Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η   Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Ο ρόλος των γενεσιουργών παραδειγμάτων στο πέρασμα στην απόδειξη σε μαθητές Α’ Λυκείου

Λιάκου Βασιλική

Δ201803

Επιβλέπουσα Συμβουλευτικής Επιτροπής:

Πόταρη Δέσποινα

Αθήνα,

Οκτώβριος, 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 12η Οκτωβρίου 2020 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδης	Καθηγητής
▪ Χ. Τριανταφύλλου	Επίκουρη Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδης	Καθηγητής
▪ Γ. Πετροπούλου	Διδάκτορας Διδακτικής Μαθηματικών

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά :

Την κα Πόταρη για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε τόσο στην εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Την κα Πετροπούλου για τη βοήθεια της στο σχεδιασμό των δραστηριοτήτων αλλά και για τη συνεχή υποστήριξη της από το προπτυχιακό επίπεδο μέχρι τώρα.

Την κα Τριανταφύλλου και τον κο Ζαχαριάδη για τη συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή.

Την γραμματέα του προγράμματος κα Μπακογιάννη για την άψογη συνεργασία που παρέχει.

Τους συμφοιτητές και φίλους που έκανα και ιδιαίτερα τον Κούτσικο Σίμο και την Μπογιατζή Κατερίνα για την πολύτιμη βοήθεια τους σε όλα τα επίπεδα καθ' όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Τους φίλους και την οικογένεια μου που με στηρίζει ανελλιπώς στους στόχους που θέτω για τον εαυτό μου όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Ένα αδιαμφισβήτητο ισχυρό εργαλείο για τη Θεωρία Αριθμών, που αποτελεί μία από τις διδακτικές ενότητες των μαθηματικών είναι τα παραδείγματα. Η εστίαση αυτής της έρευνας είναι τα γενεσιουργά παραδείγματα, δηλαδή ειδικά παραδείγματα που μέσω αυτών είναι ευκολότερο για τους μαθητές να δουν τη γενική περίπτωση. Στις δραστηριότητες, οι μαθητές χρησιμοποίησαν αυτά τα παραδείγματα κάνοντας εικασίες, επιχειρηματολογώντας με τελικό σκοπό να αιτιολογήσουν μαθηματικά την υπόθεση τους. Η διαδικασία αυτή επισπεύδεται μέσω των οπτικών αναπαραστάσεων που αποτελούν βοηθητικό εργαλείο για τους μαθητές. Οι μαθητές δεν τις επεξεργάστηκαν μόνο στο φύλλο εργασίας αλλά και στο δυναμικό περιβάλλον του ψηφιακού γεωπίνακα με αποτέλεσμα να ανακαλύψουν το μοτίβο. Αυτό με τη σειρά του, οδήγησε στη γενίκευση και τελικά στην απόδειξη ότι η εικασία των μαθητών ήταν ορθή. Τα ερευνητικά ερωτήματα σχετίζονται με το ρόλο που έχουν τα γενεσιουργά παραδείγματα στη μετάβαση για γενίκευση, όπως και το ρόλο των αναπαραστάσεων που αποτελούν εργαλεία για την πρόοδο της σκέψης. Στις δραστηριότητες του φύλλου εργασίας κλήθηκαν να απαντήσουν 6 μαθητές της Α' Λυκείου χωρισμένοι σε ομάδες των 2. Η ποιοτική έρευνα αυτή, στηρίχτηκε στη μέθοδο μελέτη περίπτωσης και σε κάθε ομάδα πραγματοποιήθηκε κλινική συνέντευξη. Τα βασικά ευρήματα της έρευνας αυτής είναι ότι τα γενεσιουργά παραδείγματα όπως και οι οπτικές αναπαραστάσεις βοήθησαν σε μεγάλο βαθμό τους περισσότερους μαθητές να εξελίξουν τον τρόπο σκέψης τους και τελικά να φτάσουν σε μεγάλα επίπεδα γενίκευσης.

Λέξεις κλειδιά : γενεσιουργό παράδειγμα, επιχείρημα, απόδειξη ,αναπαραστάσεις, γεωπίνακας

Abstract

Examples are undeniably a powerful tool in number theory that is a part of the didactic sections of mathematics. The focus of this research paper is on generic examples, that is, specific examples that make it easier for students to understand the general. Students were given activities and used these examples to justify their hypothesis mathematically. The process was accelerated with visual representations which are a helpful tool and enabled them to process the activity successfully in the worksheet. Additionally it gave them the opportunity to access it in the dynamic environment of geoboard to discover the pattern of the exercise. This led students to generalize and prove that their conjecture was true. Research shows the importance of the generic examples that contributes to the transition of generalization as well as visual representations develop thinking. In this paper, six first grade students were asked to answer these activities, which were divided into groups of two. This qualitative study was based on the case study method and each group was interviewed clinically. The results provide the support that generic examples, as well as visual representations, have helped most students to develop their thinking and eventually achieve a higher level of generalization.

Key words : generic example, argument, proof, representations, geoboard

1. Εισαγωγή

Σύμφωνα με τον Mason (2019) ο κεντρικός ρόλος των παραδειγμάτων στα μαθηματικά προέρχεται από την εποχή των Βαβυλώνιων και των Αιγύπτιων και έχει αναδειχθεί στη διδασκαλία των μαθηματικών από τότε. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα παραδείγματα με ποικίλους τρόπους, το οποίο μπορεί να επιφέρει διάφορα αποτελέσματα, είτε θετικά είτε αρνητικά. Μία από τις χρήσεις τους είναι η επιβεβαίωση μίας υπόθεσης. Σύμφωνα με τους Zaslavsky κ.α. (2012) για να ελέγξουν μία εικασία οι μαθητές θα πρέπει να κατασκευάσουν γενικευμένα επιχειρήματα, η διαδικασία η οποία είναι ασύγκριτα πιο πολύπλοκη σε σχέση με τη δημιουργία των εμπειρικών επιχειρημάτων. Τα γενικευμένα επιχειρήματα αυτά οδηγούν είτε στο μεγαλύτερο στάδιο γενίκευσης της δραστηριότητας είτε σε μία απόδειξη, τα οποία εξίσου απαιτούν μία προεργασία από τους μαθητές. Σύμφωνα με τον Thompson (1991) στο Zaslavsky κ.α. (2012) ένα μεγάλο μέρος μαθητών ΄΄αποδεικνύουν΄΄ μία εικασία παρέχοντας ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Αυτό αποτελεί έναν από τους κινδύνους που ελλοχεύουν μέσα από την παραπάνω διαδικασία. Δηλαδή, οι μαθητές πολύ συχνά παρασύρονται θεωρώντας τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουν πειστήρια ή αποδεικτικά στοιχεία για την υπόθεση που έκαναν. Για αυτό το λόγο,η συγκεκριμένη ερευνητική εργασία θέλει να εξετάσει τα παραδείγματα που είτε δίνονται από τον ερευνητή είτε οι ίδιοι οι μαθητές τα δημιουργούν με αποτέλεσμα να προσδιοριστεί ο τρόπος χείρισης τους.

Η εικασία των μαθητών είτε θα είναι ορθή αλλά είτε θα απορριφθεί απο ένα ειδικό παράδειγμα που δεν έχει τη δυνατότητα να γενικευτεί, δηλαδή το αντιπαράδειγμα. Οι μαθητές βλέπουν όλο και λιγότερο τα αντιπαραδείγματα ως εργαλείο βαθύτερης μαθηματικής σκέψης (Stylianou κ.α, 2009; Ko & Knuth, 2013). Η χρήση τους όμως, βοηθά στην κατανόηση της προυπάρχουσας εικασίας, στο μετασχηματισμό της ακόμη και στην απόρριψη της. Δηλαδή, μπορεί ένα ή και περισσότερα αντιπαραδείγματα να απορρίψουν ένα υποσύνολο της εικασίας, αλλά μπορεί και ολόκληρη. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να δίνεται τόση αξία στα αντιπαραδείγματα, όσο και στα παραδείγματα που δημιουργούνται είτε από το μαθητή είτε από τον εκπαιδευτικό. Έτσι, είναι εύλογο να σημειωθεί ότι η επιλογή των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων σε κάθε είδους έρευνα έχει μεγάλη σημασία όπως και ποια είναι η πηγή δημιουργίας τους.

Από την άλλη μεριά, σύμφωνα με τους Aricha-Metzer και Zaslavsky (2017) οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα παραδείγματα με γενικευμένο τρόπο (γενεσιουργά παραδείγματα), δηλαδή μέσα απο ένα ειδικό παράδειγμα να εξαχθεί μία πιο γενική πληροφορία. Για να μπορέσει ο μαθητής να δει με μία πιο ευρεία ματιά το συγκεκριμένο παράδειγμα θα πρέπει να κατανοήσει τη δομή του και να την εξετάσει σε πολλά παραδείγματα. Έτσι, σύμφωνα με την Leinhardt (2001) η ανάγκη για πλήθος παραδειγμάτων υπάρχει για να περιλαμβάνει ποικιλία κρίσιμων χαρακτηριστικών, με σκοπό να αναλυθούν, και αυτή η διαδικασία να οδηγήσει στην πλήρης κατανόηση και ´´ταυτοποίηση´´ του κάθε διαφορετικού παραδείγματος (Zaslavsky, 2014). Αυτό σημαίνει ότι η αναγνώριση της παίζει καθοριστικό ρόλο σε ένα ειδικό παράδειγμα και είναι πιθανή αιτία για να μετατραπεί σε γενεσιουργό. Οπότε, η σωστή χρήση της μπορεί να είναι σε μεγάλο βαθμό παραγωγική για την εξέλιξη της σκέψης των μαθητών. Η δυσκολία που έγκειται στην ταυτοποίηση της δομής και κατ'επέκταση των γενικών χαρακτηριστικών σε ένα παράδειγμα, συνεχίζει να υφίσταται και στην αναγνώριση των γενεσιουργών παραδειγμάτων. Για αυτό το λόγο, έχοντας τα κριτήρια που πρέπει να πληρούν τα παραδείγματα για να ειναι γενεσιουργά (Reid & Vargas, 2018) η διάκριση τους γίνεται ευκολότερη σε αυτή την έρευνα.

Επίσης, κάθε μαθητής έχει προσωπικό τρόπο κατανόησης των παραδειγμάτων είτε ειδικών είτε γενεσιουργών με αποτέλεσμα τα επιχειρήματα τους σε κάθε υπόθεση να διαφέρουν. Τα γενικευμένα επιχειρήματα σκοπεύουν να ´´καλύψουν´´ πλήρως κάθε τομέα της γενίκευσης ενώ τα εμπειρικά επιχειρήματα που βασίζονται σε παραδείγματα με γενικευμένα χαρακτηριστικά ικανοποιούν μόνο κάποιο υποσύνολο αυτού (Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron, & Winicki-Landman, 2012). Ακόμη υπάρχουν και τα επιχειρήματα τα οποία βασίζονται μόνο σε ένα ειδικό παράδειγμα, με τον μαθητή να μην μπορεί να παρατηρήσει τη γενική περίπτωση. Η παραπάνω κατηγοριοποίηση των επιχειρημάτων από τους (Dreyfus, Nardi, & Leikin, 2012) είναι αρκετά σημαντική και μπορεί να αναδείξει την εστιασμένη σκέψη των μαθητών σε κάθε διαφορετική εικασία.

Επόμενο βήμα για τους μαθητές από τη δημιουργία επιχειρημάτων, είναι η αιτιολόγηση των απόψεων τους. Σύμφωνα με τους (Alcock & Inglis, 2008) ο συλλογισμός που μπορεί να έχει ένας μαθητής για να αιτιολογήσει είναι είτε *συντακτικός* δηλαδή μέσω του ορισμού προτάσεων και των λογικών συνεπειών τους είτε *σημασιολογικός*, μέσω άτυπων αναπαραστάσεων όπως γραφικές παραστάσεις, εικόνες, διαγράμματα κτλ. Μέσα από κάθε διαφορετικό είδος συλλογισμού, γίνεται πιο εύκολα κατανοητή η εξέλιξη του τρόπου σκέψης των μαθητών. Η μεγαλύτερη εστίαση αυτής της ερευνητικής εργασίας γίνεται στο σημασιολογικό συλλογισμό, γιατί η δημιουργία γενικευμένων επιχειρημάτων που βασίζονται σε άτυπες αναπαραστάσεις είναι πιθανό να οδηγήσει σε ένα είδος απόδειξης που ονομάζεται γενεσιουργή. Μία τέτοια πιθανή έκβαση στην έρευνα με εποικοδομητικά και ποικίλα αποτελέσματα, αποτελεί λόγος μελέτης του συλλογισμού των μαθητών.

Είναι εύλογο, ότι για να πραγματοποιηθεί μία τέτοιου είδους απόδειξη, οι μαθητές χρειάζεται να έχουν ως μέσο τις οπτικές αναπαραστάσεις, οι οποίες βοηθούν στην αιτιολόγηση (Weber, 2009) και στην εξέλιξη της. Οι οπτικές αναπαραστάσεις αποτελούν ένα από τα διάφορα εργαλεία (η προφορική γλώσσα, διάφορα συστήματα μέτρησης, μνημονικοί κανόνες, συστήματα αλγεβρικών συμβόλων, σχήματα, διαγράμματα κτλ.) που διαμεσολαβούν μεταξύ του μαθητή και του αποτελέσματος της δραστηριότητας. Όπως είναι φανερό, οι οπτικές αναπαραστάσεις είναι απαραίτητο εργαλείο για τη μετάβαση από μία εικασία στη γενεσιουργή απόδειξη. Αυτό καθιστά αναγκαία την ύπαρξη τους στις δραστηριότητες της έρευνας.

Ακόμη, ένας είδος εργαλείου το οποίο βοηθά σε μεγάλο βαθμό τους μαθητές είναι το ψηφιακό. Η ανατροφοδότηση που δίνει μέσω της δυναμικότητας του, προσδίδει θετικά αποτελέσματα όπως για παράδειγμα ο έλεγχος μίας εικασίας και η εξαγωγή ενός συμπεράσματος. Η σημασία της χρήσης του ψηφιακού γεωπίνακα είναι μεγάλη γιατί η αλληλεπίδραση του με το μαθητή οδηγεί στη βαθύτερη κατανόηση των οπτικών αναπαραστάσεων και τη μετέπειτα χρήση τους.

Σημαντικό ρόλο παίζει και το μαθησιακό περιβάλλον στην εξαγωγή συμπεράσματος. Δηλαδή, η αυθόρμητη ή η σκόπιμη δημιουργία παραδειγμάτων είτε από μαθητή είτε απο εκπαιδευτικό, η μαθηματική ενότητα και περιπλοκότητα στην εστία της έννοιας ή του προβλήματος, οι προηγούμενες εμπειρίες (Alcock & Inglis, 2008) όπως και οι αλληλεπιδράσεις που πραγματοποιούνται αποτελούν ένα δίκτυο παραγόντων που επηρεάζουν τους μαθητές. Η κατηγοριοποίηση των παραδειγμάτων στην εικασία και στην απόδειξη με βάση την πηγή (μαθητής ή εκπαιδευτικός/ ερευνητής) από τους Zaslavsky, Aricha-Metzer,Thoms, Sabouri & Brulhardt (2016) είναι αρκετά χρήσιμη στην έρευνα και καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την έκβαση της.

Τα παραδείγματα που παρέχονται από τον ερευνητή ταξινομούνται ακόμη και ανάλογα και με τη χρήση τους. Δηλαδή, είτε σε αυτά που χρησιμοποιούνται με γενικευμένο τρόπο είτε σε αυτά που συνεισφέρουν στην απόδειξη. Είναι κατανοητό ότι, τα παραδείγματα που συμβάλλουν στην απόδειξη δεν είναι όλα το ίδιο εποικοδομητικά και υπάρχουν και σε αυτά κατηγορίες που αναδεικνύουν την παραγωγικότητα τους στη δημιουργία ενός επιχειρήματος. Αυτό σημαίνει, ότι κάθε παράδειγμα που παρέχεται από τον ερευνητή θα βοηθά με διαφορετικό τρόπο και βαθμό στη μετάβαση για γενίκευση το οποίο πυροδοτεί την έρευνα για μελέτη των παραπάνω κατηγοριών.

Όπως αναδεικνύεται παραπάνω, ο ποικίλος τρόπος λειτουργίας των παραδειγμάτων (ειδικών ή γενεσιουργών) που είτε δημιουργούνται από τους μαθητές είτε προσφέρονται από τον ερευνητή φαίνεται ότι επηρεάζει την μετέπειτα πορεία του μαθητή στη μετάβαση για γενίκευση. Το ίδιο συμβαίνει και με την ενσωμάτωση των οπτικών αναπαραστάσεων, όπου ο ρόλος τους είναι αξιοσημείωτος και καθοριστικός για την εξέλιξη της σκέψης των μαθητών. Αυτό το ερευνητικό πρόβλημα με τις δύο παραπάνω πτυχές οδήγησαν στην ανάγκη για έρευνα και αναζήτηση των αποτελεσμάτων της.

2. Θεωρητικό πλαίσιο

2.1 Παραδείγματα – επιχειρήματα - απόδειξη

2.1.1 Ρόλος των παραδειγμάτων

Σύμφωνα με τον Mason (2019) ο κεντρικός ρόλος των παραδειγμάτων στα μαθηματικά προέρχεται από την εποχή των Βαβυλώνιων και των Αιγύπτιων και έχει αναδειχθεί στη διδασκαλία των Μαθηματικών απο τότε. Διάφοροι ερευνητές δίνουν διαφορετικούς ορισμούς στο παράδειγμα. Οι Watson και Mason (2006) το περιγράφουν ως ένα αντικείμενο που ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες και οι Alcock και Weber (2010) ως μαθηματικό αντικείμενο που ικανοποιεί τον ορισμό μίας έννοιας. Διαφορετικά, είναι ένα ειδικό μαθηματικό αντικείμενο που αποτελεί σαφή αντιπρόσωπο μίας κλάσης μαθηματικών αντικειμένων όπου η κλάση ορίζεται από ένα σύνολο κριτηρίων (Mills, 2014). Οι Watson και Chick (2011) παρατήρησαν ότι τα ίδια παραδείγματα μπορεί να χρησιμοποιηθούν με διαφορετικούς σκοπούς από διαφορετικούς ανθρώπους στο ίδιο πρόβλημα. Επεξηγηματικά, αυτό αναδεικνύει ότι κάθε μαθητής μπορεί να ερμηνεύσει με το δικό του τρόπο ένα παράδειγμα. Σύμφωνα με τους Aricha-Metzer και Zaslavsky (2017) η χρήση του παραδείγματος μπορεί να είναι:

α) εμπειρική - *empirical example use* : χρήση συγκεκριμένων παραδειγμάτων που κάνουν οικεία μία εικασία, ελέγχουν την εγκυρότητα της με αποτέλεσμα να εστιάζουν στο ειδικό χωρίς να βλέπουν την γενική περίπτωση

β) γενικευμένη - *generic example use* : μέσα από το ειδικό βλέπει κανείς τη γενική περίπτωση που οδηγεί σε ένα συγκεκριμένο είδος της μαθηματικής αιτιολόγησης βασιζόμενο σε παραδείγματα

Συγκεκριμένα, τα οφέλη της χρήσης παραδειγμάτων ποικίλουν ανάλογα τον μαθητή και εξαρτώνται από το αν το παράδειγμα έχει δημιουργηθεί αυθόρμητα – *spontaneous construction* ή σκόπιμα – *evoked construction* ή αν παρέχεται ως μέρος της δραστηριότητας - *responsive consideration* (Zaslavsky, 2014;2017;2018).

Επίσης, τα παραδείγματα συχνά παίζουν κρίσιμο ρόλο στις μαθηματικές αποδεικτικές δραστηριότητες. Είναι εύλογο ότι τα παραδείγματα αποτελούν για τους μαθητές ένα ισχυρό εργαλείο για να αποδεικνύουν, στην περίπτωση που μπορούν να το χρησιμοποιήσουν σκόπιμα και στρατηγικά (Ozgur, Ellis, Vinsonhaler, Dogan, & Knuth, 2017). Για τους εκπαιδευτικούς τα παραδείγματα είναι ένα δυνατό παιδαγωγικό εργαλείο σε δημιουργικές δραστηριότητες που αφορούν την εμπλοκή των μαθητών στις βασικές ιδέες-κλειδί της απόδειξης (Zaslavsky, Aricha-Metzer, Thoms, Sabouri, & Brulhardt, 2016).

Επεξηγηματικά, σύμφωνα με τους Sandefur,Mason,Stylianides και Watson (2013) αν ο λύτης επιλέξει ελεύθερα να δημιουργήσει και να χρησιμοποιήσει παραδείγματα ως εργαλεία για την επίτευξη ενός μαθηματικού σκοπού όπως η απόδειξη, τότε η δημιουργία και η χρήση τους μπορεί να είναι ευεργετική. Σίγουρα όμως παίζει ρόλο και η εμπειρία των μαθητών για τη παραγωγική χρήση των παραδειγμάτων στην απόδειξη (Stylianides, Sandefur, & Watson, 2016). Για να μάθουν οι μαθητές να αποδεικνύουν πρέπει πρώτα να εκτιμήσουν την αξία των παραδειγμάτων στην απόδειξη. Για να πραγματοποιηθεί αυτό, θα πρέπει να εστιαστεί η προσοχή του μαθητή όχι μόνο σε συγκεκριμένες λεπτομέρειες παραδειγμάτων αλλά να δει το ειδικό με διαφορετικές οπτικές γωνίες, είτε το καθένα ξεχωριστά είτε συσχετισμένα μεταξύ τους, δηλαδή άλλοτε ως συγκεκριμένο και άλλοτε ως αντιπρόσωπο κάποιας γενικευμένης περίπτωσης (Mason, 2019).

Σύμφωνα με τους Epstein και Levy (1995) οι περισσότεροι Μαθηματικοί σπαταλούν αρκετό χρόνο για να σκεφτούν και να αναλύσουν συγκεκριμένα παραδείγματα με αποτέλεσμα να οδηγούνται στη σκέψη ότι πιθανόν σημαντικές προόδους στα Μαθηματικά προήλθαν από τον πειραματισμό με παραδείγματα. Πράγματι, ο χρόνος που θα αφιερώσει κανείς στη σκέψη και την ανάλυση παραδειγμάτων μπορεί να παρέχει όχι μόνο βαθύτερη κατανόηση μίας εικασίας αλλά να καταφέρει να κάνει ορατή την απόδειξη (Knuth, Zaslavsky, & Ellis, 2019). Παρόλο που κάθε μαθητής θέλει να χρησιμοποιεί παραδείγματα με εποικοδομητικό σκοπό, αυτό δεν σημαίνει ότι τον βοηθούν παντού με τον ίδιο τρόπο. Επεξηγηματικά, μπορεί τα παραδείγματα να επιβεβαιώνουν ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής αλλά να μην παρέχουν το γιατί είναι αληθής (Zaslavsky, Aricha-Metzer, Thoms, Sabouri, & Brulhardt, 2016). Σύμφωνα με τους Yopp και Ely (2015) οι μαθητές φαίνεται να μην γνωρίζουν τα πλεονεκτήματα των παραδειγμάτων στην απόδειξη οπότε η γνώση για τη αποτελεσματική χρήση τους είναι ανεκμετάλλευτη πηγή. Η δυσκολία για την κατανόηση και κατασκευή της απόδειξης υπάρχει σε όλες τις τάξεις (Healy & Hoyles, 2000) και πιθανόν να προέρχεται από τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τα παραδείγματα. Σύμφωνα με τον Cooper κ.α. (2011) δεν υπάρχει κάποια καθοδήγηση για την επιλογή της στρατηγικής που πρέπει να ακολουθήσουν ή με ποιο τρόπο να αναλύσουν τα παραδείγματα κατά τη διάρκεια της απόδειξης. Έτσι, δεν αποτελούν όλα τα παραδείγματα βοηθητικά στην αποδεικτική διαδικασία, για παράδειγμα κάποια συμβάλλουν στην κατασκευή μίας εικασίας αλλά αποτυγχάνουν στην απόδειξη της (Pedemonte & Buchbinder, 2011), με αποτέλεσμα η χρήση τους να μην είναι παραγωγική (Iannone, Inglis, Mejía-Ramos, Simpson, & Weber, 2011). Τελικά, μπορεί να υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις που όντως βοηθούν στην αποδεικτική διαδικασία με την προυπόθεση ότι υπάρχει η γνωστική ολότητα και η δομική συνέχεια μεταξύ ενός επιχειρήματος (που έχει δημιουργηθεί από μία εικασία) και της τυπικής απόδειξης.
Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, απαραίτητος όρος για να αποτελέσει ένα παράδειγμα αρωγός στην απόδειξη είναι δημιουργία ενός ή πολλών επιχειρημάτων. Σύμφωνα με τους Yopp και Ely (2015) υπάρχουν 3 διαφορετικά είδη παραδειγμάτων που χρησιμοποιούνται στην επιχειρηματολογία :

α) παραδείγματα μόνο για επιβεβαίωση του ισχυρισμού (χρήση συγκεκριμένων παραδειγμάτων χωρίς να είναι γενικευμένα)

β) παραδείγματα που έχουν γενικευμένα στοιχεία (χρήση διάφορων παραδειγμάτων που ικανοποιούν μία συνθήκη και άλλα όχι)

γ) γενικευμένη χρήση παραδειγμάτων (μέσω ειδικών παραδειγμάτων βλέπει κανείς τις γενικές ιδιότητες και χαρακτηριστικά)

Αν η προσοχή των μαθητών δεν είναι εστιασμένη στην εποικοδομητική χρήση των παραδειγμάτων, οι μαθητές παραμένουν ΄΄βυθισμένοι΄΄ στη γνώση που παρέχει η ποικιλία παραδειγμάτων. Επεξηγηματικά, χωρίς την επέκταση της γενίκευσης στο σχολείο οι μαθητές μπορεί να εξακολουθούσαν να θεωρούν ότι τα λίγα παραδείγματα αρκούν (Mason, 2019). Για αυτό το λόγο οι εκπαιδευτικοί πρέπει να ενθαρρύνουν συνεχώς την προσπάθεια των μαθητών να διακρίνουν τα δομικά στοιχεία των παραδειγμάτων, να τα διαφοροποιούν με εποικοδομητικό τρόπο έτσι ώστε τα αποτελέσματα αυτών να ληφθούν υπόψιν στα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν (Mason, Stephens, & Watson, 2009).

2.1.2 Δομή

Αναφέρθηκε προηγουμένως ότι για να δει κανείς ένα παράδειγμα με μία πιο γενική ματιά θα πρέπει να δει τα χαρακτηριστικά, τις ιδιότητες και γενικά τα δομικά στοιχεία του. Όμως τι εννοούμε με τον όρο δομή; Σύμφωνα με τους Watson και Shipman (2008) ως δομή ορίζεται ο τρόπος με τον οποίο τα στοιχεία και οι ιδιότητες των μαθηματικών εκφράσεων συνδέονται μεταξύ τους. Η δομική σκέψη περιγράφεται ως ΄΄η κατάσταση που χρησιμοποιεί κανείς για να ερμηνεύσει και να συνδέσει τις ιδιότητες σε μία μαθηματική σκέψη΄΄ (Mason, J., Stephan, M., & Watson, A., p.11-12, 2009). Επίσης, σύμφωνα με τους Watson και Shipman (2008) η σύγκριση είναι ο τρόπος αντίληψης των δομών και των σχέσων που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική αφαίρεση. Επεξηγηματικά, οι μαθητές πρέπει να συγκρίνουν όμοια παραδείγματα με στόχο να διακρίνουν κρίσιμα χαρακτηριστικά που προέρχονται από τη χρήση των παραδειγμάτων και να λάβουν υπόψιν την επίδραση της ποικιλομορφίας που τους οδήγησε να τα δημιουργήσουν. Οι μαθητές δεν πρέπει να εστιάζουν μόνο στις λεπτομέρειες ενός παραδείγματος αλλά και στον τρόπο που τις εκλαμβάνουν, δηλαδή είναι διαφορετικό να αναγνωρίζει κάποιος τις σχέσεις μεταξύ διακριτών λεπτομερειών των παραδειγμάτων σε σχέση με την κατανόηση των ιδιοτήτων που ενυπάρχουν στα παραδείγματα (Mason, 2001;2019). Η Άλγεβρα ως έκφραση της γενίκευσης έχει σε πρώτο πλάνο τη σχέση μεταξύ του συγκεκριμένου και του γενικού όχι μόνο στους αριθμούς αλλά και γενικά σε μαθηματικές δομές. Προσφέρει πρόσβαση σε δομικές σχέσεις οι οποίες μπορούν να ενσαρκωθούν ως ιδιότητες. Αυτές οι ιδιότητες είναι πιο εύκολο να χειριστεί η άλγεβρα σε αντίθεση με τη γεωμετρία στην οποία δεν υπάρχει φορμαλισμός που συνήθως δουλεύει. Υπάρχουν βέβαια περιπτώσεις που οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις αποτελούν αφορμή για μία απόδειξη μέσω οπτικών παρατηρήσεων και συνδυασμό αυτών με την αλγεβρική σκέψη. Για παράδειγμα τα origami δεν παρέχουν αυτόματα άλγεβρα αλλά είναι ένα εργαλείο που δημιουργεί αποδείξεις μέσω αναλογιών. Το όνειρο του Descartes ήταν να υπάρχει μία παγκόσμια μέθοδος στην οποία να ήταν επαρκής η γεωμετρική έννοια με αποτέλεσμα να μειώνονταν τα σύμβολα και η πολυπλοκότητα τους (Mason, 2019). Η δυσκολία στα σύμβολα και στην αλγεβρική δομή δημιουργεί ένα αίσθημα ανασφάλειας στους μαθητές για την γενίκευση. Όμως, σύμφωνα με τον Mason (2019) δεν υπάρχει συγκεκριμένο μονοπάτι ή λύση για όλες τις περιπτώσεις ή αλγόριθμος με σκοπό τη μετάβαση από τις συγκεκριμένες λεπτομέρειες στις σχέσεις μεταξύ τους και εν συνεχεία στις ιδιότητες που ενσαρκώνονται. Αντίθετα, είναι κάτι το οποίο μπορεί να συζητηθεί με παρουσία των εκπαιδευτικών/πηγών για τον τρόπο που αντιλαμβάνεται κανείς τα παραδείγματα μέσω μιας διαφορετικής και πιο γενικής σκοπιάς. Επεξηγηματικά, μία ισχυρή στρατηγική για να εστιαστεί η προσοχή των μαθητών είναι η παρατήρηση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δύο ή τριών μαθηματικών αντικειμένων όπως συναρτήσεις, γραφικές παραστάσεις, δραστηριότητες, προβλήματα, συσχετίσεις και εικόνες (Brown & Coles, 2000). Όλα τα παραπάνω οδηγούν στη σκέψη ότι οι δομικές σχέσεις αποτελούν τον πυρήνα της μαθηματικής απόδειξης αλλά και η απόδειξη από μόνη της εξαρτάται από την διαχείριση όλων αυτών των σχέσεων (Mason, 2019). Οι μαθητές οι οποίοι ξεκινούν να κατασκευάζουν την απόδειξη με συστημικό τρόπο σύντομα θα πρέπει να αναγνωρίσουν τις δομικές σχέσεις οι οποίες είναι έτοιμες να επικυρωθούν αλγεβρικά (Mason, 2019).

2.1.3 Γενεσιουργό παράδειγμα

Σύμφωνα με τους Mason και Pimm (1984), πολλές φορές στην καθημερινή μας ζωή μπορεί να αναφέρουμε μία μάρκα ενός προιόντος εννοώντας γενικά το προιόν αυτό. Συγκεκριμένα, όταν αναφερθεί κάποιος στο Kleenex, εννοεί γενικά τα χαρτομάντηλα. Ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και στα Μαθηματικά με το *generic example*, ένα παράδειγμα κατά το οποίο μέσω του συγκεκριμένου βλέπει κανείς το γενικό. Για παράδειγμα, ένας άρτιος αριθμός εκφράζεται ως 2Ν. Όμως υπό ποια έννοια συμβολίζεται έτσι; Ίσως αντιπροσωπεύει έναν άρτιο αριθμό ή όλους τους άρτιους. Όμως το σύμβολο 2Ν μπορεί να το δει κανείς ως το όνομα ενός αριθμού. Οι γενικευμένες εκφράσεις στα Μαθηματικά, έχουν ενδιαφέρον και χρησιμοποιούνται για μία ευρεία κλάση αντικειμένων με αποτέλεσμα το 2Ν να συμπεριφέρεται ως ένας άρτιος αριθμός. Φαίνεται ότι τα ονόματα πραγμάτων (Kleenex, 2N) χρησιμοποιούνται για να φέρουν στο νου την ανάμνηση από όλα τα αντικείμενα ή εμπειρίες που έχουν αυτό το όνομα, σαν μία φόρμα οπτικής ονοματοποιίας (ηχομιμητική) (Mason & Pimm, 1984).

Σύμφωνα με τους Mason και Pimm (1984), ένας εκπαιδευτικός γράφοντας στον πίνακα, μπορεί να δει την γενίκευση που είναι ενσωματωμένη σε ένα παράδειγμα αλλά να μην έχει σκεφτεί ποτέ να αναδείξει αυτή την πλευρά του. Όμως, οι μαθητές που έχουν λιγότερη εμπειρία δίνουν όλη τους την προσοχή στο συγκεκριμένο παράδειγμα αγνοώντας ότι μπορεί να υπάρχουν και άλλα (που βρίσκονται κάτω από τις ίδιες συνθήκες). Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως η εμπειρία των μαθητών παίζει σημαντικό ρόλο στον τρόπο διαχείρισης ενός παραδείγματος με αποτέλεσμα σπάνια οι μαθητές να προσπαθούν να ΄΄διαβάσουν το παράδειγμα΄΄ (Mason & Pimm, 1984). Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αν οι εκπαιδευτικοί δεν δίνουν την απαραίτητη προσοχή στη γενίκευση (παρόλο που δουλεύουν με συγκεκριμένα παραδείγματα) δεν αποτελεί έκπληξη ότι η προσοχή των μαθητών θα στραφεί στο συγκεκριμένο. Ο ολοκληρωμένος ορισμός των Mason και Pimm (1984) είναι ο εξής : Το γενεσιουργό παράδειγμα είναι ένα παράδειγμα που παρουσιάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να τονίσει τον σκόπιμο ρόλο του ως διαμεσολαβητή του γενικού. Αντίστοιχα, ο Balacheff (1988) περιγράφει πως ένα γενεσιουργό παράδειγμα αποτελεί ένα χαρακτηριστικό αντιπρόσωπο της δικής του κλάσης, όπως και ότι η έννοια του που προέρχεται από τους Mason και Pimm (1984) ερμηνεύεται ως ΄΄φορέας του γενικού΄΄ σύμφωνα με τους Zaslavsky,Aricha-Metzer,Thoms, Sabouri και Brulhardt

(2016). Ένα γενεσιουργό παράδειγμα περιέχει τους λόγους (κάνοντας τους συγκεκριμένους) για την ορθότητα μίας εικασίας μέσω διαδικασιών ή μετασχηματισμών σε ένα αντικείμενο που αποτελεί τον αντιπρόσωπο της κλάσης. Επίσης, το παράδειγμα αυτό πρέπει να είναι αρκετά ευρύ για να μην θεωρηθεί ειδική αναπαράσταση μίας γενικής περίπτωσης αλλά αρκετά περιορισμένο για να προσφέρει οτιδήποτε μπορεί ως συγκεκριμένο (Movshovitz-Hadar, 1988). Οι Leron και Zaslavsky (2013) συμπληρώνουν λέγοντας ότι το μέγεθος (αρκετά μεγάλο ή μικρό) μπορεί να αντικατασταθεί έχοντας ως μονάδα μέτρησης την πολυπλοκότητα ενός παραδείγματος. Επεξηγηματικά, όσο πιο ευρύ το γενεσιουργό παράδειγμα τόσο πιο πολύπλοκο. Όμως, ένα αντικείμενο (παράδειγμα) δεν είναι γενεσιουργό μέχρι να το δει κανείς με αυτή τη οπτική γωνία, οπότε η ποιότητα του εξαρτάται από αυτόν που το χειρίζεται και όχι από το ίδιο (Mason & Pimm, 1984).

Όπως όταν κάποιος μπορεί να δει δικαίως μία γενική περίπτωση μέσα από τη συγκεκριμένη, τότε το παράδειγμα γίνεται γενεσιουργό, έτσι αντίστοιχα από τη στιγμή που μία αιτιολόγηση κατανοηθεί τότε μπορεί να γίνει απόδειξη (Mason, 2019). Για αυτό το λόγο πολλοί ερευνητές θεωρούν το γενεσιουργό παράδειγμα ως ένα πολύτιμο παιδαγωγικό εργαλείο που πιθανότατα βοηθάει τους μαθητές να μεταβούν από την εμπειρική αιτολόγηση στην παραγωγική. Πράγματι, τα παραδείγματα αυτά έχουν την ισχύ να πείθουν όπως και να εξηγούν σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης (Rowland, 1998). Οι Pedemonte και Buchbinder (2011) συμφωνούν ότι τα γενεσιουργά παραδείγματα βασίζονται στη διαδικασία της γενίκευσης ενός μοτίβου ενεργοποιώντας τη γνωστική και τη δομική εξέλιξη μεταξύ επιχειρημάτων και απόδειξης. Πιο αναλυτικά, η παραγωγική χρήση ενός γενεσιουργού βοηθάει στη βαθύτερη κατανόηση μιας εικασίας ή στην ανάπτυξη της απόδειξης ακόμη και στη γενίκευση ή στη δομή (Knuth, Zaslavsky, & Ellis, 2019).

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω τα παραδείγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην επιχειρηματολογία κάποιου μαθητή. Το ίδιο συμβαίνει και με ένα γενεσιουργό παράδειγμα, όπου κάποιος μπορεί να εστιάσει στη γενικευμένη του μορφή δηλαδή να τονίσει κάποιες ιδιότητες ενώ να αγνοήσει τις υπόλοιπες με σκοπό να επιχειρηματολογήσει. Ένα γενεσιουργό παράδειγμα αποτελεί ένα μαθηματικό επιχείρημα που έχει σαν βάση ένα παράδειγμα του ισχυρισμού που θα αποδειχθεί, συνεχίζει με μία μαθηματική αιτολόγηση και ολοκληρώνεται φτάνοντας στη γενική περίπτωση (Rø & Arnesen, 2020). Επεξηγηματικά, αυτό που κάνει ένα επιχείρημα γενεσιουργό παράδειγμα είναι η γενικότητα δηλαδή η ίδια αιτιολόγηση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διάφορες περιπτώσεις (Reid & Vargas, 2018). Η εμφανής αλληλένδετη σχέση του γενεσιουργού παραδείγματος και του επιχειρήματος οδηγεί στη σκέψη ότι αν κάποιος μαθητής δεν παρέχει επιχειρήματα που αναγνωρίζονται ως γενεσιουργά παραδείγματα η αιτία δεν είναι απαραίτητα η έλλειψη γνώσης στην γενικευμένη απόδειξη αλλά η ασαφής φύση του γενεσιουργού παραδείγματος (Rowland, 2002).

