Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων

Διδακτορική Διατριβή

Μη διαταρακτικές μέθοδοι και συναρτήσεις μονοτονίας σε διδιάστατες θεωρίες πεδίου

Παντελής Πανόπουλος

Αθήνα, 2020

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα I

Ευχαριστίες 1

Περίληψη 3

Abstract 5

1 Εισαγωγή 7

2 Διδιάστατες Σύμμορφες Θεωρίες Πεδίου 13

2.1 Σύμμορφη ομάδα στις d-διαστάσεις 13

2.1.1 Περιορισμοί στις συναρτήσεις συσχέτησης από τη σύμμορφη συμμετρία 15

2.2 Σύμμορφη Θεωρία Πεδίου σε δύο διαστάσεις 19

2.3 Κανονική διάταξη και θεώρημα Wick 24

2.3.1 OPEs 26

2.3.2 Άλγεβρα Virazoro 27

2.3.3 Χώρος καταστάσεων 28

2.4 Σύμμορφη ανωμαλία 30

3 WZW πρότυπα 35

3.1 Πρωτεύον Χειραλικό Πρότυπο (PCM) 36

3.2 WZW δράση 37

3.3 Κβαντική Θεωρία 39

3.3.1 Τανυστής Ενέργειας-Ορμής και κατασκευή Sugawara 41

3.4 Cosets 44

3.5 Υπολογισμός συναρτήσεων συσχέτισης 46

4 Θεωρήματα μονοτονίας στην Θεωρία Πεδίου 49

4.1 Θεώρημα μονοτονίας στις δύο διαστάσεις 49

4.2 Θεωρήματα μονοτονίας σε διαστάσεις $d \neq 2$ 55

4.2.1 Το F-θεώρημα στις τρεις διαστάσεις 55
4.2.2 Το a-θεώρημα στις τέσσερις διαστάσεις 59

5 Επισκόπηση στις λ-παραμορφώσεις 61
5.1 Απλές λ-παραμορφώσεις 62
5.1.1 Μη Αβελιανός Τ-δυισμός και όρια 65
5.1.2 Η β-συνάρτηση του λ-προτύπου 67
5.2 Ανώμαλες διαστάσεις γ 69
5.3 Απλές λ-παραμορφώσεις με δύο ομάδες 72
5.4 λ-παραμορφώσεις με διαφορετικά επίπεδα 75
5.4.0.1 Εξάλειψη του ενός πινακα παραμόρφωσης 78

6 Ακριβή αποτελέσματα από το χώρο σταθερών ζεύξης και την ενεργό δράση 79
6.1 Ανώμαλες διαστάσεις απλών ρευμάτων 79
6.1.1 Οι εξισώσεις για τις RG ροές 81
6.1.2 Ανώμαλη διάσταση του ρεύματος 84
6.2 Ανώμαλες διαστάσεις γενικών σύνθετων ρευμάτων 85
6.2.1 Οι εξισώσεις της RG ροής 88
6.2.2 Σημαντικά παραδείγματα 91
6.2.2.1 Ο χειραλικός τελεστής $\mathcal{O}^{(m,0)}$ 92
6.2.2.2 Ο μικτός τελεστής $\mathcal{O}^{(2,1)}$ 94
6.3 λ-παραμορφώσεις με άλγεβρες διαφορετικών επιπέδων 95
6.3.1 Εξισώσεις για τις RG ροές 97
6.3.2 Σημαντικά παραδείγματα 100
6.3.2.1 Ολομορφικοί τελεστές $\mathcal{O}^{(m,0)}$ 100
6.3.2.2 Ο μικτός τελεστής $\mathcal{O}^{(2,1)}$ 101
6.4 λ-παραμορφώσεις αύτο- και αμοιβαίου τύπου 102
6.4.1 Η μετρική Zamolochikov 103
6.4.2 Ανώμαλες διαστάσεις σύνθετων τελεστών 104
6.4.2.1 Τα δύο όρια και οι ανώμαλες διαστάσεις 106
6.5 Εξαγωγή αποτελεσμάτων με τη χρήση θεωρίας διαταραχών 106
6.5.1 Χειραλικοί τελεστές $\mathcal{O}^{(m,0)}$ έως τάξη $\mathcal{O}(\lambda^2)$ 107
6.5.2 Χειραλικός τελεστής $\mathcal{O}^{(2,0)}$ έως τάξη $\mathcal{O}(\lambda^3)$ 109
6.5.3 Ο μικτός τελεστής $\mathcal{O}^{(2,1)}$ το $\mathcal{O}(\lambda^2)$ 110

7 Ακριβής συνάρτηση C στις λ-παραμορφώσεις 115
7.1 RG ροές από χώρους ομάδων 115

7.1.1 Από $G_{k_1} \times G_{k_2}$ σε $\frac{G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}$ 119
7.1.2 Από $G_{k_1} \times G_{k_2}$ σε $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$ 119
7.1.3 Από $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$ σε $\frac{G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}$ 120
7.2 RG ροές από χώρους πηλίκα 120
7.3 Περίπτωση τεσσάρων σταθερών ζεύξης 122

8 Συμπεράσματα και κατευθύνσεις 125

Α΄ Συντεταγμένες στο μιγαδικό επιπεδο 127

Β΄ Τεχνικές υπολογισμού ολοκληρωμάτων 129

Γ΄ Παράρτημα στο κεφάλαιο 3 133
Γ΄.1 Η μετρική Zamolodchikov για τον $\mathcal{O}^{(m,n)}$ 133
Γ΄.2 Στοιχεία από την $SU(N)$ θεωρία ομάδων 135
Γ΄.3 Συμπλήρωμα στους διαταρακτικούς υπολογισμούς 137
Γ΄.3.1 Ολομορφικός τελεστής $\mathcal{O}^{(2,0)}$ 138
Γ΄.4 Συμπλήρωμα στην ενότητα 5 142

Ευχαριστίες

Για την υλοποίηση και περάτωση της παρούσας διδακτορικής διατριβής θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή Κωνσταντίνο Σφέτσο για τη στήριξη και καθοδήγηση σε όλο το φάσμα της διατριβής καθώς και για τις συζητήσεις μας σε ποικίλες εκφάνσεις της θεωρητικής φυσικής. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Αν. Καθηγητές Γεώργιο Διαμάντη και Φώτιο Διάκονο καθώς επίσης και τον καθηγητή Αλέξανδρο Καρανίκα για την ξεχωριστή συνεισφορά τους. Επιπρόσθετα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθ. Αθανάσιο Λαχανά για τη μεθοδολογία σκέψης που μου εμφύσησε δια μέσου της επαφής μας και μέσω της προπτυχιακής και μεταπτυχιακής εργασίας που πραγματοποιήθηκαν υπό την επίβλεψή του. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συνεργάτες μου Γεώργιο Γεωργίου, Κωνσταντίνο Σιάμπο και Ευτυχία Σαγκριώτη για την εξαίρετη συνεργασία μας. Τέλος ευχαριστώ τα υπόλοιπα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής μου, τους Καθηγητές Δημήτριο Τρίμπη και Αλέξανδρο Κεχαγιά, καθώς και την επταμελή επιτροπή εξέτασης συμπεριλαμβάνουσα εκτός της τριμελούς επιτροπής τον Βασίλειο Σπανό, Άρη Μουστάκα, Αλέξανδρο Καρανίκα και Γεώργιο Διαμάντη.

Ξεχωριστές ευχαριστίες αξίζουν στην οικογένειά μου για τη στήριξη σε όλες τα βήματά μου και την αμέριστη συμπαράστασταση στις δυσκολίες μου καθώς επίσης και όλους τους φίλους μου εμφανείς και μη, για όλες τις φορές που μέσω αυτών βρέθηκαν διέξοδοι σε πολλές φαινομενικά αδιέξοδες καταστάσεις.

Περίληψη

Στη διδακτορική του διατριβή με τίτλο «Μη διαταρακτικές μέθοδοι και το θεώρημα μονοτονίας σε διδιάστατες θεωρίες πεδίου» μελετώνται η εύρεση των C-συναρτήσεων και η χρήση μη διαταρακτικών μεθόδων στις ολοκληρώσιμες λ-παραμορφώσεις, για την εύρεση ανώμαλων διαστάσεων διαφόρων κλάσεων τελεστών.

Ξεκινάμε με μία επαρκή παρουσίαση του θεωρητικού υποβάθρου για την κατανόηση των υπολογισμών. Συγκεκριμένα ως αφετηρία παρουσιάζουμε βασικά στοιχεία της σύμμορφης θεωρίας πεδίου και στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στις πληροφορίες που χρειαζόμαστε από τα σύμμορφα πρότυπα WZW. Ο λόγος είναι ότι οι λ-παραμορφώσεις αποτελούν παραμορφώσεις των προτύπων αυτών. Στη συνέχεια περιγράφουμε τα θεωρήματα μονοτονίας σε δύο, τρεις και τέσσερις διαστάσεις δίνοντας έμφαση στο θεώρημα Zamolodchikov όπου αποδεικνύεται ότι για κάθε διδιάστατη σύμμορφη θεωρία πεδίου υπάρχει μια συνάρτηση που καλείται C και μετράει τους ενεργούς, άμαζους βαθμούς ελευθερίας καθώς η θεωρία ρέει από τις υψηλές στις χαμηλές ενέργειες. Επίσης δίνουμε περιληπτικά και τις κατασκευές των λ-προτύπων που θα χρησιμοποιήσουμε, για πληρότητα.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στη χρήση μη διαταρακτικών μεθόδων για την εύρεση των ανώμαλων διαστάσεων αλυσιδών ολομορφικών, αντι-ολομορφικών και μεικτών ρευματικών τελεστών. Ακριβέστερα, χρησιμοποιούμε τη γεωμετρία του χώρου των σταθερών ζεύξης καθώς επίσης και την ενεργό δράση των λ-παραμορφωμένων θεωριών. Εισάγοντας στις λ-παραμορφωμένες δράσεις έναν επιπρόσθετο όρο με μία νέα ζεύξη και ζητώντας κοντά στο σύμμορφο σημείο να εξαφανίζονται φαινόμενα μίξης των τελεστών, υπολογίζουμε τις ανώμαλες διαστάσεις χωρίς να υπεισέλθουμε στη χρήση θεωρίας διαταραχών. Συγκεκριμένα ο υπολογισμός προκύπτει από ένα σύνολο βημάτων τα οποία περιγραφικά είναι τα εξής: Ξεκινούμε με τη δράση που περιέχει ένα πρότυπο WZW ένα πρότυπο PCM και έναν επιπρόσθετο βοηθητικό όρο. Στη συνέχεια ακολουθώντας τη διαδικασία βάθμισης, μέσω της εισαγωγής των πεδίων βαθμίδας και βρίσκοντας τις εξισώσεις κίνησής τους, καταλήγουμε σε μία δράση για την οποία υπολογίζουμε τη συνάρτηση β καθώς και τη μετρική Zamolodchikov. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που συνδέουν τις ανώμαλες διαστάσεις με τη μετρική και τη συνάρτηση β, υπολογίζουμε τον πίνακα των ανώμαλων διαστάσεων των τελεστών που μελετούμε. Ο πίνακας είναι διαγώνιος και τα στοιχεία του είναι η ανώμαλη διάσταση του κάθε τελεστή από το ζεύγος τελεστών που εμφανίζονται στη δράση. Τέλος, τα αποτελέσματά μας ελέγχονται μέσω της θεωρίας διαταραχών. Για να επιτευχθεί αυτό, αναπτύσουμε τις ακριβείς εκφράσεις για μικρές τιμές της ζεύξης λ, ενώ ταυτόχρονα υπολογίζουμε και διαταρακτικά την ανώμαλη διάσταση του τελεστή. Οι τελικές εκφράσεις βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία μεταξύ τους.

Με τη χρήση του θεωρήματος Zamolodchikov, υπολογίζουμε τη συνάρτηση C για μία μεγάλη κλάση λ-παραμορφώσεων, χρησιμοποιώντας τεχνικές της σύμμορφης θεωρίας πεδίου. Οι C-συναρτήσεις ικανοποιούν φθινουσα μονοτονία και στα άκρα έχουν τις τιμές των κεντρικών φορτίων των σύμμορφων θεωριών μεταξύ των οποίων παρεμβάλλονται. Οι εκφράσεις που υπολογίζουμε είναι ακριβείς ως προς λ και ικανοποιούν όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες και συμμετρίες των λ-παραμορφώσεων. Οι C-συναρτήσεις που υπολογίζουμε αφορούν τις απλές λ-παραμορφώσεις, τις παραμορφώσεις με διαφορετικά επίπεδα της άλγεβρας ρευμάτων, καθώς και τις λ παραμορφώσεις για χώρους πηλίκα. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις, οι θεωρίες εμφανίζουν σύμμορφα σημεία στο IR και οπότε και περιγράφονται από σύμμορφες θεωρίες. Αντικαθιστώντας τις τιμές των σύμμορφων σημείων στη συνάρτηση C μπορεί κανείς να αναγνωρίσει τις παραπάνω σύμμορφες θεωρίες.

Abstract

In the following thesis we present a set of new results concerning integrable deformations of two dimensional Quantum Field Theories. The approach contains novel features and techniques of non-perturbative calculations, giving a more in insightful view and understanding of this broad area. The class of deformations we are dealing with, are called λ-deformations. These deformations enjoy a set of symmetries appearing to be significant, since when exploiting them, numerous of quantum non-perturbative results arise.

To serve our purpose, we start with an overview of Conformal Field Theory (CFT). Our aim is to describe the necessary tools for the reader, to become familiar with the basic notions of CFT that take place in our calculations. This contains a gentle introduction in two-dimensional CFT, engaging the reader with calculations of correlation functions in a general set up. Next we describe in some detail the famous WZW-models as an intermediate step to understand λ-deformations. The presentation contains single WZW models as well as coset constructions usually called Goddard-Kent-Olive.

To proceed, we give an outlook of monotonicity theorems in QFT. These theorems are related with the definition of functions that capture the effective degrees of freedom as the theory flows from high energies (UV) to low energies (IR). These functions decrease monotonically in accordance with our physical intuitions, since in this motion of the QFT in coupling space the degrees of freedom are lowered. These functions are not globally defined in all dimensions even though they all come under the name of C-theorems. This is because they are related with the form of the energy momentum two-point function, which differs and becomes more complicated as the number of dimensions increase. We first describe in considerable detail the Zamolodchikov C-theorem in two dimensions as a useful background for the evaluation of the λ-deformed C-functions. During the proof, the necessary set of notions concerning geometry in coupling space is developed, as a useful tool for anomalous dimension calculations for several operators. We also discuss the F-theorem in three dimensions and the a-theorem in four dimensions for completeness but without entering deep within.

Then, we introduce a detailed presentation of λ deformations that will appear in our treatment. The special features of these integrable theories are high-lighted, among which,

the invariance under duality symmetry transformations. These discrete transformations are crucial since when exploiting them, non-perturbative calculations are feasible giving a full control of the flow.

The core of our presentation follows. On chapter 6 we utilize the coupling space geometry and the exact β-function to calculate the anomalous dimensions of a wide class of operators in λ-deformed theories. This procedure comes with a set of steps taking place in the following manner: a) Starting with a λ-deformed theory we introduce a new term with a coupling (say $\tilde{\lambda}$) which can be seen as a perturbative source term. Then, the action contains two coupling constants and the coupling space becomes two dimensional. b) For this new action we calculate the β-functions for both couplings using the heat-kernel method. These β-functions are exact in λ and first order in $\tilde{\lambda}$. c) We then use a relation between the β-functions and the anomalous dimensions in coupling space and construct the anomalous dimension matrix of operators. At this point, the Zamolodchikov metric (the coupling space metric) is important d) Assuming that there is no mixing of operators as $\tilde{\lambda}$ approaches zero, we arrive at the anomalous dimension of the operator under study. The λ-deformed models we are focused on contain single λ-deformations, λ-deformations of different algebra levels k and of mutual type. For these theories, we first calculate the anomalous dimensions of single chiral and anti-chiral current operator and then we study chains of chiral, anti-chiral and mixed operators constructed out of these single currents. Our results are checked using perturbation theory appearing to be in full agreement with the Taylor expansions of the exact expressions. Note, that in our derivations, Feynman diagrams and standard perturbation theory are not used, making this method comprehensive and attractive by giving a useful perspective of coupling space geometry in calculating effective results of QFT.

Finally on chapter 7 we present a detailed calculation of the C-function for several λ-deformed theories. The useful expression for our derivation is the one relating the C-function with the β-function. Having in our grasp the β-functions for the models under study and using the Callan-Symansik equation which implies a general form for the C-function, we compute the C-function exact in λ and for large k. Our computation contains single λ-deformation, λ deformations for different level of k and coset spaces. Also it respects the monotonicity property and on fixed points it takes the values of the central charge of the CFT.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σε αυτή τη διδακτορική διατριβή παρουσιάζουμε ένα σύνολο αποτελεσμάτων σε μία κλάση ολοκληρώσιμων παραμορφώσεων σε σύμμορφες θεωρίες πεδίου. Οι παραμορφώσεις που θα εξετάσουμε, υπολογίζοντας ένα σύνολο κβαντικών μεγεθών, χαρακτηρίζονται από μεγάλη πρωτοτυπία λόγω των ιδιοτήτων τους, όπως είναι η ολοκληρωσιμότητα που προαναφλεραμε, η επανακανονικοποιησιμότητα και ένα σύνολο συμμετριών που ικανοποιούν. Όπως θα περιγράψουμε εκτενώς, με τη χρήση των συμμετριών αντλούμε ακριβείς πληροφορίες για την ομάδα επανακανονικοποίησης (RG)[1] φωτίζοντας νέες πτυχές σε αυτό τον ευρύτατο τομέα έρευνας.

Η ομάδα επανακανονικοποίησης αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα κεφάλαια της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου καθώς συσχετίζει μέσω μίας ομάδας ροής, θεωρίες σε διαφορετικές ενεργειακές κλίμακες. Πιο συγκεκριμένα, το βασικό επιχείρημα της ομάδας επανακανονικοποίησης είναι πως ξεκινώντας με μία δράση που περιγράφεται από ένα σύνολο σταθερών ζεύξης, έστω λ_i, καθώς μεταβάλλεται η ενεργειακή κλίμακα, οι ζεύξεις αυτές θα μεταβάλλονται εν γένει με ένα συγκεκριμένο τρόπο που εξαρτάται από τις αρχικές συμμετρίες της δράσης. Αποτέλεσμα αυτού είναι πως θεωρίες που είναι ισχυρά συζευγμένες σε υψηλές ενέργειες UV[2] (κοντινές αποστάσεις) όπως η Κβαντική Ηλεκτροδυναμική θα είναι ασθενώς συζευγμένες στις χαμηλές IR[3]. Αντίστροφη συμπεριφορά παρουσιάζουν θεωρίες που είναι ασθενώς συζευγμένες στις υψηλές ενέργειες οπότε και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε θεωρία διαταραχών ενώ παρουσιάζουν ισχυρή σύζευξη στις χαμηλές. Σε αυτή την περιοχή εμφανίζονται μη διαταρακτικά φαινόμενα καθώς η θεωρία διαταραχών καταρεεί και δεν υπαρχει πρόσβαση σε ποσοτικά αποτελέσματα μέσω αυτής.

Η παραπάνω ποιοτική συζήτηση γίνεται πιο συγκεκριμένη, αν εισάγουμε ποσοτικά μεγέθη μέσω των οποίων μπορούμε να μελετάμε τη συμπεριφορά των θεωριών σε αυτές τις περιοχές

[1] Το RG προκύπτει από την αγγλική μετάφραση Renormalization Group.
[2] Συντομογραφία για το Ultraviolet.
[3] Συντομογραφία για το Infrared.

όπως και σε όλο το φάσμα μεταβολής της ενέργειας. Για αυτό το λόγο οι σταθερές ζεύξεις ανάλογα με τη συμπεριφορά τους κάτω από τη μεταβολή ενεργειακής κλίμακας χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες (χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση). Καθώς υπάρχει ένα σύνολο τελεστών που έρχονται με τις σταθερές ζεύξεις η συμπεριφορά τους θα είναι ανάλογη των ζεύξεων. Τότε

- Σχετικοί (relevant) λέγονται οι τελεστές των οποίων η συμπεριφορά γίνεται σημαντική καθώς η θεωρία ¨ρέει' προς το IR
- Μη-σχετικοί (irrelevant) είναι οι τελεστές των οποίων η συμπεριφορά γίνεται αμελητέα κάτω από τη ροή ενέργειας προς το IR
- Οριακοί (marginal) είναι οι τελεστές που δε μπορούμε να αποφανθούμε εκ πρώτης όψεως για τη συμπεριφορά τους

Η ποσοτική συμπεριφορά της σταθεράς ζεύξης κάτω από τη ροή της ενέργειας δίνεται από τη συνάρτηση β

$$\beta(\lambda) \equiv \frac{d\lambda}{d\ln\mu} \tag{1.0.1}$$

όπου η ποσότητα μ είναι μία καθορισμένη ενεργειακή κλίμακα στην οποία επιλέγουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση β. Έτσι, για τη συνάρτηση β έχουμε επίσης τρεις περιπτώσεις συμπεριφοράς:

- $\beta(\lambda) > 0$, η θεωρία γίνεται ισχυρά συζευγμένη στο UV.
- $\beta(\lambda) = 0$, η θεωρία είναι σταθερή κάτω από την αλλαγή κλίμακας.
- $\beta(\lambda) < 0$, η θεωρία ονομάζεται ασυμπτωτικά ελέυθερη καθώς γίνεται ισχυρά συζευγμένη στο IR ενώ στο UV η θεωρία τείνει να γίνει ελεύθερη.

Επικεντρωνόμαστε για λίγο στην περίπτωση μηδενικής β-συνάρτησης. Όταν μία θεωρία πεδίου έχει μηδενική συνάρτηση β τότε έχει μία επιπλέον καθοριστική συμμετρία που ονομάζεται σύμμορφη και θα μελετηθεί εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις που θα μπορούσαν να παράξουν μηδενική συνάρτηση β. Στην πρώτη περίπτωση θα μπορούσε κανείς να κατασκευάσει από πρώτες αρχές μία θεωρία σύμμορφα συμμετρική ενώ στη δεύτερη περίπτωση υπολογίζοντας τη συνάρτηση β να εξετάσει τα σημεία όπου αυτή μηδενίζεται. Οι θεωρίες πεδίου που έχουν σύμμορφη συμμετρία λέγονται Σύμμορφες Θεωρίες Πεδίου (CFTs)[4]. Ένα σημείο όπου μηδενίζεται η συνάρτηση β ονομάζεται **σύμμορφο** ή **κρίσιμο σημείο** . Ο λόγος που αναφέρεται και ως κρίσιμο είναι διότι σε εκείνο το σημείο, στο πλαίσιο της στατιστικής φυσικής εμφανίζεται αλλαγή φάσης δεύτερης τάξης.

[4]Η συντομογραφία είναι από τα αρχικά Conformal Field Theory.

Κατά κόρον, θέλοντας να μελετήσουμε μία κβαντική θεωρία πεδίου, ξεκινάμε έχοντας μία δράση η οποία περιέχει αλληλεπιδράσεις και χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της ομάδας επανακανονικοποίησης (συνήθως διαταρακτικά), υπολογίζουμε τη συνάρτηση β και τις άλλες ποσότητες της θεωρίας που αλλάζουν κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης. Γνωρίζοντας όμως οτι η συνάρτηση β είναι μηδέν σε ένα σύμμορφο σημείο και θέλωντας να μελετήσουμε ροές καθώς φεύγουμε από αυτό, θα μπορούσαμε έχοντας ως σημείο εκκίνησης μία σύμμορφη θεωρία, να εισάγουμε έναν όρο παραμόρφωσης, δηλαδή να προσθέσουμε έναν όρο αλληλεπίδρασης στη δράση

$$S = S_{CFT} + \int d^d x \lambda^I \mathcal{O}_I \tag{1.0.2}$$

Στη συνέχεια με γνωστές μεθόδους μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση β προκειμένου να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της θεωρίας κάτω από αυτή την παραμόρφωση. Υπάρχει περίπτωση η συνάρτηση β μετά τον υπολογισμό της να είναι πάλι μηδέν, οπότε η θεωρία θα είναι σύμμορφη σε κβαντικό επίπεδο. Τότε λέμε ότι ο τελεστής $\mathcal{O}_I$ είναι **επακριβώς οριακός** (exactly marginal). Σε κάθε άλλη περίπτωση η συνάρτηση β είναι μη-μηδενική οπότε μπορούμε να μελετήσουμε τη ροή της θεωρίας κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης. Αν είναι πιθανό, εξετάζουμε τα νέα σημεία που μηδενίζεται η συνάρτηση β και βρίσκουμε νέα κρίσιμα σημεία που μπορούμε να μελετήσουμε το είδος των σύμμορφων θεωριών που τα περιγράφουν.

Ο τρόπος με τον οποίο παραμορφώνει κανείς μία σύμμορφη θεωρία πεδίου μπορεί να είναι αυθαίρετος, αλλά θα μπορούσε η παραμόρφωση να είναι τέτοια ώστε η νέα δράση να ικανοποιεί και ένα σύνολο συμμετριών, που θα αντανακλώνται στις συναρτήσεις συσχέτισης και γενικότερα στα μεγέθη που περιγράφουν το υπό μελέτη σύστημα.

Καθώς λοιπόν η παραμορφωμένη θεωρία ρέει από το UV στο IR φαίνεται λογικό, έστω και διαισθητικά, πως οι ενεργειακοί βαθμοί ελευθερίας του συστήματος θα ελλατώνονται. Εγείρεται λοιπόν το ερώτημα, αν υπάρχει κάποιος ποσοτικός τρόπος, κάποια συνάρτηση, που να σχετίζεται με τους βαθμούς ελευθερίας ή που να περιγράφει αυτή τη φθίνουσα μονοτονική τους μείωση. Μεγάλη βιβλιογραφία έχει αναπτυχθεί έως τώρα για το θέμα και έχουν αποδειχθεί θεωρήματα μονοτονίας στις δύο και τέσσερις διαστάσεις για την ύπαρξη τέτοιων συναρτήσεων, ενώ στις υπόλοιπες διαστάσεις έχουν υποτεθεί κάποιες συναρτήσεις που αποτελούν εικασίες, με κάποια παραδείγματα που τις επιβεβαιώνουν. Σε όλη αυτή τη συζήτηση δεν είχε παρουσιαστεί έως τώρα εκτός των αποδείξεων κάποια συνάρτηση που να δείχνει αυτή τη φθίνουσα μονοτονική ροή. Όπως όμως θα δούμε, για τις παραμορφώσεις που θα συζητήσουμε, μπορούμε να υπολογίσουμε επακριβώς τέτοιες συναρτήσεις.

Τέλος, αν ένα σύστημα περιγράφεται από μία δράση με παραπάνω από μία σταθερές ζεύξης, τότε οι σταθερές ζεύξης μπορούν να θεωρηθούν συντεταγμένες που ορίζουν τη

γεωμετρία των σταθερών ζεύξης. Αυτή η γεωμετρία για μία αλληλεπιδρώσα θεωρία είναι εν γένει μη τετριμμένη και όπως θα δούμε θα αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο για τον μη διαταρακτικό υπολογισμό ποσοτήτων για τις θεωρίες που συζητάμε.

Παρακάτω θα περιγράψουμε σχηματικά τον τρόπο με τον οποίο μπορει κανείς να παραμορφώσει μία σύμμορφη θεωρία μέσω μίας κλάσης ολοκληρώσιμων παραμορφώσεων οι οποίες στη βιβλιογραφία ονομάζονται **λ-παραμορφώσεις**. Οι λ-παραμορφώσεις, είναι παραμορφώσεις μίας συγκεκριμένης κατηγορίας διδιάστατων CFTs που ονομάζονται WZW-πρότυπα και συνοπτικά έχουν τις παρακάτω ιδιότητες

- Είναι ολοκληρώσιμες
- Οι δράσεις (1.0.2) είναι αναλλοίωτες κάτω από παραμετρικές δυικές συμμετρίες

Οι παραπάνω ιδιότητες των λ-παραμορφώσεων δίνουν τη δυνατότητα υπολογισμού μεγεθών κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης σε μη διαταρακτικό επίπεδο μέσω των οποίων μπορούμε να αποκτήσουμε πλήρη έλεγχο της ροής κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης.

Πράγματι, ένα από τα βασικά προβλήματα της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου είναι ότι οι ποσότητες που περιγράφουν τις αλληλεπιδρώσες θεωρίες μπορούν να γίνουν μόνο σε διαταρακτικό επίπεδο και μάλιστα όπως είπαμε, σε ορισμένες περιπτώσεις η θεωρία διαταραχών αδυνατεί να περιγράψει πληθώρα ισχυρά συζευγμένων συστημάτων που εμφανίζονται σε υποατομικά συστήματα αλλά και στη φυσική στερεάς κατάστασης. Μελετώντας τις λ-παραμορφώσεις και υπολογίζοντας τα κβαντικά μεγέθη που περιγράφουν τη θεωρία, λαμβάνουμε ακριβείς εκφράσεις της συνάρτησης β, όπως και άλλων ποσοτήτων[5]. Ετσι, οι λ-παραμορφώσεις και η μελέτη τους έρχεται να καλύψει αυτό το κενό δίνοντας ένα χάρτη στην ομάδα επανακανονικοποίησης μεταξύ σύμμορφων σημείων στο UV και στο IR.

Για τη βαθύτερη κατανόησή τους, αρχικά περιγράφουμε τα βασικά στοιχεία που χρειαζόμαστε. Στο κεφάλαιο 2 δίνουμε μία συνοπτική περιγραφή των σύμμορφων θεωριών πεδίου με έμφαση στις δύο διαστάσεις όπου εισάγουμε και τις απαραίτητες τεχνικές για τους υπολογισμούς μας. Στο κεφάλαιο 3 συζητάμε έως το σημείο που είναι χρήσιμο για εμάς τα WZW-πρότυπα. Στο κεφάλαιο 4 συζητούμε αναλυτικά την απόδειξη του θεωρήματος μονοτονίας στις δύο διαστάσεις (θεώρημα Zamolodchikov), καθώς επίσης δίνουμε και μία γενική αναφορά στις τέσσερις διαστάσεις(σχέση του Cardy) όπως επίσης και στις υποθέσεις που ισχύουν για τις τρεις διαστάσεις, για λόγους πληρότητας. Στο κεφάλαιο 5 δίνουμε μία επισκόπηση των λ-παραμορφώσεων, ενώ στο κεφάλαιο 6 υπολογίζουμε τη συνάρτηση C για μία μεγάλη κλάση αυτών των θεωριών. Τέλος στο κεφάλαιο 7, χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία του χώρου ζεύξεων υπολογίζουμε πληθώρα κβαντικών μεγεθών για πολλές κλάσεις

[5]Άλλα μεγέθη που σχετίζονται με την ομάδα επανακανονικοποίησης είναι οι **ανώμαλες διαστάσεις** και η **συνάρτηση C** τα οποία έχοντας πιο τεχνικά χαρακτηριστικά τα περιγράφουμε στα παρακάτω κεφάλαια.

τελεστών που ορίζονται στις λ-παραμορφώσεις και ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας διαταρακτικά. Ένα σύνολο παραρτημάτων ακολουθεί όπου περιέχει συμβάσεις, τρόπο υπολογισμού ολοκληρωμάτων καθώς επίσης και εκτεταμένους υπολογισμούς που δεν αναφέρονται στο κυρίως κείμενο.

Κεφάλαιο 2

Διδιάστατες Σύμμορφες Θεωρίες Πεδίου

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε (ή καλύτερα συγκεντρώνουμε) ορισμένα βασικά στοιχεία της διδιάστατης σύμμορφης θεωρίας πεδίου (CFT). Στην πρώτη ενότητα ξεκινάμε με την περιγραφή της σύμμορφης ομάδας σε d-διαστάσεις όπου και αναφέρουμε ορισμένα συμπεράσματα που ισχύουν για όλες τις διαστάσεις. Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στις δύο διαστάσεις οι οποίες χαρακτηρίζονται από την ιδιαιτερότητα ότι η σύμμορφη ομάδα γίνεται απειροδιάστατη. Επιπρόσθετα λόγω ικανοποίησης ολομορφικών εξισώσεων, χρησιμοποιούμε το ισχυρό εργαλείο της μιγαδικής ανάλυσης που μας επιτρέπει τη διεξαγωγή πλούσιων υπολογισμών στην κβαντική περιγραφή της θεωρίας.

2.1 Σύμμορφη ομάδα στις d-διαστάσεις

Ξεκινάμε με μία θεωρία πεδίου σε χώρο μετρικής $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ όπου το στοιχείο μήκους δίνεται από το $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Κάτω από την αλλαγή συντεταγμένων $x \to x'$ η μετρική αλλάζει ως

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta}(x) \tag{2.1.1}$$

Εξ ορισμού, η σύμμορφη ομάδα είναι μία υποομάδα των μετασχηματισμών συντεταγμένων οι οποίες αφήνουν αναλλοίωτη τη μετρική κάτω από μία κλίμακα δηλαδή

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x)g_{\mu\nu}(x) \tag{2.1.2}$$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί διατηρούν τη γωνία $u \cdot v/(u^2v^2)^{1/2}$ μεταξύ των διανυσμάτων u, v όπου $u \cdot v = g_{\mu\nu}u^\mu v^\nu$. Να σημειώσουμε ότι η ομάδα Poincare αποτελεί υποομάδα της σύμμορφης θέτωντας όπου $\Omega = 1$ στην (2.1.1).

Οι απειροστοί γεννήτορες της σύμμορφης ομάδας μπορούν να βρεθούν θεωρώντας τους γενικούς απειροστούς μετασχηματισμούς $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ κάτω από τους οποίους

$$ds^2 \to ds^2 + (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) dx^\mu dx^\nu \tag{2.1.3}$$

Υποθέτωντας ότι σε απειροστή μορφή $\Omega \simeq 1 + \omega$, για να ικανοποιείται η (2.1.1) θα πρέπει η ποσότητα $\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu$ να είναι ανάλογη του $\eta_{\mu\nu}$ όποτε

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} (\partial \cdot \epsilon) \tag{2.1.4}$$

όπου η σταθερά αναλογίας προκύπτει συστέλλοντας με $\eta^{\mu\nu}$ και τα δύο μέλη. Τότε, η απειροστή μορφή του Ω γραφεται

$$\Omega \simeq 1 + \frac{2}{d} (\partial \cdot \epsilon) \tag{2.1.5}$$

Συστέλοντας την (2.1.4) με $\partial_\mu \partial_\nu$ προκύπτει

$$\big(\eta_{\mu\nu} \partial^2 + (d-2) \partial_\mu \partial_\nu\big)(\partial \cdot \epsilon) = 0 \tag{2.1.6}$$

Για $d > 2$ από τις εξισώσεις (2.1.4) και (2.1.6) βλέπουμε πως οι τρίτες παράγωγοι του ϵ μηδενίζονται οπότε το ϵ μπορει είναι το πολύ τετραγωνικό στο x. Παρακάτω αναφέρουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις

- Αν το ϵ είναι μηδενική τάξη ως προς x τότε

$$\epsilon^\mu = a^\mu \tag{2.1.7}$$

  και αποτελούν τις **μεταθέσεις**.

- Αν το ϵ είναι γραμμικό σε τάξη x, τότε έχουμε δύο περιπτώσεις. Είτε

$$\epsilon^\mu = \omega^\mu{}_\nu \epsilon^\nu \tag{2.1.8}$$

  με $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ οπότε έχουμε τους **μετασχηματισμούς Lorentz**, είτε

$$\epsilon^\mu = \lambda x^\mu \tag{2.1.9}$$

  που ορίζουν τους **μετασχηματισμούς κλίμακας ή διαστολές**.

- Αν είναι έως τετραγωνικοί ως προς x τότε

$$\epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu b \cdot x \tag{2.1.10}$$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί λέγονται **ειδικοί σύμμορφοι μετασχηματισμοί** οι οποίοι μπορούν να εκφραστούν και ως

$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} + b^\mu \tag{2.1.11}$$

δηλαδή μία αντιστροφή συν μία μετάθεση.

Μπορούμε να βρούμε τις ανεξάρτητες παραμέτρους της σύμμορφης άλγεβρας καθώς περιέχει d-μεταθέσεις από τα a^μ, $d(d-1)/2$ από τους μετασχηματισμούς Lorentz, μια παράμετρο από το λ και άλλες d παραμέτρους από τους ειδικούς μετασχηματισμούς. Συνολικά λοιπόν, η σύμμορφη ομάδα περιέχει $(d+1)(d+2)/2$ παραμέτρους. Θεωρώντας πως η μετρική $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,...,1)$, η άλγεβρα με τις παραπάνω ανεξάρτητες παραμέτρους είναι ισομορφική με την $SO(2,d)$.

Ολοκληρώνοντας τους απειροστούς μετασχηματισμούς, οι πεπερασμένοι σύμμορφοι μετασχηματισμοί γίνονται:

Poincare

$$\begin{aligned} x &\to x' = x + a \\ x &\to x' = \Lambda x \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Διαστολές

$$x \to x' = \lambda x \tag{2.1.13}$$

Ειδικοί σύμμορφοι

$$x \to x' = \frac{x + bx^2}{1 + 2b\cdot x + b^2x^2} \tag{2.1.14}$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι κάτω από την (2.1.14) έχουμε $x'^2 = x^2/(1+2b\cdot x + b^2x^2)^2$ οπότε η γενική μορφή του Ω είναι

$$\Omega(x) = (1 + 2b\cdot x + b^2x^2)^2 \tag{2.1.15}$$

2.1.1 Περιορισμοί στις συναρτήσεις συσχέτησης από τη σύμμορφη συμμετρία

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της σύμμορφης θεωρίας πεδίου, είναι πως η απαίτηση οι συναρτήσεις συσχέτισης να είναι αναλλοίωτες κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς, προσδιορίζει την ακριβή μορφή των συναρτήσεων συσχέτισης δύο και τριών σημείων. Συγκεκριμένα, έχοντας μία θεωρία με συλλογή πεδίων Φ και τη δράση $S[\Phi]$ που είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής

$$\begin{aligned} x &\to x' \\ \Phi(x) &\to \Phi'(x') \equiv \mathcal{F}(\Phi(x)) \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

η συνάρτηση συσχέτισης n-σημείων δίνεται από

$$\langle \Phi(x_1)\dots\Phi(x_n)\rangle = \frac{1}{Z}\int [d\Phi]\Phi(x_1)\dots\Phi(x_n)e^{-S[\Phi]} \tag{2.1.17}$$

Υποθέτωντας ότι είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς (2.1.16) προκύπτει ότι

$$\langle \Phi(x_1')\dots\Phi(x_n')\rangle = \langle \mathcal{F}\Phi(x_1)\dots\mathcal{F}\Phi(x_n)\rangle \tag{2.1.18}$$

Οι μετασχηματισμοί που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα πραγματοποιούνται με συγκεκριμένο τρόπο πάνω στα πεδία. Ειδικότερα ενδιαφερόμαστε για τις εκφράσεις των σύμμορφων μετασχηματισμών. Οι μετασχηματισμοί κλίμακας ορίζονται ως

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x \\ \Phi'(\lambda x) &= \lambda^{-\Delta}\Phi(x) \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

όπου Δ η **σύμμορφη διάσταση ή διάσταση κλίμακας** του πεδίου Φ. Γενικότερα κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς $x \to x'$ ένα πεδίο μετασχηματίζεται ως

$$\Phi(x) \to \Phi'(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-\Delta/d}\Phi(x) \tag{2.1.20}$$

όπου το $\partial x'/\partial x$ είναι η Ιακωβιανή του σύμμορφου μετασχηματισμού. Όταν ένα πεδίο μετασχηματίζεται με τον παραπάνω τρόπο λέγεται **οιωνεί-πρωτεύον** (quasi-primary). Στη συνέχεια, απαιτώντας αναλλοιώτητα της συνάρτησης συσχέτισης κάτω από μετασχηματισμούς κλίμακας $x \to \lambda x$, καταλήγουμε στην

$$\langle \Phi(\lambda x_1)\dots\Phi(\lambda x_n)\rangle = \lambda^{-\Delta_1}\dots\lambda^{-\Delta_n}\langle \Phi(x_1)\dots\Phi(x_n)\rangle \tag{2.1.21}$$

Αν επικεντρωθούμε στη συνάρτηση δύο σημείων

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = \lambda^{\Delta_1+\Delta_2}\langle \phi_1(\lambda x_1)\phi_2(\lambda x_2)\rangle \tag{2.1.22}$$

η αναλλοιώτητα κάτω από στροφές και μεταθέσεις απαιτεί ότι

$$\langle \phi_1(\lambda x_1)\phi_2(\lambda x_2)\rangle = f(|x_1 - x_2|) \tag{2.1.23}$$

όπου $f(x) = \lambda^{\Delta_1+\Delta_2} f(\lambda x)$. Άρα,

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \tag{2.1.24}$$

όπου το C_{12} αποτελεί σταθερά που μένει να υπολογιστεί. Χρησιμοποιώντας την Ιακωβιανή των σύμμορφων μετασχηματισμών

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \frac{1}{(1 - 2b\cdot x + b^2x^2)^d} \tag{2.1.25}$$

και την (2.1.20) προκύπτει ότι[1]

$$\frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} = \frac{C_{12}}{\gamma_1^{\Delta_1}\gamma_2^{\Delta_2}} \frac{(\gamma_1\gamma_2)^{(\Delta_1+\Delta_2)/2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \tag{2.1.27}$$

με

$$\gamma_i = (1 - 2b\cdot x_i + b^2x_i^2) \tag{2.1.28}$$

απ΄ όπου καταλήγουμε στην

$$\boxed{\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{2\Delta_1}} & \text{αν } \Delta_1 = \Delta_2 \\ 0 & \text{αν, } \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases}} \tag{2.1.29}$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο και χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες κάτω από στροφές, μεταθέσεις και διαστολές, η συνάρτηση τριών σημείων λαμβάνει τη γενική μορφή

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\rangle = \frac{C_{123}^{abc}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c} \tag{2.1.30}$$

όπου συμβολίζουμε με $x_{ij} = |x_i - x_j|$ και τα a, b, c ικανοποιούν

$$a + b + c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \tag{2.1.31}$$

[1]Μπορεί να δειχθεί

$$|x_i' - x_j'| = \frac{|x_i - x_j|}{(1 - 2bx_i + b^2x_i^2)^{1/2}(1 - 2bx_j + b^2x_j^2)^{1/2}} \tag{2.1.26}$$

.

Εφαρμόζοντας την αναλλοιώτητα κάτω απο διαστολές καταλήγουμε στο ότι τα a, b, c δίνονται από τις εκφράσεις [1]

$$\begin{aligned} a &= \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 \\ b &= \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 \\ c &= \Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2 \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

Τότε, η συνάρτηση τριών σημείων λαμβάνει την τελική της μορφή

$$\boxed{\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} x_{13}^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}}} \tag{2.1.33}$$

όπου η σταθερά C_{123} υπολογίζεται από το εκάστοτε πρόβλημα και ουσιαστικά αντανακλά την ελευθερία που έχουμε στην κανονικοποίηση των πεδίων. Όπως είδαμε παραπάνω, με τη χρήση της σύμμορφης συμμετρίας και χωρίς να έχουμε τη δράση της θεωρίας μπορούμε να υπολογίσουμε με μεγάλη ακρίβεια την συνάρτηση δύο και τριών σημείων. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και στις συναρτήσεις τεσσάρων σημείων όπως και στις ανώτερης τάξης συναρτήσεις συσχέτισης. Μπορούμε όμως να εκφράσουμε λόγου χάρη τη συνάρτηση τεσσάρων σημείων συναρτήσει των λεγομένων **αναρμονικών λόγων** (anharmonic ratios

$$\frac{x_{12}x_{34}}{x_{12}x_{24}}, \qquad \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{14}} \tag{2.1.34}$$

οπότε

$$\boxed{\langle \phi_1(x_1)\dots\phi_4(x_4)\rangle = f\left(\frac{x_{12}x_{34}}{x_{12}x_{24}}, \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{14}}\right)\prod_{i<j}^{4} x_{ij}^{\Delta/3-\Delta_i-\Delta_j}} \tag{2.1.35}$$

όπου $\Delta = \sum_{i=1}^{4}\Delta_i$. Τα παραπάνω συμπεράσματα όπως είπαμε ισχύουν για όλες τις διαστάσεις και θα τις χρησιμοποιήσουμε σε επόμενα κεφάλαια για τον υπολογισμό ανώμαλων διαστάσεων και συναρτήσεων συσχέτισης ανώτερης ταξής. Σημειώνουμε εδώ ότι για όλα τα διατηρούμενα ρεύματα η ισχύει η **ταυτότητα Ward** (σχέση (2.157) στην [1])

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle j^\mu \Phi(x_1)\dots\Phi_n(x_n)\rangle = -i\sum_{i=1}^{n}\delta(x-x_i)\langle\Phi(x_1)\dots G_a\Phi(x_i)\dots\Phi_n(x_n)\rangle \tag{2.1.36}$$

Η ταυτότητα Ward συσχετίζει τις κλασικές συμμετρίες με την συμπεριφορά των συναρτήσεων συσχέτισης οπότε συνδέει κλασικές με κβαντικές ποσότητες. Χωρίς απόδειξη, η οποία μπορεί να βρεθεί στην [1], ισχυεί ότι σε μία σύμμορφη θεωρία το ίχνος του τανυστή

Ενέργειας Ορμής (ΕΟ) είναι μηδέν, δηλαδή

$$T^{\mu}_{\mu} = 0 \tag{2.1.37}$$

Η παραπάνω σχέση είναι καθοριστική στις δύο διαστάσεις διότι όπως θα φανεί οι μη μηδενικές συνηστώσες του τανυστή ΕΟ είναι γεννήτορες των σύμμορφων μετασχηματισμών.

2.2 Σύμμορφη Θεωρία Πεδίου σε δύο διαστάσεις

Γυρίζοντας στην εξίσωση (2.1.6) και θέτωντας $d = 2$ προκύπτουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann

$$\partial_0\epsilon_0 = \partial_1\epsilon_1, \qquad \partial_0\epsilon_1 = -\partial_1\epsilon_0 \tag{2.2.1}$$

Τότε μπορεί να δειχθεί ότι οι γεννήτορες της διδιάστατης σύμμορφης άλγεβρας είναι ολομορφικοί και αντιολομορφικοί αντίστοιχα, οπότε και μπορούν να αναπτυχθούν κατά Laurent (να σημειωθεί ότι οι σειρές Laurent περιέχουν και όρους με πόλους). Οι απειροστοί μετασχηματισμοί σε μιγαδικές συντεταγμένες (βλεπε Α′) είναι

$$z^{'} = z + \epsilon(z) = z + \sum_{n\epsilon\mathbb{Z}} \epsilon_n(-z^{n+1}), \qquad \bar{z}^{'} = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{z} + \sum_{n\epsilon\mathbb{Z}} \bar{\epsilon}_n(-\bar{z}^{n+1}) \tag{2.2.2}$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό σε ένα πεδίο με $\delta(\epsilon)\phi(z,\bar{z}) = \phi^{'}(z,\bar{z}) - \phi(z,\bar{z})$ έχουμε

$$\delta(\epsilon)\phi = \sum_{n\epsilon\mathbb{Z}} \epsilon_n(-z^{n+1})\partial_z\phi + \sum_{n\epsilon\mathbb{Z}} \bar{\epsilon}_n(-\bar{z}^{n+1})\partial_z\phi \tag{2.2.3}$$

και βλέπουμε ότι οι γεννήτορες είναι

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z, \qquad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}} \tag{2.2.4}$$

Εύκολα φαίνεται πως ικανοποιούν την άλγεβρα

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n}, \qquad [\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m-n)\bar{l}_{m+n}, \qquad [l_m, \bar{l}_n] = 0 \tag{2.2.5}$$

Οι ανεξάρτητοι γεννήτορες $l_n, \bar{l}_n$ είναι άπειροι στο πλήθος, οπότε σε δύο διαστάσεις η σύμμορφη ομάδα είναι απειροδιάστατη και δίνεται από το ευθύ άθροισμα δύο ανεξάρτητων ισομορφικών αλγεβρών. Ξεχωρίζοντας τους l_{-1}, l_0, l_1 λαμβάνουμε την υπο-άλγεβρα

$$[l_{-1}, l_0] = -l_{-1} \qquad [l_0, l_1] = -l_1 \qquad [l_{-1}, l_1] = 2l_0 \tag{2.2.6}$$

Η παραπάνω υποάλγεβρα είναι συσχετισμένη με την **καθολική σύμμορφη ομάδα**. Από την (2.2.4) αμέσως φαίνεται ότι ο $l_{-1} = -\partial_z$ γεννά τις μεταθέσειςστο μιγαδικό επίπεδο, ο $l_0 = -z\partial_z$ γεννά τους μετασχηματισμούς κλίμακας και τις στροφές ενώ ο $l_1 = -z^2\partial_z$ γεννά τους ειδικούς σύμμορφους μετασχηματισμούς. Έτσι, οι καθολικοί σύμμορφοι μετασχηματισμοί πάνω στη σφαίρα Riemann $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$ παράγονται από τους $\{l_{-1}, l_0, l_1\}$ και συνοπτικά γράφονται

$$\{l_{-1}, l_0, l_1\} : \qquad z \to \frac{az+b}{cz+d} \tag{2.2.7}$$

με τα $a, b, c, d \, \epsilon \, \mathbb{C}$. Έχοντας τους l_n γεννήτορες και θέλοντας να βρούμε τη δράση τους πάνω στις κβαντικές καταστάσεις, χρειαζόμαστε τους απειροστούς μετασχηματισμούς των πεδίων που ορίζονται μέσω της (2.1.20)

$$z \to f(z) : \qquad \phi^{'}(z, \bar{z}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)^h \Big(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\Big)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \tag{2.2.8}$$

Αν τα πεδία μετασχηματίζονται για όλους τους σύμμορφους μετασχηματισμούς με τον παραπάνω τρόπο, τότε λέγονται **πρωτεύοντα** (primary). Σε απειροστή μορφή οι μετασχηματισμοί γράφονται

$$(f(z), \bar{f}(\bar{z})) = (z + \epsilon(z), \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})) : \qquad \delta_{\epsilon\bar{\epsilon}}\phi(z, \bar{z}) = (h\partial\epsilon + \bar{h}\bar{\partial}\bar{\epsilon} + \epsilon\partial + \bar{\epsilon}\bar{\partial})\phi(z, \bar{z}) \tag{2.2.9}$$

όπου το h και το $\bar{h}$ είναι οι **σύμμορφες διαστάσεις** του $\phi(z, \bar{z})$ και συνήθως τις συμβολίζουμε με $\Delta = (h, \bar{h})$. Προφανώς, από τον παραπάνω ορισμό, για ένα ολομορφικό πεδίο $\phi(z)$, έχουμε $\Delta_\phi = (h, 0)$ και για ένα αντι-ολομορφικό $\bar{\phi}(\bar{z})$, $\Delta_{\bar{\phi}} = (0, \bar{h})$. Το ανάπτυγμα Laurent ενός πεδίου είναι

$$\boxed{\phi(z, \bar{z}) = \sum_{n,m \epsilon \mathbb{Z}} z^{-n-h} \bar{z}^{-m-\bar{h}} \phi_{n,m}} \tag{2.2.10}$$

Οι σταθερές $\phi_{n,m}$ στην κβαντική περίπτωση προωθούνται σε τελεστές που δρουν στο χώρο Hilbert και όπως στην κβαντική θεωρία πεδίου είναι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας. Λύνοντας ως προς τις σταθερές

$$\phi_{n,m} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+h-1} \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{m+\bar{h}-1} \phi(w, \bar{w}) \tag{2.2.11}$$

Η Ερμητιανή συζυγία δίνεται από $z \to 1/\bar{z}$ και μέσω του ορισμού ενός πρωτεύοντος πεδίου

$$\phi^\dagger(z, \bar{z}) = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \phi\Big(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\Big) \to \boxed{\phi^\dagger_{n,m} = \phi_{-n,-m}} \tag{2.2.12}$$

Ένα από τα διατηρούμενα ρεύματα της σύμμορφης συμμετρίας είναι ο τανυστής Ενέργειας-Ορμής (ΕΟ) οπότε

$$\partial^{\mu} T_{\mu\nu} = 0 \tag{2.2.13}$$

με την ιδιότητα (2.1.37). Στη διδιάστατη θεωρία, σε μιγαδικές συντεταγμένες, το μηδενικό ίχνος του τανυστή ΕΟ γράφεται

$$T_{z\bar{z}} = 0 \tag{2.2.14}$$

Από την (2.2.13) προκύπτουν και οι άλλες δύο εξισώσεις

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0 \qquad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{2.2.15}$$

μέσω των οποίων έχουμε πως η T_{zz} συνηστώσα είναι ολομορφική ενώ η $T_{\bar{z}\bar{z}}$ είναι αντιολομορφική. Χρησιμοποιώντας τους συνήθεις συμβολισμούς της βιβλιογραφίας ορίζουμε

$$T(z) = -2\pi T_{zz} \qquad \bar{T}(\bar{z}) = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}} \tag{2.2.16}$$

Μέσω της ταυτότητας (2.1.36) μπορούμε να δείξουμε ότι οι ολομορφικοί σύμμορφοι μετασχηματισμοί έχουν γεννήτορες την $T(z)$ συνηστώσα και οι αντιολομορφικοί την $\bar{T}(\bar{z})$. Εφαρμόζοντας λοιπόν την ταυτότητα Ward στους απειροστούς σύμμορφους μετασχηματισμούς, προκύπτει

$$\delta_{\epsilon}\langle X\rangle = \int_M d^2x \partial_{\mu} \langle T^{\mu\nu}(x)\epsilon_{\nu}(x) X\rangle \tag{2.2.17}$$

όπου με X συμβολίζουμε μία συλλογή πεδίων. Αλλάζοντας σε μιγαδικές μεταβλητές και με τη χρήση του Stokes (Γ΄.3.1) προκύπτει η **σύμμορφη ταυτότητα Ward**

$$\delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}}\langle X\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz \epsilon(z)\langle T(z) X\rangle + \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\bar{z}\, \bar{\epsilon}(z)\langle \bar{T}(\bar{z}) X\rangle \tag{2.2.18}$$

Θα πρέπει λοιπόν οι ποσότητες στο δεξί μέλος να δίνουν τον κλασικό μετασχηματισμό του αριστερού μέλους. Συγκεκριμένα, επανερχόμενοι στη σχέση (2.2.9) για ένα πεδίο κάτω από ολομορφικούς μετασχηματισμούς όπου $X = \phi$, έχουμε

$$\begin{aligned} \delta_{\epsilon}\phi(z,\bar{z}) &= h\partial\epsilon\phi(w,\bar{w}) + \epsilon\partial\phi(w,\bar{w}) \\ \delta_{\epsilon}\langle\phi(w,\bar{w})\rangle &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\epsilon(z)\langle T(z)\phi(w,\bar{w})\rangle \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Ενα ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο είναι μη μηδενικό στην περίπτωση που η καμπύλη C περιέχει πόλους. Θα πρέπει να γράψουμε τη σωστή έκφραση για το $T(z)\phi(w,\bar{w})$ στην οριακή περίπτωση $z \to w$. Η έκφραση αυτή για δύο πεδία θα λέγεται Ανάπτυγμα Γινομένου

Τελεστών (OPE)[2]. Δεν είναι δύσκολο να μαντέψουμε την έκφραση για την περίπτωσή μας. Το OPE των $T(z)\phi(w,\bar{w})$ είναι

$$T(z)\phi(w,\bar{w}) = \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w,\bar{w}) + \frac{\partial\phi(w,\bar{w})}{z-w} + ... \tag{2.2.20}$$

Πράγματι, αντικαθιστώντας την παραπάνω ποσότητα στη δεύτερη έκφραση της (2.2.19) λαμβάνουμε την πρώτη. Με τον ίδιο τρόπο για τους αντι-ολομορφικούς μετασχηματισμούς έχουμε

$$\bar{T}(\bar{z})\phi(w,\bar{w}) = \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\phi(w,\bar{w}) + \frac{\partial\phi(w,\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + ... \tag{2.2.21}$$

Οι παραπάνω εκφράσεις, ισχύουν σε κβαντικό επίπεδο και δίνουν την έκφραση του OPE μεταξύ του τανυστή ενέργειας ορμής και ενός πρωτεύοντος πεδίου. Προχωρώντας, θέλουμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο OPE μεταξύ του τανυστή ενέργειας ορμής με τον εαυτό του. Καθώς όμως ο τανυστής ενέργειας ορμής σε μία θεωρία πεδίου κατασκευάζεται από τα πρωτεύοντα πεδία θα πρέπει να έχουμε την ακριβή του έκφραση. Για παράδειγμα αν μελετήσουμε ένα ελεύθερο μποζόνιο στις δύο διαστάσεις

$$S = \frac{1}{2}g\int d^2x(\partial_\mu\varphi)^2 \tag{2.2.22}$$

στο οποίο πρωτεύοντα πεδία είναι τα $\partial\varphi(z)$ και $\bar{\partial}\varphi(\bar{z})$, η κλασική έκφραση του τανυστή ενέργειας ορμής είναι

$$T(z) = -2\pi g\,\partial\varphi\partial\varphi \tag{2.2.23}$$

Προωθώντας τα πεδία σε τελεστές και ακολουθώντας τον ορισμό της κανονικής διάταξης, όπως θα αναλύσουμε στην επόμενη ενότητα, μπορεί να δείξει κανείς ότι το OPE του τανυστή ενέργειας ορμής είναι (βλέπε 5.3 [1])

$$T(z)T(w) = \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{2.2.24}$$

Ομοίως για ένα φερμιόνιο με δράση (βλέπε 5.4 [1])

$$S = \frac{1}{2}g\int d^2x\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi \tag{2.2.25}$$

ο τανυστής ΕΟ με τον εαυτό του δίνει

$$T(z)T(w) = \frac{1/4}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{2.2.26}$$

[2]Τα αρχικά OPE προκύπτουν από την αγγλική μετάφραση Operator Product Expansion και θα την χρησιμοποιούμε για συντομογραφία.

