ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

Τμήμα Μαθηματικών
Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Τμήμα Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

«Μελέτη της νοηματοδότησης της έννοιας της εξίσωσης από μαθητές Α΄ Γυμνασίου μέσω της χρήσης του ψηφιακού εργαλείου «Πολύζυγο»».

Μελισσάκης Γεώργιος

Δ201812

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Γ. Ψυχάρης Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα

Φεβρουάριος 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την $22^{η}$ Φεβρουαρίου 2021 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Γ. Ψυχάρης (Επιβλέπων)	Επίκουρος Καθηγητής
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Χ. Κυνηγός	Καθηγητής

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Γ. Ψυχάρης (Επιβλέπων)	Επίκουρος Καθηγητής
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Χ. Κυνηγός	Καθηγητής

Περίληψη

Οι πρωτοβάθμιες εξισώσεις είναι από τα σημαντικότερα κεφάλαια στη διδασκαλία της άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Συχνά επιστρατεύονται διάφορα μοντέλα για την εισαγωγή στην έννοια της εξίσωσης. Ένα από αυτά, ίσως το συχνότερο, είναι το μοντέλο της ζυγαριάς. Πάνω στη χρήση του μοντέλου αυτού έχουν γίνει πολλές έρευνες εστιασμένες τόσο στις δυνατότητες όσο και στους περιορισμούς του. Ένας από τους συχνότερους περιορισμούς της ζυγαριάς είναι γύρω από την εμφάνιση αρνητικών αριθμών και πως αυτό οδηγεί σε αδυναμία νοηματοδότησης των αντίστοιχων εξισώσεων. Έχουν γίνει πολλές έρευνες πάνω σε αυτό το κομμάτι, χρησιμοποιώντας παραλλαγές του κλασικού μοντέλου. Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί η νοηματοδότηση της έννοιας της εξίσωσης από μαθητές Α’ Γυμνασίου, μέσω του ψηφιακού εργαλείου «Πολύζυγο». Ο συγκεκριμένος μικρόκοσμος πέρα από ένα κλασικό μοντέλο ζυγαριάς, δίνει επιπλέον τη δυνατότητα συμπερίληψης και αρνητικών βαρών αλλά και πολλαπλών ζυγών. Ιδιαίτερη εστίαση θα δοθεί στον ρόλο των αναπαραστάσεων στο περιβάλλον και στα στοιχεία αλγεβρικού συλλογισμού του Radford (2014).

Λέξεις κλειδιά: Μοντέλο ζυγαριάς, πρωτοβάθμιες εξισώσεις, μεταβλητή, αντικειμενοποίηση, αλγεβρική σκέψη

Abstract

Linear equations are amongst the most important chapters of the algebra curriculum in lower secondary education. The use of mathematical models is common when introducing the concept of the equation. Of those models, the one used most often, is the balance model. There is a plethora of research focused on this model's uses and limitations. One of its most commonly noted limitations lies in its inability to include negative numbers. The latter often leads into difficulties when constructing meaning for equations involving negative values. Lots of this model's variations have been used by researchers. In this research we will study the trajectory of meaning construction of the concept of the equation by seventh grade students when using the digital tool "Polyzygo". This microworld, other than representing a common balance model, allows the inclusion of negative numbers as well as multiple scales. Our main focus will be on the role of representations of the environment as well as on the characteristics of algebraic thinking as proposed by Radford (2014).

Keywords: Balance model, linear equations, variable, objectification, algebraic thinking

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Οι πρωτοβάθμιες εξισώσεις είναι συχνά το κεφάλαιο στο οποίο οι μαθητές ξεκινούν να χρησιμοποιούν αλγεβρικά αντί για αριθμητικά επιχειρήματα. Από τις πρώτες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης καλούνται να λύσουν εξισώσεις όπως η 2 + … = 5. Αυτές οι ασκήσεις, αν και είναι πρακτικά εξισώσεις, αντιμετωπίζονται με έναν τελείως διαφορετικό τρόπο: λύνονται αριθμητικά και όχι αλγεβρικά. Συχνά η πρώτη επαφή με τη λέξη «εξίσωση» έρχεται στο τέλος του Δημοτικού ή στις αρχές του Γυμνασίου, κυρίως μέσω των αριθμητικών εξισώσεων, αυτών δηλαδή που έχουν τον άγνωστο μόνο στο ένα μέλος. Και σε αυτού του τύπου τις εξισώσεις γίνεται να δοθούν καθαρά αριθμητικές λύσεις, όπως αυτές που προτείνονται από το σχολικό εγχειρίδιο. Το κεφάλαιο των αλγεβρικών εξισώσεων, οι οποίες έχουν μεταβλητή και στα δύο μέλη, είναι συχνά εκείνο όπου απαιτούνται κάποια καθαρά αλγεβρικά επιχειρήματα.

Για τη διδασκαλία των εξισώσεων επιστρατεύονται πολλά μοντέλα, με το συχνότερο να είναι το μοντέλο της ζυγαριάς. Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τύποι αυτού του μοντέλου ανάλογα με το μέσο και τις ιδιότητες του. Όλα τα μοντέλα όμως έχουν ως κοινό ότι βλέπουν την εξίσωση σαν μια ζυγαριά που ισορροπεί. Αν σε μια τέτοια ζυγαριά προσθέσουμε ή γενικότερα κάνουμε οποιαδήποτε πράξη και στα δύο άκρα της, τότε εκείνη συνεχίζει να ισορροπεί. Αυτή είναι η βασική ιδιότητα της ζυγαριάς και ο κύριος λόγος ο οποίος καθιστά το μοντέλο κατάλληλο για την αναπαράσταση των εξισώσεων και ιδιαιτέρως των ιδιοτήτων τους. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει και η απεικόνιση της ισότητας και της μεταβλητής σε αυτό το μοντέλο, καθώς οι δύο αυτές έννοιες βρίσκονται στην καρδιά των εξισώσεων. Το μοντέλο της ζυγαριάς είναι ιδιαίτερα βολικό για την απεικόνιση των εξισώσεων όμως, στις περισσότερες παραλλαγές του, έχει ένα βασικό μειονέκτημα: την συμπερίληψη αρνητικών αριθμών. Αφού οι μεταβλητές και οι σταθερές ποσότητες απεικονίζονται ως βάρη, είναι δύσκολη η επέκταση του μοντέλου στο σύνολο των αρνητικών αριθμών, επειδή κάθε μάζα είναι θετική ή μηδενική.

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί η πορεία νοηματοδότησης της εξίσωσης από μαθητές Α’ Γυμνασίου στο ψηφιακό περιβάλλον «Πολύζυγο». Το συγκεκριμένο περιβάλλον παρέχει τη δυνατότητα κατασκευής και αλληλεπίδρασης με πολλαπλές ζυγαριές μέσω της χρήσης των δρομέων οι οποίοι δίνουν τις διάφορες τιμές στα μεταβλητά βάρη. Οι πολλαπλές ζυγαριές προσθέτουν μια επιπλέον πολυπλοκότητα στις δραστηριότητες καθώς απαιτούν μια αρκετά διαφορετική αντιμετώπιση από τους μαθητές. Επιπλέον, το «Πολύζυγο», με κάποιες τροποποιήσεις, επιτρέπει την εισαγωγή αρνητικών βαρών, γενικεύοντας έτσι το μοντέλο και στους αρνητικούς αριθμούς. Το τελευταίο είναι καίριας σημασίας, καθώς όπως αναδεικνύεται από τη σχετική βιβλιογραφία, (πχ Vlassis, 2002 και Otten, Van den Heuvel-Panhuizen & Veldhuis, 2019) η συγκεκριμένη αδυναμία του μοντέλου είναι η πλέον σημαντική.

Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν κλιμακωτά, από την απλούστερη στην πιο απαιτητική. Η πορεία αυτή ξεκινάει με απλές αριθμητικές εξισώσεις με φυσικές λύσεις και καταλήγει σε σύνθετες πολλαπλές ζυγαριές με μη ακέραιες αλλά και αρνητικές λύσεις. Οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν τη σκέψη τους τόσο με δεδομένα ζυγαριάς όσο και μέσω των αλγεβρικών ιδιοτήτων που χρησιμοποιούν. Η ανάλυση των δεδομένων γίνεται με εστίαση στα κριτήρια της αλγεβρικής σκέψης του Radford (2014), με ταυτόχρονη παρακολούθηση των στοιχείων του περιβάλλοντος που επηρεάζουν τις εκάστοτε αλλαγές στον τρόπο σκέψης των μαθητών.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται μερικά από τα ευρήματα των ερευνών πάνω στις εξισώσεις και στις συγγενείς έννοιες της μεταβλητής και της ισότητας. Στη συνέχεια παρουσιάζονται έρευνες πάνω στη χρήση του μοντέλου της ζυγαριάς.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο της αντικειμενοποίησης του Radford.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύονται θέματα της μεθοδολογίας της έρευνας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται αποσπάσματα από τα δεδομένα.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μία σύνοψη των αποτελεσμάτων της έρευνας καθώς και μία σύντομη σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των ερευνών, όπως αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Κεφάλαιο 1: Εξισώσεις και αλγεβρικός συλλογισμός

Εισαγωγή

Οι εξισώσεις είναι αναμφίβολα ένα από τα σημαντικότερα κεφάλαια της άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε κάθε πρόγραμμα σπουδών. Ιδιαίτερα οι πρωτοβάθμιες εξισώσεις είναι καίριας σημασίας καθώς αποτελούν συχνά την πρώτη επαφή των μαθητών με την άλγεβρα. Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται συνήθως η μετάβαση από τον αριθμητικό και πρώιμο αλγεβρικό τρόπο σκέψης στον αλγεβρικό, από συλλογισμούς με αριθμούς σε συλλογισμούς με αγνώστους (Filloy & Rojano, 1989). Οι μαθητές έχουν ήδη έρθει αντιμέτωποι με εξισώσεις στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Εκεί όμως ο τρόπος αντιμετώπισης τους είναι σχεδόν αποκλειστικά αριθμητικός, συχνά μέσω δοκιμών ή απλοποιημένων παραδειγμάτων.

Στο βιβλίο Adding it up (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001) του εθνικού συμβουλίου έρευνας των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής, οι συγγραφείς αναφέρονται εκτενώς στη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα. Συγκεκριμένα υπογραμμίζουν πως οι μαθητές πρέπει να κάνουν αρκετές μετατροπές στον τρόπο σκέψης τους. Η αριθμητική στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση τείνει να προσανατολίζεται γύρω από τη λύση και δεν εστιάζει στην απεικόνιση των σχέσεων που εμφανίζονται. Όταν ένας μαθητής ξεκινάει με την άλγεβρα έχει συνηθίσει να βλέπει τις σχέσεις ως ένα αντικείμενο προς υπολογισμό. Βλέποντας μια εξίσωση της μορφής 2+3= … +1 συχνά θα συμπληρώσει στο κενό το 5, το αποτέλεσμα της πράξης 2+3 και όχι το 4 που είναι η λύση της εξίσωσης. Το σύμβολο της ισότητας αντιμετωπίζεται ως διαχωριστικό του προβλήματος και της λύσης, ως έναυσμα για να γραφτεί το αποτέλεσμα της πράξης στα αριστερά του.

Αναλύοντας το παραπάνω κεφάλαιο του βιβλίου, η Kieran (2004) παρατηρεί πως οι μαθητές που εργάζονται στο πλαίσιο της αριθμητικής τείνουν να παραβλέπουν τις σχεσιακές πτυχές ανάμεσα στις πράξεις, καθώς η εστίαση τους είναι καθαρά στον υπολογισμό. Συμπεραίνει μάλιστα πως χρειάζεται μια αξιοσημείωτη προσαρμογή για την ανάπτυξη του αλγεβρικού τρόπου σκέψης. Μερικές από τις ενέργειες που απαιτούνται σε αυτή τη προσαρμογή είναι:

1. *Η εστίαση στις σχέσεις και όχι μόνο στον αριθμητικό υπολογισμό μιας απάντησης.*
2. *Η εστίαση τόσο στις πράξεις όσο και στις αντίστροφες τους, αλλά και την ιδέα του να κάνω κάτι και να το αναιρώ.*
3. *Η εστίαση και στην απεικόνιση αλλά και στην επίλυση ενός προβλήματος και όχι αποκλειστικά στην επίλυση του.*
4. *Η εστίαση στους αριθμούς και στα γράμματα, όχι αποκλειστικά στους αριθμούς. Αυτό περιλαμβάνει:*

    α) εργασία με γράμματα τα οποία μπορεί να είναι άγνωστοι, μεταβλητές ή παράμετροι

    β) αποδοχή ανοιχτών εκφράσεων με γράμματα ως απαντήσεις

    γ) σύγκριση εκφράσεων ως προς την ισοδυναμία τους με βάση τις ιδιότητες τους και όχι αριθμητική επαλήθευση

5. *Μια επανεστίαση στο νόημα του συμβόλου της ισότητας.*

(Kieran, 2004, σελ 140-141)

Ο αλγεβρικός συμβολισμός και η χρήση αυτού είναι σίγουρα από τα σημαντικότερα κομμάτια αυτής της μετάβασης. Τόσο τα γράμματα που χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές, άγνωστοι ή παράμετροι όσο και το ίδιο σύμβολο της ισότητας, καθιστούν την εξίσωση ιδιαίτερα προκλητική για τους μαθητές. Πολλοί από αυτούς συχνά βασίζουν τις ερμηνείες των γραμμάτων και των αλγεβρικών εκφράσεων στη διαίσθησή τους, σε εικασίες ή σε αναλογίες με άλλα σύμβολα που ήδη γνωρίζουν. Είναι συνηθισμένο να αγνοείται η συνέπεια, η αυστηρότητα και η ισχύς του μαθηματικού συμβολισμού. Αυτές οι παρανοήσεις των μαθητών οδηγούν σε δυσκολίες στη νοηματοδότηση της άλγεβρας στο σύνολό της και μπορεί να παραμείνουν για χρόνια αν δεν αναγνωριστούν και διορθωθούν (MacGregor & Stacey, 1997).

Η διαφοροποίηση αριθμητικού και αλγεβρικού τρόπου σκέψης δεν είναι πάντα ευδιάκριτη. Ο Radford (2018) προτείνει πως ο αλγεβρικός τρόπος σκέψης πρέπει να καταφεύγει σε απροσδιόριστες ποσότητές και σε ιστορικά και πολιτισμικά εξελιγμένους τρόπους αναπαράστασης και συμβολισμού. Οι τελευταίοι παίζουν ρόλο διαμεσολαβητή ανάμεσα σε αυτές τις απροσδιόριστες ποσότητες και τις λειτουργίες τους. Επιπλέον θεωρεί πως θα πρέπει να υπάρχει αλληλεπίδραση με αυτές τις γενικευμένες ποσότητες με τρόπο αναλυτικό, αντιμετωπίζοντάς τες δηλαδή με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τον οποίο θα αντιμετωπίζονταν αν ήταν γνωστές. Η μη χρήση μαθηματικών συμβόλων και γραμμάτων δε σημαίνει απαραίτητα και έλλειψη αλγεβρικού συλλογισμού. Με βάση όλα τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε πως η μεταβλητή και κυρίως η ισότητα, δύο έννοιες στην ραχοκοκαλιά της εξίσωσης, είναι καίριας σημασίας στη μετάβαση από τον αριθμητικό στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης.

Πρωτοβάθμιες εξισώσεις και σχετικές έννοιες

Η μεταβλητή

Μια από τις σημαντικότερες έννοιες στην άλγεβρα και γενικότερα στη διδακτική των μαθηματικών είναι η μεταβλητή. Τα γράμματα χρησιμοποιούνται με ποικίλους τρόπους στις μαθηματικές εκφράσεις. Ο Küchemann (1978) κατέταξε τη χρήση των γραμμάτων από τους μαθητές σε έξι κατηγορίες:

1) Εκτιμώμενο γράμμα (letter evaluated): το γράμμα χ μπορεί να εκτιμηθεί με μια απλή διαδικασία δοκιμής και σφάλματος, δεν αναγνωρίζεται ποτέ ως άγνωστος και δεν ακολουθείται κάποια συγκεκριμένη διαδικασία για την εύρεση του. Για παράδειγμα αν $\chi + 3 = 5$ με δοκιμές υπολογίζεται ότι $\chi = 2$.

2) Αγνοημένο γράμμα (letter ignored): το γράμμα αγνοείται καθώς οι μαθητές εστιάζουν στις πράξεις με αυτές. Για παράδειγμα αν έχουμε ότι $\chi + \psi = 10$ και ζητείται να υπολογιστεί το $\chi + \psi + 2$ το χ και το ψ πρακτικά περνάνε στο παρασκήνιο καθώς το μόνο που έχει νόημα για τους μαθητές είναι η εκτέλεση της πράξης $10 + 2$.

3) Γράμμα ως αντικείμενο (letter as object): το γράμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς να χρειάζεται να γίνει κάποια αριθμητική δοκιμή πριν. Δεν θεωρείται άγνωστος αριθμός αλλά αντικείμενο ή συντομογραφία κάποιου αντικειμένου. Για παράδειγμα ορίζουμε ως μ τα μήλα (εννοώντας τον αριθμό των μήλων) ή ως α το μήκος της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

4) Γράμμα ως συγκεκριμένος άγνωστος (letter as specific unknown): το γράμμα θεωρείται άγνωστος αλλά συγκεκριμένος αριθμός. Για παράδειγμα αν έχουμε τετράγωνο πλευράς α η περίμετρός του θα είναι 4α. Το α εδώ συχνά για τους μαθητές είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός που πρέπει με κάποιο τρόπο να υπολογιστεί για να έχει νόημα. Μια αλγεβρική απάντηση της μορφής Π = 4α δεν είναι αποδεκτή καθώς το αποτέλεσμα αναμένεται να είναι ένας γνωστός αριθμός.

5) Γράμμα ως γενικευμένος αριθμός (letter as generalized number): εδώ σε αντίθεση με την προηγούμενη κατηγορία το γράμμα μπορεί να παίρνει ή να αντιπροσωπεύει παραπάνω από μια τιμές. Για παράδειγμα μπορεί να ισχύει ότι $χ < 4$ ή ότι $χ = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

6) Γράμμα ως μεταβλητή (letter as variable): η μετάφραση των γραμμάτων ως μεταβλητές περιλαμβάνει μια επίγνωση της ύπαρξης κάποιας σχέσης μεταξύ των γραμμάτων όσο αλλάζει η τιμή τους. Συχνά χρησιμοποιούνται ανάλογα ποσά ως ενδεικτικά παραδείγματα: αν το κάθε τετράδιο κοστίζει 2 ευρώ τότε τα χ τετράδια κοστίζουν 2 * χ ευρώ. Επίσης, οι μαθητές μπορούν να ξεκινήσουν σχηματίζοντας ζεύγη αποδεκτών τιμών για το εκάστοτε πρόβλημα. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω παράδειγμα κάποια αποδεκτά ζευγάρια θα ήταν 4, 8 ή 7, 14 ή 100, 200 κτλ. Σε μια σχέση αυτό μπορεί να μεταφραστεί ως: «Αν το χ είναι 5 τότε οι δύο ποσότητες είναι ίσες» που είναι πρακτικά η δημιουργία μιας εξίσωσης αφού έχουμε δύο διαφορετικές ποσότητες οι οποίες για κάποια ή κάποιες τιμές του χ είναι ίσες.

Οι πολλαπλές αυτές χρήσεις των γραμμάτων, όπως: σταθερά, άγνωστος, μεταβλητή, παράμετρος κτλ. είναι πιθανό να δημιουργούν δυσκολίες κατανόησης και χρήσης των γραμμάτων σε μαθηματικές σχέσεις (Knuth et al., 2006). Η μεταβλητή είναι ίσως η σημαντικότερη έννοια στην πορεία μετάβασης από τον αριθμητικό στον αλγεβρικό συλλογισμό, και αποτελεί δομικό λίθο των εξισώσεων μαζί με το σύμβολο της ισότητας.

Η ισότητα

Το σύμβολο της ισότητας χρησιμοποιείται από τους μαθητές από το πρώτο μάθημα μαθηματικών στο σχολείο. Η χρήση του αρχικά είναι καθαρά για να δείχνει το αποτέλεσμα μιας πράξης όπως 2 + 3 = 5 ή 4 – 1 = 3. Στις πράξεις αυτές το σύμβολο της ισότητας υποδεικνύει πως τα δύο μέλη, το αριστερό και το δεξί, είναι για τα μαθηματικά ένα και το αυτό. Στην αριθμητική το σύμβολο της ισότητας είναι ένα σύμβολο που αποκαλύπτει το αποτέλεσμα μετά από μια διαδικασία υπολογισμών (Kieran, 1981; MacGregor & Stacey, 1997; Stacey & MacGregor, 1997)

Όπως τονίζει η Kieran (1981) το = είναι ένα σύμβολο που υποδηλώνει ότι «πρέπει να κάνεις κάτι». Στα παραπάνω παραδείγματα, υποδηλώνει την ανάγκη να γίνει η πρόσθεση και η αφαίρεση αντίστοιχα. Αυτή η πεποίθηση είναι ιδιαίτερα συνηθισμένη σε μαθητές δημοτικού αλλά παρατηρείται συχνά και σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Παρότι η διδασκαλία στοχεύει στην κατανόηση του ίσον ως συμβόλου που δηλώνει την ισοδυναμία δύο ποσοτήτων, πολύ συχνά αντιμετωπίζεται από τους μαθητές ως «σημάδι» που χωρίζει το πρόβλημα από το αποτέλεσμα. . Η Kieran (1981) καταλήγει πως δεν είναι σαφής ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές πραγματοποιούν αυτήν την περισσότερο αφαιρετική μετάβαση. Γνωρίζουμε ότι οι μαθητές έχουν μια ασαφή εικόνα του συμβόλου της ισότητας και πως σταδιακά αυτή γίνεται κάπως πιο αφηρημένη. Ενδεικτικά στοιχεία αυτής μετάβασης προς την γενικευμένη έννοια της ισοδυναμίας ίσως είναι η χρήση του = σε διαδικασίες επίλυσης εξισώσεων ή εύρεσης παραγώγου συνάρτησης στο Λύκειο. Εκεί το ίσον χρησιμοποιείται ως τελεστής (operator) και όχι ως σύμβολο της σχέσης της ισοδυναμίας.

Οι γνωστικές λειτουργίες που χρειάζονται για να θεωρηθεί μια αλγεβρική έκφραση ως αποδεκτή λύση καθώς και η εστίαση στην επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων, εμπλέκει δύο διαφορετικές διατυπώσεις της ισότητας και της ισοδυναμίας (Kieran, 1992).

Όπως αναφέρουν συνοπτικά οι Kieran και συνεργάτες (2016) αυτές οι δύο προσεγγίσεις είναι:

- Η ανακλαστική – ισοδύναμη (reflexive - equivalence), δηλαδή το ότι το αριστερό είναι ίσο με το δεξί μέλος της κάθε εξίσωσης για συγκεκριμένες τιμές του χ.

- Η ισοδυναμία των διαδοχικών εξισώσεων στο σύστημα εξισώσεων που δημιουργούνται κατά την επίλυση ενός προβλήματος. Για την επίλυση μιας δεδομένης εξίσωσης η συνήθης τακτική περιλαμβάνει μια κατασκευή αλυσίδας ισοδύναμων εξισώσεων που καταλήγει στην εύρεση της άγνωστης τιμής. Αυτή η ισοδυναμία επιτυγχάνεται είτε μέσω αντικατάστασης μιας έκφρασης με μια ισοδύναμη έκφραση είτε αντικαθιστώντας ολόκληρη την εξίσωση με μια άλλη ισοδύναμη εξίσωση.

Οι δύο αυτές κατηγορίες είναι ιδιαίτερα σημαντικές στην προσπάθεια ερμηνείας του συμβόλου της ισότητας από τους μαθητές. Αν και οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με το σύμβολο από τις πρώτες κιόλας πράξεις με αριθμούς που πραγματοποίησαν, ίσως και πριν την εισαγωγή τους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, αυτό δε σημαίνει πως κατανοούν πλήρως το σύνολο των χρήσεων του. Η έννοια της ισοδυναμίας είναι αρκετά πολύπλοκη, ιδιαίτερα αν δεν αφορά απλά αριθμούς, γνωστούς ή άγνωστους, αλλά ολόκληρες αλγεβρικές εκφράσεις ή εξισώσεις.

Η περιορισμένη εννοιολογική κατανόηση του συμβόλου της ισότητας είναι ένας από τους βασικούς παράγοντες που δυσχεραίνουν τη διδασκαλία της άλγεβρας (Knuth et al. ,2006; Carpenter et al. , 2003). Οι μαθητές που κατανοούν πως το σύμβολο της ισότητας αντιπροσωπεύει μια σχέση ισοδυναμίας είναι συνήθως σε θέση να επιλύουν αλγεβρικές εξισώσεις, καθώς σχεδόν κάθε μετασχηματισμός απαιτεί την κατανόηση πως το ίσον ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας (Knuth et al., 2006).

Είδη εξισώσεων και αλγεβρικός συλλογισμός

Ένα σημαντικό κομμάτι στη διδασκαλία της άλγεβρας είναι η επίλυση αριθμητικών και αλγεβρικών πρωτοβάθμιων εξισώσεων. Αυτό το κεφάλαιο εισάγει συχνά τα θεμέλια της αλγεβρικής σκέψης για πληθώρα αναλυτικών προγραμμάτων καθώς εδώ συναντάται για πρώτη φορά μια σημαντική μεταστροφή του συλλογισμού των μαθητών: από συλλογισμούς με αριθμούς σε συλλογισμούς με αγνώστους (Filloy & Rojano, 1989). Η πρώτη επαφή των μαθητών με αριθμητικές εξισώσεις, αυτές δηλαδή που έχουν άγνωστο μόνο στο ένα μέλος, γίνεται συνήθως πολύ πριν αρχίσει να αναπτύσσεται ο αλγεβρικός συλλογισμός τους. Για παράδειγμα, ακόμα και από τις πρώτες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης οι μαθητές καλούνται να λύσουν ασκήσεις της μορφής 3 + … = 5 ή 6 - □ = 1, συχνά με τη διατύπωση «να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να είναι σωστές οι πράξεις» ή άλλες αντίστοιχες διατυπώσεις. Μπορεί οι παραπάνω ασκήσεις να μην περιέχουν τυπικά γραμμένες αριθμητικές εξισώσεις, πρακτικά όμως δε διαφέρουν καθόλου από αυτές. Τη θέση του αγνώστου παίρνει ένα κενό, ένα κουτάκι ή κάποιες τελείες. Η βασική διαφορά με τις εξισώσεις είναι ο αναμενόμενος χειρισμός τέτοιων προβλημάτων από τους μαθητές. Σε πρώτη φάση οι μαθητές καλούνται να τις λύσουν με αριθμητικούς τρόπους όπως δοκιμή και σφάλμα ή αντίθετες πράξεις. Δεν αναμένεται από αυτούς να τις εκφράσουν ως εξισώσεις ούτε να τις επεξεργαστούν με τυπικό αλγεβρικό τρόπο. Οι προαναφερθέντες τρόποι επεξεργασίας ίσως δουλεύουν για απλές αριθμητικές εξισώσεις, είναι όμως αρκετά λιγότερο εφαρμόσιμοι σε πιο σύνθετες αλγεβρικές εξισώσεις.

Οι Filloy και Rojano (1989) εκτιμούν πως αριθμητικές εξισώσεις της μορφής 2χ + 1 = 5, με μια αλγεβρική έκφραση στα αριστερά και έναν σταθερό αριθμό στα δεξιά, είναι πολύ πιο εύκολες κατά την συμβολική επίλυση τους σε σύγκριση με εξισώσεις της μορφής 3χ + 4 = χ + 2. Αυτό το αποδίδουν στο ότι η πρώτη μπορεί να «αναποδογυριστεί» αριθμητικά αντιστρέφοντας τις πράξεις ενώ η δεύτερη δεν λύνεται με απλή αντιστροφή των πράξεων. Χρειάζεται απλοποίηση μέσω αλγεβρικών μετασχηματισμών που απαιτούν αυξημένη μαθηματική εμπειρία. Αυτό το φαινόμενο το ονομάζουν «διδακτική τομή» (“didactic cut”) και θεωρούν ότι πηγάζει στο γεγονός ότι πολλοί μαθητές βλέπουν το = ως ένα σύμβολο διαδικασίας, λόγω της εμπειρίας τους από την αριθμητική. Οι de Lima και Healy (2010) κατατάσσουν εξισώσεις της μορφής «έκφραση = αριθμός» ως εξισώσεις επαλήθευσης (evaluation equations) επειδή περιέχουν αριθμητική επαλήθευση μιας αλγεβρικής έκφρασης στην οποία το χ μπορεί να βρεθεί με αριθμητική αναστροφή. Τις γενικότερες γραμμικές εξισώσεις τις ονομάζουν εξισώσεις χειρισμού (manipulation equations).

Εστιάζοντας στα παραπάνω ευρήματα οι Tall και συνεργάτες (2014) παρατήρησαν πως ο συλλογισμός που συναντάται στην επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων βασίζεται στη συμβολική αναπαράσταση των πράξεων της γενικευμένης αριθμητικής. Μετατρέπεται από εξισώσεις επαλήθευσης σε εξισώσεις που απαιτούν γενικότερη επεξεργασία συμβόλων. Αυτό συχνά οδηγεί στις προβληματικές καταστάσεις τις διδακτικής τομής που περιέγραψαν οι Filloy και Rojano (1989). Τα παραπάνω συχνά έρχονται σε συνδυασμό με την εννοιολογική ενσωμάτωση της αντίληψης ότι οι λύσεις εξισώσεων αποτελούν τομές γραφικών παραστάσεων, ότι εξίσωση είναι αντίστοιχη με το φυσικό μοντέλο της ζυγαριάς ή ότι το χ^2 αναπαρίσταται με ένα τετράγωνο πλευράς χ. Όλα αυτά είναι χρήσιμα στην προσπάθεια οπτικοποίησης των αλγεβρικών εξισώσεων, δημιουργούνται όμως προβλήματα όταν εισάγονται αρνητικές ποσότητες. Η εισαγωγή γενικότερων στρατηγικών όπως «κάνουμε την ίδια ενέργεια πράγμα και στα δύο μέλη», φάνηκε επίσης προβληματική για μαθητές που ερμηνεύουν τις αφηρημένες αλγεβρικές εκφράσεις με πιο διαδικαστικό τρόπο (Tall et al. 2014).

Οι πρωτοβάθμιες εξισώσεις στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών

Στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών οι μαθητές διδάσκονται πρωτοβάθμιες εξισώσεις κυρίως σε τρεις τάξεις: ΣΤ' Δημοτικού, Α' Γυμνασίου και Β' Γυμνασίου. Θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε πως και ασκήσεις της μορφής 3 + … = 5 είναι πρωτοβάθμιες εξισώσεις, όμως αν και αυτό είναι τυπικά σωστό, δε θα συμπεριληφθούν καθώς ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζονται είναι καθαρά αριθμητικός και διαφέρει δραστικά από τον αλγεβρικό συλλογισμό που μελετάμε.

Ξεκινώντας από την ΣΤ' Δημοτικού, η πρώτη έννοια που ορίζεται είναι η μεταβλητή:

Άγνωστος / Μεταβλητή
« Το γράμμα ή το σύμβολο που χρησιμοποιείται σε μια αριθμητική παράσταση στη θέση μιας τιμής άγνωστης ή μεταβαλλόμενης λέγεται μεταβλητή.»

Αρχικά δίνονται παραδείγματα αριθμητικών παραστάσεων με τη χρήση μεταβλητής. Για παράδειγμα:

« Στη γιορτή είχαμε 4 γλυκά που έφερε η Φρόσω, 10 που έφερα εγώ και αυτά που έφερε η Σοφία. Τα έφαγαν όλα!» Να εκφράσετε με μια αριθμητική παράσταση τον αριθμό των γλυκών που έφαγαν στη γιορτή.

Όπου η ζητούμενη απάντηση είναι σ + 14, δηλαδή μια αλγεβρική παράσταση.

Στις επόμενες τέσσερις παραγράφους αναλύονται οι πρωτοβάθμιες αριθμητικές εξισώσεις, και γίνεται ο διαχωρισμός ανάλογα με την πράξη όπου εμφανίζεται ο άγνωστος. Οι παράγραφοι είναι οι:

- Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι προσθετέος
- Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος
- Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου
- Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης

Σε αυτές τις παραγράφους ορίζεται η εξίσωση:

Εξίσωση

Μια ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό, που συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα x ή ψ ή z, ... κτλ, λέγεται εξίσωση με έναν άγνωστο.

Η λύση της εξίσωσης:

« Η τιμή που επαληθεύει την εξίσωση ονομάζεται λύση της εξίσωσης.»

Και ο τρόπος επίλυσης, για παράδειγμα στην περίπτωση που ο άγνωστος είναι προσθετέος:

« Όταν ο άγνωστος έχει τη θέση προσθετέου, για να λύσω την εξίσωση αφαιρώ από το άθροισμα τον άλλο προσθετέο.»

Στη συνέχεια παρομοιάζεται η εξίσωση με ζυγαριά:

« Η εξίσωση μοιάζει με μια ζυγαριά που ισορροπεί. Αν πρέπει να αφαιρέσω έναν αριθμό από τη μία πλευρά, για να συνεχίσει να ισορροπεί, πρέπει να αφαιρέσω τον ίδιο αριθμό κι από την άλλη.»

Ακολουθεί μια εφαρμογή με την εξίσωση ως ζυγαριά:

« Σε μια ζυγαριά με δύο δίσκους τοποθετούμε στον έναν βάρος 115 γραμμαρίων και στον άλλο 45 γραμμάρια. Πόσο βάρος πρέπει να τοποθετήσουμε ακόμη, ώστε να ισορροπήσει η ζυγαριά; Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής, γράψε την εξίσωση που περιγράφει την κατάσταση αυτή και υπολόγισε τον άγνωστο.

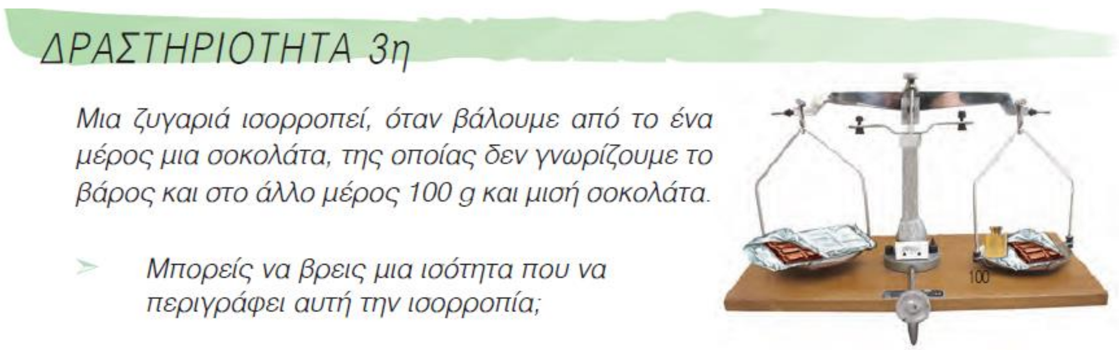
Λύση

1. Ονομάζω την άγνωστη τιμή x. Η εξίσωση στη ζυγαριά είναι 45 + x = 115.

2. Σκέφτομαι πως για να ισορροπήσει η ζυγαριά πρέπει τα βάρη στους δυο δίσκους να είναι ίσα. Υπολογίζω με το νου πόσο είναι το x, προσθέτοντας όσο βάρος χρειάζεται στο 45 ώστε να γίνει 115. Έτσι 45 + ... = 115. Άρα x = ... »

Εδώ βλέπουμε καθαρά την εστίαση του σχολικού βιβλίου στις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης. Όπως αναφέρεται ξεκάθαρα: « *Υπολογίζω με το νου πόσο είναι το x, προσθέτοντας όσο βάρος χρειάζεται στο 45 ώστε να γίνει 115».* Στη συνέχεια ακολουθεί εφαρμογή όπου η εξίσωση λύνεται με αντίστροφες πράξεις. Στις επόμενες παραγράφους ακολουθείτε το ίδιο σκεπτικό μόνο που λείπει η σύνδεση με το μοντέλο της ζυγαριάς, εστιάζοντας έτσι στην στρατηγική επίλυσης με τις αντίστροφες πράξεις.

Στην Α’ Γυμνασίου γίνεται μια υπενθύμιση του αντίστοιχου κεφαλαίου της ΣΤ’ Δημοτικού. Σε μια από τις πρώτες δραστηριότητες, πριν αναφερθούν οι βασικές έννοιες, γίνεται σύνδεση και πάλι με το μοντέλο της ζυγαριάς:



Εικόνα 1 Δραστηριότητα του σχολικού βιβλίο με μοντέλο της ζυγαριάς

Επιπλέον ορίζονται και οι ταυτότητες αλλά και οι αδύνατες εξισώσεις:

«Μια εξίσωση λέγεται ταυτότητα ή αόριστη, όταν όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της.»

«Μια εξίσωση λέγεται αδύνατη, όταν κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει.»

Ο προτεινόμενος τρόπος επίλυσης είναι και εδώ αντίστοιχος με αυτόν του Δημοτικού, μάλιστα αυτή τη φορά δίνεται σε μορφή πίνακα:

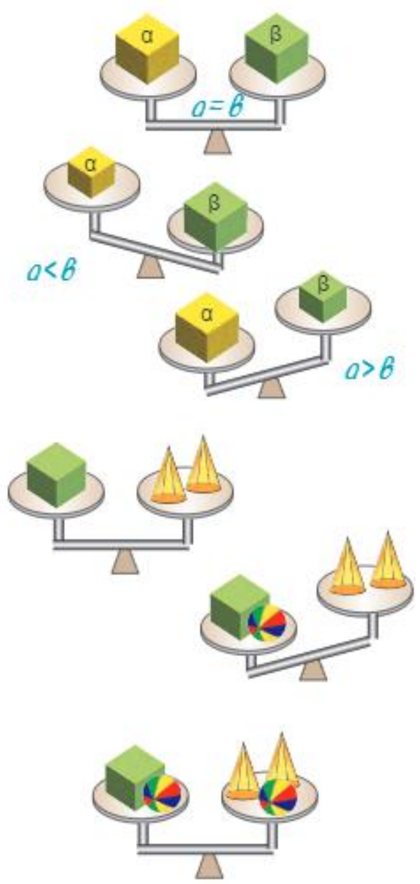
Βάσει των ορισμών των πράξεων

η εξίσωση:	$x+\alpha=\beta$	έχει λύση την	$x=\beta-\alpha$	Η εξίσωση:	$x+5=12$	έχει λύση την	$x=12-5$ ή $x=7$
-//-	$x-\alpha=\beta$	-//-	$x=\beta+\alpha$	-//-	$y-2=3$	-//-	$y=3+2$ ή $y=5$
-//-	$\alpha-x=\beta$	-//-	$x=\alpha-\beta$	-//-	$10-z=1$	-//-	$z=10-1$ ή $z=9$
-//-	$\alpha\cdot x=\beta$	-//-	$x=\beta:\alpha$	-//-	$7\cdot\varphi=14$	-//-	$\varphi=14:7$ ή $\varphi=2$
-//-	$x:\alpha=\beta$	-//-	$x=\beta\cdot\alpha$	-//-	$w:5=4$	-//-	$w=4\cdot5$ ή $w=20$
-//-	$\alpha:x=\beta$	-//-	$x=\alpha:\beta$	-//-	$24:\psi=6$	-//-	$\psi=24:6$ ή $\psi=4$

Εικόνα 2 Ο προτεινόμενος τρόπος επίλυσης αριθμητικών εξισώσεων στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου

Δεν γίνεται κάποια αναφορά στο γιατί ισχύουν τα παραπάνω. Η αιτιολόγηση περιορίζεται στη φράση: «Βάσει των ορισμών των πράξεων… η εξίσωση … έχει λύση την χ = … ».