2.1.4 Επιχειρήματα

Σύμφωνα με τους Yopp και Ely (2015) ο όρος *γενεσιουργό παράδειγμα-επιχείρημα* νοείται ως ένα συγκεκριμένο επιχείρημα που γενικεύεται βασιζόμενο σε ένα παράδειγμα που αποτυπώνει συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτό. Τα γενικευμένα επιχειρήματα είναι τελείως διαφορετικά από μία επίσημη αυστηρή απόδειξη το οποίο επιτρέπει σε νεότερους ή λιγότερο έμπειρους μαθητές να τα παράγουν όταν δεν νιώθουν ασφαλείς με τη χρήση μεταβλητής. Ένα γενεσιουργό παράδειγμα-επιχείρημα βασίζεται στο οτιδήποτε προσφέρει το πέρασμα για την απόδειξη. Είναι κοινώς αποδεκτό ότι η κατανόηση της μαθηματικής αιτιολόγησης προκύπτει από τον επαγωγικό συλλογισμό που οδηγεί στον παραγωγικό και τελικά στη γενίκευση, όπως και η αιτιολόγηση των μαθητών πρέπει να μετακινείται προοδευτικά από τα εμπειρικά επιχειρήματα στην απόδειξη (Simon & Blume, 1996). Κάποιοι αρθρογράφοι συνιστούν τα λιγότερο επίσημα επιχειρήματα για να αναδεικνύεται η δύναμη της σκέψης των μαθητών ή της εξήγησης του λόγου της ορθότητας μία πρότασης (Rowland, 2002). Οι Dreyfus κ.α. (2012) διαχωρίζουν τα επιχειρήματα σε :

i) *example-based argument* - βασιζόμενα σε παραδείγματα

ii) *example-based generic argument* - βασιζόμενα σε παραδείγματα με γενικευμένα χαρακτηριστικά

iii) *generic argument* - γενικευμένα

2.1.5 Αιτιολόγηση

Με τον όρο *συντακτικός συλλογισμός* νοείται η αιτιολόγηση που πραγματοποιείται με ένα σύστημα αναπαραστάσεων που βασίζεται στον ορισμό προτάσεων, στις λογικές συνέπειες αυτών χωρίς όμως κάποιες άτυπες αναπαραστάσεις εννοιών (αναπαραστάσεις όπως γραφικές παραστάσεις, διαγράμματα, κινήσεις/χειρονομίες ή πρωτότυπα παραδείγματα). Σε αντίθεση με τον όρο *σημασιολογικός συλλογισμός* που βασίζεται στις άτυπες αναπραστάσεις (Alcock & Inglis, 2008). Ο συνδυασμός των δύο κατηγοριών είναι απαραίτητος για την αιτιολόγηση με σκοπό να επιτύχει κανείς στις δραστηριότητες και προκλήσεις απαιτούμενης δυσκολίας. Όμως από την έρευνα είναι φανερό όμως, ότι οι μαθητές εστιάζουν κυρίως σε ένα τύπο αιτιολόγησης, ενώ χρησιμοποιούν τον άλλο περισταστιακά (Alcock & Inglis, 2008). Συγκεκριμένα κάποιοι μαθητές μπορεί να χρησιμοποιούν μόνο οπτικές αναπαραστάσεις ενώ άλλοι αρκετά σπάνια. Όπως και στην έρευνα των Weber, Alcock και Radu (2005) για τις στρατηγικές απόδειξεις των μαθητών διαπίστωσαν ότι οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποιούν τη σημασιολογική αιτιολόγηση. Οι αναπαραστάσεις και τα οπτικά παραδείγματα είναι πολύ σημαντικότερα στην ευρύτερη κατανόηση μίας έννοιας σε σχέση με τα απλά ή αλγεβρικά παραδείγματα. Για παράδειγμα, στην έρευνα των Dahlberg και Housman (1997) ζητήθηκε από τους μαθητές να δώσουν απλοικά παραδείγματα συναρτήσεων βασιζόμενοι στον ορισμό όμως φάνηκε ότι αυτό δεν τους οδήγησε στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας.

2.1.6 Γενεσιουργή απόδειξη

Είναι εύλογο ότι η αναπαράσταση παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στα γενεσιουργά παραδείγματα. Για να γίνει πιο κατανοητή η σχέση των άτυπων αναπαράστασεων με τα γενεσιουργά παραδείγματα και την γενίκευση παραθέτεται το παρακάτω παράδειγμα. Το σύμβολο 2N όπως αναφέρθηκε παραπάνω, στην έρευνα των Mason και Pimm (1984) είναι μία αναπαράσταση κάθε άρτιου αριθμού. Η μετάβαση από το συμβολισμό στην αναπαράσταση δεν είναι εύκολη. Αρωγός σε αυτό αποτελούν τα διαγράμματα που είναι αρκετά χρήσιμα ως μεσολαβητές. Φαίνεται να έχει αποδειχτεί ότι πριν από τον Πυθαγόρα οι πρώιμες ΄΄αποδείξεις΄΄ είχαν οπτική φύση, όπως για παράδειγμα η απόδειξη ότι το άθροισμα δύο άρτιων είναι πάντα άρτιος όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

Με αυτό το στιγμιότυπο γίνεται αντιληπτή η εικόνα των άρτιων αριθμών ως αριθμοί που μπορούν να αναπαρασταθούν ως δύο αντίστοιχες σειρές από τελείες. Κάποιοι μαθητές μπορεί να το δουν αυτό ως μία απόδειξη μέσω παραδείγματος. Η απόδειξη αυτή ονομάζεται *generic proof* . Παρόλο που περιέχει συγκεκριμένους αριθμούς, σε καμία περίπτωση όμως δεν βασίζεται σε συγκεκριμένες ιδιότητες αυτών. Την ίδια άποψη έχουν οι Leron και Zaslavsky (2013) επιβεβαιώνοντας ότι η απόδειξη μέσω γενεσιουργών παραδειγμάτων δεν είναι ένα παράδειγμα μόνο του αλλά η αποδεικτική διαδικασία που παράγει αυτό. Η απόδειξη αυτή που πραγματοποιείται μέσω των γενεσιουργών παραδειγμάτων και βασίζεται σε ένα προσιτό παράδειγμα, δεν απαιτεί γνώση για την τυπική μαθηματική απόδειξη (Balacheff, 1988). Η γενεσιουργή απόδειξη πάντα σχετίζεται με μαθηματικές εικασίες και είναι αναμενόμενο ότι αυτή η απόδειξη μπορεί να πείσει ότι ο ισχυρισμός είναι ορθός για όλες τις περιπτώσεις. Οι Leron και Zaslavsky (2013) διακρίνουν τους όρους *generic proof* και *generic proving* αναφέροντας ότι : ο όρος *generic proof* χρησιμοποιείται κατά προσέγγιση για την απόδειξη που διεξάγεται από γενεσιουργό παράδειγμα, ενώ *generic proving* νοείται οτιδήποτε υποδηλώνει μία μαθηματική ή εκπαιδευτική δραστηριότητα που περιβάλλει τον όρο *generic proof*. Η έννοια *generic proving* των Leron και Zaslavsky (2013) αποτελεί το μέσο που βοηθά τους μαθητές να εμπλακούν με τις κύριες ιδέες μιας ολοκληρωμένης απόδειξης σε ένα οικείο πλαίσιο που προσωρινά αποβάλλεται από τη γενίκευση, το συμβολισμό και το φορμαλισμό. Αυτή την προσέγγιση μπορεί να τη δουν οι μαθητές ως γέφυρα, δηλαδή ότι αποτελεί αρωγό στη μετάβαση από την εμπειρική οπτική γωνία και διαίσθηση στην κατανόηση γιατί ένας ισχυρισμός είναι αληθής η ψευδής (Zaslavsky, Aricha-Metzer, Thoms, Sabouri, & Brulhardt, 2016). Οι μαθητές αν έχουν αμφιβολία για την ορθότητα της εικασίας τους πολύ πιθανόν να νιώσουν την ανάγκη να αναπτύξουν μία απόδειξη. Οι Leron και Zaslavsky (2013) εκφράζουν την ανάγκη αυτή (να αιτιολογήσει ο μαθητής το λόγο που η εικασία συμβαίνει πάντα) ως πιθανή παγίδα που θα τον οδηγήσει στην απόδειξη μέσω γενεσιουργών παραδειγμάτων. Στην πορεία βέβαια μπορεί να εγκαταλείψει την προσπάθεια αν η αβεβαιότητα που αισθάνεται είναι αρκετά ισχυρή (Buchbinder & Zaslavsky, 2011) ή αν η εικασία είναι ψευδής θα πρέπει με ένα αντιπαράδειγμα να αποδείξει ότι δεν ισχύει (Zaslavsky, 2018) Γενικότερα, οι μαθητές έχουν αρκετές δυσκολίες στην κατασκευή μίας απόδειξης. Συγκεκριμένα, δεν είναι πάντα δυνατό ή εύκολο να αποδείξει κανείς γιατί ένας ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής (Zaslavsky, Aricha-Metzer, Thoms, Sabouri, & Brulhardt, 2016). Οι λόγοι για τους οποίους οι προσπάθειες τους είναι ανεπιτυχείς δεν είναι αρκετά ξεκάθαροι. Κάποιοι από τους πιθανούς λόγους είναι ότι δεν εκτιμούν τι χρειάζονται ή υπάρχει έλλειψη παρακίνησης και περιέργιας για την επιβεβαίωση της εικασίας. Επίσης μπορεί να είναι η άγνωστη πλευρά της γενικότητας που απαιτείται για την απόδειξη, η έλλειψη εμπειρίας στην αιτιολόγηση ή ίσως δεν γνωρίζουν τον τρόπο να επεκταθούν περαιτέρω από την κατασκευή παραδειγμάτων ή ακόμη και ο συνδυασμός όλων αυτών (Mason, 2019).

2.1.7 Αντιπαραδείγματα

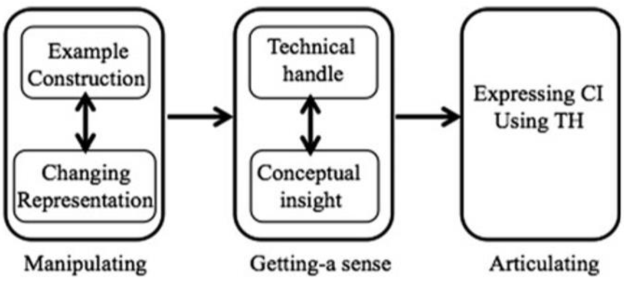
Οι μαθητές κάνοντας εικασίες προσπαθούν αρχικά να επιχειρηματολογήσουν με γενικευμένο τρόπο έχοντας ως σκοπό να φτάσουν σε ένα επίπεδο γενίκευσης. Σύμφωνα με την έρευνα των Larsen και Zandieh (2008) οι μαθητές σκεφτόμενοι αν η υπόθεση είναι πάντα σωστή, ωθούνται στην εύρεση αντιπαραδειγμάτων ή ο εκπαιδευτικός με τη σειρά του μπορεί να τους προτείνει. Η διαδικασία αυτή προκύπτει όταν ο μαθητής θέλει να αιτιολογήσει αυτή την εικασία που σκέφτηκε με αποτέλεσμα να οδηγείται στην αξιολόγηση της ορθότητας της ή σε αντίθετη περίπτωση στα αντιπαραδείγματα για να την απορρίψει (Weber, 2009). Σύμφωνα με τους Zazkis και Chernoff (2008) τα αντιπαραδείγματα βοηθούν τους μαθητές να αναπροσαρμόσουν τις αντιλήψεις και τα ΄΄πιστεύω΄΄ τους για τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων. Όταν ανταποκρίνονται οι μαθητές σε αυτά, είναι εύλογο στη συνέχεια να εστιάσουν ταυτόχρονα και στην απόδειξη και στα αντιπαραδείγματα έτσι ώστε μέσω της ανάλυσης τους να ανακαλύψουν ποια συνθήκη είναι αναγκαία για την αποδεικτική διαδικασία ως αποτέλεσμα επανασχεδιασμού της επιθυμητής ιδέας (Larsen & Zandieh, 2008). Υπάρχουν περιπτώσεις βέβαια, που τα αντιπαραδείγματα μπορεί είτε να μην είναι επαρκή για την επίλυση μίας νοητικής διαμάχης που υπάρχει στο μυαλό των μαθητών παρόλο που αποτελεί ο απώτερος σκοπός της διδασκαλίας ή να αποτελούν μόνο ειδικές περιπτώσεις που απορρίπτουν μία εικασία ή να είναι απλές εξαιρέσεις. Τα αντιπαραδείγματα για τους εκπαιδευτικούς αποτελούν μία ισχυρή διδακτική στρατηγική που δημιουργεί μία νοητική διαμάχη. Στόχος είναι να αναζητούνται καίριας σημασίας παραδείγματα είτε από τον μαθητή είτε από τον εκπαιδευτικό που προσφέρουν όχι μόνο μία νοητική διαμάχη αλλά μπορούν να την επιλύσουν. Είναι εμφανές ότι η οπτική γωνία του μαθητή ή του εκπαιδευτικού είναι διαφορετική και ερμηνεύει τα ίδια αντιπαραδείγματα με ποικίλους τρόπους. Οι Zazkis και Chernoff (2008) αναφέρουν ότι διαφορετικά αντιπαραδείγματα δεν έχουν την ίδια ισχύ πειθούς. Ποικίλα αντιπαραδείγματα, παρόλο που μπορεί να έχουν ίδιο μαθηματικό σκοπό (να απορρίψουν μία εικασία), μπορεί να μην είναι το ίδιο αποτελεσματικά σε έναν παιδαγωγικό σκοπό (όπως η αναγνώριση της μη ορθότητας της εικασίας). Επίσης, μπορεί να μπερδέψουν το μαθητή. Σίγουρα όμως η προσπάθεια απόδειξης μίας εικασίας που οδηγεί σε αντιπαραδείγματα, τελικά βελτιώνεται μέσω αυτών (Komatsu, 2016 βασιζόμενος στον Lakatos, 1976). Έτσι, είναι εμφανές ότι ο ρόλος των αντιπαραδειγμάτων για την απόρριψη μίας εικασίας είναι αρκετά ουσιώδης όπως και της απόδειξης. Για αυτό είναι δεδομένο ότι οι αποδείξεις και τα αντιπαραδείγματα είναι θεμελιώδη για την βαθύτερη γνώση και κατανόηση των Μαθηματικών (Peled & Zaslavsky, 1997).

2.1.8 Πηγή παραδειγμάτων

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν κατά τη διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας ή της γενίκευσης να ενθαρρύνουν τους μαθητές να επιλέγουν παραδείγματα ή αντιπαραδείγματα με στόχο έτσι ώστε να αναμένουν κάποιο αποτέλεσμα και να παίρνουν κατάλληλες αποφάσεις. Σύμφωνα με τα ευρήματα των Aricha-Metzer και Zaslavsky (2017) από συνεντεύξεις που βασίζονταν σε αποδεικτικές δραστηριότητες, όλο και περισσότεροι μαθητές μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν με παραγωγικό τρόπο παραδείγματα που οδηγούσαν σε απόδειξη, αν η πηγή παραδειγμάτων είναι ο εκπαιδευτικός ή ο συνεντευξιαστής. Οι ερευνητές παρέχουν παράδειγματα που θεωρούν ότι είναι βοηθητικά για την απόδειξη μίας εικασίας μόνο αν οι μαθητές έχουν κάνει αρκετές ανεπιτυχείς προσπάθειες και έχουν εξαντλήσει όλες τις περιπτώσεις με ή χωρίς χρήση των δικών τους παραδειγμάτων.

2.2 Θεωρητικά δομήματα

Η σύνδεση όλων των παραπάνω δημιουργούν τα παρακάτω θεωρητικά δομήματα που συνδυάζουν δύο θεωρίες για τη μαθηματική σκέψη. Το πρώτο θεωρητικό πλαίσιο είναι το MGA (*Manipulating–getting-a-sense-of–articulating*) που εντάσσεται στις ιδέες του Bruner (1966; Sandefur & Mason & Stylianides & Watson, 2013) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχέδιο που αποτελεί εικόνα του άρθρου Generating and using examples in the proving process (2013).



Με τον όρο *Manipulation* νοείται η χρήση οικείων μαθηματικών εννοιών/αντικειμένων που περιέχουν σύμβολα, παραδείγματα, αναπαραστάσεις για συγκεκριμένο σκοπό. Ο σκοπός είναι να κατανοήσουν (*to get-a-sense-of*) τη δομή, τα μοτίβα και τη σχέση των εμπειρικών αποτελεσμάτων με τη δημιουργία εικασιών.

Η δομή γίνεται ακόμη πιο κατανοητή στους μαθητές όταν ενθαρρύνονται να διατυπώσουν σε λέξεις, διαγράμματα και σύμβολα όλα αυτά που έχουν καταλάβει. Το δεύτερο θεωρητικό πλαίσιο κάνει αναφορά στους όρους συντακτικό και σημασιολογικό συλλογισμό. Ο πρώτος όρος χρησιμοποιείται για τον τρόπο χείρισης συμβόλων μέσα στις αναπαραστάσεις του δοσμένου προβλήματος που εξάγει μέσω των μεθόδων απόδειξης την πρόταση (Weber & Alcock, 2004). Ο όρος σημασιολογικός συλλογισμός χρησιμοποιείται για την εισαγωγή και τη χρήση άλλων συστημάτων αναπαράστασης όπως δημιουργία παραδειγμάτων για την ενασχόληση με υποκείμενες μαθηματικές ιδιότητες (Weber & Alcock, 2004). Η διάκριση του συντακτικού και σημασιολογικού συλλογισμού βοηθούν στη ανάλυση του πότε οι μαθητές παραμένουν σε ένα σύστημα αναπαραστάσεων και πότε αλλάζουν όπως φαίνεται και στο παραπάνω στιγμιότυπο. Στη συνέχεια οι όροι *conceptual insight (CI) and technical handle (TH)* προήλθαν από την επανερμήνευση του θεωρητικού πλαισίου των Birky et al. (2009) που είχε προταθεί από Raman (2003; Sandefur & Mason & Stylianides & Watson, 2013). Τα δύο σημαντικά στοιχεία της κατασκευής μίας απόδειξης είναι:

α) η εύρεση του *conceptual insight (CI)* δηλαδή η έννοια της δομικής σχέσης που σχετίζεται με την αιτία που φαίνεται η πρόταση να είναι αληθής

β) η εύρεση του *technical handle (TH)* δηλαδή ο τρόπος χειρισμού ή η χρήση των δομικών σχέσων που υποστηρίζει τη μετάβαση του *CI* σε απόδειξη

Η πολυπλοκότητα της χρήσης ενός παραδείγματος κατά τη διάρκεια της απόδειξης οδήγησε σε ένα θεωρητικό πλαίσιο που χαρακτηρίζει το ρόλο και τη χρήση των παραδειγμάτων στην αποδεικτική διαδικασία για μαθητές, φοιτητές και μαθηματικούς ερευνητές. Το θεωρητικό πλαίσιο αυτό περιέχει ως κύριες κατηγορίες το σκοπό που έχει ένα παράδειγμα, τα κριτήρια επιλογής, τα οφέλη από τη χρήση του, τις στρατηγικές και τις σκαλωσιές στην αποδεικτική διαδικασία (Knuth, Zaslavsky, & Ellis, 2019). Ακόμη οι υποκατηγορίες που φαίνονται στο παρακάτω δόμημα κάνουν πιο σαφή τις διάφορες περιπτώσεις που υπάρχουν για κάθε κατηγορία.

Κατηγορία Υποκατηγορίες

Σκοπός του παραδείγματος	Κατανόηση διατύπωσης της εικασίας Έλεγχος ορθότητας Μετάδοση της ορθότητας Επεξήγηση με μία αναπαράσταση	Κατανόηση γιατί η εικασία είναι αληθής ή όχι Άρνηση της εικασίας Δημιουργία νέας εικασίας	Διερεύνηση της ορθότητας της εικασίας Επιβεβαίωση των ΄΄πιστεύω΄΄ του Μετάδοση ενός γενικευμένου επιχειρήματος

Κριτήρια επιλογής συγκεκριμένου παραδείγματος	Διαχειρίσιμα εύκολο παράδειγμα Η ελάχιστη/μικρότερη περίπτωση που θα μπορούσε να επιλεγεί Τυχαίο	Πρώτη σκέψη Οικείο ή γνωστό παράδειγμα Οριακή περίπτωση	Ασυνήθιστο παράδειγμα Τυπικό παράδειγμα
Οφέλη από τη χρήση παραδείγματος	Πρόσβαση στην ιδέα/γνώση Γενίκευση	Αιτιολόγηση Επίγνωση των περιορισμών των παραδειγμάτων/εκτίμηση της ανάγκης για απόδειξη	Ανακάλυψη λάθους
Στρατηγική κατά τη διάρκεια χρήσης των παραδειγμάτων	Επιλογή ποικίλων παραδειγμάτων Επιλογή συστηματικής παραλλαγής παραδειγμάτων Επιλογή που βασίζεται σε μαθηματικές ιδιότητες	Αναζήτηση αντιπαραδειγμάτων Σκαλωσιά στην τυπική διαδικασία Κατασκευή τυπικής διατύπωσης μέσω παραδειγμάτων	Τυχαία χαρακτηριστικά/ αναζήτηση μοτίβου Προσπάθεια να δει κανείς τα παραδείγματα μέσω οπτικής γωνίας που εστιάζει στη δομή Ανεπίσημη επαγωγή
Μετάβαση/Σκαλωσιά	Από τα παραδείγματα στη γενίκευση ή στην επίσημη απόδειξη Από τη γενίκευση ή την επίσημη απόδειξη στα παραδείγματα	Από παραδείγματα σε παραδείγματα Από τη μία ιδέα της εικασίας στην άλλη	Από την αναζήτηση στη διακοπή της αναζήτησης

Οι μαθητές παρατηρώντας τα παραδείγματα προσπαθούν να φτάσουν στη γενίκευση η οποία, σύμφωνα με τους Bills και Rowland (1999) είναι είτε εμπειρική είτε δομική. Συγκεκριμένα, οι γενικεύσεις που δημιουργούνται από ένα μικρό αριθμό περιπτώσεων ή παρατηρήσεων βασιζόμενες στα αποτελέσματα ή στις παρατηρούμενες σχέσεις ονομάζονται εμπειρικές – *empirical generalization*. Οι δομικές γενικεύσεις - *structural generalizations* περιγράφονται ως γενικεύσεις που βασίζονται σε ένα παράδειγμα το οποίο χρησιμοποιείται ως γενικευμένο αντιπρόσωπο μίας κλάσης, εστιασμένο σε υποκείμενες έννοιες, δομές ή ιδιότητες. Ο Harrel (2001) με τη σειρά του αναγνώρισε μία απλή διάκριση στις γενικεύσεις των μαθητών με βάση την μαθηματική επαγωγή. Στον έναν τύπο γενίκευσης οι μαθητές εστιάζουν στην ΄΄κανονικότητα΄΄ των αποτελεσμάτων που ονομάζεται *result pattern generalization*, ενώ στον άλλον τύπο εστιάζουν στην ΄΄κανονικότητα΄΄ της διαδικασίας και είναι ο όρος *process pattern generalization.* Όλες οι παραπάνω διακρίσεις των γενικεύσεων έχουν σκοπό να αναδείξουν ότι ο κάθε μαθητής μπορεί να γενικεύσει με διαφορετικό τρόπο και να εστιάσει είτε στη διαδικασία είτε στο αποτέλεσμα για να καταλήξει στο ζητούμενο.

Η φύση του γενεσιουργού παραδείγματος όπως αναφέρεθηκε παραπάνω είναι ασαφής. Για αυτό το λόγο οι Reid και Vargas (2018) παραθέτουν δύο κριτήρια που πληρούν τα παραδείγματα για να είναι γενεσιουργά.

i) Ένδειξη της αντίληψης της γενικότητας – επιχείρημα που περιέχει το γενικό ισχυρισμό που θα αποδειχθεί

ii) Μαθηματική αιτιολόγηση – επιχείρημα που περιέχει μαθηματική αιτιολόγηση βασιζόμενο στον ισχυρισμό που προσφέρει το παράδειγμα αλλά και τη σκαλωσιά από την αιτιολόγηση αυτή στη γενική περίπτωση

Η πρώτη διάσταση της φύσης του γενεσιουργού παραδείγματος αναδεικνύει ότι οι μαθητές εργάζονται με γενικευμένα επιχειρήματα –*general argument* που ισχύουν για όλες τις περιπτώσεις που περιλαμβάνονται στην εικασία. Η δεύτερη διάσταση αναδεικνύει με μαθηματική αιτιολόγηση τον λόγο που όλες οι περιπτώσεις παραδειγμάτων έχουν την ίδια δομή και δεν βασίζονται μόνο στο πρόβλημα αλλά και στη γνώση εκείνης της στιγμής.

Τα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας μπορεί να δημιουργηθούν είτε από τον μαθητή είτε από τον εκπαιδευτικό. Είναι εύλογο ότι η πηγή από την οποία παρέχονται ή φτιάχνονται παίζει ρόλο στη διαδικασία της γενίκευσης. Έτσι, σύμφωνα με τους Zaslavsky,Aricha-Metzer,Thoms, Sabouri και Brulhardt (2016) άλλη μία κατηγορία χρήσης παραδειγμάτων στην εικασία και στην απόδειξη είναι η πηγή από την οποία χρησιμοποιούνται τα παραδείγματα, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται οι δύο παρακάτω κατηγορίες :

i) τα παραδείγματα που δημιουργούνται από τους μαθητές

ii) τα παραδείγματα που παρέχονται από τους ερευνητές

Τα παραδείγματα που παρέχονται από τους ερευνητές (Zaslavsky, 2014) θεωρούνται από αυτούς γενεσιουργά υπό την έννοια της ενδεχόμενης μετάβασης στην κύρια ιδέα της απόδειξης. Όλες οι περιπτώσεις γενεσιουργών παραδειγμάτων που παρέχονται από τον ερευνητή κατηγοριοπούνται σύμφωνα με τα παρακάτω (Zaslavsky, Aricha-Metzer, Thoms, Sabouri, & Brulhardt, 2016) :

i) *Generic treatment of Example(s)* (γενικευμένη χρήση παραδειγμάτων)

ii) *Contribution of Example(s) to Proving* (συνεισφορά παραδειγμάτων στην απόδειξη)

Η πρώτη κατηγορία παραδειγμάτων σχετίζεται με τη διαχείριση τους από τους μαθητές. Στην περίπτωση που τα διαχειρίζονται με ειδικό τρόπο (*non-generic treatment*) τα παραδείγματα αυτά χρησιμοποιούνται για επιβεβαίωση. Αντίθετα, αν τα παραδείγματα χρησιμοποιούνται με γενικευμένο τρόπο (*generic treatment of example(s)*) τότε κατανοείται η κύρια ιδέα της απόδειξης ή αντιμετωπίζεται το συγκεκριμένο ως γενικό. Η δεύτερη κατηγορία στοχεύει στην απάντηση της ερώτησης : Η χρήση των παραδειγμάτων είναι παραγωγική για την απόδειξη; Οι παρακάτω υποκατηγορίες του *Contribution of Example(s) to Proving* είναι :

i) *Productive for Constructing a deductive argument* - παραγωγικά παραδείγματα για την κατασκευή επιχειρήματος (ΠΚ), δηλαδή ο μαθητής είτε χρησιμοποιεί τα παραδείγματα με παραγωγικό τρόπο έτσι ώστε να κατασκευάσει ένα *general argument* είτε η απόδειξη βασίζεται μερικώς ή ολικώς στις ιδέες που προήλθαν από τα παραδείγματα

ii*) Productive for Understanding a general argument* – παραγωγικά παραδείγματα για την εμπέδωση του γενικευμένου επιχειρήματος (ΠΕ), δηλαδή ο μαθητής δεν μπορεί να κατασκευάσει την απόδειξη με ένα παραγωγικό επιχείρημα αλλά μπορεί να κατανοήσει το επιχείρημα ή την εξήγηση χρησιμοποιώντας παραδείγματα

iii) *Non-Productive for Proving* – μη παραγωγικά παραδείγματα για απόδειξη (ΜΠ), δηλαδή ο μαθητής χρησιμοποιεί τα παραδείγματα με μη παραγωγικό τρόπο και δεν μπορεί να κατασκευάσει ή να κατανοήσει ένα παραγωγικό επιχείρημα

Από τα παραπάνω θεωρητικά δομήματα, στη συγκεκριμένη εργασία θα δοθεί παραπάνω έμφαση στα είδη της χρήσης των παραδειγμάτων, στα κριτήρια που πληρούν τα γενεσιουργά παραδείγματα, στα είδη των παραδειγμάτων ανάλογα με την πηγή που χρησιμοποιούνται και στις κατηγορίες χρήσης των παραδειγμάτων με σκοπό τη γενίκευση.

2.3 Οπτικοποίηση – εργαλεία

2.3.1 Αναπαραστάσεις

Κάθε μαθητής για να μπορέσει να επιχειρηματολογήσει ή να αποδείξει με γενικευμένο τρόπο μία εικασία θα πρέπει να αιτιολογήσει τη σκέψη του προερχόμενη απο κάποιο δεδομένο του προβλήματος το οποίο μπορεί να είναι είτε μία μαθηματική αλγεβρική σχέση είτε μία οπτική αναπαράσταση. Οι κανόνες και οι νόρμες που ρυθμίζουν τη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων στο σχολείο πρέπει να θεωρούνται καίριας σημασίας στοιχεία στη διδασκαλία των μαθηματικών σε αντίθεση με την υπόθεση ότι οι μαθητές τα καταλαβαίνουν και τα μαθαίνουν σιωπηλά (David & Tomaz, 2012). Οι μαθητές αρκετά συχνά δημιουργούν επιχειρήματα παραπέμποντας σε σαφείς πηγές όπως αντικείμενα, σχέδια και διαγράμματα. Αυτές οι παραπομπές χρησιμοποιούνται για να ενσαρκώσουν αντικείμενα τα οποία θα χρησιμοποιηθούν σε ισχυρισμούς (Yopp & Ely, 2015). Η χρήση τους είναι αρκετά σημαντική γιατί μία εικόνα ή ένα διάγραμμα μπορεί να ΄΄δέσει΄΄ σκέψεις με χαρακτηριστικά και λεπτομέρειες ασύνδετες (Presmeg,1986; Arcavi, 2003). Σύμφωνα με τον Weber (2009) ο μαθητής μπορεί να αναπτύξει άτυπες αναπαραστάσεις μαθηματικών εννοιών όπως διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις ή πρωτότυπα παραδείγματα και μπορεί να τα χρησιμοποιήσει ως βάση για μαθηματική αιτιολόγηση. Αν μία εικασία παρουσιαστεί με διαγράμματα ή χειραπτικά μέσα τότε η αναπαράσταση αυτή μπορεί να ικανοποιεί μία κλάση αντικειμένων (Yopp & Ely, 2015). Έτσι, το συμπέρασμα αυτού του ισχυρισμού φαίνεται ότι ακολουθεί τη δομή της αναπαράστασης με αποτέλεσμα ένα επιχείρημα να δημιουργηθεί.

Σύμφωνα με τους Adams και Victor (1993;Arcavi ,2003) η δυνατότητα της όρασης είναι η πιο σημαντική πηγή πληροφορίας στον κόσμο. Κάθε άνθρωπος παρακινεί τον εαυτό του και φιλοδοξεί να δει όχι μόνο αυτό που είναι ΄΄φανερό΄΄ αλλά και αυτό που δεν είναι ικανός να παρατηρήσει (Arcavi, 2003). Η οπτικοποίηση έχει ένα ισχυρό και συμπληρωματικό ρόλο που αναδεικνύονται σε τρεις διαστάσεις :

i) υποστήριξη και διευκρίνηση των συμβολικών αποτελεσμάτων (και πιθανή κατασκευή απόδειξης)

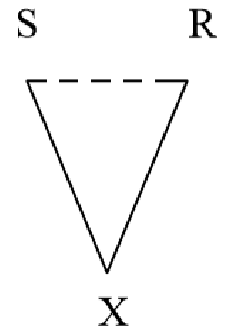
ii) πιθανός τρόπος επίλυσης της διαμάχης μεταξύ ορθών συμβολικών λύσεων και λανθασμένης διαίσθησης

iii) τρόπος βοήθειας για νέο ξεκίνημα με εννοιολογική θεμελίωση που μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω επίσημων λύσεων

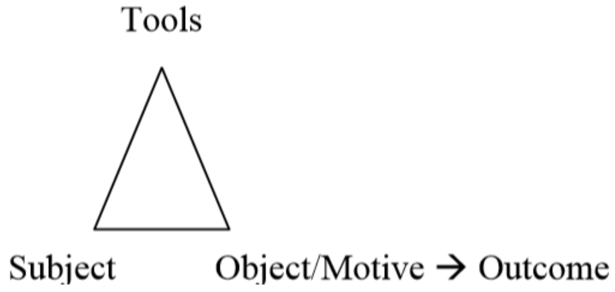
Η Γεωμετρία σχετίζεται με νοητικές οντότητες (τα λεγόμενα γεωμετρικά σχήματα) οι οποίες έχουν ταυτόχρονα εννοιολογικό και σχηματικό χαρακτήρα. Στη συμβίωση της έννοιας και του σχήματος, η εικόνα ωθεί τη σκέψη σε νέες κατευθύνσεις και αυτή η διττή φύση προκαλεί ένταση. Τις περισσότερες φορές η ένταση αυτή βοηθά, όμως υπάρχουν περιπτώσεις που καθυστερεί την κατανόηση της δομής ή των γενικών χαρακτηριστικών που μπορεί να δει μέσω αυτών (Zaslavsky, 2018). Παρά την ουσιώδη χρησιμότητα των οπτικών αναπαραστάσεων η Presmeg (2006) συμπέρανε ότι η έρευνα για τον τρόπο επίδρασης τους στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι σε μεγάλο βαθμό παραμελημένη. Αυτό δεν σημαίνει ότι αν προστεθούν περισσότερες οπτικές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία θα βοηθήσει σίγουρα με εποικοδομητικό τρόπο, λόγω της εξάρτησης τους από πολλές παραμέτρους. Σύμφωνα με τους David και Tomaz (2012) η διδασκαλία με περισσότερη Γεωμετρία και περισσότερη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων και γωμετρικών δομών στις τάξεις, δεν εξασφαλίζει τη συνεισφορά στη διευκόλυνση της οπτικοποίησης. Για παράδειγμα, μπορεί κάποιοι μαθητές να ακολουθούν μία σειρά βημάτων για την κατασκευή ενός προκαθορισμένου γεωμετρικού αντικειμένου χωρίς όμως να κατανοούν τι ακριβώς κάνουν. Λίγες ερευνητικές εργασίες έχουν εξετάσει τον τρόπο που μπορεί να αξιοποιήσει η εκπαίδευση τη χρήση και την ισχύ της οπτικοποίησης. (David & Tomaz, 2012).

2.3.2 Θεωρία Δραστηριότητας – Εργαλεία

Οι μαθητές έχουν τη τάση να αναζητούν κανονικότητες, να σκέφτονται και να επεξεργάζονται δομές έτσι ώστε να τις κατανοήσουν,όπως και να συνδέσουν μαθηματικά αντικείμενα και ιδέες με αναπαραστάσεις. Σύμφωνα με την έρευνα των David και Tomaz (2012), οι μαθητές φαίνεται να έχουν μία εσωτερική αντίφαση μεταξύ των αφηρημένων μαθηματικών ιδεών και των εμπειρικών αναπαραστάσεων η οποία οδηγεί σε μία απρόβλεπτη μάθηση για τους μαθητές όσο και για τον εκπαιδευτικό και τους ερευνητές. Η σύνδεση μεταξύ τους πραγματοποιείται συνήθως με κατάλληλη χρήση πηγών και εργαλείων. Έτσι οι μαθητές ξεκινώντας από ερωτήματα, προβλήματα ή άγνωστες καταστάσεις αναπτύσσουν υποθέσεις, επεξεργάζονται, πειραματίζονται με σκοπό να τεκμηριώσουν για την ορθότητα της εικασίας τους και να γενικεύσουν.
Η παρακάτω τριγωνική αναπαράσταση (Vygotsky, L.S., 1978) αναδεικνύει τη διαμεσολάβηση (mediation, X) του ερεθίσματος (stimulus, S) και της αντίδρασης (response, R) μέσω των ΄΄ψυχολογικών΄΄ εργαλείων (pshyclogical tools).



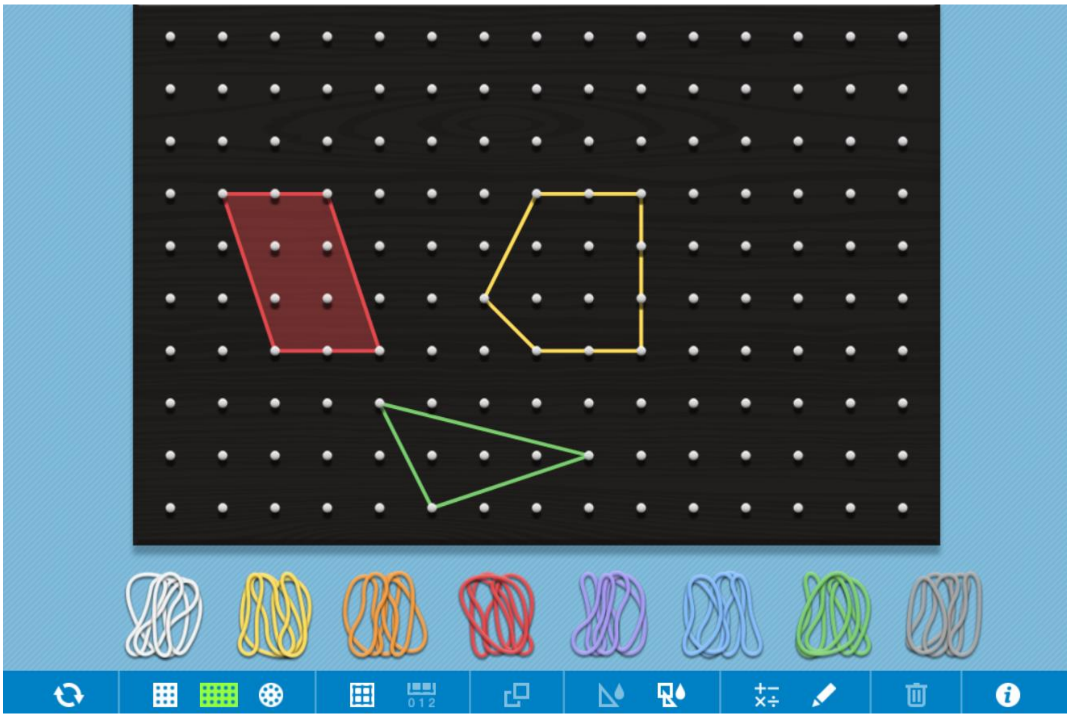
Τα εργαλεία αυτά (Vygotsky, 1979) μπορεί να είναι για παράδειγμα η προφορική γλώσσα, διάφορα συστήματα μέτρησης, μνημονικοί κανόνες, συστήματα αλγεβρικών συμβόλων, σχήματα, διαγράμματα κτλ. Ο Cole (1996) στο Mali (2006) αναπαρήγαγε τη τριγωνική αναπαράσταση διαμεσολάβησης του Vygotsky βασιζόμενος στην ανθρώπινη δράση, με απόρροια να αποτελεί την ΄΄πρώτη δημιουργία μοντέλου Θεωρίας Δραστηριότητας ΄΄. Η παρακάτω εικόνα αναδεικνύει το υποκείμενο (ο ίδιος ο μαθητής ή κάποια ομάδα) το οποίο δρα στο αντικείμενο της μάθησης (στόχοι, κίνητρα) χρησιμοποιώντας διαμεσολαβητικά εργαλεία (προφορικός, γραπτός λόγος, αναπαραστάσεις, εικόνες κτλ).



