ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Εισαγωγή στη Θεωρία Μητροειδών

Μερκούριος-Χρήστος Κ. Παπαμιχαήλ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Σταύρος Κολλιόπουλος, Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ

Οκτώβριος 2020

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Εισαγωγή στη Θεωρία Μητροειδών

Μερκούριος-Χρήστος Κ. Παπαμιχαήλ
Α.Μ.: 1115201400148

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Σταύρος Κολλιόπουλος, Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε μια εισαγωγή στη Θεωρία Μητροειδών μέσα από κάποια βασικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Μελετάμε την έννοια της *ανεξαρτησίας*, μέσω της διακριτής δομής του *μητροειδούς*. Θα δούμε πως η ανεξαρτησία εμφανίζεται στη Θεωρία Γραφημάτων και την Γραμμική Άλγεβρα και θα αποδείξουμε κάποιες θεμελιώδεις ιδιότητες που εμφανίζουν τα ανεξάρτητα σύνολα. Στην συνέχεια, αξιωματικοποιούμε τις ιδιότητες διατυπώνοντας διαφορετικές δομές ανεξαρτησίας ή *αναπαραστάσεις* μητροειδών και αποδεικνύουμε την ισοδυναμία τους. Τέλος, εξετάζουμε την σύνδεση των μητροειδών με *προβλήματα βελτιστοποίησης*, όπου ορίζουμε τον *άπληστο αλγόριθμο*. Εκεί αποδεικνύουμε ότι η βελτιστότητα του αλγορίθμου εξαρτάται από τον βαθμό, που η είσοδος προσεγγίζει την οργάνωση του μητροειδούς.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Διακριτά Μαθηματικά

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: μητροειδές, γραμμική ανεξαρτησία, άπληστος αλγόριθμος, διακριτές δομές, βελτιστοποίηση, γραμμική άλγεβρα, θεωρία γραφημάτων

ABSTRACT

In this thesis we present an introduction to Matroid Theory through some key results from the literature. We study the notion of *independence*, through the discrete structure of the *matroid*. We will see how the independence is presented in Graph Theory and Linear Algebra and prove some fundamental properties of the independent sets. Next, we axiomatize these properties stating different independence structures or matroid *representations* and prove their equivalence. Lastly, we examine the connection between matroids and *optimization problems*, where we define the *greedy algorithm*. There, we prove that the algorithm's optimality depends on how close the input is to a matroid.

SUBJECT AREA: Discrete Mathematics

KEYWORDS: matroid, linear independance, greedy algorithm, discrete structure, optimazation, linear algebra, graph theory

Στην οικογένειά μου,
και σε όσους ήταν εκεί όταν οι αποδείξεις δεν έβγαιναν

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την παρούσα εργασία ολοκληρώνω τις σπουδές μου στο Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με στήριξαν κατά την διάρκεια των σπουδών μου σε ένα υψηλών απαιτήσεων πρόγραμμα σπουδών. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και ειδικότερα την μητέρα μου, η οποία κατέστησε την φιλοδοξία μου για ανώτατη εκπαίδευση πραγματικότητα.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω του καθηγητές και τις καθηγήτριες του Τμήματος, αλλά ιδιαιτέρα εκείνους και εκείνες που μου έδειξαν τον θαυμαστό κόσμο της θεωρητικής πληροφορικής. Σε αυτή την κατεύθυνση συνέβαλε ο επιβλέπων καθηγητής μου κ. Σταύρος Κολλιόπουλος, ο οποίος μου δίδαξε την αυστηρότητα και κομψότητα των αποδείξεων, τόσο μέσω των μαθημάτων του, όσο και μέσω της καθοδήγησης του στην παρούσα εργασία. Θα ήθελα, επίσης, να τον ευχαριστήσω για τον χρόνο που αφιέρωσε καθ' όλη την διάρκεια συγγραφής της εργασίας. Ακόμη, θέλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή του τμήματος κ. Γιάννη Εμίρη ο οποίος μου έδειξε την αξία της πρακτικής διαίσθησης πίσω από τα μαθηματικά.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές και φίλους που γνώρισα κατά την διάρκεια των σπουδών μου. Ιδιαίτερα, ευχαριστώ τον Νίκο Τσακαλωφά φοιτητή του ΔΠΜΣ ΑΛΜΑ για τις χρήσιμες παρατηρήσεις στα πρώτα στάδια της εργασίας. Όπως και την συμφοιτήτριά και φίλη μου Κατερίνα Ρουσσάκη, της οποίας τη συμπαράσταση καθ' όλα τα χρόνια της γνωριμίας μας εκτιμώ βαθύτατα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Θεωρία Μητροειδών εισήχθη από τον Hassler Whitney το 1935 [1, 2], ενώ είχε ανακαλυφθεί παράλληλα και ανεξάρτητα, από τον Ιάπωνα μαθηματικό Takeo Nakasawa [3]. Στο άρθρο του ο Whitney έδωσε τα αξιώματα ανεξαρτησίας και ονόμασε οποιαδήποτε δομή που ικανοποιεί αυτά τα αξιώματα, *μητροειδές*. Η κεντρική του παρατήρηση ήταν ότι αυτά τα αξιώματα παρέχουν μια αφαίρεση της έννοιας της *ανεξαρτησίας* που εμφανίζεται τόσο στα γραφήματα, όσο και στους πίνακες. Εξ αιτίας αυτού μεγάλο κομμάτι της ορολογίας, όπως θα δούμε και αργότερα, προέρχεται από την Θεωρία Γραφημάτων και την Γραμμική Άλγεβρα. Ένας άλλος σπουδαίος ερευνητής σε αυτή την περιοχή υπήρξε ο William Thomas Tutte, ο οποίος έγραψε ένα από τα πρώτα βιβλία στην Θεωρία Μητροειδών (1971), ως μια συλλογή διαλέξεων του συγγραφέα στην RAND Corporation το 1965 [2]. Τέλος, την σύνδεση μεταξύ Θεωρίας Μητροειδών και βελτιστοποίησης, την χρωστάμε στον Jack Edmonds [2], ο οποίος έδειξε ότι ένα μητροειδές μπορεί να οριστεί αλγοριθμικά, από την άπληστο αλγόριθμο και σε μια σειρά εργασιών διερεύνησε τις σχέσεις ανάμεσα στα μητροειδή και την πολυεδρική συνδυαστική [4].

Στην ελληνόφωνη βιβλιογραφία δεν υπάρχει κάποιο εισαγωγικό βιβλίο στην Θεωρία Μητροειδών, τουλάχιστον κατά την γνώση του συγγραφέα. Κάποιες αναφορές στην Θεωρία Μητροειδών μπορεί να βρει κανείς στα *Διακριτές Μαθηματικές Δομές για την Επιστήμη Υπολογιστών* [5] και στην ελληνική μετάφραση του *Introduction to Algorithms* [6, 7]. Παρ' όλα αυτά, έχουν γραφεί πλήθος εργασιών στην Ελληνική γλώσσα με θέμα την Θεωρία Μητροειδών. Αναφέρουμε σχετικά τις ακόλουθες διπλωματικές εργασίες [8, 9, 10, 11] και την διδακτορική διατριβή του Αθανάσιου Κουτσώνα [12]. Παρ' όλα αυτά, οι παραπάνω εργασίες εξετάζουν κάποιες πλευρές ή αποτελέσματα της Θεωρίας Μητροειδών, και δεν έχουν σαν σκοπό την εισαγωγή στο αντικείμενο.

Σε αυτό το πλαίσιο έρχεται η παρούσα εργασία ώστε να συμπληρώσει την υπάρχουσα βιβλιογραφία με μια Εισαγωγή στην Θεωρία Μητροειδών, για την Ελληνική γλώσσα. Η εργασία απευθύνεται σε προπτυχιακούς φοιτητές της Επιστήμης Υπολογιστών και των Μαθηματικών, οι οποίοι έχουν παρακολουθήσει κάποιο μάθημα Διακριτών Μαθηματικών. Δεν απαιτείται προϋπάρχουσα γνώση Θεωρίας Γραφημάτων ή Γραμμικής Άλγεβρας, αφού όλες οι απαραίτητες έννοιες ορίζονται εκ νέου. Σκοπός της εργασίας είναι να παράσχει στους ενδιαφερόμενους θεμελιώδεις έννοιες και ορισμούς, ώστε να διευκολύνεται η ανάγνωση εξειδικευμένων εργασιών ή συγγραμμάτων.

Κύριες πηγές για την παρούσα εργασία είναι τα εισαγωγικά συγγράμματα στην Αγγλική γλώσσα, *Matroid Theory* [1] του Αυστραλοαμερικάνου James G. Oxley καθηγητή στο Louisiana State University και το *Topics in Matroid Theory* [2] του καθηγητή του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης Λεωνίδα Σ. Πιτσούλη. Στην δομή της παρουσίασής μας θα ακολουθήσουμε το [2]. Παρ’ όλα αυτά, πολλές αποδείξεις, ιδιαίτερα στο Κεφάλαιο 3, προέρχονται από το [1].

Στην παρούσα εργασία θα κινηθούμε επαγωγικά προς τον ορισμό της έννοιας του μητροειδούς. Στο παρόν Κεφάλαιο, αναφέρουμε κάποιους στοιχειώδεις ορισμούς και παρατηρήσεις, που θα μας χρειαστούν παρακάτω. Ενώ, στο Κεφάλαιο 2, παρατηρούμε την εμφάνιση της ανεξαρτησίας στα δάση γραφημάτων και στα γραμμικώς ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων. Στο Κεφάλαιο 3, συγκεντρώνουμε τις παρατηρήσεις μας σε συστήματα αξιωμάτων. Έτσι, ορίζουμε διαφορετικές *αναπαραστάσεις* μητροειδών, όπου αποδεικνύονται ισοδύναμες. Στο Κεφάλαιο 4, βλέπουμε την σύνδεση των μητροειδών με προβλήματα βελτιστοποίησης. Εκεί ορίζουμε τον άπληστο αλγόριθμο και δείχνουμε έναν αλγοριθμικό χαρακτηρισμό για τα μητροειδή. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5, ανακεφαλαιώνουμε την προηγηθείσα συζήτηση. Αναφερόμαστε στα θέματα που δεν καλύψαμε όπως και σε διάφορες προεκτάσεις της Θεωρίας Μητροειδών.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε ορισμένες βασικές έννοιες οι οποίες θα μας χρειαστούν στην συνέχεια. Βασική πηγή για το παρόν κεφάλαιο είναι το πρώτο κεφάλαιο του [13], αν και παρόμοια θέματα παρουσιάζονται σε οποιοδήποτε προπτυχιακό βιβλίο διακριτών μαθηματικών. Θα αρχίσουμε με μερικές θεμελιώδεις έννοιες στις σχέσεις πάνω σε σύνολα στην Ενότητα 1.1. Ενώ στην Ενότητα 1.2 θα πατήσουμε στις έννοιες για τις σχέσεις που αναπτύξαμε και θα συζητήσουμε την κλειστότητα. Τέλος, στην Ενότητα 1.3 συζητάμε για τις διακριτές συναρτήσεις και συγκεκριμένα με την υπομετρικότητα. Οι ορισμοί που θα εισάγουμε εδώ, όπως και τα θεωρήματα θα τα χρησιμοποιήσουμε καθ' όλη την συνέχεια της εργασίας. Παρ' όλα αυτά αν είστε εξοικειωμένοι με τα θέματα αυτά μπορεί να προσπεράσει το παρόν κεφάλαιο και να συνεχίσει στο Κεφάλαιο 2. Μπορεί, σε κάθε περίπτωση να γυρίσει στο παρόν κεφάλαιο για τυχόν απορίες.

1.1 Σχέσεις

Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με την έννοια της σχέσης πάνω σε ένα σύνολο. Θα ορίσουμε τις σχέσεις ισοδυναμίας, σχέσεις μερικής διάταξης, ενώ θα αποδείξουμε ότι η σχέσεις ισοδυναμίας ορίζουν μια διαμέριση σε ένα σύνολο. Τα στοιχεία της διαμέρισης θα τα ονομάσουμε κλάσεις ισοδυναμίας. Τέλος, μέσω παραδείγματος, θα δείξουμε τα διαγράμματα Hasse, τα οποία θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα τις μερικές διατάξεις, αφού θα μας παρέχουν έναν τρόπο γραφικής αναπαράστασης.

1.1.1 Ορισμός Σχέσης

Ορισμός 1.1.1.1 (Σχέση). *Έστω δύο σύνολα A, B. Οποιοδήποτε υποσύνολο του καρτεσιανού τους γινομένου $R \subseteq A \times B$ ονομάζεται (δυαδική)* σχέση *(binary relation). Επιπλέον, αν $(a, b) \in A \times B$ ανήκει στην σχέση R θα γράφουμε $(a, b) \in R$ ή aRb.*

Παρατηρήστε ότι αφού ορίσαμε την σχέση ως ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων, η "σειρά" έχει σημασία δηλαδή μπορεί για παράδειγμα $(a, b) \in R$, αλλά $(b, a) \notin R$. Η έννοια της σχέσης στα μαθηματικά μοντελοποιεί κάτι πολύ γενικό και δεν υπονοεί, παρά μια πολύ βασική οργάνωση στο εσωτερικό της. Δίνουμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.1.1.1. *Έστω* $A = B = \{$*Το σύνολο των φοιτητών του Πανεπιστημίου Αθηνών*$\}$*. Πάνω στα* A, B *ορίζουμε την σχέση* $R = \{(a, b) \in A \times B \mid$ *ο/η* a *γνωρίζει τον/την* $b\}$*. Παρατηρήστε ότι για την σχέση που ορίσαμε ισχύουν τα παρακάτω.*

- *Αν* $(a, b) \in R$*, τότε δεν ισχύει απαραίτητα* $(b, a) \in R$*.*
- *Αν* $(a, b) \in R$ *και* $(b, c) \in R$*, ενδέχεται να μην έχει γνωρίσει ο* b *τον* a*, στον* c*, άρα να ισχύει* $(a, b) \notin R$*.*
- *Ακόμη θα υποστηρίζαμε σε μια μάλλον φιλοσοφική νότα, ότι δεν ισχύει απαραίτητα* (a, a)*.*

Έχοντας τα παραπάνω υπόψη ορίζουμε τώρα μερικές καλές ιδιότητες που ενδέχεται να έχει μία σχέση.

Ορισμός 1.1.1.2. *Έστω μια δυαδική σχέση* R *πάνω σε ένα σύνολο* A *καλείται:*

- ανακλαστική *αν* $\forall a \in A\ (a, a) \in R$*.*
- συμμετρική *αν* $\forall a, b \in A$*, αν* $(a, b) \in R$*, τότε* $(b, a) \in R$*.*
- αντισυμμετρική *αν* $\forall a, b \in A$ *με* $a \neq b$*, αν* $(a, b) \in R$*, τότε* $(b, a) \notin R$*.*
- μεταβατική *αν* $\forall a, b, c \in A$*, αν* $(a, b) \in R$ *και* $(b, c) \in R$*, τότε* $(a, c) \in R$*.*

1.1.2 Σχέσεις Ισοδυναμίας

Με τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τις σχέσεις έτσι έχουμε.

Ορισμός 1.1.2.1 (Σχέση Ισοδυναμίας)**.** *Έστω* R *μια δυαδική σχέση πάνω σε ένα σύνολο* A *καλείται* σχέση ισοδυναμίας*, αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Όταν δύο στοιχεία του* A *σχετίζονται με μια σχέση ισοδυναμίας θα συμβολίζουμε με* $a \sim b$*.*

Παραδείγματα σχέσης ισοδυναμίας είναι η ισότητα $=$ στους πραγματικούς αριθμούς. Επιπλέον από την θεωρία αριθμών μας είναι γνωστή η ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας.

Παράδειγμα 1.1.2.1. *Ορίζουμε την σχέση ισοϋπολοίπου* $modulo\ 5$ *πάνω στους ακεραίους. Θα λέμε ότι δύο αριθμοί* $a, b \in \mathbb{Z}$ *είναι ισοϋπόλοιποι* $modulo\ 5$*, η ευκλείδεια διαίρεσή τους με το* 5 *δίνει το ίδιο υπόλοιπο. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι η σχέση ισοϋπολοίπου* $modulo\ 5$ *πληρεί τα κριτήρια του Ορισμού 1.1.1.2. Η απόδειξη αυτού του ορισμού είναι μια καλή άσκηση.*

Δεδομένου ενός συνόλου και μιας σχέσης ισοδυναμίας $\sim$ για κάποιο $a \in A$ μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο όλων των στοιχείων του A ισοδύναμα του a. Έτσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1.2.2 (Κλάση Ισοδυναμίας). *Έστω ένα σύνολο A και μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ πάνω στο A. Για ένα στοιχείο $a \in A$ θα συμβολίζουμε με $[a]$ το σύνολο.*

$$[a] = \{b \in A | a \sim b\}$$

Το $[a]$ θα το λέμε κλάση ισοδυναμίας *(equivalence class) του a.*

Μένοντας στην θεωρία αριθμών για να αντλήσουμε τα παραδείγματά μας. Θυμηθείτε ότι όταν διαιρείται ένας αριθμός με το n το υπόλοιπο παίρνει n δυνατές τιμές, $0, 1, ..., n-1$. Επεκτείνοντας το Παράδειγμα 1.1.2.1 αν διαιρέσουμε οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό με το 5 θα πάρουμε ένα από τα υπόλοιπα $0, 1, ..., 4$. Συνεπώς στην σχέση ισοϋπολοίπου $modulo\ 5$ έχουμε πέντε κλάσεις ισοδυναμίας. Αν συμβολίσουμε τις κλάσεις αυτές ως $[0], [1], [2], ..., [4]$, παρατηρήστε ότι κάθε άλλος αριθμός θα ανήκει σε μία από αυτές τις κλάσεις. Δηλαδή, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.2.2 μπορούμε να γράψουμε $[25]$, αλλά κατανοούμε ότι $[25] = [0]$, αφού οι αριθμοί $25, 0$ είναι ισοϋπόλοιποι $modulo\ 5$. Δηλαδή η εικασία που διαμορφώνουμε είναι ότι αν $a \sim b$, τότε $[a] = [b]$. Την εικασία αυτή αποδεικνύουμε στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.1.2.1. *Έστω μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ πάνω σε ένα σύνολο A. Έστω $a, b \in A$. Τότε $[a] = [b]$, αν και μόνο αν $a \sim b$.*

Απόδειξη. $[\Rightarrow]$ Αν $[a] = [b]$, τότε ισχύει $a \sim b$, από τον Ορισμό 1.1.2.2.

$[\Leftarrow]$ Για την άλλη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι $a \sim b$. Έστω κάποιο $d \in [b]$, άρα $b \sim d$. Από μεταβατικότητα $a \sim d$, άρα $d \in [a]$. Συνεπώς, $[a] \supseteq [b]$. Από την άλλη πλευρά έστω $e \in [a]$, άρα $a \sim e$. Όμως από συμμετρία ισχύει $b \sim a$. Άρα πάλι από μεταβατικότητα $b \sim e$, δηλαδή $e \in [b]$. Συνεπώς $[b] \supseteq [a]$. Τελικά δείξαμε ότι $[a] = [b]$.

Ο.Ε.Δ.

Ένα άλλο γεγονός που αληθεύει στην σχέση ισοϋπόλοιπο είναι ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει αποτελούν μαι διαμέριση του συνόλου των ακεραίων αριθμών. Κάθε ακέραιος θα βρίσκεται μόνο σε ένα από τα $[0], [1], ..., [4]$ και κάθε κλάση ισοδυναμίας θα έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο (στην πραγματικότητα έχουν άπειρα). Γενικεύουμε αυτή την παρατήρηση στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1.1.2.1. *Έστω μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ πάνω σε ένα σύνολο $A \neq \emptyset$. Τότε οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\sim$ αποτελούν μια διαμέριση του .*

Απόδειξη. Έστω $\Pi = \{[a] | a \in A\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι τα σύνολα στο είναι: α) μη κενά, β) ξένα μεταξύ τους και γ) όλα μαζί περιέχουν ολόκληρο το A.

α) Όλες οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι μη κενές. Επειδή $a \in [a]$ για κάθε $a \in A$, αφού λόγο της ανακλαστικής ιδιότητας $a \sim a$.

β) Για να δείξουμε ότι είναι ξένα μεταξύ τους έστω δύο κλάσεις ισοδυναμίας $[a], [b]$. Υποθέτουμε (προς άτοπο) ότι $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Τότε θα υπάρχει κάποιο στοιχείο $c \in A$, τέτοιο ώστε $c \in [a]$ και $c \in [b]$. Άρα $a \sim c$ και $b \sim c$. Λόγω της συμμετρίας έχουμε επίσης ότι $c \sim b$. Τέλος, λόγω της μεταβατικότητας παίρνουμε $a \sim b$. Από Πρόταση 1.1.2.1 έχουμε $[a] = [b]$.

Καταλήξαμε σε άτοπο αφού υποθέσαμε ότι οι $[a], [b]$ είναι δύο διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.

γ) Για να δούμε ότι $\cup\Pi = A$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι κάθε στοιχείο του A ανήκει σε κάποιο στοιχείο του , αφού $a \in [a]$ λόγω ανακλαστικότητας.

Ο.Ε.Δ.

1.1.3 Μερικές Διατάξεις

Όπως Ορισμός 1.1.2.1 γενικεύει την έννοια της ισότητας, έτσι στο ορισμό που ακολουθεί θα γενικεύσουμε την έννοια της ανισότητας.

Ορισμός 1.1.3.1 (Μερική Διάταξη). *Έστω R μια δυαδική σχέση πάνω σε ένα σύνολο A καλείται* μερική διάταξη *(partial order) αν είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική. Όταν δύο στοιχεία του A σχετίζονται με μια σχέσης μερικής διάταξης θα συμβολίζουμε $a \succeq b$. Ειδικότερα, όταν $a \not\sim b$ θα συμβολίζουμε $a \succ b$, όπου $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας.*

Όπως προδίδει και ο συμβολισμός, η ανισότητα $\geq$ πάνω στους πραγματικούς αριθμούς είναι μια σχέση μερικής διάταξης. Από την θεωρία αριθμών παίρνουμε το εξής παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1.3.1. *Θεωρούμε πάλι το σύνολο των ακεραίων και την σχέση διαιρεί. Θα λέμε ότι δύο ακέραιοι $a, b \in \mathbb{Z}$ σχετίζονται με την σχέσει διαιρεί και θα γράφουμε $a|b$, αν υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $b = c \cdot a$. Θα αφήσουμε σαν άσκηση να δείξετε ότι η σχέση $|$ είναι μια σχέση μερικής διάταξης.*

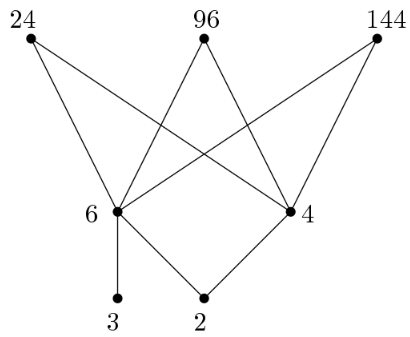
Παρατηρήστε επίσης, ότι κάνουμε λόγο για *μερική* διάταξη. Αυτό γιατί πουθενά στον Ορισμό 1.1.3.1 δεν απαιτήσαμε να σχετίζονται όλα τα στοιχεία του A μεταξύ τους. Στην σχέση διαιρεί παραπάνω, δεδομένων δύο ακεραίων δεν είναι απαραίτητο ο ένας να διαιρεί τον άλλο. Για παράδειγμα για $5, 8 \in \mathbb{Z}$ δεν ισχύει $5|8$, αλλά ούτε $8|5$. Όταν όλα τα στοιχεία του συνόλου A σχετίζονται μεταξύ τους κάνουμε λόγο για *πλήρη* ή *ολική* διάταξη. Η ανισότητα στους πραγματικούς αριθμούς είναι ένα παράδειγμα πλήρους διάταξης, ενώ η σχέση διαιρεί που ορίσαμε παραπάνω είναι παράδειγμα μερικούς διάταξης.

Υπάρχει ένας πολύ χρήσιμος τρόπος να αναπαραστήσουμε γραφικά τις μερικές διατάξεις, ο οποίος μας βοηθά να αναπτύξουμε την διαίσθησή μας. Παρακάτω εισάγουμε τα διαγράμματα Hasse [1] μέσω ενός παραδείγματος.

Παράδειγμα 1.1.3.2. *Έστω το σύνολο $A = \{2, 3, 4, 6, 24, 96, 144\}$ το οποίο διατάσσουμε με την σχέση διαιρεί. Την δομή αυτή την αναπαριστούμε με το ακόλουθο διάγραμμα Hasse.*

Τα στοιχεία του συνόλου A τα αναπαριστούμε με κόμβους, ενώ αν δύο στοιχεία συσχετίζονται στο A τα ενώνουμε με μια ακμή. Επιπλέον αν $a, b \in A$ και $a \succeq b$ θα σχεδιάσουμε το b χαμηλότερα από το a. Ακόμη, δεν σχεδιάζουμε τις ακμές που μπορούν να εννοηθούν από

[1] Τα διαγράμματα πήραν το όνομά τους από τον Γερμανό μαθηματικό Helmut Hasse (1898-1979). Ονομάστηκαν έτσι λόγο της εκτεταμένης χρήσης τους από τον Hasse. Παρ' όλα αυτά είχαν δεν ανακαλύφθηκαν από τον ίδιο. Έχουμε παράδειγμα χρήσης τους, που προηγείται του Hasse από τον Γάλλο μαθηματικό Henri Gustav Vogt (1895).



Σχήμα 1.1: Παράδειγμα διαγράμματος Hasse

την μεταβατικότητα. Έτσι το 2 το σχεδιάζουμε χαμηλότερα από το 6, αφού $2|6$. Επιπλέον, δεν σχεδιάζουμε την ακμή μεταξύ των 24 και 2 αφού το $2|24$ εννοείται από την μεταβατικότητα.

Παρατηρήστε ότι σε αντίθεση με το σύνολο των πραγματικών αριθμών και την σχέση ανισότητας, σε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο δεν μπορούμε να ορίσουμε μονοσήμαντα μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο. Θα μιλάμε για *μεγιστικά* και *ελαχιστικά* στοιχεία. Δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 1.1.3.2 (Ελαχιστικό - Μεγιστικό Στοιχείο)**.** *Έστω ένα σύνολο A και μια σχέση μερικής διάταξης $\succeq$. Θα λέμε ότι ένα στοιχείο $a^* \in A$ είναι:*

- ελαχιστικό *(minimal) αν δεν υπάρχει $a \in A$, τέτοιο ώστε $a^* \succ a$.*
- μεγιστικό *(maximal) αν δεν υπάρχει $a \in A$, τέτοιο ώστε $a^* \prec a$.*

Επιπλέον, όταν έχουμε μοναδικό ελαχιστικό στοιχείο θα κάνουμε λόγο για ελάχιστο*. Ενώ όταν έχουμε μοναδικό μεγιστικό στοιχείο θα κάνουμε λόγο για* μέγιστο*.*

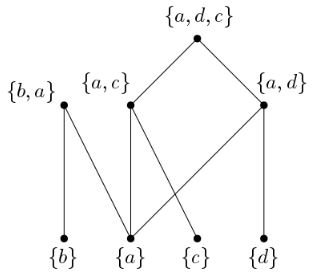
Θα κλείσουμε αυτή την ενότητα δίνοντας ένα ακόμη παράδειγμα μερικώς διατεταγμένων συνόλων. Αυτή την φορά θα διατάξουμε σύνολα από σύνολα, με την σχέση μερικής διάταξης υποσυνόλου $\subseteq$.

Παράδειγμα 1.1.3.3. *Παρατηρήστε το Σχήμα 1.2. Αριστερά έχουμε διατάξει το σύνολο $A = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}\}$, ενώ δεξιά διατάσσουμε το δυναμοσύνολο του $\{a, b, c\}$, δηλαδή $B = 2^{\{a,b,c\}}$.*

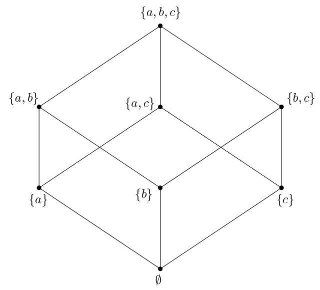
Παρατηρήστε ότι πάλι στο αριστερό σχήμα τα ελαχιστικά και τα μεγιστικά στοιχεία. Αντίθετα στο δεξιά σχήμα παρά το γεγονός ότι δεν έχουμε ολική διάταξη, εμφανίζεται μοναδικό μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.

1.2 Κλειστότητα

Μια άλλη πολύ ενδιαφέρουσα έννοια η οποία θα εμφανίζεται συνεχώς στην παρούσα εργασία και σχετίζεται με τις σχέσεις που συζητήσαμε στην προηγούμενη ενότητα είναι αυτή της κλειστότητας. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.



(α') Το διάγραμμα Hasse της μερικής διάταξης $(A, \subseteq)$



(β') Το διάγραμμα Hasse της μερικής διάταξης $(B, \subseteq)$

Σχήμα 1.2: Τα διαγράμματα Hasse του Παραδείγματος 1.1.3.3.

Ορισμός 1.2.0.1 (Κλειστό Σύνολο). *Έστω ένα σύνολο A και $R \subseteq D^{n+1}$ μια $(n+1)$-αδική σχέση πάνω στο D. Έστω, επίσης $B \subseteq D$. Θα λέμε ότι το B είναι* κλειστό *(closed) ως προς την R, αν για κάθε $b_1, b_2, ..., b_n \in B$, με $(b_1, b_2, ..., b_n, b_{n+1}) \in R$, το b_{n+1} ανήκει επίσης στο B. Κάθε ιδιότητα της μορφής "το σύνολο B είναι κλειστό ως προς τις σχέσεις $R_1, R_2, ..., R_m$" ονομάζεται* ιδιότητα κλειστότητας *(closure property)*

Όπως θα δούμε παρακάτω ο Ορισμός 1.2.0.1 θα μας επιτρέψει να κατασκευάσουμε μεγαλύτερα σύνολα από μικρότερα. Πριν όμως φτάσουμε εκεί, ας δούμε ορισμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.2.0.1. *Έστω $A = \{$ το σύνολο όλων των ανθρώπων $\}$ και $Pred_{\text{Μαρία}} = \{$ το σύνολο των προγόνων της Μαρίας $\}$. Το σύνολο $Pred_{\text{Μαρία}}$ είναι κλειστό ως προς την ακόλουθη σχέση.*

$$R = \{(a, b) | a \text{ και } b \text{ είναι άνθρωποι, και ο } b \text{ είναι πατέρας του } a\}$$

Αυτό γιατί αν a κάποιος πρόγονος της Μαρίας, τότε ο πατέρας του a θα είναι επίσης πρόγονος της Μαρίας.

Για το επόμενο παράδειγμα χρειαζόμαστε ακόμη έναν ορισμό.

Ορισμός 1.2.0.2 (Πράξη). Πράξη *(operation) ονομάζουμε μία συνάρτηση της μορφής $\star\colon V \longrightarrow Y$, όπου το V είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου k συνόλων. Δηλαδή $V \subseteq X_1 \times X_2 \times ... \times X_k$. Όταν $k = 2$ κάνουμε λόγο για* δυαδική *πράξη (binary operation).*

Παρατηρήστε ότι όταν λέμε ότι ένα σύνολο είναι κλειστό ως προς μία *πράξη* θα πρέπει να καταλαβαίνουμε τι εννοούμε αφού μια συνάρτηση δεν είναι τίποτα άλλο από μια ειδική περίπτωση σχέση. Πράγματι, για μια δυαδική πράξη $\star$ μπορούμε να ορίσουμε την (τριαδική) σχέση $R_\star = \{(a,\ b,\ a \star b) \mid a, b \in A\}$. Δίνουμε το εξής παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.2.0.2. *Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση. Αυτό γιατί αν $n, m \in \mathbb{N}$ τότε $n + m \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, οι φυσικοί αριθμοί είναι κλειστοί ως προς τον πολλαπλασιασμό. Όμως, οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι κλειστοί ως προς την πράξη της διαίρεση, αφού $3, 5 \in \mathbb{N}$, αλλά φυσικά $\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$.*

Εφόσον οι σχέσεις είναι σύνολα, μπορούμε να μιλήσουμε για σχέσεις οι οποίες είναι κλειστές ως προς άλλες σχέσεις. Σε αυτή την κατεύθυνση δίνουμε το παρακάτω παράδειγμα.

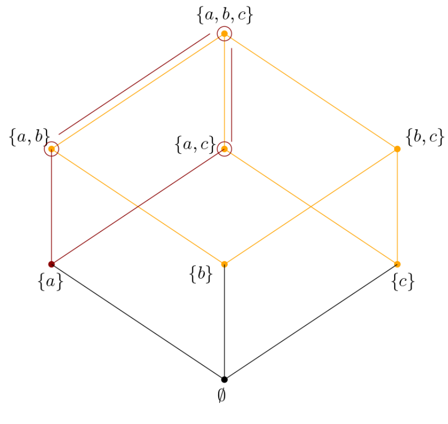
Παράδειγμα 1.2.0.3. *Έστω ένα σύνολο A. Έστω Q μια τριαδική σχέση πάνω στο D^2, δηλαδή $Q \subseteq (D \times D)^3$, τέτοια ώστε:*

$$Q = \{((a, b), (b, c), (a, c)) \mid a,\ b,\ c \in D\}$$

Τότε, μια σχέση $R \subseteq D \times D$ θα είναι κλειστή ως προς την σχέση Q, αν και μόνο αν είναι μεταβατική. Συνεπώς η μεταβατικότητα είναι μια ιδιότητα κλειστότητας. Όμοια, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι η ανακλαστικότητα είναι μια ιδιότητα κλειστότητας, επειδή μπορούμε να την εκφράσουμε ως $\{(d, d) \mid d \in D\}$.

Ένας συνηθισμένος τρόπος μαθηματικής κατασκευής είναι η μετάβαση από ένα σύνολο A στο ελάχιστο σύνολο B που περιέχει το A και έχει μια ιδιότητα P [2]. Όταν λέμε ”ελάχιστο σύνολο B”, εννοούμε ”ένα σύνολο B που δεν περιέχει γνήσια κάποιο άλλο σύνολο B', το οποίο περιέχει το A και έχει την ιδιότητα P”. Μεγάλη προσοχή χρειάζεται όταν χρησιμοποιούνται ορισμοί αυτής της μορφή. Θέλουμε το σύνολο B να είναι σαφώς ορισμένο, δηλαδή να ορίζεται μονοσήμαντα. Σε αυτή την κατεύθυνση δίνουμε το ακόλουθο (αντί)παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.2.0.4. *Θεωρείστε, όπως στο Παράδειγμα 1.1.3.3, το δυναμοσύνολο του συνόλου $T = \{a, b, c\}$. Το διάγραμμα Hasse που προκύπτει είναι αυτό του Σχήματος 1.2β'. Θεωρείστε την ιδιότητα $P = \{S \subseteq T \mid b \in S \vee c \in S\}$. Ας πάρουμε την τομή του διαγράμματος Hasse με την ιδιότητα P. Παρατηρήστε το ακόλουθο διάγραμμα. Παρατηρείστε ότι*



Σχήμα 1.3: Με πορτοκαλί έχουμε επισημάνει την τομή του Διαγράμματος Hasse 1.2β' με την ιδιότητα P. Ενώ με κόκκινο τα υπερσύνολα του $\{a\}$.

αν πάρουμε για αρχικό σύνολο το $A = \{a\}$, τότε το B, όπως το περιγράψαμε παραπάνω δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Αφού μπορούμε να έχουμε τόσο $B = \{a, b\}$, είτε $B = \{a, c\}$. Αυτό μπορούμε να το δούμε κάνοντας χρήση του διαγράμματος Hasse, αφού το μερικώς διατεταγμένο σύνολο που προκύπτει έχει δύο ελαχιστικά στοιχεία.

[2] Ένας χρήσιμος τρόπος να σκεφτόμαστε τυπικά μια *ιδιότητα* P είναι να την σκεφτόμαστε σαν σύνολο συνόλων, για παράδειγμα $P = \{S \subseteq \mathcal{U} \mid Q(S)\}$, όπου το Q κάποιο κατηγόρημα πάνω στο $2^{\mathcal{U}}$

Παρ' όλα αυτά, το ακόλουθο θεώρημα μας εγγυάται ότι, αν το P είναι ιδιότητα κλειστότητας, τότε το B είναι σαφώς ορισμένο.

Θεώρημα 1.2.0.1 (Μοναδικότητα Κλειστότητας). *Έστω P μια ιδιότητα κλειστότητας ορισμένης από σχέσεις σε ένα σύνολο D. Έστω επιπλέον, $A \subseteq D$. Τότε υπάρχει* μοναδικό *ελάχιστο σύνολο B το οποίο περιέχει το A και έχει την ιδιότητα P.* [3]

Απόδειξη. Θεωρείστε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του D που είναι κλειστά ως προς τις σχέσεις $R_1, R_2, ..., R_m$ και περιέχουν το A. Ονομάζουμε την συλλογή αυτών των συνόλων $\mathcal{S}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το $\mathcal{S}$ έχει ελάχιστο (μοναδικό ελαχιστικό). Είναι εύκολο να δούμε ότι το $\mathcal{S}$ είναι μη κενό, αφού περιέχει τουλάχιστον το σύμπαν D.

Τώρα έστω το σύνολο B, το οποίο είναι η τομή όλων των συνόλων στο $\mathcal{S}$, δηλαδή

$$B = \bigcap \mathcal{S}$$

Το B είναι καλά ορισμένο, γιατί είναι η συλλογή μιας μη κενής τομής συνόλων. Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι περιέχει το A, αφού αυτό ισχύει για όλα τα σύνολα του $\mathcal{S}$. Στην συνέχεια ισχυριζόμαστε ότι το B είναι κλειστό ως προς όλες τις R_i. Υποθέτουμε ότι $a_1, ..., a_{n_i-1} \in B$ και $(a_1, ..., a_{n_i-1}, a_{n_i}) \in R_i$. Εφόσον το B είναι η τομή όλων των συνόλων του $\mathcal{S}$, έπεται ότι όλα τα σύνολα στο $\mathcal{S}$ περιέχουν τα $a_1, ..., a_{n_i-1}$. Εφόσον, όμως, όλα τα σύνολα του $\mathcal{S}$ είναι κλειστά ως προς την R_i όλα περιέχουν και το a_{n_i} επίσης. Συνεπώς, το B περιέχει το a_{n_i} και άρα είναι κλειστό ως προς R_i.

Τέλος, το B είναι ελάχιστο. Για να το δούμε αυτό, έστω (προς άτοπο) ότι υπάρχει $B' \subset B$ το οποίο θα έχει τις ιδιότητες που θέλουμε. Τότε όμως το B' θα είναι επίσης στοιχείο του $\mathcal{S}$ και άρα το B σαν τομή των συνόλων του $\mathcal{S}$ θα είναι υποσύνολο του B', $B \subseteq B'$. Καταλήξαμε σε άτοπο.

Ο.Ε.Δ.

Το σύνολο B του Θεωρήματος 1.2.0.1 θα το λέμε *κλειστότητα* του A, ως προς τις σχέσεις $R_1, R_2, ..., R_n$. Με το παραπάνω θεώρημα θα κλείσουμε αυτή την ενότητα και το κεφάλαιο.

1.3 Διακριτές Συναρτήσεις

Συνήθως στα προπτυχιακά μαθήματα μαθηματικών δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε συναρτήσεις πάνω σε πεπερασμένα σύνολα. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν τέτοιες συναρτήσεις που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον όπως ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος $\chi(G)$, ή η συνάρτηση του Euler $\phi(n)$ από την θεωρία αριθμών. Στην παρούσα ενότητα θα μιλήσουμε για συναρτήσεις που ικανοποιούν την ιδιότητα του κορεσμού. Έτσι θα προετοιμαστούμε για την συνάρτηση βαθμίδας, που θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια. Σαν παράδειγμα δίνουμε την συνάρτηση βαθμού πάνω στα γραφήματα που θα δούμε στο Ενότητα 2.1. Αρχίζουμε με έναν ορισμό.

[3] Εναλλακτικά, αν $\mathcal{A} = \{S \subseteq D \mid S \supseteq A\}$ η συλλογή συνόλων $P \cap \mathcal{A} \cap 2^D$ έχει ελάχιστο (μοναδικό ελαχιστικό στοιχείο).

Ορισμός 1.3.0.1 (Υπομετρικότητα). *Έστω Ω ένα πεπερασμένο σύνολο. Έστω, επίσης, μια συνάρτηση από το δυναμοσύνολο του Ω στους πραγματικούς αριθμούς, $f\colon 2^{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f είναι* υπομετρική *(submodular) , αν για κάθε $X \subseteq Y$ και $x \in \Omega \setminus Y$, ισχύει:*

$$f(X \cup \{x\}) - f(X) \geq f(Y \cup \{x\}) - f(Y) \tag{1.1}$$

Θα εξηγήσουμε τώρα την διαίσθηση, πίσω από την σχέση (1.1) . Φανταστείτε ότι ετοιμάζεστε για ένα ταξίδι και θέλετε να διαλέξετε τι θα πάρετε μαζί σας. Έστω λοιπόν το σύνολο όλων των πραγμάτων που σκέφτεστε να πάρετε να είναι το Ω. Κάθε αντικείμενο έχει και μια αξία, την οποία μας δίνει η συνάρτηση $f(\{x\})$. Παρ' όλα αυτά η συνάρτηση f δεν είναι γραμμική. Αν προχωρήσουμε στο να μετρήσουμε την αξία της βαλίτσας που έχουμε ετοιμάσει τότε η συνολική αξία των αντικειμένων που θα πάρουμε μαζί μας αντισταθμίζεται από το βάρος της βαλίτσας. Έτσι η αξία ενός αντικειμένου που προσθέτουμε σε μια γεμάτη βαλίτσα είναι μικρότερη από αν προσθέταμε το ίδιο αντικείμενο σε άδεια βαλίτσα. Αυτό το γεγονός παρουσιάζεται στην σχέση (1.1) , όπου το X και το Y αντιστοιχούν σε διαφορετικά στάδια της προετοιμασίας της βαλίτσας μας. Εφόσον $X \subseteq Y$, η βαλίτσα X βρίσκεται σε πιο πρώιμο στάδιο από την βαλίτσα Y. Έτσι η προσθήκη του αντικειμένου x στην πιο άδεια βαλίτσα X οδηγεί σε μεγαλύτερη αύξηση στην αξία της βαλίτσας μας, από την προσθήκη του σε μια περισσότερο *κορεσμένη* βαλίτσα Y.

