

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Ι. ΜΗΝΑΣ

Γενικευμένες Γεωμετρικές Δομές σε
Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΤΑΥΡΙΝΟΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2021

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Ι. ΜΗΝΑΣ

Γενικευμένες Γεωμετρικές Δομές σε Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Παναγιώτης Σταυρινός, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών (Κύριος Επιβλέπων).

Θεοχάρης Αποστολάτος, Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Θεοδόσιος Χριστοδουλάκης, Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών.

ΛΟΙΠΑ ΜΕΛΗ ΕΠΤΑΜΕΛΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ:

Νεκτάριος Βλαχάκης, Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Εμμανουήλ Σαριδάκης, Κύριος Ερευνητής, Εθνικό Αστεροσκοπείο Αθηνών.

Κωνσταντίνος Αναγνωστόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Γεώργιος Παππάς, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης.

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2021

Ευχαριστίες

Εκφράζω τις θερμότερες ευχαριστίες μου προς τον επιβλέποντα της Διδακτορικής μου Διατριβής, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, Παναγιώτη Σταυρινό, για την καθοδήγηση και την συμβολή του στην εκπόνηση της, καθώς και τα μέλη της Συμβουλευτικής Επιτροπής, Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών, Θεοχάρη Αποστολάτο και Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών, Θεοδόσιο Χριστοδουλάκη. Η υποστήριξή τους και η επιστημονική τους συνεισφορά συνέβαλλε καθοριστικά στην ολοκλήρωση του παρόντος έργου.

Επιθυμώ επίσης να ευχαριστήσω τον Κύριο Ερευνητή του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών, Εμμανουήλ Σαριδάκη και τον συνεργάτη μου, Αλκιβιάδη Τριανταφυλόπουλλο για την συμβολή τους στην δημοσιευμένη μας Εργασία.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Διδάκτορες Αλέξανδρο Κουρέτση και Μαρία Αλεξίου για το πολύτιμο υλικό που ως ένα βαθμό αποτελεί υπόβαθρο της παρούσας Διατριβής.

Θα ήμουν αγνώμων εάν σε αυτό το σημείο δεν ανέφερα την πολύτιμη υποστήριξη που έχω λάβει στο σύνολο της Ακαδημαϊκής μου πορείας από τους γονείς μου, Ιωάννη Μηνά και Ασημίνα Κάκιου. Αυτή η διατριβή είναι αφιερωμένη σε εκείνους μέσα από την καρδιά μου.

Περίληψη

Στόχος της παρούσας διατριβής, είναι η μελέτη κοσμολογικών μοντέλων, τα οποία βασίζονται σε γενικευμένες γεωμετρικές δομές του χωροχρόνου, συγκεκριμένα σε γεωμετρίες Finsler και τύπου Finsler. Οι θεωρίες αυτές αποτελούν μέρος των λεγόμενων ανισοτροπικών θεωριών πεδίου. Η γεωμετρία Finsler, αποτελεί μία φυσική γενίκευση της γεωμετρίας Riemann, στην οποία όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα εξαρτώνται, εκτός από τη θέση, και από ένα όρισμα κατεύθυνσης ή ταχύτητας. Η γεωμετρία Finsler είναι χρήσιμη στη μελέτη της βαρύτητας, καθώς ενσωματώνει την τοπική ανισοτροπία ως εγγενή ιδιότητα του χωροχρόνου, περιγράφει συστήματα με αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας Lorentz, παρέχει πληροφορία για την κίνηση της μάζας και επιτρέπει τον απευθείας υπολογισμό του μετρικού τανυστή από τη Λαγκρανζιανή του συστήματος. Αρχικά, αναπτύσσονται οι βασικές έννοιες της διαφορικής γεωμετρίας πολλαπλοτήτων, μελετώνται τα κύρια στοιχεία της γεωμετρίας Riemann και της γεωμετρίας Finsler και περιγράφονται τα σημαντικότερα σημεία της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, της βαρύτητας και της κοσμολογίας σε χώρο Riemann. Στη συνέχεια, τα παραπάνω εφαρμόζονται στην κοσμολογία Finsler - Randers, όπου η ύλη κινείται στο χωρόχρονο, υπό την ταυτόχρονη επίδραση ενός βαρυτικού και ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Τέλος, ερευνάται το φαινόμενο της Κοσμολογικής Αναπήδησης, δηλαδή της μετάβασης του σύμπαντος από συστολική σε διαστολική φάση με συνεχή τρόπο. Ειδικότερα, έπειτα από μία λεπτομερή ανάλυση της έννοιας και των συνθηκών της κοσμολογικής αναπήδησης, εξετάζεται η δυνατότητα υλοποίησης Αναπήδησης, σε διάφορα μοντέλα τροποποιημένης βαρύτητας, τα οποία βασίζονται σε γεωμετρίες Finsler και τύπου Finsler. Συγκεκριμένα, διερευνώνται οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για τη δημιουργία Αναπήδησης, στην General Very Special Relativity, στο χωρόχρονο Finsler - Randers, σε γενικευμένη βαρύτητα τύπου Finsler στην εφαπτόμενη δέσμη, καθώς και σε μία θεωρία βαθμωτού - τανυστή σε νηματική δέσμη.

