



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
——— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 ———

Σχολή Θετικών Επιστημών
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης «Ηλεκτρονικής – Ραδιοηλεκτρολογίας»

ΜΕΛΕΤΗ, ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ
ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΚΟΙΛΟΤΗΤΩΝ
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ ΓΥΡΟΤΡΟΝΙΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΕΡΑΦΕΙΜ Δ. ΖΑΧΑΡΟΠΟΥΛΟΣ
Α.Μ. 2018105
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ Γ. ΤΙΓΚΕΛΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2021



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Σχολή Θετικών Επιστημών
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης «Ηλεκτρονικής – Ραδιοηλεκτρολογίας»

ΜΕΛΕΤΗ, ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ
ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΚΟΙΛΟΤΗΤΩΝ
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ ΓΥΡΟΤΡΟΝΙΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΣΕΡΑΦΕΙΜ. Δ. ΖΑΧΑΡΟΠΟΥΛΟΣ – 2018105

Η τριμελής επιτροπή

Ι. Γ. Τίγκελης
Καθηγητής
(επιβλέπων)

Δ. Φραντζεσκάκης
Καθηγητής

Α. Τζανακάκη
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Εξετάστηκε στην Αθήνα την.....

Μελέτη, σχεδίαση και προσομοίωση
μικροκυματικών κοιλοτήτων συντονισμού
γυροτρονίου

Στη μικρή μας Ελίζα

Περίληψη

Η παρούσα μελέτη αποτελεί τη διπλωματική εργασία για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην «Ηλεκτρονική – Ραδιοηλεκτρολογία» του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Το θέμα αυτής είναι η ανάλυση και η σχεδίαση της κοιλότητας αλληλεπίδρασης ενός νέου τύπου γυροτρονίου, η οποία αποτελείται εξολοκλήρου από διηλεκτρικό (συνθετικός αδάμαντας). Για τον σκοπό αυτό, αναπτύχθηκε μια προσεγγιστική μέθοδος υπολογισμού των ιδιοσυχνοτήτων της διάταξης, η οποία μελετάται απουσία διέγερσης (ψυχρή κοιλότητα). Παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα του αξονικού προφίλ πεδίου, της συχνότητας συντονισμού και του συντελεστή ποιότητας για τους ιδιορρυθμούς της διάταξης, καθώς και τα συμπεράσματα που προκύπτουν. Τέλος, δίδονται πιθανές επεκτάσεις της μελέτης.

Λέξεις κλειδιά: Γυροτρόνιο, κοιλότητα, ρυθμός, ιδιοσυχνότητα, προφίλ πεδίου

Abstract

This study is the M.Sc. thesis in “Electronics – Radioelectronics” postgraduate program of School of Sciences of National and Kapodistrian University of Athens.

The subject is the analysis and design of an all–dielectric resonator for a new type of gyrotron. For this purpose, an approximate method of calculating the eigenfrequencies of the resonator was developed, which is studied in the absence of excitation (cold cavity). Numerical results for the axial field profile, the eigenfrequency and the quality factor of the eigenmodes of the device are presented, as well as the conclusions that emerge along with possible extensions of this study.

Key words: Gyrotron, cavity, mode, eigenfrequency, field profile

Πρόλογος

Η παρούσα μελέτη εκπονήθηκε στο πλαίσιο της απόκτησης του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην «Ηλεκτρονική – Ραδιοηλεκτρολογία» του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Η εκπόνηση της παρούσας διατριβής δεν θα ήταν δυνατή χωρίς τη συνεχή καθοδήγηση του Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής Ι. Γ. Τίγκελη, καθώς και του Διδάκτορα ΕΜΠ Ι. Χέλη, μέλους της Ομάδας Μικροκυματικών και Οπτικών Εφαρμογών του Τμήματος Φυσικής, οι οποίοι βοήθησαν αφιερώνοντάς μου απλόχερα πολύτιμο χρόνο και γνώσεις. Οφείλω επίσης ένα ευχαριστώ στον συνάδελφο και φίλο Χρήστο Λιούτα, ο οποίος με παρότρυνε να συμμετάσχω σε αυτό το μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών. Τέλος, ευχαριστώ τη σύζυγό μου η οποία αδιαλείπτως με συνέδραμε ηθικά στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Αθήνα, Ιανουάριος 2021

Σεραφείμ Ζαχαρόπουλος

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract.....	i
Πρόλογος	iii
Περιεχόμενα.....	v
Πίνακας Σχημάτων	vii
Κατάλογος Πινάκων	ix
Εισαγωγή	11
Κεφάλαιο 1 Εισαγωγικά στοιχεία κυματοδότησης	13
1.1 Επίλυση εξισώσεων Maxwell	13
1.2 Διανύσματα Hertz	13
1.3 Κυματοδότηση σε κυλινδρικές συντεταγμένες.....	15
1.3.1 Ειδική περίπτωση: κούφιος μεταλλικός κυματοδηγός κυκλικής διατομής	18
1.4 Εισαγωγικά στοιχεία γυροτρονίου	20
1.4.1 Γενικά	20
1.4.2 Δομή συμβατικού γυροτρονίου.....	22
1.4.3 Κοιλότητα αλληλεπίδρασης και έξοδος ισχύος	23
Κεφάλαιο 2 Πεδία σε πολλαπλά διηλεκτρικά στρώματα	27
2.1 Επίπεδη γεωμετρία τριών διηλεκτρικών στρωμάτων	27
2.1.1 Προσέγγιση γεωμετρικής οπτικής: ανάκλαση και μετάδοση	28
2.1.2 Υπολογισμός ισχύος ανάκλασης, μετάδοσης και απωλειών	30
2.2 Κυλινδρική γεωμετρία τριών διηλεκτρικών στρωμάτων	33
2.2.1 Σχέση διασποράς	34
2.2.2 Ρυθμοί TE, TM.....	37
2.3 Κυλινδρική γεωμετρία πολλαπλών διηλεκτρικών στρωμάτων	38
2.3.1 Πίνακες μετάβασης μεταξύ συνορευόντων στρωμάτων.....	39
2.3.2 Σχέση διασποράς	41
2.3.3 Ρυθμοί TE, TM.....	44
2.3.4 Συμμετρία των λύσεων.....	45
Κεφάλαιο 3 Ελεύθερες ταλαντώσεις στην κοιλότητα συμβατικού γυροτρονίου	49
3.1 Γενικά.....	49

3.2	Προφίλ πεδίου	51
3.3	Αριθμητική επίλυση.....	53
3.4	Διάδοση και αποκοπή.....	55
3.5	Προβλήματα συμβατικού γυροτρονίου.....	57
Κεφάλαιο 4 Ελεύθερες ταλαντώσεις σε διηλεκτρική κοιλότητα γυροτρονίου..		59
4.1	Διάδοση και αποκοπή σε διηλεκτρική κοιλότητα	61
4.1.1	Διαρρέοντα κύματα (leaky waves).....	61
4.1.2	Leaky waves για κοίλο διηλεκτρικό σωλήνα.....	63
4.2	Προσεγγιστική ανάλυση.....	65
4.2.1	Αριθμητική επίλυση σχέσης διασποράς.....	68
4.2.2	Αλγόριθμος ιχνηλάτησης κυματάριθμων	74
4.2.3	Αλγόριθμος ιχνηλάτησης ρυθμών	78
4.2.4	Συνολικός αλγόριθμος επίλυσης	82
Κεφάλαιο 5 Σχεδίαση διηλεκτρικής κοιλότητας γυροτρονίου και αριθμητικά αποτελέσματα προσομοίωσης.....		87
5.1	Αποτελέσματα για $m = 0$ και συχνότητα 300 GHz	90
5.2	Αποτελέσματα για $m = 25$ και συχνότητα 300 GHz	98
5.3	Συζήτηση.....	102
Κεφάλαιο 6 Κύρια Συμπεράσματα – Επεκτάσεις.....		105
6.1	Κύρια συμπεράσματα.....	105
6.2	Μελλοντικές επεκτάσεις.....	107
Παράρτημα Α.....		109
A.1	Ταυτόχρονοι μηδενισμοί συνάρτησης Bessel και της 1 ^{ης} παραγώγου της	109
A.2	Απόδειξη των σχέσεων παρ. 2.1.2.....	110
Παράρτημα Β.....		113
B.1	Απόδειξη σχέσεων παρ. 2.2.1	113
B.2	Απόδειξη σχέσεων παρ. 2.3.1	114
Βιβλιογραφία		123

Πίνακας Σχημάτων

Σχήμα 1.1 Σχηματική δομή του συμβατικού γυροτρονίου. Επάνω φαίνεται η αξονική μεταβολή του μόνιμου αξονικού μαγνητικού πεδίου και κάτω μια εγκάρσια τομή της διάταξης [7]......	22
Σχήμα 1.2 Συμβατικό γυροτρόνιο ακτινικής εξόδου [7]......	24
Σχήμα 2.1 Γεωμετρία επίπεδης πλάκας διηλεκτρικού μέσου.....	27
Σχήμα 2.2 Υπολογισμός συνολικών συντελεστών ανάκλασης και μετάδοσης... ..	29
Σχήμα 2.3 Ποσοστό ισχύος απωλειών σε φέτα διηλεκτρικού ως συνάρτηση του d/λ για $\epsilon_r'=5.67$ και $\tan\delta = 2\times 10^{-5}$ (μαύρο), άνω φράγμα ποσοστού απωλειών (μπλε) και κάτω φράγμα ποσοστού απωλειών (κόκκινο).	31
Σχήμα 2.4 Ποσοστό (%) καταναλισκόμενης ισχύος (μαύρο), ποσοστό ανακλώμενης ισχύος (κόκκινο) και ποσοστό μεταδιδόμενης ισχύος (μπλε), ως συνάρτηση του d/λ για $\epsilon_r'=5.67$ και $\tan\delta = 2\times 10^{-5}$	31
Σχήμα 2.5 Ποσοστό (%) καταναλισκόμενης ισχύος (μαύρο), ποσοστό ανακλώμενης ισχύος (κόκκινο) και ποσοστό μεταδιδόμενης ισχύος (μπλε), ως συνάρτηση του d/λ για $\epsilon_r'=100$ και $\tan\delta = 2\times 10^{-5}$	32
Σχήμα 2.6 Εγκάρσια τομή γεωμετρίας 3 κυλινδρικών στρωμάτων διηλεκτρικού. 33	
Σχήμα 2.7 Εγκάρσια (αριστερά) και διαμήκης (δεξιά) τομή γεωμετρίας πολλαπλών κυλινδρικών διηλεκτρικών στρωμάτων. Έχει δοθεί έμφαση σε δύο γειτονικά κυλινδρικά στρώματα με διαφορετικά χαρακτηριστικά.....	39
Σχήμα 3.1 Κοιλότητα αλληλεπίδρασης του συμβατικού γυροτρονίου [10].....	49
Σχήμα 3.2 Τυπικό προφίλ πεδίου ρυθμού TE_{mn} στην κοιλότητα γυροτρονίου (Σχήμα 1.10 του [14]).	54
Σχήμα 3.3 Περιοχές διάδοσης (1) και αποκοπής (2) στο μιγαδικό επίπεδο k_z	57
Σχήμα 4.1 Γεωμετρία κοιλότητας συντονισμού γυροτρονίου από κοίλο διηλεκτρικό κύλινδρο με ήπια ανομοιογένεια της εσωτερικής του ακτίνας και με σταθερό πάχος.	60
Σχήμα 4.2 Προφίλ δείκτη διάθλασης κυλινδρικού κυματοδηγού (leaky waveguide) πολλαπλών διηλεκτρικών στρωμάτων.	62
Σχήμα 4.3 Διακριτοποίηση της διηλεκτρικής κοιλότητας συντονισμού.....	65
Σχήμα 4.4 Διαδικασίες του αλγορίθμου Nelder–Mead (Σχήμα 3.2 του [10]).....	71

Σχήμα 4.5 Αριθμητική επίλυση της σχέσης διασποράς για τον πίνακα 8×8.....	72
Σχήμα 4.6 Αριθμητική επίλυση της σχέσης διασποράς για τον πίνακα 2×2.....	73
Σχήμα 4.7 Τυπικό αποτέλεσμα του αλγορίθμου ιχνηλάτησης κυματάριθμων. ...	77
Σχήμα 4.8 Τυπικό παράδειγμα διαμήκους πεδίου για ένα ρυθμό TE.	80
Σχήμα 4.9 Τυπικό παράδειγμα διαμήκους ηλεκτρικού πεδίου για ένα μικτό ρυθμό.	80
Σχήμα 4.10 Τυπικό παράδειγμα διαμήκους μαγνητικού πεδίου για έναν υβριδικό ρυθμό.	81
Σχήμα 4.11 Διάγραμμα ροής του αλγόριθμου υπολογισμού της συχνότητας συντονισμού και του προφίλ πεδίου για ρυθμό σε διηλεκτρική κοιλότητα γυροτρονίου.....	83
Σχήμα 4.12 Τυπικά αποτελέσματα αλγορίθμου αρχικοποίησης.....	85
Σχήμα 5.1 Διάμηκες προφίλ διηλεκτρικής κοιλότητας συντονισμού.	87
Σχήμα 5.2 Διάμηκες προφίλ διηλεκτρικού της κοιλότητας για $m = 0$	91
Σχήμα 5.3 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 1.	92
Σχήμα 5.4 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 2.	92
Σχήμα 5.5 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 3.....	92
Σχήμα 5.6 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 4.....	93
Σχήμα 5.7 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 5.....	93
Σχήμα 5.8 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 6.....	93
Σχήμα 5.9 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 7.....	94
Σχήμα 5.10 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 8.....	94
Σχήμα 5.11 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 9.....	94
Σχήμα 5.12 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 10.....	95
Σχήμα 5.13 Πεδίο H_z για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 1 (TE).....	95
Σχήμα 5.14 Πεδίο H_ρ για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 1 (TE.)	96
Σχήμα 5.15 Πεδίο E_ϕ για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 1 (TE).....	96
Σχήμα 5.16 Πεδίο H_z για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 2 (TE).....	97
Σχήμα 5.17 Πεδίο H_ρ για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 2 (TE).	97
Σχήμα 5.18 Πεδίο E_ϕ για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 2 (TE).....	98
Σχήμα 5.19 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 1.....	99
Σχήμα 5.20 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 2.....	100

Σχήμα 5.21 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 3.....	100
Σχήμα 5.22 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 4.....	100
Σχήμα 5.23 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 5.....	101
Σχήμα 5.24 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 6.....	101
Σχήμα 5.25 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 7.....	101
Σχήμα 5.26 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 8.....	102

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 4.1. Σύγκριση των μεθόδων υπολογισμού της ορίζουσας της σχέσης διασποράς.....	74
Πίνακας 5.1 Τιμές των παραμέτρων της γεωμετρίας της κοιλότητας για $m = 0$...	90
Πίνακας 5.2 Δέκα πρώτοι συντονιζόμενοι ρυθμοί για $m = 0$	90
Πίνακας 5.3 Τιμές των παραμέτρων της γεωμετρίας της κοιλότητας για $m = 25$.	98
Πίνακας 5.4 Οκτώ πρώτοι συντονιζόμενοι ρυθμοί για $m = 25$	99

Εισαγωγή

Το γυροτρόνιο (gyrotron) είναι μια διάταξη παραγωγής μικροκυματικής ακτινοβολίας υψηλής ισχύος. Το βασικό λειτουργικό μέρος του είναι η κοιλότητα αλληλεπίδρασης της δέσμης ηλεκτρονίων με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Αν και η συγκεκριμένη τεχνολογία έχει δοκιμαστεί και συνεχίζει να εξελίσσεται, η απόδοση της μετατροπής της ισχύος της δέσμης σε ηλεκτρομαγνητική ισχύ χαρακτηρίζεται από ένα άνω φράγμα που καθορίζεται, πέραν των άλλων, από τις ωμικές απώλειες στα μεταλλικά τοιχώματα της κοιλότητας.

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται για πρώτη φορά η μελέτη και η σχεδίαση μιας κοιλότητας αλληλεπίδρασης (συντονισμού), η οποία αποτελείται εξολοκλήρου από διηλεκτρικό μέσο (all-dielectric cavity). Ως τέτοιο μέσο έχει επιλεγεί, λόγω των χαμηλών απωλειών και των πολύ καλών μηχανικών, θερμικών, και διηλεκτρικών ιδιοτήτων, ο συνθετικός αδάμαντας, ο οποίος ήδη χρησιμοποιείται στο παράθυρο εξόδου ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας του συμβατικού γυροτρονίου. Λόγω της πολυπλοκότητας του προβλήματος, η μελέτη περιορίζεται στη μελέτη των ελεύθερων ταλαντώσεων της «ψυχρής κοιλότητας» (cold cavity), δηλαδή χωρίς την παρουσία ηλεκτρονικής δέσμης.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσονται τα απαραίτητα εργαλεία για τον μαθηματικό χειρισμό του προβλήματος, τα οποία είναι τα βοηθητικά δυναμικά Hertz, και δίνεται μια σύντομη περιγραφή του γυροτρονίου. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η ανάλυση της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα από πολλαπλά στρώματα διηλεκτρικού. Ειδικότερα, μελετώνται η επίπεδη και η κυλινδρική γεωμετρία τριών στρωμάτων, καθώς και η κυλινδρική γεωμετρία πολλαπλών στρωμάτων. Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται το πρόβλημα της εύρεσης ιδιορρυθμών (eigenmodes) στην κοιλότητα συντονισμού του συμβατικού γυροτρονίου. Στο τέταρτο κεφάλαιο δίνεται η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για την παρούσα μελέτη. Επιχειρείται η επέκταση της ανάλυσης του κοιλότητας του κλασικού γυροτρονίου στη νέα κοιλότητα και παρουσιάζονται οι παραδοχές που έγιναν, ενώ παρέχονται επίσης τα στοιχεία των αριθμητικών κωδίκων που αναπτύχθηκαν, οι οποίοι μετατρέπουν το πρόβλημα της εύρεσης των ιδιορρυθμών σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο επιπέδων. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις δύο γεωμετρίες, οι οποίες σχεδιάστηκαν μετά από πολλές επαναληπτικές δοκιμές. Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο περιγράφονται και συνοψίζονται όλα τα συμπεράσματα, καθώς και πιθανές επεκτάσεις της μελέτης.

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγικά στοιχεία κυματοδότησης

1.1 Επίλυση εξισώσεων Maxwell

Κάθε ηλεκτροδυναμικό σύστημα διέπεται από τις εξισώσεις του Maxwell, οι οποίες συνδέουν τις συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου [1]. Πρόκειται για ένα σύνολο τεσσάρων εξισώσεων, η διαφορική μορφή των οποίων στο πεδίο του χρόνου δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

όπου \mathbf{J} είναι η επιφανειακή πυκνότητα του ρεύματος και ρ η χωρική πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων. Σημειώνεται ότι οι πυκνότητες αυτές συνδέονται μεταξύ τους με την εξίσωση συνέχειας

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

1.2 Διανύσματα Hertz

Εφόσον η πυκνότητα φορτίου και ρεύματος εμπεριέχονται στις μη ομογενείς εξισώσεις (1.1)–(1.4) κατά περίπλοκο σχετικά τρόπο, η επίλυση των εξισώσεων Maxwell διευκολύνεται αρκετά χρησιμοποιώντας βοηθητικά δυναμικά, όπως για παράδειγμα το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} και το βαθμωτό δυναμικό φ [2]. Στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης, θα χρησιμοποιηθούν τα διανύσματα του Hertz (Hertz vectors ή polarization potentials) [3].

Σύμφωνα με το θεώρημα Helmholtz [3], ένα διανυσματικό πεδίο καθορίζεται πλήρως αν είναι γνωστά η απόκλιση και ο στροβιλισμός του. Έτσι, μπορεί να θεωρηθεί ότι η πυκνότητα ρεύματος αποτελείται από μια αστρόβιλη συνιστώσα και μια σωληνοειδή [3]. Η αστρόβιλη συνιστώσα \mathbf{J}_{irrot} μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός ισοδύναμου ρεύματος πόλωσης \mathbf{P}

$$\mathbf{J}_{irrot} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (1.6)$$

και η σωληνοειδής συνιστώσα \mathbf{J}_{sol} μέσω ενός ισοδύναμου ρεύματος μαγνήτισης \mathbf{M}

$$\mathbf{J}_{sol} = \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.7)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας, και μετά από κατάλληλο χειρισμό των εξισώσεων Maxwell [3], τα πεδία μπορούν να εκφραστούν σε συνάρτηση με το ηλεκτρικό διάνυσμα Hertz $\mathbf{\Pi}_e$ και το μαγνητικό διάνυσμα Hertz $\mathbf{\Pi}_m$, που σχετίζονται με το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} με τις σχέσεις:

$$\mathbf{A} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{A} = \mu \nabla \times \mathbf{\Pi}_m \quad (1.9)$$

όπου μ και ϵ είναι η μαγνητική διαπερατότητα και η ηλεκτρική επιτρεπτότητα του μέσου, αντίστοιχα.

Υποθέτοντας αρμονική εξάρτηση $e^{+j\omega t}$, τα διανύσματα Hertz αποτελούν λύσεις των παρακάτω εξισώσεων τύπου Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_e + \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{\Pi}_e = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon} \quad (1.10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_m + \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{\Pi}_m = -\mathbf{M} \quad (1.11)$$

Σημειώνεται ότι κάθε διάνυσμα Hertz αποτελεί λύση της μη ομογενούς εξίσωσης Helmholtz, με πηγή το αντίστοιχο ισοδύναμο ρεύμα (πόλωσης – μαγνήτισης).

Χρησιμοποιώντας της αρχή της επαλληλίας, οι εκφράσεις των πεδίων δίνονται από τις σχέσεις [3]:

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e) + \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{\Pi}_e - j\omega\mu \nabla \times \mathbf{\Pi}_m \quad (1.12)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_m + j\omega\epsilon \nabla \times \mathbf{\Pi}_e \quad (1.13)$$

Απουσία πηγών, οι διαφορικές εξισώσεις (1.10) και (1.11) μεταπίπτουν σε ομογενείς και τα πεδία δίνονται από τις σχέσεις [3]:

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e) + \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{\Pi}_e - j\omega\mu \nabla \times \mathbf{\Pi}_m \quad (1.14)$$

$$\mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m) + \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{\Pi}_m + j\omega\epsilon \nabla \times \mathbf{\Pi}_e \quad (1.15)$$

Συγκρίνοντας τα διανύσματα Hertz με τα δυναμικά \mathbf{A} και φ , παρατηρούμε ότι τα τελευταία δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, αλλά συνδέονται με τη βαθμίδα Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (1.16)$$

Αντίθετα, για τα διανύσματα Hertz, από τη σχέση (1.9) ισχύει ότι $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, οπότε το δυναμικό φ οφείλει να είναι χρονικά αμετάβλητο και εφόσον η DC συνιστώσα δεν παρουσιάζει πρακτικό ενδιαφέρον, μπορεί να τεθεί $\varphi = 0$ [3]. Επίσης, το διάνυσμα $\mathbf{\Pi}_e$ είναι κατάλληλο για επίλυση προβλημάτων όπου η πυκνότητα ρεύματος είναι αστρόβιλη, ενώ το διάνυσμα $\mathbf{\Pi}_m$ είναι κατάλληλο για επίλυση προβλημάτων όπου η πυκνότητα ρεύματος είναι σωληνοειδής.

Τέλος, σημειώνεται ότι η παρουσία και των δύο διανυσμάτων Hertz στις εκφράσεις των πεδίων επιβάλλεται ανάλογα με τη μορφή των πηγών ή/και των οριακών συνθηκών κάθε προβλήματος [3], όπως φαίνεται σε επόμενες παραγράφους.

1.3 Κυματοδήγηση σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Στα προβλήματα που εμφανίζουν κυλινδρική συμμετρία χρησιμοποιούνται οι κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, φ, z) , στις οποίες οι τελεστές της απόκλισης και του στροβιλισμού, για τυχαίο διανυσματικό πεδίο \mathbf{A} , δίνονται από τις σχέσεις:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{z} \quad (1.18)$$

Αν υποθέσουμε ότι το πρόβλημα διαθέτει συμμετρία εκ περιστροφής περί τον διαμήκη άξονα z , όπως για παράδειγμα ένας μεταλλικός «κούφιος» κυλινδρικός κυματοδηγός, τότε τα διανύσματα Hertz έχουν μόνο διαμήκη συνιστώσα, δηλαδή ισχύει $\mathbf{\Pi}_e = \Pi_e \hat{z}$ και $\mathbf{\Pi}_m = \Pi_m \hat{z}$, και απουσία πηγών ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τα πεδία [3]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_\rho \hat{\rho} + E_\varphi \hat{\varphi} + E_z \hat{z} \\ E_\rho &= \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial \rho \partial z} - j\omega\mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_m}{\partial \varphi} \\ E_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial \varphi \partial z} + j\omega\mu \frac{\partial \Pi_m}{\partial \rho} \\ E_z &= \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z^2} + \omega^2 \mu\epsilon \Pi_e \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= H_\rho \hat{\rho} + H_\varphi \hat{\varphi} + H_z \hat{z} \\
H_\rho &= j\omega\varepsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial \rho \partial z} \\
H_\varphi &= -j\omega\varepsilon \frac{\partial \Pi_e}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial \varphi \partial z} \\
H_z &= \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon \Pi_m
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Τα Π_e και Π_m αποτελούν λύσεις της βαθμωτής ομογενούς εξίσωσης Helmholtz

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \Pi_e \\ \Pi_m \end{Bmatrix} + \omega^2 \mu \varepsilon \begin{Bmatrix} \Pi_e \\ \Pi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.21}$$

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε διάδοση κατά τον διαμήκη άξονα z , δηλαδή εξάρτηση της μορφής $e^{\pm jk_z z}$, όπου $k_z \in \mathbb{R}$ και είναι ο διαμήκης κυματάριθμος. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, απαιτώντας τη φυσική περιοδικότητα των λύσεων ως προς φ και αντικαθιστώντας $\partial/\partial z \equiv \pm jk_z$, αποδεικνύεται [2] ότι η εξίσωση (1.21) έχει λύσεις της μορφής

$$\{\Pi_e, \Pi_m\} = R(\rho)\Phi(\varphi)e^{\pm jk_z z} \tag{1.22}$$

όπου

$$\Phi(\varphi) = e^{jm\varphi}, m \in \mathbb{Z} \tag{1.23}$$

Η συνάρτηση $R(\rho)$ αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(k_\perp^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0 \tag{1.24}$$

όπου k_\perp είναι ο εγκάρσιος κυματάριθμος, ο οποίος ορίζεται από τη σχέση:

$$k_\perp^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2 \tag{1.25}$$

Για $\omega, \mu, \varepsilon, k_z \in \mathbb{R}$, οι λύσεις της εξίσωσης Bessel εξαρτώνται από το πρόσημο της ποσότητας k_\perp^2 . Αν $k_\perp^2 > 0$, οι λύσεις έχουν τη γενική μορφή

$$R(\rho) = C_1 \cdot J_m(k_\perp \rho) + C_2 \cdot Y_m(k_\perp \rho) \tag{1.26}$$

όπου C_1 και C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές και $J_m(*)$ και $Y_m(*)$ οι συναρτήσεις Bessel και Neumann τάξης m , αντίστοιχα [4]. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι συναρτήσεις Neumann απειρίζονται, όταν το ρ τείνει στο μηδέν. Αυτός ο περιορισμός λαμβάνεται υπόψη σε προβλήματα, όπου απαιτείται ο υπολογισμός των πεδίων για $\rho = 0$, μηδενίζοντας τη σταθερά C_2 .

Αν $k_{\perp}^2 < 0$, οι λύσεις έχουν τη γενική μορφή

$$R(\rho) = C_1 \cdot I_m(\xi\rho) + C_2 \cdot K_m(\xi\rho) \quad (1.27)$$

όπου $\xi = \sqrt{-k_{\perp}^2}$, C_1 και C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές και $I_m(*)$ και $K_m(*)$ οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel τάξης m 1^{ου} και 2^{ου} είδους, αντίστοιχα [4]. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1^{ου} είδους απειρίζονται καθώς το ρ τείνει στο άπειρο, ενώ οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 2^{ου} είδους απειρίζονται καθώς το ρ τείνει στο μηδέν. Αυτός ο περιορισμός λαμβάνεται υπόψη σε προβλήματα, όπου απαιτείται ο υπολογισμός των πεδίων για $\rho = 0$ ή/και $\rho \rightarrow \infty$, μηδενίζοντας τις αντίστοιχες σταθερές.

Μια εναλλακτική μορφή των λύσεων – σχέση (1.26) – μπορεί να γραφεί και ως εξής [3]:

$$R(\rho) = C_1 \cdot H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) + C_2 \cdot H_m^{(1)}(k_{\perp}\rho) \quad (1.28)$$

όπου $H_m^{(1)}(*)$ και $H_m^{(2)}(*)$ είναι οι συναρτήσεις Hankel τάξης m 1^{ου} και 2^{ου} είδους, αντίστοιχα, οι οποίες ορίζονται από τις σχέσεις [4]:

$$\begin{aligned} H_m^{(2)}(z) &= J_m(z) - jY_m(z) \\ H_m^{(1)}(z) &= J_m(z) + jY_m(z) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Για χρονική εξάρτηση $e^{+j\omega t}$ και για $\text{Re}\{k_{\perp}\} > 0$, η συνάρτηση $H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho)$ εκφράζει κυλινδρικό κύμα που οδεύει προς $\rho \rightarrow \infty$ και η συνάρτηση $H_m^{(1)}(k_{\perp}\rho)$ εκφράζει κυλινδρικό κύμα που οδεύει προς $\rho = 0$ [3], όπως είναι κατανοητό από τις ασυμπτωτικές εκφράσεις [4]:

$$H_m^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-j(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}, \quad -2\pi < \text{arg}(z) < \pi, |z| \rightarrow \infty \quad (1.30)$$

$$H_m^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{+j(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}, \quad -\pi < \text{arg}(z) < 2\pi, |z| \rightarrow \infty \quad (1.31)$$

Επομένως, η σχέση (1.26) εκφράζει τη συμβολή δύο κυλινδρικών κυμάτων που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις, δηλαδή ένα στάσιμο κύμα.

Στη γενική περίπτωση όπου $\omega, \mu, \epsilon, k_z \in \mathbb{C}$, όπως συμβαίνει στο πρόβλημα της παρούσας μελέτης, δεν έχει νόημα να γίνει διαχωρισμός σε λύσεις με απλές ή τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel [5], και η λύση της εξίσωσης Bessel έχει, στο μιγαδικό πλέον επίπεδο, τη μορφή

$$R(\rho) = C_1 \cdot J_m(k_{\perp}\rho) + C_2 \cdot Y_m(k_{\perp}\rho) \quad (1.32)$$

ή ισοδύναμα

$$R(\rho) = C_1 \cdot H_m^{(2)}(k_\perp \rho) + C_2 \cdot H_m^{(1)}(k_\perp \rho) \quad (1.33)$$

με $k_\perp \in \mathbb{C}$.

1.3.1 Ειδική περίπτωση: κούφιος μεταλλικός κυματοδηγός κυκλικής διατομής

Ως εφαρμογή των παραπάνω, θα υπολογιστούν οι εκφράσεις των πεδίων στην περίπτωση ενός κούφιου μεταλλικού κυλινδρικού κυματοδηγού ακτίνας ρ_0 . Επειδή το πρόβλημα διαθέτει συμμετρία εκ περιστροφής περί τον διαμήκη άξονα z , τα διανύσματα Hertz έχουν μόνο διαμήκη συνιστώσα και ισχύουν οι σχέσεις (1.19)–(1.20). Επειδή το $\rho = 0$ περιέχεται στον χώρο όπου αναζητούμε λύσεις, οι διαμήκεις (αξονικές) συνιστώσες των διανυσμάτων Hertz λαμβάνουν τη μορφή

$$\Pi_e = C_1 \cdot J_m(k_\perp \rho) \cdot e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (1.34)$$

$$\Pi_m = C_2 \cdot J_m(k_\perp \rho) \cdot e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (1.35)$$

Για εξάρτηση $e^{-jk_z z} e^{jm\varphi}$, όπου $k_z \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{Z}$, κάνουμε την αντικατάσταση $\partial/\partial z \equiv -jk_z$ και $\partial/\partial \varphi \equiv jm$, και προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_\rho \hat{\rho} + E_\varphi \hat{\varphi} + E_z \hat{z} \\ E_\rho &= \left[-jk_z k_\perp \cdot J'_m(k_\perp \rho) \cdot C_1 + \frac{m\omega\mu}{\rho} \Pi_m \cdot J_m(k_\perp \rho) \cdot C_2 \right] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \\ E_\varphi &= \left[\frac{mk_z}{\rho} J_m(k_\perp \rho) \cdot C_1 + j\omega\mu k_\perp \cdot J'_m(k_\perp \rho) \cdot C_2 \right] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \\ E_z &= k_\perp^2 \cdot J_m(k_\perp \rho) \cdot C_1 e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= H_\rho \hat{\rho} + H_\varphi \hat{\varphi} + H_z \hat{z} \\ H_\rho &= \left[-\frac{m\omega\varepsilon}{\rho} J_m(k_\perp \rho) \cdot C_1 - jk_z \cdot J'_m(k_\perp \rho) \cdot C_2 \right] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \\ H_\varphi &= \left[-j\omega\varepsilon J'_m(k_\perp \rho) \cdot C_1 + \frac{mk_z}{\rho} J_m(k_\perp \rho) \cdot C_2 \right] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \\ H_z &= k_\perp^2 \cdot J_m(k_\perp \rho) \cdot C_2 e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Θεωρώντας ότι το μεταλλικό τοίχωμα του κυματοδηγού είναι τέλειος αγωγός, οι οριακές συνθήκες απαιτούν τον μηδενισμό των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου για $\rho = \rho_0$, δηλαδή

$$\begin{aligned} E_z(\rho = \rho_o, \varphi, z) &= 0 \\ E_\varphi(\rho = \rho_o, \varphi, z) &= 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Από τις (1.36) και (1.38) παρατηρούμε ότι η οριακή συνθήκη για το E_z ικανοποιείται αν $C_1 = 0$ ή $J_m(k_\perp \rho_o) = 0$. Για να ικανοποιείται και η οριακή συνθήκη για το E_φ , θα πρέπει:

- αν $C_1 = 0$, για να μην έχουμε μηδενικά πεδία $C_2 \neq 0$, οπότε αναγκαστικά $J'_m(k_\perp \rho_o) = 0$,
- αν $J_m(k_\perp \rho_o) = 0$ θα πρέπει να ισχύει $C_2 = 0$, καθώς είναι αδύνατο να ισχύει ταυτόχρονα $J_m(k_\perp \rho_o) = J'_m(k_\perp \rho_o) = 0$ για $k_\perp \rho_o \neq 0$, όπως αποδεικνύεται στο Παράρτημα Α.1.

Έτσι, υφίστανται οι εξής δύο ανεξάρτητες επιλογές:

$$C_1 = 0 \text{ και } J'_m(k_\perp \rho_o) = 0 \quad (1.39)$$

$$C_2 = 0 \text{ και } J_m(k_\perp \rho_o) = 0 \quad (1.40)$$

Από τις σχέσεις (1.36)–(1.37), η επιλογή (1.39) εκφράζει πεδία με $E_z = 0$ και $H_z \neq 0$, δηλαδή ρυθμούς διάδοσης TE, ενώ η (1.40) πεδία με $E_z \neq 0$ και $H_z = 0$, δηλαδή ρυθμούς διάδοσης TM.

Η παράγωγος της συνάρτησης Bessel, για πραγματικό όρισμα, μηδενίζεται σε ρίζες που χαρακτηρίζονται από δύο δείκτες, έναν για την τάξη της ίδιας της συνάρτησης (δείκτης m) και έναν για την τάξη της ρίζας (δείκτης n). Οι ρίζες αυτές σε συντομία συμβολίζονται ως j'_{mn} . Επομένως, για τους ρυθμούς TE θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$k_\perp = \frac{j'_{mn}}{\rho_o} \quad (1.41)$$

Η συνάρτηση Bessel, για πραγματικό όρισμα, μηδενίζεται σε ρίζες που χαρακτηρίζονται από δύο δείκτες, έναν για την τάξη της ίδιας της συνάρτησης (δείκτης m) και έναν για την τάξη της ρίζας (δείκτης n). Οι ρίζες αυτές σε συντομία συμβολίζονται ως j_{mn} . Επομένως, για τους ρυθμούς TM θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$k_\perp = \frac{j_{mn}}{\rho_o} \quad (1.42)$$

Το βασικό συμπέρασμα των παραπάνω σχέσεων είναι ότι στην περίπτωση του κούφιου μεταλλικού κυλινδρικού κυματοδηγού, ο εγκάρσιος κυματάριθμος έχει δεδομένη τιμή για κάθε ρυθμό διάδοσης, η οποία μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά. Συνεπώς, για δεδομένη κυκλική συχνότητα ω μπορεί να υπολογιστεί ο διαμήκης κυματάριθμος k_z μέσω της σχέσης:

$$\begin{cases} k_{z,TE}^2 \\ k_{z,TM}^2 \end{cases} = \omega^2 \mu \epsilon - \begin{cases} \left(\frac{j'_{mn}}{\rho_o} \right)^2 \\ \left(\frac{j_{mn}}{\rho_o} \right)^2 \end{cases} \quad (1.43)$$

και αν $k_z^2 > 0$, ο ρυθμός διαδίδεται ως προς z με κυματάριθμο (σταθερά φάσης)

$$\begin{cases} \beta_{TE} \\ \beta_{TM} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{j'_{mn}}{\rho_o} \right)^2} \\ \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{j_{mn}}{\rho_o} \right)^2} \end{cases} \quad (1.44)$$

ενώ αν $k_z^2 < 0$, ο ρυθμός είναι σε αποκοπή ως προς z με σταθερά απόσβεσης (τα πεδία ελαττώνονται εκθετικά με την απόσταση)

$$\begin{cases} \alpha_{TE} \\ \alpha_{TM} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{j'_{mn}}{\rho_o} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \\ \sqrt{\left(\frac{j_{mn}}{\rho_o} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \end{cases} \quad (1.45)$$

Όπως θα φανεί σε επόμενο κεφάλαιο, επειδή η παρούσα μελέτη πραγματεύεται κοιλότητα συντονισμού που έχει ως τοίχωμα διηλεκτρικό μέσο κάποιου πάχους, δηλαδή αφορά στην περίπτωση των hollow core pipe fibers (βλ. παρ. 4.1.2), οι ρυθμοί που κυματοδηγούνται στην εσωτερική περιοχή (air channel) δεν διαθέτουν αποκοπή.

1.4 Εισαγωγικά στοιχεία γυροτρονίου

1.4.1 Γενικά

Το γυροτρόνιο είναι μια διάταξη παραγωγής μικροκυματικής ισχύος, δηλαδή συμπεριφέρεται ως ταλαντωτής. Η αρχική σύλληψη και η επεξήγηση του φυσικού μηχανισμού παραγωγής ηλεκτρομαγνητικής ισχύος σε αυτό παρουσιάστηκε το 1959 στην πρώτην ΕΣΣΔ και το πρώτο γυροτρόνιο κατασκευάστηκε εκεί στα μέσα της δεκαετίας του 1960. Από τότε, τα γυροτρόνια γνώρισαν μεγάλη ανάπτυξη, κυρίως λόγω της καλής επίδοσής τους στις περιοχές συχνοτήτων και ισχύος που απαιτούν οι αντιδραστήρες ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης. Ουσιαστικά, τα γυροτρόνια γεφύρωσαν το χάσμα που υπήρχε μεταξύ των κλύστρων (klystron) και των λέιζερ, όσον αφορά τη δυνατότητα παραγωγής μικροκυματικής ισχύος στη χιλιοστομετρική και υποχιλιοστομετρική περιοχή του φάσματος [6].

Η ηλεκτρονική δέσμη στο γυροτρόνιο είναι ήπια σχετικιστική (ο σχετικιστικός παράγοντας γ των ηλεκτρονίων είναι μικρότερος από 1.2). Η

μεταφορά ενέργειας από τη δέσμη προς το κύμα υψηλής συχνότητας πραγματοποιείται στο εγκάρσιο επίπεδο, μέσω του συντονισμού μεταξύ των περιστρεφόμενων ηλεκτρονίων και μιας κατάλληλης κυκλικά πολωμένης συνιστώσας του κύματος. Το κυματόνισμα της παραγόμενης ακτινοβολίας είναι σχεδόν κάθετο στον άξονα της διάταξης και η παραγόμενη ακτινοβολία, εφόσον το γυροτρόνιο λειτουργεί ως ταλαντωτής, είναι σύμφωνη (coherent). Μέχρι σήμερα, η ανάπτυξη και οι εφαρμογές του γυροτρονίου εστιάζονται κυρίως στη λειτουργία του ως ταλαντωτή (gyrotron oscillator ή gyromonotron).

Επειδή ο σχετικιστικός παράγοντας γ σε ένα γυροτρόνιο είναι σχετικά μικρός, η συχνότητα της παραγόμενης ακτινοβολίας καθορίζεται ουσιαστικά από το εξωτερικά επιβαλλόμενο αξονικό μαγνητικό πεδίο B_0 σύμφωνα με τη σχέση [6]:

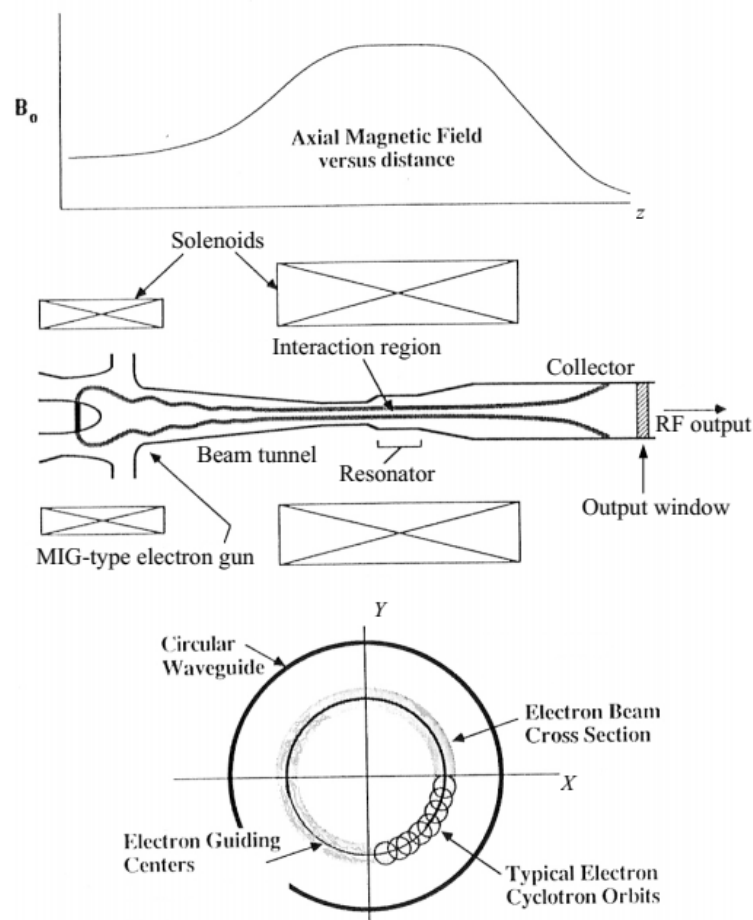
$$f(\text{GHz}) \cong \frac{28 \cdot B_0(T)}{\gamma} \quad (1.46)$$

Η σχέση αυτή αφορά στην περίπτωση που τα ηλεκτρόνια συντονίζονται με το κύμα στη θεμελιώδη κυκλοτρονική συχνότητα, καθώς στην περίπτωση των αρμονικών γυροτρονίων έχουμε συντονισμό ηλεκτρονίων – κύματος σε κάποια αρμονική της κυκλοτρονικής συχνότητας [6].

Η κυριότερη εφαρμογή του γυροτρονίου ως ταλαντωτή είναι η παραγωγή σύμφωνης χιλιοστομετρικής ακτινοβολίας ισχύος για τις ανάγκες των πειραματικών διατάξεων ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης [6]. Οι ανάγκες αυτές αφορούν στη θέρμανση του πλάσματος σύντηξης μέσω ηλεκτρονικού κυκλοτρονικού συντονισμού (electron cyclotron resonance heating, ECRH), στην ηλεκτρονική κυκλοτρονική οδήγηση ρεύματος (electron cyclotron current drive, ECCD), στον έλεγχο ασταθειών του πλάσματος και διάφορες διαγνωστικές διατάξεις. Γυροτρόνια για αυτές τις εφαρμογές παράγουν ισχύ από 100 kW έως πάνω από 1 MW σε συχνότητες μεταξύ 28 GHz και 170 GHz ή και μεγαλύτερες, λειτουργώντας είτε παλμικά (με παλμούς μικρής διάρκειας) ή ακόμη και με λειτουργία συνεχούς κύματος (Continuous Wave, CW). Ήδη αναπτύσσονται γυροτρόνια ισχύος 1 MW – 2 MW CW σε συχνότητες 110 GHz – 203 GHz για μελλοντικές μηχανές σύντηξης. Εμπορικά γυροτρόνια ισχύος 1 MW CW λειτουργούν στα 140 GHz (TED) ή στα 170 GHz (JAERI-TOSHIBA, GYCOM) με απόδοση έως και 50%. Γυροτρόνια (αρμονικά ή μη) για διαγνωστικές εφαρμογές αποδίδουν ισχύ μέχρι 40 kW για 40 μ s σε συχνότητες μέχρι 650 GHz με απόδοση της τάξης του 4%. Αρμονικά γυροτρόνια φθάνουν σε υποχιλιοστομετρικές συχνότητες (μέχρι 889 GHz, Πανεπιστήμιο Fukui στην Ιαπωνία) συνήθως με παλμική λειτουργία και με χαμηλή ισχύ (< 25 kW) και απόδοση (<7%). Τα γυροτρόνια χρησιμοποιούνται επίσης σε βιομηχανικές εφαρμογές, όπως η επεξεργασία υλικών που απαιτεί γυροτρόνια συχνότητας πάνω από 24 GHz, ισχύ 10 kW – 50 kW CW και απόδοση μεγαλύτερη του 30%. Επιπλέον, χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές φυσικής υψηλών ενεργειών, στη φασματοσκοπία, καθώς και σε χιλιοστομετρικά ραντάρ [6].

