



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ  
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΥΜΠΥΚΝΩΜΕΝΗΣ ΥΛΗΣ

Ταλαντώσεις Rabi  
σε δισταθμικό και πολυσταθμικό σύστημα  
με και χωρίς  
προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος.

Λάζαρος Χαλκοπιάδης

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

ΑΘΗΝΑ 2021





NATIONAL AND KAPODISTRIAN UNIVERSITY OF ATHENS  
DEPARTMENT OF PHYSICS  
SECTION OF CONDENSED MATTER PHYSICS

**Rabi oscillations  
in a two-level and in a multi-level system  
with and without  
rotating wave approximation.**

**Lazaros Chalkopiadis**

Diploma Thesis

Supervisor: Constantinos Simserides

ATHENS 2021



## Περίληψη

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία μελετάμε ταλαντώσεις Rabi δισταθμικού και πολυσταθμικού συστήματος στην ημικλασική προσέγγιση. Δηλαδή, το δισταθμικό ή το πολυσταθμικό σύστημα (π.χ. άτομο, χβαντική τελεία, κέντρο χρώματος κ.α.) αντιμετωπίζεται χβαντικά, ως ένα σύστημα ιδιοκαταστάσεων, ενώ το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αντιμετωπίζεται κλασικά. Η επίλυση του διαταραγμένου, από την ηλεκτρική συνιστώσα του ηλεκτρομαγνητικού (HM) πεδίου, δισταθμικού συστήματος προσεγγίζεται με τρεις τρόπους. Ο πρώτος είναι η χρήση της προσέγγισης περιστρεφόμενου κύματος (rotating wave approximation, RWA) και ο δεύτερος είναι η μέθοδος επανισώσεως (averaging method). Με αυτούς τους τρόπους οι λύσεις που προκύπτουν είναι προσεγγιστικές. Σε αμφότερες τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τις παρακάτω αρχικές συνθήκες:

1.  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη,
2.  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη, και
3.  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}, C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$ , δηλαδή στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται και στις δύο στάθμες με πιθανότητα  $|C_1(0)|^2 = |C_2(0)|^2 = \frac{1}{2}$ .

Επιπλέον, τα αναλυτικά αποτελέσματα των δύο προσεγγιστικών μεθόδων συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσεως των σχετικών διαφορικών εξισώσεων με matlab, με τις μεθόδους τραπεζίου, Runge-Kutta (2,3) και Runge-Kutta (4,5).

Όλα τα παραπάνω μελετώνται για την περίπτωση συντονισμού ( $\Delta = 0$ ), αλλά και για την περίπτωση αποσυντονισμού ( $\Delta \neq 0$ ). Εδώ  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα του HM πεδίου και  $\Omega$  είναι η ενεργειακή απόσταση των δύο σταθμών διά  $\hbar$ .  $\Delta = \omega - \Omega$ .

Τέλος, εξετάζεται το διαταραγμένο σύστημα αλλά αυτή τη φορά με πολλές στάθμες. Η μελέτη του πολυσταθμικού συστήματος γίνεται με τη χρήση της προσέγγισης περιστρεφόμενου κύματος, υπό την προϋπόθεση ότι οι στάθμες είναι ισαπέχουσες.



## Abstract

In this diploma thesis we study Rabi oscillations in a two-level and in a multi-level system within the semiclassical approximation. The two-level or multi-level system (e.g. atom, quantum dot, color center etc.) is treated as a quantum system with eigenstates, while the electromagnetic field is treated classically. The solution of the perturbed, from the electric component of the electromagnetic field, two-level system is approached with three different ways. The first is the use of rotating wave approximation and the second is the averaging method. In these approaches the resulting solutions are approximate. In both cases we use the following initial conditions:

1.  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ , i.e., placing the electron, at time zero, at the lower level.
2.  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ , i.e., placing the electron, at time zero, at the upper level.
3.  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}, C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$ , i.e., at time zero, the electron can be found with equal probability at both levels,  $|C_1(0)|^2 = |C_2(0)|^2 = \frac{1}{2}$ .

In addition, the analytical results of the two approximate methods are compared with the results of the numerical solution, utilizing matlab, of the relevant differential equations, using trapezoid, Runge-Kutta (2,3) and Runge-Kutta (4,5) algorithms.

All the above are studied both for the case of resonance ( $\Delta = 0$ ) and for the case of non resonance ( $\Delta \neq 0$ ). Here  $\omega$  is the angular frequency of the electromagnetic field and  $\Omega$  is the energy separation of the two levels divided by  $\hbar$ .  $\Delta = \omega - \Omega$ .

Finally, we examine the multi-level perturbed system. This is done with the use of the rotating wave approximation, under the assumption that the levels are equidistant.





# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	vii
Γλωσσάριο - Συμβολοθήκη. Glossary - Symbols.	x
<b>1 Ημικλασική Προσέγγιση.</b>	<b>1</b>
1.1 Αδιατάρακτο σύστημα. . . . .	1
1.2 Διαταραγμένο σύστημα. Χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών. Διπολική Ροπή. Προσέγγιση Διπόλου. . . . .	3
<b>2 Δισταθμικό Σύστημα εντός Προσεγγίσεως Περιστευόμενου Κύματος.</b>	<b>8</b>
2.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη. . . . .	13
2.1.1 Περίπτωση αποσυντονισμού. . . . .	13
2.1.2 Περίπτωση συντονισμού. . . . .	17
2.2 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη. . . . .	18
2.2.1 Περίπτωση αποσυντονισμού. . . . .	18
2.2.2 Περίπτωση συντονισμού. . . . .	20
2.3 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα. . . . .	21
2.3.1 Περίπτωση αποσυντονισμού. . . . .	21
2.3.2 Περίπτωση συντονισμού. . . . .	24
<b>3 Αριθμητικά αποτελέσματα δισταθμικού συστήματος εντός προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος.</b>	<b>25</b>
3.1 Περίπτωση αποσυντονισμού. . . . .	25
3.1.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη. . . . .	26
3.1.2 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη. . . . .	28
3.1.3 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα. . . . .	30
3.2 Περίπτωση συντονισμού. . . . .	64
3.2.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη. . . . .	64

3.2.2	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.	66
3.2.3	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.	68
<b>4</b>	<b>Δισταθμικό Σύστημα εκτός Προσεγγίσεως Περιστροφόμενου Κύματος.</b>	<b>77</b>
4.1	Περίπτωση αποσυντονισμού.	78
4.1.1	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.	78
4.1.2	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.	82
4.1.3	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.	86
4.2	Περίπτωση συντονισμού.	92
4.2.1	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.	92
4.2.2	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.	95
4.2.3	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.	98
<b>5</b>	<b>Δισταθμικό Σύστημα με τη Μέθοδο Επανισώσεως.</b>	<b>104</b>
5.1	Η Μέθοδος Επανισώσεως (Averaging Method) πρώτης και δεύτερης τάξεως.	104
5.2	Η Μέθοδος Επανισώσεως στο Δισταθμικό Σύστημα.	107
5.2.1	Περίπτωση αποσυντονισμού.	108
5.2.1.1	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.	112
5.2.1.2	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.	114
5.2.1.3	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.	115
5.2.2	Περίπτωση συντονισμού.	118
5.2.2.1	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.	121
5.2.2.2	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.	123
5.2.2.3	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.	125
<b>6</b>	<b>Αριθμητικά αποτελέσματα δισταθμικού συστήματος με την μέθοδο επανισώσεως.</b>	<b>129</b>
6.1	Περίπτωση αποσυντονισμού.	129
6.1.1	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.	130
6.1.2	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.	149
6.1.3	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.	161
6.2	Περίπτωση συντονισμού.	169

---

6.2.1	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη .	169
6.2.2	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη . .	173
6.2.3	Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα . . . . .	177
6.3	Σύγκριση της μεθόδου επανισώσεως και της μεθόδου προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος. . . . .	185
<b>7</b>	<b>Πολυσταθμικό σύστημα εντός προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος.</b>	<b>187</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>194</b>

# Γλωσσάριο - Συμβολοθήκη.

## Glossary - Symbols.

Ακολουθούν Γλωσσάριο και Συμβολοθήκη.

Πίνακας 1 Γλωσσάριο - Glossary

σύντμηση	όνομα	abbreviation	name
ΗΠ	Ημικλασική Προσέγγιση	SA	Semiclassical Approximation
ΔΣ	Δισταθμικό Σύστημα	2LS	Two-level System
ΠΣ	Πολυσταθμικό Σύστημα	MLS	Multi-level System
ΠΠΚ	Προσέγγιση Περιστρεφόμενου Κύματος	RWA	Rotating Wave Approximation
	Διαταραγμένο Σύστημα		Disturbed System
	Μέθοδος Επανισώσεως		Averaging Method
	Πρώτη Τάξη		First Order
	Δεύτερη Τάξη		Second Order
	Συντονισμός		Tuning, Resonance
	Αποσυντονισμός		Detuning, Non Resonance
	Ιδιοάνυσμα		Eigenvector
	Ιδιοτιμή		Eigenvalue
	Ιδιοκατάσταση		Eigenstate
	Ιδιοσυνάρτηση		Eigenfunction
ΗΜ	Ηλεκτρομαγνητικός Ακτινοβολία	EM	Electromagnetic Radiation
	Άτομο		Atom
	Κέντρο Χρώματος		Color Center
	Δυναμική Ενέργεια		Potential Energy
	Ηλεκτρική Διπολική Ροπή		Electric Dipole Moment
	Κβαντικό Φρέαρ		Quantum Well
	Κβαντικό Σύρμα		Quantum Wire
	Κβαντική Τελεία		Quantum Dot
	Κβάντωση		Quantization

	Κυματόανυσμα		Wave Vector
	Κυματοσυνάρτηση		Wave Function
	Μονοχρωματικότητα		Monochromaticity
	Πόλωση		Polarization
	Προσέγγιση Διπόλου		Dipole Approximation
	Συχνότητα		Frequency
	Κυκλική Συχνότητα		Angular Frequency

Πίνακας 2 Συμβολοθήκη - Symbols

συμβολισμός Symbolism	ονομασία name
$h$	η σταθερά του Planck Planck constant
$\hbar$	η ανηγμένη σταθερά του Planck reduced Planck constant
$\pi$	ο λόγος της περιφέρειας του κύκλου προς τη διάμετρο του the ratio of a circle's circumference to its diameter
$e$	στοιχειώδες φορτίο elementary charge
$m_e$	μάζα ηλεκτρονίου electron mass
$\epsilon_0$	διηλεκτρική σταθερά του κενού vacuum dielectric constant
$\Omega_k$ με $k = 1, 2, \dots, N$	κυκλική συχνότητα της στάθμης $k$ angular frequency of level $k$
$\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$	διαφορά κυκλικής συχνότητας μεταξύ των σταθμών 1 και 2 difference between the angular frequencies of the upper level minus the lower level
$\omega$	κυκλική συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου angular frequency of the electromagnetic field
$\Omega_R$	(κυκλική) συχνότητα Rabi Rabi frequency
$\mathcal{P}$	ηλεκτρική διπολική ροπή electric dipole moment
$\mathcal{E}_0$	πλάτος ηλεκτρικού πεδίου amplitude of electric field
$\Delta = \omega - \Omega$	αποσυντονισμός (διαφορά κυκλικών συχνοτήτων) detuning, non resonance (difference of angular frequencies)

---

$\Delta = 0 \Rightarrow \Omega = \omega$	συντονισμός tuning, resonance
$\Sigma = \omega + \Omega$	άθροισμα κυκλικών συχνοτήτων sum of angular frequencies
$:=$	ορίζεται ως ίσο defined as equal

# Κεφάλαιο 1

## Ημικλασική Προσέγγιση. [1]

Ημικλασική αντιμετώπιση σημαίνει ότι ενώ το δισταθμικό σύστημα (π.χ. άτομο, κβαντική τελεία, κέντρο χρώματος κ.ά.) αντιμετωπίζεται κβαντικά ως ένα σύστημα ιδιοκαταστάσεων, αντιμετωπίζουμε κλασικά το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θεωρείται ως μια εξωτερική, χρονικώς μεταβαλλόμενη διαταραχή.

Ακόμα θεωρούμε την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία αρκετά πυκνή ούτως ώστε η απορρόφηση ή η εκπομπή ενός φωτονίου από το υπό μελέτη δισταθμικό σύστημα να μην μπορεί να επηρεάσει αισθητά τα πλάτη του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου του κύματος.

### 1.1 Αδιατάρακτο σύστημα.

Ας θεωρήσουμε τη Χαμιλτονιανή του ηλεκτρονίου στο αδιατάρακτο δισταθμικό σύστημα

$$\hat{H}_0 = \frac{\widehat{p}^2}{2m_e} + U(\vec{r}) \quad (1.1)$$

π.χ. στο άτομο του υδρογόνου η δυναμική ενέργεια (Coulomb)

$$U(\vec{r}) = (-e) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.2)$$

όπου  $e$  το στοιχειώδες φορτίο. Σε πολυηλεκτρονικό άτομο με ατομικό αριθμό  $Z$  η δυναμική ενέργεια Coulomb είναι

$$U(\vec{r}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.3)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε τη θωρακισμένη (screened) μορφή της δυναμικής ενέργειας

$$U_S(\vec{r}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-k_0 r}. \quad (1.4)$$

Γενικότερα, το δυναμικό Coulomb έχει τη μορφή

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{r}, \quad (1.5)$$

ενώ το θωρακισμένο δυναμικό Coulomb (screened Coulomb potential) έχει τη μορφή

$$V_S(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{r} e^{-k_0 r}, \quad (1.6)$$

όπου  $k_0$  είναι η ισχύς του παράγοντα αποσβέσεως (strength of the damping factor) ή αλλιώς κυματόνυσμα (wave vector) Thomas-Fermi. Το θωρακισμένο δυναμικό  $V_S(\vec{r})$  επονομάζεται και Thomas-Fermi δυναμικό ή Yukawa δυναμικό. Τα παραπάνω δυναμικά και δυναμικές ενέργειες εξαρτώνται τελικά από το  $r$  και όχι από το  $\vec{r}$  είναι δηλαδή κεντρικά δυναμικά και κεντρικές δυναμικές ενέργειες. Λόγω του παράγοντα  $e^{-k_0 r}$ , το δυναμικό Yukawa πέφτει πιο απότομα από το δυναμικό Coulomb.

Ας θεωρήσουμε τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}_0 \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.7)$$

όπου  $\Psi(\vec{r}, t)$  είναι η κυματοσυνάρτηση του αδιατάραχτου ηλεκτρονίου. Περαιτέρω, ας υποθέσουμε χωρισμό μεταβλητών

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r})T(t). \quad (1.8)$$

$$\frac{(1.7)}{(1.8)} \Rightarrow \Phi(\vec{r})i\hbar \frac{dT(t)}{dt} = T(t)\hat{H}_0\Phi(\vec{r}) \Rightarrow \frac{i\hbar}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{\hat{H}_0\Phi(\vec{r})}{\Phi(\vec{r})}, \text{ για } T(t) \neq 0 \neq \Phi(\vec{r}).$$

Αν  $T(t) = 0$  ή  $\Phi(\vec{r}) = 0$ , η Εξ. 1.7 ικανοποιείται τετριμμένα. Αλλά για να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση  $\forall t, \forall \vec{r}$  θα πρέπει

$$\frac{i\hbar}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{\hat{H}_0\Phi(\vec{r})}{\Phi(\vec{r})} = E \text{ (ΣΤΑΘΕΡΑ)} \quad (1.9)$$

αφού το ένα κομμάτι είναι συνάρτηση μόνο του  $t$  και το άλλο μόνο του  $\vec{r}$ . Συνεπώς,

1.  $\hat{H}_0\Phi(\vec{r}) = E\Phi(\vec{r})$  άρα  $E$  είναι οι ιδιοτιμές της ενέργειας (εν γένει διακριτές, θα χαρακτηρίζονται από κάποιο 'συλλογικό αριθμό'  $k$  δηλαδή  $\hat{H}_0\Phi_k(\vec{r}) = E_k\Phi_k(\vec{r})$ ) και
2.  $\frac{dT}{T} = \frac{Edt}{i\hbar} \Rightarrow \ln T = -\frac{iEt}{\hbar} + c \Rightarrow T(t) = e^c e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \Rightarrow T(t) = \mathcal{N} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ .

Επομένως, συνοψίζοντας

$$\Psi_k(\vec{r}, t) = \mathcal{N} e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} \Phi_k(\vec{r}), \quad (1.10)$$

όπου  $\mathcal{N}$  είναι μια σταθερά κανονικοποίησης, και οι ιδιοκαταστάσεις του ΑΔΙΑΤΑΡΑΚΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ περιγράφονται από την

$$\hat{H}_0\Phi_k(\vec{r}) = E_k\Phi_k(\vec{r}), \quad (1.11)$$

όπου  $E_k$  είναι οι ιδιοενέργειες και  $\Phi_k(\vec{r})$  οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις. Ακόμα ορίζουμε

$$E_k := \hbar\Omega_k. \quad (1.12)$$

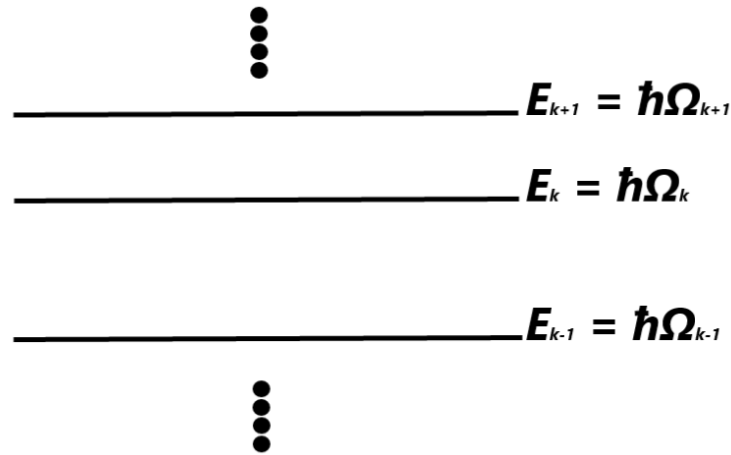
Ας απαιτήσουμε

$$\int |\Psi_k(\vec{r}, t)|^2 dV = 1 \Leftrightarrow |\mathcal{N}|^2 \int |\Phi_k(\vec{r})|^2 dV = 1. \quad (1.13)$$

Για αυτό είπαμε την  $\mathcal{N}$  σταθερά κανονικοποίησης, και υποθέσαμε τις  $\Phi_k(\vec{r})$  ορθοκανονικές.  $dV = d^3r$  είναι ο στοιχειώδης όγκος και  $k$  ένας συλλογικός κβαντικός αριθμός.



Παρακάτω παρουσιάζεται η σχηματική αναπαράσταση για τρεις στάθμες, οι οποίες έχουν άνιση ενεργειακή απόσταση μεταξύ τους.



1.2 Διαταραγμένο σύστημα.  
 Χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών.  
 Διπολική Ροπή.  
 Προσέγγιση Διπόλου.

Ας θεωρήσουμε τη Χαμιλτονιανή του ηλεκτρονίου στο διαταραγμένο δισταθμικό σύστημα, δηλαδή παρουσία ΗΜ πεδίου

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \quad (1.14)$$

και ας υποθέσουμε ότι η δυναμική ενέργεια της διαταραχής  $U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  είναι μικρή σε σχέση με την  $\hat{H}_0$ . Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.15)$$

με αρχική συνθήκη

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \Phi(\vec{r}) = \text{γνωστή.} \quad (1.16)$$

Υποθέτουμε ότι μπορούμε να αναπτύξουμε τόσο την  $\Psi(\vec{r}, 0) = \Phi(\vec{r})$  όσο και την  $\Psi(\vec{r}, t)$  συναρτήσσει των ιδιοσυναρτήσεων του αδιατάραχτου προβλήματος  $\Phi_k(\vec{r})$ . Δηλαδή γράφουμε

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_k f_k \Phi_k(\vec{r}) \quad (1.17)$$

και

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) \quad (1.18)$$

οπότε

$$C_k(0) = f_k. \quad (1.19)$$

Από τις σχέσεις (1.14), (1.15), (1.18) προκύπτει

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) \right] = [\hat{H}_0 + U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)] \left[ \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) \right]. \quad (1.20)$$

Υπολογίζουμε τα δύο μέλη αυτής της εξίσωσης και εν τέλει καταλήγουμε στην

$$\boxed{\dot{C}_{k'}(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_k C_k(t) e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k)t} U_{\mathcal{E}k'k}(t)} \quad (1.21)$$

Δηλαδή καταλήγουμε σε ένα Γραμμικό Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων 1<sup>ης</sup> Τάξεως. Αν λύσουμε το Σύστημα (1.21) ουσιαστικά λύνουμε το πρόβλημα (1.14), (1.15). Σημειωτέον ότι κατά τη διαδικασία αυτή ονομάζουμε

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = \int \Phi_{k'}^*(\vec{r}) U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r}) dV = \langle \Phi_{k'} | U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) | \Phi_k \rangle \quad (1.22)$$

τα στοιχεία πίνακα της δυναμικής ενέργειας της διαταραχής. Η άνωθεν διαδικασία συνιστά τη λεγόμενη χρονικά εξαρτώμενη θεωρία διαταραχών. Παρακάτω θα την εφαρμόσουμε σε δισταθμικό σύστημα υπό την επίδραση μονοχρωματικού και πολωμένου ηλεκτρικού κύματος, δηλαδή η διαταραχή μας έχει αυτά τα χαρακτηριστικά.

Γενικά, για οιοδήποτε φυσικό μέγεθος  $M$ , ορίζουμε τα στοιχεία πίνακά του ως

$$\boxed{M_{k'k} := \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \hat{M}(\vec{r}, -i\hbar \vec{\nabla}) \Phi_k(\vec{r}) = \langle \Phi_{k'} | \hat{M} | \Phi_k \rangle} \quad (1.23)$$

Να σημειωθεί ότι επειδή  $\int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1 \Leftrightarrow \int \Psi^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) dV = 1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int dV \sum_{k'} C_{k'}^*(t) e^{i\Omega_{k'} t} \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{k'} \sum_k C_{k'}^*(t) C_k(t) e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k)t} \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \Phi_k(\vec{r}) = 1 \Rightarrow \\ &\boxed{\sum_k |C_k(t)|^2 = 1} \Rightarrow \sum_k |C_k(0)|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\sum_k |f_k|^2 = 1} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Έστω ηλεκτρικό δίπολο  $\Theta A$  ( $\Theta$ : θετικό,  $A$ : αρνητικό) με φορτίο  $q > 0$  στο  $\Theta$  και  $-q < 0$  στο  $A$ . Η ηλεκτρική διπολική ροπή ορίζεται ως

$$\vec{\mathcal{P}} := q\vec{d} \quad (1.25)$$

## 1.2 Διαταραγμένο σύστημα.

Χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών.

Διπολική Ροπή.

Προσέγγιση Διπόλου.

5

όπου  $\vec{d} = A\vec{\Theta}$ . Θεωρούμε το άτομο του υδρογόνου, οπότε το ηλεκτρικό φορτίο στο  $\Pi \equiv \Theta$  είναι  $q = e > 0$ , ενώ στο  $H \equiv A$  είναι  $-q = -e < 0$ , και  $\vec{d} = A\vec{\Theta} = H\vec{\Pi}$ . Αν  $O$  είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων, ονομάζουμε  $\vec{r}_H$  το διάνυσμα θέσεως του ηλεκτρονίου ως προς  $O$ ,  $\vec{R}$  το διάνυσμα θέσεως του πυρήνα ως προς  $O$ , ενώ  $\vec{r} = \vec{\Pi H} = \vec{\Theta A}$  το διάνυσμα θέσεως του ηλεκτρονίου ως προς τον πυρήνα. Άρα  $\vec{d} = -\vec{r}$ , οπότε

$$\vec{P} = q\vec{d} = e(-\vec{r}) = -e\vec{r} \quad (1.26)$$

Περιοριζόμαστε τώρα σε δυνάμεις που προέρχονται από το ηλεκτρικό πεδίο οδεύοντος μονοχρωματικού και πολωμένου ΗΜ κύματος

$$\vec{E} = \vec{E}_a \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r}_H - \omega t + \phi)]$$

όπου το  $\vec{E}_a$  καθορίζει την πόλωση του κύματος και  $\omega = 2\pi\nu$  είναι η κυκλική συχνότητα,  $\nu$  είναι η συχνότητα.  $\vec{k}$  είναι το κυματόνυσμα με μέτρο  $k = 2\pi/\lambda$ , όπου  $\lambda$  είναι το μήκος κύματος.  $\phi$  είναι κάποια αυθαίρετη φάση. Όμως θα θεωρήσουμε ότι η θέση του ηλεκτρονίου  $\vec{r}_H$  δεν διαφέρει σημαντικά από τη θέση του πυρήνα  $\vec{R}$  για την κλίμακα μεγέθους που μας αφορά εδώ. Δηλαδή  $\vec{r}_H \simeq \vec{R}$ . Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι ότι θεωρούμε οπτικά μήκη κύματος. Αν π.χ.  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , τότε, δεδομένου ότι το μέγεθος της "τροχιάς" του ηλεκτρονίου είναι της τάξεως της ακτίνας Bohr  $a_0 \simeq 0.529 \text{ \AA} = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m} \simeq 0.5 \cdot 10^{-1} \text{ nm}$ , προκύπτει

$$\frac{\lambda}{a_0} = \frac{500 \text{ nm}}{0.5 \cdot 10^{-1} \text{ nm}} = \frac{5 \cdot 10^2}{5 \cdot 10^{-2}} = 10^4 \Rightarrow \lambda \gg a_0 \sim |\vec{r}|$$

Δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι πρακτικά ομογενές. Δεν έχει πρακτικά χωρική εξάρτηση. Συνεπώς

$$\vec{E} \approx \vec{E}_a \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega t + \phi)] = \underbrace{\vec{E}_a \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{R} + \phi)]}_{\vec{E}_0} \exp(-i\omega t),$$

οπότε

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t) = \vec{E}(t) \quad (1.27)$$

Δηλαδή συμπεριλάβαμε το  $\exp[i(\vec{k} \cdot \vec{R} + \phi)]$  στο πλάτος θεωρώντας ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει πρακτικά ΜΟΝΟ ΧΡΟΝΙΚΗ εξάρτηση.

Περαιτέρω, ας χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο  $V$  για το δυναμικό και το σύμβολο  $U$  για τη δυναμική ενέργεια. Μπορούμε να γράψουμε

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}V \\ dV &= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$$

$$V(\vec{r}, t) - V(\vec{0}, t) = -\vec{E} \cdot \vec{r}$$

Εννοείται ότι για να γίνει αυτό κατά την ολοκλήρωση υποθέσαμε ότι το  $\vec{\mathcal{E}}$  είναι ανεξάρτητο της θέσεως. Αν πολλαπλασιάσουμε με  $(-e)$  βρίσκουμε τη δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου λόγω της διαταραχής

$$U(\vec{r}, t) - U(\vec{0}, t) = e\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r}$$

οπότε, εκ της Εξ. 1.26 προκύπτει

$$\boxed{U(\vec{r}, t) = e\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r} = -\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}}(t)} \quad (1.28)$$

Το σύνολο των άνωθεν υποθέσεων, οι οποίες οδήγησαν στη δυναμική ενέργεια διαταραχής της Εξ. 1.28, ονομάζεται προσέγγιση διπόλου (dipole approximation).

$$\vec{\mathcal{P}} := q\vec{d} = e(-\vec{r}) \Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{P}} = -e\vec{r}} \quad (1.29)$$

$$\vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{z} = (-e)\vec{r} \cdot \hat{z} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_z = -ez} \quad (1.30)$$

Δείξαμε ότι για οπτικά μήκη κύματος μπορούμε να γράψουμε (Εξ. 1.27)

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) = \vec{\mathcal{E}}(t)}$$

Θεωρώντας ότι η πόλωση είναι στην κατεύθυνση  $\hat{z}$  και παίρνοντας το πραγματικό μέρος της Εξ. 1.27 έχουμε

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 \hat{z} \cos \omega t}$$

Άρα

$$U_{\mathcal{E}} = -\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}} = -(-e)\vec{r} \cdot \mathcal{E}_0 \hat{z} \cos \omega t \Rightarrow \boxed{U_{\mathcal{E}} = e\mathcal{E}_0 z \cos \omega t} \quad (1.31)$$

Ας εστιάσουμε τώρα στα στοιχεία πίνακα της δυναμικής ενέργειας της διαταραχής

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r}) = \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) z \Phi_k(\vec{r}) e\mathcal{E}_0 \cos \omega t \Rightarrow \boxed{U_{\mathcal{E}k'k}(t) = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) z \Phi_k(\vec{r})} \quad (1.32)$$

Ας ονομάσουμε και τα στοιχεία πίνακα της συντεταγμένης  $z$

$$z_{k'k} := \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) z \Phi_k(\vec{r}) \quad (1.33)$$

τα οποία έχουν τις ιδιότητες

$$z_{k'k}^* = z_{kk'} \quad z_{kk} = \int dV \underbrace{|\Phi_k(\vec{r})|^2}_{\text{άρτια}} \underbrace{z}_{\text{περιττή}} = 0 \quad (1.34)$$

## 1.2 Διαταραγμένο σύστημα.

Χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών.

Διπολική Ροπή.

Προσέγγιση Διπόλου.

7

Δηλαδή τα μη διαγώνια στοιχεία είναι συμμετρικά, ενώ τα διαγώνια στοιχεία μηδενίζονται. Η δεύτερη ιδιότητα οφείλεται στο ότι σε συστήματα όπως τα άτομα, τα κβαντικά φρέατα κ.ο.κ. οι ιδιοσυναρτήσεις είναι άρτιες ή περιπτές. Οπότε, το τετράγωνο του μέτρου τους είναι άρτια συνάρτηση.

Εν τέλει, τα στοιχεία πίνακα της δυναμικής ενέργειας της διαταραχής μπορούν να γραφούν ως

$$U_{\varepsilon k'k}(t) = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t z_{k'k} \quad (1.35)$$

Σε ένα δισταθμικό σύστημα ή για τις κατώτερες δύο στάθμες ενός ατόμου ή μιας κβαντικής τελείας, διαλέγουμε τα φωτόνια του ΗΜ πεδίου να ταιριάζουν αρκετά ενεργειακά με την ενεργειακή διαφορά των δύο σταθμών, δηλαδή  $\hbar\omega = \hbar\nu \sim E_2 - E_1$ , χωρίς να είναι υποχρεωτικό να ταυτίζονται ακριβώς. Αυτή η υπόθεση θα μας χρειαστεί αργότερα στη Rotating Wave Approximation (Προσέγγιση Περιστρεφόμενου Κύματος).

Στο δισταθμικό σύστημα ( $k = 1$  ή  $k = 2$ ) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon 12}(t) &= e\mathcal{E}_0 \cos \omega t z_{12} & U_{\varepsilon 12}(t) &= -\mathcal{P}_{z12} \mathcal{E}_0 \cos \omega t \\ U_{\varepsilon 21}(t) &= e\mathcal{E}_0 \cos \omega t z_{21} & \text{ή} & U_{\varepsilon 21}(t) &= -\mathcal{P}_{z21} \mathcal{E}_0 \cos \omega t \\ U_{\varepsilon kk}(t) &= e\mathcal{E}_0 \cos \omega t z_{kk} = 0 & U_{\varepsilon kk}(t) &= 0 \end{aligned}$$

Η 2η στήλη εξάγεται από την 1η επειδή  $\vec{\mathcal{P}} = -e\vec{r} \Rightarrow \mathcal{P}_z = -ez$ , οπότε τα αντίστοιχα στοιχεία πίνακα είναι  $\mathcal{P}_{zk'k} = -ez_{k'k}$ . Άρα η 1.35 γίνεται

$$U_{\varepsilon k'k}(t) = -\mathcal{P}_{zk'k} \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (1.36)$$

Εάν οι ιδιοσυναρτήσεις μας είναι πραγματικές, τότε στο δισταθμικό μας σύστημα

$$\mathcal{P}_{z12} = -ez_{12} = -ez_{21} = \mathcal{P}_{z21} := \mathcal{P}_z := \mathcal{P} \quad (1.37)$$

και αυτό το  $\mathcal{P}$  χρησιμοποιούμε στην επόμενη Ενότητα. Οπότε

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon 12}(t) &= -\mathcal{P} \mathcal{E}_0 \cos \omega t \\ U_{\varepsilon 21}(t) &= -\mathcal{P} \mathcal{E}_0 \cos \omega t \\ U_{\varepsilon kk}(t) &= 0, \quad k = 1 \text{ ή } k = 2 \end{aligned}$$

Οπότε, η (1.36) γίνεται

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon k'k}(t) &= -\mathcal{P} \mathcal{E}_0 \cos \omega t & k &\neq k' \\ U_{\varepsilon k'k}(t) &= 0 & k &= k' \end{aligned} \quad (1.38)$$

που σημαίνει ότι το μέγεθος της διαταραχής είναι ανάλογο του  $\mathcal{P} \mathcal{E}_0$  πράγμα που εκφράζεται από τη **συχνότητα Rabi**,  $\Omega_R = \frac{\mathcal{P} \mathcal{E}_0}{\hbar}$ . Ο **αποσυντονισμός (detuning)**,  $\Delta = \omega - \Omega$ , και η **συχνότητα Rabi**,  $\Omega_R$ , καθορίζουν το πλάτος και την περίοδο των ταλαντώσεων του δισταθμικού συστήματος, όπως θα φανεί παρακάτω.

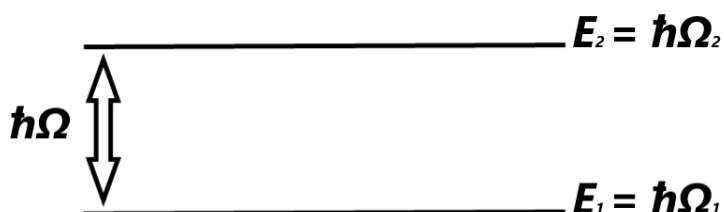
## Κεφάλαιο 2

# Δισταθμικό Σύστημα εντός Προσεγγίσεως Περιστρεφόμενου Κύματος. [1, 2]

Σε αυτό το κεφάλαιο θα λυθεί το Γραμμικό Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων 1<sup>ης</sup> Τάξεως (Εξ. 1.21), το οποίο αν λυθεί, ουσιαστικά λύνεται το πρόβλημα (1.14), (1.15). Το σύστημα αυτό θα λυθεί σε ένα δισταθμικό σύστημα. Οι αρχικές συνθήκες που θα χρησιμοποιηθούν θα είναι οι εξής:

1.  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη,
2.  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη και
3.  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}, C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$ , δηλαδή στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται και στις δύο στάθμες με πιθανότητα  $|C_1(0)|^2 = |C_2(0)|^2 = \frac{1}{2}$

Παρακάτω παρουσιάζεται η σχηματική αναπαράσταση ενός δισταθμικού συστήματος.



Είχαμε καταλήξει στην (Εξ. 1.21), δηλαδή στην

$$\dot{C}_{k'}(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_k C_k(t) e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k)t} U_{\mathcal{E}k'k}(t)$$

Ορίζουμε για το δισταθμικό σύστημα:

$$\Omega := \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \quad (2.1)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (Εξ. 1.12).

Θα χρησιμοποιήσουμε και την ταυτότητα  $\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ .

$$\begin{aligned} \boxed{k' = 1} \quad \dot{C}_1(t) &= -\frac{i}{\hbar} C_1(t) e^{i(\Omega_1 - \Omega_1)t} \overset{1}{U_{\mathcal{E}11}(t)} \overset{0}{-} - \frac{i}{\hbar} C_2(t) e^{i(\Omega_1 - \Omega_2)t} U_{\mathcal{E}12}(t) \\ \dot{C}_1(t) &= -\frac{i}{\hbar} C_2(t) e^{-i\Omega t} (-\mathcal{E}_0) \mathcal{P} \cos \omega t = \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{\hbar} C_2(t) e^{-i\Omega t} \left\{ \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right\} \\ \boxed{\dot{C}_1(t)} &= \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \left[ e^{-i(\Omega - \omega)t} + e^{-i(\Omega + \omega)t} \right] C_2(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \boxed{k' = 2} \quad \dot{C}_2(t) &= -\frac{i}{\hbar} C_1(t) e^{i(\Omega_2 - \Omega_1)t} U_{\mathcal{E}21}(t) - \frac{i}{\hbar} C_2(t) e^{i(\Omega_2 - \Omega_2)t} \overset{1}{U_{\mathcal{E}22}(t)} \overset{0}{-} \\ \dot{C}_2(t) &= -\frac{i}{\hbar} C_1(t) e^{i\Omega t} (-\mathcal{E}_0) \mathcal{P} \cos \omega t = \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{\hbar} C_1(t) e^{i\Omega t} \left\{ \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right\} \\ \boxed{\dot{C}_2(t)} &= \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \left[ e^{i(\Omega + \omega)t} + e^{i(\Omega - \omega)t} \right] C_1(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Δηλαδή έχουμε τις ακόλουθες δύο εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη του δισταθμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} \boxed{\dot{C}_1(t)} &= C_2(t) \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \left[ e^{-i(\Omega - \omega)t} + \cancel{e^{-i(\Omega + \omega)t}} \right] \text{(0 RWA)} \\ \boxed{\dot{C}_2(t)} &= C_1(t) \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \left[ \cancel{e^{i(\Omega + \omega)t}} \text{(0 RWA)} + e^{i(\Omega - \omega)t} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι τα φωτόνια του ΗΜ πεδίου ταιριάζουν αρκετά ενεργειακά με την ενεργειακή διαφορά των δύο σταθμών, χωρίς να είναι υποχρεωτικό να ταυτίζονται ακριβώς, δηλαδή  $\hbar\omega \sim E_2 - E_1$  συνεπάγεται ότι  $\omega \sim \Omega_2 - \Omega_1 = \Omega$ . Επομένως, οι όροι με  $(\Omega - \omega)$  μεταβάλλονται αργά ενώ οι όροι με  $(\Omega + \omega)$  μεταβάλλονται γρήγορα. Άρα, σε οποιαδήποτε αξιοσημείωτη χρονική κλίμακα, αυτές οι γρήγορες ταλαντώσεις θα έχουν κατά μέσο όρο μηδενική ή ας πούμε περίπου

μηδενική επίδραση στο αποτέλεσμα. Η προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος (**rotating wave approximation, RWA**) είναι ο ισχυρισμός ότι μπορούμε να αγνοήσουμε αυτούς τους γρήγορους όρους. Άρα, μετά την RWA οι Εξισώσεις (2.4) γίνονται

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= C_2(t) \frac{i}{2} \underbrace{\frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{\hbar}}_{\Omega_R} e^{-i \underbrace{(\Omega - \omega)}_{-\Delta} t} \\ \dot{C}_2(t) &= C_1(t) \frac{i}{2} \underbrace{\frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{\hbar}}_{\Omega_R} e^{i \underbrace{(\Omega - \omega)}_{-\Delta} t} \end{aligned}} \quad (2.5)$$

Ορίσαμε τον αποσυντονισμό (detuning) ως

$$\boxed{\Delta := \omega - \Omega} \quad (2.6)$$

και τη συχνότητα Rabi <sup>1</sup> ως

$$\boxed{\Omega_R := \frac{\mathcal{P} \mathcal{E}_0}{\hbar}} \quad (2.7)$$

Στη συνέχεια θα κάνουμε ένα μετασχηματισμό για να πάρουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές. Δηλαδή

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \mathbb{C}_1(t) e^{-\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} \\ C_2(t) &= \mathbb{C}_2(t) e^{\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= \dot{\mathbb{C}}_1(t) e^{-\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} + \mathbb{C}_1(t) \left( \frac{-i(\Omega - \omega)}{2} \right) e^{-\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} \\ \dot{C}_2(t) &= \dot{\mathbb{C}}_2(t) e^{\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} + \mathbb{C}_2(t) \left( \frac{i(\Omega - \omega)}{2} \right) e^{\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} \end{aligned}$$

οπότε η (2.5) γίνεται

$$\begin{cases} \dot{\mathbb{C}}_1(t) e^{-\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} + \mathbb{C}_1(t) \left( \frac{-i(\Omega - \omega)}{2} \right) e^{-\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} = \mathbb{C}_2(t) e^{\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} \frac{i \mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} e^{-i(\Omega - \omega)t} \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) e^{\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} + \mathbb{C}_2(t) \left( \frac{i(\Omega - \omega)}{2} \right) e^{\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} = \mathbb{C}_1(t) e^{-\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} \frac{i \mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} e^{i(\Omega - \omega)t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbb{C}}_1(t) + \mathbb{C}_1(t) \left( \frac{-i(\Omega - \omega)}{2} \right) = \mathbb{C}_2(t) e^{\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} e^{-\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} \frac{i \mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} e^{-i(\Omega - \omega)t} \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) + \mathbb{C}_2(t) \left( \frac{i(\Omega - \omega)}{2} \right) = \mathbb{C}_1(t) e^{-\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} e^{-\frac{i(\Omega - \omega)t}{2}} \frac{i \mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} e^{i(\Omega - \omega)t} \end{cases}$$

<sup>1</sup>Από τον Isidor Isaak Rabi (1898-1988).



$$\begin{cases} \dot{\mathbb{C}}_1(t) + \mathbb{C}_1(t) \left( \frac{-i(\Omega - \omega)}{2} \right) = \mathbb{C}_2(t) \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) + \mathbb{C}_2(t) \left( \frac{i(\Omega - \omega)}{2} \right) = \mathbb{C}_1(t) \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \\ \dot{\mathbb{C}}_1(t) = \left( \frac{i(\Omega - \omega)}{2} \right) \mathbb{C}_1(t) + \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \mathbb{C}_2(t) \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) = \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \mathbb{C}_1(t) - \left( \frac{i(\Omega - \omega)}{2} \right) \mathbb{C}_2(t) \end{cases}$$

και έχοντας ορίσει  $\Delta := \omega - \Omega$  (Εξ. 2.6) και  $\Omega_R := \frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{\hbar}$  (Εξ. 2.7)

$$\begin{cases} \dot{\mathbb{C}}_1(t) = -\frac{i\Delta}{2} \mathbb{C}_1(t) + \frac{i\Omega_R}{2} \mathbb{C}_2(t) \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) = +\frac{i\Omega_R}{2} \mathbb{C}_1(t) + \frac{i\Delta}{2} \mathbb{C}_2(t) \end{cases}$$

οπότε καταλήγουμε σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{\mathbb{C}}_1(t) \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1(t) \\ \mathbb{C}_2(t) \end{bmatrix}} \quad (2.9)$$

Το άνω δεξιά στοιχείο μήτρας θα ήταν  $\frac{i\Omega_R^*}{2}$  εάν οι ιδιοσυναρτήσεις μας δεν ήταν πραγματικές οπότε τότε π.χ. θα ορίζαμε  $\mathcal{P}_{z21} = -ez_{21} := \mathcal{P}$ , οπότε  $\mathcal{P}_{z12} = -ez_{12} = \mathcal{P}_{z21}^* = \mathcal{P}^*$ .

Για να λύσουμε το σύστημα της Εξ. (2.9) εισάγουμε το διάνυσμα

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1(t) \\ \mathbb{C}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

οπότε

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbb{C}}_1(t) \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

και ονομάζοντας

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} := -iA \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

το σύστημα της Εξ. 2.9 γράφεται

$$\boxed{\dot{\vec{x}}(t) = \tilde{A} \vec{x}(t)} \quad (2.13)$$

Ας δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής

$$\vec{x}(t) = \vec{v} e^{\lambda t} \quad (2.14)$$

12 2. Δισταθμικό Σύστημα εντός Προσεγγίσεως Περιστρεφόμενου Κύματος.

οπότε

$$\vec{v} \tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda} t} = \tilde{A} \vec{v} e^{\tilde{\lambda} t} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \tilde{A} \vec{v} = \tilde{\lambda} \vec{v} \\ \tilde{\lambda} := -i\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow -iA\vec{v} = -i\lambda\vec{v} \Rightarrow \underset{\text{πρόβλημα ιδιοτιμών}}{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}$$

Δηλαδή ουσιαστικά το όλο θέμα ανάγεται στο πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}} \quad (2.15)$$

από το οποίο θα προκύψουν τα κανονικοποιημένα ιδιοανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2$ . Έχοντας ελέγξει ότι τα κανονικοποιημένα ιδιοανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, η λύση του προβλήματός μας είναι

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^2 c_k \vec{v}_k e^{-i\lambda_k t}}$$

όπου βέβαια  $\tilde{\lambda}_k = -i\lambda_k$ . Από τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τα  $c_k$ . Πρώτα πρώτα, όμως, ας βρούμε τις ιδιοτιμές.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

όπου I ο μοναδιαίος  $2 \times 2$  πίνακας. Οπότε

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} - \lambda & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

στη γενική περίπτωση

$$\lambda_{2,1} = \pm \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}, \quad (2.16)$$

ενώ στην περίπτωση συντονισμού ( $\Delta = 0$ )

$$\lambda_{2,1} = \pm \frac{\Omega_R}{2}. \quad (2.17)$$

## 2.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμηβ

### 2.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.

Παρακάτω παρουσιάζεται η λύση του συστήματος (2.9) χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη. Τότε, λόγω του μετασχηματισμού (2.8) συνάγεται ότι  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ .

#### 2.1.1 Περίπτωση αποσυντονισμού: $\Delta \neq 0$ .

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \text{ και } \lambda_{2,1} = \pm \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

$$\text{Για } \lambda_1 = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} := -\lambda < 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta}{2}v_{11} - \frac{\Omega_R}{2}v_{21} = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}v_{11} \Rightarrow \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}\right)v_{11} = \frac{\Omega_R}{2}v_{21} \quad (1\eta)$$

$$-\frac{\Omega_R}{2}v_{11} - \frac{\Delta}{2}v_{21} = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}v_{21} \Rightarrow -\frac{\Omega_R}{2}v_{11} = \left(\frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}\right)v_{21} \quad (2\eta)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}\right)v_{11} = \frac{\Omega_R}{2} \frac{-\frac{\Omega_R}{2}v_{11}}{\left(\frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}\right)} \quad * \text{ (εάν } v_{11} \neq 0 \Rightarrow)$$

$$\frac{\Delta^2}{4} - \frac{\Omega_R^2}{4} - \frac{\Delta^2}{4} = -\frac{\Omega_R^2}{4},$$

που ισχύει. Αρκεί δηλαδή  $v_{11} \neq 0$ ,<sup>\*</sup> οπότε π.χ. από την (1η) συνάγεται

$$v_{21} = \frac{\frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}}v_{11} \quad \text{ή} \quad v_{21} = \alpha v_{11} \quad \text{άρα} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha\beta \end{bmatrix}$$

$$\text{Για να είναι κανονικοποιημένο θα πρέπει } \beta^2 + \alpha^2\beta^2 = 1 \text{ π.χ. } \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \end{bmatrix}$$

14 2. Δισταθμικό Σύστημα εντός Προσεγγίσεως Περιστρεφόμενου Κύματος.

$$\text{Για } \lambda_2 = + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} := +\lambda > 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta}{2} v_{12} - \frac{\Omega_R}{2} v_{22} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} v_{12} \Rightarrow \left( \frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \right) v_{12} = \frac{\Omega_R}{2} v_{22} \quad (1\eta)$$

$$-\frac{\Omega_R}{2} v_{12} - \frac{\Delta}{2} v_{22} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} v_{22} \Rightarrow -\frac{\Omega_R}{2} v_{12} = \left( \frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \right) v_{22} \quad (2\eta)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \right) v_{12} = \frac{\Omega_R}{2} \frac{-\frac{\Omega_R}{2} v_{12}}{\left( \frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \right)} \quad * (\text{εάν } v_{12} \neq 0) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta^2}{4} - \frac{\Omega_R^2}{4} - \frac{\Delta^2}{4} = -\frac{\Omega_R^2}{4},$$

που ισχύει. Αρκεί δηλαδή  $v_{12} \neq 0$ , οπότε π.χ. από την (1η) συνάγεται

$$\Rightarrow v_{22} = \frac{\frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}} v_{12} \quad \text{ή} \quad v_{22} = \alpha' v_{12} \quad \text{άρα} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta' \\ \alpha' \beta' \end{bmatrix}$$

Για να είναι κανονικοποιημένο θα πρέπει  $\beta'^2 + \alpha'^2 \beta'^2 = 1$  π.χ.  $\beta' = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \\ \frac{\alpha'}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \end{bmatrix}$

2.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη  $\mu_B$

Άρα,

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = c_1\vec{v}_1e^{-i\lambda_1t} + c_2\vec{v}_2e^{-i\lambda_2t} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{1+\alpha^2}}e^{-i\lambda_1t} + \frac{c_2}{\sqrt{1+\alpha'^2}}e^{-i\lambda_2t} \\ \frac{c_1\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}e^{-i\lambda_1t} + \frac{c_2\alpha'}{\sqrt{1+\alpha'^2}}e^{-i\lambda_2t} \end{bmatrix}$$

Έστωσαν Αρχικές Συνθήκες  $C_1(0) = 1$  και  $C_2(0) = 0$ . Επομένως

$$\begin{cases} 1 = \frac{c_1}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{1+\alpha'^2}} \\ 0 = \frac{c_1\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{c_2\alpha'}{\sqrt{1+\alpha'^2}} \Rightarrow c_2 = -\frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\sqrt{1+\alpha'^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}} c_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{c_1}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\sqrt{1+\alpha'^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{c_1}{\sqrt{1+\alpha'^2}} = c_1 \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' \sqrt{1+\alpha^2}} \Rightarrow c_1 = \frac{\alpha' \sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha' - \alpha} \\ c_2 = -\frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\sqrt{1+\alpha'^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{\alpha' \sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha' - \alpha} \Rightarrow c_2 = -\frac{\alpha \sqrt{1+\alpha'^2}}{\alpha' - \alpha} \end{cases}$$

Επομένως

$$\begin{bmatrix} C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha'}{\alpha' - \alpha} e^{-i\lambda_1t} - \frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} e^{-i\lambda_2t} \\ \frac{\alpha\alpha'}{\alpha' - \alpha} e^{-i\lambda_1t} - \frac{\alpha\alpha'}{\alpha' - \alpha} e^{-i\lambda_2t} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές που εμφανίζονται στην άνω εξίσωση της 2.18.

$$\alpha' - \alpha = \frac{\frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}} - \frac{\frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}} = -\frac{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{\Omega_R}$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha' - \alpha} = -\frac{\cancel{\Omega_R}}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \frac{\Delta - \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{\cancel{\Omega_R}} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} - \Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} = -\frac{\cancel{\Omega_R}}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \frac{\Delta + \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{\cancel{\Omega_R}} = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} + \Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}$$

Οπότε η άνω εξίσωση γίνεται

$$C_1(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} = \underbrace{\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} - \Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}}_{k_1} e^{i\lambda t} + \underbrace{\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} + \Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}}_{k_2} e^{-i\lambda t} \Rightarrow$$

$$C_1(t) = (k_1 e^{i\lambda t} + k_2 e^{-i\lambda t}) e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \Rightarrow$$

$$|C_1(t)|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_1 k_2 e^{2i\lambda t} + k_1 k_2 e^{-2i\lambda t} = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \cos(2\lambda t) \Rightarrow$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2 + \Delta^2 + \Delta^2 - 2\Delta\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{4(\Omega_R^2 + \Delta^2)} + \frac{\Omega_R^2 + \Delta^2 + \Delta^2 + 2\Delta\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{4(\Omega_R^2 + \Delta^2)}$$

$$+ 2 \frac{\Omega_R^2 + \Delta^2 - \Delta^2}{4(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \cos(2\lambda t) \Rightarrow$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{2(\Omega_R^2 + 2\Delta^2)}{4(\Omega_R^2 + \Delta^2)} + \frac{2\Omega_R^2}{4(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \cos(2\lambda t) = \frac{\Omega_R^2 + 2\Delta^2 + \Omega_R^2 \cos(2\lambda t)}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \Rightarrow$$

$$\boxed{P_1(t) = |C_1(t)|^2 = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t)} \quad (2.19)$$

$$\text{όπου } \lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

Η μέγιστη τιμή του  $|C_1(t)|^2$  είναι 1, ενώ η ελάχιστη τιμή του είναι  $1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2}$  και το πλάτος της ταλαντώσεως του είναι

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \quad (2.20)$$

Ας υπολογίσουμε τον συντελεστή που εμφανίζεται στην κάτω εξίσωση της (2.18).

$$\frac{\alpha\alpha'}{\alpha' - \alpha} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} + \Delta}{\Omega_R} \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} - \Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} = \frac{\Omega_R^2 + \Delta^2 - \Delta^2}{2\Omega_R\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} = \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}$$

οπότε:

$$C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} = \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} e^{+i\lambda t} - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} e^{-i\lambda t} = \frac{\Omega_R}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} i \sin(\lambda t) \Rightarrow$$

$$\boxed{P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t)} \quad (2.21)$$

$$\text{όπου } \lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

Η μέγιστη τιμή του  $|C_2(t)|^2$  είναι  $\frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2}$  και η ελάχιστη 0, άρα το πλάτος της ταλαντώσεως

είναι  $\mathcal{A} = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2}$  σε συμφωνία με την Εξ. (2.20).

Όπως φαίνεται από τις (Εξ. 2.19) και (2.21) η περίοδος των ταλαντώσεων είναι

$$\boxed{T_R = \frac{2\pi}{2\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}} \quad (2.22)$$

Υπενθυμίζεται ότι  $P_k(t) = |C_k(t)|^2$ ,  $k = 1, 2$ , είναι οι πιθανότητες παρουσίας του ηλεκτρονίου στη στάθμη  $k$ . Από τις (Εξ. 2.22) και (2.20) είναι φανερό ότι καθώς απομακρυνόμαστε από τον συντονισμό, δηλαδή καθώς αυξάνεται το  $|\Delta|$ , η περίοδος και το πλάτος των ταλαντώσεων μικραίνουν.

## 2.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη7

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν μικρύνουμε το μέγεθος της διαταραχής, δηλαδή τη συχνότητα Rabi  $\Omega_R$ , σε σχέση με την απόλυτη τιμή του αποσυντονισμού  $|\Delta|$  ( $\Omega_R \ll |\Delta|$ ).

$$\boxed{P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2\left(\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} t\right)} \quad (2.23)$$
$$\approx \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2} \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right), \quad \Omega_R \ll |\Delta|$$

Οπότε η περίοδος γίνεται  $T_R = 2\pi/|\Delta|$ . Η (Εξ. 2.23) εκφράζει το γεγονός ότι για πολύ μικρό  $\Omega_R$  προκύπτει πολύ μεγάλη περίοδος  $T_R$  πράγμα το οποίο σημαίνει αργή χρονική εξέλιξη.

Περαιτέρω ας δούμε τι συμβαίνει στο όριο απειροελάχιστης διαταραχής.

$$\lim_{\Omega_R \rightarrow 0} T_R = \lim_{\Omega_R \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} = \frac{2\pi}{|\Delta|} \quad (2.24)$$

$$\lim_{\Omega_R \rightarrow 0} \mathcal{A} = \lim_{\Omega_R \rightarrow 0} \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} = 0 \quad (2.25)$$

Δηλαδή στο όριο απειροελάχιστης διαταραχής το πλάτος των ταλαντώσεων μηδενίζεται, ενώ η περίοδος τους τείνει στο  $\frac{2\pi}{|\Delta|}$ , δηλαδή εξαρτάται μόνο από τον αποσυντονισμό.

### 2.1.2 Περίπτωση συντονισμού: $\Delta = 0$ .

Με  $\Delta = \omega - \Omega = 0$  και Αρχικές Συνθήκες  $C_1(0) = 1$ ,  $C_2(0) = 0$ , καταλήγουμε στην

$$\boxed{|C_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)} \quad (2.26)$$
$$\boxed{|C_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)}$$

Φυσικά  $|C_k(t)|^2 := P_k(t)$  είναι η πιθανότητα να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο στη στάθμη  $k$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Η περίοδος των ταλαντώσεων είναι

$$\boxed{T_R = \frac{2\pi}{\Omega_R}} \quad (2.27)$$

και το πλάτος των ταλαντώσεων είναι

$$\boxed{\mathcal{A} = 1} \quad (2.28)$$

## 2.2 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.

Παρακάτω παρουσιάζεται η λύση του συστήματος (2.9) χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη. Τότε, λόγω του μετασχηματισμού (2.8) συνάγεται ότι  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ .

### 2.2.1 Περίπτωση αποσυντονισμού: $\Delta \neq 0$ .

Όπως και προηγουμένως, για το πρώτο ιδιοδιάνυσμα θα έχουμε

$$\boxed{v_{21} = \frac{\frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}} v_{11}} \quad \text{ή} \quad v_{21} = \alpha v_{11} \quad \text{άρα} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha\beta \end{bmatrix},$$

οπότε, για να είναι κανονικοποιημένο θα πρέπει  $\beta^2 + \alpha^2 \beta^2 = 1$  π.χ.  $\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \end{bmatrix}$ ,

ενώ για δεύτερο ιδιοδιάνυσμα θα έχουμε

$$\boxed{v_{22} = \frac{\frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}} v_{12}} \quad \text{ή} \quad v_{22} = \alpha' v_{12} \quad \text{άρα} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta' \\ \alpha'\beta' \end{bmatrix},$$

οπότε, για να είναι κανονικοποιημένο θα πρέπει  $\beta'^2 + \alpha'^2 \beta'^2 = 1$  π.χ.  $\beta' = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \\ \frac{\alpha'}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \end{bmatrix}$ .

Άρα,

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = c_1 \vec{v}_1 e^{-i\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{-i\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} e^{-i\lambda_1 t} + \frac{c_2}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} e^{-i\lambda_2 t} \\ \frac{c_1 \alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} e^{-i\lambda_1 t} + \frac{c_2 \alpha'}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} e^{-i\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

με Αρχικές Συνθήκες  $C_1(0) = 0$  και  $C_2(0) = 1$ . Επομένως

$$\begin{cases} 0 = \frac{c_1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \Rightarrow c_2 = -\frac{\sqrt{1 + \alpha'^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} c_1 \\ 1 = \frac{c_1 \alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{c_2 \alpha'}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{c_1 \alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} - \frac{\sqrt{1 + \alpha'^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \frac{c_1 \alpha'}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} = c_1 \frac{\alpha - \alpha'}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \Rightarrow c_1 = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha - \alpha'} \\ c_2 = -\frac{\sqrt{1 + \alpha'^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha - \alpha'} \Rightarrow c_2 = -\frac{\sqrt{1 + \alpha'^2}}{\alpha - \alpha'} \end{cases}$$



## 2.2 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη 19

Επομένως έχουμε:

$$\begin{bmatrix} C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha-\alpha'}e^{-i\lambda_1 t} - \frac{1}{\alpha-\alpha'}e^{-i\lambda_2 t} \\ \frac{\alpha}{\alpha-\alpha'}e^{-i\lambda_1 t} - \frac{\alpha'}{\alpha-\alpha'}e^{-i\lambda_2 t} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Οι συντελεστές της παραπάνω σχέσης (2.29) θα είναι:

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha' &= \frac{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{\Omega_R} \\ \frac{1}{\alpha - \alpha'} &= \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \\ \frac{\alpha'}{\alpha - \alpha'} &= \frac{\Delta - \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \\ \frac{\alpha}{\alpha - \alpha'} &= \frac{\Delta + \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \end{aligned}$$

Από την πάνω εξίσωση της (2.29) θα έχουμε:

$$C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} = \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}e^{+i\lambda t} - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}e^{-i\lambda t} = \frac{\Omega_R}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}i \sin(\lambda t) \Rightarrow$$

$$\boxed{P_1(t) = |C_1(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t)} \quad (2.30)$$

$$\text{όπου } \lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

Από την κάτω εξίσωση της (2.29) θα έχουμε:

$$C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} = \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}(e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}) + \frac{1}{2}(e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}) \Rightarrow$$

$$C_2(t) = (\cos(\lambda t) + \frac{\Delta}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}i \sin(\lambda t))e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \Rightarrow$$

$$|C_2(t)|^2 = \cos^2(\lambda t) + \frac{\Delta^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t) = 1 - \sin^2(\lambda t) + \frac{\Delta^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t) \Rightarrow$$

$$\boxed{P_2(t) = |C_2(t)|^2 = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t)} \quad (2.31)$$

$$\text{όπου } \lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η διαφορά με την περίπτωση αρχικών συνθηκών  $C_1(t) = 1$  και  $C_2(t) = 0$  είναι ότι οι εξισώσεις είναι ανάποδα δηλαδή αυτά που ίσχυαν για την στάθμη 1 ισχύουν τώρα για την στάθμη 2 και αντιστρόφως.

### 2.2.2 Περίπτωση συντονισμού: $\Delta = 0$ .

Για την περίπτωση του συντονισμού δηλαδή για  $\Delta = 0$  θα έχουμε:

$$\begin{array}{l} P_1(t) = |C_1(t)|^2 = \sin^2(\lambda t) \\ P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \cos^2(\lambda t) \end{array} \quad (2.32)$$

$$\text{όπου } \lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}.$$

## 2.3 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.

Παρακάτω παρουσιάζεται η λύση του συστήματος (2.9) χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ ,  $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$ , δηλαδή στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί με ίση πιθανότητα και στις δύο στάθμες. Δηλαδή έχουμε:  $|C_1(0)|^2 = |C_2(0)|^2 = \frac{1}{2}$ . Τότε, λόγω του μετασχηματισμού (2.8) συνάγεται ότι  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ ,  $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$ .

### 2.3.1 Περίπτωση αποσυντονισμού: $\Delta \neq 0$ .

Για το πρώτο ιδιοάνυσμα θα έχουμε

$$\boxed{v_{21} = \frac{\frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}} v_{11}} \quad \text{ή} \quad v_{21} = \alpha v_{11} \quad \text{άρα} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha\beta \end{bmatrix},$$

οπότε, για να είναι κανονικοποιημένο θα πρέπει  $\beta^2 + \alpha^2\beta^2 = 1$  π.χ.  $\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \end{bmatrix}$ ,

ενώ, για το δεύτερο ιδιοάνυσμα θα έχουμε

$$\Rightarrow \boxed{v_{22} = \frac{\frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}} v_{12}} \quad \text{ή} \quad v_{22} = \alpha' v_{12} \quad \text{άρα} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta' \\ \alpha'\beta' \end{bmatrix},$$

οπότε, για να είναι κανονικοποιημένο θα πρέπει  $\beta'^2 + \alpha'^2\beta'^2 = 1$  π.χ.  $\beta' = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \\ \frac{\alpha'}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \end{bmatrix}$ .

Άρα,

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = c_1\vec{v}_1e^{-i\lambda_1t} + c_2\vec{v}_2e^{-i\lambda_2t} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}e^{-i\lambda_1t} + \frac{c_2}{\sqrt{1 + \alpha'^2}}e^{-i\lambda_2t} \\ \frac{c_1\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}e^{-i\lambda_1t} + \frac{c_2\alpha'}{\sqrt{1 + \alpha'^2}}e^{-i\lambda_2t} \end{bmatrix}$$

με αρχικές συνθήκες  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ ,  $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$ .

Επομένως,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta} = \frac{c_1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} = \frac{c_1\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{c_2\alpha'}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}(-\alpha) = \frac{c_1(-\alpha)}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{c_2(-\alpha)}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} = \frac{c_1\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{c_2\alpha'}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \end{array} \right\} \text{ Προσθέτω κατά μέλη} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi} - \alpha e^{i\theta}) = \frac{(\alpha' - \alpha)c_2}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \Rightarrow c_2 = \sqrt{\frac{1 + \alpha'^2}{2}} \frac{e^{i\phi} - \alpha e^{i\theta}}{\alpha' - \alpha}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta} = \frac{c_1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} = \frac{c_1\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{c_2\alpha'}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}(-\alpha') = \frac{c_1(-\alpha')}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{c_2(-\alpha')}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} = \frac{c_1\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{c_2\alpha'}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Προσθέτω κατά μέλη}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi} - \alpha' e^{i\theta}) = \frac{(\alpha - \alpha')c_2}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \Rightarrow c_1 = \sqrt{\frac{1 + \alpha^2}{2}} \frac{e^{i\phi} - \alpha' e^{i\theta}}{\alpha - \alpha'}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{bmatrix} C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t)e^{+i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{i\phi} - \alpha' e^{i\theta}}{\sqrt{2}(\alpha - \alpha')} e^{-i\lambda_1 t} - \frac{e^{i\phi} - \alpha e^{i\theta}}{\sqrt{2}(\alpha - \alpha')} e^{-i\lambda_2 t} \\ \frac{(e^{i\phi} - \alpha' e^{i\theta})\alpha}{\sqrt{2}(\alpha - \alpha')} e^{-i\lambda_1 t} - \frac{(e^{i\phi} - \alpha e^{i\theta})\alpha'}{\sqrt{2}(\alpha - \alpha')} e^{-i\lambda_2 t} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (2.33)$$

$$\begin{bmatrix} C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_1(t)e^{+i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha - \alpha')} \begin{bmatrix} e^{i\phi}(e^{-i\lambda_1 t} - e^{-i\lambda_2 t}) - e^{i\theta}(\alpha' e^{-i\lambda_1 t} - \alpha e^{-i\lambda_2 t}) \\ e^{i\phi}(\alpha e^{-i\lambda_1 t} - \alpha' e^{-i\lambda_2 t}) - e^{i\theta}(\alpha\alpha' e^{-i\lambda_1 t} - \alpha\alpha' e^{-i\lambda_2 t}) \end{bmatrix}$$

Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τους συντελεστές

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{\Delta + \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{\Omega_R} \\ \alpha' = \frac{\Delta - \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{\Omega_R} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha' e^{-i\lambda_1 t} - \alpha e^{-i\lambda_2 t} = \frac{\Delta}{\Omega_R}(e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}) - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{\Omega_R}(e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}) =$$

$$= \frac{2i\Delta}{\Omega_R} \sin(\lambda t) - \frac{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{\Omega_R} \cos(\lambda t).$$

Ομοίως έχουμε

$$\alpha e^{-i\lambda_1 t} - \alpha' e^{-i\lambda_2 t} = \frac{2i\Delta}{\Omega_R} \sin(\lambda t) + \frac{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{\Omega_R} \cos(\lambda t)$$

Τέλος έχουμε

$$\alpha\alpha' = -1 \quad \text{και} \quad \frac{1}{\alpha - \alpha'} = \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} [\cos(\lambda t)e^{i\theta} + i\frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}(\Omega_R e^{i\phi} - \Delta e^{i\theta})]e^{i\frac{\Delta}{2}t} \\ [\cos(\lambda t)e^{i\phi} + i\frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}(\Delta e^{i\phi} + \Omega_R e^{i\theta})]e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Για την άνω εξίσωση της (2.34) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 |C_1(t)|^2 &= \frac{1}{2} \left[ \cos^2(\lambda t) + \frac{\sin^2(\lambda t)}{\Omega_R^2 + \Delta^2} (\Omega_R^2 + \Delta^2 - \Omega_R \Delta e^{i(\phi-\theta)} - \Omega_R \Delta e^{-i(\phi-\theta)}) + \right. \\
 &\quad \left. + \cos(\lambda t) e^{-i\theta} i \frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} (\Omega_R e^{i\phi} - \Delta e^{i\theta}) + \right. \\
 &\quad \left. + \cos(\lambda t) e^{i\theta} (-i) \frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} (\Omega_R e^{-i\phi} - \Delta e^{-i\theta}) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \cos^2(\lambda t) + \sin^2(\lambda t) \left( 1 - \frac{\Omega_R \Delta}{\Omega_R^2 + \Delta^2} 2 \cos(\phi - \theta) \right) + i \frac{\cos(\lambda t) \sin(\lambda t)}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} 2i \Omega_R \sin(\phi - \theta) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R \Delta}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t) \cos(\phi - \theta) - \frac{\Omega_R}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \cos(\lambda t) \sin(\lambda t) \sin(\phi - \theta).
 \end{aligned}$$

Επιπλέον με τη χρήση των παρακάτω ταυτοτήτων

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \omega &= \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\omega)}{2} \\
 \cos(\phi - \theta) &= \cos(\theta - \phi) \\
 \sin(\phi - \theta) &= -\sin(\theta - \phi)
 \end{aligned}$$

προκύπτει

$$\boxed{|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \cos(\theta - \phi) (1 - \cos(2\lambda t)) + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) \sin(\theta - \phi)} \quad (2.35)$$

Για την κάτω εξίσωση της (2.34) έχουμε

$$\begin{aligned}
 |C_2(t)|^2 &= \frac{1}{2} \left[ \cos^2(\lambda t) + \frac{\sin^2(\lambda t)}{\Omega_R^2 + \Delta^2} (\Delta^2 + \Omega_R^2 + \Omega_R \Delta 2 \cos(\phi - \theta)) + \right. \\
 &\quad \left. + i \frac{\cos(\lambda t) \sin(\lambda t) e^{-i\phi}}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} (\Delta e^{i\phi} + \Omega_R e^{i\theta}) - \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{\cos(\lambda t) \sin(\lambda t) e^{i\phi}}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} (\Delta e^{-i\phi} + \Omega_R e^{-i\theta}) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \cos^2(\lambda t) + \sin^2(\lambda t) \left( 1 + \frac{\Omega_R \Delta}{\Omega_R^2 + \Delta^2} 2 \cos(\phi - \theta) \right) - i \frac{\Omega_R \cos(\lambda t) \sin(\lambda t)}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} (2i \sin(\phi - \theta)) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R \Delta}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t) \cos(\phi - \theta) + \frac{\Omega_R}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \cos(\lambda t) \sin(\lambda t) \sin(\phi - \theta).
 \end{aligned}$$

Ομοίως με την χρήση πάλι των προηγούμενων ταυτοτήτων προκύπτει τελικά

$$\boxed{|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \cos(\theta - \phi) (1 - \cos(2\lambda t)) - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) \sin(\theta - \phi)} \quad (2.36)$$

### 2.3.2 Περίπτωση συντονισμού: $\Delta = 0$ .

Με  $\Delta = \omega - \Omega = 0$  οι εξισώσεις (2.35) και (2.36) γίνονται

$$\begin{cases} |C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(\Omega_R t) \sin(\theta - \phi) \\ |C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin(\Omega_R t) \sin(\theta - \phi) \end{cases} \quad (2.37)$$

## Κεφάλαιο 3

# Αριθμητικά αποτελέσματα δισταθμικού συστήματος εντός προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα σε σύγκριση με τα αναλυτικά αποτελέσματα του δισταθμικού συστήματος με την προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος. Τα αριθμητικά αποτελέσματα προκύπτουν με τη βοήθεια του προγράμματος matlab λύνοντας το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές (2.9):

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Τα αριθμητικά αποτελέσματα θα αναλυθούν με πρώτο κριτήριο το αν βρισκόμαστε στον αποσυντονισμό ή στο συντονισμό και στη συνέχεια για τις αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιούμε.

### 3.1 Περίπτωση αποσυντονισμού: $\Delta \neq 0$ .

Στην περίπτωση του αποσυντονισμού  $\Delta \neq 0$  θα έχουμε αριθμητικά αποτελέσματα για τις τρεις αρχικές συνθήκες που έχουν ήδη παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 2. Δηλαδή,

1.  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη. (Δείτε 2.1)
2.  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη. (Δείτε 2.2)
3.  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}, C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$ , δηλαδή στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται και στις δύο στάθμες με πιθανότητα  $|C_1(0)|^2 = |C_2(0)|^2 = \frac{1}{2}$ . (Δείτε 2.3)

Για την κάθε περίπτωση έχουν προκύψει οι πιθανότητες για τις δύο στάθμες  $P_1(t)$  και  $P_2(t)$  όπου θα συγκριθούν τα αποτελέσματα αυτά με τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από το matlab.

### 3.1.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.

Με τη χρήση των αρχικών συνθηκών:  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$  προκύπτουν οι εξισώσεις (2.19) και (2.21),

$$\begin{aligned} P_1(t) = |C_1(t)|^2 &= 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t) \\ \text{όπου } \lambda &= \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

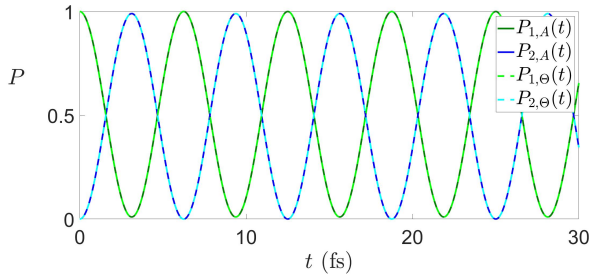
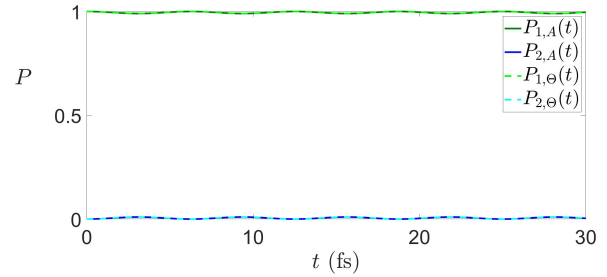
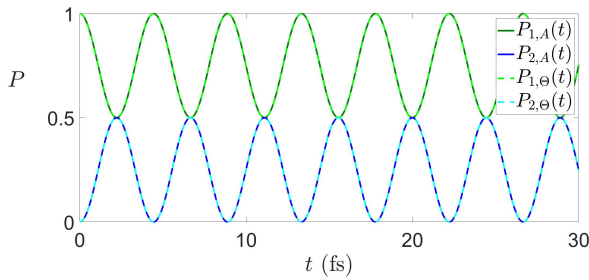
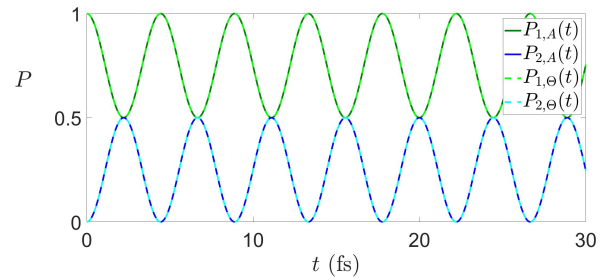
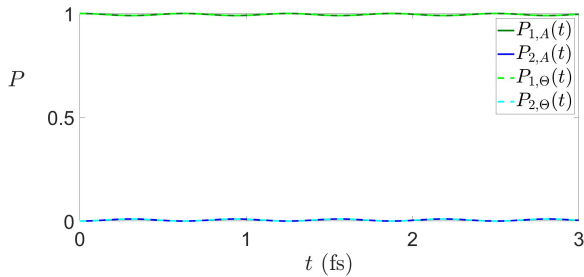
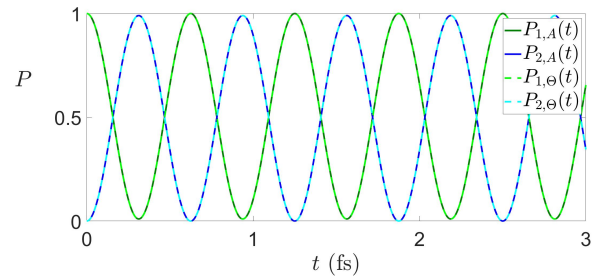
$$\begin{aligned} P_2(t) = |C_2(t)|^2 &= \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t) \\ \text{όπου } \lambda &= \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Παρακάτω παρουσιάζονται τα εξής διαγράμματα,

1. τρία διαγράμματα με  $\Omega_R = 1 \text{ fs}^{-1}$  και  $\Delta = 0.1, 1, 10 \text{ fs}^{-1}$
2. τρία διαγράμματα με  $\Omega_R = 0.1, 1, 10 \text{ fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1 \text{ fs}^{-1}$

Στα έξι διαγράμματα με διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζονται οι θεωρητικές λύσεις, ενώ με κανονικές οι αριθμητικές λύσεις. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τέσσερις καμπύλες, μια συνεχή μπλε, μία διακεκομμένη κυανή, μία συνεχή σκουροπράσινη και μία διακεκομμένη ανοιχτοπράσινη. Η συνεχή μπλε αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 2, ενώ η συνεχή σκουροπράσινη αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 1 και η κυανή καμπύλη αντιστοιχεί στην θεωρητική λύση της στάθμης 2, ενώ η ανοιχτοπράσινη καμπύλη αντιστοιχεί στη θεωρητική λύση της στάθμης 1.