Παρ' όλο που η σχέση (1.1) μας βοηθάει να κατανοήσουμε την υπομετρικότητα στις αποδείξεις θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ισοδύναμη σχέση.

$$f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T), \quad \forall X, Y \subseteq \Omega \tag{1.2}$$

Την ισοδυναμία μεταξύ των σχέσεων (1.1) και (1.2), την δείχνουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.0.1. *Έστω Ω ένα πεπερασμένο σύνολο. Έστω, επίσης, μια συνάρτηση από το δυναμοσύνολο του Ω στους πραγματικούς αριθμούς, $f\colon 2^{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$. (Τ.Α.Ε.Ι.) Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $f(X \cup \{x\}) - f(X) \geq f(Y \cup \{x\}) - f(Y), \quad \forall X \subseteq Y \subseteq \Omega, \quad x \in \Omega \setminus Y$
2. $f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T), \quad \forall S, T \subseteq \Omega$

Απόδειξη. $[(2) \Rightarrow (1)]$ Για αυτή την κατεύθυνση θεωρούμε δύο σύνολα X, Y, με $X \subseteq Y \subseteq \Omega$ και $x \in \Omega \setminus Y$. Θέτουμε $S\colon = X \cup \{x\}$ και $T\colon = Y$. Τότε:

$$\begin{array}{ccccc} f(S) + f(T) & \geq & f(S \cup T) + f(S \cap T) & \Rightarrow \\ f(X \cup \{x\}) + f(Y) & \geq & f(X \cup Y \cup \{x\}) + f(X \cap Y) & \overset{X \subseteq Y}{\Rightarrow} \\ f(X \cup \{x\}) + f(Y) & \geq & f(Y \cap \{x\}) + f(X) & \Rightarrow \\ f(X \cup \{x\}) - f(X) & \geq & f(Y \cap \{x\}) - f(Y) & \end{array}$$

$[(1) \Rightarrow (2)]$ Για να δείξουμε την άλλη κατεύθυνση ξαναγράφουμε την (1) ως

$$f(X) - f(Y) \leq f(X \cup \{x\}) - f(Y \cup \{x\}) \tag{1.3}$$

Τώρα, θεωρούμε δύο διακεκριμένα σύνολα $S, T \subseteq \Omega$ και θέτουμε $X := S \cap T$ και $Y := T$. Για αυτά τα X, Y ισχύει $X \subseteq Y$, επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (1.3) , για $x \in S \setminus T = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$. Έτσι:

$$\begin{aligned} f(S \cap T) - f(T) &\leq f((S \cap T) \cup \{s_1\}) - f(T \cup \{s_1\}) \\ &\leq f(((S \cap T) \cup \{s_1\}) \cup \{s_2\}) - f((T \cup \{s_1\}) \cup \{s_2\}) \\ &... \\ &\leq f(S) - f(T \cup S) \end{aligned}$$

Το οποίο ισοδυναμεί με το (2).

Ο.Ε.Δ.

2. ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Στην παρούσα ενότητα θα ακολουθήσουμε την παρουσίαση του [2], ενώ θα καταπιαστούμε με δύο, φαινομενικά ξένα, πεδία των μαθηματικών, την Θεωρία Γραφημάτων και τους Διανυσματικούς Χώρους. Όπως θα δούμε στην συνέχεια, σε αυτά τα δύο πεδία σημαντικό ρόλο παίζει η έννοια της *ανεξαρτησίας*. Θα την συναντήσουμε στα δέντρα και τα δάση στην Θεωρία Γραφημάτων, όπως και στα σύνολα γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων στου Διανυσματικούς Χώρους. Καθώς προχωράμε στις αποδείξεις, θα μας αναπτυχθεί η διαίσθηση πως παρά τις διαφορές τους ορισμένα θεωρήματα διατυπώνουν την ίδια μαθηματική αλήθεια, απλά σε διαφορετικές γλώσσες. Τις παρατηρήσεις μας αυτές, θα τις διατυπώσουμε με μεγαλύτερη σαφήνεια στην τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου. Έτσι θα έχουμε προετοιμάσει το έδαφος για το Κεφάλαιο 3, όπου θα αφήσουμε πίσω μας τις ειδικές περιπτώσεις και θα επιχειρήσουμε να διατυπώσουμε έναν γενικότερο ορισμό της ανεξαρτησίας.

2.1 Θεωρία Γραφημάτων

Θα αρχίσουμε με την βασικότερη, ίσως, διακριτή δομή, αυτή του γραφήματος. Η κύρια πηγή για την ενότητα είναι το [14], αν και παρόμοια θέματα παρουσιάζονται σε οποιοδήποτε προπτυχιακό βιβλίο θεωρίας γραφημάτων. Και πάλι μπορείτε να προσπεράσετε τις πρώτες υποενότητες, όπου θα αναφερθούμε σε βασικούς ορισμούς και θεωρήματα. Τα βασικότερα θεωρήματα, για την παρούσα εργασία, βρίσκονται μετά την υποενότητα για τα υπογραφήματα επικάλυψης.

2.1.1 Ορισμός Γραφήματος

Ένα γράφημα είναι μια μοντελοποίηση δυαδικών συμμετρικών σχέσεων. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

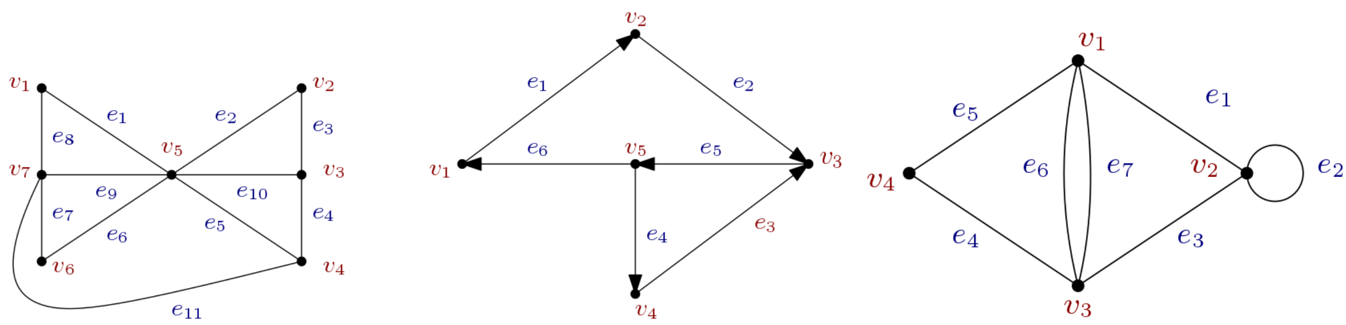
Ορισμός 2.1.1.1 (Γράφημα)**.** *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο V και E ένα σύνολο δισυνόλων του E. Δηλαδή για το E θα ισχύει $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$. Την δυάδα $G = (V, E)$ θα την ονομάζουμε* γράφημα *(graph)* [1]*. Τα στοιχεία του V θα τα ονομάζουμε* κόμβους *ή*

[1] Στην Ελληνική βιβλιογραφία το γράφημα συναντάται και ως ”γράφος”. Η λέξη γράφος είναι αντιδάνειο. Δηλαδή προκύπτει από την Αγγλική λέξη graph, η οποία με την σειρά της προκύπτει από την Ελληνική λέξη γράφημα. Για τον λόγο αυτό προτιμήθηκε ο όρος ”γράφημα”, από τον ”γράφο” στο παρόν κείμενο.

κορυφές (vertices). Τα στοιχεία του E θα τα λέμε ακμές *(edges). Αν $e \in E$, με $e = \{u, v\}$, τα u, v θα τα λέμε* άκρα *(endpoints) της ακμής.*

Όπου είναι χρήσιμο, για ένα γράφημα G, θα συμβολίζουμε με $V(G)$ το σύνολο των κόμβων, ενώ με $E(G)$ το σύνολο των ακμών. Τέλος, τον πληθυκό αριθμό του V, θα τον λέμε τάξη *(order) του γραφήματος G, ενώ την πληθικότητα του E θα τον λέμε* μέγεθος *(size) του G.*

Ένα χαρακτηριστικό που κάνει τα γραφήματα τόσο δημοφιλείς είναι το ότι μπορούμε, εύκολα να αναπαραστήσουμε ένα γράφημα με ένα σχήμα. Στο Σχήμα 2.1α' δίνουμε ένα παράδειγμα γραφήματος, όπως τον ορίσαμε στον Ορισμό 2.1.1.1. Από τον ορισμό του το γράφημα είναι ένα μοντέλο *συμμετρικών* σχέσεων. Έτσι αν για ένα γράφημα $G = (V, E)$ ορίσουμε την σχέση R_E, όπου $R_E = \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E\}$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η R_E είναι συμμετρική. Πράγματι, αν $(a, b) \in R_E$, τότε $\{a, b\} \in E$. Τότε όμως $(b, a) \in R_E$. Αν θέλουμε, αντ' αυτού, να μοντελοποιήσουμε μη συμμετρικές σχέσεις, τότε θα κάνουμε λόγο για *κατευθυνόμενα* (directed) γραφήματα (βλ. Σχήμα 2.1β').



(α') (Απλό) Γράφημα **(β') Κατευθυνόμενο Γράφημα** **(γ') Πολυγράφημα**

Σχήμα 2.1: Παραδείγματα γράφων. Με κόκκινο χρώμα έχουμε συμβολίσει τους κόμβους, ενώ με μπλε τις ακμές.

Ακόμη, η R_E δεν είναι ανακλαστική. Αν $(a, a) \in R_E$ θα έπρεπε να είχαμε επιτρέψει το σύνολο των ακμών E να περιέχει μονοσύνολα. Παρ' όλα αυτά μερικές φορές είναι χρήσιμο να μοντελοποιούμε σχέσεις όπου ισχύει $(a, a) \in R_E$, για κάποιο $a \in V$. Τότε, θα επιτρέπουμε *βρόχους* (loop) στο γράφημα G . Τέλος, μπορούμε να επιτρέψουμε δύο στοιχεία να σχετίζονται παραπάνω από μία φορά στην R_E. Τότε θα ορίζαμε την R_E ως *πολυσύνολο* (multiset), επιτρέποντας έτσι στον G να έχει *παράλληλες* (parallel) ακμές. Όταν επιτρέπουμε τόσο βρόγχους, όσο και παράλληλες ακμές κάνουμε λόγο για *πολυγράφημα* (multigraph). Στο Σχήμα 2.1γ' δίνουμε ένα παράδειγμα. Όταν θέλουμε να τονίσουμε ότι σε ένα γράφημα δεν επιτρέπουμε βρόγχους ή παράλληλες ακμές, όπως στον Ορισμό 2.1.1.1 θα κάνουμε λόγο για *απλό* (simple) γράφημα. Στην συνέχεια της εργασίας θα εστιάσουμε κυρίως στα απλά γραφήματα. Έτσι, τα γραφήματα στους οποίους αναφερόμαστε στην συνέχεια (σε παραδείγματα, ορισμούς κτλ) θα είναι απλοί, εκτός και αν επισημαίνουμε κάτι διαφορετικό.

Μια ενδιαφέρουσα έννοια και πολύ χρήσιμη, είναι αυτή της γειτονιάς ενός κόμβου v, δηλαδή το σύνολο των κόμβων που συνδέονται με τον v.

Ορισμός 2.1.1.2 (Γειτονιά). *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$, και $v \in V$, θα συμβολίζουμε με $N(v)$ (ή όπου χρειάζεται περαιτέρω διευκρίνηση $N_G(v)$), την* γειτονιά του v *(neighborhood), δηλαδή το σύνολο:*

$$N(v) = \{u \in V \mid \{v, u\} \in E\}$$

Από την άλλη, για έναν κόμβο v, την πληθυκότητα του $N(v)$, θα τον λέμε *βαθμό* (degree) του v. Θα τον με συμβολίζουμε $d(v)$. Για να σιγουρευτούμε πως έχουν γίνει πλήρως κατανοητοί οι παραπάνω ορισμοί δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1.1.1. *Για παράδειγμα, στο γράφημα του Σχήματος 2.1α' ο κόμβος v_5 έχει για γείτονές τους τους κόμβους $N(v_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8\}$. Έτσι, ο v_5 έχει βαθμό $d(v_5) = 7$.*

2.1.2 Πράξεις και Σχέσεις Γραφημάτων

Στην συνέχεια θα μιλήσουμε για πράξεις και σχέσεις πάνω σε γραφήματα. Θα αρχίσουμε ορίζοντας τις πράξεις διαγραφής κόμβων και διαγραφής ακμών.

Ορισμός 2.1.2.1 (Πράξεις Γράφων). *Έστω $G = (V, E) \in V, E \neq \emptyset$. Επιπλέον, $v \in V,\ S \subseteq V,\ e \in E,\ T \subseteq E$.*

1. *Ονομάζουμε* διαγραφή κόμβων *την πράξη*

   $$G \setminus S = (V \setminus S, \{e \in E \mid e \cap S = \emptyset\})$$

   επιπλέον θα γράφουμε $G \setminus v$ και θα εννοούμε $G \setminus \{v\}$.

2. *Ονομάζουμε* διαγραφή ακμών *την πράξη*

   $$G \setminus T = (V, E \setminus T)$$

   ομοίως, θα γράφουμε $G \setminus e$ και θα εννοούμε $G \setminus \{e\}$.

Παρατηρήστε την επέκταση που κάναμε στους συμβολισμούς θεωρίας συνόλων στα γραφήματα. Επίσης, με σκοπό την ελάφρυνση του συμβολισμού, θα συμβολίζουμε το μονοσύνολο $\{e\}$ απλά με e. Ακολουθεί μια ακόμη τέτοια επέκταση στον ορισμό που ακολουθεί. Εκεί ορίζουμε δύο σημαντικές σχέσεις πάνω σε γραφήματα, το υπογράφημα και το εναγόμενο γράφημα.

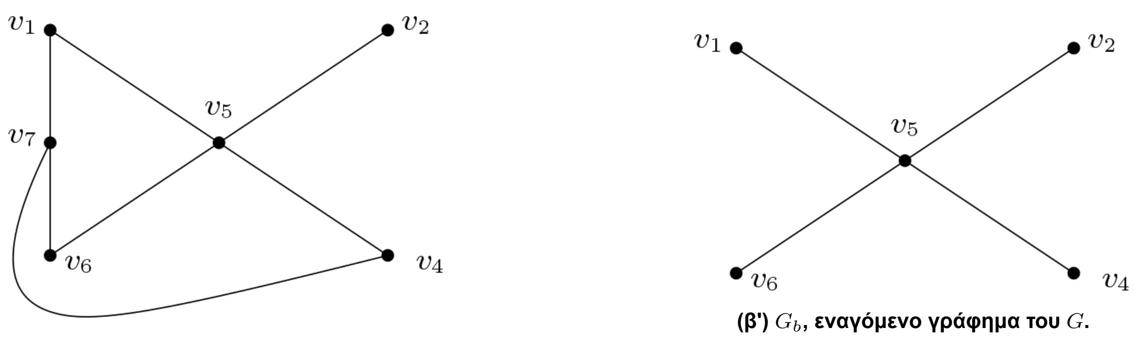
Ορισμός 2.1.2.2 (Υπογράφημα και Εναγόμενο Γράφημα). *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ και ένας άλλο γράφημα G'.*

1. *Θα λέμε ότι ο G' είναι* υπογράφημα *(subgraph) του G και θα γράφουμε $G' \subseteq_{\upsilon\pi} G$ αν υπάρχουν $S \subseteq V,\ T \subseteq E$, τέτοια ώστε $G' = (G \setminus S) \setminus T$. Δηλαδή ο G' θα προκύπτει από τον G από διαγραφές κόμβων και ακμών.*

2. *Θα λέμε ότι ο G' είναι* εναγόμενο υπογράφημα *(induced graph) του G και θα γράφουμε $G' \subseteq_{\epsilon\nu} G$ αν υπάρχει $S \subseteq V$, τέτοιο ώστε $G' = G \backslash S$. Δηλαδή ο G' θα προκύπτει από τον G μόνο από διαγραφές κόμβων.*

Παρατηρείστε ότι σε συνέπεια με τον συμβολισμό οι σχέσεις $\subseteq_{\upsilon\pi}$ και $\subseteq_{\epsilon\nu}$ είναι σχέσεις μερικής διάταξης. Παρατηρείστε επιπλέον ότι αν $G' \subseteq_{\epsilon\nu} G$, τότε $G' \subseteq_{\upsilon\pi} G$, αλλά το αντίθετο δεν ισχύει. Αυτό γιατί η πράξη διαγραφής κόμβων είναι πιο δραστική. Όταν διαγράφουμε έναν κόμβο, διαγράφουμε και όλες τις ακμές που προσπίπτων σε αυτόν. Στο παράδειγμα που ακολουθεί δίνουμε δύο παραδείγματα, ενός υπογραφήματος και ενός εναγόμενου γραφήματος, του γραφήματος στο Σχήμα 2.1α'.

Παράδειγμα 2.1.2.1. *Ονομάζουμε G το γράφημα του σχήματος Σχήμα 2.1α'. Το γράφημα G_a (αριστερά) έχει προκύψει από το G διαγράφοντας την κορυφή v_3 και την ακμή $e_9 = \{v_7, v_5\}$. Αντίθετα, το γράφημα G_b (δεξιά) προκύπτει από την G διαγράφοντας τις κορυφές v_7 και v_3.*



(α') G_a, **υπογράφημα** G. $G_a = (G \setminus v_3) \setminus e_9$

(β') G_b, **εναγόμενο γράφημα του** G. $G_b = (G \setminus v_3) \setminus v_7$

Σχήμα 2.2: Παραδείγματα υπογραφήματος και εναγόμενου γραφήματος.

Πριν προχωρήσουμε, δίνουμε έναν ακόμη χρήσιμο συμβολισμό. Έστω ότι θέλουμε να ορίσουμε ένα εναγόμενο γράφημα G' από έναν γράφημα G. Αντί να επισημάνουμε το σύνολο των κόμβων S που διαγράφουμε από τον G, θα μπορούσαμε να μιλάμε για το σύνολο των κόμβων του G που "επιβιώνει" στο G' μετά την διαγραφή κόμβων. Το σύνολο αυτό δεν είναι άλλο από το $V(G) \setminus S$. Έτσι δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.1.2.3. *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Έστω επιπλέον, ένα $S \subseteq V$. Τότε ορίζουμε ως $G[S] = G \setminus (V \setminus S)$. Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε*

$$G[S] = (S,\ \{\{u, v\} \in E \mid \{u, v\} \subseteq S\})$$

Πράγματι παρατηρούμε ότι $G[S] \subseteq_{\epsilon\nu} G$. Επίσης θα λέμε ότι το $G[S]$ είναι το υπογράφημα του G που *ενάγεται* από το σύνολο κορυφών S. Ακόμη, αν $E \subseteq E(G)$, τότε ορίζουμε $G[E] = (\bigcup E, E)$. Θα λέμε επιπλέον, ότι το $G[E]$ είναι το υπογράφημα του G που *ανάγεται* από το σύνολο των ακμών E.

2.1.3 Ειδικά Γραφήματα

Τώρα θα ασχοληθούμε με κάποιους συγκεκριμένους ορισμούς γράφων που θα μας απασχολήσουν και στην συνέχεια. Το πρώτο γράφημα που θα ορίσουμε είναι το Μονοπάτι, ο οποίος είναι ίσως το απλούστερο, μη τετριμμένο, γράφημα. Έπειτα, θα δούμε τον Κύκλωμα ή Κύκλο, που απλώς είναι ένα μονοπάτι με τα άκρα του ενωμένα.

Ορισμός 2.1.3.1 (Μονοπάτι). *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ θα το λέμε* μονοπάτι *(path), αν μπορούμε να γράψουμε όλους του κόμβους του V σε μια ακολουθία $v_1, v_2, ..., v_n$ έτσι ώστε:*

1. *κάθε κόμβος $v_i, v_{i+1} \in V$, με $i \in [n-1]$ συνδέονται με ακμή στο E.*
2. *κάθε κόμβος $v_i \in V$, με $2 \leq i \leq n-1$, έχει βαθμό 2, $d(v_i) = 2$.*
3. *οι κόμβοι v_1 και v_n έχουν βαθμό 1, $d(v_1) = d(v_n) = 1$.*

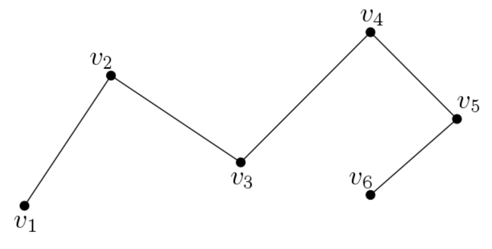
Τους κόμβους v_1, v_n, θα τα λέμε άκρα *του μονοπατιού ή το v_1 θα το λέμε* αρχή *και το v_n* πέρας *του μονοπατιού.*

*Επιπλέον, θα λέμε u, v-*μονοπάτι *και θα εννοούμε ένα μονοπάτι με άκρα τους κόμβους u, v.*

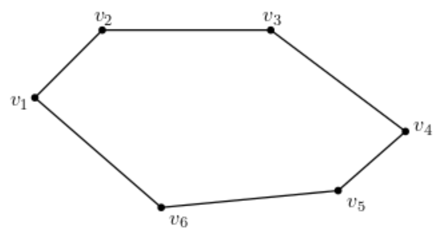
Επιπλέον, ορίζουμε το *μήκος* του μονοπατιού να είναι ο αριθμός των ακμών του. Παρατηρήστε την *τετριμμένη* περίπτωση. Μπορούμε να ορίσουμε ένα μονοπάτι μήκους 0, το οποίο να περιέχει μόνο έναν κόμβο και καθόλου ακμές. Θα μας χρειαστεί η ακραία αυτή περίπτωση όταν μιλήσουμε για την σχέση σύνδεσης παρακάτω.

Ορισμός 2.1.3.2 (Κύκλος). *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ θα το λέμε* κύκλο *(circle), αν μπορούμε να γράψουμε όλους του κόμβους του V σε μια ακολουθία $v_1, v_2, ..., v_n$, έτσι ώστε:*

1. *κάθε κόμβος $v_i, v_{i+1} \in V$, με $i \in [n-1]$ συνδέονται με ακμή στο E.*
2. *οι κόμβοι v_1 και v_n συνδέονται στο E.*
3. *κάθε κόμβος $v_i \in V$, με $i \in [n]$, έχει βαθμό 2, $d(v_i) = 2$.*



(α') Μονοπάτι



(β') Κύκλος

Σχήμα 2.3: Παραδείγματα μονοπατιού και κύκλου.

Οι παραπάνω οικογένειες γράφων είναι τόσο θεμελιώδεις, που θα τις χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε άλλες έννοιες πάνω σε γραφήματα. Συγκεκριμένα θα βασιστούμε πάνω στην έννοια του μονοπατιού για να ορίσουμε όποτε ένα γράφημα είναι συνεκτικός. Από την άλλη μέσω του κυκλώματος θα ορίσουμε τα δέντρα ως τα συνεκτικά γραφήματα που απλώς δεν περιέχουν κάποιο κύκλο ως υπογράφημα.

2.1.4 Συνεκτικότητα

Αρχίζουμε με την έννοια της συνεκτικότητας. Θα βασιστούμε, όμως, πρώτα στην σχέση σύνδεσης. Θα λέμε ότι δύο κόμβοι συνδέονται στο γράφημα G αν υπάρχει μονοπάτι που τους συνδέει στον G. Πιο τυπικά δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1.4.1 (Σύνδεση). *Έστω $G = (V, E)$. Ορίζουμε την σχέση R_{con} πάνω στο σύνολο κόμβων V, όπου*

$$R_{con} = \{(v, u) \in V^2 \mid \text{ υπάρχει μονοπάτι } P_{vu} \subseteq_{\upsilon\pi} G\}$$

Όταν οι κόμβοι $(v, u) \in R_{con}$ θα λέμε ότι οι v, u συνδέονται *στον G.*

Παρατηρήστε ότι η σχέση σύνδεσης πληρεί τις προϋποθέσεις του Ορισμού 1.1.2.1 και είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι μια καλή άσκηση. Παρατηρήστε επίσης ότι η σχέση R_{con} δεν είναι άλλη από την μεταβατική κλειστότητα της σχέσης R_E, όπως την ορίσαμε στην αρχή αυτής της ενότητας. Αφού η σύνδεση είναι μια σχέση ισοδυναμίας, μπορούμε να μιλήσουμε για τις κλάσεις ισοδυναμίας της.

Ορισμός 2.1.4.2 (Συνεκτικές Συνιστώσες). *Έστω ένα γράφημα G. Έστω R_{con} η σχέση ισοδυναμίας του Ορισμού 2.1.4.1. Θα λέμε τις κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης R_{con}* συνεκτικές συνιστώσες *(connected componends) του G. Επιπλέον, θα συμβολίζουμε τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του G, k_G.*

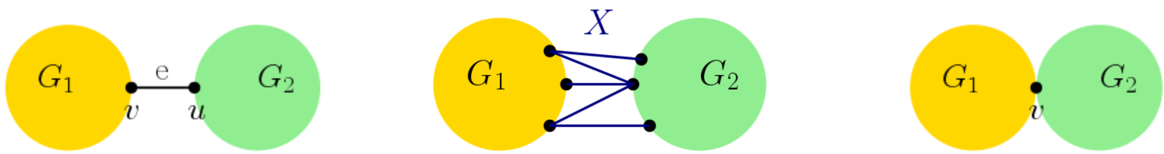
Αν ισχύει ότι $k_G = 1$, το γράφημα αποτελείται από μία μοναδική συνεκτική συνιστώσα. Τότε θα λέμε ότι το γράφημα G είναι *συνεκτικός* (connected). Επιπλέον, επισημαίνουμε ότι από τον Ορισμό 2.1.4.2 οι συνεκτικές συνιστώσες είναι σύνολα κόμβων. Έστω $V_1, V_2, ..., V_{k_G}$ οι συνεκτικές συνιστώσες του G. Θα επεκτείνουμε την ορολογία μας και θα αναφερόμαστε συχνά στα γραφήματα που ενάγονται από τα $V_1, V_2, ..., V_{k_G}$, δηλαδή τους $G[V_1], G[V_2], ..., G[V_{k_G}]$, ως συνεκτικές συνιστώσες του G.

Παρατηρήστε ότι ο αριθμός των συνιστωσών σε ένα γράφημα και ο αριθμός ακμών σχετίζονται άμεσα, αφού αν προσθέσουμε μία ακμή μεταξύ κόμβων δύο συνεκτικών συνιστωσών έχουμε μία λιγότερη συνεκτική συνιστώσα. Έτσι δίνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.1.4.1. *Κάθε γράφημα βαθμού $|V(G)|$ και μεγέθους $|E(G)|$ θα έχει τουλάχιστον $|V(G)| - |E(G)|$ συνεκτικές συνιστώσες. Ή πιο τυπικά ισχύει:*

$$k_G \geq |V(G)| - |E(G)| \tag{2.1}$$

Από την άλλη, διαγράφοντας έναν κόμβο ή μια ακμή μπορούμε να αυξήσουμε τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών. Διαγράφοντας μια ακμή, ο αριθμός των συνιστωσών μπορεί θα αυξηθεί το πολύ κατά ένα, ενώ διαγράφοντας έναν κόμβο ο αριθμός των συνιστωσών μπορεί να αυξηθεί κατά πολύ παραπάνω (για παράδειγμα δοκιμάστε να διαγράψετε την κορυφή v_5 από το γράφημα του Σχήματος 2.2β'). Μια ακμή της οποία η διαγραφή προκαλεί αύξηση των συνεκτικών συνιστωσών, θα ονομάζεται *γέφυρα* (bridge). Ενώ ένα σύνολο



(α') Γέφυρα **(β') Δεσμός** **(γ') Αρθρικό σημείο**

Σχήμα 2.4: Παραδείγματα γέφυρας, δεσμού και αρθρικού σημείου.

ακμών, των οποίων η διαγραφή έχει το ίδιο αποτέλεσμα, θα το λέμε *δεσμό* (bond). Τέλος, έναν κόμβο του οποίου η διαγραφή αυξάνει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών, τον αποκαλούμε *αρθρικό σημείο* (cut-vertex).

Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε έναν χαρακτηρισμό των γεφυρών.

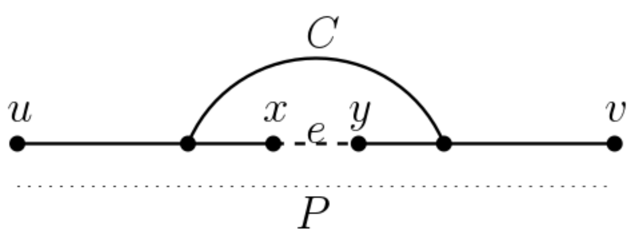
Θεώρημα 2.1.4.1. *Μια ακμή είναι γέφυρα, αν και μόνον αν δεν ανήκει σε κάποιο κύκλο.*

Απόδειξη. Έστω μια ακμή $e = \{x, y\} \in E(G)$. Έστω, επίσης, H η συνιστώσα που περιέχει την e. Εφόσον η διαγραφή της e δεν επηρεάζει καμία άλλη συνεκτική συνιστώσα, αρκεί να δείξουμε ότι το υπογράφημα $H \setminus e$ είναι συνεκτικό αν και μόνον αν η e δεν ανήκει σε κάποιο κύκλο.

$[\Leftarrow]$ Θα δείξουμε το ζητούμενο με αντιθετοαντιστροφή. Έστω ότι το υπογράφημα $H \setminus e$ είναι συνεκτικό. Άρα περιέχει ένα μονοπάτι P_{xy}. Αν στο μονοπάτι αυτό προσθέσουμε την ακμή e ολοκληρώνουμε έναν κύκλο στο H.

$[\Rightarrow]$ Πάλι θα χρησιμοποιήσουμε αντιθετοαντιστροφή. Έστω ότι η e ανήκει σε κάποιον κύκλο C. Διαλέγουμε κάποια $u, v \in V(H)$. Αφού το H είναι συνεκτικό, περιέχει uv-μονοπάτι, έστω P_{uv}. Αν το P_{uv} δεν περιέχει την e, τότε το P_{uv} υπάρχει στον $H \setminus e$. Διαφορετικά, υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το x βρίσκεται ανάμεσα στο u και το y στο P_{uv} (βλ. Σχήμα 2.5). Τότε το $H \setminus e$ θα περιέχει ένα u, x-μονοπάτι, μέσω του P_{uv}. Επίσης, θα περιέχει ένα x, y-μονοπάτι μέσω του κύκλου C. Τέλος, οι κόμβοι v, x συνδέονται, πάλι, από το μονοπάτι P_{uv}. Από μεταβατικότητα της σχέσης σύνδεσης έπεται ότι στο $H \setminus e$ υπάρχει u, v-μονοπάτι (διαφορετικό του P_{uv}).

Ο.Ε.Δ.



Σχήμα 2.5: Το σχήμα του Θεωρήματος 2.1.4.1.

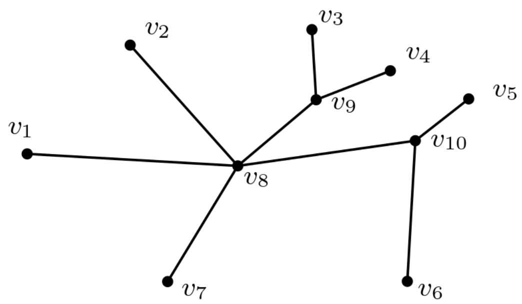
2.1.5 Δέντρα και Δάση

Τώρα περνάμε στον ορισμό των δέντρων, η οποία είναι μια οικογένεια γράφων με κάποιες καλές ιδιότητες.

Ορισμός 2.1.5.1 (Δέντρο)**.** *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$, θα λέμε ότι το G είναι* δέντρο *(tree), αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *το G είναι συνεκτικό*
2. *δεν περιέχει ως υπογράφο κάποιον κύκλο*

Γενικότερα, ένα γράφημα του οποίου όλες οι συνεκτικές συνιστώσες είναι δέντρα θα τον λέμε *δάσος* (forest).



Σχήμα 2.6: Παράδειγμα δέντρου.

Παρατηρήστε ότι η οικογένεια των γράφων μονοπατιών είναι υποπερίπτωση δέντρων. Τους κόμβους με βαθμό 1 σε ένα δέντρο θα τους λέμε *φύλλα* (leafs).

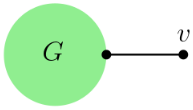
Λήμμα 2.1.1. *Έστω ένα δέντρο T. Το T έχει τουλάχιστον δύο φύλλα. Επίσης, Η διαγραφή ενός φύλλου από ένα δέντρο με n κόμβους παράγει ένα δέντρο με $n - 1$ κόμβους.*

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι ένα δέντρο έχει δύο φύλλα. Έστω ένα μονοπάτι $P_{v_0 v_n} \subseteq_{\upsilon\pi} T$, για κάποιο δέντρο T. Απαιτούμε το $P_{v_0 v_n}$ να είναι μονοπάτι μέγιστου μήκους στο T. Τότε θα ισχύει ότι $d_T(v_0) = d_T(v_n)$, διαφορετικά είτε το T θα είχε κύκλο, είτε θα υπήρχε μονοπάτι μήκους $n + 1$ στο T, άτοπο.

Τώρα, για το δεύτερο ζητούμενο, έστω v ένα φύλλο ενός δέντρου T. Έστω, επίσης, $T' = T \setminus v$. Ένα κόμβος βαθμού 1 δεν μπορεί να ανήκει σε κάποιο μονοπάτι που συνδέει δύο άλλους κόμβους. Συνεπώς για κάθε $u, w \in V(T')$ υπάρχει u, w-μονοπάτι στο T αλλά και στο T'. Άρα το T' είναι συνεκτικό. Από την άλλη η διαγραφή ενός κόμβου δεν μπορεί να δημιουργήσει κύκλο. Άρα το T' είναι επίσης δέντρο με $n - 1$ κόμβους.

Ο.Ε.Δ.

Το Λήμμα 2.1.1 μας παρέχει ένα χρήσιμο εργαλείο, ώστε να χρησιμοποιούμε επαγωγή πάνω σε δέντρα βαθμού n. Η χρήση του παρουσιάζεται στο ακόλουθο θεώρημα, το οποίο διατυπώνει κάποιους ισοδύναμους χαρακτηρισμούς για τα δέντρα.



Σχήμα 2.7: Ένα φύλλο του δέντρου G.

Θεώρημα 2.1.5.1 (Ισοδύναμοι Ορισμοί Δέντρων). *Έστω ένα γράφημα G βαθμού $n, n \geq 1$. Τ.Α.Ε.Ι. και χαρακτηρίζουν τα δέντρα με n κόμβους:*

1. *Το G είναι συνεκτικό και δεν περιέχει κύκλους.*
2. *Το G είναι συνεκτικό και έχει $n-1$ ακμές.*
3. *Το G έχει $n-1$ ακμές και δεν περιέχει κύκλους.*
4. *Για κάθε $u, v \in V(G)$, υπάρχει μοναδικό μονοπάτι P_{uv}.*

Απόδειξη. Αρχικά, δείχνουμε την ισοδυναμία των (1), (2) και (3), δείχνοντας ότι οποιοδήποτε δύο από τα {συνεκτικότητα, ακυκλότητα, $n-1$ ακμές} συνεπάγεται το τρίτο.

$[(1) \Rightarrow \{(2),(3)\}]$ Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$, ένα άκυκλο γράφημα βαθμού 1 δεν έχει ακμές. Για $n > 1$, υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για γραφήματα με λιγότερες από n κορυφές. Δεδομένου ενός άκυκλου συνεκτικού γραφήματος γραφήματος από το Λήμμα 2.1.1 υπάρχει φύλλο v, τέτοιο ώστε το $G \setminus v$ να είναι επίσης άκυκλο και συνεκτικό (βλ. Σχήμα 2.7). Από επαγωγική υπόθεση το $G' = G \setminus e$ έχει μέγεθος $|E(G')| = n - 2$. Εφόσον μόνο μια ακμή προσπίπτει στο v, το G δεν μπορεί παρά να είχε $n-1$ ακμές.

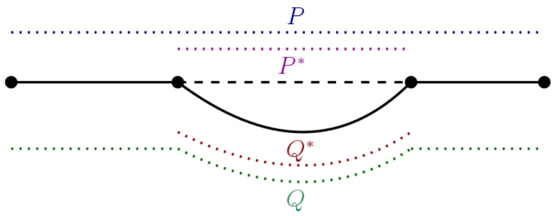
$[(2) \Rightarrow \{(1),(3)\}]$ Διαγράφουμε ακμές από τους κύκλους του G μέχρις ότου το γράφημα G' που προκύπτει να είναι άκυκλο. Αφού καμία ακμή ενός κύκλου δεν είναι γέφυρα (από Θεώρημα 2.1.4.1), το G' είναι συνεκτικό. Από την πραπάνω παράγραφο το G' έχει $n-1$ ακμές. Δεδομένου ότι το G έχει $n-1$ ακμές εξ αρχής, σημαίνει ότι δεν διαγράψαμε τελικά καμία ακμή και $G = G'$ και το G ήταν άκυκλο εξ αρχής.

$[(3) \Rightarrow \{(1),(2)\}]$ Έστω, προς άτοπο, ότι ο G δεν είναι συνεκτικός και $G_1, G_2, ..., G_k$ οι συνεκτικές συνιστώσες του G. Αφού κάθε κόμβος ανήκει σε ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα έχουμε, $\sum_i |V(G_i)| = n$. Αφού το G δεν περιέχει κύκλους, κάθε συνεκτική του συνιστώσα ικανοποιεί την ιδιότητα (1). Έτσι, ισχύει $|E(G_i)| = |V(G_i)| - 1$. Αθροίζοντας πάνω στα i παίρνουμε $|E(G)| = \sum_i [|V(G_i)| - 1] = n - k$. Όμως έχουμε $|E(G)| = n - 1$, άτοπο. Άρα $k = 1$ και ο G είναι συνεκτικός.

$(1) \Rightarrow (4)$ Έστω, προς άτοπο, ότι το G περιέχει κύκλους. Αφού το G είναι συνεκτικό για κάθε ζεύγος κόμβων u, v υπάρχει μονοπάτι που το συνδέει. Έστω ότι υπάρχει ένα ζεύγος που συνδέεται από δύο διαφορετικά μονοπάτια P, Q. Τότε παίρνουμε το μεγαλύτερο υπομονοπάτι P^* του P και Q^* του Q, έτσι ώστε $V(P^*) \cap V(Q^*) = \emptyset$ και τα P^*, Q^* να έχουν τα ίδια άκρα (βλ. Σχήμα 2.8). Τότε το $P^* \cup Q^*$ είναι ένας κύκλος στο G, άτοπο.

$(4) \Rightarrow (1)$ Αφού υπάρχει μονοπάτι ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο κόμβους u, v ο G είναι συνεκτικός. Από την άλλη, αν ο G περιέχει κύκλο, τότε έχει δύο μονοπάτια ανάμεσα σε κάποιο ζεύγος κόμβων u, v. Άρα ο G είναι άκυκλος.

Ο.Ε.Δ.



Σχήμα 2.8: Το σχήμα του Θεωρήματος 2.1.5.1.

Συνδυάζοντας τον Ορισμό 2.1.5.1 με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.1.5.1.1. *Για ένα δέντρο T, ο αριθμός των ακμών του συνδέεται με τον αριθμό των κορυφών του από την σχέση:*

$$|E(T)| = |V(T)| - 1 \tag{2.2}$$

Ενώ, γενικότερα για ένα δάσος F ισχύει:

$$|E(F)| = |V(F)| - k_F \tag{2.3}$$

Παρατηρήστε την σύνδεση ανάμεσα στις σχέσεις (2.1) και (2.3). Έτσι, μας δίνεται η διαίσθηση ότι τα δέντρα είναι ελαχιστικά συνεκτικά γραφήματα. Την διαίσθησή μας αυτή, την συμπληρώνει το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.1.5.1.2. *Σε ένα δέντρο ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Κάθε ακμή του δέντρου είναι γέφυρα.*

2. *Προσθέτοντας μία ακμή στο δέντρο δημιουργούμε ακριβώς έναν κύκλο.*

Απόδειξη. 1. Αφού ένα δέντρο είναι ένα άκυκλο γράφημα, από Θεώρημα 2.1.4.1 έχουμε ότι κάθε ακμή είναι πράγματι γέφυρα.

2. Από το (4) του Θεωρήματος 2.1.5.1, σε ένα δέντρο υπάρχει μοναδικό μονοπάτι μεταξύ δύο κόμβων. Επομένως, προσθέτοντας μια ακμή δημιουργούμε ακριβώς έναν κύκλο.

Ο.Ε.Δ.

