ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ & ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Πτυχιακή Εργασία

ΧΕΙΡΑΛΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΥΠΕΡΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ

Διονύσιος Θεοδοσόπουλος

ΑΜ: 1110201600042

Επιβλέπων:
Βασίλειος Κ. Σπανός, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ

Αθήνα
2021

NATIONAL AND KAPODISTRIAN UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF SCIENCE
DEPARTMENT OF PHYSICS
SECTION OF NUCLEAR & PARTICLE PHYSICS

BSc Thesis

CHIRAL AND GAUGE SUPERSYMMETRIC THEORIES

Dionysios Theodosopoulos

1110201600042

Supervisor:
Vassilios C. Spanos, Associate Professor

Athens
2021

Περίληψη

Η παρούσα πτυχιακή εργασία αποτελεί μια ενδελεχή εισαγωγή στις χειραλικές και διανυσματικές υπερσυμμετρικές θεωρίες. Αρχικά, επεκτείνουμε την άλγεβρα της ομάδας Poincaré και κατασκευάζουμε την ομάδα super-Poincaré, στην οποία ανήκουν οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί. Έπειτα, προσδιορίζουμε τις αναπαραστάσεις της ομάδας super-Poincaré και ταξινομούμε τα σωματίδια σε υπερπολλαπλέτες. Στη συνέχεια, μελετάμε την απλούστερη χειραλική υπερσυμμετρική θεωρία, απευθείας από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς των πεδίων, δηλαδή χωρίς τη χρήση υπερπεδίων. Ύστερα, ορίζουμε τα χειραλικά και διανυσματικά υπερπεδία και τα χρησιμοποιούμε, αρχικά, για να κατασκευάσουμε υπερσυμμετρικές Λαγκρανζιανές, οι οποίες θα περιγράφουν συστήματα χειραλικών υπερπολλαπλετών. Ακόλουθα, εξετάζουμε τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες η υπερσυμμετρία σπάει αυθόρμητα και παρουσιάζουμε το αυθόρμητο σπάσιμό της μέσω του $F-όρου$ στις χειραλικές υπερσυμμετρικές θεωρίες. Επιπλέον, μέσω των υπερπεδίων, κατασκευάζουμε την υπερσυμμετρική επέκταση της θεωρίας βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητισμού. Τέλος, εξετάζουμε το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας βαθμίδας, καθώς και το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας μέσω του $D-όρου$.

Abstract

The present thesis is an introduction to chiral and gauge supersymmetric theories. First of all, we extend the Poincaré algebra and construct the super-Poincaré group, to which the supersymmetric transformations belong. Also, we identify the representations of the super-Poincaré group and classify the particles into supermultiplets. Moreover, we study the simplest chiral supersymmetric theory, directly from the supersymmetric transformations of the fields, without the use of superfields. Furthermore, we define the chiral and vector superfields and use them for the construction of supersymmetric Lagrangians, which will describe chiral supersymmetric systems. Additionally, we examine the conditions under which supersymmetry is spontaneously broken and present the $F-term$ supersymmetry breaking. Subsequently, we construct the supersymmetric extension of the electromagnetic gauge theory. Finally, we consider the spontaneous breaking of the gauge symmetry, as well as the $D-term$ supersymmetry breaking.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Υπερσυμμετρική άλγεβρα και πολλαπλέτες....... 1

1.1 Εισαγωγή....................1

1.2 Ομάδα super-Poincaré....................1

1.3 Υπερπολλαπλέτες....................5

1.3.1 Αναπαραστάσεις της ομάδας Poincaré....................5

1.3.2 Τελεστές Casimir της ομάδας super-Poincaré....................9

1.3.3 Αναπαραστάσεις άμαζων σωματιδίων της ομάδας super-Poincaré....................11

1.3.4 Υπερπολλαπλέτες άμαζων σωματιδίων....................14

1.3.5 Αναπαραστάσεις σωματιδίων με μάζα της ομάδας super-Poincaré....................16

1.4 Ελεύθερο μοντέλο Wess-Zumino....................21

Κεφάλαιο 2

Λαγκρανζιανές χειραλικών υπερπεδίων 30

2.1 Εισαγωγή....................30

2.2 Υπερπεδία....................30

2.3 Χειραλικά υπερπεδία....................35

2.4 Λαγκρανζιανές χειραλικών υπερπεδίων....................40

2.4.1 Παράγωγα χειραλικών υπερπεδίων....................40

2.4.2 Επανακανονικοποιημένες υπερσυμμετρικές Λαγκρανζιανές....................42

2.5 Αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας....................44

2.6 Σπάσιμο της υπερσυμμετρίας μέσω του $\boldsymbol{F} - \text{ό}\boldsymbol{\rho o \upsilon}$....................47

Κεφάλαιο 3

Λαγκρανζιανές διανυσματικών υπερπεδίων.... 53

3.1 Εισαγωγή....................53

3.2 Διανυσματικά υπερπεδία....................53

3.3 Υπερσυμμετρική θεωρία βαθμίδας QED....................59

3.4 Αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας βαθμίδας....................69

3.5 Σπάσιμο της υπερσυμμετρίας μέσω του $\boldsymbol{D} - \text{ό}\boldsymbol{\rho o \upsilon}$....................72

Παράρτημα Α

Θεωρία Ομάδων.. 76

Α.1 Εισαγωγή 76

Α.2 Βασικά στοιχεία της θεωρίας ομάδων 76

Α.3 Ομάδα $SU(2)$ 81

Α.3.1 Κατασκευή της ομάδας $SU(2)$ 81

Α.3.2 Η σχέση μεταξύ της $SU(2)$ και της $SO(3)$ 85

Α.3.3 Αναπαραστάσεις της $SU(2)$ 86

Α.4 Ορθόχρονη κανονική ομάδα Lorentz 90

Α.5 Ομάδα Poincaré 93

Παράρτημα Β

Σχετικιστική κβαντομηχανική 97

Β.1 Εισαγωγή..97

Β.2 Εξίσωση Klein-Gordon...97

Β.3 Εξίσωση Dirac...98

Β.4 Σπίνορες Weyl 103

Β.5 Σπίνορες Majorana...106

Παράρτημα Γ

Σημαντικές σχέσεις-ταυτότητες..................... 107

Βιβλιογραφία 113

Κεφάλαιο 1

Υπερσυμμετρική άλγεβρα και πολλαπλέτες

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα επεκτείνουμε την ομάδα Poincaré, ούτως ώστε να περιλαμβάνει και γεννήτορες φερμιονικού χαρακτήρα. Με τον τρόπο αυτό θα κατασκευάσουμε την άλγεβρα της ομάδας super-Poincaré. Αυτή η πράξη θα μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι οι αναπαραστάσεις της ομάδας super-Poincaré δεν χαρακτηρίζονται από τον κβαντικό αριθμό του σπιν. Δηλαδή, στην ίδια αναπαράσταση ανήκουν καταστάσεις με διαφορετικά σπιν. Μάλιστα, θα παρατηρήσουμε ότι η δράση των φερμιονικών γεννητόρων πάνω στις καταστάσεις των σωματιδίων μεταβάλλει το σπιν τους κατά $\frac{1}{2}$. Επομένως, οι φερμιονικοί γεννήτορες μετατρέπουν τις φερμιονικές καταστάσεις σε μποζονικές και το αντίστροφο. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι γεννήτορες αυτοί ονομάζονται γεννήτορες της υπερσυμμετρίας και οι αναπαραστάσεις της ομάδας super-Poincaré μας οδηγούν στις πολλαπλέτες υπερσυμμετρίας.

Στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου, θα κατασκευάσουμε την απλούστερη δυνατή υπερσυμμετρική Λαγκρανζιανή. Η Λαγκρανζιανή αυτή θα περιγράφει το σύστημα δύο ελεύθερων υπερσυμμετρικών παρτενέρ. Συγκεκριμένα, θα περιγράφει το σύστημα ενός ελεύθερου αριστερόστροφου χειραλικού πεδίου και του ελεύθερου υπερσυμμετρικού παρτενέρ του, που είναι ένα ελεύθερο μιγαδικό πεδίο. Το μοντέλο που περιγράφεται από την ανωτέρω Λαγκρανζιανή ονομάζεται ελεύθερο μοντέλο Wess-Zumino.

1.2 Ομάδα super-Poincaré

Η παράγραφος αυτή είναι αφιερωμένη στην εύρεση της άλγεβρας της ομάδας super-Poincaré. Η ομάδα super-Poincaré θα μελετηθεί ως γενίκευση της ομάδας Poincaré. Η ομάδα Poincaré έχει δέκα γεννήτορες (Παράρτημα Α), τρεις γεννήτορες στροφών, τρεις γεννήτορες προωθήσεων Lorentz και τέσσερις γεννήτορες χωροχρονικών μεταθέσεων. Οι γεννήτορες της ομάδα Poincaré γράφονται με τον εξής τρόπο:

Γεννήτορες των χωροχρονικών μεταθέσεων:

$$P^{\mu} = \left(P^0, \vec{P}\right) \tag{1.1}$$

Γεννήτορες των στροφών:

$$\vec{J} = (M^{23}, M^{31}, M^{12}) \tag{1.2}$$

Γεννήτορες των προωθήσεων Lorentz:

$$\vec{K} = (M^{01}, M^{02}, M^{03}) \tag{1.3}$$

Με:
$$\left(M_{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{\ \nu} = i\left(\delta^{\mu}_{\ \alpha}\eta_{\beta\nu} - \delta^{\mu}_{\ \beta}\eta_{\alpha\nu}\right) \tag{1.4}$$

Να σημειωθεί ότι δεχόμαστε την εξής σύμβαση για τη μετρική του Minkowski για τον επίπεδο χωρόχρονο:

$$\eta^{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1) \tag{1.5}$$

Αποδεικνύεται στο παράρτημα Α ότι οι γεννήτορες αυτοί ικανοποιούν τις εξής σχέσεις μετάθεσης:

$$\left[M_{\alpha\beta}, P_{\mu}\right] = i\left(P_{\alpha}\eta_{\beta\mu} - P_{\beta}\eta_{\alpha\mu}\right) \tag{1.6}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}) \tag{1.7}$$

$$\left[P_{\alpha}, P_{\beta}\right] = 0 \tag{1.8}$$

Στη συνέχεια θα εισάγουμε τους γεννήτορες φερμιονικού χαρακτήρα. Για να έχουν φερμιονικό χαρακτήρα οι γεννήτορες θα απαιτήσουμε να μετασχηματίζονται σαν σπίνορες Weyl κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο από εδώ και πέρα θα τους συμβολίζουμε ως εξής: $Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$.

Για να κλείσει η άλγεβρα της ομάδας super-Poincaré πρέπει να αναζητήσουμε τις εξής σχέσεις μετάθεσης και αντιμετάθεσης:

$$[Q_{\alpha}, M^{\mu\nu}] \ , \ \left[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, M^{\mu\nu}\right] \ , \ [Q_{\alpha}, P^{\mu}] \ , \ \left[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, P^{\mu}\right] \ , \ \left\{Q_{\alpha}, Q^{\beta}\right\} \ , \ \left\{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} \ ,$$

$$\left\{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} \tag{1.9}$$

Θα ξεκινήσουμε αναζητώντας τη σχέση: $[Q_{\alpha}, M^{\mu\nu}]$

Όπως προαναφέραμε, ο γεννήτορας Q_{α} πρέπει να μετασχηματίζεται σαν σπίνορας Weyl κάτω από απειροστούς μετασχηματισμούς Lorentz. Οπότε, σύμφωνα με τις σχέσεις (B.42) και (B.44) έχουμε:

$$Q'_{\alpha} = S_1(\Lambda)_{\alpha}^{\ \beta} Q_{\beta} \Rightarrow$$

$$Q'_{\alpha} = \left(\delta_{\alpha}^{\ \beta} + \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\ \beta}\right) Q_{\beta} \Rightarrow$$

$$Q'_{\alpha} = Q_{\alpha} + \tfrac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\ \beta} Q_{\beta} \tag{1.10}$$

Επίσης, επειδή το Q_{α} δρα σαν τελεστής στις καταστάσεις των σωματιδίων, θα μετασχηματίζεται και σαν τελεστής κάτω από απειροστούς μετασχηματισμούς Lorentz:

$$Q'_\alpha = U^\dagger Q_\alpha U \Longrightarrow$$

$$Q'_\alpha = \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) Q_\alpha \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) \Longrightarrow$$

$$Q'_\alpha = Q_\alpha - \tfrac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] + \mathcal{O}\left(\delta\omega_{\mu\nu}{}^2\right) \tag{1.11}$$

Από τις σχέσεις (1.10) και (1.11) προκύπτει το εξής:

$$Q_\alpha - \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = Q_\alpha + \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta \Longrightarrow$$

$$\delta\omega_{\mu\nu}[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = i\delta\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του $\delta\omega_{\mu\nu}$, αρκεί $\delta\omega_{\mu\nu} \ll 1$. Επομένως, ισχύει η σχέση μετάθεσης:

$$[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta \tag{1.12}$$

Από τις σχέσεις (1.12), (Γ.4α), (Γ.4γ), (Γ.3στ) προκύπτει ακόμα μία σχέση μετάθεσης:

$$\left[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, M^{\mu\nu}\right] = i(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} \tag{1.13}$$

Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε τη σχέση μετάθεσης: $[Q_\alpha, P^\mu]$

Θυμίζουμε ότι το Q_α είναι σπίνορας, δηλαδή ο δείκτης α αριθμεί συνιστώσες σπίνορα, ενώ το P^μ είναι τετράνυσμα. Το αντικείμενο με το οποίο θα ισούται η σχέση μετάθεσης $[Q_\alpha, P^\mu]$ πρέπει να έχει δύο ελεύθερους δείκτες α, μ. Η μόνη πιθανή μορφή του αντικειμένου που ψάχνουμε είναι η ακόλουθη:

$$[Q_\alpha, P^\mu] = c(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} \text{ , με } c \in \mathbb{C} \tag{1.14}$$

Από τις σχέσεις (1.14), (Γ.4α), (Γ.4γ), (Γ.3στ) προκύπτει και η εξής σχέση μετάθεσης:

$$\left[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, P^\mu\right] = c^*(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}Q_\alpha \tag{1.15}$$

Για να προσδιορίσουμε το c θα χρειαστούμε την ταυτότητα Jacobi:

$$\left[P^\mu, [P^\nu, Q_\alpha]\right] + \left[P^\nu, [Q_\alpha, P^\mu]\right] + \left[Q_\alpha, [P^\mu, P^\nu]\right] = 0 \tag{1.16}$$

Από τη σχέση (1.8) γνωρίζουμε ότι $[P^\mu, P^\nu] = 0$. Αντικαθιστούμε τη σχέση (1.14) στην ταυτότητα Jacobi και χρησιμοποιούμε τη σχέση (1.15) για να βρούμε το c:

$$-c(\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\alpha}}\left[P^\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] + c(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\left[P^\nu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] = 0 \Longrightarrow$$

$$|c|^2(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu - \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta Q_\beta = 0 \Longrightarrow$$

$$c = 0 \tag{1.17}$$

Εν γένει ισχύει $(\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu} - \sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu})_{\alpha}^{\ \beta} Q_{\beta} \neq 0$. Επομένως ισχύει ότι $c = 0$. Άρα, οι σχέσεις (1.14) και (1.15) παίρνουν την εξής μορφή:

$$[Q_{\alpha}, P^{\mu}] = 0 \tag{1.18}$$

$$[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, P^{\mu}] = 0 \tag{1.19}$$

Στη συνέχεια, θα αναζητήσουμε τη σχέση αντιμετάθεσης: $\{Q_{\alpha}, Q^{\beta}\}$. Η μόνη πιθανή μορφή της σχέσης αυτής είναι η ακόλουθη:

$$\{Q_{\alpha}, Q^{\beta}\} = k(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\ \beta} M_{\mu\nu} \ \ , k \in \mathbb{C} \tag{1.20}$$

Παρατηρούμε πως το αριστερό μέλος της εξίσωσης μετατίθεται με το P^{μ}, σχέση (1.18). Το δεξί μέλος της εξίσωσης δεν μετατίθεται με το P^{μ}, σχέση (1.6). Προφανώς λοιπόν ισχύει ότι $k = 0$. Όμοια επιχειρηματολογία ακολουθούμε και για την εύρεση της $\{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}$. Καταλήγουμε λοιπόν στις εξής σχέσεις αντιμετάθεσης:

$$\{Q_{\alpha}, Q^{\beta}\} = \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{1.21}$$

Τέλος, αναζητούμε την σχέση αντιμετάθεσης: $\{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}$. Η μόνη πιθανή μορφή της σχέσης αυτής είναι η ακόλουθη:

$$\{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}} P_{\mu} \tag{1.22}$$

Να σημειωθεί ότι συμβατικά βάλαμε το 2 στην τελευταία σχέση.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να συγκεντρώσουμε τις σχέσης μετάθεσης και αντιμετάθεσης των γεννητόρων της ομάδας super-Poincaré.

$$[M_{\alpha\beta}, P_{\mu}] = i(P_{\alpha}\eta_{\beta\mu} - P_{\beta}\eta_{\alpha\mu}) \tag{1.23α}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}) \tag{1.23β}$$

$$[P_{\alpha}, P_{\beta}] = 0 \tag{1.23γ}$$

$$[Q_{\alpha}, M^{\mu\nu}] = i(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\ \beta} Q_{\beta} \tag{1.23δ}$$

$$[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, M^{\mu\nu}] = i(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \tag{1.23ε}$$

$$[Q_{\alpha}, P^{\mu}] = 0 \tag{1.23στ}$$

$$[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, P^{\mu}] = 0 \tag{1.23ζ}$$

$$\{Q_{\alpha}, Q^{\beta}\} = \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{1.23η}$$

$$\{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}} P_{\mu} \tag{1.23θ}$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν την άλγεβρα των γεννητόρων της ομάδας super-Poincaré και θα είναι η αφετηρία μας για τη μελέτη υπερσυμμετρικών συστημάτων.

1.3 Υπερπολλαπλέτες

Σε αυτή την παράγραφο θα αναζητήσουμε τις αναπαραστάσεις της ομάδας super-Poincaré. Αρχικά, θα βρούμε τις αναπαραστάσεις της ομάδας Poincaré, που θα περιγράφουν σωμάτια με μάζα και χωρίς. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τις αναπαραστάσεις της ομάδας Poincaré και με κατάλληλους τελεστές ανάβασης και κατάβασης θα κατασκευάσουμε τις αναπαραστάσεις της ομάδας super-Poincaré. Τέλος, οι αναπαραστάσεις της super-Poincaré, ανάλογα με τους κβαντικούς αριθμούς που τις χαρακτηρίζουν, θα αντιστοιχούν σε υπερπολλαπλέτες, οι οποίες θα δούμε ότι περιέχουν καταστάσεις σωματιδίων και των υπερσυμμετρικών παρτενέρ τους.

1.3.1 Αναπαραστάσεις της ομάδας Poincaré

Θα ξεκινήσουμε με την εύρεση των αναπαραστάσεων της ομάδας Poincaré, η οποία έχει δύο τελεστές Casimir. Οι τελεστές Casimir έχουν την ιδιότητα να μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες της ομάδας, με αποτέλεσμα να έχουν κοινές ιδιοκαταστάσεις με αυτούς. Οι τελεστές Casimir της ομάδας Poincaré είναι οι εξής:

$$C_1 = P^{\mu}P_{\mu} \quad \text{και} \quad C_2 = W^{\mu}W_{\mu} \tag{1.24}$$

Με
$$W_{\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^{\nu}M^{\rho\sigma} \;\; \text{και} \;\; W^{\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_{\nu}M_{\rho\sigma} \tag{1.25}$$

Το ψευδο-διάνυσμα W_{μ} ονομάζεται ψευδο-διάνυσμα Pauli – Lubanski. Χρησιμοποιούμε τον πλήρως αντισυμμετρικό τανυστή τέταρτης τάξης $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ με τη σύμβαση: $\varepsilon_{0123} = 1$, η ανταλλοίωτη μορφή του οποίου είναι η εξής: $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\eta^{\rho\gamma}\eta^{\sigma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Το W_{μ} ικανοποιεί τις σχέσεις μετάθεσης:

$$[W_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \tag{1.26α}$$

$$[M_{\alpha\beta}, W_{\mu}] = i(W_{\alpha}\eta_{\beta\mu} - W_{\beta}\eta_{\alpha\mu}) \tag{1.26β}$$

$$[W_{\mu}, W_{\nu}] = i\varepsilon_{\mu\tau\rho\nu}P^{\tau}W^{\rho} \tag{1.26γ}$$

$$[W^{\mu}, Q_{\alpha}] = -P_{\nu}(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\;\beta}Q_{\beta} \tag{1.26δ}$$

$$[W_{\mu}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = P^{\nu}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\;\;\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} \tag{1.26ε}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τις σχέσεις (1.26) ξεκινώντας από τη σχέση: $[W_{\mu}, P_{\nu}] = 0$. Στις πράξεις που θα ακολουθήσουν θα κάνουμε χρήση των σχέσεων $[P_{\alpha}, P_{\beta}] = 0$ και $[M^{\rho\sigma}, P_{\nu}] = i(P^{\rho}\delta^{\sigma}{}_{\nu} - P^{\sigma}\delta^{\rho}{}_{\nu})$ οι οποίες προκύπτουν από τις (1.23).

$$[W_{\mu}, P_{\nu}] = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\tau\rho\sigma}P^{\tau}M^{\rho\sigma}P_{\nu} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\tau\rho\sigma}P_{\nu}P^{\tau}M^{\rho\sigma} =$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\tau\rho\sigma}\left(P^{\tau}P_{\nu}M^{\rho\sigma}+P^{\tau}i\left(P^{\rho}\delta^{\sigma}{}_{\nu}-P^{\sigma}\delta^{\rho}{}_{\nu}\right)-P^{\tau}P_{\nu}M^{\rho\sigma}\right)=$$

$$\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\tau\rho\nu}P^{\tau}P^{\rho}-\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\tau\nu\sigma}P^{\tau}P^{\sigma}=$$

$$i\varepsilon_{\mu\tau\rho\nu}P^{\tau}P^{\rho}=0 \qquad (1.27)$$

Η ισότητα: $i\varepsilon_{\mu\tau\rho\nu}P^{\tau}P^{\rho}=0$ προέκυψε διότι οι τελεστές P^{τ},P^{σ} μετατίθενται μεταξύ τους, ενώ η εναλλαγή δύο διαδοχικών δεικτών του πλήρους αντισυμμετρικού συμβόλου δημιουργεί ένα -1 μπροστά από την έκφραση. Για παράδειγμα, έστω ότι $\mu=1$ και $\nu=4$:

$$i\varepsilon_{1\tau\rho4}P^{\tau}P^{\rho}=i\varepsilon_{1234}P^{2}P^{3}+i\varepsilon_{1324}P^{3}P^{2}=i\varepsilon_{1234}P^{2}P^{3}-i\varepsilon_{1234}P^{2}P^{3}=0$$

Αποδείξαμε λοιπόν τη σχέση (1.26α). Η σχέση $\left[M_{\alpha\beta},W_{\mu}\right]=i\left(W_{\alpha}\eta_{\beta\mu}-W_{\beta}\eta_{\alpha\mu}\right)$ έχει αποδειχθεί ήδη, διότι το W_{μ} είναι ψευδο-διάνυσμα οπότε μετασχηματίζεται όπως το P_{μ} κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, επομένως μπορούμε να ακολουθήσουμε τη διαδικασία απόδειξης της σχέσης $\left[M_{\alpha\beta},P_{\mu}\right]=i\left(P_{\alpha}\eta_{\beta\mu}-P_{\beta}\eta_{\alpha\mu}\right)$ έχοντας αντικαταστήσει το P_{μ} με το W_{μ}. Η απόδειξη της σχέσης $\left[M_{\alpha\beta},P_{\mu}\right]=i\left(P_{\alpha}\eta_{\beta\mu}-P_{\beta}\eta_{\alpha\mu}\right)$ γίνεται στο παράρτημα Α.

Η σχέση: $\left[W_{\mu},W_{\nu}\right]=i\varepsilon_{\mu\tau\rho\nu}P^{\tau}W^{\rho}$ αποδεικνύεται εύκολα ως εξής:

$$\left[W_{\mu},W_{\nu}\right]=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\tau\rho\sigma}[P^{\tau}M^{\rho\sigma},W_{\nu}]=$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\tau\rho\sigma}(P^{\tau}[M^{\rho\sigma},W_{\nu}]-[W_{\nu},P^{\tau}]M^{\rho\sigma})=$$

$$\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\tau\rho\sigma}P^{\tau}\left(\delta_{\nu}{}^{\sigma}W^{\rho}-\delta_{\nu}{}^{\rho}W^{\sigma}\right)=$$

$$\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\tau\rho\nu}P^{\tau}W^{\rho}-\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\tau\nu\sigma}P^{\tau}W^{\sigma}=$$

$$\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\tau\rho\nu}P^{\tau}W^{\rho}-\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\tau\nu\rho}P^{\tau}W^{\rho}\Longrightarrow$$

$$\left[W_{\mu},W_{\nu}\right]=i\varepsilon_{\mu\tau\rho\nu}P^{\tau}W^{\rho} \qquad (1.28)$$

Κατά τη διαδικασία της απόδειξης κάναμε χρήση των σχέσεων: $\left[W_{\mu},P_{\nu}\right]=0$ και $[M^{\rho\sigma},W_{\nu}]=i\left(\delta_{\nu}{}^{\sigma}W^{\rho}-\delta_{\nu}{}^{\rho}W^{\sigma}\right)$, οι οποίες προέρχονται από τις σχέσεις (1.26α) και (1.26β) αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε τη σχέση: $[W^{\mu},Q_{\alpha}]=-iP_{\nu}(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}Q_{\beta}$.

$$[W^\mu, Q_\alpha] = \frac{\eta^{\mu\tau}}{2}\varepsilon_{\tau\nu\rho\sigma}[P^\nu M^{\rho\sigma}, Q_\alpha] =$$

$$\frac{\eta^{\mu\tau}}{2}\varepsilon_{\tau\nu\rho\sigma}(P^\nu[M^{\rho\sigma}, Q_\alpha] - [Q_\alpha, P^\nu]M^{\rho\sigma}) =$$

$$-i\frac{\eta^{\mu\tau}}{2}\varepsilon_{\tau\nu\rho\sigma}P^\nu(\sigma^{\rho\sigma})_\alpha^{\ \beta}Q_\beta =$$

$$-\eta^{\mu\tau}P^\nu(\sigma_{\tau\nu})_\alpha^{\ \beta}Q_\beta =$$

$$-P_\nu(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}Q_\beta \Longrightarrow$$

$$[W^\mu, Q_\alpha] = -P_\nu(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}Q_\beta \tag{1.29}$$

Κατά τη διαδικασία της απόδειξης κάναμε χρήση των σχέσεων (1.23δ) και (1.23στ). Επιπλέον, χρησιμοποιήσαμε τη σχέση: $\varepsilon_{\tau\nu\rho\sigma}\sigma^{\rho\sigma} = -2i\sigma_{\tau\nu}$, η οποία μπορεί να αποδειχθεί δοκιμάζοντας όλους τους συνδυασμούς των δεικτών τ, ν, ρ, σ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (B.35).

Τέλος, θα αποδείξουμε τη σχέση: $\left[W_\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] = P^\nu\left(\bar{\sigma}_{\mu\nu}\right)^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}}$.

$$\left[W_\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left[P^\nu M^{\rho\sigma}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(P^\nu\left[M^{\rho\sigma}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] - \left[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, P^\nu\right]M^{\rho\sigma}\right) =$$

$$-i\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu(\bar{\sigma}^{\rho\sigma})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} \Longrightarrow$$

$$\left[W_\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] = P^\nu\left(\bar{\sigma}_{\mu\nu}\right)^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} \tag{1.30}$$

Κατά τη διαδικασία της απόδειξης κάναμε χρήση των σχέσεων (1.23ε), (1.23ζ) και της σχέσης: $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\sigma}^{\rho\sigma} = 2i\bar{\sigma}_{\mu\nu}$.

Οι σχέσεις (1.26) θα μας χρειαστούν για να αποδείξουμε ότι έχει γίνει σωστή επιλογή τελεστών Casimir. Θα επιβεβαιώσουμε λοιπόν ότι οι τελεστές Casimir μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες της ομάδας Poincaré. Αρχικά, μέσω των σχέσεων (1.23) παρατηρούμε ότι ο τελεστής $C_1 = P^\mu P_\mu$ μετατίθεται με τους τελεστές P_μ, ενώ με λίγες πράξεις μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι μετατίθεται και με τους τελεστές $M^{\rho\sigma}$. Επιπρόσθετα, μέσω των σχέσεων (1.26) είναι προφανές ότι και ο $C_2 = W^\mu W_\mu$ μετατίθεται με τους τελεστές P_μ. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι μετατίθεται και με τους $M^{\rho\sigma}$:

$$\left[W^\mu W_\mu, M^{\rho\sigma}\right] = W^\mu\left[W_\mu, M^{\rho\sigma}\right] + \left[W_\mu, M^{\rho\sigma}\right]W^\mu =$$

$$-iW^{\mu}\left(W^{\rho}\delta_{\mu}{}^{\sigma} - W^{\sigma}\delta_{\mu}{}^{\rho}\right) - i\left(W^{\rho}\delta_{\mu}{}^{\sigma} - W^{\sigma}\delta_{\mu}{}^{\rho}\right)W^{\mu} =$$

$$-i[W^{\sigma}, W^{\rho}] + i[W^{\sigma}, W^{\rho}] = 0 \Longrightarrow$$

$$\left[W^{\mu}W_{\mu}, M^{\rho\sigma}\right] = 0 \tag{1.31}$$

Για την απόδειξη χρησιμοποιήσαμε τη σχέση:

$$\left[W_{\mu}, M^{\rho\sigma}\right] = -i\left(W^{\rho}\delta_{\mu}{}^{\sigma} - W^{\sigma}\delta_{\mu}{}^{\rho}\right) \tag{1.32}$$

η οποία προκύπτει άμεσα από τη σχέση (1.26β).

Στο σημείο αυτό έχουμε τους τελεστές Casimir που χρειαζόμαστε και είμαστε έτοιμοι να βρούμε τις αναπαραστάσεις της ομάδας Poincaré. Αρχικά, θα αναζητήσουμε αναπαραστάσεις που θα περιγράφουν καταστάσεις σωματιδίων με μάζα m. Οι καταστάσεις των σωματιδίων χαρακτηρίζονται από κβαντικούς αριθμούς, τους οποίους θα αναζητήσουμε για να προσδιορίσουμε τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις.

Ο τελεστής $C_1 = P^{\mu}P_{\mu}$ είναι προφανές ότι θα έχει ιδιοτιμή το m^2. Ο τελεστής C_1 μετατίθεται με τον P^{μ}, ο οποίος έχει ιδιοτιμές p^{μ}. Επομένως, οι δύο τελεστές έχουν κοινές ιδιοκαταστάσεις, οι οποίες χαρακτηρίζονται από τις ποσότητες m, p^{μ}. Η δουλειά μας όμως δεν τελειώνει εδώ, διότι οι τελεστές C_1, P^{μ} μετατίθενται με τον C_2, οι ιδιοτιμές του οποίου θα χαρακτηρίζουν και αυτές την κατάσταση του σωματιδίου. Έστω ότι η τετραορμή του σωματιδίου έχει την εξής μορφή: $p^{\mu} = (m, 0,0,0)$. Πάντα υπάρχει σύστημα αναφοράς στο οποίο η τετραορμή του σωματιδίου παίρνει την ανωτέρω μορφή. Ο τελεστής W_{μ} παίρνει τη μορφή:

$$W_{\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^{\nu}M^{\rho\sigma} \Longrightarrow$$

$$W_{\mu} = \frac{m}{2}\varepsilon_{\mu 0\rho\sigma}M^{\rho\sigma} \tag{1.33}$$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι ισχύει το εξής:

$$W_{\mu} = -m\left(0, \vec{J}\right) \tag{1.34}$$

Με: $$\vec{J} = (M^{23}, M^{31}, M^{12}) \tag{1.35}$$

Προφανώς ισχύει ότι: $$C_2 = W^{\mu}W_{\mu} = -m^2J^2 \tag{1.36}$$

Από τις αναπαραστάσεις της ομάδας $SU(2)$ (Παράρτημα Α) γίνεται φανερό ότι ο τελεστής C_2 έχει ιδιοτιμές $-m^2j(j+1)$, με $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, ο οποίος είναι ο κβαντικός αριθμός του σπιν. Τέλος, ο τελεστής W_3 μετατίθεται με τους C_1, P^{μ}, C_2 αλλά όχι με τους W_1, W_2 και έχει ιδιοτιμές $j_3: -j \leq j_3 \leq j$. Το j_3 παίρνει ακέραιες και ημιακέραιες τιμές. Συνοψίζοντας, οι καταστάσεις των σωματιδίων με μάζα m καθορίζονται από τις ποσότητες m, j, p^{μ}, j_3 και μπορούν να συμβολιστούν ως εξής: $|m, j; p^{\mu}, j_3\rangle$.

Στη συνέχεια, θα αναζητήσουμε τις αναπαραστάσεις για σωματίδια χωρίς μάζα.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, επιλέγουμε σωμάτια με τετραορμή: $p^\mu = (E, 0,0, E)$. Ο τελεστής C_1 προφανώς έχει μηδενικές ιδιοτιμές. Ο τελεστής C_2 έχει επίσης μηδενικές ιδιοτιμές λόγω της μηδενικής μάζας των σωματιδίων, όπως φαίνεται από τη σχέση (1.36). Επομένως, οι καταστάσεις των σωματιδίων θα καθορίζονται από τις ιδιοτιμές γεννητόρων της ομάδας, που μετατίθενται μεταξύ τους. Όπως και πριν, ο τελεστής P^μ έχει ιδιοτιμές p^μ. Επίσης, αναφέρουμε ότι το ψευδο-διάνυσμα W_μ επιλέγεται να είναι παράλληλο στο P_μ, δηλαδή να έχει την εξής μορφή:

$$W_\mu = \lambda P_\mu \tag{1.37}$$

Όπως έχουμε προαναφέρει, ο τελεστής W_μ μετατίθεται με τον P_μ. Επίσης, είναι προφανές ότι έχει ιδιοτιμές: λp_μ. Οπότε, οι καταστάσεις των σωματιδίων θα χαρακτηρίζονται από τα μεγέθη λ, p_μ. Είναι λοιπόν μείζονος σημασίας να βρούμε σε ποιο φυσικό μέγεθος αντιστοιχεί το λ. Από τη σχέση (1.25) γνωρίζουμε ότι:

$$W_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_{0\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma} \Longrightarrow$$

$$W_0 = \vec{P}\vec{J} \tag{1.38}$$

Από τη σχέση (1.37) γνωρίζουμε επίσης το εξής:

$$W_0 = \lambda P_0 \tag{1.39}$$

Από τις σχέσεις (1.38) και (1.39) προκύπτει ότι:

$$\lambda P_0 = \vec{P}\vec{J} \Longrightarrow$$

$$\lambda = \frac{\vec{p}\vec{J}}{p_0} \tag{1.40}$$

Στην περίπτωση των άμαζων σωματιδίων το p_0 ισούται με το μέτρο της ορμής. Επομένως, η σχέση (1.40) είναι ο ορισμός της ελικότητας, η οποία είναι η προβολή του σπιν του σωματιδίου στην διεύθυνση της κίνησής του.

Συνοψίζοντας, στην περίπτωση των άμαζων σωματιδίων, οι ιδιοτιμές των τελεστών Casimir είναι μηδέν, επομένως οι καταστάσεις των σωματιδίων χαρακτηρίζονται μόνο από τις ιδιοτιμές των τελεστών W_μ, P_μ, οι οποίες είναι οι: λ, p_μ. Μπορούμε λοιπόν να συμβολίσουμε τις καταστάσεις των άμαζων σωματιδίων ως εξής: $|p^\mu, \lambda\rangle$.

1.3.2 Τελεστές Casimir της ομάδας super-Poincaré

Στο σημείο αυτό, θα αναζητήσουμε τους τελεστές Casimir της ομάδας super-Poincaré. Μέσω των σχέσεων (1.23) μπορεί να επιβεβαιώσει κανείς ότι ο τελεστής $C_1 = P^\mu P_\mu$ είναι ένας από τους δύο τελεστές Casimir που αναζητάμε, διότι μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες της ομάδας. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε αν ο δεύτερος τελεστής Casimir της ομάδας Poincaré $\left(C_2 = W^\mu W_\mu\right)$ πληροί τις προϋποθέσεις για να είναι τελεστής Casimir της ομάδας super-Poincaré. Θα ελέγξουμε λοιπόν αν ο C_2 μετατίθεται με τον γεννήτορα Q_α.

$$\left[W^\mu W_\mu, Q_\alpha\right] = W_\mu[W^\mu, Q_\alpha] + [W^\mu, Q_\alpha]W_\mu =$$

$$-W_\mu P_\nu(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta - P_\nu(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta W_\mu \Longrightarrow$$

$$\left[W^\mu W_\mu, Q_\alpha\right] = -P_\nu(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\left\{W_\mu, Q_\beta\right\} \neq 0 \qquad (1.41)$$

Κατά τη διάρκεια των πράξεων χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (1.26δ). Επίσης, εν γένει ισχύει $\left\{W_\mu, Q_\beta\right\} \neq 0$.

Έχουμε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι ο τελεστής $W^\mu W_\mu$ δεν είναι τελεστής Casimir της ομάδας super-Poincaré, διότι δεν μετατίθεται με τον γεννήτορα Q_α. Στην προσπάθειά μας να βρούμε τον δεύτερο τελεστή Casimir της super-Poincaré ορίζουμε τον εξής τελεστή:

$$C_2 = C^{\mu\nu}C_{\mu\nu} \qquad (1.42)$$

Με: $$C_{\mu\nu} = B_\mu P_\nu - B_\nu P_\mu \qquad (1.43)$$

Και: $$B_\mu = W_\mu - \tfrac{1}{4}\bar{Q}_{\dot\alpha}\left(\bar{\sigma}_\mu\right)^{\dot\alpha\beta} Q_\beta \qquad (1.44)$$

Ο τελεστής $C_2 = C^{\mu\nu}C_{\mu\nu}$ προφανώς μετατίθεται με τον τελεστή P_μ. Επιπρόσθετα, μετατίθεται με τους τελεστές $M^{\rho\sigma}, Q_\beta, \bar{Q}_{\dot\alpha}$. Η τελευταία δήλωση αποδεικνύεται μέσω των σχέσεων μετάθεσης (1.23), (1.26). Η αναλυτική απόδειξη είναι εκτενής και δεν παρατίθεται στην εργασία. Συμπερασματικά, έχουμε τον δεύτερο τελεστή Casimir που ψάχναμε.

Οι αναπαραστάσεις της ομάδας super-Poincaré χαρακτηρίζονται από τις ιδιοτιμές των δύο τελεστών Casimir, τους οποίους γνωρίζουμε. Για να προσδιορίσουμε όμως τις καταστάσεις των σωματιδίων που ανήκουν σε κάθε αναπαράσταση πρέπει να κάνουμε ακόμα μία παρατήρηση. Σε κάθε αναπαράσταση υπάρχει κάποια κατάσταση $|\psi\rangle$ του σωματιδίου για την οποία ισχύει: $Q_\alpha|\psi\rangle = 0$. Η πρόταση αυτή αποδεικνύεται ως εξής:

Έστω μια αναπαράσταση της super-Poincaré και μια κατάστασή της $|\psi\rangle$ για την οποία ισχύει το εξής: $Q_\alpha|\psi\rangle \neq 0$. Η κατάσταση $|\psi'\rangle = Q_\alpha|\psi\rangle$ επίσης ανήκει στην ίδια αναπαράσταση. Από τη σχέση (1.23η) είναι προφανές ότι ισχύει $Q_\alpha Q_\alpha = 0$. Επομένως, μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι ισχύει $Q_\alpha|\psi'\rangle = 0$. Κατανοούμε λοιπόν πως σε κάθε αναπαράσταση μπορεί να βρεθεί κατάσταση για την οποία να ισχύει $Q_\alpha|\psi'\rangle = 0$.

1.3.3 Αναπαραστάσεις άμαζων σωματιδίων της ομάδας super-Poincaré

Αρχικά, θα αναζητήσουμε τις αναπαραστάσεις άμαζων σωματιδίων, διότι τα συστήματα άμαζων σωματιδίων τα οποία αποκτούν μάζα μετά το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε σωμάτια με τετραορμή: $p^{\mu} = (E, 0{,}0, E)$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι ιδιοτιμές των δύο τελεστών Casimir είναι μηδέν. Οι ιδιοτιμές του $C_1 = P^{\mu}P_{\mu}$ μηδενίζονται με προφανή τρόπο. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι και οι ιδιοτιμές του $C_2 = C^{\mu\nu}C_{\mu\nu}$ μηδενίζονται:

$$C_2 = C^{\mu\nu}C_{\mu\nu} =$$

$$(B^{\mu}P^{\nu} - B^{\nu}P^{\mu})\big(B_{\mu}P_{\nu} - B_{\nu}P_{\mu}\big) =$$

$$2B^{\mu}B_{\mu}P^{\nu}P_{\nu} - 2\big(B^{\mu}P_{\mu}\big)^2 \Longrightarrow$$

$$C_2 = -2\big(B^{\mu}P_{\mu}\big)^2 \tag{1.45}$$

Θα αναζητήσουμε το $B^{\mu}P_{\mu}$ όταν $p^{\mu} = (E, 0{,}0, E)$. Θυμίζουμε ότι $W_{\mu} = \lambda P_{\mu}$, άρα $W_{\mu}P^{\mu} = 0$.

$$B^{\mu}P_{\mu} = W_{\mu}P^{\mu} - \frac{1}{4}P_{\mu}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}Q_{\beta} =$$

$$-\frac{1}{4}E\bar{Q}_{\dot{\alpha}}(\sigma^0)^{\dot{\alpha}\beta}Q_{\beta} - \frac{1}{4}(-E)\bar{Q}_{\dot{\alpha}}(-\sigma^3)^{\dot{\alpha}\beta}Q_{\beta} =$$

$$-\frac{1}{4}E(\bar{Q}_{\dot{1}}Q_1 + \bar{Q}_{\dot{2}}Q_2) - \frac{1}{4}E(\bar{Q}_{\dot{1}}Q_1 - \bar{Q}_{\dot{2}}Q_2) \Longrightarrow$$

$$B^{\mu}P_{\mu} = -\tfrac{1}{2}E\bar{Q}_{\dot{1}}Q_1 \tag{1.46}$$

Από τις (1.45) και (1.46) συνεπάγεται:

$$C_2 = -\tfrac{1}{2}E^2\bar{Q}_{\dot{1}}Q_1\bar{Q}_{\dot{1}}Q_1 \tag{1.47}$$

Από τη σχέση (1.23β) γνωρίζουμε ότι:

$$\{Q_1, \bar{Q}_{\dot{1}}\} = 2(\sigma^{\mu})_{1\dot{1}}P_{\mu} = 2E - 2E \Longrightarrow$$

$$\{Q_1, \bar{Q}_{\dot{1}}\} = 0 \Longrightarrow$$

$$Q_1\bar{Q}_{\dot{1}} = -\bar{Q}_{\dot{1}}Q_1 \tag{1.48}$$

Από τις (1.47) και (1.48) έχουμε:

$$C_2 = \frac{1}{2}E^2\bar{Q}_{\dot{1}}\bar{Q}_{\dot{1}}Q_1Q_1 \Longrightarrow$$

$$C_2 = 0 \tag{1.49}$$

Αποδείχθηκε ότι οι ιδιοτιμές των δύο τελεστών Casimir είναι μηδέν. Επίσης, ο τελεστής $W_\mu = \lambda P_\mu$ έχει τη μορφή γεννήτορα της ομάδας super-Poincaré στην περίπτωση που εξετάζουμε $p^\mu = (E, 0{,}0, E)$. Επομένως, οι καταστάσεις των σωματιδίων στις αναπαραστάσεις της super-Poincaré θα έχουν εξάρτηση από τις ποσότητες λ, p^μ, όπως και στην περίπτωση των αναπαραστάσεων της ομάδας Poincaré. Οι αναπαραστάσεις της ομάδας super-Poincaré θα κατασκευαστούν παίρνοντας μια κατάσταση $|p^\mu, \lambda\rangle$ και δρώντας σε αυτήν με κατάλληλους τελεστές ανάβασης και κατάβασης. Εφόσον αναζητάμε τις αναπαραστάσεις της super-Poincaré και επειδή η πληροφορία των γεννητόρων της Poincaré έχει ήδη ενσωματωθεί στην κατάσταση $|p^\mu, \lambda\rangle$ μέσω των τιμών λ, p^μ, περιμένουμε οι γεννήτορες $Q_{\alpha,}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ να παίζουν το ρόλο των τελεστών ανάβασης και κατάβασης. Για να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό ας αναζητήσουμε τη μορφή της σχέσης αντιμετάθεσης $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu$ στην ειδική περίπτωση που μελετάμε.