Τέλος, για σύστημα με πεδία φαντάσματα που περιγράφονται από τη δράση

$$S = \frac{1}{2} g \int d^2 x b_{\mu\nu} \partial^\mu c^\nu \tag{2.2.27}$$

όπου το $b_{\mu\nu}$ είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής και το c^μ είναι βαθμωτό που υπακούει στην άλγεβρα Grassman, δηλαδή $ab = -ba$, ο τανυστής ΕΟ με τον εαυτό του δίνει

$$T(z)T(w) = \frac{-13}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{2.2.28}$$

Όπως φαίνεται σε όλα τα παραπάνω συστήματα, το OPE του τανυστή ΕΟ με τον εαυτό του δίνεται από τη γενική έκφραση

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{2.2.29}$$

όπου το c λέγεται **κεντρικό φορτίο** και για τα μποζόνια $c = 1$, για φερμιόνια $c = 1/2$ και για τα πεδία φαντάσματα $c = -26$. Μπορούμε λοιπόν να κινηθούμε αντίστροφα και να εξάγουμε τον κλασικό μετασχηματισμό για τον τανυστή ΕΟ γυρίζοντας στην (2.2.17) και θέτωντας όπου $X = T(w)$. Τότε, αντικαθιστώντας στο δεξί μέλος το OPE (2.2.29), προκύπτει

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon T(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \epsilon(z) T(z) T(w) \\ &= \frac{1}{12} c\, \partial_w^3 \epsilon(w) + 2T(w) \partial_w \epsilon(w) + \epsilon(w) \partial_w T(w) \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Ο πεπερασμένος μετασχηματισμός τότε είναι

$$T^{'}(z) = \Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} S(f(z), z) \tag{2.2.31}$$

με $S(f(z), z)$ την **Swartzian παράγωγο** που δίνεται από την

$$S(w, z) = \frac{1}{(\partial_z w)^2} ((\partial_z w)(\partial_z^2 w) - \frac{3}{2} (\partial_z^2 w)^2) \tag{2.2.32}$$

Παρατηρούμε ότι ο τανυστής ΕΟ ορμής δε μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο που μετασχηματίζεται ένα πρωτεύον πεδίο λόγω της ύπαρξης της Schwartzian. Πεδία που μετασχηματίζονται μερικώς ως πρωτεύοντα ονομάζονται **δευτερογενή** (secondary). Τέλος να σημειώσουμε ότι από τη σχέση (2.2.29) ο πρώτος όρος ουσιαστικά δίνει μία ανωμαλία στη συμπεριφορά του OPE του τανυστή ΕΟ, ενώ από το δεύτερο όρο βλεπουμε ότι η σύμμορφη διάσταση του $T(z)$ είναι

$$\Delta_T = 2 \tag{2.2.33}$$

Τα παραπάνω συμπεράσματα είναι όμοια και στην αντιολομορφική περίπτωση.

2.3 Κανονική διάταξη και θεώρημα Wick

Νωρίτερα αναφέραμε την έννοια της κανονικής διάταξης. Σε αυτή την ενότητα την παρουσιάζουμε αναλυτικά, δίνοντας επαρκείς λεπτομέρειες για τη χρήση της σε υπολογισμούς.

Η κανονική διάταξη ουσιαστικά ορίζεται με τον ίδιο τρόπο που την ορίζουμε στην κβαντική θεωρία πεδίου. Δηλαδή σε ένα γινόμενο τελεστών $a_i, a_i^\dagger$ που δρουν σε μία κατάσταση, αναδιατάσουμε τους τελεστές με τέτοιο τρόπο ώστε οι τελεστές καταστροφής να βρίσκονται δεξιά και οι τελεστές δημιουργίας αριστερά. Η ίδια διαδικασία θα πρέπει να γίνει και σε ένα γινόμενο τελεστών. Συνήθως, η κανονική διάταξη του γινομένου δύο τελεστών $\mathcal{O}(z)\mathcal{O}(w)$ συμβολίζεται με $:\mathcal{O}(z)\mathcal{O}(z):$ και ορίζεται μέσω της σχέση

$$:\mathcal{O}(z)\mathcal{O}(z): := \lim_{w\to z}(\mathcal{O}(z)\mathcal{O}(w) - \langle \mathcal{O}(z)\mathcal{O}(w)\rangle) \tag{2.3.1}$$

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε ένα βολικότερο ορισμό της κανονικής διάταξης για τους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν. Τα πεδία που χρησιμοποιούμε είναι μη-Αβελιανά όποτε δεν είναι ελεύθερα[3]. Από εδώ και κάτω, θα συμβολίζουμε την κανονική διάταξη των τελεστών με $(\mathcal{O}\mathcal{O})(z)$. Πιο συγκεκριμένα το OPE δύο τελεστών

$$\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}_2(w) = \sum_{n=-\infty}^{N} \frac{\{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\}_n(w)}{(z-w)^n} \tag{2.3.2}$$

όπου το N είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε

$$(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)(z) = \{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\}_0(z) \tag{2.3.3}$$

Ο ορισμός για τη συστολή Wick των πεδίων είναι

$$\overline{\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}}_2(w) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\}_n(w)}{(z-w)^n} \tag{2.3.4}$$

[3]Ελεύθερο χαρακτηρίζεται ένα πεδίο του οποίου το OPE με τον εαυτό του περιέχει πόλους των οποίων οι συντελεστές δεν περιέχουν παραγώγους ή τα ίδια τα πεδία παρά μόνο σταθερούς συντελεστές. Η περίπτωση των μη Αβελιανών πεδίων που αναφέρουμε είναι τα ρεύματα των WZW-προτύπων που θα εξεταστουν παρακάτω.

Για παράδειγμα, θεωρώντας $\mathcal{O} = T(z)$, με αυτό το συμβολισμό

$$\overbracket{T(z)T}(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{2.3.5}$$

Η κανονική διάταξη μπορει να γραφεί

$$(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)(z) = \lim_{w\to z}(\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}_2(w) - \overbracket{\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}}_2(w)) \tag{2.3.6}$$

και το OPE μπορεί να γραφεί ως

$$\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}_2(w) = \overbracket{\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}}_2(w) + (\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}_2(w)) \tag{2.3.7}$$

Η ποσότητα $(\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}_2(w))$ αντιστοιχεί σε όλη τη σειρά των ομαλών όρων των οποίων η ακριβής μορφή δίνεται από το ανάπτυγμα Taylor του $\mathcal{O}_1(z)$ γύρω από το w:

$$(\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}_2(w)) = \sum_{k\geq 0}\frac{(z-w)^k}{k!}(\partial^k\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)(w) \tag{2.3.8}$$

Χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο, μπορούμε από την (2.3.2) να πάρουμε άλλη μία χρήσιμη αναπαράσταση της κανονικής διάταξης η οποία είναι

$$(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{z-w}\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}_2(w) \tag{2.3.9}$$

Η παραπάνω σχέση δίνει την (2.3.3) και αυτό φαίνεται εύκολα αν αντικαταστήσουμε την (2.3.2) στην (2.3.8). Ολοκληρώνοντας κατά Cauchy ο μόνος όρος που επιβιώνει είναι αυτός με τον απλό πόλο οπότε καταλήγουμε πράγματι στην (2.3.3). Αν στη συνέχεια θέλουμε το OPE τριών τελεστών με τους δύο σε κανονική διάταξη έχουμε

$$\mathcal{O}_1(z)(\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3)(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{x-w}[\overbracket{\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}}_2(x)\mathcal{O}_3(w) + \mathcal{O}_2(x)\overbracket{\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}}_3(w)] \tag{2.3.10}$$

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με ένα σχόλιο. Χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση

$$\oint_w\frac{dz}{z-w}\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}_2(w) = \oint_{|z|>|w|}\frac{dz}{z-w}\mathcal{O}_1(z)\mathcal{O}_2(w) - \oint_{|z|<|w|}\frac{dz}{z-w}\mathcal{O}_2(w)\mathcal{O}_1(z) \tag{2.3.11}$$

και τα αναπτύγματα

$$\mathcal{O}_1(z) = \sum_n(z-x)^{-n-h_{\mathcal{O}_1}}(\mathcal{O}_1)_n(x), \qquad \mathcal{O}_2(w) = \sum_n(z-x)^{-n-h_{\mathcal{O}_2}}(\mathcal{O}_2)_n(x) \tag{2.3.12}$$

μπορεί να δείξει κανείς ότι ουσιαστικά οι τελεστές είναι σε κανονική διάταξη όπως προαναφέραμε, δηλαδή

$$(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)_m = \sum_{n\leq -h_{\mathcal{O}_1}} (\mathcal{O}_1)_n(\mathcal{O}_2)_{m-n} + \sum_{n\leq -h_{\mathcal{O}_1}} (\mathcal{O}_2)_{m-n}(\mathcal{O}_1)_n \tag{2.3.13}$$

όπου

$$(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)(z) = \sum z^{n-h_{\mathcal{O}_1}-h_{\mathcal{O}_2}}(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)_n \tag{2.3.14}$$

και επίσης $(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)(z) \neq (\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1)(z)$. Για περισσότερες λεπτομέρεις της παραπάνω απόδειξης παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο κεφ. 6 της [1].

Χρησιμοποιώντας τη συστολή Wick μπορούμε να υπολογίζουμε τη συνάρτηση συσχέτισης αυθαίρετου αριθμού πεδίων μέσω της (2.3.4). Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα όταν μιλήσουμε για τα μη Αβελιανά ρεύματα και την άλγεβρά τους. Η σημαντικότερη σχέση αυτής της ενότητας είναι η (2.3.10) καθώς μέσω αυτής πραγματοποιούνται οι υπολογισμοί των συναρτήσεων συσχέτισης σε όλο το μήκος της διατριβής.

2.3.1 OPEs

Επίσης, είναι γνωστό από τον κανονικό φορμαλισμό πως ο μετασχηματισμός $\phi(z,\bar{z})$ που γεννάται από το φορτίο $Q = \int d^{d-1}x\mathcal{J}_0$, όπου το$\mathcal{J}_\mu$ είναι το διατηρούμενο ρεύμα της συμμετρίας, δίνεται από την

$$\delta\phi = [Q,\phi] \tag{2.3.15}$$

Στην περίπτωσή μας, ακολουθώντας την ακτινική κβάντωση[4] ορίζουμε

$$\boxed{\mathcal{R}\phi_1(z)\phi_2(w)\rangle = \begin{cases} \phi_1(z)\phi_2(w) & \text{αν } |z|>|w| \\ \phi_2(z)\phi_1(w) & \text{αν, } |z|<|w| \end{cases}} \tag{2.3.16}$$

Παρακάτω θα αναπαραστήσουμε τις ποσότητες που υπολογίζουμε στη θεωρία πεδίου με ολοκληρώματα στο μιγαδικό επίπεδο μέσω των OPEs. Έστω $a(z)$ και $b(w)$ δύο ολομορφικά πεδία. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\oint_w a(z)b(w) \tag{2.3.17}$$

όπου η καμπύλη περιστρέφεται γύρω από το w αντίστροφα των δεικτών του ρολογιού. Η παραπάνω έκφραση έχει ερμηνεία συνάρτησης συσχέτισης μέσω τελεστών από τη στιγμή που υπάρχει ακτινική διάταξη. Συνεπώς η καμπύλη γύρω από το w μπορεί να γραφεί ως μία

[4]Στην ακτινική κβάντωση βαζουμε τη θεωρία στον κύλινδρο και στη συνέχεια απεικονίζουμε τον κύλινδρο στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε οι συντεταγμένες γίνονται ομόκεντροι κύκλοι όπου η ακτίνα αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή. Η διαδικασία είναι ανάλογη της χρονολογικής σειράς των τελεστών στη θεωρία πεδίου.

καμπύλη που περιέχει το w και την αρχή (θυμίζουμε πως έχουμε απεικονίσει τον κύλινδρο στο μιγαδικό επιπεδο οπότε έχουμε δίσκο με αρχη το μηδέν) μείον μία καμπύλη που περιέχει το w αλλά όχι την αρχή. Τότε

$$\oint_w dza(z)b(w) = \oint_{C_{|w|+\varepsilon}} dza(z)b(w) \; - \oint_{C_{|w|-\varepsilon}} dzb(w)a(z) \; = [\oint_w dza(z), b(w)] \quad (2.3.18)$$

όπου $C_{|w|+\varepsilon}$ είναι η καμπύλη που περιλαμβάνει το w ενώ η $C_{|w|-\varepsilon}$ όχι. Αυτό σημαίνει πως σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy, αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν έχει πόλους εκτός του w, μηδενίζεται όπως εδώ.

Ορίζοντας για $A = \oint dza(z)$ και $B = \oint dzb(z)$, ο μεταθέτης

$$[A, B] = \oint_0 dw \oint_w dza(z)b(w) \quad (2.3.19)$$

όπου το z ολοκληρώνεται γύρω από το w και το w γύρω από το μηδέν. Αυτή η σχέση είναι βασική για την εξαγωγή της σύμμορφης άλγεβρας όπως θα δείξουμε αμέσως παρακάτω.

2.3.2 Άλγεβρα Virazoro

Έχοντας περιγράψει τη γλώσσα και τα εργαλεία που χρησιμοποιούμε, μπορούμε να κατασκευάσουμε την άλγεβρα των αντίστοιχων διατηρούμενων ρευμάτων όπως στην περίπτωση της θεωρίας πεδίου όπου η άλγεβρα υπολογίζεται μέσω των αγκύλων Poisson. Αφού μας ενδιαφέρουν οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί, ορίζουμε το αντίστοιχο φορτίο να δίνεται από την

$$Q_{\epsilon,\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left(dz\epsilon(z)T(z) + d\bar{z}\bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{T}(\bar{z}) \right) \quad (2.3.20)$$

και η μεταβολή ενός πεδίου κάτω από ένα σύμμορφο μετασχηματισμό είναι

$$\delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}}\phi(w) = -[Q_{\epsilon,\bar{\epsilon}}, \phi(w)] \quad (2.3.21)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.2.10) για $h = \bar{h} = 2$ έχουμε τα παρακάτω αναπτύγματα

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_{n\epsilon\mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n & \qquad \bar{T}(\bar{z}) &= \sum_{n\epsilon\mathbb{Z}} \bar{z}^{-n-2} L_n \\ L_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) & \qquad \bar{L}_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z}\bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Η δεύτερη σειρά της παραπάνω έκφρασης είναι η λύση της πρώτης ως προς τους συντελεστές. Για πληρότητα αναφέρουμε ότι το φορτίο είναι ανάλογο των συντελεστών L_n οι οποίοι λέγονται **τελεστές Virasoro**. Συγκεκριμένα για $\epsilon(z) = \sum_{n\in Z} z^{n+1}\epsilon_n$ έχουμε

$$Q_n = \frac{1}{2\pi i}\oint dz T(z)(-\epsilon_n z^{n+1}) = -\epsilon_n L_n \to Q_n = -\epsilon_n L_n \tag{2.3.23}$$

Προωθώντας τις κλασικές ποσότητες σε τελεστές μπορούμε να υπολογίσουμε την άλγεβρά τους με τη χρήση (2.3.19). Εξ ορισμού

$$[L_n, L_m] = \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_0 dw\, w^{m+1} \oint dz\, z^{n+1} T(z)T(w) \tag{2.3.24}$$

Αντικαθιστώντας το OPE του τανυστή ΕΟ και ολοκληρώνοντας κατά Cauchy (βλέπε και 6.2 της[1]) καταλήγουμε στην

$$\boxed{[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}} \tag{2.3.25}$$

Το c για την άλγεβρα αποτελεί την **κεντρική επέκταση** και η άλγεβρα (2.3.25) ονομάζεται **άλγεβρα Virazoro**. Η παραπάνω άλγεβρα είναι η κβαντική εκδοχή της (2.2.5) και τώρα τα L_n δρουν σε καταστάσεις πάνω στο χώρο Hilbert. Θέλουμε να βρούμε τον τρόπο δράσης των τελεστών πάνω στις καταστάσεις. Όπως φαίνεται, η καθολική σύμμορφη άλγεβρα παράγεται από τους $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$

2.3.3 Χώρος καταστάσεων

Για να έχουμε πληρέστερη εικόνα μιας κβαντικής σύμμορφης θεωρίας χρειαζόμαστε το χώρο καταστάσεων. Όπως αναμένουμε, αφού γεννήτορες της σύμμορφης ομάδας είναι οι συνηστώσες του τανυστή ΕΟ, οι τελεστές που θα δρουν σε αυτό το χώρο Hilbert είναι οι τελεστές Virasoro. Ξεκινώντας με τη βασική κατάσταση $|0\rangle$ απαιτούμε να είναι αναλλοίωτη κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς. Αυτό σημαίνει πως θα πρέπει να κατατρέφεται κάτω από τη δράση των $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$καθώς επίσης και απο τους αντίστοιχους αντιολομορφικούς τελεστές που συνθέτουν την καθολική άλγεβρα. Γενικά λοιπόν

$$\begin{aligned} L_n|0\rangle &= 0 \qquad n \geq -1 \\ \bar{L}_n|0\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

Η παραπάνω έκφραση υπαγορεύει και το μηδενισμό των αναμενώμενων τιμών των συνηστωσών του τανυστή ΕΟ δηλαδή

$$\langle 0|T(z)|0\rangle = \langle 0|\bar{T}(z)|0\rangle = 0 \tag{2.3.27}$$

Τα πρωτεύοντα πεδία, όταν δρουν πάνω στην κατάσταση κενού, δημιουργούν ασυμπτωτικές (ελεύθερες) καταστάσεις οι οποίες είναι και ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής (λόγω του τανυστή ΕΟ). Αυτό γίνεται εμφανέστερο αν υπολογίσει κανείς το μεταθέτη του τελεστή Virasoro με ένα πρωτεύον πεδίο σύμμορφης διάστασης $(h, \bar{h})$. Ισχύει

$$\begin{aligned}[L_n, \phi(w, \bar{w})] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz\, z^{n+1} T(z) \phi(w, \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz\, z^{n+1} \Big[\frac{h\phi(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w, \bar{w})}{z-w} + \dots \Big]\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

όπου οι τελείες δηλώνουν όρους χωρίς πόλους. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Cauchy λαμβάνουμε

$$[L_n, \phi(w, \bar{w})] = h(n+1) w^n \phi(w, \bar{w}) + w^{n+1} \partial\phi(w, \bar{w}) \qquad n \geq -1 \tag{2.3.29}$$

Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα προκύπτει ομοίως και η αντιολομορφική άλγεβρα

$$[\bar{L}_n, \phi(w, \bar{w})] = \bar{h}(n+1) \bar{w}^n \phi(w, \bar{w}) + \bar{w}^{n+1} \bar{\partial}\phi(w, \bar{w}) \qquad n \geq -1 \tag{2.3.30}$$

Από την παραπα΄νω άλγεβρα μπορούμε να υπολογίσουμε το χώρο καταστάσεων της θεωρίας. Μία ασυμπτωτική κατάσταση ορίζεται από τη σχέση

$$|h, \bar{h}\rangle \equiv \phi(0, 0)|0\rangle \tag{2.3.31}$$

Θέτωντας $n = 0$ στις (2.3.29) και (2.3.30) προκύπτει

$$L_0 |h, \bar{h}\rangle = h |h, \bar{h}\rangle \qquad \bar{L}_0 |h, \bar{h}\rangle = \bar{h} |h, \bar{h}\rangle \tag{2.3.32}$$

οπότε πράγματι οι $|h, \bar{h}\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής καθώς $H = L_0 + \bar{L}_0$. Αμέσως φαίνεται ότι

$$L_n |h, \bar{h}\rangle = 0 \qquad \bar{L}_n |h, \bar{h}\rangle = 0 \qquad n > 0 \tag{2.3.33}$$

Οι διεγερμένες καταστάσεις προκύπτουν δρώντας με τελεστές καταστροφής. Υπολογίζοντας δηλαδή τη σχέση μετάθεσης του L_n με τους συντελεστές του αντίστοιχου αναπτύγματος για το $\phi(w, \bar{w})$ (2.2.10), μέσω της (2.3.19), προκύπτει

$$[L_m, \phi_n] = ((h-1)m - n) \phi_{m+n} \tag{2.3.34}$$

και για $n = 0$ έχουμε

$$[L_0, \phi_m] = -m \phi_m \tag{2.3.35}$$

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε αυτό που αναφέραμε και νωρίτερα. Ότι τα ϕ_m είναι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας ιδιοτιμών. Πιο συγκεκριμένα οι ϕ_{-m} ανεβάζουν τη σύμμορφη διάσταση ενώ οι ϕ_m την κατεβάζουν. Επίσης από την (2.3.25) προκύπτει και η

$$[L_0, L_{-m}] = mL_{-m} \tag{2.3.36}$$

μέσω της οποίας βλέπουμε ότι οι L_{-m} με $m > 0$ επίσης ανεβάζουν τη σύμμορφη διάσταση κατά m. Άρα, μία διεγερμένη κατάσταση που δρα στην $|h\rangle$

$$L_{-k_1}L_{-k_2}\dots L_{-k_n}|h\rangle \qquad (1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n) \tag{2.3.37}$$

είναι μία ιδοκατάσταση του L_0 και της Χαμιλτονιανής με σύμμορφη διάσταση

$$h' = h + k_1 + k_2 + \dots k_n \tag{2.3.38}$$

Οι παραπάνω καταστάσεις ονομάζονται **απόγονες** (descendant).

Στην επόμενη ενότητα συζητάμε τη σύμμορφη ανωμαλία που παρουσιάστηκε νωρίτερα και τη συσχετίζουμε με τους βαθμούς ελευθερίας της σύμμορφης θεωρίας πεδίου.

2.4 Σύμμορφη ανωμαλία

Νωρίτερα ορίσαμε το κεντρικό φορτίο, το οποίο ονομάσαμε σύμμορφη ανωμαλία, χωρίς όμως να δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση στη σημασία του. Ο λόγος είναι πως η σύμμορφη ανωμαλία σχετίζεται με την ήπια διάρρηξη της σύμμορφης συμμετρίας μέσω της εισαγωγής μακροσκοπικής κλίμακας. Αυτό μπορεί να γίνει αν λόγου χάρη εισάγουμε συνοριακές συνθήκες στο χώρο. Μία τέτοια περίπτωση είναι η απεικόνιση της θεωρίας στον κύλινδρο μέσω της σχέσης

$$z \to w = \frac{L}{2\pi}\ln z \tag{2.4.1}$$

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς για $dw/dz = L/(2\pi z)$ και $S = 1/2z^2$ (Schwarzian παράγωγος) προκύπτει

$$T_{\text{cyl}} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \{T_{\text{pl}}z^2 - \frac{c}{24}\} \tag{2.4.2}$$

Θεωρώντας πως η ενέργεια κενού είναι μηδενική στο επίπεδο, δηλαδή $\langle T_{\text{pl}}\rangle = 0$, τότε η μέση ενέργεια κενού στον κύλινδρο γίνεται

$$\langle T_{\text{cyl}}(w)\rangle = -\frac{c\pi^2}{6L^2} \tag{2.4.3}$$

Αυτό σημαίνει πως το κεντρικό φορτίο είναι ανάλογο της ενέργειας Casimir, δηλαδή ανάλογο της μεταβολής ενέργειας κενού με την εφαρμογή περιοδικών συνοριακών συνθηκών. Να σημειωθεί ότι για $L \to \infty$ η ενέργεια κενού συγκλίνει στο μηδέν. Ομοίως, έχοντας ένα στατιστικό σύστημα, το κεντρικό φορτίο σχετίζεται με την ελεύθερη ενέργεια στη μονάδα μήκους που ορίζεται στον κύλινδρο. Γενικώς καταλήγουμε ότι **το κεντρικό φορτίο σχετίζεται με τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος που μελετάμε.**

Επίσης το κεντρικό φορτίο εμφανίζεται όταν ορίσουμε τη σύμμορφη θεωρία σε ένα διδιάστατο καμπύλο χώρο. Η καμπυλότητα εισάγει μακροσκοπική κλίμακα στο σύστημα και η αναμενόμενη τιμή του τανυστή ΕΟ δίνεται από τη σχέση

$$\langle T^{\mu}{}_{\mu}(x)\rangle = -\frac{c}{12\pi}R(x) \tag{2.4.4}$$

Σε αυτό το σημείο θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς αν η παραπάνω σχέση θα μπορούσε να ορισθεί και για το $\bar{c}$. Η απάντηση είναι πως παρόλο που οι σύμμορφες θεωρίες είναι καλά ορισμένες στον επίπεδο χώρο με διαφορετικά c και $\bar{c}$, όταν μεταβαίνουμε στον καμπύλο χώρο πρέπει $c = \bar{c}$. Επίσης να σημειωθεί πως η (2.4.4) ισχύει όχι μόνο για την κατάσταση κενού της θεωρίας αλλά για όλες τις καταστάσεις. Αυτό μπορεί να φανεί από το γεγονός ότι αυτή η ανωμαλία προκύπτει από την ομαλοποίηση των αποκλίσεων σε κοντινές αποστάσεις. Δηλαδή σε κοντινές αποστάσεις όλες οι καταστάσεις πεπερασμένης ενέργειας δείχνουν το ίδιο οπότε και η σχέση θα ισχύει ομοίως.

Για να κλείσουμε αυτή την ενότητα παραθέτουμε μία απόδειξη της (2.4.4). Ξεκινώντας με ένα διδιάστατο καμπύλο χώρο, μπορεί να δειχθεί ότι η μετρική του, επιλέγοντας κατάλληλες συντεταγμένες, πάντοτε μπορεί να έρθει στη μορφή

$$g_{\mu\nu}(x) = e^{2\omega(x)}\delta_{\mu\nu} \tag{2.4.5}$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός λέγεται μετασχηματισμός Weyl όπως και κάθε μετασχηματισμός που συνδέει δύο μετρικές με αυτό τον τρόπο. Τότε το βαθμωτό Ricci δίνεται από την[5]

$$R = -2e^{-2\omega(x)}\partial^2\omega \tag{2.4.9}$$

[5]Να υπενθυμίσουμε εδώ, για λόγους πληρότητας ότι ο τανυστής Riemann δίνεται από την

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}_{\rho\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\tau}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\rho} \tag{2.4.6}$$

και ο τανυστής Ricci είναι $R_{\nu\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu\mu\sigma}$ μέσω του οποίου ορίζεται το βαθμωτό Ricci μέσω της σχέσης

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{2.4.7}$$

Επιπρόσθετα

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_s g_{\nu\rho}) \tag{2.4.8}$$

Προφανώς από την (2.4.4) οποιαδήποτε CFT με $c \neq 0$ έχει ένα παρατηρήσιμο μέγεθος το οποίο παίρνει διαφορετικές τιμές σε υπόβαθρα που σχετίζονται με ένα μετασχηματισμό Weyl, έστω ω. Για αυτό το λόγο η σύμμορφη ανωμαλία λέγεται και ανωμαλία Weyl. Προχωρώντας, χρησιμοποιούμε τη διατήρηση της ενέργειας

$$\partial T_{z\bar{z}} = -\bar{\partial} T_{zz} \tag{2.4.10}$$

και μπορούμε να γράψουμε το OPE του τανυστή ενέγειας ορμής στη μορφή

$$\partial_z T_{z\bar{z}} \partial_w T_{w\bar{w}} = \partial_{\bar{z}} T_{zz} \bar{\partial}_{\bar{w}} T_{ww} = \bar{\partial}_{\bar{z}} \bar{\partial}_{\bar{w}} \Big(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \dots \Big) \tag{2.4.11}$$

Κανονικά, αναμένει κανείς να μηδενίζεται η παραπάνω ποσότητα διότι έχουμε την αντι-ολομορφική παράγωγο μιας ολομορφικής ποσότητας. Όμως λόγω της ταυτότητας (Βλέπε και παράρτημα Α′)

$$\frac{1}{\pi} \bar{\partial} \frac{1}{z} = \frac{1}{\pi} \partial \frac{1}{\bar{z}} = \delta^2(x) \tag{2.4.12}$$

εύκολα φαίνεται ότι

$$\bar{\partial}_{\bar{z}} \partial_{\bar{w}} \frac{1}{(z-w)^4} = \frac{1}{6} \bar{\partial}_{\bar{z}} \bar{\partial}_{\bar{w}} \Big(\partial_z^2 \partial_w \frac{1}{z-w} \Big) = \frac{\pi}{3} \partial_z^2 \partial_w \bar{\partial}_{\bar{w}} \delta^2(z-w) \tag{2.4.13}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\partial_z T_{z\bar{z}} \partial_w T_{w\bar{w}} = \partial_z \partial_w \Big(\frac{\pi}{3} \partial_z \bar{\partial}_{\bar{w}} \delta^2(z-w) \Big) \tag{2.4.14}$$

από την οποία καταλήγουμε στην

$$T_{z\bar{z}}(z,\bar{z}) T_{w\bar{w}}(w,\bar{w}) = \frac{c\pi}{6} \partial_z \bar{\partial}_{\bar{w}} \delta^2(z-w) \tag{2.4.15}$$

Το παραπάνω γινόμενο είναι είναι όρος επαφής (contact term). Υποθέτωντας ότι στον επίπεδο χώρο $\langle T^\mu_\mu \rangle = 0$ θέλουμε να δείξουμε τη Weyl ανωμαλία για υπόβαθρο απειροστά κοντά στο επίπεδο. Αρχικά γνωρίζουμε πως κάτω από μία γενική μεταβολή της μετρικής $\delta g_{\alpha\beta}$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \delta \langle T^\mu_\mu \rangle &= \delta \int D\phi e^{-S} T^\mu_\mu(\sigma) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int D\phi e^{-S} \Big(T^\mu_\mu(\sigma) \int d^2\sigma' \sqrt{g} \delta g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}(\sigma') \Big) \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Θεωρώντας το μετασχηματισμό Weyl, προκύπτει $\delta g_{\alpha\beta} = 2\omega \delta_{\alpha\beta}$ και $\delta g^{\alpha\beta} = -2\omega \delta^{\alpha\beta}$ και αντικαθιστώντας στην (2.4.16)

$$\delta\langle T^{\mu}_{\mu}(\sigma)\rangle = -\frac{1}{2\pi}\int D\phi e^{-S}\Big(T^{\mu}_{\mu}(\sigma)\int d^2\sigma'\omega(\sigma^{'})T^{\nu}_{\nu}(\sigma')\Big) \tag{2.4.17}$$

Για να υπολογίσουμε την ανωμαλία Weyl, αλλάζουμε μεταξύ μιγαδικών και Καρτεσιανών συντεταγμένων οπότε

$$T^{\mu}_{\mu}(\sigma)T^{\nu}_{\nu}(\sigma') = 16T_{z\bar{z}}T_{w\bar{w}} \tag{2.4.18}$$

Χρησιμοποιώντας επίσης τη σχέση

$$8\partial_z\bar{\partial}_{\bar{w}}\delta^{(2)}(z-w) = -\partial^2\delta^{(2)}(\sigma-\sigma') \tag{2.4.19}$$

Έχοντας την παραπάνω εκφράση, η εξίσωση (2.4.15) γίνεται

$$T^{\mu}_{\mu}(\sigma)T^{\nu}_{\nu}(\sigma') = -\frac{c\pi}{3}\partial^2\delta(\sigma-\sigma') \tag{2.4.20}$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στην (2.4.16) και ολοκληρώνοντας κατά μέρη προκύπτει

$$\delta\langle T^{\mu}_{\mu}\rangle = \frac{c}{6}\partial^2\omega \tag{2.4.21}$$

Αφού μας ενδιαφέρουν απειροστοί μετασχηματισμοι θέτωντας $e^{-2\omega} = 1$ προκύπτει $R = -2\partial^2\omega$. Άρα

$$\langle T^{\mu}_{\mu}(\sigma)\rangle = -\frac{c}{12}R \tag{2.4.22}$$

Η κβαντική ρήξη της συμμετρίας κλίμακας που παρουσιάζεται από την (2.4.22) καλείται και **ανωμαλία ίχνους** (Trace Anomaly) για ευνόητους λόγους. Μπορεί να παρατεθεί και αναλυτικότερη απόδειξη για την οποία παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Παράρτημα (5.A) της [1]. Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνουμε τη συζήτηση για τη γενική περιφραφή των σύμμορφων θεωριών σε δύο διαστάσεις και στο επόμενο κεφάλαιο θα υπεισέλθουμε στην περιγραφή των προτύπων που άπτονται της μελέτης μας.

Κεφάλαιο 3

WZW πρότυπα

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφουμε τα WZW-πρότυπα τα οποία αποτελούν παραδείγματα πλήρως επιλύσιμων CFTs. Σε αυτή την κατηγορία προτύπων, η άλγεβρα Virazoro επεκτείνεται σε μία αφινική Kac-Moody άλγεβρα όπως θα δούμε, ως αποτέλεσμα των επιπλέον συμμετριών της θεωρίας.

Αρχικά θα περιγράψουμε την κλασική θεωρία. Τα πρότυπα WZW μπορούν να θεωρηθούν ως μη-γραμμικά σ-πρότυπα των οποίων ο εξωτερικός χώρος (target space) είναι μία πολλαπλότητα ομάδας[1] . Εφαρμόζοντας τις τεχνικές που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο εξάγουμε την κβαντική άλγεβρα συμμετρίας που είναι η αφινική γενίκευση μίας πεπερασμένης άλγεβρας Lie και δίνεται από την

$$[J^a_m, J^b_n] = k\delta^{ab}\delta_{m+n,0} + if^{ab}_{\ \ c}J^c_{m+n} \tag{3.0.1}$$

Επίσης θα συζητήσουμε αναλυτικά την κατασκευή Sugawara μέσω της οποίας προκύπτει ο κβαντικός τανυστής ΕΟ καθώς είναι απαραίτητος στους υπολογισμούς στα επόμενα κεφάλαια. Τέλος θα συζητήσουμε τις σύμμορφες θεωρίες σε χώρους πηλίκα ή αλλιώς Coset, καθώς υπάρχει ένα σύνολο αποτελεσμάτων που σχετίζονται με αυτές τις δομές.

Το παραπάνω υλικό παρουσιάζεται σε μεγάλο σύνολο αναφορών όπως στην [1] και [3]. Ιδιαιτέρως στην [1] υπάρχει εκτεταμένη περιγραφή των WZW-προτύπων και παραπέμπουμε τον αναγνώστη εκεί για περισσότερες λεπτομέρειες.

[1] Πολλαπλότητα ομάδας (group manifold) είναι ένας χώρος του οποίου το κάθε σημείο είναι ένα στοιχείο ομάδας.

3.1 Πρωτεύον Χειραλικό Πρότυπο (PCM)

Ξεκινώντας θεωρούμε ένα πεδίο το οποίο αποτελεί στοιχείο μίας ημιαπλής ομάδας,[2] δηλαδή αποτελεί απεικόνηση από το διδιάστατο χώρο συντεταγμένων στην ομάδα G

$$g: \; R^2 \to G \tag{3.1.1}$$

Τότε γενικεύοντας τη δράση ενός μιγαδικού βαθμωτού πεδίου $\int d^2x\partial\phi\,\partial\phi^\dagger$ αντικαθιστώντας τα $\phi(x), \phi^{dag}(x)$ με τα $g(x),\, g^{-1}(x) \in G$ έχουμε τη δράση

$$S_{PCM} = \frac{1}{4a^2}\int d^2xTr(\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g) \tag{3.1.2}$$

Το παραπάνω πρότυπο καλείται Πρωτεύον Χειραλικό Πρότυπο ή αλλιώς PCM[3]. Η παραπάνω δράση έχει καθολικές συμμετρίες της μορφής $G_L \times G_R$ που εκφράζονται ως

$$g(z,\bar{z}) \to \Omega_L g(z,\bar{z})\Omega_R \tag{3.1.3}$$

Το πρότυπο PCM είναι κλασικώς αναλλοίωτη κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς αλλά αν κανείς υπολογίσει τη β-συνάρτηση προκύπτει πως αυτή είναι μη μηδενική και μάλιστα αρνητική, οπότε το σύστημα εμφανίζει ασυμπτωτική ελευθερία. Λαμβάνοντας τις εξισώσεις κίνησης βρίσκουμε το νόμο διατήρησης [4]

$$\partial^\mu J_\mu = 0, \qquad J_\mu \equiv g^{-1}\partial_\mu g \tag{3.1.4}$$

Παρατηρεί κανείς ότι η παραπάνω διατήρηση δεν είναι συνθήκη ολομορφίας όπως χρειάζεται για την περίπτωση μίας CFT[5]. Μάλιστα, γράφοντας τη διατήρηση του ρεύματος σε μιγαδικές συντεταγμένες έχουμε

$$\partial J_{\bar{z}} + \bar{\partial} J_z = 0. \tag{3.1.5}$$

Σε μία σύμμορφη θεωρία, όπως εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο θέλουμε ποσότητες (αντι)-ολομορφικές δηλαδή θα επιθυμούσαμε τα ρεύματα να μηδενίζονται ξεχωριστά. Αυτό σημαίνει πως χρειαζόμαστε και έναν επιπλέον όρο στη δράση που θα μπορούσε να διορθώσει τις εξισώσεις κίνησης ώστε τα διατηρούμενα ρεύματα να γίνουν (αντί)-ολομορφικά. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη εισαγωγή του τοπολογικού όρου Wess Zumino (WZ).

[2] Ο λόγος που θεωρούμε ημιαπλές ομάδες είναι επειδή η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μη εκφυλισμένου αναλλοίωτου ίχνους της αντίστοιχης άλγεβρας Lie.

[3] Η αγγλική μετάφραση είναι Principal Chiral Model εξ ου και PCM.

[4] Η δράση πρέπει να είναι Ερμητιανή που σημαίνει ότι $g^\dagger = g^{-1}$ απ'οπου $\int \mathrm{Tr}(\partial g)(\partial g)^\dagger \geq 0$.

[5] Υπολογίζοντας τη συνάρτηση β με μεθόδους που αναπτύσουμε παρακάτω, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η θεωρία είναι ασυμπτωτικά ελεύθερη.

3.2 WZW δράση

Όπως ήδη αναφέραμε θα διορθώσουμε τη μη-ολομορφία, με την εισαγωγή του όρου WZ που δίνεται από

$$\Gamma[g] = -\frac{i}{12\pi}\int_B d^3y\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{Tr}(g^{-1}\partial^\alpha g g^{-1}\partial^\beta g g^{-1}\partial^\gamma g). \tag{3.2.1}$$

Το πεδίο g (αφού αλλάξαμε σε μιγαδικές συντεταγμένες) μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζεται στη σφαίρα Riemann S^2 η οποία αποτελεί το διδιάστατο σύνορο της τρισδιαστάτης μπάλας B. Τα πεδία λοιπόν είναι απεικονίσεις

$$g:\, S^2 \to G. \tag{3.2.2}$$

Οι παραπάνω απεικονίσεις ταξινομούνται μέσω της δεύτερης ομάδας ομοτοπίας $\pi_2(G)$[6]. Αυτό που συμβαίνει, είναι ότι επεκτείναμε τις τιμές του g που ανήκει στο επίπεδο, να παίρνει τιμές στην τρισδιάστατη μπάλα B οπότε θα μπορούσαμε να έχουμε συμβολίσει αυτή την επέκταση με $\tilde{g}$, αλλά επιμένουμε στον ίδιο συμβολισμό για απλότητα. Η παραπάνω επέκταση δεν είναι μοναδική οπότε υπάρχει μία αυθαιρεσία στον ορισμό του Γ. Δηλαδή σε ένα συμπαγή τρισδιάστατο χώρο ένας διδιάστατος συμπαγής χώρος χωρίζει τον τρισδιάστατο χώρο σε δύο άλλους τρισδιάστατους χώρους απ΄ όπου έχουμε την αυθαιρεσία που προαναφέραμε και η διαφορά αυτή $\Delta\Gamma$, δίνεται από το δεξί μέλος της (3.2.1) . Λαμβάνοντας υπόψιν τον προσανατολισμό και το γεγονός ότι ολοκληρώνουμε σε όλο το συμπαγή τρισδιάστο χώρο, αυτό τοπολογικά ισοδυναμεί με την τρισδιάστατη σφαίρα S^3 όποτε γράφουμε

$$\Delta\Gamma[g] = -\frac{i}{12\pi}\int_B d^3y\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{Tr}(g^{-1}\partial^\alpha g g^{-1}\partial^\beta g g^{-1}\partial^\gamma g). \tag{3.2.3}$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι με την παραπάνω κανονικοποίηση το $\Delta\Gamma$ είναι ανάλογο του[7] $2\pi i$. Αυτό σημαίνει πως για το Ευκλείδιο ολοκλήρωμα ισχύει $e^{-\Gamma-2\pi i} = e^{-\Gamma}$, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε ως τοπολογικό όρο το Γ πολλαπλασιασμένο με έναν ακέραιο $k \in Z$. Συνεπώς καταλήγουμε στη δράση

$$S = S_{PCM} + k\Gamma. \tag{3.2.4}$$

Λαμβάνοντας τις εξισώσεις κίνησης για $g \to g + \delta g$ της (3.2.1) και χρησιμοποιώντας την

$$\int d^3y\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial^\gamma(\dots) = \int d^2x\epsilon_{\alpha\beta}(\dots) \tag{3.2.5}$$

---

[6]Η δεύτερη ομάδα ομοτοπίας ουσιαστικά σχετίζεται με τον αριθμό των φορών που μία απεικόνιση τυλίγεται γύρω από την ομάδα Lie.

[7]Η αναλυτική απόδειξη αυτού του επιχειρήματος βρίσκεται στο Appendix 15.A της [1].

προκύπτει

$$\delta\Gamma = \frac{i}{4\pi}\int d^2x\epsilon_{\mu\nu}Tr(g^{-1}\delta g\partial^\mu(g^{-1}\partial^\nu g)) \tag{3.2.6}$$

Συνδιάζοντας τις (3.2.6) και (3.1.4) προκύπτει

$$\partial^\mu(g^{-1}\partial_\mu g) + \frac{a^2ik}{2\pi}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\mu(g^{-1}\partial^\nu g) = 0 \tag{3.2.7}$$

και αλλάζοντας σε μιγαδικές συντεταγμένες[8]

$$(1+\frac{a^2k}{2\pi})\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}}g) + (1-\frac{a^2k}{2\pi})\partial_{\bar{z}}(g^{-1}\partial_z g) = 0. \tag{3.2.8}$$

Επιλέγοντας $a = 2\pi/k$ προκύπτει η συνθήκη ολομορφίας

$$\partial_z J_{\bar{z}} = 0, \qquad J_{\bar{z}} \equiv g^{-1}\partial_{\bar{z}}g. \tag{3.2.9}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.2.4) καταλήγουμε με το λεγόμενο **WZW πρότυπο**

$$\boxed{S_k(g) = \frac{k}{16\pi}\int d^2x\mathrm{Tr}(\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g) + \frac{ik}{24}\int d^3y\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{Tr}(g^{-1}\partial^\alpha g g^{-1}\partial^\beta g g^{-1}\partial^\gamma g)}. \tag{3.2.10}$$

Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι οι καθολικοί μετασχηματισμοί του PCM αντικαθίστανται από τους νέους τοπικούς μετασχηματισμούς που υπακούει το WZW πρότυπο που συμβολίζουμε με $G_{cur,L} \times G_{cur,R}$

$$g(z,\bar{z}) \to \Omega_L(z)g(z,\bar{z})\bar{\Omega}_R(\bar{z}). \tag{3.2.11}$$

Γράφοντας τα $\Omega_L, \bar{\Omega}_R$ σε απειροστή μορφή ως

$$\Omega_L(z) = 1 + \omega(z), \qquad \bar{\Omega}_R(\bar{z}) = 1 + \bar{\omega}(\bar{z}) \tag{3.2.12}$$

το στοιχείο g μετασχηματίζεται με τον παρακάτω τρόπο

$$\delta_L g = \omega g, \qquad \delta_R g = g\bar{\omega}. \tag{3.2.13}$$

Καθώς πλέον γνωρίζουμε πως η μεταβολή $\delta = \delta_L + \delta_R$ της (3.2.10) είναι

$$\delta S_k = \frac{k}{\pi}\int d^2x\mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g(\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}}g)) \tag{3.2.14}$$

[8] Να σημειωθεί πως $\partial^z = 2\partial_{\bar{z}}$ και $\epsilon_{z\bar{z}} = i/2$.

αντικαθιστώντας τις μεταβολές έχουμε

$$\delta S = \frac{k}{\pi} \int d^2x \mathrm{Tr}[\omega \partial_{\bar{z}}(\partial_z g g^{-1}) - \bar{\omega}\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}} g)] \tag{3.2.15}$$

όπου πράγματι μηδενίζεται μετά από κατά παράγοντες ολοκλήρωση. Περιγράψαμε τα κλασικά στοιχεία του προτύπου WZW έως το σημείο που είναι χρήσιμο για τους υπολογισμούς μας. Παρακάτω προχωρούμε στην ανάλυση του προτύπου σε κβαντικό επίπεδο όπου εκεί αναφένεται η δομή της άλγεβρας και τα αντίστοιχα OPEs μέσω των οποίων εξάγονται και οι ταυτότητες Ward.

3.3 Κβαντική Θεωρία

Έως τώρα η ανάλυση όπως είπαμε ήταν σε κλασικό επίπεδο καθώς δεν έχουμε δείξει ότι το WZW-πρότυπο είναι αναλλοίωτο κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμόύς και σε κβαντικό επίπεδο. Για να γίνει αυτό, επανερχόμαστε στη δράση (3.2.10). Προκειμένου να προχωρήσουμε στην κβαντική περιγραφή, ορίζουμε τα διατηρούμενα ρεύματα

$$\begin{aligned} J(z) &= -k\partial_z g g^{-1} \\ \bar{J}(\bar{z}) &= k g^{-1}\partial_{\bar{z}} g. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Αναπτύσοντας στη βάση t^a μπορούμε να γράψουμε $J(z) = \sum_a J^a(z)t^a$ όπου θυμίζουμε πως $\mathrm{Tr}(t^a t^b) = \delta^{ab}$ και $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$. Τότε

$$J^a(z) = -kJ^a_z \qquad \bar{J}^a(\bar{z}) = k\bar{J}^a_{\bar{z}} \tag{3.3.2}$$

όπου οι παραπάνω σχέσεις παίζουν σημαντικό ρόλο για τον υπολογισμό των OPEs. Όπως δείξαμε και νωρίτερα, υποθέτωντας την αριστερά αναλλοίωτη δράση (left-invariant action) της μορφής

$$\delta_L g(z,\bar{z}) = \omega^a(z)t^a g, \qquad \delta_L g^{-1}(z,\bar{z}) = -g^{-1}\omega^a(z)t^a \tag{3.3.3}$$

όπου ο μετασχηματισμός του αντίστροφου στοιχείου προέκυψε από τη $\delta g^{-1} = -g^{-1}\delta g g^{-1}$, μπορούμε να δείξουμε ότι $\delta_L S_{wzw} = 0$ με το $J^a(z)$ να αποτελεί το διατηρούμενο ρεύμα. Η ανάλογη σχέση για τη δεξιά αναλλοίωτη δράση είναι

$$\delta_R g(z,\bar{z}) = g\bar{\omega}^a(\bar{z})t^a, \qquad \delta_R g^{-1}(z,\bar{z}) = -\bar{\omega}^a(\bar{z})t^a g^{-1} \tag{3.3.4}$$

δίνοντας $\delta_R S_{wzw} = 0$ με $\bar{J}(\bar{z})$ το διατηρούμενο ρεύμα. Συνολικά λοιπόν **το $J(z)$ είναι γεννήτορας των αριστερόστροφων μετασχηματισμών και το $\bar{J}(\bar{z})$ των αντίστοιχων δεξιόστροφων**. Στη συνέχεια θέλουμε να ορίσουμε τα OPEs. Αυτό γίνεται μέσω της ταυτότητας Ward όπου στην περίπτωση των παραπάνω μετασχηματισμών γράφεται

$$\langle \delta_{\omega,\bar{\omega}} X(w,\bar{w})\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\oint_z dz\omega^a(z)\langle J^a(z)X(w,\bar{w})\rangle + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\bar{z}} d\bar{z}\omega^a(\bar{z})\langle \bar{J}^a(\bar{z})X(w,\bar{w})\rangle . \tag{3.3.5}$$

Ο πρώτος όρος αναφέρεται στην αριστερά αναλλοίωτη δράση με παράμετρο $\omega^a(z)$ ενώ ο δεύτερος στην αντίστοιχη δεξιά. Επίσης το $X(w,\bar{w})$ αναπαριστά ένα αυθαίρετο σύνολο τελεστών στο σημείο $(w,\bar{w})$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να θέσουμε $X = J^a$ και να υπολογίσουμε το $\delta_\omega J^a$. Δρώντας με την αριστερά αναλλοίωτη δράση στο $J^a(z)$ που δίνεται από την (3.3.3), έχουμε

$$\delta_\omega J^a(z) = -k\partial_z\omega^a(z) + f^{abc}\omega^b(z)J^c(z) \tag{3.3.6}$$

και $\delta_{\bar{\omega}} J(z) = 0$ καθώς η δεξιώς αναλλοίωτη δράση $\bar{J}^a(\bar{z})$ δίνει

$$\delta_{\bar{\omega}}\bar{J}^a(\bar{z}) = k\partial_{\bar{z}}\bar{\omega}^a(\bar{z}) - f^{abc}\bar{\omega}^b(\bar{z})J^c(\bar{z}) \tag{3.3.7}$$

με $\delta_\omega \bar{J}(\bar{z}) = 0$. Θα πρέπει ο κλασικός μετασχηματισμός (3.3.6) να αναπαράγεται από τη σωστή αντικατάσταση των OPEs στην (3.3.5) τόσο για τα J όσο και για τα $\bar{J}$. Δηλαδή ισχυέι για $X = J, \bar{J}$

$$\begin{aligned} \langle \delta_\omega J^b(w)\rangle &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_z dz\omega^a(z)\langle J^a(z)X(w,\bar{w})\rangle \\ \langle \delta_{\bar{\omega}}\bar{J}^b(\bar{w})\rangle &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\bar{z}} d\bar{z}\omega^a(\bar{z})\langle \bar{J}^a(\bar{z})X(w,\bar{w})\rangle \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Θα πρέπει λοιπόν, να βρούμε τις κατάλληλες συμπεριφορές των τελεστών καθώς το z προσεγγίζει το w ώστε αντικαθιστώντας αυτές στην (3.3.8) να πάρουμε τους κλασικούς μετασχηματισμούς των ρευμάτων. Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα

$$\begin{aligned} J^a(z)J^b(w) &\sim \frac{\delta^{ab}k}{(z-w)^2} + if^{abc}\frac{J^c(w)}{z-w} \\ \bar{J}^a(\bar{z})\bar{J}^b(\bar{w}) &\sim \frac{\delta^{ab}k}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + if^{abc}\frac{\bar{J}^c(\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

στην (3.3.8) καταλήγουμε στις (3.3.6) και (3.3.7) αντίστοιχα. Οι δύο παραπάνω σχέσεις αποτελούν τα OPEs των ρευμάτων. Εισάγωντας τις ποσότητες $J^a_n, \bar{J}^a_n$ μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Laurent οπότε (από διαστατική ανάλυση της (3.2.10) φαίνεται ότι $\Delta_J = \Delta_{\bar{J}} = 1$)

$$J^a(z) = \sum_{n\in Z} J^a_n z^{-n-1}, \qquad \bar{J}^a(\bar{z}) = \sum_{n\in Z}\bar{J}^a_n\bar{z}^{-n-1}. \tag{3.3.10}$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τον ορισμό (2.3.19) αφού πριν επιλύσουμε τις παραπάνω σχέσεις ως προς $J_n^a, \bar{J}_n^a$ λαμβάνουμε της αφινική ή αλλιώς την **άλγεβρα Kac-Moody**

$$\begin{aligned} [J_m^a, J_n^b] &= k\delta^{ab}\delta_{m+n,0} + if^{ab}_{\ \ c}J^c_{m+n} \\ [\bar{J}_m^a, \bar{J}_n^b] &= k\delta^{ab}\delta_{m+n,0} + if^{ab}_{\ \ c}\bar{J}^c_{m+n} \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

ενώ λόγω των $\delta_{\bar{\omega}} J = \delta_\omega \bar{J} = 0$ προκύπτει άμεσα

$$[J_n^a, \bar{J}_n^b] = 0 \tag{3.3.12}$$

Αυτό σημαίνει πως οι δύο άλγεβρες είναι ανεξάρτητες. Η ύπαρξη δύο ανεξάρτητων αφινικών αλγεβρών είναι θεμελιακή ιδιότητα του WZW-προτύπου και όπως θα φανεί αμέσως παρακάτω αυτό οδηγεί σε σύμμορφη αναλλοιώτητα.

Με τη χρήση της παραπάνω μεθόδου μπορούμε να υπολογίσουμε τα OPEs διαφόρων τελεστών. Για παράδειγμα μία ποσότητα που αναφέρεται συνεχώς στα επόμενα κεφάλαια είναι το

$$D^{ab} = \mathrm{Tr}(t^a g t^b g^{-1}) \tag{3.3.13}$$

μέσω του οποίου συσχετίζονται τα J και $\bar{J}$. Συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας τη σχέση $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(At^a)\mathrm{Tr}(t^a B)$ μπορεί εύκολα να δείξει κανείς ότι $\bar{J}^a(\bar{z}) = D^{ab}J^b(z)$ και επειδή $D^{ab}(D^T)^{bc} = \delta^{ac}$ προκύπτει ότι $J^a(z) = (D^T)^{ab}\bar{J}^b(\bar{z})$. Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα η εύρεση του $J^a(z)D^{bc}(w,\bar{w})$ γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο: αρχικά βρίσκουμε το μετασχηματισμό του D^{ab} κάτω από την (3.3.3) ο οποίος δίνει $\delta_L D^{ab} = -\omega^c (f^c)^a_{\ d} D^{db}$ και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την (3.3.5) βρίσκουμε το OPE που την ικανοποιεί. Αυτό δινεται από την

$$J^a(z)D^{bc}(w,\bar{w}) \sim \frac{(f^a)^b_{\ d}D^{dc}(w,\bar{w})}{z-w} \tag{3.3.14}$$

Η δεξιώς αναλλοίωτη δράση στο D^{ab} δίνει $\delta_{\bar{\omega}} D^{ab} = -\bar{\omega}^c (f^c)^d_{\ b} D^{ad}$ από όπου συνεπώς λαμβάνουμε

$$\bar{J}^a(\bar{z})D^{bc}(w,\bar{w}) \sim -\frac{(f^a)^d_{\ c}D^{bd}(w,\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} \tag{3.3.15}$$

Έχοντας υπολογίσει την οριακή συμπεριφορά των βασικών τελεστών της θεωρίας μας προχωρούμε στην εύρεση του κβαντικού τανυστή ΕΟ που έχει μοναδική κατασκευή στα πλαίσια των WZW-προτύπων.

3.3.1 Τανυστής Ενέργειας-Ορμής και κατασκευή Sugawara

Αυτό που ζητάμε είναι υπολογίσουμε τον τανυστή ΕΟ. Να θυμίσουμε ότι ο τανυστής ΕΟ είναι το διατηρούμενο ρεύμα κάτω από μεταθέσεις $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$. Υποθέτωντας πως η

Λαγκραζιανή που περιγράφει το σύστημα είναι $\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i)$ ο τανυστής ΕΟ δινεται από την

$$T^\mu_{\ \nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} \partial_\nu \phi^i - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{3.3.16}$$

όπου στην περίπτωσή μας $\phi^i \to g_{mn}$. Οι συνιστώσες του τανυστή ΕΟ, με τη χρήση της (3.2.10) και του ορισμού των ρευμάτων, δίνονται από τις εκφράσεις

$$T_{zz} = \frac{k}{4\pi} J^a_z J^a_z \qquad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{k}{4\pi} J^a_{\bar{z}} J^a_{\bar{z}} \qquad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0. \tag{3.3.17}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης $\partial_z \bar{J}^a = 0 = \partial_{\bar{z}} J^a$ εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι ο τανυστής ΕΟ διατηρείται. Με τη χρήση του ορισμού

$$T(z) = -2\pi T_{zz} \qquad \bar{T}(\bar{z}) = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}} \tag{3.3.18}$$

και την (3.3.17) προκύπτει

$$T(z) = \frac{1}{2k} J(z) J'^a(z) \qquad \bar{T}(\bar{z}) = \frac{1}{2k} J(\bar{z}) J'^a(\bar{z}). \tag{3.3.19}$$

Η εξίσωση (3.3.19) αποτελεί την κλασική έκφραση για το τανυστή ΕΟ. Στη συνέχεια θέλουμε να υπολογίσουμε το OPE $T(z)T(w)$ και το $\bar{T}(\bar{z})\bar{T}(\bar{w})$ για να βρούμε το κεντρικό φορτίο της θεωρίας. Σημείο εκκίνησης είναι ο ορισμός

$$T(z) = \gamma (J^a J^a)(z) \tag{3.3.20}$$

όπου το γ μένει να προσδιοριστεί και το (JJ) συμβολίζει την κανονική διάταξη που ορίστηκε στη σχέση (2.3.8). Αρχικά χρειαζόμαστε το $J^a(z)(JJ)(w)$. Εφαρμόζοντας τη γενική σχέση (2.3.10) για τα OPEs έχουμε

$$J^a(z)(JJ)(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{dx}{x-w} \left[\overline{J^a(z) J^b}(x) J^b(w) + J^b(x) \overline{J^a(z) J^b}(w) \right]. \tag{3.3.21}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω τελικώς λαμβάνουμε [9]

$$J^a(z)(JJ)(w) = (2k + c_G) \frac{J^a(w)}{(z-w)^2} \tag{3.3.22}$$

από την οποία εύκολα μπορεί να εξαχθεί (εναλλάσοντας $z \leftrightarrow w$)

$$(JJ)(z) J^a(w) = (2k + c_G) \frac{J^a(z)}{(z-w)^2}. \tag{3.3.23}$$

[9]Στον υπολογισμό μας χρησιμοποιούμε $f_{abc} f_{dbc} = -c_G \delta_{ab}$

Αναπτύσοντας το $J^a(z)$ γύρω από το w δηλαδή $J^a(z) \simeq J^a(w) + (z-w)\partial_w J^a(w)$ καταλήγουμε στην

$$T(z)J^a(w) = \gamma(2k+c_G)\Big\{\frac{J^a(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w J^a(w)}{z-w}\Big\} \tag{3.3.24}$$

Μιας και γνωρίζουμε πως το $J^a(z)$ είναι πρωτεύον πεδίο (φού είναι διατηρήσιμο ρεύμα) με σύμμορφη διάσταση $\Delta = 1$, το γ θα πρέπει να είναι ίσο με,[10]

$$\gamma = \frac{1}{2k+c_G} \tag{3.3.25}$$

απ΄ όπου λαμβάνουμε

$$\boxed{T(z) = \frac{1}{2k+c_G}(J^aJ^a)(z)} \tag{3.3.26}$$

Για μεγάλο k προκύπτει $\gamma \to \frac{1}{2k}$, οπότε λαμβάνουμε την κλασική έκφραση για το τανυστή ΕΟ. Η παραπάνω διαδικασία υπολογισμού του κβαντικού τανυστή ΕΟ ονομάζεται **κατασκευή Sugawara**. Μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε το $T(z)T(w)$. Χρησιμοποιώντας την (3.3.21) και το OPE, έχουμε

$$\partial J^a(z)J^b(w) \sim \frac{-2\delta^{ab}}{(z-w)^3} - \frac{f^{abc}}{\sqrt{k}}\frac{J^c(w)}{(z-w)^2} \tag{3.3.27}$$

οπότε

$$T(z)T(w) \sim \frac{k\dim G}{2k+c_G}\frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}. \tag{3.3.28}$$

Από την παραπάνω έκφραση και τη γενική σχέση

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots \tag{3.3.29}$$

μπορούμε να διαβάσουμε το κεντρικό φορτίο του WZW-προτύπου το οποίο είναι

$$c = \frac{2k\dim G}{2k+c_G} \tag{3.3.30}$$

Παραπάνω δεν αναφέραμε λεπτομέρεις εξαγωγής της (3.3.28), παραπέμπουμε όμως τον αναγνώστο στην ενότητα 15.2 της [1] για περισσότερες λεπτομέρειες του υπολογισμού αν και είναι ευκολο να βρεθεί απλώς αντικαθιστώντας τις κατάλληλες σχέσεις και υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα με το θεώρημα του Cauchy. Τέλος, με την ίδια διαδικασία της προηγούμενης

[10] Θα πρέπει να έχουμε υπόψιν το ανάπτυγμα $T(z)\phi(w,\bar{w}) = \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w,\bar{w}) + \frac{\partial_w\phi(w)}{z-w}$.