2.1.6 Υπογραφήματα Επικάληψης

Στην συνέχεια θα δούμε ότι κάθε συνεκτικό γράφημα περιέχει ένα δέντρο, το οποίο εκτείνεται σε όλους του κόμβους του γραφήματος. Για να το δούμε αυτό μπορούμε να φανταστούμε να αφαιρούμε ακμές από ένα συνεκτικό γράφημα, προσέχοντας να μην χαλάσουμε την συνεκτικότητα. Όταν δεν μπορούμε να διαγράψουμε άλλες ακμές θα έχουμε μείνει με ένα άκυκλο γράφημα. Αυτό το άκυκλο γράφημα, αφού έχουμε διατηρήσει την συνεκτικότητα, δεν μπορεί παρά να είναι ένα δέντρο. Το δέντρο αυτό θα το λέμε δέντρο επικάλυψης. Συνεχίζουμε τώρα με τους τυπικούς ορισμούς. Αρχίζουμε με το γράφημα επικάλυψης.

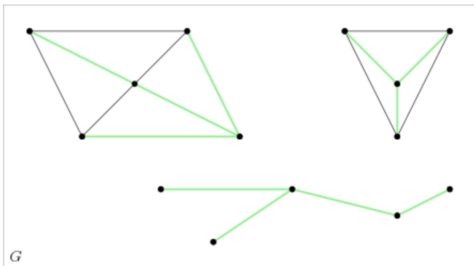
Ορισμός 2.1.6.1 (Γράφημα Επικάλυψης)**.** *Έστω ένα γράφημα G. Έστω, επίσης, ένα υπογράφημα $G' \subseteq_{\upsilon\pi} G$. Θα λέμε ότι το G' είναι* γράφημα επικάλυψης *(spanning graph) του G, αν $V(G) = V(G')$ και το $k_G = k_{G'}$. Ειδικότερα, αν το G' είναι δάσος ή δέντρο θα κάνουμε λόγο για* δάσος επικάλυψης *(spanning forest) και* δέντρο επικάλυψης *(spanning tree) αντίστοιχα.*

Από το ορισμό, μπορούμε άμεσα να δείξουμε ότι όλα τα δάση επικάλυψης έχουν το ίδιο μέγεθος. Για παράδειγμα, θεωρήστε ένα γράφημα G και ένα δάσος επικάλυψής του $F \subseteq_{\upsilon\pi} G$. Τότε από τον ορισμό έχουμε $|V(F)| = |V(G)|$ και $k_F = k_G$. Από Πόρισμα 2.1.5.1.1 θα έχουμε $|E(F)| = |V(G)| - k_G$. Αυστηρά θα δώσουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.1.6.1. *Έστω ένα γράφημα G. Έστω, επίσης, δύο δάση επικάλυψής του $F_1, F_2 \subseteq_{\upsilon\pi} G$. Τότε:*

$$|E(F_1)| = |E(F_2)| = |V(G)| - k_G$$

Δίνουμε ένα παράδειγμα ενός δάσους επικάλυψης στο Σχήμα 2.9.



Σχήμα 2.9: Ένα δάσος επικάλυψης (συμβολίζεται με πράσινο) του γραφήματος G. Το G έχει τρεις συνεκτικές συνιστώσες, έτσι το δάσος επικάλυψης απαρτίζεται από τρία δέντρα.

Παραπάνω αναφερθήκαμε σε μια διαδικασία ώστε να παράγουμε γραφήματα επικάλυψης για ένα γράφημα G. Μάλιστα επισημάνθηκε ότι ένα δέντρο (ή γενικότερα δάσος) επικάλυψης θα είναι το ελαχιστικό στοιχείο αυτής της διαδικασίας. Αποδεικνύουμε το γεγονός αυτό στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1.6.2. *Κάθε γράφημα G περιέχει ένα δάσος επικάλυψης. Επιπλέον, ένα δάσος επικάλυψης F δεν περιέχει γνήσια ένα άλλο δάσος επικάλυψης.*

Απόδειξη. Για να δούμε ότι κάθε γράφημα περιέχει ένα δάσος επικάλυψης, αρκεί να ακολουθήσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.5.1, ειδικότερα την περίπτωση, όπου δείχνουμε ότι $[(2) \Rightarrow \{(1), (3)\}]$. Διαγράφουμε, επαναληπτικά ακμές από κύκλους στις συνεκτικές συνιστώσες του G. Έτσι, μένουμε με ένα άκυκλο γράφημα F, το οποίο δεν μπορεί να έχει παραπάνω συνεκτικές συνιστώσες από το G, λόγω του Θεωρήματος 2.1.4.1.

Για το δεύτερο ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για ένα δέντρο επικάλυψης T. Έστω, προς άτοπο, ένα δέντρο $T' \subset_{\upsilon\pi} T$, όπου το T' είναι ένα άλλο δέντρο επικάλυψης του G. Θεωρούμε τον βαθμό του γραφήματος G, $n = |V(G)|$. Τότε, αφού τόσο το T, όσο και το T' είναι γραφήματα επικάλυψης ισχύει, $V(T) = n = V(T')$. Όμως, $T' \subset_{\upsilon\pi} T$, άρα $E(T') \subset E(T)$. Έτσι $|E(T')| < |E(T)| = n - 1$. Άτοπο, από Πόρισμα 2.1.5.1.1.

Ο.Ε.Δ.

Με το τέλος αυτής της υποενότητας, τελειώνει και η εισαγωγή πάνω στα γραφήματα. Στην συνέχεια της ενότητας θα ακολουθήσουμε μια διαφορετική πορεία από αυτή που συναντάμε σε προπτυχιακά μαθήματα θεωρία γραφημάτων. Αντί να εξετάσουμε γραφήματα σαν ολότητα και να αποδείξουμε αποτελέσματα πάνω σε αυτά θα θεωρήσουμε ένα αυθαίρετο γράφημα G και θα εστιάσουμε σε σχέσεις ανάμεσα στα υπογραφήματά του. Ακόμη, θα εστιάσουμε στις ακμές των υπογραφημάτων, παρά στους κόμβους τους, όπως συνηθίζεται στα προπτυχιακά μαθήματα θεωρία γραφημέτων. Αυτές οι αλλαγές επισημαίνουν την είσοδό μας στην θεωρία γραφικών μητροειδών. Παρ' όλο που θα αναβάλουμε έναν αυστηρό ορισμό μέχρι το Κεφάλαιο 3, θα πάρουμε μια γεύση την έννοιας της ανεξαρτησίας μέσω των παρακάτω αποτελεσμάτων.

2.1.7 Δέντρα και Δάση ως Υπογραφήματα

Θα αποδείξουμε τώρα, κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες που έχουν τα δάση ενός γραφήματος G. Επίσης κάνουμε την υπόθεση ότι τα γραφήματα G στα οποία αναφερόμαστε είναι συνεκτικά, εκτός και αν πούμε κάτι διαφορετικό. Παρ' όλα αυτά όλα τα αποτελέσματα μπορούν να γενικευτούν και σε μη συνεκτικά γραφήματα.

Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι τα δάση ενός γραφήματος διαθέτουν την ιδιότητα επαύξησης. Δηλαδή αν έχουμε δύο δάση, όπου το ένα είναι μικρότερου μεγέθους, από το άλλο. Τότε μπορούμε να προσθέσουμε πάντα μια ακμή, από το μεγαλύτερο στο μικρότερο και να αυξήσουμε το μέγεθος του τελευταίου. Τυπικότερα, δείχνουμε την ακόλουθη πρόταση.

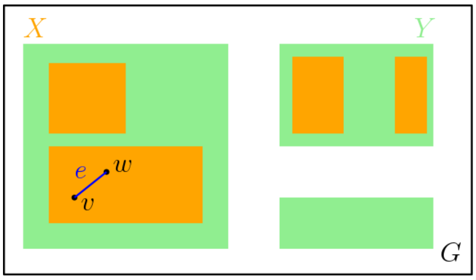
Θεώρημα 2.1.7.1 (Ιδιότητα Επαύξησης (Augmentation Property))**.** *Έστω ένα γράφημα G. Έστω δύο δάση $X, Y \subseteq_{\upsilon\pi} G$, με $|E(X)| > |E(Y)|$. Τότε υπάρχει ακμή $e \in E(X) \setminus E(Y)$ τέτοιο ώστε το $Y \cup e$ είναι επίσης ένα δάσος του G.*

Απόδειξη. Αρχικά γράφουμε κάποιες σχέσεις, που προκύπτουν από την διατύπωση της πρότασης. Έτσι αν θέσουμε $n_X = |V(X)|$ και $n_Y = |V(Y)|$. Τότε από το Πόρισμα 2.1.5.1.1. θα πάρουμε $|E(X)| = n_X - k_X$ και $|E(Y)| = n_Y - k_Y$ Αφού έχουμε $|E(X)| > |E(Y)|$, θα πρέπει:

$$(n_X - n_Y) + (k_Y - k_X) > 0 \tag{2.4}$$

Όπου, $n_X, n_Y, k_X, k_Y > 0$. Έστω, προς άτοπο, ότι για κάθε $e = \{v, w\} \in E(X) \setminus E(Y)$ το $Y \cup e$ δεν είναι δάσος. Τότε κάθε τέτοια ακμή θα δημιουργεί κύκλο στο Y. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι κόμβοι που ενώνονται με ακμή στο X, συνδέονται επίσης στο Y. Είτε άμεσα με ακμή, είτε έμμεσα μέσω ενός μονοπατιού, μήκους μεγαλύτερου της μονάδας. Συνεπώς, κάθε συνεκτική συνιστώσα του X είναι υποσύνολο κάποιας συνεκτικής συνιστώσας του Y. Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.10. Έτσι παίρνουμε $k_X \geq k_Y$ και $n_X \leq n_Y$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την σχέση (2.4) .

Ο.Ε.Δ.



Σχήμα 2.10: Το διάγραμμα Venn των συνεκτικών συνιστωσών του X, Y, σαν σύνολα κόμβων. Παρατηρείστε ότι η ακμή e δεν υπάρχει στο δάσος Y, όμως οι κόμβοι v, w ανήκουν σε κάποια συνεκτική του συνιστώσα.

Πριν προχωρήσουμε θα δώσουμε ένα (αντί)παράδειγμα στην χρήση της ιδιότητας επαύξησης στην πράξη.

Παράδειγμα 2.1.7.1. *Θεωρήστε το γράφημα του Σχήματος 2.11α' Θεωρήστε, επίσης, δύο δέντρα επικάλυψης πάνω στο γράφημα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.11α' παρακάτω. Όπως βλέπετε έχουμε $E(T_1) \cap E(T_2) = \emptyset$ ή ισοδύναμα $E(T_1) \setminus E(T_2) = E(T_1)$. Συνεπώς τα δύο δέντρα είναι "ακμικά" ξένα. Παρ' όλα αυτά δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.1.7.1, αφού $|E(T_1)| = |E(T_2)|$.*

Από την άλλη, παρατηρήστε το Σχήμα 2.11β'. Μπορούμε να αυξήσουμε το δέντρο Y σε ένα άλλο δέντρο του G, μέσω διαδοχικής πρόσθεσης ακμών από το X. Ονομάσαμε το σύνολο των ακμών που προσθέσαμε S. Τέλος, επισημαίνουμε ότι $|S| = |E(X)| - |E(Y)|$.

(α') **(β')**

Σχήμα 2.11: Το σχήμα του Παραδείγματος 2.1.7.1.

Ορμώμενοι από το Παράδειγμα 2.1.7.1 δίνουμε το παρακάτω πόρισμα, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στις αποδείξεις.

Πόρισμα 2.1.7.1.1. *Έστω ένα γράφημα G. Έστω, επίσης, δύο δάση του $X, Y \subseteq_{\upsilon\pi} G$, με $|E(X)| > |E(Y)|$. Τότε, υπάρχει ένα σύνολο ακμών $S \subseteq |E(X)| \setminus |E(Y)|$, με $|S| = |E(X)| - |E(Y)|$, τέτοιο ώστε το $Y \cup S$ να είναι επίσης ένα δάσος του G.*

Απόδειξη. Έστω $|E(X)| = n_1$ και $|E(Y)| = n_2$. Επίσης, $m = n_1 - n_2$. Παρατηρήστε στα $E(X), E(Y)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την Ιδιότητα Επαύξησης και θα μας δώσει ένα στοιχείο $x_1 \in E(X) \setminus E(Y)$. Ομοίως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα στα σύνολα $E(X) \setminus \{x_1\}$ και $E(Y) \cup \{x_1\}$. Δουλεύοντας παρόμοια μπορούμε να πάρουμε τα στοιχεία $x_1, x_2, ..., x_m \in E(X) \setminus E(Y)$. Παρ' όλα αυτά θα έχουμε [2]:

$$|E(X) \setminus \{x_1\} \setminus \{x_2\} \setminus ... \setminus \{x_m\}| = |E(Y) \cup \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup ... \cup \{x_m\}|$$

και άρα δεν θα μπορέσουμε να ξαναεφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.1.7.1

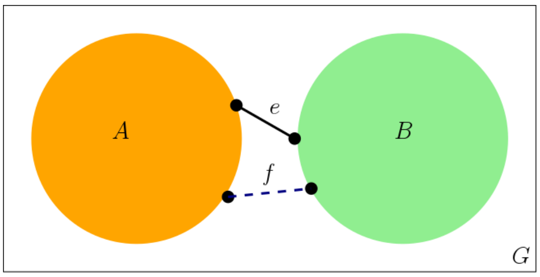
Ο.Ε.Δ.

Από την άλλη τα δέντρα επικάλυψης ενός γραφήματος, παρουσιάζουν την ενδιαφέρουσα ιδιότητα της ανταλλαγής. Δηλαδή, δεδομένων δύο διαφορετικών δέντρων επικάλυψης, μπορούμε πάντα να ανταλλάξουμε μια ακμή του πρώτου με κάποια από το δεύτερο, ώστε να πάρουμε ένα άλλο νόμιμο δέντρο επικάλυψης. Η ιδιότητα της ανταλλαγής, ίσως να σας θυμίζει την αντίστοιχη ιδιότητα που παρουσιάζουν οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου. Παρ' όλα αυτά με τους διανυσματικούς χώρους θα ασχοληθούμε στην Ενότητα 2.2.

Θεώρημα 2.1.7.2 (Ιδιότητα Ανταλλαγής (Exchange Property)). *Έστω ένα γράφημα G και δύο δέντρα επικάλυψης T_1, T_2 του G. Έστω, επίσης, μια ακμή $e \in E(T_1) \setminus E(T_2)$, τότε υπάρχει μια ακμή $f \in E(T_2) \setminus E(T_1)$, τέτοια ώστε το $(T_1 \setminus e) \cup f$ είναι επίσης ένα δέντρο επικάλυψης.*

Απόδειξη. Αρχικά, κάνοντας χρήση του Πορίσματος 2.1.5.1.2, διαγράφουμε μια ακμή από το T_1. Τότε, $T_1 \setminus e$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες, έστω A, B, οι οποίες είναι επίσης δέντρα. Όμως το T_2 είναι ένα δέντρο επικάλυψης, έτσι υπάρχει ακμή $f = \{a, b\} \in E(T_2)$, με $a \in A$ και $b \in B$ (βλ. Σχήμα 2.12). Έτσι έχουμε ότι, το υπογράφημα $T_{new} := (T_1 \setminus e) \cup f$ είναι γράφημα επικάλυψης, αφού $V(T_{new}) = V(A) \cup V(B) = V(G)$ και το T_{new} είναι συνεκτικό. Επίσης, είναι δέντρο, αφού τα A, B είναι ξένα δέντρα και άρα η ακμή f δεν μπορεί να δημιουργήσει κύκλο. Άρα το T_{new} είναι πράγματι ένα δέντρο επικάλυψης του G.

Ο.Ε.Δ.



Σχήμα 2.12: Τα δύο δέντρα (A, B) που προκύπτουν από την διαγραφή της ακμής e, από το δέντρο επικάλυψης T_1. Εφόσον το T_2 είναι ένα δέντρο επικάλυψης θα πρέπει να υπάρχει ακμή f, η οποία να ενώνει τα A, B.

[2]Για να μην επιβαρύνουμε τον συμβολισμό με περιττές παρενθέσεις, υποθέτουμε ότι η συνολοθεωρητική πράξη $\setminus$ είναι αριστερά προσεταιριστική.

2.1.8 Κύκλοι ως Υπογραφήματα

Συνεχίζουμε αυτή την ενότητα με μία πρόταση πάνω στους κύκλους ενός γραφήματος. Θα δείξουμε ότι οι κύκλοι έχουν την ιδιότητα της απαλοιφής, όπως παρουσιάζεται από την παρακάτω πρόταση.

Θεώρημα 2.1.8.1 (Ιδιότητα Απαλοιφής (Elimination Property))**.** *Έστω ένα γράφημα G και δύο κύκλοι $C_1, C_2 \subseteq_{\upsilon\pi} G$, με $C_1 \neq C_2$. Έστω, επίσης, μια ακμή $e \in E(C_1) \cap E(C_2)$. Τότε το γράφημα $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ είναι ένας κύκλος του G.*

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρήστε ότι το $C_1 \cup C_2$ είναι συνεκτικό υπογράφημα. Επιπλέον, αφού η e ανήκει σε κάποιον κύκλο, από Θεώρημα 2.1.4.1 η e δεν μπορεί να είναι γέφυρα. Συνεπώς, το γράφημα $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ είναι επίσης συνεκτικό. Έστω, προς άτοπο, ότι το $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ δεν περιέχει κύκλο. Τότε, το $C_1 \cup C_2$ θα περιέχει μοναδικό κύκλο (Πόρισμα 2.1.5.1.2). Το οποίο, όμως έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας.

Ο.Ε.Δ.

2.1.9 Βαθμός ενός Γραφήματος

Τώρα εισάγουμε την έννοια του βαθμού [3] ενός γραφήματος. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.1.9.1 (Βαθμός)**.** *Έστω ένα γράφημα G τάξης n, μεγέθους m και k_G συνεκτικές συνιστώσες. Θα λέμε* βαθμό *(rank) του γραφήματος G και θα συμβολίζουμε με $r(G)$ το μέγεθος ενός δάσους επικάλυψης του G.*

Παρατηρήστε ότι ο βαθμός ενός γραφήματος είναι καλώς ορισμένος αφού όλα τα δάση επικάλυψης έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών. Μάλιστα από Πόρισμα 2.1.5.1.1 ισχύει $r(G) = n - k_G$. Στην παρακάτω πρόταση εξετάσουμε τις ιδιότητες του βαθμού, σαν συνάρτηση πάνω στα υπογραφήματα, ενός γραφήματο G.

Θεώρημα 2.1.9.1 (Ιδιότητες Συνάρτησης Βαθμού)**.** *Για ένα γράφημα G η συνάρτηση βαθμού ικανοποιεί τα παρακάτω:*

1. Εύρος τιμών *της συνάρτησης,* $0 \leq r(G) \leq |E(G)|$.
2. Αύξουσα συνάρτηση. *Για $H \subseteq_{\upsilon\pi} G$, $r(H) \leq r(G)$.*
3. Υπομετρικότητα. *Έστω δύο υπογραφήματα $H, K \subseteq_{\upsilon\pi} G$, τότε ισχύει:*

$$r(H \cup K) \leq r(H) + r(K) - r(H \cap K) \tag{2.5}$$

[3] να μην συγχέεται με τον βαθμό ενός κόμβου, που είναι απλά η πληθικότητα του συνόλου των γειτόνων του.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της παραπάνω πρότασης, παρατηρήστε την σχέση (2.5) . Θυμηθείτε την συζήτηση που είχαμε κάνει στην Ενότητα 1.3 για διακριτές συναρτήσεις και συγκεκριμένα για την υπομετρικότητα. Η σχέση (2.5) δεν είναι τίποτα άλλο από την σχέση (1.2) εκφρασμένη για γραφήματα και υπογραφήματα, αντί για πεπερασμένα σύνολα. Έχοντας αυτό κατά νου συνεχίζουμε με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.9.1.

Απόδειξη Θεωρήματος 2.1.9.1. Υποθέτουμε ότι $H \neq K$, διαφορετικά το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. Θεωρήστε τα δάση επικάλυψης $F_{H\cap K}, F_H, F_{H\cup K}$ των υπογραφημάτων $H \cap K, H, H \cup K$ αντίστοιχα [4] (βλ. Σχήμα 2.13β'). Έστω $E_1 = E(F_{H\cap K})$. Αφού $H \neq K$, τότε $|H| > |E(H\cap K)|$. Από το Πόρισμα 2.1.7.1.1 υπάρχει ένα σύνολο ακμών $E_2 \subseteq E(F_H)\setminus E_1$, τέτοιο ώστε $G[E_1 \cup E_2]$ να είναι ένα δάσος του G. Ομοίως, υπάρχει $E_3 \subseteq E(F_{H\cup K})\setminus(E_2 \cup E_1)$ το οποίο $G[E_1 \cup E_2 \cup E_3]$ να είναι δάσος (βλ. Σχήμα 2.13γ'). Επίσης ισχύει:

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j \in [3] \tag{2.6}$$

Παρατηρήστε ότι από την Ιδιότητα Της Επαύξησης το δάσος $G[E_1 \cup E_2]$ είναι ένα δάσος για το H. Επιπλέον, το δάσος $G[E_1 \cup E_3]$ είναι ένα δάσος του K. Παρ' όλα αυτά, δεν ξέρουμε αν το $G[E_1 \cup E_3]$ είναι μεγιστικό. Επομένως:

$$\begin{aligned} r(H) + r(K) &\geq |E_1 \cup E_2| + |E_1 \cup E_3| \\ &\overset{(2.6)}{=} 2|E_1| + |E_2| + |E_3| \\ &= |E_1| + |E_1 \cup E_2 \cup E_3| \\ &= |E(F_{H\cap K})| + |E(F_{H\cup K})| \\ &= r(H \cap K) + r(H \cup K) \end{aligned}$$

Ο.Ε.Δ.

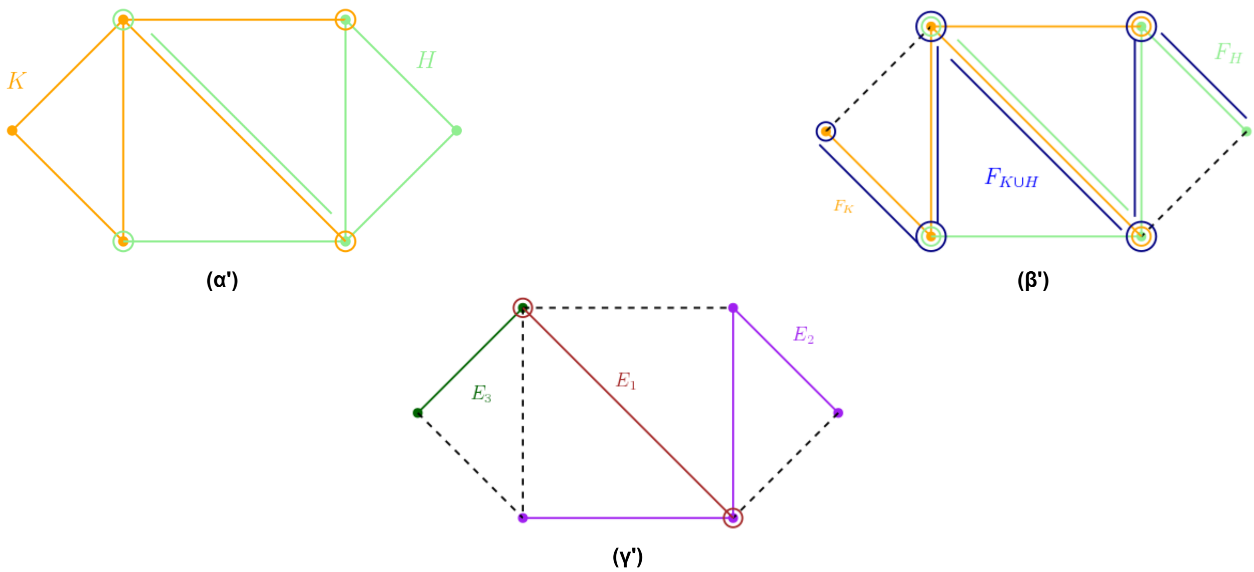
2.2 Διανυσματικοί Χώροι

Μια άλλη μαθηματική δομή με πολλές καλές ιδιότητες, όπως τα δέντρα είναι οι διανυσματικοί χώροι. Αρχίζουμε, όπως πριν, με έναν ορισμό, ο οποίος γενικεύει κάποιες καλές ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Πριν όμως προχωρήσουμε εκεί θα πρέπει να ορίσουμε αξιωματικά τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Για την παρούσα ενότητα ακολουθούμε το [15], αν και οι βασικοί ορισμοί και τα θεωρήματα βρίσκονται σε οποιοδήποτε προπτυχιακό βιβλίο γραμμικής άλγεβρας.

2.2.1 Σώμα

Ορισμός 2.2.1.1 (Αξιώματα Πρόσθεσης και Πολλαπλασιασμού). *Έστω ένα σύνολο S. Θεωρούμε τις πράξεις $+ : S \times S \longrightarrow S$ και $\cdot : S \times S \longrightarrow S$, τις οποίες θα ονομάζουμε* πρόσθεση

[4] Υπογραμμίζουμε ότι εν γένει δεν θα ισχύει $F_{H\cap K} \subseteq_{\upsilon\pi} F_H \subset_{\upsilon\pi} F_{H\cup K}$. Κάτι τέτοιο θα περιόριζε την γενικότητα της απόδειξης.



Σχήμα 2.13: Παραδείγματα γραφημάτων της απόδειξης της Θεωρήματος 2.1.9.1.

και πολλαπλασιασμό *αντίστοιχα. Έστω τώρα $a, b, c \in S$, απαιτούμε να ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα.*

1. Προσεταιριστικότητα *πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, $a + (b + c) = (a + b) + c$ και $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.*
2. Αντιμεταθετικότητα *πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$.*
3. Ταυτοτικό στοιχείο *πρόσθεση και πολλαπλασιασμού, υπάρχουν στο S δύο διαφορετικά στοιχεία τα $0, 1$ τέτοια ώστε $a + 0 = a$ και $a \cdot 1 = a$.*
4. Αντίστροφος πρόσθεσης*, για κάθε στοιχείο $a \in S$, υπάρχει ένα στοιχείο, το οποίο θα συμβολίζουμε με $-a$, και θα το ονομάζουμε προσθετικό αντίστροφο του a. Θα ισχύει $a + (-a) = 0$.*
5. Αντίστροφος πολλαπλασιασμού *για κάθε στοιχείο $a \in S$, εκτός του 0, υπάρχει ένα στοιχείο, το οποίο θα συμβολίζουμε με a^{-1} ή $1/a$, και θα το ονομάζουμε πολλαπλασιαστικό αντίστροφο του a. Θα ισχύει $a \cdot a^{-1} = 1$.*
6. Επιμεριστική ιδιότητα *του πολλαπλασιασμού πάνω στην πρόσθεση, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$*

Ορισμός 2.2.1.2 (Σώμα)**.** *Έστω ένα σύνολο $\mathbb{F}$. Έστω, επίσης, οι πράξεις $+ \colon S \times S \longrightarrow S$ και $\cdot \colon S \times S \longrightarrow S$, τις οποίες θα ονομάζουμε* πρόσθεση *και* πολλαπλασιασμό *αντίστοιχα και ικανοποιούν τα αξιώματα του Ορισμού 2.2.1.1. Θα ονομάζουμε την τριάδα $\langle \mathbb{F}, +, \cdot \rangle$* σώμα *(field), αν το $\mathbb{F}$ είναι κλειστό κάτω από τις πράξεις αυτές.*

Παρατηρούμε ότι το γνωστό μας σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, μαζί με την συνήθη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ικανοποιούν τα αξιώματα σώματος, και άρα η τριάδα

$\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ είναι σώμα. Άλλα οικεία σώματα είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ και το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$. Παρατηρήστε, ότι πουθενά στον παραπάνω ορισμό δεν κάνουμε λόγο για την πληθικότητα του συνόλου $\mathbb{F}$, απαιτήσαμε να έχει μόνο δύο στοιχεία τα $0, 1$. Ειδικότερα, αν $\mathbb{F} = \{0, 1\}$, τότε το σώμα που προκύπτει [5] είναι η *Άλγεβρα Boole*, μια δομή με ιδιαίτερη χρησιμότητα στην επιστήμη των υπολογιστών.

2.2.2 Διανυσματικός Χώρος

Ετοιμαστείτε τώρα για ακόμη έναν κατάλογο αξιωμάτων. Στην συνέχεια, πάνω στην έννοια του σώματος ορίζουμε τον διανυσματικό χώρο. Πάλι θα ορίσουμε πρώτα αξιωματικά δύο πράξεις, αυτές της πρόσθεση διανυσμάτων και βαθμωτού πολλαπλασιασμού.

Ορισμός 2.2.2.1 (Αξιώματα Πρόσθεσης Διανυσμάτων και Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού)**.** *Έστω ένα σύνολο S και ένα σώμα $\mathbb{F}$. Θεωρούμε τις πράξεις $+\colon S \times S \longrightarrow S$ και $\cdot\colon F \times S \longrightarrow S$, τις οποίες θα ονομάζουμε* πρόσθεση διανυσμάτων *και* βαθμωτό πολλαπλασιασμό *αντίστοιχα. Έστω τώρα τα στοιχεία $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in S$, απαιτούμε να ισχύουν τα παρακάτω:*

1. Προσεταιριστικότητα *πρόσθεσης διανυσμάτων, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$*
2. Αντιμεταθετικότητα *πρόσθεσης διανυσμάτων, $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$*
3. Ταυτοτικό στοιχείο *πρόσθεσης διανυσμάτων, υπάρχει στοιχείο $\mathbf{0} \in V$, τέτοιο ώστε $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$*
4. Αντίστροφος *πρόσθεσης διανυσμάτων, για κάθε στοιχείο $\boldsymbol{a} \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο, το οποίο θα συμβολίζουμε με $-\boldsymbol{a}$ και θα το ονομάζουμε αντίστροφο του $\boldsymbol{a}$. Θα ισχύει $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.*
5. Επιμεριστική ιδιότητα *του βαθμωτού πολλαπλασιασμού πάνω στην πρόσθεση διανυσμάτων, $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.*
6. Επιμεριστική ιδιότητα *του βαθμωτού πολλαπλασιασμού πάνω στην πρόσθεση του σώματος F, $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$*
7. Συμβατότητα *του βαθμωτού πολλαπλασιασμού πάνω στον πολλαπλασιασμό του σώματος F, $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu\boldsymbol{a})$*
8. Ταυτοτικό στοιχείο *βαθμωτού πολλαπλασιασμού, έστω το ταυτοτικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού του σώματος F, τότε $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$*

Ορισμός 2.2.2.2 (Διανυσματικός Χώρος)**.** *Έστω ένα σώμα $\mathbb{F}$ και ένα σύνολο V. Θεωρείστε τις πράξεις* πρόσθεσης διανυσμάτων *και* βαθμωτού γινόμενου, *$+\colon V \times V \longrightarrow V$, $\cdot\colon \mathbb{F} \times V \longrightarrow V$, που ικανοποιούν τα αξιώματα του Ορισμού 2.2.2.1. Την τριάδα $\langle V, +, \cdot \rangle$ θα την ονομάζουμε* διανυσματικό χώρο *(vector space) επί του σώματος $\mathbb{F}$, αν το V είναι κλειστό κάτω από τις πράξεις αυτές. Επίσης, θα ονομάζουμε τα στοιχεία του V* διανύσματα *(vectors), ενώ τα στοιχεία του $\mathbb{F}$ θα τα ονομάζουμε βαθμωτά (scalars).*

[5] Αλλάζοντας κατάλληλα την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

Κάνουμε τώρα μια παρατήρηση σχετικά με τον συμβολισμό. Επισημαίνουμε ότι θα μείνουμε στην σύμβαση που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει στον παραπάνω ορισμό. Τα βαθμωτά μεγέθη τα τα γράφουμε με απλή γραφή (δηλαδή x), ενώ τα διανύσματα με έντονη γραφή ($\boldsymbol{x}$).

Παρατηρούμε ότι τα αξιώματα της πρόσθεσης διανυσμάτων, δεν διαφέρουν από τα αντίστοιχα αξιώματα για την πρόσθεση σε ένα σώμα. Έτσι για ένα σώμα $\mathbb{F}$ ένας τετριμμένος διανυσματικός χώρος είναι το ίδιο το $\mathbb{F}$. Γενικότερα, το σύνολο $\mathbb{F}^n, n \geq 1$, είναι ένας διανυσματικός χώρος, με την γνωστή πρόσθεση διανυσμάτων και βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Ειδικότερα, αν αντικαταστήσουμε το $\mathbb{F}$ με το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ παίρνουμε τον οικείο μας διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$.

Στα επόμενα θεωρήματα θα επιμείνουμε στην γενικότητα και θα μιλήσουμε αφηρημένα για διανυσματικούς χώρους, πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{F}$. Παρατηρήστε ότι, όπως συμβαίνει και με τα σώματα, οι διανυσματικοί χώροι μπορεί επίσης να είναι πεπερασμένοι ή άπειροι. Θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να ορίσουμε έναν διανυσματικό χώρο πάνω σε ένα πεπερασμένο σώμα, όπως η Άλγεβρα Boole. Εμείς θα επικεντρωθούμε σε πεπερασμένα σύνολα πάνω σε έναν αφηρημένο διανυσματικό χώρο (πεπερασμένο ή άπειρο [6]).

Ένα άλλο ιδιαίτερο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των διανυσματικών χώρων είναι η διάσταση του την οποία θα συζητήσουμε αναλυτικότερα στην συνέχεια αυτής την ενότητας. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να αντιληφθούμε διαισθητικά την έννοια της διάστασης σε οικείους χώρους, όπως ο $\mathbb{R}^n$. Όμως, η έννοια του διανυσματικού χώρου δεν περιορίζεται σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Για παράδειγμα ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}[x]$, όλων των πολυωνύμων μιας μεταβλητής, είναι ένας διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης. Στην παρούσα εργασία θα περιοριστούμε στους διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Συνεχίζουμε, τώρα, την συζήτησή μας στου διανυσματικού χώρους με τα υποσύνολα αυτών, τα οποία διατηρούν την οργάνωση του διανυσματικού χώρου· όπως αυτή ορίζεται στον Ορισμό 2.2.2.2. Έτσι εισάγουμε την ακόλουθη έννοια.

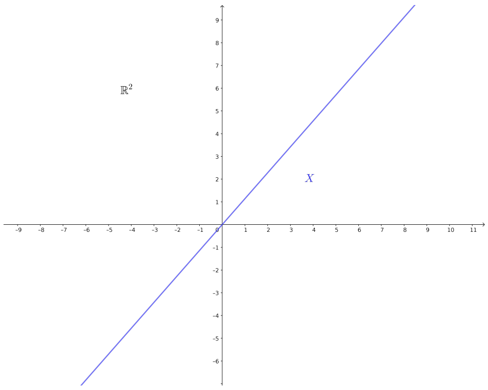
Ορισμός 2.2.2.3 (Διανυσματικός Υποχώρος)**.** *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{F}$ και $W \subseteq V$, τότε ο W είναι* διανυσματικός υπόχωρος *(vector subspace), αν πληρεί τα αξιώματα του Ορισμού 2.2.2.2 για τις πράξεις πρόσθεσης διανυσμάτων και βαθμωτού πολλαπλασιασμού του διανυσματικού χώρου V. Επιπλέον θα γράφουμε $W \leq V$.*

2.2.3 Γραμμικός Συνδυασμός

Συχνά είναι χρήσιμο να γράφουμε ένα διάνυσμα, ενός διανυσματικού χώρου V, συναρτήσει άλλων διανυσμάτων του V, έτσι δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.2.3.1 (Γραμμικός Συνδυασμός)**.** *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V επί του σώματος $\mathbb{F}$. Έστω, επίσης τα διανύσματα $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_m \in V$. Θα λέμε ότι το $\boldsymbol{y}$ γράφεται*

[6]Για την συνέχεια του Κεφαλαίου και για την υπόλοιπη εργασία, όπου κάνουμε λόγο για άπειρα σύνολα, θα εννοούμε υπεραριθμήσιμα σύνολα· εκτός και αν διατυπώσουμε ρητά κάτι άλλο.



Σχήμα 2.14: Οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $(0,0)$ είναι ένας διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^2$.

ως γραμμικός συνδιασμός *(linear combination) των $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_m$ αν υπάρχουν βαθμωτά $a_1, a_2, ..., a_m \in \mathbb{F}$, τέτοια ώστε:*

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{x}_i \tag{2.7}$$

Γενικότερα, θεωρήστε ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων X, ενός διανυσματικού χώρου V. Θεωρήστε την παρακάτω *γραμμική σχέση* (linear relation):

$$\sum_{i=1}^{|X|} a_i \boldsymbol{x}_i = 0 \tag{2.8}$$

Η σχέση (2.8) ορίζει ένα *ομογενές γραμμικό σύστημα* (homogeneous linear system) [7]. Παρατηρήστε ότι σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα υπάρχει πάντα μία λύση, όπου κάθε $a_i = 0$. Θα λέμε την λύση της (2.8), όπου κάθε $a_i = 0$, *τετριμμένη λύση*.

Ορισμός 2.2.3.2 (Γραμμική Ανεξαρτησία)**.** *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V. Έστω, επίσης, ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $X \subseteq V$. Θα λέμε ότι το X είναι* γραμμικώς ανεξάρτητο *(linearly independent) αν το ομογενές γραμμικό σύστημα:*

$$\sum_{i=1}^{|X|} a_i \boldsymbol{x}_i = 0 \tag{2.9}$$

έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Διαφορετικά, αν δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον μία μη τετριμμένη λύση στην (2.9), θα λέμε ότι το X είναι γραμμικώς εξαρτημένο *(linearly dependent).*

[7] Σε μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας συνήθως ορίζουμε μια διάταξη στα διανύσματα του X, τα οποία αντιμετωπίζουμε σαν διανύσματα - στήλες. Έτσι, θα γράφαμε την (2.8) σαν:

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{a} \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{0} \\ | \end{bmatrix}$$

Ή απλούστερα $X\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

Με μια απλή σύγκριση των σχέσεων (2.7) και (2.8) μπορούμε να υποπτευτούμε πως υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των δύο, την σχέση αυτή μας την δίνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.3.1. *Έστω ένα σύνολο διανυσμάτων* $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_m\}$, $m \geq 2$ *είναι γραμμικώς εξαρτημένο, αν και μόνον εάν υπάρχει ένα* $\boldsymbol{x}_k$ *στο παραπάνω σύνολο διανυσμάτων, το οποίο να είναι γραμμικός συνδυασμός των* $\boldsymbol{x}_i$, *με* $i < k$.

Απόδειξη. $[\Rightarrow]$ Έστω ότι το σύνολο $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_m\}$ είναι ένα γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο διανυσμάτων, όπου $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$, για όλα τα i. Τότε από τον Ορισμό 2.2.3.2, υπάρχουν βαθμωτά $a_i \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, ώστε να ισχύει $\sum_i a_i \boldsymbol{x}_i = 0$. Μπορούμε να επιλέξουμε ένα a_{i_0}, όπου $a_{i_0} \neq 0$. Αναδιατάσσουμε τα a_i, έτσι ώστε a_{i_0} να είναι το k-οστό στοιχείο, ενώ απαιτούμε όλα τα στοιχεία δεξιά του a_k να είναι μηδέν. Επιπλέον, χωρίς βλάβη της γενικότητας $k \geq 2$ (γιατί;). Έτσι παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{m} a_i \boldsymbol{x}_i = 0 \Leftrightarrow \\
&\sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{j=k+1}^{m} a_j \boldsymbol{x}_j = 0 \overset{a_j=0}{\Leftrightarrow} \\
&\sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{x}_i = 0 \Leftrightarrow a_k \boldsymbol{x}_k + \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{x}_i = 0 \Leftrightarrow \\
&\quad -a_k \boldsymbol{x}_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \boldsymbol{x}_i \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(-\frac{a_i}{a_k}\right) \boldsymbol{x}_i
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση είναι αυτή που ψάχνουμε.

$[\Leftarrow]$ Τώρα, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $\boldsymbol{x}_k$ το οποίο γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\boldsymbol{x}_i$, $i < k$, τότε απλά θέτουμε τα βαθμωτά $a_j = 0$, για $j > k$, και έχουμε το ζητούμενο.

Ο.Ε.Δ.

2.2.4 Ελαχιστικά Γραμμικώς Εξαρτημένα Σύνολα

Στην σύντομη, αυτή, υποενότητα θα συζητήσουμε για ελαχιστικά γραμμικώς εξαρτημένα σύνολα διανυσμάτων. Επιπλέον, θα δείξουμε την ιδιότητα απαλοιφής, για αυτά τα σύνολα.

Ορισμός 2.2.4.1 (Ελαχιστικά Γραμμικώς Εξαρτημένο Σύνολο)**.** *Έστω ένας διανυσματικός χώρος* V. *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων* X. *θα λέμε ότι το* X *είναι* ελαχιστικά *γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο διανυσμάτων, αν κάθε* $X' \subset X$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.*

Παρατηρήστε ότι ο Ορισμός 2.2.4.1 είναι απλά μια ειδική περίπτωση του Ορισμού 1.1.3.2 που είχαμε δώσει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Δίνουμε στην παρακάτω πρόταση έναν χαρακτηρισμό για τα ελαχιστικά γραμμικώς εξαρτημένα σύνολα.

Πρόταση 2.2.4.1. *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V. Έστω, επίσης, ένα πεπερασμένο σύνολο X διανυσμάτων του V. Αν το X είναι ελαχιστικά γραμμικώς εξαρτημένο, τότε σε κάθε λύση του ομογενούς συστήματος:*

$$\sum_{i=1}^{|X|} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = 0 \tag{2.10}$$

όλοι οι συντελεστές α_i είναι διάφοροι του μηδενός.

Απόδειξη. Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει μία λύση της γραμμικής σχέσης (2.10) όπου για κάποιο $i^* \in [|X|]$, $\alpha_{i^*} = 0$. Τότε παρατηρήστε ότι το ομογενές σύστημα

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i^*}}^{|X|} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = 0 \tag{2.11}$$

έχει μη τετριμμένη λύση. Άρα το σύνολο $X \setminus \{\boldsymbol{x}_{i^*}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι το X είναι ελαχιστικά γραμμικώς εξαρτημένο.