Στη Β’ Γυμνασίου γίνεται και πάλι αναφορά στο μοντέλο της ζυγαριάς στο εισαγωγικό κεφάλαιο των πρωτοβάθμιων εξισώσεων:



Εικόνα 3 Απεικόνιση ιδιοτήτων ζυγαριάς στο σχολικό βιβλίο της Β' Γυμνασίου

Αρχικά αναφέρεται η βασική ιδιότητα της ζυγαριάς: όταν κάνουμε το ίδιο πράγμα και στις δύο μεριές μιας ζυγαριάς που ισορροπεί αυτή θα συνεχίσει να ισορροπεί, για τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και στη συνέχεια επεκτείνεται και στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Σε όλο το κεφάλαιο κυριαρχούν τα επιχειρήματα που βασίζονται στο μοντέλο της ζυγαριάς, τα οποία το βιβλίο συνοψίζει στον εξής κανόνα:

« Σε μία εξίσωση μπορούμε να «μεταφέρουμε» όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας το πρόσημό τους »

Ο κανόνας αυτός βγαίνει ως συμπέρασμα της επαναλαμβανόμενης χρήσης της βασικής ιδιότητας της ζυγαριάς με σκοπό την απομόνωση της μεταβλητής στο ένα μέλος της εξίσωσης. Αυτή είναι η πρώτη φορά που προτείνεται από τα σχολικά εγχειρίδια ένας τρόπος επίλυσης εξισώσεων που δε βασίζεται σε αριθμητικές πράξεις αλλά σε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς με συγκεκριμένο σκοπό.

Μοντέλα στη διδασκαλία των εξισώσεων

Η σημασία των μοντέλων και των πολλαπλών αναπαραστάσεων

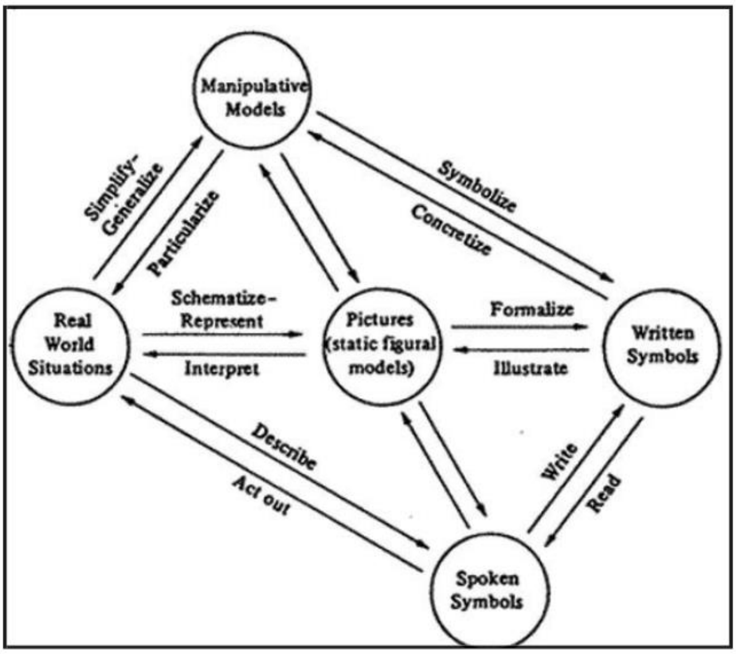
Το Εθνικό Συμβούλιο Διδασκόντων των Μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics) εστίαζε στη ρόλο των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών (NCTM, 2000). Συγκεκριμένα, τόνιζε πως οι μαθητές θα πρέπει να:

« *Μπορούν να χρησιμοποιούν και να κατασκευάζουν αναπαραστάσεις. Να οργανώνουν, να καταγράφουν και να επικοινωνούν μαθηματικές ιδέες. Να επιλέγουν, να εφαρμόζουν και ερμηνεύουν μαθηματικές αναπαραστάσεις για να λύνουν προβλήματα. Να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για να μοντελοποιήσουν και να μεταφράσουν φυσικά, κοινωνικά και μαθηματικά φαινόμενα»*

(NCTM, 2000, σελ 67)

Οι Greenes και Findell (1999) συμφωνώντας με τη θέση του NCTM, καταλήγουν πως οι μαθητές εξελίσσουν τον μαθηματικό τους συλλογισμό στην άλγεβρα όταν είναι σε θέση να ερμηνεύουν αλγεβρικές εξισώσεις χρησιμοποιώντας εικονικές, γραφικές και συμβολικές απεικονίσεις. Άλλοι ερευνητές (πχ Gardner, 1993) συνιστούν η ύλη στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών να παρουσιάζεται με ποικιλία τρόπων ώστε να καλύπτονται οι προσωπικές μαθησιακές ιδιαιτερότητες των μαθητών. Οι Lesh, Landau και Hamilton (1983) υπογράμμισαν τη σημασία της μετάβασης ανάμεσα στις μαθηματικές αναπαραστάσεις. Αναγνώρισαν πέντε διακριτούς τύπους μαθηματικών απεικονίσεων:

1) Εμπειρίες από την καθημερινότητα
2) Μοντέλα προς επεξεργασία
3) Εικόνες και διαγράμματα
4) Προφορικά σύμβολα
5) Γραπτά σύμβολα



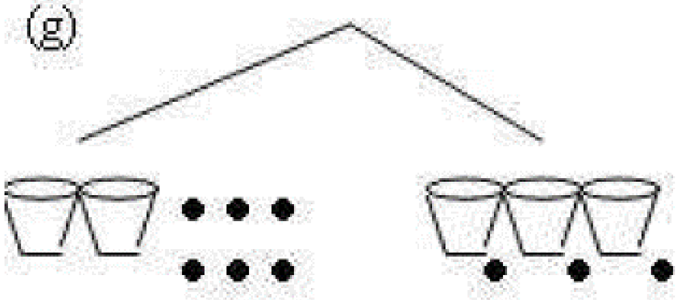
Εικόνα 4 Σύνδεση πολλαπλών απεικονίσεων κατά Lesh, Landau και Hamilton (1983)

Ο Cramer (2003) σχολιάζοντας τους πέντε αυτούς διακριτούς τύπους απεικονίσεων (Lesh, Landau & Hamilton, 1983), αναφέρει πως η εξέλιξη της κατανόησης μαθηματικών ιδεών απαιτεί εμπειρία με πολλαπλούς τρόπους απεικονήσεων καθώς και δυνατότητα σύνδεσης αυτών. Αν και η ύπαρξη πολλαπλών τρόπων απεικόνισης είναι ιδιαίτερα σημαντική, η ερμηνεία αυτών είναι αυτή που υποδεικνύει μια βαθύτερη αλγεβρική εννοιολογική κατανόηση. Μπορούμε να πούμε λοιπόν πως τα μοντέλα βρίσκονται στην καρδιά των πολλαπλών απεικονίσεων, καθώς είναι άμεση η σύνδεσή τους με όλες τις άλλες μαθηματικές απεικονίσεις.

Το μοντέλο cups and counters

Στη διδασκαλία των εξισώσεων συχνά επιστρατεύονται διάφορα μοντέλα, κυρίως για την εξοικείωση των μαθητών με τη βασική ιδιότητα: αν κάνουμε το ίδιο πράγμα και στις δύο μεριές μιας εξίσωσης αυτή συνεχίζει να ισχύει. Πέρα από τη βασική αυτή ιδιότητα πολλά από τα μοντέλα εστιάζουν στην έννοια της μεταβλητής και συγκεκριμένα του αγνώστου. Ένα από αυτά τα μοντέλα είναι το cups and counters (κούπες και μετρητές).

Στο συγκεκριμένο μοντέλο οι μεταβλητές – άγνωστοι απεικονίζονται με τη μορφή ανάποδων κουπών (cups) και οι γνωστές ποσότητες – σταθερές με τη μορφή μετρήσιμων τελειών (counters). Οι κούπες είναι αδιαφανείς και δε μπορούμε να γνωρίζουμε πόσες τελείες κρύβουν μέσα τους. Για παράδειγμα η εξίσωση $2χ + 6 = 3χ + 3$ θα απεικονιζόταν κάπως έτσι:

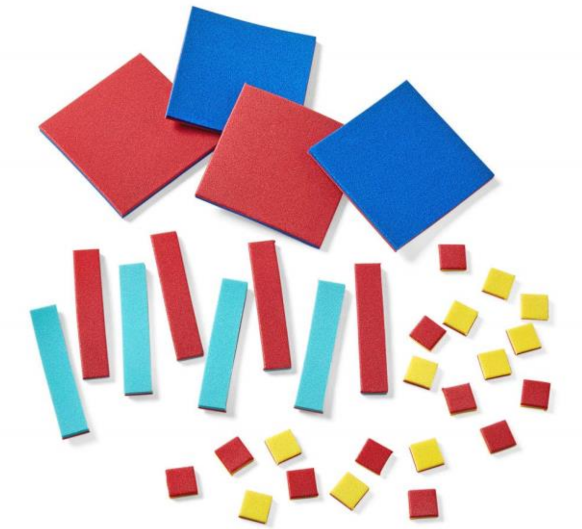


Εικόνα 5 Το μοντέλο Cups and Counters

Οι Norton και Irvin (2007), παρατήρησαν πως σχεδόν όλοι οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα τους (9η τάξη στην Αυστραλία) μπόρεσαν να μεταφράσουν την αναπαράσταση μιας εξίσωσης από εικονική σε συμβολική μορφή. Λόγω αυτού, συμπέραναν πως η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής εξελισσόταν μέσω της αναπαράστασης της άγνωστης ποσότητας με τη χρήση ενός γράμματος. Τα παραπάνω ευρήματα έρχονται σε αντίθεση με αυτά των MacGregor και Stacey (1997), ο οποίοι παρατήρησαν πως η πλειοψηφία των μαθητών ίδιας ηλικίας στην Αυστραλία δυσκολευόντουσαν στην ερμηνεία αλγεβρικών γραμμάτων ως γενικευμένων αριθμών ή συγκεκριμένων αγνώστων. Για παράδειγμα πολλοί μαθητές έβλεπαν τα γράμματα σε αλγεβρικές εκφράσεις ως συντομογραφίες κάποιων λέξεων ή ακόμα και ως τη θέση του εκάστοτε γράμματος στο αλφάβητο. Τέτοια σφάλματα είναι σημαντικά εμπόδια στη γραφή αλγεβρικών εκφράσεων και συγκεκριμένα εξισώσεων (Norton & Irvin, 2007).

Το μοντέλο των Algebra tiles

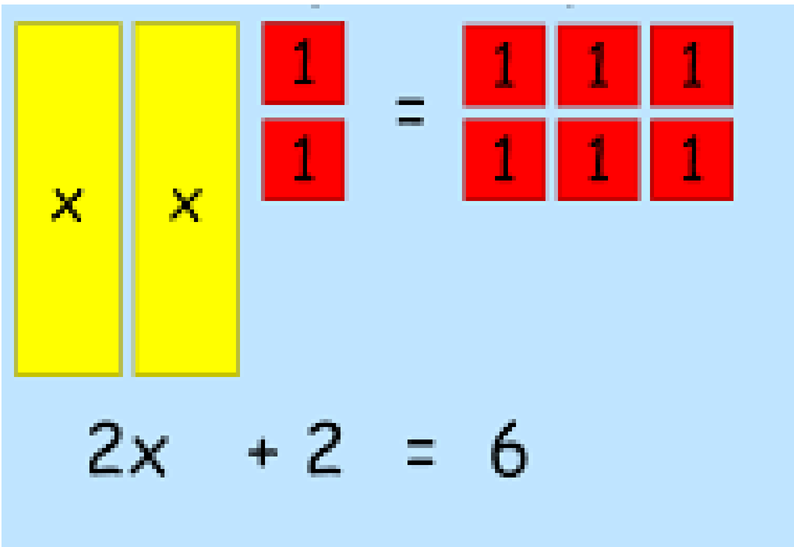
Ένα άλλο μοντέλο που χρησιμοποιείται συχνά στη διδασκαλία των πρωτοβάθμιων εξισώσεων είναι τα Algebra tiles.



Εικόνα 6 Το μοντέλο των Algebra Tiles

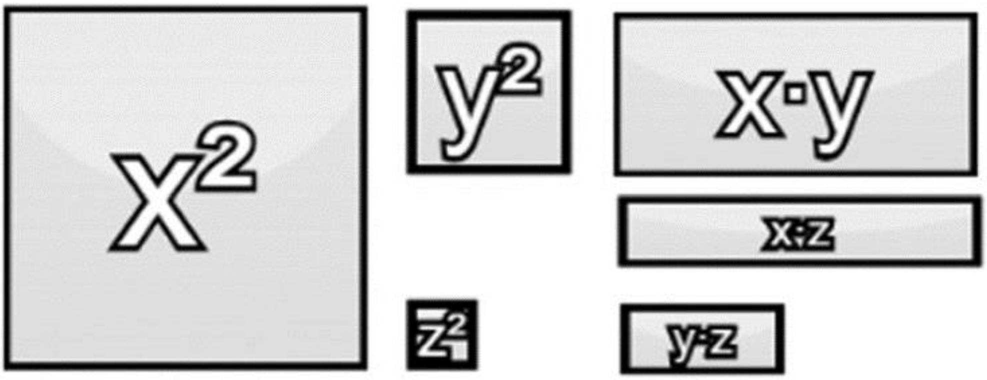
Το μοντέλο αυτό αρχικά έκανε χρήση χειραπτικών εργαλείων σε μορφή μικρών και μεγάλων τετραγώνων καθώς και ορθογωνίων παραλληλογράμμων. Κάθε μικρό τετράγωνο έχει πλευρά 1, κάθε μεγάλο έχει πλευρά χ και κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 1 και χ. Επιπλέον, τα παραπάνω σχήματα υπάρχουν σε δύο χρώματα, συνήθως μπλε και κόκκινο. Το ένα χρώμα αντιπροσωπεύει θετικούς και το άλλο αρνητικούς αριθμούς. Δύο ίδια σχήματα αντίθετου χρώματος σχηματίζουν ένα αντίθετο ζεύγος και εξουδετερώνονται ή απλοποιούνται.

Πέρα από την υλική τους μορφή, τα Algebra tiles υπάρχουν και σε ψηφιακή μορφή.



Εικόνα 7 Ψηφιακό μοντέλο Algebra Tiles (VAT)

Συχνά χρησιμοποιούνται και παραλλαγές αυτού του μοντέλου, για παράδειγμα με περισσότερες από μία μεταβλητές.



Εικόνα 8 Γεωμετρική παραλλαγή του μοντέλου των Algebra Tiles

Δεδομένης της ευελιξίας τους, τα Algebra tiles έχουν χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία διαφόρων κεφαλαίων τόσο στην άλγεβρα όσο και στη γεωμετρία, με συχνότερες τις εφαρμογές πάνω στις αλγεβρικές εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού. Οι Saraswati, Indra Putri και Somakim (2016), σε έρευνα τους σε μαθητές 7ης τάξης στην Ινδονησία, παρατήρησαν πως οι μαθητές μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τα Algebra tiles για την τυπική επίλυση πρωτοβάθμιων εξισώσεων. Η χρήση τους μπορεί να περιορίσει μερικά από τα συχνά λάθη που γίνονται από μαθητές χωρίς εμπειρία στην επίλυση εξισώσεων και συχνά βοήθησε στη μετάβαση από άτυπες και αριθμητικές μεθόδους επίλυσης σε πιο τυπικές, με χρήση αλγεβρικών συλλογισμών. Μια από τις βασικές ιδιότητες του μοντέλου που φάνηκε να βοηθάει τους μαθητές ήταν η κατασκευή αντίθετων ζευγαριών, καθώς μέσω αυτής απεικονίζεται η απλοποίηση ίδιων όρων που συχνά χρησιμοποιείται στις εξισώσεις.

Οι Garzón και Bautista (2018), χρησιμοποίησαν τα Algebra tiles σε ψηφιακή μορφή, κάνοντας μια σύγκριση ανάμεσα σε δύο ομάδες μαθητών και φοιτητών, μέσης ηλικίας 18 ετών. Η πρώτη ομάδα χρησιμοποίησε VAT (Virtual Algebra tiles) ενώ η δεύτερη παραδοσιακές μεθόδους για την επεξεργασία διάφορων αλγεβρικών διαδικασιών. Οι συγγραφείς, παρατήρησαν με χρήση ποσοτικών μεθόδων επεξεργασίας των δεδομένων τους, πως η ομάδα που χρησιμοποιούσε τα Algebra tiles είχε σημαντικά καλύτερη απόδοση. Επιπλέον εκτίμησαν, πως η χρήση τέτοιων μοντέλων βοηθάει στην ενίσχυση των λογικών επιχειρημάτων και προωθεί τον αλγεβρικό συλλογισμό. Τέλος συμπέραναν πως τα VAT επιτρέπουν στους μαθητές να αναπαριστούν αλγεβρικές σχέσεις χρησιμοποιώντας γεωμετρικά σχήματα και μετασχηματισμούς.

Το μοντέλο της ζυγαριάς

Το πιο συνηθισμένο μοντέλο, με χρήση σε πληθώρα σχολικών βιβλίων και εμφάνιση σε πολλά αναλυτικά προγράμματα σπουδών ανά τον κόσμο, είναι το μοντέλο της ζυγαριάς. Στο μοντέλο αυτό, η εξίσωση παρομοιάζεται με μια ζυγαριά: κάθε σκέλος του ζυγού αναπαριστά το ένα μέλος της εξίσωσης και η ισότητα των μελών ταυτίζεται με την ισορροπία της ζυγαριάς. Αντίστοιχα η μη ισορροπία των δύο μερών του ζυγού υποδηλώνει την μη ισότητα των βαρών. Εκφράζει δηλαδή μια σχέση ανισότητας. Ακριβώς επειδή συναντάται τόσο συχνά, οι παραλλαγές με τις οποίες εμφανίζεται είναι πολλές (Otten, Van den Heuvel-Panhuizen & Veldhuis, 2019). Η κάθε παραλλαγή έχει κάποιες μικρές τροποποιήσεις, όλες όμως βασίζονται στις ίδιες ιδέες. Κυρίαρχη θέση στη χρήση του μοντέλου έχει η βασική ιδιότητα της ζυγαριάς: όταν κάνουμε το ίδιο πράγμα και στα δύο άκρα μιας ζυγαριάς που ισορροπεί τότε αυτή θα συνεχίσει να ισορροπεί. Για συντομία όταν γίνεται αναφορά σε αυτή την ιδιότητα θα καλείται απλά «βασική ιδιότητα της ζυγαριάς».

Λόγοι χρήσης του μοντέλου της ζυγαριάς

Οι βασικοί λόγοι χρήσης του συγκεκριμένου μοντέλου είναι κυρίως τρεις. Πολλοί ερευνητές εστίασαν στη χρήση της ζυγαριάς αποκλειστικά για την ενίσχυση της κατανόησης της έννοιας της ισότητας από τους μαθητές. Άλλοι εστίασαν στη ζυγαριά λόγω πιθανών εμπειριών των μαθητών από την καθημερινότητα. Μερικοί συγγραφείς θέλοντας να εξετάσουν τη διδασκαλία μέσω μοντέλων και απεικονίσεων, κατέληξαν στη χρήση του μοντέλου της ζυγαριάς (Otten, Van den Heuvel-Panhuizen & Veldhuis, 2019). Οι παραπάνω βασικοί λόγοι σε συνδυασμό με τη φύση του μοντέλου, πραγματικό ή ψηφιακό, οδηγούν στη δημιουργία των διαφόρων παραλλαγών τις οποίες θα αναλύσουμε στη συνέχεια.

Η πιο συνηθισμένη αιτία επιλογής της ζυγαριάς για τη μοντελοποίηση πρωτοβάθμιων εξισώσεων είναι η φυσικότητα με την οποία εμπλέκει την έννοια της ισότητας (Otten, Van den Heuvel-Panhuizen & Veldhuis, 2019). Συχνά αναφέρεται πως η κατανόηση της έννοιας της ισότητας μπορεί να ενισχυθεί μέσω της χρήσης της ζυγαριάς (Gavin & Sheffield, 2015; Taylor-Cox, 2003; Warren & Cooper., 2009). Το ότι οι δύο μεριές είναι ισοδύναμες και ανταλλάξιμες καθιστά το μοντέλο κατάλληλο για την επίδειξη της έννοιας της ισότητας μέσω της ισορροπίας (Figueira-Sampaio et al., 2009). Πολλοί συγγράφεις (πχ Vlassis, 2002 και Warren & Cooper, 2009) αναφέρουν πως η ζυγαριά εδραιώνει την κατανόηση του ότι το σύμβολο = αντιπροσωπεύει την ισότητα δύο ποσοτήτων και δεν είναι, για παράδειγμα έναυσμα για εκτέλεση αριθμητικών πράξεων. Ένας άλλος, ίσως ο βασικότερος, λόγος για τον οποίο πολλοί ερευνητές (πχ Andrews & Sayers, 2012 και Figueira-Sampaio et al., 2009) επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν αυτό το μοντέλο είναι η δυνατότητα του να απεικονίσει τη στρατηγική του να κάνουμε το ίδιο πράγμα και στις δύο μεριές. Αυτή η βασική ιδιότητα της ζυγαριάς, με ταυτόχρονη εστίαση στην ισορροπία των δύο μεριών αποτελεί το κύριο λειτουργικό πλεονέκτημα του μοντέλου. Οι μαθητές μπορούν με σχετική ευκολία να δουν κάθε πράξη που εκτελείται ταυτόχρονα και στα δύο μέρη καθ’ όλη τη διάρκεια των μαθηματικών μετασχηματισμών στην επίλυση μιας εξίσωσης (Linchevski & Herscovics, 1996). Τέλος οι Filloy και Rojano (1989) αναφέρουν πως το μοντέλο είναι ιδιαίτερα βολικό για την επίδειξη της απλοποίησης δύο ίδιων όρων από τα δύο σκέλη μιας εξίσωσης.

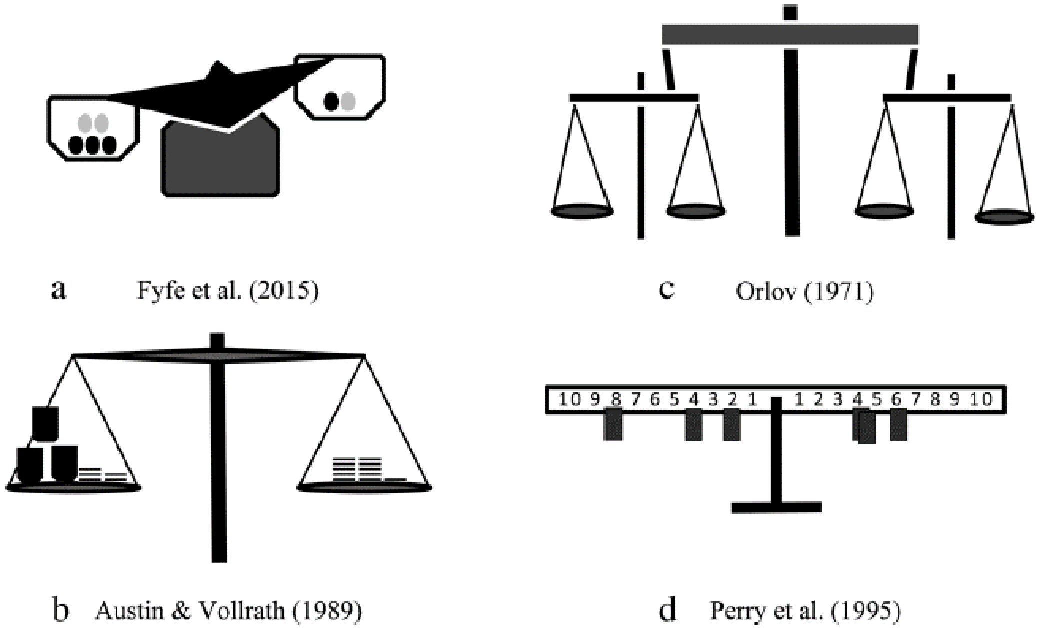
Μια άλλη αιτία επιλογής του μοντέλου της ζυγαριάς είναι η μάθηση μέσω φυσικών εμπειριών (Otten, Van den Heuvel-Panhuizen & Veldhuis, 2019). Οι Araya et al. (2010) εστίασαν στη βιολογική διαδικασία διατήρησης της ισορροπίας, καθώς θεώρησαν πως είναι κοινή φυσική γνώση για κάθε άνθρωπο. Η χρήση αυτού του μοντέλου γίνεται με σκοπό τη σύνδεση της έμφυτης αυτής γνώσης μια την πιο αφηρημένη ιδέα της διατήρησης της ισορροπίας σε μία μαθηματική εξίσωση. Ο Alibali (1999) εστίασε στην ομοιότητα που έχει μια τραμπάλα με τη ζυγαριά, θεωρώντας πως η φυσική εμπειρία των μαθητών με το παιχνίδι της τραμπάλας θα βοηθήσει στην κατανόηση των ιδιοτήτων των εξισώσεων. Οι Warren και Cooper (2009) υπογραμμίζουν τη σημασία της κίνησης κατά τη διατήρηση της ισορροπίας. Οι Suh και Moyer (2007) αναφέρουν πως η χρήση συμπαγών αντικειμένων επιτελεί μια λειτουργία σύνδεσης της διαδικαστικής γνώσης (procedural knowledge), δηλαδή της γνώσης για το πως δουλεύουν τα αντικείμενα, με την εννοιολογική γνώση (conceptual knowledge) των αλγεβρικών εξισώσεων. Οι ίδιοι συγγραφείς τόνισαν πως χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή η ανάλυση με τέτοιες μεθόδους καθώς δεν είναι απαραίτητο το ότι οι μαθητές θα μπορέσουν να συνδέσουν τις φυσικές τους γνώσεις πάνω στη λειτουργία των αντικειμένων με τις ιδιότητες αφηρημένων συμβόλων. Σε μια από τις παλαιότερες έρευνες, ο Orlov (1971) αναφέρει πως η ισορροπία μπορεί να ενθαρρύνει την αφηρημένη μαθηματική σκέψη, καθώς αναπαριστά μια ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ αισθητηριακών δεδομένων και μαθηματικής αφαίρεσης. Τέλος οι Austin και Vollrath, 1989), επέλεξαν το μοντέλο λόγω της άμεσης ανατροφοδότησης. Οι μαθητές μπορούν άμεσα να κρίνουν την ορθότητα εκτέλεσης των μετασχηματισμών και του συλλογισμού τους, καθώς αν υπάρχει κάποιο σφάλμα η ζυγαριά παύει να ισορροπεί.

Μια λιγότερο συχνή αιτία επιλογής του μοντέλου της ζυγαριάς αποτελεί το γενικότερο πλαίσιο διδασκαλίας μέσω μοντέλων και απεικονίσεων. Οι ερευνητές χρησιμοποιούν τη ζυγαριά συχνά μαζί και με άλλα απεικονιστικά μοντέλα, και ερευνούν τη μετάβαση ανάμεσα στις ποικίλες απεικονίσεις, τις συνδέσεις που γίνονται καθώς και την κοινή γλώσσα που δημιουργείται μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού (πχ Berks & Vlasnik, 2014).

Είδη μοντέλων ζυγαριάς

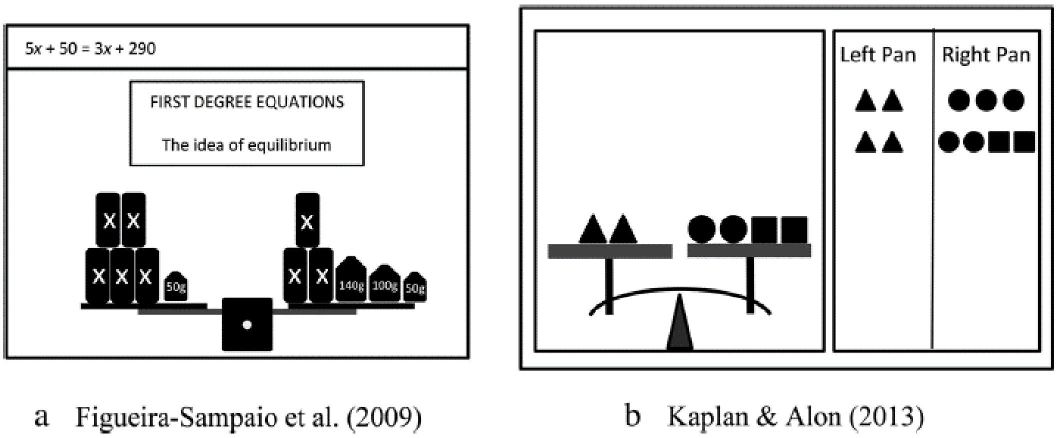
Κατά την ανασκόπηση της υπάρχουσας έρευνας πάνω στη χρήση του μοντέλου της ζυγαριάς, ξεχωρίζουν τρία διαφορετικά είδη του μοντέλου. Πέρα από τον λόγο επιλογής του μοντέλου που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, ιδιαίτερα σημαντικός είναι και ο τύπος του. Τα τρία διακριτά είδη μοντέλων που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι το φυσικό, το σχεδιασμένο και το ψηφιακό. Και οι τρεις κατηγορίες ακολουθούν τις ίδιες αρχές και εστιάζουν στις ίδιες ιδιότητες, όμως καθεμία εξέχει αλλά και υπολείπεται των άλλων σε επιμέρους χαρακτηριστικά (Otten, Van den Heuvel-Panhuizen & Veldhuis, 2019).

Τα φυσικά μοντέλα χρησιμοποιούν κανονικές ζυγαριές με διάφορα βαρίδια, γνωστά και άγνωστα. Έτσι, μπορούν να δημιουργηθούν διάφορες εξισώσεις τόσο αριθμητικές όσο και αλγεβρικές. Η πλειοψηφία των ερευνητών που χρησιμοποίησαν φυσικό μοντέλο ζυγαριάς, εστίασαν σε ζυγαριά με ένα ζυγό και δύο άκρα. Σε όλες αυτές τις ζυγαριές (πχ Fyfe et al. (2015); Warren et al., 2009) οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την τιμή ενός άγνωστου βάρους είτε μετακινώντας γνωστά ή και άγνωστα βάρη είτε αφαιρώντας ίδια βάρη και από τις δύο μεριές. Η φυσική εμπειρία εξασφάλιζε την άμεση ανατροφοδότηση των μαθητών ως προς την ορθότητα των μετασχηματισμών τους: αν προσέθεταν ή αφαιρούσαν ίδιες ποσότητες και από τις δύο μεριές η ζυγαριά συνέχιζε να ισορροπεί, σε αντίθετη περίπτωση δεν ισορροπούσε. Οι Austin και Vollrath (1989) χρησιμοποίησαν επίσης μονή ζυγαριά με βαρίδια και κούπες αγνώστου περιεχομένου στη θέση των αγνώστων, είναι θα λέγαμε, ένα υβρίδιο μεταξύ Balance model και Cups and counters. Οι Perry et al. (1995) χρησιμοποίησαν μια ζυγαριά με ίδια βάρη, τα οποία ανάλογα με τη θέση που ήταν τοποθετημένα, λόγω της ροπής, μπορούσαν να ορίσουν διάφορες εξισώσεις. Ο Orlov (1971) από την άλλη χρησιμοποίησε μια πιο πολύπλοκη φυσική ζυγαριά στην έρευνα του. Η ζυγαριά του αποτελούταν από έναν κεντρικό ζυγό στα κάθε άκρο του οποίου υπήρχαν δύο άλλοι ζυγοί. Σε 4 συνολικά θέσεις για βάρη και 3 ζυγαριές του δόθηκε η δυνατότητα να μελετήσει περισσότερες από μία εξισώσεις ταυτόχρονα καθώς η κάθε ζυγαριά ορίζει μια εξίσωση. Το μοντέλο του Orlov παρουσιάζει πολλές λειτουργικές ομοιότητες με το ψηφιακό μοντέλο του περιβάλλοντος «Πολύζυγο» που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα. Όλα τα παραπάνω μοντέλα τα απεικόνισαν δισδιάστατα στο άρθρο τους οι Otten, Van den Heuvel-Panhuizen και Veldhuis (2019).



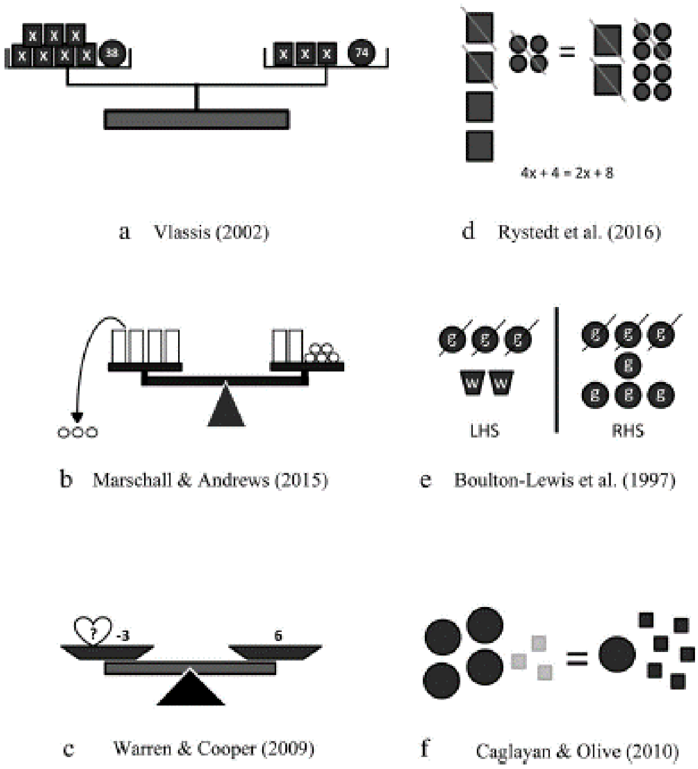
Εικόνα 9 Απεικονίσεις των φυσικών μοντέλων ζυγαριάς

Τα ψηφιακά μοντέλα εκμεταλλεύονται όλες τις φυσικές ιδιότητες της ζυγαριάς, προβάλλοντας συνήθως την εικόνα μιας κανονικής ζυγαριάς και δίνοντας τη δυνατότητα αλληλεπίδρασης των μαθητών με αυτήν. Η παράκαμψη των φυσικών περιορισμών δίνει τη δυνατότητα στα ψηφιακά μοντέλα να παρέχουν μεγαλύτερη ελευθερία στο χρήστη και να παρέχουν επιπλέον λειτουργίες και αναπαραστάσεις (Otten, Van den Heuvel-Panhuizen & Veldhuis, 2019). Στο μοντέλο που χρησιμοποίησαν οι Figueira-Sampaio et al. (2009) οι μεταβλητές αναπαρίστανται ως μεγάλα βάρη με τη σήμανση χ ενώ οι σταθερές ποσότητες ως μικρότερα βάρη με σήμανση το βάρος τους σε γραμμάρια. Οι μαθητές μπορούσαν να αλληλεπιδράσουν με τη ζυγαριά: μπορούσαν να προσθέτουν και να αφαιρούν βάρη ενώ ταυτόχρονα η σήμανση των βαρών έδινε άμεση εικόνα της τυπικής αλγεβρικής γραφής της εξίσωσης. Το παραπάνω είναι από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των ψηφιακών μοντέλων καθώς τονίζει τη σύνδεση μεταξύ μοντέλου και συμβολικής αναπαράστασης. Σε ελαφρά διαφορετική μορφή ήταν το μοντέλο των Kaplan και Alon (2013). Εκεί οι μαθητές εξερευνούσαν τη σχέση ανάμεσα σε διάφορα άγνωστα βάρη συγκεκριμένων σχημάτων όπως τρίγωνα, κύκλοι και τετράγωνα.



Εικόνα 10 Ψηφιακά μοντέλα ζυγαριάς

Τέλος, το συχνότερο είδος μοντέλου είναι αυτό με τις δισδιάστατα σχεδιασμένες ζυγαριές. Πολλοί συγγραφείς επιλέγουν ρεαλιστικές αναπαραστάσεις. Άλλοι απλοποιημένες σχηματικές. Όλες όμως βασίζονται στις ίδιες ιδέες με τα αναλογικά και τα ψηφιακά μοντέλα χωρίς όμως τη δυνατότητα αλληλεπίδρασης από τους μαθητές. Τα σχεδιασμένα μοντέλα συχνά χρησιμοποιήθηκαν μεταφορικά, μόνο για να γίνει η σύνδεση της ισότητας με την ισορροπία. Κάποια δεν απεικόνιζαν καν την ίδια τη ζυγαριά, απλά την ανέφεραν λεκτικά για να βοηθήσουν τους μαθητές να κάνουν την παραπάνω σύνδεση (Otten, Van den Heuvel-Panhuizen & Veldhuis, 2019).



Εικόνα 11 Σχεδιαστικά μοντέλα ζυγαριάς

Περιορισμοί του μοντέλου

Το μοντέλο της ζυγαριάς είναι ίσως αυτό με τη συχνότερη χρήση τόσο στη διδασκαλία των πρωτοβάθμιων και κυρίως των αλγεβρικών εξισώσεων όσο και στην έρευνα στον ίδιο τομέα. Η Vlassis (2002) αναφέρεται εκτενώς στους περιορισμούς του μοντέλου. Συγκεκριμένα, αναλύει το την απόδοση μαθητών της 8ης τάξης (Β' Γυμνασίου) που είχαν διδαχτεί την επίλυση πρωτοβάθμιων εξισώσεων με τυπικό (formal) τρόπο με τη χρήση μοντέλου ζυγαριάς. Το μοντέλο της ζυγαριάς όντως βοήθησε τους μαθητές να σχηματίσουν μια διαδικαστική νοητή εικόνα (operative mental image) του πως να εφαρμόσουν ιδιότητες της ζυγαριάς στην αλγεβρική επίλυση εξισώσεων. Παρατήρησε, όμως, πως το μοντέλο δεν είναι χρήσιμο για την απεικόνιση εξισώσεων που περιέχουν αρνητικούς αριθμούς. Επιπλέον, τονίζει πως η επίλυση εξισώσεων που δεν μεταφράζονται άμεσα στο μοντέλο, συναντά πολλά εμπόδια, κυρίως λόγω της μαθηματικής αφαιρετικής διαδικασίας που απαιτείται. Τέλος, καταλήγει πως είναι απαραίτητες και διάφορες δραστηριότητες που επιτρέπουν στους μαθητές να αποστασιοποιηθούν από το ίδιο το μοντέλο, κρατώντας όμως τις αρχές των μετασχηματισμών που χρησιμοποιούν σε αυτό.

Πέρα από τη Vlassis, υπάρχουν και άλλοι ερευνητές που τονίζουν την βασική αδυναμία του μοντέλου της ζυγαριάς: την απεικόνιση των αρνητικών αριθμών. Οι Filloy και Rojano (1989) και οι Linchevski και Herscovics (1996) παρατήρησαν έντονες δυσκολίες στο χειρισμό αφαιρέσεων κατά τη χρήση του μοντέλου σε αντίθεση με τις προσθέσεις. Δεδομένου ότι πάνω στη ζυγαριά υπάρχουν διάφορα βάρη, γνωστά και άγνωστα, και οι μαθητές γνωρίζουν και από τη φυσική αλλά και από την καθημερινή τους εμπειρία ότι η μάζα είναι πάντοτε μη αρνητικός αριθμός σίγουρα δε βοηθάει στην συμπερίληψη των αρνητικών στο μοντέλο. Άρα, η δυσκολία έκφρασης των αρνητικών αριθμών ως βάρη καθιστά δύσκολη την κατασκευή νοημάτων σε εξισώσεις με αφαίρεση (Caglayan & Olive, 2010).

Ψηφιακά μοντέλα - Μικρόκοσμοι

Ο Papert μπορεί να θεωρηθεί ο πρωτεργάτης της ενσωμάτωσης της χρήσης της τεχνολογίας στη διδακτική διαδικασία. Από τη δεκαετία του 1970 ο ίδιος μελέτησε εκτενώς τις δυνατότητες των υπολογιστών στην εκπαίδευση και δημοσίευσε πληθώρα άρθρων πάνω σε αυτό το θέμα. Στο βιβλίο του Mindstorms (Papert, 1980) περιγράφει τη μάθηση ως κάτι που πηγάζει φυσιολογικά από την ανθρώπινη φύση. Η περιέργεια και η δημιουργικότητα των ανθρώπων τους οδηγούν στη μάθηση και αυτό είναι κλειδί για τις θεωρίες του. Πέρα από το πρακτικό κομμάτι της διείσδυσης της τεχνολογίας στο σχολικό περιβάλλον, τονίζει και τις κοινωνικές συνέπειες αυτού του γεγονότος καθώς οι αντιστάσεις της κοινωνίας σε κάθε τι ξένο και καινούργιο συχνά είναι ιδιαίτερα έντονες. Ο Papert εκτιμούσε πως η εξωτερίκευση και η έκφραση ιδεών είναι κομβικές στη μαθησιακή διαδικασία. (Ackermann, 2001). Η έκφραση των ιδεών τους, τις υποστασιοποιεί και τις καθιστά ικανές να διαμοιραστούν με άλλους ανθρώπους, άρα η μορφοποίηση αυτών των ιδεών αποκτά καίρια σημασία καθώς είναι αναγκαία για τη διαδικασία της επικοινωνίας. Αυτή η κυκλική πορεία της μάθησης είναι μια επαναλαμβανόμενη διεργασία, όπου ο μαθητής χρησιμοποιεί μέσα και εργαλεία που είναι κοντινά στα ενδιαφέροντά του για την εξερεύνηση των πεδίων της μάθησης. Ο Papert , φαίνεται να συμφωνεί με τις θέσεις πολλών κοινωνικών κονστρουκτιβιστών όπως ο Vygotsky, οι οποίοι ασχολήθηκαν με τη χρήση τεχνουργημάτων (artifacts) όπως η γλώσσα για την εξωτερίκευση της γνώσης (Κυνηγός, 2011).