Λέξεις-κλειδιά

Τροποποιημένη Βαρύτητα, Τοπική Ανισοτροπία, Γεωμετρία Finsler, Γενικευμένες Εξισώσεις Friedmann, Κοσμολογική Αναπήδηση.

Abstract

The aim of the present dissertation, is the study of cosmological models, which are based on generalized geometric structures of spacetime, especially on Finsler and Finsler-like Geometries. These theories are part of the so called anisotropic field theories. Finsler geometry is a natural generalization of Riemannian geometry, in which all geometric objects depend, besides the position, from a direction or velocity argument as well. Finsler geometry is useful in the study of gravity, as it embeds local anisotropy as an intrinsic property of spacetime, it describes systems which spontaneously violate Lorentz symmetry, it provides information on the motion of mass and it allows the direct calculation of the metric tensor from the Lagrangian of the system. Firstly, we develop the basic concepts of the differential geometry of manifolds, we study the main elements of Riemann geometry and Finsler geometry and we describe the most important points of the general theory of relativity, gravity and cosmology in a Riemannian space. Subsequently, we apply the above to Finsler - Randers cosmology, where matter moves in spacetime, under the simultaneous influence of a gravitational and an electromagnetic field. Finally, we investigate the phenomenon of cosmological Bounce, that is the transition of the universe from a contracting to an expanding phase in a continuous way. Specifically, after a detailed analysis of the notion and the conditions of cosmological Bounce, we examine the possibility of Bounce realization, in various modified gravity models, which are based on Finsler and Finsler-like geometries. In particular, we investigate the conditions which must be satisfied for a Bounce creation, in General Very Special Relativity, in Finsler - Randers spacetime, in generalized Finsler-like gravity on the tangent bundle, as in a scalar - tensor theory on the fiber bundle.

Keywords

Modified Gravity, Local Anisotropy, Finsler Geometry, Generalized Friedmann Equations, Cosmological Bounce.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
0 Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες	5
0.1 Η έννοια της Διαφορίσιμης Πολλαπλότητας	5
0.1.1 Χάρτης και συμβιβαστοί Χάρτες	5
0.1.2 Άτλας και ισοδύναμοι Άτλαντες	6
0.1.3 Ορισμός Διαφορίσιμης Πολλαπλότητας	6
0.2 Γεωμετρικά αντικείμενα στην Πολλαπλότητα	7
0.2.1 Παραμετρική καμπύλη στην Πολλαπλότητα	7
0.2.2 Εφαπτόμενος χώρος - Ανταλλοίωτα Διανύσματα	7
0.2.3 Δυϊκός χώρος - Συναλλοίωτα Διανύσματα	8
0.2.4 Τανυστές	9
0.2.5 Φυσική σημασία των Τανυστών	13
0.3 Απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων	14
0.4 Νηματικές Δέσμες	15
0.4.1 Εφαπτόμενη Δέσμη	15
0.4.2 Ορισμός Νηματικής Δέσμης	15
0.4.3 Φυσική σημασία των Νηματικών Δεσμών	16
1 Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας <i>Riemann</i>	17
1.1 Μετρικός Τανυστής	17
1.2 Συναλλοίωτη Διαφόριση	20
1.3 Διαφόριση <i>Lie</i>	24