Ο.Ε.Δ.

Στο παρακάτω θεώρημα δείχνουμε ότι τα πεπερασμένα ελαχιστικά γραμμικά εξαρτημένα σύνολα έχουν την ιδιότητα απαλοιφής. Θυμηθείτε το Θεώρημα 2.1.8.1, στην προηγούμενη ενότητα, όπου αποδείξαμε ένα διαισθητικά όμοιο αποτέλεσμα για τους κύκλους ενός γραφήματος.

Θεώρημα 2.2.4.1 (Ιδιότητα Απαλοιφής (Elimination Property)). *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και δύο ελαχιστικά γραμμικώς εξαρτημένα, πεπερασμένα σύνολα διανυσμάτων $X, Y \subseteq V$, με $X \neq Y$. Έστω, επίσης, $\boldsymbol{z} \in X \cap Y$. Τότε το $(X \cup Y) \setminus \{\boldsymbol{z}\}$ περιέχει ένα ελαχιστικά γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο διανυσμάτων.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο διανυσμάτων $(Z \cup Y) \setminus \boldsymbol{z}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Έστω $X = \{\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_{t+1}\}$ και $Y = \{\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_{t+1}, \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_s\}$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_{t+1}$. Αφού, τόσο το X, όσο και το Y είναι ελαχιστικά γραμμικώς εξαρτημένα, τότε από Πρόταση 2.2.4.1 μπορούμε να εκφράσουμε το $\boldsymbol{z}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $X \setminus \{\boldsymbol{z}\}$ και $Y \setminus \{\boldsymbol{z}\}$, όπου όλοι οι συντελεστές είναι διαφορετικοί του μηδενός. Έτσι:

$$\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{k} \chi_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{i=k+1}^{t} \zeta_i \boldsymbol{z}_i \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{t} \omega_i \boldsymbol{z}_i + \sum_{i=t+1}^{s} \psi \boldsymbol{y}_i \tag{2.13}$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (2.12), (2.13) παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{i=k+1}^{t} (\zeta_i - \omega_i) \boldsymbol{z}_i + \sum_{i=t+1}^{s} \psi \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{0} \tag{2.14}$$

Παρατηρήστε ότι στην σχέση (2.14) τόσο τα $\chi_i \neq 0$, όσο και τα $\psi_i \neq 0$. Άρα, το $(X \cup Y) \setminus \{\boldsymbol{z}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Ο.Ε.Δ.

2.2.5 Γραμμική Θήκη

Στην συνέχεια θεωρούμε το σύνολο όλων των διανυσμάτων, που παράγονται σαν γραμμικοί συνδυασμοί ενός πεπερασμένου συνόλου άλλων διανυσμάτων. Με άλλα λόγια, για ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων X θα θεωρήσουμε την κλειστότητά του, ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και βαθμωτού πολλαπλασιασμού (τους γραμμικούς συνδυασμούς).

Ορισμός 2.2.5.1 (Γραμμική Θήκη)**.** *Έστω ένα σώμα $\mathbb{F}$ και ένας διανυσματικός χώρος, επί του $\mathbb{F}$, V. Έστω, επίσης, ένα πεπερασμένο υποσύνολο διανυσμάτων, $X \subseteq V$. Η* γραμμική θήκη [8] *(span) του X, συμβολίζεται με $\langle X \rangle$, είναι το σύνολο όλως των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων του X. Δηλαδή:*

$$\langle X \rangle = \left\{ \boldsymbol{x} \in V \;\middle|\; \boldsymbol{x} = \sum_i a_i \boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_i \in X, a_i \in \mathbb{F} \right\}$$

Με τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να συζητήσουμε για πεπερασμένες περιγραφές διανυσματικών χώρων, έτσι εισάγουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.5.2 (Παραγωγό Σύνολο)**.** *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και $X \subseteq V$, ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων. Θα λέμε ότι το X* παράγει *τον V ή είναι ένα* παραγωγό σύνολο *(spanning set)* [9] *του V, αν $\langle X \rangle = V$*

Κάνουμε τώρα κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με το παραγωγό σύνολο.

Παρατήρηση 2.2.5.2.1. *Έστω ένας διανυσματικός V και ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $X \subseteq V$. Τότε δεν είναι δύσκολο να δούμε τα εξής:*

1. *Η γραμμική θήκη του X είναι υποσύνολο του διανυσματικού χώρου V. Δηλαδή, $\langle X \rangle \subseteq V$.*
2. *Η γραμμική θήκη $\langle X \rangle$ είναι υποχώρος του V.*

[8] Εδώ ακολουθούμε την μετάφραση του όρου *κυρτή θήκη*. Αν δεν είστε εξοικειωμένοι με την έννοια, η κυρτή θήκη (convex hull) είναι μια υποπερίπτωση της γραμμικής θήκης, όπου όλοι οι πραγματικοί συντελεστές των διανυσμάτων πρέπει να αθροίζουν στην μονάδα. Η Αγγλική λέξη span αποδίδεται στα Ελληνικά με το αρχαιοελληνικό ρήμα ”εκτείνω” (ή εξαπλώνω, στα νέα Ελληνικά). Έτσι μια διαφορετική μετάφραση της γραμμικής θήκης, θα ήταν ”το σύνολο διανυσμάτων που εκτείνεται από τα διανύσματα του συνόλου X”. Ομοίως θα μπορούσαμε να μεταφράσουμε και το δέντρο επικάλυψης (spanning tree). Παρ’ όλα αυτά, αυτό δεν θα ήταν καθόλου εύχρηστο. Έτσι καταλήξαμε στην παραπάνω μετάφραση.

[9] Παρατηρήστε την σύνδεση μεταξύ των παραγωγών συνόλων και των δέντρων επικάλυψης, σύνδεση την οποία αποσιωπά η ελληνική ορολογία.

Το (1) προκύπτει από την κλειστότητα του V ως προς του γραμμικούς συνδυασμούς. Από την άλλη, το (2) προκύπτει από το (1) και από τον ορισμό της γραμμικής θήκης ως την κλεισότητα του X πάνω στου γραμμικούς συνδυασμούς.

Από την άλλη πλευρά, παρατηρήστε ότι αν $X \subseteq V$, ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων, τότε η γραμμική θήκη $\langle X \rangle$ είναι ένας υπόχωρος του V. Στην συνέχεια ακολουθούν κάποιες θεμελιώδεις ιδιότητες για τα παραγωγά σύνολα.

Θεώρημα 2.2.5.1. *Έστω ένα σώμα $\mathbb{F}$ και V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{F}$. Επιπλέον, έστω $X, Y, Z \subseteq V$, κάποια πεπερασμένα σύνολα. Αν $X \subseteq \langle Y \rangle$ και $Y \subseteq \langle Z \rangle$, τότε $X \subseteq \langle Z \rangle$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $Y = \{\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_k\}$ και $Z = \{\boldsymbol{z}_1, ...\boldsymbol{z}_l\}$. Για κάθε $\boldsymbol{x} \in X \subseteq \langle Y \rangle$, ισχύει από Ορισμό 2.2.5.1, ότι υπάρχουν βαθμωτά a_i τέτοια ώστε:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{y}_i \tag{2.15}$$

ενώ για κάθε $\boldsymbol{y}_i \in Y$ υπάρχουν βαθμωτά b_{ij} τέτοια ώστε:

$$\boldsymbol{y}_i = \sum_{i=1}^{l} b_{ij} \boldsymbol{z}_j \tag{2.16}$$

Από τις σχέσεις 2.15 και 2.16 έχουμε:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\sum_{j=1}^{l} b_{ij} \boldsymbol{z}_j \right) &(2.17)\\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_i b_{ij} \boldsymbol{z}_j &(2.18)\\
&= \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_{ij} \right) \boldsymbol{z}_j &(2.19)
\end{aligned}$$

Στην εξίσωση (2.17) έχουμε βγάλει κοινό παράγοντα τα a_i κατά, ενώ στην εξίσωση (2.19) βγάλαμε κοινό παράγοντα τα $\boldsymbol{z}_j$ [10]. Όπου και η τελευταία σχέση 2.19 είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του Z.

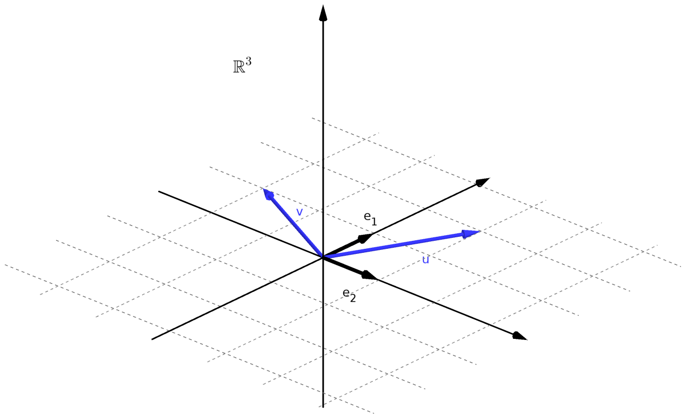
Ο.Ε.Δ.

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει το εξής χρήσιμο πόρισμα, για $X = \langle A \rangle$, $Y = A$ και $Z = B$.

[10] βλ. την επιμεριστική ιδιότητα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, πάνω στην πρόσθεση διανυσμάτων στον Ορισμό 2.2.2.2

Πόρισμα 2.2.5.1.1. *Έστω ένα σώμα $\mathbb{F}$ και V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{F}$. Επιπλέον, έστω $A, B \subseteq V$, κάποια πεπερασμένα σύνολα. Αν $A \subseteq \langle B \rangle$, τότε $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$.*

Το παραπάνω πόρισμα δηλώνει το εξής απλό γεγονός. Αν ένα σύνολο διανυσμάτων A βρίσκεται στην γραμμική θήκη ενός άλλου συνόλου διανυσμάτων B· τότε η γραμμική θήκη $\langle A \rangle$ περιέχεται στην γραμμική θήκη του B. Το γεγονός αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 2.15. Το πόρισμα θα το χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος.



Σχήμα 2.15: Έχουμε ότι τα διανύσματα u, v ανήκουν στον χώρο που παράγεται από τα e_1, e_2, συνεπώς η γραμμική του θήκη είναι υποσύνολο της γραμμικής θήκης $\langle e_1, e_2 \rangle$.

Θεώρημα 2.2.5.2. *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{F}$. Έστω $X = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Αν το $\boldsymbol{x}_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο από τα διανύσματα $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_{k-1}\}$, τότε $\langle X \rangle = \langle X \setminus \boldsymbol{x}_k \rangle$*

Απόδειξη. Αφού $\boldsymbol{x}_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο από τα $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_{k-1}\}$, από Θεώρημα 2.2.3.1 μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των $\langle X \setminus \boldsymbol{x}_k \rangle$, άρα $X \subseteq \langle X \setminus \boldsymbol{x}_k \rangle$. Από Πόρισμα 2.2.5.1.1 $\langle X \rangle \subseteq \langle X \setminus \boldsymbol{x}_k \rangle$. Από την άλλη, αφού $(X \setminus \boldsymbol{x}_k) \subseteq X$ έχουμε $\langle X \setminus \boldsymbol{x}_k \rangle \subseteq \langle X \rangle$.

Ο.Ε.Δ.

Το θεώρημα που ακολουθεί προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της γραμμικής θήκης, ως την κλειστότητα ενός πεπερασμένου συνόλου διανσυμάτων X, ως προς τις γνωστές μας πράξεις. Θα δείξουμε ότι το σύνολο που θα προκύψει αν πάρουμε την γραμμική θήκη του $\langle X \rangle$, δεν θα περιέχει άλλα διανύσματα που δεν περιέχει ήδη το $\langle X \rangle$.

Θεώρημα 2.2.5.3. *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{F}$. Για κάθε $X \subseteq V$, $\langle X \rangle = \langle \langle X \rangle \rangle$*

Απόδειξη. Αφού $X \subseteq \langle X \rangle$, τότε $\langle X \rangle \subseteq \langle \langle X \rangle \rangle$. Την άλλη κατεύθυνση την παίρνουμε από το Πόρισμα 2.2.5.1.1. Αφού $\langle X \rangle \subseteq \langle X \rangle$ παίρνουμε $\langle \langle X \rangle \rangle \subseteq \langle X \rangle$.

Ο.Ε.Δ.

Συνεχίζουμε την συζήτησή μας για την γραμμική θήκη και τα παραγωγά σύνολα με το λήμμα αντικατάστασης του Steinitz [11], ένα από τα βασικά λήμματα της Γραμμικής Άλγεβρας. Θα δείξουμε, δηλαδή, πως δεδομένου ενός παραγωγού συνόλου W, και ενός γραμμικώς ανεξάρτητου συνόλου X, μπορούμε να επεκτείνουμε το X σε ένα άλλο παραγωγό σύνολο με στοιχεία από το W. Ισοδύναμα, θα δούμε ότι μπορούμε να *αντικαταστήσουμε* στοιχεία του W με στοιχεία από το X και να πάρουμε ένα καινούριο παραγωγό σύνολο.

Λήμμα 2.2.1 (Αντικατάστασης του Steinitz). *Έστω ένα διανυσματικός χώρος V και ένα σύνολο $W = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_n\}$, με $\langle W\rangle = V$. Έστω επίσης ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του V, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_m\} \subset V$. Τότε:*

1. $m \leq n$
2. *Το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}_{m+1}, ..., \boldsymbol{w}_n\}$ παράγει τον V, ίσως μετά από μετάθεση των $\boldsymbol{w}_i$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $k \in \{0, 1, ..., m\}$, έχουμε $k \leq n$ και το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{k+1}, ..., \boldsymbol{w}_n\}$ παράγει τον V (όπου τα $\boldsymbol{w}_j$ έχουν ίσως μετατεθεί και η μετάθεση εξαρτάται από το k).

Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο k. Για $k = 0$, η υπόθεση ισχύει με τετριμμένο τρόπο. Πράγματι, αφού δεν έχουμε αντικαταστήσει κανένα από τα w_j τότε από υπόθεση $\langle W\rangle = V$.

Έστω ότι για κάποιο $k < m$ ισχύει η επαγωγική υπόθεση, δηλαδή
$V = \langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{k+1}, ..., \boldsymbol{w}_n\rangle$. Επίσης, $\boldsymbol{v}_{k+1} \in V$, άρα υπάρχουν συντελεστές $\mu_1, ..., \mu_n$, τέτοιο ώστε:

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \boldsymbol{v}_j + \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j \boldsymbol{w}_j \tag{2.20}$$

Παρατηρήστε ότι τουλάχιστον ένα από τα $\mu_{k+1}, ..., \mu_n$ είναι μη μηδενικό, διαφορετικά $\boldsymbol{v}_{k+1} \in \langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k\rangle$. Άτοπο, αφού τα $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_m\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επιπλέον, $k+1 \leq n$. Μεταθέτοντας (εν ανάγκη) τα $\mu_{k+1}\boldsymbol{w}_{k+1}, ..., \mu_n\boldsymbol{w}_n$, υποθέτουμε ότι το μ_{k+1} είναι μη μηδενικό. Έτσι έχουμε:

$$\boldsymbol{w}_{k+1} = \frac{1}{\mu_{k+1}} \left(\boldsymbol{v}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \mu_j \boldsymbol{v}_j - \sum_{j=k+2}^{n} \mu_j \boldsymbol{w}_j \right) \tag{2.21}$$

Καταφέραμε, συνεπώς, να γράψουμε το $\boldsymbol{w}_{k+1}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{w}_{k+2}, ..., \boldsymbol{w}_n$, άρα τελικά, από το Πόρισμα 2.2.5.1.1:

$$\langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{w}_{k+2}, ..., \boldsymbol{w}_n\rangle \supseteq \langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{k+1}, ..., \boldsymbol{w}_n\rangle$$

Όμως, από επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$\langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{k+1}, ..., \boldsymbol{w}_n\rangle = V$$

[11] Από τον Γερμανό μαθηματικό Ernst Steinitz (1871-1928). Συχνά το λήμμα λέγεται και λήμμα αντικατάστασης των Steinitz-Mac Lane. Αναγνωρίζοντας την συνεισφορά του Αμερικάνου μαθηματικού Sauders Mac Lane (1909-2005), ο οποίος έκανε την γενίκευση του λήμματος για μητροειδή.

Άρα $V = \langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{w}_{k+2}, ..., \boldsymbol{w}_n \rangle$. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγική υπόθεση. Τέλος, για $k = m$ παίρνουμε και το (1) του θεωρήματος.

Ο.Ε.Δ.

Θα ολοκληρώσουμε την συζήτησή μας για τη γραμμική θήκη με το ακόλουθο θεώρημα. Θα δούμε ότι η ιδιότητα επαύξησης που συναντήσαμε στα δάση ενός γραφήματος, εμφανίζεται και στα γραμμικώς ανεξάρτητα σύνολα ενός διανυσματικού χώρου. Το ζητούμενο δε, θα προκύψει ως επακόλουθο (ένα από τα πολλά που θα δούμε) του Λήμματος Steinitz.

Θεώρημα 2.2.5.4 (Ιδιότητα Επαύξησης (Augmentation Property))**.** *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και $X, Y \subseteq V$ δύο πεπερασμένα σύνολα διανυσμάτων. Έστω, επίσης, τα X, Y να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $|X| > |Y|$. Τότε, υπάρχει κάποιο $\boldsymbol{x} \in X \setminus Y$, τέτοιο ώστε το $Y \cup \{\boldsymbol{x}\}$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Έστω, προς άτοπο, ότι για κάθε $\boldsymbol{x} \in X \setminus Y$, το $Y \cup \{\boldsymbol{x}\}$ να είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Άρα $X \subseteq \langle Y \rangle$. Έστω, επίσης, $W = \langle Y \rangle$. Τότε το Y είναι ένα παραγωγό σύνολο του W και το X ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του W. Από Λήμμα Steinitz έχουμε $|Y| \geq |X|$. Άτοπο.

Ο.Ε.Δ.

2.2.6 Βάση ενός Διανυσματικού Χώρου

Θυμηθείτε το Θεώρημα 2.2.5.2. Το θεώρημα διατυπώνει ότι αν κάποιο διάνυσμα ενός παραγωγού συνόλου X είναι γραμμικώς εξαρτημένο από τα υπόλοιπα δεν ”προσφέρει” επιπλέον διανύσματα στην γραμμική θήκη του X. Με αυτό στο νου ορίζουμε το ελαχιστικό παραγωγό σύνολο για έναν διανυσματικό χώρο.

Ορισμός 2.2.6.1 (Βάση)**.** *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{F}$. Θα λέμε ότι ένα πεπερασμένο υποσύνολο $X \subseteq V$ αποτελεί* βάση [12] *(basis) του V, αν $V = \langle X \rangle$ και τα διανύσματα του X είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Θυμηθείτε την συζήτηση που είχαμε στην προηγούμενη ενότητα για τα δάση επικάλυψης. Εκεί είδαμε πως τα δάση επικάλυψης είναι τα υπογραφήματα, όπου κάθε ακμή θα συνδέσει το υπάρχον γράφημα με έναν νέο κόμβο, όπου δεν θα μπορούσαμε να φτάσουμε προηγουμένως. Συμμετρικά αν προσθέσουμε μια ακμή σε ένα δάσος επικάλυψης, αυτή αποκλείεται να συνδέσει το δάσος επικάλυψης με κάποιο νέο κόμβο του γραφήματος. Έτσι μας δημιουργείται η διαίσθηση, ότι τα δάση επικάλυψης ”παράγουν” (ή καλύπτουν) τους κόμβους του γραφήματος με ελάχιστο τρόπο. Δημιουργούμε, έτσι, μια σύνδεση μεταξύ της έννοιας του δάσους επικάλυψης και της βάσης ενός διανυσματικού χώρου. Την σύνδεση αυτή θα ενισχύσουν τα θεωρήματα που ακολουθούν.

[12] Σε αυτή την εργασία δεν θα αποδείξουμε ότι *κάθε διανυσματικός χώρος έχει κάποια βάση*, αφού αυτό θα απαιτούσε να δείξουμε το γεγονός και για διανυσματικούς χώρους άπειρης. Όμως, όπως αναφέραμε στην αρχή αυτής της ενότητας οι διανυσματικοί χώροι άπειρης διάστασης, δεν αποτελούν αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

Πριν συνεχίσουμε, παρατηρήστε ότι η βάση ενός διανυσματικού χώρου δεν είναι τίποτα άλλο από ένα ελαχιστικό παραγωγόσύνολο. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα Αντικατάστασης του Steinitz για να πάρουμε πολλά ενδιαφέροντα αποτελέσματα για την νέα έννοια που ορίσαμε. Στο παρακάτω θεώρημα δείχνουμε ότι όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου είναι ισοπληθείς.

Θεώρημα 2.2.6.1. *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V. Έστω, επίσης, δύο βάσεις του V, W_1, W_2, με $W_1 \neq W_2$. Τότε $|W_1| = |W_2|$.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $|W_1| < |W_2|$. Τότε αφού το W_2 είναι βάση, είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο. Επιπλέον, το W_1 παράγει τον V. Άρα, από Λήμμα Αντικατάστασης του Steinitz $|W_2| \leq |W_1|$. Άτοπο.

Ο.Ε.Δ.

Το επόμενο θεώρημα ενισχύει την διαίσθησή μας ότι οι βάσεις, ενός διανυσματικού χώρου, είναι ελαχιστικά παραγωγά σύνολα. Θα δείξουμε ότι κάθε παραγωγό σύνολο, ενός διανυσματικού χώρου, περιέχει κάποια βάση του.

Θεώρημα 2.2.6.2. *Έστω ένα διανυσματικός χώρος V. Έστω, επίσης, ένα παραγωγό σύνολο του V, X. Τότε υπάρχει κάποια βάση B, τέτοια ώστε $B \subseteq X$.*

Απόδειξη. Έστω X ένα παραγωγό σύνολο και $B \subseteq X$ ένα μεγιστικά γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του X. Από το Λήμμα Αντικατάστασης του Steinitz έχουμε $|B| \leq |X|$. Αν $|B| = |X|$, τότε το B είναι μια βάση. Διαφορετικά, $|B| < |X|$. Τότε από επαναληπτική εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2.5.2, $\langle B \rangle = \langle X \rangle$. Άρα το B είναι και πάλι μία βάση του V.

Ο.Ε.Δ.

Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε μια άλλη (ισοδύναμη) ερμηνεία της βάσης, ενός διανυσματικού χώρου, ως μεγιστικού γραμμικώς ανεξάρτητου συνόλου. Θα δείξουμε, δηλαδή, ότι δεδομένου ενός γραμμικώς ανεξάρτητου συνόλου A, μπορούμε πάντα να το επεκτείνουμε σε κάποια βάση. Το ακόλουθο θεώρημα συνιστά μια ειδίκευση του Λήμματος Αντικατάστασης του Steinitz.

Θεώρημα 2.2.6.3. *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $A \subseteq V$. Τότε υπάρχει κάποια βάση B_A του V, τέτοια ώστε $A \subseteq B_A$.*

Απόδειξη. Θεωρείστε ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο A και μια βάση του V, B. Εφαρμόζουμε το Λήμμα Αντικατάστασης του Steinitz για τα A και B.

Ο.Ε.Δ.

Το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο μας θυμίζει την Ιδιότητα Ανταλλαγής που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Θεώρημα 2.2.6.4 (Ιδιότητα Ανταλλαγής (Exchange Property))**.** *Έστω ένα διανυσματικός χώρος V. Έστω, επίσης, δύο βάσεις του V, B_1, B_2. Τότε για κάθε $\boldsymbol{x} \in B_1$, υπάρχει κάποιο $\boldsymbol{y} \in B_2$, τέτοιο ώστε το $(B_1 \setminus \{\boldsymbol{x}\}) \cup \{\boldsymbol{y}\}$ να είναι επίσης μία βάση του V.*

Απόδειξη. Έστω δύο βάσεις του V, $_1, B_2$. Διαλέγουμε ένα $\boldsymbol{x} \in B$. Τότε το σύνολο $B_1 \setminus \boldsymbol{x}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Εφαρμόζουμε το Λήμμα Αντικατάστασης του Steinitz για τα $B_1 \setminus \boldsymbol{x}$ και το B_2.

Ο.Ε.Δ.

2.2.7 Διάσταση Διανυσματικού Χώρου

Από το Θεώρημα 2.2.6.1 όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου έχουν την ίδια πληθικότητα. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε την διάσταση ενός διανυσματικού χώρου, ως την πληθικότητα της βάσης του. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.7.1 (Διάσταση)**.** *Έστω ένα διανυσματικός χώρος V. Θα λέμε* διάσταση *(dimension) του V την πληθικότητα κάποιας βάσης του B. Την διάσταση του V, θα τη συμβολίζουμε με $dim(V)$.*

Η παρακάτω πρόταση μας δείχνει πως συσχετίζονται οι διαστάσεις δύο διανυσματικών χώρων X, Y, με $X \leq Y$. Παρατηρήστε ότι αν B_X μια βάση του X, τότε το B_X είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων στον Y. Από Λήμμα Steinitz, έπεται η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2.7.1. *Έστω δύο διανυσματικοί χώροι X, Y, με $X \leq Y$. Τότε $dim(X) \leq dim(Y)$*

Το επόμενο θεώρημα περιγράφει μια πιο σύνθετη σχέση που μοιράζονται οι διαστάσεις των υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου, χωρίς όμως να κάνουμε κάποια υπόθεση ως προς την μεταξύ του σχέση. Πριν προχωρήσουμε στο θεώρημα, αποδεικνύουμε ένα λήμμα, το οποίο θα μας φανεί χρήσιμο στην απόδειξη του θεωρήματος.

Λήμμα 2.2.2. *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V. Έστω, επίσης, δύο γραμμικώς ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων του V, τα A, B. Αν $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle \neq \{\mathbf{0}\}$, τότε και μόνο τότε, το $A \cup B$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.*

Απόδειξη. $[\Rightarrow]$ Έστω $\boldsymbol{y} \in \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$, τότε μπορούμε να γράψουμε το $\boldsymbol{y}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων, τόσο του A, όσο και του B. Έτσι:

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{|A|} \alpha_i \boldsymbol{a}_i = \sum_{j=1}^{|B|} \beta_j \boldsymbol{b}_i \tag{2.22}$$

Έστω, τώρα, ότι $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$, θα υπάρχει κάποιο i^*, τέτοιο ώστε $\alpha_{i^*} \neq 0$. Τότε από την (2.22) παίρνουμε:

$$\alpha_{i^*} \boldsymbol{a}_{i^*} + \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq i^*}}^{|A|} \alpha_i \boldsymbol{a}_i = \sum_{j=1}^{|B|} \beta_j \boldsymbol{b}_i \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{a}_{i^*} = \frac{1}{\alpha_{i^*}} \left(\sum_{j=1}^{|B|} \beta_j \boldsymbol{b}_i - \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq i^*}}^{|A|} \alpha_i \boldsymbol{a}_i \right)$$

$[\Leftarrow]$ Για την αντίθετη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το $A \cup B$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Χ.β.γ. υποθέτουμε ότι υπάρχει $i^* \in [|A|]$, τέτοιο ώστε το $\boldsymbol{a}_{i^*} \in A$ να γράφεται:

$$\boldsymbol{a}_{i^*} = \sum_{\substack{i=1,\\ i \neq i^*}}^{|A|} \alpha_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=1}^{|B|} \beta_j \boldsymbol{b}_j \tag{2.23}$$

Όμως, το A είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Ξαναγράφοντας την (2.23) παίρνουμε:

$$\boldsymbol{a}_{i^*} = \sum_{j=1}^{|B|} \beta_j \boldsymbol{b}_j \tag{2.24}$$

Άρα, από την (2.24) το $\boldsymbol{a}_{i^*} \neq \mathbf{0}$ και $\boldsymbol{a}_{i^*} \in A \cap B$.

Ο.Ε.Δ.

Προχωράμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος.

Θεώρημα 2.2.7.1. *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V. Έστω, επίσης, δύο υποχώροι του V, X, Y. Τότε έχουμε:*

$$dim(X) + dim(Y) = dim(X \cap Y) + dim(X + Y) \tag{2.25}$$

όπου με $X + Y$, συμβολίζουμε το σύνολο $X + Y = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in X,\ \boldsymbol{y} \in Y\}$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αρκεί να βρούμε βάσεις B_X του X και του Y, τέτοιες ώστε το $B_X \cap B_Y$ να είναι μια βάση του $X \cap Y$ και το $B_X \cup B_Y$ να είναι μια βάση του $X + Y$. Αν το πετύχουμε αυτό, το ζητούμενο θα προκύπτει άμεσα από τον κανόνα εγκλεισμού αποκλεισμού, δηλαδή:

$$|B_X \cup B_Y| = |B_X| + |B_Y| - |B_X \cap B_Y|$$

Για να πετύχουμε τον σκοπό μας κινούμαστε αντίστροφα. Έστω $B_{X \cap Y}$ μια βάση του $X \cap Y$. Επειδή $X \cap Y \leq X, Y$, τότε το $B_{X \cap Y}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο στα X, Y. Από Θεώρημα 2.2.6.3 μπορούμε να επεκτείνουμε το $B_{X \cap Y}$ σε κάποια βάση των X, Y. Δηλαδή,

1. Υπάρχει $A_X \subset X$, τέτοιο ώστε $B_{X \cap Y} \cap A_X = \emptyset$ και το $B_{X \cap Y} \cup A_X$ είναι μία βάση του X. Ορίζουμε $B_X = B_{X \cap Y} \cup A_X$.
2. Υπάρχει $A_Y \subset Y$, τέτοιο ώστε $B_{X \cap Y} \cap A_Y = \emptyset$ και το $B_{X \cap Y} \cup A_Y$ είναι μία βάση του Y. Ορίζουμε $B = B_{X \cap Y} \cup A$.

Προφανώς, τότε $B_X \cap B_Y = B_{X \cap Y}$. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι το $B_X \cup B_Y$ είναι μια βάση του $X + Y$. Παρατηρήστε ότι το $B_X \cup B_Y$ παράγει τον $X + Y$, αφού ισχύει:

$$\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle B_X \rangle + \langle B_Y \rangle = \langle B_X \cup B_Y \rangle = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \;\middle|\; \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{|B_X|} a_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{j=1}^{|B_Y|} b_i \boldsymbol{y}_j \right\} \tag{2.26}$$

Μένει, λοιπόν, να δείξουμε ότι το $B_X \cup B_Y$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Αρχικά, παρατηρήστε ότι τα A_X και A_Y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων. Από Λήμμα 2.2.2 αρκεί να δείξουμε ότι $\langle A_X\rangle \cap \langle A_Y\rangle = \{\mathbf{0}\}$. Έστω, προς άτοπο, ότι $\langle A_X\rangle \cap \langle A_Y\rangle \supset \{\mathbf{0}\}$. Έστω, επίσης, ένα διάνυσμα $\boldsymbol{y} \in \langle A_X\rangle \cap \langle A_Y\rangle$. Τότε, αφού $\langle A_X\rangle \leq X$ και $\langle A_Y\rangle \leq Y$, έχουμε $\boldsymbol{y} \in X \cap Y$. Άρα $\boldsymbol{y} \in \langle B_{X\cap Y}\rangle$ και έχουμε:

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{|B_{X\cap Y}|} \beta_i \boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{|A_X|} \alpha_j \boldsymbol{a}_j \tag{2.27}$$

Αν $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$, τότε υπάρχει κάποιο $i^* \in [|B_{X\cap Y}|]$, τέτοιο ώστε $\beta_{i^*} \neq 0$. Άρα:

$$\beta_{i^*}\boldsymbol{b}_{i^*} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i^*}}^{|B_{X\cap Y}|} \beta_i \boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{|A_X|} \alpha_j \boldsymbol{a}_j \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{b}_{i^*} = \frac{1}{\beta_{i^*}} \left(\sum_{j=1}^{|A_X|} \alpha_j \boldsymbol{a}_j - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i^*}}^{|B_{X\cap Y}|} \beta_i \boldsymbol{b}_i \right) \tag{2.28}$$

Άρα το $B_X = B_{X\cap Y} \cup A_X$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Άτοπο.

Ο.Ε.Δ.

2.2.8 Βαθμός Πεπερασμένου Συνόλου Διανυσμάτων

Θεωρήστε ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων X. Στην συνέχεια ορίζουμε την συνάρτηση βαθμού, η οποία αντιστοιχεί το X στην διάσταση του χώρου που παράγεται από το X.

Ορισμός 2.2.8.1 (Βαθμός)**.** *Έστω ένα διανυσματικός χώρος V και $X \subset V$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων. Θα λέμε* βαθμό *(rank)* [13] *του X και θα συμβολίζουμε με $rank(X)$, την διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από το X. Δηλαδή:*

$$rank(X) = dim(\langle X\rangle)$$

Σε αυτό το σημείο ελπίζουμε ο παραλληλισμός δέντρων επικάλυψης και βάσεων διανυσματικών χώρων να έχει γίνει αντιληπτός. Τηρούμενων των αναλογιών δίνουμε το αντίστοιχο του Θεωρήματος 2.1.9.1 στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 2.2.8.1 (Ιδιότητες Βαθμού)**.** *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V. Έστω, επίσης, δύο πεπερασμένα υποσύνολα διανυσμάτων $X, Y \subset V$. Ο βαθμός των X, Y ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες.*

1. Εύρος Τιμών. $0 \leq rank(X) \leq |X|$

[13] Ίσως έχετε συναντήσει τον όρο σε κάποιο μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας. Εκεί γίνεται συνήθως λόγος για βαθμό πίνακα. Εδώ ο όρος γενικεύεται και μιλάμε αφαιρετικά για πεπερασμένα σύνολα διανυσμάτων.

2. Αύξουσα Συνάρτηση. *Αν* $X \subseteq Y$*, τότε* $rank(X) \leq rank(Y)$

3. Υπομετρικότητα.

$$rank(X) + rank(Y) \geq rank(X \cup Y) + rank(X \cap Y)$$

Απόδειξη. Το (1) θεωρείται προφανές, αφού στην ακραία περίπτωση είτε όλα τα διανύσματα του X είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, είτε είναι όλα γραμμικώς εξαρτημένα. Συνεχίζουμε με το (2). Έστω δύο πεπερασμένα σύνολα διανυσμάτων $X, Y \subset V$, με $X \subseteq Y$. Τότε όμως, $\langle X \rangle \leq \langle Y \rangle$ και η Πρόταση 2.2.7.1 μας δίνει το ζητούμενο.

Για το (3) έχουμε:

$$\begin{aligned} rank(X) + rank(Y) &= dim(\langle X \rangle) + dim(\langle Y \rangle) \\ &\overset{(2.25)}{=} dim(\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle) + dim(\langle X \rangle + \langle Y \rangle) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Θα δείξουμε ότι $\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle \supseteq \langle X \cap Y \rangle$ [14] και $\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle X \cup Y \rangle$. Αρχικά το $\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle \supseteq \langle X \cap Y \rangle$ προφανώς ισχύει, αφού $X \cap Y \subseteq X, Y$, άρα αν $\boldsymbol{v} \in \langle X \cap Y \rangle$, τότε $\boldsymbol{v} \in \langle X \rangle$ και $\boldsymbol{v} \in \langle Y \rangle$. Δηλαδή, αν το $\boldsymbol{v}$ μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των κοινών διανυσμάτων των $X, Y\cdot$ μπορεί να γραφτεί και σαν γραμμικός συνδυασμός, τόσο του X, όσο και του Y. Τέλος, όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.7.1 (βλ. σχέση (2.26)) ισχύει ότι $\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle X \cup Y \rangle$. Άρα από την Πρόταση 2.2.7.1 και την (2.29) έχουμε:

$$\begin{aligned} dim(\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle) + dim(\langle X \rangle + \langle Y \rangle) &\geq dim(\langle X \cap Y \rangle) + dim(\langle X \cup Y \rangle) \\ &= rank(X \cap Y) + rank(X \cup Y) \end{aligned}$$

Ο.Ε.Δ.

2.3 Αφηρημένη Ανεξαρτησία

Όπως υποσχεθήκαμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, θα επιχειρήσουμε σε αυτή την ενότητα να συμμαζέψουμε τις παρατηρήσεις που κάναμε στις δύο προηγούμενες ενότητες, έτσι ώστε να ανοίξουμε τον δρόμο για έναν αφαιρετικό ορισμό της ανεξαρτησίας. Ειδικότερα παρατηρήσαμε ότι ορισμένες ιδιότητες αφορούν τόσο σύνολα ακμών σε ένα γράφημα, όσο και σύνολα διανυσμάτων. Ειδικότερα, είδαμε ότι:

- Τα δάση και τα γραμμικώς ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων έχουν την *Ιδιότητα Επαύξησης*, όπως αποδεικνύεται στα Θεωρήματα 2.1.7.1 και 2.2.5.4.

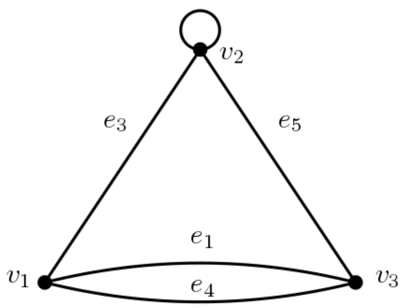
- Τα δέντρα επικάλυψης και οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου έχουν την *Ιδιότητα Ανταλλαγής*, όπως αποδεικνύεται στα Θεωρήματα 2.1.7.2 και 2.2.6.4.

[14] Παρατηρήστε ότι η ισότητα δεν ισχύει. Πάρτε για παράδειγμα $X = \{(0,1),(1,0)\}$ και $Y = \{(0,2),(2,0)\}$.

- Οι κύκλοι και τα ελαχιστικά γραμμικώς εξαρτημένα σύνολα διανυσμάτων έχουν την *Ιδιότητα Απαλοιφής*, όπως αποδεικνύεται στα Θεωρήματα 2.1.8.1 και 2.2.4.1.

- Ο βαθμός ενός υπογραφήματος, όπως και ο βαθμός ενός πεπερασμένου συνόλου διανυσμάτων έχουν την *Υπομετρικότητα*, όπως αποδεικνύεται στα Θεωρήματα 2.1.9.1 και 2.2.8.1.

Συνεπώς, μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε ότι τα παραπάνω θεωρήματα δεν περιγράφουν ιδιότητες που έχουν τα γραφήματα ή τα διανύσματα, αλλά ιδιότητες κάποιας γενικότερης αφηρημένης έννοιας, η οποία εμφανίζεται στις δύο παραπάνω μαθηματικές δομές. Θεωρήστε ένα σύνολο $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ και επιβάλουμε κάποια τάξη στο δυναμοσύνολο 2^E, θεωρώντας το E να αντιστοιχεί:



Σχήμα 2.16: Το γράφημα $G = (V, E)$.

- Στο σύνολο ακμών του γραφήματος του Σχήματος 2.16.

- Στα διανύσματα:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (-1, 2) & \boldsymbol{e}_2 &= (0, 0) \\ \boldsymbol{e}_3 &= (-1, 1) & \boldsymbol{e}_4 &= (-1, 2) \\ \boldsymbol{e}_5 &= (0, 1) \end{aligned}$$

  Θα αναφερόμαστε στο παραπάνω σύνολο διανυσμάτων με $A_E = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in [5]\}$.

Τα ακόλουθα υποσύνολα του 2^E παρουσιάζουν ενδιαφέρον:

- $\mathscr{B} = \{\{e_1, e_3\}, \{e_1, e_5\}, \{e_3, e_4\}, \{e_4, e_5\}, \{e_3, e_5\}\}$

- $\mathscr{I} = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}\} \cup \mathscr{B}$

- $\mathscr{C} = \{\{e_2\}, \{e_1, e_4\}, \{e_3, e_4, e_5\}, \{e_1, e_3, e_5\}\}$

Παρατηρούμε ότι για το γράφημα G και τον διανυσματικό χώρο που παράγεται από τα $\boldsymbol{e}_i,\ i \in [5]$, για τις παραπάνω οικογένειες συνόλων έχουμε:

- Το $\mathscr{B}$ είναι το σύνολο δέντρων επικάλυψης του G και το σύνολο βάσεων του διανυσματικού χώρου $\langle A_E \rangle$, με διανύσματα του A_E.
- Το $\mathscr{I}$ είναι το σύνολο δασών του G και το σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων συνόλων διανυσμάτων του A_E.
- Το $\mathscr{C}$ είναι το σύνολο κύκλων του G και των ελαχιστικά γραμμικώς εξαρτημένων συνόλων διανυσμάτων του A_E.

Επιπλέον, μπορούμε να δούμε ότι δεδομένης της μίας οικογένειας, μπορούμε να ορίσουμε τις άλλες δύο. Για παράδειγμα, δεδομένου του $\mathscr{B}$, έχουμε:

$$\mathscr{I} = \{X \subseteq E \mid \exists B \in \mathscr{B} \text{ τ.ω. } X \subseteq B\}$$
$$\mathscr{C} = \{X \subseteq E \mid X \in (2^E \setminus \mathscr{I}) \text{ τ.ω. το } X \text{ είναι ελαχιστικό}\}$$

Στο Κεφάλαιο 3 θα δείξουμε ότι τα συστήματα $(E, \mathscr{B}), (E, \mathscr{I}), (E, \mathscr{C})$ είναι εναλλακτικές αναπαραστάσεις του ίδιους αντικειμένου, το οποίο θα ονομάσουμε *μητροειδές*.

3. ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΜΗΤΡΟΕΙΔΟΥΣ

Οι παρατηρήσεις που κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο μας επιτρέπουν να ανεβούμε ένα επίπεδο αφαίρεσης. Θα ονομάσουμε τα αντικείμενα με τα οποία θα ασχοληθούμε μητροειδή, τα οποία θα ορίζονται μόνο μέσω των αξιωμάτων που θα υπακούν. Ένα μητροειδές μπορεί να κωδικοποιεί είτε ένα σύνολο διανυσμάτων, είτε το σύνολο των δέντρων ενός γραφήματος, είτε οποιοδήποτε άλλο μαθηματικό αντικείμενο στο οποίο παρουσιάζεται η έννοια της ανεξαρτησίας. Θα δούμε ότι σε ένα μητροειδές εμφανίζονται οι έννοιες των βάσεων, των κυκλωμάτων (βλ. κύκλοι σε ένα γράφημα), αλλά και ο βαθμός.

Μάλιστα, θα ανακαλύψουμε πως αυτές οι έννοιες είναι αλληλένδετες. Αποδεικνύοντας ορισμένες ιδιότητες για κάθε μια τους, και αναγάγωντάς τες σε αξιώματα θα οδηγηθούμε σε διαφορετικούς, αλλά ισοδύναμους, ορισμούς ενός μητροειδούς. Στο παρόν κεφάλαιο θα δούμε τέσσερεις τέτοιους ορισμούς. Τα $\mathscr{I}$- μητροειδή, τα οποία βασίζονται στην έννοια της ανεξαρτησίας. Τα $\mathscr{B}$-μητροειδή, τα οποία βασίζονται στην έννοια της βάσης. Τα $\mathscr{C}$-μητροειδή, τα οποία βασίζονται στην έννοια του κυκλώματος. Και, τέλος, τα r-μητροειδή, τα οποία βασίζονται στη συνάρτηση βαθμού. Στη δε τελευταία ενότητα, θα αναφερθούμε εν συντομία σε κάποιους άλλους ισοδύναμους ορισμούς, τους οποίους παραλείψαμε. Οι περισσότερες αποδείξεις που παρουσιάζουμε εδώ προέρχονται από το [1].

3.1 Ανεξάρτητα Σύνολα

Ξεκινάμε αυτή την ενότητα με έναν αφηρημένο ορισμό της ανεξαρτησίας. Αφού δεν κάνουμε καμία παραδοχή για τα στοιχεία που χαρακτηρίζουμε ανεξάρτητα, θα θεωρήσουμε ένα αφηρημένο πεπερασμένο σύνολο E. Την ανεξαρτησία, επί του E, εκφράζει το σύνολο $\mathscr{I}$, το οποίο ορίζει ποια στοιχεία από το E είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Παρ' όλα αυτά για να είναι συνεπές το $\mathscr{I}$ με την διαίσθηση που μας έχει δημιουργηθεί για την ανεξαρτησία απαιτούμε να υπακούει σε ορισμένα αξιώματα. Το σύνολο E, μαζί με την οργάνωση του $\mathscr{I}$, θα αποτελούν ένα σύστημα ανεξαρτησίας. Ένα μητροειδές θα είναι ένα σύστημα ανεξαρτησίας, στο οποίο απαιτούμε να ισχύει η ιδιότητα επαύξησης.

3.1.1 Συστήματα Ανεξαρτησίας και Μητροειδή

Ορισμός 3.1.1.1 (Σύστημα Ανεξαρτησίας). *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο E. Έστω, επίσης, μια συλλογή συνόλων από το E, $\mathscr{I} \subseteq 2^E$. Θα λέμε την δυάδα $(E, \mathscr{I}) = S$ είναι ένα* σύστημα ανεξαρτησίας *(independece system), αν υπακούει στα εξής αξιώματα:*

(I1) $\emptyset \in \mathscr{I}$

(I2) Αν $I \in \mathscr{I}$ *και* $I' \subseteq I$*, τότε* $I \in \mathscr{I}$.

θα τα λέμε τα στοιχεία του $\mathscr{I}$ ανεξάρτητα*, ενώ τα στοιχεία του* $2^E \setminus \mathscr{I}$ εξαρτημένα*. Επίσης, συχνά, θα γράφουμε* $E(S)$ *ή* $\mathscr{I}(S)$ *και θα εννοούμε το σύνολο στοιχείων ενός μητροειδούς ή το σύνολο ανεξάρτητων συνόλων του* S*, αντίστοιχα.*

Όπως είπαμε, το μητροειδές είναι μια ειδική περίπτωση συστήματος ανεξαρτησίας, όπου αξιωματικοποιούμε την ιδιότητα επαύξησης. Θυμηθείτε τα θεωρήματα 2.1.7.1 και 2.2.5.4 όπου αποδείξαμε ότι τα δάση σε ένα γράφημα και τα γραμμικώς ανεξάρτητα σύνολα έχουν την ιδιότητα αυτή.

Ορισμός 3.1.1.2 ($\mathscr{I}$-Μητροειδές)**.** *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας* $M = (E, \mathscr{I})$*. Θα λέμε ότι το* M *είναι ένα* $\mathscr{I}$*-μητροειδές ή απλά* μητροειδές *(matroid), αν ικανοποιεί επίσης το* αξίωμα επαύξησης.

(I3) Αν τα I_1 *και* I_2 *ανήκουν στον* $\mathscr{I}$*, και* $|I_1| < |I_2|$*, τότε υπάρχει ένα στοιχείο* $e \in I_2 \setminus I_1$*, τέτοιο ώστε* $I_1 \cup e \in \mathscr{I}$.

Στον παραπάνω ορισμό, αναφερθήκαμε σε $\mathscr{I}$-μητροειδές, επειδή σε αυτόν τον ορισμό τα αξιώματα αφορούν την οικογένεια ανεξάρτητων συνόλων $\mathscr{I}$. Στις επόμενες ενότητες θα δούμε εναλλακτικούς ορισμούς για τα μητροειδή, οι οποίοι βασίζονται σε διαφορετικά σύνολα αξιωμάτων [1].

Στο παρόν κεφάλαιο, θα επικεντρωθούμε στα μητροειδή. Αφού, τα μητροειδή είναι η δομή που γενικεύει τις καλές ιδιότητες των γραφημάτων και των διανυσματικών χώρων, που είδαμε στο Κεφάλαιο 2. Παράλληλα, θα αποδείξουμε ορισμένα γεγονότα για τα συστήματα ανεξαρτησίας. Φυσικά, αφού ένα μητροειδές είναι ένα σύστημα ανεξαρτησίας, οποιοδήποτε αποτέλεσμα δείξουμε για τα συστήματα ανεξαρτησίας ισχύει και στα μητροειδή. Εν πάση περιπτώσει, τα συστήματα ανεξαρτησίας θα μας φανούν ιδιαιτέρως χρήσιμα στο Κεφάλαιο 4, όπου θα συζητήσουμε για τον άπληστο αλγόριθμο.

Στο επόμενο θεώρημα προσφέρουμε μια ισχυρότερη μορφή του αξιώματος ανεξάρτητης αντικατάστασης.

Θεώρημα 3.1.1.1. *Έστω ένα μητροειδές* $M = (E, \mathscr{I})$*. Έστω, επίσης, δύο ανεξάρτητα σύνολα* $X, Y \in \mathscr{I}$*, με* $|X| > |Y|$*. Τότε, υπάρχει κάποιο* $Z \subseteq X \setminus Y$*, τέτοιο ώστε το* $Y \cup Z$ *να είναι ανεξάρτητο και* $|Y \cup Z| = |X|$.

Απόδειξη. Έστω κάποιο μεγιστικό $Z \subseteq X \setminus Y$, ώστε $Y \cup Z \in \mathscr{I}$. Γνωρίζουμε, από το Αξίωμα Επαύξησης ότι υπάρχει τέτοιο σύνολο Z με $|Z| \geq 1$. Έστω, προς άτοπο, ότι $|Y \cup Z| < |X|$. Αφού τόσο το X, όσο και το $Y \cup Z$ είναι ανεξάρτητα, από (I3) υπάρχει κάποιο $x \in X \setminus (Y \cup Z)$, τέτοιο ώστε $(Y \cup Z) \cup x \in \mathscr{I}$. Εφόσον το $x \notin Z$, το Z δεν είναι μεγιστικό. Άτοπο.

Ο.Ε.Δ.

[1] Οι αναγνώστες που είναι εξοικειωμένοι με την υπολογιστική γεωμετρία μπορούν να κάνουν την αναλογία με την αναπαράσταση ενός κυρτού πολυτόπου. Εκεί κάνουμε τον διαχωρισμό μεταξύ $\mathcal{V}$-αναπαράστασης, όπου μας δίνονται οι κορυφές του πολυτόπου, και $\mathcal{H}$-αναπαράστασης, όπου μας δίνονται τα υπερεπίπεδα των πλευρών του.

3.1.2 Γραφικά και Διανυσματικά Μητροειδή

Σε αυτό το σημείο θα συνδέσουμε την συζήτηση που είχαμε στο Κεφάλαιο 2 με τον Ορισμό 3.1.1.2. Ξεκινόντας από τα γραφήματα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό, για την σύνδεση γραφήματος-μητροειδούς.

Ορισμός 3.1.2.1 (Γραφικό Μητροειδές). *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Έστω, επίσης, το σύνολο των δασών του $\mathscr{F}$, δηλαδή:*

$$\mathscr{F} = \{F \subseteq E \mid \textit{το } G[F] \textit{ να είναι δάσος}\} \tag{3.1}$$

θα ονομάζουμε το μητροειδές $M_G = (E, \mathscr{F})$, που προκύπτει από το γράφημα G, γραφικό μητροειδές *(graphic matroid). Συχνά, για ένα δεδομένο γράφημα G, θα συμβολίζουμε το γραφικό μητροειδές $M(G)$.*

Για να δείξουμε ότι το γραφικό μητροειδές είναι καλά ορισμένο, αρκεί να επικαλεστούμε το Θεώρημα 2.1.7.1, το οποίο δείχνει ότι το σύνολο των δασών σε ένα γράφημα $\mathscr{F}$ υπακούει στο Αξίωμα Επαύξησης . Έχουμε, λοιπόν, την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.1.2.1. *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathscr{F}$, ως*

$$\mathscr{F} = \{F \subseteq E \mid \textit{το } G[F] \textit{ να είναι δάσος}\}$$

Η δυάδα $(E, \mathscr{F})$ είναι μητροειδές.

Αντίστοιχα, δίνουμε τον ορισμό για διανυσματικά μητροειδή.

Ορισμός 3.1.2.2. *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων A. Έστω, επίσης, το σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων υποσυνόλων του A, $\mathscr{I}$, δηλαδή:*

$$\mathscr{I} = \{I \subseteq A \mid \textit{το } I \textit{ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο}\} \tag{3.2}$$

θα ονομάσουμε το μητροειδές $M_A = (E, \mathscr{I})$, που προκύπτει από το πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων A, διανυσματικό μητροειδές *(vector matroid). Συχνά, για έναν δεδομένο σύνολο διανυσμάτων A, θα συμβολίζουμε το διανυσματικό μητροειδές $M(A)$.*

Ομοίως, η ορθότητα του Ορισμού 3.1.2.2 προκύπτει από το Θεώρημα 2.2.5.4. Αυστηρότερα, διατυπώνουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.1.2.2. *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V. Έστω, επίσης, ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $S \subseteq V$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathscr{I}$, ως*

$$\mathscr{I} = \{I \subseteq S \mid \textit{το } I \textit{ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο}\}$$

Η δυάδα $(E, \mathscr{I})$ είναι μητροειδές.

Παρατηρήστε πως το αντίστροφο ερώτημα παρουσιάζει επίσης ενδιαφέρον. Δεδομένου ενός αυθαίρετου μητροειδούς M, μπορεί το M να αναπαρασταθεί ως γράφημα; Μπορεί το M να αναπαρασταθεί ως πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων; Ειδικότερα, τα δε μητροειδή, τα οποία μπορούν να αναπαραστιθούν από ένα σύνολο διανυσμάτων A, ενός σώματος $\mathbb{F}$, λέγονται *αναπαραστήσιμα* (representable) ή $\mathbb{F}$-αναπαραστήσιμα. Για αμφότερα τα παραπάνω ερωτήματα η απάντηση είναι, όχι. Δεν είναι όλα τα μητροειδή, γραφικά μητροειδή ή αναπαριστήσιμα. Σχετικά, έχει αναπτυχθεί εκτενής θεωρία, η οποία όμως ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Παραπέμπουμε, τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στα [1, 2].

3.1.3 Ομοιόμορφα Μητροειδή

Πέρα από τα γραφικά μητροειδή και τα διανυσματικά μητροηδή, θα μας απασχολήσει μια άλλη οικογένεια μητροειδών, με εξαιρετικά απλή και διαισθητική περιγραφή. Τα ομοιόμορφα μητροειδή.

Ορισμός 3.1.3.1. *Έστω δύο φυσικοί αριθμοί $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, με $0 \leq m \leq n$. Θα λέμε το μητροειδές $U_{m,n} = (E, \mathscr{I})$, όπου $|E| = n$ και*

$$\mathscr{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq m\} \tag{3.3}$$

ομοιόμορφο μητροειδές *(uniform matroid).*

Παρατηρήστε πως τα ομοιόμορφα μητροειδή είναι καλά ορισμένα. Πράγματι, αφού $0 \leq m$, τότε $\emptyset \in \mathscr{I}$. Επιπλέον, αν έχουμε ένα ανεξάρτητο σύνολο I, τότε, για κάθε σύνολο I', το οποίο να περιέχεται στο I, θα ισχύει $|I'| \leq |I| \leq m$. Άρα, και το I' είναι ανεξάρτητο. Τέλος, θεωρήστε δύο ανεξάρτητα σύνολα I_1, I_2 με $|I_1| < |I_2|$. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $e \in I_2 \setminus I_1$, το $I_1 \cup e$ είναι ανεξάρτητο. Συνεπώς, έχουμε μια ισχυρότερη υπόθεση από το (I3). Λόγω της απλής τους περιγραφής, θα συναντήσουμε τα ομοιόμορφα μητροειδή σε πολλά παραδείγματα.

3.1.4 Περιορισμός Συστήματος Ανεξαρτησίας

Ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα, εισάγοντας έναν συμβολισμό που θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος στην συνέχεια και ιδιαίτερα στην Ενότητα 3.4. Συχνά, χρειαζόμαστε να περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας στο «τμήμα» ενός συστήματος ανεξαρτησίας και συγκεκριμένα στα στοιχεία του $\mathscr{I}$, τα οποία περιέχονται σε κάποιο σύνολο $X \subseteq E$. Έτσι δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.1.4.1 (Περιορισμός Συστήματος Ανεξαρτησίας)**.** *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, ένα σύνολο $X \subseteq E$. Θα συμβολίζουμε με $\mathscr{I}|X$, το σύνολο:*

$$\mathscr{I}|X = \{I \subseteq X \mid I \in \mathscr{I}\}$$

Θα συμβολίζουμε με $S|X$ την δυάδα $(X, \mathscr{I}|X)$ και θα την ονομάζουμε περιορισμό *(restriction) του S στο X.*

Ειδικότερα, αν το S είναι μητροειδές, τότε για κάποιο σύνολο X, το $S|X$ διατηρεί την οργάνωση του μητροειδούς. Συγκεκριμένα, δίνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.4.1. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, ένα σύνολο $X \subseteq E$. Τότε, το $M|X$ είναι μητροειδές.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathscr{I}|X$ πληρεί τα αξιώματα (I1)-(I3). Είναι προφανές, από τον ορισμό του $\mathscr{I}|X$ ότι ισχύουν τα αξιώματα (I1), (I2). Για το αξίωμα (I3), θεωρούμε τα σύνολα $I_1, I_2 \in \mathscr{I}|X$, με $|I_1| < |I_2|$. Αφού, τα I_1, I_2 είναι ανεξάρτητα, τότε από το αξίωμα (I3), για το M, υπάρχει $e \in I_2 \setminus I_1$, τέτοιο ώστε $I_1 \cup e \in \mathscr{I}$. Όμως, το $I_1 \cup e$ περιέχεται στο X. Άρα και το $I_1 \cup e$ ανήκει στο $\mathscr{I}|X$.

Ο.Ε.Δ.

Με τα παραπάνω, έχουμε εξοπλιστεί με τα απαραίτητα εργαλεία για να διεισδύσουμε στη θεωρία μητροειδών. Στην επόμενη ενότητα, θα μιλήσουμε για τις βάσεις σε συστήματα ανεξαρτησίας.

3.2 Βάσεις

Ξεκινάμε αυτή την ενότητα γενικεύοντας την έννοια της βάσης, ενός διανυσματικού χώρου, και του δάσους επικάλυψης, ενός γραφήματος. Έτσι, όταν μιλάμε για *βάση* σε ένα σύστημα ανεξαρτησίας, θα εννοούμε ένα μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο. Αυστηρότερα, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

3.2.1 Ορισμός Βάσεων

Ορισμός 3.2.1.1 (Βάση)**.** *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, ένα ανεξάρτητο σύνολο $B \in \mathscr{I}$, τέτοιο ώστε για κάθε $e \in E$, $B \cup e \notin \mathscr{I}$. Ονομάζουμε το B* βάση *(basis) του S. Επιπλέον, θα συμβολίζουμε το* σύνολο όλων των βάσεων *ενός συστήματος ανεξαρτησίας με $\mathscr{B}$ ή $\mathscr{B}(S)$.*

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια της βάσης, δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.2.1.1. *Θεωρήστε το ομοιόμορφο μητροειδές $U_{4,5} = (E, \mathscr{I})$. Τότε το σύνολο βάσεων του ομοιόμορφου μητροειδούς, θα είναι, απλώς, όλα τα υποσύνολα B του E, όπου $|B| = 4$. Δηλαδή,*

$$\mathscr{B}(U_{4,5}) = \{B \subseteq E \mid |B| = 4\}$$

Μάλιστα, αυτό ισχύει για κάθε ομοιόμορφο μητροειδές $U_{m,n}$. Το σύνολο των βάσεων θα αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του E, μεγέθους m.

Στο παραπάνω παράδειγμα, είδαμε μια ακραία περίπτωση που ισχύει στα ομοιόμορφα μητροειδή. όλα τα υποσύνολα του E μεγέθους m είναι βάσεις. Στα μη ομοιόμορφα μητροειδή ισχύει κάτι ασθενέστερο. Παρ' όλα αυτά, θα δούμε πως όλες οι βάσεις έχουν το ίδιο μέγεθος· αλλά και αντιστρόφως, αν ένα ανεξάρτητο σύνολο έχει ίδια πληθικότητα με μία βάση, τότε είναι και αυτό βάση.

Θεώρημα 3.2.1.1. *Έστω ένα μητροειδές $(E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης,$B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, δύο βάσεις του M. Τότε $|B_1| = |B_2|$.*

Απόδειξη. Έστω, προς άτοπο, ότι $|B_1| < |B_2|$. Τότε τα B_1, B_2 είναι και τα δύο ανεξάρτητα στο M, από (I3) υπάρχει κάποιο στοιχείο $e \in B_2 \setminus B_1$, τέτοιο ώστε $B_1 \cup e \in \mathscr{I}$. Άτοπο, αφού το B_1 είναι μεγιστικά ανεξάρτητο σύνολο ως βάση.

Ο.Ε.Δ.

Το Θεώρημα 3.2.1.1 μας δίνει έναν χαρακτηρισμό της βάσης. Ειδικότερα, δίνουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.1.1.1. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$. Έστω επίσης μία βάση του M, $B \in \mathscr{B}$. Αν για κάποιο ανεξάρτητο σύνολο $I \in \mathscr{I}$ ισχύει $|I| = |B|$, τότε το ανεξάρτητο σύνολο I είναι βάση.*

Απόδειξη. Έστω, προς άτοπο, $I \notin \mathscr{B}$. Συνεπώς, το I δεν είναι μεγιστικό, άρα υπάρχει $e \in E$, τέτοιο ώστε $I \cup e \in \mathscr{I}$. Τότε, $|I \cup e| > |B|$. Από Αξίωμα Επαύξησης , υπάρχει $e' \in (I \cup e) \setminus B$, τέτοιο ώστε $B \cup e' \in \mathscr{I}$. Όμως, το B είναι βάση. Άτοπο.

Ο.Ε.Δ.

Θεωρήστε ένα μητροειδές M. Παρατηρήστε πως αν περιορίσουμε το M σε κάποιο σύνολο X τότε, αν το X είναι ανεξάρτητο, είναι και μια βάση του μητροειδούς $M|X$. Μάλιστα, το $M|X$ θα έχει μοναδική βάση, το ίδιο το X. Πράγματι, αφού από το παραπάνω θεώρημα κάθε άλλη βάση πρέπει να έχει πληθικότητα $|X|$. Βέβαια, υπάρχει μόνο ένα τέτοιο σύνολο στο $\mathscr{I}|X$, το ίδιο το X. Δίνουμε, έτσι, το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.1.1.2. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, κάποιο σύνολο $X \subseteq E$. Αν το X είναι ανεξάρτητο, τότε $\mathscr{B}(M|X) = \{X\}$.*

Από την άλλη πλευρά, θεωρήστε ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$. Θεωρήστε, επιπλέον κάποιο σύνολο $X \subseteq E$, το οποίο είναι εξαρτημένο. Τι συμβαίνει τότε στις βάσεις του M στο $M|X$; Έστω, για παράδειγμα μία $B \in \mathscr{B}$. Το $B \cap X$ ανήκει στο $\mathscr{I}|X$. Παρ' όλα αυτά, το $B \cap X$, δεν είναι απαραίτητα βάση του $M|X$. Δίνουμε το εξής (αντί)παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.2.1.2. *Έστω το ομοιόμορφο μητροειδές $U_{3,6}$, πάνω στο σύνολο $E = [6]$. Έστω, επίσης, το σύνολο $X = \{3, 4, 5, 6\}$. Αφού, $|X| = 4 > 3$, το X δεν είναι ανεξάρτητο. Θεωρήστε, ακόμη, την βάση του $U_{3,6}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Τότε, το $B \cap X = \{3\}$ δεν είναι μια βάση του $U_{3,6}|X$, αφού περιέχεται γνησίως στην βάση $\{3, 4, 5\}$ του $U_{3,6}|X$.*

Από την άλλη πλευρά, ισχύει το εξής, κάπως τεχνικό, γεγονός. Δεδομένης κάποιας βάσης $B_X \in \mathscr{B}(S|X)$, θα υπάρχει βάση $B \in \mathscr{B}(S)$ τέτοια ώστε $B_X = B \cap X$. Μάλιστα, το γεγονός ισχύει για συστήματα ανεξαρτησίας και όχι μόνο για μητροειδή. Διατυπώνουμε αυστηρά, τον ισχυρισμό μας στο παρακάτω λήμμα. Θα χρειαστούμε το λήμμα αυτό στην Ενότητα 3.4.

Λήμμα 3.2.1. *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, κάποιο σύνολο $X \subseteq E$. Για κάθε βάση B_X του $S|X$, υπάρχει κάποια βάση B του S, τέτοια ώστε $B_X = B \cap X$.*

Απόδειξη. Έστω $B_X \in \mathscr{B}(S|X)$. Τότε, $B_X \in \mathscr{I}$ και άρα υπάρχει μία βάση $B \in \mathscr{B}$, τέτοια ώστε $B_X \subseteq B$. Τότε, $B_X \subseteq B \cap X$. Αν το B_X περιέχεται γνησίως στο $B \cap X$ ερχόμαστε σε αντίφαση. Αφού το $B \cap X$ είναι ανεξάρτητο, $B_X \subset B \cap X$ και το B_X είναι μεγιστικό ως βάση. Άρα, $B_X = B \cap X$.

Ο.Ε.Δ.

Το ότι όλες οι βάσεις είναι ισοπληθικές, είναι γεγονός μόνο για τα μητροειδή. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τα μεγιστικά ανεξάρτητα σύνολα σε συστήματα ανεξαρτησίας. Θυμηθείτε ότι τα συστήματα ανεξαρτησίας ορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα και αποτελούν μια γενικότερη δομή, όπου δεν απαιτείται να ικανοποιείται το Αξίωμα Επαύξησης . Ειδικότερα δίνουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.2.2. *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Το S είναι μητροειδές αν και μόνον αν, για κάθε $X \subseteq E$ όλες οι βάσεις του $S|X$ είναι ισοπληθικές.*

Απόδειξη. $[\Rightarrow]$ Αν το S είναι μητροειδές, τότε το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 3.1.4.1 και το Θεώρημα 3.2.1.1.

$[\Leftarrow]$ Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, δύο ανεξάρτητα σύνολα $X, Y \in \mathscr{I}$, με $|X| > |Y|$. Ακόμη, παρατηρήστε την ένωσή τους $X \cup Y$. Από υπόθεση, όλες οι βάσεις του $S|X \cup Y$ έχουν το ίδιο μέγεθος, το οποίο είναι τουλάχιστον $|X|$, αφού $X \in \mathscr{I}$. Συνεπώς, το Y δεν είναι βάση του $X \cup Y$ και άρα μπορούμε να το επεκτείνουμε σε κάποια βάση $B \supset Y$. Όμως, αφού βρισκόμαστε στο $X \cup Y$, μπορούμε να το επεκτείνουμε μόνο με στοιχεία από το X. Με άλλα λόγια, υπάρχει κάποιο $e \in X \setminus Y$, τέτοιο ώστε το $Y \cup e$ να είναι ανεξάρτητο. Άρα, ισχύει το Αξίωμα Επαύξησης και άρα το σύστημα ανεξαρτησίας μας είναι και μητροειδές.

Ο.Ε.Δ.

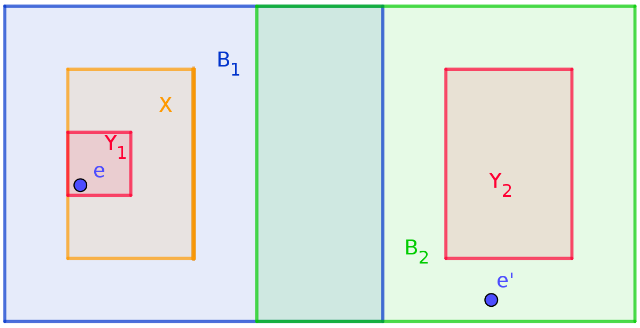
3.2.2 Ιδιότητες Βάσεων

Στην συνέχεια θα δώσουμε ορισμένες ιδιότητες για το σύνολο βάσεων $\mathscr{B}$. Αρχικά, παρατηρήστε πως για ένα σύστημα ανεξαρτησίας S, από το αξίωμα (I1) $\mathscr{B} \neq \emptyset$. Αυτό γιατί στην ακραία περίπτωση θα έχουμε τουλάχιστον $\mathscr{I} = \{\emptyset\}$, άρα, τουλάχιστον, $\mathscr{B} = \{\emptyset\}$. Ειδικότερα δίνουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.2.2.1. *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας S. Έστω, επίσης, το σύνολο των βάσεών του $\mathscr{B}$. Θα ισχύει:*

(B1) $\mathscr{B} \neq \emptyset$

Η επόμενη πρόταση γενικεύει την ιδιότητα ανταλλαγής, όπως την είδαμε στα Θεωρήματα 2.1.7.2 και 2.2.6.4. Παρ' όλο που για την απόδειξη (ή καλύτερα αιτιολόγηση) της Πρότασης



Σχήμα 3.1: Σχήμα για το Θεώρημα 3.2.2.1. Τα σύνολα B_1, B_2, όπως και τα $X \subseteq B_1$ και $Y \subseteq (B_2 \setminus B_1) \cup X$. Το Y έχει σχεδιαστεί ως $Y = Y_1 \cup Y_2$. Επίσης, παρατηρήστε τα σημεία $e \in X \cap Y$ και $e' \in B_2 \setminus [(B_1 \setminus X) \cup Y]$.

3.2.2.1 δεν χρειαστήκαμε το Αξίωμα Επαύξησης . Στην απόδειξη της επόμενης πρότασης θα το χρειαστούμε. Έτσι, εστιάζουμε στα μητροειδή, τα συστήματα ανεξαρτησίας όπου υπακούν στο αξίωμα (I3).

Πρόταση 3.2.2.2 (Ιδιότητα Ανταλλαγής). *Έστω ένα μητροειδές M. Έστω, επίσης, το σύνολο των βάσεών του $\mathscr{B}$. Θα ισχύει:*

(B2) Αν B_1, B_2 δύο στοιχεία του $\mathscr{B}$, τότε για κάθε $x \in B_1 \setminus B_2$, υπάρχει $y \in B_2 \setminus B_1$, τέτοιο ώστε το $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathscr{B}$.

Απόδειξη. Τόσο το $B_1 \setminus x$, όσο και το B_2 είναι ανεξάρτητα σύνολα. Επιπλέον, ισχύει $|B_1 \setminus x| = |B_2| - 1$, αφού από Πρόταση 3.2.1.1 $|B_1| = |B_2|$. Από Αξίωμα Επαύξησης υπάρχει ένα $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus x)$, τέτοιο ώστε $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathscr{I}$. Επιπλέον, παρατηρήστε ότι $|(B_1 \setminus x) \cup y| = |B_2|$, από Πόρισμα 3.2.1.1.1 το $(B_1 \setminus x) \cup y$ είναι βάση.

Ο.Ε.Δ.

Μάλιστα, μπορούμε να κινηθούμε ανάλογα με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1.1, ώστε να ισχυροποιήσουμε την ιδιότητα (B2). Δίνουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.2.1. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$ και $\mathscr{B}$ το σύνολο βάσεών του. Έστω, επίσης, $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ δύο βάσεις του M. Αν $X \subseteq B_1 \setminus B_2$, τότε υπάρχει $Y \subseteq B_2 \setminus B_1$, τέτοιο ώστε το $(B_1 \setminus X) \cup Y$ να είναι βάση.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε κάποιο $X \subseteq B_1 \setminus B_2$. Έστω κάποιο $Y \subseteq (B_2 \setminus B_1) \cup X$, τέτοιο ώστε το $(B_1 \setminus X) \cup Y$ να είναι βάση και η ποσότητα $|Y \setminus X|$ να είναι μέγιστη. Με άλλα λόγια, απαιτούμε το Y να έχει τα λιγότερα δυνατά στοιχεία από το X, ώστε το $(B_1 \setminus X) \cup Y$ να ανήκει στο $\mathscr{B}$. Κάποιο τέτοιο Y υπάρχει, αφού θα μπορούσε να είναι απλά το ίδιο το X. Εντούτοις, η Πρόταση 3.2.2.2 μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει Y με $|Y \setminus X| > 1$. Στην συνέχεια, θα δείξουμε ότι υπάρχει Y με $Y \cap X = \emptyset$.

Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει κάποιο $e \in Y \cap X$. Τότε, το $e \in [(B_1 \setminus X) \cup Y] \setminus B_2$ (βλ. Σχήμα 3.1) και άρα από Πρόταση 3.2.2.2 υπάρχει $e' \in B_2 \setminus [(B_1 \setminus X) \cup Y]$, τέτοιο ώστε $([(B_1 \setminus X) \cup Y] \setminus e) \cup e' \in \mathscr{B}$. Όμως, $|Y \setminus X| < |[(Y \setminus e) \cup e'] \setminus X|$, αφού έχουμε αντικαταστήσει το $e \in X$, με το $e' \notin X$. Το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την επιλογή του Y. Άτοπο.

Ο.Ε.Δ.

Από το παραπάνω θεώρημα παίρνουμε το εξής ενδιαφέρον πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.2.1.1. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$ και δύο σύνολα $X \subseteq Y \subseteq E$. Έστω, επίσης, δύο βάσεις του M, B_1, B_2, τέτοιες ώστε $X \subseteq B_1$ και $B_2 \subseteq Y$. Τότε, υπάρχει κάποια βάση B_3, τέτοια ώστε $X \subseteq B_3 \subseteq Y$.*

Απόδειξη. Έστω $S = B_1 \backslash Y$. Τότε, $S \subseteq B_1 \backslash B_2$. Από Θεώρημα 3.2.2.1 υπάρχει $T \subseteq B_2 \backslash B_1$, τέτοιο ώστε το $(B_1 \setminus S) \cup T$ να είναι βάση. Όμως, παρατηρήστε ότι $X \subseteq (B_1 \setminus S) \cup T \subseteq Y$.

Ο.Ε.Δ.

3.2.3 Αξιώματα Βάσεων

Στην συνέχεια θα δούμε πως οι ιδιότητες (B1) και (B2) χαρακτηρίζουν το σύνολο βάσεων $\mathscr{B}$ ενός μητροειδούς. Με άλλα λόγια, δεδομένων ενός συνόλου E και ενός συνόλου $\mathscr{B}$, το οποίο να ικανοποιεί τις ιδιότητες (B1) και (B2), μπορούμε να κατασκευάσουμε μονοσήμαντα το μητροειδές $(E, \mathscr{I})$, το οποίο θα είχε το $\mathscr{B}$ σαν σύνολο βάσεων. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να διατυπώσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό για μητροειδή όπου θα δώσουμε σαν αξιώματα τις ιδιότητες (B1) και (B2) για το σύνολο $\mathscr{B}$.

Ορισμός 3.2.3.1 ($\mathscr{B}$-Μητροειδές)**.** *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο E. Έστω επίσης ένα σύνολο υποσυνόλων του E, $\mathscr{B} \subseteq 2^E$. Θα λέμε ότι η δυάδα $M = (E, \mathscr{B})$ είναι ένα $\mathscr{B}$-μητροειδές, ή απλά* μητροειδές *(matroid), αν υπακούει στα εξής αξιώματα:*

(B1) $\mathscr{B} \neq \emptyset$

(B2) Αν τα B_1 και B_2 ανήκουν στο $\mathscr{B}$, τότε για κάθε $x \in B_1 \setminus B_2$, υπάρχει $y \in B_2 \setminus B_1$, τέτοιο ώστε $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathscr{B}$.

Το σύνολο $\mathscr{B}$, το ονομάζουμε σύνολο βάσεων*. Θα ονομάζουμε το δε αξίωμα (B2),* αξίωμα ανταλλαγής*.*

Σε αυτό το σημείο επισημαίνουμε πως το σύνολο $\mathscr{B}$, του παραπάνω ορισμού, δεν είναι το ίδιο με το σύνολο $\mathscr{B}$ του Ορισμού 3.2.1.1. Αυτό γιατί το τελευταίο προϋποθέτει τον Ορισμό 3.1.1.2. Προφανώς, δεν χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για να προκαλέσουμε σύγχυση. Αυτά τα δύο σύνολα θα ταυτιστούν στην συνέχεια. Για να γίνει αυτό, όμως, θα πρέπει να αποδείξουμε την ισοδυναμία των ορισμών 3.1.1.2 και 3.2.3.1.

Προς το παρόν, όμως, θα δείξουμε ένα λήμμα που θα μας χρειαστεί στην απόδειξη της ισοδυναμίας των ορισμών. Το λήμμα θα μας οδηγήσει στην ίδια παρατήρηση με το Θεώρημα 3.2.1.1. Παρ' όλα αυτά θα πρέπει να φτάσουμε σε αυτό το αποτέλεσμα μόνο με την χρήση των αξιωμάτων (B1), (B2).

Λήμμα 3.2.3. *Έστω ένα $\mathscr{B}$-μητροειδές $(E, \mathscr{B})$. Τα στοιχεία του $\mathscr{B}$ είναι ισοπληθικά.*

Απόδειξη. Έστω B_1, B_2 δύο στοιχεία του $\mathscr{B}$, με $B_1 \neq B_2$. Έστω, προς άτοπο, $|B_1| > |B_2|$. Επιλέγουμε σύνολα B_1, B_2, τέτοια ώστε να ελαχιστοποιείται η ποσότητα $|B_1 \setminus B_2|$. Από επιλογή των B_1, B_2, $B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset$. Έτσι διαλέγουμε ένα $x \in B_1 \setminus B_2$, από Αξίωμα Ανταλλαγής υπάρχει $y \in B_2 \setminus B_1$, τέτοιο ώστε $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathscr{B}$. Όμως, $|(B_1 \setminus x) \cup y| = |B_1| > |B_2|$ και $|((B_1 \setminus x) \cup y) \setminus B_2| < |B_1 \setminus B_2|$. Άτοπο, αφού αντικρούει την επιλογή των B_1, B_2.

Ο.Ε.Δ.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της ισοδυναμίας των ορισμών 3.1.1.2 και 3.2.3.1, ας μιλήσουμε για το τι πρόκειται να δείξουμε. Τι ακριβώς εννοούμε με την ισοδυναμία των ορισμών. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε πολλές ισοδυναμίες μεταξύ διαφορετικών συνόλων αξιωμάτων· δηλαδή διαφορετικών αναπαραστάσεων των μητροειδών. Ο όρος ισοδυναμία χρησιμοποιείται άτυπα, και εννοούμε πως δεδομένου του συνόλου $\mathscr{B}$, για παράδειγμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε το σύνολο $\mathscr{I}$, με εύκολο τρόπο. Το δε σύνολο $\mathscr{I}$ θα ικανοποιεί τα αξιώματα που περιμένουμε. Έτσι, συνεχίζουμε στην απόδειξη.

Θεώρημα 3.2.3.1. *Οι Ορισμοί 3.1.1.2 και 3.2.3.1 είναι ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. $[\Rightarrow]$ Έστω ένα $\mathscr{I}$-μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$. Θεωρούμε το σύνολο βάσεων του M, $\mathscr{B}_M$, τότε το $(E, \mathscr{B}_M)$ είναι ένα $\mathscr{B}$-μητροειδές. Δηλαδή το $\mathscr{B}_M$ υπακούει στα αξιώματα (B1), (B2), όπως δείξαμε στις προτάσεις 3.2.2.1 3.2.2.2.

$[\Leftarrow]$ Έστω ένα $\mathscr{B}$-μητροειδές $M = (E, \mathscr{B})$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathscr{I}_M$, το οποίο ορίζουμε ως:

$$\mathscr{I}_M = \{I \subseteq E \mid \text{υπάρχει } B \in \mathscr{B}, \text{ τέτοιο ώστε } I \subseteq B\} \tag{3.4}$$

Θα δείξουμε ότι το $(E, \mathscr{I}_M)$ είναι ένα $\mathscr{I}$-μητροειδές. Αρκεί να δείξουμε ότι το $(E, \mathscr{I}_M)$ ικανοποιεί τα αξιώματα (I1)-(I3). Παρατηρήστε ότι εξ ορισμού ικανοποιούνται τα αξιώματα (I1), (I2). Στην συνέχεια δείχνουμε ότι ικανοποιείται και το αξίωμα (I3).

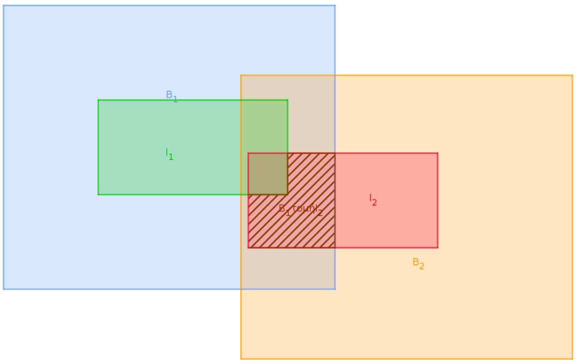
Έστω, προς άτοπο, πως το (I3) δεν ικανοποιείται. Τότε, υπάρχουν $I_1, I_2 \in \mathscr{I}_M$, με $|I_1| < |I_2|$, τέτοια ώστε για κάθε $e \in I_2 \setminus I_1$, το $I_1 \cup e \notin \mathscr{I}_M$. Εξ ορισμού το σύνολο $\mathscr{B}$ περιέχει στοιχεία B_1, B_2, τέτοια ώστε $I_1 \subseteq B_1$ και $I_2 \subseteq B_2$. Επιλέγουμε ένα σύνολο B_2, τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η ποσότητα $|B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)|$. Από επιλογή των I_1, I_2, ισχύει

$$I_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1 \tag{3.5}$$

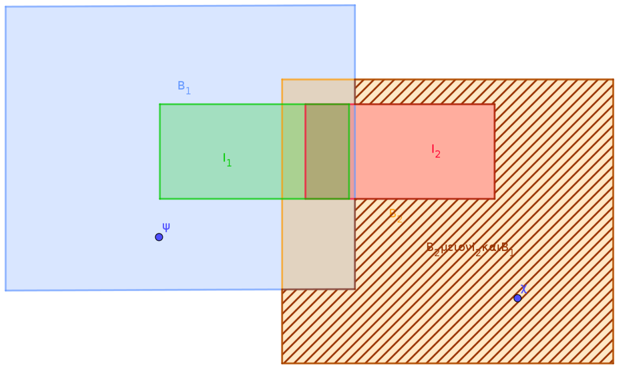
Αυτό γιατί, αφού δεν ισχύει το αξίωμα (I3) για τα I_1, I_2, τότε δεν υπάρχει κάποιο στοιχείο του I_2, το οποίο μπορεί να "χρησιμοποιήσει" το I_1, ώστε να επεκταθεί σε ένα μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο. Συνεπώς θα έχουμε $(B_1 \setminus I_1) \cap I_2 = \emptyset$. Δίνουμε τα σχετικά διαγράμματα Venn [2] στα σχήματα 3.2α' και 3.2β' [3].

[2] Επινοήθηκαν από τον Άγγλο μαθηματικό John Venn στα 1880 και αποτελούν απλοποίηση των διαγραμμάτων Euler.

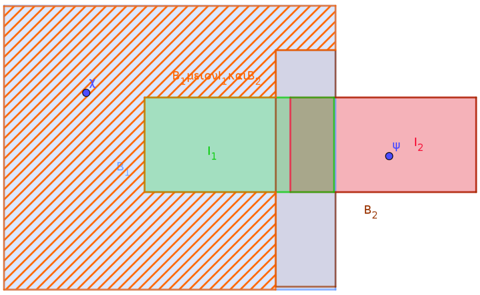
[3] Τα διαγράμματα Venn, επ'ουδενί αποτελούν τμήμα της απόδειξης. Παρ'όλα αυτά μας βοηθούν συχνά να κατανοήσουμε πολύπλοκες αποδείξεις. Σας παροτρύνουμε να σχεδιάσετε τα δικά σας διαγράμματα Venn, όπου κρίνετε απαραίτητο.