1.4.2 Δομή συμβατικού γυροτρονίου

Η δομή ενός συμβατικού γυροτρονίου, το οποίο είναι κυλινδρικά συμμετρικό περί τον άξονα z παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.1 [7]. Το μόνιμο αξονικό μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται κατά z με τον τρόπο που φαίνεται στο ίδιο σχήμα. Το σύστημα καθόδου-ανόδου, στο οποίο σχηματίζεται η ηλεκτρονική δέσμη (πηγή ηλεκτρονικής δέσμης), είναι τύπου MIG (Magnetron Injection Gun). Συνήθως η πηγή ηλεκτρονικής δέσμης είναι δίοδος (diode-type electron gun). Τα ηλεκτρόνια εκπέμπονται θερμιονικά με αμελητέα αρχική ταχύτητα από έναν εκπομπό από κατάλληλο υλικό, ο οποίος έχει τη μορφή επιφάνειας κόλουρου κώνου. Συνεπώς, η ηλεκτρονική δέσμη είναι δακτυλιοειδής. Επιπλέον, η ακτίνα της δέσμης είναι πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα της κυκλοτρονικής περιστροφής των ηλεκτρονίων (ακτίνα Larmor). Αυτά φαίνονται ποιοτικά επίσης στο Σχήμα 1.1. Συνεπώς, υπάρχει ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο κάθετο στην επιφάνεια εκπομπής το οποίο, σε συνδυασμό με το αξονικό μαγνητικό πεδίο, επιβάλλει στα ηλεκτρόνια να ακολουθήσουν ελικοειδείς τροχιές γύρω από τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου [7].



Σχήμα 1.1 Σχηματική δομή του συμβατικού γυροτρονίου. Επάνω φαίνεται η αξονική μεταβολή του μόνιμου αξονικού μαγνητικού πεδίου και κάτω μια εγκάρσια τομή της διάταξης [7].

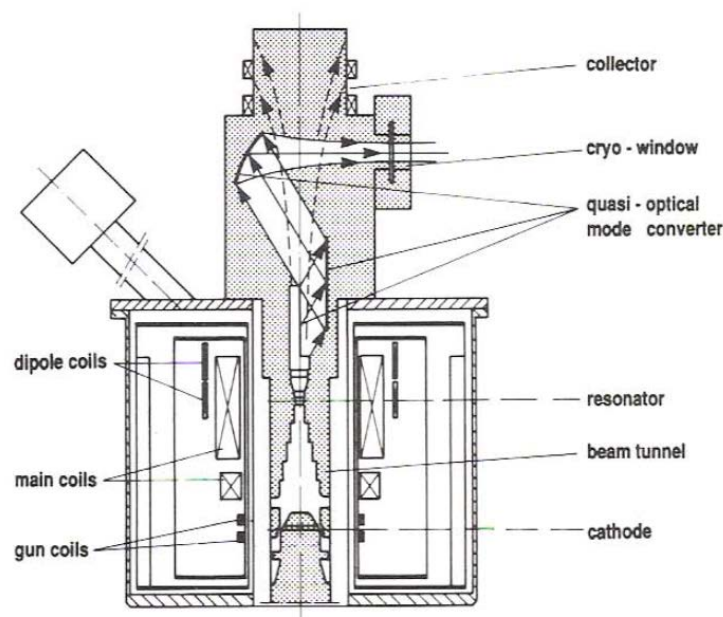
Στον διάυλο της ηλεκτρονικής δέσμης το μαγνητικό πεδίο αυξάνει και παίρνει τη μέγιστη τιμή του. Η αξονική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου στον διάυλο είναι αργή σε σύγκριση με το βήμα της ελικοειδούς τροχιάς του κάθε ηλεκτρονίου, οπότε η κίνηση του ηλεκτρονίου από την κάθοδο μέχρι το ηλεκτροδυναμικό σύστημα μπορεί να θεωρηθεί αδιαβατική, και το κέντρο της κυκλοτρονικής περιστροφής του σωματιδίου ακολουθεί μια δυναμική γραμμή του μαγνητικού πεδίου [7]. Συνεπώς, κατά τη διέλευση των ηλεκτρονίων από τον διάυλο, η εγκάρσια ορμή τους αυξάνει, η αξονική ορμή τους ελαττώνεται και επειδή, λόγω της αύξησης του B_0 , οι μαγνητικές γραμμές συγκλίνουν, η ακτίνα της δέσμης μικραίνει. Η δέσμη υφίσταται με αυτό τον τρόπο μαγνητική συμπίεση (magnetic compression), η οποία είναι απαραίτητη για να υπάρξει συμβιβασμός μεταξύ της περιορισμένης πυκνότητας ρεύματος που μπορεί να παράγει ο εκπομπός σε σχέση με την αυξημένη πυκνότητα ρεύματος που απαιτείται για την αλληλεπίδραση δέσμης – πεδίου στο ηλεκτροδυναμικό σύστημα. Ο διάυλος της ηλεκτρονικής δέσμης εξασφαλίζει έτσι την προσαρμογή της πυκνότητας ρεύματος της δέσμης και της εγκάρσιας ταχύτητας των ηλεκτρονίων στις ανάγκες τις αλληλεπίδρασης [7].

1.4.3 Κοιλότητα αλληλεπίδρασης και έξοδος ισχύος

Το ηλεκτροδυναμικό σύστημα του γυροτρονίου είναι η λεγόμενη κοιλότητα αλληλεπίδρασης (interaction cavity) και στο συμβατικό γυροτρόνιο έχει τη μορφή κυλινδρικού κυματοδηγού μεταβλητής ακτίνας. Η ακτίνα μειώνεται προς το άκρο που βρίσκεται στην πλευρά του διαύλου, ώστε η παραγόμενη Η/Μ ισχύς να είναι σε αποκοπή και να μην επιστρέφει προς την κάθοδο. Αντίθετα, η ακτίνα αυξάνει προς το άκρο που βρίσκεται στην πλευρά του συλλέκτη, ώστε η παραγόμενη Η/Μ ισχύς να εξέρχεται από το ηλεκτροδυναμικό σύστημα με τη μορφή οδεύοντος κύματος. Μεταξύ των περιοχών μεταβλητής ακτίνας υπάρχει μια περιοχή σταθερής (συνήθως) ακτίνας όπου υποστηρίζονται κύματα που μοιάζουν με στάσιμα και όπου κατεξοχήν λαμβάνει χώρα η αλληλεπίδραση δέσμης – πεδίου και η συνεπακόλουθη παραγωγή της μικροκυματικής ισχύος. Έτσι, ο κυματοδηγός μεταβλητής ακτίνας συμπεριφέρεται τελικά σαν μια ανοικτή κοιλότητα (open resonator). Στα σύγχρονα γυροτρόνια μεγάλης ισχύος, το παραγόμενο υψίσυχνο κύμα εμφανίζει ισχυρά πεδία στην περιοχή της δέσμης και όχι στο κέντρο της κοιλότητας. Με άλλα λόγια η εγκάρσια δομή του υψίσυχνου κύματος είναι δακτυλιοειδής [7].

Μετά την αλληλεπίδραση, η ηλεκτρονική δέσμη, έχοντας πλέον μειωμένη αλλά ικανή κινητική ενέργεια και μεγάλη διασπορά ταχυτήτων, καταλήγει στον συλλέκτη. Για να μετριαστεί η επιβάρυνση από τα προσκρούοντα ηλεκτρόνια, το μαγνητικό πεδίο μετά την κοιλότητα αλληλεπίδρασης μειώνεται, οπότε η ακτίνα της δέσμης αυξάνει (μαγνητική αποσυμπίεση) και τα ηλεκτρόνια κατανέμονται σε μεγαλύτερο εμβαδόν πάνω στην επιφάνεια του συλλέκτη.

Η έξοδος της παραγόμενης μικροκυματικής ισχύος από το γυροτρόνιο μπορεί να γίνει είτε κατά τον άξονα της διάταξης είτε εγκάρσια σε αυτόν. Η αξονική έξοδος αναπτύχθηκε πρώτη, επειδή είναι και η απλούστερη (τέτοια είναι η έξοδος στο γυροτρόνιο που δίνεται στο Σχήμα 1.1). Στην περίπτωση της αξονικής εξόδου δεν υπάρχει επιπλέον διάταξη διαχωριστή και ο διαχωρισμός των ηλεκτρονίων από το υψίσυχο πεδίο γίνεται ουσιαστικά με το μειούμενο μαγνητικό πεδίο στον συλλέκτη, το οποίο αναγκάζει τα ηλεκτρόνια να εγκαταλείψουν την αξονική διεύθυνση κίνησης και να προσκρούσουν στα τοιχώματα. Η παραγόμενη μικροκυματική ισχύς συνεχίζει την αξονική της πορεία ως οδεύον κύμα και εξέρχεται από τη λυχνία. Η εγκάρσια δομή του εξερχόμενου κύματος είναι συνήθως ίδια με εκείνη στην κοιλότητα αλληλεπίδρασης [7]. Στην περίπτωση όμως της ακτινικής εξόδου υπάρχει ημι-οπτική διάταξη διαχωριστή, η οποία περιλαμβάνει συνδυασμό κατόπτρων και μιας ειδικής τομής στον κυματοδηγό που ακολουθεί την κοιλότητα αλληλεπίδρασης [6], [7]. Ο διαχωριστής επιτυγχάνει την εκτροπή της μικροκυματικής ισχύος από την αξονική στην ακτινική διεύθυνση και επιπλέον λειτουργεί και ως μετατροπέας ρυθμού (mode converter), μετατρέποντας τη δακτυλιοειδή μικροκυματική δέσμη της κοιλότητας σε μικροκυματική δέσμη με γκαουσιανή κατανομή ισχύος στο εγκάρσιο επίπεδο (γκαουσιανή δέσμη). Ένα γυροτρόνιο ακτινικής εξόδου φαίνεται στο Σχήμα 1.2 [7].



Σχήμα 1.2 Συμβατικό γυροτρόνιο ακτινικής εξόδου [7].

Παρόλη την πολυπλοκότητα, η ακτινική έξοδος με μετατροπέα ρυθμού είναι προτιμότερη σε σχέση με την αξονική στα γυροτρόνια μεγάλης ισχύος (~ MW), όπου η παραγόμενη μικροκυματική δέσμη στην κοιλότητα αλληλεπίδρασης είναι δακτυλιοειδής [10]. Αφενός, η γκαουσιανή μικροκυματική δέσμη πλεονεκτεί σε σχέση με τη δακτυλιοειδή, επειδή παρουσιάζει μικρότερες ωμικές απώλειες στους κυματοδηγούς και γενικά είναι αποδοτικότερη κατά τη χρήση της στις εφαρμογές.

Αφετέρου, ο διαχωρισμός δέσμης – πεδίων είναι πλήρης, οπότε ο συλλέκτης δεν αποτελεί τμήμα του κυματοδηγού εξόδου και συνεπώς μπορεί να σχεδιαστεί με αποκλειστικό γνώμονα την καλύτερη διαχείριση της ηλεκτρονικής δέσμης. Τέλος, οι ανακλάσεις από το διηλεκτρικό παράθυρο μικροκυμάτων, από το οποίο εξέρχεται τελικά η ηλεκτρομαγνητική ισχύς, μπορούν να περιοριστούν σημαντικά με κατάλληλη μικρή κλίση του παραθύρου, το οποίο δεν είναι δυνατό στην περίπτωση της αξονικής εξόδου [7].

Το διηλεκτρικό παράθυρο μικροκυμάτων του γυροτρονίου πρέπει να εμφανίζει μικρό συντελεστή ανάκλασης και χαμηλή απορρόφηση στη συχνότητα λειτουργίας και επιπλέον να είναι ανθεκτικό στην μικροκυματική ισχύ. Η ανθεκτικότητα του παραθύρου ήταν μέχρι πριν μερικά χρόνια ο κυριότερος ίσως παράγοντας περιορισμού της χρονικής διάρκειας του παλμού λειτουργίας στα γυροτρόνια μεγάλης ισχύος. Η πρόσφατη ανάπτυξη παραθύρων συνθετικού αδάμαντα με την τεχνική CVD (Chemical Vapour Deposition) φαίνεται να λύνει αυτό το πρόβλημα για αυτό και όλες οι πρόσφατες υλοποιήσεις γυροτρονίων ισχύος (~ MW) υιοθετούν τέτοια παράθυρα [7].

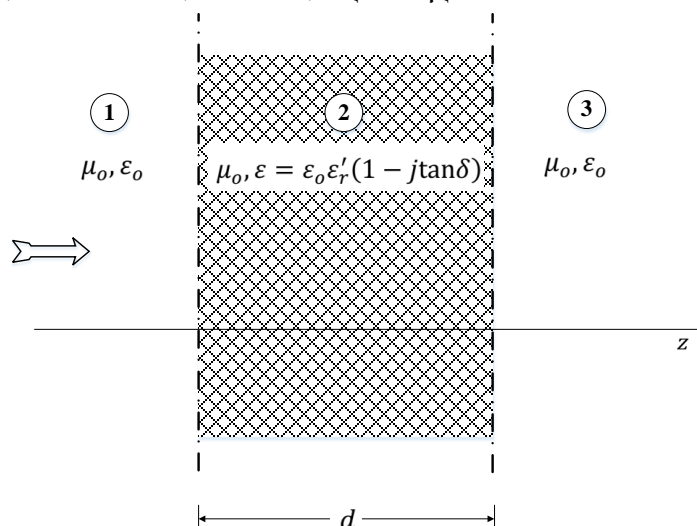
Η τυπική μαθηματική ανάλυση για την περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων (απουσία δέσμης «ψυχρή» κοιλότητα – cold cavity) στο συμβατικό γυροτρόνιο παρατίθεται στο Κεφάλαιο 3.

Κεφάλαιο 2 Πεδία σε πολλαπλά διηλεκτρικά στρώματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε διηλεκτρικά στρώματα. Αρχικά, παρατίθεται η ανάλυση για την επίπεδη γεωμετρία, η οποία είναι μεν απλούστερη από την αντίστοιχη κυλινδρική, ωστόσο παρέχει τα βασικά χαρακτηριστικά που θα χρησιμοποιηθούν για τη σχεδίαση μιας κοιλότητας συντονισμού γυροτρονίου που αποτελείται αποκλειστικά από διηλεκτρικά στρώματα. Στη συνέχεια, αναλύεται η περίπτωση της κυλινδρικής γεωμετρίας για 3 ή περισσότερα στρώματα.

2.1 Επίπεδη γεωμετρία τριών διηλεκτρικών στρωμάτων

Η απλούστερη γεωμετρία είναι μια άπειρη επιφάνεια πλάκας διηλεκτρικού πάχους d με ηλεκτρική επιτρεπτότητα $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_0 \epsilon_r' (1 - j \tan \delta)$, όπου $\tan \delta$ η εφαπτομένη απωλειών. Έτσι η γεωμετρία του προβλήματος χωρίζεται σε τρεις περιοχές (Σχήμα 2.1), όπου όλες οι περιοχές θεωρούνται χωρίς αγωγιμότητα, και μάλιστα οι περιοχές 1 και 3 έχουν τα χαρακτηριστικά του κενού.



Σχήμα 2.1 Γεωμετρία επίπεδης πλάκας διηλεκτρικού μέσου.

Έστω ότι ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα (Transverse Electromagnetic wave, TEM) προσπίπτει κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια των περιοχών 1 και 2 με φορά προς τα δεξιά. Ορίζονται οι συντελεστές ανάκλασης Γ_{ij} και μετάδοσης T_{ij} για $1 \leq i, j \leq 3, |i - j| = 1$, οι οποίοι αφορούν κάθετη πρόσπτωση σε διαχωριστική επιφάνεια δύο ημιάπειρων χώρων (και όχι στην εν λόγω γεωμετρία) με τις σχέσεις [2]:

$$\Gamma_{ij} = \frac{\eta_j - \eta_i}{\eta_j + \eta_i} \quad (2.1)$$

$$T_{ij} = \frac{2\eta_i}{\eta_j + \eta_i} \quad (2.2)$$

Σημειώνεται ότι οι δείκτες ij σημαίνουν «πεδίο στην περιοχή i από την περιοχή j ». Στις παραπάνω σχέσεις, η_i είναι η χαρακτηριστική εμπέδηση του μέσου i και ορίζεται με τη σχέση:

$$\eta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}} \quad (2.3)$$

Σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά κάθε περιοχής, προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για τις χαρακτηριστικές εμπεδήσεις:

$$\begin{aligned} \eta_1 &\equiv \eta_3 = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} \\ \eta_2 &= \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o \varepsilon_r'}} \sqrt{\frac{1}{1 - j \tan \delta}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Η μιγαδική σταθερά διάδοσης γ για την περιοχή 2 δίνεται από τη σχέση [2]:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_o \cdot j\omega\varepsilon} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_r'}}{c} \sqrt{-1 + j \tan \delta} \quad (2.5)$$

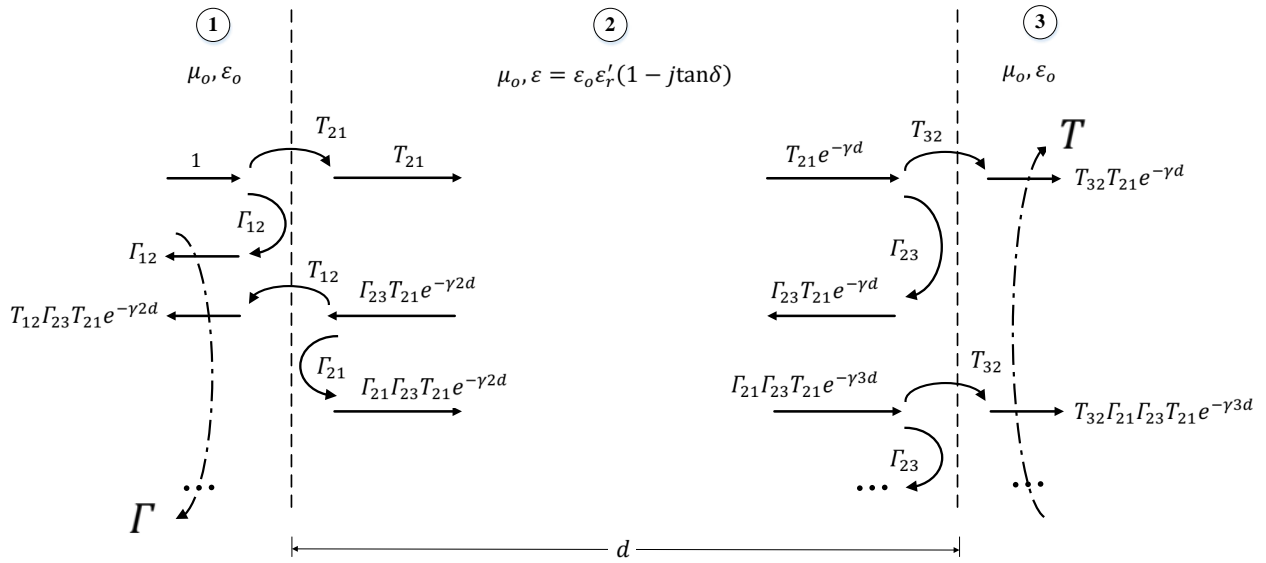
όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, $\omega = 2\pi f$, f η συχνότητα, $\text{Re}\{\gamma\} \geq 0$ και $\text{Im}\{\gamma\} \geq 0$. Γράφοντας $\gamma = \alpha + j\beta$, όπου α η σταθερά απωλειών και β η φασική σταθερά διάδοσης, μετά από πράξεις προκύπτει:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_r'}{\cos \delta}} \sin \frac{\delta}{2} \\ \beta &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_r'}{\cos \delta}} \cos \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1.1 Προσέγγιση γεωμετρικής οπτικής: ανάκλαση και μετάδοση

Ακολουθώντας την προσέγγιση γεωμετρικής οπτικής που παρατίθεται στην παράγραφο 5.5 του [2], προκύπτει ότι το προσπίπτον κύμα TEM υφίσταται πολλαπλές ανακλάσεις και μεταδόσεις διαμέσου των διαχωριστικών επιφανειών των περιοχών 1-2 και 2-3, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε τον συνολικό συντελεστή ανάκλασης Γ , ο οποίος εκφράζει την ανάκλαση του προσπίπτοντος κύματος πίσω στην περιοχή 1, καθώς και τον

συνολικό συντελεστή μετάδοσης T , ο οποίος εκφράζει τη μετάδοση από την περιοχή 1 στην περιοχή 3.



Σχήμα 2.2 Υπολογισμός συνολικών συντελεστών ανάκλασης και μετάδοσης.

Σύμφωνα με την ανάλυση που παρατίθεται στο [2], οι συνολικοί συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης αποτελούν άθροισμα συγκλίνουσας γεωμετρικής προόδου και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Gamma = \Gamma_{12} + \frac{T_{12} T_{21} \Gamma_{23} e^{-\gamma 2d}}{1 - \Gamma_{21} \Gamma_{23} e^{-\gamma 2d}} \quad (2.7)$$

$$T = \frac{T_{32} T_{21} e^{-\gamma d}}{1 - \Gamma_{21} \Gamma_{23} e^{-\gamma 2d}} \quad (2.8)$$

Λόγω των σχέσεων ορισμού (2.1) έως (2.4), σύμφωνα με [2], και επιπρόσθετα επειδή οι περιοχές 1 και 3 έχουν ταυτόσημα χαρακτηριστικά, ισχύουν:

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= -\Gamma_{21} \\ T_{12} &= 1 - \Gamma_{12} = 1 + \Gamma_{21} \\ T_{21} &= 1 - \Gamma_{21} = 1 + \Gamma_{12} \\ T_{32} &= 1 - \Gamma_{32} = 1 + \Gamma_{23} \\ \Gamma_{23} &= -\Gamma_{32} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Μετά από πράξεις, προκύπτουν:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_{12}(1 - e^{-\gamma 2d})}{1 - \Gamma_{12}^2 e^{-\gamma 2d}} \quad (2.10)$$

$$T = \frac{(1 - \Gamma_{12}^2) e^{-\gamma d}}{1 - \Gamma_{12}^2 e^{-\gamma 2d}} \quad (2.11)$$

Οι σχέσεις (2.10) και (2.11) είναι ιδιαίτερα «βολικές», καθώς εκφράζουν τους αντίστοιχους συντελεστές σε συνάρτηση αποκλειστικά με τον συντελεστή ανάκλασης Γ_{12} , το πάχος d και τη μιγαδική σταθερά διάδοσης γ του διηλεκτρικού.

2.1.2 Υπολογισμός ισχύος ανάκλασης, μετάδοσης και απωλειών

Από τη σχέση ορισμού [2] του μιγαδικού διανύσματος Poynting για κύμα TEM σε μέσο με χαρακτηριστική εμπέδηση η_i , η πυκνότητα ισχύος (W/m^2) είναι:

$$S_{TEM} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\frac{1}{\eta_i^*}\right\} |\mathbf{E}|^2 \quad (2.12)$$

Η πυκνότητα ισχύος απωλειών S_{loss} εντός της περιοχής 2, όπου υπάρχει το διηλεκτρικό, προκύπτει από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ως:

$$S_{loss} = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\frac{1}{\eta_1^*}\right\} |\mathbf{E}_o|^2 - \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\frac{1}{\eta_1^*}\right\} |\Gamma \mathbf{E}_o|^2 - \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\frac{1}{\eta_3^*}\right\} |T \mathbf{E}_o|^2 \quad (2.13)$$

όπου ο πρώτος όρος είναι η πυκνότητα ισχύος του προσπίπτοντος κύματος, το οποίο έχει ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}_o , ο δεύτερος όρος είναι η πυκνότητα της ανακλώμενης ισχύος πίσω στην περιοχή 1 και ο τρίτος όρος είναι η πυκνότητα της μεταδιδόμενης ισχύος στην περιοχή 3. Επειδή οι περιοχές 1 και 3 έχουν την ίδια χαρακτηριστική εμπέδηση, αν συμβολίσουμε με α_{loss} το κλάσμα της ισχύος που καταναλώνεται ως απώλειες εντός της περιοχής 2, με αναφορά στην προσπίπτουσα ισχύ από την περιοχή 1, προκύπτει:

$$\alpha_{loss} = 1 - |\Gamma|^2 - |T|^2 \quad (2.14)$$

Επιχειρώντας μια προσεγγιστική ανάλυση της σχέσης (2.14), χρησιμοποιώντας τις (2.6), (2.10) και (2.11), και με τις παραδοχές ότι $\Gamma_{12} \in \mathbb{R}$, $|\Gamma_{12}| \ll 1$ και $\tan\delta \ll 1$, προκύπτει ότι ένα άνω φράγμα του α_{loss} δίνεται από τη σχέση:

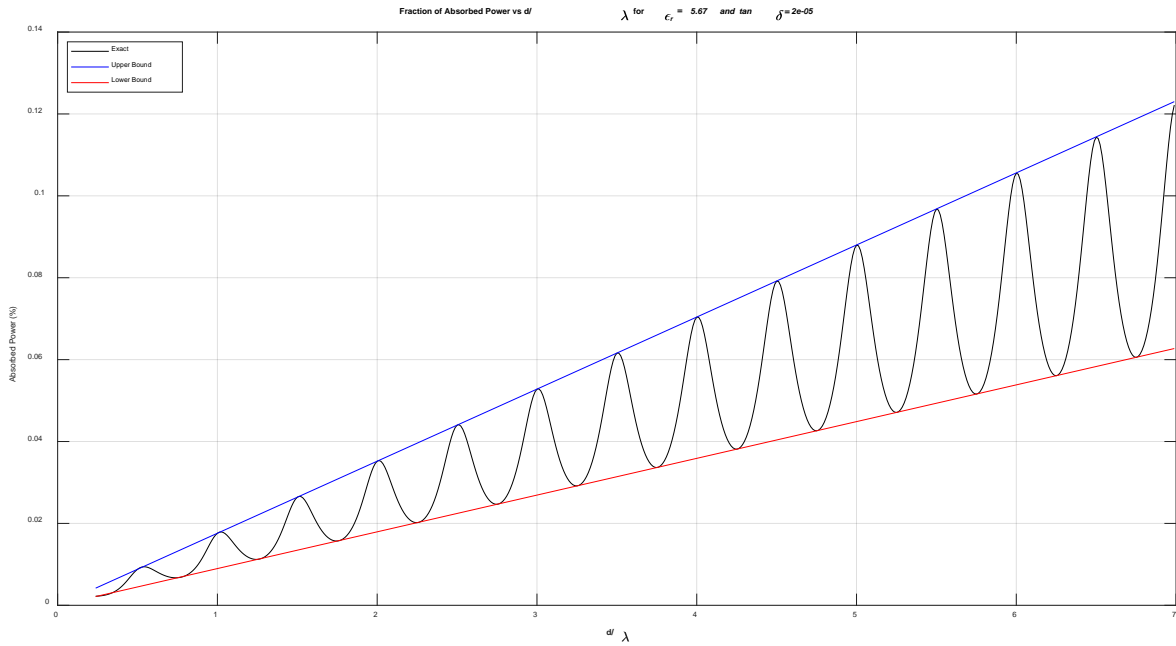
$$\alpha_{loss} \leq \pi \frac{f}{c} d (1 + \varepsilon'_r) \tan\delta \quad (2.15)$$

και ένα κάτω φράγμα του α_{loss} από τη σχέση:

$$\alpha_{loss} \geq \pi \frac{f}{c} d \frac{4\varepsilon'_r}{1 + \varepsilon'_r} \tan\delta \quad (2.16)$$

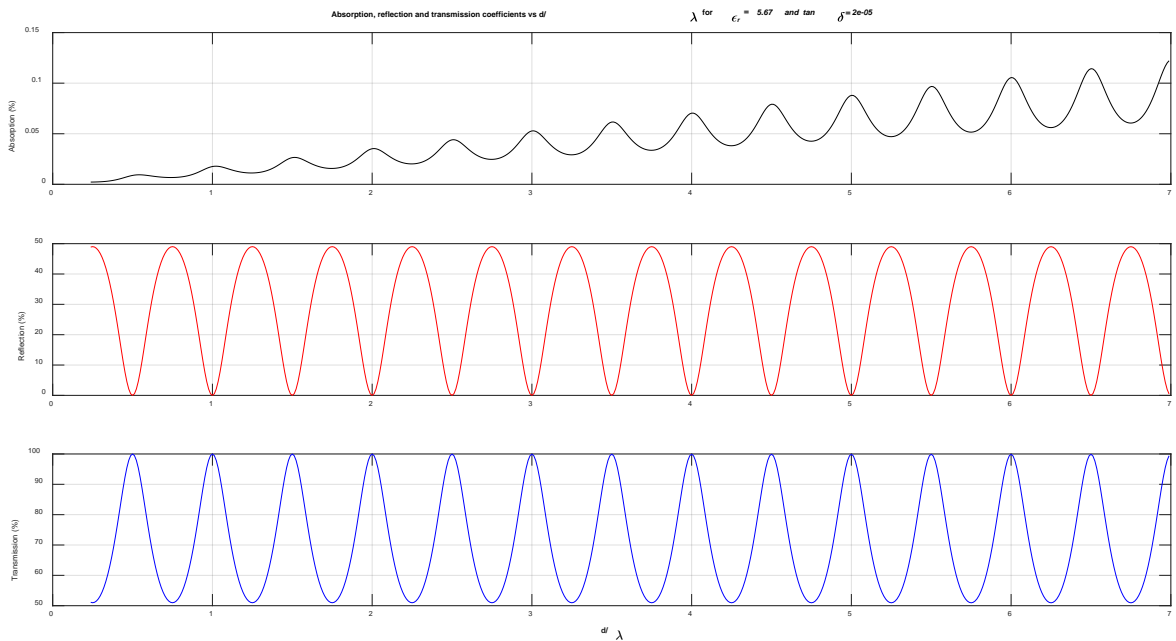
Η απόδειξη των παραπάνω βρίσκεται στο Παράρτημα Α.2.

Στο Σχήμα 2.3 φαίνονται το ποσοστό (%) της καταναλισκόμενης ισχύος από τη σχέση (2.14), από κοινού με το άνω και κάτω φράγμα των σχέσεων (2.15)–(2.16), για την περίπτωση $\varepsilon'_r = 5.67$ και $\tan\delta = 2 \times 10^{-5}$ ως συνάρτηση της αδιάστατης ποσότητας d/λ , όπου λ το μήκος κύματος μέσα στο διηλεκτρικό.



Σχήμα 2.3 Ποσοστό ισχύος απωλειών σε φέτα διηλεκτρικού ως συνάρτηση του d/λ για $\epsilon_r' = 5.67$ και $\tan \delta = 2 \times 10^{-5}$ (μαύρο), άνω φράγμα ποσοστού απωλειών (μπλε) και κάτω φράγμα ποσοστού απωλειών (κόκκινο).

Στο Σχήμα 2.4 φαίνονται, χωρίς προσέγγιση, το ποσοστό (%) της καταναλισκόμενης, της ανακλώμενης και της μεταδιδόμενης ισχύος, για την περίπτωση $\epsilon_r' = 5.67$ και $\tan \delta = 2 \times 10^{-5}$ ως συνάρτηση της αδιάστατης ποσότητας d/λ , όπου λ το μήκος κύματος μέσα στο διηλεκτρικό.



Σχήμα 2.4 Ποσοστό (%) καταναλισκόμενης ισχύος (μαύρο), ποσοστό ανακλώμενης ισχύος (κόκκινο) και ποσοστό μεταδιδόμενης ισχύος (μπλε), ως συνάρτηση του d/λ για $\epsilon_r' = 5.67$ και $\tan \delta = 2 \times 10^{-5}$.

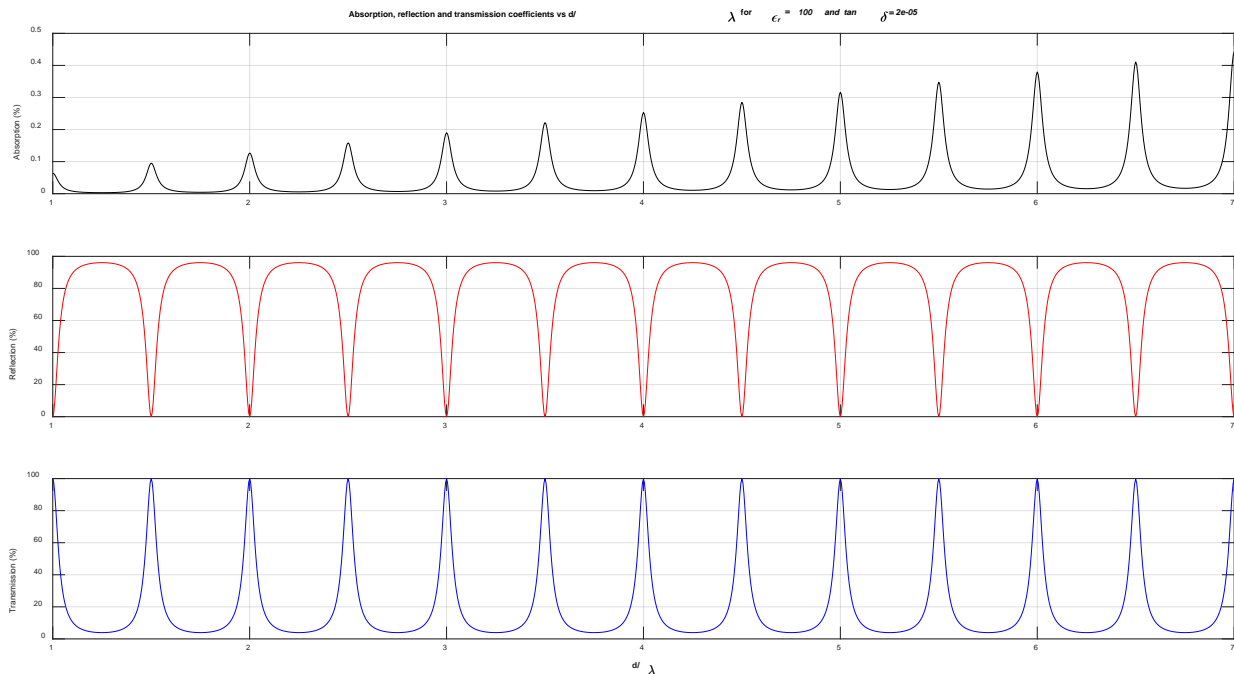
Από τα παραπάνω σχήματα είναι εμφανές, όπως αποδεικνύεται και στο Παράρτημα Α.2, ότι έχουμε τοπικό μέγιστο του ποσοστού ανακλώμενης ισχύος (και αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο του ποσοστού καταναλισκόμενης ισχύος) όταν ισχύει:

$$\text{Μέγιστη ανάκλαση} \quad d \cong \frac{\lambda}{4}(2k + 1), k \in \mathbb{Z} \quad (2.17)$$

ενώ αντίθετα έχουμε τοπικό ελάχιστο του ποσοστού ανακλώμενης ισχύος (και αντίστοιχα τοπικό μέγιστο του ποσοστού καταναλισκόμενης ισχύος) όταν

$$\text{Ελάχιστη ανάκλαση} \quad d \cong \frac{\lambda}{4}(2k), k \in \mathbb{Z} \quad (2.18)$$

Επίσης, παρατηρεί κανείς ότι η μέγιστη τιμή του ποσοστού ανακλώμενης ισχύος είναι περίπου 50%, και αυτό ισχύει λόγω της τιμής $\epsilon_r' = 5.67$ που έχει επιλεγεί. Αν γίνει ο ίδιος υπολογισμός για $\epsilon_r' = 100$ και ίδια τιμή $\tan\delta$, δηλαδή 20 περίπου φορές μεγαλύτερη σχετική διηλεκτρική σταθερά, αφενός η μέγιστη τιμή του ποσοστού ανακλώμενης ισχύος αυξάνει (είναι περίπου 96%), αφετέρου οι παρατηρούμενοι συντονισμοί γίνονται περισσότερο στενοί ως προς d/λ , δηλαδή αυξάνει η επιλεκτικότητα της διάταξης ως προς τη συχνότητα (Σχήμα 2.5).

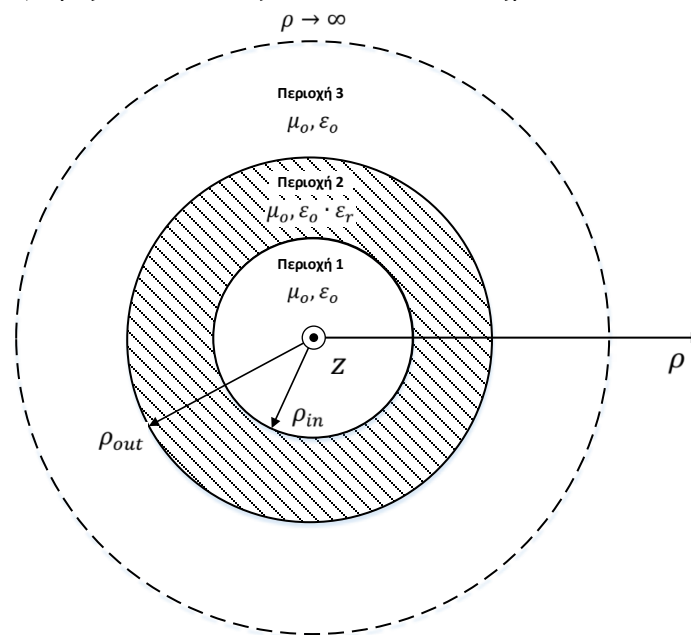


Σχήμα 2.5 Ποσοστό (%) καταναλισκόμενης ισχύος (μαύρο), ποσοστό ανακλώμενης ισχύος (κόκκινο) και ποσοστό μεταδιδόμενης ισχύος (μπλε), ως συνάρτηση του d/λ για $\epsilon_r' = 100$ και $\tan\delta = 2 \times 10^{-5}$.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις θα χρησιμεύσουν σε επόμενο κεφάλαιο, όπου θα γίνει ρύθμιση του πάχους του διηλεκτρικού στρώματος της ανοικτής κοιλότητας συντονισμού, έτσι ώστε το στρώμα αυτό να λειτουργεί όσο το δυνατόν καλύτερα ως ανακλαστικό μέσο.

2.2 Κυλινδρική γεωμετρία τριών διηλεκτρικών στρωμάτων

Ας θεωρήσουμε μια παρόμοια γεωμετρία με τρία στρώματα διηλεκτρικού, τα οποία όμως είναι κυλινδρικά δακτυλίδια με άξονα συμμετρίας τον άξονα z και τα οποία έχουν άπειρο μήκος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6 Εγκάρσια τομή γεωμετρίας 3 κυλινδρικών στρωμάτων διηλεκτρικού.

Το πρώτο στρώμα (περιοχή 1) έχει τα χαρακτηριστικά του κενού και εκτείνεται ακτινικά σε $\rho \in [0, \rho_{in}]$. Το δεύτερο στρώμα (περιοχή 2) έχει ηλεκτρική επιτρεπτότητα $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\epsilon_r \in \mathbb{C}$, και μαγνητική επιδεκτικότητα ίση με αυτή του κενού, και εκτείνεται σε $\rho \in [\rho_{in}, \rho_{out}]$. Το τελευταίο στρώμα (περιοχή 3) έχει τα χαρακτηριστικά του κενού και εκτείνεται σε $\rho \in [\rho_{out}, +\infty)$.

Στη γενική περίπτωση κυματοδότησης, είναι επιθυμητή η εξεύρεση εκείνων των διαμήκων κυματάρθμων k_z , οι οποίοι για δεδομένη κυκλική συχνότητα $\omega \in \mathbb{R}$ μπορούν να κυματοδηγηθούν μέσω της παραπάνω διάταξης, με τη μορφή κυμάτων που οδεύουν κατά τη διεύθυνση z και παρουσιάζουν στάσιμη μορφή κατά τη διεύθυνση ρ , δηλαδή αναζητούνται ρυθμοί διάδοσης που κυματοδηγούνται στην εσωτερική περιοχή της διάταξης (hollow-core fiber) [3]. Ωστόσο, στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης θα ισχύει γενικότερα $k_z, \omega \in \mathbb{C}$. Επίσης, κατά τη διεύθυνση ρ , στις περιοχές 1 και 2 θα πρέπει το πεδίο να παρουσιάζει συμπεριφορά στάσιμου κύματος, ενώ στην περιοχή 3 το πεδίο θα

πρέπει να έχει συμπεριφορά οδεύοντος κύματος που εξέρχεται της διάταξης. Για τον λόγο αυτό, επιλέγονται κατάλληλα ανά περιοχή οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Bessel $J_m(z)$, $Y_m(z)$ και $H_m^{(2)}(z)$ με $z \in \mathbb{C}$.

Επειδή εξετάζεται η διάδοση ως προς τον άξονα z , τα διανύσματα Hertz διαθέτουν μόνο αξονική συνιστώσα και σύμφωνα με τα παραπάνω οι εκφράσεις της αλγεβρικής τους τιμής για κάθε περιοχή είναι:

$$\begin{aligned} \text{περιοχή 1} \quad \Pi_m^{(1)} &= A_{m,1} \cdot J_m(k_{\perp}\rho) e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \\ \Pi_e^{(1)} &= A_{e,1} \cdot J_m(k_{\perp}\rho) e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \text{περιοχή 2} \quad \Pi_m^{(2)} &= [A_{m,2} \cdot J_m(k_{\perp d}\rho) + A_{m,3} \cdot Y_m(k_{\perp d}\rho)] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \\ \Pi_e^{(2)} &= [A_{e,2} \cdot J_m(k_{\perp d}\rho) + A_{e,3} \cdot Y_m(k_{\perp d}\rho)] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \text{περιοχή 3} \quad \Pi_m^{(3)} &= A_{m,4} \cdot H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \\ \Pi_e^{(3)} &= A_{e,4} \cdot H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Οι εγκάρσιοι κυματάριθμοι ανά περιοχή δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\text{περιοχές 1 και 3} \quad k_{\perp} = \sqrt{\omega^2 \mu_o \varepsilon_o - k_z^2} \quad (2.22)$$

$$\text{περιοχή 2} \quad k_{\perp d} = \sqrt{\omega^2 \mu_o \varepsilon_o \varepsilon_r - k_z^2} \quad (2.23)$$

Επισημαίνεται ότι για να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες στις διαχωριστικές επιφάνειες των περιοχών αυτών, πρέπει η εξάρτηση ως προς (φ, z) να είναι κοινή για όλες τις περιοχές [3]. Επίσης, επειδή η περιοχή 1 περιλαμβάνει το $\rho = 0$, δεν δύναται να συμπεριληφθεί στη μορφή του μαγνητικού/ηλεκτρικού διανύσματος Hertz η συνάρτηση $Y_m(*)$, καθώς αυτή απειρίζεται για $\rho = 0$. Αντίθετα, στην περιοχή 2 πρέπει να συμπεριληφθεί. Στην περιοχή 3 αναμένεται ένα κυλινδρικό κύμα που εξέρχεται (οδεύει προς $\rho \rightarrow +\infty$) αν $\text{Re}\{k_{\perp}\} > 0$, και για τον λόγο αυτό η εξάρτηση ως προς ρ περιγράφεται μέσω της συνάρτησης Hankel 2^{ου} είδους $H_m^{(2)}(*)$, η οποία έχει ασυμπτωτική μορφή [4]

$$H_m^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-j(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}, \quad -2\pi < \text{arg}(z) < \pi, |z| \rightarrow \infty \quad (2.24)$$

και εκφράζει εξερχόμενο κύμα αν $\text{Re}\{z\} > 0$ για χρονική εξάρτηση $e^{+j\omega t}$.

2.2.1 Σχέση διασποράς

Οι εκφράσεις για τα πεδία σε κάθε περιοχή λαμβάνονται αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις (1.19)–(1.20) και παρατίθενται αναλυτικά στο Παράρτημα Β.1. Σημειολογικά, ο εκθέτης (αριθμός εντός παρένθεσης) αναφέρεται στην κάθε περιοχή.

Οι οριακές συνθήκες απαιτούν τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στις επιφάνειες $\rho = \rho_{in}$ και $\rho = \rho_{out}$, δηλαδή [2]:

$$H_z^{(1)}(\rho = \rho_{in}, \varphi, z) = H_z^{(2)}(\rho = \rho_{in}, \varphi, z) \quad (2.25\alpha)$$

Σύνορο περιοχών 1-2

$$E_\varphi^{(1)}(\rho = \rho_{in}, \varphi, z) = E_\varphi^{(2)}(\rho = \rho_{in}, \varphi, z) \quad (2.25\beta)$$

$$E_z^{(1)}(\rho = \rho_{in}, \varphi, z) = E_z^{(2)}(\rho = \rho_{in}, \varphi, z) \quad (2.25\gamma)$$

$$H_\varphi^{(1)}(\rho = \rho_{in}, \varphi, z) = H_\varphi^{(2)}(\rho = \rho_{in}, \varphi, z) \quad (2.25\delta)$$

$$H_z^{(2)}(\rho = \rho_{out}, \varphi, z) = H_z^{(3)}(\rho = \rho_{out}, \varphi, z) \quad (2.26\alpha)$$

Σύνορο περιοχών 2-3

$$E_\varphi^{(2)}(\rho = \rho_{out}, \varphi, z) = E_\varphi^{(3)}(\rho = \rho_{out}, \varphi, z) \quad (2.26\beta)$$

$$E_z^{(2)}(\rho = \rho_{out}, \varphi, z) = E_z^{(3)}(\rho = \rho_{out}, \varphi, z) \quad (2.26\gamma)$$

$$H_\varphi^{(2)}(\rho = \rho_{out}, \varphi, z) = H_\varphi^{(3)}(\rho = \rho_{out}, \varphi, z) \quad (2.26\delta)$$

Στο Παράρτημα Β.1 παρατίθεται αναλυτικά η επίλυση των εξισώσεων (2.25α)–(2.26α), όπου φαίνεται ότι καταλήγουμε σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα 8×8 με αγνώστους τους συντελεστές των αλγεβρικών τιμών των διανυσμάτων Hertz, το οποίο γράφεται:

$$\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} A_{m,1} \\ A_{m,2} \\ A_{m,3} \\ A_{m,4} \\ A_{e,1} \\ A_{e,2} \\ A_{e,3} \\ A_{e,4} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

όπου με $\mathbf{0}$ συμβολίζεται το διάνυσμα 8×1 με όλα τα στοιχεία του μηδέν και με \mathbf{M} ο τετραγωνικός πίνακας 8×8 :

$$\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2) \quad (2.28\alpha)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} k_{\perp}^2 \cdot J_m(k_{\perp}\rho_{in}) & -k_{\perp d}^2 \cdot J_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & -k_{\perp d}^2 Y_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & 0 \\ 0 & k_{\perp d}^2 \cdot J_m(k_{\perp d}\rho_{out}) & k_{\perp d}^2 Y_m(k_{\perp d}\rho_{out}) & -k_{\perp}^2 H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho_{out}) \\ j\omega\mu_o k_{\perp} \cdot J'_m(k_{\perp}\rho_{in}) & -j\omega\mu_o k_{\perp d} \cdot J'_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & -j\omega\mu_o k_{\perp d} Y'_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & 0 \\ 0 & j\omega\mu_o k_{\perp d} \cdot J'_m(k_{\perp d}\rho_{out}) & j\omega\mu_o k_{\perp d} Y'_m(k_{\perp d}\rho_{out}) & -j\omega\mu_o k_{\perp} H_m^{(2)'}(k_{\perp}\rho_{out}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{mk_z}{\rho_{in}} J_m(k_{\perp}\rho_{in}) & -\frac{mk_z}{\rho_{in}} J_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & -\frac{mk_z}{\rho_{in}} Y_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & 0 \\ 0 & \frac{mk_z}{\rho_{out}} J_m(k_{\perp d}\rho_{out}) & \frac{mk_z}{\rho_{out}} Y_m(k_{\perp d}\rho_{out}) & -\frac{mk_z}{\rho_{out}} H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho_{out}) \end{pmatrix} \quad (2.28\beta)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{mk_z}{\rho_{in}} J_m(k_{\perp}\rho_{in}) & -\frac{mk_z}{\rho_{in}} J_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & -\frac{mk_z}{\rho_{in}} Y_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & 0 \\ 0 & \frac{mk_z}{\rho_{out}} J_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & \frac{mk_z}{\rho_{out}} Y_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & -\frac{mk_z}{\rho_{out}} H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho_{out}) \\ k_{\perp}^2 \cdot J_m(k_{\perp}\rho_{in}) & -k_{\perp d}^2 \cdot J_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & -k_{\perp d}^2 Y_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & 0 \\ 0 & k_{\perp d}^2 \cdot J_m(k_{\perp d}\rho_{out}) & k_{\perp d}^2 Y_m(k_{\perp d}\rho_{out}) & -k_{\perp}^2 H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho_{out}) \\ -j\omega\varepsilon_o k_{\perp} \cdot J'_m(k_{\perp}\rho_{in}) & j\omega\varepsilon_o \varepsilon_r k_{\perp d} \cdot J'_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & j\omega\varepsilon_o \varepsilon_r k_{\perp d} \cdot Y'_m(k_{\perp d}\rho_{in}) & 0 \\ 0 & -j\omega\varepsilon_o \varepsilon_r k_{\perp d} \cdot J'_m(k_{\perp d}\rho_{out}) & -j\omega\varepsilon_o \varepsilon_r k_{\perp d} \cdot Y'_m(k_{\perp d}\rho_{out}) & j\omega\varepsilon_o k_{\perp} H_m^{(2)'}(k_{\perp}\rho_{out}) \end{pmatrix} \quad (2.28\gamma)$$

Για να υπάρχουν λύσεις εκτός της τετριμμένης, θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα \mathbf{M} να είναι μηδέν, το οποίο δίνει τη σχέση διασποράς

$$\mathcal{D}(\omega, k_z) = \det(\mathbf{M}) = 0 \quad (2.29)$$

Γενικά, η σχέση (2.29) εκφράζει, για $m \neq 0$ την απαίτηση «συνύπαρξης» τόσο του μαγνητικού όσο και του ηλεκτρικού διανύσματος Hertz σε κάθε περιοχή, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες. Δηλαδή, οι ρυθμοί (modes) διάδοσης σε αυτή τη γεωμετρία των 3 διηλεκτρικών κυλινδρικών στρωμάτων είναι γενικά υβριδικοί (EH/HE) και όχι TE/TM.

