Εργοδικά Θεωρήματα

Διπλωματική Εργασία

Χρήστος Νίκου

Επιβλέπων: Δημήτρης Γατζούρας

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2020

Στη μνήμη του δασκάλου μου Δημήτρη Γατζούρα

Φτάνοντας στο τέλος της συγγραφής της μεταπτυχιακής μου εργασίας και συγχρόνως στην ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών τα συναισθήματα που επικρατούν είναι ανάμεικτα, απ' τη μία υπάρχει η χαρά για την ολοκλήρωση ενός απαιτητικού προγράμματος σπουδών, ενός προγράμματος που υπηρέτησε επάξια τις απαιτήσεις και τις προσδοκίες μου και απ' την άλλη η λύπη για την ξαφνική απώλεια του καθηγητή Δημητρίου Γατζούρα με τον οποίο περάσαμε πολλές ώρες μαζί δουλεύοντας για τη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία.

Νιώθω υποχρεωμένος να τονίσω και από αυτό το σημείο τη σπουδαία δουλεία που έκανε διδάσκοντας μαθήματα τόσο σε προπτυχιακό όσο και σε μεταπτυχιακό επίπεδο αλλά και την επιρροή που είχε στους φοιτητές του και ειδικότερα σε μένα. Είχα την τύχη να ξεκινήσω τις μεταπτυχιακές μου σπουδές ένα χρόνο μετά τον ερχομό του στο τμήμα Μαθηματικών. Η πρώτη μας γνωριμία έγινε στα μαθήματα της Εργοδικής Θεωρίας και της Αρμονικής Ανάλυσης που δίδασκε. Απ' την πρώτη στιγμή μου είχε κάνει εντύπωση η ικανότητά του να αναλαμβάνει τη διδασκαλία πλήθους διαφορετικών μαθημάτων της μαθηματικής ανάλυσης και να τα φέρνει εις πέρας στο μέγιστο δυνατό βαθμό. Αυτή του η ικανότητα σε συνδυασμό με την οικειότητα που απέπνεε στους γύρω του ήταν και οι λόγοι που με οδήγησαν στο να του ζητήσω να επιβλέψει τη διπλωματική μου εργασία. Η στιγμή που δέχτηκε με ιδιαίτερη χαρά να αναλάβει αυτή την ευθύνη είναι βαθιά χαραγμένη στη μνήμη μου. Η συνεργασία μας επιβεβαίωσε και με το παραπάνω την επιλογή μου, οι ώρες που αφιέρωσε στις συναντήσεις μας υπήρξαν υπεράνω των προσδοκιών μου. Υπήρχαν φορές που καθόμασταν 3 και 4 ώρες στο γραφείο του συζητώντας για τα μαθηματικά, την εργασία αλλά και για διάφορα άλλα θέματα. Ακόμα θυμάμαι τη ζεστή του χειραψία όταν είχαμε συναντηθεί μετά από καιρό στο τμήμα σε μία από τις άδειες της στρατιωτικής μου θητείας. Το γεγονός ότι πρόλαβα να παρουσιάσω τη διπλωματική μου εργασία και να τον ευχαριστήσω για τη συνεργασία μας μου δημιουργεί ένα αίσθημα ανακούφισης.

Κλείνοντας, θα ήθελα να εκφράσω τα θερμά μου συλλυπητήρια στους δικούς του ανθρώπους. Θα ήθελα να τονίσω για ακόμα μια φορά ότι ο κ. Δημήτρης έκανε τη δουλειά του πολύ περισσότερο από καλά και πως θα πρέπει να είναι πολύ περήφανοι γι' αυτόν.

Ευχαριστίες

Οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον καθηγητή του τμήματος μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών Απόστολο Γιαννόπουλο ο οποίος σε μια δύσκολη στιγμή προσφέρθηκε οικειοθελώς να με βοηθήσει στις τελικές διορθώσεις του αρχείου. Οι παρατηρήσεις του βελτίωσαν σημαντικά τη ροή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Ιδιαιτέρως, θέλω να ευχαριστήσω τους πιο κοντινούς μου ανθρώπους, τους γονείς μου και την αδελφή μου για τη στήριξη και την εμπιστοσύνη που μου δείχνουν.

Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους τους φίλους μου και τους συμφοιτητές μου για την ξένοιαστη παρέα που μου κράτησαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Το 1931 οι J. von Neumann και G.D Birkhoff με την απόδειξη δύο εργοδικών θεωρημάτων έθεσαν τα θεμέλια και άνοιξαν το δρόμο για τη μελέτη της εργοδικής θεωρίας. Από εκείνο το σημείο κι έπειτα η εργοδική θεωρία αποτελεί αυτόνομο κλάδο των μαθηματικών έχοντας έντονη επίδραση στη θεωρία πιθανοτήτων, τη συναρτησιακή ανάλυση και τη θεωρία τελεστών, την απειροσυνδιαστική αλλά και σε άλλες επιστήμες όμως για παράδειγμα τη φυσική.

Σκοπός μας κατά κύριο λόγο είναι να αναδείξουμε το κομμάτι της εργοδικής θεωρίας που συνδέεται με τη συναρτησιακή ανάλυση και τη θεωρία τελεστών παρουσιάζοντας κάποια βασικά εργοδικά θεωρήματα που χρησιμοποιούν τεχνικές από τους δύο παραπάνω κλάδους. Φυσικά δεν μπορούμε να αντισταθούμε στο πειρασμό του να παρουσιάσουμε και εργοδικά αποτελέσματα πιθανοθεωρητικής φύσης μιας και αυτός ο κλάδος είναι εξίσου σημαντικός και ελκυστικός με αυτόν της συναρτησιακής σκοπιάς.

Γενικά μιλώντας ενδιαφερόμαστε για τη σύγκλιση των μέσων όρων ποσοτήτων που παράγονται κατά στάσιμο τρόπο. Πιο συγκεκριμένα η θεωρία ανά κεφάλαιο διαμορφώνεται ως εξής:

Στο 1ο κεφάλαιο εξετάζεται η κλασική περίπτωση της εργοδικής θεωρίας όπου η στασιμότητα περιγράφεται από ένα μετασχηματισμό τ που διατηρεί το μέτρο και οι μέσοι όροι που μας ενδιαφέρουν είναι της μορφής

$$\frac{f + f \circ \tau + \ldots + f \circ \tau^{n-1}}{n}, \tag{1}$$

για κάποια ολοκλήρωσιμη συνάρτηση f. Το μοντέλο αυτό αντιστοιχεί στην πιθανοθεωρητική ερμηνεία της στασιμότητας. Επομένως το 1ο κεφάλαιο περιέχει τα δύο θεμελιώδη εργοδικά θεωρήματα των von Neumann και Birkhoff και τη διάσπαση Hopf. Το 1ο κεφάλαιο κλείνει με το θεώρημα του Kingman το οποίο γενικεύει το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff στο πλαίσιο των υποπροσθετικών διαδικασιών.

Στο κεφάλαιο 2 γενικεύοντας στο επίπεδο της συναρτησιακής ανάλυσης αντικαθιστούμε τον μετασχηματισμό τ από οποιονδήποτε γραμμικό τελεστή T σε ένα χώρο συναρτήσεων και τώρα οι υπό μελέτη μέσοι όροι είναι της μορφής

$$\frac{f + Tf + \ldots + T^{n-1}f}{n}. \tag{2}$$

Επομένως αφού ο T^n προκύπτει εφαρμόζοντας τον T $n-$φορές έχουμε και εδώ κάποιου είδους

στασιμότητα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το μέσο εργοδικό θεώρημα το οποίο γενικεύει το θεώρημα του von Neumann στο πλαίσιο των χώρων Banach. Επίσης, μελετώνται οι συνθήκες υπό τις οποίες ισχύει ανάλογη διάσπαση του χώρου όπως στο θεώρημα von Neumann. Ακόμα γενικότερα μελετάμε ημιόμαδες τελεστών $\mathscr{S}$ (με πράξη τη σύνθεση) σε τοπικά κυρτούς τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους. Τώρα, οι μέσοι όροι της (2) υλοποιούνται μέσω της αφηρημένης έννοιας του εργοδικού δικτύου.

Με τον όρο εργοδικό θεώρημα εννούμε τα θεωρήματα που αφορούν τη σύγκλιση των μέσων όρων που αναφέρθηκαν προηγουμένως (ως προς τη νόρμα ή σημειακά) αλλά και θεωρήματα που προκύπτουν ως συνέπεια της σύγκλισης τέτοιων μέσων όρων.

Στο κεφάλαιο 3 μελετώνται εργοδικά θεωρήματα που αφορούν θετικές συστολές στον L_1. Τα κυριότερα αποτελέσματα είναι η διάσπαση Hopf η οποία γενικεύει τη διάσπαση του 1ου κεφαλαίου και το θεώρημα των Chacon-Ornstein καθώς επίσης και η ταυτοποίηση του ορίου στο θεώρημα Chacon-Ornstein από τους Neveu-Chacon.

Να σημειώσουμε ότι για το κύριο μέρος της εργασίας ακολουθήσαμε το βιβλίο του U. Krengel με τίτλο Ergodic theorems [13]. Βιβλίο το οποίο περιέχει σαφώς περισσότερα αποτελέσματα αλλά σε αρκετά πιο συμπυκνωμένη μορφή. Τα προαπαιτούμενα για την ομαλή ανάγνωση της εργασίας είναι η γνώση προπτυχιακής θεωρίας μέτρου, συναρτησιακής ανάλυσης και πραγματικής ανάλυσης. Στα παραρτήματα Α′ και Β′ έχουμε συμπεριλάβει όλα όσα χρειάζονται (ίσως και λίγα παραπάνω) από τους τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους και τις διάφορες ασθενείς τοπολογίες που χρησιμοποιούνται στην εργασία. Στο παράρτημα Γ′ δίνονται όλα τα απαραίτητα αποτελέσματα από τη θεωρία αλγεβρών Banach. Ο σκοπός της ύπαρξης του παραρτήματος είναι αυτή η εργασία να είναι όσο περισσότερο αυτόνομη γίνεται χωρίς πολλές παραπομπές σε βιβλιογραφία η οποία μπορεί να μην είναι προσβάσιμη στον αναγνώστη.

Abstract

The main purpose of this thesis is the study of ergodic theorems mainly in the context of functional analysis. We also present some ergodic theorems in the classical setting of ergodic theory, i.e. measure preserving systems. In particular, we are concerned about the convergence of averages of the form

$$\frac{f + f \circ \tau + \ldots + f \circ \tau^{n-1}}{n} \tag{1}$$

where τ is a measure preserving transformation and f an integrable function. More generally, we study the convergence of averages of the form

$$\frac{x + Tx + \ldots + T^{n-1}x}{n} \tag{2}$$

where T is an operator in a Banach space X and $x \in X$. Generalizing even further, T can be replaced by a semigroup of operators in a topological vector space. In this case the averages $\frac{x+Tx+\ldots+T^{n-1}x}{n}$ are being substituted by the abstract notion of an ergodic net.

This thesis develops as follows: in chapter one we are interested in averages of the form (1). We present the proofs of the fundamental theorems of Birkhoff and Von-Neumann and we give the motivation to study the averages of the form (2). At the end of the chapter, generalizing Birkhoff's theorem we present the subadditive ergodic theorem of Kingman and one of its applications regarding the convergence of random matrices. In chapter two we develop the theory related to the averages of the form in (2). The theorem of Eberlein is of great importance since it provides necessary and sufficient conditions for the convergence of such averages. Also, we treat the case where T is being replaced by a general semigroup of operators. In the 3rd and last chapter we examine the case where T is a positive contraction in L_1. We prove the pointwise theorem of Chacon-Ornstein which ensures us that the ratio

$$\frac{f + Tf + \ldots + T^{n-1}f}{g + Tg + \ldots + T^{n-1}g}$$

converges almost everywhere on the set $\{S_\infty g > 0\}$, where $S_\infty = \sup_n(g + \ldots + T^{n-1}g)$ for every positive function $g \in L_1$. Brunel's lemma allow us to describe the limit of the ratio, a result

originally due to Neveu-Chacon. An extended appendix has been added in order to keep the thesis as self contained as possible. This way the reader can refer to the corresponding entry for notions that may not be familiar.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Τα βασικά θεωρήματα της εργοδικής Θεωρίας

1.1 Εργοδικότητα

Το κίνητρο για την απόδειξη των εργοδικών θεωρημάτων των von Neumann και Birkhoff ήρθε από τη φυσική και συγκεκριμένα από τη στατιστική μηχανική. Στα τέλη του 1800 ο θεωρητικός φυσικός L. Boltzmann μελετώντας προβλήματα από την περιοχή της στατιστικής μηχανικής διατύπωσε την εργοδική υπόθεση.

Η εργοδική υπόθεση μας λέει ότι σε ένα σύστημα το οποίο μεταβάλλεται με το χρόνο οι χρονικοί μέσοι όροι του συστήματος ισούνται με τους χωρικούς μέσους όρους. Πιο συγκεκριμένα, ας συμβολίσουμε με X το σύνολο των καταστάσεων του συστήματος, με $\tau : X \to X$ τη μεταβολή του συστήματος σε μια χρονική μονάδα και με $f : X \to \mathbb{R}$ κάποια μέτρηση που αφορά το σύστημα (π.χ. την πίεση). Τότε, η εργοδική υπόθεση λέει ότι

$$\frac{f(x) + f(\tau(x)) + \ldots + f(\tau^{n-1}(x))}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \int_X f\,, \quad x \in X$$

όπου $\frac{f(x)+f(\tau(x))+\ldots+f(\tau^{n-1}(x))}{n}$ οι χρονικοί μέσοι όροι και $\int_X f$ οι χωρικοί μέσοι όροι του συστήματος. Το πλεονέκτημα της παραπάνω σύγκλισης είναι ότι οι χρονικοί μέσοι όροι υπολογίζονται απλά παρατηρώντας την εξέλιξη του συστήματος.

Αν και ο Boltzmann δεν διατύπωσε την εργοδική υπόθεση στο πλαίσιο των χώρων μέτρου, και ειδικότερα των μετρήσιμων δυναμικών συστημάτων, παρ' όλα αυτά αποδείχθηκε αργότερα με το θεώρημα του Birkhoff ότι αυτό είναι το φυσικό περιβάλλον για την απόδειξη της εργοδικής υπόθεσης. Σε αυτή την παράγραφο ορίζουμε και αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες των μετρήσιμων δυναμικών συστημάτων και εξετάζουμε την έννοια της εργοδικότητας κάτω από την οποία ισχύει η εργοδική υπόθεση.

1.1.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

Ορισμός 1.1.1 (Σύστημα που διατηρεί το μέτρο)**.** Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $\tau : \Omega \to \Omega$ μια μετρήσιμη συνάρτηση (μετρήσιμος μετασχηματισμός). Θα λέμε ότι η τ διατηρεί το μέτρο μ αν $\mu(A) = \mu(\tau^{-1}A)$ για κάθε $A \in \mathscr{A}$. Η τετράδα $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ είναι ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο (σ.δ.μ).

Ένα σύνολο $A \in \mathscr{A}$ καλείται $\mu-$μηδενικό αν $\mu(A) = 0$. Λίγο γενικότερα συστήματα από τα συστήματα που διατηρούν το μέτρο είναι τα συστήματα που διατηρούν τα $\mu-$μηδενικά σύνολα.

Ορισμός 1.1.2 (Σύστημα που διατηρεί τα $\mu-$μηδενικά σύνολα)**.** Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $\tau : \Omega \to \Omega$ ένας μετρήσιμος μετασχηματισμός. Θα λέμε ότι ο τ διατηρεί τα $\mu-$μηδενικά σύνολα αν για κάθε $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) = 0$ ισχύει $\mu(\tau^{-1}(A)) = 0$. Η τετράδα $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ είναι ένα σύστημα που διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα (σ.δ.μ.μ).

Πρόταση 1.1.3. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένα σ.δ.μ και $f : X \to \mathbb{R}$ μια μη αρνητική συνάρτηση. Τότε,*

$$\int_\Omega f \circ \tau \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu. \tag{1.1.1}$$

Επίσης, η (1.1.1) *ισχύει και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις (όχι απαραίτητα μη αρνητικές).*

Απόδειξη. Αν η f είναι χαρακτηριστική της μορφής $\mathbb{1}_A$ για $A \in \mathscr{A}$ τότε αφού $\mathbb{1}_A \circ \tau = \mathbb{1}_{\tau^{-1}(A)}$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \circ \tau \, d\mu &= \int_\Omega \mathbb{1}_A \circ \tau \, d\mu \\ &= \int_\Omega \mathbb{1}_{\tau^{-1}(A)} \, d\mu \\ &= \mu(\tau^{-1}(A)).\end{aligned}$$

Όμως, ο τ διατηρεί το μ, άρα $\mu(\tau^{-1}(A)) = \mu(A) = \int_\Omega f \, d\mu$. Συνεπώς, η (1.1.1) ισχύει για τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έχουμε ότι η (1.1.1) θα ισχύει και για τις απλές συναρτήσεις. Για τη γενική περίπτωση θεωρούμε μια ακολουθία απλών συναρτήσεων $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ με $s_n \nearrow f$. Τότε, αφού $s_n \circ \tau \nearrow f \circ \tau$ απ' το θεώρημα μονότονης σύγκλισης θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \circ \tau \, d\mu &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} s_n \circ \tau \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \circ \tau \, d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \, d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} s_n \, d\mu \\ &= \int_\Omega f \, d\mu.\end{aligned}$$

Για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f εφαρμόζουμε την (1.1.1) ξεχωριστά για τις μη αρνητικές συναρτήσεις f^+, f^- και χρησιμοποιούμε την ολοκληρωσιμότητα ώστε να είναι καλά ορισμένη η διαφορά $\int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$. □

Για ένα χώρο μέτρου $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ γράφουμε $\{f < g\}$ για το σύνολο $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < g(\omega)\}$, αντίστοιχη είναι και η ερμηνεία των $\{f \neq g\}$ και $\{f \geq g\}$ κτλ. Για το $\mu(\{f < g\})$ γράφουμε απλά $\mu(f < g)$, αντίστοιχα γράφουμε $\mu(f \neq g)$ και $\mu(f \geq g)$. Επίσης, ο συμβολισμός $f = g \, (\mathrm{mod}\, \mu)$ σημαίνει ότι $\mu(f \neq g) = 0$. Για $1 \leq p < \infty$ γράφουμε $\mathcal{L}_p(\mu)$=$\mathcal{L}_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ για το σύνολο

$$\mathcal{L}_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ ή } \mathbb{R} \mid f \text{ μετρήσιμη με } \int_X |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Η σχέση $f \sim g$ αν και μόνο αν $f = g \pmod{\mu}$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ ή $\mathbb{R}$. Με $[f]$ συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας της f, ο χώρος $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ είναι ο χώρος ο οποίος αποτελείται από όλα τα σύνολα των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$ για τις οποίες $\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty$. Αντί του $[f]$ θα γράφουμε απλά f. Ο $L_p(\mu)$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Αντίστοιχα, ορίζεται και ο $\mathcal{L}_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ο οποίος αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{C}$ ή $\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει $t > 0$ με

$$\mu(\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > t\}) = 0.$$

Τότε για κάθε $f, g \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$ η σχέση $f \sim g$ αν και μόνο αν $f = g \pmod{\mu}$ είναι σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}_\infty$. Ο χώρος $L_\infty(\mu) = L_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ είναι ο χώρος ο οποίος αποτελείται από όλα τα σύνολα των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$ για $f \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$. Αντί του $[f]$ γράφουμε απλά f. Ο $L_\infty(\mu)$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα που δίνεται από την

$$\|f\|_\infty = \inf\{t > 0 : \mu(\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > t\}) = 0\}.$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι $\mu(|f| > \|f\|_\infty) = 0$, δηλαδή, με άλλα λόγια

$$\|f\|_\infty = \min\{t > 0 : \mu(\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > t\}) = 0\}.$$

Ο τρόπος μέσω του οποίου γίνεται η σύνδεση των σ.δ.μ με τη συναρτησιακή ανάλυση και τη θεωρία τελεστών είναι μέσω του τελεστή Koopman U_τ ο οποίος ορίζεται μέσω της $U_\tau f = f \circ \tau$ για κάθε $f \in L_p(\mu)$ με $1 \le p \le \infty$. Φυσικά πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτός είναι καλά ορισμένος και φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Πρόταση 1.1.4. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένα σ.δ.μ. Τότε, ο τελεστής Koopman $U_\tau : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ είναι ισομετρία για κάθε $1 \le p \le \infty$.*

Απόδειξη. Η γραμμικότητα είναι προφανής αφού για $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ και $f, g \in L_p$ έχουμε

$$\begin{aligned} U_\tau(\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g) \circ \tau \\ &= \lambda f \circ \tau + \mu g \circ \tau \\ &= \lambda U_\tau f + \mu U_\tau g. \end{aligned}$$

Τώρα, αν $1 \le p < \infty$ από την Πρόταση 1.1.3 έχουμε

$$\begin{aligned} \|U_\tau\|_p^p &= \int_\Omega |f \circ \tau|^p d\mu \\ &= \int_\Omega |f|^p \circ \tau \, d\mu \\ &= \int_\Omega |f|^p d\mu = \|f\|_p^p, \end{aligned}$$

άρα $\|U_\tau f\|_p = \|f\|_p$ απ' όπου έπεται ότι $U_\tau f \in L_p(\mu)$ και $\|U_\tau\| = 1$. Στην περίπτωση που $p = \infty$ και $f \in L_\infty(\mu)$ αφού ο τ διατηρεί το μέτρο μ θα έχουμε $\mu(\tau^{-1}(\{|f| > a\})) = \mu(|f| > a)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Όμως $\tau^{-1}(\{|f| > a\}) = \{|f \circ \tau| > a\}$, απ' όπου έπεται ότι

$$\mu(|f \circ \tau| > \|f\|_\infty) = \mu(|f| > \|f\|_\infty) = 0.$$

Άρα, $\|U_\tau f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Απ' την άλλη μεριά όμως, έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(|f| > \|f \circ \tau\|_\infty) &= \mu(\tau^{-1}(\{|f| > \|f \circ \tau\|_\infty\})) \\ &= \mu(|f \circ \tau| > \|f \circ \tau\|_\infty) \\ &= 0\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται και η $\|f\|_\infty \leq \|U_\tau f\|_\infty$. Οπότε, συνοψίζοντας έχουμε $U_\tau f \in L_\infty$ και $\|U_\tau\| = 1$. □

Παρατηρούμε τώρα πως αν υπάρχει σύνολο $A \in \mathscr{A}$ με $\tau^{-1}(A) = A$, $\mu(A) > 0$ και $\mu(\Omega \setminus A) > 0$ τότε η εργοδική υπόθεση δεν μπορεί να ισχύει. Πράγματι, θεωρώντας $f = \mathbb{1}_A$ έχουμε για $x \in A$ ότι

$$\frac{f(x) + f(\tau(x)) + \ldots + f(\tau^{n-1}(x))}{n} \to 1$$

ενώ για $x \in A^c$,

$$\frac{f(x) + f(\tau(x)) + \ldots + f(\tau^{n-1}(x))}{n} \to 0$$

και έτσι οι χρονικοί μέσοι όροι δεν μπορούν να ισούνται με τη σταθερά $\int_\Omega f \, d\mu = \mu(A)$.

Ορισμός 1.1.5 (Αναλλοίωτο σύνολο)**.** Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ ένα σ.δ.μ.μ. Ένα σύνολο $A \in \mathscr{A}$ θα καλείται αναλλοίωτο αν $\tau^{-1}(A) = A$ και $\mu-$σχεδόν αναλλοίωτο αν $\mu(A \triangle \tau^{-1}(A)) = 0$.[1]

Σε ένα σ.δ.μ.μ τα μ-σχεδόν αναλλοίωτα σύνολα διαφέρουν από τα αναλλοίωτα σύνολα κατά κάποιο σύνολο μέτρου μηδέν όπως φαίνεται και από την παρακάτω πρόταση. Μάλιστα όπως θα φανεί και από την απόδειξη τα $\mu-$σχεδόν αναλλοίωτα (άρα και τα αναλλοίωτα) σύνολα έχουν την ιδιότητα ότι $\mu-$σχεδόν κάθε στοιχείο τους επανέρχεται άπειρες φορές.

Πρόταση 1.1.6. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ ένα σ.δ.μ.μ και $A \in \mathscr{A}$ ένα $\mu-$σχεδόν αναλλοίωτο σύνολο. Τότε, το σύνολο*

$$A_\infty = \limsup_n \tau^{-n}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \tau^{-k}(A)$$

όλων των σημείων που περνάνε άπειρες φορές από το A είναι αναλλοίωτο και $\mu(A \triangle A_\infty) = 0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη φθίνουσα ακολουθία συνόλων $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} \tau^{-k}(A)$. Τότε,

$$\tau^{-1}(A_\infty) = \bigcap_{n=2}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \tau^{-k}(A) = \bigcap_{n=2}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = A_\infty$$

[1]όπου $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ η συμμετρική διαφορά των A, B

απ' όπου έπεται ότι το A_∞ είναι αναλλοίωτο. Τώρα, αν $x \in A \setminus A_\infty = A \cap \liminf_n \tau^{-n}(\Omega \setminus A)$ θα υπάρχει ελάχιστος n_0 ώστε $x \in A$ και $x \in \tau^{-n}(\Omega \setminus A)$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $x \in \tau^{n_0-1}(A) \setminus \tau^{n_0}(A)$ απ' όπου έπεται ότι

$$A \setminus A_\infty \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-n}(A) \setminus \tau^{-(n+1)}(A).$$

Επειδή $\mu(A \triangle \tau^{-1}(A)) = 0$ θα έχουμε και $\mu(A \setminus \tau^{-1}(A)) = 0$. Συνεπώς, αφού ο τ διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα θα έχουμε $\mu(\tau^{-n}(A) \setminus \tau^{-(n+1)}(A)) = 0$ για κάθε $n \geq 0$, απ' όπου έπεται ότι $\mu(A \setminus A_\infty) = 0$. Από την άλλη μεριά, για $x \in A_\infty \setminus A$ θα υπάρχει ο ελάχιστος n_0 με $x \in \tau^{-n_0}(A)$ και $x \notin \tau^{-(n_0-1)}(A)$. Δηλαδή,

$$A_\infty \setminus A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-(n+1)}(A) \setminus \tau^{-n}(A).$$

Όμως, αφού $\mu(\tau^{-1}(A) \setminus A) = 0$ θα έχουμε ότι $\mu(\tau^{-(n+1)}(A) \setminus \tau^{-n}(A)) = 0$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα $\mu(A_\infty \setminus A) = 0$. Οπότε τελικά, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(A \triangle A_\infty) &= \mu((A \setminus A_\infty) \cup (A_\infty \setminus A)) \\ &= \mu(A \setminus A_\infty) + \mu(A_\infty \setminus A) = 0. \end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.1.7 (Αναλλοίωτη συνάρτηση)**.** Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ θα καλείται αναλλοίωτη αν $f = f \circ \tau$ και μ−σχεδόν αναλλοίωτη αν $f = f \circ \tau$ μ−σχεδόν παντού.

1.1.2 Ιδιότητες και κριτήρια εργοδικότητας

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως αν το σύστημα $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ περιέχει μη τετριμμένα αναλλοίωτα σύνολα τότε η εργοδική υπόθεση δεν μπορεί να ισχύει. Τα εργοδικά συστήματα είναι τα συστήματα τα οποία δεν περιέχουν μη τετριμμένα αναλλοίωτα σύνολα. Χονδρικά μιλώντας σε ένα εργοδικό σύστημα δεν μπορεί να υπάρξει ένα γνήσιο υποσύνολο καταστάσεων του Ω με θετικό μέτρο ώστε όταν το σύστημα βρεθεί μέσα σε αυτό να παραμείνει για πάντα σε αυτό.

Θα δούμε παρακάτω με το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff πως το όριο των χρονικών μέσων όρων υπάρχει (σχεδόν παντού) στο πλαίσιο των συστημάτων που διατηρούν το μέτρο. Όταν το σύστημα είναι εργοδικό και $\mu(\Omega) = 1$ τότε θα έχουμε ότι το όριο θα ισούται με $\int_\Omega f \, d\mu$.

Ορισμός 1.1.8 (Εργοδικότητα)**.** Ένα σ.δ.μ.μ $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ καλείται εργοδικό όταν δεν υπάρχει αναλλοίωτο σύνολο $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) > 0$ και $\mu(\Omega \setminus A) > 0$.

Παρατηρούμε πως αν το $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ λέγεται εργοδικό από την Πρόταση 1.1.6 θα έχουμε ότι για κάθε μ-σχεδόν αναλλοίωτο σύνολο $A \in \mathscr{A}$ θα ισχύει $\mu(A) = 0$ ή $\mu(\Omega \setminus A) = 0$. Πράγματι, αφού το σύνολο $A_\infty = \limsup_n \tau^{-n}(A)$ είναι αναλλοίωτο θα πρέπει $\mu(A_\infty) = 0$ ή $\mu(\Omega \setminus A_\infty) = 0$. Όμως, $\mu(A \triangle A_\infty) = 0$ και συνεπώς $\mu(A) = 0$ ή $\mu(\Omega \setminus A) = 0$.

Πρόταση 1.1.9. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ ένα εργοδικό σ.δ.μ με $\mu(\Omega) > 0$. Τότε, κάθε μ-σχεδόν αναλλλοίωτη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ είναι σχεδόν παντού σταθερή.*

Απόδειξη. Περνώντας σε πραγματικό και φανταστικό μέρος μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε και ότι $f \geq 0$ καθώς αν $f = f \circ \tau$ μ-σχεδόν παντού γράφοντας $f = f^+ - f^-$ θα έχουμε

$$(f \circ \tau)^+ = f^+ \circ \tau = f^+ \text{ και } (f \circ \tau)^- = f^- \circ \tau = f^-$$

μ-σχεδόν παντού και οι f^+, f^- είναι θετικές. Οπότε, αν η $f \geq 0$ είναι μ-σχεδόν αναλλοίωτη τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$, λόγω του εγκλεισμού

$$\begin{aligned}(\tau^{-1}(\{f < a\}))\triangle(\{f < a\}) &= (\{f \circ \tau < a\})\triangle(\{f < a\}) \\ &\subseteq \{f \circ \tau \neq f\}\end{aligned}$$

και επειδή $\mu(f \circ \tau \neq f) = 0$ θα έχουμε ότι $\mu(\tau^{-1}(\{f < a\})\triangle(\{f < a\})) = 0$, το οποίο σημαίνει ότι το $\{f < a\}$ είναι μ-σχεδόν αναλλοίωτο. Συνεπώς από την εργοδικότητα του συστήματος θα έχουμε $\mu(F_a) = 0$ ή $\mu(\Omega \setminus F_a) = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$, όπου $F_a = \{f < a\}$. Τώρα, αφού

$$\{f < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{f < n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

και η $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα θα ισχύει $\mu(f < \infty) = \lim_n \mu(F_n)$. Όμως, η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ άρα $\mu(f = \infty) = \mu(\emptyset) = 0$, απ' όπου έπεται ότι $\mu(f < \infty) = \mu(\Omega) > 0$. Έτσι θα υπάρχει n_0 με $\mu(F_{n_0}) > 0$. Αφού $f \geq 0$ θα ισχύει $\mu(f < 0) = 0$, συνεπώς το σύνολο $C = \{c \in \mathbb{R} : \mu(F_c) = 0\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επομένως, ο $c^* = \sup(C)$ είναι πραγματικός αριθμός. Ισχυριζόμαστε ότι $f = c^*$ μ-σχεδόν παντού. Πράγματι, αφού

$$F_{c^* - \frac{1}{n}} \nearrow F_{c^*} \text{ και } \mu(F_{c^* - \frac{1}{n}}) = 0,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε

$$\mu(F_{c^*}) = \lim_n \mu(F_{c^* - \frac{1}{n}}) = 0$$

απ' όπου έπεται ότι $f \geq c^*$ μ-σχεδόν παντού. Απο την άλλη μεριά αφού για κάθε $a > c^*$ έχουμε $\mu(F_a) > 0$ τότε $\mu(\Omega \setminus F_a) = 0$ για $a > c^*$. Δηλαδή, $\mu(\Omega \setminus F_{a+\frac{1}{n}}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\Omega \setminus F_{c^*+\frac{1}{n}})\Big) = 0$$

όμως $\Omega \setminus F_{c^*+\frac{1}{n}} \nearrow \{f > c^*\}$ απ' όπου έπεται ότι $\mu(f > c^*) = 0$ και συνεπώς $f \leq c^*$ μ-σχεδόν παντού. □

Κλείνουμε την παράγραφο με κάποιες ισοδύναμες μορφές της εργοδικότητας στο πλαίσιο των συστημάτων που διατηρούν το μέτρο στην περίπτωση που $\mu(\Omega) < \infty$.

Πρόταση 1.1.10. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ ένα σ.δ.μ με $\mu(\Omega) < \infty$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το σύστημα είναι εργοδικό.*

(ii) *Για κάθε μ-σχεδόν αναλλοίωτο σύνολο $A \in \mathscr{A}$ ισχύει $\mu(A) \in \{0, \mu(\Omega)\}$.*

(iii) *Για κάθε $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) > 0$ έχουμε $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-n}(A)) = \mu(\Omega)$.*

(iv) *Για κάθε* $A, B \in \mathscr{A}$ *με* $\mu(A)\mu(B) > 0$ *υπάρχει* $n \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $\mu(A \cap \tau^{-n}(B)) > 0$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Αν το A είναι μ-σχεδόν αναλλοίωτο τότε από την Πρόταση 1.1.6 θα έχουμε $\mu(A \triangle A_\infty) = 0$ και $\tau^{-1}(A_\infty) = A_\infty$. Από την εργοδικότητα του συστήματος θα πρέπει $\mu(A_\infty) \in \{0, \mu(\Omega\})$ και άρα $\mu(A) \in \{0, \mu(\Omega)\}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Για το σύνολο $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-n}(A)$ ισχύει ότι

$$\tau^{-1}(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(A) \subseteq B.$$

Αφού $\mu(\Omega) < \infty$ και το μ διατηρεί το μέτρο θα έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(B \setminus \tau^{-1}(B)) &= \mu(B) - \mu(\tau^{-1}(B)) \\ &= \mu(B) - \mu(B) = 0\end{aligned}$$

δηλαδή το B είναι μ-σχεδόν αναλλοίωτο και άρα $\mu(B) = 0$ ή $\mu(B) = \mu(\Omega)$. Όμως επειδή $A \subseteq B$ και $\mu(A) > 0$ θα πρέπει υποχρεωτικά $\mu(B) = \mu(\Omega)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Αφού $\mu(B) > 0$ θα έχουμε ότι $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-1}(B)) = \mu(\Omega)$ άρα

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-n}(B) \cap A\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-n}(B)\Big) + \mu(A) - \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-n}(B) \cup A\Big) \\ &= \mu(\Omega) + \mu(A) - \mu(\Omega) \\ &= \mu(A)\end{aligned}$$

και επειδή $\mu(A) > 0$ θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\mu(A \cap \tau^{-n}(B)) > 0$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Αν το σύστημα δεν είναι εργοδικό θα υπάρχει ένα αναλλοίωτο σύνολο A με $\mu(A) > 0$ και $\mu(\Omega \setminus A) > 0$. Όμως τότε θα έχουμε $\mu(A)\mu(\Omega \setminus A) > 0$ και επομένως θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\mu(A \cap \tau^{-n}(\Omega \setminus A)) > 0$. Ειδικότερα θα ισχύει $A \cap \tau^{-n}(\Omega \setminus A) \neq \emptyset$. Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς αφού το A είναι αναλλοίωτο θα έχουμε $\tau^{-1}(A) = A$ και άρα $\tau^{-1}(\Omega \setminus A) = \Omega \setminus A$. Οπότε, επειδή $\tau(\Omega \setminus A) = \tau(\tau^{-1}(\Omega \setminus A) \subseteq \Omega \setminus A$ θα έχουμε και $\tau^n(\Omega \setminus A) \subseteq \Omega \setminus A$ απ' όπου έπεται ότι $A \cap \tau^{-n}(\Omega \setminus A) = \emptyset$. □

1.2 Το θεώρημα του von Neumann

Για ένα χώρο Hilbert H και $T : H \to H$ ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή συμβολίζουμε με T^* τον συζυγή τελεστή του T για τον οποίο ισχύει $< Tf, g >=< f, T^*g >$ για $f, g \in H$ και $\|T\| = \|T^*\|$. Στην περίπτωση που $\|T\| \leq 1$ ο T θα καλείται συστολή.

Οι εξής συμβολισμοί θα χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά:

$$S_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} T^k \text{ και } A_n(T) = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} T^k$$

όπου $T^k = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{k-\text{φορές}}$. Όταν δεν τίθεται θέμα σύγχυσης από την ύπαρξη διαφορετικών τελεστών θα γράφουμε για το $n-$οστό μερικό άθροισμα $S_n(T)$ απλά S_n και για τους μέσους όρους $A_n(T)$

θα γράφουμε A_n. Παρατηρήστε ότι όταν ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής τότε είναι και οι S_n, A_n. Τέλος, με $F = F(T)$ συμβολίζουμε τον υπόχωρο που αποτελείται από όλα τα σταθερά σημεία του T. Δηλαδή,

$$F(T) = \{h \in H : Th = h\}$$

Το θεώρημα του von Neumann είναι το πρώτο εργοδικό θεώρημα που μας δίνει τη σύγκλιση των μέσων όρων $A_n(T)(h)$ για $h \in H$ και $T : H \to H$ συστολή. Η απόδειξη βασίζεται σε δύο λήμματα:

Λήμμα 1.2.1. *Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T : H \to H$ μια συστολή. Τότε, για $h \in H$ ισχύει $Th = h$ αν και μόνο αν $T^*h = h$. Με άλλα λόγια, $F(T) = F(T^*)$.*

Απόδειξη. Αν $Th = h$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|T^*h - h\right\|^2 &= \langle T^*h - h, T^*h - h\rangle \\
&= \langle T^*h, T^*h - h\rangle - \langle h, T^*h - h\rangle \\
&= \langle T^*h, T^*h\rangle - \langle T^*h, h\rangle - \langle h, T^*h\rangle + \langle h, h\rangle \\
&= \left\|T^*h\right\|^2 - \langle h, Th\rangle - \langle Th, h\rangle + \|h\|^2 \\
&= \left\|T^*h\right\|^2 - 2\|h\|^2 + \|h\|^2
\end{aligned}$$

όμως αφού ο T είναι συστολή τότε θα είναι και ο T^* Άρα, $\|T^*h\|^2 \leq \|h\|^2$ απ' όπου έπεται ότι $\|T^*h - h\|^2 \leq 2\|h\|^2 - 2\|h\|^2 = 0$. Δηλαδή, $T^*h = h$. Αν τώρα $T^*h = h$ τότε αντικαθιστώντας στη θέση του T^* τον T καταλήγουμε στο ότι $Th = h$. □

Από τη συνέχεια του T έπεται πως ο υπόχωρος $F = F(T)$ των σταθερών σημείων του T είναι κλειστός. Συνεπώς, $H = F \oplus F^{\perp}$. Το επόμενο λήμμα δίνει μια περιγραφή του $F^{\perp}$.

Λήμμα 1.2.2. *Έστω T μια συστολή σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε, $F^{\perp} = \overline{N}$ όπου $N = \{h - Th : h \in H\}$.*

Απόδειξη. Αν $h \in F$ τότε για κάθε $g \in H$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle g - Tg, h\rangle &= \langle g, h\rangle - \langle Tg, h\rangle \\
&= \langle g, h\rangle - \langle g, T^*h\rangle
\end{aligned}$$

όμως από το Λήμμα 1.2.1 $T^*h = h$. Άρα, $\langle g - Tg, h\rangle = 0$, απ' όπου έπεται ότι $g - Tg \in F^{\perp}$. Δηλαδή, $N \subseteq F^{\perp}$ και επειδή ο $F^{\perp}$ είναι κλειστός θα έχουμε $\overline{N} \subseteq F^{\perp}$. Αν τώρα $h \in \overline{N}^{\perp}$ τότε για κάθε $g \in H$ θα έχουμε $\langle g - Tg, h\rangle = 0$. Δηλαδή, $\langle g, h - T^*h\rangle = 0$ για κάθε $g \in H$, απ' όπου έπεται ότι $T^*h = h$, άρα και $Th = h$. Οπότε θα έχουμε $\overline{N}^{\perp} \subseteq F$ και συνεπώς $F^{\perp} \subseteq \left(\overline{N}^{\perp}\right)^{\perp}$. Όμως, αφού $H = \overline{N}^{\perp} \oplus \left(\overline{N}^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{N} \oplus \overline{N}^{\perp}$ θα πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει $\left(\overline{N}^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{N}$. Έτσι, παίρνουμε και τον αντίστροφο εγκλεισμό $F^{\perp} \subseteq \overline{N}$. □

Με P θα συμβολίζουμε την προβολή του H στον υπόχωρο $F = F(T)$ των σταθερών σημείων του T.

Θεώρημα 1.2.3 (Εργοδικό θεώρημα von Neumann). *Έστω T μια συστολή σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε, $\|A_n h - Ph\| \to 0$, δηλαδή*

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k h - Ph \right\| \to 0 \tag{1.2.1}$$

καθώς το $n \to \infty$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.2.2 έχουμε $H = F \oplus \overline{N}$. Άρα για $h \in H$ θα υπάρχουν $Ph = f \in F$ και $g \in \overline{N}$ με $h = f + g$. Τότε, αφού $T^k f = f$ για κάθε k θα έχουμε και $A_n f = f$ για κάθε n. Ισχυριζόμαστε ότι $\|A_n g\| \to 0$. Πράγματι, για $\epsilon > 0$ θα υπάρχει $\phi \in H$ με

$$\|g - (\phi - T\phi)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\|A_n h\| &= \|A_n h - A_n(\phi - T\phi) + A_n(\phi - T\phi)\| \\ &\leq \|A_n(h - \phi + T\phi)\| + \|A_n(\phi - T\phi)\| \\ &\leq \|A_n\| \, \|h - (\phi - T\phi)\| + \|A_n(\phi - T\phi)\| .\end{aligned}$$

Όμως, αφού ο T είναι συστολή έχουμε $\|A_n\| = n^{-1} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} T^k \right\| \leq 1$ και

$$\begin{aligned}\|A_n(\phi - T\phi)\| &= n^{-1} \left\| \phi - T^n \phi \right\| \\ &\leq n^{-1} 2 \, \|\phi\|\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\|A_n(\phi - T\phi)\| \to 0$. Συνεπώς, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\|A_n(\phi - T\phi)\| < \epsilon/2$. Οπότε, συνοψίζοντας, για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\|A_n h\| &\leq \|A_n\| \, \|h - (\phi - T\phi)\| + \|A_n(\phi - T\phi)\| \\ &\leq \|h - (\phi - T\phi)\| + \|A_n(\phi - T\phi)\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα $\|A_n h - Ph\| = \|A_n g\| \to 0$ καθώς το $n \to \infty$. □

Αναδιατυπώνοντας το θεώρημα του von Neumann στο πλαίσιο των συστημάτων που διατηρούν το μέτρο και με T τον τελεστή Koopman U_τ έχουμε:

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ ένα σ.δ.μ. Τότε, για κάθε $f \in L_2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ υπάρχει μια $\tau-$αναλλοίωτη συνάρτηση $\tilde{f} \in L_2(\mu)$ ώστε $\left\| A_n(U_\tau) f - \tilde{f} \right\|_2 \to 0$, δηλαδή*

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \tau^k - \tilde{f} \right\|_2 \to 0 \tag{1.2.2}$$

καθώς το $n \to \infty$.

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο πως αν $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $\mathscr{B}$ είναι μια υποάλγεβρα της $\mathscr{A}$ τότε από το θεώρημα Radon-Nikodym για κάθε $f \in L_1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ υπάρχει μια μ-σχεδόν παντού μοναδική, $\mathscr{B}$-μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση g με

$$\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu \quad \text{για κάθε } A \in \mathscr{B}. \tag{1.2.3}$$

Η συνάρτηση g είναι η δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathscr{B}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{E}(f\,|\,\mathscr{B})$.

Θεωρώντας τώρα την υποοικογένεια $\mathscr{B}$ της $\mathscr{A}$ που αποτελείται από όλα τα αναλλοίωτα σύνολα παρατηρούμε ότι η $\mathscr{B}$ είναι σ-άλγεβρα στον Ω και πως κάθε κάθε $\mathscr{A}-$μετρήσιμη συνάρτηση f είναι αναλλοίωτη αν και μόνο αν είναι $\mathscr{B}-$μετρήσιμη. Πράγματι, για τον τελευταίο ισχυρισμό περνώντας αν χρειαστεί σε πραγματικό και φανταστικό μέρος μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές. Τότε, αν είναι αναλλοίωτη έχουμε πως για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{f < a\}$ είναι αναλλοίωτο και έτσι $\{f < a\} \in \mathscr{B}$. Δηλαδή η f είναι $\mathscr{B}$-μετρήσιμη. Αντίστροφα, αν η f είναι $\mathscr{B}-$μετρήσιμη τότε το σύνολο $\{f < a\}$ είναι αναλλοίωτο για κάθε a. Άρα, γράφοντας

$$\begin{aligned}
\{f \neq f \circ \tau\} &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q < f \circ \tau\}) \\
&= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{q < f \circ \tau\}) \\
&= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \tau^{-1}(\{q < f\}))
\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $(\{f < q\} \cap \tau^{-1}(\{q < f\}) = \emptyset$ θα έχουμε και $\{f \neq f \circ \tau\} = \emptyset$. Οπότε, για κάθε $x \in X$ θα ισχύει $f(x) = f(\tau(x))$, άρα η f είναι αναλλοίωτη.

Σε ένα σ.δ.μ $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ με $\mu(\Omega) < \infty$ μπορούμε να περιγράψουμε το όριο Pf για $f \in L_2$ ως τη δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathscr{B}$.

Πρόταση 1.2.5. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ ένα σ.δ.μ με $\mu(\Omega) < \infty$. Τότε, για κάθε $f \in L_2(\mu)$ η προβολή Pf ισούται με τη δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathscr{B}$. Δηλαδή, $Pf = \mathbb{E}(f \mid \mathscr{B})$.*

Απόδειξη. Αφού η προβολή Pf είναι $\tau-$αναλλοίωτη από τις παραπάνω παρατηρήσεις θα έχουμε ότι είναι και $\mathscr{B}-$μετρήσιμη. Επειδή το μ είναι πεπερασμένο έχουμε $L_2(\mu) \subsetneq L_1(\mu)$ και έτσι θα υπάρχει η $\mathbb{E}(f \mid \mathscr{B})$. Για να δείξουμε ότι $Pf = \mathbb{E}(f \mid \mathscr{B})$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_A Pf\, d\mu = \int_A \mathbb{E}(f \mid \mathscr{B})\, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathscr{B}$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και τη σύγκλιση $\|A_n f - Pf\|_2 \to 0$ θα έχουμε ότι $\langle A_n f, g\rangle \to \langle Pf, g\rangle$ για κάθε $g \in L_2(\mu)$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο η $g = \mathbb{1}_A$ για

$A \in \mathscr{B}$ θα ανήκει στον $L_2(\mu)$, συνεπώς

$$\begin{aligned}\langle A_n f, \mathbb{1}_A\rangle &= \frac{1}{n}\langle \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \tau^k, \mathbb{1}_A\rangle \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_\Omega f \circ \tau^k \cdot \overline{\mathbb{1}_A}\, d\mu \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_A f \circ \tau^k\, d\mu.\end{aligned}$$

Όμως, το A είναι αναλλοίωτο, άρα $\int_A f \circ \tau^k\, d\mu = \int_A f\, d\mu$ για κάθε k. Πράγματι, για τον τελευταίο ισχυρισμό εργαζόμαστε με την κλασική διαδικασία. Αν η f είναι χαρακτηριστική της μορφής $\mathbb{1}_B$ για $B \in \mathscr{A}$ τότε αφού $\tau^{-k}(A) = A$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_A f \circ \tau^k\, d\mu &= \int_A \mathbb{1}_{\tau^{-k}(B)}\, d\mu \\ &= \int_\Omega \mathbb{1}_{\tau^{-k}(B)\cap A}\, d\mu \\ &= \mu(\tau^{-k}(B) \cap A),\end{aligned}$$

όμως $\mu(\tau^{-k}(B)\cap A) = \mu(\tau^k(B)\cap\tau^{-k}(A)) = \mu(\tau^{-k}(A\cap B)) = \mu(A\cap B) = \int_A f\, d\mu$. Οπότε τώρα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος θα ισχύει και για απλές, ύστερα με το θεώρημα μονότονης και κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε το ζητούμενο για $f \geq 0$ και για γενική ολοκληρώσιμη f αντίστοιχα. Άρα αφού $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\int_A f \circ \tau^k\, d\mu = \int_A f\, d\mu$ θα έχουμε

$$\langle A_n f, \mathbb{1}_A\rangle \to \int_A f\, d\mu$$

και επειδή $\langle A_n f, \mathbb{1}_A\rangle \to \langle Pf, \mathbb{1}_A\rangle$ θα έχουμε $\int_A f\, d\mu = \int_A Pf\, d\mu$. Όμως, από την (1.2.3) έχουμε $\int_A f\, d\mu = \int_A \mathbb{E}(f \mid \mathscr{B})$ για $A \in \mathscr{B}$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Η περιγραφή του ορίου Pf ως τη δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathscr{B}$ των αναλλοίωτων υποσυνόλων του Ω (για $\mu(\Omega) < \infty$) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ακριβώς το όριο Pf στην περίπτωση που το σύστημα είναι εργοδικό. Πράγματι, από την Πρόταση 1.1.9 η Pf θα πρέπει να είναι σταθερή σχεδόν παντού. Άρα αν $Pf = c$ τότε από την ισότητα $\int_X f\, d\mu = \int_X Pf\, d\mu$ θα έχουμε ότι $c = \mu(\Omega)^{-1}\int_X f\, d\mu$. Δηλαδή, $Pf = \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_X f\, d\mu$. Φυσικά στην περίπτωση που $\mu(\Omega) = 1$ θα έχουμε ότι

$$\left\|\frac{f + f\circ\tau + \ldots + f\circ\tau^{k-1}}{n} - \int_X f\, d\mu\right\|_2 \to 0$$

επιβεβαιώνοντας με αυτό τον τρόπο την εργοδική υπόθεση ως προς την L_2 σύγκλιση.

1.3 Το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε μια απόδειξη του εργοδικού θεωρήματος του Birkhoff. Σε αντίθεση με το θεώρημα του von Neumann, αυτή τη φορά ενδιαφερόμαστε για την κατά σημείο σύγκλιση (σχεδόν παντού) των μέσων όρων

$$A_n(U_\tau)(f) = \frac{f + f \circ \tau + \ldots + f \circ \tau^{n-1}}{n},$$

για κάποια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύστημα $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ που διατηρεί το μέτρο.

Θυμίζουμε ότι για ένα τελεστή $T : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ και $f \in L_p(\mu)$, $S_n(T)(f) = S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} T^k$ και $A_n(T)(f) = A_n(f) = n^{-1}S_n(f)$. Επιπλέον, θα γράφουμε

$$M_n^S = \max\{S_1(f), \ldots, S_n(f)\},$$

$$M_n = \max\{A_1(f), \ldots, A_n(f)\}$$

και $M_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} M_n(f)$.

Κεντρικό ρόλο στην απόδειξη του κατά σημείο εργοδικού θεωρήματος παίζει το μεγιστικό εργοδικό θεώρημα το οποίο ανακαλύφθηκε στην περίπτωση των μετασχηματισμών τ που διατηρούν το μέτρο από τους Yosida-Kakutani (1939-[21]) και για γενικές θετικές συστολές στον $L_1(\mu)$ από τον Hopf (1954-[10]).

Ορισμός 1.3.1 (Θετική συστολή)**.** Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $T : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ μια συστολή ($\|T\| \le 1$). Η T είναι θετική όταν $Tf \ge 0$ μ-σχεδόν παντού για κάθε $f \in L_1(\mu)$ με $f \ge 0$ μ-σχεδόν παντού.

Θεώρημα 1.3.2 (Μεγιστικό εργοδικό θεώρημα)**.** *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και T : $L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ μια θετική συστολή. Τότε, για κάθε $f \in L_1(\mu)$ έχουμε ότι*

$$\int_{\{M_n(f)\ge 0\}} f\, d\mu \ge 0 \tag{1.3.1}$$

και

$$\int_{\{M_\infty(f)\ge 0\}} f\, d\mu \ge 0. \tag{1.3.2}$$

Απόδειξη. Το επιχείρημα οφείλεται στον Garsia (1965-[9]). Θέτουμε $E_n = \{M_n(f) \ge 0\} = \{M_n^S(f) \ge 0\}$ και $E = \{M_\infty(f) \ge 0\}$ και παρατηρούμε ότι $E_n \subseteq E_{n+1}$ και $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = E$. Για να δείξουμε την (1.3.1), αφού για $k = 1, \ldots, n$ έχουμε $(M_n^S(f))^+ \ge S_k(f)$ και επειδή ο T είναι θετικός θα έχουμε και $T(M_n^S(f))^+ \ge TS_k(f) = S_{k+1}(f) - f$. Δηλαδή, $T(M_n^S(f))^+ + f \ge S_{k+1}(f)$ για $k = 1, \ldots, n$. Όμως, επειδή $T(M_n(f))^+ + f \ge S_1 f = f$ θα έχουμε ότι $T(M_n^S(f))^+ + f \ge S_k(f)$ για $k = 1, \ldots, n$. Δηλαδή, $T(M_n^S(f))^+ + f \ge M_n^S(f)$. Οπότε, γράφοντας

$$\int_{E_n} f d\mu \ge \int_{E_n} M_n^S(f) d\mu - \int_{E_n} T(M_n^S(f))^+ d\mu$$

και χρησιμοποιώντας την $\int_{E_n} T(M_n^S(f))^+ d\mu \le \int_\Omega (M_n^S(f))^+ d\mu$ (Τ συστολή) θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{E_n} f d\mu &\ge \int_{E_n} M_n^S(f) d\mu - \int_\Omega (M_n(f))^+ d\mu \\ &= \int_\Omega (M_n^S(f))^+ d\mu - \int_\Omega (M_n(f))^+ d\mu,\end{aligned}$$

δηλαδή $\int_{E_n} f d\mu \geq 0$ αποδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο την (1.3.1). Για την (1.3.2) αφού $f \cdot \mathbb{1}_{E_n} \xrightarrow{n\to\infty} f \cdot \mathbb{1}_E$ και $|f \cdot \mathbb{1}_{E_n}| \leq |f|$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης θα έχουμε ότι

$$\int_{E_n} f d\mu \to \int_E f d\mu$$

καθώς το $n \to \infty$. Συνεπώς, επειδή $\int_{E_n} f d\mu \geq 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, θα έχουμε και $\int_E f d\mu \geq 0$. □

Πόρισμα 1.3.3 (Μεγιστική ανισότητα). *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ ένα σ.δ.μ. Τότε,*

$$\mu(M_n(f) \geq a) \leq \frac{\|f\|_1}{a} \tag{1.3.3}$$

για κάθε $f \in L_1(\mu)$ με πραγματικές τιμές και $a > 0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $A_k = \{|f| \geq 1/k\}$ και $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Απ' την ολοκληρωσιμότητα της f και επειδή η τ διατηρεί το μέτρο μ θα έχουμε $\mu(\tau^{-n}A_k) < \infty$ για κάθε n, k. Συμβολίζουμε $A_{n,k} = \tau^{-n}A_k$ για $n = 0, 1, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ και θέτουμε $B_N = \bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{k=1}^{N} A_{n,k}$ και $B = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$. Αφού κάθε $A_{n,k}$ έχει πεπερασμένο μετρο θα έχουμε ότι $\mu(B_N) < \infty$, επίσης $B_N \subseteq B_{N+1}$. Τώρα, αν $\omega \notin B$ επειδή $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-n}A$ θα έχουμε ότι $f \circ \tau^n(\omega) = 0$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots$. Δηλαδή, $M_n(f)(\omega) = 0$ για κάθε $\omega \notin B$ το οποίο με τη σειρά του μας δίνει ότι $\{M_n(f) \geq a\} \subseteq B$. Επομένως, αν αποδείξουμε ότι

$$\mu(B_N \cap \{M_n(f) \geq a\}) \leq \frac{\|f\|_1}{a}, \tag{1.3.4}$$

αφήνοντας το $N \to \infty$ και χρησιμοποιώντας την $\mu(B_N \cap \{M_n(f) \geq a\}) \to \mu(M_n(f) \geq a)$ θα έχουμε αποδείξει την (1.3.3). Για να δείξουμε την (1.3.4) θεωρούμε τη συνάρτηση $g = f - a\mathbb{1}_{B_N}$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη εξαιτίας της $\mu(B_N) < \infty$. Άρα, από το μεγιστικό εργοδικό θεώρημα έχουμε ότι

$$\int_{\{M_n(g)\geq 0\}} f d\mu \geq a\mu(\{M_n(g) \geq 0\} \cap B_N). \tag{1.3.5}$$

Όμως τώρα, για $\omega \in \{M_n(f) \geq a\}$ θα υπάρχει $1 \leq k \leq n$ με $S_k(f)(\omega) \geq ka$. Αλλά, $ka \geq a\sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{1}_{\tau^{-i}(B_N)} = aS_k(\mathbb{1}_{B_N})$, απ' όπου έπεται ότι $S_k(g) = S_k(f - \mathbb{1}_{B_N})(\omega) \geq 0$. Δηλαδή, $\omega \in \{M_n(g) \geq 0\}$ και κατά συνέπεια θα έχουμε ότι $\{M_n(f) \geq a\} \subseteq \{M_n(g) \geq 0\}$. Οπότε τώρα, από την (1.3.5) θα έχουμε ότι

$$\int_\Omega |f| d\mu \geq \int_{\{M_n(g)\geq 0\}} f d\mu \geq a\mu(\{M_n(f) \geq a\} \cap B_N)$$

αποδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο την (1.3.4). □

Θεώρημα 1.3.4 (Εργοδικό θεώρημα Birkhoff). *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ ένα σ.δ.μ και $f \in L_1(\mu)$ (πραγματική ή μιγαδική). Τότε, οι μέσοι όροι $A_n(f)$ συγκλίνουν μ-σχεδόν παντού σε μια τ-αναλλοίωτη συνάρτηση $\tilde{f}$ με $\|\tilde{f}\|_1 \leq \|f\|_1$. Επιπλέον, για κάθε τ−αναλλοίωτο σύνολο $A \in \mathscr{A}$ $(\tau^{-1}A = A)$ με $\mu(A) < \infty$ ισχύει ότι*

$$\int_A f d\mu = \int_A \tilde{f} d\mu. \tag{1.3.6}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα την περίπτωση που η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f^* = \limsup_n A_n(f)$ και $f_* = \liminf_n A_n(f)$. Από την ταυτότητα

$$A_{n+1}(f) = (n+1)^{-1}f + \frac{n}{n+1}(A_n(f) \circ \tau) \tag{1.3.7}$$

και από τις $(n+1)^{-1}f(\omega) \to 0$ και $n/(n+1) \to 1$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι f^*, f_* είναι τ-αναλλοίωτες. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ένα $\omega \in \Omega$ και μια υπακολουθία $A_{k_n+1}(f)(\omega) \to f^*(\omega)$. Τότε, θα έχουμε

$$A_{k_n}(f)(\tau(\omega)) = \frac{k_n+1}{k_n}A_{k_n+1}(f)(\omega) - \frac{f(\omega)}{k_n}$$

απ' όπου έπεται ότι $A_{k_n}(f)(\tau(\omega)) \to f^*(\omega)$. Άρα, θα έχουμε $f^*(\omega) \leq f^*(\tau(\omega))$. Αυτό δείχνει ότι $f^* \leq f^* \circ \tau$. Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε μια υπακολουθία $A_{k_n}(f)(\tau(\omega)) \to f^*(\tau(\omega))$. Τότε, από την (1.3.7) θα έχουμε

$$A_{k_n+1}(f)(\omega) = (k_n+1)^{-1}f(\omega) + \frac{k_n}{k_n+1}(A_{k_n}(f)(\tau(\omega))$$

οπότε, αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε $A_{k_n+1}(f)(\omega) \to f^*(\tau(\omega))$, απ' όπου έπεται ότι $f^*(\tau(\omega)) \leq f^*(\omega)$. Άρα, $f^* \circ \tau \leq f^*$ και έτσι η f^* είναι $\tau-$αναλλοίωτη. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι και η f_* είναι $\tau-$αναλλοίωτη. Τώρα, ισχυριζόμαστε ότι $\mu(f^* = \infty) = \mu(f_* = -\infty) = 0$. Πράγματι, θέτουμε $D_a = \{f^* > a\}$. Τότε, $D_a \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\{M_n(f) \geq a\}$. Όμως, από την μεγιστική ανισότητα έχουμε

$$\mu(D_a) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(M_n(f) \geq a) \leq \frac{\|f\|_1}{a}.$$

Άρα, αφού $\{f^* = \infty\} \subseteq D_a$ για κάθε $a > 0$, αφήνοντας το $a \to \infty$ καταλήγουμε στο ότι $\mu(f^* = \infty) = 0$. Για να δείξουμε ότι $\mu(f_* = -\infty) = 0$, θεωρούμε τα σύνολα $D'_a = \{f_* < a\}$ για $a < 0$. Γράφοντας, $f_* = -\limsup_n A_n(-f)$ έχουμε ότι $D'_a = \{\limsup_n A_n(-f) > -a\}$. Όμως, $D'_a \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\{M_n(-f) \geq -a\}$, άρα χρησιμοποιώντας τη μεγιστική ανισότητα για την $-f$ θα έχουμε ότι

$$\mu(D'_a) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(M_n(-f) \geq -a) \leq \frac{\|f\|_1}{|a|}.$$

Όμως, $\mu(f_* = -\infty) \leq \mu(D'_a)$ για κάθε $a < 0$, οπότε, αφήνοντας το $a \to -\infty$ θα έχουμε ότι $\mu(f_* = -\infty) = 0$. Ας υποθέσουμε τώρα, πως $\mu(f_* < f^*) > 0$. Τότε, επειδή

$$\{\omega \in \Omega : f_*(\omega) < f^*(\omega)\} = \bigcup_{a,\beta\in\mathbb{Q}} \{f_* < a < \beta < f^*\},$$

θα υπάρχουν $a, \beta \in \mathbb{Q}$ με $\mu(E_{a,\beta}) > 0$, όπου $E_{a,\beta} = \{f_* < a < \beta < f^*\}$. Αν $\beta > 0$ θα έχουμε $E_{a,\beta} \subseteq D_\beta$ απ' όπου έπεται ότι

$$\mu(E_{a,\beta}) \leq \mu(D_\beta) \leq \frac{\|f\|_1}{\beta} < \infty.$$

Στην περίπτωση που $\beta \leq 0$, επειδή $a \neq \beta$ θα έχουμε $a < 0$, άρα $E_{a,\beta} \subseteq D'_a$ το οποίο μας δίνει με τη σειρά του ότι

$$\mu(E_{a,\beta}) \leq \mu(D'_a) \leq \frac{\|f\|_1}{|a|} < \infty.$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση έχουμε $\mu(E_{a,\beta}) < \infty$. Συνεπώς, οι συναρτήσεις $g_a = (a - f) \cdot \mathbb{1}_{E_{a,\beta}}$ και $g_\beta = (f - \beta) \cdot \mathbb{1}_{E_{a,\beta}}$ είναι ολοκληρώσιμες και μηδενίζονται έξω από το σύνολο $E_{a,\beta}$. Επειδή οι f^*, f_* είναι τ−αναλλοίωτες το σύνολο $E_{a,\beta}$ θα είναι και αυτό τ−αναλλοίωτο. Άρα, $S_n(g_a) = \sum_{k=0}^{n-1}(f \circ \tau^k - \beta) \cdot \mathbb{1}_{E_{a,\beta}}$ και $S_n(g_\beta) = \sum_{k=0}^{n-1}(a - f \circ \tau^i) \cdot \mathbb{1}_{E_{a,\beta}}$ απ' όπου έπεται ότι οι $S_n(g_a)$, $S_n(g_\beta)$ μηδενίζονται έξω από το $E_{a,\beta}$. Άρα, $\{M_n(g_a) > 0\} \subseteq E_{a,\beta}$ και $\{M_n(g_\beta) > 0\} \subseteq E_{a,\beta}$ για κάθε n. Συνεπώς, $\{M_\infty(g_\beta) > 0\} \subseteq E_{a,\beta}$ και $\{M_\infty(g_a) > 0\} \subseteq E_{a,\beta}$. Θα δείξουμε ότι $E_{a,\beta} = \{M_\infty(g_\beta) > 0\} = \{M_\infty(g_a) > 0\}$. Πράγματι, αν $\omega \in E_{a,\beta}$ τότε αφού $f^*(\omega) > \beta$ θα υπάρχει n_1 ώστε $A_{n_1}(f)(\omega) > \beta = \beta \cdot \mathbb{1}_{E_{a,\beta}}(\omega) = \frac{\beta}{n_1} S_{n_1}(\mathbb{1}_{E_{a,\beta}})(\omega)$ απ' όπου έπεται ότι $M_{n_1}(g_\beta)(\omega) > 0$. Δηλαδή, $\omega \in \{M_\infty(g_\beta) > 0\}$ απ' όπου έπεται ότι $E_{a,\beta} \subseteq \{M_\infty(g_\beta) > 0\}$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε και τον εγκλεισμό $E_{a,\beta} \subseteq \{M_n(g_a) > 0\}$. Άρα, χρησιμοποιώντας την (1.3.2) εναλλάξ για τις g_β, g_a θα έχουμε από την μία

$$\int_{E_{a,\beta}} f d\mu \geq \beta\mu(E_{a,\beta})$$

και απ' την άλλη

$$a\mu(E_{a,\beta}) \geq \int_{E_{a,\beta}} f d\mu$$

απ' όπου έπεται ότι $a\mu(E_{a,\beta}) \geq \beta\mu(E_{a,\beta})$ και επειδή έχουμε υποθέσει ότι $\mu(E_{a,\beta}) > 0$ θα έχουμε ότι $a \geq \beta$ καταλήγοντας σε άτοπο. Άρα, τελικά $\mu(f_* < f^*) = 0$ απ' όπου έπεται ότι το $\lim A_n(f) = \tilde{f} = f^* = f_*$ υπάρχει μ-σχεδόν παντού και η $\tilde{f}$ είναι μετρήσιμη και τ−αναλλοίωτη. Για να δείξουμε ότι $\|\tilde{f}\|_1 \leq \|f\|_1$ γράφουμε $f = f^+ - f^-$. Από την παραπάνω διαδικασία έχουμε ότι οι $f_1 = \lim_n A_n(f^+)$, $f_2 = \lim_n A_n(f^-)$ ορίζονται μ-σχεδόν παντού και $0 \leq f_1, f_2 < \infty$ μ-σχεδόν παντού. Άρα, αφού $A_n(f) = A_n(f^+) - A_n(f^-)$ θα έχουμε ότι $\tilde{f} = f_1 - f_2$ μ-σχεδόν παντού. Δηλαδή, $|\tilde{f}| \leq f_1 + f_2$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Fatou και την Πρόταση 1.1.3 θα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_1 d\mu &= \int_\Omega \liminf_n A_n(f^+) d\mu \\ &\leq \liminf_n \int_\Omega A_n(f^+) d\mu \\ &\leq \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_\Omega f^+ \circ \tau^k d\mu \\ &= \int_\Omega f^+ d\mu.\end{aligned}$$

Ομοίως για την f_2 θα έχουμε $\int_\Omega f_2 d\mu \leq \int_\Omega f^- d\mu$, απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\tilde{f}| d\mu &\leq \int_\Omega f_1 d\mu + \int_\Omega f_2 d\mu \\ &\leq \int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega f^- d\mu \\ &= \int_\Omega |f| d\mu.\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, $\|\tilde{f}\|_1 \leq \|f\|_1$. Για να αποδείξουμε την (1.3.6) υποθέτουμε πρώτα ότι $A = \Omega$ και $\mu(\Omega) < \infty$. Θεωρούμε ένα $\epsilon > 0$. Τότε, από την ολοκληρωσιμότητα της f θα υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\int_{\{|f| > M\}} |f| d\mu < \epsilon.$$

Θέτουμε $A_M = \{|f| \leq M\}$ και γράφουμε $f = f \cdot \mathbb{1}_{A_M} + f \cdot \mathbb{1}_{A_M^c}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|A_n(f)| - M)^+ d\mu \leq& \int_\Omega (|A_n(f \cdot \mathbb{1}_{A_M})| - M)^+ \, d\mu \\ &+ \int_{\{|A_n(f)|>M\}} |A_n(f \cdot \mathbb{1}_{A_M^c})| \, d\mu.\end{aligned}$$

Όμως $A_n(f \cdot \mathbb{1}_{A_M}) = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \tau^k \mathbb{1}_{\tau^{-k}A_M}$ και επειδή $|f| \circ \tau^k \leq M$ στο $\tau^{-k}A_M$ θα έχουμε

$$|A_n(f \cdot \mathbb{1}_{A_M})| \leq A_n(|f| \cdot \mathbb{1}_{A_M}) \leq M$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\int_\Omega (|A_n(f \cdot \mathbb{1}_{A_M})| - M)^+ = 0,$$

άρα

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|A_n(f)| - M)^+ d\mu \leq& \int_{\{|A_n(f)|>M\}} |A_n(f \cdot \mathbb{1}_{A_M^c})| \, d\mu \\ \leq& \int_\Omega A_n(|f| \cdot \mathbb{1}_{A_M^c}) \, d\mu \\ =& \int_{\{|f|>M\}} |f| \, d\mu\end{aligned}$$

και έτσι θα έχουμε ότι $\int_\Omega (|A_n(f)| - M)^+ d\mu < \epsilon$ για κάθε n. Με άλλα λόγια, η $(A_n(f))_{n=1}^\infty$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη (βλ. (2.1.7)). Άρα, από την Πρόταση 2.1.9-(iii) και από την ολοκληρωσιμότητα της $\tilde{f}$ θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\int_A |A_n(f)| \, d\mu < \frac{\epsilon}{3}$ και $\int_A |\tilde{f}| \, d\mu < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) < \delta$. Επειδή $A_n(f) \xrightarrow{\sigma.\pi} \tilde{f}$ και $\mu(\Omega) < \infty$ θα έχουμε ότι $\mu(A_n^\epsilon) \to 0$ όπου $A_n^\epsilon = \left\{ \left| A_n(f) - \tilde{f} \right| > \frac{\epsilon}{3\mu(X)} \right\}$. Συνεπώς, θα υπάρχει n_0 ώστε $\mu(A_n^\epsilon) < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, γράφοντας

$$\begin{aligned}\int_\Omega |A_n(f) - \tilde{f}| \, d\mu =& \int_{\Omega \setminus A_n^\epsilon} |A_n(f) - \tilde{f}| \, d\mu + \int_{A_n^\epsilon} |A_n(f) - \tilde{f}| \, d\mu \\ \leq& \mu(A_n^\epsilon) \frac{\epsilon}{2\mu(X)} + \int_{A_n^\epsilon} |A_n(f)| \, d\mu + \int_{A_n^\epsilon} |\tilde{f}| \, d\mu\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\mu(A_n^\epsilon) < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε $\left\| A_n(f) - \tilde{f} \right\|_1 < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, $\left\| A_n(f) - \tilde{f} \right\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$. Ειδικότερα, $\int_\Omega A_n(f) \, d\mu \to \int_\Omega \tilde{f} \, d\mu$. Όμως,

$$\int_\Omega A_n(f) \, d\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_\Omega f \circ \tau^k \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$$

απ' όπου έπεται ότι $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega \tilde{f} \, d\mu$. Για γενικό τ−αναλλοίωτο σύνολο A με $\mu(A) < \infty$ περιοριζόμαστε στο υποσύστημα $(A, \mathscr{A}_A, \mu_A, \tau|_A)$ όπου $\mathscr{A}_A = \{B \subseteq A : B \in \mathscr{A}\}$, $\mu_A(B) = \mu(B)$ για κάθε $B \in \mathscr{A}_A$. Τέλος, αν η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, χωρίζοντας σε πραγματικό και φανταστικό μέρος $f = u + iv$, θα υπάρχουν δύο τ−αναλλοίωτες συναρτήσεις $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ με $A_n(u) \to \tilde{u}$ και $A_n(v) \to \tilde{v}$ μ-σχεδόν παντού. Τότε, θα έχουμε $A_n(f) = A_n(u) + iA_n(v) \to \tilde{u} + i\tilde{v} = \tilde{f}$, μ-σχεδόν παντού και η $\tilde{f}$ είναι τ−αναλλοίωτη. Για να δείξουμε ότι $\left\|\tilde{f}\right\|_1 \leq \|f\|$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $|A_n(f)| \leq A_n(|f|)$. Όπου τώρα το $A_n(|f|)$ υπάρχει μ-σχεδόν παντού. Άρα από το λήμμα του Fatou

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\tilde{f}|\,d\mu &\leq \liminf_n \int_\Omega |A_n(f)|\,d\mu \\ &\leq \liminf_n \int_\Omega A_n(|f|)\,d\mu.\end{aligned}$$

Όμως, $\int_\Omega A_n(|f|)\,d\mu = \int_\Omega |f|\,d\mu$, απ' όπου έπεται ότι $\int_\Omega |\tilde{f}|\,d\mu \leq \int_\Omega |f|\,d\mu$ όπως θέλαμε. □

Παρατηρούμε τώρα, πως στην περίπτωση που το σύστημα είναι εργοδικό και $\mu(\Omega) = \infty$, αφού η $\tilde{f}$ είναι σταθερή και ολοκληρώσιμη θα πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει $\tilde{f} = 0$ μ-σχεδόν παντού. Άρα, σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$\frac{f + f\circ\tau + \ldots + f\circ\tau^{n-1}}{n} \to 0$$

σχεδόν παντού. Απ' την άλλη, αν το σύστημα είναι εργοδικό και $0 < \mu(\Omega) < \infty$ τότε θα έχουμε $\tilde{f} = \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f\,d\mu$. Δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε

$$\frac{f + f\circ\tau + \ldots + f\circ\tau^{n-1}}{n} \to \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f\,d\mu$$

μ-σχεδόν παντου. Ειδικότερα, αν $\mu(\Omega) = 1$ τότε

$$\frac{f + f\circ\tau + \ldots + f\circ\tau^{n-1}}{n} \to \int_\Omega f\,d\mu$$

μ-σχεδόν παντού, επιβεβαιώνοντας με αυτό τον τρόπο την εργοδική υπόθεση του Boltzmann.

1.4 Επαναφορά

1.4.1 Το conservative και το dissipative μέρος ενός μετασχηματισμού

Θεωρούμε $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένα χώρο σ-πεπερασμένου μέτρου και $\tau : \Omega \to \Omega$ ένα μετασχηματισμό που διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα. Όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχουν δύο ξένα σύνολα C, D με $\Omega = C \cup D$ τα οποία καθορίζονται μοναδικά (αν εξαιρέσουμε τα σύνολα μέτρου μηδέν) απ' τις εξής ιδιότητες:

(i) Αν $A \subseteq C$, τότε σχεδόν κάθε σημείο του A επανέρχεται άπειρες φορές στο A.

(ii) Το D είναι το πολύ αριθμήσιμη ξένη ένωση συνόλων D_n όπου κανένα στοιχείο του D_n δεν επιστρέφει ξανά στο D_n.

Με άλλα λόγια, σε κάθε σ.δ.μ.μ (με μ σ-πεπερασμένο) ο χώρος Ω διασπάται σε δύο σύνολα C, D, όπου αντιθέτως με το D, στο C μπορούμε κατά κάποιο τρόπο να προβλέψουμε την εξέλιξη του συστήματος. Η παραπάνω διάσπαση είναι η διάσπαση Hopf του Ω και όπως θα δούμε και στο 3ο κεφάλαιο ισχύει και στο γενικότερο πλαίσιο των θετικών συστολών στον $L_1(\mu)$.

Ορισμός 1.4.1. Θεωρούμε ένα χώρο σ-πεπερασμένου μέτρου $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ και $\tau : \Omega \to \Omega$ ένα μετασχηματισμό που διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα. Ένα σύνολο $W \in \mathscr{A}$ θα ονομάζεται περιπλανώμενο (wandering) αν τα σύνολα $(\tau^{-k}W)_{k=0}^{\infty}$ είναι ξένα ανά δύο. Επίσης, θα λέμε ότι:

(i) ο τ είναι επανερχόμενος (recurrent) αν για κάθε $A \in \mathscr{A}$ ισχύει $\mu(A \setminus A_{\mathrm{ret}}) = 0$, όπου $A_{\mathrm{ret}} = A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau^{-1} A)$ το σύνολο των σημείων του A που επανέρχονται στο A.

(ii) ο τ είναι άπειρα επανερχόμενος (infinitely recurrent) αν για κάθε $A \in \mathscr{A}$ ισχύει $\mu(A \setminus A_{\mathrm{inf}}) = 0$, όπου $A_{\mathrm{inf}} = A \cap (\limsup_n \tau^{-n} A)$ το σύνολο των σημείων του A που επανέρχονται άπειρες φορές στο A.

(iii) ο τ είναι συντηρητικός (conservative) αν η $\mathscr{A}$ δεν περιέχει περιπλανώμενα σύνολα θετικού μέτρου.

(iv) ο τ είναι ασυμπίεστος (incompressible) αν για κάθε $A \in \mathscr{A}$ με $A \subseteq \tau^{-1} A$ ισχύει $\mu(\tau^{-1} A \setminus A) = 0$.

Παρατηρήστε ότι ένα σύνολο $W \in \mathscr{A}$ είναι περιπλανώμενο αν και μόνο αν κανένα στοιχείο του W δεν επιστρέφει ποτέ στο W. Πράγματι, αν το σύνολο W είναι περιπλανώμενο, τότε αφού τα W, $\tau^{-n} W$ είναι ξένα για κάθε $n \geq 1$ θα έχουμε ότι $W \cap \tau^{-n} W = \emptyset$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως, κανένα στοιχείο του W δε θα επιστρέφει ποτέ στο W.

Αντίστροφα, αν υπάρχει $\omega \in \tau^{-n} W \cap \tau^{-m} W$ για κάποια $n < m$, τότε το $\omega' = \tau^n(\omega)$ θα ανήκει στο $W \cap \tau^{-(m-n)} W$. Δηλαδή, το ω' ξεκινάει απ' το W και σε $m - n$ βήματα βρίσκεται πάλι στο W. Αυτό όμως δεν μπορεί να γίνει αν κανένα στοιχείο του w δεν επιστρέφει ποτέ στο W. Άρα, τελικά έχουμε ότι τα $(\tau^{-n} W)_{n=0}^{\infty}$ είναι ξένα ανά δύο και έτσι το W είναι περιπλανώμενο. Τέλος, περνώντας σε συμπληρώματα παρατηρούμε ότι ο τ είναι ασυμπίεστος αν για κάθε $A \in \mathscr{A}$ με $\tau^{-1} A \subseteq A$ ισχύει $\mu(A \setminus \tau^{-1} A) = 0$.

Θεώρημα 1.4.2 (Θεώρημα επαναφοράς). *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $\tau : \Omega \to \Omega$ ένας μετασχηματισμός που διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο τ είναι συντηρητικός.*

(ii) *Ο τ είναι επανερχόμενος.*

(iii) *Ο τ είναι άπειρα επανερχόμενος.*

(iv) *Ο τ είναι ασυμπίεστος.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Το σύνολο $A \setminus A_{\mathrm{ret}}$ αποτελείται απο όλα τα στοιχεία του A που δεν επιστρέφουν στο A. Ειδικότερα, κανένα στοιχείο του $A \setminus A_{\mathrm{ret}}$ δεν θα επιστρέφει στο $A \setminus A_{\mathrm{ret}}$. Άρα, από τις παραπάνω παρατηρήσεις, το $A \setminus A_{\mathrm{ret}}$ είναι περιπλανώμενο, και επειδή ο τ είναι συντηρητικός θα πρέπει $\mu(A \setminus A_{\mathrm{ret}}) = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Αφού $\mu(A \setminus A_{\mathrm{ret}}) = 0$ και ο τ διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα θα έχουμε $\mu(\tau^{-n}(A \setminus A_{\mathrm{ret}})) = 0$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα, $\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-n}(A \setminus A_{\mathrm{ret}})\Big) = 0$. Όμως, για $\omega \in A \setminus A_{\mathrm{inf}}$ θα υπάρχει $n \geq 0$ ώστε $\omega \in \tau^{-n} A$ και $\omega \notin \tau^{-k} A$ για κάθε $k > n$. Δηλαδή, $\omega \in \tau^{-k}(A \setminus A_{\mathrm{ret}})$, απ' όπου έπεται ότι $A \setminus A_{\mathrm{inf}} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-n}(A \setminus A_{\mathrm{ret}})$. Άρα, τελικά $\mu(A \setminus A_{\mathrm{inf}}) = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Θεωρούμε ένα $A \in \mathscr{A}$ με $\tau^{-1} A \subseteq A$. Τότε, η ακολουθία $(\tau^{-n} A)_{n=0}^{\infty}$ θα είναι φθίνουσα. Άρα, $A \setminus \tau^{-1} A = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} A = A \setminus A_{\mathrm{ret}}$. Όμως, $A \setminus A_{\mathrm{ret}} \subseteq A \setminus A_{\mathrm{inf}}$, απ' όπου έπεται ότι $\mu(A \setminus \tau^{-1} A) \leq \mu(A \setminus A_{\mathrm{inf}}) = 0$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Θεωρούμε ένα περιπλανώμενο σύνολο $W \in \mathscr{A}$. Τότε, $\tau^{-1}B \subseteq B$, όπου $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-n}W$. Άρα, αφού ο τ ασυμπιέστος θα έχουμε $\mu(B \setminus \tau^{-1}B) = 0$. Όμως, τα $(\tau^{-n}W)_{n=0}^{\infty}$ είναι ξένα ανά δυο. Επομένως, $B \setminus \tau^{-1}B = W$, απ' όπου έπεται ότι $\mu(W) = 0$ όπως θέλαμε. ◻

Στην περίπτωση που το μ είναι πεπερασμένο και ο τ είναι μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο μ, για κάθε περιπλανώμενο σύνολο W αφού τα $(\tau^{-n}W)_{n=0}^{\infty}$ είναι ξένα ανά δύο θα έχουμε $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} \tau^{-n}W) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\tau^{-n}W) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(W)$. Επόμενως, θα πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει $\mu(W) = 0$. Άρα, από το Θεώρημα 1.4.2 ο τ θα είναι άπειρα επανερχόμενος. Έτσι, με αυτό τον τρόπο έχουμε αποδείξει το θεώρημα επαναφοράς του Poincaré το οποίο αποτελεί ίσως το πρώτο αποτέλεσμα της εργοδικής θεωρίας:

Θεώρημα 1.4.3 (Θεώρημα επαναφοράς του Poincaré). *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο μ με $\mu(\Omega) < \infty$ και $A \in \mathscr{A}$. Τότε, για σχεδόν κάθε $\omega \in A$ υπάρχει γνήσιως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ (η οποία εξαρτάται απ' το ω) ώστε $\tau^{k_n}(\omega) \in A$ για κάθε n.*

Για ένα χώρου μέτρου $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ και $A, B \in \mathscr{A}$ θα γράφουμε $A = B \pmod{\mu}$ όταν $\mu(A \triangle B) = 0$ και $A \subseteq B \ (\mathrm{mod}\, \mu)$ όταν $\mu(A \setminus B) = 0$. Περνάμε τώρα στη διάσπαση Hopf για συστήματα που διατηρούν τα μ-μηδενικά σύνολα με μ σ-πεπερασμένο.