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \Longrightarrow$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2E(\sigma^0 - \sigma^3)_{\alpha\dot{\beta}} \Longrightarrow$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 4E \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\beta}} \Longrightarrow$$

$$\{Q_1, \bar{Q}_{\dot{1}}\} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \{Q_2, \bar{Q}_{\dot{2}}\} = 4E \tag{1.50}$$

Αναζητάμε τη δράση των $Q_1, \bar{Q}_{\dot{1}}$ πάνω στις καταστάσεις $|p^\mu, \lambda\rangle$ ως εξής:

$$\langle p^\mu, \lambda | Q_1 \bar{Q}_{\dot{1}} + \bar{Q}_{\dot{1}} Q_1 | p^\mu, \lambda\rangle = 0 \Longrightarrow$$

$$\langle p^\mu, \lambda | Q_1 \bar{Q}_{\dot{1}} | p^\mu, \lambda\rangle + \langle p^\mu, \lambda | \bar{Q}_{\dot{1}} Q_1 | p^\mu, \lambda\rangle = 0 \tag{1.51}$$

Ισχύει ότι $\langle p^\mu, \lambda | Q_1 \bar{Q}_{\dot{1}} | p^\mu, \lambda\rangle \geq 0$ και $\langle p^\mu, \lambda | \bar{Q}_{\dot{1}} Q_1 | p^\mu, \lambda\rangle \geq 0$, επομένως πρέπει να ισχύει ταυτόχρονα $\langle p^\mu, \lambda | Q_1 \bar{Q}_{\dot{1}} | p^\mu, \lambda\rangle = 0$ και $\langle p^\mu, \lambda | \bar{Q}_{\dot{1}} Q_1 | p^\mu, \lambda\rangle = 0$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι:

$$Q_1 | p^\mu, \lambda\rangle = 0 \ \text{ και } \ \bar{Q}_{\dot{1}} | p^\mu, \lambda\rangle = 0 \tag{1.52}$$

Μένει να αναζητήσουμε τη δράση των $Q_2, \bar{Q}_{\dot{2}}$ πάνω στις καταστάσεις $|p^\mu, \lambda\rangle$. Αρχικά, κανονικοποιούμε τη σχέση αντιμετάθεσης $\{Q_2, \bar{Q}_{\dot{2}}\} = 4E$ ορίζοντας τους τελεστές:

$$a = \frac{Q_2}{2\sqrt{E}} \quad \text{και} \quad a^\dagger = \frac{\bar{Q}_{\dot{2}}}{2\sqrt{E}} \tag{1.53}$$

οι οποίοι αντιμετατίθενται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\{a, a^\dagger\} = 1 \quad , \quad \{a, a\} = 0 \quad , \quad \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \tag{1.54}$$

Τώρα, θα αναζητήσουμε τις σχέσεις μετάθεσης $[W^0, a]$ και $[W_0, a^\dagger]$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.26δ) και (1.26ε).

$$[W^0, a] = -P_3(\sigma^{03})_2{}^2 a = \frac{1}{2}E(-\sigma^3)_2{}^2 a \Longrightarrow$$

$$[W^0, a] = \tfrac{1}{2}Ea \tag{1.55}$$

$$\left[W_0, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] = P^\nu(\bar{\sigma}_{0\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} = E(\bar{\sigma}_{03})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} \Longrightarrow$$

$$\left[W_0, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] = -\tfrac{1}{2}E(\sigma^3)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} \tag{1.56}$$

Από τη σχέση (Β.39α) γνωρίζουμε ότι:

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} \Longrightarrow$$

$$\bar{Q}_{\dot{1}} = \bar{Q}^{\dot{2}} \quad \text{και} \quad \bar{Q}_{\dot{2}} = -\bar{Q}^{\dot{1}} \tag{1.57}$$

Από τις σχέσεις (1.56) και (1.57) ξέρουμε το εξής:

$$\left[W_0, \bar{Q}^{\dot{1}}\right] = -\frac{1}{2}E(\sigma^3)^{\dot{1}}{}_{\dot{1}}\bar{Q}^{\dot{1}} \Longrightarrow$$

$$\left[W_0, \bar{Q}^{\dot{1}}\right] = -\frac{1}{2}E\bar{Q}^{\dot{1}} \Longrightarrow$$

$$[W_0, \bar{Q}_{\dot{2}}] = -\frac{1}{2}E\bar{Q}_{\dot{2}} \Longrightarrow$$

$$[W_0, a^\dagger] = -\tfrac{1}{2}Ea^\dagger \tag{1.58}$$

Τώρα που γνωρίζουμε τις σχέσεις μετάθεσης (1.55), (1.58) είμαστε έτοιμοι να βρούμε τη δράση των τελεστών $a, a^\dagger$ στις καταστάσεις $|p^\mu, \lambda\rangle$. Από τη σχέση (1.37) γνωρίζουμε:

$$W^0|p^\mu, \lambda\rangle = \lambda E|p^\mu, \lambda\rangle \Longrightarrow$$

$$\alpha W^0|p^\mu, \lambda\rangle = \lambda E\alpha|p^\mu, \lambda\rangle \Longrightarrow$$

$$W^0\alpha|p^\mu, \lambda\rangle - \frac{1}{2}Ea|p^\mu, \lambda\rangle = \lambda E\alpha|p^\mu, \lambda\rangle \Longrightarrow$$

$$W^0\alpha|p^\mu, \lambda\rangle = \left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right)E\alpha|p^\mu, \lambda\rangle \tag{1.59}$$

Επίσης, από τη σχέση (1.37) γνωρίζουμε το εξής:

$$W_0|p^\mu, \lambda\rangle = \lambda E|p^\mu, \lambda\rangle \Longrightarrow$$

$$a^\dagger W_0|p^\mu, \lambda\rangle = \lambda Ea^\dagger|p^\mu, \lambda\rangle \Longrightarrow$$

$$W_0 a^\dagger|p^\mu, \lambda\rangle + \frac{1}{2}Ea^\dagger|p^\mu, \lambda\rangle = \lambda Ea^\dagger|p^\mu, \lambda\rangle \Longrightarrow$$

$$W_0 a^\dagger|p^\mu,\lambda\rangle = \left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right) E a^\dagger|p^\mu,\lambda\rangle \tag{1.60}$$

Οι καταστάσεις $\alpha|p^\mu,\lambda\rangle$ και $a^\dagger|p^\mu,\lambda\rangle$ ανήκουν στην ίδια αναπαράσταση με την κατάσταση $|p^\mu,\lambda\rangle$ και μάλιστα είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή W^μ με ιδιοτιμές $\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) E$ και $\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) E$ αντίστοιχα. Επομένως, οι σχέσεις (1.59) και (1.60) μας οδηγούν στο εξής όμορφο συμπέρασμα, οι τελεστές $a, a^\dagger$ δρώντας σε μία κατάσταση $|p^\mu,\lambda\rangle$ μεταβάλλουν την ελικότητά της και κατά επέκταση το σπιν της κατά $\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Επομένως, οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ μετατρέπουν τις φερμιονικές καταστάσεις σε μποζονικές και το αντίστροφο. Οι τελεστές $a, a^\dagger$ ονομάζονται τελεστές ανάβασης και κατάβασης αντίστοιχα.

Ας κατασκευάσουμε τις αναπαραστάσεις της ομάδας super-Poincaré για άμαζα σωματίδια. Έστω πως η κατάσταση $|p^\mu,\lambda\rangle$ είναι αυτή για την οποία ισχύει:

$$Q_2|p^\mu,\lambda\rangle = 0 \Longrightarrow$$

$$\alpha|p^\mu,\lambda\rangle = 0 \tag{1.61}$$

Έχει αναφερθεί πως πάντα μπορούμε να βρούμε μία κατάσταση για την οποία να ισχύει $Q_\alpha|p^\mu,\lambda\rangle = 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν από τις σχέσεις (1.59) και (1.61) ότι στην αναπαράσταση που ψάχνουμε η κατάσταση $|p^\mu,\lambda\rangle$ είναι αυτή με το μεγαλύτερο σπιν. Δρούμε με τον τελεστή κατάβασης στην κατάσταση αυτή και παίρνουμε την δεύτερη κατάσταση της αναπαράστασης: $\left|p^\mu,\lambda - \frac{1}{2}\right\rangle$. Αν ξαναδράσουμε με τον τελεστή κατάβασης στην κατάσταση αυτή θα πάρουμε μηδέν, διότι ισχύει $\{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$. Αν δράσουμε με τον τελεστή ανάβασης στην κατάσταση $\left|p^\mu,\lambda - \frac{1}{2}\right\rangle$ θα πάρουμε ξανά την αρχική κατάσταση $|p^\mu,\lambda\rangle$, λόγω της σχέσης $\{a, a^\dagger\} = 1$. Επομένως, σε κάθε αναπαράσταση άμαζων σωματιδίων της super-Poincaré ανήκουν οι εξής δύο καταστάσεις: $|p^\mu,\lambda\rangle$ και $\left|p^\mu,\lambda - \frac{1}{2}\right\rangle$. Τέλος, κάθε αναπαράσταση της ομάδας super-Poincaré χαρακτηρίζεται από το σπιν της κατάστασης $|p^\mu,\lambda\rangle$.

1.3.4 Υπερπολλαπλέτες άμαζων σωματιδίων

Οι δύο καταστάσεις που ανήκουν σε μια αναπαράσταση της ομάδας super-Poincaré, μαζί με τις καταστάσεις της TCP-συζυγούς αναπαράστασης, απαρτίζουν μία υπερπολλαπλέτα, η οποία χαρακτηρίζεται από την τιμή του λ.

Μια χειραλική υπερπολλαπλέτα $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ περιέχει ένα σπίνορα Weyl με ελικότητα $\lambda = \frac{1}{2}$, ένα βαθμωτό πεδίο με $\lambda = 0$ και τις καταστάσεις της TCP-συζυγούς αναπαράστασης. Οι καταστάσεις της TCP-συζυγούς αναπαράστασης είναι ένας σπίνορας Weyl με ελικότητα $\lambda = -\frac{1}{2}$ και ένα ακόμα βαθμωτό πεδίο. Συνοψίζοντας, μια χειραλική υπερπολλαπλέτα $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ αποτελείται από ένα φερμιόνιο Majorana και από ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο. Τέτοιες πολλαπλέτες μπορούν να περιγράψουν τα κουάρκ, τα λεπτόνια και τα σωμάτια Higgs του Standard Model μαζί με τους υπερσυμμετρικούς παρτενέρ τους. Οι βαθμωτοί παρτενέρ των κουάρκ ονομάζονται υπερ-κουάρκ (squarks), οι βαθμωτοί παρτενέρ των λεπτονίων ονομάζονται υπερ-λεπτόνια (sleptons) και οι φερμιονικοί παρτενέρ των σωματιδίων Higgs ονομάζονται Higgsinos ή shigges.

Μια διανυσματική υπερπολλαπλέτα $(\lambda = 1)$ περιέχει μια μποζονική κατάσταση $(\lambda = 1)$ και την TCP-συζυγή της $(\lambda = -1)$, οι οποίες μαζί περιγράφουν ένα άμαζο διανυσματικό σωμάτιο. Επιπρόσθετα, μια διανυσματική υπερπολλαπλέτα περιέχει και ένα φερμιόνιο Majorana. Οι διανυσματικές πολλαπλέτες μπορούν να περιγράψουν τα μποζόνια βαθμίδας $(\lambda = 1)$, τα οποία προκύπτουν από μια τοπική θεωρία βαθμίδας, καθώς και τους φερμιονικούς παρτενέρ τους $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$. Επομένως, μια διανυσματική υπερπολλαπλέτα μπορεί να περιγράψει φωτόνια και υπερ-φωτόνια (photinos), μποζόνια W και Winos, μποζόνια Z και Zinos, όπως επίσης και γλουόνια και υπερ-γλουόνια (gluinos).

Τέλος, μια βαρυτική υπερπολλαπλέτα $(\lambda = 2)$ μπορεί να περιγράψει ένα γκραβιτόνιο με ελικότητα $\lambda = \pm 2$ και τον υπερσυμμετρικό παρτενέρ του, που ονομάζεται γκραβιτίνο. Το γκραβιτίνο έχει ελικότητα $\lambda = \pm\frac{3}{2}$.

Τα παραδείγματα που δώσαμε για τις υπερπολλαπλέτες με $\lambda = \frac{1}{2}, 1, 2$ συνοψίζονται στον πίνακα 1.1.

Σωματίδια	Υπερπολλαπλέτα (λ)	Ελικότητα	Ελικότητα του TCP-συζυγούς
quark, lepton, Higgino	χειραλική υπερπολλαπλέτα $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
squark, slepton, Higgs		0	0
gauge boson	διανυσματική υπερπολλαπλέτα $(\lambda = 1)$	1	-1
gaugino		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
graviton	βαρυτική υπερπολλαπλέτα $(\lambda = 2)$	2	-2
gravitino		$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$

Πίνακας 1.1 *Παραδείγματα από υπερπολλαπλέτες που περιγράφουν σωμάτια του Standard Model.*

1.3.5 Αναπαραστάσεις σωματιδίων με μάζα της ομάδας super-Poincaré

Σε αυτήν την υποπαράγραφο θα αναζητήσουμε τις αναπαραστάσεις της ομάδας super-Poincaré στην περίπτωση των σωματιδίων με μάζα. Πάντα μπορούμε να επιλέξουμε σύστημα αναφοράς στο οποίο η τετραορμή ενός σωματιδίου με μάζα m να γράφεται ως εξής: $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$. Σε αυτήν την περίπτωση η ιδιοτιμή του τελεστή Casimir $C_1 = P^\mu P_\mu$ προφανώς θα είναι m^2. Στη συνέχεια, θα αναζητήσουμε τη μορφή του δεύτερου τελεστή Casimir στην περίπτωση αυτή. Από τις σχέσεις (1.42) και (1.43) προκύπτει το εξής:

$$C_2 = C^{\mu\nu} C_{\mu\nu} =$$

$$(B^\mu P^\nu - B^\nu P^\mu)(B_\mu P_\nu - B_\nu P_\mu) =$$

$$2B^\mu B_\mu P^\nu P_\nu - 2(B^\mu P_\mu)^2 \Longrightarrow$$

$$C_2 = 2m^2(B^\mu B_\mu - (B^0)^2) \Longrightarrow$$

$$C_2 = 2m^2(B^i B_i) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.62}$$

Από τις σχέσεις (1.34) και (1.44) βρίσκουμε ότι:

$$B^i = W^i - \frac{1}{4} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^i)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta \Longrightarrow$$

$$B^i = mJ^i - \frac{1}{4} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^i)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta \tag{1.63}$$

Ορίζουμε τον τελεστή: $Y^i \coloneqq \frac{B^i}{m}$, ο οποίος μέσω της (1.63) γράφεται ως εξής:

$$Y^i = J^i - \frac{1}{4m} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^i)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta \tag{1.64}$$

Ο τελεστής C_2 γράφεται επομένως με τον παρακάτω τρόπο:

$$C_2 = 2m^4(Y^i Y_i) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.65}$$

Ο Y^i είναι ο τελεστής του υπερ-σπιν. Μπορεί να δείξει κανείς ότι οι τελεστές Y^i, Y^j ικανοποιούν τη σχέση μετάθεσης:

$$[Y^i, Y^j] = i\varepsilon_{ijk} Y^k \tag{1.66}$$

η οποία είναι η άλγεβρα Lie των γεννητόρων της ομάδας $SU(2)$. Επομένως, οι ιδιοτιμές του τελεστή $C_2 = 2m^4(Y^i Y_i)$ έχουν την εξής μορφή: $-2m^4 y(y+1)$ με $y = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Επιπρόσθετα, οι τελεστές P^μ, Y^3 μετατίθενται μεταξύ τους και με τους δύο τελεστές Casimir. Συμπερασματικά, μια κατάσταση που ανήκει σε μία αναπαράσταση της ομάδας super-Poincaré στην περίπτωση των σωματιδίων με μάζα m καθορίζεται από τις τιμές των m, y, p^μ, y_3. Το y_3 παίρνει ακέραιες και ημιακέραιες τιμές και επίσης ισχύει το εξής:

$-y \leq y_3 \leq y$ (Παράρτημα Α).

Όπως και πριν, θα ξεκινήσουμε την κατασκευή των αναπαραστάσεων αναζητώντας τη μορφή που παίρνει η σχέση (1.23θ) στην περίπτωση όπου $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$.

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \Longrightarrow$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2m(\sigma^0)_{\alpha\dot{\beta}} \Longrightarrow$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\beta}} \Longrightarrow$$

$$\{Q_1, \bar{Q}_{\dot{1}}\} = 2m \quad \kappa\alpha\iota \quad \{Q_2, \bar{Q}_{\dot{2}}\} = 2m \tag{1.67}$$

Κανονικοποιούμε τις σχέσεις αντιμετάθεσης (1.67) ορίζοντας τους τελεστές:

$$a_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{\sqrt{2m}} \text{ και } a_{1,2}^\dagger = \frac{\bar{Q}_{\dot{1},\dot{2}}}{\sqrt{2m}} \tag{1.68}$$

οι οποίοι αντιμετατίθενται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\left\{a_i, a_j^\dagger\right\} = \delta_{ij} \quad , \quad \{a_i, a_j\} = 0 \quad , \quad \left\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\right\} = 0 \tag{1.69}$$

Έστω μία κατάσταση $|m, y\rangle$ για την οποία ισχύει το εξής:

$$Q_\alpha |m, y\rangle = 0 \tag{1.70}$$

Θα ελέγξουμε τη δράση του τελεστή του υπερ-σπιν στην κατάσταση $|m, y\rangle$:

$$Y^i |m, y\rangle = J^i |m, y\rangle - \frac{1}{4m} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}^i\right)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta |m, y\rangle \Longrightarrow$$

$$Y^i |m, y\rangle = J^i |m, y\rangle \tag{1.71}$$

Παρατηρούμε πως η δράση του τελεστή του υπερ-σπιν και του τελεστή του σπιν, στην κατάσταση που ικανοποιεί τη σχέση (1.70), είναι η ίδια. Επομένως, η κατάσταση $|m, y\rangle$ καθορίζεται από τα m, j, p^μ, j_3και μπορεί να γραφτεί ως εξής: $|m, j, p^\mu, j_3\rangle$.

Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε τις σχέσεις μετάθεσης: $[J^3, a_1]$, $[J^3, a_2]$, $\left[J^3, a_1^\dagger\right]$, $\left[J^3, a_2^\dagger\right]$. Από τη σχέση (1.23δ) γνωρίζουμε ότι:

$$[M^{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} [M^{12}, Q_\alpha] = -\frac{i}{\sqrt{2m}} (\sigma^{12})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta \Longrightarrow$$

$$[J^3, a_i] = -\frac{1}{2} (\sigma^3)_i^{\ j} a_j \Longrightarrow$$

$$[J^3, a_1] = -\tfrac{1}{2} a_1 \quad , \quad [J^3, a_2] = \tfrac{1}{2} a_2 \tag{1.72}$$

Επίσης, από τη σχέση (1.12ε) γνωρίζουμε:

$$\left[M^{\mu\nu}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] = -i(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \Longrightarrow$$

$$\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\left[M^{12}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] = -i\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{12})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2m}}\left[J^3, \bar{Q}_{\dot{\gamma}}\right] = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}(\sigma^3)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \frac{\bar{Q}^{\dot{\beta}}}{\sqrt{2m}} \Longrightarrow$$

$$\left[J^3, a_1^\dagger\right] = \tfrac{1}{2} a_1^\dagger \quad , \quad \left[J^3, a_2^\dagger\right] = -\tfrac{1}{2} a_2^\dagger \tag{1.73}$$

Έστω μία κατάσταση $|m, j, p^\mu, j_3\rangle$ που ικανοποιεί τη σχέση (1.70). Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.73) μπορούμε να δείξουμε τα εξής:

$$J^3 a_1^\dagger |m, j, p^\mu, j_3\rangle = \left(j_3 + \tfrac{1}{2}\right) a_1^\dagger |m, j, p^\mu, j_3\rangle \tag{1.74}$$

$$J^3 a_2^\dagger |m, j, p^\mu, j_3\rangle = \left(j_3 - \tfrac{1}{2}\right) a_2^\dagger |m, j, p^\mu, j_3\rangle \tag{1.75}$$

Η δράση των τελεστών $a_{1,2}^\dagger$ στην κατάσταση $|m, j, p^\mu, j_3\rangle$ μας οδηγεί σε νέες καταστάσεις που είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή J^3 με ιδιοτιμές $\left(j_3 + \tfrac{1}{2}\right)$ και $\left(j_3 - \tfrac{1}{2}\right)$ αντίστοιχα.

Έχουμε βρει λοιπόν το μηχανισμό μέσω του οποίου θα κατασκευάσουμε τις αναπαραστάσεις που θέλουμε. Ξεκινάμε από μία κατάσταση $|m, j, p^\mu, j_3\rangle$ που ικανοποιεί τη σχέση (1.70) και στη συνέχεια δρούμε σε αυτήν με τους τελεστές $a_{1,2}^\dagger$ και κατασκευάζουμε όλες τις καταστάσεις της αναπαράστασης.

Έστω ότι ξεκινάμε από την κατάσταση $|m, 0, p^\mu, 0\rangle$. Δρώντας με τους τελεστές $a_{1,2}^\dagger$ στην κατάσταση $|m, 0, p^\mu, 0\rangle$ προκύπτουν τα εξής:

$$a_1^\dagger\, |m, 0, p^\mu, 0\rangle = \left|m, \tfrac{1}{2}, p^\mu, \tfrac{1}{2}\right\rangle \tag{1.76}$$

$$a_2^\dagger\, |m, 0, p^\mu, 0\rangle = \left|m, \tfrac{1}{2}, p^\mu, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \tag{1.77}$$

$$a_2^\dagger a_1^\dagger\, |m, 0, p^\mu, 0\rangle = |m, 0, p^\mu, 0\rangle' \tag{1.78}$$

Η κατάσταση $|m, 0, p^\mu, 0\rangle'$ είναι διαφορετική από την $|m, 0, p^\mu, 0\rangle$. Η σχέση (1.69) μας δείχνει πως οι καταστάσεις $a_1 a_1^\dagger\, |m, 0, p^\mu, 0\rangle$ και $|m, 0, p^\mu, 0\rangle$ είναι ίδιες. Συμπεραίνουμε ότι η αναπαράσταση της ομάδας super-Poincaré που χαρακτηρίζεται από τα μεγέθη m, p^μ και έχει ως κατάσταση αφετηρίας την $|m, 0, p^\mu, 0\rangle$ αποτελείται από τέσσερις καταστάσεις, δύο φερμιονικές και δύο μποζονικές. Οι δύο φερμιονικές καταστάσεις συνιστούν μία διπλέτα του σπιν.

Έστω ότι ξεκινάμε από τη διπλέτα με $j = \frac{1}{2}$, δηλαδή από τις καταστάσεις $\left|m, \frac{1}{2}, p^\mu, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$.

$$a_1^\dagger \left|m, \frac{1}{2}, p^\mu, \frac{1}{2}\right\rangle = |m, 1, p^\mu, 1\rangle \tag{1.79}$$

$$a_2^\dagger \left|m, \frac{1}{2}, p^\mu, \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|m, 1, p^\mu, 0\rangle + |m, 0, p^\mu, 0\rangle\} \tag{1.80}$$

$$a_1^\dagger \left|m, \frac{1}{2}, p^\mu, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|m, 1, p^\mu, 0\rangle - |m, 0, p^\mu, 0\rangle\} \tag{1.81}$$

$$a_2^\dagger \left|m, \frac{1}{2}, p^\mu, -\frac{1}{2}\right\rangle = |m, 1, p^\mu, -1\rangle \tag{1.82}$$

$$a_2^\dagger a_1^\dagger \left|m, \frac{1}{2}, p^\mu, \frac{1}{2}\right\rangle = \left|m, \frac{1}{2}, p^\mu, \frac{1}{2}\right\rangle' \tag{1.83}$$

$$a_1^\dagger a_2^\dagger \left|m, \frac{1}{2}, p^\mu, -\frac{1}{2}\right\rangle = \left|m, \frac{1}{2}, p^\mu, -\frac{1}{2}\right\rangle' \tag{1.84}$$

Να σημειωθεί ότι η δράση του τελεστή $a_2^\dagger$ στην κατάσταση $\left|m, \frac{1}{2}, p^\mu, \frac{1}{2}\right\rangle$ οδηγεί σε γραμμικό συνδυασμό δύο πιθανών τελικών καταστάσεων. Το ίδιο συμβαίνει και με τη δράση του τελεστή $a_1^\dagger$ στην κατάσταση $\left|m, \frac{1}{2}, p^\mu, -\frac{1}{2}\right\rangle$. Οι συντελεστές στις σχέσεις (1.80) και (1.81) έχουν μπει για κανονικοποίηση.

Παρατηρούμε ότι η αναπαράσταση της ομάδας super-Poincaré, που χαρακτηρίζεται από τα μεγέθη m, p^μ και έχει ως καταστάσεις αφετηρίας εκείνες που χαρακτηρίζονται από τον κβαντικό αριθμό $\mathrm{j} = \frac{1}{2}$, αποτελείται από μία τριπλέτα του σπιν, δύο διπλέτες του σπιν και μία κατάσταση με σπιν μηδέν. Δηλαδή, έχουμε στο σύνολο τέσσερις μποζονικές και τέσσερις φερμιονικές καταστάσεις.

Τέλος, εάν ως αφετηρία για την κατασκευή της αναπαράστασης έχουμε μία πολλαπλέτα με σπιν j, τότε είναι προφανές ότι η αναπαράσταση θα αποτελείται από $2(2j+1)$ φερμιονικές καταστάσεις και από $2(2j+1)$ μποζονικές καταστάσεις.

Παρατηρούμε πως στην περίπτωση των άμαζων σωματιδίων και των σωματιδίων με μάζα, οι αναπαραστάσεις αποτελούνται από ίσο αριθμό φερμιονικών και μποζονικών καταστάσεων. Αυτή η πρόταση μπορεί να αποδειχθεί και γενικά. Έστω ο τελεστής $(-1)^{N_F}$, όπου N_F είναι ο τελεστής του φερμιονικού αριθμού. Οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή $(-1)^{N_F}$είναι οι μποζονικές και οι φερμιονικές καταστάσεις με ιδιοτιμές $+1$ και -1 αντίστοιχα. Βρήκαμε πως οι τελεστές $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ μετατρέπουν μποζονικές καταστάσεις σε φερμιονικές και το αντίστροφο. Θα δείξουμε ότι οι τελεστές $Q_\alpha, (-1)^{N_F}$ αντιμετατίθενται:

$$Q_\alpha|F\rangle = |B\rangle \Longrightarrow$$

$$(-1)^{N_F} Q_\alpha |F\rangle = (-1)^{N_F} |B\rangle = |B\rangle \Longrightarrow$$

$$(-1)^{N_F} Q_\alpha |F\rangle = Q_\alpha |F\rangle = -Q_\alpha (-1)^{N_F} |F\rangle \Longrightarrow$$

$$\{Q_\alpha, (-1)^{N_F}\} = 0 \tag{1.85}$$

Έστω, ότι οι τελεστές $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}, (-1)^{N_F}$ έχουν αναπαρασταθεί με πίνακες στη βάση των καταστάσεων που ανήκουν σε μία υπερπολλαπλέτα. Οι καταστάσεις της υπερπολλαπλέτας είναι είτε φερμιονικές είτε μποζονικές, επομένως είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή $(-1)^{N_F}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως ο πίνακας $(-1)^{N_F}$ θα είναι διαγώνιος με ιδιοτιμές $+1$ και -1. Επομένως, αν το ίχνος του πίνακα $(-1)^{N_F}$ είναι μηδέν, τότε το πλήθος των φερμιονικών καταστάσεων (n_F) και των μποζονικών καταστάσεων (n_B) θα είναι το ίδιο.

Αρχικά, θα εξετάσουμε την τιμή που παίρνει το ακόλουθο ίχνος:

$$Tr\left((-1)^{N_F}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}\right) = Tr\left((-1)^{N_F} Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\beta}} + (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\beta}} Q_\alpha\right) =$$

$$Tr\left((-1)^{N_F} Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\beta}} + Q_\alpha (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right) =$$

$$Tr\left(-Q_\alpha (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\beta}} + Q_\alpha (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$Tr\left((-1)^{N_F}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}\right) = 0 \tag{1.86}$$

Από τις σχέσεις (1.23θ) και (1.86) γνωρίζουμε ότι:

$$Tr\left((-1)^{N_F}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}\right) = Tr\left((-1)^{N_F} 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} p_\mu \, Tr((-1)^{N_F}) = 0 \Longrightarrow$$

$$Tr((-1)^{N_F}) = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_B \langle B|(-1)^{N_F}|B\rangle + \sum_F \langle F|(-1)^{N_F}|F\rangle = 0 \Longrightarrow$$

$$n_B = n_F \tag{1.87}$$

Να σημειωθεί ότι το P_μ στην βάση των καταστάσεων μιας υπερπολλαπλέτας γράφεται ως εξής: $P_\mu = p_\mu \mathbb{I}$, διότι όλες οι καταστάσεις της υπερπολλαπλέτας έχουν την ίδια τετραορμή p_μ. Επομένως, αποδείξαμε ότι κάθε υπερπολλαπλέτα έχει το ίδιο πλήθος φερμιονικών και μποζονικών καταστάσεων.

1.4 Ελεύθερο μοντέλο Wess-Zumino

Οι πιο ενδιαφέρουσες εφαρμογές της υπερσυμμετρίας γίνονται στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας πεδίων. Μέσα από αυτό το πρίσμα θα αναζητήσουμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς των ελεύθερων και άμαζων πεδίων μιας χειραλικής υπερπολλαπλέτας.

Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου, που βρίσκεται σε κατάσταση $|\psi\rangle$, στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας πεδίων γράφεται ως εξής:

$$\psi(x) = \langle\psi|\hat{\varphi}(x)|0\rangle \tag{1.88}$$

Όπου $|0\rangle$ είναι η κατάσταση του κενού, στην οποία δεν περιέχεται κανένα σωμάτιο. Ο τελεστής $\hat{\varphi}(x)$ προκύπτει μέσω της κβάντωσης του βαθμωτού πεδίου $\varphi(x)$, το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon (Παράρτημα Β). Ο τελεστής $\hat{\varphi}(x)$ γράφεται ως ένα ανάπτυγμα Fourier έχοντας ως συντελεστές δύο τελεστές $\left(\alpha(k), \alpha^\dagger(k)\right)$. Γενικεύοντας τις σχέσεις μετάθεσης ορμής-θέσης της κβαντικής μηχανικής, σε σχέσεις μετάθεσης του τελεστή $\hat{\varphi}(x)$ και της γενικευμένης ορμής $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \pi(x)$, μπορεί να δείξει κανείς ότι οι τελεστές $\alpha^\dagger(k), \alpha(k)$ παίζουν το ρόλο τελεστών δημιουργίας και καταστροφής σωματιδίων. Αυτός είναι ο λόγος, για τον οποίο η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου γράφεται σύμφωνα με τη σχέση (1.88).

Έστω ότι το σύστημα μετασχηματίζεται ούτως ώστε η μορφή της Λαγκρανζιανής πυκνότητας $\mathcal{L}$ (ή απλά Λαγκρανζιανής) να εξακολουθεί να μας επιτρέπει να ερμηνεύσουμε τους τελεστές $\alpha^\dagger(k), \alpha(k)$ ως τελεστές δημιουργίας και καταστροφής σωματιδίων και κατά επέκταση να μπορούμε να γράψουμε τη μετασχηματισμένη κυματοσυνάρτηση στην ακόλουθη μορφή:

$$\psi'(x') = \langle\psi'|\hat{\varphi}(x')|0\rangle \tag{1.89}$$

Έστω ότι συμβολίζουμε με S την αναπαράσταση του μετασχηματισμού που δρα στην κυματοσυνάρτηση και με U την αναπαράσταση του μετασχηματισμού που δρα στην κατάσταση $|\psi\rangle$. Για να είναι ο μετασχηματισμός U συμμετρία του συστήματος, επιβάλλεται να είναι μοναδιακός. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε το εξής:

$$S\psi(x) = \left\langle\psi\middle|U^\dagger\hat{\varphi}(x')\middle|0\right\rangle \Rightarrow$$

$$S\psi(x) = \left\langle\psi\middle|U^\dagger\hat{\varphi}(x')UU^\dagger\middle|0\right\rangle \Rightarrow$$

$$S\langle\psi|\hat{\varphi}(x)|0\rangle = \left\langle\psi\middle|U^\dagger\hat{\varphi}(x')U\middle|0\right\rangle \Rightarrow$$

$$\langle\psi|S\hat{\varphi}(x)|0\rangle = \left\langle\psi\middle|U^\dagger\hat{\varphi}(x')U\middle|0\right\rangle \Rightarrow$$

$$S\hat{\varphi}(x) = U^\dagger\hat{\varphi}(x')U \tag{1.90}$$

Υποθέσαμε ότι η κατάσταση του κενού μένει αμετάβλητη κάτω από το μετασχηματισμό. Από τη σχέση (1.90) παρατηρούμε ότι το $\hat{\varphi}(x)$ μετασχηματίζεται και σαν πεδίο και σαν τελεστής.

Έστω ότι ο μετασχηματισμός είναι μία στοιχειώδης μετάθεση στο χωρόχρονο:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta a^{\mu} \tag{1.91}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός θα αλλάξει μόνο το όρισμα της κυματοσυνάρτησης, οπότε θα ισχύει το εξής:

$$\psi'(x'^{\mu}) = \psi(x^{\mu}) \Rightarrow$$

$$S\psi(x^{\mu}) = \psi(x^{\mu}) \Rightarrow$$

$$\langle\psi|S\hat{\varphi}(x^{\mu})|0\rangle = \langle\psi|\hat{\varphi}(x^{\mu})|0\rangle \Rightarrow$$

$$S\hat{\varphi}(x^{\mu}) = \hat{\varphi}(x^{\mu}) = \hat{\varphi}(x'^{\mu} - \delta a^{\mu}) \Rightarrow$$

$$S\hat{\varphi}(x^{\mu}) = \hat{\varphi}(x'^{\mu}) - \delta a^{\mu}\frac{\partial\hat{\varphi}(x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} + \mathcal{O}((\delta a^{\mu})^2) \tag{1.92}$$

Για μικρή μετάθεση δa^{μ} ο τελεστής U παίρνει τη μορφή: $U = \mathbb{1} - i\delta a^{\mu}P_{\mu}$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε το εξής:

$$U^{\dagger}\hat{\varphi}(x')U = \left(\mathbb{1} + i\delta a^{\mu}P_{\mu}\right)\hat{\varphi}(x')\left(\mathbb{1} - i\delta a^{\mu}P_{\mu}\right) =$$

$$\hat{\varphi}(x'^{\mu}) - i\delta a^{\mu}\left[\hat{\varphi}(x'), P_{\mu}\right] + \mathcal{O}((\delta a^{\mu})^2) \Rightarrow$$

$$U^{\dagger}\hat{\varphi}(x')U = \hat{\varphi}(x'^{\mu}) - i\delta a^{\mu}\left[\hat{\varphi}(x'), P_{\mu}\right] \tag{1.93}$$

Συμπερασματικά, από τις σχέσεις (1.90), (1.92) και (1.93) προκύπτει ότι:

$$\hat{\varphi}(x'^{\mu}) - i\delta a^{\mu}\left[\hat{\varphi}(x'), P_{\mu}\right] = \hat{\varphi}(x'^{\mu}) - \delta a^{\mu}\frac{\partial\hat{\varphi}(x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} \Rightarrow$$

$$\left[\hat{\varphi}(x), P_{\mu}\right] = -i\frac{\partial\hat{\varphi}(x)}{\partial x^{\mu}} \tag{1.94}$$

Ο βασικός μας στόχος είναι να βρούμε πώς μετασχηματίζεται το πεδίο $\varphi(x)$ κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Ένας απειροστός υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός γράφεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$U(\xi) = \mathbb{1} - i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right) \tag{1.95}$$

Το ξ είναι παράμετρος Grassmann (Παράρτημα Γ). Χρησιμοποιώντας παραμέτρους Grassmann η, ξ η υπερσυμμετρική άλγεβρα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$[\xi Q, M^{\mu\nu}] = i\xi\sigma^{\mu\nu}Q \tag{1.96α}$$

$$\left[\bar{\xi}\bar{Q}, M^{\mu\nu}\right] = i\left(\bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{Q}\right) \tag{1.96β}$$

$$[\xi Q, P^\mu] = 0 \tag{1.96γ}$$

$$\left[\bar{\xi}\bar{Q}, P^\mu\right] = 0 \tag{1.96δ}$$

$$[\xi Q, \eta Q] = \left[\bar{\xi}\bar{Q}, \bar{\eta}\bar{Q}\right] = 0 \tag{1.96ε}$$

$$[\xi Q, \bar{\eta}\bar{Q}] = 2(\xi\sigma^\mu\bar{\eta})P_\mu \tag{1.96στ}$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (1.90) και (1.95) το μετασχηματισμένο πεδίο $\varphi(x)$ μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\varphi' = U^\dagger \varphi U \Longrightarrow$$

$$\varphi' = \left[\mathbb{1} + i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\right]\varphi\left[\mathbb{1} - i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$\varphi' = \varphi + \left[i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right), \varphi\right] \Longrightarrow$$

$$\delta_\xi \varphi = \left[i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right), \varphi\right] \tag{1.97}$$

Αν προσδιορίσουμε το $\delta_\xi \varphi$ θα έχουμε προσδιορίσει τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό του πεδίου. Ο μετασχηματισμός $\delta_\xi \varphi$ αποτελεί αναπαράσταση της ομάδας super-Poincaré, επομένως περιμένουμε ο μετασχηματισμός $\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\varphi$ να κλείνει την άλγεβρα της ομάδας σύμφωνα με τη σχέση (1.96στ). Ακολουθεί η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού.

$$\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\varphi =$$

$$\left[i(\eta Q + \bar{\eta}\bar{Q}), \left[i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right), \varphi\right]\right] - \left[i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right), \left[i(\eta Q + \bar{\eta}\bar{Q}), \varphi\right]\right] \tag{1.98}$$

Η σχέση (1.98) μέσω της ταυτότητας Jacobi παίρνει την εξής μορφή:

$$\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\varphi = -\left[\varphi, \left[i(\eta Q + \bar{\eta}\bar{Q}), i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\right]\right] \tag{1.99}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.96ε) και (1.96στ) καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα:

$$\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\varphi = \left[\varphi, \left[\eta Q, \bar{\xi}\bar{Q}\right] + [\bar{\eta}\bar{Q}, \xi Q] + [\eta Q, \xi Q] + \left[\bar{\eta}\bar{Q}, \bar{\xi}\bar{Q}\right]\right] \Longrightarrow$$

$$\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\varphi = \left[\varphi, 2\left(\eta\sigma^\mu\bar{\xi}\right)P_\mu\right] + \left[\varphi, -2(\xi\sigma^\mu\bar{\eta})P_\mu\right] \Longrightarrow$$

$$\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\varphi = 2\left(\, \xi\sigma^\mu\bar{\eta} - \eta\sigma^\mu\bar{\xi}\, \right) i\partial_\mu\varphi \tag{1.100}$$

Έστω ότι έχουμε το σύστημα ενός άμαζου ελεύθερου μιγαδικού βαθμωτού (μποζονικού) πεδίου φ και ενός άμαζου χειραλικού (φερμιονικού) πεδίου ψ_α. Όπως έχουμε προαναφέρει, η δράση των γεννητόρων της υπερσυμμετρίας πάνω σε καταστάσεις σωματιδίων, αλλάζει το χαρακτήρα τους από φερμιονικό σε μποζονικό και το αντίστροφο. Επομένως, αναμένουμε το $\delta_\xi \varphi$ να έχει φερμιονικό χαρακτήρα και το $\delta_\xi \psi_\alpha$ να έχει μποζονικό χαρακτήρα. Αυτή η σκέψη επαληθεύεται αν απαιτήσουμε οι εκφράσεις που προσδιορίζουν τα $\delta_\xi \varphi$ και $\delta_\xi \psi_\alpha$ να έχουν σωστές διαστάσεις $[\mu ά\zeta \alpha \varsigma]$, στο φυσικό σύστημα μονάδων. Στο φυσικό σύστημα μονάδων ($c = \hbar = 1$) ισχύουν τα εξής:

i. $[x^\mu] = [\mu ά\zeta\alpha\varsigma]^{-1}$
ii. $[\partial_\mu] = [\mu ά\zeta\alpha\varsigma]$
iii. Η δράση του συστήματος είναι αδιάστατη: $S = \int \mathcal{L} d^4x \Longrightarrow$
$$[\mathcal{L}] = [\mu ά\zeta\alpha\varsigma]^4$$
iv. Η $\mathcal{L}$ του άμαζου και ελεύθερου πεδίου φ είναι η εξής:
$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) \Longrightarrow [\varphi] = [\mu ά\zeta\alpha\varsigma]$$
v. Η $\mathcal{L}$ του άμαζου και ελεύθερου χειραλικού πεδίου ψ_α είναι η εξής:
$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \Longrightarrow [\psi] = [\bar{\psi}] = [\mu ά\zeta\alpha\varsigma]^{\frac{3}{2}}$$
vi. $[P_\mu] = [\mu ά\zeta\alpha\varsigma]$. Από τη σχέση (1.96στ) $\Longrightarrow [Q] = [\bar{Q}] = [\mu ά\zeta\alpha\varsigma]^{\frac{1}{2}}$
vii. Προφανώς ο υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός (1.95) είναι αδιάστατος, επομένως: $[\delta_\xi] = [\xi Q] = [\bar{\xi}\bar{Q}] = 1$ και $[\xi] = [\bar{\xi}] = [\mu ά\zeta\alpha\varsigma]^{-\frac{1}{2}}$

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω παρατηρήσεις, είναι εύλογο να γράψουμε τους μετασχηματισμούς των πεδίων ως εξής:

$$\delta_\xi \varphi = a\xi\psi + b\bar{\xi}\bar{\psi} \tag{1.101α}$$

$$\delta_\xi \varphi^* = a^*\bar{\xi}\bar{\psi} + b^*\xi\psi \tag{1.101β}$$

$$\delta_\xi \psi_\alpha = c\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\partial_\mu \varphi \tag{1.101γ}$$

$$\delta_\xi \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -c^*\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}\beta}\xi_\beta \partial^\mu \varphi^* \tag{1.101δ}$$

Οι σχέσεις (1.101β) και (1.101δ) προκύπτουν από τις (1.101α) και (1.101γ) μέσω των σχέσεων (Γ.4α) και (Γ.4β). Τα a, b, c είναι μιγαδικές σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Στην προσπάθειά μας να τις προσδιορίσουμε, θα απαιτήσουμε η έκφραση του $(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta)\varphi$ να δίνεται από τη σχέση (1.100). Θα ξεκινήσουμε από την εύρεση του $\delta_\eta \delta_\xi \varphi$ μέσω των σχέσεων (1.101α), (1.101γ), (1.101δ):

$$\delta_\eta \delta_\xi \varphi = \delta_\eta (a\xi\psi + b\bar{\xi}\bar{\psi}) = a\xi\delta_\eta \psi + b\bar{\xi}\delta_\eta \bar{\psi} \Longrightarrow$$

$$\delta_\eta \delta_\xi \varphi = ac\xi\sigma^\mu \bar{\eta}\partial_\mu \varphi - bc^*\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu \eta \partial^\mu \varphi^* \tag{1.102}$$

Από τη σχέση (1.102) γίνεται φανερό ότι ισχύει το εξής:

$$(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta)\varphi = ac(\xi\sigma^\mu \bar{\eta} - \eta\sigma^\mu \bar{\xi})\partial_\mu \varphi - bc^*(\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu \eta - \bar{\eta}\bar{\sigma}_\mu \xi)\partial^\mu \varphi^* \tag{1.103}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.100) και (1.103) έχουμε:

$$ac = 2i \quad \text{και} \quad b = 0 \tag{1.104}$$

Επομένως, οι μετασχηματισμοί (1.101) παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\delta_\xi \varphi = a\xi\psi \tag{1.105α}$$

$$\delta_\xi \varphi^* = a^* \bar{\xi}\bar{\psi} \tag{1.105β}$$

$$\delta_\xi \psi_\alpha = c\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \varphi \tag{1.105γ}$$

$$\delta_\xi \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -c^* \bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}\beta} \xi_\beta \partial^\mu \varphi^* \tag{1.105δ}$$

Μένει να δείξουμε ότι και ο μετασχηματισμός $(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)\psi_\alpha$ κλείνει την άλγεβρα της ομάδας.

$$\delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha = c\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \delta_\eta \varphi \Longrightarrow$$

$$\delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha = ac\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} (\eta\partial_\mu\psi) \Longrightarrow$$

$$\delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha = 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} (\eta\partial_\mu\psi) \tag{1.106}$$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι ισχύουν τα εξής: $[\xi, \delta_\eta] = 0$ και $[\partial_\mu, \delta_\eta] = 0$. Να σημειωθεί ότι εξετάζουμε καθολικούς μετασχηματισμούς υπερσυμμετρίας, όχι τοπικούς. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Fierz (Γ.7στ) η σχέση (1.106) παίρνει τη μορφή:

$$\delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha = 2i\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left\{(\eta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu\psi_\alpha + 2(\eta\sigma_\nu\bar{\xi})\left[(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \partial_\mu\psi_\beta\right]\right\} \tag{1.107}$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (Β.35) μπορεί να δείξει κανείς το εξής:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{\eta^{\mu\nu}\mathbb{I} - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu}{2} \tag{1.108}$$

Από τις σχέσεις (1.107) και (1.108) προκύπτει ότι:

$$\delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha = -i\left\{(\eta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu\psi_\alpha + (\eta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu\psi_\alpha - (\eta\sigma_\nu\bar{\xi})(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi)_\alpha\right\} \Longrightarrow$$

$$\delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha = -i\left\{2(\eta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu\psi_\alpha - (\eta\sigma_\nu\bar{\xi})(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi)_\alpha\right\} \tag{1.109}$$

Ο σπίνορας Weyl ψ ικανοποιεί την εξίσωση Dirac για άμαζα ελεύθερα σωμάτια (Παράρτημα Β): $i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi = 0$. Επομένως, η εξίσωση (1.109) γράφεται στη μορφή:

$$\delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha = -2i(\eta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu\psi_\alpha \tag{1.110}$$

Είναι προφανές ότι ο μετασχηματισμός $\left(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta\right)\psi_\alpha$ δίνεται από την εξής έκφραση:

$$\left(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta\right)\psi_\alpha = 2\left(\xi\sigma^\mu\bar{\eta} - \eta\sigma^\mu\bar{\xi}\right)i\partial_\mu\psi_\alpha \tag{1.111}$$

Παρατηρούμε πως στην on-shell αντιμετώπιση του προβλήματος η υπερσυμμετρική άλγεβρα κλείνει κάνοντας χρήση της εξίσωσης κίνησης του πεδίου ψ_α. Αυτό είναι αναμενόμενο, διότι οι φερμιονικοί και οι μποζονικοί βαθμοί ελευθερίας στο πρόβλημα δεν είναι ίσοι. Ο σπίνορας ψ έχει δύο μιγαδικές συνιστώσες, ενώ έχουμε μόνο ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο φ. Για να κατασκευάσουμε μία off-shell υπερσυμμετρική θεωρία πεδίου, μπορούμε να εισάγουμε ένα ακόμα βοηθητικό βαθμωτό μιγαδικό πεδίο F. Με τον τρόπο αυτό θα έχουμε ίσους φερμιονικούς και μποζονικούς βαθμούς ελευθερίας και η άλγεβρα θα κλείνει χωρίς τη χρήση εξισώσεων κίνησης. Αυτήν την τεχνική θα την εφαρμόσουμε στη συνέχεια της παραγράφου.