Εξέλιξη των ιδεών του Papert αποτελούν οι μικρόκοσμοι (microworlds), ο οποίοι συχνά ορίζονται στη βιβλιογραφία ως συλλογές λογισμικών εργαλείων (software tools). Όπως αναφέρουν οι Hoyles & Noss (1993), μπορούμε να δούμε τους μικρόκοσμους ως υπολογιστικά περιβάλλοντα τα οποία ενσωματώνουν μαθηματικές ιδέες, με κλασικό παράδειγμα τη γεωμετρία της χελώνας. Η φύση ενός μικρόκοσμου πηγάζει από την επιστημολογική του βάση, τις γνωστικές δομές και τα αντικείμενα που μοντελοποιεί. Στα μαθηματικά αυτό είναι περίπλοκο για δύο λόγους. Πρώτον, οι δομές της γνώσης είναι σε δεύτερο επίπεδο αφαίρεσης, δηλαδή έχουν αφαιρεθεί οι οπτικές και οι φυσικές ιδιότητες και έχουν μείνει τα αντικείμενα ως μαθηματικά αντικείμενα προς επεξεργασία. Εστιάζουν στις σχέσεις, στις δομές και στις επιτρεπόμενες ενέργειες οι οποίες ορίζουν και οργανώνουν αυτά τα αντικείμενα με μαθηματικό τρόπο. Δεύτερον, κάθε μαθηματική έννοια αποτελεί μέρος ενός περίπλοκου δικτύου εννοιών.

Άρα η ενασχόληση με μια έννοια απαιτεί και την κατανόηση πληθώρας άλλων συνδεδεμένων μαθηματικών ιδεών οι οποίες τελικά καθορίζουν και τις αλληλεπιδράσεις μες στο μικρόκοσμο.

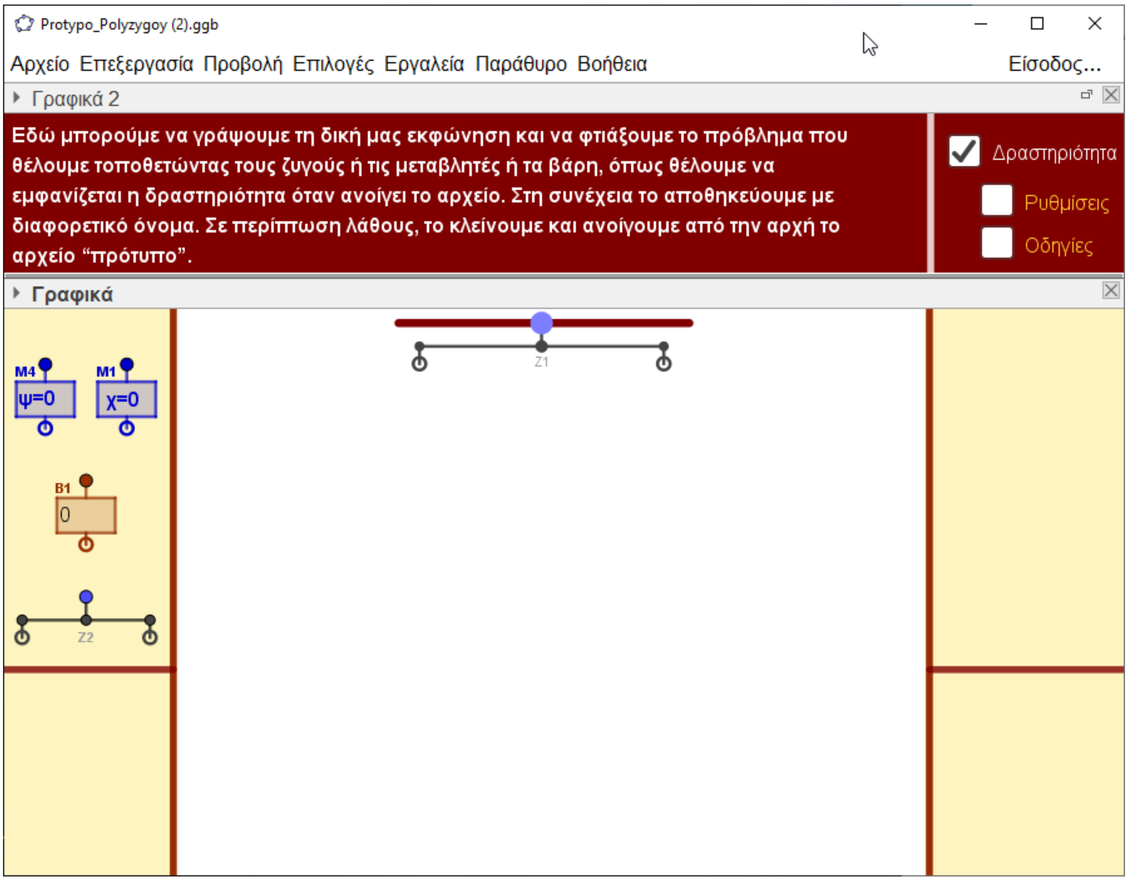
Στο ίδιο άρθρο οι Hoyles & Noss (1993) συνοψίζουν κάποιες βασικές ιδέες πάνω στο σχεδιασμό και τη χρήση των μικρόκοσμων:

- Τα υπολογιστικά εργαλεία που θα παρέχονται στα παιδιά θα πρέπει να είναι πολύ προσεκτικά σχεδιασμένα ώστε να είναι τόσο λειτουργικά όσο και «παιχνιδιάρικα».
- Τα παιδιά θα πρέπει να ενθαρρύνονται ή ακόμα και να προκαλούνται να διακρίνουν τον τρόπο με τον οποίο έχουν κατασκευαστεί οι μικρόκοσμοι και τη σχέση μεταξύ της ανατροφοδότησης του υπολογιστή και των δικών τους εισαγωγών (inputs). Μέσα από αυτές τις διακρίσεις σκοπός είναι να οικειοποιούνται τις τοπικές μαθηματικές ιδιότητες που είναι ενσωματωμένες στο μικρόκοσμο.
- Η δομή των δραστηριοτήτων θα πρέπει να υπογραμμίζει τη δυνατότητα γενίκευσης και τη σύνθεση των ιδεών σε ένα συνεπές μαθηματικό πλαίσιο.

Τα προγράμματα σπουδών από τη δεκαετία του 1980 υποστηρίζουν πως η τεχνολογία και οι υπολογιστές πρέπει να εισέλθουν στη διδασκαλία των μαθηματικών, κυρίως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ακόμα και σήμερα αυτό δεν έχει γίνει σε μεγάλο βαθμό. Η χρήση τους είναι όλο και πιο συχνή, ιδιαίτερα από νεότερους εκπαιδευτικούς, όμως σε πολλά προγράμματα σπουδών περιορίζεται σε απλές εφαρμογές. Συχνά οι προτεινόμενες δραστηριότητες δεν εκμεταλλεύονται τις δυνατότητες των προγραμμάτων. Ένα τέτοιο ψηφιακό περιβάλλον, ένας μικρόκοσμος βασισμένος πάνω στο μοντέλο της ζυγαριάς, είναι και το «Πολύζυγο» το οποίο χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία.

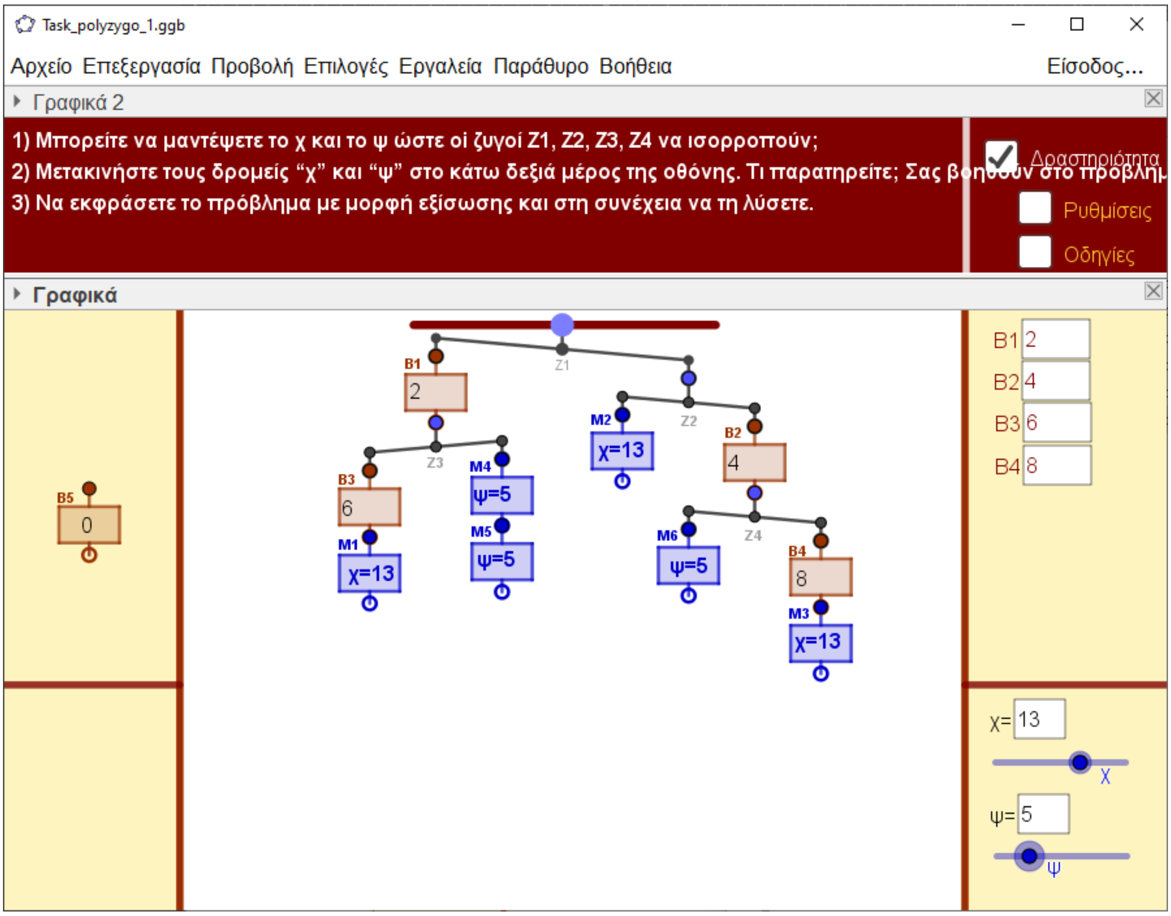
Το περιβάλλον «Πολύζυγο»

Το «Πολύζυγο» είναι ένα ψηφιακό περιβάλλον σχεδιασμένο στο πρόγραμμα Geogebra. Στο συγκεκριμένο περιβάλλον ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να δημιουργήσει δραστηριότητες χρησιμοποιώντας ζυγαριές με γνωστά και άγνωστα βάρη. Η κάθε ζυγαριά μπορεί να αποτελείται από σταθερά βάρη, από μεταβλητά βάρη (χ και ψ) ή και από ολόκληρες ζυγαριές. Κάθε ζυγαριά ισορροπεί όταν τα βάρη στα άκρα της είναι ίσα και γέρνει προς την βαρύτερη μεριά αν αυτά είναι άνισα. Οι ζυγαριές διατηρούν αυτήν την ιδιότητα για οποιεσδήποτε τιμές των βαρών. Το τελευταίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό καθώς (με κάποιες τροποποιήσεις στο βασικό περιβάλλον) επιτρέπεται και η χρήση αρνητικών αριθμών χωρίς να επιρρεάζεται η ισχύς του μοντέλου της ζυγαριάς. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η αδυναμία απεικόνισης της αφαίρεσης και των αρνητικών αριθμών είναι ένας από τους βασικούς περιορισμούς των μοντέλων της ζυγαριάς.



Εικόνα 12 Η αρχική οθόνη του Πολύζυγου

Αφού κατασκευαστεί μια δραστηριότητα από τον εκπαιδευτικό οι μαθητές μπορούν να αλληλεπιδράσουν με το περιβάλλον. Κύριο μέσο αλληλεπίδρασης είναι οι δρομείς οι οποίοι ελέγχουν τις τιμές των μεταβλητών βαρών χ και ψ. Ο δυναμικός χειρισμός των δρομέων μεταφράζεται άμεσα με τις αντίστοιχες αλλαγές της ισορροπίας των ζυγαριών. Επιπλέον, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να προσθέσουν νέα σταθερά ή μεταβλητά βάρη καθώς και ζυγαριές για την κατασκευή κάποιου προβλήματος ή δραστηριότητας. Η ύπαρξη δύο μεταβλητών χ και ψ δίνει πολλές επιπλέον δυνατότητες όπως την απεικόνιση σημείων στο επίπεδο, συστημάτων δύο μεταβλητών ή πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου.



Εικόνα 13 Ενδεικτική δραστηριότητα με πολλαπλές ζυγαριές στο Πολύζυγο

Κεφάλαιο 2: Θεωρητικό πλαίσιο

Η θεωρία της αντικειμενοποίησης

Ο Radford έχει επικεντρωθεί ερευνητικά σε ζητήματα που αφορούν την άλγεβρα και τον αλγεβρικό συλλογισμό. Κεντρική θέση στα θεωρητικά του δομήματα έχει η έννοια της αντικειμενοποίησης (objectification). Η λέξη objectification προέρχεται από το λατινικό ρήμα obiectare που σημαίνει «να βάζω κάτι στη μέση ή ανάμεσα» και η κατάληξη -tification από το ρήμα facere που σημαίνει «να κάνω» ή «να κατασκευάζω» (Charleton, 1996 όπως αναφέρεται στο Radford, 2003). Στη θεωρία της αντικειμενοποίησης η διδακτική των μαθηματικών είναι μια διαδικασία σε ένα ευρύτερο εκπαιδευτικό πρόγραμμα. Η γνώση δεν είναι κάτι το οποίο αποκτάται, κατέχεται ή κατασκευάζεται από το άτομο, αλλά είναι κάτι που βασίζεται στη διαφοροποίηση ανάμεσα στη δυνατότητα (potential) και αυτό που πραγματικά συμβαίνει (actual) (Radford, 2015). Ο ορισμός της αντικειμενοποίησης είναι αρκετά σύνθετος, περιγράφεται όμως με ιδιαίτερο ενδιαφέρον από τον ίδιο τον Radford:

« Στη θεωρία της αντικειμενοποίησης, η μάθηση θεωρείται ως διαδικασίες αντικειμενοποίησης, με τον τρόπο αυτό ονομάζουμε τις κοινωνικές διαδικασίες βαθμιαίας ανακάλυψης ενός κωδικοποιημένου τρόπου σκέψης και πράξης. Είναι κάτι που σημειώνουμε σταδιακά και ταυτόχρονα προικίζουμε με νόημα. Οι διαδικασίες της αντικειμενοποίησης είναι αυτές οι πράξεις με τις οποίες αντιλαμβανόμαστε με νόημα κάτι το οποίο αποκαλύπτεται μέσω της αισθητηριακής μας δράσης μες στον υλικό πολιτισμό. Είναι η παρατήρηση ενός πράγματος (και μόνο αυτού – "in itself") που αποκαλύπτεται από την αναδυόμενη πρόθεση που προβάλλεται στα σύμβολα ή στην κίνηση στην πορεία της πρακτικής συμπαγούς δραστηριότητας. Η αποκάλυψη του ίδιου του πράγματος ("in itself") το οποίο μεταμορφώνεται στο λόγω της ύπαρξης του ("for itself") στη πορεία της εμφάνισής του είναι αυτό που γίνεται γνώση για εμάς. »

(Radford, 2014, σελ 26)

Η αντικειμενοποίηση είναι μια διαδικασία σημειωτική (semiotic procedure), δηλαδή μια διαδικασία γενίκευσης της αντίληψης που εκφράζεται μέσω σημείων (όπως λέξεις, χειρονομίες ή σύμβολα). Είναι μια πορεία παρατήρησης ομοιοτήτων και διαφορών, στην οποία μεσολαβούν τα ίδια τα σημεία. Το αντικείμενο εμφανίζει τις εκφάνσεις του προοδευτικά και ο μαθητής παρατηρώντας τες κατανοεί σε όλο και μεγαλύτερο βάθος στοιχεία της φύσης του αντικειμένου. Είναι μια κοινωνικοπολιτική διαδικασία η οποία εμπλέκει τις αλληλεπιδράσεις με το σύνολο του περιβάλλοντος του μαθητή: τους συμμαθητές του, τον εκπαιδευτικό και τα μέσα της διδακτικής διαδικασίας όπως το βιβλίο ή ένα δόμημα σε ψηφιακό περιβάλλον.

Εστίαση και επίγνωση

«Ας φανταστούμε ότι στεκόμαστε μπροστά από έναν τοίχο καλυμμένο με ράφια γεμάτα με βιβλία, χωρίς συγκεκριμένη πρόθεση να τα κοιτάξουμε. Τα βιβλία μοιάζουν αρκετά όμοια μεταξύ τους. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι αν και κοιτάζουμε τα βιβλία χωρίς ενδιαφέρον, ξαφνικά θυμόμαστε ότι χρειαζόμαστε να βρούμε κάτι στην Ποιητική του Αριστοτέλη. Η εικόνα ενός μικρού κόκκινου βιβλίου έρχεται στο μυαλό μας. Η ακούσια αντίληψη με την οποία ξεκινήσαμε δίνει τώρα τη θέση της σε μια εκούσια. Εξετάζοντας το ράφι, η προσοχή μας μεταφέρεται σε κάποια κόκκινα βιβλία, και πρακτικά, σχεδόν αγνοούμε τα υπόλοιπα. Υποπτευόμενοι ότι αργότερα ίσως χρειαστεί να βρούμε το ίδιο βιβλίο, αποφασίζουμε να βάλουμε ένα σημάδι στο ράφι ώστε την επόμενη φορά που θα εισέλθουμε στο δωμάτιο αυτό το σημάδι να σημαίνει κάτι όπως: «Εδώ είναι το βιβλίο!». Αυτό το σημάδι, κατορθώνει ένα συγκεκριμένο σκοπό: Με έναν πρωταρχικό τρόπο επιτυγχάνει μια αντικειμενοποίηση.»

(Radford, 2003, σελ. 39)

Με αυτά τα λόγια περιγράφει ο Radford τις έννοιες της εστίασης (attention) και της επίγνωσης (awareness). Η εστίαση μπορούμε να πούμε πως είναι το γεγονός ότι κοιτώντας τα βιβλία και γνωρίζοντας ότι αυτό που ψάχνουμε είναι κόκκινο, τα βιβλία των υπολοίπων χρωμάτων σχεδόν δεν υπάρχουν για εμάς. Η επίγνωση ότι το βιβλίο είναι κόκκινο μας οδηγεί σε αυτήν την κατεύθυνση. Όπως αναφέρουν οι Yerushalmy και Swidan (2012), η εστίαση εκφράζεται μέσω ενσώματης αισθητηριακής ενασχόλησης (embodied sensual involvement) με τα εργαλεία (tools), τα τεχνουργήματα (artifacts) και τα σύμβολα (signs), ενώ η επίγνωση αναλύεται με εστίαση στις διαδικασίες όπου το νόημα αποκτά πιο αφηρημένη υπόσταση. Στη συγκεκριμένη έρευνα πάνω στα ολοκληρώματα, η εστίαση των μαθητών χρησιμοποιείται κυρίως για να μελετηθεί η πορεία νοηματοδότησης της έννοιας του ολοκληρώματος. Για παράδειγμα δίνεται έμφαση στα περιστατικά όπου οι μαθητές εστιάζουν στην ύπαρξη ενός κάτω φράγματος ή στο ότι ένα σημείο είναι σημείο συσσώρευσης μιας συνάρτησης παρατηρώντας πολλά σημεία γύρω του. Η έννοια της επίγνωσης αντίστοιχα εμφανίζεται ως αποτέλεσμα πολλαπλών παρατηρήσεων. Σε αντιστοιχία με τα παραπάνω παραδείγματα, οι συγγραφείς παρατήρησαν πως οι μαθητές αποκτούν επίγνωση μιας νέας πτυχής της έννοιας της συσσώρευσης μέσω της εστίασης τους στην ύπαρξη πολλών σημείων γύρω από ένα άλλο σημείο.

Στην παρούσα έρευνα τα στοιχεία της εστίασης και της επίγνωσης χρησιμοποιούνται κυρίως για την αναγνώριση αλλά και την ερμηνεία των αλλαγών πάνω στη νοηματοδότηση εννοιών. Συγκεκριμένα, προσπαθώντας να εντοπίσουμε στιγμές όπου εμφανίζονται αλλαγές στην επίγνωση μιας έννοιας, συνήθως της εξίσωσης ή της μεταβλητής, παρατηρούμε που είχε στραφεί η εστίαση των μαθητών αμέσως πριν. Με τον τρόπο αυτό έχουμε κάποιες ενδείξεις για τον ρόλο των στοιχείων του περιβάλλοντος και πως αυτά συμβάλουν στην πορεία νοηματοδότησης της εξίσωσης και των σχετικών εννοιών.

Κριτήρια Αλγεβρικού συλλογισμού του Radford

Στα πλαίσια της έρευνας του πάνω στην άλγεβρα και ιδιαίτερα στον αλγεβρικό συλλογισμό, ο Radford (2014), στηριζόμενος σε προ υπάρχουσες έρευνες (πχ Filloy & Rojano, 1989; Filloy, Rojano & Puig 2007; Kieran, 1989), διακρίνει 3 χαρακτηριστικά της αλγεβρικής σκέψης:

1) Την **απροσδιοριστία** (indeterminacy), όταν δηλαδή ένα πρόβλημα περιέχει άγνωστες ποσότητες (αγνώστους, μεταβλητές, παραμέτρους κλπ).
2) Την **ονοματοδοσία** (denotation), το πως αυτοί οι αόριστοι αριθμοί που υπάρχουν στο πρόβλημα ονομάζονται ή συμβολίζονται. Αυτό μπορεί να γίνει τόσο με τη χρήση μαθηματικών συμβόλων, αριθμών και γραμμάτων, όσο και

με γλωσσικές εκφράσεις, χειρονομίες, ασυνήθιστα σύμβολα ή και με συνδυασμό όλων των παραπάνω.

3) Την **αναλυτικότητα** (analyticity), το πως οι μαθητές επεξεργάζονται αυτές τις αόριστες ποσότητες που εμφανίζονται σαν να ήταν γνωστές. Κάνουν πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση, ύψωση σε δύναμη κτλ) με αυτές με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που κάνουν πράξεις με γνωστούς αριθμούς.

Αν υπάρχουν και τα τρία χαρακτηριστικά ένας συλλογισμός μπορεί να χαρακτηριστεί ως αλγεβρικός. Τα παραπάνω δεν προϋποθέτουν απαραίτητα χρήση τυπικής μαθηματικής γλώσσας και συμβολισμού. Μπορούν οι απροσδιόριστες ποσότητες να εμφανίζονται με μορφή δεικτικών αντωνυμιών (πχ 2 φορές αυτό συν 3 φορές εκείνο) , με σχήματα (πχ 2 φορές το μπλε τετράγωνο) ή με άλλους σημειωτικούς τρόπους. Αν και το σύγχρονο αλφαριθμητικό σύστημα καθιστά ένα πολύ ισχυρό σημειωτικό σύστημα, δε μπορεί με κανένα τρόπο να χαρακτηρίσει τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης (Radford, 2014).

Τα στοιχεία του αλγεβρικού τρόπου σκέψης χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των δεδομένων κυρίως για την απάντηση του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος. Προσπαθώντας να τα εντοπίσουμε σε κάθε συλλογισμό των μαθητών, μπορούμε να αναγνωρίσουμε αν τα επιχειρήματα τους είναι αριθμητικά ή αλγεβρικά. Αν υπάρχουν και τα τρία ο συλλογισμός θα θεωρείται αλγεβρικός, αν όχι, αριθμητικός. Με ιδιαίτερη προσοχή παρατηρούνται οι αλλαγές στην εμφάνιση τους. Τις αλλαγές αυτές προσπαθούμε να τις ερμηνεύσουμε βασιζόμενοι τόσο στα στοιχεία του περιβάλλοντος όσο και στους προηγούμενους συλλογισμούς όπως εκφράστηκαν από τους μαθητές. Δεν είναι συχνές οι περιπτώσεις όπου μια πορεία σκέψης χαρακτηρίζεται και από τα τρία κριτήρια. Συνήθως, θα έχει ένα ή δύο από αυτά, το οποίο αποτελεί ένδειξη ότι αυτός ο συλλογισμός έχει δυνατότητα εξέλιξης. Η έννοια της ονοματοδοσίας είναι δύσκολα παρατηρήσιμη στο συγκεκριμένο περιβάλλον, καθώς οι μεταβλητές έχουν όνομα και τιμή εξ αρχής. Ακόμα και αν ένας συλλογισμός είναι καθαρά αλγεβρικός, πολύ συχνά παρατηρείται παντελής έλλειψη αλγεβρικών επιχειρημάτων στους αμέσως επόμενους λόγω κάποιας αλλαγής. Την αιτία αυτής της αλλαγής προσπαθούμε να την εντοπίσουμε και να την ερμηνεύσουμε.

Κεφάλαιο 3: Μεθοδολογία της έρευνας

Στόχοι της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα μελέτη συντάχθηκε με σκοπό την έρευνα πάνω στις χρήσεις του ψηφιακού περιβάλλοντος «Πολύζυγο» στη διδασκαλία των πρωτοβάθμιων εξισώσεων. Το μοντέλο της ζυγαριάς έχει μελετηθεί εκτενώς σε πολλαπλές μορφές, τόσο αναλογικές όσο και ψηφιακές. Είναι από τα πλέον διαδεδομένα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των πρωτοβάθμιων εξισώσεων. Σημαντική, όμως, μερίδα ερευνητών (πχ Vlassis, 2002 ; Filloy & Rojano, 1989; Linchevski & Herscovics, 1996; Caglayan & Olive, 2010) έχει επισημάνει την αδυναμία απεικόνισης αρνητικών αριθμών και αφαιρέσεων στο συγκεκριμένο μοντέλο. Έχουν γίνει προσπάθειες αναπαράστασης των αρνητικών αριθμών με διάφορους τρόπους όπως μπαλόνια ή τροχαλίες (πχ Rojano & Martínez, 2009). Όλοι οι διαφορετικοί τρόποι απεικόνισης προσθέτουν ένα επιπλέον στοιχείο πολυπλοκότητας στο μοντέλο και διαχειρίζονται τους αρνητικούς αριθμούς με διαφορετικό τρόπο σε σύγκριση με τους θετικούς. Στο περιβάλλον «Πολύζυγο», με τις συγκεκριμένες τροποποιήσεις που έγιναν για την παρούσα έρευνα, οι αρνητικοί αριθμοί αντιμετωπίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο από το λογισμικό όπως και οι θετικοί. Οι ιδιότητες που ισχύουν σε μια κανονική ζυγαριά για θετικούς αριθμούς, εδώ, στη ψηφιακή ζυγαριά, με μια «φυσιολογική» επέκταση, ισχύουν με τον αναμενόμενο τρόπο και για τους αρνητικούς. Αυτό γίνεται χωρίς κάποια επιπλέον μηχανική προσθήκη όπως οι τροχαλίες ή τα μπαλόνια που ίσως δίνουν την εντύπωση ότι οι αρνητικοί αριθμοί είναι κάτι ξεχωριστό.

Πιο συγκεκριμένα, τα ερωτήματα τα οποία τέθηκαν είναι:

1) Ποια είναι η πορεία νοηματοδότησης της έννοιας της εξίσωσης από μαθητές Α' Γυμνασίου καθώς εμπλέκονται με δραστηριότητες χειρισμού εξισώσεων στο περιβάλλον «Πολύζυγο»;

2) Ποιος ο ρόλος των ψηφιακών αναπαραστάσεων του «Πολύζυγου» στην πορεία νοηματοδότησης της έννοιας της εξίσωσης από τους μαθητές;

Ερευνητικός σχεδιασμός

Η παρούσα έρευνα έχει πολλά στοιχεία έρευνας σχεδιασμού (design research) καθώς περιέχει πολλά από τα στοιχεία που αναφέρουν οι Gravemeijer και Prediger (2019) και οι Cobb και συνεργάτες (2003), όπως η παρεμβατικότητα (interventionist) και η αναστοχαστικότητα (reflective). Όμως, οι συνθήκες πραγματοποίησης της διαφέρουν από το κλασικό σχολικό περιβάλλον της τάξης. Σκοπός ήταν η εις βάθος μελέτη της πορείας νοηματοδότησης της έννοιας της εξίσωσης στο συγκεκριμένο περιβάλλον και με τη χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου. Άρα, ο τρόπος επιλογής της διεξαγωγής της έρευνας είναι η συνέντευξη των μαθητών ανά ομάδες των δύο ατόμων.

Η έρευνα έγινε με τη μέθοδο της μελέτης περίπτωσης (case study, Flyvbjerg, 2011) σε δύο διμελείς ομάδες μαθητών. Οι μαθητές έβλεπαν τις δραστηριότητες για πρώτη φορά και είχαν μηδενική εμπειρία με ψηφιακά περιβάλλοντα από το σχολείο. Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν στα μέσα του 2020, αναγκαστικά από απόσταση δεδομένων των συνθηκών, μέσω του προγράμματος Skype. Παράλληλα με την επικοινωνία είχα πρόσβαση και στην οθόνη των μαθητών μέσω της δυνατότητας του διαμοιρασμού οθόνης που προσφέρει το Skype.

Ως ερευνητής προσπάθησα να έχω τον ρόλο του διευκολυντή (facilitator) επεμβαίνοντας όσο γίνεται λιγότερο στην διαδικασία. Οι παρεμβάσεις μου ήταν ως επί το πλείστων με μορφή ερωτήσεων και με σκοπό να βοηθήσω στην ομαλή εξέλιξη του διαλόγου. Ίσως, όμως να έπρεπε να δίνω παραπάνω χρόνο στους μαθητές ακόμα και όταν έκρινα πως η σκέψη τους είχε καταλήξει σε τέλμα. Η πλειοψηφία των παρεμβάσεων μου ήταν κυρίως για διευκρινιστικές ερωτήσεις και για κάποιες σημαντικές επισημάνσεις και όχι για την επίδειξη λανθασμένων συλλογισμών και αιτιολογήσεων. Προσπάθησα να υποστηρίζω τη μεταξύ τους συνεργασία και να μην αποκαλύπτω τα λάθη τους. Τα δεχόμουν και τους προέτρεπα να συνεχίζουν τον συλλογισμό τους μέχρι οι ίδιοι ή οι συμμαθητές τους να ανακαλύψουν κάποια παρατυπία. Συχνά τους ζητούσα να εξηγήσουν στο συμμαθητή τους κάτι που τους φαινόταν προφανές.

Οι συμμετέχοντες

Επιλέχθηκαν δύο ομάδες μαθητών της Α’ Γυμνασίου από δύο διαφορετικές τάξεις ενός Γυμνασίου στην Ερμούπολη. Οι δύο από τους μαθητές (ο Α και η Μ) είναι αδέρφια και βρίσκονται στο ίδιο τμήμα, ενώ οι άλλες δύο μαθήτριες (Φ και ΕΥ) σε άλλο. Οι μαθητές έχουν μεταξύ τους φιλική σχέση άρα ήταν πρόθυμοι για την μεταξύ τους επικοινωνία. Το επίπεδο και των τεσσάρων είναι περίπου στο μέσο όρο της τάξης. Αν και είχαν μόλις τελειώσει την Α’ Γυμνασίου αξίζει να σημειωθεί ότι ο Α και η Μ δεν είχαν διδαχτεί καθόλου αρνητικούς αριθμούς. Το παραπάνω δεν το γνώριζα μέχρι τη στιγμή όπου εμφανίστηκαν για πρώτη φορά αρνητικοί κατά τη διάρκεια της έρευνας. Αναγκάστηκα να κάνω μια σύντομη εισαγωγή στο κεφάλαιο των αρνητικών αριθμών, με εστίαση στη φύση τους και στις ιδιότητες τους και όχι στις πράξεις με αυτούς, για να είναι δυνατόν να ολοκληρωθεί η έρευνα. Τους δύο μαθητές τους γνωρίζω χρόνια καθώς είναι γείτονες μου στη Σύρο, δεν είχαμε όμως κάνει ποτέ μαζί μαθήματα μαθηματικών. Το τελευταία μου εξασφαλίζει μια άνεση επικοινωνίας και πρόσβασης χωρίς να γνωρίζω το ακριβές επίπεδο ή τους τρόπους με τους οποίους είχαν διδαχτεί τις διάφορες ενότητες στο σχολείο.

Θεωρώ πως οι τέσσερις μαθητές είναι αρκετά αντιπροσωπευτικοί του μέσου μαθητή της τάξης τους, καθώς προέρχονται από σχολείο νησιωτικής περιοχής με έντονο αστικό στοιχείο, είναι και των δύο φύλων και έχουν μέση απόδοση στο σχολείο. Οι ομάδες ασχολήθηκαν ξεχωριστά με τις δραστηριότητες. Οι συνεντεύξεις της κάθε ομάδας είχαν διάρκεια τέσσερις ώρες (δύο δίωρα), την ίδια ημέρα με ένα διάλειμμα ανάμεσα.

Τα δεδομένα

Οι μαθητές είχαν πρόσβαση στο Geogebra στην Online εκδοχή του, όπου είχα ανεβάσει τις δραστηριότητες του Πολύζυγου. Πέρα από τον υπολογιστή είχαν ο καθένας ένα πρόχειρο φύλλο χαρτί για την καταγραφή της σκέψης τους, την επίλυση των εξισώσεων και την εκτέλεση των πράξεων. Τα δεδομένα που συλλέχτηκαν κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων ήταν η καταγραφή της οθόνης των μαθητών, η ηχογράφηση όλων των διαλόγων και τα πρόχειρα φύλλα εργασίας τους. Η χρονική έκταση των δεδομένων ήταν περίπου 4 διδακτικές ώρες ανά ομάδα. Δυστυχώς δεν είχα άδεια από τους γονείς τους για καταγραφή και βίντεο, το οποίο θα προσέφερε επιπλέον πολύτιμα δεδομένα. Κατά την διάρκεια των συνεντεύξεων καθώς και μετά το τέλος τους, κρατούσα σημειώσεις τις οποίες εισήγαγα στην απομαγνητοφώνηση των δεδομένων.

Οι δραστηριότητες στο Πολύζυγο

Παρουσίαση και ανάλυση

Η έρευνα αποτελούνταν από πέντε δραστηριότητες κλιμακούμενης πολυπλοκότητας. Οι δραστηριότητες ήταν όλες στο περιβάλλον «Πολύζυγο» και θεματικά ανήκαν στο κεφάλαιο των πρωτοβάθμιων εξισώσεων. Αρχικά δίνεται μια απλή δραστηριότητα εξοικείωσης με το περιβάλλον. Στη συνέχεια ακολουθούν μια δραστηριότητα που αφορά μια απλή αριθμητική εξίσωση με φυσική λύση. Έπειτα μια λίγο πιο σύνθετη που μοντελοποιεί μια αλγεβρική εξίσωση στο μοντέλο της ζυγαριάς, και πάλι με φυσική λύση. Ακολουθεί η πρώτη δραστηριότητα με πολλαπλούς ζυγούς και θετικές ρητές ρίζες . Τέλος δίνεται η πλέον σύνθετη που περιλαμβάνει πολλαπλούς ζυγούς και αρνητικές λύσεις. Σε όλες τις δραστηριότητες εστιάζω στη νοηματοδότηση της έννοιας της εξίσωσης και των συγγενών σε αυτή εννοιών της μεταβλητής και της ισότητας.

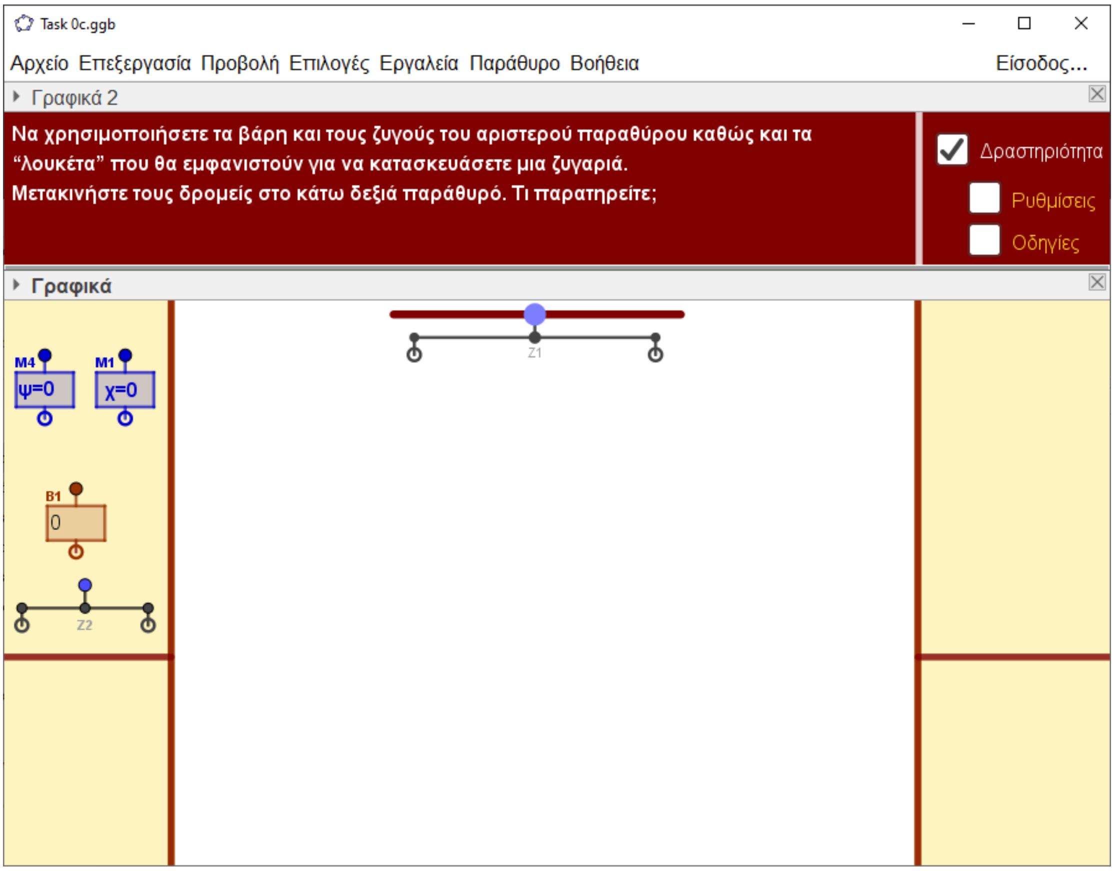
Το μοντέλο της ζυγαριάς είναι στο επίκεντρο αυτής της έρευνας και γίνεται προσπάθεια εισαγωγής των αρνητικών αριθμών σε αυτό. Στόχος μου ήταν να μελετήσω την πορεία νοηματοδότησης της εξίσωσης από τους μαθητές. Εστίασα τόσο στα στοιχεία του περιβάλλοντος που την επηρεάζουν όσο και στα κριτήρια του αλγεβρικού συλλογισμού.

Προσπάθησα να κατατάξω κάθε συλλογισμό που εκφράζεται από τους μαθητές σε αριθμητικό ή αλγεβρικό. Για να είναι αλγεβρικός ο συλλογισμός θα πρέπει να πληροί και τα 3 κριτήρια του Radford:

1) Να εμπλέκει άγνωστες ποσότητες (indeterminacy). Αναμένω να υπάρχει σχεδόν παντού, αφού όλες οι δραστηριότητες περιέχουν άγνωστα βάρη. Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο καθώς οι μαθητές μπορεί να μην δουν τα μεταβλητά βάρη ως άγνωστα αλλά να τους θέσουν κάποια σταθερή τιμή, πιθανότατα την τιμή που είναι ρίζα της εξίσωσης.