ενότητας μπορεί να εξαχθεί η άλγεβρα Virasoro

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \tag{3.3.31}$$

όπου το ανάπτυγμα Laurent του τανυστή ΕΟ δίνεται από την (2.2.10). Στην επόμενη ενότητα περιγράφουμε συνοπτικά τις κατασκευές προτύπων σε χώρους πηλίκα (Cosets) που θα φανούν αναγκαίες για την πλήρη κατανόηση των υπολογισμών που θα παρουσιαστούν στα επόμενα κεφάλαια. Στα ακόλουθα θα χρησιμοποιούμε τον αγγλικό όρο για τους χώρους πηλίκα προκειμένου να αποφύγουμε μακροσκελείς ορολογίες.

3.4 Cosets

Να θυμήσουμε ότι το coset μίας ομάδας G έχοντας μία υποομάδα H, δηλαδή $H \subset G$, συμβολίζεται με G/H και προφανώς δεν αποτελεί εν γένει σύνολο. Γενικώς όμως ισχύει η σχέση Laplace σύμφωνα με την οποία

$$\dim G = \dim H \times \dim G/H \,. \tag{3.4.1}$$

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με την κατασκευή θεωριών cosets των προτύπων WZW, καθώς όπως έχουμε αναφέρει δυναμικό πεδίο της θεωρίας είναι το στοιχείο $g \in G$. Η κατασκευή που θα περιγράψουμε λέγεται Goddard-Kent-Olive (GKO) κατασκευή.

Ξεκινάμε με μία Kac-Moody άλγεβρα της ομάδας G με επίπεδο k_g που περιέχει μία υποομάδα H επιπέδου k_h. Από την κατασκευή Sugawara έχουμε

$$\begin{aligned} T_G &= \frac{1}{2k_G + c_G}(J^a_G J^a_G)(z) \\ T_H &= \frac{1}{2k_H + c_H}(J^a_H J^a_H)(z) \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

όπου τα αντίστοιχα ρεύματα στις δύο ομάδες είναι πρωτεύοντα ρεύματα διάστασης

$$\Delta_{J_G} = \Delta_{J_H} = 1 \tag{3.4.3}$$

οπότε τα αντίστοιχα OPEs που έχουμε είναι

$$\begin{aligned} T_G(z) J^a_H(w) &= \frac{J^a_H(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J^a_H(w)}{z-w} + \ldots \\ T_H(z) J^a_H(w) &= \frac{J^a_H(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J^a_H(w)}{z-w} + \ldots \,. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Λαμβάνοντας τη διαφορά των δύο παραπάνω εξισώσεων έχουμε

$$
\begin{aligned}
(T_G - T_H)(z) J_H^a &= regular \\
(T_G - T_H)(z) T_H(w) &= regular\,.
\end{aligned}
\tag{3.4.5}
$$

Αυτό σημαίνει ότι γράφοντας τον τανυστή ΕΟ ως

$$T_G = (T_G - T_H) + T_H = T_{G/H} + T_H \tag{3.4.6}$$

όπου ορίσαμε

$$T_{G/H} = T_G - T_H \tag{3.4.7}$$

έχουμε έναν κερματισμό (decomposition) της άλγεβρας Virazoro που γεννάται από τον T_G σε δύο αμοιβαία μεταθετές υπο-άλγεβρες λόγω της (3.4.5). Χρησιμοποιώντας την (3.4.5) και τον ορισμό του $T_{G/H}$ έχουμε

$$T_{G/H}T_{G/H} = T_{G/H}(T_G - T_H) = T_{G/H}T_G = T_G T_G - T_H T_G = T_G T_G - T_H T_H \tag{3.4.8}$$

και συνεχίζουν ομαλοί όροι. Στο δεύτερο βήμα δεν εμφανίζεται το γινόμενο $T_{G/H}T_H$ διότι είναι ομαλό. Μπορούμε από την παραπάνω έκφραση να διαβάσουμε το κεντρικό φορτίο της θεωρίας coset. Δηλαδή από την (3.3.30) προκύπτει

$$c_{G/H} = c_G - c_H = \frac{2k_G \dim G}{2k_G + c_G} - \frac{2k_H \dim H}{2k_H + c_H}\,. \tag{3.4.9}$$

Να σημειωθεί ότι η παραπάνω θεωρία περιέχει όλους τους τελεστές του G_{k_G} πού έχουν μη μηδενικό OPE με τους τελεστές του H_{k_H}. Μία περίπτωση τέτοιων θεωριών είναι τα λεγόμενα **παραφερμιόνια** $SU(2)_k/U(1)_1$. Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι το κεντρικό φορτίο για οποιαδήποτε $U(1)_k$ είναι $c = 1$ οπότε το κεντρικό ενός τέτοιου προτύπου είναι

$$c = \frac{6k}{2k+4} - 1 = \frac{2(k-1)}{k+2}\,. \tag{3.4.10}$$

Μία άλλη σημαντική κλάση cosets που μπορούμε να κατασκευάσουμε είναι

$$\frac{G_{k_1} \times G_{k_2}}{G_k} \tag{3.4.11}$$

όπου η άλγεβρα G_{k_i} γεννάται από τα ρεύματα J_i^a και η G_k από το ρεύμα $J^a = J_1^a + J_2^a$. Να σημειώσουμε ότι τα αναπτύγματα Laurent μεταξύ των J_1^a και J_2^a όπου

$$[J_n^a, J_m^b] = (k_1 + k_2) m \delta^{ab} \delta_{n+m,0} + i f^{ab}{}_c J_{n+m}^c \tag{3.4.12}$$

όπου $f^{ab}_{\ \ c} = f_1^{abc} + f_2^{abc}$ και το επίπεδο της Kac-Moody άλγεβρας είναι $k = k_1 + k_2$. Αυτά τα cosets λέγονται διαγώνια και ο τανυστής ΕΟ τους έχει τη μορφή[11]

$$T_{(G_{k_1} \times G_{k_2})/G_{k_1+k_2}} = T_{G_{k_1}} + T_{G_{k_2}} - T_{G_{k_1+k_2}} \tag{3.4.13}$$

Μάλιστα, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.4.8) αμέσως έχουμε

$$\begin{aligned} T_{(G_{k_1} \times G_{k_2})/G_{k_1+k_2}} T_{(G_{k_1} \times G_{k_2})/G_{k_1+k_2}} &= T_{G_{k_1} \times G_{k_2}} T_{G_{k_1} \times G_{k_2}} - T_{G_{k_1+k_2}} T_{G_{k_1+k_2}} \\ &= T_{G_{k_1}} T_{G_{k_1}} + T_{G_{k_2}} T_{G_{k_2}} - T_{G_{k_1+k_2}} T_{G_{k_1+k_2}} \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

οπότε το κεντρικό φορτίο της θεωρίας $(G_{k_1} \times G_{k_2})/G_{k_1+k_2}$ είναι

$$\boxed{c_{(G_{k_1} \times G_{k_2})/G_{k_1+k_2}} = \frac{2k_1 \dim G_{k_1}}{2k_1 + c_{G_{k_1}}} + \frac{2k_2 \dim G_{k_2}}{2k_2 + c_{G_{k_2}}} - \frac{2(k_1+k_2) \dim G_{k_1+k_2}}{2(k_1+k_2) + c_{G_{k_1+k_2}}}} \tag{3.4.15}$$

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε και γενικότερου τύπου θεωρίες coset στις οποίες θα αναφερθούμε αργότερα.

Να σημειώσουμε εδώ ότι τα παραπάνω πρότυπα αποτελούν αναπαραστάσεις ορισμένων από τα λεγόμενα **ελλάσονα πρότυπα** (minimal models) και αυτό ουσιαστικά αποτέλεσε το σημείο εκίνησης μελέτης τέτοιων προτύπων. Εκτενής συζήτηση για όλα τα παραπάνω μπορεί να βρεθεί στις [1],[3],[4] όπως και σε αναφορές αυτών.

3.5 Υπολογισμός συναρτήσεων συσχέτισης

Σε αυτή την ενότητα, θα δείξουμε τον τρόπο που υπολογίζουμε συναρτήσεις συσχέτισης μεταξύ τελεστών στο WZW-πρότυπο χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες τεχνικές των OPEs. Προφανώς όλες αυτές οι τεχνικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για οποιαδήποτε σύμμορφη θεωρία δουλεύοντας ακριβώς με τον ίδιο τρόπο.

Αρχικά ξεκινάμε με τις συναρτήσεις ενός σημείου οι οποίες είναι πάντοτε μηδέν, δηλαδή

$$\langle \mathcal{O}(z) \rangle = 0 \tag{3.5.1}$$

για οποιοδήποτε τελεστή $\mathcal{O}(z)$ οπότε

$$\langle J^a(z) \rangle = \langle \bar{J}^a(\bar{z}) \rangle = \langle T(z) \rangle = \langle \bar{T}(\bar{z}) \rangle = 0 \tag{3.5.2}$$

[11] Να σημειώσουμε ότι καθώς οι ομάδες G_{k_1} και G_{k_2} είναι μεταξύ τους διαφορετικές (εξ ου και τα αντίστοιχα ρεύματα μετατίθενται όπως προείπαμε, η δράση με συμμετρία $G_{k_1} \times G_{k_2}$ είναι το άθροισμα δύο WZW-προτύπων $S_{k_1} + S_{k_2}$ οπότε και ο συνολικός τανυστής θα είναι το άθροισμα των επιμέρους.

και ομοιώς για όλους τους μεικτούς τελεστές που ορίζονται στο ίδιο σημείο.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης δύο σημείων του ρεύματος $J^a(z)$, δηλαδή $\langle J^a(z_1)J^b(z_2)\rangle$ εφαρμόζουμε τη γνωστή συστολή Wick και στη συνέχεια παίρνουμε τις αντίστοιχες μέσες τιμές. Η συστολή Wick δύο πεδίων που συμβολίζεται με $\overbracket{AB}$ ουσιαστικά είναι τα OPEs. Για τη συνάρτηση δύο σημείων έχουμε από (3.3.9)λοιπόν

$$\begin{aligned} \langle J^a(z_1)J^b(z_2)\rangle &= \langle \overbracket{J^a(z_1)J^b}(z_2)\rangle \\ &= \langle \Big(\frac{\delta^{ab}k}{z_{12}^2} + if^{abc}\frac{J^c(z_2)}{z_{12}} + \dots \Big) \rangle \,. \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Οι όροι που έρχονται από τις τελείες είναι κανονικά διατεταγμένοι σε ένα σημείο οπότε μηδενίζονται, όπως επίσης και η συνάρτηση ενός σημείου. Τελικά

$$\boxed{\langle J^a(z_1)J^b(z_2)\rangle = \frac{\delta^{ab}k}{z_{12}^2}} \tag{3.5.4}$$

και από τη σχέση (2.1.29) έχουμε $C_{12} = k\delta^{ab}$. Ομοίως, ακολουθώντας το θεώρημα Wick η συνάρτηση τριών σημείων είναι

$$\begin{aligned} \langle J^a(z_1)J^b(z_2)J^c(z_3)\rangle &= \langle \overbracket{J^a(z_1)J^b}(z_2)J^c(z_3)\rangle + \langle \overbracket{J^a(z_1)J^b(z_2)J^c}(z_3)\rangle \\ = \langle \Big(\frac{\delta^{ab}k}{z_{12}^2} + if^{abd}\frac{J^d(z_2)}{z_{12}} \Big) J^c(z_3)\rangle &+ \langle J^b(z_2)\Big(\frac{\delta^{ac}k}{z_{13}^2} + if^{acd}\frac{J^d(z_3)}{z_{13}} \Big)\rangle \,. \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Μηδενίζοντας τις συναρτήσεις ενός σημείου έχουμε

$$\begin{aligned} \langle J^a(z_1)J^b(z_2)J^c(z_3)\rangle &= \frac{if^{abd}}{z_{12}}\langle J^d(z_2)J^c(z_3)\rangle + \frac{if^{acd}}{z_{13}}\langle J^b(z_2)J^d(z_3)\rangle \\ &= \frac{if^{abd}}{z_{12}}\frac{k\delta^{dc}}{z_{23}} + \frac{if^{acd}}{z_{13}}\frac{k\delta^{bd}}{z_{23}} \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

οπότε τελικά

$$\boxed{\langle J^a(z_1)J^b(z_2)J^c(z_3)\rangle = \frac{ikf^{abc}}{z_{12}z_{13}z_{23}}} \tag{3.5.7}$$

σε συμφωνία με τη γενική μορφή της (2.1.35) για $C_{123} = ikf^{abc}$. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα η συνάρτηση τεσσάρων σημείων γίνεται

$$
\boxed{\begin{aligned}
\langle J^{a_1}(z_1)J^{a_2}(z_2)J^{a_3}(z_3)J^{a_4}(z_4)\rangle = k^2\frac{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}}{z_{12}^2z_{34}^2} - k\frac{f^{a_1a_2e}f^{a_3a_4e}}{z_{12}z_{14}z_{24}z_{34}} \\
+ k^2\frac{\delta^{a_1a_3}\delta^{a_2a_4}}{z_{13}^2z_{24}^2} + k\frac{f^{a_1a_3e}f^{a_2a_4e}}{z_{12}z_{13}z_{14}z_{24}} \\
+ k^2\frac{\delta^{a_1a_4}\delta^{a_2a_3}}{z_{14}^2z_{23}^2} + k\frac{f^{a_1a_4e}f^{a_2a_3e}}{z_{12}z_{23}z_{14}z_{24}}\,.
\end{aligned}} \tag{3.5.8}
$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις συσχέτισης ισχύουν κα για τα αντι-ολομορφικά ρεύματα. Προφανώς η συνάρτηση δύο σημείων ολομορφικού- αντιολομορφικού ρεύματος μηδενίζεται αφού το OPEs μεταξύ τους είναι μηδέν. Μπορούμε όμως να ορίσουμε ένα μικτό τελεστή της μορφής $\mathcal{O}(z,\bar{z}) = (J^a(z)\bar{J}^b(\bar{z}))$ και να ζητήσουμε τη συνάρτηση δύο σημείων. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$
\begin{aligned}
\langle (J^{a_1}(z_1)\bar{J}^{b_1}(\bar{z}_1))(J^{a_2}(z_2)\bar{J}^{b_2}(\bar{z}_2))\rangle &= \langle J^{a_1}(z_1)\bar{J}^{b_1}(\bar{z}_1))(J^{a_2}(z_2)\bar{J}^{b_2}(\bar{z}_2))\rangle + \text{only bar} \\
&= \langle J^{a_1}(z_1)J^{a_2}(z_2)\rangle\langle \bar{J}^{b_1}(\bar{z}_1)\bar{J}^{b_2}(\bar{z}_2)\rangle \\
&= -k^2\frac{\delta^{a_1a_2}\delta^{b_1b_2}}{z_{12}^2\bar{z}_{12}^2}\,.
\end{aligned} \tag{3.5.9}
$$

Η παραπάνω παραγοντοποίηση συμβαίνει και για αλυσίδες τελεστών της μορφής

$$
\mathcal{O}^{m,n}(z,\bar{z}) = (J^{a_1}\dots J^{a_m})(z)(J^{b_1}\dots J^{b_n})(\bar{z}) \tag{3.5.10}
$$

όταν ζητάμε τις συναρτήσεις συσχέτισης. Να σημειώσουμε ότι τέτοιας μορφής τελεστές σε όλα τα κεφάλαια που ακολουθούν είναι σε κανονικά διατεταγμένη μορφή (2.3.9) και τα OPEs δίνονται βάσει της (2.3.10).

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα OPEs να υπολογίσουμε την οποιαδήποτε συνάρτηση συσχέτισης επιθυμούμε για το πρόβλημά μας. Για παράδειγμα, μία συνάρτηση συσχέτισης που θα μας απασχολήσει παρακάτω είναι η

$$
\langle T(z_1)T(z_2)J^{a_3}(z_3)J^{a_4}(z_4)\rangle = k\delta^{a_3a_4}\Big[\frac{c/2}{z_{34}^2z_{12}^4} + \frac{1}{z_{12}^2z_{13}^2z_{24}^2} + \frac{1}{z_{12}^2z_{14}^2z_{23}^2}\Big] \tag{3.5.11}
$$

Οι συναρτήσεις συσχέτισης δύο σημείων, είναι χρήσιμες για την εξαγωγή των ανώμαλων διαστάσεων στις επανακανονικοποιήσιμες θεωρίες πεδίου και η παραπάνω περιγραφή είναι αναγκαία για την εύρεση και εξακρίβωση αποτελεσμάτων μέσω της θεωρίας διαταραχών. Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνουμε τη συζήτησή μας για τις σύμμορφες θεωρίες πεδίου και την περιγραφή των τεχνικών που θα χρησιμοποιήσουμε. Σε όποιο σημείο παρακάτω χρειαστεί, θα επισημαίνουμε τις λεπτομέρειες των υπολογισμών.

Κεφάλαιο 4

Θεωρήματα μονοτονίας στην Θεωρία Πεδίου

Παρακάτω παρουσιάζουμε αναλυτικά τα θεωρήματα μονοτονίας σε διάφορες διαστάσεις δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην περίπτωση των δύο διατάσεων. Ο λόγος που επικεντρωνόμαστε στις δύο διαστάσεις είναι διότι όπως θα αναφέρουμε και σε επόμενη ενότητα, ξεκινώντας από μία CFT και παραμορφώνοντας τη θεωρία μέσω ολοκληρώσιμων παραμορφώσεων, θα υπολογίσουμε τη λεγόμενη C-συνάρτηση η οποία σχετίζεται με τους βαθμούς ελευθερίας της θεωρίας καθώς αυτή ρέει απο το UV στο IR. Επιπρόσθετα, σημαντικό σημείο σε όλη αυτή τη συζήτηση αποτελεί η ερμηνεία του κεντρικού φορτίου που όπως αναφέραμε στο κεφ. 3 σχετίζεται με την ένεργεια Casimir της θεωρίας.

Αρχικά ξεκινάμε με την περιγραφή του C-θεωρήματος στις δύο διαστάσεις αποδεικνύοντας την ύπαρξη της λεγόμενης C-συνάρτησης η οποία παρεμβάλεται μεταξύ μίας σύμμορφης θεωρίας στο UV και της αντίστοιχης στο IR. Η συνάρτηση C αναμένουμε να είναι γνησίως φθίνουσα διότι καθώς η θεωρία πεδίου ρέει απο το UV στο IR, δηλαδή από υψηλές σε χαμηλές ενέργειες, οι βαθμοί ελευθερίας θα ελλατώνονται. Προφανώς, αφού μιλάμε για βαθμούς ελευθερίας, η συνάρτηση C θα πρέπει να είναι θετική καθ΄ όλο το μήκος της ομάδας επανακανονικοποίησης. Τέλος, όπως θα δούμε η μονοτονία της συνάρτησης C σχετίζεται με το γεγονός ότι η ροή επανακανονικοποίησης δεν αντιστρέφεται.

4.1 Θεώρημα μονοτονίας στις δύο διαστάσεις

Για την παρουσίαση του θεωρήματος μονοτονίας στις δύο διαστάσεις θα παραθέσουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη ουσιαστικά είναι πολύ κοντά στην πρωτότυπη εργασία [5] ενώ η δεύτερη χρησιμοποιεί τα βασικά στοιχεία της απόδειξης του a-θεωρήματος στις τέσσερις διαστάσεις [9] το οποιό περιγράφουμε στην επόμενη ενότητα. Για τη συζήτησή μας θα χρειαστούμε τα βασικά στοιχεία περιγραφής της ομάδας επανακανονικοποίησης.

1η απόδειξη

Ξεκινούμε με μία δράση

$$S(\mu, \vec{\lambda}) = \int d^d x \, \mathcal{L}(\mu, \vec{\lambda}) \tag{4.1.1}$$

όπου μ είναι μία ενεργειακή κλίμακα στο UV και $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ...)$ το σύνολο των σταθερών ζεύξης από τις οποίες περιγράφεται η θεωρία. Οι σταθερές ζεύξης μπορούν να θεωρηθούν και ως συντεταγμένες ενός ¨χώρου σταθερών ζεύξης' στον οποίο μπορεί κανείς να υπολογίσει τη μετρική και κατ΄ επέκταση να αναλύσει τη γεωμετρία του χώρου. Μία βασική παραδοχή της κβαντικής θεωρίας πεδίου είναι ότι οι σταθερές ζεύξης που αρχικά ορίσαμε στη θεωρία είναι ¨γυμνές' υπό την έννοια ότι κάτω από τη μεταβολή της ενεργειακής κλίμακας δεν παραμένουν ως έχουν στην αρχική δράση, αλλά μεταβάλλονται και επανακανονικοποιούνται. Ουσιαστικά, αυτή η μεταβολή μπορεί να θεωρηθεί και σαν μία κίνηση στο χώρο των ζεύξεων. Η εξάρτηση των σταθερών ζεύξης από την ενεργειακή κλίμακα δίνεται μέσω το υπολογιμού των συναρτήσεων β

$$\frac{d\lambda^i}{d \ln \mu} = \beta^i(\vec{\lambda}) \, . \tag{4.1.2}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το σύνολο των σταθερών ζεύξης αποτελεί ένα διανυσματικό πεδίο που υπακούει στην παραπάνω ανταλλοίωτη εξίσωση. Ο τρόπος που είναι ορισμένες οι συναρτήσεις β έχει σημασία, διότι οι δείκτες ανεβαίνουν και κατεβαίνουν μέσω της μετρικής. Ένα μέρος της ¨πληροφορίας ' της θεωρία στο UV χάνεται καθώς αυτή ρέει προς το IR. Αναμένουμε λοιπόν η διαδικασία αυτή να είναι μη αντιστρεπτή[1]. Επικεντρώνωντας την ανάλυσή μας στις δύο διαστάσεις, θα δείξουμε ότι

- Υπάρχει συνάρτηση την οποία συμβολιζουμε με $C(g) \geq 0$ τέτοια ώστε

$$\frac{d}{d \ln \mu} C(\vec{\lambda}) \equiv \beta^i(\vec{\lambda}) \frac{\partial}{\partial \lambda^i} C(\vec{\lambda}) \leq 0 \tag{4.1.3}$$

  με την ισότητα να ισχύει για τα σύμμορφα σημεία.

- Στα κρίσιμα σημεία όπου η συνάρτηση β μηδενίζεται η διδιάστατη θεωρία έχει σύμμορφη συμμετρία που ικανοποιεί την άλγεβρα Virasoro (2.3.25).

- Αν συμβολίσουμε τα κρίσιμα σημεία ως λ_*, σε αυτά, η συνάρτηση $C(\vec{\lambda})$ έχει την τιμή των κεντρικών φορτίων των αντίστοιχων σύμμορφων θεωριών δηλαδή

$$C(\vec{\lambda}_*) = c_{\vec{\lambda}_*} \, . \tag{4.1.4}$$

[1] Αυτό φαίνεται και από την επανακανονικοποίηση Wilson. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [10].

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βασίζεται στην επανακανονικοποιησιμότητα της θεωρίας που μελετάμε, καθώς επίσης και στις ιδιότητες της διδιάστατης CFT που μελετήσαμε στο κεφ. 2. Συμβολίζοντας με[2]

$$T = T_{zz}, \qquad \Theta = T_{z\bar{z}} \tag{4.1.5}$$

και ορίζοντας από την (4.1.1) τους τελεστές (διανύσματα βάσης)

$$\Phi_i(\vec{\lambda}, \mu) = \frac{\partial}{\partial \lambda^i} \mathcal{L}(\vec{\lambda}, \mu) \tag{4.1.6}$$

η επανακανονικοποιησιμότητα είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι η συνηστώσα Θ αναπτύσεται στη βάση (4.1.5) ως

$$\Theta = \beta^i(\vec{\lambda})\Phi_i \, . \tag{4.1.7}$$

Έχοντας τα αρχικά στοιχεία του χώρου σταθερών ζεύξης και περνώντας στο μιγαδικό επίπεδο, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} F(\vec{\lambda}) &= 2z^4 \langle T(z,\bar{z})T(0)\rangle|_{\mu=\mu_0} \\ H_i(\vec{\lambda}) &= z^3\bar{z}\langle T(z,\bar{z})\Phi_i(0)\rangle|_{\mu=\mu_0} \\ G_{ij}(\vec{\lambda}) &= z^2\bar{z}^2\langle \Phi_i(z,\bar{z})\Phi_j(0)\rangle|_{\mu=\mu_0} \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

όπου μ_0 μία αυθαίρετη κλίμακα. Όπως φαίνεται, οι τρεις παραπάνω ποσότητες δεν εξαρτώνται από τα εξωτερικά σημεία. Η ποσότητα $G_{ij}(\vec{\lambda})$ ονομάζεται **μετρική Zamolodchikov** και ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που ορίζουμε το αναλλοίωτο μήκος στη διαφορική γεωμετρία, ορίζουμε το αναλλοίωτο μήκος στο χώρο σταθερών ζεύξης

$$ds^2 = G_{ij}(\vec{\lambda}) d\lambda^i d\lambda^j \, . \tag{4.1.9}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Callan-Symanzik σύμφωνα με την οποία, κάθε αδιάστατη και αναλλοίωτη κάτω από στροφές συνάρτηση της μορφής $f(\vec{\lambda}, \mu, z\bar{z})$, εξαρτάται απο το $\vec{\lambda}$ και από την αδιάστατη ποσότητα $z\bar{z}/\mu^2$, ώστε

$$-\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial \mu} f = z\partial_z f = \bar{z}\partial_{\bar{z}} f \tag{4.1.10}$$

και είναι αναλλοίωτη κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης, καταλήγουμε ότι

$$0 = \frac{df}{dt} = \beta^i \partial_i f + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \ln \mu} f \tag{4.1.11}$$

[2] Να υπενθυμίσουμε ότι στο σύμμορφο σημείο $T_{z\bar{z}} = 0$.

όπου για συντομογραφία

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial \lambda^i} \tag{4.1.12}$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο διατήρησης του τανυστή ΕΟ, $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$, γραμμένο σε μιγαδική μορφή

$$\partial_{\bar{z}} T + \partial_z \Theta = 0, \tag{4.1.13}$$

όπως επίσης και την (4.1.7), έχουμε

$$\frac{1}{2}\beta^i \partial_i C(\vec{\lambda}) = \frac{1}{2}\bar{z}\partial_{\bar{z}}(2z^4\langle T(z,\bar{z})T(0)\rangle) = (z\partial_z - 3)(z^3\bar{z}\rangle T(z,\bar{z})\,.\Theta(0)\rangle \tag{4.1.14}$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις συσχέτισης (4.1.8), προκύπτει αμέσως

$$\frac{1}{2}\beta^i \partial_i C(\vec{\lambda}) = 3\beta^i H_i - \beta^i \beta^k \partial_k H_i - \beta^k(\partial_k \beta^i) H_i\,. \tag{4.1.15}$$

Ομοίως ισχύει η εξίσωση

$$(\bar{z}\partial_{\bar{z}} - 1)(z^3\bar{z}\langle T(z,\bar{z})\Theta(0)\rangle) + (z\partial_z - 2)(z^2\bar{z}^2\langle \Theta(z,\bar{z})\Theta(0)\rangle = 0 \tag{4.1.16}$$

από την οποία, αντικαθιστώντας τις (4.1.8) προκύπτει η εξίσωση

$$\beta^k \partial_k H_i + (\partial_i \beta^k) H_k - H_i = -2\beta^k G_{ik} + \beta^i \beta^k \partial_k G_{ij} + \beta^j(\partial_i \beta^k) G_{jk} + \beta^j(\partial_i \beta^k) G_{ik}\,. \tag{4.1.17}$$

Για την εξαγωγή της παραπάνω σχέσης χρησιμοποιήσαμε και τον ορισμό του πίνακα των ανώμαλων διαστάσεων

$$\gamma^i_j(\vec{\lambda})\Phi_j \equiv (\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial \mu} - \beta^k \partial_k)\Phi_i = (\partial_i \beta^j)\Phi_j \tag{4.1.18}$$

με γ^i_j ουσιατικά να αποτελεί τον πίνακα ανώμαλων διαστάσεων. Ορίζοντας τη συνάρτηση $C(\vec{\lambda})$ ως

$$C(\vec{\lambda}) = F(\vec{\lambda}) + 4\beta^i H_i(\vec{\lambda}) - 6\beta^i \beta^j G_{ij}(\vec{\lambda}) \tag{4.1.19}$$

και τις δύο παραπάνω εξισώσεις μετά από λίγες πράξεις προκύπτει ότι

$$\boxed{\beta^i \partial_i C = -12\beta^i \beta^j G_{ij}} \tag{4.1.20}$$

οπότε αποδείξαμε την (4.1.3).

Θεωρώντας στη συνέχεια ένα σύμμορφο σημείο $\vec{\lambda}_*$ το οποίο για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι $\vec{\lambda}_* = 0$, η μετρική Zamolodchikov γράφεται

$$G_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}(\vec{\lambda}^2)\,. \tag{4.1.21}$$

Σε αυτή την περίπτωση τα πεδία Φ_i είναι αυτά μίας σύμμορφης θεωρίας πεδίου και έχουν συγκεκριμένες ανώμαλες διαστάσεις d_i. Κοντά στο σύμμορφο σημείο θα ισχύει

$$C(\vec{\lambda}) \simeq c - 6\epsilon_i\vec{\lambda}^2 + 2f_{ijk}\lambda^i\lambda^j\lambda^k + \ldots \tag{4.1.22}$$

όπου το $2\epsilon_i = 2 - d_i$. Από την παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι για $\lambda = 0$ η συνάρτηση $C(\vec{\lambda})$ έχει τιμή c που είναι το κεντρικό φορτίο της σύμμορφης θεωρίας και μπορεί να δειχθεί ότι οι συντελεστές f_{ijk} είναι ίδια με τους παράγοντες δομής μίας σύμμορφης θεωρίας πεδίου. Η συνάρτηση β γίνεται

$$\beta^i(\vec{\lambda}) = \epsilon_i\lambda^i - \frac{1}{2}f_{ijk}\lambda^j\lambda^k + \mathcal{O}(\vec{\lambda}^3) \tag{4.1.23}$$

με το i να μην αθροίζεται στον πρώτο όρο. Χρησιμοποιώντας την (4.1.22) η συνάρτηση β^i τελικά, έρχεται στη μορφή

$$\boxed{\beta^i(\vec{\lambda}) = -\frac{1}{12}G^{ij}(\vec{\lambda})\frac{\partial}{\partial\lambda^j}C(\vec{\lambda})}\,. \tag{4.1.24}$$

Το κρίσιμο σημείο για την παραπάνω απόδειξη στις δύο διαστάσεις ήταν η χρήση ολομορφικών και αντι-ολομορφικών συντεταγμένων για την εξαγωγή των εξισώσεων (4.1.15) και (4.1.16). Σε επόμενο κεφάλαιο υπολογίζουμε τη συνάρτηση $C(\vec{\lambda})$ επακριβώς ως προς τις σταθερές ζεύξεις για μεγάλη κλάση θεωριών βρίσκοντας και τα αντίστοιχα κεντρικά φορτία στο IR.

2η απόδειξη

Μπορούμε χρησιμοποιώντας την (2.4.4) να εξάγουμε την ολοκληρωτική μορφή του θεωρήματος Zamolodchikov με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρούμε μία σύμμορφη θεωρία στο UV και εισάγουμε ένα βαθμωτό πεδίο το οποίο ονομάζουμε **διαστελόνιο** (dilaton), τροποποιώντας τη δράση ως εξής

$$S = S_{CFT_{UV}} + \lambda\int\Phi(r)e^{(x_\Phi - 2)\tau}d^2r \tag{4.1.25}$$

Η παραπάνω δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς κλίμακας

$$r^\mu \to e^b r^\mu, \qquad \Phi \to e^{-bx_\Phi}\Phi, \qquad \tau \to \tau + b \tag{4.1.26}$$

οπότε το ίχνος του συνολικού τανυστή ενέργειας-ορμής ικανοποιεί την $T^{\mu}_{\mu}|_{tot} = 0$. Να σημειώσουμε ότι αναπτύσοντας γύρω από ένα σταθερό τ, ο όρος πρώτης τάξης ζεύγνειται με το Θ στον επίπεδο χώρο.

Πριν να εισάγουμε το dilaton η θεωρία θα ρέει από μία CFT στο UV σε μία αντίστοιχη στο IR. Όμως η τροποποιημένη θεωρία είναι σύμμορφη σε όλη τη ροή το οποίο σημαίνει ότι η είσαγωγή του dilaton θα πρέπει να δίνει ένα επιπλέον κεντρικό φορτίο $\Delta c = c_{UV} - c_{IR}$. Εδώ υποθέτουμε ότι οι θεωρίες στο UV και στο IR έχουν διαφορετικά κεντρικά φορτία οπότε ορίζοντας τη διαφορά Δc θα πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι θετικά ορισμένη[3].

Στον καμπύλο χώρο όρος με το dilaton γίνεται

$$\lambda \int \Phi e^{(x_\Phi - 2)\tau} \sqrt{g}\, d^2 r \tag{4.1.27}$$

και οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί εμφανίζονται ως μετασχηματισμοί Weyl

$$g_{\mu\nu} \to e^{2\sigma} \to e^{2\sigma} g_{\mu\nu}, \qquad \tau \to \tau + \sigma\,. \tag{4.1.28}$$

Για να είναι η θεωρία σε καμπύλο χώρο σύμμορφη, θα πρέπει να εισάγουμε και τον όρο της σύμμορφης ζεύξης (βλέπε και κεφ 15 της [6]) οπότε θα υπάρχει και η επιπλέον ανωμαλία

$$\Theta = -\frac{\Delta c}{12} R\,. \tag{4.1.29}$$

Η παραπάνω ανωμαλία θα εμφανίζεται από έναν καινούριο όρο της δράσης για τον οποίο θα ισχύει

$$\frac{\delta S_{anom}}{\delta \sigma} = \frac{\Delta c}{24\pi} R\,. \tag{4.1.30}$$

Έχοντας υπόψιν τη μεταβολή $\delta^2 R \sim \partial^2 \sigma$, μπορεί να δειχθεί ότι η σωστή επιλογή είναι

$$S_{anom} = \frac{\Delta c}{24\pi} \int (\tau R + (\partial\tau)^2)\sqrt{g}\, d^2 r\,. \tag{4.1.31}$$

Το σημαντικό με τον παραπάνω όρο είναι ότι επιβιώνει και στον επίπεδο χώρο και ο συντελεστής είναι καθορισμένος από το Δc! Ολοκληρώνοντας τα πεδίο στο IR μπορεί κανείς να δει, σε ποιο σημείο ο παραπάνω όρος εμφανίζεται στον επίπεδο χώρο . Νωρίτερα αναφέραμε ότι το πεδίο τ δρα σαν πηγή για το Θ. Έτσι

$$\langle e^{\int \tau \Theta d^2 \tau d^2 r} \rangle = 1 + \frac{1}{2} \int \int \tau(\vec{r})\tau(\vec{r}\,')\langle \Theta(\vec{r})\Theta(\vec{r}\,') d^2 r d^2 \vec{r}\,' + \dots\,. \tag{4.1.32}$$

[3] Για να είμαστε πιο ακριβείς, η δράση (4.1.25) θα έχει κεντρικό φορτίο $c = c_{UV} + c_1 = c_{IR} + c_2$ οπότε $\Delta c = c_2 - c_1 = c_{UV} - c_{IR}$.

Αναπτύσοντας στη συνέχεια το πεδίο τ, βλέπουμε ότι ο όρος $(\partial\tau)^2$ ζεύγνειται με τον $\int r^2\langle\Theta(r)\Theta(0)\rangle$. Εισάγωντας όλους τους παράγοντες τελικά βρίσκουμε

$$\Delta c = \frac{3}{4\pi}\int r^2 \left\langle\Theta(r)\Theta(0)\right\rangle d^2r \geq 0\,. \tag{4.1.33}$$

Η ερώτηση που μπορεί να τεθεί, είναι αν είναι εφικτό να κατασκευάσουμε μία αντίστοιχη συνάρτηση C σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση δεν είναι τετριμμένη και για λόγους πληρότητας στην επόμενη παράγραφο περιγράφουμε τις αντίστοιχες κατασκευές συναρτήσεων C σε τρεις και τέσσερις διαστάσεις, χωρίς όμως να υπεισέλθουμε σε πολλές επεξηγήσεις παραθέτωντας στον αναγνώστη τις αντίστοιχες δημοσιεύσεις για περισσότερες λεπτομέρειες.

4.2 Θεωρήματα μονοτονίας σε διαστάσεις $d \neq 2$

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάσαμε αναλυτικά το C-θεώρημα του Zamolodchikov στις δύο διαστάσεις όπου εκεί ορίστηκε μία συνάρτηση καλούμενη C με τα χαρακτηριστικά ότι είναι γνησίως φθίνουσα κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης (καθώς ολοκληρώνουμε βαθμούς ελευθερίας) και τα άκρα αυτής της συνάρτησης έχουν τις τιμές των κεντρικών φορτίων των σύμμορφων θεωριών μεταξύ των οποίων παρεμβάλεται η συνάρτηση C.

Προχωρούμε τώρα στα αντίστοιχα θεωρήματα ανώτερων διαστάσεων, δίνοντας έμφαση στα ξεχωριστά χαρακτηριστικά που έχει η ανάλυση στις διαφορετικές διαστάσεις. Να σημειώσουμε εδώ ότι οι δύο διαστάσεις είναι πολύ ξεχωριστές λόγω της μορφής των συναρτήσεων συσχέτισης καθώς και της σύμμορφης ανωμαλίας που εμφανίζεται στη συνάρτηση δύο σημείων. Στις παραπάνω διαστάσεις οι αντίστοιχες συναρτήσεις συσχέτισης είναι πιο περίπλοκες με αποτέλεσμα να μη μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα επιχειρήματα των δύο διαστάσεων. Επίσης πρέπει να χωρίσουμε μεταξύ άρτιων και περιττών διαστάσεων καθώς στις περιττές διαστάσεις δεν εμφανίζονται σύμμορφες ανωμαλίες όπως στις άρτιες και αυτό καθιστά ακόμα δυσκολότερη την εύρεση μίας ποσότητας που ικανοποιεί τη ζητούμενη μονοτονία.

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε διαδοχικά τα αντίστοιχα θεωρήματα στις τρεις και τέσσερις διαστάσεις και στις ποσότητες που ακολουθούν την αντίστοιχη μονοτονία με τη C-συνάρτηση συζητώντας τα ξεχωριστά χαρακτηριστικά τους. Τα θεωρήματα μονοτονίας έχουν αναλυθεί και σε επίπεδο ολογραφίας αλλά δε θα μας απασχολήσουν. Συζήτηση όλων των παραπάνω γίνεται και στις αναφορές που δίνομε καθώς και στις αναφορές εντός αυτών.

4.2.1 Το F-θεώρημα στις τρεις διαστάσεις

Ερχόμαστε τώρα στις τρεις διαστάσεις όπου στις αντίστοιχες σύμμορφες θεωρίες δεν εμφανίζεται σύμμορφη ανωμαλία. Παρ΄ όλα αυτά, υπάρχει μία ποσότητα που μπορεί να ορισθεί σε κάθε θεωρία πεδίου και αυτή είναι η συνάρτηση επιμερισμού Z. Επίσης, για να αποφύγουμε αποκλίσεις καθώς την υπολογίζουμε και επειδή θέλουμε να ενσωματώσουμε την περιγραφή του θεωρήματος σε μία γενικότερη εικόνα, σχετίζοντας τα μεγέθη με το βαθμωτό Ricci (βλέπε (2.4.4)) ορίζουμε τη θεωρία πεδίου στην τρισδιάστατη σφαίρα S^3. Υπολογίζοντας τη συνάρτηση επιμερισμού μπορούμε να ορίσουμε τη λεγόμενη **ομαλοποιημένη ελεύθερη ενέργεια**

$$F \equiv -\log |Z_{S^3}| \,. \tag{4.2.1}$$

Ο ισχυρισμός του F-θεωρήματος είναι ότι σε κάθε σύμμορφη θεωρία πεδίου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό F (4.2.1) με την ιδιότητα πως όταν υπάρχει μία ροή στην ομάδα επανακανονικοποίησης μεταξύ του UV και του IR τότε ισχύει

$$F_{UV} > F_{IR} \tag{4.2.2}$$

με άλλα λόγια η ελεύθερη ενέργεια είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση της ενέργειας και η ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης είναι μη αντιστρέψιμη. Δηλαδή αν υπάρχει ροή από την CFT_1 στη CFT_2 δεν υπάρχει ροή που να συνδέει τη CFT_2 με την CFT_1.

Στις θεωρίες πεδίου τριών διαστάσων υπάρχουν αρκετά παραδείγματα όπου μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή F της τρισδιάστατης θεωρίας πεδίου. Μεταξύ αυτών είναι και θεωρίες πεδίου με $\mathcal{N} \geq 2$ υπερσυμμετρία, όπου με τη χρήση της τεχνικής ισομεταβλητού εντοπισμού μπορεί κανείς να αναγάγει το απειροδιάστατο ολοκλήρωμα της συνάρτησης επιμερισμού σε πεπερασμένο και ενίοτε να το υπολογίσει επακριβώς. Σε αυτή την κατηγορία των υπερσυμμετρικών θεωριών εμφανίζεται και ένα επιπλέον θεωρήμα το οποίο καλείται μεγιστοποίηση F και σχετίζεται με την εύρεση μιας κλάσης συμμετριών των υπερσυμμετρικής ομάδας που εμφανίζονται στις Υπερσύμμορφες θεωρίες πεδίου στο IR. Παρακάτω αναφέρουμε πολύ συνοπτικά δύο παραδείγματα όπου υπολογίζουμε το συντελεστή F και στη συνέχεια θα περιγράψουμε αδρομερώς τη μεγιστοποίηση F για πληρότητα.

Ελεύθερο Μποζόνιο

Προφανώς τα ευκολότερα συστήματα των οποίων η συνάρτηση επιμερισμού υπολογίζεται επακριβώς είναι οι ελεύθερες θεωρίες. Παρακάτω περιγράφουμε το ελεύθερο μποζόνιο στην S^3. Για να γράψουμε τη μποζονική δράση σε καμπύλο χώρο, χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη σύμμορφη απεικόνιση. Σύμφωνα με αυτήν η δράση του ελέυθερου μποζονίου γίνεται

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{g} \left((\partial_\mu \phi)^2 + \frac{R}{8} \phi^2 \right) \tag{4.2.3}$$

Ο δεύτερος όρος λέγεται σύμμορφη σύζευξη και η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς

$$\delta g_{\mu\nu} = 2\Omega(x) g_{\mu\nu}, \qquad \delta\phi(x) = -\Omega(x)/2\phi(x) \tag{4.2.4}$$

όπου R το βαθμωτό Ricci και για την τρισδιάστατη σφαίρα $R = 6$. Η συνάρτηση επιμερισμού σε αυτή την περίπτωση είναι ένα Γκαουσιανό ολοκλήρωμα και συγκεκριμένα

$$Z_{S^3} = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-\int d^3x \sqrt{g}\phi(-\nabla^2 + \frac{3}{2})\phi} \tag{4.2.5}$$

οπότε η ελεύθερη ενέργεια δίνεται από την

$$F = -\log |Z_{S^3}| = \frac{1}{2}\log(-\nabla^2 + \frac{3}{2})\,. \tag{4.2.6}$$

Ο τελεστής εντός της παρένθεσης, είναι ο τελεστής Λαπλασιανής της σφαίρας μετατοπισμένος κατά μία σταθερά και έχει ιδιοτιμές $(n + \frac{1}{2})(n + \frac{3}{2})$ με εκφυλισμό $(n + 1)^2$ και $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αντικαθιστώντας στην ελεύθερη ενέργεια προκύπτει ότι

$$F = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 \log\left((n + \frac{1}{2})(n + \frac{3}{2})\right) \tag{4.2.7}$$

Το παραπάνω άθροισμα αποκλίνει αλλά χρησιμοποιώντας τη ζ-ομαλοποίηση εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι

$$F = \frac{\log 2}{8} - \frac{3\zeta(3)}{16\pi^2} \simeq 0,0638 > 0\,. \tag{4.2.8}$$

Η παραπάνω θεωρία είναι άμαζη. Εισάγωντας έναν όρο μάζας ως όρο διαταραχής και ξεκινώντας την RG ροή, η θεωρία στο IR είναι κενή. Αυτό σημαίνει ότι $F_{IR} = 0$ και παρατηρούμε ότι

$$F_{UV} > F_{IR} = 0 \tag{4.2.9}$$

οπότε επιβεβαιώνεται το θεώρημα F.

Ελεύθερο φερμιόνιο

Η δράση φερμιονίου στην S^3 είναι

$$S_D = \int d^3x \sqrt{g}\, \psi^\dagger i\gamma^\mu D_\mu \psi \tag{4.2.10}$$

όπου $D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4}\gamma^{ab}\omega_{ab}(x)$. Η ελεύθερη ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$F_D = -\log|Z_D| = -\mathrm{tr}\log(i\gamma^\mu D_\mu) \tag{4.2.11}$$

και βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του τελεστή Dirac (καθώς είναι γνωστές στη βιβλιογραφία) βρίσκουμε την ελεύθερη ενέργεια ελεύθερου Dirac φερμιονίου[4]

$$F_D \simeq 0,219 \tag{4.2.12}$$

Υπερσυμμετρικές Θεωρίες και μεγιστοποίηση F

Όπως αναφέραμε νωρίτερα, μία κλάση θεωριών στις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε την ελεύθερη ενέργεια είναι οι υπερσυμμετρικές θεωρίες με $\mathcal{N} \geq 2$ υπερσυμμετρία. Συγκεκριμένα, με τη χρήση του ισομεταβλητού εντοπισμού, όπου παραμορφώνοντας τη δράση με έναν όρο που κατασκευάζεται με τη χρήση των υπερφορτίων και εφαρμόζοντας την προσέγγιση σαγματικών σημείων μπορεί κανείς να ανάγει το απειροδιάστατο ολοκλήρωμα σε ένα πεπερασμένο ολοκλήρωμα με πεδία τις κβαντικές διακυμάνσεις γύρω από τα σαγματικά σημεία.

Θα περιγράψουμε τώρα σχηματικά τη μεγιστοποίηση F στις θεωρίες με $\mathcal{N} = 2$ υπερσυμμετρία. Σε αυτή την περίπτωση η υπερσύμμορφη ομάδα περιέχει ως συμμετρίες την υπερσυμμετρία, την υπερσύμμορφη συμμετρία, μία συμμετρία που καλείται $U(1)_R$ αβελιανή R-συμμετρία η οποία δεν μετατίθεται με τους γεννήτορες της υπερσυμμετρίας και επιπλέον συμμετρίες γεύσης flavors. Ξεκινώντας στο UV με μία κβαντική θεωρία η οποία κατά τη διάρκεια της RG-ροής διατηρεί την υπερσυμμετρία και ένα μέρος της $U(1)_R$ την οποία συμβολίζουμε με $U(1)_R^{RG}$, καθώς και τις συμμετρίες γεύσεις, υποθέτουμε ότι στο IR θα υπάρχει ένα σύμμορφο σημείο με υπερσύμμορφη συμμετρία της οποίας αναζητούμε την $U(1)_R$-συμμετρία. Συνήθως η ζητούμενη $U(1)_R$ προκύπτει από γραμμικό συνδιασμό των $U(1)^{RG}$ και των συμμετριών γεύσης. Ο ισχυρισμός του θεωρήματος της F-μεγιστοποίησης είναι ότι μεγιστοποιώντας την ελεύθερη ενέργεια στη σφαίρα μπορεί κανείς να βρει το γραμμικό συνδιασμό

$$U(1)_R^{IR} = U(1)_R^{RG} \oplus flavors \tag{4.2.13}$$

δηλαδή μπορούμε να βρούμε την $U(1)$ στην υπερσύμμορφη θεωρία στο IR. Για επιπλέον πληροφορίες στο θεώρημα F παραθέτουμε την [7] και τις αναφορές που περιέχονται εκεί.

[4] Αν τα φερμιόνια είναι Majorana οι φερμιονικοί βαθμοί ελευθερίας είναι μισοί , οπότε $F_M = F_D/2$.

4.2.2 Το a-θεώρημα στις τέσσερις διαστάσεις

Ερχόμαστε στις τέσσερις διαστάσεις όπου το αντίστοιχο θεώρημα μονοτονίας καλείται α-θεώρημα[8]. Συγκεκριμένα, αν θελήσουμε να επαναλάβουμε την απόδειξη του θεωρήματος Zamolodchikov για τις τέσσερις διαστάσεις, θα δούμε ότι η συνάρτηση δύο σημείων (χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις συσχέτισης για σύμμορφες θεωρίες σε $d \geq 3$) έχει μία πολύ περίπλοκη μορφή και δεν είναι απλά ανάλογη του κεντρικού φορτίου της θεωρίας. Παρ όλα αυτά, ο Cardy, ορμόμενος από τη σχέση (2.4.4) και απεικονίζοντας τη θεωρία κάτω από μελέτη στην S^d, όρισε μία συνάρτηση την οποία αποκάλεσε c και δίνεται από την

$$c = (-1)^{d/2} a_d \int d^d x \sqrt{g} \, \langle T^\mu_\mu \rangle \, . \tag{4.2.14}$$

Ο παραπάνω ορισμός έχει το προνόμιο ότι μπορεί να γενικευτεί εκτός των τεσσάρων και σε όλες τις άρτιες διαστάσεις. Η υπόθεση του Cardy για τη μονοτονία αυτής της συνάρτησης έμεινε αναπόδεικτη (εκτός επιχειρημάτων που ισχυροποιούσαν τη βασιμότητά της) έως το 2011 όπου και αποδείχθηκε στην [9]. Συνοπτικά η απόδειξη είναι όμοια με αύτην που παρουσιασιάσαμε στις δύο διαστάσεις κάνοντας χρήση του dilaton. Κατ' αναλογία με τη διδιάστατη περίπτωση, όταν $d = 4$ ο αντίστοιχος όρος ζεύξης της (4.1.27) με το dilaton είναι

$$\lambda \int \Phi(r) e^{(x_\Phi - 4)\tau} \sqrt{g} \, d^4 r \tag{4.2.15}$$

Στις τέσσερις διαστάσεις μπορεί να δειχθεί ότι το ίχνος του τανυστή ενέργειας ορμής λαμβάνει τη μορφή

$$\langle \Theta \rangle = cW^2 - aE_4 \tag{4.2.16}$$

όπου

$$\begin{aligned} W^2 &= W_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 2R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{1}{3} R^2 \\ E_4 &= R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

με τα c, a να αποτελούν συντελεστές. Ο τανυστής W λέγεται τανυστής Weyl ενώ η ποσότητα E_4 καλείται πυκνότητα Euler. Το ανώμαλο μέρος της δράσης ξεκινάει με τον όρο

$$S_{anom} = \int \tau (\Delta c W^2 - \Delta a E_4) \sqrt{g} \, d^4 r + \ldots \, . \tag{4.2.18}$$

Όμως, η πυκνότητα Euler δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Weyl (παρόλο που ο W είναι). Οι επιπλέον όροι που πρέπει να προστεθούν (αγνοώντας όρους που απαλείφονται από τις εξισώσεις κίνησης $\partial^2\tau \sim (\partial\tau)^2)$, είναι

$$-\Delta a \int [4(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)\partial_\mu\tau\partial_\nu\tau - 2(\partial\tau)^4]\sqrt{g}\, d^4r\,. \tag{4.2.19}$$

Επιπρόσθετα υπάρχει και ένας επιπλέον κινητικός όρος

$$f^2 \int e^{-2\tau}(\partial\tau)^2\sqrt{g}\, d^4r \tag{4.2.20}$$

όπου το f έχει διαστάσεις μάζας. Να σημειώσουμε ότι ο όρος $\sim \Delta a \int(\partial\tau)^4 d^4r$ παραμένει όταν γυρίσουμε στον επίπεδο χώρο. Στην [9] επιχειρηματολογείται ότι στον επίπεδο χώρο αυτός ο όρος δίνει το πλάτος ελαστικής σκέδασης dilaton-dilaton

$$\mathcal{A}(s,t,u) \sim \frac{\Delta a}{f^4}(s^2 + t^2 + u^2) \tag{4.2.21}$$

Στη συνέχεια έδειξαν ότι $\Delta a \geq 0$ οπότε προκύπτει

$$a_{UV} \geq a_{IR}\,. \tag{4.2.22}$$

Έτσι λοιπόν στις τέσσερις διαστάσεις υπάρχει ένα a-θεώρημα αλλά όχι κατ΄ ανάγκη ένα c-θέωρημα καθώς υπάρχουν αντιπαραδείγματα για το δεύτερο.

Κεφάλαιο 5

Επισκόπηση στις λ-παραμορφώσεις

Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα σύνολο αποτελεσμάτων πάνω στις λ-παραμορφώσεις. Όπως αναφέραμε και στην είσαγωγη οι λ-παραμορφώσεις αποτελούν μία κλάση διδιαστατων παραμορφώσεων σε πρότυπα WZW οι οποίες έχουν τα παρακάτω γενικά χαρακτηριστικά

- Είναι εν γένει ολοκληρώσιμες
- Παρεμβάλλονται μεταξύ ενός WZW προτύπου με αφινική άλγεβρα ρευμάτων G_k και του μη- Αβελιανού Τ-δυικού Πρωτεύοντος Χειραλικού Προτύπου (PCM) ως προς την αριστερή δράση της ομάδας G_k.
- Είναι αναλλοίωτα κάτω από τη δράση δυικών συμμετριών μέσω των οποίων μπορει κανείς να εξάγει μη διαταρακτικά αποτελέσματα για την κβαντική θεωρία των λ-παραμορφώσεων, Τέτοια είναι η β-συνάρτηση, οι ανώμαλες διαστάσεις καθώς επίσης και η συνάρτηση C η οποία σχετίζεται με τη ροή των βαθμών ελευθερίας καθώς η θεωρία ρέει από το Υπεριώδες (UV) στο Υπέρυθρο (IR)

Οι λ-παραμορφώσεις που θα μας απασχολήσουν είναι οι ¨απλές' λ-παραμορφώσεις, οι λ-παραμορφώσεις για διαφορετικά επίπεδα δύο ή περισσοτέρων WZW προτύπων και οι λ-παραμορφώσεις σε χώρους πηλίκα (cosets) τύπου G_k/H_k.

Συγκεκριμένα η αρχική κατασκευή των λ-παραμορφώσεων παρουσιάζεται στην [16]. Ο υπολογισμός της συνάρτησης β για την ισοτροπική περίπτωση $\lambda = \lambda\delta_{ab}$ δίνεται στην [28] και για γενικό λ_{ab} σε cosets στην [29] με χρήση βαρυτικών μεθόδων. Η απόδειξη της Yangian συμμετρίας και της ισχυρής ολοκληρωσιμότητας των απλά παραμορφωμένων λ-προτύπων δίνεται στην [61]. Η εμβάπτιση των απλά παραμορφωμένων προτύπων δίνεται στην [14]. Στην [52] αποδεικνύεται η κλασική και ισχυρή ολοκληρωσιμότητα στην περίπτωση όπου $\lambda_{ab} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Στην [53] συζητείται ο δυισμός μεταξύ των λ-παραμορφωμένων θεωριών και η-παραμορφωμένων θεωριών. Οι ανώμαλες διαστάσεις τελεστών στα απλά παραμορφωμένα πρότυπα υπολογίζονται στην [19]. Οι συναρτήσεις δύο και τριών σημείων καθώς και η λ-παραμορφωμένη άλγεβρα του απλά λ-παραμορφωμένου προτύπου δίνονται στην [21]. Το πρότυπο με διαφορετικά αριστερόστροφα και δεξιόστροφα κεντρικά φορτία συζητώνται στην [22] ενώ στην [20] υπολογίζεται η β-συνάρτηση σε επίπεδο $1/k^2$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι θεωρίες που κατασκευάζονται για διαφορετικά στοιχεία ομάδας καθώς εμφανίζουν και πλουσιότερη δομή κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης. Η περίπτωση λ-παραμορφωμένων θεωριών με διαφορετικά στοιχεία $g_1 \neq g_2$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ αλλά ίδιου επιπέδου k αναφέρονται στην [12]. Στην [23] υπολογίζονται οι β-συναρτήσεις του προηγούμενου προτύπου. Στην [58] αποδεικνύεται ότι παρόλη την πολυπλοκότητα της δράσης η προηγούμενη θεωρία είναι δύο αντίγραφα ενός απλά λ-παραμορφωμένου προτύπου. Στην [46] συζητείται η περίπτωση της απλώς λ-παραμορφωμένης θεωρίας αλλά με $g_1 \neq g_2$ και $k_1 \neq k_2$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε την εμφάνιση σύμμορφου σημείου στο IR το οποίο είναι ακριβές ως προς λ. Στην [62] συζητείται η αντίστοιχη κατασκευή σε cosets. Στη συνέχεια, οι συναρτήσεις β υπολογίζονται με τη χρήση της μεθόδου heat-kernel στην [59]. Κλείνοντας, στην [47] συζητείται η περίπτωση αμοιβαία αλληλεπιδρώντων ρευμάτων και αυτο-αλληλεπιδρώντων. Στην [50] υπολογίζεται η C-συνάρτηση με τη χρήση του θεωρήματος Zamolodchikov [5] ενώ στην [51] υπολογίζεται η ίδια συνάρτηση με τη χρήση βαρυτικών μεθόδων.