(i)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0.1fs^{-1}$ (ii)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (v)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$ (vi)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ 

**Σχήμα 3.1** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για διαφορετικά  $\Delta$  (αριστερά) και διαφορετικά  $\Omega_R$  (δεξιά).

Παρατηρούμε λοιπόν,

1. Οι θεωρητικές λύσεις ταυτίζονται με τις αριθμητικές λύσεις για οποιαδήποτε περίπτωση τιμών των  $\Omega_R$  και  $\Delta$ .

2. Όταν το  $\Delta \gg \Omega_R$ , τότε το πλάτος της ταλάντωσης τείνει στο μηδέν όπως προκύπτει και

$$\text{από την } \mathcal{A} = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2}.$$

3. Όταν  $\Omega_R \gg \Delta$ , τότε το πλάτος τείνει στο 1, δηλαδή η ταλάντωση τείνει να συμπεριφέρεται όπως στον συντονισμό.

4. Όταν  $\Omega_R = \Delta$ , τότε το πλάτος είναι ίσο με  $\frac{1}{2}$ .

5. Όσο το  $\Omega_R$  ή το  $\Delta$  αυξάνεται, τόσο η περίοδος της ταλάντωσης μειώνεται, σύμφωνα με τον

$$\text{τύπο } T_R = \frac{2\pi}{2\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}.$$

### 3.1.2 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες:  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ , όπου με τη χρήση τους προκύπτουν οι εξισώσεις (2.30) και (2.31),

$$\begin{aligned} P_1(t) = |C_1(t)|^2 &= \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t) \\ \text{όπου } \lambda &= \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

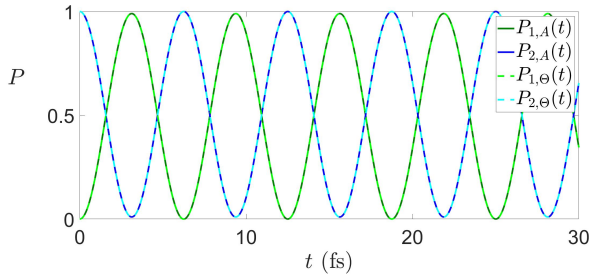
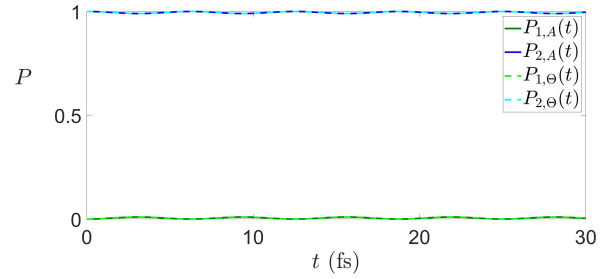
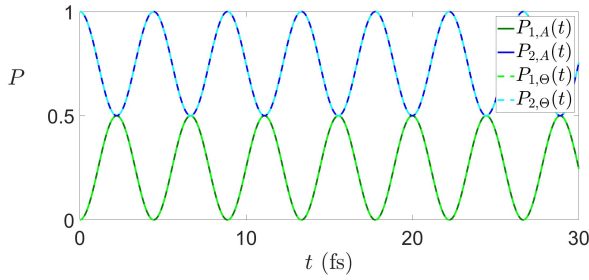
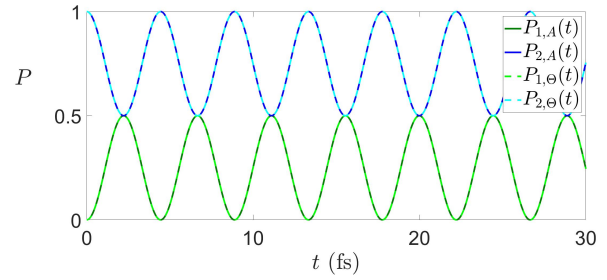
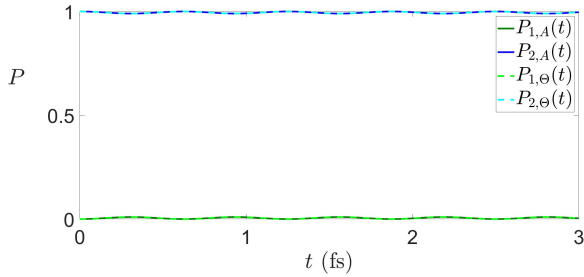
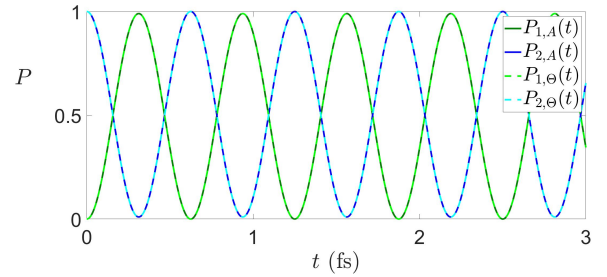
$$\begin{aligned} P_2(t) = |C_2(t)|^2 &= 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t) \\ \text{όπου } \lambda &= \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Παρατηρούμε ότι, οι εξισώσεις είναι ίδιες, με τις εξισώσεις που προέκυψαν στη λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην αρχή του χρόνου στη κάτω στάθμη, με τη μόνη διαφορά ότι αυτά που ίσχυαν για την στάθμη 1, ισχύουν για την στάθμη 2 και αντίστροφα. Άρα περιμένουμε τα διαγράμματα που θα παρουσιάσουμε να είναι ακριβώς ίδια με την μόνη διαφορά οι πιθανότητες για τη στάθμη 1 να έχουν πάρει τη θέση των πιθανοτήτων της στάθμη 2 και αντίστροφα. ( $P_{1,a} \longleftrightarrow P_{2,a}, P_{1,\theta} \longleftrightarrow P_{2,\theta}$ )

Έτσι παρακάτω παρουσιάζονται έξι διαγράμματα, τα οποία παρουσιάστηκαν και στη προηγούμενη παράγραφο,

1. τρία διαγράμματα με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$
2. τρία διαγράμματα με  $\Omega_R = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$

Όπως και στα προηγούμενα διαγράμματα, στα έξι διαγράμματα με διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζονται οι θεωρητικές λύσεις, ενώ με συνεχείς οι αριθμητικές λύσεις. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τέσσερις καμπύλες, μια συνεχής μπλε, μια διακεκομμένη κυανή, μια συνεχής σκουροπράσινη και μια διακεκομμένη ανοιχτοπράσινη. Η μπλε αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 2, ενώ η σκουροπράσινη αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 1 και η κυανή καμπύλη αντιστοιχεί στην θεωρητική λύση της στάθμης 2, ενώ η ανοιχτοπράσινη καμπύλη αντιστοιχεί στη θεωρητική λύση της στάθμης 1.

(i)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0.1fs^{-1}$ (ii)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (v)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$ (vi)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ 

**Σχήμα 3.2** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην άνω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για διαφορετικά  $\Delta$  (αριστερά) και διαφορετικά  $\Omega_R$  (δεξιά).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η αρχική μας υπόθεση ήταν σωστή. Έτσι τα συμπεράσματα που παρατηρήθηκαν για την περίπτωση αρχικών συνθηκών, με το ηλεκτρόνια να βρίσκεται στη κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου 3.1.1, ισχύουν και για αυτή την περίπτωση αρχικών συνθηκών.

### 3.1.3 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.

Τελευταία περίπτωση αρχικών συνθηκών είναι,  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ ,  $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$  όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί ισοπίθανα να βρεθεί και στις δύο στάθμες. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις (2.35) και (2.36),

$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) \sin(\theta - \phi) \quad (3.6)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) \sin(\theta - \phi) \quad (3.7)$$

Για να μπορέσουμε πρώτα από όλα να αναλύσουμε όλα τα αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι οι φάσεις εμφανίζονται ως  $\theta - \phi$  σε  $\cos$  και  $\sin$ . Άρα θα αναλύσουμε τις παρακάτω κατηγορίες αποτελεσμάτων,

1. Για  $\theta - \phi = 2\pi\kappa$  και  $\theta - \phi = (2\kappa + 1)\pi$ , όπου  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$
2. Για  $\theta - \phi = (4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$  και  $\theta - \phi = (4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}$ , όπου  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$
3. Και η πιο γενική περίπτωση, όπου το  $\theta - \phi$  είναι διάφορο όλων των παραπάνω περιπτώσεων.

Επιπλέον για κάθε περίπτωση θα γίνει ανάλυση στα όρια,  $\Omega_R \gg \Delta$ ,  $\Delta \gg \Omega_R$  και  $\Omega_R = \Delta$ .  
**Για  $\theta - \phi = 2\pi\kappa$ :** Σε αυτή τη περίπτωση ισχύει το εξής,

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \phi) &= \cos(2\pi\kappa) = 1 \\ \sin(\theta - \phi) &= \sin(2\pi\kappa) = 0 \end{aligned}$$

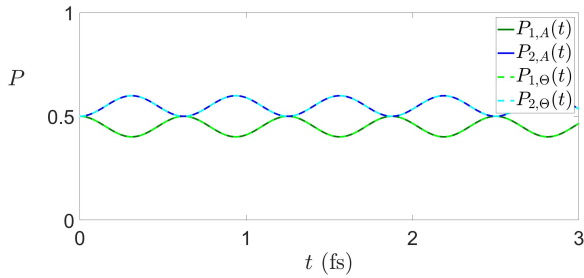
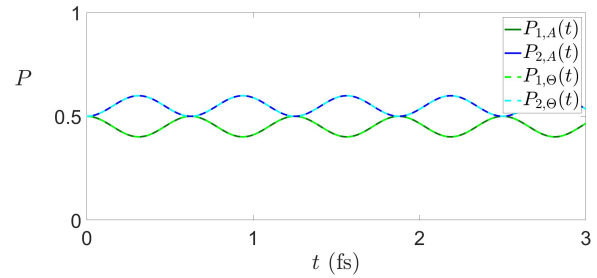
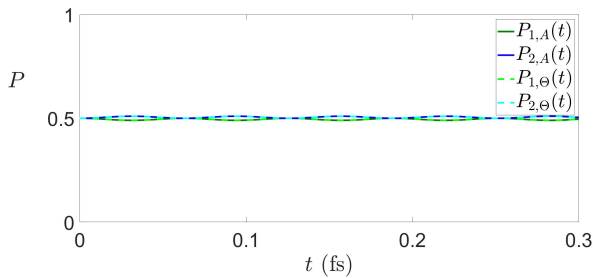
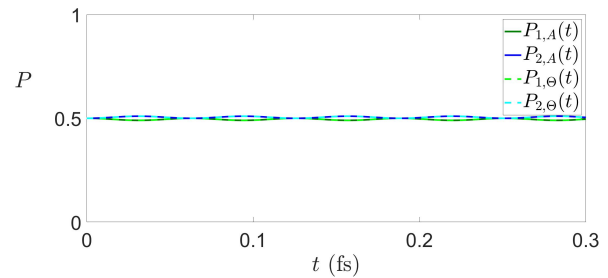
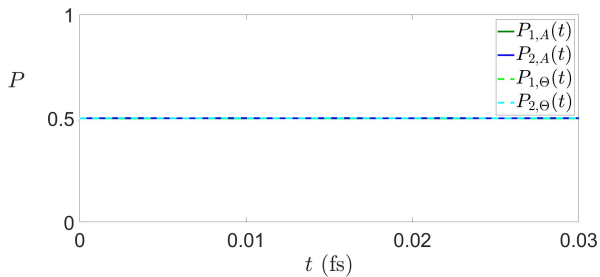
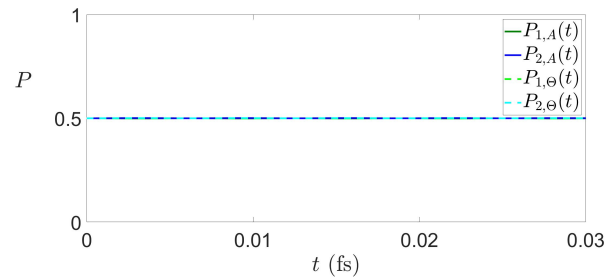
Επομένως οι εξισώσεις 3.6 και 3.7 γίνονται,

$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} (1 - \cos(2\lambda t)) \quad (3.8)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} (1 - \cos(2\lambda t)) \quad (3.9)$$

Παρακάτω παρουσιάζονται έξι διαγράμματα,

1. Για  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega_R = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$ .
2. Για  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$ .

(i)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$ (iii)  $\Omega_R = 100fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 100fs^{-1}$ (v)  $\Omega_R = 1000fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (vi)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1000fs^{-1}$ 

**Σχήμα 3.3** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθانا και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου, με  $\theta - \phi = 2\pi k$  για διαφορετικά  $\Omega_R$  (αριστερά) και διαφορετικά  $\Delta$  (δεξιά).

Τα διαγράμματα της αριστερής στήλης είναι ίδια με τα διαγράμματα της δεξιάς στήλης διότι από τις εξ. 3.8, 3.9 ο ρόλος των  $\Omega_R$  και  $\Delta$  φαίνεται ότι είναι ίδιος. Παρατηρούμε ότι, όλες οι θεωρητικές καμπύλες ταυτίζονται με όλες τις αριθμητικές καμπύλες. Επιπλέον παρατηρούμε ότι, όσο το  $\Omega_R$  αυξάνεται σε σύγκριση με το  $\Delta$  τόσο η ταλάντωση σβήνει. Αυτό φαίνεται και από τις εξισώσεις αν χρησιμοποιήσουμε ότι το  $\Omega_R \gg \Delta$ , δηλαδή

$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} (1 - \cos(2\lambda t)) = \frac{1}{2} - \frac{\cancel{\Omega_R} \Delta}{2\Omega_R^{\cancel{2}} + \Delta^2} (1 - \cos(2\lambda t)) = \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2\Omega_R} (1 - \cos(2\lambda t)) = \frac{1}{2}$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} (1 - \cos(2\lambda t)) = \frac{1}{2} + \frac{\cancel{\Omega_R} \Delta}{2\cancel{\Omega_R}^2} (1 - \cos(2\lambda t)) = \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2\Omega_R} (1 - \cos(2\lambda t)) = \frac{1}{2}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι, όσο αυξάνεται το  $\Delta$  σε σύγκριση με το  $\Omega_R$  τόσο σβήνει η ταλάντωση. Αυτό φαίνεται και στις εξισώσεις, όπου αν χρησιμοποιηθεί το δεδομένο ότι  $\Delta \gg \Omega_R$  θα έχουμε:

$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} (1 - \cos(2\lambda t)) = \frac{1}{2} - \frac{\cancel{\Omega_R} \Delta}{2\cancel{\Omega_R}^2} (1 - \cos(2\lambda t)) = \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R}{2\Delta} (1 - \cos(2\lambda t)) = \frac{1}{2}$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} (1 - \cos(2\lambda t)) = \frac{1}{2} + \frac{\cancel{\Omega_R} \Delta}{2\cancel{\Omega_R}^2} (1 - \cos(2\lambda t)) = \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R}{2\Delta} (1 - \cos(2\lambda t)) = \frac{1}{2}$$

Θα παρουσιάσουμε τρία διαγράμματα αλλά αυτή τη φορά για  $\Omega_R = \Delta = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$ . Πριν παρουσιάσουμε τα διαγράμματα αξίζει να σχολιαστεί ότι οι εξισώσεις παίρνουν τις εξής μορφές με δεδομένο ότι  $\Omega_R = \Delta$  και:

$$\frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} = \frac{\cancel{\Omega_R} \Delta}{2 \cdot 2\cancel{\Omega_R}^2} = \frac{1}{4}$$

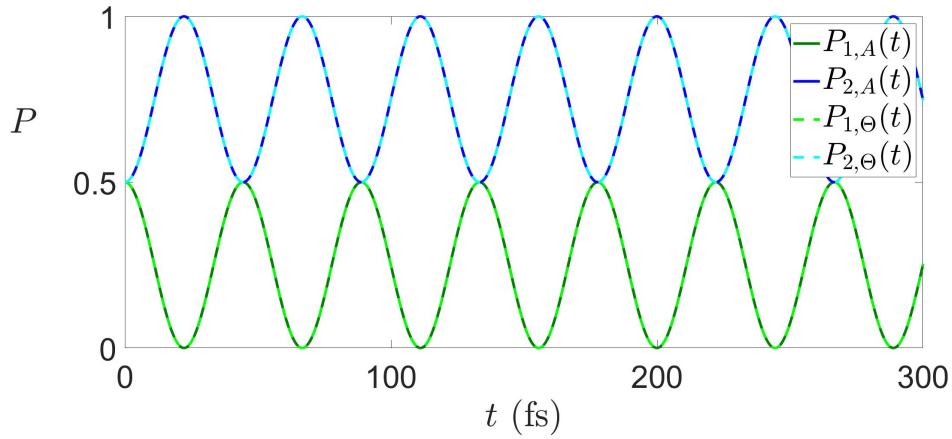
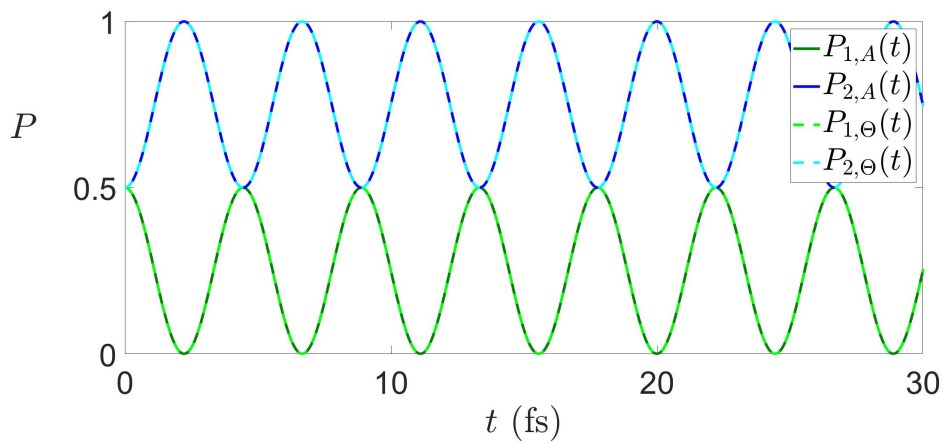
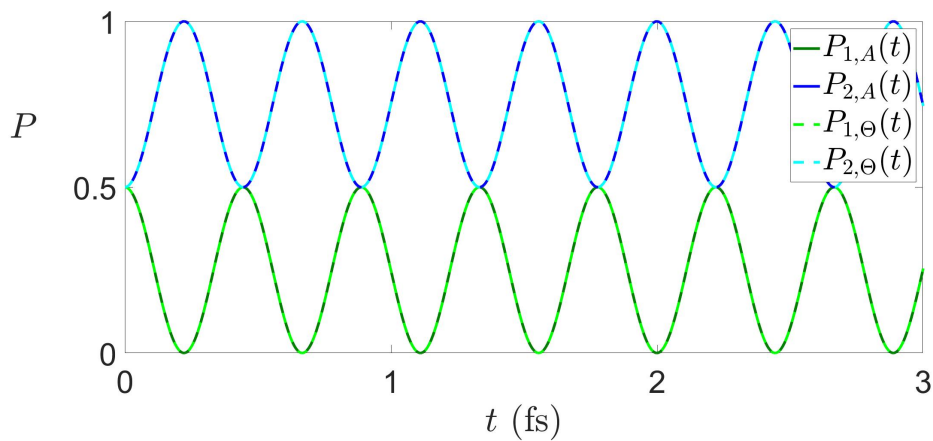
$$\lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\Omega_R}{2} = \frac{\sqrt{2}\Delta}{2}$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1 - \cos(2\frac{\sqrt{2}\Omega_R}{2}t)) \Rightarrow$$

$$\boxed{|C_1(t)|^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos(2\frac{\sqrt{2}\Omega_R}{2}t))}$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1 - \cos(2\frac{\sqrt{2}\Omega_R}{2}t)) \Rightarrow$$

$$\boxed{|C_2(t)|^2 = \frac{1}{4}(3 - \cos(2\frac{\sqrt{2}\Omega_R}{2}t))}$$

(i)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0.1fs^{-1}$ (ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (iii)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$ 

**Σχήμα 3.4** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθانا και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου, με  $\theta - \phi = 2\pi\kappa$ .

Παρατηρούμε λοιπόν,

1. Οι θεωρητικές καμπύλες ταυτίζονται με τις αριθμητικές καμπύλες.
2. Το πλάτος, όπως ήταν αναμενόμενο από τις εξισώσεις είναι σταθερό ανεξάρτητα των τιμών  $\Omega_R = \Delta$ .
3. Το μόνο που αλλάζει, είναι η περίοδος, η οποία εξαρτάται από τις τιμές  $\Omega_R = \Delta$ .

Για  $\theta - \phi = (2\kappa + 1)\pi$ : Σε αυτή τη περίπτωση ισχύει,

$$\begin{aligned}\cos(\theta - \phi) &= \cos((2\kappa + 1)\pi) = -1 \\ \sin(\theta - \phi) &= \sin((2\kappa + 1)\pi) = 0\end{aligned}$$

Επομένως οι εξισώσεις 3.6 και 3.7 γίνονται,

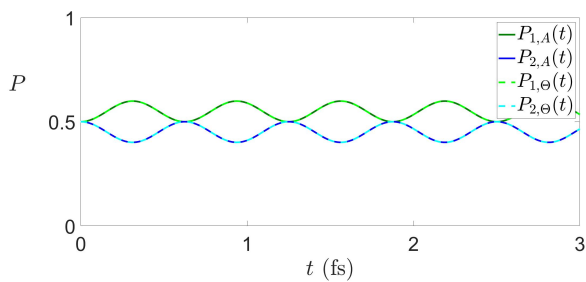
$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)}(1 - \cos(2\lambda t)) \quad (3.10)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)}(1 - \cos(2\lambda t)) \quad (3.11)$$

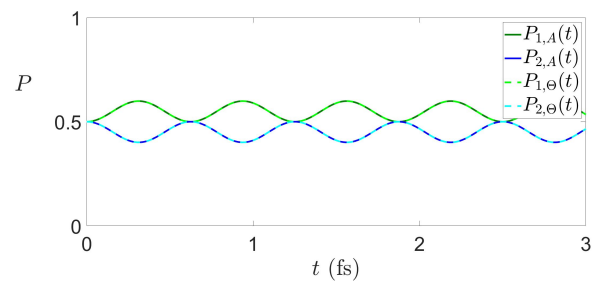
Παρακάτω παρουσιάζονται τα εξής διαγράμματα,

1. Τρία διαγράμματα για  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega_R = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$ .
2. Τρία διαγράμματα για  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$ .
3. Τρία διαγράμματα για  $\Omega_R = \Delta = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$

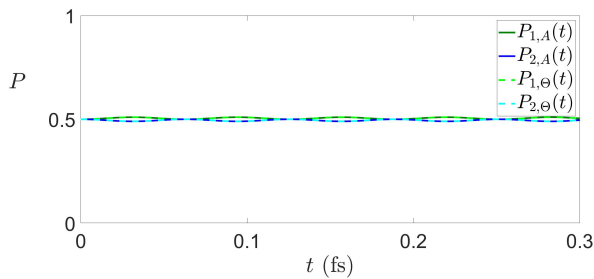




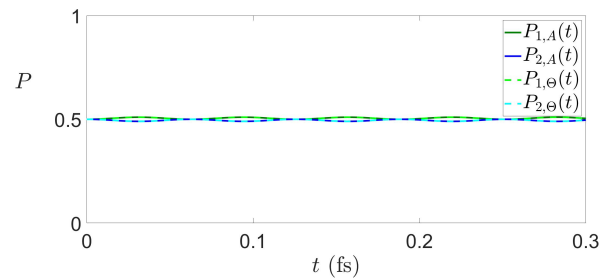
(i)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$



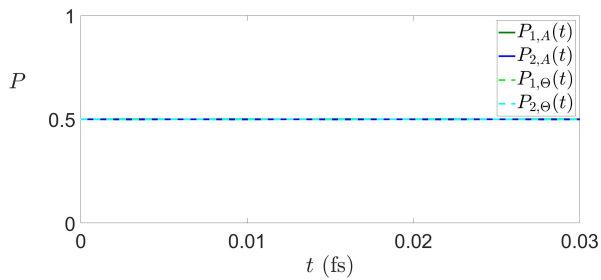
(ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$



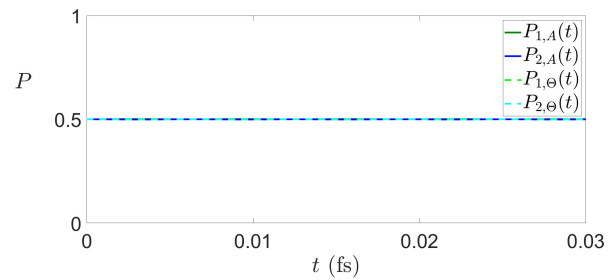
(iii)  $\Omega_R = 100fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$



(iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 100fs^{-1}$



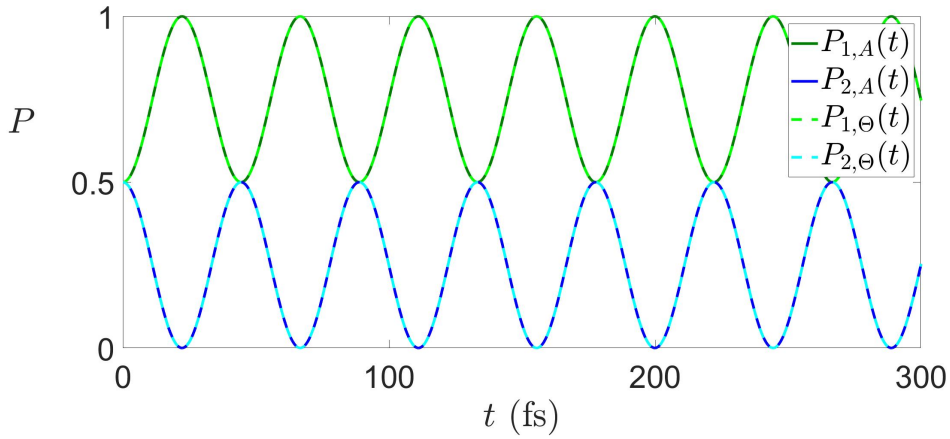
(v)  $\Omega_R = 1000fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$



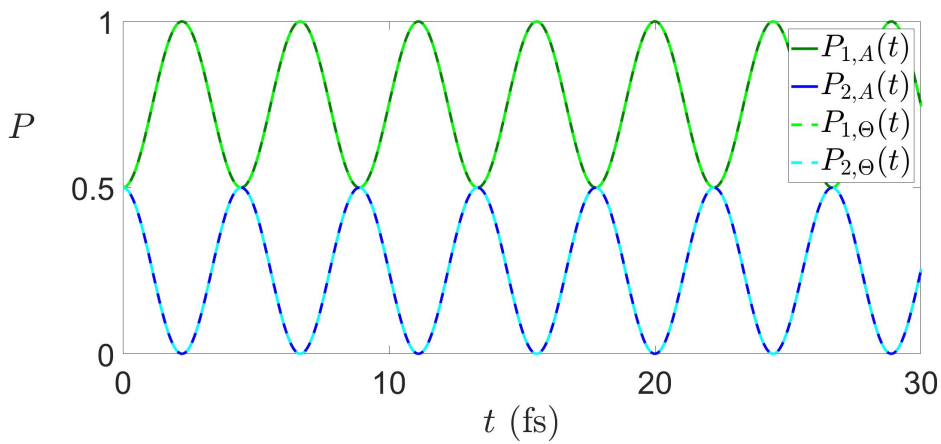
(vi)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1000fs^{-1}$

**Σχήμα 3.5** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου, με  $\theta - \phi = (2\kappa + 1)\pi$ .

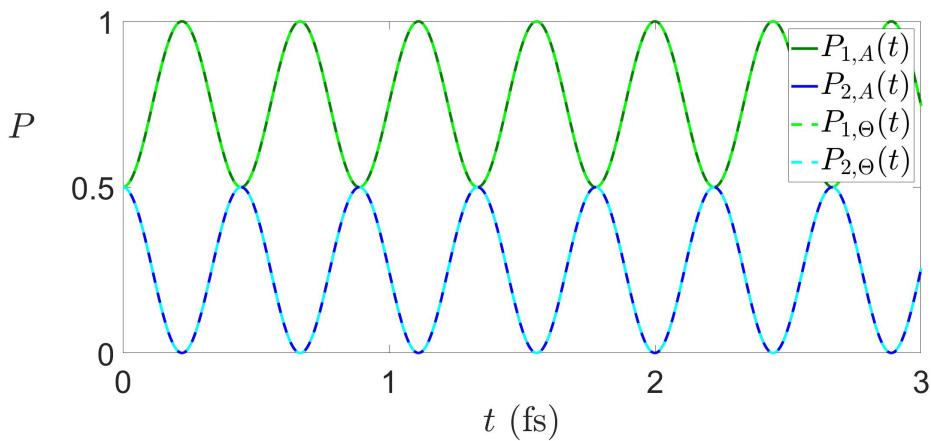
363. Αριθμητικά αποτελέσματα δισταθμικού συστήματος εντός προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος.



(i)  $\Omega_R = 0.1 \text{ fs}^{-1}$  και  $\Delta = 0.1 \text{ fs}^{-1}$



(ii)  $\Omega_R = 1 \text{ fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1 \text{ fs}^{-1}$



(iii)  $\Omega_R = 10 \text{ fs}^{-1}$  και  $\Delta = 10 \text{ fs}^{-1}$

**Σχήμα 3.6** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθانا και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου, με  $\theta - \phi = (2\kappa + 1)\pi$ .

Συγκρίνοντας, την περίπτωση για  $\theta - \phi = (2\kappa + 1)\pi$ , με την περίπτωση  $\theta - \phi = 2\kappa\pi$ , παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά είναι ότι τα  $P_1(t)$  και τα  $P_2(t)$  είναι ανάποδα. Δηλαδή, ότι ισχύει για τη στάθμη ένα, σε αυτή την περίπτωση, ισχύει για τη στάθμη δύο και αντίστροφα. Επιπλέον όλα τα συμπεράσματα τα οποία παρατηρήθηκαν ισχύουν και σε αυτή την περίπτωση.

Για  $\theta - \phi = (4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$ : Για αυτή τη περίπτωση ισχύει,

$$\begin{aligned}\cos(\theta - \phi) &= \cos\left((4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin(\theta - \phi) &= \sin\left((4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}\right) = 1\end{aligned}$$

Επομένως οι εξισώσεις 3.6 και 3.7 γίνονται,

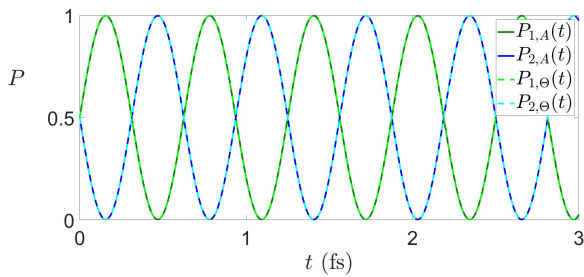
$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) \quad (3.12)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) \quad (3.13)$$

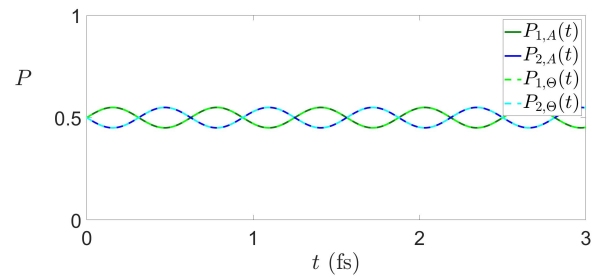
Παρουσιάζονται τα εξής διαγράμματα,

1. Τρία διαγράμματα για  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega_R = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$ .
2. Τρία διαγράμματα για  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$ .
3. Τρία διαγράμματα για  $\Omega_R = \Delta = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$ .

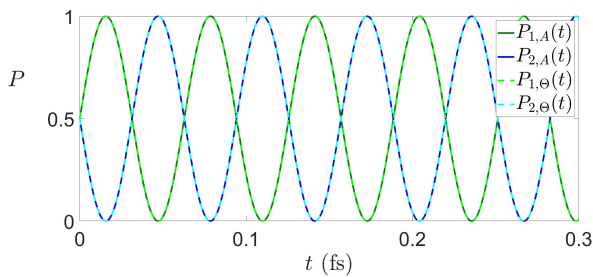
383. Αριθμητικά αποτελέσματα δισταθμικού συστήματος εντός προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος.



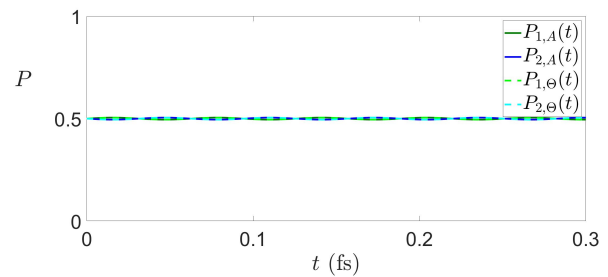
(i)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$



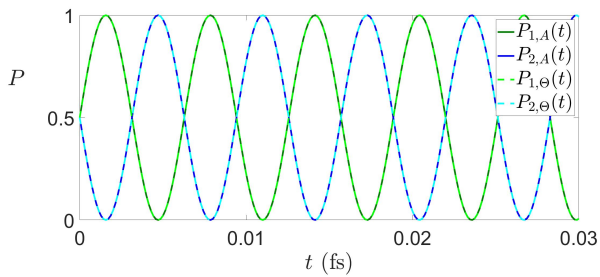
(ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$



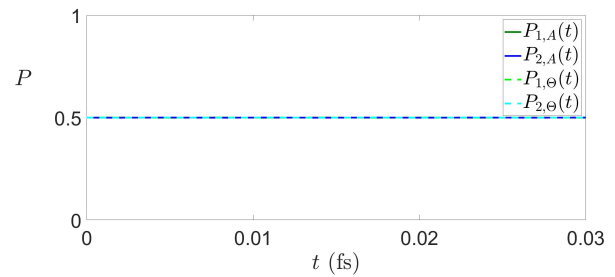
(iii)  $\Omega_R = 100fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$



(iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 100fs^{-1}$



(v)  $\Omega_R = 1000fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$



(vi)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1000fs^{-1}$

**Σχήμα 3.7** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου, με  $\theta - \phi = (4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$ .

Παρατηρούμε στα αριστερά διαγράμματα,

1. Ταυτίζονται οι θεωρητικές με τις αριθμητικές λύσεις.
  2. Σε όλες τις περιπτώσεις το πλάτος επηρεάζεται ελάχιστα και από την πρώτη κιόλας περίπτωση θα μπορούσαμε να πάρουμε την οριακή περίπτωση, για  $\Omega_R \gg \Delta$ .
  3. Το μόνο που αλλάζει αισθητά είναι η περίοδος της ταλάντωσης.
- Οι εξισώσεις 3.12 και 3.13, για  $\Omega_R \gg \Delta$  γίνονται,

$$\begin{aligned} |C_1(t)|^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2}} \sin(2\lambda t) = \frac{1}{2} + \frac{\cancel{\Omega_R}}{2\cancel{\Omega_R}} \sin(2\lambda t) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(2\lambda t)}$$

$$\begin{aligned} |C_2(t)|^2 &= \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2}} \sin(2\lambda t) = \frac{1}{2} - \frac{\cancel{\Omega_R}}{2\cancel{\Omega_R}} \sin(2\lambda t) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin(2\lambda t)}$$

Παρατηρούμε στα δεξιά διαγράμματα,

1. Ταυτίζονται οι θεωρητικές με τις αριθμητικές λύσεις.
  2. Στην οριακή περίπτωση, για  $\Delta \gg \Omega_R$ , η ταλάντωση σβήνει.
- Οι εξισώσεις 3.12 και 3.13, για  $\Delta \gg \Omega_R$  γίνονται,

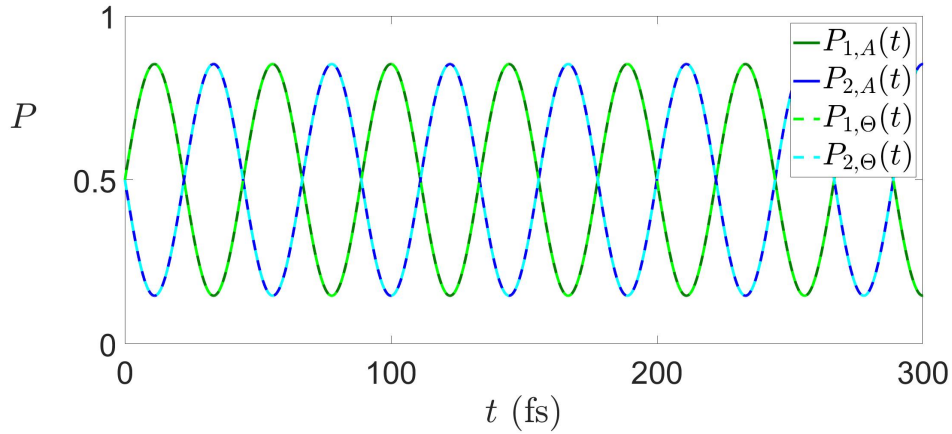
$$\begin{aligned} |C_1(t)|^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R}{2\Delta} \sin(2\lambda t) \stackrel{\frac{\Omega_R}{\Delta} \ll 1}{\Rightarrow} |C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |C_2(t)|^2 &= \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R}{2\Delta} \sin(2\lambda t) \stackrel{\frac{\Omega_R}{\Delta} \ll 1}{\Rightarrow} |C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

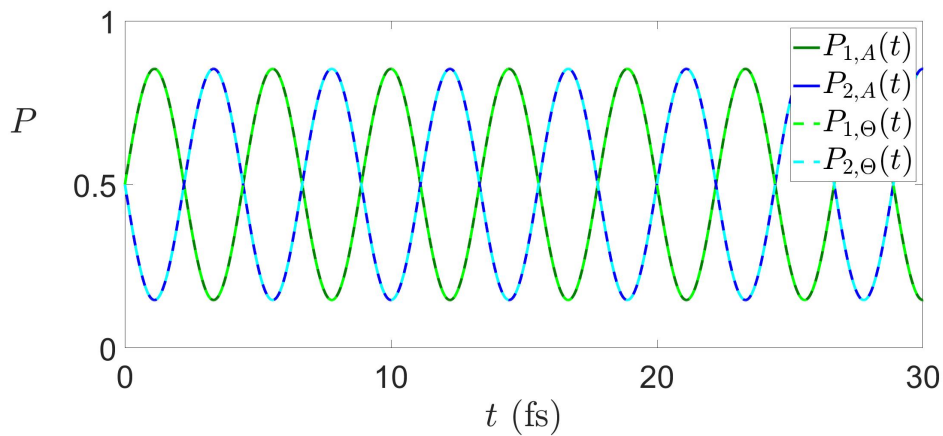
Για  $\Omega_R = \Delta$ , οι εξισώσεις 3.12 και 3.13 γίνονται,

$$\begin{aligned}
 |C_1(t)|^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) = \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{2\Omega_R^2}} \sin(2\lambda t) = \frac{1}{2} + \frac{\cancel{\Omega_R}}{2\sqrt{2}\cancel{\Omega_R}} \sin(2\lambda t) \Rightarrow \\
 &\boxed{|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(2\lambda t)} \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

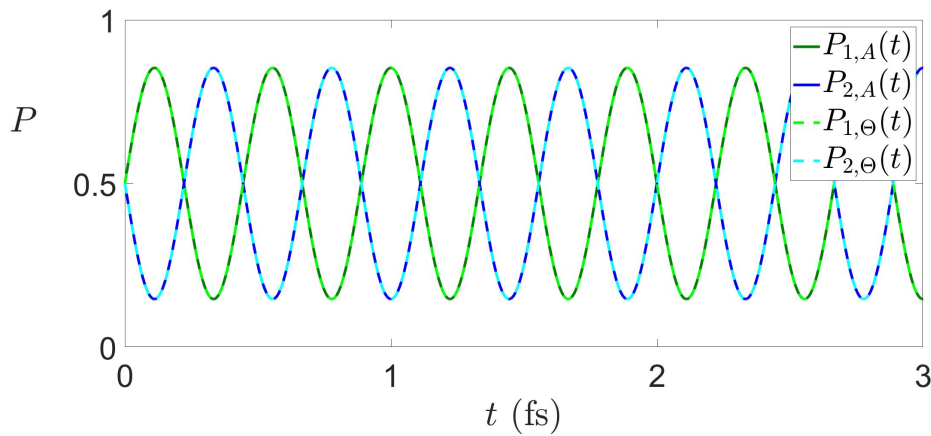
$$\begin{aligned}
 |C_2(t)|^2 &= \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{2\Omega_R^2}} \sin(2\lambda t) = \frac{1}{2} - \frac{\cancel{\Omega_R}}{2\sqrt{2}\cancel{\Omega_R}} \sin(2\lambda t) \Rightarrow \\
 &\boxed{|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(2\lambda t)} \tag{3.15}
 \end{aligned}$$



(i)  $\Omega_R = 0.1 \text{ fs}^{-1}$  και  $\Delta = 0.1 \text{ fs}^{-1}$



(ii)  $\Omega_R = 1 \text{ fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1 \text{ fs}^{-1}$



(iii)  $\Omega_R = 10 \text{ fs}^{-1}$  και  $\Delta = 10 \text{ fs}^{-1}$

**Σχήμα 3.8** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου, με  $\theta - \phi = (4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$ .

Από τα διαγράμματα παρατηρούμε,

1. Ταυτίζονται οι θεωρητικές και αριθμητικές λύσεις.
2. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι σταθερό, όπως επαληθεύεται και στις εξισώσεις 3.14, 3.15.
3. Το μόνο που αλλάζει είναι η περίοδος της ταλάντωσης.

Για  $\theta - \phi = (4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}$ : Σε αυτή τη περίπτωση ισχύει,

$$\begin{aligned}\cos(\theta - \phi) &= \cos\left((4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin(\theta - \phi) &= \sin\left((4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}\right) = -1\end{aligned}$$

Επομένως οι εξισώσεις 3.6 και 3.7 γίνονται,

$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) \quad (3.16)$$

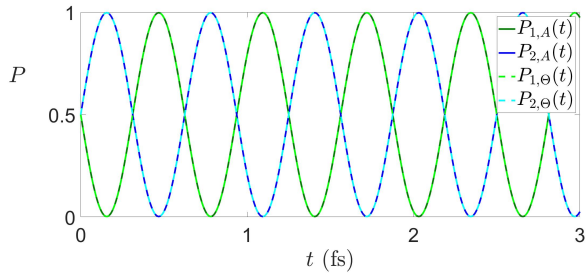
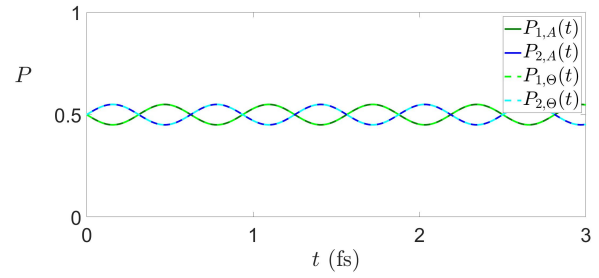
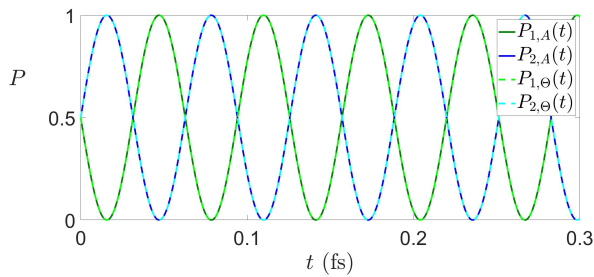
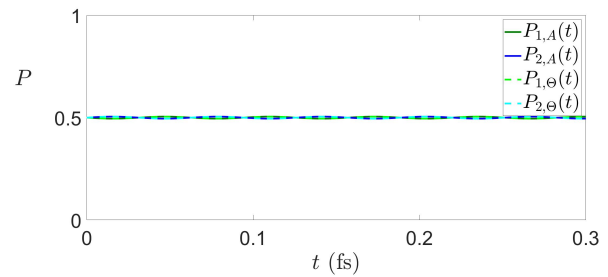
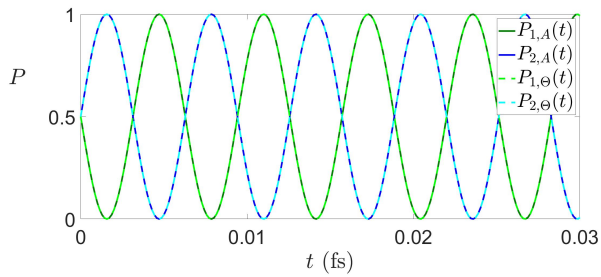
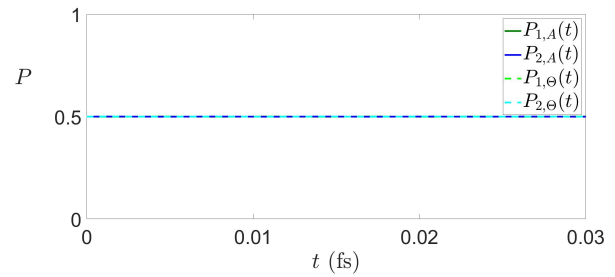
$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) \quad (3.17)$$

Παρατηρούμε ότι, οι εξισώσεις είναι ακριβώς ίδιες με τις εξισώσεις 3.12, 3.13, για  $\theta - \phi = (4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$ , με μόνη διαφορά ότι τώρα η εξίσωση της στάθμης 1 είναι η εξίσωση της στάθμης 2 και αντίστροφα. Επομένως περιμένουμε ότι σε όλα τα διαγράμματα όλες οι πιθανότητες θα είναι ανάποδα. Δηλαδή οι  $P_2(t)$  θα είναι  $P_1(t)$  και αντίστροφα.

Έτσι παρουσιάζουμε παρακάτω εννιά διαγράμματα τα οποία είναι,

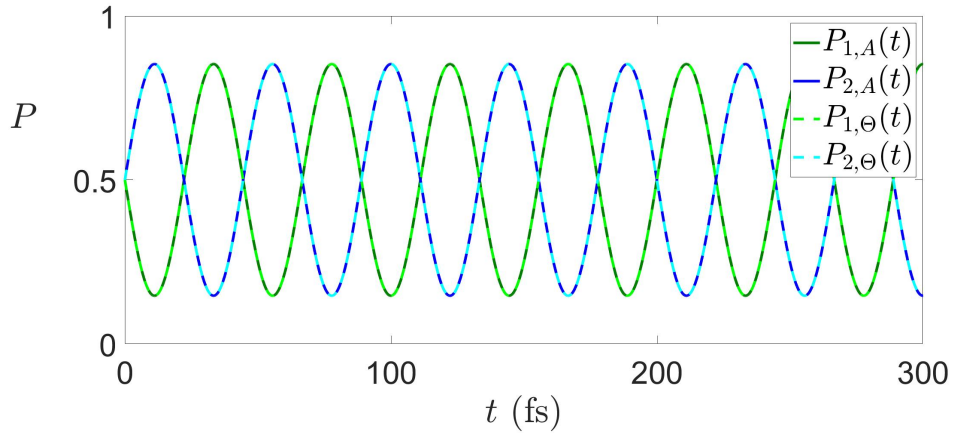
1. Για  $\Omega_R = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$ .
2. Για  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$ .
3. Για  $\Omega_R = \Delta = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$ .



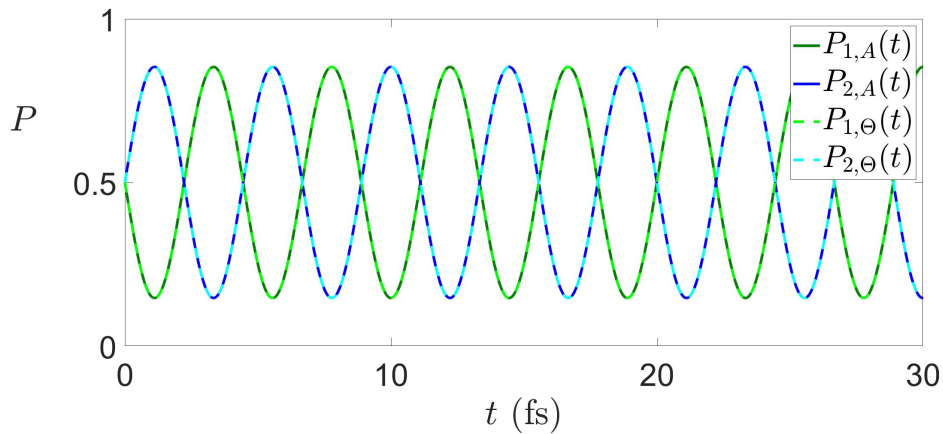
(i)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$ (iii)  $\Omega_R = 100fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 100fs^{-1}$ (v)  $\Omega_R = 1000fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ (vi)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1000fs^{-1}$ 

**Σχήμα 3.9** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου, με  $\theta - \phi = (4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}$ .

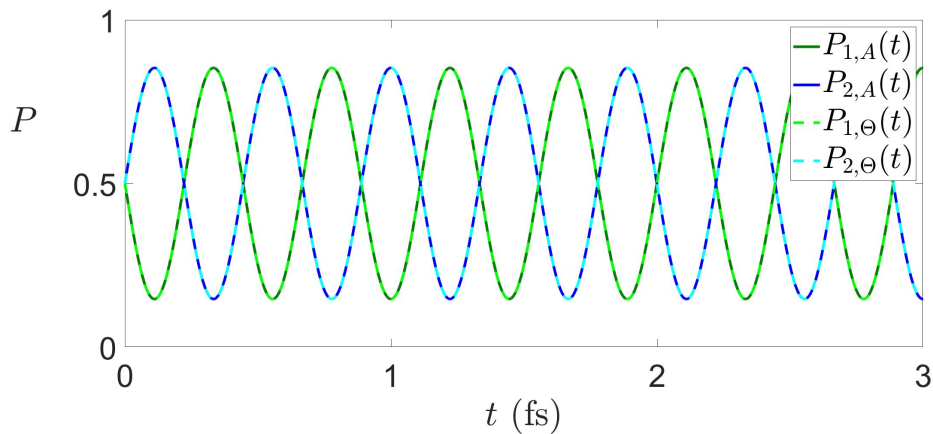
443. Αριθμητικά αποτελέσματα δισταθμικού συστήματος εντός προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος.



(i)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0.1fs^{-1}$



(ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$



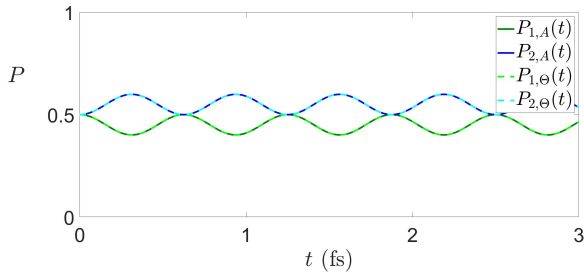
(iii)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$

**Σχήμα 3.10** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου, με  $\theta - \phi = (4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}$ .

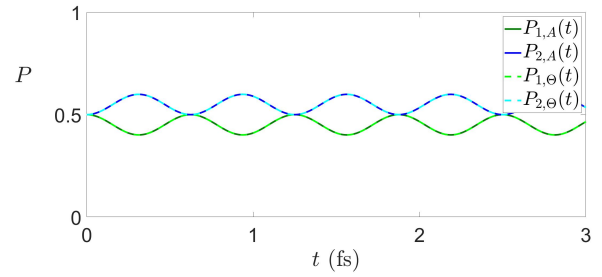
Παρακάτω παρουσιάζουμε την πιο γενική περίπτωση, για διάφορες φάσεις, οι οποίες δεν ανήκουν στις προηγούμενες κατηγορίες. Πρώτα από όλα παρουσιάζονται τρεις περιπτώσεις, οι οποίες είναι για  $\Omega_R > \Delta$ , για  $\Omega_R < \Delta$  και για  $\Omega_R = \Delta$ . Στην κάθε περίπτωση παρουσιάζονται, διαγράμματα με σταθερά τα  $\Omega_R$  και  $\Delta$ , αλλά με μεταβαλλόμενη φάση  $\theta - \phi$  και διαγράμματα με σταθερή φάση  $\theta - \phi$  και μεταβαλλόμενα τα  $\Omega_R$  και  $\Delta$ .

**Για  $\Omega_R > \Delta$ :**

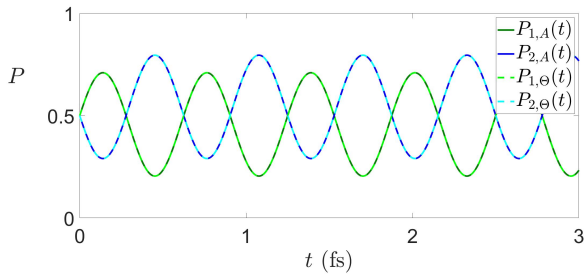
Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα σύνολο διαγραμμάτων, στα οποία τα  $\Omega_R = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$ .



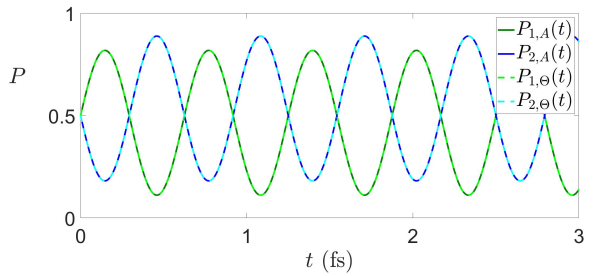
(i)  $\theta - \phi = 0$



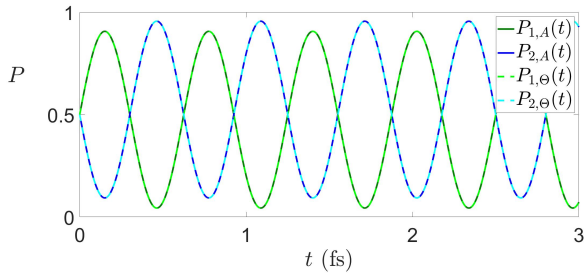
(ii)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$



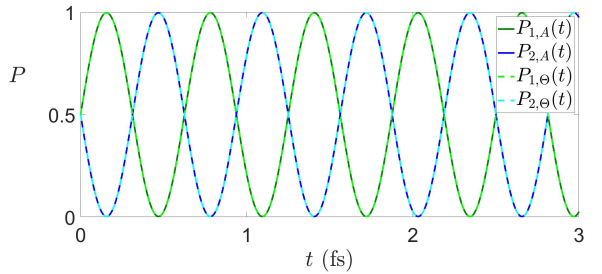
(iii)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$



(iv)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$

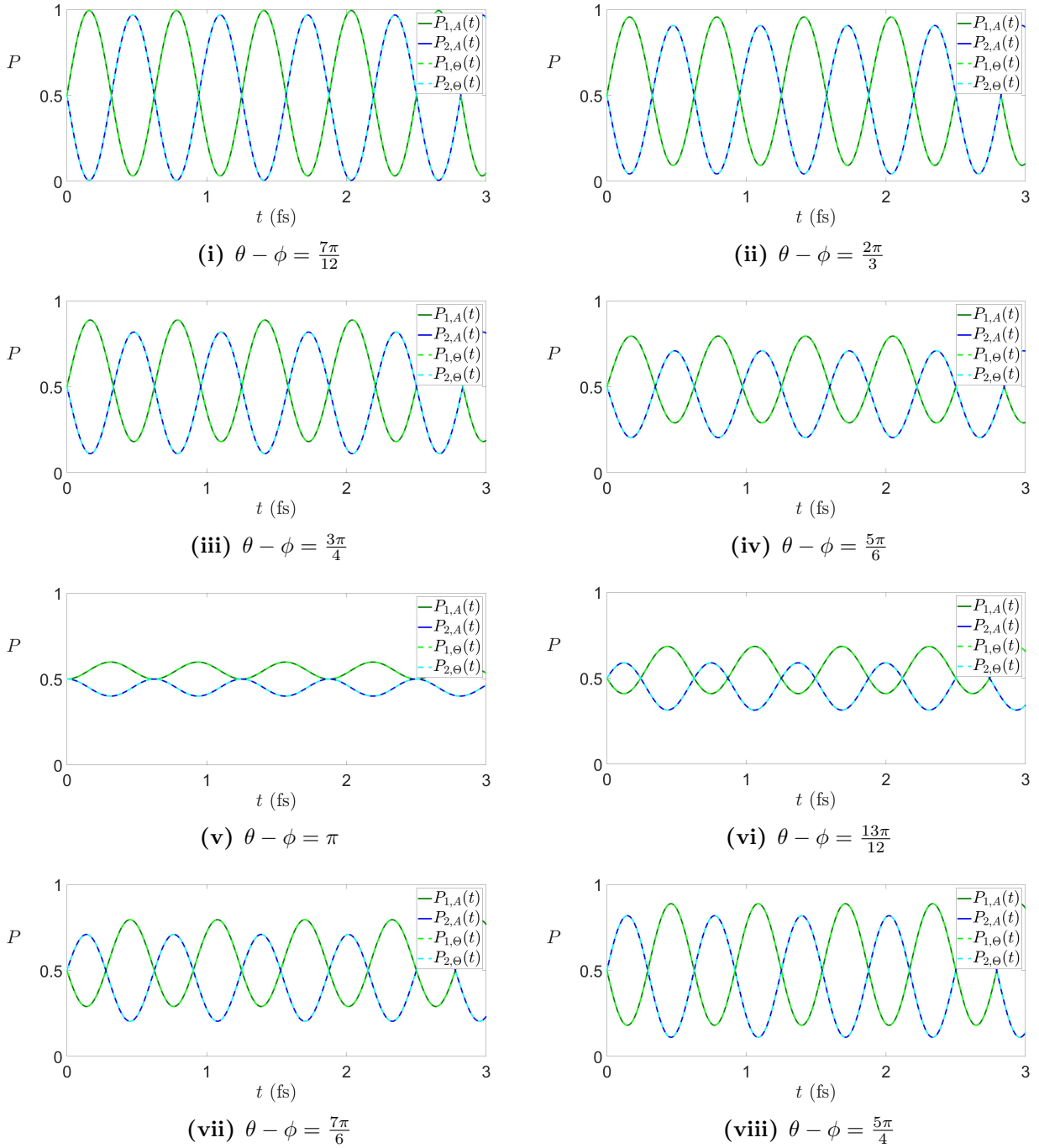


(v)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$

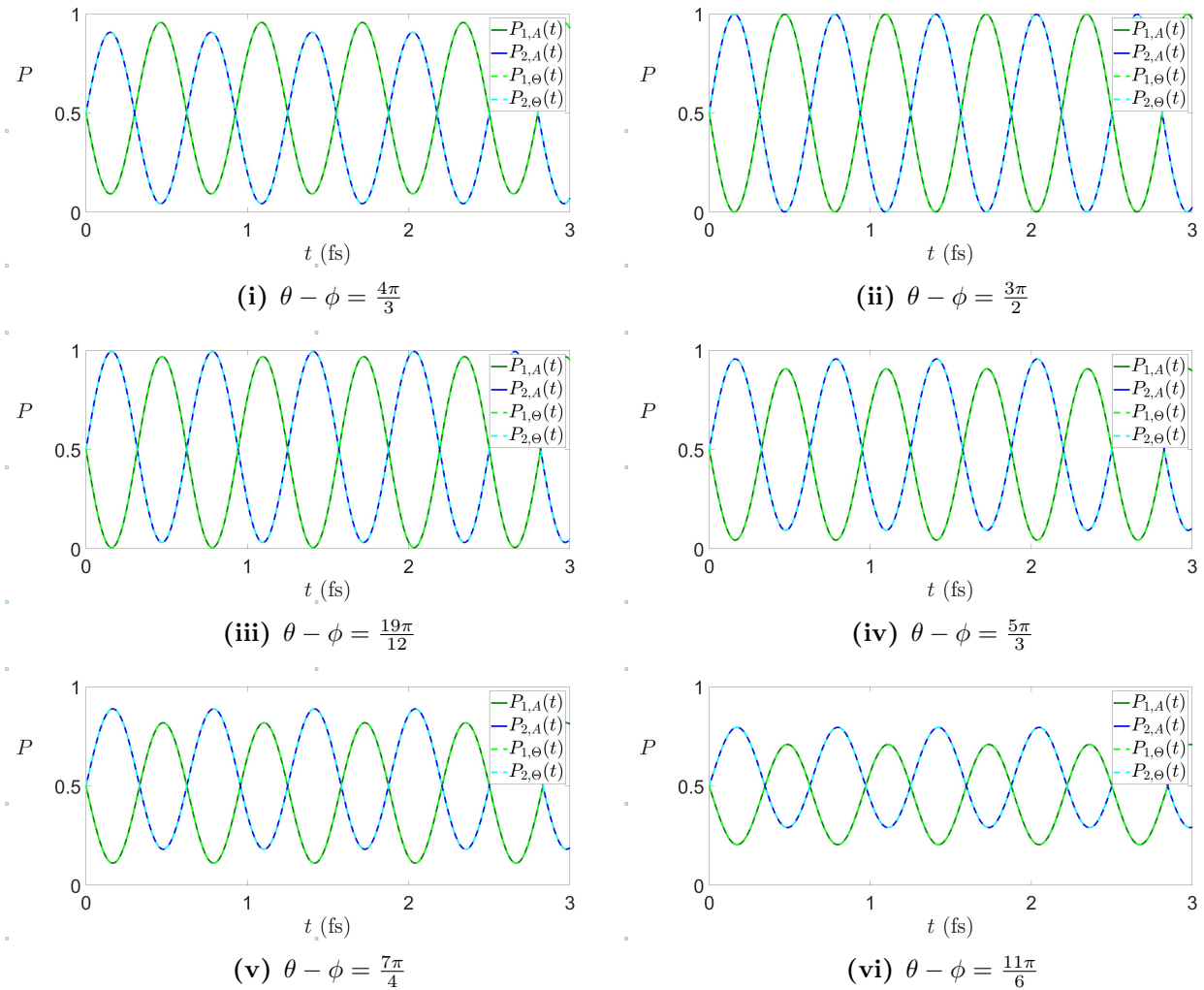


(vi)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{2}$

**Σχήμα 3.11** Ταλαντώσεις Rabi με  $\Omega_R = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  για την περίπτωση αρχικών συνθηκών με φάση.



**Σχήμα 3.12** Ταλαντώσεις Rabi με  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$  για την περίπτωση αρχικών συνθηκών με φάση.



**Σχήμα 3.13** Ταλαντώσεις Rabi με  $\Omega_R = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  για την περίπτωση αρχικών συνθηκών με φάση.

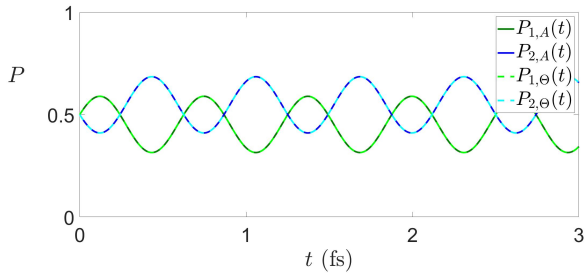
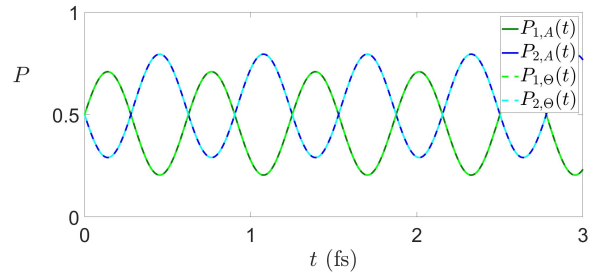
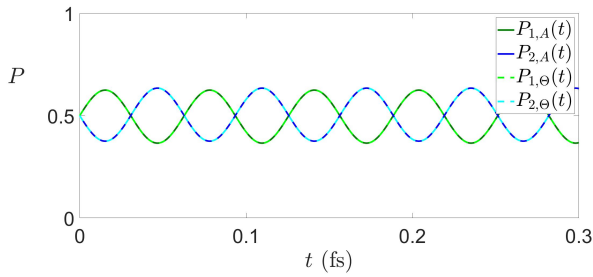
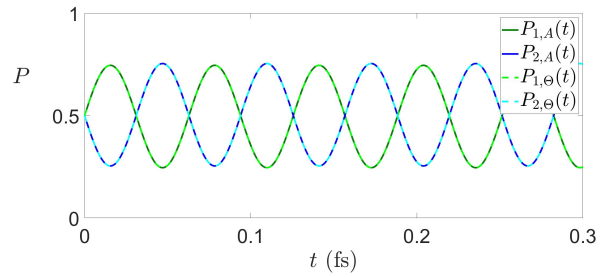
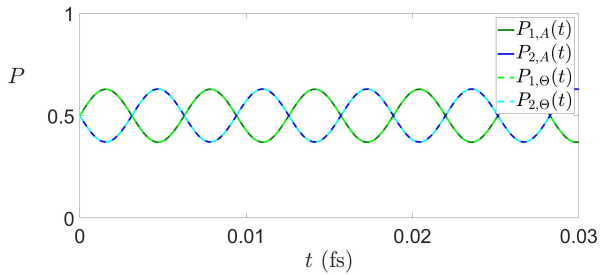
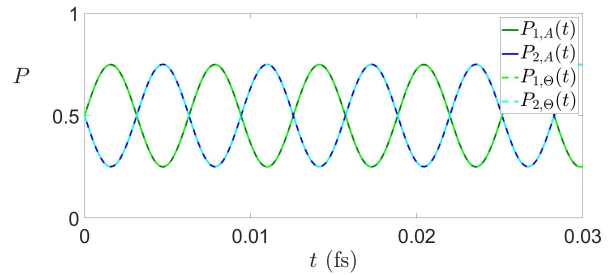
Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε την μεταβολή των ταλαντώσεων Rabi καθώς μεταβάλλουμε την  $\theta - \phi$ . Επίσης στα διαγράμματα με διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζονται οι θεωρητικές λύσεις, ενώ με συνεχείς οι αριθμητικές λύσεις. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τέσσερις καμπύλες, μια συνεχής μπλε, μια διακεκομμένη κυανή, μια συνεχής σκουροπράσινη και μια διακεκομμένη ανοιχτοπράσινη. Η μπλε αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 2, ενώ η σκουροπράσινη αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 1 και η κυανή καμπύλη αντιστοιχεί στην θεωρητική λύση της στάθμης 2, ενώ η ανοιχτοπράσινη καμπύλη αντιστοιχεί στη θεωρητική λύση της στάθμης 1.

Παρατηρούμε ότι,

1. Οι θεωρητικές με τις αριθμητικές λύσεις ταυτίζονται,
2. Τα διαγράμματα στα οποία έχουμε  $\theta - \phi = \pi + \alpha$  και στο άλλο  $\theta - \phi = \alpha$ , όπου  $\alpha$  κάποια γωνία, τα διαγράμματα αυτά είναι όμοια, η μόνη διαφορά είναι ότι η στάθμη 1 γίνεται στάθμη 2 και αντίστροφα.
3. Οι φάσεις δεν επηρεάζουν την περίοδο της ταλάντωσης.

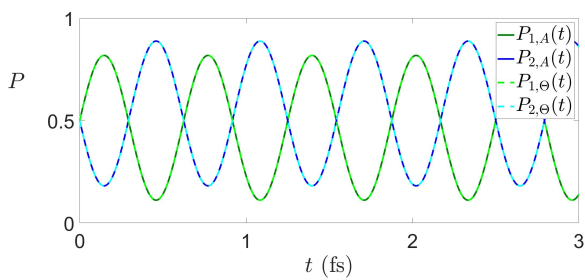
Τα δύο τελευταία συμπεράσματα παραπάνω φαίνονται και από τις εξισώσεις (2.35) και (2.36), καθώς η περίοδος δεν εξαρτάται καθόλου από τις φάσεις, και επιπλέον αν θέσουμε στην εξίσωση (2.35),  $\theta - \phi = \pi + \alpha$  προκύπτει η εξίσωση (2.36), αν της είχαμε θέσει  $\theta - \phi = \alpha$  και αντίστροφα.

Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα σύνολο διαγραμμάτων στα οποία έχουμε, για  $\Omega_R = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ .

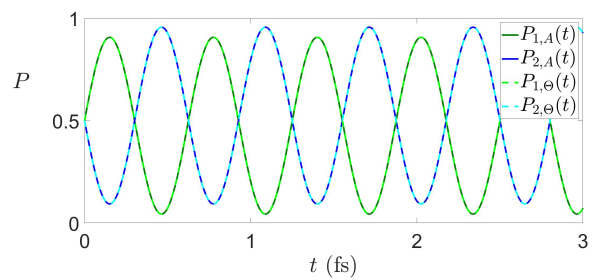
(i)  $\Omega_R = 10\text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$ (ii)  $\Omega_R = 10\text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$ (iii)  $\Omega_R = 100\text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$ (iv)  $\Omega_R = 100\text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$ (v)  $\Omega_R = 1000\text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$ (vi)  $\Omega_R = 1000\text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$ 

**Σχήμα 3.14** Ταλαντώσεις Rabi για  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$  (αριστερά) και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$  (δεξιά).

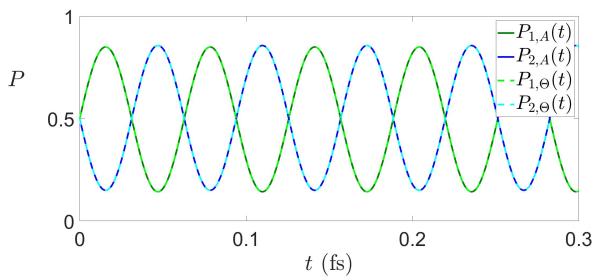
503. Αριθμητικά αποτελέσματα δισταθμικού συστήματος εντός προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος.



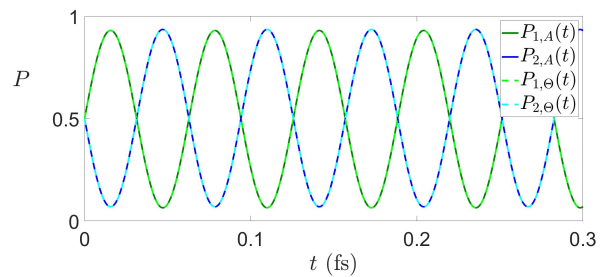
(i)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$



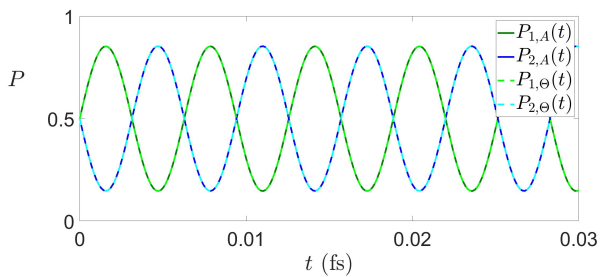
(ii)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$



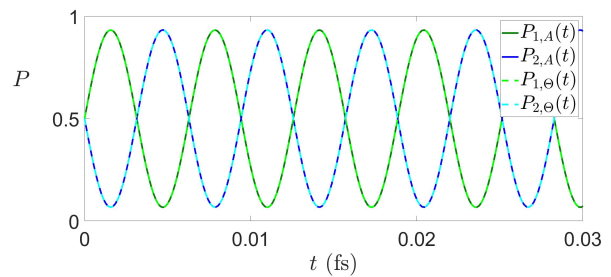
(iii)  $\Omega_R = 100fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$



(iv)  $\Omega_R = 100fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$



(v)  $\Omega_R = 1000fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$



(vi)  $\Omega_R = 1000fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$

Σχήμα 3.15 Ταλαντώσεις Rabi για  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$  (αριστερά) και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$  (δεξιά).



Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε την μεταβολή των ταλαντώσεων Rabi καθώς μεταβάλλουμε το  $\Omega_R$  και κρατάμε σταθερό το  $\theta - \phi$ . Αυτό το εφαρμόσαμε για 4 διαφορετικές φάσεις ( $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ ). Επιπλέον σε όλα τα διαγράμματα με διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζονται οι θεωρητικές λύσεις, ενώ με συνεχείς οι αριθμητικές λύσεις. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τέσσερις καμπύλες, μια συνεχής μπλε, μια διακεκομμένη κυανή, μια συνεχής σκουροπράσινη και μια διακεκομμένη ανοιχτοπράσινη. Η μπλε αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 2, ενώ η σκουροπράσινη αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 1 και η κυανή καμπύλη αντιστοιχεί στην θεωρητική λύση της στάθμης 2, ενώ η ανοιχτοπράσινη καμπύλη αντιστοιχεί στη θεωρητική λύση της στάθμης 1.

Παρατηρούμε,

1. Οι θεωρητικές με τις αριθμητικές λύσεις ταυτίζονται.
2. Η συμπεριφορά των διαγραμμάτων καθώς μεταβάλλουμε το  $\Omega_R$  είναι ακριβώς η ίδια, φυσικά στα δεδομένα πλάτη της κάθε περίπτωσης.
3. Όλες οι περιπτώσεις καθώς μεγαλώνει το  $\Omega_R$  τείνουν στην περίπτωση του συντονισμού.