Σύμφωνα με την έρευνα των David και Tomaz (2012), οι αναπαραστάσεις στη μαθηματική δραστηριότητα άλλοτε έχουν το ρόλο του εργαλείου και άλλοτε του αντικειμένου της δραστηριότητας χωρίς να είναι προσχεδιασμένο από τον εκπαιδευτικό ή να αποτελεί πρωταρχικό του στόχο. Αυτό σημαίνει ότι η αναπαράσταση δεν είναι απαραίτητα πάντα ένα εργαλείο, μπορεί κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας να αλλάζει ρόλους ανάλογα με τα δεδομένα, τα ζητούμενα και τις σκέψεις των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, κατά την Θεωρία Δραστηριότητας η σχέση υποκειμένου και αντικειμένου δεν είναι άμεση αλλά πραγματοποιείται με τη διαμεσολάβηση εργαλείων (artifacts).Τα εργαλεία αυτά είναι πηγές που χρησιμοποιούνται για να βελτιώσουν τη γνώση και τις δεξιότητες των μαθητών όπως και να διευκολύνουν την εμπέδωση της γνώσης. Σύμφωνα με τους David και Tomaz (2012) μία υποκατηγορία των εργαλείων αποτελούν τα *mediating artifacts*- τεχνουργήματα διαμεσολαβησης, δηλαδή αντικείμενα (μέσα) της διδασκαλίας που σχετίζονται με την οπτικοποίηση (όπως οπτικές αναπαραστάσεις, εικόνες και σχήματα). Τα εργαλεία αυτά ακόμη μπορεί να είναι ψηφιακά με αποτέλεσμα η δυναμικότητα που προσφέρουν να βοηθήσουν σε μεγαλύτερο βαθμό το μαθητή. Είναι δεδομένο ότι η εισαγωγή των ψηφιακών τεχνολογιών στις σχολικές τάξεις και στη σχολική ζωή είναι μέρος της εκπαιδευτικής πραγματικότητας. Σύμφωνα με τον Arcavi (2003) η τεχνολογία έχει αναπτυχθεί αρκετά και με τέτοιο τρόπο ώστε να ξεπερνά τους περιορισμούς που έχει ένας μαθητής και να μπορέσει να παρατηρήσει κάτι που είναι κρυμμένο στις οπτικές αναπαραστάσεις. Η τεχνολογία δεν ικανοποιεί μόνο την επιθυμία των μαθητών να δουν, να παρατηρήσουν, να διασκεδάσουν αλλά ταυτόχρονα και να κατανοήσουν αφού αποτελεί έναυσμα για ερωτήσεις που πιθανόν να μην τίθονταν χωρίς τη χρήση της.

2.3.4 Γεωπίνακας

Κάποια τεχνολογικά εργαλεία όπως ο γεωπίνακας μπορούν να αναπτύξουν οπτικά μέσα για να δει κανείς καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και ιδέες. Ο γεωπίνακας είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων και για ερευνητικές προσεγγίσεις (Carroll, 1992). Εστιάζει στη βαθύτερη κατανόηση μαθηματικών εννοιών πριν ο χρήστης ενασχοληθεί με τις πιο αφηρημένες. Ο ψηφιακός γεωπίνακας είναι μία εφαρμογή που υπάρχει σε οποιοδήποτε ψηφιακό μέσο όπως ηλεκτρονικός υπολογιστής, τάμπλετ η οποία θυμίζει το φυσικό γεωπίνακα. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να χειρίζονται σχήματα όπως παραλληλόγραμμα, πολύγωνα, να γράφουν τους υπολογισμούς ή τις εξηγήσεις τους αλλά και να μπορούν να μοιράζονται την εργασία τους με τον εκπαιδευτικό μέσω κοινόχρηστης πλατφόρμας ή να την παρουσιάζουν μέσω ενός προτζέκτορα σε μία τάξη. Ο φυσικός γεωπίνακας ήταν και είναι ακόμη ένα εύχρηστο εργαλείο για σχεδίαση στις παραδοσιακές τάξεις. Η ψηφιακή του έκδοση είναι το ίδιο ίσως και παραπάνω εύχρηστη αφού οι μαθητές λόγω της ευχέρειας τους με τους υπολογιστές και τις τεχνολογίες θα το χρησιμοποιούν ευκολότερα. Ακόμη διαθέτει πολλές παραπάνω δυνατότητες, όπως να διπλασιάζει τα ήδη κατασκευασμένα σχήματα και να διαχωρίζει την επιφάνεια τους με διαφορετικά χρώματα έτσι ώστε να είναι διακριτά. Η παρακάτω εικόνα αναδεικνύει τις βασικές λειτουργίες του ψηφιακού γεωπίνακα :



Σύμφωνα με τους Bjørkås και van den Heuvel-Panhuizen (2019) μέσω του ψηφιακού εργαλείου γίνονται εμφανείς όλες οι διαφορετικές στρατηγικές των μαθητών με αποτέλεσμα να αξιοποιούνται με κατάλληλο τρόπο για το σκοπό της δραστηριότητας. Ο γεωπίνακας ενθαρρύνει τους μαθητές να σκεφτούν τις στρατηγικές τους και να εξηγούν με ποιο τρόπο βρήκαν την απάντηση, όπως και ότι η δυναμικότητα του δίνει ανατροφοδότηση με αποτέλεσμα η αλληλεπίδραση αυτή να προσφέρει θετικά αποτελέσματα. Εκτός από το ψηφιακό εργαλείο, η συζήτηση και η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού τους ωθεί να σκεφτούν και να κατανοήσουν βαθύτερα τη στρατηγική τους. Στόχος της χρήσης του ψηφιακού γεωπίνακα είναι να εμπνεύσει και να ενεργοποιήσει το κάθε άτομο ξεχωριστά να ανακαλύψει και να αναπτύξει την μαθηματική αυτοπεποίθηση και ικανότητα του (Carroll, 1992).

2.3.5 Αλληλεπίδραση – Συνεργασία

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως η συζήτηση μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού βοηθά στην ανταλλαγή απόψεων και σκέψεων με απόρροια την εξέλιξη κάποια εικασίας σε γενίκευση είτε την απόρριψη της με κάποιο αντιπαράδειγμα. Σημαντικό ρόλο παίζει στην τάξη και ο εκπαιδευτικός, οι δράσεις του οποίου έχουν αντίκτυπο στις σκέψεις των μαθητών αλλά και στον τρόπο που θα κατασκευάσουν κάθε είδους απόδειξη (άτυπη ή τυπική) (Martin & McCrone, 2003). Τα γεγονότα που συμβαίνουν στην ταξη δεν είναι συγκεκριμένα πάντα ούτε εστιασμένα στον κάθε μαθητή ή τη συλλογική προσπάθεια της ομάδας του. Οι σκέψεις και οι δράσεις των μαθητών και κατ’επέκταση της ομάδας του είναι αυθόρμητες με αποτέλεσμα ο εκπαιδευτικός να δρα αντίστοιχα. Σύμφωνα με τους Lampert και Cobb (2003; Mueller & Yankelewitz & Maher, 2012), η δυνατότητα που παρέχεται στους μαθητές να εκφράσουν και να συζητήσουν τις ιδέες τους με άλλους (είτε με τους συμμαθητές τους, είτε με τον εκπαιδευτικό) μπορεί να αναπτύξει πιο εύκολα τη μαθηματική αιτιολόγηση. Σύμφωνα με τους Howe κ.α (2007; Mueller & Yankelewitz & Maher, 2012) τα πιο επιτυχημένα παραδείγματα συνεργασίας συμβαίνουν όταν οι μαθητές προτείνουν ιδέες και την αιτιολογεί ο ένας στον άλλον. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι αντικρουόμενες γνώμες ωθούν τους μαθητές να επιλύσουν το περίπλοκο πρόβλημα έτσι ώστε να καταφέρουν να συμφωνήσουν. Ακόμη, η συνεργασία είναι πιο εποικοδομητική όταν ο εκπαιδευτικός παρεμβαίνει και επιτρέπει στους μαθητές να πάρουν πρωτοβουλίες με αποτέλεσμα να έχουν αυτοπεποίθηση για την επίλυση των δραστηριοτήτων. Επεξηγηματικά, ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές με σκοπό να συνεργαστούν με αποτελεσματικό τρόπο και επεξηγεί χρησιμοποιοώντας το ως ΄΄ψυχολογικό΄΄ εργαλείο που συνεισφέρει στην ανάπτυξη της αιτιολόγησης. (Mercer, 2008; Mueller & Yankelewitz & Maher, 2012). Η γνώση συχνά αποκτάται με τις οδηγίες των ειδικών ή πιο έμπειρων πηγών (Vygotsky,1978; Martin, McCrone & Bower, 2005) και η αλληλεπίδραση μέσα στην τάξη αποτελεί γόνιμο έδαφος για να εξερευνήσει κανείς τη βαθύτερη κατανόηση ενός μαθηματικού αντικειμένου. Αναλύοντας τις δράσεις του εκπαιδευτικού και των μαθητών αποκτάται πληροφορία με την οποία ανακαλύπτεται τι προκαλεί τα γεγονότα αλλά και ποια εμπόδια μπορεί να εμφανιστούν στη μετάβαση για τη μαθηματική απόδειξη. Οι αποφάσεις του εκπαιδευτικού επηρεάζουν αλλά και επηρεάζονται από τα μέλη της τάξης, τη δομή της και τις ομάδες που διαμορφώθηκαν. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές και γενικά όλη η τάξη αλληλεπιδρά με τον εκπαιδευτικό όπως και το αντίστροφο. Η σύνδεση και η αλληλεπίδραση μεταξύ μελών κάποιας ομάδας και μαθητών με εκπαιδευτικό αποτελεί ένα σημαντικό κρίκο στην εξέλιξη της σκέψης των μαθητών, στη δημιουργία ή απόρριψη των εικασιών με πιθανή κατάληξη τη γενίκευση ή μία μαθηματική απόδειξη.

Συνοπτικά, η έρευνα αυτή θα εξετάσει αν τα γενεσιουργά παραδείγματα που παρέχονται είτε από τον ερευνητή είτε από τους μαθητές μπορούν να βοηθήσουν ή να εμποδίσουν τους μαθητές να γενικεύσουν με στόχο τη μετάβαση στην απόδειξη. Πιο συγκεκριμένα, η χρήση αυτών των παραδειγμάτων κάνει ορατές τις ιδιότητες και τη δομή τους με απόρροια οι μαθητές να εικάζουν στην προσπάθεια να γενικεύσουν. Αυτό με τη σειρά του, τους ωθεί στη δημιουργία επιχειρημάτων με σκοπό να αιτιολογήσουν την υπόθεση που έκαναν δια μέσου των γενικευμένων παραδειγμάτων. Στην περίπτωση που ένα αντιπαράδειγμα αντικρούει την εικασία τους, οι μαθητές αυτόματα οδηγούνται σε ένα καινούριο κύκλο επιχειρημάτων. Στη συγκεκριμένη έρευνα σημαντικό ρόλο θα παίξουν οι αναπαραστάσεις στις οποίες βασιζόμενοι οι μαθητές θα τεκμηριώσουν τις απόψεις τους. Οι γεωμετρικές/οπτικές αναπαραστάσεις θα χρησιμοποιηθούν ως διαμεσολαβητικά εργαλεία με κατάλληλο τρόπο έτσι ώστε να διευκολύνουν τους μαθητές στην αποδεικτική διαδικασία. Το περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές θα εργαστούν και θα χειριστούν τις οπτικές αναπαραστάσεις είναι ο ψηφιακός γεωπίνακας ο οποίος με τη σειρά του θα βοηθήσει στην αλληλεπίδραση και θα προάγει τη συνεργασία των μαθητών.

3. Μεθοδολογία

3.1 Ερευνητικά ερωτήματα

Η έρευνα αυτή σκοπεύει να εξετάσει μέσω δύο δραστηριότητων που βασίζονται στη Θεωρία Αριθμών, το ρόλο των γενεσιουργών παραδειγμάτων με σκοπό τη μετάβαση σε μεγαλύτερα επίπεδα γενίκευσης. Ακόμη θέλει να εξετάσει την εξέλιξη στη σκέψη των μαθητών έχοντας ως εργαλείο τις αναπαραστάσεις είτε εικονικά είτε μέσω ψηφιακού εργαλείου, του γεωπίνακα. Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι τα εξής :

1) Ποιος είναι ο ρόλος των γενεσιουργών παραδειγμάτων στο πέρασμα στο μεγαλύτερο στάδιο γενίκευσης σε μαθητές Α΄ Λυκείου;

2) Ποιος είναι ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην εξέλιξη της σκέψης των μαθητών;

3.2 Πλαίσιο έρευνας

Η έρευνα αυτή, πραγματοποιήθηκε σε 6 μαθητές της Α’ Λυκείου. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες των 2 με σκοπό τη συνεργασία και επικοινωνία μεταξύ τους. Η έρευνα για τις δύο ομάδες διεξάχθηκε σε φροντιστηριακό περιβάλλον ενώ για την τρίτη ομάδα μέσω εφαρμογής τηλεπικοινωνιών (Skype) λόγω της δυνατότητας πρόσβασης. Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε 2 συνεχόμενες διδακτικές ώρες. Οι προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών είναι τα κριτήρια διαιρετότητας του 3 για μεγαλύτερη διευκόλυνση των πράξεων τους και το εμβαδόν τετραγώνου και ορθογωνίου.Τα βοηθητικά μέσα για την διεξαγωγή των δραστηριοτήτων είναι το φύλλο εργασίας και ηλεκτρονικοί υπολογιστές έτσι ώστε να έχουν τη δυνατότητα να χειριστούν τον ψηφιακό γεωπίνακα.

3.3 Δεδομένα

Καθ’όλη διάρκεια της διδασκαλίας ο διάλογος που πραγματοποιήθηκε μεταξύ των μελών της ομάδας αλλά και μεταξύ της ομάδας και του εκπαιδευτικού ηχογραφήθηκε. Στα δεδομένα αυτά, προστέθηκαν και οι διάλογοι από τις συνεντεύξεις κάθε ομάδας που πραγματοποιηθήκαν μετά απο λίγο χρονικό διάστημα. Μετά από τη συλλογή τους απομαγνητοφωνήθηκαν. Ακόμη, δεδομένα αποτέλεσαν και τα στιγμιότυπα από τον ψηφιακό γεωπίνακα, κατά τη διάρκεια της χρήση του.

3.4 Δραστηριότητες

Το φύλλο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές περιέχει δύο δραστηριότητες που συνδέονται μεταξύ τους και είναι οι εξής :

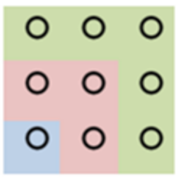
Δραστηριότητα 1

Σύμφωνα με την ιστορία των Μαθηματικών, οι Πυθαγόρειοι φαντάζονταν τους ακέραιους αριθμούς ως ψηφίδες τα οποία τα διέτασσαν σύμφωνα με ορισμένα γεωμετρικά μοτίβα.Για παράδειγμα η αναπαράσταση του άρτιου αριθμού 8 και του περιττού 9 είναι η εξής:

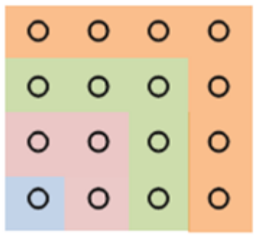
Επίσης,χρησιμοποιούσαν ψηφίδες για να δημιουργήσουν τους τετράγωνους αριθμούς,όπως φαίνεται παρακάτω.

Ξεκινώντας από τον αριθμό 1,τοποθετούσαν στις πλευρές ενός γνώμονα 3 ψηφίδες,μετά σε έναν νέο γνώμονα 5 ψηφίδες κ.τ.λ. Με αυτό τον τρόπο υπολόγιζαν το άθροισμα των περιττών αριθμών.

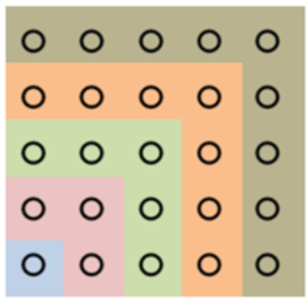
Για παράδειγμα,



Εικόνα 1



Εικόνα 2



Εικόνα 3

1) Παρατηρώντας τις παραπάνω εικόνες συμπληρώστε τα κενά.

Α) Εικόνα 1 : $1 + 3 + 5 =$ __

Εικόνα 2 : $1 + 3 + 5 + 7 =$ __

Εικόνα 3 : ______________ = __

Εικόνα 4 : __________________ = __

Τι παριστάνει γεωμετρικά κάθε αριθμός που αντιστοιχεί σε μία εικόνα ;

B) Μπορείτε να σκεφτείτε ποιο θα είναι το αποτέλεσμα για την Εικόνα 101;

2) Έχοντας τον γεωπίνακα (https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/) μπορείτε να πειραματιστείτε και να βρείτε τον μικρότερο αριθμό που θα προσθέτατε στο 4^2 και 5^2 έτσι ώστε να αποτελούν πολλαπλάσια του 3; Ισχύει το ίδιο και στο 3^2 ; Πειραματιστείτε και με άλλους φυσικούς αριθμούς. Τι παρατηρείτε;

Δραστηριότητα 2

Α	**Β**	**Γ**
3	11	33
4	18	72
5	27	135
6	38	228
7	51	357
8	66	528
10	102	1020

1) Πως προκύπτει η Β στήλη από την Α;

2) Πως προκύπτει ή Γ στήλη από την Α και Β;

3) Αξιοποιώντας τη Δραστηριότητα 1, παρατηρείστε τους αριθμούς στη Γ στήλη. Τι κοινό έχουν;

4) Μπορείτε να προσθέσετε και άλλους φυσικούς αριθμούς στη στήλη Α και αναλόγως να συμπληρώσετε τις στήλες Β και Γ; Τι παρατηρείτε;

5) Α) Αν εμπλουτίσετε τη στήλη Α όπως φαίνεται παρακάτω , χρειάζεται να κάνετε πράξεις για να διαπιστώσετε αν οι αριθμοί στις στήλες Β και Γ είναι πολλαπλάσια του 3;

Δώστε και άλλα δικά σας παραδείγματα με διάφορους φυσικούς αριθμούς.

Α	**Β**	**Γ**
411		
520		
704		

Β) Μπορείτε να βρείτε έναν φυσικό αριθμό x που δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 και το x^2+2 να μην αποτελεί επίσης πολλαπλάσιο του 3;

Γ) Πόσο σίγουροι είστε για τα συμπεράσματα σας ; Πως μπορείτε να πείσετε κάποιον ότι η παρατήρηση σας ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς;

3.5 Στόχοι Δραστηριοτήτων

Το θέμα της δραστηριότητας, η Θεωρία Αριθμών, είχε ως στόχο την κινητοποίηση των μαθητών σε μία ενότητα των μαθηματικών που δεν είχαν ξανασυναντήσει ως τώρα πιο αναλυτικά. Δηλαδή οι μαθητές έχουν εντρυφήσει ελάχιστα στα κριτήρια διαιρετότητας ή γενικά στη διαιρετότητα των αριθμών. Στο σχολικό εγχειρίδιο το κεφάλαιο της Θεωρίας Αριθμών υπάρχει στην Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης, παρόλαυτά δεν διδάσκεται. Οπότε αυτός ο λόγος αποτέλεσε αφορμή για να παρατηρηθεί η σκέψη των μαθητών σε μία ενότητα που δεν διδάσκεται και δεν είναι εξοικειωμένοι περαιτέρω σε αυτήν. Από την άλλη μεριά, η Θεωρία Αριθμών διαπραγματεύεται αριθμούς με τους οποίους είναι οικείοι οι μαθητές και ανεξαρτήτως από το επίπεδο γνώσης τους μπορούν να συμμετέχουν όλοι. Έχει ενδιαφέρον λοιπόν, οι μαθητές να έρθουν αντιμέτωποι με μία ενότητα που δεν έχουν συναντήσει ξανά τόσο αναλυτικά, όμως μπορούν να τη διαχειριστούν λόγω της οικειότητας που αισθάνονται από το περιεχόμενο της που είναι οι αριθμοί. Επίσης, η δραστηριότητα αυτή απαιτεί από τους μαθητές να γενικεύσουν τη σκέψη τους παρατηρώντας τη δομή μέσα από τα παραδείγματα, το οποίο οδηγεί στο μεγαλύτερο στάδιο γενίκευσης. Οι μαθητές δεν έχουν πολλές ευκαιρίες να δοκιμαστούν σε κάτι παρόμοιο, για αυτό μέσω των δραστηριοτήτων, τους παρέχεται η δυνατότητα να κάνουν εικασίες, να τις επαληθεύουν και να φτάνουν στο πόρισμα που τους οδηγεί στη γενίκευση. Αυτός, αποτελεί τον απώτερο στόχο του συγκεκριμένου φύλλου εργασίας όσον αφορά το θέμα των δραστηριοτήτων που είναι η Θεωρία Αριθμών.

Πιο συγκεκριμένα, στόχος της πρώτης δραστηριότητας είναι οι μαθητές να παρατηρήσουν τις εικόνες με αριθμούς 1,2 και 3 που τους παρέχει το φύλλο εργασίας και μέσω αυτών να βρουν το μοτίβο που τους οδηγεί σε εικόνες πολύ μεγαλύτερων αριθμών. Μέσα από τις εικόνες οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν και να εξάγουν συμπεράσματα που χωρίς αυτές να ήταν πολύ δύσκολο ή αδύνατο. Για αυτο ακριβώς το λόγο, σε μία δραστηριότητα που δεν έχουν αντιμετωπίσει αρκετά συχνά οι μαθητές είναι σημαντική η ενσωμάτωση των οπτικών αναπαραστάσεων. Επεξηγηματικά, η εισαγωγή της δραστηριότητας γίνεται με μία ιστορική αναδρομή στους Πυθαγόρειους και στη χρήση/διάταξη των ψηφίδων με δύο στόχους :

i) την πληροφορία ότι ένας τετράγωνος αριθμος δημιουργείται από το άθροισμα περιττών

ii) και ότι το άθροισμα όλων των περιττών ή αλλιώς όλων των ψηφίδων που αποτελείται το τετράγωνο είναι το εμβαδόν του

Για τη συμπλήρωση κενών είναι αρκετά χρήσιμα και τα δύο και η υπεροχή κάποιου είναι στην δικαιοδοσία των μαθητών που θα βρεθούν αντιμέτωποι με την δραστηριότητα. Η μετάβαση από την εικόνα 3 στην εικόνα 4 η οποία δεν υφίσταται στο φύλλο εργασίας στοχεύει στη προσπάθεια κατανόησης του μοτίβου είτε μέσω του αθροίσματος είτε των διαδοχικών τέλειων τετραγώνων. Ακόμη η μετάβαση αυτή προετοιμάζει τους μαθητές για την επόμενη ερώτηση που είναι η εύρεση του αριθμού που αντιστοιχεί στην εικόνα 101. Ο αρκετά μεγάλος αριθμός 101 είχε ως στόχο να παρακινήσει τους μαθητές να σκεφτούν στις εικόνες που έχουν πρόσβαση τι αλλάζει και ποια δομή ακολουθείται στο μοτίβο. Σκεφτόμενοι οι μαθητές με αυτό τον τρόπο, οι εικόνες που θα χρησιμοποιούσαν για να δουν το μοτίβο που επαναλαμβάνεται θα αποτελέσουν γενεσιουργά παραδείγματα με αποτέλεσμα να μπορούν για οποιαδήποτε εικόνα να βρουν τον αριθμό που αντιστοιχεί. Προυπόθεση της μετατροπής των ειδικών παραδειγμάτων σε γενεσιουργά είναι η παρατήρηση του πλήθους των ψηφίδων στην πλευρά του κάθε τετραγώνου και τη σχέση αυτού με τον αριθμό της εικόνας ή σαφώς μόνο με τις αναπαραστάσεις και την αύξηση των ψηφίδων σε κάθε επόμενη εικόνα. Για την απάντηση αυτού του ερωτήματος είναι απαραίτητο οι μαθητές να έχουν συνειδητοποιήσει ότι ο αριθμός που αντιστοιχεί σε κάθε εικόνα είναι το εμβαδόν του, για αυτό το λόγο η ερώτηση : ΄΄Τι παριστάνει γεωμετρικά ο αριθμός που αντιστοιχεί σε κάθε εικόνα;΄΄ έχει τοποθετηθεί ακριβώς σε αυτή τη θέση. Ο στόχος της είναι να προιδεάσει τους μαθητές ότι το ζητούμενο είναι το εμβαδόν. Όπως είναι εμφανές, το κάθε ερώτημα αποτελεί σκαλωσιά για το επόμενο με κλιμακούμενη δυσκολία έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να ανταποκριθούν ευκολότερα.

Η τελευταία ερώτηση της πρώτης δραστηριότητας θα απαντηθεί από τους μαθητές μέσω του ψηφιακού γεωπίνακα. Ο σκοπός αλλαγής του πλαισίου δηλαδή από φύλλο εργασίας σε ψηφιακό περιβάλλον είχε ως σκοπό να βοηθήσει τους μαθητές να χειριστούν τις ψηφίδες μέσω υπολογιστή, το οποίο δίνει τη δυνατότητα να μετασχηματίσουν σχήματα το οποίο με τη σειρά του προσφέρει ανατροφοδότηση. Στο γεωπίνακα θα είναι ήδη σχηματισμένες οι εικόνες 1,2 και 3 και οι μαθητές θα έχουν τη δυνατότητα να τις αξιοποιήσουν κατάλληλα για να φτάσουν στα ζητούμενα της δραστηριότητας. Πιο συγκεκριμένα, το ερώτημα : ΄΄Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που πρέπει να προστεθεί στο 3^2,4^2και 5^2 έτσι ώστε να βγει πολλαπλάσιο του 3΄΄ συνδέει άμεσα τις εικόνες με την επόμενη δραστηριότητα που σχετίζεται με τα πολλαπλάσια του 3. Στην εκφώνηση αυτή, αντικαθίστανται οι εικόνες 1,2,3 με τα 3^2,4^2και 5^2 με σκοπό να δοθεί έμφαση στα εμβαδά τους αλλά και στα αποτελέσματα των τέλειων τετραγώνων για την προετοιμασία τους στην επόμενη δραστηριότητα. Οι μαθητές αρχικά θα πρέπει να βρουν το μικρότερο αριθμό που θα προσθέσουν στα τέλεια τετράγωνα για να γίνει πολλαπλάσιο του 3 και σε δεύτερο επίπεδο να μετασχηματίσουν τα εμβαδα αυτά (το τέλειο τετράγωνο μαζί με το μικρότερο αριθμό που προστέθηκε) σε ορθογώνια κατάλληλων διαστάσεων με στόχο να γίνεται εμφανές ότι το εμβαδόν τους είναι πολλαπλάσιο του 3. Η εκφώνηση ζητά από τους μαθητές να δείξουν γεωμετρικά το πολλαπλάσιο του 3 για να κατανοήσουν αρχικά ότι ένα πολλαπλάσιο του 3 είναι το γινόμενο οποιουδήποτε αριθμού με το 3 αλλά και να εξελίξουν τη σκέψη τους στο γεωπίνακα με δυναμικό τρόπο. Το επόμενο ερώτημα της δραστηριότητας βασιζόταν στον πειραματισμό με άλλους αριθμούς που θα επέλεγαν οι ίδιοι οι μαθητές. Ο σκοπός της δοκιμής αυτής είναι να παρατηρήσουν οι ίδιοι ότι όλοι οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 3, τα τετράγωνα τους είναι επίσης πολλαπλάσια του 3. Ακόμη και ότι τα τέλεια τετράγωνα μη πολλαπλασίων του 3 χρειάζονταν 2 για να γίνουν. Πιο αναλυτικά, το ερώτημα αυτό στοχεύει στην αντίληψη ότι αυτό το μοτίβο επαναλαμβάνεται και δεν συμβαίνει μόνο στο 3^2, 4^2και 5^2 αλλά και σε άλλους φυσικούς αριθμούς. Στην περίπτωση που οι μαθητές θα παρατηρήσουν τις δύο παραπάνω κατηγορίες φυσικών αριθμών, αυτομάτως τα παραδείγματα του παρέχονται από τον ερευνητή (3^2,4^2+2 και 5^2+2) και αυτά που παρέχονται από τους μαθητές θα αποτελέσουν γενεσιουργά σε ένα πρώτο στάδιο γενίκευσης. Τα παραδείγματα που θα βάλουν, θα βοηθήσουν στην παρατήρηση του επαναλαμβανόμενου μοτίβου αλλά και θα παρακινήσει το ενδιαφέρον τους να μάθουν γιατί συμβαίνει. Αυτό ίσως φέρει κερδοφόρα αποτέλεσματα με τους μαθητές να φτάνουν σε όλο και μεγαλύτερα στάδια γενίκευσης όπως ότι οι κατηγορίες όλων των φυσικών αριθμών με βάση το 3 είναι οι 3x,3x+1,3x+2.

Η δεύτερη δραστηριότητα περιέχει 3 στήλες με την Α να έχει τους φυσικούς αριθμούς 3,4,5,6,7,8,10 και τη στήλη Β να έχει τα τετράγωνα αυτών προστιθέμενα με το 2, ενώ η Γ στήλη να περιλαμβάνει το γινόμενο των στηλών Α και Β. Στόχος των πρώτων δύο ερωτήσεων είναι να βρεθούν οι σχέσεις που συνδέουν τις στήλες. Η σχέση A^2+2 = Β θα πρέπει να γίνει εμφανής μέσα από τη λεπτομερής παρατήρηση των Α και Β στηλών. Η εύρεση αυτής της σχέσης θα ήταν περισσότερο δύσκολη αν δεν είχε προηγηθεί όλη η διαδικασία στο γεωπίνακα, αφού οι μαθητές μέσω του ψηφιακού εργαλείου και των παραδειγμάτων που θα θέσουν θα δουν κάποιους από αυτούς τους αριθμούς ξανά όπως, το 4 $\rightarrow$ 4^2+2=18 , 5 $\rightarrow$ 5^2+2=27, 7 $\rightarrow$ 7^2+2=51. Θα υπάρχουν βέβαια και αριθμοί όπως τα πολλαπλάσια του 3 που στο γεωπίνακα δεν προστίθεται ο αριθμός 2, όμως η σχέση που θα βρουν για τις στήλες ισχύει για όλους τους αριθμούς τους, όχι μόνο για τα μη πολλαπλάσια. Είναι εύλογο ότι ο γεωπίνακας θα αποτελεί προυπόθεση για τη διευκόλυνση των μαθητών στη δραστηριότητα 2. Αποτελεσματικά, καταλήγοντας στις σχέσεις A^2+2 = Β και Α·Β = Γ οι μαθητές θα έχουν δει το μοτίβο που θα ακολουθείται για να βρουν πως προκύπτουν οι στήλες καθιστώντας τα παραδείγματα που χρησιμοποίησαν ως γενεσιουργά. Δηλαδή όλοι οι αριθμοί των στηλών τοποθετήθηκαν με τρόπο ώστε να χρησιμοποιηθούν ως γενεσιουργά παραδείγματα. Η επόμενη ερώτηση έχει ως στόχο να επικεντρωθεί η σκέψη των μαθητών στην κοινή ιδιότητα όλων των αριθμών στη στήλη Γ ωθώντας τους να αξιοποιήσουν τη δραστηριότητα 1. Αυτή η βοήθεια είχε σκοπό να οδηγήσει τους μαθητές στην εικασία ότι είναι πολλαπλάσια του 3 και να το ελέγξουν. Και σε αυτή την ερώτηση τα παραδείγματα που παρέχονται από τον ερευνητή μπορούν να αποτελέσουν γενεσιουργά όταν θα επιβεβαιωθεί από τους μαθητές ότι η στήλη Γ είναι πολλαπλάσια του 3. Τα διαδοχικά ερωτήματα αυτά έχουν ως αρχικό στόχο το γενικό πόρισμα ότι πάντα η Γ στήλη θα έχει πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια το αξιοπερίεργο αυτό συμπέρασμα να παρακινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών να μάθουν σε ποιες περιπτώσεις πραγματοποιείται, υπό ποιες συνθήκες και γιατί.

Το επόμενο ερώτημα ζητά από τους μαθητές να βρουν δικά τους παραδείγματα και να ελέγξουν αν οι παρατηρήσεις τους ισχύει και σε αυτούς. Στοχεύει :

i) να κάνουν πιο συγκεκριμένα τα πορίσματα που έχουν εξαχθεί προηγουμένως

ii) να επιβεβαιώσουν την εικασία τους και σε άλλους αριθμούς εκτός από τα δοσμένα παραδείγματα που υπάρχουν στις στήλες

iii) να σκεφτούν τι συμβαίνει σε κάθε διαφορετική επιλογή παραδείγματος, δηλαδή να παρατηρήσουν τον τρόπο που προκύπτει και γιατί επαληθεύεται συνεχώς η εικασία τους

Στην περίπτωση που δεν έχουν οδηγηθεί στα παραπάνω διαδοχικά συμπεράσματα το επόμενο ερώτημα θα καταστήσει αναγκαίο την εξαγωγή πορίσματος λόγω των πολύ μεγαλύτερων αριθμών στη στήλη Α. Η τοποθέτηση αυτών των αριθμών στοχεύει στην εκτενέστερη παρατήρηση των προηγούμενων στηλών και στην προσπάθεια κατανόησης γιατί προκύπτουν πάντα πολλαπλάσια στη στήλη Γ. Οι μαθητές για να απαντήσουν στο ερώτημα αυτό θα πρέπει να δουν με γενικευμένο τρόπο όλους τους αριθμούς των στηλών Α και Β γιατί είτε η μία είτε η άλλη θα είναι η αιτία που δημιουργείται η κοινή ιδιότητα στη στήλη Γ. Έτσι εξάγοντας συμπέρασμα, θα μπορούν να δουν τους μεγαλύτερους αριθμούς ως πολλαπλάσια του 3 και μη πολλαπλάσια του 3 (είτε πολλαπλάσια του 3 +1 και πολλαπλάσια του 3 +2) με αποτέλεσμα να ξέρουν τι αριθμοί θα προκύψουν στις άλλες στήλες και γιατί. Επίσης, το πλήθος (3) των μεγάλων αριθμών που έχουν τοποθετηθεί στην Α στήλη δόθηκαν εκούσια με σκοπό να σκεφτούν οι μαθητές ότι υπάρχουν 3 κατηγορίες ή να υποψιαστούν ότι κάποια διαφορά θα υπάρχει μεταξύ τους (δηλαδή ότι το 411 είναι πολλαπλάσιο του 3, το 520 πολλαπλάσιο του 3 +1 και το 704 πολλαπλάσιο του 3 +2). Στη συνέχεια, οι μαθητές θα πρέπει να τοποθετήσουν δικούς τους μεγάλους αριθμούς, το οποίο στοχεύει στη καλύτερη κατανόηση του μοτίβου ανεξαρτήτως αριθμού είτε μικρού είτε μεγάλου. Ακόμη το ερώτημα αυτό δίνει την πρωτοβουλία στους μαθητές να σκεφτούν πόσους και ποιους αριθμούς θα πρέπει να δώσουν για να εξαντλήσουν όλες τις εναλλακτικές περιπτώσεις που υπάρχουν. Αν οι μεγάλοι αριθμοί που δόθηκαν από την εκφώνηση ή αυτοί που έδωσαν οι ίδιοι οι μαθητές, είναι η αφορμή για να φτάσουν στο μεγαλύτερο επίπεδο γενίκευσης, τότε θα αποτελέσουν γενεσιουργά παραδείγματα.

Το επόμενο ερώτημα είναι ένα βήμα πριν από την γενίκευση (κάθε αριθμός της Γ στήλης είναι πολλαπλάσιο του 3 , ανεξαρτήτως τι αριθμός υπάρχει στην στήλη Α). Συγκεκριμένα, το ερώτημα : ΄΄Μπορείτε να βρείτε έναν φυσικό αριθμό x που δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 και το x^2+2 να μην αποτελεί επίσης πολλαπλάσιο του 3;΄΄ θέλει να εξασφαλίσει ότι δεν υπάρχει κάποια εξαίρεση στο μοτίβο που έχει ανακαλυφθεί από τους μαθητές. Με αυτό τον τρόπο θα είναι έτοιμοι να γενικεύσουν την εικασία τους για όλους τους φυσικούς αριθμούς ανεξαιρέτως.

Το τελευταίο ερώτημα στοχεύει στη μαθηματική αιτιολόγηση ότι οι αριθμοί της Γ στήλης είναι πάντα πολλαπλάσια του 3. Στην περίπτωση που οι μαθητές δεν έχουν εκφράσει τους αριθμούς με μαθηματικό τρόπο η ερώτηση αυτή θα τους παρακινήσει να σκεφτούν πως μπορούν να πείσουν κάποιον ότι ισχύει έμπρακτα η εικασία τους. Βέβαια, το ερώτημα αυτό προυποθέτει όχι μόνο να γράψουν τις μαθηματικές εκφράσεις στις στήλες (για παράδειγμα στήλη Α $\rightarrow$ 3x + 1,στήλη Β $\rightarrow (3x+1)^2 + 2$ και στήλη Γ $\rightarrow (3x+1)[(3x+1)^2+2]$) αλλά να αναπτύξουν τις ταυτότητες να κάνουν πράξεις και εκ των υστέρων να αποδείξουν ότι είναι πάντα πολλαπλάσια του 3 στη Γ στήλη.

3.6 Μέθοδος της έρευνας

Αυτή η ποιοτική έρευνα θα στηριχτεί στη μέθοδο μελέτη περίπτωσης. Σύμφωνα με την Merriam-Webster’s dictionary (2009; Flyvbjerg, 2011) η μελέτη περίπτωσης είναι μια εκτενής ανάλυση μιας μονάδας (ενός ατόμου ή μιας ομάδας), δίνοντας έμφαση στους αναπτυξιακούς τους παράγοντες σε σχέση με το περιβάλλον. Η μονάδα στις συγκεκριμένες δραστηριότητες θα είναι η κάθε ομάδα, για την οποία θα γίνει ανάλυση αλλά θα δοθεί έμφαση και στα μέλη της όπως και στην επικοινωνία και αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Επίσης, σύμφωνα με τον Flyvbjerg (2011) η μέθοδος αυτή είναι εντατική με την έννοια ότι υπάρχουν λεπτομέρειες, ποικιλία, πληρότητα και επιπλέον εξελίσσεται στο χρόνο, το οποίο προσφέρει βαθύτερη ανάλυση για τη μονάδα. Αντίστοιχα σε αυτό το φύλλο εργασίας κάθε εικασία και σκέψη των μαθητών θα παίξουν σημαντικό ρόλο γιατί οι λεπτομέρειες αυτές μπορεί να οδηγήσουν είτε στην επιβεβαίωση της εικασίας μέσω γενεσιουργών παραδειγμάτων είτε στην απόρριψη της. Ακόμη κάθε ερώτημα αποτελεί σκαλωσιά για το επόμενο με αποτέλεσμα να εξελίσσεται η σκέψη των μαθητών μέσα στο χρόνο. Επίσης, τα μέλη της ομάδας είναι διαφορετικά μεταξύ τους και έτσι συνιστούν ένα ετερογενές σύνολο σε σχέση με τις άλλες ομάδες, με απόρροια να υπάρχει ποικιλία απόψεων, τρόπων επίλυσης, ευρημάτων και αποτελεσμάτων. Σε όλα τα παραπάνω πρέπει να εστιαστεί η ανάλυση με αποτέλεσμα να αποκαλυφθούν όλοι οι λόγοι που οδήγησαν τους μαθητές να κάνουν τις διάφορες επιλογές τους. Ένας άλλος ορισμός της μέλετης περίπτωσης είναι ο εξής σύμφωνα με τους Abercrombie, Hill και Turner (1984) στο Flyvbjerg (2011) : Η αναλυτική εξέταση ενός παραδείγματος από ένα σύνολο φαινομένων, όπου δεν μπορεί να μας προσφέρει αξιόπιστες πληροφορίες σχετικά με το ευρύτερο σύνολο, αλλά μπορεί να είναι βοηθητικό στα αρχικά στάδια μιας έρευνας καθώς παρέχει υποθέσεις, οι οποίες μπορούν να δοκιμαστούν συστηματικά σε ένα μεγαλύτερο πλήθος περιπτώσεων. Στην περίπτωση της συγκεκριμένης δραστηριότητας η καθεμία από τις 3 ομάδες είναι ξεχωριστή, όμως κάποιες κοινές σκέψεις και απόψεις πιθανόν να αποτελούν ένα σύνηθες συμπέρασμα για περισσότερες ομάδες. Ακόμη μπορεί να αποτελούν δεδομένα στα οποία μπορεί να εξεταστούν ξανά οι ίδιες ομάδες ή ένα ευρύτερο σύνολο. Στη συνέχεια, οι George και Bennett (2005;Flyvbjerg, 2011) θεωρούν ότι η χρήση της μελέτης περίπτωσης ως μέθοδο είναι ιδανική για την ανάπτυξη μίας θεωρίας διότι χειρίζεται τα παρακάτω ζητήματα καλύτερα από άλλες μεθόδους :

i) Η διαδικασία εντοπισμού των σχέσεων μεταξύ αίτιου – αποτελέσματος

ii) Η αναλυτική εξερεύνηση υποθετικών causal mechanisms (οι διαδικασίες κατά τις οποίες γίνονται η αιτία να πραγματοποιηθούν αποτελέσματα)

iii) Η ανάπτυξη και ο έλεγχος ιστορικών εξηγήσεων

iv) Κατανόηση της ευαισθησίας για την αντίληψη του πλαισίου

v) Η δημιουργία νέων υποθέσεων και νέων ερωτημάτων, ύστερα από μελέτη ειδικών περιπτώσεων

Με τη μέθοδο αυτή θα ανακαλυφθούν οι σκέψεις που έκαναν οι μαθητές και τους λόγους που τους οδήγησε στα συγκεκριμένα αποτελέσματα. Δηλαδή ποιο είναι αυτό που τους παρακίνησε να κάνουν κάποια εικασία ή ποιο παράδειγμα και γιατί μετατράπηκε σε γενεσιουργό. Επίσης μετά απο μία λεπτομερής ανάλυση μέσω της μεθόδου μελέτης περίπτωσης, τα συμπεράσματα για αυτές τις 3 περιπτώσεις μπορεί να εξεταστούν υπό άλλες συνθήκες και πλαίσια με αποτέλεσμα να ερευνηθούν οι διαφορές τους. Σύμφωνα με τους Campbell, Ragin, Geertz,Wieviorka, Flyvbjerg και άλλους ερευνητές που έχουν διεξάγει αναλυτικές μελέτες περίπτωσης συνήθως αναφέρουν ότι οι αρχικές απόψεις, οι υποθέσεις και οι έννοιες τους ήταν λανθασμένες και τα περιστατικά που προέκυψαν τους ανάγκασαν να αναθεωρήσουν τις εικασίες τους σε ουσιώδη σημεία. Όπως είναι φανερό η ανάλυση με τη μέθοδο μελέτη περίπτωσης αποτελεί μία πρόκληση για τον ίδιο τον ερευνητή αφού μπορεί να έχει κάνει πολύ διαφορετικές εικασίες για τα αποτελέσματα σε σχέση με αυτά που προέκυψαν. Η βαθύτερη ανάλυση στις λεπτομέρειες, σκέψεις, κινήσεις και επιλογές των μαθητών επιφέρουν αλληλουχία ανακαλύψεων που ίσως ο ερευνητής να μην έχει σκεφτεί ποτέ. Η μελέτη περίπτωσης είναι μία μεθοδολογία έρευνας που προσφέρει ποικίλα αποτελέσματα όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Οπότε, σύμφωνα με τον Flyvbjerg (2011) : ΄΄Στόχος είναι η μελέτη περίπτωσης να αποτελεί τόσο ανοιχτή έτσι ώστε να επιτρέπει σε διαφορετικούς ανθρώπους να αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο τα αποτελέσματα΄΄. Επεξηγηματικά, κάθε ομάδα θα έχει τα δικά της συμπεράσματα φτάνοντας ίσως στο τελικό στάδιο της γενίκευσης ή και σε μικρότερο. Τα αποτελέσματα αυτά μπορεί να είναι ίδια ή παρόμοια ή τελείως διαφορετικά, όμως η κάθε ομάδα θα έχει ακολουθήσει τη δική της πορεία με απόρροια η ερμηνεία τους να μην είναι πανομοιότυπη για τον ερευνητή ή και για άλλον αναγνώστη.