Σε ότι ακολουθεί δεν περιγράφουμε εκτενώς όλα τα παραπάνω αλλά θα περιοριστούμε σε αυτά που είναι χρήσιμα για τα επόμενα κεφάλαια ως ένα προστάδιο για την κατανόηση των υπολογισμών που πρόκειται να παρουσιάσουμε.

5.1 Απλές λ-παραμορφώσεις

Η παρακάτω παρουσίαση βασίζεται στο [16] όπου μπορει κανείς να ανατρέξει για περαιτέρω λεπτομέρειες. Σημείο εκκίνησης αποτελεί η κλάση διδιάστατων σ-προτύπων της μορφής

$$S(X) = \frac{1}{2}\int d^2\sigma\, Q_{\mu\nu}\partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu \tag{5.1.1}$$

όπου

$$Q_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} \tag{5.1.2}$$

με το $G_{\mu\nu}$ η μετρική του εξωτερικού χώρου (target space) και $B_{\mu\nu}$ ένα αντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο.

Για να κατασκεύασουμε το λ-παραμορφωμένο πρότυπο ακολουθούμε τα εξής βήματα

- Ξεκινάμε με ένα PCM πρότυπο το οποίο έχει συμμετρία $G_L \times G_R$ και ένα WZW πρότυπο το οποίο έχει συμμετρία $G_{L,cur} \times G_{R,cur}$.
- Στη συνέχεια εφαρμόζουμε βάθμιση στη διαγώνια υποομάδα H του $G_L \times G_R$. Αυτό

απαιτεί την εισαγωγή μη δυναμικών πεδίων βαθμίδας στην αντίστοιχη ομάδα Lie.

- Ολοκληρώνοντας τα πεδία βαθμίδας λαμβάνουμε το σ-πρότυπο που αντιστοιχεί στην G/H CFT.

Πιο συγκεκριμένα το PCM δίνεται από την

$$S_{PCM} = -\frac{\kappa^2}{\pi}\int d^2\sigma\, \mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}\partial_+\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial_-\tilde{g}), \qquad \tilde{g}\in G \tag{5.1.3}$$

όπου το κ^2 είναι μία συνολική σταθερά ζεύξης. Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει την αναλλοιώτητα της δράσης (5.1.3) κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής $G_L \times G_R$ δηλαδή

$$\delta_L S_{PCM} = \delta_R S_{PCM} = 0 \tag{5.1.4}$$

όπου για $\omega \equiv \omega^a t^a$ ισχύει

$$\delta_L\tilde{g} = \omega\tilde{g} \qquad \delta_R\tilde{g} = g\omega \tag{5.1.5}$$

Το πρότυπο WZW έχει συζητηθεί ικανοποιητικά στο κεφ 3 αλλά εδώ ξαναγράφουμε τη δράση που θα χρειαστούμε

$$S_{WZW}(g) = -\frac{k}{2\pi}\int d^2\sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_+ g g^{-1}\partial_- g) + \frac{ik}{6\pi}\int d^2\sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^3 \tag{5.1.6}$$

όπου k είναι η κεντρική επέκταση της αφινικής άλγεβρας G_k. Η συμμετρία $G_{L,cur}\times G_{R,cur}$ παράγει τα διατηρούμενα ρεύματα

$$J^a_+ = -i\mathrm{Tr}(t^a\partial_+ g g^{-1}) = R^a_\mu \partial_+ X^\mu \qquad J^a_- = -i\mathrm{Tr}(t^a g^{-1}\partial_- g) = L^a_\mu\partial_- X^\mu \tag{5.1.7}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη βάθμιση (gauging) της $G_L \times G_{diag,cur}$ της παραπάνω συνολικής συμμετρίας, με το $G_{diag,cur}$ να αποτελεί τη διαγώνια υποομάδα της $G_{L,cur}\times G_{R,cur}$. Κατά τη διαδικασία βάθμισης

$$\partial_\pm\tilde{g} \to D_\pm\tilde{g} = \partial_\pm\tilde{g} - A_\pm\tilde{g} \tag{5.1.8}$$

οπότε η βαθμισμένη δράση που προκύπτει από την (5.1.3) είναι

$$S_{gPCM}(g;A) = -\frac{\kappa^2}{\pi}\int d^2\sigma \mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}D_+\tilde{g}\tilde{g}^{-1}D_-\tilde{g}) \tag{5.1.9}$$

Επίσης το βαθμισμένο WZW πρότυπο δίνεται από την

$$\begin{aligned} S_{gWZW}(g;A) &= S_{WZW}(g) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma \mathrm{Tr}(iA_-J_+ - iA_+J_- + A_-gA_+g^{-1} - A_-A_+) \\ &= S_{WZW}(g) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma (iA_-^a J_+^a - iA_+ J_-^a + A_+^a (D^T - 1)_{ab} A_-^b)\,. \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Η συνολική δράση μετά τη βάθμιση είναι

$$S(g,\tilde{g};A) = S_{gPCM}(\tilde{g};A) + S_{gWZW}(g;A) \tag{5.1.11}$$

και είναι αναλλοίωτη κάτω από

$$\begin{aligned} &\tilde{g} \to \Lambda^{-1}\tilde{g}, \qquad g \to \Lambda^{-1} g \Lambda \\ &A_\pm \to \Lambda^{-1}A_\pm\Lambda - \Lambda^{-1}\partial_\pm\Lambda \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

όπου $\Lambda(\sigma^+,\sigma^-) \in G$. Για να προχωρήσουμε χρειάζεται να επιλέξουμε βαθμίδα. Διαλέγουμε

$$\tilde{g} = 1 \tag{5.1.13}$$

οπότε απαλείφοντας τους όρους με $\partial_\pm\tilde{g}$ η δράση (5.1.11) γίνεται

$$S_{g,f}(g;A) = S_{WZW}(g) + \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma \mathrm{Tr}(-ikA_+J_- + ikJ_+A_- - A_+MA_-) \tag{5.1.14}$$

όπου

$$M = \kappa^2 \times 1 - k(D^T - 1) = (\kappa^2 + k)(1 - \lambda D^T) \tag{5.1.15}$$

με

$$\lambda = \frac{k}{\kappa^2 + k} \qquad 0 < \lambda < 1 \tag{5.1.16}$$

Η δράση (5.1.14) είναι αναλλοίωτη κάτω από την καθολική συμμετρία

$$g \to \Lambda_0^{-1} g \Lambda_0, \qquad A_\pm \to \Lambda_0^{-1} A_\pm \Lambda_0, \qquad \Lambda_0 \in G\,. \tag{5.1.17}$$

Βρίσκοντας τις εξισώσεις κίνησης των πεδίων βαθμίδας έχουμε

$$A_+^a = ikM_{ba}^{-1}J_+^b, \qquad A_-^a = -ikM_{ab}^{-1}J_-^b\,. \tag{5.1.18}$$

Αντικαθιστώντας την (5.1.18) στην (5.1.11) προκύπτει

$$S(g) = S_{WZW}(g) + \frac{1}{\pi}\frac{k^2}{\kappa^2+k}\int d^2\sigma J_+^a (1-\lambda D^T)^{-1}_{ab} J_-^b \tag{5.1.19}$$

και με τη χρήση της (5.1.16) καταλήγουμε στη δράση

$$S_{k,\lambda}(g) = S_{WZW}(g) + \frac{k}{\pi}\lambda\int d^2\sigma J_+^a (1-\lambda D^T)^{-1}_{ab} J_-^b \ . \tag{5.1.20}$$

Η παραπάνω δράση έχει την παραμετρική δυική συμμετρία

$$\lambda \to \frac{1}{\lambda} \qquad k \to -k, \qquad g \to g^{-1} \ . \tag{5.1.21}$$

Εξαγωγή μετρικής του σ-προτύπου

Από τη δράση (8.0.6) μπορούμε να εξάγουμε τη μετρική του σ-προτύπου

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{k}{2\pi}L^T L + \frac{k^2}{2\pi}L^T(D^T M^{-1} + M^{-T}D)L \\ &= \frac{k}{2\pi}L^T[1 + (D-\lambda)^{-1} + \lambda(D^T - \lambda\times 1)^{-1}]L \\ &= \frac{k}{2\pi}(1-\lambda^2)e^a e^a = \frac{k}{2\pi}(1-\lambda^2)\tilde{e}^a\tilde{e}^a \end{aligned} \tag{5.1.22}$$

και επίσης

$$B = \frac{1}{1-\lambda^2}\Big(B_0 + \frac{\lambda}{2}L^T[(D-\lambda\cdot 1)^{-1} - (D^T - \lambda\cdot 1)^{-1}]\wedge L\Big) \ . \tag{5.1.23}$$

5.1.1 Μη Αβελιανός Τ-δυισμός και όρια

Στην αρχή της ενότητας αναφέραμε ότι οι λ-παραμορφώσεις αποτελούν θεωρίες που παρεμβάλλονται μεταξύ ενός WZWπροτύπου και του Τ-δυικού PCM προτύπου. Για να το δούμε, αρχικά αναφέρουμε τον μη-Αβελιανό Τ-δυισμό και το Τ-δυικό όριο του PCM.
Σύμφωνα με την [18], ο μη Αβελιανός δυισμός είναι ο Τ-δυισμός για την περίπτωση ισομετριών που κατασκευάζουν μία μη-Αβελιανή ομάδα. Για να βρούμε το μη Αβελιανό όριο του PCM αρχικά ξεκινάμε από την (5.1.3) την οποία ξαναγράφουμε χωρίς τα περισπώμενα στοιχεία οπότε

$$S_{PCM} = -\frac{\kappa^2}{\pi}\int d^2\sigma\,\mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_+ g g^{-1}\partial_- g), \qquad g\in G \ . \tag{5.1.24}$$

Για να κατασκευάσουμε την Τ-δυική θεωρία του PCM ουσιαστικά ακολουθούμε τα ίδια βήματα με αυτά της κατασκευής των λ-παραμορφωμένων θεωριών. Δηλαδή εφαρμόζουμε βάθμιση σε μία από τις ισομετρίες εισάγωντας πεδία βαθμίδας και συναλλοίωτες παραγώγους στο σ-πρότυπο. Η θεωρία βαθμίδας που προκύπτει συμπληρώνεται με πολλαπλασιαστές Lagrange απ΄ όπου προκύπτει ότι τα πεδία βαθμίδας είναι τοπικά αμιγείς βαθμίδες (pure gauges) και ότι μπορούμε να ανακτήσουμε το αρχικό σ-πρότυπο σταθεροποιώντας τη βαθμίδα στο μηδέν.

Παρ΄ όλα αυτά, μπορεί κανείς να βρει τις εξισώσεις κίνησης των πεδίων βαθμίδας και ολοκληρώνοντας αυτά τα πεδία, να προκύψει το **Τ-δυικό σ-πρότυπο** του PCM με τον πολλαπλασιαστή Lagrance να παίζει το ρόλο των Τ-δυικών συντεταγμένων.

Αρχικά επιλέγουμε να εφαρμόσουμε τη βάθμιση σε ολόκληρη την G_L ισομετρία της (5.1.24) οπότε εισάγωντας και τον πολλαπλασιαστή Lagrange οπως αναφέραμε νωρίτερα προκύπτει

$$S_{nonAb} = -\int d^2\sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}D_- g g^{-1} D_+ g) + i\mathrm{Tr}(uF_{+-}) \tag{5.1.25}$$

όπου u ο πίνακας του πολλαπλασιαστή Lagrange. Στην παραπάνω δράση υφίσταται μία αριστερόστροφη συμμετρία

$$\begin{aligned} &g \to \Lambda^{-1} g, \qquad u \to \Lambda^{-1} u \Lambda \\ &A_\pm \to \Lambda^{-1} A_\pm \Lambda - \Lambda^{-1}\partial_\pm \Lambda \end{aligned} \tag{5.1.26}$$

με το $\Lambda(\sigma^+, \sigma^-) \in G$. Επίσης η (5.1.25) είναι αναλλοίωτη κάτω από την καθολική συμμετρία $g \to g\Lambda_R$ όπου $\Lambda_R \in G$. Σταθεροποιώντας τη βαθμίδα στο $g = 1$ καταλήγουμε σε ένα σ-πρότυπο το οποίο προκύπτει αποκλειστικά από τον πολλαπλασιαστή Lagrange και δίνεται από την

$$S = \int d^2\sigma\, \partial_+ u_i (M^{-1})_{ij} \partial_- u_j \tag{5.1.27}$$

όπου

$$M_{ij} = \delta_{ij} + f_{ij} \qquad f_{ij} \equiv f_{ijk} u_k \tag{5.1.28}$$

Η παραπάνω δράση λέγεται **δυική δράση του PCM** και από αυτή μπορεί κανείς να διαβάσει τη μετρική του περιβάλλοντα χώρου κάθως επίσης τις NS 2-μορφές ως τα συμμετρικά και αντισυμμετρικά μέρη της ποσότητας M^{-1}_{ij}. Στο όριο όπου

$$g = \mathbb{1} + i\frac{u}{k} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k^2}\Big) \tag{5.1.29}$$

με $u = u^a t_a$, η δράση $S(g)$ γίνεται αυτή της μη Αβελιανής θεωρίας του PCM. Αντικαθιστώντας το όριο στις σχέσεις που δίνουν τα ρεύματα και στο D^{ab}, έχουμε

$$J^a_\pm = \frac{\partial \pm u^a}{k} \qquad D_{ab} = \delta_{ab} + \frac{f_{ab}}{k} + \dots \tag{5.1.30}$$

όπου $f_{ab} = f_{abc}u_c$. Τότε προκύπτει ότι

$$S_{gWZW} = -\frac{i}{\pi}\int d^2\sigma \mathrm{Tr}(uF_{+-}) + \mathcal{O}(\frac{1}{k}) \tag{5.1.31}$$

διότι η συνεισφορά του WZW-προτύπου σε αυτό το όριο είναι δευτερεύουσα. Επίσης η λ-παραμορφωμένη δράση γίνεται ίδια με τη δράση που προκύπτει από τον T-δυικό μετασχηματισμό που εφαρμόζεται στο PCM. Με άλλα λόγια

$$S_{nonAb}(u) = \frac{1}{\pi}\int \partial_+ u^a(\mathbb{1} + f)^{-1}_{ab}\partial_- u^b + \mathcal{O}(\frac{1}{k}) \tag{5.1.32}$$

Επίσης όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα στο όριο όπου $k << \kappa^2$, δηλαδή για μικρές τιμές του λ, η λ παραμορφωμένη δράση γίνεται

$$S = S_{WZW} + \frac{k^2}{\pi\kappa^2}\int d^2\sigma\, J^a_+ J^a_- + \dots\ . \tag{5.1.33}$$

Χρησιμοποίωντας τον ορισμό για το λ έχουμε τη διαταρακτική λ-παραμορφωμένη θεωρία

$$S_{k,\lambda}(g) = S_{WZW,k}(g) + \frac{k}{\pi}\lambda\int J^a_+ J^a_- \tag{5.1.34}$$

όπου οι δύο πρώτοι όροι δίνουν το **μη Αβελιανό πρότυπο Thirring**.

5.1.2 Η β-συνάρτηση του λ-προτύπου

Η β-συνάρτηση του απλώς παραμορφωμένου λ-προτύπου δίνεται από

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{c_G}{2k}\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}, \qquad t = \pi \ln \mu^2 \tag{5.1.35}$$

όπου c_G είναι ο τετραγωνικός τελεστής Casimir και μ μία κλίμακα ενέργειας. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι να υπολογιστεί η β-συνάρτηση και ορισμένους παραθέτουμε παρακάτω:

- Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα συμμετρίας

$$S_{k,\lambda}(g) = S_{-k,\lambda^{-1}}(g^{-1}) \tag{5.1.36}$$

- Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεδίων υποβάθρου

- Με τη χρήση της μεθόδου Heat Kernel

Επιλέγουμε να παρουσιάσουμε αναλυτικά την εξαγωγή της β-συνάρτησης με τη χρήση υποβάθρου. Η χρήση με Heat Kernel θα εφαρμοσθεί εκτενώς στο κεφάλαι0 7 και αναμένουμε να γίνει πλήρως κατανοητή καθώς θα παρατεθούν και οι αναγκαίες λεπτομέρειες.

Μέθοδος πεδίων υποβάθρου

Οι εξισώσεις για τη β-συνάρτηση σε επίπεδο ενός βρόχου δίνονται από [11]

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{dt} - \frac{dB_{\mu\nu}}{dt} = R^+_{\mu\nu} + \nabla^+_\nu \xi_\mu \tag{5.1.37}$$

όπου παιρνώντας στους δείκτες του εφαπτόμενου επιπέδου και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{dt} = \beta^g_{ab} e^a_\mu e^b_\nu, \qquad \frac{dB_{\mu\nu}}{dt} = \beta^B_{ab} e^a_\mu e^b_\nu \tag{5.1.38}$$

η εξίσωση (5.1.37) γίνεται

$$\beta^g_{ab} - \beta^B_{ab} = R^+_{ab} + \nabla^+_b \xi_a \tag{5.1.39}$$

Να σημειωθεί ότι ως ορθοκανονική βάση, χρησιμοποιούμε τα

$$e^a = \sqrt{k(1-\lambda^2)}(D - \lambda \mathbb{1})^{-1}_{ab} R^b, \qquad \Lambda = \frac{D - \lambda \mathbb{1}}{\mathbb{1} - \lambda D} \tag{5.1.40}$$

Υπολογίζοντας στη συνέχεια και τα δύο μέλη της (5.1.37) και εξισώνοντας, θα εξαγάγουμε τη β-συνάρτηση. Το αριστερό μέλος δίνει

$$\begin{aligned}
\frac{dg_{\mu\nu}}{dt} + \frac{dB_{\mu\nu}}{dt} &= 2k\frac{d}{dt}(\lambda R^a_\mu (\mathbb{1} - \lambda D^T)^{-1}_{ab} L^b_\nu \\
&= 2k\frac{d\lambda}{dt} R^a_\mu [(\mathbb{1} - \lambda D^T)^{-1}(\mathbb{1} - \lambda D^T)^{-1}]_{ab} L^b_\nu \\
&= \frac{2}{1-\lambda^2}\frac{d\lambda}{dt} e^a_\mu \Lambda_{ab} e^b_\nu
\end{aligned} \tag{5.1.41}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την (5.1.40). Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι η παραπάνω εξίσωση σέβεται τη δυική συμμετρία των λ-παραμορφώσεων. Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε και το δεξί μέλος της (5.1.37) κάνοντας χρήση των σχέσεων

$$d\Lambda_{ab} = c_1 \Lambda_{ae} f_{ebc} e^c + c_2 \big(f_{abc} - f_{adc}\Lambda_{db} + \Lambda_{ae} f_{edc} \Lambda_{db} \big) e^c \tag{5.1.42}$$

με τα c_1, c_2 σταθερές αναλλοίωτες κάτω από την (5.1.47) με εκφράσεις

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{k(1-\lambda^2)}} \frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda}, \qquad c_2 = \frac{1}{\sqrt{k(1-\lambda^2)}} \frac{\lambda}{1+\lambda} \tag{5.1.43}$$

και

$$R^{+}_{ab} = c_G c_2^2(\delta_{ab} - \Lambda_{ab}) + f_{age} f_{bce}(c_1 c_2 \Lambda_{gc} - c_2^2 \Lambda_{cg} \\ + c_2^2\big(f_{ahe} f_{bcg} \Lambda_{hc} \Lambda_{ge} + f_{age} f_{hce} \Lambda_{gb} \Lambda_{hc} \ . \tag{5.1.44}$$

Οι παραπάνω σχέσεις βρίσκονται στο Παράρτημα Α της [28]. Εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις στο δεξί μέλος της (5.1.39) επιλέγοντας $\xi_a = -c_2 f_{abc} \Lambda_{bc}$, προκύπτει ότι

$$R^{+}_{ab} + \nabla^{+}_{b} \xi_a = -c_G c_2^2 \Lambda_{ab} \,. \tag{5.1.45}$$

Εξισώνοντας στη συνέχεια τα δύο μέλη, καταλήγουμε στην

$$\beta^{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{c_G}{2k} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}, \qquad t = \pi \ln \mu^2 \tag{5.1.46}$$

που είναι η β-συνάρτηση που αναφέραμε και στην αρχή αυτής της υποενότητας. Έυκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι η συνάρτηση β^{λ} είναι αναλλοίωτη κάτω από τη συμμετρία

$$\lambda \to \lambda^{-1} \qquad k \to -k \,. \tag{5.1.47}$$

ως αναμενόμενο γεγονός λόγω αναλλοιώτητας της δράσης.

5.2 Ανώμαλες διαστάσεις γ

Ένα άλλο βασικό αποτέλεσμα των λ-παραμορφώσεων είναι ο υπολογισμός των ανώμαλων διαστάσεων τελεστών όπως των ρευμάτων ή των διγραμμικών ρευματων[1]. Επίσης οι ανώμαλες διαστάσεις μπορούν να υπολογιστούν με αρκετές μεθόδους όπως

- Με τη χρήση της δυικής συμμετρίας
- Με τη χρήση του ορισμού της ανώμαλης διάστασης μέσω της β-συνάρτησης. Συγκεκριμένα αν ζητάμε την ανώμαλη διάσταση του τελεστή J, όπου J το διατηρούμενο ρεύμα του WZW προτύπου, τότε

  $$\gamma_J = \mu \frac{\partial \ln Z^{1/2}}{\partial \mu} = \beta \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \tag{5.2.1}$$

  όπου Z η επανακανονικοποίηση των πεδίων.

[1] Στο δεύτερο μέρος της διατριβής παρουσιάζουμε ένα συστηματικό τρόπο υπολογισμού των ανώμαλων διάστασεων τελεστών που αποτελούνται απο αλυσίδες (αντι-)ολομορφικών ρευμάτων καθώς επίσης και μικτών τελεστών που αποτελούνται από γινίμενο ολομορφικών και αντιολομορφικών ρευμάτων.

- Διαταρακτικά, χρησιμοποιώντας τον ορισμό των ανώμαλων διαστάσεων μέσω των συναρτήσεων συσχέτισης

$$G_{ab}(x_1, x_2) = G_{k,\lambda} \frac{\delta_{ab}}{x_{12}^{2\Delta} \bar{x}_{12}^{2\Delta}} \big(1 + \gamma \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} + \dots\big) \tag{5.2.2}$$

- Μέσω της γεωμετρίας του χώρου των σταθερών ζεύξης. Αυτή είναι και η περίπτωση που θα μας απασχολήσει παρακάτω.

Για να υπολογίσει κανείς την ανώμαλη διάσταση μέσω του δεύτερου τρόπου χρειάζεται το Z. Προφανώς από την Κβαντική Θεωρία Πεδίου οι γυμνοί τελεστές με τους επανακανονικοποιημένους σχετίζονται μέσω της

$$J_{\pm bare} = Z^{1/2} J_{\pm ren} \tag{5.2.3}$$

Παραμετροποιώντας το $g = e^{ix^a t_a}$ με τα x^a να είναι οι συντεταγμένες του παραμορφωμένου προτύπου, αναπτύσουμε την $S_{k,\lambda}(g)$ οπότε προκύπτει [19]

$$S_{k,\lambda}(g) = Z^{-1} \int d^2\sigma (\partial_+ x^a \partial_- x^a + \dots) \tag{5.2.4}$$

όπου

$$Z^{-1} = \frac{k}{4\pi} \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \tag{5.2.5}$$

και $J^a_\pm = \partial_\pm x^a + \dots$ και τα πεδία x^a είναι τα γυμνά. Από την (5.2.1) και με τη χρήση των (5.1.46) και (5.2.5) καταλήγουμε στην ανώμαλη διάσταση του J^a που δίνεται από

$$\gamma_J(\lambda) = \frac{c_G}{k} \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3} \tag{5.2.6}$$

με διαταρακτικό ανάπτυγμα

$$\gamma_J^{per}(\lambda) = \frac{c_G}{k} \big(\lambda^2 - 2\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4)\big) \tag{5.2.7}$$

Η παραπάνω σχέση (5.2.7) μπορεί να επιβεβαιωθεί εκτελώντας τον αναλυτικό υπολογισμό μέσω της θεωρίας διαταραχών. Πιο συγκεκριμένα θέλωντας να βρει κανείς την ανώμαλη διάσταση του $J^a(x)$ υπολογίζει τη συνάρτηση συσχέτισης. Είναι σημαντικό να σημειωθεί πως όλοι οι διαταρακτικοί υπολογισμοί γίνονται στο μιγαδικό επίπεδο με τη χρήση των ολοκληρωμάτων που παρατίθενται στο Παράρτημα Γ. Επίσης τα ρεύματα που χρησιμοποιούμε για τους υπολογισμούς είναι μετασχηματισμένα ως εξής

$$J(z) \to \sqrt{k} J(z) \qquad \bar{J}(\bar{z}) \to \sqrt{k} \bar{J}(\bar{z}) \tag{5.2.8}$$

οπότε στον όρο αλληλεπίδρασης $\frac{\lambda}{\pi}\int J\bar{J}$ έχει απαληφθεί το k. Αυτό σημαίνει ότι τα ρεύματα ικανοποιούν τα OPEs του κεφαλαίου 3 με αλλαγή ορισμένων συντελεστών. Λόγου χάρη

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{\delta^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{f^{abc}}{\sqrt{k}}\frac{J^c(w)}{z-w} \tag{5.2.9}$$

Η συνάρτηση συσχέτισης ορίζεται με το συνήθη τρόπο που παρουσιάζεται στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου, ήτοι

$$\begin{aligned}\langle J^a(x_1)J^b(x_2)\rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}}\int DgJ^a(x_1)J^b(x_2)e^{-S_{WZW}-\frac{\lambda}{\pi}\int d^2zJ^c(z)\bar{J}^c(\bar{z})} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}}\int DgJ^a(x_1)J^b(x_2)e^{-S_{WZW}}\Big(1-\frac{\lambda}{\pi}\int d^2zJ^c(z)\bar{J}^c(\bar{z}) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2!\pi^2}\int d^2z_1d^2z_2J^{a_1}(z_1)\bar{J}^{a_1}(\bar{z}_1)J^{a_2}(z_2)\bar{J}^{a_2}(\bar{z}_2)+\ldots\Big)\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

όπου $\mathcal{Z}$ η συνάρτηση επιμερισμού. Στη συνέχεια συμβολίζουμε τις συναρτήσεις συσχέτισης με

$$\begin{aligned}&\langle J^a(x_1)J^b(x_2)\rangle_\lambda = \frac{\lambda}{\pi}\int d^2z\langle J^a(x_1)J^b(x_2)J^c(z)\rangle\langle\bar{J}^c(\bar{z})\rangle \\ &\langle J^a(x_1)J^b(x_2)\rangle_{\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{2!\pi^2}\int d^2z_1d^2z_2\langle J^a(x_1)J^b(x_2)J^{a_1}(z_1)J^{a_2}(z_2)\rangle\langle\bar{J}^{a_1}(\bar{z}_1)J^{a_2}(\bar{z}_2)\rangle \\ &\ldots\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Για να υπολογίσει καινείς τις παραπάνω συναρτήσεις συσχέτισης θα πρέπει να εφαρμόσει το θεώρημα Wick όπως περιγράφεται στην (3.3.21) έχοντας υπόψιν ότι οι συναρτήσεις ενός σημείου μηδενίζονται. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις συσχέτισης

$$\begin{aligned}\langle J^a(z_1)J^b(z_2)\rangle &= \frac{\delta^{ab}}{z_{12}^2}\ , \\ \langle J^a(z_1)J^b(z_2)J^c(z_3)\rangle &= \frac{if^{abc}}{\sqrt{k}}\frac{1}{z_{12}z_{13}z_{23}}\ ,\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

και τις τεχνικές ολοκλήρωσης του Παραρτήματος Γ′.3 καταλήγουμε στα αποτελέσματα

$$\begin{aligned}\langle J^a(x_1)J^b(x_2)\rangle_\lambda &= 0 \\ \langle J^a(x_1)J^b(x_2)\rangle_{\lambda^2} &= \frac{c_G}{k}\frac{\delta^{ab}}{x_{12}^2}\lambda^2\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \\ \langle J^a(x_1)J^b(x_2)\rangle_{\lambda^3} &= -2\frac{c_G}{k}\frac{\delta^{ab}}{x_{12}^2}\lambda^3\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}+\ldots\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

Τελικώς, η συνάρτηση δύο σημείων γίνεται

$$\langle J^a(x_1)J^b(x_2)\rangle = \frac{d^{ab}}{x_{12}^2}(1+\frac{c_G}{k}(\lambda^2-2\lambda^3+\dots)\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}+\dots) \tag{5.2.14}$$

και από (5.2.2) καταλήγουμε στην

$$\gamma(\lambda) = \frac{c_G}{k}(\lambda^2-2\lambda^3+\mathcal{O}(\lambda^4)) \tag{5.2.15}$$

σε πλήρη συμφωνία με την (5.2.7). Αναλυτικά οι παραπάνω υπολογισμοί μπορούν να βρεθούν στην [19] όπου περιέχονται και υπολογισμοί για τις coset θεωρίες.

5.3 Απλές λ-παραμορφώσεις με δύο ομάδες

Μπορεί κανείς να κατασκευάσει λ-παραμορφωμένες θεωρίες συνθέτωντας παραπάνω από ένα WZW-πρότυπα ίδιου επιπέδου k αλλά για διαφορετικές ομάδες με $g_1 \in G_1$ και $g_2 \in G_2$ [12]. Αντικαθιστούμε την απλή λ-παραμορφωμένη δράση με την

$$\begin{aligned} S_k(g,A_\pm,B_\pm) = S_k(g) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(&A_-\partial_+gg^{-1} - B_+g^{-1}\partial_-g + A_-gB_+g^{-1} \\ &-\frac{1}{2}A_-A_+ - \frac{1}{2}B_+B_-\big)\ , \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

όπου τώρα χρησιμοποιούμε δύο πεδία βαθμίδας που ανήκουν σε διαφορετικές άλγεβρες $A_\pm$ και $B_\pm$. Η παραπάνω δράση δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας αλλά κάτω από τους απειροστούς μετασχηματισμούς

$$\delta g = gu_R - u_Lg\ , \qquad \delta A_\pm = -\partial_\pm u_L + [A_\pm, u_L]\ , \qquad \delta B_\pm = -\partial_\pm u_R + [B_\pm, u_R]\ , \tag{5.3.2}$$

με διαφορετικές απειροστές παραμέτρους για τους αριστερόστροφους και δεξιόστροφους μετασχηματισμούς. Συγκεκριμένα

$$\delta S_k(g,A_\pm,B_\pm) = \frac{k}{2\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big[(A_+\partial_-u_L - A_-\partial_+u_L) - (B_+\partial_-u_R - B_-\partial_+u_R)\big]\ . \tag{5.3.3}$$

Αυτή η κλασική ανωμαλία είναι ανεξάρτητη των στοιχείων ομάδας αλλά αυτό θα είναι χρήσιμο για την κατασκευή μας. Συνθέτουμε δύο τέτοιες δράσεις με δύο PCMs μέσω της

$$\begin{aligned} S_k(g_1,g_2,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,A_\pm,B_\pm) &= S_k(g_1,A_\pm,B_\pm)+S_k(g_2,B_\pm,A_\pm) \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(t^a\tilde{g}_1^{-1}D_+\tilde{g}_1\big)E_{1ab}\mathrm{Tr}\big(t^b\tilde{g}_1^{-1}D_-\tilde{g}_1\big) \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(t^a\tilde{g}_2^{-1}D_+\tilde{g}_2\big)E_{2ab}\mathrm{Tr}\big(t^b\tilde{g}_2^{-1}D_-\tilde{g}_2\big)\ , \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

όπου φαίνεται η εναλλαγή των $A_\pm$ και $B_\pm$ στα δύο βαθμισμένα WZW-πρότυπα. Οι αντίστοιχες συναλλοίωτες παράγωγοι για τα $\tilde{g}_1$ και $\tilde{g}_2$ ορίζονται από $D_\pm\tilde{g}_1=\partial_\pm\tilde{g}_1-A_\pm\tilde{g}_1$ και $D_\pm\tilde{g}_2=\partial_\pm\tilde{g}_2-B_\pm\tilde{g}_2$. Οι πίνακες E_1 και E_2 παραμετροποιούν τις ζεύξεις. Η παραπάνω δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από

$$\begin{aligned} &\delta g_1=g_1u_R-u_Lg_1\ ,\qquad \delta g_2=g_2u_L-u_Rg_2\ ,\\ &\delta\tilde{g}_1=-u_L\tilde{g}_1\ ,\qquad \delta g_2=-u_R\tilde{g}_2\ ,\\ &\delta A_\pm=-\partial_\pm u_L+[A_\pm,u_L]\ ,\qquad \delta B_\pm=-\partial_\pm u_R+[B_\pm,u_R]\ . \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Χρησιμοποιώντας την (5.4.1) έχουμε

$$\begin{aligned} \delta S_k(g_1,g_2,A_\pm,B_\pm) &= \frac{k}{2\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big[(A_+\partial_-u_L-A_-\partial_+u_L)-(B_+\partial_-u_R-B_-\partial_+u_R)\big] \\ &+\frac{k}{2\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big[(B_+\partial_-u_R-B_-\partial_+u_R)-(A_+\partial_-u_L-A_-\partial_+u_L)\big]=0\ . \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Όπως και στην απλή περίπτωση, σταθεροποιούμε τη βαθμίδα επιλέγοντας $\tilde{g}_1=\tilde{g}_2=\mathbb{I}$. Επίσης εισάγουμε τον ορισμό

$$\lambda_i=k(k\mathbb{I}+E_i)^{-1}\ ,\qquad i=1,2\ , \tag{5.3.7}$$

όπου ουσιαστικά είναι οι δύο παράμετροι παραμόρφωσης. Έχοντας τα παραπάνω, η τελική δράση είναι

$$\begin{aligned} S_k(g_1,g_2,A_\pm,B_\pm) &= S_k(g_1)+S_k(g_2) \\ &+\frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(A_-\partial_+g_1g_1^{-1}-B_+g_1^{-1}\partial_-g_1+A_-g_1B_+g_1^{-1}-A_+\lambda_1^{-1}A_- \\ &\quad +B_-\partial_+g_2g_2^{-1}-A_+g_2^{-1}\partial_-g_2+B_-g_2A_+g_2^{-1}-B_+\lambda_2^{-1}B_-\big)\ . \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Ολοκληρώνοντας τα πεδία βαθμίδας προκύπτει

$$\begin{aligned} A_+ &= i(\mathbb{I} - \lambda_1^T D_1 \lambda_2^T D_2)^{-1} \lambda_1^T (J_{1+} + D_1 \lambda_2^T J_{2+}) \ , \\ A_- &= -i(\mathbb{I} - \lambda_1 D_2^T \lambda_2 D_1^T)^{-1} \lambda_1 (J_{2-} + D_2^T \lambda_2 J_{1-}) \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

και

$$\begin{aligned} B_+ &= i(\mathbb{I} - \lambda_2^T D_2 \lambda_1^T D_1)^{-1} \lambda_2^T (J_{2+} + D_2 \lambda_1^T J_{1+}) \ , \\ B_- &= -i(\mathbb{I} - \lambda_2 D_1^T \lambda_1 D_2^T)^{-1} \lambda_2 (J_{1-} + D_1^T \lambda_1 J_{2-}) \ , \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ορισμό (5.4.7) με τους δείκτες 1 και 2 να υποδηλώνουν τη χρήση των στοιχείων g_1 κσι g_2 στους ορισμούς. Αντικαθιστώντας ξανά στη δράση καταλήγουμε στην

$$\boxed{\begin{aligned} S_{k,\lambda_1,\lambda_2}(g_1,g_2) &= S_k(g_1) + S_k(g_2) \\ &\quad + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma \begin{pmatrix} J_{1+} & J_{2+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{21}\lambda_1 D_2^T \lambda_2 & \Lambda_{21}\lambda_1 \\ \Lambda_{12}\lambda_2 & \Lambda_{12}\lambda_2 D_1^T \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{1-} \\ J_{2-} \end{pmatrix} \end{aligned}} \ , \tag{5.3.11}$$

όπου έχουμε ορίσει τους πίνακες

$$\Lambda_{12} = (\mathbb{I} - \lambda_2 D_1^T \lambda_1 D_2^T)^{-1} \ , \qquad \Lambda_{21} = (\mathbb{I} - \lambda_1 D_2^T \lambda_2 D_1^T)^{-1} \ . \tag{5.3.12}$$

Εκ κατασκευής η παραπάνω δράση έχει τη συμμετρία εναλλαγής στους δείκτες 1 και 2 ενώ εμφανίζεται μία δυική συμμετρία [2]

$$k \to -k \ , \quad \lambda_1 \to \lambda_1^{-1} \ , \quad \lambda_2 \to \lambda_2^{-1} \ , \quad g_1 \to g_2^{-1} \quad g_2 \to g_1^{-1} \ . \tag{5.3.14}$$

Για να δειχθεί αυτό, χρησιμοποιήσαμε πως κάτω από την (5.3.14)

$$\begin{aligned} D_1 &\to D_2^T \ , \qquad J_{1+} \to -D_2^T J_{2+} \ , \qquad J_{1-} \to -D_2 J_{2-} \ , \\ D_1 &\to D_2^T \ , \qquad J_{2+} \to -D_1^T J_{1+} \ , \qquad J_{2-} \to -D_1 J_{1-} \ . \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

[2]Συνδιάζοντας με το πρότυπο την συμμετρία εναλλαγής $1 \leftrightarrow 2$ αυτό ισοδυναμεί με

$$k \to -k \ , \quad \lambda_1 \to \lambda_2^{-1} \ , \quad \lambda_2 \to \lambda_1^{-1} \ , \quad g_1 \to g_1^{-1} \quad g_2 \to g_2^{-1} \ . \tag{5.3.13}$$

Για τις διάφορες τιμές των $\lambda_i's$ η δράση (5.4.9) μπορεί να έχει κάποιες καθολικές συμμετρίες. Για λ_i ανάλογα της μονάδας έχει την καθολική συμμετρία

$$g_1 \to \Lambda_L^{-1} g_1 \Lambda_R \ , \qquad g_2 \to \Lambda_R^{-1} g_2 \Lambda_L \ , \qquad \Lambda_L, \Lambda_R \in G \ . \tag{5.3.16}$$

Για άλλες επιλογές η συμμετρία παραβιάζεται είτε μερικώς, είτε ολικά. Για μικρές τιμες των στοιχείων λ_i η δράση (5.4.9) γίνεται

$$S_{k,\lambda_1,\lambda_2}(g_1,g_2) = S_k(g_1) + S_k(g_2) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\ (\lambda_1^{ab} J^a_{1+} J^b_{2-} + \lambda_2^{ab} J^a_{2+} J^b_{1-}) + \cdots \ . \tag{5.3.17}$$

Όπως φαίνεται διατηρείται η μορφή του διγραμμικού όρου παραμόρφωσης όπως και στην περίπτωση του απλούστερου λ-προτύπου ενώ τα διατηρούμενα ρεύματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά WZW-πρότυπα.

5.4 λ-παραμορφώσεις με διαφορετικά επίπεδα

Στην προηγούμενη ενότητα εξηγήσαμε αναλυτικά την κατασκευή απλώς λ-παραμορφωμένων προτύπων, δηλαδή τις παραμορφώσεις με σταθερά ζεύξης λ με ένα επίπεδο αλλά και με διαφορετικά. Η στρατηγική της [12] είναι να συνδιάσουμε δύο από τις παραπάνω δράσεις με δύο PCM ως εξής

$$\begin{aligned} S_k(g_1,g_2,\tilde g_1,\tilde g_2,A_\pm,B_\pm) &= S_k(g_1,A_\pm,B_\pm) + S_k(g_2,B_\pm,A_\pm) \\ &- \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(t^a \tilde g_1^{-1} D_+ \tilde g_1\big) E_{1ab} \mathrm{Tr}\big(t^b \tilde g_1^{-1} D_- \tilde g_1\big) \\ &- \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(t^a \tilde g_2^{-1} D_+ \tilde g_2\big) E_{2ab} \mathrm{Tr}\big(t^b \tilde g_2^{-1} D_- \tilde g_2\big) \ . \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Να σημειωθεί, ότι ο ρόλος των $A_\pm$ και $B_\pm$ ανταλλάσεται στα δύο βαθμισμένα WZW πρότυπα. Οι συναλλοίωτες παράγωγοι δρουν στα στοιχεία που ορίζουν το PCM $D_\pm \tilde g_1 = \partial_\pm \tilde g_1 - A_\pm \tilde g_1$ και $D_\pm \tilde g_2 = \partial_\pm \tilde g_2 - B_\pm \tilde g_2$. Οι πίνακες E_1 και E_2 παραμετροποιούν τις αντίστοιχες ζεύξεις. Η παραπάνω δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned} &\delta g_1 = g_1 u_R - u_L g_1 \ , \qquad \delta g_2 = g_2 u_L - u_R g_2 \ , \\ &\delta \tilde g_1 = -u_L \tilde g_1 \ , \qquad \delta g_2 = -u_R \tilde g_2 \ , \\ &\delta A_\pm = -\partial_\pm u_L + [A_\pm, u_L] \ , \qquad \delta B_\pm = -\partial_\pm u_R + [B_\pm, u_R] \ . \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Στην πρώτη γραμμή η μεταβολή του πρώτου όρου στην (5.4.1) ακυρώνει το δεύτερο όρο. Η δεύτερη και η τρίτη γραμμή είναι αναλλοίωτες ξεχωριστά. Παρακάτω σταθεροποιούμε πλήρως τη βαθμίδα επιλέγοντας $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = \mathbb{I}$. Η δράση που προκύπτει μετά τη βάθμιση είναι

$$
\begin{aligned}
S(g_1, g_2, A_\pm, B_\pm) = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) - \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2\sigma \ \mathrm{Tr}\big(A_+ \lambda_1^{-1} A_- + B_+ \lambda_2^{-1} B_-\big) \\
+ \frac{k_1}{\pi} \int d^2\sigma \ \mathrm{Tr}\big(A_- \partial_+ g_1 g_1^{-1} - B_+ g_1^{-1} \partial_- g_1 + A_- g_1 B_+ g_1^{-1}\big) \\
+ \frac{k_2}{\pi} \int d^2\sigma \ \mathrm{Tr}\big(B_- \partial_+ g_2 g_2^{-1} - A_+ g_2^{-1} \partial_- g_2 + B_- g_2 A_+ g_2^{-1}\big) \ ,
\end{aligned}
\tag{5.4.3}
$$

όπου εισαγάγαμε τις παραμέτρους

$$
\lambda_i = \sqrt{k_1 k_2} \ (k\mathbb{I} + E_i)^{-1} \ , \quad i = 1, 2 \ , \qquad k = \frac{k_1 + k_2}{2} \ . \tag{5.4.4}
$$

Πιο συγκεκριμένα η δράση που εξήχθη στην [12] είναι μία από αυτές που παρουσιάζονται παραπάνω με $k_1 = k_2$. Παρ' όλα αυτά, στην (5.4.3) υποθέσαμε πως δεν είναι απαραίτητο δύο μη-συμμετρικά βαθμισμένα WZW πρότυπα να έχουν τα ίδια επίπεδα. Θεωρούμε πως αυτή η δράση είναι είναι το σημείο εκκίνησης. Αυτή η συνθήκη αλλάζει δραστικά τη συμπεριφορά της β-συνάρτησης μέσω της οποίας λαμβάνουμε νέα σύμμορφα σημεία κάτω από τη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης.

Ολοκληρώνοντας τα πεδία βαθμίδας στη δράση (5.4.3) βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
A_+ &= i(\mathbb{I} - \lambda_1^T D_1 \lambda_2^T D_2)^{-1} \lambda_1^T (\lambda_0 J_{1+} + D_1 \lambda_2^T J_{2+}) \ , \\
A_- &= -i(\mathbb{I} - \lambda_1 D_2^T \lambda_2 D_1^T)^{-1} \lambda_1 (\lambda_0^{-1} J_{2-} + D_2^T \lambda_2 J_{1-})
\end{aligned}
\tag{5.4.5}
$$

και επίσης ότι

$$
\begin{aligned}
B_+ &= i(\mathbb{I} - \lambda_2^T D_2 \lambda_1^T D_1)^{-1} \lambda_2^T (\lambda_0^{-1} J_{2+} + D_2 \lambda_1^T J_{1+}) \ , \\
B_- &= -i(\mathbb{I} - \lambda_2 D_1^T \lambda_1 D_2^T)^{-1} \lambda_2 (\lambda_0 J_{1-} + D_1^T \lambda_1 J_{2-}) \ .
\end{aligned}
\tag{5.4.6}
$$

Οι πίνακες D_{ab} και τα ρεύματα $J_\pm^a$ ορίζονται ως

$$
J_+^a = -i \, \mathrm{Tr}(t^a \partial_+ g g^{-1}), \qquad J_-^a = -i \, \mathrm{Tr}(t^a g^{-1} \partial_- g) \ , \qquad D_{ab} = \mathrm{Tr}(t_a g t_b g^{-1}) \ , \tag{5.4.7}
$$

όπου οι t^a είναι Ερμητιανοί. Όταν ένα ρεύμα ή πίνακας D έχει δείκτη 1 ή 2 σημαίνει ότι πρέπει να χρησιμοποιηθεί το αντίστοιχο στοιχείο ομάδας στον ορισμό του. Επιπρόσθετα, έχουμε ορίσει το λόγο των δύο επιπέδων ως

$$
\lambda_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \ , \tag{5.4.8}
$$

ο οποίος χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί μικρότερος του ένα. Η αντικατάσταση της έκφρασης των βαθμωτών πεδίων στη δράση καταλήγει σε ένα σ-πρότυπο το οποίο μπορει να γραφεί σε συμβολισμούς πίνακα ως

$$\begin{aligned} S_{k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2}(g_1,g_2) &= S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) \\ &+ \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma \begin{pmatrix} J_{1+} & J_{2+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1\Lambda_{21}\lambda_1 D_2^T\lambda_2 & k_2\lambda_0\Lambda_{21}\lambda_1 \\ k_1\lambda_0^{-1}\Lambda_{12}\lambda_2 & k_2\Lambda_{12}\lambda_2 D_1^T\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{1-} \\ J_{2-} \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

όπου έχουμε επίσης ορίσει τους πίνακες

$$\Lambda_{12} = (\mathbb{I} - \lambda_2 D_1^T \lambda_1 D_2^T)^{-1} , \qquad \Lambda_{21} = (\mathbb{I} - \lambda_1 D_2^T \lambda_2 D_1^T)^{-1} . \tag{5.4.10}$$

Η παραπάνω δράση είναι εκ κατασκευής συμμετρική κάτω από την εναλλαγή των δύο αρχικών προτύπων δηλαδή στους δείκτες 1 και 2. Σημαντικό να σημειωθεί, πως το πρότυπο με ίσα επίπεδα που κατασκευάστηκε στην [12] υπακούει σε μία δυική τύπου συμμετρία με το συγκεκριμένο πρότυπο (5.4.9) και η οποία είναι

$$k_1 \to -k_2 \quad k_2 \to -k_1 , \quad \lambda_1 \to \lambda_1^{-1} , \quad \lambda_2 \to \lambda_2^{-1} , \quad g_1 \to g_2^{-1} \quad g_2 \to g_1^{-1} . \tag{5.4.11}$$

Η απόδειξη χρησιμοποιεί το γεγονός ότι κάτω από την (5.4.11)

$$\begin{aligned} &D_1 \to D_2^T , \qquad J_{1+} \to -D_2^T J_{2+} , \qquad J_{1-} \to -D_2 J_{2-} , \\ &D_1 \to D_2^T , \qquad J_{2+} \to -D_1^T J_{1+} , \qquad J_{2-} \to -D_1 J_{1-} . \end{aligned} \tag{5.4.12}$$

Η δράση (5.4.9) μπορεί να έχει καθολικές ισομετρίες για συγκεκριμένες επιλογές του πίνακα παραμόρφωσης. Συγκεκριμένα, αν τα λ_i είναι ανάλογα της μονάδας, η δράση έχει την καθολική συμμετρία

$$g_1 \to \Lambda_L^{-1} g_1 \Lambda_R , \qquad g_2 \to \Lambda_R^{-1} g_2 \Lambda_L , \qquad \Lambda_L, \Lambda_R \in G . \tag{5.4.13}$$

Για γενικούς πίνακες παραμόρφωσης είναι μερικώς ή πλήρως διαρηγμένη. Για μικρές τιμές των στοιχείων των πινάκων λ_i, η δράση (5.4.9) μπορεί να προσεγγιστεί από την

$$S_{k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2}(g_1,g_2) = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) + \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi}\int d^2\sigma\ (\lambda_1^{ab} J_{1+}^a J_{2-}^b + \lambda_2^{ab} J_{2+}^a J_{1-}^b) + \cdots . \tag{5.4.14}$$

Η παραπάνω δράση, αναπαριστά μία αλληλεπίδραση ολομορφικού-αντιολομορφικού ρεύματος των δύο αρχικών WZW-προτύπων με k_1 και k_2 αντίστοιχα. Η δράση (5.4.9) μπορεί να θεωρηθεί ως η ενεργός δράση της (5.4.14) που ενσωματώνει όλες τις συνεισφορές σε επίπεδο βρόχων της παραμέτρου παραμόρφωσης λ_i.

Σε αυτό το σημείο θα δώσουμε επιχειρήματα πως παρόλο που η (5.4.14) είναι μη συμμετρική στα αριστερόστροφα και δεξιόστροφα επίπεδα αναπαράγει σωστά τις συναρτήσεις συσχέτισης σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών του χειραλικού προτύπου της απλά παραμορφωμένης θεωρίας. Το επιχείρημα είναι ίδιο με αυτό της [23]. Όλες οι συναρτήσεις συσχέτισης που περιέχουν τελεστές του τύπου $\mathcal{O} = \{J^a_{1+},\ J^a_{2-},\ J^a_{1+}J^b_{2-},\ \cdots\}$ ή οποιοδήποτε άλλο τελεστή που κατασκευάζεται από αυτούς, μπορεί να υπολογιστεί ως εάν η κορυφή που είναι ανάλογη του λ_2 στην (5.4.14) να απουσίαζε. Αυτό συμβαίνει, διότι το OPE των ρευμάτων που εμφανίζονται στην πρώτη κορυφή της (5.4.14) με οποιοδήποτε ρεύμα που εμφανίζεται στη δεύτερη κορυφή της (5.4.14) είναι ομαλό. Συνεπώς, εάν κάποιος περιοριστεί στο σύνολο τελεστών $\mathcal{O}$ είναι σαν να θέσουμε τα λ_2 στο μηδέν. Έτσι, όχι μόνο οι β-συναρτήσεις αλλά και οι συναρτήσεις συσχέτισης των προτύπων (5.4.14) και (5.3.17) συμπίπτουν σε όλες τις τάξεις ως προς λ, όπως και σε ανάπτυγμα ως προς k.

5.4.0.1 Εξάλειψη του ενός πινακα παραμόρφωσης

Έστω πως μία από τις παραμέτρους παραμόρφωσης στην προσέγγιση (5.4.9) είναι μηδέν έστω $\lambda_2 \to 0$ και επανονομάζουμε λ_1 σε το λ. Τότε η δράση (5.4.9) απλοποιείται στην παρακάτω μορφή

$$S_{k_1,k_2,\lambda}(g_1,g_2) = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) + \frac{\sqrt{k_1k_2}}{\pi}\int d^2\sigma \lambda_{ab} J^a_{1+} J^b_{2-}\ , \tag{5.4.15}$$

κάνοντας τη διαταρακτική έκφραση (5.4.14) ακριβή. Αφού τα ρεύματα J^a_{2+} και J^a_{1-} δεν εμφανίζονται στη δράση δεν παίρνουν διόρθωση στις ανώμαλες διαστάσεις. Αυτό υπονοεί ότι η (5.4.15) έπρεπε να έχει στο κέλυφος μάζας χειραλικά και αντιχειραλικά ρεύματα. Ακολουθώντας μία διαδικασία ίδια με αυτή της [23] βρίσκουμε πως οι εξισώσεις κίνησης από τη μεταβολή των στοιχείων ομάδας γίνονται

$$\begin{aligned} &\partial_-\mathcal{J}_+ = 0\ , \qquad \mathcal{J}_+ = \lambda_0^{-1} J_{2+} + D_2\lambda^T J_{1+}\ , \\ &\partial_+\mathcal{J}_- = 0\ , \qquad \mathcal{J}_- = \lambda_0 J_{1-} + D_1^T\lambda J_{2-}\ . \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

Για να αποδείξουμε τις παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιήσαμε τις ταυτότητες $(D^T\partial_- D)^{ab} = f^{ab}{}_c J^c_-$ και $(\partial_+ DD^T)^{ab} = f^{ab}{}_c J^c_+$. Τα παραπάνω χειραλικά και αντι-χειραλικά διατηρούμενα ρεύματα $\mathcal{J}_\pm$ είναι παραμορφώσεις του J_{2+} και J_{1-} που ανάγονται για $\lambda = 0$ και αυτό είναι συνεπές με το μηδενισμό των ανώμαλων διαστάσεών τους.

Κεφάλαιο 6

Ακριβή αποτελέσματα από το χώρο σταθερών ζεύξης και την ενεργό δράση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράψαμε την κατασκευή των λ-προτύπων ως βασικό σημείο για τους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν. Σε αυτό το κεφάλαιο, ξεκινώντας με τα απλά λ-παραμορφωμένα πρότυπα [16] θα δείξουμε τον τρόπο υπολογισμού των ανώμαλων διαστάσεων των θεμελιωδών ρευμάτων του προτύπου. Η μέθοδος βασίζεται σε μία βολική διαφοροποίηση της διαδικασίας βάθμισης της [16] σε συνδιασμό με γεωμετρικά στοιχεία που ορίζονται στο χώρο σταθερών ζεύξης των αντίστοιχων διδιάστατων θεωριών πεδίου. Έχοντας πλήρη χειρισμό της μεθόδου, στα επόμενα, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο σε σύνθετους τελεστές ρευμάτων. Στη συνέχεια θα επεκταθούμε και σε πρότυπα με διαφορετικά επίπεδα και τα αποτελέσματά μας είναι σε πλήρη συμφωνια με όσα παρουσιάσαμε έως τώρα χώρις τη χρήση του χώρου ζεύξεων.

6.1 Ανώμαλες διαστάσεις απλών ρευμάτων

Ξεκινάμε με ένα άθροισμα της WZW δράσης $S_k(g)$ με επίπεδο k για ένα στοιχείο $g \in G$ [85], το PCM [86] για το στοιχείο $\tilde{g} \in G$ με μία συνολικη ζεύξη κ^2 και έναν όρο που περιέχει το χειραλικό ρεύμα του αρχικού WZW-προτύπου. Συγκεκριμένα η δράση είναι

$$S_{k,\kappa^2,s}(g,\tilde{g}) = S_k(g) - \frac{\kappa^2}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(\tilde{g}^{-1}\partial_+\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial_-\tilde{g}\big) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(s\tilde{g}^{-1}\partial_+\tilde{g}\big)\ , \quad (6.1.1)$$

όπου ο τελευταίος καινούριος όρος έχει πίνακα ζεύξης $s = s^a t_a$ ενώ έχει εισαχθεί και η σταθερά k για λόγους που θα φανούν χρήσιμοι παρακάτω. Ο επιπλέον όρος είναι βοηθητικός και ο λόγος εισαγωγής του θα γίνει κατανοητός καθώς προχωρούμε. Στην ουσία θα μας βοηθήσει να υπολογίσουμε τις ανώμαλες διαστάσεις των λ- παραμορφωμένων θεωριών επακριβώς, χωρίς τη χρήση θεωρίας διαταραχών. Όλοι οι πίνακες αναπτύσσονται στη βάση των t^a που ικανοποιούν την άλγεβρα $[t_a, t_b] = i f_{abc} t_c$ και κανονικοποιούνται στη μονάδα, δηλαδή $\mathrm{Tr}(t_a t_b) = \delta_{ab}$. Όπως στην [16], χρησιμοποιήσαμε την βάθμιση δρώντας ως $g \to \Lambda^{-1} g \Lambda$ και $\tilde{g} \to \Lambda^{-1}\tilde{g}$. Η αντίστοιχη δράση αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας είναι

$$\begin{aligned} S_{k,E}(g,\tilde{g},A_\pm) = S_k(g,A_\pm) - \frac{\kappa^2}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(\tilde{g}^{-1}D_+\tilde{g}\tilde{g}^{-1}D_-\tilde{g}\big) \\ + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(s\tilde{g}^{-1}D_+\tilde{g}\big)\ , \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

όπου $D_\pm\tilde{g} = (\partial_\pm - A_\pm)\tilde{g}$ είναι συναλλοίωτες παράγωγοι. Ο πρώτος όρος είναι η γνωστή WZW δράση με συμμετρία βαθμίδας [87]

$$\begin{aligned} S_k(g,A_\pm) = S_k(g) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(A_-\partial_+ g g^{-1} - A_+ g^{-1}\partial_- g \\ + A_- g A_+ g^{-1} - A_- A_+\big)\ . \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Επιλέγοντας τη βαθμίδα (6.1.2) ως $\tilde{g} = \mathbb{1}$ καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} S_{k,\lambda,s}(g,A_\pm) = S_k(g) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(A_-\partial_+ g g^{-1} - A_+ g^{-1}\partial_- g + A_- g A_+ g^{-1}\big) \\ - \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(\lambda^{-1}A_+A_- + sA_+\big)\ , \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

όπου

$$\lambda^{-1} = 1 + \frac{\kappa^2}{k}\ . \tag{6.1.5}$$

Μας ενδιαφέρουν οι εξισώσεις κίνησης της δράσης. Μεταβάλλοντας (6.1.4) ως προς $A_\mp$ βρίσκουμε τους συνδέσμους

$$\begin{aligned} D_+g\, g^{-1} + (1-\lambda^{-1})A_+ = 0\ , \\ g^{-1}D_-g - (1-\lambda^{-1})A_- + s = 0\ , \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

όπου η συναλλοίωτες παράγωγοι που δρουν στο g πλέον οριζονται ως $D_\pm g = \partial_\pm g - [A_\pm, g]$. Μεταβάλλοντας ως προς g έχουμε

$$D_-(D_+gg^{-1}) = F_{+-} \quad \Longleftrightarrow \quad D_+(g^{-1}D_-g) = F_{+-}\ , \tag{6.1.7}$$

όπου ο τανυστής ισχύος είναι

$$F_{+-} = \partial_+A_- - \partial_-A_+ - [A_+, A_-]\ . \tag{6.1.8}$$

Αντικαθιστώντας την (6.1.6) στην (6.1.7) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}&\partial_- A_+ - \lambda\partial_+ A_- + [A_+, A_-] = 0 \ ,\\ &\partial_+ A_- - \lambda\partial_- A_+ - [A_+, A_-] - \lambda[A_+, s] = 0 \ .\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Μπορούμε χρησιμοποιώντας τους δεσμούς (6.1.6) και επιλύοντας ως προς τα πεδία βαθμίδας και να καταλήξουμε σε εκφράσεις, τις οποίες αντικαθιστώντας εκ νέου στη δράση (6.1.4) να βρούμε το σ-πρότυπο. Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα , το αποτέλεσμα είναι το λ-παραμορφωμένο σ-προτυπο που αντιστοιχεί στα λ-παραμορφωμένα πρότυπα της ισοτροπικής περίπτωσης, συν γραμμικούς όρους ως προς s. Συγκεκριμένα βρίσκουμε

$$A_+ = i\big(\lambda^{-1}\mathbb{1} - D\big)^{-1} J_+ \ , \qquad A_- = -\big(\lambda^{-1}\mathbb{1} - D^T\big)^{-1}(iJ_- + s) \ , \tag{6.1.10}$$

όπου υπευθυμίζουμε τις εκφράσεις για τα διατηρούμενα ρεύματα

$$J_+ = -i\partial_+ g g^{-1} \ , \quad J_- = -ig^{-1}\partial_- g \ , \quad D_{ab} = \mathrm{Tr}(t^a g t^b g^{-1}) \ . \tag{6.1.11}$$

Τότε η δράση γίνεται

$$S = S_k(g) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma \ J_+(\lambda^{-1}\mathbb{1} - D^T)^{-1} J_- - \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma \ \mathrm{Tr}(sA_+) \, . \tag{6.1.12}$$

Προφανώς για $s = 0$ ανακύπτει η αρχική λ-παραμορφωμένη θεωρία [16] (βλέπε και κεφ. 5). Μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός των ανώμαλων διαστάσεων των J_+^a επακριβώς στα λ και σε κύρια συνεισφορά στο k λαμβάνοντας το όριο $s = 0$, δηλαδή για την αρχική λ-παραμορφωμένη θεωρία. Το όριο θα πρέπει να είναι συνεπές με τις εξισώσεις των β-συναρτήσεων, το οποίο όντως και συμβαίνει όπως θα φανεί. Να σημειώσουμε ότι το J_+ είναι ¨ενδεδυμένο' με το A_+ όπως μπορεί να φανεί από τον αντίστοιχο τελευταίο όρο στην (6.1.12). Στο όριο $\lambda \to 0$ έχουμε $A_+ \sim J_+$.