Το τελευταίο συμπέρασμα μπορούμε να το δούμε ως εξής, από τις εξισώσεις (2.35) και (2.36) για  $\Omega_R \gg \Delta$  έχουμε,

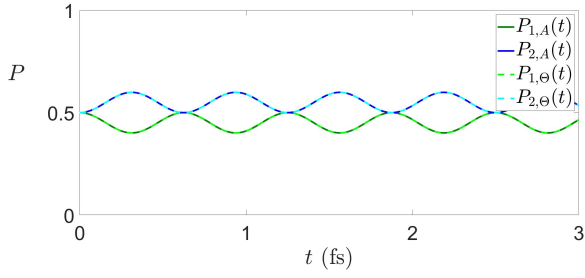
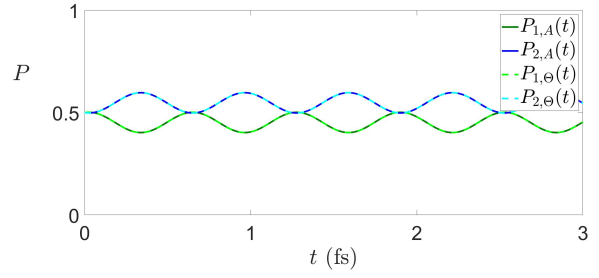
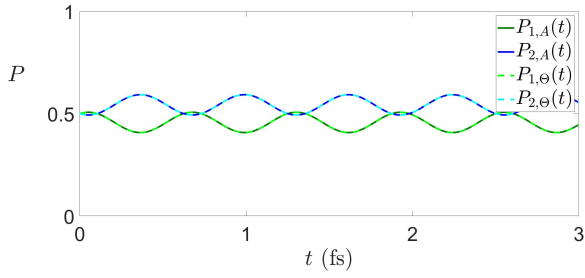
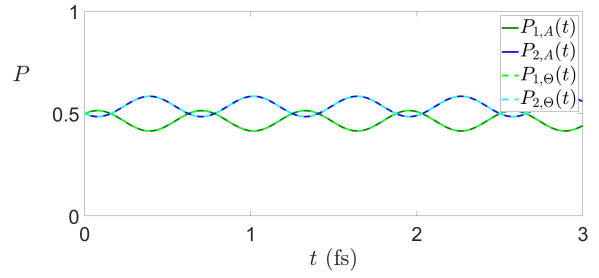
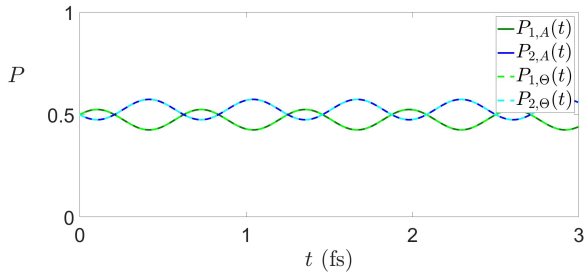
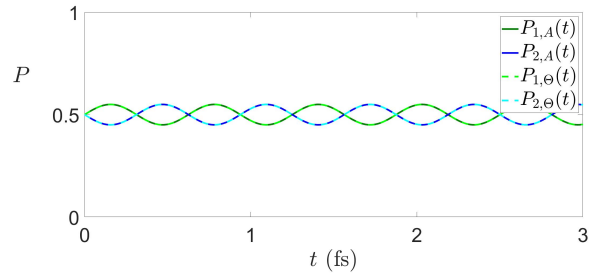
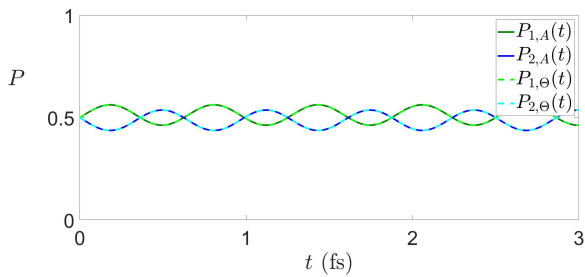
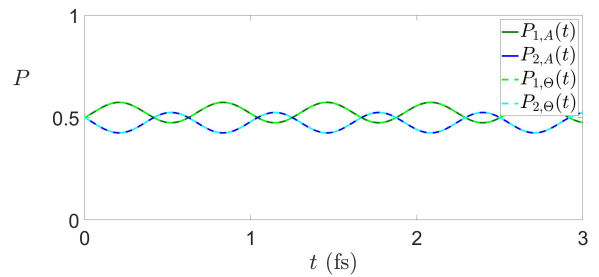
$$\begin{aligned} |C_1(t)|^2 &= \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\cancel{\Omega_R} \Delta}{2(\Omega_R^{\cancel{2}})} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) + \frac{\cancel{\Omega_R}}{2\Omega_R} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t) \xrightarrow{\frac{\Delta}{\Omega_R} \ll 1} \\ &\boxed{|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |C_2(t)|^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\cancel{\Omega_R} \Delta}{2(\Omega_R^{\cancel{2}})} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) - \frac{\cancel{\Omega_R}}{2\Omega_R} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t) \xrightarrow{\frac{\Delta}{\Omega_R} \ll 1} \\ &\boxed{|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t)} \end{aligned}$$

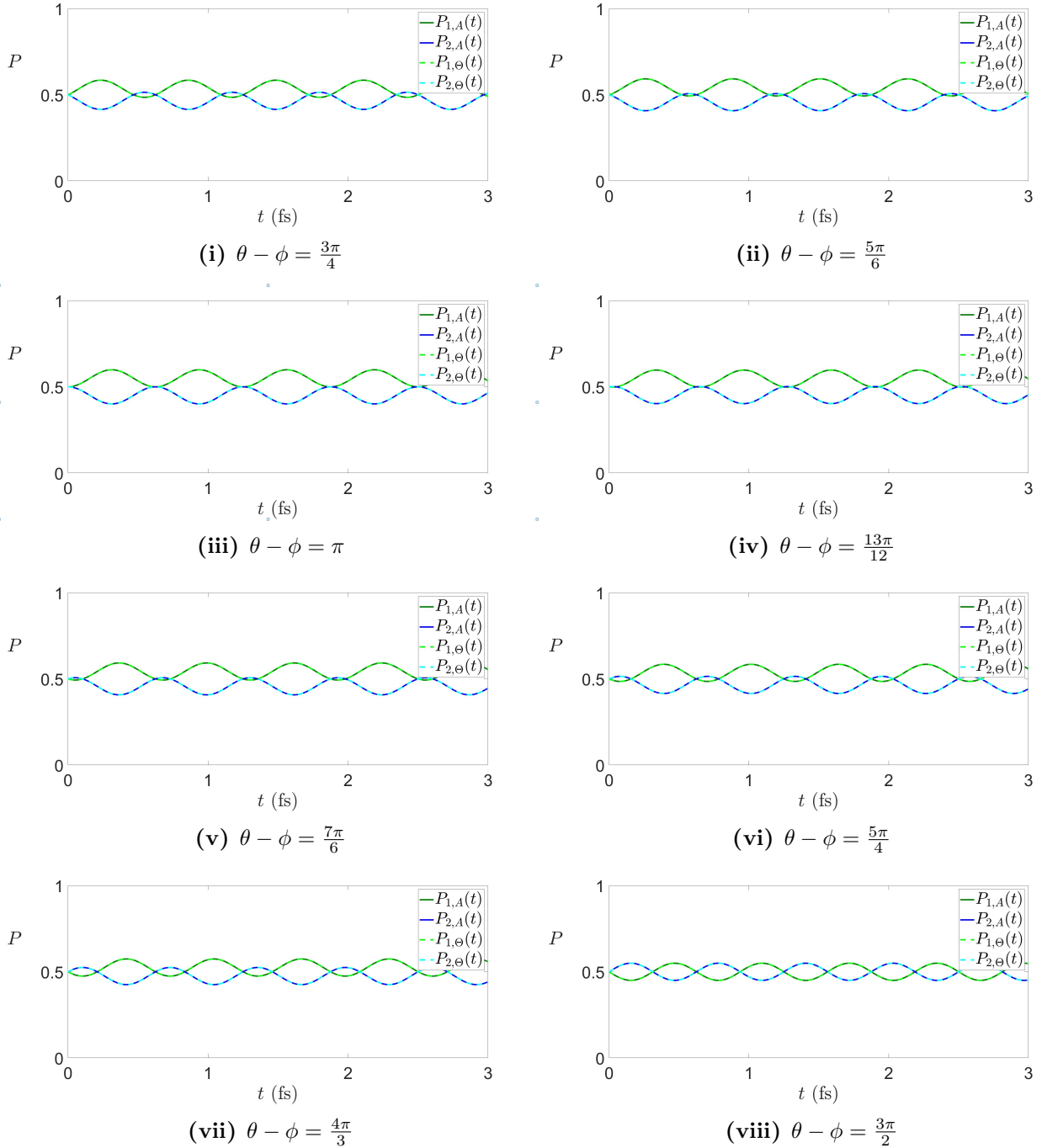
Οι παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν και στον συντονισμό, δηλαδή για  $\Delta = 0$ .

**Για  $\Omega_R < \Delta$ :**

Παρακάτω παρουσιάσουμε ένα σύνολο διαγραμμάτων, στα οποία τα  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$ .

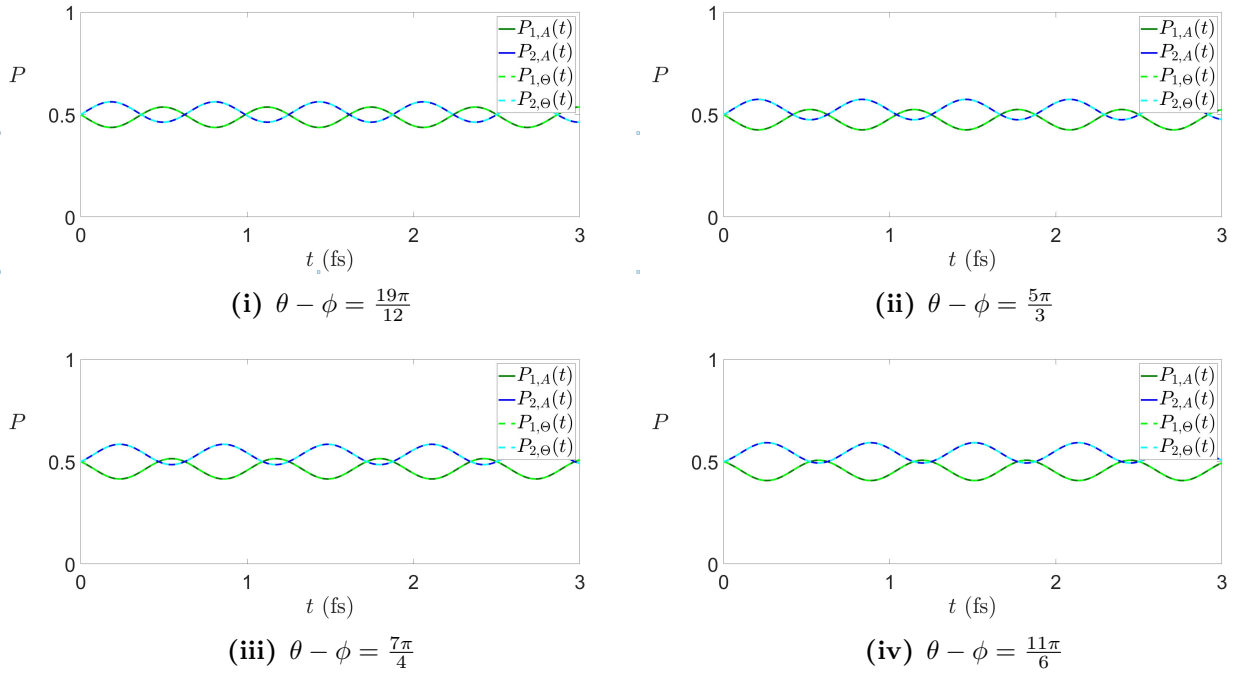
(i)  $\theta - \phi = 0$ (ii)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$ (iii)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$ (iv)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$ (v)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$ (vi)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{2}$ (vii)  $\theta - \phi = \frac{7\pi}{12}$ (viii)  $\theta - \phi = \frac{2\pi}{3}$ 

**Σχήμα 3.16** Ταλαντώσεις Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$  για την περίπτωση αρχικών συνθηκών με φάση.



**Σχήμα 3.17** Ταλαντώσεις Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 10\text{fs}^{-1}$  για την περίπτωση αρχικών συνθηκών με φάση.

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε την μεταβολή των ταλαντώσεων Rabi καθώς μεταβάλλουμε την  $\theta - \phi$ . Επίσης στα διαγράμματα με διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζονται οι θεωρητικές λύσεις, ενώ με συνεχείς οι αριθμητικές λύσεις. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τέσσερις



**Σχήμα 3.18** Ταλαντώσεις Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 10\text{fs}^{-1}$  για την περίπτωση αρχικών συνθηκών με φάση.

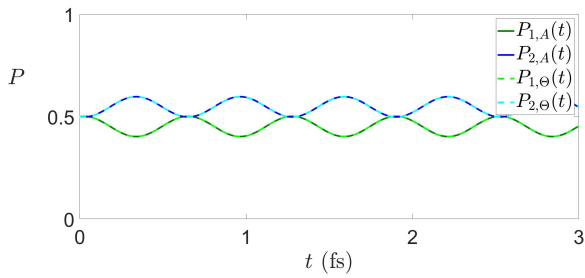
καμπύλες, μια συνεχής μπλε, μια διακεκομμένη κυανή, μια συνεχής σκουροπράσινη και μια διακεκομμένη ανοιχτοπράσινη. Η μπλε αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 2, ενώ η σκουροπράσινη αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 1 και η κυανή καμπύλη αντιστοιχεί στην θεωρητική λύση της στάθμης 2, ενώ η ανοιχτοπράσινη καμπύλη αντιστοιχεί στη θεωρητική λύση της στάθμης 1.

Παρατηρούμε ότι,

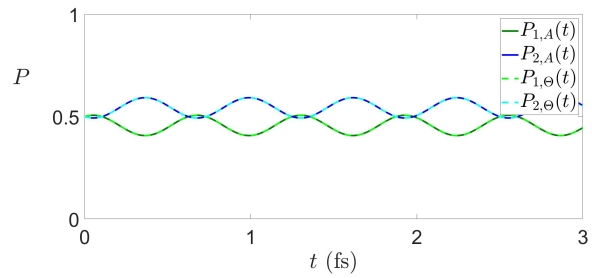
1. Οι θεωρητικές με τις αριθμητικές λύσεις ταυτίζονται.
2. Τα διαγράμματα στα οποία έχουμε  $\theta - \phi = \pi + \alpha$  και στο άλλο  $\theta - \phi = \alpha$ , όπου  $\alpha$  κάποια γωνία, τα διαγράμματα αυτά είναι όμοια, η μόνη διαφορά είναι ότι η στάθμη 1 γίνεται στάθμη 2 και αντίστροφα.
3. Οι φάσεις δεν επηρεάζουν την περίοδο της ταλάντωσης.

Τα δύο τελευταία συμπεράσματα παραπάνω φαίνονται και από τις εξισώσεις (2.35) και (2.36) καθώς η περίοδος δεν εξαρτάται καθόλου από τις φάσεις και επιπλέον αν θέσουμε στην εξίσωση (2.35),  $\theta - \phi = \pi + \alpha$  προκύπτει η εξίσωση (2.36), αν της είχαμε θέσει  $\theta - \phi = \alpha$  και αντίστροφα.

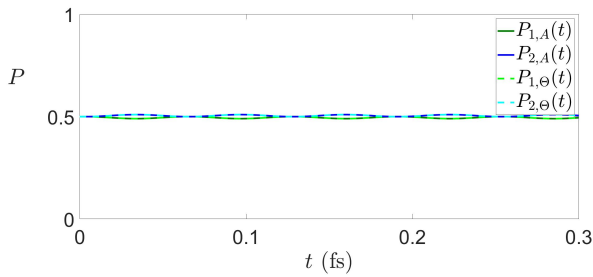
Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα σύνολο διαγραμμάτων στα οποία θα έχουμε, για  $\Delta = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ .



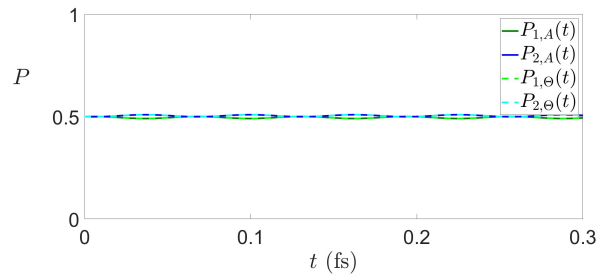
(i)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$



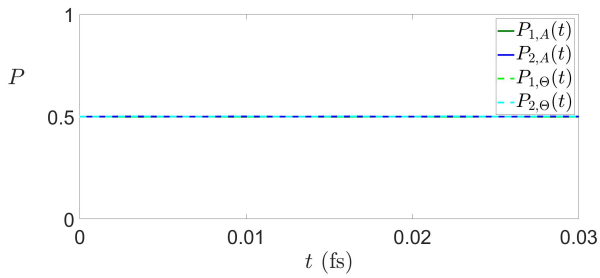
(ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$



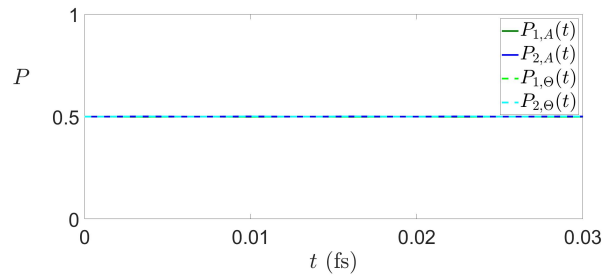
(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$



(iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$



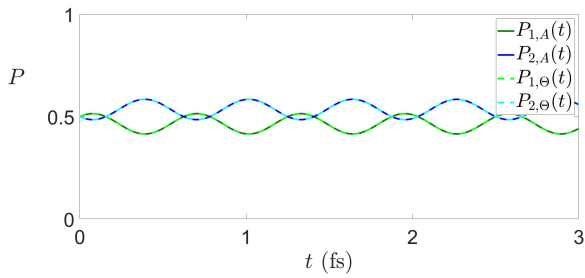
(v)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1000fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$



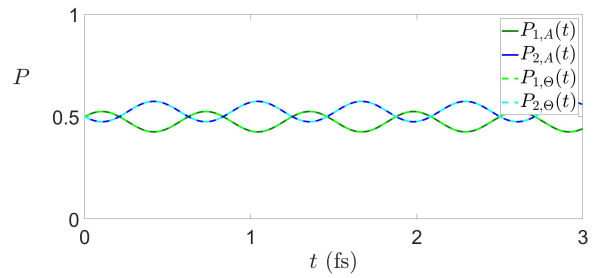
(vi)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1000fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$

Σχήμα 3.19 Ταλαντώσεις Rabi για  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$  (αριστερά),  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$  (δεξιά).

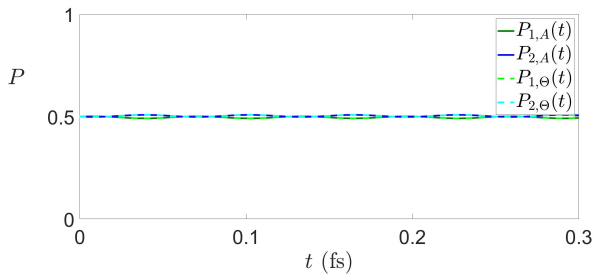
563. Αριθμητικά αποτελέσματα δισταθμικού συστήματος εντός προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος.



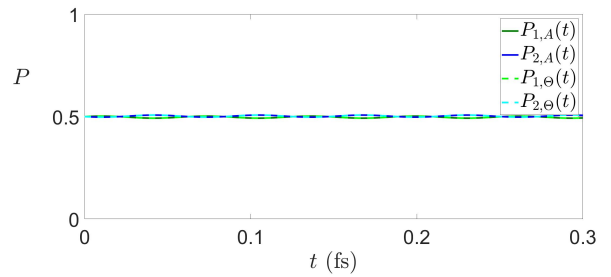
(i)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$



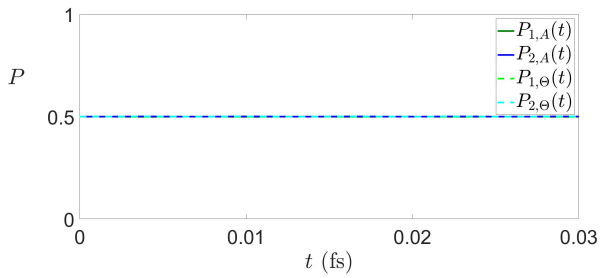
(ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$



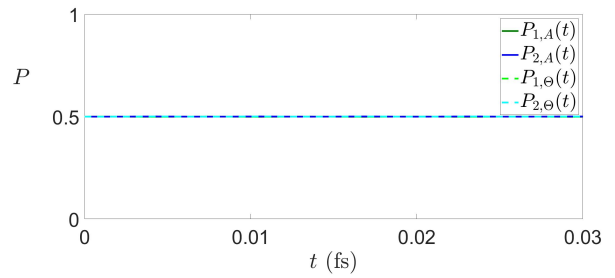
(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$



(iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$



(v)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1000fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$



(vi)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1000fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$

Σχήμα 3.20 Ταλαντώσεις Rabi για  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$  (αριστερά),  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$  (δεξιά).

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε την μεταβολή των ταλαντώσεων Rabi καθώς μεταβάλλουμε το  $\Delta$  και κρατάμε σταθερό το  $\theta - \phi$ . Αυτό το εφαρμόσαμε για 4 διαφορετικές φάσεις ( $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ ). Επιπλέον σε όλα τα διαγράμματα με διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζονται οι θεωρητικές λύσεις, ενώ με συνεχείς οι αριθμητικές λύσεις. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τέσσερις καμπύλες, μια συνεχής μπλε, μια διακεκομμένη κυανή, μια συνεχής σκουροπράσινη και μια διακεκομμένη ανοιχτοπράσινη. Η μπλε αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 2, ενώ η σκουροπράσινη αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 1 και η κυανή καμπύλη αντιστοιχεί στην θεωρητική λύση της στάθμης 2, ενώ η ανοιχτοπράσινη καμπύλη αντιστοιχεί στη θεωρητική λύση της στάθμης 1.

Παρατηρούμε,

1. Οι θεωρητικές με τις αριθμητικές λύσεις ταυτίζονται.
2. Η συμπεριφορά των διαγραμμάτων καθώς μεταβάλλουμε το  $\Delta$  είναι ακριβώς η ίδια, φυσικά στα δεδομένα πλάτη της κάθε περίπτωσης.
3. Όλες οι περιπτώσεις καθώς μεγαλώνει το  $\Delta$  η ταλάντωση σβήνει.

Το τελευταίο συμπέρασμα μπορούμε να το δούμε ως εξής, από τις εξισώσεις (2.35) και (2.36) για  $\Omega_R \ll \Delta$  έχουμε,

$$\begin{aligned} |C_1(t)|^2 &= \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R \Delta}{2(\cancel{\Omega_R^2} + \Delta^2)} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\cancel{\Omega_R^2} + \Delta^2}} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R \cancel{\Delta}}{2(\Delta^2)} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) + \frac{\Omega_R}{2\Delta} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t) \stackrel{\frac{\Omega_R}{\Delta} \ll 1}{\Rightarrow} \end{aligned}$$

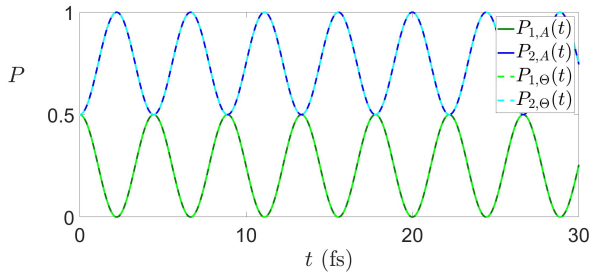
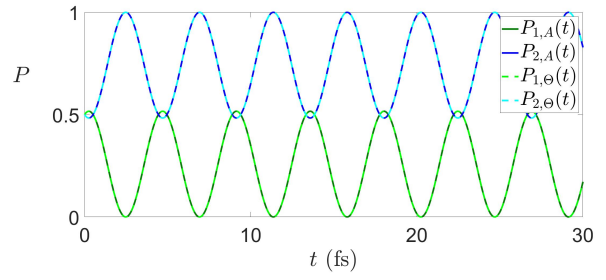
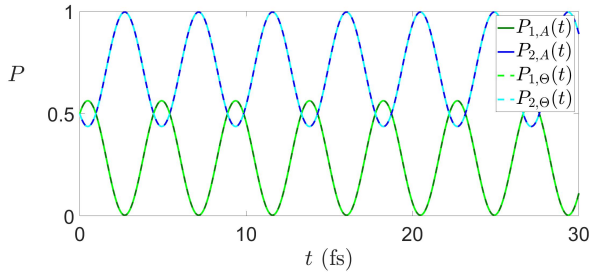
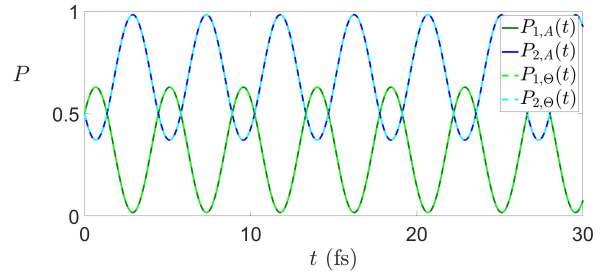
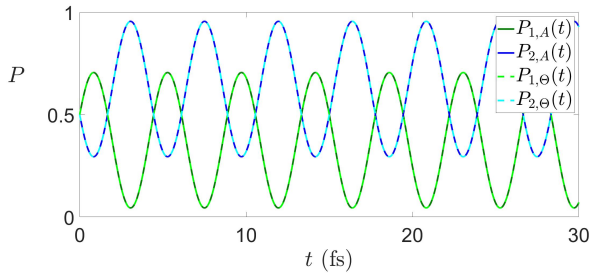
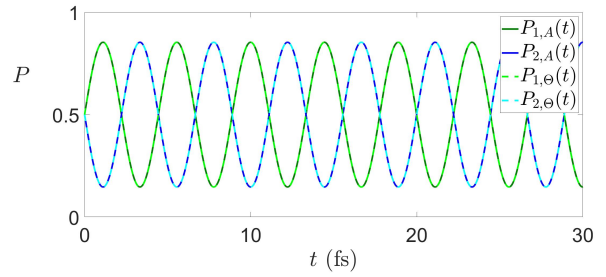
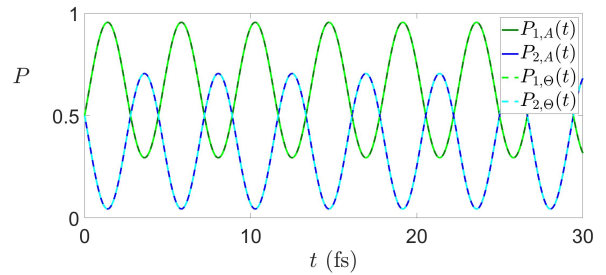
$$\boxed{|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} |C_2(t)|^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R \Delta}{2(\cancel{\Omega_R^2} + \Delta^2)} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\cancel{\Omega_R^2} + \Delta^2}} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R \cancel{\Delta}}{2(\Delta^2)} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) - \frac{\Omega_R}{2\Delta} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t) \stackrel{\frac{\Omega_R}{\Delta} \ll 1}{\Rightarrow} \end{aligned}$$

$$\boxed{|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2}}$$

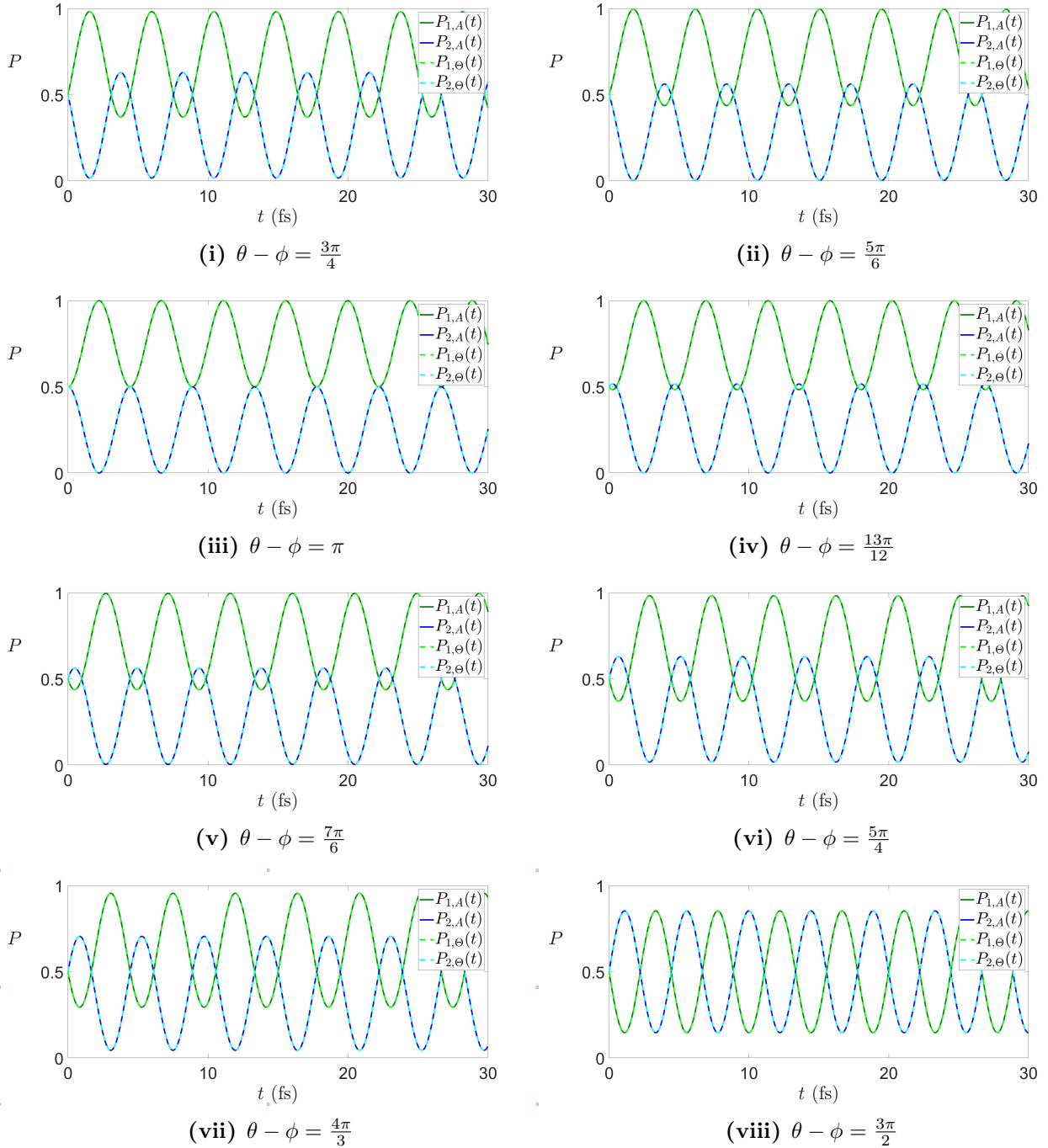
**Για  $\Omega_R = \Delta$ :**

Παρακάτω παρουσιάσουμε ένα σύνολο διαγραμμάτων, στα οποία τα  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$ .

(i)  $\theta - \phi = 0$ (ii)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$ (iii)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$ (iv)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$ (v)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$ (vi)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{2}$ (vii)  $\theta - \phi = \frac{7\pi}{12}$ (viii)  $\theta - \phi = \frac{2\pi}{3}$ 

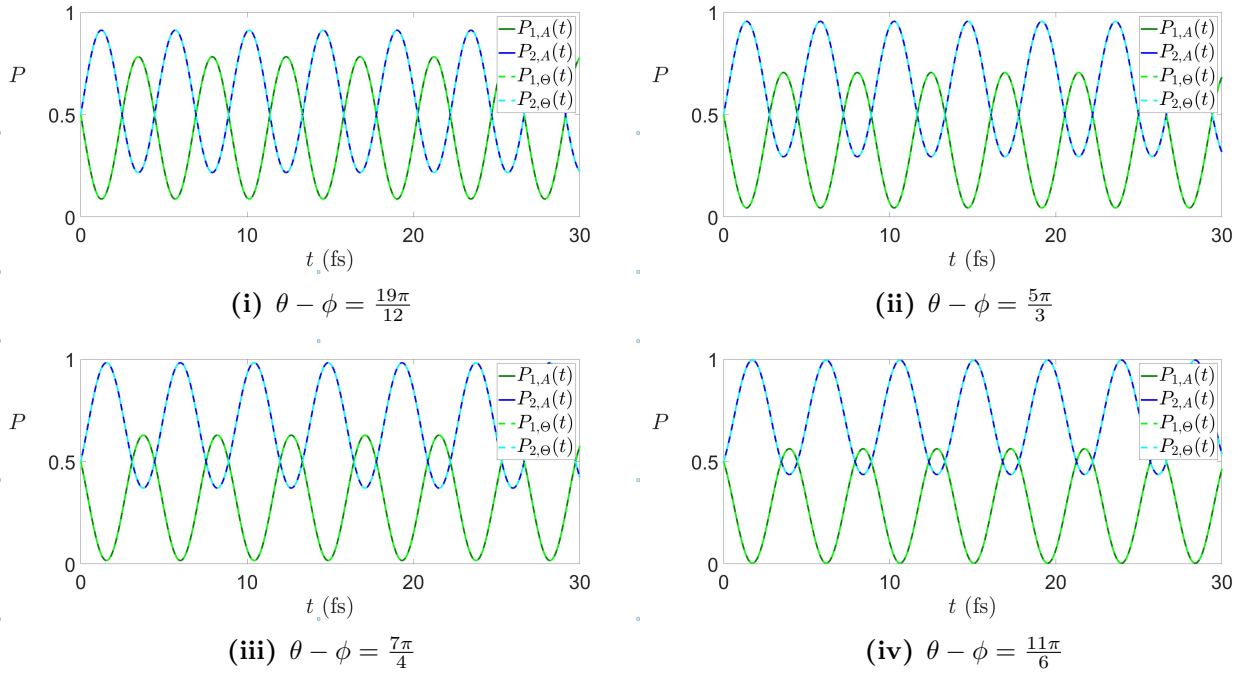
**Σχήμα 3.21** Ταλαντώσεις Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  για την περίπτωση αρχικών συνθηκών με φάση.





**Σχήμα 3.22** Ταλαντώσεις Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  για την περίπτωση αρχικών συνθηκών με φάση.

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε την μεταβολή των ταλαντώσεων Rabi καθώς μεταβάλλουμε την  $\theta - \phi$ . Επίσης στα διαγράμματα με διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζονται οι θεωρητικές λύσεις, ενώ με συνεχείς οι αριθμητικές λύσεις. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τέσσερις



**Σχήμα 3.23** Ταλαντώσεις Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  για την περίπτωση αρχικών συνθηκών με φάση.

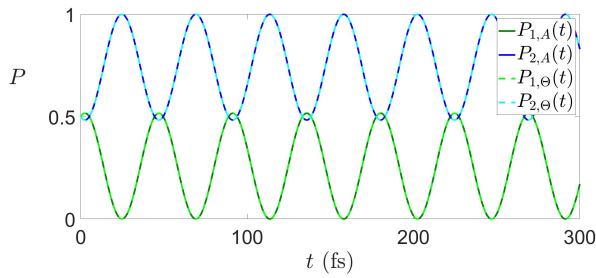
καμπύλες, μια συνεχής μπλε, μια διακεκομμένη κυανή, μια συνεχής σκουροπράσινη και μια διακεκομμένη ανοιχτοπράσινη. Η μπλε αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 2, ενώ η σκουροπράσινη αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 1 και η κυανή καμπύλη αντιστοιχεί στην θεωρητική λύση της στάθμης 2, ενώ η ανοιχτοπράσινη καμπύλη αντιστοιχεί στη θεωρητική λύση της στάθμης 1.

Παρατηρούμε ότι,

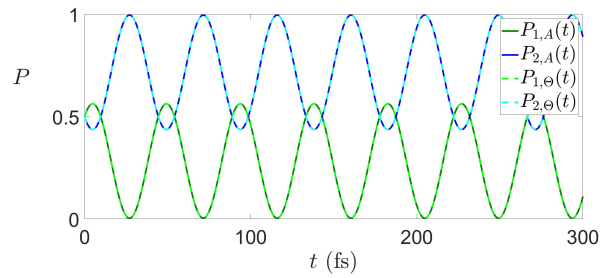
1. Οι θεωρητικές με τις αριθμητικές λύσεις ταυτίζονται.
2. Τα διαγράμματα στα οποία έχουμε  $\theta - \phi = \pi + \alpha$  και στο άλλο  $\theta - \phi = \alpha$ , όπου  $\alpha$  κάποια γωνία, τα διαγράμματα αυτά είναι όμοια, η μόνη διαφορά είναι ότι η στάθμη 1 γίνεται στάθμη 2 και αντίστροφα.
3. Οι φάσεις δεν επηρεάζουν την περίοδο της ταλάντωσης.

Τα δύο τελευταία συμπεράσματα παραπάνω φαίνονται και από τις εξισώσεις (2.35) και (2.36) καθώς η περίοδος δεν εξαρτάται καθόλου από τις φάσεις και επιπλέον αν θέσουμε στην εξίσωση (2.35),  $\theta - \phi = \pi + \alpha$  προκύπτει η εξίσωση (2.36), αν της είχαμε θέσει  $\theta - \phi = \alpha$  και αντίστροφα.

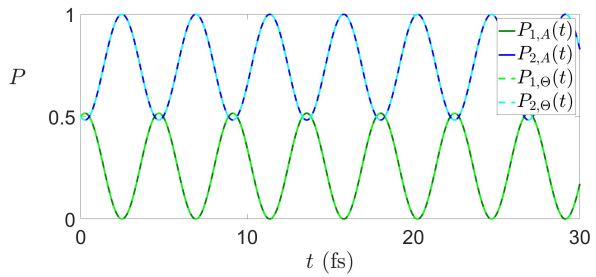
Παρακάτω παρουσιάσουμε ένα σύνολο διαγραμμάτων στα οποία θα έχουμε, για  $\Omega_R = \Delta = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ .



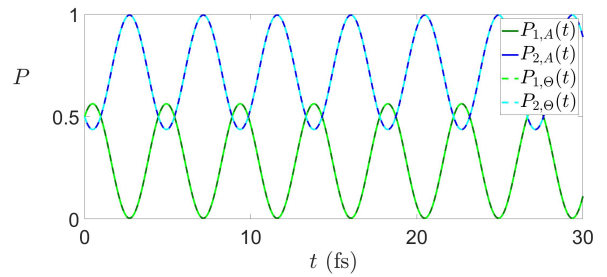
(i)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0.1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$



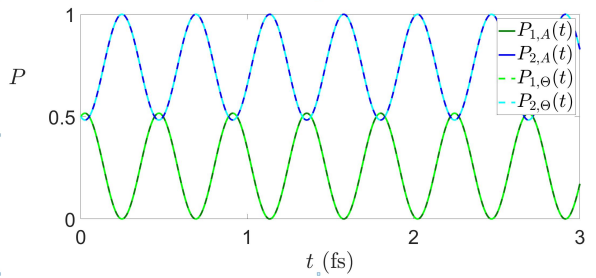
(ii)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0.1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$



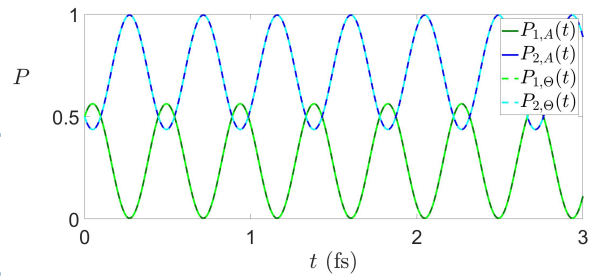
(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$



(iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$



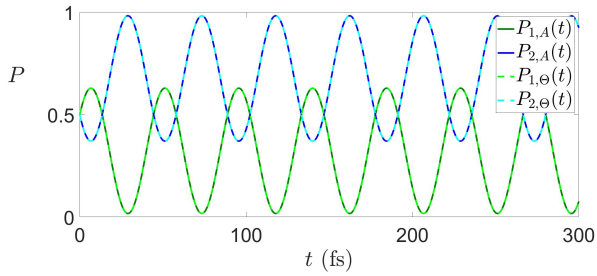
(v)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Delta = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$



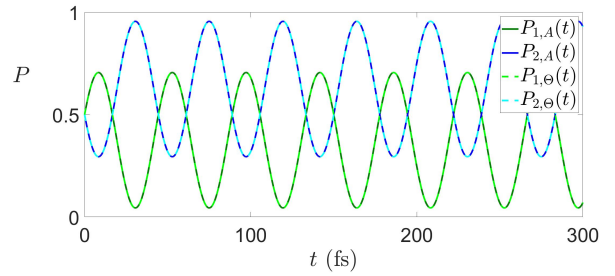
(vi)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Delta = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$

Σχήμα 3.24 Ταλαντώσεις Rabi για  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$  (αριστερά),  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$  (δεξιά).

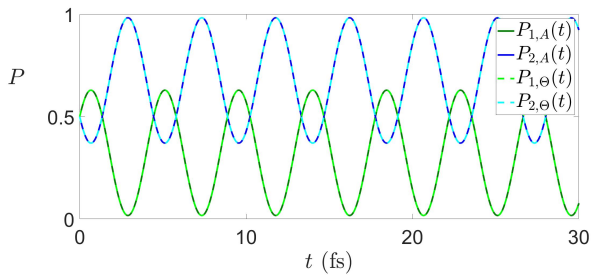
623. Αριθμητικά αποτελέσματα δισταθμικού συστήματος εντός προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος.



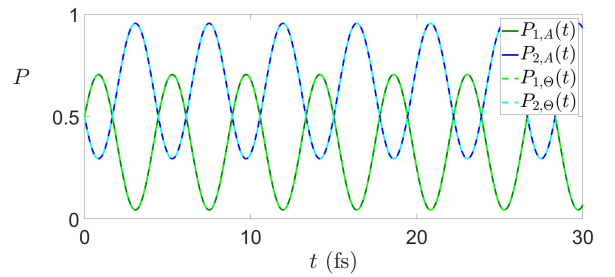
(i)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0.1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$



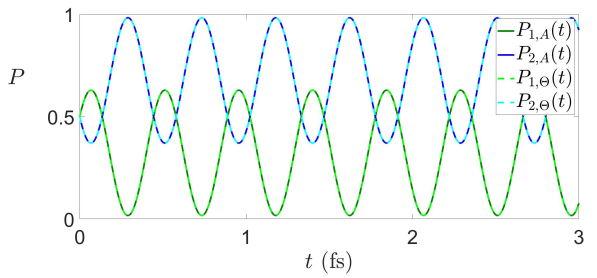
(ii)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0.1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$



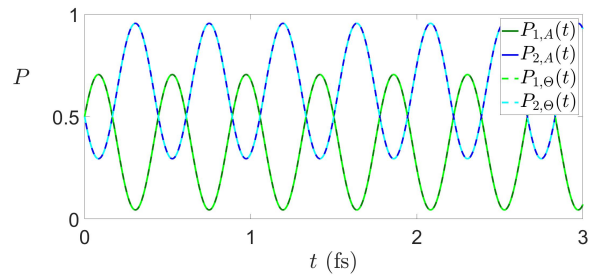
(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$



(iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 1fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$



(v)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Delta = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$



(vi)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Delta = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$

Σχήμα 3.25 Ταλαντώσεις Rabi για  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$  (αριστερά),  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$  (δεξιά).

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε την μεταβολή των ταλαντώσεων Rabi καθώς μεταβάλλουμε τα  $\Omega_R = \Delta$  και κρατάμε σταθερό το  $\theta - \phi$ . Αυτό το εφαρμόσαμε για 4 διαφορετικές φάσεις ( $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ ). Επιπλέον σε όλα τα διαγράμματα με διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζονται οι θεωρητικές λύσεις, ενώ με συνεχείς οι αριθμητικές λύσεις. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τέσσερις καμπύλες, μια συνεχής μπλε, μια διακεκομμένη κυανή, μια συνεχής σκουροπράσινη και μια διακεκομμένη ανοιχτοπράσινη. Η μπλε αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 2, ενώ η σκουροπράσινη αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 1 και η κυανή καμπύλη αντιστοιχεί στην θεωρητική λύση της στάθμης 2, ενώ η ανοιχτοπράσινη καμπύλη αντιστοιχεί στη θεωρητική λύση της στάθμης 1.

Παρατηρούμε,

1. Οι θεωρητικές με τις αριθμητικές λύσεις ταυτίζονται.
2. Η συμπεριφορά των διαγραμμάτων καθώς μεταβάλλουμε τα  $\Omega_R = \Delta$  είναι ακριβώς η ίδια, φυσικά στα δεδομένα πλάτη της κάθε περίπτωσης.
3. Η συμπεριφορά της ταλάντωσης σε όλες τις περιπτώσεις καθώς μεγαλώνουν τα  $\Omega_R = \Delta$  δεν μεταβάλλεται καθόλου και το μόνο που αλλάζει είναι η περίοδος τους.

Το τελευταίο συμπέρασμα μπορούμε να το δούμε ως εξής, από τις εξισώσεις (2.35) και (2.36) για  $\Omega_R = \Delta$  έχουμε,

$$\begin{aligned} |C_1(t)|^2 &= \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R \Omega_R}{2(\Omega_R^2 + \Omega_R^2)} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Omega_R^2}} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\cancel{\Omega_R^2}}{4(\cancel{\Omega_R^2})} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) + \frac{\cancel{\Omega_R}}{2\sqrt{2}\cancel{\Omega_R}} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t) \Rightarrow \\ &\boxed{|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |C_2(t)|^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R \Omega_R}{2(\Omega_R^2 + \Omega_R^2)} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Omega_R^2}} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\cancel{\Omega_R^2}}{4(\cancel{\Omega_R^2})} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) - \frac{\cancel{\Omega_R}}{2\sqrt{2}\cancel{\Omega_R}} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t) \Rightarrow \\ &\boxed{|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(\theta - \phi) \sin(2\lambda t)} \end{aligned}$$

### 3.2 Περίπτωση συντονισμού: $\Delta = 0$ .

Στην περίπτωση του συντονισμού, δηλαδή  $\Delta = 0 \Rightarrow \omega - \Omega = 0 \Rightarrow \Omega = \omega$ , θα έχουμε αριθμητικά αποτελέσματα για τις τρεις αρχικές συνθήκες που έχουν ήδη παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 2. Δηλαδή,

1.  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη. (Δείτε 2.1)
2.  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη. (Δείτε 2.2)
3.  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}, C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$ , δηλαδή στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται και στις δύο στάθμες με πιθανότητα  $|C_1(0)|^2 = |C_2(0)|^2 = \frac{1}{2}$ . (Δείτε 2.3)

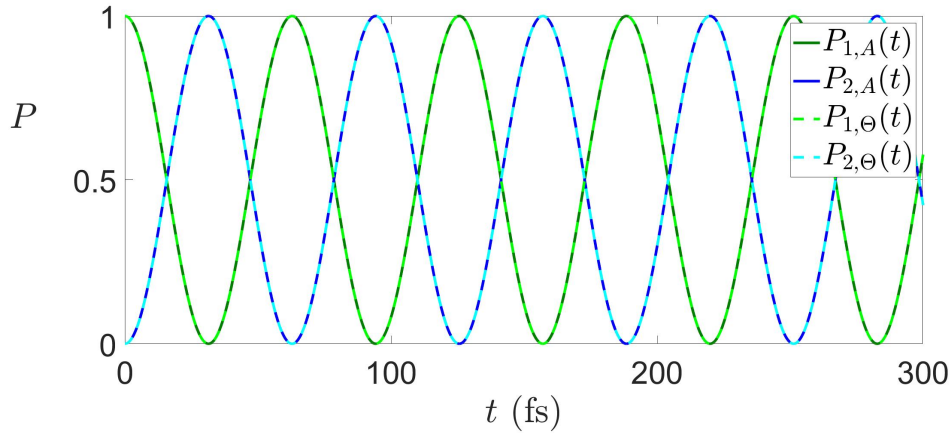
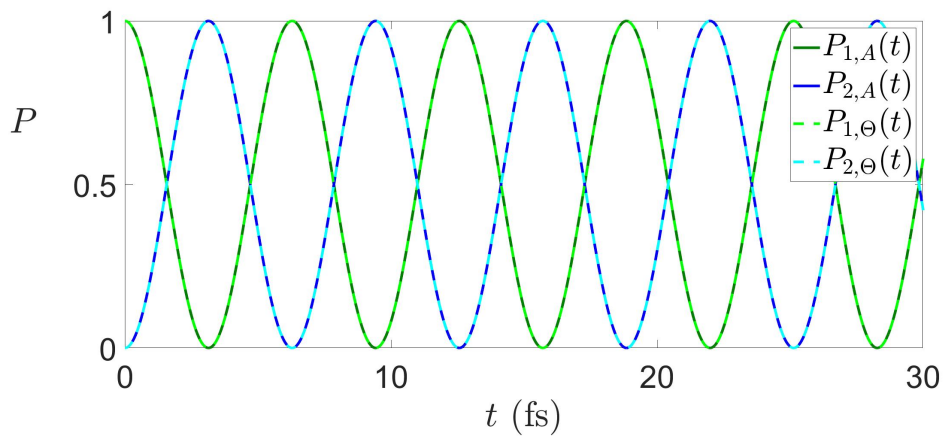
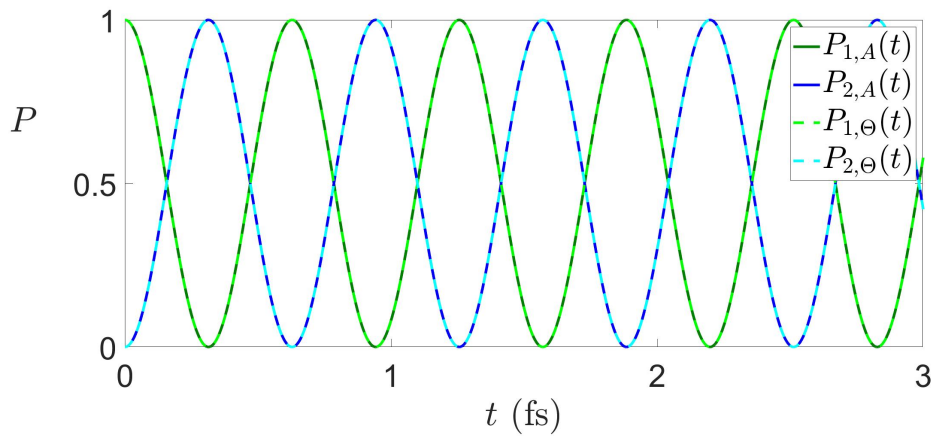
Για την κάθε περίπτωση έχουν προκύψει οι πιθανότητες για τις δύο στάθμες  $P_1(t)$  και  $P_2(t)$  όπου θα συγκριθούν τα αποτελέσματα αυτά με τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από το matlab.

#### 3.2.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.

Με τη χρήση των αρχικών συνθηκών  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη προκύπτουν οι εξισώσεις (2.26),

$$\begin{cases} |C_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \\ |C_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \end{cases} \quad (3.18)$$

Παρακάτω παρουσιάζονται τρία διαγράμματα, με  $\Delta = 0$  και  $\Omega_R = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$ .

(i)  $\Omega_R = 0.1 \text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0$ .(ii)  $\Omega_R = 1 \text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0$ .(iii)  $\Omega_R = 10 \text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0$ .

**Σχήμα 3.26** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου, με  $\Delta = 0$  (συντονισμός).

Στα τρία παραπάνω διαγράμματα με διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζονται οι θεωρητικές λύσεις, ενώ με κανονικές οι αριθμητικές λύσεις. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τέσσερις καμπύλες, μια συνεχή μπλε, μία διακεκομμένη κυανή, μία συνεχή σκουροπράσινη και μία διακεκομμένη ανοιχτοπράσινη. Η συνεχή μπλε αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 2, ενώ η συνεχή σκουροπράσινη αντιστοιχεί στην αριθμητική καμπύλη της στάθμης 1 και η κυανή καμπύλη αντιστοιχεί στην θεωρητική λύση της στάθμης 2, ενώ η ανοιχτοπράσινη καμπύλη αντιστοιχεί στη θεωρητική λύση της στάθμης 1.

Παρατηρούμε ότι,

1. Οι θεωρητικές ταυτίζονται με τις αριθμητικές λύσεις.
2. Το πλάτος είναι σταθερό και ίσο με 1, όπως είναι αναμενόμενο από τις εξισώσεις.
3. Το μόνο που αλλάζει στον συντονισμό είναι η περίοδος.

### 3.2.2 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.

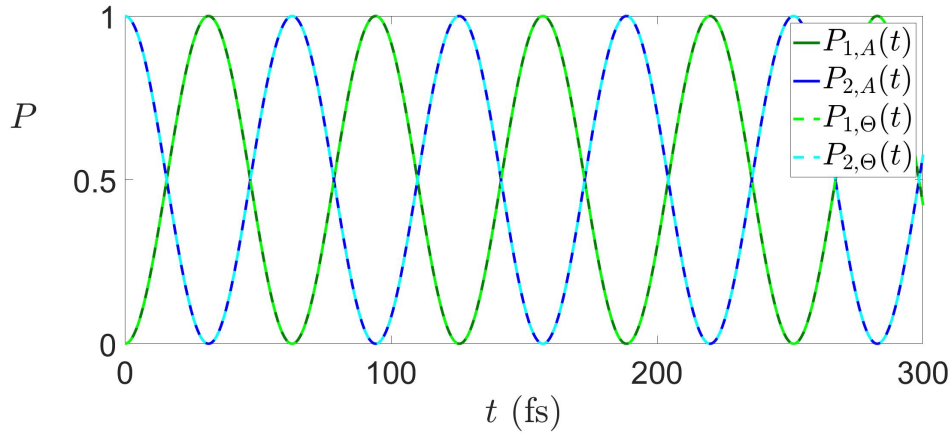
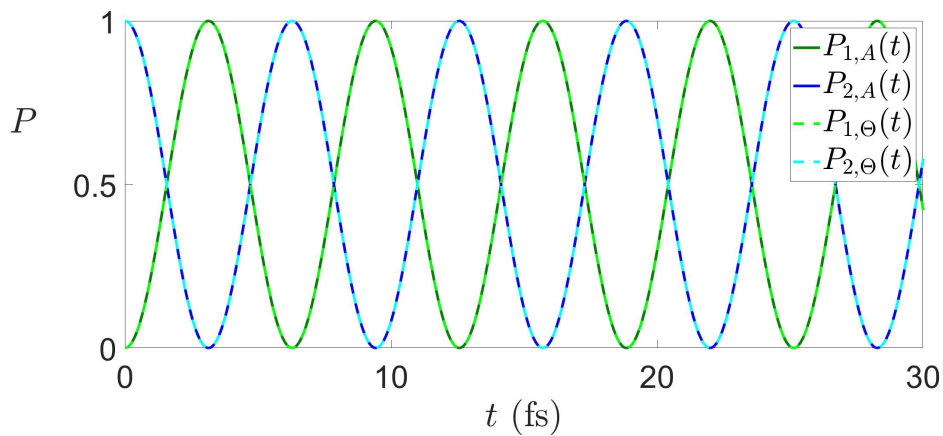
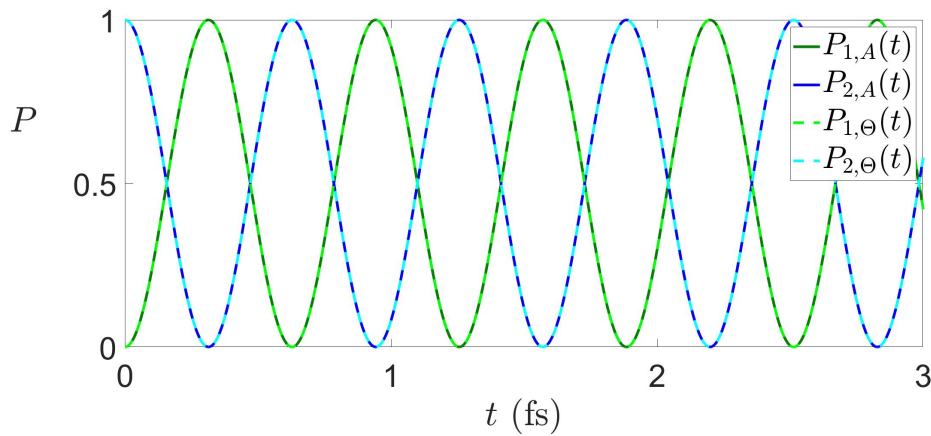
Με τη χρήση των αρχικών συνθηκών  $C_1(0) = 0$ ,  $C_2(0) = 1$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη προκύπτουν οι εξισώσεις 4.9,

$$\begin{aligned} P_1(t) &= |C_1(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \\ P_2(t) &= |C_2(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Παρατηρούμε ότι, οι εξισώσεις είναι ίδιες με τις εξισώσεις που προέκυψαν στη λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην αρχή του χρόνου στη κάτω στάθμη, με τη μόνη διαφορά ότι αυτά που ίσχυαν για την στάθμη 1 ισχύουν για την στάθμη 2 και αντίστροφα. Άρα περιμένουμε τα διαγράμματα που θα παρουσιάσουμε να είναι ακριβώς ίδια με την μόνη διαφορά τα  $P_1(t)$  να έχουν γίνει  $P_2(t)$  και αντίστροφα.

Έτσι παρακάτω παρουσιάζονται τα τρία διαγράμματα με  $\Delta = 0$  και  $\Omega_R = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$ .



(i)  $\Omega_R = 0.1 \text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0$ (ii)  $\Omega_R = 1 \text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0$ (iii)  $\Omega_R = 10 \text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0$ 

**Σχήμα 3.27** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην άνω στάθμη, στην αρχή του χρόνου, με  $\Delta = 0$  (συντονισμός).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η αρχική μας υπόθεση ήταν σωστή. Έτσι τα συμπεράσματα που παρατηρήθηκαν στην παράγραφο 3.2.1 ισχύουν και για αυτή την περίπτωση αρχικών συνθηκών.

### 3.2.3 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.

Τελευταία περίπτωση αρχικών συνθηκών είναι  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ ,  $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$  όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί ισοπίθανα να βρεθεί και στις δύο στάθμες. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις (2.37),

$$\begin{cases} |C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\sin(\theta - \phi) \\ |C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\sin(\theta - \phi) \end{cases} \quad (3.20)$$

Για να μπορέσουμε πρώτα από όλα να αναλύσουμε όλα τα αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι οι φάσεις εμφανίζονται ως  $\theta - \phi$  σε  $\sin$ . Άρα θα αναλύσουμε τις παρακάτω κατηγορίες αποτελεσμάτων όπως και στον αποσυντονισμό:

1. Για  $\theta - \phi = 2\pi\kappa$  και  $\theta - \phi = (2\kappa + 1)\pi$ , όπου  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$
2. Για  $\theta - \phi = (4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$  και  $\theta - \phi = (4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}$ , όπου  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$
3. Και η πιο γενική, όπου το  $\theta - \phi$  είναι διάφορο όλων των παραπάνω περιπτώσεων.

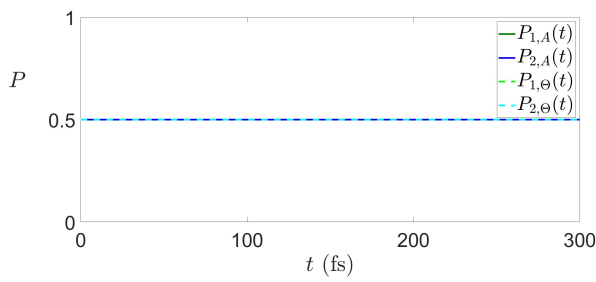
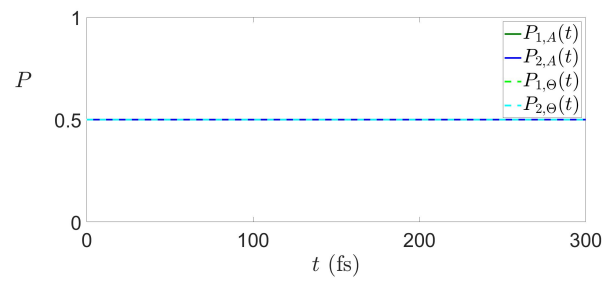
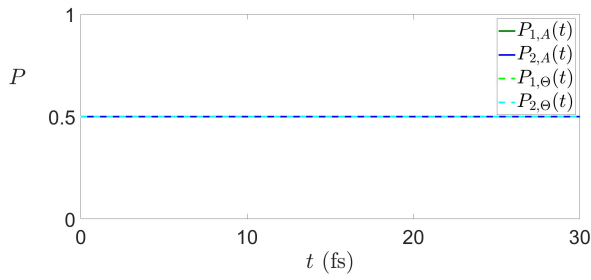
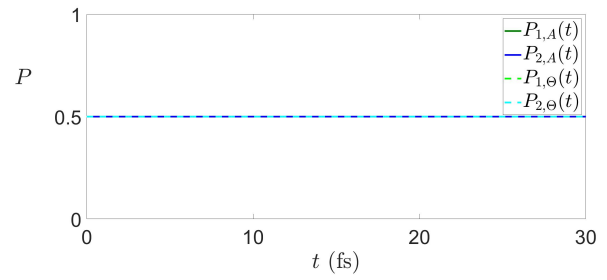
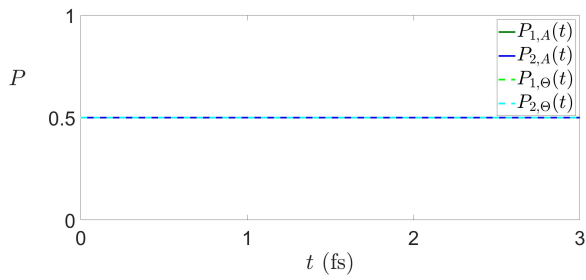
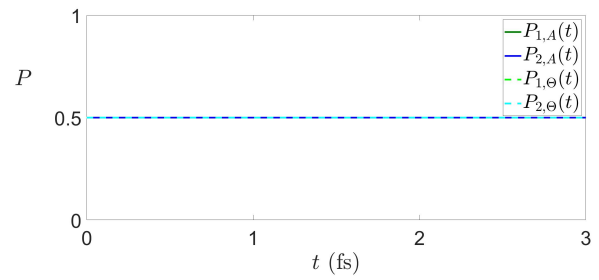
Για  $\theta - \phi = 2\pi\kappa$  και  $\theta - \phi = (2\kappa + 1)\pi$ : Σε αυτή τη περίπτωση λοιπόν ισχύει το εξής,

$$\begin{aligned} \sin(\theta - \phi) &= \sin(2\pi\kappa) = 0 \\ \sin(\theta - \phi) &= \sin((2\kappa + 1)\pi) = 0 \end{aligned}$$

Επομένως οι εξισώσεις 3.20 γίνονται,

$$\boxed{|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2}, |C_2(t)|^2 = \frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι σε αυτή την περίπτωση δεν θα έχουμε ταλάντωση σύμφωνα με τις παραπάνω εξισώσεις. Παρουσιάζουμε τυπικά έξι διαγράμματα τα οποία είναι για  $\Delta = 0$ ,  $\Omega_R = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$  και  $\theta - \phi = 2\pi\kappa$  ή  $(2\kappa + 1)\pi$ .

(i)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  με  $\theta - \phi = 2\pi\kappa$ (ii)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  με  $\theta - \phi = (2\kappa + 1)\pi$ (iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  με  $\theta - \phi = 2\pi\kappa$ (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  με  $\theta - \phi = (2\kappa + 1)\pi$ (v)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  με  $\theta - \phi = 2\pi\kappa$ (vi)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  με  $\theta - \phi = (2\kappa + 1)\pi$ 

**Σχήμα 3.28** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου, με  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = 2\pi\kappa$  (αριστερά) και  $\theta - \phi = (2\kappa + 1)\pi$  (δεξιά).

Παρατηρούμε ότι η αρχική υπόθεση προφανώς ισχύει. Έτσι το συμπέρασμα μας είναι ότι όταν  $\theta = \phi$  τότε δεν έχουμε ταλάντωση.

Για  $\theta - \phi = (4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$  και  $\theta - \phi = (4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}$ : Σε αυτή τη περίπτωση ισχύει το εξής,

$$\sin(\theta - \phi) = \sin\left((4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\sin(\theta - \phi) = \sin\left((4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Επομένως οι εξισώσεις 3.20 γίνονται,

$$\begin{cases} |C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t) \\ |C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t) \end{cases} \quad (3.22)$$

για,

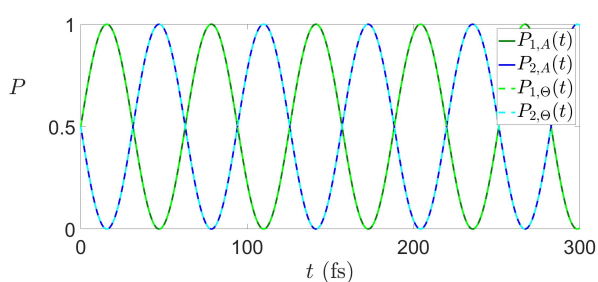
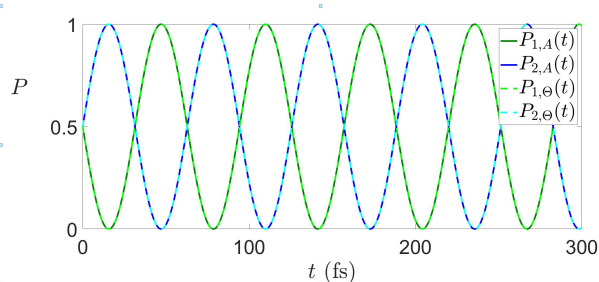
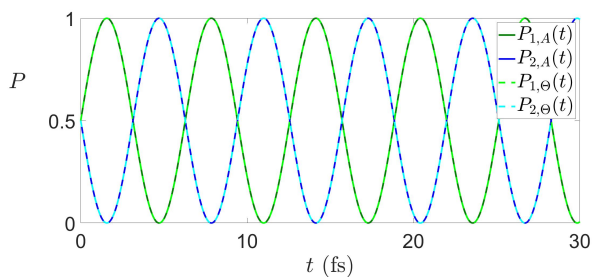
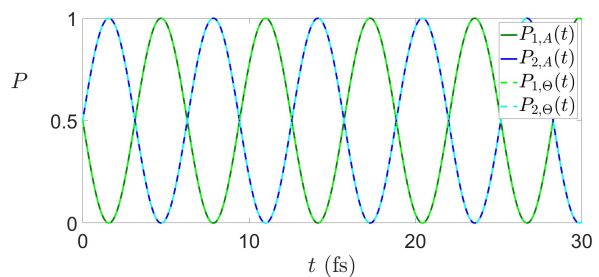
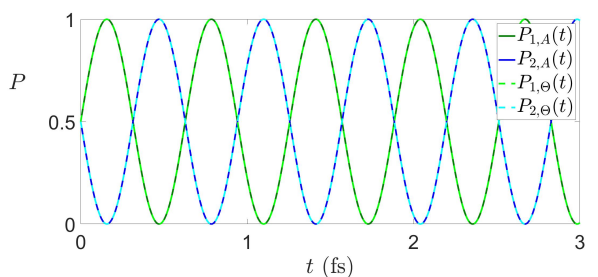
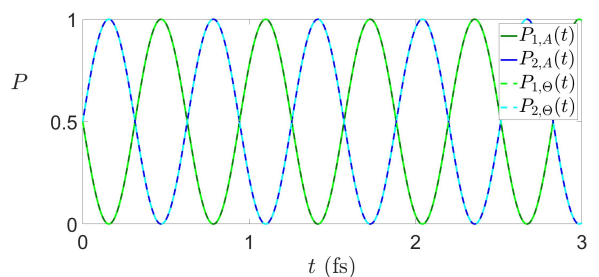
$$\theta - \phi = (4\kappa + 1)\frac{\pi}{2} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} |C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t) \\ |C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t) \end{cases} \quad (3.24)$$

για,

$$\theta - \phi = (4\kappa + 3)\frac{\pi}{2} \quad (3.25)$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα τα οποία είναι για  $\Delta = 0$ ,  $\Omega_R = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$ , με  $\theta - \phi = (4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$  ή  $(4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}$ . Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι ταλαντώσεις Rabi θα είναι ίδιες στις δυο διαφορετικές φάσεις, μόνο που αυτά που θα ισχύουν για την στάθμη 1 θα ισχύουν για την στάθμη 2 και αντίστροφα. Αυτό το παρατηρούμε στο γεγονός ότι οι εξισώσεις παραπάνω είναι ίδιες απλά γίνεται αυτή η απλή αλλαγή,  $P_1(t) \longleftrightarrow P_2(t)$ .

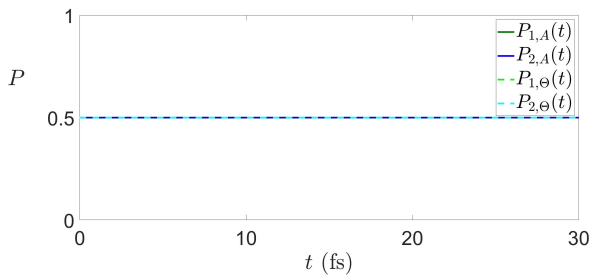
(i)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$   $\mu\epsilon$   $\theta - \phi = (4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$ (ii)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$   $\mu\epsilon$   $\theta - \phi = (4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}$ (iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$   $\mu\epsilon$   $\theta - \phi = (4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$ (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$   $\mu\epsilon$   $\theta - \phi = (4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}$ (v)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$   $\mu\epsilon$   $\theta - \phi = (4\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$ (vi)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$   $\mu\epsilon$   $\theta - \phi = (4\kappa + 3)\frac{\pi}{2}$ 

**Σχήμα 3.29** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου, με  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = (4\kappa + 1)\pi$  (αριστερά) και  $\theta - \phi = (4\kappa + 3)\pi$  (δεξιά).

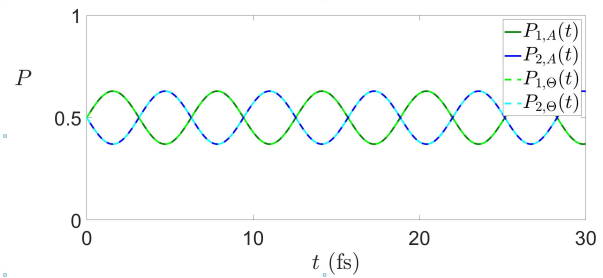
Έτσι παρατηρούμε ότι όντως η προηγούμενη υπόθεση μας ισχύει. Επιπλέον παρατηρούμε ότι το μόνο που αλλάζει είναι η περίοδος και μένει σταθερό το πλάτος των ταλαντώσεων Rabi.

Παρακάτω παρουσιάζουμε την πιο γενική περίπτωση, για διάφορες φάσεις οι οποίες δεν ανήκουν στις προηγούμενες κατηγορίες. Θα παρουσιάσουμε δύο σύνολα διαγραμμάτων, το πρώτο σύνολο διαγραμμάτων είναι να έχουμε σταθερά τα  $\Delta$  και  $\Omega_R$  και να μεταβάλλουμε την φάση. Ενώ το δεύτερο σύνολο διαγραμμάτων είναι για σταθερή φάση να μεταβάλλουμε το  $\Omega_R$ .

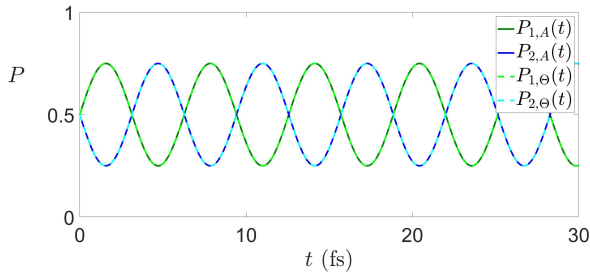
Παρακάτω παρουσιάζουμε το πρώτο σύνολο διαγραμμάτων για  $\Delta = 0$  και  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  με  $\theta - \phi = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$ .



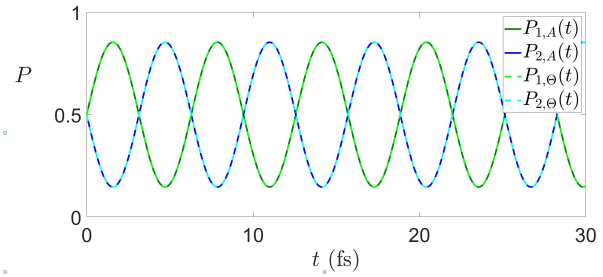
(i)  $\theta - \phi = 0$



(ii)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$

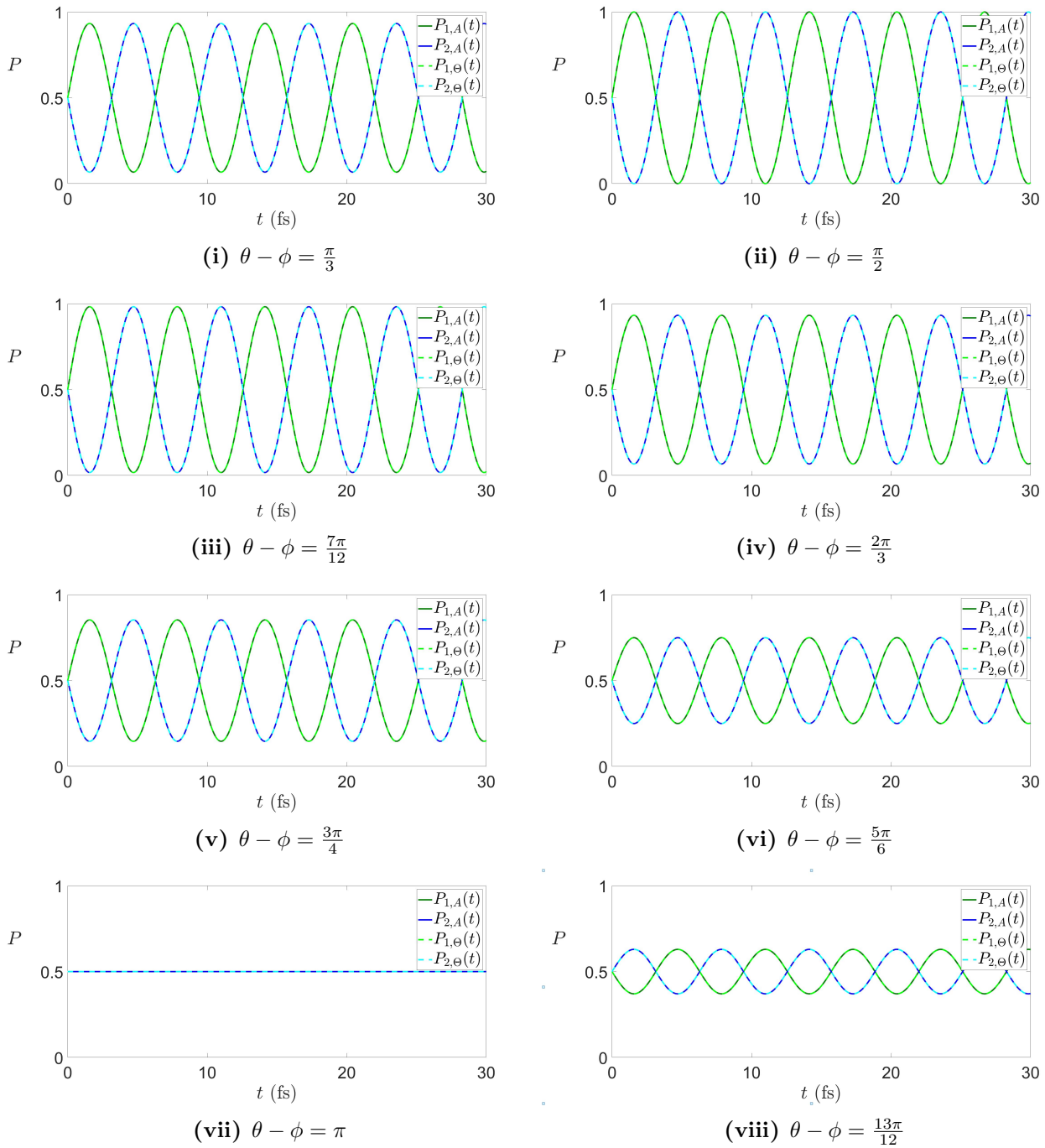


(iii)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$



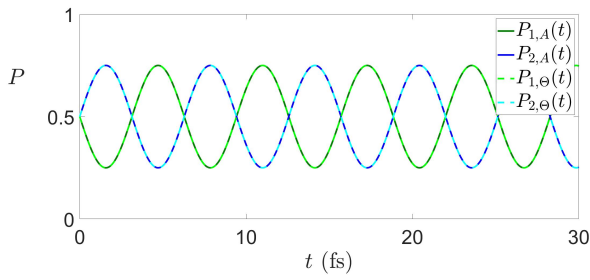
(iv)  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$

**Σχήμα 3.30** Ταλαντώσεις Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 0\text{fs}^{-1}$  για την περίπτωση αρχικών συνθηκών με φάση.