Θεώρημα 1.4.4 (Διάσπαση Hopf). *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ ένα σ.δ.μ.μ με μ σ-πεπερασμένο. Τότε, υπάρχουν δύο ξένα σύνολα $C, D \in \mathscr{A}$ με $C \cup B = \Omega$ και:*

(i) $C \subseteq \tau^{-1}C \ (\mathrm{mod}\, \mu)$.

(ii) *Ο περιορισμός του τ στο C είναι συντηρητικός.*

(iii) *Το $D = \Omega \setminus C$ είναι το πολύ αριθμήσιμη ένωση περιπλανώμενων συνόλων.*

Η απόδειξη βασίζεται στο εξής γενικότερο επιχείρημα εξάντλησης:

Λήμμα 1.4.5. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{A}$ μια ιδιότητα που αφορά τα μετρήσιμα υποσύνολα του Ω η οποία είναι κλειστή ως προς τα υποσύνολα. Δηλαδή, για κάθε $A, B \in \mathscr{A}$ με $A \subseteq B$, αν το B έχει την ιδιότητα $\mathscr{P}$ ($B \in \mathscr{P}$) τότε και το A έχει την ιδιότητα $\mathscr{P}$ ($A \in \mathscr{P}$). Τότε, υπάρχουν δύο σύνολα $C, D \in \mathscr{A}$ πλήρως καθορισμένα* $(\mathrm{mod}\ \mu)$ *απ' τις εξής ιδιότητες:*

(i) *$C \cup D = \Omega$ και $C \cap D = \emptyset$.*

(ii) *Το D είναι το πολύ αριθμήσιμη ξένη ένωση συνόλων που έχουν την ιδιότητα $\mathscr{P}$.*

(iii) *Για κάθε $A \subseteq C$ που έχει την ιδιότητα $\mathscr{P}$ ισχύει $\mu(A) = 0$.*

Όπου με το πλήρως καθορισμένα $(\mathrm{mod}\, \mu)$ *εννούμε πως αν C', D' είναι ένα άλλο ζευγάρι συνόλων με τις ιδιότητες* (i)-(iii) *τότε $\mu(C \triangle C') = \mu(D \triangle D') = 0$.*

Απόδειξη. Η ιδέα είναι να αναχθούμε σε ένα πεπερασμένο μέτρο ν το οποίο να έχει τα ίδια σύνολα μέτρου μηδέν με το μ. Για να το κάνουμε αυτό, αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο, θεωρούμε μια ακολουθία $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ από ξένα ανά δύο σύνολα με $\mu(E_n) < \infty$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n =$

Ω. Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι το μέτρο $\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\mu(A \cap E_n)}{\mu(E_n)}$ είναι πεπερασμένο και $\mu \sim \nu$ ($\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \nu$). Αφού τα μ, ν έχουν τα ίδια σύνολα μέτρου μηδέν αρκεί να βρούμε τα C, D και να αποδείξουμε τις (i)-(iii) ως προς το μέτρο ν. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\emptyset \neq \mathscr{P} \neq \{\emptyset\}$ και πως υπάρχει $A \in \mathscr{P}$ με $\nu(A) > 0$ (αλλιώς $D = \emptyset$, $C = \Omega$). Θέτουμε

$$a_1 = \sup\{\nu(A) : A \in \mathscr{P}\}$$

και βρίσκουμε $D_1 \in \mathscr{P}$ με $\nu(D_1) \geq \frac{a_1}{2}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $A \subseteq \Omega \setminus D_1$ με $\nu(A) > 0$ και $A \in \mathscr{P}$, διαφορετικά, παίρνουμε $C = \Omega \setminus D_1$ και $D = D_1$ και το ζευγάρι C, D ικανοποιεί τις (i)-(iii). Θέτουμε

$$a_2 = \sup\{\nu(A) : A \subseteq \Omega \setminus D_i \text{ και } A \in \mathscr{P}\}$$

και βρίσκουμε $D_2 \subseteq \Omega \setminus D_1$ με $D_2 \in \mathscr{P}$ και $\nu(D_2) \geq \frac{a_2}{2}$. Στην περίπτωση που η παραπάνω διαδικασία τερματίζει, θα έχουμε βρει σύνολα $D_1, \ldots, D_n \in \mathscr{P}$ με $D_j \subseteq \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} D_i$ για $j \geq 1$, ($D_0 = \emptyset$), $\nu(D_j) \geq \frac{a_j}{2}$ για $j \geq 1$, όπου $a_j = \sup\{\nu(A) : A \subseteq \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} D_i\}$ και για κάθε $A \in \mathscr{P}$ με $A \subseteq \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ να ισχύει $\nu(A) = 0$. Τότε, το ζευγάρι C, D με $C = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ και $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ ικανοποιεί τις (i)-(iii). Στην πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση που η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον, αναδρομικά κατασκευάζεται μια ακολουθία συνόλων $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ με $D_n \in \mathscr{P}$, $D_n \subseteq \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} D_k$ ($D_0 = \emptyset$) και $\nu(D_n) \geq \frac{a_n}{2}$ όπου $a_n = \sup\{\nu(A) : A \subseteq \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} D_k \text{ και } A \in \mathscr{P}\}$. Θέτουμε $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ και $C = \Omega \setminus C$ και δείχνουμε ότι το ζευγάρι C, D έχει τις ιδιότητες (i)-(iii). Προφανώς, ισχύει $C \cup D = \Omega$ και $C \cap D = \emptyset$ και ότι το D είναι αριθμήσιμη ξένη ένωση στοιχείων της $\mathscr{P}$. Για την (iii) θεωρούμε ένα $A \subseteq C$ με $A \in \mathscr{P}$. Τότε, θα έχουμε $A \subseteq \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n} D_k$ για κάθε n. Δηλαδή, $\nu(A) \leq a_n$ για κάθε n. Όμως,

$$\infty > \nu(D) = \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(D_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}$$

απ' όπου έπεται ότι $a_n \to 0$. Άρα, θα έχουμε $\nu(A) = 0$. Για τη μοναδικότητα τώρα, αν C', D' είναι ένα άλλο ζευγάρι με τις (i)-(iii), τότε θα υπάρχουν σύνολα D_n' με την ιδιότητα $\mathscr{P}$ ώστε $D' = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n'$. Όμως τότε, $D_n' \setminus D \subseteq C$ και επειδή η $\mathscr{P}$ είναι κλειστή ως προς τα υποσύνολα, αφού το D_n' έχει την $\mathscr{P}$ θα πρέπει να την έχει και το $D_n' \setminus D$. Άρα, από την ιδιότητα (iii) για το C θα έχουμε $\nu(D_n' \setminus D) = 0$. Οπότε, αφού $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n' \setminus D = D' \setminus D$ θα έχουμε $\nu(D' \setminus D) = 0$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των D', D και χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα, θα έχουμε και $\nu(D \setminus D') = 0$. Οπότε, τελικά $\nu(D \triangle D') = 0$. Τώρα, αφού $C \cup D = C' \cup D' = \Omega$ και $C \cap D = C' \cap D' = \emptyset$ θα έχουμε $C \triangle C' = D \triangle D'$, απ' όπου έπεται και ότι $\nu(C \triangle C') = 0$ αποδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο τη μοναδικότητα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.4. Θεωρούμε την $\mathscr{P} = \{W \subseteq \Omega : W \text{ περιπλανώμενο}\}$ και παρατηρούμε πως αν το $A \subseteq B$ και το B είναι περιπλανώμενο τότε και το A είναι περιπλανώμενο. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.4.5 βρίσκουμε δύο σύνολα $C, D \in \mathscr{A}$ τα οποία να είναι πλήρως καθορισμένα (mod μ) απ' τις εξής ιδιότητες:

(i) $C \cup D = \Omega$ και $C \cap D = \emptyset$.

(ii) Υπάρχουν ξένα ανά δύο περιπλανώμενα σύνολα $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ με $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

(iii) Αν το $A \subseteq C$ είναι περιπλανώμενο, τότε $\mu(A) = 0$.

Τώρα, το $\tau^{-1}(D \cap D_n) \setminus D \subseteq C$ είναι περιπλανώμενο γιατί $\tau^{-1}(D \cap D_n) \setminus D \subseteq \tau^{-1}(D_n)$ και το $\tau^{-1}D_n$ είναι περιπλανώμενο. Άρα, από την ιδιότητα (iii) θα πρέπει $\mu(\tau^{-1}(D \cap D_n) \setminus D) = 0$, απ' όπου έπεται ότι

$$\mu(\tau^{-1}D \setminus D) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau^{-1}(D \cap D_n) \setminus D\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tau^{-1}(D \cap D_n) \setminus D) = 0.$$

Με άλλα λόγια, $\tau^{-1}D \subseteq D (\mathrm{mod}\, \mu)$. Όμως, $\tau^{-1}D \setminus D = (\tau^{-1}(\Omega \setminus C)) \setminus \Omega \setminus C = (\Omega \setminus \tau^{-1}C) \setminus \Omega \setminus C = C \setminus \tau^{-1}C$. Επομένως, θα έχουμε $\mu(C \setminus \tau^{-1}C) = 0$. Δηλαδή, $C \subseteq \tau^{-1}C (\mathrm{mod}\, \mu)$. Θεωρώντας τα σύνολα $C' = C \cap C \setminus \tau^{-1}C$ και $D' = \Omega \setminus C'$ και χρησιμοποιώντας ότι οι ιδιότητες (i)-(iii) εξακολουθούν να ισχύουν αν αλλάξουμε τα C, D σε σύνολα μέτρου μηδέν, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $C \subseteq \tau^{-1}C$. Τώρα, ο περιορισμός $\tau|_C : C \to C$ είναι συντηρητικός και έτσι έχουμε ότι το ζευγάρι C, D ικανοποιεί τις (i)-(iii). □

1.5 Υποπροσθετικές διαδικασίες

1.5.1 Το θεώρημα του Kingman

Σε αυτή την παράγραφο θα δώσουμε μια απόδειξη του υποπροσθετικού θεωρήματος του Kingman (1968-[12]) το οποίο γενικεύει το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff στο πλαίσιο των υποπροσθετικών διαδικασιών. Τέλος, παρουσιάζουμε μια εφαρμογή του θεωρήματος σε ένα γνωστό αποτέλεσμα που αφορά τα όρια γινομένων τυχαίων πινάκων.

Θέτουμε $Q = \{(i, k) : 0 \leq i < k\}$ όπου i, k ακέραιοι. Παρατηρήστε ότι αν $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ είναι ένα σ.δ.μ και f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, αν ορίσουμε

$$F_{i,k} = \sum_{j=i}^{k-1} f \circ \tau^j, \ (i, k) \in Q \tag{1.5.1}$$

τότε η οικόγεινεια συναρτήσεων $(F_{i,k})_{(i,k)\in Q}$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $F_{i,k} \circ \tau = F_{i+1,k+1}$ για κάθε $(i, k) \in Q$.

(ii) $F_{i,k} = F_{i,l} + F_{l,k}$ για κάθε $(i, l), (l, k) \in Q$.

(iii) $\inf_{n\in\mathbb{N}} n^{-1} \int_{\Omega} F_{0,n}\, d\mu = \int_{\Omega} f\, d\mu > -\infty$.

Η οικογένεια $(F_{i,k})_{(i,k)\in Q}$ αποτελεί ένα παράδειγμα υποπροσθετικής διαδικασίας:

Ορισμός 1.5.1 (Υποπροσθετική διαδικασία)**.** Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \tau)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο (σ.δ.μ) και $Q = \{(i, k) : 0 \leq i < k\}$ όπου i, k ακέραιοι. Μια οικογένεια $F \equiv (F_{i,k})_{(i,k)\in Q}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων θα καλείται υποπροσθετική αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $F_{i,k} \circ \tau = F_{i+1,k+1}$ για κάθε $(i, k) \in Q$.

(β) $F_{i,k} \leq F_{i,l} + F_{l,k}$ για κάθε $(i, l), (l, k) \in Q$.

(γ) $\gamma_-(F) := \inf_{n\in\mathbb{N}} n^{-1} \int_{\Omega} F_{0,n} d\mu > -\infty$.

Επιπλέον, η διαδικασία F θα καλείται υπερπροσθετική όταν η $(-F_{i,k})_{(i,k)\in Q}$ είναι υποπροσθετική. Τέλος, η F θα καλείται προσθετική όταν είναι συγχρόνως υποπροσθετική και υπερπροσθετική. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση που η διαδικασία είναι υπερπροσθετική έχουμε ότι

(β') $F_{i,k} \geq F_{i,l} + F_{l,k}$ για κάθε $(i,l),(l,k) \in Q$.

(γ') $\gamma_+(F) := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} n^{-1} \int\limits_{\Omega} F_{0,n} d\mu < \infty$.

Αν F είναι μια υποπροσθετική διαδικασία και ορίσουμε $g_n := \int F_{0,n} d\mu$ τότε θα έχουμε ότι η $(g_n)_{n\geq 1}$ είναι μια υποπροσθετική ακολουθία. Δηλαδή, για κάθε n, m θα ισχύει

$$g_{n+m} \leq g_n + g_m.$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την υποπροσθετικότητα (β) της F και το γεγονός ότι ο τ διατηρεί το μ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} g_{n+m} = \int_\Omega F_{0,n+m}\, d\mu &\leq \int_\Omega F_{0,n}\, d\mu + \int_\Omega F_{n,n+m}\, d\mu \\ &= \int_\Omega F_{0,n}\, d\mu + \int_\Omega F_{0,m} \circ \tau^n\, d\mu \\ &= \int_\Omega F_{0,n}\, d\mu + \int_\Omega F_{0,m}\, d\mu \\ &= g_n + g_m. \end{aligned}$$

Οπότε τώρα χρησιμοποιώντας το παρακάτω λήμμα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$n^{-1} g_n = \frac{1}{n}\int_\Omega F_{0,n} d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \gamma_-(F). \tag{1.5.2}$$

Λήμμα 1.5.2. *Έστω $(g_n)_{n\geq 1}$ μια υποπροσθετική ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε,*

$$\frac{g_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \inf\left\{\frac{g_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε N και για κάθε $n > N$ γράφουμε $n = Nk_n + r_n$ με $0 \leq r_n < N$. Τότε, χρησιμοποιώντας διαδοχικά την υποπροσθετικότητα της g_n θα έχουμε ότι

$$g_n \leq g_{Nk_n} + g_{r_n} \leq k_n g_N + g_{r_n}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\frac{g_n}{n} \leq \frac{Nk_n}{n} \cdot \frac{g_N}{N} + \frac{g_{r_n}}{n},$$

όμως τώρα για $\epsilon > 0$, αφού $\frac{Nk_n}{n} \to 1$ και $\frac{g_{r_n}}{n} \to 0$ θα υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$$\frac{g_n}{n} \leq \frac{g_N}{N} + \epsilon,$$

το οποίο με τη σειρά του δίνει ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g_n}{n} \leq \frac{g_N}{N} + \epsilon$$

και αφού το N ήταν τυχόν θα έχουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g_n}{n} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{g_n}{n}.$$

□

Όπως και στην απόδειξη του εργοδικού θεωρήματος του Birkhoff η απόδειξη του υποπροσθετικού θεωρήματος βασίζεται στη μεγιστική ανισότητα του Πορίσματος 1.3.3 η οποία ισχύει και για τις υπερπροσθετικές διαδικασίες. Η απόδειξη της οφείλεται στους Akcoglu-Krengel (1981-[1]).

Θεώρημα 1.5.3 (Μεγιστική ανισότητα)**.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \tau)$ ένα σ.δ.μ και $F \equiv (F_{i,k})_{(i,k)\in Q}$ μια υπερπροσθετική διαδικασία. Τότε, για κάθε $a > 0$ ισχύει ότι*

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega : \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{F_{0,n}(\omega)}{n} > a\right\}\right) \leq a^{-1}\gamma_+(F). \tag{1.5.3}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$E = \left\{\omega \in \Omega : \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{F_{0,n}(\omega)}{n} > a\right\}$$

και

$$E_N = \left\{\omega \in \Omega : \sup_{1\leq n\leq N} \frac{F_{0,n}(\omega)}{n} > a\right\}.$$

Τότε, ισχύει ότι $E_N \subseteq E_{N+1}$ και $E = \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$. Σταθεροποιούμε ένα φυσικό αριθμό $N \geq 1$. Για $K > N$ και $\omega \in \Omega$ θεωρούμε το σύνολο $A(\omega) = \{0 \leq k < K - N : \tau^k(\omega) \in E_N\}$. Υποθέτουμε προς το παρόν πως το $A(\omega)$ είναι μη κενό και θεωρούμε k_1 το ελάχιστο στοιχείο του. Τότε, θα υπάρχει $1 \leq n_1 \leq N$ με

$$\frac{1}{n_1} F_{0,n_1}(\tau^{k_1}(\omega)) > a.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε k_2 τον ελάχιστο k στο $A(\omega)$ με $k \geq k_1 + n_1$. Τότε, θα υπάρχει $1 \leq n_2 \leq N$ με

$$\frac{1}{n_2} F_{0,n_2}(\tau^{k_2}(\omega)) > a.$$

Αφού το $A(\omega)$ είναι πεπερασμένο αυτή η διαδικασία κάποια στιγμή θα τερματίσει και τότε θα έχουμε βρει $k_1, \ldots, k_r, n_1, \ldots, n_r$ με $0 \leq k_i < K - N$, $1 \leq n_i \leq N$, $k_{i+1} \geq n_i + k_i$ και

$$\frac{1}{n_i} F_{0,n_i}(\tau^{k_i}(\omega)) > a. \tag{1.5.4}$$

Τότε, δεν θα υπάρχει στοιχείο του $A(\omega)$ μεγαλύτερο ή ίσο του $k_r + n_r$ και επειδή $k_r + n_r < K$ θα έχουμε ότι

$$A(\omega) \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} [k_i, k_i + n_i) \subseteq [0, K], \tag{1.5.5}$$

όπου τα διαστήματα $[k_i, k_i + n_i)$ είναι ξένα ανά δύο. Τότε, χρησιμοποιώντας διαδοχικά την ιδιότητα (β') της F και τις (1.5.3),(1.5.4) θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_{0,K}(\omega) &\overset{(\beta'),(1.5.4)}{\geq} \sum_{i=1}^{r} F_{k_i,k_i+n_i}(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{r} n_i n_i^{-1} F_{0,n_i}(\tau^{k_i}(\omega)) \\ &\overset{(1.5.3)}{\geq} a \sum_{i=1}^{r} n_i \overset{(1.5.4)}{\geq} a\Big|A(\omega)\Big|, \end{aligned}$$

όπου $\Big|A(\omega)\Big|$ ο πληθάριθμος του A. Γράφοντας $\Big|A(\omega)\Big| = \sum_{i=0}^{K-N-1} \mathbb{1}_{\tau^{-i}(E_N)}(\omega)$, παρατηρούμε ότι η $\omega \mapsto \Big|A(\omega)\Big|$ είναι μετρήσιμη και επειδή

$$\begin{aligned} \frac{1}{K}\int_\Omega F_{0,K}(\omega)\, d\mu(\omega) &\geq \frac{a}{K} \int\limits_{\{A(\omega)\neq\emptyset\}} \Big|A(\omega)\Big|\, d\mu(\omega) \\ &= \frac{a}{K}\int_\Omega \Big|A(\omega)\Big|\, d\mu(\omega) \\ &= \frac{a}{K}\sum_{i=0}^{K-N-1} \mu(\tau^{-i}(E_N)) = a\cdot\frac{K-N}{K}\mu(E_N) \end{aligned}$$

από το Λήμμα 1.5.2 θα έχουμε ότι $K^{-1}\int_\Omega F_{0,K}(\omega)d\mu(\omega) \xrightarrow{K\to\infty} \gamma(F_+)$, απ' όπου έπεται ότι $\mu(E_N) \leq a^{-1}\gamma_+(F)$. Οπότε, τώρα αφήνοντας το $N \to \infty$ παίρνουμε την (1.5.3). □

Παρατηρήστε πως αν F είναι η προσθετική διαδικασία της (1.5.1) τότε το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει μιας απόδειξη της μεγιστικής ανισότητας

$$\mu\left(\left\{\omega\in\Omega : \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{A_n(f)(\omega)}{n} > a\right\}\right) \leq \frac{\|f\|_1}{a}$$

του Πορίσματος 1.3.3 χωρίς τη χρήση του μεγιστικού θεωρήματος.

Λήμμα 1.5.4. *Έστω $(g_n)_{n\geq1}$ αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε για $m \geq 1$ ισχύουν οι εξής ισότητες:*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{g_n}{n} = \limsup_{n\to\infty}\frac{g_{nm}}{nm}$$

και

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{g_n}{n} = \liminf_{n\to\infty}\frac{g_{nm}}{nm}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο ότι $\limsup\frac{g_n}{n} = \limsup\frac{g_{nm}}{nm}$ καθώς η απόδειξη για την άλλη ισότητα είναι τελείως ανάλογη. Αφού έτσι και αλλιώς ισχύει ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{g_n}{n} \geq \limsup_{n\to\infty}\frac{g_{nm}}{nm},$$

αρκεί να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα. Σταθεροποιούμε n και γράφουμε $n = mk_n + r_n$ όπου $0 \le r_n < m$. Τότε, αφού η g_n είναι αύξουσα και επειδή $n \le m(k_n + 1)$ θα έχουμε ότι

$$\frac{g_n}{n} \le \frac{g_{m(k_n+1)}}{n} = \frac{m(k_n+1)}{n} \cdot \frac{g_{m(k_n+1)}}{m(k_n+1)}.$$

Όμως $\frac{m(k_n+1)}{n} \to 1$ απ' όπου έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g_n}{n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{g_{m(k_n+1)}}{m(k_n+1)} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{g_{nm}}{nm}.$$

□

Θεώρημα 1.5.5 (Kingman). *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \tau)$ ένα σ.δ.μ και $F \equiv (F_{i,k})_{(i,k)\in Q}$ μια υποπροσθετική διαδικασία. Τότε, υπάρχει μια $\tau-$αναλλοίωτη συνάρτηση $\tilde{f} \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε*

$$\frac{1}{n} F_{0,n}(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{f}(\omega)$$

για $\mu-$σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$. Επιπλέον, αν το μ είναι πεπερασμένο τότε η παραπάνω σύγκλιση είναι και στον L^1 και ισχύει ότι $\int_\Omega \tilde{f}\, d\mu = \gamma_-(F)$.

Απόδειξη. Θεωρώντας την $(-F_{i,k})_{(i,k)\in Q}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η F είναι υπερπροσθετική. Προσθαφαιρώντας την προσθετική διαδικασία $H_{i,k} = \sum_{j=i}^{k-1} F_{0,1} \circ \tau^j$, όπου απ' το θεώρημα του Birkhoff το όριο της $n^{-1}H_{0,n}$ υπάρχει σχεδόν παντού και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $F_{i,k} - H_{i,k} \ge 0$ μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $F_{i,k} \ge 0$. Ορίζουμε

$$f^* := \limsup \frac{1}{n} F_{0,n} \text{ και } f_* := \liminf \frac{1}{n} F_{0,n}$$

και

$$g_n := \frac{1}{n} \int F_{0,n} d\mu.$$

Απ' το Λήμμα 1.5.2 και το λήμμα του Fatou έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_* d\mu &\le \liminf n^{-1} \int_\Omega F_{0,n} d\mu \\ &= \liminf n^{-1} g_n = \lim n^{-1} g_n = \gamma_+(F) < \infty\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι η f_* είναι ολοκληρώσιμη και $f_* < \infty$ μ-σχεδόν παντού. Θα δείξουμε ότι $f^* = f_*$ σχεδόν παντού δείχνοντας ότι $\mu(|f^* - f_*| > a) = 0$ για κάθε $a > 0$. Για $\epsilon > 0$ βρίσκουμε m_0 ώστε για κάθε $m \ge m_0$ να ισχύει

$$m^{-1} g_m > \gamma(F_+) - \epsilon. \tag{1.5.6}$$

Σταθεροποιούμε $m \ge m_0$ και ορίζουμε τις διαδικασίες $H^m = (H^m_{i,k})$ και $F^m = (F^m_{i,k})$ όπου

$$H^m_{i,k} := \sum_{j=i}^{k-1} F_{0,m} \circ \tau^{jm} \quad \text{και} \quad F^m_{i,k} := F_{im,km} - H^m_{i,k}.$$

Τότε, είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η H^m είναι προσθετική και η F^m είναι υπερπροσθετική διαδικασία με $F^m_{i,k} \geq 0$. Επίσης,

$$
\begin{aligned}
\gamma_+(F^m) = \sup_k \frac{1}{k} \int_\Omega F^m_{0,k} d\mu = \sup_k \frac{1}{k}\Big(\int_\Omega F_{0,km} d\mu - \int_\Omega H^m_{0,k} d\mu\Big) \\
&= m \sup_k \frac{1}{km} \int_\Omega F^m_{0,k} d\mu + \Big(\sup_k -\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \int_\Omega F_{0,m} \circ \tau^{jm} d\mu\Big) \\
&= m\gamma_+(F) - \int_\Omega F_{0,m} d\mu \\
&= m\gamma_+(F) - g_m \overset{(1.5.5)}{\leq} \epsilon m,
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$\gamma(F^m_+) \leq \epsilon m. \tag{1.5.7}$$

Απ' το Λήμμα 1.5.4 γνωρίζουμε ότι οι f^*, f_* είναι ίσες με $\lim\sup(nm)^{-1}g_{nm}, \lim\inf(nm)^{-1}g_{nm}$ αντίστοιχα. Επίσης, απ' το θεώρημα του Birkhoff το όριο της $k^{-1}H^m_{0,k}$ υπάρχει σχεδόν παντού. Οπότε, για τα $\omega \in \Omega$ για τα οποία ισχύει ότι $f_*(\omega) < \infty$ θα έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
f^* - f_* &= \lim_k \sup(km)^{-1} F_{0,km} - \lim_k \inf(km)^{-1} F_{0,km} \\
&= \lim_k \sup\Big(\frac{1}{km} F^m_{0,k} + \frac{1}{km} H^m_{0,k}\Big) - \lim_k \inf\Big(\frac{1}{km} F^m_{0,k} + \frac{1}{km} H^m_{0,k}\Big) \\
&= \lim_k \sup \frac{1}{km} F^m_{0,k} - \lim_k \inf \frac{1}{km} F^m_{0,k} \\
&\overset{F^m_{0,k} \geq 0}{\leq} \sup_k \frac{1}{km} F^m_{0,k},
\end{aligned}
$$

οπότε τώρα χρησιμοποιώντας τη μεγιστική ανισότητα (1.5.4) και την (1.5.6) καταλήγουμε στην

$$\mu(|f^* - f_*| > a) \leq \frac{1}{ma} \gamma(F^m_+) \leq \frac{\epsilon}{a} \tag{1.5.8}$$

απ' όπου έπεται ότι $\tilde{f} := f^* = f_* \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ και $n^{-1}F_{0,n} \to \tilde{f}$ σχεδόν παντού. Για να δείξουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι $\tau-$αναλλοίωτη για $m \geq m_0$ γράφουμε h^m για το τ^m-αναλλοίωτο όριο της $(nm)^{-1}H^m_{0,n}$. Τότε, αφού

$$\frac{1}{km} F_{0,km} - \frac{1}{km} H^m_{0,k} = \frac{1}{km} F^m_{0,k} \leq \sup_k \frac{1}{km} F^m_{0,k}$$

αφήνοντας το $k \to \infty$ θα έχουμε ότι

$$0 \leq \tilde{f} - h^m \leq \sup_k \frac{1}{km} F^m_{0,k}. \tag{1.5.9}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας διαδοχικά το ότι η h^m είναι τ^m-αναλλοίωτη,την (1.5.8),την (1.5.4) και την (1.5.6) θα έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mu(|\tilde{f} - \tilde{f} \circ \tau^m| > 2a) &\leq \mu(|\tilde{f} - h^m| > a) + \mu(|h^m - \tilde{f} \circ \tau^m| > a) \\
&= \mu(|\tilde{f} - h^m| > a) + \mu(|\tilde{f} - h^m| > a) \\
&\overset{(1.5.8)}{\leq} 2\mu\Big(\sup_k \frac{1}{km} F^m_{0,k} > a\Big) \\
&\overset{(1.5.4)}{\leq} \frac{2\gamma_+(F^m)}{ma} \overset{(1.5.6)}{\leq} \frac{2\epsilon}{a}.
\end{aligned}
$$

Ομοίως για την h^{m+1} θα έχουμε

$$\mu(|\tilde{f} - \tilde{f} \circ \tau^{m+1}| > 2a) \leq \frac{2\epsilon}{a}.$$

Οπότε, συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω ανισότητες παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mu(|\tilde{f} - \tilde{f} \circ \tau| > 4a) &= \mu(|\tilde{f} \circ \tau^m - \tilde{f} \circ \tau^{m+1}| > 4a) \\
&\leq \mu(|\tilde{f} - \tilde{f} \circ \tau^m| > 2a) + \mu(|\tilde{f} - \tilde{f} \circ \tau^{m+1}| > 2a) \\
&\leq \frac{4\epsilon}{a}
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\tilde{f} = \tilde{f} \circ \tau$ σχεδόν παντού, δηλαδή ότι η $\tilde{f}$ είναι $\tau-$αναλλοίωτη. Αν τώρα το μ είναι πεπερασμένο τότε απ' το θεώρημα του Birkhoff η σύγκλιση της $(nm)^{-1}H^m_{0,n}$ στην h^m θα είναι και στον L^1. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (a), (β') της F θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
H^{2m}_{0,k} &= \sum_{j=0}^{k-1} F_{0,2m} \circ \tau^{2mj} \\
&\geq \sum_{j=0}^{k-1} F_{0,m} \circ \tau^{2mj} + \sum_{j=0}^{k-1} F_{m,2m} \circ \tau^{2mj} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} F_{2mj,m+2mj} + \sum_{j=0}^{k-1} F_{m+2mj,2m+2mj} \\
&= \sum_{j=0}^{2k-1} F_{0,m} \circ \tau^{mj} = H^m_{0,2k},
\end{aligned}$$

οπότε διαιρώντας με $2mk$ και αφήνοντας το $k \to \infty$ καταλήγουμε στο ότι $h^{2m} \geq h^m$. Επομένως, η ακολουθία h^{2^i} είναι αύξουσα, συνεπώς θα υπάρχει το $h^\infty := \lim_i h^{2^i}$ και επειδή $h^m \geq 0$ απ' το θεώρημα μονότονης σύγκλισης θα έχουμε και ότι

$$\int_\Omega h^\infty d\mu = \lim_{i\to\infty} \int_\Omega h^{2^i} d\mu.$$

Όμως απ' την άλλη αφού η $(nm)^{-1}H^m_{0,n}$ συγκλίνει στην h^m και ως προς την $\|\cdot\|_1$ και

$$\begin{aligned}
\frac{1}{nm} \int_\Omega H^m_{0,n} d\mu &= \frac{1}{mn} \sum_{j=0}^{n-1} \int_\Omega F_{0,m} \circ \tau^{mj} d\mu \\
&= \frac{1}{m} \int_\Omega F_{0,m} d\mu = m^{-1} g_m
\end{aligned}$$

θα έχουμε ότι $\int_\Omega h^m d\mu = m^{-1} g_m$ απ' όπου έπεται ότι

$$\int_\Omega h^\infty d\mu = \gamma_+(F).$$

Οπότε τώρα θεωρώντας $\eta > 0$ βρίσκουμε m της μορφής 2^i ώστε $\|h^\infty - h^m\|_1 < \eta$ και $\left|m^{-1}g_m - \gamma_+(F)\right| < \eta$. Για $n > m$ γράφουμε $n = mk_n + r_n$ με $0 \leq r_n < m$. Τότε, αφού η $F_{0,n}$ είναι αύξουσα ως προς n θα έχουμε ότι

$$F_{0,k_n(m+1)} - H^m_{0,k_n} \geq F_{0,n} - H^m_{0,k_n},$$

άρα

$$\begin{aligned}\int_\Omega (F_{0,n} - H^m_{0,k_n})d\mu &\le \int_\Omega (F_{0,k_n(m+1)} - H^m_{0,k_n})d\mu \\ &= g_{k_n(m+1)} - k_n g_m \\ &\le (k_n+1)m\gamma_+(F) - k_n g_m \\ &\le m\gamma_+(F) + k_n m\eta\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{k_n m}F_{0,n} - h^\infty\right\|_1 &\le \frac{1}{k_n m}\left\|F_{0,n} - H^m_{0,k_n}\right\|_1 + \left\|\frac{1}{k_n m}H^m_{0,k_n} - h^m\right\|_1 + \left\|h^m - h^\infty\right\|_1 \\ &\le \frac{\gamma_+(F)}{k_n} + 2\eta + \left\|\frac{1}{k_n m}H^m_{0,k_n} - h^m\right\|_1.\end{aligned}$$

Παίρνοντας lim sup και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $k_n \to \infty$ θα έχουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{k_n m}F_{0,n} - h^\infty\right\|_1 \le 2\eta.$$

Δηλαδή, $\left\|\frac{1}{k_n m}F_{0,n} - h^\infty\right\|_1 \to 0$ και επειδή $\frac{n}{k_n m} \to 1$ έπεται και ότι $\left\|\frac{1}{n}F_{0,n} - h^\infty\right\|_1 \to 0$. Όμως επειδή $n^{-1}F_{0,n} \to \tilde{f}$ σχεδόν παντού θα πρέπει να έχουμε $h^\infty = \tilde{f}$ σχεδόν παντού. □

Στην περίπτωση που το μέτρο μ είναι πεπερασμένο η σχεδόν παντού σύγκλιση του Θεωρήματος 1.5.5 μπορεί να επιτευχθεί με ασθενέστερες υποθέσεις:

Θεώρημα 1.5.6. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας και $\tau : \Omega \to \Omega$ ένας μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο μ. Θεωρούμε μια οικογένεια μετρήσιμων συναρτήσεων $F \equiv (F_{i,k})_{(i,k)\in Q}$ με τιμές στο $[-\infty, +\infty]$ που ικανοποιεί τα εξής:*

(i) $F_{i,k} \circ \tau = F_{i+1,k+1}$.

(ii) $F_{i,k} \le F_{i,l} + F_{l,k}$.

(iii) $\int_\Omega F^+_{0,1}\, d\mu = \left\|F^+_{0,1}\right\|_1 < \infty$.

Τότε, υπάρχει μια τ−αναλλοίωτη συνάρτηση $f^\infty \in L_1(\mu)$, ώστε $n^{-1}F_{0,n} \to f^\infty$ μ-σχεδόν παντού και

$$\int_\Omega f^\infty\, d\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\int_\Omega F_{0,n}\, d\mu = \gamma_-(F). \tag{1.5.10}$$

Απόδειξη. Επειδή $(F_{i,k} \circ \tau)^+ = F^+_{i,k} \circ \tau$ και $\left\|F^+_{0,1}\right\|_1 < \infty$ από την ιδιότητα (i) και επειδή ο τ διατηρεί το μ θα έχουμε ότι $\left\|F^+_{i,i+1}\right\|_1 < \infty$. Από την ιδιότητα (ii) έχουμε $F_{i,k} \le \sum_{j=i}^{k-1} F_{j,j+1}$ για κάθε $0 \le i < k$. Άρα, αφού $F^+_{i,k} \le \sum_{j=i}^{k-1} F^+_{j,j+1}$ θα έχουμε $\left\|F^+_{i,k}\right\|_1 < \infty$. Ειδικότερα, $\left\|F^+_{0,n}\right\|_1 < \infty$ για κάθε n, απ' όπου έπεται ότι το $\frac{1}{n}\int_\Omega F_{0,n}\, d\mu$ είναι καλά ορισμένο και ανήκει στο $[-\infty, \infty)$. Για σταθερό $N \geq 1$ θεωρούμε την οικογένεια συναρτήσεων $F^N \equiv (F^N_{i,k})$ με $F^N_{i,k} = \max\{F_{i,k}, -N(k-i)\}$. Τότε, $F^N_{i,k} \circ \tau = F_{i+1,k+1}$ και για $i < l < k$ έχουμε

$$\begin{aligned}
F^N_{i,k} &= \max\{F_{i,k}, -N(k-i)\} \\
&= \max\{F_{i,k}, -N(k-l) - N(l-i)\} \\
&\leq \max\{F_{i,l} + F_{i,k}, -N(k-l) - N(l-i)\} \\
&\leq \max\{F_{i,l} - N(k-l)\} + \max\{F_{i,k}, -N(l-i)\} \\
&= F_{i,l} + F_{l,k}.
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\int_\Omega F^N_{0,n}\,d\mu &= \frac{1}{n}\int_\Omega \max\{F_{0,n}, -Nn\}\,d\mu \\
&\geq \frac{-Nn}{n} = -N > -\infty,
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι η F^N είναι μια υποπροσθετική διαδικασία. Συνεπώς, από το Θεώρημα 1.5.5 υπάρχει μια τ−αναλλοίωτη συνάρτηση f^N με $n^{-1}F^N_{0,n} \to f^N$ μ-σ.π και $\left\|n^{-1}F^N_{0,n} - f^N\right\|_1 \to 0$, αφού το μ είναι πεπερασμένο. Επειδή $F^N_{0,n} \geq F^{N+1}_{0,n}$ θα έχουμε και $f^{N+1} \leq f^N$. Θέτουμε $f^\infty = \lim_N f^N$ και παρατηρούμε ότι η f^∞ είναι τ−αναλλοίωτη. Από την $n^{-1}F_{0,n} \leq n^{-1}F^N_{0,n}$ παίρνουμε ότι $\limsup_n n^{-1}F_{0,n} \leq f^N$. Άρα, αφήνοντας το $N \to \infty$ θα έχουμε $\limsup_n n^{-1}F_{0,n} \leq f^\infty$. Για να δείξουμε ότι $f^\infty \leq \liminf_n n^{-1}F_{0,n}$ αρκεί να δείξουμε ότι $f^\infty(\omega) \leq \liminf_n n^{-1}F_{0,n}(\omega)$ για $f^\infty(\omega) > -\infty$. Ισοδύναμα, αρκεί για τυχόν $\epsilon > 0$ να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{n}F_{0,n}(\omega) < f^\infty(\omega) - \epsilon \tag{1.5.11}$$

για πεπερασμένα το πλήθος n. Αν η (1.5.11) ισχύει για άπειρα το πλήθος n θα υπάρχει υπακολουθία $k_n^{-1}F_{0,k_n}$ που να ικανοποιεί την (1.5.11). Όμως τότε θα έχουμε

$$\frac{1}{k_n}F_{0,k_n}(\omega) < f^\infty(\omega) - \epsilon < f^N(\omega)$$

για κάθε n και N. Άρα, αφού $k_n^{-1}F^N_{0,k_n}(\omega) \to f^N(\omega)$ θα υπάρχει $k_n \equiv k_n(N)$ με $k_n^{-1}F_{0,k_n}(\omega) < f^\infty(\omega) - \epsilon \leq k_n^{-1}F^N_{0,k_n}(\omega)$, απ' όπου έπεται ότι $k_n^{-1}F^N_{0,k_n}(\omega) = -N$ καταλήγοντας στην $-\infty < f^\infty(\omega) - \epsilon \leq -N$ για κάθε N η οποία μας οδηγεί σε αντίφαση. Άρα τελικά $f^\infty \leq \liminf_n n^{-1}F_{0,n}$. Οπότε, $n^{-1}F_{0,n} \to f^\infty$ μ-σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\frac{1}{n}\int_\Omega F^N_{0,n}\,d\mu \to \frac{1}{n}\int_\Omega F_{0,n}\,d\mu$$

καθώς το $N \to \infty$. Άρα γράφοντας

$$\int_\Omega f^\infty\,d\mu \leq \int_\Omega f^N\,d\mu = g_-(F^N) \leq \frac{1}{n}\int_\Omega F^N_{0,n}\,d\mu$$

και αφήνοντας το $N \to \infty$ θα έχουμε ότι $\int_\Omega f^\infty\,d\mu \leq n^{-1}\int_\Omega F_{0,n}\,d\mu$ απ' όπου έπεται ότι $\int_\Omega f^\infty\,d\mu \leq \gamma_-(F)$. Απ' την άλλη $\gamma_-(F) \leq n^{-1}\int_\Omega F^N_{0,n}\,d\mu$ και επειδή $\left\|n^{-1}F^N_{0,n} - f^N\right\|_1 \to 0$ θα έχουμε ότι

$\gamma_-(F) \le \int_\Omega f^N \, d\mu$. Αφού $f^{N+1} \le f^N$ έπεται πως το $\lim_N \int_\Omega f^N \, d\mu$ υπάρχει. Γράφοντας

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f^1 - f^\infty) \, d\mu &\le \liminf_N \int_\Omega (f^1 - f^N) \, d\mu \\ &= \int_\Omega f^1 \, d\mu - \lim_{N\to\infty} \int_\Omega f^N \, d\mu \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το ότι η f^1 είναι ολοκληρώσιμη θα έχουμε $\lim_N \int_\Omega f^N \, d\mu = \int_\Omega f^\infty \, d\mu$, απ' όπου έπεται ότι $\gamma_-(F) \le \int_\Omega f^\infty \, d\mu$. □

1.5.2 Μια εφαρμογή του υποπροσθετικού θεωρήματος

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζουμε μια εφαρμογή του υποπροσθετικού θεωρήματος μέσα από την οποία φαίνεται η ισχύς του σε σύγκριση με το θεώρημα του Birkhoff. Η εφαρμογή αφορά ένα αποτέλεσμα των Furstenberg-Kesten οι οποίοι απέδειξαν στην εργασία τους [8], χωρίς τη βοήθεια του θεωρήματος του Kingman το οποίο αποδείχθηκε το 1968, το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1.5.7 (H. Furstenberg-H. Kesten). *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας και $(\widetilde{X}_n)_{n=0}^\infty$ μια στάσιμη ακολουθία τυχαίων πινάκων με τιμές στο $\mathbb{R}^{k\times k}$ ή στο $\mathbb{C}^{k\times k}$. Θεωρούμε μια νόρμα πινάκων που ικανοποιεί την*

$$\|A \cdot B\| \le \|A\| \, \|B\| \, , \; A, B \in M_k(\mathbb{R}) \text{ ή } M_k(\mathbb{C}) \tag{1.5.12}$$

και υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}\Big((\log \|\widetilde{X}_0\|)^+\Big) < \infty$ Τότε, υπάρχει $-\infty \le E \le \infty$ ώστε

$$E = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}\Big(\log \big\|\widetilde{X}_0 \cdot \ldots \cdot \widetilde{X}_{n-1}\big\|\Big). \tag{1.5.13}$$

Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η $(\widetilde{X_n})_{n=0}^\infty$ είναι και ανεξάρτητη, τότε

$$\frac{1}{n} \log \big\|\widetilde{X}_0 \cdot \ldots \cdot \widetilde{X}_{n-1}\big\| \xrightarrow{\sigma.\pi} E. \tag{1.5.14}$$

Μάλιστα θα αποδείξουμε ότι αν $\mathbb{E}\Big((\log \|\widetilde{X}_0\|)^+\Big) < \infty$ τότε το όριο $\lim_n n^{-1} \log \big\|\widetilde{X}_0 \cdot \ldots \cdot \widetilde{X}_{n-1}\big\|$ υπάρχει σχεδόν παντού χωρίς να είναι απαραίτητα η $(\widetilde{X}_n)_{n=0}^\infty$ ανεξάρτητη.

Ορισμός 1.5.8 (Τυχαίος πίνακας). Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας. Ένας τυχαίος $k \times k$ πραγματικός πίνακας είναι μια Borel-μετρήσιμη απεικόνιση $\widetilde{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{k\times k}$. Όπου τον $\mathbb{R}^{k\times k}$ τον ταυτίζουμε με τον $\mathbb{R}^{k^2}$ και θεωρούμε την Borel σ-άλγεβρα $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{k^2})$. Επομένως, επειδή

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^{k\times k}) = \underbrace{\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})}_{k^2-\text{φορές}}$$

θα έχουμε ότι η

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1k} \\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \ldots & X_{kk} \end{pmatrix}$$

είναι Borel-μετρήσιμη αν και μόνο αν η $X_{lm} : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι Borel-μετρήσιμη για κάθε $1 \le l \le k$, $1 \le m \le k$. Αντίστοιχα ορίζεται και ο τυχαίος $k \times k$ μιγαδικός πίνακας.

Μια ακολουθία τυχαίων πινάκων $(\widetilde{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ θα καλείται στάσιμη αν

$$\mathbb{P}\Big(\widetilde{X}_0 \in B_0, \widetilde{X}_1 \in B_1, \ldots, \widetilde{X}_{n-1} \in B_{n-1}\Big) = \mathbb{P}\Big(\widetilde{X}_m \in B_0, \widetilde{X}_{m+1} \in B_1, \ldots, \widetilde{X}_{n+m} \in B_{n-1}\Big) \qquad (1.5.15)$$

για κάθε $n,\ m \geq 1$ και $B_0, B_1, \ldots B_{n-1} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{k\times k})$, και ανεξάρτητη αν

$$\mathbb{P}\Big(\widetilde{X}_m \in B_0, \widetilde{X}_{m+1} \in B_1, \ldots, \widetilde{X}_{n+m} \in B_{n-1}\Big) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}\Big(\widetilde{X}_{m+i} \in B_i\Big) \qquad (1.5.16)$$

για κάθε $n,\ m \geq 0$ και $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{k\times k})$.

Ο τρόπος με τον οποίο περνάμε από ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ και μια στάσιμη ακολουθία τυχαίων πινάκων $(\widetilde{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ σε ένα σ.δ.μ $(X, \mathscr{B}, \mu, \tau)$ είναι ο εξής: Θεωρούμε $X = (\mathbb{R}^{k\times k})^{\mathbb{N}}$, όπου

$$(\mathbb{R}^{k\times k})^{\mathbb{N}} = \{(\widetilde{x}_n)_{n=0}^{\infty} : \widetilde{x}_i \in \mathbb{R}^{k\times k},\ \text{ για } i = 0, 1, 2, \ldots\}$$

και $\mathscr{B} = \sigma(\pi_0, \pi_1, \ldots)$, όπου $\pi_i : X \to \mathbb{R}^{k\times k}$ η προβολή στην i-οστή συντεταγμένη. Η $\mathscr{B}$ είναι επίσης η σ-άλγεβρα που παράγεται από την άλγεβρα των μετρήσιμων κυλίνδρων της μορφής

$$\pi_0^{-1}(B_0) \cap \pi_1^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap \pi_{n-1}^{-1}(B_{n-1}) \qquad (1.5.17)$$

για κάθε $n \geq 1$ και $B_0, \ldots, B_{n-1} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{k\times k})$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\widetilde{X} : \Omega \to X$ με $\widetilde{X}(\omega) = (\widetilde{X}_n(\omega))_{n=0}^{\infty}$. Τότε, αφού $\widetilde{X}^{-1}(\pi_i^{-1}(B)) = \widetilde{X}_i^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ και τα σύνολα $\pi_i^{-1}(B)$ για $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{k\times k})$ παράγουν την $\mathscr{B}$, θα έχουμε $\widetilde{X}^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ για κάθε $B \in \mathscr{B}$. Δηλαδή, η $\widetilde{X}$ είναι $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-μετρήσιμη. Συνεπώς, η συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathscr{B} \to \mathbb{R}$ με $\mu(B) = \mathbb{P}(\widetilde{X}^{-1}(B))$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $(X, \mathscr{B})$. Τέλος, θεωρούμε την απεικόνιση $\tau : X \to X$ με

$$\tau((\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots)) = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \ldots)$$

η οποία είναι μετρήσιμη καθώς $\tau^{-1}(\pi_i^{-1}(B)) = \pi_{i+1}^{-1}(B) \in \mathscr{B}$ για κάθε i και $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{k\times k})$. Συνεπώς, για να δείξουμε ότι το $(X, \mathscr{B}, \mu, \tau)$ είναι ένα σ.δ.μ αρκεί να δείξουμε ότι $\mu(\tau^{-1}(B)) = \mu(B)$ για κάθε $B \in \mathscr{B}$. Όμως, επειδή τα σύνολα της μορφής $\pi_i^{-1}(B)$, για $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{k\times k})$ παράγουν την $\mathscr{B}$ αρκεί να δείξουμε την παραπάνω ισότητα γι' αυτά τα σύνολα. Οπότε, γράφοντας

$$\begin{aligned}\mu(\tau^{-1}(\pi_i^{-1}(B))) &= \mu(\pi_{i+1}^{-1}(B)) \\ &= \mathbb{P}(\widetilde{X}^{-1}(\pi_{i+1}^{-1}(B))) \\ &= \mathbb{P}(\widetilde{X}_{i+1} \in B)\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την $\mathbb{P}(\widetilde{X}_{i+1} \in B) = \mathbb{P}(\widetilde{X}_i \in B) = \mu(\pi_i^{-1}(B))$, λόγω της στασιμότητας της $(\widetilde{X}_n)_{n=0}^{\infty}$, θα έχουμε τελικά ότι $\mu(\tau^{-1}(\pi_i^{-1}(B))) = \mu(\pi_{i+1}^{-1}(B)) = \mu(\pi_i^{-1}(B))$. Τέλος, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η $(\widetilde{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι και ανεξάρτητη, τότε το $(X, \mathscr{B}, \mu, \tau)$ θα είναι εργοδικό. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε ένα $B \in \mathscr{B}$ με $\tau^{-1}(B) = B$ και $\epsilon > 0$. Αφού τα σύνολα της (1.5.17) αποτελούν άλγεβρα και παράγουν την $\mathscr{B}$ θα υπάρχει $A = \pi_0^{-1}(B_0) \cap \pi_1^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap \pi_{n-1}^{-1}(B_{n-1})$ με $\mu(A \triangle B) < \epsilon$. Τότε, επειδή

$$\begin{aligned}\tau^{-n}(A) =& \tau^{-n}((\pi_0^{-1}(B_0) \cap \pi_1^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap \pi_{n-1}^{-1}(B_{n-1}))) \\ &= \tau^{-n}(\pi_0^{-1}(B_0)) \cap \tau^{-n}(\pi_1^{-1}(B_1)) \cap \ldots \cap \tau^{-n}(\pi_{n-1}^{-1}(B_{n-1})) \\ &= \pi_n^{-1}(B_0) \cap \pi_{n+1}^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap \pi_{2n-1}^{-1}(B_{n-1}),\end{aligned}$$

λόγω της ανεξαρτησίας και της στασιμότητας θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mu(A\cap\tau^{-n}(A)) &= \mathbb{P}\Big(\widetilde{X}_0\in B_0,\, \widetilde{X}_1\in B_1,\, \dots, \widetilde{X}_{n-1}\in B_{n-1},\, \widetilde{X}_n\in B_0,\, \widetilde{X}_{n+1}\in B_1,\, \dots, \widetilde{X}_{2n-1}\in B_{n-1}\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\widetilde{X}_0\in B_0,\, \widetilde{X}_1\in B_1,\, \dots, \widetilde{X}_{n-1}\in B_{n-1}\Big)\mathbb{P}\Big(\widetilde{X}_n\in B_0,\, \widetilde{X}_{n+1}\in B_1,\, \dots, \widetilde{X}_{2n-1}\in B_{n-1}\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\widetilde{X}_0\in B_0,\, \widetilde{X}_1\in B_1,\, \dots, \widetilde{X}_{n-1}\in B_{n-1}\Big)\mathbb{P}\Big(\widetilde{X}_0\in B_0,\, \widetilde{X}_1\in B_1,\, \dots, \widetilde{X}_{n-1}\in B_{n-1}\Big)\\ &= \mu(A)^2.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}|\mu(A)-\mu(A)^2| &= |\mu(A)-\mu(A\cap\tau^{-n}(A))|\\ &\le \mu(A\triangle(A\cap\tau^{-n}A))\\ &\le \mu(A\triangle\tau^{-n}A).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την $\tau^{-1}B=B$ θα έχουμε $\mu(\tau^{-1}A\triangle B)=\mu(\tau^{-1}(A\triangle B))=\mu(A\triangle B)<\epsilon$. Επόμένως, απ' τον εγκλεισμό $A\triangle\tau^{-n}A\subseteq(A\triangle B)\cup(\tau^{-n}A\triangle B)$ θα έχουμε τελικά ότι $|\mu(A)-\mu(A)^2|\le\mu(A\triangle B)+\mu(\tau^{-n}\triangle B)<2\epsilon$. Οπότε, γράφοντας

$$\begin{aligned}|\mu(B)-\mu^2(B)| &= |\mu(B)-\mu(A)+\mu(A)-\mu(A)^2+\mu(A)^2-\mu(B)^2|\\ &\le |\mu(B)-\mu(A)|+|\mu(A)-\mu(A)^2|+2|\mu(A)-\mu(B)|\\ &\le 3\mu(A\triangle B)+|\mu(A)-\mu(A)^2|,\end{aligned}$$

θα έχουμε $|\mu(B)-\mu(B)^2|<5\epsilon$. Δηλαδή, $\mu(B)=\mu(B)^2$ απ' όπου έπεται ότι $\mu(B)\in\{0,1\}$.

Απόδειξη Θεωρήματος 1.5.7. Θεωρούμε το σύστημα $(X,\mathscr{B},\mu,\tau)$ που κατασκευάσαμε προηγουμένως και ορίζουμε την οικογένεια συναρτήσεων $F_{i,k}:X\to[-\infty,\infty)$ με

$$F_{i,k}((\widetilde{x}_n)_{n=0}^\infty)=\begin{cases}\log\left\|\widetilde{x}_i\cdot\ldots\cdot\widetilde{x}_{k-1}\right\|, & \widetilde{x}_i\cdot\ldots\cdot\widetilde{x}_{k-1}\neq 0\\ -\infty, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

για κάθε $0\le i<k$. Τότε,

$$F_{i,k}(\tau(\widetilde{x}_{n=0}^\infty))=\begin{cases}\log\left\|\widetilde{x}_{i+1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{x}_k\right\|, & \widetilde{x}_{i+1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{x}_k\neq 0\\ -\infty, & \text{διαφορετικά}\end{cases},$$

απ' όπου έπεται ότι $F_{i,k}\circ\tau=F_{i+1,k+1}$. Επίσης, για $0\le i<l<k$ από την ιδιότητα (1.5.12) της νόρμας έχουμε

$$\begin{aligned}F_{i,k}((\widetilde{x}_n)_{n=0}^\infty) &= \log\left\|\prod_{j=i}^{l-1}\widetilde{x}_j\cdot\prod_{j=l}^{k-1}\widetilde{x}_j\right\|\\ &\le \log\left(\left\|\prod_{j=i}^{l-1}\widetilde{x}_j\right\|\cdot\left\|\prod_{j=l}^{k-1}\widetilde{x}_j\right\|\right)\\ &\le \log\left\|\prod_{j=i}^{l-1}\widetilde{x}_j\right\|\cdot\log\left\|\prod_{j=l}^{k-1}\widetilde{x}_j\right\|.\end{aligned}$$

Δηλαδή, $F_{i,k} \leq F_{i,l} + F_{l,k}$. Από την $\mathbb{E}\Big((\log \|\widetilde{X}_0\|)^+\Big) < \infty$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_X (F_{0,1})^+ \, d\mu &= \int_\Omega (F_{0,1} \circ \widetilde{X})^+ \, d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega (\log \|\widetilde{X}_0\|)^+ \, d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}\Big((\log \|\widetilde{X}_0\|)^+\Big) < \infty.\end{aligned}$$

Επομένως, η οικογένεια $(F_{i,k})_{i,k\in Q}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 1.5.6. Συνεπώς, το $n^{-1}\mathbb{E}(\log \|\widetilde{X}_0 \cdot \ldots \cdot \widetilde{X}_{n-1}\|)$ είναι καλά ορισμένο και ανήκει στο $[-\infty, \infty)$. Από την (1.5.2) παίρνουμε ότι $n^{-1}\mathbb{E}(\log \|\widetilde{X}_0 \cdot \ldots \cdot \widetilde{X}_{n-1}\|) \to E$, όπου

$$E = \inf\left\{\frac{1}{n}\mathbb{E}\Big(\log \|\widetilde{X}_0 \cdot \ldots \cdot \widetilde{X}_{n-1}\|\Big) : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Από το Θεώρημα 1.5.6, υπάρχει μια τ−αναλλοίωτη συνάρτηση f^∞ με $\int_X (f^\infty)^+ \, d\mu < \infty$ και

$$\begin{aligned}\int_\Omega f^\infty \circ \widetilde{X} \, d\mathbb{P} &= \inf\left\{\frac{1}{n}\int_\Omega \log \|\widetilde{X}_0 \cdot \ldots \cdot \widetilde{X}_{n-1}\| \, d\mathbb{P} : \ n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \inf\left\{\frac{1}{n}\mathbb{E}\Big(\log \|\widetilde{X}_0 \cdot \ldots \cdot \widetilde{X}_{n-1}\|\Big) : \ n \in \mathbb{N}\right\}\end{aligned}$$

ώστε $n^{-1}F_{0,n} \to f^\infty$ μ-σχεδόν παντού. Με άλλα λόγια, υπάρχει ένα σύνολο $B \in \mathscr{B}$ με $\mu(B^c) = 0$ ώστε $n^{-1}F_{0,n}(\tilde{x}) \to f^\infty(\tilde{x})$ για κάθε $\tilde{x} = (\tilde{x}_n)_{n=0}^\infty \in \mathscr{B}$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \widetilde{X}^{-1}(B) \in \mathscr{A}$. Τότε, $\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\widetilde{X}^{-1}(B^c)) = \mu(B^c) = 0$ και για κάθε $\omega \in A$ θα έχουμε $n^{-1}F_{0,n}(\widetilde{X}(\omega)) \to f^\infty(\widetilde{X}(\omega))$. Δηλαδή,

$$\frac{1}{n}\log \|\widetilde{X}_0 \cdot \ldots \cdot \widetilde{X}_{n-1}(\omega)\| \to f^\infty(\widetilde{X}(\omega))$$

για $\mathbb{P}$-σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$. Τέλος, αν η ακολουθία είναι ανεξάρτητη, τότε το $(X, \mathscr{B}, \mu, \tau)$ θα είναι εργοδικό. Άρα, αφού η f^∞ είναι τ−αναλλοίωτη θα πρέπει να είναι σταθερή. Λόγω της $\int_\Omega f^\infty \circ \widetilde{X} \, d\mathbb{P} = E$ παίρνουμε ότι $f^\infty = E$. Επομένως, στην περίπτωση της ανεξαρτησίας θα έχουμε ότι

$$\frac{1}{n}\log \|\widetilde{X}_0 \cdot \ldots \cdot \widetilde{X}_{n-1}\| \to E$$

$\mathbb{P}$-σχεδόν παντού. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μέσοι όροι σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους

Σε αυτό το σημείο γενικεύουμε τους μέσους όρους $\frac{f+f\circ\tau+\ldots+f\circ\tau^{n-1}}{n}$ αντικαθιστώντας τον τελεστή Koopman U_τ με οποιονδήποτε φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : X \to X$ όπου τώρα ο X είναι χώρος Banach. Οι υπό μελέτη μέσοι όροι τώρα είναι της μορφής $A_n(T) = \frac{f+Tf+\ldots+T^{n-1}f}{n}$.

Γενικότερα, ενδιαφερόμαστε για μέσους όρους πάνω στην τροχιά στοιχείων ενός τοπολογικού διανυσματικού χώρου (τ.δ.χ) X κάτω από μια ημιομάδα τελεστών. Στην περίπτωση που ο X είναι χώρος Banach εξετάζουμε επίσης την ομοιόμορφη σύγκλιση (σύγκλιση ως προς τη νόρμα τελεστή) μέσων όρων τελεστών η οποία επιτυγχάνεται στους ψευδοσυμπαγείς τελεστές.

2.1 Χώροι Banach I

Σε αυτή την παράγραφο ασχολούμαστε με τους μέσους όρους $A_n(T)x = A_n x$ για $x \in X$ όπου X ένας χώρος Banach. Απαραίτητο εργαλείο για τη μελέτη της $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ είναι η ασθενής τοπολογία $\mathcal{T}_w$ και η ασθενής* τοπολογία $\mathcal{T}_{w^*}$. Για τους ορισμούς και τις βασικές ιδιότητες των ασθενών τοπολογιών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στις Παραγράφους Α΄.3.2, Β΄.1.1, Β΄.1.2. Επίσης θα χρησιμοποιηθούν αρκετές συνέπειες και ιδιότητες από την Παράγραφο Β΄.2.1 των δύο παραπάνω τοπολογιών στο πλαίσιο των χώρων Banach. Ο αναγνώστης που είναι εξοικειωμένος με τους βασικούς ορισμούς μπορεί να συνεχίσει κανονικά την ανάγνωση της παραγράφου και στα σημεία που χρησιμοποιείται κάποιο αποτέλεσμα που είναι καθαρά θέμα συναρτησιακής ανάλυσης θα υπάρχει αντίστοιχη παραπομπή στο παράρτημα.

Πριν ξεκινήσουμε τις αποδείξεις των βασικών αποτελεσμάτων της παραγράφου να συμφωνήσουμε στο συμβολισμό που θα χρησιμοποιούμε: Για ένα διανυσματικό χώρο X πάνω από το $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $A, B \subseteq X$ συμβολίζουμε με span$A$ τη γραμμική θήκη του A. Με convA την κυρτή θήκη του A η οποία περιγράφεται ως conv$A = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{F},\ x_i \in A \text{ και n} \in \mathbb{N}\}$. Γράφουμε $A + B = \{a + \beta : a \in A,\ \beta \in B\}$ και $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$ για $\lambda \in \mathbb{F}$. Αν οι A, B είναι υπόχωροι και $A \cap B = \{0\}$ τότε $A \oplus B$ είναι το ευθύ άθροισμα των A, B. Αν ο X είναι χώρος Banach με B_X συμβολίζουμε την κλειστή μοναδιαία μπάλα του X, δηλαδή το σύνολο $\{x \in X : \|x\| \le 1\}$, με X^*, X^{**} συμβολίζουμε τον πρώτο και αντίστοιχα τον δεύτερο δυϊκό του X. Με j_X συμβολίζουμε την κανονική εμφύτευση του X στον X^{**} (βλ. Β΄.2.1), αν δεν τίθεται θέμα σύγχυσης θα γράφουμε απλά j. Με $\mathcal{B}(X)$ συμβολίζουμε το σύνολο των φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον X. Για $T \in \mathcal{B}(X)$ ο T^* είναι ο συζυγής τελεστής του T (βλ. Β΄.3.1). Για $x \in X$, $h \in X^*$ θα γράφουμε $\langle Tx, h\rangle$ αντί του $h(Tx)$ και $\langle x, h\rangle$ αντί του $h(x)$. Για ένα σύνολο A συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την κλειστή θήκη του A ως προς τη νόρμα, με $\overline{A}^w$ την κλειστή θήκη ως προς την ασθενή τοπολογία και με $\overline{A}^{w^*}$ την κλειστή θήκη ως προς την ασθενή* τοπολογία. Τέλος, για $x \in X$, $h \in X^*$ και $x_n \in X$, $h_n \in X^*$ γράφουμε $x_n \xrightarrow{w} x$ όταν η $(x_n)_{n=1}^\infty$ συγκλινει ασθενώς στο x και $h_n \xrightarrow{w^*} x^*$ όταν η $(h_n^*)_{n=1}^\infty$ συγκλίνει ασθενώς* στο x^*.

2.1.1 Το μέσο εργοδικό θεώρημα

Ορισμός 2.1.1. Έστω X ένας χώρος Banach. Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(X)$ θα καλείται:

(i) power bounded αν έχει ομοιόμορφα φραγμένες δυνάμεις, δηλαδή $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$.

(ii) φραγμένος κατά Cesàro αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$.

Παρατηρούμε πως αν ο T είναι power bounded τότε θα είναι και φραγμένος κατά Cesàro καθώς

$$\|A_n\| = \left\| n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} T^k \right\| \leq n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left\|T^k\right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|T^n\right\|,$$

απ' όπου έπεται ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$. Λόγω της ταυτότητας

$$A_n - \frac{n-1}{n} A_{n-1} = \frac{T^{n-1}}{n} \tag{2.1.1}$$

η συνθήκη

$$\frac{T^{n-1}x}{n} \to 0 \ \text{ καθώς το } n \to \infty \tag{2.1.2}$$

για $x \in X$ είναι αναγκαία για τη σύγκλιση της $(A_n x)_{n=1}^\infty$. Η (2.1.2) όπως φαίνεται και από το παρακάτω λήμμα μας λέει πως το όριο της $(A_n x)_{n=1}^\infty$ (αν υπάρχει) θα πρέπει να είναι σταθερό σημείο του T.

Λήμμα 2.1.2. *Έστω $T \in \mathcal{B}(X)$ όπου X ένας χώρος Banach. Αν για κάποιο $x \in X$ ισχύει η* (2.1.2) *τότε*

$$\left\|A_n T^k x - A_n x\right\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.1.3}$$

για κάθε $k \geq 1$.

Απόδειξη. Έστω $k \geq 1$. Τότε για $n > k$ έχουμε

$$\begin{aligned} A_n T^k x - A_n x &= \frac{T^k x + \ldots + T^{n-1}x + T^n x + \ldots + T^{n-1+k}x}{n} \\ &\quad - \frac{x + \ldots + T^k x + \ldots + T^{n-1}x}{n} \\ &= \frac{T^n x + \ldots + T^{n-1+k}x}{n} - \frac{x + \ldots + T^{k-1}x}{n} \\ &= n^{-1} \sum_{j=1}^{k} T^{n-1+j}x - n^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} T^j x. \end{aligned}$$

Όμως για $1 \leq j \leq k$ έχουμε

$$\frac{T^{n-1+j}x}{n} = \frac{n+j}{n(n+j)} T^{n-1+j}x$$

και επειδή $\frac{n+j}{n} \to 1$ και $n^{-1}T^{n-1}x \to 0$ θα έχουμε ότι $n^{-1}T^{n-1+j}x \to 0$. Αφού το k είναι ανεξάρτητο του n θα έχουμε $n^{-1}\sum_{j=1}^{k} T^{n-1+j}x \to 0$. Επίσης,

$$\begin{aligned} \left\| n^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} T^j x \right\| &\leq n^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left\| T^j x \right\| \\ &\leq n^{-1} \|x\| M \to 0, \end{aligned}$$

όπου $M = \sum_{j=0}^{k-1} \left\| T^j \right\| < \infty$. Άρα, συνοψίζοντας,

$$\begin{aligned} \left\| A_n T^k x - A_n x \right\| &= \left\| n^{-1} \sum_{j=1}^{k} T^{n-1+j}x - n^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} T^j x \right\| \\ &\leq n^{-1} \|x\| M + \left\| n^{-1} \sum_{j=1}^{k} T^{n-1+j}x \right\| \to 0. \end{aligned}$$

□

Το πρώτο αποτέλεσμα που αφορά τη σύγκλιση της $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ είναι το μέσο εργοδικό θεώρημα το οποίο όπως θα δούμε παρακάτω γενικεύει το θεώρημα του von Neumann.

Θεώρημα 2.1.3 (Μέσο εργοδικό θεώρημα)**.** *Έστω T ένας φραγμένος κατά Cesàro τελεστής σε ένα χώρο Banach X. Τότε, για κάθε $x \in X$ που ικανοποιεί την* (2.1.2) *και για κάθε $y \in X$ τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *$Ty = y$ και $y \in \overline{\mathrm{conv}}\{x, Tx, T^2x, \ldots\}$.*

(ii) *$A_n x \to y$.*

(iii) *$A_n x \xrightarrow{w} y$.*

(iv) *Το y είναι ασθενές υπακολουθιακό όριο της ακολουθίας $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$. Με άλλα λόγια υπάρχει υπακολουθία της $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ που συγκλίνει ασθενώς στο y.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Θέτουμε $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$ και θεωρούμε $\epsilon > 0$. Αφού $y \in \overline{\mathrm{conv}}\{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ θα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ και $\lambda_i \geq 0$ με $\sum_{i=0}^{N} \lambda_i = 1$ ώστε

$$\left\| \sum_{i=0}^{N} \lambda_i T^i x - y \right\| < \frac{\epsilon}{2M}. \tag{2.1.4}$$

Από την (2.1.3) θα έχουμε ότι $\|A_n T^i x - A_n x\| \to 0$ για $0 \leq i \leq N$. Οπότε θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\left\| A_n T^i x - A_n x \right\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ για } 0 \leq i \leq N. \tag{2.1.5}$$

Επειδή $Ty = y$ θα έχουμε και $T^k y = y$ το οποίο με τη σειρά του μας δίνει ότι $A_n y = y$. Χρησιμοποιώντας τις (2.1.4),(2.1.5) και την ισότητα $A_n y = y$, για $n \geq n_0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\|A_n x - y\| &= \left\| A_n x - A_n(\sum_{i=0}^{N} \lambda_i T^i x) + A_n(\sum_{i=0}^{N} \lambda_i T^i x) - A_n y \right\| \\
&\overset{\sum_i \lambda_i = 1}{\leq} \left\| \sum_{i=0}^{N} \lambda_i (A_n x - A_n T^i x) \right\| + \|A_n\| \left\| \sum_{i=0}^{N} \lambda_i T^i x - A_n y \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \left\| A_n x - A_n T^i x \right\| + M \frac{\epsilon}{2M} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $A_n x \to y$.

Οι συνεπαγωγές (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) είναι προφανείς. Για την (iv) $\Longrightarrow$ (i) αρκεί να δείξουμε ότι $\langle y, h \rangle = \langle Ty, h \rangle$ για κάθε $h \in X^*$. Θεωρούμε $\epsilon > 0$. Επειδή το y είναι ασθενές υπακολουθιακό όριο της $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ θα υπάρχει υπακολουθία $(A_{k_n} x)_{n=1}^{\infty}$ με $A_{k_n} x \xrightarrow{w} y$. Άρα, $\langle A_{k_n} x, h \rangle \to \langle y, h \rangle$. Από την (2.1.3) έχουμε $A_{k_n} Tx - A_{k_n} x \to 0$. Άρα λόγω της συνέχειας του h, $\langle A_{k_n} Tx - A_{k_n} x, h \rangle \to 0$. Τώρα, επειδή $T^* h \in X^*$ θα έχουμε και $\langle A_{k_n} x - y, T^* y \rangle \to 0$. Όμως

$$\begin{aligned}
\langle A_{k_n} x - y, T^* y \rangle &= \langle T(A_{k_n} x - y), h \rangle \\
&= \langle A_{k_n} Tx - Ty, h \rangle.
\end{aligned}$$

Οπότε τώρα γράφοντας

$$\begin{aligned}
|\langle y - Ty, h \rangle| &= |\langle y - A_{k_n} x, h \rangle + \langle A_{k_n} x - A_{k_n} Tx, h \rangle + \langle A_{k_n} Tx - Ty, h \rangle| \\
&\leq |\langle y - A_{k_n} x, h \rangle| + |\langle A_{k_n} x - A_{k_n} Tx, h \rangle| + |\langle A_{k_n} Tx - Ty, h \rangle|
\end{aligned}$$

και αφήνοντας το $n \to \infty$ καταλήγουμε στο ότι $\langle y - Ty, h \rangle = 0$, Δηλαδή $\langle y, h \rangle = \langle Ty, h \rangle$ όπως θέλαμε. Τέλος, επειδή $A_{k_n} x \in \mathrm{conv}\{\mathrm{x}, \mathrm{Tx}, \mathrm{T}^2\mathrm{x}, \ldots\}$ και $A_{k_n} x \xrightarrow{w} y$ θα έχουμε $y \in \overline{\mathrm{conv}}^{w}\{x, Tx, T^2 x, \ldots\}$. Όμως από το θεώρημα του Mazur (βλ. Β΄.1.3), $\overline{\mathrm{conv}}\{x, Tx, T^2 x, \ldots\} = \overline{\mathrm{conv}}^{w}\{x, Tx, T^2 x, \ldots\}$. □

Η παραπάνω διατύπωση του μέσου εργοδικού θεωρήματος είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Eberlein (1949-[5]) που θα δούμε παρακάτω. Παρ' όλα αυτά οι βασικοί ισχυρισμοί είχαν ήδη αποδειχθεί με τις εργασίες του F. Riesz (1938-[18]) για $X = L_p$ και ανεξάρτητα με τη δουλειά των K. Yosida (1938-[20]) και S. Kakutani (1938-[11]) για γενικό χώρο Banach (βλ. [13] σελ.73).

Η ισοδυναμία των (ii),(iv) ανάγει τη σύγκλιση της ακολουθίας $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ στην εύρεση ενός ασθενούς υπακολουθιακού ορίου. Πρόβλημα το οποίο με τη βοήθεια της συναρτησιακής ανάλυσης αντιμετωπίζεται πιο εύκολα όπως φαίνεται στα παρακάτω αποτελέσματα.

Θεώρημα 2.1.4. *Αν T είναι ένας power bounded τελεστής σε έναν αυτοπαθή χώρο Banach X τότε οι μέσοι όροι $A_n x$ συγκλίνουν ως προς τη νόρμα σε ένα $T-$αναλλοίωτο όριο για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη. Αφού ο T είναι power bounded θα είναι και φραγμένος κατά Cesàro, έτσι η ακολουθία $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ θα είναι φραγμένη, οπότε θα υπάρχει $M > 0$ με $A_n x \in MB_X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού ο X είναι αυτοπαθής, η κλειστή μπάλα MB_X θα είναι ασθενώς συμπαγής (βλ. Θεώρημα Β΄.2.9). Όμως τότε από το θεώρημα Eberlein-Smulian (βλ. Θεώρημα Β΄.2.10) θα είναι και ασθενώς ακολουθιακά συμπαγής. Άρα η $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ θα έχει ασθενές υπακολουθιακό όριο και τώρα το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 2.1.3. □

Το Θεώρημα 2.1.4 αποδείχθηκε με διαφορετικό τρόπο από τον E. Lorch (1939-[15]). Παρακάτω θα δούμε το επιχείρημά του.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1.4 στους L_p οι οποίοι είναι αυτοπαθείς για $1 < p < \infty$ με τελεστή τον τελεστή Koopman ο οποίος είναι ισομετρία (άρα και power bounded) παίρνουμε το L_p−μέσο εργοδικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.5 (L_p-μέσο εργοδικό θεώρημα)**.** *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $\tau : \Omega \to \Omega$ ένας μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο μ. Τότε, για κάθε $f \in L_p(\mu)$ υπάρχει μια τ−αναλλοίωτη συνάρτηση $\tilde{f} \in L_p(\mu)$ με*

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \tau^k - \tilde{f} \right\|_p \to 0 \tag{2.1.6}$$

καθώς το $n \to \infty$.

2.1.2 Μια συνθήκη για σύγκλιση στον L_1

Η αυτοπάθεια είναι καταλυτικός παράγοντας για το Θεώρημα 2.1.4 μιας και στον L_1 δεν μπορούμε να έχουμε αντίστοιχο αποτέλεσμα. Πράγματι, θεωρώντας $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, μ =το μέτρο Lebesgue και $\tau(x) = x + a$ για $a > 0$ σταθερό, έχουμε ότι η τετράδα $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ είναι ένα σ.δ.μ. Αν ισχύει το Θεώρημα 2.1.4 για τον L_1 τότε για τη συνάρτηση $f = \mathbb{1}_{[0,a)} \in L_1$ θα υπάρχει μια τ−αναλλοίωτη συνάρτηση $\tilde{f}$ ώστε να ισχύει η (2.1.6) για $p = 1$. Όμως, για $\omega \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \tau^k(\omega) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\tau^{-k}([0,a))}(\omega) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[-ka,-(k-1)a))}(\omega) \end{aligned}$$

και επειδή τα $([-ka, -(k-1)a))_{k=0}^{\infty}$ είναι ξένα ανά δύο θα έχουμε $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \tau^k(\omega) \to 0$. Άρα, αφού η $n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \tau^k$ συγκλίνει στον L_1 στην $\tilde{f}$ θα συγκλίνει και κατά μέτρο, συνεπώς, θα υπάρχει υπακολουθία της $n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \tau^k$ που θα συγκλίνει σχεδόν παντού στην $\tilde{f}$ και άρα θα πρέπει $\tilde{f} = 0$. Δηλαδή,

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \tau^k \right\|_1 \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Όμως από την άλλη έχουμε

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \tau^k \right\|_1 &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[-ka,-(k-1)a)} \, d\mu \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu([-ka, -(k-1)a)) = a > 0 \end{aligned}$$

και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο. Παρ' όλα αυτά το μέσο εργοδικό θεώρημα μπορεί να μας δώσει σύγκλιση στον L_1 στην παρακάτω ειδική περίπτωση:

Θεώρημα 2.1.6. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $T : L_1 \to L_1$ μια συστολή. Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει μια γνήσια θετική συνάρτηση $p \in L_1$ ώστε για κάθε $f \in L_1$ με $|f| \leq p$ να ισχύει $|Tf| \leq p$. Τότε, υπάρχει μια συνάρτηση $\tilde{f} \in L_1$ με $T\tilde{f} = \tilde{f}$ ώστε*

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f - \tilde{f} \right\|_1 \to 0 \tag{2.1.7}$$

καθώς το $n \to \infty$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.6 βασίζεται στο θεώρημα των Dunford-Pettis (1940-[4]) το οποίο χαρακτηρίζει τα υποσύνολα του L_1 που είναι ασθενώς συμπαγή μέσω της έννοιας της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας.

Ορισμός 2.1.7 (Ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα)**.** Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Μια οικογένεια συναρτήσεων $\mathcal{F} \subseteq L_1(\mu)$ λέγεται ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια μη αρνητική συνάρτηση $g_\epsilon \in L_1(\mu)$ ώστε

$$\int_\Omega (|f| - g_\epsilon)^+ \, d\mu < \epsilon \tag{2.1.8}$$

για κάθε $f \in \mathcal{F}$.

Το θεώρημα των Dunford-Pettis μας λέει ότι:

Θεώρημα 2.1.8 (Dunford-Pettis)**.** *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $\mathcal{F} \subseteq L_1(\mu)$. Τότε, το $\overline{\mathcal{F}}^w$ είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του $L_1(\mu)$ αν και μόνο αν η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.*

Να αναφέρουμε ότι οι Dunford-Pettis στην εργασία τους [4] απέδειξαν το θεώρημα στην ειδική περίπτωση που το μέτρο μ είναι σ-πεπερασμένο. Συγκεκριμένα, απέδειξαν ότι το $\overline{\mathcal{F}}^w$ είναι ασθενώς συμπαγές αν και μόνο αν για την $\mathcal{F}$ ισχύουν οι εξής τρεις συνθήκες:

(i) Το $\mathcal{F}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $L_1(\mu)$.

(ii) Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $E \in \mathscr{A}$ με $\mu(E) < \delta$ τότε $\int_E |f| \, d\mu < \epsilon$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$.

(iii) Για κάθε $(E_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathscr{A}$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων με $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = \Omega$ και $\mu(E_n) < \infty$ ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \sum_{k=n}^\infty \left| \int_{E_k} f \, d\mu \right| = 0.$$

Στην περίπτωση του σ-πεπερασμένου μέτρου οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες με τον Ορισμό 2.1.7 της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας. Παρ' όλα αυτά για μέτρο μ όχι απαραίτητα σ-πεπερασμένο οι παραπάνω τρεις συνθήκες δεν αρκούν για να αποδειχθεί ότι το $\overline{\mathcal{F}}^w$ είναι ασθενώς συμπαγές. Όμως, το Θεώρημα 2.1.8 ισχύει και στην περίπτωση άπειρου μέτρου. Μια απόδειξη, με χρήση υπερφίλτρων, για τη γενική περίπτωση του Θεωρήματος 2.1.8 μπορεί να βρεθεί στο [7]-σελ.192.

Για την απόδειξη του εργοδικού Θεωρήματος 2.1.6 η κατεύθυνση του Θεωρήματος 2.1.8 που μας χρειάζεται είναι πως αν η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη οικογένεια συναρτήσεων στον $L_1(\mu)$ τότε το $\overline{\mathcal{F}}^w$ είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του $L_1(\mu)$. Μιας και η περίπτωση του σ-πεπερασμένου μέτρου αρκεί για τα περισσότερα παραδείγματα αλλά και για την αποφυγή της έννοιας του υπερφίλτρου θα δώσουμε μια απόδειξη του παραπάνω στο πλαίσιο των σ-πεπερασμένων μέτρων χρησιμοποιώντας ένα διαφορετικό επιχείρημα από αυτό των Dunford-Pettis.