2) Να συμβολίζουν κάπως αυτές τις άγνωστες ποσότητες (denotation). Αν και το ίδιο το περιβάλλον δίνει όνομα στις τιμές ίσως οι μαθητές χρειαστεί να ορίσουν νέες άγνωστες ποσότητες. Το παραπάνω είναι πιο πιθανό να συναντηθεί σε επόμενες δραστηριότητες.
3) Να χρησιμοποιούν αυτές τις ποσότητες σαν να ήταν γνωστές (analyticity). Να μην τους επηρεάζει ότι μια ποσότητα είναι άγνωστη αλλά να μπορούν να την αφαιρέσουν, για παράδειγμα, και από τα δύο μέλη σαν να ήταν γνωστή. Αναμένω να απουσιάζει από τις αρχικές δραστηριότητες.

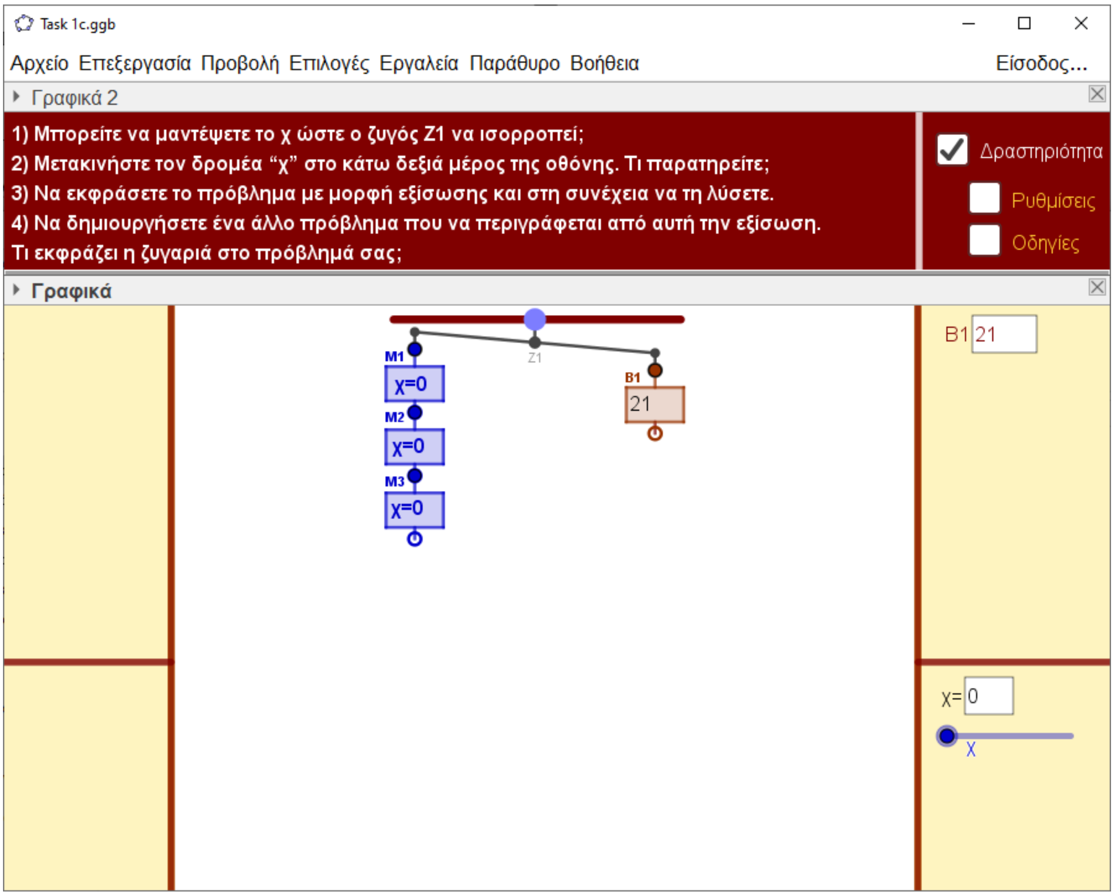
Εισαγωγική Δραστηριότητα στο περιβάλλον «Πολύζυγο»



Εικόνα 14 Η εισαγωγική δραστηριότητα στο Πολύζυγο

Το παραπάνω αρχείο είναι ένα κενό, πρότυπο αρχείο στο Πολύζυγο. Σκοπός είναι η εξοικείωση των μαθητών με το ψηφιακό περιβάλλον μέσω κατασκευών και συζήτησης. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν τις ζυγαριές και τα βάρη (αριστερό κομμάτι της οθόνης) για να φτιάξουν ένα δικό τους σύστημα. Όταν κατασκευάσουν κάποιους ζυγούς θα γίνει συζήτηση πάνω στις ιδιότητες του συστήματος (τι σημαίνει αν γέρνει προς τα αριστερά ή τα δεξιά; Όταν ισορροπεί;). Εδώ βλέπουν τι κάνουν οι δρομείς, ποια η διαφορά των σταθερών και των μεταβλητών βαρών. Δε γίνεται επιπλέον μαθηματική συζήτηση πάνω στις μεταβλητές ή τις εξισώσεις σε αυτό το σημείο. Το λογισμικό αναμένεται να τους κεντρίσει το ενδιαφέρον καθώς γνωρίζω πως δεν έχουν εργαστεί στο παρελθόν σε κάποιο αντίστοιχο περιβάλλον.

Δραστηριότητα 1 – Αριθμητική εξίσωση με ζυγαριά



Εικόνα 15 Δραστηριότητα 1- Αριθμητική εξίσωση

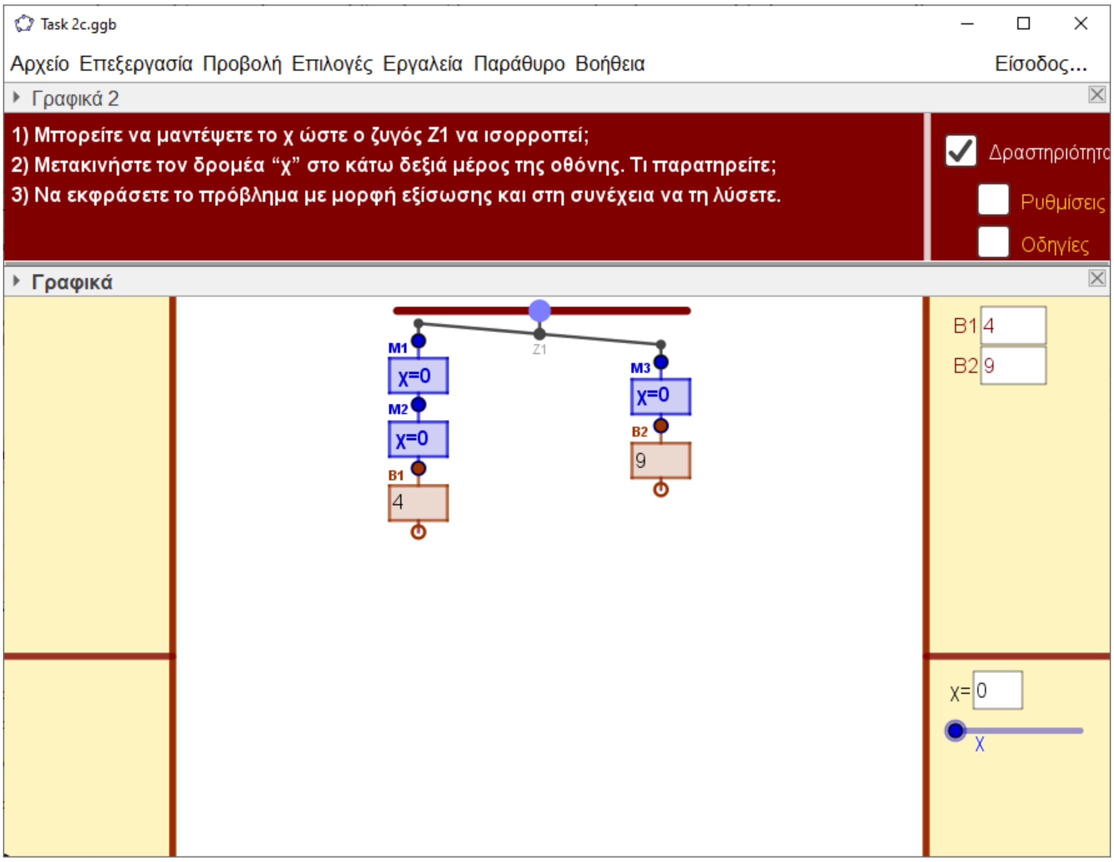
Στην πρώτη δραστηριότητα είναι κρυφά τα επιπλέον στοιχεία (βάρη και ζυγοί) για να επικεντρωθούν οι μαθητές στα ερωτήματα. Αρχικά τους ζητείται να «μαντέψουν» το χ ώστε ο ζυγός να ισορροπεί. Εδώ αναμένονται αρκετές δοκιμές αρχικά, δηλαδή καθαρά αριθμητικός τρόπος σκέψης. Πιθανός τρόπος αντιμετώπισης είναι και η μέθοδος των αντίστροφων πράξεων, όπως δηλαδή έχουν διδαχτεί πως επιλύονται οι εξισώσεις στο Δημοτικό αλλά και στην Α' Γυμνασίου. Δεν αναμένεται κάποια μαθηματική αιτιολόγηση ή απόδειξη για τη λύση που ίσως προτείνουν.

Στη συνέχεια καλούνται να μεταβάλλουν τον δρομέα χ. Είτε έχουν βρει τη λύση πριν (χ=7) είτε όχι, θα γίνει συζήτηση πάνω σε αυτό. Πιο συγκεκριμένα τι αλλάζει αν χ=7 και αντίστοιχα αν χ>7 ή χ<7. Ίσως η λέξη «εξίσωση» να μην υπάρχει καν στο τραπέζι ακόμα. Αναμένω να γίνει σύνδεση με το φυσικό μοντέλο, το οποίο ίσως και να μην έχουν δει ποτέ στη ζωή τους από κοντά. Μετά από αυτό θα είναι σαφές το ότι προς τα όπου γέρνει ο ζυγός είναι και το μεγαλύτερο βάρος. Εδώ εστιάζω στο ίδιο το χ. Τι είναι το χ; Είναι ένα; Είναι πολλά; Πόσα χ έχουμε; Γίνεται να είναι ταυτόχρονα διαφορετικά μεταξύ τους; Οι παραπάνω ερωτήσεις είναι ενδεικτικές για τις υπάρχουσες πεποιθήσεις των μαθητών πάνω στην έννοια του αγνώστου και της μεταβλητής.

Στο επόμενο ερώτημα καλούνται να κατασκευάσουν μια εξίσωση (αν δεν το έχουν κάνει ήδη) και να την επιλύσουν. Η εξίσωση αυτή είναι αριθμητική άρα εκτιμώ πως οι μαθητές μπορούν να τη λύσουν, πιθανότατα με καθαρά αριθμητικές και όχι αλγεβρικές στρατηγικές. Η μέθοδος των αντίθετων πράξεων είναι η πλέον πιθανή επιλογή τους για την επίλυση της εξίσωσης. Εδώ είναι η πρώτη φορά που εμπλέκεται ξεκάθαρα η έννοια της εξίσωσης. Έπειτα ακολουθεί συζήτηση πάνω στη φύση των εξισώσεων. Τι είναι μια εξίσωση; Πρέπει να έχει άγνωστο; Κτλ.

Στο τελευταίο ερώτημα οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν ένα πραγματικό πρόβλημα που να αναπαρίσταται με την υπάρχουσα ζυγαριά. Εδώ θέλω να δω τον ρόλο της αναπαράστασης, κυρίως μέσω του αν μπορούν να ερμηνεύσουν τι σημαίνει η ζυγαριά στο δικό τους πρόβλημα, ιδιαίτερα το ότι ισορροπεί ή ότι γέρνει προς τη μία κατεύθυνση. Η δυσκολία στην κατασκευή του προβλήματος είναι αναμενόμενη καθώς αυτή η αντίστροφη διαδικασία θα τους είναι σχεδόν σίγουρα πρωτόγνωρη αφού στο σχολείο θα λύνουν συχνά τέτοιου είδους προβλήματα ενώ σχεδόν ποτέ δεν τα κατασκευάζουν οι ίδιοι. Ένα πιθανό πρόβλημα που αναμένεται είναι να κατασκευάσουν οι μαθητές κάτι που να σχετίζεται με την αγορά προϊόντων που ζυγίζονται (πχ πήρα 3 κιλά κεράσια και είχαν 21 ευρώ, πόσο κοστίζει το 1 κιλό;)

Δραστηριότητα 2 – Αλγεβρική εξίσωση με ζυγαριά

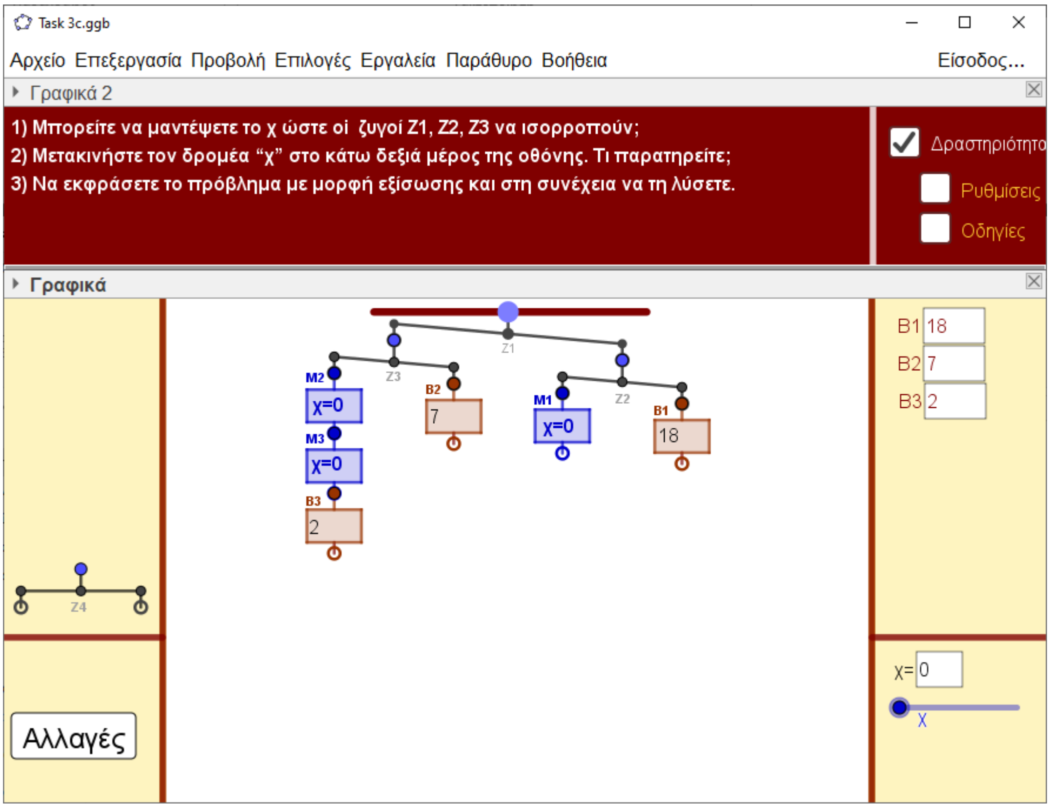


Εικόνα 16 Δραστηριότητα 2 - Αλγεβρική εξίσωση με φυσική λύση

Εδώ τα ερωτήματα είναι παρόμοια με την προηγούμενη δραστηριότητα, με μια βασική διαφορά. Η εξίσωση δεν είναι πλέον αριθμητική αλλά αλγεβρική. Οι μαθητές ίσως γνωρίζουν έναν αλγόριθμο επίλυσης (πχ χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους, πάμε τα χ στο ίδιο μέλος). Αν γνωρίζουν έναν τέτοιο αλγόριθμο επικεντρώνομαι στην αιτιολόγηση της στρατηγικής τους: Γιατί το κάνεις αυτό; Γιατί ισχύει; Πως φαίνεται αυτό; Μέχρι στιγμής στο σχολείο δεν έχουν διδαχτεί αλγεβρικές εξισώσεις όμως πολύ συχνά οι εκπαιδευτικοί δείχνουν κάποια παραδείγματα στους μαθητές και συζητούν για τις στρατηγικές επίλυσης και τις ιδιότητες.

Το μοντέλο της ζυγαριάς προσφέρεται ιδιαίτερα για την αναπαράσταση αυτών των ενεργειών. Ίσως οι μαθητές μετά τη συζήτηση πάνω σε αυτό να βλέπουν διαφορετικά τον αλγόριθμο επίλυσης που πιθανότατα χρησιμοποιούν χωρίς να γνωρίζουν το γιατί ισχύει. Ίσως οι ιδιότητες αυτές να φανερωθούν με έναν πιο φυσικό τρόπο. Δεδομένου ότι μέχρι στιγμής όλες οι εμφανιζόμενες ποσότητες είναι θετικοί ακέραιοι, τα παραδείγματα εκτιμώ πως είναι απλά και κατανοητά, και η γενίκευση τους έρχεται με φυσικό τρόπο στις επόμενες δραστηριότητες. Θεωρώ πως το πιθανότερο είναι οι μαθητές να μην μπορούν να λύσουν την εξίσωση καθώς έχει άγνωστο και στις δύο μεριές. Αν είναι αυτή η περίπτωση θα γίνει εκτενής αναφορά στη βασική ιδιότητα της ζυγαριάς: « Αν κάνουμε το ίδιο πράγμα και στις δύο μεριές μιας ζυγαριάς που ισορροπεί τότε εκείνη θα συνεχίσει να ισορροπεί». Αυτό γίνεται σε ένα νέο αρχείο στο Πολύζυγο, αρχικά με απλά παραδείγματα πχ έχω 5 και 5 κιλά ισορροπεί; Αν προσθέσω 1 κιλό στην κάθε μεριά πόσα θα έχω; Θα συνεχίσει να ισορροπεί; Αν αφαιρέσω 1; Και ούτω καθεξής μέχρι οι ίδιοι οι μαθητές, με κατάλληλες ερωτήσεις καθοδήγησης πιθανότατα, να καταλήξουν να εκφράσουν τον κανόνα.

Δραστηριότητα 3 – Πολλαπλοί ζυγοί και μη ακέραιες λύσεις



Εικόνα 17 Δραστηριότητα 3 - Πολλαπλοί ζυγοί και θετικές ρητές ρίζες

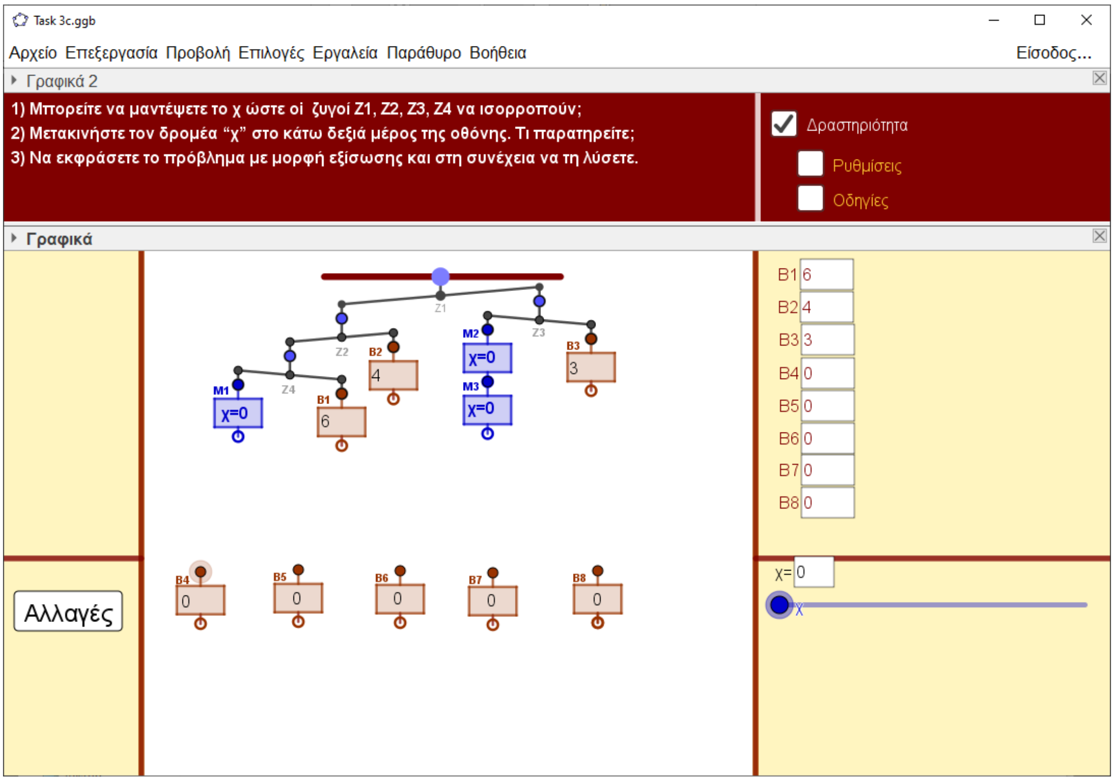
Μπορεί οι μαθητές, δεδομένων των προηγούμενων δραστηριοτήτων, να θεωρούν πως το χ επιτρέπεται να παίρνει αποκλειστικά φυσικές τιμές, γεγονός που δεν ισχύει. Συγκεκριμένα, πατώντας το πλήκτρο «Αλλαγές» στο κάτω αριστερό τμήμα της οθόνης το χ πλέον παίρνει και δεκαδικές τιμές. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές μπορούν να επαληθεύσουν τις λύσεις που πιθανόν έχουν ήδη βρει ή να εκτιμήσουν τη λύση αν δεν το έχουν κάνει.

Η βασική δυσκολία εδώ είναι οι πολλές ζυγαριές. Αρχικά δε θα είναι καθόλου σαφές πως η κάθε ζυγαριά ορίζει μια αυτόνομη εξίσωση. Το πως διαχειρίζονται τις ζυγαριές και το αν τις βλέπουν όταν χρειάζεται ως βάρη είναι ένα μεγάλο βήμα. Ίσως είναι μια από τις πιο δημιουργικές ενδείξεις ονοματοδοσίας (denotation) που παρατηρείται στην έρευνα, καθώς είναι η πρώτη φορά που δεν είναι σαφώς ορισμένη η εκάστοτε μεταβλητή. Η ζυγαριά που πριν ήταν εξίσωση τώρα είναι βάρος, ένα μόνο κομμάτι δηλαδή μιας εξίσωσης, το ρόλο της οποίας παίζει μια άλλη ζυγαριά.

Δε θα είναι φανερό πως δεν κάνει ένα χ για όλες. Η συζήτηση εδώ επικεντρώνεται σε αυτό ακριβώς το ζήτημα. Τι έχει ο κάθε ζυγός στα άκρα του; Ποιες ποσότητες πρέπει να είναι ίσες για να ισορροπεί; Γιατί; Μπορούν να ισορροπούν όλοι ταυτόχρονα; Γιατί όχι; Εκτιμώ πως μετά από αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με την ιδιότητα «κάνω το ίδιο και στις δύο μεριές» και θα μπορούν να τη χρησιμοποιούν με μια σχετική άνεση στις επόμενες, καθώς για την κάθε ζυγαριά εδώ χρειάζεται χρήση της ιδιότητας. Πλέον, ίσως μπορούν να εξηγήσουν μέσω αυτής όλες τις περιπτώσεις για την επίλυση εξισώσεων που εμφανίζονται στον σχετικό πίνακα του σχολικού βιβλίου.

Δραστηριότητα 4 – Πολλαπλοί ζυγοί και αρνητικές λύσεις

Σε αυτή τη δραστηριότητα οι βασικές διαφορές είναι τόσο οι πολλαπλοί ζυγοί όσο και το γεγονός ότι οι λύσεις των εξισώσεων δεν είναι πλέον φυσικοί αριθμοί, για την ακρίβεια δεν είναι καν θετικοί: υπάρχουν ζυγαριές που ισορροπούν για αρνητικά βάρη. Αυτό είναι σίγουρα ένα μεγάλο άλμα καθώς είναι αναμφισβήτητα η μεγαλύτερη αδυναμία του μοντέλου της ζυγαριάς.



Εικόνα 18 Δραστηριότητα 4 – Πολλαπλοί ζυγοί και αρνητικές λύσεις

Ως προς τους ζυγούς αναμένω να μην είναι πλέον τόσο σαφές πότε ισορροπεί ο καθένας, ιδιαίτερα οι πάνω ζυγοί Ζ1 και Ζ2 που εξαρτώνται από άλλους. Εδώ οι εξισώσεις είναι πολλές και όχι μία: κάθε ζυγός και μια εξίσωση, κάθε εξίσωση και μια διαφορετική λύση. Θα πρέπει να δοθεί έμφαση σε αυτό: τι σημαίνει εξίσωση εδώ; Πώς φαίνεται το ότι «τα αριστερά είναι ίσα με τα δεξιά» ; Πώς φαίνονται οι ιδιότητες των εξισώσεων που συζητήσαμε πριν; Μπορούν να ισορροπούν όλοι οι ζυγοί ταυτόχρονα; Γιατί όχι;

Δεδομένης της αυξημένης δυσκολίας των εξισώσεων εδώ αναμένω στο πρώτο ερώτημα να μη μπορέσουν να απαντήσουν με δοκιμές, πέρα από τον ζυγό Ζ4 που είναι ιδιαίτερα απλός. Αντίστοιχα και στο 2ο ερώτημα αν και βοηθάει η χρήση του δρομέα στην εκτίμηση της λύσης πάλι πιστεύω πως δε θα βρεθεί ακριβώς. Αναμένω, όμως, στο Ζ3 όπου πρέπει να ισχύει ότι $\chi = 1{,}5$ κάποια επιχειρήματα όπως: « Για $\chi = 1$ γέρνει προς τα δεξιά ενώ για $\chi=2$ προς τα αριστερά, μήπως είναι κάπου ανάμεσα η λύση;». Αντίστοιχα για τον Ζ2, όπου για να ισορροπεί πρέπει $\chi = -2$ αναμένω να παρατηρήσουν πως για καμία από τις δοκιμές που έκαναν δεν αλλάζει φορά ο ζυγός. Ίσως αναφερθεί πως είναι αδύνατη αυτή η εξίσωση, αν ναι θα συζητήσουμε γιατί δεν είναι, καθώς και τι σημαίνει αδύνατη εξίσωση. Θα υπενθυμίσω ότι και εδώ έχουμε τη δυνατότητα να πατήσουμε το πλήκτρο «Αλλαγές» και να επιτραπεί στο χ να παίρνει επιπλέον τιμές. Χρειάζεται πλέον να γενικεύσουμε το μοντέλο επιτρέποντας στο χ να παίρνει αρνητικές τιμές. Θα συζητήσουμε για το πως θα μεταφραζόταν κάτι τέτοιο στο φυσικό μοντέλο. Θα μπορούσαμε να βάλουμε πχ 1,5 κιλό πάνω στη ζυγαριά; Ναι. Όμως θα μπορούσαμε να βάλουμε -2 κιλά; Τι σημαίνει αυτό;

Αυτή είναι η κύρια διαφορά μεταξύ πραγματικού και ψηφιακού μοντέλου: στο ψηφιακό μπορούμε να παρακάμψουμε μια από τις βασικές αδυναμίες του πραγματικού μοντέλου, την αναπαράσταση των αρνητικών. Με πολύ «φυσικό» τρόπο μπορούμε να εισάγουμε αρνητικές ποσότητες διατηρώντας όλες τις ζητούμενες ιδιότητες, γενικεύοντας έτσι το μοντέλο στο σύνολο των ρητών. Εδώ η αφαίρεση οποιασδήποτε ποσότητας γίνεται χωρίς κανένα περιορισμό και χωρίς να δημιουργεί κανένα πρόβλημα.

Αν θέλαμε όμως να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα στο φυσικό μοντέλο τι θα μπορούσε να γίνει; Αναμένω οι μαθητές να απαντήσουν πως θα μπορούσαμε να προσθέσουμε βάρη στην άλλη μεριά της κάθε ζυγαριάς (αντί να προσθέσουμε αρνητικό βάρος δηλαδή). Προς αυτή την κατεύθυνση υπάρχουν διαθέσιμα ελεύθερα βάρη Β4 – Β8 τα οποία μπορούν να τα ορίσουν όπως θέλουν για να βρεθεί και «πραγματική» λύση στο πρόβλημα. Στη συνέχεια θα κληθούν να λύσουν και αυτές τις «πραγματικές» εξισώσεις. Τι λύσεις έχουν; Είναι ίδιες με τις άλλες; Όχι. Γιατί; Επειδή προσέθεσαν βάρη μόνο στη μία μεριά για παραάδειγμα.

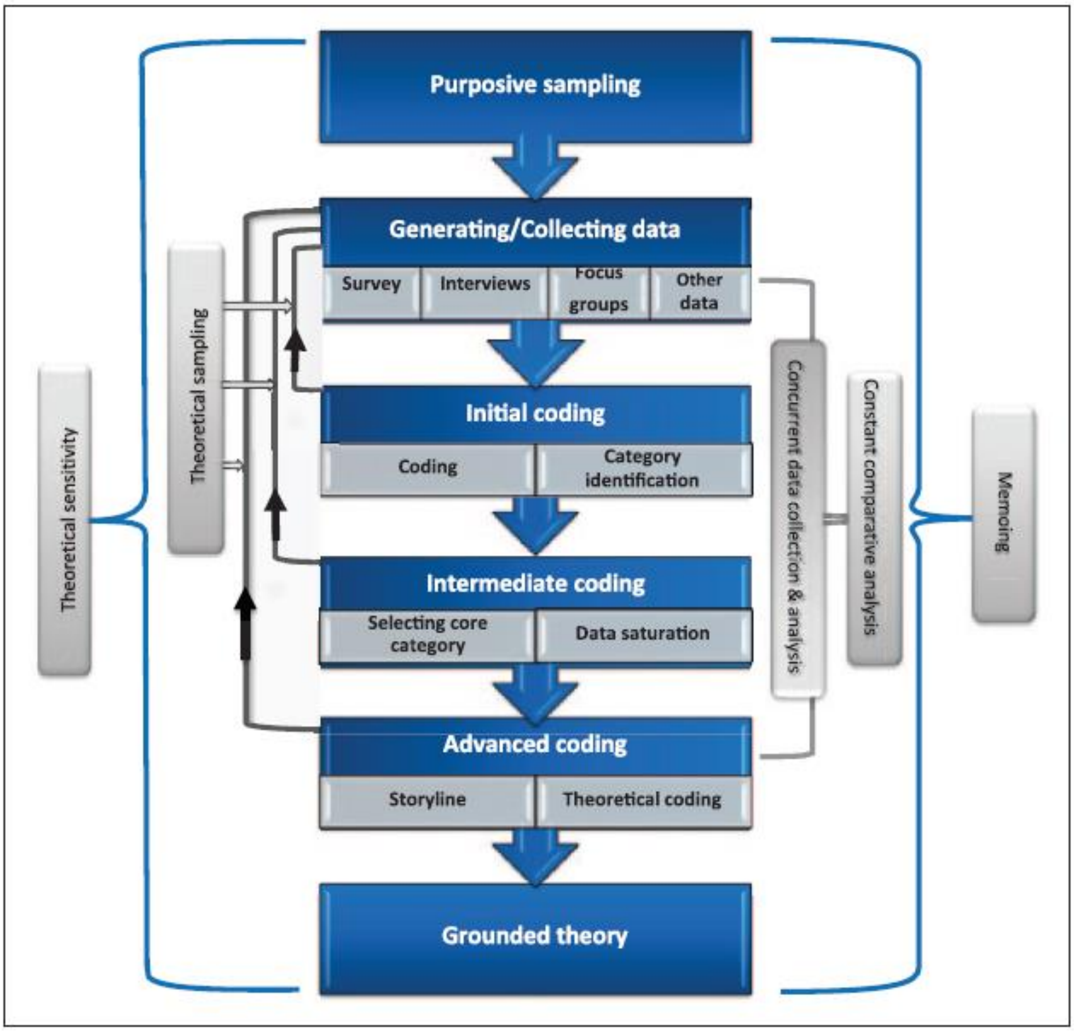
Οι εξισώσεις εδώ είναι αρκετά πολύπλοκες. Εκτιμώ πως η πολυπλοκότητα αυτή οδηγεί στην αναγκαιότητα της χρήσης πιο αλγεβρικών μεθόδων. Οι δοκιμές δε είναι πλέον εύκολες και οι αλγόριθμοι επίλυσης αριθμητικών εξισώσεων είναι ανεπαρκείς. Η βασική ιδιότητα της ζυγαριάς είναι στο επίκεντρο των επιχειρημάτων των μαθητών και η σκέψη τους είναι ίσως «περισσότερο» αλγεβρική από ότι ήταν όταν έβλεπαν την αρχική δραστηριότητα.

Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων

Μετά τη συλλογή των δεδομένων έγινε απομαγνητοφώνηση των διαλόγων στην οποία προστέθηκαν στιγμιότυπα από την αλληλεπίδραση των μαθητών με το περιβάλλον καθώς και παρατηρήσεις πάνω στους διαλόγους όπως: « Ο Α διατύπωσε αυτήν την πρόταση με σιγουριά» ή «Η Μ απάντησε με αβεβαιότητα μετά από μεγάλη παύση». Ακολούθησα το μοντέλο της θεμελιωμένης θεωρίας (grounded theory) καθώς το σχήμα της ανάλυσης και οι κωδικοί δεν ήταν προκαθορισμένοι (Thornburg & Charmaz, 2014).

Κατά την ανάλυση ακολούθησα το σχήμα της κωδικοποίησης όπως το αναφέρουν οι Chun Tie, Birks και Francis (2019). Μετά τη συλλογή και την καταγραφή των δεδομένων ακολούθησε σειρά προσεκτικών αναγνώσεων και ομαδοποίησης των περιστατικών. Αρχικά η ανάλυση της κάθε ομάδας συνεντευξιαζόμενων έγινε ξεχωριστά και στο τέλος έγινε η σύνθεση. Στην αρχική κωδικοποίηση (initial coding) προσπάθησα να ξεχωρίσω τις διακριτές κατηγορίες κοινών χαρακτηριστικών του κάθε επεισοδίου. Με τη συνεχή σύγκριση των κωδικών και τις διαφοροποιήσεις στην οπτική μου κατέληξα στους κωδικούς της ενδιάμεσης κωδικοποίησης (intermediate coding). Σε αυτούς κράτησα την μία ομάδα της αρχικής και άλλαξα τελείως την άλλη ομάδα. Κάποια από τα επεισόδιά που είχα αρχικά επιλέξει τελικά απορρίφθηκαν ενώ άλλα που δεν ταίριαζαν στους αρχικούς κωδικούς φάνηκε να είναι αντιπροσωπευτικά κάποιων νέων.

Στην πορεία επιλογής αποσπασμάτων προς ανάλυση, προσπάθησα να κατατάξω αν το κάθε επεισόδιο εμπίπτει σε μία από τις κατηγορίες της εστίασης ή της επίγνωσης (attention και awareness). Κάθε αλλαγή στην πορεία σκέψης των μαθητών προσπάθησα να την αποδίδω σε στοιχεία του μικρόκοσμου. Κατά την ανάλυση προέκυψαν διάφοροι κωδικοί οι οποίοι τελικά εξελίχθηκαν στις ομάδες που παρουσιάζονται παρακάτω. Συγκεκριμένα, κατέληξα σε δύο ομάδες κωδικών. Στην πρώτη ομάδα εμπίπτουν οι κωδικοί που είναι σχετικοί με τη διαμεσολάβηση του περιβάλλοντος, δηλαδή τα στοιχεία του μικρόκοσμου ή των ιδιοτήτων στο χαρτί τα οποία επηρεάζουν τις νοηματοδοτήσεις των εννοιών. Διέκρινα δύο ξεχωριστά περιβάλλοντα: το χαρτί-μολύβι και το Πολύζυγο. Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριλαμβάνονται τα 3 κριτήρια αλγεβρικού συλλογισμού του Radford. Οι δύο αυτές κατηγορίες και ο τρόπος με τον οποίο δομήθηκαν εστιάζουν στην απάντηση των δύο ερευνητικών ερωτημάτων. Παραθέτω μια συνοπτική περιγραφή των δύο ομάδων κωδικών όπως χρησιμοποιήθηκαν στην ανάλυση.



Εικόνα 19 Δομή εργασίας με θεμελιωμένη θεωρία όπως αναφέρεται από τους Chun Tie, Birks και Francis (2019)

Ομάδα Κωδικών Α (Διαμεσολάβηση περιβάλλοντος)

ΝΖ: Νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών και ιδιοτήτων μέσω ζυγαριάς (συμπεριλαμβάνει προσθήκη βαρών και στις 2 μεριές, μεταβλητή ως γενικευμένο βάρος, ζυγαριές που γίνονται τελικά βάρη κλπ)

Υποκατηγορίες:

ΝΖΕ: Νοηματοδότηση μέσω ζυγαριάς της εξίσωσης

ΝΖΜ: Νοηματοδότηση μέσω ζυγαριάς της μεταβλητής

NZA: Νοηματοδότηση μέσω ζυγαριάς της ανίσωσης

ΙΧΜ: Νοηματοδότηση μαθηματικών ιδιοτήτων στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι (συμπεριλαμβάνει ιδιότητες των εξισώσεων όπως «χωρίζω γνωστούς αγνώστους» , πολλαπλασιάζω και τα 2 μέρη με κάτι κλπ)

Υποκατηγορίες:

ΙΧΜΕ: Ιδιότητες εξίσωσης στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

ΙΧΜΜ: Ιδιότητες μεταβλητής στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

ΙΧΜΑ: Ιδιότητες ανίσωσης στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Ομάδα Κωδικών Β (Διάκριση αριθμητικού και αλγεβρικού τρόπου σκέψης)

ΑΡΘ: Μαθηματικός συλλογισμός που εντάσσεται στον αριθμητικό τρόπο σκέψης (συμπεριλαμβάνει δοκιμή και σφάλμα, μεταβλητή ως συγκεκριμένο αριθμό κλπ)

ΑΛΓ: Μαθηματικός συλλογισμός που εντάσσεται στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης (συμπεριλαμβάνει κατανόηση της γενικευμένης μορφής της μεταβλητής, πράξεις με μεταβλητές, ορισμό ζυγαριών ως βάρη κλπ)

Υποκατηγορίες:

ΑΛΓD: Denotation

ΑΛΓΙ: Indeterminacy

ΑΛΓΑ: Analyticity

Η χρήση των κριτηρίων του Radford για τον αλγεβρικό συλλογισμό είναι στο επίκεντρο της ανάλυσης. Συνδυάζοντας τα με την εκάστοτε αιτία για την κάθε αλλαγή στον τρόπο σκέψης των μαθητών θα επιχειρήσω να απαντήσω στα δύο ερευνητικά ερωτήματα.

Κεφάλαιο 4: Αποτελέσματα της έρευνας

Εισαγωγή

Κατά την ανάλυση των δεδομένων θα εστιάσω στην πορεία του συλλογισμού από αριθμητικό σε αλγεβρικό και το ανάποδο, εν γένει, προσπαθώντας να ερμηνεύσω ποια στοιχεία του κάθε περιβάλλοντος (χαρτί - μολύβι και πολύζυγο) την επηρεάζουν. Θα προσπαθήσω να εξετάσω την ιδιότητα ή την έννοια που ξεχωρίζει στο κάθε επεισόδιο και να αναλύσω τα 3 στοιχεία του αλγεβρικού συλλογισμού: απροσδιοριστία, ονοματοδοσία και αναλυτικότητα (indeterminacy, denotation και analyticity, Radford, 2014) ή την έλλειψη αυτών. Με τον τρόπο αυτό θα μπορέσω να κατατάξω τους συλλογισμούς σε αριθμητικούς και αλγεβρικούς και να μελετήσω αυτήν την πορεία νοηματοδότησης. Τέλος θα προσπαθήσω να χρησιμοποιήσω και τους όρους εστίαση (attention) και επίγνωση (awareness) στην ερμηνεία των επεισοδίων (Radford, 2003), προσπαθώντας να ερμηνεύσω αν η προέλευση κάποιας αλλαγής είναι στο τι γνωρίζουν οι μαθητές ή σε ποιο από τα στοιχεία του περιβάλλοντος είναι εστιασμένοι. Καθ' όλη τη διάρκεια της ανάλυσης είναι αναγκαίο να υπενθυμίζεται ότι οι μαθητές δεν είχαν καμία πρότερη εμπειρία με χρήση ψηφιακών περιβαλλόντων στα μαθηματικά.