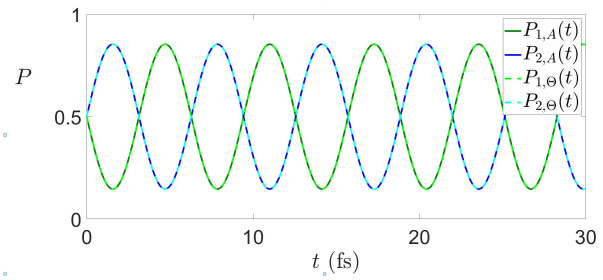


Σχήμα 3.31 Ταλαντώσεις Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 0\text{fs}^{-1}$  για την περίπτωση αρχικών συνθηκών με φάση.

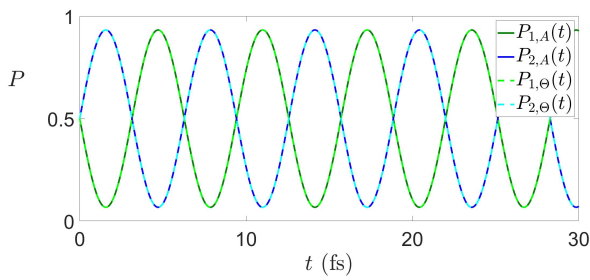
743. Αριθμητικά αποτελέσματα δισταθμικού συστήματος εντός προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος.



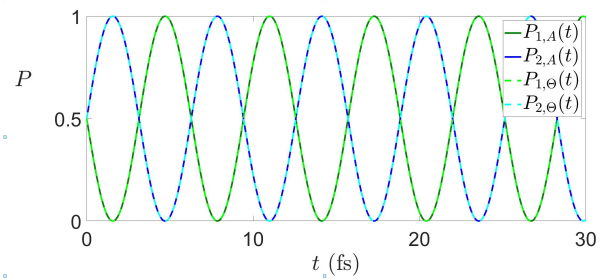
(i)  $\theta - \phi = \frac{7\pi}{6}$



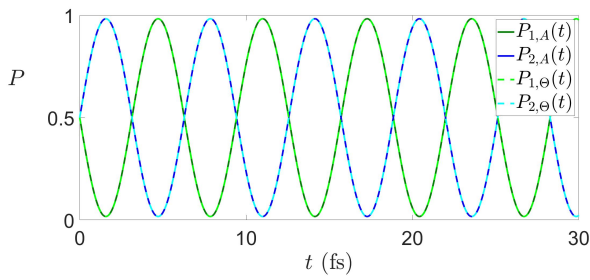
(ii)  $\theta - \phi = \frac{5\pi}{4}$



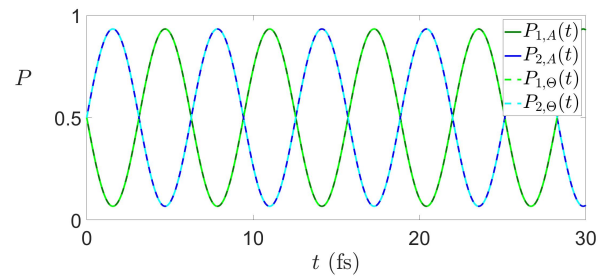
(iii)  $\theta - \phi = \frac{4\pi}{3}$



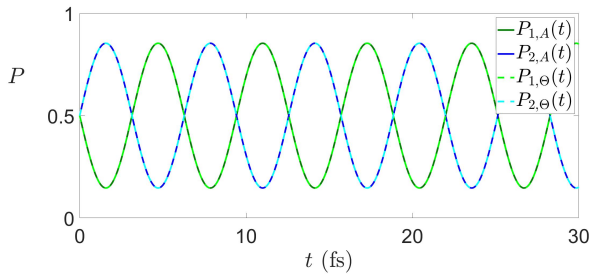
(iv)  $\theta - \phi = \frac{3\pi}{2}$



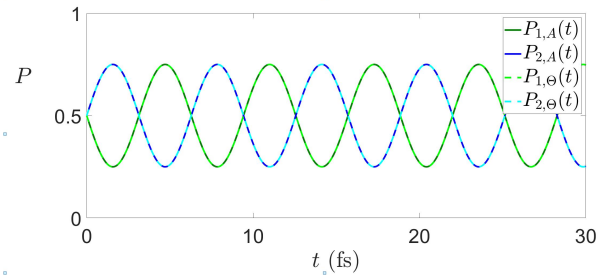
(v)  $\theta - \phi = \frac{19\pi}{12}$



(vi)  $\theta - \phi = \frac{5\pi}{3}$



(vii)  $\theta - \phi = \frac{7\pi}{4}$

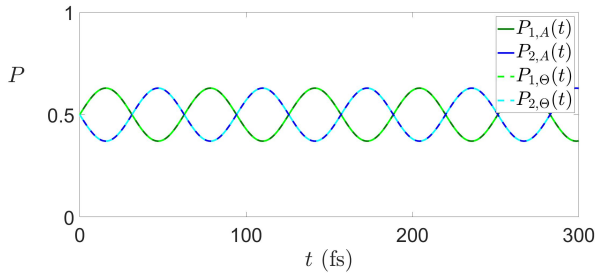
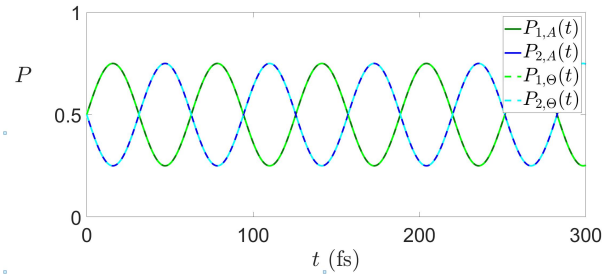
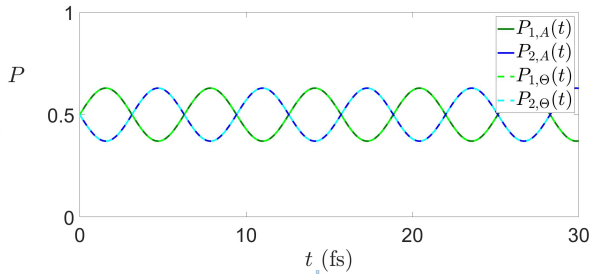
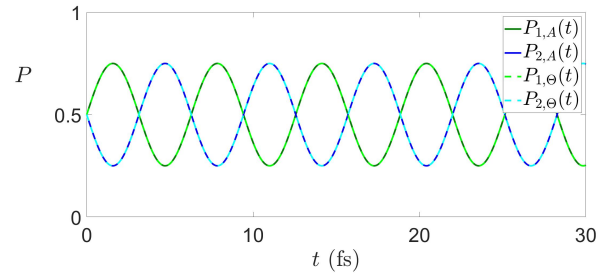
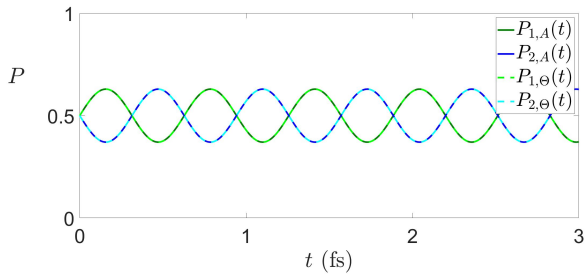
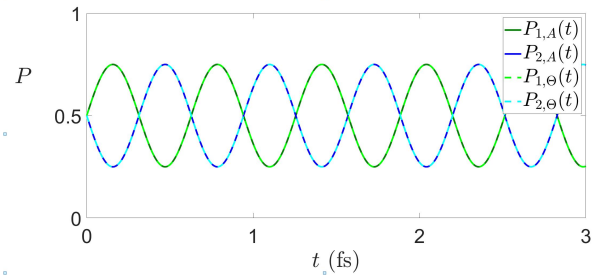


(viii)  $\theta - \phi = \frac{11\pi}{6}$

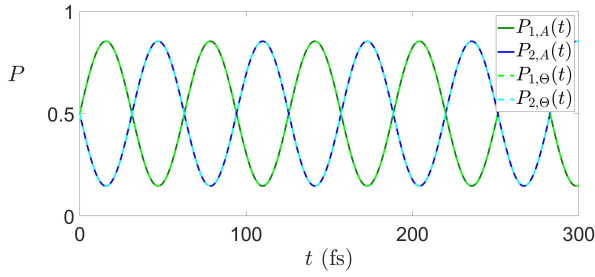
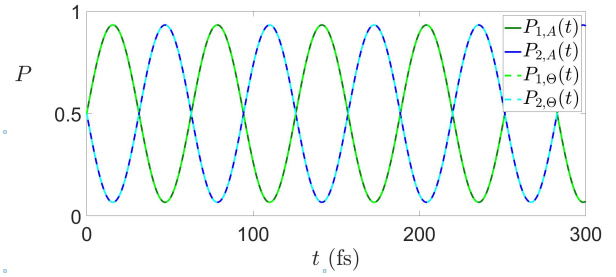
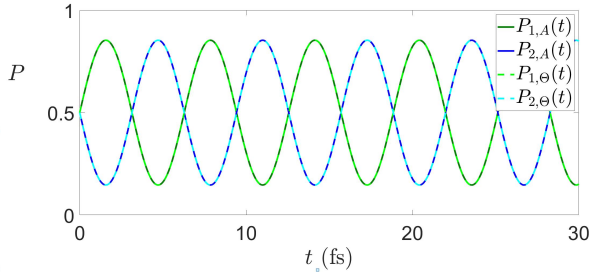
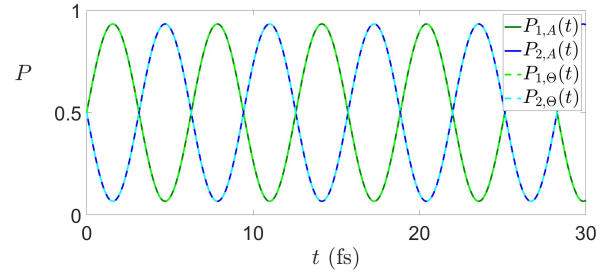
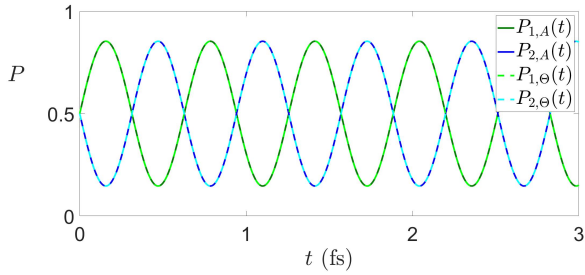
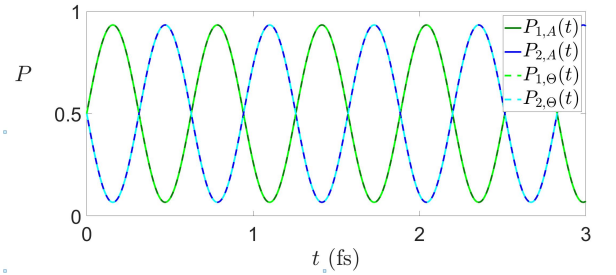
Σχήμα 3.32 Ταλαντώσεις Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$  για την περίπτωση αρχικών συνθηκών με φάση.



Το δεύτερο σύνολο διαγραμμάτων παρουσιάζει, για τέσσερις διαφορετικές φάσεις  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$  τις ταλαντώσεις Rabi, για  $\Omega_R = 0.1, 1, 10 \text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 0$ .

(i)  $\Omega_R = 0.1 \text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$ (ii)  $\Omega_R = 0.1 \text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$ (iii)  $\Omega_R = 1 \text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$ (iv)  $\Omega_R = 1 \text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$ (v)  $\Omega_R = 10 \text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$ (vi)  $\Omega_R = 10 \text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$ 

Σχήμα 3.33 Ταλαντώσεις Rabi για  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$  (αριστερά) και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$  (δεξιά).

(i)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$ (ii)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$ (iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$ (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$ (v)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$ (vi)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Delta = 0$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$ Σχήμα 3.34 Ταλαντώσεις Rabi για  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$  (αριστερά) και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$  (δεξιά).

Παρατηρούμε λοιπόν στα παραπάνω διαγράμματα ότι το μόνο που επηρεάζεται είναι η περίοδος της ταλάντωσης Rabi. Σε αυτό το σημείο έχουμε καλύψει όλες τις περιπτώσεις. Είναι σημαντικό να σχολιαστεί ότι για  $\Omega_R \gg \Delta$  τείνουν όλες οι περιπτώσεις στον συντονισμό δηλαδή το αποτέλεσμα είναι ίδιο για  $\Delta = 0$ . Τέλος αξίζει να σχολιαστεί ότι για  $\Omega_R \ll \Delta$  σε μερικές περιπτώσεις δείχνει το αποτέλεσμα ότι τείνει στον συντονισμό. Αυτό το συμπέρασμα είναι εσφαλμένο, καθώς στην περίπτωση αυτή σημαίνει ότι η διαταραχή είναι πολύ μικρή και επομένως μπορεί να θεωρηθεί μηδενική και είναι λογικό να μην έχουμε ταλάντωση.

## Κεφάλαιο 4

# Δισταθμικό Σύστημα εκτός Προσεγγίσεως Περιστρεφόμενου Κύματος.

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την αριθμητική επίλυση του Γραμμικού Συστήματος Διαφορικών Εξισώσεων 1<sup>ης</sup> Τάξεως (Εξ. 1.21), με τη βοήθεια του προγράμματος matlab. Το σύστημα αυτό θα λυθεί σε ένα δισταθμικό σύστημα. Οι αρχικές συνθήκες που θα χρησιμοποιηθούν θα είναι οι εξής:

1.  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη,
2.  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη και
3.  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}, C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$ , δηλαδή στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται και στις δύο στάθμες με πιθανότητα  $|C_1(0)|^2 = |C_2(0)|^2 = \frac{1}{2}$

Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα λύσουμε είναι,

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) = C_2(t) \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \left[ e^{-i(\Omega-\omega)t} + e^{-i(\Omega+\omega)t} \right] \\ \dot{C}_2(t) = C_1(t) \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \left[ e^{i(\Omega+\omega)t} + e^{i(\Omega-\omega)t} \right] \end{cases} \quad (4.1)$$

Το πρόγραμμα matlab λύνει το πρόβλημα με τη βοήθεια του αλγόριθμου ODE45. Ο αλγόριθμος ODE45 είναι από τους πιο βασικούς του matlab και βασίζεται στη μέθοδο τραπεζίου Runge-Kutta (4,5) [ [9]]. Ο αλγόριθμος αυτός επιλέγει μια συγκεκριμένη διχοτόμηση του διαστήματος που έχουμε ορίσει, στη συγκεκριμένη περίπτωση για το χρόνο  $t$ , δίνοντας μας ως αποτέλεσμα για κάθε σημείο του χρόνου μία στήλη πίνακα με στοιχεία τα  $C_k(t)$  με  $k = 1, 2$ . Επιπλέον σημαντικό είναι να σχολιάσουμε ότι αυτή τη διαμέριση μπορούμε να την ελέγξουμε. Επίσης χρησιμοποιούμε

δύο σημαντικές επιλογές οι οποίες είναι διαθέσιμες για τον αλγόριθμο αυτόν. Είναι οι σχετική και απόλυτη ανεκτικότητα (relative and absolute tolerance). Πιο συγκεκριμένα σε κάθε βήμα του αλγόριθμου, ένα σφάλμα είναι προσεγγιστικό για αυτό το βήμα. Αν  $y_k$  είναι η προσέγγιση του  $y(x_k)$  στο  $k$  βήμα και  $e_k$  είναι το προσεγγιστικό σφάλμα του βήματος, τότε το matlab επιλέγει η διαμέριση του να εξασφαλίζει,

$$e_k \leq \max(\text{RelTol} \cdot y_k, \text{AbsTol})$$

Σημειώνουμε ότι οι προεπιλεγμένες τιμές για τα RelTol και AbsTol είναι 0.001 και 0.000001, αντίστοιχα [ [9] σελίδες 4-7]. Έτσι, εμείς επιλέγουμε,  $\text{RelTol} = 10^{-10}$  και  $\text{AbsTol} = 10^{-10}$ , διότι με δοκιμές παρατηρήσαμε ότι σε αυτές τις τιμές έχουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα.

Έτσι σε αυτό το κεφάλαιο θα συγκρίνουμε τις λύσεις που προκύπτουν από το matlab, με τις λύσεις που έχουμε καταλήξει με τη μέθοδο RWA, στο 2ο κεφάλαιο. Τα αποτελέσματα θα αναλυθούν με πρώτο κριτήριο το αν βρισκόμαστε στον αποσυντονισμό ή στο συντονισμό και στη συνέχεια για τις αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιούμε.

## 4.1 Περίπτωση αποσυντονισμού: $\Delta \neq 0$ .

### 4.1.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.

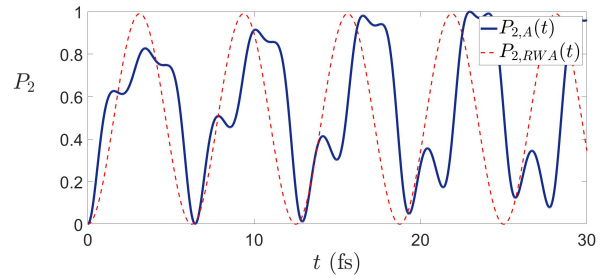
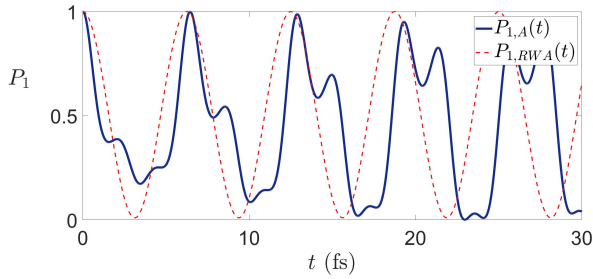
Στη περίπτωση του αποσυντονισμού  $\Delta \neq 0$  και για αρχικές συνθήκες  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ , προκύπτουν οι εξισώσεις (2.19) και (2.21), για την περίπτωση της RWA,

$$\begin{aligned} P_1(t) = |C_1(t)|^2 &= 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t) \\ \text{όπου } \lambda &= \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

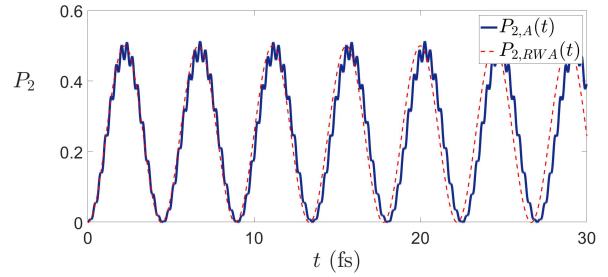
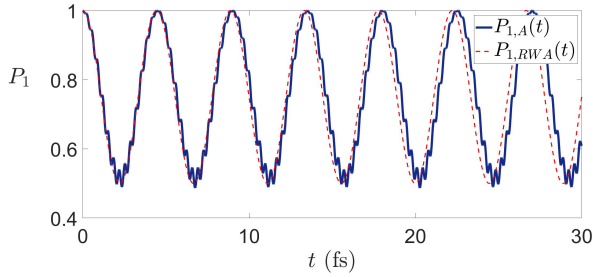
$$\begin{aligned} P_2(t) = |C_2(t)|^2 &= \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t) \\ \text{όπου } \lambda &= \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Παρακάτω παρουσιάζονται τα εξής διαγράμματα,

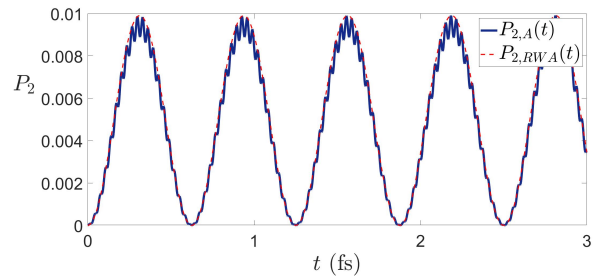
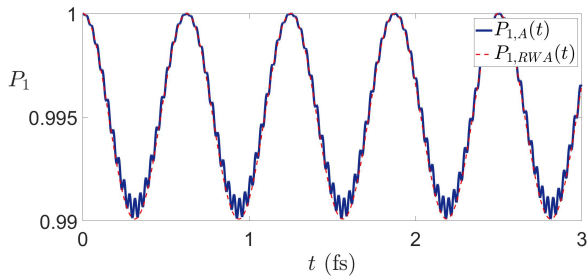
1. Τρία διαγράμματα με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$  (για  $\omega = 1, 10, 100\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 0.9, 9, 90\text{fs}^{-1}$ , αντίστοιχα).
2. Τρία διαγράμματα με  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega_R = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$  (για  $\omega = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 9\text{fs}^{-1}$ ).
3. Τρία διαγράμματα με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  (για  $\omega = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 9, 99, 999\text{fs}^{-1}$ , αντίστοιχα).



(i)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0.1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και (ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0.1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και  $\Omega = 0.9fs^{-1}$ .

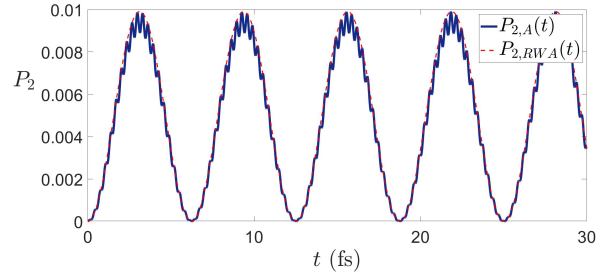
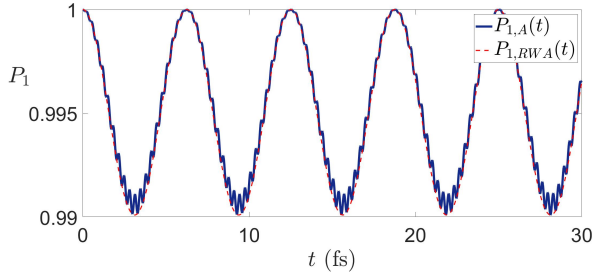


(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ .

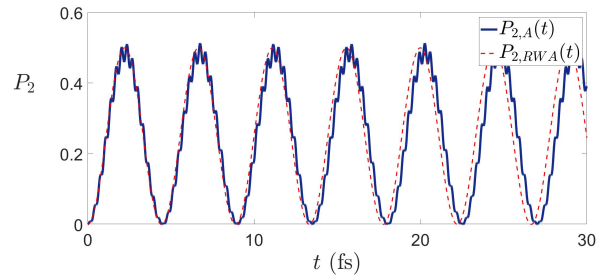
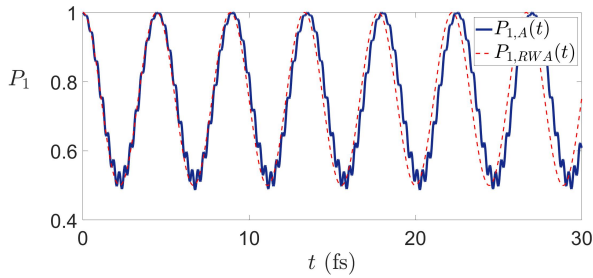


(v)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 100fs^{-1}$  και (vi)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\Omega = 90fs^{-1}$ .

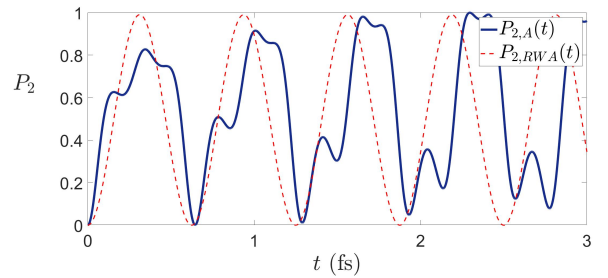
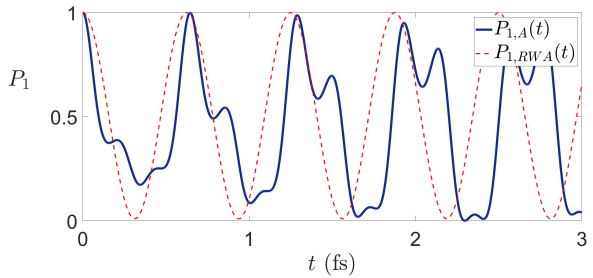
**Σχήμα 4.1** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για διαφορετικά  $\Delta$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).



(i)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και (ii)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ .

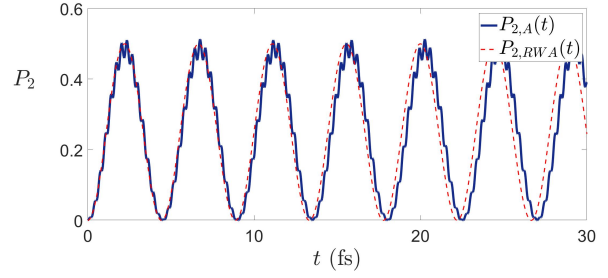
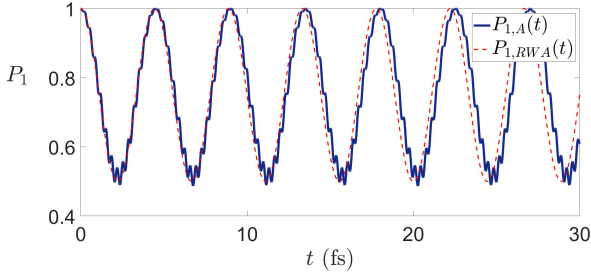


(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ .

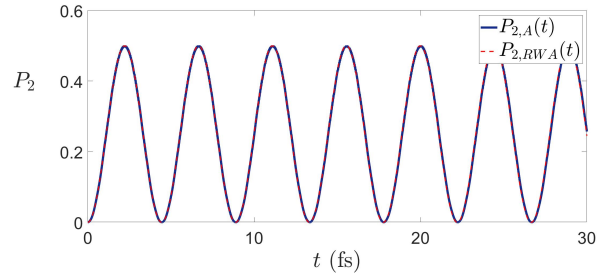
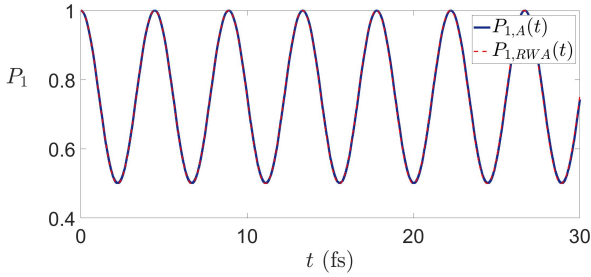


(v)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και (vi)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ .

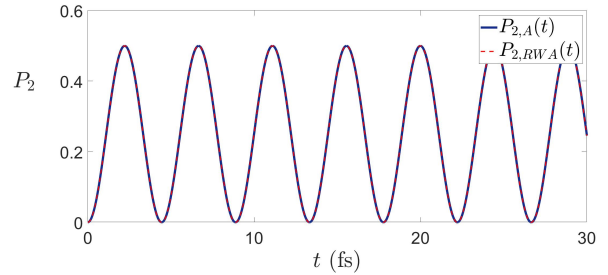
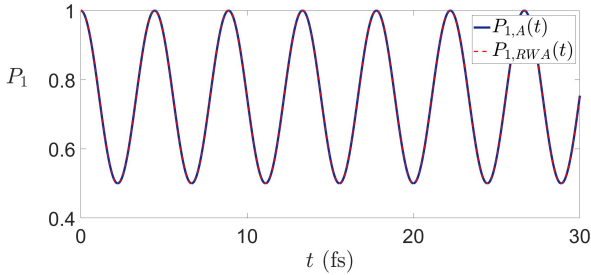
**Σχήμα 4.2** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για διαφορετικά  $\Omega_R$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).



(i)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και (ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ .



(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 100fs^{-1}$  και (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\Omega = 99fs^{-1}$ .



(v)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1000fs^{-1}$  και (vi)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1000fs^{-1}$  και  $\Omega = 999fs^{-1}$ .

**Σχήμα 4.3** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για σταθερά  $\Omega_R$  και  $\Delta$  αλλά για διαφορετικά  $\omega$  και  $\Omega$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).

Παρατηρούμε λοιπόν,

1. Στα διαγράμματα του 4.1, όσο το  $\Delta > \Omega_R$ , τόσο το σφάλμα από την αριθμητική λύση και τη λύση της RWA μειώνεται, δηλαδή όσο αυξάνεται το  $\Delta$ , τόσο τείνουν να ταυτιστούν οι λύσεις.
2. Στα διαγράμματα του 4.2, ισχύει και εδώ ότι, όσο το  $\Delta > \Omega_R$ , τόσο το σφάλμα από την αριθμητική λύση και τη λύση της RWA μειώνεται, δηλαδή όσο αυξάνεται το  $\Delta$ , τόσο τείνουν να ταυτιστούν οι λύσεις, όπως και στο 4.1.

3. Στα διαγράμματα του 4.3, όσο οι συχνότητες  $\Omega$  και  $\omega$  μεγαλώνουν, τόσο το σφάλμα από την αριθμητική λύση και τη λύση της RWA μειώνεται, δηλαδή όσο το  $\Omega \sim \omega$  τόσο τείνουν να ταυτιστούν οι λύσεις. Αυτό συμβαίνει διότι όσο οι συχνότητες  $\Omega$  και  $\omega$  μεγαλώνουν, τόσο οι όροι  $e^{-i(\Omega+\omega)t}$ ,  $e^{i(\Omega+\omega)t}$  γίνονται πολύ μεγαλύτεροι από τους όρους  $e^{-i(\Omega-\omega)t}$  και  $e^{i(\Omega-\omega)t}$ . Έτσι στη RWA, η απλοποίηση των γρήγορων όρων είναι λογική, όσο οι συχνότητες αυξάνονται.
4. Στα διαγράμματα των 4.1, 4.2, 4.3, το σφάλμα των δύο λύσεων είναι, εκτός από το σχήμα των καμπυλών και οι δύο καμπύλες παρατηρείται ότι έχουν απώλεια φάσεως (dephasing).

#### 4.1.2 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.

Στη περίπτωση αποσυντονισμού  $\Delta \neq 0$  και για αρχικές συνθήκες  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ , προκύπτουν οι εξισώσεις (2.30) και (2.31), για την περίπτωση της RWA,

$$\boxed{P_1(t) = |C_1(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t)} \quad (4.4)$$

$$\text{όπου } \lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

$$\boxed{P_2(t) = |C_2(t)|^2 = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t)} \quad (4.5)$$

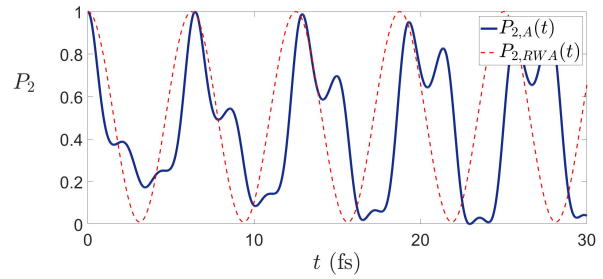
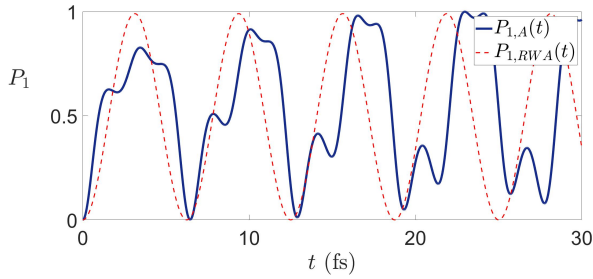
$$\text{όπου } \lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

Παρατηρούμε ότι, οι εξισώσεις είναι ίδιες, με τις εξισώσεις που προέκυψαν στη λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην αρχή του χρόνου στη κάτω στάθμη, με τη μόνη διαφορά ότι αυτά που ίσχυαν για την στάθμη 1, ισχύουν για την στάθμη 2 και αντίστροφα. Άρα περιμένουμε τα διαγράμματα που θα παρουσιάσουμε να είναι ακριβώς ίδια με την μόνη διαφορά οι πιθανότητες για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 να έχουν πάρει τη θέση των πιθανοτήτων της στάθμη 2 και αντίστροφα. ( $P_{1,A} \longleftrightarrow P_{2,A}, P_{1,RWA} \longleftrightarrow P_{2,RWA}$ )

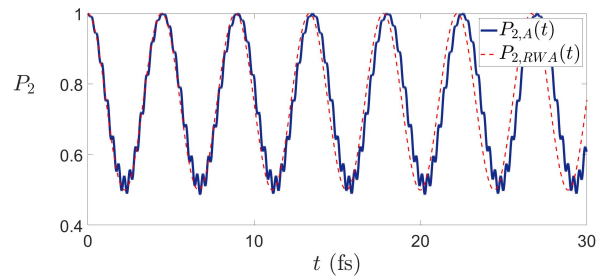
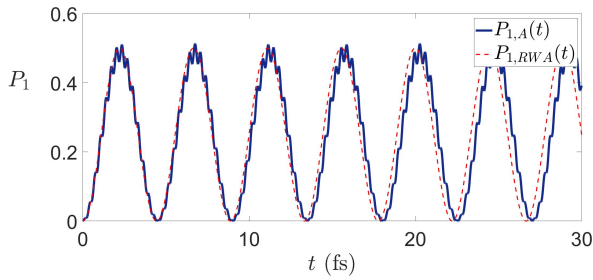
Παρακάτω παρουσιάζονται τα εξής διαγράμματα,

1. Τρία διαγράμματα με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$  (για  $\omega = 1, 10, 100\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 0.9, 9, 90\text{fs}^{-1}$ , αντίστοιχα).
2. Τρία διαγράμματα με  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega_R = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$  (για  $\omega = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 9\text{fs}^{-1}$ ).
3. Τρία διαγράμματα με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  (για  $\omega = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 9, 99, 999\text{fs}^{-1}$ , αντίστοιχα).

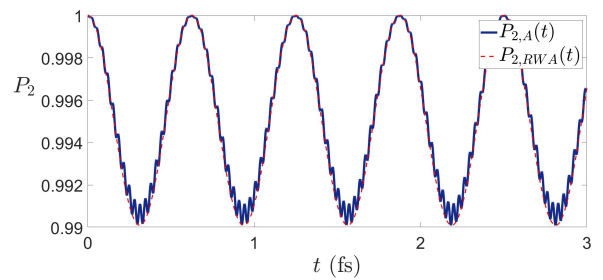
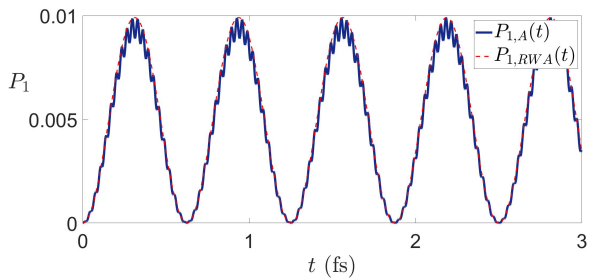




(i)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0.1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και (ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0.1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και  $\Omega = 0.9fs^{-1}$ .

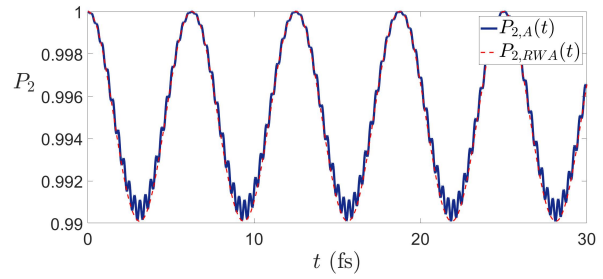
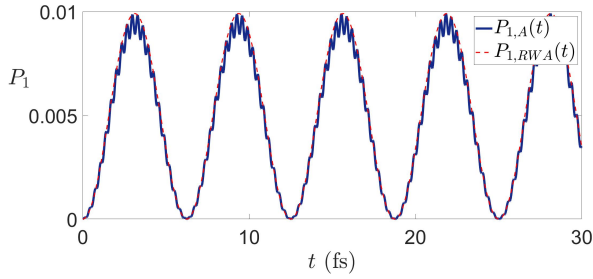


(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ .

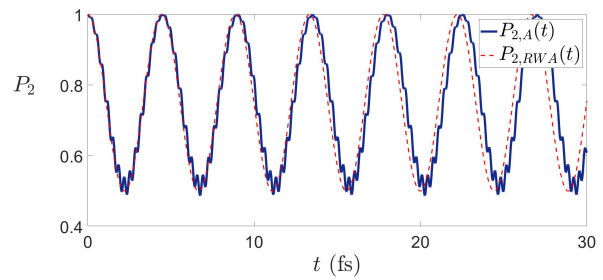
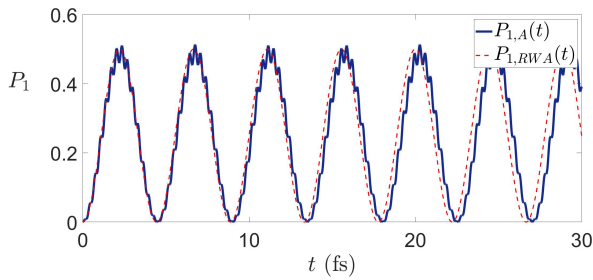


(v)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 100fs^{-1}$  και (vi)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 10fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\Omega = 90fs^{-1}$ .

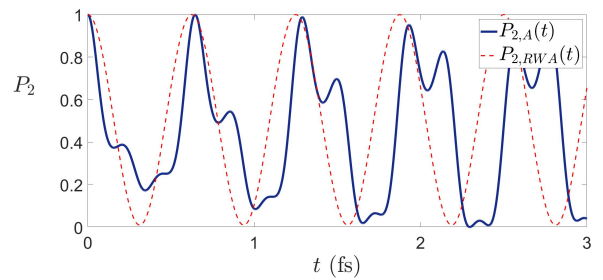
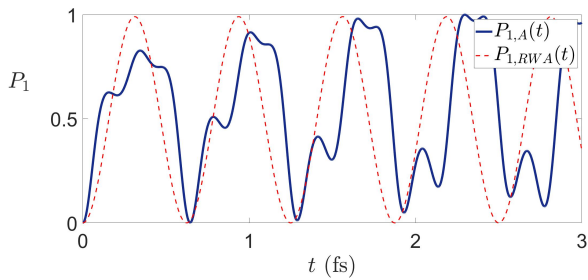
**Σχήμα 4.4** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην άνω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για διαφορετικά  $\Delta$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).



(i)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και (ii)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ .

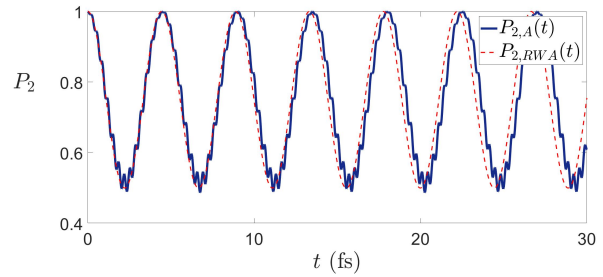
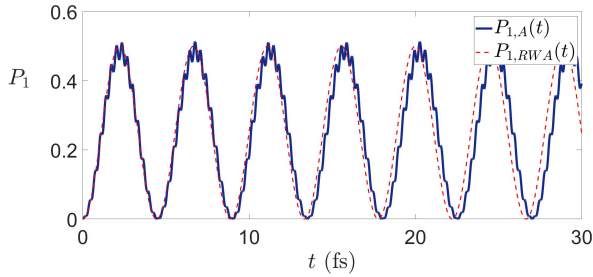


(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ .

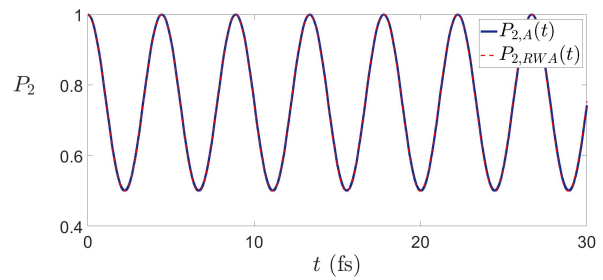
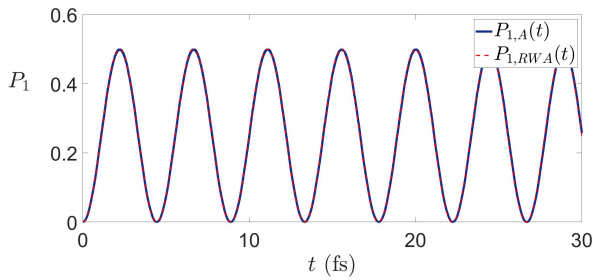


(v)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και (vi)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ .

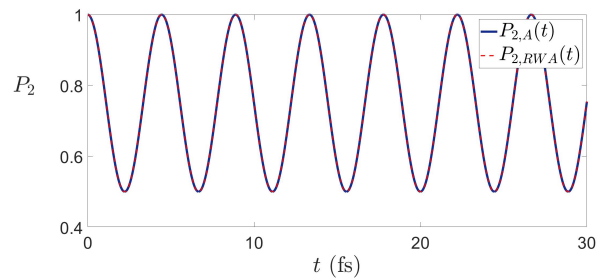
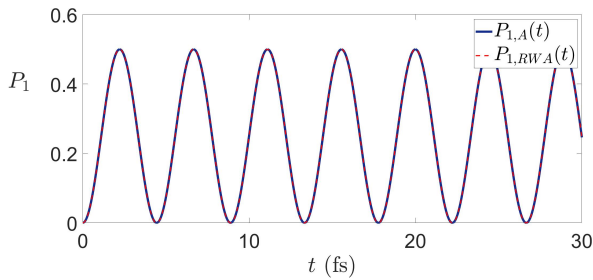
**Σχήμα 4.5** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην άνω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για διαφορετικά  $\Omega_R$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).



(i)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και (ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ .



(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 100fs^{-1}$  και (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\Omega = 99fs^{-1}$ .



(v)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1000fs^{-1}$  και (vi)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1000fs^{-1}$  και  $\Omega = 999fs^{-1}$ .

**Σχήμα 4.6** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην άνω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για σταθερά  $\Omega_R$  και  $\Delta$  αλλά για διαφορετικά  $\omega$  και  $\Omega$ , για την κάτω στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η αρχική μας υπόθεση ήταν σωστή. Έτσι τα συμπεράσματα που παρατηρήθηκαν για την περίπτωση αρχικών συνθηκών, με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου 4.1.1, ισχύουν και για αυτή την περίπτωση αρχικών συνθηκών.

### 4.1.3 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.

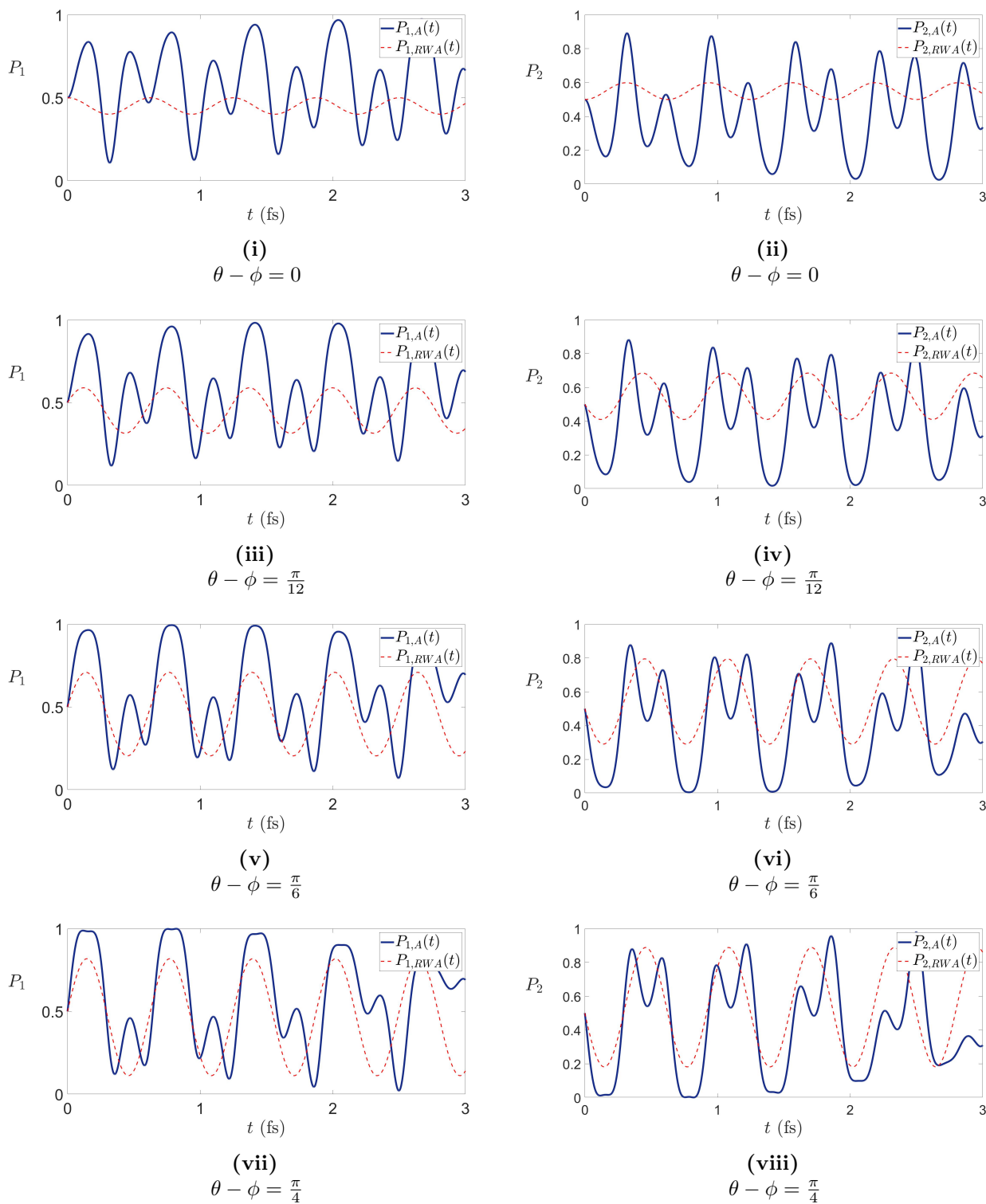
Τελευταία περίπτωση αρχικών συνθηκών για τον αποσυντονισμό, είναι  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ ,  $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$  όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί ισοπίθανα να βρεθεί και στις δύο στάθμες. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις (2.35) και (2.36),

$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) + \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) \sin(\theta - \phi) \quad (4.6)$$

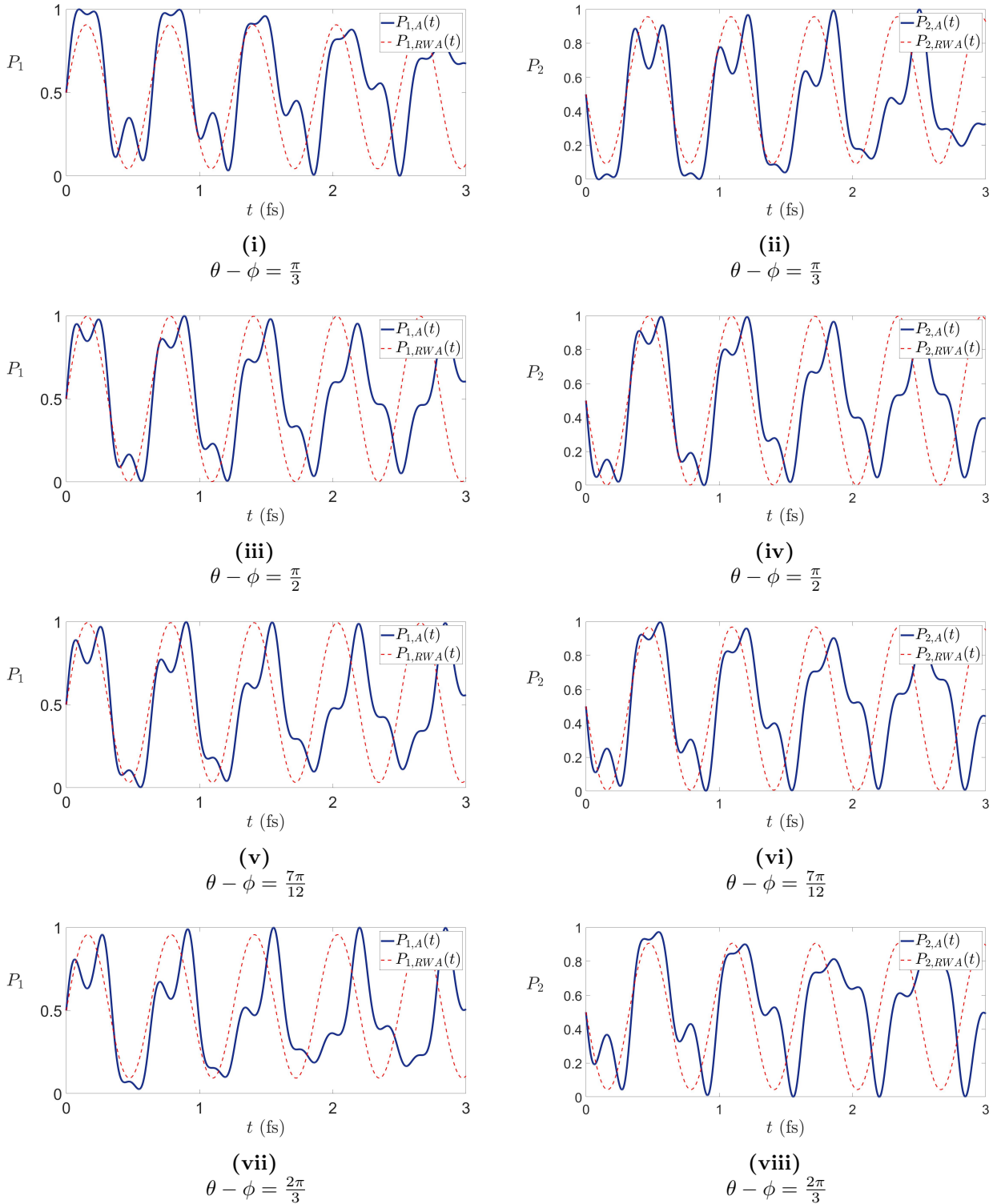
$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\Omega_R \Delta}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \cos(\theta - \phi)(1 - \cos(2\lambda t)) - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \sin(2\lambda t) \sin(\theta - \phi) \quad (4.7)$$

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύθηκαν όλες οι περιπτώσεις που μπορούν να προκύψουν όταν έχουμε αρχικές συνθήκες με φάση (δείτε 3.1.3). Στο παρόν κεφάλαιο αυτό που θα κάνουμε είναι να παρουσιάσουμε ένα σύνολο διαγραμμάτων με σταθερά τα  $\Delta$  και  $\Omega_R$ , ενώ μεταβάλλουμε τις φάσεις  $\theta - \phi$ . Δεν θα είχε νόημα να ξανά κάνουμε την ανάλυση του κεφαλαίου δύο, εφόσον συγκρίνουμε τις αριθμητικές λύσεις με τις λύσεις με την RWA, αφού ότι απόκλιση υπάρχει στα διαγράμματα που θα παρουσιάσουμε, θα έχουν και όλα τα άλλα διαγράμματα της ανάλυσης. Επιπλέον έχουμε ήδη δει τη συμπεριφορά των καμπυλών όταν μεταβάλλουμε τα  $\Delta$  και  $\Omega_R$  στις προηγούμενες παραγράφους. Έτσι τα συμπεράσματα 4.1.1 θα ισχύουν και σε αυτή την περίπτωση αρχικών συνθηκών.

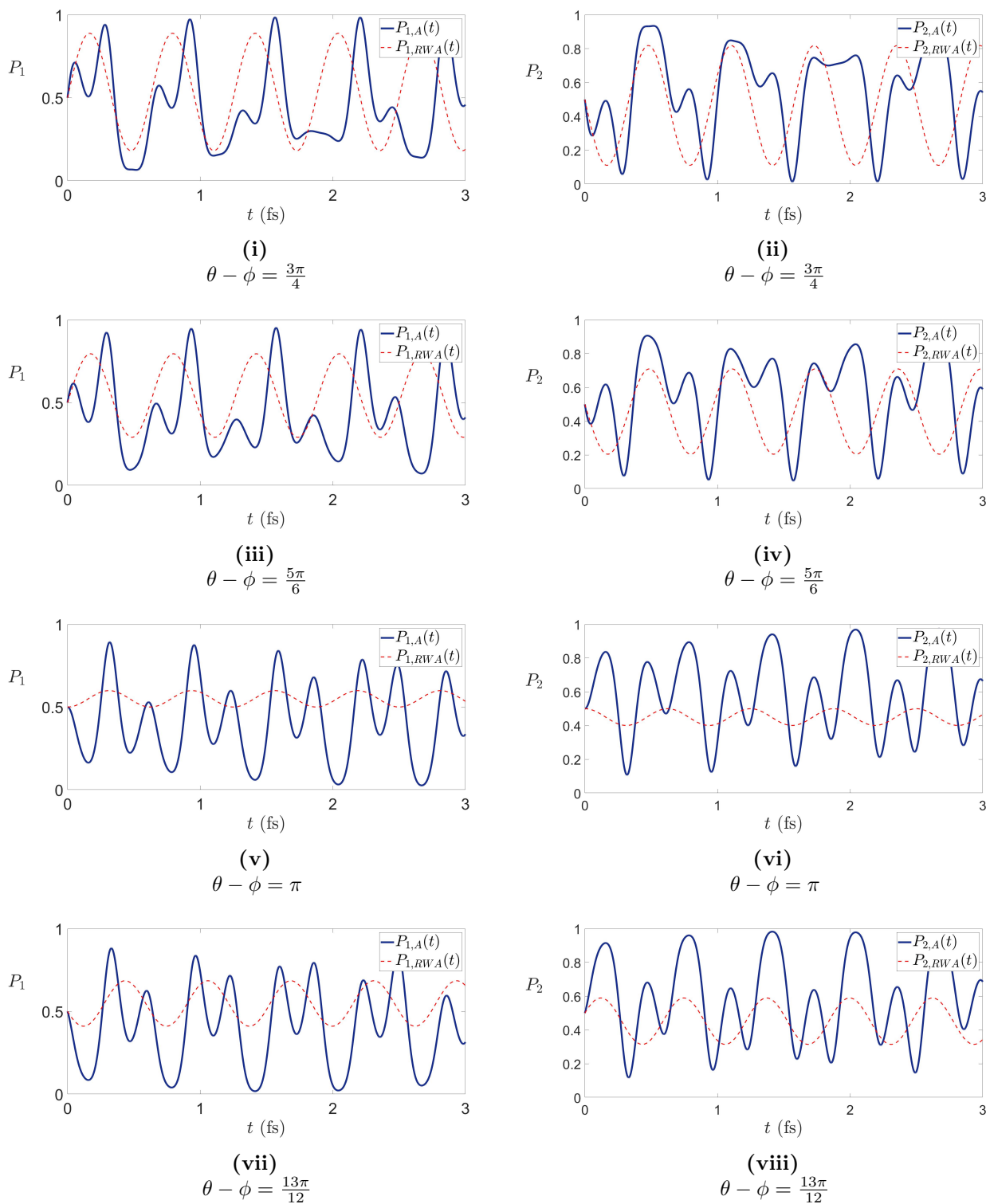
Παρακάτω παρουσιάζουμε το σύνολο διαγραμμάτων, στα οποία έχουμε  $\Omega_R = 10\text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$  (όπου  $\Omega = 9\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 10\text{fs}^{-1}$ ) και  $\theta - \phi = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$ .



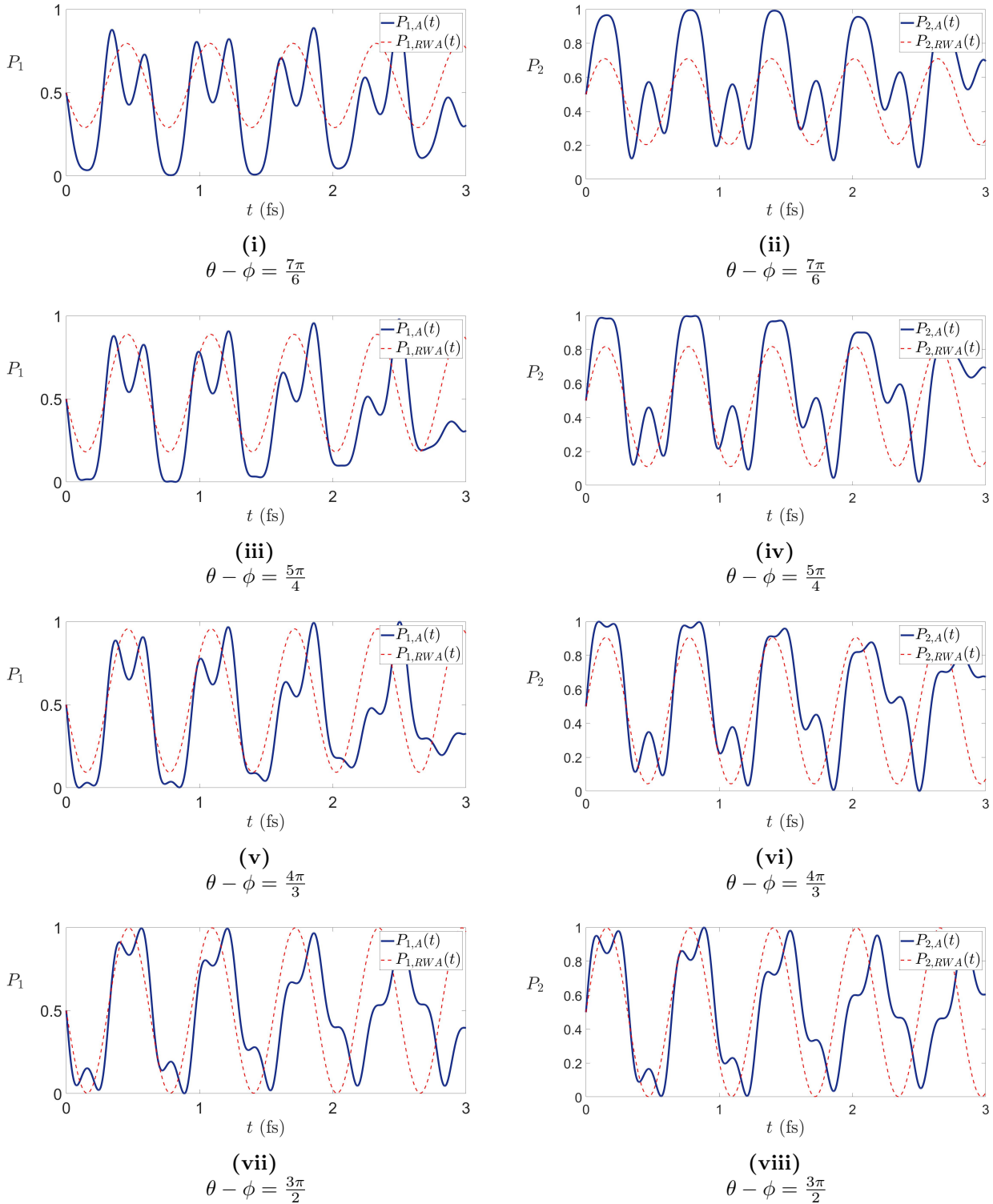
**Σχήμα 4.7** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθانا και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου για  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , με  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).



**Σχήμα 4.8** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθانا και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου για  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , με  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).

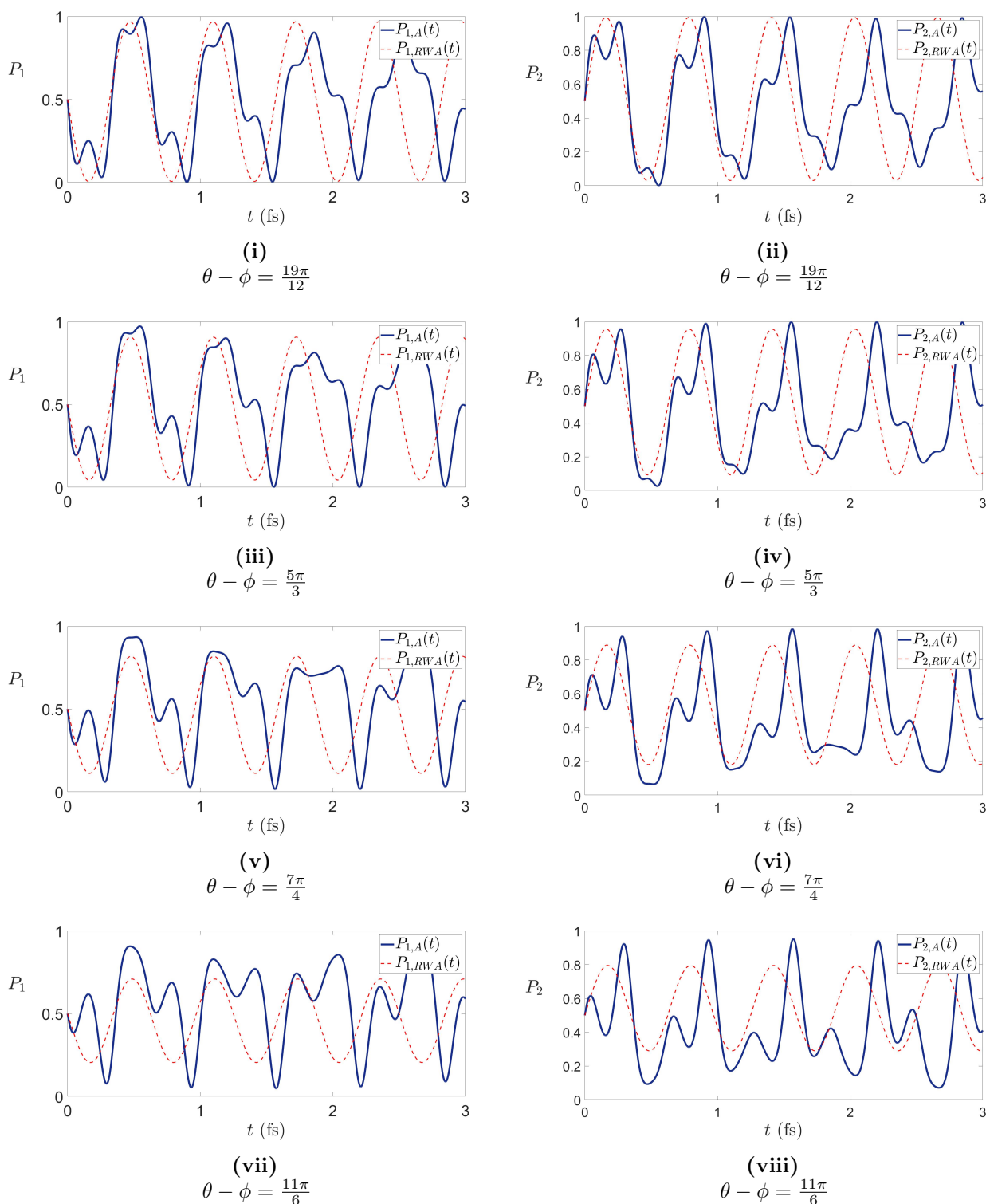


**Σχήμα 4.9** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθانا και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου για  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , με  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).



**Σχήμα 4.10** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου για  $\Omega_R = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$ , με  $\omega = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 9\text{fs}^{-1}$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).





**Σχήμα 4.11** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου για  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , με  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 9fs^{-1}$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).

## 4.2 Περίπτωση συντονισμού: $\Delta = 0$ .

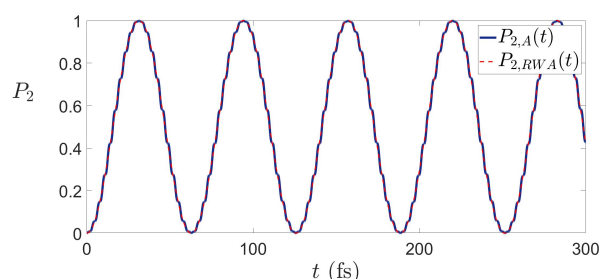
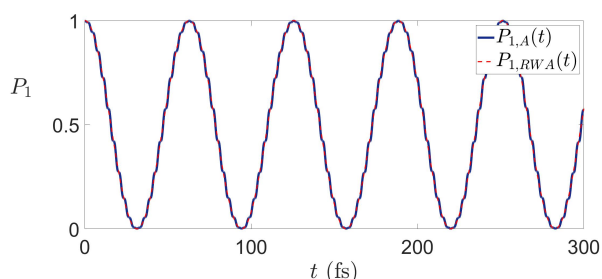
### 4.2.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.

Στη περίπτωση του συντονισμού  $\Delta = 0 \Rightarrow \Omega = \omega$  και για αρχικές συνθήκες  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ , προκύπτουν οι εξισώσεις (2.26), για την περίπτωση της RWA,

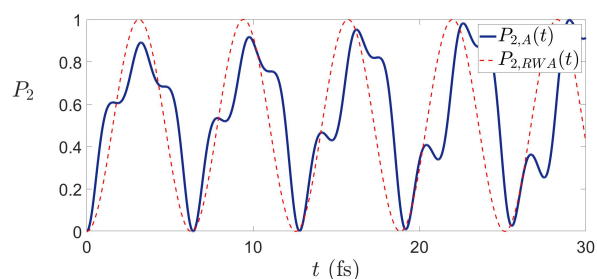
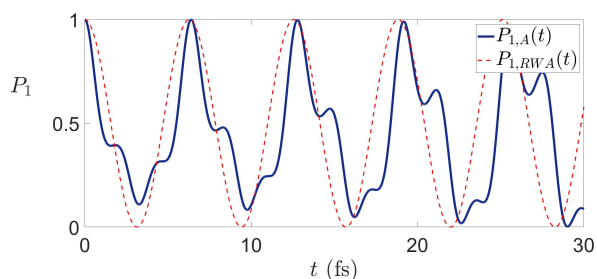
$$\begin{cases} |C_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \\ |C_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \end{cases} \quad (4.8)$$

Παρακάτω παρουσιάζονται τα εξής διαγράμματα,

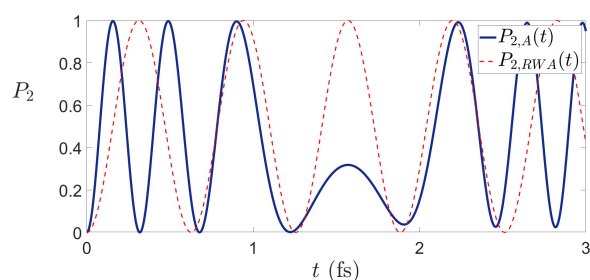
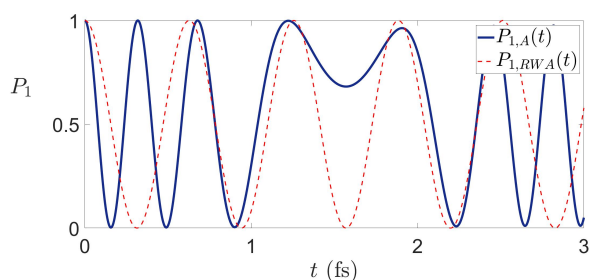
1. Τρία διαγράμματα με  $\Delta = 0\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega_R = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$  (για  $\omega = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 1\text{fs}^{-1}$ ).
2. Τρία διαγράμματα με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 0\text{fs}^{-1}$  (για  $\omega = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$ , αντίστοιχα).



(i)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και (ii)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και  $\Omega = 1fs^{-1}$ .

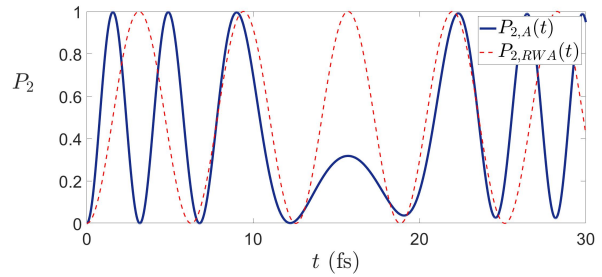
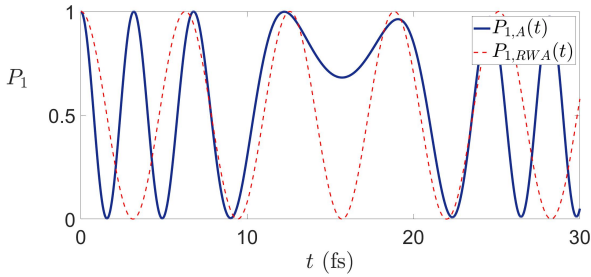


(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και  $\Omega = 1fs^{-1}$ .

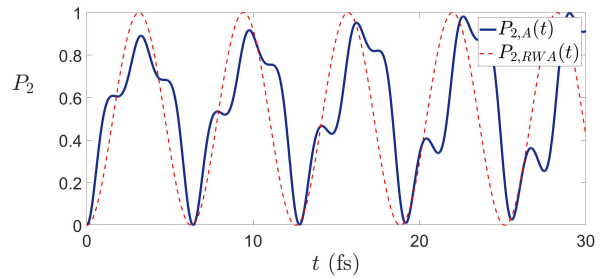
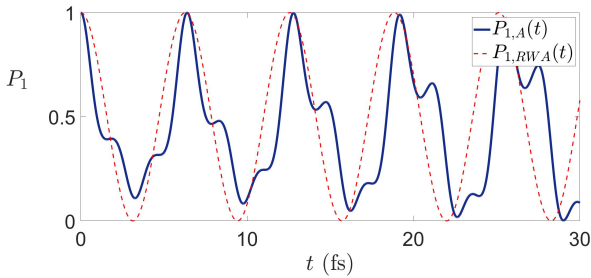


(v)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και (vi)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και  $\Omega = 1fs^{-1}$ .

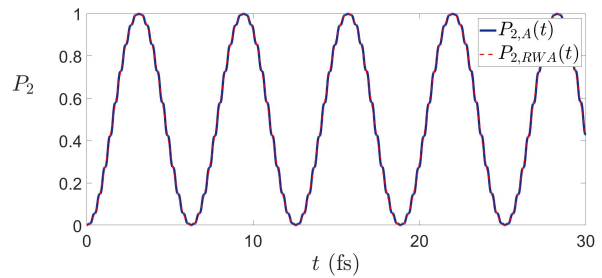
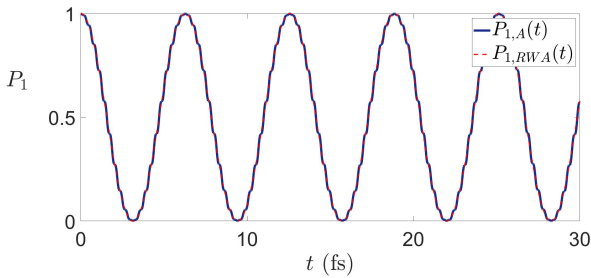
**Σχήμα 4.12** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για διαφορετικά  $\Omega_R$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).



(i)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 0.1fs^{-1}$  και (ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 0.1fs^{-1}$  και  $\Omega = 0.1fs^{-1}$ .



(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και  $\Omega = 1fs^{-1}$ .



(v)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και (vi)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 10fs^{-1}$ .

**Σχήμα 4.13** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για σταθερά  $\Omega_R$  και  $\Delta$  αλλά για διαφορετικά  $\omega$  και  $\Omega$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).

Παρατηρούμε λοιπόν,

1. Στα διαγράμματα του 4.12, όσο το  $\Omega_R$  τείνει στο μηδέν, τόσο το σφάλμα από την αριθμητική λύση και τη λύση της RWA μειώνεται, δηλαδή όσο μειώνεται το  $\Omega_R$ , τόσο τείνουν να ταυτιστούν οι λύσεις.
2. Στα διαγράμματα του 4.13, όσο οι συχνότητες  $\Omega$  και  $\omega$  μεγαλώνουν, τόσο το σφάλμα από την αριθμητική λύση και τη λύση της RWA μειώνεται. Αυτό συμβαίνει διότι όσο οι συχνότητες

$\Omega$  και  $\omega$  μεγαλώνουν, τόσο οι όροι  $e^{-i(\Omega+\omega)t}$ ,  $e^{i(\Omega+\omega)t}$  μεταβάλλονται πολύ γρηγορότερα από τους όρους  $e^{-i(\Omega-\omega)t}$  και  $e^{i(\Omega-\omega)t}$ . Έτσι στη RWA, η απλοποίηση των γρήγορων όρων είναι λογική, όσο οι συχνότητες αυξάνονται.

3. Στα διαγράμματα των 4.12, 4.13, το σφάλμα των δύο λύσεων είναι, εκτός από το σχήμα των καμπυλών και οι δύο καμπύλες παρατηρείται ότι έχουν απώλεια φάσεως (dephasing).