3.7 Συμμετέχοντες

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, κάθε ομάδα είναι ξεχωριστή και ίσως φέρει διαφορετικές ερμηνείες, απόψεις και εκδοχές. Αυτό εξαρτάται από τη διαφορετική προσωπικότητα που έχει κάθε μαθητής όπως και πως επιδρά αυτή στο σύνολο της ομάδας. Αυτό σημαίνει ότι είναι αρκετά σημαντική η επιλογή των συμμετεχόντων σε κάθε ομάδα και συνολικά σε μία ερευνητική εργασία. Οι μαθητές της Α' Λυκείου επιλέχθηκαν λόγω της εκδήλωσης του ενδιαφέροντος τους για αυτή την έρευνα. Λόγω της εκούσιας συμμετοχής τους οι μαθητές έδειξαν προσήλωση και η ουσιώδης ενασχόληση τους με τις δραστηριότητες ήταν εμφανής. Και οι 6 συμμετέχοντες βρίσκονται σε αρκετά καλό επίπεδο γνώσης με την ομάδα Α και Β σε καλύτερο σε σύγκριση με την Γ. Οι ομάδες δημιουργήθηκαν με βάση την επιθυμία των μαθητών με αποτέλεσμα να υπάρχει ισορροπία μεταξύ τους. Αυτή η ακούσια επιλογή των ομάδων από την οπτική της ερευνήτριας είχε ως απόρροια τη δημιουργία κατάλληλων συνδυασμών με βάση τη γνώση τους στα μαθηματικά.

3.8 Συνέντευξη

Σύμφωνα με τους Zazkis και Hazzan (1998) η ανάπτυξη ποιοτικών μεθοδολογιών δεν έχει γίνει μόνο αποδεκτή αλλά κυριαρχεί στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών. Έτσι, η συνέντευξη έχει γίνει ένα από τα κύρια εργαλεία στην έρευνα για την εκπαίδευση των μαθηματικών και αποτελεί δημοφιλής τρόπος συλλογής δεδομένων. Η συνέντευξη ονομάζεται κλινική γιατί αφορά την εκτεταμένη παρατήρηση και επειδή διεξάγεται σε ΄΄κλινική΄΄, που συνήθως είναι ένα γραφείο, μία τάξη ή ένα εργαστήριο έξω από το φυσικό εκπαιδευτικό περιβάλλον των ερωτηθέντων. Ένα περιβάλλον που εμπνέει το μαθητή εμπιστοσύνη και σεβασμό είναι απαραίτητο για να τον κάνει να νιώσει ασφαλής και ελεύθερος να μιλήσει για την δραστηριότητα (Hunting, 1997). Στην προκειμένη περίπτωση το περιβάλλον στο οποίο πραγματοποιήθηκε η συνέντευξη είναι διαδικτυακό (μέσω της εφαρμογής Skype) το οποίο παρέχει όλα τα παραπάνω πλεονεκτήματα ενός ασφαλούς και οικείου πλαισίου για τους μαθητές. Η συνέντευξη εκτός από κλινική ήταν και ημιδομημένη, δηλαδή οργανώθηκε εκ των προτέρων όμως η τελική της δομή προήλθε και από τις απαντήσεις των μαθητών στη δραστηριότητα. Επεξηγηματικά, οι ερωτήσεις που έγιναν στους μαθητές είχαν μία αρχική μορφή πριν πραγματοποιηθεί η δραστηριότητα, όμως κάποιες τροποποιήθηκαν, προστέθηκαν και αφαιρέθηκαν με σκοπό να εστιάσουν συγκεκριμένα στις προβληματικές καταστάσεις των μαθητών αλλά και στον τρόπο σκέψης τους κατά την γενίκευση. Ακόμη, κατά τη διάρκεια της συνέντευξης προστέθηκαν και άλλες ενδιάμεσες ερωτήσεις με σκοπό να αποσαφηνιστούν οι προηγούμενες για τους συνεντευξιαζόμενους. Είναι φανερό ότι οι ερωτήσεις αυτής της συνέντευξης προσαρμόστηκαν σε δύο στάδια. Το πρώτο στάδιο επήλθε λόγω των απαντήσεων στις δραστηριότητες και το δεύτερο κατά την εξέλιξη της συνέντευξης.Τα πλεονεκτήματα μιας κλινικής συνέντευξης είναι η δυνατότητα αποκάλυψης γνώσεων στην εκπαίδευση των μαθηματικών, δίνοντας προσοχή στις ατομικές διαφορές μεταξύ των μαθητών και στις μαθηματικές αντιλήψεις τους (Confrey, 1980; Zazkis & Hazzan, 1998). Οι μαθητές είναι πιθανό να μην αποτυπώνουν όλες τις σκέψεις τους ή μπορεί να μην είναι διαφανής για τον ερευνητή ο τρόπος που τον οδήγησε στην γενίκευση ή πως εξελίχθηκε η επίλυση τους από τις γεωμετρικές αναπαράστασεις. Για όλους τους παραπάνω λόγους είναι πολύ χρήσιμη η συνέντευξη γιατί μέσω αυτής ανακαλύπτονται και ταυτοποιούνται κάποιες σκέψεις που δεν είναι φανερές κατά την εξέλιξη των δραστηριοτήτων. Ακόμη είναι σημαντικό να εξηγηθεί στους μαθητές εξαρχής ότι ο σκοπός δεν είναι η ορθότητα της απάντησης αλλά πως έφτασε στη λύση και με ποιο τρόπο σκέφτονται τα μαθηματικά (Hunting, 1997). Ο Ginsburg (1981) αναφέρει ότι ο ερευνητικός στόχος του Piaget ήταν να εξηγήσει τη φύση της σκέψης. Όπως και ότι το έργο ενός ερευνητή στην εκπαίδευση των μαθηματικών είναι να ανακαλύψει τις προσεγγίσεις του μαθητή σε προβληματικές καταστάσεις, να συγκεκριμενοποιήσει και να περιγράψει τις υποκείμενες γνωσιακές διαδικασίες. Επεξηγηματικά, οι δύο δραστηριότητες περιέχουν αρκετές προβληματικές καταστάσεις όπως για παράδειγμα η εύρεση της εικόνας 101 ή η συμπλήρωση των κενών με τους μεγάλους αριθμούς και σίγουρα το μεγαλύτερο στάδιο γενίκευσης που είναι το τελευταίο ερώτημα. Οι μαθητές πιθανόν να μην έχουν βρεθεί ξανά αντιμέτωποι σε τέτοιες καταστάσεις, για αυτό το λόγο η συνέντευξη καθίσταται απαραίτητη. Ακόμη, ο ερευνητής έχει το πλεονέκτημα ότι ηχογραφεί τις συνεντεύξεις και έχει τη δυνατότητα να παρατηρεί, να συζητά, να απαντά, να ελέγχει τις εναλλακτικές ερμηνείες από τις απαντήσεις των μαθητών λαμβάνοντας υπόψιν τις αντιδράσεις κατά την εξέλιξη της συνέντευξης. (Hunting, 1997).

Η χρονική διάρκεια που πέρασε από το πέρας των δραστηριοτήτων μέχρι τις συνεντεύξεις σε κάθε ομάδα που αποτελεί τη μονάδα ανάλυσης ήταν μία εβδομάδα. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως λόγω των ποικίλων αποτελεσμάτων οι ερωτήσεις ήταν προσαρμοσμένες πάνω σε κάθε σκέψη, εικασία και απάντηση των ομάδων. Οι ερωτήσεις για κάθε ομάδα είναι οι εξής :

Α’ Ομάδα

1) Πως καταλάβατε ότι η Εικόνα 101 $\rightarrow$ $103 \cdot 103$;

2) Πως καταλήξατε ότι ενδιάμεσα στα τέλεια τετράγωνα (9,36,81) υπάρχουν αριθμοί που μόνο αν προσθέσεις 2 γίνονται πολλαπλάσια του 3; (με την μόνη διαφορά ότι δεν είναι τετράγωνα αλλά ορθογώνια)

3) Πως καταλάβατε ότι και στους αριθμούς 411,520,704 ισχύουν ότι είχατε παρατηρήσει πιο πριν; Πως σας βοήθησαν στα συμπεράσματα σας;

4) Τα παραδείγματα 1240,1241 στη στήλη Α γιατί τα επιλέξατε;

5) Πως σκεφτήκατε να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς με αυτό τον τρόπο; Πως σας βοήθησε στη γενίκευση;

$4 = 3+1 \qquad 6 = 3 \cdot 2$

$5 = 3+2 \qquad 7 = 3 \cdot 2 + 1$

$8 = 3 \cdot 2 + 2$

6) Γιατί κάθε τρεις αριθμούς βρίσκουμε πολλαπλάσια του 3 ;

7) Γιατί κατά τη διάρκεια της γενίκευσης επαληθεύετε ξανά την υπόθεση σας βάζοντας όπου x το 2 ;

Β' Ομάδα

1) Πως καταλάβατε ότι η Εικόνα 101 $\rightarrow$ 103·103;

2) Όταν κάνατε τον πειραματισμό με τον γεωπίνακα γράψατε την εξίσωση $x^2 + 2 = 3x$ και βρήκατε τις λύσεις x=1 και x=2. Πως σκεφτήκατε σε αυτή την περίπτωση;

3) Στον πειραματισμό σας στον γεωπίνακα δώσατε τους αριθμούς 6 εως 14. Πως τα επιλέξατε αυτά τα παραδείγματα;

4) Πως καταλάβατε ότι και στους αριθμούς 411,520,704 ισχύουν ότι είχατε παρατηρήσει πιο πριν; Πως σας βοήθησαν στα συμπεράσματα σας;

5) Τα παραδείγματα 1507 και 333 στη στήλη Α γιατί τα επιλέξατε;

6) Γιατί κάθε τρεις αριθμούς βρίσκουμε πολλαπλάσια του 3 ;

7) Πως συμπεράνατε ότι οι κατηγορίες 3x , 3x+1 , 3x+2 αντιπροσωπεύουν όλους τους φυσικους αριθμούς της στήλης Α;

Γ' Ομάδα

1) Πως σκεφτήκατε ότι Εικόνα 1 $\rightarrow$ 2, Εικόνα 2 $\rightarrow$ 4 και καταλήξατε αρχικά ότι Εικόνα 50 $\rightarrow$ ~~48~~ 52 ; Σας βοήθησαν οι Εικόνες;

2) Όταν κάνατε τον πειραματισμό με τον γεωπίνακα μου δώσατε τα παραδείγματα 2^2(πρέπει να προσθέσουμε 2) , 6^2 (είναι ήδη πολ3), 9^2 (είναι ήδη πολ3). Γιατί μου δώσατε αυτά τα συγκεκριμένα παραδείγματα;

3) Πως σκεφτήκατε ότι η στήλη Β προκύπτει αν προσθέσουμε το 8 + κάτι ;

4) Πως καταλάβατε ότι και στους αριθμούς 411,520,704 ισχύουν ότι είχατε παρατηρήσει πιο πριν; Πως σας βοήθησαν στα συμπεράσματα σας;

3.9 Μέθοδος ανάλυσης

Η μέθοδος ανάλυσης των αποτελεσμάτων είναι η Grounded theory. Σύμφωνα με τους Vollstedt και Rezat (2009;2019), χαρακτηρίζεται από την επαναληπτική διαδικασία και τη σύνδεση του σχεδιασμού, της συλλογής δεδομένων, της ανάλυσης δεδομένων και της ανάπτυξη της θεωρίας. Ακόμη προσφέρει ένα ξεχωριστό σύνολο συστηματικών μεθόδων που υποστηρίζουν την ΄΄αφαίρεση΄΄(abstraction) από τα δεδομένα, ώστε να αναπτυχθεί μια θεωρία που βασίζεται στα εμπειρικά δεδομένα. Τα νέα δεδομένα συλλέγονται συνεχώς και περιέχονται στην ανάλυση που πιθανόν να συνεισφέρει για περαιτέρω ανάπτυξη της εξελισσόμενης θεωρίας. Η κυκλική διαδικασία συλλογής, επεξεργασίας δεδομένων και ανάπτυξης θεωρίας συνεχίζεται έως ότου επιτευχθεί ο θεωρητικός κορεσμός (theoretical saturation). Η θεωρία που είναι το προϊόν αυτής της διαδικασίας αναφέρεται επίσης ως Grounded Theory. Στην αρχή της διαδικασίας ανάλυσης δεδομένων, επιλέγονται περιπτώσεις, επειδή είναι πιθανό να οδηγήσουν στην ανακάλυψη νέων σχετικών εννοιών. Στη συνέχεια όμως, οι περιπτώσεις επιλέγονται επειδή μπορεί να συμβάλλουν στη διαφοροποίηση, την επεξεργασία, τη συνένωση και την επικύρωση κατηγοριών όσον αφορά τις ιδιότητες, τις διαστάσεις τους ή τις αλληλεπιδράσεις τους. Ο πρωταρχικός στόχος της ανάλυσης δεδομένων στη μεθοδολογία ανάλυσης Grounded theory είναι η ανάπτυξη θεωρίας. Για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος τα δεδομένα αξιολογούνται μέσω διαφορετικών μεθόδων κωδικοποίησης που αποτελεί τον πυρήνα της διαδικασίας. Υπάρχουν 3 κατηγορίες κωδικοποίησης :

i) Ανοιχτή κωδικοποίηση

ii) Αξονική κωδικοποίηση

iii) Επιλεκτική κωδικοποίηση

Στα δεδομένα από τις δύο δραστηριότητες θα πραγματοποιηθεί ανοιχτή κωδικοποίηση. Η διαδικασία της ανοιχτής κωδικοποίησης έχει ως στόχο τη σύλληψη και κατηγοριοποίηση των φαινομένων, μέσα από μια λεπτομερής ανάλυση των δεδομένων. Στην προκειμένη περίπτωση, τα δεδομένα χωρίζονται σε μικρότερα μέρη που αναλύονται σε βάθος, τα οποία στη συνέχεια συγκρίνονται βρίσκοντας ομοιότητες και διαφορές με αποτέλεσμα να ενταχθούν σε προηγούμενες κατηγορίες. Πιο συγκεκριμένα, τα δεδομένα αυτής της ερευνητικής εργασίας που κατηγοριοποιήθηκαν με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα ήταν τα παραδείγματα και οι αναπαραστάσεις. Έτσι αναλύθηκαν σε βάθος όλα τα παραδείγματα των μαθητών για κάθε ομάδα ξεχωριστά, με στόχο να εξαχθεί συμπέρασμα για το είδος τους, δηλαδή αν είναι ειδικά ή γενεσιουργά και με ποιο τρόπο βοηθούν στη μετάβαση για γενίκευση. Με τον ίδιο τρόπο εντοπίστηκαν τα δεδομένα της δραστηριότητας που αφορούν τις αναπαραστάσεις και αναλύθηκαν με λεπτομερή τρόπο έτσι ώστε να γίνει εμφανής ο ρόλος τους στην εξέλιξη της σκέψης των μαθητών. Ακόμη, στην ανάλυση αυτή είχαν ενισχυτικό ρόλο και τα δεδομένα από τη συνέντευξη, τα οποία πιθανόν να επιβεβαίωναν τις σκέψεις των μαθητών που είχαν κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας αλλά και να τις απέρριπταν με αποτέλεσμα να γίνεται πιο εμφανές πως αναπτύχθηκε η σκέψη τους. Έπειτα από την ανάλυση των δεδομένων της κάθε ομάδας ξεχωριστά πραγματοποιήθηκε η σύγκριση μεταξύ τους βρίσκοντας ομοιότητες και διαφορές έχοντας ως βασικούς θεματικούς άξονες τα παραδείγματα και τις αναπαραστάσεις.

4. Αποτελέσματα

Τα παρακάτω αποτελέσματα έχουν δομηθεί με βάση τη σειρά ερωτήσεων της δραστηριότητας και παρατίθονται ξεχωριστά για κάθε ομάδα. Πιο αναλυτικά, τα αποτελέσματα αυτά έχουν θεματικό άξονα είτε τα παραδείγματα είτε τις αναπαραστάσεις ανάλογα με το ζητούμενο και περιεχόμενο του ερωτήματος. Σε αυτά προστίθενται και τα αποτελέσματα της συνέντευξης που αντιστοιχούν σε κάθε ερώτημα. Τελικά, γίνεται σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων των ομάδων με βάση τους παραπάνω θεματικούς άξονες.

4.1 Α΄ ομάδα

Η Α' ομάδα βλέποντας τις εικόνες συμπληρώνει το άθροισμα των περιττών αριθμών και τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν σε αυτές. Ο Μ2 παρατηρεί τα δύο πρώτα αποτελέσματα και αναφέρει:

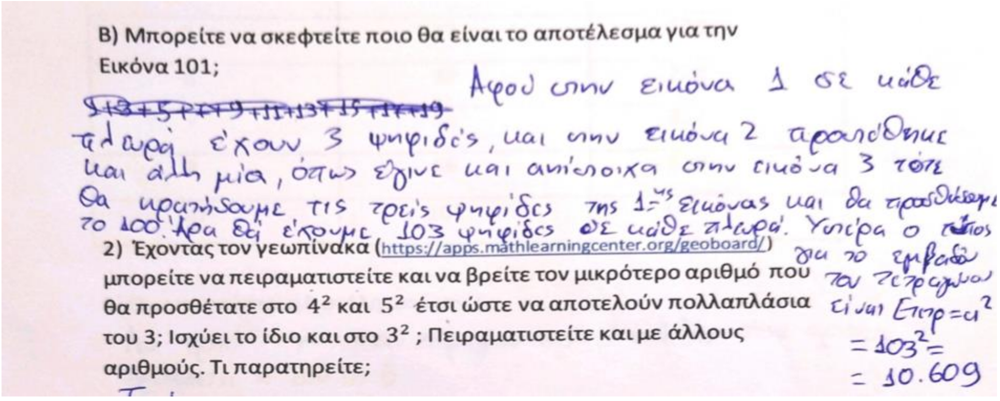
Μ2 : Δημιουργείται κάτι άλλο όλα όσα είναι στο τετράγωνο.
Μ4 : Οπότε παρακάτω μπορεί να βγάλει 25.

Ο Μ2 κάνει μία εικασία λέγοντας ότι τα αποτελέσματα είναι τέλεια τετράγωνα και η Μ4 συμληρώνει τα λεγόμενα του αναφέροντας ότι η εικόνα 3 θα είναι 25 (εμπειρική χρήση/ non-generic treatment), το οποίο τελικά επιβεβαιώνεται από το άθροισμα των περιττών αριθμών. Η εμπειρική χρήση των παραδειγμάτων για τις εικόνες 1 και 2 έγινε γενικευμένη με τέτοιο τρόπο που μπορούν να συνεισφέρουν στη γενίκευση (contribution of examples to proving). Συγκεκριμένα, οι μαθητές δεν μπορούν ακόμη να φτάσουν σε ένα γενικευμένο επιχείρημα για οποιαδήποτε εικόνα, όμως μπορούν να κατανοήσουν το μοτίβο και να το εξηγήσουν με παραδείγματα (ΠΕ).

Στην ερώτηση Β της δραστηριότητας 1 (ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της εικόνας 101;) το παράδειγμα 101 ήταν δοσμένο από την εκφώνηση άρα αποτελεί παράδειγμα που δόθηκε από τον ερευνητή. Σύμφωνα με το παρακάτω στιγμιότυπο συζήτησης :

Μ4 : Πρέπει να γράψουμε τους αριθμούς μέχρι το 101;
Κ : Τι πιστεύεις;
Μ4 : Λογικά θα είναι κάτι εύκολο.
Μ2 : Έχουμε δηλαδή μία περιοδική συνάρτηση που κάθε φορά προσθέτουμε το δύο.
Κ : αλλά πότε θα φτάσουμε στην εικόνα 101;

έχουν καταλάβει ότι θα το βρουν με διαφορετικό τρόπο και όχι με το άθροισμα των περιττών αφού έτσι χρειάζεται χρόνο και πολλές πράξεις. Ήδη σε αυτή τη περίπτωση ο αριθμός 101 αποτελεί πιθανόν την αιτία που οι μαθητές θα κάνουν μία εικασία ή θα δώσουν ένα επιχείρημα. Παρολαυτά, αρχίζουν και προσθέτουν τους πρώτους περιττούς αριθμούς όπως στις προηγούμενες εικόνες αλλά παρατηρούν ότι οι αριθμοί είναι πάρα πολλοί. Τελικά, ο Μ2 βλέποντας τις αναπαραστάσεις βρίσκει τη λύση, με το 101 να αποτελεί γενεσιουργό παράδειγμα πληρώντας και τα δύο κριτήρια και απαντά όπως φαίνεται παρακάτω:


B) Μπορείτε να σκεφτείτε ποιο θα είναι το αποτέλεσμα για την Εικόνα 101;

~~1+3+5+7+9+11+13+15+17+19~~

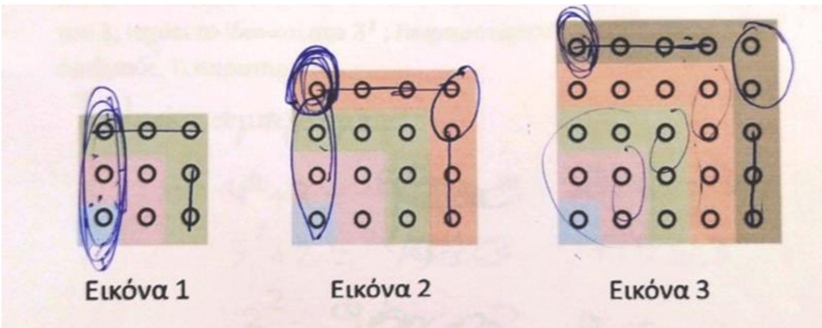
Αφού στην εικόνα 1 σε κάθε πλευρά έχουν 3 ψηφίδες, και στην εικόνα 2 προσθέσαμε και άλλη μία, όπως έγινε και αντίστοιχα στην εικόνα 3 τότε θα κρατήσουμε τις τρεις ψηφίδες της 1ης εικόνας και θα προσθέσουμε το 100. Άρα θα έχουμε 103 ψηφίδες σε κάθε πλευρά. Ύστερα ο τύπος για το εμβαδό του τετραγώνου είναι $E_{τετρ} = a^2 = 103^2 = 10.609$

2) Έχοντας τον γεωπίνακα (https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/) μπορείτε να πειραματιστείτε και να βρείτε τον μικρότερο αριθμό που θα προσθέτατε στο 4^2 και 5^2 έτσι ώστε να αποτελούν πολλαπλάσια του 3; Ισχύει το ίδιο και στο 3^2 ; Πειραματιστείτε και με άλλους αριθμούς. Τι παρατηρείτε;

Δηλαδή, ο Μ2 βρίσκει ένα μοτίβο με βάση τις αναπαραστάσεις, το οποίο το χρησιμοποιεί και καταλήγει στο σωστό αποτέλεσμα. Μέσα από αυτό το παράδειγμα, ο μαθητής έχει δει τη γενική περίπτωση και αυτό επιβεβαιώνεται όταν στη συνέντευξη, του ζητείται να εξηγήσει ξανά τη σκέψη του για την εικόνα 204, στην οποία απάντα με τον ίδιο ορθό τρόπο που τον εξηγεί λεπτομερώς. Τα παραδείγματα για την εικόνα 101 και 204 αποτελούν γενεσιουργά αφού ο Μ2 μέσω αυτών κατάφερε να δει την αναπαράσταση και την αύξηση των ψηφίδων με γενικευμένο τρόπο. Ουσιαστικά, έδειξε χωρίς φορμαλισμό και συμβολισμό τον τρόπο που λειτουργεί το μοτίβο (γενεσιουργή απόδειξη). Έτσι, η συνεισφορά του παραδείγματος 101 σε αυτή του είδους απόδειξη είναι παραγωγική με απόρροια η γενίκευση να βασίζεται ολικώς στην προερχόμενη ιδέα από την εικόνα 101 (ΠΚ). Η Μ4 κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας φαίνεται να μην έχει κατανοήσει τη σκέψη του συμμαθητή της όπως φαίνεται παρακάτω.

Μ2 : Εσύ τι λες σωστό είναι ;
Μ4 : Ναι σίγουρα σωστό είναι απλά δεν θα το σκεφτόμουν γιατί δεν έδωσα σημασία στην εικόνα , δεν θα το σκεφτόμουν ποτέ αυτό με το σχήμα.

Ακόμη στη συνέντευξη, είναι εμφανές ξανά να μην έχει καταλάβει τον τρόπο σκέψης του Μ2 και ζητά επεξήγηση. Μέσα από τα λεγόμενα της Μ4, επισημαίνεται ότι η παρατήρηση των εικόνων έπαιξε πολύ σημαντικό ρόλο στην εύκολη εύρεση του ζητούμενου από τον Μ1. Επεξηγηματικά, βλέποντας τις εικόνες αμέσως έγινε κατανοητό ότι η 101 θα είναι επίσης τετράγωνο και αυτό που χρειάζονταν να βρουν είναι η πλευρά. Ο Μ2 επικεντρώθηκε σε αυτό, είδε κάθε φορά πόσες ψηφίδες αυξάνονται και τις κύκλωσε σε κάθε πλευρά όπως φαίνεται στο φύλλο εργασίας του με αποτέλεσμα να οδηγηθεί στο σωστό συμπέρασμα.



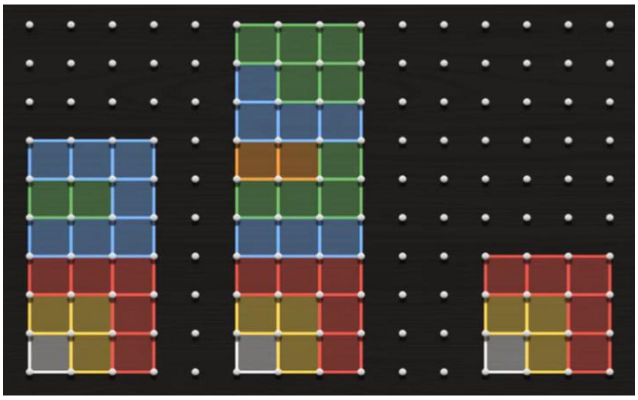
Στην ερώτηση 2, δίνεται ο ψηφιακός γεωπίνακας που αποτελεί εργαλείο για την βαθύτερη κατανόηση των εικόνων που έχουν ειπωθεί στο προηγούμενο ερώτημα. Ανοίγοντας το γεωπίνακα υπάρχουν οι εικόνες 1, 2 και 3 όπου κάθε μία ψηφίδα είναι κατασκευασμένη ως ένα τετραγωνάκι τα οποία μπορούν να τα χειριστούν με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μετασχηματίσουν τις εικόνες που έχουν σε διαφορετικά σχήματα. Οι μαθητές στο ερώτημα : ´´ Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που πρέπει να προστεθεί στις εικόνες 2 και 3 για να προκύψει πολλαπλάσιο του 3;´´ έδωσαν την απάντηση 2 και όπως φαίνεται από τα παρακάτω λεχθέντα, αμέσως βρίσκουν τις διαστάσεις των ορθογωνίων χωρίς να έχουν χρησιμοποιήσει τον γεωπίνακα.

Μ4 : Αφού το 4 στο τετράγωνο είναι 16 και θα γίνει 18 και αυτό Διαιρείται με το 3 και μας κάνει 6.
Μ2 : Δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του 3.
Μ4 : Οπότε και αυτό που μας βγαίνει πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 3 …. έτσι κι αλλιώς θα είναι πολλαπλάσιο του 3.
Κ : Και στο 5 στο τετράγωνο 25 προσθέτουμε το 2 και βγαίνει 27 και αν το διαιρέσουμε με το 9 θα βγει 3.

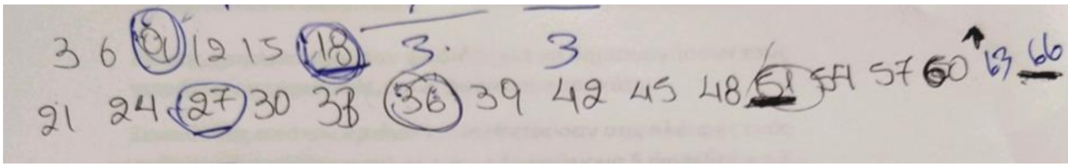
Ύστερα από προτροπή της εκπαιδευτικού οι μαθητές επιχειρούν να πειραματιστούν στα παραδείγματα που παρέχονται από τον ερευνητή. Οι μαθητές επηρεασμένοι όμως από τις οπτικές αναπαραστάσεις πιστεύουν ότι πρέπει να βρουν τον ελάχιστο αριθμό για να γίνει τέλειο τετράγωνο αλλά ταυτόχρονα και πολλαπλάσιο του 3. Τελικά, προσθέτοντας 2 ψηφίδες κατασκεύασαν δύο ορθογώνια με διαστάσεις 3x6 και 3x9 για τις εικόνες 2 και 3 αντίστοιχα. Οι διαστάσεις των ορθογωνίων φαίνεται να ήταν απόρροια της σκέψης (16+2) : 9 = 3 και όχι με βάση τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω στιγμιότυπο :

Κ : Άρα με το 3x6 που η μία του πλευρά είναι το 6 και άλλη το 3 θα καταλάβω ότι είναι πολλαπλάσιο του 3 μόλις δω το σχήμα ;
Μ2 : Όχι.

Επεξηγηματικά, οι εικόνες παίζουν δευτερεύοντα ρόλο σε αυτό το στιγμιότυπο μέχρι να κατανοήσουν καλύτερα ότι είναι πολλαπλάσιο του 3 επειδή η μία διάσταση είναι 3. Μετά από τη δημιουργία των ορθογωνίων στην εικόνα 3 ήταν ομόφωνη η απάντηση ότι είναι ήδη πολλαπλάσιο του 3 και δεν χρειάζεται να προστεθεί κάποιος αριθμός. Το τελικό αποτέλεσμα στο γεωπίνακα είναι το εξής :



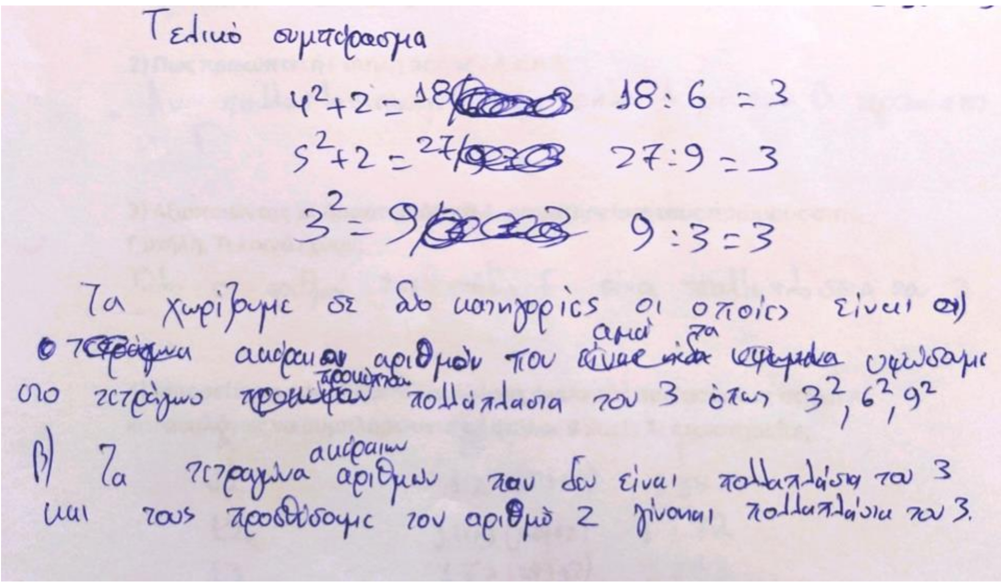
Οι μαθητές κατανόησαν τον τρόπο που μπορούν να μετασχηματίσουν τις εικόνες σε ορθογώνια και έχουν τη δυνατότητα να το χρησιμοποιήσουν σε όλους τους αριθμούς. Το γενικευμένο επιχείρημα που δημιούργησαν είναι στηριγμένο σε αυτές τις 3 εικόνες (ΠΚ).Τα παραδείγματα αυτά όμως δεν έχουν χρησιμοποιηθεί ούτε ως εμπειρικά ούτε ως γενεσιουργά για το μοτίβο που ακολουθείται σε όλους τους φυσικούς αριθμούς, οπότε δεν βοηθούν στη δημιουργία ενός γενικευμένου επιχειρήματος που μπορεί να καταλήξει σε μία γενεσιουργή απόδειξη (non-generic proof). Στη συνέχεια, οι μαθητές αρχίζουν να πειραματίζονται βάζοντας δικούς τους αριθμούς όπως τους υποδεικνύει η δραστηριότητα. Ξεκινάνε γράφοντας όλα τα πολλαπλάσια του 3, υπογραμμίζουν αυτά που προκύπτουν από τα μη πολλαπλάσια του 3 και κυκλώνουν τα τέλεια τετράγωνα όπως είναι φανερό στο παρακάτω στιγμιότυπο.



Δηλαδή κατάλαβαν ότι το 9, το 36 και το 81 είναι ήδη πολλαπλάσια του 3 ενώ ανάμεσα σε αυτά τα τέλεια τετράγωνα υπάρχουν αριθμοί που για να γίνουν πρέπει να προστεθεί ο αριθμός 2. Η χρήση των παραδειγμάτων που έδωσαν οι μαθητές είναι εμπειρική αφού θέλουν να επιβεβαιώσουν και να κάνουν πιο οικείο σε αυτούς ότι το μοτίβο που ακολουθείται είναι όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Οι μαθητές έχουν δει τη δομή μέσα από τα παραδείγματα τους (δηλαδή πολλαπλάσιο του 3, και μη πολλαπλάσιο του 3) με αποτέλεσμα η χρήση τους να είναι γενικευμένη. Η εικασία τους επιβεβαιώνεται και μπορούν με μαθηματικό τρόπο να αιτιολογήσουν αυτό το πρώτο επίπεδο γενίκευσης στο οποίο έχουν φτάσει με αποτέλεσμα τα παραδείγματα αυτά να πληρούν τα κριτήρια των γενεσιουργών παραδειγμάτων. Παρατηρώντας τα νέα σχήματα στο γεωπίνακα και από τα προηγούμενα συμπεράσματα τους με το μοτίβο που επαναλαμβάνεται, οι μαθητές επηρεασμένοι θετικά συμπεραίνουν ότι όπως τα $4^2+ 2$ και 5^2+2 αποτελούν ορθογώνια ενώ το 3^2 τετράγωνο το ίδιο ισχύει για τα μη πολλαπλάσια +2 και τα πολλαπλάσια του 3 αντίστοιχα. Φαίνεται ότι η χρήση των παραδείγματων που δόθηκαν αρχικά από την εκπαιδευτικό δεν φαινόταν εξελίξιμη. Αυτό έπειτα, απορρίφθηκε όταν οι μαθητές έβαζαν κατά σειρά τις τιμές 6,7,8,9 και παρατήρησαν ένα μοτίβο, έκαναν μία εικασία και προσπαθούσαν να την ελέγξουν με τα παραδείγματα που δόθηκαν στη δραστηριότητα αλλά και με τα δικά τους. Αυτό επιβεβαιώνεται μέσα από τον παρακάτω διάλογο της συνέντευξης με την ερώτηση : ΄΄Πως καταλήξατε ότι ενδιάμεσα στα τέλεια τετράγωνα (9,36,81) υπάρχουν αριθμοί που μόνο αν προσθέσεις 2 γίνονται πολλαπλάσια του 3;΄΄ (με τη μόνη διαφορά ότι δεν είναι τετράγωνα αλλά ορθογώνια)

Μ4 : Παίρναμε όλα τα τετράγωνα των αριθμών τουλάχιστον μέχρι το 10.
Κ : Ωραία εσύ Μ2 κάποια άλλη σκέψη σε αυτό;
Μ2 : Ναι Αρχικά μας είπατε να κάνουμε αυτή τη δραστηριότητα και μετά μας είπατε σκεφτείτε και άλλους αριθμούς και κάπως έτσι δηλαδή πιστεύω ότι ξεκίνησε αυτή η σκέψη.
Κ : Επειδή σας είπα δηλαδή βάλτε και άλλα δικά σας παραδείγματα;
Μ2 : Ναι.