2.2.2 Ρυθμοί TE, TM

Στην ειδική περίπτωση όπου $m = 0$, όπως φαίνεται από τη σχέση (2.28α), παράγονται δύο ανεξάρτητα ομογενή γραμμικά συστήματα 4×4 . Το πρώτο έχει ως αγνώστους τους συντελεστές των μαγνητικών διανυσμάτων Hertz όλων των περιοχών και εκφράζει τους ρυθμούς TE, καθώς από τη σχέση (1.19) προκύπτει ότι $E_z = 0$. Το δεύτερο σύστημα έχει ως αγνώστους τους συντελεστές των ηλεκτρικών διανυσμάτων Hertz όλων των περιοχών και εκφράζει τους ρυθμούς TM, καθώς από τη σχέση (1.20) προκύπτει ότι $H_z = 0$. Συγκεκριμένα:

$$\mathbf{M}_{TE} \cdot \begin{pmatrix} A_{m,1} \\ A_{m,2} \\ A_{m,3} \\ A_{m,4} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{M}_{TE} = \begin{pmatrix} k_{\perp}^2 \cdot J_0(k_{\perp}\rho_{in}) & -k_{\perp d}^2 \cdot J_0(k_{\perp d}\rho_{in}) & -k_{\perp d}^2 Y_0(k_{\perp d}\rho_{in}) & 0 \\ 0 & k_{\perp d}^2 \cdot J_0(k_{\perp d}\rho_{out}) & k_{\perp d}^2 Y_0(k_{\perp d}\rho_{out}) & -k_{\perp}^2 H_0^{(2)}(k_{\perp}\rho_{out}) \\ j\omega\mu_0 k_{\perp} \cdot J'_0(k_{\perp}\rho_{in}) & -j\omega\mu_0 k_{\perp d} \cdot J'_0(k_{\perp d}\rho_{in}) & -j\omega\mu_0 k_{\perp d} Y'_0(k_{\perp d}\rho_{in}) & 0 \\ 0 & j\omega\mu_0 k_{\perp d} \cdot J'_0(k_{\perp d}\rho_{out}) & j\omega\mu_0 k_{\perp d} Y'_0(k_{\perp d}\rho_{out}) & -j\omega\mu_0 k_{\perp} H_0^{(2)'}(k_{\perp}\rho_{out}) \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{M}_{TM} \cdot \begin{pmatrix} A_{e,1} \\ A_{e,2} \\ A_{e,3} \\ A_{e,4} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{M}_{TM} = \begin{pmatrix} k_{\perp}^2 \cdot J_0(k_{\perp}\rho_{in}) & -k_{\perp d}^2 \cdot J_0(k_{\perp d}\rho_{in}) & -k_{\perp d}^2 Y_0(k_{\perp d}\rho_{in}) & 0 \\ 0 & k_{\perp d}^2 \cdot J_0(k_{\perp d}\rho_{out}) & k_{\perp d}^2 Y_0(k_{\perp d}\rho_{out}) & -k_{\perp}^2 H_0^{(2)}(k_{\perp}\rho_{out}) \\ -j\omega\varepsilon_0 k_{\perp} \cdot J'_0(k_{\perp}\rho_{in}) & j\omega\varepsilon k_{\perp d} \cdot J'_0(k_{\perp d}\rho_{in}) & j\omega\varepsilon k_{\perp d} \cdot Y'_0(k_{\perp d}\rho_{in}) & 0 \\ 0 & -j\omega\varepsilon k_{\perp d} \cdot J'_0(k_{\perp d}\rho_{out}) & -j\omega\varepsilon k_{\perp d} \cdot Y'_0(k_{\perp d}\rho_{out}) & j\omega\varepsilon_0 k_{\perp} H_0^{(2)'}(k_{\perp}\rho_{out}) \end{pmatrix}$$

όπου με $\mathbf{0}$ συμβολίζεται το διάνυσμα 4×1 με όλα τα στοιχεία του μηδέν.

Προφανώς, οι σχέσεις διασποράς για κάθε ρυθμό TE/TM γράφονται κατ' αντιστοιχία με τη γενική περίπτωση:

$$\text{TE:} \quad \mathcal{D}_{TE}(\omega, k_z) = \det(\mathbf{M}_{TE}) = 0 \quad (2.32)$$

$$\text{TM:} \quad \mathcal{D}_{TM}(\omega, k_z) = \det(\mathbf{M}_{TM}) = 0 \quad (2.33)$$

2.3 Κυλινδρική γεωμετρία πολλαπλών διηλεκτρικών στρωμάτων

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι έχουμε πολλαπλά στρώματα με διαφορετική ηλεκτρική επιτρεπτότητα και ταυτόσημη μαγνητική επιδεκτικότητα (ίση με αυτή του κενού), τα οποία έχουν κυλινδρική μορφή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.7. Για N στρώματα, η αρίθμηση τους ξεκινά από το πλέον εσωτερικό στρώμα, το οποίο περιέχει το $\rho = 0$ και καλείται περιοχή 1, έως το πλέον εξωτερικό, το οποίο εκτείνεται έως $\rho \rightarrow \infty$ και καλείται περιοχή N . Έτσι, για την περιοχή i , με $i \neq 1, N$, η οποία έχει ηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_i , θα ισχύει για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό διάνυσμα Hertz:

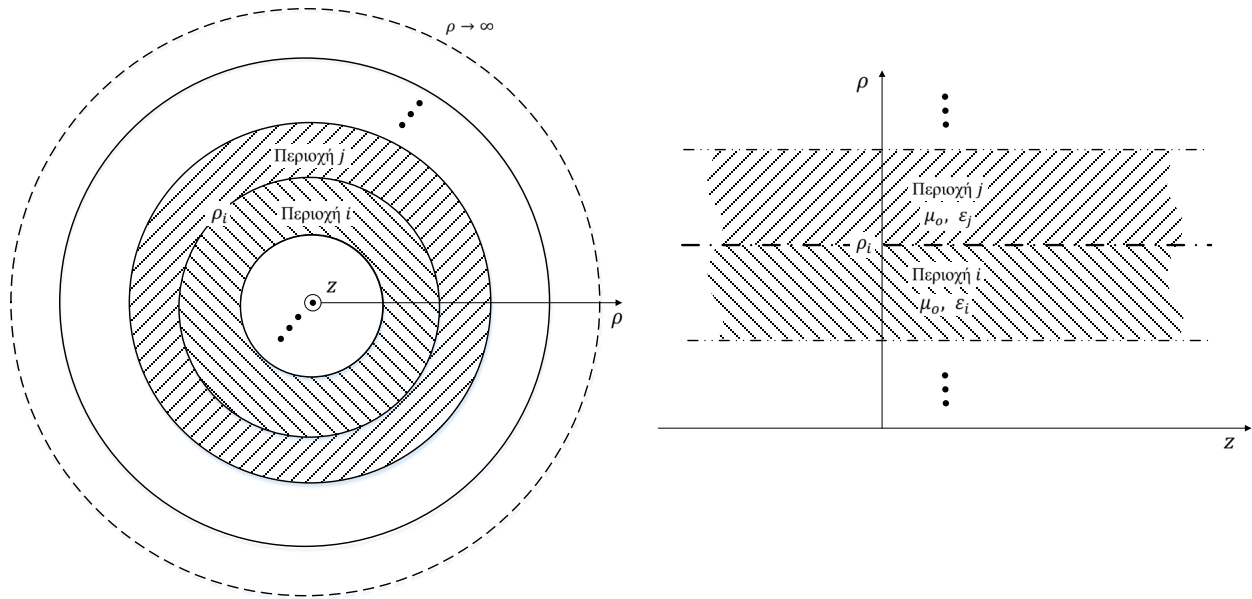
$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{e,i} &= \Pi_{e,i} \hat{z} \\ \Pi_{e,i} &= [G_i \cdot J_m(k_i \rho) + F_i \cdot Y_m(k_i \rho)] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{m,i} &= \Pi_{m,i} \hat{z} \\ \Pi_{m,i} &= [D_i \cdot J_m(k_i \rho) + G_i \cdot Y_m(k_i \rho)] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (2.35)$$

όπου k_i είναι ο εγκάρσιος κυματάριθμος που ορίζεται από τη σχέση:

$$k_i = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_i - k_z^2} \quad (2.36)$$

Οι σχέσεις (1.19)–(1.20) με χρήση των παραπάνω σχέσεων παράγουν τις εκφράσεις για τα εφαπτομενικά πεδία στη διαχωριστική επιφάνεια $\rho = \rho_i$, οι οποίες δίνονται στο Παράρτημα Β.2. Ειδικά για την περιοχή 1 θα ισχύει προφανώς $F_1 = G_1 = 0$, λόγω του απειρισμού της συνάρτησης Neumann για $\rho = 0$, ενώ για την περιοχή N θα ισχύει $F_N = G_N = 0$, αλλά επιπλέον πρέπει να γίνει η αντικατάσταση $J_m(k_N \rho) \rightarrow H_m^{(2)}(k_N \rho)$. Έτσι, έχουμε από 2 αγνώστους συντελεστές για τις περιοχές 1 και N και από 4 αγνώστους συντελεστές στις υπόλοιπες $N - 2$. Αν ακολουθηθεί η μεθοδολογία της προηγούμενης παραγράφου, θα προκύψει ένα γραμμικό ομογενές σύστημα διαστάσεων $4(N - 1) \times 4(N - 1)$, και είναι εμφανές ότι για πολλά στρώματα δυσχεραίνεται ο αλγεβρικός χειρισμός του προβλήματος.



Σχήμα 2.7 Εγκάρσια (αριστερά) και διαμήκης (δεξιά) τομή γεωμετρίας πολλαπλών κυλινδρικών διηλεκτρικών στρωμάτων. Έχει δοθεί έμφαση σε δύο γειτονικά κυλινδρικά στρώματα με διαφορετικά χαρακτηριστικά.

Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα, παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τη διαχωριστική επιφάνεια $\rho = \rho_i$ μεταξύ των γειτονικών στρωμάτων i και j , με $|i - j| = 1$, τότε οι οριακές συνθήκες είναι οι παρακάτω 4 ανεξάρτητες σχέσεις:

$$E_z^{(i)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) = E_z^{(j)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) \quad (2.37\alpha)$$

$$H_z^{(i)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) = H_z^{(j)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) \quad (2.37\beta)$$

$$E_\varphi^{(i)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) = E_\varphi^{(j)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) \quad (2.37\gamma)$$

$$H_\varphi^{(i)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) = H_\varphi^{(j)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) \quad (2.37\delta)$$

Επειδή υπάρχουν το πολύ έως 4 άγνωστοι συντελεστές σε κάθε περιοχή, είναι εφικτό να εκφραστούν οι συντελεστές C_j, D_j, F_j και G_j της περιοχής j σε συνάρτηση με τους C_i, D_i, F_i και G_i της περιοχής i , όπως φαίνεται στην επόμενη παράγραφο. Σημειώνεται ότι παρόμοια μεθοδολογία ακολουθείται στο [5], με τη διαφορά ότι δεν χρησιμοποιούνται τα ηλεκτρικά/μαγνητικά διανύσματα Hertz.

2.3.1 Πίνακες μετάβασης μεταξύ συνορευόντων στρωμάτων

Αν συμβολίσουμε με $\mathbf{X}^{(i)}$ το διάνυσμα – στήλη που περιέχει τους συντελεστές C_i, D_i, F_i και G_i της περιοχής i , και με $\mathbf{X}^{(j)}$ το διάνυσμα – στήλη που περιέχει τους C_j, D_j, F_j

και G_j της συνορεύουσας, για $\rho = \rho_i$, περιοχής j , ισχύει η παρακάτω σχέση που αποδεικνύεται στο Παράρτημα Β.2:

$$\mathbf{X}^{(j)} = \mathbf{T}^{(i \rightarrow j)} \mathbf{X}^{(i)} \quad (2.38)$$

όπου $j = i \pm 1$, εφόσον έχουμε γειτονικές περιοχές. Στην παραπάνω σχέση, ο πίνακας $\mathbf{T}^{(i \rightarrow j)}$ έχει διαστάσεις 4×4 και στο εξής θα καλείται ως «πίνακας μετάβασης» από την περιοχή i στην j . Ανάλογα σε ποιες περιοχές αναφέρεται ο πίνακας μετάβασης, προκύπτουν διαφορετικές περιπτώσεις, οι οποίες είναι εύκολα κατανοητές για την περίπτωση $N = 4$ στρωμάτων. Δηλαδή, στις περιοχές 1 (πλέον εσωτερική) και 4 (πλέον εξωτερική) τα αντίστοιχα διανύσματα είναι:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}^{(4)} = \begin{pmatrix} C_4 \\ D_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

ενώ στις περιοχές 2 και 3 τα αντίστοιχα διανύσματα έχουν 4 μη μηδενικά στοιχεία έκαστο.

Έτσι, σύμφωνα με την ανάλυση του Παραρτήματος Β.2 ισχύει:

$$\begin{matrix} i = 1 \\ j = 2 \end{matrix} \quad \mathbf{T}^{(1 \rightarrow 2)} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 & 0 \\ T_{31} & T_{32} & 0 & 0 \\ T_{41} & T_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

όπου τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα δίνονται από τις σχέσεις (Β. 39) έως (Β. 54), με $i = 1, j = 2$ και $\rho_i = \rho_1$.

$$\begin{matrix} i = 2 \\ j = 1 \end{matrix} \quad \mathbf{T}^{(2 \rightarrow 1)} = \begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} & T'_{14} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} & T'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

όπου τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα δίνονται από τις σχέσεις (Β. 56) έως (Β. 63), με $i = 2, j = 1$ και $\rho_i = \rho_1$.

$$\begin{matrix} i = N \\ j = N - 1 \end{matrix} \quad \mathbf{T}^{(N \rightarrow N-1)} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 & 0 \\ T_{31} & T_{32} & 0 & 0 \\ T_{41} & T_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

όπου τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα δίνονται από τις σχέσεις (Β. 39) έως (Β. 54), με την αντικατάσταση $J_m(k_j \rho_i) \rightarrow H_m^{(2)}(k_j \rho_i), J_m'(k_j \rho_i) \rightarrow H_m^{(2)'}(k_j \rho_i)$ και φυσικά $i = N, j = N - 1$ και $\rho_i = \rho_{N-1}$.

$$\begin{array}{l}
i = N - 1 \\
j = N
\end{array}
\quad
\mathbf{T}^{(N-1 \rightarrow N)} = \begin{pmatrix} T_{11}' & T_{12}' & T_{13}' & T_{14}' \\ T_{21}' & T_{22}' & T_{23}' & T_{24}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

όπου τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα δίνονται από τις σχέσεις (B. 56) έως (B. 63), με την αντικατάσταση $J_m(k_j \rho_i) \rightarrow H_m^{(2)}(k_j \rho_i)$, $J_m'(k_j \rho_i) \rightarrow H_m^{(2)'}(k_j \rho_i)$ και φυσικά $i = N - 1, j = N$ και $\rho_i = \rho_{N-1}$.

Για τους υπόλοιπους συνδυασμούς των i και j ισχύει γενικά:

$$\mathbf{T}^{(i \rightarrow j)} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

όπου τα στοιχεία του πίνακα δίνονται από τις σχέσεις (B. 39) έως (B. 54).

2.3.2 Σχέση διασποράς

Παρατηρώντας τη σχέση (2.38), για $i = 2$ και $j = 1$ ισχύει:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{T}^{(2 \rightarrow 1)} \mathbf{X}^{(2)} \quad (2.45)$$

και αντίστοιχα για $i = 3$ και $j = 2$:

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{T}^{(3 \rightarrow 2)} \mathbf{X}^{(3)} \quad (2.46)$$

Συνδυάζοντας τις (2.45) – (2.46), παίρνουμε:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{T}^{(2 \rightarrow 1)} \mathbf{T}^{(3 \rightarrow 2)} \mathbf{X}^{(3)} \quad (2.47)$$

Συνεχίζοντας μέχρι την περιοχή N και εφαρμόζοντας διαδοχικά το γινόμενο των σχετικών πινάκων, έχουμε:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \left\{ \prod_{k=2}^N \mathbf{T}^{(k \rightarrow k-1)} \right\} \mathbf{X}^{(N)} \quad (2.48)$$

Παρατηρώντας τη σχέση (2.38), για $i = N - 1$ και $j = N$ ισχύει:

$$\mathbf{X}^{(N)} = \mathbf{T}^{(N-1 \rightarrow N)} \mathbf{X}^{(N-1)} \quad (2.49)$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά το γινόμενο των πινάκων και φτάνοντας μέχρι την περιοχή 1:

$$\mathbf{X}^{(N)} = \left\{ \prod_{k=N}^2 \mathbf{T}^{(k-1 \rightarrow k)} \right\} \mathbf{X}^{(1)} \quad (2.50)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.45), (2.48) και (2.50), ισχύει:

$$\left[I_4 - \left\{ \prod_{k=2}^N \mathbf{T}^{(k \rightarrow k-1)} \right\} \cdot \left\{ \prod_{k=N}^2 \mathbf{T}^{(k-1 \rightarrow k)} \right\} \right] \cdot \mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

όπου I_4 ο μοναδιαίος πίνακας 4×4 .

Από την ειδική μορφή που έχουν οι πίνακες μετάβασης $\mathbf{T}^{(1 \rightarrow 2)}$ και $\mathbf{T}^{(2 \rightarrow 1)}$, σχέσεις (2.40) και (2.41) αντίστοιχα, ο πίνακας που πολλαπλασιάζει από αριστερά το διάνυσμα $\mathbf{X}^{(1)}$ στη σχέση (2.51) έχει μηδενικά στοιχεία στις γραμμές 3 και 4 και στις στήλες 3 και 4. Έτσι, προκύπτει τελικά ένα ομογενές γραμμικό σύστημα 2×2 της μορφής

$$\begin{pmatrix} 1 - \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & 1 - \tau_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

όπου τα στοιχεία τ_{11} , τ_{12} , τ_{21} και τ_{22} προκύπτουν μετά τον πολλαπλασιασμό των πινάκων της σχέσης (2.51) και εξαρτώνται από την κυκλική συχνότητα, τον διαμήκη κυματάριθμο και τις υπόλοιπες παραμέτρους της διάταξης. Έτσι, απαιτώντας την ύπαρξη μη τετριμμένων λύσεων στη σχέση (2.52), προκύπτει η σχέση διασποράς

$$\mathcal{D}(\omega, k_z) = \det \begin{pmatrix} 1 - \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & 1 - \tau_{22} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.53)$$

Η σχέση (2.53) είναι μια υπερβατική εξίσωση και παρέχει τις επιτρεπτές τιμές του διαμήκους κυματάριθμου $k_z \in \mathbb{C}$, για δεδομένο $\omega \in \mathbb{C}$, για τη διάταξη των N ομόκεντρων κυλινδρικών διηλεκτρικών στρωμάτων, για οποιαδήποτε τιμή του N . Δηλαδή, η μεθοδολογία των πινάκων μετάβασης καταλήγει στον υπολογισμό μιας οριζουσας 2×2 ανεξάρτητα από το πλήθος των στρωμάτων διηλεκτρικού, ενώ η

μεθοδολογία της παραγράφου 2.2 καταλήγει στον υπολογισμό μιας ορίζουσας $4(N-1) \times 4(N-1)$. Πέρα από την προφανή πολυπλοκότητα του αλγεβρικού χειρισμού για μεγάλες τιμές του N (πχ για $N \geq 4$) που εμφανίζει η δεύτερη μέθοδος, υφίστανται επιπλέον τα εξής τρία μειονεκτήματα:

- Η επίλυση της σχέσης διασποράς $\mathcal{D}(\omega, k_z)$ απαιτεί την εύρεση των $k_z \in \mathbb{C}$, για δεδομένο $\omega \in \mathbb{C}$, μέσω του μηδενισμού μιας ορίζουσας $4(N-1) \times 4(N-1)$. Επειδή όμως ο υπολογισμός της ορίζουσας θα υλοποιηθεί αναγκαστικά αριθμητικά, λόγω του αναπόφευκτου σφάλματος στρογγυλοποίησης (roundoff error) και του τρόπου που υπολογίζεται η ορίζουσα από τα περισσότερα λογισμικά (π.χ. Matlab), όπου γίνεται παραγοντοποίηση LU του εμφανιζόμενου πίνακα [8]–[9], ελλοχεύει ο κίνδυνος απώλειας ριζών για μεγάλες τιμές του N . Πράγματι, μετά την παραγοντοποίηση LU, ο πίνακας U που προκύπτει μετασχηματίζεται σε ένα διαγώνιο πίνακα Δ και η ορίζουσα τελικά υπολογίζεται ως το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του Δ . Αν η ορίζουσα αναμένεται να είναι «μαθηματικά» μηδέν, λόγω του σφάλματος στρογγυλοποίησης ένα από τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του Δ θα είναι αρκετά μικρό, όχι όμως ακριβώς μηδέν, αλλά τα υπόλοιπα στοιχεία μπορεί να λαμβάνουν αρκετά υψηλότερες τιμές, οπότε το γινόμενο όλων των $4(N-1)$ στοιχείων μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλο όσο μάλιστα αυξάνει το N . Το πρόβλημα αυτό δεν υφίσταται στη μέθοδο με τους πίνακες μετάβασης, γιατί η ορίζουσα είναι 2×2 και υπάρχει η γνωστή αναλυτική σχέση υπολογισμού της.
- Αφού επιλυθεί η σχέση διασποράς $\mathcal{D}(\omega, k_z)$, ο υπολογισμός των εκφράσεων των πεδίων κάθε περιοχής απαιτεί την εύρεση των συντελεστών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού δυναμικού Hertz κάθε περιοχής. Εφόσον έχουμε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $4(N-1) \times 4(N-1)$, μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα έναν συντελεστή από τους $4(N-1)$ και να μετατρέψουμε το ομογενές σύστημα σε ένα μη ομογενές γραμμικό σύστημα με τάξη μειωμένη κατά 1, δηλαδή $(4N-5) \times (4N-5)$. Επιλύοντας το τελευταίο σύστημα, οι υπόλοιποι συντελεστές εκφράζονται σε συνάρτηση με τον επιλεγέντα συντελεστή. Αν το προκύπτον ελαττωμένο γραμμικό σύστημα χαρακτηρίζεται από υψηλή τιμή του δείκτη κατάστασης (condition number) [9], ο οποίος για έναν πίνακα A ορίζεται ως $\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \geq 1$, η επίλυση του συστήματος θα προκαλέσει υψηλή αβεβαιότητα στις τιμές των υπόλοιπων συντελεστών, δεδομένου του αναπόφευκτου σφάλματος στρογγυλοποίησης. Αντίθετα, στη μέθοδο των πινάκων μετάβασης, οι συντελεστές κάθε περιοχής

προκύπτουν μέσω αλυσιδωτής εφαρμογής της σχέσης (2.38), αφού επιλεγούν αυθαίρετα οι συντελεστές C_1 και D_1 της περιοχής 1.

- Η αλγεβρική πολυπλοκότητα για μεγάλες τιμές του N δεν αφήνει περιθώριο για τον έλεγχο διαισθητικών υποθέσεων, όπως για παράδειγμα την προφανή φυσική απαίτηση ότι αν κάποιος συνδυασμός (ω, k_z) ικανοποιεί τη σχέση διασποράς $\mathcal{D}(\omega, k_z) = 0$, τότε και ο συνδυασμός $(\omega, -k_z)$ ικανοποιεί πάλι τη σχέση διασποράς, δεδομένου ότι η διάταξη των ομόκεντρων διηλεκτρικών στρωμάτων εκτείνεται επ' άπειρο ως προς τον άξονα z . Αντίθετα, στην παράγραφο 2.3.4 αποδεικνύεται με αυστηρό τρόπο αυτή η υπόθεση με τη μέθοδο των πινάκων μετάβασης.

2.3.3 Ρυθμοί TE, TM

Από τις σχέσεις υπολογισμού των στοιχείων των πινάκων μετάβασης που δόθηκαν στην παράγραφο 2.3.1, προκύπτει ότι ο πίνακας μετάβασης $\mathbf{T}^{(i \rightarrow j)}$ έχει, στη γενική περίπτωση, την ειδική μορφή

$$\mathbf{T}^{(i \rightarrow j)} = \begin{pmatrix} \zeta_{11} & mk_z \cdot \zeta_{12} & \zeta_{13} & mk_z \cdot \zeta_{14} \\ mk_z \cdot \zeta_{21} & \zeta_{22} & mk_z \cdot \zeta_{23} & \zeta_{24} \\ \zeta_{31} & mk_z \cdot \zeta_{32} & \zeta_{33} & mk_z \cdot \zeta_{34} \\ mk_z \cdot \zeta_{41} & \zeta_{42} & mk_z \cdot \zeta_{43} & \zeta_{44} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

η οποία εξ εποπτείας συμπεριλαμβάνει και τις ειδικές περιπτώσεις της παραγράφου 2.3.1.

Για $m = 0$ προφανώς ισχύει:

$$\mathbf{T}_{m=0}^{(i \rightarrow j)} = \begin{pmatrix} \zeta_{11} & 0 & \zeta_{13} & 0 \\ 0 & \zeta_{22} & 0 & \zeta_{24} \\ \zeta_{31} & 0 & \zeta_{33} & 0 \\ 0 & \zeta_{42} & 0 & \zeta_{44} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Επειδή οι πίνακες μετάβασης πολλαπλασιάζονται αλυσιδωτά με τον τρόπο που περιγράφεται από τη σχέση (2.51), και επειδή για $m = 0$ έχουν τη γενική μορφή της σχέσης (2.55), παρατηρεί κανείς ότι αν πολλαπλασιαστούν δύο διαφορετικοί πίνακες με αυτή τη μορφή, το γινόμενο τους έχει πάλι αυτή τη μορφή. Πράγματι, αν εκτελεστεί το γινόμενο \mathbf{C} δύο τέτοιων πινάκων \mathbf{A} και \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & b_{24} \\ b_{31} & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & b_{42} & 0 & b_{44} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

τότε εύκολα προκύπτει ότι ο πίνακας \mathbf{C} έχει τη μορφή της σχέσης (2.55):

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{AB} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{13}b_{31} & 0 & a_{11}b_{13} + a_{13}b_{33} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} + a_{24}b_{42} & 0 & a_{22}b_{24} + a_{24}b_{44} \\ a_{31}b_{11} + a_{33}b_{31} & 0 & a_{31}b_{13} + a_{33}b_{33} & 0 \\ 0 & a_{42}b_{22} + a_{44}b_{42} & 0 & a_{42}b_{24} + a_{44}b_{44} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τον αλυσιδωτό πολλαπλασιασμό των πινάκων μετάβασης με τον τρόπο που περιγράφεται από τη σχέση (2.51), τελικά προκύπτει ένας πίνακας με τη μορφή της σχέσης (2.55), οπότε η σχέση διασποράς γράφεται:

$$m = 0 \quad \mathcal{D}(\omega, k_z) = \det \begin{pmatrix} 1 - \tau_{11} & 0 \\ 0 & 1 - \tau_{22} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \tau_{11})(1 - \tau_{22}) = 0 \quad (2.58)$$

Για μη τετριμμένες λύσεις, εμφανίζονται δύο ανεξάρτητες επιλογές, καθώς μπορεί να μηδενίζεται είτε ο πρώτος όρος εντός της παρένθεσης είτε ο δεύτερος όρος αντίστοιχα. Για $1 - \tau_{11} = 0$, αναγκαστικά θα πρέπει $1 - \tau_{22} \neq 0$, και προκύπτει ότι για την περιοχή 1 θα ισχύει $D_1 = 0$, δηλαδή έχουμε μηδενικό μαγνητικό διάνυσμα Hertz στην περιοχή 1. Εφαρμόζοντας όμως αλυσιδωτά τη σχέση (2.38) από την περιοχή 1 προς τις υπόλοιπες (ώστε να υπολογιστούν οι συντελεστές C_i, D_i, F_i και G_i), προκύπτει ότι και όλες οι υπόλοιπες περιοχές έχουν μηδενικό μαγνητικό διάνυσμα Hertz. Συμπερασματικά, για $m = 0$ η σχέση $1 - \tau_{11} = 0$ εκφράζει ρυθμούς TM και με την ίδια επιχειρηματολογία η σχέση $1 - \tau_{22} = 0$ εκφράζει ρυθμούς TE.

Βέβαια, αν $m \neq 0$ δεν ισχύει η αποσύζευξη μεταξύ των ρυθμών TE και TM και για να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες θα πρέπει να «συνυπάρχουν» τόσο το μαγνητικό όσο και το ηλεκτρικό διάνυσμα Hertz σε κάθε περιοχή. Δηλαδή, οι ρυθμοί (modes) διάδοσης σε αυτή τη γεωμετρία των ομόκεντρων διηλεκτρικών κυλινδρικών στρωμάτων είναι υβριδικοί (EH/HE) και όχι TE/TM.

2.3.4 Συμμετρία των λύσεων

Αν κάποιος συνδυασμός (ω, k_z) ικανοποιεί τη σχέση διασποράς $\mathcal{D}(\omega, k_z) = 0$, τότε και ο συνδυασμός $(\omega, -k_z)$ ικανοποιεί πάλι τη σχέση διασποράς. Πράγματι, ας θεωρήσουμε δύο τυχαίους πίνακες μετάβασης \mathbf{A} και \mathbf{B} , οι οποίοι έχουν υπολογιστεί για κάποιο k_z , και τους αντίστοιχους πίνακες μετάβασης \mathbf{A}' και \mathbf{B}' , οι οποίοι έχουν

υπολογιστεί για $-k_z$. Από τη σχέση (2.54) και επειδή ο εγκάρσιος κυματάριθμος δεν μεταβάλλεται αν γίνει αντικατάσταση $k_z \rightarrow -k_z$ στη σχέση (2.36), προκύπτει ότι οι εν λόγω πίνακες έχουν τη μορφή

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & k_z a_{12} & a_{13} & k_z a_{14} \\ k_z a_{21} & a_{22} & k_z a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & k_z a_{32} & a_{33} & k_z a_{34} \\ k_z a_{41} & a_{42} & k_z a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & k_z b_{12} & b_{13} & k_z b_{14} \\ k_z b_{21} & b_{22} & k_z b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & k_z b_{32} & b_{33} & k_z b_{34} \\ k_z b_{41} & b_{42} & k_z b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & -k_z a_{12} & a_{13} & -k_z a_{14} \\ -k_z a_{21} & a_{22} & -k_z a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & -k_z a_{32} & a_{33} & -k_z a_{34} \\ -k_z a_{41} & a_{42} & -k_z a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} b_{11} & -k_z b_{12} & b_{13} & -k_z b_{14} \\ -k_z b_{21} & b_{22} & -k_z b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & -k_z b_{32} & b_{33} & -k_z b_{34} \\ -k_z b_{41} & b_{42} & -k_z b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

Εκτελώντας το γινόμενο $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$, μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$$\mathbf{A}'\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} ab_{11} & -ab_{12} & ab_{13} & -ab_{14} \\ -ab_{21} & ab_{22} & -ab_{23} & ab_{24} \\ ab_{31} & -ab_{32} & ab_{33} & -ab_{34} \\ -ab_{41} & ab_{42} & -ab_{43} & ab_{44} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

ενώ

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} & ab_{13} & ab_{14} \\ ab_{21} & ab_{22} & ab_{23} & ab_{24} \\ ab_{31} & ab_{32} & ab_{33} & ab_{34} \\ ab_{41} & ab_{42} & ab_{43} & ab_{44} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Σημειώνεται ότι τα στοιχεία ab_{ij} προκύπτουν κατά τον πολλαπλασιασμό των πινάκων \mathbf{A} και \mathbf{B} . Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνεται ότι το γινόμενο $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$ έχει

την ίδια μορφή με τον πίνακα \mathbf{A}' ή/και \mathbf{B}' , οπότε εφαρμόζοντας τη σχέση (2.51), προκύπτει ότι η σχέση διασποράς $\mathcal{D}'(\omega, k_z) = \mathcal{D}(\omega, -k_z)$ γράφεται:

$$\mathcal{D}'(\omega, k_z) = \det \begin{pmatrix} 1 - \tau_{11} & -\tau_{12} \\ -\tau_{21} & 1 - \tau_{22} \end{pmatrix} = (1 - \tau_{11})(1 - \tau_{22}) - \tau_{12}\tau_{21} \quad (2.65)$$

Αλλά, επειδή προφανώς ισχύει

$$\mathcal{D}(\omega, k_z) = \det \begin{pmatrix} 1 - \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & 1 - \tau_{22} \end{pmatrix} = (1 - \tau_{11})(1 - \tau_{22}) - \tau_{12}\tau_{21} \quad (2.66)$$

προκύπτει:

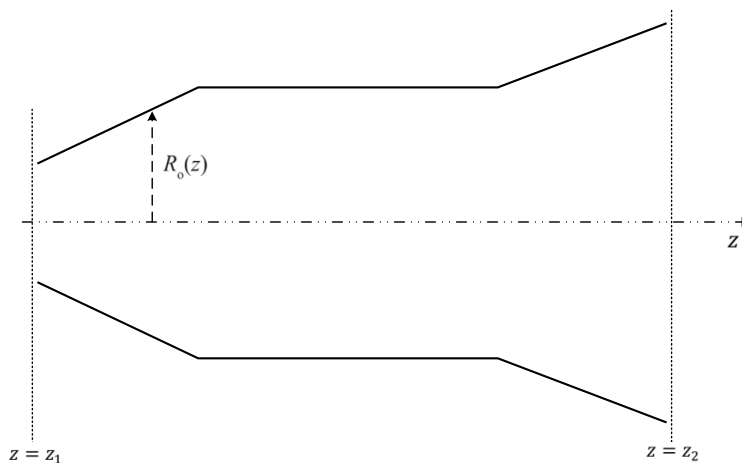
$$\mathcal{D}(\omega, k_z) = \mathcal{D}(\omega, -k_z) \quad (2.67)$$

Δηλαδή, αν ο συνδυασμός (ω, k_z) ικανοποιεί τη σχέση διασποράς $\mathcal{D}(\omega, k_z) = 0$, τότε και ο συνδυασμός $(\omega, -k_z)$ ικανοποιεί πάλι τη σχέση διασποράς. Το συμπέρασμα αυτό θα φανεί χρήσιμο σε επόμενες παραγράφους.

Κεφάλαιο 3 Ελεύθερες ταλαντώσεις στην κοιλότητα συμβατικού γυροτρονίου

3.1 Γενικά

Η κοιλότητα αλληλεπίδρασης του συμβατικού γυροτρονίου διαθέτει συμμετρία εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα διάδοσης z και τυπικά αποτελείται από τμήματα μεταλλικού κυλινδρικού κυματοδηγού με ήπια αξονική ανομοιογένεια της εσωτερικής ακτίνας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1 [10]. Ουσιαστικά, αποτελείται από τρία τμήματα που έχουν διαφορετική κωνικότητα. Ο ρυθμός της κοιλότητας, που βρίσκεται σε συντονισμό, σχηματίζεται στο μεσαίο τμήμα, το οποίο έχει σταθερή ακτίνα κατά μήκος του άξονα διάδοσης. Το αριστερό τμήμα έχει ακτίνα που ελαττώνεται προς τα αριστερά (προς τον διάυλο της δέσμης) και δεν επιτρέπει στον ρυθμό να διαφύγει προς τα πίσω, καθώς ο τελευταίος βρίσκεται στην αποκοπή στο τμήμα αυτό λόγω της μειούμενης ακτίνας [βλ. σχέση (1.45)]. Το τρίτο τμήμα έχει ακτίνα που αυξάνει προς τα δεξιά, ώστε να διοχετεύεται η παραγόμενη μικροκυματική ισχύς [10]. Η ανάκλαση που δημιουργείται λόγω της μεταβολής της ακτίνας μεταξύ του μεσαίου και του δεξιού τμήματος σχηματίζει μια ανοικτή κοιλότητα, η οποία μπορεί να υποστηρίξει συντονιζόμενους ρυθμούς. Η ανάκλαση είναι σημαντική κυρίως για τους εγκάρσιους ρυθμούς που βρίσκονται κοντά στην αποκοπή [10]. Μάλιστα, οι ρυθμοί αυτοί παρουσιάζουν μεγάλους συντελεστές ποιότητας (της τάξης του 1000) [10].



Σχήμα 3.1 Κοιλότητα αλληλεπίδρασης του συμβατικού γυροτρονίου [10]

Η παρατήρηση αυτή, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η ανταλλαγή ενέργειας (πεδίου κοιλότητας – δέσμης ηλεκτρονίων) γίνεται μέσω της αλληλεπίδρασης ECM

στο εγκάρσιο επίπεδο, σημαίνει ότι στο συμβατικό γυροτρόνιο ευνοείται η διέγερση ρυθμών TE, καθώς οι τελευταίοι έχουν πολύ πιο ισχυρό εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο κοντά στην αποκοπή σε σχέση με τους ρυθμούς TM. Δηλαδή, η αλληλεπίδραση γυροτρονίου σχετίζεται με την ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ της δέσμης ηλεκτρονίων και ρυθμών TE κοντά στην αποκοπή [10].

Έχει αποδειχθεί [11] ότι η εγκάρσια κατανομή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε κάθε διατομή ενός τελείως αγωγίμου μεταλλικού κυματοδηγού, με ήπια αξονική ανομοιογένεια της ακτίνας του, ταυτίζεται με την κατανομή του πεδίου σε ένα συνήθη κυλινδρικό κυματοδηγό της ίδιας διατομής (ο τελευταίος καλείται κυματοδηγός αναφοράς ή σύγκρισης – comparison waveguide). Για ρυθμούς TE_{mn} , η διαμήκης συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου $H_z(\mathbf{r}_\perp, z) \neq 0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή [12]

$$H_z(\mathbf{r}_\perp, z) = C(z)H_{z\perp}(\mathbf{r}_\perp) \quad (3.1)$$

όπου $H_{z\perp}(\mathbf{r}_\perp)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\nabla_\perp^2 H_{z\perp} + \kappa^2 H_{z\perp} = 0 \quad (3.2)$$

με τον τελεστή

$$\nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \quad (3.3)$$

και $\kappa \equiv \kappa_{mn}$ είναι μια ιδιοτιμή της (3.2). Η οριακή συνθήκη στη διατομή του κυματοδηγού αναφοράς (δηλαδή στο συγκεκριμένο σημείο z) είναι ο μηδενισμός της εφαπτομενικής συνιστώσας E_φ του ηλεκτρικού πεδίου:

$$\frac{\partial H_{z\perp}(\mathbf{r}_\perp)}{\partial n} = 0 \quad (3.4)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, και απαιτώντας τη φυσική συνθήκη περιοδικότητας των λύσεων ως προς φ , η σχέση (3.1) γράφεται [12]:

$$H_z(\mathbf{r}_\perp, z) = C(z)J_m(\kappa\rho)e^{jm\varphi} \equiv f(z)AJ_m(\kappa\rho)e^{jm\varphi} \quad (3.5)$$

Στην τελευταία σχέση, A είναι μια αυθαίρετη σταθερά και $f(z)$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση κανονικοποιημένη ώστε $|f(z)| \leq 1$. Η συνάρτηση αυτή καλείται «προφίλ πεδίου» και περιγράφει την εξάρτηση, ως προς z , της διαμήκους συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου. Αντικαθιστώντας την οριακή συνθήκη (3.4) στη σχέση (3.5), προκύπτει:

$$\left. \frac{dJ_m(\kappa\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=R(z)} = 0 \quad (3.6)$$

Κάθε διατομή της κοιλότητας είναι ένας κύκλος, η ακτίνα του οποίου μεταβάλλεται καθώς είναι συνάρτηση του z , δηλαδή $\rho = R(z)$. Έτσι, οι ιδιοτιμές $\kappa \equiv \kappa_{mn}$ είναι και αυτές συναρτήσεις του z , $\kappa \equiv \kappa(z)$. Συνεπώς, η λύση της (3.6), λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.41) δίνεται από τη σχέση:

$$\kappa \equiv \kappa(z) = \frac{j'_{mn}}{R(z)} \quad (3.7)$$

όπου j'_{mn} είναι η ρίζα τάξης n της παραγώγου της συνάρτησης Bessel τάξης m , δηλαδή η ρίζα τάξης n της συνάρτησης $J'_m(x)$.

3.2 Προφίλ πεδίου

Για το προφίλ πεδίου, αποδεικνύεται στο [12] ότι η συνάρτηση $f(z)$ αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \beta^2(z)f(z) = 0 \quad (3.8)$$

με

$$\beta^2(z) = \omega^2 \mu \epsilon - \kappa^2(z) \quad (3.9)$$

Στη μαθηματική φυσική, η εξίσωση (3.8) καλείται «η εξίσωση της μη ομοιόμορφης χορδής» (nonuniform string equation) [12]. Κλασικό παράδειγμα είναι η μονοδιάστατη εξίσωση Schrödinger με μεταβαλλόμενο δυναμικό. Ουσιαστικά, η συνάρτηση $\beta(z)$ είναι ο διαμήκης κυματάριθμος k_z , ο οποίος πλέον είναι συνάρτηση του z . Η συνάρτηση αυτή βρίσκεται αφού έχει υπολογισθεί ο εγκάρσιος κυματάριθμος από τη σχέση (3.7). Η αντιστοιχία με έναν κλασικό κούφιο μεταλλικό κυματοδηγό σταθερής κυκλικής διατομής είναι $\beta(z) \leftrightarrow k_z$ και $f(z) \leftrightarrow e^{\pm jk_z z}$. Σημειώνεται ότι η σχέση (3.8) ισχύει στην περίπτωση της λεγόμενης «αδιαβατικής» προσέγγισης JWKB (Jeffreys, Wentzel, Kramers, Brillouin) [13], η οποία ισχύει εφόσον η ακτίνα $R(z)$, και συνεπώς ο εγκάρσιος κυματάριθμος $\kappa(z)$, μεταβάλλονται κατά τρόπον ώστε να ισχύει η παρακάτω συνθήκη:

$$\left| \frac{d\beta(z)}{dz} \right| \ll |\beta^2(z)| \quad (3.10)$$

Επίσης, σύμφωνα με τη σχετική ανάλυση [13], θεωρείται ότι υπάρχει μόνο ένας ρυθμός εντός της κοιλότητας (προσέγγιση μονορυθμικής λειτουργίας – single mode approximation), ή ισοδύναμα η σύζευξη με τους υπόλοιπους ρυθμούς είναι αμελητέα. Στην περίπτωση όπου η σύζευξη δεν μπορεί να αμεληθεί, προκύπτει ένα σύνολο συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων, όπου το προφίλ πεδίου του κάθε ρυθμού συζεύγνυται με το προφίλ πεδίου των υπολοίπων ρυθμών. Στην παρούσα εργασία, θεωρούμε ότι η κοιλότητα εμφανίζει μονορυθμική λειτουργία και ότι ισχύει η προσέγγιση JWKB.

Αν θεωρηθεί ότι η κοιλότητα δεν έχει κάποια διέγερση (μέσω δέσμης ηλεκτρονίων), δηλαδή είναι «ψυχρή» (cold cavity) [10], τότε για να υπάρχουν ελεύθερες ταλαντώσεις θα πρέπει τα πεδία να έχουν συμπεριφορά εξερχόμενων κυμάτων (outgoing-wave boundary conditions) ως προς z στα άκρα της κοιλότητας $z = z_1$ και $z = z_2$ (Σχήμα 3.1), δηλαδή θα έχουμε ταλαντώσεις που αποσβένουν χρονικά λόγω απωλειών περίθλασης στα άκρα της κοιλότητας, και θα πρέπει να ισχύει [10]–[12]:

$$\left\{ \frac{df(z)}{dz} - j\beta(z)f(z) \right\} \Big|_{z=z_1} = 0 \quad (3.11\alpha)$$

$$\left\{ \frac{df(z)}{dz} + j\beta(z)f(z) \right\} \Big|_{z=z_2} = 0 \quad (3.11\beta)$$

όπου υπονοείται $\text{Re}\{\beta(z)\} \geq 0$.