#### 4.2.2 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.

Στη περίπτωση του συντονισμού  $\Delta = 0 \Rightarrow \Omega = \omega$  και για αρχικές συνθήκες  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ , προκύπτουν οι εξισώσεις (4.9), για την περίπτωση της RWA,

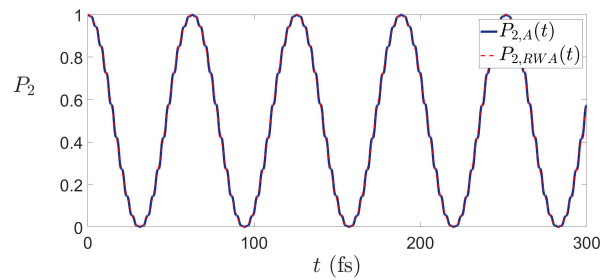
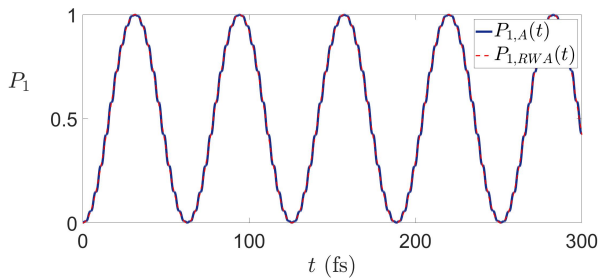
$$\begin{cases} P_1(t) = |C_1(t)|^2 = \sin^2(\lambda t) \\ P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \cos^2(\lambda t) \end{cases} \quad (4.9)$$

όπου  $\lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$ .

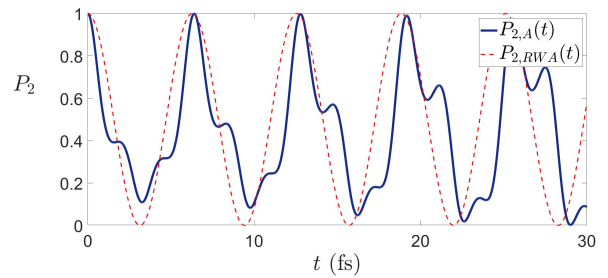
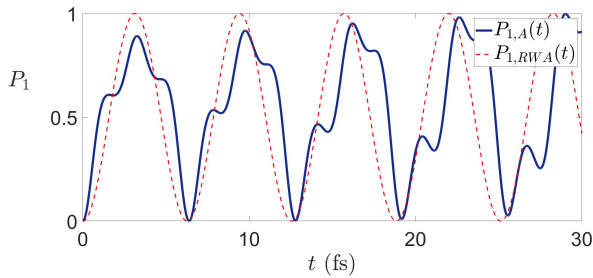
Παρατηρούμε ότι, οι εξισώσεις είναι ίδιες, με τις εξισώσεις που προέκυψαν στη λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην αρχή του χρόνου στη κάτω στάθμη, με τη μόνη διαφορά ότι αυτά που ίσχυαν για την στάθμη 1, ισχύουν για την στάθμη 2 και αντίστροφα. Άρα περιμένουμε τα διαγράμματα που θα παρουσιάσουμε να είναι ακριβώς ίδια με την μόνη διαφορά οι πιθανότητες για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 να έχουν πάρει τη θέση των πιθανοτήτων της στάθμη 2 και αντίστροφα. ( $P_{1,A} \longleftrightarrow P_{2,A}, P_{1,RWA} \longleftrightarrow P_{2,RWA}$ )

Παρακάτω παρουσιάζονται τα εξής διαγράμματα,

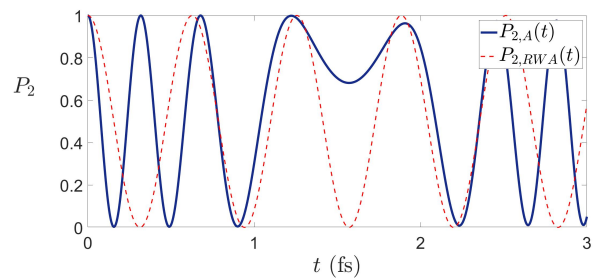
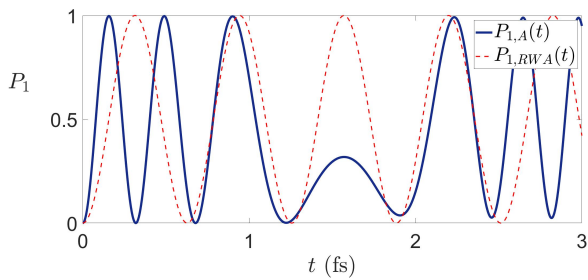
1. Τρία διαγράμματα με  $\Delta = 0\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega_R = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$  (για  $\omega = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 1\text{fs}^{-1}$ ).
2. Τρία διαγράμματα με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 0\text{fs}^{-1}$  (για  $\omega = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$ , αντίστοιχα).



(i)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και (ii)  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και  $\Omega = 1fs^{-1}$ .

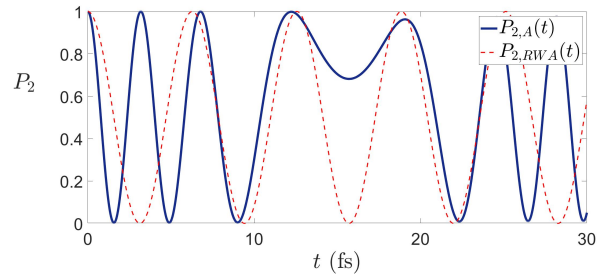
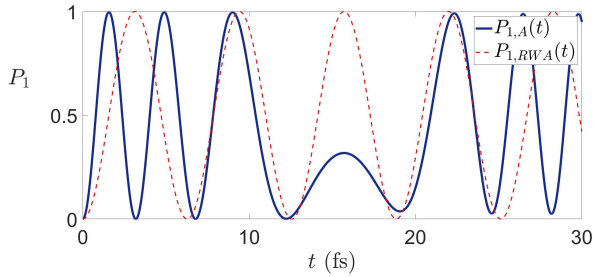


(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και  $\Omega = 1fs^{-1}$ .

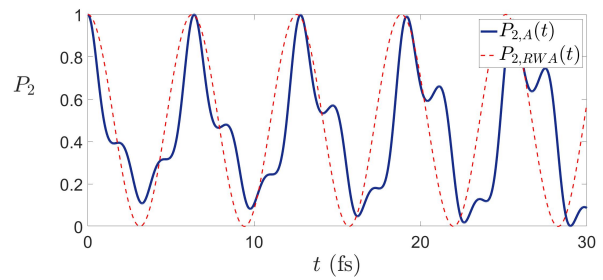
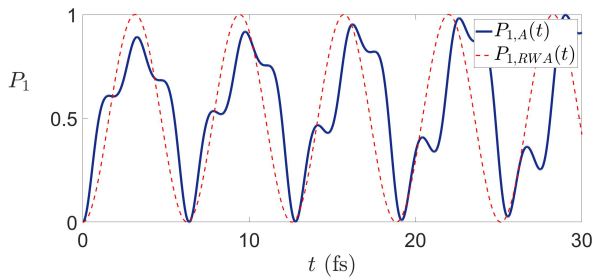


(v)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και (vi)  $\Omega_R = 10fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και  $\Omega = 1fs^{-1}$ .

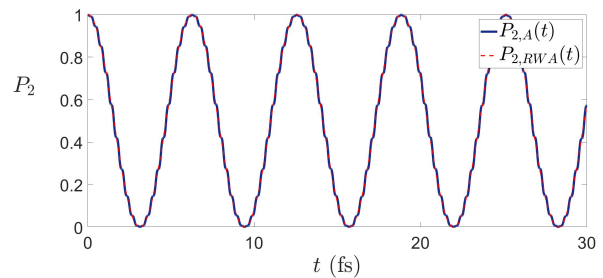
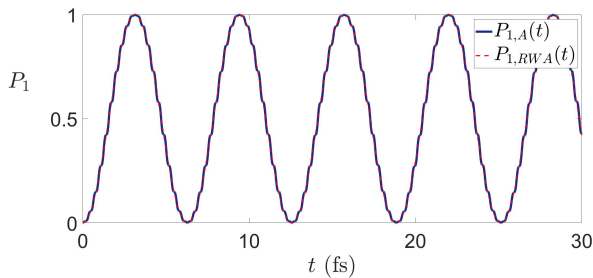
**Σχήμα 4.14** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για διαφορετικά  $\Omega_R$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).



(i)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 0.1fs^{-1}$  και (ii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 0.1fs^{-1}$  και  $\Omega = 0.1fs^{-1}$ .



(iii)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και (iv)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 1fs^{-1}$  και  $\Omega = 1fs^{-1}$ .



(v)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και (vi)  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 0fs^{-1}$ , όπου  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 10fs^{-1}$ .

**Σχήμα 4.15** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για σταθερά  $\Omega_R$  και  $\Delta$  αλλά για διαφορετικά  $\omega$  και  $\Omega$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η αρχική μας υπόθεση ήταν σωστή. Έτσι τα συμπεράσματα που παρατηρήθηκαν για την περίπτωση αρχικών συνθηκών, με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου 4.2.1, ισχύουν και για αυτή την περίπτωση αρχικών συνθηκών.

### 4.2.3 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.

Τελευταία περίπτωση αρχικών συνθηκών για τον συντονισμό, είναι  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ ,  $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$  όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί ισοπίθανα να βρεθεί και στις δύο στάθμες. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις (2.37),

$$\begin{cases} |C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(\Omega_R t) \sin(\theta - \phi) \\ |C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin(\Omega_R t) \sin(\theta - \phi) \end{cases} \quad (4.10)$$

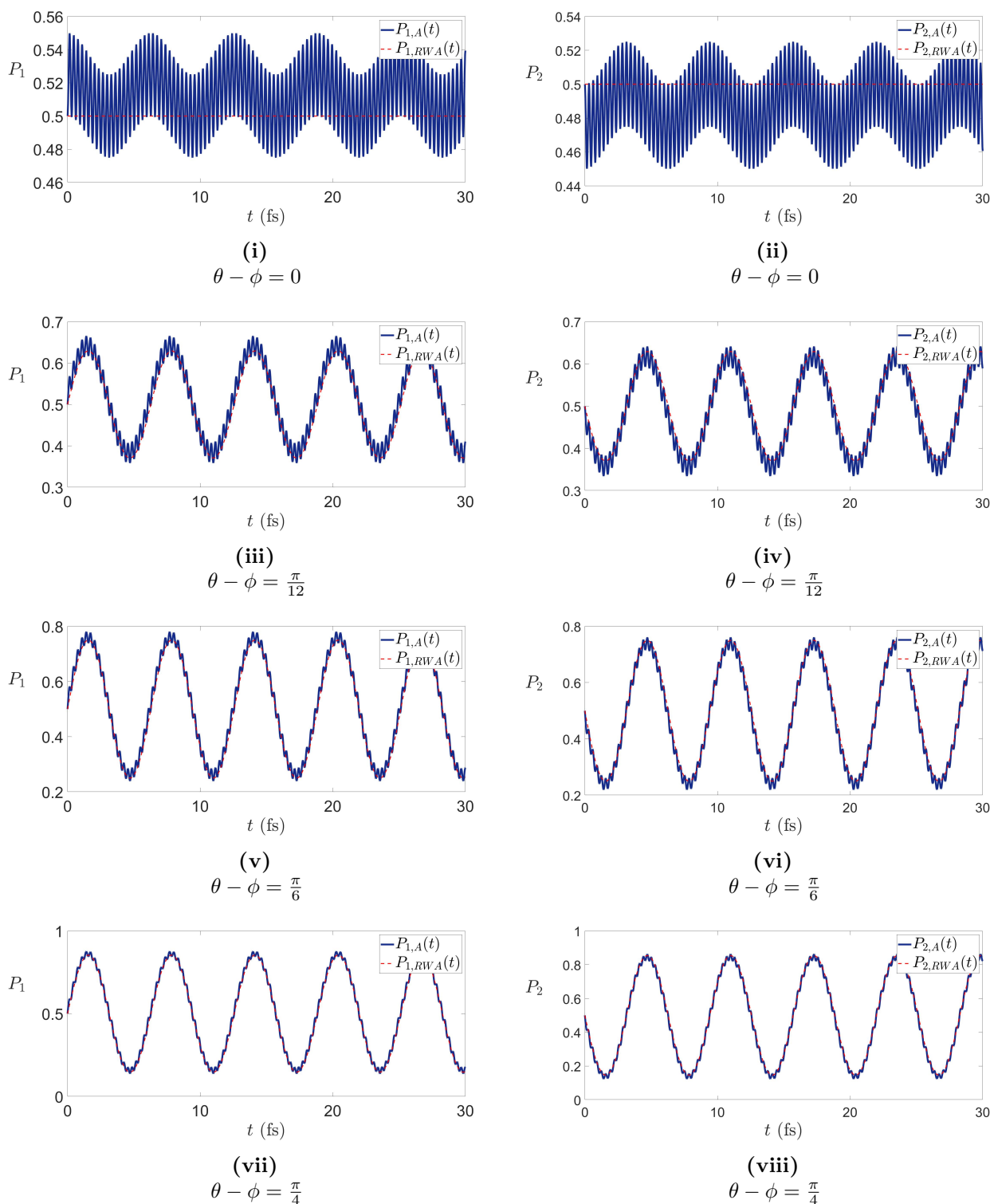
Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύθηκαν όλες οι περιπτώσεις που μπορούν να προκύψουν όταν έχουμε αρχικές συνθήκες με φάση (δείτε 3.2.3). Στο παρόν κεφάλαιο αυτό που θα κάνουμε είναι να παρουσιάσουμε ένα σύνολο διαγραμμάτων με σταθερά τα  $\Delta$  και  $\Omega_R$ , ενώ μεταβάλλουμε τις φάσεις  $\theta - \phi$ . Δεν θα είχε νόημα να ξανά κάνουμε την ανάλυση του κεφαλαίου δύο, εφόσον συγκρίνουμε τις αριθμητικές λύσεις με τις λύσεις με την RWA, αφού ότι απόκλιση υπάρχει στα διαγράμματα που θα παρουσιάσουμε, θα έχουν και όλα τα άλλα διαγράμματα της ανάλυσης. Επιπλέον έχουμε ήδη δει τη συμπεριφορά των καμπυλών όταν μεταβάλλουμε τα  $\Delta$  και  $\Omega_R$  στις προηγούμενες παραγράφους. Έτσι τα συμπεράσματα 4.2.1 θα ισχύουν και σε αυτή την περίπτωση αρχικών συνθηκών.

Παρακάτω παρουσιάζουμε το σύνολο διαγραμμάτων, στα οποία έχουμε  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Delta = 0\text{fs}^{-1}$  (όπου  $\Omega = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 10\text{fs}^{-1}$ ) και

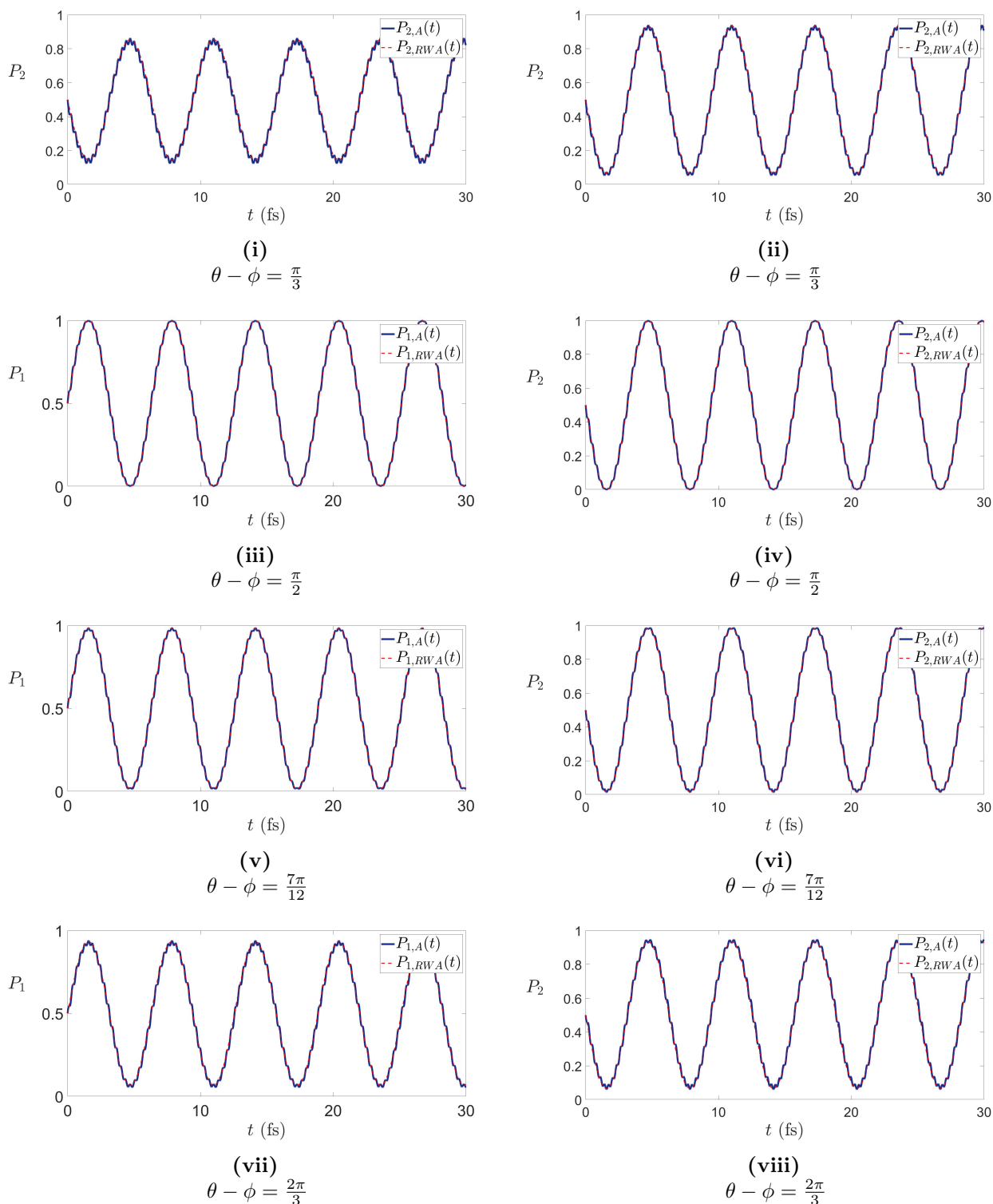
$$\theta - \phi = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}.$$

Στα παρακάτω διαγράμματα, λόγω κλίμακας στην οποία γίνεται η παρουσίαση, μπορεί η πρώτη εντύπωση να είναι πως υπάρχει μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ RWA και noRWA, αλλά προσεκτικότερη παρατήρηση δείχνει πως δεν είναι έτσι. Για παράδειγμα, στα διαγράμματα 4.18(v) και 4.18(vii), παρατηρούμε ότι η κλίμακα στο πρώτο είναι από 0.54 έως 0.44, ενώ στο δεύτερο 0.7 έως 0.3. Επομένως είναι λογικό, η πρώτη εντύπωση να είναι πως υπάρχει μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ RWA και noRWA στο πρώτο διάγραμμα.

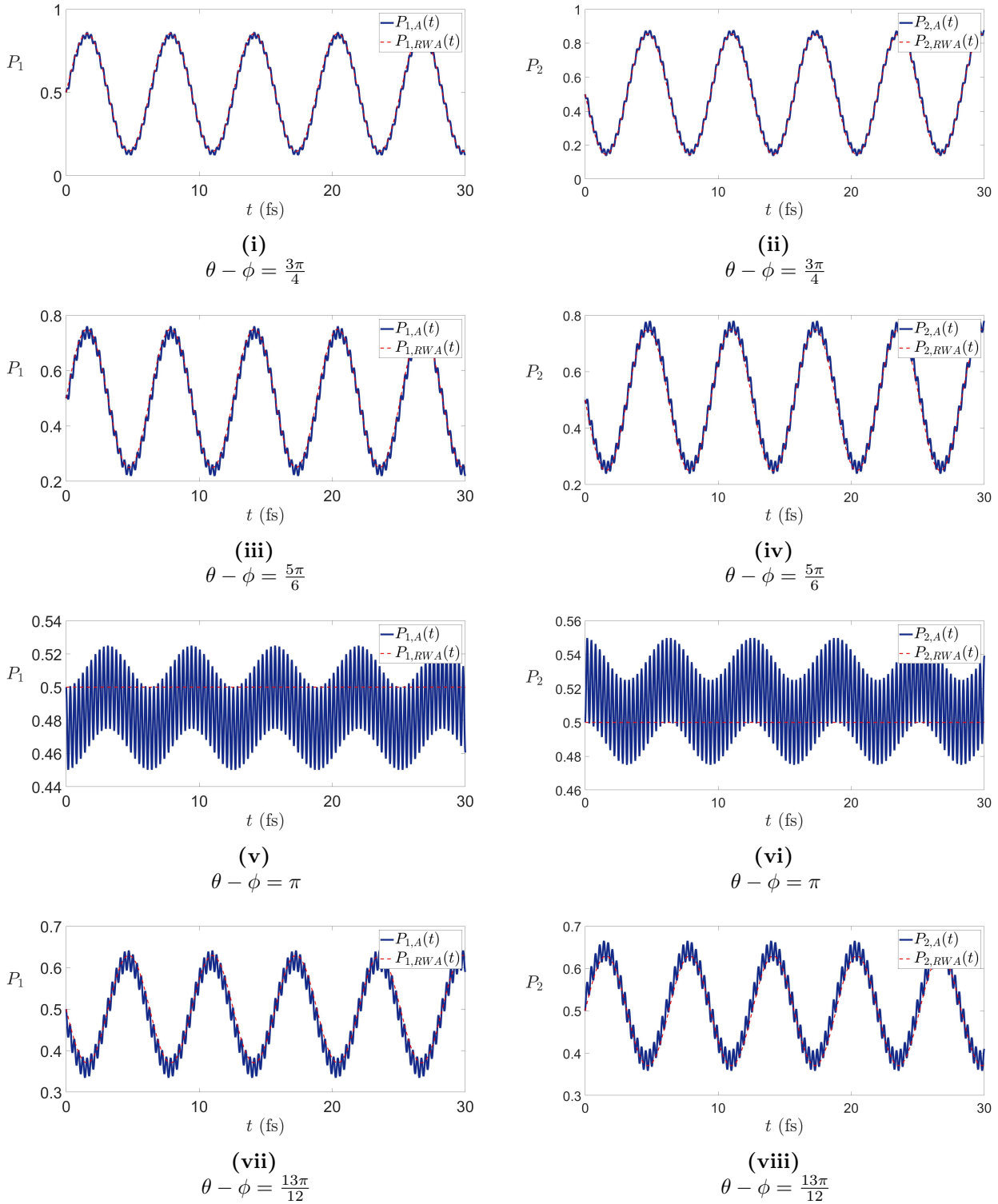




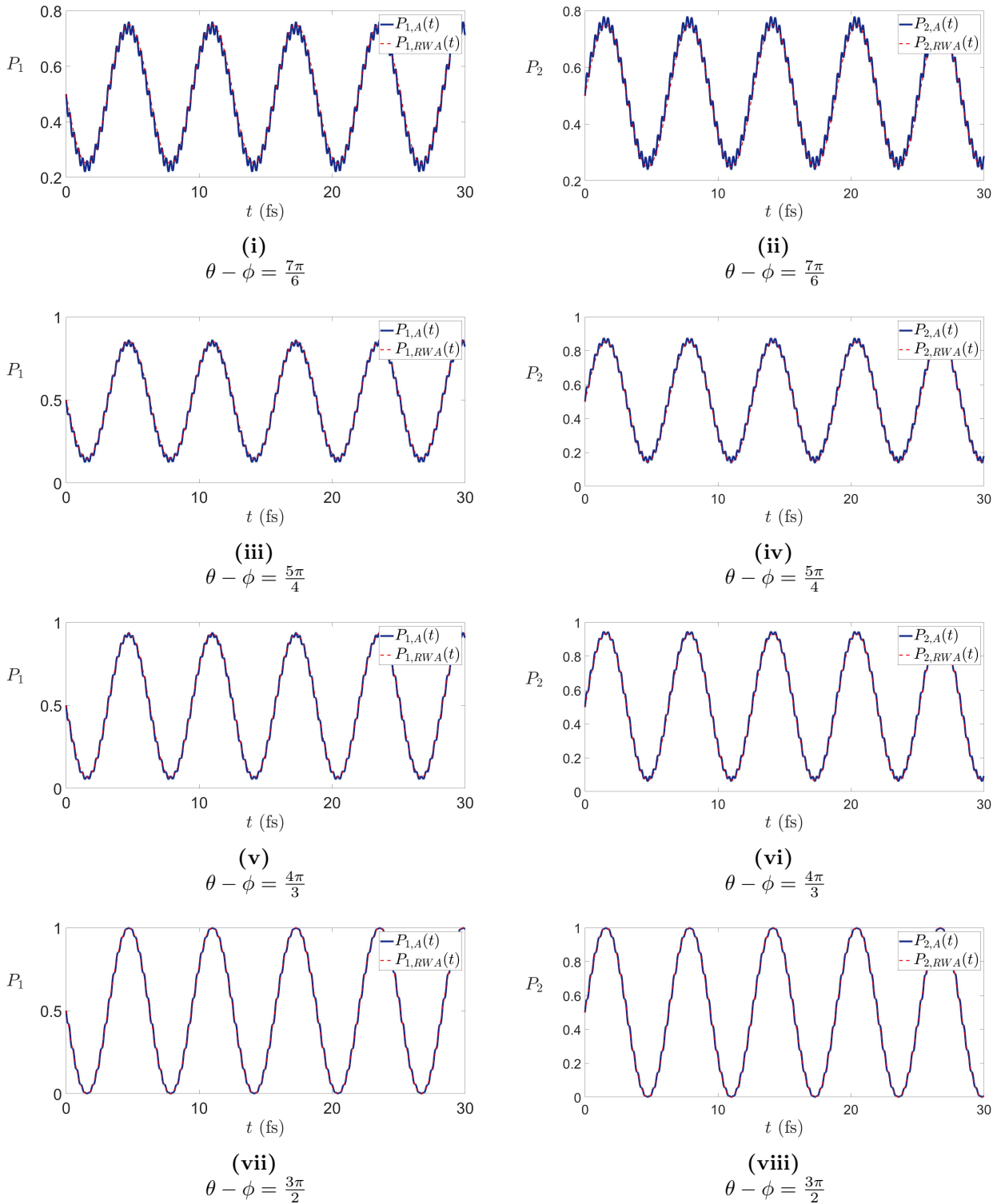
**Σχήμα 4.16** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου για  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , με  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 10fs^{-1}$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).



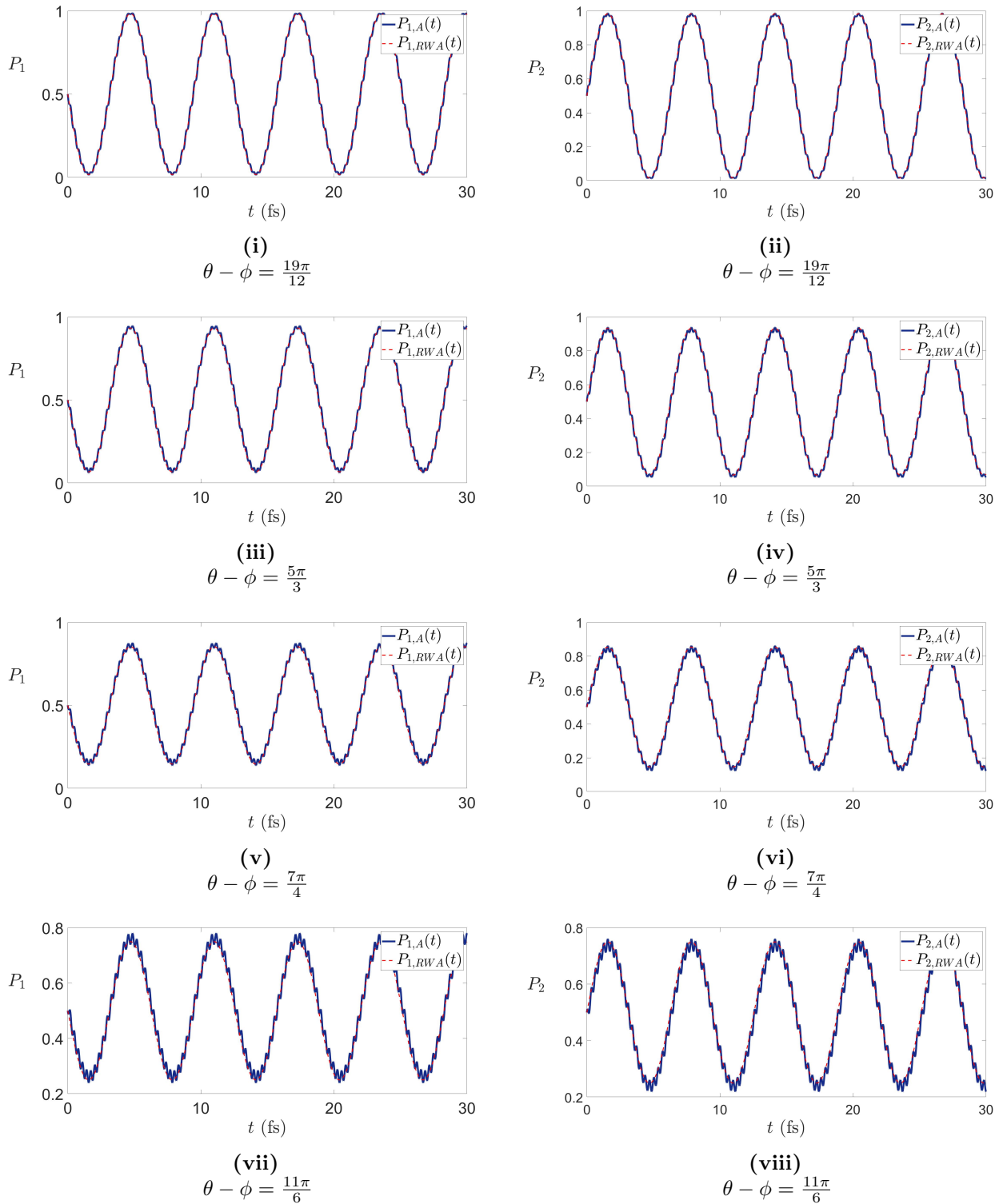
**Σχήμα 4.17** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου για  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$ , με  $\omega = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 10\text{fs}^{-1}$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).



**Σχήμα 4.18** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου για  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , με  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 10fs^{-1}$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).



**Σχήμα 4.19** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου για  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Delta = 1\text{fs}^{-1}$ , με  $\omega = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 10\text{fs}^{-1}$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).



**Σχήμα 4.20** Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί ισοπίθανα και στις δύο στάθμες, στην αρχή του χρόνου για  $\Omega_R = 1fs^{-1}$  και  $\Delta = 1fs^{-1}$ , με  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\Omega = 10fs^{-1}$ , για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).

## Κεφάλαιο 5

# Δισταθμικό Σύστημα με τη Μέθοδο Επανισώσεως.

### 5.1 Η Μέθοδος Επανισώσεως (Averaging Method) πρώτης και δεύτερης τάξεως. [3–6]

Η μέθοδος της επανισώσεως (averaging method) χρησιμοποιείται σε σύστημα της μορφής

$$\dot{x} = \epsilon f(x, t) + \epsilon^2 g(x, t) \quad (5.1)$$

όπου  $\epsilon \ll 1$  και  $f(x, t)$ ,  $g(x, t)$  περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο  $T$ . Η πιο απλή μορφή επανισώσεως είναι η περιοδική επανίσωση στην οποία το πρόβλημα διαταραχών 5.1 λύνεται υποθέτοντας ότι το  $x(t)$  είναι αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση σε σχέση με τους υπόλοιπους οπότε η μέση τιμή (επανίσωση) γίνεται στους άλλους όρους που περιέχουν το  $t$ , ενώ το  $x(t)$  διατηρείται σταθερό [4] (Σελ. 21). Η ίδια υπόθεση γίνεται και για τα  $y(t)$  και  $z(t)$ , τα οποία ορίζονται στις εξισώσεις 5.2 και 5.16. Η παράμετρος  $t$  συνήθως σημαίνει χρόνο και υποθέτουμε ότι  $t \geq 0$  ή  $t \geq t_0$  με  $t_0$  μια σταθερά. Η (μικρού μεγέθους) παράμετρος  $\epsilon$  χαρακτηρίζει το μέγεθος των διαταραχών. Συνήθως θεωρούμε  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$  ή  $|\epsilon| \leq \epsilon_0$ , αλλά ακόμα κι όταν το  $\epsilon = 0$  δεν περιλαμβάνεται στην περιοχή, μπορεί να μας ενδιαφέρουν τα όρια  $\epsilon \rightarrow 0$ . Θέτουμε

$$x(t) = y(t) + \epsilon w(y(t), t) \quad (5.2)$$

όπου το  $w$  είναι μια συνάρτηση του  $y(t)$  και του  $t$ , η οποία ορίζεται παρακάτω με την Εξ. 5.13.

$$dx(t) = dy(t) + \epsilon dw(y(t), t) \quad (5.3)$$

$$dw(y, t) = \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dt \quad (5.4)$$

Οπότε η χρονική παράγωγος του  $x$  είναι

$$\dot{x} = \dot{y} + \epsilon \frac{\partial w}{\partial y} \dot{y} + \epsilon \frac{\partial w}{\partial t} \quad (5.5)$$

Επομένως η (5.1) γίνεται

$$\dot{y} + \epsilon \frac{\partial w}{\partial y} \dot{y} + \epsilon \frac{\partial w}{\partial t} = \epsilon f(y + \epsilon w, t) + \epsilon^2 g(y + \epsilon w, t) \quad (5.6)$$

Αρχικά γράφουμε τη συνάρτηση  $f$  ως

$$f(x, t) := \bar{f}(x) + \tilde{f}(x, t) \quad (5.7)$$

όπου  $\bar{f}(x)$  είναι η μέση τιμή της  $f$  στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t) dt \quad (5.8)$$

Επομένως, έχουμε

$$f(y + \epsilon w, t) = \bar{f}(y + \epsilon w) + \tilde{f}(y + \epsilon w, t) \quad (5.9)$$

Με την σειρά Taylor ως προς  $y$  έχουμε

$$\bar{f}(y + \epsilon w) = \bar{f}(y) + \epsilon \frac{\partial \bar{f}(y)}{\partial y} w + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.10)$$

$$\tilde{f}(y + \epsilon w, t) = \tilde{f}(y, t) + \epsilon \frac{\partial \tilde{f}(y, t)}{\partial y} w + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.11)$$

$$g(y + \epsilon w, t) = g(y, t) + \epsilon \frac{\partial g(y, t)}{\partial y} w + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.12)$$

Επομένως, η Εξ. 5.6, με τη βοήθεια των Εξ. 5.10, 5.11, 5.12, γίνεται

$$\dot{y} + \epsilon \frac{\partial w}{\partial y} \dot{y} + \epsilon \frac{\partial w}{\partial t} = \epsilon(\bar{f}(y) + \tilde{f}(y, t)) + \epsilon^2 \left( \frac{\partial \bar{f}(y)}{\partial y} w + \frac{\partial \tilde{f}(y, t)}{\partial y} w + g(y, t) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

Αναδιατάσσοντας,

$$(I + \epsilon \frac{\partial w}{\partial y}) \dot{y} = \epsilon(f(y, t) - \frac{\partial w}{\partial t}) + \epsilon^2 \left( \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} w + g(y, t) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

όπου  $I$  η μονάδα όπου αντιστοιχεί στη φύση του  $y$ . Αν  $y$  μία συνάρτηση η οποία έχει εξάρτηση από το  $t$ , τότε το  $I = 1$ . Αν  $y$  ένας πίνακας στήλη, τότε  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Ορίζουμε,

$$\tilde{f}(y, t) = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (5.13)$$

Άρα,

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= (I + \epsilon \frac{\partial w}{\partial y})^{-1} (\epsilon \bar{f}(y) + \epsilon^2 (\frac{\partial f(y,t)}{\partial y} w + g(y,t)) + \mathcal{O}(\epsilon^3)) \\ (I + \epsilon \frac{\partial w}{\partial y})^{-1} &= I - \epsilon \frac{\partial w}{\partial y} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{y} = \epsilon \bar{f}(y) + \epsilon^2 \left( \frac{\partial f(y,t)}{\partial y} w + g(y,t) - \frac{\partial w}{\partial y} \bar{f}(y) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)} \quad (5.14)$$

Η Εξ. 5.14, αν αγνοήσουμε τους όρους από  $\epsilon^2$  και πάνω, περιγράφει την πρώτης τάξεως προσέγγιση του προβλήματος Εξ. 5.1, δηλαδή

$$\boxed{\dot{y} = \epsilon \bar{f}(y)} \quad (5.15)$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις που μένουν δεν εξαρτώνται από το χρόνο.

Τώρα θα ξεκινήσουμε από την εξίσωση (5.14) και θα συνεχίσουμε στη δεύτερη τάξη της μεθόδου επανισώσεως θέτοντας αυτή τη φορά

$$y = z + \epsilon^2 u(z, t) \quad (5.16)$$

Ο όρος  $u(z, t)$  έχει για τη δεύτερη τάξη τον ρόλο του  $w(y, t)$  στη πρώτη τάξη. Επομένως έχουμε

$$\dot{y} = \epsilon \bar{f}(y) + \epsilon^2 h(y, t) \quad (5.17)$$

όπου,

$$h(y, t) = \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} w + g(y, t) - \frac{\partial w}{\partial y} \bar{f}(y) \quad (5.18)$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό για τη δεύτερη τάξη, η Εξ. 5.17 γίνεται

$$\left. \begin{aligned} y = z + \epsilon^2 u(z, t) &\Rightarrow \dot{y} = \dot{z} + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z} \dot{z} + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} \\ \dot{y} &= \epsilon \bar{f}(y) + \epsilon^2 h(y, t) \\ h(y, t) &:= \bar{h}(y) + \tilde{h}(y, t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z} \dot{z} + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} &= \epsilon \bar{f}(z + \epsilon^2 u) + \epsilon^2 (\bar{h}(z + \epsilon^2 u) + \tilde{h}(z + \epsilon^2 u, t)) \\ \bar{f}(z + \epsilon^2 u) &= \bar{f}(z) + \epsilon^2 \frac{\partial \bar{f}(z)}{\partial z} u + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \bar{h}(z + \epsilon^2 u) &= \bar{h}(z) + \epsilon^2 \frac{\partial \bar{h}(z)}{\partial z} u + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \tilde{h}(z + \epsilon^2 u, t) &= \tilde{h}(z, t) + \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{h}(z, t)}{\partial z} u + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



$$\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{z} + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z} \dot{z} + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} &= \epsilon \bar{f}(z) + \epsilon^2 (\bar{h}(z) + \tilde{h}(z, t)) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
\Rightarrow \dot{z} + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z} \dot{z} + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} &= \epsilon \bar{f}(z) + \epsilon^2 h(z, t) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
\Rightarrow (I + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}) \dot{z} &= \epsilon \bar{f}(z) + \epsilon^2 (h(z, t) - \frac{\partial u}{\partial t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3)
\end{aligned}$$

Ορίζουμε,

$$\tilde{h}(z, t) := \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.19)$$

Άρα,

$$\left. \begin{aligned}
\dot{z} &= (I + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z})^{-1} (\epsilon \bar{f}(z) + \epsilon^2 \bar{h}(z, t)) \\
(I + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z})^{-1} &= I - \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z} + \mathcal{O}(\epsilon^4)
\end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\dot{z} = \epsilon \bar{f}(z) + \epsilon^2 \bar{h}(z) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

Γνωρίζουμε ότι:  $h(z, t) = \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} w(z, t) + g(z, t) - \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \bar{f}(z)$ .

Οι όροι  $w(z, t)$  και  $\frac{\partial w(z, t)}{\partial z}$  είναι τέτοιοι ώστε οι μέσες τιμές των όρων  $\frac{\partial \bar{f}(z)}{\partial z} w(z, t)$  και  $\frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \bar{f}(z)$  να είναι μηδέν. Επομένως

$$\overline{(h(z, t))} = \bar{h}(z) = \overline{\left( \frac{\partial \tilde{f}(z, t)}{\partial z} w(z, t) \right)} + \bar{g}(z, t)$$

Επομένως προκύπτει

$$\boxed{\dot{z} = \epsilon \bar{f}(z) + \epsilon^2 \bar{h}(z) + \mathcal{O}(\epsilon^3)} \quad (5.20)$$

Η Εξ. 5.20, αν αγνοήσουμε τους όρους από  $\epsilon^3$  και πάνω, περιγράφει την δεύτερης τάξεως προσέγγιση του προβλήματος Εξ. 5.1, δηλαδή

$$\boxed{\dot{z} = \epsilon \bar{f}(z) + \epsilon^2 \bar{h}(z)} \quad (5.21)$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις που μένουν δεν εξαρτώνται από το χρόνο.

## 5.2 Η Μέθοδος Επανισώσεως στο Δισταθμικό Σύστημα.

Η μέθοδος επανισώσεως εφαρμόστηκε σε ασύμμετρο κβαντικό φρέαρ στο άρθρο [8] και σε ΔΣ στο άρθρο [7]. Στη παρούσα διπλωματική εφαρμόζεται σε ΔΣ με διαφορετικό τρόπο από ότι

στο άρθρο [7]. Έτσι σε αυτό το σημείο θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο επανισώσεως στο πρόβλημα του δισταθμικού συστήματος αλλά αυτή τη φορά χωρίς την προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος (RWA). Σημειώνουμε ότι σκοπός μας με τη χρήση της μεθόδου επανισώσεως είναι να αποκτήσουμε εξισώσεις με συντελεστές ανεξάρτητους του χρόνου κατά αναλογία με την RWA.

Ξεκινώντας από το σύστημα εξισώσεων (2.4)

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) = C_2(t) \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \left[ e^{-i(\Omega-\omega)t} + e^{-i(\Omega+\omega)t} \right] \\ \dot{C}_2(t) = C_1(t) \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \left[ e^{i(\Omega+\omega)t} + e^{i(\Omega-\omega)t} \right] \end{cases} \quad (5.22)$$

θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο επανισώσεως για δυο διαφορετικές περιπτώσεις, την περίπτωση του αποσυντονισμού και την περίπτωση του συντονισμού.

Υπενθυμίζουμε ότι  $\Delta := \omega - \Omega$  και  $\Sigma := \omega + \Omega$ . Επομένως μπορούμε να γράψουμε τις Εξ. 5.22 με την μορφή πινάκων,

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{bmatrix} = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{+i\Delta t} + e^{-i\Sigma t} \\ e^{-i\Delta t} + e^{+i\Sigma t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

, όπου  $\Omega_R := \frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{\hbar}$ .

### 5.2.1 Περίπτωση αποσυντονισμού: $\Delta \neq 0$

Μπορούμε να γράψουμε την (5.23)

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{+i\Delta t} + e^{-i\Sigma t} \\ e^{-i\Delta t} + e^{+i\Sigma t} & 0 \end{bmatrix}}_{\epsilon f(x,t)} x(t) \quad (5.24)$$

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο επανισώσεως θα πρέπει η συνάρτηση  $f$  να είναι περιοδική. Παρατηρούμε ότι έχουμε δύο περιοδικά κομμάτια με περιόδους  $T_1 = \frac{2\pi}{\Delta}$ ,  $T_2 = \frac{2\pi}{\Sigma}$ . Αν ο λόγος των περιόδων  $\frac{T_1}{T_2}$  είναι ρητός, τότε το παραπάνω σύστημα είναι όντως περιοδικό με μια κοινή περίοδο η οποία θα είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δύο περιόδων  $T_1$  και  $T_2$ .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{T_1}{T_2} = \frac{\Sigma}{\Delta} = N, \text{ όπου: } N = \text{ρητός} \\ N = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ όπου: } \alpha, \beta = \text{ακέραιοι} \end{array} \right\} \Rightarrow T = \alpha T_2 = \beta T_1$$

Αν ο λόγος των περιόδων  $\frac{T_1}{T_2}$  δεν είναι ρητός τότε διαλέγουμε κάποιο κοντινό ρητό και λύνουμε το πρόβλημα κατά προσέγγιση. Σημειώνουμε ότι στον υπολογιστή όλοι οι αριθμοί είναι ρητοί

αφού αναπαρίστανται με κάποιο πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων. Έτσι για παράδειγμα αν το κλάσμα των περιόδων είναι  $\sqrt{2}$  δηλαδή,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2}$$

στον υπολογιστή θα ήταν  $\sqrt{2} = 1.41\dots$  με κάποιο πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων. Άρα σε αυτή τη περίπτωση θα μπορούσαμε να πάρουμε για παράδειγμα  $\sqrt{2} = 1.41 = \frac{141}{100}$

Έτσι η μέση τιμή της  $f$  είναι,

$$\epsilon \bar{f}(x) := \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon f(x, t) dt = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} 0 & \int_0^T (e^{+i\Delta t} + e^{-i\Sigma t}) dt \\ \int_0^T (e^{-i\Delta t} + e^{+i\Sigma t}) dt & 0 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

διότι έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{\pm i\Sigma t} dt &= \pm \frac{1}{i\Sigma} (e^{\pm i\Sigma T} - 1) = 0 \\ e^{\pm i\Sigma T} &= e^{\pm i\Sigma \alpha \frac{2\pi}{\Sigma}} = e^{\pm i2\pi\alpha} = (e^{i2\pi})^{\pm\alpha} = 1^{\pm\alpha} = 1 \\ \int_0^T e^{\pm i\Delta t} dt &= \pm \frac{1}{i\Delta} (e^{\pm i\Delta T} - 1) = 0 \\ e^{\pm i\Delta T} &= e^{\pm i\Delta \beta \frac{2\pi}{\Delta}} = e^{\pm i2\pi\beta} = (e^{i2\pi})^{\pm\beta} = 1^{\pm\beta} = 1 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\boxed{\bar{f}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad (5.25)$$

Επομένως από την Εξ. 5.7, θα έχουμε

$$f(x, t) = \overset{0}{\bar{f}(x)} + \tilde{f}(x, t) \Rightarrow \epsilon \tilde{f}(x, t) = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{+i\Delta t} + e^{-i\Sigma t} \\ e^{-i\Delta t} + e^{+i\Sigma t} & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (5.26)$$

Άρα για την πρώτη τάξη της μεθόδου επανισώσεως, σύμφωνα με το μετασχηματισμό 5.2 και την τελική μορφή (5.14) προκύπτει,

$$\boxed{\dot{y} = \overset{0}{\epsilon \bar{f}(y)} + \epsilon^2 \left( \frac{\partial \overset{0}{f}(y, t)}{\partial y} w + \overset{0}{g}(y, t) - \frac{\partial w}{\partial y} \overset{0}{\bar{f}(y)} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)} \Rightarrow \quad (5.27)$$

$$\boxed{\dot{y} = \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{f}(y, t)}{\partial y} w} \quad (5.28)$$

Επιπλέον γνωρίζουμε,

$$\epsilon \frac{\partial w}{\partial t} = \epsilon \tilde{f}(y, t) \Rightarrow \epsilon w(y, t) = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{e^{+i\Delta t}}{i\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{i\Sigma} \\ -\frac{e^{-i\Delta t}}{i\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{i\Sigma} & 0 \end{bmatrix} y(t)$$

Τελικά καταλήγουμε,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{i\Omega_R}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\Sigma t} \\ e^{+i\Sigma t} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{+i\Delta t} \\ e^{-i\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \right\} \frac{i\Omega_R}{2} \left\{ \frac{1}{i\Sigma} \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i\Sigma t} \\ e^{+i\Sigma t} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{i\Delta} \begin{bmatrix} 0 & e^{+i\Delta t} \\ -e^{-i\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \right\} y(t) \Rightarrow \\ \dot{y} &= i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\Sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -e^{-i(\Delta+\Sigma)t} & 0 \\ 0 & e^{i(\Delta+\Sigma)t} \end{bmatrix} + \frac{1}{\Sigma} \begin{bmatrix} e^{i(\Delta+\Sigma)t} & 0 \\ 0 & -e^{-i(\Delta+\Sigma)t} \end{bmatrix} \right\} y(t) \end{aligned}$$

Αν θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά και μόνο τη πρώτη τάξη, της μεθόδου επανισώσεως θα χρησιμοποιούσαμε την Εξ. 5.28 αγνοώντας τους όρους  $\epsilon^2$  και πάνω. Δηλαδή

$$\boxed{\dot{y} = 0} \quad (5.29)$$

Για τη δεύτερη τάξη της μεθόδου επανισώσεως κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού  $y = z + \epsilon^2 u(z, t)$  και της τελικής μορφής (5.20),

$$\boxed{\dot{z} = \epsilon \overline{\tilde{f}(z)} + \epsilon^2 \left( \left( \frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial z} w(z, t) \right) + \bar{g}(z, t) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)} \quad (5.30)$$

Η μέση τιμή του όρου που απομένει είναι

$$\epsilon^2 \overline{\left[ \frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial z} w(z, t) \right]} = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial z} w(z, t) \right) dt = i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \left[ \frac{1}{\Sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] z(t)$$

Άρα καταλήγουμε,

$$\dot{z} = i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \end{bmatrix} z(t) \quad (5.31)$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} &= \frac{\Delta - \Sigma}{\Sigma\Delta} = -\frac{2\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \\ \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} &= \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma\Delta} = \frac{2\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \end{aligned}$$

Άρα, το πρόβλημα μας καταλήγει σε μια προσέγγιση όπου οι συντελεστές είναι ανεξάρτητοι από τον χρόνο

$$\dot{z} = iA \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z(t) \quad (5.32)$$

όπου ορίζουμε,

$$A := \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \left(\frac{2\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right) \quad (5.33)$$

Επομένως καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις,

$$\left. \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = -iAz_1(t) \\ \dot{z}_2(t) = iAz_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{dz_1}{z_1} = -iAdt \\ \frac{dz_2}{z_2} = iAdt \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \ln \frac{z_1}{z_{10}} = -iAt \\ \ln \frac{z_2}{z_{20}} = iAt \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z_1 = z_{10}e^{-iAt} \\ z_2 = z_{20}e^{iAt} \end{array} \right\}$$

Υπενθυμίζουμε ότι τα  $z$  συνδέονται με τις παρακάτω σχέσεις,

$$\begin{aligned} x &= y + \epsilon w(y, t) \\ y &= z + \epsilon^2 u(z, t) \end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε τον πίνακα  $u(z, t)$  ώστε να έχουμε την ολοκληρωμένη λύση του προβλήματος μας.

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon^2 \tilde{h}(z, t) &= i \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -e^{-i(\Delta+\Sigma)t} & 0 \\ 0 & e^{i(\Delta+\Sigma)t} \end{bmatrix} + \frac{1}{\Sigma} \begin{bmatrix} e^{i(\Delta+\Sigma)t} & 0 \\ 0 & -e^{-i(\Delta+\Sigma)t} \end{bmatrix} \right\} z(t) = \\ &= i \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -e^{-i2\omega t} & 0 \\ 0 & e^{i2\omega t} \end{bmatrix} + \frac{1}{\Sigma} \begin{bmatrix} e^{i2\omega t} & 0 \\ 0 & -e^{-i2\omega t} \end{bmatrix} \right\} z(t) \Rightarrow \\ \epsilon^2 u(z, t) &= i \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{i2\omega\Delta} \begin{bmatrix} e^{-i2\omega t} & 0 \\ 0 & e^{i2\omega t} \end{bmatrix} + \frac{1}{i2\omega\Sigma} \begin{bmatrix} e^{i2\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i2\omega t} \end{bmatrix} \right\} z(t) \end{aligned}$$

Τέλος, παρουσιάζουμε την προσέγγιση πρώτης και δεύτερης τάξεως της μεθόδου επανισώσεως για το πρόβλημα μας.

Πρώτη τάξη:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y + \epsilon w(y, t) \\ \dot{y} = 0 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} \\ \epsilon w(y, t) = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{e^{+i\Delta t}}{i\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{i\Sigma} \\ -\frac{e^{-i\Delta t}}{i\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{i\Sigma} & 0 \end{bmatrix} y(t) \end{array} \right\} \quad (5.34)$$

Δεύτερη τάξη:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = z + \epsilon w(z, t) + \epsilon^2 u(z, t) \\ z = \begin{bmatrix} z_{10} e^{-iAt} \\ z_{20} e^{iAt} \end{bmatrix} \\ \epsilon w(z, t) = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{e^{+i\Delta t}}{i\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{i\Sigma} \\ -\frac{e^{-i\Delta t}}{i\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{i\Sigma} & 0 \end{bmatrix} z(t) \\ \epsilon^2 u(z, t) = i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \left[ \frac{1}{i2\omega\Delta} \begin{bmatrix} e^{-i2\omega t} & 0 \\ 0 & e^{i2\omega t} \end{bmatrix} + \frac{1}{i2\omega\Sigma} \begin{bmatrix} e^{i2\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i2\omega t} \end{bmatrix} \right] z(t) \end{array} \right. \quad (5.35)$$

Παρατηρούμε, πως στις εξισώσεις (5.34) και (5.35) εμφανίζονται τρία διαφορετικά  $\epsilon$ , συγκεκριμένα τα  $\frac{\Omega_R}{\Delta}$ ,  $\frac{\Omega_R}{\Sigma}$ ,  $\frac{\Omega_R}{\omega}$ . Αυτή η διαπίστωση είναι η σημαντικότερη ίσως συνεισφορά της παρούσας εργασίας στη βιβλιογραφία. Δηλαδή, τα τρία αυτά, διαφορετικά, μικρά  $\epsilon$  δείχνουν το σχετικό μέγεθος της ισχύος της διαταραχής, την οποία περιγράφει η συχνότητα Rabi, σε σχέση με τον αποσυντονισμό  $\Delta = \omega - \Omega$ , το άθροισμα των συχνοτήτων  $\Sigma = \omega + \Omega$  και τη συχνότητα  $\omega$ . Αυτή η διαφορετική θεώρηση θα μας επιτρέψει να αντιμετωπίσουμε αριθμητικά διαφορετικές περιπτώσεις.

Οι άγνωστοι συντελεστές,  $y_{10}$ ,  $y_{20}$ ,  $z_{10}$ ,  $z_{20}$ , οι οποίοι προκύπτουν στις εξισώσεις (5.34) και (5.35), μπορούν να υπολογιστούν με την βοήθεια των αρχικών συνθηκών.

### 5.2.1.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.

Θα υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές που προκύπτουν στις εξισώσεις της πρώτης και δεύτερης τάξεως της μεθόδου επανισώσεως. Αυτό θα γίνει με την χρήση των αρχικών συνθηκών. Έστω ότι, στην αρχή των χρόνων, το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη κάτω στάθμη, έτσι έχουμε,  $C_1(0) = 1$ ,  $C_2(0) = 0$ .

Επομένως,  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές της πρώτης τάξεως της μεθόδου επανισώσεως για  $t = 0$  στην Εξ. 5.34,

$$\begin{aligned} x(0) &= \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \\ \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} 1 = y_{10} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \right) y_{20} \\ 0 = y_{20} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} \right) y_{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} 1 = y_{10} + \frac{2A}{\Omega_R} y_{20} \\ 0 = y_{20} - \frac{2A}{\Omega_R} y_{10} \Rightarrow y_{20} = \frac{2A}{\Omega_R} y_{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 = y_{10} + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 y_{10} \Rightarrow \boxed{y_{10} = \frac{1}{1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2}}, \quad \boxed{y_{20} = \frac{\frac{2A}{\Omega_R}}{1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2}} \end{aligned}$$

όπου από την Εξ. 5.33,

$$A = \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \left(\frac{2\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right) \quad (5.36)$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι,

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{i\Omega_R}{2} \left(\frac{e^{+i\Delta t}}{i\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{i\Sigma}\right) \\ \frac{i\Omega_R}{2} \left(-\frac{e^{-i\Delta t}}{i\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{i\Sigma}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \left(\frac{2A}{\Omega_R}\right)^2} \\ \frac{\frac{2A}{\Omega_R}}{1 + \left(\frac{2A}{\Omega_R}\right)^2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2A}{\Omega_R}\right)^2} \left[ 1 + A \left( \frac{e^{+i\Delta t}}{\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \right] \\ C_2(t) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2A}{\Omega_R}\right)^2} \left[ \frac{2A}{\Omega_R} + \frac{\Omega_R}{2} \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \right] \end{aligned}} \quad (5.37)$$

$|C_1(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη και  $|C_2(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη άνω στάθμη για κάθε χρονική στιγμή.

Για τη δεύτερη τάξη της μεθόδου επανισώσεως έχουμε, για  $t = 0$  στην Εξ. 5.35,

$$x(0) = \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \\ \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} + i \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{i2\omega\Delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{i2\omega\Sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} 1 &= z_{10} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \right) z_{20} + \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Sigma} \right) z_{10} \Rightarrow 1 = \left(1 + \frac{A}{2\Omega}\right) z_{10} + \frac{2A}{\Omega_R} z_{20} \\ 0 &= z_{20} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} \right) z_{10} + \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Sigma} \right) z_{20} \Rightarrow \frac{2A}{\Omega_R} z_{10} = \left(1 + \frac{A}{2\Omega}\right) z_{20} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} 1 &= \left(1 + \frac{A}{2\Omega}\right) z_{10} + \frac{\left(\frac{2A}{\Omega_R}\right)^2}{\left(1 + \frac{A}{2\Omega}\right)} z_{10} \\ z_{20} &= \frac{\frac{2A}{\Omega_R}}{\left(1 + \frac{A}{2\Omega}\right)} z_{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} z_{10} &= \frac{1 + \frac{A}{2\Omega}}{\left(1 + \frac{A}{2\Omega}\right)^2 + \left(\frac{2A}{\Omega_R}\right)^2} \\ z_{20} &= \frac{\frac{2A}{\Omega_R}}{\left(1 + \frac{A}{2\Omega}\right)^2 + \left(\frac{2A}{\Omega_R}\right)^2} \end{aligned} \right\}$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι,

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \left(\frac{e^{-i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{i2\omega t}}{\Sigma}\right) & \frac{\Omega_R}{2} \left(\frac{e^{i\Delta t}}{\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{\Sigma}\right) \\ \frac{\Omega_R}{2} \left(-\frac{e^{-i\Delta t}}{\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{\Sigma}\right) & 1 + \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \left(\frac{e^{i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{-i2\omega t}}{\Sigma}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{10} e^{-iAt} \\ z_{20} e^{iAt} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_1(t) &= \left[ 1 + \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \left(\frac{e^{-i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{i2\omega t}}{\Sigma}\right) \right] z_{10} e^{-iAt} + \left[ \frac{\Omega_R}{2} \left(\frac{e^{i\Delta t}}{\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{\Sigma}\right) \right] z_{20} e^{iAt} \\ C_2(t) &= \left[ \frac{\Omega_R}{2} \left(-\frac{e^{-i\Delta t}}{\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{\Sigma}\right) \right] z_{10} e^{-iAt} + \left[ 1 + \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \left(\frac{e^{i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{-i2\omega t}}{\Sigma}\right) \right] z_{20} e^{iAt} \end{aligned}} \quad (5.38)$$

$|C_1(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη και  $|C_2(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη άνω στάθμη για κάθε χρονική στιγμή.

### 5.2.1.2 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.

Θα υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές που προκύπτουν στις εξισώσεις της πρώτης και δεύτερης τάξης της μεθόδου επανισώσεως. Αυτό θα γίνει με την χρήση των αρχικών συνθηκών. Έστω ότι, στην αρχή των χρόνων, το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην άνω στάθμη, θα έχουμε,  $C_1(0) = 0$ ,  $C_2(0) = 1$ .

Επομένως,  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Άρα αρχικά ας υπολογίσουμε τους συντελεστές της πρώτης τάξης της μεθόδου επανισώσεως για  $t = 0$  στην Εξ. 5.34,

$$\begin{aligned} x(0) &= \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \\ \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\begin{cases} 0 = y_{10} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \right) y_{20} \\ 1 = y_{20} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} \right) y_{10} \end{cases} \Rightarrow \\ &\begin{cases} 0 = y_{10} + \frac{2A}{\Omega_R} y_{20} \Rightarrow y_{10} = -\frac{2A}{\Omega_R} y_{20} \\ 1 = y_{20} - \frac{2A}{\Omega_R} y_{10} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 &= y_{20} + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 y_{20} \Rightarrow \boxed{y_{20} = \frac{1}{1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2}}, \quad \boxed{y_{10} = \frac{-\frac{2A}{\Omega_R}}{1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2}} \end{aligned}$$

όπου από την Εξ. 5.33,

$$A = \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \left( \frac{2\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \right) \quad (5.39)$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι,

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{i\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{i\Sigma} \right) & \frac{i\Omega_R}{2} \left( \frac{e^{+i\Delta t}}{i\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{i\Sigma} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{i\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{i\Sigma} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-\frac{2A}{\Omega_R}}{1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2} \\ \frac{1}{1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\boxed{\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{1}{1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2} \left[ -\frac{2A}{\Omega_R} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{e^{i\Delta t}}{\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \right] \\ C_2(t) &= \frac{1}{1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2} \left[ 1 - A \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{\Delta} + \frac{e^{i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \right] \end{aligned}} \quad (5.40) \end{aligned}$$

$|C_1(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη και  $|C_2(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη άνω στάθμη για κάθε χρονική στιγμή.

Για τη δεύτερη τάξη της μεθόδου επανισώσεως έχουμε, για  $t = 0$  στην Εξ. 5.35,



$$\begin{aligned}
x(0) &= \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \\ \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} + i \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{i2\omega\Delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{i2\omega\Sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&\left\{ \begin{aligned} 0 &= z_{10} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \right) z_{20} + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Sigma} \right) z_{10} \Rightarrow -\frac{2A}{\Omega_R} z_{20} = \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) z_{10} \\ 1 &= z_{20} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} \right) z_{10} + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Sigma} \right) z_{20} \Rightarrow 1 = \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) z_{20} - \frac{2A}{\Omega_R} z_{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
&\left\{ \begin{aligned} z_{10} &= \frac{-\frac{2A}{\Omega_R}}{\left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right)} z_{20} \\ 1 &= \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) z_{20} + \frac{\left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2}{\left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right)} z_{20} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} z_{10} &= \frac{-\frac{2A}{\Omega_R}}{\left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right)^2 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2} \\ z_{20} &= \frac{1 + \frac{A}{2\Omega}}{\left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right)^2 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2} \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι,

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{e^{-i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{i2\omega t}}{\Sigma} \right) & \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{e^{i\Delta t}}{\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \\ \frac{\Omega_R}{2} \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{\Sigma} \right) & 1 + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{e^{i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{-i2\omega t}}{\Sigma} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{10} e^{-iAt} \\ z_{20} e^{iAt} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= \left[ 1 + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{e^{-i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{i2\omega t}}{\Sigma} \right) \right] z_{10} e^{-iAt} + \left[ \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{e^{i\Delta t}}{\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \right] z_{20} e^{iAt} \\
C_2(t) &= \left[ \frac{\Omega_R}{2} \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \right] z_{10} e^{-iAt} + \left[ 1 + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{e^{i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{-i2\omega t}}{\Sigma} \right) \right] z_{20} e^{iAt}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$|C_1(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη και  $|C_2(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη άνω στάθμη για κάθε χρονική στιγμή.

### 5.2.1.3 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.

Θα υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές που προκύπτουν στις εξισώσεις της πρώτης και δεύτερης τάξεως της μεθόδου επανισώσεως. Αυτό θα γίνει με την χρήση των αρχικών συνθηκών. Έστω ότι το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται με ίση πιθανότητα και στις δύο στάθμες, θα έχουμε  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$ ,  $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi}$ , με πιθανότητα  $|C_1(0)|^2 = |C_2(0)|^2 = \frac{1}{2}$ .

Επομένως,  $x(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \end{bmatrix}$ . Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές της πρώτης τάξεως της μεθόδου επανισώσεως για  $t = 0$  στην Εξ. 5.34,

$$\begin{aligned}
x(0) &= \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \\ \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} = y_{10} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \right) y_{20} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} = y_{20} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} \right) y_{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} = y_{10} + \frac{2A}{\Omega_R} y_{20} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} = -\frac{2A}{\Omega_R} y_{10} + y_{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2A}{\Omega_R} e^{i\theta} = \frac{2A}{\Omega_R} y_{10} + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 y_{20} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} = -\frac{2A}{\Omega_R} y_{10} + y_{20} \end{array} \right\} \text{ Προσθέτω κατά μέλη} \\
\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2A}{\Omega_R} e^{i\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} = y_{20} + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 y_{20} \Rightarrow \boxed{y_{20} = \frac{\frac{2A}{\Omega_R} e^{i\theta} + e^{i\phi}}{\sqrt{2} \left( 1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 \right)}} \\
\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} = y_{10} + \frac{2A}{\Omega_R} y_{20} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} = -\frac{2A}{\Omega_R} y_{10} + y_{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} = y_{10} + \frac{2A}{\Omega_R} y_{20} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{2A}{\Omega_R} \right) e^{i\phi} = \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 y_{10} + \left( -\frac{2A}{\Omega_R} \right) y_{20} \end{array} \right\} \text{ Προσθέτω κατά μέλη} \\
\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2A}{\Omega_R} e^{i\phi} = y_{10} + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 y_{10} \Rightarrow \boxed{y_{10} = \frac{e^{i\theta} - \frac{2A}{\Omega_R} e^{i\phi}}{\sqrt{2} \left( 1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 \right)}}
\end{aligned}$$

όπου από την Εξ. 5.33,

$$A = \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \left( \frac{2\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \right) \quad (5.42)$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι,

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{i\Omega_R}{2} \left( \frac{e^{+i\Delta t}}{i\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{i\Sigma} \right) \\ \frac{i\Omega_R}{2} \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{i\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{i\Sigma} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^{i\theta} - \frac{2A}{\Omega_R} e^{i\phi}}{\sqrt{2} \left( 1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 \right)} \\ \frac{\frac{2A}{\Omega_R} e^{i\theta} + e^{i\phi}}{\sqrt{2} \left( 1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 \right)} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\boxed{ \begin{array}{l} C_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2} \left( 1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 \right)} \left[ \left( e^{i\theta} - \frac{2A}{\Omega_R} e^{i\phi} \right) + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{e^{i\Delta t}}{\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \left( \frac{2A}{\Omega_R} e^{i\theta} + e^{i\phi} \right) \right] \\ C_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2} \left( 1 + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 \right)} \left[ \frac{\Omega_R}{2} \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{\Delta} + \frac{e^{i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \left( e^{i\theta} - \frac{2A}{\Omega_R} e^{i\phi} \right) + \left( \frac{2A}{\Omega_R} e^{i\theta} + e^{i\phi} \right) \right] \end{array} \quad (5.43) }
\end{aligned}$$

$|C_1(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη και  $|C_2(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη άνω στάθμη για κάθε χρονική στιγμή.

Για τη δεύτερη τάξη της μεθόδου επανισώσεως έχουμε, για  $t = 0$  στην Εξ. 5.35,

$$\begin{aligned}
 x(0) &= \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \\ \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} + i \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{i2\omega\Delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{i2\omega\Sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} = z_{10} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Sigma} \right) z_{20} + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Sigma} \right) z_{10} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} = z_{20} + \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Delta} \right) z_{10} + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Sigma} \right) z_{20} \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} = \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) z_{10} + \frac{2A}{\Omega_R} z_{20} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} = -\frac{2A}{\Omega_R} z_{10} + \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) z_{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right) e^{i\theta} = \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right) \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) z_{10} + \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 z_{20} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) e^{i\phi} = -\frac{2A}{\Omega_R} \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) z_{10} + \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right)^2 z_{20} \end{array} \right\} &\text{Προσθέτω κατά μέλη} \Rightarrow \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right) e^{i\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) e^{i\phi} &= \left[ \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 + \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right)^2 \right] z_{20} \Rightarrow \boxed{z_{20} = \frac{\left( \frac{2A}{\Omega_R} \right) e^{i\theta} + \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) e^{i\phi}}{\sqrt{2} \left[ \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 + \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right)^2 \right]}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} = \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) z_{10} + \frac{2A}{\Omega_R} z_{20} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} = -\frac{2A}{\Omega_R} z_{10} + \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) z_{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) e^{i\theta} = \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right)^2 z_{10} + \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right) z_{20} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{2A}{\Omega_R} \right) e^{i\phi} = \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 z_{10} + \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) \left( -\frac{2A}{\Omega_R} \right) z_{20} \end{array} \right\} &\text{Προσθέτω κατά μέλη} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) e^{i\theta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right) e^{i\phi} &= \left[ \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 + \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right)^2 \right] z_{10} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \boxed{z_{10} = \frac{\left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right) e^{i\theta} - \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right) e^{i\phi}}{\sqrt{2} \left[ \left( \frac{2A}{\Omega_R} \right)^2 + \left( 1 + \frac{A}{2\Omega} \right)^2 \right]}}
 \end{aligned}$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι

$$\begin{aligned}
 x(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{e^{-i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{i2\omega t}}{\Sigma} \right) & \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{e^{i\Delta t}}{\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \\ \frac{\Omega_R}{2} \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{\Sigma} \right) & 1 + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{e^{i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{-i2\omega t}}{\Sigma} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{10} e^{-iAt} \\ z_{20} e^{iAt} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \boxed{ \begin{array}{l} C_1(t) = \left[ 1 + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{e^{-i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{i2\omega t}}{\Sigma} \right) \right] z_{10} e^{-iAt} + \left[ \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{e^{i\Delta t}}{\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \right] z_{20} e^{iAt} \\ C_2(t) = \left[ \frac{\Omega_R}{2} \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \right] z_{10} e^{-iAt} + \left[ 1 + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{e^{i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{-i2\omega t}}{\Sigma} \right) \right] z_{20} e^{iAt} \end{array} \right. & \quad (5.44)
 \end{aligned}$$

$|C_1(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη και  $|C_2(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη άνω στάθμη για κάθε χρονική στιγμή.

### 5.2.2 Περίπτωση συντονισμού: $\Delta=0$

Ξεκινώντας πάλι από την (5.23), αλλά αυτή τη φορά για  $\Delta = 0$ , δηλαδή για  $\Omega = \omega$  προκύπτει

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 + e^{-i2\omega t} \\ 1 + e^{+i2\omega t} & 0 \end{bmatrix}}_{\epsilon f(x,t)} x(t) \quad (5.45)$$

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο επανισώσεως θα πρέπει η συνάρτηση  $f$  να είναι περιοδική. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει περίοδο  $T = \frac{\pi}{\omega}$ .

Έτσι η μέση τιμή της  $f$  είναι,

$$\epsilon \bar{f}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon f(x,t) dt = \frac{1}{T} \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & T \\ T & 0 \end{bmatrix} x(t) = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Άρα,

$$\boxed{\epsilon \bar{f}(x) = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)} \quad (5.46)$$

Επομένως από την Εξ. 5.7 θα έχουμε,

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \bar{f}(x) + \tilde{f}(x,t) \Rightarrow \\ \epsilon \tilde{f}(x,t) &= \epsilon f(x,t) - \epsilon \bar{f}(x) = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 + e^{-i2\omega t} \\ 1 + e^{+i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} x(t) - \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\epsilon \tilde{f}(x,t) = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (5.47)$$

Γνωρίζουμε ότι,

$$\epsilon \frac{\partial w}{\partial t} = \epsilon \tilde{f}(y,t) \Rightarrow \epsilon w(y,t) = \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} y(t)$$

Άρα για την πρώτη τάξη της μεθόδου επανισώσεως, σύμφωνα με το μετασχηματισμό 5.2 και την τελική μορφή (5.14) έχουμε:

$$\boxed{\dot{y} = \epsilon \bar{f}(y) + \epsilon^2 \left( \frac{\partial f(y,t)}{\partial y} \Big|_{\tilde{f}(y)+\tilde{f}(y,t)} w + g(y,t) \Big|_0 \frac{\partial w}{\partial y} \bar{f}(y) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)} \Rightarrow \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y + \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} y \\
&\quad + \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} y \\
&\quad - \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y \\
\Rightarrow \dot{y} &= \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y + i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \begin{bmatrix} 1 + 2\cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & -(1 + 2\cos(2\omega t)) \end{bmatrix} y
\end{aligned}$$

Αν θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά και μόνο τη πρώτη τάξη, της μεθόδου επανισώσεως θα χρησιμοποιούσαμε την Εξ. 5.48 αγνοώντας τους όρους  $\epsilon^2$  και πάνω. Δηλαδή έχουμε,

$$\dot{y} = \epsilon \bar{f}(y) \Rightarrow \dot{y} = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{i\Omega_R}{2} y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{i\Omega_R}{2} y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{y}_1 + \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 y_1 = 0 \\ \ddot{y}_2 + \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 y_2 = 0 \end{cases} \quad (5.49)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = A_{11} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + B_{11} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \\ y_2 = A_{21} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + B_{21} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \end{cases} \quad (5.50)$$

με

$$\left. \begin{cases} y_1(0) = A_{11} \\ y_2(0) = A_{21} \end{cases} \right\} \text{ και } \left. \begin{cases} \dot{y}_1(0) = \frac{\Omega_R}{2} B_{11} = i\frac{\Omega_R}{2} y_2(0) \\ \dot{y}_2(0) = \frac{\Omega_R}{2} B_{21} = i\frac{\Omega_R}{2} y_1(0) \end{cases} \right\} \quad (5.51)$$

Για τη δεύτερη τάξη της μεθόδου επανισώσεως κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού 5.16 και της τελικής μορφής (5.20)

$$\dot{z} = \epsilon \bar{f}(z) + \epsilon^2 \left( \overline{\left( \frac{\partial \tilde{f}(z, t)}{\partial z} w(z, t) \right)} + \bar{g}(z, t) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

Έχουμε,

$$\begin{aligned}
\overline{\left( \frac{\partial \tilde{f}(z, t)}{\partial z} w(z, t) \right)} &= \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} z(t) = \\
&= i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z(t)
\end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε,

$$\dot{z} = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z + i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z \Rightarrow$$

$$\dot{z} = i \begin{bmatrix} \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} & \frac{\Omega_R}{2} \\ \frac{\Omega_R}{2} & -\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \end{bmatrix} z \quad (5.52)$$

Έτσι λύνουμε το σύστημα 5.52 με  $A := \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega}$  και  $B := \frac{\Omega_R}{2}$ ,

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= iAz_1 + iBz_2 \\ \dot{z}_2(t) &= iBz_1 - iAz_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= iAz_1 + iBz_2 \\ \dot{z}_2(t) &= iBz_1 - iAz_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= iA(iAz_1 + iBz_2) + iB(iBz_1 - iAz_2) \\ \dot{z}_2(t) &= iB(iAz_1 + iBz_2) - iA(iBz_1 - iAz_2) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \ddot{z}_1 + C^2 z_1 &= 0 \\ \ddot{z}_2 + C^2 z_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

όπου  $C^2 := A^2 + B^2$ .