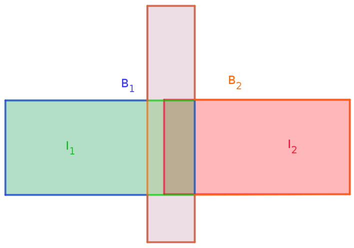
(α') Τα σύνολα B_1, B_2, I_1, I_2, σχεδιασμένα λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους περιορισμούς $I_1 \subseteq B_1$ και $I_2 \subseteq B_2$.



(β') Τα σύνολα B_1, B_2, I_1, I_2, σχεδιασμένα λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση ότι το αξίωμα (I3) δεν ισχύει για τα I_1, I_2. Παρατηρήστε, επίσης, το $x \in B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)$ και το $y \in B_1 \setminus B_2$.



(γ') Τα σύνολα B_1, B_2, I_1, I_2, σχεδιασμένα λαμβάνοντας υπόψη ότι το σύνολο $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)$ είναι κενό. Παρατηρήστε, επίσης, το $x \in B_1 \setminus (I_1 \cup B_2)$ και το $y \in B_2 \setminus B_1$.



(δ') Τα σύνολα B_1, B_2, I_1, I_2, σχεδιασμένα λαμβάνοντας υπόψη ότι το σύνολο $B_1 \setminus (I_1 \cup B_2)$ είναι κενό.

Σχήμα 3.2: Τα διαγράμματα Venn για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.3.1.

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1) = \emptyset$. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1) \neq \emptyset$. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα στοιχείο x από αυτό το σύνολο. Παρατηρούμε, επίσης, πως $x \in B_2 \setminus (I_2 \cup B_1) \subseteq (B_2 \setminus B_1)$. Συνεπώς, από αξίωμα (B2), υπάρχει $y \in B_1 \setminus B_2$, τέτοιο ώστε $(B_2 \setminus x) \cup y \in \mathscr{B}$. Όμως, $|((B_2 \setminus x) \cup y) \setminus (I_2 \cup B_1)| < |B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)|$. Αφού, αφαιρέσαμε από το B_2 το x, το οποίο δεν ανήκει στο $I_2 \cup B_1$, και προσθέσαμε το y, το οποίο ανήκει στο $B_1 \subseteq I_2 \cup B_1$. Με τον τρόπο βρήκαμε βάση $B' \supseteq I_2$, τέτοια ώστε $|B' \setminus (I_2 \cup B_1)| < |B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)|$. Έτσι καταλήξαμε σε άτοπο. Συνεπώς, το σύνολο $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)$ είναι κενό (βλ. Σχήμα 3.2γ'). Λαμβάνοντας αυτό υπόψιν, και από την (3.5) παίρνουμε:

$$B_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1 \tag{3.6}$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $B_1 \setminus (I_1 \cup B_2)$ είναι κενό. Υποθέτουμε, πάλι προς άτοπο, ότι ισχύει το αντίθετο. Τότε υπάρχει ένα στοιχείο x σε αυτό το σύνολο. Από Αξίωμα Ανταλλαγής υπάρχει ένα στοιχείο $y \in B_2 \setminus B_1$, τέτοιο ώστε $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathscr{B}$. Παρατηρήστε, ότι $I_1 \cup y \subseteq (B_1 \setminus x) \cup y$ (βλ. Σχήμα 3.2γ'). Από τον ορισμό του $\mathscr{I}_M$, έχουμε $I_1 \cup y \in \mathscr{I}_M$. Εφόσον $y \in B_2 \setminus B_1$, από σχέση (3.6) έχουμε $y \in I_2 \setminus I_1$. Άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι το (I3) δεν ισχύει για τα I_1, I_2. Συνεπώς, καταλήγουμε ότι το σύνολο $B_1 \setminus (I_1 \cup B_2)$ είναι κενό (βλ. Σχήμα 3.2δ'). Έτσι έχουμε $B_1 \setminus B_2 = I_1 \setminus B_2$. Επιπλέον, $I_1 \setminus B_2 \subseteq I_1 \setminus I_2$, αφού $B_2 \supseteq I_2$. Άρα, τελικά:

$$B_1 \setminus B_2 \subseteq I_1 \setminus I_2 \tag{3.7}$$

Τέλος, από Λήμμα 3.2.3 $|B_1| = |B_2|$, επομένως $|B_1 \setminus B_2| = |B_2 \setminus B_1|$. Από τις σχέσεις (3.6) και (3.7) $|I_1 \setminus I_2| \geq |I_2 \setminus I_1|$, άρα $|I_1| \geq |I_2|$. Άτοπο, από την επιλογή των I_1, I_2.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα πρέπει να δείξουμε ότι το $\mathscr{B}$ είναι το $\mathscr{B}(E, \mathscr{I}_M)$. Το γεγονός αυτό προκύπτει άμεσα, από τον ορισμό του $\mathscr{I}_M$.

Ο.Ε.Δ.

Από το παραπάνω θεώρημα, και από την λοιπή συζήτησή μας στην ενότητα αυτή, δίνουμε το πόρισμα που είχαμε υποσχεθεί, στην αρχή της ενότητας.

Πόρισμα 3.2.3.1.1. *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο E. Έστω, επίσης, μια οικογένεια συνόλων από το E, το $\mathscr{B} \subseteq 2^E$. Τότε, το $\mathscr{B}$ είναι το σύνολο βάσεων ενός μητροειδούς πάνω στο E αν και μόνον αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(B1) $\mathscr{B} \neq \emptyset$

(B2) Αν τα B_1 και B_2 ανήκουν στο $\mathscr{B}$, τότε για κάθε $x \in B_1 \setminus B_2$, υπάρχει $y \in B_2 \setminus B_1$, τέτοιο ώστε $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathscr{B}$.

Με το προηγούμενο πόρισμα ολοκληρώνεται η συζήτησή μας για το σύνολο βάσεων ενός μητροειδούς. Στην επόμενη ενότητα, θα εργαστούμε ομοίως, γενικεύοντας την έννοια του κύκλου, που συνατήσαμε στη Ενότητα 2.1.

3.3 Κυκλώματα

Ως τώρα έχουμε μιλήσει για τα ανεξάρτητα σύνολα ενός μητροειδούς. Μάλιστα, στην προηγούμενη ενότητα, κάναμε λόγο για τα μεγιστικά ανεξάρτητα σύνολα, τις βάσεις. Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τα εξαρτημένα σύνολα, ενός μητροειδούς M. Παραδείγματος χάρη, θεωρείστε ένα γράφημα $G = (V, E)$. Τι κοινό έχουν όλα τα εξαρτημένα σύνολα του γραφικού μητροειδούς M_G; Έστω ένα σύνολο ακμών του E, $D \subseteq E$. Τότε, το D θα είναι εξαρτημένο, αν και μόνο αν δεν ανήκει στο σύνολο δασών του G, $\mathscr{F}$. Με άλλα λόγια, το $G[D]$ περιέχει τουλάχιστον ένα κύκλο. Αυτός ο κύκλος είναι η ”πηγή του κακού”. Παρατηρήστε, επίσης, ότι σε έναν κύκλο, κάθε υπογράφημά του είναι δάσος. Υπό αυτή την έννοια ο κύκλος αποτελεί ένα ελαχιστικά εξαρτημένο σύνολο. Την γενίκευση των κύκλων, αλλά και των ελαχιστικά γραμμικώς εξαρτημένων συνόλων, δίνει ο παρακάτω ορισμός.

3.3.1 Ορισμός Κυκλωμάτων

Ορισμός 3.3.1.1 (Κύκλωμα). *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, ένα εξαρτημένο υποσύνολο C του E. Θα ονομάζουμε το C* κύκλωμα *(circuit), αν κάθε γνήσιο υποσύνολό του $C' \subset C$ είναι ανεξάρτητο, δηλαδή $C' \in \mathscr{I}$. Επιπλέον, θα συμβολίζουμε το* σύνολο όλων των κυκλωμάτων*, ενός συστήματος ανεξαρτησίας με $\mathscr{C}$ ή $\mathscr{C}(S)$.*

Πάλι θα δώσουμε ένα παράδειγμα από τα ομοιόμορφα μητροειδή, που θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τα κυκλώματα.

Παράδειγμα 3.3.1.1. *Θεωρήστε το ομοιόμορφο μητροειδές $U_{3,5} = (E, \mathscr{I})$. Τότε, το σύνολο κυκλωμάτων του ομοιόμορφου μητροειδούς θα είναι, απλώς, όλα τα υποσύνολα C του E, όπου $|C| = 4$. Δηλαδή,*

$$\mathscr{C}(U_{3,5}) = \{C \subseteq E \mid |C| = 4\}$$

Γενικότερα, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε πως για το σύνολο κυκλωμάτων ενός ομοιόμορφου μητροειδούς ισχύει:

$$\mathscr{C}(U_{m,n}) = \begin{cases} \emptyset, & m = n \\ \{X \subseteq E \mid |X| = m+1\}, & m < n \end{cases}$$

Δανειζόμενοι την ορολογία από την θεωρία γραφημάτων, για κάποιο μητροειδές M, θα λέμε το $e \in E$ *βρόχο* (loop) αν το $\{e\}$ είναι κύκλωμα. Επιπλέον, θα ονομάζουμε *παράλληλα* (parallel) δύο στοιχεία $f, g \in E$, αν δημιουργούν από κοινού κύκλωμα, δηλαδή $\{f, g\} \in \mathscr{C}$. Ακόμη, ονομάζουμε *τάξη παραλληλίας* (parallel class) ένα μεγιστικό σύνολο X, τέτοιο ώστε κάθε δύο στοιχεία του είναι παράλληλα και κανένα στοιχείο του δεν είναι βρόχος. Μια τάξη παραλληλίας θεωρείται *τετριμμένη* (trivial) όταν περιέχει μόνο ένα στοιχείο. Από την άλλη, αν ένα μητροειδές δεν περιέχει μη τετριμμένες τάξεις παραλληλίας και βρόχους, ονομάζεται *απλό* (simple).

Όταν $m = 0$, κάθε στοιχείο του $U_{m,n}$ είναι βρόχος. Από την άλλη, αν $m = 1$, το $U_{m,n}$ περιέχει μία τάξη παραλληλίας. Τέλος, όταν $m \geq 2$, το ομοιόμορφο μητροειδές είναι απλό.

3.3.2 Ιδιότητες Κυκλωμάτων

Ακολουθώντας το πνεύμα της προηγούμενης ενότητας, θα δείξουμε κάποιες ιδιότητες για το σύνολο $\mathscr{C}$ των κυκλωμάτων. Οι πρώτες δύο ιδιότητες, που θα δείξουμε, προκύπτουν κατευθείαν από τον Ορισμό $3.3.1.1$. Αρχικά, παρατηρήστε ότι από το αξίωμα (I1), το κενό σύνολο είναι ανεξάρτητο, συνεπώς δεν μπορεί να είναι κύκλωμα, άρα $\emptyset \notin \mathscr{C}$. Από την άλλη, για δύο κυκλώματα C_1, C_2, όπου $C_1 \subseteq C_2$, γνωρίζουμε ότι ταυτίζονται. Αυτό γιατί, αν ίσχυε γνήσια ο εγκλεισμός, το C_1 θα έπρεπε να είναι ανεξάρτητο. Διατυπώνουμε αυτούς τους δύο ισχυρισμούς στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.3.2.1. *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, το σύνολο $\mathscr{C}$ κυκλωμάτων του S. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(C1) $\emptyset \notin \mathscr{C}$

(C2) Αν C_1, C_2 στοιχεία του $\mathscr{C}$, με $C_1 \subseteq C_2$, τότε $C_1 = C_2$.

Για την επόμενη ιδιότητα χρειαζόμαστε το Αξίωμα Επαύξησης , οπότε εστιάζουμε την προσοχή μας σε συστήματα ανεξαρτησίας, τα οποία είναι επιπλέον και μητροειδή. Η ακόλουθη πρόταση γενικεύει την ιδιότητα απαλοιφής που είδαμε στα θεωρήματα 2.1.8.1 και 2.2.4.1.

Πρόταση 3.3.2.2 (Ιδιότητα Απαλοιφής)**.** *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, το σύνολο $\mathscr{C}$ κυκλωμάτων του M. Τότε, ισχύει:*

(C3) Αν C_1, C_2 δύο διακεκριμένα στοιχεία του $\mathscr{C}$ και $e \in C_1 \cap C_2$, τότε υπάρχει ένα στοιχείο $C_3 \in \mathscr{C}$ τέτοιο ώστε $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$.

Απόδειξη. Έστω, προς άτοπο, ότι το $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ δεν περιέχει κάποιο κύκλωμα. Τότε, $(C_1 \cup C_2) \setminus e \in \mathscr{I}$. Από την αντιθετοαντιστροφή της ιδιότητας (C2), το $C_2 \setminus C_1$ είναι μη κενό, άρα μπορούμε να επιλέξουμε, από αυτό, ένα στοιχείο f. Εφόσον το C_2 είναι ελαχιστικά εξαρτημένο σύνολο, το $C_2 \setminus f \in \mathscr{I}$. Τώρα διαλέγουμε ένα σύνολο I, υποσύνολο των $C_1 \cup C_2$, μεγιστικό υπό των ιδιοτήτων, να περιέχει το $C_2 \setminus f$ και να είναι ανεξάρτητο. Προφανώς, $f \notin I$, διαφορετικά το I περιέχει το C_2 και άρα είναι εξαρτημένο. Για το ίδιο λόγο, το I δεν μπορεί να περιέχει το C_1, άρα υπάρχει $g \in C_1 \setminus I$. Εφόσον, το $f \in C_2 \setminus C_1$, τα στοιχεία f, g είναι διαφορετικά. Έτσι,

$$|I| \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{f, g\}| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus e|$$

Τώρα, εφαρμόζουμε το (I3) στα I και $(C_1 \cup C_2) \setminus e$. Το σύνολο που προκύπτει θα είναι ανεξάρτητο, θα περιέχεται στο $(C_1 \cup C_2)$ και θα περιέχει το I. Άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι το I είναι μεγιστικό.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα πρέπει να δείξουμε ότι το $\mathscr{C}$ είναι το $\mathscr{C}(E, \mathscr{I}_M)$. Το γεγονός αυτό προκύπτει άμεσα, από τον ορισμό του $\mathscr{I}_M$.

Ο.Ε.Δ.

3.3.3 Αξιώματα Κυκλωμάτων

Στην συνέχεια, θα δούμε πως οι ιδιότητες (C1)-(C3) είναι αρκετές για να χαρακτηρίσουμε το σύνολο κυκλωμάτων ενός μητροειδούς M. Σε αυτή την κατεύθυνση, θα διατυπώσουμε τον τρίτο μας ορισμό για μητροειδή, αξιωματικοποιώντας τις προαναφερθείσες ιδιότητες.

Ορισμός 3.3.3.1 ($\mathscr{C}$-Μητροειδές). *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο E. Έστω, επίσης, ένα σύνολο $\mathscr{C} \subseteq 2^E$ υποσυνόλων του E. Θα λέμε ότι η δυάδα $M = (E, \mathscr{C})$ είναι ένα $\mathscr{C}$-μητροειδές ή απλά* μητροειδές *(matroid), αν υπακούει στα εξής αξιώματα:*

(C1) $\emptyset \notin \mathscr{C}$

(C2) Αν C_1, C_2 στοιχεία του $\mathscr{C}$, με $C_1 \subseteq C_2$, τότε $C_1 = C_2$

(C3) Αν C_1, C_2 δύο διακεκριμένα στοιχεία του $\mathscr{C}$ και $e \in C_1 \cap C_2$, τότε υπάρχει ένα στοιχείο $C_3 \in \mathscr{C}$, τέτοιο ώστε $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$.

Το δε σύνολο $\mathscr{C}$, το ονομάσουμε σύνολο κυκλωμάτων*. Θα ονομάζουμε το αξίωμα (C3),* αξίωμα απαλοιφής*.*

Προχωράμε, τώρα, στην απόδειξη της ισοδυναμίας των Ορισμών 3.1.1.2 και 3.3.3.1.

Θεώρημα 3.3.3.1. *Οι ορισμοί 3.1.1.2 και 3.3.3.1 είναι ισοδύναμοι.*

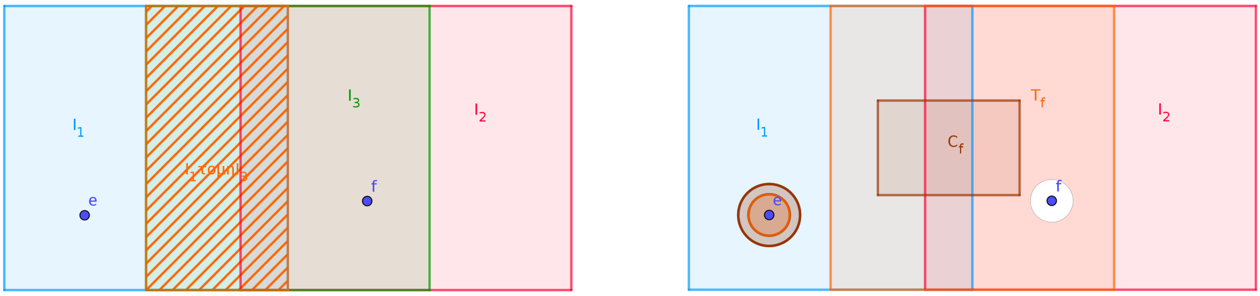
Απόδειξη. $[\Rightarrow]$ Έστω ένα $\mathscr{I}$-μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$. Θεωρούμε το σύνολο κυκλωμάτων του M, $\mathscr{C}_M$. Το $(E, \mathscr{C}_M)$ είναι ένα $\mathscr{C}$-μητροειδές. Δηλαδή, το $\mathscr{C}_M$ υπακούει στα (C1)-(C3), όπως δείξαμε στις Προτάσεις 3.3.2.1 και 3.3.2.2.

$[\Leftarrow]$ Έστω ένα $\mathscr{C}$-μητροειδές $M = (E, \mathscr{C})$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathscr{I}_M$, το οποίο ορίζουμε ως:

$$\mathscr{I}_M = \{I \subseteq E \mid \text{δεν υπάρχει } C \in \mathscr{C} \text{ τέτοιο ώστε } C \subseteq I\} \tag{3.8}$$

Θα δείξουμε ότι το $(E, \mathscr{I}_M)$ είναι ένα $\mathscr{I}$-μητροειδές. Αρκεί να δείξουμε ότι το $(E, \mathscr{I}_M)$ ικανοποιεί τα αξιώματα (I1)-(I3). Από το (C1), το κενό σύνολο $\emptyset$ δεν περιέχει κάποιο στοιχείο του $\mathscr{C}$, άρα $\emptyset \in \mathscr{I}_M$ και το αξίωμα (I1) ικανοποιείται. Αν το I δεν περιέχει κάποιο στοιχείο του $\mathscr{C}$ και το I' περιέχεται στο I, τότε το I', επίσης, δεν περιέχει κάποιο στοιχείο του $\mathscr{C}$. Άρα και το αξίωμα (I2) ικανοποιείται.

Για την απόδειξη του (I3), υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι υπάρχουν $I_1, I_2 \in \mathscr{I}_M$, με $|I_1| < |I_2|$, αλλά δεν ικανοποιούν το Αξίωμα Επαύξησης . Τώρα, υπάρχει στο $\mathscr{I}_M$ κάποιο υποσύνολο του $I_1 \cup I_2$, το οποίο να έχει περισσότερα στοιχεία από το I_1. Πάρτε για παράδειγμα, το ίδιο, το I_2. Θα διαλέξουμε ένα τέτοιο υποσύνολο I_3, για το οποίο η ποσότητα $|I_1 \setminus I_3|$ να είναι ελάχιστη. Εφόσον, το (I3) αποτυγχάνει, το $I_1 \setminus I_3$ είναι μη κενό, συνεπώς μπορούμε να διαλέξουμε κάποιο $e \in I_1 \setminus I_3$. Τώρα, για κάθε στοιχείο, f, του $I_3 \setminus I_1$, θεωρούμε το σύνολο T_f, να είναι $(I_3 \cup e) \setminus f$ (βλ. Σχήμα 3.3). Τότε, το $T_f \subseteq I_1 \cup I_2$ και $|I_1 \setminus T_f| < |I_1 \setminus I_3|$. Συνεπώς, $T_f \notin \mathscr{I}_M$. Άρα, το T_f περιέχει κάποιο σύνολο $C_f \in \mathscr{C}$. Από τον ορισμό του T_f, $f \notin C_f$. Επιπλέον, $e \in C_f$, διαφορετικά $C_f \subseteq I_3$, το οποίο αντιφάσκει με το γεγονός ότι $I_3 \in \mathscr{I}_M$.



(α') Τα σύνολα I_1, I_2 και $I_3 \subseteq I_1 \cup I_2$. Παρατηρήστε, επίσης, τα σημεία $e \in I_1 \setminus I_3$ και $f \in I_3 \setminus I_1$.

(β') Τα σύνολα I_1, I_2, και $T_f = (I_3 \setminus f) \cup e$. Παρατηρήστε, επίσης, το $C_f \subseteq T_f$, με $e \in C_f$.

Σχήμα 3.3: Τα διαγράμματα Venn για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.3.1.

Έστω g κάποιο στοιχείο του $I_3 \setminus I_1$. Αν $C_g \cap (I_3 \setminus I_1) = \emptyset$, τότε $C_g \subseteq ((I_1 \cap I_3) \cup e) \setminus g \subseteq I_1$. Άτοπο, αφού $I_1 \in \mathscr{I}_M$. Συνεπώς, το C_g περιέχει κάποια στοιχεία που ανήκουν στο I_3, αλλά όχι στο I_1. Γι' αυτό μπορούμε να διαλέξουμε κάποιο $h \in C_g \cup (I_3 \setminus I_1)$. Παρατηρήστε, ότι $h \neq g$. Τώρα, $e \in C_g \cap C_h$, άρα από (C3), υπάρχει C στο $\mathscr{C}$, τέτοιο ώστε $C \subseteq (C_g \cap C_h) \setminus e$. Όμως, αμφότερα τα C_g και C_h είναι υποσύνολα του $I_3 \cup e$, έτσι $C \subseteq I_3$. Άτοπο, αφού $I_3 \in \mathscr{I}_M$.

Ο.Ε.Δ.

Από το παραπάνω θεώρημα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα αξιώματα (C1) ως (C3) αρκούν για να χαρακτηρίσουν το σύνολο κυκλωμάτων ενός μητροειδούς. Διατυπώνουμε το συμπέρασμά μας στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.3.3.1.1. *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο E. Έστω, επίσης, μια οικογένεια υποσυνόλων από το E, η $\mathscr{C} \subseteq 2^E$. Το $\mathscr{C}$ είναι το σύνολο κυκλωμάτων ενός μητροειδούς πάνω στο E, αν και μόνον αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(C1) $\emptyset \notin \mathscr{C}$

(C2) Αν C_1, C_2 στοιχεία του $\mathscr{C}$, με $C_1 \subseteq C_2$, τότε $C_1 = C_2$

(C3) Αν C_1, C_2 δύο διακεκριμένα στοιχεία του $\mathscr{C}$ και $e \in C_1 \cap C_2$, τότε υπάρχει ένα στοιχείο $C_3 \in \mathscr{C}$, τέτοιο ώστε $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$.

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας το παραπάνω πόρισμα, θα αποδείξουμε μία πρόταση η οποία γενικεύει μια ιδιότητα των μητροειδών γραφήματος. Ειδικότερα, γνωρίζουμε ότι δεδομένου ενός δάσους σε ένα γράφημα G, αν προσθέσουμε μια ακμή στο δάσος θα δημιουργήσουμε το πολύ έναν κύκλο [4]. Ακολουθεί η απόδειξη αυτού του γεγονότος σε γενικά μητροειδή.

[4]Αυτό ισχύει, επειδή απλά οι ακμές είναι δισύνολα και άρα μπορούν να συνδέσουν μόνο δύο κόμβους.

Πρόταση 3.3.3.1. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$ και ένα ανεξάρτητο σύνολο $I \in \mathscr{I}$. Έστω, επίσης, ένα στοιχείο e του E. Αν το $I \cup e$ είναι εξαρτημένο, τότε υπάρχει μοναδικό κύκλωμα $C \in \mathscr{C}$, το οποίο να περιέχεται στο $I \cup e$.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι το $I \cup e$ περιέχει κάποιο κύκλωμα C Επιπλέον, κάθε κύκλωμα που περιέχεται στο $I \cup e$, πρέπει να περιέχει το e, διαφορετικά δεν θα ίσχυε το αξίωμα (I2). Έστω, τώρα, ένα άλλο κύκλωμα $C' \subseteq I \cup e$, διαφορετικό από το C. Τότε, από Αξίωμα Απαλοιφής το $(C \cup C') \setminus e$ περιέχει κάποιο κύκλωμα. Όμως, $(C \cup C') \setminus e \subseteq I$. Άτοπο, από το αξίωμα (I2).

Ο.Ε.Δ.

3.3.4 Θεμελιώδες Κύκλωμα

Από την παραπάνω πρόταση παίρνουμε το εξής πόρισμα για τις βάσεις ενός μητροειδούς.

Πόρισμα 3.3.4.0.1. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$ και B, μια βάση του M. Έστω, επίσης, κάποιο στοιχείο $e \in E \setminus B$. Τότε το $B \cup e$ περιέχει μοναδικό κύκλωμα $C(e, B)$. Επιπλέον, $e \in C(e, B)$.*

Θα ονομάζουμε το $C(e, B)$ το *θεμελιώδες κύκλωμα* (fundamental circuit) των e και B. Μάλιστα, θα δούμε στην συνέχεια, πως κάθε κύκλωμα ενός μητροειδούς είναι θεμελιώδες κύκλωμα για κάποιο ζεύγος στοιχείου-βάσης, e, B.

Πρόταση 3.3.4.1. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$ και κάποιο κύκλωμά του C. Έστω, επίσης, κάποιο $e \in C$. Τότε υπάρχει κάποια βάση B του M, τέτοια ώστε $C = C(e, B)$*

Απόδειξη. Αφού το C είναι κάποιο κύκλωμα του M, για κάθε $e \in C$, το $C \setminus e$ είναι ανεξάρτητο. Θεωρούμε, λοιπόν, το $I = C \setminus e$, όπου $I \in \mathscr{I}$. Από Αξίωμα Επαύξησης υπάρχει κάποια βάση του M, B, τέτοια ώστε $B \supseteq I$. Τώρα, το $B \cup e$ περιέχει το C. Όμως, από Πόρισμα 3.3.4.0.1, το $B \cup e$ περιέχει μοναδικό κύκλωμα. Άρα, $C = C(e, B)$.

Ο.Ε.Δ.

Με την σύντομη συζήτησή μας για το θεμελιώδες κύκλωμα μίας βάσης, ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα. Στην επόμενη ενότητα θα μιλήσουμε για τη συνάρτηση βαθμού, γενικεύοντας την έννοια του βαθμού γραφήματος και το βαθμό στα σύνολα διανυσμάτων.

3.4 Βαθμός

Θυμηθείτε στην Ενότητα 2.2 την συζήτηση που είχαμε για το βαθμό ενός συνόλου διανυσμάτων. Εκεί ορίσαμε σαν βαθμό ενός συνόλου, την διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από αυτό. Με άλλα λόγια απεικονίσαμε σε κάθε σύνολο διανυσμάτων την πληθικότητα μίας βάσης του διανυσματικού χώρου που παράγει· ή την πληθικότητα ενός μεγιστικού γραμμικώς ανεξάρτητου υποσυνόλου του. Ομοίως, όταν μιλήσαμε για τον βαθμό ενός γραφήματος στην Ενότητα 2.1, απεικονίσαμε ένα γράφημα στο πλήθος ακμών του δάσους επικάλυψής του. Στην γλώσσα θεωρίας μητροειδών, απλά θα απεικονίσουμε κάθε σύνολο X, με στοιχεία από το E, στην πληθικότητα του μεγαλύτερου υποσυνόλου του X, το οποίο όμως είναι ανεξάρτητο.

3.4.1 Ορισμός Βαθμού

Ορισμός 3.4.1.1 (Βαθμός-Μητροειδή). *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, ένα σύνολο $X \subseteq E$. Θεωρήστε τον περιορισμό του S στο X. Θα ονομάζουμε βαθμό του X και θα συμβολίζουμε με $r(X)$ την πληθικότητα της μεγαλύτερης βάσης του $S|X$. Δηλαδή,*

$$r(X) = \max\{|Y| \mid Y \in \mathscr{B}(S|X)\}$$

Επιπλέον, συχνά θα γράφουμε $r(S)$ και θα εννοούμε $r(E)$, για κάποιο σύστημα ανεξαρτησίας S.

Αν το σύστημα ανεξαρτησίας μας, είναι επίσης μητροειδές, τότε όλα τα μέλη του $\mathscr{B}(S|X)$ θα είναι ισοπληθή. Αντίθετα, σε ένα σύστημα ανεξαρτησίας, στο οποίο δεν ισχύει το Αξίωμα Επαύξησης , από το Λήμμα 3.2.2 δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Γι' αυτό ορίζουμε και το βαθμό ως την πληθικότητα της μεγαλύτερης βάσης. Μάλιστα, για τα συστήματα ανεξαρτησίας, τα οποία δεν είναι μητροειδή, θα μας φανεί χρήσιμη η έννοια του χαμηλού βαθμού.

Ορισμός 3.4.1.2 (Χαμηλός Βαθμός). *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, ένα σύνολο $X \subseteq E$. Θεωρήστε τον περιορισμό του S στο X. Θα ονομάζουμε* χαμηλός βαθμός *(low rank) του X και θα συμβολίζουμε με $lr(X)$, την πληθικότητα της μικρότερης σε πληθικότητα βάσης του $S|X$. Δηλαδή,*

$$lr(X) = \min\{|Y| \mid Y \in \mathscr{B}(S|X)\}$$

Επιπλέον, συχνά θα γράφουμε $lr(S)$ και θα εννοούμε $lr(E)$, για κάποιο σύστημα ανεξαρτησίας S.

Παρατηρήστε πως τόσο ο βαθμός, όσο και ο χαμηλός βαθμός ενός συνόλου δεν είναι κάτι άλλο από μια συνάρτηση, από το δυναμοσύνολο 2^E στο σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Αν επιπλέον $X \in \mathscr{I}$, τότε $r(X) = |X|$.

Συνεχίζουμε με το καθιερωμένο μας παράδειγμα για τα ομοιόμορφα μητροειδή.

Παράδειγμα 3.4.1.1. *Έστω το ομοιόμορφο μητροειδές $U_{3,6} = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, κάποιο σύνολο $X \subseteq E$. Τότε ο βαθμός του X θα είναι το μέγεθός του, αν αυτό είναι μικρότερο από 3, αλλιώς θα είναι 3. Δηλαδή,*

$$r(X) = \begin{cases} 3, & |X| > 3 \\ |X|, & |X| \leq 3 \end{cases}$$

Αφού, γνωρίζουμε εκ των προτέρων, ότι όλες οι βάσεις στο $U_{3,6}$ έχουν μέγεθος 3. Αν το X έχει πληθικότητα μικρότερη του 3, τότε είναι το ίδιο μία (και μοναδική, βλ. Πόρισμα 3.2.1.1.2) βάση του $U_{3,6}|X$. Γενικότερα, για το ομοιόμορφο μητροειδές $U_{m,n}$ θα ισχύει,

$$r(X) = \begin{cases} m, & |X| > m \\ |X|, & |X| \leq m \end{cases}$$

3.4.2 Ιδιότητες Βαθμού

Στην συνέχεια θα δώσουμε κάποιες ιδιότητες για τη συνάρτηση βαθμού. Οι παρακάτω ιδιότητες είναι εύκολο να δειχθούν και αφήνουμε την απόδειξη ως άσκηση.

Πρόταση 3.4.2.1. *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$.*

(R1) Αν $X \subseteq E$, τότε $0 \leq r(X) \leq |X|$.

(R2) Αν $X \subseteq Y \subseteq E$, τότε $r(X) \leq r(Y)$.

Εφόσον, οι ιδιότητες ισχύουν για κάθε σύστημα ανεξαρτησίας, αυτό σημαίνει πως στην απόδειξή τους δεν μας χρειάζεται το Αξίωμα Επαύξησης . Στην συνέχεια, γενικεύουμε την υπομετρικότητα που είδαμε στα θεωρήματα 2.1.9.1 και 2.2.8.1. Εδώ παρ' όλα αυτά, μας χρειάζεται το Αξίωμα Επαύξησης και γι' αυτό η ιδιότητα αυτή ισχύει μόνο για τα συστήματα ανεξαρτησίας τα οποία είναι και μητροειδή.

Πρόταση 3.4.2.2 (Υπομετρικότητα). *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, δύο σύνολα $X, Y \subseteq E$. Τότε, ισχύει:*

(R3) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Απόδειξη. Έστω $B_{X\cap Y}$ μία βάση του $M|(X\cap Y)$. Τότε το $B_{X\cap Y}$ είναι ανεξάρτητο στο $M|(X\cap Y)$. Συνεπώς, από Αξίωμα Επαύξησης μπορούμε να το επεκτείνουμε σε μία βάση του $M|(X \cup Y)$, έστω $B_{X\cup Y}$. Τώρα τα $B_{X\cup Y} \cap X$ και $B_{X\cup Y} \cap Y$ είναι ανεξάρτητα στα $M|X$ και $M|Y$, αντίστοιχα. Συνεπώς,

$$|B_{X\cup Y} \cap X| \leq r(X) \text{ και } |B_{X\cup Y} \cap Y| \leq r(Y)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |B_{X\cup Y} \cap X| + |B_{X\cup Y} \cap Y| \\ &= |(B_{X\cup Y} \cap X) \cup (B_{X\cup Y} \cap Y)| + |(B_{X\cup Y} \cap X) \cap (B_{X\cup Y} \cap Y)| \\ &= |B_{X\cup Y} \cap (X \cup Y)| + |B_{X\cup Y} \cap (X \cap Y)| \end{aligned}$$

Αλλά, $B_{X\cup Y} \cap (X \cup Y) = B_{X\cup Y}$. Επιπλέον, παρατηρήστε πως, αυξήσαμε το $B_{X\cup Y}$ από το $B_{X\cap Y}$. Όμως, το $B_{X\cap Y}$ ήταν μια βάση του $M|X\cap Y$ και άρα δεν μπορούσε να επεκταθεί με άλλα στοιχεία από το $X\cap Y$. Επομένως, η επέκταση έγινε από στοιχεία του $(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)$. Για αυτό τον λόγο, αν περιορίσουμε το $B_{X\cup Y}$, πάλι στο $X \cap Y$ παίρνουμε το $B_{X\cap Y}$. Έτσι, τελικά:

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |B_{X\cup Y}| + |B_{X\cap Y}| \\ &= r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \end{aligned}$$

Ο.Ε.Δ.

Παρατηρήστε ότι για κάποιο αυθαίρετο μητροειδές, σε κάποια ζεύγη X, Y μπορεί να ισχύει η ισότητα στην (R3)· ενώ σε άλλα να ισχύει η ανισότητα. Δίνουμε το εξής παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.4.2.1. *Θεωρήστε στο ομοιόμορφο μητροειδές $U_{3,6}$ πάνω στο σύνολο $E = [6]$. Τότε για τα σύνολα $X = \{1, 2\}$ και $Y = \{3, 4\}$ ισχύει η ανισότητα στην (R3). Πράγματι,*

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &= 2 + 2 \\ &= 4 \\ &> 3 + 0 \\ &= r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \end{aligned}$$

Αντίθετα, για τα σύνολα $X = \{1, 2\}$ και $Y = \{2, 3\}$ ισχύει η ισότητα. Πράγματι,

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &= 2 + 2 \\ &= 4 \\ &= 3 + 1 \\ &= r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \end{aligned}$$

Υπάρχουν κάποια μητροειδή στα οποία να ισχύει πάντα η ισότητα στην (R3); Η απάντηση προκύπτει σαν πόρισμα στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.2.1. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Για κάθε $X, Y \subseteq E$, $r(X \cup Y) = r(X) + r(Y) - r(X \cap Y)$*

2. *Για κάθε $X, Y \in \mathscr{I}$, το $X \cup Y$ είναι επίσης ανεξάρτητο.*

3. *$|\mathscr{B}(M)| = 1$*

Απόδειξη. $[(1) \longrightarrow (2)]$ Θα δείξουμε το ζητούμενο με αντιθετοαντιστροφή, δηλαδή θα δούμε ότι $\neg(2) \longrightarrow \neg(1)$. Έστω δύο ανεξάρτητα σύνολα $X, Y \in \mathscr{I}$, τέτοια ώστε η ένωσή τους $X \cup Y$ να μην είναι ανεξάρτητη. Τότε έχουμε $r(X) = |X|$, $r(Y) = |Y|$ και $r(X \cap Y) = |X \cap Y|$, από αξίωμα (I2). Επιπλέον, από υπόθεση $r(X \cup Y) < |X \cup Y|$. Τελικά,

$$\begin{aligned} r(X \cup Y) < |X \cup Y| &= |X| + |Y| - |X \cap Y| \\ &= r(X) + r(Y) - r(X \cap Y) \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει και η (1).

$[(2) \longrightarrow (3)]$ Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχουν δύο βάσεις του M, $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, με $B_1 \neq B_2$. Τότε, από υπόθεση το $B_1 \cup B_2$ είναι ανεξάρτητο. Όμως, $B_1 \cup B_2 \supset B_1, B_2$. Άτοπο, αφού τα B_1, B_2 είναι μεγιστικά ως βάσεις.

$[(3) \longrightarrow (1)]$ Έστω $\mathscr{B}(M) = \{B\}$. Έστω, επίσης, $X, Y \subseteq E$. Τότε, από Λήμμα 3.2.1 $|\mathscr{B}(M|X)| = |\mathscr{B}(M|Y)|$, αφού $\mathscr{B}(M|X) = \{X \cap B\}$ και $\mathscr{B}(M|Y) = \{Y \cap B\}$. Επιπλέον, η μοναδική βάση του $M|(X \cup Y)$ είναι η $B \cap (X \cup Y) = (X \cap B) \cup (Y \cap B)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} r(X \cup Y) &= |(X \cap B) \cup (Y \cap B)| \\ &= |X \cap B| + |Y \cap B| - |X \cap Y \cap B| \\ &= r(X) + r(Y) - r(X \cap Y) \end{aligned}$$

Ο.Ε.Δ.

Από το Θεώρημα 3.4.2.1 παίρνουμε το πόρισμα που απαντάει στην απορία μας.

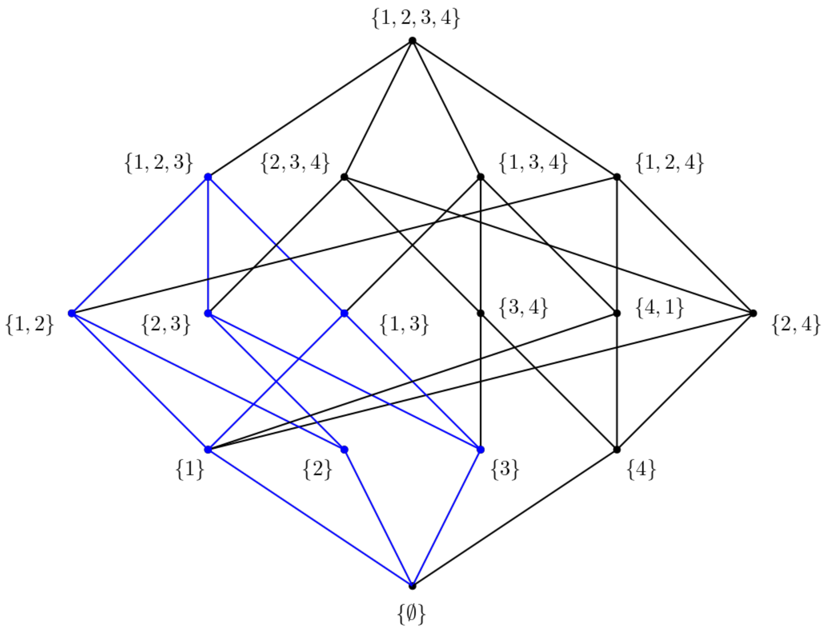
Πόρισμα 3.4.2.1.1. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, δύο σύνολα $X, Y \subseteq E$. Τότε,*

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) = r(X) + r(Y)$$

αν και μόνον αν το σύνολο βάσεων, $\mathscr{B}$ είναι μονοσύνολο.

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε ένα μητροειδές που πληρεί τις προυποθέσεις του Πορίσματος 3.4.2.1.1. Δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.4.2.2. *Θεωρούμε το μητροειδές $M = (E, \{B\})$ σε $\mathscr{B}$ αναπαράσταση, όπου $E = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$. Δίνουμε το διάγραμμα Hasse των υποσυνόλων του $[4]$ στο Σχήμα 3.4. Ας υπολογίσουμε την (R3) για τα σύνολα $X = \{1, 2\}$ και $Y = \{1, 3, 4\}$. Πρώτα*



Σχήμα 3.4: Το σχήμα του Παραδείγματος 3.4.2.2. Το διάγραμμα Hasse για τα υποσύνολα του $[4]$. Με μπλε επισημαίνουμε τα ανεξάρτητα σύνολα, του $\mathscr{B}$-μητροειδούς $M = ([4], \{[3]\})$.

για το αριστερό μέλος έχουμε,

$$\begin{aligned} r(X \cup Y) + r(X \cap Y) &= r(\{1, 2, 3, 4\}) + r(\{1\}) \\ &= 3 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ενώ για το δεξιά μέλος έχουμε,

$$r(X) + r(Y) = 2 + 2 = 4$$

Όπως και περιμέναμε.