Οι σχέσεις (3.8)–(3.11) αποτελούν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών. Αν αυτό επιλυθεί για δεδομένη κοιλότητα και για δεδομένες σταθερές m, n – σχέση (3.7) – θα προκύψει ως μιγαδική ιδιοτιμή η κυκλική ιδιοσυχνότητα $\omega \equiv \omega_{res} = \omega_R + j\omega_I$ με την προφανή συνθήκη $\omega_I \equiv \text{Im}\{\omega_{res}\} > 0$, διότι οι ταλαντώσεις αποσβένουν χρονικά και έχει υποτεθεί χρονική εξάρτηση $e^{j\omega t}$ [12]. Δηλαδή, το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ιδιοσυχνότητας είναι η συχνότητα συντονισμού, στην οποία ταλαντώνεται ο ρυθμός. Αντίστοιχα, το φανταστικό μέρος δίνει τον συντελεστή ποιότητας Q_{tot} , που αναπαριστά τις συνολικές απώλειες του ρυθμού και εκφράζει τη χρονική σταθερά απόσβεσης των πεδίων. Μάλιστα, κάθε συντονιζόμενος ρυθμός στην κοιλότητα διαθέτει και το αντίστοιχο αξονικό προφίλ πεδίου [10]. Ο συντελεστής ποιότητας Q_{tot} σύμφωνα με τη θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών κοιλοτήτων [12] δίνεται από τη σχέση:

$$Q_{tot} \equiv \frac{\omega_R W_{em}}{P_{loss}} \quad (3.12)$$

και ισοδύναμα [10] από τη σχέση:

$$Q_{tot} = \frac{\omega_R}{2\omega_I} \quad (3.13)$$

όπου $\omega_R \equiv \text{Re}\{\omega_{res}\}$, $\omega_I \equiv \text{Im}\{\omega_{res}\}$, W_{em} είναι η αποθηκευμένη ηλεκτρομαγνητική ενέργεια και P_{loss} η συνολική ισχύς απωλειών του ρυθμού. Σημειώνεται ότι η συνολική ισχύς απωλειών απαρτίζεται από την ισχύ ωμικών απωλειών στα μεταλλικά τοιχώματα της κοιλότητας και από την ηλεκτρομαγνητική ισχύ που διαφεύγει από την κοιλότητα (δηλαδή τις απώλειες περίθλασης της κοιλότητας). Τυπικά, μπορούμε να γράψουμε για τον συντελεστή ποιότητας Q_{tot} του ρυθμού τη σχέση [10]:

$$\frac{1}{Q_{tot}} = \frac{1}{Q_{ohm}} + \frac{1}{Q_{diff}} \quad (3.14)$$

όπου Q_{ohm} είναι ο συντελεστής ποιότητας εξαιτίας των ωμικών απωλειών και Q_{diff} ο συντελεστής ποιότητας λόγω περίθλασης, οι οποίοι δίνονται από τις σχέσεις:

$$Q_{ohm} \equiv \frac{\omega_R W_{em}}{P_{ohm}} \quad (3.15\alpha)$$

$$Q_{diff} \equiv \frac{\omega_R W_{em}}{P_{out}} \quad (3.15\beta)$$

όπου P_{ohm} είναι η ισχύς ωμικών απωλειών και P_{out} η ισχύς εξόδου της κοιλότητας.

3.3 Αριθμητική επίλυση

Η επίλυση του προβλήματος που περιγράφεται από τις σχέσεις (3.8)–(3.11) γίνεται με αριθμητικές μεθόδους, όπως περιγράφεται στο [13]. Αρχικά, επιλέγεται μια μιγαδική τιμή για την κυκλική συχνότητα ω . Κατόπιν, δίνεται μια αυθαίρετη τιμή στη συνάρτηση $f(z)$ στο αριστερό άκρο της κοιλότητας ($z = z_1$) και χρησιμοποιείται η οριακή συνθήκη (3.11α) για να υπολογιστεί η τιμή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης $f(z)$ στο αριστερό άκρο. Έπειτα, αφού είναι γνωστές οι τιμές της $f(z)$ και της πρώτης παραγώγου της στο αριστερό άκρο, χρησιμοποιώντας μια κλασική αριθμητική μέθοδο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, όπως Runge–Kutta ή Numeron [15], επιλύεται η συνήθης διαφορική εξίσωση (3.8) και τελικά υπολογίζεται το σφάλμα

$$\left| \left\{ \frac{df(z)}{dz} + j\beta(z)f(z) \right\} \Big|_{z=z_2} \right| \quad (3.16)$$

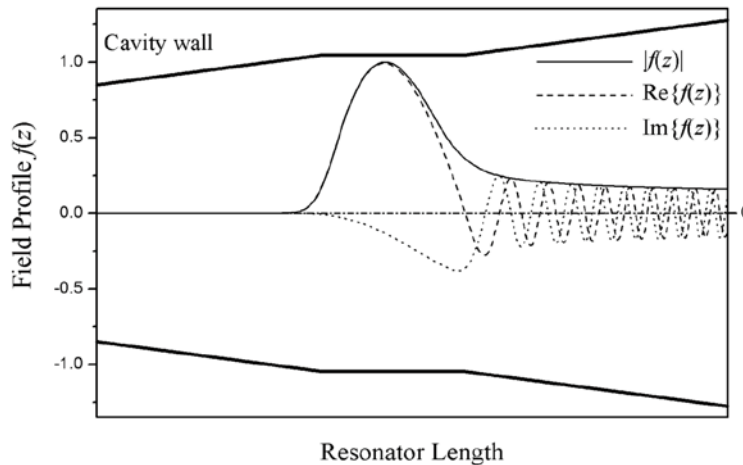
που είναι το μέτρο του αριστερού μέλους της οριακής συνθήκης (3.11β).

Έτσι, έχουμε πλέον ένα ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης για κάθε συντονιζόμενο ρυθμό, με την έννοια ότι ψάχνουμε εκείνη την τιμή της κυκλικής συχνότητας $\omega \equiv \omega_{res}$ η οποία ελαχιστοποιεί την ποσότητα που περιγράφεται στη σχέση (3.16), δηλαδή συγκεντρωτικά:

$$\begin{aligned} \text{Εύρεση } \omega \text{ ώστε } \left| \left\{ \frac{df(z)}{dz} + j\beta(z)f(z) \right\} \Big|_{z=z_2} \right| &\rightarrow \min \\ \text{δεδομένου ότι } \left\{ \frac{df(z)}{dz} - j\beta(z)f(z) \right\} \Big|_{z=z_1} &= 0, \text{ με} \\ \beta^2(z) &= \omega^2 \mu \epsilon - \kappa^2(z) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Είναι προφανές ότι από τη διαδικασία επίλυσης θα προκύψει, για κάθε συντονιζόμενο ρυθμό, τόσο η μιγαδική ιδιοσυχνότητα όσο και το αξονικό προφίλ πεδίου, το οποίο χαρακτηρίζει τον αξονικό δείκτη του συντονιζόμενου ρυθμού.

Στο Σχήμα 3.2 φαίνεται ένα τυπικό προφίλ πεδίου, δηλαδή μια τυπική μορφή της συνάρτησης $f(z)$, μαζί με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κοιλότητας, για ένα συντονιζόμενο ρυθμό TE_{mn1} [14].



Σχήμα 3.2 Τυπικό προφίλ πεδίου ρυθμού TE_{mn1} στην κοιλότητα γυροτρονίου (Σχήμα 1.10 του [14]).

Παρατηρούμε ότι ο αξονικός δείκτης είναι 1, δηλαδή υπάρχει ένας μόνο «λοβός» κατά την αξονική διεύθυνση, ο οποίος μάλιστα επικεντρώνεται στο μεσαίο τμήμα της κοιλότητας. Επίσης, φαίνεται ότι το μέτρο του αξονικού προφίλ πεδίου είναι μηδενικό στο αριστερό τμήμα της κοιλότητας, καθώς εκεί ο ρυθμός βρίσκεται σε αποκοπή. Στο

μεσαίο τμήμα το προφίλ πεδίου λαμβάνει τη μορφή στασίμου κύματος, το οποίο καθώς κινούμαστε προς το δεξιό τμήμα «μετασχηματίζεται» σε οδεύον κύμα (όπως φαίνεται από τη σχέση πραγματικού – φανταστικού μέρους του προφίλ) που κατευθύνεται προς την έξοδο και εκφράζει την ωφέλιμη ισχύ του γυροτρονίου, αφού αφαιρεθούν οι απώλειες του συστήματος εξόδου της ακτινοβολίας [10], [14].

3.4 Διάδοση και αποκοπή

Αυτό που σιωπηρά υποτέθηκε στη μέχρι τώρα ανάλυση είναι ότι οι ρυθμοί που συντονίζονται μέσα στην κοιλότητα είναι ρυθμοί που διαδίδονται (δηλαδή δεν βρίσκονται στην αποκοπή). Αυτή η διάκριση είναι προφανής στην περίπτωση ενός κλασικού κούφιου μεταλλικού κυματοδηγού σταθερής κυκλικής διατομής και άπειρου μήκους, όπου ο διαχωρισμός διάδοση – αποκοπή δίνεται από το πρόσημο της ποσότητας k_z^2 , δηλαδή του τετραγώνου του διαμήκους κυματάριθμου, ο οποίος έχει σταθερή τιμή για δεδομένη συχνότητα και για δεδομένο ρυθμό σε όλο το μήκος του εν λόγω κυματοδηγού – βλ. σχέσεις (1.43) και (1.44). Η διάκριση αυτή ισχύει απλά διότι στο πρόβλημα αυτό, που έχει αναλυθεί στην παράγραφο 1.3.1, όλες οι σχετικές παράμετροι είναι πραγματικά μεγέθη και όχι μιγαδικά (πέραν από την προφανή ανεξαρτησία τους από τη μεταβλητή z).

Ωστόσο, στην περίπτωση της κοιλότητας του συμβατικού γυροτρονίου, η οποία είναι ουσιαστικά ένας ανοικτός στα άκρα του κυματοδηγός με ήπια αξονική ανομοιογένεια της εσωτερικής ακτίνας και με πεπερασμένο μήκος, η συχνότητα συντονισμού για οποιονδήποτε ρυθμό TE είναι τελικά μιγαδικό μέγεθος και συνεπώς τόσο ο διαμήκης όσο και ο εγκάρσιος κυματάριθμος είναι στη γενική περίπτωση μιγαδικές συναρτήσεις του z .

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα πώς μπορεί να οριστεί η διάδοση και η αποκοπή σε ένα τέτοιο πρόβλημα. Η απάντηση δίνεται στα [16] και [17], όπου αποδεικνύεται ότι η συνθήκη αφορά στο πρόσημο του $\text{Re}\{\beta^2(z)\}$, δηλαδή οι εγκάρσιοι ρυθμοί που διαδίδονται έχουν $\text{Re}\{\beta^2(z)\} > 0$, ενώ αντίθετα αυτοί που βρίσκονται στην αποκοπή έχουν $\text{Re}\{\beta^2(z)\} < 0$. Έτσι, ο φορμαλισμός για το πρόβλημα της κοιλότητας με ήπια ανομοιογένεια είναι συγκεντρωτικά:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + k_z^2(z; \omega) f = 0, f = f(z) \quad (3.18\alpha)$$

$$k_z^2(z; \omega) = \omega^2 \mu \varepsilon - k_{\perp}^2(z; \omega) \quad (3.18\beta)$$

$$\left[\frac{df}{dz} - j k_z(z; \omega) f \right]_{z=z_1} = 0 \quad (3.18\gamma)$$

$$\left[\frac{df}{dz} + jk_z(z; \omega) f \right]_{z=z_2} = 0 \quad (3.18\delta)$$

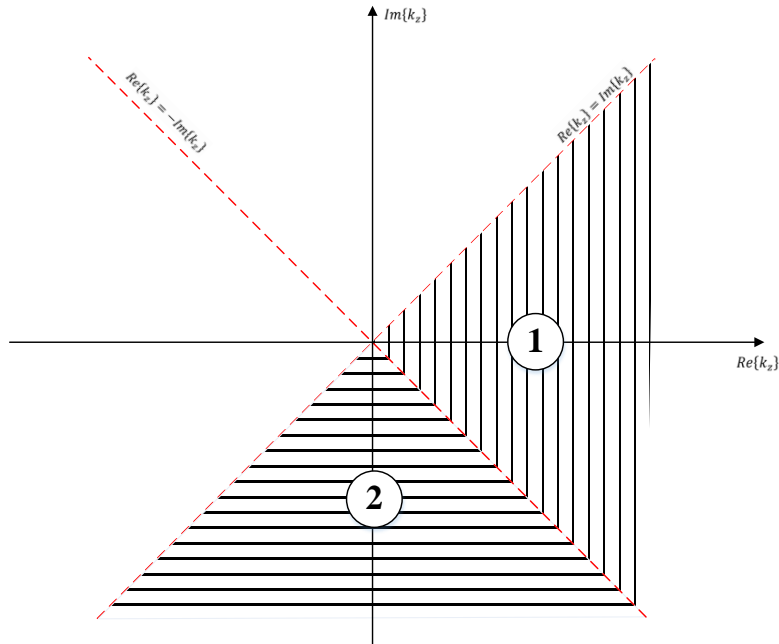
Διάδοση: $\operatorname{Re}\{k_z^2(z; \omega)\} > 0$ και $\operatorname{Re}\{k_z(z; \omega)\} > 0$ (3.18ε)

Αποκοπή: $\operatorname{Re}\{k_z^2(z; \omega)\} < 0$ και $\operatorname{Im}\{k_z(z; \omega)\} < 0$ (3.18στ)

Στις παραπάνω σχέσεις, $k_z(z; \omega)$ και $k_{\perp}(z; \omega)$ είναι ο διαμήκης και ο εγκάρσιος κυματάριθμος, αντίστοιχα, οι οποίοι είναι συναρτήσεις του z με παράμετρο την κυκλική συχνότητα ω . Οι επιπρόσθετες συνθήκες για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του διαμήκη κυματάριθμου προκύπτουν από το γεγονός ότι για $\operatorname{Re}\{k_z^2(z; \omega)\} > 0$ τα πεδία έχουν τη μορφή οδεύοντος κύματος που εξέρχεται της κοιλότητας (οδεύει δηλαδή προς τα αριστερά στο $z = z_1$ και προς τα δεξιά στο $z = z_2$), ενώ αντίθετα για $\operatorname{Re}\{k_z^2(z; \omega)\} < 0$ τα πεδία παρουσιάζουν εκθετική μείωση του πλάτους τους με την απόσταση (ως προς z) από την κοιλότητα [17]. Αυτή η παρατήρηση υποβοηθάται και από το γεγονός ότι μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση της (3.18α) στη μορφή [17]

$$f(z) = \frac{C_1}{\sqrt{k_z(z; \omega)}} e^{+j \int k_z(z; \omega) dz} + \frac{C_2}{\sqrt{k_z(z; \omega)}} e^{-j \int k_z(z; \omega) dz} \quad (3.19)$$

όπου C_1 και C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν τόσο οι σχέσεις (3.18γ) – (3.18δ), αλλά κυρίως προκύπτει η σύμβαση ότι ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της σχέσης (3.19) εκφράζει κύμα που κατευθύνεται προς τα αριστερά και αντίστοιχα ο δεύτερος όρος κύμα που κατευθύνεται προς τα δεξιά για τον ίδιο διαμήκη κυματάριθμο $k_z(z; \omega)$ – ουσιαστικά αλλάζει μόνο το πρόσημο στο όρισμα της εκθετικής συνάρτησης. Αναπαριστώντας στο μιγαδικό επίπεδο ($\operatorname{Re}\{k_z\}, \operatorname{Im}\{k_z\}$) τη σχέση $\operatorname{Re}\{k_z^2\} = 0$, προκύπτουν οι ευθείες $\operatorname{Re}\{k_z\} = \pm \operatorname{Im}\{k_z\}$. Λαμβάνοντας υπόψη και τις σχέσεις (3.18ε) – (3.18στ), στο Σχήμα 3.3 φαίνεται η αναπαράσταση στο εν λόγω μιγαδικό επίπεδο των περιοχών διάδοσης (περιοχή 1) και αποκοπής (περιοχή 2).



Σχήμα 3.3 Περιοχές διάδοσης (1) και αποκοπής (2) στο μιγαδικό επίπεδο k_z .

3.5 Προβλήματα συμβατικού γυροτρονίου

Είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο ότι στο συμβατικό γυροτρόνιο, εκτός από τις απώλειες περίθλασης (δεξιό άκρο της κοιλότητας), υπάρχουν και ωμικές απώλειες στα μεταλλικά τοιχώματα. Πρακτικά, οι κοιλότητες συντονισμού των γυροτρονίων κατασκευάζονται από ενισχυμένα κράματα χαλκού, καθώς αυτά παρουσιάζουν βελτιωμένα χαρακτηριστικά θερμικής και ηλεκτρικής αγωγιμότητας στις υψηλές θερμοκρασίες που αναπτύσσονται κατά τη λειτουργία του γυροτρονίου. Βέβαια, η ηλεκτρική αγωγιμότητα των κραμάτων αυτών είναι πεπερασμένη και οι ωμικές απώλειες που δημιουργούνται από τα επαγόμενα ρεύματα υψηλής συχνότητας του ρυθμού λειτουργίας σε γυροτρόνια υψηλής ισχύος δεν είναι αμελητέες. Ουσιαστικά, η κατάλληλη ψύξη της κοιλότητας, ειδικά σε γυροτρόνια συνεχούς κύματος (Continuous Wave, CW), συνιστά την πλέον σημαντική τροχοπέδη που περιορίζει τη διαθέσιμη ισχύ εξόδου στα γυροτρόνια. Το υφιστάμενο τεχνολογικό φράγμα ψύξης της κοιλότητας (της τάξης των 2 KW/cm²) επιβάλλει τη σχεδίαση μιας κοιλότητας με αυξημένη ακτίνα, γεγονός που σημαίνει ότι για δεδομένη συχνότητα απαιτείται λειτουργία της κοιλότητας σε ρυθμό υψηλότερης τάξης (αναφορικά με το εγκάρσιο προφίλ του ρυθμού) [10].

Όμως, η λειτουργία σε ρυθμό υψηλής τάξης, για τα γυροτρόνια υψηλής ισχύος και συχνότητας, δημιουργεί το πρόβλημα του ανταγωνισμού των ρυθμών (mode competition). Καθώς αυξάνει η τάξη των ρυθμών, και αντίστοιχα η ιδιοτιμή τους,

πυκνώνει το φάσμα των ρυθμών και συνακόλουθα η μονορυθμική λειτουργία (που είναι πλέον επιθυμητή) καθίσταται δύσκολη. Η διέγερση των «παρασιτικών» γειτονικών ρυθμών γίνεται εις βάρος του κύριου ρυθμού λειτουργίας, και έτσι ο τελευταίος δεν μπορεί να φτάσει σε υψηλό επίπεδο ισχύος. Με σκοπό την αντιμετώπιση του ανταγωνισμού των ρυθμών, αναπτύχθηκαν τα ομοαξονικά γυροτρόνια. Περιληπτικά, με την εισαγωγή ενός ακόμη μεταλλικού ομοαξονικού στελέχους με ήπια μεταβολή της ακτίνας (κατά την αξονική διεύθυνση) επιτυγχάνεται, με προσεκτική επιλογή των γεωμετρικών χαρακτηριστικών, η τροποποίηση των απωλειών περίθλασης και των ωμικών απωλειών για τους βασικούς ανταγωνιστές (παρασιτικούς ρυθμούς) του επιθυμητού ρυθμού λειτουργίας, με βασικό στόχο τη μείωση του συντελεστή ποιότητας των ρυθμών αυτών σε σχέση με τον επιθυμητό ρυθμό [10].

Κεφάλαιο 4 Ελεύθερες ταλαντώσεις σε διηλεκτρική κοιλότητα γυροτρονίου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρατέθηκε ο απαραίτητος μαθηματικός φορμαλισμός και αναλύθηκε η λειτουργία της «ψυχρής» κοιλότητας συντονισμού για την περίπτωση του συμβατικού γυροτρονίου. Το βασικό συμπέρασμα είναι ότι για να μειωθεί το ποσοστό των ωμικών απωλειών, σε σχέση με την ωφέλιμη ηλεκτρομαγνητική ισχύ εξόδου, απαιτείται τροποποίηση της βασικής σχεδίασης της κοιλότητας συντονισμού. Όμως όπως καταδείχθηκε στην παράγραφο 2.1, δηλαδή στην περίπτωση της επίπεδης γεωμετρίας για άπειρου εμβαδού διηλεκτρική πλάκα σταθερού πάχους, αν το πάχος d και το μήκος κύματος εντός του διηλεκτρικού λ ικανοποιούν τη σχέση:

$$d \cong \frac{\lambda}{4}(2k + 1), k \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

τότε το διηλεκτρικό μέσο εμφανίζει μέγιστη ανάκλαση, με ποσοστό ανακλώμενης ισχύος, σε σχέση με την προσπίπτουσα, που εξαρτάται κυρίως από την τιμή της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς της διηλεκτρικής πλάκας. Παράλληλα, λόγω απωλειών του διηλεκτρικού εξαιτίας της μιγαδικής γενικά τιμής της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς, αποδείχθηκε ότι το κλάσμα α_{loss} ($0 \leq \alpha_{loss} \leq 1$) των απωλειών σε σχέση με την προσπίπτουσα ισχύ διαθέτει ένα άνω φράγμα που δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση:

$$\alpha_{loss} \approx \pi \frac{f}{c} d (1 + \varepsilon_r') \tan \delta \quad (4.2)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, ε_r' το πραγματικό μέρος της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς και $\tan \delta$ η εφαπτομένη απωλειών του διηλεκτρικού. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.1) και (4.2), καταλήγουμε στη σχέση:

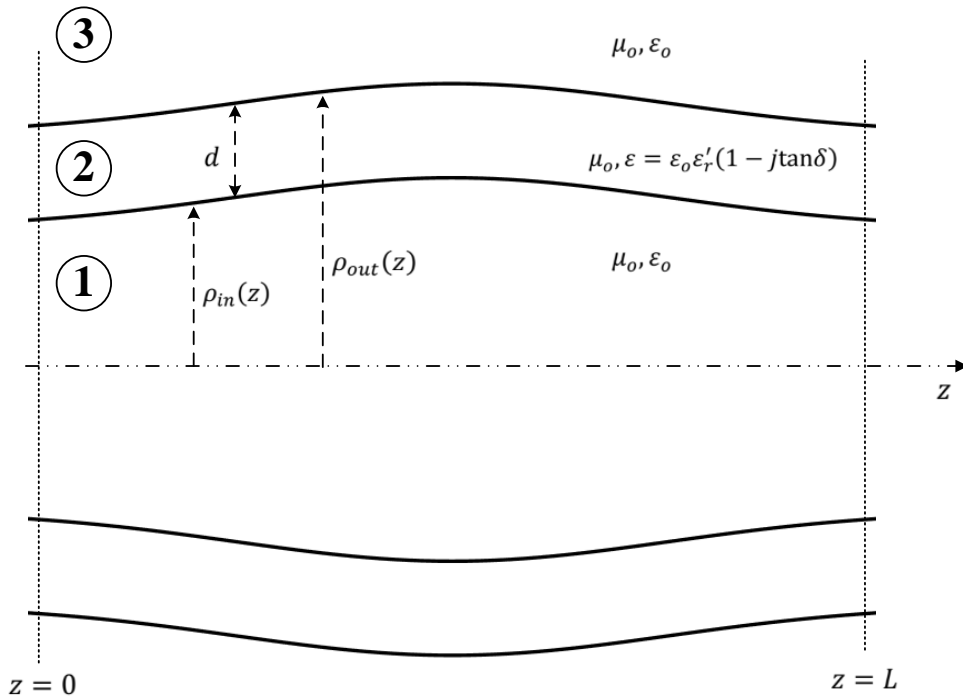
$$\alpha_{loss} \approx \frac{\pi}{4} \frac{1 + \varepsilon_r'}{\sqrt{\varepsilon_r'}} \cdot \xi \cdot \tan \delta, \quad \xi = 1, 3, 5 \dots \quad (4.3)$$

Για παράδειγμα, αν το διηλεκτρικό είναι τεχνητός αδάμαντας, υλικό που χρησιμοποιείται στο παράθυρο εξόδου RF του συμβατικού γυροτρονίου και το οποίο έχει $\varepsilon_r' = 5.67$ και $\tan \delta = 2 \times 10^{-5}$, τιμές που παραμένουν σχετικά σταθερές σε συχνότητες περί τα 100 GHz, τότε το ποσοστό απωλειών (%) με βάση τη σχέση (4.3) γράφεται:

$$\alpha_{loss}(\%) \approx 4.4 \times 10^{-3} \cdot \xi \quad (4.4)$$

Παρατηρούμε ότι για τιμές του περιττού ακεραίου $\xi \leq 3$ το ποσοστό απωλειών μπορεί να περιοριστεί κάτω από 0.02%. Βέβαια, το πάχος d θα πρέπει να προσαρμοστεί κατάλληλα για τη συχνότητα ενδιαφέροντος, σύμφωνα με τη σχέση (4.1).

Από τα παραπάνω, συνάγεται το συμπέρασμα της αντικατάστασης του μεταλλικού τοιχώματος της κοιλότητας συντονισμού του συμβατικού γυροτρονίου με έναν κοίλο διηλεκτρικό κύλινδρο που χαρακτηρίζεται από ήπια ανομοιογένεια της εσωτερικής του ακτίνας και, σε πρώτη εκτίμηση, με σταθερό πάχος. Στο Σχήμα 4.1 φαίνεται η γεωμετρία μιας τέτοιας διάταξης. Το διηλεκτρικό μέσο καταλαμβάνει την περιοχή 2, η οποία έχει σταθερό πάχος d , και η όλη διάταξη διατηρεί τους συμβολισμούς της παραγράφου 2.2 (κυλινδρική γεωμετρία 3 διηλεκτρικών στρωμάτων).



Σχήμα 4.1 Γεωμετρία κοιλότητας συντονισμού γυροτρονίου από κοίλο διηλεκτρικό κύλινδρο με ήπια ανομοιογένεια της εσωτερικής του ακτίνας και με σταθερό πάχος.

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν είναι αρχικά δυνατό, ρυθμίζοντας κατάλληλα το πάχος (ή ακόμη μεταβάλλοντάς το κατά μήκος της κοιλότητας) και το διάμηκες προφίλ της διάταξης, να υπάρξει συντονιζόμενος ρυθμός εντός της κοιλότητας με αποδεκτό συντελεστή ποιότητας για δεδομένη μικροκυματική συχνότητα. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν είναι τετριμμένη, μια προσέγγιση ωστόσο δίνεται παρακάτω.

4.1 Διάδοση και αποκοπή σε διηλεκτρική κοιλότητα

Η διάδοση και η αποκοπή στην κοιλότητα του συμβατικού γυροτρονίου, σύμφωνα με την ανάλυση της παραγράφου 3.4, διακρίνονται ουσιαστικά με βάση το πρόσημο της ποσότητας $\text{Re}\{k_z^2(z; \omega)\}$. Επίσης, λόγω των οριακών συνθηκών εξερχόμενων οδοντών κυμάτων [17], προκύπτουν οι ακόλουθες συνθήκες:

$$\text{Διάδοση:} \quad \text{Re}\{k_z^2(z; \omega)\} > 0 \text{ και } \text{Re}\{k_z(z; \omega)\} > 0 \quad (4.5\alpha)$$

$$\text{Αποκοπή:} \quad \text{Re}\{k_z^2(z; \omega)\} < 0 \text{ και } \text{Im}\{k_z(z; \omega)\} < 0 \quad (4.5\beta)$$

Επισημαίνεται ότι οι παραπάνω συνθήκες ισχύουν για την παρακάτω συμβολική γραφή της εξάρτησης των πεδίων ως προς z , δηλαδή για προφίλ πεδίου $f(z)$:

$$f(z) \propto e^{\pm j \int k_z(w; \omega) dw} \quad (4.6)$$

Στο συμβατικό γυροτρόνιο υπολογίζεται από την αρχή ο εγκάρσιος κυματάριθμος, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες μηδενισμού του εφαπτομενικού ηλεκτρικού πεδίου πάνω στο μεταλλικό τοίχωμα της κοιλότητας, το οποίο θεωρείται ως τελείως αγωγίμο. Έτσι, ως «ελεύθερη» παράμετρος απομένει ο διαμήκης κυματάριθμος, οπότε οι συνθήκες (4.5α)–(4.5β) αφορούν αποκλειστικά σε αυτόν.

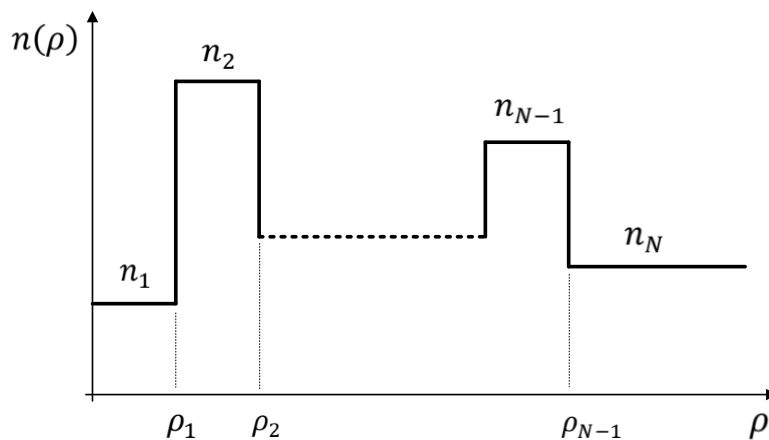
Αντίθετα, στη διηλεκτρική κοιλότητα συντονισμού, ακριβώς επειδή αυτή θεωρητικά εκτείνεται ως το άπειρο στην εγκάρσια διεύθυνση λόγω της παρουσίας του διηλεκτρικού στο τοίχωμα της κοιλότητας, η αποκοπή/διάδοση δεν μπορεί να οριστεί με αντίστοιχο τρόπο. Αυτό συμβαίνει κυρίως διότι ο εγκάρσιος και ο διαμήκης κυματάριθμος είναι συζευγμένοι μέσω της βασικής σχέσης διασποράς και δεν υφίσταται οριακή συνθήκη που να απαιτεί το μηδενισμό της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου σε κάποια διαχωριστική επιφάνεια (καθώς η κοιλότητα δεν διαθέτει μεταλλικές επιφάνειες). Αν υπήρχε τέτοιος μηδενισμός, τότε ο εγκάρσιος κυματάριθμος θα λάμβανε συγκεκριμένες πραγματικές τιμές, όπως συμβαίνει στο συμβατικό γυροτρόνιο.

4.1.1 Διαρρέοντα κύματα (leaky waves)

Στις κοινές οπτικές ίνες, που ουσιαστικά είναι κυλινδρικοί κυματοδηγοί πολλαπλών διηλεκτρικών στρωμάτων, το φως περιορίζεται στην εσωτερική περιοχή (πυρήνας – core), όπου ο δείκτης διάθλασης είναι μεγαλύτερος από το μέσο που την περιβάλλει (μανδύας – cladding). Ωστόσο, υπάρχει μια κατηγορία οπτικών κυματοδηγών, όπου ο δείκτης διάθλασης του πυρήνα είναι μικρότερος από αυτόν του

μανδύα [19]–[20]. Ένας τέτοιος κυματοδηγός με διαρροές (leaky waveguide) δεν υποστηρίζει ρυθμούς που κυματοδηγούνται και οι δυνατότητές του περιορίζονται λόγω των απωλειών διαρροής. Αυτές οι απώλειες μπορεί να μειωθούν σε αποδεκτό επίπεδο με προσεκτική σχεδίαση του προφίλ του δείκτη διάθλασης στην εγκάρσια διεύθυνση του κυματοδηγού. Ο πλέον αποδοτικός τρόπος είναι να περιβληθεί ο πυρήνας με μανδύες που δρουν ανακλαστικά, καθώς βρίσκονται σε αντισυντονισμό (antiresonance). Ο αντισυντονισμός είναι γνωστό φαινόμενο στα συμβολόμετρα (interferometers) τύπου Fabry–Perot, όπου το φως είναι σε τέτοια κατάσταση όταν υπάρχει καταστροφική συμβολή λόγω διαφοράς φάσης 180° , και σε αυτή την περίπτωση η ανακλαστικότητα του συμβολόμετρου είναι μέγιστη. Οι κυματοδηγοί antiresonance χρησιμοποιούν το φαινόμενο αυτό ώστε να περιορίζεται το φως στην εγκάρσια διεύθυνση.

Στο Σχήμα 4.2 φαίνεται το προφίλ των δεικτών διάθλασης για έναν κυματοδηγό με διαρροές απείρου μήκους, με N διηλεκτρικά κυλινδρικά στρώματα. Ο πυρήνας εκτείνεται για $\rho \in [0, \rho_1]$ και έχει σταθερό δείκτη διάθλασης n_1 , υπάρχουν $N - 2$ εσωτερικοί μανδύες με πάχος $t_q = \rho_q - \rho_{q-1}$ και δείκτη διάθλασης n_q , $2 < q < N - 1$ και ένας εξωτερικός μανδύας που εκτείνεται για $\rho \in [\rho_{N-1}, \infty)$ με σταθερό δείκτη διάθλασης n_N . Ο κυματοδηγός αυτός θεωρείται ότι είναι leaky, αν ισχύει $n_1 \leq n_N$ [19]. Γενικά, ο δείκτης διάθλασης κάθε στρώματος μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μιγαδικός για να συμπεριληφθούν οι απώλειες κάθε διηλεκτρικού. Σημειώνεται ότι για εξάρτηση $e^{+j\omega t}$ η σχετική διηλεκτρική σταθερά έχει αρνητικό φανταστικό μέρος. Έτσι, επειδή ο δείκτης διάθλασης είναι η τετραγωνική ρίζα της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς, λαμβάνοντας ως κλαδική τομή της τετραγωνικής ρίζας τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα, προκύπτει ότι για τον δείκτη διάθλασης n_q του στρώματος q ισχύει $\text{Re}\{n_q\} > 0$ και $\text{Im}\{n_q\} \leq 0$.



Σχήμα 4.2 Προφίλ δείκτη διάθλασης κυλινδρικού κυματοδηγού (leaky waveguide) πολλαπλών διηλεκτρικών στρωμάτων.

Κάθε ρυθμός έχει έναν διαμήκη κυματάριθμο k_z , που έχει πραγματική τιμή για κυματοδηγούμενο ρυθμό και μιγαδική τιμή για διαρρέοντα (leaky) ρυθμό. Ο ισοδύναμος δείκτης διάθλασης n_{eff} για κάποιο ρυθμό δίνεται από τη σχέση [19]:

$$n_{eff} = \frac{\text{Re}\{k_z\}}{k_o} \quad (4.7)$$

όπου $k_o = 2\pi/\lambda_o$ και λ_o είναι το μήκος κύματος στο κενό για τη συγκεκριμένη συχνότητα, η οποία θεωρείται καθαρά πραγματικός αριθμός.

Ο τύπος της εγκάρσιας εξάρτησης των πεδίων για τον ρυθμό αυτόν συνάγεται μέσω τη σύγκρισης του ισοδύναμου δείκτη διάθλασης του ρυθμού με τον τοπικό δείκτη διάθλασης ανά στρώμα του κυματοδηγού [19]:

- αν ισχύει $n_{eff} < n_q$ τα πεδία παρουσιάζουν ταλαντωτική συμπεριφορά στο στρώμα q ,
- αν $n_{eff} > n_q$ τα πεδία παρουσιάζουν συμπεριφορά απόσβεσης (evanescent waves) στο στρώμα.

Έτσι, ο ρυθμός χαρακτηρίζεται ως κυματοδηγούμενος (σε διάδοση) αν $n_{eff} > n_N$ και leaky αν $n_{eff} < n_N$.

4.1.2 Leaky waves για κοίλο διηλεκτρικό σωλήνα

Ο διαχωρισμός των ρυθμών σε κυματοδηγούμενους και διαρρέοντες έχει νόημα ειδικά για την περίπτωση των συμπαγών οπτικών ινών, καθώς ο μηχανισμός διάδοσης είναι ουσιαστικά η ολική εσωτερική ανάκλαση. Έτσι, οι διαρρέοντες ρυθμοί για τη συμπαγή οπτική ίνα είναι οι ρυθμοί που εμφανίζονται σε συχνότητα χαμηλότερη από τη συχνότητα αποκοπής των κυματοδηγούμενων ρυθμών ολικής εσωτερικής ανάκλασης [3].

Το πρόβλημα όμως που πραγματεύεται η παρούσα μελέτη προσιδιάζει στην περίπτωση ενός κοίλου κυλινδρικού διηλεκτρικού κυματοδηγού (hollow core pipe fiber), παρόμοιου με αυτόν της παραγράφου 2.2, όπου ένα κανάλι αέρα ή κενού (air channel) περιβάλλεται κυλινδρικά από ένα στρώμα διηλεκτρικού [20]. Σε μια τέτοια διάταξη, υποστηρίζονται:

- αφενός κυματοδηγούμενοι ρυθμοί τύπου οπτικής ίνας στην ενδιάμεση περιοχή του διηλεκτρικού στρώματος (ταλαντωτική συμπεριφορά ως προς την εγκάρσια διεύθυνση), οπότε στην εσωτερική και την εξωτερική περιοχή (που έχουν τα χαρακτηριστικά του κενού) τα πεδία πρέπει να εμφανίζουν συμπεριφορά απόσβεσης στην εγκάρσια διεύθυνση (cladding modes),
- αφετέρου κυματοδηγούμενοι ρυθμοί στην εσωτερική περιοχή, οι οποίοι μέσω του μηχανισμού του αντισυντονισμού (antiresonance) ανακλώνται

μερικώς από το διηλεκτρικό στρώμα και συνεπώς διεισδύουν σε αυτό και κατ' επέκταση στο εξωτερικό στρώμα.

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι, επειδή η παρούσα μελέτη εξετάζει τη δυνατότητα αντικατάστασης του μεταλλικού τοιχώματος της κοιλότητας συντονισμού του συμβατικού γυροτρονίου από αντίστοιχο διηλεκτρικό, οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί που πρέπει να εξεταστούν κατατάσσονται στη δεύτερη κατηγορία, καθώς σε αυτή τα πεδία περιορίζονται εντός της εσωτερικής περιοχής, αν και υπάρχουν απώλειες (διαρροές) προς τις υπόλοιπες περιοχές αναπόφευκτα λόγω της μερικής (και όχι πλήρους) ανάκλασης. Έτσι, οι ρυθμοί αυτοί θεωρούνται διαρρέοντες υπό αυτή ακριβώς την έννοια και αντιδιαστέλλονται προς την έννοια των ομώνυμων ρυθμών που αφορούν στη συμπαγή οπτική ίνα.

Μετά από μελέτη της υπάρχουσας βιβλιογραφίας, προκύπτει ότι, για την περίπτωση των hollow core pipe fibers, οι ρυθμοί που κυματοδηγούνται στην εσωτερική περιοχή (air channel) εμφανίζουν απώλειες, οι οποίες αυξάνουν καθώς ελαττώνεται η ακτίνα της εσωτερικής περιοχής ή η συχνότητα. Το βασικότερο όμως συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι αυτοί οι ρυθμοί δεν διαθέτουν αποκοπή [20].

Συμπερασματικά, για την απλή περίπτωση της γεωμετρίας 3 κυλινδρικών στρωμάτων, όπως αυτή της παραγράφου 2.2, οι εκφράσεις της αλγεβρικής τιμής των διανυσμάτων Hertz ανά περιοχή διηλεκτρικού, ακολουθώντας τη λογική του συμβατικού γυροτρονίου [17], έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Περιοχή 1} \quad \Pi_m^{(1)} &= A_{m,1} \cdot J_m(k_{\perp}\rho) e^{jm\varphi} e^{\mp jk_z z} \\ \Pi_e^{(1)} &= A_{e,1} \cdot J_m(k_{\perp}\rho) e^{jm\varphi} e^{\mp jk_z z} \end{aligned} \quad (4.8\alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{Περιοχή 2} \quad \Pi_m^{(2)} &= [A_{m,2} \cdot J_m(k_{\perp d}\rho) + A_{m,3} \cdot Y_m(k_{\perp d}\rho)] e^{jm\varphi} e^{\mp jk_z z} \\ \Pi_e^{(2)} &= [A_{e,2} \cdot J_m(k_{\perp d}\rho) + A_{e,3} \cdot Y_m(k_{\perp d}\rho)] e^{jm\varphi} e^{\mp jk_z z} \end{aligned} \quad (4.8\beta)$$

$$\begin{aligned} \text{Περιοχή 3} \quad \Pi_m^{(3)} &= A_{m,4} \cdot H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) e^{jm\varphi} e^{\mp jk_z z} \\ \Pi_e^{(3)} &= A_{e,4} \cdot H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) e^{jm\varphi} e^{\mp jk_z z} \end{aligned} \quad (4.8\gamma)$$

$$k_{\perp} = \sqrt{\omega^2 \mu_o \varepsilon_o - k_z^2} \quad (4.8\delta)$$

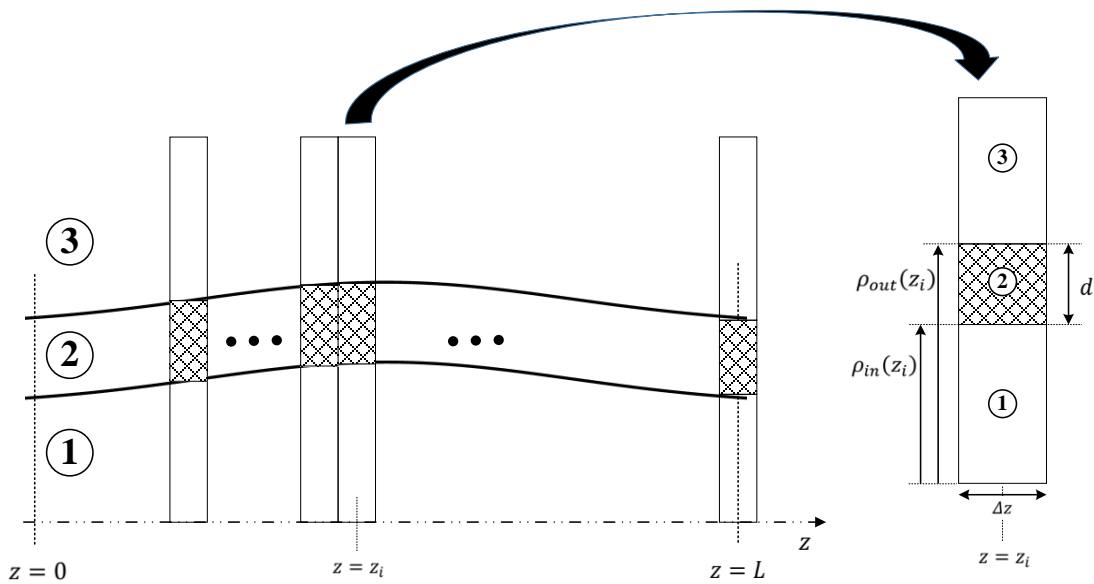
$$k_{\perp d} = \sqrt{\omega^2 \mu_o \varepsilon_o \varepsilon_r - k_z^2} \quad (4.8\epsilon)$$

Επειδή δε μελετάται μια διηλεκτρική κοιλότητα συντονισμού αναμένονται εξερχόμενα κυλινδρικά κύματα που διαδίδονται στο εγκάρσιο επίπεδο (εξερχόμενα και όχι εισερχόμενα). Δηλαδή, ο εγκάρσιος κυματάριθμος της πλέον εξωτερικής περιοχής της κοιλότητας θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από $\text{Re}\{k_{\perp}\} > 0$. Η

παρατήρηση αυτή θεμελιώνεται στην ασυμπτωτική μορφή της συνάρτησης Hankel 2^{ου} είδους, που δίνεται από τη σχέση (1.30).

4.2 Προσεγγιστική ανάλυση

Η απλούστερη μέθοδος προσέγγισης του προβλήματος βασίζεται στο [17] και σε πρώτη φάση η κοιλότητα διακριτοποιείται ως προς το διαμήκη άξονα, λαμβάνοντας εγκάρσια «δακτυλίδια» σε βαθμιδωτή διάταξη (staircase) όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3 Διακριτοποίηση της διηλεκτρικής κοιλότητας συντονισμού.

Επιλέγοντας το μήκος $\Delta z'$ κάθε δακτυλιδιού έτσι ώστε να ισχύει:

$$\Delta z' \leq \frac{\lambda_0}{20} \quad (4.9)$$

όπου λ_0 είναι το μήκος κύματος στο κενό για τη συχνότητα ενδιαφέροντος, η κοιλότητα, που εκτείνεται ως προς το διαμήκη άξονα από $z = 0$ έως $z = L$, διακριτοποιείται σε N' δακτυλίδια, όπου

$$N' \geq \frac{L}{\Delta z'} \quad (4.10)$$

και φυσικά λαμβάνεται ο αμέσως μεγαλύτερος ακέραιος, κατά προτίμηση ο αμέσως μεγαλύτερος άρτιος ακέραιος, έτσι ώστε το κέντρο $z = L/2$ της κοιλότητας να συμπεριλαμβάνεται στο πλέγμα διακριτοποίησης. Τελικά, λαμβάνονται N δακτυλίδια σύμφωνα με τον παραπάνω περιορισμό, με το καθένα να έχει μήκος

$$\Delta z = \frac{L}{N} \quad (4.11)$$

και τα $N + 1$ σημεία z_i του διαμήκη άξονα δίνονται από τη σχέση:

$$z_i = i \frac{L}{N}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.12)$$

Στο δακτυλίδι με αρίθμηση i , δηλαδή για $z_i \leq z \leq z_{i+1}$, το διηλεκτρικό μέσο (περιοχή 2), που έχει ηλεκτρική επιτρεπτότητα $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, $\varepsilon_r \in \mathbb{C}$ και μαγνητική επιδεκτικότητα ίση με αυτή του κενού, εκτείνεται σε $\rho \in [\rho_{in}(z_i), \rho_{out}(z_i)]$. Αντίστοιχα, η περιοχή 1, που χαρακτηρίζεται από $\rho \in [0, \rho_{in}(z_i)]$, και η περιοχή 3, που εκτείνεται σε $\rho \in [\rho_{out}(z_i), +\infty)$, έχουν τα χαρακτηριστικά του κενού.