Οι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων είναι γνωστές

$$\left\{ \begin{aligned} z_1 &= A_{12} \cos(Ct) + B_{12} \sin(Ct) \\ z_2 &= A_{22} \cos(Ct) + B_{22} \sin(Ct) \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

με

$$\left\{ \begin{aligned} z_1(0) &= A_{12} \\ z_2(0) &= A_{22} \end{aligned} \right\} \text{ και } \left\{ \begin{aligned} \dot{z}_1(0) &= CB_{12} = iAz_1(0) + iBz_2(0) \\ \dot{z}_2(0) &= CB_{22} = iBz_1(0) - iAz_2(0) \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

Υπενθυμίζουμε ότι τα  $z$  συνδέονται με τις παρακάτω σχέσεις,

$$\begin{aligned} x &= y + \epsilon w(y, t) \\ y &= z + \epsilon^2 u(z, t) \end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε τον πίνακα  $u(z, t)$  ώστε να έχουμε την ολοκληρωμένη λύση του προβλήματος μας.

$$\epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon^2 \tilde{h}(z, t) = i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \begin{bmatrix} 2 \cos 2\omega t & 0 \\ 0 & -2 \cos(2\omega t) \end{bmatrix} z = i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{\omega} \cos 2\omega t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z \Rightarrow$$

$$\epsilon^2 u(z, t) = i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z$$

Τέλος, παρακάτω παρουσιάζουμε την προσέγγιση πρώτης και δεύτερης τάξης της μεθόδου επανισώσεως για το πρόβλημα μας.

Πρώτης τάξης:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y + \epsilon w(y, t) \\ y = \begin{bmatrix} A_{11} \cos(\frac{\Omega_R}{2}t) + B_{11} \sin(\frac{\Omega_R}{2}t) \\ A_{21} \cos(\frac{\Omega_R}{2}t) + B_{21} \sin(\frac{\Omega_R}{2}t) \end{bmatrix} \\ \epsilon w(y, t) = \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} y(t) \end{array} \right\} \quad (5.56)$$

Δεύτερης τάξης:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = z + \epsilon w(z, t) + \epsilon^2 u(z, t) \\ z = \begin{bmatrix} A_{12} \cos(Ct) + B_{12} \sin(Ct) \\ A_{22} \cos(Ct) + B_{22} \sin(Ct) \end{bmatrix} \\ \epsilon w(z, t) = \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} z(t) \\ \epsilon^2 u(z, t) = i(\frac{\Omega_R}{2})^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z(t) \end{array} \right\} \quad (5.57)$$

Παρατηρούμε, πως στις εξισώσεις 5.56 και 5.57, τα τρία διαφορετικά  $\epsilon$  εκφυλίζονται σε ένα, το οποίο είναι  $\frac{\Omega_R}{\omega}$ . Έτσι στη περίπτωση του συντονισμού  $\Delta = 0$ , το  $\epsilon$  αυτό δείχνει το σχετικό μέγεθος της διαταραχής, την οποία περιγράφει η συχνότητα Rabi, σε σχέση με τη συχνότητα  $\omega$ .

Οι άγνωστοι συντελεστές,  $A_{11}$ ,  $A_{21}$ ,  $B_{11}$ ,  $B_{21}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{22}$ , οι οποίοι προκύπτουν στις εξισώσεις 5.56 και 5.57, μπορούν να υπολογιστούν με την βοήθεια των αρχικών συνθηκών.

### 5.2.2.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.

Θα υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές που προκύπτουν στις εξισώσεις της πρώτης και δεύτερης τάξεως της μεθόδου επανισώσεως. Αυτό θα γίνει με την χρήση των αρχικών συνθηκών. Έστω ότι το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη κάτω στάθμη, θα έχουμε:  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ .

Επομένως έχουμε:  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές της πρώτης τάξεως της μεθόδου επανισώσεως για  $t = 0$  στην Εξ. (5.56)

$$x(0) = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = A_{11} - \frac{\Omega_R}{4\omega} A_{21} \\ 0 = A_{21} + \frac{\Omega_R}{4\omega} A_{11} \Rightarrow A_{21} = -\frac{\Omega_R}{4\omega} A_{11} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = A_{11} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2 A_{11} \\ A_{21} = -\frac{\Omega_R}{4\omega} A_{11} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{A_{11} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2}}, \quad \boxed{A_{21} = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2}}$$

Επιπλέον γνωρίζουμε,

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = \frac{\Omega_R}{2} B_{11} = i \frac{\Omega_R}{2} y_2(0) \\ y_2(0) = \frac{\Omega_R}{2} B_{21} = i \frac{\Omega_R}{2} y_1(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_{11} = i A_{21} = \frac{-i \frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2} \\ B_{21} = i A_{11} = \frac{i}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2} \end{array} \right\}$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι,

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C_1(t) = A_{11} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + i A_{21} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} (A_{21} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + i A_{11} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)) \\ C_2(t) = A_{21} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + i A_{11} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{i2\omega t} (A_{11} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + i A_{21} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)) \end{array}} \quad (5.58)$$

$|C_1(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη και  $|C_2(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη άνω στάθμη.

Για τη δεύτερη τάξη της μεθόδου επανισώσεως έχουμε για  $t = 0$  στην εξίσωση (5.57)

$$x(0) = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = A_{12} - \frac{\Omega_R}{4\omega} A_{22} \\ 0 = A_{22} + \frac{\Omega_R}{4\omega} A_{12} \Rightarrow A_{22} = -\frac{\Omega_R}{4\omega} A_{12} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = A_{12} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2 A_{12} \\ A_{22} = -\frac{\Omega_R}{4\omega} A_{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{A_{12} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2}}, \quad \boxed{A_{22} = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2}}$$

Επιπλέον γνωρίζουμε,



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(0) = CB_{12} = iAz_1(0) + iBz_2(0) \\ \dot{z}_2(0) = CB_{22} = iBz_1(0) - iAz_2(0) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_{12} = \frac{iAA_{12} + iBA_{22}}{C} = i \frac{(\frac{\Omega_R}{2})^2 \frac{1}{2\omega} \frac{1}{1+(\frac{\Omega_R}{4\omega})^2} + \frac{\Omega_R}{2} \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}}{1+(\frac{\Omega_R}{4\omega})^2}}{C} = 0 \\ B_{22} = \frac{iBA_{12} - iAA_{22}}{C} = i \frac{\frac{\Omega_R}{2} \frac{(1+(\frac{\Omega_R}{4\omega})^2)}{(1+(\frac{\Omega_R}{4\omega})^2)}}{C} = \frac{i\Omega_R}{2C} \end{array} \right\}$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι,

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + i(\frac{\Omega_R}{2})^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t & \frac{\Omega_R}{4\omega} (-e^{-i2\omega t}) \\ \frac{\Omega_R}{4\omega} (e^{i2\omega t}) & 1 - i(\frac{\Omega_R}{2})^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C_1(t) = (1 + i(\frac{\Omega_R}{2})^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t) z_1(t) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} z_2(t) \\ C_2(t) = \frac{\Omega_R}{4\omega} (e^{i2\omega t}) z_1(t) + (1 - i(\frac{\Omega_R}{2})^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t) z_2(t) \end{array}} \quad (5.59)$$

με:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = A_{12} \cos(Ct) + B_{12} \sin(Ct) \\ z_2 = A_{22} \cos(Ct) + B_{22} \sin(Ct) \end{array} \right\} \text{ και } \left\{ \begin{array}{l} A_{12} = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega_R}{4\omega})^2} \\ A_{22} = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + (\frac{\Omega_R}{4\omega})^2} \\ B_{12} = 0 \\ B_{22} = \frac{i\Omega_R}{2C} \end{array} \right\}$$

$|C_1(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη και  $|C_2(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη άνω στάθμη.

### 5.2.2.2 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.

Θα υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές που προκύπτουν στις εξισώσεις της πρώτης και δεύτερης τάξεως της μεθόδου επανισώσεως. Αυτό θα γίνει με την χρήση των αρχικών συνθηκών. Έστω ότι το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη άνω στάθμη, θα έχουμε:  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ .

Επομένως έχουμε:  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές της πρώτης τάξης της μεθόδου επανισώσεως για  $t = 0$  στη (5.56)

$$x(0) = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A_{11} - \frac{\Omega_R}{4\omega} A_{21} \Rightarrow A_{11} = \frac{\Omega_R}{4\omega} A_{21} \\ 1 = A_{21} + \frac{\Omega_R}{4\omega} A_{11} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_{11} = \frac{\Omega_R}{4\omega} A_{21} \\ 1 = A_{21} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2 A_{21} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_{11} = \frac{\frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2}}, \quad \boxed{A_{21} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2}}$$

Επιπλέον γνωρίζουμε,

$$\begin{cases} y_1(0) = \frac{\Omega_R}{2} B_{11} = i \frac{\Omega_R}{2} y_2(0) \\ y_2(0) = \frac{\Omega_R}{2} B_{21} = i \frac{\Omega_R}{2} y_1(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_{11} = i A_{21} = \frac{i}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2} \\ B_{21} = i A_{11} = \frac{i \frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2} \end{cases}$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι,

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_1(t) &= A_{11} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + i A_{21} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} (A_{21} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + i A_{11} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)) \\ C_2(t) &= A_{21} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + i A_{11} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{i2\omega t} (A_{11} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + i A_{21} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)) \end{aligned}} \quad (5.60)$$

$|C_1(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη και  $|C_2(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη άνω στάθμη.

Για τη δεύτερη τάξη της μεθόδου επανισώσεως έχουμε για  $t = 0$  στην εξίσωση (5.57)

$$x(0) = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A_{12} - \frac{\Omega_R}{4\omega} A_{22} \Rightarrow A_{12} = \frac{\Omega_R}{4\omega} A_{22} \\ 1 = A_{22} + \frac{\Omega_R}{4\omega} A_{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_{12} = \frac{\Omega_R}{4\omega} A_{22} \\ 1 = A_{22} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2 A_{22} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_{12} = \frac{\frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2}}, \quad \boxed{A_{22} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2}}$$

Επιπλέον γνωρίζουμε,

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \dot{z}_1(0) = CB_{12} &= iAz_1(0) + iBz_2(0) \\ \dot{z}_2(0) = CB_{22} &= iBz_1(0) - iAz_2(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{aligned} B_{12} &= \frac{iAA_{12} + iBA_{22}}{C} = i \frac{\frac{\Omega_R}{2} (1 + (\frac{\Omega_R}{4\omega})^2)}{(1 + (\frac{\Omega_R}{4\omega})^2)} = \frac{i\Omega_R}{2C} \\ B_{22} &= \frac{iBA_{12} - iAA_{22}}{C} = i \frac{\frac{\Omega_R}{2} \frac{\frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + (\frac{\Omega_R}{4\omega})^2} - (\frac{\Omega_R}{2})^2 \frac{1}{2\omega} \frac{1}{1 + (\frac{\Omega_R}{4\omega})^2}}{C} = 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι:

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + i(\frac{\Omega_R}{2})^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t & \frac{\Omega_R}{4\omega} (-e^{-i2\omega t}) \\ \frac{\Omega_R}{4\omega} (e^{i2\omega t}) & 1 - i(\frac{\Omega_R}{2})^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} C_1(t) &= (1 + i(\frac{\Omega_R}{2})^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t) z_1(t) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} z_2(t) \\ C_2(t) &= \frac{\Omega_R}{4\omega} (e^{i2\omega t}) z_1(t) + (1 - i(\frac{\Omega_R}{2})^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t) z_2(t) \end{aligned} \quad (5.61)$$

με:

$$\left\{ \begin{aligned} z_1 &= A_{12} \cos(Ct) + B_{12} \sin(Ct) \\ z_2 &= A_{22} \cos(Ct) + B_{22} \sin(Ct) \end{aligned} \right\} \text{ και } \left\{ \begin{aligned} A_{12} &= \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + (\frac{\Omega_R}{4\omega})^2} \\ A_{22} &= \frac{1}{1 + (\frac{\Omega_R}{4\omega})^2} \\ B_{12} &= \frac{i\Omega_R}{2C} \\ B_{22} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$|C_1(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη και  $|C_2(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη άνω στάθμη.

### 5.2.2.3 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.

Θα υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές που προκύπτουν στις εξισώσεις της πρώτης και δεύτερης τάξεως της μεθόδου επανισώσεως. Αυτό θα γίνει με την χρήση των αρχικών συνθηκών. Έστω ότι το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται με ίση πιθανότητα και στις δύο στάθμες, θα έχουμε:  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$ ,  $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi}$ , με πιθανότητα:  $|C_1(0)|^2 = |C_2(0)|^2 = \frac{1}{2}$ .

Επομένως έχουμε:  $x(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} \end{bmatrix}$ . Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές της πρώτης τάξης της μεθόδου επανισώσεως για  $t = 0$  στη (5.56)

$$x(0) = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta} = A_{11} - \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{21} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} = A_{21} + \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{11} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta} = A_{11} - \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{21} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi} = \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{21} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2A_{11} \end{cases} \xrightarrow{\text{Προσθέτω κατά μέλη}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi} = \left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)A_{11} \Rightarrow \boxed{A_{11} = \frac{e^{i\theta} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)}}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta} = A_{11} - \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{21} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} = A_{21} + \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\theta} = \left(-\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)A_{11} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2A_{21} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} = A_{21} + \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{11} \end{cases} \xrightarrow{\text{Προσθέτω κατά μέλη}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} = \left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)A_{21} \Rightarrow \boxed{A_{21} = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}e^{i\theta} + e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)}}$$

Επιπλέον γνωρίζουμε,

$$\begin{cases} y_1(0) = \frac{\Omega_R}{2}B_{11} = i\frac{\Omega_R}{2}y_2(0) \\ y_2(0) = \frac{\Omega_R}{2}B_{21} = i\frac{\Omega_R}{2}y_1(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_{11} = iA_{21} = i\frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}e^{i\theta} + e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} \\ B_{21} = iA_{11} = i\frac{e^{i\theta} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} \end{cases}$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_1(t) &= A_{11} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_{21} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) - \frac{\Omega_R}{4\omega}e^{-i2\omega t} \left(A_{21} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_{11} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\right) \\ C_2(t) &= A_{21} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_{11} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + \frac{\Omega_R}{4\omega}e^{i2\omega t} \left(A_{11} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_{21} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\right) \end{aligned}} \quad (5.62)$$

$|C_1(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη και  $|C_2(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη άνω στάθμη.

Για τη δεύτερη τάξη της μεθόδου επανισώσεως έχουμε για  $t = 0$  στην εξίσωση (5.57),

$$x(0) = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} + \frac{\Omega_R}{4\omega} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta} = A_{12} - \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{22} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} = A_{22} + \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{12} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta} = A_{12} - \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{22} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi} = \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{22} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2A_{12} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Προσθέτω κατά μέλη}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi} = \left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)A_{12} \Rightarrow \boxed{A_{12} = \frac{e^{i\theta} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta} = A_{12} - \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{22} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} = A_{22} + \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\theta} = \left(-\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)A_{12} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2A_{22} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} = A_{22} + \frac{\Omega_R}{4\omega}A_{12} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Προσθέτω κατά μέλη}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} = \left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)A_{22} \Rightarrow \boxed{A_{22} = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}e^{i\theta} + e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)}}$$

Επιπλέον γνωρίζουμε,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(0) = CB_{12} = iAz_1(0) + iBz_2(0) \\ \dot{z}_2(0) = CB_{22} = iBz_1(0) - iAz_2(0) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{12} = \frac{iAA_{12} + iBA_{22}}{C} = i \frac{\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} (e^{i\theta} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi}) + \frac{\Omega_R}{2} \left(-\frac{\Omega_R}{4\omega}e^{i\theta} + e^{i\phi}\right)}{\sqrt{2}C\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} = \\ = i \frac{\cancel{\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} - \frac{\Omega_R}{2} \frac{\Omega_R}{4\omega}} e^{i\theta} + \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \frac{\Omega_R}{4\omega} + \frac{\Omega_R}{2} e^{i\phi}}{\sqrt{2}C\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} = i \frac{\frac{\Omega_R}{2} \left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right) e^{i\phi}}{\sqrt{2}C\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} = i \frac{\Omega_R e^{i\phi}}{2\sqrt{2}C} \\ B_{22} = \frac{iBA_{12} - iAA_{22}}{C} = i \frac{\frac{\Omega_R}{2} (e^{i\theta} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi}) - \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \left(-\frac{\Omega_R}{4\omega}e^{i\theta} + e^{i\phi}\right)}{\sqrt{2}C\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} = \\ = i \frac{\left(\frac{\Omega_R}{2} + \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \frac{\Omega_R}{4\omega}\right) e^{i\theta} + \left(\frac{\Omega_R}{2} \frac{\Omega_R}{4\omega} - \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega}\right) e^{i\phi}}{\sqrt{2}C\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} = i \frac{\frac{\Omega_R}{2} \left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right) e^{i\theta}}{\sqrt{2}C\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} = i \frac{\Omega_R e^{i\theta}}{2\sqrt{2}C} \end{array} \right.$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι,

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t & \frac{\Omega_R}{4\omega} (-e^{-i2\omega t}) \\ \frac{\Omega_R}{4\omega} (e^{i2\omega t}) & 1 - i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1(t) = (1 + i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t) z_1(t) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} z_2(t) \\ C_2(t) = \frac{\Omega_R}{4\omega} (e^{i2\omega t}) z_1(t) + (1 - i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t) z_2(t) \end{cases} \quad (5.63)$$

με:

$$\begin{cases} z_1 = A_{12} \cos(Ct) + B_{12} \sin(Ct) \\ z_2 = A_{22} \cos(Ct) + B_{22} \sin(Ct) \end{cases} \text{ και } \begin{cases} A_{12} = \frac{e^{i\theta} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right) e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} \\ A_{22} = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega} e^{i\theta} + e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} \\ B_1 = i \frac{\Omega_R e^{i\phi}}{2\sqrt{2}C} \\ B_2 = i \frac{\Omega_R e^{i\theta}}{2\sqrt{2}C} \end{cases}$$

$|C_1(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη κάτω στάθμη και  $|C_2(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη άνω στάθμη.

## Κεφάλαιο 6

# Αριθμητικά αποτελέσματα δισταθμικού συστήματος με την μέθοδο επανισώσεως.

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα του δισταθμικού συστήματος εκτός της προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος σε σύγκριση με τις αναλυτικές λύσεις της μεθόδου επανισώσεως (Averaging Method) πρώτης και δεύτερης τάξης. Τέλος παρουσιάζονται και οι αναλυτικές λύσεις με την μέθοδο RWA, με σκοπό να συγκριθούν και οι δύο μέθοδοι. Σημαντικό είναι να σχολιάσουμε ότι από τα προηγούμενα αποτελέσματα παρατηρήθηκε, σε όλες τις περιπτώσεις, οι αριθμητικές λύσεις με τη μέθοδο RWA ταυτίζονται με τις αναλυτικές λύσεις με τη μέθοδο RWA. Αυτό σημαίνει ότι στη μέθοδο RWA όταν θα αναφερόμαστε στην αναλυτική ή στην αριθμητική λύση της, επειδή έχουμε να κάνουμε ακριβώς με την ίδια καμπύλη, θα λέμε απλά λύση με την μέθοδο RWA.

Οι λύσεις που έχουν προκύψει με την μέθοδο επανισώσεως στο κεφάλαιο 5, έχουν όλες βασιστεί σε έναν όρο  $\epsilon$ . Αυτός ο όρος είναι απόλυτα αναγκαίο να είναι πολύ μικρότερος του 1 ( $\epsilon \ll 1$ ). Αν αυτή η προϋπόθεση δεν ικανοποιείται τότε θα παρατηρήσουμε ότι η λύση με την μέθοδο επανισώσεως θα αποκλίνει από την αριθμητική λύση. Σκοπός μας λοιπόν είναι να αποδείξουμε ότι τα παραπάνω λεγόμενα ισχύουν και ότι η μέθοδος λειτουργεί πάντα, όταν το  $\epsilon \ll 1$ . Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι την πρώτη τάξη την βάζουμε μέσα στα αποτελέσματα για την πληρότητα, εφόσον στα αποτελέσματα έχουμε τη δεύτερη τάξη. Η δεύτερη τάξη θα έχει πιο ακριβείς αποτελέσματα, από ότι η πρώτη τάξη. Στο πρώτο σύνολο διαγραμμάτων θα αναφερθούν κάποιες παρατηρήσεις για την πρώτη τάξη οι οποίες είναι γενικές για όλα τα υπόλοιπα διαγράμματα αλλά μετέπειτα δεν θα γίνουν άλλα σχόλια για αυτή εφόσον θα έχουμε την καλύτερη περίπτωση της δεύτερης τάξης.

### 6.1 Περίπτωση αποσυντονισμού: $\Delta \neq 0$ .

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για την περίπτωση του αποσυντονισμού. Οι λύσεις πρώτης και δεύτερης τάξης της μεθόδου επανισώσεως έχουν προκύψει με δεδομένο ότι:

$$\frac{\Omega_R}{\Delta} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad , \quad \frac{\Omega_R}{\Sigma} = \mathcal{O}(\epsilon)$$

$$\frac{\Omega_R}{\omega} = \mathcal{O}(\epsilon)$$

Δηλαδή τα παραπάνω πηλίκα θα πρέπει να είναι της τάξης του  $\epsilon$  δηλαδή πολύ μικρότερα του 1 ( $\ll 1$ ). Το πηλίκο  $\frac{\Omega_R}{\Sigma}$  θα το χρησιμοποιούμε σε πολύ ειδικές περιπτώσεις, διότι όταν το πηλίκο  $\frac{\Omega_R}{\Delta}$  είναι πολύ μικρότερο του 1 θα είναι και αυτό.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τις λύσεις πρώτης και δεύτερης τάξης με την μέθοδο επανισώσεως (5.34) και (5.34):

Πρώτης τάξης:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y + \epsilon w(y, t) \\ \dot{y} = 0 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} \\ \epsilon w(y, t) = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{e^{+i\Delta t}}{i\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{i\Sigma} \\ -\frac{e^{-i\Delta t}}{i\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{i\Sigma} & 0 \end{bmatrix} y(t) \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

Δεύτερης τάξης:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = z + \epsilon w(z, t) + \epsilon^2 u(z, t) \\ z = \begin{bmatrix} z_{10} e^{-iAt} \\ z_{20} e^{iAt} \end{bmatrix} \\ \epsilon w(z, t) = \frac{i\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{e^{+i\Delta t}}{i\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{i\Sigma} \\ -\frac{e^{-i\Delta t}}{i\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{i\Sigma} & 0 \end{bmatrix} z(t) \\ \epsilon^2 u(z, t) = i \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \left[ \frac{1}{i2\omega\Delta} \begin{bmatrix} e^{-i2\omega t} & 0 \\ 0 & e^{i2\omega t} \end{bmatrix} + \frac{1}{i2\omega\Sigma} \begin{bmatrix} e^{i2\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i2\omega t} \end{bmatrix} \right] z(t) \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

### 6.1.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη.

Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για τις αρχικές συνθήκες με το ηλεκτρόνιο στην αρχή του χρόνου να βρίσκεται στην κάτω στάθμη δηλαδή:  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ . Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι 5.37 και 5.38,



Πρώτης τάξης:

$$\begin{cases} C_1(t) = \frac{1}{1 + (\frac{2A}{\Omega_R})^2} \left[ 1 + A \left( \frac{e^{+i\Delta t}}{\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \right] \\ C_2(t) = \frac{1}{1 + (\frac{2A}{\Omega_R})^2} \left[ \frac{2A}{\Omega_R} + \frac{\Omega_R}{2} \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \right] \end{cases} \quad (6.3)$$

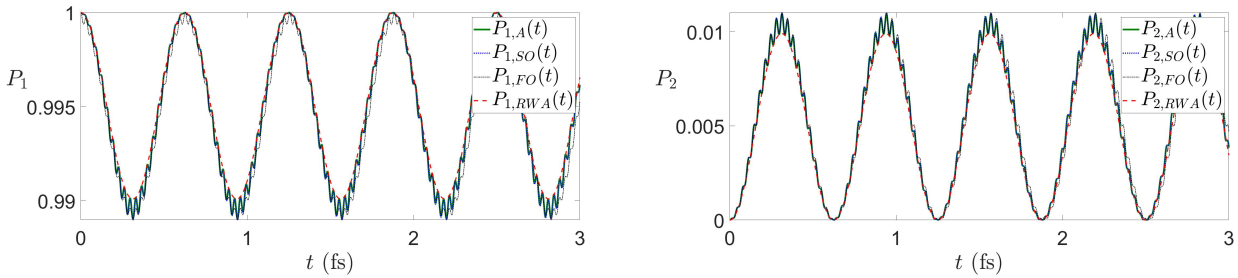
Δεύτερης τάξης:

$$\begin{cases} C_1(t) = \left( 1 + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{e^{-i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{i2\omega t}}{\Sigma} \right) \right) z_{10} e^{-iAt} + \left( \frac{\Omega_R}{2} \left( \frac{e^{i\Delta t}}{\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \right) z_{20} e^{iAt} \\ C_2(t) = \left( \frac{\Omega_R}{2} \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{\Sigma} \right) \right) z_{10} e^{-iAt} + \left( 1 + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega} \left( \frac{e^{i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{-i2\omega t}}{\Sigma} \right) \right) z_{20} e^{iAt} \end{cases} \quad (6.4)$$

όπου  $A = \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \left( \frac{2\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \right)$

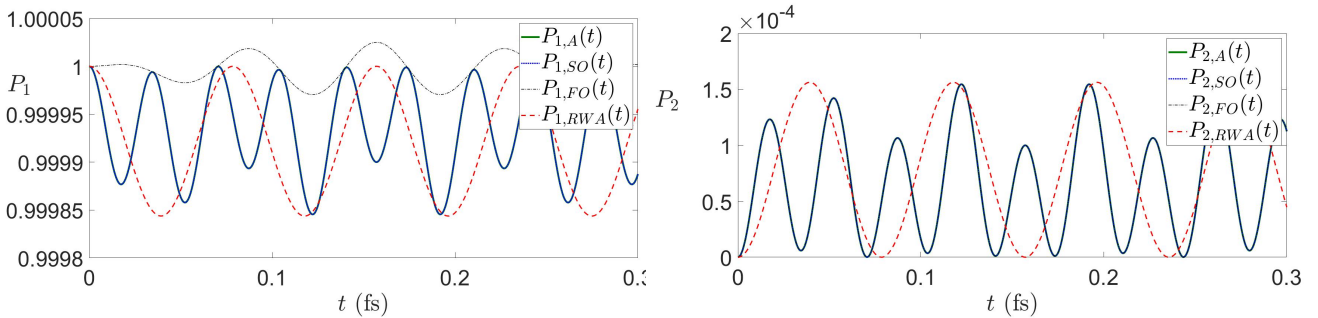
Στα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν οι καμπύλες θα αντιστοιχούν στις αντίστοιχες πιθανότητες, δηλαδή  $P_1(t) = |C_1(t)|^2$  και  $P_2(t) = |C_2(t)|^2$ , οι οποίες είναι οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρισκείται στη στάθμη 1 και 2 αντίστοιχα. Η παρουσίαση των διαγραμμάτων θα είναι με βάση τις μεταβλητές  $\Omega_R$ ,  $\Omega$  και  $\omega$ . Επίσης σημειώνουμε ότι σε όλα τα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν η πιθανότητα με τον δείκτη «SO» σημαίνει ότι είναι η αναλυτική λύση με τη μέθοδο επανισώσεως δεύτερης τάξης (Second Order), η πιθανότητα με τον δείκτη «FO» σημαίνει ότι είναι η αναλυτική λύση με τη μέθοδο επανισώσεως πρώτης τάξης (First Order), η πιθανότητα με τον δείκτη «RWA» σημαίνει ότι είναι η λύση με τη προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος (Rotating Wave Approximation), ενώ η πιθανότητα με δείκτη «A» είναι από την Αριθμητική λύση.

Παρακάτω παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 100, 10, 1\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 90\text{fs}^{-1}$ .



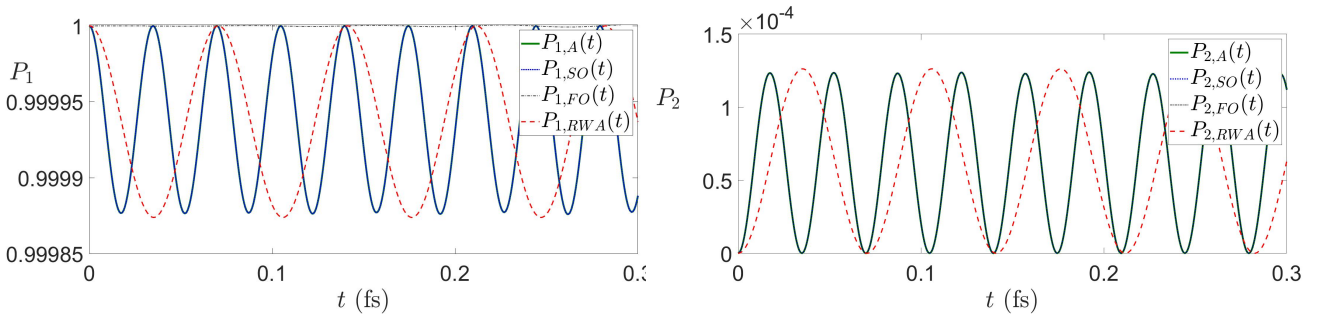
(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.1 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 100fs^{-1}$  και  $\omega = 90fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.2 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$  και  $\omega = 90fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.3 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 1fs^{-1}$  και  $\omega = 90fs^{-1}$ .

Στα παραπάνω διαγράμματα κρατάμε σταθερά τις συχνότητες  $\Omega_R$  και  $\omega$ , ενώ μεταβάλλουμε την συχνότητα  $\Omega$ .

Τα  $\epsilon$  που έχουμε στις παραπάνω περιπτώσεις είναι,

1. Στο σχήμα 6.1, στα διαγράμματα έχουμε,  $\frac{1}{90} \sim 10^{-2}$  και  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ .

2. Στο σχήμα 6.2, στα διαγράμματα έχουμε,  $\frac{1}{90} \sim 10^{-2}$  και  $\frac{1}{80} \sim 10^{-2}$ .
3. Στο σχήμα 6.3, στα διαγράμματα έχουμε,  $\frac{1}{90} \sim 10^{-2}$  και  $\frac{1}{89} \sim 10^{-2}$ .

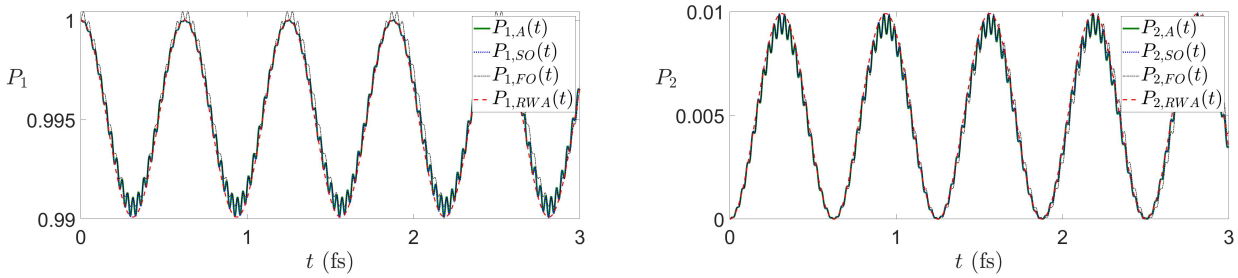
Επομένως μπορούμε να πούμε για τα  $C_k(t)$  με  $k = 1, 2$  ότι,

1. Στο σχήμα 6.1, στα διαγράμματα για την πρώτη τάξη έχουμε όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-1.5}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-3}$ .
2. Στο σχήμα 6.1, στα διαγράμματα έχουμε για την πρώτη τάξη όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-2}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-4}$ .
3. Στο σχήμα 6.1, στα διαγράμματα έχουμε για την πρώτη τάξη όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-2}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-4}$ .

Παρατηρούμε λοιπόν,

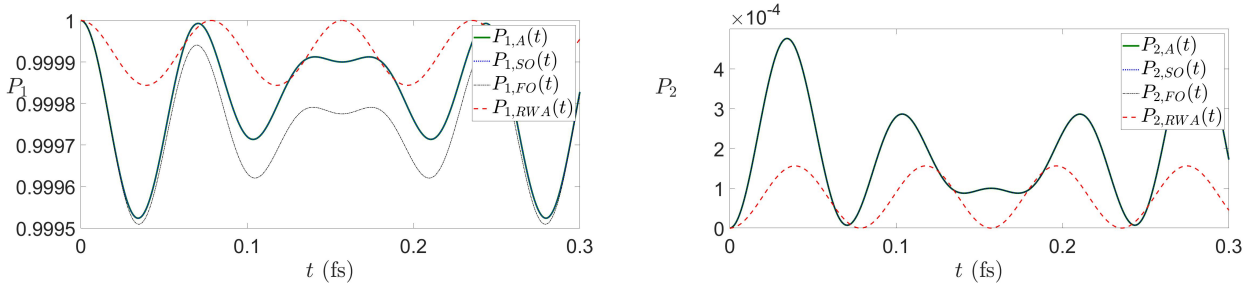
1. Η καμπύλη της μεθόδου επανισώσεως πρώτης τάξης στα διαγράμματα 6.1, 6.2 αποκλίνουν από την αριθμητική λύση στη στάθμη 1 και πιο συγκεκριμένα στο δεύτερο ξεπερνάει και την τιμή 1 στον άξονα των πιθανοτήτων το οποίο αυτό είναι ένα σφάλμα της μεθόδου.
2. Το σφάλμα της πρώτης τάξης της μεθόδου επανισώσεως είναι της τάξης  $10^{-5}$ , το  $\epsilon$  είναι της τάξης  $10^{-2}$ . Επομένως εμείς στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους, οι οποίοι είναι  $10^{-2}$  και πάνω. Οπότε είναι λογική η απόκλιση αυτή. Σε αυτό το σημείο δεν προσπαθούμε να δικαιολογήσουμε το σφάλμα αυτό, ώστε να το δεχτούμε σαν λύση, απλά το σχολιάζουμε για μελλοντικά σφάλματα τα οποία θα υπάρξουν. Άλλωστε στη συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρούμε ότι και σαν καμπύλη αποκλίνει τελείως από την αριθμητική λύση.
3. Η πρώτη τάξη για να λειτουργήσει καλύτερα θα πρέπει το  $\epsilon$  να είναι μικρότερο. Στα διαγράμματα 6.2 έχουμε  $\epsilon$  τάξης  $10^{-2}$ , επιπλέον αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-4}$  και παρατηρούμε ότι η ταλάντωση μας είναι της τάξης  $10^{-4}$ , αυτό σημαίνει ότι αφαιρούμε σημαντικούς όρους. Ενώ για αυτή την περίπτωση στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης μικρότερους από  $10^{-4}$ , επομένως για αυτό έχουμε και αυτή την ταύτιση με την αριθμητική λύση.
4. Με βάση τη παραπάνω λογική, στα διαγράμματα 6.1 έχουμε ταύτιση και της πρώτης τάξης.

Παρακάτω παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 90\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100, 10, 1\text{fs}^{-1}$ .



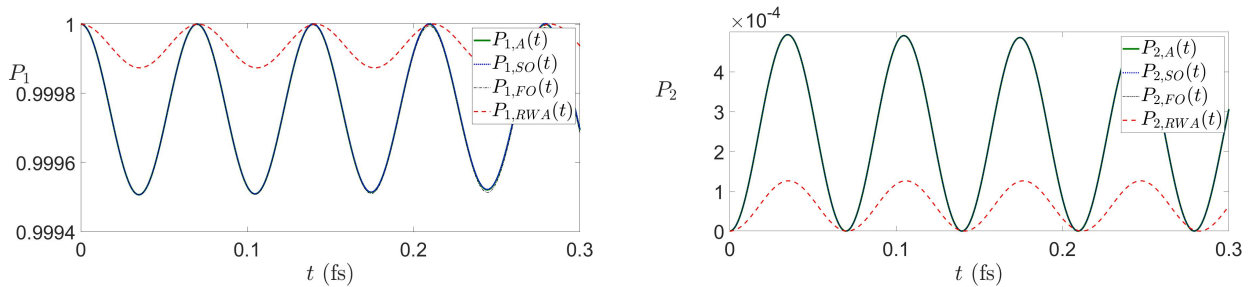
(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.4 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.5 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$  και  $\omega = 10fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.6 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$  και  $\omega = 1fs^{-1}$ .

Στα παραπάνω διαγράμματα κρατάμε σταθερά τις συχνότητες  $\Omega_R$  και  $\Omega$ , ενώ μεταβάλλουμε την συχνότητα  $\omega$ .

Τα  $\epsilon$  που έχουμε στις παραπάνω περιπτώσεις είναι,

1. Στο σχήμα 6.4, στα διαγράμματα έχουμε,  $\frac{1}{100} = 10^{-2}$  και  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ .
2. Στο σχήμα 6.5, στα διαγράμματα έχουμε,  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$  και  $\frac{1}{80} \sim 10^{-2}$ .

3. Στο σχήμα 6.6, στα διαγράμματα έχουμε,  $\frac{1}{1} = 1$  και  $\frac{1}{89} \sim 10^{-2}$ .

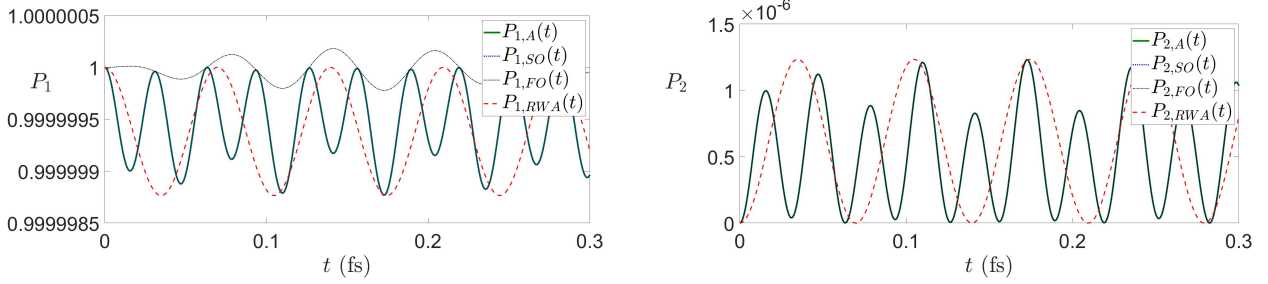
Επομένως μπορούμε να πούμε για τα  $C_k(t)$  με  $k = 1, 2$  ότι,

1. Στα διαγράμματα 6.4 για την πρώτη τάξη έχουμε όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-1.5}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-3}$ .
2. Στα διαγράμματα 6.5 έχουμε για την πρώτη τάξης όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-1.5}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-3}$ .
3. Στα διαγράμματα 6.6 έχουμε για την πρώτη τάξη όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-1}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-2}$ .

Παρατηρούμε λοιπόν τα εξής,

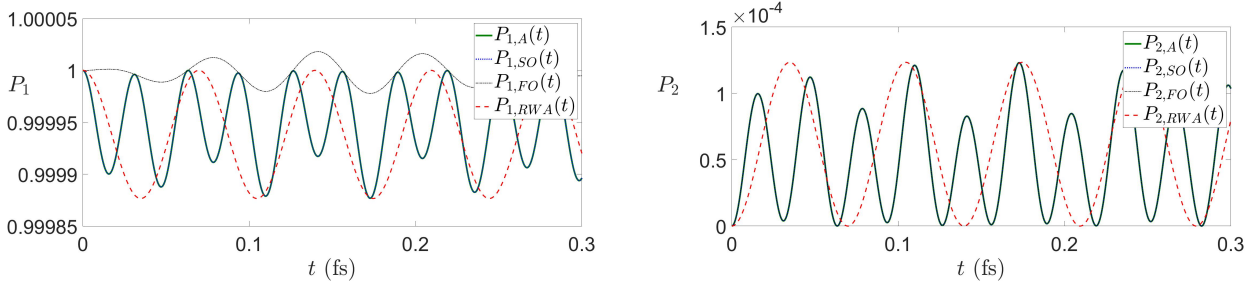
1. Στα διαγράμματα 6.4 παρατηρούμε την ταύτιση της δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση καθώς και της πρώτης με μια μικρή απόκλιση στις κορυφές. Το γεγονός αυτό είναι λογικό, διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-4,5}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-3}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς.
2. Στα διαγράμματα 6.5 παρατηρούμε την ταύτιση της δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό, διότι εδώ στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-4,5}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-4}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς. Αντίθετα η πρώτη τάξη έχει απόκλιση αρκετά σημαντική αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$ , ενώ η ταλάντωση είναι της τάξης  $10^{-4}$ . Άρα σε αυτή τη περίπτωση αγνοούμε σημαντικούς όρους.
3. Στα διαγράμματα 6.6 παρατηρούμε την ταύτιση της δεύτερης και πρώτης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό δεν είναι λογικό διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-2}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-4}$ . Επομένως αγνοούμε όρους σημαντικούς και θα έπρεπε και οι δύο περιπτώσεις να αποκλίνουν από την αριθμητική λύση. Σε αυτό το σημείο η εξήγηση είναι ότι τα δύο είδη  $\epsilon$  έχουν διαφορετική δυναμικότητα. Περισσότερα για την δυναμικότητα των  $\epsilon$  θα αναλυθούν παρακάτω (δείτε 6.1.1). Προς το παρόν θα μπορούσαμε να πούμε ότι το  $\epsilon$  είναι τελικά της τάξης  $10^{-2}$  και έτσι στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-4}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-6}$  και για αυτό το λόγο δεν έχουμε σημαντικές αποκλίσεις.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 0.1, 1, 10\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100\text{fs}^{-1}$ .



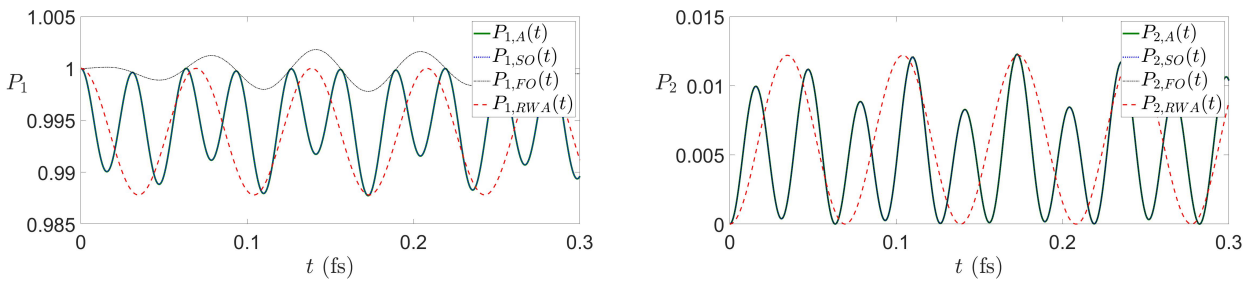
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.7 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.8 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.9 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .

Στα παραπάνω διαγράμματα κρατάμε σταθερά τις συχνότητες  $\omega$  και  $\Omega$ , ενώ μεταβάλλουμε την συχνότητα  $\Omega_R$ .

Τα  $\epsilon$  που έχουμε στις παραπάνω περιπτώσεις είναι,

1. Στα διαγράμματα 6.7 έχουμε  $\frac{0.1}{100} = 10^{-3}$  και  $\frac{0.1}{90} \sim 10^{-3}$ .
2. Στα διαγράμματα 6.8 έχουμε  $\frac{1}{100} = 10^{-2}$  και  $\frac{1}{90} \sim 10^{-2}$ .

3. Στα διαγράμματα 6.9 έχουμε  $\frac{10}{100} = 10^{-1}$  και  $\frac{10}{90} \sim 10^{-1}$ .

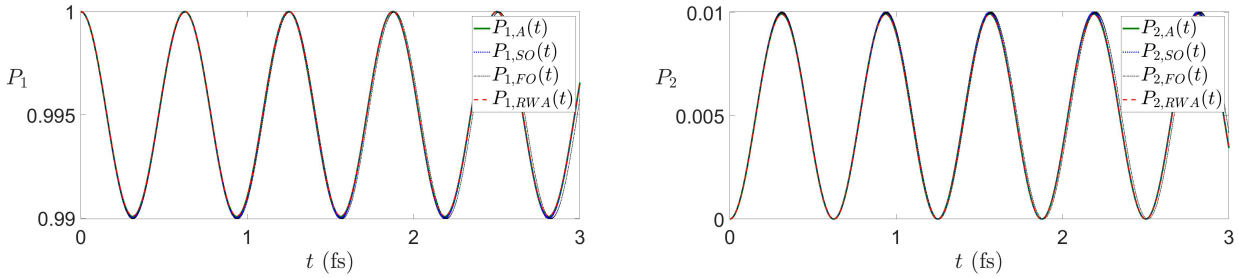
Επομένως μπορούμε να πούμε για τα  $C_k(t)$  με  $k = 1, 2$  ότι,

1. Στα διαγράμματα 6.7 για την πρώτη τάξη έχουμε όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-3}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-6}$ .
2. Στα διαγράμματα 6.8 έχουμε για την πρώτη τάξης όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-2}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-4}$ .
3. Στα διαγράμματα 6.9 έχουμε για την πρώτη τάξη όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-1}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-2}$ .

Παρατηρούμε λοιπόν,

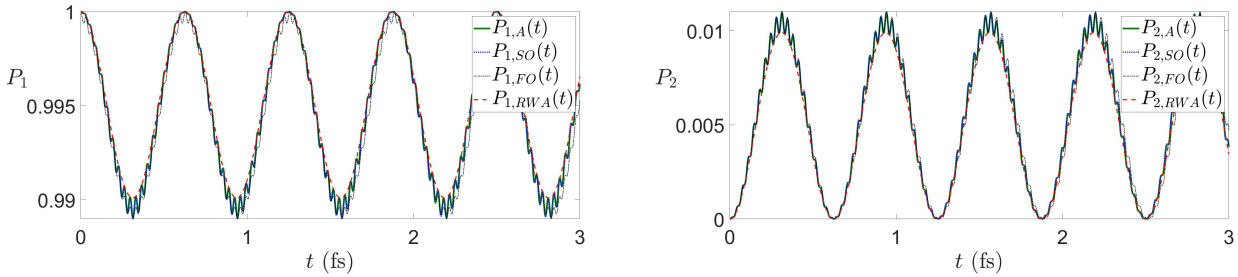
1. Στα διαγράμματα 6.7 παρατηρούμε την ταύτιση της δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό, διότι στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-9}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-7}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς. Αντίθετα η πρώτη τάξη έχει τεράστια απόκλιση αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-6}$ , ενώ η ταλάντωση είναι της τάξης  $10^{-7}$ . Άρα σε αυτή τη περίπτωση αγνοούμε σημαντικούς όρους.
2. Στα διαγράμματα 6.8 παρατηρούμε την ταύτιση της δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-6}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-5}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς. Αντίθετα η πρώτη τάξη έχει σημαντική απόκλιση, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-4}$ , ενώ η ταλάντωση είναι της τάξης  $10^{-5}$ . Άρα σε αυτή τη περίπτωση αγνοούμε σημαντικούς όρους.
3. Στα διαγράμματα 6.9 παρατηρούμε την ταύτιση της δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-3}$ . Επομένως αγνοούμε οριακά όρους λιγότερο σημαντικούς. Αντίθετα η πρώτη τάξη έχει σημαντική απόκλιση, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-2}$ , ενώ η ταλάντωση είναι της τάξης  $10^{-3}$ . Άρα σε αυτή τη περίπτωση αγνοούμε σημαντικούς όρους.

Στη πορεία παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 1000, 100, 11\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 990, 90, 1\text{fs}^{-1}$  αντίστοιχα.



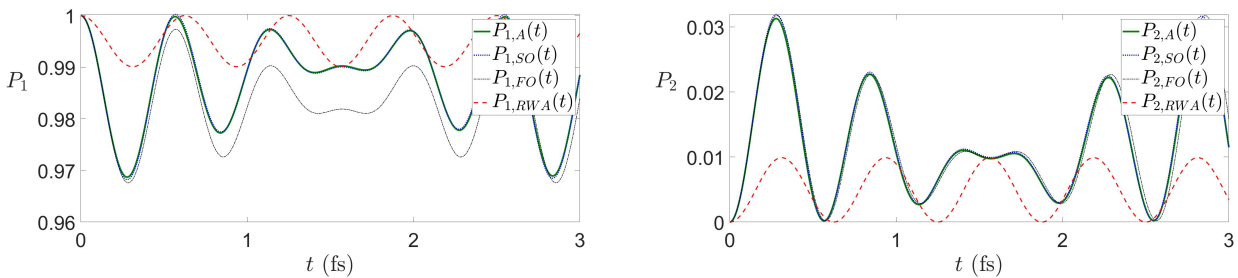
(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.10** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 1000fs^{-1}$  και  $\omega = 990fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.11** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 100fs^{-1}$  και  $\omega = 90fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.12** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 11fs^{-1}$  και  $\omega = 1fs^{-1}$ .

Στα παραπάνω διαγράμματα κρατάμε σταθερά τα  $|\Delta| = 10fs^{-1}$  και την συχνότητα  $\Omega_R$ , ενώ μεταβάλλουμε τις συχνότητες  $\omega$  και  $\Omega$ .

Τα  $\epsilon$  που έχουμε στις παραπάνω περιπτώσεις είναι,

1. Στα διαγράμματα 6.10 έχουμε  $\frac{1}{990} \sim 10^{-3}$  και  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ .
2. Στα διαγράμματα 6.11 έχουμε  $\frac{1}{90} \sim 10^{-2}$  και  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ .



3. Στα διαγράμματα 6.12  $\frac{1}{1} = 1$  και  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ .

Επομένως μπορούμε να πούμε για τα  $C_k(t)$  με  $k = 1, 2$  ότι,

1. Στα διαγράμματα 6.10 για την πρώτη τάξη έχουμε όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-2}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-4}$ .
2. Στα διαγράμματα 6.11 έχουμε για την πρώτη τάξης όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-1.5}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-3}$ .
3. Στα διαγράμματα 6.12 έχουμε για την πρώτη τάξη όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-0.5}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-1}$ .

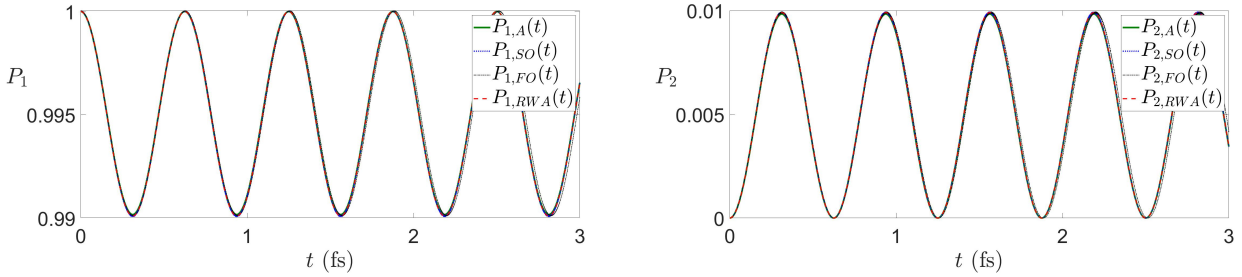
Παρατηρούμε λοιπόν,

1. Στα διαγράμματα 6.10 παρατηρούμε την ταύτιση της πρώτης και δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-4}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-6}$ , ενώ η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-3}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς.
2. Στα διαγράμματα 6.11 παρατηρούμε την ταύτιση της πρώτης και δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-4.5}$ , ενώ η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-3}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς, αν και είναι οριακή περίπτωση για την πρώτη τάξη. Το οποίο αυτό παρατηρείται στα διαγράμματα κυρίως στις κορυφές της ταλάντωσης όπου η πρώτη τάξη αποκλίνει λίγο.
3. Στα διαγράμματα 6.12 παρατηρούμε την ταύτιση της δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό δεν είναι λογικό διότι εδώ στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-1.5}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-2}$ . Επομένως αγνοούμε όρους σημαντικούς. Αντίθετα η πρώτη τάξη έχει σημαντική απόκλιση, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-1}$ , ενώ η ταλάντωση είναι της τάξης  $10^{-2}$ . Άρα σε αυτή τη περίπτωση αγνοούμε σημαντικούς όρους. Στη δεύτερη τάξη εξηγείται πάλι με την δυναμικότητα των  $\epsilon$ . Περισσότερα για την δυναμικότητα των  $\epsilon$  θα αναλυθούν παρακάτω (δείτε 6.1.1). Προς το παρόν θα μπορούσαμε να πούμε ότι το  $\epsilon$  είναι τελικά της τάξης  $10^{-1}$  και έτσι στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$  και για αυτό το λόγω δεν έχουμε σημαντικές αποκλίσεις. Τέλος παρατηρείται στη πρώτη τάξη ότι η απόκλιση είναι της τάξης  $10^{-2}$ , ενώ θα έπρεπε να έχει απόκλιση τάξης  $10^{-1}$ . Ο μόνος τρόπος που μπορεί να εξηγηθεί αυτό, είναι ο λόγος της δυναμικότητας των  $\epsilon$ , δηλαδή το  $\epsilon$  είναι τελικά της τάξης  $10^{-1}$ .

Παρακάτω παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα πάλι με σταθερό  $\Delta$ , τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 990, 90, 1\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 1000, 100, 11\text{fs}^{-1}$  αντίστοιχα. Δηλαδή με  $\Omega < \omega$ .

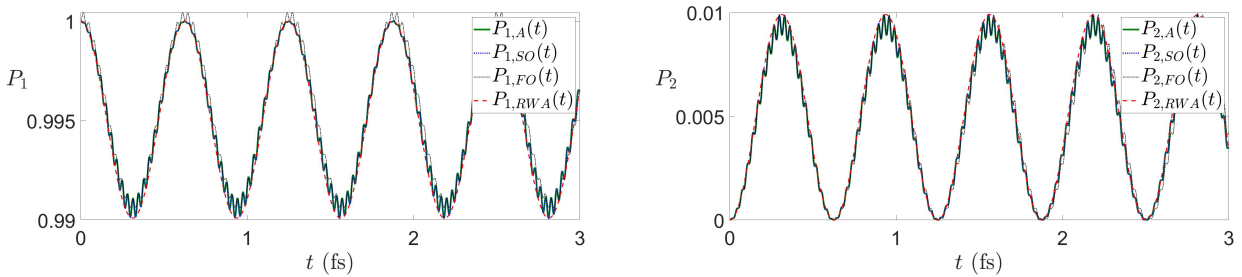
Στα παραπάνω διαγράμματα κρατάμε σταθερά πάλι τα  $|\Delta| = 10\text{fs}^{-1}$  και την συχνότητα  $\Omega_R$ , ενώ μεταβάλλουμε τις συχνότητες  $\omega$  και  $\Omega$  (με  $\Omega < \omega$ ).

Τα  $\epsilon$  που έχουμε στις παραπάνω περιπτώσεις είναι,



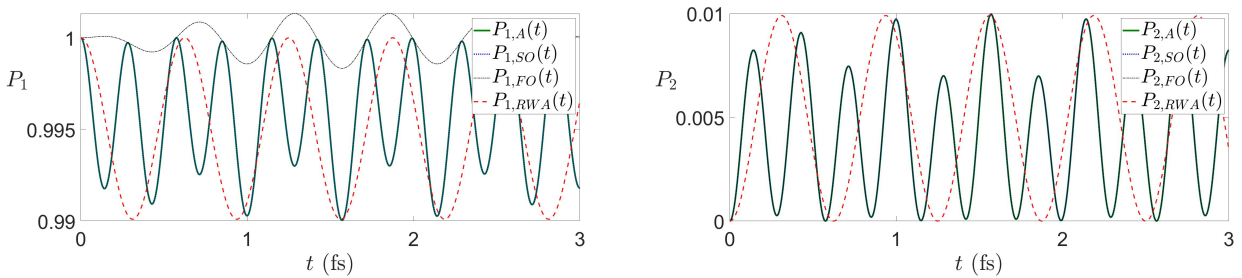
(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.13** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 990fs^{-1}$  και  $\omega = 1000fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.14** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.15** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 1fs^{-1}$  και  $\omega = 11fs^{-1}$ .

1. Στα διαγράμματα 6.13 έχουμε  $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$  και  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ .
2. Στα διαγράμματα 6.14 έχουμε  $\frac{1}{100} = 10^{-2}$  και  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ .
3. Στα διαγράμματα 6.15  $\frac{1}{11} \sim 10^{-1}$  και  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ .

Επομένως μπορούμε να πούμε για τα  $C_k(t)$  με  $k = 1, 2$  ότι,

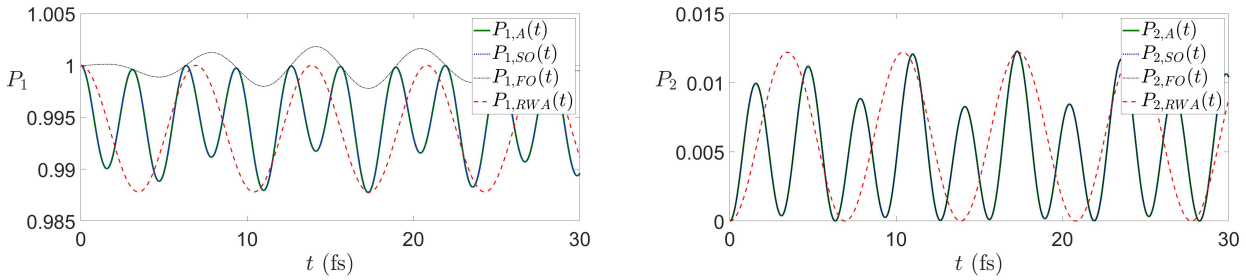
1. Στα διαγράμματα 6.13 για την πρώτη τάξη έχουμε όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-2}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-4}$ .

2. Στα διαγράμματα 6.14 έχουμε για την πρώτη τάξης όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-1.5}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-3}$ .
3. Στα διαγράμματα 6.15 έχουμε για την πρώτη τάξη όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-1}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-2}$ .

Παρατηρούμε λοιπόν,

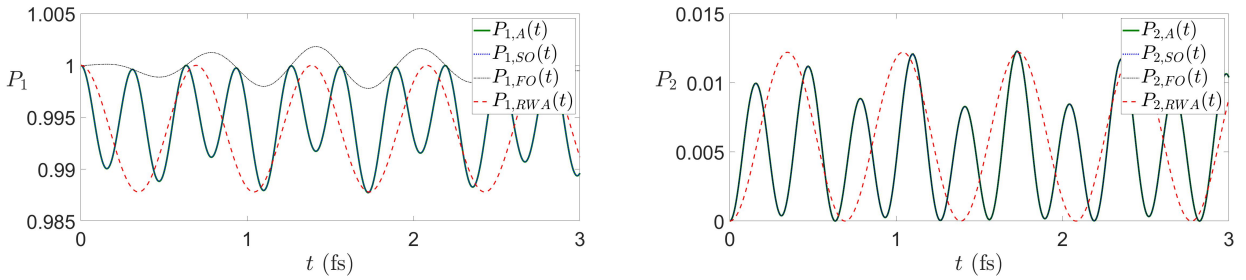
1. Στα διαγράμματα 6.13 παρατηρούμε την ταύτιση της πρώτης και δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-4}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-6}$ , ενώ η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-3}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς.
2. Στα διαγράμματα 6.14 παρατηρούμε την ταύτιση της πρώτης και δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-4.5}$ , ενώ η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-3}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς, αν και είναι οριακή περίπτωση για την πρώτη τάξη. Το οποίο αυτό παρατηρείται στα διαγράμματα κυρίως στις κορυφές της ταλάντωσης όπου η πρώτη τάξη αποκλίνει λίγο.
3. Στα διαγράμματα 6.15 παρατηρούμε την ταύτιση της δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-3}$ . Επομένως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς. Αντίθετα η πρώτη τάξη έχει σημαντική απόκλιση, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-2}$ , ενώ η ταλάντωση είναι της τάξης  $10^{-3}$ . Άρα σε αυτή τη περίπτωση αγνοούμε σημαντικούς όρους.

Επιπλέον παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 10, 1, 0.1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 10, 1, 0.1\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100, 10, 1\text{fs}^{-1}$  αντίστοιχα.



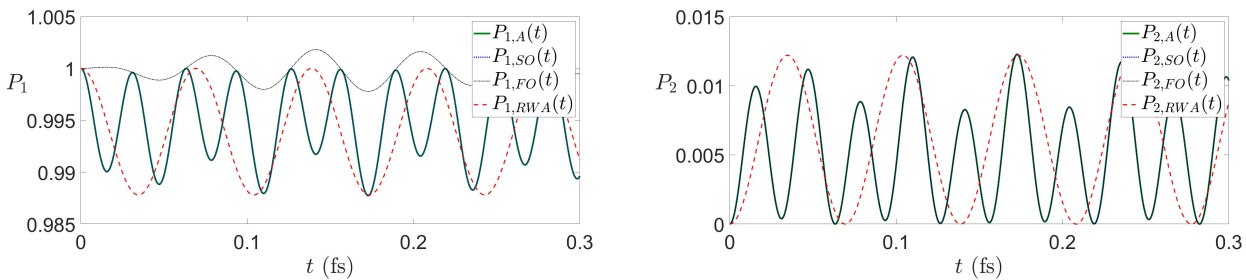
(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.16 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 0.1fs^{-1}$  και  $\omega = 1fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.17 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 1fs^{-1}$  και  $\omega = 10fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.18 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .

Στα παραπάνω διαγράμματα ξεκινάμε από μια τριπλέτα αριθμών  $\Omega_R$ ,  $\Omega$  και  $\omega$  και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την τριπλέτα επί 10. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι ακριβώς ίδια και το μόνο που αλλάζει είναι η περίοδος της ταλάντωσης. Αυτό το γεγονός είναι σωστό από φυσική σκοπιά.

Τα  $\epsilon$  που έχουμε στις παραπάνω περιπτώσεις είναι,

1. Στα διαγράμματα 6.16 έχουμε  $\frac{0.1}{1} = 10^{-1}$  και  $\frac{0.1}{0.9} \sim 10^{-1}$ .

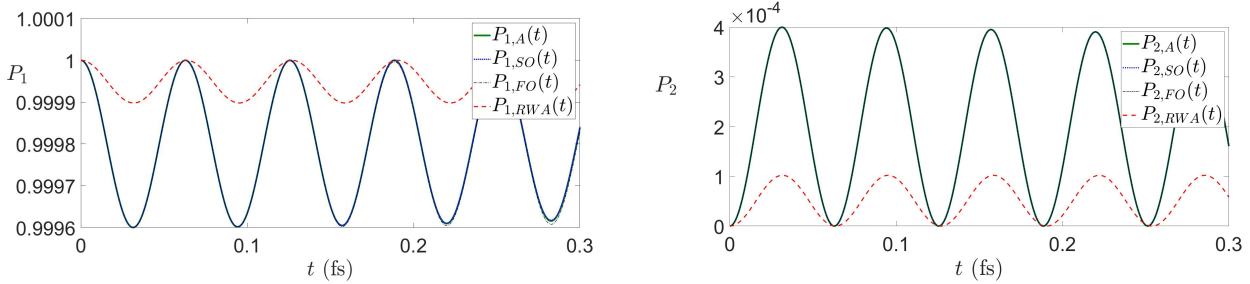
2. Στα διαγράμματα 6.17 έχουμε  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$  και  $\frac{1}{9} \sim 10^{-1}$ .
3. Στα διαγράμματα 6.18  $\frac{10}{100} = 10^{-1}$  και  $\frac{10}{90} \sim 10^{-1}$ .

Επομένως μπορούμε να πούμε για τα  $C_k(t)$  με  $k = 1, 2$  ότι, σε όλα τα διαγράμματα έχουμε για την πρώτη τάξη, όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-1}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-2}$ . Παρατηρούμε λοιπόν ότι σε όλα τα διαγράμματα ισχύει η ταύτιση δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$ , ενώ η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-3}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς, αν και είναι στην οριακή περίπτωση. Όσον αφορά την πρώτη τάξη βλέπουμε πλήρως απόκλιση από την αριθμητική λύση. Αυτό είναι λογικό διότι αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-2}$ , ενώ η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-3}$ . Άρα αγνοούμε όρους σημαντικούς.

Τέλος ήρθε η ώρα να μιλήσουμε για την δυναμικότητα των  $\epsilon$ . Θα αποδείξουμε ότι η ισχύς του  $\epsilon = \frac{\Omega_R}{\Delta}$  είναι μεγαλύτερη από την ισχύς του  $\epsilon = \frac{\Omega_R}{\omega}$ . Αυτό θα το πετύχουμε με ένα σύνολο διαγραμμάτων τα οποία θα είναι,

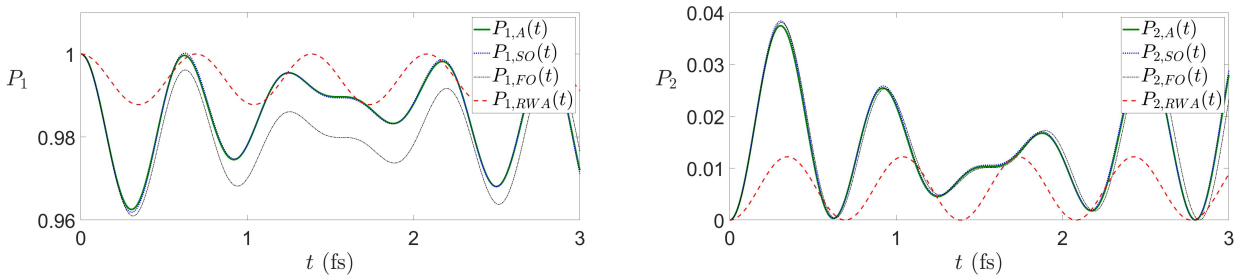
1. Έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = \omega = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 100, 10, 1.1\text{fs}^{-1}$ .
2. Έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = \Delta = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 99, 9, 0.1\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100, 10, 1.1\text{fs}^{-1}$  αντίστοιχα.
3. Έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε:  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 200, 110, 101\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100, 10, 1\text{fs}^{-1}$  αντίστοιχα, δηλαδή με  $\Delta$  σταθερό.
4. Έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε:  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 200, 110, 101\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100\text{fs}^{-1}$ , δηλαδή με  $\omega$  σταθερό.

Το πρώτο σύνολο διαγραμμάτων,



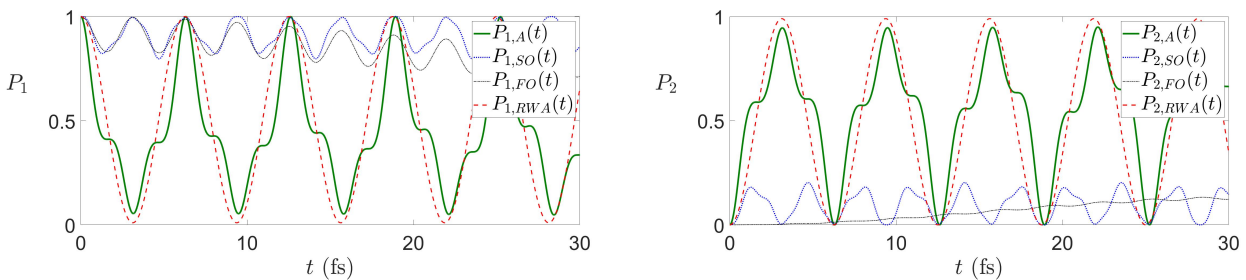
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.19 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 100fs^{-1}$  και  $\omega = 1fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.20 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$  και  $\omega = 1fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.21 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 1.1fs^{-1}$  και  $\omega = 1fs^{-1}$ .

Τα  $\epsilon$  που έχουμε στις παραπάνω περιπτώσεις είναι,

1. Στα διαγράμματα 6.19 έχουμε  $\frac{1}{1} = 1$  και  $\frac{1}{99} \sim 10^{-2}$ .
2. Στα διαγράμματα 6.20 έχουμε  $\frac{1}{1} = 1$  και  $\frac{1}{9} \sim 10^{-1}$ .
3. Στα διαγράμματα 6.21 έχουμε  $\frac{1}{1} = 1$  και  $\frac{1}{0.1} = 10^{+1}$ .

Επομένως μπορούμε να πούμε για τα  $C_k(t)$  με  $k = 1, 2$  ότι,

1. Στα διαγράμματα 6.19 για την πρώτη τάξη έχουμε όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-1}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-2}$ .
2. Στα διαγράμματα 6.20 έχουμε για την πρώτη τάξης όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-0.5}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-1}$ .
3. Στα διαγράμματα 6.21 έχουμε για την πρώτη τάξη όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{+0.5}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{+1}$ .

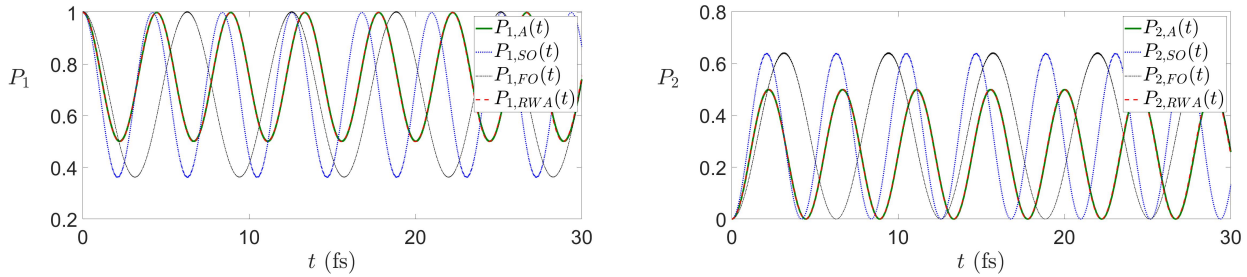
Παρατηρούμε λοιπόν ότι με σταθερό το  $\epsilon = \frac{\Omega_R}{\omega} = 1$  έχουμε,

1. Στα διαγράμματα 6.19 παρατηρούμε την ταύτιση της πρώτης και δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό δεν είναι λογικό διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-2}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$ , ενώ η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-4}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους σημαντικούς.
2. Στα διαγράμματα 6.20 παρατηρούμε την ταύτιση της δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό δεν είναι λογικό διότι εδώ στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-1.5}$ , ενώ η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-2}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους σημαντικούς. Η πρώτη τάξη εδώ παρατηρούμε ταύτιση αλλά με μια απόκλιση στη κάτω στάθμη αυτό όμως δεν είναι λογικό, θα έπρεπε να μην έχει καν ίδιο σχήμα η καμπύλη. Διότι στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-1}$ , ενώ η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-2}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους πολύ σημαντικούς.
3. Στα διαγράμματα 6.21 παρατηρούμε καμία ταύτιση, ούτε της πρώτης, ούτε της δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι το  $\epsilon$  πλέον είναι μεγαλύτερο του 1.

Έτσι τα παραπάνω δικαιολογούνται με την δυναμικότητα των  $\epsilon$ . Αυτό σημαίνει ότι το  $\epsilon = \frac{\Omega_R}{\Delta}$  έχει μεγαλύτερη ισχύ από ότι το  $\epsilon = \frac{\Omega_R}{\omega}$ . Δηλαδή σε αυτές τις περιπτώσεις δεν παίζει ρόλο τόσο το δεύτερο από ότι το πρώτο  $\epsilon$ . Έτσι η πιο σωστή προσέγγιση του προβλήματος αυτού είναι αν παρατηρήσουμε τις εξισώσεις (5.34) και (5.35), θα δούμε ότι στη πρώτη τάξη εμφανίζεται μόνο το πρώτο  $\epsilon$ , επομένως θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε αυτή την τάξη θα χρησιμοποιούμε μόνο αυτό. Δηλαδή αγνοούμε όρους της τάξης αυτού του  $\epsilon$  στο τετράγωνο. Ενώ στη δεύτερη τάξη παρατηρούμε ότι εκεί εμφανίζεται το δεύτερο  $\epsilon$ . Άρα ανακεφαλαιώνοντας έχουμε,  $\epsilon = \frac{\Omega_R}{\Delta} := \epsilon_1$  και  $\epsilon = \frac{\Omega_R}{\omega} := \epsilon_2$ .

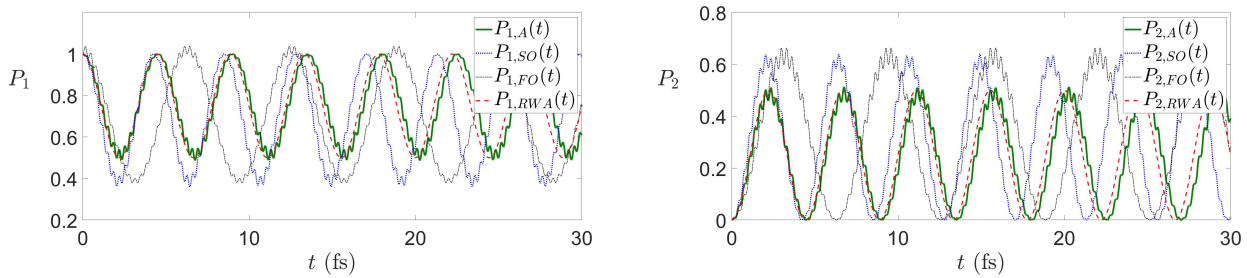
Άρα για την πρώτη τάξη έχουμε,  $\epsilon_1$  και έχουμε διώξει  $\epsilon_2^2$  και για τη δεύτερη τάξη έχουμε,  $\epsilon_1$ ,  $(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)$  και έχουμε διώξει όρους  $(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_1)$ .

Το δεύτερο σύνολο διαγραμμάτων,



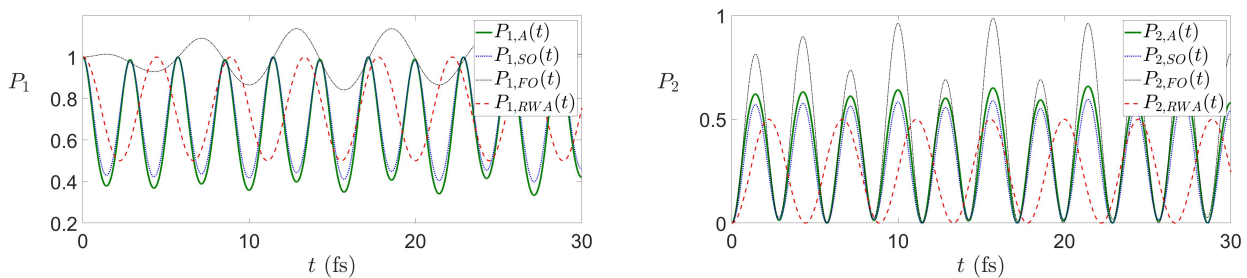
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.22** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 99fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.23** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 9fs^{-1}$  και  $\omega = 10fs^{-1}$ .