Αρχικά, θα αντιμετωπίσουμε on-shell το πρόβλημα. Το σύστημα των ελεύθερων και άμαζων υπερσυμμετρικών παρτενέρ φ, ψ περιγράφεται από την ακόλουθη Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu\varphi^*\right)\left(\partial^\mu\varphi\right) + i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \tag{1.112}$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από αυτή τη Λαγκρανζιανή είναι η εξίσωση Klein-Gordon για τα πεδία φ, φ^* και η εξίσωση Dirac για το πεδίο ψ. Απαιτώντας το σύστημα να είναι συμμετρικό κάτω από μετασχηματισμούς υπερσυμμετρίας, θα βρούμε τις τιμές των σταθερών a, c. Έστω ότι ο υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός εξαρτάται από την παράμετρο ξ. Η μετασχηματισμένη Λαγκρανζιανή $\mathcal{L}'$ σχετίζεται με την αρχική μέσω της εξής σχέσης:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta_\xi\mathcal{L} \tag{1.113}$$

Για να είναι το σύστημα υπερσυμμετρικό πρέπει το $\delta_\xi\mathcal{L}$ να είναι είτε μηδέν είτε ολική παράγωγος, ούτως ώστε η δράση να μένει αμετάβλητη. Για να υπολογίσουμε το $\delta_\xi\mathcal{L}$ θα χρειαστούμε το μετασχηματισμό $\delta_\xi\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$, ο οποίος προσδιορίζεται από τη σχέση (1.105δ) με τη βοήθεια των σχέσεων (Γ.3γ) και (Γ.4β):

$$\delta_\xi\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = c^*\xi^\beta\sigma^\nu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\nu\varphi^* \tag{1.114}$$

Επίσης, θα μας χρειαστούν οι σχέσεις (1.105α) και (1.105β). Ας υπολογίσουμε λοιπόν το $\delta_\xi\mathcal{L}$:

$$\delta_\xi\mathcal{L} = \left(\partial_\mu\delta_\xi\varphi^*\right)\left(\partial^\mu\varphi\right) + \left(\partial_\mu\varphi^*\right)\left(\partial^\mu\delta_\xi\varphi\right) + i\delta_\xi\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\delta_\xi\psi \Longrightarrow$$

$$\delta_\xi\mathcal{L} = a\left(\partial_\mu\varphi^*\right)\left(\xi\partial^\mu\psi\right) - a^*\left(\bar{\xi}\partial_\mu\bar{\psi}\right)\left(\partial^\mu\varphi\right)$$

$$-ic^*\partial_\nu\varphi^*\left(\xi\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) + ic\left(\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\varphi \Longrightarrow$$

$$\delta_\xi\mathcal{L} = \left(a - ic^*\right)\left(\partial_\mu\varphi^*\right)\left(\xi\partial^\mu\psi\right) - \left(ic + a^*\right)\left(\bar{\xi}\partial_\mu\bar{\psi}\right)\left(\partial^\mu\varphi\right)$$

$$+\partial_\mu\left[ic\left(\bar{\xi}\bar{\psi}\right)\partial^\mu\varphi - 2ic^*(\xi\sigma^{\nu\mu}\psi)\partial_\nu\varphi^*\right] \Longrightarrow$$

$$\delta_\xi\mathcal{L} = \partial_\mu\left[ic\left(\bar{\xi}\bar{\psi}\right)\partial^\mu\varphi - 2ic^*(\xi\sigma^{\nu\mu}\psi)\partial_\nu\varphi^*\right] \qquad (1.115)$$

Ο μετασχηματισμός της Λαγκρανζιανής γράφεται όπως στη σχέση (1.115) μόνο εάν ισχύει ότι:

$$a = ic^* \quad \text{και} \quad a^* = -ic \qquad (1.116)$$

Από τις σχέσεις (1.104) και (1.116) βρίσκουμε ότι:

$$a = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad c = i\sqrt{2} \qquad (1.117)$$

Η δράση του μετασχηματισμένου συστήματος υπολογίζεται ως εξής:

$$S' = \int \mathcal{L}' d^4x = \int\left(\mathcal{L} + \delta_\xi\mathcal{L}\right)d^4x = \int \mathcal{L}\, d^4x + \int \delta_\xi\mathcal{L}\, d^4x \Longrightarrow$$

$$S' = S + \int \delta_\xi\mathcal{L}\, d^4x \qquad (1.118)$$

Από το νόμο του Gauss το ολοκλήρωμα $\int \delta_\xi\mathcal{L}\, d^4x$ σε όλο το χώρο ισούται με το ολοκλήρωμα του $ic\left(\bar{\xi}\bar{\psi}\right)\partial^\mu\varphi - 2ic^*(\xi\sigma^{\nu\mu}\psi)\partial_\nu\varphi^*$ πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια που καλύπτει όλο το χώρο. Επομένως, το ολοκλήρωμα μηδενίζεται με προφανή τρόπο. Συμπεραίνουμε πως με τους μετασχηματισμούς των πεδίων που ορίσαμε, το σύστημα που κατασκευάσαμε είναι υπερσυμμετρικό.

Όπως προαναφέραμε, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και off-shell το πρόβλημα, εισάγοντας ένα βοηθητικό βαθμωτό μιγαδικό πεδίο F. Το ονομάζουμε βοηθητικό, διότι οι εξισώσεις κίνησής του θα δίνουν $F = 0$. Για να συμβεί αυτό, η Λαγκρανζιανή που το περιγράφει μπορεί να έχει την εξής μορφή: $\mathcal{L} = F^*F$. Θυμίζουμε ότι η Λαγκρανζιανή έχει μονάδες $[\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma]^4$, επομένως το πεδίο F έχει μονάδες $[\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma]^2$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι μετασχηματισμοί των πεδίων φ, ψ, F θα έχουν την εξής μορφή:

$$\delta_\xi\varphi = \sqrt{2}\xi\psi \qquad (1.119\alpha)$$

$$\delta_\xi\psi_\alpha = i\sqrt{2}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\partial_\mu\varphi + d\xi_\alpha F \qquad (1.119\beta)$$

$$\delta_\xi F = e\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \qquad (1.119\gamma)$$

Όπου d, e είναι μιγαδικές σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Με την εισαγωγή του βοηθητικού πεδίου θα δείξουμε ότι η υπερσυμμετρική άλγεβρα στο ψ κλείνει χωρίς να κάνουμε χρήση των εξισώσεων κίνησης, αρκεί να ισχύει $de = 2i$.

$$\delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha = i\sqrt{2}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\partial_\mu\delta_\eta\varphi + d\xi_\alpha\delta_\eta F \Longrightarrow$$

$$\delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha = 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\left(\eta\partial_\mu\psi\right) + de\left(\bar{\eta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)\xi_\alpha \qquad (1.120)$$

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες του Fierz (Γ.7στ) και (Γ.7ζ), η σχέση (1.120) παίρνει την εξής μορφή:

$$\delta_\eta \delta_\xi \psi_\alpha = 2i\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(\eta\sigma^\mu\bar{\xi}\right)\partial_\mu\psi_\alpha + 2\left(\eta\sigma_\nu\bar{\xi}\right)\left[(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\partial_\mu\psi_\beta\right]\right\}$$

$$+de\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left\{\left(\bar{\eta}\bar{\sigma}^\mu\xi\right)\partial_\mu\psi_\alpha - 2\left(\bar{\eta}\bar{\sigma}_\nu\xi\right)\left[(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\partial_\mu\psi_\beta\right]\right\} \tag{1.121}$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (1.108), η σχέση (1.121) παίρνει τη μορφή:

$$\delta_\eta \delta_\xi \psi_\alpha = -i\left\{2\left(\eta\sigma^\mu\bar{\xi}\right)\partial_\mu\psi_\alpha - \left(\eta\sigma_\nu\bar{\xi}\right)\left(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)_\alpha\right\}$$

$$-\frac{de}{2}\left\{\left(\bar{\eta}\bar{\sigma}^\mu\xi\right)\partial_\mu\psi_\alpha - \left(\bar{\eta}\bar{\sigma}^\mu\xi\right)\partial_\mu\psi_\alpha + \left(\bar{\eta}\bar{\sigma}_\nu\xi\right)\left(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)_\alpha\right\} \Longrightarrow$$

$$\delta_\eta \delta_\xi \psi_\alpha = -2i\left(\eta\sigma^\mu\bar{\xi}\right)\partial_\mu\psi_\alpha + i\left(\eta\sigma_\nu\bar{\xi}\right)\left(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)_\alpha$$

$$-\tfrac{de}{2}\left\{\left(\bar{\eta}\bar{\sigma}_\nu\xi\right)\left(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)_\alpha\right\} \tag{1.122}$$

Η σχέση (1.122) μέσω της (Γ.3γ) παίρνει τη μορφή:

$$\delta_\eta \delta_\xi \psi_\alpha = -2i\left(\eta\sigma^\mu\bar{\xi}\right)\partial_\mu\psi_\alpha + i\left(\eta\sigma_\nu\bar{\xi}\right)\left(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)_\alpha$$

$$+\tfrac{de}{2}\left(\xi\sigma_\nu\bar{\eta}\right)\left(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)_\alpha \tag{1.123}$$

Επομένως, από τη σχέση (1.123) βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός $\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\psi_\alpha$ είναι ο εξής:

$$\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\psi_\alpha = \left(i - \frac{de}{2}\right)\left(\eta\sigma_\nu\bar{\xi}\right)\left(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)_\alpha$$

$$+\left(\frac{de}{2} - i\right)\left(\xi\sigma_\nu\bar{\eta}\right)\left(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)_\alpha + 2i\left(\xi\sigma^\mu\bar{\eta} - \eta\sigma^\mu\bar{\xi}\right)\partial_\mu\psi_\alpha \Longrightarrow$$

$$\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\psi_\alpha = 2i\left(\xi\sigma^\mu\bar{\eta} - \eta\sigma^\mu\bar{\xi}\right)\partial_\mu\psi_\alpha \tag{1.124}$$

Παρατηρούμε πως η άλγεβρα κλείνει αρκεί να ισχύει:

$$de = 2i \tag{1.125}$$

Τέλος, γράφουμε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος:

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu\varphi^*\right)\left(\partial^\mu\varphi\right) + i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + F^*F \tag{1.126}$$

Απαιτώντας η Λαγκρανζιανή να είναι συμμετρική κάτω από μετασχηματισμούς υπερσυμμετρίας βρίσκουμε ότι τα e, d παίρνουν τις εξής τιμές:

$$d = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad e = i\sqrt{2} \tag{1.127}$$

Συγκεντρώνουμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς των πεδίων:

$$\delta_\xi \varphi = \sqrt{2}\xi\psi \tag{1.128α}$$

$$\delta_\xi \psi_\alpha = i\sqrt{2}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\partial_\mu\varphi + \sqrt{2}\xi_\alpha F \tag{1.128β}$$

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \tag{1.128γ}$$

Είναι προφανές ότι η άλγεβρα της ομάδας κλείνει με τους μετασχηματισμούς του πεδίου F. Αυτόν τον ισχυρισμό θα τον αποδείξουμε αμέσως.

$$\delta_\eta\delta_\xi F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\delta_\eta\psi =$$

$$-2\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\eta}\partial_\mu\partial_\nu\varphi + 2i\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\eta\partial_\mu F =$$

$$-\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\eta}\partial_\mu\partial_\nu\varphi - \bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\eta}\partial_\nu\partial_\mu\varphi + 2i\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\eta\partial_\mu F =$$

$$-\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\eta}\partial_\mu\partial_\nu\varphi - \bar{\xi}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\eta}\partial_\mu\partial_\nu\varphi + 2i\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\eta\partial_\mu F =$$

$$-\bar{\xi}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)\bar{\eta}\partial_\mu\partial_\nu\varphi + 2i\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\eta\partial_\mu F =$$

$$-2\bar{\xi}\eta^{\mu\nu}\bar{\eta}\partial_\mu\partial_\nu\varphi + 2i\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\eta\partial_\mu F \Longrightarrow$$

$$\delta_\eta\delta_\xi F = -2\bar{\xi}\bar{\eta}\partial_\mu\partial^\mu\varphi + 2i\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\eta\partial_\mu F \tag{1.129}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.129) θα βρούμε την έκφραση για το μετασχηματισμό $(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)F$:

$$(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)F = 2i(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\eta - \bar{\eta}\bar{\sigma}^\mu\xi)\partial_\mu F \overset{(\Gamma.3\gamma)}{\Longrightarrow}$$

$$(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)F = 2i(\xi\sigma^\mu\bar{\eta} - \eta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu F \tag{1.130}$$

Παρατηρούμε πως η υπερσυμμετρική άλγεβρα κλείνει και με τους μετασχηματισμούς του βοηθητικού πεδίου F.

Συνοψίζοντας, σε αυτήν την παράγραφο, θεωρήσαμε το σύστημα ενός ελεύθερου άμαζου βαθμωτού μιγαδικού πεδίου και ενός ελεύθερου άμαζου πεδίου Weyl που ανήκουν σε μία χειραλική υπερπολλαπλέτα. Βρήκαμε τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να μετασχηματίζονται, ούτως ώστε το σύστημα να είναι υπερσυμμετρικό και να κλείνει η άλγεβρα και στα δύο πεδία. Για να κλείνει η άλγεβρα χωρίς τη χρήση των εξισώσεων κίνησης, εισάγαμε ένα βοηθητικό πεδίο F, του οποίου οι εξισώσεις κίνησης μηδενίζονται. Η Λαγκρανζιανή του συστήματος των πεδίων ψ, φ, F δίνεται από τη σχέση (1.126). Η Λαγκρανζιανή αυτή περιγράφει το ελεύθερο μοντέλο Wess-Zumino για άμαζα σωμάτια. Τέλος, να σημειωθεί ότι οι μετασχηματισμοί των πεδίων (1.128) θα αποδειχθούν ξανά, με πολύ κομψό τρόπο, στην παράγραφο 2.4 με τη βοήθεια των χειραλικών υπερπεδίων.

Κεφάλαιο 2

Λαγκρανζιανές χειραλικών υπερπεδίων

2.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο 1.4 είδαμε πώς κατασκευάζεται μια υπερσυμμετρική Λαγκρανζιανή απευθείας από τα πεδία που ανήκουν σε μία υπερπολλαπλέτα. Η κατασκευή υπερσυμμετρικών Λαγκρανζιανών γίνεται με ευκολότερο και κομψότερο τρόπο μέσω της χρήσης υπερπεδίων $S(x,\theta,\bar{\theta})$. Τα υπερπεδία έχουν εξάρτηση από τις χωροχρονικές συντεταγμένες και από τις μεταβλητές Grassmann $(\theta,\bar{\theta})$. Για το λόγο αυτό, ένας υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός αλλάζει μόνο το όρισμα των πεδίων. Επομένως, η μελέτη υπερσυμμετρικών συστημάτων γίνεται ευκολότερη με τη χρήση των υπερπεδίων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναζητήσουμε τις αναπαραστάσεις των μετασχηματισμών της ομάδας super-Poincaré που μετασχηματίζουν υπερπεδία. Στη συνέχεια, θα δούμε ότι εφαρμόζοντας κάποιους περιορισμούς στη γενική μορφή των υπερπεδίων μπορούμε να πάρουμε χειραλικά υπερπεδία και διανυσματικά υπερπεδία. Αυτά τα υπερπεδία θα μας φανούν χρήσιμα στην κατασκευή υπερσυμμετρικών Λαγκρανζιανών, που θα περιγράφουν συστήματα χειραλικών και διανυσματικών υπερπολλαπλετών αντίστοιχα. Έπειτα, θα επικεντρωθούμε στα χειραλικά υπερπεδία βρίσκοντας έναν γενικό τρόπο για να κατασκευάζουμε υπερσυμμετρικές Λαγκρανζιανές μέσω αυτών. Τέλος, γνωρίζοντας ότι δεν υπάρχουν υπερσυμμετρικά συστήματα σε χαμηλές ενέργειες, θα αναπτύξουμε έναν μηχανισμό αυθόρμητου σπασίματος της υπερσυμμετρίας που θα δίνει μάζα στα πεδία.

2.2 Υπερπεδία

Αρχικά, είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίζουμε τις αναπαραστάσεις των μετασχηματισμών της ομάδας super-Poincaré που δρουν στα υπερπεδία. Συγκεκριμένα, θα αναζητήσουμε τους μετασχηματισμούς με γεννήτορες $\left(P_\mu, Q_\alpha\, , \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right)$. Ένας γενικός τέτοιος μετασχηματισμός μπορεί να γραφτεί στην εξής μορφή:

$$G\left(a^\mu,\xi,\bar{\xi}\right) = e^{i\left(\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}-a^\mu P_\mu\right)} \tag{2.1}$$

Στην αναζήτησή μας θα μας φανεί χρήσιμη η ταυτότητα του Hausdorff:

$$e^A e^B = e^{\left(A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\cdots\right)} \tag{2.2}$$

όπου A,B τελεστές. Υπολογίζουμε το μετασχηματισμό $G\left(a^\mu,\xi,\bar{\xi}\right)\cdot G(x^\mu,\theta,\bar{\theta})$ με τη βοήθεια των σχέσεων (1.96γ), (1.96δ), (1.96ε), (1.96στ) και (2.2).

$$G\left(a^\mu,\xi,\bar{\xi}\right)\cdot G(x^\mu,\theta,\bar{\theta}) = e^{i\left(\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}-a^\mu P_\mu\right)} e^{i\left(\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q}-x^\mu P_\mu\right)} =$$

$$e^{\left(i(\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}-a^{\mu}P_{\mu})+i(\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q}-x^{\mu}P_{\mu})+\frac{1}{2}[i(\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}-a^{\mu}P_{\mu}),i(\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q}-x^{\mu}P_{\mu})]+\cdots\right)}=$$

$$e^{i\left(((\xi+\theta)Q+(\bar{\xi}+\bar{\theta})\bar{Q}-(x^{\mu}+a^{\mu})P_{\mu}+\frac{i}{2}[\xi Q,\bar{\theta}\bar{Q}]+\frac{i}{2}[\bar{\xi}\bar{Q},\theta Q]\right)}=$$

$$e^{i\left(((\xi+\theta)Q+(\bar{\xi}+\bar{\theta})\bar{Q}-(x^{\mu}+a^{\mu})P_{\mu}+i(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})P_{\mu}-i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi})P_{\mu}\right)}\Longrightarrow$$

$$G(a^{\mu},\xi,\bar{\xi})\cdot G(x^{\mu},\theta,\bar{\theta})=e^{i\left(((\xi+\theta)Q+(\bar{\xi}+\bar{\theta})\bar{Q}-\left(x^{\mu}+a^{\mu}-i(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})+i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi})\right)P_{\mu}\right)}\Longrightarrow$$

$$G(a^{\mu},\xi,\bar{\xi})\cdot G(x^{\mu},\theta,\bar{\theta})=G\left(x^{\mu}+a^{\mu}-i(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})+i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}),\xi+\theta,\bar{\xi}+\bar{\theta}\right)\quad(2.3)$$

Μέσω της σχέσης (2.3) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο μετασχηματισμός $G(\delta a^{\mu},\xi,\bar{\xi})$ έχει την ακόλουθη δράση πάνω σε ένα πεδίο $S(x^{\mu},\theta,\bar{\theta})$:

$$G(\delta a^{\mu},\xi,\bar{\xi})S(x^{\mu},\theta,\bar{\theta})=S\left(x^{\mu}+\delta a^{\mu}-i(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})+i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}),\theta+\xi,\bar{\theta}+\bar{\xi}\right)\quad(2.4)$$

Μπορούμε να αναπτύξουμε το πεδίο της σχέσης (2.4) σε σειρά ως εξής:

$$S\left(x^{\mu}+\delta a^{\mu}-i(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})+i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}),\theta+\xi,\bar{\theta}+\bar{\xi}\right)=$$

$$S(x^{\mu},\theta,\bar{\theta})+\delta a^{\mu}\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}+\xi^{\alpha}\left[\frac{\partial\left(x^{\mu}+\delta a^{\mu}-i(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})+i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi})\right)}{\partial\xi^{\alpha}}\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial S}{\partial\theta^{\alpha}}\right]$$

$$+\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\left[\frac{\partial\left(x^{\mu}+\delta a^{\mu}-i(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})+i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi})\right)}{\partial\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial S}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right]+\cdots\Longrightarrow$$

$$S\left(x^{\mu}+\delta a^{\mu}-i(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})+i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}),\theta+\xi,\bar{\theta}+\bar{\xi}\right)=$$

$$S(x^{\mu},\theta,\bar{\theta})-i\delta a^{\mu}i\partial_{\mu}S+i\xi^{\alpha}\left[\left(-(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right)\partial_{\mu}-i\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\right]S$$

$$-i\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\left[\theta^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}+i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right]S\quad(2.5)$$

Να σημειωθεί ότι στις πράξεις που έγιναν παραπάνω χρησιμοποιήσαμε κανόνες παραγώγισης τον μεταβλητών Grassmann, όπως τον κανόνα αλυσίδας. Οι κανόνες αυτοί συνοψίζονται στο Παράρτημα Γ. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα υπολογίζοντας την εξής παράγωγο:

$$\frac{\partial\left(\theta^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\right)}{\partial\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}}=-\frac{\partial\left(\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\theta^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\right)}{\partial\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}}=-\delta^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}\theta^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}=-\theta^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\quad(2.6)$$

Από τη σχέση (2.5) διαβάζουμε τις αναπαραστάσεις των γεννητόρων P_{μ}, Q_{α} , $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$.

$$-i\delta a^{\mu}P_{\mu}S=-i\delta a^{\mu}i\partial_{\mu}S\Longrightarrow$$

$$P_\mu = i\partial_\mu \tag{2.7α}$$

$$i\xi^\alpha Q_\alpha S = i\xi^\alpha \left[\left(-(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right)\partial_\mu - i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\right] S \Longrightarrow$$

$$Q_\alpha = -(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu - i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \tag{2.7β}$$

$$i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} S = -i\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\left[\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu + i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right] S \Longrightarrow$$

$$-i\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}} S = -i\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\left[\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu + i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right] S \Longrightarrow$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = \theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu + i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \tag{2.7γ}$$

Επιπροσθέτως, μέσω των σχέσεων (2.7β), (2.7γ) και με τη βοήθεια των σχέσεων (Γ.3α) και (Γ.3δ) μπορούμε να βρούμε τις αναπαραστάσεις των $Q^\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ ως εξής:

$$\xi^\alpha Q_\alpha = \xi^\alpha\left[\left(-(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right)\partial_\mu - i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\right] \Longrightarrow$$

$$-\xi_\alpha Q^\alpha = -\xi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu - i\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \Longrightarrow$$

$$-\xi_\alpha Q^\alpha = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\xi_\alpha\partial_\mu - i\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \Longrightarrow$$

$$-\xi_\alpha Q^\alpha = -\xi_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu - i\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \Longrightarrow$$

$$Q^\alpha = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu + i\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \tag{2.7δ}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι:

$$\bar{Q}^{\dot{\alpha}} = -(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\partial_\mu - i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \tag{2.7ε}$$

Να σημειωθεί ότι το γενικό υπερπεδίο $S(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ μπορεί να αναπτυχθεί σε δυνάμεις των μεταβλητών Grassmann με συντελεστές συνηθισμένα πεδία που έχουν εξάρτηση από τις χωροχρονικές συντεταγμένες. Ένα τέτοιο υπερπεδίο αποτελεί εν γένει αναγώγιμη αναπαράσταση της υπερσυμμετρικής άλγεβρας. Σε μία μη αναγώγιμη αναπαράσταση πρέπει να εμφανίζονται ως συντελεστές στο ανάπτυγμα του πεδίου συνηθισμένα πεδία που ανήκουν σε μία μόνο υπερπολλαπλέτα (παράγραφος 1.3.4). Εφαρμόζοντας κάποιους καλά επιλεγμένους περιορισμούς στο γενικό υπερπεδίο μπορούμε να πάρουμε διάφορα είδη υπερπεδίων που θα αποτελούν μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τα διανυσματικά υπερπεδία, στα οποία έχει επιβληθεί ο εξής περιορισμός $S = S^\dagger$. Τα πεδία που εμφανίζονται σαν συντελεστές στο ανάπτυγμα αυτών των πεδίων ανήκουν στη διανυσματική υπερπολλαπλέτα.

Στις επόμενες παραγράφους του παρόντος κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με τα χειραλικά υπερπεδία "$\Phi(x^\mu,\theta,\bar{\theta})$", στα οποία έχουμε επιβάλει τον ακόλουθο περιορισμό. Η υπερσυμμετρική συναλλοίωτη παράγωγός τους είναι μηδέν:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi(x^\mu,\theta,\bar{\theta}) = 0 \tag{2.8}$$

Τα πεδία που εμφανίζονται σαν συντελεστές στο ανάπτυγμα ενός χειραλικού υπερπεδίου ανήκουν σε μία χειραλική υπερπολλαπλέτα. Η απεικόνιση των συναλλοίωτων παραγώγων που δρουν σε υπερπεδία μπορεί να είναι η εξής:

$$D_\alpha = i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu + \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \tag{2.9α}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu - \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \tag{2.9β}$$

Για να είναι αποδεκτή η μορφή των σχέσεων (2.9α), (2.9β) πρέπει η δράση των συναλλοίωτων παραγώγων στα υπερπεδία να δίνει υπερπεδία. Η απαίτηση αυτή δεν είναι τετριμμένη και για αυτό θα αποδείξουμε ότι ικανοποιείται με την επιλογή της μορφής των συναλλοίωτων παραγώγων που κάναμε. Ακολουθώντας τους συνειρμούς που έγιναν στην παράγραφο 1.4 για τα συνηθισμένα πεδία, θα απαιτήσουμε τα υπερπεδία να μετασχηματίζονται και σαν πεδία και σαν τελεστές κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Σαν πεδία μετασχηματίζονται ως εξής:

$$G(0,\xi,\bar{\xi})S(x^\mu,\theta,\bar{\theta}) = \left[\mathbb{1} + i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\right]S(x^\mu,\theta,\bar{\theta}) \Longrightarrow$$

$$\delta_\xi S = i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)S \tag{2.10}$$

Ενώ, σαν τελεστές μετασχηματίζονται ως εξής:

$$S' = G^\dagger\left(0,\xi,\bar{\xi}\right)\, S\, G\left(0,\xi,\bar{\xi}\right) \Longrightarrow$$

$$S' = \left[\mathbb{1} - i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\right] S \left[\mathbb{1} + i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$\delta_\xi S = \left[S, i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\right] \tag{2.11}$$

Από τις σχέσεις (2.10) και (2.11) προκύπτει ότι τα υπερπεδία πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση:

$$\left[S, i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\right] = i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)S \tag{2.12}$$

Από τις σχέσεις (2.7β), (2,7γ), (2.9α) και (2.9β) είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι οι συναλλοίωτες παράγωγοι ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις αντιμετάθεσης όταν δρουν σε υπερπεδία:

$$\left\{D_\alpha, Q_\beta\right\} = \left\{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = \left\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\right\} = \left\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 0 \tag{2.13α}$$

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot\alpha}, \bar{D}_{\dot\beta}\} = 0 \qquad (2.13β)$$

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot\beta}\} = -2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu \qquad (2.13γ)$$

Ενδεικτικά θα παρουσιάσουμε τις αποδείξεις για τις σχέσεις $\{D_\alpha, Q_\beta\} = 0$ και $\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot\beta}\} = -2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu$, διότι οι υπόλοιπες μπορούν να αποδειχθούν με παρόμοιο τρόπο.

$$\{D_\alpha, Q_\beta\}S = D_\alpha Q_\beta S + Q_\beta D_\alpha S =$$

$$\left(i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu + \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\right)\left(-(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\nu - i\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right)S$$

$$+\left(-(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\nu - i\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right)\left(i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu + \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\right)S =$$

$$-i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\bar\theta^{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\mu\partial_\nu S + (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}S$$

$$-(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\partial_\nu S)\bar\theta^{\dot\beta} - i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}S$$

$$-i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\nu\partial_\mu S - (\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\nu\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}S$$

$$+(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}(\partial_\mu S)\bar\theta^{\dot\alpha} - i\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}S =$$

$$-i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\left(\bar\theta^{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} + \bar\theta^{\dot\beta}\bar\theta^{\dot\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu S + (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\left(\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial S}{\partial\theta^\beta} + \frac{\partial S}{\partial\theta^\beta}\bar\theta^{\dot\alpha}\right)$$

$$-(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\partial_\nu\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} + \bar\theta^{\dot\beta}\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha}\right) - i\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}S + \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}S\right) \Rightarrow$$

$$\{D_\alpha, Q_\beta\}S = 0 \qquad (2.14)$$

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της σχέσης (2.13γ).

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot\beta}\}S = D_\alpha\bar{D}_{\dot\beta}S + \bar{D}_{\dot\beta}D_\alpha S =$$

$$\left(i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu + \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\right)\left(-i\theta^\beta(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\partial_\nu - \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\right)S$$

$$+\left(-i\theta^\beta(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\partial_\nu - \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\right)\left(i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu + \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\right)S =$$

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\left(\bar\theta^{\dot\alpha}\theta^\beta + \theta^\beta\bar\theta^{\dot\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu S - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}S$$

$$-i(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\partial_\nu \frac{\partial\theta^\beta S}{\partial\theta^\alpha} - \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}S + \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}S\right)$$

$$-i(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\theta^\beta\partial_\nu \frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu \frac{\partial\bar\theta^{\dot\alpha} S}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}} =$$

$$-i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}S - i(\sigma^\nu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\nu S - i(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\partial_\nu \frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta$$

$$-i(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\theta^\beta\partial_\nu \frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu S - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu \frac{\partial S}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\bar\theta^{\dot\alpha} =$$

$$-2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu S - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\left(\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}S + \frac{\partial S}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\bar\theta^{\dot\alpha}\right)$$

$$-i(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\partial_\nu\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta + \theta^\beta\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha}\right) \Longrightarrow$$

$$\{D_\alpha, \bar D_{\dot\beta}\}S = -2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu S \qquad (2.15)$$

Τέλος, θα δείξουμε ότι το $\bar D_{\dot\alpha}S$ είναι υπερπεδίο, όταν το S είναι υπερπεδίο. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\bar D_{\dot\alpha}S$ ικανοποιεί τη σχέση (2.12).

$$[\bar D_{\dot\alpha}S, i(\xi Q + \bar\xi\bar Q)] = \bar D_{\dot\alpha}[S, i(\xi Q + \bar\xi\bar Q)] + [\bar D_{\dot\alpha}, i(\xi Q + \bar\xi\bar Q)]S \Longrightarrow$$

$$[\bar D_{\dot\alpha}S, i(\xi Q + \bar\xi\bar Q)] = i\bar D_{\dot\alpha}(\xi Q + \bar\xi\bar Q)S \Longrightarrow$$

$$[\bar D_{\dot\alpha}S, i(\xi Q + \bar\xi\bar Q)] = i(\xi Q + \bar\xi\bar Q)\bar D_{\dot\alpha}S \qquad (2.16)$$

Η σχέση (2.16) μας πείθει ότι το $\bar D_{\dot\alpha}S$ είναι υπερπεδίο όταν το S είναι υπερπεδίο. Για να γίνει πλήρως συνεπής η απόδειξή μας πρέπει να σχολιάσουμε ότι μέσω των σχέσεων (2.9β), (2.13α) γίνεται φανερό το εξής:

$$[\bar D_{\dot\alpha}, i(\xi Q + \bar\xi\bar Q)]S = 0 \qquad (2.17)$$

Το $\bar D_{\dot\alpha}$ αντιμετατίθεται με τα $\xi, \bar\xi, Q, \bar Q$ όταν δρα σε υπερπεδία, επομένως η απόδειξη της (2.17) είναι τετριμμένη.

Συμπερασματικά, έχουμε δικαίωμα να ορίσουμε ως χειραλικά υπερπεδία $\Phi(x^\mu, \theta, \bar\theta)$ τα υπερπεδία που ικανοποιούν τη σχέση (2.8).

2.3 Χειραλικά υπερπεδία

Στο σημείο αυτό θα επιδιώξουμε την εύρεση της γενικότερης μορφής ενός χειραλικού υπερπεδίου. Έστω η μεταβλητή y^μ που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar\theta \qquad (2.18)$$

Θα δείξουμε ότι κάθε συνάρτηση των μεταβλητών (y^μ, θ) ικανοποιεί τη σχέση (2.8). Στα πλαίσια της απόδειξης είναι χρήσιμο να δείξουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} y^\mu = 0 \quad \text{και} \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} \theta = 0 \tag{2.19}$$

Οι σχέσεις (2.19) αποδεικνύονται ως εξής:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} y^\mu = \left(-i\theta^\alpha (\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\nu - \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right)(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) =$$

$$-i\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} - i\frac{\partial \theta^\alpha {\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}}}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} = -i\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} + i\frac{\partial \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \theta^\alpha {\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\beta}}}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} =$$

$$-i\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha {\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} = 0 \Longrightarrow$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} y^\mu = 0$$

Όμοια αποδεικνύεται η σχέση $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \theta = 0$. Μέσω της σχέσης (2.19) επαληθεύεται εύκολα το εξής: $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi(y^\mu, \theta) = 0$:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi(y^\mu, \theta) = \bar{D}_{\dot{\alpha}} y^\mu \frac{\partial \Phi(y^\mu, \theta)}{\partial y^\mu} + \bar{D}_{\dot{\alpha}} \theta \frac{\partial \Phi(y^\mu, \theta)}{\partial \theta} \Longrightarrow$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi(y^\mu, \theta) = 0 \tag{2.20}$$

Αναπτύσσοντας το $\Phi(y^\mu, \theta)$ σε δυνάμεις του θ θα βρούμε τη γενικότερη μορφή των χειραλικών υπερπεδίων.

$$\Phi(y^\mu, \theta) = \varphi(y^\mu) + \sqrt{2}\theta\psi(y^\mu) + \theta\theta F(y^\mu) \tag{2.21}$$

όπου φ, F είναι βαθμωτά μιγαδικά πεδία και ψ είναι ένας αριστερόστροφος σπίνορας Weyl. Το $\sqrt{2}$ στον δεύτερο όρο του αναπτύγματος προστέθηκε αυθαίρετα για λόγους που θα γίνουν εμφανείς στη συνέχεια. Αναπτύσσοντας το $\Phi(y^\mu, \theta)$ γύρω από το διάνυσμα x^μ παίρνουμε τη γενικότερη μορφή ενός χειραλικού υπερπεδίου με εξάρτηση από τις συντεταγμένες του υπερ-χώρου $(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$.

$$\Phi(y^\mu, \theta) = \Phi(x^\mu, \theta) + (y^\mu - x^\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}(y^\nu - x^\nu)(y^\mu - x^\mu)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\nu \partial x^\mu} =$$

$$\varphi(x^\mu) + \sqrt{2}\theta\psi(x^\mu) + \theta\theta F(x^\mu) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu \varphi(x^\mu)$$

$$+i\sqrt{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\left(\theta\partial_\mu\psi(x^\mu)\right) - \frac{1}{2}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\nu\partial_\mu\varphi(x^\mu) \Longrightarrow$$

$$\Phi(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = \varphi(x^\mu) + \sqrt{2}\theta\psi(x^\mu) + \theta\theta F(x^\mu) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu \varphi(x^\mu)$$

$$+i\sqrt{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\left(\theta\partial_\mu\psi(x^\mu)\right) - \tfrac{1}{2}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\nu\partial_\mu\varphi(x^\mu) \tag{2.22}$$

Να σημειωθεί ότι οι όροι της μορφής $\theta^{\alpha}\theta\theta$ μηδενίζονται. Ο όρος $i\sqrt{2}(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\left(\theta\partial_{\mu}\psi(x^{\mu})\right)$ μέσω των σχέσεων (Γ.7α), (Γ.7στ) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$i\sqrt{2}(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\left(\theta\partial_{\mu}\psi(x^{\mu})\right) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\partial_{\mu}\psi(x^{\mu})\sigma^{\mu}\bar{\theta}\right) \tag{2.23}$$

Ενώ ο όρος $-\frac{1}{2}(\theta\sigma^{\nu}\bar{\theta})(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_{\nu}\partial_{\mu}\varphi(x^{\mu})$ μέσω των σχέσεων (Γ.7α), (Γ.7η) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$-\frac{1}{2}(\theta\sigma^{\nu}\bar{\theta})(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_{\nu}\partial_{\mu}\varphi(x^{\mu}) = -\frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi(x^{\mu}) \tag{2.24}$$

Μέσω των σχέσεων (2.22), (2.23) και (2.24) το χειραλικό υπερπεδίο παίρνει τη μορφή:

$$\Phi(x^{\mu},\theta,\bar{\theta}) = \varphi + \sqrt{2}(\theta\psi) + (\theta\theta)F + i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_{\mu}\varphi - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\partial_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\theta}\right)$$
$$-\frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi \tag{2.25}$$

Είναι προφανές ότι το μιγαδικό συζυγές του πεδίου $\Phi(x^{\mu},\theta,\bar{\theta})$ θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Phi^{\dagger}(x^{\mu},\theta,\bar{\theta}) = \varphi^{\dagger} + \sqrt{2}(\bar{\theta}\bar{\psi}) + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^{\dagger} - i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_{\mu}\varphi^{\dagger} + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(\theta\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}\right)$$
$$-\frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi^{\dagger} \tag{2.26}$$

Συχνά το πεδίο $\Phi(x^{\mu},\theta,\bar{\theta})$ αποκαλείται αριστερόστροφο χειραλικό υπερπεδίο, ενώ το $\Phi^{\dagger}(x^{\mu},\theta,\bar{\theta})$ αποκαλείται δεξιόστροφο χειραλικό υπερπεδίο. Το δεξιόστροφο χειραλικό υπερπεδίο ικανοποιεί τον ακόλουθο περιορισμό:

$$D_{\alpha}\Phi^{\dagger} = 0 \tag{2.27}$$

Για την ολοκλήρωση αυτής της παραγράφου, μένει να δείξουμε πως τα πεδία φ,ψ,F που εμφανίζονται σαν συντελεστές στο ανάπτυγμα των χειραλικών υπερπεδίων μετασχηματίζονται όπως τα αντίστοιχα πεδία της παραγράφου 1.4. Κατά επέκταση θα δείξουμε ότι τα πεδία φ,ψ ανήκουν σε μία χειραλική υπερπολλαπλέτα, ενώ το πεδίο F είναι ένα βοηθητικό πεδίο, του οποίου οι εξισώσεις κίνησης μηδενίζονται.

Αρχικά, θα βρούμε πως μετασχηματίζεται ένα χειραλικό υπερπεδίο κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.7β) και (2.7γ):

$$G\left(0,\xi,\bar{\xi}\right)\Phi(x^{\mu},\theta,\bar{\theta}) = \left[\mathbb{1} + i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\right]\Phi(x^{\mu},\theta,\bar{\theta}) \Longrightarrow$$

$$\delta_{\xi}\Phi = i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\Phi = i\left(\xi^{\alpha}Q_{\alpha} - \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right)\Phi \Longrightarrow$$

$$\delta_{\xi}\Phi = -i(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_{\mu}\Phi + \xi^{\alpha}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta^{\alpha}} + i\left(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}\right)\partial_{\mu}\Phi + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \tag{2.28}$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους $\partial_\mu \Phi$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta^\alpha}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}$, όπου το Φ δίνεται από τη σχέση (2.25).

$$\partial_\mu \Phi = \partial_\mu \varphi + \sqrt{2}\big(\theta \partial_\mu \psi\big) + (\theta\theta)\partial_\mu F + i(\theta\sigma^\nu \bar{\theta})\partial_\mu \partial_\nu \varphi$$

$$-\tfrac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\big(\partial_\mu \partial_\nu \psi \sigma^\nu \bar{\theta}\big) - \tfrac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu \partial_\nu \partial^\nu \varphi \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta^\alpha} = \sqrt{2}\psi_\alpha + 2\theta_\alpha F + i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu \varphi$$

$$-i\sqrt{2}\theta_\alpha\big(\partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\theta}\big) - \tfrac{1}{2}\theta_\alpha(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu \partial^\mu \varphi \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} = -i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu \varphi +$$

$$\tfrac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\partial_\mu \psi^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} + \tfrac{1}{2}(\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_\mu \partial^\mu \varphi \tag{2.31}$$

Από τις σχέσεις (2.28), (2.29), (2.30) και (2.31) βρίσκουμε το $\delta_\xi \Phi$.

$$\delta_\xi \Phi = \sqrt{2}\xi\psi + 2(\xi\theta)F + i(\xi\sigma^\mu \bar{\theta})\partial_\mu \varphi - i\sqrt{2}(\xi\theta)\big(\partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\theta}\big)$$

$$-\tfrac{1}{2}(\xi\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu \partial^\mu \varphi - i(\xi\sigma^\mu \bar{\theta})\partial_\mu \varphi - i\sqrt{2}(\xi\sigma^\mu \bar{\theta})\big(\theta \partial_\mu \psi\big)$$

$$-i(\xi\sigma^\mu \bar{\theta})(\theta\theta)\partial_\mu F + (\xi\sigma^\mu \bar{\theta})(\theta\sigma^\nu \bar{\theta})\partial_\mu \partial_\nu \varphi$$

$$-\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\xi\sigma^\mu \bar{\theta})(\theta\theta)\big(\partial_\mu \partial_\nu \psi \sigma^\nu \bar{\theta}\big) + \tfrac{i}{4}(\xi\sigma^\mu \bar{\theta})(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu \partial_\nu \partial^\nu \varphi$$

$$+i\big(\theta\sigma^\mu \bar{\xi}\big)\partial_\mu \varphi + \sqrt{2}i\big(\theta\sigma^\mu \bar{\xi}\big)\big(\theta \partial_\mu \psi\big) + i\big(\theta\sigma^\mu \bar{\xi}\big)(\theta\theta)\partial_\mu F$$

$$-\big(\theta\sigma^\mu \bar{\xi}\big)(\theta\sigma^\nu \bar{\theta})\partial_\mu \partial_\nu \varphi + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\theta\sigma^\mu \bar{\xi}\big)(\theta\theta)\big(\partial_\mu \partial_\nu \psi \sigma^\nu \bar{\theta}\big)$$

$$-\tfrac{i}{4}\big(\theta\sigma^\mu \bar{\xi}\big)(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu \partial_\nu \partial^\nu \varphi + i\big(\theta\sigma^\mu \bar{\xi}\big)\partial_\mu \varphi$$

$$-\tfrac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\big(\partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\xi}\big) - \tfrac{1}{2}(\theta\theta)\big(\bar{\theta}\bar{\xi}\big)\partial_\mu \partial^\mu \varphi \tag{2.32}$$

Για να προχωρήσουμε, κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

1. Οι όροι $\frac{i}{4}(\xi\sigma^\mu \bar{\theta})(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu \partial_\nu \partial^\nu \varphi$, $i\big(\theta\sigma^\mu \bar{\xi}\big)(\theta\theta)\partial_\mu F$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\theta\sigma^\mu \bar{\xi}\big)(\theta\theta)\big(\partial_\mu \partial_\nu \psi \sigma^\nu \bar{\theta}\big)$, $-\frac{i}{4}\big(\theta\sigma^\mu \bar{\xi}\big)(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu \partial_\nu \partial^\nu \varphi$ μηδενίζονται διότι εμφανίζονται γινόμενα της μορφής: $\theta^\alpha \theta\theta$ ή $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}\bar{\theta}$.
2. Οι όροι $i(\xi\sigma^\mu \bar{\theta})\partial_\mu \varphi, -i(\xi\sigma^\mu \bar{\theta})\partial_\mu \varphi$ αλληλοαναιρούνται.
3. Οι όροι $\sqrt{2}i\big(\theta\sigma^\mu \bar{\xi}\big)\big(\theta \partial_\mu \psi\big) - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\big(\partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\xi}\big)$ μέσω της σχέσης (Γ.7στ) παίρνουν την εξής μορφή:

$$\sqrt{2}i\big(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}\big)\big(\theta\partial_{\mu}\psi\big)-\tfrac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\big(\partial_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\xi}\big)=i\sqrt{2}(\theta\theta)\big(\bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi\big)$$

4. Οι όροι $-i\sqrt{2}(\xi\theta)\big(\partial_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\theta}\big)-i\sqrt{2}(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})\big(\theta\partial_{\mu}\psi\big)$ μέσω της σχέσης (Γ.7στ) παίρνουν την εξής μορφή:

$$-i\sqrt{2}(\xi\theta)\big(\partial_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\theta}\big)-i\sqrt{2}(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})\big(\theta\partial_{\mu}\psi\big)=i\sqrt{2}(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\big(\xi\partial_{\mu}\psi\big)$$

5. Ο όρος $-i(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})(\theta\theta)\partial_{\mu}F$ μέσω της σχέσης (Γ.3δ) παίρνει την εξής μορφή:
$$-i(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})(\theta\theta)\partial_{\mu}F=i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\xi)\partial_{\mu}F$$
6. Ο όρος $-\big(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}\big)(\theta\sigma^{\nu}\bar{\theta})\partial_{\mu}\partial_{\nu}\varphi$ μέσω των σχέσεων (Γ.3δ), (Γ.7θ) και (Γ.7ιη) παίρνει τη μορφή:
$$-\big(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}\big)(\theta\sigma^{\nu}\bar{\theta})\partial_{\mu}\partial_{\nu}\varphi=-\frac{1}{2}(\theta\theta)\big(\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\bar{\xi}\big)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\varphi$$
7. Ο όρος $-\frac{1}{2}(\theta\theta)\big(\bar{\theta}\bar{\xi}\big)\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi$ με τη βοήθεια των σχέσεων (Γ.7ε), (Γ.7θ) και (Γ.7ιη) έρχεται στη μορφή:
$$-\frac{1}{2}(\theta\theta)\big(\bar{\theta}\bar{\xi}\big)\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi=-\frac{1}{2}(\theta\theta)\big(\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\bar{\xi}\big)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\varphi$$
8. Ο όρος $-\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})(\theta\theta)\big(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\psi\sigma^{\nu}\bar{\theta}\big)$ μέσω της σχέσης (Γ.7στ) παίρνει την εξής μορφή:
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})(\theta\theta)\big(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\psi\sigma^{\nu}\bar{\theta}\big)=-\frac{\sqrt{2}}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\big(\xi\partial_{\mu}\partial^{\mu}\psi\big)$$
9. Τέλος, οι όροι $-\frac{1}{2}(\xi\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi+(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta})(\theta\sigma^{\nu}\bar{\theta})\partial_{\mu}\partial_{\nu}\varphi$ μέσω των σχέσεων (Γ.3δ), (Γ.7α) και (Γ.7θ) φαίνεται πως αλληλοαναιρούνται.