3.4.3 Αξιώματα Βαθμού

Με την παραπάνω πρόταση έχουμε ολοκληρώσει τον κατάλογο αξιωμάτων που μας χρειάζεται για την διατύπωση του ορισμού του r-μητροειδούς.

Ορισμός 3.4.3.1 (r-Μητροειδές)**.** *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο E. Έστω επίσης μια συνάρτηση r από το δυναμοσύνολο του E, στους μη αρνητικούς ακεραίους, δηλαδή $r : 2^E \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$. Θα λέμε ότι μια δυάδα $M = (E, r)$ είναι ένα r-μητροειδές, ή απλά* μητροειδές *(matroid), αν υπακούει στα εξής αξιώματα:*

(R1) Αν $X \subseteq E$, τότε $0 \leq r(X) \leq |X|$.

(R2) Αν $X \subseteq Y \subseteq E$, τότε $r(X) \leq r(Y)$.

(R3) Αν $X, Y \subseteq E$, τότε $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Τη συνάρτηση r, την ονομάζουμε συνάρτηση βαθμού *(ή απλά βαθμίδα). Θα ονομάζουμε το δε αξίωμα (R3),* αξίωμα υπομετρικότητας*.*

Για το καθιερωμένο θεώρημα ισοδυναμίας θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα. Θεωρήστε δύο υποσύνολα του E, τα $X, Y \subseteq E$. Έστω, επίσης πως, για κάθε $y \in Y \setminus X$ ο βαθμός $r(X \cup y)$ παραμένει ίση με το βαθμό του X. Τότε, παρόλο που παρέχουμε νέα στοιχεία στις βάσεις του X, αυτές δεν μπορούν να αυξηθούν. Συνεπώς, είναι διαισθητικά προφανές πως, ακόμη και αν προσθέταμε στο X ολόκληρο το Y, ο βαθμός θα παρέμενε σταθερή. Ακολουθεί η αυστηρή απόδειξη της παραπάνω ιδιότητας.

Λήμμα 3.4.1. *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο E. Έστω, επίσης, μια συνάρτηση $r : 2^E \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, η οποία να ικανοποιεί τα αξιώματα (R2) και (R3). Θεωρήστε, ακόμη δύο υποσύνολα X, Y του E, τέτοια ώστε, για κάθε $y \in Y \setminus X$ ισχύει $r(X \cup y) = r(X)$. Τότε, $r(X \cup Y) = r(X)$.*

Απόδειξη. Έστω $Y \setminus X = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο k. Για $k = 1$, το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $k = n$. Τότε θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $k = n + 1$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
r(X) + r(X) &\overset{\text{E.Y.}}{=} r(X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}) + r(X \cup y_{k+1}) \\
&\overset{(R3)}{\geq} r((X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}) \cup (X \cup y_{k+1})) + r((X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}) \cap (X \cup y_{k+1})) \\
&= r(X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}\}) + r(X) \\
&\overset{(R2)}{\geq} r(X) + r(X)
\end{aligned}$$

Αφού η πρώτη και η τελευταία σειρά στο παραπάνω ταυτίζονται, η ανισότητα καταρρέει και ισχύει:

$$r(X) = r(X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\})$$

Ο.Ε.Δ.

Συνεχίζουμε τώρα με το θεώρημα ισοδυναμίας για τα r-μητροειδή.

Θεώρημα 3.4.3.1. *Οι ορισμοί 3.1.1.2 και 3.4.3.1 είναι ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. $[\Rightarrow]$ Έστω ένα $\mathscr{I}$-μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$. Θεωρούμε τη συνάρτηση βαθμού του M, r_M. Το (E, r_M) είναι ένα r-μητροειδές. Δηλαδή, η r_M υπακούει στα αξιώματα (R1)-(R3), όπως είδαμε στις προτάσεις 3.4.2.1 και 3.4.2.2.

$[\Leftarrow]$ Έστω ένα r-μητροειδές $M = (E, r)$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathscr{I}_M$, το οποίο ορίζουμε ως:

$$\mathscr{I}_M = \{I \subseteq E \mid r(I) = |I|\} \tag{3.9}$$

Θα δείξουμε ότι το $(E, \mathscr{I}_M)$ είναι ένα $\mathscr{I}$-μητροειδές. Αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιεί τα αξιώματα (I1)-(I3). Από (R1), $0 \le r(\emptyset) \le |\emptyset|$, άρα $r(\emptyset) = |\emptyset|$. Συνεπώς, $\emptyset \in \mathscr{I}_M$ και το (I1) ικανοποιείται. Για το (I2), θεωρήστε το σύνολο $I \in \mathscr{I}_M$. Έστω, επίσης, κάποιο $I' \subseteq I$. Τότε, $r(I) = |I|$. Εφαρμόζουμε το Αξίωμα Υπομετρικότητας για τα σύνολα I' και $I \setminus I'$:

$$r(I') + r(I \setminus I') \ge r(I' \cup (I \setminus I')) + r(I' \cap (I \setminus I'))$$

Δηλαδή,

$$r(I) + r(\emptyset) \le r(I') + r(I \setminus I') \tag{3.10}$$

Αλλά, $r(I) = |I|$ και $r(\emptyset) = 0$. Επιπλέον, από (R2) $r(I') \le |I'|$ και $r(I \setminus I') \le |I \setminus I'|$. Συνεπώς, από την (3.10) έχουμε:

$$|I| = r(I) \le r(I') + r(I \setminus I') \le |I'| + |I \setminus I'| = |I|$$

Όπου, η τελευταία ισότητα ισχύει, επειδή τα $I, (I \setminus I')$ είναι ξένα. Εφόσον, έχουμε ισότητες στα άκρα, τότε όλες οι ενδιάμεσες ανισότητες καταρρέουν. Συνεπώς, $r(I') = |I'|$ [5].

Μένει να δείξουμε ότι το $\mathscr{I}_M$ υπακούει στο αξίωμα (I3), θα δείξουμε το ζητούμενο με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε πως υπάρχουν $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$, με $|I_1| < |I_2|$, για τα οποία, για κάθε e στο $I_2 \setminus I_1$, το $I_1 \cup e \notin \mathscr{I}_M$. Τότε, από τον ορισμό του $\mathscr{I}_M$, για κάθε τέτοιο $e \in I_2 \setminus I_1$, $r(I \cup e) \ne |I_1 \cup e|$. Συνεπώς, από (R1), (R2) και το γεγονός ότι $I \in \mathscr{I}$, για κάθε e,

$$|I_1| + 1 > r(I_1 \cup e) \ge r(I_1) = |I_1|$$

άρα,

$$r(I_1 \cup e) = |I_1|.$$

[5] Παρατηρήστε ότι, αν έχουμε δύο αριθμούς $a \le \mu$, $b \le m$ και $a + b = \mu + m$. Αναγκαστικά, τα a, b παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους, δηλαδή $a = \mu$ και $b = m$.

Τώρα, εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.4.1 για τα I_1 και I_2, παίρνουμε ότι $r(I_1) = r(I_1 \cup I_2)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω,

$$|I_1| = r(I_1) = r(I_1 \cup I_2) \overset{(R2)}{\geq} r(I_2) = |I_2|$$

δηλαδή, $|I_1| \geq |I_2|$. Άτοπο.

Για να ολοκληρώσουμε την παρούσα απόδειξη, θα πρέπει να δείξουμε ότι η συνάρτηση r είναι ο βαθμός του μητροειδούς $(E, \mathscr{I}_M)$, καθώς αυτό δεν είναι προφανές από τον τρόπο που ορίσαμε το $\mathscr{I}_M$. Έστω r' ο βαθμός του $(E, \mathscr{I}_M)$, θα δείξουμε ότι $r = r'$. Έστω κάποιο $X \subseteq E$. Αν $X \in \mathscr{I}_M$, τότε, εξ ορισμού, $r(X) = |X|$. Όμως, επίσης, $r'(X) = |X|$. Διαφορετικά $x \notin \mathscr{I}_M$. Έστω κάποια βάση B του $(E, \mathscr{I}_M)|X$. Τότε, $r'(X) = |B|$. Επιπλέον, για κάθε $x \in X \setminus B$, $B \cup x \notin \mathscr{I}_M$. Επομένως, $|B| = r(B) \leq r(B \cup x) < |B \cup x|$, άρα $r(X \cup x) = r(B)$. Από Λήμμα 3.4.1, $r(B \cup X) = r(B)$, δηλαδή $r(X) = r(B)$. Τελικά, $r' = r$.

Ο.Ε.Δ.

Από το παραπάνω θεώρημα και την συζήτηση που έχει προηγηθεί, συμπεραίνουμε πως τα αξιώματα (R1)-(R3) αρκούν για να χαρακτηρίσουν την συνάρτηση βαθμού ενός μητροειδούς. Διατυπώνουμε το συμπέρασμά μας στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.4.3.1.1. *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο E. Έστω, επίσης, μία συνάρτηση $r\colon 2^E \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$. Η r θα είναι μια συνάρτηση βαθμού για κάποιο μητροειδές πάνω στο E, αν και μόνον αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(R1) Αν $X \subseteq E$, τότε $0 \leq r(X) \leq |X|$.

(R2) Αν $X \subseteq Y \subseteq E$, τότε $r(X) \leq r(Y)$.

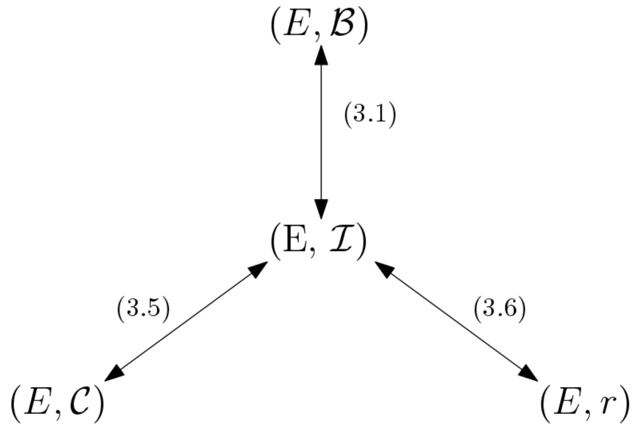
(R3) Αν $X, Y \subseteq E$, τότε $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Στην παρακάτω πρόταση διατυπώνουμε μερικές ακόμη ιδιότητες που συσχετίζουν τα ανεξάρτητα σύνολα, τις βάσεις και τα κυκλώματα με το βαθμό. Η απόδειξη είναι σχετικά απλή και αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 3.4.3.1. *Έστω κάποιο μητροειδές M με συνάρτηση βαθμού r και υποθέτουμε κάποιο $X \subseteq E(M)$. Τότε,*

1. *Το είναι ανεξάρτητο, αν και μόνον αν $|X| = r(X)$.*
2. *Το X είναι βάση, αν και μόνον αν $|X| = r(X) = r(M)$.*
3. *Το X είναι κύκλωμα, αν και μόνον αν είναι μη κενό και, για κάθε $x \in X$, $r(X \setminus x) = |X| - 1 = r(X)$.*

Με τα παραπάνω, ολοκληρώνεται η σύντομη παρουσίασή των διαφορετικών ορισμών μητροειδών. Στην επόμενη ενότητα, θα παρουσιάσουμε τα συμπεράσματά μας από την προηγηθείσα συζήτηση, καθώς και θα αναφερθούμε εν συντομία σε άλλα συστήματα αξιωμάτων, τα οποία παραλείψαμε.



Σχήμα 3.5: Σχηματική αναπαράσταση των διαφορετικών ορισμών για μητροειδή. Μέσω της σχέσης (3.4) πηγαίνουμε από τα $\mathscr{B}$-μητροειδή στα $\mathscr{I}$-μητροειδή. Μέσω της σχέσης (3.8) πηγαίνουμε από τα $\mathscr{C}$-μητροειδή στα $\mathscr{I}$-μητροειδή. Τέλος, μέσω της σχέσης (3.9) πηγαίνουμε από τα r στα $\mathscr{I}$-μητροειδή.

3.5 Συμπεράσματα και Άλλοι Ορισμοί

3.5.1 Συμπεράσματα

Στην συζήτηση που προηγήθηκε στις προηγούμενες ενότητες είδαμε πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο με διαφορετικά σύνολα αξιωμάτων. Ξεκινήσαμε από μια δυάδα $(E, \mathscr{I})$, για την οποία διατυπώσαμε ένα σύνολο αξιωμάτων που πρέπει να ικανοποιεί το σύνολο $\mathscr{I}$, στα (I1)-(I3). Ονομάσαμε το $(E, \mathscr{I})$ μητροειδές. Στην συνέχεια ονομάσαμε το σύνολο μεγιστικών συνόλων από το $\mathscr{I}$, σύνολο βάσεων του μητροειδούς, $\mathscr{B}$. Έπειτα, αποδείξαμε ορισμένες βασικές ιδιότητες για το $\mathscr{B}$. Στην συνέχεια αξιοματικοποιήσαμε αυτές τις ιδιότητες στα αξιώματα (B1)-(B2), ενώ περιγράψαμε την δυάδα $(E, \mathscr{B})$ ως $\mathscr{B}$-μητροειδές. Μέσω του Θεωρήματος 3.2.3.1 αποδείξαμε ότι οι δυάδες $(E, \mathscr{I})$ και $(E, \mathscr{B})$ είναι το ίδιο αντικείμενο και η (3.4) είναι η σχέση που ορίζει το $\mathscr{I}$, δοθέντος του $\mathscr{B}$. Έτσι, είδαμε πως ο κατάλογος αξιωμάτων (I1)-(I3) οδηγεί στον (B1)-(B2) και το αντίστροφο. Ανάλογες συνδέσεις κάναμε και για τα σύνολα αξιωμάτων που βασίζονται στις δυάδες $(E, \mathscr{C})$ και (E, r). Τον καρπό των κόπων μας, παρουσιάζουμε στο Σχήμα 3.5.

Είδαμε, επιπλέον, τα συστήματα ανεξαρτησίας, σαν μια γενίκευση των μητροειδών. Τα αξιώματα (I1)-(I2), (B1), (R1)-(R2) ισχύουν γενικά για συστήματα ανεξαρτησίας. Αντίθετα, τα αξιώματα (I3), (B2) και (R3) ισχύουν μόνο για μητροειδή.

3.5.2 Άλλοι Ορισμοί

Στην παρούσα εργασία ξύσαμε μόνο την επιφάνεια σχετικά με τους διαφορετικούς ορισμούς για τα μητροειδή. Στην συνέχεια θα δώσουμε, σύντομα, άλλους ισοδύναμους καταλόγους αξιωμάτων, χωρίς αποδείξεις. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε τα μητροειδή και αλγοριθμικά. Μητροειδές θα είναι ένα σύστημα ανεξαρτησίας, όπου ο άπληστος αλγόριθμος δίνει την βέλτιστη λύση.

Στα συστήματα ανεξαρτησίας η κλειστότητα αντιστοιχεί γενικεύει την έννοια της γραμμικής θήκης στα διανύσματα (βλ. Ορισμό 2.2.5.1). Ειδικότερα, δεδομένου ενός συστήματος ανεξαρτησίας $(E, \mathscr{I})$, ενός συνόλου $X \subseteq E$ και ενός στοιχείου $y \in E$, θα λέμε ότι το y *εξαρτάται* από το X, αν $r(X \cup y) = r(X)$. Παρατηρήστε ότι αυτός ο ορισμός συμφωνεί με την διαίσθηση που αναπτύξαμε στην Ενότητα 3.4. Η κλειστότητα ενός συνόλου X είναι όλα τα στοιχεία $y \in E$ τα οποία είναι εξαρτημένα από το X. Δηλαδή,

Ορισμός 3.5.2.1 (Τελεστής Κλειστότητας)**.** *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, κάποιο σύνολο $X \subseteq E$. Ορίζουμε τον τελεστή κλειστότητας του X ως,*

$$cl(X) = \{y \in E \mid r(X \cup y) = r(X)\}$$

Παρατηρήστε ότι ο τελεστής κλειστότητας είναι, απλά, μια συνάρτηση από το δυναμοσύνολο 2^E στον εαυτό του, δηλαδή $cl\colon 2^E \longrightarrow 2^E$. Μπορούμε να βασιστούμε στον τελεστή κλειστότητας για να ορίσουμε τα cl-μητροειδή.

Ορισμός 3.5.2.2 (cl-Μητροειδές)**.** *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο E. Έστω, επίσης, μία συνάρτηση $cl\colon 2^E \longrightarrow 2^E$. Θα ονομάζουμε την δυάδα $= (E, cl)$ cl-μητροειδές ή απλά* μητροειδές*, αν υπακούει στα εξής αξιώματα:*

(CL1) Αν $X \subseteq E$, τότε $X \subseteq cl(X)$.

(CL2) Αν $X \subseteq Y \subseteq E$, τότε $cl(X) \subseteq cl(Y)$.

(CL3) Αν $X \subseteq E$, τότε $cl(cl(X)) = cl(X)$.

(CL4) Αν $X \subseteq E$, $x \in E$, $y \in cl(X \cup x) \setminus cl(X)$, τότε $x \in cl(X \cup y)$.

Δεδομένου του τελεστή κλειστότητας $cl\colon 2^E \longrightarrow 2^E$, μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο ανεξάρτητων συνόλων ως,

$$\mathscr{I} = \{X \subseteq E \mid x \notin cl(X \setminus x) \text{ για κάθε } x \in X\} \tag{3.11}$$

αφού κάθε στοιχείο ενός ανεξάρτητου συνόλου δεν μπορεί να εξαρτάται από τα υπόλοιπα.

Ακόμη, μπορούμε να δώσουμε έναν κατάλογο αξιωμάτων για τα *εξαρτημένα* στοιχεία ενός μητροειδούς. Θυμίζουμε, ότι αν $\mathscr{D}$ το σύνολο εξαρτημένων στοιχείων ενός μητροειδούς, ισχύει $\mathscr{D} = 2^E \setminus \mathscr{I}$.

Ορισμός 3.5.2.3 ($\mathscr{D}$-Μητροειδές)**.** *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο E. Έστω, επίσης, ένα υποσύνολο του δυναμοσυνόλου $\mathscr{D}$ του E, $\mathscr{D} \subseteq 2^E$. Θα ονομάζουμε την δυάδα $M = (E, \mathscr{D})$ $\mathscr{D}$-μητροειδές ή απλά* μητροειδές*, αν υπακούει στα εξής αξιώματα:*

(D1) $\emptyset \notin \mathscr{D}$.

(D2) Αν $X \in \mathscr{D}$ και $X \subseteq Y$, τότε $Y \in \mathscr{D}$.

(D3) Αν $X, Y \in \mathscr{D}$ και $X \cap Y \notin \mathscr{D}$, τότε για κάθε $e \in E$, $(X \cup Y) \setminus e \in \mathscr{D}$.

Δεδομένου του συνόλου εξαρτημένων συνόλων $\mathscr{D}$, μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο ανεξάρτητων συνόλων ως,

$$\mathscr{I} = \{X \subseteq E \mid X \notin \mathscr{D}\} \tag{3.12}$$

αφού τα $\mathscr{I}$ και $\mathscr{D}$ είναι συμπληρωματικά σύνολα.

Για τους επόμενους δύο ορισμούς θα βασιστούμε πάλι στην ορολογία της γραμμικής άλγεβρας. Στη γραμμική άλγεβρα και την αναλυτική γεωμετρία ονομάζουμε *υπερεπίπεδο* (hyperplane) έναν υποχώρο, ο οποίος έχει διάσταση κατά 1 μικρότερη από τον κύριο διανυσματικό χώρο. Επιπλέον θυμηθείτε στην Ενότητα 2.2 όπου μιλήσαμε για παράγωγα σύνολα. Γενικεύουμε αυτές τις δύο έννοιες στα συστήματα ανεξαρτησίας στους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 3.5.2.4 (Υπερεπίπεδο)**.** *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, κάποιο $X \subseteq E$. Θα ονομάζουμε το X* υπερεπίπεδο *(hyperplane) αν $r(X) = r(E) - 1$.*

Ορισμός 3.5.2.5 (Παραγωγό Σύνολο)**.** *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, κάποιο $X \subseteq E$. Θα ονομάζουμε το X* παραγωγό σύνολο *(spanning set) αν $cl(X) = E$.*

Στον δεύτερο ορισμό κάναμε χρήση του τελεστή κλειστότητας που ορίσαμε προηγουμένως. Παρατηρήστε, επιπλέον, την σύνδεση των ορισμών 2.2.5.2 και 3.5.2.5. Στον τελευταίο, απλώς γράψαμε τον πρώτο σε γλώσσα συστημάτων ανεξαρτησίας. Μάλιστα μπορούμε να κάνουμε την εξής παρατήρηση, με άρωμα γραμμικής άλγεβρας· ένα υπερσύνολο $X \supseteq B$ κάποιας βάσης B είναι πάντα παραγωγό σύνολο. Αυτό γιατί, όλα τα άλλα στοιχεία του E είναι εξαρτημένα από την βάση B, αφού η τελευταία είναι ένα μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο.

Δίνουμε τώρα τα αξιώματα για τις αντίστοιχες έννοιες.

Ορισμός 3.5.2.6 ($\mathscr{H}$-Μητροειδές)**.** *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο E. Έστω, επίσης, ένα υποσύνολο $\mathscr{H}$ του δυναμοσυνόλου του E, $\mathscr{H} \subseteq 2^E$. Θα ονομάζουμε την δυάδα $M = (E, \mathscr{H})$ $\mathscr{H}$-μητροειδές ή απλά* μητροειδές*, αν υπακούει στα εξής αξιώματα:*

(H1) $E \notin \mathscr{H}$.

(H2) Αν $H_1, H_2 \in \mathscr{H}$ και $H_1 \subseteq H_2$, τότε $H_1 = H_2$.

(H3) Αν $H_1, H_2 \in \mathscr{H}$ και H_1 διαφορετικό του H_2, τότε για κάθε $e \in E$, υπάρχει $H_3 \in \mathscr{H}$, τέτοιο ώστε $(H_1 \cap H_2) \cup x \subseteq H_3$.

Δεδομένου του συνόλου υπερεπιπέδων $\mathscr{H}$, μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο ανεξάρτητων συνόλων ως,

$$\mathscr{I} = \{X \subseteq E \mid \text{για κάθε } x \in X, X \setminus H = \{x\}, \text{ για κάποιο } H \in \mathscr{H}\} \tag{3.13}$$

Κλείνουμε, με τον τελευταίο μας ορισμό για τα αξιώματα παραγωγών συνόλων.

Ορισμός 3.5.2.7 ($\mathscr{S}$-Μητροειδές). *Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο E. Έστω, επίσης, ένα σύνολο $\mathscr{S} \subseteq 2^E$. Θα ονομάζουμε την δυάδα $M = (E, \mathscr{S})$ $\mathscr{S}$-μητροειδές ή απλά* μητροειδές, *αν υπακούει στα εξής αξιώματα:*

(S1) $\mathscr{S} \neq \emptyset$.

(S2) Αν $X \in \mathscr{S}$ και $X \subseteq Y$, τότε $Y \in \mathscr{S}$.

(S3) Αν $X, Y \in \mathscr{S}$ και $|X| > |Y|$, τότε υπάρχει κάποιο $x \in X \setminus Y$, τέτοιο ώστε $X \setminus x \in \mathscr{S}$.

Παρατηρήστε τη δυϊκότητα μεταξύ των ορισμών 3.1.1.2 και 3.5.2.7. Για περισσότερα σχετικά με την δυϊκότητα στα μητροειδή παραπέμπεστε σχετικά στα [1, 2].

4. ΑΠΛΗΣΤΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε πολλούς διαφορετικούς ορισμούς για την ίδια μαθηματική έννοια· αυτή του μητροειδούς. Στον παρόν κεφάλαιο θα δώσουμε ακόμη έναν ορισμό για τα μητροειδή, χωρίς όμως να παρουσιάσουμε άλλον ένα κατάλογο αξιωμάτων. Τα μητροειδή αποτελούν σπάνια περίπτωση μαθηματικού αντικειμένου, το οποίο μπορεί να χαρακτηριστεί από έναν αλγόριθμο. Επιπλέον, η φύση του αλγοριθμικού ορισμού αναδεικνύει τη σημασία των μητροειδών στην θεωρία βελτιστοποίησης. Και σε αυτό το κεφάλαιο για ακολουθούμε την παρουσίαση του [2].

4.1 Προβλήματα βελτιστοποίησης

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε συνοπτικά σε ένα πρόβλημα από την αλγοριθμική θεωρία γραφημάτων, την εύρεση ελάχιστου δάσους επικάλυψης σε ένα βεβαρυμένο γράφημα. Θα παρουσιάσουμε έναν απλό αλγόριθμο επίλυσής του, τον αλγόριθμο του Kruskal. Στην συνέχεια, θα γενικεύσουμε, μιλώντας για μια οικογένεια προβλημάτων σε συστήματα ανεξαρτησίας.

4.1.1 Ελάχιστο Δάσος Επικάλυψης

Αρχίζουμε την ενότητα αυτή με ένα γνωστό παράδειγμα από την αλγοριθμική θεωρία γραφημάτων. Στην Ενότητα 2.1 ορίσαμε αυστηρά τα δάση επικάλυψης και παρ' όλο που αναφερθήκαμε άτυπα σε μεθόδους κατασκευής τους, δεν δώσαμε αυστηρά κάποιον αλγόριθμο. Θα λύσουμε, τώρα, αλγοριθμικά ένα γενικότερο πρόβλημα, αυτό της εύρεσης του δάσους ανεξαρτησίας με το μικρότερο κόστος, σε βεβαρημένα γραφήματα.

Πρόβλημα 4.1.1.1 (Ελάχιστο Δάσος Επικάλυψης)**.** *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Έστω, επίσης, μια συνάρτηση $w\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία απαιτούμε να είναι γραμμική, δηλαδή:*

$$w(X) = \sum_{e \in X} w(e)$$

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα διακριτής βελτιστοποίησης πάνω στο βεβαρυμένο γράφημα G με συνάρτηση βάρους την w.

$$\begin{array}{ll} \text{min} & w(F) \\ \textit{τ.ω.} & G[F] \textit{ να είναι δάσος επικάλυψης} \end{array}$$

Διάφορες τεχνικές έχουν προταθεί για την λύση του συγκεκριμένου προβλήματος. Παραθέτουμε, εδώ, για χάρη πληρότητας τον αλγόριθμο του Kruskal [1]. Για μια πλήρη απόδειξη ορθότητας του αλγορίθμου παραπέμπουμε στο [16].

Αλγόριθμος 4.1.1: Αλγόριθμος του Kruskal

Είσοδος: Ένα βεβαρυμένο γράφημα $G = (V, E)$, με συνάρτηση βάρους $w\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$
Έξοδος : Ένα σύνολο ακμών F το οποίο να είναι λύση στο Πρόβλημα 4.1.1.1

1 $F \leftarrow \emptyset$
2 **while** $E \neq \emptyset$ **do**
3     $e \leftarrow \text{arg min}\{w(e) \mid e \in E\}$
4     $E \leftarrow E \setminus e$
5   **if** $G[F \cup e]$ *είναι δάσος* **then**
6         $F \leftarrow F \cup e$
7   **end**
8 **end**

Η στρατηγική που ακολουθήσαμε είναι ιδιαίτερα απλή. Ξεκινάμε με ένα μερικό δάσος F, το οποίο αρχικά είναι κενό. Έπειτα, επιλέγουμε την ακμή e με το μικρότερο βάρος και ενημερώνουμε το σύνολο ακμών. Στο *Βήμα 5*, ελέγχουμε αν μπορούμε να αυξήσουμε την μερική λύση F με την ακμή e και αν η λύση που προκύπτει είναι *εφικτή* ενημερώνουμε την λύση F. Χωρίς να δώσουμε αυστηρό ορισμό, θα αναφερόμαστε σε αυτή την μυωπική στρατηγική επίλυσης, ως *άπληστη* . Στην θεωρία αλγορίθμων, συνήθως ένας άπληστος αλγόριθμος σημαίνει και ασυμπτωτικά γρήγορος χρόνος επίλυσης. Πράγματι, παρατηρήστε ότι ο Αλγόριθμος 4.1.1 απλά σαρώνει τις ακμές του γραφήματος, κατά αύξουσα σειρά, ενώ δεν εξετάζει κάποια ακμή πάνω από μια φορά. Είναι έτσι εξαιρετικά φειδωλός στους υπολογισμούς του. Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες, θα πρέπει να είναι διαισθητικά προφανές ότι όταν ένα πρόβλημα επιδέχεται άπληστη επίλυση, αυτό είναι καλά νέα.

4.1.2 Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης

Όπως έχουμε δει στην Πρόταση 3.1.2.1 τα δάση ενός γραφήματος μαζί με το σύνολο ακμών συγκροτούν ένα μητροειδές, ή γενικότερα ένα σύστημα ανεξαρτησίας. Μπορούμε λοιπόν να γενικεύσουμε σε μια ομάδα προβλημάτων για συστήματα ανεξαρτησίας. Το Πρόβλημα 4.1.1.1, που είδαμε προηγουμένως, αποτελεί ειδική περίπτωση του Προβλήματος 4.1.2.1 που ακολουθεί.

Πρόβλημα 4.1.2.1 (Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς (Ελαχιστοβαρούς) Βάσης)**.** *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, κάποια συνάρτηση $w\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία να είναι γραμμική, δηλαδή για κάθε $X \subseteq E$ να ισχύει*

$$w(X) = \sum_{e \in X} w(e)$$

[1]Από τον Αμερικάνο μαθηματικό Joseph Bernard Kruskal, Jr. ο οποίος ανακάλυψε τον αλγόριθμο το 1956.

και $w(\emptyset) = 0$, κατόπιν συμβάσεως. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα διακριτής βελτιστοποίησης σε συστήματα ανεξαρτησίας,

$$\begin{array}{cc} \text{max(min)} & w(X) \\ \textit{τ.ω.} & X \in \mathscr{B} \end{array}$$

όπου $\mathscr{B}$ το σύνολο βάσεων του συστήματος ανεξαρτησίας S.

Θα λέμε κάθε σύνολο $X \subseteq E$ *εφικτή λύση* (feasible solution) , αν $X \in \mathscr{B}$, ενώ αν επιπλέον είναι και μεγιστοβαρές θα κάνουμε λόγο για *βέλτιστη λύση* (optimum solution) . Τα περισσότερα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης μπορούν να εκφραστούν σαν προβλήματα βελτιστοποίησης πάνω σε συστήματα ανεξαρτησίας, όπου ο στόχος είναι να βρεθεί μια μεγιστοβαρής ή ελαχιστοβαρής βάση.

4.1.3 Παραδείγματα

Σε αυτή την κατεύθυνση, θα δώσουμε δύο αναλυτικά παραδείγματα, σαν ειδικά στιγμιότυπα του Προβλήματος Μεγιστοβαρούς Βάσης. Έτσι, θα δούμε την εκφραστική ισχύ του συμβολισμού. Στα παραδείγματα που ακολουθούν, τα συστήματα ανεξαρτησίας δεν είναι μητροειδή, παρ' όλο που αυτό δεν είναι εμφανές εξ αρχής.

Για το πρώτο πρόβλημα, χρειάζεται να σταθεροποιήσουμε κάποια ορολογία από την θεωρία γραφημάτων. Εισάγουμε την έννοια του ταιριάσματος.

Ορισμός 4.1.3.1 (Ταίριασμα)**.** *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Θα λεμε ένα υποσύνολο των ακμών $M \subseteq E$,* ταίριασμα *(matching), αν ισχύει,*

$$\forall e_1, e_2 \in M, \quad e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

Με άλλα λόγια απαιτούμε οι ακμές του ταιριάσματος να μην τέμνονται. Στο παρακάτω πρόβλημα, θα ζητήσουμε να βρούμε ένα μεγιστοβαρές ταίριασμα σε ένα βεβαρυμένο γράφημα G.

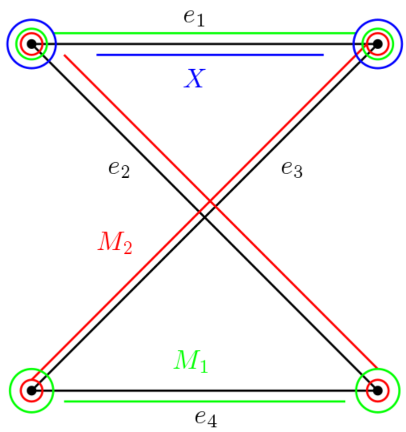
Πρόβλημα 4.1.3.1 (Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Ταιριάσματος)**.** *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Έστω, επίσης, κάποια συνάρτηση βάρους $w \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης,*

$$\begin{array}{cc} \text{max} & w(M) \\ \textit{τ.ω.} & \textit{το } M \textit{ να είναι ταίριασμα.} \end{array}$$

Στο παραπάνω πρόβλημα το σύνολο ανεξάρτητων συνόλων είναι το,

$$\mathscr{I} = \{M \subseteq E \mid \text{το } M \text{ να είναι ταίριασμα}\}$$

Παρατηρήστε ότι το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι ένα τετριμμένο ταίριασμα. Επιπλέον, δεδομένου ενός ταιριάσματος M κάθε $M' \subseteq M$ είναι επίσης ταίριασμα. Αυτό γιατί αφαιρώντας ακμές από το M, δεν γίνεται να ενώσουμε δύο ακμές στο M'. Παρ' όλα αυτά το σύστημα ανεξαρτησίας του Προβλήματος 4.1.3.1 δεν είναι μητροειδές. Δίνουμε σχετικά το ακόλουθο (αντί)παράδειγμα.



Σχήμα 4.1: Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος εύρεσης ελάχιστοβαρους ταιριάσματος. Θεωρούμε δύο ταιριάσματα, τα $M_1 = \{e_1, e_4\}$ και $M_2 = \{e_2, e_3\}$. Επίσης, θεωρούμε το ανεξάρτητο σύνολο $X = \{e_1\}$, όπου $X \subseteq M_1$.

Παράδειγμα 4.1.3.1. *Θεωρήστε το γράφημα $G = (V, E)$ του Σχήματος 4.1. Θεωρούμε, επίσης, τα ταιριάσματα M_1 και M_2, όπως φαίνονται στο σχήμα. Θεωρούμε, επίσης, το ανεξάρτητο σύνολο X, $X \subseteq M_1$. Τότε, $|M_1| > |X|$. Όμως, δεν υπάρχει κάποιο $e \in M_1 \setminus X$, τέτοιο ώστε το $X \cup e$ να διατηρεί την ιδιότητα του ταιριάσματος. Συνεπώς, δεν ισχύει το Αξίωμα Επαύξησης.*

Το επόμενο πρόβλημα είναι το διάσημο πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή.

Πρόβλημα 4.1.3.2 (Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή)**.** *Έστω ένα γράφημα $G = (E, V)$. Έστω, επίσης, κάποια συνάρτηση βάρους $w\colon E \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης,*

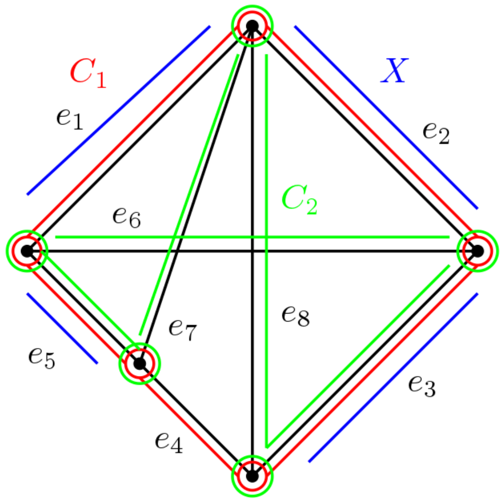
$$\begin{array}{ll} \text{min} & w(C) \\ \textit{τ.ω.} & \textit{το } C \textit{ να είναι ένας κύκλος επικάλυψης.} \end{array}$$

Στο παραπάνω πρόβλημα το σύνολο ανεξάρτητων συνόλων είναι το,

$$\mathscr{I} = \{X \subseteq E \mid X \subseteq C, \text{ για κάποιο κύκλο επικάλυψης } C\}$$

Παρατηρήστε την ομοιότητα μεταξύ των Προβλημάτων 4.1.1.1 και 4.1.3.2. Στο πρώτο ζητάμε ένα ελάχιστο δάσος επικάλυψης, ενώ στο δεύτερο ένα ελάχιστο κύκλο επικάλυψης. Παρ’ όλα αυτά, όπως θα δούμε, το Πρόβλημα 4.1.3.2 είναι πολύ πιο δύσκολο από το Πρόβλημα 4.1.1.1. Αυτό γιατί το σύστημα ανεξαρτησίας το προβλήματος εύρεσης ελάχιστου δάσους επικάλυψης ικανοποιεί το Αξίωμα Επαύξησης, ενώ το πρόβλημα περιοδεύοντος πωλητή, όχι. Δίνουμε σχετικά το εξής (αντί)παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.1.3.2. *Θεωρήστε το γράφημα $G = (V, E)$ του Σχήματος 4.2. Θεωρούμε δύο κύκλους επικάλυψης, τους C_1 και C_2, όπως φαίνονται στο σχήμα. Θεωρούμε, επιπλέον, το ανεξάρτητο σύνολο X, $X \subseteq C_1$. Τότε $|C_2| > |X|$. Όμως, δεν υπάρχει κάποιο $e \in C_2 \setminus X$, τέτοιο ώστε το $X \cup e$ να είναι ανεξάρτητο. Συνεπώς, δεν ισχύει το Αξίωμα Επαύξησης.*



Σχήμα 4.2: Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος περιοδεύοντος πωλητή. Θεωρούμε δύο κύκλους επικάλυψης $C_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ και $C_2 = \{e_6, e_3, e_8, e_7, e_5\}$. Επίσης, θεωρούμε το ανεξάρτητο σύνολο $X = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$, όπου $X \subseteq C_1$.

4.1.4 Λόγος Βαθμών

Κλείνουμε αυτή την ενότητα δίνοντας ένα μέτρο για το πότε ένα σύστημα ανεξαρτησίας παρουσιάζει τη δομή μητροειδούς. Αυτή η ποσοτικοποίηση θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στην επόμενη ενότητα, όπου θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο που να επιλύει το Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης. Το μέτρο αυτό θα μας βοηθήσει να εκφράσουμε την απόδοση του αλγορίθμου συναρτήσει της ομοιότητας του συστήματος ανεξαρτησίας με ένα μητροειδές. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1.4.1 (Λόγος Βαθμών)**.** *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Θα λέμε* λόγο βαθμίδων *(rank quotient) και θα συμβολίζουμε με $q(E, \mathscr{I})$ την εξής σχέση,*

$$q(E, \mathscr{I}) = \min_{X \subseteq E} \frac{lr(X)}{r(X)}$$

Παρατηρήστε ότι για ένα μητροειδές ο λόγος βαθμών είναι σταθερός και ίσος με ένα. Αφού, από Θεώρημα 3.2.1.1 όλες οι βάσεις είναι ισοπληθικές. Παρ' όλα αυτά, γενικότερα για κάποιο σύστημα ανεξαρτησίας, ο λόγος βαθμίδων είναι μικρότερος της μονάδος.

Με την εισαγωγή του λόγου βαθμίδων, ολοκληρώνουμε την συζήτησή μας για τα προβλήματα βελτιστοποίησης. Στην επόμενη ενότητα θα γενικεύσουμε τον Αλγόριθμο του Kruskal.

4.2 Άπληστος Αλγόριθμος

Παρ' όλο που εξετάσαμε διάφορα στιγμιότυπα του Προβλήματος Μεγιστοβαρούς Βάσης, δεν είδαμε ακόμη κάποια λύση. Με την έννοια της λύσης, εννοούμε κάποιον αλγόριθμο ο οποίος να λύνει συστηματικά στιγμιότυπα του Προβλήματος Μεγιστοβαρούς Βάσης, όπως αυτά που είδαμε στα παραδείγματα. Θα θέλαμε, δηλαδή, να βρούμε μια διαδικασία η οποία να επιστρέφει κάποια εφικτή λύση, η οποία να είναι όμως και βέλτιστη.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τον άπληστο αλγόριθμο, ενώ θα δείξουμε ότι μας δίνει πάντα μια εφικτή λύση στο Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την ποιότητα της λύσης. Θα φράξουμε το σφάλμα του αλγορίθμου για ένα γενικό σύστημα ανεξαρτησίας, ενώ θα δούμε πως για μητροειδή ο αλγόριθμός μας είναι βέλτιστος. Το τελευταίο γεγονός θα μας οδηγήσει σε έναν αλγοριθμικό ορισμό τους μητροειδούς.

4.2.1 Ο Αλγόριθμος

Το Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης , που θέλουμε να αντιμετωπίσουμε είναι μια γενίκευση του Προβλήματος Ελάχιστου Δάσους Επικάλυψης. Έτσι, θα γενικεύσουμε τον Αλγόριθμο του Kruskal, που επιλύει το τελευταίο. Ειδικότερα, δίνουμε τον εξής αλγόριθμο, το οποίο ονομάζουμε *άπληστο*.

Αλγόριθμος 4.2.1: Άπληστος Αλγόριθμος

Είσοδος: Ένα βεβαρυμένο σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$, με συνάρτηση βάρους $w\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Έξοδος : Μία εφικτή λύση στο Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης .

1 $B \leftarrow \emptyset$
2 **while** $E \neq \emptyset$ **do**
3     $e \leftarrow$ arg max$\{w(e) \mid e \in E\}$
4     $E \leftarrow E \setminus e$
5   **if** $B \cup e \in \mathscr{I}$ **then**
6         $B \leftarrow B \cup e$
7   **end**
8 **end**

Παρατηρήστε ότι οι μόνες αλλαγές που έχουν γίνει στο Αλγόριθμο 4.2.1, πέρα από τον συμβολισμό, είναι στα Βήματα 3 και 5. Στο *Βήμα 3* ζητάμε κάθε φορά το μεγιστοβαρές στοιχείο του E, αφού έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης. Ενώ, στο *Βήμα 5* γενικεύουμε και ελέγχουμε αν η μερική λύση μας είναι ανεξάρτητη.