Συγκρίνοντας με την κοιλότητα του συμβατικού γυροτρονίου, σημειώνεται ότι, λόγω της παρουσίας μεταλλικών επιφανειών, η εφαρμογή των ανάλογων οριακών συνθηκών στο συμβατικό γυροτρόνιο επιτρέπει, ως πρώτο βήμα της ανάλυσης, τον υπολογισμό του εγκάρσιου κυματάριθμου για ρυθμούς TE αποκλειστικά από το γεωμετρικό προφίλ της διάταξης σύμφωνα με τη σχέση (3.7). Κατόπιν, βρίσκεται ο διαμήκης κυματάριθμος με τη σχέση (3.9) και τελικά επιλύοντας την εξίσωση της μη ομοιόμορφης χορδής (3.8), με οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων, υπολογίζεται το προφίλ πεδίου.

Ωστόσο, για την περίπτωση της διηλεκτρικής κοιλότητας, το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί είναι συζευγμένο, με την έννοια ότι στο εγκάρσιο επίπεδο οι οριακές συνθήκες αφορούν στη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών τόσο του ηλεκτρικού όσο και του μαγνητικού πεδίου. Ο περιορισμός αυτός δεν επιτρέπει να ακολουθηθεί παρόμοια διαδικασία με την περίπτωση της κοιλότητας συμβατικού γυροτρονίου, διότι για δεδομένη συχνότητα πρέπει να επιλυθεί η σχέση διασποράς, η οποία είναι μια πολύπλοκη υπερβατική εξίσωση, όπου ο εγκάρσιος και ο διαμήκης κυματάριθμος είναι πεπλεγμένοι, και από την οποία προκύπτουν ως ιδιοτιμές οι επιτρεπτές τιμές του διαμήκους κυματάριθμου.

Έτσι, η βασική παραδοχή για την επίλυση του προβλήματος της διηλεκτρικής κοιλότητας συνίσταται στη θεώρηση ότι:

- Στην κοιλότητα υπάρχει μόνο ένας ρυθμός (single-mode approximation) και η σύζευξη με άλλους ρυθμούς είναι αμελητέα.
- Ισχύει η προσέγγιση WJKB.
- Το πρόβλημα επιλύεται τοπικά για κάθε δακτυλίδι (δηλαδή κάθε δακτυλίδι αντιμετωπίζεται σαν να εκτείνεται στο άπειρο ως προς z) και στη συνέχεια εφαρμόζεται η σύζευξη μεταξύ των δακτυλιδιών.

Συνεπώς, είναι αρχικά εφικτό να υπολογιστούν για δεδομένη μιγαδική συχνότητα $\omega \in \mathbb{C}$ οι επιτρεπτές τιμές (ιδιοτιμές) του διαμήκους κυματάριθμου $k_z(z_i; \omega)$ για κάθε

δακτυλίδι με αρίθμηση i , μέσω της σχέσης διασποράς για την κυλινδρική γεωμετρία 3 (ή πολλαπλών) διηλεκτρικών στρωμάτων των παραγράφων 2.2.1 (ή 2.3.2 αντίστοιχα) με τη συμβολική μορφή

$$\mathcal{D}[\omega, k_z(z_i; \omega)] = 0 \quad (4.13)$$

όπου ωστόσο οι εκφράσεις των διανυσμάτων Hertz δίνονται από τις σχέσεις (4.8α) έως (4.13γ). Κατόπιν, υπολογίζεται ο εγκάρσιος κυματάριθμος $k_{\perp}(z_i; \omega)$ για κάθε δακτυλίδι από τη σχέση:

$$k_{\perp}^2(z_i; \omega) = \omega^2 \mu \epsilon - k_z^2(z_i; \omega) \quad (4.14)$$

όπου σημειώνεται ότι αυτός είναι διαφορετικός στη γενική περίπτωση για κάθε περιοχή διηλεκτρικού εντός του ίδιου δακτυλιδιού.

Στην προκειμένη περίπτωση των δακτυλιδιών με 3 περιοχές και αγνοώντας προς το παρόν το πρόσημο κατά την εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας στη σχέση (4.14), υπάρχουν, για κάθε δακτυλίδι, 2 διακριτά σύνολα τιμών του εγκάρσιου κυματάριθμου, ένα για τις περιοχές 1 και 3 και ένα για την περιοχή 2, ενώ όλες οι περιοχές έχουν φυσικά τον ίδιο αξονικό κυματάριθμο. Κάθε ξεχωριστή τιμή του διαμήκους κυματάριθμου αντιστοιχεί προφανώς σε συγκεκριμένο υβριδικό ρυθμό ΕΗ ή ΗΕ για το συγκεκριμένο δακτυλίδι. Το πρόβλημα που ανακύπτει είναι πώς θα συσχετιστεί μια τιμή διαμήκους κυματάριθμου για ένα δακτυλίδι, ανάμεσα από τις πολλές τιμές που έχουν βρεθεί κατόπιν επίλυσης της σχέσης διασποράς, και η οποία «ανήκει» σε ένα συγκεκριμένο ρυθμό, με μια τιμή κυματάριθμου για ένα διαφορετικό δακτυλίδι, έτσι ώστε να βρεθεί το σύνολο των διαμήκων κυματάριθμων που χαρακτηρίζει ένα συγκεκριμένο ρυθμό από δακτυλίδι σε δακτυλίδι και για όλο το μήκος της διάταξης. Επειδή όμως έχει υποθεθεί ήπια ανομοιογένεια των εγκάρσιων γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κοιλότητας, ο εν λόγω συσχετισμός μπορεί να προκύψει μέσω ενός αλγόριθμου ιχνηλάτησης κυματάριθμων (wavenumber tracking) που θα εξετάζει κάθε τιμή κυματάριθμου ενός δακτυλιδιού και θα τη συσχετίζει με μια και μόνο τιμή κυματάριθμου στο άμεσα γειτονικό δακτυλίδι, με κριτήριο την ευκλείδεια απόσταση σημείου–προς–σημείο για τους διαφορετικούς κυματάριθμους που προκύπτουν για κάθε z_i .

Έχοντας δημιουργήσει το σύνολο των διαμήκων κυματάριθμων που αντιστοιχούν σε κάποιο ρυθμό, δηλαδή το σύνολο των $N + 1$ το πλήθος τιμών $\{k_{z,i}(z_i; \omega)\}, i = 0, 1, \dots, N$ για ένα ρυθμό με αυθαίρετη αρίθμηση l , μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση του προβλήματος υιοθετώντας τη μεθοδολογία της κοιλότητας του κλασικού γυροτρονίου. Συγκεκριμένα, μπορούμε να βρούμε το

προφίλ πεδίου $f_l(z)$ του ρυθμού l για δεδομένη μιγαδική συχνότητα ω επιλύοντας την παρακάτω διαφορική εξίσωση με οριακές συνθήκες εξερχόμενου κύματος:

$$\frac{d^2 f_l}{dz^2} + k_{z,l}^2(z; \omega) f_l = 0, \quad z \in [0, L], \quad f_l = f_l(z) \quad (4.15\alpha)$$

$$\left[\frac{df_l}{dz} - j k_{z,l}(z; \omega) f_l \right]_{z=0} = 0 \quad (4.20\beta)$$

$$\left[\frac{df_l}{dz} + j k_{z,l}(z; \omega) f_l \right]_{z=L} = 0 \quad (4.20\gamma)$$

όπου στις παραπάνω σχέσεις $k_{z,l}(z; \omega)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του z που έχει προκύψει μέσω κατάλληλης μεθόδου παρεμβολής (π.χ. spline) πάνω στο σύνολο $\{k_{z,l}(z_i; \omega)\}, i = 0, 1, \dots, N$ των διακριτών, ένεκα της διακριτοποίησης της διάταξης ως προς τον άξονα z , τιμών του διαμήκους κυματάριθμου για το ρυθμό l . Η επίλυση της εξίσωσης γίνεται με την ίδια μεθοδολογία που περιγράφεται στην παράγραφο 3.3. Τελικά, η εύρεση της μιγαδικής συχνότητας συντονισμού και του προφίλ πεδίου ενός συγκεκριμένου ρυθμού προκύπτει μέσω ενός προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$\text{Εύρεση } \omega \text{ ώστε } \left| \left\{ \frac{df_l(z)}{dz} + j k_{z,l}(z; \omega) f_l(z) \right\} \Big|_{z=L} \right| \rightarrow \min \quad (4.16)$$

$$\text{δεδομένου ότι } \left\{ \frac{df_l(z)}{dz} - j k_{z,l}(z; \omega) f_l(z) \right\} \Big|_{z=0} = 0$$

Κατά την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης μέσω αλγορίθμου (όπως φαίνεται παρακάτω), θα απαιτηθεί η μεταβολή της συχνότητας από βήμα σε βήμα του αλγορίθμου. Αυτό όμως θα μεταβάλλει τόσο την εύρεση των δυνατών διαμήκων κυματάριθμων ανά δακτυλίδι διακριτοποίησης όσο και τη συλλογή/συσχέτιση των κυματάριθμων αυτών ανά ρυθμό. Επειδή όμως κατά τη μεταβολή της συχνότητας θα πρέπει να παρακολουθείται ο συγκεκριμένος ρυθμός ενδιαφέροντος, απαιτείται ένας αλγόριθμος ιχνηλάτησης ρυθμών (mode tracking), ο οποίος να αντιμετωπίζει κάθε ρυθμό l ως ένα σύνολο κυματάριθμων $\{k_{z,l}(z_i; \omega)\}$. Ο εν λόγω αλγόριθμος θα συσχετίζει ένα ρυθμό σε μία συχνότητα με όλους τους υπόλοιπους ρυθμούς σε μια διαφορετική συχνότητα, με κριτήριο την «ομοιότητα» των εγκάρσιων συνιστωσών (ρ, φ) των πεδίων που προκύπτουν.

4.2.1 Αριθμητική επίλυση σχέσης διασποράς

Η εύρεση των επιτρεπτών διαμήκων κυματάριθμων $k_z(z_i; \omega)$ για δεδομένη συχνότητα ω και για κάθε δακτυλίδι z_i , μέσω της σχέσης διασποράς (4.13),

αντιμετωπίζεται ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, λαμβάνοντας υπόψη την ανάλυση της παραγράφου 2.2.1 και θεωρώντας τη σχέση (2.28), παρατηρείται καταρχάς ότι η ορίζουσα του πίνακα \mathbf{M} τάξης 8×8 γράφεται ως μιγαδική συνάρτηση του $k_z = x + jy$. Θεωρώντας την πραγματική συνάρτηση

$$W(x, y; \omega) \equiv W(k_z; \omega) = \|\mathcal{D}[\omega, k_z(z_i; \omega)]\| \quad (4.17)$$

φαίνεται ότι γενικά ισχύει (λόγω του μέτρου) $W(x, y; \omega) > 0$, εκτός από κάποια σημεία (x, y) για τα οποία ισχύει $W(x, y; \omega) = 0$. Τα τελευταία σημεία αποτελούν τους ιδιορρυθμούς (επιτρεπτοί εγκάρσιοι κυματάριθμοι) του προβλήματος και είναι τα ολικά ελάχιστα της συνάρτησης $W(x, y)$. Οι δυσκολίες που προκύπτουν με τη θεώρηση αυτή είναι:

- Επειδή ο υπολογισμός της ορίζουσας 8×8 θα υλοποιηθεί αναγκαστικά αριθμητικά, λόγω του αναπόφευκτου σφάλματος στρογγυλοποίησης (roundoff error) και του τρόπου που υπολογίζεται η ορίζουσα από τα περισσότερα λογισμικά (π.χ. Matlab), όπου γίνεται παραγοντοποίηση LU του εμφανιζόμενου πίνακα [8]–[9], ελλοχεύει ο κίνδυνος απώλειας ριζών για μεγάλες τιμές τάξης του πίνακα. Πράγματι, μετά την παραγοντοποίηση LU, ο πίνακας U που προκύπτει μετασχηματίζεται σε ένα διαγώνιο πίνακα Δ και η ορίζουσα τελικά υπολογίζεται ως το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του Δ. Αν η ορίζουσα αναμένεται να είναι «μαθηματικά» μηδέν, λόγω του σφάλματος στρογγυλοποίησης ένα από τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του Δ θα είναι αρκετά μικρό, όχι όμως ακριβώς μηδέν, αλλά τα υπόλοιπα στοιχεία μπορεί να λαμβάνουν αρκετά υψηλότερες τιμές, οπότε το γινόμενο όλων των στοιχείων μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλο, όσο μάλιστα αυξάνει η τάξη του πίνακα.
- Η μέθοδος βελτιστοποίησης δεν μπορεί να χρησιμοποιεί την παράγωγο του συστήματος (π.χ. μέθοδοι quasi-Newton), καθώς αυτή δεν είναι γνωστή για την παρούσα περίπτωση και απαιτείται να διαθέτει ανεκτική αξιοπιστία στον υπολογισμό των σημείων ελαχιστοποίησης, χωρίς απαραίτητα να χαρακτηρίζεται από υψηλή ταχύτητα.

Η πρώτη δυσκολία υπερβαίνεται με τη χρήση της μεθόδου των πινάκων μετάβασης, όπως αυτοί αναλύθηκαν στην παράγραφο 2.3. Επειδή με τη μέθοδο αυτή η ορίζουσα είναι τάξης 2×2 , υπάρχουν συγκριτικά πλεονεκτήματα σε σχέση με την ορίζουσα 8×8 , όχι μόνο σε θέμα αξιοπιστίας εύρεσης των ριζών, αλλά και λόγω της ευκολίας «χαρακτηρισμού» των ρυθμών (TE/TM/HE/EH) που προκύπτουν. Συγκεκριμένα, προκύπτει ο πίνακας 2×2 της μορφής

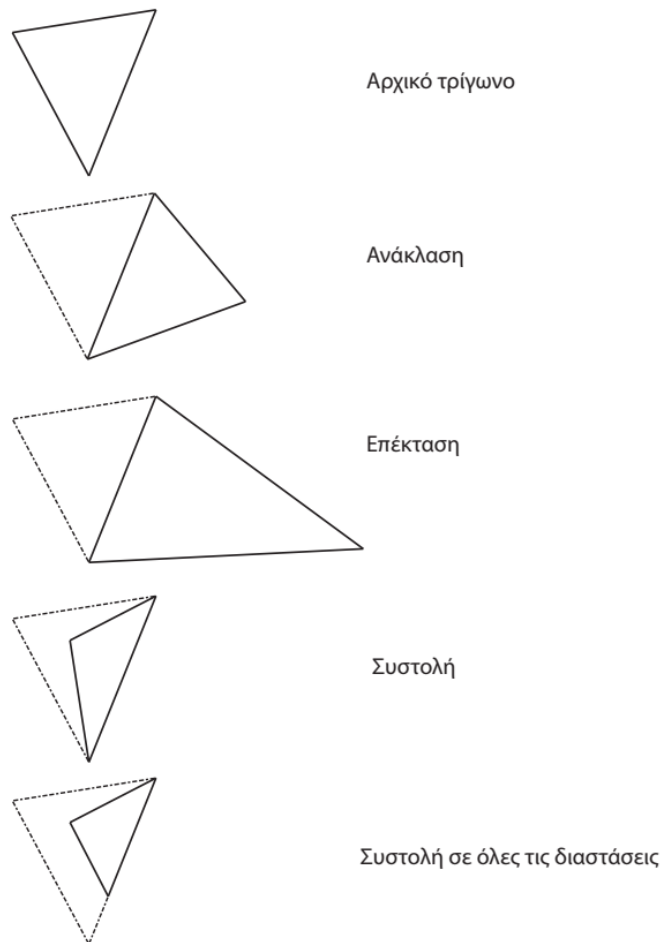
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 2.3.3. Υπενθυμίζεται ότι ο πίνακας της παραπάνω σχέσης πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα-στήλη που περιέχει το συντελεστή του διανύσματος Hertz Π_e (πάνω στοιχείο) και το συντελεστή του διανύσματος Hertz Π_m (κάτω στοιχείο) της εσωτερικής περιοχής (I) της κοιλότητας. Για $m = 0$, ισχύει $b = c = 0$ και για $a = 0$ προκύπτουν ρυθμοί TM και για $d = 0$ ρυθμοί TE. Για $m \neq 0$, οι ρυθμοί είναι αναγκαστικά υβριδικοί (EH/HE).

Η δεύτερη δυσκολία υπερβαίνεται με τη χρήση του αλγορίθμου Nelder–Mead (ή αλγόριθμος της αμοιβάδας). Λεπτομέρειες για τον αλγόριθμο μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία [21], ενώ η βασική λειτουργία του θα περιγραφεί σύντομα για τις δύο διαστάσεις, που είναι και η περίπτωση του παρόντος προβλήματος. Αρχικά, ο αλγόριθμος τροφοδοτείται με ένα σημείο εκκίνησης, το οποίο επιλέγεται ως η μια κορυφή του αρχικού τριγώνου αναζήτησης. Κατόπιν, υπολογίζεται η υπό βελτιστοποίηση συνάρτηση στις υπόλοιπες κορυφές του τριγώνου και «ταξινομούνται» οι κορυφές. Η χειρότερη κορυφή με τη μεγαλύτερη τιμή απορρίπτεται και σχηματίζεται ένα νέο τρίγωνο ως ανάκλαση του αρχικού. Η ανάκλαση σχηματίζεται με τη νέα κορυφή να είναι συμμετρική ως προς το κέντρο της πλευράς που έχει απομείνει. Τα δύο τρίγωνα, αρχικό και νέο, έχουν το ίδιο εμβαδόν. Αν η τιμή του νέου σημείου βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές των δύο άλλων, τότε η διαδικασία επαναλαμβάνεται, εκτελώντας μια ανάκλαση του νέου τριγώνου ως προς το νέο χειρότερο σημείο. Αν όμως το νέο σημείο μιας ανάκλασης εμφανίζει μικρότερη τιμή σε σχέση με τα υπόλοιπα, τότε γίνεται μια επέκταση του τριγώνου, λαμβάνοντας τη διπλάσια απόσταση από το κέντρο της πλευράς που έχει απομείνει. Σε κάθε περίπτωση, μεταξύ των δύο τελευταίων σημείων (της απλής ανάκλασης και της επέκτασης), επιλέγεται το σημείο με τη χαμηλότερη τιμή.

Αν το σημείο μετά από την ανάκλαση είναι μεν καλύτερο από το αρχικό, αλλά παραμένει χειρότερο από τα υπόλοιπα, τότε εκτελείται μια συστολή του τριγώνου με ένα νέο σημείο στη μισή απόσταση του χειρότερου σημείου από το κέντρο της απέναντι πλευράς. Αν και πάλι το νέο σημείο είναι χειρότερο από τα υπόλοιπα, γίνεται μια συστολή του τριγώνου μειώνοντας την απόσταση των δύο χειρότερων σημείων από το κέντρο της πλευράς κατά το ήμισυ. Συνοψίζοντας, η επαναληπτική διαδικασία αποτελείται από διαδοχικές διαδικασίες ανάκλασης, επέκτασης και συστολής του τριγώνου, οι οποίες και απεικονίζονται στο Σχήμα 4.4. Με τη διαδικασία αυτή, παραλείποντας τα τρίγωνα στα οποία η νέα κορυφή έχει αυξημένη τιμή της $W(x, y; \omega)$, σχηματίζεται μια αλληλουχία από τρίγωνα, που οι τιμές της $W(x, y; \omega)$ στις κορυφές των τριγώνων διαδοχικά είναι μικρότερες, με κατεύθυνση προς την ελάχιστη τιμή, και τα μήκη των πλευρών τους γίνονται συνεχώς μικρότερα.

Το κριτήριο σύγκλισης του αλγορίθμου ορίζεται ως μια ελάχιστη απόσταση, που θα πρέπει να απέχουν τα σημεία μεταξύ τους, που είναι ουσιαστικά η ακρίβεια με την οποία είναι επιθυμητή η εύρεση της θέσης του σημείου ελαχίστου.

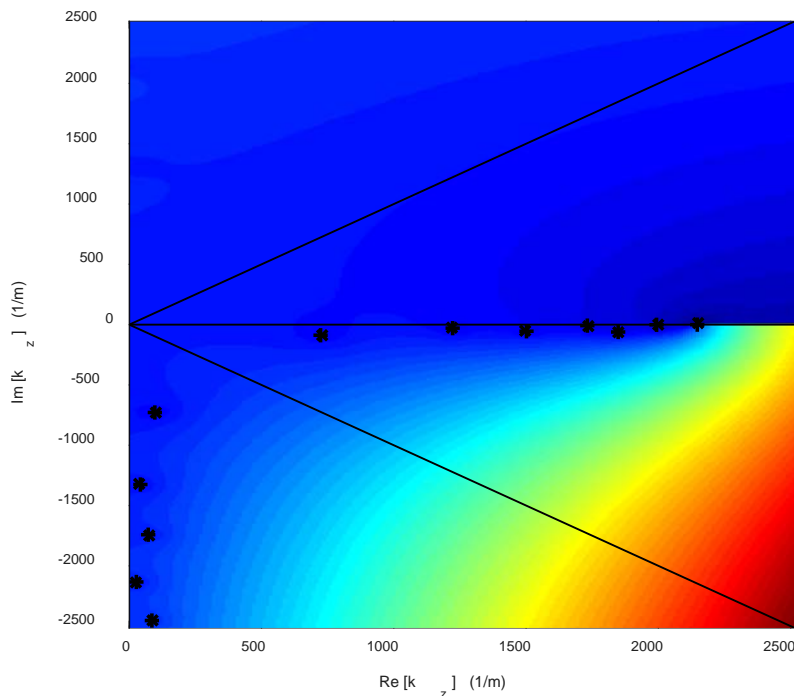


Σχήμα 4.4 Διαδικασίες του αλγορίθμου Nelder–Mead (Σχήμα 3.2 του [10]).

Για την παρούσα μελέτη, η υλοποίηση της αριθμητικής επίλυσης της εξίσωσης διασποράς γίνεται, για δεδομένη συχνότητα ω και για δεδομένο προφίλ διηλεκτρικού κατά μήκος της κοιλότητας (ουσιαστικά για κάθε διαφορετικό δακτυλίδι), παρέχοντας στον αλγόριθμο ένα χωρίο διαμήκων κυματάριθμων ($\text{Re}\{k_z\}, \text{Im}\{k_z\}$) με $\text{Re}\{k_z\} \geq 0$, το οποίο έχει μορφή ορθογώνιου παραλληλογράμμου. Σημειώνεται ότι ελήφθη η παραδοχή $\text{Re}\{k_z\} \geq 0$, η οποία είναι πλήρως συμβατή με τη λογική της συμμετρίας που αναλύθηκε στην παράγραφο 2.3.4. Το ορθογώνιο διακριτοποιείται σε πλέγμα (με πλήθος σημείων της τάξης των 400×200) και στις κορυφές του πλέγματος υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης $W(\text{Re}\{k_z\}, \text{Im}\{k_z\}; \omega)$. Υλοποιώντας μια αρχική εκτίμηση των τοπικών ελαχίστων, μέσω σύγκρισης κάθε σημείου του πλέγματος με τα 8 γειτονικά του, προκύπτει μια συλλογή σημείων (αρχικά τοπικά ελάχιστα) και

έκαστο από αυτά αποτελεί σημείο αρχικοποίησης του αλγορίθμου βελτιστοποίησης. Αφού προκύψουν τα υποψήφια σημεία – λύσεις της εξίσωσης διασποράς, γίνεται κατόπιν υπολογισμός της τιμής της συνάρτησης $W(\text{Re}\{k_z\}, \text{Im}\{k_z\}; \omega)$. Στη φάση αυτή, απορρίπτονται σημεία που η τιμή της συνάρτησης (δηλαδή ουσιαστικά το μέτρο της ορίζουσας) υπερβαίνει μια επιλεγμένη τιμή, έτσι ώστε να αποφευχθούν παρασιτικά – πλασματικά (spurious) σημεία ελαχίστου. Σημειώνεται ότι ο τελευταίος αυτός έλεγχος είναι εφικτός μόνο αν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των πινάκων μετάβασης, καθώς για τον «κλασικό» πίνακα 8×8 προκύπτουν πολύ υψηλές τιμές της ορίζουσας, λόγω του τρόπου υπολογισμού της (παράγραφος 2.3).

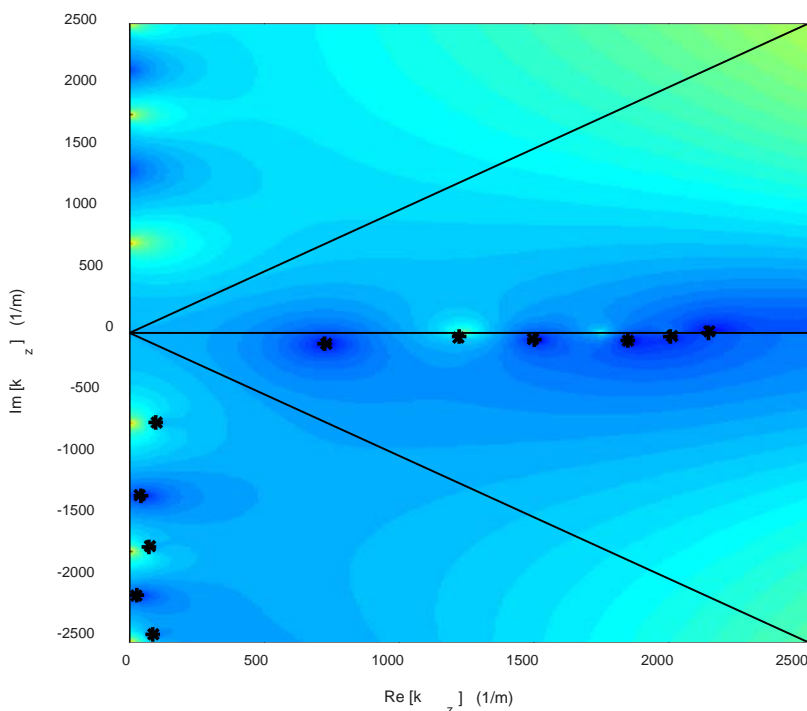
Στο Σχήμα 4.5 φαίνεται το χωρίο επίλυσης της συνάρτησης $W(\text{Re}\{k_z\}, \text{Im}\{k_z\}; \omega)$ για την περίπτωση του πίνακα 8×8 . Η συχνότητα είναι 100 GHz (χωρίς φανταστικό μέρος), το ενδιάμεσο στρώμα διηλεκτρικού έχει $\epsilon_r' = 5.67$ και $\tan\delta = 2 \times 10^{-5}$ και εκτείνεται σε ακτίνα $\rho_{in} = 4.5 \text{ mm}$ έως $\rho_{out} = 6.1 \text{ mm}$. Οι πλάγιες γραμμές ορίζουν τον κώνο διάδοσης του συμβατικού γυροτρονίου (ο οποίος έχει διατηρηθεί για «ιστορικούς» λόγους ως αναφορά, μιας και οι ρυθμοί που εξετάζονται είναι leaky και δεν διαθέτουν αποκοπή) και ο χρωματισμός ακολουθεί την τιμή $\log_{10}[W(k_z; \omega)]$ για τα σημεία του πλέγματος (και όχι για τα τελικά σημεία ελαχίστου). Τα σημεία με «x» είναι τα αρχικά σημεία με τα οποία τροφοδοτείται ο αλγόριθμος Nelder–Mead, ενώ τα σημεία με «+» είναι τα σημεία που υποδεικνύει ο ίδιος αλγόριθμος ως σημεία ελαχίστου, δηλαδή τους ιδιορρυθμούς. Αντίστοιχα, στο Σχήμα 4.6 φαίνεται το ίδιο χωρίο με τις ίδιες παραμέτρους, αλλά για την περίπτωση του πίνακα 2×2 .



Σχήμα 4.5 Αριθμητική επίλυση της σχέσης διασποράς για τον πίνακα 8×8 .

Αυτό που διακρίνεται είναι ότι για τα σημεία του αρχικού πλέγματος ο πίνακας 8×8 υπολογίζει την ορίζουσα της σχέσης διασποράς με ελάχιστη τιμή $\sim 10^{45}$, ενώ ο πίνακας 8×8 υπολογίζει την ορίζουσα της σχέσης διασποράς με ελάχιστη τιμή $\sim 10^{-1.5}$, όπως φαίνεται από το colorbar κάθε σχήματος. Αυτή η παρατήρηση γενικά ισχύει και για τα σημεία ελαχίστου στα οποία καταλήγει ο αλγόριθμος. Στον Πίνακα 4.1 παρατίθενται οι ιδιορρυθμοί, που υπολογίζει ο αλγόριθμος Nelder–Mead για τις δύο μεθόδους.

Η μέθοδος του πίνακα 8×8 βρίσκει 13 ρίζες, ενώ αυτή του πίνακα 2×2 11 ρίζες. Για τους κοινούς ιδιορρυθμούς, η διαφορά είναι ελάχιστη (σχετικό σφάλμα κάτω από 10^{-11}). Για τη ρίζα με αύξοντα αριθμό (α/α) 11 παρατηρούμε ότι είναι πολύ κοντά στη ρίζα με α/α 12, και μάλιστα η τιμή της ορίζουσας είναι 8 τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη σε σχέση με τη ρίζα με α/α 12. Συνεπώς, η ρίζα με α/α 11 είναι πλασματική (spurious), όπως φαίνεται και από τις ισούψεις καμπύλες του Σχήματος 4.6, όπου δεν παρατηρείται οπτικά κάποια «βαθιά» κοιλάδα της συνάρτησης W . Η τελευταία παρατήρηση ισχύει και για τη ρίζα με α/α 9. Συγκεκριμένα, για τη μέθοδο 2×2 , στην περιοχή της ρίζας με α/α 9 που παράγει η μέθοδος 8×8 , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.6, η συνάρτηση W εμφανίζει τοπικό μέγιστο.



Σχήμα 4.6 Αριθμητική επίλυση της σχέσης διασποράς για τον πίνακα 2×2 .

Πίνακας 4.1. Σύγκριση των μεθόδων υπολογισμού της οριζουσας της σχέσης διασποράς

α/α	Πίνακας 8×8		Πίνακας 2×2	
	Ιδιορρυθμοί k_z	Τιμή οριζουσας	Ιδιορρυθμοί k_z	Τιμή οριζουσας
1	2.7001e+01 – 2.1337e+03j	2.3919e+43	2.7001e+01 – 2.1337e+03j	1.8930e–08
2	4.2214e+01 – 1.3256e+03j	6.9653e+42	4.2214e+01 – 1.3256e+03j	1.1343e–08
3	7.1677e+01 – 1.7418e+03j	1.5300e+43	7.1677e+01 – 1.7418e+03j	2.1270e–07
4	8.5683e+01 – 2.4535e+03j	2.1912e+43	8.5683e+01 – 2.4535e+03j	1.3354e–07
5	9.6807e+01 – 7.2833e+02j	2.8179e+42	9.6807e+01 – 7.2833e+02j	1.7719e–07
6	7.2320e+02 – 8.7823e+01j	1.6541e+42	7.2320e+02 – 8.7823e+01j	6.8962e–09
7	1.2224e+03 – 2.8908e+01j	8.8196e+41	1.2224e+03 – 2.8908e+01j	1.7505e–06
8	1.5015e+03 – 5.4800e+01j	3.7647e+42	1.5015e+03 – 5.4800e+01j	1.8156e–08
9	1.7315e+03 – 7.7813e+00j	2.2545e+41	—	—
10	1.8480e+03 – 6.1049e+01j	7.1348e+42	1.8480e+03 – 6.1049e+01j	1.2943e–08
11	1.9931e+03 – 1.2606e+00j	4.1762e+40	—	—
12	2.0058e+03 – 2.9151e+01j	8.3901e+32	2.0058e+03 – 2.9151e+01j	2.2832e–08
13	2.1470e+03 + 1.3343e–08j	1.4863e+43	2.1470e+03 + 1.3343e–08j	4.0036e–05

Ως γενική παρατήρηση, η μέθοδος του πίνακα 2×2 παράγει τιμές οριζουσας περισσότερο κοντά στο αναμενόμενο από μαθηματικής άποψης και οι ισοϋψείς καμπύλες στο Σχήμα 4.6 καταδεικνύουν ότι τα σημεία των ριζών όντως βρίσκονται σε περιοχές τοπικών ελαχίστων της συνάρτησης W , ενώ το ίδιο δεν φαίνεται να ισχύει για τη μέθοδο του πίνακα 8×8.

Από πλευράς ταχύτητας, οι δύο μέθοδοι δεν παρουσιάζουν διαφορά. Ωστόσο, λόγω των παραπάνω παρατηρήσεων και επιπρόσθετα λόγω του ότι η μέθοδος του πίνακα 2×2 παρέχει τη δυνατότητα εύκολου «χαρακτηρισμού» των ρυθμών (TE/TM/HE/EH), για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος της παρούσας μελέτης θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του πίνακα 2×2 (δηλαδή η μέθοδος των πινάκων μετάβασης).

4.2.2 Αλγόριθμος ιχνηλάτησης κυματάριθμων

Βασικό στοιχείο για την επίλυση του προβλήματος αποτελεί ο αλγόριθμος ιχνηλάτησης κυματάριθμων (wavenumber tracking). Ο αλγόριθμος αυτός συλλέγει τους ιδιορρυθμούς (δηλαδή τα k_z) για κάθε δακτυλίδι διακριτοποίησης (δηλαδή για κάθε z_i) και κατόπιν επιχειρεί να ομαδοποιήσει τα k_z , συσχετίζοντας τα αντίστοιχα k_z μεταξύ των διαφορετικών z_i .

Ο τρόπος που το επιτυγχάνει βασίζεται στην παρακάτω θεώρηση: για κάθε z_i προκύπτει μια «εικόνα» όπως αυτή στο Σχήμα 4.6. Επειδή όμως έχει υποτεθεί ήπια ανομοιογένεια των εγκάρσιων γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κοιλότητας, για το αμέσως γειτονικό z_{i+1} οι ιδιορρυθμοί δεν αναμένεται να μεταβληθούν ραγδαία. Αντιμετωπίζοντας τους ιδιορρυθμούς για z_i και για z_{i+1} ονοεί ως frame ενός αρχείου video, είναι εφικτό να γίνει «αφαίρεση» των δύο frame και να βρεθούν οι διαφορές τους. Η διαδικασία είναι αντίστοιχη με την ιχνηλάτηση πολλών αντικειμένων (π.χ. σφαιρών) που κινούνται και η κίνησή τους καταγράφεται με τη μορφή video με υψηλό ρυθμό frame, ώστε το κάθε αντικείμενο να μην αλλάζει ραγδαία θέση από frame σε frame.

Ακριβέστερα, ο αλγόριθμος ιχνηλάτησης κυματάριθμων πρέπει να εξετάζει κάθε τιμή κυματάριθμου (ιδιορρυθμού) ενός δακτυλιδιού και να τη συσχετίζει με μια και μόνο τιμή κυματάριθμου στο άμεσα γειτονικό δακτυλίδι, με κριτήριο την ευκλείδεια απόσταση σημείου–προς–σημείο για τους διαφορετικούς κυματάριθμους που προκύπτουν για κάθε z_i , μέχρι να ληφθούν υπόψη όλα τα δακτυλίδια διακριτοποίησης.

Δοκιμάστηκαν αρκετοί αλγόριθμοι ιχνηλάτησης, ωστόσο για τους σκοπούς της παρούσας μελέτης επιλέχθηκε ο αλγόριθμος του Munkres, ή Hungarian algorithm όπως αλλιώς αποκαλείται [22]. Ο αλγόριθμος αυτός χρησιμοποιείται για την επίλυση του προβλήματος της ανάθεσης (assignment): έστω ότι έχουμε n πόρους τους οποίους επιθυμούμε να αναθέσουμε σε n εργασίες με αντιστοιχία 1 προς 1. Ας υποτεθεί επίσης ότι το κόστος ανάθεσης ενός πόρου σε κάθε εργασία είναι γνωστό. Πρέπει να βρεθεί η βέλτιστη ανάθεση πόρων σε εργασίες, έτσι ώστε το συνολικό κόστος να είναι το ελάχιστο.

Έστω $c_{i,j} \geq 0$ το κόστος ανάθεσης του πόρου i στην εργασία j . Ο πίνακας κόστους C ορίζεται ως

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Μαθηματικά, το πρόβλημα της ανάθεσης διατυπώνεται ως εξής: δεδομένου του πίνακα C , να βρεθεί μια μετάθεση (permutation) μ του συνόλου $\{1,2,3, \dots, n\}$, έτσι ώστε να ισχύει

$$\sum_{i=1}^n c_{i,\mu(i)} = \min \quad (4.20)$$

Η μετάθεση μ που επιτυγχάνει την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους καλείται βέλτιστη ανάθεση.

Ο αλγόριθμος του Munkres επιλύει το πρόβλημα της ανάθεσης για τον πίνακα C με τα παρακάτω βήματα:

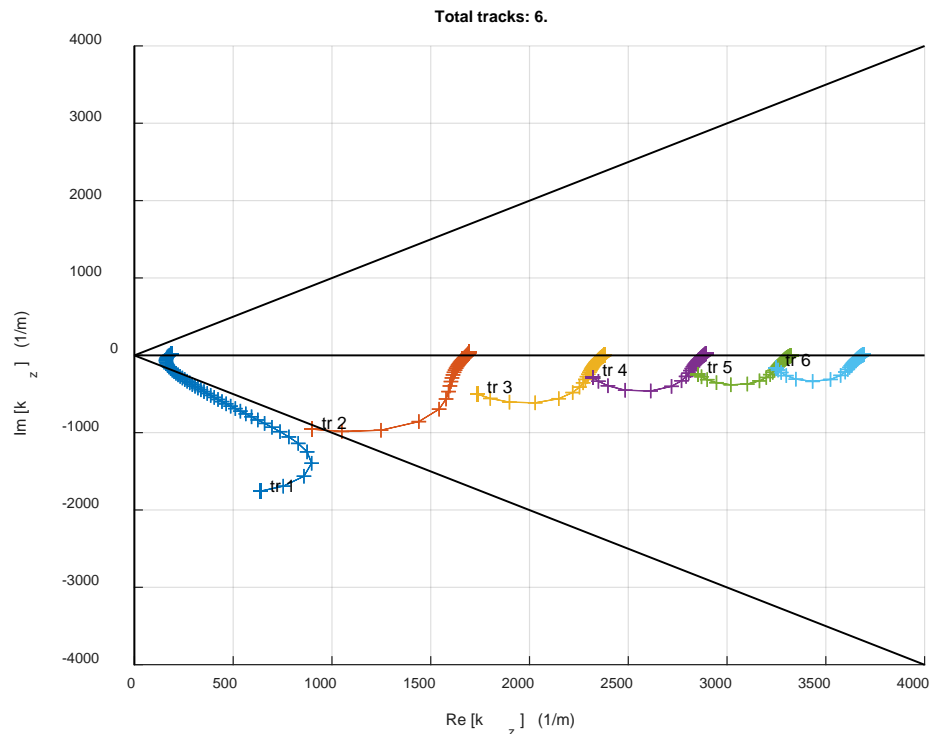
- **Βήμα 1:** Για κάθε γραμμή, εύρεση του μικρότερου στοιχείου και αφαίρεσή του από κάθε στοιχείο της γραμμής.
- **Βήμα 2:** Για κάθε στήλη, εύρεση του μικρότερου στοιχείου και αφαίρεσή του από κάθε στοιχείο της στήλης.
- **Βήμα 3:** «Καλύπτουμε» όλα τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα χρησιμοποιώντας έναν ελάχιστο αριθμό οριζόντιων και κατακόρυφων γραμμών. Αν απαιτούνται n γραμμές, η βέλτιστη ανάθεση υφίσταται μεταξύ των μηδενικών. Αλλιώς, συνεχίζουμε στο Βήμα 4.
- **Βήμα 4:** Εντοπίζουμε το μικρότερο στοιχείο (έστω k) που δεν καλύπτεται από γραμμή του Βήματος 3. Αφαιρούμε το k από όλα τα στοιχεία που δεν καλύπτονται και προσθέτουμε το k στα στοιχεία που καλύπτονται διπλά.

Η εφαρμογή του παραπάνω αλγορίθμου στην παρούσα μελέτη μπορεί να γίνει με τις εξής παρατηρήσεις:

- Οι πόροι είναι οι ιδιορρυθμοί για το δακτυλίδι z_i και οι εργασίες είναι οι ιδιορρυθμοί για το γειτονικό δακτυλίδι z_{i+1} .
- Το κόστος ανάθεσης είναι η Ευκλείδεια απόσταση των ιδιορρυθμών k_z για τα δύο δακτυλίδια.
- Το πρόβλημα που υπάρχει είναι ότι ο πίνακας κόστους έχει τετραγωνική μορφή, το οποίο υπονοεί ότι το πλήθος των ιδιορρυθμών σε κάθε δακτυλίδι πρέπει να είναι το ίδιο. Επειδή όμως αυτό δεν μπορεί να ισχύει γενικά, βρίσκουμε το δακτυλίδι όπου έχουμε το μέγιστο πλήθος ιδιορρυθμών, και καταρτίζουμε ένα πίνακα κόστους με διαστάσεις όσο το μέγιστο πλήθος ιδιορρυθμών. Για τα δακτυλίδια που έχουν μικρότερο πλήθος ιδιορρυθμών, γεμίζουμε τα αντίστοιχα σημεία του πίνακα με μια αυθαίρετα μεγάλη τιμή, έτσι ώστε ο αλγόριθμος να μην εκτελέσει εσφαλμένη ανάθεση.
- Ξεκινώντας από το πρώτο δακτυλίδι, βρίσκουμε την ανάθεση των ιδιορρυθμών για το δεύτερο δακτυλίδι και, παρακολουθώντας την ανάθεση από δακτυλίδι σε δακτυλίδι, καταλήγουμε με σύνολα ιδιορρυθμών που είτε έχουν ιδιορρυθμό σε όλα τα δακτυλίδια είτε έχουν «χαμένα σημεία», δηλαδή για κάποια δακτυλίδια δεν υπάρχει ανάθεση. Από φυσικής άποψης αυτό σημαίνει ότι το πρώτο σύνολο εκφράζει ένα ρυθμό (δηλαδή μια συλλογή k_z) που υφίσταται σε όλο το μήκος της διάταξης της κοιλότητας, ενώ το δεύτερο σύνολο εκφράζει ένα ρυθμό που δεν υπάρχει σε όλο το μήκος της διάταξης.
- Ο βασικός αλγόριθμος Munkres τροποποιείται ώστε να τροφοδοτείται, πέραν από τους ιδιορρυθμούς για κάθε z_i και με δύο παραμέτρους: τη

μέγιστη ανεκτή Ευκλείδεια απόσταση σημείου προς σημείο και το μέγιστο αριθμό δακτυλιδιών όπου είναι ανεκτή η απώλεια ιχνηλάτησης. Συγκεκριμένα, για τους ρυθμούς που δεν υπάρχουν σε όλο το μήκος της διάταξης, αν υπάρχουν χαμένα σημεία σε περισσότερα δακτυλίδια από όσο είναι ανεκτό, οι ρυθμοί αυτοί απορρίπτονται.

Μια τυπική αναπαράσταση του αποτελέσματος του αλγόριθμου ιχνηλάτησης φαίνεται στο Σχήμα 4.7. Κάθε ίχνος (track) είναι ένας ρυθμός που υφίσταται στην κοιλότητα συντονισμού σε όλο το μήκος της. Τα tracks διακρίνονται από το διαφορετικό χρωματισμό. Για κάθε track, με «+» συμβολίζεται το k_z για ένα δακτυλίδι z_i , και εκεί όπου φαίνεται η ονομασία του (π.χ. «tr 1») είναι το k_z για το αριστερό άκρο της κοιλότητας. Επίσης, οι πλάγιες γραμμές ορίζουν τον κώνο διάδοσης του κλασικού γυροτρονίου (παράγραφος 3.4).



Σχήμα 4.7 Τυπικό αποτέλεσμα του αλγορίθμου ιχνηλάτησης κυματάριθμων.

Η γεωμετρία της συγκεκριμένης κοιλότητας είναι συμμετρική στον διαμήκη άξονα περί το κέντρο της, οπότε τα k_z κάθε ρυθμού εμφανίζονται από το αριστερό άκρο μέχρι το κέντρο της κοιλότητας. Από τη σκοπιά της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος της παρούσας μελέτης, είναι ακριβώς ρυθμοί σαν τον ρυθμό 1 που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, και, κυρίως, μεταβάλλοντας τη μιγαδική συχνότητα ω σε γειτονικές περιοχές σε σχέση με τη συχνότητα όπου παράχθηκε το αποτέλεσμα του παραπάνω σχήματος, βρίσκεται με το χαμηλότερο υπολογιστικό φόρτο η συχνότητα

συντονισμού (ιδιοσυχνότητα) για το συγκεκριμένο ρυθμό. Με καλύτερη διατύπωση, όταν μεταβάλλεται η συχνότητα, σύμφωνα με το διάγραμμα ροής που φαίνεται στο Σχήμα 4.11, ο αλγόριθμος ιχνηλάτησης ρυθμών, που αναλύεται παρακάτω, θα «παρακολουθεί» έναν ρυθμό με παρόμοια χαρακτηριστικά με το ρυθμό 1.

4.2.3 Αλγόριθμος ιχνηλάτησης ρυθμών

Αναφέρθηκε ήδη ότι κατά την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης, απαιτείται η μεταβολή της συχνότητας από βήμα σε βήμα του αλγορίθμου της παραγράφου 4.2. Αυτό όμως θα μεταβάλλει τόσο την εύρεση των δυνατών διαμήκων κυματάριθμων ανά δακτυλίδι διακριτοποίησης όσο και τη συλλογή/συσχέτιση των κυματάριθμων αυτών ανά ρυθμό. Επειδή όμως κατά τη μεταβολή της συχνότητας θα πρέπει να παρακολουθείται ο συγκεκριμένος ρυθμός ενδιαφέροντος, απαιτείται ένας αλγόριθμος ιχνηλάτησης ρυθμών (mode tracking), ο οποίος να αντιμετωπίζει κάθε ρυθμό l ως ένα σύνολο κυματάριθμων $\{k_{z,l}(z_i; \omega)\}$. Ο εν λόγω αλγόριθμος θα συσχετίζει ένα ρυθμό σε μία συχνότητα με τον αντίστοιχο ρυθμό σε μια διαφορετική συχνότητα, με κριτήριο την «ομοιότητα» των πεδίων που προκύπτουν.