Μέσω των παραπάνω παρατηρήσεων μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (2.32) ως εξής:

$$\delta_{\xi}\Phi=\sqrt{2}\xi\psi+2i\big(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}\big)\partial_{\mu}\varphi+2(\xi\theta)F$$
$$+i\sqrt{2}(\theta\theta)\big(\bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi\big)+i\sqrt{2}(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\big(\xi\partial_{\mu}\psi\big)$$
$$-(\theta\theta)\big(\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\bar{\xi}\big)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\varphi+i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\xi)\partial_{\mu}F$$
$$-\tfrac{\sqrt{2}}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\big(\xi\partial_{\mu}\partial^{\mu}\psi\big)\qquad(2.33)$$

Όπως έχουμε προαναφέρει, τα χειραλικά υπερπεδία οφείλουν να μετασχηματίζονται και σαν τελεστές κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Επίσης, τα πεδία που εμφανίζονται σαν συντελεστές στο ανάπτυγμα του χειραλικού υπερπεδίου πρέπει να μετασχηματίζονται και σαν τελεστές κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς.

$$\Phi'=G^{\dagger}\big(0,\xi,\bar{\xi}\big)\Phi\,G\big(0,\xi,\bar{\xi}\big)\Rightarrow$$

$$\delta_{\xi}\Phi=\delta_{\xi}\varphi+\sqrt{2}\big(\theta\delta_{\xi}\psi\big)+(\theta\theta)\delta_{\xi}F+i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_{\mu}\delta_{\xi}\varphi$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\partial_\mu \delta_\xi \psi \sigma^\mu \bar{\theta}\right) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu \partial^\mu \delta_\xi \varphi \tag{2.34}$$

Συγκρίνοντας με τις σχέσεις (2.33) και (2.34) βρίσκουμε πώς μετασχηματίζονται τα πεδία φ, ψ, F μέσω των υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών.

$$\delta_\xi \varphi = \sqrt{2}\xi\psi \tag{2.35α}$$

$$\delta_\xi \psi_\alpha = i\sqrt{2}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\partial_\mu \varphi + \sqrt{2}\xi_\alpha F \tag{2.35β}$$

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \tag{2.35γ}$$

Παρατηρούμε πως τα πεδία μετασχηματίζονται όπως στις σχέσεις (1.128). Επομένως, επιβεβαιώνουμε πως τα πεδία φ, ψ που εμφανίζονται σαν συντελεστές στο ανάπτυγμα των χειραλικών υπερπεδίων ανήκουν σε μία χειραλική υπερπολλαπλέτα, ενώ το πεδίο F αποτελεί μιγαδικό βαθμωτό βοηθητικό πεδίο. Επιπροσθέτως, η παραπάνω διαδικασία αποτελεί έναν κομψότερο τρόπο εύρεσης των μετασχηματισμών των πεδίων μιας χειραλικής υπερπολλαπλέτας από εκείνον που χρησιμοποιήσαμε στην παράγραφο 1.4.

2.4 Λαγκρανζιανές χειραλικών υπερπεδίων

Ο σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η εύρεση μίας γενικής μορφής υπερσυμμετρικών Λαγκρανζιανών που θα περιγράφουν συστήματα σωματιδίων που ανήκουν σε χειραλικές υπερπολλαπλέτες.

2.4.1 Παράγωγα χειραλικών υπερπεδίων

Αρχικά, χρησιμοποιώντας διαφορετικά χειραλικά υπερπεδία, θα κατασκευάσουμε καινούρια υπερπεδία, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή των υπερσυμμετρικών Λαγκρανζιανών. Συγκεκριμένα, θα αναζητήσουμε τα υπερπεδία $\Phi_i\Phi_j$, $\Phi_i\Phi_j\Phi_k$, $\Phi_i^\dagger\Phi_j$. Να σημειωθεί ότι οι τελεστές $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ είναι γραμμικοί διαφορικοί τελεστές στον υπερχώρο $(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$. Επομένως, κάθε παράγωγο δύο αριστερόστροφων χειραλικών υπερπεδίων θα αποτελεί αριστερόστροφο χειραλικό υπερπεδίο, αφού θα ικανοποιεί με προφανή τρόπο τις σχέσεις (2.8) και (2.12). Ο συνδυασμός αριστερόστροφων και δεξιόστροφων χειραλικών υπερπεδίων $\Phi_i^\dagger\Phi_j$ αποτελεί διανυσματικό υπερπεδίο, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 3. Ας υπολογίσουμε το χειραλικό υπερπεδίο $\Phi_i(y,\theta)\Phi_j(y,\theta)$ χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.21).

$$\Phi_i(y,\theta)\Phi_j(y,\theta) = \varphi_i(y)\varphi_j(y)$$

$$+\sqrt{2}\theta\left(\varphi_i(y)\psi_j(y) + \psi_i(y)\varphi_j(y)\right)$$

$$+\theta\theta\left(\varphi_i(y)F_j(y) + F_i(y)\varphi_j(y)\right) + 2\left(\theta\psi_i(y)\right)\left(\theta\psi_j(y)\right) \Rightarrow$$

$$\Phi_i(y,\theta)\Phi_j(y,\theta) = \varphi_i(y)\varphi_j(y)$$

$$+\sqrt{2}\theta\left(\varphi_i(y)\psi_j(y)+\psi_i(y)\varphi_j(y)\right)$$

$$+\theta\theta\left(\varphi_i(y)F_j(y)+F_i(y)\varphi_j(y)-\psi_i(y)\psi_j(y)\right) \tag{2.36}$$

Στους υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (Γ.7β). Στη συνέχεια υπολογίζουμε το χειραλικό υπερπεδίο $\Phi_i(y,\theta)\Phi_j(y,\theta)\Phi_k(y,\theta)$:

$$\Phi_i(y,\theta)\Phi_j(y,\theta)\Phi_k(y,\theta)=\varphi_i(y)\varphi_j(y)\varphi_k(y)$$

$$+\sqrt{2}\theta\left(\varphi_i(y)\varphi_j(y)\psi_k(y)+\varphi_i(y)\psi_j(y)\varphi_k(y)+\psi_i(y)\varphi_j(y)\varphi_k(y)\right)$$

$$+\theta\theta\left(\varphi_i(y)\varphi_j(y)F_k(y)+\varphi_i(y)F_j(y)\varphi_k(y)+F_i(y)\varphi_j(y)\varphi_k(y)-\right.$$
$$\left.\psi_i(y)\psi_j(y)\varphi_k(y)-\varphi_i(y)\psi_j(y)\psi_k(y)-\varphi_j(y)\psi_i(y)\psi_k(y)\right) \tag{2.37}$$

Τέλος, θα υπολογίσουμε το υπερπεδίο $\Phi_i^\dagger(y,\theta)\Phi_j(y,\theta)$.

$$\Phi_i^\dagger(y,\theta)\Phi_j(y,\theta)=\varphi_i^\dagger(y)\varphi_j(y)+\sqrt{2}\theta\psi_j(y)\varphi_i^\dagger(y)+\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i(y)\varphi_j(y)$$

$$+2\bar{\theta}\bar{\psi}_i(y)\theta\psi_j(y)+\theta\theta\varphi_i^\dagger(y)F_j(y)+\bar{\theta}\bar{\theta}F_i^\dagger\varphi_j(y)$$

$$+\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i(y)\theta\theta F_j(y)+\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\theta}F_i^\dagger(y)\theta\psi_j(y)+\bar{\theta}\bar{\theta}F_i^\dagger\theta\theta F_j(y) \tag{2.38}$$

Να σημειωθεί ότι οι σχέσεις (2.36), (2.37) και (2.38) μπορούν να γραφτούν και σε συντεταγμένες $(x^\mu,\theta,\bar{\theta})$ μέσω της σχέσης (2.18) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 2.3.

Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε μία πολύ σημαντική παρατήρηση. Στο ανάπτυγμα των χειραλικών υπερπεδίων της μορφής $\Phi(y,\theta)$ οι συντελεστές του $\theta\theta$ ($F-όροι$) μετασχηματίζονται σαν ολικοί παράγωγοι κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, σχέση (2.35γ). Επίσης, στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι στο ανάπτυγμα των διανυσματικών υπερπεδίων οι συντελεστές του $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ ($D-όροι$) μετασχηματίζονται σαν ολικοί παράγωγοι κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Επομένως, μπορούμε να φτιάξουμε υπερσυμμετρικές Λαγκρανζιανές χρησιμοποιώντας τους $F-όρους$ και τον $D-όρο$ των υπερπεδίων των σχέσεων (2.36), (2.37) και (2.38).

Θα μας φανεί πολύ χρήσιμο στη συνέχεια το να γράψουμε τους $F-όρους$ και τον $D-όρο$ των προαναφερθέντων υπερπεδίων συναρτήσει των συντεταγμένων $(x^\mu,\theta,\bar{\theta})$.

$$\left[\Phi_i\Phi_j\right]_F=\varphi_i(x)F_j(x)+\varphi_j(x)F_i(x)-\psi_i(x)\psi_j(x) \tag{2.39}$$

$$\left[\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right]_F=\varphi_i\varphi_jF_k+\varphi_iF_j\varphi_k+F_i\varphi_j\varphi_k$$

$$-\psi_i\psi_j\varphi_k-\psi_i\psi_k\varphi_j-\psi_j\psi_k\varphi_i \tag{2.40}$$

$$\left[\Phi_i{}^{\dagger}\Phi_j\right]_D = F_i^{\dagger}F_j + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_i^{\dagger}\partial^\mu\varphi_j - \frac{1}{4}\varphi_i^{\dagger}\partial_\mu\partial^\mu\varphi_j - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\varphi_i^{\dagger}\varphi_j$$

$$+\tfrac{i}{2}\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j - \tfrac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_j \qquad (2.41)$$

2.4.2 Επανακανονικοποιημένες υπερσυμμετρικές Λαγκρανζιανές

Όπως προαναφέραμε, μπορούμε να κατασκευάσουμε υπερσυμμετρικές Λαγκρανζιανές χρησιμοποιώντας τους $F-όρους$ χειραλικών υπερπεδίων και τους $D-όρους$ διανυσματικών υπερπεδίων. Έχουμε λοιπόν το δικαίωμα να κατασκευάσουμε επανακανονικοποιημένες υπερσυμμετρικές Λαγκρανζιανές, που θα περιγράφουν συστήματα σωματιδίων, τα οποία ανήκουν σε χειραλικές υπερπολλαπλέτες, ως εξής:

$$\mathcal{L} = \textstyle\sum_i\left[\Phi_i{}^{\dagger}\Phi_i\right]_D + \left([W(\Phi)]_F + E.\Sigma.\right) \qquad (2.42)$$

όπου $E.\Sigma.$ εννοούμε Ερμιτιανοί Συζυγείς όροι. Το $W(\Phi)$ ονομάζεται υπερδυναμικό και στην περίπτωση των επανακανονικοποιημένων υπερσυμμετρικών Λαγκρανζιανών παίρνει την εξής μορφή:

$$W(\Phi) = \tfrac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \tfrac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \qquad (2.43)$$

όπου έχουμε άθροιση στα i, j, k. Τα $m_{ij}, \lambda_{ijk} \in \mathbb{R}$ και είναι συμμετρικά στην εναλλαγή των δεικτών τους. Οι συντελεστές $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ υπάρχουν στο υπερδυναμικό για να μην εμφανίζονται οι ίδιοι όροι δύο και τρεις φορές αντίστοιχα μετά τις αθροίσεις. Στη συνέχεια, θα γράψουμε την αναλυτική μορφή της σχέσης (2.42), χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.39), (2.40), (2.41), (2.42) και (2.43) χωρίς να κρατήσουμε τους όρους που εμφανίζονται σαν ολικές παράγωγοι.

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi_i^{\dagger}\partial^\mu\varphi_i + i\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i + F_i^{\dagger}F_i$$

$$+\left(m_{ij}\varphi_iF_j - \tfrac{1}{2}m_{ij}\psi_i\psi_j + \lambda_{ijk}\varphi_i\varphi_jF_k - \lambda_{ijk}\psi_i\psi_j\varphi_k + E.\Sigma.\right) \qquad (2.44)$$

Κάναμε χρήση των σχέσεων:

1. $-\tfrac{1}{4}\varphi_i^{\dagger}\partial_\mu\partial^\mu\varphi_j - \tfrac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\varphi_i^{\dagger}\varphi_j = -\tfrac{1}{4}\partial_\mu\left(\varphi_i^{\dagger}\partial^\mu\varphi_j + \partial^\mu\varphi_i^{\dagger}\varphi_j\right) + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\varphi_i^{\dagger}\partial^\mu\varphi_i$
2. $-\tfrac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_j = -\tfrac{i}{2}\partial_\mu\left(\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_j\right) + \tfrac{i}{2}\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j$
3. $m_{ij}\varphi_jF_i = m_{ij}\varphi_iF_j$
4. $\lambda_{ijk}\left(\varphi_i\varphi_jF_k + \varphi_iF_j\varphi_k + F_i\varphi_j\varphi_k\right) = 3\lambda_{ijk}\varphi_i\varphi_jF_k$
5. $\lambda_{ijk}\left(-\psi_i\psi_j\varphi_k - \psi_i\psi_k\varphi_j - \psi_j\psi_k\varphi_i\right) = -3\lambda_{ijk}\psi_i\psi_j\varphi_k$

Απαιτώντας η δράση του συστήματος να είναι στάσιμη, αποδεικνύονται οι εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \tag{2.45}$$

Επομένως, για τη Λαγκρανζιανή της σχέσης (2.44) μπορούμε να βρούμε την εξίσωση κίνησης του βοηθητικού πεδίου:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu F_i\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_i} = 0 \Rightarrow$$

$$F_i^\dagger = -m_{ij}\varphi_j - \lambda_{ijk}\varphi_j\varphi_k = -\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i} \tag{2.46}$$

όπου $W(\varphi) = \frac{1}{2}m_{ij}\varphi_i\varphi_j + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\varphi_i\varphi_j\varphi_k$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.46) η Λαγκρανζιανή (2.44) παίρνει την εξής μορφή:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi_i^\dagger \partial^\mu \varphi_i + i\bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - F_i^\dagger F_i$$

$$-\left(\frac{1}{2}m_{ij}\psi_i\psi_j + \lambda_{ijk}\psi_i\psi_j\varphi_k + E.\Sigma.\right) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi_i^\dagger \partial^\mu \varphi_i + i\bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \left|m_{ij}\varphi_j + \lambda_{ijk}\varphi_j\varphi_k\right|^2$$

$$-\left(\frac{1}{2}m_{ij}\psi_i\psi_j + \lambda_{ijk}\psi_i\psi_j\varphi_k + E.\Sigma.\right) \tag{2.47}$$

Οι σχέσεις (2.47) και (2.44) δίνουν τη γενική μορφή μιας επανακανονικοποιημένης υπερσυμμετρικής Λαγκρανζιανής. Στην περίπτωση της (2.47) έχει γίνει χρήση των εξισώσεων κίνησης του βοηθητικού πεδίου, ενώ στην περίπτωση της (2.44) δεν έχει γίνει. Όταν το υπερδυναμικό είναι μηδέν ($m_{ij} = 0$ και $\lambda_{ijk} = 0$), παίρνουμε τη Λαγκρανζιανή του ελεύθερου και άμαζου μοντέλου Wess-Zumino που μελετήσαμε στην παράγραφο 1.4. Συγκεκριμένα, η Λαγκρανζιανή (2.47) αντιστοιχεί στη (1.112), ενώ η Λαγκρανζιανή (2.44) αντιστοιχεί στη (1.126).

Τέλος, να σημειωθεί ότι το $F_i^\dagger$ γράφεται στη μορφή $F_i^\dagger = -\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i}$ για οποιαδήποτε μορφή του υπερδυναμικού $W(\varphi)$, αρκεί οι κινητικοί όροι της Λαγκρανζιανής να προέρχονται από τον όρο $\left[\Phi_i{}^\dagger \Phi_i\right]_D$ και να μην υπάρχει αλληλεπίδραση ανάμεσα στο χειραλικό υπερπεδίο και σε άλλα πεδία. Επιπρόσθετα, παρατηρώντας τη Λαγκρανζιανή της σχέσης (2.47), μπορούμε να ορίσουμε ως ενεργό δυναμικό (tree level effective potential) το εξής:

$$V \coloneqq F_i^\dagger F_i \tag{2.48}$$

Για τις υπερσυμμετρικές θεωρίες χειραλικών υπερπεδίων το ενεργό δυναμικό είναι θετικά ημιορισμένο. Μάλιστα, παραμένει θετικά ημιορισμένο όταν τα χειραλικά υπερπεδία συνδυάζονται με διανυσματικά υπερπεδία.

2.5 Αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας

Όπως έχει προαναφερθεί, σε χαμηλές ενέργειες δεν παρατηρούνται υπερσυμμετρικά συστήματα. Δηλαδή, τα σωματίδια δεν φαίνεται να συνοδεύονται από τους υπερσυμμετρικούς παρτενέρ τους, οι οποίοι αν υπήρχαν θα αποτελούσαν μαζί με τα σωματίδια εκφυλισμένες καταστάσεις της μάζας. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η υπερσυμμετρία είναι σπασμένη στα ρεαλιστικά μοντέλα. Στην παρούσα παράγραφο θα εξετάσουμε τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας.

Η βασική προϋπόθεση για το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας είναι η εξής, η κατάσταση του κενού "$|0\rangle$" δεν πρέπει να μένει αμετάβλητη κάτω από ένα γενικό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό. Επομένως, η δράση κάποιου γεννήτορα της υπερσυμμετρίας στην κατάσταση του κενού πρέπει να την μεταβάλλει, δηλαδή πρέπει να ισχύει το ακόλουθο για κάποιο α:

$$Q_\alpha|0\rangle \neq 0 \quad \text{ή} \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}}|0\rangle \neq 0 \tag{2.49}$$

Η απαίτηση (2.49) επιφυλάσσει επιπτώσεις για την ενέργεια της κατάστασης του κενού, τις οποίες θα εξετάσουμε αμέσως. Αρχικά, χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.23θ) θα γράψουμε τη Χαμιλτονιανή του προβλήματος, δηλαδή τη μηδενική συνιστώσα του τελεστή της ορμής, συναρτήσει των γεννητόρων της υπερσυμμετρίας.

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu \Longrightarrow$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\alpha} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\alpha}P_\mu \Longrightarrow$$

$$(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\alpha}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2Tr(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)P_\mu \Longrightarrow$$

$$(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\alpha}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 4\eta^{\mu\nu}P_\mu \Longrightarrow$$

$$P^\mu = \tfrac{1}{4}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \tag{2.50}$$

Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι ισχύει: $Tr(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu) = 2\eta^{\mu\nu}$. Παίρνοντας τη μηδενική συνιστώσα της σχέσης (2.50) βρίσκουμε την έκφραση της Χαμιλτονιανής:

$$H = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^0)^{\dot{\beta}\alpha}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \Longrightarrow$$

$$H = \tfrac{1}{4}(Q_1\bar{Q}_{\dot{1}} + \bar{Q}_{\dot{1}}Q_1 + Q_2\bar{Q}_{\dot{2}} + \bar{Q}_{\dot{2}}Q_2) \tag{2.51}$$

Η ενέργεια μιας κατάστασης $|\psi\rangle$ δίνεται από τη σχέση:

$$E = \langle\psi|H|\psi\rangle \Longrightarrow$$

$$E = \frac{1}{4}\langle\psi|Q_1\bar{Q}_{\dot{1}} + \bar{Q}_{\dot{1}}Q_1 + Q_2\bar{Q}_{\dot{2}} + \bar{Q}_{\dot{2}}Q_2|\psi\rangle \Longrightarrow$$

$$E = \frac{1}{4}(\langle\psi|Q_1\bar{Q}_{\dot{1}}|\psi\rangle + \langle\psi|\bar{Q}_{\dot{1}}Q_1|\psi\rangle + \langle\psi|Q_2\bar{Q}_{\dot{2}}|\psi\rangle + \langle\psi|\bar{Q}_{\dot{2}}Q_2|\psi\rangle) \qquad (2.52)$$

Ισχύει ότι: $\langle\psi|Q_\alpha\bar{Q}_{\dot{\alpha}}|\psi\rangle \geq 0$ και $\langle\psi|\bar{Q}_{\dot{\alpha}}Q_\alpha|\psi\rangle \geq 0$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

$$E \geq 0 \qquad (2.53)$$

Δηλαδή, η Χαμιλτονιανή του προβλήματος είναι θετικά ημιορισμένη. Όταν η υπερσυμμετρία δεν είναι σπασμένη, δεν ισχύει η συνθήκη (2.49), με αποτέλεσμα η κατάσταση του κενού να έχει μηδενική ενέργεια. Αντιθέτως, όταν η υπερσυμμετρία είναι αυθόρμητα σπασμένη, ισχύει η συνθήκη (2.49) και η κατάσταση του κενού έχει θετική ενέργεια.

Παρατηρώντας τη Λαγκρανζιανή (2.47) και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συμπεράσματα, μπορούμε να πούμε πως σε μια υπερσυμμετρική θεωρία όταν η κατάσταση του κενού υπάρχει σαν τοπικό ελάχιστο του ενεργού δυναμικού της σχέσης (2.48), τότε αποτελεί ολικό ελάχιστο του δυναμικού. Αυτό ισχύει διότι η κατάσταση του κενού στις υπερσυμμετρικές θεωρίες αποτελεί κατάσταση με μηδενική ενέργεια, η οποία είναι η μικρότερη δυνατή, σύμφωνα με τη σχέση (2.53), σχήμα 2.1. Επιπρόσθετα, όταν σε μία υπερσυμμετρική θεωρία υπάρχουν περισσότερες από μία καταστάσεις κενού, τότε όλες οι καταστάσεις του κενού έχουν ενέργεια μηδέν, δηλαδή υπάρχει εκφυλισμός, σχήμα 2.2. Σε ένα σύστημα με σπασμένη υπερσυμμετρία το ολικό ελάχιστο του ενεργού δυναμικού της σχέσης (2.48) είναι μεγαλύτερο του μηδενός, σχήμα 2.3.

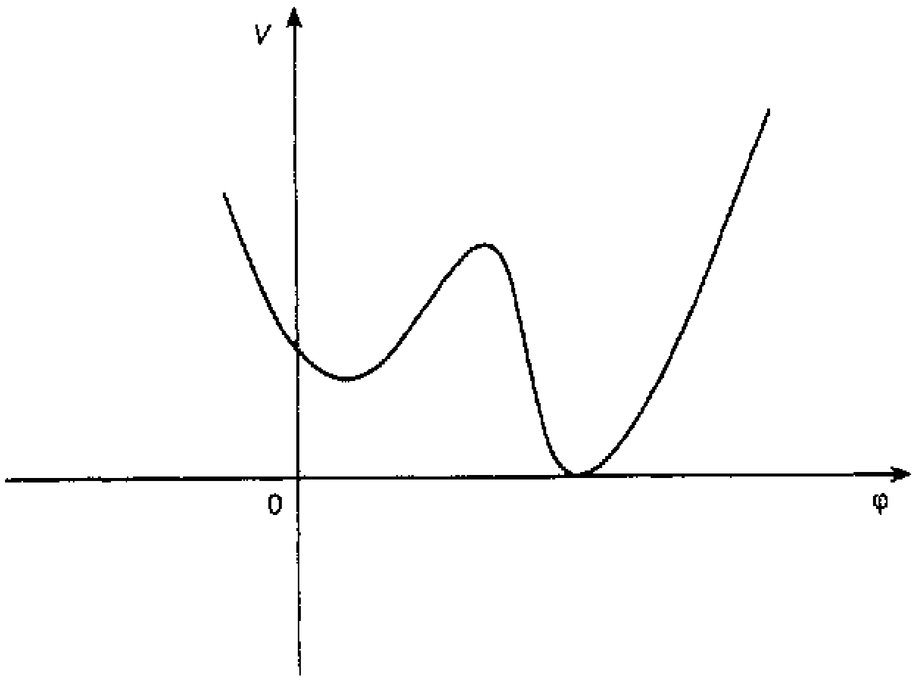
Επιπροσθέτως, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας θα προέλθει από κάποια πεδία της θεωρίας που θα έχουν αναμενόμενες τιμές κενού ($\langle 0|\psi|0\rangle$) οι οποίες δεν θα παραμένουν αμετάβλητες κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Για να έχει νόημα η θεωρία μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας, πρέπει οι αναμενόμενες τιμές κενού να μένουν αμετάβλητες κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Τα αντικείμενα: $\partial_\mu, \psi_\alpha$ μεταβάλλονται κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Επομένως, αν εξετάζουμε μια θεωρία χειραλικών υπερπεδίων, ο μόνος υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός πεδίου των σχέσεων (2.35) που μπορεί να είναι μη μηδενικός, σεβόμενος παράλληλα την αναλλοιώτητα Lorentz, είναι ο εξής:

$$\langle 0|\delta_\xi \psi_{i_\alpha}|0\rangle = \sqrt{2}\xi_\alpha\langle 0|F_i|0\rangle \qquad (2.54)$$

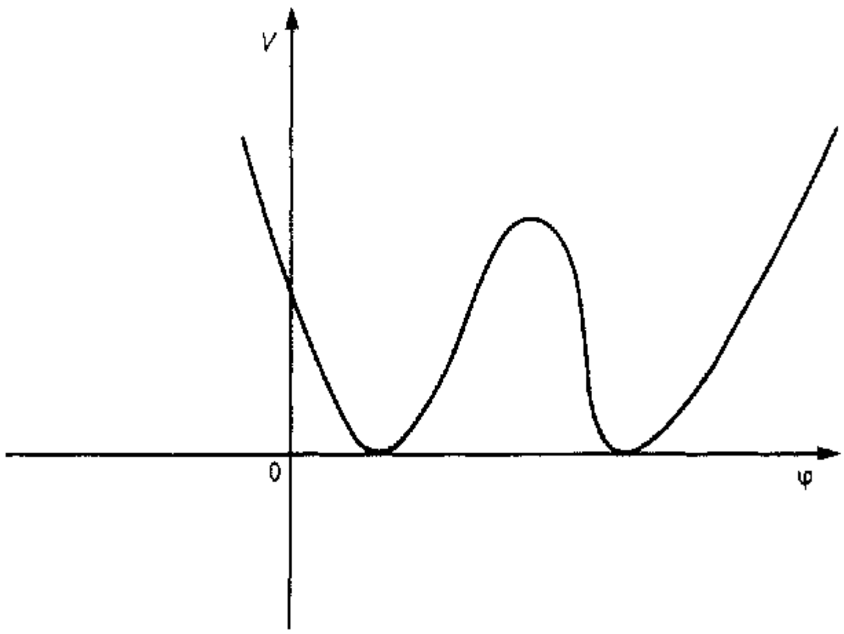
Συμπερασματικά, ο μηχανισμός για το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας είναι ο εξής: η αναμενόμενη τιμή του κενού για κάποιο βοηθητικό πεδίο F_i της θεωρίας πρέπει να είναι μη μηδενική.

$$\langle 0|F_i|0\rangle \neq 0 \qquad (2.55)$$

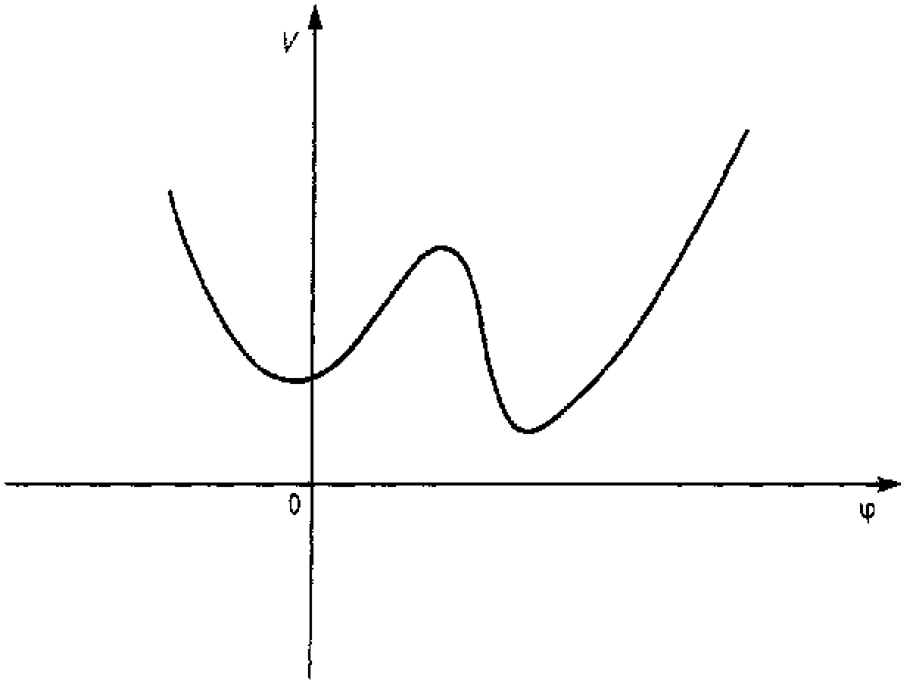
Ο μηχανισμός αυτός ονομάζεται σπάσιμο της υπερσυμμετρίας μέσω του $F - όρου$ (F-term supersymmetry breaking). Ο μηχανισμός αυτός θα εξεταστεί εκτενέστερα στην επόμενη παράγραφο. Η συνθήκη (2.55) μας επιβεβαιώνει ότι η τιμή του ενεργού δυναμικού της σχέσης (2.48) είναι θετική όταν η υπερσυμμετρία σπάει αυθόρμητα, οπότε επιβεβαιώνουμε ότι ο συλλογισμός μας είναι αυτοσυνεπής.



Σχήμα 2.1 *Γράφημα του ενεργού δυναμικού V για μη σπασμένη υπερσυμμετρία, όπου φ είναι η αναμενόμενη τιμή του κενού κάποιου βαθμωτού πεδίου.*[1]



Σχήμα 2.2 *Γράφημα του ενεργού δυναμικού V για μη σπασμένη υπερσυμμετρία με δύο υπερσυμμετρικές καταστάσεις κενού, όπου φ είναι η αναμενόμενη τιμή του κενού κάποιου βαθμωτού πεδίου.* [1]



Σχήμα 2.3 *Γράφημα του ενεργού δυναμικού V για αυθόρμητα σπασμένη υπερσυμμετρία, όπου φ είναι η αναμενόμενη τιμή του κενού κάποιου βαθμωτού πεδίου.* [1]

Κλείνοντας αυτήν την παράγραφο, αξίζει να αναφέρουμε ότι καθώς η υπερσυμμετρία σπάει αυθόρμητα, εμφανίζεται ένα άμαζο φερμιόνιο Goldstone, διότι ο γεννήτορας της υπερσυμμετρίας είναι φερμιονικός. Εν γένει, τα Goldstone σωματίδια αποτελούν πρόβλημα στις θεωρίες βαθμίδας. Για παράδειγμα, στις θεωρίες βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητισμού και της ασθενούς αλληλεπίδρασης, μετά το αυθόρμητο σπάσιμο των συμμετριών προκύπτουν τόσα μποζόνια Goldstone όσοι οι γεννήτορες των συμμετριών. Στις θεωρίες αυτές, τα μποζόνια Goldstone απορροφούνται μέσω κατάλληλης τεχνικής που ονομάζεται gauge fixing. Επιστρέφοντας στις καθολικές υπερσυμμετρικές θεωρίες, στις οποίες οι μεταβλητές Grassmann δεν έχουν εξάρτηση από τις χωροχρονικές συντεταγμένες, σε κάθε πεδίο F_i, που προκαλεί το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας, αντιστοιχεί ένα φερμιόνιο Goldstone, το οποίο θα είναι ο σπίνορας ψ_i της υπερπολλαπλέτας στην οποία ανήκει το βοηθητικό πεδίο F_i. Στις καθολικές υπερσυμμετρικές θεωρίες τα φερμιόνια Goldstone αποτελούν πρόβλημα, ενώ σε μια τοπική (local) υπερσυμμετρική θεωρία υπερβαρύτητας, το φερμιόνιο Goldstone απορροφάται από το γκραβιτίνο (υπερσυμμετρικός παρτενέρ του γκραβιτόνιου, υποπαράγραφος 1.3.4), δίνοντάς του μάζα.

2.6 Σπάσιμο της υπερσυμμετρίας μέσω του $F-$όρου

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέραμε ότι το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας σε μία καθολική υπερσυμμετρική θεωρία χειραλικών υπερπεδίων, μπορεί να προκύψει μέσω του βοηθητικού πεδίου F_i. Επιπρόσθετα, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι για να είναι αυθόρμητα σπασμένη η υπερσυμμετρία πρέπει το ενεργό δυναμικό της σχέσης (2.48) να μην έχει υπερσυμμετρικό ελάχιστο. Αυτή η συνθήκη επιβάλλει κάποιους περιορισμούς στην μορφή του υπερδυναμικού $W(\Phi)$.

Σε αυτήν την παράγραφο θα αναζητήσουμε μία πιθανή μορφή του υπερδυναμικού, η οποία να επιτρέπει το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας. Για παράδειγμα, το υπερδυναμικό των επανακανονικοποιημένων υπερσυμμετρικών θεωριών της σχέσης (2.43), δεν επιτρέπει το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας. Ακολουθεί η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού. Το βοηθητικό πεδίο σε αυτές τις θεωρίες έχει τη μορφή της σχέσης (2.46):

$$F_i^{\dagger} = -\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i} = -m_{ij}\varphi_j - \lambda_{ijk}\varphi_j\varphi_k$$

Παρατηρούμε ότι οι αναμενόμενες τιμές του F_i μπορούν πάντα να είναι μηδενικές, αρκεί οι αναμενόμενες τιμές του φ_i να είναι μηδέν. Επομένως, η εξίσωση $V = 0$ (σχέση (2.48)) έχει πάντα λύση το $\varphi = 0$, δηλαδή υπάρχει πάντα υπερσυμμετρικό ελάχιστο στις επανακανονικοποιημένες υπερσυμμετρικές θεωρίες.

Ένα καλό παράδειγμα επανακανονικοποιημένης υπερσυμμετρικής θεωρίας είναι το μοντέλο Wess-Zumino με:

$$W(\Phi) = \frac{1}{2}m\Phi^2 + \frac{1}{3}\lambda\Phi^3 \tag{2.56}$$

όπου η εξίσωση $V = 0$ έχει τις εξής λύσεις:

$$V = 0 \overset{(2.48)}{\Longrightarrow}$$

$$F^{\dagger}F = 0 \overset{(2.46)}{\Longrightarrow}$$

$$-\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi} = 0 \overset{(2.56)}{\Longrightarrow}$$

$$m\varphi + \lambda\varphi^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\varphi = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi = -\frac{m}{\lambda} \tag{2.57}$$

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρέπει να γενικεύσουμε τη μορφή (2.43) του υπερδυναμικού, ούτως ώστε η εξίσωση $V = F_i^{\dagger}F_i = 0$ να μην έχει λύση. Μια καλή ιδέα είναι να προσθέσουμε στη μορφή της σχέσης (2.43) έναν γραμμικό όρο ως προς το πεδίο:

$$W(\Phi) = f_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \tag{2.58}$$

Η προσθήκη αυτή δεν είναι από μόνη της ικανή συνθήκη για να πετύχουμε το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας. Πρέπει η επιλογή των $f_i, m_{ij}, \lambda_{ijk}$ να γίνει σοφά, ούτως ώστε να επιτύχουμε το σκοπό μας. Το απλούστερο μοντέλο που δεν έχει υπερσυμμετρικό ελάχιστο ονομάζεται μοντέλο O'Raifeartaigh. Το υπερδυναμικό αυτού του μοντέλου δίνεται από τη σχέση (2.58), θέτοντας $f_1 = -\lambda_1 M^2, m_{23} = m_{32} = \mu$ και $\lambda_{133} = \lambda_{313} = \lambda_{331} = \lambda_1$. Οι σταθερές που δεν αναγράφονται είναι ίσες με μηδέν.

$$W(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \lambda_1 \Phi_1 (\Phi_3^2 - M^2) + \mu \Phi_2 \Phi_3 \qquad (2.59)$$

Σε αυτό το μοντέλο, τα $F_i^\dagger$ δίνονται από τη σχέση (2.46):

$$-F_1^\dagger = \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_1} = \lambda_1 (\varphi_3^2 - M^2) \qquad (2.60)$$

$$-F_2^\dagger = \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_2} = \mu \varphi_3 \qquad (2.61)$$

$$-F_3^\dagger = \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_3} = 2\lambda_1 \varphi_1 \varphi_3 + \mu \varphi_2 \qquad (2.62)$$

Παρατηρούμε πως δεν γίνεται τα $F_1^\dagger, F_2^\dagger, F_3^\dagger$ να μηδενιστούν ταυτόχρονα. Επομένως, ισχύει $V = F_i^\dagger F_i \neq 0$, έχουμε δηλαδή το επιθυμητό σπάσιμο της υπερσυμμετρίας.

Στη συνέχεια, θα αναζητήσουμε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος όταν το ενεργό δυναμικό γίνεται ελάχιστο και θα βρούμε τις μάζες των πεδίων.

$$V = F_i^\dagger F_i \xRightarrow{(2.60),(2.61),(2.62)}$$

$$V = {\lambda_1}^2 |\varphi_3^2 - M^2|^2 + \mu^2 |\varphi_3|^2 + |2\lambda_1 \varphi_1 \varphi_3 + \mu \varphi_2|^2 \qquad (2.63)$$

Αν ισχύει $M^2 < \frac{\mu^2}{2{\lambda_1}^2}$, το ενεργό δυναμικό γίνεται ελάχιστο όταν οι αναμενόμενες τιμές των φ_2, φ_3 μηδενίζονται. Επίσης, το ενεργό δυναμικό εξακολουθεί να είναι ελάχιστο για οποιαδήποτε αναμενόμενη τιμή του φ_1. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε πως τα βοηθητικά πεδία παίρνουν την εξής μορφή:

$$F_1^\dagger = \lambda_1 M^2 \quad \text{και} \quad F_2^\dagger = F_3^\dagger = 0 \qquad (2.64)$$

Το βοηθητικό πεδίο F_1 είναι μη μηδενικό, επομένως μέσω αυτού θα σπάσει η υπερσυμμετρία. Συμπεραίνουμε ότι το φερμιόνιο Goldstone θα είναι το ψ_1. Ενώ, η ελάχιστη τιμή του ενεργού δυναμικού είναι η ακόλουθη:

$$V = {\lambda_1}^2 M^4 \qquad (2.65)$$

Το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού είναι θετικό. Αυτό το γεγονός συνάδει με τις παρατηρήσεις που έγιναν στην προηγούμενη παράγραφο. Στο σημείο αυτό, θα γράψουμε τους όρους της Λαγκρανζιανής (2.47) που δίνουν τις μάζες των φερμιονίων:

$$\mathcal{L}_m^F = -\left(\frac{1}{2} m_{ij} \psi_i \psi_j + \lambda_{ijk} \psi_i \psi_j \varphi_k + E.\Sigma.\right) \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}_m^F = -\frac{1}{2} m_{23} {\psi_2}^\alpha {\psi_3}_\alpha - \frac{1}{2} m_{32} {\psi_3}^\alpha {\psi_2}_\alpha + \lambda_{331} \psi_3 \psi_3 \varphi_1 + E.\Sigma. \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}_m^F = -\mu\psi_2\psi_3 + \lambda_1\psi_3\psi_3\varphi_1 + E.\Sigma. \tag{2.66}$$

Θεωρώντας, για ευκολία, την αναμενόμενη τιμή του φ_1 ίση με μηδέν, η παραπάνω Λαγκρανζιανή παίρνει την εξής μορφή:

$$\mathcal{L}_m^F = -\mu(\psi_2\psi_3 + \bar{\psi}_2\bar{\psi}_3) \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}_m^F = -\mu\begin{pmatrix}\bar{\psi}_{2\dot{\alpha}} & \psi_3{}^{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{2\alpha}\\ \bar{\psi}_3{}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}_m^F = -\mu\bar{\psi}\psi \tag{2.67}$$

όπου ψ είναι σπίνορας Dirac με μάζα μ, ο οποίος έχει τη μορφή:

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_{2\alpha}\\ \bar{\psi}_3{}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} \tag{2.68}$$

Παρατηρούμε πως το φερμιόνιο ψ_1 έχει μηδενική μάζα. Στη συνέχεια, θα γράψουμε τους όρους της Λαγκρανζιανής (2.47) που δίνουν τις μάζες των μποζονίων: $\mathcal{L}_m^B = -F_i^{\dagger}F_i$

$$\mathcal{L}_m^B = -\lambda_1{}^2|\varphi_3^2 - M^2|^2 - \mu^2|\varphi_3|^2 - |2\lambda_1\varphi_1\varphi_3 + \mu\varphi_2|^2 \tag{2.69}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις μηδενικές αναμενόμενες τιμές των πεδίων, η Λαγκρανζιανή παίρνει την εξής μορφή:

$$\mathcal{L}_m^B = \lambda_1{}^2M^2\left(\varphi_3^2 + \varphi_3^{\dagger 2}\right) - \mu^2\left(\varphi_2^{\dagger}\varphi_2 + \varphi_3^{\dagger}\varphi_3\right) \tag{2.70}$$

Για να φέρουμε την παραπάνω Λαγκρανζιανή σε μία μορφή, στην οποία να διαβάζουμε τους όρους μάζας των πεδίων, θα θέσουμε το εξής:

$$\varphi_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(a_3 + ib_3) \tag{2.71}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.71) στην (2.70) παίρνουμε το εξής:

$$\mathcal{L}_m^B = -\tfrac{1}{2}(\mu^2 - 2\lambda_1^2M^2)a_3^2 - \tfrac{1}{2}(\mu^2 + 2\lambda_1^2M^2)b_3^2 - \mu^2\varphi_2^{\dagger}\varphi_2 \tag{2.72}$$

Αρχικά, να σχολιάσουμε ότι το $\mu^2 - 2\lambda_1^2M^2$ είναι θετική ποσότητα, λόγω του περιορισμού που θέσαμε στην αρχή της αναζήτησής μας για το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού. Επίσης, το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο φ_1 είναι άμαζο, όπως και ο υπερσυμμετρικός παρτενέρ του, ψ_1. Επιπλέον, το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο φ_2 έχει μάζα μ, όπως και ο υπερσυμμετρικός παρτενέρ του, ψ_2. Παρατηρούμε πως ο εκφυλισμός στη μάζα εξακολουθεί να ισχύει στην περίπτωση των φ_1, ψ_1 και φ_2, ψ_2, ακόμα και μετά το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας. Τα αποτελέσματα του αυθόρμητου σπασίματος της υπερσυμμετρίας εκδηλώνονται στην περίπτωση των σωματιδίων a_3, b_3, ψ_3, οι μάζες των οποίων διαφέρουν. Το φερμιόνιο ψ_3 έχει μάζα μ, ενώ τα πραγματικά βαθμωτά πεδία a_3, b_3 έχουν μάζες:

$$m_{a_3} = \sqrt{\mu^2 - 2\lambda_1^2 M^2} \quad (2.73)$$

$$m_{b_3} = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda_1^2 M^2} \quad (2.74)$$

Το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας φανερώνεται στα πεδία του υπερπεδίου Φ_3, διότι είναι το μόνο υπερπεδίο στο υπερδυναμικό (2.59) που αναμειγνύεται με το υπερπεδίο Φ_1, το οποίο περιέχει το φερμιόνιο Goldstone. Συμπερασματικά, αναγνωρίσαμε τα αποτελέσματα που επέφερε το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας και βρήκαμε τις μάζες των πεδίων που προέκυψαν.

Επιπροσθέτως, θα κάνουμε την εξής παρατήρηση, το ημιάθροισμα των τετραγώνων των μαζών των πεδίων a_3 και b_3 ισούται με τη μάζα του πεδίου ψ_3 στο τετράγωνο. Αυτό είναι μια ειδική περίπτωση του tree level result για θεωρίες χειραλικών υπερπεδίων, για τις οποίες ισχύει το εξής:

$$STrM^2 \equiv \sum_J (-1)^{2J}(2J+1)m_J^2 = 0 \quad (2.75)$$

Το $STrM^2$ είναι το υπερίχνος (superTrace) του πίνακα τετραγώνου μάζας των πεδίων ενός χειραλικού υπερπεδίου. Το J αριθμεί τα σπιν των πεδίων. Στην περίπτωσή μας:

$$STrM^2 \equiv \sum_J (-1)^{2J}(2J+1)m_J^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$m_{a_3}{}^2 + m_{b_3}{}^2 - 2m_{\psi_3}{}^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$m_{\psi_3}{}^2 = \frac{m_{a_3}{}^2 + m_{b_3}{}^2}{2} \quad (2.76)$$

Τέλος, η χαρακτηριστική κλίμακα (M_S^2) στην οποία συμβαίνει το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας μπορεί να οριστεί ως η αναμενόμενη τιμή του $F - \acute{o}\rho o\upsilon$, που ευθύνεται για το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας. Στο παράδειγμα που μελετήσαμε στην παρούσα παράγραφο, η χαρακτηριστική κλίμακα δίνεται από την εξής σχέση:

$$M_S^2 = \lambda_1 M^2 \quad (2.77)$$

Μπορούμε να γράψουμε τις μάζες των βαθμωτών πεδίων a_3 και b_3 συναρτήσει της χαρακτηριστικής κλίμακας:

$$m_{a_3}{}^2 = \mu^2 - 2\lambda_1 M_S^2 \quad (2.78)$$

$$m_{b_3}{}^2 = \mu^2 + 2\lambda_1 M_S^2 \quad (2.79)$$

Επομένως, το τετράγωνο της μάζας εντός μιας υπερπολλαπλέτας μετά το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας χωρίζεται με βάση τη χαρακτηριστική κλίμακα, με συντελεστή το λ_1. Ο χωρισμός της μάζας δύναται να είναι μικρός, εάν ο συντελεστής λ_1, που ευθύνεται για τη μίξη των υπερπεδίων Φ_1, Φ_3 στη σχέση (2.59), είναι μικρός. Να σημειωθεί ότι το υπερπεδίο Φ_1 περιέχει το φερμιόνιο Goldstone.

Κεφάλαιο 3

Λαγκρανζιανές διανυσματικών υπερπεδίων

3.1 Εισαγωγή

Στα περισσότερα ρεαλιστικά συστήματα, μεταξύ άλλων, συμμετέχουν σωμάτια που περιγράφονται από διανυσματικά πεδία. Στις υπερσυμμετρικές θεωρίες τα διανυσματικά πεδία ανήκουν στις διανυσματικές υπερπολλαπλέτες. Επομένως, για να μελετήσουμε υπερσυμμετρικές επεκτάσεις ρεαλιστικών μοντέλων, είναι απαραίτητη η χρήση διανυσματικών υπερπεδίων. Τα πεδία μιας διανυσματικής υπερπολλαπλέτας εμφανίζονται σαν συντελεστές στο ανάπτυγμα των διανυσματικών υπερπεδίων.

Αρχικά, στο κεφάλαιο αυτό, θα βρούμε τη γενική μορφή των διανυσματικών υπερπεδίων. Ύστερα, θα ανακαλύψουμε τη δράση των υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών πάνω σε αυτά. Στη συνέχεια, θα κατασκευάσουμε την υπερσυμμετρική επέκταση του μοντέλου της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου θα εξετάσουμε το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας βαθμίδας τύπου $U(1)$ στα πλαίσια υπερσυμμετρικών μοντέλων, καθώς και το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας μέσω του $D - \acute{o}\rho o\upsilon$.