Πρόταση 2.1.9. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $\mathcal{F} \subseteq L_1(\mu)$ μια ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη οικογένεια συναρτήσεων. Τότε:*

(i) *Το $\mathcal{F}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $L_1(\mu)$.*

(ii) $\lim\limits_{M\to\infty} \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|>M\}} |f|\, d\mu = 0.$

(iii) *Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\int_A |f|\, d\mu < \epsilon$ για κάθε $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) < \delta$ και $f \in \mathcal{F}$.*

Απόδειξη. (i) Αφού η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη θα υπάρχει μια μη αρνητική συνάρτηση $g \in L_1(\mu)$ με

$$\int_\Omega (|f| - g)^+\, d\mu < 1$$

για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Τότε, γράφοντας

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|\, d\mu &= \int_\Omega (|f| - g)\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu \\ &\leq \int_\Omega (|f| - g)^+\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu \\ &< 1 + \|g\|_1 ,\end{aligned}$$

θα έχουμε ότι $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_1 \leq 1 + \|g\|_1$.

(ii) Από το (i) έχουμε ότι $A = \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_1 < \infty$. Θεωρούμε $\epsilon > 0$. Τότε, θα υπάρχει μια μη αρνητική $g \in L_1(\mu)$ με

$$\int_\Omega (|f| - g)^+\, d\mu < \frac{\epsilon}{3} \tag{2.1.9}$$

για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Αφού η g είναι ολοκληρώσιμη θα υπάρχει $M_0 > 0$ ώστε

$$\int\limits_{\{g>M\}} g\, d\mu < \frac{\epsilon}{3} \tag{2.1.10}$$

για κάθε $M \geq M_0$. Τότε, χρησιμοποιώντας τις (2.1.9),(2.1.10) και γράφοντας

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{|f|>M\}} |f|\, d\mu &= \int\limits_{\{|f|>M\}} (|f| - g)\, d\mu + \int\limits_{\{|f|>M\}} g\, d\mu \\ &\leq \int\limits_{\{|f|>M\}} (|f| - g)^+\, d\mu + \int\limits_{\{|f|>M\}\cap\{g>M_0\}} g\, d\mu + \int\limits_{\{|f|>M\}\cap\{g\leq M_0\}} g\, d\mu,\end{aligned}$$

θα έχουμε για $M > M_0$ ότι

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{|f|>M\}} |f|\, d\mu &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + M_0\mu(|f| > M) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{M_0}{M}A\end{aligned}$$

για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Άρα,

$$\limsup_{M\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int\limits_{\{|f|>M\}} |f|\, d\mu \leq \frac{2\epsilon}{3},$$

απ' όπου έπεται ότι $\lim\limits_{M\to\infty} \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \int\limits_{\{|f|>M\}} |f|\, d\mu = 0$.

(iii) Θεωρούμε ένα $\epsilon > 0$ και βρίσκουμε μια μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση g με $\int_\Omega (|f| - g)^+\, d\mu < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Από την ολοκληρώσιμοτητα της g υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\int_A g\, d\mu < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) < \delta$. Τότε, γράφοντας

$$\begin{aligned}\int_A |f|\, d\mu &= \int_A (|f| - g)\, d\mu + \int_A g\, d\mu \\ &\leq \int_A (|f| - g)^+\, d\mu + \int_A g\, d\mu,\end{aligned}$$

θα έχουμε $\int_A |f|\, d\mu < \epsilon$ για κάθε $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) < \delta$ και $f \in \mathcal{F}$. □

Για $\mathcal{F} \subseteq L_1(\mu)$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη θέτουμε $\epsilon(M) = \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \int\limits_{|f|>M} |f|\, d\mu$. Χρησιμοποιώντας το ότι $\epsilon(M) \to 0$ για $M \to \infty$, μπορούμε να δείξουμε ότι το $\overline{\mathcal{F}}^w$ είναι ασθενώς συμπαγές στην περίπτωση που το μ είναι σ-πεπερασμένο:

Θεώρημα 2.1.10. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $\mathcal{F} \subseteq L_1(\mu)$ μια ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη οικογένεια συναρτήσεων. Τότε, το $\overline{\mathcal{F}}^w$ είναι ασθενώς συμπαγές.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το μ είναι πεπερασμένο. Για $M > 0$ ορίζουμε

$$\mathcal{F}_M = \{f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|\leq M\}} : f \in \mathcal{F}\}$$

και

$$\mathcal{F}^M = \{f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|>M\}} : f \in \mathcal{F}\}.$$

Τότε $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_M + \mathcal{F}^M$. Από την Πρόταση 2.1.9 το $\mathcal{F}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $L_1(\mu)$. Συνεπώς, το $j(\mathcal{F})$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $(L_1(\mu))^{**}$. Άρα, το $\overline{j(\mathcal{F})}^{w^*}$ είναι w^*−συμπαγές. Αφού η j είναι (w, w^*)-συνεχής, για να δείξουμε ότι το $\overline{\mathcal{F}}^{w}$ είναι ασθενώς συμπαγές αρκεί να δείξουμε ότι

$$\overline{j(\mathcal{F})}^{w^*} \subseteq j(L_1(\mu)). \tag{2.1.11}$$

Από την $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_M + \mathcal{F}^M$ έχουμε $j(\mathcal{F}) \subseteq j(\mathcal{F}_M) + j(\mathcal{F}^M)$ απ' όπου έπεται ότι $\overline{j(\mathcal{F})}^{w^*} \subseteq \overline{j(\mathcal{F}_M) + j(\mathcal{F}^M)}^{w^*}$. Τώρα, επειδή τα $j(\mathcal{F}_M), j(\mathcal{F}^M)$ είναι φραγμένα, τα $\overline{j(\mathcal{F}_M)}^{w^*}, \overline{j(\mathcal{F}^M)}^{w^*}$ θα είναι w^*-συμπαγή. Συνεπως, το $\overline{j(\mathcal{F}_M)}^{w^*} + \overline{j(\mathcal{F}^M)}^{w^*}$ είναι w^*-συμπαγές, και επειδή $j(\mathcal{F}_M) + j(\mathcal{F}^M) \subseteq \overline{j(\mathcal{F}_M)}^{w^*} + \overline{j(\mathcal{F}^M)}^{w^*}$ θα έχουμε ότι $\overline{j(\mathcal{F}_M) + j(\mathcal{F}^M)}^{w^*} \subseteq \overline{j(\mathcal{F}_M)}^{w^*} + \overline{j(\mathcal{F}^M)}^{w^*}$. Δηλαδή, $\overline{j(\mathcal{F})}^{w^*} \subseteq \overline{j(\mathcal{F}_M)}^{w^*} + \overline{j(\mathcal{F}^M)}^{w^*}$. Άρα, για να δείξουμε την (2.1.11) αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{j(\mathcal{F}_M)}^{w^*} \subseteq j(L_1(\mu))$ και $\overline{j(\mathcal{F}^M)}^{w^*} \subseteq j(L_1(\mu))$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο θα έχουμε ότι $\mathcal{F}_M \subseteq L_2(\mu)$. Όμως, ο $L_2(\mu)$ είναι αυτοπαθής, απ' όπου έπεται ότι το $\overline{j_{L_2}(\mathcal{F}_M)}^{w^*} \subseteq j_{L_2}(L_2(\mu))$. Άρα, το $\overline{\mathcal{F}_M}^{w}$ είναι w−συμπαγές (ως προς την ασθενή τοπολογία του L_2). Όμως, για $f \in L_2(\mu)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f| \, d\mu &= \int_\Omega |f| \mathbb{1}_\Omega \, d\mu \\ &\leq \left(\int_\Omega |f|^2 \, d\mu \right)^{1/2} \mu(\Omega)^{1/2}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι η εμφύτευση $\iota : L_2(\mu) \to L_1(\mu)$ είναι $(\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1)$-συνεχής και κατ' επέκταση και (w, w)−συνεχής. Άρα, το $\overline{\mathcal{F}_M}^{w}$ είναι w−συμπαγές υποσύνολο του $L_1(\mu)$. Άρα, το $j(\overline{\mathcal{F}_M}^{w})$ θα είναι w^*-συμπαγές υποσύνολο του $j(L_1(\mu))$ και επειδή $j(\mathcal{F}_M) \subseteq j(\overline{\mathcal{F}_M}^{w})$ θα έχουμε ότι $\overline{j(\mathcal{F}_M)}^{w^*} \subseteq j(L_1(\mu))$. Χρησιμοποιώντας τώρα το ότι $\epsilon(M) \to 0$ για $M \to \infty$ μπορούμε να δείξουμε και την $\overline{j(\mathcal{F}^M)}^{w^*} \subseteq j(L_1(\mu))$. Πράγματι, αφού για κάθε $f \in \mathcal{F}^M$ έχουμε ότι $\|f\|_1 \leq \epsilon(M)$ θα ισχύει ότι $j(\mathcal{F}^M) \subseteq \epsilon(M) B_{L_1^{**}}$. Όμως, η $B_{L_1^{**}}$ είναι w^*-συμπαγής, συνεπώς $\overline{j(\mathcal{F}^M)}^{w^*} \subseteq \epsilon(M) B_{L_1^{**}}$. Άρα, συνοψίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} \overline{j(\mathcal{F})}^{w^*} &\subseteq \overline{j(\mathcal{F}_M)}^{w^*} + \overline{j(\mathcal{F}^M)}^{w^*} \\ &\subseteq j(L_1(\mu)) + \epsilon(M) B_{L_1^{**}}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για $f \in \overline{j(\mathcal{F})}^{w^*}$ θα υπάρχει $g_M \in L_1(\mu)$ με $\|f - j(g_M)\|_{L_1^{**}} \leq \epsilon(M)$. Ειδικότερα, θα έχουμε $d(f, j(L_1(\mu)) \leq \epsilon(M)$ για κάθε $M > 0$. Άρα, αφού $\epsilon(M) \to 0$ για $M \to \infty$ θα πρέπει να ισχύει $d(f, j(L_1(\mu))) = 0$ και επειδή ο $j(L_1(\mu))$ είναι κλειστός θα έχουμε ότι $f \in j(L_1(\mu))$. Δηλαδή, καταλήγουμε στην $\overline{j(\mathcal{F})}^{w^*} \subseteq j(L_1(\mu))$ ολοκληρώνοντας με αυτό τον τρόπο την απόδειξη στην περίπτωση που το μ είναι πεπερασμένο.

Στην περίπτωση που το μ είναι σ-πεπερασμένο θα υπάρχουν $(E_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathscr{A}$ ξένα ανά δύο με $0 < \mu(E_n) < \infty$ και $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = \Omega$. Θεωρούμε την $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\mathbb{1}_{E_n}}{\mu(E_n)}$ για την οποία ισχύει $\int_\Omega g \, d\mu = 1$ και ορίζουμε $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ με

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu.$$

Τότε το ν είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathscr{A})$. Τώρα, αφού η g είναι γνησίως θετική για $A \in \mathscr{A}$ θα έχουμε

$$\int_A g^{-1}\, d\nu = \int_A d\mu = \mu(A),$$

δηλαδή $\frac{d\mu}{d\nu} = g^{-1}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $S : L_1(\mu) \to L_1(\nu)$ με $S(f) = fg^{-1}$. Τότε, η S είναι 1-1, επί, γραμμική και για κάθε $f \in L_1(\mu)$ με $f \geq 0$

$$\begin{aligned}\int_\Omega Sf\, d\nu &= \int_\Omega fg^{-1}\, d\nu\\ &= \int_\Omega f\, d\mu,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\|f\|_1 = \|Sf\|_1$. Άρα, η S είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Ειδικότερα, η S θα είναι (w, w)-συνεχής. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε $h \in (L_1(\nu))^*$ και $V \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό. Τότε, $S^{-1}(h^{-1}(V)) = (h \circ S)^{-1}(V)$. Όμως, αφού η S είναι $(\|\cdot\|_{L_1(\mu)}, \|\cdot\|_{L_1(\nu)})$-συνεχής θα έχουμε $h \circ S \in (L_1(\mu))^*$. Άρα, το $S^{-1}(h^{-1}(V))$ είναι ασθενώς ανοικτό απ' όπου έπεται ότι η S αντιστρέφει ασθενώς ανοικτά σε ασθενώς ανοικτά. Τώρα, αν $\mathcal{F} \subseteq L_1(\mu)$ είναι μια ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη οικογένεια συναρτήσεων έχουμε ότι η $S(\mathcal{F}) \subseteq L_1(\nu)$ είναι επίσης ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Πράγματι, για $\epsilon > 0$ θα υπάρχει μια μη αρνητική $h \in L_1(\mu)$ με

$$\int_\Omega (|f| - h)^+\, d\mu < \epsilon$$

για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Τότε, η $Sh = hg^{-1}$ είναι μη αρνητική και $Sh \in L_1(\nu)$. Αφού η g^{-1} είναι γνησίως θετική τότε θα έχουμε

$$(fg^{-1} - hg^{-1})^+ = (f - h)^+ g^{-1},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|Sf| - Sh)^+\, d\nu &= \int_\Omega (|f|g^{-1} - hg^{-1})^+\, d\nu\\ &= \int_\Omega (|f| - h)^+ g^{-1}\, d\nu\\ &= \int_\Omega (|f| - h)^+\, d\mu < \epsilon\end{aligned}$$

για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Δηλαδή, η $S(\mathcal{F})$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, αφού το ν είναι πεπερασμένο το $\overline{S(\mathcal{F})}^w$ θα είναι w–συμπαγές. Απ' την (w, w)-συνέχεια της S, το $S^{-1}(\overline{S(\mathcal{F})}^w)$ θα είναι w–συμπαγές. Όμως, $\overline{\mathcal{F}}^w = S^{-1}(\overline{S(\mathcal{F})}^w)$. □

Απόδειξη Θεωρήματος 2.1.6. Έστω $f \in L_1(\mu)$. Θεωρούμε $\epsilon > 0$. Αφού η p είναι γνήσια θετική έχουμε $f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|>Mp\}} \to 0$ καθώς το $M \to \infty$, και επειδή $|f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|>Mp\}}| \leq |f|$ θα έχουμε ότι

$$\int\limits_{\{|f|>Mp\}} |f|\, d\mu \xrightarrow{M\to\infty} 0.$$

Οπότε, θα υπάρχει $M > 0$ με

$$\int\limits_{\{|f|>Mp\}} |f|\, d\mu < \epsilon. \tag{2.1.12}$$

Γράφουμε $f = f_M + f'_M$ όπου $f_M = f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|\leq Mp\}}$ και $f'_M = f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|>Mp\}}$. Τότε, από την $|f_M| \leq Mp$ θα έχουμε διαδοχικά ότι $|T^k f_M| \leq Mp$, απ' όπου έπεται ότι $|A_n f_M| \leq Mp$. Επίσης, από την (2.1.12) έχουμε ότι $\|f'_M\|_1 < \epsilon$. Όμως, η T είναι συστολή, άρα, $\|T^k f'_M\|_1 \leq \|f'_M\|_1$ για κάθε $k \geq 0$, απ' όπου έπεται ότι $\|A_n f'_M\|_1 \leq \|f'_M\|_1 < \epsilon$. Οπότε τώρα χρησιμοποιώντας το ότι η $Mp \in L_1(\mu)$ είναι μη αρνητική και $(|A_n f_M| + |A_n f'_M| - Mp)^+ \leq (|A_n f_M| - Mp)^+ + |A_n f'_M|$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|A_n f| - Mp)^+ \, d\mu &\leq \int_\Omega (|A_n f_M| - Mp)^+ \, d\mu + \int_\Omega |A_n f'_M| \, d\mu \\ &\leq \int_{\{|A_n f_M|>Mp\}} (|A_n f_M| - Mp) \, d\mu + \|A_n f'_M\|_1 ,\end{aligned}$$

και επειδή $|A_n f_M| \leq Mp$ θα έχουμε

$$\int_{\{|A_n f_M|>Mp\}} (|A_n f_M| - Mp) \, d\mu = 0.$$

Οπότε τελικά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega (|A_n f| - Mp)^+ \, d\mu \leq \|A_n f'_M\|_1 < \epsilon,$$

απ' όπου έπεται ότι η $\mathcal{F} = (A_n f)_{n=1}^\infty$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Άρα, από το Θεώρημα 2.1.8 το $\overline{\mathcal{F}}^w$ θα είναι w−συμπαγές. Από το Θεώρημα Β′.2.10 θα είναι και ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές. Συνεπώς, η $(A_n f)_{n=1}^\infty$ θα έχει υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς. Οπότε τώρα, η (2.1.6) έπεται από το μέσο εργοδικό θεώρημα. □

2.2 Το θεώρημα διάσπασης

Γνωρίζουμε από το θεώρημα von Neumann (και συγκεκριμένα το Λήμμα 1.2.2) ότι αν $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ είναι ένα σ.δ.μ τότε

$$L_2 = F(U_\tau) \oplus \overline{N}, \tag{2.2.1}$$

όπου $F(U_\tau) = \{f \in L_2 : f \circ \tau = f\}$ και $N = \{f - f \circ \tau : f \in L_2\} = (I - U_\tau)L_2$. Σε αυτή την παράγραφο εξετάζουμε την παραπάνω διάσπαση στο πλαίσιο των χώρων Banach. Ο χώρος στον οποίο ισχύει ανάλογη διάσπαση με αυτή της (2.2.1) δεν είναι όλος ο X αλλά ο υπόχωρος όλων των σημείων που έχουν μέσους όρους. Δηλαδή, ο $X_{me} = \{x \in X : \text{ το } \lim_n A_n x \text{ υπάρχει}\}$ όπου $T \in \mathcal{B}(X)$. Στην περίπτωση που ισχύει $X = X_{me}$ ο τελεστής T θα καλείται εργοδικός. Επίσης γράφουμε,

$$N = \{x - Tx : x \in X\}, \ F_* = F^*(T) = \{h \in X^* : T^* h = h\}$$

και $N^* = \{h - T^* h : h \in X^*\} = (I - T^*)X^*$. Τώρα, για $x \in X_{me}$ ορίζεται η απεικόνιση $P : X_{me} \to X$ με $Px = \lim_n A_n x$ η οποία είναι γραμμική. Στην περίπτωση που ο T είναι φραγμένος κατά Cesàro ο X_{me} είναι κλειστός και η P συνεχής όπως φαίνεται και από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω X ένας χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$ ένας φραγμένος κατά Cesàro τελεστής. Τότε, ο X_{me} είναι κλειστός υπόχωρος του X και η $Px = \lim_n A_n x$, $x \in X_{me}$ είναι γραμμική και συνεχής.*

Απόδειξη. Το ότι ο X_{me} είναι υπόχωρος και η P γραμμική ισχύει ανεξάρτητα απ' το αν ο T είναι φραγμένος κατά Cesàro. Τώρα, αν ο T είναι φραγμένος κατά Cesàro για $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq X_{me}$ με $x_k \to x$ έχουμε ότι $\lim_n A_n x_k = y_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Οπότε, αν $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$ και $\epsilon > 0$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $k, m \geq n_0$ να ισχύει $\|x_k - x_m\| < \frac{\epsilon}{3M}$. Άρα, για κάθε $k, m \geq n_0$

$$\begin{aligned}\|y_k - y_m\| &\leq \|y_k - A_n y_k\| + \|A_n x_k - A_n x_m\| + \|A_n x_m - y_m\| \\ &\leq \|y_k - A_n x_k\| + \frac{\epsilon}{2} + \|A_n x_m - y_m\|\end{aligned}$$

και έτσι αφήνοντας το $n \to \infty$ θα έχουμε $\|y_k - y_m\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $k, m \geq n_0$. Δηλαδή, η $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι βασική. Επομένως, θα υπάρχει $y \in X$ με $y_k \to y$. Δείχνοντας ότι $\lim_n A_n x = y$ θα έχουμε ότι ο X_{me} είναι κλειστός και η P συνεχής. Γι' αυτό, θεωρούμε $\epsilon > 0$ και βρίσκουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ με

$$\left\|x_{k_0} - x\right\| < \frac{\epsilon}{3M} \quad \text{και} \quad \left\|y_{k_0} - y\right\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Τότε, αφού $A_n x_{k_0} \to y_{k_0}$ θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\left\|A_n x_{k_0} - y_{k_0}\right\| < \frac{\epsilon}{3}$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\|A_n x - y\| &\leq \left\|A_n x - A_n x_{k_0}\right\| + \left\|A_n x_{k_0} - y_{k_0}\right\| + \left\|y_{k_0} - y\right\| \\ &\leq M\left\|x - x_{k_0}\right\| + \left\|A_n x_{k_0} - y_{k_0}\right\| + \left\|y_{k_0} - y\right\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

□

Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι ο T είναι φραγμένος κατά Cesàro και ισχύει η (2.1.2) για όλα τα $x \in X$, τότε από το μέσο εργοδικό θεώρημα θα έχουμε ότι το όριο Px είναι $T-$αναλλοίωτο, δηλαδή $Px \in F(T)$ για $x \in X_{me}$. Συνεπώς, $P^2 x = Px$ και έτσι η P θα είναι μια προβολή στον X_{me} (βλ. Ορισμό Β΄.3.5). Άρα από την Πρόταση Β΄.3.6 θα έχουμε ότι $X_{me} = \mathrm{Im}P \oplus \ker P$ και επειδή $\mathrm{Im}P = F(T)$ θα έχουμε τελικά ότι $X_{me} = F(T) \oplus \ker P$. Άρα δείχνοντας ότι $\ker P = \overline{N}$ όπου $N = \{x - Tx : x \in X\}$ θα έχουμε πετύχει τη γενίκευση της (2.2.1). Οι παραπάνω ισχυρισμοί συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα του οποίου το μεγαλύτερο μέρος της απόδειξης οφείλεται στον K. Yosida (1938-[20]).

Θεώρημα 2.2.2 (Θεώρημα διάσπασης). *Έστω $T \in \mathcal{B}(X)$ ένας φραγμένος κατά Cesàro τελεστής για τον οποίο η* (2.1.2) *ισχύει για όλα τα $x \in X$. Τότε, $X_{me} = F \oplus \overline{N}$. Ο τελεστής $Px = \lim_n A_n x$, $x \in X_{me}$ είναι η προβολή του X_{me} στον F και $P = P^2 = PT = TP$. Επιπλέον, για $z \in X$ τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) $A_n z \to 0$.

(ii) $\langle z, h\rangle = 0$ *για κάθε* $h \in F_*$.

(iii) $z \in \overline{N}$.

Απόδειξη. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις έχουμε ότι $X = F \oplus \ker P$ και ο P είναι η προβολή του X_{me} στον F (άρα $P^2 = P$). Επίσης, από το Λήμμα 2.1.2 θα έχουμε $\|A_n Tx - A_n x\| \to 0$ απ' όπου έπεται ότι $PTx = Px$ για κάθε $x \in X_{me}$ και επειδή $TA_n = A_n T$ θα έχουμε και $TP = P$. Άρα τελικά, $P = P^2 = PT = TP$. Αποδεικνύοντας τις ισοδυναμίες των (i),(ii),(iii) (συγκεκριμένα των (i),(iii)) θα έχουμε αποδείξει ότι $\overline{N} = \ker P$ και έτσι θα έχουμε ότι $X_{me} = F \oplus \overline{N}$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Αφού $T^*h = h$ και επειδή $(T^k)^* = (T^*)^k$ (βλ. μετά την Πρόταση Β'.3.2) θα έχουμε ότι $A_n^* h = h$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα αφού $\langle A_n z, h\rangle = \langle z, A_n^* h\rangle = \langle z, h\rangle$ και επειδή $A_n z \to 0$ θα έχουμε ότι $\langle z, h\rangle = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Αν $z \notin \overline{N}$ από το θεώρημα Hahn-Banach (βλ. Πρόταση Α'.3.3) θα υπάρχει $h \in X^*$ με $\langle z, h\rangle \neq 0$ και $h|_{\overline{N}} = 0$. Δηλαδή, για κάθε $x \in X$ θα έχουμε $\langle x, h\rangle = \langle Tx, h\rangle$, απ' όπου έπεται ότι $h \in F_*$. Όμως τότε θα πρέπει $\langle z, h\rangle = 0$ και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Από το Λήμμα 2.1.2 έχουμε $\|A_n(x - Tx)\| = \|A_n x - A_n Tx\| \to 0$. Άρα για κάθε $z \in N$ θα ισχύει $\|A_n z\| \to 0$. Στην περίπτωση που $z \in \overline{N}$ θεωρώντας $\epsilon > 0$ και θέτοντας $M = \sup \|A_n\|$ βρίσκουμε $x \in X$ με $\|z - (x - Tx)\| < \frac{\epsilon}{2M}$. Άρα, αφού $\|A_n(x - Tx)\| \to 0$ θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\|A_n(x - Tx)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\|A_n z\| &\leq \|A_n(z - (x - Tx))\| + \|A_n(x - Tx)\| \\ &\leq M\,\|z - (x - Tx)\| + \|A_n(x - Tx)\| \\ &< M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\|A_n z\| \to 0$. □

Ορισμός 2.2.3 (Προβολή που απορροφά τον T)**.** Θα λέμε ότι μια προβολή $Q \in \mathcal{B}(X)$ είναι μια προβολή που απορροφά τον T αν $Q = QT = TQ$.

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα η P είναι μια προβολή που απορροφά τον T. Το παρακάτω θεώρημα οφείλεται στον R. Sine (1970-[19]) και μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για το πότε ένας τελεστής T είναι εργοδικός.

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω T ένας φραγμένος κατά Cesàro τελεστής για τον οποίο ισχύει η* (2.1.2) *για όλα τα $x \in X$. Τότε, ο T είναι εργοδικός (δηλ. $X = X_{me}$) αν και μόνο αν ο F διαχωρίζει τον F_*, με την έννοια ότι για κάθε $h \in F_*$ με $h \neq 0$ υπάρχει $x \in F$ με $\langle x, h\rangle \neq 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο T είναι εργοδικός και θεωρούμε $h \neq 0$ με $h \in F_*$. Αφού $h \neq 0$ θα υπάρχει σε πρώτη φάση $x \in X$ με $\langle x, h\rangle \neq 0$. Αφού ο T είναι εργοδικός θα έχουμε ότι $X = F \oplus \overline{N}$ και έτσι θα υπάρχουν $x_1 \in F$ και $x_2 \in \overline{N}$ με $x = x_1 + x_2$. Όμως αφού $h \in F_*$ από το Θεώρημα 2.2.2 θα έχουμε $\langle x_2, h\rangle = 0$. Άρα τελικά $0 \neq \langle x, h\rangle = \langle x_1, h\rangle$ απ' όπου έπεται ότι ο F διαχωρίζει τον F_*. Αντίστροφα, αν υποθέσουμε πως ο T δεν είναι εργοδικός θα έχουμε $X \neq X_{me}$. Αφού ο X_{me} είναι κλειστός υπόχωρος του X από το θεώρημα Hahn-Banach θα υπάρχει $h \in X^*$ με $h \neq 0$ και $h|_{X_{me}} = 0$. Όμως, $X_{me} = F \oplus \overline{N}$. Άρα από τη μία θα έχουμε $\langle x, h\rangle = \langle Tx, h\rangle$ για κάθε $x \in X$ (δηλαδή $h \in F_*$) και από την άλλη θα έχουμε $h|_F = 0$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί αφού ο F διαχωρίζει τον F_*. □

Μιας και η περίπτωση που ο X είναι αυτοπαθής αρκεί για αρκετές εφαρμογές κλείνουμε αυτή την παράγραφο με το επιχείρημα του E. Lorch για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.4.

Απόδειξη Θεωρήματος 2.1.4. Αν $E^{\perp} = \{h \in X^* : \langle x, h\rangle = 0 \text{ για κάθε } x \in E\}$ είναι ο κάθετος του $E \subseteq X$, τότε αφού ο X είναι αυτοπαθής ταυτίζοντας τον X με τον X^{**} έχουμε ότι $(E^{\perp})^{\perp} = \overline{E}$. Πράγματι, ο εγκλεισμός $\overline{E} \subseteq (E^{\perp})^{\perp}$ είναι προφανής. Απ' την άλλη, αν $x \in (E^{\perp})^{\perp} \setminus \overline{E}$ τότε $\langle x, h\rangle \neq 0$ και $\langle y, h\rangle = 0$ για κάθε $y \in E$ και κάποιο $h \in X^*$. Όμως, τότε $h \in E^{\perp}$ απ' όπου θα πρέπει να ισχύει $\langle x, h\rangle = 0$, αφού $x \in (E^{\perp})^{\perp}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, άρα τελικά $\overline{E} = (E^{\perp})^{\perp}$. Επίσης, στον X^* ισχύει ότι $F_* \cap \overline{N}_* = \{0\}$. Πράγματι, αν $h \in F_* \cap N_*$, τότε για $x \in X$ και γράφοντας $h = h_1 - T^* h_1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle x, h\rangle &= \langle x, A_n^* h\rangle \\ &= \langle A_n x, h\rangle \\ &= \langle A_n x, h_1 - T^* h_1\rangle \\ &= \langle A_n x, h_1\rangle - \langle A_n T x, h_1\rangle.\end{aligned}$$

Όμως, $A_n x - A_n T x \to 0$, απ' όπου έπεται ότι $\langle x, h\rangle = 0$. Τώρα, αν $h \in F_* \cap \overline{N_*}$ για $\epsilon > 0$ βρίσκουμε $h_1 \in N_*$ με $\|h - h_1\| < \epsilon$. Όμως τότε,

$$\begin{aligned}|\langle x, h\rangle| &= |\langle x, A_n^* h\rangle| = |\langle A_n x, h\rangle| \\ &\leq |\langle A_n x, h\rangle - \langle A_n x, h_1\rangle| + |\langle A_n x, h_1\rangle| \\ &\leq M\|h - h_1\| + |\langle A_n x, h_1\rangle|,\end{aligned}$$

όπου $M = \sup \|A_n\|$. Όμως, $\langle A_n x, h_1\rangle \to 0$ απ' όπου έπεται ότι $\langle x, h\rangle = 0$. Άρα, $F_* \cap \overline{N}_* = \{0\}$. Για να δείξουμε ότι $X = X_{me} = F \oplus \overline{N}$ αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $h \in (F \oplus \overline{N})^{\perp}$ είναι ταυτοτικά μηδέν. Αν $h \in (F \oplus \overline{N})^{\perp}$, τότε $h \in N^{\perp} = F_*$ και $h \in F^{\perp}$. Όμως, χρησιμοποιώντας πάλι την αυτοπάθεια του X θα έχουμε ότι $x \in N_*^{\perp}$ αν και μόνο αν $\langle x, h\rangle = \langle x, T^* h\rangle$ για κάθε $h \in X^*$ δηλαδή $\langle Tx, h\rangle = \langle x, h\rangle$ για κάθε $h \in X^*$, το οποίο είναι ισοδύναμο με την $Tx = x$. Άρα, δείξαμε ότι $N_*^{\perp} = F$. Οπότε, λόγω αυτοπάθειας, $F^{\perp} = \overline{N_*}$. Επομένως, $h \in F_* \cap F^{\perp} = F_* \cap \overline{N_*} = \{0\}$. □

2.3 Ημιομάδες τελεστών και εργοδικά δίκτυα σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους

2.3.1 Το θεώρημα του Eberlein

Περνάμε τώρα και στην πιο γενική περίπτωση μέσων όρων που θα μελετήσουμε, τα εργοδικά δίκτυα. Τώρα, ο χώρος Banach X αντικαθίσταται από έναν τοπικά κυρτό τοπολογικό διανυσματικό χώρο και ο τελεστής T από μια ημιομάδα (με πράξη τη σύνθεση) τελεστών $\mathscr{S}$. Για τους βασικούς ορισμούς και τις ιδιότητες των τοπολογικών διανυσματικών χώρων και των τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων παραπέμπουμε τον αναγνώστη στις Παραγράφους Α΄.1 και Α΄.3.

Ορισμός 2.3.1 (Ισοσυνεχής οικογένεια τελεστών)**.** Έστω X ένας τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος (τ.κ.τ.δ.χ) και $\mathcal{N}(0) = \{V \subseteq X : 0 \in V^{\circ}\}$ το σύστημα περιοχών του μηδενός. Μια οικογένεια $(S_i)_{i\in I}$ γραμμικών τελεστών από τον X στον X θα καλείται ισοσυνεχής αν για κάθε $V \in \mathcal{N}(0)$ υπάρχει $U \in \mathcal{N}(0)$ με $S_i U \subseteq V$ για κάθε $i \in I$.

Παρατήρηση 2.3.2. Αν ο X είναι χώρος με νόρμα τότε η οικογένεια γραμμικών τελεστών $(S_i)_{i\in I}$ είναι ισοσυνεχής αν και μόνο αν $\sup_{i\in I} \|S_i\| < \infty$.

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Αφού η $(S_i)_{i\in I}$ είναι ισοσυνεχής για $\epsilon = 1 > 0$ θα υπάρχει $\delta > 0$ με $S_i(\delta B_X) \subseteq B_X$. Δηλαδή, $S_i B_X \subseteq \frac{1}{\delta} B_X$. Άρα αν $x \neq 0$ θα έχουμε $\frac{x}{\|x\|} \in B_X$ απ' όπου έπεται ότι $\|S_i x\| \leq \frac{\|x\|}{\delta}$ για κάθε $i \in I$ και άρα $\sup_{i\in I} \|S_i\| \leq \frac{1}{\delta} < \infty$.

($\Longleftarrow$) Για $\epsilon > 0$ και $M = \sup_{i\in I} \|S_i\| < \infty$ έχουμε ότι $U = \frac{\epsilon}{M} B_X \in \mathcal{N}(0)$ και για κάθε $x \in U$ έχουμε $\|S_i x\| \leq M\frac{\epsilon}{M} \leq \epsilon$, δηλαδή $S_i U \subseteq \epsilon B_X$ για κάθε $\in I$ απ' όπου έπεται ότι η οικογένεια $(S_i)_{i\in I}$ είναι ισοσυνεχής. □

Οι μέσοι όροι που θα μελετήσουμε υλοποιούνται μέσων των εργοδικών δικτύων που γενικεύουν τους μέσους όρους $A_n = A_n(T)$. Ιδιαίτερα χρήσιμες ιδιότητες των A_n για τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων παραγράφων ήταν οι εξής:

(i) $A_n x \in \text{conv}\{x, Tx, T^2x, \dots\}$.

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$.

(iii) $\|A_n Tx - A_n x\| \to 0$.

Όπως φαίνεται και στον παρακάτω ορισμό οι ιδιότητες αυτές συνεχίζουν να ισχύουν και στα εργοδικά δίκτυα.

Ορισμός 2.3.3 ($\mathscr{S}$−εργοδικά δίκτυα)**.** Έστω X ένας τ.κ.τ.δ.χ και $\mathscr{S}$ μια ημιομάδα (με πράξη τη σύνθεση) συνεχών γραμμικών τελεστών. Θα λέμε ότι η $\mathscr{S}$ επιδέχεται ένα δεξί εργοδικό δίκτυο αν υπάρχει μια οικογένεια $(A_\jmath)_{\jmath\in\Lambda}$ ώστε το Λ να είναι κατευθυνόμενο και επιπλέον:

(I_1) Κάθε $A_\jmath$ είναι γραμμικός τελεστής από τον X στον X.

(I_2) Για κάθε $x \in X$ και $\jmath \in \Lambda$ ισχύει ότι $A_\jmath x \in \overline{\text{conv}} \mathscr{S} x$, όπου $\mathscr{S} x = \{Tx : T \in \mathscr{S}\}$.

(I_3) Η οικογένεια $(A_\jmath)_{\jmath\in\Lambda}$ είναι ισοσυνεχής.

(I_4δ) Για κάθε $x \in X$ και $T \in \mathscr{S}$ ισχύει ότι $\lim_\jmath (A_\jmath Tx - A_\jmath x) = 0$.

Αν τώρα η (I_4δ) αντικατασταθεί από την

(I_4α) Για κάθε $x \in X$ και $T \in \mathscr{S}$ ισχύει $\lim_\jmath (TA_\jmath x - A_\jmath x) = 0$,

θα λέμε ότι η οικογένεια $(A_\jmath)_{\jmath\in\Lambda}$ είναι ένα αριστερό $\mathscr{S}$−εργοδικό δίκτυο για την $\mathscr{S}$. Αν ισχύουν ταυτόχρονα οι (I_4δ) και (I_4α) θα λέμε ότι η οικογένεια είναι ένα $\mathscr{S}$−εργοδικό δίκτυο. Τέλος, αν η σύγκλιση στην (I_4δ) αντικατασταθεί από την ασθενή σύγκλιση τότε θα λέμε ότι η οικογένεια $(A_\jmath)_{\jmath\in\Lambda}$ είναι ένα ασθενώς δεξί εργοδικό δίκτυο κτλ.

Ένα από τα πιο σημαντικά παραδείγματα εργοδικών δικτύων είναι το πολυπαραμετρικό εργοδικό δίκτυο της ημιομάδας $\mathscr{S}$ που παράγεται από τους $T_1, \dots, T_d$ οι οποίοι μετατίθενται. Πιο συγκεκριμένα:

Παράδειγμα 2.3.4. Έστω $T_1, \dots, T_d$ power bounded τελεστές με $T_i T_j = T_j T_i$ σε ένα χώρο Banach X. Αν $\mathscr{S}$ είναι η ημιομάδα που παράγουν οι $T_1, \dots, T_d$, δηλαδή $\mathscr{S} = \{T_1^{n_1} \dots T_d^{n_d} : n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}\}$, τότε η οικογένεια $(A_\jmath)_{\jmath\in\Lambda}$ όπου $\Lambda = \mathbb{N}^d$ με [1]

$$A_\jmath x = \frac{1}{n_1 \dots n_d} \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} T_1^{i_1} \dots T_d^{i_d} x \tag{2.3.1}$$

[1]όπου στο $\mathbb{N}^d$ έχουμε τη διάταξη $(n_1, \dots, n_d) \leq (\jmath_1, \dots, \jmath_d)$ ανν $n_i \leq \jmath_i$ για $i = 1, \dots, d$

και $\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ είναι ένα $\mathscr{S}$−εργοδικό δίκτυο.

Απόδειξη. Είναι προφανές πως κάθε $A_{\mathfrak{n}}$ είναι γραμμικός τελεστής από τον X στον X και $A_{\mathfrak{n}}x \in$ conv$\mathscr{S}$x. Αφού κάθε T_i είναι power bounded θα υπάρχει $M > 0$ με $\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \left\|T_i^n\right\| \leq M$ για $i = 1, \ldots, d$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|A_{\mathfrak{n}}\| &= \left\|\frac{1}{n_1 \ldots n_d} \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \ldots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} T_1^{i_1} \ldots T_d^{i_d}\right\| \\
&\leq \frac{1}{n_1 \ldots n_d} \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \ldots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} \left\|T_1^{i_1}\right\| \ldots \left\|T_d^{i_d}\right\| \\
&\leq \frac{n_1 \ldots n_d}{n_1 \ldots n_d} M^d = M^d,
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\sup_{\mathfrak{n}\in\Lambda} \|A_{\mathfrak{n}}\| \leq M^d < \infty$ και άρα η $(A_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\Lambda}$ είναι και ισοσυνεχής. Αφού $TA_{\mathfrak{n}} = A_{\mathfrak{n}}T$ για $T \in \mathscr{S}$ αρκεί να δείξουμε μόνο την ($I_4\delta$). Τώρα, για $1 \leq j \leq d$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|A_{\mathfrak{n}}T_jx - A_{\mathfrak{n}}x\right\| &= \left\|\frac{1}{n_1 \ldots n_d} \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \ldots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} (T_1^{i_1} \ldots T_d^{i_d})T_jx - \frac{1}{n_1 \ldots n_d} \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \ldots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} T_1^{i_1} \ldots T_d^{i_d}x\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{n_1 \ldots n_d}\left(\sum_{i_2=0}^{n_2-1} \ldots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} (T_2^{i_2} \ldots T_d^{i_d})T_j^{n_j}x - \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \ldots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} T_2^{i_2} \ldots T_d^{i_d}x\right)\right\| \\
&\leq \frac{M^{d-1}}{n_j}\left\|T_j^{n_j}x - x\right\| \\
&\leq \frac{M^d}{n_j}\|x\| + \frac{M^{d-1}}{n_j}\|x\|.
\end{aligned}$$

Οπότε για $\epsilon > 0$, διαλέγοντας $\mathfrak{n}_0 = (n_1, \ldots, n_j, \ldots, n_d)$ με $\frac{M^d+M^{d-1}}{n_j}\|x\| < \epsilon$ θα έχουμε για κάθε $\mathfrak{n} \geq \mathfrak{n}_0$ ότι $\left\|A_{\mathfrak{n}}T_jx - A_{\mathfrak{n}}x\right\| < \epsilon$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $A_{\mathfrak{n}}T_j^kx - A_{\mathfrak{n}}x \to 0$. Τώρα, αν S, T είναι γραμμικοί τελεστές με $\|S\| \leq M$, $\|T\| \leq M$ οι οποίοι μετατίθενται μεταξύ τους και με τους $A_{\mathfrak{n}}$, για τους οποίους ισχύει $A_{\mathfrak{n}}Sx - A_{\mathfrak{n}}x \to 0$ και $A_{\mathfrak{n}}Tx - A_{\mathfrak{n}}x \to 0$, τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\|A_{\mathfrak{n}}STx - A_{\mathfrak{n}}x\| &\leq \|A_{\mathfrak{n}}STx - A_{\mathfrak{n}}Sx\| + \|A_{\mathfrak{n}}Sx - A_{\mathfrak{n}}x\| \\
&\leq \|S\|\,\|A_{\mathfrak{n}}Tx - A_{\mathfrak{n}}x\| + \|A_{\mathfrak{n}}Sx - A_{\mathfrak{n}}x\|,
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $A_{\mathfrak{n}}STx - A_{\mathfrak{n}}x \to 0$. Οπότε αφού οι $T_1^{n_1}, \ldots, T_d^{n_d}$ μετατίθενται μεταξύ τους και με τους $A_{\mathfrak{n}}$ και επιπλέον ισχύει και ότι $A_{\mathfrak{n}}T_j^{n_j}x - A_{\mathfrak{n}}x \to 0$ για $1 \leq j \leq d$, θα έχουμε τελικά ότι $A_{\mathfrak{n}}Tx - A_{\mathfrak{n}}x \to 0$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$. □

Η απόδειξη του μέσου εργοδικού Θεωρήματος 2.1.3 περνάει και στο γενικότερο πλαίσιο που παρουσιάσαμε σε αυτή την παράγραφο. Αυτή είναι η γενική μορφή του μέσου εργοδικού θεωρήματος που απέδειξε αρχικά ο Eberlein.

Θεώρημα 2.3.5 (Eberlein-1949)**.** *Έστω X ένας τ.κ.τ.δ.χ και $\mathscr{S}$ μια ημιομάδα συνεχών γραμμικών τελεστών στον X. Αν η $\mathscr{S}$ επιδέχεται ένα $\mathscr{S}$-εργοδικό δίκτυο $(A_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\Lambda}$ τότε για κάθε $x, y \in X$ τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *$Ty = y$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$ και $y \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x$.*

(ii) $A_\beta x \longrightarrow y$.

(iii) $A_\beta x \xrightarrow{w} y$.

(iv) *Υπάρχει υποδίκτυο του $(A_\beta x)$ που συγκλίνει ασθενώς στο y.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Έστω $V \in \mathcal{N}(0)$. Αφού ο X είναι τ.κ.τ.δ.χ υπάρχει ανοικτή, κυρτή περιοχή U του μηδενός ώστε $U+U \subseteq V$. Απ' την ισοσυνέχεια των (A_β) υπάρχει ανοικτή κυρτή περιοχή W του μηδενός με $A_\beta W \subseteq U$ για κάθε $\beta \in \Lambda$. Αφού $y \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x$ θα υπάρχουν $\beta_1, \ldots, \beta_M \geq 0$ και $T_1, \ldots, T_M \in \mathscr{S}$ ώστε $\sum\limits_{i=1}^{M} \beta_i = 1$ και $\sum_{i=1}^{M} \beta_i T_i x - y \in W$. Τώρα όμως για κάθε $1 \leq i \leq M$ ισχύει ότι $A_\beta(x - T_i x) \to 0$, συνεπώς μπορούμε να βρούμε $\beta_0 \in \Lambda$ ώστε $A_\beta(x - T_i x) \in U$ για κάθε $\beta \geq \beta_0$ και κάθε $1 \leq i \leq M$. Αφού το U κυρτό , τότε για κάθε $\beta \geq \beta_0$ θα έχουμε $A_\beta(x - \sum_{i=1}^{M} \beta_i T_i x) \in U$. Απ' την άλλη όμως $Ty = y$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$ άρα $\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}y = \{y\}$ απ' όπου έπεται ότι $A_\beta y = y$, αφού $A_\beta y \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}y$. Οπότε για κάθε $\beta \geq \beta_0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A_\beta x - y &= A_\beta x - \sum_{i=1}^{M} \beta_i A_\beta T_i x + \sum_{i=1}^{M} \beta_i A_\beta T_i x - A_\beta y \\ &= A_\beta\Big(x - \sum_{i=1}^{M} \beta_i T_i x\Big) + A_\beta\Big(\sum_{i=1}^{M} \beta_i T_i x - y\Big) \\ &\in U + U \subseteq V, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $A_\beta x \to y$.

Οι συνεπαγωγές (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) είναι προφανείς.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Έστω ένα υποδίκτυο $A_{\beta_\mu} x$ του $A_\beta x$ που συγκλίνει ασθενώς στο y. Αφού $A_\beta x \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$ για κάθε β θα έχουμε και $A_{\beta_\mu} x \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$ για κάθε μ. Όμως από το θεώρημα του Mazur (βλ. Θεώρημα Β'.1.3) έχουμε $\overline{\mathrm{conv}}^w\mathscr{S} = \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$. Άρα αφού $A_{\beta_\mu} x \xrightarrow{w} y$ θα έχουμε ότι $y \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x$. Για να δείξουμε ότι $Ty = y$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$ θεωρούμε $h \in X^*$. Τότε, θα έχουμε $h \circ T \in X^*$. Επομένως, αφού $A_{\beta_\mu} x \xrightarrow{w} y$ θα ισχύει ότι

$$|\langle A_{\beta_\mu} x, h\rangle - \langle y, h\rangle| \to 0 \ \text{ και } \ |\langle A_{\beta_\mu} x, h \circ T\rangle - \langle y, h \circ T\rangle| \to 0.$$

Αφού η οικογένεια $(A_\beta)_{\beta \in \Lambda}$ είναι ένα $\mathscr{S}$−εργοδικό δίκτυο από την (I_4α) θα έχουμε $TA_{\beta_\mu} x - A_\beta x \to 0$ και ειδικότερα $|\langle TA_{\beta_\mu} x - A_\beta x, h\rangle| \to 0$. Οπότε, συνοψίζοντας θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\langle y - Ty, h\rangle| \leq |\langle y, h\rangle - \langle A_{\beta_\mu} x, h\rangle| + |\langle A_{\beta_\mu} x, h\rangle - \langle TA_{\beta_\mu} x, h\rangle| \\ + |\langle TA_{\beta_\mu} x, h\rangle - \langle Ty, h\rangle| \to 0, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $|\langle y - Ty, h\rangle| = 0$ και άρα αφού το $h \in X^*$ ήταν τυχόν θα πρέπει $y = Ty$. □

2.3.2 Εφαρμογές του θεωρήματος Eberlein

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζουμε δύο εφαρμογές του θεωρήματος Eberlein μέσα απ' τις οποίες φαίνεται η γενικότητα των εργοδικών δικτύων σε σχέση με τους μέσους όρους $A_n(T)$.

Η πρώτη εφαρμογή αφορά τις συνεχείς σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις. Θεωρούμε

$$\mathrm{BC}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ συνεχής και φραγμένη}\}$$

με νόρμα την $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ τις μεταφορές $T_t : \mathrm{BC}(\mathbb{R}) \to \mathrm{BC}(\mathbb{R})$ με $T_t f(s) = f(t+s)$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 2.3.6 (Σχεδόν περιοδική συνάρτηση)**.** Μια $f \in \mathrm{BC}(\mathbb{R})$ θα καλείται σχεδόν περιοδική αν το σύνολο $\{T_t f : t \in \mathbb{R}\}$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $\mathrm{BC}(\mathbb{R})$. Δηλαδή, το $\overline{\{T_t f : t \in \mathbb{R}\}}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathrm{BC}(\mathbb{R})$ ως προς την $\|\cdot\|_\infty$.

Πρόταση 2.3.7. *Κάθε συνεχής σχεδόν περιοδική συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, θα υπάρχουν $\epsilon_0 > 0$ και δύο ακολουθίες πραγματικών t_n, x_n με $t_n \to 0$ ώστε

$$|f(x_n + t_n) - f(x_n)| \geq \epsilon_0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{2.3.2}$$

Όμως τότε η ακολουθία $T_{t_n} f$ θα περιέχεται στο συμπαγές σύνολο $\overline{\{T_t f : t \in \mathbb{R}\}}$. Συνεπώς θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Δηλαδή, θα υπάρχει $g \in \mathrm{BC}(\mathbb{R})$ και t_{k_n} ώστε

$$\left\|T_{t_{k_n}} f - g\right\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Όμως τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα έχουμε ότι απ' την μία

$$|f(x + t_{k_n}) - g(x)| \to 0$$

και απ' την άλλη λόγω της συνέχειας της f και επειδή $t_{k_n} \to 0$

$$|f(x + t_{k_n}) - f(x)| \to 0,$$

απ' όπου έπεται ότι $g(x) = f(x)$. Άρα τελικά θα έχουμε $\left\|T_{t_{k_n}} f - f\right\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ πράγμα το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (2.3.2). □

Πρόταση 2.3.8. *Έστω f μια σχεδόν περιοδική συνάρτηση. Τότε, το σύνολο $\overline{\mathrm{conv}}\{T_t f : t \in \mathbb{R}\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $BC(\mathbb{R})$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στην παρατήρηση ότι αν K είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα X (ισχύει και γενικότερα σε τ.κ.τ.δ.χ) τότε η κυρτή θήκη conv(K) είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του X. Πράγματι αν ισχύει αυτό, τότε αφού το $\overline{\{T_t f : t \in \mathbb{R}\}}$ είναι ολικά φραγμένο τότε θα είναι και το $\{T_t f : t \in \mathbb{R}\}$ ως υποσύνολό του. Όμως τότε, το $\mathrm{conv}\{T_t f : t \in \mathbb{R}\}$ θα είναι ολικά φραγμένο και άρα και το $\overline{\mathrm{conv}}\{T_t f : t \in \mathbb{R}\}$. Τώρα, επειδή είναι και κλειστό υποσύνολο στον πλήρη $(\mathrm{BC}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ θα είναι και συμπαγές.

Για την απόδειξη της παρατήρησης θεωρούμε ένα $\epsilon > 0$. Αφού το K είναι ολικά φραγμένο θα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in K$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq B\left(x_1, \frac{\epsilon}{2}\right) \cup \ldots \cup B\left(x_m, \frac{\epsilon}{2}\right). \tag{2.3.3}$$

Θεωρούμε το $F = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ το οποίο είναι συμπαγές και βρίσκουμε $y_1, \ldots, y_n \in F$ τέτοια ώστε

$$F \subseteq B\left(y_1, \frac{\epsilon}{2}\right) \cup \ldots \cup B\left(y_n, \frac{\epsilon}{2}\right) \tag{2.3.4}$$

Απ' την (2.3.3) έχουμε ότι $K \subseteq F + B(0, \epsilon/2)$ και επειδή το $F + B(0, \epsilon/2)$ είναι κυρτό θα ισχύει $\mathrm{conv}(K) \subseteq F + B(0, \epsilon/2)$ και έτσι απ' την (2.3.4) έπεται ότι $\mathrm{conv}(K) \subseteq B(y_1, \epsilon) \cup \ldots \cup B(y_n, \epsilon)$. □

Εφαρμογή 2.3.9 (Υπαρξη μέσων για σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις). Θεωρούμε τον χώρο Banach $(\mathrm{BC}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Για $f \in \mathrm{BC}(\mathbb{R})$ σχεδόν περιοδική και για $\lambda > 0$ ορίζουμε τους μέσους όρους

$$A_\lambda f(s) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda T_t f(s)dt \text{ για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

Τότε, υπάρχει μια σταθερά $c(f)$ ώστε $\|A_\lambda f - c(f)\|_\infty \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις οικογένειες γραμμικών τελεστών $\mathscr{S} = (T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ και $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ όπου

$$T_t : \mathrm{BC}(\mathbb{R}) \to \mathrm{BC}(\mathbb{R}) \text{ με } T_t f(s) = f(t+s)$$

για κάθε $f \in \mathrm{BC}(\mathbb{R})$ και $t \in \mathbb{R}$. Επίσης θεωρούμε

$$A_\lambda : \mathrm{BC}(\mathbb{R}) \to \mathrm{BC}(\mathbb{R}) \text{ με } A_\lambda f(s) = \lambda^{-1}\int_0^\lambda T_t f(s)dt$$

για κάθε $f \in \mathrm{BC}(\mathbb{R})$ και $\lambda > 0$. Ισχυριζόμαστε ότι η $\mathscr{S}$ είναι ημιομάδα και ότι η $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ είναι ένα $\mathscr{S}-$εργοδικό δίκτυο για την $\mathscr{S}$. Ας υποθέσουμε προς στιγμήν πως αυτός ο ισχυρισμός είναι αληθής. Τότε, για μια f σχεδόν περιοδική θα έχουμε για $\lambda > 0$ ότι $A_\lambda f \in \overline{\mathrm{conv}}\{T_t f : t \in \mathbb{R}\}$ το οποίο απ' την Πρόταση 2.3.8 είναι συμπαγές. Έτσι, το δίκτυο $(A_\lambda f)_{\lambda>0}$ θα έχει σημείο συσσώρευσης. Απ' το θεώρημα του Eberlein υπάρχει $g \in BC(\mathbb{R})$ η οποία παραμένει αναλλοίωτη απ' την ημιομάδα $\mathscr{S}$ και επιπλέον

$$\|A_\lambda f - g\|_\infty \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0.$$

Όμως, αφου $T_t g = g$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θα έχουμε ότι η $g = c(f)$ είναι σταθερή. □

Η $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι $\mathscr{S}$-εργοδικό δίκτυο. Είναι σαφές ότι κάθε $T_t : \mathrm{BC}(\mathbb{R}) \to \mathrm{BC}(\mathbb{R})$ είναι γραμμική ισομετρία και $T_t \circ T_s = T_{t+s}$ για κάθε s, t. Συνεπώς, η οικογένεια $\mathscr{S} = \{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ημιομάδα φραγμένων γραμμικών τελεστών. Επιπλέον, κάθε $A_\lambda : \mathrm{BC}(\mathbb{R}) \to \mathrm{BC}(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός τελεστής και επειδή για $f \in \mathrm{BC}(\mathbb{R})$ και $s \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$|A_\lambda f(s)| \leq \lambda^{-1}\int_0^\lambda |f(t+s)|dt \leq \|f\|_\infty ,$$

θα έχουμε $\|A_\lambda\|_\infty \leq 1$ απ' όπου έπεται ότι η οικογένεια $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ είναι και ισοσυνεχής. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι σχεδόν περιοδική. Θεωρούμε μια ακολουθία διαμερίσεων

$$P_n = \{x_{n0} < \ldots < x_{nk_n}\}$$

του $[0, \lambda]$ με $P_n \subseteq P_{n+1}$ και με λεπτότητα $\|P_n\| \to 0$. Τότε, για $s \in \mathbb{R}$ αν

$$\begin{aligned} R_n(s) &= \lambda^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}(x_{nj+1} - x_{nj})T_{t_{nj}}f(s) \\ &= \lambda^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}(x_{nj+1} - x_{nj})f(t_{nj}+s) \text{ όπου } t_{nj} \in [x_{nj}, x_{nj+1}] \end{aligned}$$

θα ισχύει ότι $R_n \in \mathrm{conv}\mathscr{S}f$ και $R_n(s) \xrightarrow{n\to\infty} A_\lambda f(s)$. Πράγματι, αφού η f είναι σχεδόν περιοδική απ' την Πρόταση 2.3.7 θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής, οπότε για $\epsilon > 0$ θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $|x-y| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \lambda\epsilon$. Διαλέγοντας n_0 με $\left\|P_{n_0}\right\| < \delta$ θα έχουμε για κάθε $n, m \geq n_0$ ότι

$$|R_m(s) - R_n(s)| \leq \epsilon \text{ για κάθε } s \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει ότι $\|R_n - R_m\|_\infty \leq \epsilon$ απ' όπου έπεται ότι η $(R_n)_{n\geq 1}$ είναι βασική στον πλήρη $(\mathrm{BC}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Όμως, επειδή $R_n \xrightarrow{\text{κ.σ}} A_\lambda f$ θα έχουμε ότι $R_n \xrightarrow{\text{ο.μ}} A_\lambda f$ και συνεπώς $A_\lambda f \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}f$. Για $u > 0$ και $\lambda > u$ γράφοντας

$$\begin{aligned}
\left|A_\lambda T_u f(s) - A_\lambda f(s)\right| &= \lambda^{-1}\left|\int_0^\lambda f(s+u+t)dt - \int_0^\lambda f(s+t)dt\right| \\
&= \lambda^{-1}\left|\int_u^{\lambda+u} f(s+t)dt - \int_0^\lambda f(s+t)dt\right| \\
&= \lambda^{-1}\left|\int_\lambda^{\lambda+u} f(s+t)dt - \int_0^u f(s+t)dt\right| \\
&\leq 2\frac{u}{\lambda}\|f\|_\infty,
\end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\|A_\lambda T_u f - A_\lambda f\|_\infty \leq 2\frac{u}{\lambda}\|f\|_\infty,$$

απ' όπου έπεται ότι $\|A_\lambda T_u f - A_\lambda f\|_\infty \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0$. Τέλος, το ότι η (A_λ) είναι και αριστερό εργοδικό δίκτυο έπεται άμεσα απ' το γεγονός ότι $T_u \circ T_s = T_s \circ T_u$. □

Περνάμε και στη 2η εφαρμογή του θεωρήματος Eberlein. Ο χώρος μας αυτή τη φορά αποτελείται από όλες τις συνεχείς και 2π περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. Συμβολίζουμε με D_n τον n–οστό πυρήνα του Dirichlet και με K_n τον n–οστό πυρήνα του Fejér. Δηλαδή,

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

και

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

Επίσης αν

$$f * g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\,ds$$

είναι η συνέλιξη των f, g συμβολίζουμε με $\Sigma_n(t) = D_n * f$ το n–οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f και με $s_n(f) = K_n * f$ τους n–οστούς Cesàro μέσους της $\Sigma_n(f)$. Θυμίζουμε ότι οι απεικονίσεις $f \mapsto \Sigma_n(f)$ και $f \mapsto \sigma_n(f)$ είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές με $\|\Sigma_n\| \sim \log n$ και $\|\sigma_n\| \leq 1$. Τότε, με τη βοήθεια του θεωρήματος του Eberlein μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα του Fejér:

Εφαρμογή 2.3.10 (Θεώρημα Fejér)**.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Τότε,

$$\|f - \sigma_n(f)\|_\infty \to 0 \tag{2.3.5}$$

καθώς το $n \to \infty$.

Σε αυτό το σημείο υπενθυμίζουμε χωρίς απόδειξη (για την απόδειξη βλ.σελ.390-[16]) το θεώρημα των Arzelà-Ascoli που θα χρειαστούμε παρακάτω για την απόδειξη της (2.3.10).

Ορισμός 2.3.11 (Ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων)**.** Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $C(X)$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ με $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Μια οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ λέγεται ισοσυνεχής στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $d(x, x_0) < \delta$ να ισχύει

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ για κάθε } f \in \mathcal{F}.$$

Το σύνολο $\mathcal{F}$ θα καλείται ισοσυνεχές όταν η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής σε κάθε $x \in X$.

Θεώρημα 2.3.12 (Θεώρημα Arzelà-Ascoli)**.** *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε ένα υποσύνολο $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ είναι σχετικά συμπαγές ($\overline{\mathcal{F}}$ είναι συμπαγές) αν και μόνο αν το $\mathcal{F}$ είναι φραγμένο και ισοσυνεχές.*

Απόδειξη της Εφαρμογής 2.3.10. Θεωρούμε τον συμπαγή μετρικό χώρο $X = ([0, 2\pi), d)$ όπου $d(x, y) = \min\{|x - y|, 2\pi - |x - y|\}$. Τότε, κάθε συνεχής $2\pi-$περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αντιστοιχεί μέσω της απεικόνισης $f \mapsto \tilde{f}$ όπου $\tilde{f}(x) = f(x)$ για $x \in [0, 2\pi)$ σε μία και μόνο μία $d-$συνεχή συνάρτηση $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$. Επειδή $\|f - \sigma_n(f)\|_\infty \to 0$ αν και μόνο αν $\left\|\tilde{f} - \sigma_n(\tilde{f})\right\|_\infty \to 0$ αρκεί να δείξουμε την (2.3.5) για τις συνεχείς συναρτήσεις στον X.

Θεωρούμε την οικογένεια $\mathscr{S} = \{I\} \cup \{U_n : n \geq 0\}$ όπου $I : C(X) \to C(X)$ με $I(f) = f$ και $U_n : C(X) \to C(X)$ με $U_n(f) = f - \Sigma_n(f)$. Επίσης θεωρούμε την οικογένεια $(A_n)_{n\geq 0}$ με

$$\begin{aligned} A_n(f) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U_k(f) \\ &= f - \sigma_n(f) \end{aligned}$$

και ισχυριζόμαστε ότι η $\mathscr{S}$ είναι μια ημιομάδα γραμμικών τελεστών στον $C(X)$ και πως η $(A_n)_{n\geq 0}$ είναι ένα $\mathscr{S}-$εργοδικό δίκτυο. Ας υποθέσουμε προς στιγμήν πως ο ισχυρισμός είναι αληθής. Τότε, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και το ότι η οικογένεια $(A_n)_{n\geq 0}$ αποτελείται από ισοσυνεχείς τελεστές (ειδικότερα $\sup \|A_n\| \leq 2$) μπορούμε να δείξουμε ότι το $\mathcal{F}_f = \{f\} \cup \{A_n(f) : n \geq 1\}$ είναι φραγμένο και ισοσυνεχές υποσύνολο του $C(X)$ με την έννοια του Ορισμού 2.3.11.

Πράγματι, για $\epsilon > 0$, η 2π-περιοδική επέκταση της f, $F(x) = f(2\pi(x-[x]))$ θα είναι και αυτή ομοιόμορφα συνεχής. Άρα, θα υπάρχει $0 < \delta < \pi$ ώστε για $|t| < \delta$ να ισχύει $|F(x)-F(x+t)| < \epsilon$. Για $|t| < \delta$ θεωρούμε τις $F_t(x) = F(x + t)$ και $f_t = F_t|_{[0,2\pi)}$. Τότε, η f_t ανήκει στον $C(X)$ και για $|t| < \delta$ έχουμε ότι $\sup_{x\in[0,2\pi)}|f(x) - f_t(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Επειδή $\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|A_n\| \leq 2$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |A_n f(x) - A_n f_t(x)| &\leq \sup_{x\in[0,2\pi)} |A_n f(x) - A_n f_t(x)| \\ &= \|A_n f - A_n f_t\|_\infty \\ &\leq \|A_n\| \, \|f - f_t\|_\infty \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Τώρα είναι εύκολο να δείξουμε ότι η $(A_n f)_{n\geq 0}$ είναι ισοσυνεχής. Πράγματι, θεωρούμε $x, y \in [0, 2\pi)$ και $d(x, y) < \delta$. Τότε επειδή $0 < \delta < \pi$ θα έχουμε και $d(x, y) = |y - x| < \delta$. Άρα για $t = \operatorname{sgn}(y - x)|y - x|^2$ θα ισχύει $x + t = y$ και $|t| < \delta$. Επομένως,

$$\begin{aligned} |A_n f(x) - A_n f(y)| &= |A_n f(x) - A_n f_t(x)| \\ &\leq \|A_n f - A_n f_t\|_\infty \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι το $\{f\} \cup \{A_n f : n \geq 1\}$ είναι ισοσυνεχές. Άρα, αφού το $\{f\} \cup \{A_n f : n \geq 1\}$ είναι και φραγμένο υποσύνολο του $C(X)$ από το Θεώρημα 2.3.12 το $\overline{\{f\} \cup \{A_n f : n \geq 1\}}$ θα είναι συμπαγές. Από το θεώρημα του Eberlein θα υπάρχει μια $g_f \in C(X)$ με $U_n g_f = g_f$ για κάθε $n \geq 0$ και $\left\|A_n f - g_f\right\|_\infty \to 0$. Από την $U_n g_f = g_f$ παίρνουμε ότι $\Sigma_n(g_f) = 0$ για κάθε $n \geq 0$. Συνεπώς, θα έχουμε και $\widehat{g_f}(n) = 0$ για $n \geq 0$ όπου $(\widehat{g_f})_{n=0}^\infty$ οι συντελεστές Fourier της g_f. Δηλαδή, θα ισχύει ότι $g_f \equiv 0$. Άρα τελικά θα έχουμε $\|A_n f\|_\infty = \|f - \sigma_n(f)\|_\infty \to 0$. □

Η $\mathscr{S}$ είναι ημιομάδα και η $(A_n)_{n\geq 0}$ ένα $\mathscr{S}$-εργοδικό δίκτυο. Είναι προφανές πως για κάθε $n \geq 0$ η $U_n = I - \Sigma_n$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής στον $C(X)$. Επίσης, αφού για $m < n$ έχουμε

$$\begin{aligned} U_n U_m &= (I - \Sigma_n)(I - \Sigma_m) \\ &= I - \Sigma_n - \Sigma_m + \Sigma_n \Sigma_m \\ &= I - \Sigma_n - \Sigma_m + \Sigma_m \\ &= I - \Sigma_n = U_n, \end{aligned}$$

θα έχουμε ότι $U_n U_m \in \mathscr{S}$ για n, m και έτσι η $\mathscr{S}$ είναι μια ημιομάδα φραγμένων γραμμικών τελεστών στον $C(X)$. Τώρα, οι $A_n = (n + 1)^{-1} \sum_{k=0}^n U_k = I - \sigma_n \in \operatorname{conv}\mathscr{S}$ είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές στον $C(X)$ και επειδή $\|\sigma_n\| \leq 1$ θα έχουμε ότι $\|A_n\| \leq 2$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα, η $(A_n)_{n\geq 0}$ είναι μια ισοσυνεχής οικογένεια τελεστών με $A_n f \in \operatorname{conv}\mathscr{S} f$ για κάθε $f \in C(X)$. Τέλος, αφού $U_n U_m = U_{\max\{n,m\}} = U_m U_n$ αρκεί να δείξουμε μόνο μία από τις ιδιότητες (I_4δ), (I_4α). Οπότε για $n > m$ γράφουμε

$$\begin{aligned} A_n U_m f - A_n f &= \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n U_k\right) U_m f - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n U_k f \\ &= \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n U_{\max\{k,m\}}\right) f - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n U_k f \\ &= \frac{m+1}{n+1} U_m f + \frac{1}{n+1} \sum_{k=m+1}^n U_k f - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n U_k f \\ &= \frac{m+1}{n+1} U_m f - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^m U_k f, \end{aligned}$$

[2] όπου $\operatorname{sgn}(a) = 1$ αν $a = 1$ και $\operatorname{sgn}(a) = -1$ αν $a = -1$.

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}\|A_n U_m f - A_n f\|_\infty &\le \left\|\frac{m+1}{n+1} U_m f\right\|_\infty + \left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{m} U_k f\right\|_\infty \\ &\le \frac{m+1}{n+1}\|U_m\|\,\|f\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{n+1}\sum_{k=0}^{m}\|U_k\| \longrightarrow 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$ (αφού το m είναι σταθερό). □

2.4 Το θεώρημα διάσπασης για ημιομάδες

Σε αυτή την παράγραφο γενικεύουμε το Θεώρημα 2.2.2 στο πλαίσιο των τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων. Σε όλα τα παρακάτω υποθέτουμε ότι ο X είναι ένας πλήρης τ.κ.τ.δ.χ. Υπενθυμίζουμε ότι ένα δίκτυο (x_ρ) στον X είναι ένα δίκτυο Cauchy όταν για κάθε $V \in \mathcal{N}(0)$ υπάρχει ρ_0 ώστε για κάθε $\rho, \mu \ge \rho_0$ να ισχύει ότι $x_\rho - x_\mu \in V$.

Τότε, ο X είναι πλήρης τ.κ.τ.δ.χ όταν κάθε δίκτυο Cauchy του X συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Ορίζουμε τον υπόχωρο $\mathscr{F}(S)$ όλων των σημείων του X που παραμένουν αναλλοίωτα απ' την ημιομάδα $\mathscr{S}$, δηλαδή

$$F(\mathscr{S}) \equiv F = \{x \in X : Tx = x \text{ για κάθε } T \in \mathscr{S}\}.$$

Ορίζουμε επίσης τον υπόχωρο $N(\mathscr{S})$ που παράγεται απ' το σύνολο $\{x - Tx : x \in X \text{ και } T \in \mathcal{P}\}$, δηλαδή

$$N(\mathscr{S}) \equiv N = \operatorname{span}\{x - Tx : x \in X,\ T \in \mathscr{S}\}$$

και τον υπόχωρο $\mathscr{F}_*(\mathscr{S})$ του X^* όλων των σημείων που παραμένουν αναλλοίωτα απ' την οικογένεια $\mathscr{S}^* = \{T^* : T \in \mathscr{S}\}$ όπου T^* ο συζυγής τελεστής του T, δηλαδή

$$F_*(\mathscr{S}) \equiv F_* = \{h^* : T^* h^* = h^* \text{ για κάθε } T \in \mathscr{S}\}.$$

Υποθέτουμε την ύπαρξη ενός ασθενούς δεξιού $\mathscr{S}$−εργοδικού δικτύου $(A_{\mathfrak{J}})_{\mathfrak{J}\in\Lambda}$ για την ημιομάδα $\mathscr{S}$. Τότε, συμβολίζουμε με D τον υπόχωρο του X ο οποίος αποτελείται από όλα τα σημεία που έχουν ασθενείς μέσους όρους, δηλαδή

$$D = \{x \in X : w - \lim_{\mathfrak{J}} A_{\mathfrak{J}} x \text{ υπάρχει}\}.$$

Για $x \in D$ ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $Px = w - \lim_{\mathfrak{J}} A_{\mathfrak{J}} x$. Με $D(0)$ συμβολίζουμε τον πυρήνα $\ker P$ της P και θέτουμε $D(F) = \{x \in D : Px \in F\}$.

Παρατήρηση 2.4.1. Η συνάρτηση $Px = w - \lim_{\mathfrak{J}} A_{\mathfrak{J}} x$ για $x \in D$ είναι γραμμική και συνεχής.

Απόδειξη. Το ότι η P είναι γραμμική είναι προφανές. Για τη συνέχεια θεωρούμε $V \in \mathcal{N}(0)$ και τότε αφού ο X είναι τοπικά κυρτός υπάρχει $W \in \mathcal{N}(0)$ κυρτό ώστε $W + W \subseteq V$. Όμως επειδή $\overline{W} = \bigcap\{G + W : G \text{ ανοικτό με } 0 \in G\}$ (βλ. Πρόταση Α'.1.5) έπεται ότι $\overline{W} \subseteq V$. Απ' την ισοσυνέχεια της $(A_{\mathfrak{J}})$ υπάρχει $U \in \mathcal{N}(0)$ ώστε $A_{\mathfrak{J}} U \subseteq W$ για κάθε $\mathfrak{J} \in \Lambda$. Τώρα, αφού το $\overline{W}$ είναι κυρτό και κλειστό θα είναι και ασθενώς κλειστό, οπότε για $x \in D \cap U$ και επειδή $A_{\mathfrak{J}} x \in W$ θα έχουμε ότι και $Px \in \overline{W} \subseteq V$. Δηλαδή, $PU \cap D \subseteq V$ απ' όπου έπεται ότι η $P : D \to X$ είναι συνεχής. □

Πρόταση 2.4.2. *Αν ο X είναι ένας πλήρης τ.κ.τ.δ.χ και $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα ασθενώς δεξί $\mathscr{S}$-εργοδικό δίκτυο για μια ημιομάδα τελεστών $\mathscr{S}$, τότε:*

(i) *ο D είναι κλειστός υπόχωρος του X με $TD \subseteq D$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$.*

(ii) *$PD \subseteq D$ και η P είναι γραμμική και συνεχής στο D.*

(iii) *στο D ισχύει $PT = P$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$.*

Απόδειξη. (i) Είναι προφανές πως ο D είναι υπόχωρος του X. Αφού ο X είναι πλήρης, για να δείξουμε ότι ο D είναι κλειστός αρκεί να δείξουμε πως είναι πλήρης. Γι' αυτό θεωρούμε ένα δίκτυο Cauchy (x_ρ) στον D. Τότε, θα υπάρχει $x \in X$ με $x_\rho \to x$. Αφού η P είναι συνεχής το δίκτυο Px_ρ θα είναι Cauchy. Συνεπώς θα υπάρχει $y \in X$ με $Px_\rho \to y$. Αν δείξουμε ότι $y = w - \lim A_\lambda x$ θα έχουμε ότι $Px = y$ και άρα $x \in D$ και $x_\rho \to x$ και έτσι ο D θα είναι πλήρης.

Για να δείξουμε ότι $A_\lambda x \xrightarrow{w} y$ θεωρούμε μια ασθενώς κυρτή περιοχή V του 0. Από την ισοσυνέχεια της $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ θα υπάρχει ανοικτή περιοχή U του 0 με $A_\lambda U \subseteq \frac{1}{3}V$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Από τις συγκλίσεις $x_\rho \to x$, $Px_\rho \to y$ θα υπάρχει ρ_0 με $x - x_{\rho_0} \in U$ και $Px_{\rho_0} - y \in \frac{1}{3}V$. Αφού $A_\lambda x_{\rho_0} \xrightarrow{w} Px_{\rho_0}$ θα υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε για $\lambda \geq \lambda_0$ να ισχύει $A_\lambda x_{\rho_0} - Px_{\rho_0} \in \frac{1}{3}V$. Τότε, για $\lambda \geq \lambda_0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
A_\lambda x - y &= A_\lambda x - A_\lambda x_{\rho_0} + A_\lambda x_{\rho_0} - Px_{\rho_0} + Px_{\rho_0} - y \\
&= A_\lambda(x - x_{\rho_0}) + A_\lambda x_{\rho_0} - Px_{\rho_0} + Px_{\rho_0} - y \\
&\in \frac{1}{3}V + \frac{1}{3}V + \frac{1}{3}V.
\end{aligned}$$

Όμως επειδή το V είναι κυρτό θα έχουμε

$$\frac{1}{3}V + \frac{1}{3}V + \frac{1}{3}V = V,$$

οπότε τελικά για $\lambda \geq \lambda_0$ θα ισχύει $A_\lambda x - y \in V$ απ' όπου έπεται ότι $A_\lambda x \xrightarrow{w} y$. Ο εγκλεισμός $TD \subseteq D$ προκύπτει από τη σύγκλιση $A_\lambda Tx - A_\lambda x \xrightarrow{w} 0$ που ισχύει για κάθε $T \in \mathscr{S}$.

(ii) Το ότι η P είναι γραμμική και συνεχής έπεται άμεσα από την Παρατήρηση 2.4.1. Τώρα, από τον εγκλεισμό $TD \subseteq D$ θα έχουμε και $\mathscr{S}x \subseteq D$ για κάθε $x \in D$. Άρα αφού ο D είναι κλειστός υπόχωρος θα πρέπει και $\overline{\text{conv}}\mathscr{S}x \subseteq D$. Όμως, $A_\lambda x \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ και επειδή $A_\lambda x \xrightarrow{w} Px$ από το θεώρημα του Mazur θα έχουμε $Px \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$. Άρα τελικά $Px \in D$ για $x \in D$, απ' όπου έπεται ότι $PD \subseteq D$.

(iii) Αφού $A_\lambda Tx - A_\lambda x \xrightarrow{w} 0$ και επειδή $A_\lambda x \xrightarrow{w} Px$ για κάθε $x \in D$ θα έχουμε ότι $A_\lambda Tx \xrightarrow{w} Px$ για $x \in D$. Με άλλα λόγια, $PTx = Px$ για κάθε $x \in D$. □

Πόρισμα 2.4.3. *Ύπο τις προϋποθέσεις της Πρότασης 2.4.2 έχουμε ότι:*

(i) *Οι F, $D(F)$ και $D(0)$ είναι κλειστοί υπόχωροι του D με*

$$F = PD(F) \subseteq D(F) \subseteq D. \tag{2.4.1}$$

(ii) *Για κάθε $T \in \mathscr{S}$ ισχύει $TD(F) \subseteq D(F)$ και για $\lambda \in \Lambda$ ισχύει $A_\lambda D(F) \subseteq D(F)$.*

(iii) *Στον $D(F)$ έχουμε $P = P^2 = PT = TP$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$.*

Απόδειξη. (i) Το ότι ο F είναι υπόχωρος του X έπεται άμεσα από τη γραμμικότητα των $T \in \mathscr{S}$. Τώρα, αφού ο F αποτελείται από τα αναλλοίωτα σημεία της ημιομάδας $\mathscr{S}$ αναμένουμε οι «μέσοι όροι» $(A_{\daleth})_{\daleth\in\Lambda}$ να είναι σταθεροί πάνω στον F. Πράγματι, αφού $Tx = x$ για $T \in \mathscr{S}$ και $x \in F$ θα ισχύει ότι conv$\mathscr{S}$x = {x} και κατ' επέκταση $\overline{\text{conv}}\mathscr{S}x = \{x\}$. Όμως, $A_{\daleth}x \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ για κάθε $\daleth \in \Lambda$ απ' όπου έπεται ότι $A_{\daleth}x = x$ για κάθε $\daleth$ και $x \in F$. Άρα, αφού $A_{\daleth}x = x$ για $x \in F$ θα έχουμε ότι $Px = x$ στον F και συνεπώς $F \subseteq D(F)$. Τώρα, για να δείξουμε ότι ο F είναι κλειστός, θεωρούμε ένα δίκτυο $(x_\mu)_{\mu\in M} \subseteq F$ με $x_\mu \to x$. Τότε, από τη συνέχεια του T θα έχουμε $Tx_\mu \to Tx$. Όμως, $Tx_\mu = x_\mu$ για κάθε $\mu \in M$, απ' όπου έπεται ότι $Tx = x$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$ και άρα $x \in F$.

Το ότι ο $D(F)$ είναι υπόχωρος του X προκύπτει από το γεγονός ότι η P είναι γραμμική και ο F υπόχωρος του X. Εξ' ορισμού του $D(F)$ έχουμε ότι $D(F) \subseteq D$. Για να δείξουμε ότι είναι κλειστός, θεωρούμε ένα δίκτυο $(x_\mu)_{\mu\in M} \subseteq D(F)$ με $x_\mu \to x$. Τότε, από τη συνέχεια της P θα έχουμε $Px_\mu \to Px$. Όμως, $Px_\mu \in F$ για κάθε $\mu \in M$ και ο F είναι κλειστός. Άρα, $Px \in F$ και έτσι έχουμε ότι $x \in D(F)$ απ' όπου έπεται ότι ο $D(F)$ είναι κλειστός.

Το ότι ο $D(0)$ είναι κλειστός υπόχωρος του D έπεται από την ισότητα $D(0) = D \cap \ker P = \ker P$ και τη συνέχεια της P. Για τους εγκλεισμούς της (2.4.1), αφού για $x \in F$ έχουμε $A_{\daleth}x = x$ για κάθε $\daleth \in \Lambda$. Τότε, $Px = x$ για $x \in F$. Άρα, αφού $x \in F \subseteq D(F)$ θα έχουμε $x \in PD(F)$ απ' όπου έπεται ότι $F \subseteq PD(F)$. Ο εγκλεισμός $PD(F) \subseteq F$ έπεται άμεσα από τον ορισμό του $D(F)$. Άρα τελικά $F = PD(F) \subseteq D(F) \subseteq D$.

(ii),(iii) Για $x \in D(F)$ έχουμε $Px \in F$. Όμως, η οικογένεια $(A_{\daleth})_{\daleth\in\Lambda}$ είναι ένα ασθενώς δεξί $\mathscr{S}-$εργοδικό δίκτυο. Άρα, $A_{\daleth}Tx - A_{\daleth}x \xrightarrow{w} 0$ απ' όπου έπεται ότι $PTx = Px \in F$ για κάθε $x \in D(F)$. Άρα, $TD(F) \subseteq D(F)$ και $PT = P$ στον $D(F)$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$.

Τώρα, αφού $TD(F) \subseteq D(F)$ για $T \in \mathscr{S}$ και ο $D(F)$ είναι κλειστός θα έχουμε $\overline{\text{conv}}\mathscr{S}x \subseteq D(F)$ για $x \in D(F)$. Άρα,

$$A_{\daleth}x \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x \subseteq D(F)$$

για κάθε $\daleth \in \Lambda$ και $x \in D(F)$, απ' όπου έπεται ότι $A_{\daleth}D(F) \subseteq D(F)$ για $\daleth \in \Lambda$. Τέλος, αφού για $x \in D(F)$ έχουμε $Px \in F$ θα πρέπει $A_{\daleth}Px = Px$ για κάθε $\daleth \in \Lambda$. Άρα, $A_{\daleth}Px \to Px$, απ' όπου έπεται ότι $P^2x = Px$ για $x \in D(F)$. Η ισότητα $TPx = Px$ για $x \in D(F)$ και $T \in \mathscr{S}$ έπεται άμεσα από την $Px \in F$ για $x \in D(F)$. Άρα τελικά στον $D(F)$ θα ισχύει $P = P^2 = TP = PT$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$. □

Όπως και στην περίπτωση του Θεωρήματος 2.2.2 όπου ο $\overline{N}$ αποτελείται από όλα τα σημεία του X για τα οποία οι μέσοι όροι $A_n(T)(x)$ συγκλίνουν στο 0 έτσι και στη γενική περίπτωση των ημιομάδων ο $\overline{N}$ αποτελείται από όλα τα $x \in X$ για τα οποία $A_{\daleth}x \xrightarrow{w} 0$ όπως φαίνεται και από το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.4.4. $D(0) = \overline{N}$.