Το πρώτο βήμα για την ανάπτυξη ενός τέτοιου αλγορίθμου είναι ο χαρακτηρισμός των ρυθμών, όπου η συμβολή της μεθόδου των πινάκων μετάβασης είναι καταλυτική. Συγκεκριμένα, με τη μέθοδο αυτή προκύπτει για κάθε δακτυλίδι διακριτοποίησης της κοιλότητας ένας πίνακας 2×2 της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 2.3.3 και η ορίζουσα του πίνακα αυτού είναι η σχέση διασποράς για το συγκεκριμένο δακτυλίδι. Υπενθυμίζεται ότι ο πίνακας της παραπάνω σχέσης πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα-στήλη \mathbf{X} που περιέχει το συντελεστή C του διανύσματος Hertz Π_e (πάνω στοιχείο) και το συντελεστή D του διανύσματος Hertz Π_m (κάτω στοιχείο) της εσωτερικής περιοχής (I) της κοιλότητας, δηλαδή προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Για $m = 0$, ισχύει $b = c = 0$ και για $a = 0$ προκύπτουν ρυθμοί TM και για $d = 0$ ρυθμοί TE. Βέβαια, κατά την αριθμητική επίλυση δεν είναι δυνατόν να προκύψει ακριβώς 0 για το a ή το d (ωστόσο θα ισχύει $b = c = 0$, καθώς αυτοί οι συντελεστές είναι ευθέως ανάλογοι του m , όπως φάνηκε στην παράγραφο 2.3.3). Έτσι, ένας ρυθμός θα είναι TM αν ισχύει $|a| \ll |d|$, και TE αν ισχύει $|a| \gg |d|$. Για $m \neq 0$, οι ρυθμοί

είναι αναγκαστικά υβριδικοί (EH/HE). Η διάκριση μεταξύ EH και HE γίνεται βάσει του σχετικού μεγέθους (μέτρο) των συντελεστών a, b (ή c, d με ακριβώς ίδια αποτελέσματα). Συγκεκριμένα, για τους σκοπούς της παρούσας μελέτης ένας ρυθμός θα χαρακτηρίζεται ως EH αν $|a|/|b| \ll 1$ και ως HE αν $|a|/|b| \gg 1$.

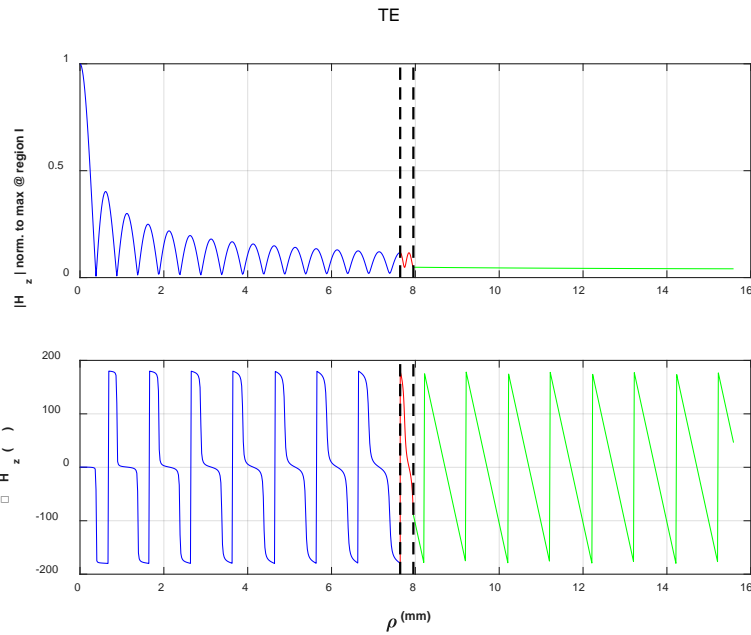
Έτσι, ο ρυθμός ενδιαφέροντος χαρακτηρίζεται (TE/TM/HE/EH) εκτελώντας την παραπάνω διαδικασία για αρκετά σημεία z (δακτυλίδια διακριτοποίησης) της κοιλότητας (συγκεκριμένα λαμβάνονται 10 σημεία) και εφόσον ο χαρακτηρισμός είναι κοινός για τουλάχιστον 8 σημεία από τα 10, ο ρυθμός αποκτά αυτό τον χαρακτηρισμό. Ο εμπειρικός κανόνας των 8 από 10 στοιχειοθετείται βάσει των ιδιοτήτων της διωνυμικής κατανομής: όποια και να είναι η τιμή του m , για κάθε σημείο έχουμε να επιλέξουμε μεταξύ δύο χαρακτηρισμών (TE/TM και HE/EH), οπότε η μεμονωμένη πιθανότητα ευστοχίας $p = 1/2$ και η πιθανότητα αστοχίας $q = 1 - p = 1/2$. Έτσι, η πιθανότητα σφάλματος p_e , δηλαδή να επιλεγεί λανθασμένος χαρακτηρισμός για το ρυθμό, είναι:

$$p_e = 1 - \sum_{i=8}^{10} \binom{10}{i} p^i q^{10-i} \quad (4.23)$$

η οποία μετά από πράξεις προκύπτει ως $p_e \approx 1.07\%$.

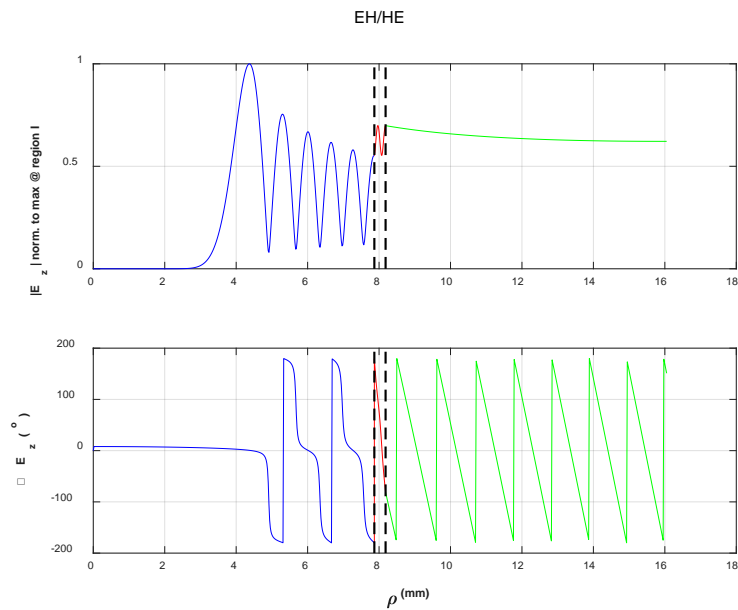
Αφού λοιπόν έχει χαρακτηριστεί ο ρυθμός ενδιαφέροντος για μια δεδομένη συχνότητα ω , στη νέα συχνότητα ω' βρίσκονται οι νέοι ρυθμοί μέσω του αλγορίθμου ιχνηλάτησης κυματάρθμων και οι ρυθμοί αυτοί χαρακτηρίζονται με την παραπάνω διαδικασία. Εφόσον προκύψει κοινός χαρακτηρισμός του ρυθμού ενδιαφέροντος με κάποιον ή κάποιους από τους νέους ρυθμούς, τότε ο αλγόριθμος ιχνηλάτησης ρυθμών προχωρά στο επόμενο βήμα, το οποίο είναι η συσχέτιση των πεδίων E_z και H_z μεταξύ του ρυθμού ενδιαφέροντος και εκάστου των νέων ρυθμών, εφόσον φυσικά διαθέτουν τον ίδιο χαρακτηρισμό. Αρχικά, υπολογίζονται τα διαμήκη πεδία E_z και H_z (επιλέγονται αυτά καθώς από τις εξισώσεις Maxwell είναι εφικτός ο υπολογισμός των εγκάρσιων πεδίων εφόσον είναι γνωστά τα διαμήκη πεδία, όπως φαίνεται στο [2]) για το κέντρο και για τα άκρα της κοιλότητας και για ακτίνα ρ όσο 2 φορές την εξωτερική ακτίνα της περιοχής του διηλεκτρικού (περιοχή 2). Συγκεκριμένα, για κάθε ρυθμό υπολογίζονται οι συντελεστές C, D της περιοχής 1 της κοιλότητας από τη σχέση (4.22). Οι αντίστοιχοι συντελεστές των διανυσμάτων Hertz για την περιοχή 2 και την περιοχή 3 προκύπτουν μέσω εφαρμογής των πινάκων μετάβασης, δηλαδή των σχέσεων της παραγράφου 2.3.1. Αν $m = 0$ και ο ρυθμός έχει χαρακτηριστεί ως TE, υπολογίζεται το H_z θέτοντας $D = 1$, ενώ αν ο ρυθμός είναι TM υπολογίζεται το E_z θέτοντας $C = 1$. Αν όμως $m \neq 0$ υπολογίζονται αμφότερα τα πεδία. Κατόπιν, λαμβάνεται το μέτρο κάθε πεδίου κανονικοποιημένο ως προς τη μέγιστη τιμή του για την περιοχή 1. Ένα τυπικό παράδειγμα του πεδίου H_z φαίνεται στο Σχήμα 4.8 για

$m = 0$ και για το κέντρο της κοιλότητας. Εντός των κάθετων εστιγμένων γραμμών εντοπίζεται η περιοχή του διηλεκτρικού (περιοχή 2) για το δακτυλίδι διακριτοποίησης που επιλέχθηκε. Το πεδίο για κάθε περιοχή διακρίνεται με διαφορετικό χρωματισμό.

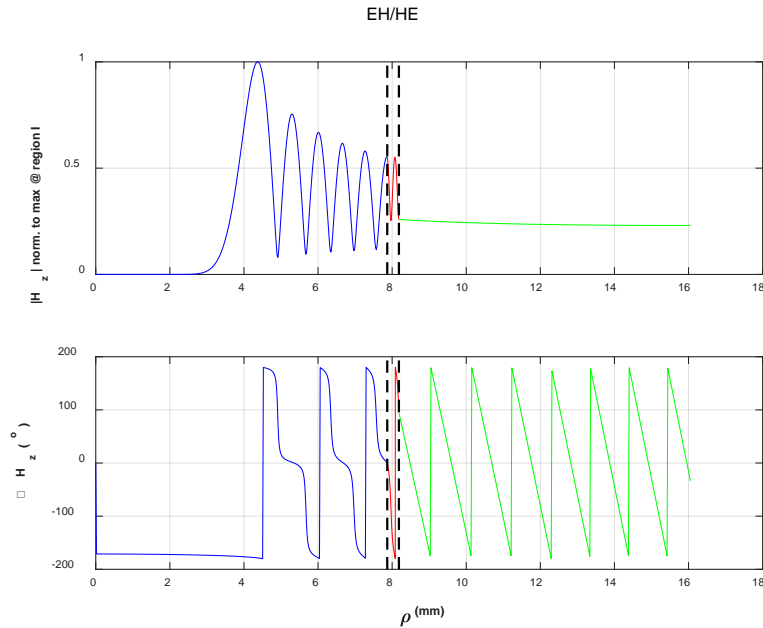


Σχήμα 4.8 Τυπικό παράδειγμα διαμήκους πεδίου για ένα ρυθμό TE.

Στο Σχήμα 4.9 και στο Σχήμα 4.10 φαίνεται ένα τυπικό παράδειγμα των πεδίων E_z και H_z αντίστοιχα για $m = 25$ και για το κέντρο της κοιλότητας.



Σχήμα 4.9 Τυπικό παράδειγμα διαμήκους ηλεκτρικού πεδίου για ένα μικτό ρυθμό.



Σχήμα 4.10 Τυπικό παράδειγμα διαμήκους μαγνητικού πεδίου για έναν υβριδικό ρυθμό.

Αυτό που φαίνεται οπτικά είναι ότι τα πεδία στην περιοχή 1 ταυτίζονται. Αυτό όμως συμβαίνει, διότι τα πεδία έχουν κανονικοποιηθεί ως προς τη μέγιστη τιμή που εμφανίζει έκαστο στην περιοχή 1, και έτσι ο υπολογισμός των συντελεστών C, D οιονεί αναιρείται. Ωστόσο, είναι εμφανές ότι στις άλλες δύο περιοχές της κοιλότητας τα πεδία όντως διαφέρουν. Ως γενικό σχόλιο που αφορά και τα 3 παραπάνω σχήματα, η φάση των πεδίων στην περιοχή 3 (αυτή που εκτείνεται εκτός του διηλεκτρικού και μέχρι το άπειρο) ακολουθεί χαρακτηριστικά τη συμπεριφορά οδεύοντος κύματος που διαδίδεται στο εγκάρσιο επίπεδο (η φάση μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση), όπως αναμενόταν από την ανάλυση της παραγράφου 4.1.

Αφού έχουν υπολογιστεί οι αξονικές συνιστώσες των πεδίων για το κέντρο και τα άκρα της κοιλότητας, το επόμενο βήμα είναι να γίνει μια συσχέτιση των πεδίων του ρυθμού ενδιαφέροντος, που προέκυψε σε μια δεδομένη συχνότητα ω , με κάθε ρυθμό ίδιου χαρακτηρισμού με το ρυθμό ενδιαφέροντος για τη νέα συχνότητα ω' . Επειδή όμως τα διαμήκη πεδία έχουν υπολογιστεί με αριθμητικό τρόπο για τα ίδια ακριβώς σημεία της ακτινικής απόστασης ρ , για κάθε πεδίο έχουμε ουσιαστικά ένα διάνυσμα με πραγματικές τιμές (καθώς λαμβάνεται το μέτρο κάθε πεδίου) για κάθε σημείο ρ , όπου συμπεριλαμβάνονται και οι τρεις εγκάρσιες περιοχές της κοιλότητας. Η συσχέτιση των πεδίων γίνεται μέσω του συντελεστή συσχέτισης $\rho(A, B)$ του Pearson [23], ο οποίος για τα διανύσματα «παρατηρήσεων» A, B με πλήθος στοιχείων N ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho(A, B) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{A_i - \mu_A}{\sigma_A} \right) \left(\frac{B_i - \mu_B}{\sigma_B} \right) \quad (4.24)$$

όπου μ_A και σ_A η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των τιμών του διανύσματος A και μ_B και σ_B αντίστοιχα για το διάνυσμα B . Ο συντελεστής συσχέτισης λαμβάνει τιμές στο διάστημα $-1 \leq \rho(A, B) \leq 1$, και αν $\rho(A, B) \cong \pm 1$ υπάρχει ισχυρή συσχέτιση (θετική ή αρνητική αντίστοιχα) μεταξύ των A, B .

Για τους σκοπούς της παρούσας μελέτης, ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(p, q)$ μεταξύ δύο ρυθμών p, q αφορά στην απόλυτη τιμή του ως άνω συντελεστή συσχέτισης για τα πεδία E_z και H_z για το κέντρο και τα άκρα της κοιλότητας, και δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(p, q) = \begin{cases} \rho_E(p, q) \cdot \rho_H(p, q) & , char(p) = char(q) \neq TE, TM \\ \rho_E(p, q) & , char(p) = char(q) = TM \\ \rho_H(p, q) & , char(p) = char(q) = TE \\ 0 & , char(p) \neq char(q) \end{cases} \quad (4.25)$$

όπου

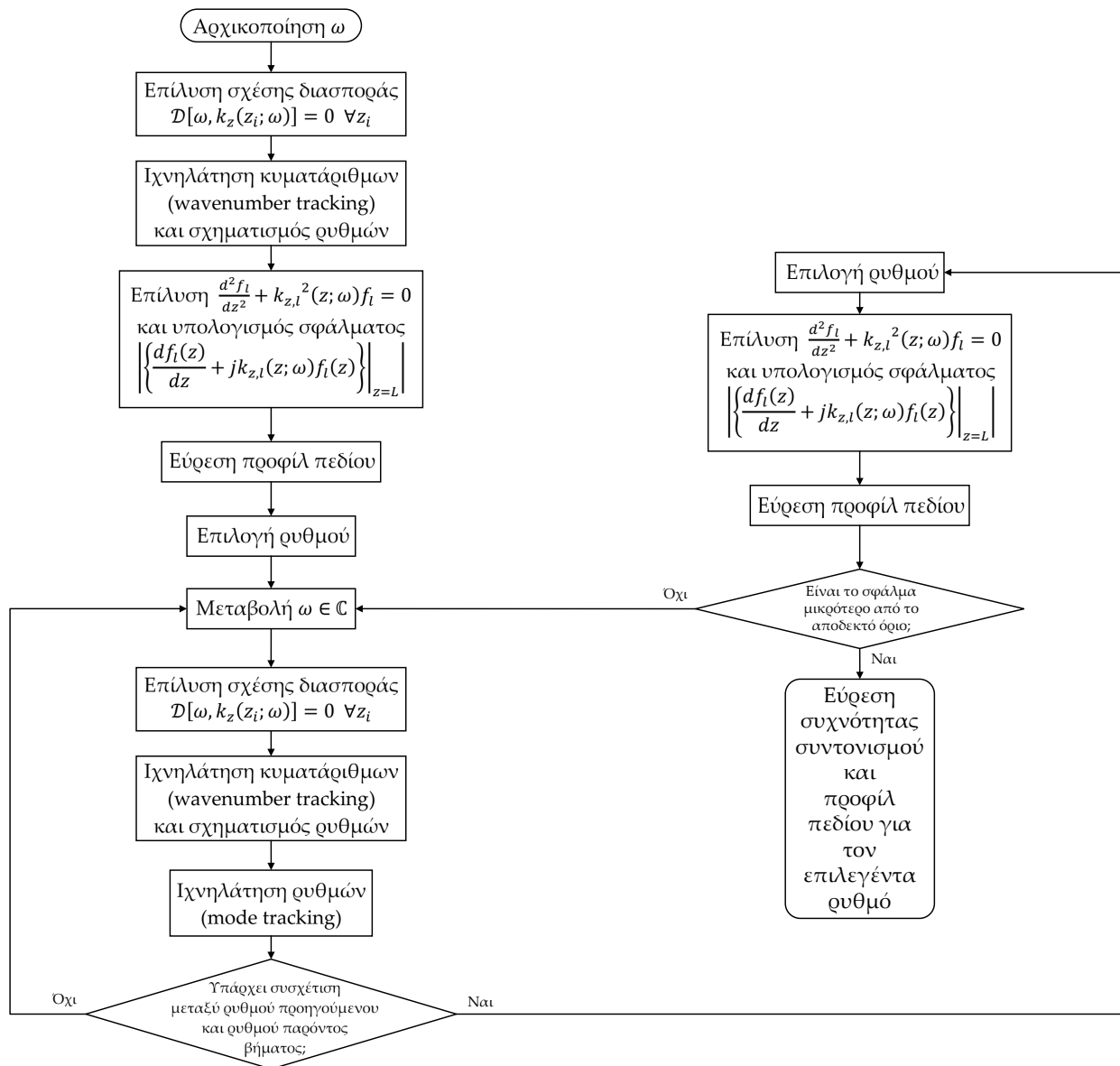
$$\begin{aligned} \rho_E(p, q) &= \left| \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{E_{z,i}^p - \mu_{E,p}}{\sigma_{E,p}} \right) \left(\frac{E_{z,i}^q - \mu_{E,q}}{\sigma_{E,q}} \right) \right| \\ \rho_H(p, q) &= \left| \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{H_{z,i}^p - \mu_{H,p}}{\sigma_{H,p}} \right) \left(\frac{H_{z,i}^q - \mu_{H,q}}{\sigma_{H,q}} \right) \right| \end{aligned} \quad (4.26)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, η παράμετρος $char(p) = \{TE, TM, HE, EH\}$ είναι ο χαρακτηρισμός του ρυθμού p , N είναι το πλήθος των στοιχείων των διανυσμάτων E_z και H_z και οι υπόλοιπες παράμετροι ακολουθούν το συμβολισμό της σχέσης (4.24). Για τον συντελεστή συσχέτισης ισχύει προφανώς $0 \leq \rho(p, q) \leq 1$ και σημειώνεται ότι για ρυθμούς με διαφορετικό χαρακτηρισμό λαμβάνεται ως τιμή του συντελεστή το μηδέν.

Το τελευταίο βήμα του αλγόριθμου ιχνηλάτησης των ρυθμών είναι η επιλογή εκείνου του ρυθμού για τη συχνότητα ω' , ο οποίος έχει ίδιο χαρακτηρισμό με τον ρυθμό ενδιαφέροντος για τη συχνότητα ω και τη μέγιστη συσχέτιση με τον ρυθμό ενδιαφέροντος, σε σχέση με τους υπόλοιπους ρυθμούς ίδιου χαρακτηρισμού.

4.2.4 Συνολικός αλγόριθμος επίλυσης

Στο Σχήμα 4.11 φαίνεται ο συνολικός αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος (βελτιστοποίηση δύο επιπέδων) με τη μορφή διαγράμματος ροής.



Σχήμα 4.11 Διάγραμμα ροής του αλγόριθμου υπολογισμού της συχνότητας συντονισμού και του προφίλ πεδίου για ρυθμό σε διηλεκτρική κοιλότητα γυροτρονίου.

Αρχικά, ο αλγόριθμος τροφοδοτείται με μια αρχική συχνότητα ω . Επιλύεται η σχέση διασποράς για κάθε δακτυλίδι z_i και ο αλγόριθμος ιχνηλάτησης κυματάριθμων (wavenumber tracking) σχηματίζει τους τοπικά υφιστάμενους ρυθμούς. Για κάθε ένα από αυτούς, έστω με αυθαίρετη αρίθμηση l , επιλύεται η διαφορική εξίσωση της μη ομογενούς χορδής – σχέση (4.15α) – υποθέτοντας ότι ισχύει η οριακή συνθήκη εξερχόμενων κυμάτων στο αριστερό άκρο της διάταξης $z = 0$. Καθώς το προφίλ πεδίου $f_l(z)$ κανονικοποιείται ως προς τη μέγιστη τιμή του μέτρου του, τίθεται χωρίς βλάβη της γενικότητας $f_l(z = 0) = 1$ και επιλύεται η οριακή

συνθήκη ώστε να προκύψει η τιμή της παραγώγου του προφίλ πεδίου στο αριστερό άκρο σύμφωνα με τη σχέση:

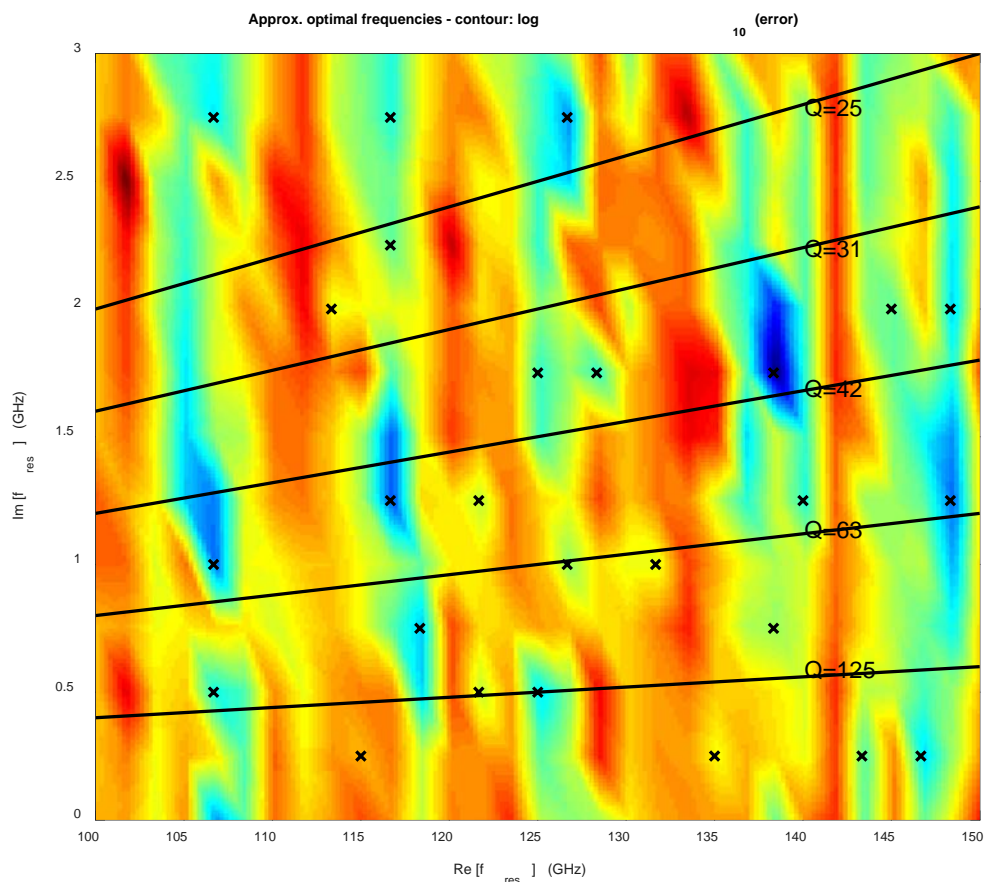
$$\left. \frac{df_l}{dz} \right|_{z=0} = jk_{z,l}(z; \omega) f_l(z=0) \quad (4.27)$$

Με γνωστές τις τιμές του προφίλ πεδίου $f_l(z)$ και της 1^{ης} παραγώγου του, επιλύεται η διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο Runge–Kutta και για το δεξιό άκρο $z = L$, υπολογίζεται το σχετικό σφάλμα της 1^{ης} παραγώγου του προφίλ πεδίου, κανονικοποιημένο σύμφωνα με τη σχέση:

$$\left\| \frac{\left[\frac{df_l}{dz} + jk_{z,l}(z; \omega) f_l \right]_{z=L}}{\left[jk_{z,l}(z; \omega) f_l \right]_{z=L}} \right\| \quad (4.28)$$

Αφού συλλεχθεί το σχετικό σφάλμα κάθε ρυθμού, εκτελείται χαρακτηρισμός κάθε ρυθμού και υπολογίζεται η κατανομή των πεδίων E_z και H_z στο κέντρο της διάταξης. Κατόπιν, επιλέγεται ο ρυθμός ενδιαφέροντος και εισάγεται ως αρχική συνθήκη στον αλγόριθμο βελτιστοποίησης δύο επιπέδων.

Σε πρώτη φάση, η αρχική συχνότητα προκύπτει διαισθητικά (π.χ. εφόσον αναζητούνται συντονιζόμενοι ρυθμοί σε συχνότητα έστω 100 GHz, αυτή είναι και η αρχική συχνότητα). Ωστόσο, αναπτύχθηκε ειδικός αλγόριθμος αρχικοποίησης, ο οποίος εκτελεί την παραπάνω διαδικασία σε ένα εύρος μιγαδικών συχνοτήτων (με κατάλληλη διακριτοποίηση), και ο οποίος βρίσκει για κάθε συχνότητα του πλέγματος διακριτοποίησης τους υφιστάμενους ρυθμούς και εξάγει τον ρυθμό που διαθέτει το ελάχιστο σχετικό σφάλμα της σχέσης (4.28), ανάμεσα σε όλους τους ρυθμούς για τη συγκεκριμένη συχνότητα. Ένα τυπικό παράδειγμα της μορφής των αποτελεσμάτων φαίνεται στο Σχήμα 4.12. Η περιοχή συχνοτήτων εκτείνεται από 100 έως 150 GHz (πραγματικό μέρος) και 0 έως 3 GHz (φανταστικό μέρος). Ο ρυθμός με το ελάχιστο σφάλμα σημειώνεται με «x», ενώ στο ίδιο σχήμα φαίνονται και οι χαρακτηριστικές ευθείες που περιγράφουν ένα συγκεκριμένο δείκτη ποιότητας Q , σύμφωνα με τη σχέση (3.13). Ο χρωματισμός (colorbar) ακολουθεί τον δεκαδικό λογάριθμο του μέτρου του σφάλματος. Κατόπιν, για όλες αυτές τις αρχικές συχνότητες εκτελείται χαρακτηρισμός των ρυθμών (TE/TM/EH/HE και υπολογίζεται το πλήθος των τοπικών μεγίστων και ελαχίστων των πεδίων E_z και H_z στο κέντρο της διάταξης) και τελικά λαμβάνεται μια συλλογή μιγαδικών συχνοτήτων, από όπου προκύπτει η αρχική συχνότητα για κάθε ρυθμό από αυτούς που εμφανίστηκαν στην παραπάνω περιοχή συχνοτήτων.



Σχήμα 4.12 Τυπικά αποτελέσματα αλγορίθμου αρχικοποίησης.

Σημειώνεται ότι για τη διηλεκτρική κοιλότητα που μελετά η παρούσα εργασία, δεν αναζητώνται «τυφλά» ρυθμοί, αλλά η όλη διαδικασία εστιάζεται στην εύρεση ρυθμών TE (για $m = 0$) και HE (για $m \neq 0$), καθώς, όπως ήδη επισημάνθηκε, η ανταλλαγή ενέργειας (πεδίου κοιλότητας – δέσμης ηλεκτρονίων) στο συμβατικό γυροτρόνιο γίνεται μέσω της αλληλεπίδρασης ECM στο εγκάρσιο επίπεδο, το οποίο σημαίνει ότι ευνοείται η διέγερση ρυθμών TE, καθώς οι τελευταίοι έχουν πολύ πιο ισχυρό εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο πλησίον της αποκοπής σε σχέση με τους ρυθμούς TM [10].

Αφού έχει παραχθεί η αρχική συχνότητα για κάθε ρυθμό ενδιαφέροντος, ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος (βελτιστοποίηση δύο επιπέδων) λαμβάνει δράση, ακολουθώντας τα βήματα που φαίνονται στο Σχήμα 4.11. Μεταβάλλεται η συχνότητα, σχηματίζονται οι ρυθμοί μέσω του αλγορίθμου ιχνηλάτησης κυματαρίθμων, βρίσκεται ο νέος ρυθμός ενδιαφέροντος για τη νέα συχνότητα μέσω του αλγορίθμου ιχνηλάτησης ρυθμών (εσωτερικό επίπεδο βελτιστοποίησης), επιλύεται η διαφορική εξίσωση της μη ομογενούς χορδής και υπολογίζεται το σχετικό

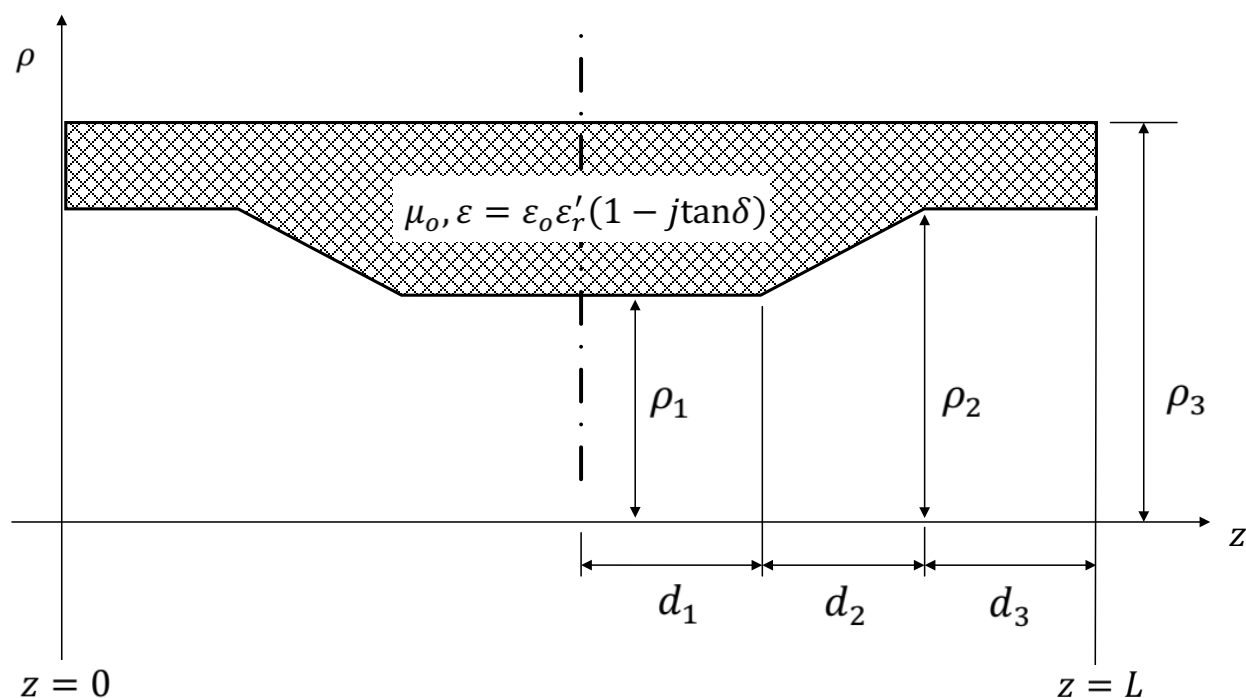
σφάλμα στο δεξιό άκρο της κοιλότητας. Το τελευταίο είναι ουσιαστικά η αντικειμενική συνάρτηση του εξωτερικού επιπέδου βελτιστοποίησης, το οποίο υλοποιείται και αυτό, όπως το εσωτερικό επίπεδο βελτιστοποίησης, με τη βοήθεια του αλγορίθμου Nelder–Mead. Οι βασικές διαφορές με το εσωτερικό επίπεδο είναι:

- Κατά τον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης τίθεται ένα φράγμα στις τιμές της μιγαδικής συχνότητας, στις οποίες πρέπει να υπολογιστεί το σχετικό σφάλμα και οι οποίες επιλέγονται αποκλειστικά από τον αλγόριθμο Nelder–Mead. Αν η μιγαδική συχνότητα βρεθεί εκτός της περιοχής αυτής, η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει αυθαίρετα μεγάλη τιμή (άπειρο).
- Αν δεν προκύψει ταύτιση ως προς τον χαρακτηρισμό του ρυθμού ενδιαφέροντος στην προηγούμενη συχνότητα με ρυθμό σε νέα συχνότητα, η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει πάλι αυθαίρετα μεγάλη τιμή.

Η αναγκαιότητα των παραπάνω αλλαγών προέκυψε κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου επίλυσης, καθώς στο στάδιο ανάπτυξης – δοκιμών διαπιστώθηκε ότι ο συντονιζόμενος ρυθμός που προέκυπτε, σε αρκετές περιπτώσεις, είχε τελείως διαφορετικά χαρακτηριστικά σε σχέση με τον ρυθμό ενδιαφέροντος με τον οποίο είχε τροφοδοτηθεί ο αλγόριθμος ως αρχική συνθήκη.

Κεφάλαιο 5 Σχεδίαση διηλεκτρικής κοιλότητας γυροτρονίου και αριθμητικά αποτελέσματα προσομοίωσης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρατέθηκε η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για το σκοπό της παρούσας εργασίας, ο οποίος είναι κατά κύριο λόγο η διερεύνηση κατά πόσο είναι δυνατόν να σχεδιαστεί μια κοιλότητα συντονισμού γυροτρονίου που να αποτελείται αποκλειστικά από διηλεκτρικό (all-dielectric cavity) και να διαθέτει συντονιζόμενους ρυθμούς που να χαρακτηρίζονται από μια αποδεκτή τιμή του συντελεστή ποιότητας Q . Ως διηλεκτρικό μέσο επελέγη ο συνθετικός αδάμαντας, υλικό που χρησιμοποιείται στο παράθυρο εξόδου RF του συμβατικού γυροτρονίου, λόγω των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών που έχει για τόσο υψηλές τιμές συχνότητας και ισχύος [10]. Για τη σχετική διηλεκτρική σταθερά ελήφθησαν οι τιμές $\epsilon'_r = 5.67$ και $\tan\delta = 2 \times 10^{-5}$. Οι κοιλότητες συντονισμού που μελετώνται αποτελούνται από τρεις περιοχές ως προς το εγκάρσιο επίπεδό τους και ακολουθούν τη μορφή και τον συμβολισμό που φαίνεται στο Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1 Διάμηκες προφίλ διηλεκτρικής κοιλότητας συντονισμού.

Η κοιλότητα προκύπτει εκ περιστροφής του διαμήκους προφίλ του παραπάνω σχήματος περί τον άξονα z και έχει μήκος L . Το διάμηκες προφίλ είναι συμμετρικό

περί το σημείο $z = L/2$, χαρακτηρίζεται δε από δύο περιοχές σταθερής ακτίνας, την πλέον εσωτερική με εσωτερική ακτίνα ρ_1 και μήκος d_1 και την πλέον εξωτερική με εσωτερική ακτίνα ρ_2 και μήκος d_3 . Η ενδιάμεση περιοχή έχει μήκος d_2 και η εσωτερική της ακτίνα μεταβάλλεται γραμμικά από την τιμή ρ_1 έως την τιμή ρ_2 . Η εξωτερική ακτίνα όλων των περιοχών είναι ίση με ρ_3 .

Η βασική θεώρηση για την επιλογή της γεωμετρίας αυτής είναι αρχικά ότι, επειδή είναι συμμετρική περί το κέντρο της, για συντονιζόμενο ρυθμό αναμένεται το προφίλ πεδίου $f(z)$ να είναι και αυτό συμμετρικό περί το $z = L/2$, μιας και εξετάζονται οι ελεύθερες ταλαντώσεις της κοιλότητας (ψυχρή κοιλότητα). Έτσι, το προφίλ πεδίου, κατά αντιστοιχία με αυτό του κλασικού γυροτρονίου στο άκρο εισόδου της κοιλότητας, θα πρέπει να είναι σχεδόν μηδενικό και στα δύο άκρα της κοιλότητας. Αυτό όμως ποιοτικά σημαίνει ότι τα πεδία θα πρέπει να μην αντιμετωπίζουν ισχυρή ανάκλαση στο εγκάρσιο επίπεδο στα άκρα της κοιλότητας και να δύνανται να «διαφύγουν» προς $\rho \rightarrow \infty$. Λαμβάνοντας υπόψη την ανάλυση της παραγράφου 2.1.2, θα πρέπει στα άκρα της κοιλότητας το πάχος του διηλεκτρικού να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος (στο διηλεκτρικό) λ_d , δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$|\rho_3 - \rho_2| \approx n \cdot \frac{\lambda_d}{2}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.1)$$

Με παρόμοιο σκεπτικό, το πάχος του διηλεκτρικού στο κέντρο της διάταξης θα πρέπει να είναι τέτοιο ώστε τα πεδία να αντιμετωπίζουν όσο το δυνατόν ισχυρότερη ανάκλαση στο εγκάρσιο επίπεδο, ώστε να «αναγκαστούν» σε περιορισμό περί το κέντρο της διάταξης, δηλαδή κατά αντιστοιχία θα πρέπει να ισχύει:

$$|\rho_3 - \rho_2| \approx (2k + 1) \cdot \frac{\lambda_d}{4}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Επισημαίνεται ότι, όπως φαίνεται από τη σχέση (4.3), επειδή οι ωμικές απώλειες εντός του διηλεκτρικού αυξάνονται αναλογικά (κατά προσέγγιση) με το $2k + 1$, γενικά επιλέγεται $k \leq 1$.

Κατά την εκπόνηση της εργασίας, εξετάστηκαν πολλές εναλλακτικές γεωμετρίες για το διάμηκες προφίλ του διηλεκτρικού της κοιλότητας, για τις οποίες όμως δεν κατέστη εφικτή η εύρεση συντονιζόμενων ρυθμών με αξιόλογο συντελεστή ποιότητας. Για παράδειγμα, εξετάστηκαν γεωμετρίες τόσο με σταθερό όσο και μεταβλητό πάχος διηλεκτρικού, όπου το προφίλ διηλεκτρικού ακολουθεί μια καμπύλη Gaussian, αντίστοιχη με αυτή στο Σχήμα 4.1. Αντίθετα, η γεωμετρία που παρατίθεται στο Σχήμα 5.1 απέδωσε τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, για την περιοχή των 300 GHz υπολογίστηκε $Q \sim 136$.

Στις επόμενες παραγράφους παρατίθενται τα αριθμητικά αποτελέσματα για τη μορφή της παραπάνω γεωμετρίας, για $m = 0$ και για $m = 25$, με διαφορετικές παραμέτρους ρ_i και d_i , $i = 1,2,3$.

Το βασικό πρόβλημα που προέκυψε κατά την εκπόνηση της εργασίας είναι ότι, λόγω του ειδικού θέματος που πραγματεύεται, δεν εντοπίστηκε κάποιο άμεσα διαθέσιμο λογισμικό προσομοίωσης που να μπορεί να εκτελέσει ανάλυση για μια «ανοικτή» κοιλότητα διηλεκτρικού, η οποία χαρακτηρίζεται από συνοριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων στα άκρα της. Επίσης, δεν κατέστη εφικτός ο έλεγχος της παρούσας μεθοδολογίας με κάποια αντίστοιχη, δεδομένης της πρωτοτυπίας της παρούσας μεθόδου. Έτσι, ο μοναδικός τρόπος ελέγχου της μεθόδου είναι ο έλεγχος αυτοσυνέπειας (self-consistency check), και συγκεκριμένα ο υπολογισμός του συντελεστή ποιότητας Q_{ideal} για μια συχνότητα συντονισμού ω^* που προκύπτει από τη σχέση:

$$Q_{ideal} = \frac{\text{Re}\{\omega^*\}}{2 \cdot \text{Im}\{\omega^*\}} \quad (5.3)$$

και η σύγκρισή του με τον συντελεστή ποιότητας Q_{calc} που υπολογίζεται από τις εκφράσεις των πεδίων στην κοιλότητα μέσω της σχέσης:

$$Q_{calc} = \text{Re}\{\omega^*\} \cdot \frac{W_{em}}{P_{loss}} \quad (5.4)$$

όπου W_{em} είναι η αποθηκευμένη ηλεκτρομαγνητική ενέργεια και P_{loss} η συνολική ισχύς απωλειών του ρυθμού. Από τους υπολογισμούς, προέκυψε ότι για όποια κλειστή επιφάνεια και να επιλεγεί (π.χ. υπολογισμός μόνο για την εσωτερική περιοχή 1, υπολογισμός για τις περιοχές 2 και 3, υπολογισμός για τις περιοχές 1, 2 και μέχρι κάποια ακτίνα για την περιοχή 3), το σφάλμα υπολογισμού του Q_{calc} δεν υπερβαίνει το 4^ο δεκαδικό ψηφίο. Αντίθετα, το μέγιστο σφάλμα μεταξύ του Q_{calc} και του Q_{ideal} είναι μικρότερο του 1.9%, τουλάχιστον για τους πρώτους τρεις κατά την τάξη ρυθμούς, όπως υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left| \frac{Q_{calc} - Q_{ideal}}{Q_{ideal}} \right| \cdot 100\% \quad (5.5)$$

Το σφάλμα αυτό είναι αναμενόμενο λόγω της προσεγγιστικής μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 4 και των παραδοχών που ελήφθησαν. Στο τελευταίο συνηγορεί και το γεγονός ότι ακόμη και με βελτίωση της διακριτοποίησης σε $\lambda/30$, το εν λόγω σφάλμα δεν μεταβλήθηκε ουσιαστικά.

5.1 Αποτελέσματα για $m = 0$ και συχνότητα 300 GHz

Με αναφορά στο Σχήμα 5.1, στον Πίνακα 5.1 φαίνονται οι τιμές των παραμέτρων ρ_{1-3} και d_{1-3} . Οι τιμές αυτές προέκυψαν κατόπιν πολλών μικρορυθμίσεων έτσι ώστε να επιτευχθεί υψηλός σχετικά συντελεστής ποιότητας. Σημειώνεται ότι το λ και το λ_d είναι το μήκος κύματος στο κενό και στο διηλεκτρικό αντίστοιχα, ενώ αμφότερα έχουν υπολογιστεί για συχνότητα 300 GHz.

Πίνακας 5.1 Τιμές των παραμέτρων της γεωμετρίας της κοιλότητας για $m = 0$

L	$24 \cdot \lambda$		
ρ_1	$15 \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{7}$	d_1	$6 \cdot \lambda$
ρ_2	$\rho_1 + \frac{\lambda_d}{4} - \frac{\lambda_d}{150}$	d_2	$3 \cdot \lambda$
ρ_3	$\rho_1 + 3 \frac{\lambda_d}{4}$	d_3	$3 \cdot \lambda$

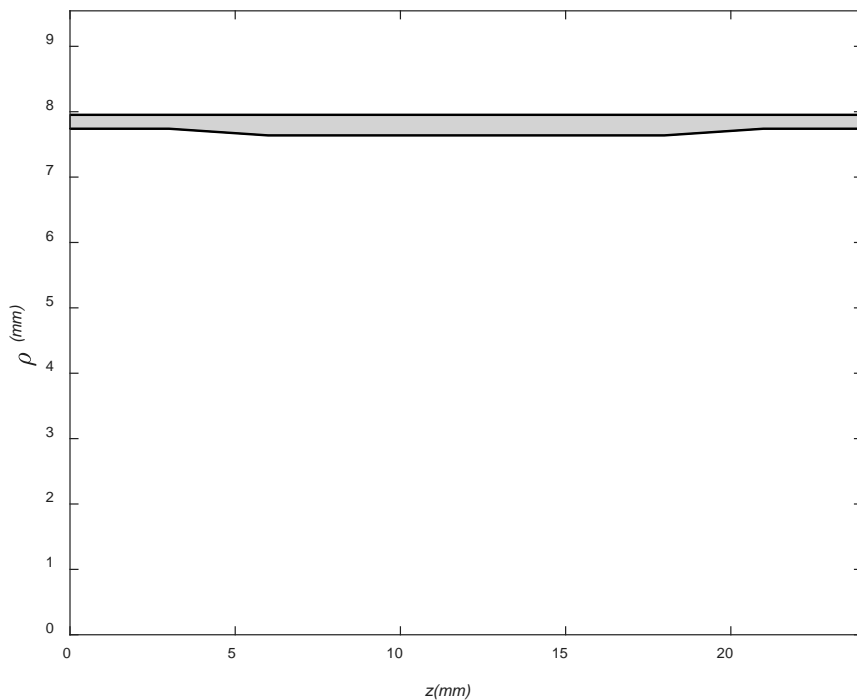
Στον Πίνακα 5.2 δίνονται το πραγματικό μέρος της συχνότητας συντονισμού, το Q_{calc} και το Q_{ideal} καθώς και το σχετικό σφάλμα για τους 10 πρώτους συντονιζόμενους ρυθμούς, οι οποίοι αριθμούνται βάσει του πλήθους των μεγίστων του μέτρου του προφίλ πεδίου $f(z)$.