3.2 Διανυσματικά υπερπεδία

Τα διανυσματικά υπερπεδία μας βοηθούν στη μελέτη συστημάτων που περιέχουν, μεταξύ άλλων, πεδία διανυσματικών υπερπολλαπλετών. Όπως δείξαμε στην υποπαράγραφο 1.3.4, μια διανυσματική υπερπολλαπλέτα περιέχει ένα διανυσματικό σωμάτιο με ιδιοκαταστάσεις ελικότητας ± 1 και ένα φερμιόνιο gaugino με ιδιοκαταστάσεις ελικότητας $\pm\frac{1}{2}$. Το ανάπτυγμα σε δυνάμεις των $\theta, \bar{\theta}$ ενός γενικού υπερπεδίου είναι το εξής:

$$F(x,\theta,\bar{\theta}) = f(x) + \theta\varphi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}V_{\mu}(x)$$

$$+\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x) \qquad (3.1)$$

Να σημειωθεί ότι δεν μπορούν να υπάρξουν άλλοι όροι στο ανάπτυγμα λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας των μεταβλητών Grassmann. Επίσης, τα f, n, m, d είναι βαθμωτά μιγαδικά πεδία, τα $\varphi, \psi, \bar{\chi}, \bar{\lambda}$ είναι σπίνορες Weyl και το V_{μ} είναι διανυσματικό πεδίο. Στην παράγραφο 2.2 αναφέραμε ότι τα διανυσματικά υπερπεδία ικανοποιούν την εξής σχέση: $F^{\dagger} = F$

$$F^{\dagger} = F \Longrightarrow$$

$$f^*(x) + \bar{\theta}\bar{\varphi}(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}m^*(x) + \theta\theta n^*(x) + \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}{V_{\mu}}^*(x)$$

$$+\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d^*(x) = f(x) + \theta\varphi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x)$$

$$+\bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x) \Rightarrow$$

$$f^*(x) = f(x)\ ,\ d(x) = d^*(x)\ ,\ n(x) = m^*(x)$$

$$\lambda(x) = \psi(x)\ ,\ \chi(x) = \varphi(x)\ ,\ V_\mu(x) = V_\mu{}^*(x) \qquad (3.2)$$

Παρατηρούμε πως το διανυσματικό υπερπεδίο περιέχει δύο ανεξάρτητους σπίνορες Weyl ($\chi(x), \lambda(x)$), επομένως έχει οκτώ φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας. Ξέρουμε ότι οι φερμιονικοί και οι μποζονικοί βαθμοί ελευθερίας πρέπει να είναι ίσοι σε μια off-shell υπερσυμμετρική θεωρία, άρα περιμένουμε το διανυσματικό υπερπεδίο να έχει οκτώ μποζονικούς βαθμούς ελευθερίας. Αυτό συμβαίνει διότι περιέχει δύο ανεξάρτητα βαθμωτά πεδία ($f(x), d(x)$), ένα ανεξάρτητο μιγαδικό πεδίο ($m(x)$) και ένα βαθμωτό διανυσματικό πεδίο ($V_\mu(x)$), επομένως έχει οκτώ μποζονικούς βαθμούς ελευθερίας.

Χρησιμοποιώντας τα πεδία που μας επιτρέπει η σχέση (3.2) για την κατασκευή διανυσματικών υπερπεδίων, μπορούμε να γράψουμε τη γενική μορφή ενός διανυσματικού υπερπεδίου ως εξής:

$$V(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = C(x^\mu) + i\theta\chi(x^\mu) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x^\mu) + \frac{i}{2}\theta\theta\big(M(x^\mu) + iN(x^\mu)\big)$$

$$-\frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\big(M(x^\mu) - iN(x^\mu)\big) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x^\mu) + i\theta\theta\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}(x^\mu) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x^\mu)\right)$$

$$-i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(\lambda(x^\mu) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x^\mu)\right) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(D(x^\mu) - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C(x^\mu)\right) \qquad (3.3)$$

Στο ανάπτυγμα (3.3) υπάρχουν δύο σπίνορες Weyl χ, λ, τέσσερα βαθμωτά πεδία M, N, C, D και ένα διανυσματικό πεδίο V_μ. Παρατηρούμε πως οι φερμιονικοί και μποζονικοί βαθμοί ελευθερίας παραμένουν ίσοι μεταξύ τους. Η μορφή (3.3) του διανυσματικού υπερπεδίου έχει ένα σημαντικό πλεονέκτημα, όλα τα πεδία που συμπεριλαμβάνονται στο διανυσματικό υπερπεδίο μπορούν να γραφτούν σαν συνδυασμοί συναλλοίωτων υπερσυμμετρικών παραγώγων των σχέσεων (2.9), οι οποίες υπολογίζονται για $\theta = \bar{\theta} = 0$. Η συνθήκη $\theta = \bar{\theta} = 0$ θα συμβολίζεται ως εξής "$\big|$". Στη συνέχεια, θα βρούμε τις εκφράσεις που δίνουν τα πεδία μέσω των συναλλοίωτων παραγώγων. Είναι εύκολο να δείξει κανείς τα ακόλουθα:

$$V\big| = C \qquad (3.4)$$

$$D_\alpha V\big| = i\chi_\alpha \quad \text{και} \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}V = -i\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \qquad (3.5)$$

Από τις σχέσεις (2.9) μπορούμε να βρούμε τη μορφή των τελεστών $D^\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}}$, με τη βοήθεια των σχέσεων (Γ.3δ), (Γ.8η):

$$D^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta} D_{\beta} \xRightarrow{(2.9\alpha)}$$

$$D^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}} + \varepsilon^{\alpha\beta} i(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \xRightarrow{(\Gamma.3\delta),(\Gamma.8\eta)}$$

$$D^{\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} - i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_{\mu} \tag{3.6}$$

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{D}_{\dot{\beta}} \xRightarrow{(2.9\beta)}$$

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} = -\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}} - \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} i\theta^{\alpha} (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}} \partial_{\mu} \xRightarrow{(\Gamma.3\delta),(\Gamma.8\eta)}$$

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} \theta_{\alpha} \partial_{\mu} \tag{3.7}$$

Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό:

$$D^2 \equiv D^{\alpha} D_{\alpha} \quad \text{και} \quad \bar{D}^2 = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \tag{3.8}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (3.3), (3.6), (3.7) και (3.8) θα υπολογίσουμε το εξής:

$$D^2 \bar{D}_{\dot{\alpha}} V \big| = \left(-\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} - i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_{\mu}\right) \left(\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_{\mu}\right)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha} (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_{\mu}\right) V \big| =$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_{\mu}\right) \left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha} (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_{\mu}\right) V \big| =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} \theta^{\beta}\right) V \big| =$$

$$i \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \theta\theta\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \left(\bar{\lambda}^{\dot{\beta}} + \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\beta} \partial_{\mu} \chi_{\beta}\right) - (\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} \theta^{\beta} \theta^{\gamma} \chi_{\gamma} =$$

$$i\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} \theta\theta \left(\bar{\lambda}^{\dot{\beta}} + \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\beta} \partial_{\mu} \chi_{\beta}\right)$$

$$-(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} \theta^{\gamma} \chi_{\gamma} + (\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} \theta^{\beta} \chi_{\alpha} =$$

$$-2i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} \theta_{\alpha} \left(\bar{\lambda}^{\dot{\beta}} + \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\beta} \partial_{\mu} \chi_{\beta}\right) - \varepsilon^{\gamma\alpha} (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \chi_{\gamma} + \varepsilon^{\beta\alpha} (\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \chi_{\alpha} =$$

$$-2i\delta^{\alpha}{}_{\alpha} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + \delta^{\alpha}{}_{\alpha} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\beta} \partial_{\mu} \chi_{\beta} + (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \chi^{\alpha} + (\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \chi^{\beta} =$$

$$-4i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} - 2(\sigma^{\mu})_{\gamma\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \chi^{\gamma} + 2(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \chi^{\alpha} \Longrightarrow$$

$$D^2\overline{D}_{\dot{\alpha}}V\Big| = -4i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \tag{3.9}$$

Όμοια αποδεικνύεται το:
$$\overline{D}^2 D_\alpha V\Big| = 4i\lambda_\alpha \tag{3.10}$$

Στη συνέχεια θα βρούμε την έκφραση του διανυσματικού πεδίου:

$$D_\alpha\overline{D}_{\dot{\alpha}}V\Big| = \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\right)\left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\right)V\Big| =$$

$$-\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}V\Big| - i(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta V\Big| =$$

$$-\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}V_\mu - i(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta C =$$

$$(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta V_\mu - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu C \Longrightarrow$$

$$D_\alpha\overline{D}_{\dot{\alpha}}V\Big| = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}V_\mu - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu C \tag{3.11}$$

Όμοια αποδεικνύεται το εξής:

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}D_\alpha V\Big| = -(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}V_\mu - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu C \tag{3.12}$$

Από τις σχέσεις (3.11), (3.12) προκύπτει η επιθυμητή έκφραση:

$$D_\alpha\overline{D}_{\dot{\alpha}}V\Big| - \overline{D}_{\dot{\alpha}}D_\alpha V\Big| = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}V_\mu \Longrightarrow$$

$$[D_\alpha, \overline{D}_{\dot{\alpha}}]V\Big| = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}V_\mu \tag{3.13}$$

Όμοια αποδεικνύεται:

$$D^\beta\overline{D}^2 D_\alpha V\Big| = 4\delta^\beta{}_\alpha D + 2i(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta V_{\mu\nu} \tag{3.14}$$

όπου:
$$V_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \tag{3.15}$$

Άμεσα από τη σχέση (3.14) προκύπτει ότι:

$$D^\alpha\overline{D}^2 D_\alpha V\Big| = 4\delta^\alpha{}_\alpha D + i(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\alpha V_{\mu\nu} - i(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\alpha V_{\nu\mu} =$$

$$8D + i(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\alpha V_{\mu\nu} - i(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\alpha V_{\mu\nu}$$

$$8D + i(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\alpha V_{\mu\nu} \Longrightarrow$$

$$D^\alpha\overline{D}^2 D_\alpha V\Big| = 8D \tag{3.16}$$

Ισχύει ότι $(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha^\alpha = 0$, διότι αν $\mu = \nu$ το αντικείμενο $\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu$ μηδενίζεται ταυτοτικά, ενώ σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση ισούται με κάποιον πίνακα Pauli. Τα ίχνη των πινάκων Pauli είναι μηδενικά.

Συνοψίζοντας, μετασχηματίσαμε διανυσματικά υπερπεδία μέσω συναλλοίωτων παραγώγων, ούτως ώστε κάθε πραγματικό πεδίο να αποτελεί τον πρώτο όρο στο ανάπτυγμα κάποιου υπερπεδίου. Θυμίζουμε από την παράγραφο 2.1 ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός υπερπεδίου είναι υπερπεδίο. Επομένως, θέτοντας $\theta = \bar{\theta} = 0$ στα υπερπεδία (π.χ. $D^{\alpha}\bar{D}^2 D_{\alpha}V$) παίρνουμε τα πραγματικά πεδία (π.χ. D). Επίσης, μετασχηματίζοντας τα υπερπεδία μέσω υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών και θέτοντας $\theta = \bar{\theta} = 0$, θα βρούμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς των πραγματικών πεδίων. Ένα υπερπεδίο μετασχηματίζεται ως εξής κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς:

$$\delta_{\xi}V = i\big(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\big)V \tag{3.17}$$

Οι αναπαραστάσεις των τελεστών $Q, \bar{Q}$ δίνονται από τις σχέσεις (2.7β) και (2.7γ). Να σημειωθεί ότι μετά τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό των υπερπεδίων θα θέσουμε $\theta = \bar{\theta} = 0$, επομένως η δράση των γεννητόρων της υπερσυμμετρίας $Q, \bar{Q}$ στα υπερπεδία θα περιορίζεται στις εκφράσεις $-i\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}$ και $i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}$ αντίστοιχα. Επομένως, η δράση των γεννητόρων $iQ, i\bar{Q}$ θα συμπίπτει με τη δράση των $D_{\alpha}, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ αντίστοιχα. Παρακάτω θα βρούμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς των πραγματικών πεδίων:

$$\delta_{\xi}C = i\big(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\big)V\big| = \big(\xi D + \bar{\xi}\bar{D}\big)V\big| \overset{(3.5)}{\Longrightarrow}$$

$$\delta_{\xi}C = i\big(\xi\chi - \bar{\xi}\bar{\chi}\big) \tag{3.18}$$

$$\delta_{\xi}\lambda_{\alpha} = \frac{1}{4i}\big(\xi D + \bar{\xi}\bar{D}\big)\bar{D}^2 D_{\alpha}V\big| =$$

$$\delta_{\xi}\lambda_{\alpha} = -\frac{1}{4i}\xi_{\beta}D^{\beta}\bar{D}^2 D_{\alpha}V\big| \overset{(3.14)}{\Longrightarrow}$$

$$\delta_{\xi}\lambda_{\alpha} = i\xi_{\alpha}D - \tfrac{1}{2}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu})_{\alpha}^{\ \beta}\xi_{\beta}V_{\mu\nu} \tag{3.19}$$

Όμοια βρίσκουμε ότι:

$$\delta_{\xi}V^{\mu} = i\big(\xi\sigma^{\mu}\bar{\lambda} - \lambda\sigma^{\mu}\bar{\xi}\big) - \partial^{\mu}\big(\xi\chi + \bar{\xi}\bar{\chi}\big) \tag{3.20}$$

$$\delta_{\xi}D = \partial_{\mu}\big(-\xi\sigma^{\mu}\bar{\lambda} + \lambda\sigma^{\mu}\bar{\xi}\big) \tag{3.21}$$

Επιπρόσθετα, από τη σχέση (3.20) προκύπτει:

$$\delta_{\xi}V^{\mu\nu} = i\partial^{\mu}\big(\xi\sigma^{\nu}\bar{\lambda} - \lambda\sigma^{\nu}\bar{\xi}\big) - i\partial^{\nu}\big(\xi\sigma^{\mu}\bar{\lambda} - \lambda\sigma^{\mu}\bar{\xi}\big) \tag{3.22}$$

Παρατηρούμε ότι οι μετασχηματισμοί των αντικειμένων $\lambda, \bar{\lambda}, D, V^{\mu\nu}$ αποτελούν μια μη αναγώγιμη αναπαράσταση της υπερσυμμετρικής άλγεβρας. Επιπλέον, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι ο υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός του D πεδίου είναι μια ολική παράγωγος. Επίσης, το αντικείμενο $\partial_\mu \partial^\mu C$ μετασχηματίζεται σαν ολική παράγωγος κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Επομένως, ο συντελεστής του όρου $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$, ο οποίος ονομάζεται $D - όρος$, μετασχηματίζεται σαν ολική παράγωγος και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή υπερσυμμετρικών Λαγκρανζιανών, όπως είχαμε προαναφέρει στην υποπαράγραφο 2.4.1.

Τέλος, εφόσον η μόνη προϋπόθεση για τα διανυσματικά υπερπεδία είναι να τηρούν τη σχέση $V^\dagger = V$, μπορούμε να κατασκευάσουμε διανυσματικά υπερπεδία χρησιμοποιώντας χειραλικά υπερπεδία (2.25) ως εξής:

$$V = i\left(\Phi - \Phi^\dagger\right) = i\left(\varphi - \varphi^\dagger\right) + i\sqrt{2}(\theta\psi - \bar{\theta}\bar{\psi}) + i(\theta\theta)F - i(\bar{\theta}\bar{\theta})F^*$$

$$-(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\left(\varphi + \varphi^\dagger\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta}\right)$$

$$+\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}\right) - \tfrac{i}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi - \varphi^\dagger\right) \tag{3.23}$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (3.23) με τη σχέση (3.3) βρίσκουμε ότι:

$$C = i\left(\varphi - \varphi^\dagger\right) \tag{3.24α}$$

$$\chi = \sqrt{2}\psi \tag{3.24β}$$

$$\tfrac{1}{2}(M + iN) = F \tag{3.24γ}$$

$$V_\mu = -\partial_\mu\left(\varphi + \varphi^\dagger\right) \tag{3.24δ}$$

$$\lambda = 0 \tag{3.24ε}$$

$$D = 0 \tag{3.24στ}$$

Το διανυσματικό υπερπεδίο της σχέσης (3.23) θα μας φανεί χρήσιμο στην κατασκευή ενός υπερσυμμετρικού συστήματος, το οποίο θα μένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας της ομάδας $U(1)$.

Τέλος, θα μας φανεί χρήσιμο στη συνέχεια να γνωρίζουμε τις διαστάσεις $[μάζας]$ των πραγματικών πεδίων που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα του διανυσματικού υπερπεδίου της σχέσης (3.3). Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε ότι ο όρος της Λαγκρανζιανής που δίνει τις εξισώσεις διάδοσης του διανυσματικού πεδίου V_μ είναι ο εξής: $\mathcal{L}_V = -\frac{1}{4}V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}$. Επίσης, θυμόμαστε από την παράγραφο 1.4 ότι οι μονάδες $[μάζας]$ της Λαγκρανζιανής πυκνότητας στο φυσικό σύστημα μονάδων είναι $[\mathcal{L}] = [μάζας]^4$. Επιπρόσθετα, οι διαστάσεις της μερικής χωροχρονικής παραγώγου είναι $[\partial_\mu] = [μάζας]$. Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το διανυσματικό πεδίο θα έχει διαστάσεις $[V_\mu] = [μάζας]$. Οι μεταβλητές Grassmann έχουν διαστάσεις $[\theta] = [\bar{\theta}] = [μάζας]^{-\frac{1}{2}}$. Από τον όρο $\theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu$ του διανυσματικού υπερπεδίου V μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι έχει διαστάσεις $[V] = 1$. Με αυτές τις πληροφορίες μπορούμε να βρούμε τις διαστάσεις και των υπόλοιπων πεδίων: $[C] = 1$, $[\chi] = [\bar{\chi}] = [\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma]^{\frac{1}{2}}$, $[M] = [N] = [\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma]$, $[\lambda] = [\bar{\lambda}] = [\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma]^{\frac{3}{2}}$, $[D] = [\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma]^2$. Παρατηρούμε πως το πεδίο D έχει τη μεγαλύτερη διάσταση και μετασχηματίζεται σαν ολική παράγωγος κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, όπως συνέβαινε και με το F στην περίπτωση των χειραλικών υπερπεδίων. Οι σχέσεις (3.24) δίνουν τα πεδία του διανυσματικού υπερπεδίου συναρτήσει των πεδίων μιας χειραλικής υπερπολλαπλέτας, οι διαστάσεις μάζας των οποίων έχουν μειωθεί κατά μία από εκείνες που βρέθηκαν στην παράγραφο 1.4 για να υπάρχει συμφωνία.

3.3 Υπερσυμμετρική θεωρία βαθμίδας QED

Σε αυτήν την παράγραφο θα κατασκευάσουμε μία υπερσυμμετρική Λαγκρανζιανή, η οποία θα είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς της ομάδας $U(1)$. Αρχικά, θα βρούμε εν συντομία τη μορφή που έχει μια τέτοια Λαγκρανζιανή όταν δεν είναι υπερσυμμετρική και στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε την αντίστοιχη υπερσυμμετρική θεωρία.

Η Λαγκρανζιανή που περιγράφει ένα ελεύθερο φερμιόνιο με σπιν $\frac{1}{2}$ και μάζα m έχει τη μορφή:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi \tag{3.25}$$

Η εξίσωση κίνησης που προκύπτει από αυτή τη Λαγκρανζιανή είναι η εξίσωση Dirac: $\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0$. Έστω μετασχηματισμός $U \in U(1)$, ο οποίος έχει τη γενική μορφή $U = e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}$. Η Λαγκρανζιανή δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτόν τον αβελιανό μετασχηματισμό, λόγω της εξάρτησης του $\Lambda(x^{\mu})$ από τις χωροχρονικές συντεταγμένες. Για να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό θα χρειαστούμε την ακόλουθη σχέση:

$$\partial_{\mu}\psi' = \partial_{\mu}e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\psi \Longrightarrow$$

$$\partial_{\mu}\psi' = -iq\partial_{\mu}\Lambda e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\psi + e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\partial_{\mu}\psi \tag{3.26}$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (3.26) θα δείξουμε ότι η Λαγκρανζιανή δεν μένει αναλλοίωτη:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi' \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}' = \psi^{\dagger}e^{iq\Lambda(x^{\mu})}\gamma^{0}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\psi \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}e^{iq\Lambda(x^{\mu})}e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi + \bar{\psi}e^{iq\Lambda(x^{\mu})}q\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\psi \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi + q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}(\Lambda)\psi \tag{3.27}$$

Από τη σχέση (3.27) γίνεται φανερό ότι η Λαγκρανζιανή δεν μένει αναλλοίωτη. Επομένως, πρέπει να τροποποιήσουμε την αρχική Λαγκρανζιανή για να παραμένει αναλλοίωτη. Δοκιμάζουμε την εξής μορφή:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\big(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\big)\psi \tag{3.28}$$

όπου:
$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + iqV_{\mu} \tag{3.29}$$

Με αυτόν τον τρόπο θα πετύχουμε την αναλλοιώτητα της Λαγκρανζιανής. Επίσης, θα μπορούμε να επιστρέψουμε στην αρχική μορφή της Λαγκρανζιανής θέτοντας την παράμετρο q ίση με μηδέν. Στη συνέχεια, θα απαιτήσουμε ο μετασχηματισμός του πεδίου V_{μ} να είναι τέτοιος ώστε η Λαγκρανζιανή (3.28) να παραμένει αναλλοίωτη. Αρκεί να απαιτήσουμε το εξής:

$$D'_{\mu}\psi' = e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}D_{\mu}\psi \Longrightarrow$$

$$\partial_{\mu}\psi' + iqV'_{\mu}\psi' = e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\partial_{\mu}\psi + iqV_{\mu}e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\psi \overset{(3.26)}{\Longrightarrow}$$

$$-iq\partial_{\mu}\Lambda e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\psi + e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\partial_{\mu}\psi + iqV'_{\mu}e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\psi$$

$$= e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\partial_{\mu}\psi + iqV_{\mu}e^{-iq\Lambda(x^{\mu})}\psi \Longrightarrow$$

$$-\partial_{\mu}\Lambda\psi + V'_{\mu}\psi = V_{\mu}\psi \Longrightarrow$$

$$V'_{\mu} = V_{\mu} + \partial_{\mu}\Lambda \tag{3.30}$$

Ο μετασχηματισμός (3.30) είναι όμοιος με το μετασχηματισμό βαθμίδας του δυναμικού A_{μ}, που είναι συμμετρία της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε πως το V_{μ} είναι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Επιπρόσθετα, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι ο τανυστής $V_{\mu\nu} = \partial_{\mu}V_{\nu} - \partial_{\nu}V_{\mu}$ μένει αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας της ομάδας $U(1)$. Επομένως, ο αναλλοίωτος κατά Lorentz όρος $-\frac{1}{4}V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}$ μπορεί να προστεθεί στη Λαγκρανζιανή ως ο όρος διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Έχουμε καταλήξει στην ακόλουθη Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\big(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\big)\psi - \tfrac{1}{4}V^{\mu\nu}V_{\mu\nu} \overset{(3.29)}{\Longrightarrow}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\big(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\big)\psi - q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi V_{\mu} - \tfrac{1}{4}V^{\mu\nu}V_{\mu\nu} \tag{3.31}$$

Ο όρος $\bar{\psi}\big(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\big)\psi$ περιγράφει την κίνηση του φερμιονίου μάζας m, ο όρος $-q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi V_{\mu}$ περιγράφει την αλληλεπίδραση του φερμιονίου με φορτίο q με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (το $j^{\mu} = q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ είναι το τετράνυσμα του ηλεκτρικού ρεύματος) και ο όρος $-\frac{1}{4}V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}$ περιγράφει τη διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Μάλιστα, αν πάρουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για το πεδίο V_μ καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$\partial_\mu V^{\mu\nu} = j^\nu \ , \ \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{3.32}$$

οι οποίες είναι οι εξισώσεις των νόμων Gauss και Ampère. Επιπρόσθετα, μέσω της ταυτότητας Jacobi: $\partial_k V_{ij} + \partial_i V_{jk} + \partial_j V_{ki} = 0$ μπορούμε να βρούμε και τις άλλες δύο εξισώσεις του Maxwell. Τέλος, να σχολιάσουμε ότι ένας όρος μάζας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $\mathcal{L}_M = -M^2 V^\mu V_\mu$ θα έσπαγε τη συμμετρία βαθμίδας, για αυτό το λόγο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι άμαζο.

Είμαστε πλέον σε θέση να μελετήσουμε την αντίστοιχη υπερσυμμετρική θεωρία. Από τις σχέσεις (3.24δ) και (3.30) βλέπουμε ότι μπορούμε να θέσουμε:

$$\Lambda = -\left(\varphi + \varphi^\dagger\right) \tag{3.33}$$

διότι το $-\partial_\mu\left(\varphi + \varphi^\dagger\right)$ παίζει το ρόλο του πεδίου V_μ στο διανυσματικό υπερπεδίο $i\left(\Phi - \Phi^\dagger\right)$ της σχέσης (3.23). Επομένως, όπως πρότειναν οι Wess και Zumino, μπορούμε να γράψουμε πως ένα διανυσματικό υπερπεδίο μπορεί να μετασχηματίζεται ως εξής μέσω μετασχηματισμών βαθμίδας τύπου $U(1)$:

$$V'(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = V(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) + i\left(\Phi(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) - \Phi^\dagger(x^\mu, \theta, \bar{\theta})\right) \tag{3.34}$$

Οι σχέσεις (3.24α), (3.24β) και (3.24γ) μας δείχνουν ότι δύναται να υπάρξει μετασχηματισμός (3.34) τέτοιος ώστε να απαλείψει τα πεδία C, χ, M, N αφήνοντας το $\Lambda = -\left(\varphi + \varphi^\dagger\right)$ αυθαίρετο. Συμπερασματικά, μέσω της σχέσης (3.3), μπορούμε να γράψουμε το διανυσματικό υπερπεδίο Wess-Zumino ως εξής:

$$V_{WZ} = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D \tag{3.35}$$

Επίσης, οι σχέσεις (3.24ε) και (3.24στ) μας δείχνουν ότι ο μετασχηματισμός βαθμίδας (3.34) αφήνει τα πεδία λ, D αναλλοίωτα. Έπειτα, προσπαθώντας να κατασκευάσουμε διανυσματικά υπερπεδία της μορφής V_{WZ}^n με $n = 2{,}3, \ldots$ βλέπουμε ότι το μόνο μη μηδενικό είναι το:

$$V_{WZ}^2 = -(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\nu\theta)V_\mu V_\nu \overset{(\Gamma.7\theta)}{\Longrightarrow}$$

$$V_{WZ}^2 = \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}V^\mu V_\mu \tag{3.36}$$

Ένας τέτοιος όρος θα προέβλεπε μάζα για το διανυσματικό πεδίο και θα έσπαγε τη συμμετρία βαθμίδας. Επιπρόσθετα, σε μια θεωρία που προβλέπει διανυσματικά πεδία με μάζα και δεν υπακούει στη συμμετρία βαθμίδας, τα πεδία C, χ, M, N δεν μπορούν να απαλειφθούν.

Για να κατασκευάσουμε μια υπερσυμμετρική θεωρία βαθμίδας πρέπει πρώτα να βρούμε ένα υπερπεδίο W_α, που να είναι αντίστοιχο του $V_{\mu\nu}$, από το οποίο να προκύπτει ο όρος διάδοσης του πεδίου V_μ στη Λαγκρανζιανή. Το W_α πρέπει να μένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, όπως και το $V_{\mu\nu}$. Επομένως, σαν συντελεστές στο ανάπτυγμά του πρέπει να έχει τα πεδία $\lambda, \bar{\lambda}, D, V_{\mu\nu}$, τα οποία δεν μεταβάλλονται κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Επίσης, έχει προαναφερθεί ότι οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί των πεδίων $\lambda, \bar{\lambda}, D, V_{\mu\nu}$ αποτελούν μια μη αναγώγιμη αναπαράσταση της υπερσυμμετρικής άλγεβρας. Οι διαστάσεις μάζας αυτών των πεδίων είναι οι εξής: $[\lambda] = [\bar{\lambda}] = [\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma]^{\frac{3}{2}}$, $[D] = [V^{\mu\nu}] = [\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma]^2$. Μπορεί να παρατηρήσει κανείς από τη σχέση (3.3) ότι ο όρος με τη μικρότερη διάσταση μάζας στο ανάπτυγμα των υπερπεδίων είναι ο πρώτος όρος. Στην περίπτωση του υπερπεδίου W_α ο πρώτος όρος πρέπει να περιλαμβάνει το σπίνορα λ_α. Η σχέση (3.10) μας δείχνει πως ήδη γνωρίζουμε ένα τέτοιο υπερπεδίο:

$$W_\alpha \equiv \bar{D}^2 D_\alpha V \tag{3.37}$$

Επίσης, μέσω της σχέσης (3.37), μπορεί να γίνει μια ωραία παρατήρηση, το W_α είναι χειραλικό υπερπεδίο, διότι ικανοποιεί τετριμμένα τη σχέση:

$$\bar{D}_{\dot{\beta}} W_\alpha = \bar{D}_{\dot{\beta}} \bar{D}^2 D_\alpha V \Longrightarrow$$

$$\bar{D}_{\dot{\beta}} W_\alpha = 0 \tag{3.38}$$

Να σημειωθεί ότι ισχύει: $\bar{D}_{\dot{\beta}} \bar{D}^2 = 0$ λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας των μεταβλητών Grassmann. Συμπεραίνουμε ότι το υπερπεδίο W_α θα έχει τη μορφή της σχέσης (2.21):

$$W_\alpha(y^\mu, \theta) = 4i\lambda_\alpha(y^\mu) + \theta^\beta \varphi_{\alpha\beta}(y^\mu) + \theta\theta F_\alpha(y^\mu) \tag{3.39}$$

Το y^μ δίνεται από τη σχέση (2.18): $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$. Για να συνεχίσουμε, πρέπει να γράψουμε τα πεδία $\varphi_{\alpha\beta}$ και F_α συναρτήσει των $\lambda, \bar{\lambda}, D, V_{\mu\nu}$. Από τις σχέσεις (2.9) και (3.39) μπορεί εύκολα να διαπιστώσει κάποιος ότι ισχύει:

$$D_\beta W_\alpha \Big| = \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \theta^\gamma \varphi_{\alpha\gamma} \Longrightarrow$$

$$D_\beta W_\alpha \Big| = \varphi_{\alpha\beta} \overset{(3.37)}{\Longrightarrow}$$

$$\varphi_{\alpha\beta} = D_\beta \bar{D}^2 D_\alpha V \Big| \overset{(3.14)}{\Longrightarrow}$$

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\gamma}\left(4\delta^\gamma{}_\alpha D + 2i(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\gamma V_{\mu\nu}\right) \tag{3.40}$$

$$D^2 W_\alpha \Big| = \frac{\partial}{\partial\theta_\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \theta\theta F_\alpha \overset{(\Gamma.8\varepsilon)}{\Longrightarrow}$$

$$D^2 W_\alpha \Big| = 2\frac{\partial}{\partial\theta_\beta}\theta_\beta F_\alpha = 4F_\alpha \xRightarrow{(3.37)}$$

$$4F_\alpha = D^2\bar{D}^2 D_\alpha V \Big| = (D^2\bar{D}^2 D_\alpha - D^2 D_\alpha \bar{D}^2)V \Big| =$$

$$D^2[\bar{D}^2, D_\alpha]V \Big| = D^2\big(\bar{D}_{\dot\alpha}\{\bar{D}^{\dot\alpha}, D_\alpha\} - \{\bar{D}_{\dot\alpha}, D_\alpha\}\bar{D}^{\dot\alpha}\big)V \Big| \xRightarrow{(2.13\gamma)}$$

$$4F_\alpha = D^2\big(-2i\bar{D}_{\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu + 2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\bar{D}^{\dot\alpha}\partial_\mu\big)V \Big| \Longrightarrow$$

$$4F_\alpha = 4i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu D^2\bar{D}^{\dot\alpha}V \Big| \xRightarrow{(3.9)}$$

$$F_\alpha = 4(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot\alpha} \qquad (3.41)$$

Συμπερασματικά, μέσω των σχέσεων (3.39), (3.40) και (3.41) το χειραλικό υπερδυναμικό W_α γράφεται στη μορφή:

$$W_\alpha(y^\mu,\theta) = 4i\lambda_\alpha(y^\mu) - \Big(4\delta^\gamma{}_\alpha D(y^\mu) + 2i(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\gamma V_{\mu\nu}(y^\mu)\Big)\theta_\gamma$$

$$+4(\theta\theta)(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot\alpha}(y^\mu) \qquad (3.42)$$

Θέλουμε η Λαγκρανζιανή να είναι Lorentz αναλλοίωτη. Επίσης, στο παράρτημα Β αναφέρεται πως τα αντικείμενα $\chi^\alpha\psi_\alpha$ συμπεριφέρονται σαν βαθμωτά κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Επομένως, ο όρος της Λαγκρανζιανής που αναζητούμε θα προέρχεται από το αντικείμενο $W^\alpha W_\alpha$. Μάλιστα, έχουμε προαναφέρει στην υποπαράγραφο 2.4.1 ότι αντικείμενα σαν το $W^\alpha W_\alpha$ εξακολουθούν να είναι χειραλικά υπερπεδία, άρα ο $F-όρος$ τους θα μετασχηματίζεται σαν ολική παράγωγος κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Συμπεραίνουμε πως στη Λαγκρανζιανή που ψάχνουμε θα συμμετέχει ο $F-όρος$ του $W^\alpha W_\alpha$, τον οποίο θα βρούμε αμέσως:

$$(W^\alpha W_\alpha)_F = \Big(4i\lambda^\alpha - 4\theta^\alpha D - 2i\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\beta{}^\gamma\theta_\gamma V_{\mu\nu} + 4(\theta\theta)\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot\alpha}\Big)$$

$$\cdot\big(4i\lambda_\alpha - 4\theta_\alpha D - 2i(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\gamma\theta_\gamma V_{\mu\nu} + 4(\theta\theta)(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot\alpha}\big)\Big|_F =$$

$$32i(\theta\theta)\lambda(\sigma^\mu)\partial_\mu\bar{\lambda} + 16(\theta\theta)D^2 + 16iD(\theta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)V_{\mu\nu}$$

$$-4\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\beta{}^\gamma\theta_\gamma V_{\mu\nu}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\gamma\theta_\gamma V_{\mu\nu}\Big|_F =$$

$$32i(\theta\theta)\lambda(\sigma^\mu)\partial_\mu\bar{\lambda} + 16(\theta\theta)D^2 + 16\big(\theta\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\kappa\lambda}\theta\big)V_{\mu\nu}V_{\kappa\lambda}\Big|_F \xRightarrow{(\Gamma.7\iota\zeta)}$$

$$(W^\alpha W_\alpha)_F = 32i\lambda(\sigma^\mu)\partial_\mu\bar{\lambda} + 16D^2$$

$$-4\big(2V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + i\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}V_{\mu\nu}V_{\kappa\lambda}\big) \xRightarrow{\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}=\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\eta^{\kappa\gamma}\eta^{\lambda\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}}$$

$$\frac{1}{32}(W^{\alpha}W_{\alpha})_F = i\lambda(\sigma^{\mu})\partial_{\mu}\bar{\lambda} + \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} - \frac{i}{8}V^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}V^{\gamma\delta} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{32}(W^{\alpha}W_{\alpha})_F = -\frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + i\lambda(\sigma^{\mu})\partial_{\mu}\bar{\lambda} + \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}V^{\alpha\beta}\left(\,{}^{*}V_{\alpha\beta}\right) \tag{3.43}$$

Όπου:

$$^{*}V_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}V^{\gamma\delta} \tag{3.44}$$

Να σημειωθεί ότι ο όρος $V^{\alpha\beta}\left(\,{}^{*}V_{\alpha\beta}\right)$ αποτελεί μία ολική παράγωγο, επομένως δεν επηρεάζει τη δράση. Επιπλέον, το πεδίο D αποτελεί βοηθητικό πεδίο και στη συνέχεια θα παραληφθεί από τη Λαγκρανζιανή χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης.

Τέλος, ορίζοντας το σπίνορα Majorana Λ_M ως εξής:

$$\Lambda_M = \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha} \\ \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

μπορεί να δείξει κανείς το εξής:

$$\frac{1}{2}\bar{\Lambda}_M i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda_M = i\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\partial_{\mu}\left(\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda}\right) \Longrightarrow$$

$$i\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} = \frac{1}{2}\bar{\Lambda}_M i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda_M + \frac{i}{2}\partial_{\mu}\left(\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda}\right) \tag{3.46}$$

Ο όρος της (3.46) με την ολική παράγωγο δεν συνεισφέρει στη δράση. Συμπερασματικά, από τις σχέσεις (3.43) και (3.46) μπορούμε να συμπεριλάβουμε στη Λαγκρανζιανή τους όρους:

$$\mathcal{L}_V = \frac{1}{2}\bar{\Lambda}_M i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda_M - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^2 \tag{3.47}$$

Η Λαγκρανζιανή (3.47) περιγράφει τη διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου V_{μ} και του υπερσυμμετρικού παρτενέρ του, που είναι ένα άμαζο φερμιόνιο Majorana (gaugino) με σπιν $\frac{1}{2}$. Αυτά τα σωμάτια ανήκουν σε μία διανυσματική υπερπολλαπλέτα (υποπαράγραφος 1.3.4).

Συνεχίζοντας την αναζήτησή μας για μια υπερσυμμετρική θεωρία βαθμίδας, πρέπει να βρούμε τον όρο της Λαγκρανζιανής που περιγράφει την αλληλεπίδραση του gauge πεδίου με ένα φερμιονικό πεδίο με μάζα και φορτίο. Ένα τέτοιο πεδίο μπορεί για παράδειγμα να περιγράφει το ηλεκτρόνιο. Για να είναι πλήρης η θεωρία πρέπει να περιλαμβάνει τον αριστερόστροφο και το δεξιόστροφο σπίνορα του ηλεκτρονίου και κατά επέκταση του ποζιτρονίου. Για να το επιτύχουμε αυτό πρέπει να κατασκευάσουμε ένα χειραλικό υπερπεδίου S μέσω δύο χειραλικών υπερπεδίων Φ_1, Φ_2, διότι το καθένα από αυτά περιέχει ένα σπίνορα Weyl. Μια καλή επιλογή για το χειραλικό υπερπεδίο S είναι η εξής:

$$S \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2) \tag{3.48}$$

Εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι ισχύει το εξής: $\overline{D}_{\dot{\alpha}}S = 0$. Η αναπαράσταση του μετασχηματισμού βαθμίδας τύπου $U(1)$, που δρα στα πεδία που εμφανίζονται σαν συντελεστές στο ανάπτυγμα των χειραλικών υπερπεδίων, είναι η εξής: $U = e^{-2iq\Lambda(x^\mu)} \in U(1)$. Ο λόγος που προστέθηκε το 2 στον εκθέτη θα γίνει φανερός αργότερα. Το $\Lambda(x^\mu)$ είναι μία βαθμωτή gauge συνάρτηση. Συμπεραίνουμε πως ο μετασχηματισμός βαθμίδας του χειραλικού υπερπεδίου S θα έχει την εξής μορφή:

$$S' = e^{-2iq\Lambda}S \tag{3.49}$$

όπου Λ είναι ένα χειραλικό υπερπεδίο. Να σημειωθεί ότι σύμφωνα με τις παρατηρήσεις της υποπαραγράφου 2.4.1, το S' εξακολουθεί να είναι χειραλικό υπερπεδίο. Είναι προφανές ότι το δεξιόστροφο χειραλικό υπερπεδίο $S^\dagger$ θα μετασχηματίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$S^{\dagger\prime} = S^\dagger e^{2iq\Lambda^\dagger} \tag{3.50}$$

Για να προχωρήσουμε την αναζήτησή μας πρέπει να βρούμε ένα αντικείμενο που να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας $U(1)$. Ένα υποψήφιο αντικείμενο είναι το εξής: $S^\dagger e^{2qV}S$, όπου V είναι ένα διανυσματικό υπερπεδίο, το οποίο μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση (3.34) κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Στο μετασχηματισμό του διανυσματικού υπερπεδίου V και του χειραλικού υπερπεδίου S χρησιμοποιείται το ίδιο χειραλικό υπερπεδίο Λ:

$$S^{\dagger\prime}e^{2qV'}S' = S^\dagger e^{2iq\Lambda^\dagger}e^{2qV+2iq\left(\Lambda-\Lambda^\dagger\right)}e^{-2iq\Lambda}S \Longrightarrow$$

$$S^{\dagger\prime}e^{2qV'}S' = S^\dagger e^{2qV}S \tag{3.51}$$

Το αντικείμενο $S^\dagger e^{2qV}S$ μένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας τύπου $U(1)$. Επιπρόσθετα, όμοια με τη σχέση (3.48), μπορούμε να ορίσουμε το χειραλικό υπερπεδίο T:

$$T \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 - i\Phi_2) \tag{3.52}$$

Το οποίο μετασχηματίζεται ως εξής:

$$T' = e^{2iq\Lambda}T \tag{3.53}$$

Επίσης, μπορούμε να επινοήσουμε το αντικείμενο $T^\dagger e^{-2qV}T$ και να δείξουμε ότι είναι αμετάβλητο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας.

$$T^{\dagger\prime}e^{-2qV'}T' = T^\dagger e^{-2qV}T \tag{3.54}$$

Να σχολιάσουμε πως μπορεί να δείξει κανείς ότι τα αντικείμενα $S^\dagger e^{2qV}S$ και $T^\dagger e^{-2qV}T$ είναι διανυσματικά υπερπεδία, εφόσον το V είναι διανυσματικό υπερπεδίο. Επομένως, οι $D-όροι$ αυτών των πεδίων μπορούν να αποτελέσουν τους όρους της υπερσυμμετρικής Λαγκρανζιανής που περιγράφουν την αλληλεπίδραση του gauge πεδίου με ένα φερμιονικό πεδίο με μάζα και φορτίο. Επιπρόσθετα, θυμόμαστε από την υποπαράγραφο 2.4.2 ότι οι όροι μάζας στη Λαγκρανζιανή προκύπτουν από τους $F - όρους$ χειραλικών υπερπεδίων. Έχει σχολιαστεί ξανά ότι τα αντικείμενα της μορφής ST και $S^\dagger T^\dagger$ είναι αριστερόστροφα και δεξιόστροφα χειραλικά υπερπεδία αντίστοιχα. Επίσης, μέσω των σχέσεων (3.49) και (3.53) μπορεί να δείξει κανείς ότι είναι gauge αναλλοίωτα. Συμπερασματικά, οι όροι μάζας στη Λαγκρανζιανή θα προκύπτουν από τους $F - όρους$ των υπερπεδίων ST και $S^\dagger T^\dagger$. Συνοψίζοντας, η Λαγκρανζιανή που ψάχνουμε έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\Lambda}_M \gamma^\mu \partial_\mu \Lambda_M - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + \left(S^\dagger e^{2qV} S\right)_D + \left(T^\dagger e^{-2qV} T\right)_D$$
$$+m\left(ST + S^\dagger T^\dagger\right)_F \qquad (3.55)$$

Για να ολοκληρώσουμε με επιτυχία την αποστολή μας, πρέπει να εκφράσουμε τη Λαγκρανζιανή (3.55) μέσω των πεδίων των σωματιδίων. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το διανυσματικό υπερπεδίο V που χρησιμοποιούμε δίνεται από τη σχέση (3.35). Επίσης, θυμόμαστε ότι η μόνη μη μηδενική δύναμη του V_{WZ} είναι η V_{WZ}^2 που δίνεται από τη σχέση (3.36). Επομένως, η σειρά Maclaurin του $e^{2qV_{WZ}}$ θα είναι η εξής:

$$e^{2qV_{WZ}} = 1 + 2qV_{WZ} + 2q^2V_{WZ}^2 \qquad (3.56)$$

Επιπρόσθετα, τα χειραλικά υπερπεδία S, T μέσω της σχέσης (2.25) αναπτύσσονται σε άθροισμα όρων που περιλαμβάνουν τα πεδία (φ_S, ψ_S, F_S) και (φ_T, ψ_T, F_T) αντίστοιχα. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$\left(S^\dagger e^{2qV} S\right)_D =$$

$$\Big(\varphi_S^\dagger + \sqrt{2}(\bar{\theta}\bar{\psi}_S) + (\bar{\theta}\bar{\theta})F_S^\dagger - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi_S^\dagger + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_S\right)$$
$$-\frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu\partial^\mu\varphi_S^\dagger\Big)$$

$$\cdot\left(1 + 2q\theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu + 2qi\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - 2qi\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + q\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D + q^2\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}V^\mu V_\mu\right)$$

$$\cdot\Big(\varphi_S + \sqrt{2}(\theta\psi_S) + (\theta\theta)F_S + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi_S - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\partial_\mu\psi_S\sigma^\mu\bar{\theta}\right)$$
$$-\frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu\partial^\mu\varphi_S\Big)\Big|_D =$$

$$-\frac{1}{4}\varphi_S^\dagger\partial_\mu\partial^\mu\varphi_S + F_S^\dagger F_S + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi_S^\dagger\partial_\nu\varphi_S\Big|_D - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\varphi_S^\dagger\varphi_S$$

$$+2qi\varphi_S^\dagger(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})V_\mu\partial_\nu\varphi_S\Big|_D - 2qi(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi_S^\dagger V_\nu\varphi_S\Big|_D$$

$$+2\sqrt{2}qi(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\psi}_S)(\bar{\theta}\bar{\lambda})\varphi_S\big|_D - 2\sqrt{2}qi\varphi_S^\dagger(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\lambda)(\theta\psi_S)\big|_D$$

$$-i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\psi}_S)(\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta}) + i(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\psi_S)(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi})$$

$$+4q(\theta\psi_S)(\bar{\theta}\bar{\psi}_S)\theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu + \varphi_S^\dagger\varphi_S qD + \varphi_S^\dagger\varphi_S q^2V^\mu V_\mu \tag{3.57}$$

Η σχέση (3.57) μέσω των ταυτοτήτων (Γ.3δ), (Γ.7α), (Γ.7β), (Γ.7θ) και κρατώντας όρους που δεν είναι ολικές παράγωγοι παίρνει τη μορφή:

$$\left(S^\dagger e^{2qV}S\right)_D = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_S^\dagger\partial_\mu\varphi_S + F_S^\dagger F_S + \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_S^\dagger\partial_\mu\varphi_S$$

$$+qi\varphi_S^\dagger V^\mu\partial_\mu\varphi_S - qiV^\mu\partial_\mu\varphi_S^\dagger\varphi_S - \sqrt{2}qi(\bar{\lambda}\bar{\psi}_S)\varphi_S + \sqrt{2}qi\varphi_S^\dagger(\psi_S\lambda)$$

$$\frac{i}{2}(\partial_\mu\psi_S\sigma^\mu\bar{\psi}_S) - \frac{i}{2}(\psi_S\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_S) - qV_\mu\bar{\psi}_S\bar{\sigma}^\mu\psi_S$$

$$+\varphi_S^\dagger\varphi_S qD + \varphi_S^\dagger\varphi_S q^2V^\mu V_\mu =$$

$$(\partial_\mu\varphi_S^\dagger + iqV_\mu\varphi_S^\dagger)(\partial^\mu\varphi_S - iqV^\mu\varphi_S) + \varphi_S^\dagger\varphi_S qD - \left(i(\partial_\mu + iqV_\mu)\psi_S\sigma^\mu\bar{\psi}_S\right)$$

$$+i\sqrt{2}q\left(\varphi_S^\dagger(\psi_S\lambda) - (\bar{\lambda}\bar{\psi}_S)\varphi_S\right) + q^2\varphi_S^\dagger\varphi_S V^\mu V_\mu + F_S^\dagger F_S \Longrightarrow$$

$$\left(S^\dagger e^{2qV}S\right)_D = \left(D_\mu\varphi_S^\dagger\right)\left(D^{\mu\dagger}\varphi_S\right) + qD\varphi_S^\dagger\varphi_S + \left(i\bar{\psi}_S\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi_S\right)$$

$$+i\sqrt{2}q\left(\varphi_S^\dagger(\psi_S\lambda) - (\bar{\lambda}\bar{\psi}_S)\varphi_S\right) + F_S^\dagger F_S \tag{3.58}$$

Όμοια υπολογίζουμε το $\left(T^\dagger e^{-2qV}T\right)_D$:

$$\left(T^\dagger e^{-2qV}T\right)_D = \left(D_\mu\varphi_T\right)(D^\mu\varphi_T)^\dagger - qD\varphi_T^\dagger\varphi_T + \left(i\psi_T\sigma^\mu D_\mu\bar{\psi}_T\right)$$

$$-i\sqrt{2}q\left(\varphi_T^\dagger(\psi_T\lambda) - (\bar{\lambda}\bar{\psi}_T)\varphi_T\right) + F_T^\dagger F_T \tag{3.59}$$

Για να ολοκληρωθεί το έργο μας μένει να υπολογίσουμε το $m\left(ST + S^\dagger T^\dagger\right)_F$:

$$\left(ST + S^\dagger T^\dagger\right)_F = \varphi_S F_T + \varphi_T F_S + 2(\theta\psi_S)(\theta\psi_T)\big|_F + E.\Sigma. \xRightarrow{(\Gamma.7\beta)}$$

$$m\left(ST + S^\dagger T^\dagger\right)_F = m(\varphi_S F_T + \varphi_T F_S - \psi_S\psi_T + E.\Sigma.) \tag{3.60}$$

Οι σχέσεις (3.55), (3.58), (3.59) και (3.60) μας δίνουν την Λαγκρανζιανή της υπερσυμμετρικής θεωρίας βαθμίδας SQED:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\Lambda}_M\gamma^\mu\partial_\mu\Lambda_M - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^2 + \left(D_\mu\varphi_S^\dagger\right)\left(D^{\mu\dagger}\varphi_S\right) + qD\varphi_S^\dagger\varphi_S$$

$$+\left(i\bar{\psi}_S\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi_S\right) + i\sqrt{2}q\left(\varphi_S^\dagger(\psi_S\lambda) - (\bar{\lambda}\bar{\psi}_S)\varphi_S\right) + F_S^\dagger F_S$$

$$+\left(D_\mu\varphi_T\right)(D^\mu\varphi_T)^\dagger - qD\varphi_T^\dagger\varphi_T + \left(i\psi_T\sigma^\mu D_\mu\bar{\psi}_T\right)$$

$$-i\sqrt{2}q\left(\varphi_T^\dagger(\psi_T\lambda) - \left(\bar{\lambda}\bar{\psi}_T\right)\varphi_T\right) + F_T^\dagger F_T$$

$$m(\varphi_S F_T + \varphi_T F_S - \psi_S\psi_T + E.\Sigma.) \tag{3.61}$$

Τα βοηθητικά πεδία F_S, F_T, D μπορούν να απαλειφθούν μέσα από τις εξισώσεις κίνησής τους:

$$F_S + m\varphi_T^\dagger = F_T + m\varphi_S^\dagger = F_S^\dagger + m\varphi_T = F_T^\dagger + m\varphi_S = 0 \tag{3.62}$$

$$D + q\left(\varphi_S^\dagger\varphi_S - \varphi_T^\dagger\varphi_T\right) = 0 \tag{3.63}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.62) και (3.63) η Λαγκρανζιανή (3.61) γράφεται:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\Lambda}_M\gamma^\mu\partial_\mu\Lambda_M - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + \left(D_\mu\varphi_S^\dagger\right)\left(D^{\mu\dagger}\varphi_S\right) - m^2\varphi_S^\dagger\varphi_S$$

$$+\left(i\bar{\psi}_S\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi_S\right) - m\psi_S\psi_T + i\sqrt{2}q\left(\varphi_S^\dagger(\psi_S\lambda) - \left(\bar{\lambda}\bar{\psi}_S\right)\varphi_S\right)$$

$$+\left(D_\mu\varphi_T\right)(D^\mu\varphi_T)^\dagger - m^2\varphi_T^\dagger\varphi_T + \left(i\psi_T\sigma^\mu D_\mu\bar{\psi}_T\right) - m\bar{\psi}_S\bar{\psi}_T$$

$$-i\sqrt{2}q\left(\varphi_T^\dagger(\psi_T\lambda) - \left(\bar{\lambda}\bar{\psi}_T\right)\varphi_T\right) - \tfrac{1}{2}q^2\left(\varphi_S^\dagger\varphi_S - \varphi_T^\dagger\varphi_T\right)^2 \tag{3.65}$$

Τέλος, συμπεριλαμβάνοντας τους σπίνορες Weyl $\psi_S, \bar{\psi}_T$ σε έναν σπίνορα Dirac:

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_S \\ \bar{\psi}_T\end{pmatrix} \tag{3.64}$$

καταλήγουμε στην ακόλουθη Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - m\Psi\bar{\Psi} + \left(D_\mu\varphi_S^\dagger\right)\left(D^{\mu\dagger}\varphi_S\right) - m^2\varphi_S^\dagger\varphi_S$$

$$+\left(D_\mu\varphi_T\right)(D^\mu\varphi_T)^\dagger - m^2\varphi_T^\dagger\varphi_T - \frac{1}{2}q^2\left(\varphi_S^\dagger\varphi_S - \varphi_T^\dagger\varphi_T\right)^2$$

$$-\frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\bar{\Lambda}_M\gamma^\mu\partial_\mu\Lambda_M$$

$$+i\frac{q}{\sqrt{2}}\left[\bar{\Lambda}_M\Psi\left(\varphi_S^\dagger + \varphi_T\right) + \bar{\Lambda}_M\gamma^5\Psi\left(\varphi_T - \varphi_S^\dagger\right)\right]$$

$$-i\tfrac{q}{\sqrt{2}}\left[\bar{\Psi}\Lambda_M\left(\varphi_T^\dagger + \varphi_S\right) + \bar{\Psi}\gamma^5\Lambda_M\left(\varphi_S - \varphi_T^\dagger\right)\right] \tag{3.65}$$

Για το κλείσιμο της παραγράφου, θα σχολιάσουμε τον κάθε όρο της Λαγκρανζιανής (3.65) ξεχωριστά, υποθέτοντας ότι περιγράφει την αλληλεπίδραση ενός ηλεκτρονίου με ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, καθώς και τις αλληλεπιδράσεις των υπερσυμμετρικών παρτενέρ τους.