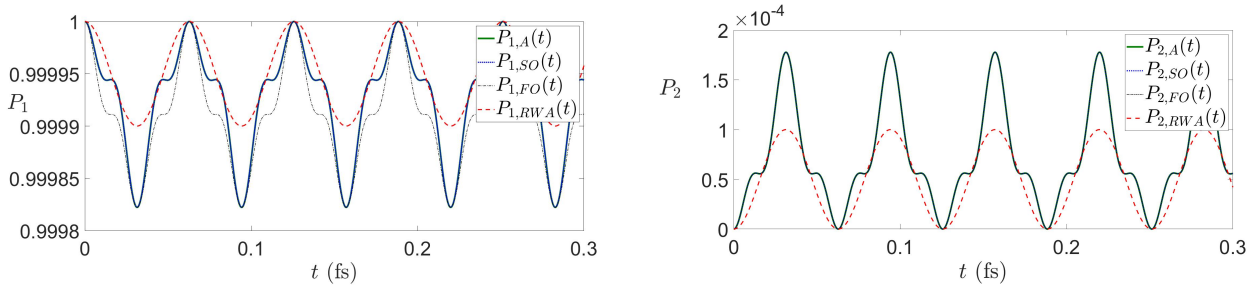
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.24** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 0.1fs^{-1}$  και  $\omega = 1.1fs^{-1}$ .

Στα παραπάνω διαγράμματα, με βάση αυτά που ειπώθηκαν πριν θα έπρεπε όχι απλά να είχαμε απλή απόκλιση όπως και συμβαίνει, αλλά και σχηματικά οι καμπύλες να ήταν διαφορετικές. Το σχήμα των καμπυλών δηλαδή αυτή η διατήρηση του σχήματος οφείλεται και στο τρίτο  $\epsilon = \frac{\Omega}{\Sigma} := \epsilon_3$ , το οποίο ακόμα διατηρεί την τιμή του μικρότερη του 1. Αλλά όπως και να έχει έχουμε απόκλιση αρκετά μεγάλη από την αριθμητική λύση.

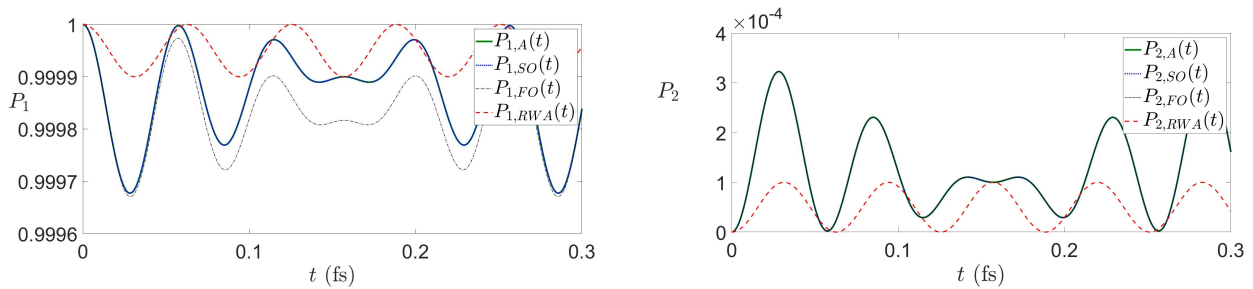


Το τρίτο σύνολο διαγραμμάτων,



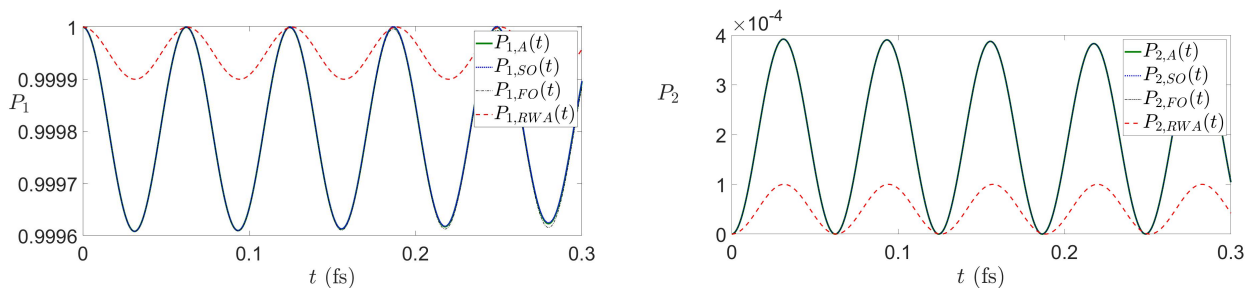
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.25 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 200fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

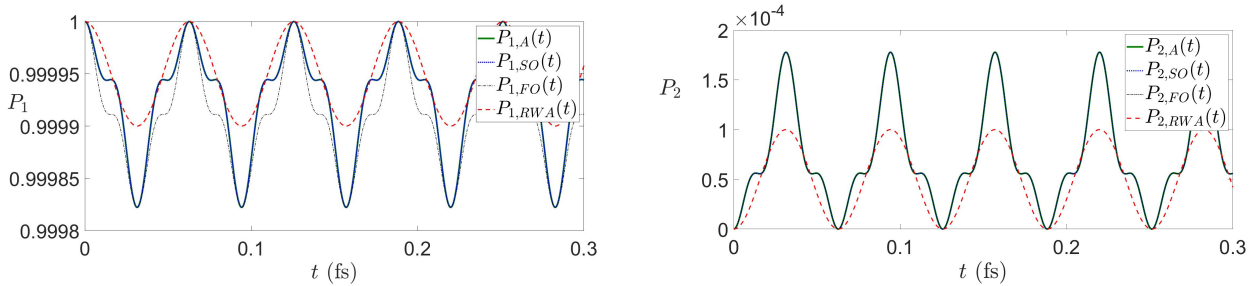
Σχήμα 6.26 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 110fs^{-1}$  και  $\omega = 10fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

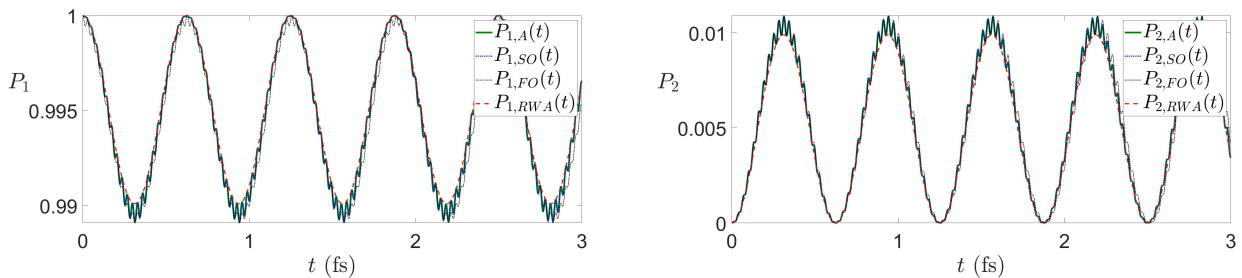
Σχήμα 6.27 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 101fs^{-1}$  και  $\omega = 1fs^{-1}$ .

Το τέταρτο σύνολο διαγραμμάτων,



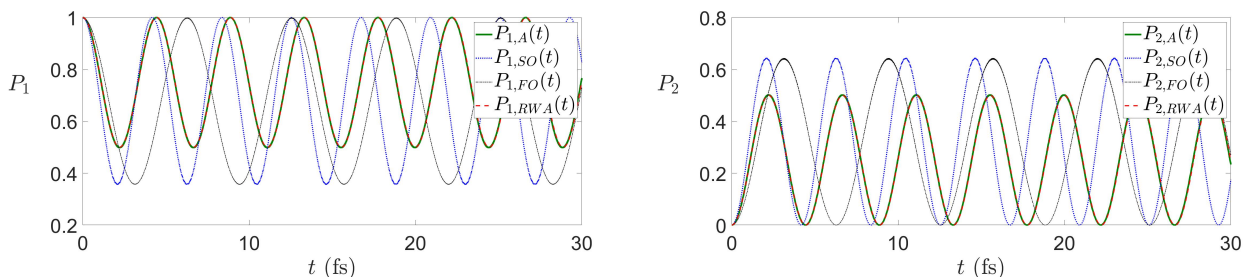
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.28 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 200fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.29 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 110fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.30 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 101fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι με βάση όλα αυτά που σχολιάστηκαν ισχύουν και στο τρίτο και τέταρτο σύνολο διαγραμμάτων. Επιπλέον βλέπουμε την ισχύ των διαφορών  $\epsilon$  καθώς μεταβάλλονται. Τελικά τη μεγαλύτερη ισχύ την έχει το  $\epsilon_1$  και στην συνέχεια τα  $\epsilon_2$  και  $\epsilon_3$ . Για να μην ισχύει καθόλου η μέθοδος επανισώσεως πρώτης και δεύτερης τάξης θα πρέπει όλα τα  $\epsilon$  να είναι πάνω από την τιμή 1.

### 6.1.2 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη.

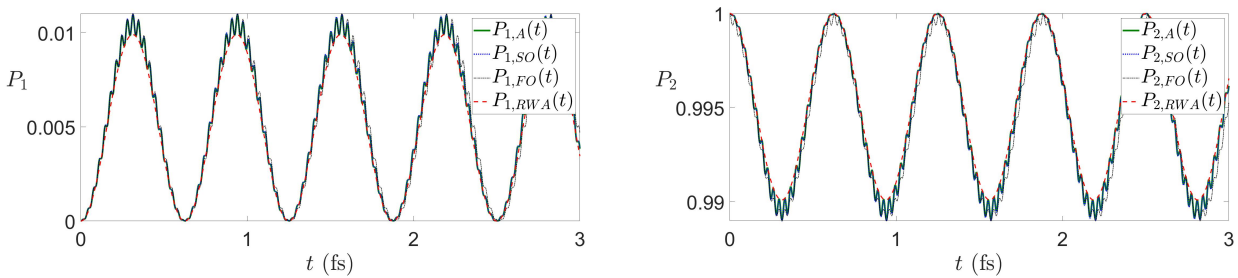
Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη στην αρχή του χρόνου, οι εξισώσεις που έχουμε για την μέθοδο επανισώσεως πρώτης και δεύτερης τάξης είναι,

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{i\Omega_R}{2} \left( \frac{e^{+i\Delta t}}{i\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{i\Sigma} \right) \\ \frac{i\Omega_R}{2} \left( -\frac{e^{-i\Delta t}}{i\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{i\Sigma} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-\frac{2A}{\Omega_R}}{1 + (\frac{2A}{\Omega_R})^2} \\ \frac{1}{1 + (\frac{2A}{\Omega_R})^2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \left(\frac{e^{-i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{i2\omega t}}{\Sigma}\right)\right) z_{10} e^{-iAt} + \left(\frac{\Omega_R}{2} \left(\frac{e^{i\Delta t}}{\Delta} - \frac{e^{-i\Sigma t}}{\Sigma}\right)\right) z_{20} e^{iAt} \\ C_2(t) &= \left(\frac{\Omega_R}{2} \left(-\frac{e^{-i\Delta t}}{\Delta} + \frac{e^{+i\Sigma t}}{\Sigma}\right)\right) z_{10} e^{-iAt} + \left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \left(\frac{e^{i2\omega t}}{\Delta} + \frac{e^{-i2\omega t}}{\Sigma}\right)\right) z_{20} e^{iAt} \end{aligned}$$

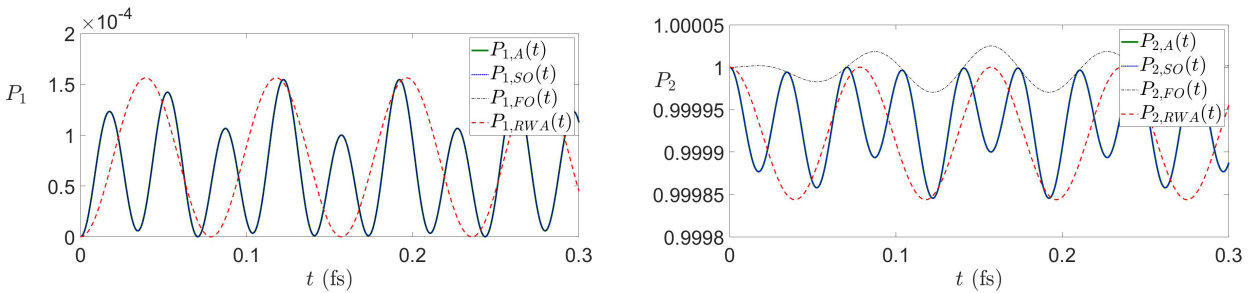
Σε αυτή την περίπτωση η μόνη διαφορά με την προηγούμενη, δηλαδή όταν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη κάτω στάθμη στην αρχή του χρόνου, είναι ότι οι πιθανότητες για την στάθμη 1 είναι οι πιθανότητες τώρα για την στάθμη 2 και αντίστροφα. Επομένως ότι σχολιάστηκε στην προηγούμενη περίπτωση ισχύει και σε αυτή. Παρακάτω παρουσιάζουμε με την ίδια σειρά τα αντίστοιχα διαγράμματα της προηγούμενης περίπτωσης.

Αρχικά παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 100, 10, 1\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 90\text{fs}^{-1}$ .



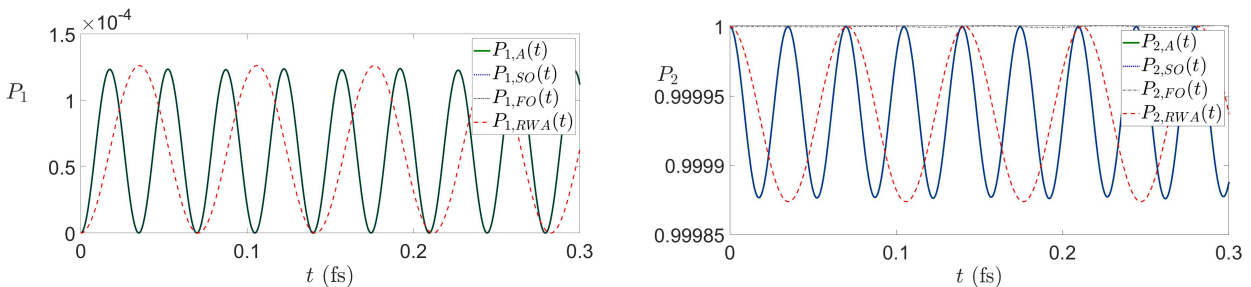
(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.31 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 100fs^{-1}$  και  $\omega = 90fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

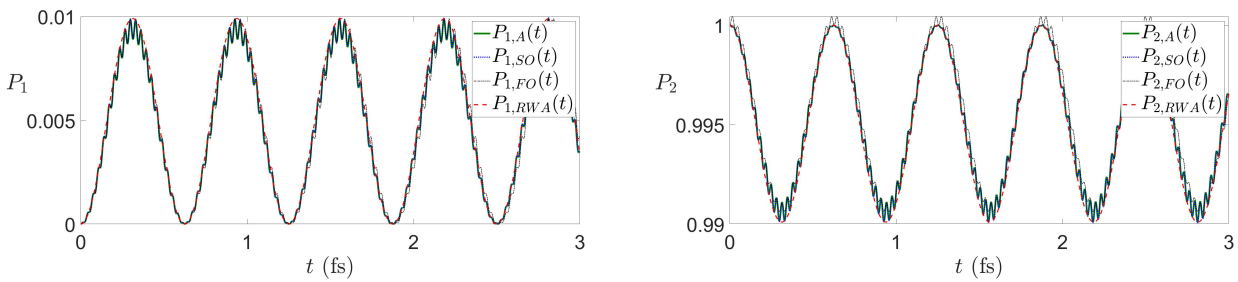
Σχήμα 6.32 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$  και  $\omega = 90fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

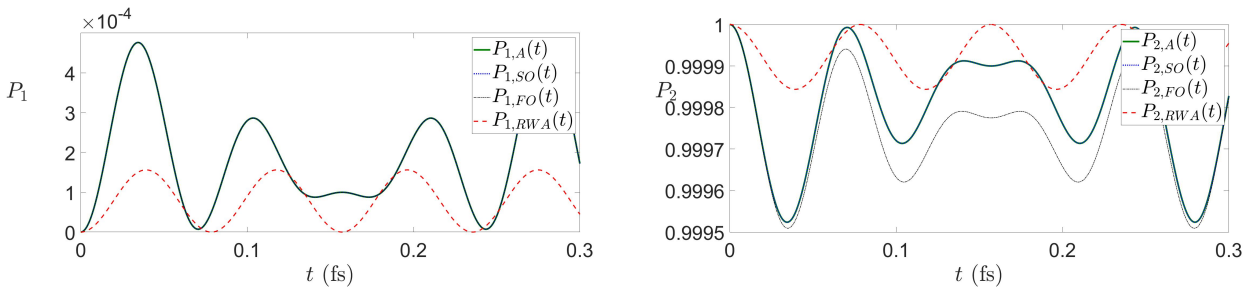
Σχήμα 6.33 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 1fs^{-1}$  και  $\omega = 90fs^{-1}$ .

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 90\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100, 10, 1\text{fs}^{-1}$ .



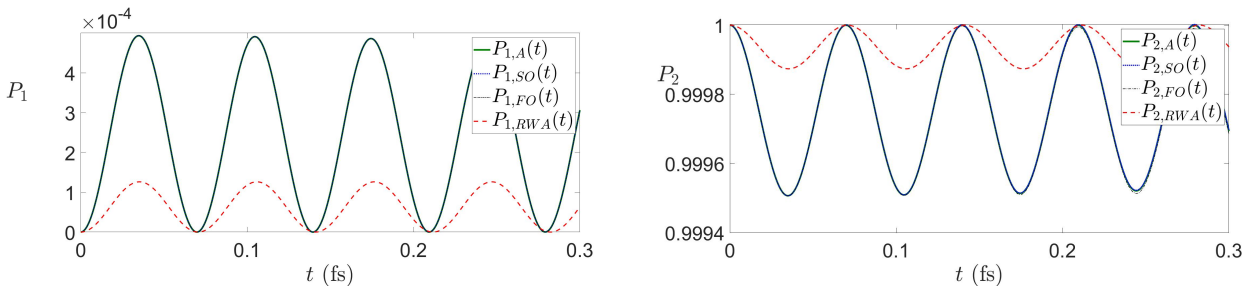
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.34 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 90\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100\text{fs}^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

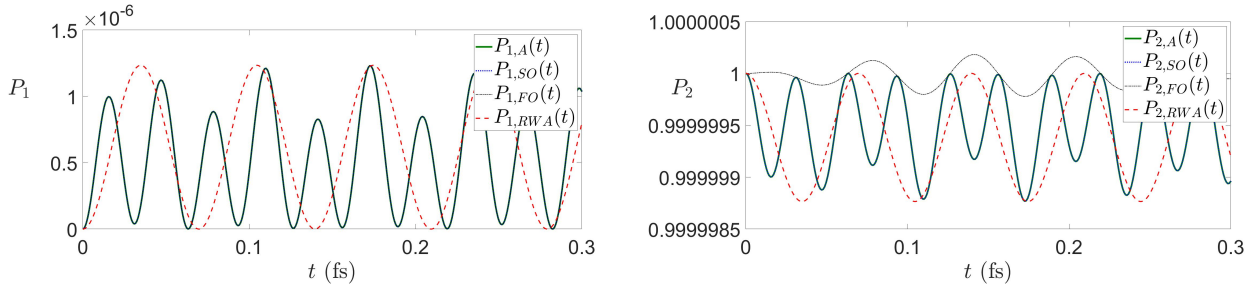
Σχήμα 6.35 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 90\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 10\text{fs}^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

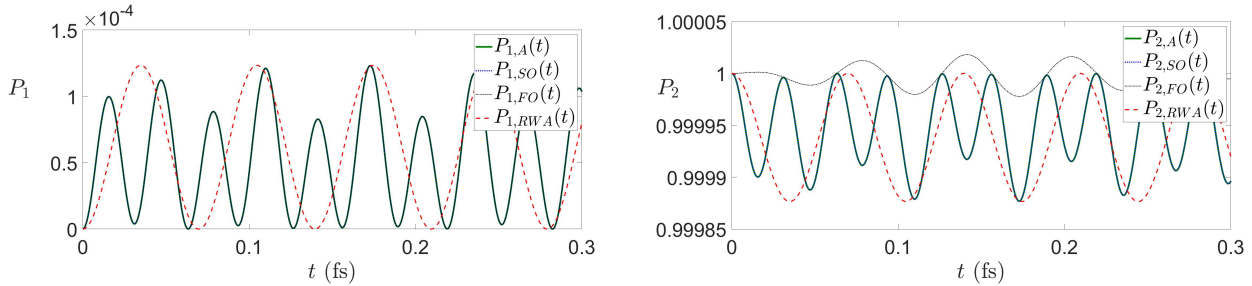
Σχήμα 6.36 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 90\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 1\text{fs}^{-1}$ .

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 0.1, 1, 10fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



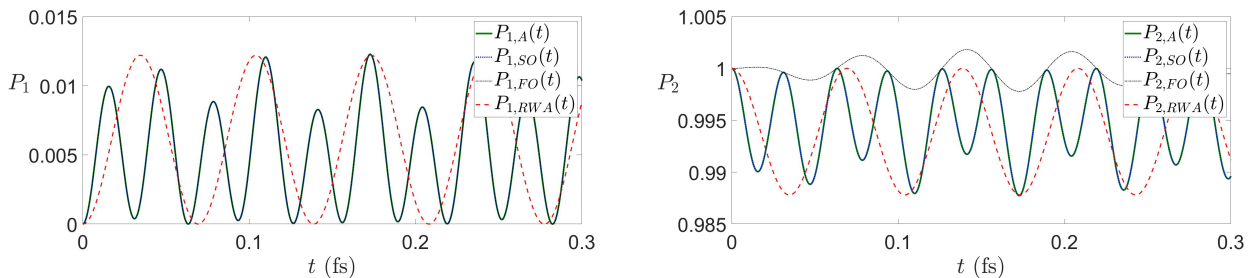
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.37 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 0.1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

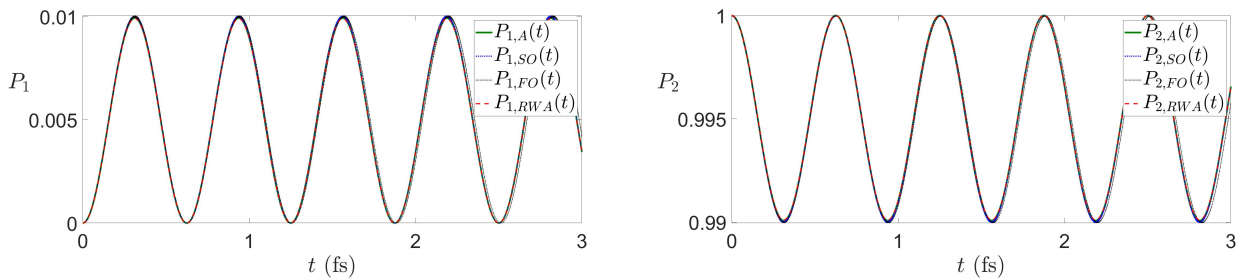
Σχήμα 6.38 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

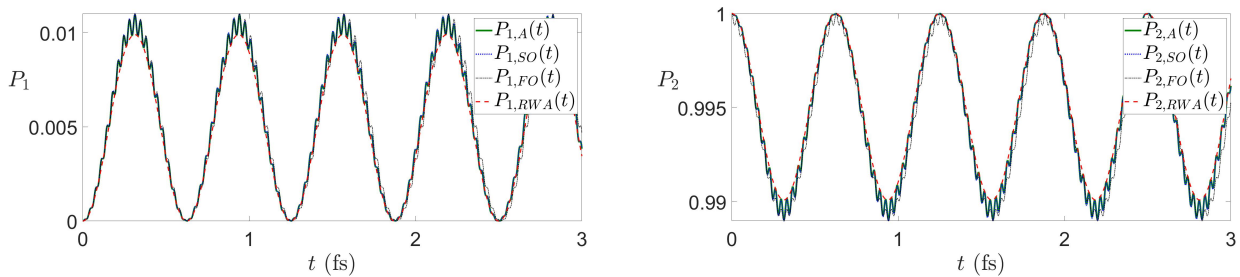
Σχήμα 6.39 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .

Στη πορεία παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 1000, 100, 11\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 990, 90, 1\text{fs}^{-1}$  αντίστοιχα.



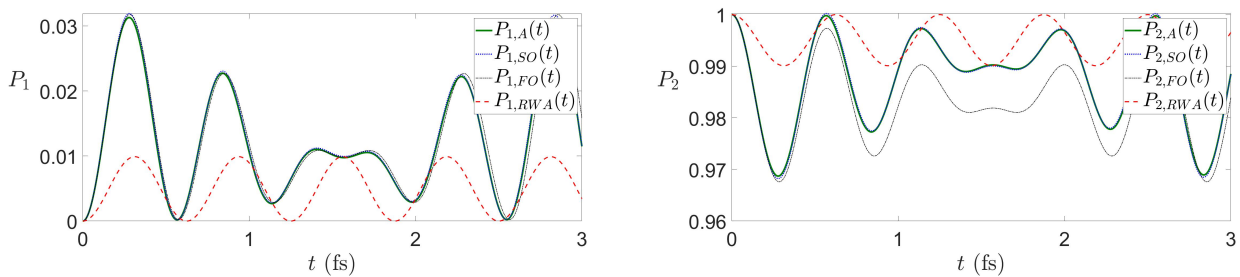
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.40 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 1000\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 990\text{fs}^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

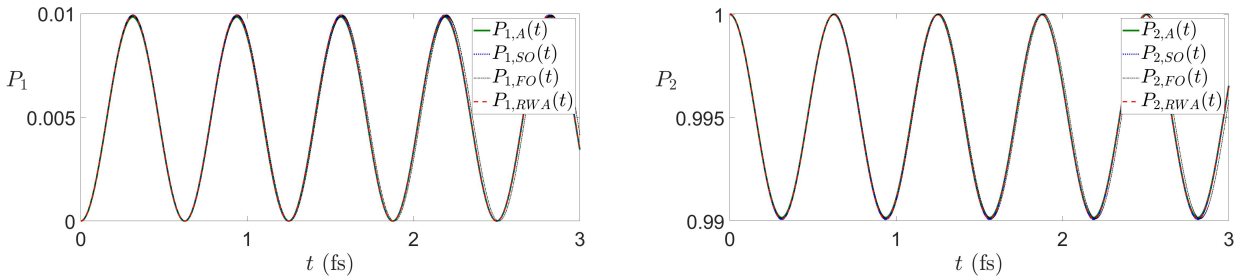
Σχήμα 6.41 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 100\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 90\text{fs}^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

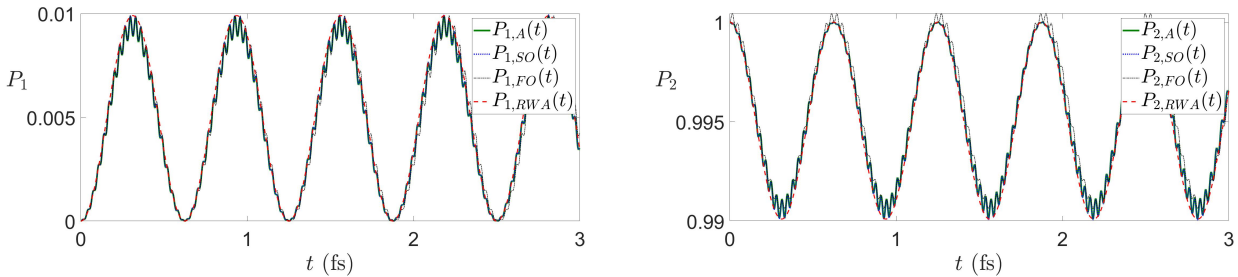
Σχήμα 6.42 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 11\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 1\text{fs}^{-1}$ .

Επίσης παρακάτω παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα πάλι με σταθερό  $\Delta$ , τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 990, 90, 1\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 1000, 100, 11\text{fs}^{-1}$  αντίστοιχα. Δηλαδή με  $\Omega < \omega$ .



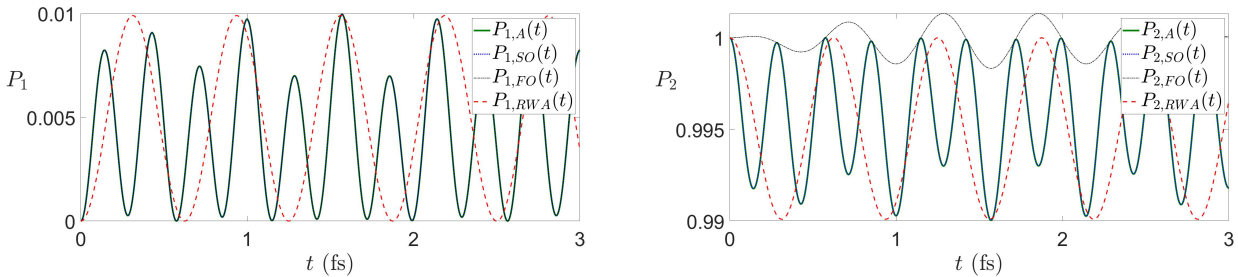
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.43 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 990\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 1000\text{fs}^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.44 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 90\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100\text{fs}^{-1}$ .

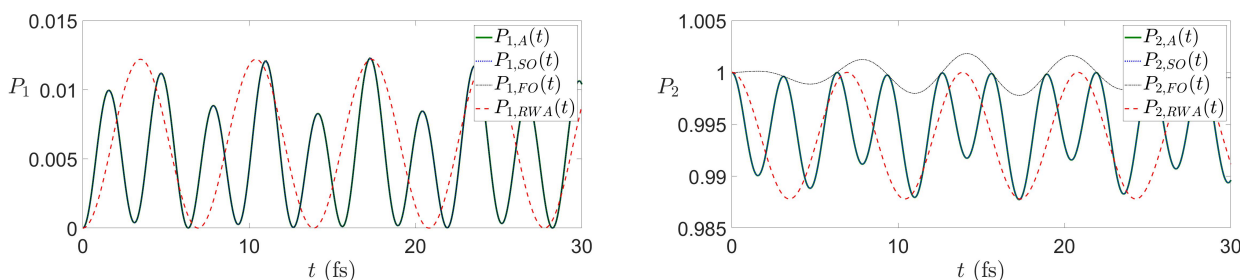


- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.45 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 11\text{fs}^{-1}$ .

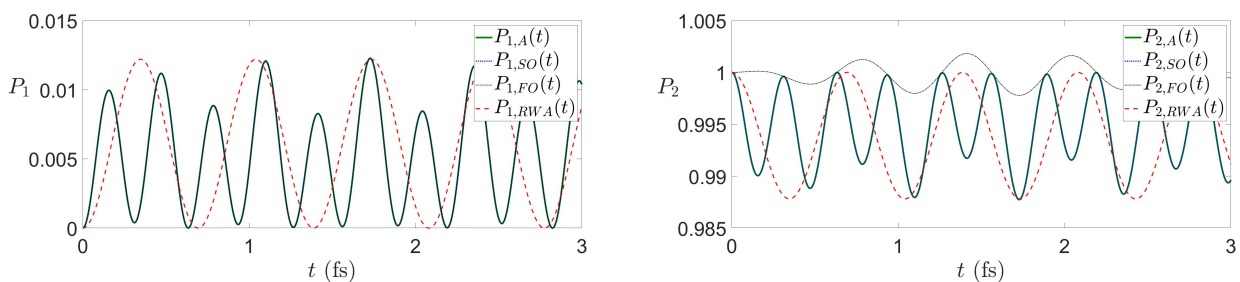


Επιπλέον παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 10, 1, 0.1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 10, 1, 0.1\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100, 10, 1\text{fs}^{-1}$  αντίστοιχα.



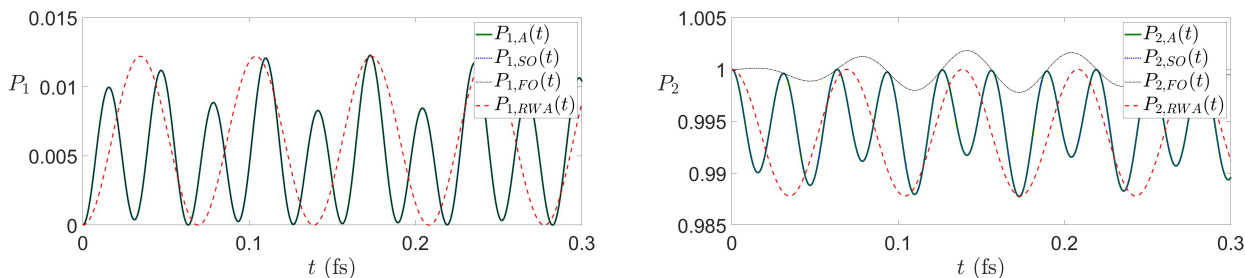
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

**Σχήμα 6.46** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 0.1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 0.1\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 1\text{fs}^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

**Σχήμα 6.47** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 10\text{fs}^{-1}$ .



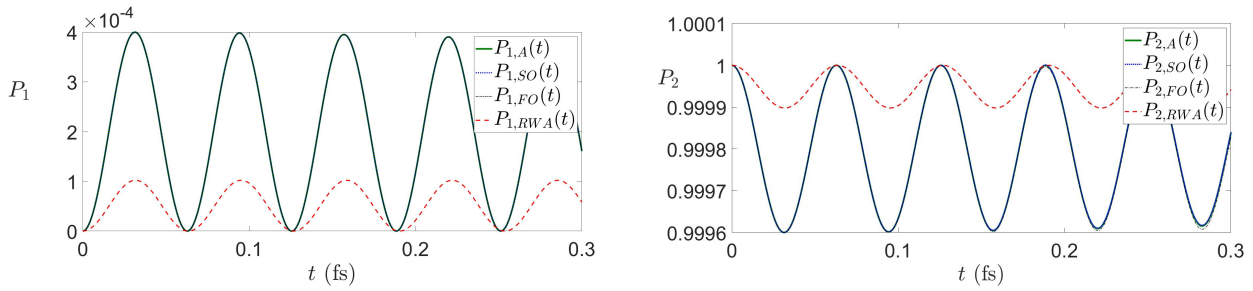
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

**Σχήμα 6.48** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 10\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 10\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100\text{fs}^{-1}$ .

Τέλος παρουσιάζουμε το αντίστοιχο σύνολο διαγραμμάτων που παρουσιάσαμε πριν για την δυναμικότητα των  $\epsilon$ ,

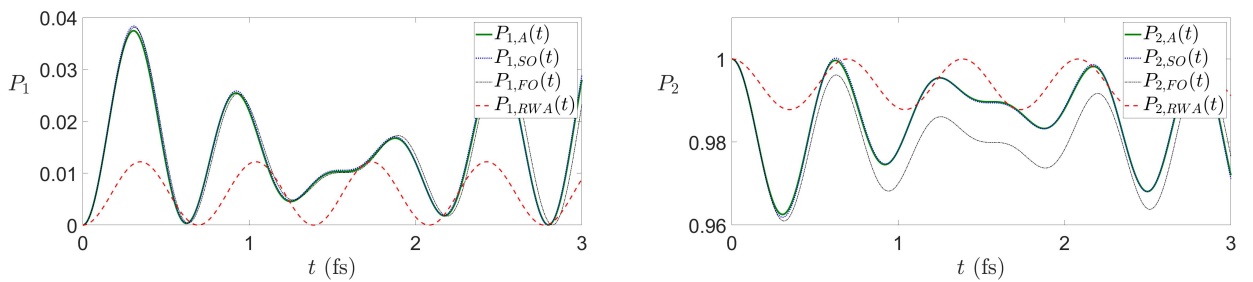
1. Έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = \omega = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = 100, 10, 1.1\text{fs}^{-1}$ .
2. Έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = \Delta = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 99, 9, 0.1\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100, 10, 1.1\text{fs}^{-1}$  αντίστοιχα,
3. Έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 200, 110, 101\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100, 10, 1\text{fs}^{-1}$  αντίστοιχα, δηλαδή με  $\Delta$  σταθερό.
4. Έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 200, 110, 101\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100\text{fs}^{-1}$ , δηλαδή με  $\omega$  σταθερό.

Το πρώτο σύνολο διαγραμμάτων,



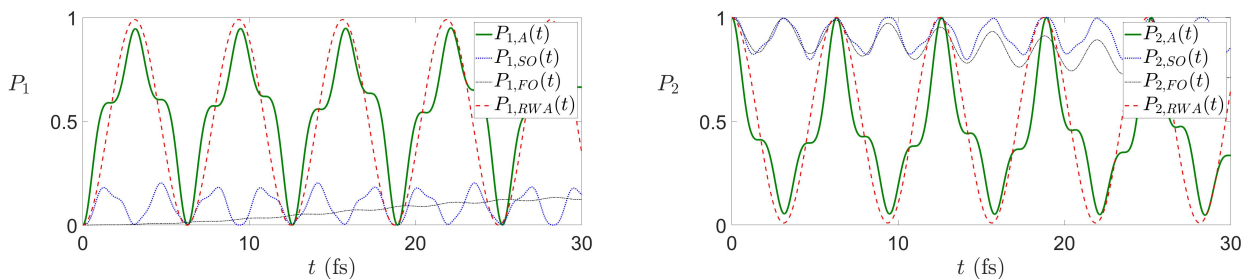
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1).
- (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.49 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 100fs^{-1}$  και  $\omega = 1fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1).
- (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

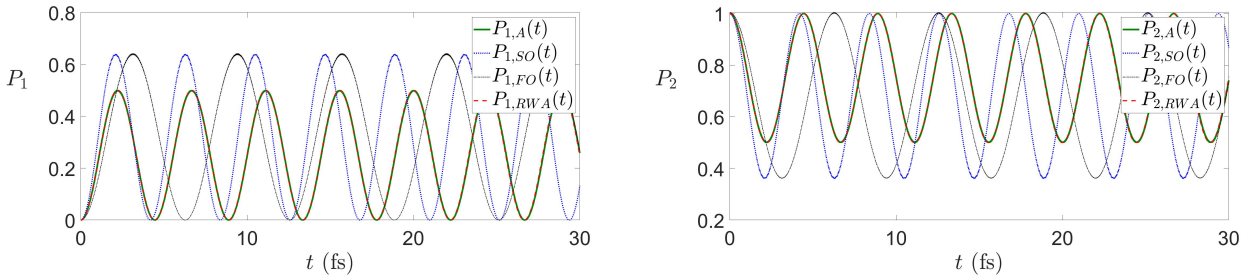
Σχήμα 6.50 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$  και  $\omega = 1fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1).
- (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

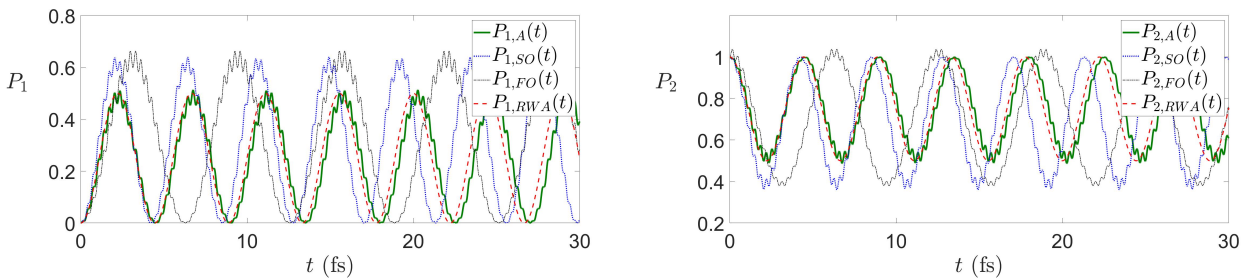
Σχήμα 6.51 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 1.1fs^{-1}$  και  $\omega = 1fs^{-1}$ .

Το δεύτερο σύνολο διαγραμμάτων,



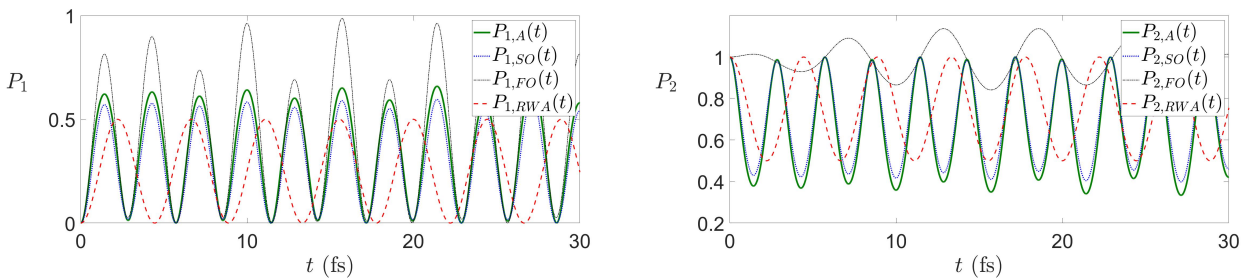
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.52 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 99fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

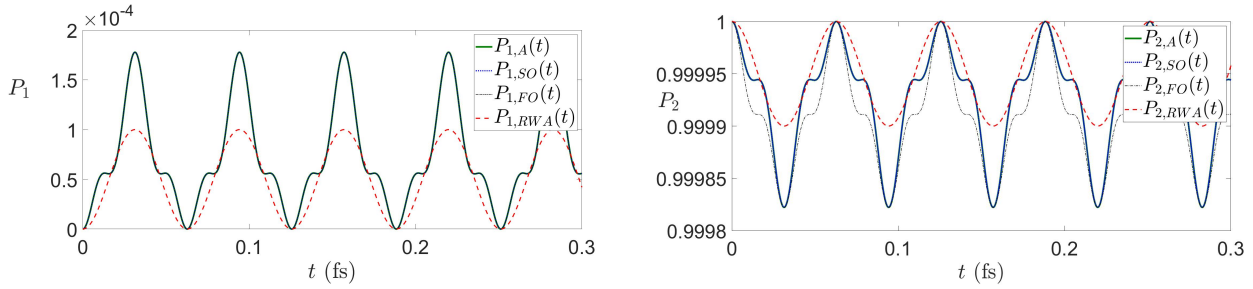
Σχήμα 6.53 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 9fs^{-1}$  και  $\omega = 10fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

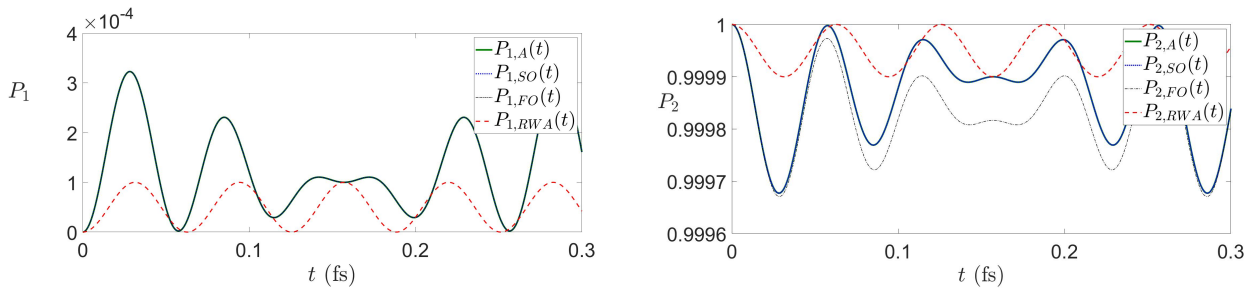
Σχήμα 6.54 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 0.1fs^{-1}$  και  $\omega = 1.1fs^{-1}$ .

Το τρίτο σύνολο διαγραμμάτων,



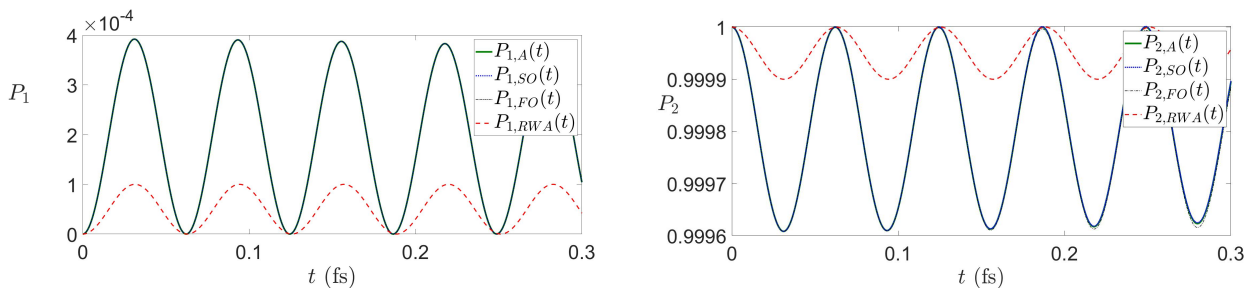
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.55 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 200fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

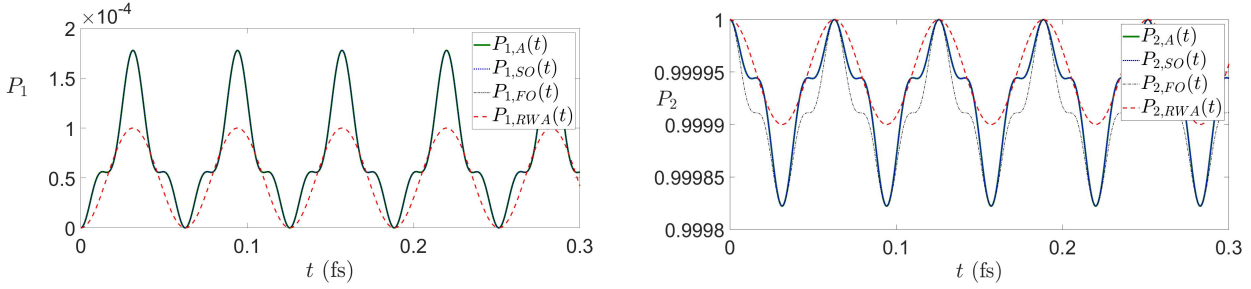
Σχήμα 6.56 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 110fs^{-1}$  και  $\omega = 10fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

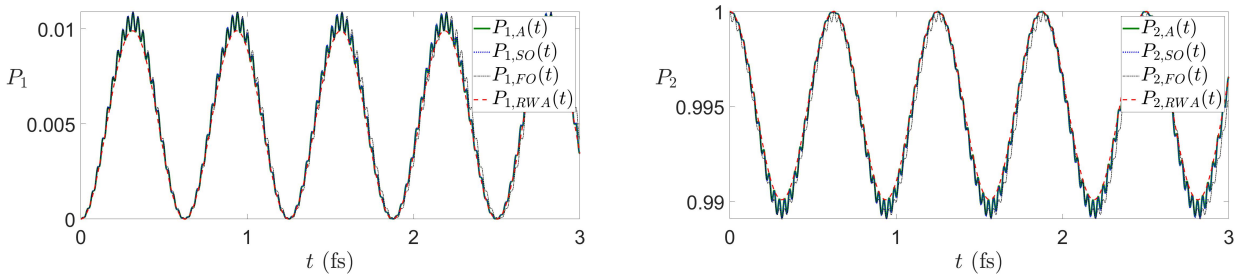
Σχήμα 6.57 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 101fs^{-1}$  και  $\omega = 1fs^{-1}$ .

Το τέταρτο σύνολο διαγραμμάτων:



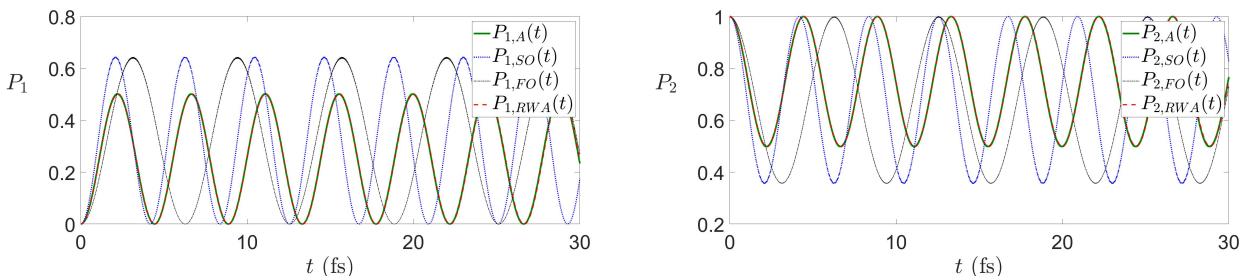
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.58 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 200fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.59 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 110fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.60 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 101fs^{-1}$  και  $\omega = 100fs^{-1}$ .

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σχολιάσουμε ότι στη μέθοδο επανισώσεως πρώτης τάξης, παρατηρούμε ότι όταν έχουμε αρχικές συνθήκες, που το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη κάτω στάθμη στην αρχή των χρόνων, τότε όλο το σφάλμα της μεθόδου βρίσκεται στην πιθανότητα της στάθμης 1 (κάτω), ενώ η πιθανότητα της στάθμης 2 (άνω) δεν έχει καθόλου απόκλιση από την αριθμητική λύση. Ακριβώς το αντίθετο ισχύει και για την περίπτωση αρχικών συνθηκών που το ηλεκτρόνιο

βρίσκεται στη άνω στάθμη στην αρχή των χρόνων. Δηλαδή όλο το σφάλμα βρίσκεται στη πιθανότητα της στάθμη 2 (άνω). Για αυτό το λόγο καταφεύγουμε στη δεύτερη τάξη γιατί η πρώτη τάξη έχει πολλά σφάλματα και πολλές αποκλίσεις από την αριθμητική λύση.

### 6.1.3 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα.

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες που το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα στην αρχή των χρόνων. Δηλαδή:  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ ,  $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$ , με πιθανότητα:  $|C_1(0)|^2 = |C_2(0)|^2 = \frac{1}{2}$ . Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής,

$$\begin{cases} C_1(t) = A_1 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_2 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} \left(A_2 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_1 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\right) \\ C_2(t) = A_2 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_1 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{i2\omega t} \left(A_1 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_2 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\right) \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\text{με } A_1 = \frac{e^{i\theta} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} \text{ και } A_2 = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}e^{i\theta} + e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)}.$$

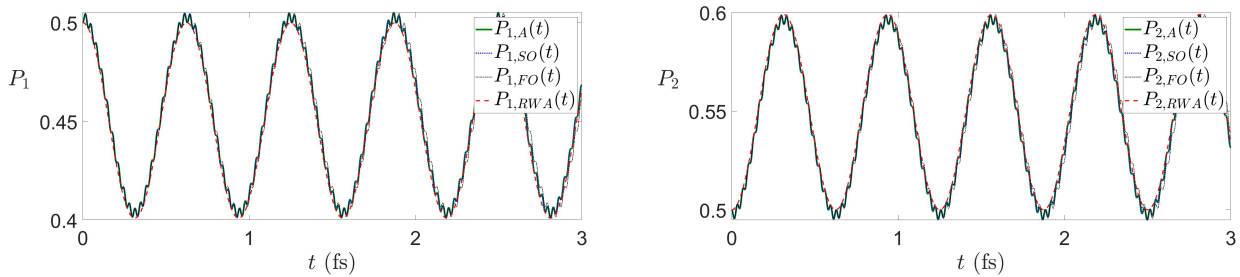
$$\begin{cases} C_1(t) = \left(1 + i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t\right) z_1(t) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} z_2(t) \\ C_2(t) = \frac{\Omega_R}{4\omega} (e^{i2\omega t}) z_1(t) + \left(1 - i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t\right) z_2(t) \end{cases} \quad (6.6)$$

με:

$$\begin{cases} z_1 = A_1 \cos(Ct) + B_1 \sin(Ct) \\ z_2 = A_2 \cos(Ct) + B_2 \sin(Ct) \end{cases} \text{ και } \begin{cases} A_1 = \frac{e^{i\theta} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} \\ A_2 = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}e^{i\theta} + e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} \\ B_1 = i\frac{\Omega_R e^{i\phi}}{2\sqrt{2}C} \\ B_2 = i\frac{\Omega_R e^{i\theta}}{2\sqrt{2}C} \end{cases}$$

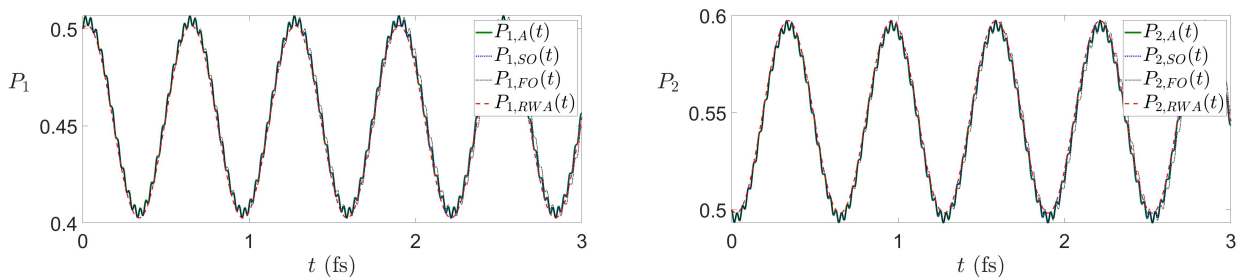
Επίσης όσα έχουν σχολιαστεί στις παραπάνω περιπτώσεις για τη μέθοδο της επανισώσεως πρώτης και δεύτερης τάξης ισχύουν και εδώ. Η μόνη διαφορά εδώ είναι στο σημείο με το σφάλμα της πρώτης τάξης στη στάθμη 1 και 2 για τις αρχικές συνθήκες που το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη κάτω και άνω στάθμη αντίστοιχα στην αρχή των χρόνων. Σε αυτή τη περίπτωση το σφάλμα αυτό μοιράζεται και στις δύο στάθμες.

Τελικά θα παρουσιάσουμε μια σειρά από διαγράμματα τα οποία θα έχουν σταθερές τις συχνότητες  $\Omega_R$ ,  $\Omega$  και  $\omega$ . Αυτό που θα μεταβάλλουμε θα είναι την φάση  $\theta - \phi$ .



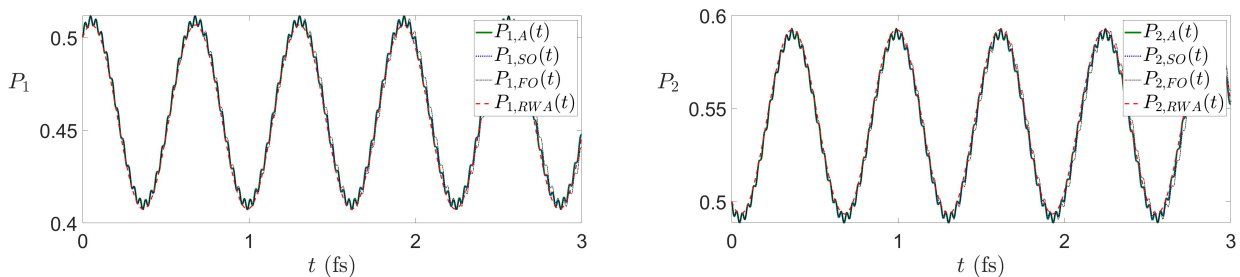
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.61 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = 0$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

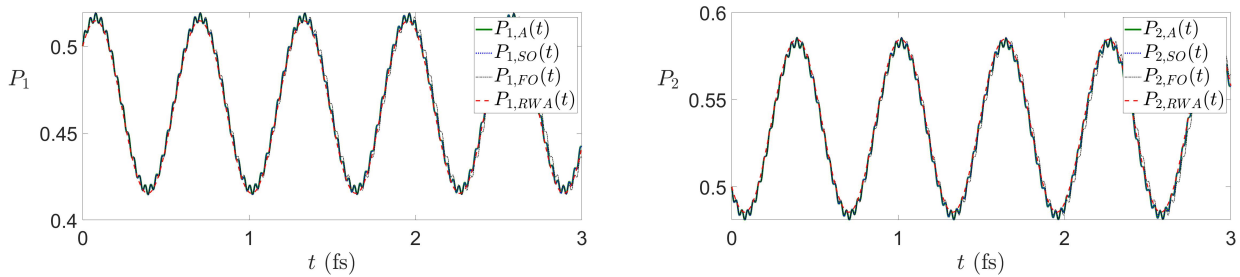
Σχήμα 6.62 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

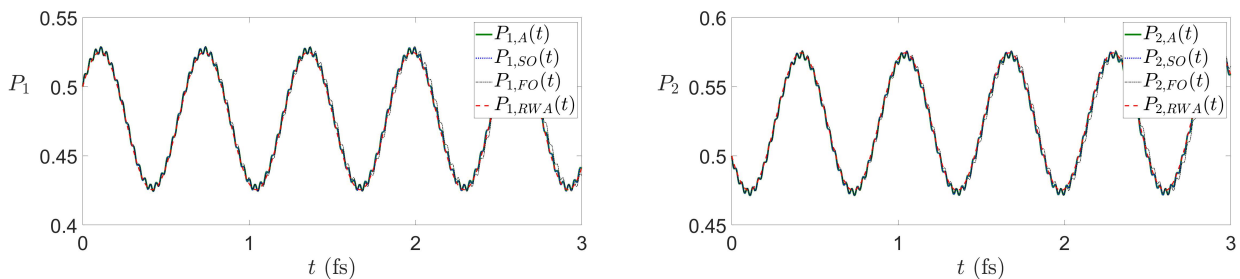
Σχήμα 6.63 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$ .





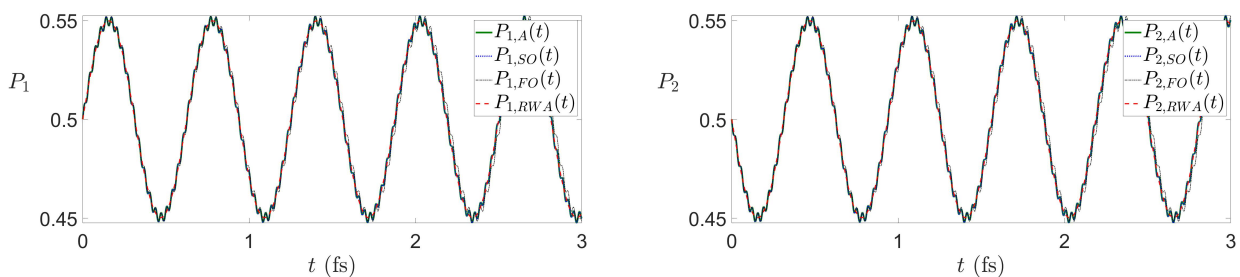
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.64 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$ .



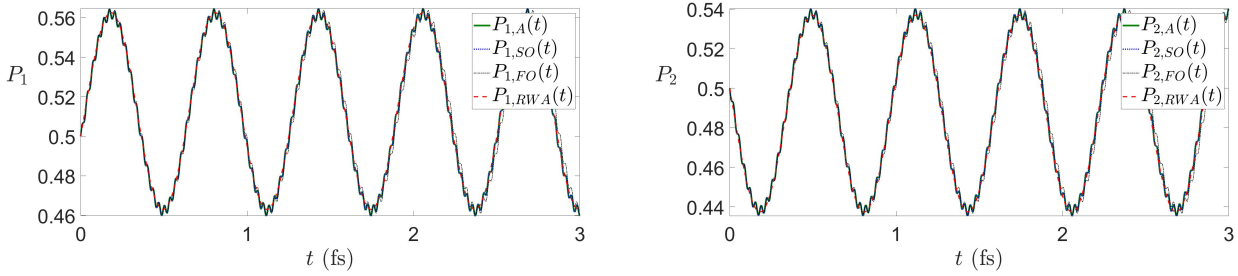
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.65 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$ .



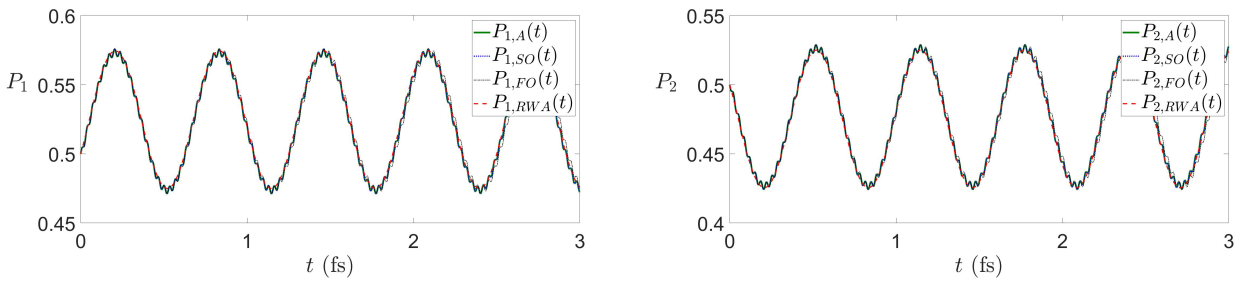
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.66 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{2}$ .



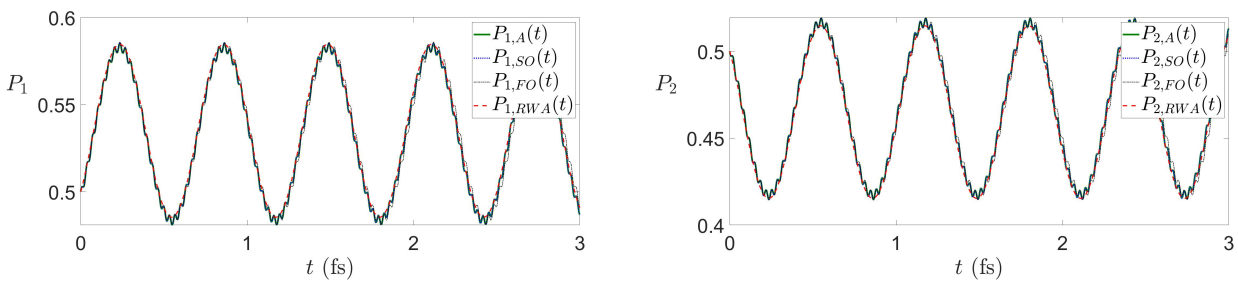
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.67 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{7\pi}{12}$ .



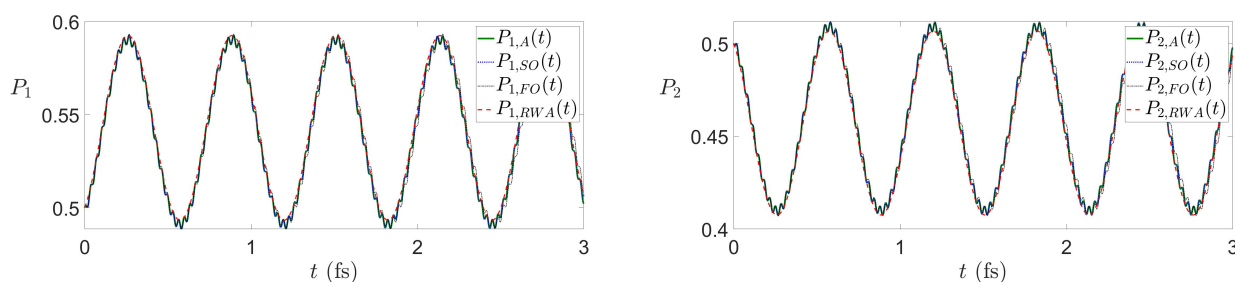
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.68 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{2\pi}{3}$ .



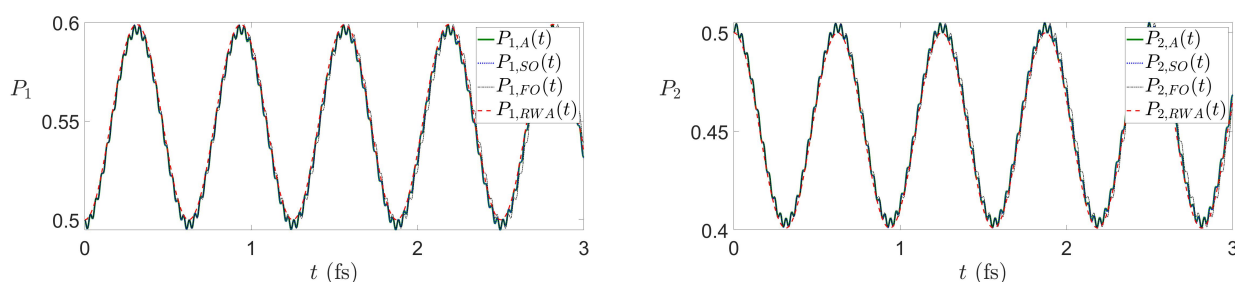
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.69 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{3\pi}{4}$ .



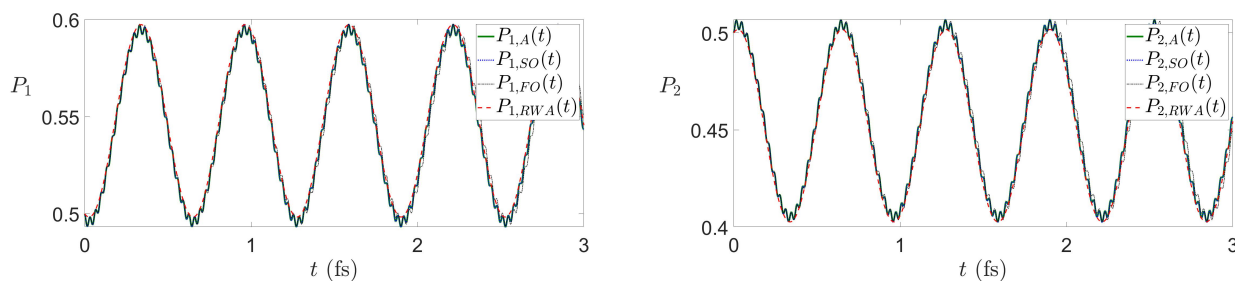
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.70 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{5\pi}{6}$ .



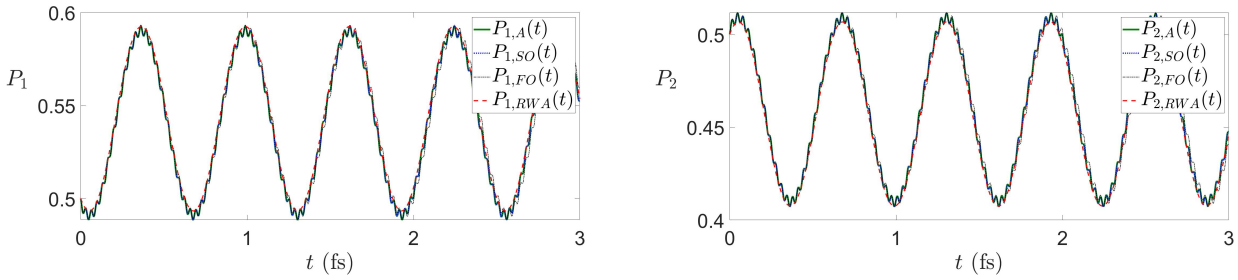
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.71 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \pi$ .



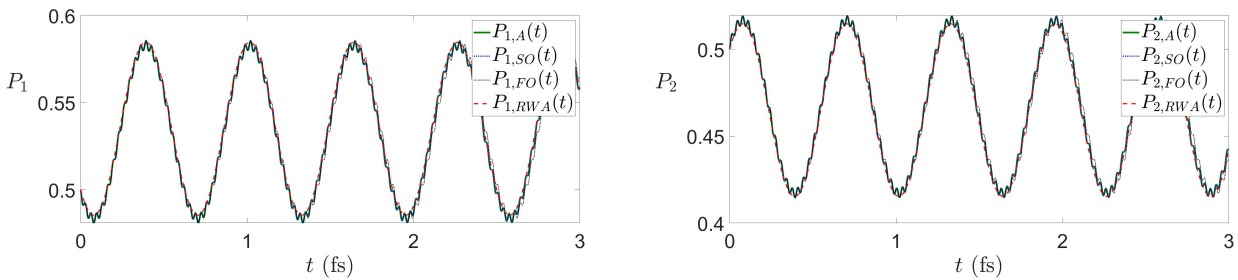
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.72 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{13\pi}{12}$ .



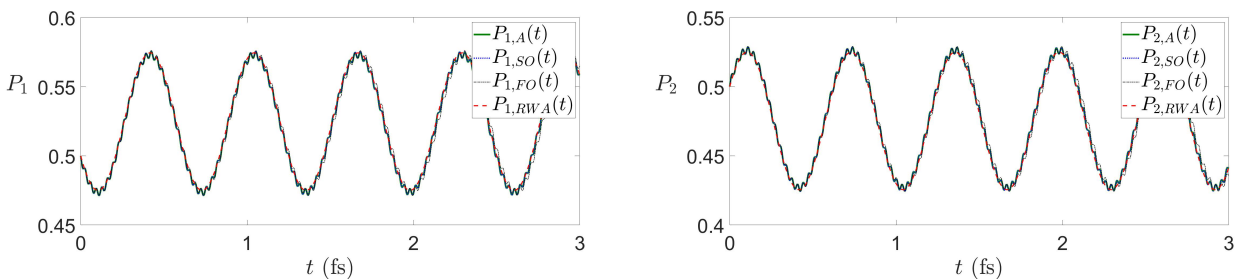
(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.73 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{7\pi}{6}$ .



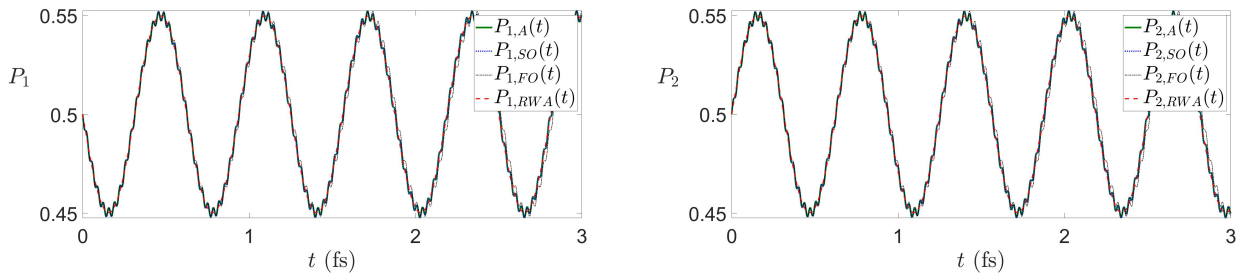
(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.74 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{5\pi}{4}$ .



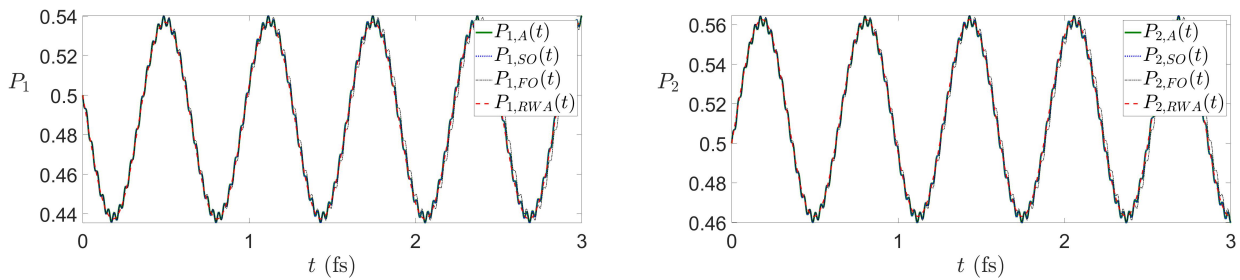
(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.75 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{4\pi}{3}$ .



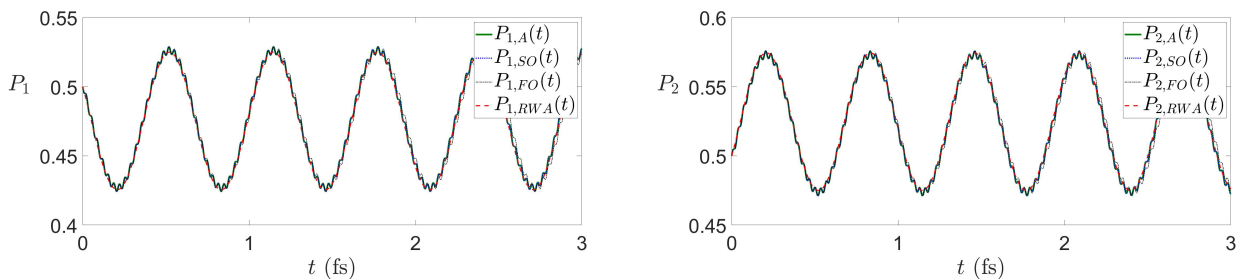
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.76 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{3\pi}{2}$ .



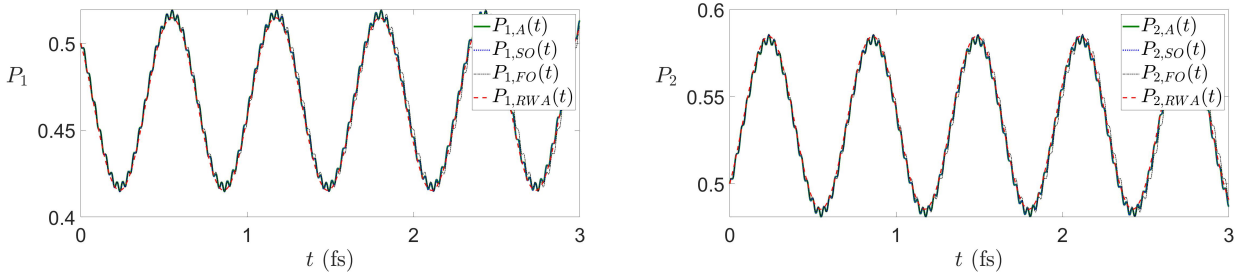
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.77 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{19\pi}{12}$ .



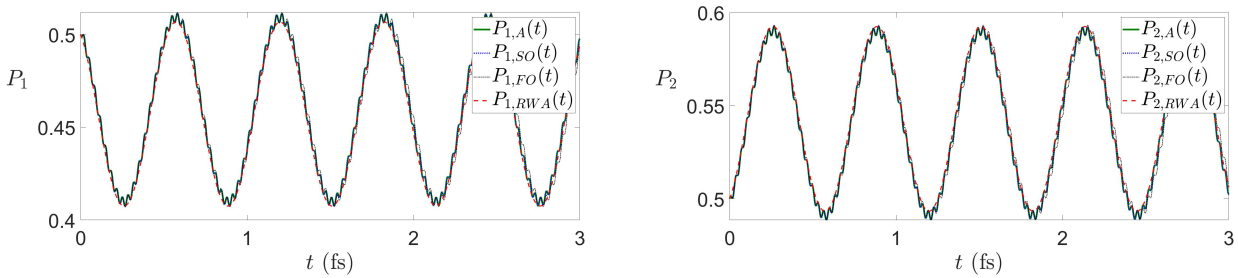
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.78 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{5\pi}{3}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.79** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{7\pi}{4}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.80** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 90fs^{-1}$ ,  $\omega = 100fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{11\pi}{6}$ .