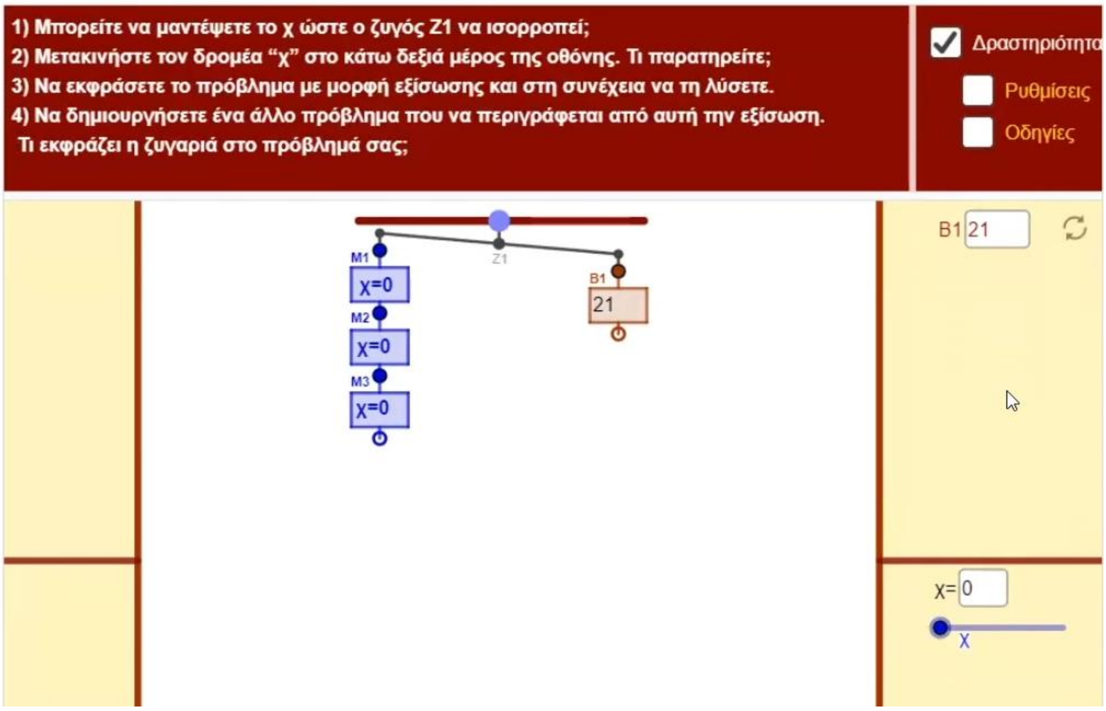
Η ανάλυση δομείται σε κατηγορίες νοημάτων που συγκροτήθηκαν μέσα από την ομαδοποίηση των επεισοδίων τα οποία προέκυψαν. Οι κατηγορίες αυτές σκιαγραφούν μια πορεία εξέλιξης της νοηματοδότησης της έννοιας της εξίσωσης, και των συγγενών εννοιών της ισότητας και της μεταβλητής, από το απλούστερο στο συνθετότερο. Συγκεκριμένα διακρίνουμε τις εξής κατηγορίες νοηματοδοτήσεων:

- Νοηματοδότηση μεταβλητής σε αριθμητικές εξισώσεις
- Νοηματοδότηση εξίσωσης μέσω ισορροπίας της ζυγαριάς
- Νοηματοδότηση ανισότητας μέσω της ζυγαριάς
- Νοηματοδότηση ιδιοτήτων της εξίσωσης μέσω της βασικής ιδιότητας της ζυγαριάς
- Νοηματοδότηση αλγεβρικών εξισώσεων με χρήση της βασικής ιδιότητας της ζυγαριάς.
- Νοηματοδότηση εξισώσεων με θετικές ρητές ρίζες μέσω της ζυγαριάς

- Νοηματοδότηση της εξίσωσης μέσω πολλαπλών ζυγαριών
- Νοηματοδότηση εξισώσεων με αρνητικές ρίζες στο μοντέλο της ζυγαριάς

Νοηματοδότηση μεταβλητής σε αριθμητικές εξισώσεις

Τα επεισόδιά που υπάγονται σε αυτήν την κατηγορία αφορούν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές νοηματοδότησαν την έννοια της μεταβλητής σε αριθμητικές εξισώσεις. Τα αποσπάσματα αυτά εμφανίστηκαν σχεδόν αποκλειστικά στα πρώτα στάδια της έρευνας, δηλαδή κατά την ενασχόληση των μαθητών με την εισαγωγική και την πρώτη δραστηριότητα. Θα αναλυθούν, αρχικά, δύο ενδεικτικά παραδείγματα, ένα από την κάθε ομάδα, τα οποία φανερώνουν την αρχική οπτική των δύο μαθητών πάνω στην έννοια της μεταβλητής. Σε αυτό το σημείο οι δύο μαθητές βλέπουν τα χ ως διαφορετικούς αριθμούς ταυτόχρονα, αν και το ίδιο το περιβάλλον τους ονομάζει με το ίδιο όνομα και δίνει την ίδια τιμή. Τέλος θα μελετηθεί η εξέλιξη της νοηματοδότησης αυτής σε ένα τρίτο παράδειγμα, στο οποίο παρατηρείται μια εμφανής μετατόπιση του Α από την αρχική του θέση πάνω στη φύση της μεταβλητής.



Εικόνα 20 Δραστηριότητα 1 - Αρχική οθόνη

Συζητώντας για το πρώτο ερώτημα, χωρίς να έχουν υπολογίσει κάτι και χωρίς να αλληλεπιδράσουν με τον δρομέα, τους ζητήθηκε να μαντέψουν το χ ώστε να ισορροπεί η ζυγαριάς και ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

Ε: Ωραία για πες μου Α πόσο νομίζεις ότι πρέπει να είναι.

Α: 10+10+1

Ε: Μάλιστα, 10+10+1. Εσύ Φ τι λες;

Φ:7

Ε: 7. Ωραία, θέλω τώρα Α να πείσεις τη Φ γιατί έχεις δίκιο. Γιατί πιστεύεις πως είναι 10 και 10 και 1;

Α: Γιατί αν βάλω στο πρώτο κουτάκι, στο χ 10, στο δεύτερο 10 και στο τρίτο 1 θα βγαίνει 21.

Ε: Ωραία… εσύ Φ γιατί λες ότι είναι 7;

Φ: Γιατί τα χ είναι όλα ίσα και 3x7=21.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα φαίνεται πως ο Α και η Φ έχουν διαφορετική άποψη για τη φύση του χ. Ο Α θεωρεί πως η μεταβλητή χ μπορεί ταυτόχρονα να παίρνει διαφορετικές τιμές, όπως λέει εδώ μπορεί να είναι χ = 10 και χ = 1 την ίδια στιγμή (letter evaluated, Küchemann, 1978). Η Φ πιστεύει πως και τα 3 χ πρέπει να έχουν την ίδια τιμή, άρα αφού είναι όλα ίσα και 3χ = 21, τότε θα ισχύει ότι χ = 7. Ερμηνεύοντας τη νοηματοδότηση της μεταβλητής από τους δύο μαθητές, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως αν και το ίδιο το περιβάλλον δίνει όνομα και τιμή στη μεταβλητή, οι δύο μαθητές το αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο.

Αντίστοιχη ήταν η αντιμετώπιση του χ και από της μαθήτριες της δεύτερης ομάδας όπως φαίνεται από τους παρακάτω διαλόγους:

ΕΥ: Να πω εγώ;

Ε: Για πες.

ΕΥ: Όταν το χ θα είναι 7.

Ε: Ωραία. Μ συμφωνείς;

Μ: Ναι.

Ε: Αν το χ ήταν ας πούμε στο Μ1 10, στο Μ2 10 και στο Μ3 1, θα μπορούσε να γίνει αυτό;

Μ: Ναι.

ΕΥ: Ναι αλλά δεν είναι όλα το ίδιο;

Η οπτική του Α και της Μ είναι πιο αριθμητική: βρίσκουν 3 αριθμούς που όντως έχουν άθροισμα 21 όπως θέλουμε, αγνοώντας πως οι αριθμοί αυτοί έχουν το ίδιο όνομα και άρα θα πρέπει να είναι ίσοι. Υπάρχει μια ασαφής επίγνωση (awareness) της έννοιας της μεταβλητής για τον Α και τη Μ. Βλέπουν ένα instance της «γνωστής» έννοιας, μια συγκεκριμένη εικόνα της μεταβλητής . Η εστίασή τους (attention) είναι αυτή τη στιγμή αποκλειστικά στην εύρεση αριθμητικών τιμών που να βολεύουν. Χρησιμοποιώντας τα κριτήρια του Radford για τον χαρακτηρισμό του αλγεβρικού συλλογισμού, θα λέγαμε πως ενώ υπάρχει το στοιχείο της ονοματοδοσίας (denotation) ενσωματωμένο στο ψηφιακό περιβάλλον, οι Α και Μ δυσκολεύονται να το ερμηνεύσουν. Το ότι τα 3 βάρη έχουν το ίδιο όνομα δεν είναι αρκετό για να τους πείσει πως πρέπει να έχουν και την ίδια τιμή. Επιπλέον η απροσδιοριστία (indeterminacy) που συνοδεύει τη μεταβλητή είναι εδώ απούσα, καθώς το χ πήρε τις πρώτες τιμές που σκέφτηκαν. Ο Α δοκίμασε κάποιες τιμές και είδε πως δουλεύουν ενώ η Μ αποδέχτηκε κάποιες τιμές που προτάθηκαν.

Η Φ βλέπει τη μεταβλητή χ με άλλη ματιά. Λέει σαφώς πως «τα χ είναι όλα ίσα» συμπεραίνοντας πως το χ πρέπει να είναι 7. Πιθανότατα χρησιμοποιεί σε αυτό το σημείο τεχνικές επίλυσης εξισώσεων όπως και στο χαρτί, αφού διαίρεσε άμεσα με το συντελεστή του χ για να βρει τη λύση. Η ονοματοδοσία (denotation) της μεταβλητής ήταν αρκετή για να την πείσει πως και τα τρία βάρη είναι ίσα. Δεν είναι εμφανές αν σε αυτό το σημείο η Φ μπορεί να αντιμετωπίσει το χ ως γνωστή ποσότητα και να κάνει πράξεις (analyticity) ούτε το αν το βλέπει ως γενικευμένο αριθμό (indeterminacy). Με βάση τα παραπάνω θα έβγαζα το συμπέρασμα πως ο συλλογισμός της Φ τείνει περισσότερο προς τον αλγεβρικό και λιγότερο προς τον αριθμητικό. Συγκρίνοντας τη σκέψη της με αυτή του Α και της Μ η διαφορά είναι εμφανής.

Αντίστοιχη είναι και η αντιμετώπιση της ΕΥ. Βλέπει από την αρχή πως πρέπει να ισχύει χ = 7 για να ισορροπεί η ζυγαριά και στη συνέχεια για να αντικρούσει το επιχείρημα ότι μπορεί το χ να είναι 10, 10 και 1 αναφέρει χαρακτηριστικά: «Ναι αλλά δεν είναι όλα το ίδιο;». Η αντιμετώπιση των δύο μαθητριών είναι ακριβώς η ίδια.

Με βάση τα παραπάνω θα χαρακτηρίζαμε αυτόν το συλλογισμό του Α και της Μ καθαρά αριθμητικό, καθώς απουσιάζουν και τα 3 κριτήρια αλγεβρικής σκέψης ενώ διακρίνουμε κάποια στοιχεία αλγεβρικού συλλογισμού στην Φ και την ΕΥ. Η επίγνωση της έννοιας της μεταβλητής είναι και αυτή αρκετά διαφορετική για τους τέσσερις μαθητές, με τον Α και την Μ να έχουν μια πιο ασαφή εικόνα και την Φ και την ΕΥ μια εμφανώς πιο συγκεκριμένη. Ως προς την ισορροπία της ζυγαριάς, από το πρώτο κιόλας ερώτημα φαίνεται πως οι μαθητές την έχουν ταυτίσει με την ισότητα των βαρών στα δύο άκρα της.

Στη συνέχεια της συζήτησης ο Α άρχισε να αμφιβάλει για την ορθότητα της αρχικής του απάντησης:

Ε: (...). Πόσα βάρη έχεις αριστερά;

Α: 3

Ε: Είναι ίδια ή διαφορετικά μεταξύ τους;

Α: Είναι ίδια.

Ε: Άρα μπορεί να είναι 10, 10 και 1;

Α: Ε όχι!

Ε: Ωραία. Άρα τι ψάχνουμε; 3 ίδιους αριθμούς που μαζί να κάνουν…

Α: 21

Ε: Η Φ είπε πως 3 φορές το 7 κάνει 21.

Α: Εεε... ναι…7.

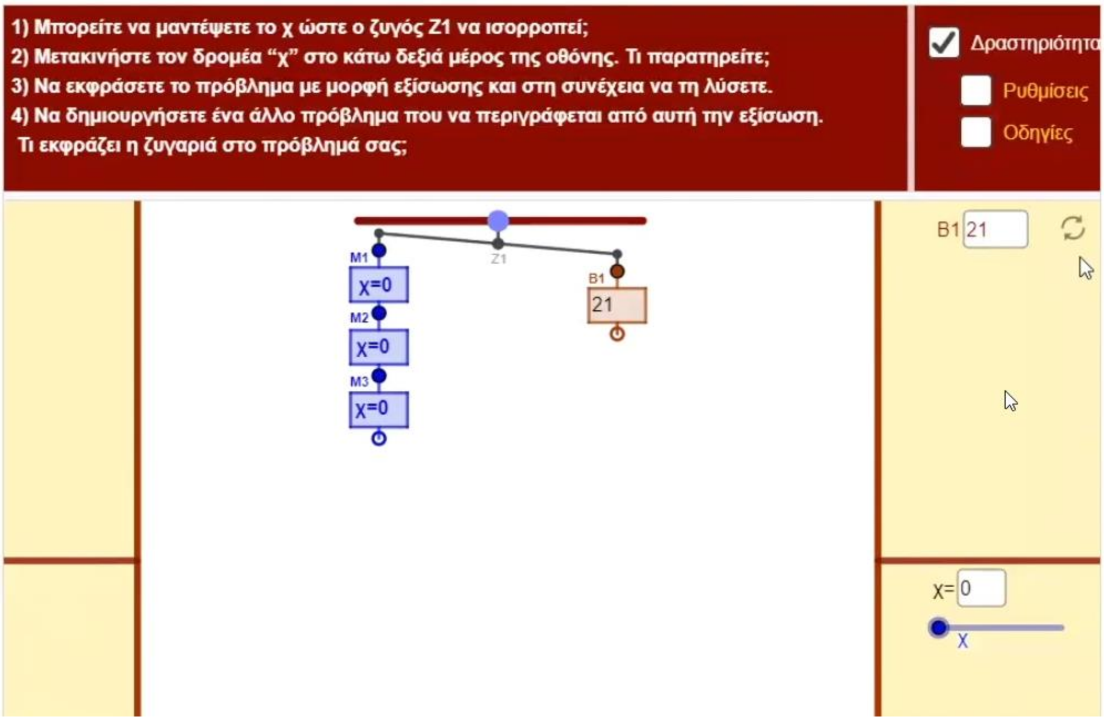
Στο σημείο αυτό ο Α καταλαβαίνει πως ενώ η ζυγαριά όντως θα ισορροπεί αν το χ είναι 10,10 και 1 όπως αρχικά είπε, δεν έχουμε 3 οποιαδήποτε βάρη από τα αριστερά αλλά 3 ίδια βάρη. Φαίνεται πως σε αυτό το σημείο η επίγνωση του Α για την έννοια της μεταβλητής αλλάζει, κάνοντας έτσι ένα βήμα προς τη ζητούμενη αναλυτικότητα. Η εστίαση (awareness) μετατοπίζεται από την απλή εύρεση 3 αριθμών που να έχουν άθροισμα 21, ψάχνει πλέον 3 *ίδιους* αριθμούς, ίσως επηρεασμένος από τη ονοματοδοσία του περιβάλλοντος. Φεύγει από την δοκιμή που έτυχε να δουλεύει και προσεγγίζει μια αντιμετώπιση ίδια με αυτήν της Φ στο προηγούμενο απόσπασμα. Η ζυγαριά και πάλι θα ισορροπεί μόνο που τώρα όλα τα χ είναι ο ίδιος αριθμός. Στο απόσπασμα αυτό παρατηρούμε μια στιγμή μάθησης του Α, όπου η εστίαση του αλλάζει, βοηθώντας έτσι το χτίσιμο της επίγνωσης της έννοιας της μεταβλητής.

Μπορούμε να πούμε πως η νοηματοδότηση της μεταβλητής εξελίχθηκε για τον Α, πιθανότατα λόγω της ονοματοδοσίας του λογισμικού. Άρα ο Α έκανε ένα μικρό βήμα προς τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης αφού ξεκίνησε να παρατηρεί πως το γεγονός ότι τα άγνωστα βάρη έχουν το ίδιο όνομα (denotation) σημαίνει πως πρέπει να έχουν ταυτόχρονα και την ίδια τιμή.

Νοηματοδότηση εξίσωσης μέσω ισορροπίας της ζυγαριάς

Στο παρακάτω παράδειγμα θα δούμε την νοηματοδότηση της ισότητας στην εξίσωση μέσω της ισορροπίας της ζυγαριάς. Από τις πρώτες κιόλας δραστηριότητες οι μαθητές ταύτισαν την ισότητα με την ισορροπία, χωρίς αυτό να αλλάξει σε όλη τη διάρκεια της έρευνας. Αυτό είναι κομβικής σημασίας για την κατανόηση της βασικής ιδιότητας της ζυγαριάς, όπως θα φανεί και στη συνέχεια.

Συζητώντας για το ρόλο της λύσης χ=7, εξετάστηκε η συμπεριφορά της ζυγαριάς για τις διάφορες τιμές του χ. Αρχικά, για χ=0 ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:



Εικόνα 21 Γενίκευση του μεταβλητού βάρους πριν τη χρήση του δρομέα

Ε: Άρα γέρνει όντως προς τα δεξιά επειδή είναι περισσότερα κιλά. Μέχρι πότε πιστεύετε πως θα γέρνει προς τα δεξιά; Μέχρι πόσο μπορεί να είναι το χ;

Φ: 7, 7 και πάνω.

Ε: Ωραία. Άρα πριν το 7 τι θα κάνει;

Φ: Θα γέρνει προς το 21.

Ε: Και μετά το 7;

Α: Θα γέρνει προς το χ.

Ε: Και ακριβώς στο 7;

Φ: Θα είναι ίσα.

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα φαίνεται πως και οι δύο μαθητές βλέπουν τη μεταβλητή ως κάτι απροσδιόριστο, ως έναν γενικευμένο αριθμό. Ακόμα και ο Α που έβλεπε συγκεκριμένες τιμές στρέφει την εστίαση του (awareness), μέσω του δρομέα, στις διάφορες τιμές της μεταβλητής. Αντιλαμβάνονται πως δεν έχει μία συγκεκριμένη τιμή και πως για τις διάφορες τιμές της η ζυγαριά συμπεριφέρεται διαφορετικά. Η ζυγαριά είναι σαφές πως γέρνει προς τη μεριά με τα περισσότερα κιλά δίνοντας έτσι μια νέα ερμηνεία στην σχέση της ανισότητας. Σημείο καμπής αυτής της διαδικασίας είναι το χ = 7 όπου ισορροπεί, εκατέρωθεν του οποίου και αλλάζει η μεριά προς την οποία γέρνει. Οι έννοια της ισότητας και της ισορροπίας που είδαμε πριν εμπλουτίζεται πλέον και με αυτήν της ανισότητας που μεταφράζεται ως ανισορροπία της ζυγαριάς. Η ζυγαριά δεν είναι ένα εργαλείο που απλά ισορροπεί δίνοντας μας έτσι την πληροφορία ότι οι δύο μεριές της έχουν ίσο βάρος. Είναι σαφές στους μαθητές πως μας δείχνει επιπλέον ποια μεριά έχει το μεγαλύτερο βάρος. Όλα τα παραπάνω διατυπώνονται ως εικασίες από τους μαθητές. Δεν έχουν ακόμα γράψει τίποτα ούτε έχουν επεξεργαστεί τον δρομέα. Η δεύτερη ομάδα δεν έφτασε σε αυτό το επίπεδο πριν αρχίσει να αλληλοεπιδρά με τον δρομέα.

Μπορούμε να πούμε πως τόσο οι ιδιότητες της ζυγαριάς όσο και η αλληλεπίδραση με τον δρομέα ώθησαν τους μαθητές στο να διατυπώσουν εικασίες σε σχέση με τη συμπεριφορά της δεδομένης σχέσης για τις διάφορες τιμές του χ. Η εστίαση τους ήταν καθαρά πάνω στην εικόνα της ζυγαριάς και την κίνησή της, γεγονός που μεταβάλει την υφιστάμενη επίγνωση πάνω στην έννοια της ανίσωσης αλλά κυρίως της εξίσωσης. Η μεταβλητή είναι πλέον και για τους δύο μαθητές της πρώτης ομάδας μια πιο γενικευμένη έννοια και όχι ένας συγκεκριμένος αριθμός, στοιχείο απαραίτητο για την απαγκίστρωση τους από τον αριθμητικό τρόπο σκέψης.

Νοηματοδότηση ανισότητας μέσω της ζυγαριάς

Σε αντιστοιχία με το παραπάνω, οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια της ανισότητας μέσω της μη ισορροπίας της ζυγαριάς. Στα δύο αποσπάσματα που αναλύονται εδώ, θα δούμε πως οι μαθητές ταυτίζουν την κατεύθυνση του συμβόλου της ανισότητας (< ή >) με τη μεριά προς την οποία γέρνει η ζυγαριά. Και για τις δύο ομάδες αυτή η παρατήρηση έγινε στην πρώτη κιόλας δραστηριότητα.

Αφού οι μαθητές επιβεβαίωσαν τις εικασίες τους δίνοντας διάφορες τιμές στη μεταβλητή χ στο περιβάλλον, συζητήθηκε στην πρώτη ομάδα το παρακάτω:

Ε: Στο 7 λοιπόν ισορροπεί. Γιατί; Γιατί μου είπατε ότι τα δύο μέρη έχουν ίδιο βάρος. Βάλτε τώρα κάτι μεγαλύτερο. Τι θα γίνει; Θα γέρνει προς τα... ;

Φ: Από τη μεριά που είναι τα χ.

Ε: Αν βάζαμε χ=1.000.000 θα άλλαζε κάτι;

Α+Φ: Όχι!

Ε: Αν βάζαμε χ=1.000.000.000 ;

Α+Φ: Όχι!!

Έ: Άρα αρκεί να είναι μεγαλύτερο του 7 και πάντα θα γέρνει προς τα αριστερά;

Α: Ναι.

Στο σημείο αυτό παρατηρείται μια τάση για γενίκευση. Μετά τις συγκεκριμένες τιμές που δοκίμασαν οι μαθητές και παρατήρησαν ότι οι ιδιότητες της ζυγαριάς ήταν όντως οι αναμενόμενες, τώρα αυτό γίνεται για μεγαλύτερους αριθμούς. Η εστίαση τους μεταφέρθηκε από την εικόνα της ζυγαριάς και τον δρομέα σε μια «εικονική» ζυγαριά στο μυαλό τους. Φαντάστηκαν μια ζυγαριά με τα διάφορα κιλά που συζητήσαμε και αποφάνθηκαν προς τα που θα γέρνει σε κάθε περίπτωση. Παρατηρούν τελικά πως δεν έχει σημασία πόσο μεγάλος είναι ένας αριθμός, αρκεί να είναι μεγαλύτερος από 7.Η γνώση περί ανίσωσης εμπλουτίστηκε: μπορεί να υπάρχουν άπειροι αριθμοί που να ικανοποιούν μια ανίσωση. Η εμπειρία με τη ζυγαριά βοήθησε στην απαγκίστρωση των μαθητών από το ίδιο το μοντέλο, γενικεύοντας την ίδια κατάσταση για οποιοδήποτε χ με συγκεκριμένη ιδιότητα, εδώ για οποιοδήποτε χ > 7. Η μεταβλητή χ πλέον παίρνει οποιεσδήποτε τιμές ακόμα και για τον Α. Δε μας περιορίζουν ούτε οι πιθανές τιμές του δρομέα ούτε οι πιθανοί περιορισμοί του φυσικού μοντέλου. Σε μια κανονική ζυγαριά θα ήταν δύσκολο να βάλουμε 1.000.000.000 κιλά, στη ψηφιακή ζυγαριά μας έχουμε το δικαίωμα να δώσουμε οποιαδήποτε τιμή στο χ θέλουμε. Η συνειδητοποίηση πως για οποιοδήποτε χ > 7 θα γέρνει προς τα αριστερά είναι ένα βήμα ακόμα προς τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Η εστίαση στην ιδιότητα και όχι στις ποσότητες δείχνει να οδηγεί σε αλλαγή της επίγνωσης τόσο για την έννοια της μεταβλητής όσο και της ανίσωσης.

Στο αντίστοιχο σημείο η δεύτερη ομάδα είχε την ακόλουθη αντιμετώπιση:

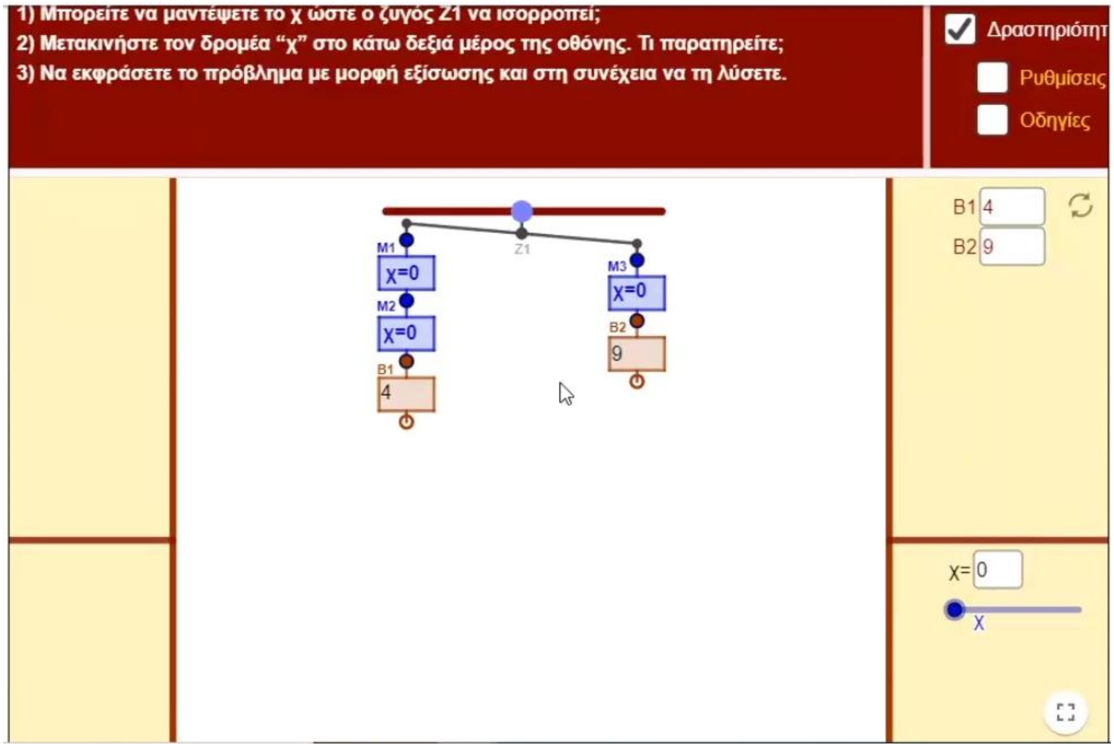
> *Ε: Όταν είναι πιο βαρύ σηκώνεται το Β1. Κοιτάξτε για να μη μπερδευόμαστε δε θα λέμε από που σηκώνεται αλλά προς τα που γέρνει.*
>
> *Μ: Ωραία, γέρνει προς τα αριστερά.*
>
> *Ε: Πολύ ωραία, όταν είναι πιο βαρύ από πόσο;*
>
> *Μ: Από 7.*
>
> *Ε: Όταν είναι ακριβώς 7;*
>
> *Μ: Ισορροπεί.*
>
> *Ε: Και αν είναι μικρότερο από 7;*
>
> *Μ: Γέρνει προς τα δεξιά.*

Βλέπουμε λοιπόν πως και για τη δεύτερη ομάδα είναι δεδομένο πως η ζυγαριά γέρνει προς τη μεριά με το μεγαλύτερο βάρος. Το παραπάνω γενικεύεται με όμοιο τρόπο για τις διάφορες τιμές του χ. Η μεταβλητή για την Μ και την ΕΥ έχει πάρει εδώ μια πιο αφηρημένη μορφή: είναι ένας αριθμός που παίρνει διάφορες τιμές οι οποίες επηρεάζουν τη συμπεριφορά της ζυγαριάς. Η εστίαση των μαθητριών είναι και εδώ στην ιδιότητα και όχι στον αριθμό. Η ονοματοδοσία του λογισμικού θεωρώ πως βοηθάει στο να βλέπουν το χ σαν κάτι που αλλάζει και όχι σαν συγκεκριμένο βάρος στα άκρα μιας ζυγαριάς.

Άρα οι μαθητές έχουν ταυτίσει το προς τα που γέρνει η ζυγαριά με την κατεύθυνση του συμβόλου < ή > της ανισότητας. Η μεταβλητή είναι πλέον γενικευμένος, απροσδιόριστος αριθμός και για τους τέσσερις μαθητές και οι πιθανές τιμές της δεν επηρεάζονται ούτε από αναλογικούς ούτε από ψηφιακούς περιορισμούς. Πλέον και ο Α έχει κάνει ένα βήμα προς τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης, την απροσδιοριστία. Το βήμα αυτό οι υπόλοιπες τρεις μαθήτριες το είχαν ήδη κάνει νωρίτερα.

Σταδιακή εστίαση στη διαχείριση της μεταβλητής σε αλγεβρικές εξισώσεις

Στα επόμενα τρία παραδείγματα θα δούμε τρεις χαρακτηριστικές περιπτώσεις διαχείρισης της μεταβλητής χ σε αλγεβρικές εξισώσεις. Στα πρώτα δύο θα παρατηρήσουμε μερικά βήματα προς τα πίσω στην πορεία προς τον αλγεβρικό συλλογισμό των δύο μαθητών. Το ότι εμφανίζεται το χ και στα δύο μέλη της εξίσωσης φαίνεται πως είναι η αιτία πίσω από την εμφάνιση αυτής της δυσκολίας. Στο τελευταίο παράδειγμα, θα δούμε πως ακόμα και Φ που έδειχνε να έχει ευχέρεια στη χρήση στρατηγικών επίλυσης στις προηγούμενες δραστηριότητες, εδώ αδυνατεί να προσδιορίσει ποια είναι η ζητούμενη προς λύση εξίσωση. Όλα τα παρακάτω περιστατικά παρατηρήθηκαν στη δεύτερη δραστηριότητα και στις δύο ομάδες.



Εικόνα 22 Δραστηριότητα 2 - Αρχική οθόνη

Αφού «μάντεψαν» για ποιο χ (χ = 5) θα ισορροπεί η ζυγαριά, το επιβεβαίωσαν και με τη χρήση του δρομέα. Γενίκευσαν μάλιστα, όπως και πριν, τη συμπεριφορά της ζυγαριάς για χ > 5 και για χ < 5. Στη συνέχεια κλήθηκαν να εκφράσουν το παραπάνω πρόβλημα με μορφή εξίσωσης και ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

Ε: Να είναι ίσα, ωραία. Για πες μου Α, το αριστερό μέλος της εξίσωσης τι θα είναι;

Α: Το 14.

Ε: 14 είναι αυτή τη στιγμή που το χ είναι 5.

Α: (μετακινεί το ποντίκι στον δρομέα και παρατηρεί πως το χ είναι 5) Ναι.

Ε: Όταν το χ δεν ξέρουμε τι είναι;

Α: Α! 4.

Ε: Μόνο 4;

(…)

Α: 4χχ. Α… 4χ

Ε: Το δεξί κομμάτι ποιο θα είναι Α;

Α: Εεε… 9χ

Ε: Ωραία, πες μου η εξίσωση σου ποια θα είναι;

Α: (με μικρές παύσεις) 4χ=9χ

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε πως ο Α κάνει ένα βήμα πίσω στην πορεία της αλγεβρικής σκέψης. Ενώ στην προηγούμενη δραστηριότητα είχε αρχίσει να βλέπει τη μεταβλητή ως γενικευμένο αριθμό και έκανε κάποιες πράξης με αυτήν σαν να ήταν γνωστός αριθμός (αναλυτικότητα) εδώ αυτό το βήμα χάνεται. Βλέπει και πάλι το χ σαν συγκεκριμένο αριθμό που βρέθηκε με δοκιμές και σφάλματα, μια μέθοδο καθαρά αριθμητική. Η εστίαση του είναι στην εικόνα της ζυγαριάς και τους αριθμούς και όχι στην έννοια της μεταβλητής. Η προηγούμενη επίγνωση της έννοιας περνάει στο περιθώριο δίνοντας βήμα στη συνήθη πρακτική της αριθμητικής. Ακόμα και όταν σταματάει ο Α να βλέπει, έστω και προσωρινά, το χ ως τον αριθμό 5 και θυμάται την απροσδιοριστία που είχε παρατηρήσει στην προηγούμενη δραστηριότητα, δυσκολεύεται να σκεφτεί τις πράξεις σαν να ήταν με γνωστούς αριθμούς. Ενώ πριν έβλεπε τα 3 βάρη και σκεφτόταν χ + χ + χ άρα 3χ, εδώ βλέπει ένα σταθερό βάρος 4 κιλών και κάποια χ και συμπεραίνει πως έχουμε 4χ κιλά. Ειδοποιός διαφορά στις δύο δραστηριότητες είναι ο τύπος και η πολυπλοκότητα της εξίσωσης. Στην πρώτη είχαμε μια απλή αριθμητική εξίσωση με το χ μόνο στη μία μεριά (3χ = 21) ενώ εδώ έχουμε μια πιο σύνθετη αλγεβρική εξίσωση με το χ και στα δύο μέλη (2χ + 4 = χ + 9). Συνοψίζοντας τη σκέψη του, ο Α καταλήγει πως η ζητούμενη εξίσωση είναι η 4χ = 9χ.

Αντίστοιχη με τον Α είναι και η αντιμετώπιση της Μ:

Ε: Για πες Μ, τι βρήκες;

Μ: Θα βάλουμε στα αριστερά 5 και 1.

Ε: 5 και 1, μάλιστα, και στα δεξιά τι θα βάλουμε;

Μ: 1.

Ε: Άρα μου λες ότι το χ πρέπει να είναι 5 και 1.

Μ: Ναι.

Και η Μ λοιπόν κάνει το ίδιο βήμα προς τα πίσω: βλέπει και πάλι τη μεταβλητή ως διαφορετικό αριθμό ταυτόχρονα. Έκανε δύο αριθμητικές δοκιμές που δούλεψαν και αυτό ήταν αρκετό για να «ξεχάσει» πως το χ δε μπορεί ταυτόχρονα να παίρνει δύο διαφορετικές τιμές. Η Φ όμως, έχει άλλη άποψη, όπως φαίνεται και στο παρακάτω απόσπασμα:

Φ:Εγώ θα έλεγα 4+9+3χ

Ε: Ίσον πόσο;

Φ: Ίσον… (παύση) Βλακεία, όχι.

Ε: Αυτό που έλεγες μάλλον δεν είναι εξίσωση γιατί λείπει ένα ίσον.

Φ: Ναι θα έλεγα =14 αλλά το 14 το βρήκαμε μετά.

Η Φ αν και στην προηγούμενη δραστηριότητα είχε βρει άμεσα και σωστά τόσο την εξίσωση όσο και τη λύση εδώ δυσκολεύεται. Η εστίαση της είναι στα βάρη και στις πράξεις με αυτά ενώ η ισορροπία δεν υπάρχει πουθενά στο συλλογισμό της. Η προηγούμενη γνώση φαίνεται πως δεν ήταν ξεκάθαρη και τα βήματα προς τον αλγεβρικό συλλογισμό εδώ δίνουν τη θέση τους σε πράξεις και μαντεψιές, πρακτικές καθαρά αριθμητικές. Προσθέτει τα βάρη και από τις δύο μεριές, χωρίς όμως να φαίνεται η έννοια της ισότητας κάπου στην απάντηση της. Σε αντίθεση με τον Α αναγνωρίζει άμεσα το χ ως γενικευμένη ποσότητα και αθροίζει σωστά, με τη δική της στρατηγική, τα χ λέγοντας πως έχουμε 3χ σύνολο. Η αναλυτικότητα υπάρχει στη συλλογιστική της Φ, όμως η επίγνωση της έννοιας εξίσωσης είναι σε ακόμα πιο πρωταρχικό επίπεδο σε σύγκριση με πριν. Εκτιμώ πως και για την Φ η πολυπλοκότητα μια αλγεβρικής εξίσωσης έπαιξε καίριο ρόλο στη διατύπωση των επιχειρημάτων της. Εδώ το αντικείμενο προς ερμηνεία είναι και πάλι μια εξίσωση μόνο που αυτή τη φορά είναι πιο πολύπλοκη. Είναι εμφανής και η δυσκολία που εμφανίζεται λόγω της διαμεσολάβησης του ψηφιακού μοντέλου. Η μετάβαση αυτή στην επίγνωση (awareness) των εξισώσεων γίνεται σε δύο επίπεδα ταυτόχρονα: τόσο στο ψηφιακό περιβάλλον όσο και στις αλγεβρικές ιδιότητες. Τα αντικείμενα προς ερμηνεία και οι ιδιότητες τους ναι μεν μοιράζονται πολλά κοινά στοιχεία και στα δύο περιβάλλοντα αλλά δεν παύουν να είναι νέες έννοιες για τους μαθητές. Το γεγονός ότι οι ιδιότητες στη ζυγαριά είναι άμεσα παρατηρήσιμες ίσως διευκολύνει αυτήν την ερμηνεία και στο αλγεβρικό κομμάτι.

Αλλαγές στην επίγνωση της έννοιας της μεταβλητής σε αλγεβρικές εξισώσεις

Στα παραδείγματα που ακολουθούν βλέπουμε την αμφίδρομη πορεία στην εξέλιξη της επίγνωσης των μαθητών πάνω στη μεταβλητή, κατά την ενασχόλησή τους με αλγεβρικές εξισώσεις στη δεύτερη και την τρίτη δραστηριότητα. Η πολυπλοκότητα που συνοδεύει τις αλγεβρικές εξισώσεις φαίνεται πως οδηγεί τους μαθητές στο να ξεχάσουν ιδιότητες της μεταβλητής, τις οποίες χρησιμοποιούσαν μάλιστα με σχετική άνεση και σιγουριά κατά την επίλυση αριθμητικών εξισώσεων στην πρώτη δραστηριότητα. Αυτή η αμφιταλάντευση φαίνεται και κατά την ερμηνεία των επεισοδίων με τη χρήση των κριτηρίων του Radford, καθώς πολύ συχνά, συλλογισμοί που θα χαρακτηρίζονταν αλγεβρικοί, ακολουθούνται από άλλους με παντελή έλλειψη ενός ή και παραπάνω κριτηρίων.

Η ΕΥ έδειχνε να έχει μια άνεση με τη χρήση του χ σε πράξεις. Εδώ έχουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα διαχείρισης της μεταβλητής σαν να ήταν γνωστή ποσότητα.

> *ΕΥ: Ε ναι. Να πω και εγώ τι σκέφτηκα;*
>
> *Ε: Για πες.*
>
> *ΕΥ: Αν βάλουμε στο χ 5 από την αριστερή μεριά θα είναι 4+5+5=14 και από τη δεξιά θα είναι 9 +5 = πάλι 14.*

Χωρίς δεύτερη σκέψη η ΕΥ χρησιμοποιεί την απροσδιόριστη ποσότητα του χ σαν να ήταν γνωστή. Προσέχει πως οι άγνωστοι έχουν το ίδιο όνομα άρα θα πρέπει να έχουν και την ίδια τιμή και χρησιμοποιεί το χ χωρίς πρόβλημα σε αριθμητικές πράξεις σαν να ήταν γνωστός αριθμός. Όλα τα παραπάνω αποτελούν ισχυρές ενδείξεις ύπαρξης των τριών κριτηρίων του αλγεβρικού συλλογισμού του Radford.