Οι εκφράσεις των αριθμών με βάση το 3 (3x,3x+1,3x+2) φαίνεται να μην μπορούν να παρατηρηθούν ακόμη από τους μαθητές μέσω του γεωπίνακα και τη συχνότητα επανάληψης του μοτίβου οπότε οι μαθητές καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα :



Προχωρώντας οι μαθητές στη δραστηριότητα 2 καταλαβαίνουν ότι η λογική που ακολούθησαν στο γεωπίνακα ισχύει και σε αυτή την περίπτωση λέγοντας ότι στο τετράγωνο της στήλης Α αν προστεθεί το 2 θα προκύψει η στήλη Β. Το συμπέρασμα αυτό φαίνεται να προέκυψε σύντομα, με τους μαθητές να νιώθουν σίγουροι για την απάντηση τους χωρίς να θέλουν να το επιβεβαιώσουν με όλους τους αριθμούς της στήλης Α. Έτσι, η χρήση των παραδειγμάτων που δόθηκαν από τον ερευνητή είναι γενικευμένη (generic treatment of examples) με τους αριθμούς στη στήλη Α να αποτελούν γενεσιουργά παραδείγματα όπως φαίνεται παρακάτω :

Μ2 : Κυρία η δραστηριότητα 2 είναι η ίδια λογική με αυτή που σκεφτόμασταν πριν. (Μετά από λίγα δευτερόλεπτα)
Μ2 : Άμα το υψώσουμε στο τετράγωνο και προσθέσουμε το δύο είναι όπως τα λέγαμε πριν.
Μ4 : Αν προσθέσουμε στο τετράγωνο του αριθμού, στο τετράγωνο της στήλης Α το 2 προκύπτει ο αριθμός της στήλης Β.

Το αρχικό επιχείρημα τους περιέχει ένα γενικό ισχυρισμό που έχει επιβεβαιωθεί με παραδείγματα από την προηγούμενη δραστηριότητα, οπότε βασιζόμενοι σε αυτό αιτιολογούν μαθηματικά πως προκύπτει η Β στήλη από την Α. Δηλαδή οι μαθητές χρησιμοποιήσαν με παραγωγικό τρόπο τα παραδείγματα αυτά έτσι ώστε να φτάσουν στη γενική σχέση $Α^2 + 2 = Β$ (ΠΚ). Στην ερώτηση πως προκύπτει η Γ στήλη από την Α και Β, δεν αισθάνονται τόσο ασφαλείς για την απάντηση τους συζητώντας παραπάνω τους πιθανούς τρόπους. Οπότε ελέγχουν σε περισσότερους αριθμούς και έπειτα οδηγούνται στη γενικευμένη σχέση $Α \cdot Β = Γ$ (ΠΚ) καθιστώντας τα παραδείγματα αυτά γενεσιουργά. Συγκριτικά, οι μαθητές χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο και παραδείγματα για να κάνουν σε αυτούς πιο οικεία τη σκέψη τους και να επαληθεύσουν την εικασία. Έπειτα η Μ4 κάνοντας τα κριτήρια διαιρετότητας του 3 στους αριθμούς (παραδείγματα που δόθηκαν από τον ερευνητή) της στήλης Γ διαπιστώνει από τα πρώτα δύο παραδείγματα ότι είναι πολλαπλάσια του 3. Επεξηγηματικά, οι αριθμοί 33 και 72 χρησιμοποιήθηκαν με γενικευμένο τρόπο (generic treatment of examples) και αιτιολογήθηκαν μαθηματικά γιατί είναι πολλαπλάσια του 3, με αποτέλεσμα να πληρούν τα κριτήρια των γενεσιουργών παραδειγμάτων. Η συνεισφορά τους στη γενίκευση είναι προφανής αφού το γενικευμένο επιχείρημα προήλθε από τη δραστηριότητα 1 με το γεωπίνακα, τις οπτικές αναπαραστάσεις και τις σκέψεις τους για τα πολλαπλάσια του 3 (ΠΚ). Οι μαθητές όμως δεν παρέμειναν σε αυτό το πόρισμα και προσπάθησαν να βρουν την αιτία που συμβαίνει αυτό κάθε φορά, δηλαδή έλεγξαν πως προκύπτει ο αριθμός αυτός πάντα πολλαπλάσιο του 3. Όπως φαίνεται στο παρακάτω στιγμιότυπο :

Μ4 : Αυτά εδώ είναι πολλαπλάσια του 3. (Στήλη Β)
Κ : Όλα είναι;
Μ4 : Όχι αυτό δεν είναι. Το 11 και το 38 δεν είναι πολλαπλάσια του 3. (Ελέγχουν αν όλοι οι αριθμοί της στήλης Β είναι πολλαπλάσια του 3)
Μ2 : Βασικά δεν χρειάζεται να είναι. Έχει το 6, όπως και στο 11 έχει το 3 το 3 είναι πολλαπλάσια του 3 όπως και το 6 είναι πολλαπλάσιο του 3.

Η Μ4 κάνει μία εικασία λέγοντας ότι όλοι οι αριθμοί της στήλης Β είναι πολλαπλάσια του 3 και έτσι προκύπτει η κοινή ιδιότητα των αριθμών στη στήλη Γ. Η εικασία αυτή απορρίπτεται από τα αντιπαραδείγματα 11 και 38 που δεν είναι πολλαπλάσια του 3. Δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση η χρήση των παραδειγμάτων είναι εμπειρική (non-generic treatment) με σκοπό να επιβεβαιώσει ή να απορρίψει την εικασία. Η προσοχή τους επικεντρώθηκε στα αντιπαραδείγματα με το Μ2 να βρίσκει το λόγο που σε αυτές τις περιπτώσεις βγαίνει ξανά πολλαπλάσιο του 3 στη στήλη Γ. Αυτομάτως συμπεραίνουν ότι όσοι αριθμοί της στήλης Β δεν είναι πολλαπλάσια του 3 οι αντίστοιχοι τους στη στήλη Α θα είναι. Συνεπώς οι μαθητές δεν έβλεπαν μεμονωμένα τον κάθε αριθμό και μέσα από τα ειδικά παραδείγματα της στήλης Β, είδαν τις γενικές περιπτώσεις πολλαπλασίων και μη πολλαπλασίων του 3 (generic treatment of examples). Έτσι, με τη βοήθεια των αντιπαραδειγμάτων οι μαθητές κατέληξαν στο σωστό συμπέρασμα δημιουργώντας ένα γενικευμένο επιχείρημα βασιζόμενο στα γενεσιουργά παραδείγματα (ΠΚ).

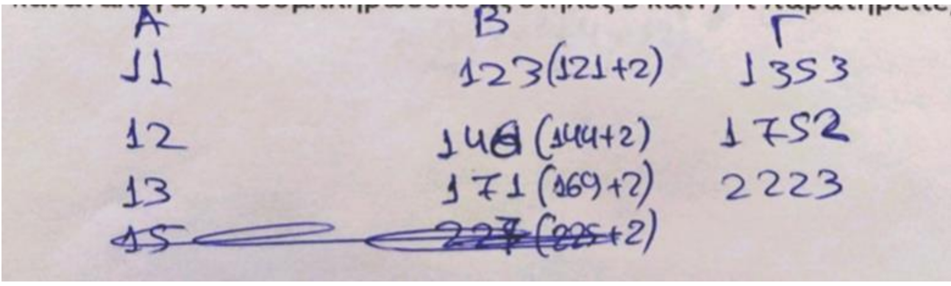
Στο επόμενο ερώτημα της δραστηριότητας 2 οι μαθητές θα πρέπει να τοποθετήσουν δικούς τους αριθμούς στη στήλη Α και να παρατηρήσουν τι προκύπτει στις διπλανές στήλες. Οι αριθμοί που έβαλαν είναι οι διαδοχικοί 11,12,13 και στη συνέχεια τοποθετούν και το 15. Εξαιτίας της γενικευμένης χρήσης των δοσμένων αριθμών στις στήλες διαχώρισαν τους αριθμούς που έβαλαν σε πολλαπλάσια και μη πολλαπλάσια του 3 και έκαναν τις πράξεις. Ο Μ2 επηρεασμένος από τη δραστηριότητα 1 και ξεχνώντας τη σχέση που συνδέει όλους τους αριθμούς της στήλης Α και Β αναφέρει:

Μ2 : 12 x 12 κάνει 144, άρα μένει ίδιο. 144, το 11 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 άρα πρέπει να προσθέσουμε το συν 2. Το 12 και το 15 επειδή είναι πολλαπλάσιο 3 τα αφήσαμε έτσι σύμφωνα με τη Δραστηριότητα 1.

Ύστερα από την παρέμβαση της εκπαιδευτικού να ακολουθήσουν το σκεπτικό των παραπάνω στηλών ο Μ2 παρατήρησε ότι ακόμη και στο 6 που είναι ήδη πολλαπλάσιο του 3 στο τετράγωνο του πάλι προτίθεται το 2. Το 6 λοιπόν, στην προκειμένη περίπτωση λειτουργεί ως αντιπαράδειγμα με αποτέλεσμα οι μαθητές να ακολουθούν τη σχέση $B = A^2 + 2$ για όλα τα παραδείγματα που δημιουργήθηκαν από αυτούς. Παρόλο που οι μαθητές έχουν αναγνωρίσει ότι πάντα οι αριθμοί στη Γ στήλη βγαίνουν πολλαπλάσια του 3 γιατί είτε στη στήλη Β είτε στη στήλη Α υπάρχουν αριθμοί με αυτή την ιδιότητα, φαίνεται ότι δεν λειτούργησαν έτσι στα δικά τους παραδείγματα, ελέγχοντας με πράξεις τα αποτελέσματα. Οι αριθμοί λοιπόν 11,12,13 αποτελούν γενεσιουργά παραδείγματα για τις κατηγορίες πολλαπλάσια και μη πολλαπλάσια του 3 γιατί μπορούν να αιτιολογήσουν με μαθηματικό τρόπο επικαλώντας τα κριτήρια διαιρετότητας. Όμως οι μαθητές δεν έχουν φτάσει στο μεγαλύτερο επίπεδο γενίκευσης αφού δεν έχουν παρατηρήσει στα δικά τους παραδείγματα το λόγο που οι αριθμοί στη στήλη Γ είναι πολλαπλάσια του 3. Η χρήση των αριθμών 11,12,13 σε αυτή την περίπτωση είναι εμπειρική (non generic treatment) και έτσι εξετάζεται κάθε αποτέλεσμα αν είναι πολλαπλάσιο του 3 ξεχωριστά. Έπειτα, ο Μ2 αναφέρει :

'' Ωραία ας κάνουμε μέχρι το 13''

Σύμφωνα με τα παραπάνω λεγόμενα του, το 12 και το 15 είναι πολλαπλάσια του 3, οπότε εξετάζοντας τον αριθμό της στήλης Γ που αντιστοιχεί στο 12 θεώρησε ότι στο 15 πιθανόν να συμβαίνει το ίδιο και ότι δεν έχει νόημα να κάνει πράξεις για να το διαπιστώσει. Αυτό επιβεβαιώνεται στην παρακάτω απάντηση του Μ2.



A	B	Γ
11	123(121+2)	1353
12	146 (144+2)	1752
13	171 (169+2)	2223
~~15~~	~~227(225+2)~~	

Αυτή η περίπτωση επιβεβαιώνει ότι οι μαθητές δεν μένουν στο ειδικό βλέποντας το κάθε παράδειγμα ξεχωριστά αλλά έχουν προχωρήσει σε ένα στάδιο γενίκευσης όμως μόνο για τα πολλαπλάσια του 3. Από όλα αυτά τα παραδείγματα, το 15 χρησιμοποιήθηκε με γενικευμένο τρόπο αφού οι μαθητές κατανόησαν ότι είναι σαν το 12 και γενικά σαν όλα τα πολλαπλάσια του 3. Ακόμη, πληροί τα κριτήρια του γενεσιουργού παραδείγματος γιατί αιτιολογείται μαθηματικά ότι ο αριθμός της στήλης Γ είναι πολλαπλάσιο του 3 λόγω της Α.

Το επόμενο ερώτημα της δραστηριότητας περιέχει ξανά τις στήλες Α,Β και Γ με μεγαλύτερους αριθμούς. Η πρώτη τους σκέψη είναι ότι οι αριθμοί της στήλης Γ θα είναι σίγουρα πολλαπλάσια του 3. Στο επόμενο στιγμιότυπο, προκύπτει ένας διάλογος μεταξύ του Μ2 και της Μ4 ανταλλάζοντας επιχειρήματα για την εύρεση της αιτίας που οι αριθμοί της στήλης Γ είναι πολλαπλάσια του 3.

Μ4 : Από το πολλαπλασιασμό της στήλης Α με τη στήλη Β προκύπτει πάντα η στήλη Γ πολλαπλάσιο του 3.
Κ : Το θέμα είναι οι αριθμοί από τη στήλη Γ θα προκύπτουν από ποιον αριθμό ,από τη στήλη Α ή από τη στήλη Β ;
Μ4 : Της στήλης Α θα είναι πολλαπλάσια του 3 όμως έχουμε και δύο που δεν ήταν.(οι αριθμοί 11 και 38)
Μ2 : Της Β δεν προκύπτουν πάντα πολλαπλάσια του 3 της Γ ναι
Μ4 : και της Α όχι.

Η επικοινωνία μεταξύ τους, τους βοηθά να αποσαφηνίσουν ότι καμία από τις στήλες Α και Β δεν αποτελούνται ολόκληρες από αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 3 αλλά ακόμη φαίνεται άγνωστο σε αυτούς πως προκύπτει πάντα η Γ στήλη με αυτή την ιδιότητα. Επόμενη σκέψη τους ήταν να ελέγξουν καθένα από τους δοσμένους αριθμούς 411,520,704 αν είναι ή όχι πολλαπλάσια του 3. Η δυσκολία που προκύπτει είναι για ποιους αριθμούς της στήλης Α προκύπτει η στήλη Β πολλαπλάσιο του 3 και για ποιους όχι. Οι μαθητές βρέθηκαν σε αδιέξοδο οπότε η μόνη τους δίοδος ήταν οι πράξεις, ξεκινώντας με το 411, το οποίο έχει εμπειρική χρήση (non generic treatment) και δεν συνεισφέρει με παραγωγικό τρόπο στη δημιουργία γενικευμένου επιχειρήματος (non-productive for proving). Η εκπαιδευτικός προέτρεψε τους μαθητές να κοιτάξουν τις στήλες με τους μικρότερους αριθμούς που ήταν είτε δοσμένα παραδείγματα της δραστηριότητας είτε τα είχαν δημιουργήσει οι μαθητές.. Ο παρακάτω διάλογος μεταξύ της εκπαιδευτικού και του Μ2 αναδεικνύει τη σκέψη του μαθητή που τον οδήγησε στο συμπέρασμα.

Μ2 : Δεν είναι απαραιτήτως πάντα πολλαπλάσιο του 3 στη στήλη Β.
Κ : Ωραία, πότε συμβαίνει αυτό;
Μ2 : Βασικά προκύπτει πολλαπλάσιο του 3 στη στήλη Β όταν ο αριθμός της στήλης Α δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.
Κ : Ενώ όταν στη στήλη Α είναι πολλαπλάσιο του 3 ;
Μ2 : Στη στήλη Β δεν είναι.

Η ιδέα του Μ2 ώθησε την Μ4 κατευθείαν στην παρακάτω σκέψη :

΄΄Το 411 είναι πολλαπλάσιο του 3. Οι άλλοι δύο δεν είναι.(520 και 704).Οπότε σε αυτόν δεν θα βγει και στα άλλα θα βγουν πολλαπλάσια του 3 (εννοεί τους αριθμούς στη στήλη Β). Και στη στήλη Γ πάντα θα βγουν πολλαπλάσια του 3 αναγκαστικά΄΄

Είναι εμφανές ότι αυτή η αλληλεπίδραση και η συνεργασία μεταξύ των μαθητών οδηγεί σε μία αλληλουχία σκέψεων που χωρίς αυτή ίσως να μην οδηγούνταν σε κάποιο συμπέρασμα. Έτσι, μέσω των μικρότερων αριθμών στις προηγούμενες στήλες που είχαν γενικευμένη χρήση (generic treatment of examples) έβγαλαν συμπέρασμα για τους 411,520 και 704 και συμπλήρωσαν με ένα ναι ή όχι αν θα είναι πολλαπλάσιο του 3 ή όχι αντίστοιχα. Οπότε, από τους μικρούς αριθμούς προήλθε το γενικευμένο επιχείρημα και με βάση αυτό διαχειρίστηκαν τους μεγάλους αριθμούς (ΠΚ). Επεξηγηματικά, οι μεγάλοι αριθμοί μαζί με την ώθηση της εκπαιδευτικού προέτρεψε τους μαθητές να γενικεύσουν και να καταλάβουν το μοτίβο που δημιουργείται στους αριθμούς όλων των στηλών. Αυτοί οι αριθμοί δεν αποτέλεσαν γενεσιουργά παραδείγματα (non generic treatment) ούτε η χρήση τους ήταν εμπειρική όμως ήταν η αφορμή για να δουν τους μικρότερους αριθμούς ως γενεσιουργά παραδείγματα. Δηλαδή οι ίδιοι οι αριθμοί δεν βοήθησαν στη γενίκευση (ΜΠ) όμως ώθησαν τους μαθητές να δουν με διαφορετική ματιά τους μικρότερους.

Το επόμενο ερώτημα ζητούσε να δώσουν δικούς τους αριθμούς στη στήλη Α και ακολούθως να βγάλουν συμπεράσματα για τη Β και Γ. Έτσι, τοποθέτησαν τους 801 και 1240 και συμπλήρωσαν τις στήλες Β και Γ ορθά με βάση αν ο κάθε αριθμός είναι ή όχι πολλαπλάσιο του 3. Έχοντας φτάσει σε ένα καλό επίπεδο γενίκευσης, η εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές και τον αριθμό 1241 με στόχο να οδηγηθούν στις μαθηματικές εκφράσεις $3x$,$3x+1$,$3x+2$. Οι μαθητές έχοντας σχηματίσει τις δύο κατηγορίες στο νου τους (πολλαπλάσιο και μη πολλαπλάσιο του 3) δεν είναι εμφανές ότι το 1240 μπορεί να γραφεί ως $3 \cdot 413+1$ και αντίστοιχα το $1241=3 \cdot 413+2$. Οπότε οι αριθμοί αυτοί επιβεβαιώνουν μόνο τον ισχυρισμό χωρίς να αποτελούν γενεσιουργά παραδείγματα που οδηγούν στην ανακάλυψη των κατηγοριών $3x$,$3x+1$,$3x+2$. Έτσι, τους ζητήθηκε αρχικά να βρουν τις κοινές ιδιότητες των 411,520 και 704 με τους 3,4 και 5. Ο παρακάτω διάλογος μεταξύ της εκπαιδευτικού και των μαθητών αναδεικνύει μία λανθασμένη αντίληψη των μαθητών.

Κ : Μου είπατε ότι το 411 είναι πολλαπλάσιο του 3 άρα με ποιόν θα ταίριαζε από τους αριθμούς 3,4 και 5 ;
Μ4 : Με το 3.
Κ : Το 704 με ποιο θα ταίριαζε ;
Μ4 : Με το 4 ;
Κ : Γιατί ;
Μ2 : Γιατί δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.
Κ : Το 520;
Μ4 : Με το 5,γιατί τελειώνει σε 0.
Μ2 : 411 είναι με το 3 , το 1240 και με το 4 και με το 5 βγαίνει.

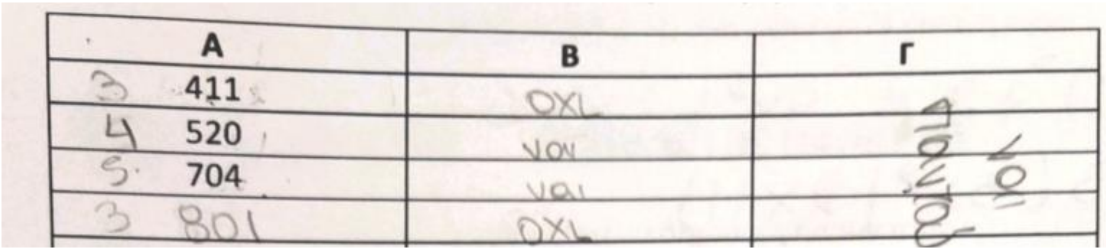
Οι μαθητές στα δοσμένα παραδείγματα από τον ερευνητή σκέφτηκαν τα πολλαπλάσια του 3,4 και 5 όμως το παράδειγμα με τιμή 1240 που έδωσαν απορρίπτει την εικασία τους. Σε κάθε προσπάθεια τους να γενικεύσουν, γεννιούνται εικασίες που είτε επαληθεύονται με γενεσιουργά παραδείγματα είτε απορρίπτονται με αντιπαραδείγματα, όπως φαίνεται παραπάνω. Το αδιέξοδο στο οποίο βρέθηκαν οι μαθητές προέκυψε πιθανόν λόγω της παρερμήνευσης της ερώτησης της εκπαιδευτικού και ταυτόχρονα της μη κατανόησης ότι ένας αριθμός που δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 εκφράζεται 3x+1 ή 3x+2. Η εκπαιδευτικός ζήτησε από τους μαθητές να παρατηρήσουν τους μικρούς αριθμούς των στηλών και να δουν τις σχέσεις των αριθμών 4 και 5 σε σχέση με το 3. Έτσι, άρχιζαν να εκφράζουν τους αριθμούς μέχρι το 11 όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στο παρακάτω στιγμιότυπο :

Μ2 : Το 6 είναι 3+3 ή 3·2
Κ : Το 7;
Μ2 : 3+4 ή 3+2+2 ή 3·2+1
Κ : Ωραία,γράψτε τα αυτά.
Μ4 : Το 8 είναι 3·2+2, μετά θα βγει 3·3+1 ,οπότε μέχρι το 2 πάει (εννοεί το υπόλοιπο) και το 11 είναι 3·3 + 2.

Ο Μ2 στη συνέντευξη που έδωσε χαρακτήρισε την ομάδα τυχερή που βρήκε χωρίς μεγάλη προσπάθεια τη σωστή έκφραση των αριθμών με βάση το 3. Στη συνέχεια, αναφέρει ότι πήραν ως βασικό αριθμό το 3 και με τη βοήθεια από τον πίνακα και τον γεωπίνακα με τις αναπαραστάσεις κατέληξαν στη σωστή έκφραση των αριθμών. Είναι εμφανές ότι η χρήση των παραδειγμάτων 4 έως 11 είναι γενικευμένη (generic treatment of examples) και πληρούνται και τα δύο κριτήρια των γενεσιουργών παραδειγμάτων αφού το επιχείρημα τους έχει έναν γενικό ισχυρισμό που στη συνέχεια αιτιολογείται μαθηματικά. Επεξηγηματικά, οι μαθητές αιτιολόγησαν με μαθηματικό τρόπο πως οι αριθμοί 3,6,9 αποτελούν πολλαπλάσια του 3 και οι 4,5,7,8,10,11 μη πολλαπλάσια του 3 (ΠΚ). Βλέποντας οι μαθητές το γενικευμένο τρόπο έκφρασης αυτών των αριθμών είναι έτοιμοι να δουν απο άλλη οπτική γωνία τους μεγαλύτερους αριθμούς 411,520,704 λέγοντας :

> *Κ : Το 520 είναι;*
> *Μ4 : 3·τόσο + 1 ...... (Κάνει την διαίρεση)*
> *Μ4 : Οπότε είναι το 519 + 1,το 519 είναι πολλαπλάσιο του 3 άρα +1 θα βγει 520*
> *Κ : Οπότε με ποιον θα το αντίστοιχουσατε; Με ποιον θα πούμε ότι θα έχει τις ίδιες ιδιότητες με το 3 με το 4 με το 5 ;*
> *Μ4 : με το 4*

Μέσα από το στιγμιότυπο αναδεικνύεται η ορθή σκέψη της Μ4 και η αποτελεσματική προσπάθεια να εκφράσει το 520 ως 3x+1. Στην παρακάτω εικόνα δίπλα από τους αριθμούς στη στήλη Α η Μ4 έχει γράψει τους αριθμούς (3 ή 4 ή 5) με τους οποίους καταλάβε ότι έχουν κοινές ιδιότητες.



	Α	Β	Γ
3	411	ΟΧΙ	
4	520	ναι	
5	704	ναι	
3	801	ΟΧΙ	

Στη συνέντευξη οι μαθητές αποκρίθηκαν ότι :

> *΄΄ Επειδή ήταν μεγάλοι αριθμοί έπρεπε να βρούμε λίγο πώς θα καταλάβουμε αν είναι ή δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε άρχισε μετά η Μ4 να φτιάχνει τους τύπους και έτσι καταλήξαμε στο συμπέρασμα. Στην αρχή το βρήκαμε στους απλούς αριθμούς μετά βρήκαμε τον τύπο με τον οποίο βγαίνει κάθε αριθμός΄΄.*

Με τη λέξη τύπος οι μαθητές της Α' ομάδας εννόησαν τις εκφράσεις 3x,3x+1,3x+2 με τις οποίες προέκυπταν όλοι οι φυσικοί αριθμοί είτε πολλαπλάσια είτε μη πολλαπλάσια του 3. Ακόμη, μέσα από τη συνέντευξη αναδεικνύεται ότι η Μ4 αναγνωρίζει την παρανόηση που είχαν κάνει με τους αριθμούς 411,520 και 704 και τα πολλαπλάσια του 4 και 5. Αυτή είναι αναμφίβολα μία αξιοσημείωτη αλλαγή από το χρονικό της δραστηριότητας μέχρι τη συνέντευξη και φαίνεται ότι στη σκέψη της Μ4 αυτή η παρανόηση είχει μείνει ανεξίτηλη. Στην ερώτηση ποιος είναι ο λόγος που επιλέξατε τους αριθμούς 801 και 1240 η Μ4 απάντησε :

> *Μ4 : Η αλήθεια είναι ότι εγώ είχα είχα πει το 1240 το είχα στο μυαλό μου γιατί..... συνήθως το έπαιρνα με τα κριτήρια διαιρετότητας του 3 πρόσθετα τα ψηφία και αυτά θα έβγαιναν πολλαπλάσια του 3 και αν δεν ήθελα να ήταν πολλαπλάσια του 3 τότε θα πρόσθετα + 1 ή + 2.*
> *Κ : άρα αυτούς τους αριθμούς Που έβαλες Είχες κάποιο στόχο ;*
> *Μ4 : Ναι.*
> *Κ : Και τι ήθελες να ελέγξεις με αυτούς τους αριθμούς ;*
> *Μ4 : Ότι ισχύει.*

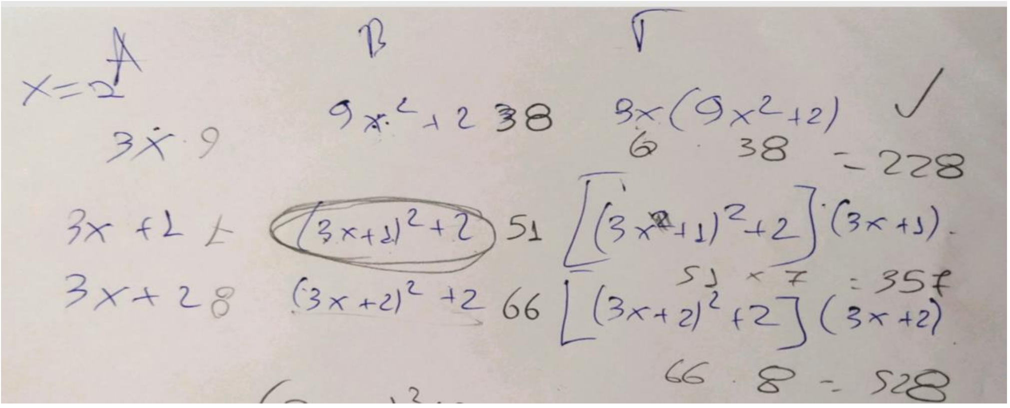
Από τον παραπάνω διάλογο αναδεικνύεται ότι η Μ4 βρίσκοντας τις εκφράσεις των αριθμών με βάση το 3 ήταν πολύ εύκολο να επιλέξει παραδείγματα που είναι η όχι πολλαπλάσια του 3. Μέσα από τη συνέντευξη έγινε πιο ευδιάκριτος ο λόγος που επέλεξαν τους αριθμούς 801 και 1240 το οποίο αποδεικνύει ότι η γενικευμένη χρήση των δοσμένων παραδειγμάτων βοήθησε στην επιλογή αυτών που τοποθετούσαν οι μαθητές. Η ώθηση της εκπαιδευτικού αποσκοπούσε την προετοιμασία των εκφράσεων αυτών για τα επόμενα ερωτήματα που ζητούσαν πρώτα να απορρίψουν τη σκέψη ότι υπάρχει έστω και ένας αριθμός που δεν συνάδει με τα συμπεράσματα τους και ύστερα να δείξουν ότι τα ευρήματα τους ισχύουν για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Οι μαθητές αμέσως ανέφεραν ότι υπάρχουν μόνο δύο περιπτώσεις, και κάθε αριθμός θα είναι αναγκαστικά ή στη μία ή στην άλλη. Δηλαδή, δεν υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός που απορρίπτει αυτή την εικασία με αποτέλεσμα να προχωρούν στη σκέψη για το πως θα πείσουν κάποιον ότι ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Η αλληλεπίδραση και η ανταλλαγή επιχειρημάτων μεταξύ εκπαιδευτικού και των μαθητών όπως φαίνεται παρακάτω παίζουν ουσιώδη ρόλο στη κατανόηση της σημασίας : ´´πείθω´´ κάποιον ότι τα συμπεράσματα ισχύουν για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Μ2 : Μα ισχύει για τους φυσικούς.
Κ : Και πώς θα με πείσετε,με παραδείγματα;
Μ4 : Με τις αναλύσεις των αριθμών , θέλετε να τους πάρουμε όλους τους αριθμούς μέχρι το 10 ;
Κ : Θέλω να μου αποδείξεις ότι ισχύει για όλους τους αριθμούς.
Μ4 : Θα πάρουμε το 3 το 4 και το 5 που είναι οι βάσεις για το 3+1, 3+2 και θα πάρουμε όλους τους αριθμούς από κάτω.
Κ : Πόσοι φυσικοί αριθμοί υπάρχουν ;
Μ4 : Άπειροι.
Κ : Θα μου το αποδείξεις για τους άπειρους έναν-έναν ;
Μ4 : Θα σας αποδείξω για την πρώτη δεκάδα.
Κ : Και εγώ που θα ξέρω ότι θα ισχύουν για τους υπόλοιπους;

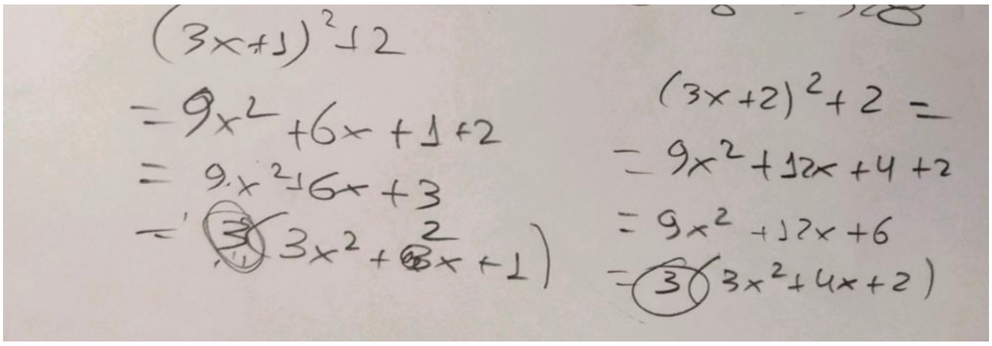
Η Μ4 έχοντας γράψει τις εκφράσεις των αριθμών μέχρι το 14 δυσκολεύεται να δείξει ότι ισχύει για όλους τους φυσικούς παρόλο που το έχει κατανοήσει. Η εκπαιδευτικός προτρέπει τους μαθητές να δουν τις εκφράσεις προσεκτικά λέγοντας τους :

Κ : Κάθε φορά όμως τι αλλάζει ;
Μ4 : Ο αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζεται.
Κ : Αυτό θα τον ξέρεις ;
Μ4: Όχι μπορεί να είναι οποιοσδήποτε.
Κ : Φυσικός αριθμός, και πώς θα τον πεις αν δεν τον ξέρεις ;
Μ2,Μ4 : x
Μ4 : Άρα, 3x+1 , 3x+2.
Κ : Μόνο αυτές τις δύο περιπτώσεις έχουμε;
Μ4 : Ή 3x.

Ακόμη και σε αυτές τις εκφράσεις ζητείται από τους μαθητές να γενικεύσουν ξανά αντικαθιστώντας τον αριθμό που πολλαπλάσιάζεται με το 3 με μία μεταβλητή x που αλλάζει συνεχώς παίρνοντας ως τιμές μόνο φυσικούς αριθμούς. Οι εκφράσεις των αριθμών ήταν ειδικές ώσπου έγιναν γενικές δημιουργώντας τις μαθηματικές εκφράσεις 3x,3x+1,3x+2 λόγω της εμφανούς επανάληψης μοτίβου. Τα γενεσιουργά παραδείγματα σε αυτή τη περίπτωση που είναι οι αριθμοί 3 έως το 14 συνεισφέρουν στη δημιουργία εκφράσεων και τελικά στη γενίκευση που ακολουθείται (ΠΚ). Έτσι, έχοντας τις εκφράσεις αυτές στη στήλη Α αναλόγως συμπληρώνουν τις υπόλοιπες στήλες χωρίς να κάνουν πράξεις όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Αμέσως μετά ο Μ2 αντικαθιστά όπου x τον αριθμό 2 για να ελέγξει αν ισχύουν τα συμπεράσματα με αυτές τις εκφράσεις, δηλαδή η χρήση του ήταν μόνο εμπειρική. Πιθανόν να μην είχε πειστεί ότι οι εκφράσεις που βρήκε στις στήλες Β και Γ είναι οι αντίστοιχοι αριθμοί που θα έβρισκε ανάλογα με τον αριθμό της στήλης Α. Η αβεβαιότητα αυτή γίνεται εμφανής και από τη συνέντευξη που ο Μ2 εκφράζει ότι δεν ήταν σίγουρος και ήθελε να το ελέγξει, με την Μ4 να αναφέρει ότι το έβαλαν για να καταλάβουν αν ισχύει, επειδή δεν είχαν αναπτύξει τις ταυτότητες. Στη συνέχεια, ο Μ2 αναγνωρίζει ότι στην περίπτωση του 3x στη στήλη Α, η στήλη Γ θα προκύπτει ξανά πολλαπλάσιο του 3, όμως έχει βρει εμπόδιο στο πως θα δείξει για τους 3x+1 και 3x+2. Τελικά, ο μαθητής ανέπτυξε τις ταυτότητες και κάνοντας παραγοντοποίηση κατέληξε ότι στους αριθμούς 3x+1 και 3x+2 πάντα οι στήλες Β θα είναι 3 · κάποιον αριθμό. Όπως φαίνεται στην εικόνα ο μαθητής κυκλώνει το 3 και δείχνει ότι ανεξαρτήτως τον αριθμό που θα βρίσκεται στη παρένθεση αυτό θα είναι πάντα πολλαπλάσιο του 3.



4.2 Β΄ομάδα

Στην Β΄ομάδα οι μαθήτριες Μ5 και Μ6 παρατήρησαν τις εικόνες και συμπλήρωσαν τα κενά με βάση αυτές. Η Μ5 αναφέρει :

΄΄Η Εικόνα 2 έχει βγει 16 η 3 είναι 16 + 9 , δεν τα μετράω τα σκέφτομαι. Η 4 είναι +11 γιατί μετά από το 9 επόμενος περιττός είναι το 11 άρα 36΄΄.

Πιθανόν η Μ5 παρατήρησε αριθμητικά πως αυξάνονται οι κουκίδες ακολουθώντας το μοτίβο του αθροίσματος διαδοχικών περιττών αριθμών. Η προσθήκη του γνώμονα σε κάθε επόμενη εικόνα έγινε αντιληπτή μέσω των αναπαραστάσεων αλλά η Μ5 θεώρησε ότι δεν είναι αναγκαίο να μετρήσει τις ψηφίδες, το οποίο αναδεικνύει την κατανόηση της στο αριθμητικό μοτίβο. Η χρήση των παραδειγμάτων είναι γενικευμένη αλλά δεν συνεισφέρουν με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να φτάσουν στη κατασκευή ενός γενικευμένου επιχειρήματος για κάθε εικόνα (ΠΕ). Στην ερώτηση τι παριστάνει γεωμετρικά ο αριθμός που αντιστοιχεί σε μία εικόνα η Μ5 εκφράζει το δίλημμα στο οποίο βρίσκεται μέσω μίας ερώτησης :

'' Τέλεια τετράγωνα ή τετραγωνικές ρίζες; ''

Το οπτικό ερέθισμα που προσφέρουν οι εικόνες ως σχήματα είναι το τετράγωνο και αριθμητικά τα αποτελέσματα παραπέμπουν σε αριθμούς που αποτελούν τέλεια τετράγωνα. Από την άλλη μεριά, οι αριθμοί που αντιστοιχούν στις εικόνες αποτελούν υπόρριζες ποσότητες τετραγωνικών ριζών που έχουν αποτέλεσμα φυσικό αριθμό. Οι αριθμοί αυτοί είναι χαρακτηριστικοί και έχουν αποτυπωθεί στο νου των μαθητών , για αυτό το λόγο η σκέψη της Μ5 παρέπεμψε στις τετραγωνικές ρίζες. Η αντιπαράθεση μεταξύ αναπαραστάσεων και αριθμητικών μοτίβων επιλύθηκε με την υπερίσχυση των εικόνων. Στο επόμενο ερώτημα : Ποιο είναι το αποτέλεσμα της εικόνας 101, η πρώτη σκέψη των μαθητριών είναι να προσθέτουν έναν έναν τους επόμενους περιττούς αριθμούς που αμέσως απορρίπτεται λόγω του μεγάλου πλήθους τους. Στη συνέχεια η Μ5 βρίσκει τη λύση λέγοντας :

Μ5 : Λοιπόν η Εικόνα 1 είναι 3 x 3 το τετραγωνάκι ,η επόμενη της είναι 4 άρα για την εικόνα 101 θα έχουμε προσθέσει σε κάθε πλευρά 100, οπότε θα βγει 103 επί 103.

Επειδή η Μ6 δεν κατανόησε τη σκέψη αυτή, η Μ5 εξηγεί όπως φαίνεται παρακάτω με περισσότερη λεπτομέρεια την άποψη της.

Μ5 : Οι πλευρές είναι 3 x 3 στην πρώτη Εικόνα στην δεύτερη είναι 4 x 4 οπότε έχουμε προσθέσει ένα, η επόμενη είναι 5 x 5, οπότε άμα το πάω με αυτή τη λογική για να φτάσουμε στην 101 θα έχουμε προσθέσει από την Εικόνα 1 άλλα 100 σε κάθε πλευρά.

Από την διεξοδική εξήγηση της αναδεικνύεται ότι η λογική της βασίζεται στις εικόνες και στην αύξηση των ψηφίδων από τη μία στην άλλη. Όταν το εξηγεί στη Μ6 χρησιμοποιεί όλες τις εικόνες που έχει στο φύλλο εργασίας για να δείξει την αλλαγή που συμβαίνει κάθε φορά. Τα ειδικά παραδείγματα που έχουν δοθεί από τον ερευνητή είναι γενεσιουργά και οδηγούν σε μία άτυπη απόδειξη που βασίζεται στις αναπαραστάσεις (γενεσιουργή απόδειξη). Έτσι κατέληξαν στο γενικευμένο επιχείρημα βασιζόμενο εξ'όλοκλήρου στα παραδείγματα (ΠΚ). Στη συνέντευξη, η Μ5 εξηγεί με τον ίδιο τρόπο τη σκέψη της με μία μικρή αλλαγή λέγοντας :

''Αφού η 1 ήταν 3, η 2 ηταν 4, η 3 ήταν 5, η 101 θα είναι η 1+100.''