1. Ο όρος $i\overline{\Psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\Psi - m\Psi\overline{\Psi}$ περιγράφει την κίνηση του ηλεκτρονίου εντός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.
2. Οι όροι $\left(D_{\mu}\varphi_S^{\dagger}\right)\left(D^{\mu\dagger}\varphi_S\right) - m^2\varphi_S^{\dagger}\varphi_S + \left(D_{\mu}\varphi_T\right)\left(D^{\mu}\varphi_T\right)^{\dagger} - m^2\varphi_T^{\dagger}\varphi_T$ δίνουν τις εξισώσεις κίνησης των καταστάσεων του υπερσυμμετρικού παρτενέρ του ηλεκτρονίου εντός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Φαίνεται πως ο υπερσυμμετρικός παρτενέρ του ηλεκτρονίου είναι μποζόνιο και έχει την ίδια μάζα και το ίδιο φορτίο με το ηλεκτρόνιο.
3. Ο όρος $-\frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}$ δίνει τις εξισώσεις διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.
4. Ο όρος $\frac{i}{2}\bar{\Lambda}_M\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda_M$ περιγράφει την κίνηση του υπερσυμμετρικού παρτενέρ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, το οποίο είναι ένα άμαζο φερμιόνιο χωρίς φορτίο.
5. Οι όροι $i\frac{q}{\sqrt{2}}\left[\bar{\Lambda}_M\Psi\left(\varphi_S^{\dagger} + \varphi_T\right) + \bar{\Lambda}_M\gamma^5\Psi\left(\varphi_T - \varphi_S^{\dagger}\right)\right] - i\frac{q}{\sqrt{2}}\left[\overline{\Psi}\Lambda_M\left(\varphi_T^{\dagger} + \varphi_S\right) + \overline{\Psi}\gamma^5\Lambda_M\left(\varphi_S - \varphi_T^{\dagger}\right)\right]$ περιγράφουν την αλληλεπίδραση της χειραλικής υπερπολλαπλέτας του ηλεκτρονίου με τον υπερσυμμετρικό παρτενέρ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

3.4 Αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας βαθμίδας

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας βαθμίδας, στα πλαίσια ενός υπερσυμμετρικού μοντέλου. Αρχικά, να σχολιάσουμε ότι όταν μία καθολική συμμετρία σπάει αυθόρμητα, εμφανίζεται ένα μποζόνιο Goldstone. Ενώ, όταν μία τοπική συμμετρία βαθμίδας σπάει αυθόρμητα, δεν εμφανίζονται Goldstone μποζόνια, διότι απαλείφονται μέσω ενός μηχανισμού που ονομάζεται gauge fixing και προκύπτουν διανυσματικά μποζόνια με μάζα. Ένα παράδειγμα, στο όποιο χρησιμοποιείται αυτός ο μηχανισμός, είναι η ηλεκτρασθενής θεωρία. Η μελέτη αυτού του φαινομένου έχει ενδιαφέρον στα πλαίσια μιας υπερσυμμετρικής θεωρίας βαθμίδας.

Θα ξεκινήσουμε την αναζήτησή μας από μια υπερσυμμετρική θεωρία, καθολικά συμμετρική, με χειραλικά υπερπεδία Φ_i. Στις θεωρίες αυτές το ενεργό δυναμικό δίνεται από τη σχέση (2.48): $V \coloneqq F_i^{\dagger}F_i$. Επίσης, το υπερδυναμικό δίνεται από τη σχέση (2.58): $W(\Phi) = f_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k$. Διαλέγουμε αυτή τη μορφή του υπερδυναμικού για να υπάρχει ο γραμμικός όρος $f_i\Phi_i$ που θα μας επιτρέψει το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας. Επιπρόσθετα, γνωρίζουμε ότι το βοηθητικό πεδίο $F_i^{\dagger}$ δίνεται από τη σχέση:

$$F_i^{\dagger} = -\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i} \Longrightarrow$$

$$F_i^{\dagger} = -\left(f_i + m_{ij}\varphi_j + \lambda_{ijk}\varphi_j\varphi_k\right) \tag{3.66}$$

Όπως έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 2.5, όταν η εξίσωση $F_i = 0$ έχει λύση, η υπερσυμμετρία δεν είναι σπασμένη. Αν όμως έχει λύση, στην οποία τα πεδία φ_i δεν είναι μηδενικά, η καθολική συμμετρία μπορεί να είναι σπασμένη, ενώ η υπερσυμμετρία διατηρείται.

Για παράδειγμα, έστω μια θεωρία με τρία χειραλικά υπερπεδία S, T, N, όπου τα S, T μετασχηματίζονται όπως στις σχέσεις (3.49) και (3.53) κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς τύπου $U(1)$, ενώ το N μένει αμετάβλητο:

$$S' = e^{-2iq\Lambda_0}S \tag{3.67}$$

$$T' = e^{2iq\Lambda_0}T \tag{3.68}$$

$$N' = N \tag{3.69}$$

Το χειραλικό υπερπεδίο Λ_0 είναι σταθερό διότι μελετάμε μία καθολική συμμετρία. Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι το ακόλουθο αντικείμενο είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς $U(1)$.

$$W(S, T, N) = fN + \lambda STN \tag{3.70}$$

Η συνθήκη $F_i = 0$ ή ακόμα καλύτερα, για το παράδειγμά μας, $F - όροι = 0$, επιβάλλει να ισχύουν ταυτόχρονα οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\lambda tn = 0 \tag{3.71α}$$

$$\lambda sn = 0 \tag{3.71β}$$

$$\lambda st + f = 0 \tag{3.71γ}$$

Με s, t, n συμβολίζουμε τις αναμενόμενες τιμές του κενού των βαθμωτών πεδίων των αντίστοιχων υπερπεδίων. Η λύση:

$$n = 0 \text{ και } st = \frac{f}{\lambda} \tag{3.72}$$

απαιτεί τα s, t να είναι μη μηδενικά. Με αποτέλεσμα το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας $U(1)$. Επομένως, θέτοντας τα εξής:

$$\varphi_S = s + \hat{\varphi}_S \tag{3.73α}$$

$$\varphi_T = t + \hat{\varphi}_T \tag{3.73β}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.71), το ενεργό δυναμικό παίρνει τη μορφή:

$$V(\hat{\varphi}_S, \hat{\varphi}_T, \varphi_N) = \lambda^2|(t + \hat{\varphi}_T)\varphi_N|^2 + \lambda^2|(s + \hat{\varphi}_S)\varphi_N|^2$$
$$+|\lambda(s + \hat{\varphi}_S)(t + \hat{\varphi}_T) + f|^2 =$$
$$\lambda^2(s^2 + t^2)\varphi_N^\dagger\varphi_N + \lambda^2(s\hat{\varphi}_T + t\hat{\varphi}_S)^\dagger(s\hat{\varphi}_T + t\hat{\varphi}_S) + \cdots \tag{3.74}$$

Στις "..." βρίσκονται οι τρίτες και οι τέταρτες δυνάμεις των πεδίων. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο βαθμωτά μποζόνια με μάζες στο τετράγωνο: $\lambda^2(s^2+t^2)$ και ένα άμαζο μποζόνιο Goldstone $\sim(s\hat{\varphi}_S - t\hat{\varphi}_T)$.

Εφόσον η υπερσυμμετρία δεν είναι σπασμένη, πρέπει να υπάρχει και ένα άμαζο Goldstone σωμάτιο φερμιονικού χαρακτήρα. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί από τη Λαγκρανζιανή (2.47). Ορίζουμε τους σπίνορες Majorana:

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} \psi_i \\ \bar{\psi}_i \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

Εύκολα επιβεβαιώνονται τα εξής:

$$\bar{\Psi}_i \Psi_j = \psi_i \psi_j + \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \tag{3.76}$$

$$\bar{\Psi}_i \gamma^5 \Psi_j = -\psi_i \psi_j + \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \tag{3.77}$$

$$\bar{\Psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_i = \psi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i + \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i = 2\bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i \tag{3.78}$$

Στη σχέση (3.78) αγνοήσαμε όρους που αποτελούσαν ολικές παραγώγους. Μέσω των σχέσεων (3.76), (3.77) και (3.78) η Λαγκρανζιανή (2.47) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \partial_\mu \varphi_i^\dagger \partial^\mu \varphi_i - \left| m_{ij}\varphi_j + \lambda_{ijk}\varphi_j\varphi_k \right|^2 + \frac{i}{2}\bar{\Psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_i - \frac{1}{2} m_{ij} \bar{\Psi}_i \Psi_j \\ - \tfrac{1}{2}\lambda_{ijk}\left(\bar{\Psi}_i \Psi_j - \bar{\Psi}_i \gamma^5 \Psi_j\right)\varphi_k - \tfrac{1}{2}\lambda_{ijk}\left(\bar{\Psi}_i \Psi_j + \bar{\Psi}_i \gamma^5 \Psi_j\right)\varphi_k^\dagger \end{aligned} \tag{3.79}$$

Ο όρος $-\frac{1}{2}\lambda_{ijk}\bar{\Psi}_i\Psi_j\left(\varphi_k + \varphi_k^\dagger\right)$ δίνει όρους μάζας φερμιονίων όταν γίνουν οι αλλαγές (3.73):

$$-\tfrac{1}{2}\lambda_{ijk}\bar{\Psi}_i\Psi_j\left(\varphi_k + \varphi_k^\dagger\right) = -\lambda\bar{\Psi}_N(s\Psi_T + t\Psi_S) + \cdots \tag{3.80}$$

Να σημειωθεί ότι οι φερμιονικοί όροι $-t\Psi_T + s\Psi_S$ προσδιορίζουν το άμαζο φερμιόνιο Goldstone.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το αυθόρμητο σπάσιμο μιας τοπικής αβελιανής συμμετρίας βαθμίδας $U(1)$ στα πλαίσια μιας υπερσυμμετρικής θεωρίας. Γνωρίζουμε ότι το gauge μποζόνιο V_μ θα αποκτήσει μάζα μετά το σπάσιμο της συμμετρίας βαθμίδας. Επειδή η υπερσυμμετρία θα εξακολουθεί να υπάρχει, στο σύστημα θα συμμετέχει και ο υπερσυμμετρικός παρτενέρ του V_μ, που θα είναι ένα gaugino με μάζα. Επιπροσθέτως, το άμαζο φερμιόνιο Majorana Λ_M θα συνδυαστεί με το άμαζο φερμιόνιο Goldstone και θα δημιουργηθεί ένα φερμιόνιο Dirac με μάζα. Αυτό που μόλις περιγράψαμε είναι ο υπερσυμμετρικός μηχανισμός Higgs.

Η Λαγκρανζιανή του απλούστερου υπερσυμμετρικού μοντέλου με τοπική συμμετρία βαθμίδας $U(1)$ είναι η εξής:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32}(W^{\alpha}W_{\alpha})_F + \left(S^{\dagger}e^{2qV}S\right)_D + \left(T^{\dagger}e^{-2qV}T\right)_D$$

$$+\left(N^{\dagger}N\right)_D + \left(W(S,T,N)\,\big|_F + E.\Sigma.\right) \tag{3.81}$$

Το ενεργό δυναμικό θα είναι:

$$V(\varphi_S, \varphi_T, \varphi_N) = F_S^{\dagger}F_S + F_T^{\dagger}F_T + F_N^{\dagger}F_N + \tfrac{1}{2}D^2 \tag{3.82}$$

όπου τα $F_i^{\dagger}$ δίνονται από τη σχέση: $F_i^{\dagger} = -\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i}$ και το $W(\varphi)$ από τη σχέση (3.70). Το D δίνεται από την εξίσωση κίνησής του (3.63):

$$F_S^{\dagger} = -\lambda\varphi_T\varphi_N \tag{3.83α}$$

$$F_T^{\dagger} = -\lambda\varphi_S\varphi_N \tag{3.83β}$$

$$F_N^{\dagger} = -f - \lambda\varphi_S\varphi_T \tag{3.83γ}$$

$$F_N^{\dagger} = -f - \lambda\varphi_S\varphi_T \tag{3.83δ}$$

$$D = -q\left(\varphi_S^{\dagger}\varphi_S - \varphi_T^{\dagger}\varphi_T\right) \tag{3.83ε}$$

Το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού, που διατηρεί την υπερσυμμετρία, υπάρχει στα:

$$s = t = -\sqrt{\frac{f}{\lambda}} \;\; \text{και} \;\; n = 0 \tag{3.84}$$

Να σημειωθεί ότι οι συναλλοίωτες παράγωγοι D_μ των βαθμωτών πεδίων της Λαγκρανζιανής (3.65) δίνουν τον όρο μάζας του πεδίου V_μ:

$$m_V^2 = 2q^2(s^2 + t^2) = 4q^2\frac{f}{\lambda} \tag{3.85}$$

Επίσης, οι αναμενόμενες τιμές του κενού, των ίδιων βαθμωτών πεδίων, δίνουν μάζα στο άμαζο gaugino Λ_M, ούτως ώστε να σχηματίσει μαζί με το άμαζο φερμιόνιο Goldstone ένα φερμιόνιο Dirac με μάζα:

$$m_\Lambda = 2q\sqrt{\frac{f}{\lambda}} \tag{3.86}$$

3.5 Σπάσιμο της υπερσυμμετρίας μέσω του $D - όρου$

Σε αυτήν την παράγραφο θα εξετάσουμε έναν ακόμα μηχανισμό για το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας, πέρα από το μηχανισμό που χρησιμοποιεί τον $F - όρο$ ενός χειραλικού υπερπεδίου, που εξετάσαμε στην παράγραφο 2.6. Στις Λαγκρανζιανές που μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο συμμετέχουν διανυσματικά υπερπεδία. Επομένως, μπορούμε να εξετάσουμε το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας μέσω του $D - όρου$ ενός διανυσματικού υπερπεδίου.

Στην παράγραφο 2.5 καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι για να υπάρχει αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας πρέπει κάποιο πεδίο της θεωρίας να έχει αναμενόμενη τιμή κενού που να μεταβάλλεται κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, αλλά όχι κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Στην παράγραφο 2.5 είδαμε πως στις θεωρίες των χειραλικών υπερπεδίων, το πεδίου που πρέπει να έχει μη μηδενικές αναμενόμενες τιμές κενού είναι το βοηθητικό πεδίο F. Στις θεωρίες που συμμετέχουν διανυσματικά υπερπεδία, τις μη μηδενικές αναμενόμενες τιμές κενού πρέπει να τις έχει το βοηθητικό πεδίο D. Από τις σχέσεις (3.18), (3.19), (3.20), (3.21) και (3.22) φαίνεται πως μόνο μέσω του D πεδίου μπορούμε να πετύχουμε μεταβολή της αναμενόμενης τιμής κενού κάποιου πεδίου χωρίς να πειράξουμε την αναλλοιώτητα Lorentz. Συγκεκριμένα, από τη σχέση (3.19) παρατηρούμε πως ο υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός της αναμενόμενης τιμής κενού του πεδίου λ_α πρέπει να είναι μη μηδενικός:

$$\left\langle 0 \middle| \delta_\xi \lambda_\alpha \middle| 0 \right\rangle = i\xi_\alpha \langle 0|D|0\rangle \neq 0 \Longrightarrow$$

$$d = \langle 0|D|0\rangle \neq 0 \tag{3.87}$$

Η απαίτηση (3.87) συνάδει με την απαίτηση που εισάγαμε στην παράγραφο 2.5 για το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας, η οποία ήταν το ενεργό δυναμικό να μην έχει υπερσυμμετρικό ελάχιστο. Όπως φαίνεται από τη σχέση (3.82) το βοηθητικό πεδίο D συνεισφέρει στο ενεργό δυναμικό μέσω του όρου $\frac{1}{2}D^2$. Επομένως, για το ενεργό δυναμικό θα ισχύει:

$$V \geq \frac{1}{2}d^2 > 0 \tag{3.88}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τη Λαγκρανζιανή (3.55), προσθέτοντας και άλλα χειραλικά υπερπεδία Φ_i, ούτως ώστε να προβλέπεται η αλληλεπίδραση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και με άλλες χειραλικές υπερπολλαπλέτες με φορτία q_i. Από τη νέα Λαγκρανζιανή θα προκύψει η εξίσωση κίνησης του βοηθητικού πεδίου D, η οποία θα είναι γενίκευση της σχέσης (3.63):

$$D = -\sum_i q_i\, \varphi_i^\dagger \varphi_i \tag{3.89}$$

Παρατηρούμε πως αν οι αναμενόμενες τιμές κενού των πεδίων φ_i είναι μηδέν, τότε και το d θα είναι μηδέν, επομένως θα έχουμε μια υπερσυμμετρική θεωρία. Οι υπερσυμμετρικές καταστάσεις είναι πάντα σταθερές, άρα είναι προτιμητέες. Υπάρχει ελπίδα για το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας, εάν το υπερδυναμικό δεν επιτρέπει σε όλα τα πεδία φ_i να έχουν μηδενικές αναμενόμενες τιμές κενού. Στις $U(1)$ υπερσυμμετρικές θεωρίες βαθμίδας υπάρχει ένας ακόμα τρόπος για το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας. Έχουμε αναφέρει ξανά πως το πεδίο D μετασχηματίζεται σαν ολική παράγωγος κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, επομένως μπορεί να αποτελέσει κάποιον όρο σε μια υπερσυμμετρική Λαγκρανζιανή. Επίσης, σε αυτό το κεφάλαιο έχουμε δείξει ότι το πεδίο D μένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Επομένως, οι Λαγκρανζιανές που μελετάμε μπορούν να έχουν έναν όρο της εξής μορφής:

$$\mathcal{L}_1 = \xi D \tag{3.90}$$

Τον όρο (3.90) τον εισήγαγαν οι Fayet-Iliopoulos. Να σημειωθεί ότι το ξ είναι μία πραγματική σταθερά και όχι μια μεταβλητή Grassmann. Με την προσθήκη αυτού του όρου, οι εξισώσεις κίνησης του πεδίου D παίρνουν την εξής μορφή:

$$D = -\xi - \sum_i q_i \, \varphi_i^\dagger \varphi_i \tag{3.91}$$

Το απλούστερο υπερσυμμετρικό gauge αναλλοίωτο μοντέλο, στο οποίο ο όρος (3.91) επιτρέπει το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας, περιέχει μόνο ένα χειραλικό υπερπεδίο με φορτίο q. Η Λαγκρανζιανή του μοντέλου θα είναι η εξής:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32}(W_\alpha W^\alpha)_F + \left(\Phi^\dagger e^{2qV}\Phi\right)_D + \xi(V)_D \tag{3.92}$$

Το υπερδυναμικό και ο $F - \acute{o}\rho o\varsigma$ εξαφανίζονται λόγω της $U(1)$ αναλλοιώτητας του προβλήματος. Επίσης, από τη σχέση (3.91) φαίνεται πως η εξίσωση κίνησης του πεδίου D γίνεται:

$$D = -\xi - q\varphi^\dagger \varphi \tag{3.93}$$

Εάν ισχύει $\xi q < 0$, το πεδίο D απαλείφεται εάν έχουμε μη μηδενική αναμενόμενη τιμή κενού για το πεδίο φ. Αυτό είναι ένα ακόμα παράδειγμα του υπερσυμμετρικού μηχανισμού Higgs, που σχολιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Εάν ισχύει $\xi q > 0$, το ενεργό δυναμικό γίνεται ελάχιστο για μηδενική τιμή της αναμενόμενης τιμής κενού του πεδίου φ. Με τον τρόπο αυτό διατηρείται η $U(1)$ συμμετρία βαθμίδας. Επιπροσθέτως, το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού θα είναι $V = \frac{1}{2}\xi^2 > 0$, δηλαδή η υπερσυμμετρία είναι αυθόρμητα σπασμένη. Σύμφωνα με τη σχέση (3.93), το ενεργό δυναμικό θα έχει την εξής μορφή:

$$V = \frac{1}{2}\left(\xi + q\varphi^\dagger\varphi\right)^2 \tag{3.94}$$

Επομένως, το πεδίο φ αποκτά μάζα: $\quad m_\varphi^2 = q\xi \quad$ (3.95)

ενώ ο φερμιονικός παρτενέρ του φ παραμένει άμαζος. Έτσι επιβεβαιώνεται ότι η υπερσυμμετρία είναι σπασμένη. Η παραμένουσα συμμετρία βαθμίδας διατηρεί το gauge πεδίο V_μ άμαζο, όπως και τον υπερσυμμετρικό παρτενέρ του, το gaugino λ_α. Το λ_α παίζει το ρόλο του φερμιονίου Goldstone που σχετίζεται με το αυθόρμητο σπάσιμο της καθολικής υπερσυμμετρίας. Για αυτό το λόγο το λ_α παραμένει άμαζο και ονομάζεται Goldstino.

Τον ίδιο μηχανισμό για το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας μπορούμε να τον εφαρμόσουμε και στην περίπτωση του μοντέλου (3.55), που αποτελεί την υπερσυμμετρική επέκταση της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Επομένως, όταν προσθέτουμε τον όρο (3.90) στη Λαγκρανζιανή (3.55), οι όροι που επηρεάζονται από το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας είναι οι βαθμωτοί. Ο όρος $-\frac{1}{2}q^2\left(\varphi_S^\dagger\varphi_S - \varphi_T^\dagger\varphi_T\right)^2$ της Λαγκρανζιανής (3.65) θα γίνει: $-\frac{1}{2}\left[\xi + q\left(\varphi_S^\dagger\varphi_S - \varphi_T^\dagger\varphi_T\right)\right]^2$. Επομένως, τα πεδία φ_S και φ_T θα έχουν μάζες:

$$m_S^2 = m^2 + q\xi \quad \text{και} \quad m_T^2 = m^2 - q\xi \tag{3.96}$$

ενώ το φερμιόνιο Ψ θα εξακολουθεί να έχει μάζα m.

Παράρτημα Α

Θεωρία Ομάδων

Α.1 Εισαγωγή

Η θεωρία ομάδων είναι μια μαθηματική θεωρία που μελετά τις αλγεβρικές δομές που ονομάζονται ομάδες. Στη φυσική, σημαντικό ρόλο παίζουν οι συμμετρίες των φυσικών συστημάτων, μέσω των οποίων μπορούμε να μελετήσουμε διατηρούμενες φυσικές ποσότητες, αλλά και τις ιδιότητες των αλληλεπιδράσεων. Για να διερευνήσουμε την συμμετρία ενός φυσικού συστήματος, δρούμε με μετασχηματισμούς στα μαθηματικά αντικείμενα που περιγράφουν το σύστημα (π.χ. χωροχρονικές συντεταγμένες, συναρτήσεις θέσης, κυματοσυναρτήσεις, σπίνορες, πεδία κ.τ.λ.). Εάν μετά τη δράση των μετασχηματισμών το σύστημα διατηρεί κάποιες από τις ιδιότητές του, για παράδειγμα την συνολική του ορμή, την ενέργειά του, την μορφή των εξισώσεων κίνησής του κ.α., τότε λέμε ότι το σύστημα είναι συμμετρικό κάτω από τους συγκεκριμένους μετασχηματισμούς. Πιο συνοπτικά, ένας μετασχηματισμός ονομάζεται συμμετρία ενός συστήματος, αν αφήνει αναλλοίωτη τη δράση του συστήματος. Οι μετασχηματισμοί, ανάλογα με τις ιδιότητές τους, αποτελούν στοιχεία κάποιας ομάδας. Αυτός είναι ο λόγος που η μελέτη της θεωρίας ομάδων είναι μείζονος σημασίας για τη φυσική.

Στο παρόν κεφάλαιο θα παραθέσουμε βασικούς ορισμούς και θεωρήματα της θεωρίας. Επιπρόσθετα, θα μελετήσουμε συνοπτικά κάποιες από τις βασικότερες ομάδες για τη φυσική.

Α.2 Βασικά στοιχεία της θεωρίας ομάδων

Στην παράγραφο αυτή δίνονται βασικοί ορισμοί και θεωρήματα της θεωρίας ομάδων, καθώς και κάποια παραδείγματα από τη φυσική που φανερώνουν την χρησιμότητά τους. Να σημειωθεί ότι αρχικά θα αναφερόμαστε σε διακριτές ομάδες. Όμως, η γενίκευση όσων θα πούμε γίνεται με προφανή τρόπο για τις συνεχείς ομάδες, οι οποίες παίζουν σημαντικότερο ρόλο στη φυσική.

<u>Ορισμός ομάδας:</u>

Ένα σύνολο $G = \{g_1, g_2, \dots, g_N\}$ εφοδιασμένο με πράξη “o”, την οποία την ονομάζουμε συγκαταβατικά πολλαπλασιασμό, ονομάζεται ομάδα αν και μόνο αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. Κλειστότητα: $\forall\ g_i, g_j \in G$ ισχύει ότι $g_i\ o\ g_j \in G$
2. Προσεταιριστική ιδιότητα: Αν $g_i, g_j, g_k \in G$ τότε ισχύει το εξής: $g_i\ o\ (g_j o g_k) = (g_i\ o g_j) o g_k$

3. Υπάρχει δεξί ουδέτερο στοιχείο $e \in G : \ g_i \ o \ e = g_i \ , \forall g_i \in G$

4. Υπάρχει δεξί αντίστροφο στοιχείο ${g_i}^{-1} \in G : g_i \ o \ {g_i}^{-1} = e \ , \forall g_i \in G$

Να σημειωθεί ότι άμεση συνέπεια του ορισμού της ομάδας είναι ότι το αριστερό ουδέτερο στοιχείο είναι το ίδιο με το δεξί ουδέτερο στοιχείο και μάλιστα είναι μοναδικό σε μία ομάδα. Επιπλέον, το δεξί αντίστροφο κάθε στοιχείου αποτελεί και αριστερό αντίστροφό του και επίσης είναι μοναδικό σε μία ομάδα.

Ορισμός υποομάδας:

Έστω μια ομάδα G με πολλαπλασιασμό "o". Ένα υποσύνολο $H : H \subseteq G$ ονομάζεται υποομάδα της G αν και μόνο αν το H, εφοδιασμένο με τον πολλαπλασιασμό "o", αποτελεί ομάδα.

Στο σημείο αυτό θα κατασκευάσουμε την ομάδα $G_2 = \{e, g\}$ αφενός για να μας δοθεί η αφορμή να δώσουμε κάποιους ορισμούς και αφετέρου γιατί οι μετασχηματισμοί της ομοτιμίας και της αντιστροφής χρόνου αποτελούν στοιχεία αυτής της ομάδας. Για να κατασκευάσουμε την ομάδα πρέπει να εξετάσουμε τα γινόμενα των στοιχείων της:

$$e \ o \ e = e \ , \ e \ o \ g = g \ o \ e = g \ \ , \ g \ o \ g = g \text{ ή } e \tag{A.1}$$

Αν $g \ o \ g = g \Longrightarrow g = e$, άτοπο.

Επομένως:
$$g \ o \ g = e \tag{A.2}$$

Παρατηρήσεις:

1. Όλη η ομάδα μπορεί να κατασκευαστεί μέσω του g και διαδοχικών πολλαπλασιασμών με τον εαυτό του.
   Το g ονομάζεται γεννήτορας της ομάδας. Μια ομάδα μπορεί να έχει και παραπάνω από έναν γεννήτορες.
2. Οι ομάδες που μπορούν να κατασκευαστούν μόνο από ένα στοιχείο ονομάζονται κυκλικές και συμβολίζονται ως εξής: C_N , π.χ. C_2
3. Ισχύει ότι $g_i \ o \ g_j = g_j \ o \ g_i \ \forall \ g_i, g_j \in C_2$. Κάθε ομάδα G που πληροί την προϋπόθεση $g_i \ o \ g_j = g_j \ o \ g_i \ \forall \ g_i, g_j \in G$ ονομάζεται Αβελιανή.

Έστω ο τελεστής της ομοτιμίας $\hat{P}$ που δρα πάνω σε κυματοσυναρτήσεις της μορφής $\psi(\vec{x})$ ως εξής:

$$\hat{P}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x}) \tag{A.3}$$

Αν δράσουμε με τον τελεστή της ομοτιμίας στην παραπάνω σχέση θα πάρουμε το εξής:

$$\hat{P}\hat{P}\psi(\vec{x}) = \hat{P}\psi(-\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \qquad \text{(A.4)}$$

Επομένως ισχύει ότι:

$$\hat{P}\hat{P} = \hat{\mathbb{1}} \qquad \text{(A.5)}$$

Με:

$$\hat{\mathbb{1}}\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \qquad \text{(A.6)}$$

Είναι προφανές ότι οι τελεστές $\hat{P}, \hat{\mathbb{1}}$ απαρτίζουν την ομάδα C_2 ομοτιμίας.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε το ευθύ γινόμενο δύο ομάδων, το οποίο παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην κβαντομηχανική πολλών σωμάτων.

Ορισμός ευθέως γινομένου:

Έστω μια ομάδα G με πολλαπλασιασμό "o" και μια ομάδα F με πολλαπλασιασμό "$\times$". Το ευθύ γινόμενο των ομάδων G, F συμβολίζεται ως εξής:

$$\tilde{G} = G \otimes F \qquad \text{(A.7)}$$

Η $\tilde{G}$ αποτελεί ομάδα με σύνολο στοιχείων (g, f) όπου $g \in G$ και $f \in F$ και είναι εφοδιασμένη με τον πολλαπλασιασμό "$*$", ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$(g_1, f_1) * (g_2, f_2) = (g_1 o g_2, f_1 \times f_2) \qquad \text{(A.8)}$$

Το ουδέτερο στοιχείο της $\tilde{G}$ είναι το (e_G, e_F) και το αντίστροφο είναι το (g^{-1}, f^{-1}).

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα από την κβαντομηχανική όπου γίνεται φανερή η χρησιμότητα της ομάδας του ευθέως γινομένου. Έστω δύο πανομοιότυπα σωμάτια με σπιν $1/2$. Το σπινοριακό κομμάτι της κυματοσυνάρτησης του συστήματος των δύο φερμιονίων θα δίνεται από αναπαραστάσεις της ομάδας $SU_{spin}(2) \otimes SU_{spin}(2)$. Η ομάδα $SU(2)$ θα μελετηθεί αναλυτικά στη συνέχεια.

Ορισμός συμπλόκου:

Έστω H μία γνήσια υποομάδα της G, δηλαδή ισχύει $H \subset G$, και ένα στοιχείο $g_i \in G$ με $g_i \notin H$. Το σύνολο $g_i \, o \, H$ ονομάζεται αριστερό σύμπλοκο της H στην G ως προς g_i. Αντίστοιχα το $H \, o \, g_i$ είναι δεξί σύμπλοκο της H στην G ως προς g_i.

Ορισμός κανονικής υποομάδας:

Όταν όλα τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα μιας υποομάδας είναι ίδια, τότε ονομάζεται κανονική υποομάδα. Οι κανονικές υποομάδες συμβολίζονται συνήθως με N.

Ορισμός ομάδας πηλίκο:

Έστω μια κανονική υποομάδα N της G με γινόμενο "o". Τότε η N μαζί με όλα τα σύμπλοκά της στην G αποτελούν ομάδα με γινόμενο "o" ορισμένο για σύνολα. Η ομάδα αυτή ονομάζεται ομάδα πηλίκο και συμβολίζεται με G/N.

Για να γίνει πιο κατανοητός αυτός ο ορισμός θα αποδείξουμε την κλειστότητα και θα βρούμε το ουδέτερο στοιχείο και τα αντίστροφα στοιχεία της ομάδας πηλίκο G/N.

Έστω $(g_i\, o\, N)$ και $(g_j\, o\, N)$ δύο στοιχεία της G/N. Ακολουθεί η απόδειξη της κλειστότητας της ομάδας:

$$(g_i\, o\, N)o(g_j\, o\, N) = g_i o(N\, o\, g_j)oN = g_i o(g_j\, o\, N)oN = (g_i\, o\, g_j)o(N\, o\, N) \Longrightarrow$$

$$(g_i\, o\, N)o(g_j\, o\, N) = (g_i\, o\, g_j)oN \tag{A.9}$$

Προφανώς $g_i\, o\, g_j \in G$ και $g_i\, o\, g_j \notin N$, επομένως $(g_i\, o\, g_j)oN \in G/N$, δηλαδή ισχύει η κλειστότητα.

Η ομάδα πηλίκο θα μας χρειαστεί στη συνέχεια που θα δείξουμε ότι η ομάδα $SU(2)$ είναι γενικότερη της $SO(3)$ και μάλιστα ισχύει ότι η ομάδα $SU(2)/C_2$ είναι ισόμορφη της $SO(3)$. Ακολουθεί ο ορισμός του ισομορφισμού.

Ορισμός ομοιομορφισμού- ισομορφισμού:

Έστω μία ομάδα G με πολλαπλασιασμό "o" και μία ομάδα $\tilde{G}$ με πολλαπλασιασμό "$*$". Μια απεικόνιση $\Phi\, :\, G \to \tilde{G}$ με:

$$\Phi(g_i) * \Phi(g_j) = \Phi(g_i o g_j)\,,\ \forall g_i, g_j \in G \tag{A.10}$$

ονομάζεται ισομορφισμός εάν το πλήθος των στοιχείων της ομάδας G είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων της ομάδας $\tilde{G}$, ενώ ονομάζεται ομοιομορφισμός εάν το πλήθος των στοιχείων των δύο ομάδων δεν είναι το ίδιο.

Ορισμός αναπαράστασης ομάδας:

Αναπαράσταση A μιας ομάδας G είναι ένας ομοιομορφισμός από το G στο σύνολο των γραμμικών τελεστών που δρουν σε διανυσματικό χώρο V:

$$A : G \to GL(V) \tag{A.11}$$

Η $GL(V)$ είναι η ομάδα των γενικών γραμμικών τελεστών που δρουν σε διανυσματικό χώρο V. Να σημειωθεί ότι αν η απεικόνιση A είναι ισομορφισμός, τότε η A ονομάζεται πιστή αναπαράσταση της G.

Ορισμός ισοδύναμων αναπαραστάσεων:

Δύο αναπαραστάσεις A και $\tilde{A}$ με πίνακες ίδιας διάστασης $d \times d$ μιας ομάδας G ονομάζονται ισοδύναμες αν και μόνο αν συνδέονται με μετασχηματισμό ομοιότητας:

$$\tilde{A}(g) = S \cdot A(g) \cdot S^{-1} \ , \ \ \forall g \in G \tag{A.12}$$

Όπου S είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας διάστασης $d \times d$.

Ορισμός αναγώγιμης αναπαράστασης:

Μια αναπαράσταση $A : G \to GL(V)$ ονομάζεται αναγώγιμη αν υπάρχει υποχώρος $W \subset V$ με $W \neq \{0\}$ τέτοιος ώστε $\forall \ w \in W$ να ισχύει το εξής:

$$A(g)w \ \in W \ , \ \forall \ g \in G \tag{A.13}$$

Αν δεν υπάρχει τέτοιος υποχώρος W, η αναπαράσταση ονομάζεται μη αναγώγιμη.

Ιδιαίτερα χρήσιμο είναι το ακόλουθο λήμμα.

Πρώτο λήμμα του Schur:

Έστω $A(g)$ μία μη αναγώγιμη αναπαράσταση της G με πίνακες $d \times d$. Έστω επίσης ένας πίνακας M διάστασης $d \times d$ με την ιδιότητα:

$$\mathrm{A}(g) \cdot M = M \cdot A(g) \, , \ \ \forall g \in G \tag{A.14}$$

Τότε ισχύει το εξής:

$$M = c \, \mathbb{I} \ \ , \ \ c \in \mathbb{C} \tag{A.15}$$

Όπου $\mathbb{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης $d \times d$.

Η χρησιμότητα του λήμματος του Schur γίνεται φανερή στη μελέτη των ομάδων Lie, ο ορισμός των οποίων θα δοθεί παρακάτω. Αποδεικνύεται ότι οι τελεστές Casimir των ομάδων Lie αναπαρίστανται ως $c \, \mathbb{I}$, διότι μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες των ομάδων Lie. Ένα παράδειγμα τελεστής Casimir είναι ο τελεστής της στροφορμής στο τετράγωνο "$\hat{L}^2$" στην κβαντομηχανική.

Επιπλέον, να σημειωθεί ότι οι αναγώγιμες αναπαραστάσεις $A(g)$ μπορούν να γραφτούν σαν ευθύ άθροισμα μη αναγώγιμων και μη ισοδύναμων αναπαραστάσεων $A^{(k)}(g)$ (το k αριθμεί μη αναγώγιμες και μη ισοδύναμες αναπαραστάσεις):

$$A(g) = \bigoplus_{k=1}^{k_{max}} \lambda_k A^{(k)}(g) \tag{A.16}$$

Το λ είναι η πολλαπλότητα με την οποία εμφανίζεται κάθε μη αναγώγιμη μη ισοδύναμη αναπαράσταση στο ευθύ άθροισμα. Η τελευταία σχέση σημαίνει πως η αναγώγιμη αναπαράσταση μπορεί πάντα μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού ομοιότητας να γραφτεί σαν μπλοκ διαγώνιας μορφής, δηλαδή να γραφτεί ως εξής:

$$A(g) = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \quad \text{(A.17)}$$

Όπου $A^{(i)}(g) = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$, $A^{(j)}(g) = x$, $i, j \in \{1,2, \ldots, k_{max}\}$.

Ορισμός συνεχών ομάδων:

Ένα σύνολο στοιχείων $R(\vec{a})$ που προσδιορίζονται από ένα σύνολο r παραμέτρων $\vec{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$, εφοδιασμένο με κατάλληλα ορισμένη πράξη γινομένου, ονομάζεται συνεχής r-παραμετρική ομάδα αν και μόνο αν ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις της ομάδας: κλειστότητα, προσεταιριστικότητα, ύπαρξη ουδετέρου και αντίστροφου στοιχείου.

Έστω το γινόμενο: $R(\vec{a})R(\vec{b}) = R(\vec{c})$. Το $\vec{c}$ καθορίζεται από τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ μέσω της απεικόνισης: $\vec{c} = f(\vec{a}, \vec{b})$, η οποία εξαρτάται από τις ιδιότητες της ομάδας που μελετάμε. Μπορούμε να βρούμε κάποιες ιδιότητες της f μέσω της προσεταιριστικότητας της ομάδας και της ύπαρξης ουδετέρου και αντίστροφου στοιχείου.

$$\text{Προσεταιριστικότητα} \Longrightarrow f\left(\vec{a}, f(\vec{b}, \vec{c})\right) = f(f(\vec{a}, \vec{b}), \vec{c})$$

$$\text{Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου} \Longrightarrow f(\vec{a}_e, a) = f(\vec{a}, \vec{a}_e) = \vec{a}$$

$$\text{Ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου} \Longrightarrow f(\vec{a}_{-1}, \vec{a}) = f(\vec{a}, \vec{a}_{-1}) = \vec{a}_e$$

Για την απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών πρέπει να γίνει χρήση των σχέσεων: $R(\vec{a}_e)R(\vec{a}) = R(\vec{a})$ και $R(\vec{a})R(\vec{a}_{-1}) = R(\vec{a}_e)$, οι οποίες είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού της συνεχούς ομάδας.

A.3 Ομάδα $SU(2)$

Η ομάδα $SU(2)$ είναι πολύ σημαντική για την κβαντομηχανική, διότι οι αναπαραστάσεις της περιγράφουν τις καταστάσεις του spin των σωματιδίων. Επιπρόσθετα, θα δείξουμε με πολύ κομψό τρόπο ότι μέσω της ομάδας $SU(2)$ μπορούν να περιγραφούν και οι καταστάσεις της στροφορμής. Επίσης, η $SU(2)$ μας βοηθάει στην ταξινόμηση κάποιων μεσονίων και βαριονίων, μέσω της εισαγωγής του κβαντικού αριθμού isospin.

A.3.1 Κατασκευή της ομάδας $SU(2)$

Θα κατασκευάσουμε εν συντομία την ομάδα $SU(2)$ μέσω της θεμελιώδους αναπαράστασής της. Η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SU(2)$ απαρτίζεται από πίνακες διάστασης 2×2, εξού και το 2 στην παρένθεση της ονομασίας της ομάδας. Τα στοιχεία της θεμελιώδους αναπαράστασης δρουν σε διανύσματα δύο διαστάσεων με μιγαδικές συνιστώσες και αφήνουν το μέτρο τους αναλλοίωτο.