Οι δύο μαθητές της πρώτης ομάδας αλλά και η Μ απομακρύνονται από τον πορεία προς τον αλγεβρικό συλλογισμό τους. Το ότι η εξίσωση πλέον ήταν αλγεβρική και άρα πιο σύνθετη από την προηγούμενη αριθμητική θεωρώ πως μπέρδεψε και τους δύο μαθητές. Τόσο η έννοια της μεταβλητής όσο και της εξίσωσης απομακρύνθηκαν από την πορεία προς γενίκευση που παρατηρήσαμε νωρίτερα. Κάποια βήματα αναλυτικότητας από τη Φ υπήρχαν, παρ’όλα αυτά οι συλλογισμοί και των δύο μαθητών θα χαρακτηρίζονταν σχεδόν αποκλειστικά αριθμητικοί λόγω της έλλειψης και των τριών κριτηρίων του Radford. Η ΕΥ από την άλλη δε δείχνει να δυσκολεύεται από την αλγεβρική εξίσωση. Αντιθέτως παρατηρούμε μια ευχέρεια στη χρήση της μεταβλητής καθώς υπάρχουν και τα τρία κριτήρια του Radford. Η ερμηνεία των νέων εννοιών και ιδιοτήτων σε δύο παράλληλα περιβάλλοντα, το ψηφιακό και το αλγεβρικό, καθιστά αυτή τη μετάβαση πιο πολύπλοκη. Το ότι υπάρχουν πολλές ομοιότητες ανάμεσα στο ψηφιακό περιβάλλον και τις μαθηματικές σχέσεις σε συνδυασμό με την άμεση οπτική επαφή με τη ζυγαριά ίσως είναι κομβικής σημασίας για τη συνέχεια της νοηματοδότησης.

Ένα ακόμα αντίστοιχο συμβάν περιγράφεται από τον διάλογο παρακάτω:

Ε: Στη μία μεριά, στην αριστερή πόσα κιλά έχουμε γενικά;

Α: 14.

Ε: 14 Έχουμε αυτή τη στιγμή που το χ είναι 5. Αν το χ δεν το ξέραμε;

Α+Φ: 4.

Ε: Μόνο 4;

Α: 4χ

Φ: 4+2χ

Στο παραπάνω απόσπασμα βλέπουμε ξεκάθαρα πως η απροσδιοριστία που συνοδεύει το χ απουσιάζει αρχικά από τη σκέψη και των δύο μαθητών. Αρχικά, έχουν πλέον νοηματοδότήσει την ισότητα ως ισορροπία της ζυγαριάς. Από το σημείο αυτό και έπειτα αυτό δε θα αλλάξει. Η φύση της εξίσωσης και της ανίσωσης είναι πλέον συνδεδεμένη με αυτή της ζυγαριάς: αν η ζυγαριά ισορροπεί τα δύο μέλη είναι ίσα αν όχι τότε το μέρος προς το οποίο γέρνει είναι πιο βαρύ. Αυτό που δεν έχει εντυπωθεί στους μαθητές, ακόμα και στη Φ που φαινόταν να το είχε συνηθίσει πριν, είναι η φύση της μεταβλητής.

Ένα αντίστοιχο παράδειγμα βρίσκουμε και στην άλλη ομάδα:

Ε: Εδώ πέρα τι θέλουμε για να ισορροπεί η ζυγαριά; Θέλουμε τα αριστερά κιλά με τα δεξιά κιλά να είναι ίσα.

Μ: Ναι.

Ε: Ωραία. Ποια είναι τα αριστερά κιλά;

Μ: 9.

Ε: Τι έχουμε στα αριστερά;

Μ: Εεε το 4.

Ε: 4. Τίποτα άλλο;

Μ: Και το 0.

Και οι τρεις βλέπουν το χ ως συγκεκριμένο αριθμό, είτε τον αριθμό που «μάντεψαν» ότι κάνει τη ζυγαριά να ισορροπεί είτε το 0. Θεωρούν πως αν δεν ξέρουμε ποιο είναι το χ, ας το βάλουμε 0. Η Φ , αφού το ξανασκεφτεί, αναφέρει πως αν δεν ξέρουμε το χ το γράφουμε απλά ως χ (denotation και indeterminacy) και στη συνέχεια προχωρά και το αντιμετωπίζει ως γνωστή ποσότητα (analyticity) στις πράξεις της. Καταλήγει ότι στη μία μεριά έχουμε $4 + χ + χ = 4 + 2χ$ κιλά. Ο Α και η Μ από την άλλη, όπως και πριν, δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν το χ σαν να ήταν γνωστός αριθμός στις πράξεις. Αναφέρει πως έχουμε 4χ κιλά. Αγνοεί τελείως πως υπάρχουν 2 βάρη των χ κιλών. Η εστίαση του είναι στον αριθμό 4 και στην ύπαρξη κάποιου χ. Ενώ και οι 2 μαθητές φάνηκαν να κάνουν βήματα προς τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης, και σε αυτό το απόσπασμα βλέπουμε παραδείγματα προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Το μοναδικό πράγμα που άλλαξε σε αυτή τη δραστηριότητα είναι ο τύπος της εξίσωσης: από αριθμητική είναι αλγεβρική.

Η αιτία της αλλαγής στην επίγνωση: η εμφάνιση της μεταβλητής και στα δύο μέλη

Όπως γνωρίζουμε και από τη βιβλιογραφία (πχ Filloy & Rojano, 1989; Gallardo, 2001; Vlassis, 2002) οι μαθητές αντιμετωπίζουν επιπλέον δυσκολίες στην επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων. Είδαμε ήδη παραδείγματα εμποδίων στη διαδικασία νοηματοδότησης τόσο της έννοιας της μεταβλητής όσο και της εξίσωσης. Σε αντίθεση με τα στοιχεία αλγεβρικού συλλογισμού που είδαμε στην πρώτη δραστηριότητα, σε μια αριθμητική εξίσωση, στη δεύτερη παρατηρηθήκαν πολλά αριθμητικά επιχειρήματα. Ακόμα και η Φ που είχε δείξει μεγαλύτερη εξοικείωση με τις εξισώσεις εδώ δεν αναγνώρισε καν ποια είναι η ζητούμενη εξίσωση. Στα δύο αποσπάσματα που ακολουθούν φαίνεται ξεκάθαρα τι ήταν αυτό που δυσκόλεψε τους μαθητές και τους απομάκρυνε από τα αλγεβρικά επιχειρήματα που είχαν ξεκινήσει να διατυπώνουν: η ύπαρξη της μεταβλητής και στα δύο μέλη της εξίσωσης.

Αυτό μάλιστα το αναγνωρίζουν και οι ίδιοι, κατά τη συζήτηση πάνω στην επίλυση της εξίσωσης $4 + 2χ = 9 + χ$, διαδραματίστηκε ο παρακάτω διάλογος:

Ε: Πώς θα τη λύνατε τι σκέφτεστε;

Φ: (παύση) 4+2χ=9+χ;

Ε: Ναι. Σας αφήνω να το σκεφτείτε λίγο και το συζητάμε μαζί

(μεγάλη παύση)

Ε: Κάποια ιδέα;

Φ: Δε ξέρω… επειδή έχουμε άγνωστο στο αποτέλεσμα…

Ε: Αποτέλεσμα εννοείς το δεξί μέλος έτσι;

Φ: Ναι.

Η Φ δυσκολεύεται να αναλύσει τη σκέψη της πάνω στη ζητούμενη εξίσωση. Ενώ πριν έγραψε στο χαρτί και έλυσε με ευκολία την εξίσωση σε αυτήν την περίπτωση όπως λέει και εκείνη: «Δε ξέρω… επειδή έχουμε άγνωστο στο αποτέλεσμα…». Η εστίαση της είναι αυτή τη στιγμή στο χαρτί. Έχει γράψει την εξίσωση και δεξιά του συμβόλου της ισότητας αναμένει να υπάρχει ένα γνωστό «αποτέλεσμα». Το παραπάνω αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της παρατήρησης ότι το σύμβολο της ισότητας αποτελεί έναυσμα για εκτέλεση πράξεων και όχι τη δήλωση ότι δύο ποσότητες είναι ίσες (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Kieran, 1981). Η εξίσωση εδώ δεν ταυτίζεται με την ισορροπία της ζυγαριάς όπως πριν. Είναι μια πράξη γραμμένη στο χαρτί την οποία πρέπει να κάνουμε, και όχι μια διαδικασία όπου ψάχνουμε μια συγκεκριμένη τιμή. Η προηγούμενη επίγνωση της εξίσωσης παρατηρούμε πως περιοριζόταν σε αριθμητικές εξισώσεις, με τη μεταβλητή μόνο στη μία μεριά.

Η δεύτερη ομάδα αναγνώρισε αμέσως την διαφορά με την προηγούμενη δραστηριότητα:

Ε: Τι το κάνει πιο δύσκολο;

ΕΥ: Εεε… το ότι έχει χ και από τις δύο μεριές.

Ε: Το ότι έχει βάρη (εννοούσα σταθερά) και από τις δύο μεριές μας πειράζει πολύ;

ΕΥ: Εεε…

Ε: Τι μας πειράζει πιο πολύ; Το ότι έχει χ ή ότι έχει βάρη;

ΕΥ: Ότι έχει χ και από τις δύο μεριές.

Ε: Μ τι λες; Σε ενοχλεί ότι έχει χ και από τις δύο μεριές;

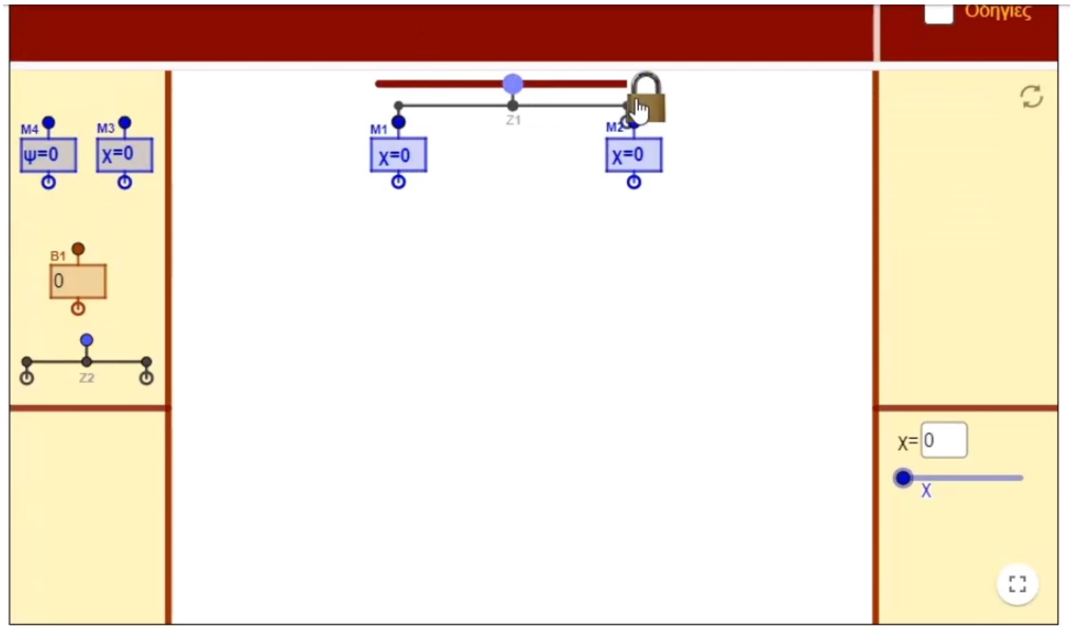
Μ: Εγώ θα έλεγα το ότι έχουμε 2 σταθερά νούμερα.

Συγκεκριμένα, η ΕΥ πιστεύει πως η δυσκολία βρίσκεται στο ότι έχουμε χ και από τις δύο μεριές ενώ η Μ έμεινε στα σταθερά βάρη. Θεωρώ πως αυτό είναι μια ένδειξη πως η Μ είναι περισσότερο αγκιστρωμένη στον αριθμητικό τρόπο σκέψης. Εστιάζει στους γνωστούς αριθμούς. Η απροσδιοριστία που συνοδεύει το χ την κάνει να θέλει να το αποφύγει.

Τα παραπάνω αποτελούν άλλο ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τις αλγεβρικές εξισώσεις. Ο τρόπος με τον οποίο τις διαχειρίζονται είναι ιδιαίτερα σημαντικός στην πορεία εξέλιξης του αριθμητικού σε αλγεβρικού συλλογισμού. Η πρόοδος της επίγνωσης τους πάνω στην ίδια τη μεταβλητή φαίνεται πως έχει πέσει σε τέλμα.

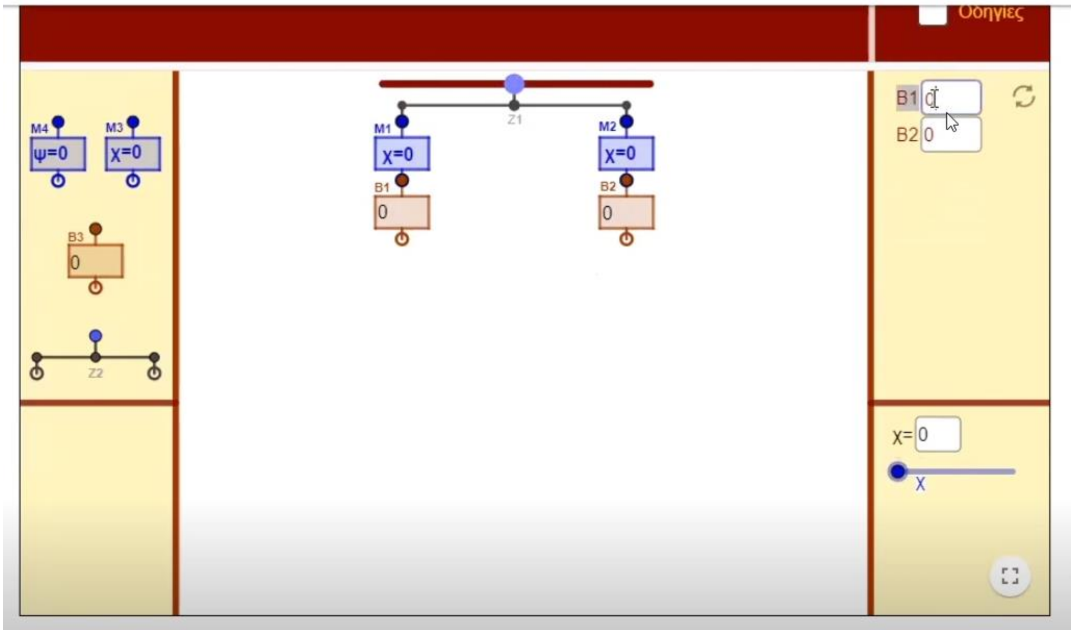
Νοηματοδότηση ιδιοτήτων της εξίσωσης μέσω των βασικών χαρακτηριστικών της ζυγαριάς

Αφού παρατηρήσαμε πως οι αλγεβρικές εξισώσεις δεν αντιμετωπίστηκαν με τον ίδιο τρόπο όπως και οι απλούστερες αριθμητικές, χρειάστηκε μια ενδιάμεση δραστηριότητα. Σκοπός της η υπενθύμιση της βασικής ιδιότητας της ζυγαριάς και της εξίσωσης: «Αν προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέρη μιας ζυγαριάς που ισορροπεί τότε εκείνη θα συνεχίσει να ισορροπεί». Στα τρία παραδείγματα που ακολουθούν θα δούμε τη σταδιακή πορεία γενίκευσης της βασικής αυτής ιδιότητας και στις δύο ομάδες: αρχικά η ιδιότητα διατυπώνεται για συγκεκριμένους αριθμούς και στη συνέχεια επεκτείνεται για οποιονδήποτε αριθμό.



Εικόνα 23 Ενδιάμεση δραστηριότητα - Βασική ιδιότητα της ζυγαριάς

Σε αυτή την ενδιάμεση δραστηριότητα υπήρχε μια ζυγαριά με χ κιλά στην κάθε μεριά. Οι μαθητές συμπέραναν άμεσα πως για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής χ η ζυγαριά αυτή θα ισορροπεί. Στη συνέχεια τους ζητήθηκε να προσθέσουν ένα ίδιο σταθερό βάρος και στα δύο μέρη και να εκτιμήσουν τη συμπεριφορά της ζυγαριάς.



Εικόνα 24 Βασική ιδιότητα - Προσθήκη ίσων βαρών στις δύο μεριές

Έπειτα, αφού παρατήρησαν πως για κάποιες συγκεκριμένες τιμές του σταθερού βάρους η ισορροπία διατηρήθηκε, ακολούθησε ο εξής διάλογος:

Ε: Τώρα που βάλαμε 1 κιλό στην κάθε μεριά ισορροπεί;

Φ: Ναι.

Ε: Ωραία. Αν βάζαμε 5 κιλά από την κάθε μεριά θα ισορροπούσε;

Φ: Ναι.

Ε: 10;

Φ: Ναι.

Ε: 100;

Φ: (γελώντας) Ναι.

Ε: Άρα τι θα έλεγες; Πότε ισορροπεί μια ζυγαριά; Πότε συνεχίζει να ισορροπεί;

Φ: Όταν προσθέτουμε τα ίδια κιλά;

Ε: Όταν προσθέτουμε τα ίδια κιλά πού;

Φ: Στη δεξιά και στην αριστερή πλευρά.

Εδώ βλέπουμε πως η Φ προσπαθεί να γενικεύσει τη συγκεκριμένη παρατήρηση που έκανε πριν. Αν βάλουμε τον ίδιο γνωστό αριθμό κιλών στην κάθε μεριά η ζυγαριά συνεχίζει να ισορροπεί. Για αυτό είναι σίγουρη καθώς απαντάει άμεσα για 5 ,10 ,100 κιλά. Στο τέλος γενικεύει το παραπάνω λέγοντας: «Όταν προσθέτουμε τα ίδια κιλά (…) στη δεξιά και την αριστερή μεριά», διατυπώνοντας έτσι τη θεμελιώδη ιδιότητα της ζυγαριάς άρα και της εξίσωσης. Γενικεύει μια αριθμητική παρατήρηση διατυπώνοντας έτσι μια πιο απροσδιόριστη, πιο καθολική ιδιότητα. Αν και στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε χ και στις δύο μεριές τις εξίσωσης το ότι η προσοχή στράφηκε από τη γραμμένη εξίσωση στο χαρτί στην εικόνα της ζυγαριάς έφερε αρκετά διαφορετικά αποτελέσματα στη διαχείριση μιας αλγεβρικής εξίσωσης. Για την Φ που έχει διδαχτεί εξισώσεις, μοιάζει να υπάρχει μια σχετική εξοικείωση με την ιδιότητα. Εκτιμώ πως είδε ένα στιγμιότυπο από τη γνωστή ιδιότητα «μεταφέρουμε κάτι στο άλλο μέρος αλλάζοντας του πρόσημο». Ο Α τελικά συμφωνεί με τη Φ χωρίς να δίνει περισσότερες λεπτομέρειες. Θα δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα διαχείρισης της ιδιότητας από τον Α στη συνέχεια της ίδιας συζήτησης:

Ε: Αν προσθέσουμε 10 από τη μία πόσα να βάλουμε στην άλλη;

Α: 10.

Ε: Τι πρέπει να είναι πάντοτε αυτά που προσθέτουμε;

Α: Ίσα.

Ε: Ίσα, ωραία. Αντίστοιχα και όταν αφαιρούμε. Συμφωνείτε και οι δύο;

Α+Φ: Ναι.

Εδώ λοιπόν βλέπουμε πως και ο Α αντιλαμβάνεται την ιδιότητα με τον ίδιο τρόπο. Σταδιακά γενικεύεται η ιδιότητα για συγκεκριμένα κιλά, εδώ για 1 και 10 κιλά. Και τέλος αναφέρει ο Α πως πρέπει να προσθέσουμε ίσα κιλά και στις δύο μεριές για να διατηρηθεί η ισορροπία της ζυγαριάς που ταυτίζεται με την ισότητα στην εξίσωση. Το παραπάνω αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μάθησης που θα χρησιμοποιηθεί στην πράξη πολύ σύντομα.

Με την ίδια ακριβώς οπτική αντιμετώπισαν την βασική ιδιότητα της ζυγαριάς και στη δεύτερη ομάδα:

Ε: Λοιπόν αυτή τη στιγμή τι κάναμε; Προσθέσαμε 1 κιλό και στα δύο μέρη, σωστά;

Μ: Ναι.

Ε: Τι παρατηρείς; Τι κάνει η ζυγαριά;

Μ: Ισορροπεί.

(...)

Ε: Αν προσθέταμε από τη μία 1 κιλό και από την άλλη 2 κιλά, θα ισορροπούσε;

Μ: Όχι.

Ε: Αν προσθέταμε στη μία 1 κιλό και στην άλλη κανένα κιλό, θα ισορροπούσε;

Μ: Όχι.

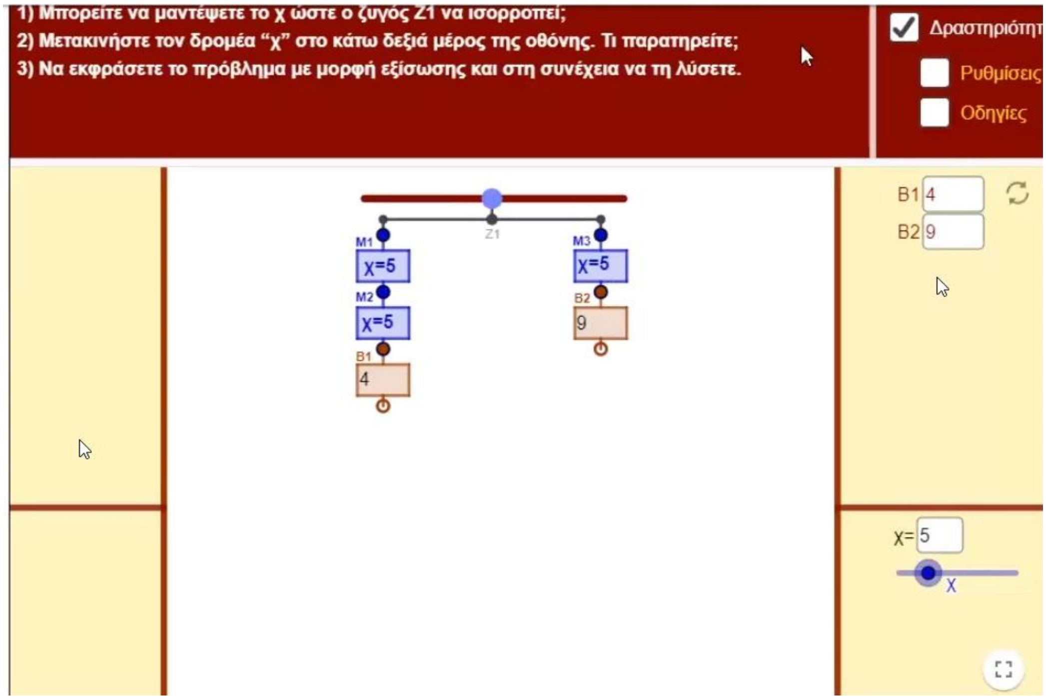
Ε: Ενώ πριν όταν βάζαμε 1 και 1, 5 και 5 ή 1.000 και 1.000 μου έλεγες ότι ισορροπούσε. Τι θα λέγαμε τελικά; Ότι μια ζυγαριά που ισορροπούσε θα συνεχίσει να ισορροπεί αν προσθέταμε και στις δύο μεριές... τι;

Μ: Τους ίδιους αριθμούς.

Είδαμε στα παραπάνω αποσπάσματα πως η επίλυση με χρήση μετασχηματισμών στις αλγεβρικές εξισώσεις μπορεί να υποβοηθηθεί μέσω της βασικής ιδιότητας της ζυγαριάς. Όταν η εστίαση των μαθητών μεταφερθεί από την εξίσωση στο χαρτί στη ζυγαριά παρατηρείται η ισχύς αυτής της ιδιότητας μέσω μιας γενίκευσης. Αυτή είναι η πρώτη φορά που οι μαθητές παρατηρούν την ιδιότητα, αν και αυτή κάτι φαίνεται να θυμίζει στη Φ που έχει μεγαλύτερη εξοικείωση με τις εξισώσεις και τις τεχνικές επίλυσης τους. Ίσως η χρήση αυτής της ιδιότητας να είναι το γεγονός που βοηθάει τους μαθητές να ξεφύγουν από το τέλμα που βρέθηκαν με τη χρήση της μεταβλητής στις αλγεβρικές εξισώσεις. Ο ρόλος του μοντέλου της ζυγαριάς είναι εμφανής στην παραπάνω διαδικασία καθώς χωρίς την εστίαση σε εκείνο, όπως είδαμε παραπάνω, η ίδια η μεταβλητή είναι εμπόδιο στην περαιτέρω εξέλιξη της επίγνωσης της εξίσωσης.

Νοηματοδότηση αλγεβρικών εξισώσεων με χρήση των βασικών χαρακτηριστικών της ζυγαριάς

Όπως παρατηρήσαμε ήδη, η ύπαρξη του χ και στα δύο μέλη είναι πιθανότατα η αιτία που καθιστά τις αλγεβρικές εξισώσεις σημαντικά δυσκολότερες στη διαχείριση τους σε σύγκριση με τις αριθμητικές. Η βασική ιδιότητα της ζυγαριάς παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη νοηματοδότηση των συγκεκριμένων εξισώσεων και στην ανάπτυξη αλγεβρικού συλλογισμού από τους μαθητές. Ιδιαίτερα, ο τρόπος με τον οποίο απεικονίζεται η ιδιότητα στο περιβάλλον σε συνδυασμό με τη χρήση των δρομέων, βοηθάει ιδιαίτερα τους μαθητές. Όπως θα δούμε στα τέσσερα παραδείγματα σε αυτήν την ενότητα, οι μαθητές κάνουν μεγάλη πρόοδο στην ανάπτυξη των τριών κριτηρίων του Radford. Στο πρώτο παράδειγμα βλέπουμε σαφώς την έλλειψη της αναλυτικότητας καθώς οι μαθητές θεωρούν πως δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε τη μεταβλητή και από τα δύο μέλη καθώς δεν την γνωρίζουμε. Στα επόμενα τρία αποσπάσματα θα παρατηρήσουμε σημαντικά βήματα στην πορεία προς την αλγεβρική σκέψη. Τα επεισόδιά αυτά είναι κυρίως συνδεδεμένα με την αναλυτικότητα όπως αυτή φαίνεται να εδραιώνεται στη σκέψη των μαθητών μέσω της χρήσης της βασικής ιδιότητας της ζυγαριάς.



Εικόνα 25 Δραστηριότητα 3 - Επίλυση με βασική ιδιότητα ζυγαριάς

Επιστρέφοντας στη δεύτερη δραστηριότητα, αφού πλέον οι μαθητές είχαν «ανακαλύψει» τη βασική ιδιότητα της ζυγαριάς ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

Ε: Τέλεια. Αν αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό και από τα δύο μέλη, θα συνεχίσει να ισορροπεί;

Φ: Ναι.

Α: Ναι.

Ε: Ποιον αριθμό θα θέλατε να αφαιρέσετε και από τα δύο μέλη;

Φ: Ας πούμε το 2.

Ε: Το 2… Εμάς τι είπαμε πως μας ενοχλεί; Ότι έχουμε χ και στις δύο μεριές.

Φ: Ναι.

Ε: Το χ είναι ένας αριθμός;

Φ: Είναι, αλλά άγνωστος.

Ε: Άγνωστος όντως αλλά είναι κάποιος αριθμός.

Φ: Ναι.

Ε: (…) Μπορούμε μήπως να το αφαιρέσουμε αυτό το χ; Τι λέτε;

Φ: Αφού δεν το ξέρουμε.

Εδώ βλέπουμε πως οι μαθητές έχουν πλέον στη φαρέτρα τους μια σημαντική νέα γνώση: ότι αν αφαιρέσουμε ή προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό και στις δύο μεριές μιας ζυγαριάς που ισορροπεί αυτή θα συνεχίσει να ισορροπεί, αυτή είναι η «βασική» ιδιότητα της ζυγαριάς. Έχουν ήδη έρθει αντιμέτωποι με πολλά στιγμιότυπα (instances) αυτής της ιδιότητας χωρίς να το γνωρίζουν. Στο παραπάνω απόσπασμα όμως φαίνεται ξεκάθαρα η προσκόλληση στη λέξη αριθμός: πρέπει να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο *αριθμό* για να ισχύει. Αριθμός για την Φ και τον Α είναι ένας γνωστός αριθμός. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά η Φ: το χ είναι αριθμός αλλά είναι άγνωστος. Δε θα μπορούσε να διατυπώσει πιο ξεκάθαρα το αντίθετο της αναλυτικότητας: το χ είναι άγνωστος αριθμός και άρα δε μπορούμε να κάνουμε πράξεις με αυτό. Ενώ αν αφαιρέσουμε το 1 ή το 2 από τις δύο πλευρές της ζυγαριάς θα συνεχίζει να ισορροπεί.

Ο παραπάνω διάλογος συνεχίζει ως εξής:

Ε: Δεν το ξέρουμε, αυτό είναι αλήθεια. Αλλά αν έχουμε μια ποσότητα που δεν την ξέρουμε, ας την πούμε χ, και έχουμε και μια ζυγαριά που ισορροπεί, ν και στα δύο μέρη προσθέσουμε αυτήν την ποσότητα θα ισορροπεί ή όχι;

Φ: Θα ισορροπεί.

Ε: Γιατί; Επειδή…

Φ: Γιατί θα προσθέσουμε το ίδιο πράγμα.

Ε: Άρα έχει σημασία αν ξέρουμε ή όχι αυτό που προσθέτουμε;

Α+Φ: Όχι.

Εδώ φαίνεται πως οι μαθητές αρχίζουν να παραβλέπουν ότι το χ είναι άγνωστος και η εστίαση τους μεταφέρεται στην ιδιότητα της ζυγαριάς: προσθέτουμε έναν αριθμό και στα δύο μέρη μιας ζυγαριάς που ισορροπεί. Καταλήγουν πως η ζυγαριά θα συνεχίσει να ισορροπεί, αν και δεν γνωρίζουμε ακριβώς ποιος είναι αυτός ο αριθμός που προσθέσαμε. Αυτό είναι ένα βήμα προς τη ζητούμενη απροσδιοριστία (indeterminacy) αλλά και την αναλυτικότητα, καθώς οι μαθητές κάνουν πράξεις με την άγνωστη ποσότητα, αντιμετωπίζοντάς την ως γνωστό αριθμό. Η παραπάνω εξίσωση συνεχίζει να είναι αλγεβρική αλλά πλέον μέσα από την ιδιότητα της ζυγαριάς η δυσκολία που έγκειται στην ύπαρξη μεταβλητής και στα δύο μέρη ίσως μπορεί να παρακαμφθεί. Η επίγνωση της έννοιας της εξίσωσης έχει εμφανώς αλλάξει σε αυτό το σημείο, κυρίως λόγω της μετατόπισης της εστίασης από τους αριθμούς στις ιδιότητες. Οι μαθητές μπορούν πλέον να αφαιρέσουν τη μεταβλητή και από τα δύο μέρη, αφήνοντας έτσι χ μόνο στο ένα. Έτσι θα καταλήξουν σε μια αριθμητική εξίσωση, την οποία όπως είδαμε πριν, μπορούν να αντιμετωπίσουν με μεγαλύτερη σιγουριά. Αυτό είναι ένα στιγμιότυπο μάθησης όπου γίνεται πρακτική εφαρμογή της γνωστής πλέον ιδιότητας, δίνοντας έτσι μια νέα μορφή στην επίγνωση των εννοιών τόσο της εξίσωσης όσο και της μεταβλητής.

Η αντιμετώπιση από την άλλη ομάδα όμως είναι αρκετά διαφορετική:

> *Ε: Αν αφαιρέσουμε από τα αριστερά χ τι πρέπει να κάνουμε από τα δεξιά για να ισορροπεί;*
>
> *Μ: Να αφαιρέσουμε…*
>
> *Ε: Πόσο;*
>
> *Μ: Το χ.*
>
> *Ε: Το χ. Άρα από τα δεξιά αφαιρούμε χ, από τα αριστερά αφαιρούμε χ, οπότε αυτή πρέπει να ισορροπεί. Μας πειράζει που δεν ξέρουμε πόσο είναι το χ;*
>
> *Μ: Όχι.*

Εδώ βλέπουμε πως για τη Μ δεν έχει σημασία το ότι δε γνωρίζουμε το χ: είναι ένας αριθμός και μπορούμε εφαρμόσουμε την ιδιότητα για αυτόν τον αριθμό κανονικά. Το παραπάνω αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα αναλυτικότητας και θεωρώ είναι κομβικό σημείο στην πορεία ανάπτυξης του αλγεβρικού συλλογισμού της Μ. Εστιάζοντας στην ιδιότητα και όχι στον αριθμό και χρησιμοποιώντας μια άγνωστη ποσότητα με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως θα έκανε και με μια γνωστή, η Μ απομακρύνεται από τα αριθμητικά επιχειρήματα. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βλέπει τα πράγματα και η ΕΥ.

Σε άλλο αντίστοιχο απόσπασμα η ΕΥ προσπαθεί να εξηγήσει τις ιδιότητες της εξίσωσης τις οποίες γνωρίζει και εφαρμόζει στο χαρτί μέσω της ζυγαριάς:

> *ΕΥ: Όπως είχαμε πει πριν με τη ζυγαριά πρέπει για να ισχύει η ισότητα πρέπει να βάζουμε και να βγάζουμε την ίδια ποσότητα και από τις δύο μεριές.*

Ε: Όντως.

ΕΥ: Άρα θεωρητικά αφού θέλουμε να πάμε το χ από την άλλη μεριά πρέπει να…

(παύση)

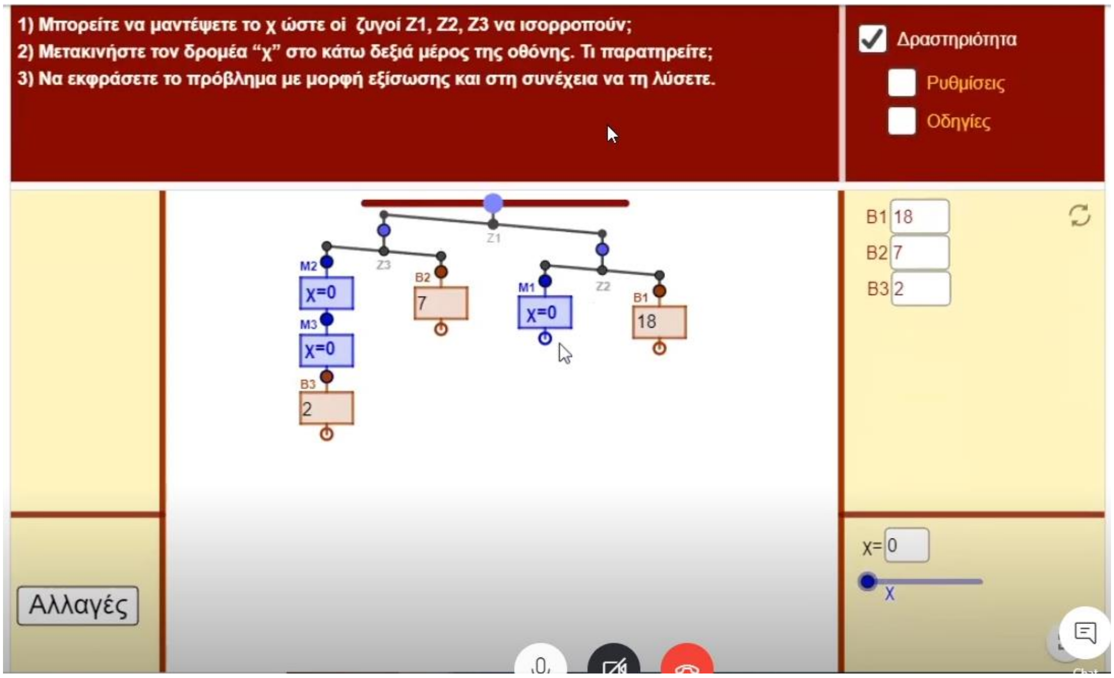
ΕΥ: Αν βάλουμε -χ από τη μία πρέπει να βάλουμε -χ και από την άλλη.

Δεδομένου ότι η ΕΥ έχει μεγαλύτερη εμπειρία αλλά και ευχέρεια διαχείρισης των εξισώσεων ήθελε να μεταφέρει το χ στην άλλη μεριά αλλάζοντάς του πρόσημο, μια πολύ συνηθισμένη τακτική επίλυσης εξισώσεων. Αφού συζητήσαμε ότι κάτι τέτοιο όντως ισχύει, εκείνη προσπάθησε να το ερμηνεύσει με ιδιότητες της ζυγαριάς. Μετά από λίγη σκέψη κατέληξε πως πρακτικά η μεταφορά στην άλλη μεριά δεν είναι παρά η πρόσθεση της αντίθετης ποσότητας και στα δύο μέρη. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό βήμα για την ΕΥ καθώς αν και γνωρίζει τις τεχνικές επίλυσης εξισώσεων και τις εφαρμόζει συχνά, μέχρι τώρα δεν είχε αναρωτηθεί γιατί ισχύουν.

Στα παραπάνω αποσπάσματα είδαμε χαρακτηριστικές δυσκολίες των μαθητών της πρώτης ομάδας στη χρήση της βασικής ιδιότητας της ζυγαριάς. Αντί για συγκεκριμένους αριθμούς όπως είχαν ήδη δει, χρειάστηκε να αφαιρέσουν το χ και από τα δύο μέρη. Αρχικά αυτό τους φάνηκε αδύνατο καθώς δε γνωρίζουμε το χ. Εστιάζοντας στη συμπεριφορά της ζυγαριάς όμως, οι μαθητές συμπέραναν πως δεν έχει σημασία που δε γνωρίζουμε ακριβώς ποιον αριθμό αφαιρούμε, αρκεί να είναι ο ίδιος και στις δύο μεριές. Το βήμα αυτό θεωρώ πως είναι ένα από τα σημαντικότερα που θα κάνουν στην πορεία εξέλιξης του αλγεβρικού συλλογισμού καθώς είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα προοδευτικής εξέλιξης της επίγνωσης γύρω από τη μεταβλητή: από κάτι άγνωστο και άχρηστο σε κάτι άγνωστο μεν χρήσιμο δε, αν εκμεταλλευτούν γνωστές ιδιότητες. Επιπλέον, βλέπουμε πως οι ιδιότητες των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται συχνά στο χαρτί εδώ μεταφράστηκαν για πρώτη φορά σε ιδιότητες ζυγαριάς. Είναι σαφές και για τις δύο ομάδες σε αυτό το σημείο πως το χ είναι ο ίδιος αριθμός στην ίδια εξίσωση. Ένας αριθμός σαν όλους τους άλλους, με τον οποίο μπορούμε να κάνουμε πράξεις και να χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες σαν να ήταν γνωστός, χωρίς όμως να είναι. Η εξέλιξη του αριθμητικού σε αλγεβρικού συλλογισμού κυρίως μέσω τις νοηματοδότησης της έννοιας της εξίσωσης είναι πλέον εμφανής και για τους τέσσερις μαθητές. Σημαντικό ρόλο έπαιξε σε αυτό η εικόνα της ζυγαριάς από την ενδιάμεση δραστηριότητα, καθώς εκεί φαινόταν ξεκάθαρα γιατί ισχύει η βασική ιδιότητα, γεγονός που φάνηκε να πείθει τους μαθητές και τους δημιούργησε μεγαλύτερη σιγουριά κατά τη χρήση της.