6.1.1 Οι εξισώσεις για τις RG ροές

Παρακάτω υπολογίζουμε τις εξισώσεις για τις β-συναρτήσεις των ζεύξεων λ και s. Ακολουθούμε τη μέθοδο πεδιακού υποβάθρου (background field method) η οποία αρχικά εφαρμόσθηκε για τα λ-παραμορφωμένα πρότυπα στην[57] και στην πλήρη της μορφή στην [59]. Επιλέγουμε ως $g = e^{\sigma^+\theta_+ + \sigma^-\theta_-}$, όπου οι πίνακες $\theta_\pm$ είναι σταθεροί και μετατίθενται. Τότε έχουμε πως $J_\pm = -i\theta_\pm$ και ότι ο πίνακας $D = \mathbb{1}$. Από την (6.1.10) τα πεδία υποβάθρου είναι

$$A_+^{(0)} = \frac{\lambda}{1-\lambda}\theta_+ \ , \qquad A_-^{(0)} = -\frac{\lambda}{1-\lambda}(\theta_- + s) \ . \tag{6.1.13}$$

Να σημειωθεί πως πράγματι οι παραπάνω εκφράσεις επιλύουν τις κλασικές εξισώσεις (6.1.9). Τότε η Λαγκραζιανή πυκνότητα (6.1.12) είναι

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{k}{2\pi}\Big(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\theta_+\theta_- + 2\frac{s\lambda}{1-\lambda}\theta_+\Big) \ . \tag{6.1.14}$$

Το επόμενο βήμα είναι να θεωρήσουμε διακυμάνσεις των πεδίων βαθμίδας γύρω από την (6.1.13) οπότε

$$A_\pm = A_\pm^{(0)} + \delta A_\pm \ , \qquad (\tilde{A}_\pm^{(0)})_{ab} = i f_{abc}(A_\pm^{(0)})_c \ , \qquad \tilde{s}_{ab} = i f_{abc} s_c \ . \tag{6.1.15}$$

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης τότε είναι

$$\begin{aligned} &-\big(\lambda\partial_+ + \tilde{A}_+^{(0)}\big)\delta A_- + \big(\partial_- + \tilde{A}_-^{(0)}\big)\delta A_+ = 0 \ , \\ &\big(\partial_+ + \tilde{A}_+^{(0)}\big)\delta A_- - \big(\lambda\partial_- + \tilde{A}_-^{(0)} + \lambda\tilde{s}\big)\delta A_+ = 0 \ . \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

Αυτές μπορούν να γραφούν ως

$$\hat{D}\begin{pmatrix} \delta A_- \\ \delta A_+ \end{pmatrix} = 0 \ , \tag{6.1.17}$$

όπου ο τελεστής $\hat{D}$ είναι πρώτης τάξης διαφορικός τελεστής ως προς τις συντεταμένες. Μετά την Ευκλείδια αναλυτική επέκταση, στο χώρο των ορμών, με τις συμβάσεις [47], αντικαθιστούμε (∂_+, ∂_-) με $\frac{1}{2}(\bar{p}, p) \equiv (p_+, p_-)$. Τότε έχουμε $\hat{D} = \hat{C} + \hat{F}$, όπου

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} -\lambda p_+ & p_- \\ p_+ & -\lambda p_- \end{pmatrix} \ , \qquad \hat{F} = \begin{pmatrix} -\tilde{A}_+^{(0)} & \tilde{A}_-^{(0)} \\ \tilde{A}_+^{(0)} & -\tilde{A}_-^{(0)} - \lambda\tilde{s} \end{pmatrix} \ . \tag{6.1.18}$$

Ο πίνακας $\hat{C}$ περιλαμβάνει συνολικά την εξάρτηση της ορμής. Ολοκληρώνοντας τις διακυμάνσεις, λαμβάνουμε την ενεργό δράση της θεωρίας μας

$$-\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(0)} + \int^{\mu} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln(\det \hat{D})^{-1/2} \ . \tag{6.1.19}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα αποκλίνει λογαριθμικά σύμφωνα με την UV κλίμακα μάζας μ η οποία απομονώνεται αναπτύσοντας για μεγάλες ορμές το ολοκλήρωμα και κρατώντας όρους ανάλογους του $\dfrac{1}{|p|^2}$, όπου $|p|^2 = p\bar{p}$. Αφού το $\hat{C}$ μεγαλώνει με $|p|$ χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα

$$\ln(\det \hat{D}) = \ln\det\hat{C} + \mathrm{Tr}(\hat{C}^{-1}\hat{F}) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\hat{C}^{-1}\hat{F})^2 + \cdots \ . \tag{6.1.20}$$

Ο τελευταίος όρος είναι ο μόνος που συνεισφέρει στη λογαριθμική απόκλιση λαμβάνοντας

$$-\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(0)} + \frac{1}{16\pi^2}\int^{\mu} d^2p\, \mathrm{Tr}(\hat{C}^{-1}\hat{F})^2 + \cdots \ . \tag{6.1.21}$$

Παρακάτω χρησιμοποιούμε τις πολικές συντεταγμένες $p = re^{i\phi}$, $\bar{p} = re^{-i\phi}$ με μέτρο ολοκλήρωσης $d^2p = rdrd\phi$ υπολογίζοντας το $\mathrm{Tr}(\hat{C}^{-1}\hat{F})^2$. Η εξάρτηση από το r είναι της μορφής $1/r^2$ και ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε τον αναγκαίο όρο $\ln\mu$. Τότε προκύπτει

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\text{eff}} &= \mathcal{L}^{(0)} + \frac{c_G}{2\pi}\ln\mu^2\left(\frac{A_+^{(0)}A_-^{(0)}}{(1+\lambda)^2} + \frac{s\lambda A_+^{(0)}}{(1-\lambda)(1+\lambda)^2}\right) \\ &= \mathcal{L}^{(0)} - \frac{c_G}{2\pi}\ln\mu^2\frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}\theta_+\theta_- \ , \end{aligned} \tag{6.1.22}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (6.1.13) για τη λύση υποβάθρου των πεδίων βαθμίδας. Επίσης, $\mathrm{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)}) = c_G(A_+^{(0)})^a(A_-^{(0)})^a$ και $\mathrm{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{s}) = c_G(A_+^{(0)})^a s^a$, όπου c_G είναι η ιδιοτιμή του τετραγωνικού τελεστή Casimir στη συζυγή αναπαράσταση που ορίζεται μέσω της $f_{acd}f_{bcd} = c_G\delta_{ab}$. Από εδώ και κάτω παραλείπουμε το δείκτη στο s^a αφού το αποτέλεσμα για τη β-συνάρτηση και τις ανώμαλες διαστάσεις θα είναι ανεξάρτητα αυτού.

Ως συνήθως στη θεωρία πεδίου , απαιτούμε η συνάρτηση (6.1.22) να είναι ανεξάρτητη της ενεργειακής κλίμακας, δηλαδή $\partial_{\ln\mu^2}\mathcal{L}_{\text{eff}} = 0$. Για $k \gg 1$ αυτή η παράγωγος δρα μόνο στις σταθερές ζεύξης στη $\mathcal{L}^{(0)}$. Τότε, ορίζοντας $\beta^{\lambda} = \partial_{\ln\mu^2}\lambda$ ανδ $\beta^{s} = \partial_{\ln\mu^2}s$, λαμβάνουμε

$$\beta^{\lambda} = -\frac{c_G}{2k}\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} \ , \qquad \beta^{s} = \frac{c_G}{2k}\frac{s\lambda}{(1-\lambda)(1+\lambda)^2} \ . \tag{6.1.23}$$

Είναι σημαντικό για λόγους που θα φανεί παρακάτω να υπολογίσουμε τη μεταβολή της

$$\tilde{\lambda} \sim s\lambda \ , \tag{6.1.24}$$

η οποία αντικαθιστά το s στην έως τώρα συζήτηση. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και εφαρμόζοντας τη γνωστή αλλαγή συντεταγμένων, λαμβάνουμε

$$\beta^{\tilde{\lambda}} = \frac{c_G}{2k}\frac{\lambda^2\tilde{\lambda}}{(1-\lambda)(1+\lambda)^2} \ . \tag{6.1.25}$$

Τα αποτελέσματα που εξάγαμε για τις παραπάνω συναρτήσεις β είναι αναγκαία για τον υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων που παρουσιάζονται αμέσως παρακάτω.

6.1.2 Ανώμαλη διάσταση του ρεύματος

Έως τώρα κρατήσαμε τις ζεύξεις λ και $\tilde{\lambda}$ πεπερασμένες. Για μικρές τιμές των ζεύξεων έχουμε από την (6.1.12) ότι

$$S = S_k(g) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\big(\lambda J_+^a J_-^a + \tilde{\lambda} J_+^a\big) + \cdots \ . \tag{6.1.26}$$

Κρατώντας τη συζήτηση γενική, εκτός της απλής διαταραχής ρεύματος θεωρούμε μία γενική διαταραχή με τελεστές

$$\lambda^i \mathcal{O}_i \ . \tag{6.1.27}$$

Καθένας απ αυτούς έχει μία κλασική σύμμορφη διάσταση και οι β-συναρτήσεις για τις ζεύξεις συμβολίζονται με β^i. Υπάρχει η μετρική $G_{ij}^{(0)}$ στο χώρο των σταθερών ζεύξης που ορίζεται μέσω της συνάρτησης δύο σημείων του $\mathcal{O}_i$ [54] με στοιχείο μήκους $ds^2 = G_{ij}^{(0)} d\lambda^i d\lambda^j$ όπως συζητήσαμε στο κεφάλαιο 4. Η επανακανονικοποιησιμότητα και η εξίσωση Callan–Symanzik δίνουν

$$\gamma_i{}^j = \partial_i \beta^j + G^{(0)jm}\left(G_{in}^{(0)}\partial_m \beta^n + \beta^n \partial_n G_{im}^{(0)}\right) \ . \tag{6.1.28}$$

Έστω η περίπτωση δύο σταθερών ζεύξης λ και $\tilde{\lambda}$. Γενικώς υπάρχει μίξη των δύο τελεστών παρόλο που δεν εμφανίζεται στο σύμμορφο σημείο η μίξη αυτή. Συνεπώς οι ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών αυτών θα προκύπτουν από τη διαγωνιοποίηση του πίνακα $\gamma_i{}^j$ με τέσσερα μη μηδενικά στοιχεία. Υποθέτουμε ότι μία από τις ζεύξεις, έστω η $\tilde{\lambda}$, μπορεί με συνέπεια να τεθεί στο μηδέν με την αντίστοιχη $\beta^{\tilde{\lambda}} = 0$. Σε αυτό το όριο υποθέτουμε ότι η μίξη εξαφανίζεται. Τότε, μόνο τα στοιχεία $\gamma_\lambda{}^\lambda$ και $\gamma_{\tilde{\lambda}}{}^{\tilde{\lambda}}$ θα είναι μη μηδενικά. Στην περίπτωσή μας οι τελεστές είναι $\mathcal{O}_1 = J_+^a J_-^a$ και $\mathcal{O}_2 = J_+^a$. Ο δεύτερος παραβιάζει τη συμμετρία Lorentz, ώστε να είναι δυνατή η μίξη. Παρ όλα αυτά στο όριο όπου $\tilde{\lambda} \to 0$ η συμμετρία Lorentz επανακτάται και η μίξη τελεστών διαφορετικής χειραλικότητας πάυει να υπάρχει.

Κοντά στο $\tilde{\lambda} = 0$ υποθέτουμε για τη μετρική στο χώρο σταθερών ζεύξης τη μορφή

$$G_{\lambda\lambda}^{(0)}(\lambda,\tilde{\lambda}) = g_{\lambda\lambda}^{(0)}(\lambda) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}) \ , \quad G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}^{(0)}(\lambda,\tilde{\lambda}) = g_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}^{(0)}(\lambda) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}) \ , \quad G_{\lambda\tilde{\lambda}}^{(0)} = \mathcal{O}(\tilde{\lambda}) \tag{6.1.29}$$

και ότι $\beta^{\tilde{\lambda}} = \mathcal{O}(\tilde{\lambda})$. Τα προηγούμενα είναι συνέπειες της αποσύζευξης στο όριο $\tilde{\lambda} = 0$. Έτσι στο όριο $\tilde{\lambda} \to 0$ χρησιμοποιώντας την (6.1.29) βρίσκουμε

$$\gamma_{\mathcal{O}_1} = \gamma_\lambda{}^\lambda = 2\partial_\lambda \beta^\lambda + \beta^\lambda \partial_\lambda \ln g_{\lambda\lambda}^{(0)} \tag{6.1.30}$$

και ότι

$$\gamma_{\mathcal{O}_2} = \gamma_{\tilde{\lambda}}{}^{\tilde{\lambda}} = 2\partial_{\tilde{\lambda}} \beta^{\tilde{\lambda}} + \beta^\lambda \partial_\lambda \ln g_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}^{(0)} \ . \tag{6.1.31}$$

Έτσι, σε αυτό το όριο έχουμε την αρχική λ-παραμορφωμένη θεωρία μόνο με τη σταθερά ζεύξης λ, δηλαδή την (6.1.12) απουσία του τελευταίου όρου. Παρ' όλα αυτά, έχουμε επιπλέον την έκφραση για την ανώμαλη διάσταση του τελεστή $\mathcal{O}_2$ καθώς αποτελούσε και τον αρχικό μας στόχο. Να σημειωθεί πως μόνο οι εκφράσεις για τις μετρικές $g_{ii}^{(0)}$ στο όριο $k \to \infty$ χρειάζονται επειδή στην (6.1.30) και στην (6.1.31) οι β είναι $\mathcal{O}(1/k)$. Επιπρόσθετα ακόμα και η συνολική σταθερά στις ξεχωριστές εκφράσεις είναι περιττή. Συγκεκριμένα στην περίπτωσή μας , χρησιμοποιώντας την (Γ'.1.8) έχουμε

$$g_{\lambda\lambda}^{(0)} = \frac{\dim G}{(1-\lambda^2)^2} \ , \qquad g_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}^{(0)} \sim \frac{1}{1-\lambda^2} \ , \tag{6.1.32}$$

όπου με τη χρήση της (6.1.30) βρίσκουμε

$$\gamma_{J_+J_-} = -\frac{2c_G}{k}\frac{\lambda(1-\lambda(1-\lambda))}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3} \ , \tag{6.1.33}$$

η οποία προέκυψε χρησιμοποιώντας γεωμετρικές μεθόδους. Επιπρόσθετα, υπολογίζοντας το δεξί μέλος της (6.1.31) βρίσκουμε

$$\gamma_{J_+} = \frac{c_G}{k}\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3} \ . \tag{6.1.34}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα αρχικά βρέθηκε στην [21] χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες του χώρου σταθερών ζεύξης

$$k \to -k \ , \qquad \lambda \to \frac{1}{\lambda} \tag{6.1.35}$$

και σε κύρια συνεισφορά στη θεωρία διαταραχών. Παρακάτω θα εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο για τον υπολογισμό σύνθετων τελεστών.

6.2 Ανώμαλες διαστάσεις γενικών σύνθετων ρευμάτων

Σε αυτή την ενότητα, θα επεκτείνουμε το φορμαλισμό που συζητήθηκε παραπάνω, προκειμένου να υπολογίσουμε ανώμαλες διαστάσεις γενικών τελεστών της μορφής

$$\mathcal{O}^{(m,n)} = S_{a_1\ldots a_m;b_1\ldots b_n} J_+^{a_1}\ldots J_+^{a_m} J_-^{b_1}\ldots J_-^{b_n} \ . \tag{6.2.1}$$

Εκ κατασκευής, ο συνολικός συντελεστής θα πρέπει να είναι συμμετρικός στους πρώτους m δείκτες, όπως επίσης και στους τελευταίους n ξεχωριστά. Παρ' όλα αυτά, δεν υφίσταται συμμετρία που συσχετίζει τα a_i'ς και τα b_i'ς. Αυτός ο τανυστής μπορεί να κερματιστεί σε αναγώγιμες αναπαραστάσεις της ομάδας G. Όπως στην περίπτωση των απλών ρευμάτων, ο παραπάνω τελεστής θα μετατραπεί σε ένα τελεστή που θα εξαρτάται από το λ δηλαδή $\mathcal{O}_\lambda^{(m,n)}$ του οποίου η έκφραση δίνεται παρακάτω. Σημείο εκκινησης αποτελεί η δράση (6.1.2) με τον s-όρο στη δεύτερη γραμμή να αντικαθίσταται με

$$\frac{ks}{\pi}\int d^2\sigma\ S_{a_1\dots a_m;b_1\dots b_n}(\tilde g^{-1}D_+\tilde g)^{a_1}\dots(\tilde g^{-1}D_+\tilde g)^{a_m}(\tilde g^{-1}D_-\tilde g)^{b_1}\dots(\tilde g^{-1}D_-\tilde g)^{b_n}\ , \qquad (6.2.2)$$

επί ένα παράγοντα $(-1)^{m+n+1}$ ο οποίος εισάγεται ώστε οι ακόλουθες εκφράσεις να απλοποιούνται επαρκώς. Αυτή η δράση παραμένει αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς βαθμίδας και η συνθήκη επιλογής βαθμίδας $\tilde g = \mathbb{1}$ δίνει

$$\begin{aligned} S_{k,\lambda,s}(g,A_\pm) &= S_k(g) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathrm{Tr}\big(A_-\partial_+ g g^{-1} - A_+ g^{-1}\partial_- g + A_- g A_+ g^{-1}\big) \\ &\quad - \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\ \Big(\lambda^{-1}\mathrm{Tr}\big(A_+A_-\big) + s\mathcal{A}_{+-}^{(m,n)}\Big)\ , \end{aligned} \qquad (6.2.3)$$

όπου

$$\mathcal{A}_{+-}^{(m,n)} = S_{a_1\dots a_m;b_1\dots b_n}A_+^{a_1}\dots A_+^{a_m}A_-^{b_1}\dots A_-^{b_n}\ . \qquad (6.2.4)$$

Οι εξισώσεις κίνησης για την (6.2.3) ως προς A_- και A_+ είναι

$$\begin{aligned} D_+g\,g^{-1} &= (\lambda^{-1}-1)A_+ + ns\mathcal{A}_{+-}^{(m,n')}\ , \\ g^{-1}D_-g &= -(\lambda^{-1}-1)A_- - ms\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)}, \end{aligned} \qquad (6.2.5)$$

όπου έχουμε ορίσει τα διανύσματα $\mathcal{A}_{+-}^{(m,n')}$ και $\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)}$ με συνιστώσες

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)}\big)_a &= S_{a\cdots a_{m-1};b_1\dots b_n}A_+^{a_1}\dots A_+^{a_{m-1}}A_-^{b_1}\dots A_-^{b_n}\ , \\ \big(\mathcal{A}_{+-}^{(m,n')}\big)_b &= S_{a_1\dots a_m;b\dots b_{n-1}}A_+^{a_1}\dots A_+^{a_m}A_-^{b_1}\dots A_-^{b_{n-1}}\ . \end{aligned} \qquad (6.2.6)$$

Ο τόνος δείχνει πως ένας δείκτης δε συστέλλεται και παραμένει ελεύθερος στον αντίστοιχο συντελεστή του τανυστή. Μεταβάλλοντας τη δράση ως προς g καταλήγουμε στην ίδια εξίσωση (6.1.7) μιας και ο s-όρος στην (6.2.3) δεν εξαρτάται από αυτό. Αντικαθιστώντας τους δεσμούς (6.2.5) στην (6.1.7) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}\partial_+A_- - \partial_-A_+ &= \lambda^{-1}[A_+,A_-] - m\,s\,D_+\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)}\ , \\ \lambda^{-1}\partial_-A_+ - \partial_+A_- &= -\lambda^{-1}[A_+,A_-] - n\,s\,D_-\mathcal{A}_{+-}^{(m,n')}\ , \end{aligned} \qquad (6.2.7)$$

όπου οι συναλλοίωτες παράγωγοι δρουν ως συνήθως δηλαδή

$$D_+\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)} = \partial_+\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)} - [A_+,\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)}] \qquad (6.2.8)$$

και
$$D_-\mathcal{A}^{(m,n')}_{+-} = \partial_+\mathcal{A}^{(m,n')}_{+-} - [A_-, \mathcal{A}^{(m,n')}_{+-}] \,. \tag{6.2.9}$$

Σαν αποτέλεσμα οι εξισώσεις κίνησης γράφονται συναρτήσει των πεδίων βαθμίδας. Για να προχωρήσουμε με τους υπολογισμούς χρειαζόμαστε τις κλασικές λύσεις στην (6.2.5). Δυστυχώς οι εξισώσεις (6.1.10) εκτός της περίπτωσης του απλού ρεύματος, είναι πολύ δυσκολότερες να επιλυθούν λόγω της μη γραμμικότητας . Παρ΄ όλα αυτά εμείς στοχεύουμε να θεωρήσουμε το όριο s στο μηδέν, οπότε χρειαζόματε μόνο τη λύση για το $\mathcal{O}(s)$. Ετσι βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} A_+ &= i\big(\lambda^{-1}\mathbb{1} - D\big)^{-1} J_+ - ns\big(\lambda^{-1}\mathbb{1} - D\big)^{-1}\mathcal{A}^{(m,n')}_{+-} + \mathcal{O}(s^2)\ , \\ A_- &= -i\big(\lambda^{-1}\mathbb{1} - D^T\big)^{-1} J_- - ms\big(\lambda^{-1}\mathbb{1} - D^T\big)^{-1}\mathcal{A}^{(m',n)}_{+-} + \mathcal{O}(s^2)\ . \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

Να σημειωθεί ότι στο δεύτερο όρο σε κάθε μία από τις παραπάνω εκφράσεις, για τα πεδία βαθμίδας που εισάγονται στους ορισμούς (6.2.6) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση της κύριας συνεισφοράς που δίνεται από τους πρώτους κυρίαρχους όρους. Ο λόγος είναι ότι αυτοί οι όροι ήδη πολλαπλασιάζονται με s και μόνο με τους γραμμικούς όρους σε αυτή την παράμετρο. Η αντικατάσταση στη δράση (6.2.3) δίνει

$$S = S_k(g) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\ J_+(\lambda^{-1}\mathbb{1} - D^T)^{-1}J_- - \frac{ks}{\pi}\int d^2\sigma\ \mathcal{A}^{(m,n)}_{+-} + \mathcal{O}(s^2)\ , \tag{6.2.11}$$

όπου όπως και πριν στην $\mathcal{A}^{(m,n)}_{+-}$ πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι εκφράσεις της κύριας συνεισφοράς για τα πεδία βαθμίδας. Επίσης, οι πρώτοι δύο όροι είναι η δράση της λ-παραμορφωμένης θεωρίας του s-προτύπου όπως στην (6.1.12). Η παραπάνω έκφραση δίνει τη μορφή του s-ενδεδυμένου τελεστή $\mathcal{O}^{(m,n)}$ στην εξίσωση (6.2.1). Απλώς δίνεται από την

$$\mathcal{O}^{(m,n)}_\lambda = \mathcal{A}^{(m,n)}_{+-} = S_{a_1\ldots a_m;b_1\ldots b_n} A_+^{a_1}\ldots A_+^{a_m} A_-^{b_1}\ldots A_-^{b_n}\ , \tag{6.2.12}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό (6.2.4). Προφανώς, για μικρές τιμές του λ ο τελεστής $\mathcal{O}^{(m,n)}_\lambda$ ανάγεται στον $\mathcal{O}^{(m,n)}$ στην (6.2.1) σε τάξη λ-σταθερών όρων, που δεν επιρρεάζουν την ανώμαλη διάσταση του τελεστή. Να σημειώσουμε ότι η (6.2.11) παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τη γενικευμένη συμμετρία $k \to -k$, $\lambda \to \lambda^{-1}$, $g \to g^{-1}$, $s \to s\lambda^{m+n}$ ή σε σχέση με την ενεργό ζεύξη

$$k \to -k, \qquad \lambda \to \lambda^{-1}, \qquad g \to g^{-1}, \qquad \tilde\lambda \to \tilde\lambda/\lambda^{m+n}\ . \tag{6.2.13}$$

Αυτή η συμμετρία πρέπει να αντανακλάται στις φυσικές ποσότητες. Για το στοιχείο μήκους έχουμε
$$ds^2 = G_{\lambda\lambda}d\lambda^2 + G_{\tilde\lambda\tilde\lambda}d\tilde\lambda^2 + 2G_{\lambda\tilde\lambda}d\lambda d\tilde\lambda\ , \tag{6.2.14}$$

το οποίο σε γραμμική τάξη σε $\tilde{\lambda}$ πρέπει να είναι αναλλοίωτο κάτω από την (6.2.13). Μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου $\tilde{\lambda} = 0$ στην οποία το $G_{\lambda\tilde{\lambda}}$ είναι γραμμικό στο $\tilde{\lambda}$, οπότε δε συνεισφέρει. Επιπλέον, σε αυτό το όριο ο πρώτος όρος μετασχηματίζεται ανεξάρτητα οπότε και είναι αναλλοίωτος κάτω από το μετασχηματισμό (6.2.13). Η αναλλοιώτητα του $G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}$ κάτω από (6.2.13) δίνει τη συνθήκη $G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}(\lambda) = \lambda^{-2m-2n} G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}(1/\lambda)$ με απροσδιόριστο ένα συνολικό πρόσημο. Αυτό πράγματι ικανοποιείται από τη συνιστώσα της μετρικής $G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}$ στην (Γ′.1.8).

6.2.1 Οι εξισώσεις της RG ροής

Όπως πριν, επιλέγουμε το στοιχείο ομάδας $g = e^{\sigma^+\theta_+ + \sigma^-\theta_-}$ για δύο στοιχεία της υποομάδας Cartan του G, έτσι ώστε ξανά $J_\pm = -i\theta_\pm$ και $D = \mathbb{1}$. Επιπλέον οι εκφράσεις για τα πεδία βαθμίδας στις λύσεις παίρνουν τις τιμές

$$\begin{aligned} A_+^{(0)} &= \frac{\lambda}{1-\lambda}\big(\theta_+ - n\, s\, \mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')}\big) + \mathcal{O}(s^2)\ , \\ A_-^{(0)} &= -\frac{\lambda}{1-\lambda}\big(\theta_- + m\, s\, \mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)}\big) + \mathcal{O}(s^2)\ . \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

Ο συμβολισμός $\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)}$ και $\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')}$ αναμένουμε να είναι κατανοητός, δηλαδή στον ορισμό (6.2.6) θα πρέπει να θέσουμε για $A_\pm$ τις κλασικές τιμές και συγκεκριμένα την κυρίαρχη συνεισφορά του s -όρου της (6.2.15). Επίσης να σημειωθεί πως η (6.2.15) πρέπει να ικανοποιεί και την (6.2.7). Αυτό διασφαλίζεται αν ο $\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)}$ και το $\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')}$ ανήκουν στην υποομάδα Cartan, που είναι όμοια με τα $\theta_\pm$΄ς. Πράγματι αυτό συμβαίνει αφού οι συνιστώσες του τανυστή $S_{aa_1\dots a_{m-1};b_1\dots b_n}$ και $S_{a_1\dots a_m;bb_1\dots b_{n-1}}$ εξαφανίζονται αν a_i και b_j είναι δείκτες Cartan, εκτός και αν τα a και b είναι επίσης.

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω είμαστε σε θέση να γράψουμε την έκφραση για τη δράση (6.2.11) πάνω στην κλασική λύση (6.2.15). Σε γραμμική τάξη σε s λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{k}{2\pi}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\theta_+\theta_- + 2s\,(-1)^n\Big(\frac{\lambda}{1-\lambda}\Big)^{m+n}\theta_{+-}^{(m,n)}\right) + \mathcal{O}(s^2)\ , \tag{6.2.16}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό

$$\theta_{+-}^{(m,n)} = S_{a_1\dots a_m;b_1\dots b_n}\theta_+^{a_1}\dots\theta_+^{a_m}\theta_-^{b_1}\dots\theta_-^{b_n}\ , \tag{6.2.17}$$

που είναι ανάλογος με αυτόν στην (6.2.4). Να σημειωθεί ότι (6.2.16) ανάγεται στην (6.1.14) για $m = 1, n = 0$. Παρακάτω υπολογίζουμε τις διακυμάνσεις της (6.2.7) γύρω από την κλασική λύση, κρατώντας μόνο τους γραμμικούς όρους. Το αποτέλεσμα για την πρώτη εξίσωση της (6.2.7) δίνει

$$\begin{aligned}&\Big(- \lambda\delta_{ab}\partial_- - (\tilde{A}^{(0)}_-)_{ab} + m(m-1)s\lambda\big(\mathcal{A}^{(0)(m'',n)}_{+-}\big)_{ab}\partial_+ - ims\lambda f_{abc}\big(\mathcal{A}^{(0)(m',n)}_{+-}\big)_c \\ &\qquad + m(m-1)s\lambda(\tilde{A}^{(0)}_+)_{ac}\big(\mathcal{A}^{(0)(m'',n)}_{+-}\big)_{cb}\Big)\delta A^b_+ \\ &+\Big(\delta_{ab}\partial_+ + (\tilde{A}^{(0)}_+)_{ab} + mns\lambda\big(\mathcal{A}^{(0)(m',n')}_{+-}\big)_{ab}\partial_+ + mns\lambda(\tilde{A}^{(0)}_+)_{ac}\big(\mathcal{A}^{(0)(m',n')}_{+-}\big)_{cb}\Big)\delta A^b_- = 0\ .\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

Ομοίως οι διακυμάσεις για τη δεύτερη εξίσωση (6.2.7) δίνουν

$$\begin{aligned}&\Big(- \lambda\delta_{ab}\partial_+ - (\tilde{A}^{(0)}_+)_{ab} + n(n-1)s\lambda\big(\mathcal{A}^{(0)(m,n'')}_{+-}\big)_{ab}\partial_- - ins\lambda f_{abc}\big(\mathcal{A}^{(0)(m,n')}_{+-}\big)_c \\ &\qquad + n(n-1)s\lambda(\tilde{A}^{(0)}_-)_{ac}\big(\mathcal{A}^{(0)(m,n'')}_{+-}\big)_{cb}\Big)\delta A^b_- \\ &+\Big(\delta_{ab}\partial_- + (\tilde{A}^{(0)}_-)_{ab} + mns\lambda\big(\mathcal{A}^{(0)(m',n')}_{+-}\big)_{ba}\partial_- + mns\lambda(\tilde{A}^{(0)}_-)_{ac}\big(\mathcal{A}^{(0)(m',n')}_{+-}\big)_{bc}\Big)\delta A^b_+ = 0\ .\end{aligned} \tag{6.2.19}$$

Επίσης έχουμε ορίσει τις ποσότητες με δύο τόνους

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{A}^{(m'',n)}_{+-}\big)_{ab} &= S_{aba_1\dots a_{m-2};b_1\dots b_n}A^{a_1}_+\dots A^{a_{m-2}}_+A^{b_1}_-\dots A^{b_n}_-\ ,\\ \big(\mathcal{A}^{(m,n'')}_{+-}\big)_{ab} &= S_{a_1\dots a_m;abb_1\dots b_{n-2}}A^{a_1}_+\dots A^{a_m}_+A^{b_1}_-\dots A^{b_{n-2}}_-\ ,\\ \big(\mathcal{A}^{(m',n')}_{+-}\big)_{ab} &= S_{aa_1\dots a_{m-1};bb1\dots b_{n-1}}A^{a_1}_+\dots A^{a_{m-1}}_+A^{b_1}_-\dots A^{b_{n-1}}_-\ ,\end{aligned} \tag{6.2.20}$$

όπου, όπως και πριν ένας ή δύο τόνοι υπονοούν ότι δύο δείκτες στον τανυστή S δε συστέλονται. Οι εξισώσεις διακυμάνσεων (6.2.18) και (6.2.19) μπορούν να γραφούν στη μορφή (6.1.17) με $\hat{D} = \hat{C} + \hat{F}$. Στο χώρο των ορμών έχουμε

$$\hat{C} = \hat{C}_0 + s\,\hat{C}_1\ , \qquad \hat{F} = \hat{F}_0 + s\,\hat{F}_1\ , \tag{6.2.21}$$

όπου

$$\hat{C}_0 = \begin{pmatrix} -\lambda p_+ & p_- \\ p_+ & -\lambda p_- \end{pmatrix}\ , \qquad \hat{F}_0 = \begin{pmatrix} -\tilde{A}^{(0)}_+ & \tilde{A}^{(0)}_- \\ \tilde{A}^{(0)}_+ & -\tilde{A}^{(0)}_- \end{pmatrix} \tag{6.2.22}$$

και

$$\hat{C}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda\,E\,p_- & \lambda\,B\,p_- \\ \lambda\,\tilde{B}\,p_+ & -\lambda\,\tilde{E}\,p_+ \end{pmatrix}\ , \qquad \hat{F}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda\,F & \lambda\,C \\ \lambda\,\tilde{C} & -\lambda\,\tilde{F} \end{pmatrix}\ . \tag{6.2.23}$$

Κάθε ένα από τα στοιχεία στους πίνακες των (6.2.22) και (6.2.23) είναι πίνακας με δύο δείκτες. Συγκεκριμένα οι συνιστώσες του πίνακα είναι

$$\begin{aligned}
&B_{ab} = mn\big(\mathcal{A}^{(0)(m',n')}_{+-}\big)_{ba} \ , \qquad E_{ab} = -n(n-1)\big(\mathcal{A}^{(0)(m,n'')}_{+-}\big)_{ab} \ , \\
&\tilde{B}_{ab} = mn\big(\mathcal{A}^{(0)(m',n')}_{+-}\big)_{ab} \ , \qquad \tilde{E}_{ab} = -m(m-1)\big(\mathcal{A}^{(0)(m'',n)}_{+-}\big)_{ab} \ , \\
&F_{ab} = -n(n-1)(\tilde{A}^{(0)}_{-})_{ac}\big(\mathcal{A}^{(0)(m,n'')}_{+-}\big)_{cb} + inf_{abc}\big(\mathcal{A}^{(0)(m,n')}_{+-}\big)_{c} \ , \\
&\tilde{F}_{ab} = -m(m-1)(\tilde{A}^{(0)}_{+})_{ac}\big(\mathcal{A}^{(0)(m'',n)}_{+-}\big)_{cb} + imf_{abc}\big(\mathcal{A}^{(0)(m',n)}_{+-}\big)_{c} \ , \\
&C_{ab} = mn(\tilde{A}^{(0)}_{-})_{ac}\big(\mathcal{A}^{(0)(m',n')}_{+-}\big)_{bc} \ , \qquad \tilde{C}_{ab} = mn(\tilde{A}^{(0)}_{+})_{ac}\big(\mathcal{A}^{(0)(m',n')}_{+-}\big)_{cb} \ .
\end{aligned} \tag{6.2.24}$$

Έχοντας τις παραπάνω εκφράσεις μπορεί να κανείς να υπολογίσει απ΄ ευθείας το ίχνος του πίνακα $(\hat{C}^{-1}\hat{F})^2$ στην (6.1.21) κρατώντας μόνο τους όρους από τους οποίους αναδύονται μη-μηδενικές συνεισφορές από γωνιακές ολοκληρώσεις. Οι τελευταίοι αυτοί όροι συνεισφέρουν έναν παράγοντα 2π. Έτσι λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\hat{C}^{-1}\hat{F})^2 &= \mathrm{Tr}(\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0)^2 \\
&\quad + 2s\Big(\mathrm{Tr}(\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_1) - \mathrm{Tr}\big((\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0)^2\hat{C}_0^{-1}\hat{C}_1\big)\Big) + \mathcal{O}(s^2) \ .
\end{aligned} \tag{6.2.25}$$

Υπολογίζοντας καθένα από τα ίχνη στο δεξί μέλος της (6.2.25) ξεχωριστά, προκύπτει

$$\mathrm{Tr}(\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0)^2 = -\frac{8c_G}{r^2}\frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}\theta_+\theta_- - \frac{8(m+n)c_G\lambda s}{r^2(1-\lambda)(1+\lambda)^2}\mathcal{A}^{(0)(m,n)}_{+-} \tag{6.2.26}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_1) = \frac{4\lambda}{r^2(1-\lambda)(1+\lambda)^2}&\Big(\mathrm{Tr}\big(\tilde{A}^{(0)}_{-}F + \tilde{A}^{(0)}_{+}\tilde{F}\big) \\
&- \lambda\mathrm{Tr}(\tilde{A}^{(0)}_{+}C + \tilde{A}^{(0)}_{-}\tilde{C})\Big) \, .
\end{aligned} \tag{6.2.27}$$

Για το τελευταίο ίχνος έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}((\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0)^2\hat{C}_0^{-1}\hat{C}_1) &= \frac{4\lambda}{r^2(1-\lambda)(1+\lambda)^3}\Big(\mathrm{Tr}\big(\tilde{B}\tilde{A}^{(0)}_{-}\tilde{A}^{(0)}_{+} + \tilde{E}\tilde{A}^{(0)}_{+}\tilde{A}^{(0)}_{+} \\
&\quad + E\tilde{A}^{(0)}_{-}\tilde{A}^{(0)}_{-} + B\tilde{A}^{(0)}_{+}\tilde{A}^{(0)}_{-}\big) - \lambda\mathrm{Tr}(B\tilde{A}^{(0)}_{-}\tilde{A}^{(0)}_{+} + \tilde{B}\tilde{A}^{(0)}_{+}\tilde{A}^{(0)}_{-})\Big) \ .
\end{aligned} \tag{6.2.28}$$

Όπως πριν, τα διάφορα ίχνη που εμφανίζονται στις (6.2.27) και (6.2.28) πρέπει να υπολογιστούν κατά περίπτωση αφού τα αποτελέσματά τους εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη μορφή του τελεστή που επιλέχθηκε και πιο συγκεκριμένα από την επιλογή για τον τανυστή S. Εύκολα φαίνεται ότι στον τελευταίο όρο της (6.2.11) έχουμε $\mathcal{A}^{(m,n)}_{+-} \sim \mathcal{O}^{(m,n)}$ για μικρό s.

Έτσι το σ -πρότυπο (6.2.11) για μικρά λ και s γίνεται

$$S = S_k(g) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\Big(\lambda J_+^a J_-^a + \tilde{\lambda}\mathcal{O}^{(m,n)}\Big) + \cdots \ , \tag{6.2.29}$$

όπου έχουμε εισάγει την ενεργό ζεύξη

$$\tilde{\lambda} \sim s\lambda^{m+n} \ . \tag{6.2.30}$$

Αυτή είναι η αναλογία της (6.1.26) για την περίπτωση του απλού ρεύματος. Έτσι, λαμβάνοντας το όριο $\tilde{\lambda} \to 0$ θα βρούμε την ανώμαλη διάσταση του $\mathcal{O}_\lambda^{(m,n)}$. Αυτό θα επιτευχθεί κάνοντας χρήση της (6.1.31) όπου το $\beta^{\tilde{\lambda}}$ τώρα θα πρέπει να αντιστοιχεί σε αυτό τον τελεστή και η συνιστώσα της μετρικής πρέπει να είναι

$$g^{(0)}_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}} \sim \frac{1}{(1-\lambda^2)^{m+n}} \ . \tag{6.2.31}$$

Ο συνολικός συντελεστής είναι μη-σχετικός, αλλά παρ' όλα αυτά μπορεί να βρεθεί στο παράρτημα ;;, όπου αυτή η μετρική έχει υπολογιστεί. Μένει να υπολογίσουμε το $\beta^{\tilde{\lambda}}$. Όμως, αυτό φαίνεται δύσκολο αφού για έναν αυθαίρετο τανυστή S στον τελεστή (6.2.1) αναμένουμε μία μίξη τελεστών κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης ακόμα και αν αυτός ο τανυστής αντιστοιχεί σε μία μη αναγώγιμη αναπαράσταση του G.

Στην επόμενη ενότητα, επικεντρωνόμαστε σε σημαντικές περιπτώσεις όπου μία τέτοια μίξη τελεστών δε συμβαίνει και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ανώμαλες διαστάσεις.

6.2.2 Σημαντικά παραδείγματα

Επικεντρωνόμαστε τώρα σε κάποια σημαντικά παραδείγματα. Αυτά αφορούν τελεστές οι οποίοι στο UV στο όριο όπου $\lambda = 0$, αποτελούν μία αλυσίδα από αμιγώς χειραλικούς τελεστές όπως και μικτούς τελεστές ρεύματος. Για αυτή την κλάση καταλήγουμε πως οι ανώμαλες διαστάσεις είναι μηδέν. Για τις τελευταίες περιπτώσεις υπάρχει μία γενική μίξη που σχετίζεται με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις του τελεστή. Δεν υφίσταται τέτοια μίξη για τελεστές με δύο J_+΄ς και ένα J_-. Για αυτό τον συγκεκριμένο τελεστή βρίσκουμε ότι η ανώμαλη διάσταση είναι ίδια με αυτήν του τελεστή J_+J_- που αποτελεί την παραμόρφωση από το σύμμορφο σημείο. Έχουμε επίσης ελέγξει ότι οι ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών παραγοντοποιούνται σε χειραλικούς και αντι-χειραλικούς. Κυρίως επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση της $SU(N)$ ομάδας για την οποία έχουμε συλλέξει ορισμένες χρήσιμες σχέσεις στο παράρτημα Γ΄.2.

6.2.2.1 Ο χειραλικός τελεστής $\mathcal{O}^{(m,0)}$

Ενδιαφερόμαστε για την ανώμαλη διάσταση του τελεστή

$$\mathcal{O}^{(m,0)} = d^{(m)}_{a_1 \ldots a_m} J^{a_1}_+ \ldots J^{a_m}_+ \ , \tag{6.2.32}$$

όπου $d^{(m)}_{a_1 \ldots a_m}$ είναι ο πλήρως συμμετρικός τάξης -m τανυστής της $SU(N)$. Στο σύμμορφο σημείο αυτός είναι ένα πρωτεύον πεδίο με διάσταση m [88] όπου $m \geqslant 3$. Για $m = 2$ το πεδίο είναι ανάλογο του τανυστή ενέργεια-ορμής. Η λ-¨ενδεδυμένη' εκδοχή του θα δίνεται από την (6.2.12) με $n = 0$. Για αυτή την κλάση τελεστών εμφανίζονται συγκεκριμένες απλοποιήσεις όταν εφαρμόζουμε το γενικό φορμαλισμό και επιπρόσθετα δε θα εμφανιστούν επιπλέον μίξεις με άλλους τελεστές, όπως θα φανεί. Όντως, οι περισσότεροι πίνακες στην (6.2.24) μηδενίζονται . Τότε για τα μη μηδενικά ίχνη που εμφανίζονται στις (6.2.27) και (6.2.28), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}(\tilde{A}^{(0)}_+ \tilde{F}) = m\big(c_G + (m-1)\Delta_m\big)\mathcal{A}^{(0)(m,0)}_{+-} = 0 \ , \\ &\mathrm{Tr}(\tilde{E}\tilde{A}^{(0)}_+ \tilde{A}^{(0)}_+) = m(m-1)\Delta_m \mathcal{A}^{(0)(m,0)}_{+-} = -m c_G \mathcal{A}^{(0)(m,0)}_{+-} \ , \end{aligned} \tag{6.2.33}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την (Γ′.2.11) που ισχύουν για $m = 2, 3, \ldots$. Τότε η (6.1.21) με την (6.2.16) που υπολογίστηκε για $n = 0$ δίνεται από

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\text{eff}} = &-\frac{k}{2\pi}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\theta_+\theta_- + 2\frac{\tilde{\lambda}}{(1-\lambda)^m}\theta^{(m,0)}_{+-}\right) \\ &-\frac{c_G}{2\pi}\frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}\ln\mu^2\left(\theta_+\theta_- + \frac{m\tilde{\lambda}}{(1-\lambda)^{m-1}(1+\lambda)}\theta^{(m,0)}_{+-}\right) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2) \ , \end{aligned} \tag{6.2.34}$$

όπου η ενεργός ζεύξη είναι $\tilde{\lambda} \sim s\lambda^m$. Τότε απαιτώντας $\partial_{\ln\mu^2}\mathcal{L}_{\text{eff}} = 0$ λαμβάνουμε την κύρια συνεισφορά $1/k$, η έκφραση για το β^λ στην (6.1.23) όπως επίσης και

$$\beta^{\tilde{\lambda}} = \frac{c_G}{2k}\frac{m\tilde{\lambda}\lambda^3}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2) \ . \tag{6.2.35}$$

Χρησιμοποιώντας την (6.1.31) με τη μετρική να δίνεται από την (6.3.22) με $n = 0$, βρίσκουμε ότι

$$\gamma_{\mathcal{O}^{(m,0)}_\lambda} = 0 \ . \tag{6.2.36}$$

Πριν σχολιάσουμε το αποτέλεσμα να επισημάνουμε πως όταν $m = 1$ η (Γ′.2.11) δεν έχει νόημα. Σε αυτή την περίπτωση καταλήγουμε σε ένα αποτέλεσμα για την ανώμαλη διάσταση του απλού ρεύματος στην (6.1.34). Ο μηδενισμός της ανώμαλης διάστασης (6.2.36) έχει μία απλή ερμηνεία. Να σημειωθεί ότι η λ-παραμορφωμένη δράση έχει δύο καλά ορισμένα όρια τα οποία εμπεριέχουν $k \to \infty$ και $\lambda \to \pm 1$ με τέτοιο τρόπο ώστε το $k(1-\lambda)$ και το $k(1+\lambda)^3$ να παραμένουν πεπερασμένα. Αυτά αποτελούν το μη-αβελιανό και ψευδο-χειραλικό όριο αντίστοιχα [16, 21]. Τα παραπάνω προτείνουν ότι η ανώμαλη διάσταση οποιουδήποτε τελεστή $\mathcal{O}$ πρέπει να έχει τη μορφή

$$\gamma_{\mathcal{O}} = \frac{c_G}{k} \frac{\lambda^n f(\lambda)}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3} \ , \tag{6.2.37}$$

όπου το n είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος του οποίου η τιμή υποδεικνύεται από την κύρια διαταρακτική συνεισφορά στο λ αποτέλεσμα ή είναι μηδέν αν ο τελεστής έχει ένα $\frac{1}{k}$ ανάπτυγμα ακόμα και στο σύμμορφο σημείο για $\lambda = 0$. Η συνάρτηση $f(\lambda)$ είναι αναλυτική στο λ. Η συμμετρία στην (6.1.35) θα πρέπει να εμπεριέχεται στην ανώμαλη διάσταση του τελεστή ο οποίος πρέπει τότε να παραμένει αναλλοίωτος. Αυτό δίνει τη συνθήκη

$$\lambda^{2(2-n)} f(1/\lambda) = f(\lambda) \ . \tag{6.2.38}$$

Για $n = 0, 1, 2$, η συνάρτηση $f(\lambda)$ είναι ένα πολυώνυμο τέταρτης, δεύτερης και πρώτης τάξης. Παρ' όλα αυτά για $n \geqslant 3$ η εξίσωση (6.2.38) δεν ευσταθεί, εκτός και αν $f(\lambda) = 0$ που οδηγεί σε μηδενική ανώμαλη διάσταση . Έτσι, αν βρει κανείς μία μηδενική ανώμαλη διάσταση έως τάξη $\mathcal{O}(\lambda^2)$ τότε αυτή θα μηδενίζεται σε όλες τις τάξης ως προς λ επίσης. Αυτό ευσταθεί έως την τάξη $\mathcal{O}(1/k)$ και παρόμοια επιχειρήματα ισχύουν και για αναπτύγματα σε μεγάλα k. Έχουμε εκτελέσει και διαταρακτικά αποτελέσματα σε πλήρη συμφωνία με τα παραπάνω. Ο τελεστής $J_+^a J_+^a$ στο σύμμορφο όριο δηλαδή για $\lambda = 0$, είναι ανάλογος με τη χειραλική συνιστώσα του τανυστή ΕΟ. Στη λ-παραμορφωμένη θεωρία μπορεί να ελεγχθεί πως ο ρόλος του τανυστή ενέργειας ορμής δίνεται από την παραμόρφωση $J_+^a J_+^a$, δηλαδή $\mathcal{O}_\lambda^{(2,0)}$. Έτσι,

$$\mathcal{O}_\lambda^{(2,0)} = \mathcal{A}_{+-}^{(2,0)} \sim J_+ (1-\lambda D^T)^{-1} (1-\lambda D)^{-1} J_+ \sim T_{++} \ . \tag{6.2.39}$$

Η τελευταία σχέση αναλογίας στο T_{++} προκύπτει αν απλώς υπολογίσουμε τον τανυστή ενέργειας-ορμής για το λ-παραμορφωμένο πρότυπο (6.1.12) (με $s = 0$). Όπως σε κάθε σ-πρότυπο διατηρείται η κλασική χειραλική συμμετρία δηλαδή $\partial_- T_{++} = 0$. Ένα λιγότερο τετριμμένο επιχείρημα είναι πως η παρακάτω ακολουθία των νόμων χειραλικής διατήρησης

$$\partial_- \mathcal{O}_\lambda^{(m,0)} = 0 \ , \qquad m = 2, 3, \ldots \ . \tag{6.2.40}$$

είναι βάσιμος, με τη διατήρηση του T_{++} να είναι απλώς το πρώτο μέλος. Αυτό αποτελεί συνέπεια του γεγονότος ότι η κλασική εξίσωση κίνησης για το λ-παραμορφωμένο πρότυπο μπορεί να γραφεί

$$\partial_\mp A_\pm = \mp \frac{1}{1+\lambda} [A_+, A_-] \ , \tag{6.2.41}$$

όπως και για τη θεωρητική μονάδα της ομάδας στην (Γ'.2.10). Το γεγονός ότι η $\gamma_{\mathcal{O}^{(m,0)}} = 0$ σημαίνει πως η (6.2.40) ισχύει και κβαντικά επίσης, εως και $\mathcal{O}(1/k)$. Για να φανεί αυτό, να σημειωθεί πως για τη συνάρτηση δύο σημείων το κλασικό αποτέλεσμα

$$\langle \mathcal{O}_\lambda^{(m,0)}(x_1)\mathcal{O}_\lambda^{(n,0)}(x_2)\rangle \sim \frac{\delta_{mn}}{x_{12}^{2m}} \ , \tag{6.2.42}$$

σε $\mathcal{O}(1/k)$ και επακριβώς στο λ, επίσης ισχύει και δεν υπάρχει μίξη με άλλους τελεστές. Αυτές οι δύο παρατηρήσεις μπορούν να συνδιαστούν με τη μορφή της συνάρτησης δύο σημείων(5.2.2), με $\bar{\gamma} = \gamma$ όπως εξηγείται κάτω από την εξίσωση. Παρ' όλα αυτά αναμένουμε πως γενικά θα υπάρχουν διορθώσεις τάξης $\mathcal{O}(1/k^2)$. Προφανώς, η ανώμαλη διάσταση του τελεστή $\mathcal{O}_\lambda^{(0,n)}$ που περιέχει μόνο αντι-χειραλικά ρεύματα μηδενίζεται επίσης. Επιπρόσθετα, ακόμα κι αν αυτό είναι λιγότερο προφανές έχει ελεγχθεί ότι ο τελεστής $\mathcal{O}_\lambda^{(m,0)}\mathcal{O}_\lambda^{(0,n)}$ έχει επίσης μηδενική ανώμαλη διάσταση. Επιλέγουμε να μην παρουσιάσουμε τις λεπτομέρειες του υπολογισμού χωρίς να διαφέρουν από τους έως τώρα.

6.2.2.2 Ο μικτός τελεστής $\mathcal{O}^{(2,1)}$

Ο τελεστής του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε την ανώμαλη διάσταση είναι

$$\mathcal{O}^{(2,1)} = d_{abc} J_+^a J_+^b J_-^c \ , \tag{6.2.43}$$

όπου d_{abc} είναι ο πλήρως συμμετρικός τανυστής της $SU(N)$ τάξεως τρία. Αυτός ο τελεστής δε μπορεί να αναμειχθεί με άλλους και η λ -ενδεδυμένη του μορφή δίνεται από την (6.2.12) για $m = 2$ και $n = 1$. Να υπευθυμίσουμε ότι το πεδίο $Q^a = d_{abc} J_+^b J_+^c$ είναι πρωτεύον με διάσταση ίση με 2 [88]. Έτσι ο τελεστής $\mathcal{O}^{(2,1)}$ στο σύμμορφο σημείο είναι ένα πρωτεύον πεδίο με ολομορφικές και αντι-ολομορφικές διαστάσεις ίσες με 2 και 1, αντίστοιχα.

Θέτωντας $n = 1$ ορισμένοι πίνακες στην (6.2.24) μηδενίζονται ή απλοποιούνται. Τότε έχουμε για τα διάφορα ίχνη που εμφανίζονται στις (6.2.27) και (6.2.28) ότι

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)} F) = \mathrm{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)} \tilde{F}) = \mathrm{Tr}(\tilde{B}\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)}) = -\mathrm{Tr}(\tilde{E}\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)}) \\
&\quad = \mathrm{Tr}(B\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)}) = \mathrm{Tr}(\tilde{B}\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)}) = \mathrm{Tr}(B\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)}) \\
&\quad = \mathrm{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)} C) = \mathrm{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)} \tilde{C}) \\
&\quad = -c_G \frac{\lambda^3}{(1-\lambda)^3} \theta_{+-}^{(2,1)} + \mathcal{O}(s) \ ,
\end{aligned} \tag{6.2.44}$$

όπου κρατήσαμε μόνο τις κύριες συνεισφορές ως προς s μιας και αυτοί οι όροι πολλαπλασιάζονται με s στην (6.2.25) (μέσω των (6.2.27) και (6.2.28)). Τότε η(6.1.21) με (6.2.16) που υπολογίστηκε με $m = 2$ και $n = 1$ γίνεται

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{\text{eff}} = &-\frac{k}{2\pi}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\theta_+\theta_- - 2\frac{\tilde{\lambda}}{(1-\lambda)^3}\theta_{+-}^{(2,1)}\right) \\
&-\frac{c_G}{2\pi}\frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^2}\ln\mu^2\left(\lambda\theta_+\theta_- - \frac{\tilde{\lambda}(2+\lambda+2\lambda^2)}{(1-\lambda)^2(1+\lambda)}\theta_{+-}^{(2,1)}\right) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2)\ ,
\end{aligned}
\tag{6.2.45}
$$

όπου σε αυτή την περίπτωση η ενεργός ζεύξη είναι $\tilde{\lambda} = s\lambda^3$. Απαιτώντας $\partial_{\ln\mu^2}\mathcal{L}_{\text{eff}} = 0$ λαμβάνουμε την κύρια συνεισφορά σε $1/k$ την έκφραση για το β^λ, το οποίο εδώθη στην (6.1.23) και

$$
\beta^{\tilde{\lambda}} = -\frac{c_G}{2k}\frac{\tilde{\lambda}\lambda\big(2-\lambda(2+\lambda)\big)}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3} + \mathcal{O}(\hat{\lambda}^2)\ . \tag{6.2.46}
$$

Χρησιμοποιώντας την (6.1.31) με μετρική που δίνεται από την (6.3.22) ξανά με $m = 2$ και $n = 1$ καταλήγουμε στην

$$
\gamma_{\mathcal{O}_\lambda^{(2,1)}} = -\frac{2c_G}{k}\frac{\lambda(1-\lambda(1-\lambda))}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3}\ , \tag{6.2.47}
$$

που δίνει το ίδιο με αυτήν για $\gamma_{J_+J_-}$ στην (6.1.33). Παρακάτω προχωρούμε στην ανάλυση των προτύπων με διαφορετικά επίπεδα των Kac-Moody αλγεβρών.