Έστω $U \in SU(2)$ και $\psi = \binom{\alpha}{\beta}$ ένα διάνυσμα με μιγαδικές συνιστώσες ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$). Το μέτρο του διανύσματος δίνεται από τη σχέση: $|\psi|^2 = \psi^\dagger\psi$. Επίσης, δρώντας με τον μετασχηματισμό U στο διάνυσμα ψ προκύπτει ένα άλλο διάνυσμα $\psi' = U\psi$ με μέτρο:

$$|\psi'|^2 = (U\psi)^\dagger U\psi = \psi^\dagger U^\dagger U\psi \tag{A.18}$$

Όπως προαναφέραμε, απαιτούμε το μέτρο του διανύσματος να παραμείνει αναλλοίωτο, επομένως πρέπει να ισχύει το εξής:

$$|\psi'|^2 = |\psi|^2 \Longrightarrow$$

$$\psi^\dagger U^\dagger U\psi = \psi^\dagger\psi \Longrightarrow$$

$$U^\dagger U = \mathbb{I} \tag{A.19}$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως οι πίνακες U είναι μοναδιακοί (unitary), εξού και το σύμβολο U στο όνομα της ομάδας. Επίσης, να σημειωθεί ότι το σύνολο των πινάκων A με ορίζουσα ένα ($det(A) = 1$) αποτελούν ομάδα (ας την συμβολίσουμε με S) με ουδέτερο στοιχείο το $\mathbb{I}$ και αντίστροφο το A^{-1}, το οποίο υπάρχει εφόσον $det(A) \neq 0$. Επομένως, για να συμπεριλαμβάνεται ο πίνακας $\mathbb{I}$ στην ομάδα $SU(2)$ μπορούμε να θέσουμε ως περιορισμό για τους πίνακες U τον εξής:

$$\det(U) = 1 \tag{A.20}$$

Είναι προφανές με όσα έχουμε πει ότι οι πίνακες U εξακολουθούν να αποτελούν ομάδα, την $SU(2)$, η οποία είναι υποομάδα της S που ορίσαμε παραπάνω. Το S στο όνομα της ομάδας $SU(2)$ προέρχεται από τον χαρακτηρισμό “special” της ομάδας και επιβάλλει τη σχέση $\det(U) = 1$.

Τέλος, επιβάλλοντας τους περιορισμούς (Α.19) και (Α.20) για τους πίνακες U, καταλήγουμε στην εξής γενική μορφή των πινάκων:

$$U\left(a_R, \vec{\theta}\right) = a_R\mathbb{1} + i\vec{\theta}\vec{\sigma} \tag{A.21}$$

Με:

$$\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)\ ,\ \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \tag{A.22}$$

Όπου $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ είναι οι τρεις πίνακες του Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.23}$$

Επιπλέον, τα $a_R, \vec{\theta}$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$a_R{}^2 + \vec{\theta}^2 = 1 \ \text{ με } \ a_R \in \mathbb{R}\ ,\ \vec{\theta} \in \mathbb{R}^3 \tag{A.24}$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες U εξαρτώνται από τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές λόγω του περιορισμού: $a_R{}^2 + \vec{\theta}^2 = 1$. Αυτός είναι ο λόγος που η ομάδα $SU(2)$ έχει τρεις γεννήτορες, τους οποίους θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια.

Είναι απαραίτητο να δείξουμε πως οι πίνακες με τη μορφή (A.21) αποτελούν ομάδα. Θα εξετάσουμε λοιπόν αν ικανοποιούνται όλες οι απαιτήσεις της ομάδας: κλειστότητα, προσεταιριστική ιδιότητα, ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου και ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου.

1)Κλειστότητα:

Έστω $U\left(a_{R,1},\vec{\theta}_1\right), U\left(a_{R,2},\vec{\theta}_2\right) \in SU(2)$. Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$U\left(a_{R,1},\vec{\theta}_1\right) \cdot U\left(a_{R,2},\vec{\theta}_2\right) = U\left(a_{R,3},\vec{\theta}_3\right) \tag{A.25}$$

Όπου: $$a_{R,3} = a_{R,1}a_{R,2} - \vec{\theta}_1\vec{\theta}_2 \quad \text{και} \quad \vec{\theta}_3 = a_{R,1}\vec{\theta}_2 + a_{R,2}\vec{\theta}_1 - \vec{\theta}_1 \times \vec{\theta}_2 \tag{A.26}$$

Προφανώς: $$a_{R,3} \in \mathbb{R} \ , \ \vec{\theta}_3 \in \mathbb{R}^3 \tag{A.27}$$

Επίσης, μέσω της ταυτότητας:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \tag{A.28}$$

μπορούμε να δείξουμε ότι: $${a_{R,3}}^2 + \vec{\theta}_3^2 = 1 \tag{A.29}$$

Επομένως ισχύει ότι: $$U\left(a_{R,3},\vec{\theta}_3\right) \in SU(2) \tag{A.30}$$

2) Προσεταιριστική ιδιότητα:

Επειδή το γινόμενο της ομάδας στην αναπαράσταση αυτή είναι ο πολλαπλασιασμός πινάκων, για τον οποίο ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, η απαίτηση της προσεταιριστικότητας ικανοποιείται τετριμμένα.

3) Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου:

Προφανώς: $$U(1,0) = \mathbb{I} \tag{A.31}$$

4) Ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου:

Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι το δεξί αντίστροφο στοιχείο του $U\left(a_R,\vec{\theta}\right)$ είναι το $U\left(a_R,-\vec{\theta}\right)$, αντικαθιστώντας τα εξής: $a_{R,1} = a_{R,2} = a_R$ και $\vec{\theta}_1 = -\vec{\theta}_2 = \vec{\theta}$ στις σχέσεις:

$$a_{R,3} = a_{R,1}a_{R,2} - \vec{\theta}_1\vec{\theta}_2 \quad \text{και} \quad \vec{\theta}_3 = a_{R,1}\vec{\theta}_2 + a_{R,2}\vec{\theta}_1 - \vec{\theta}_1 \times \vec{\theta}_2$$

όπου και θα βρει ότι $a_{R,3} = 1$ και $\vec{\theta}_3 = 0$. Επομένως:

$$U\left(a_R,\vec{\theta}\right)U\left(a_R,-\vec{\theta}\right) = U(1,0) = \mathbb{I} \tag{A.32}$$

Όμοια για το αριστερό αντίστροφο του $U\left(a_R,\vec{\theta}\right)$, το οποίο πάλι είναι το $U\left(a_R,-\vec{\theta}\right)$.

Επιπρόσθετα, είναι εύκολο να δείξουμε ότι η ομάδα $SU(2)$ δεν είναι αβελιανή:

$$U\left(a_{R,2}, \vec{\theta}_2\right) \cdot U\left(a_{R,1}, \vec{\theta}_1\right) = U\left(a'_{R,3}, \overrightarrow{\theta'}_3\right) \quad \text{(A.33)}$$

Με: $$a'_{R,3} = a_{R,1}a_{R,2} - \vec{\theta}_1\vec{\theta}_2 = a_{R,3} \quad \text{(A.34)}$$

Και: $$\overrightarrow{\theta'}_3 = a_{R,1}\vec{\theta}_2 + a_{R,2}\vec{\theta}_1 - \vec{\theta}_2 \times \vec{\theta}_1 = a_{R,1}\vec{\theta}_2 + a_{R,2}\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_1 \times \vec{\theta}_2 \neq \vec{\theta}_3 \quad \text{(A.35)}$$

Επομένως, εν γένει ισχύει:

$$U\left(a'_{R,3}, \overrightarrow{\theta'}_3\right) \neq U\left(a_{R,3}, \vec{\theta}_3\right) \Longrightarrow$$

$$U\left(a_{R,2}, \vec{\theta}_2\right) \cdot U\left(a_{R,1}, \vec{\theta}_1\right) \neq U\left(a_{R,1}, \vec{\theta}_1\right) \cdot U\left(a_{R,2}, \vec{\theta}_2\right) \quad \text{(A.36)}$$

Στη συνέχεια, θα μας φανεί χρήσιμο να γράψουμε τους πίνακες U στη μορφή $U(\varphi, \vec{n}) = e^{i\varphi\, \vec{n}\cdot\vec{J}}$. Για να το πετύχουμε αυτό θα κάνουμε την εξής παραμετροποίηση:

$$a_R = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \text{ και } \vec{\theta} = \vec{n}\, sin\left(\frac{\varphi}{2}\right),\ \varphi \in [0,4\pi)\ , |\vec{n}| = 1 \quad \text{(A.37)}$$

Είναι προφανές ότι εξακολουθεί να ισχύει η σχέση (A.24). Οι πίνακες U της θεμελιώδους αναπαράστασης της $SU(2)$, κάνοντας χρήση της σχέσης (A.19), γράφονται με τον εξής γνωστό τρόπο:

$$U(\varphi, \vec{n}) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathbb{I} + isin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{n}\,\vec{\sigma} \quad \text{(A.38)}$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor τα $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, $sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ και κάνοντας χρήση της σχέσης $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = \mathbb{I}$, μπορούμε να δείξουμε πως οι πίνακες $U(\varphi, \vec{n})$ μπορούν να γραφτούν στην εξής μορφή:

$$U(\varphi, \vec{n}) = e^{i\varphi\, \vec{n}\cdot\vec{J}} \quad \text{(A.39)}$$

όπου οι πίνακες:

$$J_1 = \frac{\sigma_1}{2} \quad , \quad J_2 = \frac{\sigma_2}{2} \quad , \quad J_3 = \frac{\sigma_3}{2} \quad \text{(A.40)}$$

ονομάζονται γεννήτορες της $SU(2)$, διότι μέσω αυτών μπορεί να γραφτεί κάθε πίνακας $U \in SU(2)$. Οι πίνακες του Pauli υπακούν στη σχέση μετάθεσης:

$$\left[\sigma_i, \sigma_j\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad \text{(A.41)}$$

Επομένως, είναι προφανές ότι οι γεννήτορες της $SU(2)$ θα έχουν την εξής σχέση μετάθεσης:

$$\left[J_i, J_j\right] = i\varepsilon_{ijk}J_k \quad \text{(A.42)}$$

Στο σημείο αυτό έχουμε τη δυνατότητα να σταματήσουμε να αντιμετωπίζουμε τα αντικείμενα U μόνο σαν πίνακες διάστασης 2×2 της θεμελιώδους αναπαράστασης της $SU(2)$. Πλέον, μπορούμε να τα αντιμετωπίζουμε σαν γενικούς μετασχηματισμούς που ανήκουν στην ομάδα $SU(2)$ και κατασκευάζονται μέσω των γεννητόρων της από τη σχέση (A.39). Η άλγεβρα (A.42) των γεννητόρων της ομάδας $SU(2)$ ονομάζεται άλγεβρα Lie της $SU(2)$ και συμβολίζεται ως εξής: $su(2)$. Ένας απειροστός μετασχηματισμός $U(\delta\varphi, \vec{n})$ για απειροστό $\delta\varphi$, από τη σχέση (A.39), φαίνεται πως μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$U(\delta\varphi, \vec{n}) = \mathbb{1} + i\delta\varphi\, \vec{n} \cdot \vec{J} + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) + \cdots \tag{A.43}$$

Παρατηρούμε πως ο απειροστός μετασχηματισμός προσεγγίζει το ουδέτερο στοιχείο $U(0, \vec{n}) = \mathbb{1}$ με αναλυτικό τρόπο. Επομένως, επιβεβαιώνουμε πως η $SU(2)$ είναι μια ομάδα Lie.

Γενικά, οι γεννήτορες των ομάδων Lie ορίζουν την αντίστοιχη άλγεβρα Lie μέσω του γινομένου Lie: $\left[X_i, X_j\right] = \sum_k C_{ij}^{\ k} X_k$. Οι συντελεστές $C_{ij}^{\ k}$ ονομάζονται σταθερές δομής της άλγεβρας Lie.

A.3.2 Η σχέση μεταξύ της $\boldsymbol{SU(2)}$ και της $\boldsymbol{SO(3)}$

Η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SO(3)$ είναι οι πίνακες μετασχηματισμού των στροφών $R(\varphi, \vec{n})$, διάστασης 3×3 που δρουν σε διανύσματα του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$. Έστω $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, ο πίνακας $R(\varphi, \vec{n})$ δρώντας στο διάνυσμα $\vec{x}$ το στρέφει κατά γωνία $\varphi \in [0,2\pi)$ γύρω από το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}$ και αφήνει το μέτρο του αναλλοίωτο.

Ας μετασχηματίσουμε το $\vec{x}$ μέσω του $R(\delta\varphi, \vec{n})$ για στοιχειώδη γωνία $\delta\varphi$:

$$\vec{x}' = R(\delta\varphi, \vec{n})\vec{x} \tag{A.44}$$

Η δράση του μετασχηματισμού $\hat{R}(\delta\varphi, \vec{n})$ της αναπαράστασης της ομάδας $SO(3)$ που δρα σε κυματοσυναρτήσεις, θα έχει την εξής μορφή:

$$\hat{R}(\delta\varphi, \vec{n})\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}') \tag{A.45}$$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς, μέσω των σχέσεων (A.44) και (A.45), ότι ο απειροστός μετασχηματισμός $\hat{R}(\delta\varphi, \vec{n})$ παίρνει τη μορφή:

$$\hat{R}(\delta\varphi, \vec{n}) = \mathbb{1} + i\delta\varphi\, \vec{n} \cdot \hat{\vec{L}} \tag{A.46}$$

όπου $\hat{\vec{L}}$ είναι ο τελεστής της στροφορμής. Επομένως, οι γεννήτορες των στροφών είναι οι στροφορμές.

Να σημειωθεί επίσης ότι τα στοιχεία της $SO(3)$ μπορούν να γραφτούν στη γενική μορφή: $R(\varphi, \vec{n}) = e^{i\varphi\, \vec{n} \cdot \vec{L}}$ και ότι οι γεννήτορες της $SO(3)$ ικανοποιούν την εξής άλγεβρα: $\left[L_i, L_j\right] = i\varepsilon_{ijk} L_k$.

Παρατηρούμε λοιπόν πως οι γενικές μορφές των στοιχείων και οι άλγεβρες των γεννητόρων των ομάδων $SU(2)$ και $SO(3)$ είναι οι ίδιες. Η διαφορά των δύο ομάδων είναι ότι η παράμετρος φ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,2\pi)$ στην περίπτωση της $SO(3)$ και στο διάστημα $[0,4\pi)$ στην περίπτωση της $SU(2)$ (σχέση (Α.37)). Επομένως η $SU(2)$ έχει διπλάσια στοιχεία από την $SO(3)$. Από τη θεμελιώδη αναπαράσταση της $SU(2)$, σχέση (Α.38), παρατηρούμε τα εξής:

$$U(0,\vec{n}) = \mathbb{1} \quad \text{και} \quad U(2\pi,\vec{n}) = -\mathbb{1} \tag{Α.47}$$

Τα στοιχεία $U(0,\vec{n})$, $U(2\pi,\vec{n})$ αποτελούν την ομάδα C_2, την οποία κατασκευάσαμε στην παράγραφο Α.2. Η C_2 είναι κανονική υποομάδα της $SU(2)$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε την ομάδα πηλίκο: $SU(2)/\,C_2$. Παρατηρούμε επίσης από τη σχέση (Α.38) ότι:

$$U(\varphi + 2\pi,\vec{n}) = -U(\varphi,\vec{n}) \tag{Α.48}$$

Επομένως, τα σύμπλοκα: $U(\varphi + 2\pi,\vec{n})\{\mathbb{1},-\mathbb{1}\}$ και $U(\varphi,\vec{n})\{\mathbb{1},-\mathbb{1}\}$ αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο της ομάδας $SU(2)/\,C_2$. Άρα, η $SU(2)/\,C_2$ έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με την $SO(3)$. Επιπλέον, η $SU(2)/\,C_2$ διατηρεί τις υπόλοιπες ιδιότητες της $SU(2)$, οι οποίες είναι οι ίδιες με της $SO(3)$. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι οι ομάδες $SU(2)/\,C_2$ και $SO(3)$ είναι ισόμορφες.

Α.3.3 Αναπαραστάσεις της $SU(2)$

Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι οι πίνακες των αναπαραστάσεων των γεννητόρων της ομάδας $SU(2)$ έχουν ίχνος μηδέν. Θυμόμαστε ότι οι μετασχηματισμοί $U \in SU(2)$ έχουν ορίζουσα 1 και μπορούν να γραφτούν μέσω των γεννητόρων της ομάδας σύμφωνα με τη σχέση (Α.39):

$$det\big(U(\varphi,n_k)\big) = 1 \Longrightarrow$$

$$det\big(e^{i\varphi\, n_k J_k}\big) = 1 \Longrightarrow$$

$$det\big(Se^{i\varphi\, n_k J_k}S^{-1}\big) = 1 \tag{Α.49}$$

Δράσαμε με έναν μετασχηματισμό ομοιότητας στον πίνακα U ούτως ώστε να διαγωνοποιηθεί: $Se^{i\varphi\, n_k J_k}S^{-1} = diag\left(e^{i\varphi\,\lambda_k^{(1)}}, e^{i\varphi\,\lambda_k^{(2)}}, \dots, e^{i\varphi\,\lambda_k^{(d)}}\right)$, όπου d είναι η διάσταση της αναπαράστασης. Επίσης, χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες της ορίζουσας: $det(AB) = det(A)det(B)$ και $det(AA^{-1}) = 1$. Αντικαθιστώντας την διαγωνοποιημένη μορφή στη σχέση (Α.49) έχουμε:

$$\prod_{j=1}^{d} e^{i\varphi\,\lambda_k^{(j)}} = 1 \Longrightarrow$$

$$e^{i\varphi \sum_{j=1}^{d} \lambda_k^{(j)}} = 1 \Longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{d} \lambda_k^{(j)} = 0 \Longrightarrow$$

$$Tr(SJ_kS^{-1}) = 0 \Longrightarrow$$

$$Tr(J_k) = 0 \tag{A.50}$$

Επιπρόσθετα, πρέπει να αναφέρουμε ότι σε μια ομάδα $SU(N)$ μπορούν να γραφτούν ταυτόχρονα σε διαγώνια μορφή $N-1$ γεννήτορες, οι οποίοι μετατίθενται μεταξύ τους και αποτελούν την υποάλγεβρα Cartan της άλγεβρας Lie. Στην περίπτωση της ομάδας $SU(2)$ έχουμε έναν γεννήτορα σε διαγώνια μορφή. Επιλέγουμε να είναι ο J_3. Επιπλέον, οι ομάδες $SU(N)$ έχουν $N-1$ τελεστές Casimir, οι οποίοι μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες της ομάδας. Η ομάδα $SU(2)$ έχει έναν τελεστή Casimir, ο οποίος είναι ο εξής:

$$C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \tag{A.51}$$

Μέσω της σχέσης μετάθεσης των γεννητόρων (A.42) μπορεί να δείξει κανείς ότι ο τελεστής C μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες της ομάδας. Επομένως, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι τελεστές C, J_3 έχουν κοινές ιδιοσυναρτήσεις:

$$C|\lambda,\mu\rangle = f(\lambda)|\lambda,\mu\rangle \tag{A.52}$$

$$J_3|\lambda,\mu\rangle = \mu|\lambda,\mu\rangle \tag{A.53}$$

Μπορούμε να σχολιάσουμε ότι οι μοναδιακοί μετασχηματισμοί παίζουν σημαντικό ρόλο για τη φυσική, διότι οι γεννήτορές τους είναι ερμιτιανοί τελεστές. Οι ερμιτιανοί τελεστές έχουν πραγματικές ιδιοτιμές, επομένως μπορούν να αντιπροσωπεύσουν φυσικά μεγέθη στην κβαντομηχανική. Συμπεραίνουμε πως οι γεννήτορες J_i έχουν πραγματικές ιδιοτιμές. Επιπλέον, σύμφωνα με το πρώτο λήμμα του Schur θα ισχύει ότι $C = f(\lambda)\mathbb{I}$, όπου $f(\lambda)$ οι ιδιοτιμές του τελεστή, τις οποίες θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια.

Στην αναζήτηση των αναπαραστάσεων της ομάδας $SU(2)$ θα μας φανούν χρήσιμοι οι ακόλουθοι τελεστές ανάβασης και κατάβασης:

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 \tag{A.54}$$

Μέσω της σχέσης μετάθεσης (A.42) μπορεί να δείξει κανείς ότι οι τελεστές $J_\pm$ μετατίθενται με τον τελεστή Casimir, αλλά όχι με τον τελεστή J_3. Μάλιστα, ισχύει το εξής:

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm \tag{A.55}$$

$$[C, J_\pm] = 0 \tag{A.56}$$

Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε τη δράση των τελεστών $J_\pm$ στις καταστάσεις $|\lambda,\mu\rangle$:

$$J_{\pm}C|\lambda,\mu\rangle = f(\lambda)J_{\pm}|\lambda,\mu\rangle \xRightarrow{(\mathrm{A.56})}$$

$$CJ_{\pm}|\lambda,\mu\rangle = f(\lambda)J_{\pm}|\lambda,\mu\rangle \tag{A.57}$$

Παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις $J_{\pm}|\lambda,\mu\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή C με ιδιοτιμή $f(\lambda)$.

$$J_{\pm}J_3|\lambda,\mu\rangle = \mu J_{\pm}|\lambda,\mu\rangle \xRightarrow{(\mathrm{A.55})}$$

$$J_3J_{\pm}|\lambda,\mu\rangle = (\mu \pm 1)J_{\pm}|\lambda,\mu\rangle \tag{A.58}$$

Επίσης, οι καταστάσεις $J_{\pm}|\lambda,\mu\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή J_3 με ιδιοτιμές $(\mu \pm 1)$. Επιπλέον, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι οι καταστάσεις $|\lambda,\mu\rangle$ δεν παρουσιάζουν εκφυλισμό, διότι δεν υπάρχει τελεστής που να συμμετέχει στην άλγεβρα Lie της ομάδας $SU(2)$ και να μετατίθεται με τους C, J_3. Επομένως, η μορφή των καταστάσεων $J_{\pm}|\lambda,\mu\rangle$, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (A.57) και (A.58), θα είναι η εξής:

$$J_{\pm}|\lambda,\mu\rangle = c_{\pm}|\lambda,\mu \pm 1\rangle \tag{A.59}$$

Θυμίζουμε ότι οι ιδιοτιμές των γεννητόρων J_i είναι πραγματικοί αριθμοί. Επομένως, από τον ορισμό του τελεστή C, σχέση (A.51), μπορούμε να δείξουμε το εξής:

$$\langle\lambda,\mu|C|\lambda,\mu\rangle = \langle\lambda,\mu|J_1^2|\lambda,\mu\rangle + \langle\lambda,\mu|J_2^2|\lambda,\mu\rangle + \langle\lambda,\mu|J_3^2|\lambda,\mu\rangle \Rightarrow$$

$$\langle\lambda,\mu|C|\lambda,\mu\rangle \geq \langle\lambda,\mu|J_3^2|\lambda,\mu\rangle \xRightarrow{(A.52),(A.53)}$$

$$f(\lambda) \geq \mu^2 \Rightarrow$$

$$-\sqrt{f(\lambda)} \leq \mu \leq \sqrt{f(\lambda)} \tag{A.60}$$

Η σχέση (A.60) μας φανερώνει ότι θα υπάρχουν καταστάσεις $|\lambda,\mu_{max}\rangle$, $|\lambda,\mu_{min}\rangle$ για τις οποίες θα ισχύει ότι:

$$J_{+}|\lambda,\mu_{max}\rangle = 0 \quad \text{και} \quad J_{-}|\lambda,\mu_{min}\rangle = 0 \tag{A.61}$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να βρούμε τη μορφή των ιδιοτιμών $f(\lambda)$ και τη σχέση τους με τις ιδιοτιμές μ. Για να το πετύχουμε αυτό, θα γράψουμε τον τελεστή C μέσω των τελεστών $J_{\pm}$ ως εξής:

$$C = J_{+}J_{-} + J_3^2 - J_3 \tag{A.62α}$$

$$C = J_{-}J_{+} + J_3^2 + J_3 \tag{A.62β}$$

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη δράση του τελεστή C πάνω στις καταστάσεις $|\lambda,\mu_{max}\rangle$ και $|\lambda,\mu_{min}\rangle$:

$$C|\lambda,\mu_{max}\rangle = f(\lambda)|\lambda,\mu_{max}\rangle \xRightarrow{(\mathrm{A.62β}),(\mathrm{A.61})}$$

$$({\mu_{max}}^2 + \mu_{max})|\lambda, \mu_{max}\rangle = f(\lambda)|\lambda, \mu_{max}\rangle \Longrightarrow$$

$$({\mu_{max}}^2 + \mu_{max}) = f(\lambda) \tag{A.63}$$

$$C|\lambda, \mu_{min}\rangle = f(\lambda)|\lambda, \mu_{min}\rangle \xRightarrow{(\text{A.62α}),(\text{A.61})}$$

$$({\mu_{min}}^2 - \mu_{min})|\lambda, \mu_{min}\rangle = f(\lambda)|\lambda, \mu_{min}\rangle \Longrightarrow$$

$$({\mu_{min}}^2 - \mu_{min}) = f(\lambda) \tag{A.64}$$

Από τις σχέσεις (A.63) και (A.64) προκύπτει το εξής:

$$({\mu_{max}}^2 + \mu_{max}) = ({\mu_{min}}^2 - \mu_{min}) \Longrightarrow$$

$$\mu_{max} = -\mu_{min} \tag{A.65}$$

και: $$f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \quad \text{με} \quad \lambda = \mu_{max} \tag{A.66}$$

Επιπροσθέτως, μέσω της σχέσης (A.59) μπορεί να δείξει κανείς ότι υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε:

$$J_+^N|\lambda, -\lambda\rangle \sim |\lambda, \lambda\rangle \Longrightarrow$$

$$-\lambda + N = \lambda \Longrightarrow$$

$$\lambda = \frac{N}{2} \Longrightarrow$$

$$\lambda = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \tag{A.67}$$

Τέλος, για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε τις αναπαραστάσεις της $SU(2)$ πρέπει να προσδιορίσουμε τη σταθερά $c_\pm$ της σχέσης (A.59). Από τον ορισμό (A.54) φαίνεται ότι ${J_\pm}^\dagger = J_\mp$. Επομένως, μπορούμε να δείξουμε το εξής:

$$\langle \lambda, \mu | {J_\pm}^\dagger J_\pm | \lambda, \mu \rangle = |c_\pm|^2 \Longrightarrow$$

$$\langle \lambda, \mu | J_\mp J_\pm | \lambda, \mu \rangle = |c_\pm|^2 \xRightarrow{(\text{A.62α}),(\text{A.62β})}$$

$$\langle \lambda, \mu | C^2 - J_3^2 \mp J_3 | \lambda, \mu \rangle = |c_\pm|^2 \Longrightarrow$$

$$|c_\pm|^2 = \lambda^2 + \lambda - \mu^2 \mp \mu \Longrightarrow$$

$$c_\pm = \sqrt{\lambda(\lambda + 1) - \mu(\mu \pm 1)} \tag{A.68}$$

Οι αναπαραστάσεις χαρακτηρίζονται από την τιμή του λ. Οι πίνακες των αναπαραστάσεων έχουν διάσταση $2\lambda + 1$, όσες είναι δηλαδή οι δυνατές τιμές της ιδιοτιμής μ του τελεστή J_3. Ο τελεστής J_3 αναπαρίσταται με πίνακα, ο οποίος στη διαγώνιό του έχει τις ιδιοτιμές του και όλα τα άλλα στοιχεία του είναι μηδέν. Επίσης, έχουμε προαναφέρει ότι η αναπαράσταση του τελεστή Casimir θα είναι η εξής: $C = \lambda(\lambda+1)\mathbb{I}$. Επιπλέον, ο προσδιορισμός των αναπαραστάσεων των άλλων δύο γεννητόρων γίνεται μέσω των τελεστών ανάβασης και κατάβασης. Από τη σχέση (Α.54) μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$J_1 = \tfrac{1}{2}(J_+ + J_-) \quad \text{και} \quad J_2 = \tfrac{1}{2i}(J_+ - J_-) \tag{A.69}$$

Οι αναπαραστάσεις των $J_\pm$ προσδιορίζονται από τη δράση τους στις καταστάσεις $|\lambda,\mu\rangle$ ως εξής:

$$(J_\pm)_{mn} = \langle \lambda, \mu_m | J_\pm | \lambda, \mu_n \rangle \tag{A.70}$$

Για παράδειγμα, θα προσδιορίσουμε την αναπαράσταση για $\lambda = \frac{1}{2}$. Αυτή η αναπαράσταση αποτελείται από πίνακες διάστασης 2×2 . Επίσης, ο τελεστής J_3 θα έχει ιδιοτιμές: $\mu = \pm\frac{1}{2}$, επομένως θα αναπαρίσταται με τον πίνακα:

$$J_3 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.71}$$

Ο τελεστής C θα αναπαρίσταται με τον πίνακα:

$$C = \tfrac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.72}$$

Οι τελεστές ανάβασης και κατάβασης θα αναπαρίστανται μέσω των πινάκων:

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.73}$$

Επομένως, μπορεί να δείξει κανείς μέσω των σχέσεων (Α.69) ότι ισχύει:

$$J_1 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad J_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{A.74}$$

Παρατηρούμε πως επαληθεύεται ότι οι γεννήτορες της ομάδας $SU(2)$ στη θεμελιώδη αναπαράσταση έχουν τη μορφή: $J_i = \frac{\sigma_i}{2} \quad i = 1, 2, 3$ όπου σ_i είναι οι τρεις πίνακες Pauli.

Α.4 Ορθόχρονη κανονική ομάδα Lorentz

Στα θεμέλια της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας βρίσκεται μια συμμετρία, η οποία προκύπτει άμεσα από την απαίτηση που υπαγορεύει ότι η ταχύτητα του φωτός πρέπει να είναι η ίδια για όλους τους παρατηρητές. Η προαναφερθείσα συμμετρία απαιτεί οι μετασχηματισμοί Lorentz Λ να μετασχηματίζουν τα τετρανύσματα ($x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$) διατηρώντας σταθερό το μέτρο τους. Το μέτρο ενός τετρανύσματος x^μ με $\mu = 0, 1, 2, 3$ ορίζεται ως εξής:

$$|x|^2 = x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{A.75}$$

όπου $\eta_{\mu\nu}$ είναι η μετρική του Minkowski. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε τη σύμβαση:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.76}$$

Η απαίτηση το μέτρο των τετρανυσμάτων να μένει αναλλοίωτο μετά τη δράση των μετασχηματισμών Lorentz μας δίνει τις απαραίτητες πληροφορίες για τις δυνατές μορφές των μετασχηματισμών Lorentz.

$$\eta_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = \eta_{\kappa\lambda} x^{\kappa} x^{\lambda} \Longrightarrow$$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\kappa} \Lambda^{\nu}{}_{\lambda} x^{\kappa} x^{\lambda} = \eta_{\kappa\lambda} x^{\kappa} x^{\lambda} \Longrightarrow$$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\kappa} \Lambda^{\nu}{}_{\lambda} = \eta_{\kappa\lambda} \Longrightarrow$$

$$\Lambda^{T\mu}_{\kappa} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\lambda} = \eta_{\kappa\lambda} \Longrightarrow$$

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{A.77}$$

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Longrightarrow$$

$$det(\Lambda^T \eta \Lambda) = det(\eta) \Longrightarrow$$

$$det(\Lambda)^2 = 1 \Longrightarrow$$

$$det(\Lambda) = \pm 1 \tag{A.78}$$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{0} \Lambda^{\nu}{}_{0} = \eta_{00} \Longrightarrow$$

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(\Lambda^i{}_0\right)^2 = 1 \Longrightarrow$$

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \ \text{ ή } \ \Lambda^0{}_0 \leq -1 \tag{A.79}$$

Η σχέση (Α.77) ορίζει τους μετασχηματισμούς Lorentz. Μπορεί να δείξει κανείς ότι οι μετασχηματισμοί Lorentz αποτελούν ομάδα. Επιπρόσθετα, μέσω των σχέσεων (Α.78) και (Α.79) μπορούμε να χωρίσουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz σε τέσσερα υποσύνολα ως εξής:

1. $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ και $det(\Lambda) = 1$
2. $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ και $det(\Lambda) = -1$
3. $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ και $det(\Lambda) = 1$
4. $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ και $det(\Lambda) = -1$

Ο μοναδιαίος πίνακας ανήκει στο πρώτο υποσύνολο. Οι πίνακες Lorentz του πρώτου υποσυνόλου αποτελούν ομάδα, η οποία ονομάζεται ορθόχρονη κανονική ομάδα Lorentz (proper Lorentz group). Στο δεύτερο υποσύνολο ανήκει ο μετασχηματισμός της ομοτιμίας (Parity): $\Lambda = diag(1,-1,-1,-1)$, στο τέταρτο υποσύνολο ανήκει ο μετασχηματισμός αντιστροφής χρόνου: $\Lambda = diag(-1,1,1,1)$, ενώ στο τρίτο υποσύνολο ανήκει το γινόμενο της ομοτιμίας και της αντιστροφής χρόνου: $\Lambda = diag(-1,-1,-1,-1)$. Θα δείξουμε ότι ο τελευταίος μετασχηματισμός στην αναπαράσταση της ομάδας που δρα σε σπίνορες αντιστοιχεί στον τελεστή της χειραλικότητας.

Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, οι απειροστοί μετασχηματισμοί της ορθόχρονης κανονικής ομάδας Lorentz μπορούν να γραφτούν στην ακόλουθη μορφή:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} \tag{A.80}$$

Το αντικείμενο $\Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}$ έχει απειροστά μικρά στοιχεία και εμπεριέχει τους γεννήτορες της ομάδας, καθώς και τις ελεύθερες παραμέτρους των μετασχηματισμών. Οι μετασχηματισμοί Lorentz ικανοποιούν τη σχέση (A.77):

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\kappa}\Lambda^{\nu}{}_{\lambda} = \eta_{\kappa\lambda} \Longrightarrow$$

$$\eta_{\mu\nu}\left(\delta^{\mu}{}_{\kappa} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\kappa}\right)\left(\delta^{\nu}{}_{\lambda} + \Delta\omega^{\nu}{}_{\lambda}\right) = \eta_{\kappa\lambda} \Longrightarrow$$

$$\eta_{\kappa\lambda} + \Delta\omega_{\kappa\lambda} + \Delta\omega_{\lambda\kappa} + \boldsymbol{\mathcal{O}}(\Delta\omega^2) = \eta_{\kappa\lambda} \Longrightarrow$$

$$\Delta\omega_{\kappa\lambda} = -\Delta\omega_{\lambda\kappa} \tag{A.81}$$

Ο τανυστής $\Delta\omega_{\mu\nu}$ έχει 16 στοιχεία και είναι αντισυμμετρικός, επομένως εξαρτάται από 6 ελεύθερες παραμέτρους. Συγκεκριμένα, οι μετασχηματισμοί της ορθόχρονης κανονικής ομάδας Lorentz μπορούν να περιγράψουν τις τρεις στροφές στον ευκλείδειο χώρο και τις τρεις προωθήσεις Lorentz.

Στη συνέχεια, θα βρούμε τους γεννήτορες της ομάδας:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\rho\xi}\eta_{\xi\nu}\delta^{\mu}{}_{\rho} \overset{(A.81)}{\Longrightarrow}$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \frac{1}{2}\left(\Delta\omega^{\rho\xi}\eta_{\xi\nu}\delta^{\mu}{}_{\rho} - \Delta\omega^{\xi\rho}\eta_{\xi\nu}\delta^{\mu}{}_{\rho}\right) \Longrightarrow$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \frac{1}{2}\Delta\omega^{\rho\xi}\left(\eta_{\xi\nu}\delta^{\mu}{}_{\rho} - \eta_{\rho\nu}\delta^{\mu}{}_{\xi}\right) \Longrightarrow$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} - \frac{i}{2}\Delta\omega^{\alpha\beta}i\left(\eta_{\beta\nu}\delta^{\mu}{}_{\alpha} - \eta_{\alpha\nu}\delta^{\mu}{}_{\beta}\right) \tag{A.82}$$

Από τη σχέση (A.82) φαίνεται πως οι γεννήτορες των μετασχηματισμών της ορθόχρονης κανονικής ομάδας Lorentz δίνονται από τη σχέση:

$$\left(M_{\alpha\beta}\right)^{\mu}{}_{\nu} = i\left(\delta^{\mu}{}_{\alpha}\eta_{\beta\nu} - \delta^{\mu}{}_{\beta}\eta_{\alpha\nu}\right) \quad (A.83)$$

$$\eta^{\rho\alpha}\eta^{\sigma\beta}\left(M_{\alpha\beta}\right)^{\mu}{}_{\nu} = i\eta^{\rho\alpha}\eta^{\sigma\beta}\left(\delta^{\mu}{}_{\alpha}\eta_{\beta\nu} - \delta^{\mu}{}_{\beta}\eta_{\alpha\nu}\right) \Longrightarrow$$

$$(M^{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} = i\left(\delta^{\sigma}{}_{\nu}\eta^{\rho\mu} - \delta^{\rho}{}_{\nu}\eta^{\sigma\mu}\right) \quad (A.84)$$

Μάλιστα, δίνοντας τιμές στα α, β μπορούμε να βρούμε τους έξι ανεξάρτητους μετασχηματισμούς Lorentz, οι γεννήτορες των οποίων θα είναι οι εξής:

Γεννήτορες των στροφών:

$$\vec{J} = (M^{23}, M^{31}, M^{12}) \quad (A.85)$$

Γεννήτορες των προωθήσεων Lorentz:

$$\vec{K} = (M^{01}, M^{02}, M^{03}) \quad (A.86)$$

Τέλος, πρέπει να βρούμε τη σχέση μετάθεσης των γεννητόρων της ομάδας:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = (M^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta}(M^{\rho\sigma})^{\beta}{}_{\gamma} - (M^{\rho\sigma})^{\alpha}{}_{\beta}(M^{\mu\nu})^{\beta}{}_{\gamma} =$$

$$-\left[\left(\eta^{\alpha\mu}\delta^{\nu}{}_{\beta} - \eta^{\alpha\nu}\delta^{\mu}{}_{\beta}\right)\left(\delta^{\sigma}{}_{\gamma}\eta^{\rho\beta} - \delta^{\rho}{}_{\gamma}\eta^{\sigma\beta}\right)\right]$$

$$+\left[\left(\eta^{\alpha\rho}\delta^{\sigma}{}_{\beta} - \eta^{\alpha\sigma}\delta^{\rho}{}_{\beta}\right)\left(\delta^{\nu}{}_{\gamma}\eta^{\mu\beta} - \delta^{\mu}{}_{\gamma}\eta^{\nu\beta}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}) \quad (A.87)$$

A.5 Ομάδα Poincaré

Η ομάδα Poincaré έχει ιδιαίτερη σημασία για τη φυσική, διότι περιλαμβάνει κάποιους από τους σημαντικότερους μετασχηματισμούς. Συγκεκριμένα, ένας μετασχηματισμός Poincaré αποτελείται από ένα μετασχηματισμό Lorentz Λ, ο οποίος ακολουθείται από μια μετάθεση b στο χωρόχρονο. Στόχος μας είναι να βρούμε τις σχέσεις μετάθεσης των γεννητόρων της ομάδας Poincaré.

Η δράση ενός μετασχηματισμού Poincaré σε ένα τετράνυσμα θέσης του χωρόχρονου έχει τη μορφή:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + b^{\mu} \quad (A.88)$$

Η σχέση (A.88) μπορεί να γραφτεί και στην εξής κομψή μορφή:

$$x'^{\mu} = g_{(b,\Lambda)}{}^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \quad (A.89)$$

Σε μορφή πίνακα τα αντικείμενα της εξίσωσης (A.89) γράφονται:

$$x^{\mu} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_{(b,\Lambda)} = \begin{pmatrix} & & \Lambda & & \begin{matrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.90}$$

Επίσης, είναι χρήσιμο να γράψουμε τους μετασχηματισμούς $g_{(b,\Lambda)}$, Λ στη μορφή:

$$\Lambda = g_{(0,\Lambda)} \text{ και } g_{(b,\Lambda)} = T(b)\Lambda \tag{A.91}$$

όπου $T(b)$ είναι η μετάθεση, για την οποία προφανώς ισχύει ότι:

$$T(b) = g_{(b,E)}, \text{ όπου } E \text{ είναι ο } 4 \times 4 \text{ μοναδιακός πίνακας.} \tag{A.92}$$

Στη συνέχεια, θα μας χρειαστεί η σχέση:

$$\Lambda T(b)\Lambda^{-1} = T(\Lambda b) \tag{A.93}$$

η οποία αποδεικνύεται ως εξής:

$$\Lambda T(b)\Lambda^{-1} = g_{(0,\Lambda)} g_{(b,E)} g_{(0,\Lambda^{-1})} =$$

$$= \begin{pmatrix} & & \Lambda & & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \mathrm{E} & & \begin{matrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \Lambda^{-1} & & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & \Lambda & & \Lambda^{\mu}{}_{\nu} b^{\nu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \Lambda^{-1} & & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & \mathrm{E} & & \Lambda^{\mu}{}_{\nu} b^{\nu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= T(\Lambda b)$$

Η ομάδα Poincare έχει δέκα γεννήτορες, οι έξι είναι οι γεννήτορες των μετασχηματισμών Lorentz και οι τέσσερις είναι οι γεννήτορες των μεταθέσεων. Οι μεταθέσεις έχουν εξάρτηση από τέσσερις ελεύθερες παραμέτρους: b^0, b^1, b^2, b^3. Το ουδέτερο στοιχείο των μεταθέσεων είναι το εξής: $T(0)$. Έστω ο απειροστός μετασχηματισμός μετάθεσης:

$$T(\delta b) = \begin{pmatrix} & & \mathrm{E} & & \begin{matrix}\delta b^0 \\ \delta b^1 \\ \delta b^2 \\ \delta b^3\end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.94}$$

Είναι προφανές ότι υπάρχει το παρακάτω όριο για κάθε τιμή του $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\lim_{\delta b^i \to 0} \frac{T(\delta b^i) - T(0)}{\delta b^i} = -iP_i \tag{A.95}$$

Τα P_μ είναι οι γεννήτορες των μεταθέσεων. Επομένως, για μικρές μεταθέσεις μπορούμε να γράψουμε το εξής:

$$T(\delta b) = \mathbb{I} - i\delta b^\mu P_\mu \tag{A.96}$$

Για μικρές μεταθέσεις, από τη (A.93), μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\Lambda T(b)\Lambda^{-1} = T(\Lambda b) \overset{(A.96)}{\Longrightarrow}$$

$$\Lambda(\mathbb{I} - i\delta b^\mu P_\mu)\Lambda^{-1} = \mathbb{I} - i\Lambda^\mu{}_\nu \delta b^\nu P_\mu \Longrightarrow$$

$$\delta b^\mu \Lambda P_\mu \Lambda^{-1} = \delta b^\mu \Lambda^\nu{}_\mu P_\nu \Longrightarrow$$

$$\Lambda P_\mu \Lambda^{-1} = P_\nu \Lambda^\nu{}_\mu \tag{A.97}$$

Οι απειροστοί μετασχηματισμοί Lorentz μπορούν να γραφτούν μέσω των γεννητόρων τους ως εξής:

$$\Lambda = \mathbb{I} - \frac{i}{2}\delta\omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \tag{A.98}$$

Από τις σχέσεις (A.97) και (A.98) προκύπτει η σχέση μετάθεσης των γεννητόρων $[M_{\alpha\beta}, P_\mu]$:

$$\Lambda P_\mu \Lambda^{-1} = P_\nu \Lambda^\nu{}_\mu \overset{(\mathrm{A.98})}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\mathbb{I} - \frac{i}{2}\delta\omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}\right) P_\mu \left(\mathbb{I} + \frac{i}{2}\delta\omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}\right) = P_\nu \delta^\nu{}_\mu - \frac{i}{2}\delta\omega^{\alpha\beta} P_\nu i\left(\delta^\nu{}_\alpha \eta_{\beta\mu} - \delta^\nu{}_\beta \eta_{\alpha\mu}\right) \Longrightarrow$$

$$P_\mu - \frac{i}{2}\delta\omega^{\alpha\beta}[M_{\alpha\beta}, P_\mu] + \mathcal{O}\left((\delta\omega^{\alpha\beta})^2\right) = P_\mu - \frac{i}{2}\delta\omega^{\alpha\beta} i\left(P_\alpha \eta_{\beta\mu} - P_\beta \eta_{\alpha\mu}\right) \Longrightarrow$$

$$[M_{\alpha\beta}, P_\mu] = i\left(P_\alpha \eta_{\beta\mu} - P_\beta \eta_{\alpha\mu}\right) \tag{A.99}$$

Επιπρόσθετα, οι μεταθέσεις αποτελούν αβελιανή ομάδα, επομένως ισχύει ότι:

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0 \tag{A.100}$$

Παρακάτω συνοψίζεται η άλγεβρα της ομάδας Poincaré:

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0 \tag{A.101α}$$

$$[M_{\alpha\beta}, P_\mu] = i(P_\alpha \eta_{\beta\mu} - P_\beta \eta_{\alpha\mu}) \tag{A.101β}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma}) \tag{A.101γ}$$

Παράρτημα Β

Σχετικιστική κβαντομηχανική

Β.1 Εισαγωγή

Στην κβαντική μηχανική είναι μείζονος σημασίας η εύρεση μιας διαφορικής εξίσωσης, οι λύσεις της οποίας είναι οι κυματοσυναρτήσεις, οι οποίες περιέχουν όλη την πληροφορία για το εκάστοτε σύστημα. Η εύρεση της διαφορικής εξίσωσης ισοδυναμεί με την εύρεση της μορφής του τελεστή της Χαμιλτονιανής. Στην κλασική κβαντική μηχανική η Χαμιλτονιανή δίνεται από τον κλασικό τύπο της ενέργειας $\widehat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$. Η κλασική κβαντική μηχανική έχει δώσει απαντήσεις σε πολλά ζητήματα της φυσικής και η ισχύς της έχει επαληθευτεί επανειλημμένως κυρίως μέσω του πρότυπου του υδρογόνου και των ατομικών και μοριακών προτύπων. Αδυνατεί όμως να δώσει απαντήσεις σε προβλήματα της φυσικής υψηλών ενεργειών και της σωματιδιακής φυσικής. Επίσης, το σπιν των σωματιδίων δεν προκύπτει αυθόρμητα από τη θεωρία, με αποτέλεσμα να πρέπει να προστεθεί αυθαίρετα ούτως ώστε να είναι σωστοί οι βαθμοί ελευθερίας των φερμιονικών συστημάτων.

Σε υψηλές ενέργειες ενισχύεται η σχετικιστική φύση των σωματιδίων. Επομένως, οι σκέψεις των Klein-Gordon και Dirac να χρησιμοποιήσουν τη σχετικιστική σχέση για την ενέργεια, όχι μόνο μοιάζουν απόλυτα λογικές, αλλά γεννούν τη σχετικιστική κβαντομηχανική η οποία λύνει κάποια από τα προβλήματα της σωματιδιακής φυσικής. Σε αυτό το παράρτημα θα μελετήσουμε εν συντομία τις εξισώσεις Klein-Gordon και Dirac και θα δούμε ιδιότητες των σπινόρων.