Νοηματοδότηση εξισώσεων με θετικές ρητές ρίζες μέσω της ζυγαριάς

Κατά την ενασχόληση των μαθητών με πολλαπλές ζυγαριές, η έννοια της εξίσωσης δεν ήταν πλέον απόλυτα ταυτισμένη με αυτήν της ισορροπίας. Στα επόμενα τρία αποσπάσματα θα δούμε με ποιον τρόπο διαχειρίστηκαν οι μαθητές εξισώσεις που δεν είχαν για ρίζα τους φυσικό αριθμό, με εστίαση στη συμπεριφορά της ζυγαριάς. Στο πρώτο παράδειγμα θα δούμε πως, με χαρακτηριστική ευκολία, «μαντεύουν» τη λύση της εξίσωσης που ορίζει ο ζυγός Ζ2 στην τρίτη δραστηριότητα. Σε αντιπαραβολή με αυτό θα μελετήσουμε την εντελώς διαφορετική προσέγγιση τους στα επόμενα δύο παραδείγματα. Κατά τη μελέτη της ισορροπίας του ζυγού Ζ3, ο οποίος ισορροπεί για χ= 2,5 , οι μαθητές της πρώτης ομάδας φαίνεται πως αγνοούν την ύπαρξη των ρητών αριθμών. Αυτό ίσως οφείλεται αρχικά στο ότι δεν είχαν συμπεριληφθεί ρητοί αριθμοί στις προηγούμενες δραστηριότητες. Αφού γίνεται σαφές πως οι εξισώσεις δύνανται να έχουν μη ακέραιες λύσεις, πάλι παρατηρείται μια ιδιαίτερη προσκόλληση στους περισσότερο οικείους φυσικούς αριθμούς. Στα επόμενα δύο παραδείγματα θα δούμε τη συνέχεια των παραπάνω προσπαθειών και τελικά τη γενίκευση του μοντέλου για θετικούς ρητούς αριθμούς. Στο τελευταίο απόσπασμα θα δούμε την εκ διαμέτρου αντίθετη αντιμετώπιση του ίδιου προβλήματος από την δεύτερη ομάδα, όπου από την αρχή είδαν την λύση (χ = 2,5) χωρίς καν να χρειαστούν δοκιμές ή να διερωτηθούν αν γίνεται να είναι μη φυσικός αριθμός η ρίζα της εξίσωσης. Οι μεταβλητές παίρνουν πλέον και για τους τέσσερις μαθητές οποιεσδήποτε θετικές τιμές και όχι αποκλειστικά ακέραιες.



Εικόνα 26 Δραστηριότητα 3 - Αρχική οθόνη

Η ισορροπία της κάθε ζυγαριάς ορίζει και μια εξίσωση και αυτό είναι πλέον δεδομένο για τους μαθητές. Όμως, οι ζυγαριές Z2 και Z3 αποτελούν βάρη για την εξίσωση που ορίζεται από τη Z1. Σε συνδυασμό με την πολυπλοκότητα των αλγεβρικών εξισώσεων η τρίτη δραστηριότητα ήταν ιδιαίτερα προκλητική για τους μαθητές. Αυτό όμως δεν τους επηρέασε κατά την επεξεργασία της Z2, όπου τα πράγματα ήταν πολύ απλά:

Ε: Για πες μου Α, για τη Z2 πόσο πρέπει να είναι το χ για να ισορροπεί;

Α: Ε… 18.

Ε: Εύκολο έ; Συμφωνείτε; Αφού το βάρος από τη μια είναι 18 πρέπει και από την άλλη να γίνει 18. Συμφωνείς Φ;

Φ: Ναι.

Ο Α απάντησε άμεσα πως πρέπει το χ να είναι 18, αφού είχαμε 18 κιλά στη μία μεριά και χ στην άλλη. Η Φ συμφώνησε. Είναι σαφές πως σε αυτό το σημείο η ισορροπία της ζυγαριάς έχει αναμφίβολα ταυτιστεί με την ισότητα στην εξίσωση.

Η ζυγαριά Z3 έχει σίγουρα μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Όταν ζητήθηκε από την Φ. να μαντέψει το χ ώστε να ισορροπεί η Z3 ακολούθησε ο εξής διάλογος:

Ε: Πες μου εσύ Φ για τη Z3. Κάνε μια μαντεψιά. Αυτό ίσως να μην είναι και τόσο εύκολο.

Φ: 3.

Ε: 3; Για να δούμε, για βάλε όπου χ το 3 με το μυαλό.

Φ: Ναι ορίστε… Α όχι…

Ε: 3+3=6 ε;

Φ: Α όχι… βλακεία… Εμμ…

Ε: Τι παρατηρείς; Ότι βάζεις 3 και είναι πολύ;

Φ: Ναι

Ε: Άρα πήγαινε κάτω στο δρομέα και βάλε χ=3. Τι παρατηρούμε; Για χ=3 προς τα πού γέρνει;

Φ: Προς τα αριστερά.

Εδώ έχουμε μια εξίσωση που δεν έχει για λύση φυσικό αριθμό. Η Φ. προσπαθώντας να βρει το χ για το οποίο ισορροπεί η Ζ3 δοκίμασε με το δρομέα τις τιμές χ = 2 και χ = 3 και παρατήρησε πώς η ζυγαριά γέρνει προς τα δεξιά και τα αριστερά αντίστοιχα. Στο σημείο αυτό θεώρησε πως αυτό σημαίνει : « Ότι δε μπορεί να ισορροπήσει». Μέχρι τώρα οι εξισώσεις είχαν όλες ακέραιες, και συγκεκριμένα φυσικές λύσεις. Μια επιπλέον χρήσιμη πληροφορία είναι και ότι οι μαθητές δεν είχαν εμπειρία τόσο στο συγκεκριμένο περιβάλλον όσο και σε ψηφιακά περιβάλλοντα στα μαθηματικά γενικότερα. Αυτό ίσως επηρεάζει τη δυνατότητα τους να υποθέσουν ότι το χ μπορεί να παίρνει και άλλες τιμές πέρα από αυτές που ήδη έχουν δει ότι παίρνει. Οι μαντεψιές ήταν πιο εύκολες και η οπτική επιβεβαίωση μέσω του δρομέα και της ισορροπίας της ζυγαριάς ήταν άμεση. Η εξίσωση αυτή (2χ + 2 = 7) είναι αριθμητική αφού έχει χ μόνο στη μία μεριά. Οι αριθμητικές εξισώσεις φάνηκαν να μην έχουν δυσκολέψει τους μαθητές μέχρι τώρα όμως το ότι δεν υπάρχει εμφανής φυσική λύση είναι αρκετό για να θεωρήσει η Φ ότι δεν υπάρχει λύση γενικά. Ο Α συμφώνησε μαζί της:

Ε: Να μας πει και ο Α τι σκέφτεται. Μπορεί να ισορροπήσει η Ζ3; Ναι ή όχι;

Α: Αν αλλάξουμε κάτι; (Εννοεί να προσθέσουμε κάτι στη μία μεριά)

Ε: Χωρίς να αλλάξουμε κάτι.

Α: Χωρίς να αλλάξουμε κάτι όχι. Δε μπορεί.

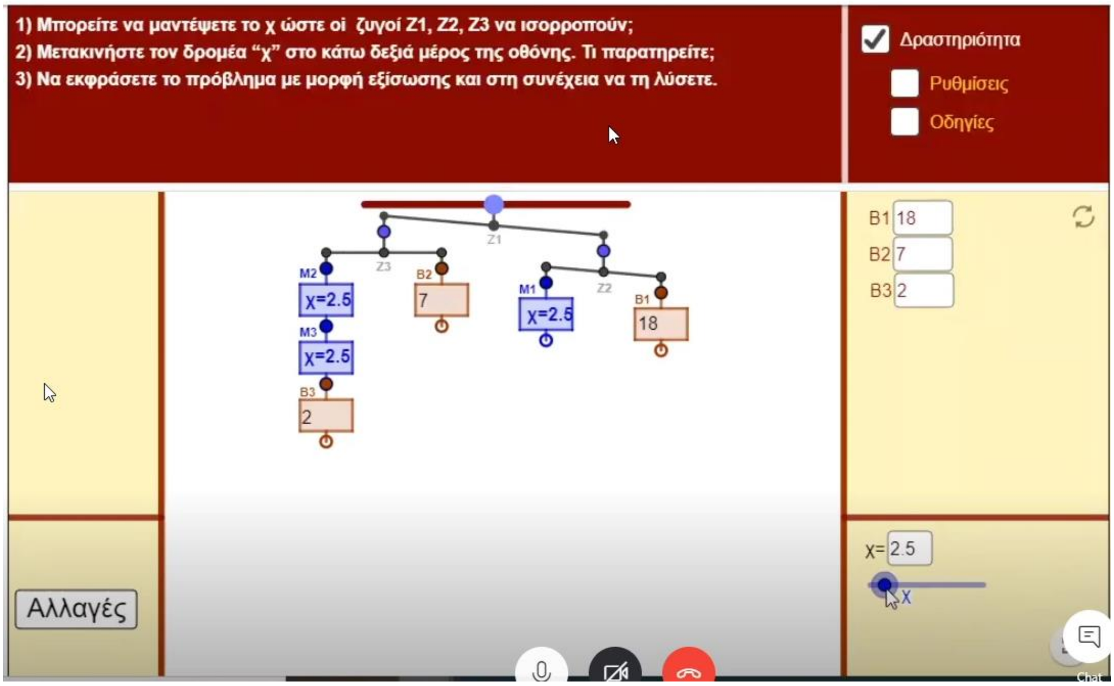
Όπως είδαμε σε αυτά τα αποσπάσματα οι μαθητές είναι σε θέση να υπολογίσουν ρίζες μιας εξίσωσης με φυσικές λύσεις. Αν και οι ίδιοι έχουν εμπειρία με δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα, θεωρούν πως μια εξίσωση που δεν έχει φυσική λύση είναι αδύνατη. Αυτό ίσως οφείλεται στην μέχρι τώρα ενασχόληση τους με το Πολύζυγο, καθώς ίσως δεν ήταν σαφές πως μπορούμε να επιτρέψουμε στο χ να παίρνει και άλλες τιμές, μιας και σε όλες τις προηγούμενες δραστηριότητες ήταν ακέραιος. Η εστίαση τους ήταν για άλλη μια φορά στις αριθμητικές ιδιότητες και στις απλές πράξεις και η εξέλιξη του αλγεβρικού τους τρόπου σκέψης μάλλον απούσα σε αυτό το σημείο. Στη συνέχεια όπου θα γίνει σαφές πως η μεταβλητή μπορεί να παίρνει και άλλες τιμές, θα παρατηρήσουμε μια σημαντική αλλαγή.

Αφού οι μαθητές επεξεργάστηκαν τη ζυγαριά η οποία δεν ισορροπούσε για κάποιον φυσικό αριθμό, διατύπωσαν ότι μάλλον δεν έχει λύση. Στο σημείο αυτό ερωτήθηκαν για την ύπαρξη αριθμών ανάμεσα στο 2 και στο 3 και ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

> *Ε: Αφού είπαμε πως για χ=2 γέρνει προς τα δεξιά ενώ για χ=3 προς τα αριστερά. Να σας πω, ανάμεσα στο 2 και στο 3 υπάρχουν άλλοι αριθμοί;*
>
> *Φ: Το δυόμισι.*
>
> *Ε: Υπάρχει άλλος;*
>
> *Α: Ναι, 2,1. 2,2. 2,3. 2,4 …*
>
> *Ε: Πάρα πολλοί ε;*
>
> *Α+Φ: Ναι.*
>
> *(…)*
>
> *Ε: Υπάρχει περίπτωση για κάποιο αριθμό ανάμεσα στο 2 και στο 3 να ισορροπεί;*
>
> *Φ: Ε όλο και κάποια περίπτωση θα υπάρχει.*
>
> *Ε: Μπορεί ε;*
>
> *Φ: Ναι.*

Αφού λοιπόν θυμήθηκαν ότι υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στο 2 και στο 3, η Φ αναφέρει πως υπάρχει περίπτωση τελικά να ισορροπεί η ζυγαριά για κάποιο αριθμό ανάμεσα στο 2 και στο 3.

Έχοντας πατήσει και το κουμπί που επιτρέπει στο δρομέα να παίρνει και δεκαδικές τιμές παρατηρούν ότι για χ = 2,5 η Ζ2 ισορροπεί:



Εικόνα 27 Χρήση του δρομέα ώστε να δοκιμαστούν και μη φυσικές τιμές του χ.

Ε: Τι έγινε εδώ;

Φ: Στο δυόμισι ισορρόπησε, γιατί είναι 5+2=7.

Ε: Α συμφωνείς;

Α: Συμφωνώ απόλυτα.

Ε: Αν το βάζαμε 2,4 χωρίς να αλλάξουμε τον δρομέα, τι θα έκανε η ζυγαριά; Προς τα πού θα έγερνε;

Φ: Προς τα δεξιά;

Ε: Α τι λες; Δεξιά ή αριστερά;

Α: Εεε μισό λεπτό… (μικρή παύση). Δεξιά.

Από τον παραπάνω διάλογο είναι σαφές πως η ισορροπία της ζυγαριάς είναι ταυτόσημη με την ισότητα στην εξίσωση και αντίστοιχα η μη ισορροπία ταυτίζεται με την ανάλογη σχέση της ανισότητας Αυτό αποτελεί γνώση πλέον και για τους τέσσερις μαθητές. Το γεγονός ότι η εστίαση τους μεταφέρθηκε από τους αριθμούς που δοκίμαζαν στον δρομέα αλλά και στην οπτική απεικόνιση της ζυγαριάς ώθησε και τους δύο να καταρρίψουν άμεσα την εικασία ότι η εξίσωση δεν θα έχει λύση αφού οι πιθανές φυσικές τιμές του χ δε μας κάνουν. Στη συνέχεια γενικεύουν και το ότι η ζυγαριά θα γέρνει προς τα αριστερά και τα δεξιά αντίστοιχα και για μη φυσικούς αριθμούς. Ένα άλλο στοιχείο που μπορεί να έπαιξε σημαντικό ρόλο είναι το ότι το περιβάλλον μέχρι στιγμής έπαιρνε μόνο φυσικές τιμές. Ίσως οι μαθητές να θεώρησαν αρχικά πως το ερώτημα να ήταν πάνω στις φυσικές λύσεις τις εξίσωσης, μέχρι να διασαφηνιστεί ότι το ζητούμενο είναι οι λύσεις γενικά.

Από την άλλη οι μαθήτριες της δεύτερης ομάδας δεν είχαν κανένα πρόβλημα στη χρήση μη ακέραιων αριθμών στη θέση του χ, από την πρώτη στιγμή που είδαν τη δραστηριότητα.

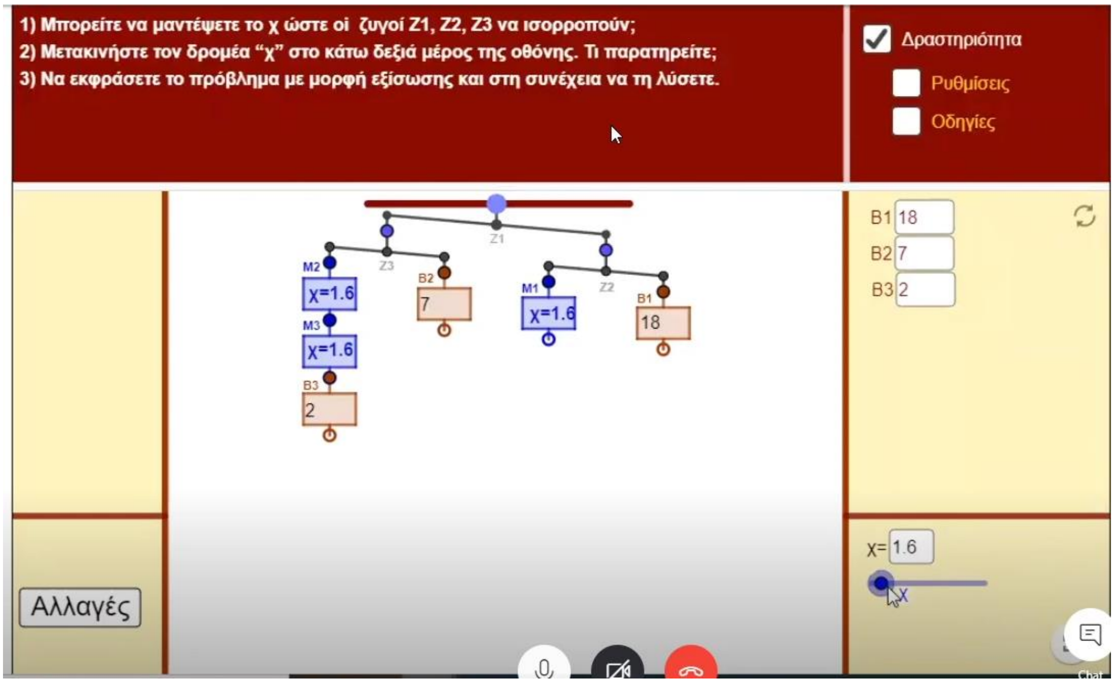
> *ΕΥ: Για να είναι… Αν αυτό είναι 7 πρέπει να είναι και εκείνο 7. Άρα 7-2=5 και 5/2=2μισι.*
>
> *Ε: Εγώ συμφωνώ.*
>
> *Μ: Και γω.*

Χωρίς καμία αμφιβολία ανέφεραν πως πρέπει να είναι το χ = 5 / 2 για να ισορροπεί η ζυγαριά, το οποίο επαλήθευσαν αργότερα και με τη χρήση του δρομέα.

Όπως βλέπουμε στα παραπάνω περιστατικά οι μαθητές αντιμετώπισαν με δυσπιστία μια αριθμητική, απλή εξίσωση. Αυτό οφείλεται στο ότι η εξίσωση αυτή δεν είχε εμφανείς φυσικές λύσεις όπως οι προηγούμενες. Παρατήρησαν πως για χ = 2 και για χ = 3 η ζητούμενη ζυγαριά έγερνε προς τα δεξιά και τα αριστερά αντίστοιχα. Η αρχική τους εκτίμηση ήταν πως η ζυγαριά αυτή δεν δύναται να ισορροπήσει. Αφού επεξεργάστηκαν τον δρομέα, ο οποίος κινούνταν σε φυσικές τιμές, επιβεβαίωσαν τον αρχικό τους ισχυρισμό ότι η ζυγαριά Ζ2 δεν ισορροπεί πότε. Η διατύπωση αυτή ίσως οφείλεται στο ότι στις προηγούμενες δραστηριότητες ο δρομέας έπαιρνε αποκλειστικά φυσικές τιμές. Επιτρέποντας στον δρομέα να παίρνει και δεκαδικές τιμές οι μαθητές παρατήρησαν εύκολα πως για χ = 2,5 η Ζ2 τελικά ισορροπεί, το οποίο επιβεβαίωσαν και αριθμητικά. Εκτιμώ πως η αλλαγή της εστίασης από τις εύκολες αριθμητικές πράξεις στην εικόνα της ζυγαριάς οδήγησε τους μαθητές στο να γενικεύσουν τις ιδιότητες των εξισώσεων και των ανισώσεων και για αριθμούς που δεν είναι φυσικοί. Ως προς την πορεία εξέλιξης του αλγεβρικού τρόπου σκέψης μπορούμε να πούμε πως εδώ γίνεται ένα βήμα προς την απροσδιοριστία καθώς γενικεύεται το χ και παίρνει πλέον και ρητές τιμές.

Νοηματοδότηση της εξίσωσης μέσω πολλαπλών ζυγαριών

Κατά την επεξεργασία της τρίτης δραστηριότητας, αφού εξετάστηκαν οι ισορροπίες των ζυγών Ζ2 και Ζ3, μιας αριθμητικής και μιας απλής αλγεβρικής εξίσωσης αντίστοιχα, οι μαθητές ασχολήθηκαν με τη ζυγαριά Ζ1. Αυτή έχει στα δύο άκρα της τις προηγούμενες δύο, γεγονός που την καθιστά σημαντικά πιο πολύπλοκη. Οι ζυγαριές από εξισώσεις τώρα γίνονται βάρη για πρώτη φορά. Στα επεισόδιά που ακολουθούν θα παρακολουθήσουμε τις αλλαγές στον τρόπο σκέψης των μαθητών σε ότι αφορά τις πολλαπλές εξισώσεις. Αρχικά θα δούμε την αντιμετώπιση της πρώτης ομάδας, όπου έγινε μια σταδιακή κατασκευή της ζητούμενης εξίσωσης μέσω επεξεργασίας των προηγούμενων, βασισμένη κυρίως στην εικόνα της ζυγαριάς όπως φαίνεται μες στο περιβάλλον. Οι μαθητές παραμέρισαν το αλγεβρικό στοιχείο και εστίασαν στο ίδιο το μοντέλο, γεγονός που φάνηκε να τους βοηθάει στην εξεύρεση της ζητούμενης εξίσωσης. Η πορεία αυτή όμως ήταν αμφίδρομη, καθώς σε αρκετά σημεία, κυρίως ο Α αντιμετώπισε δυσκολίες, όπως ακριβώς την πρώτη φορά που επεξεργάστηκε αντίστοιχη αλγεβρική εξίσωση. Στη συνέχεια οι μαθητές επιχειρούν να σχετίσουν την ισορροπία του μεγάλου ζυγού με αυτή των δύο μικρότερων, άμεσα όμως βλέπουν πως αυτό δεν οδηγεί κάπου. Αυτό γίνεται κυρίως μέσω της παρατήρησης της μεριάς προς την οποία γέρνουν οι τρεις ζυγαριές όσο οι ίδιοι αλληλεπιδρούν με τους δρομείς. Τέλος θα παρουσιαστούν δύο αποσπάσματα από τη δεύτερη ομάδα, η οποία είδε με σχετική ευκολία τη ζητούμενη εξίσωση. Οι μαθήτριες αναγνώρισαν ποια βάρη θα πρέπει να εξισώνονται, κατάλαβαν πως πρόκειται για μια αλγεβρική εξίσωση όπως οι προηγούμενες , και ανακάλεσαν τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν πριν. Έτσι κατάφεραν να ορίσουν και να λύσουν με ιδιαίτερη ευκολία και πληθώρα αλγεβρικών επιχειρημάτων την αρκετά απαιτητική αυτή εξίσωση.



Εικόνα 28 Ζυγαριά: Από εξίσωση σε βάρος

Οι μαθητές της πρώτης ομάδας, αφού επεξεργάστηκαν τη Ζ2 και τη Ζ3 ρωτήθηκαν για την ισορροπία της ομολογουμένως πιο πολύπλοκης Ζ1 και ακολούθησε ο εξής διάλογος:

Ε: Άρα από τη δεξιά μεριά της Ζ1 πόσα κιλά έχουμε συνολικά;

Α: Ε… (μικρή παύση) 20 και μισό.

Ε: 20 και μισό έχουμε τώρα. Γενικά με το χ;

Α: Α… 18.

Ε: Μόνο 18;

Α: Όχι.

Ε: 18 και κάτι ακόμα δεν έχει;

Α: Ναι.

Ε: Τι είναι αυτό το κάτι ακόμα;

Α: 18χ.

Ε: 18χ ή 18+χ.

Α: 18+χ.

Στο συγκεκριμένο σημείο είναι η πρώτη φορά που οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν τη συμπεριφορά μιας ζυγαριάς που έχει άλλες ζυγαριές στις δύο μεριές της. Πλέον η Ζ2 από εξίσωση είναι βάρος. Αυτό είναι μια εντελώς καινούργια οπτική πάνω στο ζητούμενο πρόβλημα. Μέχρι τώρα η ζυγαριά ήταν απόλυτα ταυτισμένη με μια εξίσωση (αν ισορροπούσε) ή με μια ανίσωση (αν έγερνε προς τη μία μεριά). Το να νοηματοδοτήθει η ζυγαριά ως βάρος, συγκεκριμένα το άθροισμα των βαρών στα δύο άκρα της είναι ένα μεγάλο βήμα προς την αναλυτικότητα. Ο Α βλέπει αμέσως το ότι το δεξί μέρος της Ζ1 είναι ολόκληρη η Ζ2, και αθροίζει τα κιλά της για να βρει το ζητούμενο βάρος στη δεξιά μεριά. Εστιάζει όμως στις αριθμητικές τιμές και συγκεκριμένα θεωρεί πως το χ θα πρέπει να είναι όσο δείχνει ο δρομέας. Δε βλέπει ακόμα τη γενικότητα που διέπει αυτή τη σχέση καθώς θέλει να προσθέσει βάρη και αρκείται στους γνωστούς αριθμούς. Αφού μετά από συζήτηση καταλήγει ότι έχει 18 και κάτι ακόμα, φτάνει στο συμπέρασμα ότι έχουμε 18 + χ κιλά στη δεξιά μεριά της Ζ1.

Στη συνέχεια η Φ. αναφέρει και τα αντίστοιχα βάρη στην αριστερή μεριά.

> *Ε: Μου είπε ο Α πως από τη δεξιά μεριά της Ζ1 έχει 18+χ. Θέλω εσύ να μου πεις τι έχει από την αριστερή μεριά.*
>
> *Φ: Οκ. Έχει 9+2χ.*
>
> *Ε: Έχει 9+2χ. Συμφωνείς Α;*
>
> *Α: Ναι.*
>
> *Ε: Άρα αν θέλαμε να γράψουμε μια εξίσωση για τη Ζ1 ποια θα ήταν;*

Στο σημείο αυτό φτάνουμε στο κομβικό ερώτημα: Πότε θα ισορροπεί η Ζ1;

Τόσο στο δεξί της μέρος όσο και στο αριστερό δεν έχει απλά βάρη αλλά άλλες ζυγαριές. Οι ζυγαριές αυτές με τη σειρά τους αντιμετωπίστηκαν πριν λίγο σαν εξισώσεις και βρέθηκαν οι λύσεις τους. Μήπως αυτές οι λύσεις μας κάνουν και τώρα; Και οι δύο μαζί με κάποιο τρόπο; Η κάθε μια ξεχωριστά; Το άθροισμά τους;

> *Φ: Είναι 9+2χ*
>
> *Ε: Η αριστερή μεριά δηλαδή*
>
> *Φ: =18+χ*

Ε: Συμφωνείς Α;

Α: Ναι.

Ε: Αυτό είναι μια εξίσωση. Συμφωνούμε; Σαν την προηγούμενη που κάναμε.

Φ: Απλά έχει και στα δύο άγνωστο.

Στο παραπάνω απόσπασμα βλέπουμε πως η Φ. αναγνωρίζει άμεσα πως πρέπει να εξισώσουμε τις δύο ποσότητες για να ισορροπεί η Ζ1. Το ότι οι ποσότητες αυτές μέχρι πριν λίγο ήταν εξισώσεις δεν την επηρέασε καθόλου: τώρα τις βλέπει σαν βάρη στα άκρα μιας ζυγαριάς. Αυτό πιστεύω πως είναι μια πολύ ισχυρή ένδειξη αλγεβρικού συλλογισμού: κάτι που ήταν κάπως τώρα ονομάζεται αλλιώς και έχει διαφορετική χρήση (denotation), άγνωστες ποσότητες υπάρχουν και στις δύο μεριές (indeterminacy) και μπορούμε μάλιστα να κάνουμε και πράξεις με αυτές (analyticity) ώστε να φέρουμε την εξίσωση σε μορφή που μας βολεύει. Οι ιδιότητες της ζυγαριάς γενικεύονται για όλο και πιο πολύπλοκες εφαρμογές για την Φ.

Ο Α. από την άλλη ακόμα δυσκολεύεται να κατανοήσει τις ιδιότητες. Αναγνωρίζει πως δεν είναι βολική μορφή η $9 + 2χ = 18 + χ$ αφού είναι αριθμητική εξίσωση. Θυμάται πως πριν σε αντίστοιχη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε η βασική ιδιότητα και το πρόβλημα μετασχηματίστηκε σε ένα απλούστερο αλλά προτείνει μια φαινομενικά τυχαία μετατροπή (να προσθέσουμε 2 και στις δύο μεριές) χωρίς κάποιο εμφανή σκοπό παρά μόνο μια δοκιμή. Η διαδικασία αυτή είναι για εμένα καθαρά αριθμητική καθώς απουσιάζουν όλα τα κριτήρια αλγεβρικού συλλογισμού. Αυτό αποδεικνύεται και από τον παρακάτω διάλογο:

Ε: Το χ. Α τι λες μπορούμε να βγάλουμε το χ και από τις 2 μεριές;

Α: Όχι.

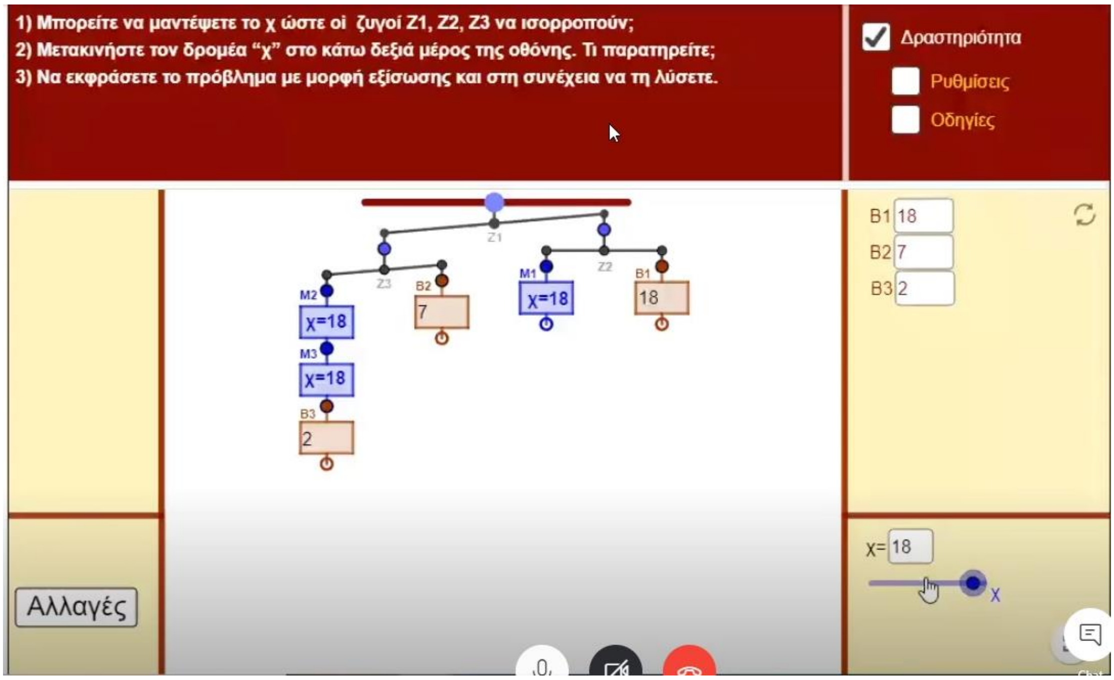
Ε: Γιατί;

Α: Μισό γιατί μπερδεύτηκα τώρα.

(μεγάλη παύση)

Όπως φαίνεται εδώ το χ είναι άγνωστος άρα δε μπορούμε να το αφαιρέσουμε από τις δύο μεριές, το οποίο προδίδει ένα ακόμα βήμα προς τα πίσω στον πορεία του αλγεβρικού συλλογισμού. Η αναλυτικότητα που έχει παρατηρηθεί σε διάφορα σημεία των επιχειρημάτων του Α δεν είναι σταθερή, καθώς συχνά χάνεται σε αλγεβρική σκέψη.

Αφού οι μαθητές ανέλυσαν το πότε και γιατί ισορροπούν οι ζυγοί Ζ2 και Ζ3 άρχισαν να υποθέτουν πως η ισορροπία αυτών των δύο κάπως πρέπει να σχετίζεται με την ισορροπία του Ζ1. Έτσι, φτάνουμε στον ακόλουθο διάλογο:



Εικόνα 29 Πολλαπλοί ζυγοί και ανεξάρτητες ισορροπίες

Ε: Και τώρα Α για πες μου εσύ. Ο Ζ1 τώρα πότε θα ισορροπεί;

Α: Ο Ζ1… Άμα ισορροπούν και οι άλλοι 2.

Ε: Τώρα ισορροπεί ο Ζ2, ισορροπεί και ο Ζ3;

Α: Ά όχι…

Ε: Ο Ζ3 είναι ο αριστερά έτσι;

Α: Ναι.

Ε: Άρα έχει κάποια σχέση ο Ζ2 με τον Ζ3;

Α: Όχι.

Εδώ βλέπουμε ξεκάθαρα πως η ισορροπία της Ζ1 ταυτίστηκε με την ισορροπία των άλλων δύο ζυγών Ζ2 και Ζ3. Το ότι και οι δύο μαθητές έχουν δει ως βάρη τις ζυγαριές και έχουν ήδη κατασκευάσει τη ζητούμενη εξίσωση στο χαρτί δεν είναι αρκετό για να το μεταφράσουν αυτό στα δεδομένα του ψηφιακού περιβάλλοντος. Η εστίαση τους εδώ στρέφεται καθαρά στις ζυγαριές, και ιδιαίτερα στις τιμές του χ για τις οποίες ισορροπούν και αγνοούν πλήρως την κατασκευασμένη εξίσωση. Βλέπουμε δηλαδή ένα παράδειγμα όπου η διαμεσολάβηση του λογισμικού δεν βοηθά στην εξέλιξη και την ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού. Κανένα από τα κριτήρια του Radford δεν αναγνωρίζεται στο παραπάνω απόσπασμα. Εκτιμώ πως αυτό οφείλεται στο ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά ένα τέτοιο ζητούμενο με πολλαπλές ζυγαριές και η μετάβαση από το χαρτί στο Πολύζυγο είναι σίγουρα σε πρώιμο επίπεδο.

Μετά από αρκετή συζήτηση καταλήγουν στο ότι για να βρεθεί το χ ώστε να ισορροπεί η Ζ1 θα πρέπει να λυθεί η αρχική εξίσωση: $2χ + 9 = χ +18$, εκεί όπου είχαν αντιμετωπίσει τις άλλες δύο ζυγαριές σαν βάρη. Με χρήση των ιδιοτήτων των εξισώσεων, και κυρίως της βασικής ιδιότητας της ζυγαριάς.

Αρκετά παρόμοια ήταν η αντίδραση των μαθητριών της δεύτερης ομάδας στην ίδια δραστηριότητα. Αρχικά θέλησαν και εκείνες να εξισώσουν τις δύο εξισώσεις, συμπέραναν όμως άμεσα πως αυτό δε βγάζει νόημα καθώς αυτές έχουν διαφορετικές λύσεις και το χ δε μπορεί να είναι ταυτόχρονα παραπάνω από ένας αριθμός.

Ε: Τι σημαίνει ότι δύο ζυγαριές ισορροπούν ταυτόχρονα;

ΕΥ: Θα έπρεπε η Ζ1 με τη Ζ3 ή η Ζ1 με τη Ζ2 ή η Ζ2 με τη Ζ3 να ισορροπούν.

Ε: Τι θα έπρεπε να γίνει όμως; Πότε ισορροπεί η μία και πότε η άλλη; Πες μου για παράδειγμα για τη Ζ1 και τη Ζ2. Πότε ισορροπεί η Ζ1;

ΕΥ: Όταν το χ είναι 9.

Ε: Και η Ζ2;

ΕΥ: Όταν το χ είναι 18.

Ε: Γίνεται να ισορροπούν ταυτόχρονα;

ΕΥ: Όχι.

Ε: Γιατί;

ΕΥ: Γιατί έχουν διαφορετικές τιμές για το χ στην κάθε περίπτωση.

Στη συνέχεια είδαν και εκείνες τις ζυγαριές ως βάρη (denotation) και τα χρησιμοποίησαν για να κατασκευάσουν τη ζητούμενη εξίσωση που μας δίνει την ισορροπία της Ζ1:

Ε: Ωραία. Και έχουμε την εξίσωση που μου είπες 9 + 2χ = 18+ χ.

Μ: Ναι.

Ε: Μπορείς να βρεις το χ τώρα; Να χρησιμοποιήσεις ό,τι λέγαμε πριν, να προσθέσεις κάτι στα δύο μέρη να αφαιρέσεις να διαιρέσεις. Θέλουμε να καταλήξουμε σε μια σχέση της μορφής χ = κάτι.

Μ: Να χωρίσουμε γνωστούς από αγνώστους.

Ε: Να χωρίσουμε γνωστούς από αγνώστους, μάλιστα. Αυτό είναι μια τεχνική, ωραία. Αλλά πως θα το κάνουμε;

Μ: 2χ-χ

Ε: 2χ-χ. Άρα τι έκανες; Αφαίρεσες ένα χ δηλαδή;

Μ: Ναι.

Ε: Και το αφαίρεσες από τα αριστερά.

Μ: Ναι.

Ε: Από τα δεξιά τι πρέπει να κάνεις;

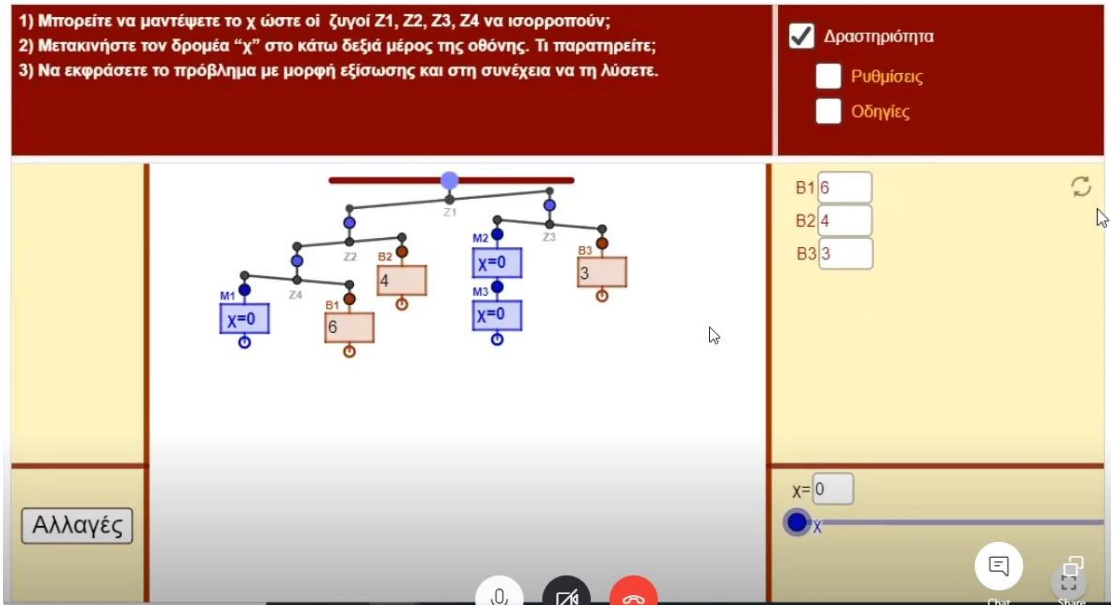
Μ: Να αφαιρέσω το χ;

Οι ιδιότητες της ζυγαριάς έχουν ταυτιστεί πλέον με τις τεχνικές επίλυσης των εξισώσεων στο χαρτί. Το χ αν και άγνωστος αντιμετωπίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο στις πράξεις και τις ιδιότητες με όλους τους γνωστούς αριθμούς (αναλυτικότητα), οι ζυγαριές από εξισώσεις ονομάστηκαν βάρη εδώ (denotation) και η απροσδιοριστία είναι στο κέντρο αυτών των δραστηριοτήτων. Με βάση τα παραπάνω θα μπορούσαμε να πούμε πως πληρούνται όλα τα κριτήρια του Radford ώστε να χαρακτηριστούν οι συλλογισμοί και των δύο μαθητριών της δεύτερης ομάδας ως αλγεβρικοί.

Στην παραπάνω δραστηριότητα οι μαθητές κλήθηκαν για πρώτη φορά να αντιμετωπίσουν κάποιες ζυγαριές όχι ως εξισώσεις όπως έκαναν μέχρι τώρα αλλά ως βάρη. Μελετώντας την ισορροπία μιας ζυγαριές με πλευρές επίσης ζυγαριές έπρεπε να γενικεύσουν την έννοια της εξίσωσης στο ψηφιακό περιβάλλον αλλά και στο αλγεβρικό, στο χαρτί τους. Με ευκολία κατάφεραν να υπολογίσουν και να εξηγήσουν τις λύσεις των δύο απλών ζυγαριών, όμως στη σύνθετη δεν είχαν την ίδια αντιμετώπιση. Αρχικά υπέθεσαν πως κάπως πρέπει να σχετίζεται με την ισορροπία των άλλων δύο, υπόθεση που κατέρρευσε κυρίως μέσα από τη νοηματοδότηση της μεταβλητής: για να ισορροπούν δύο ζυγαριές ταυτόχρονα και θα έπρεπε το χ να είναι ταυτόχρονα δύο διαφορετικοί αριθμοί. Αυτό το απέρριψαν άμεσα, στρέφοντας την εστίασή τους στα βάρη των 2 μελών της σύνθετης ζυγαριάς κατασκεύασαν τη ζητούμενη εξίσωση. Το παραπάνω αποτελεί ένα βήμα ακόμα προς την πορεία εξέλιξης του αλγεβρικού συλλογισμού: είδαν τη ζυγαριά εκεί που χρειάστηκε ως βάρος και όχι ως εξίσωση (denotation) και έκαναν πράξεις με τις άγνωστες ποσότητες σαν να ήταν γνωστές (analyticity). Τα βήματα αυτά δεν ήταν πάντοτε προς αυτήν την κατεύθυνση, καθώς σε αρκετά σημεία παρατηρήθηκαν καθαρά αριθμητικά επιχειρήματα καθώς και παραδείγματα παντελούς έλλειψης των κριτηρίων του Radford, κυρίως της αναλυτικότητας, ιδίως από τον Α.