Απόδειξη. Αφού η οικογένεια $(A_{\daleth})_{\daleth\in\Lambda}$ είναι ένα ασθενώς δεξί $\mathscr{S}-$εργοδικό δίκτυο θα έχουμε $A_{\daleth}Tx - A_{\daleth}x \xrightarrow{w} 0$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$. Άρα, θα ισχύει ότι

$$\{x - Tx : \ T \in \mathscr{S}, \ x \in X\} \subseteq D(0)$$

και επειδή ο $D(0)$ είναι κλειστός υπόχωρος θα έχουμε και $\overline{N} \subseteq D(0)$. Αν τώρα ισχύει $\overline{N} \nsubseteq D(0)$ από το Θεώρημα Α΄.3.4 θα υπάρχει $x_0 \in D(0)$ και $h \in X^*$ με $\langle x_0, h\rangle \neq 0$ και $\langle y, h\rangle = 0$ για $y \in \overline{N}$. Δηλαδή, $\langle x - Tx, h\rangle = 0$ για $x \in X$ και $T \in \mathscr{S}$ απ' όπου έπεται ότι $\langle x, h\rangle = \langle Tx, h\rangle$ για $x \in X$ και $T \in \mathscr{S}$. Ειδικότερα, θα έχουμε $\langle x_0, h\rangle = \langle Tx_0, h\rangle$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$. Έτσι, για $y \in \mathrm{conv}\mathscr{S}\mathrm{x}_0$ θα έχουμε $\langle y, h\rangle = \langle x_0, h\rangle$. Με άλλα λόγια, $h(\mathrm{conv}\mathscr{S}\mathrm{x}_0) = \{\langle \mathrm{x}_0, \mathrm{h}\rangle\}$. Όμως, το h είναι συνεχές και άρα

$$\begin{aligned} h(\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x_0) &\subseteq \overline{h(\mathrm{conv}\mathscr{S}\mathrm{x}_0)} \\ &= \overline{\{\langle x_0, h\rangle\}} \\ &= \{\langle x_0, h\rangle\} \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$h(\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x_0) = \{\langle x_0, h\rangle\} \tag{2.4.2}$$

Απ' την άλλη όμως $x_0 \in D(0)$ και επομένως θα πρέπει

$$\langle A_{\mathfrak{I}}x_0, h\rangle \xrightarrow{w} 0 \tag{2.4.3}$$

αλλά $A_{\mathfrak{I}}x_0 \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x_0$ για κάθε $\mathfrak{I} \in \Lambda$ και έτσι από την (2.4.2) θα πρέπει $\langle A_{\mathfrak{I}}x_0, h\rangle = \langle x_0, h\rangle \neq 0$ πράγμα το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (2.4.3). Άρα τελικά, $D(0) = \overline{N}$. □

Ορισμός 2.4.5 (Προβολή που απορροφά την ημιομάδα $\mathscr{S}$)**.** Θα λέμε ότι η προβολή Q απορροφά την ημιομάδα τελεστών $\mathscr{S}$ όταν $Q = Q^2 = QT = TQ$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$.

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.2.2 στο πλαίσιο των ημιομάδων στους τοπικά κυρτούς τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους συνοψίζεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.4.6. *Έστω X ένας τ.κ.τ.δ.χ και $(A_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{I}\in\Lambda}$ ένα ασθενώς δεξί $\mathscr{S}$-εργοδικό δίκτυο για μια ημιομάδα συνεχών γραμμικών τελεστών $\mathscr{S}$ στον X. Τότε:*

(i) *Ο $D(F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X με $\mathscr{S}D(F) \subseteq D(F)$, $D(F) = F \oplus \overline{N}$ και η $P : D(F) \to F$ είναι μια προβολή που απορροφά την $\mathscr{S}$.*

(ii) *Ισχύει ότι $D(F) = X$ αν και μόνο αν ο F διαχωρίζει τον F_*, με την έννοια ότι για κάθε $h \in F_*$ με $h \neq 0$ υπάρχει $x \in F$ με $\langle x, h\rangle \neq 0$.*

(iii) *Αν ο $\mathscr{D}$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του X με $\mathscr{S}\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}$ και η Q είναι μια συνεχής προβολή στον $\mathscr{D}$ που απορροφά την $\mathscr{S}$ με $Qx \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x$ για κάθε $x \in X$, τότε $\mathscr{D} \subseteq D(F)$ και η Q συμφωνεί με την P στον $\mathscr{D}$.*

(iv) *Αν η οικογένεια $(A_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{I}\in\Lambda}$ είναι και ασθενώς αριστερό εργοδικό δίκτυο τότε $D = D(F)$.*

(v) *Αν η οικογένεια $(A_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{I}\in\Lambda}$ είναι ένα δεξί $\mathscr{S}$-εργοδικό δίκτυο τότε $A_{\mathfrak{I}}x \to Px$ για κάθε $x \in D(F)$.*

Απόδειξη. (i) Το ότι ο $D(F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X με $\mathscr{S}D(F) \subseteq D(F)$ έπεται από το Πόρισμα (2.4.3)-(i),(ii). Επίσης, από την Πρόταση 2.4.2 και το Πόρισμα (2.4.3)-(iii) έχουμε ότι η $P : D(F) \to F$ είναι μια συνεχής γραμμική προβολή που απορροφά την $\mathscr{S}$.

Τώρα, αν $x \in F \cap \overline{N}$ θα έχουμε από τη μία ότι $A_{\mathfrak{I}}x = x$ για κάθε $\mathfrak{I} \in \Lambda$ και από την άλλη αφού $\overline{N} = D(0)$ θα έχουμε $A_{\mathfrak{I}}x \xrightarrow{w} 0$ απ' όπου έπεται ότι $x = 0$. Συνεπώς, $F \cap \overline{N} = \{0\}$. Άρα, αφού F, $\overline{N} \subseteq D(F)$ θα έχουμε ότι $F \oplus \overline{N} \subseteq D(F)$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, για $x \in D(F)$ γράφοντας $x = Px + x - Px$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$A_{\mathfrak{F}}(x - Px) \xrightarrow{w} 0$$

θα έχουμε ότι $x - Px \in D(0) = \overline{N}$ και $Px \in F$. Άρα τελικά $x = Px + x - Px \in F \oplus \overline{N}$ απ' όπου έπεται ότι $D(F) \subseteq F \oplus \overline{N}$.

(ii) ($\Longrightarrow$) Θεωρούμε ένα $h \in F_*$ με $h \neq 0$. Τότε, σε πρώτη φάση υπάρχει $x \in X$ με $\langle x, h\rangle \neq 0$. Όμως, $X = D(F) = F \oplus \overline{N}$. Συνεπώς, θα υπάρχουν $x_1 \in F$ και $x_2 \in \overline{N}$ με $x = x_1 + x_2$. Αφού $h \in F_*$ θα ισχύει ότι

$$\langle x_2, T^* h\rangle = \langle x_2, h\rangle \Longleftrightarrow \langle Tx_2, h\rangle = \langle x_2, h\rangle$$

για κάθε $T \in \mathscr{S}$. Άρα, $h(\mathrm{conv}\mathscr{S} x_2) = \{\langle x_2, h\rangle\}$ και άρα από τη συνέχεια του h θα έχουμε $h(\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S} x_2) = \{\langle x_2, h\rangle\}$. Όμως, $x_2 \in D(0)$ και άρα $\langle A_{\mathfrak{F}} x_2, h\rangle \to 0$ απ' όπου έπεται ότι $\langle x_2, h\rangle = 0$. Άρα τελικά,

$$\begin{aligned} 0 &\neq \langle x, h\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, h\rangle \\ &= \langle x_1, h\rangle + \langle x_2, h\rangle \\ &= \langle x_1, h\rangle \end{aligned}$$

και επειδή $x_1 \in F$ έπεται ότι ο F διαχωρίζει τον F_*.

($\Longleftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι $D(F) \nsubseteq X$. Τότε, αφού ο $D(F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X από το Θεώρημα Α'.3.4 θα υπάρχει $h \in X^*$ με $h \neq 0$ το οποίο να μηδενίζεται στον $D(F)$. Όμως,

$$D(F) = F \oplus \overline{N}.$$

Συνεπώς, το h θα μηδενίζεται σε καθέναν από τους F, $\overline{N}$. Αφού το h μηδενίζεται στον $\overline{N}$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$ και $x \in X$ θα ισχύει $\langle x, h\rangle = \langle Tx, h\rangle$. Με άλλα λόγια,

$$\langle x, h\rangle = \langle x, T^* h\rangle$$

για κάθε $T \in \mathscr{S}$. Άρα θα έχουμε ότι $T^* h = h$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$, δηλαδή $h \in F_*$. Τότε, από την υπόθεση ότι ο F διαχωρίζει τον F_* και $h \neq 0$ θα υπάρχει $x \in F$ με $\langle x, h\rangle \neq 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού το h μηδενίζεται πάνω στον F.

(iii) Αφού ο $\mathscr{D}$ είναι κλειστός υπόχωρος του X και επειδή $\mathscr{S}\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}$ μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $X = \mathscr{D}$. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι $D(F) = X$ και $P = Q$. Για να δείξουμε ότι $X = D(F)$ από το (ii) αρκεί να δείξουμε ότι ο F διαχωρίζει τον F_*. Θεωρούμε $h \in F_*$ με $h \neq 0$. Τότε, υπάρχει $x \in X$ με $\langle x, h\rangle \neq 0$. Αφού $h \in F_*$ θα έχουμε ότι

$$h(\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S} x) = \{\langle x, h\rangle\}.$$

Όμως, $Qx \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S} x$ απ' όπου έπεται ότι $\langle Qx, h\rangle \neq 0$. Αφού η Q απορροφά την $\mathscr{S}$ θα έχουμε $TQx = Qx$ και έτσι $Qx \in F$ και $\langle Qx, h\rangle \neq 0$. Δηλαδή, ο F διαχωρίζει τον F_*. Αφού για $x \in X$ έχουμε $QTx = Qx$ για $T \in \mathscr{S}$ θα έχουμε ότι $QSx = Qx$ για $S \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$. Δηλαδή,

$$Q(\mathrm{conv}\mathscr{S} x) = \{Qx\}$$

και επειδή η Q είναι συνεχής θα ισχύει και $Q(\overline{\text{conv}}\mathscr{S}x) = \{Qx\}$. Όμως, $A_{\hbar}x \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ απ' όπου έπεται ότι $QA_{\hbar}x = Qx$. Από την $TQx = Qx$ θα έχουμε ότι $\text{conv}\mathscr{S}Qx = \{Qx\}$ και κατ' επέκταση $\overline{\text{conv}}\mathscr{S}Qx = \{Qx\}$ απ' όπου έπεται ότι $A_{\hbar}Qx = Qx$. Άρα τελικά, $A_{\hbar}Q = QA_{\hbar} = Q$ το οποίο μας δίνει ότι $PQ = QP = Q$. Από την άλλη, αφού $PT = P$ και επειδή $Qx \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ από τη συνέχεια της P θα έχουμε ότι $PQ = P$. Συνεπώς, $P = PQ = Q$.

(iv) Αν το δίκτυο $(A_{\hbar})_{\hbar\in\Lambda}$ είναι και αριστερά ασθενώς $\mathscr{S}$-εργοδικό τότε από την $TA_{\hbar}x - A_{\hbar}x \xrightarrow{w} 0$ για κάθε $x \in D$ θα ισχύει $TPx = Px$, δηλαδή $Px \in F$ για κάθε $x \in D$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in D(F)$ για κάθε $x \in D$. Άρα, $D \subseteq D(F)$ και επειδή $D(F) \subseteq D$ θα έχουμε $D = D(F)$.

(v) Αφού $D(F) = F \oplus \overline{N}$ και επειδή $A_{\hbar}x = x$ για κάθε $\hbar \in \Lambda$ και $x \in F$ για να δείξουμε ότι $A_{\hbar}x \to Px$ για κάθε $x \in D(F)$ αρκεί να δείξουμε ότι $A_{\hbar}x \to 0$ για κάθε $x \in \overline{N}$. Από τη σύγκλιση

$$A_{\hbar}Tx - A_{\hbar}x \longrightarrow 0,$$

έχουμε ότι $x - Tx \in \{x \in X : A_{\hbar}x \to 0\}$ για $x \in X$ και $T \in \mathscr{S}$. Άρα αφού το $\{x \in X : A_{\hbar}x \to 0\}$ είναι υπόχωρος του X θα έχουμε $N \subseteq \{x \in X : A_{\hbar}x \to 0\}$. Τώρα, αν $(x_\mu)_{\mu\in M} \subseteq \{x \in X : A_{\hbar}x \to 0\}$ είναι ένα δίκτυο με $x_\mu \to x$ και V μια περιοχή του μηδενός τότε θα υπάρχει ανοικτή περιοχή U το μηδενός με

$$U + U \subseteq V.$$

Από την ισοσυνέχεια της $(A_{\hbar})_{\hbar\in\Lambda}$ θα υπάρχει ανοικτή περιοχή W του μηδενός με $A_{\hbar}W \subseteq U$. Τότε, αφού $x_\mu \to x$ θα υπάρχει μ_0 με

$$x - x_{\mu_0} \in W.$$

Αφού $A_{\hbar}x_{\mu_0} \to 0$ θα υπάρχει $\hbar_0 \in \Lambda$ ώστε για κάθε $\hbar \geq \hbar_0$ να ισχύει $A_{\hbar}x_{\mu_0} \in U$. Οπότε, συνοψίζοντας, για $\hbar \geq \hbar_0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} A_{\hbar}x &= A_{\hbar}x - A_{\hbar}x_{\mu_0} + A_{\hbar}x_{\mu_0} \\ &= A_{\hbar}(x - x_{\mu_0}) + A_{\hbar}x_{\mu_0} \\ &\in A_{\hbar}W + U \\ &\subseteq U + U \end{aligned}$$

και επειδή $U + U \subseteq V$ θα έχουμε ότι $A_{\hbar}x \in V$ για $\hbar \geq \hbar_0$. Δηλαδή, $A_{\hbar}x \to 0$ απ' όπου έπεται ότι $x \in \{x \in X : A_{\hbar}x \to 0\}$ και έτσι το $\{x \in X : A_{\hbar}x \to 0\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Συνεπώς, $\overline{N} \subseteq \{x \in X : A_{\hbar}x \to 0\}$. □

Παρατηρήστε ότι η περιγραφή του $D(F)$ ώς το ευθύ άθροισμα των F, $\overline{N}$ στο προηγούμενο θεώρημα είναι ανεξάρτητη από το δίκτυο $(A_{\hbar})_{\hbar\in\Lambda}$. Ειδικότερα, αν $(A_{\hbar})_{\hbar\in\Lambda}$, $(B_\mu)_{\mu\in M}$ είναι δύο $\mathscr{S}$−εργοδικά δίκτυα τότε τα σύνολα των σταθερών σημείων στα οποία συγκλίνουν τα παραπάνω δίκτυα συμπίπτουν μεταξύ τους και τα όρια των $(A_{\hbar}x)_{\hbar\in\Lambda}$, $(B_\mu)_{\mu\in M}$ είναι τα ίδια.

2.5 Χώροι Banach II

2.5.1 Ημιομάδες τελεστών σε χώρους Banach

Σε όλα τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου υποθέταμε την ύπαρξη ενός δεξιού ασθενούς $\mathscr{S}$-εργοδικού δικτύου για την ημιομάδα τελεστών $\mathscr{S}$.

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε θεωρήματα που αφορούν ημιομάδες τελεστών σε χώρους Banach χωρίς την ύπαρξη εργοδικών δικτύων αλλά και ένα εργοδικό θεώρημα που αφορά πεπερασμένους το πλήθος τελεστές $T_1, \dots, T_m$ που μετατίθενται μεταξύ τους.

Το πρώτο θεώρημα είναι ένα αποτέλεσμα των Alaoglu-Birkhoff (1940-[2]) και δίνει μια συνθήκη για την ύπαρξη σταθερών σημείων για μια ημιομάδα συστολών $\mathscr{S}$ σε ένα χώρο Banach. Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε τους ορισμούς και τις βασικές ιδιότητες της ομοιόμορφης και της γνήσιας κυρτότητας της παραγράφου Β′.2.2 του Παραρτήματος Β′.

Θεώρημα 2.5.1 (Alaoglu-Birkhoff). *Έστω $\mathscr{S}$ μια ημιομάδα από συστολές σε ένα χώρο Banach X. Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο X είναι ομοιόμορφα κυρτός και ο X^* γνήσια κυρτός (βλ. Ορισμό Β′.2.11). Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $Px \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x$ με $TPx = Px$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$.*

Απόδειξη. Πρώτα αποδεικνύουμε τη μοναδικότητα. Γι' αυτό ας υποθέσουμε πως για $x \in X$ υπάρχουν $x_1,\ x_2 \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x$ με $Tx_1 = x_1$ και $Tx_2 = x_2$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$. Τότε, αν $x_1 \neq x_2$ από το Hahn-Banach θα υπάρχει $h \in X^*$ με

$$\langle x_1 - x_2, h\rangle = \|x_1 - x_2\| \neq 0. \tag{2.5.1}$$

Αφού $\|T^*\| \leq 1$ για $T \in \mathscr{S}$ τότε θα έχουμε και $\|S^*\| \leq 1$ για $S^* \in \mathrm{conv}\mathscr{S}^*$. Από αυτό μπορούμε να δείξουμε ότι το $\overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h$ είναι φραγμένο. Πράγματι, για $h_1 \in \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h$ θα υπάρχει δίκτυο $S_i^* \in \mathrm{conv}\mathscr{S}^*h$ με $S_i^*h \xrightarrow{w^*} h_1$ τότε από την Πρόταση Β′.2.4-(ii) θα έχουμε

$$\begin{aligned}\|h_1\| &\leq \liminf_i \left\|S_i^*h\right\| \\ &\leq \|h\| \liminf_i \left\|S_i^*\right\| \\ &\leq \|h\|.\end{aligned}$$

Δηλαδή, το $\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}^*h$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X^* και έτσι θα υπάρχει $M > 0$ με $\overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h \subseteq MB_{X^*}$. Όμως από το Θεώρημα Β′.2.5 το MB_{X^*} είναι ασθενώς* συμπαγές και έτσι θα είναι και το $\overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h$. Επομένως, αν $(h_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h$ είναι μια ακολουθία με

$$\|h_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d(0, \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h),$$

από την w^*-συμπάγεια θα υπάρχει υποδίκτυο (h_{n_i}) της $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ και $h^* \in \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h$ με $h_{n_i} \xrightarrow{w^*} h^*$. Τότε, χρησιμοποιώντας πάλι την (Β′.2.4)-(ii) θα έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|h^*\right\| &\leq \liminf_i \left\|h_{n_i}\right\| \\ &= d(0, \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h),\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\|h^*\| = d(0, \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h)$. Αφού ο X είναι γνήσια κυρτός, από την Παρατήρηση Β′.2.12 το h^* θα είναι και το μοναδικό πλησιέστερο σημείο του $\overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h$ στο 0. Όμως τώρα αφού η $\mathscr{S}^*$ είναι ημιομάδα (με πράξη τη σύνθεση πάντα) για $T^* \in \mathscr{S}^*$ και $S^* \in \mathrm{conv}\mathscr{S}^*$ θα έχουμε ότι $T^*S^* \in \mathrm{conv}\mathscr{S}^*$. Δηλαδή, $T^*(\mathrm{conv}\mathscr{S}^*) \subseteq \mathrm{conv}\mathscr{S}^*$ και επειδή ο T^* είναι (w^*, w^*)-συνεχής (βλ. Πρόταση Β′.3.3-(ii)) θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}T^*(\overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h) &\subseteq \overline{T^*(\mathrm{conv}\mathscr{S}^*h)}^{w^*} \\ &\subseteq \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $T^*h^* \in \overline{\text{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$. Έτσι, αφού $\|T^*h^*\| \leq \|T^*\|\|h^*\| \leq \|h^*\|$ και από τη μοναδικότητα του h^* ως πλησιέστερου σημείου στο 0 έπεται ότι $T^*h^* = h^*$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$. Δηλαδή, το h^* παραμένει αναλλοίωτο από την $\mathscr{S}^*$ πράγμα το οποίο σε συνδυασμό με τη γραμμικότητα του h^* μας δίνει

$$\begin{aligned}\langle Sx, h^*\rangle &= \langle x, S^*h^*\rangle \\ &= \langle x, Sh^*\rangle\end{aligned}$$

για κάθε $S \in \text{conv}\mathscr{S}$. Τώρα, αν $y \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ θα υπάρχει δίκτυο $S_i \in \text{conv}\mathscr{S}$ με $\|S_ix - y\| \to 0$. Οπότε, απ' τη συνέχεια του h^* θα έχουμε

$$\begin{aligned}\langle y, h^*\rangle &= \lim_i\langle S_ix, h^*\rangle \\ &= \langle x, h^*\rangle.\end{aligned}$$

Ειδικότερα, αφού $x_1,\ x_2 \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ θα έχουμε $\langle x_1, h^*\rangle = \langle x_2, h^*\rangle = \langle x, h^*\rangle$ απ' όπου έπεται ότι

$$\langle x_1 - x_2, h^*\rangle = 0. \tag{2.5.2}$$

Όμως τώρα τα $x_1,\ x_2$ είναι αναλλοίωτα από την $\mathscr{S}$ οπότε

$$\begin{aligned}\langle x_j, S^*h\rangle &= \langle Sx_j, h\rangle \\ &= \langle x_j, h\rangle\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

για $j = 1, 2$ και $S \in \text{conv}\mathscr{S}$. Αφού $h^* \in \overline{\text{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h$ θα υπάρχει δίκτυο $S_i \in \text{conv}\mathscr{S}$ με $S_i^*h \xrightarrow{w^*} h^*$. Τότε, από την (2.5.3) θα έχουμε $\langle x_j, h\rangle = \langle x_j, h^*\rangle$ για $j = 1, 2.$. Οπότε, από τη μία θα έχουμε ότι $\langle x_1 - x_2, h\rangle = \langle x_1 - x_2, h^*\rangle = 0$ και από την (2.5.1) $\langle x_1 - x_2, h\rangle \neq 0$ καταλήγοντας σε άτοπο.

Για την ύπαρξη θέτουμε $C = \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ και υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $0 \notin \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ αλλιώς το 0 θα είναι το ζητούμενο Px. Οπότε, αν $0 \notin \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$, αφού ο X είναι ομοιόμορφα κυρτός, από την Πρόταση Β'.2.13 θα υπάρχει μοναδικό πλησιέστερο σημείο $Px \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ στο 0. Όμως τότε, αφού η $\mathscr{S}$ είναι ημιομάδα θα έχουμε $Ty \in \text{conv}\mathscr{S}x$ για $y \in \text{conv}\mathscr{S}x$ και άρα λόγω της συνέχειας του T θα πρέπει να ισχύει $Ty \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ για κάθε $y \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$. Άρα από τις $\|TPx\| \leq \|Px\|$ και $TPx \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ για $T \in \mathscr{S}$ θα έπεται ότι $TPx = Px$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$. □

Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο πως τα δίκτυα που χρησιμοποιήθηκαν για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1 μπορούν να αντικατασταθούν από ακολουθίες. Αυτό οφείλεται στο θεώρημα των Milman-Pettis (Β'.2.15) το οποίο μας λέει πως κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach πρέπει να είναι αυτοπαθής, έτσι η ασθενής* τοπολογία θα συμπίπτει με την ασθενή τοπολογία στον X^*. Όμως, από το θεώρημα Eberlein-Smulian Β'.2.10 η ασθενής συμπάγεια είναι ισοδύναμη με την ασθενή ακολουθιακή συμπάγεια.

Όπως ήδη γνωρίζουμε οι χώροι $\mathcal{B}(X)$ και $\mathcal{B}(X^*)$ είναι χώροι Banach με νόρμα τη νόρμα τελεστή:

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|$$

για $T \in \mathcal{B}(X)$ (ή και $T \in \mathcal{B}(X^*)$). Η τοπολογία που παράγει η νόρμα τελεστή καλείται πολλές φορές και τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης. Όπως και στην περίπτωση της ασθενούς και της ασθενούς* τοπολογίας ενός χώρου Banach, έτσι και στους χώρους $\mathcal{B}(X)$ (γενικότερα $\mathcal{B}(X, Y)$) και $\mathcal{B}(X^*)$ (γενικότερα $\mathcal{B}(Y^*, X^*)$) μπορούμε με τη βοήθεια μιας οικογένειας ημινορμών να παράξουμε και άλλες τοπολογίες. Οι πιο σημαντικές που θα χρειαστούμε για τα παρακάτω είναι η ισχυρή τοπολογία, η ασθενής και η ασθενής* τοπολογία τελεστών. Για τους ορισμούς και τις βασικές ιδιότητες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στις Παραγράφους Β΄.4.1, Β΄.4.2 και Β΄.4.3.

Για $A \subseteq \mathcal{B}(X)$ θα συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την κλειστή θήκη του A ως προς τη νόρμα τελεστή και με $\overline{A}^{so}$, $\overline{A}^{wo}$ την κλειστή θήκη του A ως προς την ισχυρή και την ασθενή τοπολογία τελεστών αντιστοίχως. Τέλος, για $B \subseteq \mathcal{B}(X^*)$ με $\overline{B}^{w^*o}$ θα συμβολίζουμε την κλειστή θήκη ως προς την ασθενή* τοπολογία τελεστών.

Από το Θεωρήμα διάσπασης 2.2.2 αν ο τελεστής T είναι εργοδικός (δηλ. $X = X_{me}$) τότε η απεικόνιση $Px = \lim_n A_n(T)x$ είναι μια προβολή με $PT = TP$. Επειδή $A_n(T)x \in \text{conv}\{T^n : n = 0, 1, \ldots\}$, γράφοντας τη σύγκλιση δικτύων ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών βλέπουμε πως η σύγκλιση $Px = \lim_n A_n(T)x$ για κάθε $x \in X$ μας δίνει ότι $P \in \overline{\text{conv}}^{so}\{T^n : n = 0, 1 \ldots\}$ (βλ. μετά τον Ορισμό Β΄.4.1). Αυτές οι παρατηρήσεις μας επιτρέπουν να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.5.2 (Εργοδική ημιομάδα τελεστών)**.** Έστω $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{B}(X)$ μια ημιομάδα τελεστών σε ένα χώρο Banach X. Θα λέμε ότι η $\mathscr{S}$ είναι εργοδική αν υπάρχει μια προβολή $P \in \overline{\text{conv}}^{so}\mathscr{S}$ με $P = PT = TP$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$.

Παρατηρήσεις 2.5.3. Αν η ημιομάδα $\mathscr{S}$ είναι εργοδική τότε από την $P \in \overline{\text{conv}}^{so}\mathscr{S}$ υπάρχει δίκτυο $(S_i) \subseteq \text{conv}\mathscr{S}$ με $S_i \xrightarrow{so} P$. Όμως, η παραπάνω σύγκλιση είναι ισοδύναμη με την $S_i x \to Px$ για κάθε $x \in X$. Αφού οι S_i είναι κυρτοί συνδυασμοί στοιχείων της ημιομάδας και το όριο Px παραμένει αναλλοίωτο από την ημιομάδα για κάθε $x \in X$, έχουμε ένα είδους εργοδικού θεωρήματος σε αυτό το γενικό πλαίσιο. Παρατηρήστε επίσης πως από το θεώρημα του Eberlein αν η $\mathscr{S}$ είναι εργοδική και $(A_\beta)_{\beta\in\Lambda}$ είναι ένα $\mathscr{S}$-εργοδικό δίκτυο τότε θα έχουμε $A_\beta x \to Px$ για κάθε $x \in X$.

Το θεώρημα του Nagel (1973-[17]) μας δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για το πότε μια φραγμένη ημιομάδα τελεστών είναι εργοδική. Από την ισοδυναμία των (i),(iv) και τις Παρατηρήσεις 2.5.3 φαίνεται η εργοδική φύση του Θεωρήματος 2.5.1.

Θεώρημα 2.5.4 (Nagel)**.** *Έστω $\mathscr{S}$ μια φραγμένη ημιομάδα γραμμικών τελεστών σε ένα χώρο Banach X. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Υπάρχει μια προβολή $P \in \overline{\text{conv}}^{so}\mathscr{S}$ που απορροφά την $\mathscr{S}$ ($P = PT = TP$).*

(ii) *Υπάρχει μια (w^*, w^*)-συνεχής προβολή $P' \in \overline{\text{conv}}^{w^*o}\mathscr{S}^*$ που απορροφά την $\mathscr{S}^*$ ($P' = P'T^* = T^*P'$).*

(iii) *Ισχύει ότι $\overline{\text{conv}}\mathscr{S}x \cap F \neq \emptyset$ και $\overline{\text{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h \cap F_* \neq \emptyset$ για κάθε $x \in X$ και $h \in X^*$.*

(iv) *Για κάθε $x \in X$ το $\overline{\text{conv}}\mathscr{S}x \cap F$ είναι μονοσύνολο.*

(v) *Υπάρχει προβολή P που απορροφά την $\mathscr{S}$ με $Px \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Θεωρούμε $P' = P^*$ όπου P^* ο συζυγής τελεστής του P. Τότε, από τις $P = P^2 = PT = TP$ θα έχουμε ότι $P' = (P')^2 = T^*P' = P'T^*$ (βλ. μετά την Πρόταση Β΄.3.2). Άρα, η P' είναι μια προβολή που απορροφά την $\mathscr{S}^*$. Από το Θεώρημα Β΄.4.4 έχουμε

$$\overline{\text{conv}}^{so}\mathscr{S} = \overline{\text{conv}}^{wo}\mathscr{S}. \tag{2.5.4}$$

Άρα, αφού $P \in \overline{\text{conv}}^{wo}\mathscr{S}$ θα υπάρχει δίκτυο $(T_i) \subseteq \text{conv}\mathscr{S}$ με $T_i \xrightarrow{wo} P$. Τότε, από την Παρατήρηση Β΄.4.6 θα έχουμε $T_i^* \xrightarrow{w^*o} P'$ απ' όπου έπεται ότι $P' \in \overline{\text{conv}}^{w^*o}\mathscr{S}^*$. Το ότι η P' είναι (w^*, w^*)-συνεχής έπεται από την Πρόταση Β΄.3.3-(ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Αφού η P' είναι (w^*, w^*)-συνεχής θα έχουμε (όπως στην απόδειξη του Πορίσματος Β΄.3.4) ότι $P \in \mathscr{B}(X)$ όπου $P = j^{-1} \circ (P')^* \circ j$. Ισχυριζόμαστε ότι $P^* = P'$. Αυτό ελέγχεται εύκολα καθώς για $x \in X$ και $h \in X^*$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle x, P^*h\rangle &= \langle Px, h\rangle \\ &= \langle (j^{-1}(P')^*j)x, h\rangle \\ &= \langle h, (P')^*j(x)\rangle \\ &= \langle P'h, j(x)\rangle \\ &= \langle x, P'h\rangle,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $P'h = P^*h$ για κάθε $h \in X^*$. Όπου τώρα από τις ισότητες $P' = (P')^2 = P'T^* = T^*P'$ και το γεγονός ότι $j^{-1} \circ T^{**} \circ j = T$ (βλ. Πόρισμα Β΄.3.4) θα έχουμε ότι $P = P^2 = PT = TP$ και έτσι η P είναι μια προβολή που απορροφά την $\mathscr{S}$. Από τις $P^* = P'$ και $P' \in \overline{\text{conv}}^{w^*o}\mathscr{S}^*$ θα έχουμε $P \in \overline{\text{conv}}^{wo}\mathscr{S}$ (Παρατήρηση Β΄.4.6) και άρα από την (2.5.4) $P \in \overline{\text{conv}}^{so}\mathscr{S}$.

(i),(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Αφού $P \in \overline{\text{conv}}^{so}\mathscr{S}$ και $P' \in \overline{\text{conv}}^{w^*o}\mathscr{S}^*$ για $x \in X$ και $h \in X^*$ θα έχουμε $Px \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ και $P'x \in \overline{\text{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h$. Οι $Px \in F$ και $P'h \in F_*$ προκύπτουν από τις $TPx = Px$ και $T^*P'h = P'h$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Έστω πως υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ με $x_1,\ x_2 \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x \cap F$. Τότε, από το θεώρημα Hahn-Banach θα υπάρχει $h \in X^*$ με

$$\langle x_1 - x_2, h\rangle \neq 0. \tag{2.5.5}$$

Τότε, αφού $\overline{\text{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h \cap F_* \neq \emptyset$ βρίσκουμε $h^* \in \overline{\text{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h \cap F_*$. Από την $h^* \in \overline{\text{conv}}^{w^*}\mathscr{S}^*h$ βρίσκουμε δίκτυο $(S_i^*) \subseteq \text{conv}\mathscr{S}^*$ με $S_i^*h \xrightarrow{w^*} h^*$. Επειδή $x_j \in F$ θα έχουμε $S_ix_j = x_j$ για κάθε i και $j = 1, 2$. Άρα για $j = 1, 2$ γράφοντας

$$\begin{aligned}\langle x_j, h^*\rangle &= \lim_i \langle x_j, S_i^*h\rangle \\ &= \lim_i \langle S_ix_j, h\rangle \\ &= \langle x_j, h\rangle\end{aligned}$$

θα έχουμε $\langle x_1, h\rangle = \langle x_1, h^*\rangle$ και $\langle x_2, h\rangle = \langle x_2, h^*\rangle$. Οπότε χρησιμοποιώντας την (2.5.5) προκύπτει

$$\langle x_1 - x_2, h^*\rangle \neq 0. \tag{2.5.6}$$

Από την $x_1 \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x$ θα υπάρχει δίκτυο $(S_i) \subseteq \mathrm{conv}\mathscr{S}$ με $S_i x \to x_1$. Όμως, επειδή $h^* \in F_*$ θα έχουμε ότι $S_i^* h^* = h^*$ για κάθε i. Άρα γράφοντας

$$\begin{aligned}\langle x_1, h^*\rangle &= \lim_i \langle S_i x, h^*\rangle \\ &= \lim_i \langle x, S_i^* h^*\rangle \\ &= \langle x, h^*\rangle\end{aligned}$$

θα έχουμε $\langle x_1, h^*\rangle = \langle x, h^*\rangle$. Με ακριβώς ίδιο τρόπο δείχνουμε και ότι $\langle x_2, h^*\rangle = \langle x, h^*\rangle$. Δηλαδή, $\langle x_1 - x_2, h^*\rangle = 0$ πράγμα το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (2.5.6). Οπότε, υπάρχει μοναδικό $Px \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x \cap F$.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) Συμβολίζουμε με Px το μοναδικό στοιχείο του $\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x \cap F$. Χρησιμοποιώντας το ότι το $\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x \cap F$ είναι μονοσύνολο και η $\mathscr{S}$ ημιομάδα είναι εύκολο να δείξουμε ότι $P = P^2 = PT = TP$ για $T \in \mathscr{S}$. Πράγματι, αφού η $\mathscr{S}$ είναι ημιομάδα θα έχουμε SR, $RS \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$ για κάθε $S, R \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$. Τότε, θα έχουμε $S(\mathrm{conv}\mathscr{S}x) \subseteq \mathrm{conv}\mathscr{S}x$ και $\mathrm{conv}\mathscr{S}Sx \subseteq \mathrm{conv}\mathscr{S}x$ για κάθε $x \in X$. Οπότε, από τη συνέχεια του S θα έχουμε

$$\begin{aligned}S(\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x) &\subseteq \overline{S(\mathrm{conv}\mathscr{S}x)} \\ &\subseteq \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x\end{aligned}$$

και από τον εγκλεισμό $\mathrm{conv}\mathscr{S}S \subseteq \mathrm{conv}\mathscr{S}$ θα έχουμε $\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}Sx \subseteq \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x$. Οπότε, παίρνοντας τομή με τον F θα έχουμε

$$\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}Sx \cap F \subseteq \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x \cap F$$

και

$$S(\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x \cap F) \subseteq \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x \cap F,$$

απ' όπου έπεται ότι $PSx = Px = SPx$ για κάθε $S \in \mathscr{S}$. Ειδικότερα, $PTx = Px = TPx$. Για την $P^2 = P$ αφού $P^2 x \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}Px$ θα υπάρχει δίκτυο $(S_i) \subseteq \mathrm{conv}\mathscr{S}$ με $S_i Px \to P^2 x$. Όμως, $S_i Px = Px$ απ' όπου έπεται ότι $Px = P^2 x$. Μένει να δείξουμε ότι η P είναι γραμμική. Αφού $S\lambda = \lambda S$ για κάθε $S \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$ από την Πρόταση Α'.1.5-(ii) θα έχουμε ότι $\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}\lambda x = \lambda\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x$ όπου τώρα λόγω της μοναδικότητας έπεται ότι $P\lambda x = \lambda Px$ για κάθε λ. Για να δείξουμε ότι $P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2$ αρκεί να δείξουμε ότι $Px_1 + Px_2 \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}(x_1 + x_2)$. Γι' αυτό θεωρούμε $\epsilon > 0$ και $M = \sup_{T\in\mathscr{S}} \|T\| < \infty$ (η $\mathscr{S}$ είναι φραγμένη). Από την $Px_1 \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x_1$ θα υπάρχει $R \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$ με

$$\|Rx_1 - Px_1\| < \epsilon. \tag{2.5.7}$$

Επειδή, $\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}Rx_2 = \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x_2$ και $Px_2 \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x_2$ θα υπάρχει $S \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$ με

$$\|SRx_2 - Px_2\| < \epsilon. \tag{2.5.8}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.5.7),(2.5.8), την ισότητα $SRx_1 = SPx_1$ και το γεγονός ότι $SR \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$ γράφοντας

$$\begin{aligned}\|SR(x_1 + x_2) - Px_1 - Px_2\| &\leq \|SRx_1 - Px_1\| + \|SRx_2 - Px_2\| \\ &= \|SRx_1 - SPx_1\| + \|SRx_2 - Px_2\| \\ &\leq \|S\|\,\|Rx_1 - Px_1\| + \|SRx_2 - Px_2\| \\ &\leq M\epsilon + \epsilon,\end{aligned}$$

θα έχουμε

$$((M\epsilon + \epsilon)B_X + Px_1 + Px_2) \cap \mathrm{conv}\mathscr{S}(x_1 + x_2) \neq \emptyset$$

απ' όπου έπεται ότι $Px_1 + Px_2 \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}(x_1 + x_2)$.

(v) $\Longrightarrow$ (i) Για να δείξουμε ότι $P \in \overline{\mathrm{conv}}^{so}\mathscr{S}$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathrm{conv}\mathscr{S} \cap \{T \in \mathcal{B}(X) : \|Tx_i - Px_i\| < \epsilon,\ i = 1, \dots, m\} \neq \emptyset \tag{2.5.9}$$

για $\epsilon > 0$ και $x_1, \dots, x_m \in X$. Αφού $Px \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}x$ η (2.5.9) θα είναι αληθής για $m = 1$. Υποθέτουμε πως η (2.5.9) ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$ και κάθε $x_1, \dots, x_m \in X$ και δείχνουμε ότι ισχύει για $m + 1$ σημεία. Έστω $\epsilon > 0$ και $x_1, \dots, x_m, x_{m+1} \in X$. Θέτουμε $M = \sup_{T \in \mathscr{S}} \|T\| < \infty$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $S \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$ με

$$\|Sx_i - Px_i\| < \frac{\epsilon}{2M} \tag{2.5.10}$$

για $1 \leq i \leq m$. Τότε, αφού $PSx_{m+1} \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}Sx_{m+1}$ θα υπάρχει $T \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$ με

$$\|TSx_{m+1} - PSx_{m+1}\| < \epsilon. \tag{2.5.11}$$

Επειδή η $\mathscr{S}$ είναι ημιομάδα θα έχουμε $TS \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$ και επειδή $TP = P$ για $1 \leq i \leq m$ από την (2.5.10) θα έχουμε

$$\begin{aligned}\|TSx_i - Px_i\| &= \|TSx_i - TPx_i\| \\ &\leq \|T\|\,\|Sx_i - Px_i\| \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

και από την (2.5.11) και την $PS = P$ θα έχουμε $\|TSx_{m+1} - Px_{m+1}\| < \epsilon$. □

2.5.2 Κυρτοί συνδυασμοί εργοδικών τελεστών

Σε αυτή την παράγραφο ασχολούμαστε με κυρτούς συνδυασμούς πεπερασμένων το πλήθος εργοδικών τελεστών $T_1, \dots, T_m$ που μετατίθενται μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 2.5.5. *Έστω X χώρος Banach και $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{B}(X)$ power bounded τελεστές οι οποίοι μετατίθενται μεταξύ τους. Αν κάθε T_i για $1 \leq i \leq m$ είναι εργοδικός τότε είναι εργοδικός και κάθε $S \in \mathrm{conv}\{T_1, \dots, T_m\}$.*

Η απόδειξη βασίζεται σε δύο γενικότερα λήμματα:

Λήμμα 2.5.6. *Έστω X χώρος Banach και $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(X)$ το σύνολο όλων των συστολών. Τότε, ο ταυτοτικός τελεστής I είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{S}$.*

Απόδειξη. Έστω πως ο I δεν είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{S}$. Τότε, αφού το $\mathcal{S}$ είναι κυρτό θα υπάρχουν συστολές $T_1 \neq T_2$ με

$$I = \frac{T_1 + T_2}{2}. \tag{2.5.12}$$

Θέτουμε $T = I - T_1$ όπου από την (2.5.12) και επειδή $T_1 \neq T_2$ θα πρέπει $T \neq 0$. Γνωρίζουμε ότι η B_{X^*} είναι w^*-συμπαγής (βλ. Θεώρημα Β΄.2.5) οπότε από το θεώρημα Krein-Milman (βλ. Θεώρημα Α΄.3.12) έχουμε

$$B_{X^*} = \overline{\text{conv}}^{w^*}(\text{ext}(B_{X^*})). \tag{2.5.13}$$

Ειδικότερα, αφού $\text{ext}(B_{X^*}) \neq 0$ για $h \in \text{ext}(B_{X^*})$ από την (2.5.12) θα έχουμε $h = \frac{T_1^*h+T_2^*h}{2}$. Όμως, επειδή οι T_1, T_2 είναι συστολές θα έχουμε $T_1^*h,\ T_2^*h \in B_{X^*}$. Επομένως, αφού το h είναι ακραίο σημείο της B_{X^*} θα πρέπει $T_1^*h = T_2^*h = h$. Με άλλα λόγια, $T^*h = 0$ για κάθε $h \in \text{ext}(B_{X^*})$. Από τη γραμμικότητα του T^* θα έχουμε $T^*h = 0$ για κάθε $h \in \text{conv}\,\text{ext}(B_{X^*})$. Επειδή ο T^* είναι (w^*, w^*)-συνεχής θα έχουμε

$$T^*(\overline{\text{conv}}^{w^*}(\text{ext}(B_{X^*}))) \subseteq \overline{T(\text{conv}\,\text{ext}(B_{X^*}))},$$

απ' όπου έπεται ότι $T^*h = 0$ για κάθε $h \in \overline{\text{conv}}^{w^*}(\text{ext}(B_{X^*}))$. Οπότε, από την (2.5.13) θα έχουμε $T^*|_{B_{X^*}}$ το οποίο με τη σειρά του δίνει ότι $T^* = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $T \neq 0$. □

Λήμμα 2.5.7. *Έστω $(a_n)_{n=1}^\infty$ μια ακολουθία γνήσια θετικών αριθμών με $\sum_{n=1}^\infty a_n = 1$. Έστω $(T_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{B}(X)$ μια ακολουθία συστολών σε ένα χώρο Banach που μετατίθενται μεταξύ τους. Τότε,*

$$F(T) = \bigcap_{n=1}^\infty F(T_n), \tag{2.5.14}$$

όπου $T = \sum\limits_{n=1}^\infty a_n T_n$.

Απόδειξη. Καταρχάς έχουμε $T \in \mathcal{B}(X)$ αφού $\sum_{n=1}^\infty \|a_n T_n\| \leq \sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$ και ο $\mathcal{B}(X)$ είναι χώρος Banach. Για $x \in \bigcap_{n=1}^\infty F(T_n)$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{n=1}^\infty a_n T_n x \\ &= x \sum_{n=1}^\infty a_n = x \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $x \in F(T)$. Άρα, $\bigcap_{n=1}^\infty F(T_n) \subseteq F(T)$. Αφού οι T_n μετατίθενται μεταξύ τους για $m \in \mathbb{N}$ και $x \in F(T)$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} T_m x = T_m T x &= T_m \sum_{n=1}^\infty a_n T_n x \\ &= \sum_{n=1}^\infty a_n T_m T_n x = \sum_{n=1}^\infty a_n T_n T_m x = T T_m x, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $T_m(F(T)) \subseteq F(T)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε, αφού ο $F(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X θα έχουμε $S(F(T)) \subseteq F(T)$ όπου $S = (1-a_m)^{-1} \sum_{n \neq m} a_n T_n \in \mathcal{B}(X)$. Οι T_m, S είναι συστολές και $T = a_m T_j + (1-a_m)S$. Αφού στον $F(T)$ ισχύει $T = I$ από το Λήμμα 2.5.6 θα έχουμε $T_j = I$, δηλαδή $T_j(x) = x$ για κάθε $x \in F(T)$. Με άλλα λόγια, $F(T) \subseteq F(T_m)$ απ' όπου έπεται ότι $F(T) \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty F(T_n)$. □

Απόδειξη Θεωρήματος 2.5.5. Μπορούμε περνώντας στην ισοδύναμη νόρμα

$$|||x||| = \sup\left\{\left\|T_1^{k_1}...T_n^{k_n}x\right\| : \, k_1, ..., k_n \geq 0\right\}$$

να υποθέσουμε ότι κάθε T_i είναι συστολή. Πράγματι, αφού κάθε T_i είναι power bounded θα υπάρχει $M > 0$ ώστε $\left\|T_i^k\right\| \leq M$ για κάθε $k \geq 0$ και $1 \leq i \leq m$. Τότε, θα έχουμε απ' τη μία ότι $|||x||| \leq M^m \|x\|$ και απ' την άλλη $\|x\| \leq |||x|||$. Δηλαδή, οι $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ είναι ισοδύναμες. Επίσης, αφού $|||T_i x||| \leq |||x|||$ θα έχουμε ότι κάθε T_i είναι συστολή ως προς την $|||\cdot|||$ για κάθε $1 \leq i \leq m$. Θεωρούμε έναν $S \in \text{conv}\{T_1, ..., T_m\}$. Αφού οι $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ είναι ισοδύναμες, ο S θα είναι εργοδικός ως προς την $\|\cdot\|$ αν και μόνο αν είναι εργοδικός ως προς την $|||\cdot|||$. Οπότε υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι κάθε T_i είναι συστολή ως προς την $\|\cdot\|$. Δείχνουμε πρώτα το θεώρημα για την περίπτωση $m = 2$. Δηλαδή, θεωρούμε $S \in \text{conv}\{T_1, T_2\}$. Τότε, από το Λήμμα 2.5.7 έχουμε

$$F(S) = F(T_1) \cap F(T_2)$$

και επειδή οι T_1^*, T_2^* είναι επίσης συστολές και $S^* \in \text{conv}\{T_1^*, T_2^*\}$ θα έχουμε και

$$F(S^*) = F(T_1^*) \cap F(T_2^*).$$

Οπότε, για να δείξουμε ότι ο S είναι εργοδικός από το Θεώρημα 2.2.4 αρκεί να δείξουμε ότι ο $F(T_1) \cap F(T_2)$ διαχωρίζει τον $F(T_1^*) \cap F(T_2^*)$. Γι' αυτό θεωρούμε $h \in F(T_1^*) \cap F(T_2^*)$ με $h \neq 0$. Αφού ο T_1 είναι εργοδικός υπάρχει $x_1 \in F(T_1)$ με $\langle x_1, h\rangle \neq 0$. Τότε, από την εργοδικότητα του T_2 θα υπάρχει το $x_2 = \lim_n A_n(T_2)x$ και $x_2 \in F(T_2)$. Αφού οι T_1, T_2 μετατίθενται τότε

$$\begin{aligned} A_n(T_2)x_1 &= A_n(T_2)T_1x_1 \\ &= T_1(A_n(T_2)x_1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T_1(x_2), \end{aligned}$$

όμως $A_n(T_2)x_1 \to x_2$, άρα $T_1(x_2) = x_2$ απ' όπου έπεται ότι $x_2 \in F(T_1)$. Συνεπώς, $x_2 \in F(T_1) \cap F(T_2)$. Αν δείξουμε ότι $\langle x_2, h\rangle \neq 0$ τότε θα έχουμε το ζητούμενο. Αφού $h \in F(T_2^*)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle x_1, h\rangle &= \langle x_1, A_n(T_2)^*h\rangle \\ &= \langle A_n(T_2)x_1, h\rangle \end{aligned}$$

και επειδή $A_n(T_2)x_1 \to x_2$ θα έχουμε $\langle x_2, h\rangle = \langle x_1, h\rangle \neq 0$. Για γενικό m προχωράμε επαγωγικά. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $m \geq 2$ και δείχνουμε την περίπτωση $m+1$. Αν $S \in \text{conv}\{T_1, ..., T_m, T_{m+1}\}$ θα υπάρχουν $a_1, ..., a_m, a_{m+1} \geq 0$ με

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_i = 1 \quad \text{και} \quad S = \sum_{i=1}^{m+1} a_i T_i.$$

Θέτουμε $\beta = \sum_{i=1}^m a_i$ και θεωρούμε τον

$$S' = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{\beta} T_i$$

για τον οποίο ισχύει ότι $S' \in \text{conv}\{T_1, ..., T_m\}$. Από την επαγωγική υπόθεση ο S' είναι εργοδικός. Τώρα, αφού a_m, $\beta \geq 0$ με $\beta + a_m = 1$ και $S = \beta S' + a_m T_m$ από την περίπτωση $m = 2$ θα έχουμε ότι και ο S είναι εργοδικός. □

2.6 Ομοιόμορφη σύγκλιση

Στις προηγούμενες παραγράφους ασχοληθήκαμε με τη σημειακή σύγκλιση των μέσων όρων $(A_n(T)x)_{n=1}^{\infty}$ όπως και με τη σημειακή σύγκλιση $(A_{\mathfrak{I}}x)_{\mathfrak{I}\in\Lambda}$ όπου $(A_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{I}\in\Lambda}$ είναι ένα εργοδικό δίκτυο για μια ημιομάδα τελεστών. Σε αυτή την παράγραφο εξετάζουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση (ως προς τη νόρμα τελεστή) των δύο παραπάνω μέσων όρων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η έννοια του ψευδοσυμπαγούς τελεστή η οποία δίνει μια ικανή συνθήκη για την ομοιόμορφη σύγκλιση των μέσων όρων A_n και $A_{\mathfrak{I}}$.

2.6.1 Το ομοιόμορφο εργοδικό θεώρημα

Ορισμός 2.6.1 (Ομοιόμορφα εργοδικός τελεστής)**.** Έστω X ένας χώρος Banach, $(S_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}(X)$ και $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Θα λέμε ότι η ακολουθία $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον S, αν $\|S_n - S\| \to 0$. Ο T θα καλείται ομοιόμορφα εργοδικός αν η ακολουθία $(A_n(T))_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον T.

Παρατηρήστε ότι λόγω της (2.1.1) κάθε ομοιόμορφα εργοδικός τελεστής T θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$\left\|\frac{T^{n-1}}{n}\right\| \to 0 \text{ καθώς το } n \to \infty. \tag{2.6.1}$$

Επίσης, αν ο T είναι ομοιόμορφα εργοδικός τότε θα υπάρχει τελεστής $S \in \mathcal{B}(X)$ με $\|A_n - S\| \to 0$. Ειδικότερα, για κάθε $x \in X$ θα έχουμε

$$\|A_n x - Sx\| \leq \|x\| \, \|A_n - S\| \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Δηλαδή, ο T θα είναι εργοδικός. Συνεπώς, από το Θεώρημα 2.2.2 θα έχουμε $X = \overline{N} \oplus F$ και $Px = Sx$ για κάθε $x \in X$. Άρα τελικά η ακολουθία $(A_n(T))_{n=1}^{\infty}$ θα συγκλίνει ομοιόμορφα στην προβολή P του X ως προς τον υπόχωρο F των αναλλοίωτων σημειών του T. Το επόμενο θεώρημα οφείλεται στον Lin (1974-[14]) και μας λέει μάλιστα ότι $X = F \oplus N$.

Θεώρημα 2.6.2 (Ομοιόμορφο εργοδικό θεώρημα)**.** *Έστω $T \in \mathcal{B}(X)$ όπου X ένας χώρος Banach. Υποθέτουμε ότι ο T ικανοποιεί την* (2.6.1). *Τότε, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο T είναι ομοιόμορφα εργοδικός.*

(ii) *Ο N είναι κλειστός υπόχωρος του X.*

Πριν την απόδειξη του θεωρήματος να θυμίσουμε μια συνέπεια του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης που θα χρειαστούμε: Αν X, Y είναι δύο χώροι Banach και ο $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ είναι επί, τότε υπάρχει μια σταθερά $M > 0$ ώστε για κάθε $y \in Y$ να υπάρχει $x_y \in X$ με

$$Tx_y = y \text{ και } \left\|x_y\right\| \leq M \|y\|. \tag{2.6.2}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης θα υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$B_Y \subseteq MT(B_X). \tag{2.6.3}$$

Τότε, αφού για $y \in Y$ με $y \neq 0$ έχουμε $\frac{y}{\|y\|} \in B_Y$, από την (2.6.3) θα υπάρχει $x \in B_X$ με $MTx = \frac{y}{\|y\|}$. Δηλαδή, $T(M\|y\|x) = y$. Θέτουμε $x_y = M\|y\|x \in X$. Τότε, $Tx_y = y$ και επειδή $\|x\| \leq 1$ θα ισχύει $\left\|x_y\right\| = \|M\|y\|x\| \leq M\|y\|$. □

Απόδειξη Θεωρήματος 2.6.2. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Έστω $Y = \overline{N}$. Τότε, αφού $Py = 0$ για κάθε $y \in Y$ και επειδή $\|A_n(T) - P\| \to 0$ για τον $S = T|_Y \in \mathcal{B}(Y)$ θα ισχύει $\|A_n(S)\| \to 0$. Επόμενως, θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\|A_n(S)\| < 1$. Ειδικότερα, ο $I - A_n(S)$ θα είναι αντιστρέψιμος στον $\mathcal{B}(Y)$ (βλ Πρόταση Γ΄.1.5). Λόγω της ταυτότητας

$$\begin{aligned}
I - A_n(S) &= I - \frac{1}{n}I - \frac{1}{n}S - \ldots - \frac{1}{n}S^{n-1} \\
&= \frac{n-1}{n}I + \frac{n-2}{n}S + \ldots + \frac{2}{n}S^{n-3} + \frac{1}{n}S^{n-2} \\
&- \frac{n-1}{n}S - \frac{n-2}{n}S^2 - \ldots - \frac{2}{n}S^{n-2} - \frac{1}{n}S^{n-1} \\
&= (I - S)\Big(\frac{n-1}{n}I + \frac{n-2}{n}S + \ldots + \frac{2}{n}S^{n-3} + \frac{1}{n}S^{n-2}\Big) \qquad (2.6.4)
\end{aligned}$$

και επειδή οι παράγοντες της (2.6.4) μετατίθενται μεταξύ τους θα έχουμε ότι ο $(I - S)$ είναι αντιστρέψιμος στον $\mathcal{B}(Y)$. Άρα, $Y = (I - S)Y = (I - T)Y \subsetneq (I - T)X = N$. Δηλαδή, $Y \subsetneq N$ απ' όπου έπεται ότι $Y = N$ και συνεπώς ο N είναι κλειστός.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Αντίστροφα, αν $N = Y$, τότε η απεικόνιση $(I-T) : X \to Y$ είναι μια συνεχής, γραμμική και επί απεικόνιση μεταξύ των χώρων Banach X, Y. Οπότε, από την (2.6.2) θα υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $y \in Y$ να υπάρχει $z \in X$ με

$$(I - T)z = y \quad \text{και} \quad \|z\| \leq M\,\|y\|\,. \qquad (2.6.5)$$

Τότε, γράφοντας

$$\begin{aligned}
\|A_n(T)y\| &= \|A_n(T)z - A_n(T)Tz\| \\
&= \frac{\|Iz - T^n z\|}{n} \\
&\leq \frac{\|I - T^n\|}{n}\,\|z\| \\
&\leq M\,\|y\|\,\frac{\|I - T^n\|}{n},
\end{aligned}$$

θα έχουμε

$$\|A_n(S)\| \leq M\,\frac{\|I - T^n\|}{n}$$

και επειδή από την (2.6.1) ισχύει $n^{-1}\left\|T^{n-1}\right\| \to 0$ θα έπεται ότι $\|A_n(S)\| \to 0$. Οπότε, ακριβώς όπως πριν ο $I - S$ θα αντιστρέφεται στον N. Άρα, $(I - T)X = (I - T)Y$. Επομένως, για $x \in X$ θα υπάρχει $y \in Y$ με

$$(I - T)x = (I - T)y. \qquad (2.6.6)$$

Τώρα, υπάρχει $z \in X$ που να ικανοποιεί την (2.6.4). Από την (2.6.5) το $x - y$ παραμένει αναλλοίωτο από τον T συνεπώς χρησιμοποιώντας την (2.6.5) και την (2.6.6) και γράφοντας

$$\begin{aligned}
\|A_n(T)x - (x - y)\| &= \|A_n(T)y\| = \|A_n(T)(z - Tz)\| \\
&= \frac{\|(I - T^n)z\|}{n} \leq \frac{\|I - T^n\|}{n}\,\|z\| \\
&\leq \frac{\|I - T^n\|}{n} K\,\|y\| \\
&\leq KK'\frac{\|I - T^n\|}{n}\,\|I - T\|\,\|x\|\,, \qquad (2.6.7)
\end{aligned}$$

(με $K' = \left\|(I-S)^{-1}(I-T)\right\|$) θα έχουμε ότι $A_n(T)x \to x-y$, απ' όπου έπεται ότι $Px = x-y$. Συνεπώς, από την (2.6.7) θα έχουμε

$$\|A_n(T)-P\| \le KK' \frac{\|I-T^n\|}{n} \|I-T\|.$$

Οπότε, αφήνοντας το $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας τη σύγκλιση $n^{-1}\left\|T^{n-1}\right\| \to 0$ θα έχουμε ότι $\|A_n(T)-P\| \to 0$. □

Δεν είναι τώρα δύσκολο, με τη βοήθεια του Θεωρήματος 2.6.2 να εξαγάγουμε ένα αποτέλεσμα ομοιόμορφης σύγκλισης για την πολυδιάστατη περίπτωση του Παραδείγματος 2.3.4.

Πόρισμα 2.6.3. *Έστω $T_1,\dots,T_d$ power bounded τελεστές σε ένα χώρο Banach X οι οποίοι μετατίθενται μεταξύ τους. Θεωρούμε την ημιομάδα $\mathscr{S}$ που παράγουν οι $T_1,..,T_d$, δηλαδή $\mathscr{S} = \{T_1^{n_1}\dots T_d^{n_d} : n_1,\dots,n_d \in \mathbb{N}\}$ και $(A_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\Lambda}$ όπου $\Lambda = \mathbb{N}^d$ και*

$$A_{\mathfrak{n}} = \frac{1}{n_1\dots n_d}\sum_{i_1=0}^{n_1-1}\dots\sum_{i_d=0}^{n_d-1} T_1^{i_1}\dots T_d^{i_d}$$

όπου $\mathfrak{n} = (n_1,\dots,n_d)$. Τότε, η ακολουθία $A_{\mathfrak{n}(n)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα για όλες τις γνησίως αύξουσες ακολουθίες $\mathfrak{n}(n) \in \Lambda$ αν και μόνο αν ο $(I-T_i)X$ είναι κλειστός για κάθε $i = 1,\dots,d$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $1 \le i \le d$ και υποθέτουμε ότι η ακολουθία $A_{\mathfrak{n}(k)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα για όλες τις γνησίως αύξουσες ακολουθίες $\mathfrak{n}(n) \in \Lambda$. Θεωρούμε $\mathfrak{n}(n) = (\mathfrak{n}_1(n),\dots,\mathfrak{n}_d(n))$ όπου

$$\mathfrak{n}_j(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } j \neq i \\ n, & \text{αν } j = i \end{cases}$$

Τότε, αφού $A_{\mathfrak{n}(n)} = A_n(T_i)$ θα έχουμε ότι η ακολουθία $(A_n(T_i))_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Επομένως, από το Θεώρημα 2.6.2 ο $(I-T_i)X$ θα είναι κλειστός υπόχωρος του X. Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι κάθε $(I-T_i)X$ είναι κλειστός για $1 \le i \le d$ και θεωρούμε $\mathfrak{n}(n) = (\mathfrak{n}_1(n),\dots,\mathfrak{n}_d(n)) \in \Lambda$ μια γνησίως αύξουσα ακολουθία. Τότε, από το Θεώρημα 2.6.2 θα έχουμε ότι $\|A_n(T_i)i - P_i\| \to 0$ για κάθε $1 \le i \le d$. Θέτουμε $P = P_1\dots P_d$ και ισχυριζόμαστε ότι $\left\|A_{\mathfrak{n}(n)} - P\right\| \to 0$ καθώς το $n \to \infty$. Πράγματι, αφού η $\mathfrak{n}(n)$ είναι γνησίως αύξουσα θα υπάρχει $1 \le i \le d$ ώστε το $\{\mathfrak{n}_i(n) : n \in \mathbb{N}\}$ να είναι άπειρο. Τότε, αφού η $\mathfrak{n}_i(n)$ είναι αύξουσα και επειδή $\|A_n(T_i) - P_i\| \to 0$ θα έχουμε $\left\|A_{\mathfrak{n}_i(n)} - P_i\right\| \to 0$ καθώς το $n \to \infty$. Επίσης, αφού κάθε T_i είναι power bounded θα έχουμε

$$\left\|A_{\mathfrak{n}_i(n)}(T_i) - P_i\right\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\left(\left\|T_i^n\right\| + \|P_i\|\right) =: M_i < \infty,$$

οπότε γράφοντας

$$\begin{aligned}\left\|A_{\mathfrak{n}(n)} - P\right\| &= \left\|\frac{1}{\mathfrak{n}_1(n)\dots\mathfrak{n}_d(n)}\sum_{i_1=0}^{\mathfrak{n}_1(n)-1}\dots\sum_{i_d=0}^{\mathfrak{n}_d(n)-1} T_1^{i_1}\dots T_d^{i_d} - P_1\dots P_d\right\| \\ &= \left\|\frac{1}{\mathfrak{n}_1(n)\dots\mathfrak{n}_d(n)}\left(\sum_{i_1=0}^{\mathfrak{n}_1(n)-1}\dots\sum_{i_d=0}^{\mathfrak{n}_d(n)-1}(T_1^{i_1}\dots T_d^{i_d} - P_1\dots P_d)\right)\right\| \\ &\le \left\|A_{\mathfrak{n}_1(n)}(T_1) - P_1\right\|\dots\left\|A_{\mathfrak{n}_d(n)}(T_d) - P_d\right\|,\end{aligned}$$

θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left\|A_{\mathfrak{n}(n)} - P\right\| &\le \left\|A_{\mathfrak{n}_1(n)}(T_1) - P_1\right\| \dots \left\|A_{\mathfrak{n}_d(n)}(T_d) - P_d\right\| \\ &\le \prod_{j\neq i} M_j \left\|A_{\mathfrak{n}_i(n)} - P_i\right\| \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$. □

2.6.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση για ημιομάδες τελεστών

Ορισμός 2.6.4 (Ομοιόμορφο εργοδικό δίκτυο)**.** Έστω X ένας χώρος Banach και $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{B}(X)$ μια φραγμένη ημιομάδα τελεστών. Θα λέμε ότι μια οικογένεια τελεστών $(A_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\Lambda} \subseteq \mathcal{B}(X)$ είναι ένα ομοιόμορφο εργοδικό δίκτυο αν:

(i) $A_{\mathfrak{n}} \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}$ για κάθε $\mathfrak{n} \in \Lambda$.

(ii) Ισχύει ότι $\|A_{\mathfrak{n}}T - A_{\mathfrak{n}}\| \to 0$ και $\|TA_{\mathfrak{n}} - A_{\mathfrak{n}}\| \to 0$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$.

Παρατηρήστε ότι από την ιδιότητα (i) και επειδή η $\mathscr{S}$ είναι φραγμένη η οικογένεια $(A_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\Lambda}$ θα είναι φραγμένη. Πράγματι, θέτοντας $M = \sup_{T\in\mathscr{S}} \|T\|$ και $T \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}$ μπορούμε να βρούμε $(S_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \text{conv}\mathscr{S}$ με $\|T - S_n\| \to 0$. Συνεπώς, γράφοντας

$$\begin{aligned}\|T\| &= \|T - S_n + S_n\| \\ &\le \|T - S_n\| + \|S_n\|\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\|S_n\| \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (αφού $S_n \in \text{conv}\mathscr{S}$) αφήνοντας το $n \to \infty$ θα έχουμε ότι $\|T\| \le M$. Δηλαδή, $\sup_{T\in\mathscr{S}} \|T\| < \infty$. Οπότε, αφού $A_{\mathfrak{n}} \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}$ θα έχουμε ότι $\sup_{\mathfrak{n}\in\Lambda} \|A_{\mathfrak{n}}\| < \infty$. Επίσης, από την (i) θα έχουμε $A_{\mathfrak{n}}x \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}x$ και από την (ii) θα ισχύει $\|A_{\mathfrak{n}}Tx - Tx\| \to 0$ και $\|TA_{\mathfrak{n}}x - Tx\| \to 0$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$. Οι παρατηρήσεις αυτές δείχνουν ότι η οικογένεια $(A_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\Lambda}$ είναι ένα $\mathscr{S}-$εργοδικό δίκτυο.

Θεώρημα 2.6.5. *Έστω $(A_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\Lambda}$ ένα ομοιόμορφο εργοδικό δίκτυο για μια φραγμένη ημιομάδα τελεστών $\mathscr{S}$ σε ένα χώρο Banach X. Τότε, το δίκτυο $(A_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\Lambda}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathcal{B}(X)$ αν και μόνο αν υπάρχει $P \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}$ με $TP = PT = P$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$.*

Απόδειξη. Αν το δίκτυο $(A_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\Lambda}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathcal{B}(X)$ τότε θα υπάρχει ένας τελεστής $P \in \mathcal{B}(X)$ με $\|A_{\mathfrak{n}} - P\| \to 0$. Αφού $A_{\mathfrak{n}} \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}$ για κάθε $\mathfrak{n} \in \Lambda$ θα έπεται ότι $P \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}$. Τώρα, για να δείξουμε ότι $TP = P$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\|TP - P\| &= \|TP - TA_{\mathfrak{n}} - TA_{\mathfrak{n}} - P\| \\ &\le \|TP - TA_{\mathfrak{n}}\| + \|TA_{\mathfrak{n}} - P\| \\ &\le \|T\|\,\|P - A_{\mathfrak{n}}\| + \|TA_{\mathfrak{n}} - P\|,\end{aligned}$$

όπου τώρα χρησιμοποιώντας το ότι η $\mathscr{S}$ είναι φραγμένη και τις συγκλίσεις $\|P - A_{\mathfrak{n}}\| \to 0$, $\|TA_{\mathfrak{n}} - P\| \to 0$ θα έχουμε ότι

$$\|T\|\,\|P - A_{\mathfrak{n}}\| + \|TA_{\mathfrak{n}} - P\| \to 0$$

απ' όπου έπεται ότι $TP = P$. Χρησιμοποιώντας την $\|A_{\mathfrak{n}}T - A_{\mathfrak{n}}\| \to 0$ με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε και την $PT = P$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε πως υπάρχει ένας τελεστής $P \in \overline{\mathrm{conv}\mathscr{S}}$ με $PT = TP = P$ και ισχυριζόμαστε ότι $\|A_\lambda - P\| \to 0$. Θέτουμε $M = \sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_\lambda\|$ και θεωρούμε $\epsilon > 0$. Αφού $P \in \overline{\mathrm{conv}\mathscr{S}}$ θα υπάρχει $S \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$ με

$$\|S - P\| < \frac{\epsilon}{2M}. \tag{2.6.8}$$

Από την $\|A_\lambda T - A_\lambda\| \to 0$ θα έχουμε και $\|A_\lambda S - A_\lambda\| \to 0$. Πράγματι, αυτό έπεται γράφοντας $S = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i T_i$ όπου $\lambda_i \geq 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$ και $T_i \in \mathscr{S}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|A_\lambda S - A_\lambda\| &= \left\| A_\lambda \Big(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i T_i\Big) - A_\lambda \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{N} \Big(\lambda_i A_\lambda T_i - A_\lambda \Big) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, \|A_\lambda T_i - A_\lambda\|
\end{aligned}$$

και επειδή $\|A_\lambda T_i - A_\lambda\| \to 0$ για $i = 1, \dots, N$ θα έχουμε και $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \|A_\lambda T_i - A_\lambda\| \to 0$ απ' όπου έπεται ότι $\|A_\lambda S - A_\lambda\| \to 0$. Συνεπώς, θα υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ να ισχύει

$$\|A_\lambda S - A_\lambda\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.6.9}$$

Τώρα, από την $TP = P$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$ θα έχουμε και $S'P = P$ για κάθε $S' \in \overline{\mathrm{conv}\mathscr{S}}$. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε $(S_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathrm{conv}\mathscr{S}$ με $\|S' - S_n\| \to 0$. Τότε, από την $TP = P$ για $T \in \mathscr{S}$ θα έχουμε και $S_n P = P$ (αφού $S_n \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$). Οπότε,

$$\begin{aligned}
\left\| S'P - P \right\| &= \|SP - S_n P + S_n P - P\| \\
&\leq \left\| S'P - S_n P \right\| + \|S_n P - P\| \\
&\leq \|P\| \left\| S' - S_n \right\| \to 0,
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $SP = P$ για κάθε $S \in \overline{\mathrm{conv}\mathscr{S}}$. Ειδικότερα, αφού $A_\lambda \in \overline{\mathrm{conv}\mathscr{S}}$ θα έχουμε $A_\lambda P = P$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση και τις (2.6.8),(2.6.9), για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|A_\lambda - P\| &= \|A_\lambda - A_\lambda S + A_\lambda S - P\| \\
&\leq \|A_\lambda - A_\lambda S\| + \|A_\lambda (S - P)\| \\
&\leq \|A_\lambda - A_\lambda S\| + \|A_\lambda\| \, \|S - P\|
\end{aligned}$$

και έχουμε ότι $\|A_\lambda - P\| < \epsilon$. Οπότε, τελικά $\|A_\lambda - P\| \to 0$. □

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να δώσουμε τον επόμενο ορισμό:

Ορισμός 2.6.6 (Ομοιόμορφα εργοδική ημιομάδα τελεστών)**.** Έστω X ένας χώρος Banach και $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{B}(X)$ μια φραγμένη ημιομάδα τελεστών. Η $\mathscr{S}$ θα καλείται ομοιόμορφα εργοδική αν υπάρχει ένας τελεστής $P \in \overline{\mathrm{conv}\mathscr{S}}$ με $PT = TP = P$ για κάθε $T \in \mathscr{S}$.

Φυσικά, αφού $\overline{\text{conv}}\mathscr{S} \subseteq \overline{\text{conv}}^{so}\mathscr{S}$ κάθε ομοιόμορφα εργοδική ημιομάδα τελεστών θα είναι και εργοδική (Ορισμός 2.5.2). Παρατηρήστε επίσης, ότι στην περίπτωση που η $\mathscr{S}$ είναι ομοιόμορφα εργοδική, από το Θεώρημα 2.6.5 θα έχουμε $\|A_{\beta} - P\| \to 0$ για οποιοδήποτε ομοιόμορφο $\mathscr{S}$-εργοδικό δίκτυο. Δηλαδή, αν $(A_{\beta})_{\beta\in\Lambda}$, $(B_{\mu})_{\mu\in M}$ είναι δύο ομοιόμορφα $\mathscr{S}$-εργοδικά δίκτυα θα συγκλίνουν ομοιόμορφα και τα δύο στο ίδιο όριο P.

2.6.3 Ψευδοσυμπαγείς τελεστές

Ιδιαίτερα σημαντικές και στενά συνδεδεμένες με την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση εργοδικών δικτύων είναι οι έννοιες των ασθενώς ψευδοσυμπαγών και ψευδοσυμπαγών τελεστών.

Όπως θα δούμε παρακάτω, αν το $\overline{\text{conv}}\mathscr{S}$ περιέχει έναν ασθενώς ψευδοσυμπαγή τελεστή τότε το όριο $(A_{\beta}x)_{\beta\in\Lambda}$ θα υπάρχει για κάθε $x \in X$. Αντίστοιχα, αν το $\overline{\text{conv}}\mathscr{S}$ περιέχει έναν ψευδοσυμπαγή τελεστή τότε οποιοδήποτε ομοιόμορφο $\mathscr{S}$-εργοδικό δίκτυο θα συγκλίνει ομοιόμορφα. Στο τέλος της παραγράφου, με τη βοήθεια της φασματικής θεωρίας πετυχαίνουμε έναν χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης ο οποίος με τη σειρά του μας οδηγεί σε ένα θεώρημα φασματικής ανάλυσης για τους power bounded ψευδοσυμπαγείς τελεστές.

Για την ανάπτυξη των αποτελεσμάτων αυτής της παραγράφου θα χρειαστούμε τους ορισμούς και τις βασικές ιδιότητες των συμπαγών τελεστών και των ασθενώς συμπαγών τελεστών που βρίσκονται στις Παραγράφους Β΄.3.3 και Β΄.3.4.

Ορισμός 2.6.7 (Ψευδοσυμπαγείς και ασθενώς ψευδοσυμπαγείς τελεστές)**.** Έστω X ένας χώρος Banach και $T \in \mathscr{B}(X)$. Ο T θα καλείται (ασθενώς) ψευδοσυμπαγής αν υπάρχει (ασθενώς) συμπαγής τελεστής Q ώστε
$$\left\|T^m - Q\right\| < 1 \tag{2.6.10}$$
για κάποιον θετικό ακέραιο m.

Για τα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί και τα ομοιόμορφα όρια (ασθενώς) συμπαγών τελεστών είναι (ασθενώς) συμπαγείς τελεστές καθώς και το ότι το γινόμενο ενός (ασθενώς) συμπαγούς τελεστή με οποιονδήποτε φραγμένο γραμμικό τελεστή είναι (ασθενώς) συμπαγής τελεστής. (βλ. Προτάσεις Β΄.3.10, Β΄.3.11,Β΄.3.15 και Β΄.3.16).