6.3 λ-παραμορφώσεις με άλγεβρες διαφορετικών επιπέδων

Σε αυτή την ενότητα, θα χρησιμοποιήσουμε το γενικό φορμαλισμό που αναπτύχθηκε νωρίτερα προκειμένου να υπολογίσουμε τις ανώμαλες διαστάσεις σύνθετων ρευμάτων όπου τα επίπεδα των χειραλικών και αντιχειραλικών αλγεβρών διαφέρουν. Το βασικότερο κίνητρο είναι πως τέτοια πρότυπα έχουν σταθερά σημεία στο IR που αντιστοιχούν σε κανούργιες CFTs. Το πρώτο τέτοιο πρότυπο παρουσιάστηκε στην [46] όπου εκεί ξεκινώντας κανείς με δύο πρότυπα WZW με διαφορετικά επίπεδα k_1 και k_2 και μέσω της διαδικασίας της βάθμισης η οποία περιλαμβάνει δύο ειδών πεδία βαθμίδας $A_\pm$ και $B_\pm$ μπορεί κανείς να κατασκευάσει την ενεργό δράση δύο αμοιβαίως αλληλεπιδρώντων WZW προτύπων. Οι όροι που οδηγούν τα πρότυπα μακρυά από το σύμμορφο σημείο είναι οι $J_{1+}J_{2-}$ και $J_{2+}J_{1-}$ με το δείκτη 1 ή 2 να δείχνει ότι αναφερόμαστε στο πρώτο ή στο δεύτερο πρότυπο WZW με τα αντίστοιχα επίπεδα k_1 και k_2. Μπορούμε να απλουστεύσουμε το πρότυπο θέτωντας τη σταθερά ζεύξης του δεύτερου εκ των δύο όρων στο μηδέν όπως θα φανεί. Τότε προκύπτει πως είναι συνεπές να θεωρήσουμε τελεστές μορφής πανομοιώτυπης της (6.2.1) που δίνονται από την

$$\mathcal{O}^{(m,n)} = S_{a_1\dots a_m;b_1\dots b_n} J_{1+}^{a_1} \dots J_{1+}^{a_m} \bar{J}_{2-}^{b_1} \dots \bar{J}_{2-}^{b_n} \ . \tag{6.3.1}$$

Όπως στην λ-παραμόρφωση ο συνολικός συντελεστής του τανυστή πρέπει να είναι συμμετρικός στους πρώτους m δείκτες, όπως και στους τελικούς n, ξεχωριστά χωρίς καμία ιδιότητα συμμετρίας που να συσχετίζει τα a_i και τα b_i. Σημείο εκκίνησης είναι η εξίσωση (2.6) της [46] αλλά με $\lambda_2 \to 0$ και λ_1 επανα-ορισμένο ως λ. Προκύπτει ότι σ' αυτό το όριο, το οποίο είναι συνεπές κβαντομηχανικά από την πλευρά της ομάδας επανακανονικοποίησης, ο κυρίαρχος όρος για μικρά λ είναι $J_{1+}J_{2-}$, ο οποίος, όπως επισημάνθηκε νωρίτερα είναι η περίπτωση που θέλουμε να μελετήσουμε. Τότε ο τελευταίος όρος στην πρώτη γραμμή της (2.6) της [46] παραμένει πεπερασμένος αν επανα-ορίσουμε το $B_\pm$ ως $B_\pm \to \sqrt{\lambda_2}B_\pm$. Σε αυτό το όριο το ανάλογο της ενεργού δράσης, η ενεργός δράση (6.2.3) γίνεται

$$\begin{aligned} S_{k_i,\lambda,s}(g_i, A_\pm) = \sum_{i=1}^{2} S_{k_i}(g_i) + \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma \ \mathrm{Tr}\big(k_1 A_- \partial_+ g_1 g_1^{-1} - k_2 A_+ g_2^{-1} \partial_- g_2\big) \\ - \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2\sigma \ \Big(\lambda^{-1} \mathrm{Tr}\big(A_+ A_-\big) + s\mathcal{A}_{+-}^{(m,n)}\Big) \ , \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

όπου όπως και πριν η έκφραση για το $\mathcal{A}_{+-}^{(m,n)}$ δίνεται από την (6.2.4). Σε αυτή τη διαδικασία το πεδίο βαθμίδας $B_\pm$ έχει αποσυζευχθεί και λόγω αυτού δεν έχουμε περιλάβει τον όρο $\mathrm{Tr}(B_+ B_-)$ στην παραπάνω δράση.

Οι εξισώσεις κίνησης για την (6.3.2) ως προς A_- και A_+ δίνουν

$$\begin{aligned} D_+ g_1\, g_1^{-1} &= (\lambda_0^{-1}\lambda^{-1} - 1)A_+ + \lambda_0^{-1} n s \mathcal{A}_{+-}^{(m,n')} \ , \\ g_2^{-1} D_- g_2 &= -(\lambda_0 \lambda^{-1} - 1)A_- - \lambda_0 m s \mathcal{A}_{+-}^{(m',n)}, \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

όπου έχουμε ορίσει τις συναλλοίωτες παραγώγους $D_+ g_1 = \partial_+ g_1 - A_+ g_1$ και $D_- g_2 = \partial_- g_2 + g_2 A_-$ καθώς επίσης και τα διανύσματα $\mathcal{A}_{+-}^{(m,n')}$ και $\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)}$ που δίνονται από την (6.2.6). Αντί των επιπέδων k_1 ανδ k_2 θα χρησιμοποιήσουμε τις παραμέτρους

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \ , \qquad k = \sqrt{k_1 k_2} \ . \tag{6.3.4}$$

Μεταβάλλοντας τη δράση ως προς τα στοιχεία ομάδας g_1 και g_2 προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις

$$\partial_-(D_+ g_1 g_1^{-1}) - [A_-, D_+ g_1 g_1^{-1}] = F_{+-}, \qquad \partial_-(D_+ g_2 g_2^{-1}) = 0, \tag{6.3.5}$$

ή ισοδύναμα

$$\partial_+(g_1^{-1}D_-g_1) = 0, \qquad \partial_+(g_2^{-1}D_-g_2) - [A_+, g_2^{-1}D_-g_2] = F_{+-}, \tag{6.3.6}$$

Αντικαθιστώντας τους συνδέσμους (6.3.3) στις (6.3.5) και (6.3.6) έχουμε

$$\begin{aligned} &\lambda_0\lambda^{-1}\partial_+A_- - \partial_-A_+ = \lambda_0\lambda^{-1}[A_+, A_-] - \lambda_0 m\, s\, D_+\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)} \ , \\ &\lambda_0^{-1}\lambda^{-1}\partial_-A_+ - \partial_+A_- = -\lambda_0^{-1}\lambda^{-1}[A_+, A_-] - \lambda_0^{-1}n\, s\, D_-\mathcal{A}_{+-}^{(m,n')} \ , \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

όπου οι συναλλοίωτες παράγωγοι δρουν με τον ίδιο τρόπο όπως στην (6.2.7). Έτσι, οι εξισώσεις κίνησης έχουν γραφεί αποκλειστικά συναρτήσει των πεδίων βαθμίδας. Οι σύνδεσμοι (6.3.3) μπορούν να λυθούν εύκολα και δίνουν

$$\begin{aligned} A_+ &= i\lambda_0\lambda J_{1+} - ns\lambda\mathcal{A}_{+-}^{(m,n')} + \mathcal{O}(s^2) \ , \\ A_- &= -i\lambda_0^{-1}\lambda J_{2-} - ms\lambda\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)} + \mathcal{O}(s^2) \ , \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

όπου στα $\mathcal{A}_{+-}^{(m,n')}$ και $\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)}$ παραπάνω, μόνο οι κύριες συνεισφορές πρέπει να χρησιμοποιηθούν στους ορισμούς τους(6.2.6). Τότε η αντικατάσταση στην (6.3.2) δίνει τη δράση

$$S = \sum_{i=1}^{2} S_{k_i}(g_i) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\Big(\lambda J_{1+}^a J_{2-}^a - s\mathcal{A}_{+-}^{(m,n)}\Big) + \mathcal{O}(s^2) \ . \tag{6.3.9}$$

Να σημειωθεί πως αφού η παραπάνω δράση στην $\mathcal{A}_{+-}^{(m,n)}$ μόνο οι κυρίαρχες εκφράσεις στο s έπρεπε να χρησιμοποιηθούν, δεν υπάρχει λ-ένδυση των πεδίων βαθμίδας όπως ήταν η περίπτωση των πεδίων βαθμίδας για τα απλά λ-παραμορφωμένα πρότυπα (6.2.10). Συνεπώς, ο τελεστής (6.3.1) δεν αλλάζει κάτω από λ-παραμόφωση.

6.3.1 Εξισώσεις για τις RG ροές

Για να προχωρήσουμε χρειαζόμαστε μία κλασική λύση της (6.3.7). Παρ όλα αυτά, όπως κάναμε και στις προηγούμενες περιπτώσεις χρειαζόμαστε μόνο λύσεις που ισχύουν σε τάξη $\mathcal{O}(s)$. Αυτό μπορεί έυκολα να επιτευχθεί αν επιλέξουμε τα στοιχεία ομάδας $g_i = e^{\sigma^+\theta_+^{(i)} + \sigma^-\theta_-^{(i)}}$, $i = 1,2$ με τα στοιχεία $\theta_\pm^{(i)}$ να ανήκουν στην Cartan υποομάδα του G, ώστε $J_{i\pm} = -i\theta_\pm^{(i)}$. Οι εκφράσεις των πεδίων βαθμίδας είναι

$$\begin{aligned} A_+^{(0)} &= \lambda_0\lambda\theta_+^{(1)} - n\, s\, \lambda\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')} + \mathcal{O}(s^2) \ , \\ A_-^{(0)} &= -\lambda_0^{-1}\lambda\theta_-^{(2)} - m\, s\, \lambda\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)} + \mathcal{O}(s^2) \ . \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

Να σημειωθεί ότι στον ορισμό (6.2.6) πρέπει να θέσουμε για $A_\pm$ τις κλασικές τους τιμές (6.3.10). Να σημειωθεί επίσης ότι η (6.3.10) πρέπει να ικανοποιεί την (6.3.7). Αυτό διασφαλίζεται αν τα $\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)}$ και $\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')}$ ανήκουν στην Cartan υποομάδα ομοίως με $\theta_\pm$. Όπως σημειώθηκε νωρίτερα, αυτό πράγματι συμβαίνει αφού οι συνηστώσες των τανυστών $S_{aa_1\dots a_{m-1};b_1\dots b_n}$ και $S_{a_1\dots a_m;bb_1\dots b_{n-1}}$ μηδενίζονται αν a_i και b_j είναι δείκτες Cartan ενώ τα a ή τα ορ b δεν είναι.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε την έκφραση για τη δράση (6.3.2) με την κλασική λύση (6.3.10). Σε γραμμική τάξη στο s λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{2\pi}\Big(& k_1\theta_+^{(1)}\theta_-^{(1)} + k_2\theta_+^{(2)}\theta_-^{(2)} + 2k\lambda\theta_+^{(1)}\theta_-^{(2)} \\ & + 2ks\,(-1)^n\lambda_0^{m-n}\lambda^{m+n}\theta_{+-}^{(m,n)}\Big) + \mathcal{O}(s^2)\ ,\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε έναν ορισμό παρόμοιο με τον (6.2.17), δηλαδή

$$\theta_{+-}^{(m,n)} = S_{a_1\dots a_m;b_1\dots b_n}\theta_+^{(1)a_1}\dots\theta_+^{(1)a_m}\theta^{(2)b_1}\dots\theta_-^{(2)b_n}\ . \tag{6.3.12}$$

Οι γραμικές διακυμάσεις της (6.3.7) γύρω από τις κλασικές λύσεις με τη χρήση της (6.3.7) δίνουν

$$\begin{aligned}&\Big(-\lambda_0^{-1}\lambda\delta_{ab}\partial_- - (\tilde{A}_-^{(0)})_{ab} + m(m-1)s\lambda\big(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m'',n)}\big)_{ab}\partial_+ - ims\lambda f_{abc}\big(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)}\big)_c \\ &\qquad + m(m-1)s\lambda(\tilde{A}_+^{(0)})_{ac}\big(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m'',n)}\big)_{cb}\Big)\delta A_+^b \\ &+\Big(\delta_{ab}\partial_+ + (\tilde{A}_+^{(0)})_{ab} + mns\lambda\big(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')}\big)_{ab}\partial_+ + mns\lambda(\tilde{A}_+^{(0)})_{ac}\big(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')}\big)_{cb}\Big)\delta A_-^b = 0\ .\end{aligned} \tag{6.3.13}$$

Ομοίως η δεύτερη εξίσωση στην (6.3.7) δίνει

$$\begin{aligned}&\Big(-\lambda_0\lambda\delta_{ab}\partial_+ - (\tilde{A}_+^{(0)})_{ab} + n(n-1)s\lambda\big(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n'')}\big)_{ab}\partial_- - ins\lambda f_{abc}\big(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')}\big)_c \\ &\qquad + n(n-1)s\lambda(\tilde{A}_-^{(0)})_{ac}\big(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n'')}\big)_{cb}\Big)\delta A_-^b \\ &+\Big(\delta_{ab}\partial_- + (\tilde{A}_-^{(0)})_{ab} + mns\lambda\big(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')}\big)_{ba}\partial_- + mns\lambda(\tilde{A}_-^{(0)})_{ac}\big(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')}\big)_{bc}\Big)\delta A_+^b = 0\ ,\end{aligned} \tag{6.3.14}$$

όπου οι ποσότητες με δύο τόνους ορίζονται στην (6.2.20). Αυτές οι διακυμάνσεις μπορούν να ξαναγραφούν στη μορφή (6.1.17) με $\hat{D} = \hat{C} + \hat{F}$. Στο χώρο των ορμών έχουμε

$$\hat{C} = \hat{C}_0 + s\,\hat{C}_1\ , \qquad \hat{F} = \hat{F}_0 + s\,\hat{F}_1\ , \tag{6.3.15}$$

με τους

$$\hat{C}_0 = \begin{pmatrix} -\lambda\lambda_0 p_+ & p_- \\ p_+ & -\lambda\lambda_0^{-1} p_- \end{pmatrix} , \qquad \hat{F}_0 = \begin{pmatrix} -\tilde{A}_+^{(0)} & \tilde{A}_-^{(0)} \\ \tilde{A}_+^{(0)} & -\tilde{A}_-^{(0)} \end{pmatrix} . \tag{6.3.16}$$

και

$$\hat{C}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda\, E\, p_- & \lambda\, B\, p_- \\ \lambda\, \tilde{B}\, p_+ & -\lambda\, \tilde{E}\, p_+ \end{pmatrix} , \qquad \hat{F}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda\, F & \lambda\, C \\ \lambda\, \tilde{C} & -\lambda\, \tilde{F} \end{pmatrix} . \tag{6.3.17}$$

Όλοι οι πίνακες που εμφανίζονται στην (6.3.16) και στην (6.3.17) ορίζονται όπως στην (6.2.24). ,Μπορεί κανείς απ′ ευθείας να υπολογίσει το $\mathrm{Tr}(\hat{C}^{-1}\hat{F})^2$ στην (6.1.21). Απλώς κρατάμε τους όρους που δίνουν μη μηδενικές συνεισφορές κάτω από τη γωνιακή ολοκλήρωση η οποία θα συνεισφέρει έναν επιπλεόν παράγοντα 2π. Υπολογίζοντας καθένα από τα ίχνη της (6.2.25) ξεχωριστά, προκύπτει

$$\mathrm{Tr}(\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0)^2 = -\frac{8c_G}{r^2}\frac{\lambda(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_0^{-1})}{(1-\lambda^2)^2}\Big(\lambda\theta_+^{(1)}\theta_-^{(2)} + (m+n)s\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n)}\Big) , \tag{6.3.18}$$

και

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_1) = \frac{4\lambda}{r^2(1-\lambda^2)^2}\Big(&(1-\lambda_0^{-1}\lambda)\mathrm{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)}F) + (1-\lambda_0\lambda)\mathrm{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{F}) \\ &+ \lambda(\lambda-\lambda_0^{-1})\mathrm{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)}C) + \lambda(\lambda-\lambda_0)\mathrm{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{C})\Big) \end{aligned} \tag{6.3.19}$$

και

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}((\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0)^2\hat{C}_0^{-1}\hat{C}_1) = &\frac{4\lambda}{r^2(1-\lambda^2)^3}\Big((\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_0^{-1})\mathrm{Tr}\big(\tilde{B}\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)} \\ &+ \tilde{E}\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)} + E\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)} + B\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)}\big) \\ &- \lambda\lambda_0(\lambda-\lambda_0^{-1})^2\mathrm{Tr}(B\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)}) - \lambda\lambda_0^{-1}(\lambda-\lambda_0)^2\mathrm{Tr}(\tilde{B}\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)})\Big) . \end{aligned} \tag{6.3.20}$$

Τα διάφορα ίχνη που παρουσιάζονται στην (6.2.27) και στην (6.2.28) θα πρέπει να υπολογιστούν ξεχωριστά το κάθε ένα ανάλογα με την περίπτωση, διότι το αποτέλεσμά τους εξαρτάται από τη συγκεκριμένη μορφή του επιλεγόμενου τελεστή.

Για μικρές τιμές της παραμέτρου s η δράση του σ-προτύπου (6.3.2) γίνεται

$$S = \sum_{i=1}^{2} S_{k_i}(g_i) + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma\Big(\lambda J_{1+}^a J_{2-}^a + +\tilde{\lambda}\mathcal{O}^{(m,n)}\Big) + \cdots \tag{6.3.21}$$

όπου ο τελεστής προσετέθη στην (6.3.1) και η ενεργός ζεύξη όπως στην (6.2.30).

Τελικά, λαμβάνοντας το όριο $\tilde{\lambda} \to 0$ θα βρούμε την ανώμαλη διάσταση του $\mathcal{O}^{(m,n)}$. Αυτό θα γίνει μέσω της (6.1.31) όπου το $\beta^{\tilde{\lambda}}$ τώρα θα πρέπει να αντιστοιχεί σε αυτό τον τελεστή και η συνηστώσα της μετρικής

$$g^{(0)}_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}} \sim \frac{1}{(1-\lambda^2)^{m+n}} \ , \tag{6.3.22}$$

που μπορεί να διαβαστεί από την (Γ΄.1.8). Μένει να υπολογίσουμε $\beta^{\tilde{\lambda}}$ και να υπολογίσουμε τις ανώμαλες διαστάσεις και αυτό παρουσιάζουμε στην επόμενη ενότητα.

6.3.2 Σημαντικά παραδείγματα

Παρακάτω υπολογίζουμε τις ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών της ενότητας 6.2.

6.3.2.1 Ολομορφικοί τελεστές $\mathcal{O}^{(m,0)}$

Ο τελεστής του οποίου θέλουμε την ανώμαλη διάσταση είναι

$$\mathcal{O}^{(m,0)} = d^{(m)}_{a_1\ldots a_m} J^{a_1}_{1+} \ldots J^{a_m}_{1+} \ , \tag{6.3.23}$$

και είναι ίδιος με την (6.2.32). Σε αυτή την περίπτωση μέσω της μεθόδου που εφαρμόζουμε έχουμε συγκεκριμένες απλοποιήσεις. Αφού $n=0$, οι περισσότεροι των πινάκων της (6.2.24) μηδενίζονται. Τότε, έχουμε για τα ίχνη στην (6.3.19) και (6.3.20), τις ίδιες σχέσεις όπως και στην (6.2.33). Αθροίζοντας την (6.1.21) με την (6.3.11) η οποία υπολογίστηκε στο $n=0$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{\text{eff}} =& -\frac{k_1}{2\pi}\theta^{(1)}_+\theta^{(1)}_- - \frac{k_2}{2\pi}\theta^{(2)}_+\theta^{(2)}_- - \frac{k}{\pi}\lambda\theta^{(1)}_+\theta^{(2)}_- - \frac{k}{\pi}\tilde{\lambda}\lambda_0^m\theta^{(m,0)}_{+-} \\
& - \frac{\ln\mu^2}{2\pi}\frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}\Bigg(c_G(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_0^{-1})\theta^{(1)}_+\theta^{(2)}_- \\
& + m\tilde{\lambda}\lambda_0^m\frac{\lambda-\lambda_0^{-1}}{1-\lambda^2}\Big(c_G(1-\lambda^2)+\Delta_m(m-1)(1-\lambda_0\lambda)\Big)\theta^{(m,0)}_{+-}\Bigg) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2) \ ,
\end{aligned} \tag{6.3.24}$$

όπου όπως και νωρίτερα $\tilde{\lambda} = s\lambda^m$ είναι η ενεργός ζεύξη. Απαιτώντας $\partial_{\ln\mu^2}\mathcal{L}_{\text{eff}} = 0$ λαμβάνουμε στην κύρια συνεισφορά στο $1/k$ την έκφραση για το β^λ για την περίπτωση των άνισων επιπέδων [46]

$$\beta^\lambda = -\frac{c_G}{2k}\frac{\lambda^2(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_0^{-1})}{(1-\lambda^2)^2}, \tag{6.3.25}$$

καθώς επίσης

$$\beta^{\tilde{\lambda}} = -\frac{m\lambda^2(\lambda-\lambda_0^{-1})\Big(c_G(1-\lambda^2)+(m-1)\Delta_m(1-\lambda\lambda_0)\Big)\tilde{\lambda}}{2k(1-\lambda^2)^3} + \mathcal{O}(\hat{\lambda}^2) \ . \tag{6.3.26}$$

Χρησιμοποιώντας την (6.1.31) με τη μετρική να εισάγεται από την (6.3.22) πάλι με $n = 0$ βρίσκουμε ότι

$$\gamma_{\mathcal{O}^{(m,0)}} = \Big(c_G + (m-1)\Delta_m\Big)\frac{m\lambda^2(1-\lambda\lambda_0)^2}{k_1(1-\lambda^2)^3} \ . \tag{6.3.27}$$

Από την (6.3.28) είναι άμεση η παρατήρηση πως για $m \geqslant 2$ η ανώμαλη διάσταση των ολομορφικών τελεστών μηδενίζεται λόγω της ταυτότητας (Γ΄.2.11),

$$\gamma_{\mathcal{O}_\lambda^{(m,0)}} = 0 \ , \tag{6.3.28}$$

όπως και στην περίπτωση ίσων επιπέδων στην (6.3.28). Παρ όλα αυτά, για την ανώμαλη διάσταση ενός απλά ολομορφικού ρεύματος δηλαδή όταν $m = 1$, η ταυτότητα δεν ισχύει και η (6.3.28) δίνει

$$\gamma_{\mathcal{O}_\lambda^{(1,0)}} = \frac{c_G\lambda^2(\lambda-\lambda_0^{-1})^2}{k_2(1-\lambda^2)^3} \ , \tag{6.3.29}$$

που βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με την έκφραση για το ολομορφικό ρεύμα που υπολογίστηκε στην (2.9) της [22].

6.3.2.2 Ο μικτός τελεστής $\mathcal{O}^{(2,1)}$

Θέλουμε την ανώμαλη διάσταση του τελεστή

$$\mathcal{O}^{(2,1)} = d_{abc}J^a_{1+}J^b_{1+}J^c_{2-} \ , \tag{6.3.30}$$

όπου d_{abc} είναι ο πλήρως συμμετρικός τελεστής της $SU(N)$ βαθμού τρία. Τότε έχουμε για τα ίχνη στις (6.2.27) και (6.2.28)

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)}F) &= \mathrm{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{F}) = \mathrm{Tr}(\tilde{B}\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)}) = -\mathrm{Tr}(\tilde{E}\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)}) \\ &= \mathrm{Tr}(B\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)}) = \mathrm{Tr}(\tilde{B}\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)}) = \mathrm{Tr}(B\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)}) \\ &= \mathrm{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)}C) = \mathrm{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{C}) \\ &= -c_G\lambda_0\lambda^3\theta_{+-}^{(2,1)} + \mathcal{O}(s) \ , \end{aligned} \tag{6.3.31}$$

όπου κρατάμε μόνο το κυρίαρχο αποτέλεσμα σε s αφού αυτοί οι όροι πολλαπλασιάζονται με s στην (6.2.25) (μέσω της (6.3.19) και (6.3.20)). Τότε η (6.1.21) με (6.3.11) υπολογισμένη για $m=2$ και $n=1$ είναι

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{\text{eff}} = &-\frac{1}{2\pi}\left(k_1\theta_+^{(1)}\theta_-^{(1)} + k_2\theta_+^{(2)}\theta_-^{(2)} + 2k\lambda\theta_+^{(1)}\theta_-^{(2)} - 2k\tilde{\lambda}\lambda_0\theta_{+-}^{(2,1)}\right)\\
&-\frac{\ln\mu^2}{2\pi}\frac{c_G\lambda}{(1-\lambda^2)^2}\left(\lambda(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_0^{-1})\theta_+^{(1)}\theta_-^{(2)}\right.\\
&\left.-\tilde{\lambda}\frac{2\lambda_0-3\lambda-\lambda_0\lambda(3\lambda_0-5\lambda+\lambda^3)}{1-\lambda^2}\theta_{+-}^{(2,1)}\right)+\mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2)\ ,
\end{aligned}
\tag{6.3.32}
$$

όπου η ενεργός δράση είναι $\tilde{\lambda} = s\lambda^3$. Απαιτώντας $\partial_{\ln\mu^2}\mathcal{L}_{\text{eff}} = 0$ λαμβάνουμε την κύρια συνεισφορά σε ανάπτυγμα $1/k$ την έκφραση για β^λ στην (6.3.25) και

$$
\beta^{\tilde{\lambda}} = -\frac{c_G}{2k}\frac{\tilde{\lambda}\lambda\big(2-3\lambda\lambda_0^{-1}+\lambda(5\lambda-\lambda^3-3\lambda_0)\big)}{(1-\lambda^2)^3}+\mathcal{O}(\hat{\lambda}^2)\ . \tag{6.3.33}
$$

Χρησιμοποιώντας την (6.1.31) με τη μετρική να δίνεται από την (6.3.22) ξανά με $m=2$ και $n=1$ βρίσκουμε

$$
\gamma_{\mathcal{O}^{(2,1)}} = c_G\lambda\frac{3(\lambda_0+\lambda_0^{-1})\lambda(1+\lambda^2)-2(1+4\lambda^2+\lambda^4)}{k(1-\lambda^2)^3}\ , \tag{6.3.34}
$$

που είναι η ίδια με την ανώμαλη διάσταση του τελεστή $J_{1+}^a J_{2-}^a$ που μπορεί να βρεθεί στην (2.16) της [22].

Έτσι καταλήγουμε πως όπως στην περίπτωση ίσων επιπέδων οι ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών που δομούνται αποκλειστικά από ολομορφικά ή αντι-ολομορφικά ρεύματα μηδενίζονται σε τάξη $1/k$.

6.4 λ-παραμορφώσεις αύτο- και αμοιβαίου τύπου

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε λ-παραμορφωμένα πρότυπα που κατασκευάστηκαν στην [47] και περιγράφουν δύο WZW πρότυπα με αλληλεπιδράσεις τύπου αυτο-αλληλεπιδράσεων και αμοιβαίων αλληλεπιδράσεων. Σε γραμμικοποιημένη μορφή η δράση είναι

$$
\begin{aligned}
S_{k_1,k_2,\lambda,\tilde{\lambda}}(g_1,g_2) &= S_{k_1}(g_1)+S_{k_2}(g_2)\\
&+\frac{k_1}{\pi}\lambda\int d^2\sigma J_{1+}J_{1-}+\frac{k_2}{\pi}\tilde{\lambda}\int d^2\sigma J_{2+}J_{1-}+\mathcal{O}(\lambda\tilde{\lambda})\ .
\end{aligned}
\tag{6.4.1}
$$

Αρκετές όψεις αυτού του προτύπου, μπορούν να βρεθούν στην [47]. Θα υπολογίσουμε τη μετρική Zamolodchikov καθώς και τις ανώμαλες διαστάσεις των σύνθετων τελεστών $J_{1+}J_{2-}$ και $J_{2+}J_{1-}$ που μας απομακρύνουνουν από το σύμμορφο σημείο. Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δείξει τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να υπολογιστούν ανώμαλες διαστάσεις ρευμάτων ίσων ή άνισων επιπέδων και ουσιαστικά η μέθοδος που θα παρουσιαστεί αποτελεί μία εναλλακτική των παραπάνω μεθόδων. Η $\beta-$συνάρτηση για αυτό το πρότυπο έχει υπολογιστεί στην (4.19) και (4.20) της [47] και είναι

$$\begin{aligned}\beta_\lambda(\lambda,\tilde\lambda) &= -\frac{c_G\lambda(1-\lambda)}{2\Delta^2}\Big(k_1\lambda(1-\lambda)-k_2\tilde\lambda^2(1+\lambda-\tilde\lambda)\Big)\ ,\\ \beta_{\tilde\lambda}(\lambda,\tilde\lambda) &= -\frac{c_G\tilde\lambda(1-\tilde\lambda)}{2\Delta^2}\Big(k_1(1-\lambda)\Big(\tilde\lambda-\lambda(\lambda-\tilde\lambda)\Big)-k_2\tilde\lambda^2\Big)\ .\end{aligned}\tag{6.4.2}$$

όπου

$$\Delta = k_1(1-\lambda^2)-k_2\tilde\lambda^2\ .\tag{6.4.3}$$

Όπως επισημάνθηκε στο τέλος της ενότητας 4.1 της [47] είναι βολικό να ξαναγράψουμε την (6.4.1) μετα από επαναορισμό ώστε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Εφαρμόζοντας μία κλιμάκωση $J_{i\pm}\to J_{i\pm}/\sqrt{k_i}$, $i=1,2$, η (6.4.1) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}&S_{k_1,k_2,\Lambda} = S_{k_1}(g_1)+S_{k_2}(g_2)+\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\mathcal{J}_{+A}\Lambda_{AB}\mathcal{J}_{-B}\ ,\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda\mathbb{1} & 0\\ \lambda_0^{-1}\tilde\lambda\mathbb{1} & 0\end{pmatrix}\ ,\\ &\mathcal{J}^A_\pm=\Big(J^a_{1\pm},J^{a'}_{2\pm}\Big)\ ,\qquad \lambda_0=\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\ ,\end{aligned}\tag{6.4.4}$$

όπου και οι δύο δείκτες είναι δείκτες ομάδας $a,a'=1,2,\dots,\dim G$. Να σημειωθεί εδώ ότι ο πίνακας ζεύξης Λ δεν είναι αντιστρέψιμος . Παρ όλα αυτά η μη αντιστρεψιμότητα δεν επιρεάζει τους υπολογισμούς μας διότι δεν την χρειαζόμαστε ουσιαστικά .

6.4.1 Η μετρική Zamolochikov

Παρακάτω υπολογίζουμε τη μετρική Zamolochikov για την (6.4.1). Σε σχέση με πριν, ο υπολογισμός θα γίνει για πεπερασμένες τιμές των ζεύξεων. Η γενική μορφή της μετρικής Zamolochikov είναι [51]

$$ds^2 = G_{AB|CD}d\Lambda_{AB}d\Lambda_{CD}\ ,\quad G_{AB|CD}=\frac{\dim G}{2}(\tilde g^{-1})_{AC}(g^{-1})_{BD}\ ,\tag{6.4.5}$$

όπου

$$g_{AB}=(\mathbb{1}-\Lambda^T\Lambda)_{AB}\ ,\qquad \tilde g_{AB}=(\mathbb{1}-\Lambda\Lambda^T)_{AB}\ .\tag{6.4.6}$$

Με τον πίνακα Λ της (6.4.4) έχουμε

$$
\begin{aligned}
g &= \begin{pmatrix} k_1^{-1}\Delta\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} , \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} k_1\Delta^{-1}\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} , \\
\tilde{g} &= \begin{pmatrix} (1-\lambda^2)\mathbb{1} & -\lambda_0^{-1}\lambda\tilde{\lambda}\mathbb{1} \\ -\lambda_0^{-1}\lambda\tilde{\lambda}\mathbb{1} & (1-\lambda_0^{-2}\tilde{\lambda}^2)\mathbb{1} \end{pmatrix} , \\
\tilde{g}^{-1} &= \frac{k_1}{\Delta}\begin{pmatrix} (1-\lambda_0^{-2}\tilde{\lambda}^2)\mathbb{1} & \lambda_0^{-1}\lambda\tilde{\lambda}\mathbb{1} \\ \lambda_0^{-1}\lambda\tilde{\lambda}\mathbb{1} & (1-\lambda^2)\mathbb{1} \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{6.4.7}
$$

Τότε η ακριβής μορφή της μετρικής στο χώρο των σταθερών ζεύξης λ, $\tilde{\lambda}$ είναι

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= G_{11|11}d\Lambda_{11}^2 + G_{21|21}d\Lambda_{21}^2 + 2G_{11|21}d\Lambda_{11}d\Lambda_{21} \\
&= \frac{k_1\dim G}{2\Delta^2}\Big((k_1 - k_2\tilde{\lambda}^2)d\lambda^2 + k_2(1-\lambda^2)\lambda_0^{-2}d\tilde{\lambda}^2 + 2k_2\lambda\tilde{\lambda}\, d\lambda d\tilde{\lambda}\Big) .
\end{aligned}
\tag{6.4.8}
$$

Ο παραπάνω χώρος είναι AdS_2 αφού το αντίστοιχο βαθμωτό Ricci είναι $R = -4/\dim G$. Επιπρόσθετα μπορεί να δειχθεί ότι η (6.4.8) είναι αναλλοίωτη κάτω από τους δυικούς μετασχηματισμούς

$$
k_1 \to -k_1 , \qquad \lambda \to \frac{1}{\lambda} , \qquad \tilde{\lambda} \to \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} . \tag{6.4.9}
$$

όπως στην [47] για την πλήρη ενεργό δράση που αντιστοιχεί στην (6.4.1), όπως είναι και οι β-συναρτήσεις (6.1.23).

6.4.2 Ανώμαλες διαστάσεις σύνθετων τελεστών

Για να υπολογίσουμε τις ανώμαλες διαστάσεις διγραμμικών ρευματικών τελεστών, θα ακολουθήσουμε την [51]. τα σύμβολα Cristoffel είναι

$$
\Gamma^{P_1P_2}_{M_1M_2|N_1N_2} = \delta^{P_1}_{N_1}\delta^{P_2}_{M_2}(\Lambda g^{-1})_{M_1N_2} + \delta^{P_1}_{M_1}\delta^{P_2}_{N_2}(\Lambda g^{-1})_{N_1M_2} . \tag{6.4.10}
$$

Τότε ο πίνακας ανώμαλων διαστάσεων είναι

$$
\gamma_{AB}{}^{CD} = \nabla_{AB}\beta^{CD} + \nabla^{CD}\beta_{AB} = \nabla_{AB}\beta^{CD} + G_{AB|MN}G^{CD|PQ}\nabla_{PQ}\beta^{MN} \tag{6.4.11}
$$

με

$$
\nabla_{AB}\beta^{CD} = \partial_{AB}\beta^{CD} + \Gamma^{CD}_{AB|MN}\beta^{MN} , \qquad \partial_{AB} = \frac{\partial}{\partial\Lambda_{AB}} . \tag{6.4.12}
$$

Προκύπτει ότι οι μη-μηδενικές συνηστώσες του πίνακα ανώμαλων διαστάσεων είναι $\gamma_{ab}{}^{cd}$, $\gamma_{ab}{}^{c'd}$, $\gamma_{a'b}{}^{cd}$, $\gamma_{a'b}{}^{c'd}$, $\gamma_{ab'}{}^{cd'}$, $\gamma_{ab'}{}^{c'd'}$, $\gamma_{a'b'}{}^{cd'}$ και η λεπτομερής μορφή τους δίνεται στο παράρτημα Γ′.4, ενώ

$$\gamma_{ab}{}^{cd'} = \gamma_{ab}{}^{c'd'} = \gamma_{a'b}{}^{cd'} = \gamma_{a'b}{}^{c'd'} = \gamma_{ab'}{}^{cd} = \gamma_{ab'}{}^{c'd} = \gamma_{a'b'}{}^{cd} = \gamma_{a'b'}{}^{c'd} = 0 \ . \tag{6.4.13}$$

Λόγω της μορφής του πίνακα αλληλεπίδρασης Λ_{AB}, υπολογίζουμε τις ανώμαλες διαστάσεις παίρνωντας το ίχνος των δεικτών για κάθε ισοτροπικό μπλοκ του Λ. Μετά τα παραπάνω καταλήγουμε στην

$$\gamma_{AB}{}^{cd}\delta_{cd} = \begin{pmatrix} \gamma_1\delta_{ab} & 0 \\ \gamma_2\delta_{a'b} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_{AB}{}^{c'd}\delta_{c'd} = \begin{pmatrix} \tilde\gamma_1\delta_{ab} & 0 \\ \tilde\gamma_2\delta_{a'b} & 0 \end{pmatrix} , \tag{6.4.14}$$

όπου

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{c_G}{\Delta^3}\Big(2k_1^2\ f_1(\lambda) + k_2^2\ f_2(\lambda,\tilde\lambda) - k_1k_2\ f_3(\lambda,\tilde\lambda)\Big) , \\ \gamma_2 &= \frac{c_G(1-\lambda)\lambda\tilde\lambda}{\Delta^4}\left(\sqrt{k_1^5k_2}\ f_4(\lambda,\tilde\lambda) - \sqrt{k_1k_2^5}\ f_5(\lambda,\tilde\lambda) + \sqrt{k_1^3k_2^3}\ f_6(\lambda,\tilde\lambda)\right) \end{aligned} \tag{6.4.15}$$

και

$$\begin{aligned} \tilde\gamma_1 &= \frac{c_G(1-\tilde\lambda)\lambda\tilde\lambda}{\Delta^4}\left(\sqrt{k_1^5k_2}\ f_4(\lambda,\tilde\lambda) - \sqrt{k_1k_2^5}\ f_5(\lambda,\tilde\lambda) + \sqrt{k_1^3k_2^3}\ f_6(\lambda,\tilde\lambda)\right) , \\ \tilde\gamma_2 &= \frac{c_G}{\Delta^3}\Big(k_1^2\ f_7(\lambda,\tilde\lambda) + k_2^2\ f_8(\tilde\lambda) + k_1k_2\ f_9(\lambda,\tilde\lambda)\Big) \end{aligned} \tag{6.4.16}$$

με

$$\begin{aligned} & f_1(\lambda) = (1-\lambda)^2\lambda\big(1-(1-\lambda)\lambda\big) \ , \quad f_2(\lambda,\tilde\lambda) = \lambda\tilde\lambda^4(2\tilde\lambda - 3\lambda) \ , \\ & f_3(\lambda,\tilde\lambda) = (1-\lambda)\tilde\lambda^2\big(3\lambda^3 + (1-\tilde\lambda)^2 - 5\lambda^2\tilde\lambda + \lambda(3+\tilde\lambda^2)\big) \ , \\ & f_4(\lambda,\tilde\lambda) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)(2-\lambda+2\lambda^2-3\tilde\lambda(1+\lambda)) \ , \\ & f_5(\lambda,\tilde\lambda) = \tilde\lambda^4(3+3\lambda-2\tilde\lambda) \ , \quad f_6(\lambda,\tilde\lambda) = \tilde\lambda^2(1-\lambda)\big(1+\tilde\lambda+\lambda(7+\lambda+\tilde\lambda)\big) \ , \\ & f_7(\lambda,\tilde\lambda) = (1-\lambda)^2\big(\lambda^2 - 2\tilde\lambda(1+\lambda)(1+\lambda+\lambda^2) + 3\tilde\lambda^2(1+\lambda)^2\big) \ , \\ & f_8(\tilde\lambda) = \tilde\lambda^4(3-2\tilde\lambda) \ , \\ & f_9(\lambda,\tilde\lambda) = \tilde\lambda^2(1-\lambda)\big(3+\lambda(3+\lambda(6+\lambda)) - 8\tilde\lambda - \lambda\tilde\lambda(8+5\lambda) + 3\tilde\lambda^2(1+\lambda)\big) \ . \end{aligned} \tag{6.4.17}$$

Έτσι η ανώμαλη διάσταση των $J_{1+}J_{1-}$ και $J_{2+}J_{1-}$ είναι

$$\gamma_{J_{1+}J_{1-}} = \gamma_1 + \tilde\gamma_1, \qquad \gamma_{J_{2+}J_{1-}} = \gamma_2 + \tilde\gamma_2 \ . \tag{6.4.18}$$

6.4.2.1 Τα δύο όρια και οι ανώμαλες διαστάσεις

Στο όριο όπου $\tilde{\lambda} = 0$ μόνο οι αυτοαλληλεπιδράσεις $J_{1+}J_{1-}$ επιβιώνουν. Τότε έχουμε

$$\gamma_{J_{1+}J_{1-}} = -\frac{2c_G}{k_1}\lambda\frac{1-\lambda(1-\lambda)}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3}, \qquad \gamma_{J_{2+}J_{1-}} = \frac{c_G}{k_1}\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3}\ . \tag{6.4.19}$$

Να σημειωθεί εδώ ότι ο όρος $\gamma_{J_{1+}J_{1-}}$ συμπίπτει με την ανώμαλη διάσταση του $J_{1+}J_{1-}$ για το απλά παραμορφωμένο πρότυπο [19], ενώ η $\gamma_{J_{2+}J_{1-}}$ είναι η ανώμαλη διάσταση του J_{1-} (και J_{1+} λόγω ισοτροπίας) για το ίδιο πρότυπο. Αυτό πράγματι αναμένει κανείς σε αυτό το όριο διότι εκεί το J_{2+} είναι μη αλληλεπιδρών μέσω της οποίας $\gamma_{J_{2+}J_{1-}} = \gamma_{J_{1-}} = \gamma_{J_{1+}}$. Στο όριο όπου $\lambda = 0$, μόνο η αυτο-αλληλεπίδραση $J_{2+}J_{1-}$ επιβιώνει. Τότε, μετά την κλιμάκωση scaling $\tilde{\lambda} \to \lambda_0\tilde{\lambda}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \gamma_{J_{1+}J_{1-}} &= \frac{c_G}{k_1}\tilde{\lambda}^2\frac{(1-\lambda_0\tilde{\lambda})^2}{(1-\tilde{\lambda}^2)^3}\ , \\ \gamma_{J_{2+}J_{1-}} &= \frac{c_G}{\sqrt{k_1k_2}}\tilde{\lambda}\frac{3(\lambda_0+\lambda_0^{-1})\tilde{\lambda}(1+\tilde{\lambda}^2)-2(1+4\tilde{\lambda}^2+\tilde{\lambda}^4)}{(1-\tilde{\lambda}^2)^3}\ . \end{aligned} \tag{6.4.20}$$

Όπως και πριν η ανώμαλη διάσταση, $\gamma_{J_{1+}J_{1-}}$ συμπίπτει με την ανώμαλη διάσταση του J_{1-} (αφού το J_{1+} είναι μη αλληλεπιδρών), καθώς η $\gamma_{J_{2+}J_{1-}}$ είναι η ανώμαλη διάσταση του σύνθετου τελεστή που συζητήθηκε στην [22].

6.5 Εξαγωγή αποτελεσμάτων με τη χρήση θεωρίας διαταραχών

Σε αυτή την ενότητα προχωρουμε με την εξακρίβωση των προηγούμενων αποτελεσμάτων μέσω της χρήσης της θεωρίας διαταραχών. Από την εξίσωση Callan-Symanzik προκύπτει πως σε τάξη $\frac{1}{k}$ η συνάρτηση δύο σημείων ενός τελεστή έχει τη μορφή

$$G_{ab}(x_1,x_2) = G_0(k,\lambda)\frac{\delta_{ab}}{x_{12}^{2\Delta}\bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}}}\Big(1+\gamma\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}+\dots\Big)\ , \tag{6.5.1}$$

όπου τα $(\Delta,\bar{\Delta})$ είναι οι ολομορφικές και αντιολομορφικές διαστάσεις του τελεστή στο σύμμορφο σημείο και $(\gamma,\bar{\gamma})$ είναι οι αντίστοιχες ανώμαλες διαστάσεις. Η συνάρτηση $G_0(k,\lambda)$ είναι παράγων κανονικοποίησης. Οι δείκτες a,b παίρνουν τιμές σε μία γενική μη-αναγώγιμη αναπαράσταση της ομάδας G. Στους παρακάτω διαταρακτικούς υπολογισμούς, οι ανώμαλες διαστάσεις προκύπτουν από ολοκληρώματα που εμφανίζουν όρους της μορφής $\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}$, όπου το ϵ αποτελεί ένα κατώφλι σε κοντινές αποστάσεις. Απο αυτό προκύπτει επίσης ότι $\bar{\gamma} = \gamma$. Από την εξίσωση (6.5.1) μπορούμε να διαβάσουμε τις ανώμαλες διαστάσεις. Να σημειωθεί ότι τα Δ και $\bar{\Delta}$ μπορούν να εξαρτώνται από το k, ενώ το γ και από τα δύο k και λ.

Η συνάρτηση συσχέτισης n-σημείων για ένα γενικό σύνθετο πεδίο $\Phi(x)$ δίνεται από

$$\langle \Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\rangle = \frac{1}{Z}\int [D\Phi]\ \Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n) e^{-S_k-\frac{\lambda}{\pi}\int d^2z J^a \bar{J}^a} . \tag{6.5.2}$$

Μας απασχολούν οι ανώμαλες διαστάσεις σύνθετων τελεστών-ρευμάτων . Αυτό σημαίνει πως θα χρειαστούμε το OPE για δύο ολομορφικά ρεύματα, που δίνεται από την

$$J^a(z_1)J^b(z_2) = \frac{\delta^{ab}}{z_{12}^2} + \frac{i f^{abc}}{\sqrt{k}}\frac{J^c(z_2)}{z_{12}} , \tag{6.5.3}$$

απ΄ όπου λαμβάνουμε τις συναρτήσεις δύο και τριών σημείων (βλέπε κεφ. 3 όπου περιγράφεται αναλυτικά ο τρόπος υπολογισμού συναρτήσεων συσχέτισης)

$$\begin{aligned} \langle J^a(z_1)J^b(z_2)\rangle &= \frac{\delta^{ab}}{z_{12}^2} , \\ \langle J^a(z_1)J^b(z_2)J^c(z_3)\rangle &= \frac{i f^{abc}}{\sqrt{k}}\frac{1}{z_{12}z_{13}z_{23}} , \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

Υψηλώτερης τάξης συναρτήσεις συσχέτισης λαμβάνονται μέσω της χρήσης των ταυτοτήτων Ward. Επιπρόσθετα θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην κανονική διάταξη μη Αβελιανών ρευμάτων. Για δύο κανονικά διατεταγμένους τελεστές A και B χρησιμοποιούμε το συμβολισμο (AB). Για το κανονικά διατεταγμένο γινόμενο για παραπάνω από δύο τελεστές θα χρησιμοποιούμε την περιγραφή $(ABC) = (A(BC))$.

6.5.1 Χειραλικοί τελεστές $\mathcal{O}^{(m,0)}$ έως τάξη $\mathcal{O}(\lambda^2)$

Σε τάξη $\mathcal{O}(\lambda)$ η ανώμαλη διάσταση είναι μηδέν. Η πρώτη μη τετριμμένη συνεισφορά στην ανώμαλη διάσταση για τον $\mathcal{O}^{(m,0)}$ προκύπτει σε επίπεδο δύο βρόχων που δίνεται από

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}^{(m,0)}(x_1)\mathcal{O}^{(m,0)}(x_2)\rangle_{\lambda^2} &= \frac{\lambda^2}{2\pi^2}\int d^2z_1 d^2z_2 \langle \bar{J}^{c_1}(\bar{z}_1)\bar{J}^{c_2}(\bar{z}_2)\rangle \\ &\times d^{(m)}_{a_1\cdots a_m} d^{(m)}_{b_1\cdots b_m}\langle (J^{a_1}\dots J^{a_m})(x_1)\,(J^{b_1}\dots J^{b_m})(x_2)\, J^{c_1}(z_1)J^{c_2}(z_2)\rangle . \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

Να σημειωθεί ότι η εξάρτηση από το k-προκύπτει εξ ολοκλήρου από από την ολομορφική συνάρτηση συσχέτισης. Εφαρμόζοντας την ταυτότητα Ward για το ρεύμα στο σημείο z_1 και αφήνοντας για λίγο τους τανυστές d, το ολομορφικό μέρος δίνει

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{(z_1-x_1)^2}\langle \delta^{c_1(a_1}(J^{a_2}\cdots J^{a_m)})(x_1)\,(J^{b_1}\dots J^{b_m})(x_2)J^{c_2}(z_2)\rangle \\
&+\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{m}{(z_1-x_1)}\langle f^{ec_1(a_1}(J^{a_2}\dots J^{a_m)}J^e)(x_1)(J^{b_1}\dots J^{b_m})(x_2)J^{c_2}(z_2)\rangle \\
&+\frac{m}{(z_1-x_2)^2}\langle (J^{a_1}\dots J^{a_m})(x_1)\delta^{c_1(b_1}(J^{b_2}\dots J^{b_m)})(x_2)J^{c_2}(z_2)\rangle \\
&+\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{m}{(z_1-x_2)}\langle (J^{a_1}\dots J^{a_m})(x_1)f^{ec_1(b_1}(J^{b_2}\dots J^{b_m)}J^e)(x_2)J^{c_2}(z_2)\rangle \ ,
\end{aligned} \tag{6.5.6}$$

όπου το m προκύπτει από τις συμβάσεις συμμετροποίησης που περιγράφονται στο παράρτημα Γ′.2. Να σημειωθεί πως η συστολή με τα $J^{c_2}(z_2)$ όταν θεωρηθούν με την αντι-ολομορφική συνεισφορά, είτε μηδενίζεται, είτε προκύπτουν διαγράμματα φυσαλλίδας. Εκτελώντας το ολοκλήρωμα ως προς z_1 για τον πρώτο και τρίτο όρο, λαμβάνουμε όρους ανάλογους των δ-συναρτήσεων μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών σημείων τα οποία είναι μηδέν στο σχήμα επανακανονικοποίησης που χρησιμοποιούμε . Τελικώς εφαρμόζοντας την ταυτότητα Ward για το ρέυμα στο σημείο z_2 και επαναφέροντας τον τανυστή d, το ολομορφικό μέρος του τελεστή πολλαπλασιασμένο με $\delta^{c_1c_2}$ (που προκύπτει από το αντι-ολομορφικό μέρος της συνάρτησης συσχέτισης) λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{k}\frac{d^{(m)}_{a_1\dots a_m}d^{(m)}_{b_1\dots b_m}}{(z_2-x_1)(z_1-x_1)}\Big(f^{c_1a_1e}f^{c_1ef}\langle (J^fJ^{a_1}\dots J^{a_m})(x_1)\,(J^{b_1}\dots J^{b_m})(x_2)\rangle \\
&\qquad\qquad +(m-1)f^{c_1a_1e}f^{c_1a_2f}\langle (J^eJ^fJ^{a_3}\dots J^{a_m})(x_1)\,(J^{b_1}\dots J^{b_m})(x_2)\rangle\Big) \\
&+\frac{m^2}{k}\frac{d^{(m)}_{a_1\dots a_m}d^{(m)}_{b_1\dots b_m}f^{c_1a_1e}f^{c_1b_1f}}{(z_2-x_1)(z_1-x_2)}\langle (J^eJ^{a_2}\dots J^{a_m})(x_1)\,(J^fJ^{b_2}\dots J^{b_m})(x_2)\rangle \\
&\qquad\qquad +(x_1\leftrightarrow x_2)\ .
\end{aligned} \tag{6.5.7}$$

Έχοντας εξαντλήσει (saturate) τις δυνάμεις σε $1/k$ χρειαζόμαστε μόνο το Αβελιανό μέρος από τη συνάρτηση δύο σημείων που δίνεται από

$$\langle J^{a_1\dots a_m}(x_1)J^{b_1\dots b_m}(x_2)\rangle\big|_{\text{Abel}}=\frac{m!}{x_{12}^{2m}}\delta^{a_1}_{(b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\dots\delta^{a_m}_{b_m)}\ . \tag{6.5.8}$$

Οι παρενθέσεις στο δεξί μέλος της (6.5.8) δηλώνουν την πλήρη συμμετροποίηση των δεικτών $b_1,\dots,b_n$. Αντικαθιστώντας την (6.5.8) στην (6.5.7) και χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες (Γ′.2.11), (Γ′.2.12) υπολογίζουμε την ανώμαλη διάσταση του $\mathcal{O}^{(m,0)}$

$$\gamma_{\mathcal{O}^{(m,0)}}=0\ , \tag{6.5.9}$$

έως τάξη $\mathcal{O}(\lambda^2)$, σε πλήρη συμφωνία με την (6.2.36).

6.5.2 Χειραλικός τελεστής $\mathcal{O}^{(2,0)}$ έως τάξη $\mathcal{O}(\lambda^3)$

Συνεχίζουμε με το χειραλικό τελεστή $\mathcal{O}^{(2,0)}$ ο οποίος είναι ανάλογος του ολομορφικού τανυστή ΕΟ, $T(z)$ (επισημαίνουμε και τη συζήτηση στην (6.2.39)). Συνεπώς θεωρούμε αυτό τον τελεστή με OPE

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{c/2}{(z-w)^2} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{T'(w)}{z-w} \ , \\ J^a(z)T(w) &= \frac{J^a(w)}{(z-w)^2} \ . \end{aligned} \tag{6.5.10}$$

Μία ομάδα από συναρτήσεις τεσσάρων σημείων θα αποβούν χρήσιμες για τους υπολογισμούς μας. Δηλαδή θυμίζουμε ότι

$$\langle T(z_1)T(z_2)J^a(z_3)J^b(z_4)\rangle = \delta^{ab}\Big(\frac{c/2}{z_{34}^2 z_{12}^4} + \frac{1}{z_{12}^2 z_{13}^2 z_{24}^2} + \frac{1}{z_{12}^2 z_{14}^2 z_{23}^2}\Big) \ , \tag{6.5.11}$$

όπου $c = \dfrac{2k \dim G}{2k + c_G}$ είναι το κεντρικό φορτίο ενός WZW προτύπου και

$$\langle J^{a_1}(z_1)J^{a_2}(z_2)J^{a_3}(z_3)T(z_4)\rangle = \frac{f^{a_1a_2a_3}}{\sqrt{k}}\Big(\frac{1}{z_{12}z_{24}^2 z_{34}^2} - \frac{1}{z_{13}z_{24}^2 z_{34}^2} + \frac{1}{z_{23}z_{14}^2 z_{24}z_{34}}\Big) \ . \tag{6.5.12}$$

Η πρώτη μη-τετριμμένη συνεισφορά στην ανώμαλη διάσταση είναι σε τάξη $\mathcal{O}(\lambda^2)$. Αφού ο τανυστής ΕΟ είναι οιωνεί-πρωτεύον (quazi-primary) επαναλαμβάνουμε τους υπολογισμούς της προηγούμενης ενότητας για $m \geqslant 3$. Τότε

$$\langle T(x_1)T(x_2)\rangle_{\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{2\pi^2}\int d^2z_1 d^2z_2 \langle \bar{J}^a(\bar{z}_1)\bar{J}^b(\bar{z}_2)\rangle\langle T(x_1)T(x_2)J^{a_1}(z_1)J^{a_2}(z_2)\rangle \ . \tag{6.5.13}$$

Με χρήση (6.5.11) λαμβάνουμε για το συνεκτικό μέρος

$$\begin{aligned} \langle T(x_1)T(x_2)\rangle_{\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{2\pi^2}\frac{\dim G}{x_{12}^2}\int d^2z_1 d^2z_2 \Big(& \frac{1}{(z_1-x_1)^2(z_2-x_2)^2\bar{z}_{12}^2} \\ & + \frac{1}{(z_1-x_2)^2(z_2-x_1)^2\bar{z}_{12}^2}\Big) \ . \end{aligned} \tag{6.5.14}$$

Εκτελώντας την ολοκλήρωση ως προς z_2, εμφανίζεται μία συνάρτηση $\delta^{(2)}(z_2 - x_i)$ με $i = 1, 2$ η οποία είναι μηδέν όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα. Τότε καταλήγουμε στην

$$\langle T(x_1)T(x_2)\rangle_{\lambda^2} = 0 \ . \tag{6.5.15}$$

Συνεχίζουμε σε τάξη $\mathcal{O}(\lambda^3)$ με συνεισφορές

$$\begin{aligned}\langle T(x_1)T(x_2)\rangle_{\lambda^3} = -\frac{\lambda^3}{6\pi^3}\int d^2z_1d^2z_2d^2z_3\langle \bar{J}^{a_1}(\bar{z}_1)\bar{J}^{a_2}(\bar{z}_2)\bar{J}^{a_3}(\bar{z}_3)\rangle\times \\ \langle T(x_1)T(x_2)J^{a_1}(z_1)J^{a_2}(z_2)J^{a_3}(z_3)\rangle\ .\end{aligned} \tag{6.5.16}$$

Η αντι-ολομορφική συνάρτηση τρίων σημείων δίνεται από την (6.5.4). Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες Ward για τον τελεστή στο z_1, η ολομορφική συνάρτηση πέντε σημείων γίνεται

$$\begin{aligned}&\frac{if^{a_1a_2c}}{\sqrt{k}\ z_{12}}\langle J^c(z_2)J^{a_3}(z_3)T(x_1)T(x_2)\rangle + \frac{if^{a_1a_3c}}{\sqrt{k}}\frac{1}{z_{13}}\langle J^{a_2}(z_2)J^c(z_3)T(x_1)T(x_2)\rangle \\ &+\frac{1}{(z_1-x_1)^2}\langle J^{a_2}(z_2)J^{a_3}(z_3)J^{a_1}(x_1)T(x_2)\rangle + \frac{1}{(z_1-x_2)^2}\langle J^{a_2}(z_2)J^{a_3}(z_3)T(x_1)J^{a_1}(x_2)\rangle\end{aligned} \tag{6.5.17}$$

Κάνοντας χρήση της (6.5.11) και (6.5.12), η συνεισφορά σε επίπεδο τριών βρόχων στη συνάρτηση δύο σημείων του $\mathcal{O}^{(2,0)}(x)$ παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\langle T(x_1)T(x_2)\rangle_{\lambda^3} = \frac{c_G \dim G}{3\pi^3 x_{12}^2}\frac{\lambda^3}{k}\int \frac{d^2z_1d^2z_2d^2z_3}{\bar{z}_{12}\bar{z}_{13}\bar{z}_{23}}\times \\ \Big\{\frac{1}{z_{12}(z_2-x_1)^2(z_3-x_2)^2} - \frac{1}{z_{13}(z_2-x_1)^2(z_3-x_2)^2} \\ +\frac{1}{z_{23}(z_1-x_1)^2(z_3-x_2)^2} - \frac{1}{(z_1-x_1)^2(z_2-x_1)(z_3-x_2)^2} \\ +\frac{x_{12}}{(z_1-x_1)^2(z_2-x_2)^2(z_3-x_1)(z_3-x_2)}\Big\}\ ,\end{aligned} \tag{6.5.18}$$

όπου με τη χρήση της συμμετρίας κάτω από τη εναλλαγή $x_1 \leftrightarrow x_2$ το σύνολο ολοκληρωμάτων ανάγεται ουσιαστικά στο ήμισι. Ο λεπτομερής υπολογισμός της παραπάνω έκφρασης δίνεται στο Γ′.3 και καταλήγει στην

$$\langle T(x_1)T(x_2)\rangle_{\lambda^3} = 0\ . \tag{6.5.19}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, ο μηδενισμός της συνάρτησης σε επίπεδο δύο βροχων και η χρήση της συμμετρίας κλειδώνουν τις συνεισφορές σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών για τον $T \sim \mathcal{O}^{(2,0)}$ στο μηδέν.