Νοηματοδότηση εξισώσεων με αρνητικές ρίζες στο μοντέλο της ζυγαριάς

Τα πέντε αποσπάσματα που ακολουθούν τοποθετούνται όλα σε αυτήν την τελευταία δραστηριότητα. Υπήρχαν και πάλι πολλαπλές ζυγαριές, κάποιες από αυτές ισορροπούσαν για θετικούς ρητούς αριθμούς όμως υπήρχε μια μεγάλη διαφορά: αυτή τη φορά κάποιες εξισώσεις είχαν αρνητικές λύσεις. Αυτό είναι κάτι που δε θα μπορούσε να ισχύει σε ένα φυσικό μοντέλο με ζυγαριά, καθώς δεν υπάρχουν αρνητικά βάρη. Στο ψηφιακό περιβάλλον όμως έχουμε τη δυνατότητα να παρακάμψουμε αυτή την αδυναμία του μοντέλου προσπαθώντας να το γενικεύσουμε και στους αρνητικούς αριθμούς. Στο πρώτο παράδειγμα θα αναλύσουμε την αντιμετώπιση από την πρώτη ομάδα μιας εκ των εξισώσεων που είχε θετική λύση και θα την αντιπαραβάλουμε με μια αντίστοιχη με αρνητική στο δεύτερο παράδειγμα. Κατά την πρώτη τους επαφή η αντίδραση τους ήταν ανάλογη με την πρώτη εξίσωση με μη ακέραιη λύση: αναρωτήθηκαν αν γίνεται να λυθεί. Αφού την επεξεργάστηκαν και μετακίνησαν τους δρομείς κατέληξαν να ρωτήσουν αν γίνεται να πάρει το χ αρνητικές τιμές. Η χρήση των δρομέων εδώ ήταν καίριας σημασίας, καθώς οι μαθητές παρατήρησαν πως για οποιαδήποτε θετική τιμή η ζυγαριά συνεχίζει να γέρνει προς την ίδια μεριά. Στο τρίτο παράδειγμα αναλύεται το παραπάνω περιστατικό, και αναδεικνύεται η ισχύς του συγκεκριμένου μικρόκοσμου πάνω στην απεικόνιση των αρνητικών αριθμών. Η συμπερίληψη τους έρχεται, εκτιμώ, με φυσικό τρόπο, καθώς την αποζητούν οι ίδιοι οι μαθητές. Δεν τους φαίνεται περίεργο πως ασχολούνται με βάρη, δηλαδή ποσότητες θετικές στον φυσικό κόσμο. Τα αντιμετωπίζουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως κάθε άλλο βάρος. Στα τελευταία δύο αποσπάσματα βλέπουμε την αντίστοιχη διαχείριση από τη δεύτερη ομάδα. Οι μαθήτριες έχουν μια πιο άμεση στρατηγική, βλέπουν αμέσως πως η εξίσωση έχει αρνητική λύση και χωρίς περαιτέρω συζήτηση το δέχονται αυτό και συνεχίζουν.



Εικόνα 30 Δραστηριότητα 4 - Αρχική οθόνη

Η πρώτη ομάδα στις περιπτώσεις που οι λύσεις ήταν θετικές είχε αντίστοιχη αντιμετώπιση με τις προηγούμενες δραστηριότητες. Ενδεικτικά παραθέτω μερικά αποσπάσματα:

Φ: Νομίζω 2χ=3.

Ε: Συμφωνείς Α;

Α: Ναι.

Ε: Και πώς θα την έλυνες αυτή Α; Τι πράξη θα έκανες;

Α: Πρόσθεση.

Ε: Τι θα ήθελες να προσθέσεις; Πώς θα σε βοηθούσε;

Α: Όχι όχι… Διαίρεση.

Ε: Με τι θα διαιρούσες;

Α: Με… (παύση) το χ.

Ε: Ωραία για γράψε στο χαρτί 2χ=3.

Α: Ναι.

Ε: Για διαίρεσε με το χ και πες μου τι βγαίνει.

(…)

Α: Όχι όχι… εεε… (μεγάλη παύση) Εεε χ=3/2.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο Α προσπαθεί να βρει το χ για το οποίο ισορροπεί η Ζ3. Η αντίστοιχη εξίσωση είναι η 2 χ = 3. Ο Α θυμάται ότι αν κάνουμε την ίδια πράξη και στα δύο μέρη η εξίσωση συνεχίζει να ισχύει καθώς το έχει εφαρμόσει ήδη αρκετές φορές. Η αντιμετώπιση του όμως αν και στο σωστό δρόμο είναι και πάλι αριθμητική: αρχικά θέλει να προσθέσει, χωρίς κάποια συγκεκριμένη αιτιολόγηση. Εκτιμώ πως επέλεξε την πρόσθεση με σκοπό να δοκιμάσει και όχι ακολουθώντας κάποια συγκεκριμένη στρατηγική. Στη συνέχει αναγνωρίζει ότι πρέπει να κάνει διαίρεση όμως επιλέγει να διαιρέσει με το χ. Αυτό ίσως πηγάζει από την εστίαση πάνω στην έννοια της μεταβλητής και στις συζητήσεις που προηγήθηκαν πάνω στη χρήση του χ μέσα στις πράξεις. Στην προσπάθεια εξοικείωσης με τις ιδιότητες και νοηματοδότησης της μεταβλητής ίσως ο Α πήγε την αναλυτικότητα ένα αχρείαστο επίπεδο πιο πέρα: επειδή έχουμε μεταβλητή θα τη χρησιμοποιήσουμε κάπως στις πράξεις. Το ότι έχουμε αυτή τη δυνατότητα δε σημαίνει πως υπάρχει λόγος να το κάνουμε άκριτα. Στο τέλος διαίρεσε με τον συντελεστή του χ, το 3, ίσως επειδή είδε τις πράξεις στο τετράδιο της συμμαθήτριας του.

Άρα, αν και ο Α εστιάζει στο χ και θέλει να το χρησιμοποιήσει σε πράξεις σαν να ήταν γνωστή ποσότητα, το ότι το κάνει αυτό χωρίς συγκεκριμένο λόγο, μάλλον στα πλαίσια μιας δοκιμής. Αυτή η παρατήρηση με ωθεί στο να κατατάξω τον συλλογισμό και πάλι σε αριθμητικό αν και διακρίνονται στοιχεία αναλυτικότητας.

Στη συνέχεια οι μαθητές προχώρησαν στις πιο πολύπλοκες ζυγαριές και σε αυτή που είχε αρνητική λύση. Παραθέτω ένα παράδειγμα από την πρώτη επαφή:

Ε: Ωραία. Πώς θα ήταν αυτό σαν εξίσωση; Πώς θα το λέγαμε;

Φ: Ε… 6+χ=4.

Ε: Πολύ ωραία, γράψε την. Αρχικά μπορείς να δεις με το μυαλό πόσο πρέπει να είναι το χ;

Φ: Μισό… (παύση)

Ε: Γίνεται αρχικά;

Φ: Έτσι όπως το βλέπω δε νομίζω, αλλά δε μπορεί να μη γίνεται.

Εδώ παρατηρούμε και πάλι ένα βήμα πίσω στην πορεία εξέλιξης του αλγεβρικού συλλογισμού: πάλι το χ παίρνει την τιμή που τυχαίνει να έχει ο δρομέας τη συγκεκριμένη στιγμή, κυρίως λόγω της εστίασης των μαθητών στην αριθμητική τιμή του μεταβλητού βάρους. Αυτό όμως γρήγορα παρακάμπτεται και η Φ παρατηρεί πως η ζητούμενη εξίσωση για την ισορροπία της Ζ4 είναι η χ + 6 = 4. Αυτή είναι η πρώτη εξίσωση μέχρι στιγμής με αρνητική λύση. Αυτό σίγουρα μπέρδεψε τη Φ τόσο επειδή είναι κάτι καινούργιο όσο και λόγω του ότι μέχρι τώρα ο δρομέας έπαιρνε θετικές τιμές. Σε αντιστοιχία με την πρώτη φορά που πήρε ρητές τιμές στην προηγούμενη δραστηριότητα, χρειάστηκε ένα μικρό χρονικό διάστημα εξοικείωσης με τα νέα δεδομένα του ψηφιακού περιβάλλοντος.

Η Φ αφού σκέφτηκε για αρκετή ώρα για το ποια θα μπορούσε να είναι η λύση της εξίσωσης κατέληξε στο ότι ίσως δεν έχει λύση, όμως αμφέβαλε και η ίδια για την ορθότητα της άποψης της. Αυτό ίσως οφείλεται στο ότι είχαμε υπενθυμίσει τον ορισμό των αδύνατων εξισώσεων καθώς και μερικά παραδείγματα νωρίτερα.

Αφού οι μαθητές προσπάθησαν με τον δρομέα αλλά και τις ιδιότητες των εξισώσεων να επιλύσουν τη ζητούμενη, ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

Φ: Να πω κάτι;

Ε: Για πες.

Φ: Μπορεί να πάει κάτω από το 0;

Ε: Ποιο;

Φ: Δηλαδή να πάει σε αρνητικό;

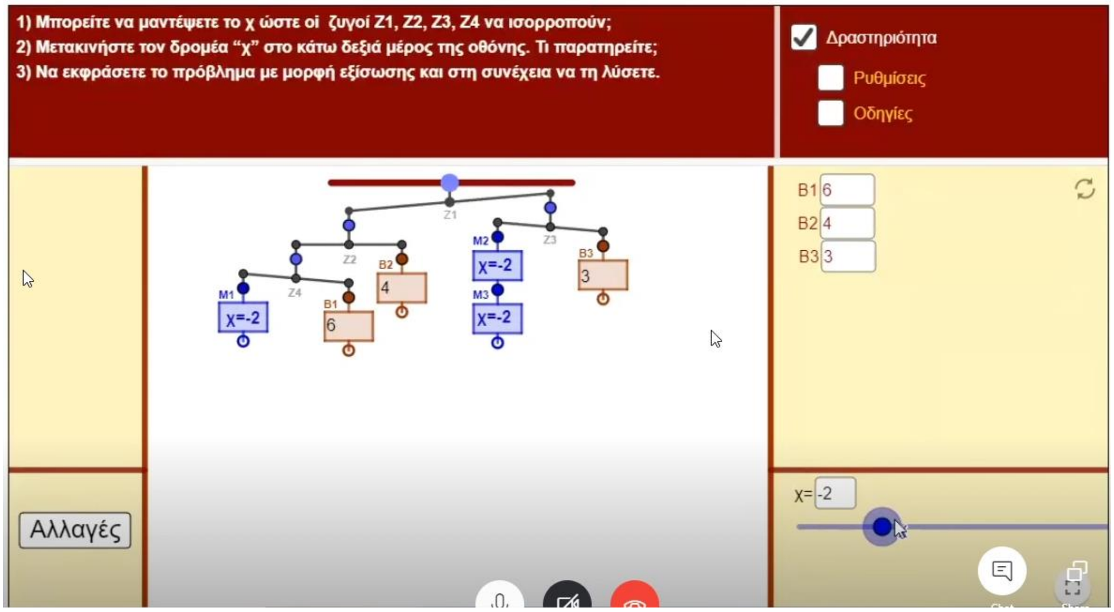
Ε: Ναι! Α τι λες; Γίνεται;

Α: Ναι.

Φ: Εγώ λέω… Μπορεί να πάει -2 το χ.

Εδώ βλέπουμε πως η χρήση αρνητικής τιμής για το χ ήρθε μάλλον με φυσικό τρόπο. Το ότι έχουμε μια ζυγαριά που έχει βάρη πέρασε στο περιθώριο καθώς η εστίαση των μαθητών ήταν στις αλγεβρικές ιδιότητες και όχι στις φυσικές ιδιότητες του μοντέλου. Μέχρι στιγμής δεν είχαμε αναφέρει ούτε τη δυνατότητα του Πολύζυγου να έχει αρνητικά βάρη ούτε το ενδεχόμενο μια εξίσωση να έχει για λύση αρνητικό αριθμό. Η Φ αναγνώρισε πως η χ + 6 = 4 δεν είναι αδύνατη, προσπάθησε να βρει θετική λύση χωρίς επιτυχία και συμπέρανε πως αφού υπάρχει η λύση θα πρέπει να είναι αρνητική. Στη συνέχεια την προσδιόρισε με επιτυχία. Ο παραπάνω συλλογισμός είναι καθαρά αλγεβρικός: υπάρχει μια δεδομένη απροσδιοριστία λόγω της φύσης της εξίσωσης, η ονοματοδοσία αν και δίνεται από το ίδιο το λογισμικό ερμηνεύεται με αρκετά γενικευμένο τρόπο από τη Φ και η άγνωστη ποσότητα αντιμετωπίζεται σαν να ήταν γνωστή τόσο στις πράξεις όσο και στη νοηματοδότηση εντός του περιβάλλοντος. Τα παραπάνω οδήγησαν την Φ σε άλλη μια γενίκευση του μοντέλου: αυτή τη φορά για τους αρνητικούς αριθμούς. Το ότι αυτό έγινε με φυσικό τρόπο δείχνει πως ίσως σε αυτό το περιβάλλον είναι δυνατόν να παρακαμφθεί μια από τις βασικότερες αδυναμίες του μοντέλου της ζυγαριάς: η συμπερίληψη των αρνητικών αριθμών.

Στη συνέχεια αποκαλύφθηκε πως και ο δρομέας μπορεί να παίρνει αρνητικές τιμές και με τη μετακίνηση του η Φ επιβεβαίωσε την εικασία της αλλά και τη λύση στο τετράδιο της: ότι χ = -2.



Εικόνα 31 Τροποποίηση του δρομέα ώστε να επιτρέπει τις αρνητικές τιμές στο χ.

Στο σημείο αυτό αξίζει να θυμίσω πως ο Α δεν είχε διδαχτεί καθόλου αρνητικούς αριθμούς στο σχολείο. Το αποτέλεσμα αυτό του φάνηκε, όπως είναι λογικό, τελείως αφύσικο και ξένο. Ακολούθησε μια σύντομη συζήτηση πάνω στους αρνητικούς αριθμούς ώστε να μπορέσει να συμμετέχει για το υπόλοιπο τις δραστηριότητας, έστω και στοιχειωδώς. Παρατηρήθηκαν πολλές παρανοήσεις πάνω στους αρνητικούς και τις ιδιότητες τους από τον Α, γεγονός απόλυτα φυσιολογικό δεδομένου ότι δεν είχε διδαχτεί το συγκεκριμένο κεφάλαιο.

Αντιθέτως, η ΕΥ στη δεύτερη ομάδα είχε μια πιο άμεση προσέγγιση:

Ε: Για τη Ζ2;

ΕΥ: Α! Έχω ένα!

Ε: Για πες μου.

ΕΥ: -2.

Η ΕΥ χωρίς δεύτερη σκέψη απάντησε ότι το χ πρέπει να είναι -2 για να ισορροπεί η Ζ2. Είναι η πρώτη φορά που εμφανίζονται αρνητικοί αριθμοί, και θεωρώ πως ενσωματώθηκαν με αρκετά φυσικό τρόπο στη δραστηριότητα. Το ότι το παραπάνω είναι ένα πρόβλημα με ζυγαριές και βάρη δεν επηρεάζει τη ΕΥ. Το φυσικό μοντέλο της ζυγαριάς περνάει στο παρασκήνιο καθώς εδώ στο Πολύζυγο έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε και αρνητικά βάρη χωρίς να επηρεαστεί η ισχύς των ιδιοτήτων. Η ορθότητα της επίλυσης της εξίσωσης επικυρώνεται άμεσα και από τη χρήση του δρομέα.

Αφού έγινε η εισαγωγή των αρνητικών στο λογισμικό, η Μ που δεν είχε δει ποτέ ξανά αρνητικούς αριθμούς κλήθηκε να απαντήσει στο παρακάτω:

> *Ε: Ωραία. Κοίταξε Μ τώρα τη Ζ3. Γιατί γέρνει προς τα δεξιά;*
>
> *Μ: Γιατί το 3 είναι μεγαλύτερο.*
>
> *Ε: Μεγαλύτερο από ποιο;*
>
> *Μ: Από το μείον… 4;*
>
> *ΕΥ: -4 κάνει, ναι.*
>
> *Ε: Ό,τι και αν γίνει λοιπόν ένας θετικός είναι πάντα μεγαλύτερος από έναν αρνητικό;*
>
> *Μ: Ναι.*

Εστιάζοντας στις ζυγαριές, και συγκεκριμένα στο προς τα που γέρνουν η Μαρία καταλήγει στο ότι ένας αρνητικός είναι πάντα μικρότερος από έναν θετικό αριθμό. Το ότι έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή (4 σε σύγκριση με το 3 στην άλλη μεριά) δε φαίνεται να επηρεάζει τη σκέψη της Μ. Το παραπάνω μπορεί να φαίνεται προφανές αλλά θεωρώ πως είναι αρκετά σημαντική τροποποίηση της επίγνωσης των αρνητικών αριθμών για έναν μαθητή που τους συναντά για πρώτη φορά.

Οι αρνητικοί αριθμοί εισάγονται με αρκετά φυσιολογικό τρόπο μέσα στις δραστηριότητες. Η αδυναμία απεικόνισης αρνητικών αριθμών του φυσικού μοντέλου παρακάμπτεται στο περιβάλλον του Πολύζυγου, καθώς όπως βλέπουμε οι μαθητές τους αντιμετωπίζουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τους θετικούς. Οι φυσικές παράμετροι, ότι δεν υπάρχουν δηλαδή αρνητικά βάρη, δε φάνηκαν να τους προβληματίζουν. Ακόμα και για τον Α και τη Μ που δεν είχαν διδαχτεί αρνητικούς αριθμούς, η χρήση τους έγινε με μια σχετική ευχέρεια, χωρίς βέβαια τη εμπλοκή τους σε πράξεις, καθώς δεν γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες των πράξεων με αρνητικούς αριθμούς. Η εστίαση και των τεσσάρων μαθητών είναι στις μαθηματικές ιδιότητες και όχι στις φυσικές ιδιότητες του μοντέλου. Η επίγνωση τους πάνω στους αρνητικούς αριθμούς εμπλουτίζεται κυρίως μέσω της παρατήρησης της φοράς που γέρνει η ζυγαριά. Ο συλλογισμός τους εμφανίζει έντονα και τα 3 κριτήρια του Radford σε αυτό το σημείο. Το παραπάνω είναι εντονότερο στην τελευταία δραστηριότητα, ιδιαίτερα αν παρατηρήσουμε και την παντελή έλλειψη αριθμητικών επιχειρημάτων, ακόμα και από των Α και τη Μ οι οποίοι φαίνεται να κάνουν βήματα προς την απαγκίστρωση από τις αριθμητικές μεθόδους όπως η δοκιμή και το σφάλμα.

Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα – Συζήτηση

Στην παρούσα έρευνα μελετήθηκε η νοηματοδότηση της έννοιας της εξίσωσης από μαθητές Α’ Γυμνασίου στο ψηφιακό περιβάλλον Πολύζυγο. Επικεντρωθήκαμε στην εξέλιξη του αλγεβρικού τρόπου σκέψης των μαθητών με εστίαση στα στοιχεία του περιβάλλοντος που την επηρέασαν. Συγκεκριμένα, αναλύθηκε το σύνολο των μαθηματικών συλλογισμών που εξέφρασαν οι μαθητές βάσει των τριών κριτηρίων του Radford (2014): την απροσδιοριστία (indeterminacy), την ονοματοδοσία (denotation) και την αναλυτικότητα (analyticity). Ταυτόχρονα προσπαθήσαμε να ερμηνεύσουμε τις αιτίες της κάθε αλλαγής στην επίγνωση (awareness) της εκάστοτε έννοιας βασιζόμενοι στα στοιχεία όπου έστρεφαν την εστίασή τους (awareness) οι μαθητές. Τα στοιχεία αυτά ήταν συνήθως συστατικά του περιβάλλοντος και του μοντέλου, όπως η ισορροπία της ζυγαριάς ή η αλληλεπίδραση με τους δρομείς.

Κατά την ανάλυση των δεδομένων εντοπίσαμε κάποιες διακριτές πορείες νοηματοδοτήσεων εννοιών σχετικών με τις εξισώσεις καθώς και συγκεκριμένων υποκατηγοριών εξισώσεων. Ξεχωρίσαμε την έννοια της μεταβλητής σε απλές αριθμητικές εξισώσεις καθώς και την έννοια της ισότητας σε αυτές. Η ανισότητα ήρθε και εκείνη στο προσκήνιο καθώς οι ζυγαριές ισορροπούσαν για μοναδική τιμή του χ, για όλες τις άλλες όριζαν πρακτικά μια ανισότητα. Σημαντικές αλλαγές παρατηρήθηκαν στις παραπάνω νοηματοδοτήσεις όταν οι εξισώσεις έγιναν αλγεβρικές και άρα πιο πολύπλοκες. Όταν, επιπλέον, οι λύσεις των εξισώσεων έπαψαν να είναι φυσικοί αριθμοί, τότε παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφορές στη νοηματοδότηση τόσο της εξίσωσης όσο και της μεταβλητής αλλά και της ισότητας. Τέλος, κατά τη χρήση πολλαπλών ζυγαριών, εμφάνισε ιδιαίτερο ενδιαφέρον η νοηματοδότηση των εξισώσεων ως βαρών, καθώς η ζυγαριά που πριν όριζε μια εξίσωση πλέον αποτελούσε ένα σύνολο βαρών.

Η νοηματοδότηση της μεταβλητής σε αριθμητικές εξισώσεις είχε ιδιαίτερη ποικιλομορφία. Αρχικά οι μαθητές δεν έβλεπαν το χ ως γενικευμένο αριθμό, αλλά ως συγκεκριμένο και μάλιστα μπορούσε ταυτόχρονα να παίρνει παραπάνω από μια τιμές. Ενδεικτικό παράδειγμα μπορούμε να βρούμε στην πρώτη δραστηριότητα όπου ο ένας μαθητής πρότεινε ως λύση της εξίσωσης 3χ = 21 το χ = 10 , 10 και 1. Το ότι το ίδιο το περιβάλλον δίνει όχι μόνο το ίδιο όνομα αλλά και απεικονίζει την ίδια τιμή δίπλα σε αυτό δεν ήταν ικανό για να πείσει τους μαθητές πως μεταβλητές με το ίδιο όνομα είναι απαραίτητα ίδιες. Μετά την αλληλεπίδραση των μαθητών με τους δρομείς που καθόριζαν τις τιμές του χ η οπτική τους άλλαξε: το χ είναι όποιος αριθμός θέλουμε όμως για μία μόνο τιμή του ισορροπεί η ζυγαριά. Στις αριθμητικές εξισώσεις κυριαρχούσαν τα αριθμητικά επιχειρήματα στους συλλογισμούς των μαθητών. Αυτό δε σημαίνει πως δεν υπήρχαν στοιχεία αλγεβρικού τρόπου σκέψης, κυρίως της απροσδιοριστίας.

Η εξίσωση ταυτίστηκε με την εικόνα της ζυγαριάς από την εισαγωγική κιόλας δραστηριότητα και το σύμβολο της ισότητας με την ισορροπία της ζυγαριάς. Αντίστοιχα η ανισότητα συνδέεται ξεκάθαρα με την ανισορροπία της ζυγαριάς, καθώς και η φορά του συμβόλου < ή > με τη μεριά προς τα όπου γέρνει η ζυγαριά.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον είχε η νοηματοδότηση των ίδιων εννοιών σε αλγεβρικές εξισώσεις. Σε αυτές, η ύπαρξη της μεταβλητής και στα δύο μέλη απαιτεί πλέον αλγεβρικούς χειρισμούς. Η πολυπλοκότητα που χαρακτηρίζει τις αλγεβρικές εξισώσεις φάνηκε να επηρεάζει την πορεία εξέλιξης του αλγεβρικού συλλογισμού. Αν και οι μαθητές είχαν αρχίσει να χρησιμοποιούν ιδιότητες, σε αυτές τις εξισώσεις φαίνεται να κάνουν βήματα προς τα πίσω καθώς αρχίζουν και πάλι να χρησιμοποιούν αριθμητικά επιχειρήματα. Για παράδειγμα ενώ η Φ μπόρεσε και βρήκε τη ζητούμενη αριθμητική εξίσωση στην πρώτη δραστηριότητα και μάλιστα την έλυσε με ευκολία, δυσκολεύτηκε ακόμα και να αναγνωρίσει την εξίσωση στην επόμενη δραστηριότητα. Η μοναδική διαφορά ανάμεσα στις δύο ήταν η ύπαρξη του χ και στις δύο μεριές. Αυτό μάλιστα το αντιλαμβάνονται και οι ίδιοι οι μαθητές. Όπως ανέφεραν χαρακτηριστικά η δυσκολία βρίσκεται στο ότι *«έχουμε άγνωστο στο αποτέλεσμα»*.

Κομβικής σημασίας είναι χρήση των ιδιοτήτων της ζυγαριάς για την ανάπτυξη του αλγεβρικού τρόπου σκέψης. Αφού οι μαθητές έφτασαν σε τέλμα κατά την επεξεργασία αλγεβρικών εξισώσεων, τους αποκαλύφτηκε η βασική ιδιότητα της ζυγαριάς. Από τη στιγμή που άρχισαν να τη χρησιμοποιούν, η εστίασή τους μεταφέρθηκε στην απεικόνιση της συμπεριφοράς της ζυγαριάς και όχι στη γραφή της εξίσωσης. Αυτό τους δίνει μια ευχέρεια στις πράξεις με τη μεταβλητή, καθώς μπορούν πλέον να την προσθέτουν και να την αφαιρούν και από τα δύο μέλη, το οποίο αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα αναλυτικότητας. Στο σημείο αυτό μεταφράστηκαν και οι ιδιότητες από το περιβάλλον χαρτί μολύβι στο Πολύζυγο. Η επίγνωση των εξισώσεων και συγκεκριμένα των αλγεβρικών εξελίσσεται, καθώς μεταμορφώνονται από δυσνόητες εξισώσεις με τον άγνωστο στο αποτέλεσμα σε διαχειρίσιμες αλγεβρικές οντότητες.

Η νοηματοδότηση μη φυσικών και ιδιαιτέρως των αρνητικών ριζών εξισώσεων παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Αρχικά, ίσως λόγω του ότι οι μεταβλητές στις πρώτες δραστηριότητες έπαιρναν μόνο φυσικές τιμές, οι μαθητές θεωρούσαν πως εξισώσεις χωρίς προφανή φυσική λύση είναι αδύνατες. Όταν επιτράπηκε στον δρομέα να δίνει αρνητικές τιμές στο χ, οι μαθητές το εξέλαβαν ως μια φυσιολογική αλλαγή. Δεν τους παραξένεψε το ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατο στο φυσικό μοντέλο καθώς τα βάρη είναι θετικά. Η χρήση και των αρνητικών αριθμών γενικεύει το μοντέλο της ζυγαριάς και ενθαρρύνει τα αλγεβρικά επιχειρήματα. Αυτό φαίνεται από την εμφάνιση και των τριών κριτηρίων του Radford σε πληθώρα συλλογισμών σε αυτό το σημείο.

Τέλος, κατά την ενασχόληση των μαθητών με πολλαπλές ζυγαριές προκύπτουν επίσης ενδιαφέρουσες νοηματοδοτήσεις. Αρχικά οι μαθητές φάνηκε πως αδυνατούσαν να δουν τη ζυγαριά ως βάρος. Αφού επεξεργάστηκαν τους δρομείς παρατήρησαν πως η ισορροπία του μεγάλου ζυγού δεν έχει καμία σχέση με αυτή των μικρότερων. Οι μαθητές εστίασαν στο ίδιο το μοντέλο, γεγονός που φάνηκε να τους βοηθάει στην εξεύρεση της ζητούμενης εξίσωσης. Η μετατροπή της ζυγαριάς σε βάρος είναι μια ενδιαφέρουσα περίπτωση ονοματοδοσίας, καθώς από τη φύση του περιβάλλοντος οι μεταβλητές έχουν δεδομένο όνομα, φανερό στους μαθητές από την αρχή. Η αναγνώριση και η επίλυση αυτών των εξισώσεων απαιτούσε καθαρά αλγεβρικό τρόπο σκέψης: χρειάστηκε ονοματοδοσία όπως είδαμε, περιλάμβανε άγνωστες ποσότητες και απαιτούσε ευχέρεια στη διαχείριση της μεταβλητής, σαν να ήταν γνωστός αριθμός. Ή εστίαση στους δρομείς σε συνδυασμό με την εικόνα της ζυγαριάς οδήγησαν τους μαθητές στη διατύπωση πλούσιων αλγεβρικών συλλογισμών, εξελίσσοντας έτσι την επίγνωση της έννοιας της εξίσωσης.

Οι αναπαραστάσεις στο σύνολό τους ήταν ίσως το σημαντικότερο κομμάτι που επηρέασε τον τρόπο σκέψης των μαθητών. Σε αρκετά παραδείγματα παρατηρήθηκε άμεση αλλαγή στη συλλογιστική των μαθητών μετά την αλληλεπίδραση τους με τους δρομείς. Επίσης, σε πολλά σημεία η εστίαση στην εικόνα και την κίνηση της ζυγαριάς μεταφράστηκε σε διατύπωση και έμμεση απόδειξη αλγεβρικών ιδιοτήτων. Για παράδειγμα η βασική ιδιότητα της ζυγαριάς ήταν κομβική στη διαχείριση των αλγεβρικών εξισώσεων, καθώς πριν από εκείνη οι μαθητές φάνηκε πως είχαν καταλήξει σε τέλμα. Χρησιμοποιώντας την όμως, κατάφεραν να αφαιρέσουν το χ και από τα δύο μέλη, μετατρέποντας έτσι την εξίσωση σε μια γνωστή αριθμητική. Η παραπάνω ενέργεια είναι χαρακτηριστική περίπτωση αναλυτικότητας και απροσδιοριστίας.

Η συγκεκριμένη έρευνα ανήκει στην ευρύτερη κατηγορία των ερευνών πάνω στην πρώιμη αλγεβρική σκέψη και συγκεκριμένα στις εξισώσεις με χρήση του μοντέλου της ζυγαριάς. Όπως στην πλειοψηφία των ερευνών (πχ Vlassis, 2002; Rojano & Martinez, 2009) έτσι και στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιήθηκε το η ζυγαριά με σκοπό τη μοντελοποίηση των εξισώσεων. Παρατηρήθηκε η υπογραμμισμένη δυσκολία πάνω στη διαχείριση αλγεβρικών εξισώσεων (Filloy & Rojano, 1989) καθώς και η καταλληλόλητα του μοντέλου για την επίδειξη της απαλοιφής ίδιων όρων (Radford & Grenier, 1996). Η καινοτομία έγκειται στη χρήση του ψηφιακού περιβάλλοντος «Πολύζυγο», στο οποίο χρησιμοποιήθηκαν πολλαπλές ζυγαριές. Επιπλέον, ο μικρόκοσμος αυτός τροποποιήθηκε ώστε να εμπεριέχει αρνητικούς αριθμούς. Με αυτόν τον τρόπο έγινε προσπάθεια γενίκευσης του μοντέλου της ζυγαριάς στο σύνολο των αρνητικών, το οποίο αποτελεί σύμφωνα με τη βιβλιογραφία την μεγαλύτερη ίσως αδυναμία του μοντέλου. Φαίνεται πως το συγκεκριμένο περιβάλλον έχει τη δυνατότητα με συγκεκριμένες δραστηριότητες και αλλαγές, να περιλαμβάνει με τρόπο φυσικό όλους τους ρητούς αριθμούς. Για να διαπιστωθούν οι δυνατότητες του Πολύζυγου απαιτείται περεταίρω έρευνα.

Δεδομένων αυτών των πρώτων ενθαρρυντικών παρατηρήσεων θεωρώ πως το συγκεκριμένο εργαλείο θα παρουσιάζει ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον και σε άλλες ενότητες. Μία από αυτές θα ήταν τα συστήματα εξισώσεων, καθώς παρέχει πρόσφορο έδαφος για την επεξεργασία δύο μεταβλητών και πολλών εξισώσεων ταυτόχρονα. Άλλες πιθανές επεκτάσεις είναι πάνω στην εισαγωγή των εξισώσεων στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Επιπλέον, αφού παρατηρήθηκαν ενδείξεις πως το Πολύζυγο μπορεί να επεκτείνει το μοντέλο στο σύνολο των αρνητικών αριθμών, θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον μια έρευνα εστιασμένη καθαρά πάνω σε αυτό το θέμα.

Βιβλιογραφία

Ackermann E. (2001). Piaget's Constructivism, Papert's Constructionism: What's the difference? . Future of learning group publication, 5(3), 438 Algebra', For the learning of the mathematics 9(2), 19–25.

Alibali, M. W. (1999). How children change their minds: Strategy change can be gradual or abrupt. Developmental Psychology, 35, 127–145.

Andrews, P., Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. The Journal of Mathematical Behavior, 31, 476–488.

Araya, R., Calfucura, P., Jiménez, A., Aguirre, C., Palavicino, M. A., Lacourly, N., Dartnell, P. (2010). The effect of analogies on learning to solve algebraic equations. Pedagogies: An International Journal, 5, 216–232.

Austin, J., Vollrath, H. J. (1989). Representing, solving, and using algebraic equations. Mathematics Teacher, 82(8), 608–612.

Berks, D. R., Vlasnik, A. N. (2014). Working the system. Mathematics Teacher, 107, 542–546

Caglayan, G., Olive, J. (2010). Eighth grade students' representations of linear equations based on a cups and tiles model. Educational Studies in Mathematics, 74, 143-162

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). Thinking mathematically: Integrating algebra and arithmetic in elementary school. Portsmouth, NH: Heinemann. (Chapters 1, 3-10)

Charleton, T. L. (1996). An Elementary Latin Dictionary. Oxford, England: Oxford University Press

Chun Tie Y, Birks M, Francis K. (2019). Grounded theory research: A design framework for novice researchers. SAGE Open Medicine. January 2019.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. Educational Researcher, 32(1), 9–13.

Cramer, K. (2003). Using a translation model for curriculum development and classroom instruction. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Figueira-Sampaio, A. S., Santos, E. E. F., Carrijo, G. A. (2009). A constructivist computational tool to assist in learning primary school mathematical equations. Computers & Education, 53, 484–492.

Filloy, E. & Puig, L. & Rojano, T. (2007). Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach. New York: Springer Verlag

Filloy, E. and Rojano, T.: (1989), 'Solving equations: The transition from arithmetic to algebra', For the learning of the mathematics 9(2), 19–25.

Flyvbjerg, B. (2011), "Case Study," in Norman K. Denzin and Yvonna S. Lincoln, eds., The Sage Handbook of Qualitative Research, 4th Edition (Thousand Oaks, CA: Sage, 2011), Chapter 17, pp. 301-316.

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Borjas, S. (2015). Benefits of "concreteness fading" for children's mathematics understanding. Learning and Instruction, 35, 104–120.

Gardner, H. (1993). Multiple intelligences: The theory in practice. New York: Basic Books

Garzón J, Bautista J. (2018) Virtual Algebra Tiles: A pedagogical tool to teach and learn algebra through geometry. J Comput Assist Learn.

Gavin, M. K., Sheffield, L. J. (2015). A balancing act: Making sense of algebra. Mathematics Teaching in the Middle School, 20, 460–466.

Gravemeijer K.& Prediger S. (2019) Topic-Specific Design Research: An Introduction. In: Kaiser G., Presmeg N. (eds) Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Greenes, C., & Findell, C. (1999). Developing students' algebraic reasoning abilities. In L.V. Stiff & F.R. Curico (Eds.), Developing mathematical reasoning in grades K-12, 1999 yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hoyles, C. & Noss, R. & Kent, P. (2004). On the Integration of Digital Technologies into Mathematics Classrooms. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 9.

Hoyles, C. & Noss, R. (1993). Deconstructing Microworlds. 10.1007/978-3-662-02938- 1_15.

Kaplan, R. G., Alon, S. (2013). Using technology to teach equivalence. Teaching Children Mathematics, 19, 382–389.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. Proceedings of the 13th PME conference (v. 2, pp. 163-171). Paris: PME.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. The Mathematics Educator. 8. 139-151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. 707-762.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching. New York: Springer

Kieran, C.: (1981), 'Concepts associated with equality symbol', Educational Studies in Mathematics 12, 317–326.

Kieran, C.: (1992), 'The learning and the teaching of scool algebra', in D. Grouws (ed.), Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning, Mac Millan, New York, pp. 390–419.

Κυνηγός Χ. (2011), Το μάθημα της διερεύνησης. Εκδόσεις Τόπος

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., & Alibali, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. Journal for Research in Mathematics Education.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. Mathematics in School, 7(4), 23-26.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts & processes (pp. 263-343). New York: Academic Press.

Lima, R. N., & Healy, L. (2010). The didactic cut in equation solving or a gap between the embodied and the symbolic mathematical worlds? In M. M. Pinto,& T. F. Kawasaki (Eds.), Proceedings of the 34th Meeting of the International Group for Psychology of Mathematics Education (vol. 3) (pp. 353–360). Brazil:Belo Horizonte.

Linchevski, L., Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. Educational Studies in Mathematics, 30, 39–65.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997) Students' understanding of algebraic notation: 11-15. Educational Studies in Mathematics, 33, 1-19

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Research Council. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Norton, S. & Irvin, J. (2007). A concrete approach to teaching symbolic algebra. Mathematics: Essential Research, Essential Practice, Volume 1. 551-560

Orlov, K. (1971). Experimental verification of the use of the mathematical balance in secondary teaching. Educational Studies in Mathematics, 3, 192–205.

Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Veldhuis, M. (2019) The balance model for teaching linear equations: a systematic literature review. IJ STEM Ed 6, 30

Papert.S, (1980). Mindstorms: children, computers, and powerful ideas. Basic Books, Inc., USA.

Perry, M., Berch, D., Singleton, J. (1995). Constructing shared understanding: The role of nonverbal input in learning contexts. Journal of Contemporary Legal Issues, 6, 213–235

Radford L. (2018) The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. In: Kieran C. (eds) Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Radford, L. & Grenier, M. (1996). Les apprentissages mathématiques en situation. Revue des Sciences de l'education, XXII(2), 253-276.

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. Math Ed Res J 26, 257–277

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. Mathematical Thinking and Learning. 5. 37-70.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. Perspectivas da Educação Matemática.

Rojano, T. & Martinez, M. (2009).From concrete modeling to algebraic syntax: learning to solve linear equations with a virtual balance. Swars, S. L., Stinson, D. W., & Lemons-Smith, S. (Eds.). Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Atlanta, GA: Georgia State University.

Saraswati, S. , Indra Putri, R. & Somakim, S. (2016). Supporting students' understanding of linear equations with one variable using algebra tiles. Journal on Mathematics Education.

Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. Mathematics Teacher, 90(3).

Suh, J., Moyer, P. S. (2007). Developing students' representational fluency using virtual and physical algebra balances. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 26(2), 155–173.

Tall, D., Lima R. N. & Healy, L. (2014), Evolving a three-world framework for solving algebraic equations in the light of what a student has met before, The Journal of Mathematical Behavior, Volume 34, 2014

Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years. Young Children, 58(1), 14–21.

Thornberg, R. & Charmaz, K. (2014). Grounded Theory and theoretical coding

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. Educational Studies in Mathematics, 49, 341–359.

Warren, E., Cooper, T. J. (2005). Young children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. Mathematics Education Research Journal, 17, 58–72.

Warren, E., Cooper, T. J. (2009). Developing mathematics understanding and abstraction: The case of equivalence in the elementary years. Mathematics Education Research Journal, 21, 76–95.

Yerushalmy, M. & Swidan, O. (2012). Signifying the accumulation graph in a dynamic and multi-representation environment. Educational Studies in Mathematics. 80.