Παρατηρούμε λοιπόν, πρώτα από όλα ότι οι φάσεις δεν επηρεάζουν τη μεθόδου επανισώσεως, δηλαδή δεν επηρεάζονται τα  $\epsilon$  έτσι όντως όλα τα παραπάνω που έχουμε πει και σχολιάσει στις προηγούμενες περιπτώσεις ισχύουν. Τέλος σημαντικό είναι να σχολιάσουμε ότι η φάση απλά είναι ένας αριθμός ο οποίος πολλαπλασιάζεται στους συντελεστές.

## 6.2 Περίπτωση συντονισμού: $\Delta = 0$ .

Στη περίπτωση του συντονισμού είναι λίγο πιο απλά τα πράγματα, διότι έχουμε το  $\Delta = 0$ . Αυτό σημαίνει ότι,  $\Omega = \omega$ . Για το συντονισμό λοιπόν οι λύσεις της μεθόδου επανισώσεως έχουν προκύψει με δεδομένο ότι,

$$\frac{\Omega_R}{\Sigma} = \mathcal{O}(\epsilon)$$

$$\frac{\Omega_R}{\omega} = \mathcal{O}(\epsilon)$$

Η απλότητα εδώ είναι ότι έχουμε στην ουσία ένα  $\epsilon$  διότι αν θέσουμε όπου  $\Omega = \omega$ , τότε θα έχουμε  $\Sigma = 2\omega$  και άρα θα έχουμε ένα ηγλίκο:  $\frac{\Omega_R}{\omega}$  διότι το ηγλίκο  $\frac{\Omega_R}{2\omega}$ , αν το πρώτο είναι της τάξης του  $\epsilon$  θα είναι και το δεύτερο.

Παρακάτω παρουσιάζονται οι λύσεις της μεθόδου επανισώσεως πρώτης και δεύτερης τάξης (5.56),(5.57),

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y + \epsilon w(y, t) \\ y = \left[ \begin{array}{l} A_{11} \cos(\frac{\Omega_R}{2}t) + B_{11} \sin(\frac{\Omega_R}{2}t) \\ A_{21} \cos(\frac{\Omega_R}{2}t) + B_{21} \sin(\frac{\Omega_R}{2}t) \end{array} \right] \\ \epsilon w(y, t) = \frac{\Omega_R}{4\omega} \left[ \begin{array}{cc} 0 & -e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{array} \right] y(t) \end{array} \right\} \quad (6.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = z + \epsilon w(z, t) + \epsilon^2 u(z, t) \\ z = \left[ \begin{array}{l} A_{12} \cos(Ct) + B_{12} \sin(Ct) \\ A_{22} \cos(Ct) + B_{22} \sin(Ct) \end{array} \right] \\ \epsilon w(z, t) = \frac{\Omega_R}{4\omega} \left[ \begin{array}{cc} 0 & -e^{-i2\omega t} \\ e^{i2\omega t} & 0 \end{array} \right] z(t) \\ \epsilon^2 u(z, t) = i \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right] z(t) \end{array} \right\} \quad (6.8)$$

### 6.2.1 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη

Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για τις αρχικές συνθήκες με το ηλεκτρόνιο στην αρχή του χρόνου να βρίσκεται στην κάτω στάθμη δηλαδή:  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ . Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι,

Πρώτης τάξης:

$$\begin{cases} C_1(t) = A_1 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_2 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} \left(A_2 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_1 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\right) \\ C_2(t) = A_2 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_1 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{i2\omega t} \left(A_1 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_2 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\right) \end{cases} \quad (6.9)$$

με  $A_1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2}$ ,  $A_2 = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2}$ .  
Δεύτερης τάξης:

$$\begin{cases} C_1(t) = \left(1 + i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t\right) z_1(t) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} z_2(t) \\ C_2(t) = \frac{\Omega_R}{4\omega} (e^{i2\omega t}) z_1(t) + \left(1 - i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t\right) z_2(t) \end{cases} \quad (6.10)$$

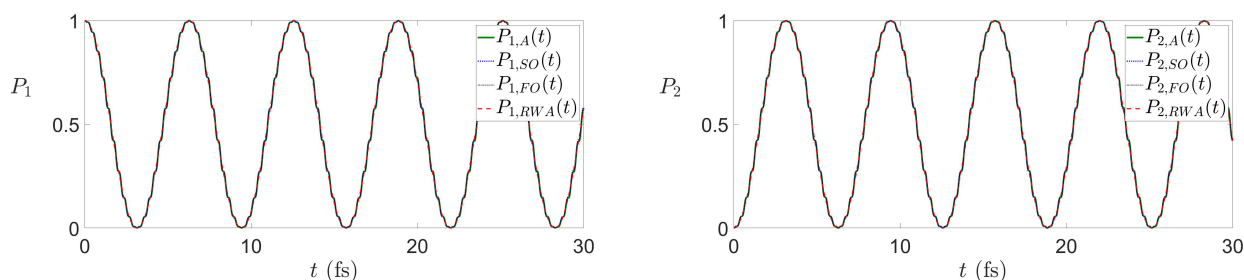
με:

$$\begin{cases} z_1 = A_1 \cos(Ct) + B_1 \sin(Ct) \\ z_2 = A_2 \cos(Ct) + B_2 \sin(Ct) \end{cases} \text{ και } \begin{cases} A_1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2} \\ A_2 = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2} \\ B_1 = 0 \\ B_2 = \frac{i\Omega_R}{2C} \end{cases}$$

Στα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν οι καμπύλες θα αντιστοιχούν στις αντίστοιχες πιθανότητες, δηλαδή  $P_1(t) = |C_1(t)|^2$  και  $P_2(t) = |C_2(t)|^2$ , όπου είναι οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη στάθμη 1 και 2 αντίστοιχα. Η παρουσίαση των διαγραμμάτων θα είναι με βάση τις μεταβλητές  $\Omega_R$ ,  $\Omega$  και  $\omega$ .

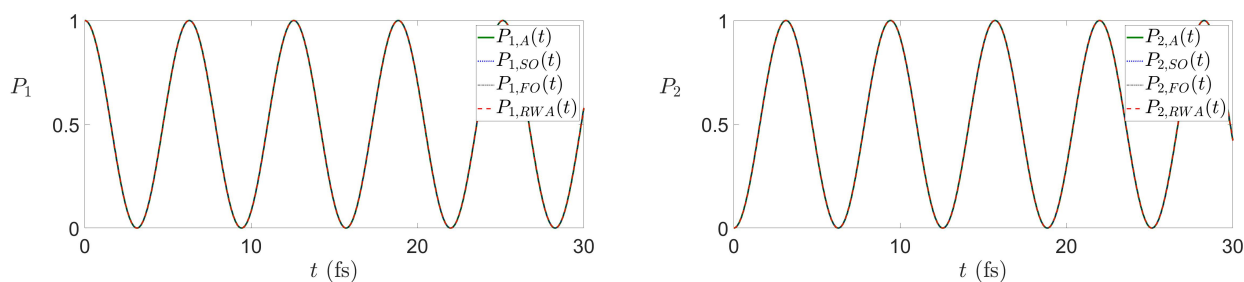
Παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = \omega = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$ .





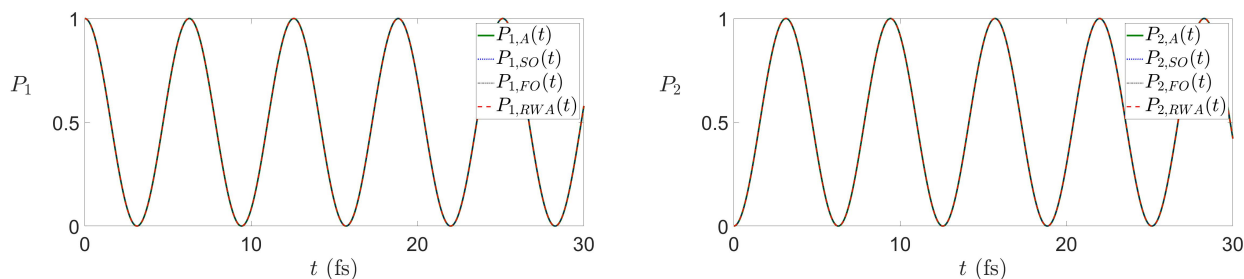
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.81 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = \omega = 10fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.82 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = \omega = 100fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.83 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = \omega = 1000fs^{-1}$ .

Στα παραπάνω διαγράμματα κρατάμε σταθερά τη συχνότητα  $\Omega_R$ , ενώ μεταβάλλουμε τις συχνότητες  $\Omega = \omega$ .

Τα  $\epsilon$  που έχουμε στις παραπάνω περιπτώσεις είναι,

1. Στα διαγράμματα 6.81 έχουμε  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ .
2. Στα διαγράμματα 6.82 έχουμε  $\frac{1}{100} = 10^{-2}$ .

3. Στα διαγράμματα 6.83  $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$ .

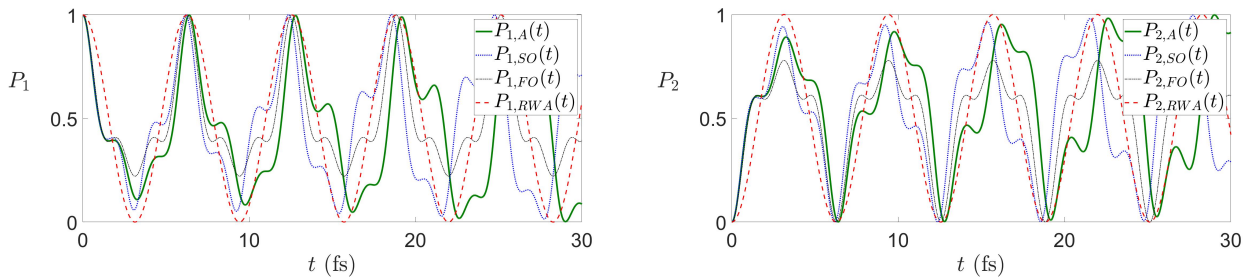
Επομένως μπορούμε να πούμε για τα  $C_k(t)$  με  $k = 1, 2$  ότι,

1. Στα διαγράμματα 6.81 για την πρώτη τάξη έχουμε όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-1}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-2}$ .
2. Στα διαγράμματα 6.82 έχουμε για την πρώτη τάξης όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-2}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-4}$ .
3. Στα διαγράμματα 6.83 έχουμε για την πρώτη τάξη όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-3}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-6}$ .

Παρατηρούμε λοιπόν,

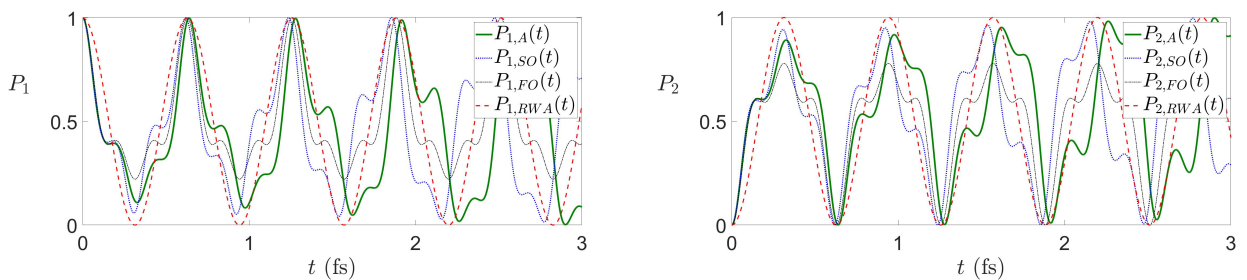
1. Στα διαγράμματα 6.81 παρατηρούμε την ταύτιση της πρώτης και δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-2}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-1}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς.
2. Στα διαγράμματα 6.82 παρατηρούμε την ταύτιση της πρώτης και δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-4}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-6}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-1}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς.
3. Στα διαγράμματα 6.83 παρατηρούμε την ταύτιση της πρώτης και δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-6}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-9}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τέσσερα διαγράμματα, δύο διαγράμματα για την άνω στάθμη και δύο για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = \Omega = \omega = 1, 10\text{fs}^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.84 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = \omega = 1fs^{-1}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.85 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Omega = \omega = 10fs^{-1}$ .

Στα παραπάνω διαγράμματα όλες οι συχνότητες είναι ίσες  $\Omega_R = \Omega = \omega$ .

Τα  $\epsilon$  που έχουμε στις παραπάνω περιπτώσεις είναι,

1. Στα διαγράμματα 6.84 έχουμε  $\frac{1}{1} = 1$ .
2. Στα διαγράμματα 6.85 έχουμε  $\frac{10}{10} = 1$ .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, εφόσον και στις δύο περιπτώσεις το  $\epsilon$  είναι 1, οι καμπύλες της πρώτης και δεύτερης τάξης δεν ταυτίζονται, όπως είναι αναμενόμενο.

### 6.2.2 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για τις αρχικές συνθήκες με το ηλεκτρόνιο στην αρχή των χρόνων να βρίσκεται στην άνω στάθμη δηλαδή:  $C_1(0) = 0, C_2(0) = 1$ . Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι,

Πρώτης τάξης:

$$\begin{cases} C_1(t) = A_1 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_2 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} (A_2 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_1 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)) \\ C_2(t) = A_2 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_1 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{i2\omega t} (A_1 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_2 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)) \end{cases} \quad (6.11)$$

με  $A_1 = \frac{\frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2}$ ,  $A_2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2}$ .  
Δεύτερης τάξης:

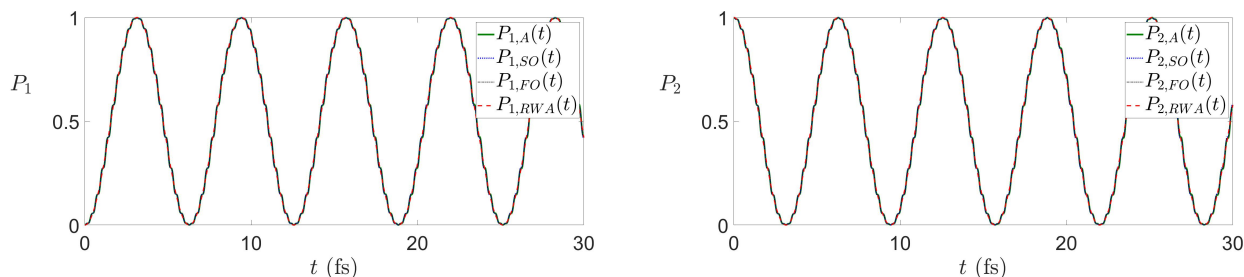
$$\begin{cases} C_1(t) = \left(1 + i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t\right) z_1(t) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} z_2(t) \\ C_2(t) = \frac{\Omega_R}{4\omega} (e^{i2\omega t}) z_1(t) + \left(1 - i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t\right) z_2(t) \end{cases} \quad (6.12)$$

με:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = A_1 \cos(Ct) + B_1 \sin(Ct) \\ z_2 = A_2 \cos(Ct) + B_2 \sin(Ct) \end{array} \right\} \text{ και } \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2} \\ A_2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2} \\ B_1 = \frac{i\Omega_R}{2C} \\ B_2 = 0 \end{array} \right\}$$

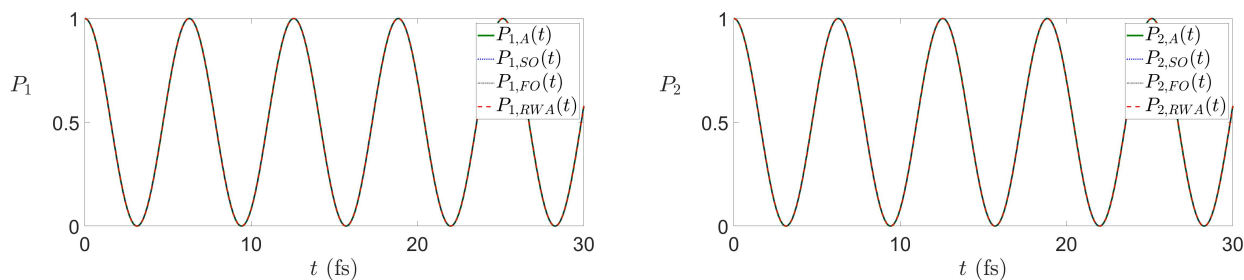
Στα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν οι καμπύλες θα αντιστοιχούν στις αντίστοιχες πιθανότητες, δηλαδή  $P_1(t) = |C_1(t)|^2$  και  $P_2(t) = |C_2(t)|^2$ , όπου είναι οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη στάθμη 1 και 2 αντίστοιχα. Η παρουσίαση των διαγραμμάτων θα είναι με βάση τις μεταβλητές  $\Omega_R$ ,  $\Omega$  και  $\omega$ .

Παρουσιάζουμε έξι διαγράμματα, τρία διαγράμματα για την άνω στάθμη και τρία για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$  και  $\Omega = \omega = 10, 100, 1000\text{fs}^{-1}$ .



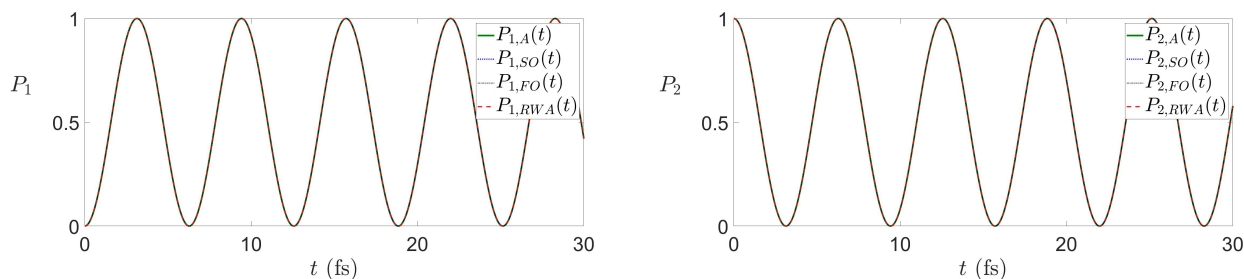
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.86 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = \omega = 10\text{fs}^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.87 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = \omega = 100\text{fs}^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.88 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = \omega = 1000\text{fs}^{-1}$ .

Στα παραπάνω διαγράμματα κρατάμε σταθερά τη συχνότητα  $\Omega_R$ , ενώ μεταβάλλουμε τις συχνότητες  $\Omega = \omega$ .

Τα  $\epsilon$  που έχουμε στις παραπάνω περιπτώσεις είναι,

1. Στα διαγράμματα 6.86 έχουμε  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ .
2. Στα διαγράμματα 6.87 έχουμε  $\frac{1}{100} = 10^{-2}$ .

3. Στα διαγράμματα 6.88 έχουμε  $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$ .

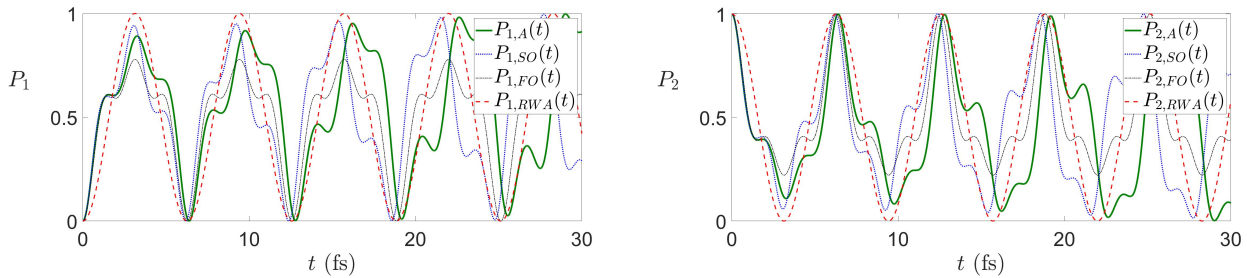
Επομένως μπορούμε να πούμε για τα  $C_k(t)$  με  $k = 1, 2$  ότι,

1. Στα διαγράμματα 6.86 για την πρώτη τάξη έχουμε όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-1}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-2}$ .
2. Στα διαγράμματα 6.87 έχουμε για την πρώτη τάξης όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-2}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-4}$ .
3. Στα διαγράμματα 6.88 έχουμε για την πρώτη τάξη όρους με  $\epsilon$  τάξης  $10^{-3}$  και δεύτερης τάξης με όρους  $\epsilon^2$  τάξης  $10^{-6}$ .

Παρατηρούμε λοιπόν,

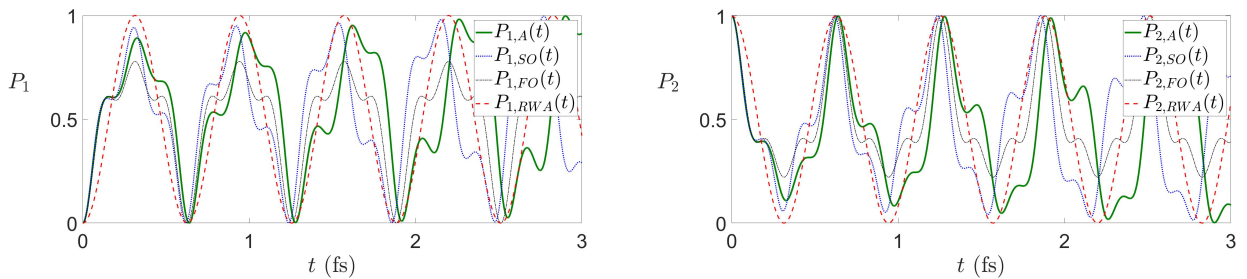
1. Στα διαγράμματα 6.86 παρατηρούμε την ταύτιση της πρώτης και δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-2}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-1}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς.
2. Στα διαγράμματα 6.87 παρατηρούμε την ταύτιση της πρώτης και δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-4}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-6}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-1}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς.
3. Στα διαγράμματα 6.88 παρατηρούμε την ταύτιση της πρώτης και δεύτερης τάξης με την αριθμητική λύση. Το γεγονός αυτό είναι λογικό διότι εδώ στη πρώτη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-6}$  και στη δεύτερη τάξη αγνοούμε όρους τάξης  $10^{-3}$  και η ταλάντωση είναι τάξης  $10^{-9}$ . Επομένως όντως αγνοούμε όρους λιγότερο σημαντικούς.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τέσσερα διαγράμματα, δύο διαγράμματα για την άνω στάθμη και δύο για τη κάτω στάθμη στα οποία έχουμε,  $\Omega_R = \Omega = \omega = 1, 10\text{fs}^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.89 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = \omega = 1fs^{-1}$ .



- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.90 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 10fs^{-1}$ ,  $\Omega = \omega = 10fs^{-1}$ .

Στα παραπάνω διαγράμματα όλες οι συχνότητες είναι ίσες  $\Omega_R = \Omega = \omega$ .

Τα  $\epsilon$  που έχουμε στις παραπάνω περιπτώσεις είναι,

1. Στα διαγράμματα 6.89 έχουμε  $\frac{1}{1} = 1$ ,
2. Στα διαγράμματα 6.90 έχουμε  $\frac{10}{10} = 1$ .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, εφόσον και στις δύο περιπτώσεις το  $\epsilon$  είναι 1, οι καμπύλες της πρώτης και δεύτερης τάξης δεν ταυτίζονται, όπως είναι αναμενόμενο.

### 6.2.3 Λύση του προβλήματος με το ηλεκτρόνιο να μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες που το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί και στις δύο στάθμες με την ίδια πιθανότητα στην αρχή των χρόνων. Δηλαδή:  $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ ,  $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$ , με πιθανότητα:  $|C_1(0)|^2 = |C_2(0)|^2 = \frac{1}{2}$ . Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής,

$$\begin{cases} C_1(t) = A_1 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_2 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} (A_2 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_1 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)) \\ C_2(t) = A_2 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_1 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{i2\omega t} (A_1 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + iA_2 \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)) \end{cases} \quad (6.13)$$

$$\text{με } A_1 = \frac{e^{i\theta} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} \text{ και } A_2 = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}e^{i\theta} + e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)}.$$

$$\begin{cases} C_1(t) = \left(1 + i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t\right) z_1(t) - \frac{\Omega_R}{4\omega} e^{-i2\omega t} z_2(t) \\ C_2(t) = \frac{\Omega_R}{4\omega} (e^{i2\omega t}) z_1(t) + \left(1 - i\left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 \frac{1}{2\omega^2} \sin 2\omega t\right) z_2(t) \end{cases} \quad (6.14)$$

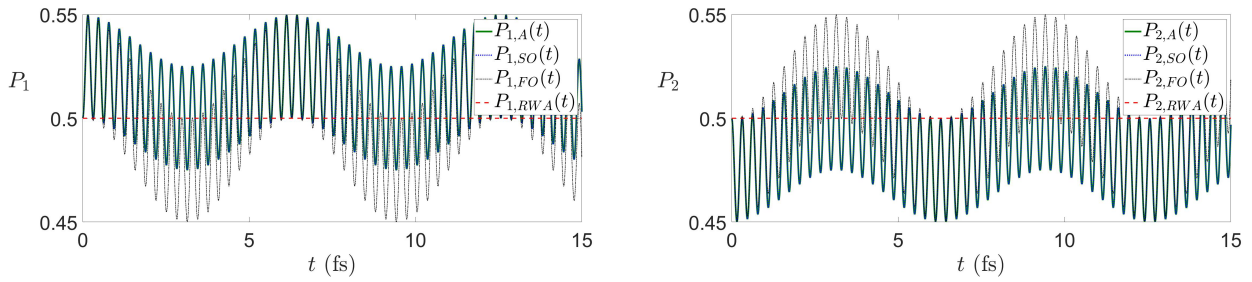
με:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = A_1 \cos(Ct) + B_1 \sin(Ct) \\ z_2 = A_2 \cos(Ct) + B_2 \sin(Ct) \end{array} \right\} \text{ και } \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{e^{i\theta} + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} \\ A_2 = \frac{-\frac{\Omega_R}{4\omega}e^{i\theta} + e^{i\phi}}{\sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{\Omega_R}{4\omega}\right)^2\right)} \\ B_1 = i \frac{\Omega_R e^{i\phi}}{2\sqrt{2}C} \\ B_2 = i \frac{\Omega_R e^{i\theta}}{2\sqrt{2}C} \end{array} \right.$$

Επίσης όσα έχουν σχολιαστεί στις παραπάνω περιπτώσεις για τη μέθοδο της επανισώσεως πρώτης και δεύτερης τάξης ισχύουν και εδώ. Η μόνη διαφορά εδώ είναι στο σημείο με το σφάλμα της πρώτης τάξης στη στάθμη 1 και 2 για τις αρχικές συνθήκες που το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη κάτω και άνω στάθμη αντίστοιχα στην αρχή των χρόνων. Σε αυτή τη περίπτωση το σφάλμα αυτό μοιράζεται και στις δύο στάθμες.

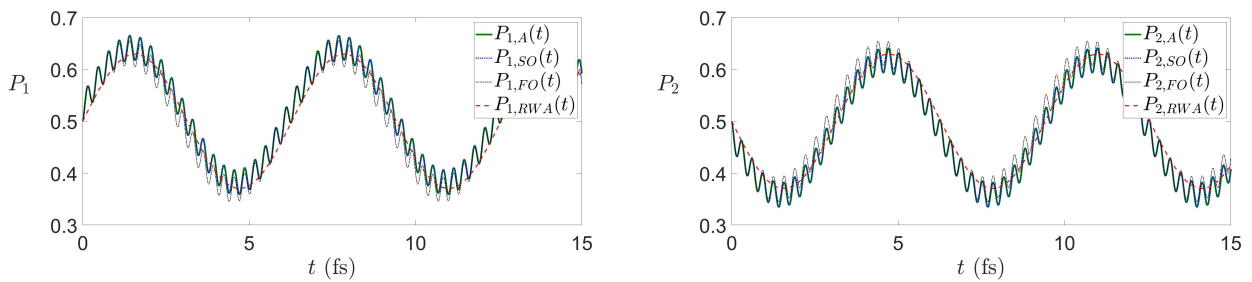
Τελικά θα παρουσιάσουμε μια σειρά από διαγράμματα τα οποία θα έχουν σταθερές τις συχνότητες  $\Omega_R$ ,  $\Omega$  και  $\omega$ . Αυτό που θα μεταβάλλουμε θα είναι την φάση  $\theta - \phi$ .





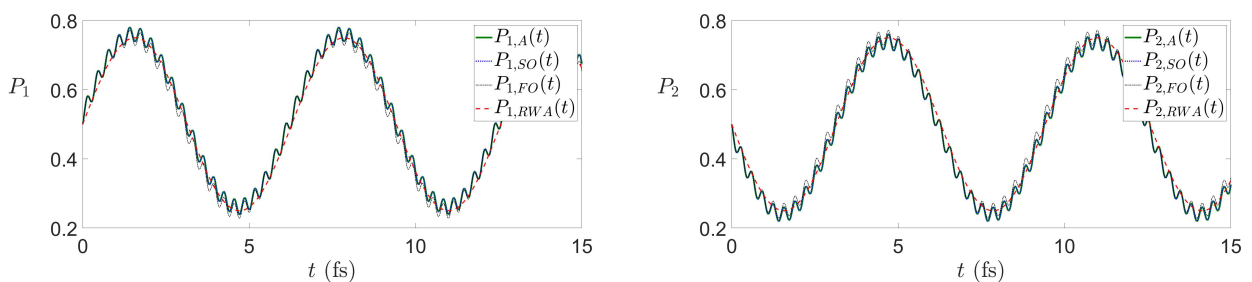
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.91 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = 0$ .



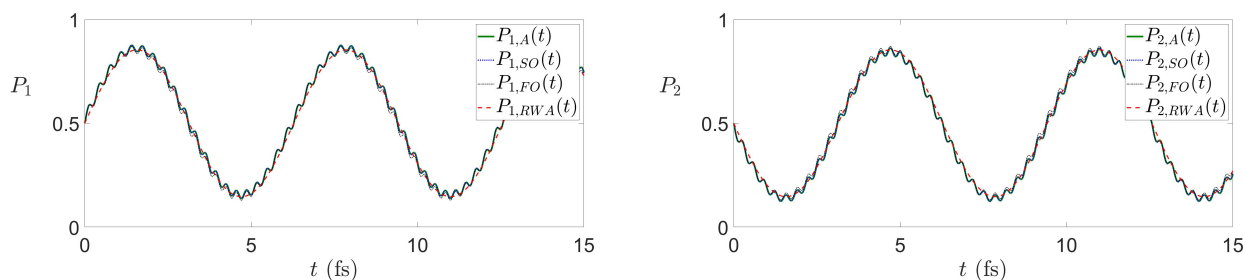
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.92 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{12}$ .



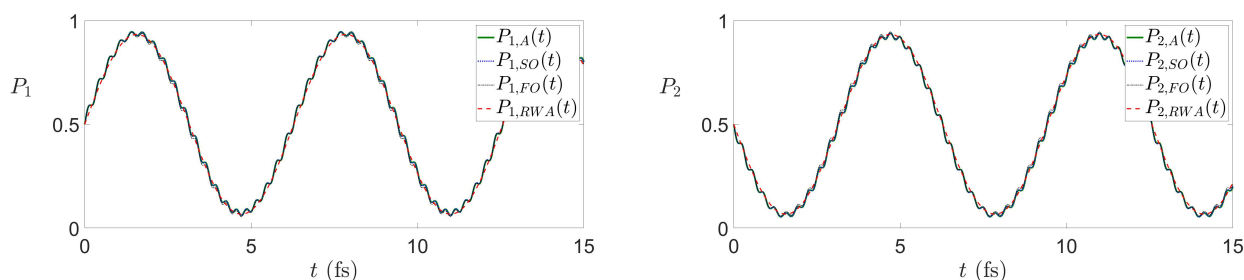
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.93 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{6}$ .



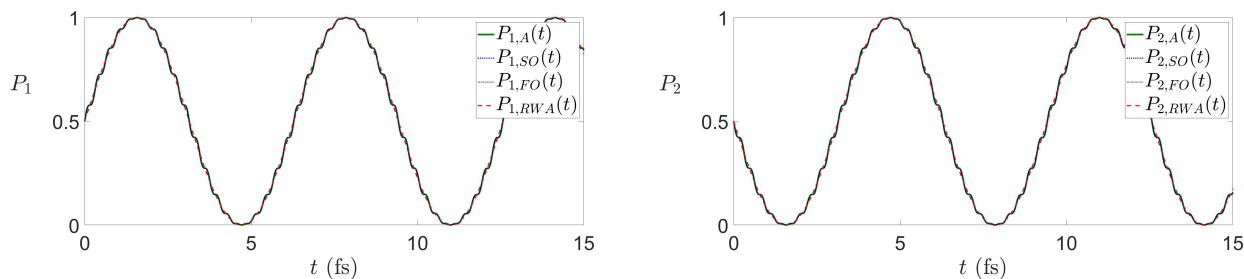
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.94 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$ .



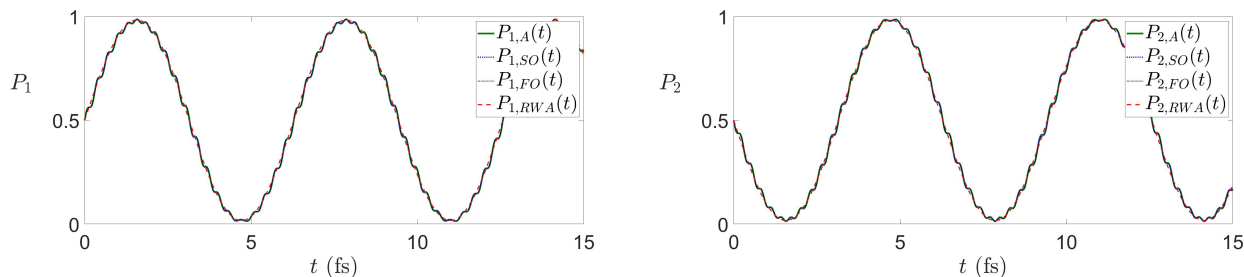
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.95 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{3}$ .



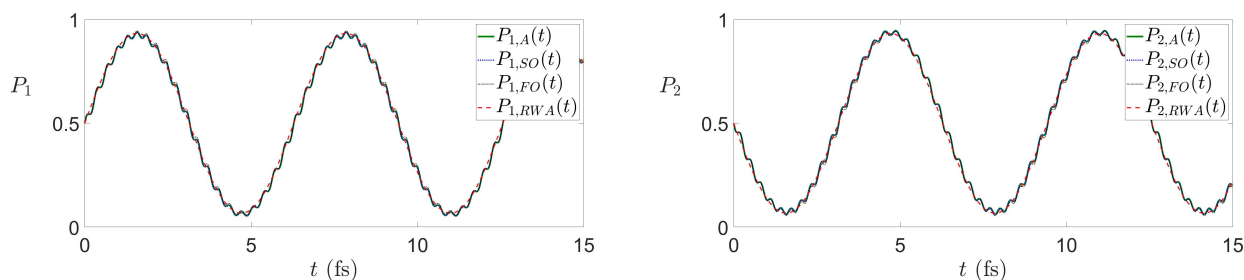
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.96 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{\pi}{2}$ .



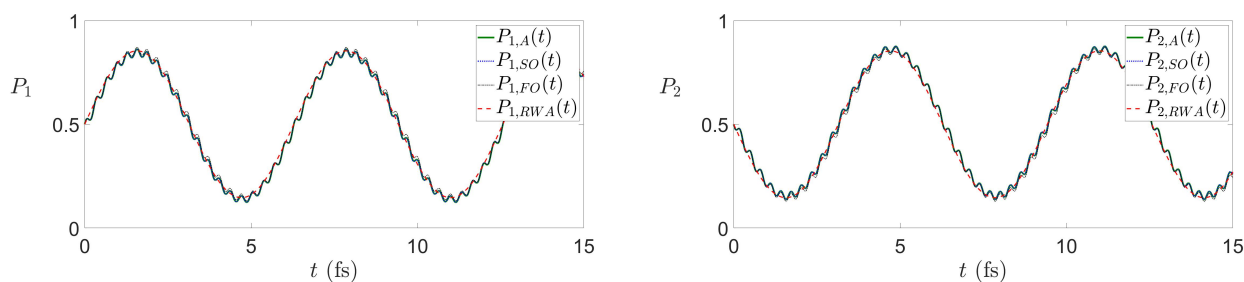
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.97 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{7\pi}{12}$ .



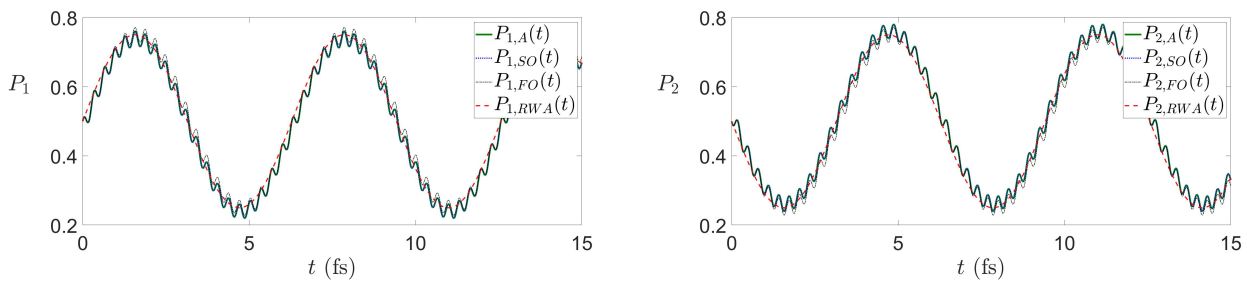
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.98 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{2\pi}{3}$ .



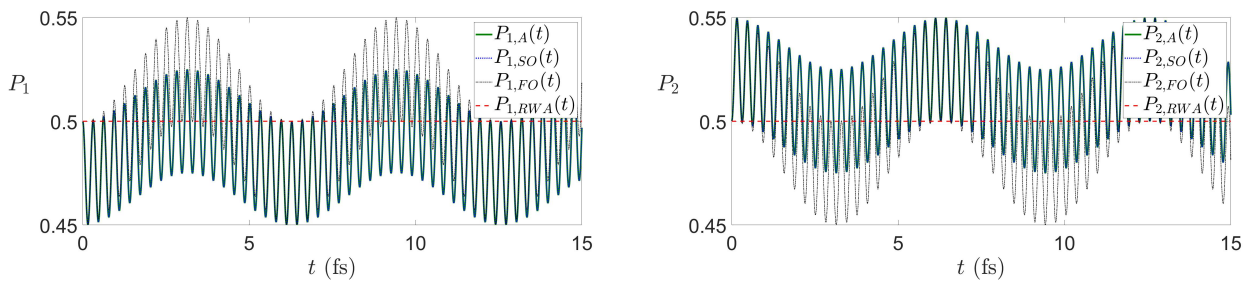
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.99 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{3\pi}{4}$ .



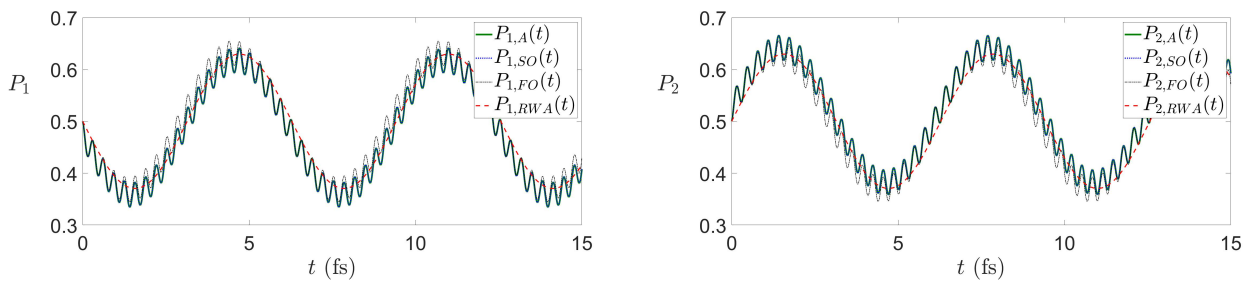
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.100 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{5\pi}{6}$ .



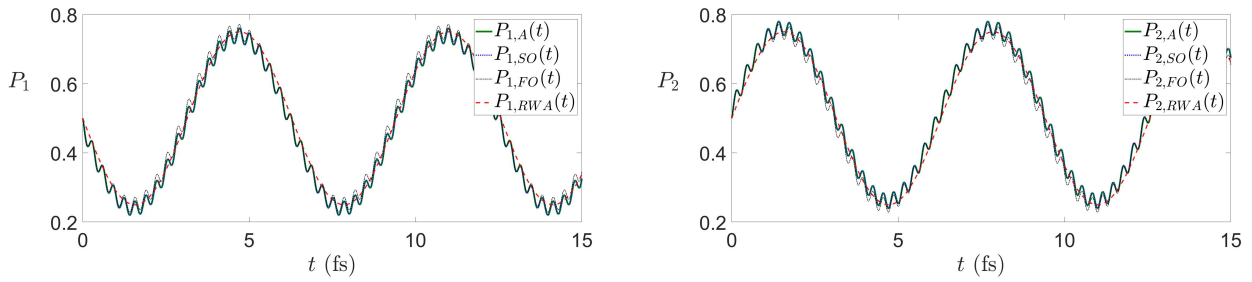
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.101 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \pi$ .



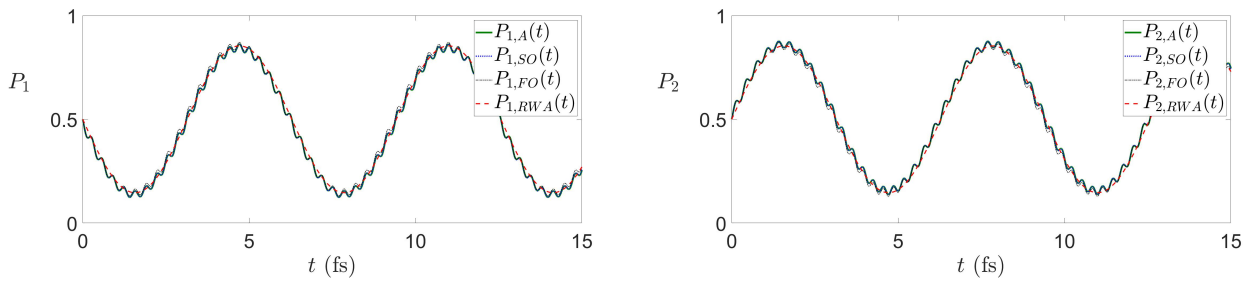
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

Σχήμα 6.102 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{13\pi}{12}$ .



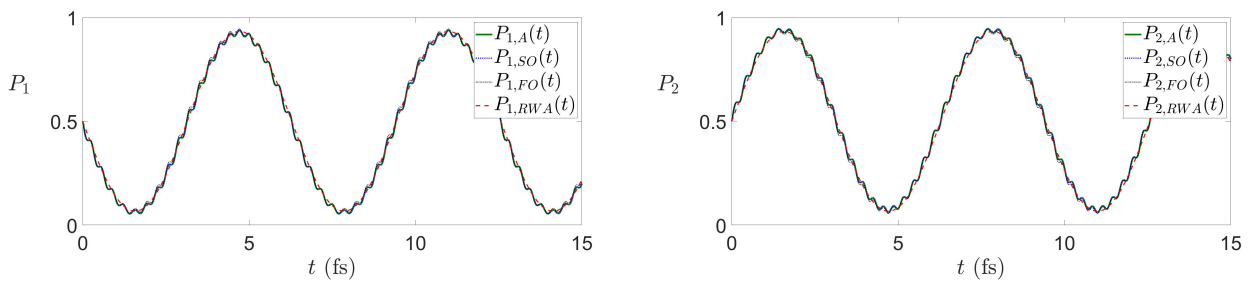
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.103** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{7\pi}{6}$ .



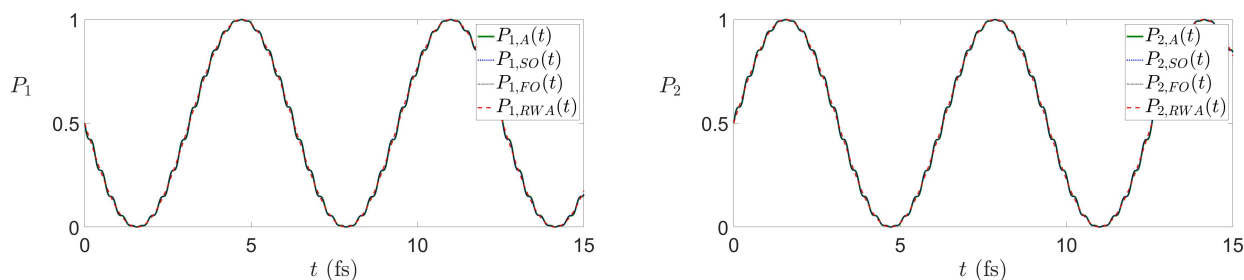
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.104** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{5\pi}{4}$ .



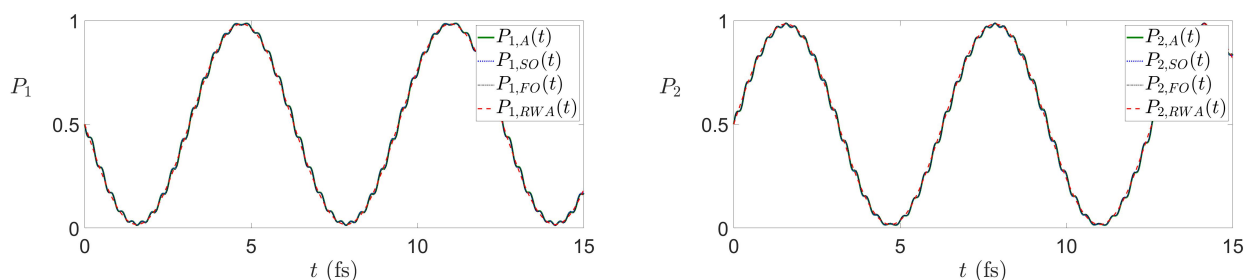
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω στάθμη(1). (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(2).

**Σχήμα 6.105** Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{4\pi}{3}$ .



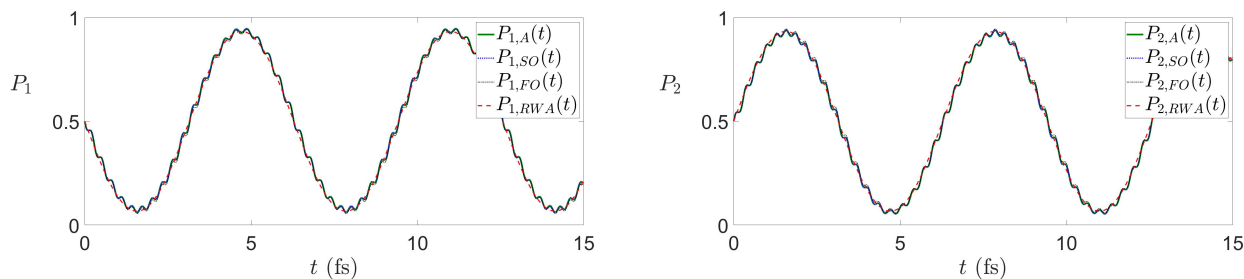
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.106 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{3\pi}{2}$ .



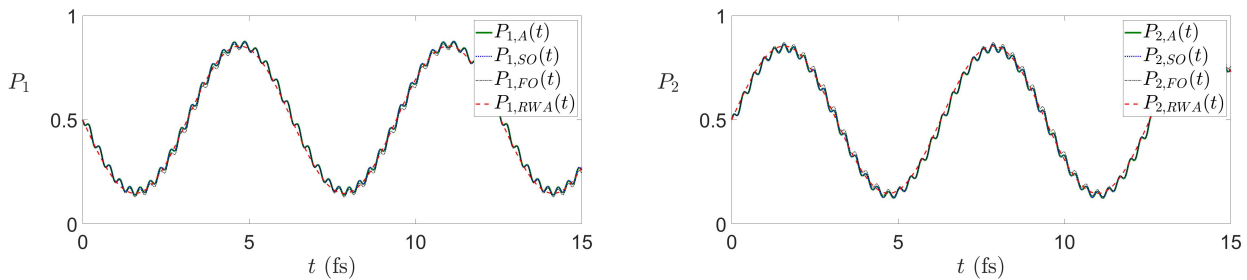
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.107 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{19\pi}{12}$ .



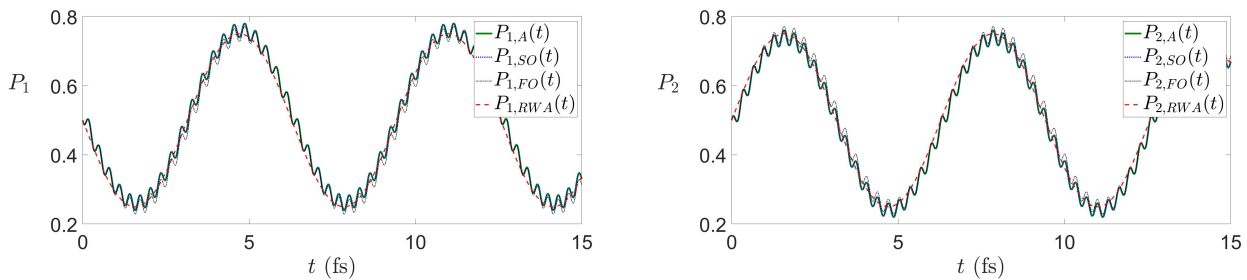
- (i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.108 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{5\pi}{3}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.109 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{7\pi}{4}$ .



(i) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην κάτω (ii) Οι πιθανότητες το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στην άνω στάθμη(1).

Σχήμα 6.110 Ταλάντωση Rabi με  $\Omega_R = 1fs^{-1}$ ,  $\Omega = 10fs^{-1}$ ,  $\omega = 10fs^{-1}$  και  $\theta - \phi = \frac{11\pi}{6}$ .

Παρατηρούμε λοιπόν, πρώτα από όλα ότι οι φάσεις δεν επηρεάζουν τη μέθοδο επανισώσεως, δηλαδή δεν επηρεάζονται τα  $\epsilon$  έτσι όντως όλα τα παραπάνω που έχουμε πει και σχολιάσει στις προηγούμενες περιπτώσεις ισχύουν. Τέλος σημαντικό είναι να σχολιάσουμε ότι η φάση απλά είναι ένας αριθμός ο οποίος πολλαπλασιάζεται στους συντελεστές. Τέλος η απόκλιση της πρώτης τάξης είναι αναμενόμενη, διότι στη πρώτη τάξη με  $\epsilon = 10^{-1}$  αγνοούμε όρους με τάξη μικρότερη από  $10^{-2}$ , ενώ η ταλάντωση είναι της τάξης  $10^{-2}$ . Αυτό σημαίνει ότι αγνοούμε σημαντικούς όρους.

### 6.3 Σύγκριση της μεθόδου επανισώσεως και της μεθόδου προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος.

Σε αυτό το σημείο θα συγκρίνουμε την λύση της προσέγγισης περιστρεφόμενου κύματος με την μέθοδο επανισώσεως. Θα σχολιαστούν τα θετικά και τα αρνητικά των δύο μεθόδων και σε ποιες περιπτώσεις αξίζει να χρησιμοποιούμε τη μια και σε ποιες την άλλη. Πριν ξεκινήσουμε να σχολιάσουμε ότι, ως πραγματική λύση στα παρακάτω θεωρούμε ότι είναι η αριθμητική λύση που μας δίνει το Matlab με την βοήθεια της εντολής ode45. Δηλαδή θεωρούμε ότι το Matlab μας λύνει σωστά το πρόβλημα, φυσικά έχουμε τις αμφιβολίες μας ότι θα υπάρχουν και από αυτή τη

λύση αποκλίσσει από την πραγματική, αλλά προς το παρόν μέχρι να λυθεί το πρόβλημα χωρίς προσεγγίσεις είναι η καλύτερη λύση που έχουμε.

Αρχικά για τη λύση της προσέγγισης περιστρεφόμενου κύματος το σημαντικότερο πλεονέκτημα είναι ότι λειτουργεί για όλες τις τιμές των συχνοτήτων. Δηλαδή δεν έχει κάποιον περιορισμό. Στις προηγούμενες παραγράφους παρουσιάσαμε πολλές περιπτώσεις. Οι περιπτώσεις που αξίζει να σχολιάσουμε είναι αυτές που είναι καλύτερη η χρήση της RWA από ότι η μέθοδος της επανισώσεως.

1.  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 9\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 10\text{fs}^{-1}$
2.  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 99\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100\text{fs}^{-1}$
3.  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 101\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100\text{fs}^{-1}$

Οι παραπάνω περιπτώσεις αφορούν την περίπτωση του αποσυντονισμού. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις καλύτερη μέθοδος ήταν αυτή της επανισώσεως και σε κάποιες περιπτώσεις δεν ήταν καμία μέθοδος καλή για χρήση. Παρατηρούμε λοιπόν ότι και στις 3 περιπτώσεις το  $\Omega$  τείνει στο  $\omega$  και επιπλέον το  $\Omega_R = \Delta$ , στο οποίο οφείλεται ότι η μέθοδος επανισώσεως είναι χειρότερη από την RWA. Τέλος παρακάτω παρουσιάζω περιπτώσεις οι οποίες ήταν καλές και οι δύο μέθοδοι, δηλαδή όποια μέθοδο και να χρησιμοποιήσουμε θα προσεγγίζαμε πολύ καλά την πραγματική λύση.

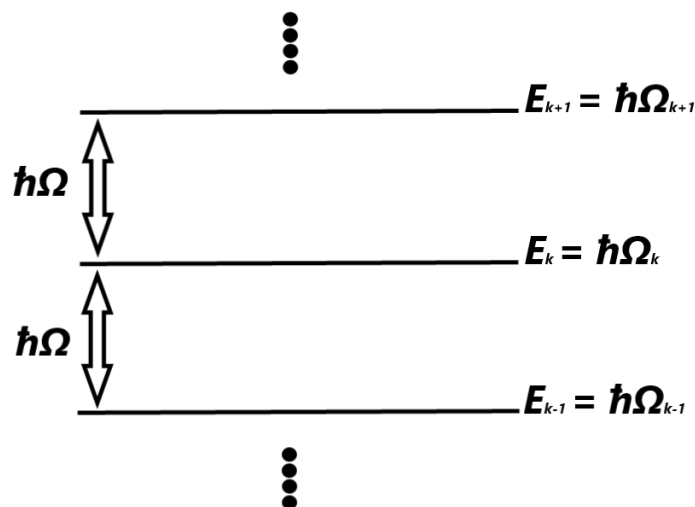
1.  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 90\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100\text{fs}^{-1}$
2.  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 100\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 90\text{fs}^{-1}$
3.  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 110\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 100\text{fs}^{-1}$
4.  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 990\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 1000\text{fs}^{-1}$
5.  $\Omega_R = 1\text{fs}^{-1}$ ,  $\Omega = 1000\text{fs}^{-1}$  και  $\omega = 990\text{fs}^{-1}$



## Κεφάλαιο 7

### Πολυσταθμικό σύστημα εντός προσεγγίσεως περιστρεφόμενου κύματος.

Στο παρόν κεφάλαιο θα λύσουμε το πρόβλημα αυτή τη φορά για  $N$  στάθμες. Οι προσεγγίσεις που θα χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό είναι ότι θα πρέπει οι στάθμες του συστήματος να είναι ισαπέχουσες και επιπλέον θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος. Με αυτές τις δύο προσεγγίσεις το πρόβλημα απλουστεύεται και είναι εφικτή η λύση του. Παρακάτω παρουσιάζεται η σχηματική αναπαράσταση για τρεις στάθμες με ίση ενεργειακή απόσταση μεταξύ τους.



Από την εξίσωση που καταλήξαμε στο πρώτο κεφάλαιο (1.21),

$$\dot{C}_{k'}(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_k C_k(t) e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k)t} U_{\mathcal{E}k'k}(t) \quad (7.1)$$

όπου,

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) z \Phi_k(\vec{r}) \quad (7.2)$$

Με στοιχεία πίνακα της συντεταγμένης  $z$ ,

$$z_{k'k} := \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) z \Phi_k(\vec{r}) \quad (7.3)$$

Σημειώνουμε πρώτα από όλα ότι τα  $\Phi_k$  είναι για  $k = 1, 3, 5, \dots$  άρτια ενώ για  $k' = 2, 4, 6, \dots$  είναι περιττά. Επομένως με βάση αυτή τη πληροφορία και την πληροφορία ότι το  $z$  είναι πάντα περιττό μπορούμε να πούμε το εξής:

Για  $k = k'$  τα  $z_{k,k} = 0$  διότι ισχύει,

$$z_{k,k} = \int dV \underbrace{|\Phi_k(\vec{r})|^2}_{\text{Άρτια}} \underbrace{z}_{\text{Περιττή}} = 0 \quad (7.4)$$

Για  $k \neq k'$ ,

παρατηρούμε λοιπόν το εξής:

Έστω για  $k' = k - 1$  προκύπτει:  $z_{k-1,k} \neq 0$ . Αυτό συμβαίνει διότι,

$$z_{k-1,k} = \int dV \Phi_{k-1}^*(\vec{r}) z \Phi_k(\vec{r}) \quad (7.5)$$

Αν το  $\Phi_{k-1}^*(\vec{r}) \rightarrow$  Άρτιο, τότε  $\Phi_k(\vec{r}) \rightarrow$  Περιττό ή αντίθετα αν το  $\Phi_{k-1}^*(\vec{r}) \rightarrow$  Περιττό, τότε  $\Phi_k(\vec{r}) \rightarrow$  Άρτιο. Έτσι είτε στη μία είτε στην άλλη περίπτωση το αποτέλεσμα θα είναι ΑΡΤΙΟ·ΠΕΡΙΤΤΟ·ΠΕΡΙΤΤΟ ή ΠΕΡΙΤΤΟ·ΠΕΡΙΤΤΟ·ΑΡΤΙΟ και άρα διάφορο του μηδενός. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι για  $k' = k - 2$  προκύπτει:  $z_{k-2,k} = 0$ .χ.ο.χ.

Άρα τελικά έχουμε,

$$z_{k-1,k} = z_{k,k-1} \neq 0$$

$$z_{k-2,k} = z_{k,k-2} = 0$$

$$z_{k-3,k} = z_{k,k-3} \neq 0$$

$$z_{k-4,k} = z_{k,k-4} = 0$$

...

$$z_{k-(N-1),k} \begin{cases} \neq 0, & N = \text{Άρτιο} \\ = 0, & N = \text{Περιττό} \end{cases}$$

Ξηρησιμοποιούμε,

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = -\mathcal{P}_{zk'k}\mathcal{E}_0 \cos(\omega t) = -\mathcal{P}_{zk'k}\mathcal{E}_0 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

Άρα θα έχουμε (7.1),

$$\begin{aligned} \dot{C}_{k'}(t) &= \frac{-i}{\hbar} \sum_k C_k(t) e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k)t} U_{\mathcal{E}k'k}(t) \Rightarrow \\ \dot{C}_{k'}(t) &= \frac{i}{2\hbar} \sum_k \mathcal{E}_0 \mathcal{P}_{zk'k} C_k(t) (e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k + \omega)t} + e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k - \omega)t}) \end{aligned}$$

Επιπλέον χρησιμοποιούμε  $\Omega_{k'} - \Omega_k = (k' - k)\Omega$ , δηλαδή χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι στάθμες μας έχουμε υποθέσει ότι είναι ισαπέχουσες.

Άρα,

$$\begin{aligned} \dot{C}_{k'}(t) &= \frac{i\mathcal{E}_0}{2\hbar} \sum_{k=1}^{k'} \mathcal{P}_{zk'k} C_k(t) (e^{i((k'-k)\Omega + \omega)t} + e^{i((k'-k)\Omega - \omega)t}) + \\ &+ \frac{i\mathcal{E}_0}{2\hbar} \sum_{k=k'+1}^N \mathcal{P}_{zk'k} C_k(t) (e^{i((k'-k)\Omega + \omega)t} + e^{i((k'-k)\Omega - \omega)t}) \end{aligned}$$

Οι συντελεστές  $k' - k$  εμφανίζονται στο παρακάτω πίνακα,

$k \ k'$	1	2	3	4	...	N
1	0	1	2	3	...	N-1
2	-1	0	1	2	...	N-2
3	-2	-1	0	1	...	N-3
4	-3	-2	-1	0	...	N-4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	-(N-1)	-(N-2)	-(N-3)	-(N-4)	...	0

Σύμφωνα με τη προσέγγιση RWA οι όροι που αντιστοιχούν σε αργές μεταβολές είναι, για το εκθετικό  $e^{i((k'-k)\Omega + \omega)t}$ , όταν η διαφορά  $k' - k = -1$  και για το εκθετικό  $e^{i((k'-k)\Omega - \omega)t}$ , όταν η διαφορά  $k' - k = 1$ . Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις οι μεταβολές είναι γρήγορες, επομένως και μπορούμε να τις απλοποιήσουμε. Έτσι από τις N εξισώσεις που προκύπτουν έχουμε για  $k' = 1$ ,  $k' = 2, 3, \dots, N - 1$  και  $k' = N$ ,

$$\dot{C}_1(t) = \frac{i\mathcal{P}_{1,2}\mathcal{E}_0}{2\hbar} C_2(t) e^{i\Delta t} \quad (7.6)$$

$$\dot{C}_{k'}(t) = \frac{i\mathcal{P}_{k',k'-1}\mathcal{E}_0}{2\hbar} C_{k'-1}(t) e^{-i\Delta t} + \frac{i\mathcal{P}_{k',k'+1}\mathcal{E}_0}{2\hbar} C_{k'+1}(t) e^{i\Delta t} \quad (7.7)$$

$$\dot{C}_N(t) = \frac{i\mathcal{P}_{N,N-1}\mathcal{E}_0}{2\hbar} C_{N-1}(t) e^{-i\Delta t} \quad (7.8)$$

Τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να τις λύσουμε με τη βοήθεια των παρακάτω μετασχηματισμών:

Για  $N=\text{Άρτιο}$ :

$$C_{k'}(t) = \mathbb{C}_{k'}(t)e^{i((N+1)-2k')\frac{\Delta}{2}t} \Rightarrow$$

$$\dot{C}_{k'}(t) = \dot{\mathbb{C}}_{k'}(t)e^{i((N+1)-2k')\frac{\Delta}{2}t} + i((N+1) - 2k')\frac{\Delta}{2}\mathbb{C}_{k'}(t)e^{i((N+1)-2k')\frac{\Delta}{2}t}$$

Για  $N=\text{Περιττό}$ :

$$C_{k'}(t) = \mathbb{C}_{k'}(t)e^{i(N-2k')\frac{\Delta}{2}t} \Rightarrow$$

$$\dot{C}_{k'}(t) = \dot{\mathbb{C}}_{k'}(t)e^{i(N-2k')\frac{\Delta}{2}t} + i(N - 2k')\frac{\Delta}{2}\mathbb{C}_{k'}(t)e^{i(N-2k')\frac{\Delta}{2}t}$$

Επομένως με τη βοήθεια των παραπάνω μετασχηματισμών έχουμε,

Για  $N=\text{Άρτιο}$ :

Η εξίσωση για  $k' = 1$ :

$$\dot{C}_1(t)e^{i((N+1)-2)\frac{\Delta}{2}t} + i((N+1) - 2)\frac{\Delta}{2}C_1(t)e^{i((N+1)-2)\frac{\Delta}{2}t} = \frac{i\mathcal{P}_{1,2}\mathcal{E}_0}{2\hbar}C_2(t)e^{i((N+1)-4)\frac{\Delta}{2}t}e^{i\Delta t} \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbb{C}}_1(t) = -i(N-1)\frac{\Delta}{2}\mathbb{C}_1(t) + \frac{i\mathcal{P}_{1,2}\mathcal{E}_0}{2\hbar}\mathbb{C}_2(t)$$

Η εξίσωση για  $k' = 2, 3, \dots, N-1$ :

$$\dot{C}_{k'}(t)e^{i((N+1)-2k')\frac{\Delta}{2}t} + i((N+1) - 2k')\frac{\Delta}{2}C_{k'}(t)e^{i((N+1)-2k')\frac{\Delta}{2}t} =$$

$$= \frac{i\mathcal{P}_{k',k'-1}\mathcal{E}_0}{2\hbar}C_{k'-1}(t)e^{i((N+1)-2(k'-1))\frac{\Delta}{2}t}e^{-i\Delta t} + \frac{i\mathcal{P}_{k',k'+1}\mathcal{E}_0}{2\hbar}C_{k'+1}(t)e^{i((N+1)-2(k'+1))\frac{\Delta}{2}t}e^{i\Delta t} \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbb{C}}_{k'}(t) = \frac{i\mathcal{P}_{k',k'-1}\mathcal{E}_0}{2\hbar}\mathbb{C}_{k'-1}(t) - i(N+1-2k')\frac{\Delta}{2}\mathbb{C}_{k'}(t) + \frac{i\mathcal{P}_{k',k'+1}\mathcal{E}_0}{2\hbar}\mathbb{C}_{k'+1}(t)$$

Η εξίσωση για  $k' = N$ :

$$\dot{C}_N(t)e^{i((1-N))\frac{\Delta}{2}t} + i((1-N))\frac{\Delta}{2}C_N(t)e^{i((1-N))\frac{\Delta}{2}t} = \frac{i\mathcal{P}_{N,N-1}\mathcal{E}_0}{2\hbar}C_{N-1}(t)e^{i((N+1)-2(N-1))\frac{\Delta}{2}t}e^{-i\Delta t} \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbb{C}}_N(t) = +i(N-1)\frac{\Delta}{2}\mathbb{C}_N(t) + \frac{i\mathcal{P}_{N,N-1}\mathcal{E}_0}{2\hbar}\mathbb{C}_{N-1}(t)$$

Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε:  $\Omega_{Rk'k} = \frac{\mathcal{P}_{zk'k}\mathcal{E}_0}{\hbar}$ .

Άρα για  $N=$ Άρτιο:

για  $k' = 1$ :

$$\dot{C}_1(t) = -i(N-1)\frac{\Delta}{2}C_1(t) + \frac{i\Omega_{R1,2}}{2}C_2(t)$$

για  $k' = 2, 3, \dots, N-1$ :

$$\dot{C}_{k'}(t) = \frac{i\Omega_{Rk',k'-1}}{2}C_{k'-1}(t) - i(N+1-2k')\frac{\Delta}{2}C_{k'}(t) + \frac{i\Omega_{Rk',k'+1}}{2}C_{k'+1}(t)$$

για  $k' = N$ :

$$\dot{C}_N(t) = +i(N-1)\frac{\Delta}{2}C_N(t) + \frac{i\Omega_{RN,N-1}}{2}C_{N-1}(t)$$

Για  $N=$ Περιττό:

Η εξίσωση για  $k' = 1$ :

$$\dot{C}_1(t)e^{i(N-2)\frac{\Delta}{2}t} + i(N-2)\frac{\Delta}{2}C_1(t)e^{i(N-2)\frac{\Delta}{2}t} = \frac{i\mathcal{P}_{1,2}\mathcal{E}_0}{2\hbar}C_2(t)e^{i(N-4)\frac{\Delta}{2}t}e^{i\Delta t} \Rightarrow$$

$$\dot{C}_1(t) = -i(N-2)\frac{\Delta}{2}C_1(t) + \frac{i\mathcal{P}_{1,2}\mathcal{E}_0}{2\hbar}C_2(t)$$

Η εξίσωση για  $k' = 2, 3, \dots, N-1$ :

$$\begin{aligned} & \dot{C}_{k'}(t)e^{i(N-2k')\frac{\Delta}{2}t} + i(N-2k')\frac{\Delta}{2}C_{k'}(t)e^{i(N-2k')\frac{\Delta}{2}t} = \\ & = \frac{i\mathcal{P}_{k',k'-1}\mathcal{E}_0}{2\hbar}C_{k'-1}(t)e^{i(N-2(k'-1))\frac{\Delta}{2}t}e^{-i\Delta t} + \frac{i\mathcal{P}_{k',k'+1}\mathcal{E}_0}{2\hbar}C_{k'+1}(t)e^{i(N-2(k'+1))\frac{\Delta}{2}t}e^{i\Delta t} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\dot{C}_{k'}(t) = \frac{i\mathcal{P}_{k',k'-1}\mathcal{E}_0}{2\hbar}C_{k'-1}(t) - i(N-2k')\frac{\Delta}{2}C_{k'}(t) + \frac{i\mathcal{P}_{k',k'+1}\mathcal{E}_0}{2\hbar}C_{k'+1}(t)$$

Η εξίσωση για  $k' = N$ :

$$\dot{C}_N(t)e^{i(N-2N)\frac{\Delta}{2}t} + i((N-2N))\frac{\Delta}{2}C_N(t)e^{i(N-2N)\frac{\Delta}{2}t} = \frac{i\mathcal{P}_{N,N-1}\mathcal{E}_0}{2\hbar}C_{N-1}(t)e^{i(N-2(N-1))\frac{\Delta}{2}t}e^{-i\Delta t} \Rightarrow$$

$$\dot{C}_N(t) = +iN\frac{\Delta}{2}C_N(t) + \frac{i\mathcal{P}_{N,N-1}\mathcal{E}_0}{2\hbar}C_{N-1}(t)$$

Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε πάλι:  $\Omega_{Rk'k} = \frac{\mathcal{P}_{zk'k}\mathcal{E}_0}{\hbar}$ .

Άρα για  $N=$ Άρτιο:

για  $k' = 1$ :

$$\dot{\mathbf{C}}_1(t) = -i(N-2)\frac{\Delta}{2}\mathbf{C}_1(t) + \frac{i\Omega_{R1,2}}{2}\mathbf{C}_2(t)$$

για  $k' = 2, 3, \dots, N-1$ :

$$\dot{\mathbf{C}}_{k'}(t) = \frac{i\Omega_{Rk',k'-1}}{2}\mathbf{C}_{k'-1}(t) - i(N-2k')\frac{\Delta}{2}\mathbf{C}_{k'}(t) + \frac{i\Omega_{Rk',k'+1}}{2}\mathbf{C}_{k'+1}(t)$$

για  $k' = N$ :

$$\dot{\mathbf{C}}_N(t) = +iN\frac{\Delta}{2}\mathbf{C}_N(t) + \frac{i\Omega_{RN,N-1}}{2}\mathbf{C}_{N-1}(t)$$

Έτσι προκύπτουν τρεις εξισώσεις για κάθε περίπτωση. Δηλαδή τρεις εξισώσεις για  $N=$ Άρτιο και άλλες τρεις εξισώσεις για  $N=$ Περιττό. Έτσι με δεδομένο το  $N$  προκύπτει ένα σύστημα εξισώσεων το οποίο είναι πρόβλημα ιδιοτιμών - ιδιοδιανυσμάτων, το οποίο είναι εφικτό να λυθεί και να μας δώσει τις λύσεις του προβλήματος μας.

Βλέπουμε δηλαδή ότι για κάθε περίπτωση προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{C}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{C}}_2(t) \\ \dot{\mathbf{C}}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{C}}_N(t) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(t) \\ \mathbf{C}_2(t) \\ \mathbf{C}_3(t) \\ \vdots \\ \mathbf{C}_N(t) \end{bmatrix}$$

Όπου για  $N=$ Άρτιο:

$$\tilde{A} =$$

$$\frac{i}{2} \begin{bmatrix} -(N-1)\Delta & \Omega_{R1,2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Omega_{R1,2} & -(N-3)\Delta & \Omega_{R2,3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega_{R2,3} & -(N-5)\Delta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \Omega_{Rk'-2,k'-1} & ((N+1)-2(k'-1))\Delta & \Omega_{Rk'-1,k'} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Omega_{Rk'-1,k'} & ((N+1)-2k')\Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-1)\Delta \end{bmatrix}$$

Όπου για  $N=$ Περιττό:

$$\tilde{A} =$$

$$\frac{i}{2} \begin{bmatrix} -(N-2)\Delta & \Omega_{R1,2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Omega_{R1,2} & -(N-4)\Delta & \Omega_{R2,3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega_{R2,3} & -(N-6)\Delta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \Omega_{Rk'-2,k'-1} & -(N-2(k'-1))\Delta & \Omega_{Rk'-1,k'} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Omega_{Rk'-1,k'} & -((N-2k')\Delta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N\Delta \end{bmatrix}$$

Γενικά λοιπόν και στις δύο περιπτώσεις έχουμε,

$$\tilde{A} = -iA$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \tilde{A}\vec{x}(t)$$

Δοκιμάζω λύσεις στη μορφή,  $\vec{x}(t) = \vec{u}e^{\tilde{\lambda}t}$ , με  $\tilde{\lambda} = -i\lambda$ . Άρα προκύπτει,

$$\tilde{\lambda}\vec{u}e^{\tilde{\lambda}t} = \tilde{A}\vec{u}e^{\tilde{\lambda}t} \Rightarrow -i\lambda\vec{u} = -iA\vec{u} \Rightarrow$$

$$\boxed{A\vec{u} = \lambda\vec{u}}$$

Δηλαδή προκύπτει για οποιαδήποτε περίπτωση  $N$ , πρόβλημα ιδιοτιμών - ιδιοδιανυσμάτων.

# Βιβλιογραφία

- [1] Κωνσταντίνος Σιμσερίδης, Κβαντική Οπτική και Lasers, Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, Αθήνα, [www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr), ISBN 978-960-603-073-4, 2015. Creative Commons Αναφορά δημιουργού - Μη εμπορική χρήση - Όχι παράγωγα έργα (CC BY-NC-ND) 3.0.
- [2] Κωνσταντίνος Σιμσερίδης, Κβαντική Οπτική και Lasers, σημειώσεις του μαθήματος του Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ.
- [3] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer, New York, 1983, [*in series* Applied Mathematical Sciences, Volume 42, Editors J.E. Marsden L. Sirovich F. John (deceased)] Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, ISBN 978-1-4612-7020-1, ISBN 978-1-4612-1140-2 (eBook), DOI 10.1007/978-1-4612-1140-2.
- [4] J. A. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Springer, New York, 2007, Second Edition, [*in series* Applied Mathematical Sciences, Volume 59, Editors S.S. Antman J.E. Marsden L. Sirovich] Library of Congress Control Number: 2007926028, ISBN-10: 0-387-48916-9, ISBN-13: 978-0-387-48916-2, eISBN-13: 978-0-387-48918-6, 59.
- [5] C. Zhang, An Introduction to Averaging Method, Dynamics at the Horsetooth 2A, 2010. Focused Issue: Asymptotics and Perturbations An Introduction to Averaging Method, Chuan Zhang, Department of Mathematics, Colorado State University, Report submitted to Prof. I. Oprea for Math 676, Fall 2010]
- [6] C. Holmes and P. Holmes, Second order averaging and bifurcations to subharmonics in Duffing's equation, Journal of Sound and Vibration **78**, 163-164 (1981).
- [7] A. A. Batista, B. Birnir, M. S. Sherwin, Subharmonic generation in a driven asymmetric quantum well, Physical Review B **61**, 15108-15113 (2000).
- [8] A. A. Batista, Rabi oscillations in two-level systems beyond the rotating-wave approximation, arXiv:1507.05124v1 [quant-ph], (2015).
- [9] P. Howard, Solving ODE in MATLAB, 2007.