Λήμμα 2.6.8. *Ένας τελεστής T είναι (ασθενώς) ψευδοσυμπαγής αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία (ασθενώς) συμπαγών τελεστών $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ με $\|T^n - Q_n\| \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Αν ο T είναι (ασθενώς) ψευδοσυμπαγής τότε θα υπάρχει ένας (ασθενώς) συμπαγής τελεστής Q που να ικανοποιεί την (2.6.10). Θέτουμε $\Delta = T^m - Q$ και έχουμε $\|\Delta\| < 1$. Τότε, για $n \geq m$ γράφουμε $n = s_n m + r_n$ όπου $0 \leq r_n < m$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\begin{aligned} Q_n &= T^n - T^r\Delta^s \\ &= T^{r_n}(T^{s_n m} - \Delta^{s_n}). \end{aligned}$$

Τότε, αφού στο ανάπτυγμα του Δ^{s_n} ο μόνος όρος που δεν περιέχει τον Q ως παράγοντα είναι ο $T^{s_n m}$ θα έχουμε ότι ο Q_n είναι (ασθενώς) συμπαγής για κάθε $n \geq m$. Επίσης, γράφοντας

$$\begin{aligned} \left\|T^n - Q_n\right\| &= \left\|T^{r_n}\Delta^{s_n}\right\| \\ &\leq \sup_{0\leq r<m} \left\|T^r\right\| \|\Delta\|^{s_n} \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την $\|\Delta\|^{s_n} \to 0$ (αφού $\|\Delta\| < 1$) θα έχουμε ότι $\|T^n - Q_n\| \to 0$ καθώς το $n \to \infty$. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι προφανής. □

Θεώρημα 2.6.9. *Έστω $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{B}(X)$ μια ημιομάδα σε ένα χώρο Banach X και $(A_\beta)_{\beta\in\Lambda}$ ένα $\mathscr{S}$-εργοδικό δίκτυο. Αν το $\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$ περιέχει έναν (ασθενώς) ψευδοσυμπαγή τελεστή T τότε, το $\lim_\beta A_\beta x$ υπάρχει για κάθε $x \in X$ και ο $Px = \lim_\beta A_\beta x$ είναι (ασθενώς) συμπαγής.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο T είναι ασθενώς ψευδοσυμπαγής. Τότε, υπάρχει ασθενώς συμπαγής τελεστής Q ώστε $\|\Delta\| < 1$, όπου $\Delta = T^m - Q$. Από την Πρόταση Γ΄.1.5 έχουμε ότι ο $I - \Delta$ αντιστρέφεται. Τότε, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την

$$(I - \Delta)A_\beta = A_\beta - T^m A_\beta + QA_\beta \tag{2.6.11}$$

με τον $(I - \Delta)^{-1}$ θα έχουμε ότι

$$A_\beta = (I - \Delta)^{-1}QA_\beta + (I - \Delta)^{-1}(A_\beta - T^m A_\beta). \tag{2.6.12}$$

Αφού η $(A_\beta)_{\beta\in\Lambda}$ είναι ένα $\mathscr{S}$-εργοδικό δίκτυο θα έχουμε $\|A_\beta x - SA_\beta x\| \to 0$ για κάθε $S \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$. Ισχυριζόμαστε ότι $\|A_\beta x - SA_\beta x\| \to 0$ για κάθε $S \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$. Πράγματι, αν $(S_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathrm{conv}\mathscr{S}$ με $\|S_n - S\| \to 0$ τότε αφού

$$\begin{aligned}\|A_\beta x - SA_\beta x\| &= \|A_\beta x - S_nA_\beta x + S_nA_\beta x - SA_\beta x\|\\ &\leq \|A_\beta x - S_nA_\beta x\| + \|S_n - S\|\,\|A_\beta\|\,\|x\|,\end{aligned}$$

θεωρώντας N με

$$\|S_N - S\| < \frac{\epsilon}{2M\,\|x\|}$$

(όπου $M = \sup_{\beta\in\Lambda}\|A_\beta\| < \infty$) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\|A_\beta x - S_NA_\beta x\| \to 0$ θα έχουμε ότι

$$\|A_\beta x - SA_\beta x\| \to 0 \tag{2.6.13}$$

για $S \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$. Αφού $T \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$ θα έχουμε επαγωγικά ότι $T^m \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε $(S_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathrm{conv}\mathscr{S}$ με $\|S_n - T\| \to 0$ και δείχνουμε ότι $\left\|S_n^m - T^m\right\| \to 0$. Αν υποθέσουμε πως ισχύει για κάποιον k τότε, γράφοντας

$$\begin{aligned}\left\|S_n^{k+1} - T^{k+1}\right\| &= \left\|S_n^kS_n - S_n^kT + S_n^kT - T^kT\right\|\\ &\leq \left\|S_n^k\right\|\|S_n - T\| + \|T\|\left\|S_n^k - T^k\right\|\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τις συγκλίσεις $\|S_n - T\| \to 0$ και $\left\|S_n^k - T^k\right\| \to 0$ θα έχουμε ότι

$$\left\|S^{k+1} - T^{k+1}\right\| \to 0.$$

Όμως, η $\mathscr{S}$ είναι ημιομάδα και έτσι θα έχουμε $SW \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$ για κάθε $S, W \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$. Ειδικότερα, (επαγωγικά) θα έχουμε $S_n^k \in \mathrm{conv}\mathscr{S}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε τελικά, θα έχουμε ότι $T^k \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$ για κάθε k (άρα και για $m = k$). Οπότε, από την (2.6.13) θα έχουμε $\|A_\beta x - T^mA_\beta x\| \to 0$. Έτσι, για να δείξουμε ότι το $\lim_\beta A_\beta x$ υπάρχει από την (2.6.12) αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το $\lim_\beta(I - \Delta)^{-1}QA_\beta x$. Από την ανισότητα $\|A_\beta x\| \leq M\,\|x\|$ θα έχουμε ότι

$$(I - \Delta)^{-1}QA_\beta x \in (I - \Delta)^{-1}Q(M\,\|x\|\,B_X),$$

όπως επειδή ο $(I-\Delta)^{-1}Q$ είναι ασθενώς συμπαγής το $(I-\Delta)^{-1}Q(M\|x\|B_X)$ θα είναι ασθενώς σχετικά συμπαγές. Συνεπώς, το δίκτυο $((I-\Delta)^{-1}QA_{\mathfrak{I}}x)_{\mathfrak{I}\in\Lambda}$ θα έχει ασθενές σημείο συσσώρευσης. Επομένως, το $(A_{\mathfrak{I}}x)_{\mathfrak{I}\in\Lambda}$ θα έχει ασθενές σημείο συσσώρευσης και έτσι από το θεώρημα του Eberlein θα υπάρχει το όριο $Px = \lim_{\mathfrak{I}} A_{\mathfrak{I}}x$. Από την (2.6.12) θα έχουμε ότι

$$P = (I-\Delta)^{-1}QP + (I-\Delta)^{-1}(P - T^m P)$$

και επειδή $T^mP = P$ θα έχουμε ότι $P = (I-\Delta)^{-1}QP$ όπου τώρα από την Πρόταση Β΄.3.15 έπεται ότι ο P είναι ασθενώς συμπαγής. Στην περίπτωση που ο T είναι ψευδοσυμπαγής ο Q θα είναι συμπαγής. Οπότε, καταλήγοντας ακριβώς με τον ίδιο τρόπο στην $P = (I-\Delta)^{-1}QP$ από την Πρόταση Β΄.3.10 ο P θα είναι συμπαγής αυτή τη φορά. □

Πόρισμα 2.6.10. *Στην περίπτωση που η $\mathscr{S}$ είναι φραγμένη και το $\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$ περιέχει έναν ψευδοσυμπαγή τελεστή T, ο υπόχωρος $F(\mathscr{S})$ των αναλλοίωτων σημείων της ημιομάδας θα είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη. Πράγματι, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.9 θα έχουμε $T^m \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$ για κάθε $m \geq 1$. Αφού η $\mathscr{S}$ είναι φραγμένη, το $\overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$ θα είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathcal{B}(X)$. Ειδικότερα, ο T θα είναι power bounded. Άρα, η ακολουθία $(A_n(T))_{n=1}^{\infty}$ θα είναι ένα εργοδικό δίκτυο για την ημιομάδα $\mathscr{S}' = \{T^n : n \geq 0\}$. Συνεπώς, αφού ο $T \in \mathrm{conv}\mathscr{S}'$ είναι ψευδοσυμπαγής, από το Θεώρημα 2.6.9 η προβολή P στον υπόχωρο $F(T)$ των αναλλοίωτων σημείων του T θα είναι συμπαγής. Οπότε, το $\overline{P(B_X)}$ θα είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Όμως, για $y \in F(T) \cap B_X$ έχουμε $Py = y$ και $\|y\| \leq 1$, απ' όπου έπεται ότι $y \in P(B_X)$. Δηλαδή, $F(T) \cap B_X \subseteq P(B_X)$ και επειδή το $F(T) \cap B_X$ είναι και κλειστό θα είναι και συμπαγές. Δηλαδή, η μοναδιαία μπάλα $F(T) \cap B_X$ του $F(T)$ είναι συμπαγής. Άρα, ο $F(T)$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Όμως, $F(\mathscr{S}) \subseteq F(T)$ απ' όπου έπεται ότι ο $F(\mathscr{S})$ είναι πεπερασμένης διάστασης. □

Αποδεικνύουμε τώρα και το αντίστοιχο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.6.9 στην περίπτωση της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Θεώρημα 2.6.11. *Έστω $(A_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{I}\in\Lambda}$ ένα ομοιόμορφο εργοδικό δίκτυο για μια ημιομάδα $\mathscr{S}$. Αν υπάρχει ψευδο-συμπαγής τελεστής $T \in \overline{\mathrm{conv}}\mathscr{S}$, τότε $\|A_{\mathfrak{I}} - P\| \to 0$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $M = \sup\limits_{\mathfrak{I}\in\Lambda} \|A_{\mathfrak{I}}\|$. Αφού ο T είναι ψευδοσυμπαγής θα υπάρχει ένας συμπαγής τελεστής Q ώστε

$$\left\|T^m - Q\right\| < 1$$

για κάποιον θετικό ακέραιο m. Θέτουμε $\Delta = T^m - Q$. Τότε, επειδή $\|\Delta\| < 1$ από την Πρόταση Γ΄.1.5 ο $I - \Delta$ θα αντιστρέφεται. Γράφοντας

$$A_{\mathfrak{I}} = A_{\mathfrak{I}} - A_{\mathfrak{I}}T^m + A_{\mathfrak{I}}Q$$

και πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με τον $(I-\Delta)^{-1}$ θα έχουμε ότι

$$A_{\mathfrak{I}} = (A_{\mathfrak{I}} - A_{\mathfrak{I}}T^m)(I-\Delta)^{-1} + A_{\mathfrak{I}}Q(I-\Delta)^{-1} \tag{2.6.14}$$

για κάθε $\mathfrak{I} \in \Lambda$. Τώρα, ισχυρίζομαστε ότι

$$\|A_{\mathfrak{I}} - A_{\mathfrak{I}}S\| \to 0 \tag{2.6.15}$$

για κάθε $S \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}$. Πράγματι, η (2.6.15) έπεται άμεσα από την ιδιότητα (ii) του Ορισμού 2.6.4 και την τριγωνική ανισότητα για τον $S \in \text{conv}\mathscr{S}$. Αν τώρα $S \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}$ και $\epsilon > 0$, τότε θα υπάρχει $S' \in \text{conv}\mathscr{S}$ με

$$\left\|S - S'\right\| < \frac{\epsilon}{2M}. \tag{2.6.16}$$

Αφού $\|A_{\mathfrak{I}} - A_{\mathfrak{I}}S'\| \to 0$ θα υπάρχει $\mathfrak{I}_0 \in \Lambda$ ώστε

$$\|A_{\mathfrak{I}} - A_{\mathfrak{I}}S\| < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.6.17}$$

για κάθε $\mathfrak{I} \geq \mathfrak{I}_0$. Γράφοντας

$$\begin{aligned}\|A_{\mathfrak{I}} - A_{\mathfrak{I}}S\| &= \left\|A_{\mathfrak{I}} - A_{\mathfrak{I}}S' + A_{\mathfrak{I}}S' - A_{\mathfrak{I}}S\right\| \\ &\leq \left\|A_{\mathfrak{I}} - A_{\mathfrak{I}}S'\right\| + \|A_{\mathfrak{I}}\| \left\|S' - S\right\|\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τις (2.6.16) και (2.6.17) θα έχουμε ότι $\|A_{\mathfrak{I}} - A_{\mathfrak{I}}S\| < \epsilon$ για κάθε $\mathfrak{I} \geq \mathfrak{I}_0$. Δηλαδή, $\|A_{\mathfrak{I}} - A_{\mathfrak{I}}S\| \to 0$. Άρα, η (2.6.15) ισχύει για κάθε $S \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}$. Ειδικότερα, αφού $T^m \in \overline{\text{conv}}\mathscr{S}$ θα έχουμε ότι $\|A_{\mathfrak{I}} - A_{\mathfrak{I}}T^m\| \to 0$, απ' όπου έπεται ότι

$$\left\|(A_{\mathfrak{I}} - A_{\mathfrak{I}}T^m)(I - \Delta)^{-1}\right\| \to 0. \tag{2.6.18}$$

Αφού η οικογένεια $(A_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{I}\in\Lambda}$ είναι ένα ομοιόμορφο εργοδικό δίκτυο θα είναι και $\mathscr{S}-$εργοδικό δίκτυο για την $\mathscr{S}$. Οπότε, από το Θεώρημα 2.6.9 θα ισχύει

$$\|A_{\mathfrak{I}}x - Px\| \to 0 \tag{2.6.19}$$

για κάθε $x \in X$. Θα δείξουμε ότι $\left\|A_{\mathfrak{I}}Q(I - \Delta)^{-1} - P\right\| \to 0$. Αφού ο Q είναι συμπαγής, ο $Q(I-\Delta)^{-1}$ θα είναι και αυτός συμπαγής. Ειδικότερα, το $Q(I-\Delta)^{-1}(B_X)$ θα είναι ολικά φραγμένο. Θεωρούμε $\epsilon > 0$. Τότε θα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in B_X$ με

$$Q(I - \Delta)^{-1}(B_X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B\Big(Q(I - \Delta)^{-1}x_j, \frac{\epsilon}{3M}\Big). \tag{2.6.20}$$

Από την (2.6.19) παίρνουμε ότι $\|P\| \leq M$ και $\left\|A_{\mathfrak{I}}y_j - Py_j\right\| \to 0$, για $y_j = Q(I - \Delta)^{-1}x_j$ και $j = 1, \ldots, n$. Συνεπώς, θα υπάρχει $\mathfrak{I} \in \Lambda$ ώστε

$$\left\|A_{\mathfrak{I}}y_j - Py_j\right\| < \frac{\epsilon}{3} \tag{2.6.21}$$

για κάθε $\mathfrak{I} \geq \mathfrak{I}_0$. Για τυχόν $x \in B_X$ από την (2.6.20) θα υπάρχει $1 \leq j \leq n$ ώστε

$$\left\|Q(I - \Delta)^{-1}x - y_j\right\| < \frac{\epsilon}{3M}. \tag{2.6.22}$$

Άρα γράφοντας

$$\begin{aligned}\left\|A_{\mathfrak{I}}Q(I - \Delta)^{-1}x - PQ(I - \Delta)^{-1}x\right\| &\leq \left\|A_{\mathfrak{I}}Q(I - \Delta)^{-1}x - A_{\mathfrak{I}}y_j\right\| + \left\|A_{\mathfrak{I}}y_j - Py_j\right\| \\ &\quad + \left\|Py_j - PQ(I - \Delta)^{-1}x\right\| \\ &\leq \|A_{\mathfrak{I}}\| \left\|Q(I - \Delta)^{-1}x - y_j\right\| + \left\|A_{\mathfrak{I}}y_j - Py_j\right\| \\ &\quad + \|P\| \left\|y_j - Q(I - \Delta)^{-1}x\right\|\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τις (2.6.21),(2.6.22) και την $\|P\| \le M$ θα έχουμε ότι

$$\left\|A_{\lambda}Q(I-\Delta)^{-1}x - PQ(I-\Delta)^{-1}x\right\| < \frac{\epsilon}{3}$$

για κάθε $\lambda \ge \lambda_0$ και $x \in B_X$, απ' όπου έπεται ότι $\left\|A_{\lambda}Q(I-\Delta)^{-1} - PQ(I-\Delta)^{-1}\right\| \le \epsilon$ για κάθε $\lambda \ge \lambda_0$. Δηλαδή, $\left\|A_{\lambda}Q(I-\Delta)^{-1} - PQ(I-\Delta)^{-1}\right\| \to 0$. Όμως, για $x \in X$ αφού $A_{\lambda}x \to Px$, $A_{\lambda}x - A_{\lambda}T^m x \to 0$ και $A_{\lambda}Q(I-\Delta)^{-1}x \to PQ(I-\Delta)^{-1}x$ από την (2.6.14) θα έχουμε $Px = PQ(I-\Delta)^{-1}x$ για κάθε $x \in X$. Άρα τελικά

$$\begin{aligned}\|A_{\lambda} - P\| &= \left\|A_{\lambda} - PQ(I-\Delta)^{-1}\right\| \\ &\le \left\|A_{\lambda} - A_{\lambda}T^m\right\| + \left\|A_{\lambda}Q(I-\Delta)^{-1} - PQ(I-\Delta)^{-1}\right\|,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\|A_{\lambda} - P\| \to 0$. □

Τα Θεωρήματα 2.6.9 και 2.6.11 είναι γενικεύσεις που οφείλονται στον Eberlein (1949-[5]) των αποτελεσμάτων των Yosida-Kakutani (1941-[22]) οι οποίοι ασχολήθηκαν με την ειδική περίπτωση όπου $A_{\lambda} = A_n(T)$. Οι Yosida και Kakutani απέδειξαν στην ίδια εργασία και ένα θεώρημα φασματικής ανάλυσης για τις δυνάμεις ενός power bounded ψευδοσυμπαγούς τελεστή. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε βασίζεται σε κάποια βασικά αποτελέσματα που αφορούν τη θεωρία αλγεβρών Banach. Παρακάτω δίνουμε τους απαραίτητους ορισμούς και τα αποτελέσματα που θα χρειαστούμε παραπέποντας για την απόδειξη των αποτελεσμάτων στο Παράρτημα Γ'.

Θεωρούμε ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή T σε ένα μιγαδικό χώρο Banach X. Το φάσμα του T είναι το σύνολο $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ ο } \lambda I - T \text{ δεν αντιστρέφεται}\}$. Από το Θεώρημα Γ'.2.2 το $\sigma(T)$ είναι μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ με $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \|T\|\}$. Αφού το $\sigma(T)$ είναι μη κενό και συμπαγές ορίζεται η φασματική ακτινά $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ για την οποία ισχύει $r(T) \le \|T\|$. Το Θεώρημα Γ'.2.4 μας λέει ότι $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$. Με $\rho(T)$ συμβολίζουμε το συμπλήρωμα $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ του φάσματος $\sigma(T)$. Αφού για $\lambda \in \rho(T)$ ορίζεται ο τελεστής $(\lambda I - T)^{-1}$, ορίζεται η συνάρτηση $R(\lambda, T) : \rho(T) \to \mathcal{B}(X)$ με $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$. Από την απόδειξη του Θεωρήματος Γ'.2.2 (βλ.(Γ'.2.3)) και επειδή το $\rho(T)$ είναι ανοικτό σύνολο έπεται ότι η $R(\lambda, T)$ είναι ολόμορφη σε κάθε $\lambda_0 \in \rho(T)$ με

$$\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} R(\lambda, T) = (\lambda_0 I - T)^{-2}, \tag{2.6.23}$$

όπου με την (2.6.23) εννοούμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$ τότε

$$\left\|\frac{R(\lambda, T) - R(\lambda_0, T)}{\lambda - \lambda_0} - (\lambda_0 I - T)^{-2}\right\| < \epsilon.$$

Επίσης, από την (Γ'.2.2) θα έχουμε ότι

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \tag{2.6.24}$$

για κάθε $|\lambda| > \|T\|$. Τώρα, για $\Phi \in (\mathcal{B}(X))^*$ η $\Phi \circ R(\lambda, T)$ είναι ολόμορφη για κάθε $\lambda \in \rho(T)$. Ειδικότερα, η $\Phi \circ R(\lambda, T)$ θα είναι ολόμορφη για κάθε $|\lambda| > r(T)$. Οπότε, η $\Phi \circ R(\lambda, T)$ θα έχει ένα ανάπτυγμα Laurent στον δακτύλιο $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(T)\}$. Όμως, λόγω της συνέχειας του Φ από την (2.6.24) θα έχουμε ότι

$$\Phi \circ R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi(T^n)}{\lambda^{n+1}}$$

για κάθε $|\lambda| > \|T\|$. Οπότε, από τη μοναδικότητα του αναπτύγματος Laurent θα έχουμε ότι η παραπάνω ισότητα θα ισχύει για κάθε $|\lambda| > r(T)$. Ειδικότερα, για κάθε $\Phi \in (\mathcal{B}(X))^*$ και $|\lambda| > r(T)$ θα έχουμε $\Phi(R(\lambda, T)) = \Phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}\right)$, απ' όπου έπεται ότι

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \tag{2.6.25}$$

για κάθε $|\lambda| > r(T)$. Τέλος, θα λέμε ότι το λ_0 είναι πόλος τάξης m για την $R(\lambda, T)$ εάν υπάρχει μια συνάρτηση $Q(\lambda, T) : \mathbb{C} \to \mathcal{B}(X)$ με $Q(\lambda_0, T) \neq 0$ και $\delta > 0$ ώστε η $Q(\lambda, T)$ να είναι ολόμορφη στη μπάλα $B(\lambda_0, \delta)$ και

$$R(\lambda, T) = \frac{Q(\lambda, T)}{(\lambda - \lambda_0)^m}$$

για εκείνα τα $\lambda \neq \lambda_0$ τα οποία περιέχονται στη μπάλα με κέντρο λ_0 και ακτίνα $\delta > 0$.

Πρόταση 2.6.12. *Έστω T ένας power bounded τελεστής σε ένα μιγαδικό χώρο Banach X. Υποθέτουμε ότι το 1 είναι πόλος τάξης 1 για την $R(\lambda, T)$. Τότε, ο τελεστής $Q(1, T)$, όπου $Q(\lambda, T)$ η συνάρτηση για την οποία ισχύει*

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1} = \frac{Q(\lambda, T)}{\lambda - 1}$$

για λ κοντά στο 1, είναι μια προβολή στον υπόχωρο $F(T)$ των αναλλοίωτων σημείων του T με $Q(1, T)T = TQ(1, T) = Q(1, T)$.

Απόδειξη. Αφού ο T είναι power bounded, $r(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n} \leq 1$. Ισχυριζόμαστε ότι $TQ(1, T) = Q(1, T)T = Q(1, T)$. Πράγματι, για να δείξουμε π.χ. ότι $TQ(1, T) = Q(1, T)$ αρκεί να δείξουμε ότι $Q(1, T)(I - T) = 0$. Όμως, για λ κοντά στο 1 έχουμε ότι

$$(\lambda I - T)^{-1} = (\lambda - 1)^{-1} Q(\lambda, T),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$(\lambda - 1)I = Q(\lambda, T)(\lambda I - T).$$

Οπότε τώρα, γράφοντας

$$\begin{aligned}
\|Q(1, T)(I - T)\| &\leq \|Q(1, T)(I - T) - Q(\lambda, T)(\lambda I - T)\| + \|Q(\lambda, T)(\lambda I - T)\| \\
&\leq \|Q(1, T)(I - T) - Q(1, T)(\lambda I - T)\| \\
&\quad + \|Q(1, T)(\lambda I - T) - Q(\lambda, T)(\lambda I - T)\| + \|(\lambda - 1)I\| \\
&\leq |\lambda - 1| \, \|Q(1, T)\| + \|\lambda I - T\| \, \|Q(1, T) - Q(\lambda, T)\| + |\lambda - 1|
\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $Q(\lambda, T)$ είναι ολόμορφη στο 1, αφήνοντας το $\lambda \to 1$ θα έχουμε ότι $\|Q(1, T) - Q(\lambda, T)\| \to 0$. Οπότε, τελικά θα έχουμε $\|Q(1, T)(I - T)\| = 0$. Δηλαδή, $Q(1, T)(I - T) = 0$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε και την $(I - T)Q(1, T) = 0$. Άρα τελικά ισχύει ότι $TQ(1, T) = Q(1, T)T = Q(1, T)$. Για να δείξουμε ότι η $Q(1, T)$ είναι προβολή στον F, χρησιμοποιώντας την $Q(1, T)T^n = Q(1, T)$ για κάθε $n \geq 0$ και την

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}},$$

για $|\lambda| > 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} Q(1,T)R(\lambda,T) &= Q(1,T)\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{T^n}{\lambda^n + 1} = \lim_{N\to\infty} Q(1,T)\sum_{n=0}^{N}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{Q(1,T)T^n}{\lambda^{n+1}} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{Q(1,T)}{\lambda^{n+1}} = (\lambda-1)^{-1}Q(1,T), \end{aligned}$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας με $\lambda - 1$ θα έχουμε $Q(1,T)Q(\lambda,T) = Q(1,T)$ για κάθε λ κοντά στο 1. Αφήνοντας το $\lambda \to 1$ και χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της $Q(\lambda,T)$ στο 1 θα έχουμε ότι $Q(1,T)^2 = Q(1,T)$. Δηλαδή, ο τελεστής $Q(1,T)$ είναι προβολή. Μένει να δείξουμε ότι $Q(1,T)X = F$. Αφού $TQ(1,T) = Q(1,T)$ θα έχουμε ότι $Q(1,T)X \subseteq F$. Απ' την άλλη, αν $x \in F$ τότε αφού $T^n x = x$ για κάθε $n \geq 0$ θα έχουμε για κάθε $|\lambda| > 1$ ότι

$$R(\lambda,T)x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n x}{\lambda^{n+1}} = (\lambda-1)^{-1}Ix,$$

δηλαδή $(\lambda-1)R(\lambda,T)x = x$ για κάθε $|\lambda| > 1$. Όμως, για λ κοντά στο 1 ισχύει και $(\lambda - 1)R(\lambda,T)x = Q(\lambda,T)x$. Οπότε, αφήνοντας το $\lambda \to 1$ και χρησιμοποιώντας το ότι η $Q(\lambda,T)$ είναι συνεχής στο 1, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|Q(1,T)x - x\| &= \|Q(1,T)x - Q(\lambda,T)x\| \\ &\leq \|Q(1,T) - Q(\lambda,T)\|\,\|x\| \to 0 \end{aligned}$$

για $\lambda \to 1$. Άρα τελικά, $Q(1,T)x = x$ απ' όπου έπεται ότι $x \in Q(1,T)X$. □

Τώρα, μπορούμε να αποδείξουμε ένα χαρακτηρισμό για το πότε ένας power bounded τελεστής T είναι ομοιόμορφα εργοδικός.

Θεώρημα 2.6.13. *Ένας power bounded τελεστής T σε ένα χώρο Banach X είναι ομοιόμορφα εργοδικός αν και μόνο αν το 1 ανήκει στο σύνολο $\rho(T)$ ή το 1 είναι πόλος τάξης 1 της $R(\lambda,T)$.*

Απόδειξη. Αν ο T είναι ομοιόμορφα εργοδικός, τότε από το Θεώρημα 2.6.2 ο $N = (I-T)X$ θα είναι κλειστός υπόχωρος του X και $X = F \oplus N$. Θεωρούμε S τον περιορισμό του T στον Y και την προβολή P του X επί του F. Λόγω του εγκλεισμού

$$TN = T(I-T)X = (I-T)TX \subseteq (I-T)X$$

θα έχουμε ότι $TN \subseteq N$. Δηλαδή, $S \in \mathcal{B}(Y)$. Από την $\|S\| \leq \|T\|$ έπεται ότι ο S είναι power bounded και $r(S) \leq r(T) \leq 1$. Άρα, $\rho(T) \subseteq \rho(T)$. Αφού $TN \subseteq N$ θα έχουμε ότι $(\lambda I - T)N \subseteq N$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Ειδικότερα, αν $\lambda \in \rho(S)$ τότε για $y \in N$ θα έχουμε $R(\lambda,S)(\lambda I - S)y = y$ και επειδή $R(\lambda,S)y \in N$ θα έχουμε και $(\lambda I - T)R(\lambda,S)y = (\lambda I - S)R(\lambda,S)y = y$. Με άλλα λόγια, $R(\lambda,S) = R(\lambda,T)|_N$ για κάθε $\lambda \in \rho(S)$. Τώρα, ισχυριζόμαστε ότι

$$R(\lambda,T) = (\lambda-1)^{-1}P + R(\lambda,S)(I-P) \tag{2.6.26}$$

για κάθε $\lambda \in \rho(S)$ με $\lambda \neq 1$. Καταρχάς παρατηρούμε ότι λόγω της $X = F \oplus N$ αρκεί να δείξουμε την (2.6.26) ξεχωριστά για $x \in F$ και $x \in N$. Αν $x \in F$ τότε επειδή $Px = x$ θα έχουμε ότι $R(\lambda,S)(I-P)x = 0$. Επίσης, αφού $Tx = x$ έχουμε

$$\begin{aligned} (\lambda I - T)(\lambda-1)^{-1}Px &= (\lambda-1)^{-1}(\lambda I - T)x \\ &= (\lambda-1)^{-1}(\lambda-1)x = x \end{aligned}$$

και

$$(\lambda-1)^{-1}P(\lambda I-T)x = \lambda(\lambda-1)^{-1}Px-(\lambda-1)^{-1} \\ = (\lambda-1)^{-1}(\lambda-1)x = x.$$

Δηλαδή, $(\lambda I-T)(\lambda-1)^{-1}Px = (\lambda-1)^{-1}P(\lambda I-T)x = x$ για κάθε $x \in F$. Συνεπώς, για $x \in F$ έχουμε

$$(\lambda I-T)[(\lambda-1)^{-1}P+R(\lambda,S)(I-P)]x \\ = [(\lambda-1)^{-1}P+R(\lambda,S)(I-P)](\lambda I-T)x = x. \tag{2.6.27}$$

Τώρα, αν $x \in N$ θα υπάρχει $z \in X$ με $x = z - Tz$. Οπότε, επειδή $Pz = PTz$ θα έχουμε $(\lambda I-T)(\lambda-1)^{-1}Px = (\lambda I-T)(\lambda-1)^{-1}P(z-Tz) = 0$ και

$$(\lambda-1)^{-1}P(\lambda I-T)x = (\lambda-1)^{-1}P(\lambda I-T)(z-Tz) \\ = (\lambda-1)^{-1}[\lambda Pz-\lambda PTz-PTz+PT^{z}] \\ = (\lambda-1)^{-1}[\lambda Pz-\lambda Pz-Pz+Pz] = 0.$$

Δηλαδή, $(\lambda I-T)(\lambda-1)^{-1}Px = (\lambda-1)^{-1}P(\lambda I-T)x = 0$. Απ' την άλλη, αφού $R(\lambda S) = R(\lambda,T)|_N$ και $P|_N = 0$ θα έχουμε ότι

$$(\lambda I-T)R(\lambda,S)(I-P)x = (\lambda I-T)R(\lambda,S)x \\ = (\lambda I-S)R(\lambda,S)x = x$$

και

$$R(\lambda,S)(I-P)(\lambda I-T)x = R(\lambda,S)(I-P)(\lambda I-S)x \\ = R(\lambda,S)(\lambda I-S)x = x.$$

Συνοψίζοντας, έχουμε δείξει ότι

$$(\lambda I-T)[(\lambda-1)^{-1}P+R(\lambda,S)(I-P)]x \\ = [(\lambda-1)^{-1}P+R(\lambda,S)(I-P)](\lambda I-T)x = x \tag{2.6.28}$$

για κάθε $x \in N$. Από τις (2.6.27), (2.6.28) έπεται ότι ο $(\lambda-1)^{-1}P+R(\lambda,S)(I-P)$ είναι ο αντίστροφος του $R\lambda I - T$ για κάθε $\lambda \in \rho(S)$ με $\lambda \neq 1$. Συνεπώς, έχουμε αποδείξει την (2.6.26). Οπότε, τελικά θα έχουμε ότι $\rho(T) = \rho(S) \setminus \{1\}$. Τώρα, αφού ο T είναι ομοιόμορφα εργοδικός, ακριβώς όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.2 ο $I - S$ θα είναι αντίστρεψιμος. Με άλλα λόγια, $1 \in \rho(S)$. Επειδή το $\rho(S)$ είναι ανοικτό, θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η μπάλα $B(1,\delta)$ να περιέχεται στο $\rho(S)$. Οπότε, στην περίπτωση που $F \neq \{0\}$ από την (2.6.26) θα έχουμε ότι

$$R(\lambda,T) = \frac{P+(\lambda-1)R(\lambda,S)(I-P)}{\lambda-1}$$

για κάθε $\lambda \in B(1,\delta)$. Τότε, αν $x \in F$ με $x \neq 0$ επειδή $P+(\lambda-1)R(1,S)(I-P)x = Px = x \neq 0$ θα έχουμε ότι $P+(\lambda-1)R(1,S)(I-P) \neq 0$ και επειδή η $R(\lambda,S)$ είναι ολόμορφη για κάθε $\lambda \in B(1,\delta)$ θα έχουμε ότι η $P+(\lambda-1)R(\lambda,S)(I-P)$ είναι ολόμορφη στην $B(1,\delta)$. Άρα, όταν $F \neq \{0\}$ το 1 είναι πόλος τάξης 1 για την $R(\lambda,T)$. Στην περίπτωση που $F = \{0\}$ θα έχουμε $X = N$ και $T = S$, οπότε αφού $1 \in \rho(S)$ θα έχουμε και $1 \in \rho(T)$.

Αντίστροφα τώρα, αν το $1 \in \rho(T)$ τότε ο $I-T$ θα είναι αντιστρέψιμος. Ειδικότερα, $N = (I-T)X = X$ απ' όπου έπεται ότι ο N είναι κλειστός και άρα ο T θα είναι ομοιόμορφα εργοδικός λόγω του Θεωρήματος 2.6.2. Αν τώρα το 1 είναι πόλος τάξης 1 του $R(\lambda, T)$ τότε θα υπάρχει $\delta > 0$ και μια ολόμορφη συνάρτηση $Q(\lambda, T) : B(1, \delta) \to \mathcal{B}(X)$ με

$$R(\lambda, T) = \frac{Q(\lambda, T)}{\lambda - 1}$$

για κάθε $\lambda \in B(0, \delta)$. Από την Πρόταση 2.6.12 ο $Q(1, T)$ θα είναι προβολή επί του F με $Q(1, T)T = TQ(1, T) = Q(1, T)$. Οπότε, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Q(1, T)(z - Tz) &= Q(1, T) - Q(1, T)Tz \\ &= Q(1, T)z - Q(1, T)z = 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $Q(1, T)(N) = \{0\}$. Οπότε από τη συνέχεια της $Q(1, T)$ θα έχουμε ότι $Q(1, T)(Y) = \{0\}$, όπου $Y = \overline{N}$. Τώρα, επειδή $(\lambda I - T)N \subseteq Y$ θα έχουμε και $(\lambda I - T)Y \subseteq Y$ απ' όπου έπεται ότι $R(\lambda, S) = R(\lambda, T)|_Y$ με $S = T|_Y$. Άρα,

$$R(\lambda, S) = R(\lambda, T)|_Y = \frac{Q(\lambda, T)|_Y}{\lambda - 1} = \frac{Q(\lambda, T)|_Y - Q(1, T)|_Y}{\lambda - 1}$$

και επειδή η $Q(\lambda, T)$ είναι ολόμορφη στο 1,

$$Q'(1, T) := \frac{\partial}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=1} Q(\lambda, T) = \lim_{\lambda \to 1} \frac{Q(\lambda, T)|_Y - Q(1, T)|_Y}{\lambda - 1}.$$

Όμως τότε, γράφοντας για $\lambda \in B(1, \delta)$

$$\begin{aligned} \left\|I - (I - S)Q'(1, T)\right\| &= \left\|(\lambda I - S)R(\lambda, S) - (I - S)Q'(1, T)\right\| \\ &\leq \left\|(\lambda I - S)R(\lambda, S) - (\lambda I - S)Q'(1, T)\right\| + \left\|(\lambda I - S)Q'(1, T) - (I - S)Q'(1, T)\right\| \\ &\leq \|(\lambda I - S)\| \left\|R(\lambda, S) - Q'(1, T)\right\| + \left\|Q'(1, T)\right\| \|(\lambda - 1)I\| \end{aligned}$$

και αφήνοντας το $\lambda \to 1$ θα έχουμε τελικά ότι $I = (I-S)Q'(1, T)$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε και ότι $I = Q'(1, T)(I - S)$. Συνεπώς, ο $I - S$ είναι αντιστρέψιμος, άρα $Y = (I - S)Y \subseteq (I - T)X = N$. Έπεται ότι ο N είναι κλειστός, και έτσι από το Θεώρημα 2.6.2 θα έχουμε ότι ο T είναι ομοιόμορφα εργοδικός. □

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν power bounded ψευδοσυμπαγή τελεστή T. Τότε, επειδή $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$, η ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα ομοιόμορφο εργοδικό δίκτυο για την ημιομάδα $\mathscr{S} = \{T^n : n \geq 0\}$. Πράγματι, είναι προφανές ότι $A_n \in \text{conv}\mathscr{S}$, και γράφοντας για $n > k$

$$\begin{aligned} \left\|A_n T^k - A_n\right\| &= \left\| \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=0}^{n-1} T^{j+k} - \sum_{j=0}^{n-1} T^j \Big) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=n}^{k+n-1} T^j - \sum_{j=0}^{k-1} T^j \Big) \right\| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{k+n-1} \left\|T^j\right\| + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \left\|T^j\right\| \leq \frac{2kM}{n}, \end{aligned}$$

θα έχουμε και $\left\|A_nT^k - A_n\right\| \to 0$ καθώς το $n \to \infty$. Από την $A_nT^k = T^kA_n$ θα έχουμε και $\left\|T^kA_n - A_n\right\| \to 0$ για $n \to \infty$. Άρα, η ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι όντως ένα ομοιομόρφο $\mathscr{S}$-εργοδικό δίκτυο. Επειδή ο $T \in \operatorname{conv}\mathscr{S}$ είναι ψευδο-συμπαγής, το Θεώρημα 2.6.11 μας εξασφαλίζει ότι $\|A_n - P\| \to 0$ για $n \to \infty$, όπου P η προβολή του X επί του $F = \{x \in X : Tx = x\}$. Με άλλα λόγια, ο T είναι ομοιόμορφα εργοδικός, οπότε από το Θεώρημα 2.6.13 το 1 είτε θα είναι πόλος τάξης 1 για την $R(\lambda, T)$ είτε $1 \in \rho(T)$. Τώρα, ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ είναι το πολύ πεπερασμένο και κάθε στοιχείο του (εάν υπάρχει) θα είναι πόλος τάξης 1 για την $R(\lambda, T)$. Με άλλα λόγια, η $R(\lambda, T)$ έχει το πολύ πεπερασμένες το πλήθος ανωμαλίες στην περιφέρεια του κύκλου και όλες αυτές είναι πόλοι τάξης 1. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε ένα $\xi \in \mathbb{C}$ με $|\xi| = 1$. Τότε, αφού ο T είναι ψευδοσυμπαγής, θα υπάρχει m και Q συμπαγής ώστε $\|T^m - Q\| < 1$. Οπότε, γράφοντας

$$\left\|(\xi^{-1}T)^m - \xi^{-m}Q\right\| = |\xi^{-m}| \left\|T^m - Q\right\| < 1$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $\xi^{-m}Q$ είναι και αυτός συμπαγής θα έχουμε ότι ο $\xi^{-1}T$ είναι ψευδοσυμπαγής. Οπότε, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και στην περίπτωση του T προκύπτει ότι το 1 είτε θα είναι πόλος τάξης 1 για την $R(\lambda, \xi^{-1}T)$ είτε $1 \in \rho(\xi^{-1}T)$. Όμως, παρατηρούμε ότι

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1} = \xi^{-1}(\xi^{-1}\lambda I - \xi^{-1}T)^{-1} = \xi^{-1}R(\xi^{-1}\lambda, \xi^{-1}T), \tag{2.6.29}$$

απ' όπου έπεται ότι το $\lambda = \xi$ είτε είναι πόλος τάξης 1 για την $R(\lambda, T)$ είτε $\xi \in \rho(\xi^{-1}T) = \rho(T)$. Οπότε, δείξαμε ότι το $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ περιέχει μόνο πόλους τάξης 1. Αν υποθέσουμε τώρα πως είναι άπειρο, τότε απ' τη συμπάγεια του $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ το $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ θα έχει σημείο συσσώρευσης. Δηλαδή, θα υπάρχει $|\lambda_0| = 1$ και (λ_n) με $\lambda_n \to \lambda_0$ και κάθε λ_n θα είναι πόλος τάξης 1 για την $R(\lambda, T)$. Αν $\lambda_0 \in \rho(T)$ τότε καταλήγουμε σε άτοπο διότι το $\rho(T)$ είναι ανοικτό. Αν απ' την άλλη το λ_0 είναι πόλος τάξης 1, τότε θα υπάρχει $\delta > 0$ και μια ολόμορφη $Q(\lambda, T) : B(\lambda_0, \delta) \to \mathcal{B}(X)$ με $Q(\lambda_0, T) \neq 0$ και

$$R(\lambda, T) = \frac{Q(\lambda, T)}{\lambda - \lambda_0}$$

για κάθε $\lambda \neq \lambda_0$ με $\lambda \in B(\lambda_0, \delta)$. Ειδικότερα, θα έχουμε ότι $B(\lambda, \delta) \setminus \{\lambda_0\} \subseteq \rho(T)$, πράγμα το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι $\lambda_n \to \lambda_0$ και $\lambda_n \in \sigma(T)$. Άρα, το $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ είναι το πολύ πεπερασμένο. Αν τώρα, $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ όπου λ_i πόλοι τάξης 1 για την $R(\lambda, T)$, τότε, από την (2.6.29) θα έχουμε ότι το 1 είναι πόλος τάξης 1 για τον $T_i = \lambda_i^{-1}T$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.6.11 για τον T_i θα έχουμε ότι $\|A_n(T_i) - P_i\| \to 0$ καθώς το $n \to \infty$, όπου P_i η προβολή στον υπόχωρο $F_i = \{x \in X : Tx = \lambda_i x\}$. Τώρα, το Θεώρημα 2.6.9 και το Πόρισμα (2.6.10) μας εξασφαλίζουν ότι ο P_i είναι συμπαγής και ο F_i πεπερασμένης διάστασης. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.13 αφού το 1 είναι πόλος τάξης 1 για τον T_i θα έχουμε ότι $F_i \neq \{0\}$. Με άλλα λόγια, το λ_i θα είναι ιδιοτιμή για τον T. Άρα, $F_i \cap F_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$. Επειδή οι $A_n(T_i)$, $A_m(T_j)$ μετατίθενται θα έχουμε ότι μετατίθενται και οι προβολές P_i, P_j. Οπότε, για $x \in X$ θα έχουμε $P_iP_jx = P_jP_ix \in F_i \cap F_j = \{0\}$, απ' όπου έπεται ότι $P_iP_j = 0$ για κάθε $i \neq j$. Θέτουμε

$$S = T - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i. \tag{2.6.30}$$

Από τις $T_iP_i = P_iT_i = P_i^2 = P_i$ και $P_iP_j = 0$ για κάθε $i \neq j$ θα έχουμε ότι

$$P_jS = P_jT - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_j P_i = \lambda_j P_j T_j - \lambda_j P_j^2 = 0$$

δηλαδή, $P_jS = 0$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε και ότι $SP_j = 0$. Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το θεώρημα φασματικής ανάλυσης των Yosida-Kakutani για τις δυνάμεις των power bounded ψευδοσυμπαγών τελεστών:

Θεώρημα 2.6.14. *Έστω T ένας power bounded, ψευδοσυμπαγής τελεστής σε ένα μιγαδικό χώρο Banach X. Τότε, κάθε T^n έχει μια αναπαράσταση της μορφής*

$$T^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n P_i + S^n \tag{2.6.31}$$

με P_i να είναι η προβολή στον υπόχωρο $F_i = \{x \in X : Tx = \lambda_i x\}$ και λ_i οι ιδιοτιμές του T πάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου. Επιπλέον, ο S είναι ψευδοσυμπαγής με $\|S^n\| \leq M\rho^n$ για κάποιες σταθερές $0 < \rho < 1$, $M > 0$.

Απόδειξη. Αφού ο T είναι power bounded θα έχουμε $r(T) \leq 1$. Αν τώρα, ο T δεν έχει ιδιοτιμές στην περιφέρεια του κύκλου, από τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν θα έχουμε ότι $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = \emptyset$. Δηλαδή, $r(T) < 1$. Οπότε, αφού

$$\lim_{n\to\infty} \left\|T^n\right\|^{1/n} = r(T) < 1,$$

θα υπάρχει $0 < \rho < 1$ και $M > 0$ ώστε $\|T^n\| \leq M\rho^n$. Άρα, θέτοντας $S = T$ θα έχουμε το ζητούμενο. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε πως ο T έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου. Ισοδύναμα, τα $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ είναι οι πόλοι τάξης 1 του $R(\lambda, T)$ πάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου. Οπότε, από την (2.6.30) θα έχουμε ότι

$$T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i + S$$

όπου P_i η προβολή στον $F_i = \{x \in X : Tx = \lambda_i x\}$. Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις έχουμε ότι κάθε P_i είναι ψευδοσυμπαγής με $P_iP_j = 0$ για $i \neq j$ και $P_jS = SP_j = 0$. Ειδικότερα, αφού ο T είναι ψευδοσυμπαγής θα είναι ψευδοσυμπαγής και ο S. Τώρα, αν υποθέσουμε πως η (2.6.31) ισχύει για τον n, γράφοντας

$$\begin{aligned}
T^{n+1} &= TT^n = T\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n P_i + S^n\Big) \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j + S\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n P_i + S^n\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \lambda_j \lambda_i^n P_j P_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n S P_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j S^n + S^{n+1}
\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τις $P_j P_i = 0$ για $i \neq j$ και $SP_i = P_i S = 0$ θα έχουμε ότι

$$T^{n+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{n+1} P_i + S^{n+1}$$

και επομένως η (2.6.31) ισχύει για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Τώρα, από την ισότητα $S^n = T^n - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n P_i$ και επειδή $|\lambda_i| = 1$ και ο T είναι power bounded θα έχουμε ότι και ο S είναι power bounded. Συνεπώς, $r(S) \leq 1$. Αν υποθέσουμε τώρα πως $r(S) = 1$ τότε ο S θα έχει ιδιοτιμή λ πάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου. Έστω ένα $x \neq 0$ με $Sx = \lambda x$. Τότε, $\lambda^2 x = S^2 x = TSx = T\lambda x$ απ' όπου έπεται ότι το λ είναι ιδιοτιμή του T. Άρα, πρέπει να είναι κάποιο από τα λ_i. Τότε, όμως θα έχουμε ότι $x \in F_i$ για κάποιο i απ' όπου έπεται ότι $\lambda x = Sx = Tx - \lambda_i P_i = \lambda_i x - \lambda_i = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο αφού $x \neq 0$. Άρα, τελικά

$$r(S) = \lim_{n \to \infty} \left\| S^n \right\|^{1/n} < 1$$

απ' όπου έπεται η υπάρξη των $0 < \rho < 1$, $M > 0$ με $\|S^n\| \leq M\rho^n$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Θετικές Συστολές στον L_1

3.1 Διάσπαση κατά Hopf

Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Υπεθυμίζουμε πως μια συστολή $T : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ καλείται θετική όταν $Tf \geq 0\,\mu-$σχεδόν παντού για κάθε $f \in L_p(\mu)$ με $f \geq 0\,\mu-$σχεδόν παντού. Συμβολίζοντας με $L_p^+ = \{f \in L_p(\mu) : f \geq 0 \ \mu - \text{σχεδόν παντού}\}$ παρατηρούμε ότι μια συστολή T είναι θετική αν και μόνο αν $T(L_p^+(\mu)) \subseteq L_p^+(\mu)$. Επίσης, για T θετική συστολή και $f \in L_p^+(\mu)$ γράφουμε $S_\infty f = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n f = \sum_{n=0}^{\infty} S_n f$, όπου $S_n f = \sum_{k=1}^{n-1} T^k f$.

Όπως θα δούμε παρακάτω, για οποιαδήποτε θετική συστολή T στον $L_1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ υπάρχουν δύο μοναδικά (αν εξαιρέσουμε τα σύνολα μέτρου μηδέν) σύνολα $C, D \in \mathscr{A}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $C \cup D = \Omega$ και $C \cap D = \emptyset$.

(ii) Για κάθε $f \in L_1^+(\mu)$ έχουμε $S_\infty f = \infty$ σχεδόν παντού στο $C \cap \{S_\infty f > 0\}$.

(iii) Για κάθε $f \in L_1^+(\mu)$ έχουμε $S_\infty f < \infty$ σχεδόν παντού στο D.

Πριν ξεκινήσουμε τη διαδικασία για την απόδειξη της παραπάνω διάσπασης θα περιγράψουμε τη σύνδεση που υπάρχει μεταξύ των θετικών συστολών στον L_1 και των στοχαστικών πυρήνων από τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών Markov.

Ορισμός 3.1.1 (Στοχαστικός πυρήνας)**.** Έστω $(\Omega, \mathscr{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Μια απεικόνιση $P : \Omega \times \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+$ καλείται υποστοχαστικός πυρήνας αν:

(i) Για κάθε $\omega \in \Omega$ η απεικόνιση $A \mapsto P(\omega, A)$ είναι ένα μέτρο στον $(\Omega, \mathscr{A})$ με $P(\omega, \Omega) \leq 1$.

(ii) Για κάθε $A \in \mathscr{A}$ η απεικόνιση $\omega \mapsto P(\omega, A)$ είναι μετρήσιμη.

Η P καλείται στοχαστικός πυρήνας αν ικανοποιεί τις (i),(ii) και επιπλέον $P(\omega, \Omega) = 1$ για κάθε $\omega \in \Omega$.

Μπορούμε να σκεφτομάστε τον Ω ως το σύνολο όλων των καταστάσεων ενός συστήματος το οποίο παρακολουθούμε τις χρονικές στιγμές $0, 1, 2\dots$ και την $P(\omega, A)$ ως την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση ω στο σύνολο των καταστάσεων A σε μια χρονική μονάδα.

Για ένα μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathscr{A})$ γράφουμε $B(\mathscr{A})$ για το σύνολο όλων των μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με $\|f\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)| < \infty$ και $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ για το σύνολο όλων προσημασμένων μέτρων $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ με $\|\nu\| < \infty$, όπου $\|\nu\| = \nu^+(\Omega) + \nu^-(\Omega)$ η ολική κύμανση του μέτρου ν. Οι $(B(\mathscr{A}), \|\cdot\|_\infty)$, $(\mathscr{M}, \|\cdot\|)$ είναι χώροι Banach. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $T : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ και $T^* : B(\mathscr{A}) \to B(\mathscr{B})$ με

$$T\nu(A) = \int_\Omega P(\omega, A)\, d\nu(\omega), \;\; A \in \mathscr{A} \tag{3.1.1}$$

και

$$T^* h(\omega) = \int_\Omega h(y) P(\omega, dy), \;\; \omega \in \Omega \tag{3.1.2}$$

όπου με $\int_\Omega h(y)P(\omega, dy)$ συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα της h ως προς το μέτρο $A \mapsto P(\omega, A)$, $A \in \mathscr{A}$.

Πρόταση 3.1.2. *Οι T, T^* είναι καλά ορισμένες θετικές συστολές στους $\mathscr{M}$, $B(\mathscr{A})$ αντίστοιχα, όπου όταν λέμε ότι ο T είναι θετικός στον $\mathscr{M}$ εννοούμε ότι $T\nu \geq 0$ για κάθε $\nu \geq 0$ με $\nu \in \mathscr{M}$.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι $T\nu(\emptyset) = 0$. Τώρα, αν ν είναι πεπερασμένο θετικό μέτρο και $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathscr{A}$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα, τότε αφού $P(\omega, \bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty P(\omega, A_n)$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Beppo-Levi θα έχουμε

$$\begin{aligned} T\nu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) &= \int_\Omega P\Big(\omega, \bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big)\, d\nu(\omega) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega P(\omega, A_n)\, d\nu(\omega) \\ &= \sum_{n=1}^\infty T\nu(A_n). \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που το ν είναι τυχόν προσημασμένο μέτρο $\nu \in \mathscr{M}$ αναλύοντας το $\nu = \nu^+ - \nu^-$ στο θετικό και αρνητικό μέρος του, αφού τα ν^+, ν^- είναι πεπερασμένα θετικά μέτρα, χρησιμοποιώντας το παραπάνω επιχείρημα θα έχουμε $T\nu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \sum_{n=1}^\infty T\nu(A_n)$. Άρα, $T\nu \in \mathscr{M}$ για κάθε $\nu \in \mathscr{M}$, απ' όπου έπεται ότι η T είναι καλά ορισμένη. Επίσης, είναι προφανές ότι η T είναι γραμμική. Τώρα, γράφοντας $\nu = \nu^+ - \nu^-$ θα έχουμε $T\nu = T\nu^+ - T\nu^-$, και επειδή $\nu^+ \perp \nu^-$ και ν^+, $\nu^- \geq 0$ θα έχουμε $T\nu^+ \perp T\nu^-$ και $T\nu^+$, $T\nu^- \geq 0$. Οπότε, λόγω της μοναδικότητας της ανάλυσης $T\nu = (T\nu)^+ - (T\nu)^-$ θα έχουμε ότι $T\nu^+ = (T\nu)^+$ και $T\nu^- = (T\nu)^-$. Οπότε, γράφοντας

$$\begin{aligned} \|T\nu\| &= T\nu^+(\Omega) + T\nu^-(\Omega) \\ &= \int_\Omega P(\omega, \Omega)\, d\nu^+(\omega) + \int_\Omega P(\omega, \Omega)\, d\nu^-(\omega) \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $P(\omega, \Omega) \leq 1$ θα έχουμε $\|T\nu\| \leq \nu^+(\Omega) + \nu^-(\Omega)$. Με άλλα λόγια, $\|T\| \leq 1$. Αφού $P(\omega, \mathscr{A}) \geq 0$ είναι προφανές ότι $T\nu \geq 0$ για κάθε $\nu \in \mathscr{M}$ με $\nu \geq 0$. Για την T^* τώρα, καταρχάς παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |T^* h(\omega)| &= \left| \int_\Omega h(y) P(\omega,\, dy) \right| \\ &\leq \int_\Omega |h(y)| P(\omega,\, dy) \\ &\leq \|h\|_\infty \,, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι η Th είναι καλά ορισμένη και $Th \in B(\mathscr{A})$. Παρατηρώντας εύκολα πως είναι και γραμμική, απ' τον παραπάνω υπολογισμό έπεται ότι $\|T^* h\|_\infty \leq \|h\|_\infty$ απ' όπου βλέπουμε ότι $\|T^*\| \leq 1$. Τέλος, αφού $P \geq 0$ είναι προφανές ότι $T^* h \geq 0$ για κάθε $h \in B(\mathscr{A})$ με $h \geq 0$. □

Αν $h(y)$ είναι κάποια μέτρηση που αφορά την κατάσταση $y \in \Omega$ (π.χ. αμοιβή), τότε μπορούμε να σκεφτόμαστε την ποσότητα $T^* h(\omega)$ ως την αναμενόμενη αμοιβή που θα έχουμε σε μια χρονική μονάδα αν ξεκινήσουμε από την κατάσταση ω. Ειδικότερα, $T^* \mathbb{1}_A = P(\omega, A)$. Στην περίπτωση που το ν είναι θετικό μέτρο, μπορούμε να σκεφτόμαστε την ποσότητα $T\nu$ ως τη μεταφορά ύλης. Η ύλη εξαπλώνεται τυχαία στην κατάσταση ω ανάλογα με τις πιθανότητες μετάβασης $P(\omega, A)$, $A \in \mathscr{A}$. Η ποσότητα $T\nu$ είναι η νέα κατανομή της μάζας. Αν το ν παίρνει και αρνητικές τιμές, γράφοντας $\nu = \nu^+ - \nu^-$, μπορούμε να σκεφτόμαστε το ν^- ως αντιμάζα.

Η απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathscr{M} \times B(\mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ με $\langle \nu, h\rangle = \int_\Omega h\, d\nu$ είναι διγραμμική και λόγω της

$$\int_\Omega \Big(\int_\Omega h(y) P(\omega,\, dy) \Big) d\nu(\omega) = \int_\Omega h(y)\, dT\nu(y), \tag{3.1.3}$$

έχουμε ότι

$$\langle T\nu, h\rangle = \langle \nu, T^* h\rangle, \ (\nu \in \mathscr{M},\ h \in B(\mathscr{A})). \tag{3.1.4}$$

Απόδειξη της (3.1.3). Αναλύοντας το $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και χρησιμοποιώντας τις $(T\nu)^+ = T\nu^+$ και $(T\nu)^- = T\nu^-$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\nu \geq 0$. Αν $h = \mathbb{1}_A$ για $A \in \mathscr{A}$, τότε

$$\begin{aligned} \int_\Omega h(y)\, dT\nu(y) &= \int_\Omega P(\omega,\, A)\, d\nu(\omega) \\ &= \int_\Omega \Big(\int_\Omega \mathbb{1}_A(y) P(\omega,\, dy) \Big) d\nu(\omega) \\ &= \int_\Omega \Big(\int_\Omega h(y) P(\omega,\, dy) \Big) d\nu(\omega). \end{aligned}$$

Λόγω γραμμικότητας του ολοκληρώματος η (3.1.3) θα ισχύει και για $h \geq 0$ απλές. Για $h \geq 0$ με $h \in B(\mathscr{A})$ βρίσκουμε μια ακολουθία απλών συναρτήσεων h_n με $h_n \nearrow h$. Τότε, επειδή η T^* είναι θετική θα έχουμε $T^* h_{n+1} \geq T^* h_n$. Δηλαδή, $\int_\Omega h_n(y) P(\omega,\, dy) \leq \int_\Omega h_{n+1}(y) P(\omega,\, dy)$. Οπότε, χρησιμοποιώντας τρεις φορές το θεώρημα μονότονης σύγκλισης θα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega h(y)\,dT\nu(y) &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega h_n(y)\,dT\nu(y)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega\Big(\int_\Omega h_n(y)P(\omega,\,dy)\Big)\,d\nu(\omega)\\ &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty}\Big(\int_\Omega h_n(y)P(\omega,\,dy)\Big)\,d\nu(\omega)\\ &= \int_\Omega\Big(\int_\Omega h(y)P(\omega,\,dy)\Big)\,d\nu(\omega).\end{aligned}$$

Για γενική συνάρτηση $h \in B(\mathscr{A})$ γράφουμε $h = h^+ - h^-$ και χρησιμοποιούμε το προηγούμενο επιχείρημα για τις h^+, h^- ξεχωριστά. □

Για τη μελέτη των εργοδικών θεωρημάτων θα χρειαστούμε και ένα μέτρο αναφοράς. Θεωρούμε στον $(\Omega,\,\mathscr{A})$ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο μ και συμβολίζουμε με $\widetilde{L}_1(\mu)$ τον χώρο των προσημασμένων μέτρων $\nu \in \mathscr{M}$ τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο μ. Δηλαδή,

$$\widetilde{L}_1(\mu) = \{\nu \in \mathscr{M} \,:\, \nu \ll \mu\}.$$

Θα λέμε ότι ο πυρήνας P διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα αν $P(\omega,\,A) = 0$ μ-σχεδόν παντού για κάθε $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) = 0$. Θεωρούμε ένα μετρήσιμο μετασχηματισμό $\tau : \Omega \to \Omega$ και θέτουμε $P_\tau(\omega,\,A) = \mathbb{1}_{\tau^{-1}A}(\omega)$. Ο P_τ είναι στοχαστικός πυρήνας.

Πρόταση 3.1.3. *Ο πυρήνας P_τ διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα αν και μόνο αν ο τ διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα. Επιπλέον, οι τελεστές των* (3.1.1) *και* (3.1.2) *δίνονται απ' τις $T\nu = \nu\circ\tau^{-1}$ και $T^*h = h\circ\tau$.*

Απόδειξη. Αν ο P_τ διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα και $\mu(A) = 0$, τότε αφού $P(\omega,\,A) = \mathbb{1}_{\tau^{-1}A}(\omega) = 0$ μ−σχεδόν παντού, συμπεραίνουμε ότι $\mu(\tau^{-1}A) = 0$. Δηλαδή, $\mu\circ\tau^{-1} \ll \mu$ και ο τ διατηρεί τα μ−μηδενικά σύνολα. Απ' την άλλη αν $\mu\circ\tau^{-1} \ll \mu$, τότε για $\mu(A) = 0$ θα έχουμε $\mu(\tau^{-1}A) = 0$, απ' όπου έπεται ότι $P(\omega,\,A) = 0$ μ-σχεδόν παντού. Τώρα, για $A \in \mathscr{A}$ και $\nu \in \mathscr{M}$ έχουμε

$$T\nu(A) = \int_\Omega P(\omega,\,A)\,d\nu(\omega) = \int_\Omega \mathbb{1}_{\tau^{-1}A}(\omega)\,d\nu(\omega) = \nu(\tau^{-1}A).$$

Άρα, $T\nu = \nu\circ\tau^{-1}$. Για $h \in B(\mathscr{A})$ με $h = \mathbb{1}_A$, έχουμε

$$T^*h(\omega) = \int_\Omega h(y)P(\omega,\,dy) = P(\omega,\,A) = \mathbb{1}_{\tau^{-1}A}(\omega).$$

Δηλαδή, $T^*h(\omega) = h\circ\tau$. Λόγω γραμμικότητας του ολοκληρώματος, η προηγούμενη ισότητα θα ισχύει και για απλές συναρτήσεις. Τώρα, για $h \in B(\mathscr{A})$ με $h \geq 0$, βρίσκουμε μια ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων h_n με $h_n \nearrow h$. Επειδή, $h_n\circ\tau \nearrow h\circ\tau$, χρησιμοποιώντας το θεωρήμα μονότονης σύγκλισης θα έχουμε

$$\begin{aligned}T^*h(\omega) &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega h_n(y)P(\omega,\,dy)\\ &= \lim_{n\to\infty} h_n(\tau(\omega)) = h(\tau(\omega)).\end{aligned}$$

Τέλος, για τη γενική περίπτωση, γράφοντας $h = h^+ - h^-$ θα έχουμε $T^*h(\omega) = T^*h^+(\omega) - T^*h^-(\omega) = h^+\circ\tau - h^-\circ\tau$ και χρησιμοποιώντας τις $h^+\circ\tau = (h\circ\tau)^+$, $h^-\circ\tau = (h\circ\tau)^-$ καταλήγουμε στην $T^*h(\omega) = h\circ\tau(\omega)$. □

Λήμμα 3.1.4. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και P ένας υποστοχαστικός πυρήνας. Τότε, ο P διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα αν και μόνο αν $T(\widetilde{L_1}(\mu)) \subseteq \widetilde{L_1}(\mu)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο P διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα και θεωρούμε $\nu \in \widetilde{L_1}(\mu)$ και $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) = 0$. Τότε, αφού $\nu \ll \mu$ θα έχουμε $\nu(A) = 0$. Άρα, $T\nu(A) = \int_\Omega P(\omega, A)\, d\nu(\omega) = 0$ απ' όπου έπεται ότι $T\nu \ll \mu$. Δηλαδή, $T\nu \in \widetilde{L_1}(\mu)$. Απ' την άλλη αν υποθέσουμε ότι $T(\widetilde{L_1}(\mu)) \subseteq \widetilde{L_1}(\mu)$ και ότι ο P δεν διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα, θα υπάρχει ένα $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) = 0$ και ένα $B \in \mathscr{A}$ με $\mu(B) > 0$ ώστε $P(\omega, A) > 0$ για κάθε $\omega \in B$. Αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο, τέμνοντας το B με σύνολα πεπερασμένου μέτρου που καλύπτουν τον χώρο μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu(B) < \infty$. Τότε, θεωρώντας το $\nu(\Gamma) = \mu(\Gamma \cap B)$ έχουμε ότι $\nu \in \widetilde{L_1}(\mu)$. Επειδή $T(\widetilde{L_1}(\mu)) \subseteq \widetilde{L_1}(\mu)$ και $\mu(A) = 0$ θα έχουμε $T\nu(A) = 0$. Δηλαδή,

$$0 = T\nu(A) = \int_\Omega P(\omega, A)\, d\nu(\omega) = \int_B P(\omega, A)\, d\mu(\omega),$$

πράγμα το οποίο έρχεται σε αντίφαση με τις $\mu(A) = 0$ και $P(\omega, A) > 0$ για κάθε $\omega \in B$. □

Στην περίπτωση που το μ είναι σ-πεπερασμένο μπορούμε να δουλεύουμε στον $L_1(\mu)$ αντί για τον $\widetilde{L_1}(\mu)$ ταυτίζοντας τον $T : \widetilde{L_1}(\mu) \to \widetilde{L_1}(\mu)$ με ένα τελεστή $\widetilde{T} : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$. Αυτό γίνεται ως εξής: Αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο, για κάθε $\nu \in \widetilde{L_1}(\mu)$ από το θεώρημα Radon-Nikodym θα υπάρχει μια μ-σχεδόν παντού μοναδική ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\frac{d\nu}{d\mu} : \Omega \to \mathbb{R}$ με $\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$ για κάθε $A \in \mathscr{A}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi_\mu : \widetilde{L_1}(\mu) \to L_1(\mu)$ με $\phi_\mu(\nu) = \frac{d\nu}{d\mu}$, η οποία είναι γραμμική, 1-1, επί με αντίστροφη την $\phi_\mu^{-1}(f)(A) = \int_A f\, d\mu$ για $A \in \mathscr{A}$. Επιπλέον, από την

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu &= \int_\Omega \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^+ d\mu - \int_\Omega \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^- d\mu \\ &= \nu^+(\Omega) - \nu^-(\Omega)\end{aligned}$$

έπεται ότι $\left\|\phi_\mu(\nu)\right\|_1 = \|\nu\|$. Δηλαδή, η ϕ_μ είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Τώρα, θέτουμε $\widetilde{T} = \phi_\mu \circ T \circ \phi_\mu^{-1}$ και επειδή η ϕ_μ είναι ισομετρικός ισομορφισμός και η T θετική συστολή, η $\widetilde{T}$ θα είναι θετική συστολή στον $L_1(\mu)$. Τώρα, αν ο στοχαστικός πυρήνας P διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα θα έχουμε $T^*(L_\infty(\mu)) \subseteq L_\infty(\mu)$ και ότι ο T^* περιορισμένος στον $L_\infty(\mu)$ είναι μια θετική συστολή με

$$\int_\Omega \widetilde{T}f \cdot h\, d\mu = \int_\Omega f \cdot T^* h\, d\mu, \tag{3.1.5}$$

για κάθε $f \in L_1(\mu)$ και $h \in L_\infty(\mu)$. Δηλαδή, $\langle \widetilde{T}f, h\rangle = \langle f, T^*h\rangle$, όπου $\langle f, h\rangle = \int_\Omega f \cdot h\, d\mu$ για $f \in L_1(\mu)$ και $h \in L_\infty(\mu)$.

Απόδειξη του εγκλεισμού $T^*(L_\infty(\mu)) \subseteq L_\infty(\mu)$ και της (3.1.5). Για $h \in L_\infty(\mu)$ έχουμε $|T^*h(\omega)| \leq \|h(\omega)\|_\infty$. Οπότε, για να δείξουμε ότι $T^*(L_\infty(\mu)) \subseteq L_\infty(\mu)$ αρκεί να δείξουμε ότι για $h_1, h_2 \in L_\infty(\mu)$ με $h_1 = h_2$ μ-σχεδόν παντού ισχύει και $T^*h_1 = T^*h_2$ μ-σχεδόν παντού. Ισοδύναμα, αρκεί για $h = 0$ μ-σχεδόν παντού να δείξουμε ότι $T^*h = 0$ μ-σχεδόν παντού. Στην περίπτωση που $h = \mathbb{1}_A = 0$ θα έχουμε $\mu(A) = 0$. Άρα, αφού ο P διατηρεί τα μ−μηδενικά σύνολα θα έχουμε $P(\omega, A) = 0$ μ-σχεδόν παντού. Άρα, για τα ω με $P(\omega, A) = 0$ θα έχουμε

$$T^*h(\omega) = \int_\Omega h(y)P(\omega, dy) = \int_A P(\omega, dy) = P(\omega, A) = 0$$

απ' όπου έπεται ότι $T^*h = 0$ $\mu-$σχεδόν παντού. Τώρα, εύκολα χρησιμοποιώντας το προηγούμενο επιχείρημα και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος δείχνουμε ότι $T^*h = 0$ μ-σχεδόν παντού για $h = 0$ $\mu-$σχεδόν παντού και h απλή μετρήσιμη. Για γενική h με $h = 0$ $\mu-$σχεδόν παντού προσεγγίζουμε με απλές $h_n \nearrow h$ και $h_n \geq 0$. Για την (3.1.5) πάλι με την κλασική τεχνική, αν $h = \mathbb{1}_A$ τότε γράφοντας

$$\begin{aligned}\int_\Omega \widetilde{T}f(\omega) \cdot \mathbb{1}_A(\omega)\, d\mu(\omega) &= \int_A \phi \circ (T \circ \phi_\mu^{-1})(f)\, d\mu(\omega)\\ &= T \circ \phi_\mu^{-1}(f)(A)\\ &= \int_\Omega P(\omega, A)\, d\phi_\mu^{-1}(f)(\omega)\\ &= \int_\Omega P(\omega, A) f(\omega)\, d\mu(\omega)\\ &= \int_\Omega \Big(\int_\Omega \mathbb{1}_A(y) P(\omega, dy) \Big) f(\omega)\, d\mu(\omega)\end{aligned}$$

και παρατηρώντας ότι $\int_\Omega \mathbb{1}_A(y)P(\omega, dy) = T^*h(\omega)$ θα έχουμε

$$\int_\Omega \widetilde{T}f \cdot \mathbb{1}_A\, d\mu(\omega) = \int_\Omega T^*h(\omega)f(\omega)\, d\mu(\omega).$$

Με άλλα λόγια, $\langle \widetilde{T}f, h\rangle = \langle f, T^*h\rangle$. Τώρα, λόγω γραμμικότητας η (3.1.5) θα ισχύει και για απλές. Για $h \geq 0$ βρίσκουμε ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων h_n με $h_n \nearrow h$. Τότε, θα έχουμε $\widetilde{T}f \cdot h_n \nearrow \widetilde{T}f \cdot h$ και επειδή $|\widetilde{T}f \cdot h - \widetilde{T}f \cdot h_n| \leq 2|\widetilde{T}f \cdot h|$ από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης θα έχουμε

$$\int_\Omega \widetilde{T}f \cdot h\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{T}f \cdot h_n\, d\mu \tag{3.1.6}$$

Τώρα, για σταθερό ω, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης θα έχουμε

$$T^*h(\omega) = \int_\Omega h(y)P(\omega, dy) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(y)P(\omega, dy).$$

Δηλαδή, $T^*h_n \nearrow T^*h$. Οπότε, αφού $|f \cdot T^*h - f \cdot T^*h_n| \leq 2|f \cdot T^*h|$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης θα έχουμε και

$$\int_\Omega f \cdot T^*h\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f \cdot T^*h_n\, d\mu. \tag{3.1.7}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τις (3.1.6),(3.1.7) και γράφοντας

$$\begin{aligned}\int_\Omega \widetilde{T}f \cdot h\, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{T}f \cdot h_n\, d\mu\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f \cdot T^*h_n\, d\mu\\ &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f \cdot T^*h_n\, d\mu\\ &= \int_\Omega f \cdot T^*h\, d\mu,\end{aligned}$$

θα έχουμε ότι η (3.1.5) ισχύει για $h \in L_\infty(\mu)$ με $h \geq 0$. Για γενική $h \in L_\infty(\mu)$ γράφουμε $h = h^+ - h^-$. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \widetilde{T}f \cdot h\, d\mu &= \int_\Omega \widetilde{T}f \cdot h^+\, d\mu + \int_\Omega \widetilde{T}f \cdot h^-\, d\mu \\ &= \int_\Omega f \cdot T^* h^+\, d\mu - \int_\Omega f \cdot T^* h^-\, d\mu \\ &= \int_\Omega f \cdot T^*(h^+ - h^-)\, d\mu \\ &= \int_\Omega f \cdot T^* h\, d\mu.\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε την (3.1.5) για όλες τις $f \in L_1(\mu)$ και $h \in L_\infty(\mu)$, άρα ο T^* είναι ο συζυγής τελεστής του $T \equiv \widetilde{T}$ δικαιολογώντας με αυτό τον τρόπο τον συμβολισμό του T^*. □

Συνεπώς, για ένα στοχαστικό πυρήνα P ο οποίος διατηρεί τα μ-μηδενικά σύνολα σε ένα χώρο σ-πεπερασμένου μέτρο $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ οι $T : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$, $T^* : L_\infty(\mu) \to L_\infty(\mu)$ (ταυτίζοντας την T με την $\widetilde{T}$) που κατασκευάσαμε παραπάνω, είναι θετικές συστολές με $\langle Tf, h\rangle = \langle f, T^*h\rangle$ για κάθε $f \in L_1(\mu)$ και $h \in L_\infty(\mu)$. Έχοντας την παραπάνω σύνδεση μπορούμε να ξεκινήσουμε τη μελέτη των θετικών συστολών στον L_1:

Θεωρούμε ένα χώρο σ-πεπερασμένου μέτρου $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ και μια θετική συστολή $T : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$. Γνωρίζουμε ότι $(L_1(\mu))^* = L_\infty(\mu)$ μέσω της απεικόνισης $\psi_\mu : L_\infty(\mu) \to (L_1(\mu))^*$ με $\psi_\mu(h) = \psi_h$, όπου $\psi_h(f) = \int_\Omega f \cdot h\, d\mu$ για $f \in L_1(\mu)$. Μέσω της ψ_μ μπορούμε να ταυτίσουμε τον συζυγή τελεστή $T^* : (L_1(\mu))^* \to (L_1(\mu))^*$ του T με έναν τελεστή $S : L_\infty(\mu) \to L_\infty(\mu)$ για τον οποίο ισχύει

$$\int_\Omega Tf \cdot h\, d\mu = \int_\Omega f \cdot Sh\, d\mu \tag{3.1.8}$$

για κάθε $f \in L_1(\mu)$ και $h \in L_\infty(\mu)$. Δηλαδή, συμβολικά $\langle Tf, h\rangle = \langle f, Sh\rangle$. Πράγματι, ορίζουμε $S = \psi_\mu^{-1} \circ T^* \circ \psi_\mu$. Τότε, αφού $\left\|\psi_\mu\right\| = \left\|\psi_\mu^{-1}\right\| = 1$ θα έχουμε από τη μία $\|S\| \leq \|T^*\|$, και απ' την άλλη $\|T^*\| = \left\|\psi_\mu \circ S \circ \psi_\mu\right\| \leq \|S\|$. Άρα, $\|S\| = \|T^*\| \leq 1$, απ' όπου έπεται ότι ο S είναι συστολή στον $L_\infty(\mu)$. Για την (3.1.8), για $h^* \in L_1^*$ και $f \in L_1$ έχουμε

$$h^*(f) = \psi_\mu \circ (\psi_\mu^{-1} \circ h^*)(f) = \int_\Omega \psi_\mu^{-1} \circ h^* \cdot f\, d\mu,$$

άρα αφού $T^* \circ \psi_\mu(h) \in L_1^*$ χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του συζυγούς τελεστή T^* θα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \cdot Sh\, d\mu &= \int_\Omega f \cdot \psi_\mu^{-1} \circ (T^* \circ \psi_\mu)(h)\, d\mu \\ &= T^* \circ \psi_\mu(h)(f) = \psi_\mu(h)(Tf) \\ &= \int_\Omega Tf \cdot h\, d\mu\end{aligned}$$

αποδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο την (3.1.8). Μάλιστα, ο S είναι ο μοναδικός τελεστή $S : L_\infty \to L_\infty$ που ικανοποιεί την (3.1.8). Πράγματι, αν υπάρχει άλλος τελεστής S' με την ίδια ιδιότητα, τότε χρησιμοποιώντας την (3.1.8) για την $f = \mathbb{1}_A$ όπου $A_n = \{Sh > S'h\} \cap E_n$, με $\mu(E_n) < \infty$ και

$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$, θα έχουμε

$$\int_{A_n} Sh\,d\mu = \int_A S'h\,d\mu$$
$$\implies \int_{A_n} (Sh - S'h)\,d\mu = 0$$

απ' όπου έπεται ότι $\mu(A_n) = 0$. Άρα, αφού $A_n \nearrow \{Sh > S'h\}$ θα έχουμε $\mu(Sh > S'h) = 0$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε και την $\mu(S'h < Sh) = 0$. Άρα, τελικά $Sh = S'h$ μ−σχεδόν παντού. Μιας και ο L_∞ είναι πιο κατανοητός απ' τον L_1^* θα δουλεύουμε με τον S, έτσι ταυτίζουμε τον T^* με τον S, όπου τώρα η (3.1.8) γίνεται $\langle Tf, h\rangle = \langle f, T^*h\rangle$ για $f \in L_1(\mu)$ και $h \in L_\infty(\mu)$.

Ορισμός 3.1.5 (Υπο-Μαρκοβιανοί και Μαρκοβιανοί τελεστές)**.** Μια θετική συστολή στον $L_\infty(\mu)$ καλείται υπο-Μαρκοβιανός τελεστής αν ισχύει $Sh_n \to 0$ μ−σχεδόν παντού για κάθε φθίνουσα ακολουθία $h_n \in L_\infty(\mu)$ με $h_n \to 0$ μ−σχεδόν παντού. Οι T, T^*, όπου T μια θετική συστολή στον $L_1(\mu)$, θα καλούνται Μαρκοβιανοί αν $T^*\mathbb{1} = \mathbb{1}$[1].

Λήμμα 3.1.6. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και T μια θετική συστολή στον L_1. Τότε:*

(i) *Ο T^* είναι υπο-Μαρκοβιανός τελεστής με $T^*\mathbb{1} \le \mathbb{1}$.*

(ii) *Για κάθε μετρήσιμη $f \ge 0$ και κάθε ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ολοκληρώσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων με $f_n \nearrow f$ το $Tf = \lim_n Tf_n$ είναι καλά ορισμένο και ανεξάρτητο της (f_n).*

(iii) *Για κάθε μετρήσιμη $h \ge 0$ και κάθε ακολουθία $h_n \nearrow h$ μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L_\infty(\mu)$, το $T^*h = \lim_n T^*h_n$ είναι καλά ορισμένο και ανεξάρτητο της (h_n).*

Απόδειξη. (i) Αφού $\|T^*\| = \|T\|$ και ο T είναι συστολή, ο T^* θα είναι επίσης συστολή. Αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο, υπάρχουν $(E_n)_\infty \subseteq \mathscr{A}$ με $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\mu(E_n) < \infty$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$. Για να δείξουμε ότι ο T^* είναι θετικός, θεωρούμε μια $h \in L_\infty$ με $h \ge 0$. Τότε, η $f_n^k = \mathbb{1}_{A_n^k}$ όπου $A_n^k = \{T^*h < -\frac{1}{k}\} \cap E_n$ είναι ολοκληρώσιμη και μη αρνητική. Άρα,

$$0 \le \int_\Omega Tf_n^k \cdot h\,d\mu = \int_\Omega f_n^k \cdot T^*h\,d\mu = \int_{A_n^k} T^*h\,d\mu$$

απ' όπου έπεται ότι $\mu(A_n^k) = 0$ για κάθε k, n. Άρα, αφήνοντας πρώτα το $k \to \infty$ έχουμε $\mu(\{T^*h < 0\} \cap E_n) = 0$ και ύστερα αφήνοντας το $n \to \infty$, $\mu(T^*h < 0) = 0$. Δηλαδή, $T^*h \ge 0$ μ−σχεδόν παντού. Για να δείξουμε ότι είναι υπο-Μαρκοβιανός, θεωρούμε μια φθίνουσα ακολουθία $(h_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_\infty(\mu)$ με $h_n \to 0$ και ένα $\epsilon > 0$. Αφού ο T^* είναι θετικός έχουμε $T^*h_{n+1} \le T^*h_n$. Άρα, το $\lim_{m\to\infty} T^*h_m = \liminf_m T^*h_m \ge 0$ υπάρχει. Ορίζουμε τα σύνολα $A_n = \{\liminf_m T^*h_m > \epsilon\} \cap E_n$ για τα οποία ισχύει $\mu(A_n) < \infty$ και $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\liminf_m T^*h_m > \epsilon)$. Άρα, η $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$ είναι ολοκληρώσιμη. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Fatou έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega Tf_n \cdot \liminf_m h_m\,d\mu &\le \liminf_m \int_\Omega Tf_n \cdot h_m\,d\mu \\ &= \liminf_m \int_\Omega f_n \cdot T^*h_m\,d\mu \ge \int_{A_n} \liminf_m T^*h_m\,d\mu \\ &\ge \epsilon \cdot \mu(A_n), \end{aligned}$$

[1] όπου $\mathbb{1} = \mathbb{1}_\Omega$

απ' όπου έπεται ότι $\mu(A_n) = 0$ και κατ' επέκταση $\mu(\liminf_m T^* h_m > \epsilon) = 0$. Ειδικότερα, για κάθε k έχουμε $\mu(\liminf_m T^* h_m > \frac{1}{k}) = 0$ απ' όπου έπεται ότι $\mu(\liminf_m T^* h_m > 0) = 0$. Δηλαδή, $\lim_m T^* h_m = \liminf_m T^* h_m = 0$ $\mu-$σχεδόν παντού όπως θέλαμε. Για την $T^*\mathbb{1} \leq \mathbb{1}$ θεωρούμε τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$ όπου $A_n = \{T^*\mathbb{1} > \mathbb{1}\} \cap E_n$. Τότε, επειδή ο T είναι συστολή έχουμε

$$\int_\Omega f_n \cdot T^*\mathbb{1} = \int_\Omega Tf_n \, d\mu \leq \int_\Omega f_n \cdot \mathbb{1} \, d\mu.$$

Δηλαδή,

$$\int_{A_n} (T^*\mathbb{1} - \mathbb{1}) \, d\mu = \int_\Omega f_n \cdot (T^*\mathbb{1} - \mathbb{1}) \, d\mu \leq 0$$

απ' όπου έπεται ότι $\mu(A_n) = 0$. Άρα, αφήνοντας το $n \to \infty$ θα έχουμε $\mu(T^*\mathbb{1} > \mathbb{1}) = 0$. Δηλαδή, $T^*\mathbb{1} \leq \mathbb{1}$ $\mu-$σχεδόν παντού.

(ii) Αφού $f_n \leq f_{n+1}$ και ο T είναι θετικός θα έχουμε $Tf_n \leq Tf_{n+1}$. Άρα, το $\lim_n Tf_n(\omega)$ υπάρχει για κάθε $\omega \in \Omega$. Θεωρούμε μια άλλη ακολουθία $g_n \nearrow f$ και δείχνουμε ότι $\lim_n Tf_n = \lim_n Tg_n$ $\mu-$σχεδόν παντού. Σταθεροποιούμε ένα k. Τότε, $g_k \cdot \mathbb{1}_{E_n} \leq f \cdot \mathbb{1}_{E_n}$ και επειδή η T είναι θετική και οι παραπάνω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες θα έχουμε $Tg_k \cdot \mathbb{1}_{E_n} \leq Tf \cdot \mathbb{1}_{E_n}$. Όμως, $\lim_m f_m \cdot \mathbb{1}_{E_n} \xrightarrow{\kappa.\sigma} f \cdot \mathbb{1}_{E_n}$ και επειδή $|f_m \cdot \mathbb{1}_{E_n} - f \cdot \mathbb{1}_{E_n}| \leq f \cdot \mathbb{1}_{E_n}$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης θα έχουμε $f_m \cdot \mathbb{1}_{E_n} \xrightarrow{L_1} f \cdot \mathbb{1}_{E_n}$. Οπότε, λόγω συνέχειας, $Tf_m \cdot \mathbb{1}_{E_n} \xrightarrow{L_1} Tf \cdot \mathbb{1}_{E_n}$ Άρα, θα υπάρχει υπακολουθία $Tf_{m_l} \cdot \mathbb{1}_{E_n} \xrightarrow{\kappa.\sigma} Tf \cdot \mathbb{1}_{E_n}$. Όμως, $Tf_{m_l} \cdot \mathbb{1}_{E_n} \leq Tf_{m_l} \leq \lim_l Tf_l$ απ' όπου έπεται ότι $Tf \cdot \mathbb{1}_{E_n} \leq \lim_l Tf_l$. Οπότε, $Tg_k \cdot \mathbb{1}_{E_n} \leq Tf \cdot \mathbb{1}_{E_n} \leq \lim_l Tf_l$. Δείχνοντας ότι $Tg_k \cdot \mathbb{1}_{E_n} \xrightarrow{\kappa.\sigma} Tg_k$ καθώς το $n \to \infty$ θα έχουμε δείξει ότι $Tg_k \leq \lim_l Tf_l$. Οπότε, για $k \to \infty$ θα έχουμε $\lim_k Tg_k \leq \lim_l Tf_l$. Για τον τελευταίο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι $g_k \cdot \mathbb{1}_{E_n} \xrightarrow{L_1} g_k$. Τώρα, λόγω συνέχειας του T θα έχουμε $Tg_k \cdot \mathbb{1}_{E_n} \xrightarrow{L_1} Tg_k$. Συνεπώς, θα υπάρχει υπακολουθία $Tg_k \cdot \mathbb{1}_{E_{m_n}} \to Tg_k$ καθώς το $n \to \infty$. Όμως, επιλέγοντας τα E_n ώστε $E_n \subseteq E_{n+1}$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $g_k \geq 0$ και ότι ο T είναι θετικός, βλέπουμε ότι η $Tg_k \cdot \mathbb{1}_{E_n}$ θα είναι αύξουσα ως προς n. Άρα, τελικά θα έχουμε $Tg_k \cdot \mathbb{1}_{E_n} \xrightarrow{\kappa.\sigma} Tg_k$ όπως θέλαμε. Λόγω συμμετρίας του επιχειρήματος θα έχουμε και $\lim_n Tf_n \leq \lim_n Tg_n$.

(iii) Αφού ο T^* είναι θετικός θα έχουμε $T^* h_n \leq T^* h_{n+1}$. Δηλαδή, το $\lim_n T^* h_n$ υπάρχει. Θεωρούμε μια άλλη ακολουθία $(s_n)_{n=1}^\infty$ μη αρνητικών συναρτήσεων στον L_∞ με $s_n \nearrow h$. Σταθεροποιούμε ένα k και θεωρούμε τα σύνολα $A_n = \{T^* s_k > \lim_m T^* h_m\} \cap E_n$, όπου $\mu(E_n) < \infty$ με $E_n \nearrow \Omega$. Τότε, η $f = \mathbb{1}_{A_n}$ είναι μη αρνητική και ολοκληρώσιμη. Επειδή, $s_k \leq h = \lim_m h_m$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_\Omega Tf \cdot s_k \, d\mu &\leq \int_\Omega Tf \cdot h \, d\mu \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega Tf \cdot h_m \, d\mu \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega f \cdot T^* h_m \, d\mu \\
&= \int_\Omega f \cdot \lim_{m\to\infty} T^* h_m \, d\mu.
\end{aligned}$$

Όμως $\infty > \int_\Omega Tf \cdot s_k \, d\mu = \int_\Omega f \cdot T^* s_k \, d\mu$, απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega f \cdot (\lim_{m\to\infty} T^* h_m - T^* s_k)\, d\mu \\
&= \int_{A_n} \lim_{m\to\infty} T^* h_m - T^* s_k \, d\mu, \qquad (3.1.9)
\end{aligned}$$

όπου τώρα αν υποθέσουμε ότι $\mu(A_n) > 0$ θα υπάρχουν ρητοί q_1, q_2 με $\mu(A_n^{q_1,q_2}) > 0$, όπου $A_n^{q_1,q_2} = \{T^* s_k > q_1 > q_2 > \lim_m T^* h_m\}$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_{A_n} \lim_{m\to\infty} T^* h_m - T^* s_k \, d\mu &\leq \int_{A_n^{q_1,q_2}} \lim_{m\to\infty} T^* h_m - T^* s_k \, d\mu \\
&\leq \int_{A_n^{q_1,q_2}} q_2 - q_1 \, d\mu \\
&= \mu(A_n^{q_1,q_2})(q_2 - q_1) < 0,
\end{aligned}$$

πράγμα το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (3.1.9). Άρα, $\mu(A_n) = 0$ για κάθε n, απ' όπου έπεται ότι $\mu(T^* s_k > \lim_m T^* h_m) = 0$. Δηλαδή, $T^* s_k \leq \lim_m T^* h_m$ μ−σχεδόν παντού. Οπότε, αφήνοντας το $k \to \infty$ θα έχουμε $\lim_k T^* s_k \leq \lim_m T^* h_m$ μ−σχεδόν παντού. Λόγω συμμετρίας του επιχειρήματος θα έχουμε και $\lim_m T^* h_m \leq \lim_k T^* s_k$. □

Περνάμε τώρα στη διάσπαση κατά Hopf του συνόλου $\Omega = C \cup D$ δίνοντας τρεις διαφορετικές αλλά ισοδύναμες περιγραφές των συνόλων C, D. Το C καλείται το συντηρητικό μέρος της θετικής συστολής T ενώ το D το dissipative μέρος. Στην περίπτωση που $\Omega = C$, ο T καλείται συντηρητικός.