Πίνακας 5.2 Δέκα πρώτοι συντονιζόμενοι ρυθμοί για $m = 0$

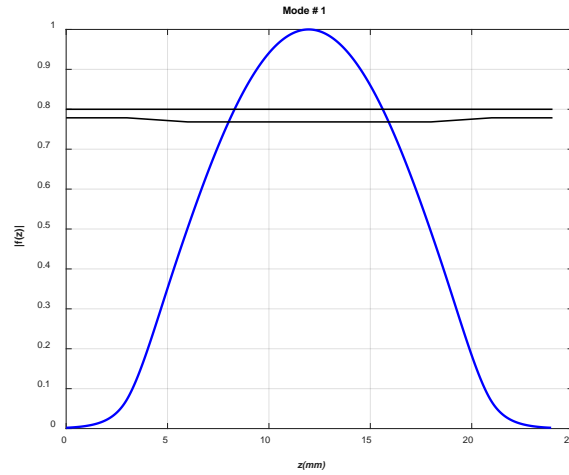
α/α	Συχνότητα συντονισμού (GHz)	Q_{ideal}	Q_{calc}	Σχετικό σφάλμα (%)
1	299.3914	136.2271	136.9709	0.5459
2	299.7336	128.5016	129.3345	0.6482
3	300.2934	118.0606	119.0846	0.8674
4	301.0601	106.8776	108.2701	1.3029
5	302.0253	95.9492	98.0404	2.1794
6	303.1846	85.4475	88.8254	3.9532
7	304.5370	75.3592	80.9593	7.4312
8	306.0815	66.0052	72.3296	9.5816
9	307.8296	57.6948	57.9445	0.4238
10	309.7844	50.6895	51.6896	1.9730

Από τα αποτελέσματα αυτά παρατηρούμε ότι το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του συντελεστή ποιότητας αυξάνει γενικά με την τάξη συντονισμού. Για τους 5 πρώτους ρυθμούς, το σφάλμα παραμένει μικρότερο του 3%, ωστόσο για τον έβδομο και όγδοο ρυθμό το σφάλμα υπερβαίνει το 7%. Επίσης, εμφανίζεται μια ανεξήγητη μείωση του σφάλματος στους δυο τελευταίους ρυθμούς. Οι αιτίες αυτών των σφαλμάτων αποδίδονται στην προσεγγιστική μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε, στην υψηλή ευαισθησία που εμφανίζει το προφίλ πεδίου ως προς τη συχνότητα, και στο γεγονός ότι η 1^η παράγωγος του προφίλ πεδίου υπολογίζεται αριθμητικά. Σε κάθε περίπτωση, ο πρώτος στην τάξη συντονιζόμενος ρυθμός, ο οποίος έχει λόγω του σχήματος του προφίλ πεδίου και την υψηλότερη πρακτική σημασία, εμφανίζει χαμηλό σφάλμα (περίπου 0.5%).

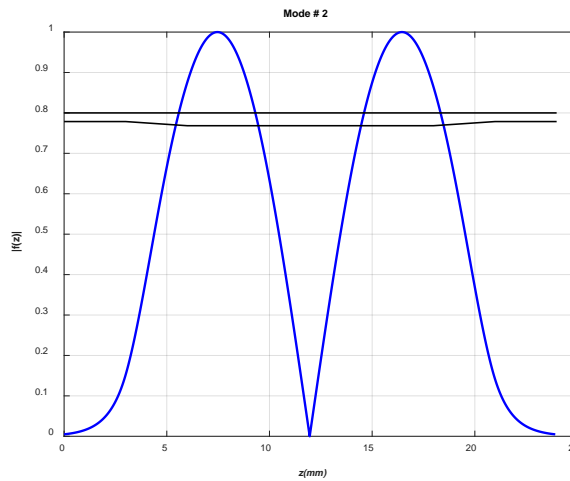
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται η γεωμετρία της κοιλότητας (Σχήμα 5.2), τα προφίλ πεδίου για τους δέκα πρώτους ρυθμούς (μαζί με το διάμηκες προφίλ διηλεκτρικού ώστε να υπάρχει καλύτερη εποπτεία, Σχήματα 5.3 έως 5.12) και μια απεικόνιση δύο διαστάσεων των πεδίων στην κοιλότητα για τον 1^ο και το 2^ο ρυθμό (Σχήματα 5.13 έως 5.15 και Σχήματα 5.16 έως 5.18 αντίστοιχα). Σημειώνεται ότι οι εν λόγω ρυθμοί χαρακτηρίζονται ως TE.



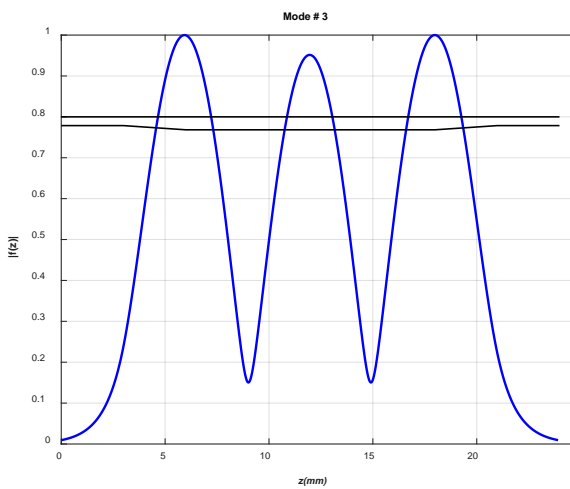
Σχήμα 5.2 Διάμηκες προφίλ διηλεκτρικού της κοιλότητας για $m = 0$.



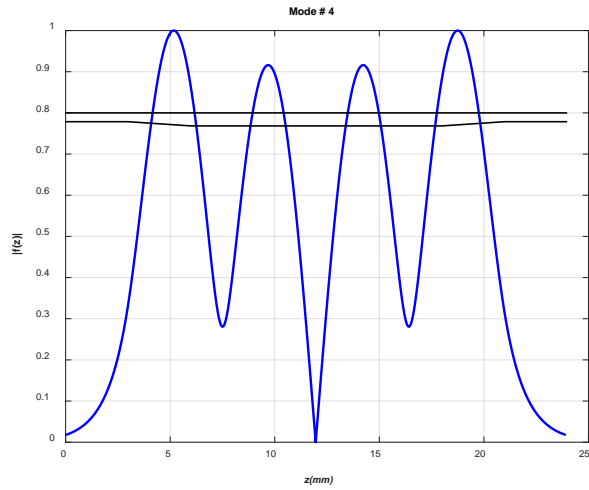
Σχήμα 5.3 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 1.



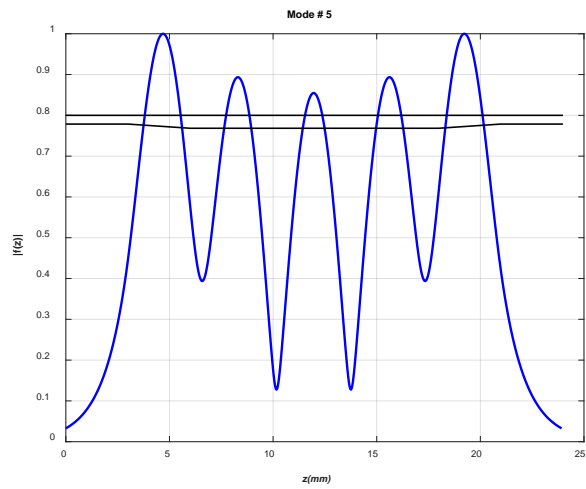
Σχήμα 5.4 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 2.



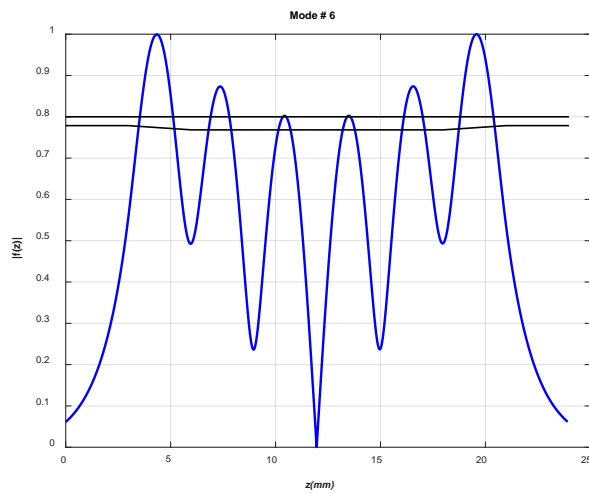
Σχήμα 5.5 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 3.



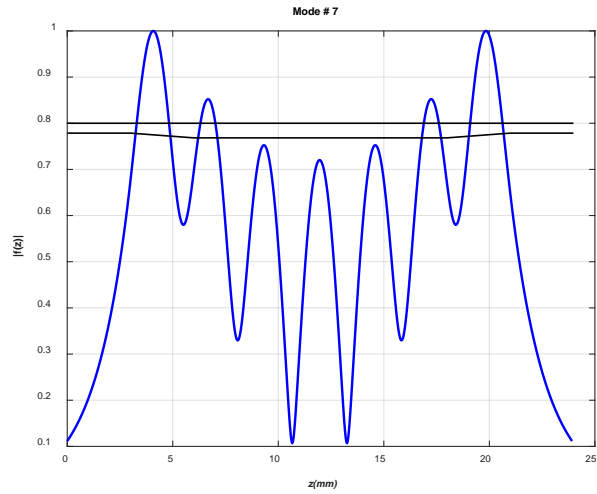
Σχήμα 5.6 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 4.



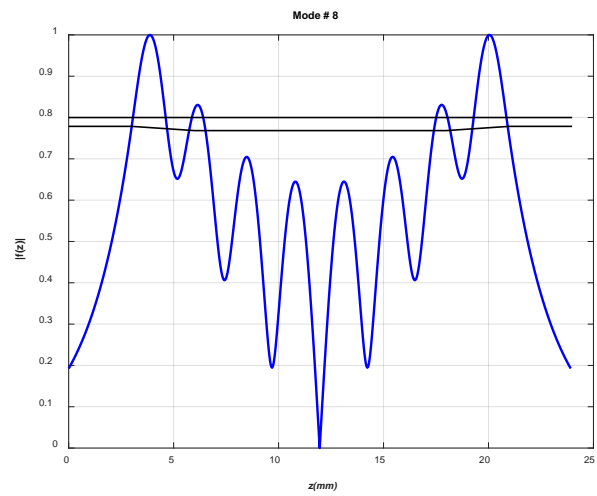
Σχήμα 5.7 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 5.



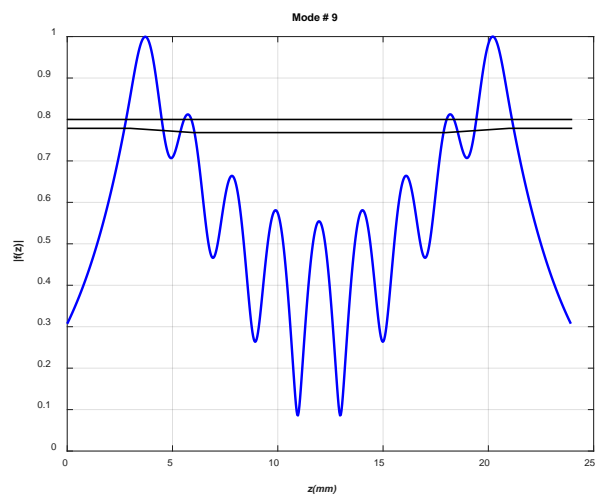
Σχήμα 5.8 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 6.



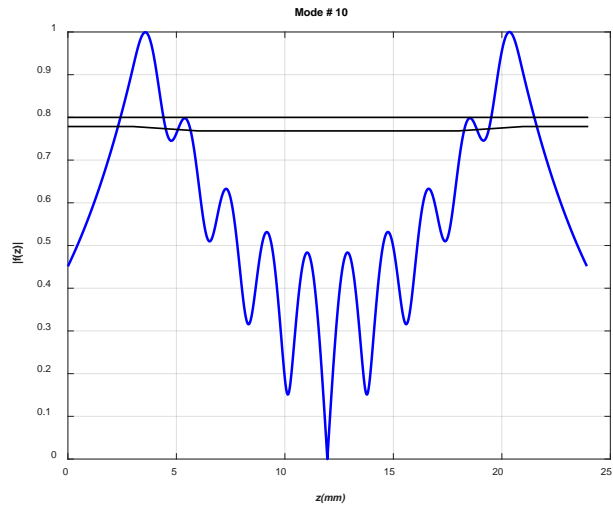
Σχήμα 5.9 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 7.



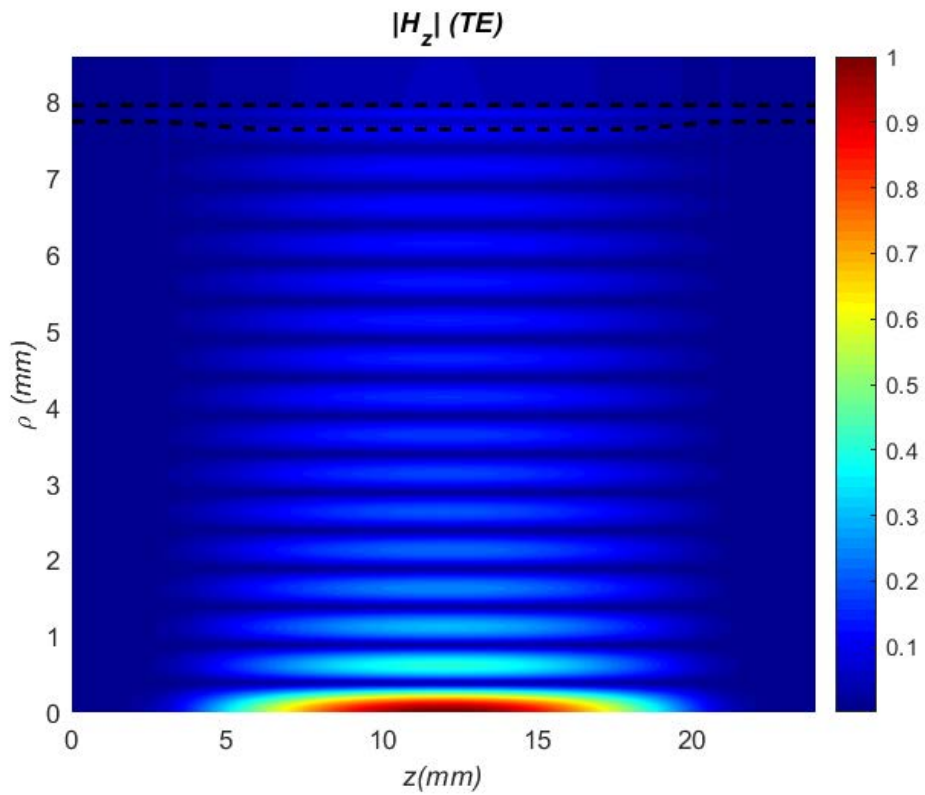
Σχήμα 5.10 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 8.



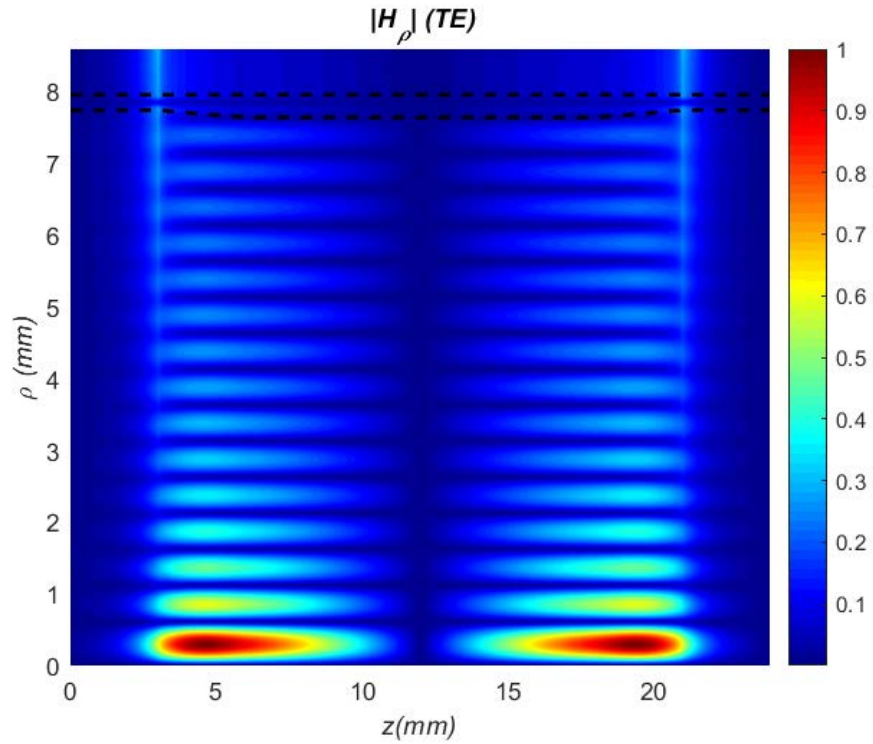
Σχήμα 5.11 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 9.



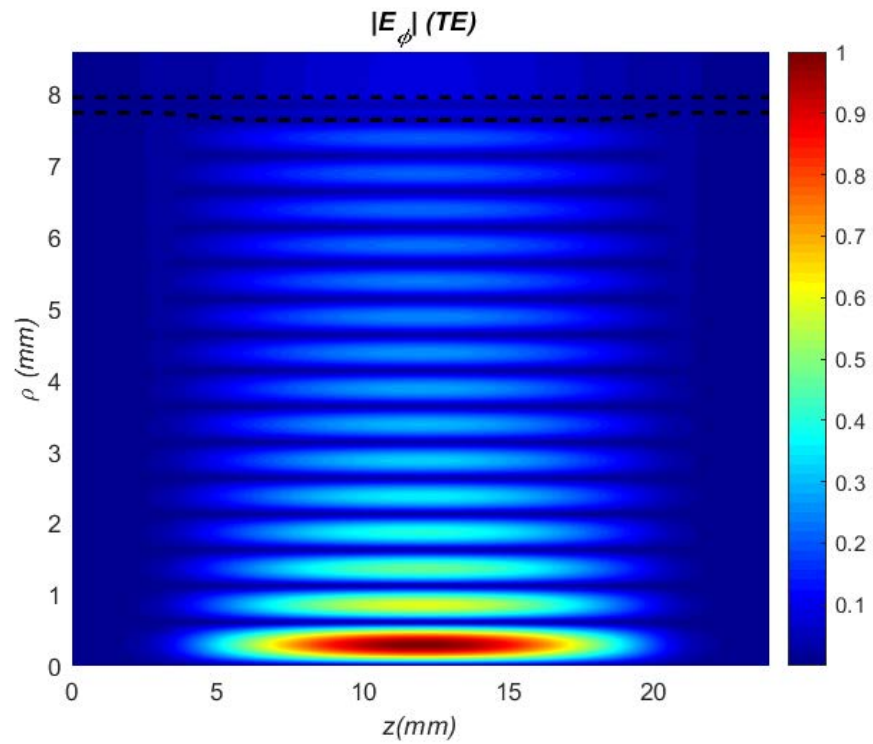
Σχήμα 5.12 Προφίλ πεδίου για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 10.



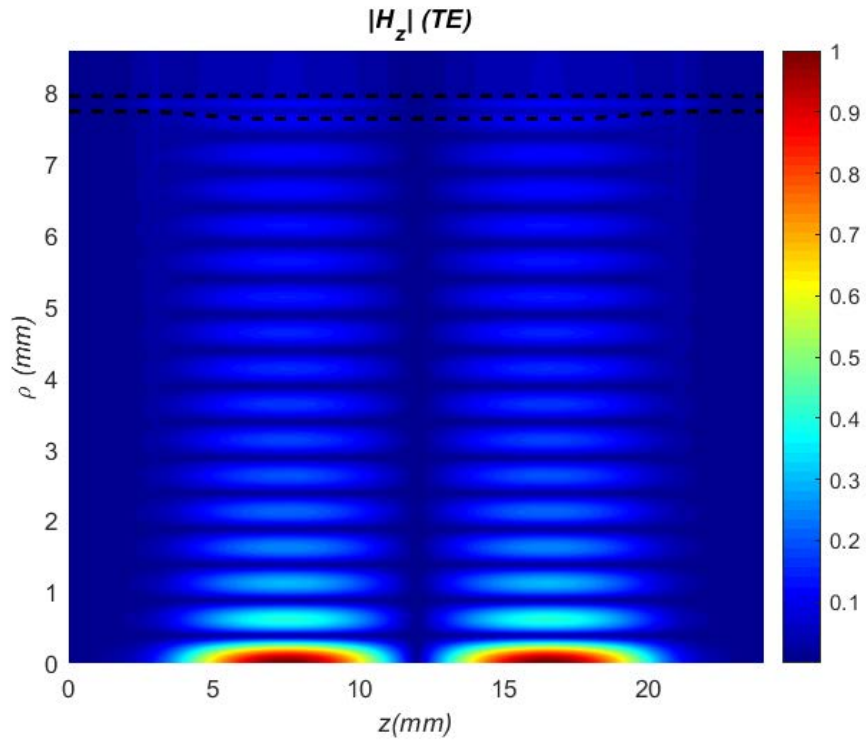
Σχήμα 5.13 Πεδίο H_z για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 1 (TE).



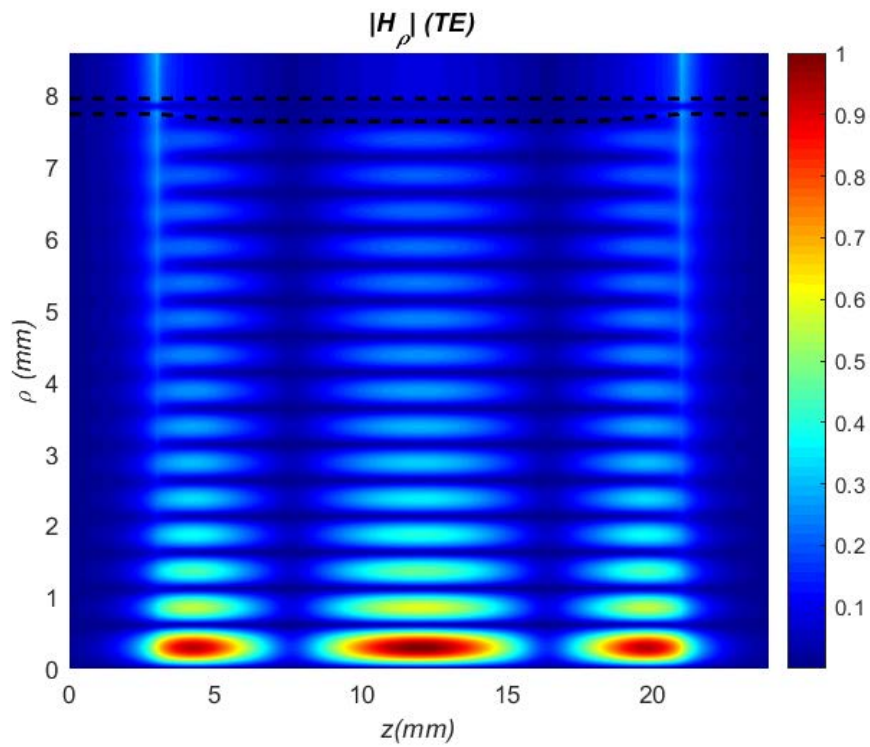
Σχήμα 5.14 Πεδίο H_ρ για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 1 (TE.)



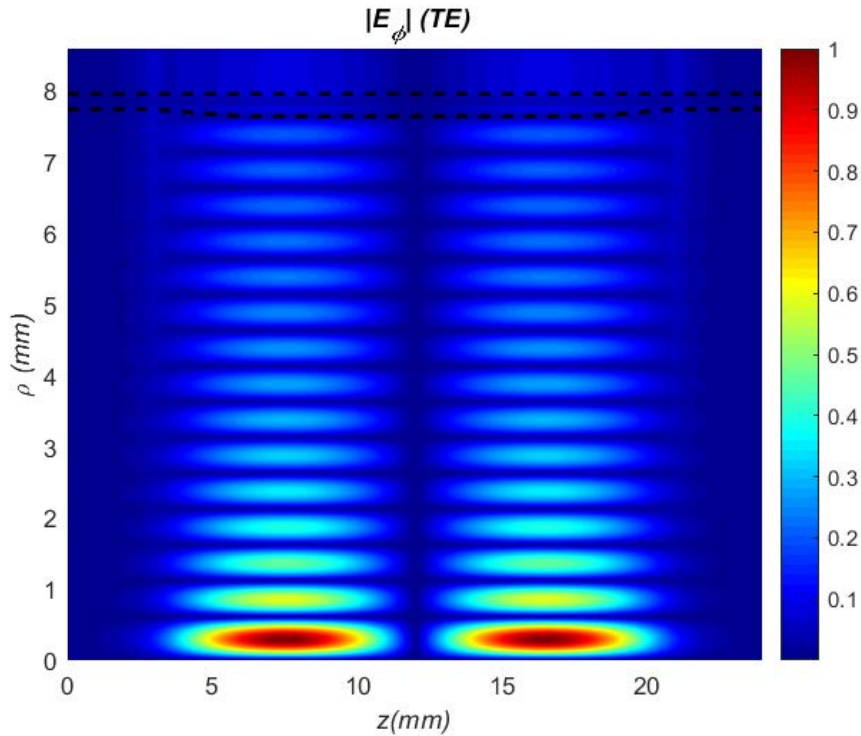
Σχήμα 5.15 Πεδίο E_ϕ για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 1 (TE).



Σχήμα 5.16 Πεδίο H_z για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 2 (TE).



Σχήμα 5.17 Πεδίο H_ρ για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 2 (TE).



Σχήμα 5.18 Πεδίο E_φ για $m = 0$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 2 (TE).

5.2 Αποτελέσματα για $m = 25$ και συχνότητα 300 GHz

Με αναφορά στο Σχήμα 5.1, στον Πίνακα 5.3 φαίνονται οι τιμές των παραμέτρων ρ_{1-3} και d_{1-3} για την περίπτωση $m = 25$. Οι τιμές αυτές προέκυψαν κατόπιν πολλών μικρορυθμίσεων έτσι ώστε να επιτευχθεί υψηλός σχετικά συντελεστής ποιότητας. Σημειώνεται ότι το λ και το λ_d είναι το μήκος κύματος στο κενό και στο διηλεκτρικό αντίστοιχα, ενώ αμφότερα έχουν υπολογιστεί για συχνότητα 300 GHz.

Πίνακας 5.3 Τιμές των παραμέτρων της γεωμετρίας της κοιλότητας για $m = 25$

L	$24 \cdot \lambda$		
ρ_1	$15 \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{25}$	d_1	$6 \cdot \lambda$
ρ_2	$\rho_1 + \frac{\lambda_d}{4}$	d_2	$3 \cdot \lambda$
ρ_3	$\rho_1 + 3 \cdot \frac{\lambda_d}{4}$	d_3	$3 \cdot \lambda$

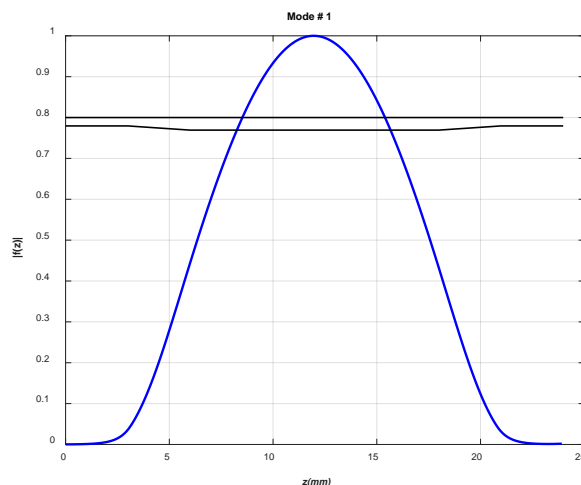
Στον Πίνακα 5.4 φαίνονται το πραγματικό μέρος της συχνότητας συντονισμού, το Q_{calc} και το Q_{ideal} καθώς και το σχετικό σφάλμα για τους 8 πρώτους συντονιζόμενους ρυθμούς, οι οποίοι αριθμούνται βάσει του πλήθους των μεγίστων του μέτρου του προφίλ πεδίου $f(z)$.

Πίνακας 5.4 Οκτώ πρώτοι συντονιζόμενοι ρυθμοί για $m = 25$

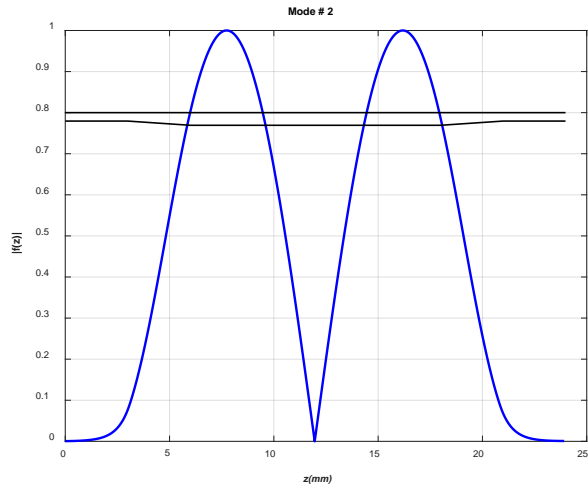
α/α	Συχνότητα συντονισμού (GHz)	Q_{ideal}	Q_{calc}	Σχετικό σφάλμα (%)
1	299.1855	95.4787	96.5112	1.081
2	299.5675	92.3964	91.1814	1.315
3	300.1876	87.6492	86.0334	1.844
4	301.0224	81.7891	80.1772	1.971
5	302.0445	75.5021	73.5386	2.610
6	303.2315	69.4337	67.4677	2.831
7	304.5771	63.9262	62.0632	2.914
8	306.0934	58.8741	57.1425	2.942

Παρατηρούμε ότι το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του συντελεστή ποιότητας αυξάνει γενικά, αλλά παραμένει κάτω από 3%.

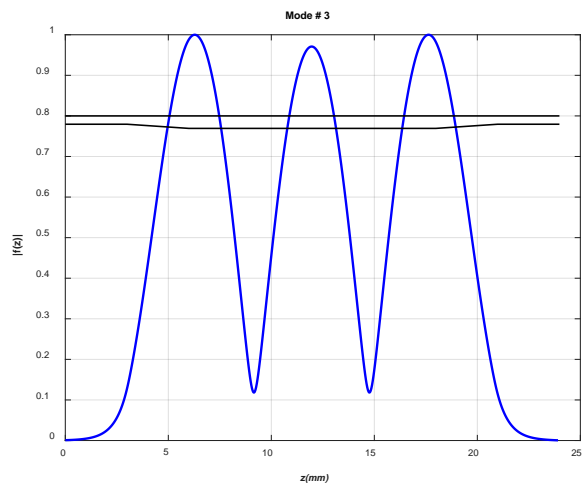
Στα παρακάτω Σχήματα 5.19 έως 5.26 φαίνονται τα προφίλ πεδίου για τους οκτώ πρώτους ρυθμούς (μαζί με το διάμηκες προφίλ διηλεκτρικού ώστε να υπάρχει καλύτερη εποπτεία. Η γεωμετρία της κοιλότητας δεν παρατέθηκε ξεχωριστά, καθώς οι διαφορές σε σχέση με την περίπτωση $m = 0$ δεν διακρίνονται οπτικά.



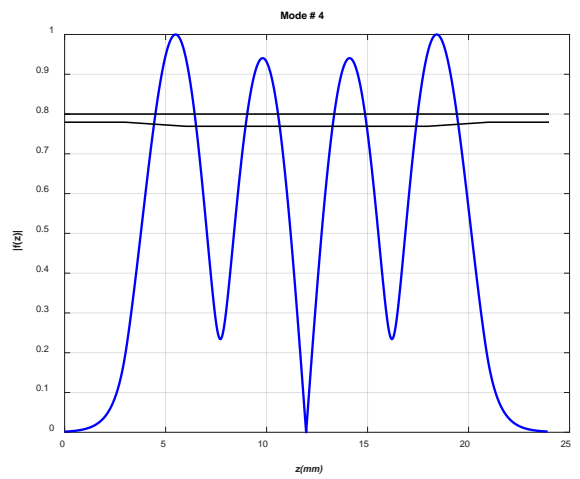
Σχήμα 5.19 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 1.



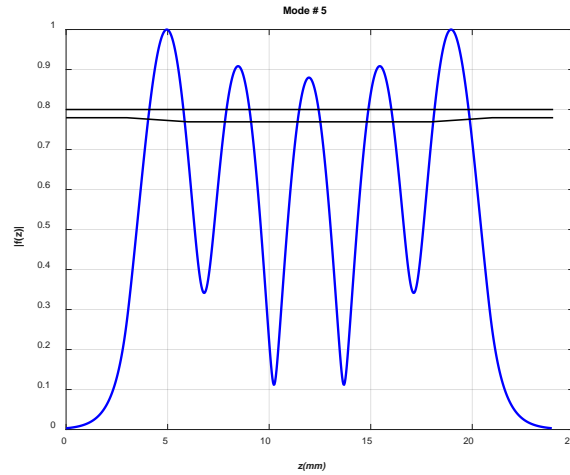
Σχήμα 5.20 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 2.



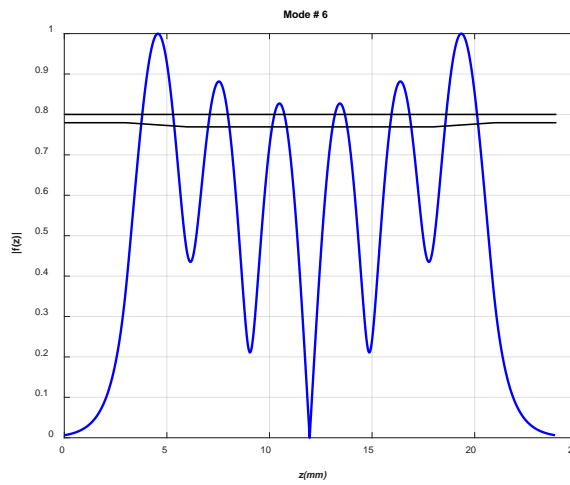
Σχήμα 5.21 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 3.



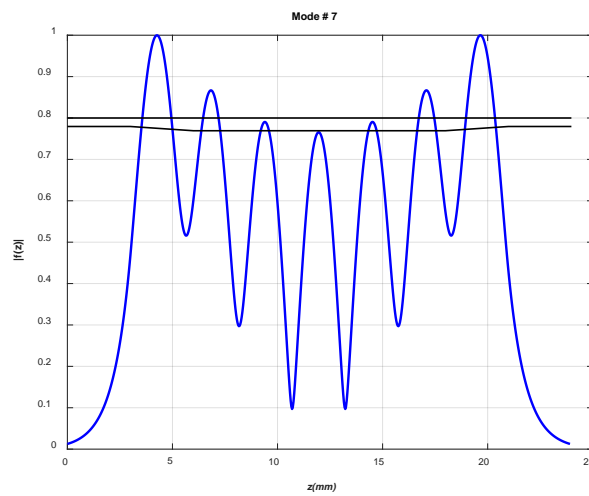
Σχήμα 5.22 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 4.



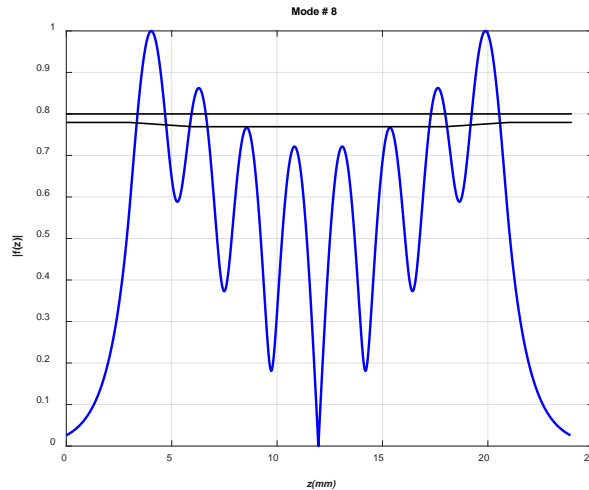
Σχήμα 5.23 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 5.



Σχήμα 5.24 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 6.



Σχήμα 5.25 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 7.



Σχήμα 5.26 Προφίλ πεδίου για $m = 25$ και για τον ρυθμό αξονικής τάξης 8.

5.3 Συζήτηση

Από τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται καταρχάς ότι ο συντελεστής ποιότητας που επιτυγχάνει η γεωμετρία των παραπάνω παραγράφων είναι χαμηλός (περίπου 136 για $m = 0$) σε σχέση με την τυπική τιμή (της τάξης του 1000) του συντελεστή ποιότητας για την κοιλότητα του συμβατικού γυροτρονίου. Ωστόσο, το σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι η παρούσα μελέτη δείχνει ότι υπάρχει η δυνατότητα ικανού αξονικού περιορισμού του πεδίου μέσω της αντικατάστασης του μεταλλικού τοιχώματος της κοιλότητας συντονισμού του συμβατικού γυροτρονίου με μια διηλεκτρική πλάκα, που χαρακτηρίζεται από ήπια ανομοιογένεια της εσωτερικής της ακτίνας. Σημειώνεται δε ότι οι υπολογισθείσες τιμές του συντελεστή ποιότητας ανά ρυθμό ισχύουν για τις συγκεκριμένες γεωμετρίες των παραπάνω παραγράφων και για διηλεκτρικό μέσο τον συνθετικό αδάμαντα. Εκτιμάται ότι αν επαναληφθούν οι υπολογισμοί για κάποιο διηλεκτρικό μέσο με υψηλότερη τιμή διηλεκτρικής σταθεράς, η τιμή του συντελεστή ποιότητας, τουλάχιστον για τον πρώτο στην τάξη συντονιζόμενο ρυθμό, θα προκύψει υψηλότερη. Αυτός ο ισχυρισμός συμβαδίζει με το γεγονός ότι το πάχος της κοιλότητας στο κεντρικό τμήμα αυτής έχει επιλεγεί κατά τρόπον ώστε το διηλεκτρικό στρώμα να εμφανίζει τη μέγιστη δυνατή ανάκλαση, η οποία είναι αρκετά ισχυρότερη, τουλάχιστον στην επίπεδη γεωμετρία της παραγράφου 2.1.2, καθώς αυξάνει η διηλεκτρική σταθερά του στρώματος, όπως υπολογίστηκε στην εν λόγω παράγραφο.

Επιχειρώντας ένα γενικό σχολιασμό της κατανομής των προφίλ πεδίου ανά ρυθμό, παρατηρείται ότι εφόσον η κοιλότητα είναι συμμετρική ως προς τον διαμήκη άξονα περί το κέντρο της διάταξης, παράγεται προφίλ πεδίου με την ίδια συμμετρία,

το οποίο είναι απολύτως αναμενόμενο από φυσικής άποψης, καθώς η κοιλότητα μελετήθηκε χωρίς διέγερση (ψυχρή κοιλότητα). Επίσης, βάσει της παραπάνω συμμετρίας και του τρόπου αρίθμησης της τάξης των συντονιζόμενων ρυθμών (όπου η τάξη ισούται με τον αριθμό των τοπικών μεγίστων του μέτρου του προφίλ πεδίου), δικαιολογείται η ύπαρξη τοπικού μεγίστου του προφίλ πεδίου στο κέντρο της διάταξης για ρυθμούς περιττής τάξης και αντίστοιχα τοπικού ελαχίστου στο κέντρο της διάταξης για ρυθμούς άρτιας τάξης. Επισημαίνεται δε ότι οι ρυθμοί άρτιας τάξης εμφανίζουν μια αρκετά χαμηλή τιμή του προφίλ πεδίου (σχεδόν μηδενική) στο κέντρο της διάταξης.

Όσον αφορά στην εγκυρότητα των υπολογισμών του προφίλ πεδίου και του συντελεστή ποιότητας για τους ρυθμούς των παραγράφων 5.1 και 5.2, επαναλαμβάνεται ότι δεν κατέστη εφικτή η χρήση εμπορικού πακέτου λογισμικού για την επίλυση του προβλήματος που πραγματεύεται η παρούσα μελέτη, έτσι ώστε να γίνει μια διασταύρωση – αντιπαράθεση των υπολογισμών. Συνεπώς, η παρούσα μελέτη αρκείται σε έναν έλεγχο αυτοσυνέπειας (self-consistency check), ο οποίος συνίσταται στον υπολογισμό του συντελεστή ποιότητας αφενός μέσω της συχνότητας συντονισμού – σχέση (5.3) – αφετέρου μέσω των εκφράσεων των πεδίων της κοιλότητας – σχέση (5.4). Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 5.2 ($m = 0$) και τον Πίνακα 5.4 ($m = 25$), το σχετικό σφάλμα υπολογισμού του συντελεστή ποιότητας γενικά αυξάνει περισσότερο για την περίπτωση $m = 0$ σε σχέση με την άλλη περίπτωση, για αυξανόμενη τάξη συντονισμού. Αυτό οφείλεται πιθανόν στη μεγαλύτερη τιμή των πεδίων πλησίον του άξονα της διάταξης (δηλαδή για $\rho \approx 0$) για την περίπτωση $m = 0$ σε σχέση με την περίπτωση $m = 25$, καθώς υπενθυμίζεται ότι η εξάρτηση των πεδίων στο εγκάρσιο επίπεδο εκφράζεται μέσω της συνάρτησης Bessel τάξης m και της πρώτης παραγώγου της. Για παράδειγμα, για $m = 0$ η κατανομή του πεδίου H_z για έναν ρυθμό TE φαίνεται στο Σχήμα 4.8, ενώ αντίστοιχα για $m = 25$ η κατανομή του πεδίου H_z για έναν ρυθμό HE φαίνεται στο Σχήμα 4.10. Συγκρίνοντας τα δύο σχήματα, φαίνεται ότι για τη δεύτερη περίπτωση το πεδίο στην εσωτερική περιοχή της κοιλότητας είναι σχεδόν μηδενικό για το εύρος ακτινικής απόστασης $\rho \in [0, 3 \text{ mm}]$, εύρος το οποίο είναι περίπου το 38% της ακτίνας της εσωτερικής περιοχής.

Κεφάλαιο 6 Κύρια Συμπεράσματα – Επεκτάσεις

6.1 Κύρια συμπεράσματα

Αρχικά, επειδή η παρούσα μελέτη πραγματεύεται ένα θέμα που εμπίπτει στον υπολογιστικό ηλεκτρομαγνητισμό, επιλέχθηκε να θεμελιωθεί πάνω στα βοηθητικά δυναμικά του Hertz $\mathbf{\Pi}_e$ και $\mathbf{\Pi}_m$. Αυτά, σε αντίθεση για παράδειγμα με τα δυναμικά \mathbf{A} και φ , τα οποία χρησιμοποιούνται κατά κόρον στη διεθνή βιβλιογραφία, διαθέτουν το συγκριτικό πλεονέκτημα να είναι ανεξάρτητα μεταξύ ενός (καθώς δεν συνδέονται με τη βαθμίδα Lorenz όπως τα τελευταία), και ως εκ τούτου διευκολύνουν την ανάλυση ενός ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος.

Στη συνέχεια, η μελέτη της ανάκλασης/μετάδοσης για μια απείρων διαστάσεων πλάκα διηλεκτρικού πάχους d σε επίπεδη γεωμετρία κατέδειξε τη δυνατότητα επίτευξης ισχυρής σχετικά ανάκλασης/μετάδοσης για ένα προσπίπτον επίπεδο κύμα, εφόσον ισχύει η σχέση:

$$\text{Μετάδοση} \quad d = n \cdot \frac{\lambda_d}{2}, n = 1,2,3, \dots \quad (6.1\alpha)$$

$$\text{Ανάκλαση} \quad d = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda_d}{4}, n = 0,1,2, \dots \quad (6.1\beta)$$

Αυτή η παρατήρηση αξιοποιήθηκε στη σχεδίαση της διηλεκτρικής κοιλότητας συντονισμού γυροτρονίου. Κατόπιν, αναλύθηκε η περίπτωση τριών διηλεκτρικών στρωμάτων σε κυλινδρική συμμετρία, όπου εξήχθη η σχέση διασποράς και αναγνωρίστηκαν οι ρυθμοί που υποστηρίζει μια τέτοια διάταξη. Επειδή η σχέση διασποράς είναι ουσιαστικά ο μηδενισμός μιας οριζουσας τάξης 8×8 , διαπιστώθηκαν οι δυσχέρειες της αριθμητικής επίλυσης, οι οποίες προέρχονται από τον τρόπο που υπολογίζεται η οριζουσα ενός πίνακα στα έτοιμα υπολογιστικά λογισμικά, όπως π.χ. το Matlab. Για τον λόγο αυτό, αναπτύχθηκε μια εναλλακτική μέθοδος, αυτή των πινάκων μετάβασης, όπως περιεγράφηκε στο κεφάλαιο 2. Πέραν από τις παραπάνω δυσχέρειες που αντιμετωπίζει, η εν λόγω μέθοδος διευκολύνει τον χαρακτηρισμό των ρυθμών που υποστηρίζει η παραπάνω διάταξη, καθώς επίσης παρέχει τη δυνατότητα μελέτης πολυστρωματικών διατάξεων διηλεκτρικού.

Στο κεφάλαιο 3 παρατέθηκε ο απαραίτητος μαθηματικός φορμαλισμός και αναλύθηκε η λειτουργία της «ψυχρής» κοιλότητας συντονισμού για την περίπτωση του συμβατικού γυροτρονίου. Παρατηρήθηκε ότι στο συμβατικό γυροτρόνιο υπολογίζεται εξ αρχής ο εγκάρσιος κυματάρθμος, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι

οριακές συνθήκες μηδενισμού του εφαπτομενικού ηλεκτρικού πεδίου πάνω στο μεταλλικό τοίχωμα της κοιλότητας, το οποίο συμβατικά θεωρείται ως τελείως αγωγίμο. Έτσι, ως «ελεύθερη» παράμετρος απομένει ο διαμήκης κυματάριθμος $k_z(z; \omega)$, ο οποίος καθορίζει και την «κατάσταση» του ρυθμού (αποκοπή/διάδοση).

Αντίθετα, στη διηλεκτρική κοιλότητα συντονισμού βρέθηκε ότι μπορεί να εφαρμοστεί η λογική των διαρρεόντων κυμάτων (leaky waves), οι οποίοι αφορούν σε hollow-core pipe fibers και δεν διαθέτουν αποκοπή, και αναλύθηκε η διαδικασία αντιμετώπισης του προβλήματος. Αφού η κοιλότητα διακριτοποιήθηκε ως προς τον διαμήκη άξονα σε δακτυλίδια διηλεκτρικού, τέθηκε η βασική παραδοχή η οποία συνίσταται στη θεώρηση ότι:

- Στην κοιλότητα υπάρχει μόνο ένας ρυθμός (single-mode approximation) και η σύζευξη με άλλους ρυθμούς είναι αμελητέα.
- Ισχύει η προσέγγιση WJKB.
- Το πρόβλημα επιλύεται τοπικά για κάθε δακτυλίδι (δηλαδή κάθε δακτυλίδι αντιμετωπίζεται σαν να εκτείνεται στο άπειρο ως προς z) και κατόπιν εφαρμόζεται η σύζευξη μεταξύ των δακτυλιδιών.