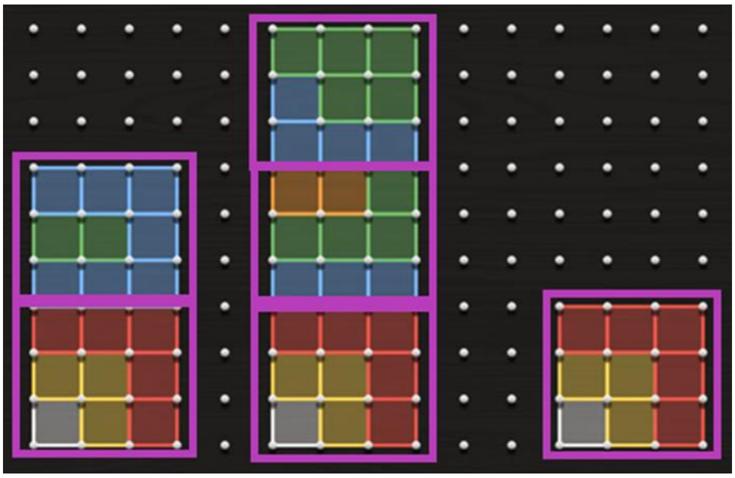
Στη προυπάρχουσα σκέψη της προσθέτει ότι η εικόνα 101 είναι η εικόνα 1 και η εικόνα 100. Επεξηγηματικά, εννοεί ότι η εικόνα 1 έχει από μόνη της 3 ψηφίδες σε κάθε πλευρά και από την 2 μέχρι και την 100 αυξάνεται ανά 1. Η Μ6, όπως φαίνεται και από τη συνέντευξη δεν έχει κατανοήσει αρκετά καλά τη λογική της Μ5 και ίσως αυτός είναι ένας λόγος που δεν εξέφρασε την άποψη της πάνω στην ορθή απάντηση αναφέροντας ότι απάντησε με βάση το εμβαδόν των εικόνων.

Στη συνέχεια η εκπαιδευτικός παρουσιάζοντας το γεωπίνακα και διαβάζοντας την εκφώνηση, η Μ5 έχει την απορία αν τα τετράγωνα που θα μετασχηματίσουν πρέπει να βγουν ξανά τετράγωνα ή οποιοδήποτε άλλο σχήμα. Η επιρροή των αναπαραστάσεων με τις εικόνες είναι εμφανής και στις δύο μαθήτριες αφού και η Μ6 αναρωτιέται αν ο αριθμός 2 είναι σωστός αφού το 18 δεν έχει τετραγωνική ρίζα. Η εκπαιδευτικός απαντά και στις δύο δίνοντας έμφαση στο ότι η δραστηριότητα ζητά τον ελάχιστο αριθμό. Στο μετασχηματισμό των τετραγώνων 4x4 και 5x5, δεν υπήρχε δυσκολία και έγινε περισσότερο αντιληπτό από την Μ5 ο τρόπος που θα δημιουργηθούν όπως φαίνεται παρακάτω :

> *Μ5 : Το βρήκα! Λοιπόν τα 4 μπλε δεξιά κουτάκια θα τα βγάλετε και θα βάλετε το ένα από πάνω και τα άλλα τρία από πάνω σε μία σειρά καταλάβετε τι λέω ;*
> *Άρα θα είναι πολλαπλάσιο του 3 γιατί η κάτω πλευρά είναι το 3.*

Χωρίς παραπάνω σκέψη πραγματοποιούν το ίδιο και στο τετράγωνο 5x5 όπως και στο 3x3 και αναφέρουν ότι δεν χρειάζεται να προστεθεί σε αυτό κάποιος αριθμός ούτε να μετασχηματιστεί. Μέσω των παραδειγμάτων αυτών και τη μετατροπή των τετραγώνων σε ορθογώνια, έγινε κατανοητό γεωμετρικά ότι για να είναι ένας αριθμός (εμβαδόν στην προκειμένη περίπτωση) πολλαπλάσιο του 3 πρέπει η μία του διάσταση να είναι 3. Η χρήση των δοσμένων παραδειγμάτων είναι γενικευμένη στην περίπτωση των σχημάτων και για αυτό αποτελούν γενεσιουργά παραδείγματα. Η ομάδα αυτή κατανόησε τη δομή τους έτσι ώστε να βγαίνουν πολλαπλάσιο του 3, και πιθανόν σε οποιαδήποτε άλλο τετράγωνο θα μπορούσαν να το μετασχηματίσουν κατάλληλα έτσι ώστε να βγει (ΠΚ). Τα ίδια παραδείγματα, προς το παρόν δεν αποτελούν ούτε εμπερικά ούτε γενεσιουργά αφού δεν έχουν σκεφτεί οι μαθήτριες να κάνουν κάποια εικασία και να την επαληθεύσουν. Η κάθε εικόνα δηλαδή μετασχηματισμένη σε ορθογώνια αποτελούν ειδικά παραδείγματα χωρίς να οδηγούν σε κάποια γενίκευση για το ποιοι αριθμοί και με ποιον τρόπο γίνονται πολλαπλάσια του 3. Σε αντίθεση με τη γενικευμένη χρήση τους στην κατασκευή των ορθογωνίων που είναι πάντα πολλαπλάσια του 3 λόγω της μίας διάστασης.

Ένα ακόμη συμπέρασμα της Μ5 ήταν ότι το ορθογώνιο 3x6 είναι το διπλάσιο της εικόνας 1 και το ορθογώνιο 3x9 είναι το τριπλάσιο της εικόνας 1. Η σκέψη αυτή δείχνει την τάση της μαθήτριας να βλέπει τη σχέση μεταξύ των εικόνων μέσω των αναπαραστάσεων και να θέλει να βρει το γεωμετρικό μοτίβο που κρύβεται πίσω από τα σχήματα. Πιο συγκεκριμένα, το παρακάτω στιγμιότυπο κάνει σαφή την οπτική παρατήρηση της Μ5.



Στη συνέχεια, οι μαθήτριες δίνουν παραδείγματα όπως τους ζητείται εξαιρώντας το 6 επειδή είναι πολλαπλάσιο του 3. Φαίνεται ότι η εικόνα 1 αποτελεί γενεσιουργό παράδειγμα για όλα τα τα τετράγωνα με διαστάσεις πολλαπλασίων του 3. Το τετράγωνο αυτό πληροί τα κριτήρια του γενεσιουργού παραδείγματος αφού μέσω αυτού οι μαθήτριες κατανοούν ότι ο ελάχιστος αριθμός που πρέπει να προσθέσουν στα τέλεια τετράγωνα με διάσταση πολλαπλάσιο του 3 είναι το 0. Αυτό το έχουν αιτιολογήσει μέσω των γεωμετρικών αναπαραστάσεων που αποτέλεσε σκαλωσιά για τη γενίκευση. Άρα, ξεκινώντας από το 7 παρατηρούν ότι πρέπει να προσθέσουν το 2 έτσι ώστε το 49 να γίνει 51 που αποτελεί πολλαπλάσιο του 3. Αμέσως μετά η Μ6 αναφέρει :

Μ6 : $x^2+2 = 3x$ ας το λύσω για να δω τι βγαίνει.
....
Μ6 : Μήπως να βρω το x; Άμα το παραγοντοποίησουμε;
Κ : Θες να μας πεις τι σκέφτηκες και είπες $x^2+2 = 3x$;
Μ6 : Ότι έχουμε έναν αριθμό και το ύψωσαμε στο τετράγωνο και του προσθέσαμε και 2 και αυτό είναι πολλαπλάσιο του 3.
Κ : Και αυτό τι αριθμούς μας έδωσε;
Μ6 : Το 2 και το 1. Επειδή δεν βγαίνει πάντα ένας περιττός πολλαπλάσιο του 3 και βγαίνει ας πούμε και 18 που είναι και πολλαπλάσια του 2 .Άμα δεν είναι 2 θα είναι 1, λοιπόν την πρώτη φορά βρήκαμε 18 το 18 είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 1 μάλλον, το 27 όμως δεν είναι πολλάπλάσιο και του 2 γιατί είναι περιττός.

Η Μ6 παρατηρεί ότι στο τετράγωνο των αριθμών 4,5 και 7 πρέπει να προστεθεί το 2 για να βγει πολλαπλάσιο του 3. Έτσι, θέλει να επιβεβαιώσει την εικασία της με μαθηματικό τρόπο. Η χρήση των δοσμένων αλλά και αυτών των παραδειγμάτων που έδωσαν οι ίδιοι οι μαθητές στην περίπτωση της Μ6 είναι γενικευμένη, τοποθετώντας τον άγνωστο x στη θέση των ειδικών αριθμών 4,5 και 7. Στην προκειμένη περίπτωση η Μ6 παρερμήνευσε ότι το οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του 3 είναι το πολλαπλάσιο του αριθμού που υψώνεται στο τετράγωνο. Επεξηγηματικά, αν ήθελε δηλαδή να σχηματίσει την εξίσωση θα ήταν η εξής : $x^2+ 2 = 3y$, η οποία δεν μπορεί να λυθεί, πιθανόν για αυτό το λόγο να σχημάτισε την $x^2+2 = 3x$. Ύστερα παρατήρησε ότι είναι $2^{ου}$ βαθμού εξίσωση, όμως βρίσκοντας τις λύσεις 1 και 2, φάνηκε να δυσκολεύτηκε να τις ερμηνεύσει καθώς θεώρησε ότι κάποια από τα πολλαπλάσια του 3 που προκύπτουν θα είναι είτε και πολλαπλάσια του 2 είτε του 1. Η εικασία αυτή απορρίπτεται από την ίδια βρίσκοντας αντιπαράδειγμα τον αριθμό 18 που είναι πολλαπλάσιο του 1,2 και 3. Οπότε, η γενικευμένη χρήση αυτών των παραδειγμάτων δεν έφερε αποτέλεσμα αντιθέτως φάνηκε να μπέρδεψε και την ίδια την Μ6 όπως ανέφερε στη συνέντευξη :

΄΄Σκέφτηκα ότι κάθε αριθμός στο τετράγωνο +2 , επειδή το πήγαμε λίγο πειραματικά έβγαινε πολλαπλάσιο του 3 κάπως έτσι, και μετά είδα ότι είναι εξίσωση δεύτερου βαθμού και το έλυσα.Μετά μπερδεύτηκα λίγο δεν ήμουν σίγουρη.΄΄

Συμπερασματικά, η εξίσωση που έγραψε ήταν βασισμένη στις εικόνες, οι λύσεις και η ερμηνεία τους προέκυψε λόγω της δυνατότητας επίλυσης αυτής της εξίσωσης.

Προχωρώντας στον πειραματισμό με δικά τους παραδείγματα, οι μαθήτριες βάζουν όλους τους αριθμούς από το 6 μέχρι και το 11 από τους οποίους περνούν ταχύτατα τους 6 και 9 αναφέροντας ότι είναι ήδη πολλαπλάσια του 3, άρα και τα τετράγωνα τους θα είναι. Στους υπόλοιπους αριθμούς αναγνωρίζουν ότι στο τετράγωνο τους πρέπει να προστεθεί το 2 έτσι ώστε να βγει πολλαπλάσιο του 3 και γράφουν στο φύλλο εργασίας τα συμπεράσματα τους. Οι μαθήτριες μέσα από τους συγκεκριμένους αριθμούς 3 έως και 11 είδαν σε ένα πρώτο στάδιο τις γενικές περιπτώσεις πολλαπλασίων και μη πολλαπλασίων του 3 χωρίς να δουν τη διαφορά των ζευγαριών 4-5,7-8 κτλ. Αυτό σημαίνει ότι αποτέλεσαν όλα τα παραδείγματα αυτά γενεσιουργά γιατί με μαθηματικό τρόπο αιτιολογήθηκε το επιχείρημα.

Ο παρακάτω διάλογος μεταξύ των δύο μαθητριών αναδεικνύει την προηγούμενη σκέψη της Μ6, η οποία εξακολουθεί να αναζητά αν οι αριθμοί που βρίσκει είναι ταυτόχρονα πολλαπλάσια και άλλων αριθμών :

Μ6 : Ξέρεις τι μου φαίνεται περίεργο; Που δεν βγαίνει ποτέ άλλο πολλαπλάσιο του 2 ή για παράδειγμα του 4. *Μ5 : Γιατί ; Δεν μας νοιάζει αυτό.*

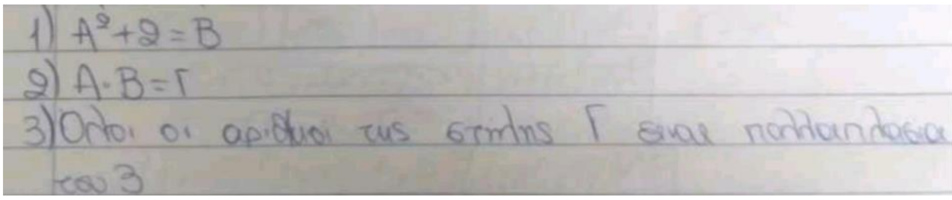
Η αλληλεπίδραση και η επικοινωνία μεταξύ των μαθητριών βοηθά τη Μ6 να κατανοήσει ότι το επίκεντρο της δραστηριότητας είναι τα πολλαπλάσια του 3 και ότι δεν είναι αναγκαίο να αποτελούν πολλαπλάσια και άλλων αριθμών. Μετά από τον αριθμό 11, οι μαθήτριες συνεχίζουν να φέρνουν δικά τους παραδείγματα με το 12,13 στα οποία σταματάνε λέγοντας σχεδόν με σιγουριά ότι :

Μ6 : Έτσι πάει νομίζω. *Μ5 : Βγαίνει με όλους τους αριθμούς τώρα,δεν πιστεύω να υπάρχει κάποια εξαίρεση κάπου πιο μετά.*

Τα συνεχή αυτά παραδείγματα οδήγησαν τις μαθήτριες στο συμπέρασμα ότι αυτό θα συμβαίνει με όλους τους αριθμούς χωρίς ίσως καμία εξαίρεση. Έτσι δεν έχουν ούτε εμπειρική ούτε γενικευμένη χρήση γιατί φαίνεται ότι οι μαθήτριες έφτασαν σε ένα στάδιο κορεσμού που τα υπόλοιπα παραδείγματα δεν είχαν νόημα να δοθούν. Την ίδια γνώμη είχαν και στη συνέντευξη όπως φαίνεται παρακάτω :

Κ : Πως σκεφτήκατε τους αριθμούς από 6 έως 13; Είχατε κάποιο σκοπό ;
Μ5 : Τυχαία;
Κ : Και ξεκινήσατε από το 6 και φτάσατε μέχρι και το 13 ;
Μ6 : Ναι , γιατι μετά δεν είχε σκοπό, βγαίνανε ολα πολλαπλάσια του 3.

Στην επόμενη δραστηριότητα, η Μ6 χωρίς να κάνει πράξεις και με ιδιαίτερη ευκολία δίνει τη σχέση $A^2 + 2 = B$ αναφέροντας ότι μοιάζει με αυτή που είχε δώσει στο γεωπίνακα ($x^2+2 = 3x$). Η ίδια μαθήτρια βγάζει αμέσως μετά συμπέρασμα ότι το γινόμενο των στηλών Α και Β δημιουργεί τη στήλη Γ γράφοντας τη σχέση $A \cdot B = \Gamma$. Δεν είναι εμφανές πόσα παραδείγματα χρησιμοποίησε εμπειρικά για να δει στη συνέχεια με γενικευμένο τρόπο τη σχέση των δύο στηλών και να δημιουργήσει το γενικευμένο επιχείρημα (ΠΚ). Τα δοσμένα παραδείγματα της στήλης Α πληρούν τα κριτήρια των γενεσιουργών γιατί με μαθηματικό τρόπο αιτιολογήθηκε πως βγαίνουν οι αντίστοιχοι αριθμοί στις στήλες Β και Γ. Το ίδιο αποτελούν και οι αριθμοί της στήλης Γ, όπου επίσης με ιδιαίτερη ευκολία βρήκαν ότι είναι πολλαπλάσια του 3 και το αιτιολόγησαν με τα κριτήρια διαιρετότητας (ΠΚ). Μέσα απο κάθε ειδικό παράδειγμα είδαν με γενικευμένο τρόπο την κοινή ιδιότητα όλης αυτής της στήλης. Τα συμπεράσματα τους τα γράφουν περιληπτικά όπως φαίνεται στο παρακάτω στιγμιότυπο :

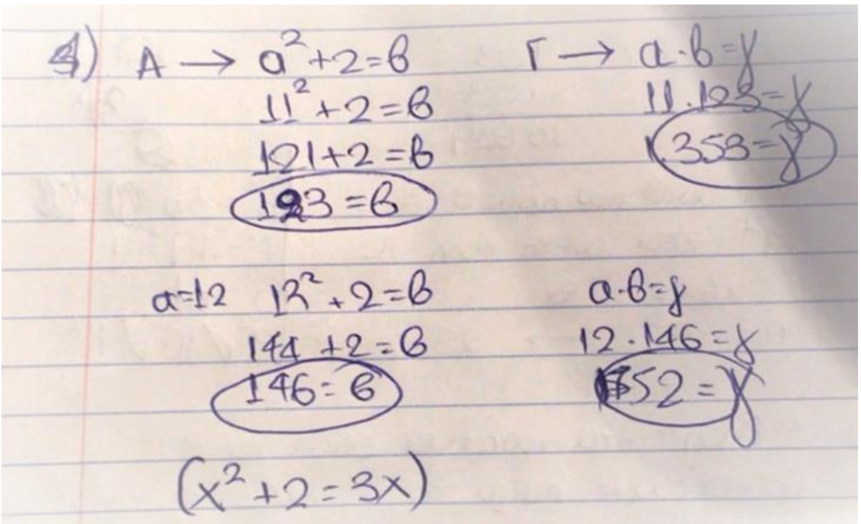


Έπειτα, σύμφωνα με την εκφώνηση οι μαθήτριες πρέπει να τοποθετήσουν δικούς τους αριθμούς στη στήλη Α και να παρατηρήσουν τι ισχύει για κάθε ειδικό παράδειγμα ξεχωριστά. Η Μ6 με βάση τις σχέσεις που έχει βρει τοποθετεί τους αριθμούς 9,11 και 12 στη στήλη Α και κάνοντας τις πράξεις η Μ5 αναφέρει :

΄΄ Ισχύει δηλαδή ότι όλοι οι αριθμοί της στήλης Γ είναι πολλαπλάσια του 3 και εντάξει αυτά που βγάλαμε οι εξίσωσεις $A^2 + 2 = B$ ισχύει προφανώς γιατί έτσι βγάλαμε τις στήλες Β και Γ.΄΄

Άρα, τα παραδείγματα έχουν μόνο εμπειρική χρήση αφού έλεγξε την εικασία και παρατήρησε ότι όλοι οι αριθμοί της στήλης Γ είναι πολλαπλάσια του 3.

Η Μ5 αναφέροντας ότι όλοι οι αριθμοί της στήλης Γ είναι πολλαπλάσια του 3 ωθεί τη Μ6 να ξαναγυρίσει στη σχέση που είχε αναφέρει στο γεωπίνακα πιθανόν λόγω της έκφρασης 3x όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Η Μ6 τελικά μπερδεύεται ξανά, τοποθετεί σε παρένθεση τη σχέση λέγοντας ότι δεν ισχύει εδώ. Το x^2+2 πιθανόν να θύμισε στη Μ6 τη στήλη Α όπως και το 3x την στήλη Γ όμως η εικασία που έκανε απορρίφθηκε κατανοώντας ότι η Γ είναι το γινόμενο των στηλών Α και Β.

Στο επόμενο ερώτημα της δραστηριότητας 2 η στήλη Α περιέχει αρκετά μεγάλους αριθμούς έτσι ώστε να παρακινήσει τις μαθήτριες να μάθουν τον τρόπο που προκύπτουν όλα τα παραπάνω συμπεράσματα τους και ίσως να ανακαλύψουν και περισσότερα. Στον πρώτο αριθμό 411 η Μ6 σκέφτεται να κάνει πράξεις όμως η Μ5 την σταματά. Είναι εμφανές ότι η συνεργασία μεταξύ τους παίζει σπουδαίο ρόλο στην εξέλιξη των σκέψεων τους, στον τρόπο που αιτιολογούν και πιθανόν στο παραπάνω στιγμιότυπο αν η Μ6 έπραττε μόνη της θα έκανε τις πράξεις χωρίς να έδινε χρόνο στον εαυτό της να σκεφτεί τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα της από τις προηγούμενες στήλες. Ο παρακάτω διάλογος μεταξύ της Μ5 και της εκπαιδευτικού αναδεικνύει την επιρροή της μαθήτριας από την δραστηριότητα 1 με τις αναπαραστάσεις .

Μ5 : Αν είναι οι αριθμοί της στήλης Α πολλαπλάσια του 3 τότε και στη στήλη Β θα είναι πολλαπλάσια του 3.
Κ : Πως το κατάλαβες αυτό;
Μ5 : Από το συμπέρασμα της Δραστηριότητας .

Η Μ5 είχε κατανοήσει σε βάθος από τον γεωπίνακα την εικόνα 1 που είχε ένα τετράγωνο διαστάσεων 3x3, στο εμβαδόν του οποίου δεν χρειαζόταν να προστεθεί κάποιος αριθμός για να γίνει πολλαπλάσιο του 3. Επεξηγηματικά, οι οπτικές αναπαραστάσεις υπερίσχυσαν σε σχέση με τον τύπο $A^2 + 2 = B$ και η μαθήτρια έβγαλε λανθασμένα το συμπέρασμα ότι αν η στήλη Α είναι πολλαπλάσιο του 3 τότε και η στήλη Β θα είναι. Η εκπαιδευτικός προτρέπει τις μαθήτριες να κοιτάξουν τις στήλες με τους μικρότερους αριθμούς όμως, η Μ6 χωρίς να τις κοιτάξει, υπενθυμίζει το συμπέρασμα από το γεωπίνακα που ισχύει για αυτούς που δεν είναι πολλαπλάσια του 3. Στη συνέχεια η Μ5 τη συμπληρώνει καταλήγοντας στο ορθό συμπέρασμα : αν ένας αριθμός στη στήλη Α δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 τότε θα είναι στη Β. Στην προκειμένη περίπτωση κανένα παράδειγμα δεν χρησιμοποιήθηκε γενικευμένα, ούτε αποτέλεσε γενεσιουργό αφού το συμπέρασμα προήλθε από το πόρισμα της προηγούμενης δραστηριότητας και συγκεκριμένα μέσω των αναπαραστάσεων στο γεωπίνακα. Οι διαφορετικές απόψεις και η αλληλεπίδραση των μαθητριών συνεχίζεται με μόνο θετικά αποτέλεσματα. Πιο λεπτομερώς η Μ6 υποστηρίζει ότι δεν έχει σημασία πως δημιουργείται το πολλαπλάσιο του 3, σε αντίθεση με τη Μ5 που αναφέρει :

΄΄Θα έχει πιστεύω η Γ θα είναι πολλαπλάσιο του 3 γιατί αφού η στήλη Α είναι πολλαπλάσιο του 3. Άμα την πολλαπλασιάσουμε με τη στήλη Β ότι και να είναι δεν θα βγει πολλαπλάσια του 3;΄΄

Η Μ6 φαίνεται να μην πείθεται αφού θέλει να το επιβεβαιώσει μέσω των παραδειγμάτων. Η εμπειρική χρήση των παραδειγμάτων βοηθά το μαθητή να οικειοποιηθεί με αυτό και να επαληθεύσει την εικασία του, όπως επιβεβαιώνεται και από τις κινήσεις της Μ6. Η Μ6 λοιπόν, παρατηρεί τους αριθμούς που είναι κυκλωμένοι στην παρακάτω εικόνα και βλέπει ότι το 11 και το 38 δεν είναι πολλαπλάσια του 3, το 18 και το 27 είναι και όλοι οι αριθμοί της στήλης Γ είναι επίσης.

Α	Β	Γ
3	11	33
4	18	72
5	27	135
6	38	228
7	51	357
8	66	528
10	102	1020

Τα δοσμένα παραδείγματα της δραστηριότητας αποτελούν γενεσιουργά γιατί μέσω αυτών η μαθήτρια κατανοεί και εξηγεί με μαθηματικό τρόπο πως κάποιοι αριθμοί της Γ στήλης βγαίνουν πολλαπλάσια του 3 λόγω της Β. Η Μ6 δεν έχει αναφερθεί ακόμη στη στήλη Α εστιάζοντας στις άλλες δύο με αποτέλεσμα να μην έχει κατανοήσει πως δημιουργείται το πολλαπλάσιο του 3 στις περιπτώσεις που οι αριθμοί της Β δεν είναι. Η εκπαιδευτικός προσπαθώντας να συνοψίσει τα ευρήματα των μαθητριών ρωτά :

΄΄ Πώς προκύπτει αυτό στη στήλη Γ πάντα;΄΄

Η Μ5 απαντά ότι είτε η στήλη Α είτε η Β θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Είναι αδιαμφισβήτητο ότι τα παραδείγματα που επικαλέστηκαν για να φτάσουν στο συμπέρασμα βοήθησαν στη κατασκευή του γενικευμένου επιχειρήματος που ανέφερε η Μ5 (ΠΚ). Έχοντας το πόρισμα για τους μικρούς αριθμούς στις στήλες Α,Β και Γ (γενεσιουργά παραδείγματα), έβγαλαν συμπέρασμα για τους 411,520,704 όπως φαίνεται στο παρακάτω στιγμιότυπο γνωρίζοντας μόνο αν οι αριθμοί της Α στήλης είναι ή όχι πολλαπλάσια του 3.

Α	Β	Γ
411	μη πολλαπλάσιο	πολλαπλάσιο
520	πολλαπλάσιο	πολλαπλάσιο
704	πολλαπλάσιο	πολλαπλάσιο

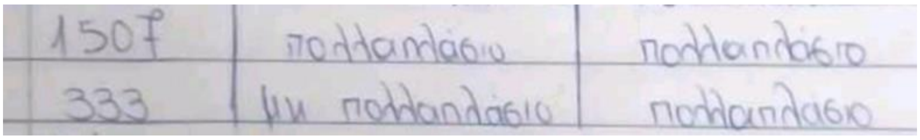
Οι μαθήτριες έχουν φτάσει σε ένα πρώτο επίπεδο γενίκευσης βλέποντας μέσα από τα ειδικά παραδείγματα τις κατηγορίες πολλαπλάσια, μη πολλαπλάσια του 3 και τα συμπεράσματα που προκύπτουν απο αυτά. Το επόμενο στάδιο γενίκευσης που θα πρέπει να φτάσουν οι μαθήτριες είναι η έκφραση όλων των αριθμών με μαθηματικό τρόπο ως εξής : 3x, 3x+1 και 3x+2. Επεξηγηματικά, μέχρι στιγμής τα δοσμένα παραδείγματα αποτελούν γενεσιουργά με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι μαθήτριες να κατατάξουν τους αριθμούς σε δύο κατηγορίες (πολλαπλάσια και μη πολλαπλάσια). Τα μη πολλαπλάσια του 3 θα πρέπει να χωριστούν σε άλλες δύο κατηγορίες (3x+1,3x+2), το οποίο μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω ενός μεγαλύτερου σταδίου γενίκευσης. Για αυτό το λόγο, η εκπαιδευτικός ρωτά σκόπιμα :

΄΄Πόσα παραδείγματα πιστεύετε θα έπρεπε να δίνατε έτσι ώστε να μου ξεκαθαρίσετε όλες τις περιπτώσεις αριθμών που υπάρχουν ;΄΄.

Οι μαθήτριες συμφωνούν και οι δύο λέγοντας ότι χρειάζονται μόνο 2 παραδείγματα, όσες είναι και οι κατηγορίες αριθμών για να καλύψουν όλες τις περιπτώσεις. Ο παρακάτω διάλογος αναδεικνύει την προσπάθεια της εκπαιδευτικού να παρακινήσει τις μαθήτριες να σκεφτούν ξανά τους αριθμούς της στήλης Α :

Κ : Δηλαδή αυτό συμβαίνει άνα δύο αριθμούς;
Μ5 : Αα.
Κ : Πάμε εναλλάξ δηλαδή εδώ; Έχω πολλαπλάσιο του 3 και μετά μη πολλαπλάσιο του 3;
Μ5,Μ6 : όχι
Κ : Στη μία κατηγορία έχουμε το 3 και στην άλλη κατηγορία ποιους αριθμούς έχουμε ;
Μ5 : 4 5 , 7 8 , 10 ;
Κ : 4,5,7 δηλαδή μου αποκλείετε το 3 το 6 και όλα τα πολλαπλάσια του 3, απλά εγώ θα έλεγα σαν μία κατηγορία να μου δώσετε συγκεκριμένους αριθμούς μη μου βάζετε στην ίδια κατηγορία και το 4 και το 5 ή το 7 και 8. Καταλαβαίνετε τι λέω;

Φαίνεται ότι ο διάλογος δεν βοήθησε τις μαθήτριες να σκεφτούν ή έστω να αναρωτηθούν γιατί δεν πάνε εναλλάξ οι αριθμοί για πολλαπλάσιο ή μη πολλαπλάσιο του 3. Στη συνέχεια, η εκπαιδευτικός γυρνάει ξανά στους μικρούς αριθμούς λέγοντας στις μαθήτριες ότι κάθε αριθμός έχει διαφορετικές ιδιότητες οπότε όπως έχει το 3 τη δική του κατηγορία (3x) έτσι θα έχει και ο κάθε αριθμός από τους 4 (3x+1) και 5 (3x+2) αντίστοιχα. Οι μαθήτριες συνεχίζουν βάζοντας δύο παραδείγματα το 333 και το 1507, καθένα αντιπροσωπευτικό για τις κατηγορίες πολλαπλάσιο και μη πολλαπλάσιο του 3. Στη συνέχεια, απαντούν άμεσα για τα περιεχόμενα των στηλών Β και Γ όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



1507	πολλαπλάσιο	πολλαπλάσιο
333	μη πολλαπλάσιο	πολλαπλάσιο

Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης επιβεβαιώθηκε από τις μαθήτριες ότι οι αριθμοί αυτοί που επέλεξαν δεν ήταν τυχαίοι, ο ένας ήθελαν να είναι πολλαπλάσιο και ο άλλος να μην είναι. Η εκπαιδευτικός προτρέπει ξανά τις μαθήτριες να δουν τα δοσμένα παραδείγματα με τους μικρούς αριθμούς ζητώντας να αντιστοιχίσουν τους 411,520 και 704 με τους 3,4 και 5. Οι μαθήτριες κατανοούν ότι το 411 είναι πολλαπλάσιο του 3 οπότε έχει την ίδια ιδιότητα με αυτό τον αριθμό. Ο αριθμός αυτός δεν αποτελεί γενεσιουργό παράδειγμα (non generic treatment) ούτε χρησιμοποιείται εμπειρικά, απλώς εκφράζεται με βάση το γενικευμένο επιχείρημα (πολλαπλάσια και μη πολλαπλάσια του 3). Για τον αριθμό 520 υπήρχε δυσκολία αφου η Μ5 αναφέρε ότι θα αντιστοιχούσε με το 4 και το 5. Σε αυτή τη στιγμή, η εκπαιδευτικός βοηθά τις μαθήτριες, ρωτώντας ποια η διαφορά μεταξύ του 4 και του 5 με το 3. Ακόμη, αναφέροντας τους ότι ουσιαστικά το 7 είναι ο επόμενος του 6 που είναι πολλαπλάσιο του 3 η Μ5 μπόρεσε να δει με γενικευμένο τρόπο το 7 ως 3·2+1. Στον παρακάτω διάλογο γίνεται εμφανής η σκαλωσιά στη σκέψη της Μ5 για τους μεγαλύτερους αριθμούς.

Κ : Οπότε το 520 με το 4 ή με το 5 θα αντιστοιχούσε;
Μ5 : Με το 4 ;
Κ : Πως το σκέφτηκες;
Μ5 : Γιατί το 519 είναι πολλαπλάσιο του 3 και το 520 είναι πολλαπλάσιο του 3 + 1
Κ : Το 704 ;
Μ5 : Είναι πολλαπλάσιο του 3 + 2.

Στους 520 και 704 οι μαθήτριες χρησιμοποίησαν το γενικευμένο επιχείρημα που είχαν κατασκευάσει πριν και τους εξέφρασαν ως εξής : 520 = 519 + 1, γνωρίζοντας ότι το 519 είναι πολλαπλάσιο του 3 και γράφεται ως 3· κάποιον αριθμό άρα υπάγεται στην κατηγορία πολλαπλάσιο του 3 + 1. Επεξηγηματικά, τα δοσμένα παραδείγματα δεν βοήθησαν στην περαιτέρω γενίκευση (ΜΠ) όμως ήταν η αφορμή για να δουν οι μαθητές με διαφορετική ματιά τους μικρότερους αριθμούς. Στη συνέντευξη οι μαθήτριες ρωτήθηκαν αν οι 411,520 και 704 τις βοήθησαν στην κατηγοριοποίηση των αριθμών απαντώντας ότι έδωσαν περισσότερη έμφαση και σημασία στους μικρότερους. Επεξηγηματικά, οι μαθήτριες αναφέρουν ότι οι μικρότεροι αριθμοί τις βοήθησαν αρκετά και βάσει αυτών οδηγήθηκαν στις κατηγορίες με αποτέλεσμα να εκφράσουν τους μεγαλύτερους αριθμούς με τον ίδιο τρόπο. Στη συνέντευξη ερωτήθηκαν ακόμη πως βρήκαν τις μαθηματικές εκφράσεις 3x,3x + 1 και 3x + 2. Οι μαθήτριες απαντούν λέγοντας :

Μ6 : Σύμφωνα με τον πίνακα.
Κ : Με ποιους αριθμούς τους μεγάλους ή τους μικρούς;
Μ6 : Τους μικρούς λογικά.
Μ5 : Νομίζω επειδή εμείς επιμέναμε για δύο κατηγορίες μας είχατε πει το 4 και το 5 τι διαφορά έχουν σε σχέση με το 3 και βρήκαμε ότι το 4 είναι 3+1 ενώ το 5 ειναι 3+2.
Κ : Και μετά νομίζω πήγαμε στο 7.
Μ5 : Ναι που είναι το $3 \cdot 2 + 1$.
Κ : Και το 8;
Μ5 : Α το 8, 3x+ 2

Συμπερασματικά, η Μ5 αναγνωρίζει ότι οι αριθμοί που αποτέλεσαν σταθμό για να καταλάβουν ότι υπάρχουν 3 κατηγορίες ήταν οι μικροί αριθμοί στις στήλες Α, Β και Γ. Πιο αναλυτικά, οι αριθμοί από το 3 έως το 8 αποτέλεσαν γενεσιουργά παραδείγματα και οδήγησαν τους μαθητές στο επόμενο στάδιο γενίκευσης ταυτοποιώντας τις κατηγορίες 3x,3x+1 και 3x+2. Αυτά τα παραδείγματα συνεισφέρουν αναμφίβολα στο μεγαλύτερο στάδιο γενίκευσης που αποτελεί πειστήριο ότι όλοι οι αριθμοί στη Γ στήλη είναι πάντα πολλαπλάσια του 3 (ΠΚ).

Στο επόμενο ερώτημα, οι μαθήτριες θα πρέπει να σκεφτούν αν υπάρχει έστω και ένας φυσικός αριθμός ο οποίος δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 ούτε στη στήλη Α ούτε στη Β. Φαίνεται ότι σκέφτονται αριθμούς όπως $\sqrt{3}$, -2. Η εκπαιδευτικός υπενθυμίζει ότι στη στήλη Α τοποθετούνται μόνο φυσικοί, οπότε οι μαθήτριες αποκλείουν την περίπτωση να υπάρχει κάποιος αριθμός που να μην είναι πολλαπλάσιο του 3 στη στήλη Α και στη Β. Είναι εύλογο να ψάξουν να βρουν ένα αντιπαράδειγμα που να απορρίψει όλα τα συμπεράσματα τους γιατί πιθανόν να φαίνεται ασυνήθιστο ένα τέτοιο μοτίβο που επαναλαμβάνεται για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Έχοντας απορρίψει την πιθανότητα εμπειρικά και όχι με μαθηματικό τρόπο ότι δεν υπάρχει κάποιος άλλος φυσικός για τον οποίο ισχύουν τα παραπάνω προχώρησαν στο μεγαλύτερο επίπεδο γενίκευσης στο οποίο αποδεικνύεται ότι η στήλη Γ θα περιέχει πάντα αριθμούς που είναι πολλαπλάσιο του 3. Όπως είναι φανερό στον παρακάτω διάλογο η Μ6 επαναφέρει την αυθόρμητη σκέψη της που είχε κάνει στον γεωπίνακα διατυπώνοντας τη σχέση $x^2 + 3 = 3x$.

M6 : Τα συμπεράσματα είναι ότι όσα δεν είναι πολλαπλάσια του 3 χρειάζεται να προσθέσουμε 2 για να γίνουν . Άμα κάνουμε αυτό που πήγα να πω στην αρχή ή όχι;
....
Λοιπόν στην αρχή που βρήκα ένα $x^2 + 3 = 3x$ και βρήκα λύσεις 1 και 2; Οι κατηγορίες που βρήκαμε , είναι πολλαπλάσιο του 3, πολλαπλάσιο του 3 + 1 και πολλαπλάσιο του 3 + 2.

Η Μ6 φαίνεται να βρήκε την ερμηνεία που έψαχνε στις λύσεις 1 και 2 από τη δραστηριότητα 1 ταυτίζοντας τις με τα πιθανά υπόλοιπα μίας ατελούς διαίρεσης με το 3. Εκτός αυτού, θεώρησε ότι μέσω αυτής της εξίσωσης μπορεί να αποδείξει ότι τα συμπεράσματα της ισχύουν για όλους τους αριθμούς. Η Μ5 έχει μία διαφορετική άποψη σε σχέση με την Μ6 λέγοντας ότι :

΄΄Πρέπει να αποδείξουμε στις 3 κατηγορίες που βρήκαμε ,ας πούμε να κάνουμε στο 3 στο 4 και στο 5 ή σε κάποιο που είναι πολλαπλάσια του 3, πολλαπλάσιο του 3 + 1 και πολλαπλάσιο του 3 + 2΄΄.

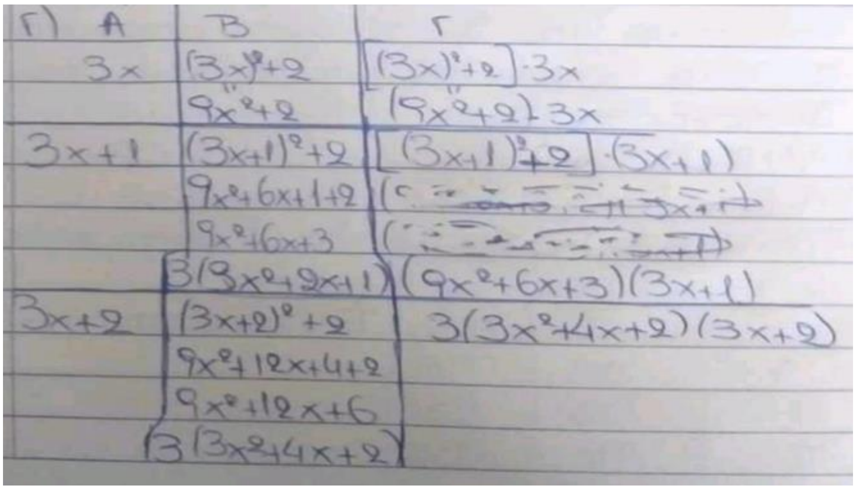
Η μαθήτρια αυτή πιστεύει ότι 3 αντιπροσωπευτικά παραδείγματα είναι αρκετά για να αποδείξει κανείς ότι ισχύει για όλους τους αριθμούς. Παρατηρείται λοιπόν, ότι η Μ6 σε σχέση με τη Μ5 έχει κατανοήσει ότι δεν αρκούν κάποια γενεσιουργά παραδείγματα αλλά χρειάζονται γενικευμένες μαθηματικές σχέσεις που να αποδεικνύουν ότι οι αριθμοί στη στήλη Γ είναι πάντα πολλαπλάσια του 3. Η Μ5 εκφράζει τα πολλαπλάσια του 3 με μαθηματικό τρόπο ως 3x και κάνει πράξεις στη στήλη Β και Γ. Το ίδιο συμβαίνει και με τις εκφράσεις 3x+1 και 3x+2. Οι μαθητές κατέληξαν σε αυτές μέσω των λεκτικών φράσεων που είχαν συμπεράνει από το γενικευμένο επιχείρημα πιο πριν. Η αναλυτική σκέψη της Μ5 αναδεικνύεται από το παρακάτω στιγμιότυπο :

M6 : Το 3x + 2 είναι πολλαπλάσια του 3
M5 : Όχι δεν είναι.
M6 : Ας βάλω έναν αριθμό.
M5 : Αν βάλουμε όπου x το 1 θα γίνει $3 \cdot 1 = 3$ και 2 μας κάνει 5. Δεν είναι πολλαπλάσιο. Το 3x είναι το πολλαπλάσιο του 3.