Ορισμός 3.1.7 (Υπερ-αρμονικές και αρμονικές συναρτήσεις)**.** Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και T μια θετική συστολή στον $L_1(\mu)$. Μια συνάρτηση h με $T^* h = h$ καλείται αρμονική. Μια μη αρνητική συνάρτηση h καλείται υπερ-αρμονική αν $h \geq T^* h$. Τέλος, μια υπερ-αρμονική συνάρτηση h καλείται γνήσια υπερ-αρμονική στο $A \in \mathscr{A}$, αν $h > T^* h$ σχεδόν παντού στο A.

Στα παρακάτω θεωρήματα μπορούμε να αγνοήσουμε την έννοια του σχεδόν παντού μιας και ασχολούμαστε με κλάσεις συναρτήσεων που σχηματίζονται μέσω της ισοδυναμίας $f \sim g$ ανν $f = g \,(\mathrm{mod}\, \mu)$.

Θεώρημα 3.1.8. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και T μια θετική συστολή στον $L_1(\mu)$. Τότε, υπάρχουν δύο σύνολα $C, D \in \mathscr{A}$ τα οποία καθορίζονται πλήρως* $(\mathrm{mod}\, \mu)$ *απ' τις εξής ιδιότητες:*

(i) *$C \cup D = \Omega$ και $C \cap D = \emptyset$.*

(C1) *Αν η h είναι υπερ-αρμονική, τότε $h = T^* h$ στο C.*

(D1) *Υπάρχει μια φραγμένη υπερ-αρμονική συνάρτηση h_0, η οποία είναι γνήσια υπερ-αρμονική στο D. Επιπλέον, η h_0 μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $(T^*)^n h_0 \to 0$ στο D και $h_0 = 0$ στο C.*

Εδώ, όταν λέμε πως τα C, D καθορίζονται πλήρως $(\mathrm{mod}\, \mu)$ *εννοούμε πως αν $C', D' \in \mathscr{A}$ είναι ένα άλλο ζευγάρι με τις ιδιότητες* (i),(C1),(D1), *τότε $\mu(C \triangle C') = \mu(D \triangle D') = 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{A}$ όλων των συνόλων $D \in \mathscr{A}$ για τα οποία υπάρχει φραγμένη υπερ-αρμονική συνάρτηση g_D η οποία να είναι γνήσια υπερ-αρμονική στο D. Παρατηρούμε πως η $\mathscr{P}$ είναι κλειστή ως προς τα υποσύνολα. Δηλαδή, αν $A, B \in \mathscr{A}$ με $A \subseteq B$ και $B \in \mathscr{P}$, τότε $A \in \mathscr{P}$. Χρησιμοποιώντας το επιχείρημα εξάντλησης του Λήμματος 1.4.5 βρίσκουμε μια ακολουθία $(D_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ ξένων ανά δύο συνόλων τα οποία να έχουν την ιδιότητα $\mathscr{P}$ και για κάθε $A \subseteq \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ με $A \in \mathscr{P}$ να ισχύει $\mu(A) = 0$. Έστω g_n μια φραγμένη υπερ-αρμονική η οποία να είναι γνήσια υπερ-αρμονική στο D_n. Έστω c_n ένα άνω φράγμα για την g_n. Θέτουμε $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ και $g = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} c_n^{-1} g_n$. Τότε, επειδή

$$\|g\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|g_n\|_\infty}{2^n c_n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

έχουμε $\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} c_n^{-1} g_n \xrightarrow{L_\infty} g$. Άρα, λόγω συνέχειας του T^* ισχύει $T^*g = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} c_n^{-1} T^* g_n$. Επομένως, από την $T^* g_n \leq g_n$ έχουμε ότι $T^* g \leq g$. Δηλαδή, η g είναι φραγμένη και υπερ-αρμονική. Τώρα, αφού στο D_n ισχύει $T^* g_n < g_n$ θα έχουμε $T^* g < g$ στο D, απ' όπου έπεται ότι η g είναι γνήσια υπερ-αρμονική στο D. Μένει να δείξουμε πως το $C = \Omega \setminus D$ έχει την ιδιότητα (C1). Γνωρίζουμε ότι για κάθε $A \subseteq C$ με $A \in \mathscr{P}$ ισχύει $\mu(A) = 0$. Υποθέτουμε πως υπάρχει $A \subseteq C$ με $\mu(A) > 0$ και μια υπερ-αρμονική συνάρτηση g_A (μη φραγμένη) με $T^* g_A < g_A$ στο A. Εδώ, με $T^* g_A$ εννοούμε την επέκταση του T^* του Λήμματος 3.1.6-(iii). Τότε, υπάρχει ρητός q ώστε $\mu(A^q) > 0$, όπου $A^q = \{\omega \in A : T^* g_A(\omega) < q < g_A(\omega)\}$. Θεωρούμε τη φραγμένη συνάρτηση $g_A' = \min\{q, g_A\}$. Από το Λήμμα 3.1.6 έχουμε $T^* q \leq q$ και επειδή η g_A είναι υπερ-αρμονική $T^* g_A \leq g_A$. Επειδή ο T^* είναι θετικός έχουμε ότι $T^* g_A' \leq T^* q$ και $T^* g_A' \leq T^* g_A$. Δηλαδή, $T^* g_A' \leq \min\{T^* q, T^* g_A\} \leq \min\{q, g_A\} = g_A'$. Με άλλα λόγια, η g_A' είναι φραγμένη και υπερ-αρμονική. Επίσης, για $\omega \in A^q$ έχουμε $T^* g_A'(\omega) < q = g_A'(\omega)$. Δηλαδή, η g_A' είναι γνήσια υπερ-αρμονική στο A^q. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $A^q \subseteq C$ και $\mu(A^q) > 0$. Απ' αυτό έπεται πως το C έχει την ιδιότητα (C1) αλλά και η μοναδικότητα των C, D.

Για την κατασκευή της h_0, αφού $T^* g \leq g$ θα έχουμε ότι $h_n = (T^*)^{n-1}$ είναι φθίνουσα και μη αρνητική, και κάθε h_n είναι υπερ-αρμονική. Θέτουμε $h_\infty = \lim_n h_n$. Αφού ο T^* είναι υπο-Μαρκοβιανός έχουμε ότι $T^* h_\infty = \lim_n T^* h_n = \lim_n h_{n+1} = h_\infty$. Θέτουμε $h_0 = g - h_\infty$. Τότε, $(T^* h_0)^n = (T^* g)^n - h_\infty \to 0$ και επειδή $T^* g = g$ στο C θα έχουμε $(T^* g)^n = g = h_\infty$ στο C, απ' όπου έπεται ότι $h_0 = 0$ στο C. □

Από την παραπάνω περιγραφή των C, D, και επειδή η $\mathbb{1}$ είναι υπερ-αρμονική, έπεται ότι $T^* \mathbb{1} = \mathbb{1}$ στο C. Για ένα στοχαστικό πυρήνα P και μια υπερ-αρμονική συνάρτηση h, ερμηνεύοντας την ποσότητα $T^* h(\omega)$ της (3.1.2) ως την αναμενόμενη αμοιβή σε ένα βήμα όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση ω, τότε σχεδόν για κάθε $\omega \in C$ αναμένουμε η αμοιβή να παραμένει η ίδια. Αυτό δικαιολογεί και την ονομασία του C ως το συντηρητικό μέρος του T^*.

Θυμίζουμε τον συμβολισμό $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} T^k f$ για μια θετική συστολή T και $f \in L_1$. Παρατηρήστε ότι $S_n^*(T) = \sum_{k=0}^{n-1} (T^*)^k h$ για $h \in L_\infty$. Επίσης, για $h \in L_\infty$ με $h \geq 0$, γράφουμε $S_\infty^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n^* h$, όπου επειδή $h \geq 0$ και T^* θετικός θα έχουμε $S_\infty^* h = \sum_{n=0}^{\infty} (T^*)^n h$.

Θεώρημα 3.1.9. *Τα σύνολα C, D της διάσπασης Hopf του Θεωρήματος 3.1.8 καθορίζονται επίσης πλήρως* $(\mathrm{mod}\,\mu)$ *και απ' τις ιδιότητες:*

(C2) *Για κάθε $h \in L_\infty^+(\mu)$ ισχύει $S_\infty^* h = \infty$ (σχεδόν παντού) στο $C \cap \{S_\infty^* h > 0\}$.*

(D2) *Υπάρχει μια συνάρτηση $h_D \in L_\infty^+(\mu)$ με $\{h_D > 0\} = D\,(\mathrm{mod}\,\mu)$ και $S_\infty^* h_D \leq \mathbb{1}$.*

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας τη συνάρτηση h_0 του Θεωρήματος 3.1.8 με κατάλληλη σταθερά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $h_0 \leq \mathbb{1}$. Τότε, η $h_D = h_0 - T^* h_0$ είναι γνήσια θετική στο D και $h_D = 0$ σχεδόν παντού στο C. Άρα, $\{h_D > 0\} = D \,(\mathrm{mod}\, \mu)$. Επίσης, παρατηρώντας ότι

$$S_n^* h_D = \sum_{k=0}^{n-1} (T^*)^k h_D - \sum_{k=0}^{n-1} (T^*)^{k+1} h_D = h_D - (T^*)^{n+1} h_D$$

και χρησιμοποιώντας την $0 \leq (T^*)^{n+1} h_D \leq h_D$, έχουμε ότι $S_n^* h_D \leq h_D \leq \mathbb{1}$ για κάθε n, απ' όπου έπεται ότι $S_\infty^* h_D \leq \mathbb{1}$. Επομένως, το D έχει την ιδιότητα (D2). Έστω τώρα πως δεν ισχύει η (C2). Τότε, θα υπάρχει μια συνάρτηση $h \in L_\infty(\mu)^+$, ένα j και $A \subseteq C$ ώστε $(T^*)^j h > 0$ και $S_\infty^* h < \infty$ στο A (σχεδόν παντού). Ορίζουμε $h_n = \sum_{i=j}^{n} (T^*)^i h$ και $\widetilde{h} = \lim_n h_n$. Αφού $h_n \geq 0$ και $h_n \nearrow \widetilde{h}$, από το Λήμμα 3.1.6 θα έχουμε $T^* \widetilde{h} = \lim_n T^* h_n$. Όμως, $T^* h_n = \sum_{i=j+1}^{n+1} (T^*)^i h$. Άρα, $T^* \widetilde{h} = \sum_{i=j+1}^{\infty} (T^*)^i h \leq \widetilde{h}$. Με άλλα λόγια, η $\widetilde{h}$ είναι υπερ-αρμονική. Οπότε, από την ιδιότητα (C1) θα ισχύει $(T^*)^k \widetilde{h} = \widetilde{h}$ στο C. Όμως, $(T^*)^k \widetilde{h} = \sum_{i=k+j}^{\infty} (T^*)^i h \leq S_\infty^* h < \infty$ στο $A \subseteq C$. Αφήνοντας το $k \to \infty$ έχουμε $0 = \lim_k (T^*)^k \widetilde{h} = \widetilde{h}$ στο A. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το ότι $\widetilde{h} > (T^*)^j h > 0$ στο A. Για τη μοναδικότητα τώρα, έστω C', D' ένα άλλο ζευγάρι με τις ιδιότητες (C2), (D2) και με $C' \cup D' = \Omega$ και $C' \cap D' = \emptyset$. Τότε, για την $h_{D'}$ ισχύει $S_\infty h_{D'} \leq \mathbb{1}$ και $S_\infty^* h_{D'} > 0$ στο $D' \setminus D \subseteq C$. Οπότε, από την (C2) θα πρέπει υποχρεωτικά να έχουμε $\mu(D' \setminus D) = 0$. Λόγω συμμετρίας θα ισχύει και $\mu(D \setminus D') = 0$. Άρα, τελικά $\mu(D \triangle D') = 0$. □

Θεώρημα 3.1.10. *Τα σύνολα C, D της διάσπασης Hopf καθορίζονται πλήρως $(\mathrm{mod}\, \mu)$ και απ' τις ιδιότητες:*

(C3) *Για κάθε $f \in L_1^+(\mu)$, $S_\infty f = \infty$ στο $C \cap \{S_\infty f > 0\}$.*

(D3) *Για κάθε $f \in L_1^+(\mu)$, $S_\infty f < \infty$ στο D.*

Απόδειξη. Από την (D2) υπάρχει $h_D^+ \in L_\infty^+(\mu)$ με $\{h_D > 0\} = D$ και $S_\infty^* h_D \leq \mathbb{1}$. Τότε, γράφοντας

$$\begin{aligned}\langle S_\infty f, h_D \rangle &= \lim_n \int S_n f \cdot h_D \, d\mu \\ &= \lim_n \int f \cdot S_n^* h_D \, d\mu \\ &= \langle f, S_\infty^* h_D \rangle \leq \langle f, \mathbb{1} \rangle < \infty\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $h_D > 0$ σχεδόν παντού στο D θα έχουμε την (D3). Για την (C3) υποθέτουμε ότι $S_\infty f < \infty$ σε ένα σύνολο $F \subseteq C \cap \{f > 0\}$ με $0 < \mu(F) < \infty$. Τότε, η $h = \mathbb{1}_F (\mathbb{1} + S_\infty f)^{-1}$ είναι γνήσια θετική στο F. Από την (C2) θα έχουμε $S_\infty^* h = \infty$ στο F. Αλλά,

$$\begin{aligned}\langle f, S_\infty^* h \rangle &= \langle S_\infty f, h \rangle \\ &= \int (S_\infty f) \mathbb{1}_F (\mathbb{1} + S_\infty f)^{-1} \, d\mu \\ &\leq \mu(F) < \infty,\end{aligned}$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι $f > 0$ στο F. Άρα, $S_\infty f = \infty$ σχεδόν παντού στο $C \cap \{f > 0\}$. Επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα με την $T^n f$ στη θέση της f βλέπουμε ότι $S_\infty f = \infty$ σχεδόν παντού στο $C \cap \{T^n f > 0\}$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα, επειδή $C \cap \{S_\infty f > 0\} = \cup_{n=0}^{\infty} C \cap \{T^n f > 0\}$ έπεται και η (C3). □

Για κάθε $1 \le p \le \infty$ θα συμβολίζουμε με $L_p(B)$ το σύνολο $\{f \in L_p : \{f \neq 0\} \subseteq B\}$.

Ορισμός 3.1.11. Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και T μια θετική συστολή στον L_1. Ένα σύνολο $B \in \mathscr{A}$ καλείται $T-$απορροφούν αν $Tf \in L_1(B)$ για κάθε $f \in L_1(B)$.

Θεώρημα 3.1.12. *Το συντηρητικό κομμάτι C μιας θετικής συστολής T στον L_1 είναι $T-$αναλλοίωτο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια γνήσια θετική συνάρτηση p στον L_1. Από τις (C3) και (D3) έχουμε $C = \{S_\infty p = \infty\}$. Για $f \in L_1^+(C)$ έχουμε $nf \le S_\infty p$ για κάθε n. Άρα, $nTf \le TS_\infty p = \sum_{i=1}^\infty T^i p$ για κάθε n. Ειδικότερα, $S_\infty p = \infty$ στο $\{Tf > 0\}$ και λόγω μοναδικότητας του C έπεται ότι $\{Tf > 0\} \subseteq C$. Δηλαδή, $Tf \in L_1(C)$. □

Θεώρημα 3.1.13. *Ένα σύνολο $B \in \mathscr{A}$ είναι $T-$απορροφούν αν και μόνο αν $T^* \mathbb{1}_{B^c} \le \mathbb{1}_{B^c}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το B είναι $T-$απορροφούν και $f \in L_1^+$ με $\{f > 0\} = B$. Τότε, αφού $Tf \in L_1(B)$ θα έχουμε $0 = \langle Tf, \mathbb{1}_{B^c}\rangle = \langle f, T^*\mathbb{1}_{B^c}\rangle$. Άρα, $T^*\mathbb{1}_{B^c} = 0$ στο B. Χρησιμοποιώντας την $T^*\mathbb{1}_{B^c} \le \mathbb{1}$ καταλήγουμε στην $T^*\mathbb{1}_{B^c} \le \mathbb{1}_{B^c}$. Αντίστροφα, αν ισχύει η τελευταία ανισότητα και $g \in L_1^+(B)$ τότε, $0 \le \langle Tg, \mathbb{1}_{B^c}\rangle = \langle g, T^*\mathbb{1}_{B^c}\rangle \le \langle g, \mathbb{1}_{B^c}\rangle = 0$ απ' όπου έπεται ότι $Tg \in L_1(B)$. Για γενική $g \in L_1(B)$ γράφουμε $g = g^+ - g^-$. □

3.2 Το θεώρημα των Chacon-Ornstein

Θεωρούμε μια θετική συστολή T στον L_1. Περνάμε τώρα στη σχεδόν βεβαίως σύγκλιση του S_nf/S_ng στο σύνολο $\{S_\infty g > 0\}$ για $f \in L_1$ και $g \in L_1^+$. Γράφουμε $f \overset{1}{\to} g$ αν $f \in L_1^+$ και υπάρχουν $r, s \in L_1^+$ με $f = r + s$ και $g = r + Ts$ (η g προκύπτει αν το κομμάτι r της f παραμείνει σταθερό και το υπόλοιπο κομμάτι s απεικονιστεί μέσω του T). Για $n \ge 2$ γράφουμε $f \overset{n}{\to} g$ αν υπάρχουν g_1 με $f \overset{n-1}{\to} g_1$ και $g_1 \overset{1}{\to} g$. Ο μη γραμμικός τελεστής U με $Uh = Th^+ - h^-$ καλείται «τελεστής γεμίσματος» (filling operator). Στην περίπτωση που $h = f - g$ με $f, g \in L_1^+$ μπορούμε να σκεφτόμαστε την f ως μάζα και την g ως αντιμάζα. Ο $U(f - g)$ προκύπτει ως εξής: Πρώτα το κομμάτι $f \wedge g$ της f και η g αλληλοεξουδετερώνονται, το υπόλοιπο κομμάτι h^+ απεικονίζεται μέσω του T και το υπόλοιπο κομμάτι h^- της g παραμένει σταθερό. Πολλές φορές, η g θεωρείται ως μια τρύπα. Το κομμάτι $f \wedge g$ πέφτει μέσα στην τρύπα και τη γεμίζει μερικώς. Αν πάρουμε τον U^2, ένα κομμάτι του Th^+ θα πέσει πάλι στην τρύπα γεμίζοντάς την ακόμα περισσότερο και το υπόλοιπο θα απεικονιστεί μέσω του T. Η συνεχόμενη χρήση του U καλείται «διαδικασία γεμίσματος» (filling scheme).

Λήμμα 3.2.1. *Για κάθε $f, g \in L_1^+$ και $n \ge 0$ υπάρχει $f_n \in L_1^+$ με $f \overset{n}{\to} f_n$ και $U^n(f - g) = f_n - g$.*

Απόδειξη. Για $n = 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $f_0 = f$. Προχωρώντας επαγωγικά, αν η f_n έχει κατασκευαστεί, τότε η $t_n = f_n - [U^n(f - g)]^+ = f_n \wedge g$ είναι μη αρνητική και $[U^n(f - g)]^- = -U^n(f - g) + [U^n(f - g)]^+ = g - t_n$. Οπότε, $U^{n+1}(f - g) = T(f_n - t_n) - (g - t_n)$ και έτσι, επιλέγοντας $f_{n+1} = T(f_n - t_n) + t_n$ έχουμε το ζητούμενο. □

Διαισθητικά, η t_n είναι η ποσότητα που πέφτει στην τρύπα τη χρονική στιγμή n και η f_n είναι το άθροισμα των t_n. Το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι στο σύνολο $\{M_n^S h > 0\}$ η τρύπα θα έχει γεμίσει μέχρι τη χρονική στιγμή $n - 1$.

Θεώρημα 3.2.2. *Για $h \in L_1, n \ge 1$ και T, U όπως παραπάνω, έχουμε $U^{n-1}h \ge 0$ στο σύνολο $\{M_n^S h > 0\} = \{M_n h > 0\}$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του U έχουμε ότι η ακολουθία $(U^k h)^-$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, είναι φθίνουσα. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι για σχεδόν κάθε $\omega \in \{M_n^S h > 0\}$ υπάρχει m με $0 \le m \le n-1$ και $(U^m h)^+(\omega) > 0$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι η ποσότητα $\phi_k(\omega) = \sum_{m=0}^k (U^m h)^+(\omega)$ είναι γνήσια θετική για κάποιο $0 \le k \le n-1$. Μιας και $(U^m h)^+$ είναι το κομμάτι του $T^m h^+$ το οποίο δεν θα πέσει στην τρύπα τη χρονική στιγμή m θα πρέπει να ισχύει

$$\phi_k \ge \sum_{m=0}^{k} T^m h = S_{k+1} h. \tag{3.2.1}$$

Αποδεικνύοντας την (3.2.1) θα έχουμε και το ζητούμενο. Για $k = 0$ η (3.2.1) ισχύει αφού είναι η ανισότητα $h^+ \ge h$. Αν η (3.2.1) ισχύει για κάποιον k, τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο T είναι θετικός, την $TS_{k+1}f \le T\phi_k$ και γράφοντας

$$\begin{aligned}
S_{k+2}f &= h + TS_{k+1}f \le h + T\phi_k = h + \sum_{m=0}^{k} T(U^m h)^+ \\
&= h + \sum_{m=0}^{k} (U^{m+1}h + (U^m h)^-) \\
&= h + \sum_{m=0}^{k} [(U^{m+1}h)^+ - (U^{m+1}h)^- + (U^m h)^-] \\
&= h + (\phi_{k+1} - h^+) + h^- - (U^{k+1}h)^- \le \phi_{k+1},
\end{aligned}$$

έχουμε το ζητούμενο και για τον $k+1$. □

Το Θεώρημα 3.2.2 και το Λήμμα 3.2.1 δίνουν μια διαφορετική απόδειξη του μεγιστικού εργοδικού Θεωρήματος 1.3.2 του Hopf: Για $h \in L_1$ θέτουμε $f = h^+$, $g = h^-$ και βρίσκουμε f_{n-1} με $(f_{n-1} - g) = U^{n-1}h$ και $f \overset{n-1}{\to} f_{n-1}$ όπως στο Λήμμα 3.2.1 με $U^{n-1}h \ge 0$ στο σύνολο $\{M_n h > 0\}$. Τώρα, ισχυριζόμαστε ότι αν $f \overset{k}{\to} f'$ τότε $\int f\, d\mu \ge \int f'\, d\mu$. Πράγματι, αν $k = 1$ τότε $f = r + s$ με $r, s \in L_1^+$ και $f' = r + Ts$. Αφού ο T είναι συστολή θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\int f\, d\mu &= \int r + s\, d\mu \\
&\ge \int r + Ts\, d\mu \\
&= \int f'\, d\mu.
\end{aligned}$$

Αν τώρα έχουμε τον ισχυρισμό για τον $k-1$ και $f \overset{k}{\to} f'$, θα υπάρχει $f_1' \in L_1^+$ με $f \overset{k-1}{\to} f_1'$ και $f_1' \overset{1}{\to} f'$. Από την επαγωγική υπόθεση και την περίπτωση $k = 1$ έχουμε

$$\int f\, d\mu \ge \int f_1'\, d\mu \ge \int f'\, d\mu.$$

Επομένως, λόγω της $f \overset{n-1}{\to} f_{n-1}$ έχουμε $\int f\, d\mu \ge \int f_{n-1}\, d\mu$. Αφού το σύνολο $\{h^+ > 0\}$ περιέχεται στο $E = \{M_n h > 0\}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_E h\,d\mu &= \int_E h^+\,d\mu - \int_E h^-\,d\mu\\ &= \int_\Omega h^+\,d\mu - \int_E g\,d\mu\\ &\geq \int_\Omega f_{n-1}\,d\mu - \int_E g\,d\mu\\ &= \int_E U^{n-1}h \geq 0.\end{aligned}$$

Επομένως, δείξαμε το θεώρημα, μόνο που στη θέση του $\{M_n h \geq 0\}$ έχουμε το $\{M_n h > 0\}$. Για να δείξουμε ότι ισχύει και για το $\{M_n h \geq 0\}$ θεωρούμε μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία h_n που φθίνει προς την h (π.χ. $h_k = h^+ - s_k$ όπου $s_{k+1} < s_k$ με $s_k \nearrow h^-$). Τότε, τα σύνολα $\{M_n h_k > 0\}$ φθίνουν προς το $\{M_n h \geq 0\}$. Επομένως,

$$\int_{\{M_n h \geq 0\}} h\,d\mu = \lim_k \int_{\{M_n h_k > 0\}} h_k\,d\mu \geq 0.$$

Λήμμα 3.2.3 (Chacon-Ornstein). *Έστω T μια θετική συστολή στον L_1, $f \in L_1$ και $g \in L_1^+$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T^n f}{S_{n+1} g} = 0 \tag{3.2.2}$$

σχεδόν παντού στο σύνολο $\{S_\infty g > 0\}$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f \geq 0$. Τότε, ορίζουμε $r_{nm} = T^n(T^m f) - \epsilon S_{n+1} T^m g$ και

$$A_{nm} = \left\{\omega \in \Omega : \frac{T^n(T^m f)}{S_{n+1}T^m g}(\omega) > \epsilon\right\} \cap \{T^m g > 0\}$$

για κάθε m, n και $\epsilon > 0$. Τότε, επειδή ο T είναι θετικός έχουμε

$$r_{nm} = Tr_{n-1m} - \epsilon T^m g \leq T(r_{n-1m})^+ - \epsilon T^m g. \tag{3.2.3}$$

Με τη βοήθεια της (3.2.3) μπορούμε να δείξουμε ότι

$$(r_{nm})^+ \leq T(r_{n-1m})^+ - \epsilon \cdot \mathbb{1}_{A_{nm}} T^m g. \tag{3.2.4}$$

Παρατηρώντας ότι $\Omega = \{T^m g = 0\} \cup (A^c_{nm} \cap \{T^m g > 0\}) \cup A_{nm}$ αρκεί να ελέγξουμε την (3.2.4) σε καθένα από τα παραπάνω σύνολα. Στο $\{T^m g = 0\}$ η (3.2.4) ισχύει λόγω της (3.2.3). Στο A_{nm} έχουμε $r_{nm} = (r_{nm})^+$ συνεπώς η (3.2.4) προκύπτει και πάλι από την (3.2.3). Στο $A^c_{nm} \cap \{T^m g > 0\}$ έχουμε $(r_{nm})^+ = 0$ ενώ $T(r_{n-1m})^+ - \epsilon \cdot \mathbb{1}_{A_{nm}} T^m g = T(r_{n-1m})^+ \geq 0$. Χρησιμοποιώντας την (3.2.4) έχουμε

$$\sum_{n=1}^N \int \epsilon \cdot \mathbb{1}_{A_{nm}} T^m g\,d\mu \leq \sum_{n=1}^N \int (T(r_{n-1m})^+ - (r_{nm})^+) d\mu.$$

Όμως, ο T είναι συστολή, άρα $\int T(r_{n-1m})^+ \, d\mu \leq \int (r_{n-1m})^+ \, d\mu$. Οπότε, θα έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} \int \epsilon \cdot \mathbb{1}_{A_{nm}} T^m g \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{N} \int ((r_{n-1m})^+ - (r_{nm})^+) d\mu$$
$$= \int (r_{0m})^+ \, d\mu - \int (r_{Nm})^+ \, d\mu.$$

Επειδή, $(r_{0m})^+ = (T^m f - \epsilon T^m g) \cdot \mathbb{1}_{A_{0m}}$, $\int (r_{Nm})^+ \, d\mu \geq 0$, $\int T^m f \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ και $\int T^m g \, d\mu \geq 0$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} \int \epsilon \cdot \mathbb{1}_{A_{nm}} T^m g \, d\mu \leq \int f \, d\mu,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon \cdot \mathbb{1}_{A_{nm}} T^m g \, d\mu \leq \int f \, d\mu.$$

Άρα, $\mathbb{1}_{A_{nm}} T^m g \to 0$ σχεδόν παντού. Αν $B_{nm} = \{\omega : T^n(T^m f)(\omega) > \epsilon S_{n+1} T^m g\}$ και επειδή $A_{nm} = B_{nm} \cap \{T^m g > 0\}$ θα πρέπει για σχεδόν κάθε $\omega \in \{T^m g > 0\}$ να ισχύει $\omega \notin \limsup_n B_{nm}$, διαφορετικά θα έχουμε $\mathbb{1}_{A_{nm}} T^m g \not\to 0$. Άρα, για σχεδόν κάθε $\omega \in \{T^m g > 0\}$ θα ισχύει $\omega \in \liminf_n B_{nm}^c$ το οποίο είναι ισοδύναμο με την

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T^n(T^m f)}{S_{n+1} T^m g}(\omega) = 0$$

για σχεδόν κάθε $\omega \in \{T^m g > 0\}$. Παρατηρήστε ότι επειδή η g είναι θετική και ο T θετικός θα έχουμε $g + \ldots + T^{m-1} g \geq 0$. Άρα, $S_{n+1} T^m g = S_{m+n+1} g - (g + \ldots + T^{m-1} g) \leq S_{m+n+1} g$. Επομένως, στο $\{T^m g > 0\}$ έχουμε

$$\frac{T^{n+m} f}{S_{n+m+1} g} \leq \frac{T^n(T^m f)}{S_{n+1} T^m g}.$$

Δηλαδή,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T^n f}{S_{n+1} g}(\omega) = 0$$

για σχεδόν κάθε $\omega \in \{T^m g > 0\}$. Με άλλα λόγια υπάρχει $C_m \subseteq \{T^m g > 0\}$ ώστε $T^n f / S_{n+1} g \to 0$ στο C_m και $\mu(\{T^m g > 0\} \setminus C_m) = 0$. Θέτοντας $C = \cup_{m=0}^{\infty} C_m$ και παρατηρώντας ότι $\cup_{m=0}^{\infty} \{T^m g > 0\} = \{S_\infty g > 0\}$ έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 3.2.4. *Έστω $f, g \in L_1^+$, $n \geq 1$, $g \overset{n}{\to} g_1$, $\gamma > 1$. Τότε,*

$$\{\limsup_n S_n(f - g) > 0\} \subseteq \{\limsup_n S_n(\gamma f - g_1) > 0\} \ (\mathrm{mod}\, \mu). \tag{3.2.5}$$

Απόδειξη. Προχωράμε με επαγωγή στο n. Για $n = 1$, αφού $g \overset{1}{\to} g_1$, υπάρχουν $r, s \in L_1^+$ με $g = r + s$ και $g_1 = r + Ts$. Γράφουμε

$$S_n(\gamma f - g_1) = S_n(\gamma f - r - Ts)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} T^k(\gamma f - r - Ts)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} T^k(\gamma f - r - s) + s - T^{n-1}(Ts).$$

Δηλαδή, $S_n(\gamma f - g_1) = S_n(\gamma f - g) + s - T^{n-1}(Ts)$. Προσθαφαιρώντας το $S_n(f)$ και χρησιμοποιώντας την $s \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} S_n(\gamma f - g_1) &= S_n(\gamma f - g) + s - T^{n-1}(Ts) \\ &\geq (\gamma - 1)S_n(f) - T^{n-1}(Ts) + S_n(f - g). \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 3.2.3 σχεδόν παντού στο σύνολο $\{S_\infty f > 0\}$ έχουμε ότι $T^{n-1}(Ts)/S_n(f) \to 0$. Όμως, $\{\limsup_n S_n(f-g) > 0\} \subseteq \{S_\infty f > 0\}$. Οπότε, θεωρώντας $\omega \in \{\limsup_n S_n(f-g) > 0\}$ με

$$\frac{T^{n-1}(Ts)}{S_n(f)}(\omega) \to 0$$

και επειδή $\gamma - 1 > 0$ μπορούμε να βρούμε n_0 ώστε $T^{n-1}(Ts)(\omega) \leq (\gamma - 1)S_n(f)(\omega)$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε $S_n(\gamma f - g_1)(\omega) \geq S_n(f - g)(\omega)$ απ' όπου έπεται ότι

$$\limsup_n S_n(\gamma f - g_1)(\omega) \geq \limsup_n S_n(f - g)(\omega) \geq 0.$$

Επομένως, για σχεδόν κάθε $\omega \in \{\limsup_n S_n(f-g) > 0\}$ θα έχουμε $\limsup_n S_n(\gamma f - g_1)(\omega) \geq 0$. Με άλλα λόγια, ισχύει η (3.2.5). Υποθέτουμε τώρα ότι η (3.2.5) ισχύει για όλες τις $f, g \in L_1^+$, $h \in L_1$ με $g \overset{n-1}{\to} h$ και όλα τα $\gamma > 1$. Θεωρούμε $\gamma > 1$ και $g \overset{n}{\to} g_1$ με $n \geq 2$. Τότε, θα υπάρχει h με $g \overset{n-1}{\to} h$ και $h \overset{1}{\to} g_1$. Γράφουμε $\gamma = \gamma_1^2$ με $\gamma_1 = \sqrt{\gamma}$. Επειδή, $\gamma > 1$ θα έχουμε $\gamma_1 > 1$. Τότε, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $\mu(A \setminus B) = 0$ και $\mu(B \setminus C) = 0$ όπου $A = \{\limsup_n S_n(f-g) > 0\}$, $B = \{\limsup_n S_n(\gamma_1 f - h) > 0\}$ και $C = \{\limsup_n S_n(\gamma f - g_1) > 0\}$. Τώρα, το επαγωγικό βήμα ολοκληρώνεται από τον εγκλεισμό $A \setminus C \subseteq A \setminus B \cup B \setminus C$. □

Για $H \in \mathscr{A}$, $f \in L_1^+$ και $n \geq 0$ ορίζουμε

$$\Psi_H^n = \sup\left\{\int_H g\,d\mu : f \overset{n}{\to} g\right\} \quad \text{και} \quad \Psi_H = \lim_{n\to\infty} \Psi_H^n.$$

Παρατηρήστε ότι επειδή η $f \overset{n}{\to} g$ συνεπάγεται την $f \overset{n+1}{\to} g$ προκύπτει ότι η ακολουθία Ψ_H^n είναι αύξουσα. Διαισθητικά, Ψ_H^n είναι η μεγιστή δυνατή ποσότητα μάζας που μπορούμε να μεταφέρουμε στο σύνολο H απεικονίζοντας διάφορα κομμάτια της f το πολύ n φορές. Τώρα, επειδή αν $f \overset{1}{\to} g$ με $f \in L_1^+$ θα έχουμε ότι $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$, προκύπτει ότι $\Psi_H f \leq \|f\|_1$. Τέλος, οι Ψ_H^n και Ψ_H είναι θετικά ομογενείς. Δηλαδή, $\Psi_H^n(af) = a\Psi_H^n f$ και $\Psi_H(af) = a\Psi_H(f)$ για κάθε $a > 0$. Με $E_\infty(h)$ συμβολίζουμε την ένωση των συνόλων $E_n(h) = \{M_n h > 0\}$.

Λήμμα 3.2.5. *Για $f, g \in L_1^+$, $h = f - g$ και $n \geq 1$, αν $H \subseteq E_n(h)$ τότε $\Psi_H^{n-1} f \geq \int \mathbb{1}_H g\,d\mu$ και αν $H \subseteq E_\infty(h)$ τότε $\Psi_H f \geq \int \mathbb{1}_H g\,d\mu$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.2.2, η $U^{n-1}h$ είναι μη αρνητική στο σύνολο $E_n(h)$ και από το Λήμμα 3.2.1 έχουμε $U^{n-1}h = f_{n-1} - g$ με $f \overset{n-1}{\to} f_{n-1}$. Αν $H \subseteq E_n(h)$, τότε η $0 \leq \int \mathbb{1}_H U^{n-1}h = \int \mathbb{1}_H (f_{n-1} - g)$ μας δίνει τον πρώτο ισχυρισμό. Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει χρησιμοποιώντας τον πρώτο ισχυρισμό στα σύνολα $H_n = H \cap E_n(h)$ και αφήνοντας το $n \to \infty$. □

Λήμμα 3.2.6. *Αν $H \subseteq \{\limsup_n S_n(f-g) > 0\}$ με $f, g \in L_1^+$ τότε $\Psi_H f \geq \Psi_H g$.*

Απόδειξη. Έστω $n \geq 1$ και $g \overset{n}{\to} g_1$. Τότε, από το Λήμμα 3.2.4 έχουμε

$$\mu(H \setminus \{\limsup_n S_n(\gamma f - g_1) > 0\}) = 0$$

για κάθε $\gamma > 1$. Γράφουμε $H = A \cup B$ με $A = H \setminus \{\limsup_n S_n(\gamma f - g_1) > 0\}$ και $B = H \cap \{\limsup_n S_n(\gamma f - g_1) > 0\}$. Τότε, $B \subseteq E_\infty(\gamma f - g_1)$. Άρα, από το Λήμμα 3.2.5 έχουμε

$$\begin{aligned}\gamma \Psi_B(f) = \Psi_H(\gamma f) &\geq \int \mathbb{1}_B g_1 \, d\mu \\ &= \int \mathbb{1}_H g_1 \, d\mu.\end{aligned}$$

Από τον εγκλεισμό $B \subseteq H$ έπεται ότι $\Psi_H(f) \geq \Psi_B(f)$. Άρα τελικά, $\gamma\Psi_H(f) \geq \int \mathbb{1}_H g_1 \, d\mu$. Αφού το $\gamma > 1$ είναι τυχόν, θα ισχύει $\Psi_H(f) \geq \int \mathbb{1}_H g_1 \, d\mu$ απ' όπου έπεται η $\Psi_H(f) \geq \Psi_H(g)$. □

Με τα παραπάνω εργαλεία είμαστε πια σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα των Chacon-Ornstein.

Θεώρημα 3.2.7 (Chacon-Ornstein). *Έστω T μια θετική συστολή στον L_1, $f \in L_1$ και $g \in L_1^+$. Τότε ο λόγος $S_n f / S_n g$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο σύνολο $\{S_\infty g > 0\}$ σε ένα πεπερασμένο όριο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f \geq 0$. Παρατηρώντας ότι $g \overset{n}{\to} T^n g$ για κάθε $H \subseteq \{S_\infty g > 0\}$ με $\mu(H) > 0$ θα έχουμε $\Psi_H(g) > 0$. Πράγματι, γράφοντας $H = \cup_{n=0}^\infty H \cap A_n$ όπου $A_n = \{T^n g > 0\}$ βρίσκουμε n με $\mu(H \cap A_n) > 0$. Από την $g \overset{n}{\to} T^n g$ έχουμε

$$\Psi_H(g) \geq \int \mathbb{1}_{H \cap A_n} T^n g \, d\mu > 0.$$

Στο σύνολο $\{S_\infty g > 0\}$ θέτουμε $\overline{h} = \limsup(S_n f / S_n g)$ και $\underline{h} = \liminf(S_n f / S_n g)$. Για $a > 0$ στο σύνολο $\{\overline{h} > a\}$ έχουμε ότι $\limsup(S_n(f - ag)/S_n g) > 0$. Αυτό έπεται άμεσα από την παρατήρηση ότι $a = S_n(ag)/S_n g$. Τώρα, επειδή ο T είναι θετικός, η ακολουθία $S_n g$ είναι φθίνουσα. Άρα, αν $\limsup(S_n(f - ag)/S_n g)(\omega) > 0$, αφού $\omega \in \{S_\infty g > 0\}$ θα υπάρχει m με $S_m g(\omega) > 0$. Επομένως, για κάθε $n > m$

$$\frac{S_n(f - ag)}{S_m g}(\omega) \geq \frac{S_n(f - ag)}{S_n g}(\omega),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$(S_m g(\omega))^{-1} \limsup_n S_n(f - ag)(\omega) \geq \limsup_n \frac{S_n(f - ag)}{S_n g}(\omega) > 0.$$

Δηλαδή, $\limsup_n S_n(f - ag)(\omega) > 0$. Άρα, τελικά $\{\overline{h} > a\} \subseteq \{\limsup_n S_n(f - ag)(\omega) > 0\}$. Αν υποθέσουμε τώρα ότι το $\{\overline{h} = \infty\} \cap \{S_\infty g > 0\}$ έχει θετικό μέτρο τότε από το Λήμμα 3.2.6 και τις προηγούμενες παρατηρήσεις έχουμε για κάθε $a > 0$

$$\Psi_H(f) \geq \Psi_H(ag) = a\Psi_H(g) \;\text{ με }\; \Psi_H(g) > 0.$$

Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την $\Psi_H(f) \leq \|f\|_1$. Άρα, $\overline{h} < \infty$ σχεδόν παντού στο $\{S_\infty g > 0\}$. Αν τώρα $\mu(\underline{h} < \overline{h}) > 0$ θα υπάρχουν δύο ρητοί $a < \beta$ με $\mu(\underline{h} < a < \beta < \overline{h}) > 0$. Θέτοντας $G = \{\underline{h} < a < \beta < \overline{h}\}$ όπως προηγουμένως θα έχουμε $G \subseteq \{\limsup S_n(f - \beta g) > 0\}$ και $G \subseteq \{\limsup S_n(ag - f) > 0\}$. Χρησιμοποιώντας πάλι το Λήμμα 3.2.6, έχουμε $a\Psi_G(g) \geq \Psi_G(f)$ και $\Psi_G(f) \geq \beta\Psi_G(g)$ πράγμα το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την $0 < \Psi_G(g) < \infty$. □

3.3 Περιγραφή του ορίου στο θεώρημα Chacon-Ornstein

Στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξαμε ότι για μια θετική συστολή T στον $L_1(\mu)$ και $f \in L_1$, $g \in L_1^+$ η ακολουθία S_nf/S_ng συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\{S_\infty g > 0\}$ σε ένα πεπερασμένο όριο. Σε αυτή την παράγραφο με τη βοήθεια του λήμματος του Brunel δίνουμε μια περιγραφή του ορίου.

Ορισμός 3.3.1 (Μερική εφαρμογή ενός τελεστή)**.** Στον $L_1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ θεωρούμε μια θετική συστολή T και μια μετρήσιμη συνάρτηση a στον Ω με $0 \leq a \leq 1$. Τότε, η απεικόνιση $f \mapsto T_af := af + T((\mathbb{1} - a)f)$ είναι θετική συστολή στον L_1. Ο T_a καλείται μερική εφαρμογή του T.

Παρατήρηστε ότι ο τελεστής γεμίσματος που ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο με $Uf = f^- + Tf^+$ είναι της μορφής $Uf = T_af$ με $a = \mathbb{1}_{\{f<0\}}$. Επίσης, για $f, g \in L_1^+$ η σχέση $f \xrightarrow{1} g$ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μετρήσιμης συνάρτησης $0 \leq a \leq 1$ με $g = T_af$. Η μία κατεύθυνση είναι προφανής. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αν $f \xrightarrow{1} g$ τότε θα υπάρχουν $r, s \in L_1^+$ με $f = r + s$ και $g = r + Ts$. Τότε, η $a = \frac{r}{r+s}\mathbb{1}_{\{f>0\}}$ είναι καλά ορισμένη, μετρήσιμη, με $0 \leq a \leq 1$ και $af + T(\mathbb{1} - a)f = g$. Συνεπώς, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\Psi_E f &= \sup\Big\{\int_E g\,d\mu : f \xrightarrow{n} g\Big\}\\ &= \sup\Big\{\int_E T_{a_n}T_{a_{n-1}}\dots T_{a_1}f\,d\mu\Big\},\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

όπου το sup υπολογίζεται πάνω από όλες τις ακολουθίες που αποτελούνται από n μετρήσιμες συναρτήσεις $a_i : \Omega \to [0, 1]$. Τέλος, αν $a = \mathbb{1}_E$ και I_E είναι ο τελεστής $f \mapsto I_Ef = \mathbb{1}_Ef$, τότε η μερική εφαρμογή $T_E := T_{\mathbb{1}_E}$ του T μπορεί να γραφτεί ως $T_E = I_E + TI_{E^c}$.

Λήμμα 3.3.2. *Για κάθε $f \in L_1^+$ και $n \geq 1$ ισχύει $\Psi_E^n f = \int_E T_E^n f\,d\mu$.*

Απόδειξη. Το λήμμα προκύπτει αν αποδείξουμε ότι

$$\int_E T_E^n T_a f\,d\mu \leq \int_E T_E^{n+1} f\,d\mu \tag{3.3.2}$$

για κάθε $n \geq 0$, $f \in L_1^+$ και οποιαδήποτε μετρήσιμη $a : \Omega \to [0, 1]$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την (3.3.1) έχουμε ότι $\int_E T_E f\,d\mu \leq \Psi_E f$. Οπότε, αν για κάποιο n ισχύει $\int_E T_E^n f\,d\mu \leq \Psi_E^n f$ τότε $\int_E T_E^{n+1} f\,d\mu = \int_E T_E^n T_E f\,d\mu \leq \Psi_E^n T_E f$. Όμως,

$$\begin{aligned}\Psi_E^n T_E f &= \sup\Big\{\int_E T_{a_n}\dots T_{a_1}T_E f\,d\mu\Big\}\\ &\leq \sup\Big\{\int_E T_{a_{n+1}}T_{a_n}\dots T_{a_1} f\,d\mu\Big\}\\ &= \Psi_E^{n+1} f,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\int_E T_E^{n+1} f\,d\mu \leq \Psi_E^{n+1} f$. Δηλαδή, $\int_E T_E^n f\,d\mu \leq \Psi_E^n f$ για κάθε n. Η αντίστροφη ανισότητα $\Psi_E^n f \leq \int_E T_E^n f\,d\mu$ προκύπτει από την (3.3.2). Πράγματι, για $n = 0$ θα έχουμε

$\int_E T_a f\, d\mu \leq \int_E T_E f\, d\mu$ και παίρνοντας sup ως προς όλες τις μετρήσιμες $a : \Omega \to [0, 1]$ θα έχουμε $\Psi_E f \leq \int_E T_E f\, d\mu$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, αν για κάποιο n ισχύει $\Psi_E^n f \leq \int_E T_E^n f\, d\mu$ τότε

$$\begin{aligned} \int_E T_E^{n+1} f\, d\mu &\geq \int_E T_E^n T_a f\, d\mu \\ &\geq \Psi_E^n(T_a f) \\ &= \sup\Big\{ \int_E T_{a_n} \dots T_{a_1} T_a f\, d\mu \Big\}, \end{aligned}$$

όπου επειδή οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν για κάθε μετρήσιμη $a : \Omega \to [0, 1]$ θα έχουμε από την (3.3.1) ότι $\int_E T_E^{n+1} f\, d\mu \geq \Psi_E^{n+1} f$. Για την απόδειξη της (3.3.2) θεωρούμε $\beta = a\mathbb{1}_E$ και ισχυριζόμαστε ότι

$$T_E^n T_\beta f - T_E^n T_a f = (TI_{E^c})^{n+1}(af) - I_{E^c}(TI_{E^c})^n(af) \tag{3.3.3}$$

για κάθε $n \geq 0$. Πράγματι, για $n = 0$,

$$\begin{aligned} T_\beta f - T_a f &= \beta f + T(\mathbb{1} - \beta) f - af - T(\mathbb{1} - af \\ &= T(\mathbb{1}_{E^c} af) - \mathbb{1}_{E^c} af \end{aligned}$$

Αν η (3.3.3) ισχύει για κάποιο n, τότε

$$\begin{aligned} T_E^{n+1} T_\beta f - T_E^{n+1} T_a f &= (I_E + TI_{E^c})((TI_{E^c})^{n+1}(af) - I_{E^c}(TI_{E^c})^n(af) \\ &= (TI_{E^c})^{n+2}(af) + I_E(TI_{E^c})^{n+1}(af) - (TI_{E^c})I_{E^c}(TI_{E^c})^n(af) \\ &= (TI_{E^c})^{n+2}(af) - I_{E^c}(TI_{E^c})^{n+1}(af) \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το επαγωγικό βήμα. Τώρα, πολλαπλασιάζοντας την (3.3.3) με την $\mathbb{1}_E$ έχουμε

$$\mathbb{1}_E T_E^n T_\beta f - \mathbb{1}_E T_E^n T_a f = \mathbb{1}_E (TI_{E^c})^{n+1}(af),$$

όμως επειδή $\mathbb{1}_E(TI_{E^c})^{n+1}(af) \geq 0$ θα έχουμε ότι $\mathbb{1}_E T_E^n T_a f \leq \mathbb{1}_E T_E^n T_\beta f$. Η τελευταία ανισότητα μας επιτρέπει να δείξουμε την (3.3.2) μόνο για τις μετρήσιμες $a : \Omega \to [0, 1]$ για τις οποίες $\mathbb{1}_{E^c} a = 0$. Πράγματι, αν έχουμε την (3.3.2) για αυτές, θεωρώντας την $\beta = \mathbb{1}_E a$ θα έχουμε ότι $\int_E T_E^n T_a f\, d\mu \leq \int_E T_E^n T_\beta f\, d\mu \leq \int_E T_E^{n+1} f\, d\mu$. Επομένως, αν $\mathbb{1}_{E^c} a = 0$ τότε χρησιμοποιώντας διαδοχικά τον T_E θα έχουμε

$$\begin{aligned} T_E f - T_a f &= (\mathbb{1}_E - a) f - T(\mathbb{1}_E - a) f \\ T_E^2 f - T_E T_a f &= (\mathbb{1}_E - a) f - T_E T(\mathbb{1}_E - a) f \\ T_E^{n+1} f - T_E^n T_a f &= (\mathbb{1}_E - a) f - T_E^n T(\mathbb{1}_E - a) f. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Όμως, επειδή οι T_E^n, T είναι συστολές θα έχουμε

$$\int_E T_E^n T f(\mathbb{1}_E - a)\, d\mu \leq \int_\Omega f(\mathbb{1}_E - a)\, d\mu = \int_E f(\mathbb{1}_E - a)\, d\mu. \tag{3.3.5}$$

Ολοκληρώνοντας την (3.3.4) και χρησιμοποιώντας την (3.3.5) και την $\int_E T_E^n T(\mathbb{1}_E - a) f \geq 0$ θα έχουμε

$$\int_E T_E^n T_a f\, d\mu \leq \int_E T_E^{n+1} f\, d\mu.$$

□

Από εδώ και στο εξής θεωρούμε ότι το μέτρο μ είναι σ-πεπερασμένο. Ταυτίζοντας τον L_1^* με τον L_∞ θυμίζουμε πως $T^* : L_\infty \to L_\infty$ είναι ο συζυγής τελεστής του T (βλ. (3.1.8)) ο οποίος χαρακτηρίζεται από τη σχέση

$$\int_\Omega Tf \cdot h\, d\mu = \int_\Omega f \cdot T^* h\, d\mu \quad \text{για } f \in L_1,\ h \in L_\infty.$$

Συμβολικά, $\langle Tf, h\rangle = \langle f, T^*h\rangle$. Στην περίπτωση που ο T είναι θετική συστολή έχουμε ότι ο T^* είναι υπο-Μαρκοβιανός τελεστής με $T^*\mathbb{1} \le \mathbb{1}$ (βλ. (3.1.6)). Παρατηρήστε ότι ο τελεστής I_E που ορίστηκε παραπάνω είναι μια θετική συστολή και $(I_E)^*h = \mathbb{1}_E \cdot h$ για κάθε $h \in L_\infty$. Επαγωγικά και εφαρμόζοντας διαδοχικά τον T_E έχουμε

$$T_E^n = \sum_{i=0}^{n-1} I_E (TI_{E^c})^i + (TI_{E^c})^n. \tag{3.3.6}$$

Επομένως, από το Λήμμα 3.3.2 έχουμε για κάθε $f \in L_1^+$

$$\Psi_E^n f = \int_E \sum_{i=0}^{n} (TI_{E^c})^i f\, d\mu = \int f\psi_E^n\, d\mu \tag{3.3.7}$$

και

$$\Psi_E f = \lim_n \Psi_E^n f = \int_E \sum_{i=0}^{\infty} (TI_{E^c})^i f\, d\mu = \int f\psi_E\, d\mu, \tag{3.3.8}$$

όπου $\psi_E^n := \sum_{i=0}^n (I_{E^c}T^*)^i \mathbb{1}_E$ και $\psi_E := \lim_n \psi_E^n = \sum_{i=0}^\infty (I_{E^c}T^*)^i \mathbb{1}_E$.

Παρατηρήσεις 3.3.3. Παρατηρήστε ότι $\psi_E^n \le \mathbb{1}$ για κάθε $n \ge 0$. Πράγματι, για $n = 0$ έχουμε $\psi_E^0 = \mathbb{1}_E \le \mathbb{1}$. Αν $\psi_E^n \le \mathbb{1}$ για κάποιο n, τότε επειδή ο T^* είναι θετικός θα έχουμε $T^*\psi_E^n \le \mathbb{1}$. Επομένως, $\mathbb{1} \ge \mathbb{1}_E \vee T^*\psi_E^n = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_{E^c}T^*\psi_E^n = \psi_E^{n+1}$. Επίσης, η ψ_E είναι η μικρότερη υπεραρμονική συνάρτηση που βρίσκεται πάνω από την $\mathbb{1}_E$. Πράγματι, από τα παραπάνω έχουμε $\mathbb{1}_E \le \psi_E^n \le \mathbb{1}_E \vee T^*\psi_E^n = \psi_E^{n+1} \le \psi_E$. Άρα, η ψ_E^n είναι αύξουσα και $T^*\psi_E^n \le \psi_E^{n+1}$. Επομένως, αφού $\lim_n \psi_E^n = \psi_E$ έχουμε $T^*\psi_E^n = \lim_n T^*\psi_E^n \le \lim_n \psi_E^{n+1} = \psi_E$. Άρα, η ψ_E είναι υπεραρμονική με $\psi_E \ge \mathbb{1}_E$. Αν τώρα $h \ge \mathbb{1}_E$ για κάποια υπεραρμονική h τότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\psi_E^{n+1} = \mathbb{1}_E \vee T^*\psi_E^n$ δείχνουμε επαγωγικά ότι $\psi_E^n \le h$, απ' όπου έπεται ότι $\psi_E \le h$.

Τώρα, με τη βοήθεια των (3.2.6) και (3.3.2) μπορούμε να αποδείξουμε το λήμμα του Brunel.

Θεώρημα 3.3.4 (Λήμμα του Brunel)**.** *Έστω T μια θετική συστολή στον $L_1(\mu)$ με το μ σ-πεπερασμένο και $f \in L_1(\mu)$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο σύνολο E με $E \subsetneq \{\omega \in \Omega : S_nf(\omega) > 0$ για άπειρα $n\}$ ισχύει $\int f\psi_E\, d\mu \ge 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια γνήσια θετική συνάρτηση $p \in L_1$. Τέτοια συνάρτηση υπάρχει αφού μπορούμε να βρούμε ξένα ανα δύο (A_n) με $\cup_{n=1}^\infty = \Omega$ και να πάρουμε $p = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \cdot \mathbb{1}_{A_n}$. Για κάθε $\epsilon > 0$ θέτουμε $f_\epsilon = f + \epsilon p$. Αφού η p είναι γνήσια θετική και ο T θετικός, έχουμε $S_np(\omega) \ge p(\omega) > 0$ για κάθε ω. Άρα, αν $\omega \in E$ αφού $S_nf(\omega) > 0$ για άπειρα n, θα έχουμε και $\limsup_n S_nf(\omega) \ge 0$. Όμως τότε,

$$\begin{aligned}
\limsup_n S_n(f_\epsilon)(\omega) &= \limsup_n S_n(f + \epsilon p)(\omega) \\
&= \limsup_n (S_nf(\omega) + \epsilon S_np(\omega)) \\
&\ge \limsup_n S_nf(\omega) + \epsilon p(\omega) \\
&\ge \epsilon p(\omega) > 0.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, $E \subseteq \{\omega : \limsup_n S_n(f_\epsilon)(\omega) > 0\}$. Γράφοντας $f_\epsilon = f_\epsilon^+ - f_\epsilon^-$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.6 έχουμε

$$\Psi_E f_\epsilon^+ \geq \Psi_E f_\epsilon^- . \tag{3.3.9}$$

Γράφοντας $f_\epsilon^+ = f_\epsilon \vee 0 = (|f_\epsilon| + f_\epsilon)/2$ και παρατηρώντας ότι $f_{\epsilon'} < f_\epsilon$ για κάθε $\epsilon' < \epsilon$ και $|f_\epsilon| \to |f|$, $f_\epsilon \to f$ καθώς το $\epsilon \to 0$ έχουμε ότι $f_\epsilon^+ \searrow f^+$ για $\epsilon \to 0$. Με παρόμοιο τρόπο, έχουμε $f_\epsilon^- \nearrow f^-$ για $\epsilon \to 0$. Από την $\psi_E^n \leq \mathbb{1}$ έπεται ότι $\psi_E \leq \mathbb{1}$. Δηλαδή, η ψ_E ανήκει στον L_∞. Άρα, για κάθε $\epsilon < \epsilon_0$ έπεται ότι

$$|f_\epsilon^+ - f^+|\psi_E \leq 2f_{\epsilon_0}^+ \psi_E$$

και επειδή η τελευταία συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης θα έχουμε ότι

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int f_\epsilon^+ \psi_E \, d\mu = \int f^+ \psi_E \, d\mu.$$

Με ανάλογο τρόπο, $\lim_{\epsilon \to 0} \int f_\epsilon^- \psi_E \, d\mu = \int f^- \psi_E \, d\mu$. Χρησιμοποιώντας τώρα την (3.3.8) και την (3.3.9) έχουμε

$$\begin{aligned} \int f^+ \psi_E \, d\mu &= \lim_{\epsilon \to 0} \int f_\epsilon^+ \psi_E \, d\mu = \lim_\epsilon \Psi_E f_\epsilon^+ \geq \lim_\epsilon \Psi_E f_\epsilon^- \\ &= \lim_\epsilon \int f_\epsilon^- \psi_E \, d\mu = \int f^- \psi_E \, d\mu \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας με αυτό τον τρόπο την απόδειξη. □

Παρατήρηση 3.3.5. Για μια θετική συστολή T στον $L_1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ θεωρούμε την οικόγενεια $\mathscr{E}$ όλων των $T-$απορροφούντων υποσυνόλων του C, όπου C το συντηρητικό κομμάτι του T. Στην περίπτωση που $\Omega = C$, δηλαδή όταν ο T είναι συντηρητικός, η $\mathscr{E}$ είναι μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathscr{A}$.

Απόδειξη. Πράγματι, αφού ο T είναι συντηρητικός, από την (C1) (βλ. (3.1.8)) θα έχουμε $T^*\mathbb{1} = \mathbb{1}$. Επίσης, από το Θεώρημα 3.1.13 έχουμε ότι $A \in \mathscr{E}$ ανν $T^*\mathbb{1}_{A^c} \leq \mathbb{1}_{A^c}$. Άρα, αν $A \in \mathscr{E}$ θα έχουμε $T^*\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_{A^c}$ όμως $\mathbb{1}_A = \mathbb{1} - \mathbb{1}_{A^c} = T^*(\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A^c}) = T^*\mathbb{1}_A$ απ' όπου έπεται ότι $A^c \in \mathscr{E}$. Αν (A_n) είναι μια φθίνουσα ακολουθία μέσα στην $\mathscr{E}$ και $A = \cap_{n=1}^\infty A_n$ θα έχουμε $\mathbb{1}_{A_n} \searrow \mathbb{1}_A$. Όμως, ο T^* είναι υπο-Μαρκοβιανός, άρα $T^*\mathbb{1}_{A_n} \searrow T^*\mathbb{1}_A$. Επειδή, $T^*\mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{A_n}$ θα έχουμε $T^*\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$ απ' όπου έπεται ότι $A \in \mathscr{E}$. □

Λήμμα 3.3.6. *Υποθέτουμε ότι $\Omega = C$. Τότε, μια συνάρτηση $h \in L_\infty$ είναι αρμονική αν και μόνο αν είναι $\mathscr{E}-$μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Αν $h = T^*h$ τότε οι $T^*h^+ \geq h$ και $T^*h^+ \geq 0$ μας δίνουν $T^*h^+ \geq h^+$. Άρα, η $g = \|h\|_\infty \mathbb{1} - h^+$ είναι υπερ-αρμονική και άρα αρμονική (αφού $\Omega = C$). Οπότε, $T^*h^+ = h^+$. Άρα, αν $B = \{h > 0\}$ τότε,

$$\begin{aligned} T^*\mathbb{1}_B &= T^*(\lim_n (nh^+ \wedge \mathbb{1}) \\ &= \lim_n T^*(nh^+ \wedge \mathbb{1}) \\ &\leq \lim_n (nh^* \wedge \mathbb{1}) = \mathbb{1}_B, \end{aligned}$$

το οποίο με τη σειρά του μας δίνει ότι $T^*\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_B$. Δηλαδή, $B \in \mathscr{E}$. Εφαρμόζοντας το ίδιο στην $h - a$ καταλήγουμε στην $\{h > a\} \in \mathscr{E}$ για κάθε a. Για την αντίστροφη κατεύθυνση προσεγγίζουμε την h με απλές συναρτήσεις h_n για τις οποίες η $T^*h_n = h_n$ είναι προφανής. □

Σε αυτό το σημείο να κάνουμε κάποιες υπενθυμίσεις σχετικά με το θεώρημα Radon-Nikodym που θα μας χρειαστούν στα παρακάτω: Αν $(\Omega, \mathscr{A})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος και ν_1, ν_2 δύο πεπερασμένα θετικά μέτρα, τότε γνωρίζουμε πως υπάρχει μια ν_1-σχεδόν παντού μοναδική ολοκληρώσιμη συνάρτηση h και ένα θετικό πεπερασμένο μέτρο με $\lambda \perp \nu_1$ ώστε

$$\nu_2(A) = \int_A h \, d\nu_1 + \lambda(A) \tag{3.3.10}$$

για κάθε $A \in \mathscr{A}$. Η παραπάνω διάσπαση καλείται διάσπαση Lebesgue του ν_2 ως προς το ν_1 και είναι μοναδική, υπό την έννοια ότι αν $\nu_2 = h' d\nu_1 + \lambda'$ με $\lambda' \perp \nu_1$, τότε $h = h'$ σχεδόν παντού και $\lambda = \lambda'$. Αν τώρα, $B \subseteq \Omega$, $B \in \mathscr{A}$ και αν θεωρήσουμε τον μετρήσιμο χώρο $(B, \mathscr{A} \cap B)$ τότε η Lebesgue διάσπαση του $\nu_2|_{\mathscr{A}\cap B}$ ως προς το $\nu_2|_{\mathscr{A}\cap B}$ είναι η

$$\nu_2(A \cap B) = \int_{A\cap B} h \, d\nu_1 + \lambda(A \cap B) \tag{3.3.11}$$

Με τη βοήθεια του λήμματος του Brunel και τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε να δώσουμε μια περιγραφή του $\lim S_n(f)/S_n(g)$ στην περίπτωση που ο T είναι συντηρητικός.

Θεώρημα 3.3.7 (Neveu-Chacon-περίπτωση $\Omega = C$)**.** *Έστω T μια θετική συστολή στον $L_1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ με μ σ-πεπερασμένο και $\Omega = C$. Για $f \in L_1(\mu)$, $g \in L_1^+(\mu)$ θεωρούμε την διάσπαση Lebesgue*

$$fd\mu = h(gd\mu) + \lambda \tag{3.3.12}$$

του $fd\mu$ ως προς το $gd\mu$. Τότε, αν $A = \{S_\infty g > 0\}$ και $\mathscr{E}$ είναι η υπο-σ-άλγεβρα των $T-$απορροφούντων υποσυνόλων του Ω έχουμε ότι $(fd\mu)|_{\mathscr{E}\cap A} \ll (gd\mu)|_{\mathscr{E}\cap A}$ και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n f}{S_n g} = h = \frac{d\big((fd\mu)|_{\mathscr{E}\cap A}\big)}{d\big((gd\mu)\big|_{\mathscr{E}\cap A}\big)} \tag{3.3.13}$$

$\mu-$σχεδόν παντού στο A. Στην περίπτωση που το μ είναι πεπερασμένο έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n f}{S_n g} = \frac{\mathbb{E}(f\,|\,\mathscr{E})}{\mathbb{E}(g\,|\,\mathscr{E})} \tag{3.3.14}$$

σχεδόν παντού στο σύνολο A.

Απόδειξη. Πρώτα δείχνουμε ότι $A \in \mathscr{E}$. Θεωρούμε μια $t \in L_1(A)$. Τότε, απ' την (C3) του Θεωρήματος 3.1.10 έχουμε $S_n g \to \infty$ στο A. Άρα, για την $t_n = h \wedge S_n g$ έχουμε $t_n \nearrow t$ στο A. Απ' τον εγκλεισμό $\{t \neq 0\} \subseteq A$ έχουμε $t = 0$ στο A^c. Επομένως, αφού $S_n g = 0$ στο A^c η $t_n \nearrow t$ θα ισχύει και στο A^c. Άρα, $t_n \nearrow t$ στον Ω. Όμως, ο T είναι θετικός. Άρα, $Tt_n \nearrow Tt$. Από την $t_n \leq S_n g$ έχουμε και $Tt_n \leq S_{n+1} g$. Όμως, $S_n g = 0$ στο A^c, απ' όπου έπεται ότι $Tt_n = 0$ στο A^c, το οποίο με τη σειρά του μας δίνει ότι $Tt = 0$ στο A^c. Άρα, $\{Tt \neq 0\} \subseteq A$ απ' όπου έπεται ότι το A είναι $T-$ απορροφούν. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \geq 0$. Τότε, από το Θεώρημα 3.2.7 έχουμε $\lim_n S_n(f)/S_n(g) \in [0, \infty)$ στο A. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_m : m \in \mathbb{N}\}$ των ρητών του $[0, \infty)$. Για $k \geq 1$ θεωρούμε τα σύνολα

$$B_m^k = \left\{\omega \in A : -1/k + q_m < \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(f)(\omega)}{S_n(g)(\omega)} < 1/k + q_m\right\}$$

Παρατηρήστε ότι για k σταθερό, $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m^k = A$. Σταθεροποιούμε ένα ζευγάρι k, m και γράφουμε χάριν συντομίας $B = B_m^k$ και $\alpha = -1/k + q_m$, $\beta = 1/k + q_m$. Στο B έχουμε $S_n(f - \alpha g) > 0$ για άπειρα n. Συνεπώς, από το λήμμα του Brunel

$$\int (f - \alpha g) \cdot \psi_B \, d\mu \geq 0. \tag{3.3.15}$$

Θέτουμε $B' = \{\psi_B = 1\}$. Από τις Παρατηρήσεις 3.3.3 η ψ_B είναι η μικρότερη υπεραρμονική που βρίσκεται πάνω από την $\mathbb{1}_B$. Αφού ο T είναι συντηρητικός, η ψ_B είναι αρμονική, και άρα $\mathscr{E}$-μετρήσιμη (Λήμμα 3.3.6). Άρα, ο εγκλεισμός, $B \subseteq B' \in \mathscr{E}$ και η $\mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_{B'} = T^*\mathbb{1}_{B'}$ μας δίνουν $\psi_B \leq \mathbb{1}_{B'}$. Επομένως, $\psi_B = \mathbb{1}_{B'}$. Άρα, η (3.3.15) γίνεται

$$\int (f - \alpha g) \cdot \mathbb{1}_{B'} \, d\mu \geq 0. \tag{3.3.16}$$

Αντικαθιστώντας το B' με το $B' \cap G$ για $G \in \mathscr{E}$, με ανάλογο επιχείρημα έχουμε

$$\int_{B' \cap G} (f - \alpha g) \, d\mu \geq 0. \tag{3.3.17}$$

Ανάλογα, δουλέυοντας με την $(\beta g - f)$ έχουμε και

$$\int_{B' \cap G} (\beta g - f) \, d\mu \geq 0. \tag{3.3.18}$$

Συμπτύσσοντας τις παραπάνω σε μια ανίσωση παίρνουμε

$$\alpha \int_{B' \cap G} g \, d\mu \leq \int_{B' \cap G} f \, d\mu \leq \beta \int_{B' \cap G} g \, d\mu \tag{3.3.19}$$

για κάθε $G \in \mathscr{E}$. Η τελευταία δείχνει ότι $f d\mu \ll g d\mu$ στον $(B', B' \cap \mathscr{E})$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η (3.3.12) ισχύει για την $B' \cap \mathscr{E}$ και τη μοναδικότητα της διάσπασης Lebesgue στον $(B', B' \cap \mathscr{E})$ συμπεραίνουμε ότι $h = \frac{d(fd\mu)}{d(gd\mu)}$ σχεδόν παντού στο B' και $\mathfrak{H}(B' \cap G) = 0$ για κάθε $G \in \mathscr{E}$. Άρα,

$$\int_{B' \cap G} f \, d\mu = \int_{B' \cap G} h \, d(g\mu) = \int_{B' \cap G} h \cdot g \, d\mu$$

για κάθε $G \in \mathscr{E}$. Επομένως, από την (3.3.19) καταλήγουμε στο ότι $\alpha \leq h \leq \beta$ σχεδόν παντού στο B'. Αφού η f είναι μη αρνητική, το $\mathfrak{H}$ είναι και αυτό θετικό. Άρα, αφού $B_m^k = B \subseteq B'$ και $\mathfrak{H}(B' \cap G) = 0$ θα έχουμε και $\mathfrak{H}(B_m^k \cap G) = 0$. Επομένως, από την $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m^k$ προκύπτει ότι $\mathfrak{H}(A \cap G) = 0$ για κάθε $G \in \mathscr{E}$. Αυτή η παρατήρηση, μαζί με την (3.3.12) μας δίνουν ότι $(fd\mu)|_{\mathscr{E} \cap A} \ll (gd\mu)|_{\mathscr{E} \cap A}$. Μένει να δείξουμε την (3.3.13). Έχουμε δείξει προς το παρόν ότι $h = \frac{d(fd\mu)|_{\mathscr{E} \cap A}}{d(gd\mu)|_{\mathscr{E} \cap A}}$ σχεδόν παντού στο B' και $\alpha \leq h \leq \beta$ στο B'. Επειδή $B_m^k \subseteq B'$ τα παραπάνω θα ισχύουν και σχεδόν παντού στο B_m^k. Επομένως, θα ισχύουν και σχεδόν παντού στο $A = B^k = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m^k$ για κάθε k. Άρα, θα υπάρχουν $\Gamma^k \subseteq B^k$ με $\mu(\Gamma^k) = 0$ και

$$\left| \frac{d(fd\mu)|_{\mathscr{E}}}{d(gd\mu)|_{\mathscr{E}}}(\omega) - \lim_{n \to \infty} \frac{S_n f}{S_n g}(\omega) \right| = \left| h(\omega) - \lim_{n \to \infty} \frac{S_n f}{S_n g}(\omega) \right| \leq \frac{1}{k}$$

για κάθε $\omega \in B^k \setminus \Gamma^k$. Θέτοντας, $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma^k$ έχουμε $\Gamma \subseteq A$, $\mu(\Gamma) = 0$ και

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n f}{S_n g} = h = \frac{d(fd\mu)|_{\mathscr{E}}}{d(gd\mu)|_{\mathscr{E}}}$$

στο $A \setminus \Gamma$. Για γενική $f \in L_1(\mu)$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$ και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $fd\mu = f^+ d\mu - f^- d\mu$. Αν τώρα το μ είναι πεπερασμένο, τότε οι $\mathbb{E}(f\,|\,\mathscr{E})$, $\mathbb{E}(g|\mathscr{E})$ ορίζονται καλά. Ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια βήματα όπως προηγουμένως, καταλήγουμε πάλι στην (3.3.19) όπου τώρα επειδή B', $G \in \mathscr{E}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha \int_{B'\cap G} \mathbb{E}(g|\mathscr{E})\, d\mu \leq \int_{B'\cap G} \mathbb{E}(f\,|\,\mathscr{E})\, d\mu \leq \beta \int_{B'\cap G} \mathbb{E}(g|\mathscr{E})\, d\mu \tag{3.3.20}$$

η οποία μας δίνει $\alpha\mathbb{E}(g|\mathscr{E}) \leq \mathbb{E}(f\,|\,\mathscr{E}) \leq \beta\mathbb{E}(g|\mathscr{E})$ σχεδόν παντού στο B'. Για να τελειώσουμε το επιχείρημα, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{E}(g|\mathscr{E}) > 0$ σχεδόν παντού στο A. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει $F \in \mathscr{E}$ με $F \subseteq A$, $\mu(F) > 0$ και $\mathbb{E}(g|\mathscr{E}) = 0$ στο F. Τότε,

$$\int_F g\, d\mu = \int_F \mathbb{E}(g|\mathscr{E})\, d\mu = 0$$

απ' όπου έπεται ότι $g = 0$ στο F. Επειδή το F είναι απορροφούν, απο το Θεώρημα 3.1.13 και χρησιμοποιώντας διαδοχικά τον T έχουμε $(T^*)^m \mathbb{1}_F \leq \mathbb{1}_F$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_F T^m g\, d\mu &= \int T^m g \cdot \mathbb{1}_F\, d\mu \\ &= \int g \cdot (T^*)^m \mathbb{1}_F\, d\mu \\ &\leq \int g \cdot \mathbb{1}_F\, d\mu = 0,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $T^m g = 0$ στο F. Άρα, (σχεδόν παντού) στο F έχουμε $S_\infty g = 0$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με τον εγκλεισμό $F \subseteq A$. □

Πριν συζητήσουμε και τη γενική περίπτωση που $\Omega \neq C$ να κάνουμε κάποια σχόλια σχετικά με το προηγούμενο θεώρημα.

Το πρώτο σχόλιο είναι πως αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, τότε μπορούμε από την περιγραφή της (3.3.13) να περάσουμε στην (3.3.14). Αυτό μπορεί να γίνει θεωρώντας μια γνήσια θετική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση $p \in L_1(\mu)$ με $\int p\, d\mu = 1$ (π.χ. την $p = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\mathbb{1}_{A_n}}{\mu(A_n)}$ για $0 < \mu(A_n) < \infty$ και $A_n \nearrow \Omega$). Τότε, τα μέτρα $\mu' = pd\mu$, μ έχουν τα ίδια μ−μηδενικά σύνολα, το $pd\mu$ είναι μέτρο πιθανότητας και $\mu = p^{-1}d\mu'$. Άρα, η $S : L_1(\mu) \to L_1(\mu')$ με $Sf = p^{-1}f$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Θεωρούμε τον $T' : L_1(\mu') \to L_1(\mu')$ με $T' = S \circ T \circ S^{-1}$, ο οποίος είναι μια θετική συστολή στον $L_1(\mu')$. Εύκολα βλέπουμε ότι $T'f' = p^{-1}T(pf')$ και $(T')^n f' = p^{-1}T^n(pf')$ και επομένως, $T(f) = pT'(p^{-1}f)$ και $T^n(f) = p(T')^n(p^{-1}f)$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε πως οι T, T' έχουν το ίδιο συντηρητικό κομμάτι C και τα ίδια απορροφούντα σύνολα. Συνεπώς, αν ο T είναι συντηρητικός σύμφωνα με τις προηγούμενες παρατηρήσεις και την (3.3.14) έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n f}{S_n g} = \frac{\mathbb{E}(p^{-1}f\,|\,\mathscr{E})}{\mathbb{E}(p^{-1}g\,|\,\mathscr{E})} \tag{3.3.21}$$

σχεδόν παντού στο $\{S_\infty g > 0\}$. Εδώ φυσικά οι παραπάνω δεσμευμένες τιμές χαρακτηρίζονται από την

$$\int_G \mathbb{E}(p^{-1}f\,|\,\mathscr{E})\, d\mu = \int_G p^{-1}f\, d\mu$$

για κάθε $G \in \mathscr{E}$. Το δευτέρο σχόλιο έχει να κάνει με την κατά σημείο σύγκλιση των μέσων όρων της μορφής $A_n(f) = n^{-1}S_n(f)$, όπου φυσιολογικά θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς γιατί γίνεται η μελέτη του λόγου $S_n(f)/S_n(g)$ αντί του $A_n(f)$. Ένας λόγος είναι πως αν υπάρχει μια γνήσια θετική ολοκλήρωσιμη συνάρτηση p με $Tp = p$, τότε $A_n f = p\frac{S_n f}{S_n p}$ και επομένως η σύγκλιση των $A_n(f)$ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση των $S_n f/S_n p$. Στην περίπτωση που δε βάλουμε κάποια υπόθεση για τον T μπορεί το $\lim_n A_n(f)$ να αποκλίνει σχεδόν παντού. (βλ. [13] σελ.151).

Επιστρέφοντας πάλι στη συνθήκη $Tp = p$ παρατηρήστε ότι αυτή μας δίνει το εξής: Αν $f \in L_1(\mu)$ με $|f| \leq p$ τότε $|Tf| \leq p$. Για να το δούμε αυτό, επειδή ο T είναι θετικός, έχουμε σε πρώτη φάση ότι $T|f| \leq p$ για $|f| \leq p$. Όμως, $|Tf| = |Tf^+ - Tf^-| \leq Tf^+ + Tf^- = T|f|$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. Από το Θεώρημα 2.1.6 γνωρίζουμε ότι η $A_n(f)$ συγκλίνει στον $L_1(\mu)$ σε μια T-αναλλοίωτη συνάρτηση $\tilde{f}$. Με το Θεώρημα 3.3.7 μπορούμε να περιγράψουμε την $\tilde{f}$:

Θεώρημα 3.3.8. Έστω T μια θετική συστολή στον $L_1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ με το μ σ-πεπερασμένο. Υποθέτουμε πως υπάρχει μια γνήσια θετική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση p με $Tp = p$. Τότε, ο T είναι συντηρητικός, και για $f \in L_1(\mu)$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f) = p \cdot \frac{d((f \cdot d\mu)|_{\mathscr{E}\cap A})}{d((p \cdot d\mu)|_{\mathscr{E}\cap A})} = p \cdot \mathbb{E}(p^{-1} f \,|\, \mathscr{E}) \tag{3.3.22}$$

σχεδόν παντού στον Ω.

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι ο T είναι συντηρητικός, τότε από την $A_n(f) = p\frac{S_n f}{S_n p}$ και τις (3.3.13),(3.3.21) έχουμε το ζητούμενο. Για να δείξουμε ότι ο T είναι συντηρητικός, από το Θεώρημα 3.1.8 αρκεί να δείξουμε ότι κάθε υπερ-αρμονική $T^*h \leq h$ είναι αρμονική στον Ω. Γι' αυτό γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega p \cdot h\, d\mu &= \int_\Omega Tp \cdot h\, d\mu \\ &= \int_\Omega p \cdot T^* h\, d\mu.\end{aligned}$$

Δηλαδή, $\int_\Omega p \cdot (h - T^*h)\, d\mu = 0$ και επειδή $p > 0$ και $h \geq T^*h$ θα έχουμε υποχρεωτικά $T^*h = h$. □

Τέλος, κλείνουμε αυτή την παράγραφο διατυπώνοντας το θεώρημα Neveu-Chacon στην πλήρη γενικότητά του, όπου ο T δεν είναι συντηρητικός, παραπέποντας για την αποδειξή του στο [13] για την αποδειξή του. Παρακάτω, με H_C συμβολίζουμε τη θετική συστολή στον L_1 που ορίζεται από την $I_C(\sum_{n=1}^\infty (TI_{C^c})^n)$, όπου I_A ο τελεστής με $f \mapsto f \cdot \mathbb{1}_A$.

Θεώρημα 3.3.9 (Neveu-Chacon). *Έστω T μια θετική συστολή στον $L_1(\mu)$ με το μ σ-πεπερασμένο και έστω C το συντηρητικό κομμάτι του T. Τότε, για $f \in L_1(\mu)$ και $g \in L_1^+(\mu)$ έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n f}{S_n g} = \frac{d((H_C f) d\mu|_{\mathscr{E}})}{d\,(H_C g) d\mu|_{\mathscr{E}})}$$

σχεδόν παντού στο σύνολο $C \cap \{S_\infty > 0\}$, όπου $\mathscr{E}$ είναι η οικογένεια των $T-$απορροφούντων υποσυνόλων του C.

Παράρτημα

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄

Τοπολογικοί Διανυσματικοί Χώροι

Α΄.1 Βασικοί Ορισμοί και Ιδιότητες

Όπως οι τοπολογικοί χώροι αποτελούν γενίκευση των μετρικών χώρων έτσι και οι τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι αποτελούν γενίκευση των χώρων με νόρμα. Σε αυτό το σημείο δίνουμε τον ορισμό του τοπολογικού διανυσματικού χώρου και αναπτύσσουμε τις βασικές ιδιότητες που είναι απαραίτητες για τη βασική θεωρία της εργασίας.

Ορισμός Α΄.1.1 (Τοπολογικός Διανυσματικός Χώρος)**.** Έστω $(X, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{F}$ ($= \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) και $\mathcal{T}$ μια τοπολογία στον X ως προς την οποία οι πράξεις της πρόσθεσης $+ : X \times X \to X$ και του πολλαπλασιασμού $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ είναι συνεχείς (όπου στους $X \times X$ και $\mathbb{F} \times X$ θεωρούμε την καρτεσιανή τοπολογία). Τότε, η τετράδα $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$ θα καλείται τοπολογικός διανυσματικός χώρος.

Μια άμεση αλλά και χρήσιμη συνέπεια του ορισμού Α΄.1.1 είναι ότι οι απεικονίσεις μεταφοράς $T_x : X \to X$ με $T_x(y) = y + x$ και επιμήκυνσης $L_{\lambda} : X \to X$ με $L_{\lambda}(y) = \lambda y$ για $\lambda \neq 0$ είναι ομοιομορφισμοί του X.
Πράγματι, είναι φανερό ότι οι παραπάνω απεικονίσεις είναι $1-1$ και επί του X αφού $T_x \circ T_{-x} = T_{-x} \circ T_x = I_X$ και $L_{\lambda} \circ L_{\lambda^{-1}} = L_{\lambda^{-1}} \circ L_{\lambda} = I_X$. Για τη συνέχεια της T_x θεωρούμε ένα ανοικτό σύνολο G με $T_x(y) = x + y \in G$. Τότε, απ' τη συνέχεια της πρόσθεσης θα υπάρχουν δύο ανοικτά σύνολα V_1, V_2 με $x \in V_1$ και $y \in V_2$ ώστε

$$V_1 + V_2 \subseteq G.$$

Ειδικότερα, θα έχουμε ότι $x + V_2 \subseteq G$, άρα αφού $y \in V_2$ και $T_x(V_2) = x + V_2 \subseteq G$ έπεται πως η T_x είναι συνεχής στο τυχόν y και άρα είναι συνεχής παντού. Αφού η συνέχεια της T_{-x} έπεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι η μεταφορά T_x είναι ομοιομορφισμός του X. Ομοίως ελέγχεται και η περίπτωση της L_{λ}.