1.4	Παράλληλη μετατόπιση και μετρική συμβατότητα	25
1.5	Γεωδαισιακές	26
1.6	Ο Τανυστής Καμπυλότητας	27
1.7	Ταυτότητες <i>Bianchi</i>	28
1.8	Γεωδαισιακή Απόκλιση	30
1.9	Σύμμορφοι Μετασχηματισμοί της Μετρικής	32
2	Στοιχεία Γεωμετρίας <i>Finsler</i>	37
2.1	Η χρησιμότητα της Γεωμετρίας <i>Finsler</i>	37
2.2	Θεμελιώδης συνάρτηση δομής	39
2.3	Μετρικός Τανυστής και Τανυστής στρέψης του <i>Cartan</i>	40
2.4	Συνοχή και Τανυστής Καμπυλότητας	41
2.4.1	Θεωρία <i>Berwald</i>	41
2.4.2	Θεωρία <i>Cartan</i>	44
3	Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, Βαρύτητα και Κοσμολογία	49
3.1	Εξισώσεις Πεδίου του <i>Einstein</i>	49
3.1.1	Το Ολοκλήρωμα Δράσης του Βαρυτικού Πεδίου	49
3.1.2	Λογισμός των Μεταβολών	50
3.2	Ασθενές βαρυτικό πεδίο και βαρυτικά κύματα	53
3.2.1	Γραμμικοποιημένες Εξισώσεις Πεδίου	54
3.2.2	Βαρυτικά Κύματα	55
3.3	Συναλλοίωτη Κινηματική	55
3.3.1	Η έννοια της Ομοτοπίας	55
3.3.2	Εξισώσεις <i>Raychaudhuri</i>	56
3.3.3	Ενεργειακές συνθήκες	58
3.3.4	Η περίπτωση των μηδενικών γεωδαισιακών	60
3.4	Κοσμολογία <i>FLRW</i>	63
3.4.1	Η έννοια της Υπερεπιφάνειας	63
3.4.2	Μετρική ομογενούς και ισότροπου χωροχρόνου	64

3.4.3	Εξισώσεις <i>Friedmann</i>	66
3.5	Το καθιερωμένο πρότυπο της Κοσμολογίας	69
3.6	Κοσμολογικός Πληθωρισμός	73
3.6.1	Η αναγκαιότητα τροποποίησης του καθιερωμένου προτύπου	73
3.6.2	Το βαθμωτό πεδίο <i>inflaton</i>	75
3.7	Θεωρίες Βαθμωτού-Τανυστή	78
4	Κοσμολογία <i>Finsler – Randers</i>	85
4.1	Κοσμολογία τύπου <i>FLRW</i> σε χωρόχρονο <i>Finsler – Randers</i>	86
4.1.1	Μετρική <i>Finsler – Randers</i>	86
4.1.2	Εγγυτατοποιημένη μετρική και επιλογή συνοχής	87
4.1.3	Καμπυλότητα και τανυστής <i>Ricci</i>	89
4.1.4	Εξισώσεις πεδίου <i>Einstein</i> και εξίσωση <i>Friedmann</i>	90
4.1.5	Βασικές Κοσμολογικές παράμετροι	91
4.1.6	Εξισώσεις <i>Raychaudhuri</i>	93
4.1.7	Λύσεις των εξισώσεων πεδίου <i>Einstein</i>	94
4.1.8	Συμπεράσματα	96
4.2	Ασθενές βαρυτικό πεδίο σε χώρο <i>Finsler – Randers</i> και βαρυτικά κύματα	97
4.2.1	Γραμμικοποιημένη Θεωρία Βαρύτητας	97
4.2.2	Εφαρμογή στα Βαρυτικά Κύματα	101
4.2.3	Γεωδαισιακή Απόκλιση και Εξισώσεις <i>Raychaudhuri</i>	104
5	Κοσμολογική Αναπήδηση σε Τροποποιημένα Μοντέλα Βαρύτητας	107
5.1	Η έννοια της Αναπήδησης	107
5.2	Συνθήκες Αναπήδησης	111
5.3	Βαρύτητα <i>Finsler</i>	113
5.4	Αναπήδηση στην <i>GVSR</i>	114
5.5	Αναπήδηση σε χώρο <i>Finsler – Randers</i>	117
5.6	Βαρύτητα τύπου <i>Finsler</i> στην Εφαπτόμενη Δέσμη	118
5.6.1	Γεωμετρία της Εφαπτόμενης Δέσμης	119