Επισημαίνουμε, επιπλέον, το γεγονός ότι το Αλγόριθμος 4.2.1 επιστρέφει πάντα μία εφικτή λύση. Με άλλα λόγια, το B θα είναι μια βάση του S. Αυτό γιατί, ξεκινάμε από το κενό σύνολο, το οποίο από αξίωμα (I1) είναι πάντα ανεξάρτητο. Έπειτα, στον βρόχο των *Γραμμών 2 - 8* σαρώνουμε όλα τα στοιχεία του E, ενώ θα αυξήσουμε την μερική μας λύση B, μόνο όταν το προκύπτον σύνολο είναι ανεξάρτητο (βλ. *Βήμα 5*). Λόγω του αξιώματος (I2), αν γίνει ψευδής η συνθήκη στην *Γραμμή 5*, θα παραμείνει ψευδής για όλα τα επόμενα βήματα. Συνεπώς, αυτό που κάνουμε είναι να προσθέτουμε στοιχεία στο B μέχρι αυτό να μην μπορεί να επαυξηθεί άλλο, διατηρώντας την ανεξαρτησία του. Δίνουμε, έτσι, την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.2.1.1. *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Ο Αλγόριθμος 4.2.1 επι-*

στρέφει μία εφικτή λύση. Δηλαδή, αν B το σύνολο που επιστρέφεται, τότε $B \in \mathscr{B}(S)$.

4.2.2 Ποιότητα Λύσης

Παρ' όλο που ο Αλγόριθμος 4.2.1 επιστρέφει πάντα μία εφικτή λύση δεν γνωρίζουμε αν θα είναι βέλτιστη. Σε αυτή την κατεύθυνση δίνουμε το επόμενο θεώρημα. Θα δείξουμε ότι η ποιότητα λύσης του Αλγόριθμου 4.2.1 φράσσεται από τον λόγο βαθμίδων. Ειδικότερα, θα δείξουμε πως η λύση του άπληστο αλγορίθμου δεν μπορεί να είναι $q(E, \mathscr{I})$ φορές χειρότερη από την βέλτιστη.

Θεώρημα 4.2.2.1 (Hausmann κ.ά. 1980)**.** *Έστω ένα βεβαρυμένο σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$, με συνάρτηση βάρους $w\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$. Αν για το Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης, $G \subseteq E$ είναι η λύση του Άπληστου Αλγόριθμου και $O \subseteq E$ είναι η βέλτιστη λύση, τότε ισχύει,*

$$q(E, \mathscr{I}) \leq \frac{w(G)}{w(O)} \tag{4.1}$$

Απόδειξη. Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Διατάσσουμε το σύνολο E κατά φθίνουσα σειρά βάρους. Έστω, $|E| = n$, θα έχουμε,

$$w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_n)$$

Αυτή είναι η σειρά που θα εξετάζει τα στοιχεία του S, ο Αλγόριθμος 4.2.1. Για κάθε $i \in [n]$, θεωρούμε τα σύνολα $E_i = \{e_k \mid k \in [i]\}$. Το σύνολο E_i περιέχει τα στοιχεία του E που έχει εξετάσει ο Απληστος Αλγόριθμος μέχρι και το i-στό βήμα. Κάποια από τα στοιχεία του E τα επιλέγει ο Άπληστος Αλγόριθμος, ενώ άλλα τα απορρίπτει. Για κάθε $i \in [n]$ θεωρούμε τα σύνολα $G_i = G \cap E_i$. Το σύνολο G_i περιέχει τα στοιχεία από το E που έχει επιλέξει ο Απληστος Αλγόριθμος μέχρι και το i-οστό βήμα. Από σύμβαση $G_0 = \emptyset$, αφού ο Απληστος Αλγόριθμος αρχικοποιεί την μερική του λύση στο κενό σύνολο.

Έστω τώρα κάποιος άλλος βέλτιστος αλγόριθμος και O η λύση που επιστρέφει. Ομοίως, για κάθε $i \in [n]$ θεωρούμε το σύνολο $O_i = O \cap E_i$ [2]. Πάλι, θεωρούμε $O_0 = \emptyset$.

Παρατηρήστε ότι σε κάθε βήμα ο Απληστος Αλγόριθμος είτε θα προσθέσει κάποιο στοιχείο στην λύση του, είτε όχι. Συνεπώς, έχουμε,

$$|G_i| - |G_{i-1}| = \begin{cases} 1, & e_i \in G \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{4.2}$$

το ίδιο ισχύει για τα O_i. Εφόσον, $O_i \subseteq E_i$ και O_i ανεξάρτητο, σαν υποσύνολο του O και από Αξίωμα (I2), εξ ορισμού της συνάρτησης βαθμού ισχύει,

$$|O_i| = r(O_i) \leq r(E_i) \tag{4.3}$$

[2] Επισημαίνουμε ότι δεν κάναμε καμία υπόθεση για το πως λειτουργεί ο βέλτιστος αλγόριθμος. Ειδικότερα, δεν είναι απαραίτητο να εξετάζει τα στοιχεία με φθίνουσα σειρά βάρους.

Από το *Βήμα 5* του Απληστου Αλγορίθμου, το G_i είναι μία βάση του $S|E_i$, για κάθε $i \in [n]$, συνεπώς

$$|G_i| \geq lr(E_i) \tag{4.4}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.2), (4.3) και (4.4), το γεγονός ότι $w(e_i) - w(e_{i+1}) \geq 0$, για κάθε $i \in [n]$, και θεωρώντας $w(e_{n+1}) = 0$ μπορούμε να συσχετίσουμε το συνολικό βάρος των λύσεων G και O ως εξής:

$$\begin{aligned} w(G) &= \sum_{i=1}^{n} (|G_i| - |G_{i-1}|) w(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |G_i| w(e_i) - \sum_{i=1}^{n} |G_{i-1}| w(e_i) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Όμως, για το δεξιά άθροισμα έχουμε,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |G_{i-1}| w(e_i) &\overset{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} |G_j| w(e_{j+1}) \\ &\overset{G_0=\emptyset}{=} \sum_{j=1}^{n-1} |G_j| w(e_{j+1}) \\ &\overset{w(e_{n+1})=0}{=} \sum_{j=1}^{n} |G_j| w(e_{j+1}) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Μετονομάζοντας την μετάβλητη j πάλι σε i και εφαρμόζοντας την (4.6) στην (4.5) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} w(G) &= \sum_{i=1}^{n} |G_i| w(e_i) - \sum_{i=1}^{n} |G_i| w(e_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |G_i| (w(e_i) - w(e_{i+1})) \\ &\overset{(4.4)}{\geq} \sum_{i=1}^{n} lr(E_i)(w(e_i) - w(e_{i+1})) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Από την άλλη, εξ ορισμού του λόγου βαθμίδων, για κάθε $i \in [n]$ έχουμε,

$$\frac{lr(E_i)}{r(E_i)} \geq q(E, \mathscr{I}) = \min_{X \subseteq E} \frac{lr(X)}{r(X)} \tag{4.8}$$

Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
w(G) &\geq \sum_{i=1}^{n} lr(E_i)(w(e_i) - w(e_{i+1})) \\
&\overset{(4.8)}{\geq} q(E, \mathscr{I}) \sum_{i=1}^{n} r(E_i)(w(e_i) - w(e_{i+1})) \\
&\overset{(4.3)}{\geq} q(E, \mathscr{I}) \sum_{i=1}^{n} |O_i|(w(e_i) - w(e_{i+1}))
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Παρατηρήστε ότι στην τελευταία ανισότητα της σχέσης (4.9) μπορούμε, μέσω επιμεριστικής ιδιότητας να εμφανίσουμε το κόστος της βέλτιστης λύσης [3]. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
w(G) &\geq q(E, \mathscr{I}) \sum_{i=1}^{n} |O_i|(w(e_i) - w(e_{i+1})) \\
&= q(E, \mathscr{I}) \sum_{i=1}^{n} w(e_i)(|O_i| - |O_{i-1}|) \\
&= q(E, \mathscr{I}) w(O)
\end{aligned}
$$

Ο.Ε.Δ.

Το Θεώρημα 4.2.2.1 μας δίνει και ένα ενδιαφέρον πόρισμα. Γνωρίσουμε ότι, σε κάθε μητροειδές ο λόγος βαθμών ισούται με την μονάδα, $q(E, \mathscr{I}) = 1$. Συνεπώς, ο Απληστος Αλγόριθμος θα δώσει τη βέλτιστη λύση στο Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης, αν το δεδομένο σύστημα ανεξαρτησίας είναι και μητροειδές. Διατυπώνουμε την παρατήρησή μας στο παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 4.2.2.1.1. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, κάποια συνάρτηση βάρους πάνω στο E, $w \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$. Τότε, ο Απληστος Αλγόριθμος θα δώσει τη βέλτιστη λύση στο προκύπτον στιγμιότυπο του Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης.*

Στην συνέχεια θα δείξουμε πως το φράγμα της ανισότητας (4.1) είναι σφιχτό. Ειδικότερα θα δείξουμε ότι ο λόγος $\frac{w(G)}{w(O)}$ μπορεί να πλησιάσει αυθαίρετα κοντά στο λόγο βαθμών $q(E, \mathscr{I})$.

Θεώρημα 4.2.2.2. *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, για το Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης, $G \subseteq E$ να είναι η λύση του Άπληστου Αλγόριθμου, και $O \subseteq E$ η*

[3] Δίνουμε ένα παράδειγμα για $|E| = 3$.

$$
\begin{gathered}
|O_1|(w(e_1) - w(e_2)) + |O_2|(w(e_2) - w(e_3)) + |O_3|(w(e_3) - w(e_4)) = \\
|O_1|w(e_1) - |O_1|w(e_2) + |O_2|w(e_2) - |O_2|w(e_3) + |O_3|w(e_3) - \cancel{|O_3|w(e_4)} \overset{O_0=\emptyset}{=} \\
w(e_1)(|O_1| - |O_0|) + w(e_2)(|O_2| - |O_1|) + w(e_3)(|O_3| - |O_4|)
\end{gathered}
$$

βέλτιστη λύση. Τότε, για κάθε πραγματικό αριθμό $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποια συνάρτηση βάρους, $w\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε,

$$\frac{w(G)}{w(O)} \leq q(E, \mathscr{I})(1+\epsilon) \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, επίσης, κάποιος πραγματικός αριθμός $\epsilon > 0$. Παρατηρήστε ότι, αν το δεξί μέλος την ανισότητας (4.10) είναι μεγαλύτερο της μονάδας, δεν έχουμε κάτι να δείξουμε. Σε κάθε περίπτωση ισχύει,

$$\frac{w(G)}{w(O)} \leq 1$$

και άρα η (4.10) ισχύει για οποιαδήποτε συνάρτηση βάρους. Χωρίς βλάβη της γενικότητα θεωρούμε ότι $q(E, \mathscr{I})(1+\epsilon) < 1$. Τότε, το S δεν μπορεί να είναι μητροειδές, γιατί τότε ο λόγος βαθμών θα ισούταν με την μονάδα.

Θα προσπαθήσουμε να φράξουμε άνω την τιμή του ϵ. Θεωρούμε το σύνολο X, το οποίο είναι υπεύθυνο για την τιμή του λόγου βαθμίδων, δηλαδή,

$$\frac{lr(X)}{r(X)} = q(E, \mathscr{I})$$

Έστω, επίσης, δύο βάσεις $B_1, B_2 \in \mathscr{B}(S|X)$, τέτοιες ώστε $lr(X) = |B_1|$ και $r(X) = |B_2|$. Αφού, το S δεν είναι μητροειδές ισχύει $|B_2| > |B_1|$. Τότε έχουμε για το ϵ:

$$\begin{aligned} q(E, \mathscr{I})(1+\epsilon) &< 1 \\ \epsilon &< \frac{1 - q(E, \mathscr{I})}{q(E, \mathscr{I})} \\ \epsilon &< \frac{1}{q(E, \mathscr{I})} - 1 \\ \epsilon &< \frac{r(X)}{lr(X)} - 1 \\ \epsilon &< \frac{|B_2| - |B_1|}{|B_1|} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Θα κάνουμε τον Άπληστο Αλγόριθμο να βρίσκει τη βάση B_1, ενώ η B_2 να αποτελεί την βέλτιστη λύση του Πρόβληματος Μεγιστοβαρούς Βάσης. Θεωρούμε την εξής συνάρτηση βάρους

$$w(e) = \begin{cases} 1, & e \in B_2 \\ 1+\epsilon, & e \in B_1 \setminus B_2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε, για κάθε $e_1 \in B_1$ και κάθε $e_2 \in B_2$, ισχύει $w(e_1) \geq w(e_2)$. Άρα ο Απληστος Αλγόριθμος θα επιλέξει πράγματι την B_1, δηλαδή $G = B_1$. Για να δούμε ποια είναι η βέλτιστη λύση, παρατηρήστε ότι μόνο δύο βάσεις έχουν μη μηδενικά βάρη, άρα αρκεί να συγκρίνουμε τα

$w(B_1)$ και $w(B_2)$. Προφανώς, $w(B_2) = |B_2|$. Για το $w(B_1)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} w(B_1) &\leq |B_1|(1+\epsilon) \\ &\overset{(4.11)}{<} |B_1|\left(1 + \frac{|B_2| - |B_1|}{|B_1|}\right) \\ &< |B_1| + |B_2| - |B_1| \\ &< |B_2| \end{aligned}$$

Άρα τελικά, $w(B_1) < w(B_2) = |B_2|$. Συνεπώς, $O = B_2$. Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{w(G)}{w(O)} &\leq \frac{|B_1|(1+\epsilon)}{|B_2|} \\ &= q(E, \mathscr{I})(1+\epsilon) \end{aligned}$$

Ο.Ε.Δ.

Παρατηρούμε πως καθώς το $\epsilon \longrightarrow 0$, τότε η (4.10) γίνεται ισότητα. Αυστηρότερα δίνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.2.2.2.1. *Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Έστω, για το Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης, $G \subseteq E$ να είναι η λύση του Άπληστου Αλγόριθμου, και $O \subseteq E$ η βέλτιστη λύση. Τότε, υπάρχει κάποια συνάρτηση βάρους, $w \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε,*

$$w(G) = q(E, \mathscr{I})w(O) \tag{4.12}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.2.2.2 μπορούμε να επιλέξουμε μια συνάρτηση βάρους w,τέτοια ώστε να ισχύει για τον λόγο αποδόσεων $\frac{w(G)}{w(O)}$ η (4.10). Όμως, καθώς $\epsilon \longrightarrow 0$, η ποσότητα $q(E, \mathscr{I})(1+\epsilon) \longrightarrow q(E, \mathscr{I})$. Συνεπώς, έχουμε:

$$w(G) \leq w(O)q(E, \mathscr{I})$$

Όμως από Θεώρημα 4.2.2.1 ισχύει $w(G) \geq q(E, \mathscr{I})w(O)$. Συνεπώς, $w(G) = q(E, \mathscr{I})w(O)$.
Ο.Ε.Δ.

4.2.3 Αλγοριθμικός Ορισμός Μητροειδούς

Το τελευταίο πόρισμα μας δείχνει την κατεύθυνση για έναν αλγοριθμικό ορισμό για τα μητροειδή. Γνωρίζουμε ότι η μία κατεύθυνση ισχύει· αν ένα σύστημα ανεξαρτησίας είναι και μητροειδές, τότε ο Απληστος Αλγόριθμος μας δίνει την βέλτιστη λύση. Βασιζόμενοι σε αυτή μας την διαίσθηση δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.2.3.1 (Άπληστο Μητροειδές). *Έστω κάποιο σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Θα λέμε ότι το S είναι ένα* άπληστο μητροειδές*, ή απλά μητροειδές (matroid)· αν για οποιαδήποτε συνάρτηση βάρους $w \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ το Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης, που προκύπτει, επιλύεται βέλτιστα από τον Απληστο Αλγόριθμο.*

Μένει να δείξουμε και την αντίθετη κατεύθυνση. Δηλαδή, αν σε ένα σύστημα ανεξαρτησίας ο Απληστος Αλγόριθμος δίνει βέλτιστη λύση, για κάθε συνάρτηση βάρους, τότε το σύστημα ανεξαρτησίας είναι και μητροειδές. Αποδεικνύουμε αυτό το γεγονός στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.3.1 (Edmonds[4] 1971)**.** *Οι Ορισμοί 3.1.1.2 και 4.2.3.1 είναι ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. $[\Rightarrow]$ Άμεση συνέπεια του Πορίσματος 4.2.2.1.1.

$[\Leftarrow]$ Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathscr{I})$. Από υπόθεση, γνωρίζουμε ότι, ο Απληστος Αλγόριθμος μας δίνει την βέλτιστη λύση, για οποιαδήποτε συνάρτηση βάρους $w\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το S ικανοποιεί το Αξίωμα Επαύξησης.

Έστω, προς άτοπο, ότι το Αξίωμα Επαύξησης δεν ικανοποιείται. Δηλαδή, υπάρχουν δύο σύνολα $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$, με $|I_1| < |I_2|$, τέτοια ώστε $I_1 \cup e \notin \mathscr{I}$ για όλα τα e στο $I_2 \setminus I_1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $|I_1 \setminus I_2| < |I_2 \setminus I_1|$ και το σύνολο $I_1 \setminus I_2$ είναι μη κενό. Συνεπώς, μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο πραγματικό αριθμό $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε

$$0 < (1+\epsilon)|I_1 \setminus I_2| < |I_2 \setminus I_1| \tag{4.13}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση βάρους, $w\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$w(e) = \begin{cases} 2, & e \in I_1 \cap I_2 \\ \frac{1}{|I_1 \setminus I_2|}, & e \in I_1 \setminus I_2 \\ \frac{1+\epsilon}{|I_2 \setminus I_1|}, & e \in I_2 \setminus I_1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε, ο Απληστος Αλγόριθμος θα διαλέξει πρώτα όλα τα στοιχεία του $I_1 \cap I_2$ και έπειτα όλα τα στοιχεία του $I_1 \setminus I_2$. Από υπόθεση, δεν μπορεί να επιλέξει κάποιο στοιχείο του $I_2 \setminus I_1$. Έτσι, τα υπόλοιπα στοιχεία της βάσης G που επιλέγει ο Απληστος Αλγόριθμος θα βρίσκονται στο $E \setminus (I_1 \cup I_2)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} w(G) &= 2|I_1 \cap I_2| + |I_1 \setminus I_2| \left(\frac{1}{|I_1 \setminus I_2|} \right) \\ &= 2|I_1 \cap I_2| + 1 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Όμως, από (I2), υπάρχει κάποια βάση $B_2 \subseteq \mathscr{B}(S)$, με $B_2 \subseteq I_2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} w(B_2) \geq w(I_2) &= 2|I_1 \cap I_2| + |I_2 \setminus I_1| \left(\frac{1+\epsilon}{I_2 \setminus I_1} \right) \\ &= 2|I_1 \cap I_2| + 1 + \epsilon \end{aligned} \tag{4.15}$$

Από τις σχέσεις (4.14) και (4.15), ισχύει $w(B_2) > w(G)$. Δηλαδή, ο Απληστος Αλγόριθμος αποτυγχάνει για αυτή τη συνάρτηση βάρους. Άτοπο.

Ο.Ε.Δ.

[4] Από τον Καναδοαμερικάνο Jack R. Edmonds ο οποίος διατύπωσε το θεώρημα.

Ο τελευταίος ορισμός διαφέρει από εκείνους που εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 3. Εδώ δεν χρησιμοποιήσαμε έναν κατάλογο αξιωμάτων για να χαρακτηρίσουμε κάποια σύνολα. Αντίθετα, παρατηρήσαμε πως αν η είσοδος σε έναν αλγόριθμο, διαθέτει κάποια ισχυρή οργάνωση, τότε και μόνον τότε, ο αλγόριθμος θα δίνει την βέλτιστη λύση. Έτσι, είδαμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια αφηρημένη διακριτή δομή για να επιχειρηματολογήσουμε για προβλήματα βελτιστοποίησης.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΕΡΕΤΑΙΡΩ ΘΕΜΑΤΑ

5.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία ακολουθήσαμε όλη την πορεία σκέψης από την διατύπωση παρατηρήσεων για επιμέρους τομείς των μαθηματικών, στη σύσταση μιας αφηρημένης θεωρίας, όπου γενικεύει τις παρατηρήσεις μας. Στην Ενότητα 2.1, ορίσαμε την έννοια του γραφήματος, ενώ συγκεκριμένα υπογραφήματα, ενός γραφήματος, παρουσιάζουν κάποια ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα,

1. Τα δάση ενός γραφήματος διαθέτουν την Ιδιότητα Επαύξησης, όπως είδαμε στο Θεώρημα 2.1.7.1.
2. Ενώ τα δάση επικάλυψης, ενός γραφήματος, διαθέτουν την Ιδιότητα Ανταλλαγής, όπως είδαμε στο Θεώρημα 2.1.7.2.
3. Οι κύκλοι ενός γραφήματος διαθέτουν την Ιδιότητα Απαλοιφής, όπως είδαμε στο Θεώρημα 2.1.8.1.
4. Ο βαθμός ενός γραφήματος διαθέτει την Ιδιότητα Κορεσμού (όπως ορίστηκε στην Ενότητα 1.3), όπως είδαμε στο Θεώρημα 2.1.9.1.

Όμοιες ιδιότητες είδαμε να διέπουν και τους διανυσματικούς χώρους. Εκεί τα γραμμικώς ανεξάρτητα σύνολα διαθέτουν την Ιδιότητα Επαύξησης, όπως είδαμε στο Θεώρημα 2.2.5.4. Τα ελαχιστικά γραμμικώς εξαρτημένα σύνολα διανυσμάτων διαθέτουν την Ιδιότητα Απαλοιφής, όπως είδαμε στο Θεώρημα 2.2.4.1. Ονομάσαμε τα μεγιστικά γραμμικώς ανεξάρτητα σύνολα, βάσεις· και είδαμε στο Θεώρημα 2.2.6.4 ότι διαθέτουν την Ιδιότητα Ανταλλαγής. Ενώ, τέλος, είδαμε, στο Θεώρημα 2.2.8.1 πως η βαθμίδα συνόλου διανυσμάτων διαθέτει την Ιδιότητα Κορεσμού.

Στην Ενότητα 2.3, διατυπώσαμε αυτές τις παρατηρήσεις οι οποίες μας οδήγησαν στην αφηρημένη θεωρία ανεξαρτησίας. Έτσι στο Κεφάλαιο 3 κάναμε ακριβώς αυτό. Μέσω αξιωμάτων ορίσαμε μια μαθηματική δομή με την οποία να μπορούμε να μελετήσουμε σχέσεις εξάρτησης και ανεξαρτησίας και να αντλήσουμε γενικά συμπεράσματα. Αρχικά, βασιστήκαμε στην Ιδιότητα Επαύξησης για να διατυπώσουμε τα αξιώματά μας, ενώ ονομάσαμε την δομή ανεξαρτησίας μητροειδές. Δανειζόμενοι την ορολογία από την θεωρία γραφημάτων και την γραμμική άλγεβρα, είδαμε πως τα μητροειδή έχουν βάσεις, κυκλώματα, και συνάρτηση βαθμίδας. Για κάθε μία από τις νέες έννοιες που ορίσαμε διατυπώσαμε και νέους κατάλογους αξιωμάτων, όπου αξιωματικοποιούσαμε κάθε φορά και μία διαφορετική ιδιότητα από τις παραπάνω. Έπειτα είδαμε πως, παρά τα διαφορετικά αξιώματα, οι δομές που ορίζαμε ήταν οι ίδιες. Ο ένας κατάλογος αξιωμάτων ισοδυναμούσε με τον άλλο. Συγκεκριμένα,

1. Βασιζόμενοι στην Ιδιότητα Επαύξησης και τα ανεξάρτητα σύνολα ορίσαμε το $\mathscr{I}$-μητροειδές.
2. Βασιζόμενοι στην Ιδιότητα Ανταλλαγής και την έννοια της βάσης ορίσαμε το $\mathscr{B}$-μητροειδές. Ενώ στο Θεώρημα 3.2.3.1 δείξαμε την ισοδυναμία του $\mathscr{B}$-μητροειδούς με το $\mathscr{I}$-μητροειδές.
3. Βασιζόμενοι στην Ιδιότητα Απαλοιφής και την έννοια του κυκλώματος ορίσαμε το $\mathscr{C}$-μητροειδές. Ενώ στο Θεώρημα 3.3.3.1 δείξαμε την ισοδυναμία του $\mathscr{C}$-μητροειδούς με το $\mathscr{I}$-μητροειδές.
4. Βασιζόμενοι στην Ιδιότητα Κορεσμού και την συνάρτηση βαθμίδας ορίσαμε το r-μητροειδές. Ενώ στο Θεώρημα 3.4.3.1 δείξαμε την ισοδυναμία του r-μητροειδούς με το $\mathscr{I}$-μητροειδές.

Μάλιστα, στο Κεφάλαιο 3, ορίσαμε και μια ασθενέστερη έννοια, αυτή του συστήματος ανεξαρτησίας, όπου δεν συμπεριλάβαμε στον κατάλογο αξιωμάτων την ιδιότητα επαύξησης. Μέσα από την εργασία μας στο παρόν κεφάλαιο, διαπιστώσαμε πως για να δείξουμε τις άλλες ιδιότητες πάντα χρειαζόμασταν την ιδιότητα επαύξησης, δημιουργώντας έτσι την διαίσθηση ότι οι ίδιες οι ιδιότητες διέπονται από σχέση ισοδυναμίας. Η ασθενέστερη δομή του συστήματος ανεξαρτησίας, επειδή δεν είχε την Ιδιότητα Επαύξησης, δεν θα είχε και καμία από τις άλλες. Παρ' όλα αυτά δεν προχωρήσαμε σε μια αυστηρή απόδειξη αυτού του γεγονότος.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 ακολουθήσαμε μια τελείως διαφορετική προσέγγιση. Αρχικά, ορμώμενοι από την αλγοριθμική θεωρία γραφημάτων, ορίσαμε μια γενική κλάση προβλημάτων βελτιστοποίησης πάνω σε συστήματα ανεξαρτησίας. Ονομάσαμε αυτό το γενικό πρόβλημα, Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης. Έπειτα, μιμηθήκαμε τον Αλγόριθμο του Kruskal για εύρεση ελαχιστοβαρών δασών επικάλυψης σε γραφήματα και διατυπώσαμε τον Απληστο Αλγόριθμο. Στην Πρόταση 4.2.1.1 είδαμε πως ο άπληστος αλγόριθμος επιστρέφει πάντα μια εφικτή λύση για το πρόβλημα μεγιστοβαρούς βάσης. Όμως, επιστρέφει τη βέλτιστη λύση, μόνο όταν το σύστημα ανεξαρτησίας είναι και μητροειδές, όπως είδαμε στο Πόρισμα του Θεωρήματος 4.2.2.1. Εν κατακλείδι, ορίσαμε το άπληστο μητροειδές, ως εκείνο το σύστημα ανεξαρτησίας, για το οποίο ο άπληστος αλγόριθμος επιστρέφει πάντα τη βέλτιστη λύση. Στο Θεώρημα 4.2.3.1 είδαμε πως το άπληστο μητροειδές είναι ισοδύναμο με το $\mathscr{I}$-μητροειδές. Στο Παράρτημα Ι έχουμε δίνουμε ένα ευρετήριο όλων των παραπάνω ορισμών, και των ισοδυναμιών μεταξύ τους.

5.2 Περαιτέρω Θέματα

Η θεωρία μητροειδών έχει προχωρήσει πολύ από το άρθρο του Whitney το 1935 και έχει επεκταθεί σε ένα πλήρη κλάδο των μαθηματικών με πληθώρα εφαρμογών στην επιστήμη της πληροφορικής. Στην παρούσα εργασία παρουσιάσαμε μόνο τις βασικές έννοιες αυτής της πλούσιας θεωρίας. Για περισσότερα σας παραπέμπουμε στα [1, 2], τα οποία υπήρξαν και οι κύριες πηγές για αυτή την εργασία.

Ενδιαφέροντα θέματα που δεν καλύφθηκαν σε αυτή την εργασία είναι η σύνδεση των μητροειδών με τις εγκάρσιες τομές (transversals). Εκεί έχουμε μια οικογένεια πεπερασμένων συνόλων $\{A_j \mid j \in [n]\}$ και ζητάμε να βρούμε ένα σύνολο $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, το οποίο θα περιέχει έναν αντιπρόσωπο από κάθε σύνολο A_j. Δηλαδή, για κάθε $t_j \in T$, ισχύει επίσης, $t_j \in A_j$. Επιπλέον, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο δυϊσμός (duality) στα μητροειδή. Για κάποιο μητροειδές $M = (E, \mathscr{B})$, σε $\mathscr{B}$-αναπαράσταση, ορίζουμε το δυϊκό μητροειδές $M^\star = (E, \mathscr{B}^\star)$, όπου

$$\mathscr{B}^\star = \{B \subseteq E \mid E \setminus B \in \mathscr{B}\}$$

Και τα δύο αυτά θέματα αναλύονται διεξοδικά στα [1, 2].

Επιπλέον, έχουν προταθεί διαφορές ενδιαφέρουσες παραλλαγές την έννοιας του μητροειδούς. Το 1980 σε μια προσπάθεια για περαιτέρω χαρακτηρισμό των προβλημάτων που επιδέχονται τον άπληστο αλγόριθμο, προτάθηκαν από τον Γερμανό μαθηματικό Bernhard H. Korte και τον Ούγγρο μαθηματικό László Lovász η έννοια του απληστοειδούς (greedoid) [17]. Εκεί το αξίωμα (I2) έχει αντικατασταθεί από την Ιδιότητα Προσβασιμότητας (Accessibility Property). Αντί να απαιτούμε για κάποιο ανεξάρτητο σύνολο I κάθε υποσύνολό του να είναι επίσης ανεξάρτητο, ζητάμε να υπάρχει κάποιο $e \in I$ τέτοιο ώστε το $I \setminus e$ να είναι επίσης ανεξάρτητο [17].

5.3 Λογισμικό

Έχουν υλοποιηθεί διάφορα πακέτα λογισμικού για υπολογισμούς με μητροειδή. Αναφέρουμε, ενδεικτικά το πρόγραμμα Oid [18] της Sandra Kingan και το MACEK [19] του Petr Hliněný. Και τα δύο προγράμματα είναι ανοιχτού κώδικα. Επιπλέον, δύο λογισμικά ανοιχτού κώδικα μαθηματικών SAGE [20] και Macaulay2 [21] παρέχουν πακέτα για μητροειδή.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Στους Πίνακες Ι1 και Ι2 έχουμε συγκεντρώσει τα σημαντικότερα αποτελέσματα που εξετάσαμε στην παρούσα εργασία. Στην πρώτη στήλη αναφέρουμε το όνομα του κάθε μητροειδούς. Στην δεύτερη στήλη αναφέρουμε το αναγνωριστίκο του ορισμου της. Στην τρίτη στήλη, «Ιδιότητες» δίνουμε τις διάφορες ιδιότητες της οικογένειας και το αντίστοιχο αναγνωριστικό, του σχετικού θεωρήματος. Στην στήλη «Ανεξάρτητα Σύνολα», παραθέτουμε τον αριθμό της σχέσης που περιγράφει το σύνολο ανεξάρτητων συνόλων. Στην στήλη «Απόδειξη Ισοδυναμίας» δίνουμε το αναγνωριστικό του θεωρήματος, που δείχνει την ισοδυναμία του εκάστοτε μητροειδούς με το $\mathscr{I}$-μητροειδές. Τέλος, στους πίνακες θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

ΔΙ Δεν ισχύει ο ισχυρισμός.
Τ Ο ισχυρισμός είναι τετριμμένος.
ΔΕ Ο ισχυρισμός ισχύει, αλλά δεν εξετάστηκε.

Στον Πίνακα Ι1 δίνουμε τις τρεις οικογένειες μητροειδών που εξετάσαμε. Φυσικά, καμία από αυτές τις οικογένειες δεν εκφράζει γενικά τα μητροειδή. Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να εκφράσουμε ένα αυθαίρετο μητροειδές ως γραφικό μητροειδές, διανυσματικό μητροειδές ή ομοιόμορφο. Στην τελευταία στήλη του πίνακα, «Απόδειξη Ισοδυναμίας», δίνουμε τις προτάσεις όπου αποδείξαμε πως οι εκάστοτε διακριτές δομές είναι μητροειδή. Παράλληλα σημειώνουμε πως η αντίστροφη κατεύθυνση δεν ισχύει, παρ’ όλο που δεν εξετάσαμε κάποια -απόδειξη. Για μια πλήρη απόδειξη παραπέμπεστε στα [1, 2]. Τέλος, έχουμε μαρκάρει τους αντίστοιχους ισχυρισμούς για το ομοιόμορφο μητροειδές, ως τετριμμένους.

Στον Πίνακα Ι2 δίνουμε τις οικογένειες μητροειδών που ορίσαμε αξιωματικά, μαζί με το άπληστο μητροειδές. Παρατηρήστε ότι κάποιες από τις στήλες του πίνακα δεν έχουν νόημα για το άπληστο μητροειδές ή για το $\mathscr{I}$-μητροειδές, έτσι έμειναν κενές. Επιπλέον, συμπεριλάβαμε τα μητροειδή που ορίσαμε στην Ενότητα 3.5 για λόγους πληρότητας, παρ’ όλο που δεν έχουμε ασχοληθεί διεξοδικά. Το [1] καλύπτει τις περισσότερους από αυτούς τους ορισμούς αναλυτικότερα.

Πίνακας Ι1: Οι οικογένειες μητροειδών που παρουσιάστηκαν στην εργασία.

Μητροειδές	Ορισμός	Ιδιότητες		Ανεξάρτητα Σύνολα	Απόδειξη Ισοδυναμίας
Γραφικό Μητροειδές	Ορισμός 3.1.2.1	Ιδιότητα Επαύξησης	Θεώρημα 2.1.7.1	(3.1)	Πρόταση 3.1.2.1/ΔΙ
		Ιδιότητα Ανταλλαγής	Θεώρημα 2.1.7.2		
		Ιδιότητα Απαλοιφής	Θεώρημα 2.1.8.1		
		Ιδιότητα Κορεσμού	Θεώρημα 2.1.9.1		
Διανυσματικό Μητροειδές	Ορισμός 3.1.2.2	Ιδιότητα Επαύξησης	Θεώρημα 2.2.5.4	(3.2)	Πρόταση 3.1.2.2/ΔΙ
		Ιδιότητα Ανταλλαγής	Θεώρημα 2.2.6.4		
		Ιδιότητα Απαλοιφής	Θεώρημα 2.2.4.1		
		Ιδιότητα Κορεσμού	Θεώρημα 2.2.8.1		
Ομοιόμορφο Μητροειδές	Ορισμός 3.1.3.1	Τ		(3.3)	Τ/ΔΙ

Πίνακας Ι2: Οι ορισμοί μητροειδών που παρουσιάστηκαν στην εργασία.

Μητροειδές	Ορισμός	Ιδιότητες		Ανεξάρτητα Σύνολα	Απόδειξη Ισοδυναμίας
$\mathscr{I}$-Μητροειδές	Ορισμός 3.1.1.2	-		-	-
$\mathscr{B}$-Μητροειδές	Ορισμός 3.2.3.1	(B1) (B2) Ιδιότητα Ανταλλαγής	Πρόταση 3.2.2.1 Πρόταση 3.2.2.2	(3.4)	Θεώρημα 3.2.3.1
$\mathscr{C}$-Μητροειδές	Ορισμός 3.3.3.1	(C1) (C2) (C3) Ιδιότητα Απαλοιφής	Πρόταση 3.3.2.1 » Πρόταση 3.3.2.2	(3.8)	Θεώρημα 3.3.3.1
r-Μητροειδές	Ορισμός 3.4.3.1	(R1) (R2) (R3) Ιδιότητα Κορεσμού	Πρόταση 3.4.2.1 » Πρόταση 3.4.2.2	(3.9)	Θεώρημα 3.4.3.1
Άπληστο Μητροειδές	Ορισμός 4.2.3.1	-		-	Θεώρημα 4.2.2.1
cl-Μητροειδές	Ορισμός 3.5.2.2	ΔΕ		(3.11)	ΔΕ
$\mathscr{D}$-Μητροειδές	Ορισμός 3.5.2.3	ΔΕ		(3.12)	ΔΕ
$\mathscr{H}$-Μητροειδές	Ορισμός 3.5.2.6	ΔΕ		(3.13)	ΔΕ
$\mathscr{S}$-Μητροειδές	Ορισμός 3.5.2.7	ΔΕ		ΔΕ	ΔΕ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ

Ξενόγλωσσος Όρος	**Ελληνικός Όρος**
Basis	Βάση
Cut-Vertex	Αρθρικό Σημείο
Duality	Δυϊκότητα
Edge	Ακμή
Field	Σώμα
Graph	Γράφημα
Multigraph	Πολυγράφημα
Graph Order	Τάξη Γραφήματος
Graph Rank	Βαθμός Γραφήματος
Graph Size	Μέγεθος Γραφήματος
Induced Graph	Εναγόμενο Γράφημα
Greedoid	Απληστοειδές
Homogenous Linear System	Ομογενές Γραμμικό Σύστημα
Loop	Βρόχος
Low Rank	Χαμηλός Βαθμός
Matroid	Μητροειδές
Graphic Matroid	Γραφικό Μητροειδές
Maximal	Μεγιστικό
Minimal	Ελαχιστικό
Rank Function	Συνάρτηση Βαθμού
Rank Quotient	Λόγος Βαθμών
Spanning Set	Παραγωγό Σύνολο
Span	Γραμμική Θήκη
Spanning Graph	Γράφημα Επικάλυψης
Subgraph	Υπογράφημα
Submodularity	Υπομετρικότητα
Submodular Function	Υπομετρική Συνάρτηση
Transversals	Εγκάρσιες Τομές
Vertex	Κόμβος

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] J. G. Oxley, *Matroid Theory*. Oxford University Press, 1992.

[2] L. S. Pitsoulis, *Topics in Matroid Theory*. Springer, 2014.

[3] H. Nishimura και S. Kuroda, *A Lost Mathematician, Takeo Nakasawa: The forgotten father of matroid theory*. Birkhauser Verlag, 2009.

[4] A. Schrijver, “The greedy algorithm and the independent set polytope”, στο *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. Springer, 2003, κεφ. 40.

[5] Δ. Γεωργίου, Ε. Αντωνίου και Α. Χατζιμιχαηλίδης, *Διακριτές Μαθηματικές Δομές για την Επιστήμη Υπολογιστών*. Σύνδεσμος Ελλήνων Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015, `https://repository.kallipos.gr/handle/11419/457`.

[6] T. H. Cormen, C. E. Leiseron, R. L. Rivest και C. Stein, *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 2001.

[7] ——, *Εισαγωγή στους Αλγορίθμους*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2003, Μεταφραστής Ι. Παπαδογγόνας.

[8] Μ. Πετροπαναγιωτάκη, *Παραμετρικοί Αλγόριθμοι και Μητροειδή: η χρήση των συνόλων αντιπροσώπευσης*, `https://pergamos.lib.uoa.gr/uoa/dl/object/1325895`, 2016.

[9] Γ. Σταθόπουλος, *Πολύεδρα, Μητροειδή και Υπομετρικά Συστήματα, Θεωρία και Εφαρμογές*, `https://pergamos.lib.uoa.gr/uoa/dl/object/1319497`, 2012.

[10] Θ. Δημητρακόπουλος, *Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι για το Generalized Min-Sum Set Cover*, `https://pergamos.lib.uoa.gr/uoa/dl/object/1319647`, 2014.

[11] Κ. Τσιρικίδου, *Αλγόριθμος Αναγνώρισης Γραφικών Μητροειδών*, `http://ikee.lib.auth.gr/record/291881/`, 2015.

[12] Α. Κουτσώνας, “Διδιαστατότητα: Θεωρία και Αλγοριθμικές Εφαρμογές”, `https://pergamos.lib.uoa.gr/uoa/dl/object/1308818`, Διδακτορική διατρ., Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2014.

[13] H. R. Lewis και C. H. Papadimitriou, *Elements of the Theory of Computation*. Prentice Hall, 1998.

[14] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*. Pearson Education, 2001.

[15] Χ. Χαραλάμπους και Α. Φωτιάδης, *Μια εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, για τις θετικές επιστήμες*. Σύνδεσμος Ελλήνων Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015, `https://repository.kallipos.gr/handle/11419/2329`.

[16] S. Dasgupta, C. H. Papadimitriou και U. Vazirani, *Algorithms*. McGraw-Hill, 2008.

[17] A. Björner και G. M. Ziegler, “Introduction to greedoids”, στο *Matroid Applications*. Cambridge University Press, 1992, κεφ. 8, σσ. 284–357.

[18] S. Kingan, *Oid: An interactive software system for experimenting with matroids*, `http://userhome.brooklyn.cuny.edu/skingan/software.html`, Accessed: 2020-10-20.

[19] P. Hliněný, *MACEK: A program for structural computations with representable matroids*, `https://www.fi.muni.cz/~hlineny/MACEK/`, Accessed: 2020-10-20.

[20] S. community, *SAGE matroid theory package*, https://doc.sagemath.org/html/en/reference/matroids/index.html, Accessed: 2020-10-20.

[21] J. Chen, *Matroids: a package for computations with matroids*, https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/doc/Macaulay2-1.12/share/doc/Macaulay2/Matroids/html/index.html, Accessed: 2020-10-20.

[22] J. L. Kelly και P. R. Halmos, *Naive Set Theory*. Litton Educational Publishing, 1960.

[23] Δ. Μ. Θηλυκός, *Σημειώσεις στη Θεωρία Γραφημάτων*.

[24] Σ. Κολλιόπουλος, *Θεωρία Γραφημάτων (Σημειώσεις)*, http://cgi.di.uoa.gr/~sgk/teaching/GT/index.html.