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο δύο βασικούς ορισμούς απ' την τοπολογία.

Ορισμός Α΄.1.2. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Τότε

(i) Για $x \in X$ το σύστημα περιοχών του x είναι το σύνολο $\mathcal{N}(x) = \{V \subseteq X : x \in V^\circ\}$.

(ii) Μια υποοικογένεια $\mathcal{B}_x$ του συστήματος περιοχών του x καλείται βάση περιοχών του x αν για κάθε $V \in \mathcal{N}(x)$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$ ώστε $B \subseteq V$.

Στο πλαίσιο των τ.δ.χ μπορούμε να περιγράψουμε το σύστημα περιοχών $\mathcal{N}(x)$ μέσω του συστήματος περιοχών του μηδενός $\mathcal{N}(0)$.

Πράγματι, αφού η απεικόνιση T_x είναι ομοιομορφισμός έχουμε ότι $T_x(\mathcal{N}(0)) = \mathcal{N}(x)$, δηλαδή $\mathcal{N}(x) = \{x + V : V \in \mathcal{N}(0)\}$.

Στην ανάπτυξη της θεωρίας των χώρων με νόρμα χρήσιμο ήταν το γεγονός ότι οι βασικές περιοχές του μηδενός, δηλαδή οι μπάλες

$$B(0, r) = \{x \in X : \|x\| < r\}$$

είχαν καλές ιδιότητες, όπως για παράδειγμα

(i) $B(0, r_1) + B(0, r_2) \subseteq B(0, r)$ για κάθε $r_1 + r_2 < r$.

(ii) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $\lambda x \in B(0, r)$ (π.χ. $\lambda = \frac{r}{2\|x\|}$).

(iii) Ισχύει ότι $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda B(0, r) = B(0, r)$.

(iv) Η $B(0, r)$ είναι κυρτό σύνολο.

Η αντίστοιχη ιδιότητα της (i) σε έναν τ.δ.χ X μεταφράζεται στην ακόλουθη: για κάθε $G \in \mathcal{N}(0)$ υπάρχουν $U, V \in \mathcal{N}(0)$ με

$$U + V \subseteq G,$$

πράγμα το οποίο είναι εύκολο να ελεγχθεί πως ισχύει καθώς αφού $0 + 0 = 0 \in G^\circ$ απ' τη συνέχεια της πρόσθεσης θα υπάρχουν ανοικτά U, V με $U + V \subseteq G$.

Παρακάτω στην Πρόταση Α΄.1.5-(x) γίνεται φανερό πως πάντα σε έναν τ.δ.χ X μπορούμε να βρίσκουμε μια βάση περιοχών του μηδενός η οποία να έχει καλές ιδιότητες όπως τις (ii), (iii).

Ορισμός Α΄.1.3 (Τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος)**.** Οι χώροι οι οποίοι ικανοποιούν και την ιδιότητα (iv), δηλαδή έχουν μια βάση περιοχών του μηδενός η οποία αποτελείται από κυρτά σύνολα ονομάζονται τοπικά κυρτοί τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι (τ.κ.τ.δ.χ).

Οι τοπικά κυρτοί χώροι αποτελούν ίσως την πιο σπουδαία κατηγορία τοπολογικών διανυσματικών χώρων καθώς σε αυτούς μπορούν να εφαρμοστούν τα διαχωριστικά θεωρήματα τα οποία είναι ενα σημαντικό εργαλείο για την εξαγωγή συμπερασμάτων που αφορούν διάφορα υποσύνολα του χώρου. Αυτοί οι χώροι και τα διαχωριστικά θεωρήματα θα εξεταστούν παρακάτω σε αυτό το παράρτημα. Προς το παρόν δίνουμε ένα όνομα στα σύνολα που ικανοποιούν τις (ii),(iii) και αποδεικνύουμε όσα συζητήσαμε παραπάνω.

Ορισμός Α΄.1.4. Έστω X ένας διανυσματικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A θα καλείται :

(i) απορροφούν αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $\lambda x \in A$.

(ii) ισορροπημένο αν $\bigcup_{|\lambda|\leq 1} \lambda A = A$, (δηλαδή, αν για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ με $|\lambda| \leq 1$ και $x \in A$ έχουμε ότι $\lambda x \in A$.

Παρατηρούμε πως αν το A είναι απορροφούν τότε πρέπει να ισχύει $0 \in A$ αφού για το $0 \in X$ θα υπάρχει $\lambda > 0$ με $0 = \lambda \cdot 0 \in A$. Επίσης, κάθε ανοικτό σύνολο G με $0 \in G$ είναι απορροφούν αφού για $x \in X$ έχουμε ότι $0 \cdot x = 0 \in G$ και συνεπώς απ'τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού θα υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $|\lambda| < \epsilon$ να ισχύει ότι $\lambda x \in G$. Τέλος, αν το A είναι μη κενό και ισορροπημένο τότε $0 \in A$ και $A = -A$.

Πρόταση Α΄.1.5. *Έστω X ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Τότε*

(i) $\overline{x + A} = x + \overline{A}$ *για κάθε* $A \subseteq X$ *και* $x \in X$.

(ii) $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$ *για κάθε* $A \subseteq X$ *και* $\lambda \in \mathbb{F}$.

(iii) $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B}$ *για κάθε* $A, B \subseteq X$.

(iv) *Το* $A + G$ *είναι ανοικτό για κάθε* $A \subseteq X$ *και* $G \subseteq X$ *ανοικτό.*

(v) $\overline{A} = \bigcap\{A + G : G \text{ ανοικτό}, 0 \in G\}$.

(vi) *Αν ο* Y *είναι διανυσματικός υπόχωρος του* X *τότε και ο* $\overline{Y}$ *είναι διανυσματικός υπόχωρος του* X.

(vii) *Αν το* A *είναι ισορροπημένο τότε και το* $\overline{A}$ *είναι ισορροπημένο.*

(viii) *Αν το* A *είναι ισορροπημένο και* $0 \in A^\circ$ *τότε και το* A° *είναι ισορροπημένο.*

(ix) *Αν το* A *είναι κυρτό, τότε τα* A° *και* $\overline{A}$ *είναι κυρτά.*

(x) *Αν το* A *είναι ανοικτό και* $0 \in A$, *τότε υπάρχει* K *ανοικτό και ισορροπημένο ώστε* $0 \in K \subseteq A$. *Αν επιπλέον το* A *είναι και κυρτό τότε υπάρχει ανοικτό, ισορροπημένο και κυρτό σύνολο* B *ώστε* $0 \in B \subseteq A$.

Απόδειξη. (i) Αφού η T_x είναι ομοιομορφισμός του X θα έχουμε ότι το $x + \overline{A} = T_x(\overline{A})$ είναι κλειστό υποσύνολο του X και επειδή $x + A \subseteq x + \overline{A}$ θα έχουμε ότι $\overline{x + A} \subseteq x + \overline{A}$. Απ' την άλλη μεριά χρησιμοποιώντας την T_{-x} θα έχουμε ότι $A = T_{-x}(x + A) \subseteq T_{-x}(\overline{x + A})$, όπου τώρα επειδή το $T_{-x}(\overline{x + A})$ είναι κλειστό θα έχουμε ότι $\overline{A} \subseteq T_{-x}(\overline{x + A})$. Άρα $x + \overline{A} = T_x(A) \subseteq T_x \circ T_{-x}(\overline{x + A}) = \overline{x + A}$ απ' όπου έπεται ότι $x + \overline{A} \subseteq \overline{x + A}$. Το (ii) έπεται με παρόμοιο τρόπο χρησιμοποιώντας τις $L_\lambda, L_{\lambda^{-1}}$.
Για το (iii) αφού η πράξη της πρόσθεσης είναι συνεχής και το $\overline{A} \times \overline{B}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$ θα έχουμε ότι

$$\overline{A} + \overline{B} = +(\overline{A} \times \overline{B}) \subseteq \overline{+(A \times B)} = \overline{A + B}.$$

Για το (iv) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $A + B = \bigcup_{a \in A}(a + G)$ και ότι τα $a + G$ είναι όλα ανοικτά.

Για το (v) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\iff \text{για κάθε } G \text{ ανοικτό με } x \in G \text{ ισχύει } G \cap A \neq \emptyset \\ &\iff \text{για κάθε } G \text{ ανοικτό με } 0 \in G \text{ ισχύει } (x - G) \cap A \neq \emptyset \\ &\iff \text{για κάθε } G \text{ ανοικτό με } 0 \in G \text{ ισχύει } x \in A + G \\ &\iff x \in \bigcap \{A + G : G \text{ ανοικτό}, 0 \in G\}. \end{aligned}$$

(vi) Θεωρούμε $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις (i),(ii) και το ότι $\lambda Y + \mu Y \subseteq Y$ έχουμε ότι

$$\lambda \overline{Y} + \mu \overline{Y} = \overline{\lambda Y} + \overline{\mu Y} \subseteq \overline{\lambda Y + \mu Y} \subseteq \overline{Y}.$$

(vii) Είναι προφανές ότι $\overline{A} \subseteq \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda \overline{A}$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό χρησιμοποιώντας την (ii) έχουμε ότι

$$\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda \overline{A} = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \overline{\lambda A} \subseteq \overline{\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A} \subseteq \overline{A}.$$

(viii) Αφού για κάθε $\lambda \neq 0$ έχουμε ότι $(\lambda A)^\circ = \lambda A^\circ$ έπεται ότι

$$\bigcup_{|\lambda| \leq 1, \lambda \neq 0} \lambda A^\circ = \bigcup_{|\lambda| \leq 1, \lambda \neq 0} (\lambda A)^\circ \subseteq \Big(\bigcup_{|\lambda| \leq 1, \lambda \neq 0} \lambda A \Big)^\circ \subseteq A^\circ$$

και επειδή $0 \in A^\circ$ στις παραπάνω ενώσεις μπορούμε να βγάλουμε τον περιορισμό $\lambda \neq 0$ και να πάρουμε ότι

$$\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A^\circ \subseteq A^\circ$$

και επειδή ο αντίστροφος εγκλεισμός ισχύει έτσι και αλλιώς έχουμε το ζητούμενο.

(ix) Το ότι το $\overline{A}$ είναι κυρτό αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο όπως το (vi). Απ' το (iv) έχουμε ότι το $A^\circ + B^\circ$ είναι ανοικτό και επειδή περιέχεται στο $A + B$ θα έχουμε ότι $A^\circ + B^\circ \subseteq (A + B)^\circ$. Άρα για κάθε $t \in (0, 1)$ έχουμε ότι

$$tA^\circ + (1 - t)A^\circ = (tA)^\circ + ((1 - t)A)^\circ \subseteq (tA + (1 - t)A)^\circ \subseteq A^\circ.$$

(x) Αφού το A είναι ανοικτό και $0 \in A$ απ' τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού θα υπάρχει $\epsilon > 0$ και G ανοικτό σύνολο με $0 \in G$ ώστε για κάθε $|\lambda| \leq \epsilon$ να ισχύει $\lambda G \subseteq A$. Θεωρώντας το $K = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda \epsilon G$ έχουμε ότι το K είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών, $0 \in K$ και είναι και ισορροπημένο. Τέλος, αν το A είναι και κυρτό θεωρούμε το σύνολο $(conv(K))^\circ$ το οποίο απ' το (ix) είναι κυρτό, ανοικτό και επειδή η κυρτή θήκη ισορροπημένου είναι ισορροπημένο απ'το (viii) είναι και ισορροπημένο. □

Παρατήρηση Α'.1.6. Απ' το (x) της Πρότασης Α'.1.5 γίνεται φανερό ότι σε οποιονδήποτε τ.δ.χ X μπορούμε να δουλεύουμε με βάσεις περιοχών του μηδενός οι οποίες αποτελούνται από ανοικτά και ισορροπημένα σύνολα. Αν επιπλέον ο X είναι και τοπικά κυρτός τότε μπορούμε να έχουμε βάσεις περιοχών του μηδενός που αποτελούνται από ανοικτά, κυρτά και ισορροπημένα σύνολα.

Α΄.2 Διαχωριστικά Θεωρήματα σε τ.δ.χ

Ορισμός Α΄.2.1. Έστω X ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η p καλείται:

(i) υποπροσθετική αν $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$.

(ii) θετικά ομογενής αν $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ για κάθε $\lambda \geq 0$.

(iii) υπογραμμική αν ικανοποιεί τα (i),(ii).

(iv) ημινόρμα αν είναι υποπροσθετική και επιπλέον $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

(v) νόρμα αν είναι ημινόρμα και $p(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

Παρατηρήσεις Α΄.2.2. Είναι άμεσο απ' τον παραπάνω ορισμό ότι ισχύουν οι συνεπαγωγές

$$\text{νόρμα} \implies \text{ημινόρμα} \implies \text{υπογραμμική}$$

Αν η p είναι υπογραμμική απ' την ιδιότητα (ii) παρατηρούμε ότι $p(0) = 0$. Επίσης, λόγω της ιδιότητας (i) έχουμε ότι $0 = p(0) = p(x-x) \leq p(x)+p(-x)$ απ' όπου παίρνουμε ότι $-p(x) \leq p(-x)$ και $-p(-x) \leq p(x)$.

Όπως και στην περίπτωση των γραμμικών συναρτήσεων για να ελέγξουμε τη συνέχεια μιας υπογραμμικής συνάρτησης αρκεί να ελέγξουμε αν αυτή είναι συνεχής στο 0. Συγκεκριμένα έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση Α΄.2.3. *Έστω X τ.δ.χ και $p : X \to \mathbb{R}$ μια υπογραμμική συνάρτηση στον X. Τότε, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η p είναι συνεχής.*

(ii) *Η p είναι συνεχής στο 0.*

(iii) *Η p είναι φραγμένη σε περιοχή του μηδενός, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ και $U \in \mathcal{N}(0)$ ώστε $p(U) \subseteq (-M, M)$.*

Απόδειξη. Η κατεύθυνση (i) $\implies$ (ii) είναι προφανής. Για την (ii) $\implies$ (iii) για $\epsilon = 1 > 0$ απ' τη συνέχεια της p στο 0 θα υπάρχει ανοικτό σύνολο U με $0 \in U$ ώστε $p(U) \subseteq (-1, 1)$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

(iii) $\implies$ (ii) Θεωρούμε $\epsilon > 0$ και το σύνολο $V = \frac{\epsilon}{M} U$ το οποίο είναι ανοικτό με $0 \in V$. Επίσης, αφού η p είναι ημινόρμα θα έχουμε ότι

$$p(V) = \frac{\epsilon}{M} p(U) \subseteq \frac{\epsilon}{M}(-M, M) = (-\epsilon, \epsilon),$$

δηλαδή $p(V) \subseteq (-\epsilon, \epsilon)$ απ' όπου έπεται ότι η p είναι συνεχής στο 0.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Θεωρούμε ένα δίκτυο $x_{\beta} \to x$, τότε $x_{\beta} - x \to 0$ οπότε λόγω της συνέχειας της p στο 0 θα έχουμε ότι $p(x - x_{\beta}) \to 0$ και $p(x_{\beta} - x) \to 0$. Οπότε τώρα γράφοντας απ' τη μία

$$p(x_{\beta}) = p(x_{\beta} - x + x) \leq p(x_{\beta} - x) + p(x)$$

και απ' την άλλη

$$p(x) = p(x - x_{\beta} + x_{\beta}) \leq p(x - x_{\beta}) + p(x_{\beta}) \implies$$

$$p(x_{\beta}) \geq p(x) - p(x - x_{\beta})$$

καταλήγουμε στο ότι

$$-p(x - x_{\beta}) \leq p(x_{\beta}) - p(x) \leq p(x_{\beta} - x)$$

απ' όπου έπεται ότι $p(x_{\beta}) \to p(x)$. □

Η σημασία των υπογραμμικών συναρτήσεων γίνεται εμφανής μέσα απ' το θεώρημα των Hahn-Banach, ένα απ' το πιο σημαντικά και απαραίτητα θεωρήματα στη μελέτη της θεωρίας χώρων Banach αλλά και στο γενικότερο πλαίσιο των τοπολογικών διανυσματικών χώρων. Υπενθυμίζουμε για λόγους πληρότητας το θεώρημα παραπέμποντας στο [16] (σελ.92) για την αποδειξή του.

Θεώρημα Α΄.2.4 (Θεώρημα Hahn-Banach)**.** *Έστω X ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος, $p : X \to \mathbb{R}$ μια υπογραμμική συνάρτηση και Y ένας υπόχωρος του X . Αν $h : Y \to \mathbb{R}$ είναι μια γραμμική συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $h(y) \leq p(y)$ για κάθε $y \in Y$, τότε υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση $\tilde{h} : X \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\tilde{h}|Y = h$ και $\tilde{h}(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Το θεώρημα των Hahn-Banach είναι το βασικό εργαλείο για την απόδειξη των διαχωριστικών θεωρημάτων, παρ' όλα αυτά απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή του είναι η ύπαρξη μιας κατάλληλης υπογραμμικής συνάρτησης. Το ρόλο αυτό έρχεται να παίξει το συναρτησοειδές του Minkowski.

Ορισμός Α΄.2.5 (Συναρτησοειδές Minkowski)**.** Έστω X ένας διανυσματικός χώρος και $A \subseteq X$ ένα απορροφούν υποσύνολο του X. Το συναρτησοειδές του Minkowski που αντιστοιχεί στο σύνολο A είναι η συνάρτηση $p_A : X \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$p_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}. \tag{Α΄.2.1}$$

Αφού το σύνολο A είναι απορροφούν, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $t > 0$ ώστε $tx \in A$, δηλαδή $x \in \frac{1}{t}A$. Συνεπώς, το σύνολο $\{t > 0 : x \in tA\}$ είναι μη κενό και έτσι η p_A είναι καλά ορισμένη απ' την (Α΄.2.1).

Πρόταση Α΄.2.6. *Έστω X ένας διανυσματικός χώρος και $A \subseteq X$ κυρτό και απορροφούν υποσύνολο του X. Τότε, το συναρτησοειδές Minkowski p_A είναι υπογραμμική συνάρτηση και*

$$\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X : p_A(x) \leq 1\}. \tag{Α΄.2.2}$$

Απόδειξη. Καταρχάς, για $\lambda > 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} p_A(\lambda x) &= \inf\{t > 0 : \lambda x \in tA\} \\ &= \lambda \inf\Big\{\frac{t}{\lambda} > 0 : x \in \frac{t}{\lambda}A\Big\} \\ &= \lambda p_A(x) \end{aligned}$$

και επειδή $p_A(0) = 0$ έχουμε ότι $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$ για κάθε $\lambda \geq 0$. Για να δείξουμε ότι η p_A είναι υποπροσθετική θεωρούμε $x, y \in X$ και $\epsilon > 0$. Τότε, απ' τον ορισμό της p_A θα υπάρχουν $t_1, t_2 > 0$ ώστε $x \in t_1 A$, $y \in t_2 A$ και

$$t_1 < p_A(x) + \epsilon/2, \ t_2 < p_A(y) + \epsilon/2.$$

Όμως λόγω της κυρτότητας του A θα έχουμε ότι

$$\frac{t_1}{t_1 + t_2} A + \frac{t_2}{t_1 + t_2} A \subseteq A,$$

δηλαδή

$$t_1 A + t_2 A \subseteq (t_1 + t_2) A$$

και επειδή έτσι και αλλιώς ισχύει $(t_1 + t_2)A \subseteq t_1 A + t_2 A$ θα έχουμε ότι $(t_1 + t_2)A = t_1 A + t_2 A$. Άρα αφού $x + y \in t_1 A + t_2 A$ θα έχουμε ότι

$$p_A(x + y) \leq t_1 + t_2 < p_A(x) + p_A(y) + \epsilon$$

απ' όπου έπεται ότι $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$. Για την (Α'.2.2) αν $p_A(x) < 1$ τότε υπάρχει ένα $0 < t < 1$ ώστε $x \in tA$. Όμως τότε λόγω της κυρτότητας του A και επειδή $0 \in A$ (το A είναι απορροφούν) θα έχουμε ότι

$$x \in tA = (1 - t)0 + tA \subseteq A,$$

δηλαδή $\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subseteq A$. Τέλος, αν $x \in A$ θα έχουμε ότι $1 \in \{t > 0 : x \in tA\}$ και συνεπώς $p_A(x) \leq 1$, δηλαδή $x \in \{x \in X : p_A(x) \leq 1\}$. Συνεπώς, $A \subseteq \{x \in X : p_A(x) \leq 1\}$. □

Παρατηρήσεις Α'.2.7. (i) Αν το A είναι και ισορροπημένο τότε η p_A είναι ημινόρμα.

(ii) Έστω $0 \in A^\circ$ τότε το συναρτησοειδές του Minkowski p_A είναι συνεχής συνάρτηση.

(iii) Έστω X τ.δ.χ, $p : X \to \mathbb{R}$ συνεχής, υπογραμμική συνάρτηση και $h : X \to \mathbb{R}$ γραμμική με $h(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$. Τότε, η h είναι συνεχής.

Απόδειξη. (i) Αρκεί να δείξουμε ότι $p_A(\lambda x) = -\lambda p_A(x)$ για κάθε $\lambda < 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} p_A(\lambda x) &= \inf\{t > 0 : \lambda x \in tA\} \\ &= -\lambda \inf\Big\{-\frac{t}{\lambda} > 0 : x \in -\frac{t}{\lambda}(-A)\Big\} \\ &\overset{A=-A}{=} -\lambda \inf\Big\{-\frac{t}{\lambda} > 0 : x \in -\frac{t}{\lambda}A\Big\} \\ &= -\lambda p_A(x). \end{aligned}$$

(ii) Από την Πρόταση Α΄.2.3 αρκεί να δείξουμε οτι η p_A είναι φραγμένη σε περιοχή του μηδενός. Θεωρούμε το $U = A^\circ$ και από την (Α΄.2.2) έχουμε ότι $p_A(U) \subseteq p_A(A) \subseteq [-1, 1]$.

(iii) Αφού η h είναι υπογραμμική από την Πρόταση Α΄.2.3 αρκεί να δειχτεί ότι είναι συνεχής στο 0. Όμως, αφού $h(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$ και επειδή $-h(x) = h(-x) \leq p(-x) = p(x)$ θα έχουμε ότι $\left|h(x)\right| \leq p(x)$ από όπου τώρα έπεται εύκολα πως η h είναι συνεχής στο 0. □

Είμαστε πια σε θέση με τα παραπάνω εργαλεία να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε τα διαχωριστικά θεωρήματα. Η κεντρική ιδέα κάθε φορά είναι βρίσκουμε κατάλληλο υπόχωρο Y και μια γραμμική συνάρτηση h ορισμένη πάνω σε αυτόν ώστε να ισχύει $h(y) \leq p_A(y)$ για κάθε $y \in Y$ όπου το A να είναι ένα κατάλληλο σύνολο. Το θεώρημα Hahn-Banach θα κάνει τα υπόλοιπα.

Θεώρημα Α΄.2.8 (1ο Θεμελιώδες Διαχωριστικό Θεώρημα)**.** *Έστω X τ.δ.χ και $A \subseteq X$ ανοικτό και κυρτό και $x_0 \in X \setminus A$. Τότε, υπάρχει μια συνεχής και γραμμική συνάρτηση $h : X \to \mathbb{R}$ ώστε*

$$\sup_{x\in A} h(x) \leq h(x_0). \tag{Α΄.2.3}$$

Απόδειξη. Καταρχάς μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $0 \in A$. Πράγματι, αν έχουμε το διαχωριστικό στην περίπτωση που $0 \in A$ τότε αν $0 \notin A$ θεωρώντας $A' = A - y$ για κάποιο $y \in A$ θα έχουμε ότι το A' είναι ανοικτό και ότι $x_0 - y \notin A'$. Άρα θα υπάρχει $h : X \to \mathbb{R}$ συνεχής και γραμμική ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει

$$h(x - y) \leq h(x_0 - y),$$

δηλαδή $\sup_{x\in A} h(x) \leq h(x_0)$. Οπότε υποθέτουμε ελεύθερα ότι $0 \in A$. Θέτουμε $Y = \operatorname{span}(x_0)$, $h : Y \to \mathbb{R}$ με $h(\lambda x_0) = \lambda$ και p_A το συναρτησοειδές του Minkowski. Τότε, η h είναι προφανώς γραμμική και επειδή $x_0 \notin A$ από την (Α΄.2.2) έχουμε ότι $p_A(x_0) \geq 1$. Όμως τότε για $\lambda \geq 0$ θα έχουμε

$$h(\lambda x_0) = \lambda \leq \lambda p_A(x_0) = p_A(\lambda x_0)$$

και για $\lambda < 0$

$$h(\lambda x_0) = \lambda < 0 \leq p_A(\lambda x_0).$$

Δηλαδή, για κάθε $y \in Y$ έχουμε $h(y) \leq p_A(y)$. Οπότε από το θεώρημα Hahn-Banach Α΄.2.4 θα υπάρχει γραμμική $\tilde{h} : X \to \mathbb{R}$ η οποία επεκτείνει την h και ικανοποιεί την $\tilde{h}(x) \leq p_A(x)$ για κάθε $x \in X$. Γράφουμε για συντομία $\tilde{h} = h$. Τότε, αφού $h(x) \leq p_A(x)$ για κάθε $x \in X$ από την Παρατήρηση Α΄.2.7-(iii) έχουμε ότι η h είναι συνεχής. Τέλος, για κάθε $x \in A$ έχουμε $h(x) \leq p_A(x) \leq 1 = h(x_0)$. □

Θεώρημα Α΄.2.9 (2ο Διαχωριστικό Θεώρημα)**.** *Έστω X τ.δ.χ και $A, B \subseteq X$ κυρτά υποσύνολα του X με το A να είναι ανοικτό και $A \cap B = \emptyset$. Τότε, υπάρχει συνεχής γραμμική $h : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\sup_{x\in A} h(x) \leq \inf_{x\in B} h(x). \tag{Α΄.2.4}$$

Απόδειξη. Θεώρούμε το σύνολο $A - B$ το οποίο από την Πρόταση Α΄.1.5-(iv) είναι ανοικτό και επειδή τα A, B είναι κυρτά είναι και κυρτό. Αφού $A \cap B = \emptyset$ έπεται πως $0 \notin A - B$ συνεπώς από το 1ο Διαχωριστικό Θεώρημα υπάρχει $h : X \to \mathbb{R}$ γραμμική και συνεχής τέτοια ώστε $h(x) \leq h(0) = 0$ για κάθε $x \in A - B$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι $h(\alpha) \leq h(\beta)$ για κάθε $\alpha \in A$ και $\beta \in B$. □

Α΄.3 Τοπικά κυρτοί τ.δ.χ

Α΄.3.1 Διαχωριστικά Θεωρήματα

Περνάμε τώρα και στα διαχωριστικά θεωρήματα που αφορούν τους τοπικά κυρτούς τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους. Στα παρακάτω θα υποθέτουμε ότι οι τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι είναι και Hausdorff δηλαδή για κάθε δύο διαφορετικά σημεία του χώρου x, y υπάρχουν ανοικτα σύνολα U, V με $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.

Θυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι από την Πρόταση Α΄.1.5-(x) όταν ο X είναι τοπικά κυρτός τότε μπορούμε να βρούμε μια βάση περιοχών του 0 η οποία να αποτελείται από ανοικτά, κυρτά και ισορροπημένα σύνολα (άρα και συμμετρικά).

Πρόταση Α΄.3.1. *Έστω X τ.κ.τ.δ.χ και $K \subseteq X$ συμπαγές, $F \subseteq X$ κλειστό με $K \cap F = \emptyset$. Τότε, υπάρχει $V \subseteq X$ ανοικτή, κυρτή και συμμετρική περιοχή του 0 τέτοια ώστε $(K + V) \cap F = \emptyset$.*

Απόδειξη. Για σταθερό $x \in K$ αφού $x \in X \setminus F$ υπάρχει W_x ανοικτή περιοχή του 0 με $(x+W_x) \cap F = \emptyset$. Αφού ο X είναι τοπικά κυρτός θα υπάρχει ανοικτή, κυρτή και συμμετρική περιοχή V_x του 0 με $V_x + V_x \subseteq W_x$. Τότε, η οικογένεια $(V_x)_{x \in K}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του K. Άρα λόγω συμπάγειας θα υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K$ ώστε

$$K \subseteq (x_1 + V_{x_1}) \cup \dots \cup (x_n + V_{x_n}).$$

Θέτουμε $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$ το οποίο είναι ανοικτό, κυρτό και συμμετρικό. Ισχυριζόμαστε ότι $(K + V) \cap F = \emptyset$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} K + V &\subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i}) \right) + V \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \Big(x_i + V_{x_i} + V \Big) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}), \end{aligned}$$

όμως για κάθε i έχουμε ότι $x + V_{x_i} + V_{x_i} \subseteq x_i + W_{x_i}$ και επειδή $x_i + W_{x_i} \cap F = \emptyset$ θα πρέπει και $(x + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap F = \emptyset$. Άρα $(K + V) \cap F = \emptyset$. □

Θεώρημα Α΄.3.2 (3ο Διαχωριστικό Θεώρημα)**.** *Έστω X τ.κ.τ.δ.χ, $K \subseteq X$ συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X και $F \subseteq X$ κλειστό υποσύνολο του X με $K \cap F = \emptyset$. Τότε, υπάρχει συνεχής και γραμμική $h : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\sup_{x \in K} h(x) < \inf_{x \in F} h(x). \tag{Α΄.3.1}$$

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει ανοικτή, κυρτή και συμμετρική περιοχή V του μηδενός με $(K + V + V) \cap F = \emptyset$. Όμως τότε θα έχουμε ότι $(K - F + V) \cap V = \emptyset$. Πράγματι, αν δεν ισχύει κάτι τέτοιο θα υπάρχουν $x \in K$, $y \in F$ $z_1, z_2 \in V$ με $x - y + z_1 = z_2$. Δηλαδή, $y = x + z_1 - z_2$ και επειδή η V είναι συμμετρική θα ισχύει ότι $-z_2 \in V$ και συνεπώς θα έχουμε ότι $(K + V + V) \cap F \neq \emptyset$ το οποίο δεν μπορεί να συμβεί. Άρα αφού το V είναι ανοικτό και

$(K - F + V) \cap V = \emptyset$ από το 2ο διαχωριστικό Θεώρημα Α΄.3.2 θα υπάρχει $h : X \to \mathbb{R}$ γραμμική και συνεχής με

$$\sup_{x \in K - F + V} h(x) \leq \inf_{x \in V} h(x).$$

Όμως αφού $h \neq 0$ και το V είναι ανοικτό θα υπάρχει $x_0 \in V$ με $h(x_0) \neq 0$ και αφού η V είναι και συμμετρική μπορούμε να υποθέσουμε ότι $h(x_0) < 0$. Άρα αφού $0 \in V$ θα έχουμε ότι για κάθε $x \in K,\ y \in F$

$$h(x) - h(y) \leq h(x_0) < 0$$

συνεπώς θα έχουμε ότι $\sup_{x \in K} h(x) \leq h(x_0) + h(y) < h(y)$ για κάθε $y \in F$ και επειδή $h(x_0) \neq 0$ θα έχουμε ότι

$$\sup_{x \in K} h(x) \leq h(x_0) + \inf_{x \in F} h(x) < \inf_{x \in F} h(x).$$

□

Το τελευταίο διαχωριστικό θεώρημα γενικεύει το γνωστό αλλά και ταυτόχρονα πολύ χρήσιμο πόρισμα του θεωρήματος Hahn-Banach το οποίο χρησιμοποιείται αρκετές φορές στην παρούσα εργασία. Το διατυπώνουμε αποδεικνύοντας μόνο τη γενικότερη περίπτωση.

Πρόταση Α΄.3.3. *Έστω X χώρος με νόρμα και $Y \subsetneq X$ ένας γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus Y$. Τότε, υπάρχει $h \in X^*$ με $\|h\| = 1$ ώστε $h(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$ και $h(x_0) \neq 0$.*

Θεώρημα Α΄.3.4. *Έστω X τ.κ.τ.δ.χ και $Y \neq X$ κλειστός υπόχωρος του X. Τότε, για κάθε $x_0 \notin Y$ υπάρχει $h : X \to \mathbb{R}$ γραμμική και συνεχής ώστε $h(x_0) \neq 0$ και $h(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$.*

Απόδειξη. Αφού $x_0 \notin Y$ θα ισχύει ότι $0 \notin Y - x_0$. Αφού $Y - x_0$ κλειστό υποσύνολο του X τότε θα υπάρχει A ανοικτή,κυρτή και ισορροπημένη περιοχή του 0 με $A \cap (Y - x_0) = \emptyset$. Θεωρούμε $p_A(t) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}$ το συναρτησοειδές του Minkowski και τον υπόχωρο Z που παράγεται απ' τον Y και το x_0. Ορίζουμε $h(y + \lambda x_0) = \lambda$ για κάθε $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, η h είναι γραμμική και μηδενίζεται στον Y. Επιπλέον, αν υπάρχουν $y, \lambda > 0$ με

$$\lambda = h(y + \lambda x_0) > p_A(y + \lambda x_0)$$

τότε θα υπάρχει $0 < t < \lambda$ με $y + \lambda x_0 \in tA$. Δηλαδή, $x_0 \in \frac{t}{\lambda}A - y' \subseteq A + Y$. Πράγμα το οποίο δε γίνεται να συμβεί αφού $A \cap (Y - x_0) = \emptyset$. Άρα για κάθε $z \in Z$ θα έχουμε ότι $h(z) \leq p_A(z)$. Οπότε απ' το θεώρημα Hahn-Banach θα υπάρχει $\tilde{h} \equiv h : X \to \mathbb{R}$ γραμμική που επεκτείνει την h με $h(x) \leq p_A(x)$ για κάθε $x \in X$. Τώρα, αφού το A είναι ισορροπημένο η p_a είναι ημινόρμα και επομένως είναι εύκολο να δειχθεί ότι $|h| \leq p_A$ και επειδή η p_A είναι συνεχής έπεται ότι και η h είναι συνεχής. □

Α΄.3.2 Τοπολογίες Παραγόμενες από Οικογένειες Ημινορμών

Όπως αναφέραμε και προηγούμενως οι τοπικά κυρτοί τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι αποτελούν την πιο σημαντική κατηγορία τ.δ.χ. Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς με τη θεωρία που έχει αναπτυχθεί στο προηγούμενο μέρος του Παραρτήματος ότι οι τοπικά κυρτοί τ.δ.χ είναι αυτοί που η τοπολογία τους παράγεται από μια οικογένεια ημινορμών. Παρ' όλα αυτά αυτό ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας εργασίας, όποιος ενδιαφέρεται μπορεί να δει π.χ. στο [16].

Αυτό όμως που θα μας απασχολήσει είναι το αντίστροφο, δηλαδή το πως από μια οικογένεια ημινορμών σε έναν τ.δ.χ X μπορεί κάποιος να κατασκευάσει μια τοπολογία η οποία θα κάνει την οικογένεια συνεχή και θα είναι συμβατή με τις πράξεις του χώρου, δηλαδή οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού θα είναι συνεχείς ως προς την καινούργια τοπολογία. Αυτή η παράγραφος είναι στην ουσία η εισαγωγή στο Β′ μέρος του Παραρτήματος όπου θα μελετηθούν οι τοπολογίες που χρησιμοποιούνται αρκετά σε αυτή την εργασία.

Η κατασκευή της τοπολογίας θα γίνει προσδιορίζοντας μια βάση περιοχών $\mathcal{B}_x$ για κάθε $x \in X$. Συνεπώς θα χρειαστούμε το γνωστό θεώρημα από την Τοπολογία το οποίο μας λέει ποιές ιδιότητες πρέπει να έχει η $\mathcal{B}_x$.

Θεώρημα Α′.3.5. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και για κάθε $x \in X$ μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{B}_x$ υποσυνόλων του X με τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Αν $B \in \mathcal{B}_x$, τότε $x \in B$.*

(ii) *Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ τότε υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}_x$ ώστε $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

(iii) *Για κάθε $B \in \mathcal{B}_x$ υπάρχει $G \subseteq B$ ώστε για κάθε $y \in G$ υπάρχει $B_y \in \mathcal{B}_y$ με $y \in B_y \subseteq G$.*

Τότε, η οικογένεια

$$\mathcal{T} = \{G \subseteq X : \text{ για κάθε } y \in G \text{ υπάρχει } B_y \in \mathcal{B}_y \text{ με } B_y \subseteq G\} \tag{Α′.3.2}$$

είναι μια τοπολογία στον X και η $\mathcal{B}_x$ είναι βάση περιοχών του x ως προς την $\mathcal{T}$ για κάθε $x \in X$.

Θεωρούμε έναν τ.δ.χ X και μια οικογένεια Γ ημινορμών στον X (βλ. Ορισμό Α′.2.1). Για κάθε $x \in X$ θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{B}_x$ που αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής

$$W(x, \Delta, \epsilon) = \{y \in X : p(x - y) < \epsilon \text{ για κάθε } p \in \Delta\}, \tag{Α′.3.3}$$

όπου $\Delta \subseteq \Gamma$ πεπερασμένο και $\epsilon > 0$.

Πρόταση Α′.3.6. *Για κάθε $x \in X$ η οικογένεια*

$$\mathcal{B}_x = \{W(x, \Delta, \epsilon) : \Delta \subseteq \Gamma \text{ πεπερασμένο και } \epsilon > 0\} \tag{Α′.3.4}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες (i)-(iii) του Θεωρήματος Α′.3.5.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι $x \in W(x, \Delta, \epsilon)$ για κάθε $\Delta \subseteq \Gamma$ και $\epsilon > 0$, συνεπώς ισχύει η συνθήκη (i). Για τη συνθήκη (ii) θεωρούμε $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Gamma$ πεπερασμένα και $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$. Τότε θεώρωντας το πεπερασμένο σύνολο $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ και $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$ θα έχουμε ότι

$$W(x, \Delta, \epsilon) \subseteq W(x, \Delta_1, \epsilon_1) \cap W(x, \Delta_2, \epsilon_2).$$

Τέλος για την (iii) θεωρούμε $\Delta \subsetneq \Gamma$ πεπερασμένο και $\epsilon > 0$. Θέτουμε $G = W(x, \Delta, \epsilon)$ και για $y \in W(x, \Delta, \epsilon)$ θεωρούμε το σύνολο $B_y \in \mathcal{B}_y$ με $B_y = W(y, \Delta, \epsilon')$ όπου $\epsilon' = \epsilon - p(x-y) > 0$. Αν $z \in B_y$ τότε

$$\begin{aligned} p(x-z) &= p(x-y+y-z) \\ &\leq p(x-y) + p(y-z) \\ &< p(x-y) + \epsilon - p(x-y) = \epsilon \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $z \in G$. Άρα $B_y \subsetneq G$ και έτσι έχουμε και την (iii). Μάλιστα δείξαμε ότι κάθε $W(x, \Delta, \Gamma)$ ικανοποιεί τη συνθήκη της (Α΄.1.1) και συνεπώς τα βασικά σύνολα είναι και ανοικτά ως προς την τοπολογία που ορίζει το Θεώρημα Α΄.3.5. □

Συνεπώς σύμφωνα με το Θεώρημα Α΄.3.5 υπάρχει μια τοπολογία στον τ.δ.χ X με την οποία κάθε $x \in X$ έχει ως βάση περιοχών την (Α΄.3.4). Συμβολίζουμε αυτή την τοπολογία με $\mathcal{T}_\Gamma$. Δεν είναι δύσκολο να παρατηρήσουμε πως κάθε $p \in \Gamma$ είναι συνεχής ως προς την $\mathcal{T}_\Gamma$. Πράγματι το σύνολο

$$U = \{y \in X : p(y) < 1\} = W(0, \{p\}, 1)$$

είναι ανοικτό σύνολο ως προς την $\mathcal{T}_\Gamma$ και $p(U) \subsetneq [-1, 1]$, δηλαδή η p είναι φραγμένη σε μια $\mathcal{T}_\Gamma$-περιοχή του μηδενός και συνεπώς από την Πρόταση Α΄.2.3 είναι συνεχής ως προς την $\mathcal{T}_\Gamma$. Μάλιστα, η τοπολογία $\mathcal{T}_\Gamma$ είναι και η ελάχιστη τοπολογία στον X ως προς την οποία η οικογένεια Γ είναι συνεχής. Πράγματι, αν θεωρήσουμε μια τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X ως προς την οποία η Γ είναι συνεχής τότε για $\Delta = \{p_1, \ldots, p_m\}$ και $\epsilon > 0$ θα έχουμε ότι

$$W(x, \{p_i\}, \epsilon) = p_i^{-1}(x-\epsilon, x+\epsilon) \in \mathcal{T}$$

αφού κάθε p_i είναι συνεχής ως προς την $\mathcal{T}$. Άρα θα έχουμε ότι

$$W(x, \Delta, \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{m} W(x, \{p_i\}, \epsilon) \in \mathcal{T},$$

οπότε η $\mathcal{T}$ θα περιέχει όλη την οικογένεια $\mathcal{B}_x$ για κάθε $x \in X$ και συνεπώς θα έχουμε ότι $\mathcal{T}_\Gamma \subsetneq \mathcal{T}$.

Φυσικά μένει να δείξουμε ότι η τοπολογία $\mathcal{T}_\Gamma$ είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού του X.

Πρόταση Α΄.3.7. *Έστω $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$ ένας τ.δ.χ. Τότε, ο $(X, +, \cdot, \mathcal{T}_\Gamma)$ είναι ένας τοπικά κυρτός τ.δ.χ.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι οι βασικές περιοχές του μηδενός $W(0, \Delta, \epsilon)$ με $\Delta \subsetneq \Gamma$ και $\epsilon > 0$ είναι κυρτά σύνολα. Συνεπώς μένει να δειχθεί η συνέχεια των πράξεων. Για την πρόσθεση θεωρούμε $x, y \in X$ και $W(x+y, \Delta, \epsilon)$ μια βασική περιοχή του $x+y$. Τότε, τα σύνολα $W(x, \Delta, \epsilon/2)$ και $W(y, \Delta, \epsilon/2)$ είναι βασικές περιοχές των x, y αντίστοιχα και για $z \in W(x, \Delta, \epsilon/2) + W(y, \Delta, \epsilon/2)$ θα έχουμε ότι $z = z_1 + z_2$ όπου $z_1 \in W(x, \Delta, \epsilon/2)$ και $z_2 W(y, \Delta, \epsilon/2)$. Άρα

$$\begin{aligned} p(x+y-z) &= p(x-z_1+y-z_2) \\ &\leq p(x-z_1) + p(y-z_2) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon, \end{aligned}$$

δηλαδή $z \in W(x+y, \Delta, \epsilon)$ απ' όπου έπεται ότι

$$W(x, \Delta, \epsilon/2) + W(y, \Delta, \epsilon/2) \subsetneq W(x+y, \Delta, \epsilon)$$

και συνεπώς η πράξη της πρόσθεσης είναι συνεχής. Για τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού θεωρούμε $\lambda \neq 0$ και $x \in X$, $W(\lambda x, \Delta, \epsilon)$ μια βασική περιοχή του λx. Τότε, για $|\lambda - \mu| < a$ και $y \in X$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} p(\lambda x - \mu y) &= p(\lambda x - \mu x + \mu x - \mu y) \\ &\leq p(\lambda x - \mu x) + p(\mu x - \mu y) \\ &= |\lambda - \mu| p(x) + |\mu| p(x - y) \\ &< a p(x) + (a + |\lambda|) p(x - y), \end{aligned}$$

όπου τώρα επειδή μπορούμε το a και το $p(x - y)$ να τα φέρουμε όσα κοντά στο μηδέν θέλουμε θα μπορούμε να βρούμε $a' > 0$ και $\epsilon' > 0$ ώστε $(\lambda - a', \lambda + a')W(x, \Delta, \epsilon') \subseteq W(\lambda x, \Delta, \epsilon)$. □

Η σύγκλιση των δικτύων ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}_\Gamma$ περιγράφεται με απλό τρόπο όπως φαίνεται και από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση Α′.3.8. *Ένα δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ συγκλίνει ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}_\Gamma$ στο $x \in X$ (συμβ. $x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_\Gamma} x$) αν και μόνο αν $p(x - x_\lambda) \to 0$ για κάθε $p \in \Gamma$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Θεωρούμε μια $p \in \Gamma$ και $\epsilon > 0$. Αφού $x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_\Gamma} x$ για την ανοικτή περιοχή $W(x, \{p\}, \epsilon)$ του x θα υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ να ισχύει $x_\lambda \in W(x, \{p\}, \epsilon)$. Δηλαδή, για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ θα έχουμε ότι $p(x - x_\lambda) < \epsilon$, το οποίο μας δίνει ότι $p(x - x_\lambda) \to 0$.

($\Longleftarrow$) Θεωρούμε μια βασική περιοχή $W(x, \Delta, \epsilon)$ του x. Αφού το $\Delta \subseteq \Gamma$ είναι πεπερασμένο μπορούμε να γράψουμε $\Delta = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $p_i(x - x_\lambda) \to 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας διαδοχικά την παραπάνω σύγκλιση και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το Λ είναι κατευθυνόμενο βλέπουμε ότι θα υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $p_i(x - x_\lambda) < \epsilon$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ και $i = 1, \ldots, m$. Όμως τότε θα έχουμε ότι $x_\lambda \in W(x, \Delta, \epsilon)$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$. □

Ορισμός Α′.3.9 (Διαχωρίζουσα οικογένεια ημινορμών)**.** Θα λέμε ότι η οικογένεια ημινορμών Γ διαχωρίζει τα σημεία του X ή ότι η Γ είναι διαχωρίζουσα αν για κάθε $x \neq y$ υπάρχει $p \in \Gamma$ με $p(x - y) > 0$.

Πρόταση Α′.3.10. *Αν η οικογένεια Γ διαχωρίζει τα σημεία του X τότε ο $(X, +, \cdot, \mathcal{T}_\Gamma)$ είναι χώρος Hausdorff. Ειδικότερα, αν $p(x - y) = 0$ για κάθε $p \in \Gamma$ τότε $x = y$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $x \neq y$ και πρέπει να βρούμε δύο ανοικτές περιοχές W_x, W_y των x, y αντίστοιχα με $W_x \cap W_y = \emptyset$. Αφού η Γ διαχωρίζει τα σημεία του X υπάρχει $p \in \Gamma$ με $p(x - y) > 0$. Θέτουμε $W_x = W(x, \{p\}, \epsilon)$ και $W_y = W(y, \{p\}, \epsilon)$ με $\epsilon = p(x - y)/2 > 0$. Τότε, αν υπάρχει $z \in W_x \cap W_y$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} p(x - y) &= p(x - z + z - y) \\ &\leq p(x - z) + p(z - y) < 2\epsilon = p(x - y) \end{aligned}$$

πράγμα το οποίο δεν μπορεί να συμβεί. Συνεπώς έχουμε ότι $W_x \cap W_y = \emptyset$. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο διατυπώνοντας το γνωστό και χρήσιμο θεώρημα των Krein-Milman και παραπέμπουμε στο [16] για την αποδειξή του.

Ορισμός Α΄.3.11 (Ακραία σημεία)**.** Έστω X ένας $\mathbb{R}-$διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$ ένα υποσύνολο του X. Το $x_0 \in K$ θα καλείται ακραίο σημείο του K όταν δεν υπάρχουν $x \neq y$ μέσα στο K και $t \in (0, 1)$ με $x_0 = tx + (1 - t)y$. Το σύνολο των ακραίων σημείων του K συμβολίζεται με ext(K).

Θεώρημα Α΄.3.12 (Θεώρημα Krein-Milman)**.** *Έστω X ένας τοπικά κυρτός και Hausdorff τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$ ένα συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε,* $\mathrm{ext}(K) \neq \emptyset$ *και* $K = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{ext}(K))$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄

Σημαντικές Τοπολογίες

Β΄.1 Ασθενείς Τοπολογίες

Στο Α΄ μέρος του Παραρτήματος περιγράψαμε πώς μπορούμε από μια οικογένεια ημινορμών Γ σε έναν τοπολογικό διανυσματικό χώρο X να κατασκευάσουμε μια τοπικά κυρτή τοπολογία $\mathcal{T}_\Gamma$ στον X ως προς την οποία οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού να είναι συνεχείς. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε και θα μελετήσουμε βασικές ιδιότητες των τοπολογιών που χρησιμοποιούνται σε αυτή την εργασία.

Οι τοπολογίες αυτές έχουν ανεξάρτητο ενδιαφέρον και είναι ιδιαίτερα σημαντικές λόγω της χρησιμοτητάς τους σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών όπως π.χ στη θεωρία Τελεστών, στη θεωρία χώρων Banach αλλά και στις μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Για έναν τοπολογικό διανυσματικό χώρο X συμβολίζουμε με X^* τον δυϊκό του χώρο ο οποίος αποτελείται από όλες τις συνεχείς και γραμμικές συναρτήσεις $h : X \to \mathbb{R}$. Τα στοιχεία του X^* καλούνται συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή και θα τα συμβολίζουμε με x^*, y^* και ούτω κάθεξής.

Β΄.1.1 Η Ασθενής Τοπολογία

Ορισμός Β΄.1.1 (Ασθενής Τοπολογία)**.** Έστω $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$ ένας τοπικά κυρτός τ.δ.χ. Η ασθενής τοπολογία T_w στον X είναι η τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια ημινορμών $\{p_h : h \in X^*\}$ όπου $p_h(x) = |h(x)|$ για κάθε $x \in X$ και $h \in X^*$.

Σύμφωνα με την Πρόταση Α΄.3.8 έχουμε ότι ένα δίκτυο (x_β) συγκλίνει στο x ως προς την $\mathcal{T}_w$ (συμβ. $x_\beta \xrightarrow{w} x$) αν και μόνο αν $h(x_\beta) \to h(x)$ για κάθε $h \in X^*$.

Επίσης η οικογένεια ημινορμών $\{p_h : h \in X^*\}$ είναι και διαχωρίζουσα αφού για $x \neq y$ και επειδή το $\{x\}$ είναι συμπαγές, κυρτό και το $\{y\}$ είναι κλειστό και κυρτό από το 3ο διαχωριστικό Θεώρημα Α΄.3.2 θα υπάρχει $h \in X^*$ με $h(x) < h(y)$ δηλαδή $h(x-y) \neq 0$ και συνεπώς $p_h(x-y) > 0$.

Τέλος, αφού κάθε $h \in X^*$ είναι συνεχές ως προς την αρχική τοπολογία $\mathcal{T}$ και επειδή η $\mathcal{T}_w$ είναι η ελάχιστη τοπολογία ως προς την οποία οι ημινόρμες p_h είναι συνεχείς θα έχουμε ότι $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}$. Μάλιστα η $\mathcal{T}_w$ είναι η ελάχιστη τοπολογία ως προς την οποία κάθε $h \in X^*$ είναι συνεχής. Αυτό έπεται άμεσα από την παρατήρηση ότι η p_h είναι συνεχής αν και μόνο αν η h είναι συνεχής (αφού $|h(x) - h(y)| = p_h(x - y)$). Συνεπώς, κάθε γραμμικό συναρτησοειδές που είναι $\mathcal{T}_w$−συνεχές είναι και $\mathcal{T}$−συνεχές και αντίστροφα. Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα Β΄.1.2. *Έστω $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$ ένας τοπικά κυρτός τ.δ.χ. Τότε, ο $(X, +, \cdot)$ με την ασθενή τοπολογία $\mathcal{T}_w$ είναι ένας τοπικά κυρτός Hausdorff τ.δ.χ και η $\mathcal{T}_w$ είναι η ελάχιστη τοπολογία στον X ως προς την οποία κάθε $h \in X^*$ είναι συνεχής (δηλ. $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}$). Επίσης, τα γραμμικά συναρτησοειδή που είναι συνεχή ως προς την $\mathcal{T}_w$ είναι συνεχή και ως προς την $\mathcal{T}$ και αντίστροφα. Δηλαδή,*

$$(X, \mathcal{T}_w)^* = X^*. \tag{Β΄.1.1}$$

Τέλος, ένα δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ συγκλίνει ως προς την ασθενή τοπολογία στο $x \in X$ (συμβ. $x_\lambda \xrightarrow{w} x$) αν και μόνο αν $h(x_\lambda) \to h(x)$ για κάθε $h \in X^*$.

Αφού η ασθενής τοπολογία $\mathcal{T}_w$ είναι ασθενέστερη από την αρχική τοπολογία $\mathcal{T}$ του χώρου, για κάθε υποσύνολο $C \subseteq X$ θα ισχύει $\overline{C} \subseteq \overline{C}^w$. Το παρακάτω θεώρημα του Mazur, που χρησιμοποιείται αρκετές φορές σε αυτή την εργασία μας λέει ότι η κλειστή θήκη των δύο τοπολογιών ταυτίζεται στα κυρτά υποσύνολα του χώρου.

Θεώρημα Β΄.1.3 (Θεώρημα Mazur)**.** *Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος και $C \subseteq X$ ένα κυρτό υποσύνολο του X. Τότε, $\overline{C} = \overline{C}^w$.*

Απόδειξη. Αφού $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}$ θα έχουμε ότι $\overline{C} \subseteq \overline{C}^w$. Αν υπάρχει $x_0 \in \overline{C}^w \setminus \overline{C}$ τότε αφού το $\{x_0\}$ είναι κυρτό και συμπαγές και το $\overline{C}$ είναι κλειστό και κυρτό, από το 3ο Διαχωριστικό Θεώρημα Α΄.3.2 θα υπάρχει $h \in X^*$ και $a \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\sup_{x \in \overline{C}} h(x) < a < h(x_0),$$

όμως τότε θα έχουμε ότι $C \subseteq h^{-1}((-\infty, a])$ και επειδή το σύνολο $h^{-1}((-\infty, a])$ είναι κλειστό ως προς την ασθενή τοπολογία (η h είναι συνεχής ως προς την $\mathcal{T}_w$) θα έχουμε ότι $\overline{C}^w \subseteq h^{-1}((-\infty, a])$. Όμως αυτό είναι άτοπο αφού $x_0 \in \overline{C}^w$ και $x_0 \notin h^{-1}((-\infty, a])$. □

Β΄.1.2 Η Ασθενής* Τοπολογία

Περνάμε τώρα και στην ασθενή*-τοπολογία η οποία ορίζεται στον δυϊκό χώρο X^* ενός χώρου με νόρμα X. Θυμίζουμε ότι όταν ο X είναι χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$ τότε και ο δυϊκός χώρος X^* του X είναι χώρος με νόρμα που ορίζεται από την

$$\|h\|_{X^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|h(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |h(x)| \tag{Β΄.1.2}$$

και μάλιστα είναι και πλήρης ως προς αυτή τη νόρμα. Πολλές φορές θα γράφουμε απλά $\|h\|$ αντί για $\|h\|_{X^*}$.

Ορισμός Β΄.1.4 (Ασθενής* Τοπολογία)**.** Έστω X ένας χώρος με νόρμα και X^* ο δυϊκός χώρος του X. Η ασθενής* τοπολογία $\mathcal{T}_{w^*}$ στον X^* είναι η τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια ημινορμών $\{p_x : x \in X\}$ όπου $p_x(x^*) = |x^*(x)|$ για κάθε $x \in X$ και $x^* \in X^*$.

Όπως και στην περίπτωση της ασθενούς τοπολογίας η σύγκλιση των δικτύων σύμφωνα με την Πρόταση Α΄.3.8 περιγράφεται με απλό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, ένα δίκτυο (x^*_{λ}) στον X^* συγκλίνει στο x^* ως προς την ασθενή* τοπολογία (συμβ. $x_{\lambda} \xrightarrow{w^*} x^*$) αν και μόνο αν $x^*_{\lambda}(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$. Επίσης, αφού για κάθε $x^* \neq y^*$ υπάρχει $x \in X$ με $x^*(x) \neq y^*(x)$ άρα $p_x(x^* - y^*) > 0$, έπεται πως η οικογένεια ημινορμών $\{p_x : x \in X\}$ είναι και διαχωρίζουσα. Επίσης, ισχύει ότι $\mathcal{T}_{w^*} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{X^*}}$, όπου $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_{X^*}}$ η τοπολογία που παράγει η νόρμα της (Β΄.1.2) στον X^*. Πράγματι, από την (Α΄.3.3) μια βασική περιοχή του $x^* \in X^*$ έχει τη μορφή

$$W(x^*, \Delta, \epsilon) = \{y^* \in X^* : |x^*(x) - y^*(x)| < \epsilon \text{ για κάθε } x \in \Delta\} \tag{Β΄.1.3}$$

όπου $\Delta \subseteq X$ πεπερασμένο και $\epsilon > 0$. Όμως τότε γράφοντας $\Delta = \{x_1, ..., x_m\}$ και θέτοντας $M = \max\{\|x_1\|, ..., \|x_m\|\} > 0$ και $r = \epsilon/M > 0$ θα έχουμε ότι αν $y^* \in B(x^*, r)$ τότε για κάθε $x \in \Delta$

$$\begin{aligned} |x^*(x) - y^*(x)| &\leq \left\|x^* - y^*\right\| \|x\| \\ &< r\|x\| = \frac{\epsilon}{M}\|x\| < \epsilon \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $B(x^*, r) \subseteq W(x^*, \Delta, \epsilon)$ το οποίο με τη σειρά του μας δίνει ότι $\mathcal{T}_{w^*} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{X^*}}$. Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε αποδείξει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα Β΄.1.5. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Τότε, ο X^* με την ασθενή* τοπολογία $\mathcal{T}_{w^*}$ είναι ένας τοπικά κυρτός Hausdorff τ.δ.χ με $\mathcal{T}_{w^*} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{X^*}}$. Τέλος, ένα δίκτυο $(x^*_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ συγκλίνει ως προς την ασθενή* τοπολογία σε ένα $x^* \in X^*$ (συμβ. $x^*_{\lambda} \xrightarrow{w^*} x^*$) αν και μόνο αν $x^*_{\lambda}(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Β΄.2 Χώροι Banach

Β΄.2.1 Συνέπειες των ασθενών τοπολογιών

Όπως αναφέραμε και στην αρχή του Παραρτήματος Β΄, οι ασθενείς τοπολογίες αποτελούν ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη των χώρων Banach. Σε αυτή την παράγραφο διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε αποτελέσματα που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτή την εργασία.

Ορισμός Β΄.2.1 (Κανονική Εμφύτευση και Αυτοπάθεια)**.** Έστω ένας χώρος Banach X. Η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**} είναι η απεικόνιση $j : X \to X^{**}$ που ορίζεται μέσω της $j(x)(x^*) = x^*(x)$ για $x \in X$ και $x^* \in X^*$. Ο X καλείται αυτοπαθής αν η j είναι επί, δηλαδή $j(X) = X^{**}$.

Θυμίζουμε ότι η $j : X \to X^{**}$ είναι γραμμική ισομετρία, δηλαδή $\|j(x)\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Επίσης, από τις ισοδυναμίες $x_{\lambda} \xrightarrow{w} x \iff x^*(x_{\lambda}) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^* \iff j(x_{\lambda})(x^*) \to j(x)(x^*)$ για κάθε $x^* \in X^*$ προκύπτει ότι η j είναι (w, w^*)−συνεχής.

Στον δυϊκό χώρο X^* έχουμε τρεις τοπολογίες, την τοπολογία $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_{X^*}}$ της νόρμας, την ασθενή τοπολογία $\mathcal{T}_w$ και την ασθενή* τοπολογία $\mathcal{T}_{w^*}$. Αφού η $\mathcal{T}_{w^*}$ είναι η ελάχιστη τοπολογία που κάνει την οικογένεια ημινορμών

$$\Gamma_1 = \{p_x : x \in X\} \text{ με } p_x(x^*) = |x^*(x)| \text{ για κάθε } x^* \in X^*$$

συνεχή και επειδή η Γ_1 περιέχεται στην οικογένεια

$$\Gamma = \{p_{x^{**}} : x^{**} \in X^{**}\} \text{ με } p_{x^{**}}(x^*) = |x^{**}(x^*)| \text{ για κάθε } x^* \in X^*$$

που παράγει την ασθενή τοπολογία $\mathcal{T}_w$ στον X^* θα έχουμε ότι $\mathcal{T}_{w^*} \subseteq \mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{X^*}}$. Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο πως οι παραπάνω τοπολογίες έχουν περισσότερο νόημα στην περίπτωση που ο X είναι απειροδιάστατος (αλλιώς $\mathcal{T}_{w^*} = \mathcal{T}_w = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{X^*}}$).

Παρακάτω εξετάζονται βασικές ιδιότητες της ασθενούς και της ασθενούς* τοπολογίας σχετικά με τη νόρμα του χώρου. Μερικές από τις αποδείξεις αυτών χρησιμοποιούν την Αρχή του Ομοιόμορφου φράγματος, ενός βασικού εργαλείου στη μελέτη των χώρων Banach.

Θεώρημα Β΄.2.2 (Αρχή Ομοιόμορφου φράγματος)**.** *Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας χώρος με νόρμα και $T_i : X \to Y$ $(i \in I)$, μια οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών για την οποία ισχύει ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $0 < M_x < \infty$ με $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| \leq M_x$ τότε υπάρχει $0 < M < \infty$ ώστε $\sup\limits_{i\in I} \|T_i\|$* [1] *$\leq M$.*

Πρόταση Β΄.2.3. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα και $K \subseteq X$ ένα υποσύνολο του X. Τότε, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το K είναι ασθενώς φραγμένο,* δηλαδή για κάθε $x^* \in X^*$ το σύνολο $\{x^*(x) : x \in K\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(ii) Το K είναι $\|\cdot\|$-φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ με $\|x\| \leq M$ για κάθε $x \in K$.

Απόδειξη. Η κατεύθυνση (ii) $\Longrightarrow$ (i) είναι προφανής αφού για $x^* \in X^*$ θα έχουμε ότι $|x^*(x)| \leq \|x^*\|\,\|x\| \leq M\,\|x^*\|$, δηλαδή $|x^*(x)| \leq M\,\|x^*\|$ για κάθε $x \in K$ και συνεπώς το $\{x^*(x) : x \in K\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Υποθέτουμε ότι για κάθε $x^* \in X^*$ υπάρχει $M_{x^*} > 0$ με $|x^*(x)| \leq M_{x^*}$ για κάθε $x \in K$. Τότε, για την οικογένεια γραμμικών τελεστών $(j(x))_{x\in K}$ με $j(x) : X^* \to \mathbb{R}$ θα ισχύει ότι

$$\sup_{x\in K} |j(x)(x^*)| < \infty$$

για κάθε $x^* \in X^*$. Οπότε, από την Αρχή ομοιόμορφου φράγματος θα υπάρχει $M > 0$ με $\sup_{x\in K} \|j(x)\| \leq M$. Όμως επειδή $\|j(x)\| = \|x\|$ θα έχουμε τελικά ότι $\sup_{x\in K} \|x\| \leq M$. □

Πρόταση Β΄.2.4. *Έστω X ένας χώρος Banach. Τότε,*

(i) *Για κάθε δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ με $x_\lambda \xrightarrow{w} x$ ισχύει ότι $\|x\| \leq \liminf\limits_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|$* [2]*.*

(ii) *Για κάθε δίκτυο $(x^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ με $x_\lambda \xrightarrow{w^*} x^*$ ισχύει ότι $\|x^*\| \leq \liminf\limits_{\lambda\in\Lambda} \left\|x^*_\lambda\right\|$.*

[1] όπου με $\|T\|$ εννοούμε τη νόρμα του τελεστή T που ορίζεται ως $\|T\| = \sup\limits_{x\neq 0} \|T(x)\| / \|x\|$

[2] όπου $\liminf\limits_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\| = \sup\limits_{\lambda\geq\mu_0} \inf\limits_{\mu\geq\mu_0} \|x_\lambda\|$, αντίστοιχα ορίζεται και το $\limsup_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|$ και ισχύουν ανάλογες ιδιότητες όπως στις ακολουθίες.

Απόδειξη. (i) Αφού το $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ είναι ασθενώς φραγμένο, από την Πρόταση Β΄.2.3 θα έχουμε ότι $\liminf_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\| < \infty$. Επίσης, για κάθε $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| \leq 1$ ισχύει

$$\begin{aligned} |j(x)(x^*)| = |x^*(x)| &= \lim_{\lambda\in\Lambda}|x^*(x_\lambda)| \\ &= \liminf_{\lambda\in\Lambda}|x^*(x_\lambda)| \\ &\leq \left\|x^*\right\| \liminf_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|, \end{aligned}$$

δηλαδή $|j(x)(x^*)| \leq \liminf_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|$ για κάθε $\|x^*\| \leq 1$. Όμως,

$$\|j(x)\| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |j(x)(x^*)|$$

και επειδή $\|j(x)\| = \|x\|$ θα έχουμε τελικά ότι $\|x\| \leq \liminf_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|$.

(ii) Για κάθε $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |x^*(x)| &= \lim_{\lambda\in\Lambda}|x^*_\lambda(x)| \\ &= \liminf_{\lambda\in\Lambda}|x^*_\lambda(x)| \\ &\leq \|x\| \liminf_{\lambda\in\Lambda} \left\|x^*_\lambda\right\| = \liminf_{\lambda\in\Lambda} \left\|x^*_\lambda\right\|, \end{aligned}$$

δηλαδή για κάθε $\|x\| \leq 1$ θα έχουμε ότι $|x^*(x)| \leq \liminf_{\lambda\in\Lambda} \left\|x^*_\lambda\right\|$ απ' όπου έπεται ότι $\|x^*\| \leq \liminf_{\lambda\in\Lambda} \left\|x^*_\lambda\right\|$. □

Μια ένδειξη του πόσο μικρότερη είναι η ασθενής* τοπολογία από την τοπολογία της νόρμας στην περίπτωση που ο X είναι απειροδιάστατος δίνει το θεώρημα του Αλάογλου:

Θεώρημα Β΄.2.5 (Θεώρημα Αλάογλου). *Έστω X ένας χώρος Banach. Τότε, η κλειστή μοναδιαία μπάλα $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ του X^* είναι w^*-συμπαγής.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο

$$D = \prod_{x\in X}[-\|x\|, \|x\|]$$

και $\mathcal{T}_K$ την καρτεσιανή τοπολογία στο D. Από το θεώρημα του Tychonoff ο $(D, \mathcal{T}_K)$ είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος. Έστω $\phi : B_{X^*} \to D$ με $\phi(x^*) = (x^*(x))_{x\in X}$. Τότε, η ϕ είναι καλά ορισμένη αφού για $x^* \in B_{X^*}$ έχουμε ότι $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\| \leq \|x\|$ απ' όπου έπεται ότι $x^*(x) \in [-\|x\|, \|x\|]$. Άρα, $\phi(x^*) \in D$. Επίσης, η ϕ είναι και 1-1 αφού αν $\phi(x^*) = \phi(y^*)$ τότε $x^*(x) = y^*(x)$ για κάθε $x \in X$. Ειδικότερα, η ισότητα θα ισχύει για κάθε $x \in B_X$ απ' όπου έπεται ότι

$$\left\|x^* - y^*\right\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |x^*(x) - y^*(x)| = 0.$$

Με άλλα λόγια, $x^* = y^*$. Τώρα, αν (x^*_λ) είναι ένα δίκτυο στον X^* με $x^*_\lambda \xrightarrow{w^*} x^*$ τότε για κάθε $x \in X$ θα έχουμε ότι $x^*_\lambda(x) \to x^*(x)$. Δηλαδή, $\pi_x \circ \phi(x^*_\lambda) \to \pi_x \circ \phi(x^*)$ για κάθε $x \in X$, όπου $\pi_x : D \to [-\|x\|, \|x\|]$ η προβολή στην $x-$οστή συντεταγμένη. Όμως η τελευταία σύγκλιση είναι ισοδύναμη με το ότι $\phi(x^*_\lambda) \xrightarrow{\mathcal{T}_K} \phi(x^*)$ το οποίο μας δίνει ότι η ϕ είναι $(w^*, \mathcal{T}_K)$-συνεχής. Τέλος, ισχυριζόμαστε ότι το $\phi(B_X)$ είναι κλειστό υποσύνολο του D. Πράγματι, θεωρούμε $z = (z_x)_{x\in X} \in D$ και ένα δίκτυο x^*_λ στην B_{X^*} με $\phi(x^*_\lambda) \xrightarrow{\mathcal{T}_K} z$. Τότε, περνώντας σε σύγκλιση ως προς τις προβολές θα έχουμε ότι $x^*_\lambda(x) \to z_x$ για κάθε $x \in X$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : X \to \mathbb{R}$ με $h(x) = z_x$. Αφού $x^*_\lambda(x) \to h(x)$ για κάθε για κάθε $x \in X$ έπεται πως η h είναι και γραμμική και από την Πρόταση Β΄.2.4-(ii) θα έχουμε ότι $\|h\| \leq \liminf_{\lambda\in\Lambda} \left\|x^*_\lambda\right\| \leq 1$, άρα $h \in B_{X^*}$ και επειδή $\phi(h) = z$ έπεται πως το $\phi(B_X)$ είναι κλειστό υποσύνολο του D και συνεπώς είναι συμπαγές. Όμως, η B_{X^*} είναι ομοιομορφική με το $\phi(B_X)$. □

Παρατηρήστε ότι αντικαθιστώντας στο παραπάνω θεώρημα τον X με τον X^* παίρνουμε ότι η $B_{X^{**}}$ είναι w^*-συμπαγής όπου τώρα έχουμε την ασθενή*-τοπολογία στον X^{**}. Μια άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα της $B_{X^{**}}$ είναι ότι ισούται με την w^*-κλειστή θήκη της B_X, αυτό είναι το θεώρημα του Goldstine. Για την αποδειξή του θα πρέπει να προσδιορίσουμε τα γραμμικά συναρτησοειδή $h : X^{**} \to \mathbb{R}$ τα οποία είναι w^*-συνεχή.

Λήμμα Β΄.2.6. *Έστω X ένας $\mathbb{R}-$ διανυσματικός χώρος και $h, h_1, \dots, h_m : X \to \mathbb{R}$ γραμμικές συναρτήσεις. Τότε, υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ με $h = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_m h_m$ αν και μόνο αν ισχύει ότι*

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker h_i \subseteq \ker h. \tag{Β΄.2.1}$$

Απόδειξη. Η κατεύθυνση ($\Longrightarrow$) είναι προφανής. Για την αντίστροφη κατεύθυνση μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $h \neq 0$. Θεωρούμε την απεικόνιση $T : X \to \mathbb{R}^m$ με $T(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$ η οποία είναι γραμμική. Άρα η εικόνα $T(X)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $S : T(X) \to \mathbb{R}$ με $S((h_1(x), \dots, h_m(x)) = h(x)$. Λόγω της (Β΄.1.1) είναι καλά ορισμένη αφού αν $(h_1(x), \dots, h_m(x)) = (h_1(y), \dots, h_m(y))$ τότε $x-y \in \bigcap_{i=1}^m \ker h_i$ απ' όπου έπεται ότι $x - y \in \ker h$ και έτσι θα έχουμε ότι $h(x) = h(y)$. Επίσης, η S είναι και γραμμική, συνεπώς επεκτείνεται σε γραμμική συνάρτηση $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Τότε, θέτοντας $\lambda_i = S(e_i)$ όπου $(e_i)_{i=1}^m$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^m$ θα έχουμε ότι για κάθε $x \in X$

$$\begin{aligned} h(x) &= S((h_1(x), \dots, h_m(x)) \\ &= h_1(x)S(e_1) + \dots + h_m(x)S(e_m) \\ &= \lambda_1 h_1(x) + \dots + \lambda_m h_m(x) \end{aligned}$$

Δηλαδή $h = \lambda_1 h_1 + \dots + h_m \lambda_m$. □

Πρόταση Β΄.2.7. *Έστω X ένας χώρος Banach. Τότε, ένα γραμμικό συναρτησοειδές $h : X^* \to \mathbb{R}$ είναι w^*-συνεχές αν και μόνο αν $h \in j(X)$. Δηλαδή, $(X^*, \mathcal{T}_{w^*})^* = j(X)$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Αφού το h είναι w^*-συνεχές θα υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in X$ και $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $x^* \in X^*$

$$\text{αν } |x^*(x_i)| < \epsilon \text{ για κάθε } i = 1, \dots, m \text{ τότε } |h(x^*)| < 1 \tag{Β΄.2.2}$$

Θεωρούμε τα συναρτησοειδή $j(x_1), \dots, j(x_m) \in j(X)$ και ισχυριζόμαστε ότι

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker j(x_i) \subseteq \ker h.$$

Πράγματι, αν $|x^*(x_i)| = j(x_i)(x^*) = 0$ για $i = 1, \ldots, m$, τότε το nx^* θα ικανοποιεί την (Β'.2.2) για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε ότι $|h(x^*)| < 1/n$, απ' όπου έπεται ότι $h(x^*) = 0$ και συνεπώς $x^* \in \ker h$. Άρα από το Λήμμα Β'.2.6 θα υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ με $h = \lambda_1 j(x_1) + \ldots + \lambda_m j(x_m)$ και έτσι θα έχουμε ότι $h \in j(X)$.

($\Longleftarrow$) Αν $h \in j(X)$ τότε θα υπάρχει $x_0 \in X$ με $h = j(x_0)$. Τότε, αφού το h είναι γραμμικό συναρτησοειδές αρκεί να ελέγξουμε τη συνέχεια στο 0. Όμως, για $\epsilon > 0$ έχουμε ότι $h^{-1}(-\epsilon, +\epsilon) = W(0, \{x_0\}, \epsilon)$ το οποίο είναι w^*−ανοικτό και έτσι έχουμε ότι το h είναι w^*−συνεχές. □

Αναδιατυπώνοντας την παραπάνω πρόταση με τον X αυτή τη φορά να είναι ο X^* έχουμε ότι ένα γραμμικό συναρτησοειδές $h : X^{**} \to \mathbb{R}$ είναι w^*−συνεχές αν και μόνο αν $h \in j(X^*)$, δηλαδή υπάρχει $x^* \in X^*$ με $h(x^{**}) = x^{**}(x^*)$ για κάθε $x^{**} \in X^{**}$.

Θεώρημα Β'.2.8 (Θεώρημα Goldstine)**.** *Έστω X ένας χώρος Banach. Τότε,*

$$\overline{j(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}. \tag{Β'.2.3}$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση Β'.2.4-(ii) έπεται πως η $B_{X^{**}}$ είναι w^*−κλειστή (ή αλλιώς είναι w^*−συμπαγής). Οπότε επειδή $j(B_X) \subseteq B_{X^{**}}$ θα έχουμε ότι $\overline{j(B_X)}^{w^*} \subseteq B_{X^{**}}$. Αν η (Β'.2.1) δεν ισχύει θα υπάρχει $\left\|x_0^{**}\right\| \leq 1$ με $x_0^{**} \notin \overline{j(B_X)}^{w^*}$. Όμως τώρα το $\{x_0\}$ είναι κυρτό, w^*−συμπαγές και ξένο από το κυρτό και w^*−κλειστό $\overline{j(B_X)}^{w^*}$. Άρα από το 3ο Διαχωριστικό Θεώρημα Α'.3.2 θα υπάρχει w^*-συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $h : X^{**} \to \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ με

$$\sup\{h(x^{**}) : x^{**} \in j(B_X)\} = \sup_{\|x\| \leq 1} h(j(x)) < a < h(x_0^{**}). \tag{Β'.2.4}$$

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις θα υπάρχει $x^* \in X^*$ με $h(x^{**}) = x^{**}(x^*)$. Οπότε, αφού $h(j(x)) = x^*(x)$ από την (Β'.2.4) έχουμε ότι για κάθε $\|x\| \leq 1$ ισχύει $x^*(x) < a < x_0^{**}(x^*) \leq |x_0^{**}(x^*)|$. Όμως τότε θα έχουμε από τη μια ότι $a < |x_0^{**}(x^*)| \leq \left\|x_0^{**}\right\| \|x^*\| = \|x^*\|$ και από την άλλη ότι $\|x^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} x^*(x) \leq a$ και με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο. □

Το θεώρημα Goldstine σε συνδυασμό με την w^*−συμπάγεια της $B_{X^{**}}$ μας δίνουν ένα χαρακτηρισμό της αυτοπάθειας.

Θεώρημα Β'.2.9 (Χαρακτηρισμός Αυτοπάθειας)**.** Έστω X ένας χώρος Banach. Τότε, ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν η κλειστή μοναδιαία μπάλα B_X είναι ασθενώς συμπαγής.

Απόδειξη. Εάν ο X είναι αυτοπαθής τότε θα έχουμε ότι ο $j(B_X) = B_{X^{**}}$, όμως αφού η j είναι (w, w^*)−συνεχής ομοιομορφισμός και η $B_{X^{**}}$ ασθενώς* συμπαγής, τότε η B_X θα είναι ασθενώς συμπαγής.

Αντίστροφα, εάν η B_X είναι ασθενώς συμπαγής τότε η $j(B_X)$ θα είναι ασθενώς* συμπαγής ως εικόνα συμπαγούς μέσω συνεχούς συνάρτησης. Από το θεώρημα Goldstine θα έχουμε ότι $j(B_X) = B_{X^{**}}$ απ' όπου έπεται ότι $j(X) = X^{**}$ και συνεπώς ο X είναι αυτοπαθής. □

Φυσικά, αν ο X είναι αυτοπαθής τότε η ασθενής τοπολογία θα συμπίπτει με την ασθενή* τοπολογία στον δυϊκό χώρο X^*. Αλλά ισχύει και το αντίστροφο καθώς αν στον X^* έχουμε ότι $\mathcal{T}_w = \mathcal{T}_{w^*}$ τότε η κλειστή μοναδιαία μπάλα B_{X^*} θα είναι ασθενώς συμπαγής με αποτελέσμα ο X^* να είναι αυτοπαθής. Οπότε, στον X^{**} η ασθενής τοπολογία θα συμπίπτει με την ασθενή* τοπολογία. Άρα κάθε $x^{**} \in X^{**}$ θα είναι w^*-συνεχές και έτσι από την Πρόταση Β΄.2.7 θα έχουμε ότι $x^{**} \in j(X)$, δηλαδή $j(X) = X^{**}$. Άρα η κλάση των χώρων Banach για τους οποίους η ασθενής τοπολογία στον X^* συμπίπτει με την ασθενή* τοπολογία είναι ακριβώς οι αυτοπαθείς χώροι.

Το ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα B_{X^*} είναι ασθενώς* συμπαγής είναι αδιαμφησβήτητα μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες της ασθενούς* τοπολογίας. Στο πλαίσιο της ασθενούς τοπολογίας έχουμε το θεώρημα των Eberlein-Smulian το οποίο μας λέει πως η ασθενής τοπολογία ενός χώρου Banach συμπεριφέρεται σαν την τοπολογία ενός μετρικού χώρου στα ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του χώρου.

Θεώρημα Β΄.2.10 (Θεώρημα Eberlein-Smulian)**.** *Έστω K ένα υποσύνολο ενός χώρου Banach. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το K είναι ασθενώς συμπαγές.*

(ii) *Το K είναι ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές.*

(iii) *Το K είναι αριθμήσιμα ασθενώς συμπαγές.*

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος παραπέμπουμε στο [16] .

Β΄.2.2 Ομοιόμορφη κυρτότητα

Η ομοιόμορφη κυρτότητα είναι μια έννοια η οποία αφορά την κλειστή μοναδιαία μπάλα B_X. Πολύ χονδρικά οι ομοιόμορφα κυρτοί χώροι είναι αυτοί που η μοναδιαία τους μπάλα B_X δεν έχει «γωνίες». Όπως θα δούμε παρακάτω η έννοια της ομοιόμορφης κυρτότητας είναι μια ιδιαίτερα ισχυρή έννοια αφού κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος πρέπει να είναι αυτοπαθής (θεώρημα Milman-Pettis).

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε τους απαραίτητους ορισμούς και αποδεικνύουμε τις βασικές ιδιότητες που θα χρησιμοποιηθούν στο κύριο μέρος της εργασίας.

Ορισμός Β΄.2.11 (Γνήσια και Ομοιόμορφη κυρτότητα)**.** Έστω X ένας χώρος Banach. Ο X θα καλείται:

(i) γνήσια κυρτός όταν για κάθε $x \neq y$ με $\|x\| = \|y\| = 1$ ισχύει ότι $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$.

(ii) ομοιόμορφα κυρτός αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\|x\| = \|y\| = 1$ με $\|x - y\| > \epsilon$ να ισχύει ότι $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta$.

Παρατηρήσεις Β΄.2.12. Είναι φανερό από τους παραπάνω ορισμούς πως κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος είναι και γνήσια κυρτός. Αν ο X είναι γνήσια κυρτός και C είναι ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X, τότε για κάθε $x_0 \in X \setminus C$ αν υπάρχει $x \in C$ που «πιάνει» την ελάχιστη απόσταση από το x_0, δηλαδή $\|x - x_0\| = d(x_0, C) = \inf\{\|x - x_0\| : x \in C\}$ τότε αυτό είναι και μοναδικό.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $x_0 = 0$ και $0 \notin C$. Έστω πως υπάρχει $y \in C$ με $y \neq x$ και $\|y\| = d$ όπου $d = d(0, C)$. Αφού το C είναι κλειστό και $0 \notin C$ έχουμε ότι $d > 0$. Αφού το C είναι κυρτό τότε το μέσο $\frac{x+y}{2}$ των x, y θα ανήκει στο C. Θεωρούμε τα $x' = x/d$ και $y' = y/d$ για τα οποία ισχύει ότι $x' \neq y'$ και $\|x'\| = \|y'\| = 1$. Από τη γνήσια κυρτότητα του X

$$\left\|\frac{x' + y'}{2}\right\| < 1 \implies \left\|\frac{x + y}{2}\right\| < d,$$

πράγμα το οποίο είναι άτοπο αφού $\frac{x+y}{2} \in C$ και $d = d(0, C)$. Για τη γενική περίπτωση θεωρούμε το κυρτό $C' = C - x_0$, οπότε $0 \notin C'$ και $d(0, C') = d(x_0, C) = \|x - x_0\|$ και επομένως η μοναδικότητα του $x \in C$ έπεται από την παραπάνω ειδική περίπτωση. □

Είδαμε πως αν ο X είναι γνήσια κυρτός, C είναι κυρτό υποσύνολο του X και $x_0 \notin C$ τότε υπάρχει το πλησιέστερο σημείο του C ως προς το x_0 τότε αυτό είναι μοναδικό. Παρ' όλα αυτά κανείς δε μας εγγυάται πως αυτό θα υπάρχει απαραίτητα. Η ύπαρξη εξασφαλίζεται όταν ο X είναι ομοιόμορφα κυρτός.