6.5.3 Ο μικτός τελεστής $\mathcal{O}^{(2,1)}$ το $\mathcal{O}(\lambda^2)$

Η ανώμαλη διάσταση του $\mathcal{O}^{(2,1)}$ δίνεται από την (6.1.33). Για μικρές τιμές του λ γίνεται

$$\gamma_{\mathcal{O}^{(2,1)}} = -\frac{2c_G}{k}(\lambda - 3\lambda^2) + \mathcal{O}(\lambda^3)\ . \tag{6.5.20}$$

Θα το ελέγξουμε μέσω της θεωρίας διαταραχών . Για πληρότητα αναφέρουμε τα αντίσοιχα OPE που θα χρησιμοποιήσουμε

$$\begin{aligned} J^a(z)(J^bJ^c)(w) &= \frac{\delta_{ab}}{(z-w)^2}J^c(w) + \frac{\delta_{ac}}{(z-w)^2}J^b(w) + \frac{i}{\sqrt{k}}\frac{f_{abc}}{(z-w)^3} \\ &+ \frac{i}{\sqrt{k}}\frac{f_{abe}}{z-w}(J^eJ^c)(w) + \frac{i}{\sqrt{k}}\frac{f_{ace}}{z-w}(J^bJ^e)(w) - \frac{1}{k}\frac{f_{abe}f_{ecd}}{(z-w)^2}J^d(w) \ . \end{aligned} \tag{6.5.21}$$

Χρειαζόμαστε και τη δενδροειδή συνεισφορά προκειμένου να κανονικοποιήσουμε τα αποτελέσματά μας. Λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1)\mathcal{O}^{(2,1)}(x_2)\rangle_{\lambda^0} &= d_{a_1a_2c_1}d_{b_1b_2c_2}\langle (J^{a_1}J^{a_2})(x_1)(J^{b_1}J^{b_2})(x_2)\rangle\langle \bar{J}^{c_1}(\bar{x}_1)J^{c_2}(\bar{x}_2)\rangle \\ &= \frac{4(N^2-4)}{N}\frac{\dim G}{x_{12}^4\bar{x}_{12}^2} \ , \end{aligned} \tag{6.5.22}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις (6.5.8), (6.5.4) και (Γ′.2.6). Η συνεισφορά σε τάξη $\mathcal{O}(\lambda)$ δίνεται από την

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1)\mathcal{O}^{(2,1)}(x_2)\rangle_{\lambda} = -\frac{\lambda}{\pi}\, d_{a_1a_2c_1}d_{b_1b_2c_2} \int d^2z_1 \langle \bar{J}^{c_1}(\bar{x}_1)\bar{J}^{c_2}(\bar{x}_2)\bar{J}^{d_1}(\bar{z}_1)\rangle \\ \times \langle (J^{a_1}J^{a_2})(x_1)(J^{b_1}J^{b_2})(x_2)J^{d_1}(z_1)\rangle \end{aligned} \tag{6.5.23}$$

Αποτιμώντας το ολομορφικό μέρος ξεχωριστά λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \langle (J^{a_1}J^{a_2})(x_1)(J^{b_1}J^{b_2})(x_2)J^{d_1}(z_1)\rangle &= \frac{2i}{\sqrt{k}(z_1-x_1)} f^{ed_1(a_1}\langle (J^{a_2)}J^e)(x_1)(J^{b_1}J^{b_2})(x_2)\rangle \\ &+ \frac{2i}{\sqrt{k}(z_1-x_2)} f^{ed_1(b_1}\langle (J^{b_2)}J^e)(x_2)(J^{a_1}J^{a_2})(x_1)\rangle \ . \end{aligned} \tag{6.5.24}$$

Βάζοντας όλες τις εκφράσεις μαζί και χρησιμοποιώντας την (6.5.8)έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1)\mathcal{O}^{(2,1)}(x_2)\rangle_{\lambda} &= \frac{4\lambda}{\pi k} d_{a_1c_1a_2}d_{a_2c_2e}f_{ed_1a_1}\frac{f_{c_1c_2d_1}}{\bar{x}_{12}}\int \frac{d^2z_1}{(z_1-x_1)(\bar{z}_1-\bar{x}_1)(\bar{z}_1-\bar{x}_2)} \\ &+ \frac{4\lambda}{\pi k} d_{b_1c_2b_2}d_{b_2c_1e}f_{ed_1b_1}\frac{f_{c_1c_2d_1}}{\bar{x}_{12}}\int \frac{d^2z_1}{(z_1-x_2)(\bar{z}_1-\bar{x}_1)(\bar{z}_1-\bar{x}_2)} \ . \end{aligned} \tag{6.5.25}$$

Αντικαθιστώντας την (Γ′.2.7) και το ολοκλήρωμα (Γ′.3.5) φθάνουμε στην

$$\langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1)\mathcal{O}^{(2,1)}(x_2)\rangle = \frac{4(N^2-4)}{N}\frac{\dim G}{x_{12}^4\bar{x}_{12}^2}\Big(-\frac{2c_G}{k}\lambda\Big)\frac{1}{x_{12}^4\bar{x}_{12}^2}\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \ . \tag{6.5.26}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνεισφορά σε επίπεδο δύο βρόχων

$$\langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1)\mathcal{O}^{(2,1)}(x_2)\rangle_{\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} d_{a_1a_2c_1}d_{b_1b_2c_2}\int d^2z_1 d^2z_2 \langle \bar{J}^{c_1}(\bar{x}_1)\bar{J}^{c_2}(\bar{x}_2)\bar{J}^{d_1}(\bar{z}_1)\bar{J}^{d_2}(\bar{z}_2)\rangle \times \langle (J^{a_1}J^{a_2})(x_1)(J^{b_1}J^{b_2})(x_2)J^{d_1}(z_1)J^{d_2}(z_2)\rangle \tag{6.5.27}$$

Το αντι-ολομορφικό μέρος είναι η συνάρτηση τεσσάρων σημείων

$$\begin{aligned}\langle \bar{J}^{c_1}(\bar{x}_1)\bar{J}^{c_2}(\bar{x}_2)\bar{J}^{d_1}(\bar{z}_1)\bar{J}^{d_2}(\bar{z}_2)\rangle &= \frac{\delta^{d_1d_2}\delta^{c_1c_2}}{\bar{z}_{12}^2\bar{x}_{12}^2} + \frac{\delta^{d_1c_1}\delta^{d_2c_2}}{(\bar{z}_1-\bar{x}_1)^2(\bar{z}_2-\bar{x}_2)^2} + \frac{\delta^{d_1c_2}\delta^{d_2c_1}}{(\bar{z}_1-\bar{x}_2)^2(\bar{z}_2-\bar{x}_1)^2}\\ &-\frac{1}{k}\frac{1}{\bar{x}_{12}}\Big(\frac{f^{d_1d_2e}f^{c_1c_2e}}{\bar{z}_{12}(\bar{z}_2-\bar{x}_1)(\bar{z}_2-\bar{x}_2)} - \frac{f^{d_1c_1e}f^{d_2c_2e}}{(\bar{z}_1-\bar{x}_1)(\bar{z}_2-\bar{x}_1)(\bar{z}_2-\bar{x}_2)}\\ &+\frac{f^{d_1c_2e}f^{d_2c_1e}}{(\bar{z}_1-\bar{x}_2)(\bar{z}_2-\bar{x}_1)(\bar{z}_2-\bar{x}_2)}\Big)\ .\end{aligned} \tag{6.5.28}$$

Η ολομορφική συνάρτηση συσχέτισης , έχοντας υπόψιν ότι πολλαπλασιάζεται με $d_{a_1a_2c_1}d_{b_1b_2c_2}$, δίνεται από την

$$\begin{aligned}\langle (J^{a_1}J^{a_2})(x_1)(J^{b_1}J^{b_2})(x_2)J^{d_1}(z_1)J^{d_2}(z_2)\rangle &= \frac{\delta_{d_1d_2}}{z_{12}^2}\{(J^{a_1}J^{a_2})(x_1)(J^{b_1}J^{b_2})(x_2)\}\\ &+\Big(2+\frac{c_G}{2k}\Big)\frac{\delta_{d_1a_1}}{(z_1-x_1)^2}\{J^{a_2}(x_1)J^{d_2}(z_2)(J^{b_1}J^{b_2})(x_2)\}\\ &+\Big(2+\frac{c_G}{2k}\Big)\frac{\delta_{d_1b_1}}{(z_1-x_2)^2}\{(J^{a_1}J^{a_2})(x_1)J^{d_2}(z_2)J^{b_2}(x_2)\}\\ &+\frac{i}{\sqrt{k}}\frac{f_{d_1a_1e}}{z_1-x_1}\{\big(J^eJ^{a_2}+J^{a_2}J^e\big)(x_1)J^{d_2}(z_2)(J^{b_1}J^{b_2})(x_2)\}\\ &+\frac{i}{\sqrt{k}}\frac{f_{d_1b_1e}}{z_1-x_2}\{(J^{a_1}J^{a_2})(x_1)J^{d_2}(z_2)\big(J^eJ^{b_2}+J^{b_2}J^e\big)(x_2)\}\\ &+\frac{i}{\sqrt{k}}\frac{f_{d_1d_2e}}{z_{12}}\{(J^{a_1}J^{a_2})(x_1)J^e(z_2)(J^{b_1}J^{b_2})(x_2)\}\ .\end{aligned} \tag{6.5.29}$$

Να σημειωθεί ότι εύκολα μπορεί να εξαχθεί ότι

$$\langle J^a(x_1)(J^bJ^c)(x_2)J^d(z)\rangle = \Big(2+\frac{c_G}{2k}\Big)\frac{\delta^{d(b}\delta^{c)a}}{(z-x_2)^2x_{12}^2} \tag{6.5.30}$$

και όλες οι συναρτήσεις τριών σημείων (6.5.29) αποτελούν αναδιατάξεις των δεικτών της (6.5.24). Για να προχωρήσουμε, επικεντρωνόμαστε στους όρους που συνεισφέρουν στην ανώμαλη διάσταση. Πολλαπλασιάζοντας τα ολομορφικά και αντι-ολομορφικά μέρη ανακύπτει η παρακάτω ομάδα ολοκληρωμάτων των οποίων δίνουμε και τα αποτελέσματα με τη χρήση των (Γ′.2.7) και (Γ′.2.6). Είναι λοιπόν

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^2z_1d^2z_2}{(\bar{z}_1-\bar{x}_1)^2(z_1-x_1)(\bar{z}_2-\bar{x}_2)^2z_{12}} &= -\frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}^2}\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}\ ,\\
\int \frac{d^2z_1d^2z_2}{(\bar{z}_1-\bar{x}_1)^2(z_1-x_2)(\bar{z}_2-\bar{x}_2)z_{12}} &= \frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}^2}\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}+\frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}^2}\ ,\\
\int \frac{d^2z_1d^2z_2}{(\bar{z}_1-\bar{x}_1)^2(z_2-x_1)(\bar{z}_2-\bar{x}_2)^2z_{12}} &= -\frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}^2}\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}\ ,\\
\int \frac{d^2z_1d^2z_2}{(\bar{z}_1-\bar{x}_1)^2(z_2-x_2)(\bar{z}_2-\bar{x}_2)^2z_{12}} &= \frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}^2}\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}+\frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}^2}\ ,\\
\int \frac{d^2z_1d^2z_2}{(\bar{z}_1-\bar{x}_1)(\bar{z}_2-\bar{x}_1)(\bar{z}_2-x_2)z_{12}^2} &= \frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}}\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}\ ,\\
\int \frac{d^2z_1d^2z_2}{(\bar{z}_1-\bar{x}_2)(\bar{z}_2-\bar{x}_1)(\bar{z}_2-\bar{x}_2)z_{12}^2} &= -\frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}}\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}\ ,\\
\int \frac{d^2z_1d^2z_2}{(z_1-x_1)^2(z_2-x_2)^2(\bar{z}_2-\bar{x}_1)(\bar{z}_2-\bar{x}_2)\bar{z}_{12}} &= -\frac{2\pi^2}{x_{12}^2\bar{x}_{12}}\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}-\frac{\pi^2}{x_{12}^2\bar{x}_{12}}\ .
\end{aligned} \tag{6.5.31}$$

Έχοντας αυτά , αποτελεί πλέον εύκολη διαδικασία να συλλέξουμε τους όρους που συνεισφέρουν στην ανώμαλη διάσταση. Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις και χρησιμοποιώντας την (6.5.31), καταλήγουμε στην

$$\langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1)\mathcal{O}^{(2,1)}(x_2)\rangle_{\lambda^2} = \frac{1}{x_{12}^4\bar{x}_{12}^2}\frac{4(N^2-4)}{N}\frac{\dim G}{x_{12}^4\bar{x}_{12}^2}\Big(\frac{6c_G\lambda^2}{k}\Big)\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}\ . \tag{6.5.32}$$

Από τις (6.5.22),(6.5.26) και (6.5.32) προκύπτει

$$\langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1)\mathcal{O}^{(2,1)}(x_2)\rangle = \frac{4(N^2-4)}{N}\frac{\dim G}{x_{12}^4\bar{x}_{12}^2}\Big(1-\frac{2c_G}{k}(\lambda-3\lambda^2)\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}\Big)+\cdots\ , \tag{6.5.33}$$

όπου οι ελλείψεις δηλώνουν όρους που συνεισφέρουν σε τάξη $\mathcal{O}(1/k)$ στη συνολική κανονικοποίηση ή επιπρόσθετους όρους σε υψηλώτερη τάξη ως προς λ της ανώμαλης διάστασης (6.5.1). Καταλήγουμε λοιπόν ότι η ανώμαλη διάσταση δίνεται πράγματι από την (6.5.20) έως $\mathcal{O}(\lambda^2)$.

Σε αυτο το σημείο ολοκληρώνουμε την παρουσίαση υπολογισμού των ανώμαλων διαστάσεων με τη χρήση του χώρου σταθερών ζεύξης. Στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τη συνάρτηση C για ένα σύνολο θεωριών ορισμένες εκ των οποίων αναλύθηκαν νωρίτερα.

Κεφάλαιο 7

Ακριβής συνάρτηση C στις λ-παραμορφώσεις

Παρακάτω παρουσιάζουμε τον τρόπο υπολογισμού των συναρτήσεων C για τις λ-παραμορφώσεις επιστρατεύοντας τις πληροφορίες και τις μεθόδους των προηγούμενων κεφαλαίων. Κεντρικο σημείο αποτελεί το θεώρημα Zamolodchikov που αναπτύχθηκε νωρίτερα. Πριν όμως προχωρήσουμε, για λόγους που θα φανούν παρακάτω επανορίζουμε τη συνάρηση C ως

$$\frac{dC}{d\ln\mu^2} = \beta^i\partial_i C = 24G_{ij}\beta^i\beta^j \, . \tag{7.0.1}$$

οπότε

$$\beta^i = \frac{1}{24}G^{ij}\partial_j C + \cdots \tag{7.0.2}$$

όπου $G^{ij} = G^{-1}_{ij}$.

7.1 RG ροές από χώρους ομάδων

Σε αυτή την πρώτη ενότητα του κεφαλαίου θα υπολογίσουμε την ακριβή μορφή της C-συνάρτησης για μία κλάση θεωριών που κατασκευάστηκαν στην [46]. Θεωρούμε τη δράση με δύο πίνακες σταθερών ζεύξης $(\lambda_{1,2})_{AB}$

$$S_{\lambda_1,\lambda_2} = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) + \frac{\sqrt{k_1k_2}}{\pi}\int d^2\sigma\big((\lambda_1)_{AB}J^A_{1+}J^B_{2-} + (\lambda_2)_{AB}J^A_{2-}J^B_{1+}\big) \, , \tag{7.1.1}$$

όπου οι δείκτες με κεφαλαία τρέχουν για μία ημι-απλή ομάδα G. Η ενεργός δράση για αυτή τη θεωρία έχει κατασκευασθεί στην [46] και συζητήθηκε και νωρίτερα, αλλά η ακριβής μορφή της δεν είναι απαραίτητη στους υπολογισμούς μας. Παρ΄ όλα αυτά, θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση ισοτροπικών σταθερών ζεύξης των οποίων οι πίνακες ορίζονται να είναι

$(\lambda_i)_{AB} = \lambda_i \delta_{AB}$ ώστε τελικά να έχουμε δύο παραμέτρους. Μία γενίκευση για την περίπτωση των τεσσάρων σταθερών ζεύξης παρουσιάζεται στην 7.3. Η μετρική Zamolodchikov στο χώρο των σταθερών ζεύξης μπορεί να υπολογισθεί σε όλες τις τάξεις θεωρίας διαταραχών ως προς $\lambda_{1,2}$ και δίνεται στο όριο για μεγάλα $k_{1,2}$ από την [54, 19]

$$G_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{2} \frac{\dim G}{(1-\lambda_i^2)^2} \ , \tag{7.1.2}$$

όπου στο ανάπτυγμα για μεγάλες τιμές του k η κύρια συνεισφορά στη μετρική όπου δίνεται παραπάνω εξαρτάται μόνο από το Αβελιανό μέρος του OPE των ρευμάτων .[1] Αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση β κοντά στο σύμμορφο σημείο, είτε στο UV, είτε στο IR, ολοκληρώνοντας την (7.0.2) ενδέχεται να γνωρίζουμε και τη συμπεριφορά της C-συνάρτησης κοντά σε αυτή την περιοχή. Η σταθερά ολοκλήρωσης καθορίζεται από την απαίτηση ότι η C-συνάρτηση στο σύμμορφο σημείο συμπίπτει με το κεντρικό φορτίο της αντίστοιχης CFT. Παρακάτω, η ακριβής έκφραση της C-συνάρτησης επιτυγχάνεται με τη χρήση επιχειρημάτων συμμετρίας σε συνάρτηση με διαταρακτικά αποτελέσματα. Πριν προχωρήσουμε είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε τους συνδιασμούς των ακεραίων $k_{1,2}$ (υποθέτωντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $k_2 \geqslant k_1$) οι οποίοι δίνονται από

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \leqslant 1 \ , \qquad k = \sqrt{k_1 k_2} \ .$$

Η ροή των σταθερών ζεύξης έχει υπολογιστεί επακριβώς στα λ_i και σε κύρια συνεισφορά ως προς $k \gg 1$ με μεθόδους θεωρίας υποβάθρου που περιγράψαμε νωρίτερα και μεθόδους CFT. Υπενθυμίζουμε ότι από το κεφ. 6 [56, 22] και [46], αντίστοιχα

$$\beta^i(\lambda_i;\lambda_0) = -\frac{c_G}{2k} \frac{\lambda_i^2(\lambda_i-\lambda_0)(\lambda_i-\lambda_0^{-1})}{(1-\lambda_i^2)^2} \ , \quad i = 1,2 \ , \tag{7.1.3}$$

όπου c_G είναι ο τετραγωνικός τελεστής Casimir για το G στη συζυγή αναπαράσταση, βλέπε (7.3.1). Αυτό υποδεικνύει πως οι ροές για λ_1 και λ_2 αποσυζεύγνυνται και υπάρχουν δύο σύμμορφα σημεία στο UV και στο IR στα $\lambda_i = 0$ και $\lambda_i = \lambda_0$ αντίστοιχα. Κοντά στο UV διαταρακτικά λαμβάνουμε

$$\beta^i(\lambda_i;\lambda_0) = -\frac{c_G}{2k}\lambda_i^2 + \mathcal{O}(\lambda_i^3) \ , \quad i = 1,2 \ .$$

Το κεντρικό φορτίο της CFT στο UV δίνεται από το άθροισμα των κεντρικών φορτίων των δύο επιμέρους WZW προτύπων με επίπεδα $k_{1,2}$ αντίστοιχα. Κρατώντας τους δύο κύριους

[1] Η μετρική παίρνει τη μορφή(7.1.2) αφού οι διγραμμικοί όροι των ρευμάτων $J_{1+}^A J_{2-}^B$ και $J_{2+}^A J_{1-}^B$ στην (7.1.1) δεν αλληλεπιδρούν. Επομένως είναι ένα διπλό αντίγραφο της περίπτωσης με μία σταθερα ζεύξης [54, 19].

όρους σε ανάπτυγμα $1/k$ λαμβάνουμε

$$c_{\mathrm{UV}} = \frac{2k_1 \dim G}{2k_1 + c_G} + \frac{2k_2 \dim G}{2k_2 + c_G} = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{2k}(\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) + \cdots \ . \tag{7.1.4}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι σε κύρια συνεισφορά κοντά στο $\lambda_i = 0$ η μετρική είναι $G_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} \dim G$, επιλύωντας την (7.0.2) προκύπτει

$$C(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{k}\left(\frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) + 2\lambda_1^3 + 2\lambda_2^3\right) + \mathcal{O}(\lambda^4) \ . \tag{7.1.5}$$

Η ενεργός δράση του λ-προτύπου (7.1.1), κατασκευάστηκε στην [46], και συγκεκριμένα η β-συνάρτηση είναι αναλλοίωτη στην συμμετρία [2]

$$\lambda_i \to \frac{1}{\lambda_i} \quad i = 1, 2 \ , \quad k_1 \to -k_2 \ , \quad k_2 \to -k_1 \ . \tag{7.1.6}$$

Να σημειωθεί ότι, κάτω από αυτό το μετασχηματισμό το $k \to -k$. Τα δύο σύμμορφα σημεία της παραπάνω συμμετρίας για τις παραμέτρους λ_i είναι στο $\lambda_i \to \pm 1$. Προκειμένου να έχουμε καλή συμπεριφορά στα αναπτύγματα της (7.1.3) γύρω απο τα σημεία αυτά, έχουμε

$$\lambda_i = \pm 1 - \frac{b_i}{k^{1/3}} \ , \quad k \to \infty \ , \quad \lambda_0 = \text{fixed} \, . \tag{7.1.7}$$

Έτσι, όπως εξηγήθηκε [19], η C-συνάρτηση σε $\mathcal{O}(1/k)$ πρέπει να έχει την ακόλουθη μορφή

$$C(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{4k}\left(\frac{f(\lambda_1; \lambda_0)}{(1-\lambda_1^2)^3} + \frac{f(\lambda_2; \lambda_0)}{(1-\lambda_2^2)^3}\right) \ , \tag{7.1.8}$$

όπου η αναλυτική συνάρτηση $f(\lambda; \lambda_0)$ ικανοποιεί, από την εξίσωση (7.1.6), τη συνθήκη $f(\lambda; \lambda_0) = \lambda^6 f(\lambda^{-1}; \lambda_0^{-1})$. Άρα η $f(\lambda; \lambda_0)$ πρέπει να είναι ένα πολυώνυμο σε λ με συντελεστές που γενικώς θα εξαρτώνται από το λ_0. Ταυτίζοντας τους συντελεστές με τα διαταρακτικά αποτελέσματα η (7.1.5) δίνει

$$f(\lambda; \lambda_0) = (\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(1 - 3\lambda^2 - 3\lambda^4 + \lambda^6) + 8\lambda^3 \ . \tag{7.1.9}$$

Να σημειωθεί ότι $C(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}; \lambda_0^{-1}) = C(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_0)$, μέσω της οποίας φαίνεται η αναλλοιώτητα κάτω από τους μετασχηματισμούς(7.1.6).[3]

[2] Στο επίπεδο της ενεργού συνάρτησης στην (7.1.1), η συμμερία (7.1.6) συνοδεύεται από μία αντιστροφή των στοιχείων ομάδας $g_{1,2} \to g_{2,1}^{-1}$, βλέπε εξ (2.12) & (2.14) στην [46]. Αυτό γενικεύει την [28] για ένα λ-παραμορφωμένο πρότυπο[16].

[3] Μία μέθοδος εξαγωγής του ενεργού κεντρικού φορτίου είναι μέσω TBA μεθόδων για τον ορισμό της θεμελιώδους ενεργειακής κατάστασης του συστήματος, όπου αρχικά συζητείται στο[37, 38].

Μία συντόμευση

Χρησιμοποιώντας την (7.0.1) προκύπτει

$$\partial_\lambda C = 24 G_{\lambda\lambda}\beta^\lambda \ . \tag{7.1.10}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ακριβής σε λ και αναμένεται να ισχύει και για τις $\lambda_{1,2}$ ξεχωριστά. Τότε στην περίπτωσή μας

$$\begin{aligned} C &= c_{\mathrm{UV}} - 6\frac{c_G \dim G}{k}\int_0^{\lambda_1} \delta x \frac{x^2(x-\lambda_0)(x-\lambda_0^{-1})}{(1-x^2)^4} - (\lambda_1 \to \lambda_2) \\ &= c_{\mathrm{UV}} - \frac{c_G \dim G}{2k}\lambda_1^3 \frac{4-\lambda_1(3-\lambda_1^2)(\lambda_0+\lambda_0^{-1})}{(1-\lambda_1^2)^3} - (\lambda_1 \to \lambda_2) \ , \end{aligned} \tag{7.1.11}$$

όπου c_{UV} δίνεται από την (7.1.4). Ύστερα από πράξεις, λαμβάνουμε την (7.1.8) και (7.1.9). Να σημειωθεί ότι ο όρος που εμφανίζεται από την ολοκλήρωση δεν είναι από μόνος του αναλλοίωτος κάτω από την (7.1.6)

Περίπτωση ίσων επιπέδων

Στην περίπτωση των ίσων επιπέδων, δηλαδή όταν $\lambda_0 = 1$ η C-συνάρτηση (7.1.8) γίνεται (θέτωντας επίσης $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)

$$C(\lambda) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{k}\frac{1+2\lambda+2\lambda^3+\lambda^4}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3} \ . \tag{7.1.12}$$

Αυτή είναι η C-συνάρτηση που αντιστοιχεί στο απλούστερο λ-παραμορφωμένο πρότυπο της [16] και γίνεται ισχυρά συζευγμένο όταν $\lambda = \pm 1$. Όπως έχει δειχθεί στην [16] και στην [21] αυτό που έχει νόημα γύρω από αυτά τα σημεία είναι ο μη-Αβελιανός T-δυισμός και τα ψευδοδυικά ορια των προτύπων (7.1.7), για $\lambda = 1$ και $\lambda = -1$, αντίστοιχα. Σε αυτά τα όρια η συνάρτηση $C(\lambda)$ παραμένει πράγματι πεπερασμένη. Ας σημειωθεί εδώ ότι η C-συνάρτηση για τη συγκεκριμένη περίπτωση, γνωστή και ως **μη-Αβελιανό Thirring πρότυπο** εξήχθη στην [54, 27], αλλά όχι στην αναλυτική μορφή (7.1.12). Πράγματι, το ενεργό δυναμικό που υπολογίστηκε στην [54] ικανοποιεί την ίδια διαφορική εξίσωση με την C-συνάρτηση. Παρ΄ όλα αυτά το ενεργό δυναμικό δεν είναι αναλλοίωτο κάτω από την $\lambda \to 1/\lambda,\ k \to -k$.[4]

[4]Για συγκεκριμένες ολοκληρώσιμες παραμορφώσεις του ισοτροπικού πρωτεύοντος χειραλικού προτύπου [33], η ανωμαλία Weyl του σ-προτύπου στον NS-NS τομέα [34, 35] έχει συζητηθεί στην [36]. Αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως η ¨γενικευμένη C-συνάρτηση¨. Παρ΄ όλα αυτά όπως επισημαίνεται στις [34, 35] δε μπορεί γενικώς να ταυτιστεί με τη C-συνάρτηση του Zamolodchikov αφού δεν είναι μονοτονική λόγω της μη καθορισμένης μετρικής στο χώρο των σταθερών ζεύξης $(g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi)$.

7.1.1 Από $G_{k_1} \times G_{k_2}$ σε $\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}$

Αναπτύσσοντας την (7.1.8) γύρω από το IR σύμμορφο σημείο $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ λαμβάνουμε

$$C(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{k}\frac{1+\lambda_0^4}{2\lambda_0(1-\lambda_0^2)} + \mathcal{O}(\lambda-\lambda_0)^2 \,. \qquad (7.1.13)$$

Η κύρια συνεισφορά πρέπει να αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα για μεγάλα k του κεντρικού φορτίου της CFT στο IR το οποίο ταυτοποιήθηκε στην [46] ως το σύμπλοκο $\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}$.[5] Το κεντρικό φορτίο για $k \gg 1$, δίνει όντως $C(\lambda_0, \lambda_0; \lambda_0)$, δηλαδή την (7.1.13), όπως αναμένεται. Αυτό αποτελεί ένα μη τετριμμένο έλεγχο της (7.1.8).

7.1.2 Από $G_{k_1} \times G_{k_2}$ σε $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$

Μπορούμε να θέσουμε μία από τις δύο σταθερές ζεύξης στο μηδέν π.χ $\lambda_2 = 0$ όπως μπορεί να φανεί από τις εκφράσεις των β-συναρτήσεων της θεωρίας (7.1.3). Ορίζοντας $\lambda_1 \equiv \lambda$ έχοντας αυτό για τις εκφράσεις (7.1.8), (7.1.9) προκύπτει

$$C(\lambda; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{2k}\frac{(\lambda_0+\lambda_0^{-1})(1-3\lambda^2)+4\lambda^3}{(1-\lambda^2)^3} \,. \qquad (7.1.14)$$

Αναπτύσσοντας γύρω από το $\lambda = \lambda_0$ έχουμε

$$C(\lambda; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{2k}\frac{1}{\lambda_0(1-\lambda_0^2)} + \mathcal{O}(\lambda-\lambda_0)^2 \,. \qquad (7.1.15)$$

Η κύρια συνεισφορά πρέπει να αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα για μεγάλα k του κεντρικού φορτίου της CFT στο IR, το οποίο αποτελείται από δύο WZW πρότυπα με k_1 και $k_2 - k_1$ [46]. Για $k \gg 1$ πράγματι λαμβάνουμε $C(\lambda_0; \lambda_0)$, ήτοι την κύρια συνεισφορά της (7.1.15), όπως αναμένεται. Να σημειωθεί επίσης ότι η (7.1.14) δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από $\lambda \to 1/\lambda$ και $k \to -k$. Αυτό δεν αποτελεί έκπληξη καθώς στα άκρα της ροής το κεντρικό φορτίο δεν είναι αναλλοίωτο κάτω από τη συμμετρία.

[5] Εύκολα φαίνεται ότι το $\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}$. είναι αναλλοίωτο κάτω από την επέκταση της συμμετρίας (7.1.6) η οποία περιλαμβάνει την αλλαγή των επιπέδων

$$k_1 \to -k_2 - 2c_G \;, \quad k_2 \to -k_1 - 2c_G \;,$$

τα οποία ισχύουν για μεγάλα k . Ο μετασχηματισμός του λ δεν είναι πιθανώς μία αντιστροφή όπως στη (7.1.6), αλλά μπορεί να περιλαμβάνει k-διορθώσεις.

7.1.3 Από $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$ σε $\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}$

Υπάρχει μία άλλη συνεπής υποπερίπτωση στο χώρο των σταθερών ζεύξης και αυτή είναι να θέσουμε μία από τις ζεύξεις, έστω την λ_2 στην λ_0 και να ονομάσουμε τη λ_1 ως λ. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στη γενική έκφραση για $C(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_0)$ (7.1.8) προκύπτει

$$C(\lambda;\lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{2k}\frac{1-3\lambda^2+\lambda_0^4\lambda^4(3-\lambda^2)+4\lambda_0(1-\lambda_0^2)\lambda^3}{\lambda_0(1-\lambda_0^2)(1-\lambda^2)^3}\ . \tag{7.1.16}$$

Κοντά στο UV σύμμορφο σημείο $\lambda = 0$, λαμβάνουμε την κύρια συνεισφορά στην (7.1.15), όπως αναμένεται, αφού το σύμμορφο σημείο στο IR που περιγράφηκε νωρίτερα, είναι το σύμμορφο σημείο στο UV της συγκεκριμένης ροής. Ομοίως, κοντά στο IR σύμμορφο σημείο $\lambda = \lambda_0$ βρίσκουμε την (7.1.13), όπως αναμένεται. Αυτή η C-συνάρτηση είναι αναλλοίωτη κάτω από $\lambda \to 1/\lambda$ και $k \to -k$.

7.2 RG ροές από χώρους πηλίκα

Σε αυτή την ενότητα υπολογίζουμε την C-συνάρτηση επακριβώς για τη ροή από τη θεωρία σε σύμπλοκο με συμμετρία $\frac{G_{k_1}\times G_{k_2}}{G_{k_1+k_2}}$ (UV-σύμμορφο σημείο), στη θεωρία με $\frac{G_{k_2-k_1}\times G_{k_1}}{G_{k_2}}$ (IR σύμμορφο σημείο). Αυτές οι θεωρίες κατασκευάστηκαν αρχικά στην [14] για $G = SU(2)$ όπου δίνεται η ακριβής έκφραση της δράσης. Η ενεργός δράση για αυτό, συνυπολογίζοντας τα φαινόμενα σε όλες τις τάξης της θεωρίας διαταραχών στις ιδιότητες ολοκληρωσιμότητας της λ_i, όπως και τη ροή των ζεύξεων, έχουν εξεταστεί για μία γενική ομάδα G στην [62], όπου και η αντίστοιχη ροή ταυτοποιήθηκε. Ξεκινούμε ορίζοντας τις παραμέτρους

$$s_i = \frac{k_i}{k_1+k_2}\ ,\quad i = 1,2$$

και

$$\lambda_1^{-1} = s_2 - 3s_1\,,\quad \lambda_2^{-1} = s_1 - 3s_2\,,\quad \lambda_3^{-1} = (s_1-s_2)^2 = 1-4s_1s_2\ ,\quad \lambda_f^{-1} = 1-8s_1s_2\ .$$

Η β-συνάρτηση σε επίπεδο ενός βρόχου είναι ακριβής στο λ και σε κύρια συνεισφορά για $k \gg 1$ δίνεται από την [62] [6]

$$\beta_\lambda = -\frac{c_G\lambda(1-\lambda_1^{-1}\lambda)(1-\lambda_2^{-1}\lambda)(1-\lambda_3^{-1}\lambda)}{2(k_1+k_2)(1-\lambda_f^{-1}\lambda)^2}\,. \tag{7.2.1}$$

[6] Για την περίπτωση $k_2 = k_2 = k$ έχουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_f = -1$ και $\lambda_3 \to \infty$. Τότε, $\beta_\lambda = -\frac{c_G}{4k}\lambda$, δηλαδή το διαταρακτικό αποτέλεσμα είναι ακριβές (για $k \gg 1$) οπως στην [28, 57] για όλους τους συμμετρικούς χώρους.

Το κεντρικό φορτίο της CFT στο UV, $\frac{G_{k_1}\times G_{k_2}}{G_{k_1+k_2}}$ προκύπτει να είναι

$$c_{\rm UV} = \dim G - \frac{c_G \dim G}{k}\frac{1+\lambda_0^2+\lambda_0^4}{2\lambda_0(1+\lambda_0^2)} + \cdots \ . \tag{7.2.2}$$

Το κεντρικό φορτίο της CFT στο IR $\frac{G_{k_2-k_1}\times G_{k_1}}{G_{k_2}}$ συμβαίνει για $\lambda=\lambda_2<0$ και δίνεται από την

$$c_{\rm IR} = \dim G - \frac{c_G \dim G}{k}\frac{1-\lambda_0^2+\lambda_0^4}{2\lambda_0(1-\lambda_0^2)} + \cdots \ . \tag{7.2.3}$$

Η δράση της θεωρίας είναι αναλλοίωτη κάτω από την αξιοσημείωτη συμμετρία [62]

$$\lambda \to \frac{1-(s_1-s_2)^2\lambda}{(s_1-s_2)^2-(1-8s_1s_2)\lambda} \ , \quad k_i\to -k_i \ , \quad i=1,2 \tag{7.2.4}$$

και το ίδιο για τη β-συνάρτηση. Αυτή η συμμετρία έχει δύο σύμμορφα σημεία για την παράμετρο λ , δηλαδή $\lambda=1$ ανδ $\lambda=\lambda_f$. Κοντά σε αυτά τα σημεία

$$\lambda = 1-\frac{b}{k}, \quad k\to\infty \, ,$$

και

$$\lambda = \lambda_f - \frac{b}{k} \ , \quad \lambda_0 = 1-\frac{n}{2k} \, , \quad k\to\infty \, ,$$

όλες οι συναρτήσεις πρέπει να είναι καλά ορισμένες (όπως για τη β-συνάρτηση). Η μετρική στο χώρο των σταθερών ζεύξης είναι

$$G_{\lambda\lambda} = \frac{8s_1^2s_2^2\dim G}{(1-\lambda)^2(1-\lambda_f^{-1}\lambda)^2} \ . \tag{7.2.5}$$

Η παραπάνω έκφραση έχει τη σωστή συμπεριφορά καθώς είναι ιδιάζουσα στα σύμμορφα σημεία του μετασχηματισμού της συμμετρίας και επίσης για $k_1=k_2$ λαμβάνουμε $\lambda_f=-1$ όπου ανάγεται στη γνωστή έκφραση $G_{\lambda\lambda}=\frac{\dim G}{2(1-\lambda^2)^2}$. Επιπλέον η συμμετρία (7.2.4) αφήνει αναλλοίωτο το στοιχείο μήκους με μετρική (7.2.5). Τέλος, ο συνολικός συντελεστής έχει επιλεγεί ώστε να αναπαράγεται το σωστό κεντρικό φορτίο στο IR. Προκειμένου να λάβουμε την ακριβή έκφραση σε λ και $\mathcal{O}(1/k)$ επιλύουμε την (7.1.10)

$$\begin{aligned} C(\lambda;\lambda_0) &= \dim G - \frac{c_G\dim G}{k}\frac{1+\lambda_0^2+\lambda_0^4}{2\lambda_0(1+\lambda_0^2)} \\ &- \frac{16c_G\dim G}{k}\frac{\lambda_0^5\lambda^2}{(1+\lambda_0^2)^7}\frac{3(1+\lambda_0^2)^2+2(1+10\lambda_0^2+\lambda_0^4)\lambda-(5-22\lambda_0^2+5\lambda_0^4)\lambda^2}{(1-\lambda)(1-\lambda_f^{-1}\lambda)^3} \ . \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Στο IR σύμμορφο σημείο $\lambda = \lambda_2$ προκύπτει η (7.2.3), όπως αναμένεται. Επιπρόσθετα, η $C(\lambda;\lambda_0)$ είναι αναλλοίωτη κάτω από τη συμμετρία (7.2.4).[7]

7.3 Περίπτωση τεσσάρων σταθερών ζεύξης

Εισαγωγικά

Σε αυτή την ενότητα ασχολούμαστε με μία κλάση προτύπων που παρουσιάζονται στην [46], αλλά με πιο γενικούς πίνακες σταθερών ζεύξης. Συγκεκριμένα ας θεωρήσουμε την (7.1.1) διαχωρίζοντας την ημι-απλή ομάδα G σε μία από τις υποομάδες της H και στον αντίστοιχο χώρο σύμπλοκο G/H. Ο δείκτης $A = (a, \alpha)$,με λατινικά και ελληνικά γράμματα συμβολίζει τους δείκτες των G και G/H αντίστοιχα. Τότε για μη συμμετρικούς χώρους Einstein G/H [44, 45] έχουμε

$$\begin{aligned} &f_{ACD}f_{BCD} = c_G\delta_{AB}\ , \quad f_{acd}f_{bcd} = c_H\delta_{ab}\ , \quad f_{\alpha\gamma\delta}f_{\beta\gamma\delta} = c_{G/H}\delta_{\alpha\beta}\ , \\ &f_{a\gamma\delta}f_{b\gamma\delta} = (c_G - c_H)\delta_{ab}\,, \quad f_{\alpha\gamma c}f_{\beta\gamma c} = \frac{1}{2}(c_G - c_{G/H})\delta_{\alpha\beta}\ . \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

Μεταξύ των παραπάνω ταυτοτήτων, αυτή που ορίζει έναν μη συμμετρικό χώρο Einstein είναι αυτή που περιλαμβάνει ελληνικούς δείκτες.

Θα δουλέψουμε με τους $(\lambda_i)_{AB} = \lambda_{H_i}\,\delta_{ab} + \lambda_i\,\delta_{\alpha\beta}$, όπου λ_{H_i} και λ_i συμβολίζουν τις παραμέτρους της ομάδας και υποομάδας αντίστοιχα. Οι β-συναρτήσεις για κάθε $(\lambda_i)_{AB}$ δίνονται από [59]

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_H} &= -\frac{(\lambda_H-\lambda_0)(\lambda_H-\lambda_0^{-1})}{2k}\left(c_H\frac{\lambda_H^2}{(1-\lambda_H^2)^2} + (c_G-c_H)\frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}\right)\ , \\ \beta_\lambda &= -\frac{1}{2k}\left(c_{G/H}\frac{\lambda^2(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_0^{-1})}{(1-\lambda^2)^2} + \frac{c_G-c_{G/H}}{2}\right. \\ &\left.\times\frac{\lambda}{(1-\lambda^2)(1-\lambda_H^2)}\left((\lambda_0^{-1}-\lambda_H)(\lambda_0\lambda_H-\lambda^2) + (\lambda_0-\lambda_H)(\lambda_0^{-1}\lambda_H-\lambda^2)\right)\right)\ . \end{aligned}$$

Οι παραπάνω β-συναρτήσεις είναι αναλλοίωτες κάτω από

$$\lambda \to \lambda^{-1}\ , \quad \lambda_H \to \lambda_H^{-1}\ , \quad k_{1,2} \to -k_{2,1}\ ,$$

[7] Στην περίπτωση ίσων επιπέδων, η C-συνάρτηση απλοποιείται στην

$$C(\lambda) = \dim G - \frac{3c_G\dim G}{4k}\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\ .$$

.

και έχουν ως σύμμορφα σημεία

$$(\lambda_H, \lambda) = \{(0,0)\,, (\lambda_0, \lambda_0)\,, (\lambda_0, 0)\}\,. \tag{7.3.2}$$

Σε αυτή την περίπτωση η μετρική Zamolodchikov στο χώρο σταθερών ζεύξης G_{ij} είναι

$$G_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} G^{(1)}_{ij} & 0 \\ 0 & G^{(2)}_{ij} \end{pmatrix}\,, \quad G^{(i)}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\dim G/H}{(1-\lambda_i^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\dim H}{(1-\lambda_{H_i}^2)^2} \end{pmatrix}\,, \quad i = 1,2\,. \tag{7.3.3}$$

Η C-συνάρτηση

Θα υπολογίσουμε τη γενική C-συνάρτηση που αντιστοιχεί στη δράση (7.1.1). Από την (7.0.2) με τη χρήση της (7.3.3) καταλήγουμε σε τεσσερις διαφορικές εξισώσεις. Όμως από τη μορφή των β-συναρτήσεων γνωρίζουμε ότι οι σταθερές $(\lambda_1)_{AB}$ και $(\lambda_2)_{AB}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Έτσι οι διαφορικές εξισώσεις γίνονται ανεξάρτητες επίσης. Η γενική λύση αυτών των εξισώσεων είναι

$$C(\lambda_1, \lambda_{H_1}, \lambda_2, \lambda_{H_2}; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{1}{4k}\Big(\tilde{C}(\lambda_1, \lambda_{H_1}, \lambda_0) + \tilde{C}(\lambda_2, \lambda_{H_2}; \lambda_0)\Big)\,, \tag{7.3.4}$$

όπου

$$\tilde{C}(\lambda, \lambda_H; \lambda_0) = \frac{1}{(1-\lambda^2)^3}\bigg(c_G \dim G\, g_1 + c_G\ \dim H\, g_2 + c_H\ \dim H\, g_3\bigg)\,,$$

και οι συναρτήσεις $g_i(\lambda, \lambda_H; \lambda_0)$, $i = 1,2,3$ δίνονται από την

$$\begin{aligned} g_1 &= (\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(1 - 3\lambda^2 - 3\lambda^4 + \lambda^6) + 8\lambda^3\,, \\ g_2 &= 12\lambda^2(\lambda_0 + \lambda_0^{-1} - 2\lambda) - \frac{12\lambda^2(1-\lambda^2)}{(1-\lambda_H^2)}(\lambda_0 + \lambda_0^{-1} - 2\lambda_H)\,, \\ g_3 &= -2\big((\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(1+3\lambda^2) - 8\lambda^3\big) + \frac{2(1-\lambda^2)}{(1-\lambda_H^2)^3}\Big[(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})\big(1 + 4\lambda^2 \\ &\quad + \lambda^4 - 3(1+\lambda^2)^2\lambda_H^2 + 6\lambda^2\lambda_H^4\big) + 4(1 + 4\lambda^2 + \lambda^4)\lambda_H^3 - 12\lambda^2\lambda_H(1+\lambda_H^4)\Big]\,. \end{aligned}$$

Για να βρούμε την (7.3.4), χρησιμοποιήσαμε την

$$c_{G/H} = c_G - \frac{2\dim H(c_G - c_H)}{\dim G/H}\,,$$

η οποία αποδεικνύεται λαμβάνοντας τα ίχνη των δεικτών στη δεύτερη σειρά της (7.3.1). Η συνάρτηση (7.3.4) δίνει τις σωστές τιμές στο UV και IR για τα κεντρικά φορτία (7.1.4) και

(7.1.13). Επίσης παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τη συμμετρία

$$(\lambda_i \to \lambda_i^{-1}, \lambda_{H_i} \to \lambda_{H_i}^{-1}, \lambda_0 \to \lambda_0^{-1}, k \to -k) \tag{7.3.5}$$

Άλλες σημαντικές RG-ροές

1. Θεωρώντας $\lambda_2 = \lambda_{H_2} = 0$ ανδ $\lambda_1 = \lambda_{H_1} = \lambda$, (7.3.4) λαμβάνει τη μορφή

$$C(\lambda, \lambda, 0, 0; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{2k} \frac{(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(1 - 3\lambda^2) + 4\lambda^3}{(1 - \lambda^2)^3}$$

η οποία παραμένει αναλλοίωτη με μία σταθερά κάτω από τη συμμετρία και έχει το σωστό κεντρικό φορτίο στο IR τγια $\lambda = \lambda_0$ και το οποίο αντιστοιχεί στη ροή από την $G_{k_1} \times G_{k_2}$ στην $G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1}$.

2. Λαμβάνοντας $\lambda_2 = \lambda_{H_2} = \lambda_0$ ανδ $\lambda_1 = \lambda_{H_1} = \lambda$, η (7.3.4) δίνει

$$C(\lambda, \lambda, \lambda_0, \lambda_0; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{2k} \frac{1 - 3\lambda^2 + 4\lambda_0^4 \lambda^4 (3 - \lambda^2) + \lambda_0 (1 - \lambda_0^2)\lambda^3}{\lambda_0 (1 - \lambda_0^2)(1 - \lambda^2)^3}$$

αναπαριστώντας τη ροή από $G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1}$ σε $\frac{G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2 - k_1}$, με το σωστό κεντρικό φορτίο στο $\lambda = \lambda_0$.

3. Θεωρώντας $\lambda_{1,2} = 0$ και $\lambda_{H_1} = \lambda_{H_2} = \lambda$, από την (7.3.4) προκύπτει

$$C(0, \lambda, 0, \lambda; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{2k}\left(\lambda_0 + \lambda_0^{-1}\right) - \frac{c_H \dim H}{k} \frac{\lambda^3 (4 + \lambda(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(\lambda^2 - 3)}{(1 - \lambda^2)^3}.$$

4. Τέλος, για $\lambda_{1,2} = 0 = \lambda_{H_2}$ και $\lambda_{H_1} = \lambda$, από την (7.3.4) έχουμε

$$C(0, \lambda, 0, \lambda; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{2k}\left(\lambda_0 + \lambda_0^{-1}\right) - \frac{c_H \dim H}{2k} \frac{\lambda^3 (4 + \lambda(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(\lambda^2 - 3)}{(1 - \lambda^2)^3}.$$

Εδώ ολοκληρώνουμε τη συζήτηση για τα μη διαταρακτικά αποτελέσματα στις λ-παραμορφώσεις δίνοντας ένα σύνολο νέων αποτελεσμάτων που συνεισφέρουν στη βαθύτερη κατανόηση της ομάδας επανακανονικοποίησης καθώς οι RG ροές αποτελούν κεντρικό σημείο μελέτης της θεωρίας πεδίου. Ακολουθούν παραρτήματα που παρουσιάζουν λεπτομέρειες υπολογισμών και συμβάσεων που δεν περιλαμβάνονται στο κυρίως κείμενο.

Κεφάλαιο 8

Συμπεράσματα και κατευθύνσεις

Στη διδακτορική του διατριβή με τίτλο «Μη διαταρακτικές μέθοδοι και το θεώρημα μονοτονίας σε διδιάστατες θεωρίες πεδίου» μελετήθηκε η εύρεση των C-συναρτήσεων και η χρήση μη διαταρακτικών μεθόδων στις ολοκληρώσιμες λ-παραμορφώσεις, για την εύρεση ανώμαλων διαστάσεων διαφόρων κλάσεων τελεστών.

Ξεκινήσαμε με μία επαρκή παρουσίαση του θεωρητικού υποβάθρου για την κατανόηση των υπολογισμών. Συγκεκριμένα ως αφετηρία παρουσιάσαμε βασικά στοιχεία της σύμμορφης θεωρίας πεδίου και στη συνέχεια επικεντρωθήκαμε στις πληροφορίες που χρειάστηκαν από τα σύμμορφα πρότυπα WZW. Ο λόγος είναι ότι οι λ-παραμορφώσεις αποτελούν παραμορφώσεις των προτύπων αυτών. Στη συνέχεια περιγράψαμε τα θεωρήματα μονοτονίας σε δύο, τρεις και τέσσερις διαστάσεις δίνοντας έμφαση στο θεώρημα Zamolodchikov όπου αποδεικνύεται ότι για κάθε διδιάστατη σύμμορφη θεωρία πεδίου υπάρχει μια συνάρτηση που καλείται C και μετράει τους ενεργούς, άμαζους βαθμούς ελευθερίας καθώς η θεωρία ρέει από τις υψηλές στις χαμηλές ενέργειες. Επίσης δώσαμε περιληπτικά και τις κατασκευές των λ-προτύπων που επρόκειτο να χρησιμοποιήσουμε.

Στη συνέχεια, προχωρήσαμε στη χρήση μη διαταρακτικών μεθόδων για την εύρεση των ανώμαλων διαστάσεων αλυσιδών ολομορφικών, αντι-ολομορφικών και μεικτών ρευματικών τελεστών. Ακριβέστερα, χρησιμοποιήσαμε τη γεωμετρία του χώρου των σταθερών ζεύξης καθώς επίσης και την ενεργό δράση των λ-παραμορφωμένων θεωριών. Εισάγοντας στις λ-παραμορφωμένες δράσεις έναν επιπρόσθετο όρο με μία νέα ζεύξη και ζητώντας κοντά στο σύμμορφο σημείο να εξαφανίζονται φαινόμενα μίξης των τελεστών, υπολογίσαμε τις ανώμαλες διαστάσεις χωρίς να υπεισέλθουμε στη χρήση θεωρίας διαταραχών. Τέλος, τα αποτελέσματά μας ελέγχθηκαν μέσω της θεωρίας διαταραχών και βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με αυτήν.

Με τη χρήση του θεωρήματος Zamolodchikov, υπολογίσαμε τη συνάρτηση C για μία μεγάλη κλάση λ-παραμορφώσεων, χρησιμοποιώντας τεχνικές της σύμμορφης θεωρίας πεδίου. Οι C-συναρτήσεις ικανοποιούν φθινουσα μονοτονία και στα άκρα έχουν τις τιμές των κεντρικών φορτίων των σύμορφων θεωριών μεταξύ των οποίων παρεμβάλλονται. Οι εκφράσεις που υπολογίσαμε είναι ακριβείς ως προς λ και ικανοποιούν όλες τις απαιτούμενες ιδιότητές και συμμετρίες των λ-παραμορφώσεων.

Η παραπάνω συζήτηση μπορεί να επεκταθεί και σε λ-παραμορφώσεις με υπερσυμμετρία. Σε αυτή την περίπτωση ξεκινώντας με ένα σ-προτυπο της μορφής

$$S=\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\, Q_{\mu\nu}(X)\partial_a X^\mu\partial^a X^\nu=\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma(G_{\mu\nu}(X)+B_{\mu\nu}(X))\partial_a X^\mu\partial^a X^\nu\,, \quad (8.0.1)$$

όπου αντικαθιστούμε τα πεδία X^μ με υπερπεδία $Z^\mu=X^\mu+\theta\psi^\mu+\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F^\mu$ και τις απλές παραγώγους με τις υπερπαραγώγους $D_\pm$. Μπορεί κανείς να δείξει, ότι αντικαθιστώντας τα παραπάνω και βρίσκοντας τις εξισώσεις κίνησης για το βοηθητικό πεδίο F^μ η δράση μπορεί να πάρει τη μορφή

$$S=\frac{1}{2\pi}\int \delta^2\sigma\Big(Q_{\mu\nu}\partial_+x^\mu\partial_-x^\nu+iG_{\mu\nu}\psi^\mu_-\mathcal{D}_+\psi^\nu_-+iG_{\mu\nu}\psi^\mu_+\mathcal{D}_-\psi^\nu_++\frac{1}{2}R^-_{\mu\nu\rho\lambda}\psi^\mu_+\psi^\nu_+\psi^\rho_-\psi^\lambda_-\Big) \quad (8.0.2)$$

Με τη χρήση της ορθοκανονικής βάσης $\varepsilon^a_\pm=\varepsilon^a_\mu\partial_\pm x^\mu$ και $\psi^a_\pm=\varepsilon^a_\mu\psi^\mu_\pm$ η δράση γράφεται

$$S=\frac{1}{2\pi}\int \delta^2\sigma\Big(Q_{ab}e^a_+e^b_-+iG_{ab}\psi^a_-\mathcal{D}_+\psi^b_-+iG_{ab}\psi^a_+\mathcal{D}_-\psi^a_++\frac{1}{2}R^-_{abcd}\psi^a_+\psi^b_+\psi^c_-\psi^d_-\Big)\,, \quad (8.0.3)$$

όπου

$$\mathcal{D}_\pm\psi^a_\mp=\partial_\pm\psi^a_\mp+\omega^{\pm a}{}_{b|c}\varepsilon^c_\pm\psi^b_\mp\,,\quad \omega^\pm_{ab|c}=\omega_{ab|c}\pm\frac{1}{2}H_{abc}\,. \quad (8.0.4)$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι η καμπυλότητα που εμφανίζεται παραπάνω, όπως αναμένεται έχει και στρέψη. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ορθοκανονική βάση για τις λ-παραμορφώσεις

$$e^a=\sqrt{k(1-\lambda^2)}(D-\lambda\mathbb{I})^{-1}_{ab}R_b\,,\quad \tilde{e}^a=\sqrt{k(1-\lambda^2)}(D^T-\lambda\mathbb{I})^{-1}_{ab}L_b\,, \quad (8.0.5)$$

καταλήγουμε στο υπερσυμμετρικό λ-πρότυπο

$$S_{k,\lambda}(g)=\tfrac{k}{2\pi}\int d^2\sigma\, J^a_+\left(\tfrac{D+\lambda\mathbb{I}}{\mathbb{I}-\lambda D^T}\right)_{ab}J^b_-+\tfrac{k}{12\pi}\int(g^{-1}\delta g)^3\,, \quad (8.0.6)$$

$$S_k(\chi_\pm)=-\tfrac{ik}{2\pi}\int d^2\sigma(\chi^a_+\partial_-\chi^a_++\chi^a_-\partial_+\chi^a_-)\,, \quad (8.0.7)$$

$$\begin{aligned} S_{k,\lambda}(g,\chi_\pm)=\tfrac{k}{\pi}\int d^2\sigma\tfrac{\lambda}{1+\lambda}\Big[&J^a_{\chi-}\left(\tfrac{1}{\mathbb{I}-\lambda D}\right)_{ab}J^b_++J^a_{\chi+}\left(\tfrac{1}{\mathbb{I}-\lambda D^T}\right)_{ab}J^b_-\\ &+\tfrac{(1+\lambda^2)}{(1-\lambda^2)(1+\lambda)}J^a_{\chi+}J^a_{\chi-}+\tfrac{\lambda}{(1-\lambda^2)(1+\lambda)}J^a_{\chi-}\left(\tfrac{D-\lambda}{\mathbb{I}-\lambda D}\right)_{ab}J^b_{\chi+}\Big]\,. \end{aligned} \quad (8.0.8)$$

Έχοντας την παραπάνω δράση μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση β η οποία θα είναι ίδια με του μποζονικού προτύπου καθώς και τις ανώμαλες διαστάσεις των φερμιονίων.