Επίσης, το πρόβλημα εύρεσης των συντονιζόμενων ρυθμών στην εν λόγω κοιλότητα επαναδιατυπώθηκε και πήρε την τελική μορφή ενός προβλήματος βελτιστοποίησης δύο επιπέδων. Το εσωτερικό επίπεδο βελτιστοποίησης επιλύει για δεδομένη μιγαδική συχνότητα τη σχέση διασποράς για κάθε δακτυλίδι διακριτοποίησης, και έτσι προκύπτουν οι δυνατές τιμές του διαμήκους κυματάριθμου ανά δακτυλίδι. Κατόπιν, μέσω του αλγορίθμου ιχνηλάτησης κυματάριθμων (wavenumber tracking) σχηματίζονται οι ρυθμοί που υφίστανται σε όλο το μήκος της διάταξης. Για κάθε ρυθμό με αρίθμηση l , επιλύεται η διαφορική εξίσωση της μη ομογενούς χορδής – σχέση (4.15α) – υποθέτοντας ότι ισχύει η οριακή συνθήκη εξερχόμενων κυμάτων στο αριστερό άκρο της διάταξης $z = 0$ και για το δεξιό άκρο $z = L$, υπολογίζεται το σχετικό σφάλμα της 1^{ης} παραγώγου του προφίλ πεδίου $f_l(z)$, κανονικοποιημένο σύμφωνα με τη σχέση:

$$\left\| \frac{\left[\frac{df_l}{dz} + jk_{z,l}(z; \omega) f_l \right]_{z=L}}{\left[jk_{z,l}(z; \omega) f_l \right]_{z=L}} \right\| \quad (6.2)$$

Το εξωτερικό επίπεδο βελτιστοποίησης προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το παραπάνω σφάλμα, μεταβάλλοντας τη μιγαδική συχνότητα. Επισημαίνεται ότι η όλη διαδικασία εστιάζεται στην εύρεση ρυθμών TE (για $m = 0$) και HE (για $m \neq 0$), καθώς, όπως ήδη επισημάνθηκε, η ανταλλαγή ενέργειας (πεδίου κοιλότητας – δέσμης ηλεκτρονίων) στο συμβατικό γυροτρόνιο γίνεται μέσω της αλληλεπίδρασης ECM στο εγκάρσιο επίπεδο, το οποίο σημαίνει ότι ευνοείται η διέγερση ρυθμών TE, επειδή οι

τελευταίοι έχουν πολύ πιο ισχυρό εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο πλησίον της αποκοπής σε σχέση με τους ρυθμούς TM [10].

Η μεθοδολογία αυτή εφαρμόστηκε στο κεφάλαιο 5, όπου σχεδιάστηκε μια διηλεκτρική κοιλότητα συντονισμού, συμμετρική στον διαμήκη άξονα περί το κέντρο της, με τη γενική μορφή για το διάμηκες προφίλ διηλεκτρικού η οποία φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Η κοιλότητα σχεδιάστηκε για συχνότητα 300 GHz και οι τιμές των επιμέρους γεωμετρικών παραμέτρων επιλέχθηκαν σύμφωνα με τον Πίνακα 5.1 (για $m = 0$) και με τον Πίνακα 5.3 (για $m = 25$).

Για $m = 0$, υπολογίστηκαν οι συχνότητες συντονισμού και το προφίλ πεδίου για τους πρώτους 10 ρυθμούς TE (περί της συχνότητας των 300 GHz). Προέκυψε ότι ο συντελεστής ποιότητας ξεκινά από ~136 για τον πρώτο ρυθμό και βαίνει μειούμενος προς τον τελευταίο. Για τον πρώτο ρυθμό, το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του συντελεστή ποιότητας είναι περίπου 0.55%. Το σφάλμα αυτό γενικά αυξάνει με την τάξη του ρυθμού. Αντίστοιχα, για $m = 25$ υπολογίστηκαν οι πρώτοι 8 ρυθμοί HE (συχνότητες και προφίλ πεδίου), και προέκυψε ότι ο συντελεστής ποιότητας ξεκινά από ~95 για τον πρώτο ρυθμό και παρουσιάζει την ίδια συμπεριφορά μείωσης για αυξανόμενη τάξη συντονισμού. Για τον πρώτο ρυθμό, το σχετικό σφάλμα είναι περίπου 1.08% και ομοίως αυξάνει με την τάξη του ρυθμού. Γενικά, ο πρώτος στην τάξη συντονιζόμενος ρυθμός διαθέτει προφίλ πεδίου με σχεδόν γκαουσιανή μορφή.

Το βασικό συμπέρασμα είναι ότι η παρούσα μελέτη κατ' ελάχιστον δείχνει ότι μπορούν να υποστηριχθούν συντονιζόμενοι ρυθμοί μέσω της αντικατάστασης του μεταλλικού τοιχώματος της κοιλότητας του συμβατικού γυροτρονίου με μια διηλεκτρική πλάκα, που χαρακτηρίζεται από ήπια ανομοιογένεια της εσωτερικής της ακτίνας. Μπορεί ο συντελεστής ποιότητας που υπολογίστηκε να διαφέρει σημαντικά σε σχέση με τον συντελεστή ποιότητας της κοιλότητας του συμβατικού γυροτρονίου (~1000), ωστόσο η παρούσα μελέτη είναι η πρώτη προσπάθεια προσέγγισης της σχεδίασης μιας κοιλότητας συντονισμού αποτελούμενης αποκλειστικά από διηλεκτρικό (all-dielectric cavity). Συνεπώς, το όλο εγχείρημα επιδέχεται βελτιώσεων, τόσο στη μεθοδολογία όσο και στις γεωμετρικές παραμέτρους του προφίλ του διηλεκτρικού, έτσι ώστε να επιτευχθεί υψηλότερος συντελεστής ποιότητας.

6.2 Μελλοντικές επεκτάσεις

Αρχικά, αποσκοπώντας στην αναζήτηση ρυθμών με υψηλότερο συντελεστή ποιότητας, μια επέκταση της παρούσας εργασίας είναι η τροποποίηση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διηλεκτρικής κοιλότητας κατά τρόπον ώστε να επιτυγχάνεται ισχυρότερη ανάκλαση των πεδίων στο εγκάρσιο επίπεδο στο κέντρο της κοιλότητας. Ένας πιθανός τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι η σχεδίαση μιας

κοιλότητας που θα αποτελείται από διαδοχικά εναλλασσόμενα στρώματα κενού και διηλεκτρικού (περισσότερα από 3), στοιβαγμένα στο εγκάρσιο επίπεδο, κατά αντιστοιχία με ένα οπτικό φίλτρο Bragg (fiber Bragg grating) [24], όπου στον πυρήνα μιας οπτικής ίνας δημιουργείται μια περιοδική διακύμανση του δείκτη διάθλασης, η οποία λειτουργεί ως διηλεκτρικός καθρέπτης που ανακλά (θεωρητικά) ένα μόνο συγκεκριμένο μήκος κύματος και επιτρέπει τη διάδοση των υπολοίπων μηκών κύματος. Σημειώνεται ότι το βασικό οπλοστάσιο για τον υπολογισμό των επιτρεπτών διαμήκων κυματάρθμων για μια τέτοια γεωμετρία έχει αναπτυχθεί ήδη στην παράγραφο 2.3.

Μια άλλη επέκταση της παρούσας εργασίας είναι η άρση του περιορισμού της μονορυθμικής λειτουργίας της κοιλότητας και η εξέταση της σύζευξης μεταξύ των διαφορετικών ρυθμών, οι οποίοι προκύπτουν για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου m για εξάρτηση των πεδίων $e^{jm\varphi}$. Είναι εκ προοιμίου αναμενόμενο ότι η εξίσωση της μη ομογενούς χορδής, η λύση της οποίας με οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων παρέχει το προφίλ πεδίου, θα αναχθεί σε ένα σύνολο συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων, με τη τυπική μορφή που παρατίθεται στο [13] για την περίπτωση της κοιλότητας του συμβατικού γυροτρονίου. Εκτιμάται ότι ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος για την επίλυση του προβλήματος θα αυξηθεί αρκετά, κρίνοντας από την εμπειρία της παρούσας εργασίας.

Τέλος, είναι εφικτή η εξέταση της συμπεριφοράς της διηλεκτρικής κοιλότητας με διέγερση μέσω ηλεκτρονικής δέσμης, δηλαδή η μελέτη της θερμής κοιλότητας.

Παράρτημα Α

A.1 Ταυτόχρονοι μηδενισμοί συνάρτησης Bessel και της 1ης παραγώγου της

Στο Παράρτημα αυτό, αποδεικνύεται ο ισχυρισμός της παραγράφου 1.3.1 ότι είναι αδύνατο να υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, με $x \neq 0$ ώστε να ισχύει ταυτόχρονα

$$J_m(x) = J'_m(x) = 0 \quad (\text{A. 1})$$

για m ακέραιο μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.

Ξεκινώντας από την περίπτωση $m = 0$, από τη σχέση (9.1.28) του [4] ισχύει:

$$J'_0(x) = -J_1(x) \quad (\text{A. 2})$$

το οποίο σημαίνει ότι για να ισχύει η (A. 1) θα πρέπει να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του πραγματικού άξονα όπου μηδενίζεται η $J_0(x)$ ταυτόχρονα με την $J_1(x)$. Αυτό όμως είναι γνωστό ότι δεν είναι αληθές, καθώς τα (πραγματικά) μηδενικά της $J_n(x)$ εναλλάσσονται με αυτά της $J_{n+1}(x)$ για n ακέραιο μεγαλύτερο του μηδενός (Λήμμα 2.1 στο [18]).

Για την περίπτωση $m \geq 1$, χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις (9.1.27) του [4], οι οποίες επαναλαμβάνονται για λόγους σαφήνειας:

$$J'_m(x) = \frac{1}{2} [J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)] \quad (\text{A. 3})$$

$$J_m(x) = \frac{x}{2m} [J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)] \quad (\text{A. 4})$$

παρατηρούμε ότι για να ισχύει $J'_m(x) = 0$, η σχέση (A. 3) δίνει $J_{m-1}(x) = J_{m+1}(x)$, το οποίο αντικαθιστώντας στη σχέση (A. 4) παράγει:

$$J_m(x) = \frac{x}{m} J_{m+1}(x) \quad (\text{A. 5})$$

Συνακόλουθα, ο μηδενισμός της (A. 5) απαιτεί είτε $x = 0$ είτε $J_{m+1}(x)$. Η λύση $J_{m+1}(x)$, ταυτόχρονα με $J_m(x) = 0$ έρχεται σε αντίφαση με το Λήμμα 2.1 του [18], οπότε απορρίπτεται. Η λύση $x = 0$ σημαίνει ότι θα πρέπει $J_m(0) = J'_m(0) = 0$. Από την ανάπτυξη σε δυναμοσειρά της συνάρτησης Bessel, σχέση (9.1.10) του [4]:

$$J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \quad (\text{A. 6})$$

φαίνεται ότι $J_m(0) = 0$ για ακέραιο $m \geq 1$, ενώ αν παραγωγίσουμε όρο προς όρο την παραπάνω σχέση (και αυτό επιτρέπεται καθώς η δυναμοσειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα):

$$J'_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (m+2k)}{2^{m+2k} k! \Gamma(m+k+1)} x^{m+2k-1} \quad (\text{A. 7})$$

και είναι προφανές ότι $J'_m(0)$ μόνο αν ισχύει $m \geq 2$ ώστε η ελάχιστης τάξης δύναμη του x να είναι η x^1 .

Συμπερασματικά, η σχέση (A. 1) για m ακέραιο μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός ισχύει μόνο για $x = 0$ και ακέραιο $m \geq 2$. Όμως, στο πρόβλημα που πραγματεύεται η παράγραφος 1.3.1, η λύση αυτή ($x = 0$) δεν έχει φυσικό νόημα.

A.2 Απόδειξη των σχέσεων παρ. 2.1.2

Με την παραδοχή ότι $\tan \delta \ll 1$, δηλαδή $\sin \frac{\delta}{2} \cong \frac{\delta}{2} \cong \frac{\tan \delta}{2}$, $\cos \frac{\delta}{2} \cong \cos \delta \cong 1$, η σχέση (2.6) γράφεται:

$$\begin{aligned} \alpha &\cong \frac{\omega}{2c} \sqrt{\varepsilon'_r} \tan \delta = \sqrt{\varepsilon'_r} \tan \delta \cdot \frac{\pi}{\lambda_o} \\ \beta &\cong \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'_r} = \sqrt{\varepsilon'_r} \cdot \frac{2\pi}{\lambda_o} \end{aligned} \quad (\text{A. 8})$$

όπου λ_o είναι το μήκος κύματος στο κενό.

Με τις παραδοχές ότι $\Gamma_{12} \in \mathbb{R}$, $|\Gamma_{12}| \ll 1$ και $\tan \delta \ll 1$, η σχέση (2.10) δυνάμει της (A. 8) δίνει:

$$|\Gamma| = \left| \frac{\Gamma_{12}(1 - e^{-\gamma 2d})}{1 - \Gamma_{12}^2 e^{-\gamma 2d}} \right| \cong |\Gamma_{12}| \cdot |1 - e^{-2\alpha d} e^{-j2\beta d}| \quad (\text{A. 9})$$

από την οποία παρατηρείται ότι:

$$\begin{aligned} |\Gamma| \rightarrow \min & : e^{-j2\beta d} = 1 \Rightarrow d = k \frac{\lambda}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ |\Gamma| \rightarrow \max & : e^{-j2\beta d} = -1 \Rightarrow d = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (\text{A. 10})$$

όπου $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon'_r}$ είναι το μήκος κύματος στο διηλεκτρικό μέσο.

Από φυσικής άποψης, αναμένεται ότι όταν το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης $|\Gamma|$ γίνει ελάχιστο, τότε οι απώλειες λόγω απορρόφησης ισχύος στο διηλεκτρικό θα λάβουν μέγιστη τιμή λόγω της σχέσης (2.14). Πράγματι, καλώντας A_{max} και A_{min} τη μέγιστη και αντίστοιχα την ελάχιστη τιμή του κλάσματος της προσπίπτουσας ισχύος που καταναλώνεται ως απώλειες εντός του όγκου του διηλεκτρικού, οι οποίες προκύπτουν από τη σχέση (2.14) όταν $|\Gamma| \rightarrow \min$ και $|\Gamma| \rightarrow \max$ αντίστοιχα, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} A_{max} &= 1 - \frac{h^2(1 - e^{-x})^2}{(1 - h^2e^{-x})^2} - \frac{(1 - h^2)^2 e^{-x}}{(1 - h^2e^{-x})^2} \\ A_{min} &= 1 - \frac{h^2(1 + e^{-x})^2}{(1 + h^2e^{-x})^2} - \frac{(1 - h^2)^2 e^{-x}}{(1 + h^2e^{-x})^2} \end{aligned} \quad (\text{A. 11})$$

όπου $h = |\Gamma_{12}| \ll 1$ και $x = 2ad$. Αναπτύσσοντας την εκθετική συνάρτηση σε σειρά Taylor και κρατώντας τους όρους μέχρι 1^{ης} τάξης, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} A_{max} &\cong \frac{(1 + h^2)x}{(1 - h^2) + 2h^2x} \Rightarrow A_{max} \cong \frac{(1 + h^2)}{(1 - h^2)} x \\ A_{min} &\cong \frac{(1 - h^2)x}{(1 + h^2) - 2h^2x} \Rightarrow A_{min} \cong \frac{(1 - h^2)}{(1 + h^2)} x \end{aligned} \quad (\text{A. 12})$$

Σημειώνεται ότι στην παραπάνω σχέση η παράμετρος x για το A_{max} υπολογίζεται σε εκείνες τις τιμές του πάχους d και του μήκους κύματος λ όπου $|\Gamma| \rightarrow \min$ (και αντίστοιχα για το A_{min}). Αντικαθιστώντας τη σχέση (A. 8) στην (A. 12) παίρνουμε τελικά:

$$\begin{aligned} A_{max} &\cong \frac{\pi f}{c_0} \tan \delta \cdot d \cdot (1 + \varepsilon'_r) \\ A_{min} &\cong \frac{\pi f}{c_0} \tan \delta \cdot d \cdot \frac{4\varepsilon'_r}{1 + \varepsilon'_r} \end{aligned} \quad (\text{A. 13})$$

που ουσιαστικά είναι οι σχέσεις (2.15) και (2.16).

Παράρτημα Β

Β.1 Απόδειξη σχέσεων παρ. 2.2.1

Για την περιοχή 1, αντικαθιστώντας τη σχέση (2.19) στις σχέσεις (1.19) και (1.20) παίρνουμε τις εκφράσεις των εφαπτομενικών πεδίων ως εξής:

$$E_z^{(1)} = k_{\perp}^2 A_{e,1} \cdot J_m(k_{\perp}\rho) e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 1})$$

$$E_{\varphi}^{(1)} = \left[\frac{mk_z}{\rho} A_{e,1} \cdot J_m(k_{\perp}\rho) + j\omega\mu_0 k_{\perp} A_{m,1} \cdot J_m'(k_{\perp}\rho) \right] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 2})$$

$$H_z^{(1)} = k_{\perp}^2 A_{m,1} \cdot J_m(k_{\perp}\rho) e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 3})$$

$$H_{\varphi}^{(1)} = \left[-j\omega\varepsilon_0 k_{\perp} A_{e,1} \cdot J_m'(k_{\perp}\rho) + \frac{mk_z}{\rho} A_{m,1} \cdot J_m(k_{\perp}\rho) \right] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 4})$$

Ομοίως, για την περιοχή 2 (διηλεκτρικό) αντικαθιστούμε τη σχέση (2.20) στις σχέσεις (1.19) και (1.20):

$$E_z^{(2)} = k_{\perp d}^2 [A_{e,2} \cdot J_m(k_{\perp d}\rho) + A_{e,3} \cdot Y_m(k_{\perp d}\rho)] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 5})$$

$$E_{\varphi}^{(2)} = \left\{ \frac{mk_z}{\rho} [A_{e,2} \cdot J_m(k_{\perp d}\rho) + A_{e,3} \cdot Y_m(k_{\perp d}\rho)] \right. \\ \left. + j\omega\mu_0 k_{\perp d} [A_{m,2} \cdot J_m'(k_{\perp d}\rho) + A_{m,3} \cdot Y_m'(k_{\perp d}\rho)] \right\} e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 6})$$

$$H_z^{(2)} = k_{\perp d}^2 [A_{m,2} \cdot J_m(k_{\perp d}\rho) + A_{m,3} \cdot Y_m(k_{\perp d}\rho)] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 7})$$

$$H_{\varphi}^{(2)} = \left\{ -j\omega\varepsilon_0 \varepsilon_r k_{\perp d} [A_{e,2} \cdot J_m'(k_{\perp d}\rho) + A_{e,3} \cdot Y_m'(k_{\perp d}\rho)] \right. \\ \left. + \frac{mk_z}{\rho} [A_{m,2} \cdot J_m(k_{\perp d}\rho) + A_{m,3} \cdot Y_m(k_{\perp d}\rho)] \right\} e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 8})$$

Τέλος, για την περιοχή 3 αντικαθιστούμε τη σχέση (2.21) στις σχέσεις (1.19) και (1.20):

$$E_z^{(3)} = k_{\perp}^2 A_{e,4} \cdot H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 9})$$

$$E_{\varphi}^{(3)} = \left[\frac{mk_z}{\rho} A_{e,4} \cdot H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) + j\omega\mu_0 k_{\perp} A_{m,4} \cdot H_m^{(2)'}(k_{\perp}\rho) \right] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 10})$$

$$H_z^{(3)} = k_{\perp}^2 A_{m,4} \cdot H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 11})$$

$$H_{\varphi}^{(3)} = \left[-j\omega\varepsilon_0 k_{\perp} A_{e,4} \cdot H_m^{(2)'}(k_{\perp}\rho) + \frac{mk_z}{\rho} A_{m,4} \cdot H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) \right] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 12})$$

Με βάση τα παραπάνω, η σχέση (2.25α) μετά από απλοποιήσεις δίνει:

$$k_{\perp}^2 A_{m,1} \cdot J_m(k_{\perp}\rho) = k_{\perp d}^2 [A_{m,2} \cdot J_m(k_{\perp d}\rho) + A_{m,3} \cdot Y_m(k_{\perp d}\rho)] \quad (\text{B. 13})$$

που, κατόπιν αναδιάταξης, αναγνωρίζεται ως η πρώτη γραμμή του πίνακα \mathbf{M} της σχέσης (2.28).

Η σχέση (2.26α) δίνει παρόμοια:

$$k_{\perp d}^2 [A_{m,2} \cdot J_m(k_{\perp d}\rho) + A_{m,3} \cdot Y_m(k_{\perp d}\rho)] = k_{\perp}^2 A_{m,4} \cdot H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) \quad (\text{B. 14})$$

που αναγνωρίζεται ως η δεύτερη γραμμή του πίνακα \mathbf{M} της σχέσης (2.28). Συνεχίζοντας κατά παρόμοιο τρόπο, δηλαδή με τις σχέσεις (2.25β)–(2.26β) κ.ο.κ., καταρτίζεται η σχέση (2.28).

B.2 Απόδειξη σχέσεων παρ. 2.3.1

Για την περιοχή i , η διαμήκης συνιστώσα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού διανύσματος Hertz γράφονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{e,i} &= \Pi_{e,i} \hat{z} \\ \Pi_{e,i} &= [C_i \cdot J_m(k_i\rho) + F_i \cdot Y_m(k_i\rho)] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (\text{B. 15})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{m,i} &= \Pi_{m,i} \hat{z} \\ \Pi_{m,i} &= [D_i \cdot J_m(k_i\rho) + G_i \cdot Y_m(k_i\rho)] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (\text{B. 16})$$

όπου C_i , D_i , F_i και G_i αυθαίρετες μιγαδικές σταθερές, k_z ο διαμήκης κυματάριθμος και k_i ο εγκάρσιος κυματάριθμος, ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$k_i^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_i - k_z^2 \quad (\text{B. 17})$$

Οι συνιστώσες (φ, z) των πεδίων, επί των οποίων θα εφαρμοστούν οι οριακές συνθήκες, δίνονται αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στις σχέσεις (1.19) και (1.20):

$$E_z^{(i)} = k_i^2 [C_i \cdot J_m(k_i \rho) + F_i \cdot Y_m(k_i \rho)] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 18})$$

$$E_\varphi^{(i)} = \left\{ \frac{mk_z}{\rho} [C_i \cdot J_m(k_i \rho) + F_i \cdot Y_m(k_i \rho)] + j\omega \mu_o k_i [D_i \cdot J_m'(k_i \rho) + G_i \cdot Y_m'(k_i \rho)] \right\} e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 19})$$

$$H_z^{(i)} = k_i^2 [D_i \cdot J_m(k_i \rho) + G_i \cdot Y_m(k_i \rho)] e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 20})$$

$$H_\varphi^{(i)} = \left\{ -j\omega \varepsilon_i k_i [C_i \cdot J_m'(k_i \rho) + F_i \cdot Y_m'(k_i \rho)] + \frac{mk_z}{\rho} [D_i \cdot J_m(k_i \rho) + G_i \cdot Y_m(k_i \rho)] \right\} e^{jm\varphi} e^{-jk_z z} \quad (\text{B. 21})$$

Οι οριακές συνθήκες στην διαχωριστική επιφάνεια $\rho = \rho_i$ των δύο περιοχών i και $j = i \pm 1$ απαιτούν τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, δηλαδή:

$$E_z^{(i)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) = E_z^{(j)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) \quad (\text{B. 22})$$

$$H_z^{(i)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) = H_z^{(j)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) \quad (\text{B. 23})$$

$$E_\varphi^{(i)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) = E_\varphi^{(j)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) \quad (\text{B. 24})$$

$$H_\varphi^{(i)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) = H_\varphi^{(j)}(\rho = \rho_i, \varphi, z) \quad (\text{B. 25})$$

Αντικαθιστώντας, προκύπτει αντίστοιχα:

$$C_j + \frac{Y_m(k_j \rho_i)}{J_m(k_j \rho_i)} F_j = \frac{k_i^2 J_m(k_i \rho_i)}{k_j^2 J_m(k_j \rho_i)} C_i + \frac{k_i^2 Y_m(k_i \rho_i)}{k_j^2 J_m(k_j \rho_i)} F_i \quad (\text{B. 26})$$

$$D_j + \frac{Y_m(k_j \rho_i)}{J_m(k_j \rho_i)} G_j = \frac{k_i^2 J_m(k_i \rho_i)}{k_j^2 J_m(k_j \rho_i)} D_i + \frac{k_i^2 Y_m(k_i \rho_i)}{k_j^2 J_m(k_j \rho_i)} G_i \quad (\text{B. 27})$$

$$\begin{aligned}
C_j + \frac{Y_m(k_j \rho_i)}{J_m(k_j \rho_i)} F_j + \frac{j\omega \mu_o k_j \rho_i J_m'(k_j \rho_i)}{mk_z J_m(k_j \rho_i)} D_j + \frac{j\omega \mu_o k_j \rho_i Y_m'(k_j \rho_i)}{mk_z J_m(k_j \rho_i)} G_j \\
= \frac{J_m(k_i \rho_i)}{J_m(k_j \rho_i)} C_i + \frac{Y_m(k_i \rho_i)}{J_m(k_j \rho_i)} F_i + \frac{j\omega \mu_o k_i \rho_i J_m'(k_i \rho_i)}{mk_z J_m(k_j \rho_i)} D_i \\
+ \frac{j\omega \mu_o k_i \rho_i Y_m'(k_i \rho_i)}{mk_z J_m(k_j \rho_i)} G_i
\end{aligned} \tag{B. 28}$$

$$\begin{aligned}
-C_j - \frac{Y_m'(k_j \rho_i)}{J_m'(k_j \rho_i)} F_j + \frac{mk_z J_m(k_j \rho_i)}{j\omega \varepsilon_j k_j \rho_i J_m'(k_j \rho_i)} D_j + \frac{mk_z Y_m(k_j \rho_i)}{j\omega \varepsilon_j k_j \rho_i J_m'(k_j \rho_i)} G_j \\
= -\frac{\varepsilon_i k_i J_m'(k_i \rho_i)}{\varepsilon_j k_j J_m'(k_j \rho_i)} C_i - \frac{\varepsilon_i k_i Y_m'(k_i \rho_i)}{\varepsilon_j k_j J_m'(k_j \rho_i)} F_i \\
+ \frac{mk_z J_m(k_i \rho_i)}{j\omega \varepsilon_j k_j \rho_i J_m'(k_j \rho_i)} D_i + \frac{mk_z Y_m(k_i \rho_i)}{j\omega \varepsilon_j k_j \rho_i J_m'(k_j \rho_i)} G_i
\end{aligned} \tag{B. 29}$$

Αντικαθιστώντας τις (B. 26) και (B. 27) στην (B. 28), απαλείφονται οι όροι που περιέχουν τον συντελεστή F_j , και προκύπτει ότι ο συντελεστής G_j γράφεται:

$$\begin{aligned}
G_j = C_i \cdot \frac{mk_z}{j\omega \mu_o k_j \rho_i} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_j^2}\right) \frac{J_m(k_i \rho_i) J_m(k_j \rho_i)}{\Delta_{ij}} \\
+ D_i \cdot \frac{\frac{k_i}{k_j} J_m(k_j \rho_i) J_m'(k_i \rho_i) - \frac{k_i^2}{k_j^2} J_m(k_i \rho_i) J_m'(k_j \rho_i)}{\Delta_{ij}} + \\
+ F_i \cdot \frac{mk_z}{j\omega \mu_o k_j \rho_i} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_j^2}\right) \frac{Y_m(k_i \rho_i) J_m(k_j \rho_i)}{\Delta_{ij}} + \\
+ G_i \cdot \frac{\frac{k_i}{k_j} J_m(k_j \rho_i) Y_m'(k_i \rho_i) - \frac{k_i^2}{k_j^2} Y_m(k_i \rho_i) J_m'(k_j \rho_i)}{\Delta_{ij}}
\end{aligned} \tag{B. 30}$$

όπου $\Delta_{ij} = J_m(k_j \rho_i) Y_m'(k_j \rho_i) - J_m'(k_j \rho_i) Y_m(k_j \rho_i)$, που ουσιαστικά είναι η βρονσκιανή (Wronskian) ορίζουσα των συναρτήσεων Bessel, για την οποία ισχύει σύμφωνα με [4]:

$$W\{J_m(z), Y_m(z)\} \equiv J_m(z) Y_m'(z) - J_m'(z) Y_m(z) = \frac{2}{\pi z} \tag{B. 31}$$

δηλαδή

$$\Delta_{ij} = J_m(k_j \rho_i) Y_m'(k_j \rho_i) - J_m'(k_j \rho_i) Y_m(k_j \rho_i) = \frac{2}{\pi k_j \rho_i} \tag{B. 32}$$

Αντικαθιστώντας τις (B. 26) και (B. 27) στην (B. 29), απαλείφονται οι όροι που περιέχουν τον συντελεστή G_j , και προκύπτει ότι ο συντελεστής F_j γράφεται:

$$\begin{aligned}
F_j = C_i \cdot & \frac{\frac{\varepsilon_i k_i}{\varepsilon_j k_j} J_m(k_j \rho_i) J_m'(k_i \rho_i) - \frac{k_i^2}{k_j^2} J_m(k_i \rho_i) J_m'(k_j \rho_i)}{\Delta_{ij}} + \\
& + D_i \cdot \frac{mk_z}{j\omega \varepsilon_j k_j \rho_i} \left(\frac{k_i^2}{k_j^2} - 1 \right) \frac{J_m(k_i \rho_i) J_m(k_j \rho_i)}{\Delta_{ij}} + \\
& + F_i \cdot \frac{\frac{\varepsilon_i k_i}{\varepsilon_j k_j} J_m(k_j \rho_i) Y_m'(k_i \rho_i) - \frac{k_i^2}{k_j^2} Y_m(k_i \rho_i) J_m'(k_j \rho_i)}{\Delta_{ij}} + \\
& + G_i \cdot \frac{mk_z}{j\omega \varepsilon_j k_j \rho_i} \left(\frac{k_i^2}{k_j^2} - 1 \right) \frac{Y_m(k_i \rho_i) J_m(k_j \rho_i)}{\Delta_{ij}}
\end{aligned} \tag{B. 33}$$

Η σχέση (B. 26) δυνάμει των (B. 30) και (B. 33), μετά από αρκετές πράξεις, δίνει:

$$\begin{aligned}
C_j = C_i \cdot & \frac{\frac{k_i^2}{k_j^2} J_m(k_i \rho_i) Y_m'(k_j \rho_i) - \frac{\varepsilon_i k_i}{\varepsilon_j k_j} Y_m(k_j \rho_i) J_m'(k_i \rho_i)}{\Delta_{ij}} + \\
& + D_i \cdot \frac{mk_z}{j\omega \varepsilon_j k_j \rho_i} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_j^2} \right) \frac{J_m(k_i \rho_i) Y_m(k_j \rho_i)}{\Delta_{ij}} + \\
& + F_i \cdot \frac{\frac{k_i^2}{k_j^2} Y_m(k_i \rho_i) Y_m'(k_j \rho_i) - \frac{\varepsilon_i k_i}{\varepsilon_j k_j} Y_m(k_j \rho_i) Y_m'(k_i \rho_i)}{\Delta_{ij}} + \\
& + G_i \cdot \frac{mk_z}{j\omega \varepsilon_j k_j \rho_i} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_j^2} \right) \frac{Y_m(k_i \rho_i) Y_m(k_j \rho_i)}{\Delta_{ij}}
\end{aligned} \tag{B. 34}$$

Η παραπάνω σχέση δυνάμει της (B. 27) δίνει:

$$\begin{aligned}
D_j = C_i \cdot & \frac{mk_z}{j\omega \mu_o k_j \rho_i} \left(\frac{k_i^2}{k_j^2} - 1 \right) \frac{J_m(k_i \rho_i) Y_m(k_j \rho_i)}{\Delta_{ij}} + \\
& + D_i \cdot \frac{\frac{k_i^2}{k_j^2} J_m(k_i \rho_i) Y_m'(k_j \rho_i) - \frac{k_i}{k_j} Y_m(k_j \rho_i) J_m'(k_i \rho_i)}{\Delta_{ij}} + \\
& + F_i \cdot \frac{mk_z}{j\omega \mu_o k_j \rho_i} \left(\frac{k_i^2}{k_j^2} - 1 \right) \frac{Y_m(k_i \rho_i) Y_m(k_j \rho_i)}{\Delta_{ij}} + \\
& + G_i \cdot \frac{\frac{k_i^2}{k_j^2} Y_m(k_i \rho_i) Y_m'(k_j \rho_i) - \frac{k_i}{k_j} Y_m(k_j \rho_i) Y_m'(k_i \rho_i)}{\Delta_{ij}}
\end{aligned} \tag{B. 35}$$

Συγκεντρωτικά, αν συμβολίσουμε με $\mathbf{X}^{(i)}$ το διάνυσμα – στήλη που περιέχει τους συντελεστές C_i, D_i, F_i και G_i της περιοχής i ,

$$\mathbf{X}^{(i)} = \begin{pmatrix} C_i \\ D_i \\ F_i \\ G_i \end{pmatrix} \quad (\text{B. 36})$$

τότε μπορούμε να γράψουμε για το διάνυσμα – στήλη $\mathbf{X}^{(j)}$, το οποίο περιέχει τους συντελεστές C_j, D_j, F_j και G_j της συνορεύουσας, για $\rho = \rho_i$, περιοχής j με $j = i \pm 1$:

$$\mathbf{X}^{(j)} = \mathbf{T}^{(i \rightarrow j)} \mathbf{X}^{(i)} \quad (\text{B. 37})$$

όπου $\mathbf{T}^{(i \rightarrow j)}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από την περιοχή i στην περιοχή j που δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{T}^{(i \rightarrow j)} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{B. 38})$$

με

$$T_{11} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \left[\frac{k_i^2}{k_j^2} J_m(k_i \rho_i) Y_m'(k_j \rho_i) - \frac{\varepsilon_i k_i}{\varepsilon_j k_j} Y_m(k_j \rho_i) J_m'(k_i \rho_i) \right] \quad (\text{B. 39})$$

$$T_{12} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \frac{mk_z}{j\omega\varepsilon_j k_j \rho_i} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_j^2} \right) J_m(k_i \rho_i) Y_m(k_j \rho_i) \quad (\text{B. 40})$$

$$T_{13} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \left[\frac{k_i^2}{k_j^2} Y_m(k_i \rho_i) Y_m'(k_j \rho_i) - \frac{\varepsilon_i k_i}{\varepsilon_j k_j} Y_m(k_j \rho_i) Y_m'(k_i \rho_i) \right] \quad (\text{B. 41})$$

$$T_{14} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \frac{mk_z}{j\omega\varepsilon_j k_j \rho_i} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_j^2} \right) Y_m(k_i \rho_i) Y_m(k_j \rho_i) \quad (\text{B. 42})$$

$$T_{21} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \frac{mk_z}{j\omega\mu_o k_j \rho_i} \left(\frac{k_i^2}{k_j^2} - 1 \right) J_m(k_i \rho_i) Y_m(k_j \rho_i) \quad (\text{B. 43})$$

$$T_{22} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \left[\frac{k_i^2}{k_j^2} J_m(k_i \rho_i) Y_m'(k_j \rho_i) - \frac{k_i}{k_j} Y_m(k_j \rho_i) J_m'(k_i \rho_i) \right] \quad (\text{B. 44})$$

$$T_{23} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \frac{mk_z}{j\omega\mu_o k_j \rho_i} \left(\frac{k_i^2}{k_j^2} - 1 \right) Y_m(k_i \rho_i) Y_m(k_j \rho_i) \quad (\text{B. 45})$$

$$T_{24} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \left[\frac{k_i^2}{k_j^2} Y_m(k_i \rho_i) Y_m'(k_j \rho_i) - \frac{k_i}{k_j} Y_m(k_j \rho_i) Y_m'(k_i \rho_i) \right] \quad (\text{B. 46})$$

$$T_{31} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \left[\frac{\varepsilon_i k_i}{\varepsilon_j k_j} J_m(k_j \rho_i) J_m'(k_i \rho_i) - \frac{k_i^2}{k_j^2} J_m(k_i \rho_i) J_m'(k_j \rho_i) \right] \quad (\text{B. 47})$$

$$T_{32} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \frac{mk_z}{j\omega\varepsilon_j k_j \rho_i} \left(\frac{k_i^2}{k_j^2} - 1 \right) J_m(k_i \rho_i) J_m(k_j \rho_i) \quad (\text{B. 48})$$

$$T_{33} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \left[\frac{\varepsilon_i k_i}{\varepsilon_j k_j} J_m(k_j \rho_i) Y_m'(k_i \rho_i) - \frac{k_i^2}{k_j^2} Y_m(k_i \rho_i) J_m'(k_j \rho_i) \right] \quad (\text{B. 49})$$

$$T_{34} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \frac{mk_z}{j\omega\varepsilon_j k_j \rho_i} \left(\frac{k_i^2}{k_j^2} - 1 \right) Y_m(k_i \rho_i) J_m(k_j \rho_i) \quad (\text{B. 50})$$

$$T_{41} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \frac{mk_z}{j\omega\mu_o k_j \rho_i} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_j^2} \right) J_m(k_i \rho_i) J_m(k_j \rho_i) \quad (\text{B. 51})$$

$$T_{42} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \left[\frac{k_i}{k_j} J_m(k_j \rho_i) J_m'(k_i \rho_i) - \frac{k_i^2}{k_j^2} J_m(k_i \rho_i) J_m'(k_j \rho_i) \right] \quad (\text{B. 52})$$

$$T_{43} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \frac{mk_z}{j\omega\mu_o k_j \rho_i} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_j^2} \right) Y_m(k_i \rho_i) J_m(k_j \rho_i) \quad (\text{B. 53})$$

$$T_{44} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \left[\frac{k_i}{k_j} J_m(k_j \rho_i) Y_m'(k_i \rho_i) - \frac{k_i^2}{k_j^2} Y_m(k_i \rho_i) J_m'(k_j \rho_i) \right] \quad (\text{B. 54})$$

Ουσιαστικά, ο πίνακας μετάβασης $\mathbf{T}^{(i \rightarrow j)}$ παρέχει τους συντελεστές της περιοχής j συναρτήσει των συντελεστών της περιοχής i .

Επισημαίνεται ότι οι σχέσεις (B. 39) έως (B. 54) ισχύουν όταν υπάρχει μετάβαση από την περιοχή i στη γειτονική της περιοχή $j = i \pm 1$ και στην περιοχή j όλοι οι συντελεστές C_j, D_j, F_j και G_j είναι διάφοροι του μηδενός.

Ειδική περίπτωση αποτελεί η μετάβαση από την περιοχή i , όπου C_j, D_j, F_j και $G_j \neq 0$ στην περιοχή j , όπου $C_j, D_j \neq 0$, αλλά $F_j = G_j = 0$. Στην υπόψη διάταξη των N διηλεκτρικών στρωμάτων, η ειδική αυτή περίπτωση αφορά στους πίνακες μετάβασης $\mathbf{T}^{(2 \rightarrow 1)}$ και $\mathbf{T}^{(N-1 \rightarrow N)}$. Στον μεν πρώτο πίνακα η περιοχή 1 περιέχει το $\rho = 0$, οπότε η συνάρτηση Neumann $Y_m(*)$ δεν δύναται να συμπεριληφθεί στη λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel, στο δε δεύτερο πίνακα η πλέον εξωτερική περιοχή N περιέχει το $\rho \rightarrow \infty$ και απαιτείται ως λύση η συνάρτηση Hankel $H_m^{(2)}(*)$. Δυστυχώς, για την περίπτωση αυτή δεν μπορεί να γίνει κάποια εκ των υστέρων απλοποίηση στις σχέσεις (B. 39) – (B. 54) και θα πρέπει να επιλυθούν από την αρχή οι οριακές συνθήκες. Εκτελώντας την ίδια διαδικασία, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{T}^{(i \rightarrow j)} = \begin{pmatrix} T_{11}' & T_{12}' & T_{13}' & T_{14}' \\ T_{21}' & T_{22}' & T_{23}' & T_{24}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 55})$$

όπου

$$T_{11}' = \frac{\varepsilon_i k_i J_m'(k_i \rho_i)}{\varepsilon_j k_j J_m'(k_j \rho_i)} \quad (\text{B. 56})$$

$$T_{12}' = \frac{mk_z}{j\omega\varepsilon_j k_j \rho_i} \left(\frac{k_i^2}{k_j^2} - 1 \right) \frac{J_m(k_i \rho_i)}{J_m'(k_j \rho_i)} \quad (\text{B. 57})$$

$$T_{13}' = \frac{\varepsilon_i k_i Y_m'(k_i \rho_i)}{\varepsilon_j k_j J_m'(k_j \rho_i)} \quad (\text{B. 58})$$

$$T_{14}' = \frac{mk_z}{j\omega\varepsilon_j k_j \rho_i} \left(\frac{k_i^2}{k_j^2} - 1 \right) \frac{Y_m(k_i \rho_i)}{J_m'(k_j \rho_i)} \quad (\text{B. 59})$$

$$T_{21}' = \frac{mk_z}{j\omega\mu_o k_j \rho_i} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_j^2} \right) \frac{J_m(k_i \rho_i)}{J_m'(k_j \rho_i)} \quad (\text{B. 60})$$

$$T_{22}' = \frac{k_i J_m'(k_i \rho_i)}{k_j J_m'(k_j \rho_i)} \quad (\text{B. 61})$$

$$T_{23}' = \frac{mk_z}{j\omega\mu_o k_j \rho_i} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_j^2} \right) \frac{Y_m(k_i \rho_i)}{J_m'(k_j \rho_i)} \quad (\text{B. 62})$$

$$T_{24}' = \frac{k_i Y_m'(k_i \rho_i)}{k_j J_m'(k_j \rho_i)} \quad (\text{B. 63})$$

Για τον πίνακα $\mathbf{T}^{(2 \rightarrow 1)}$ ισχύουν οι ανωτέρω σχέσεις (B. 56) έως (B. 63), με την προφανή αντικατάσταση $i = 1, j = 2$. Για τον πίνακα $\mathbf{T}^{(N-1 \rightarrow N)}$ ισχύουν πάλι αυτές οι σχέσεις, αλλά $J_m'(k_j \rho_i) \rightarrow H_m^{(2)'}(k_j \rho_i)$ και $i = N - 1, j = N$.

Παρατηρείται ότι για την πλέον εσωτερική περιοχή 1 (που περιέχει το $\rho = 0$), όπου η συνάρτηση Neumann $Y_m(*)$ δεν δύναται να συμπεριληφθεί στη λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel, για το διάνυσμα $\mathbf{X}^{(1)}$ θα ισχύει:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 64})$$

και ισοδύναμα για τον πίνακα μετάβασης $\mathbf{T}^{(1 \rightarrow 2)}$ θα ισχύει:

$$\mathbf{T}^{(1 \rightarrow 2)} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 & 0 \\ T_{31} & T_{32} & 0 & 0 \\ T_{41} & T_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 65})$$

όπως προκύπτει από τη σχέση ορισμού (B. 37), καθώς το γινόμενο του πίνακα μετάβασης με το διάνυσμα $\mathbf{X}^{(1)}$ παραμένει προφανώς το ίδιο αν χρησιμοποιηθεί η σχέση (B. 65) αντί της (B. 38). Σημειώνεται ότι τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα δίνονται πάλι από τις σχέσεις (B. 39) έως (B. 54), με $i = 1$ και $j = 2$.

Βιβλιογραφία

- [1] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th edition, Wiley, 2012.
- [2] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, 2nd edition, Wiley, 2012.
- [3] K. Zhang and D. Li, *Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics*, 2nd edition, Springer, 2008.
- [4] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, 1974.
- [5] C. Yeh and F. Shimabukuro, *The Essence of Dielectric Waveguides*, Springer, 2008.
- [6] G. S. Nusinovich, *Introduction to the Physics of Gyrotrons*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 2004.
- [7] J. M. Baird, "Gyrotron theory", in *High-Power Microwave Sources*, V. L. Granatstein and I. Alexeff Eds. Boston-London: Artech House, 1987, ch. 4, pp. 103-183.
- [8] F. Scheid, *Theory and Problems of Numerical Analysis*, 2nd edition, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1988.
- [9] Y. Altman, *Accelerating Matlab Performance, 1001 tips to speed up MATLAB programs*, CRC Press, 2015.
- [10] Ι. Γ. Χέλης, *Προσομοίωση της Κυκλοτρονικής Αλληλεπίδρασης στον Δίαυλο Δέσμης του Γυροτρονίου με Εφαρμογή στη Μελέτη των Παρασιτικών Ταλαντώσεων*, Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ/ΣΗΜΜΥ, 2016.
- [11] B. Z. Katsenelenbaum, L. Mercader del Rio, M. Pereyaslavets, M. Sorolla Ayza and M. Thumm, *Theory of Nonuniform Waveguides, the Cross-Section Method*, IEE Electromagnetic Waves Series 44, 1998.
- [12] S. E. Tsimring, *Electron Beams and Microwave Vacuum Electronics*, Wiley, 2007.
- [13] M. V. Kartikeyan, E. Borie and M. K. A. Thumm, *Gyrotrons, High Power Microwave and Millimeter Wave Technology*, Springer, 2004.
- [14] Κ. Α. Αβραμίδης, *Σχεδίαση και προσομοίωση ομοαξονικών γυροτρονίων (με έμφαση στη λειτουργία 2ης αρμονικής)*, διδακτορική διατριβή, Ε.Μ.Π, Αθήνα, 2006.
- [15] E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations*, 2nd edition, Springer, 2008.

- [16] V. P. Shestopalov and Y. V. Shestopalov, *Spectral Theory and Excitation of Open Structures*, ser. IEE Electromag. Waves. London, U.K.: IEE Press, 1996.
- [17] S. N. Vlasov, G. M. Zhislin, I. M. Orlova, M. I. Petelin and G. G. Rogacheva, *Irregular Waveguides as Open Resonators*, Radio Phys. and Quantum Electronics, vol. 12, pp. 972–978, 1969.
- [18] H. Liu and J. Zou, *Zeros of the Bessel and Spherical Bessel functions and their applications for uniqueness in inverse acoustic obstacle scattering*, IMA Journal of Applied Mathematics (2007) 72, 817–831.
- [19] J.-L. Archambault, R.J. Black, S. Lacroix, and J. Bures, *Loss Calculations for Antiresonant Waveguides*, Journal of Lightwave Technology, vol. 11, no. 3, March 1993.
- [20] G. Humbert, *Optical Fibers in Terahertz Domain*, In: Peng GD. (eds) Handbook of Optical Fibers. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-1477-2_33-1, 2019.
- [21] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*, 3rd ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007.
- [22] J. Munkres, *Algorithms for the Assignment and Transportation Problems*, J. Soc. Ind. Appl. Math., vol. 5, pp. 32–38, 1957.
- [23] Π. Κιόχος, *Στατιστική*, Interbooks, 1993.
- [24] K. Raman, *Fiber Bragg Gratings*, 3rd ed. USA: Academic Press 1999.