Πρόταση Β΄.2.13. *Έστω X ένας ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach. Αν C είναι ένα μη κενό, κυρτό, κλειστό υποσύνολο του X και $x_0 \notin C$ τότε υπάρχει μοναδικό $x \in C$ με $d(x_0, C) = \|x - x_0\|$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $x_0 = 0$ και $0 \notin C$. Αφού $d = d(0, C) = \inf\{\|x\| : x \in C\} > 0$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του C με $\|x_n\| \to d$. Θεωρούμε την ακολουθία $x'_n = x_n / \|x_n\|$ και ισχυριζόμαστε πως αυτή είναι βασική. Πράγματι, αν αυτό δεν ισχύει θα υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ και δύο υπακολουθίες (x'_{k_n}),(x'_{m_n}) της (x'_n) με

$$\left\|x'_{k_n} - x'_{m_n}\right\| > \epsilon_0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Από την ομοιόμορφη κυρτότητα του X θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\left\|\frac{x'_{k_n} + x'_{m_n}}{2}\right\| < 1 - \delta \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{Β΄.2.5}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\left\|x'_n - \frac{x_n}{d}\right\| &= \left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_n}{d}\right\| \\ &= \left\|\frac{dx_n - \|x_n\| x_n}{d\,\|x_n\|}\right\| \\ &= \frac{\left|d - \|x_n\|\right|}{d} \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$. Οπότε από την τριγωνική ανισότητα θα έχουμε ότι

$$\left\|\frac{x'_{k_n} + x'_{m_n}}{2} - \frac{x_{k_n} + x_{m_n}}{2d}\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|x'_{k_n} - \frac{x_{k_n}}{d}\right\| + \frac{1}{2}\left\|x'_{m_n} - \frac{x_{m_n}}{d}\right\| \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Άρα και

$$\left|\left\|\frac{x'_{k_n} + x'_{m_n}}{2}\right\| - \left\|\frac{x_{k_n} + x_{m_n}}{2d}\right\|\right| \longrightarrow 0$$

για $n \to \infty$. Από την παραπάνω σύγκλιση και την (Β′.2.5) θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$\left\|\frac{x_{k_n} + x_{m_n}}{2}\right\| < d(1-\delta) < d,$$

αυτό όμως είναι άτοπο αφού $\frac{x_{k_n}+x_{m_n}}{2} \in C$ και $d = d(0, C)$. Άρα η (x'_n) είναι βασική και συνεπώς θα είναι και συγκλίνουσα. Όμως τότε αφού η (x'_n) πρέπει να έχει το ίδιο όριο με την (x_n/d) έπεται πως η (x_n) είναι συγκλίνουσα σε κάποιο $x \in X$. Αφού το C είναι κλειστό έχουμε $x \in C$ και επειδή $\|x_n\| \to d$ θα πρέπει $\|x\| = d$ και έτσι έχουμε αποδείξει την ύπαρξη του πλησιέστερου σημείου στην περίπτωση που $x_0 = 0$. Η μοναδικότητα έπεται από την Παρατήρηση Β′.2.12. Για τη γενική περίπτωση θεωρούμε το κυρτό και κλειστό $C' = x_0 - C$ για το οποίο ισχύει ότι $0 \notin C'$. □

Η παρακάτω πρόταση μας λέει πως όταν ο X είναι ομοιόμορφα κυρτός τότε η συνθήκη (ii) του Ορισμού Β′.2.11 ισχύει για ολόκληρη τη μοναδιαία μπάλα και όχι μόνο για την περιφέρειά της.

Πρόταση Β′.2.14. *Έστω X ένας χώρος Banach. Τότε, ο X είναι ομοιόμορφα κυρτός αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $\|x\| \le 1, \|y\| \le 1$ με $\|x - y\| \ge \epsilon$ να ισχύει $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le 1 - \delta$..*

Απόδειξη. Η κατεύθυνση ($\Longleftarrow$) είναι η προφανής, καθώς αν η συνθήκη ομοιόμορφης κυρτότητας ισχύει για ολόκληρη τη μπάλα θα ισχύει ειδικότερα και για την περιφέρειά της.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνθήκη ομοιόμορφης κυρτότητας ισχύει για την περιφέρεια της μοναδιαίας μπάλας αλλά όχι για ολόκληρη τη μπάλα. Τότε, θα υπάρχει ένα $\epsilon_0 > 0$ και δύο ακολουθίες $\|x_n\| \le 1, \|y_n\| \le 1$ με

$$\|x_n - y_n\| > \epsilon_0 \ \text{ αλλά } \ \left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| > 1 - \frac{1}{n} \ \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}, \tag{Β′.2.6}$$

δηλαδή

$$\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \to 1$$

καθώς το $n \to \infty$. Όμως, αφού $\|x_n\|, \|y_n\| \le 1$ θα έχουμε

$$\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \le \frac{\|x_n\|}{2} + \frac{\|y_n\|}{2} \le 1 \ \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

συνεπώς λόγω της (Β′.2.6) θα πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει $\|x_n\| \to 1$ και $\|y_n\| \to 1$ καθώς το $n \to \infty$. Οπότε τώρα θεωρώντας τις ακολουθίες $x'_n = x_n/\|x_n\|$ και $y'_n = y_n/\|y_n\|$ οι οποίες βρίσκονται στην περιφέρεια της μπάλας θα έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|x_n - x'_n\right\| &= \frac{1}{\|x_n\|}\Big\|\|x_n\| x_n - x_n\Big\| \\ &= \big|1 - \|x_n\|\big| \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$ και ομοίως $\left\|y_n - y'_n\right\| \to 0$ απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}\Big|\|x_n - y_n\| - \left\|x'_n - y'_n\right\|\Big| &\le \left\|x_n - x'_n + y'_n - y_n\right\| \\ &\le \left\|x_n - x'_n\right\| + \left\|y'_n - y_n\right\| \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$. Συνεπώς, θα υπάρχει n_0 ώστε $\left\|x'_n - y'_n\right\| > \epsilon_0$ για κάθε $n \geq n_0$. Επίσης, με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε και ότι

$$\left| \left\| \frac{x'_n + y'_n}{2} \right\| - \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| \right| \to 0$$

για $n \to \infty$. Τώρα λόγω της (Β′.2.6) θα έχουμε ότι

$$\left\| \frac{x'_n + y'_n}{2} \right\| \to 1,$$

αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με τη συνθήκη της ομοιόμορφης κυρτότητας που ισχύει στην περιφέρεια της μοναδιαίας μπάλας. □

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως η ομοιόμορφη κυρτότητα είναι μια ιδιαίτερα ισχυρή έννοια και αυτό φαίνεται από το θεώρημα των Milman-Pettis:

Θεώρημα Β′.2.15 (Θεώρημα Milman-Pettis). *Έστω X ένας ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach. Τότε ο X είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. Έστω πως ο X δεν είναι αυτοπαθής. Τότε, θα υπάρχει $\|x^{**}\| = 1$ με $x^{**} \notin j(X)$. Αφού, ο X είναι πλήρης, ο $j(X)$ θα είναι κλειστό υποσύνολο του X^{**} και άρα θα είναι κλειστό και το $j(B_X)$. Οπότε από την ομοιόμορφη κυρτότητα του X για το $\epsilon_0 = d(x^{**}, j(B_X)) > 0$ θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1$ με

$$\left\| \frac{j(y) + j(x)}{2} \right\| > 1 - \delta$$

να ισχύει $\|j(x) - j(y)\| < \frac{\epsilon_0}{2}$. Αφού $\|x^{**}\| = 1$ θα υπάρχει $\|x^*\| = 1$ με $x^{**}(x^*) > 1 - \delta$. Τότε, το

$$V = \{y^{**} \in X^{**} : y^{**}(x^*) > 1 - \delta\}$$

είναι ασθενώς*-ανοικτή περιοχή του x^{**}. Από το θεώρημα Goldstine (Β′.2.8) θα ισχύει $j(B_X) \cap V \neq \emptyset$, συνεπώς θα υπάρχει $\|x\| \leq 1$ με $x^*(x) > 1 - \delta$. Τότε, για κάθε $\|y\| \leq 1$ και $y \in V$ έχουμε ότι

$$\|x + y\| \geq |x^*(x) + x^*(y)| > 2 - 2\delta,$$

δηλαδή

$$\left\| \frac{j(x) + j(y)}{2} \right\| = \left\| \frac{x + y}{2} \right\| > 1 - \delta,$$

απ' όπου έπεται ότι $\|j(x) - j(y)\| < \frac{\epsilon_0}{2}$, άρα $V \cap j(B_X) \subseteq j(x) + \frac{\epsilon_0}{2} B_{X^{**}}$. Όμως το $j(x) + \epsilon_0 B_{X^{**}}$ είναι w^*-κλειστό απ' όπου έπεται ότι

$$V \cap \overline{j(B_X)}^{w^*} \subseteq j(x) + \frac{\epsilon_0}{2} B_{X^{**}}$$

όμως $x^{**} \in V \cap \overline{j(B_X)}^{w^*}$ το οποίο μας δίνει ότι $\|x^{**} - j(x)\| < \epsilon_0/2$ πράγμα το οποίο είναι άτοπο αφού $\epsilon_0 = d(x^{**}, j(B_X))$. □

Β′.3 Τελεστές μεταξύ χώρων Banach

Για δύο χώρους με νόρμα X, Y συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(X, Y)$ το σύνολο των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to Y$. Δηλαδή,

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{T : X \to Y : T \text{ γραμμική με } \|T\| < \infty\}$$

όπου $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$ η νόρμα τελεστή. Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση που ο Y είναι χώρος Banach τότε ο $\mathcal{B}(X, Y)$ με τη νόρμα τελεστή είναι και αυτός χώρος Banach.

Σε αυτή την παράγραφο ορίζουμε τον συζυγή τελεστή, τους συμπαγείς και τους ασθενώς συμπαγείς τελεστές, και αποδεικνύουμε τις βασικές ιδιότητές τους.

Β′.3.1 Συζυγής Τελεστής

Ορισμός Β′.3.1 (Συζυγής Τελεστής)**.** Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Ο συζυγής τελεστής T^* του T είναι ο τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ που ορίζεται από την $T^*y^*(x) = y^*(Tx)$ για κάθε $y^* \in Y^*$ και $x \in X$.

Πρόταση Β′.3.2. *Ο T^* είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, δηλαδή $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$ και μάλιστα $\|T^*\| = \|T\|$.*

Απόδειξη. Η γραμμικότητα του T^* είναι προφανής. Για $y^* \in Y^*$ και $x \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left\|T^*y^*(x)\right\| &= \left\|y^*(Tx)\right\| \\ &\leq \left\|y^*\right\| \|Tx\| \\ &\leq \left\|y^*\right\| \|T\| \|x\| \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\|T^*y^*\| \leq \|y^*\| \|T\| < \infty$ δηλαδή $T^*y^* \in X^*$, άρα ο T^* είναι καλά ορισμένος και $\|T^*\| \leq \|T\|$.
Τώρα για να δείξουμε ότι $\|T\| \leq \|T^*\|$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T \neq 0$ αλλίως $T^* = 0$ και $\|T^*\| = \|T\| = 0$. Αφού $T \neq 0$ υπάρχει $\|x\| \leq 1$ με $Tx \neq 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Hahn-Banach βρίσκουμε $\|y^*\| = 1$ με $y^*(Tx) = \|Tx\|$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= |y^*(Tx)| \\ &= |T^*y^*(x)| \\ &\leq \left\|T^*y^*\right\| \|x\| \\ &\leq \left\|T^*\right\| \|x\|, \end{aligned}$$

δηλαδή για κάθε $\|x\| \leq 1$ έχουμε $\|Tx\| \leq \|T^*\| \|x\|$ απ' όπου έπεται ότι $\|T\| \leq \|T^*\|$. □

Για $y^* \in Y^*$ και $x \in X$ αντί για $T^*y^*(x)$ θα γράφουμε $\langle x, T^*y^*\rangle$. Οπότε η ισότητα $T^*y^*(x) = y^*(Tx)$ γίνεται $\langle x, T^*y^*\rangle = \langle Tx, y\rangle$. Επίσης, αντί για $x^*(x)$ θα γράφουμε $\langle x, x^*\rangle$ όταν το $x^*(x)$ εμφανίζεται στην ίδια σχέση με τον συζυγή τελεστή T^*.

Φυσικά τα παραπάνω συμφωνούν με τη θεωρία των χώρων Hilbert. Στην ειδική περίπτωση όπου $X = H$ είναι ένας χώρος Hilbert, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz γνωρίζουμε ότι κάθε $x^* \in H^*$ αναπαρίσταται ώς $x^*(x) = \langle x, y_{x^*}\rangle$ για κάποιο $y_{x^*} \in H$. Στην περίπτωση

$X = Y = H$ ο συζυγής τελεστής του Ορισμού Β′.3.1 γενικεύει τον συζυγή τελεστή T^* ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή $T : H \to H$ ο οποίος ικανοποιεί την $\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H$. Με αυτές τις παρατήρησεις ο παραπάνω συμβολισμός είναι συνεπής με την ήδη γνωστή θεωρία των χώρων Hilbert.

Για $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ και $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ έχουμε ότι $(ST)^* = T^*S^*$. Πράγματι, για $z^* \in Z^*$ και $x \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle x, (ST)^*z^*\rangle &= \langle STx, z^*\rangle\\ &= \langle Tx, S^*z^*\rangle\\ &= \langle x, T^*S^*z^*\rangle\end{aligned}$$

άρα $(ST)^*z^* = T^*S^*z^*$ για κάθε $z^* \in Z^*$ απ' όπου έπεται ότι $(ST)^* = T^*S^*$.

Κατ' αναλογία ορίζεται και ο συζυγής τελεστής $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ του T^* από την $\langle y^*, T^{**}x^{**}\rangle = \langle T^*y^*, x^{**}\rangle$ ο οποίος είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T\| = \|T^*\| = \|T^{**}\|$. Ο T^{**} είναι ο δεύτερος συζυγής του T.

Ένας λόγος που είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι οι συζυγείς τελεστές είναι επειδή διατηρούν τις ασθενείς τοπολογίες.

Πρόταση Β′.3.3. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Τότε,*

(i) *Ο $T^* : Y^* \to X^*$ είναι $(\mathcal{T}_w, \mathcal{T}_w)$−συνεχής.*

(ii) *Ο $T^* : Y^* \to X^*$ είναι $(\mathcal{T}_{w^*}, \mathcal{T}_{w^*})$−συνεχής.*

(iii) *Ο $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ είναι $(\mathcal{T}_w, \mathcal{T}_w)$−συνεχής.*

(iv) *Ο $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ είναι $(\mathcal{T}_{w^*}, \mathcal{T}_{w^*})$−συνεχής.*

Απόδειξη. (i) Για $y^* \in Y^*$ και (y^*_λ) δίκτυο στον Y^* με $y^*_\lambda \xrightarrow{w} y^*$ έχουμε για $x^{**} \in X^{**}$

$$\langle T^*y^*_\lambda, x^{**}\rangle = \langle y^*_\lambda, T^{**}x^{**}\rangle.$$

Όμως $T^{**}x^{**} \in Y^{**}$ άρα αφού $y^*_\lambda \xrightarrow{w} y^*$ θα έχουμε $\langle y^*_\lambda, T^{**}x^{**}\rangle \to \langle y^*, T^{**}x^{**}\rangle$. Όμως $\langle y^*, T^{**}x^{**}\rangle = \langle T^*y^*, x^{**}\rangle$. Άρα τελικά $\langle T^*y^*_\lambda, x^{**}\rangle \to \langle T^*y^*, x^{**}\rangle$ απ' όπου έπεται ότι $T^*y^*_\lambda \xrightarrow{w} T^*y^*$.

(ii) Για $y^* \in Y^*$ και y^*_λ δίκτυο στον Y^* με $y^*_\lambda \xrightarrow{w^*} y^*$ έχουμε για $x \in X$

$$\langle x, T^*y^*_\lambda\rangle = \langle Tx, y^*_\lambda\rangle.$$

Όμως $Tx \in Y$ και $y^*_\lambda \xrightarrow{w^*} y$ άρα

$$\langle Tx, y^*_\lambda\rangle \to \langle Tx, y^*\rangle$$

οπότε

$$\langle x, T^*y^*_\lambda\rangle \to \langle Tx, y^*\rangle = \langle x, T^*y^*\rangle$$

απ' όπου έπεται ότι $T^*y^*_\lambda \xrightarrow{w^*} T^*y^*$ και συνεπώς ο T^* είναι $(\mathcal{T}_{w^*}, \mathcal{T}_{w^*})$-συνεχής.

Τα (iii),(iv) έπονται άμεσα από τα (i),(ii) και από το γεγονός ότι ο T^{**} είναι ο συζυγής τελεστής του T^*. □

Πόρισμα Β′.3.4. *Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Τότε $j_Y^{-1} \circ T^{**} \circ j_X = T$.*

Απόδειξη. Αφού ο T^* είναι (w^*, w^*)-συνεχής (βλ. Πρόταση Β′.3.3-(ii)) για κάθε $x \in X$ το συναρτησοειδές $T^{**}j_X(x)$ θα είναι w^*-συνεχές. Πράγματι, αν $y_i^* \xrightarrow{w^*} y^*$ τότε χρησιμοποιώντας τη σύγκλιση $T^*y_i^* \xrightarrow{w^*} T^*y^*$ και γράφοντας

$$\begin{aligned}\langle y^*, T^{**}j_X(x)\rangle &= \langle T^*y^*, j_X(x)\rangle \\ &= \langle x, T^*y^*\rangle \\ &= \lim_i \langle x, T^*y_i^*\rangle \\ &= \lim_i \langle T^*y_i^*, j_X(x)\rangle \\ &= \lim_i \langle y_i^*, T^{**}j_X(x)\rangle\end{aligned}$$

θα έχουμε το ζητούμενο. Όμως, από την Πρόταση Β′.2.7 θα πρέπει να έχουμε $T^{**}j_X(x) \in j_Y(Y)$. Με άλλα λόγια, $T^{**}(j_X(X)) \subseteq j_Y(Y)$. Άρα για τον $S = j_Y^{-1} \circ T^{**} \circ j_X$ έχουμε ότι $S \in \mathcal{B}(X, Y)$. Ισχυριζόμαστε ότι $S = T$. Πράγματι, για $x \in X$ και $h \in Y^*$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle Sx - Tx, h\rangle &= \langle Sx, h\rangle - \langle x, T^*h\rangle \\ &= \langle h, T^{**}j_X(x)\rangle - \langle x, T^*h\rangle \\ &= \langle T^*h, j_X(x)\rangle - \langle x, T^*h\rangle \\ &= \langle x, T^*h\rangle - \langle x, T^*h\rangle\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\langle Sx - Tx, h\rangle = 0$ για κάθε $h \in Y^*$. Δηλαδή, $Sx = Tx$. □

Β′.3.2 Προβολές

Γνωρίζουμε ότι αν H είναι ένας χώρος Hilbert και $F \subseteq H$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος τότε για κάθε $x \in H$ υπάρχει μοναδικό πλησιέστερο σημείο Px του F στο x. Δηλαδή, $\|x - Px\| = d(x, F)$. Το Px συμβολίζει την προβολή του x στον F. Η απεικόνιση $x \mapsto Px$ ορίζει έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή με $P^2 = P$ και ο X γράφεται ως τον ευθύ άθροισμα των $\ker P$ και $\mathrm{Im}P$.

Σε αυτή την παράγραφο γενικεύουμε την παραπάνω ιδέα στο πλαίσιο των χώρων Banach.

Ορισμός Β′.3.5 (Προβολή)**.** Έστω X ένας χώρος Banach. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $P : X \to X$ ονομάζεται προβολή αν $P^2 = P$.

Πρόταση Β′.3.6. *Αν P είναι μια προβολή σε ένα χώρο με νόρμα X τότε $\|P\| \geq 1$, οι $\ker P$, ImP είναι κλειστοί υπόχωροι του X και ο X είναι το ευθύ άθροισμα των $\ker P$, ImP. Δηλαδή, $X = \ker P \oplus ImP$.*

Απόδειξη. Από την $P^2 = P$ έχουμε $\|P\| = \left\|P^2\right\| \leq \|P\|^2$ άρα $\|P\| \geq 1$. Αφού η P είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής ο πυρήνας $\ker P$ θα είναι κλειστός υπόχωρος του X. Για $x \in X$ έχουμε ότι $x - Px \in \ker P$ αφού

$$\begin{aligned}P(x - Px) &= Px - P^2x \\ &= Px - Px = 0,\end{aligned}$$

άρα $x = x - Px + Px$ απ' όπου έπεται ότι $X = \ker P + \mathrm{Im}P$. Αν $x \in \ker P \cap \mathrm{Im}P$ τότε $x = Py$ και $Px = 0$ όμως αφού $P^2 = P$ θα έχουμε $Px = P^2 y = Py = 0$ άρα $x = Py = 0$. Άρα $\ker P \cap \mathrm{Im}P = \{0\}$ και συνεπώς $X = \ker P \oplus \mathrm{Im}P$.

Τέλος, για να δείξουμε ότι ο $\mathrm{Im}P$ είναι κλειστός θεωρούμε $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathrm{Im}P$ με $y_n \to y$. Αφού $y_n \in \mathrm{Im}P$ υπάρχουν x_n με $Px_n = y_n$. Αφού $X = \ker P \oplus \mathrm{Im}P$ γράφουμε $x_n = z_n + w_n$ με $z_n \in \ker P, w_n \in \mathrm{Im}P$ και $y = z + w$ με $z \in \ker P,\ w \in \mathrm{Im}P$. Τότε, $Px_n = w_n = y_n \to y$ και από τη συνέχεια της P θα έχουμε $Pw_n \to Py = w$. Όμως $Px_n = P^2 x_n = Pw_n$ άρα $y_n = Px_n \to w$ και επειδή $y_n \to y$ θα έχουμε $y = w \in \mathrm{Im}P$ απ' όπου έπεται ότι ο $\mathrm{Im}P$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. □

Επομένως, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι κάθε προβολή επάγει μια γραφή του X ως ευθύ άθροισμα δύο κλειστών υποχώρων του, του πυρήνα $\ker P$ και της εικόνας $\mathrm{Im}P$.

Το ενδιαφέρον είναι ότι ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν Y, Z είναι κλειστοί υπόχωροι με $X = Y \oplus Z$ τότε υπάρχει μια προβολή $P : X \to Z$ με $\mathrm{Im}P = Z$ και $\ker P = Y$. Η απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα κλειστού γραφήματος. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε αυτό το απότελεσμα.

Θεώρημα Β΄.3.7. *Έστω X ένας χώρος Banach και Y, Z δύο κλειστοί υπόχωροι του X με $X = Y \oplus Z$. Τότε, υπάρχει προβολή $P : X \to Z$ με $\ker P = Y$ και $\mathrm{Im}P = Z$.*

Απόδειξη. Αφού $X = Y \oplus Z$, για $x \in X$ υπάρχουν μοναδικοί $y \in Y$ και $z \in Z$ ώστε $x = y + z$. Συνεπώς, η απεικόνιση $x \mapsto Px := z$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική. Επίσης, είναι άμεσο ότι $\ker P = Y,\ \mathrm{Im}P = Z$ και $P^2 = P$. Για να δείξουμε ότι η P είναι φραγμένη αφού οι X, Z είναι χώροι Banach αρκεί να δείξουμε ότι το γράφημα

$$Gr(P) = \{(x, w) \in X \times Z : Px = w\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Z$ ως προς τη νόρμα $\|(x, w)\| = \|x\| + \|w\|$. Θεωρούμε $(x_n, w_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq Gr(P)$ με $\|(x_n, w_n) - (x, w)\| \to 0$. Τότε, $Px_n = w_n,\ x_n \to x$ και $w_n \to w$. Αφού $X = Y \oplus Z$ γράφουμε $x_n = y_n + z_n$ με $y_n \in Y,\ z_n \in Z$. Τότε, $Px_n = z_n = w_n \to w$, άρα $y_n \to x_n - z_n \to x - w$ και επειδή ο Y είναι κλειστός θα έχουμε $x - w \in Y = \ker P$. Επομένως, $Px = Pw$ όμως επειδή $w_n = z_n \in Z,\ w_n \to w$ και ο Z είναι κλειστός θα έχουμε $w \in Z$ άρα $Pw = w$, επομένως $Px = w$ απ' όπου έπεται ότι $(x, w) \in Gr(P)$.

□

Β΄.3.3 Συμπαγείς Τελεστές

Ορισμός Β΄.3.8 (Συμπαγής Τελεστής)**.** Έστω X, Y δύο χώροι Banach. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ καλείται συμπαγής αν το $T(B_X)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του Y, δηλαδή το $\overline{T(B_X)}$ είναι συμπαγές.

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι πως κάθε συμπαγής τελεστής πρέπει να είναι φραγμένος. Αυτό έπεται από το ότι το $T(B_X)$ πρέπει να είναι φραγμένο ως υποσύνολο του συμπαγούς $\overline{T(B_X)}$.

Θεώρημα Β΄.3.9. *Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο T είναι συμπαγής.*

(ii) *Για κάθε ακολουθία* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq B_X$ *η* $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ *έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

(iii) *Το* $T(B_X)$ *είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του* Y.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Αφού το $\overline{T(B_X)}$ είναι συμπαγές και $Tx_n \in \overline{T(B_X)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η (Tx_n) θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Από το (ii) έπεται πως το $\overline{T(B_X)}$ είναι συμπαγές άρα είναι και ολικά φραγμένο. Τότε, το $T(B_X)$ θα είναι και αυτό ολικά φραγμένο ως υποσύνολο του $\overline{T(B_X)}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Αφού το $T(B_X)$ είναι ολικά φραγμένο, θα είναι ολικά φραγμένο και το $\overline{T(B_X)}$ το οποίο είναι ταυτόχρονα και κλειστό. Αφού ο Y είναι πλήρης, το $\overline{T(B_X)}$ θα είναι συμπαγές. □

Η παρακάτω πρόταση μας περιγράφει πώς συμπεριφέρεται η έννοια του συμπαγούς τελεστή ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της σύνθεσης τελεστών.

Πρόταση Β′.3.10. *Έστω* X, Y, Z *τρεις χώροι Banach,* $S, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ *και* $W \in \mathcal{B}(Y, Z)$. *Τότε:*

(i) *Αν οι* S, T *είναι συμπαγείς τότε οι* $S + T$ *και* λT *είναι συμπαγείς.*

(ii) *Αν ο* T *είναι συμπαγής τότε είναι συμπαγής και ο* $W \circ T$.

(iii) *Αν ο* W *είναι συμπαγής τότε είναι συμπαγής και ο* $W \circ T$.

Απόδειξη. (i) Για το άθροισμα των S, T από το Θεώρημα Β′.3.9 αρκεί να δείξουμε ότι το $T(B_X) + S(B_X)$ είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του Y. Γι' αυτό θεωρούμε $\epsilon > 0$ και παρατηρούμε ότι αφού οι T, S είναι συμπαγείς τα $T(B_X), S(B_X)$ θα είναι ολικά φραγμένα υποσύνολα του Y. Οπότε θα υπάρχουν $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in X$ ώστε

$$T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B\left(Tx_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \text{ και } S(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B\left(Sy_i, \frac{\epsilon}{2}\right). \tag{Β′.3.1}$$

Τότε για $z \in T(B_X) + S(B_X)$ θα έχουμε $z = z_1 + z_2$ με $z_1 \in T(B_X), z_2 \in S(B_X)$. Άρα από την (Β′.3.1) θα υπάρχουν x_i και y_j με

$$z_1 \in B\left(Tx_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \text{ και } z_2 \in B\left(Sy_j, \frac{\epsilon}{2}\right),$$

όμως τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} z = z_1 + z_2 &\in B\left(Tx_i, \frac{\epsilon}{2}\right) + B\left(Sy_j, \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &= B(Tx_i + Sy_j, \epsilon), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$T(B_X) + S(B_X) \subseteq \bigcup_{i,j} B(Tx_i + Sy_j, \epsilon)$$

και άρα το $T(B_X) + S(B_X)$ είναι ολικά φραγμένο.

Για το $\overline{\lambda T(B_X)}$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\overline{\lambda T(B_X)} = \lambda\overline{T(B_X)}$ και τώρα επειδή η απεικόνιση $T_\lambda(x) = \lambda x$ είναι ομοιομορφισμός θα έχουμε ότι το $\lambda\overline{T(B_X)}$ είναι συμπαγές αφού το $\overline{T(B_X)}$ είναι συμπαγές.

(ii) Υποθέτουμε ότι $W \neq 0$ αλλιώς $W \circ T = 0$ ο οποίος είναι συμπαγής κατά τετριμμένο τρόπο. Για $\epsilon > 0$ από τη συμπάγεια του T βρίσκουμε $x_1, \ldots, x_m \in X$ με

$$T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B\left(Tx_i, \frac{\epsilon}{2\,\|W\|}\right).$$

Τότε για $w \in W(T(B_X))$ έχουμε ότι $w = W(Tx)$ όπου $\|x\| \leq 1$, άρα υπάρχει x_i με $Tx \in B\left(Tx_i, \frac{\epsilon}{2\|W\|}\right)$ όμως τότε

$$\begin{aligned}
\|W(Tx) - W(Tx_i)\| &\leq \|W\|\,\|Tx - Tx_i\| \\
&\leq \|W\| \frac{\epsilon}{2\,\|W\|} \\
&= \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,
\end{aligned}$$

δηλαδή $W(Tx) \in B\big(W(Tx_i), \epsilon\big)$ απ' όπου έπεται ότι

$$W(T(B_X)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B\big(W(Tx_i), \epsilon\big)$$

και άρα το $W(T(B_X))$ είναι ολικά φραγμένο και κατ' επέκταση ο $W \circ T$ είναι συμπαγής.

(iii) Έχουμε ότι $T(B_X) \subseteq \|T\|\, B_Y$, άρα $W(T(B_X)) \subseteq \|T\|\, W(B_Y)$. Όμως τώρα αφού ο W είναι συμπαγής το $W(B_Y)$ θα είναι ολικά φραγμένο, άρα θα είναι ολικά φραγμένο και το $W(T(B_X))$ ως υποσύνολό του. Άρα από το Θεώρημα Β΄.3.9 ο $W \circ T$ είναι συμπαγής. □

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση θεωρώντας τον $\mathcal{B}(X) \equiv \mathcal{B}(X, X)$ ως δακτύλιο με πρόσθεση τη συνήθη πρόσθεση τελεστών και πολλαπλασιασμό τη σύνθεση έχουμε ότι το σύνολο των συμπαγών τελεστών από τον X στον X είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες.

Η παρακάτω πρόταση μας λέει πως το αμφίπλευρο ιδεώδες των συμπαγών τελεστών είναι και κλειστό ως προς τη νόρμα τελεστή.

Πρόταση Β΄.3.11. *Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συμπαγών τελεστών με $\|T_n - T\| \to 0$ όπου $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τότε, ο T είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Β΄.3.9 αρκεί να δείξουμε ότι το $T(B_X)$ είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του Y. Σταθεροποιούμε $\epsilon > 0$ και αφού $\|T_n - T\| \to 0$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με

$$\left\|T_{n_0} - T\right\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Αφού ο T_{n_0} είναι συμπαγής θα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in B_X$ με

$$T_{n_0}(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B\left(T_{n_0}x_i, \frac{\epsilon}{3}\right).$$

Τότε για $x \in B_X$ θα υπάρχει i με $\left\|T_{n_0}x - T_{n_0}x_i\right\| < \epsilon/3$, άρα γράφοντας

$$\begin{aligned}
\|Tx - Tx_i\| &= \left\|Tx - T_{n_0}x + T_{n_0}x - T_{n_0}x_i + T_{n_0}x_i - Tx_i\right\| \\
&\leq \left\|Tx - T_{n_0}x\right\| + \left\|T_{n_0}x - T_{n_0}x_i\right\| + \left\|T_{n_0}x_i - Tx_i\right\| \\
&\leq \left\|T - T_{n_0}\right\| \|x\| + \left\|T_{n_0}x - T_{n_0}x_i\right\| + \left\|T_{n_0} - T\right\| \|x_i\| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

καταλήγουμε στο ότι $Tx \in B(Tx_i, \epsilon)$, δηλαδή

$$T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(Tx_i, \epsilon)$$

απ' όπου έπεται ότι το $T(B_X)$ είναι ολικά φραγμένο και άρα ο T συμπαγής. □

Β'.3.4 Ασθενώς Συμπαγείς Τελεστές

Ορισμός Β'.3.12 (Ασθενώς συμπαγής τελεστής)**.** Έστω X, Y δύο χώροι Banach. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ καλείται ασθενώς συμπαγής αν το $T(B_X)$ είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του Y. Δηλαδή, το $\overline{T(B_X)}^{w}$ είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του Y.

Σκόπιμα στον παραπάνω ορισμό δεν υποθέσαμε ότι ο T είναι φραγμένος αφού από την Πρόταση Β'.2.3 όταν ο T είναι ασθενώς συμπαγής θα πρέπει υποχρεωτικά το $T(B_X)$ να είναι φραγμένο υποσύνολο του Y και άρα ο T να είναι και φραγμένος.

Όπως και στην περίπτωση των συμπαγών τελεστών ισχύει ότι το σύνολο των ασθενώς συμπαγών τελεστών από τον X στον X είναι κλειστό αμφίπλευρο ιδεώδες του $\mathcal{B}(X)$. Για να το αποδείξουμε αυτό στην ασθενή περίπτωση χρειαζόμαστε το εξής λήμμα:

Λήμμα Β'.3.13. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Ο T είναι ασθενώς συμπαγής αν και μόνο αν $T^{**}(X^{**}) \subseteq j_Y(Y)$.*

Παρατήρηση Β'.3.14. Ισχύει ότι $j_Y \circ T = T^{**} \circ j_X$

Απόδειξη. Για $x \in X$ και $y^* \in Y^*$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle y^*, j_Y(Tx)\rangle &= \langle Tx, y^*\rangle \\ &= \langle x, T^*y^*\rangle \\ &= \langle T^*y^*, j_X(x)\rangle \\ &= \langle y^*, T^{**}(j_X(x))\rangle,\end{aligned}$$

δηλαδή $\langle y^*, j_Y(Tx)\rangle = \langle y^*, T^{**}(j_X(x))\rangle$ για κάθε $y^* \in Y^*$ απ' όπου έπεται ότι $j_Y \circ T = T^{**} \circ j_X$. □

Απόδειξη Λήμματος 5.3.13. Αν ο T είναι ασθενώς συμπαγής τότε λόγω της $(\mathcal{T}_w, \mathcal{T}_{w^*})$-συνέχειας της j_Y θα έχουμε ότι το $j_Y(\overline{T(B_X)}^{w})$ είναι w^*−συμπαγές υποσύνολο του Y. Όμως,

$$j_Y(T(B_X)) \subseteq j_Y(\overline{T(B_X)}^{w}),$$

άρα από την Παρατήρηση Β'.3.14 θα έχουμε

$$T^{**}(j_X(B_X)) \subseteq j_Y(\overline{T(B_X)}^{w})$$

και επειδή το $j_Y(\overline{T(B_X)}^{w})$ είναι w^*−συμπαγές (άρα και w^*-κλειστό) θα έχουμε

$$\overline{T^{**}(j_X(B_X))}^{w^*} \subseteq j_Y(\overline{T(B_X)}^{w}).$$

Αφού ο T^{**} είναι $(\mathcal{T}_{w^*}, \mathcal{T}_{w^*})$-συνεχής (βλ. Πρόταση Β΄.3.3) έχουμε

$$T^{**}(\overline{j_X(B_X)}^{w^*}) \subseteq \overline{T^{**}(j_X(B_X))}^{w^*},$$

δηλαδή

$$T^{**}(\overline{j_X(B_X)}^{w^*}) \subseteq j_Y(\overline{T(B_X)}^{w}),$$

όμως από το θεώρημα Goldstine έχουμε $\overline{j_X(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$ άρα

$$T^{**}(B_{X^{**}}) \subseteq j_Y(\overline{T(B_X)}^{w})$$

και επειδή $\overline{T(B_X)}^{w} \subseteq Y$ θα έχουμε

$$T^{**}(B_{X^{**}}) \subseteq j_Y(Y)$$

απ' όπου έπεται ότι $T^{**}(X^{**}) \subseteq j_Y(Y)$.

Αντίστροφα, αν $T^{**}(X^{**}) \subseteq j_Y(Y)$ τότε $T^{**}(B_{X^{**}}) \subseteq j_Y(Y)$. Όμως, η $B_{X^{**}}$ είναι w^*-συμπαγής και άρα λόγω της $(\mathcal{T}_{w^*}, \mathcal{T}_{w^*})$-συνέχειας του T^{**} το $T^{**}(B_{X^{**}})$ θα είναι w^*–συμπαγές υποσύνολο του Y^{**} (άρα και w^*-κλειστό). Συνεπώς,

$$\begin{aligned} j_Y(\overline{T(B_X)}^{w}) &\subseteq \overline{j_Y(T(B_X))}^{w^*} \\ &= \overline{T^{**}(j_X(B_X))}^{w^*} \\ &\subseteq \overline{T^{**}(B_{X^{**}})}^{w^*} \\ &= T^{**}(B_{X^{**}}). \end{aligned}$$

Άρα, αφού $j_Y(\overline{T(B_X)}^{w}) \subseteq T^{**}(B_{X^{**}}) \subseteq j_Y(Y)$ και το $T^{**}(B_{X^{**}})$ είναι ομοιομορφικό με το $j_Y^{-1}(T^{**}(B_{X^{**}}))$ θα έχουμε ότι το $j_Y^{-1}(T^{**}(B_{X^{**}}))$ είναι w-συμπαγές και άρα το $\overline{T(B_X)}^{w} \subseteq j_Y^{-1}(T^{**}(B_{X^{**}}))$ θα είναι w–συμπαγές ως w–κλειστό υποσύνολο συμπαγούς. Επομένως, ο T είναι ασθενώς συμπαγής. □

Πρόταση Β΄.3.15. *Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T, S \in \mathcal{B}(X, Y)$, $W \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Τότε:*

(i) *Αν οι T, S είναι ασθενώς συμπαγείς τότε είναι ασθενώς συμπαγείς και οι $S + T$, λT.*

(ii) *Αν ο T είναι ασθενώς συμπαγής τότε είναι και ο $W \circ T$.*

(iii) *Αν ο W είναι ασθενώς συμπαγής τότε είναι και ο $W \circ T$.*

Απόδειξη. (i) Για το άθροισμα των T, S από το Λήμμα Β΄.3.13 έχουμε ότι $S^{**}(X^{**}) \subseteq j_Y(Y)$ και $T^{**}(X^{**}) \subseteq j_Y(Y)$. Άρα,

$$\begin{aligned} (S+T)^{**}(X^{**}) &= S^{**}(X^{**}) + T^{**}(X^{**}) \\ &\subseteq j_Y(Y) + j_Y(Y) \\ &= j_Y(Y), \end{aligned}$$

δηλαδή $(S+T)^{**}(X^{**}) \subseteq j_Y(Y)$ απ' όπου έπεται ότι ο $S + T$ είναι ασθενώς συμπαγής.

Για τον ∂T αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned}(\partial T)^{**}(X^{**}) &= \partial T^{**}(X^{**})\\ &\subseteq \partial j_Y(Y)\\ &= j_Y(Y).\end{aligned}$$

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}(W\circ T)^{**}(X^{**}) &= W^{**}\circ T^{**}(X^{**})\\ &\subseteq W^{**}\circ j_Y(Y)\\ &= j_Z\circ W(Y)\\ &\subseteq j_Z(Z).\end{aligned}$$

(iii) Γράφουμε

$$\begin{aligned}(W\circ T)^{**}(X^{**}) &= W^{**}\circ T^{**}(X^{**})\\ &\subseteq W^{**}(Y^{**})\\ &\subseteq j_Z(Z).\end{aligned}$$

□

Σύμφωνα με την προγούμενη πρόταση έχουμε ότι το σύνολο των συμπαγών τελεστών από τον X στον X είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες του δακτυλίου $\mathcal{B}(X)$. Τέλος, χρησιμοποιώντας το Λήμμα Β′.3.13 δείχνουμε ότι είναι και κλειστό.

Πρόταση Β′.3.16. *Έστω X, Y χώροι Banach, $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ασθενώς συμπαγών τελεστών και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με $\|T_n - T\| \to 0$. Τότε, ο T είναι ασθενώς συμπαγής.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα Β′.3.13 αρκεί να δείξουμε ότι $T^{**}(X^{**}) \subseteq j_Y(Y)$. Αφού $\|T_n - T\| \to 0$ θα έχουμε και $\left\|T_n^{**} - T^{**}\right\| \to 0$. Οπότε, για $x^{**} \in X^{**}$ έχουμε $\left\|T_n^{**}x^{**} - T^{**}x^{**}\right\| \to 0$. Όμως, ο Y είναι πλήρης άρα ο $j_Y(Y)$ θα είναι κλειστός υπόχωρος του Y^{**}. Οπότε απ' την ασθενή συμπάγεια των (T_n) θα έχουμε $T_n^{**}x^{**} \in j_Y(Y)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επειδή $\left\|T_n^{**}x^{**} - T^{**}x^{**}\right\| \to 0$ θα έχουμε ότι $T^{**}x^{**} \in j_Y(Y)$. Δηλαδή, $T^{**}(X^{**}) \subseteq j_Y(Y)$. □

Β′.4 Ασθενείς τοπολογίες σε χώρους τελεστών

Στις προηγούμενες παραγράφους ορίσαμε και μελετήσαμε βασικές ιδιότητες της ασθενούς και της ασθενούς* τοπολογίας ενός χώρου Banach X. Στην περίπτωση που τα στοιχεία του X είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές υπάρχουν άλλες δύο σημαντικές τοπολογίες οι οποίες μας βοηθούν να αντλήσουμε πληροφορίες όταν η τοπολογία της νόρμας τελεστή δεν επαρκεί.

Β΄.4.1 Η ισχυρή τοπολογία τελεστών

Ορισμός Β΄.4.1. Έστω X, Y δύο χώροι Banach. Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (**strong operator topology**-$\mathcal{T}_{so}$) στον $\mathcal{B}(X, Y)$ είναι η τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια ημινορμών $\{p_x : x \in X\}$ όπου $p_x(T) = \|Tx\|$ για κάθε $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Οι βασικές περιοχές του $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ είναι της μορφής

$$W(T, \Delta, \epsilon) = \{S \in \mathcal{B}(X, Y) : \|Tx - Sx\| < \epsilon \text{ για } x \in \Delta\},$$

όπου $\Delta \subsetneq X$ πεπερασμένο και $\epsilon > 0$.

Σύμφωνα με την Πρόταση Α΄.3.8 ένα δίκτυο τελεστών (T_i) στον $\mathcal{B}(X, Y)$ συγκλίνει στον $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ως προς την ισχυρή τοπολογία (συμβ. $T_i \xrightarrow{so} T$) αν και μόνο αν $\|T_i x - Tx\| \to 0$ για $x \in X$. Από την παραπάνω σύγκλιση έπεται ότι $\mathcal{T}_{so} \subsetneq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, όπου $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ η τοπολογία που παράγει η νόρμα τελεστή στον $\mathcal{B}(X, Y)$.

Β΄.4.2 Η ασθενής τοπολογία τελεστών

Ορισμός Β΄.4.2 (Ασθενής τοπολογία τελεστών)**.** Έστω X, Y χώροι Banach. Η ασθενής τοπολογία τελεστών (**weak operator topology**- $\mathcal{T}_{wo}$) στον $\mathcal{B}(X, Y)$ είναι η τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια ημινορμών $\{p_{x,h} : x \in X,\ h \in Y^*\}$ όπου $p_{x,h}(T) = |h(Tx)|$.

Οι βασικές περιοχές του $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ είναι της μορφής

$$\{S \in \mathcal{B}(X, Y) : |h_i(Tx_i) - h_i(Sx_i)| < \epsilon \text{ , } i = 1, \ldots, m\},$$

όπου $\epsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Επίσης, αφού $p_{x,h}(T - S) = |h(Tx) - h(Sx)|$ έπεται πως η $p_{x,h}$ είναι $\|\cdot\|$−συνεχής αν και μόνο αν η $T \mapsto h(Tx)$ είναι συνεχής. Συνεπώς η $\mathcal{T}_{wo}$ είναι η ελάχιστη τοπολογία ως προς την οποία η οικογένεια συναρτήσεων

$$\{T \mapsto h(Tx) : x \in X,\ h \in Y^*\}$$

είναι συνεχής. Τέλος, ένα δίκτυο τελεστών (T_i) στον $\mathcal{B}(X, Y)$ συγκλίνει στον $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ως προς την ασθενή τοπολογία τελεστών (συμβ. $T_i \xrightarrow{wo} T$) αν και μόνο αν $|h(T_i x) - h(Tx)| \to 0$ για κάθε $x \in X$ και $h \in Y^*$. Παρατηρήστε ότι η τελευταία σύγκλιση είναι ισοδύναμη με την $T_i x \xrightarrow{w} Tx$ για κάθε $x \in X$. Από την παραπάνω σύγκλιση προκύπτει ότι $\mathcal{T}_{wo} \subsetneq \mathcal{T}_{so} \subsetneq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$.

Ιδιαίτερα χρήσιμο στις ασθενείς τοπολογίες είναι το θεώρημα του Mazur το οποίο μας λέει πως στα κυρτά σύνολα η κλειστή θήκη ως προς τη νόρμα συμπίπτει με την κλειστή θήκη ως προς την ασθενή τοπολογία. Το θεώρημα του Mazur ισχύει και για τις τοπολογίες τελεστών μόνο που αυτή τη φορά τη θέση της τοπολογίας $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ παίρνει η $\mathcal{T}_{so}$.

Λήμμα Β΄.4.3. *Ένα γραμμικό συναρτησοειδές F στον $\mathcal{B}(X, Y)$ είναι $\mathcal{T}_{wo}$-συνεχές αν και μόνο αν είναι $\mathcal{T}_{so}$-συνεχές.*

Απόδειξη. Αν το F είναι $\mathcal{T}_{wo}$-συνεχές αφού $\mathcal{T}_{wo} \subsetneq \mathcal{T}_{so}$ θα είναι και $\mathcal{T}_{so}$-συνεχές. Αντίστροφα, έστω πως το F είναι $\mathcal{T}_{so}$-συνεχές. Τότε, θα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in X$ και $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ αν $\|Sx_i\| < \epsilon$ για $i = 1, \ldots, m$ τότε $|F(S)| < 1$. Θεωρούμε τον $Y^m = \underbrace{Y \times \ldots \times Y}_{m}$ ο οποίος γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|(y_1, \ldots, y_m)\| = \max\{\|y_i\| : i = 1, \ldots, m\}.$$

Επίσης, θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $H : Z \to Y^m$ με $H(T) = (Tx_1, \ldots, Tx_m)$, όπου $Z = \mathcal{B}(X, Y)$. Άρα, ο $H(Z)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του Y^m. Ορίζουμε $\widetilde{F} : H(Z) \to \mathbb{R}$ με $\widetilde{F}(Tx_1, \ldots, Tx_m) = F(T)$. Τότε, η $\widetilde{F}$ είναι καλά ορισμένη αφού αν $Tx_i = Sx_i$ για $i = 1, \ldots, m$ θα έχουμε

$$\|n(T - S)x_i\| < \epsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε, θα ισχύει

$$|F(T - S)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, απ' όπου έπεται ότι $F(T) = F(S)$, δηλαδή $\widetilde{F}(S) = \widetilde{F}(T)$. Επίσης, αφού η F είναι γραμμική θα είναι γραμμική και η $\widetilde{F}$. Τέλος, η $\widetilde{F}$ είναι και συνεχής, καθώς αν $(T_n x_1, \ldots, T_n x_m)$ είναι μια ακολουθία στον $H(Z)$ με

$$\|(T_n x_1, \ldots, T_n x_m)\| \to 0,$$

τότε θα έχουμε ότι $T_n x_i \to 0$ για $i = 1, \ldots, m$. Οπότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θα υπάρχει n_k ώστε $\|kT_n x_i\| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_k$ και $i = 1, \ldots, m$. Δηλαδή, $|F(T_n)| < \frac{1}{k}$ για κάθε $n \geq n_k$, απ' όπου έπεται ότι $\sup_{n \geq n_k} |F(T_n)| \leq \frac{1}{k}$. Άρα,

$$\limsup_{n \to \infty} |F(T_n)| \leq \frac{1}{k}.$$

Έτσι, θα έχουμε $|F(T_n)| \to 0$ πράγμα το οποίο αποδεικνύει τη συνέχεια της $\widetilde{F}$ στο 0. Από το θεώρημα Hahn-Banach η $\widetilde{F}$ θα επεκτείνεται σε ολόκληρο τον Y^m. Οπότε, θα έχουμε

$$\begin{aligned} F(T) &= \widetilde{F}(Tx_1, \ldots, Tx_m) \\ &= \widetilde{F}(Tx_1, 0, \ldots, 0) + \ldots + \widetilde{F}(0, 0, \ldots, Tx_m) \\ &= f_1(T) + \ldots + f_m(T) \end{aligned}$$

και επειδή τα $f_1, \ldots, f_m$ είναι $\mathcal{T}_{wo}$-συνεχή έπεται πως το F είναι $\mathcal{T}_{wo}$-συνεχές. □

Θεώρημα Β′.4.4. *Έστω X, Y δύο χώροι Banach και C ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{B}(X, Y)$. Τότε, η κλειστή θήκη του C ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών συμπίπτει με την κλειστή θήκη του ως προς την ασθενή τοπολογία. Δηλαδή, $\overline{C}^{so} = \overline{C}^{wo}$.*

Απόδειξη. Αφού $\mathcal{T}_{wo} \subseteq \mathcal{T}_{so}$ θα ισχύει ότι $\overline{C}^{so} \subseteq \overline{C}^{wo}$. Αν τώρα έχουμε ότι $\overline{C}^{so} \nsubseteq \overline{C}^{wo}$ τότε από το Θεώρημα Α′.3.4 θα υπάρχει ένα $\mathcal{T}_{so}$−συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές F, $S \in \overline{C}^{wo} \setminus \overline{C}^{so}$ και ένας πραγματικός αριθμός α ώστε

$$F(T) < \alpha < F(S) \tag{Β′.4.1}$$

για κάθε $T \in \overline{C}^{so}$. Όμως, τότε θα έχουμε ότι $\overline{C}^{so} \subseteq F^{-1}((-\infty, \alpha])$. Αφού το F είναι $\mathcal{T}_{so}$-συνεχές από το Λήμμα Β′.4.3 θα είναι και $\mathcal{T}_{wo}$−συνεχές. Άρα το $F^{-1}((-\infty, \alpha])$ είναι ένα $\mathcal{T}_{wo}$−κλειστό σύνολο που περιέχει το C. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $S \in \overline{C}^{wo}$ και από την (Β′.4.1) έχουμε $S \notin F^{-1}((-\infty, \alpha])$. □

Β΄.4.3 Η ασθενής* τοπολογία τελεστών

Ορισμός Β΄.4.5. Έστω X, Y δύο χώροι Banach. Η ασθενής* τοπολογία τελεστών (**weak* operator topology-**$\mathcal{T}_{w*o}$**)** στον $\mathcal{B}(Y^*, X^*)$ είναι η τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια ημινορμών $\{p_{x,h} : x \in X,\ h \in Y^*\}$ όπου $p_{x,h}(T) = |T(hx)|$.

Οι βασικές περιοχές του $T \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$ είναι της μορφής

$$\{S^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*) : |T(h_i x_i) - S(h_i x_i)| < \epsilon,\ i = 1, \dots, m\},$$

όπου $\epsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Επίσης, αφού $p_{x,h}(T - S) = |T(hx) - S(hx)|$ έπεται πως η $p_{x,h}$ είναι $\|\cdot\|$−συνεχής αν και μόνο αν η $T \mapsto T(hx)$ είναι συνεχής. Συνεπώς, η $\mathcal{T}_{w^*o}$ είναι η ελάχιστη τοπολογία ως προς την οποία η οικογένεια συναρτήσεων

$$\{T \mapsto T(hx) : x \in X,\ h \in Y^*\}$$

είναι συνεχής. Τέλος, ένα δίκτυο τελεστών (T_i) στον $\mathcal{B}(Y^*, X^*)$ συγκλίνει ως προς την ασθενή* τοπολογία τελεστών (συμβ. $T_i \overset{w^*o}{\longrightarrow} T$) αν και μόνο αν $|T_i(hx) - T(hx)| \to 0$ για κάθε $x \in X$ και $h \in Y^*$. Παρατηρήστε ότι η τελευταία σύγκλιση είναι ισοδύναμη με την $T_i h \overset{w^*}{\longrightarrow} Th$ για κάθε $h \in Y^*$.

Παρατήρηση Β΄.4.6. Έστω X, Y δύο χώροι Banach και (T_i) ένα δίκτυο στον $\mathcal{B}(X, Y)$ και $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) $T_i \overset{wo}{\longrightarrow} T$.

(ii) $T_i^* \overset{w^*o}{\longrightarrow} T^*$.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} T_i \overset{wo}{\longrightarrow} T &\iff h(T_i x) \to h(Tx) \ \text{ για κάθε } \ x \in X,\ h \in Y^* \\ &\iff T_i^*(hx) \to T^*(hx) \ \text{ για κάθε } \ x \in X,\ h \in Y^* \\ &\iff T_i^* \overset{w^*o}{\longrightarrow} T. \end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ′

Άλγεβρες Banach

Σε αυτό το μέρος του παραρτήματος δίνουμε τους βασικούς ορισμούς και τα αποτελέσματα της θεωρίας των αλγεβρών Banach που χρησιμοποιούμε στο κύριο μέρος της εργασίας. Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν τα αντιστρέψιμα στοιχεία, και συγκεκριμένα το κριτήριο αντιστρεψιμότητας, βασικές ιδιότητες του φάσματος καθώς και της φασματικής ακτίνας ενός στοιχείου μιας άλγεβρας Banach.

Γ′.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

Ορισμός Γ′.1.1 (Άλγεβρα Banach)**.** Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach πάνω από το $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο X είναι εφοδιασμένος και με μια πράξη πολλαπλασιασμού $\cdot : X \times X \to X$ ώστε η τριάδα $(X, +, \cdot)$ να έχει τη δομή δακτυλίου (όπου $+$ η πρόσθεση του διανυσματικού χώρου) και τέτοια ώστε για κάθε $x,\ y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ να ισχύει

$$\lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y) \tag{Γ′.1.1}$$

και

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \, \|y\| \,. \tag{Γ′.1.2}$$

Τότε, η τετράδα $(X, \|\cdot\|, +, \cdot)$ είναι μια άλγεβρα Banach πάνω από το $\mathbb{C}$.

Για λόγους ευκολίας, για μια άλγεβρα Banach $(X, \|\cdot\|, +, \cdot)$ πάνω από το $\mathbb{C}$ θα γράφουμε απλά X χωρίς να κάνουμε ιδιαίτερη αναφορά (εάν αυτό δεν κρίνεται απαραίτητο) στη νόρμα και τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Επίσης, για κάθε $x,\ y \in X$ θα γράφουμε πολλές φορές xy αντί του $x \cdot y$.

Η συνθήκη της (Γ′.1.1) μας λέει εμμέσως πως η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι συνεχής ως προς τη νόρμα του χώρου:

Παρατήρηση Γ′.1.2. Έστω X μια άλγεβρα Banach πάνω από το $\mathbb{C}$. Τότε, για κάθε $x_n,\ y_n,\ x,\ y \in X$ με $x_n \to x$ και $y_n \to y$ ισχύει $x_n y_n \to xy$.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|x_n y_n - xy\| &= \|x_n y_n - x_n y + x_n y - xy\| \\ &\le \|x_n y_n - x_n y\| + \|x_n y - xy\| \\ &\le \|x_n(y_n - y)\| + \|(x_n - x)y\| \\ &\le \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\|\end{aligned}$$

όπου τώρα λόγω των συγκλίσεων $\|x_n - x\| \to 0$, $\|y_n - y\| \to 0$ έπεται ότι $\|x_n y_n - xy\| \to 0$. □

Ορισμός Γ'.1.3. Θα λέμε ότι μια άλγεβρα Banach X είναι:

(i) άλγεβρα με μονάδα, αν υπάρχει ένα στοιχείο $e \in X$ ώστε $ex = xe = x$ για κάθε $x \in X$.

(ii) μεταθετική άλγεβρα, αν $xy = yx$ για κάθε $x, y \in X$.

Παρατηρήστε πως το μοναδιαίο στοιχείο e αν υπάρχει τότε είναι και μοναδικό. Το κύριο παράδειγμα με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι η άλγεβρα Banach $\mathcal{B}(X)$ όπου X ένας χώρος Banach πάνω από το $\mathbb{C}$. Όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως (βλ. Β'.3) ο $\mathcal{B}(X)$ είναι χώρος Banach με νόρμα τη νόρμα τελεστή που δίνεται από την

$$\begin{aligned}\|T\| &= \inf\{M > 0 : \ \|Tx\| \le M\,\|x\| \quad \text{για κάθε } x \in X\} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\end{aligned}$$

για $T \in \mathcal{B}(X)$. Η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι η πράξη της σύνθεσης $TS = T \circ S$ δύο τελεστών $T, S \in \mathcal{B}(X)$. Η (Γ'.1.1) είναι εύκολο να ελεγχθεί. Για την (Γ'.1.2) για $x \in X$ αρκεί να γράψουμε

$$\begin{aligned}\|TS(x)\| &= \|T(S(x))\| \\ &\le \|T\|\,\|Sx\| \\ &\le \|T\|\,\|S\|\,\|x\|\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|$. Τέλος, αφού $IT = TI = T$ όπου I ο ταυτοτικός τελεστής, έχουμε ότι η $\mathcal{B}(X)$ είναι μια άλγεβρα Banach με μονάδα.

Ορισμός Γ'.1.4 (Αντιστρέψιμο στοιχείο)**.** Ένα στοιχείο x σε μια άλγεβρα Banach X με μονάδα e λέγεται αντιστρέψιμο εάν υπάρχει $z \in X$ με $xz = zx = e$. Το z είναι ο αντίστροφος του x. Το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων στοιχείων της X συμβολίζεται με $\mathcal{G}(X)$.

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση που το x είναι αντιστρέψιμο τότε ο αντίστροφος του x είναι μοναδικός. Θα γράφουμε x^{-1} για τον αντίστροφο του x. Το πρώτο βασικό αποτελέσμα είναι το παρακάτω κριτήριο αντιστρεψιμότητας:

Πρόταση Γ'.1.5. *Έστω X μια άλγεβρα Banach με μονάδα και έστω $x \in X$. Αν $\|e - x\| < 1$ τότε το x είναι αντιστρέψιμο και*

$$x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n \tag{Γ'.1.3}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα ένα $y \in Y$ με $\|y\| < 1$. Τότε, $\sum_{n=0}^{\infty} \|y\|^n < \infty$ και επειδή $\|y^n\| \leq \|y\|^n$ θα έχουμε και $\sum_{n=0}^{\infty} \|y^n\| < \infty$. Αφού ο X είναι χώρος Banach η ακολουθία $s_N = \sum_{n=0}^{N} y^n$ θα συγκλίνει σε κάποιο $z \in X$. Οπότε, γράφοντας

$$\begin{aligned}(e-y)s_N &= (e-y)\sum_{n=0}^{N} y^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} y^n - \sum_{n=1}^{N+1} y^n \\ &= e - y^n\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $y^n \to 0$ θα έχουμε ότι $(e-y)z = e$. Με παρόμοιο τρόπο έχουμε και $z(e-y) = e$ απ' όπου έπεται ότι $(e-y) \in \mathscr{G}(X)$ και

$$(e-y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n.$$

Τώρα, αν $\|e-x\| < 1$ από πριν θα έχουμε ότι $x = e-(e-x) \in \mathscr{G}(X)$ και

$$x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(e-x)^n$$

όπως θέλαμε. □

Πρόταση Γ'.1.6. *Το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων $\mathscr{G}(X)$ μια άλγεβρας Banach με μονάδα είναι ανοικτό υποσύνολο του X, και η απεικόνιση $x \mapsto x^{-1}$ είναι μια συνεχής απεικόνιση από το $\mathscr{G}(X)$ στο $\mathscr{G}(X)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα $x_0 \in \mathscr{G}(X)$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε $x = x_0 x_0^{-1} x$. Οπότε αφού

$$\left\|e - x_0^{-1}x\right\| = \left\|x_0^{-1}(x_0 - x)\right\| \leq \left\|x_0^{-1}\right\| \|x_0 - x\|$$

αν $\|x_0 - x\| < \left\|x_0^{-1}\right\|^{-1}$ από την Πρόταση Γ'.1.5 θα έχουμε ότι $x_0^{-1}x \in \mathscr{G}(X)$ και

$$(x_0^{-1}x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(e - x_0^{-1}x)^n.$$

Τώρα, είναι εύκολο να δούμε πως το x θα αντιστρέψιμο και ο αντιστροφός του είναι ο $(x_0^{-1}x)^{-1}x_0^{-1}$. Πράγματι, έχουμε $(x_0^{-1}x)^{-1}x_0^{-1}x = e$ και

$$\begin{aligned}x(x_0^{-1}x)^{-1}x_0^{-1} &= x_0 x_0^{-1} x (x_0^{-1}x)^{-1} x_0^{-1} \\ &= x_0 x_0^{-1} = e.\end{aligned}$$

Άρα, αν $\|x - x_0\| < \left\|x_0^{-1}\right\|^{-1}$ τότε $x \in \mathscr{G}(X)$ και

$$x^{-1} = (x_0^{-1}x)^{-1}x_0^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[x_0^{-1}(x_0 - x)]^n x_0^{-1}$$

και έτσι το $\mathscr{G}(X)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Τώρα, για να δείξουμε ότι η $x \mapsto x^{-1}$ είναι συνεχής θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{G}(X)$ και $x \in \mathscr{G}(X)$ με $x_n \to x$ και δείχνουμε ότι $x_n^{-1} \to x^{-1}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} x^{-1} - x_n^{-1} &= x^{-1}x_n x_n^{-1} - x^{-1}x x_n^{-1} \\ &= x^{-1}(x_n - x)x_n^{-1} \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\left\|x^{-1} - x_n^{-1}\right\| \leq \left\|x^{-1}\right\| \|x_n - x\| \left\|x_n^{-1}\right\|$. Από την $x_n \to x$ βρίσκουμε n_0 ώστε $\left\|x - x_{n_0}\right\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left|\left\|x_n^{-1}\right\| - \left\|x^{-1}\right\|\right| &\leq \left\|x_n^{-1} - x^{-1}\right\| \\ &\leq \left\|x^{-1}\right\| \|x_n - x\| \left\|x_n^{-1}\right\| \\ &\leq \frac{\left\|x_n^{-1}\right\|}{2} \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\left\|x_n^{-1}\right\| \leq 2\left\|x^{-1}\right\|$. Δηλαδή, η $(x_n^{-1})_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη, άρα από την $\left\|x^{-1} - x_n^{-1}\right\| \leq \left\|x^{-1}\right\| \|x_n - x\| \left\|x_n^{-1}\right\|$ θα έχουμε ότι $x_n^{-1} \to x^{-1}$. □

Γ΄.2 Το φάσμα και η φασματική ακτίνα

Ορισμός Γ΄.2.1 (Φάσμα και φασματική ακτίνα)**.** Έστω X μια άλγεβρα Banach με μονάδα και έστω $x \in X$. Το φάσμα του x είναι το υποσύνολο $\sigma_X(x)$ του $\mathbb{C}$ που αποτελείται από όλους τους μιγαδικούς αριθμούς λ για τους οποίους ο $\lambda e - x$ δεν έχει αντίστροφο, δηλαδή

$$\sigma_X(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda e - x \notin \mathscr{G}(X)\}.$$

Η φασματική ακτίνα $r_X(x)$ του x στην περίπτωση που το φάσμα του x είναι μη κενό ορίζεται ως

$$r_X(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_X(x)\}.$$

Επίσης, για το συμπλήρωμα του φάσματος γράφουμε $\rho_X(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma_X(x)$.

Θεώρημα Γ΄.2.2. *Έστω X μια άλγεβρα Banach με μονάδα και έστω $x \in X$. Τότε, το φάσμα $\sigma_X(x)$ του x είναι μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ με*

$$\sigma_X(x) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leq \|x\|\} \tag{Γ΄.2.1}$$

Απόδειξη. Για $x \in X$ ισχυριζόμαστε ότι το $\lambda e - x$ είναι αντιστρέψιμο όταν $|\lambda| > \|x\|$. Πράγματι, γράφοντας $(\lambda e - x) = \lambda(e - \frac{x}{\lambda})$ αν $|\lambda| > \|x\|$ από την Πρόταση Γ΄.1.5 θα έχουμε ότι το $e - \frac{x}{\lambda}$ αντιστρέφεται. Οπότε, θα αντιστρέφεται και το $\lambda e - x$ για $|\lambda| > \|x\|$ και

$$(\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n. \tag{Γ΄.2.2}$$

Άρα, αφού για κάθε $\lambda > \|x\|$ ισχύει $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_X(x)$ έχουμε αποδείξει την (Γ΄.2.1). Ειδικότερα, το $\sigma_X(x)$ είναι φραγμένο. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $f : \mathbb{C} \to X$ με $f(\lambda) = \lambda e - x$.

Τότε, $\lambda \notin \sigma_X(x)$ αν και μόνο αν $\lambda e - x \in \mathscr{G}(X)$ αν και μόνο αν $\lambda \in f^{-1}(\mathscr{G}(X))$. Δηλαδή, $\rho_X(x) = f^{-1}(\mathscr{G}(X))$. Όμως, η f είναι συνεχής, συνεπώς αφού το $\mathscr{G}(X)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X (Πρόταση Γ′.1.6) θα έχουμε ότι το $\rho_X(x)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Δηλαδή, το $\sigma_X(x)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Άρα τελικά το $\sigma_X(x)$ θα είναι συμπαγές ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Μένει να δείξουμε ότι το $\sigma_X(x)$ είναι μη κενό. Υποθέτουμε προς άτοπο πως $\sigma_X(x) = \emptyset$. Τότε, το $\lambda e - x$ αντιστρέφεται για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Ισχυριζόμαστε ότι η απεικόνιση $g : \mathbb{C} \to X$ με $g(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$ είναι διαφορίσιμη με παράγωγο $(\lambda e - x)^{-2}$. Δηλαδή, ισχυριζόμαστε ότι

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{g(\lambda + z) - g(\lambda)}{\zeta} = (\lambda e - x)^{-2}. \tag{Γ′.2.3}$$

Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}(ae - x)^{-1} - (\beta e - x)^{-1} &= (ae - x)^{-1}[(\beta e - x) - (ae - x)](\beta e - x)^{-1} \\ &= (ae - x)^{-1}(\beta - a)(\beta e - x)^{-1},\end{aligned}$$

οπότε τώρα για $\zeta \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{g(\lambda + \zeta) - g(\lambda)}{\zeta} &= \frac{[(\lambda + \zeta)e - x]^{-1} - (\lambda e - x)^{-1}}{\zeta} \\ &= \frac{[(\lambda + \zeta)e - x]^{-1}\zeta(\lambda e - x)^{-1}}{\zeta} \\ &= [(\lambda + \zeta)e - x]^{-1}(\lambda e - x)^{-1} \xrightarrow{\zeta \to 0} (\lambda e - x)^{-2}.\end{aligned}$$

Άρα η g είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{C}$. Απ' αυτό έπεται πως η $h \circ g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ για κάθε $h \in X^*$. Για να το δούμε αυτό γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{h(g(\lambda + \zeta)) - h(g(\lambda))}{\zeta} - h(\lambda e - x)^{-2})\right| &= \left|h\left(\frac{g(\lambda + \zeta) - g(\lambda))}{\zeta} - (\lambda e - x)^{-2}\right)\right| \\ &\leq \|h\| \left\|\frac{g(\lambda + \zeta) - g(\lambda)}{\zeta} - (\lambda e - x)^{-2}\right\| \xrightarrow{\zeta \to 0} 0.\end{aligned}$$

Όμως, για $|\lambda| > \|x\|$ έχουμε

$$g(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n, \tag{Γ′.2.4}$$

οπότε λόγω συνέχειας της h

$$h(g(\lambda)) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} h\left(\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right), \tag{Γ′.2.5}$$

άρα για κάθε $|\lambda| > \|x\|$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|h(g(\lambda))\| &\leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\|h\left(\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right)\right\| \\ &\leq \frac{\|h\|}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n \\ &= \frac{\|h\|}{|\lambda|} \frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|x\|}\end{aligned}$$

και έτσι αφήνοντας το $\lambda \to \infty$ θα έχουμε $\|h(g(\lambda))\| \to 0$. Άρα, η $h \circ g$ θα είναι ολόμορφη και φραγμένη στο $\mathbb{C}$. Από το θεώρημα του Liouville θα πρέπει υποχρεωτικά η $h \circ g$ να είναι σταθερή, και επειδή $\|h(g(\lambda))\| \to 0$ για $\lambda \to \infty$ θα έχουμε τελικά ότι $h(g(\lambda)) = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Αφού το $h \in X^*$ ήταν τυχόν, έχουμε $g(\lambda) = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς $g(0) = -x \neq 0$ (αφού $x \in \mathscr{G}(X)$). Άρα τελικά το $\sigma_X(x)$ είναι μη κενό! □

Πρόταση Γ'.2.3. *Έστω X μια άλγεβρα Banach με μονάδα και έστω $x \in X$. Τότε:*

(i) $\sigma_X(p(x)) = p(\sigma_X(x))$ *για κάθε μιγαδικό πολυώνυμο p.*

(ii) *Αν το x είναι αντιστρέψιμο, τότε $\sigma_X(x^{-1}) = \sigma_X(x)^{-1} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma_X(x)\}$.*

Απόδειξη. (i) Υποθέτουμε ότι το p έχει βαθμό $n \geq 1$. Για $\mu \in \mathbb{C}$ έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι n ρίζες του πολυωνύμου $p - \mu$. Τότε, για $z \in \mathbb{C}$ έχουμε $p(z) - \mu = a(z - \lambda_1)\ldots(z - \lambda_n)$ για κάποιον μη μηδενικό $a \in \mathbb{C}$. Άρα, $p(x) - \mu e = a(x - \lambda_1 e)\ldots(x - \lambda_n e)$.

Τώρα, ισχυριζόμαστε πως αν $a_1, \ldots, a_n \in X$ είναι στοιχεία του X που μετατίθενται ανά δύο μεταξύ τους τότε το γινόμενο $a_1 \ldots a_n$ αντιστρέφεται αν και μόνο αν καθένα από τα a_i αντιστρέφεται. Αν κάθε a_i αντιστρέφεται τότε προφανώς και το γινόμενο $a_1 \ldots a_n$ θα αντιστρέφεται (ανεξάρτητα από το αν τα a_i μετατίθενται μεταξύ τους) και ο αντίστροφος είναι ο $a_n^{-1} \ldots a_1^{-1}$. Τώρα, αν το γινόμενο $a_1 \ldots a_n$ αντιστρέφεται θα έχουμε

$$\begin{aligned} a_2 a_1 a_3 \ldots a_n (a_1 \ldots a_n)^{-1} &= a_1 \ldots a_n (a_1 \ldots a_n)^{-1} \\ &= (a_1 \ldots a_n)^{-1} a_1 \ldots a_n \\ &= (a_1 \ldots a_n)^{-1} a_1 a_3 \ldots a_n a_2 \end{aligned}$$

πράγμα το οποίο δείχνει ότι το a_2 είναι αντιστρέψιμο. Με παρόμοιο τρόπο, δείχνουμε ότι κάθε a_i είναι αντιστρέψιμο. Τώρα, αν $\mu \in \sigma_X(p(x))$ θα έχουμε ότι το $p(x) - \mu e$ δεν αντιστρέφεται, συνεπώς θα υπάρχει $1 \leq i \leq n$ ώστε το $x - \lambda_i e$ να μην αντιστρέφεται. Δηλαδή, $\lambda_i \in \sigma_X(x)$. Όμως, $p(\lambda_i) = \mu$ απ' όπου έπεται ότι $\mu \in p(\sigma_X(x))$ και $\sigma_X(p(x)) \subseteq p(\sigma_X(x))$. Αντίστροφα, αν $\mu \in p(\sigma_X(x))$ τότε $\mu = p(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in \sigma_X(x)$. Οπότε, γράφοντας το $p - \mu$ στη μορφή $a(x - \lambda_1 e)\ldots(x - \lambda_n e)$ θα έχουμε ότι $\lambda = \lambda_i$ για κάποιο i. Όμως, οι παράγοντες στην ανάλυση του $p - \mu$ μετατίθενται μεταξύ τους. Οπότε, επειδή το $x - \lambda e = x - \lambda_i e$ δεν αντιστρέφεται θα έχουμε ότι και το $p(x) - \mu e$ δεν αντιστρέφεται. Δηλαδή, $\mu \in \sigma_X(p(x))$ απ' όπου έπεται ότι $p(\sigma_X(x)) \subseteq \sigma_X(p(x))$.

(ii) Αν το x είναι αντιστρέψιμο, τότε $0 \notin \sigma_X(x)$. Τώρα, αφού για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\lambda \neq 0$ έχουμε

$$x - \lambda e = x(e - \lambda x^{-1}) = x\lambda(\lambda^{-1} e - x^{-1})$$

έπεται πως το $x - \lambda e$ δεν αντιστρέφεται αν και μόνο αν το $x^{-1} - \lambda^{-1} e$ δεν αντιστρέφεται. Με άλλα λόγια, $\sigma_X(x^{-1}) = \sigma_X(x)^{-1}$. □

Όπως είδαμε προηγουμένως (Θεώρημα Γ'.2.2) το $\sigma_X(x)$ είναι μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Συνεπώς, η φασματική ακτίνα $r_X(x)$ του x ορίζεται καλά και $r_X(x) \leq \|x\|$. Το επόμενο θεώρημα μας δίνει έναν τρόπο υπολογισμού της φασματικής ακτίνας.

Θεώρημα Γ'.2.4 (Τύπος φασματικής ακτίνας)**.** *Έστω X μια άλγεβρα Banach με μονάδα και έστω $x \in X$. Τότε, το όριο $\lim_n \|x^n\|^{1/n}$ υπάρχει και μάλιστα:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x^n\right\|^{1/n} = r_X(x) = \inf_n \left\|x^n\right\|^{1/n}. \tag{Γ'.2.6}$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$\gamma(x) = \inf\{\left\|x^n\right\|^{1/n} : n = 1, 2, ...\}$$

και δείχνουμε ότι $\|x^n\|^{1/n} \to \gamma(x)$ καθώς το $n \to \infty$. Θεωρούμε $\epsilon > 0$ και σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{N}$ με

$$\left\|x^k\right\|^{1/k} < \gamma(x) + \epsilon. \tag{Γ΄.2.7}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφουμε το n ως $n = a_n k + \beta_n$ όπου $0 \leq \beta_n < k$ και $a_n, \beta_n \in \mathbb{N}$. Τότε, $\beta_n/n \to 0$ καθώς το $n \to \infty$ και κατ' επέκταση $\frac{a_n k}{n} \to 1$ καθώς το $n \to \infty$. Δηλαδή, $\frac{a}{n} \to \frac{1}{k}$ καθώς το $n \to \infty$. Οπότε, γράφοντας

$$\begin{aligned} \left\|x^n\right\|^{1/n} &= \left\|(x^k)^{a_n} x^{\beta_n}\right\|^{1/n} \\ &\leq \left\|x^k\right\|^{a_n/n} \|x\|^{\beta_n/n} \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τη σύγκλιση $\left\|x^k\right\|^{a_n/n} \|x\|^{\beta_n/n} \to \left\|x^k\right\|^{1/k}$ για $n \to \infty$, από την (Γ΄.2.7) θα έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \left\|x^n\right\|^{1/n} < \gamma(x) + \epsilon$$

απ' όπου έπεται ότι $\limsup_n \|x^n\|^{1/n} \leq \gamma(x)$ και επειδή $\gamma(x) \leq \liminf_n \|x^n\|^{1/n}$ θα έχουμε τελικά ότι $\lim_n \|x^n\|^{1/n} = \gamma(x)$. Μένει να δείξουμε ότι $\lim_n \|x^n\|^{1/n} = r_X(x)$. Από την Πρόταση Γ΄.2.3 έχουμε ότι $\{\lambda^n : \lambda \in \sigma_X(x)\} = \sigma_X(x^n)$. Άρα, $r_X(x^n) = r_X(x)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, $r_X(x^n) \leq \|x^n\|$ απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned} r_X(x)^n &= r_X(x^n) \leq \left\|x^n\right\| \\ &\implies r_X(x) \leq \left\|x^n\right\|^{1/n} \\ &\implies r_X(x) \leq \gamma(x). \end{aligned}$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε τυχόν $h \in X^*$. Τότε, ακριβώς όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος Γ΄.2.2 έχουμε ότι η $h \circ g$ όπου $g : \lambda \mapsto (\lambda e - x)^{-1}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \sigma_X(x) = \rho_X(x)$. Επομένως, η $h \circ g$ θα έχει ένα ανάπτυγμα Laurent στο δακτύλιο $\{\lambda : |\lambda| > r_X(x)\}$. Όμως, από την (Γ΄.2.5) έχουμε

$$h(g(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} h\Big(\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\Big)$$

για $|\lambda| > \|x\|$. Ειδικότερα, το παραπάνω ανάπτυγμα (από τη μοναδικότητα του αναπτύγματος Laurent) θα ισχύει και για $|\lambda| > r_X(x)$. Άρα, η παραπάνω σειρά θα συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $\{\lambda : |\lambda| > r_X(x)\}$. Οπότε, $h(x^n/\lambda^{n+1}) \to 0$ για $|\lambda| > r_X(x)$. Συνεπώς, από την Πρόταση Β΄.2.3 η ακολουθία $(x^n/\lambda^{n+1})_{n=1}^{\infty}$ θα είναι $\|\cdot\|$−φραγμένη. Δηλαδή, θα υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\right\| \leq M \implies \\ &\left\|x^n\right\| \leq M|\lambda||\lambda^n| \implies \\ &\left\|x^n\right\|^{1/n} \leq (M|\lambda|)^{1/n}|\lambda|. \end{aligned}$$

Τότε, αφήνοντας το $n \to \infty$ θα έχουμε $\gamma(x) \leq |\lambda|$ για κάθε $|\lambda| > r_X(x)$. Απ' όπου έπεται ότι $r_X(x) \leq \gamma(x)$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Βιβλιογραφία

[1] Mustafa Akcoglu and Ulrich Krengel. "Ergodic theorems for superadditive processes". In: *J. reine angew. Math* 323.53-67 (1981), pp. 106–127.

[2] Leon Alaoglu and Garrett Birkhoff. "General ergodic theorems". In: *Annals of Mathematics* (1940), pp. 293–309.

[3] Fernando Albiac and Nigel John Kalton. *Topics in Banach space theory*. Vol. 233. Springer, 2006.

[4] Nelson Dunford and B. J. Pettis. "Linear Operations on Summable Functions". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 47.3 (1940), pp. 323–392. ISSN: 00029947. URL: http://www.jstor.org/stable/1989960.

[5] William F. Eberlein. "Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 67.1 (1949), pp. 217–240.

[6] Tanja Eisner et al. *Operator theoretic aspects of ergodic theory*. Vol. 272. Springer, 2015.

[7] David H. Fremlin. "Measure Theory, Volume 2". In: *Torres Fremlin, Colchester* (2003).

[8] Harry Furstenberg and Harry Kesten. "Products of random matrices". In: *The Annals of Mathematical Statistics* 31.2 (1960), pp. 457–469.

[9] Adriano M. Garsia. "A simple proof of E. Hopf's maximal ergodic theorem". In: *Journal of Mathematics and Mechanics* 14.3 (1965), pp. 381–382.

[10] Edhard Hopf. "The general temporally discrete Markov process". In: *J. Rational Mech. Anal* 3 (1954), pp. 13–45.

[11] Shizuo Kakutani. "Iteration of linear operations in complex Banach spaces". In: *Proceedings of the Imperial Academy* 14.8 (1938), pp. 295–300.

[12] John F.C. Kingman. "The ergodic theory of subadditive stochastic processes". In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 30.3 (1968), pp. 499–510.

[13] Ulrich Krengel. *Ergodic theorems*. Vol. 6. Walter de Gruyter, 2011.

[14] Michael Lin. “On the Uniform Ergodic Theorem”. In: *Proc. Amer. Math. Soc. 43* (1974), pp. 337–340.

[15] Edgar R Lorch. “Means of iterated transformations in reflexive vector spaces”. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 45.12 (1939), pp. 945–947.

[16] Σ Νεγρεπόντης et al. “*Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*”. Greek. In: *Αίθρα, Αθήνα* (1988).

[17] Rainer J. Nagel. “Mittelergodische halbgruppen linearer operatoren”. In: *Annales de l’institut Fourier*. Vol. 23. 4. 1973, pp. 75–87.

[18] Frederick Riesz. “Some mean ergodic theorems”. In: *Journal of the London Mathematical Society* 1.4 (1938), pp. 274–278.

[19] Robert Sine. “A mean ergodic theorem”. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 24.3 (1970), pp. 438–439.

[20] Kôsaku Yosida. “Mean ergodic theorem in Banach spaces”. In: *Proceedings of the Imperial Academy* 14.8 (1938), pp. 292–294.

[21] Kôsaku Yosida and Shizuo Kakutani. “Birkhoff’s ergodic theorem and the maximal ergodic theorem”. In: *Proceedings of the Imperial Academy* 15.6 (1939), pp. 165–168.

[22] Kôsaku Yosida and Shizuo Kakutani. “Operator-theoretical treatment of Markoff’s process and mean ergodic theorem”. In: *Annals of Mathematics* (1941), pp. 188–228.

Ευρετήριο