Β.2 Εξίσωση Klein-Gordon

Η εξίσωση Klein-Gordon αποδεικνύεται κάνοντας χρήση της σχετικιστικής σχέσης ενέργειας-ορμής: $\widehat{H}^2 = c^2\hat{\vec{p}}^2 + m^2c^4$, όπου $\widehat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ και $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$. Η εξίσωση Klein-Gordon στις φυσικές μονάδες μέτρησης ($\hbar = c = 1$) είναι η εξής:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)\psi(\vec{x}, t) = 0 \tag{B.1}$$

Από την εξίσωση (Β.1) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[i\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\right] + \vec{\nabla}\left[i\left(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi\right)\right] = 0 \tag{B.2}$$

Παρατηρούμε πως το αντικείμενο $i\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$ δεν είναι θετικά ορισμένο, επομένως δεν μπορεί να ερμηνευθεί σαν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Η εξίσωση Klein-Gordon για ελεύθερο σωμάτιο επιλύεται από κυματοσυναρτήσεις της μορφής:

$$\psi(x^\mu) \sim e^{-ip^\mu x_\mu} \tag{Β.3}$$

οι οποίες έχουν είτε θετική είτε αρνητική ενέργεια: $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Οι κυματοσυναρτήσεις αρνητικής ενέργειας θα ερμηνευθούν αργότερα.

B.3 Εξίσωση Dirac

Για να βρούμε την εξίσωση Dirac απαιτούμε η ενέργεια και η ορμή να συνδέονται μέσω γραμμικής σχέσης της μορφής:

$$\hat{H}\psi = \vec{\alpha}\hat{\vec{p}}\psi + \beta m\psi \tag{Β.4}$$

Απαιτώντας να επαληθεύεται η σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής βρίσκουμε τα ακόλουθα:

1. $\alpha_i^2 = 1$, $\beta^2 = 1$, $\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}$, $\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$. Τα α_i, β αποτελούν πίνακες.
2. Τα α_i, β είναι ερμιτιανοί πίνακες εφόσον η Χαμιλτονιανή είναι ερμιτιανός τελεστής.
3. Τα $\vec{\alpha}, \beta$ είναι τέσσερις ερμιτιανοί γραμμικά ανεξάρτητοι πίνακες, αλλά κανένας από αυτούς δεν μπορεί να είναι ο μοναδιαίος. Επίσης, έχουν ίχνος μηδέν και ιδιοτιμές ± 1. Επομένως, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα $\vec{\alpha}, \beta$ με πίνακες, η ελάχιστη διάσταση των οποίων μπορεί να είναι 4.
4. Το αντικείμενο ψ αναπαρίσταται σαν πίνακας στήλης με τέσσερα στοιχεία και αποκαλείται σπίνορας Dirac για λόγους που θα γίνουν προφανείς στη συνέχεια.

Δίνοντας τους εξής ορισμούς:

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha}) \tag{Β.5}$$

$$\hat{p}^\mu = \left(\hat{H}, \hat{\vec{p}}\right) = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla}\right) \tag{Β.6}$$

η εξίσωση Dirac μπορεί να πάρει τις εξής μορφές:

$$\left(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m\right)\psi = 0 \tag{Β.7α}$$

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0 \tag{Β.7β}$$

όπου:

$$\partial_\mu = \left(\partial_t, \vec{\nabla}\right) \tag{Β.8}$$

Αποδεικνύεται ότι οι πίνακες γ^μ έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{I} \quad \text{και} \quad \left(\gamma^i\right)^2 = -\mathbb{I} \tag{Β.9α}$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \tag{Β.9β}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I} \tag{Β.9γ}$$

Υπάρχουν πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις των πινάκων $\vec{\alpha}, \beta, \gamma^\mu$. Η φυσική δεν εξαρτάται από την επιλογή της αναπαράστασης. Οι πιο γνωστές αναπαραστάσεις είναι δύο:

Αναπαράσταση Dirac-Pauli

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \,,\; \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \,,\; \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \,,\; \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{B.10}$$

Αναπαράσταση Weyl

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,,\; \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \,,\; \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{B.11}$$

όπου $\vec{\sigma}$ οι τρεις πίνακες του Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,,\; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \,,\; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B.12}$$

οι οποίοι υπακούν στην εξής σχέση μετάθεσης:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{B.13}$$

Επίσης:

$$\sigma^\mu \equiv (\mathbb{I}, \vec{\sigma}) \quad \text{και} \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbb{I}, -\vec{\sigma}) \tag{B.14}$$

Από την εξίσωση Dirac προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση συνέχειας:

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \tag{B.15}$$

όπου:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \tag{B.16}$$

Το αντικείμενο $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ αποκαλείται ρεύμα πιθανότητας, μετασχηματίζεται σαν τετράνυσμα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και η μηδενική συνιστώσα του, $j^0 = \psi^\dagger\psi$, είναι θετικά ορισμένη και μπορεί να ερμηνευτεί σαν πυκνότητα πιθανότητας.

Αποδεικνύεται ότι οι λύσεις της εξίσωσης Dirac επαληθεύουν και την εξίσωση Klein-Gordon. Συμπερασματικά, οι λύσεις της εξίσωσης Dirac μπορούν να γραφτούν εν γένει ως εξής:

$$\psi(x^\mu) = u e^{-ip^\mu x_\mu} \tag{B.17}$$

όπου u είναι ένας πίνακας στήλης με τέσσερα στοιχεία. Οι τέσσερις ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Dirac στην αναπαράσταση Dirac-Pauli, διαλέγοντας για κανονικοποίηση τη σχέση $\int j^0 dV = 2E$, είναι οι ακόλουθες:

$$\psi^{(s)}(x^\mu) = \sqrt{\frac{E+m}{V}} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} e^{-ip^\mu x_\mu}$$

και

$$\psi^{(s+1)}(x^\mu) = \sqrt{\frac{-E+m}{V}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E-m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} e^{-ip^\mu x_\mu} \qquad \text{(B.18)}$$

όπου $s = 1, 2$. Τα $\chi^{(s)}$ έχουν την εξής μορφή:

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και } \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.19)}$$

Η ελικότητα λ είναι η προβολή του σπιν στην διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου. Ο τελεστής της ελικότητας είναι ο εξής: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix}$. Οι τέσσερις γραμμικά ανεξάρτητοι σπίνορες διαφέρουν ως προς την ενέργεια και την ελικότητά τους. Για την αναπαράσταση Dirac-Pauli αποδεικνύονται τα εξής:

$$\psi^{(1)} \to E > 0\,, \lambda = \frac{1}{2} \qquad \text{(B.20α)}$$

$$\psi^{(2)} \to E > 0\,, \lambda = -\frac{1}{2} \qquad \text{(B.20β)}$$

$$\psi^{(3)} \to E < 0\,, \lambda = \frac{1}{2} \qquad \text{(B.20γ)}$$

$$\psi^{(4)} \to E < 0\,, \lambda = -\frac{1}{2} \qquad \text{(B.20δ)}$$

Οι σπίνορες ονομάστηκαν έτσι διότι, όταν περιγράφουν σωμάτια που κινούνται, είναι ιδιοκαταστάσεις της ελικότητας, ενώ όταν περιγράφουν ακίνητα σωμάτια, είναι ιδιοκαταστάσεις του σπιν. Επομένως, στη σχετικιστική κβαντομηχανική, το σπιν ενσωματώνεται στις θεωρίες αυθόρμητα και δεν είναι ανάγκη να το προσθέσουμε εμείς αυθαίρετα, όπως στην κλασική κβαντομηχανική.

Στη συνέχεια, θα ερμηνεύσουμε τις λύσεις αρνητικής ενέργειας. Για να το πετύχουμε αυτό πρέπει να βρούμε την εξίσωση κίνησης ενός φερμιονίου με φορτίο q, εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η θεωρία βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητισμού μας υπαγορεύει πως πρέπει να αντικαταστήσουμε τις μερικές παραγώγους στην εξίσωση Dirac με συναλλοίωτες της μορφής: $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$. Η εξίσωση Dirac ενός ηλεκτρονίου εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι η εξής:

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi_{e^-} = 0 \qquad \text{(B.21)}$$

Μέσω της εξίσωσης (B.21) θα προσπαθήσουμε να βρούμε την εξίσωση Dirac ενός ποζιτρονίου εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου:

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi_{e^-} = 0 \Longrightarrow$$

$$-i\partial_\mu \psi_{e^-}^\dagger \gamma^{\mu\dagger} + e\psi_{e^-}^\dagger \gamma^{\mu\dagger} A_\mu - m\psi_{e^-}^\dagger = 0 \xRightarrow{(B.9\beta)}$$

$$-i\partial_\mu \bar{\psi}_{e^-}\gamma^\mu + e\bar{\psi}_{e^-}\gamma^\mu A_\mu - m\bar{\psi}_{e^-} = 0 \Longrightarrow$$

$$-i\gamma^{\mu\,T}\partial_\mu \bar{\psi}^T_{e^-} + eA_\mu \gamma^{\mu\,T}\bar{\psi}^T_{e^-} - m\bar{\psi}^T_{e^-} = 0 \qquad \text{(B.22)}$$

Υπάρχει πίνακας C, τη μορφή του οποίου θα δείξουμε στη συνέχεια, ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση:

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T} \qquad \text{(B.23)}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (B.22) από αριστερά με τον πίνακα C καταλήγουμε στην επιθυμητή εξίσωση:

$$i\gamma^\mu C\partial_\mu \bar{\psi}^T_{e^-} - eA_\mu \gamma^\mu C\bar{\psi}^T_{e^-} - mC\bar{\psi}^T_{e^-} = 0 \Longrightarrow$$

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - eA_\mu \gamma^\mu - m\right)C\bar{\psi}^T_{e^-} = 0 \qquad \text{(B.24)}$$

Η σχέση (B.24) ικανοποιείται από ένα σωμάτιο σαν το ηλεκτρόνιο αλλά με αντίθετο φορτίο, δηλαδή από το ποζιτρόνιο. Ο σπίνορας του ποζιτρονίου βρίσκεται από το σπίνορα του ηλεκτρονίου μέσω της σχέσης:

$$\psi_{e^+} = C\bar{\psi}^T_{e^-} \qquad \text{(B.25)}$$

Ο πίνακας C δίνεται από τη σχέση:

$$C = \omega\gamma^0\gamma^2 = \omega\begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.26)}$$

Απαιτώντας το αντισωμάτιο του αντισωματιδίου να είναι το αρχικό σωμάτιο, βρίσκουμε το μέτρο του ω:

$$|\omega| = 1 \qquad \text{(B.27)}$$

Μάλιστα, για λόγους που θα γίνουν φανεροί στη συνέχεια, μπορούμε να θεωρήσουμε:

$$\omega = -i \qquad \text{(B.28)}$$

Με όλη αυτή τη γνώση μπορεί να δείξει κανείς ότι οι καταστάσεις των σωματιδίων με αρνητική ενέργεια (π.χ. $\psi^{(3)}_{e^-}$) αντιστοιχούν σε καταστάσεις αντισωματιδίων με θετική ενέργεια και αντίθετη ορμή και σπιν (π.χ. $\psi^{(3)}_{e^-} \to \psi^{(2)}_{e^+}$). Επίσης, οι καταστάσεις των αντισωματιδίων μπορούν να προκύψουν από τις καταστάσεις των σωματιδίων κάνοντας τις αλλαγές: $E \to -E$ και $\vec{p} \to -\vec{p}$ (π.χ. $\psi^{(2)}_{e^+}(E,\vec{p}) \sim \psi^{(2)}_{e^-}(-E,-\vec{p})$).

Στη συνέχεια είναι απαραίτητο να δείξουμε την αναλλοιώτητα της εξίσωσης Dirac υπό τους μετασχηματισμούς της ομάδας Lorentz. Η μερική παράγωγος ως προς τις χωροχρονικές συντεταγμένες μετασχηματίζεται ως εξής, κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz:

$$\partial'_\mu = \Lambda^{-1\,\nu}{}_\mu \partial_\nu \qquad \text{(B.29)}$$

Επίσης, έστω $S(\Lambda)$ η αναπαράσταση των μετασχηματισμών Lorentz, στην περίπτωση που δρουν στους σπίνορες Dirac. Για να είναι αναλλοίωτη η εξίσωση Dirac κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, πρέπει να διατηρεί τη μορφή της μετά τη δράση των μετασχηματισμών. Ακολουθεί η μετασχηματισμένη εξίσωση Dirac:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m\right)\psi' = 0 \Longrightarrow$$

$$\left(i\gamma^{\mu}\Lambda^{-1\,\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu} - m\right)S(\Lambda)\psi = 0 \xrightarrow{S^{-1}(\Lambda)\cdot}$$

$$\left(iS^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda)\Lambda^{-1\,\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu} - m\right)\psi = 0 \Longrightarrow$$

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda)\Lambda^{-1\,\nu}{}_{\mu} = \gamma^{\nu} \Longrightarrow$$

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu} \tag{B.30}$$

Αν ικανοποιείται η σχέση (B.30) η εξίσωση Dirac είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε το μετασχηματισμό της ομοτιμίας (Parity), ο οποίος ανήκει στο δεύτερο υποσύνολο των μετασχηματισμών Lorentz στο παράρτημα A.4. Από τη σχέση (B.30) μπορεί να δείξει κανείς ότι η αναπαράσταση του μετασχηματισμού της ομοτιμίας που δρα σε σπίνορες είναι ο πίνακας γ^0. Επιπροσθέτως, στο τρίτο υποσύνολο των μετασχηματισμών Lorentz του παραρτήματος A.4 ανήκει το γινόμενο της ομοτιμίας και της αντιστροφής χρόνου. Η αναπαράσταση του μετασχηματισμού αυτού που δρα σε σπίνορες είναι ο πίνακας γ^5, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{B.31}$$

Ο πίνακας γ^5 παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στις θεωρίες των στοιχειωδών σωματιδίων, διότι αντιπροσωπεύει τον τελεστή της χειραλικότητας. Μπορεί να δείξει κανείς ότι οι δράσεις των τελεστών της χειραλικότητας και της ελικότητας είναι ίδιες στο όριο των υψηλών ενεργειών ή στην περίπτωση των άμαζων σωματιδίων. Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι ο τελεστής της ελικότητας μετατίθεται με τη Χαμιλτονιανή και επομένως η ελικότητα των ελεύθερων σωματιδίων διατηρείται με το πέρας του χρόνου, ενώ η χειραλικότητα διατηρείται μόνο στην περίπτωση των άμαζων σωματιδίων.

Επίσης, η αναπαράσταση $S(\Lambda)$ των απειροστών μετασχηματισμών της ορθόχρονης κανονικής ομάδας Lorentz μπορεί να γραφτεί ως εξής: $S(\Lambda) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}$, όπου $\Sigma_{\mu\nu}$ είναι οι γεννήτορες των μετασχηματισμών. Μέσω της σχέσης (B.30) μπορεί να βρεθεί η μορφή των γεννητόρων:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \tag{B.32}$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε τους μετασχηματισμούς $S(\Lambda)$ στη μορφή:

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \tag{B.33}$$

B.4 Σπίνορες Weyl

Στην αναπαράσταση Weyl οι μετασχηματισμοί (B.33) γράφονται ως εξής:

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \Longrightarrow$$

$$S(\Lambda) = e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\begin{pmatrix}\sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu}\end{pmatrix}} \tag{B.34}$$

Όπου: $$\sigma^{\mu\nu} = \frac{\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}}{4} \quad \text{και} \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} - \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}}{4} \tag{B.35}$$

Παρατηρούμε ότι στην αναπαράσταση Weyl οι δύο πάνω συνιστώσες του σπίνορα θα μετασχηματίζονται με διαφορετικό τρόπο από τις δύο κάτω συνιστώσες του σπίνορα. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε τις δύο πάνω συνιστώσες σαν ένα σπίνορα και τις δύο κάτω σαν άλλο σπίνορα. Οι σπίνορες που ορίσαμε ονομάζονται σπίνορες Weyl. Οι σπίνορες Weyl συνοδεύονται από ένα δείκτη, ο οποίος αριθμεί τις δύο συνιστώσες τους. Συμπερασματικά, μπορούμε να γράψουμε ένα σπίνορα Dirac στην αναπαράσταση Weyl με την ακόλουθη μορφή:

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_{\alpha} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} \tag{B.36}$$

Όπου $\psi_{\alpha}, \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ είναι οι σπίνορες Weyl. Ο συμβολισμός των δεικτών $\alpha, \dot{\alpha}$ διαφέρει για να δείξουμε ότι οι σπίνορες Weyl μετασχηματίζονται με διαφορετικό τρόπο. Με την ίδια λογική, βάζουμε δείκτες στους ακόλουθους πίνακες: $(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\ \beta}, (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}}, (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}, (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}$. Επίσης, στην αναπαράσταση Weyl, οι σπίνορες Dirac των αντισωματιδίων γράφονται στη μορφή (B.36). Από τις σχέσεις (B.25), (B.26) και (B.28) προκύπτει:

$$\Psi^{C} = C\bar{\Psi}^{T} = -i\gamma^{0}\gamma^{2}\left[\begin{pmatrix}\psi_{\alpha} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}^{\dagger}\gamma^{0}\right]^{T} \Longrightarrow$$

$$\Psi^{C} = -i\begin{pmatrix}-\sigma^{2} & 0 \\ 0 & \sigma^{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}^{*}} \\ \psi_{\alpha}^{\ *}\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Psi^{C} = \begin{pmatrix}i\sigma^{2}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}^{*}} \\ -i\sigma^{2}\psi_{\alpha}^{\ *}\end{pmatrix} \tag{B.37}$$

Το αντικείμενο $i\sigma^{2}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}^{*}}$ πρέπει να μετασχηματίζεται όπως το ψ_{α}, ενώ το αντικείμενο $-i\sigma^{2}\psi_{\alpha}^{\ *}$ όπως το $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$. Επομένως, εισάγουμε τον εξής συμβολισμό:

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}^{*}} = \chi^{\alpha} \quad \kappa\alpha\iota \quad \psi_{\alpha}^{\ *} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \tag{B.38}$$

Επίσης, παρατηρούμε πως το $i\sigma^{2}$ πρέπει να κατεβάζει τους δείκτες α, ενώ το $-i\sigma^{2}$ πρέπει να ανεβάζει τους δείκτες $\dot{\alpha}$. Επομένως, μπορούμε να εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$(i\sigma^2)_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.39α}$$

$$(-i\sigma^2)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.39β}$$

Με τους ορισμούς που δώσαμε μπορούμε να γράψουμε το σπίνορα του αντισωματιδίου ως εξής:

$$\Psi^C = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{B.40}$$

Στην αναπαράσταση Weyl ο τελεστής της χειραλικότητας γ^5 έχει τη μορφή:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{B.41}$$

Οι σπίνορες ψ_α είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της χειραλικότητας με ιδιοτιμή -1, οπότε ονομάζονται αριστερόστροφοι σπίνορες Weyl, ενώ οι σπίνορες $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της χειραλικότητας με ιδιοτιμή 1, επομένως ονομάζονται δεξιόστροφοι σπίνορες Weyl.

Όπως προαναφέραμε, οι σπίνορες $\psi_\alpha, \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ μετασχηματίζονται με διαφορετικό τρόπο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Στο σημείο αυτό, θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο μετασχηματίζεται ο καθένας. Ο αριστερόστροφος σπίνορας ψ_α σύμφωνα με τη σχέση (B.34) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\psi'_\alpha = S_1(\Lambda)_\alpha^{\ \beta}\psi_\beta \tag{B.42}$$

όπου:

$$S_1(\Lambda) = e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \tag{B.43}$$

και ο στοιχειώδης μετασχηματισμός γράφεται:

$$S_1(\Lambda)_\alpha^{\ \beta} = 1 + \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} \tag{B.44}$$

Όμοια ο δεξιόστροφος σπίνορας $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}\prime} = S_2(\Lambda)^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}}\bar{\chi}^{\dot{\beta}} \tag{B.45}$$

όπου:

$$S_2(\Lambda) = e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}} \tag{B.46}$$

και ο στοιχειώδης μετασχηματισμός γράφεται:

$$S_2(\Lambda)^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} = 1 + \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} \tag{B.47}$$

Οι μετασχηματισμοί $S_1(\Lambda)$ και $S_2(\Lambda)$ συνδέονται με τη σχέση:

$$S_1(\Lambda)^\dagger = S_2(\Lambda)^{-1} \tag{B.48}$$

Επίσης, ο σπίνορας ψ^α μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\psi'^{\alpha} = S_3(\Lambda)^{\alpha}{}_{\delta}\psi^{\delta} \tag{B.49}$$

όπου:
$$S_3(\Lambda) = S_1(\Lambda)^{-1^T} \tag{B.50}$$

Επιπλέον, ο σπίνορας $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\bar{\chi}'_{\dot{\alpha}} = S_4(\Lambda)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}\bar{\chi}_{\dot{\beta}} \tag{B.51}$$

όπου:
$$S_4(\Lambda) = S_2(\Lambda)^{-1^T} = S_1(\Lambda)^* \tag{B.52}$$

Οι σχέσεις (Β.45), (Β.47) και (Β.49) θα αποδειχθούν στο παράρτημα Γ.

Στη συνέχεια, αναφέρεται ότι οι σπίνορες Dirac μπορούν να γραφτούν σαν άθροισμα δεξιόστροφων και αριστερόστροφων σπινόρων Weyl:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} = \Psi_L + \Psi_R \tag{B.53}$$

Ορίζοντας τους τελεστές:

$$P_L = \tfrac{1}{2}(1-\gamma^5) = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{B.54α}$$

$$P_R = \tfrac{1}{2}(1+\gamma^5) = \begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{B.54β}$$

μπορούμε να γράψουμε τους δεξιόστροφους και αριστερόστροφους σπίνορες Weyl ως εξής:

$$\Psi_L = P_L\Psi_D \tag{B.55α}$$

$$\Psi_R = P_R\Psi_D \tag{B.55β}$$

Αφού βρήκαμε πώς μετασχηματίζονται οι σπίνορες Weyl μέσω των μετασχηματισμών της ορθόχρονης κανονικής ομάδας Lorentz, μπορούμε να δείξουμε ότι τα αντικείμενα $\chi^\alpha\psi_\alpha$, $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ είναι Lorentz αναλλοίωτα, ενώ τα $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\psi_\alpha$, $\chi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ μετασχηματίζονται σαν διανύσματα και τα $\chi^\alpha(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta\psi_\beta, \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}$ μετασχηματίζονται σαν τανυστές κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Η αναλλοιώτητα του $\chi^\alpha\psi_\alpha$ αποδεικνύεται ως εξής:

$$\chi'^{\alpha}\psi'_{\alpha} = S_3(\Lambda)^{\alpha}{}_{\beta}S_1(\Lambda)_{\alpha}^{\gamma}\chi^{\beta}\psi_{\gamma} \overset{(\text{B.50})}{\Longrightarrow}$$

$$\chi'^{\alpha}\psi'_{\alpha} = \left(S_1(\Lambda)^{-1^T}\right)^{\alpha}{}_{\beta} S_1(\Lambda)_{\alpha}^{\gamma}\chi^{\beta}\psi_{\gamma} =$$

$$(S_1(\Lambda)^{-1})_{\beta}{}^{\alpha}S_1(\Lambda)_{\alpha}^{\gamma}\chi^{\beta}\psi_{\gamma} = \delta_{\beta}{}^{\gamma}\chi^{\beta}\psi_{\gamma} \Longrightarrow$$

$$\chi'^{\alpha}\psi'_{\alpha} = \chi^{\beta}\psi_{\beta} \tag{Β.56}$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι ισχυρισμοί. Όταν έχουμε άθροιση συνιστωσών και οι δείκτες έχουν την εξής διάταξη: $\chi^{\alpha}\psi_{\alpha}$ και $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ συνήθως χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$\chi\psi \equiv \chi^{\alpha}\psi_{\alpha} \tag{Β.57α}$$

$$\bar{\chi}\bar{\psi} \equiv \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \tag{Β.57β}$$

Επίσης, να σημειωθεί ότι οι σπίνορες αποτελούν μεταβλητές Grassmann, επομένως αντιμετατίθενται μεταξύ τους, δηλαδή ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\{\psi, \chi\} = \{\bar{\chi}, \bar{\psi}\} = \{\psi, \bar{\chi}\} = 0 \tag{Β.58}$$

Β.5 Σπίνορες Majorana

Τα σωματίδια Majorana ταυτίζονται με τα αντισωματίδιά τους. Επομένως, οι σπίνορες αυτών των σωματιδίων (σπίνορες Majorana) έχουν την ιδιότητα:

$$\Psi_M^C = \Psi_M \tag{Β.59}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (Β.40), για τους σπίνορες Majorana ισχύει ότι:

$$\psi_{\alpha} = \chi_{\alpha} \quad \kappa\alpha\iota \quad \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \tag{Β.60}$$

δηλαδή θα ισχύει:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha} \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{Β.61}$$

Ένας σπίνορας Dirac μπορεί να γραφτεί μέσω δύο σπινόρων Majorana ως εξής:

$$\Psi_D = \Psi_{M1} + i\Psi_{M2} \tag{Β.62}$$

όπου:

$$\Psi_{M1} = \frac{1}{2}(\Psi_D + \Psi_D^C) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_{\alpha} + \chi_{\alpha} \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{Β.63α}$$

$$\Psi_{M2} = \frac{1}{2i}(\Psi_D - \Psi_D^C) = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \psi_{\alpha} - \chi_{\alpha} \\ -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{Β.63β}$$

Παράρτημα Γ

Σημαντικές σχέσεις-ταυτότητες

Σε αυτό το παράρτημα παραθέτουμε σημαντικές σχέσεις και τις αποδείξεις τους.

$$\sigma^{\mu\nu\dagger} = -\bar{\sigma}^{\mu\nu} \tag{Γ.1}$$

Απόδειξη:

$$\sigma^{\mu\nu\dagger} = \left(\frac{\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}}{4}\right)^{\dagger} = \frac{\bar{\sigma}^{\nu\dagger}\sigma^{\mu\dagger} - \bar{\sigma}^{\mu\dagger}\sigma^{\nu\dagger}}{4} = \frac{\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu} - \bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}}{4} \Longrightarrow$$

$$\sigma^{\mu\nu\dagger} = -\bar{\sigma}^{\mu\nu}$$

$$\sigma^2\sigma^{\mu}\sigma^2 = \bar{\sigma}^{\mu T} \tag{Γ.2α}$$

$$\sigma^2\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^2 = \sigma^{\mu T} \tag{Γ.2β}$$

$$\sigma^2\sigma^{\mu\nu}\sigma^2 = -\sigma^{\mu\nu T} \tag{Γ.2γ}$$

$$\sigma^2\bar{\sigma}^{\mu\nu}\sigma^2 = -\bar{\sigma}^{\mu\nu T} \tag{Γ.2δ}$$

Απόδειξη σχέσης (Γ.2α):

Για $\mu = 0, 2$ αποδεικνύεται με προφανή τρόπο. Για $\mu = 1$ έχουμε:

$$\sigma^2\sigma^1\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\sigma^1 = -\sigma^{1^T} = \bar{\sigma}^{1^T}$$

Όμοια για $\mu = 3$.

Απόδειξη σχέσης (Γ.2β):

Αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο με την (Γ.2α).

Απόδειξη σχέσης (Γ.2γ):

$$\sigma^2\sigma^{\mu\nu}\sigma^2 = \sigma^2\frac{\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}}{4}\sigma^2 = \frac{\sigma^2\sigma^{\mu}\sigma^2\sigma^2\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^2 - \sigma^2\sigma^{\nu}\sigma^2\sigma^2\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^2}{4} \xRightarrow{\text{(B.62α),(B.62β)}}$$

$$\sigma^2\sigma^{\mu\nu}\sigma^2 = \frac{\bar{\sigma}^{\mu T}\sigma^{\nu T} - \bar{\sigma}^{\nu T}\sigma^{\mu T}}{4} = \frac{(-\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} + \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu})^T}{4} = -\sigma^{\mu\nu T}$$

Απόδειξη σχέσης (Γ.2δ):

Αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο με την (Γ.2γ).

$$\chi^{\alpha}\psi_{\alpha} = \psi^{\alpha}\chi_{\alpha} \tag{Γ.3α}$$

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \tag{Γ.3β}$$

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}\psi_{\alpha} = -\psi^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \tag{Γ.3γ}$$

$$\chi^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_{\alpha} \tag{Γ.3δ}$$

$$\chi^{\alpha}(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}\psi_{\beta} = -\psi^{\beta}(\sigma^{\mu\nu})_{\beta}{}^{\alpha}\chi_{\alpha} \tag{Γ.3ε}$$

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} = -\bar{\psi}_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \tag{Γ.3στ}$$

<u>Απόδειξη σχέσης (Γ.3α):</u>

$$\chi^{\alpha}\psi_{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\chi_{\beta}\psi_{\alpha} \xRightarrow{(\mathrm{B}.39\alpha)}$$

$$\chi^{\alpha}\psi_{\alpha} = -\varepsilon^{\beta\alpha}\chi_{\beta}\psi_{\alpha} = -\chi_{\beta}\psi^{\beta} \xRightarrow{(B.58)}$$

$$\chi^{\alpha}\psi_{\alpha} = \psi^{\alpha}\chi_{\alpha}$$

<u>Απόδειξη σχέσης (Γ.3β):</u>

Αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο με την (Γ.3α).

<u>Απόδειξη σχέσης (Γ.3γ):</u>

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}\psi_{\alpha} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\chi}^{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta} = -\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta} =$$

$$-[i\sigma^2\bar{\sigma}^{\mu}i\sigma^2]_{\dot{\beta}\beta}\bar{\chi}^{\dot{\beta}}\psi^{\beta} = \left[\sigma^{\mu T}\right]_{\dot{\beta}\beta}\bar{\chi}^{\dot{\beta}}\psi^{\beta} = \bar{\chi}^{\dot{\beta}}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\beta}}\psi^{\beta} \Rightarrow$$

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}\psi_{\alpha} = -\psi^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$$

<u>Απόδειξη σχέσης (Γ.3δ):</u>

Αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο με την (Γ.3γ).

<u>Απόδειξη σχέσης (Γ.3ε):</u>

$$\chi^{\alpha}(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}\psi_{\beta} = \varepsilon^{\alpha\gamma}\chi_{\gamma}(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}\varepsilon_{\beta\delta}\psi^{\delta} = -\varepsilon^{\gamma\alpha}\chi_{\gamma}(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}\varepsilon_{\beta\delta}\psi^{\delta} =$$

$$-[(-i\sigma^2)\sigma^{\mu\nu}(i\sigma^2)]^{\gamma}{}_{\delta}\,\chi_{\gamma}\psi^{\delta} \xRightarrow{(\Gamma.2\gamma)}$$

$$\chi^{\alpha}(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}\psi_{\beta} = \left[\sigma^{\mu\nu T}\right]^{\gamma}{}_{\delta}\,\chi_{\gamma}\psi^{\delta} = \chi_{\gamma}(\sigma^{\mu\nu})_{\delta}{}^{\gamma}\psi^{\delta} \Rightarrow$$

$$\chi^{\alpha}(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}\psi_{\beta} = -\psi^{\beta}(\sigma^{\mu\nu})_{\beta}{}^{\alpha}\chi_{\alpha}$$

Απόδειξη σχέσης (Γ.3στ):

Αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο με την (Γ.3ε).

$$(\chi\psi)^\dagger = \bar{\chi}\bar{\psi} = \bar{\psi}\bar{\chi} \qquad (Γ.4α)$$

$$(\chi\sigma^\mu\bar{\psi})^\dagger = \psi\sigma^\mu\bar{\chi} \qquad (Γ.4β)$$

$$(\chi\sigma^{\mu\nu}\psi)^\dagger = \bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi} \qquad (Γ.4γ)$$

Απόδειξη σχέσης (Γ.4α):

$$(\chi\psi)^\dagger = (\chi^\alpha\psi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\chi}$$

Απόδειξη σχέσης (Γ.4β):

$$(\chi\sigma^\mu\bar{\psi})^\dagger = \left(\chi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\right)^\dagger = \psi^\alpha(\sigma^\mu)^\dagger_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \psi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \psi\sigma^\mu\bar{\chi}$$

Απόδειξη σχέσης (Γ.4γ):

$$(\chi\sigma^{\mu\nu}\psi)^\dagger = \left(\chi^\alpha(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta\psi_\beta\right)^\dagger \overset{(Γ.1)}{\Longrightarrow}$$

$$(\chi\sigma^{\mu\nu}\psi)^\dagger = -\bar{\psi}_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \overset{(Γ.3στ)}{\Longrightarrow}$$

$$(\chi\sigma^{\mu\nu}\psi)^\dagger = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}$$

Απόδειξη της σχέσης: $S_1(\Lambda)^\dagger = S_2(\Lambda)^{-1}$

$$S_1(\Lambda)^\dagger = \left(e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\right)^\dagger = e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})^\dagger} = e^{-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}} = S_2(\Lambda)^{-1}$$

Απόδειξη της σχέσης: $S_3(\Lambda) = S_1(\Lambda)^{-1^T}$

$$\psi'^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi'_\beta = \varepsilon^{\alpha\beta}S_1(\Lambda)_\beta^\gamma\psi_\gamma = \varepsilon^{\alpha\beta}S_1(\Lambda)_\beta^\gamma\varepsilon_{\gamma\delta}\psi^\delta = S_3(\Lambda)^\alpha_\delta\psi^\delta \Longrightarrow$$

$$S_3(\Lambda)^\alpha_\delta = \varepsilon^{\alpha\beta}S_1(\Lambda)_\beta^\gamma\varepsilon_{\gamma\delta} \Longrightarrow$$

$$S_3(\Lambda) = -i\sigma^2 S_1(\Lambda) i\sigma^2 \Longrightarrow$$

$$S_3(\Lambda) = \sigma^2 e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\sigma^2 = e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^2\sigma^{\mu\nu}\sigma^2} = e^{-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu^T}} \Longrightarrow$$

$$S_3(\Lambda) = S_1(\Lambda)^{-1^T}$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η σχέση: $S_4(\Lambda) = S_2(\Lambda)^{-1^T} = S_1(\Lambda)^*$

Θεωρούμε δύο σπίνορες Dirac: $\Psi = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}$ και $\Phi = \begin{pmatrix}\varphi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}$

$$\bar{\Psi}\Phi = \bar{\psi}\bar{\eta} + \chi\varphi = (\bar{\Phi}\Psi)^\dagger \quad (Γ.5α)$$

$$\bar{\Psi}\gamma^5\Phi = \bar{\psi}\bar{\eta} - \chi\varphi = -(\bar{\Phi}\gamma^5\Psi)^\dagger \quad (Γ.5β)$$

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Phi = \chi\sigma^\mu\bar{\eta} + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\varphi = (\bar{\Phi}\gamma^\mu\Psi)^\dagger \quad (Γ.5γ)$$

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Phi = \chi\sigma^\mu\bar{\eta} - \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\varphi = (\bar{\Phi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi)^\dagger \quad (Γ.5δ)$$

$$\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\Phi = i\chi\sigma^{\mu\nu}\varphi + i\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\eta} = (\bar{\Phi}\Sigma^{\mu\nu}\Psi)^\dagger \quad (Γ.5ε)$$

Θεωρούμε δύο σπίνορες Majorana: $\Psi_M = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}$ και $\Phi_M = \begin{pmatrix}\varphi_\alpha \\ \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}$

$$\bar{\Psi}_M\Phi_M = \bar{\psi}\bar{\varphi} + \psi\varphi = \bar{\Phi}_M\Psi_M = (\bar{\Psi}_M\Phi_M)^\dagger \quad (Γ.6α)$$

$$\bar{\Psi}_M\gamma^5\Phi_M = \bar{\psi}\bar{\varphi} - \psi\varphi = \bar{\Phi}_M\gamma^5\Psi_M = -(\bar{\Psi}_M\gamma^5\Phi_M)^\dagger \quad (Γ.6β)$$

$$\bar{\Psi}_M\gamma^\mu\Phi_M = \psi\sigma^\mu\bar{\varphi} + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\varphi = -\bar{\Phi}_M\gamma^\mu\Psi_M = -(\bar{\Psi}_M\gamma^\mu\Phi_M)^\dagger \quad (Γ.6γ)$$

$$\bar{\Psi}_M\gamma^\mu\gamma^5\Phi_M = \psi\sigma^\mu\bar{\varphi} - \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\varphi = \bar{\Phi}_M\gamma^\mu\gamma^5\Psi_M = (\bar{\Psi}_M\gamma^\mu\gamma^5\Phi_M)^\dagger \quad (Γ.6δ)$$

$$\bar{\Psi}_M\Sigma^{\mu\nu}\Phi_M = i\psi\sigma^{\mu\nu}\varphi + i\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\varphi} = -\bar{\Phi}_M\Sigma^{\mu\nu}\Psi_M = -(\bar{\Psi}_M\Sigma^{\mu\nu}\Phi_M)^\dagger \quad (Γ.6ε)$$

Ταυτότητες:

$$\theta\sigma^{\mu\nu}\theta = 0 \quad (Γ.7α)$$

$$(\theta\varphi)(\chi\theta) = -\tfrac{1}{2}(\theta\theta)(\chi\varphi) \quad (Γ.7β)$$

$$\theta^\beta\theta_\gamma = \tfrac{1}{2}(\theta\theta)\delta^\beta{}_\gamma \quad (Γ.7γ)$$

$$(\theta\varphi)(\chi\eta) = -\tfrac{1}{2}\left[(\theta\eta)(\chi\varphi) - (\theta\sigma^{\mu\nu}\eta)(\chi\sigma_{\mu\nu}\varphi)\right] \quad (Γ.7δ)$$

$$(\theta\varphi)(\bar{\chi}\bar{\eta}) = -\tfrac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\eta})(\bar{\chi}\bar{\sigma}_\mu\varphi) \quad (Γ.7ε)$$

$$(\theta\varphi)(\chi\sigma^\mu\bar{\eta}) = -\tfrac{1}{2}[(\theta\sigma^\mu\bar{\eta})(\chi\varphi) + 2(\theta\sigma_\nu\bar{\eta})(\chi\sigma^{\mu\nu}\varphi)] \quad (Γ.7στ)$$

$$(\theta\varphi)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\eta) = -\tfrac{1}{2}[(\theta\eta)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\varphi) - 2(\theta\sigma^{\mu\nu}\eta)(\bar{\chi}\bar{\sigma}_\nu\varphi)] \quad (Γ.7ζ)$$

$$(\theta\sigma^\mu\bar{\varphi})(\chi\sigma^\nu\bar{\eta}) = -\tfrac{1}{2}\left[(\theta\sigma^\mu\bar{\eta})(\chi\sigma^\nu\bar{\varphi}) + (\theta\sigma^\nu\bar{\eta})(\chi\sigma^\mu\bar{\varphi}) - \eta^{\mu\nu}(\theta\sigma^\lambda\bar{\eta})(\chi\sigma_\lambda\bar{\varphi}) - i\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(\theta\sigma_\kappa\bar{\eta})(\chi\sigma_\lambda\bar{\varphi})\right] \quad (Γ.7η)$$

$$(\theta\sigma^{\mu}\bar{\varphi})(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\nu}\eta) = -\tfrac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}(\theta\eta)(\bar{\chi}\bar{\varphi}) + 2(\theta\sigma^{\mu\nu}\eta)(\bar{\chi}\bar{\varphi}) - 2(\theta\eta)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\varphi}) - 4\left(\theta\sigma^{\nu\lambda}\eta\right)(\bar{\chi}\bar{\sigma}_{\lambda}{}^{\mu}\bar{\varphi})\right] \tag{Γ.7θ}$$

$$(\theta\varphi)(\chi\sigma^{\mu\nu}\eta) = -\tfrac{1}{2}\left[(\theta\eta)(\chi\sigma^{\mu\nu}\varphi) + (\theta\sigma^{\mu\nu}\eta)(\chi\varphi) - \left(\theta\sigma^{\mu\lambda}\eta\right)(\chi\sigma_{\lambda}{}^{\nu}\varphi) + \left(\theta\sigma^{\nu\lambda}\eta\right)(\chi\sigma_{\lambda}{}^{\mu}\varphi)\right] \tag{Γ.7ι}$$

$$(\theta\varphi)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\eta}) = -\tfrac{1}{4}\left[(\theta\sigma^{\nu}\bar{\eta})(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\varphi) - (\theta\sigma^{\mu}\bar{\eta})(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\nu}\varphi) + i\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(\theta\sigma_{\kappa}\bar{\eta})(\bar{\chi}\bar{\sigma}_{\lambda}\varphi)\right] \tag{Γ.7ια}$$

$$(\theta\sigma^{\mu\nu}\varphi)\left(\chi\sigma^{\lambda}\bar{\eta}\right) = \frac{1}{4}\left[\eta^{\mu\lambda}(\theta\sigma^{\nu}\bar{\eta})(\chi\varphi) - \eta^{\nu\lambda}(\theta\sigma^{\mu}\bar{\eta})(\chi\varphi) + i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\left(\theta\sigma_{\rho}\bar{\eta}\right)(\chi\varphi)\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[(\theta\sigma^{\nu}\bar{\eta})\left(\chi\sigma^{\lambda\mu}\varphi\right) - (\theta\sigma^{\mu}\bar{\eta})\left(\chi\sigma^{\lambda\nu}\varphi\right) + i\varepsilon^{\mu\nu\kappa\rho}(\theta\sigma_{\kappa}\bar{\eta})\left(\chi\sigma_{\rho}{}^{\lambda}\varphi\right)\right] \tag{Γ.7ιβ}$$

$$(\theta\sigma^{\mu\nu}\varphi)\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\lambda}\eta\right) = -\frac{1}{4}\left[\eta^{\mu\lambda}(\theta\eta)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\nu}\varphi) - \eta^{\nu\lambda}(\theta\eta)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\varphi) + i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\theta\eta)\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}_{\rho}\varphi\right)\right]$$
$$-\tfrac{1}{2}\left[\left(\theta\sigma^{\mu\lambda}\eta\right)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\nu}\varphi) - \left(\theta\sigma^{\nu\lambda}\eta\right)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\varphi) + i\varepsilon^{\mu\nu\kappa\rho}\left(\theta\sigma_{\kappa}{}^{\lambda}\eta\right)\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}_{\rho}\varphi\right)\right] \tag{Γ.7ιγ}$$

$$(\theta\sigma^{\mu\nu}\varphi)\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\kappa\lambda}\bar{\eta}\right) = -\frac{1}{8}\{\left(\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} - \eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda}\right)(\theta\sigma^{\rho}\bar{\eta})\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}_{\rho}\varphi\right) +$$
$$\eta^{\mu\kappa}(\theta\sigma^{\nu}\bar{\eta})\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\lambda}\varphi\right) + \eta^{\mu\kappa}\left(\theta\sigma^{\lambda}\bar{\eta}\right)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\nu}\varphi)$$
$$-\eta^{\nu\kappa}(\theta\sigma^{\mu}\bar{\eta})\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\lambda}\varphi\right) - \eta^{\nu\kappa}\left(\theta\sigma^{\lambda}\bar{\eta}\right)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\varphi) +$$
$$\eta^{\nu\lambda}(\theta\sigma^{\mu}\bar{\eta})(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\kappa}\varphi) + \eta^{\nu\lambda}(\theta\sigma^{\kappa}\bar{\eta})(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\varphi)$$
$$-\eta^{\mu\lambda}(\theta\sigma^{\nu}\bar{\eta})(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\kappa}\varphi) - \eta^{\mu\lambda}(\theta\sigma^{\kappa}\bar{\eta})(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\nu}\varphi)$$
$$+i\varepsilon^{\mu\nu\kappa\rho}\left(\theta\sigma_{\rho}\bar{\eta}\right)\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\lambda}\varphi\right) - i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\left(\theta\sigma_{\rho}\bar{\eta}\right)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\kappa}\varphi)$$
$$-i\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\rho}(\theta\sigma^{\nu}\bar{\eta})\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}_{\rho}\varphi\right) + i\varepsilon^{\kappa\lambda\nu\rho}(\theta\sigma^{\mu}\bar{\eta})\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}_{\rho}\varphi\right)\} \tag{Γ.7ιδ}$$

$$\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\lambda} = -\tfrac{1}{2}\left[\eta^{\mu\lambda}\sigma^{\nu} - \eta^{\nu\lambda}\sigma^{\mu} + i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\sigma_{\rho}\right] \tag{Γ.7ιε}$$

$$\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu\lambda} = \tfrac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\lambda} - \eta^{\mu\lambda}\bar{\sigma}^{\nu} + i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\bar{\sigma}_{\rho}\right] \tag{Γ.7ιστ}$$

$$\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\kappa\lambda} = -\tfrac{1}{4}\left[\eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} + i\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} + 2\left(\eta^{\mu\kappa}\sigma^{\nu\lambda} + \eta^{\nu\lambda}\sigma^{\mu\kappa} - \eta^{\mu\lambda}\sigma^{\nu\kappa} - \eta^{\nu\kappa}\sigma^{\mu\lambda}\right)\right] \tag{Γ.7ιζ}$$

$$\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} + \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I} \tag{Γ.7ιη}$$

$$\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} + \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I} \tag{Γ.7ιθ}$$

$$\frac{\partial\theta^{\alpha}}{\partial\theta^{\beta}} = \delta_{\beta}{}^{\alpha} \tag{Γ.8α}$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}} = \delta_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}} \tag{Γ.8β}$$

$$\frac{\partial\theta_{\alpha}}{\partial\theta^{\beta}} = \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{Γ.8γ}$$

$$\frac{\partial\theta^{\alpha}}{\partial\theta_{\beta}} = \varepsilon^{\alpha\beta} \tag{Γ.8δ}$$

$$\frac{\partial\theta\theta}{\partial\theta^{\alpha}} = 2\theta_{\alpha} \tag{Γ.8ε}$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}\bar{\theta}}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} = -2\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \tag{Γ.8στ}$$

$$\frac{\partial f\big(u(\theta)\big)}{\partial\theta} = \frac{\partial u(\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial f(u)}{\partial u} \tag{Γ.8ζ}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} = -\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_{\beta}} \tag{Γ.8η}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} = -\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}} \tag{Γ.8θ}$$

$$\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\beta}\theta_{\beta} = -\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}} \tag{Γ.8ι}$$

Βιβλιογραφία

[1] David Bailin & Alexander Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Institute Of Physics Publishing Ltd, 1994

[2] Sven Krippendorf, Fernando Quevedo, Oliver Schlotterer, *Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions*, arXiv:1011.1491

[3] Stephen P. Martin, *A Supersymmetry Primer*, arXiv:hep-ph/9709356

[4] Julius Wess & Jonathan Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press, 1992

[5] Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific Publishing Co. Pte, Ltd., 1985

[6] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1996

[7] David Bailin & Alexander Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, Institute Of Physics Publishing Limited, 1993

[8] Michael E. Peskin & Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books Publishing, L.L.C., 1995