Η Μ5 σκέφτεται με γενικευμένο μαθηματικό τρόπο αναφέροντας ότι οποιοσδήποτε και να είναι ο x αν πολλαπλασιαστεί με το 3 τότε θα είναι πολλαπλάσιο του 3, όπως και το $9x^2$ είναι πολλαπλάσιο του 3, όμως αν προστεθεί σε αυτό το 2 τότε δεν θα είναι. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αιτιολογεί μαθηματικά την περίπτωση του 3x+1, στην οποία η εκπαιδευτικός προτρέπει την Μ5 να δει με πιο εύκολο τρόπο ότι η στήλη Β είναι πολλαπλάσιο του 3. Έτσι, η μαθήτρια κάνει παραγοντοποίηση και φτάνει στο μεγαλύτερο επίπεδο γενίκευσης αναδεικνύοντας με μαθηματικό τρόπο ότι ένας αριθμός είναι πάντα πολλαπλάσιος του 3 αν είναι της μορφής 3· κάποιον αριθμό. Φτάνοντας στη 3η κατηγορία που είναι η 3x + 2 , η Μ6 αναφέρει ότι οι αριθμοί που ανήκουν σε αυτή είναι πολλαπλάσια του 3. Η Μ5 διαφωνεί και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος.

Κ : Πώς καταλαβαίνεις ότι στη στήλη Β δεν είναι αυτό πολλαπλάσιο του 3; Ενώ στη Γ είναι ;
Μ5 : Θα βγει $9x^2+2$,το $9x^2$είναι σίγουρα πολλαπλάσιο του 3 και άμα προσθέσουμε 2 δεν θα είναι πολλαπλάσια του .
Κ : Και στη Γ πώς θα είναι πολλαπλάσια του 3 ; μου πες $3x(9x^2+2)$.
Μ5 : Το $9x^2+2$ ξέρουμε ότι δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 αλλά αν κάνουμε · 3 δεν θα γίνει πολλαπλάσιο του 3 ;

Φαίνεται ότι η Μ6 μπερδεύτηκε με τις γενικευμένες μαθηματικές εκφράσεις και η ίδια παίρνει την πρωτοβουλία να κάνει ενα δικό της παράδειγμα για να επαληθεύσει την εικασία της ή να την απορρίψει λόγω των αμφιβολιών που της δημιούργησε η Μ5. Η χρήση αυτού είναι εμπειρική και φαίνεται ότι η διαδικασία γίνεται με την αντίθετη φορά, από το γενικό στο ειδικό έτσι ώστε να γίνει πιο οικείο στη Μ6 ότι αυτή η κατηγορία αντιπροσωπεύει τα μη πολλαπλάσια του 3. Με το αντιπαράδειγμα της Μ5, η Μ6 πείθεται ότι οι αριθμοί στη κατηγορία 3x + 1 δεν αποτελούν πολλαπλάσια του 3 οπότε συνεχίζουν δείχνοντας ότι και σε αυτή την περίπτωση η Γ στήλη θα έχει πολλαπλάσια του 3. Τελικά οι απαντήσεις των μαθητριών αποτυπώνονται όπως παρακάτω.



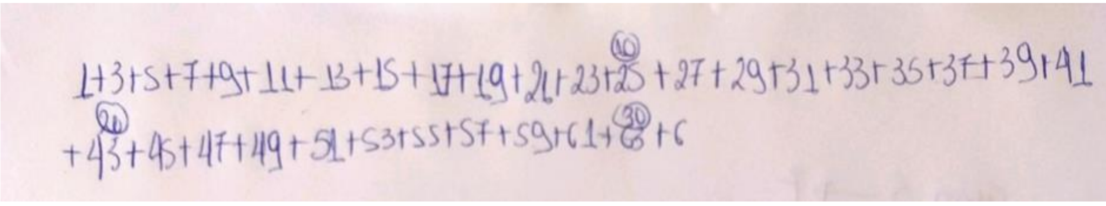
Θέλοντας να επιβεβαιωθεί η εκπαιδευτικός ότι οι μαθήτριες κατάλαβαν γιατί δημιουργούνται 3 κατηγορίες στα πολλαπλάσια του 3 τις ρώτησε πόσες κατηγορίες αριθμών θα είχαμε για τα πολλαπλάσια του 4 απαντώντας ορθά 4. Είναι εμφανές ότι οι μαθήτριες κατανόησαν τις κατηγορίες και γιατί το πλήθος τους είναι 3 οπότε με βάση αυτό το ειδικό παράδειγμα μπορούν να διαχειριστούν και άλλες περιπτώσεις με πολλαπλάσια πιο μεγάλων αριθμών. Η χρήση του 3 ήταν γενικευμένη με τις μαθήτριες να δείχνουν ότι έχουν κατανοήσει σε πολύ μεγάλο βαθμό το σκοπό της δραστηριότητας 1 και 2.

4.3 Γ΄ομάδα

Οι μαθήτριες της Γ΄ ομάδας δεν παρατήρησαν κάποιο μοτίβο βλέποντας τις 3 εικόνες. Τα δοσμένα παραδείγματα από τη δραστηριότητα δεν είχαν ούτε εμπειρική ούτε γενικευμένη χρήση (non generic treatment) με αποτέλεσμα να μην συνεισφέρουν σε ένα μεγαλύτερο στάδιο γενίκευσης (ΜΠ). Οι μαθήτριες ξεκίνησαν να βρουν την εικόνα 101 προθέτοντας περιττούς αριθμούς όπως φαίνεται είτε οπτικά από τον γνώμονα που προστίθεται κάθε φορά είτε αριθμητικά συμπληρώνοντας τα κενά στην άσκηση. Όπως φαίνεται παρακάτω η εκπαιδευτικός ζητά από τις μαθήτριες να πουν αναλυτικά πως σκέφτηκαν.

Μ3 : Μέχρι το 11 είναι η εικόνα 3;
Κ : Αυτό πιστεύεις θα σε βοηθήσει;
Μ3 : Κάτι θα βγάλει αλλά πότε;
Κ : Καταλαβαίνετε τι ζητάμε;
Μ3 : Αυτή η εικόνα έχει + 3 η επόμενη + 5 και η άλλη +7 , κάθε φορά προσθέτεις... Στην εικόνα 101 πόσο θα έχουμε φτάσει;

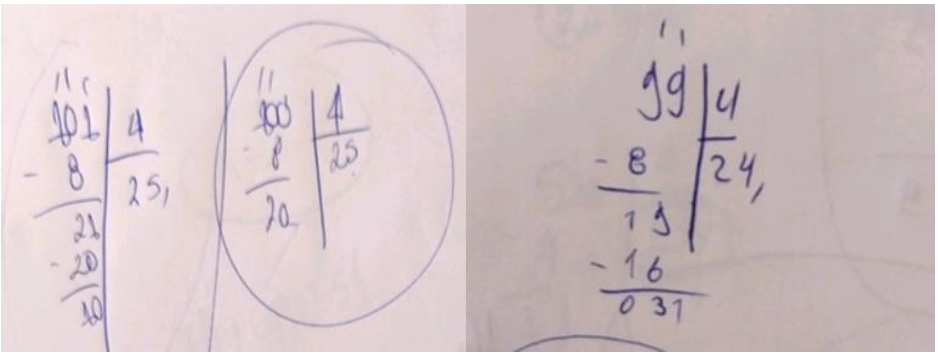
Η Μ3 δείχνει να μην είναι βέβαιη ότι ο τρόπος αυτός θα την βοηθήσει να καταλήξει γρήγορα στο αποτέλεσμα κατανοώντας ότι η διαδικασία αυτή είναι χρονοβόρα και πολύπλοκη. Παρολαυτά, συνεχίζουν να προσθέτουν περιττούς αριθμούς, γράφοντας πάνω απο κάποιους συγκεκριμένους ποια εικόνα συνθέτουν ως τώρα. Το παρακάτω στιγμιότυπο αναδεικνύει τη σκέψη της Μ1 και Μ3.



Αρχικός σκοπός τους είναι να προθέσουν τόσους αριθμούς έτσι ώστε να φτάσουν στην εικόνα 101. Αφού πρόσθεσαν κάποιους περιττούς, έφτασαν στη 30 και πιθανόν κατάλαβαν ότι πρακτικά είναι αρκετά δύσκολο. Όμως, φαίνεται ότι δεν εγκατέλειψαν πολύ νωρίς τη προσπάθεια τους να βρουν την εικόνα 101 μέσω αυτού του τρόπου. Επίσης, αυτός ο χρονοβόρος αλλά ταυτόχρονα ορθός τρόπος αναδεικνύει ότι οι μαθήτριες είτε μέσω των αριθμών είτε μέσω των αναπαραστάσεων κατάλαβαν τη δομή τους και ποιο είναι το γεωμετρικό μοτίβο. Στη συνέχεια η Μ1 δίνει μία άλλη σκέψη :

M1 : Να κάνουμε 101 : 4;
...... Δεν βγαίνει ακριβώς είναι 25, κάτι
M3 : Ε κάπου εκεί.
M1 : Και τι θα γίνει μισό ;
K : Πως το σκέφτηκες αυτό;
M1 : Γιατί θέλαμε να βρούμε πόσο είναι αυτό (δείχνει την πλευρά του τετραγώνου).
K : Άρα σκέφτηκες να βρεις πόσο θα είναι αυτή η πλευρά.
M1 : Α αυτό αυξάνεται βασικά όλα αυξάνονται.
M1 : 4 ειναι εδώ και οι διαγώνιοι είναι 4 άρα είναι τετράγωνο αυτό.

Προσπαθώντας η Μ1 να βρει ένα πιο απλό τρόπο σκέφτηκε να μοιράσει το 101 στις 4 πλευρές του σχήματος. Ίσως, η Μ1 να μπέρδεψε το εμβαδόν με την περίμετρο ή δεν συνέδεσε ότι το αποτέλεσμα της εικόνας 101 παριστάνει γεωμετρικά το εμβαδόν. Για αυτό το λόγο η ερώτηση: ΄΄Τι παριστάνει γεωμετρικά κάθε αριθμός που αντιστοιχεί σε μία εικόνα ;΄΄ τοποθετήθηκε πριν από την εύρεση της εικόνας 101, έτσι ώστε να σκεφτούν ότι το ζητούμενο είναι το εμβαδόν του τετραγώνου που προκύπτει γνωρίζοντας τη πλευρά του. Ακόμη, φαίνεται ότι η Μ1 δίνει αρκετή σημασία στην αναπαράσταση, επιβεβαιώνοντας ότι είναι τετράγωνο λόγω των διαγωνίων του που είναι ίσες. Ακόμη, έχει παρατηρήσει ότι όλες οι πλευρές και οι διαγώνιοι του αυξάνονται πηγαίνοντας στην επόμενη εικόνα. Όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως, τα οπτικά ερεθίσματα που προσφέρουν οι αναπαραστάσεις αποτελούν αρωγούς στην εξαγωγή συμπεράσματος αλλά και στη βαθύτερη κατανόηση του γεωμετρικού μοτίβου. Στη συνέχεια, η εκπαιδευτικός θέλοντας να σκεφτούν το σχήμα περισσότερο και τις ιδιότητες του τετραγώνου τις ρωτά τι σχήμα θα έχει η εικόνα 101. Η Μ1 απαντά ταχύτατα ότι θα είναι τετράγωνο και με βάση τον τύπο $Ε = β \cdot υ$ το εμβαδόν θα πρέπει να βγει 101. Την επόμενη ακριβώς στιγμή αναιρεί τα λεγόμενα της και αναφέρει ότι ο αριθμός της εικόνας πρέπει να είναι 101 και όχι το εμβαδόν της. Συμπερασματικά, γνωρίζει ότι αυτό που ζητά είναι το εμβαδόν όπως και ότι το τετράγωνο έχει 4 ίσες πλευρές, όμως πιθανόν να προσπαθεί να συνδέσει τον αριθμό 101 με τις πλευρές ή σκέφτηκε ότι ο αριθμός αυτός αποτελεί την περίμετρο. Επίσης, δεν υπάρχει ως τότε ουσιώδης αλληλεπίδραση και επικοινωνία μεταξύ των μαθητριών, αφού η καθεμία παραθέτει τη διαφορετική αποψή της, χωρίς να δίνει η μία στην άλλη ανατροφοδότηση. Οι μαθήτριες βρέθηκαν σε αδιέξοδο και η επόμενη σκέψη τους προήλθε από το άκουσμα του αριθμού 100 που ανέφερε εκείνη τη στιγμή η Α' ομάδα. Οπότε, ακολούθησαν την ίδια διαδικασία όπως πριν δηλαδή έκαναν την διαίρεση 100 : 4 , βρήκαν 25 το οποίο θεώρησαν ότι αποτελεί την πλευρά του τετραγώνου και βρίσκοντας εμπόδιο τον αριθμό 1 που απομένει από το 101. Παρατηρείται περισσότερη αλληλεπίδραση μεταξύ των ομάδων στην προκειμένη περίπτωση σε σύγκριση με τα μέλη της ίδιας ομάδας. Με το ίδιο σκεπτικό η Μ3 πιστεύει ότι αφού ο κάθε γνώμονας περιέχει περιττό αριθμό, το 101 είναι προτιμότερο να χωριστεί στο 99 + 2. Η παρακάτω εικόνα δείχνει τις πράξεις των μαθητριών με σκοπό να βρουν το εμβαδόν της εικόνας 101.



Έπειτα από τις παραπάνω προσπάθειες, οι μαθήτριες ξεκίνησαν από την αρχή με διαφορετική σκέψη η οποία εξελίχθηκε ως εξής :

Κ : Τι θα θες να βρεις για να μπορέσεις να δώσεις το αποτέλεσμα για την Εικόνα 101;
Μ1 : Το εμβαδόν του.
Κ : Η αλλιώς τι θα ήθελες να ξέρεις για να βρεις το εμβαδόν της;
Μ1 : Τις πλευρές της.
Κ : Βασικά δεν είναι 2.
Μ1 : Είναι τέσσερις.
Κ : Για το εμβαδόν τι χρειαζόμαστε;
Μ1 : 2 πλευρές θέλουμε.
Κ : Τι σχήμα είναι;
Μ3 : Τετράγωνο άρα θέλουμε τη μία της πλευρά.

Επιβεβαιώνεται ότι η Μ1 έχει κατανοήσει την αντιστοιχία του εμβαδού με την εικόνα, όμως ο εσφαλμένος τύπος β · υ δίνει την εντύπωση στη μαθήτρια ότι χρειάζεται 2 πλευρές. Η Μ3 επεμβαίνει λέγοντας ότι μόνο μία πλευρά αρκεί, με αποτέλεσμα να πλησιάζουν και να εστιάζουν όλο και περισσότερο στο ζητούμενο. Την ίδια στιγμή η Μ3 αναφέρει :

΄΄Στην Εικόνα 1 είναι 3 στην Εικόνα 2 είναι 4 στην Εικόνα 5 είναι 7.΄΄

Επεξηγηματικά, εστίασε στον αριθμό της εικόνας με την διάσταση της πλευράς. Στον παρακάτω διάλογο φαίνεται η λογική σειρά των ερωτήσεων-απαντήσεων των μαθητριών με την εκπαιδευτικό.

Κ : Στην Εικόνα 6 ;
Μ3,Μ1 : 8 και πάει λέγοντας
Κ : Εικόνα 7;
Μ1 : 9, να βρούμε μέχρι το 10. Εικόνα 8 -> 10 Εικόνα 9->11
Κ : Για παράδειγμα στην εικόνα 50 πόσο θα είναι η πλευρά;
Μ3 : στην εικόνα 7 έχουμε 9 αρα 2 (Εννοεί η διαφορά)
Μ1 : Στην εικόνα 50 → 48 βασικά 52. Άρα στην εικόνα 101 θα είναι 103.

Και οι δύο μαθήτριες κατανόησαν ότι το γεωμετρικό μοτίβο επαναλαμβάνεται συνεχώς, με την Μ1 να θέλει να βρει τουλάχιστον μέχρι την εικόνα 10. Παρόλο που απαντά ορθά για τη διάσταση της πλευράς, πιθανόν να μην έχει κατανοήσει τον τρόπο που λειτουργεί αυτό το μοτίβο. Πιο συγκεκριμένα φαίνεται να αυξάνει κατά 1 τον αριθμό της εικόνας και κατά 1 την πλευρά του τετραγώνου κάθε φορά, χωρίς να σκεφτεί βαθύτερα και μεμονωμένα σε κάθε παράδειγμα τι συμβαίνει. Συμπερασματικά η Μ1, δεν χρησιμοποιεί με γενικευμένο τρόπο το κάθε ειδικό παράδειγμα, απλώς ακολουθεί το μοτίβο αύξηση κατά 1 στην εικόνα και στο πλήθος των ψηφίδων σε κάθε πλευρά. Η εκπαιδευτικός, με τη σειρά της δίνει ένα παράδειγμα (εικόνα 50), έτσι ώστε να σκεφτούν πως θα διαχειριστούν ένα μεγαλύτερο αριθμό και να περάσουν στη γενίκευση ότι εικόνα n αντιστοιχεί σε τετάγωνο πλευράς n+2. Αντιθέτως, η εικόνα 7 αποτελεί γενεσιουργό παράδειγμα για τη Μ3 που παρατηρεί τη διαφορά του 7 και του 9 βγάζοντας συμπέρασμα βασισμένο στα αριθμητικά δεδομένα και όχι στις αναπαραστάσεις. Η Μ1 ορμώμενη από το πόρισμα της Μ3, βρίσκει την εικόνα 50 και αμέσως την εικόνα 101. Το γενεσιουργό παράδειγμα της Μ3 που ήταν το 7 βοήθησε τη Μ1 να κατανοήσει το μοτίβο και να βρει το ζητούμενο. Στη συνέντευξη οι μαθήτριες είχαν ξεχάσει πως βρήκαν τα αποτέλεσματα, οπότε σκέφτηκαν από την αρχή πως θα μπορούσαν να απαντήσουν στο ερώτημα. Η Μ1, ύστερα από κάποια χρονική διάρκεια βρίσκει τη σωστή απάντηση με τον ίδιο τρόπο, χωρίς να έχει προηγηθεί η σκέψη της Μ3 για τη διαφορά του αριθμού της εικόνας με τη διάσταση της πλευράς του τετραγώνου. Η φράση :

΄΄Δεν θυμάμαι αν το είχαμε σκεφτεί έτσι αλλά τώρα μου ήρθε αυτό.΄΄

επιβεβαιώνει ότι η Μ1 ξαναλύνει το υποερώτημα της δραστηριότητας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Στην ερώτηση της εκπαιδευτικού αν οι αναπαραστάσεις βοήθησαν τη σκέψη τους, απάντησαν ομόφωνα θετικά. Προχωρώντας στο γεωπίνακα η Μ1 με τις φράσεις :

΄΄Το 4^2 γιατί δεν μας το δίνει 16; , ΄΄Ας το σκεφτούμε ως 4^2 ή 16.΄΄

φαίνεται να δίνει σημασία στον τρόπο γραφής του αριθμού 16 υποψιασμένη ότι η δομή παίζει ρόλο στη δραστηριότητα. Η Μ3 στο ερώτημα του γεωπίνακα σκέφτηκε ότι θα πρέπει να ικανοποιήσει 3 συνθήκες για να απαντήσει ορθά :

α) να βρει το μικρότερο αριθμό
β) το αποτέλεσμα να είναι πολλαπλάσιο του 3
γ) το σχήμα που θα κατασκευάσουν να είναι τετράγωνο.

Η εκφώνηση ζητά μόνο τις 2 πρώτες συνθήκες. Ίσως η Μ3 να έχει επηρεαστεί από τις αναπαραστάσεις είτε από το προηγούμενο ερώτημα αυτής της δραστηριότητας είτε από τα σχήματα στο γεωπίνακα. Αφού η εκπαιδευτικός έκανε επεξηγήσεις της εκφώνησης, η Μ3 εξηγεί πως θα μετακινηθούν οι ψηφίδες έτσι ώστε να είναι φανερό από το σχήμα ότι είναι πολλαπλάσιο του 3. Η Μ1 συμπληρώνει τη σκέψη της συμαθήτριας της λέγοντας :

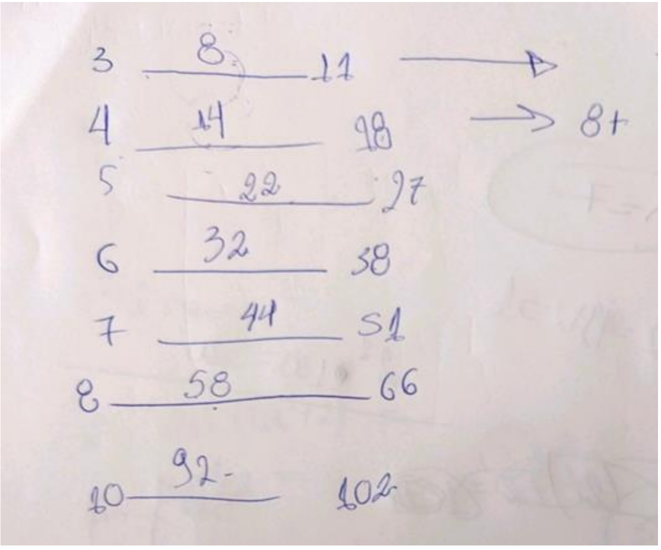
Κ : Εγώ καταλαβαίνω ότι αυτό είναι πολλαπλάσιο του 3 ;
Μ1 : Ναι.
Κ : Πώς; τι σχήμα είναι;
Μ1,Μ3 : Ορθογώνιο.
Κ : Το οποίο είναι πόσο;
Μ1 : 3 x 6.

Οι μαθήτριες βρήκαν αρκετά γρήγορα ότι ένα σχήμα για να έχει εμβαδόν πολλαπλάσιο του 3 θα πρέπει τουλάχιστον η μία του διάσταση να είναι το 3. Αμέσως μετά, βρήκαν τον ελάχιστο αριθμό (ξανά το 2) που κάνει το 25 πολλαπλάσιο του 3 και με τον ίδιο τρόπο μετασχηματίζουν το τετράγωνο σε ορθογώνιο διαστάσεων 3x9. Μέσω αυτής της υποάσκησης οι μαθήτριες μπόρεσαν να δουν το γενικευμένο τρόπο μετασχηματισμού ενός τετραγώνου σε ορθογώνιο με εμβαδόν πολλαπλάσιο του 3. Για την εικόνα 1, οι μαθήτριες συμφώνησαν ότι δεν χρειάζεται να προσθέσουν κάποιο αριθμό γιατί το 9 είναι ήδη πολλαπλάσιο του 3. Έτσι, οι εικόνες 1,2,3 που αποτελούν παραδείγματα της δραστηριότητας χρησιμοποιήθηκαν με γενικευμένο τρόπο (generic treatment) και βοήθησαν στη γενίκευση για τον μετασχηματισμό των εικόνων σε ορθογώνια (ΠΚ). Όμως τα ίδια παραδείγματα δεν χρησιμοποιήθηκαν με εμπειρικό τρόπο δηλαδή για να επιβεβαιώσουν κάποια εικασία που έκαναν οι μαθήτριες ούτε με γενικευμένο, γιατί μέχρι στιγμής βλέπουν κάθε εικονα ξεχωριστά και δεν έχουν ανακαλύψει το μοτίβο που ακολουθείται (ΜΠ). Στη συνέχεια οι μαθήτριες έπρεπε να δώσουν δικά τους παραδείγματα και να παρατηρήσουν αν είναι πολλαπλάσια του 3, ή χρειάζεται να προστεθεί κάποιος αριθμός για να γίνει. Τα παραδείγματα που έδωσαν ήταν το 2^2, το 6^2 και το 9^2 λέγοντας ότι στο 2^2 θα πρέπει να προστεθεί το 2, ενώ στα υπόλοιπα δεν χρειάζεται αφού είναι ήδη πολλαπλάσια του 3. Τα τετράγωνα των 2,6 και 9 αποτελούν γενεσιουργά παραδείγματα, με αποτέλεσμα οι μαθήτριες όχι μόνο να επιβεβαιώνουν την εικασία τους αλλά και να αιτιολογούν με μαθηματικό τρόπο γιατί είναι ήδη πολλαπλάσια του 3. Τα δικά τους παραδείγματα τις προέτρεψαν να κάνουν εικασίες λέγοντας :

Μ3 : Μήπως στους άρτιους δεν προσθέτουμε και είναι πολλαπλάσια του 3;
Κ : Για παράδειγμα στο 4^2που είναι άρτιος δεν προσθέσαμε ;
Μ1 : Ναι προσθέσαμε.
Μ3 : Στους αριθμούς που είναι ήδη πολλαπλάσια του 3 και τα βάζουμε στο τετράγωνο πάλι είναι πολλαπλάσια του 3 σε αυτούς δεν προσθέτουμε και στους άλλους προσθέτουμε 2.

Η Μ3 θέλει να γενικεύσει τις παρατηρήσεις της, χωρίς να το έχει επιβεβαιώσει με πολλούς αριθμούς. Η εκπαιδευτικός ωθεί τη Μ3 να σκεφτεί τι συμβαίνει στην περίπτωση του 4^2 που το 4 είναι άρτιος. Η εικασία δεν επαληθεύεται γιατί το 4^2 αποτελεί αντιπαράδειγμα. Το εμπόδιο αυτό όμως, οδήγησε σε θετικά αποτελέσματα για τη μαθήτρια αφού την ώθησε στη γενίκευση με ορθό τρόπο. Στη συνέντευξη, ρωτήθηκαν αν υπήρχε κάποιος σκοπός επιλογής των συγκεκριμένων παραδειγμάτων που έθεσαν οι ίδιες. Οι μαθήτριες απάντησαν ότι το 6 και το 9 το επέλεξαν επειδή είναι πολλαπλάσιο του 3 ενώ το 2 επειδή δεν είναι και θα πρέπει να προστεθεί ο αριθμός 2 για να γίνει. Είχαν ήδη κατηγοριοποιήσει τους αριθμούς σε πολλαπλάσια και μη πολλαπλάσια. Η εκπαιδευτικός για να επιβεβαιώσει ότι οι μαθήτριες έχουν καταλάβει το μοτίβο τις ρωτά για τα 7^2,8^2,9^2. Με τα δοσμένα παραδείγματα, επαληθεύεται ότι οι μαθήτριες έχουν γενικεύσει σε ένα πρώτο επίπεδο λέγοντας ότι οι αριθμοί που είναι ήδη πολλαπλάσια του 3 θα συνεχίσουν να είναι στο τετράγωνο τους και αυτοί που δεν είναι θα χρειαστούν 2 για να γίνουν.

Στο επόμενο ερώτημα, η αρχική σκέψη της Μ3 ήταν να βρουν τη διαφορά μεταξύ των αριθμών της στήλης Β από την Α όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα :



Η εκπαιδευτικός παρατηρώντας την εργασία των μαθητριών τις ρωτά αν προστίθεται κάθε φορά ο ίδιος αριθμός, με σκοπό να εστιάσουν στη μεταβαλλόμενη διαφορά των αριθμών. Έχοντας κατανοήσει ότι με τον ίδιο τρόπο θα πρέπει να προκύπτει η Β στήλη από την Α, προσπαθούν να συσχετίσουν όλες τις διαφορές με τον αριθμό 8 όπως φαίνεται και στην παραπάνω εικόνα αλλά χωρίς αποτέλεσμα. Ίσως, να μη έδωσαν έμφαση από αριθμητικής πλευράς στο εμβαδόν των τετραγώνων και των ορθογωνίων του γεωπίνακα με αποτέλεσμα οι αριθμοί των στηλών Α και Β να μην σχετίζονται άμεσα με τη προηγούμενη δραστηριότητα. Βλέποντας ότι αυτή η σκέψη οδηγεί σε αδιέξοδο, η Μ3 προτείνει την πράξη του πολλαπλασιασμού, ενώ η Μ1 επιμένει με τη διαφορά. Και σε αυτή την περίπτωση φαίνεται να μην αναλύουν και να ανατροφοδοτούν την σκέψη της συμμαθήτριας τους, με απόρροια η αλληλεπίδραση τους να μην είναι συχνή και ισχυρή. Ύστερα η εκπαιδευτικός υπενθυμίζει ξανά ότι με τον ίδιο τρόπο πρέπει να βγαίνει η στήλη Β από την Α, έτσι ώστε να απορριφθεί η εικασία τους ότι πρέπει να είναι ο ίδιος αριθμός σε κάθε περίπτωση. Τελικά, η Μ3 παρατήρησε ότι το 11 προκύπτει από το $3 \cdot 3+2$ όπως και το 18 από το $4 \cdot 4+2$. Τα παραδείγματα της δραστηριότητας αποτέλεσαν εκείνη τη στιγμή γενεσιουργά αφού η μαθήτρια παρατήρησε το γενικό τρόπο που χρησιμοποιείται έτσι ώστε να προκύψουν όλοι οι αριθμοί της Β στήλης από την Α (ΠΚ). Η απάντηση για την ερώτηση πως προκύπτει η Γ στήλη από την Β δόθηκε με αρκετή ευκολία κατά τη διάρκεια της αναζήτησης της σχέσης $A^2+2 = B$ όπως αναδεικνύεται από τα λεχθέντα της Μ3 :

΄΄ Πάντως η στήλη Γ είναι εύκολη προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του 3 και του 11 για παράδειγμα.΄΄

Το πρώτο ειδικό παράδειγμα με αριθμούς 3,11 και 33 φαίνεται ότι χρησιμοποιείται με γενικευμένο τρόπο (generic treatment) οδηγώντας τη μαθήτρια στο συμπέρασμα ότι η Γ αποτελεί το γινόμενο των στηλών Α και Β (ΠΚ).

Στο ερώτημα τι κοινό υπάρχει στη στήλη Γ, η Μ3 κοιτά τους αριθμούς 33 και 72 και αμέσως απαντά ότι είναι πολλαπλάσια του 3. Αυτοί οι αριθμοί χρησιμοποιήθηκαν ως γενεσιουργά παραδείγματα, γενικεύοντας ότι όλοι οι αριθμοί της Γ στήλης έχουν κοινή ιδιότητα ότι είναι πολλαπλάσια του 3 (ΠΚ). Στη συνέχεια, οι μαθήτριες συμπληρώνουν τις στήλες Α με δικά τους παραδείγματα όπως το 9,12 και 15 που είναι όλα πολλαπλάσια του 3. Αναλόγως συμπληρώνουν και τις άλλες, κάνοντας τις πράξεις όπως και τις διαιρέσεις των αριθμών της στήλης Γ με το 3 έχοντας ως σκοπό να διαπιστώσουν αν είναι πολλαπλάσια του 3. Αυτό αναδεικνύει ότι τα ειδικά παραδείγματα που έδωσαν χρησιμοποιήθηκαν με εμπειρικό τρόπο για να επιβεβαιώσουν την εικασία και να κάνουν σε αυτές πιο οικεία τα συμπεράσματα τους. Αντίθετα, δεν πληρούν τα κριτήρια των γενεσιουργών αφού για να διαπιστώσουν αν οι αριθμοί της στήλης Γ είναι πολλαπλάσια του 3 πρέπει να κάνουν πράξεις. Σε άλλη περίπτωση, θα είχαν σκεφτεί ότι το γινόμενο οποιουδήποτε αριθμού με το 3 είναι πάντα πολλαπλάσιο του. Οι μαθήτριες δεν έφτασαν σε αυτό το επίπεδο γενίκευσης, ούτε σκέφτηκαν να κατηγοριοποιήσουν τους αριθμούς πολλαπλάσια και μη πολλαπλάσια του 3, συνεπώς ούτε ότι οι φυσικοί αριθμοί γράφονται με βάση το 3 ως εξής : $3x, 3x+1, 3x+2$.

Στο επόμενο ερώτημα, η Μ3 εκπλήσσεται από την εκφώνηση λέγοντας :

΄΄ Και στη στήλη Β είναι πολλαπλάσιο του 3; Όχι πριν δεν ήταν.΄΄

Οι μαθήτριες δεν έδωσαν σημασία στους αριθμούς της στήλης Β, και δεν έλεγξαν αν είναι πολλαπλάσια του 3 όπως επίσης δεν εξέτασαν γιατί οι αριθμοί της στήλης Γ έχουν αυτή την κοινή ιδιότητα. Επίσης, τα παραδείγματα που έδωσαν οι μαθήτριες ήταν όλα πολλαπλάσια του 3. Έτσι, δεν έλεγξαν τι συμβαίνει περαιτέρω με τους αριθμούς της στήλης Β. Η εκπαιδευτικός τις παρατρύνει να κοιτάξουν τις στήλες με τους μικρότερους αριθμούς και να παρατηρήσουν πως προκύπτουν τα πολλαπλάσια του 3. Ο παρακάτω διάλογος δείχνει τις διαφορετικές και ανεξάρτητες μεταξύ τους σκέψεις των μαθητριών.

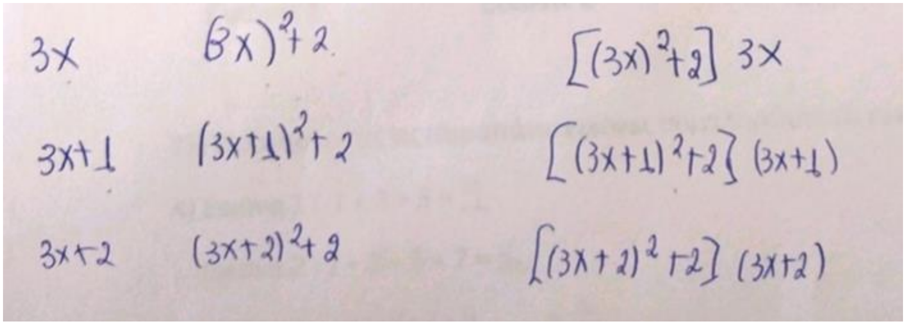
M1 : Τα πολλαπλάσια του 3 προκύπτουν από το Α και Β. Δηλαδή ότι οι αριθμοί της στήλης Γ είναι πολλαπλάσιο του 3 και δεν προκύπτουν από την Α ούτε από την Β αλλά μόνο αν τις πολλαπλασιάσουμε.
Κ : Θέλω να το σκεφτείτε καλύτερα και λίγο πιο συγκεκριμένα.Δηλαδή λέτε ότι προκύπτει πάντα πολλαπλάσιο του 3 στη στήλη Γ αυτό γιατί συμβαίνει.
Μ3 : Συμβαίνει γιατί θα είναι ή ο αριθμός της στήλης Α ή της στήλης Β πολλαπλάσιο του 3. Στη στήλη Α το 3 είναι πολλαπλάσιο του 3 μετά είναι ο αριθμός της στήλης Β και ξανά της στήλης Β.Μετά της στήλης Α ,της Β της Β.

Η Μ3 αναιρεί τη σκέψη της Μ1 και παρατηρώντας τις στήλες με τους μικρότερους αριθμούς (γενεσιουργά παραδείγματα) βγάζει ορθό πόρισμα για τα πολλαπλάσια και μη πολλαπλάσια του 3 χρησιμοποιώντας με γενικευμένο τρόπο τους 6 από τους 7 αριθμούς των στηλών Α,Β και Γ (ΠΚ). Έχοντας το συμπέρασμα αυτό, οι μαθήτριες θέλουν να τοποθετήσουν δικά τους παραδείγματα, όμως δυσκολεύονται αρκετά με αποτέλεσμα, να δίνονται από την εκπαιδευτικό οι τιμές 1240 και 1241. Με τη βοήθεια των παραπάνω παρατηρήσεων (γενεσιουργά παραδείγματα στις στήλες με τους μικρότερους αριθμούς), οι μαθήτριες με τα κριτήρια διαιρετότητας έβγαλαν συμπέρασμα για όλους τους αριθμούς και τις στήλες . Οι μεγάλοι δοσμένοι αριθμοί δεν έχουν ούτε εμπειρική αλλά ούτε και γενικευμένη χρήση αφού δεν συνεισφέρουν στη γενίκευση (ΜΠ). Όμως αποτέλεσαν την αφορμή για να επιστρέψουν στους μικρούς αριθμούς. Στη συνέντευξη ρωτήθηκαν αν οι μεγάλοι αριθμοί 411,520 και 704 τις βοήθησαν για τα συμπεράσματα τους. Η Μ1 απάντησε λέγοντας ότι τις βοήθησε αρκετά αφού έτσι βρήκαν τη σχέση μεταξύ των στηλών όπως και την κοινή ιδιότητα των αριθμών στη στήλη Γ. Με τη σειρά της η Μ3 ανέφερε ότι θα μπορούσαν να φτάσουν στις τελικές παρατηρήσεις και χωρίς τα παραδείγματα της δραστηριότητας αλλά ίσως απαιτούσε παραπάνω χρόνο.

Η εκπαιδευτικός προσπαθεί να ωθήσει τις μαθήτριες στο μεγαλύτερο επίπεδο γενίκευσης εκφράζοντας τους αριθμούς 3x,3x+1 και 3x+2. Έτσι ρωτά τις μαθήτριες ποιες θα είναι οι αντιστοιχίες των 411,520 και 704 με τους 3,4 και 5. Χωρίς να έχουν σκεφτεί ότι το 4 είναι το επόμενο του 3 όπως και το 5 ότι είναι 3+2 , σκέφτονται ότι θα τα αντιστοιχίσουν με το αν είναι πολλαπλάσια του 3,4 και 5. Το 520 όμως, είναι πολλαπλάσιο του 4 και του 5, οπότε η εικασία του απορρίπτεται με αντιπαράδειγμα τον αριθμό αυτό. Η εκπαιδευτικός προτρέπει τις μαθήτριες να σκεφτούν τη διαφορά του 3 από το 4 και το 5 αλλά χωρίς αποτέλεσμα. Συμπερασματικά, εγκαταλείπουν την προσπάθεια αφού δεν μπόρεσαν να αντιληφθούν τα παραδείγματα με γενικευμένο τρόπο ώστε να καταλήξουν στην εύρεση των 3 κατηγοριών (ΜΠ). Έτσι, προχωρούν στο επόμενο ερώτημα της δραστηριότητας στο οποίο, επιβεβαιώνουν ότι δεν υπάρχει κάποια εξαίρεση στο μοτίβο και όλοι οι φυσικοί αριθμοί το ακολουθούν πιστά. Ο παρακάτω διάλογος κάνει φανερή την ώθηση της εκπαιδευτικού να σκεφτούν το πλήθος των κατηγοριών που ανήκουν όλοι οι αριθμοί με βάση το 3.

Κ : Και αυτό επαναλαμβάνεται ανά πόσους αριθμούς;
Μ3 : Ανά δύο.
Κ : Δηλαδή ;
Μ3 : Το πρώτο δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 το δεύτερο δεν είναι το τρίτο είναι.
Κ : Άρα ανα πόσους;
Μ3 : Ανά τρεις.