Παράρτημα Α′

Συντεταγμένες στο μιγαδικό επιπεδο

Δουλεύοντας στον Ευκλείδιο χώρο με συντεταγμένες x^0, x^1 το αναλλοίωτο μήκος είναι

$$ds^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{Α′.0.1}$$

όπου $\delta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,1)$. Για να μεταβούμε στο μιγαδικό επιπεδο ορίζουμε τις συντεταγμένες

$$z = x^0 + ix^1, \qquad \bar{z} = x^0 - ix^1 \tag{Α′.0.2}$$

οπότε

$$x^0 = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad x^1 = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \tag{Α′.0.3}$$

και σε αυτή την περίπτωση το αναλλοίωτο μήκος γράφεται

$$ds^2 = g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^\beta \tag{Α′.0.4}$$

όπου η μετρική (Α′.0.6) μετασχηματίζεται γενικώς ως

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial z^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{z}^\beta} g_{\mu\nu} \tag{Α′.0.5}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{Α′.0.6}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε και τις αντίστοιχες παραγώγους οπότε[1]

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1) \tag{Α′.0.8}$$

Το στοιχείο όγκου γίνεται

$$\int \sqrt{\det g_{\mu\nu}}\, d^2x = \int \sqrt{g}\, d^2 z \tag{Α′.0.9}$$

Επίσης με τη χρήση του θεωρήματος Stokes (Γ′.3.1) εύκολα δείχνεται ότι (βλέπε για απόδειξη το κεφ. 5 [1])

$$\partial_z \frac{1}{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z} = 2\pi\delta^{(2)}(z, \bar{z}) \tag{Α′.0.10}$$

ΤΤέλος ο αντισυμμετρικός τανυστής $\epsilon_{\mu\nu}$ σε μιγαδικές συντεταγμένες γράφεται

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{Α′.0.11}$$

[1] Ενίοτε, για συντομογραφία χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \partial_z = \partial, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \partial_{\bar{z}} = \bar{\partial}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i \tag{Α′.0.7}$$

Παράρτημα Β΄

Τεχνικές υπολογισμού ολοκληρωμάτων

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται τα διάφορα ολοκληρώματα που προκύπτουν από τη θεωρία διαταραχών μέσα από δύο παραδείγματα.

Έστω αρχικά το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{d^2 z}{(x_1 - z)(\bar{z} - \bar{x}_2)}. \tag{Β΄.0.1}$$

που ορίζεται στο χωρίο ολοκλήρωσης

$$\mathcal{D}_n = \{(z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathrm{C}_n : |z_1 - x_j| > \epsilon, \epsilon > 0\}$$

και πιο συγκεκριμένα, ο $\mathbb{R}^2 - \{x_1, x_2\}$. Εφόσον η συνάρτηση εντός του ολοκληρώματος δεν είναι (αντι)ολομορφική δεν μπορεί να γίνει χρήση του θεωρήματος Cauchy, αλλά γίνεται χρήση του θεωρήματος Stokes στις δύο διαστάσεις όπου

$$\int\int_{\mathcal{D}_n} \left(\frac{\partial f(z,\bar{z})}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) d^2 z = \frac{i}{2} \oint_{\partial \mathcal{D}_n} \big(f(z,\bar{z}) d\bar{z} - \bar{f}(z,\bar{z}) dz \big), \tag{Β΄.0.2}$$

με $f(z,\bar{z}) = U(z,\bar{z}) - iV(z,\bar{z})$ και $\bar{f}(z,\bar{z}) = U(z,\bar{z}) + iV(z,\bar{z})$, και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γίνεται στην κλειστή διαδρομή C που φαίνεται στο σχήμα Α΄.1.

Για το ολοκλήρωμα (Β΄.0.1) προκύπτει ότι

$$\bar{f}(z,\bar{z}) = \frac{\ln |z - x_2|^2}{(x_1 - z)}, \qquad f(z,\bar{z}) = 0.$$

Για ευκολία, εάν είναι εφικτό, επιλέγεται η παράγουσα έτσι ώστε μέσα στο όρισμα του ln

εμφανίζεται το μέτρο στο τετράγωνο προκειμένου να αποφευχθούν τα σημεία διακλάδωσης της συνάρτησης κατά την ολοκλήρωση διαδρομής.
Η σχέση (Β΄.0.2) συνεπάγεται την ακόλουθη ισότητα για το υπό εξέταση ολοκλήρωμά

$$I = \int\int_{R^2-\{x_1,x_2\}} \frac{d^2z}{(x_1-z)(\bar{z}-\bar{x}_2)} = -\frac{i}{2}\left(\oint_C \frac{\ln|z-x_2|^2}{(x_1-z)}dz\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(\oint_{(x_1,\epsilon)} + \oint_{(x_2,\epsilon)} + \oint_{(0,R)} + \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4}\Big),$$

όπου (x_i, r) υπονοεί την ολοκλήρωση σε κύκλο κέντρου x_i και ακτίνας r. Εδώ $\epsilon \to 0$ και εν γένει $R \to \infty$ προκειμένου να συμπεριληφθεί στην ολοκλήρωση όλο το μιγαδικό επίπεδο (για $R >> |x_1|, |x_2|$). Όσον αφορά τα ολοκληρώματα στις διαδρομές L_1, L_2, L_3, L_4, οι αντίστοιχες συνεισφορές είναι ίσες και αντίθετες εφόσον δεν υπάρχει κλάδος στην υπό ολοκλήρωση συνάρτηση, με αποτέλεσμα να μηδενίζονται. Έτσι,

$$I = \frac{1}{2i}\left(\oint_{(x_1,\epsilon)} \frac{\ln|z-x_2|^2}{(x_1-z)}dz + \oint_{(x_2,\epsilon)} \frac{\ln|z-x_2|^2}{(x_1-z)}dz + \oint_{(0,R)} \frac{\ln|z-x_2|^2}{(x_1-z)}dz\right) =$$
$$= \big(J + K + M\big).$$

Η συνεισφορά του κύκλου γύρω απο το x_1 στην ολοκλήρωση είναι

$$J = -\frac{1}{2i}\oint_{(x_1,\epsilon)} \frac{\ln|z-x_2|^2}{(z-x_1)}dz = -\frac{1}{2i}\oint_{|u|=\epsilon} \frac{\ln|u+x_{12}|^2}{u}du =$$
$$= -\frac{1}{2i}\int_{\pi}^{-\pi} \frac{\ln|\epsilon e^{i\theta}+x_{12}|^2}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta}d\theta = -\frac{1}{2i}\int_{\pi}^{-\pi} \ln|\epsilon e^{i\theta}+x_{12}|^2 d\theta$$

όπου στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η αλλαγή μεταβλητής $u = z - x_1$ με $du = dz$, ενώ στην τρίτη η $u = \epsilon e^{i\theta}$ με $du = i\epsilon e^{i\theta}d\theta$. Για $\epsilon \to 0$ προκύπτει τελικά το αποτέλεσμα

$$J = -\frac{1}{2i}(-2\pi i)\ln|x_{12}|^2 \Rightarrow \qquad J = \pi \ln|x_{12}|^2. \tag{Β΄.0.3}$$

Όμοια υπολογίζεται και η συνεισφορά από το κυκλάκι με κέντρο το x_2 και ακτίνα ϵ, θέτοντας αυτή τη φορά $u = z - x_2$. Προκύπτει

$$K = -\frac{1}{2i}\int_{\pi}^{-\pi} i\epsilon\frac{\ln\epsilon^2}{-x_{12}}e^{i\theta}d\theta \Rightarrow \qquad K = 0. \tag{Β΄.0.4}$$

Τέλος, για τον μεγάλο κύκλο ακτίνας R η συνεισφορά είναι

$$M = -\frac{1}{2i}\oint_{(0,R)} \frac{\ln|z-x_2|^2}{(x_1-z)}dz = -\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \frac{\ln|Re^{i\theta}-x_2|^2}{(x_1-Re^{i\theta})} iRe^{i\theta}d\theta,$$

το οποίο στο όριο $R \gg |x_1|, |x_2|$ που η κλειστή διαδρομή C περικλείει όλο το μιγαδικό επίπεδο, γίνεται

$$M = -\pi \ln R^2 \tag{B'.0.5}$$

Προσθέτωντας τώρα τις (B'.0.3), (B'.0.4) και (B'.0.5) προκύπτει για το αρχικό ολοκλήρωμα ότι

$$I = \pi \ln \frac{|x_1-x_2|^2}{R^2}. \tag{B'.0.6}$$

Παράρτημα Γ′

Παράρτημα στο κεφάλαιο 3

Γ′.1 Η μετρική Zamolodchikov για τον $\mathcal{O}^{(m,n)}$

Στο συγκεκριμένο παράρτημα θέλουμε να υπολογίσουμε την κύρια συνεισφορά σε ανάπτυγμα για μεγάλα k της μετρικής Zamolodchikov για τελεστές της μορφής (6.2.1), δηλαδή όταν $k \to \infty$ και η άλγεβρα γίνεται Αβελιανή. Σαν αποτέλεσμα η δράση που προκύπτει παραμορφώνοντας το πρότυπο WZW θα είναι όπως στην (6.2.29) δηλαδή ωηιςη

$$
\begin{aligned}
&S = S_{WZW} + \frac{k}{\pi}\int d^2\sigma \left(\lambda\mathcal{O} + \tilde{\lambda}\mathcal{O}^{(m,n)}\right) \ , \\
&\tilde{\mathcal{O}} = J^a \bar{J}^a \ , \quad \mathcal{O}^{(m,n)} = S_{a_1\ldots a_m;b_1\ldots b_n} J^{a_1}\ldots J^{a_m}\bar{J}^{b_1}\ldots\bar{J}^{b_n} \ .
\end{aligned}
\tag{Γ′.1.1}
$$

Ακολουθώντας το παράρτημα A.2 της [19] προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε το ακριβές σε λ και μηδενικό σε $\tilde{\lambda}$ Αβελιανό μέρος της μετρικής Zamolodchikov στο χώρο των σταθερών ζεύξης λ και $\tilde{\lambda}$. Στα παρακάτω θεωρούμε $m \geqslant n$. Η μετρική που προκύπτει θα είναι ίδια και για $m < n$.

Για το $G_{\lambda\lambda} = |x_{12}|^4\langle\mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2)\rangle$ μέρος της μετρικής και σε $\mathcal{O}(\tilde{\lambda}^0)$, απ΄ευθείας φαίνεται ότι το αποτέλεσμα είναι ίδιο με την απλά παραμορφωμένη περίπτωση [19]. Ο μη διαγώνιος όρος $G_{\lambda\tilde{\lambda}}$ που προκύπτει από την $\langle\mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}^{(m,n)}(x_2)\rangle$ είναι μηδενικός σε τάξη $\mathcal{O}(\tilde{\lambda}^0)$.Έτσι, απλώς χρειαζόμαστε το Αβελιανό μέρος του $G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}} = x_{12}^{2m}\bar{x}_{12}^{2n}\langle\mathcal{O}^{(m,n)}(x_1)\mathcal{O}^{(m,n)}(x_2)\rangle$ επακριβώς στο λ και μηδενικό ως προς $\tilde{\lambda}$.

Ομοίως σύμφωνα με το [19], αναπτύσουμε σε δυνάμεις του λ ως

$$
\langle\mathcal{O}^{(m,n)}\mathcal{O}^{(m,n)}\rangle = G^{(0)} + \sum_{r=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\lambda^r}{\pi^r r!} G^{(r)} \tag{Γ′.1.2}
$$

όπου μόνο οι άρτιοι όροι συνεισφέρουν

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= S_{a_1\ldots a_m;b_1\ldots b_n} S_{c_1\ldots c_m;d_1\ldots d_n} < J^{a_1}\ldots J^{a_m}(x_1) J^{c_1}\ldots J^{c_m}(x_2) > \\ &\times \langle \bar{J}^{b_1}\ldots \bar{J}^{b_n}(\bar{x}_1)\bar{J}^{d_1}\ldots \bar{J}^{d_n}(\bar{x}_2)\rangle = \frac{m!n!S^2_{a_1\ldots a_m;b_1\ldots b_n}}{x_{12}^{2m}\bar{x}_{12}^{2n}} \end{aligned} \tag{Γ'.1.3}$$

και

$$\begin{aligned} G^{(r)} = \int d^2z_1\ldots d^2z_r\ S_{a_1\ldots a_m;b_1\ldots b_n} s_{c_1\ldots c_m;d_1\ldots d_n} < J^{a_1}\ldots J^{a_m}(x_1)J^{e_1}(z_1)\ldots J^{e_r}(z_r)J^{c_1}J^{c_m}(x_2) > \\ \times \langle \bar{J}^{b_1}\ldots \bar{J}^{b_n}(\bar{x}_1)\bar{J}^{e_1}(\bar{z}_1)\ldots \bar{J}^{e_r}(\bar{z}_r)\bar{J}^{d_1}\ldots \bar{J}^{d_n}(\bar{x}_2)\rangle. \end{aligned} \tag{Γ'.1.4}$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε μία αναδρομική σχέση για το $G^{(r)}$ ως εξής: Τα σημεία $z_1,\ldots,z_k$ είναι εσωτερικά, ενώ τα $x_{1,2}$ είναι εξωτερικά. Επιλέγοντας τα ρεύματα $J^{e_1}(z_1)$ και $\bar{J}^{e_1}(\bar{z}_1)$ έχουμε όρους εσωτερικών με εσωτερικά και εσωτερικών με εξωτερικά. Το ολομορφικό J^{e_1} μπορεί να συσταλεί με κάθε ένα από τα $(r-1)$ εσωτερικά ρεύματα J^{e_i} (με $j\neq 1$). Αυτό θα πρέπει να συνδιαστεί με τη συστολή του αντι-ολομορφικού ρεύματος $\bar{J}^{e_1}$ με κάθε ένα από τα $(r-2)$ εσωτερικά $\bar{J}^{e_j}$ (με $j\neq 1$, έτσι ώστε να αποφύγουμε τα μη-συνεκτικά και τα διαγράμματα φυσαλλίδας) ή με κάθε ένα από τα $2n$ εξωτερικά $\bar{J}^{b_i}$ και $\bar{J}^{d_i}$. Επιπρόσθετα, το ολομορφικό J^{e_1} μπορεί να συσταλθεί με κάθε ένα από τα $2m$ εξωτερικά ρεύματα J^{a_i} και J^{c_i} και το αποτέλεσμα θα πρέπει να συνδιαστεί με τη συστολή του $\bar{J}^{e_1}$ με κάθε ένα εκ των $(r-1)$ εσωτερικών $\bar{J}^{e_i}$ (με $i\neq 1$). Άρα έχουμε για το $G^{(r)}$ ότι

$$\begin{aligned} G^{(r)} &= \pi^2\left[(r-1)(r-2)+2n(r-1)+2m(r-1)\right]G^{(r-2)} \\ &= \pi^2(r-1)\big(r+2(m+n-1)\big)G^{(r-2)}\ , \end{aligned} \tag{Γ'.1.5}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\displaystyle\int \frac{d^2z}{(z-x)^2(\bar{z}-\bar{y})^2} = \pi^2\delta^{(2)}(x-y)$. Επιλύοντας βρίσκουμε

$$G^{(r)} = \pi^{2k}\frac{(r-1)!!\big(r+2(m+n-1)\big)!!}{\big(2(m+n)-2\big)!!}G^{(0)}\ . \tag{Γ'.1.6}$$

Αντικαθιστώντας στην (Γ'.1.2) και υπολογίζοντας το άθροισμα έχουμε το αποτέλεσμα

$$\langle \mathcal{O}^{(m,n)}\mathcal{O}^{(m,n)}\rangle = \frac{m!n!S^2_{a_1\ldots a_m;b_1\ldots b_n}}{x_{12}^{2m}\bar{x}_{12}^{2n}(1-\lambda^2)^{m+n}}\ , \qquad m\geqslant n\ . \tag{Γ'.1.7}$$

Συνοπτικά λοιπόν, οι Αβελιανές συνηστώσες ακριβείς στο λ αλλά $\tilde{\lambda}$-ανεξάρτητες της μετρικής Zamolodchikov είναι

$$\begin{aligned} G_{\lambda\lambda} &= \frac{S^2_{a_1\ldots a_m;b_1\ldots b_n}}{(1-\lambda^2)^2} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}) \ , \quad G_{\lambda\tilde{\lambda}} = \mathcal{O}(\tilde{\lambda}) \ , \\ G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}} &= \frac{m!n!S^2_{a_1\ldots a_m;b_1\ldots b_n}}{(1-\lambda^2)^{m+n}} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}). \end{aligned} \tag{Γ'.1.8}$$

Να σημειωθεί ότι στην περίπτωση με $m = 2$, $n = 0$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ότι $S_{ab;0} = \delta_{ab}$.

Γ'.2 Στοιχεία από την $SU(N)$ θεωρία ομάδων

Εδώ χρησιμοποιούμε τις αναφορές [92, 93, 94]. Έστω μία βάση $N \times N$ άιχνων πινάκων $\{t_a\}$, $a = 1, 2, \ldots, N^2 - 1$ και τη συνθήκη κανονικοποίησης

$$\mathrm{Tr}(t_a t_b) = \delta_{ab} \ . \tag{Γ'.2.1}$$

Ο πολλαπλασιασμός για δύο απ' αυτούς αναλύεται με τον εξής τρόπο

$$t_a t_b = \frac{\delta_{ab}}{N}\mathbb{I}_{N\times N} + \frac{1}{2}(if_{abc} + d_{abc})t_c \ , \tag{Γ'.2.2}$$

όπου το f_{abc} είναι πλήρως αντισυμμετρικό και το d_{abc} συμμετρικό και με μηδενικό ίχνος. ο συντελεστής του πρώτου όρου προκύπτει από τη συνθήκη κανονικοποίησης. Στην κανονικοποίησή μας η ιδιοτιμή του τετραγωνικού Casimir είναι

$$c_G = 2N \ . \tag{Γ'.2.3}$$

Σε μία δεδομένη μη-αναγώγιμη αναπαράσταση R με στοιχεία $(t_a)_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \dim R$ η σχέση πληρότητας είναι ρεαδς

$$(t_a)_{\alpha\beta}(t_a)_{\gamma\delta} = \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{N}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} \ . \tag{Γ'.2.4}$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού των πινάκων οδηγεί στις ταυτότητες

$$\begin{aligned} &f_{abe}f_{cfe} + f_{cae}f_{bfe} + f_{bce}f_{afe} = 0 \ , \\ &d_{abe}f_{cfe} + d_{cae}f_{bfe} + d_{bce}f_{afe} = 0 \ , \\ &f_{abe}f_{cfe} = \frac{4}{N}(\delta_{ac}\delta_{bf} - \delta_{bc}\delta_{af}) + d_{ace}d_{bfe} - d_{bce}d_{afe} \ . \end{aligned} \tag{Γ'.2.5}$$

Από την τελευταία συστέλοντας με Φρομ τηε λαστ ονε βψ ςοντραστινγ ωιτη δ_{bf} και επανονοματίζοντας τους δείκτες

$$d_{acd}d_{bcd} = 2\frac{N^2-4}{N}\delta_{ab} \ . \tag{Γ′.2.6}$$

Από την (Γ′.2.5) συστέλλοντας και επανονοματίζοντας

$$\begin{aligned} f_{eaf}f_{fbg}f_{gce} &= -Nf_{abc} \ , \\ d_{eaf}f_{fbg}f_{gce} &= -Nd_{abc} \ , \\ d_{eaf}d_{fbg}f_{gce} &= \frac{N^2-4}{N}f_{abc} \ , \\ d_{eaf}d_{fbg}d_{gce} &= \frac{N^2-12}{N}d_{abc} \ . \end{aligned} \tag{Γ′.2.7}$$

Συμμετρικοί τανυστές με παραπάνω δείκτες υπολογίζονται επαγωγικά

$$d^{(m+1)}_{a_1a_2\ldots a_{m+1}} = d^{(m)}_{a(a_1a_2\ldots a_{m-1}}d_{a_ma_{m+1})a} \ , \qquad m = 3,4\ldots \ , \tag{Γ′.2.8}$$

όπου στη συμμετροποίηση περιλαμβάνουμε τα αντίστοιχα βάρη. Για παράδειγμα

$$d^{(4)}_{a_1a_2a_3a_4} = \frac{1}{3}(d_{aa_1a_2}d_{a_3a_4a} + d_{aa_3a_1}d_{a_2a_4a} + d_{aa_2a_3}d_{a_1a_4a}) \ . \tag{Γ′.2.9}$$

Η παρακάτω χρήσιμη ταυτότητα

$$f_{ab(a_1}d^{(m)}_{a_2a_3\ldots a_m)b} = 0 \ . \tag{Γ′.2.10}$$

Μπορεί εύκολα να εξαχθεί υπενθυμίζοντας ότι ο $C^{(m)} = d_{a_1a_2\ldots a_m}t^{a_1}t^{a_2}\ldots t^{a_m}$ είναι ένας τελεστής Casimir οπότε $[C^{(m)}, t^a] = 0, a = 1,2,\ldots \dim G$. Απ′ αυτό με κατάλληλες συστολές λαμβάνουμε την ταυτότητα

$$d^{(m)}_{ab(a_1\ldots a_{m-2}}f_{c)bd}f_{dae} = \Delta_m d_{cea_1\ldots a_{m-2}} \ , \qquad \Delta_m = -\frac{c_G}{m-1} \ , \qquad m = 2,3,\ldots \ , \tag{Γ′.2.11}$$

όπως επίσης και

$$f_{dea}f_{db(a}d^{(m)}_{a_1\ldots a_{m-2}c)b} = 0 \ . \tag{Γ′.2.12}$$

Να σημειωθεί πως για $m = 2$, χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $d^{(2)}_{ab} = \delta_{ab}$.

Γ′.3 Συμπλήρωμα στους διαταρακτικούς υπολογισμούς

Η βασική τεχνική για τους υπολογισμούς μας είναι η χρήση του Θεωρήματος Stokes σε δύο διαστάσεις

$$\int_M d^2x\, \partial_\mu F^\mu = \frac{i}{2}\int_{\partial M} \{d\bar{z}F^z - dzF^{\bar{z}}\}\ , \qquad (\Gamma'.3.1)$$

όπου M είναι μία διδιάστατη περιοχή και M μόια διδιάστατη περιοχή με ∂M είναι η καμπύλη με θετικό δείκτη στροφής όταν ολοκληρώνουμε αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού. Οι συναρτήσεις που ολοκληρώνουμε δεν είναι ολομορφικές οπότε δε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Cauchy αλλά μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι το μόνο μέρος που συνεισφέρει στα ολοκληρώματα παρκάτω, είναι οι ολοκληρώσεις γύρω από τους πόλους. Στις περισσότερες εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες όπου τα z και $\bar{z}$ αντιμετωπίζονται ως ξεχωριστές μεταβλητές με μη μηδενική συνεισφορά από τους επιφανειακούς όρους εν γένει. Στα παρακάτω τα x_i συμβολίζουν τα εξωτερικά σημεία , ενώ τα z_i τα εσωτερικά με $i = 1, 2$. Τα βασικά ολοκληρώματα είναι

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_1)^2(\bar{z}-\bar{x}_2)^2} = \pi\delta^{(2)}(x_1-x_2)\ , \qquad (\Gamma'.3.2)$$

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_1)^2(\bar{z}-\bar{x}_2)} = -\frac{\pi}{x_{12}}\ , \qquad \int \frac{d^2z}{(z-x_1)(\bar{z}-\bar{x}_2)^2} = \frac{\pi}{\bar{x}_{12}}\ , \qquad (\Gamma'.3.3)$$

$$\int \frac{d^2z}{(z_1-x_1)(z_1-x_2)(\bar{z}_1-\bar{x}_2)} = \frac{\pi}{x_{12}}\ln\frac{\varepsilon^2}{|x_{12}|^2}\ , \qquad (\Gamma'.3.4)$$

$$\int \frac{d^2z}{(z_1-x_1)(\bar{z}_1-\bar{x}_1)(\bar{z}_1-\bar{x}_2)} = -\frac{\pi}{\bar{x}_{12}}\ln\frac{\varepsilon^2}{|x_{12}|^2}\ . \qquad (\Gamma'.3.5)$$

Επίσης στους υπολογισμούς μας εμφανίζονται και τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_2)^2(\bar{z}-\bar{z}_1)(\bar{z}-\bar{z}_2)} = \frac{\pi}{\bar{z}_{12}}\Big(\frac{1}{z_1-x_2}-\frac{1}{z_2-x_2}\Big)\ , \qquad (\Gamma'.3.6)$$

$$\int \frac{d^2z}{(z-z_1)(z-x_1)^2(\bar{z}-\bar{z}_1)^2} = \frac{\pi}{\bar{z}_1-\bar{x}_1}\frac{1}{(z_1-x_1)^2}\ , \qquad (\Gamma'.3.7)$$

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_2)(z-x_1)^2(\bar{z}-\bar{z}_1)^2} = \frac{\pi}{x_{12}^2}\Big(\frac{1}{\bar{x}_2-\bar{z}_1}-\frac{1}{\bar{x}_1-\bar{z}_1}\Big)\ , \qquad (\Gamma'.3.8)$$

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_2)(\bar{z}-\bar{x}_2)} - \int \frac{d^2z}{(z-x_2)(\bar{z}-\bar{x}_1)} = -\pi\ln\frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}\ , \qquad (\Gamma'.3.9)$$

$$\int \frac{d^2z}{(z_1-z)(\bar{z}-\bar{z}_1)(\bar{z}-\bar{z}_2)} = \frac{\pi}{\bar{z}_{12}} \ln \frac{\epsilon^2}{|z_{12}|^2} \ , \tag{Γ'.3.10}$$

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_2)(\bar{z}-\bar{z}_1)(\bar{z}-\bar{z}_2)} = \frac{\pi}{\bar{z}_{12}} \ln \frac{|z_2-x_2|^2}{|z_1-x_2|^2} \ , \tag{Γ'.3.11}$$

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_1)^2(\bar{z}-\bar{z}_1)^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|z-z_1|^2} = -\frac{\pi}{|z_1-x_1|^2} \ , \tag{Γ'.3.12}$$

και

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^2z}{(z-x_1)^2(\bar{z}-\bar{z}_1)^2} \ln \frac{|z-x_2|^2}{|z_1-x_2|^2} \\ &\qquad = \frac{\pi}{x_{12}}\Big(\frac{1}{\bar{x}_1-\bar{z}_1} - \frac{1}{\bar{x}_2-\bar{z}_1}\Big) + \frac{\pi}{(\bar{z}_1-\bar{x}_2)(z_1-x_1)} \end{aligned} \tag{Γ'.3.13}$$

και

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_1)(z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_1)^2} = \frac{\pi}{|z_1-x_1|^2} \ , \tag{Γ'.3.14}$$

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_1)(z-x_2)(\bar{z}-\bar{z}_1)^2} = \frac{\pi}{x_{12}}\Big(\frac{1}{\bar{x}_1-\bar{z}_1} - \frac{1}{\bar{x}_2-\bar{z}_1}\Big) \ , \tag{Γ'.3.15}$$

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_2)^2(z-x_1)(\bar{z}-\bar{x}_1)} = -\frac{\pi}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} - \frac{\pi}{x_{12}^2} \ , \tag{Γ'.3.16}$$

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_2)^2(z-x_1)(\bar{z}-\bar{x}_2)} = \frac{\pi}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \ , \tag{Γ'.3.17}$$

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_2)^2(\bar{z}-\bar{z}_1)^2} \ln \frac{|z-x_2|^2}{|z_1-x_2|^2} = \frac{\pi}{|z_1-x_2|^2} \ . \tag{Γ'.3.18}$$

Γ'.3.1 Ολομορφικός τελεστής $\mathcal{O}^{(2,0)}$

Γυρίζοντας στην (6.5.18) βλέπουμε ένα σύνολο πέντε ολοκληρωμάτων τα οποία συμβολίζουμε με $I_1, \ldots, I_5$. Ξεκινώντας με το I_1 έχουμε

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d^2z_1 d^2z_2}{z_{12}(z_2-x_1)^2\bar{z}_{12}} \int \frac{d^2z_3}{(z_3-x_2)^2\bar{z}_{13}\bar{z}_{23}} \\ &= \pi \int \frac{d^2z_1}{z_1-x_2} \int \frac{d^2z_2}{z_{12}(z_2-x_1)^2\bar{z}_{12}^2} - \pi \int \frac{d^2z_1 d^2z_2}{z_{12}(z_2-x_1)^2(z_2-x_2)\bar{z}_{12}^2} \ , \end{aligned} \tag{Γ'.3.19}$$

όπου χρησιμοποιούμε το διαχωρισμό

$$\frac{1}{\bar{z}_{13}\bar{z}_{23}} = \frac{1}{\bar{z}_{12}}\Big(\frac{1}{\bar{z}_3-\bar{z}_1} - \frac{1}{\bar{z}_3-\bar{z}_2}\Big) \ . \tag{Γ'.3.20}$$

Εφαρμόζοντας τον ίδιο διαχωρισμό στο δεύτερο ολοκλήρωμα, οι δύο πρώτοι όροι που ανακύπτουν ακυρώνουν το πρώτο ολοκλήρωμα και μένει

$$I_1 = -\pi \int \frac{d^2 z_1}{z_1 - x_2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2)(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}^2} \ . \tag{Γ′.3.21}$$

Ο πλήρης διαχωρισμός του z_2 ολοκληρώματος περιλαμβάνει τρεις όρους

$$\frac{1}{(z_2 - x_2)(z_2 - x_1)^2} = \frac{1}{x_{12}^2}\Big(\frac{1}{z_2 - x_2} - \frac{1}{z_2 - x_1}\Big) + \frac{1}{x_{12}} \frac{1}{(z_2 - x_1)^2} \ , \tag{Γ′.3.22}$$

αλλά ο τρίτος μηδενίζεται στο σχήμα επανακανονικοποίησης που έχουμε επιλέξει.

$$I_1 = \frac{\pi^2}{x_{12}^2}\Big(\int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} - \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)}\Big) \ . \tag{Γ′.3.23}$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα λαμβάνουμε

$$I_1 = -\frac{\pi^3}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \ . \tag{Γ′.3.24}$$

Το I_2 δίνεται από

$$I_2 = \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}} \int \frac{d^2 z_3}{z_{13}(z_3 - x_2)^2 \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \ . \tag{Γ′.3.25}$$

Χρησιμοποιώντας την (Γ′.3.22), αντικαθιστώντας το z_2 με z_3 έχουμε

$$\begin{aligned} I_2 = \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}} \Big(& \frac{1}{(z_1 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_3}{z_{13} \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \\ & + \frac{1}{(z_1 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2) \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} + \frac{1}{z_1 - x_2} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2)^2 \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \Big) \end{aligned} \tag{Γ′.3.26}$$

και με τη βοήθεια των (Γ′.3.10), (Γ′.3.11) και (Γ′.3.6), το ολοκλήρωμα I_2 γίνεται

$$\begin{aligned} I_2 = \pi & \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|z_{12}|^2} \\ & + \pi \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}^2} \ln \frac{|z_2 - x_2|^2}{|z_1 - x_2|^2} \\ & - \pi \int \frac{d^2 z_1}{z_1 - x_2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2)(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}^2} \ . \end{aligned} \tag{Γ′.3.27}$$

Κάνοντας χρήση της (Γ′.3.12), (Γ′.3.13) και (Γ′.3.8) αντίστοιχα, προκύπτει

$$\begin{aligned} I_2 = &-\pi^2 \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)^2 (z_1 - x_1)(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)} - \frac{\pi^2}{x_{12}} \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)^2 (\bar{z}_1 - \bar{x}_1)} \\ &+ \frac{\pi^2}{x_{12}^2} \Big(\int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} - \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)} \Big) \\ &+ \pi^2 \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)^2 (z_1 - x_1)(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} \end{aligned} \tag{Γ′.3.28}$$

και τελικά από την (Γ′.3.16), (Γ′.3.9) και (Γ′.3.17) αντίστοιχα

$$I_2 = \frac{\pi^3}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \ . \tag{Γ′.3.29}$$

Παρακάτω υπολογίζουμε το I_3 που δίνεται από

$$I_3 = \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \int \frac{d^2 z_2}{\bar{z}_{12}} \int \frac{d^2 z_3}{z_{23} (z_3 - x_2)^2 \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \ . \tag{Γ′.3.30}$$

Εφαρμόζοντας την (Γ′.3.22) έχουμε

$$\begin{aligned} I_3 = &\int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \int \frac{d^2 z_2}{\bar{z}_{12}} \Big\{ \frac{1}{(z_2 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_3}{z_{23} \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \\ &+ \frac{1}{(z_2 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2) \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} + \frac{1}{z_2 - x_2} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2)^2 \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \Big\} \ . \end{aligned} \tag{Γ′.3.31}$$

Με χρήση της (Γ′.3.10) όπου $z_1 \to z_2$, (Γ′.3.11) και της (Γ′.3.6) αντίστοιχα

$$\begin{aligned} I_3 = &\int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \Big\{ - \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2)^2 \bar{z}_{12}} \ln \frac{\epsilon^2}{|z_{12}|^2} \\ &+ \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2)^2 \bar{z}_{12}^2} \ln \frac{|z_2 - x_2|^2}{|z_1 - x_2|^2} + \frac{1}{z_1 - x_2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2) \bar{z}_{12}^2} \Big\} \end{aligned} \tag{Γ′.3.32}$$

και από την (Γ′.3.8) με $x_1 \to x_2$ και (Γ′.3.18) αντίστοιχα, μία ακύρωση μεταξύ του δεύτερου και τρίτου όρου του ανακύπτοντος ολοκληρώματος λαμβάνει χώρα και μένει

$$I_3 = \pi^2 \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} = -\frac{\pi^3}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} - \frac{\pi^3}{x_{12}^2} \ , \tag{Γ′.3.33}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (Γ′.3.16).

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το I_4 όπου

$$I_4 = \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_1) \bar{z}_{12}} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2)^2 \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \tag{Γ′.3.34}$$

Με χρήση της (Γ′.3.6) έχουμε

$$\begin{aligned} I_4 = \pi \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (z_1 - x_2)} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_1)\bar{z}_{12}^2} \\ - \pi \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_1)(z_2 - x_2)\bar{z}_{12}^2} \end{aligned} \tag{Γ′.3.35}$$

και με μία γρήγορη ματιά στην (Γ′.3.15) δίνει

$$I_4 = -\pi^2 \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)} - \frac{\pi^2}{x_{12}} \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} \ . \tag{Γ′.3.36}$$

Τελικώς με τη βοήθεια της (Γ′.3.17) φτάνουμε στην

$$I_4 = -\frac{\pi^3}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} + \frac{\pi^3}{x_{12}^2} \ . \tag{Γ′.3.37}$$

Ο υπολογισμός μας ολοκληρώνεται με το I_5 όπου

$$I_5 = x_{12} \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \int \frac{d^2 z_2}{\bar{z}_{12}(z_2 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_1)(z_3 - x_2)\bar{z}_{13}\bar{z}_{23}} \ , \tag{Γ′.3.38}$$

το οποίο γράφεται

$$- x_{12} \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \int \frac{d^2 z_2}{\bar{z}_{12}(z_2 - x_2)^2} \left\{ \int \frac{d^2 z_3}{(x_1 - z_3)\bar{z}_{13}\bar{z}_{23}} + \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2)\bar{z}_{13}\bar{z}_{23}} \right\} \tag{Γ′.3.39}$$

και από την (Γ′.3.11) η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} \pi \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \Big\{ \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2)^2 \bar{z}_{12}^2} \ln \frac{|z_2 - x_1|^2}{|z_1 - x_1|^2} \\ - \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2)^2 \bar{z}_{12}^2} \ln \frac{|z_2 - x_2|^2}{|z_1 - x_2|^2} \Big\} \ . \end{aligned} \tag{Γ′.3.40}$$

Χρησιμοποιώντας εκ νέου την (Γ′.3.13) και (Γ′.3.18)

$$\begin{aligned} I_5 = \frac{\pi^2}{x_{12}} \Big\{ \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} + \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)} \\ - \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} \Big\} \ , \end{aligned} \tag{Γ′.3.41}$$

η οποία δίνει

$$I_5 = \frac{2\pi^3}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \ . \tag{Γ′.3.42}$$

Συλλέγοντας τα αποτελέσματά μας τελικώς

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0 \ , \tag{Γ'.3.43}$$

όπως δηλώσαμε στο κύριο μέρος της εργασίας.

Γ'.4 Συμπλήρωμα στην ενότητα 5

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τον πίνακα ανώμαλων διαστάσεων για το πρότυπο [47] το οποίο περιέχει αύτο- και αμοιβαίες αλληλεπιδράσεις ρευμάτων. Έχουμε

$$\gamma_{ab}{}^{cd} = \gamma_1 \delta_a^c \delta_b^d \ , \quad \gamma_{ab}{}^{c'd} = \tilde{\gamma}_1 \delta_a^c \delta_b^d \ , \quad \gamma_{a'b}{}^{cd} = \gamma_2 \delta_a^c \delta_b^d \ , \quad \gamma_{a'b}{}^{c'd} = \tilde{\gamma}_2 \delta_a^c \delta_b^d \ ,$$

όπου οι συντελεστές δίνονται από τις (6.4.15) και (6.4.16). Επίσης

$$\begin{aligned}
\gamma_{ab'}{}^{cd'} &= \frac{c_G \lambda^2}{2\Delta^3} \Big(-k_1^2 f_{10}(\lambda) + k_2^2 f_{11}(\lambda, \tilde{\lambda}) + k_1 k_2 f_{12}(\lambda, \tilde{\lambda}) \Big) \delta_a^c \delta_b^d \ , \\
f_{10}(\lambda) &= 2\lambda(1-\lambda)^2 \ , \qquad f_{11}(\lambda, \tilde{\lambda}) = \lambda \tilde{\lambda}^4 (\lambda - \tilde{\lambda}) \ , \\
f_{12}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda}^2 (1-\lambda) \big(2 + 3\lambda - \tilde{\lambda}(3 + \lambda + \lambda^2) + \tilde{\lambda}^2 (1+\lambda) \big) \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{ab'}{}^{c'd'} &= \frac{c_G \lambda_0^{-1} \lambda \tilde{\lambda}}{2\Delta^3} \Big(-k_1^2 f_{13}(\lambda, \tilde{\lambda}) + k_2^2 f_{14}(\lambda, \tilde{\lambda}) + k_1 k_2 f_{15}(\lambda, \tilde{\lambda}) \Big) \delta_a^c \delta_b^d \ , \\
f_{13}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \lambda \big(1 - \lambda(3 - \tilde{\lambda}^2) + \lambda^2 (2 - \tilde{\lambda}) \big) + \tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda}), \qquad f_{14}(\lambda, \tilde{\lambda}) = f_{11}(\lambda, \tilde{\lambda}) \ , \\
f_{15}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda}^2 \big(2 + \lambda(1 - 2\lambda) - \tilde{\lambda}(3 - \lambda - \lambda^3) + \tilde{\lambda}^2 (1 - \lambda^2) \big) \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{a'b'}{}^{cd'} &= -\frac{c_G \lambda \tilde{\lambda}}{2\Delta^3} \left(\sqrt{k_1^3 k_2} f_{16}(\lambda, \tilde{\lambda}) + \sqrt{k_1 k_2^3} f_{17}(\lambda, \tilde{\lambda}) \right) \delta_a^c \delta_b^d \ , \\
f_{16}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= (1-\lambda)^2 \big(\lambda(1-\lambda) + \tilde{\lambda}(1+\lambda)(1 + \lambda + \lambda^2) - \tilde{\lambda}^2 (1+\lambda)^2 \big) \ , \\
f_{17}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda}^2 \big(-2 + \lambda^2 (1 + \lambda^2) + \tilde{\lambda}(2 - \lambda - \lambda^3) \big)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\gamma_{a'b'}{}^{c'd'} &= \frac{c_G \tilde{\lambda}^2}{2\Delta^3} \Big(k_2^2 f_{18}(\lambda, \tilde{\lambda}) - k_1 k_2 f_{19}(\lambda, \tilde{\lambda}) \Big) \delta_a^c \delta_b^d \\
f_{18}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda}^2 \big(2(1 - \tilde{\lambda}) - \lambda^3 (\lambda - \tilde{\lambda}) \big), \\
f_{19}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda} \big(2(1 - \tilde{\lambda}) + \lambda^5 \big) - \lambda^2 \big((1 - \tilde{\lambda})(2 + 3\tilde{\lambda}) - \lambda(3 - 2\tilde{\lambda}) + \lambda^2 (1 + \tilde{\lambda}^2) \big)
\end{aligned}$$

Bibliography

[1] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal.*Conformal field theory, Springer, 1997.*

[2] Joshua D. Qualls *Lectures on Conformal Field Theory*, 1511.04074

[3] R. Blumenhagen and E. Plauschinn,*Introduction to conformal field theory,*

[4] Ginsparg, *Applied conformal field theory* https://arxiv.org/abs/hep-th/9108028

[5] A.B. Zamolodchikov, *Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory*, JETP Lett. **43** (1986) 730.

[6] Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen, *Supergravity*, Supergravity.

[7] Silviu Pufu, *The F-Theorem and F-Maximazation*, https://arxiv.org/abs/1608.02960.

[8] John L. Cardy, *Is there a C-theorem in four dimensions?*, Phys.Lett.B 215 (1988) 749-752.

[9] Zohar Komargodski, Adam Schwimmer *On renormalization group flows in four dimensions*, https://arxiv.org/abs/1107.3987.

[10] Joseph Polchinski, *Renormalization and effective Lagrangians*, 10.1016/0550-3213(84)90287-6

[11] D.Friedan *Nonlinear Models in 2+ϵ Dimensions*, PhysRevLett.45.1057

[12] G. Georgiou and K. Sfetsos, *A new class of integrable deformations of CFTs*, JHEP **1703** (2017) 083, arXiv:1612.05012 [hep-th].

[13] G. Georgiou and K. Sfetsos, *Integrable flows between exact CFTs*, JHEP **1711**, 078 (2017), arXiv:1707.05149 [hep-th].

[14] K. Sfetsos and D.C. Thompson, *Spacetimes for λ-deformations*, JHEP **1412** (2014) 164, arXiv:1410.1886 [hep-th].

[15] K. Sfetsos and K. Siampos, *Integrable deformations of the $G_{k_1} \times G_{k_2}/G_{k_1+k_2}$ coset CFTs*, Nucl. Phys. **B927**, 124 (2018), arXiv:1710.02515v2 [hep-th].

[16] K. Sfetsos, *Integrable interpolations: From exact CFTs to non-Abelian T-duals*, Nucl. Phys. **B880** (2014) 225, arXiv:1312.4560 [hep-th].

[17] J. Balog, P. Forgacs, Z. Horvath and L. Palla, *A New family of SU(2) symmetric integrable sigma models,* Phys. Lett. **B324** (1994) 403, hep-th/9307030.

[18] Konstadinos Sfetsos, Daniel C. Thompson, *On non-abelian T-dual geometries with Ramond fluxes*, arXiv:1012.1320 [hep-th]

[19] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, *All-loop anomalous dimensions in integrable λ-deformed σ-models*, Nucl. Phys. **B901** (2015) 40, arXiv:1509.02946 [hep-th].

[20] George Georgiou, Eftychia Sagkrioti, Konstantinos Sfetsos, Konstantinos Siampos *An exact symmetry in λ-deformed CFTs* arXiv:1911.02027 [hep-th]

[21] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, *All-loop correlators of integrable λ-deformed σ-models*, Nucl. Phys. **B909** (2016) 360, 1604.08212 [hep-th].

[22] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, *λ-deformations of left-right asymmetric CFTs*, Nucl. Phys. **B914** (2017) 623, arXiv:1610.05314 [hep-th].

[23] G. Georgiou, E. Sagkrioti, K. Sfetsos and K. Siampos, *Quantum aspects of doubly deformed CFTs*, Nucl. Phys. **B919** (2017) 504, arXiv:1703.00462 [hep-th].

[24] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, *Double and cyclic λ-deformations and their canonical equivalents*, Phys. Lett. **B771**, 576 (2017), arXiv:1704.07834 [hep-th].

[25] E. Sagkrioti, K. Sfetsos and K. Siampos, *RG flows for λ-deformed CFTs*, Nucl. Phys. **B930** (2018) 499, arXiv:1801.10174 [hep-th].

[26] D. Kutasov, *String Theory and the Nonabelian Thirring Model*, Phys. Lett. **B227** (1989) 68.

[27] D. Kutasov, *Duality Off the Critical Point in Two-dimensional Systems With Non-abelian Symmetries*, Phys. Lett. **B233** (1989) 369.

[28] G. Itsios, K. Sfetsos and K. Siampos, *The all-loop non-Abelian Thirring model and its RG flow*, Phys. Lett. **B733** (2014) 265, arXiv:1404.3748 [hep-th].

[29] K. Sfetsos and K. Siampos, *Gauged WZW-type theories and the all-loop anisotropic non-Abelian Thirring model*, Nucl. Phys. **B885** (2014) 583, arXiv:1405.7803 [hep-th].

[30] B. Gerganov, A. LeClair and M. Moriconi, *On the beta function for anisotropic current interactions in 2-D*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 4753, hep-th/0011189.

[31] A. LeClair, *Chiral stabilization of the renormalization group for flavor and color anisotropic current interactions*, Phys. Lett. **B519** (2001) 183, hep-th/0105092.

[32] C. Appadu and T. J. Hollowood, *Beta function of k deformed $AdS_5 \times S^5$ string theory*, JHEP **1511** (2015) 095, arXiv:1507.05420 [hep-th].

[33] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, *Integrable double deformation of the principal chiral model*, Nucl. Phys. **B891** (2015) 312, arXiv:1410.8066 [hep-th].

[34] A.A. Tseytlin, *Conditions of Weyl Invariance of Two-dimensional σ model From Equations of Stationarity of 'Central Charge' Action*, Phys. Lett. **B194** (1987) 63.

[35] A.A. Tseytlin, *On sigma model RG flow, 'central charge' action and Perelman's entropy*, Phys. Rev. **D75** (2007) 064024, hep-th/0612296.

[36] S. Demulder, S. Driezen, A. Sevrin and D. C. Thompson, *Classical and Quantum Aspects of Yang-Baxter Wess-Zumino Models*, JHEP **1803** (2018) 041, arXiv:1711.00084 [hep-th].

[37] A.B. Zamolodchikov, *Thermodynamic Bethe ansatz for RSOS scattering theories*, Nucl. Phys. **B358** (1991) 497.

[38] Al.B. Zamolodchikov, *On the thermodynamic Bethe ansatz equation in sinh-Gordon model*, J. Phys. **A39** (2006) 12863, hep-th/0005181.

[39] D. Bernard and A. Leclair, *Residual Quantum Symmetries of the Restricted Sine-Gordon Theories*, Nucl. Phys. **B340** (1990) 721.

[40] C. Crnkovic, G. M. Sotkov and M. Stanishkov, *Renormalization Group Flow for General $SU(2)$ Coset Models*, Phys. Lett. **B226** (1989) 297.

[41] C. Ahn, D. Bernard and A. LeClair, *Fractional Supersymmetries in Perturbed Coset CFTs and Integrable Soliton Theory*, Nucl. Phys. **B346** (1990) 409.

[42] Al. B. Zamolodchikov, *TBA equations for integrable perturbed $SU(2)_k \times SU(2)_l/SU(2)_{k+l}$ coset models*, Nucl. Phys. **B366** (1991) 122.
V. A. Fateev and Al. B. Zamolodchikov, *Integrable perturbations of ZN parafermion models and the O(3) sigma model*, Phys. Lett. **B271** (1991) 91.

[43] F. Ravanini, *Thermodynamic Bethe ansatz for $G_k x G_l/G_{k+l}$ coset models perturbed by their $\phi_{1,1,Adj}$ operator*, Phys. Lett. **B282**, 73 (1992), hep-th/9202020.

[44] P. Forgacs, Z. Horvath and L. Palla, *Spontaneous Compactification To Nonsymmetric Spaces*, Z. Phys. **C30** (1986) 261.

[45] D. Lüst, *Compactification of Ten-dimensional Superstring Theories Over Ricci Flat Coset Spaces*, Nucl. Phys. **B276** (1986) 220.

[46] G. Georgiou and K. Sfetsos, *Integrable flows between exact CFTs*, JHEP **1711** (2017) 078, arXiv:1707.05149 [hep-th].

[47] G. Georgiou and K. Sfetsos, *Novel all loop actions of interacting CFTs: Construction, integrability and RG flows*, Nucl. Phys. **B937** (2018) 371,arXiv:1809.03522 [hep-th]].

[48] G. Georgiou and K. Sfetsos, *The most general λ-deformation of CFTs and integrability*, JHEP **1903** (2019) 094, arXiv:1812.04033 [hep-th].

[49] S. Driezen, A. Sevrin and D. C. Thompson, *Integrable asymmetric λ-deformations*, JHEP **1904**, 094 (2019) arXiv:1902.04142 [hep-th].

[50] G. Georgiou, P. Panopoulos, E. Sagkrioti, K. Sfetsos, K. Siampos, *The exact C-function in integrable λ-deformed theories*, Phys. Lett. **B782** (2018) 613-18, arXiv:1805.03731 [hep-th].

[51] E. Sagkrioti, K. Sfetsos and K. Siampos, *Weyl anomaly and the C-function in λ-deformed CFTs*, Nucl. Phys. **B938** (2019) 426, arXiv:1810.04189 [hep-th].

[52] K. Sfetsos and K. Siampos, *The anisotropic λ-deformed SU(2) model is integrable*, Phys. Lett. **B743** (2015) 160, arXiv:1412.5181 [hep-th].

[53] K. Sfetsos, K. Siampos and D.C. Thompson, *Generalised integrable λ- and η-deformations and their relation*, Nucl. Phys. **B899** (2015) 489, arXiv:1506.05784 [hep-th].

[54] D. Kutasov, *String Theory and the Nonabelian Thirring Model*, Phys. Lett. **B227** (1989) 68.

[55] B. Gerganov, A. LeClair and M. Moriconi, *On the beta function for anisotropic current interactions in 2-D*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 4753, hep-th/0011189.

[56] A. LeClair, *Chiral stabilization of the renormalization group for flavor and color anisotropic current interactions*, Phys. Lett. **B519** (2001) 183, hep-th/0105092.

[57] C. Appadu and T.J. Hollowood, *Beta function of k deformed $AdS_5 \times S^5$ string theory*, JHEP **1511** (2015) 095, arXiv:1507.05420 [hep-th].

[58] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, *Double and cyclic λ-deformations and their canonical equivalents*, Phys. Lett. **B771** (2017) 576, arXiv:1704.07834 [hep-th].

[59] E. Sagkrioti, K. Sfetsos and K. Siampos, *RG flows for λ-deformed CFTs*, Nucl. Phys. **B930** (2018) 499, arXiv:1801.10174 [hep-th].

[60] G. Ecker and J. Honerkamp, *Application of invariant renormalization to the nonlinear chiral invariant pion Lagrangian in the one-loop approximation*, Nucl. Phys. **B35** (1971) 481.
J. Honerkamp, *Chiral multiloops*, Nucl. Phys. **B36** (1972) 130.
D. Friedan, *Nonlinear Models in Two Epsilon Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1057 and *Nonlinear Models in Two + Epsilon Dimensions*, Annals Phys. **163** (1985) 318.

[61] Georgios Itsios, Konstantinos Sfetsos, Konstantinos Siampos, Alessandro Torrielli *The classical Yang-Baxter equation and the associated Yangian symmetry of gauged WZW-type theories* https://arxiv.org/abs/1409.0554

[62] K. Sfetsos and K. Siampos, *Integrable deformations of the $G_{k_1} \times G_{k_2}/G_{k_1+k_2}$ coset CFTs*, Nucl. Phys. **B927** (2018) 124, arXiv:1710.02515 [hep-th].

[63] T.J. Hollowood, J.L. Miramontes and D.M. Schmidtt, *Integrable Deformations of Strings on Symmetric Spaces*, JHEP **1411** (2014) 009, arXiv:1407.2840 [hep-th].

[64] T.J. Hollowood, J.L. Miramontes and D. Schmidtt, *An Integrable Deformation of the $AdS_5 \times S^5$ Superstring*, J. Phys. **A47** (2014) 49, 495402, arXiv:1409.1538 [hep-th].

[65] S. Demulder, K. Sfetsos and D.C. Thompson, *Integrable λ-deformations: Squashing Coset CFTs and $AdS_5 \times S^5$*, JHEP **07** (2015) 019, arXiv:1504.02781 [hep-th].

[66] R. Borsato, A.A. Tseytlin and L. Wulff, *Supergravity background of λ-deformed model for $AdS_2 \times S^2$ supercoset*, Nucl. Phys. **B905** (2016) 264, arXiv:1601.08192 [hep-th].

[67] Y. Chervonyi and O. Lunin, *Supergravity background of the λ-deformed $AdS_3 \times S^3$ supercoset*, Nucl. Phys. **B910** (2016) 685, arXiv:1606.00394 [hep-th].

[68] R. Borsato and L. Wulff, *Target space supergeometry of η and λ-deformed strings*, JHEP **1610** (2016) 045, arXiv:1608.03570 [hep-th].

[69] C. Klimčík, *YB sigma models and dS/AdS T-duality*, JHEP **0212** (2002) 051, hep-th/0210095.

[70] C. Klimčík, *On integrability of the YB sigma-model*, J. Math. Phys. **50** (2009) 043508, arXiv:0802.3518 [hep-th].

[71] C. Klimčík, *Integrability of the bi-Yang–Baxter sigma-model*, Letters in Mathematical Physics **104** (2014) 1095, arXiv:1402.2105 [math-ph].

[72] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, *On classical q-deformations of integrable sigma-models*, JHEP **1311** (2013) 192, arXiv:1308.3581 [hep-th].

[73] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, *An integrable deformation of the $AdS_5 \times S^5$ superstring action*, Phys. Rev. Lett. **112**, 051601, arXiv:1309.5850 [hep-th].

[74] G. Arutyunov, R. Borsato and S. Frolov, *S-matrix for strings on η-deformed $AdS_5 \times S^5$*, JHEP **1404** (2014) 002, arXiv:1312.3542 [hep-th].

[75] C. Klimčík and P. Ševera, *Dual non-Abelian duality and the Drinfeld double*, Phys. Lett. **B351** (1995) 455, hep-th/9502122.

[76] K. Sfetsos, *Duality invariant class of two-dimensional field theories*, Nucl. Phys. **B561** (1999) 316, [hep-th/9904188].

[77] B. Vicedo, *Deformed integrable σ-models, classical R-matrices and classical exchange algebra on Drinfel'd doubles*, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015) 355203, arXiv:1504.06303 [hep-th].

[78] B. Hoare and A.A. Tseytlin, *On integrable deformations of superstring sigma models related to $AdS_n \times S^n$ supercosets*, Nucl. Phys. **B897** (2015) 448, arXiv:1504.07213 [hep-th].

[79] C. Klimčík, *η and λ deformations as $\mathcal{E}$-models*, Nucl. Phys. **B900** (2015) 259, arXiv:1508.05832 [hep-th].

[80] C. Klimčík, *Poisson–Lie T-duals of the bi-Yang–Baxter models*, Phys. Lett. **B760** (2016) 345, arXiv:1606.03016 [hep-th].

[81] B. Hoare and F.K. Seibold, *Poisson-Lie duals of the η-deformed* $\mathrm{AdS}_2 \times \mathrm{S}^2 \times \mathrm{T}^6$ *superstring*, JHEP **1808** (2018) 107, arXiv:1807.04608 [hep-th].

[82] O. Lunin and W. Tian, *Scalar fields on λ-deformed cosets*, Nucl. Phys. **B938** (2019) 671, arXiv:1808.02971 [hep-th].

[83] D.M. Schmidtt, *Integrable Lambda Models And Chern-Simons Theories*, JHEP **1705** (2017) 012, arXiv:1701.04138 [hep-th]

and *Lambda Models From Chern-Simons Theories*,
JHEP **1811** (2018) 111, arXiv:1808.05994 [hep-th].

[84] S. Driezen, A. Sevrin and D. C. Thompson, *D-branes in λ-deformations*,
JHEP **1809** (2018) 015, arXiv:1806.10712 [hep-th].

[85] E. Witten, *Nonabelian Bosonization in Two-Dimensions*,
Commun. Math. Phys. **92** (1984) 455.

[86] A.M. Polyakov, *Interaction of Goldstone Particles in Two-Dimensions. Applications to Ferromagnets and Massive Yang-Mills Fields*, Phys. Lett. **B59** (1975) 79.
K. Pohlmeyer, *Integrable Hamiltonian Systems and Interactions Through Quadratic Constraints*, Commun. Math. Phys. **46** (1976) 207.
M. Luscher, *Quantum Nonlocal Charges and Absence of Particle Production in the Two-Dimensional Nonlinear Sigma Model*, Nucl. Phys. **B135** (1978) 1.
M. Luscher and K. Pohlmeyer, *Scattering of Massless Lumps and Nonlocal Charges in the Two-Dimensional Classical Nonlinear Sigma Model*, Nucl. Phys. **B137** (1978) 46.

[87] D. Karabali, Q.H. Park, H.J. Schnitzer and Z. Yang, *A GKO Construction Based on a Path Integral Formulation of Gauged Wess-Zumino-Witten Actions*,
Phys. Lett. **B216** (1989) 307.
D. Karabali and H.J. Schnitzer, *BRST Quantization Of The Gauged WZW Action And Coset Conformal Field Theories*, Nucl. Phys. **B329** (1990) 649.
K. Gawedzki and A. Kupiainen, *G/H Conformal Field Theory from Gauged WZW Model*, Phys. Lett. **B215** (1988) 119.

[88] F.A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge and K. Schoutens, *Extensions Of The Virasoro Algebra Constructed From Kac-Moody Algebras Using Higher Order Casimir Invariants*, Nucl. Phys. **B304** (1988) 348.

[89] Y. Y. Goldschmidt and E. Witten, *Conservation Laws in Some Two-dimensional Models*, Phys. Lett. **B91** (1980) 392

[90] F. Delduc, S. Lacroix, M. Magro and B. Vicedo, *Integrable coupled sigma-models*, Phys. Rev. Lett. **122** (2019) no.4, 041601, arXiv:1811.12316 [hep-th].

[91] F. Delduc, S. Lacroix, M. Magro and B. Vicedo, *Assembling integrable σ-models as affine Gaudin models*, JHEP **1906** (2019) 017, arXiv:1903.00368 [hep-th].

[92] J.A. de Azcarraga, A.J. Macfarlane, A.J. Mountain, J.C. Perez Bueno, *Invariant tensors for simple groups*, Nucl.Phys. **B510** (1998) 657-687, physics/9706006.

[93] L.M. Kaplan and M. Resnikoff, *Matrix Products and the Explicit 3, 6, 9, and 12-j Coefficients of the Regular Representation of* $SU(n)$, Math. Phys. **8** (1967) 2194.

[94] A.J. MacFarlane, A. Sudbery, and P.H. Weisz, *On Gell-Mann's* λ*-Matrices, d- and f-tensors, octets, and parametrizations of* $SU(3)$,
Comm. Math. Phys. Volume **11** (1968) 77-90.