Η απάντηση ανά δύο, πιθανό να έκρυβε τη σκέψη ότι οι δύο αριθμοί είναι μη πολλαπλάσια και ο άλλος πολλαπλάσιο του 3. Με αυτή την ανταλλαγή απόψεων η Μ3 έδειξε να κατανοεί ότι το μοτίβο επαναλαμβάνεται ανά 3 αριθμούς και με γενικευμένο τρόπο κατάλαβε ότι υπάρχουν 3 κατηγορίες αριθμών με βάση τα πολλαπλάσια του 3. Στη συνέχεια, οι μαθήτριες αντιμετώπισαν ως εμπόδιο την διατύπωση της λεκτικής φράσης ΄΄πολλαπλάσιο του 3΄΄ σε μαθηματική έκφραση ΄΄3x΄΄. Ύστερα από προσπάθειες και αρκετά αντιπαραδείγματα σε κάθε εσφαλμένη μαθηματική έκφραση, οι μαθήτριες έφτασαν στις διατυπώσεις 3x,3x+1 και 3x+2, χωρίς όμως κάποια γενικευμένη χρήση παραδείγματος. Η παρακάτω εικόνα αναδεικνύει ότι οι μαθήτριες ακολούθησαν τις σχέσεις $A^2 + 2 = B$, $A \cdot B = \Gamma$ και αντικατέστησαν όπου Α τις παραπάνω εκφράσεις.



Οι μαθήτριες θεώρησαν βέβαιο ότι όλοι οι αριθμοί της στήλης Γ με τις παραπάνω εκφράσεις είναι πολλαπλάσια του 3, επιμένοντας ότι είναι γνωστό από τις στήλες με τους μικρότερους αριθμούς και δεν χρειάζεται περαιτέρω επεξήγηση και γενίκευση. Δηλαδή για τις μαθήτριες ήταν αρκετή η εικασία και η επαλήθευση της μέσα από αρκετά παραδείγματα, με αποτέλεσμα να μην φτάσουν στο τελικό επίπεδο γενίκευσης.

4.4 Σύγκριση των ομάδων

Στα πρώτα ερωτήματα της δραστηριότητας 1 οι ομάδες Α και Β φαίνεται ότι κάνουν εικασίες και προσπαθούν να τις επαληθεύσουν είτε αριθμητικά είτε μέσω των αναπαραστάσεων. Παρατηρήθηκε ότι δεν κάνουν ακριβώς τις ίδιες υποθέσεις αλλά με βάση αυτό που τους έκανε εντύπωση. Και στις δύο ομάδες έπαιξε πολύ σημαντικό ρόλο οι αναπαραστάσεις όπως και οι αριθμοί, με τον συνδυασμό τους να τις ωθεί σε εικασίες που προσπαθούν να τις επαληθεύσουν, βλέποντας με γενικευμένο τρόπο τα αποτελέσματα. Και οι δύο εικασίες, αν και διαφορετικές μεταξύ τους οδήγησαν με ορθό τρόπο στο σωστό αποτέλεσμα. Η Γ' ομάδα δεν έκανε κάποια εικασία παρόμοια ή διαφορετική με τις προηγούμενες, με απόρροια να βρίσκει τα αποτελέσματα μετρώντας είτε τις ψηφίδες που προστίθονται στην αναπαράσταση μέσω του γνώμονα είτε να προσθέτει περιττούς ξεκινώντας από το 1 χωρίς να έχει παρατηρήσει κάποιο μοτίβο που επαναλαμβάνεται. Στην περίπτωση αυτή, ίσως δόθηκε περισσότερη έμφαση στους αριθμούς παρά στις αναπαραστάσεις.

Στο ερώτημα για την εικόνα 101, η αρχική σκέψη και των τριών ομάδων ήταν το άθροισμα των περιττών, όμως πάρα πολύ γρήγορα απορρίπτεται αυτή η εικασία από την Α΄ και Β΄ πιστεύοντας ότι υπάρχει πιο εύκολος τρόπος. Η Γ΄ ομάδα συνέχισε με αυτή τη μέθοδο ώσπου εγκατέλειψαν την προσπάθεια. Τελικά όλες οι ομάδες έφτασαν στο επιθυμητό αποτέλεσμα με τη διαφορά ότι οι Α' και Β' είχαν διαφορετικό τρόπο εύρεσης της εικόνας 101 και διέθεσαν λιγότερο χρόνο σε σχέση με τη Γ'. Επεξηγηματικά, οι ομάδες Α΄ και Β΄ επικεντρώθηκαν στις αναπαραστάσεις και στις ψηφίδες ενώ η Γ΄ και στα δύο με περισσότερη έμφαση στους αριθμούς. Ακόμη στη συνέντευξη, η Α΄ και η Β΄ ομάδα εξήγησαν ξανά τον τρόπο που βρήκαν την εικόνα 101. Πιθανόν να είχαν εστιάσει με τέτοιο τρόπο στην εύρεση της απάντησης που μετά απο κάποιο χρονικό διάστημα να ήταν για τις ομάδες το ίδιο εύκολο να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης. Αντίθετα, η ομάδα Γ΄ είχε δυσκολευτεί σε μεγάλο βαθμό και στη συνέντευξη σκέφτηκε ξανά από την αρχή πως θα το έλυνε με αποτέλεσμα να καταλήξει στον ίδιο τρόπο σκέψης.

Στο επόμενο ερώτημα με το γεωπίνακα, και οι 3 ομάδες θεώρησαν ότι έπρεπε να βρουν τον ελάχιστο αριθμό έτσι ώστε να μετασχηματιστούν ξανά σε τετράγωνα και το εμβαδόν τους να είναι πολλαπλάσιο του 3. Πιθανόν αυτή η σκέψη να σχετίζεται άμεσα με το οπτικό ερέθισμα που προσέφεραν οι αναπαραστάσεις σε όλα τα προηγούμενα ερωτήματα κάνοντας εμφανή τον ουσιώδη ρόλο στη δραστηριότητα. Στη συνέχεια, και οι 3 ομάδες έβαλαν δικά τους παραδείγματα και με διαφορετικό τρόπο η καθεμία έφτασε στο πρώτο επίπεδο γενίκευσης. Πριν φτάσουν στην τελική παρατήρηση (το τετράγωνο των πολλαπλασίων του 3 παραμένει πολλαπλάσιο του 3 ενώ το τετράγωνο των μη πολλαπλασίων χρειάζεται να προστεθεί ο αριθμός 2 για να γίνει) παρατηρείται και στις 3 ομάδες η τάση για γενίκευση βάζοντας δικά τους παραδείγματα είτε εικάζοντας. Τα μέλη της Α΄και της Β΄ ομάδας φαίνεται να τοποθετούν αρκετά παραδείγματα, σε αντίθεση με την ομάδα Γ' που είναι πιο διστακτική στη σκέψη αυτή. Πιο συγκεκριμένα, οι αρχικές υποθέσεις που έκανε η Β΄ και η Γ΄ ομάδα δεν ήταν ορθές (κατασκευή εξίσωσης : $x^2 + 2 = 3x$ και τα τετράγωνα των άρτιων είναι πολλαπλάσια του 3 αντίστοιχα) όμως κατέληξαν στο σωστό συμπέρασμα όπως και η Α' ομάδα. Επίσης η Β΄ ομάδα σε αντίθεση με τις Α' και Γ' έκανε και άλλες γενικεύσεις με βάση τις αναπαραστάσεις και το γεωπίνακα που καθιστούν τη δραστηριότητα πλούσια από συμπεράσματα, τα οποία παρόλο που δεν ήταν τα προβλεπόμενα ήταν ουσιώδη και αξιοσημείωτα. Όμως, ακόμη και οι 3 ομάδες φάνηκε να μην έχουν σκεφτεί ότι τα μη πολλαπλάσια του 3 μπορούν να γραφούν ως 3x+1 και 3x+2, όπως και τα πολλαπλάσια του 3 ως 3x.

Στις επόμενες ερωτήσεις με τις στήλες, οι ομάδες Α΄ και Β΄ με μεγάλη ευκολία βρήκαν τις σχέσεις ($Α^2+2 = Β, Α \cdot Β = Γ$) συσχετίζοντας τα ερωτήματα αυτά με την προηγούμενη δραστηριότητα. Από την άλλη μερία, τα μέλη της Γ΄ δυσκολεύτηκαν σε μεγαλύτερο βαθμό γιατί δεν μπορούσαν να παρατηρήσουν τον τρόπο που συνδέει κάθε παράδειγμα της Β στήλης με την Α. Στη συνέχεια, όλες οι ομάδες παρατήρησαν ότι η στήλη Γ είναι πολλαπλάσιο του 3 και μόνο η ομάδα Α΄ αυτή τη φορά είχε την σκέψη να δει γιατί και με ποιο τρόπο προκύπτει κάθε φορά η στήλη Γ πολλαπλάσιο του 3 , καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι όταν η στήλη Α είναι πολλαπλάσιο του 3 η στήλη Β δεν είναι και το αντίθετο. Η σκέψη αυτή προήλθε πιθανόν από προσωπικό ενδιαφέρον της Α΄ ομάδας χωρίς δηλαδή να παρακινηθεί από την εκπαιδευτικό ή από την εκφώνηση της άσκησης ή από δικά τους ή δοσμένα παραδείγματα. Έτσι, είχαν προετοιμαστεί για το επόμενο ερώτημα, σε αντίθεση με τις ομάδες Β΄ και Γ΄. Έπειτα, οι ομάδες θα πρέπει να συμπληρώσουν τα κενά για τους 411,520, και 704 με τις ομάδες Α΄ και Β΄ να θέλουν να κάνουν πράξεις για τον πρώτο αριθμό, σε αντίθεση με τη Γ' που τα μέλη της δεν σκέφτηκαν το ίδιο. Οι ομάδες Α' και Β' ξέρουν ότι για να βγει πολλαπλάσιο του 3 η στήλη Γ, αναγκαστικά η αιτία θα είναι ή η Α ή η Β, ενώ η Γ' υπέθεσε ότι καμία στήλη από τις Α και Β δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 αλλά προκύπτει το πολλαπλάσιο από το γινόμενο τους. Η ομάδα αυτή δυσκολεύεται αρκετά και αυτό αποτελεί εμπόδιο για την εξαγωγή συμπεράσματος για τους μεγάλους αριθμούς αλλά ταυτόχρονα και για την επιλογή των παραδειγμάτων που πρέπει να δώσουν. Πράγματι, στην ομάδα Γ' η εκπαιδευτικός παραθέτει 2 αριθμούς λόγω της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν. Στον αντίποδα, τα μέλη των ομάδων της Α΄ και Β΄ επέλεξαν με μεγαλύτερη ευκολία δύο αντιπροσωπευτικά παραδείγματα (μη πολλαπλάσιο και πολλαπλάσιο του 3). Στη συνέχεια, και οι 3 ομάδες κατάφεραν να φτάσουν στις μαθηματικές εκφράσεις 3x, 3x+1 και 3x+2 με διαφορετικό τρόπο η καθεμία. Η Α' ομάδα γράφοντας τους αριθμούς μέχρι το 14 έχοντας ως βάση το 3 (πχ $8=3\cdot 2+2 \rightarrow 3x+2$). Έπειτα, η Β' ομάδα με λίγη παραπάνω βοήθεια από την εκπαιδευτικό οδηγήθηκε μέσω των παρατηρήσεων της στην εξαγωγή συμπεράσματος. Τα μέλη της Γ΄ ομάδας, έκαναν περισσότερες προσπάθειες στις οποίες δόθηκαν αρκετά αντιπαραδείγματα από την εκπαιδευτικό με αποτέλεσμα να οδηγηθούν στο ορθό συμπέρασμα. Οι εκφράσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν μόνο από τις ομάδες Α΄ και Β΄ με σκοπό να γενικεύσουν για όλους τους φυσικούς αριθμούς, σε αντίθεση με τη Γ΄ που εγκατέλειψε τη προσπάθεια.

Σε κάθε ομάδα υπήρχε η ανταλλαγή απόψεων, η συνεργασία και η αλληλεπίδραση με την Γ΄ να έχει την μικρότερη ένταση μεταξύ των μελών της. Οι αναπαραστάσεις με τις ψηφίδες είτε στις εικόνες είτε στο γεωπίνακα βοήθησαν σε μεγάλο βαθμό όλες τις ομάδες με τη Β΄ να δίνει τη μεγαλύτερη έμφαση εξάγοντας διάφορα πορίσματα με βάση το οπτικό ερέθισμα που προσέφεραν. Συγκρίνοντας, τα μέλη των ομάδων Α΄ και Β΄ φαίνεται να έχουν πιο κοινές απόψεις και σκέψεις οι οποίες πολύ συχνά είχαν διαφοροποιήσεις. Αυτό το αποτέλεσμα είναι εύλογο αφού έφτασαν και οι δύο ομάδες στο μέγιστο επίπεδο γενίκευσης. Η ομάδα Γ΄ χειρίζεται με διαφορετικό τρόπο πολλά μέρη των δραστηριοτήτων. Αυτό συνέβη γιατί είχε περισσότερες δυσκολίες με τελική απόρροια να μην μπορέσει να απαντήσει στην τελευταία απαιτητική ερώτηση. Έτσι, είναι λογικό ότι αποκλίνει από τις άλλες ομάδες.

5. Συμπεράσματα - Συζήτηση

5.1 Ο ρόλος των γενεσιουργών παραδειγμάτων στη μετάβαση για γενίκευση

Η χρήση των δοσμένων εικόνων από τις ομάδες Α’ και Β’ είναι γενικευμένη, όμως οι μαθητές δεν δημιούργησαν ένα γενικευμένο επιχείρημα που δίνει απάντηση για κάθε εικόνα (ΠΕ). Σε αντίθεση με την Γ΄ ομάδα που δεν παρατήρησε αν υπάρχει κάποιο μοτίβο στις αρχικές εικόνες και η χρήση τους δεν ήταν ούτε εμπειρική ούτε γενικευμένη (non generic treatment) με αποτέλεσμα να μην συνεισφέρουν σε περαιτέρω γενίκευση (ΜΠ). Ο ρόλος των παραδειγμάτων αυτών δεν βοήθησε τις μαθήτριες να γενικεύσουν αφού αντιμετωπίστηκε ως γεωμετρικό ΄΄αντικείμενο΄΄ από το οποίο βρέθηκαν δεδομένα για να συμπληρωθούν τα κενά.

Για τις ομάδες Α’ και Β’, η γενικευμένη χρήση των εικόνων που αποτέλεσαν γενεσιουργά παραδείγματα βοήθησε αποκλειστικά στην επιχειρηματολογία των μαθητών (ΠΚ) με σημασιολογικό συλλογισμό οδηγώντας τους στη γενεσιουργή απόδειξη. Από την άλλη πλευρά, η Γ΄ ομάδα αντιλαμβάνεται αριθμητικά το μοτίβο (συντακτικός συλλογισμός), με τις εικόνες να αποτελούν γενεσιουργά παραδείγματα. Έτσι, οι 3 αρχικές εικόνες έπαιξαν τον πιο σπουδαίο ρόλο σε αυτού του είδους γενίκευση.

Οι μαθητές και των τριών ομάδων βρίσκουν το γενικευμένο τρόπο μετασχηματισμού των εικόνων 1,2,3 δηλαδή αντίστοιχα των αριθμοί 3^2,4^2και 5^2 που είναι κατασκευασμένοι στον ψηφιακό γεωπίνακα στηρίζοντας το επιχείρημα τους στα δοσμένα παραδείγματα (ΠΚ).Τα παραδείγματα που τοποθετούνται από τους μαθητές όλων των ομάδων έχουν αρχικά εμπειρική χρήση αλλά στη συνέχεια αποτελούν γενεσιουργά αφού οδηγήθηκαν στο σωστό συμπέρασμα. Αυτά τα παραδείγματα βοήθησαν τους μαθητές και έπαιξαν σημαντικό ρόλο στη δημιουργία δύο κατηγοριών των αριθμών αλλά όχι στο μεγαλύτερο στάδιο γενίκευσης που είναι οι κατηγορίες πολλαπλάσιο του 3, πολλαπλάσιο του 3+1 και πολλαπλάσιο του 3+2. Η Β΄ ομάδα έδωσε ακόμη δύο επιπλέον παραδείγματα που τα χρησιμοποιήσαν με γενικευμένο τρόπο (αφού δεν έκαναν τις πράξεις για να ελέγξουν την εικασία) διστάζοντας να κάνουν πράξεις επειδή το μοτίβο επαναλαμβάνεται επ΄άπειρον.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές και των τριών ομάδων χρειάστηκε να παρατηρήσουν αρκετούς αριθμούς (πληρούν τα κριτήρια των γενεσιουργών παραδειγμάτων) της στήλης Α μέχρι να καταλάβουν τα κοινά δομικά στοιχεία που έχουν και να οδηγηθούν στη σχέση που συνδέει και τις 3 στήλες. Έτσι, τα δοσμένα παραδείγματα συνεισφέρουν εποικοδομητικά στη δημιουργία του γενικευμένου επιχειρήματος με παραγωγικό τρόπο (ΠΚ) κάνοντας εμφανές το βοηθητικό τους ρόλο για την κατανόηση της σχέσης των στηλών Α και Β. Συμπερασματικά, είναι εμφανές ότι ο ρόλος των παραδειγμάτων είναι σε μεγάλο βαθμό βοηθητικός για τη μετάβαση κάθε φορά σε ένα μεγαλύτερο στάδιο γενίκευσης από αυτό που ήδη βρίσκονται οι μαθητές.

Οι μαθητές της Α΄ ομάδας έχοντας τη περιέργια να βρουν την αιτία που η στήλη Γ είναι πάντα πολλαπλάσιο του 3 εικάζουν ότι τα δοσμένα παραδείγματα της στήλης Β είναι πολλαπλάσια του 3. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούνται εμπειρικά και τελικά αποτελούν αντιπαραδείγματα. Χωρίς να είναι γενεσιουργά, έχουν βοηθητικό ρόλο στη μετάβαση για την κατανόηση του επαναλαμβανόμενου μοτίβου. Έτσι, τα αντιπαραδείγματα μαζί με τα γενεσιουργά στις στήλες Α και Β οδήγησαν στην κατασκευή του ορθού γενικευμένου επιχειρήματος βασιζόμενο σε αυτά (ΠΚ). Αντίθετα, οι άλλες δύο ομάδες δεν σκέφτηκαν μόνοι τους να βρουν την αιτία που κάνει τη στήλη Γ πάντα πολλαπλάσιο του 3.

Όλα τα παραδείγματα που έδωσαν στη συνέχεια οι μαθητές όλων των ομάδων χρησιμοποιήθηκαν με εμπειρικό τρόπο εκτός από ένα που δόθηκε από την Α' ομάδα. Η γενικευμένη χρήση του οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η στήλη Γ θα είναι αναγκαστικά πολλαπλάσιο του 3 λόγω της Α. Ο ρόλος των υπολοίπων παραδειγμάτων δεν ωθεί τους μαθητές σε μεγαλύτερο στάδιο γενίκευσης αλλά τους δίνει την επιβεβαίωση ότι αυτό το μοτίβο επαναλαμβάνεται για οποιοδήποτε αριθμό (είτε δοσμένο στη δραστηριότητα είτε παράδειγμα μαθητών).

Στη συνέχεια, οι μεγάλοι αριθμοί της δραστηριότητας δεν έχουν ούτε γενικευμένη χρήση (non generic treatment) ούτε συνεισφέρουν στη κατασκευή επιχειρήματος για τη γενίκευση (ΜΠ). Όμως αυτοί οι αριθμοί ήταν η αφορμή για να αποτελέσουν οι μικρότεροι αριθμοί γενεσιουργά παραδείγματα και να κατασκευάσουν το γενικευμένο επιχείρημα ότι όλοι οι αριθμοί κατηγοριοποιούνται ως πολλαπλάσια του 3 και μη πολλαπλάσια του 3 (ΠΚ). Συνοπτικά, ο ρόλος των μεγάλων αριθμών ήταν προωθητικός για να μετατραπούν οι μικροί αριθμοί του πρώτου πίνακα σε γενεσιουργά παραδείγματα και να οδηγήσουν σε ένα μεγαλύτερο στάδιο γενίκευσης.

Στη συνέχεια οι μεγάλοι αριθμοί (είτε δοσμένοι από την εκπαιδευτικό είτε από τους μαθητές) χρησιμοποιήθηκαν ως ΄΄αντικείμενα΄΄ για να κατανοήσουν οι μαθητές όλων των ομάδων σε ποια κατηγορία ανήκουν με το γενικευμένο τρόπο που είχαν βρει πριν. Πάλι όμως, δεν έχουν εμπειρική χρήση αλλά ούτε και γενικευμένη (non generic treatment) με αποτέλεσμα να μην συνεισφέρουν στη γενίκευση (ΜΠ). Έτσι, τα παραδείγματα αυτά ούτε ανασταλτικό ούτε βοηθητικό ρόλο έχουν στη δραστηριότητα απλά δρουν ως αριθμητικά ΄΄αντικείμενα΄΄ ή αλλιώς ως απλοί αριθμοί για να κατανοηθεί σε μεγαλύτερο βαθμό το μοτίβο.

Οι μαθητές της Α' και Β' ομάδας έφτασαν στο μεγαλύτερο επίπεδο γενίκευσης (3 κατηγορίες) χρησιμοποιώντας τους δοσμένους μικρούς αριθμούς που πληρούν τα κριτήρια για να αποτελούν γενεσιουργά παραδείγματα. Έτσι αυτά, συνεισφέρουν στη κατασκευή ενός γενικευμένου επιχειρήματος (ΠΚ) και βοηθούν στο πέρασμα για τη γενίκευση. Ο ρόλος των παραδειγμάτων ήταν πολύ βοηθητικός για το επόμενο στάδιο που είναι η δημιουργία μαθηματικών εκφράσεων και τελικά η γενίκευση. Από την άλλη μεριά, η Γ΄ ομάδα αντιλήφθηκε ότι υπάρχουν 3 κατηγορίες από τη συχνότητα που επαναλαμβάνεται το μοτίβο. Έτσι, οι μικροί αριθμοί δεν αποτέλεσαν γενεσιουργά παραδείγματα (ΜΠ). Η συχνότητα επανάληψης τους όμως έπαιξε περισσότερο σημαντικό ρόλο παρά οι ίδιοι δοσμένοι αριθμοί.

Χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή x οι μαθητές της Α΄ ομάδας αιτιολόγησαν με συντακτικό συλλογισμό πως βρήκαν τις εκφράσεις 3x, 3x+1, 3x+2 μέσα από τα γενεσιουργά παραδείγματα. Χωρίς τη συνεισφορά των παραδειγμάτων στη γενίκευση (ΠΚ) οι μαθητές δεν θα μπορούσαν να προχωρήσουν στο επόμενο στάδιο. Έτσι, ο ρόλος τους ήταν ουσιαστικός για τη μετάβαση στη γενίκευση. Οι μαθητές της Β΄ και Γ΄ ομάδας μετέτρεψαν τις λεκτικές φράσεις πολλαπλάσιο του 3, πολλαπλάσιο του 3 + 1 και πολλαπλάσιο του 3 + 2 σε μαθηματικές. Οπότε σε αυτή την περίπτωση τα παραδείγματα με τους μικρούς αριθμούς βοήθησαν έμμεσα στη γενίκευση και δεν αποτέλεσαν ξανά γενεσιουργά.

Κατά τη διάρκεια της γενίκευσης με τις μαθηματικές εκφράσεις οι μαθητές της Α΄ και Β’ ομάδας δίνουν ένα παράδειγμα μόνοι τους για να ελέγξουν (εμπειρική χρήση) αν οι μαθηματικές εκφράσεις είναι ορθές για τις στήλες.Τελικά, οι ομάδας Α΄ και Β΄ κατάφεραν να δείξουν με μαθηματικό τρόπο ότι όλοι οι αριθμοί της Γ στήλης είναι πάντα πολλαπλάσια του 3 σε αντίθεση με την Γ΄ ομάδα που εγκατέλειψε την προσπάθεια.

Όπως ειπώθηκε παραπάνω στο θεωρητικό πλαίσιο ένα παράδειγμα δεν είναι γενεσιουργό μέχρι να το δει με άλλη οπτική γωνία ο μαθητής που το χειρίζεται (Mason & Pimm, 1984). Αυτό συμφωνεί σε αρκετά μεγάλο βαθμό με τα συμπεράσματα αυτής της έρευνας όπου διαπιστώθηκε ότι ίδια παραδείγματα αρχικά αξιοποιήθηκαν ως ειδικά αλλά στη συνέχεια ως γενεσιουργά με απόρροια να αποτελούν αρωγοί στη βαθύτερη κατανόηση της απόδειξης. Επίσης, στη παρούσα ερευνητική εργασία υπήρχε ποικιλία συμπερασμάτων που επιβεβαιώνουν και τις 3 υποκατηγορίες για την παραγωγική χρήση δοσμένων παραδειγμάτων στην απόδειξη (ΠΕ,ΠΚ,ΜΠ). Ακόμη, στις κατηγορίες των Aricha-Metzer και Zaslavsky (2017) για τη χρήση των παραδειγμάτων που είναι εμπειρική ή γενικευμένη προστέθηκε και η κατηγορία αντικείμενο. Με τον όρο αυτό νοείται ένα παράδειγμα από το οποίο αντλούνται τα απαραίτητα δεδομένα για την εξαγωγή συμπεράσματος. Επίσης, επιβεβαιώνεται μέσα από τη συγκεκριμένη εργασία ότι κάποιοι μαθητές εστιάζουν σε ένα είδος συλλογισμού και χρησιμοποιούν τον άλλο περιστασιακά (Alcock & Inglis, 2008). Σε αντίθεση όμως, με τα λεγόμενα των Weber,Alcock και Radu (2005) η ομάδα Γ΄ δεν χρησιμοποίησε σε μεγαλύτερο βαθμό το σημασιολογικό συλλογισμό στην αιτιολόγιση όπως έχει διαπιστωθεί σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές.

5.2 Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην εξέλιξη της σκέψης

Στη δραστηριότητα 1 οι αναπαραστάσεις έχουν πρωταγωνιστικό ρόλο και κάθε ομάδα τις διαχειρίζεται διαφορετικά έτσι ώστε να εξάγει συμπεράσματα. Δηλαδή, οι μαθητές της Α΄ και Β΄ ομάδας παρατήρησαν λεπτομερώς τις εικόνες και τις χρησιμοποίησαν ως εργαλείο. Άρα ο ρόλος τους ήταν βοηθητικός όμως ταυτόχρονα υποδεέστερος σε σχέση με την αριθμητική παρατήρηση του μοτίβου που οδήγησε τους μαθητές στο τελικό τους πόρισμα. Από την άλλη μεριά, οι μαθητές της Γ΄ ομάδας δεν χρησιμοποίησαν τις αναπαραστάσεις, το οποίο υποδηλώνει ότι ο ρόλος τους δεν ήταν ούτε βοηθητικός αλλά ούτε ανασταλτικός σε αυτή την περίπτωση.

Το αποτέλεσμα της εικόνας 101 βρέθηκε από την Α΄ και τη Β΄ ομάδα μέσω των αναπαραστάσεων εξ'ολοκλήρου (γενεσιουργή απόδειξη), το οποίο κάνει φανερό ότι οι μαθητές κατανόησαν τις αναπαραστάσεις με ουσιώδη τρόπο. Η χρήση αυτών ως μοναδικό εργαλείο για την εύρεση του αποτελέσματος αναδεικνύει την αναγκαιότητα της ύπαρξης τους στη δραστηριότητα. Από την άλλη μεριά, ο ρόλος των αναπαραστάσεων για την Γ΄ ομάδα ήταν απλά ενισχυτικός γιατί το συμπέρασμα τους δεν στηρίχτηκε ολοκληρωμένα σε αυτές αλλά συνδυάστηκε με το παρατηρούμενο αριθμητικό μοτίβο.

Η οπτικοποίηση των εικόνων στο ψηφιακό γεωπίνακα ήταν τόσο ισχυρή που οι μαθητές όλων των ομάδων είχαν λανθασμένα την άποψη ότι τα μετασχηματισμένα σχήματα θα πρέπει να είναι πάλι τετράγωνα. Ο ρόλος των αναπαραστάσεων σε αυτή τη περίπτωση είναι ανασταλτικός. Στη συνέχεια, οι μαθητές της Α΄ ομάδας έκαναν το μετασχηματισμό χωρίς τη βοήθεια του ψηφιακού γεωπίνακα με αποτέλεσμα να τον χρησιμοποιήσουν ως εργαλείο για να επιβεβαιώσουν την εικασία τους. Ακόμη, μέσω αυτού κατανόησαν οπτικά πότε ένα εμβαδόν ενός σχήματος είναι πολλαπλάσιο του 3, το οποίο αναδεικνύει το σπουδαίο ρόλο της οπτικοποίησης σε μία δραστηριότητα. Αντίθετα, οι μαθητές των άλλων ομάδων χρησιμοποίησαν τις ψηφιακές αναπαραστάσεις ως εργαλείο έτσι ώστε να μετασχηματίσουν τις εικόνες, κάνοντας εμφανές ότι οπτικά πότε ένα εμβαδόν ενός σχήματος είναι πολλαπλάσιο του 3 οπτικά πότε ένα εμβαδόν ενός σχήματος είναι πολλαπλάσιο του 3βασίστηκαν εξ' ολοκλήρου στις αναπαραστάσεις και ο ρόλος τους ήταν στο μέγιστο βαθμό βοηθητικός.

Ακόμη, οι μαθητές της Α΄ ομάδας οπτικοποίησαν τα πολλαπλάσια του 3 και τα μη πολλαπλάσια του 3 + 2 μέσω των αναπαραστάσεων το οποίο αναδεικνύει τον βοηθητικό τους ρόλο στη σκέψη τους. Οι μαθητές της Β΄ ομάδας παρατήρησαν υπάρχει ένα άλλο μοτίβο που δημιουργείται από τη σχέση μεταξύ των μετασχηματισμένων εικόνων. Είναι φανερό ότι σε αυτή την περίπτωση, η παρατήρηση των οπτικών αναπαραστάσεων έχει μόνη της την ισχύ για κατασκευή γενικευμένων επιχειρημάτων. Ακόμη, οι μαθητές της ίδιας ομάδας έχοντας ως αφορμή τις αναπαραστάσεις ήθελαν να αποδείξουν με μαθηματικό τρόπο ότι ισχύει η εικασία που έκαναν, αναδεικνύοντας τον ενισχυτικό ρόλο τους στη δραστηριότητα. Ενώ, η Γ΄ ομάδα δεν χρησιμοποίησε ως εργαλείο τις αναπαραστάσεις για περαιτέρω δικά τους συμπεράσματα όπως οι άλλες ομάδες, το οποίο αναδεικνύει ότι ο βοηθητικός τους ρόλος δεν είναι ισχυρός.

Στη δημιουργία των μαθηματικών εκφράσεων της δραστηριότητας 2 οι μαθητές της Β΄ και Γ΄ ομάδας δεν χρησιμοποίησαν τις αναπαραστάσεις με αποτέλεσμα να μην έχουν ενισχυτικό ρόλο σε αυτού του είδους τη γενίκευση, σε αντίθεση με την Α΄

ομάδα. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν βοήθησαν έμμεσα για την μετάβαση τους στο μεγαλύτερο επίπεδο γενίκευσης αφού οι μαθητές της Α΄ και Β΄ ομάδας συνδύασαν τα συμπεράσματα από τις αναπαραστάσεις του γεωπίνακα με την παρατήρηση τους για την εξαγωγή συμπεράσματος. Αντίθετα, η ομάδα Γ΄ δεν τις χρειάστηκε για να οδηγηθεί στο τελικό της συμπέρασμα, αναδεικνύοντας την εστίαση των μαθητών στην τυπική αιτιολόγηση (συντακτικός συλλογισμός).

Συνοπτικά, είναι εμφανές ότι οι αναπαραστάσεις είχαν σε μεγάλο βαθμό ενισχυτικό ρόλο στη δημιουργία επιχειρημάτων και στην αιτιολόγηση των εικασιών, το οποίο συμφωνεί με τα λεγόμενα του Weber (2009). Μέσω της οπτικοποίησης των εικόνων οι μαθητές έδεσαν τις σκέψεις φτάνοντας στο ζητούμενο. Ακόμη, ο ρόλος των αναπαραστάσεων σύμφωνα με τους David και Tomaz (2012) είναι διττός, δηλαδή άλλοτε χρησιμοποιείται ως εργαλείο και άλλοτε ως αντικείμενο, με τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας να αναδεικνύουν μόνο την εργαλειακή του φύση.

5.3 Συζήτηση - Επέκταση έρευνας

Οι δύο αυτές δραστηριότητες περιείχαν αρκετά παραδείγματα, όπως και εργαλεία (αναπαραστάσεις και γεωπίνακας) τα οποία οι μαθητές έπρεπε να χρησιμοποιήσουν για να γενικεύσουν. Αξιοσημείωτο θα ήταν να ερευνηθεί πως οι μαθητές διαχειρίζονται δραστηριότητες στις οποίες δεν δίνονται παραδείγματα και εργαλεία από κάποια πηγή αλλά να είναι απαραίτητο να δημιουργήσουν δικά τους έτσι ώστε να εξάγουν συμπεράσματα. Η παρακάτω εκφώνηση θα μπορούσε να αποτελεί μέρος μίας δραστηριότητας, στην οποία ο μαθητής θα έδινε δικά του παραδείγματα και πιθανόν να έκανε κάποια αναπαράσταση έτσι ώστε να οικειοποιηθεί με το ερώτημα και να κατέληγε στα συμπεράσματα του μέσω μιας γενεσιουργής απόδειξης.

Ερώτημα

Άρτιος ή περιττός είναι το άθροισμα 3 περιττών;
Συμβαίνει το ίδιο στο άθροισμα 14 περιττών;
Δικαιολόγησε την απάντηση σου.

6. Βιβλιογραφία

Alcock , L., & Inglis , M. (2008). Doctoral students’ use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 111-129.

Alcock, L., & Weber, K. (2010). Case studies from a transition-to-proof course. In F. Hitt, D. Holton, & P. Thompson, *Referential and syntactic approaches to proving* (pp. 93-114).

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Aricha-Metzer, I., & Zaslavsky, O. (2017). The nature of productive and non-productive example-use in proving. *Journal of Mathematical Behavior, 53,* 304-322.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children*, 216-235.

Bills, L., & Rowland, T. (1999). Examples, generalization and proof. *Research in Mathematics Education, 1*(1), 103-116.

Bjørkås, J., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2019, February). Measuring area on the geoboard focusing on using flexible strategies. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Brown, L., & Coles, A. (2000). Same/different: a 'natural' way of learning mathematics. *PME, 2*, pp. 2-113.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2011). Is this a coincidence? The role of examples in fostering a need for proof. *ZDM, 43*(2), 269-281.

Carroll, J. (1992). Using the Geoboard for teaching primary mathematics. *Mathematics: meeting the challenge* , 283-288.

Cooper, J., Walkington, C., Williams, C., Akinsiku, O., Kalish, C., Ellis, A., et al. (2011). Adolescent reasoning in mathematics: Exploring middle school students' strategic approaches in empirical justifications. *In Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, *33.*

Dahlberg, R., & Housman, D. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics, 33*(3), 283-299.

David, M. M., & Tomaz, V. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 413-431.

Dreyfus, T., Nardi, E., & Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving in the classroom. In G. Hanna , & M. De Villiers. (Eds.), *New ISMI Study Series* (Vol. 15).

Epstein, D., & Levy, S. (1995). Experimentation and proof in mathematics. *Notice of the AMS, 42*(6), 670-674.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Flyvbjerg, B. (2011). Case Study. The Sage Handbook of Qualitative Research.

Geoboard [Computer software]. (2017). *Math Learning Center*.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction, 2*, 185.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 369-428.

Hunting, R. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(2), 145-165.

Iannone, P., Inglis, M., Mejía-Ramos, J., Simpson, A., & Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 1-14.

Knuth, E., Zaslavsky, O., & Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *Journal of Mathematical Behavior, 53,* 256-262.

Ko, Y., & Knuth, E. (2013, 32(1), 20-35.). Validating proofs and counterexamples across content domains : Practices of importance for mathematics majors. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(1), 20-35.

Komatsu, K. (2016). A framework for proofs and refutations in school mathematics: Increasing content by deductive guessing. *Educational Studies in Mathematics, 92*(2), 147-162.

Larsen, S., & Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 205-216.

Leron, U., & Zaslavsky, O. (2013). Generic proving : Reflections on scope and method. *For the Learning of Mathematics, 33*(3), 24-30.

Mali, A. (2016). Lecturers' tools and strategies in university mathematics teaching : An ethnographic study.

Martin , T., & McCrone, S. (2003). Classroom factors related to geometric proof construction ability. *The Mathematics Educator, 7*(1), 18-31.

Martin, T., McCrone, S., & Bower, M. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 95-124.

Mason, J. (2019). Relationships between proof and examples : Comments arising from the papers in this issue. *The Journal of Mathematical Behavior, 53*, 339-347.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277-289.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Mills, M. (2014). A framework for example usage in proof presentations. *The Journal of Mathematical Behavior, 33,* 106-118.

Movshovitz-Hadar, N. (1988). Stimulating presentations of theorems followed by responsive proofs. *For the Learning of Mathematics, 8*(2), 12-30.

Mueller, M., Yankelewitz, D., & Maher, C. (2012). A framework for analyzing the collaborative construction of arguments and its interplay with agency. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 369-387.

Ozgur, Z., Ellis, A., Vinsonhaler, R., Dogan, M., & Knuth, E. (2017). From examples to proof: Purposes, strategies, and affordances of example use. *The Journal of Mathematical Behavior, 53,* 284-303.

Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: The case of triangular numbers. *ZDM, 43*(2), 257-267.

Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-Examples that (only) Prove and Counter-Examples that (Also) Explain. *FOCUS on Learning Problems in mathematics, 19*(3), 49-61.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching Mathematics: Emergence from psychology. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 205-235.

Reid, D., & Vargas, E. (2018). When is a generic argument a proof? *Advances in mathematics education research on proof and proving*, 239-251.

Rø, K., & Arnesen, K. (2020). The opaque nature of generic examples: The structure of student teachers' arguments in multiplicative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*.

Rowland, T. (1998). Conviction, explanation and generic examples. *ISSN, 1-3,* 366.

Rowland, T. (2002). Generic proofs in number theory. *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction*, 157-183.

Sandefur, J., Mason, J., Stylianides,, G., & Watson, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics, 83*(3), 323-340.

Simon, M., & Blume, G. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 3-31.

Stylianides, G., Sandefur, J., & Watson, A. (2016). Conditions for proving by mathematical induction to be explanatory. *The Journal of Mathematical Behavior, 43*, 20-34.

Vollstedt, M., & Rezat, S. (2019). An Introduction to Grounded Theory with a Special Focus on Axial Coding and the Coding Paradigm. *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education*, 81-100.

Vygotsky, L. (1979). The development of higher forms of attention. *Soviet Psychology, 18*(1), 67-115.

Vygotsky, L.S. (1978). Mind in society: The development of the higher psychological processes. Harvard university press: Harvard university press.

Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM, 43*(2), 283-294.

Watson, A., & Mason, J. (2006). Mathematics as a constructive activity : Learners generating examples. *ZDM*.

Watson, A., & Shipman, S. (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts. *Educational Studies in Mathematics, 2*, 97-109.

Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(2-3), 200-208.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics, 56*(2-3), 209-234.

Weber, K., Alcock, L., & Radu, I. (2005). Undergraduates'use of examples in a transition-to-proof course. *Proceedings of the 26th conference for the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education.*

Yopp, D., & Ely, R. (2015). When does an argument use a generic example? *Educational Studies in Mathematics, 91*(1), 37-53.

Zaslavsky, O. (2014). Thinking with and through examples. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Ed.), *roceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, 1*, pp. 21-34. Vancouver, Canada.

Zaslavsky, O. (2018). Genericity, Conviction and Conventions : Examples that Prove and Examples that don't Prove. *Advances in mathematics education research on proof and proving*, 283-298.

Zaslavsky, O., Aricha-Metzer, I., Thoms, M., Sabouri, P., & Brulhardt, A. (2016). Generic Use of Examples for Proving. *NCTM Research Conference San Francisco*.

Zaslavsky, O., Nickerson, S., Stylianides, A., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2012). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. *Proof and Proving in Mathematics Education, 15*, pp. 215-229.

Zazkis, R., & Chernoff, E. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 195-208.

Zazkis, R., & Hazzan, O. (1998). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(4), 429-439.