5.6.2	Εξισώσεις Πεδίου	124
5.6.3	Εξισώσεις <i>Raychaudhuri</i> και κοσμολογία τύπου <i>FLRW</i>	128
5.7	Θεωρία Βαθμωτού-Τανυστή στην Νηματική Δέσμη	130
5.7.1	Το θεωρούμενο Μοντέλο	130
5.7.2	Αναπήδηση σε Ολονομική Βάση	135
5.7.3	Αναπήδηση σε Μη Ολονομική Βάση	136
5.8	Συμπεράσματα	140
	Σύνοψη	143
	Βιβλιογραφία	147

Εισαγωγή

Η μαθηματική περιγραφή της βαρύτητας και των φαινομένων που σχετίζονται με αυτή, είχε ήδη αρχίσει από την εποχή του Νεύτωνα, με τη διατύπωση του νόμου της παγκόσμιας έλξης. Ο μαθηματικός φορμαλισμός που χρησιμοποιήθηκε για αυτή την ανάλυση, ήταν ανάλογος με αυτόν που υιοθετήθηκε αργότερα, για την περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Πρόκειται για ένα νόμο αντιστρόφου τετραγώνου, στον οποίο ο χώρος και ο χρόνος, αντιμετωπίζονται ως δύο αυτοτελείς οντότητες, οι οποίες υπάρχουν ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Η επανάσταση που επέφερε η διατύπωση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, στις αρχές του εικοστού αιώνα από τον **Einstein**, έγκειται κυρίως στην εισαγωγή μίας ενιαίας θεώρησης του χώρου και του χρόνου. Ο χρόνος δεν είναι πλέον μία στατική μεταβλητή της κίνησης, αλλά μία δυναμική μεταβλητή που συμμετέχει στην κίνηση. Με τον τρόπο αυτό, το βαρυτικό πεδίο περιγράφεται πλέον, ως συνάρτηση της μετρικής του χωροχρόνου, καθώς και των γεωμετρικών αντικειμένων που προκύπτουν από αυτή, όπως είναι η συσχετισμένη συνοχή (σύμβολα **Christoffel** και η βαθμωτή καμπυλότητα του **Ricci**, η οποία παίζει το ρόλο της Λαγκρανζιανής πυκνότητας του πεδίου. Η δυναμική του βαρυτικού πεδίου, καθορίζεται εξ ολοκλήρου από τις εξισώσεις πεδίου του **Einstein**, οι οποίες παράγονται από τη στασιμοποίηση της δράσης, που προκύπτει από την παραπάνω Λαγκρανζιανή πυκνότητα. Έκτοτε, έχουν διατυπωθεί διάφορα μοντέλα για τη βαρύτητα, η αξιοπιστία των οποίων, καθορίζεται από την συμφωνία ή μη των αποτελεσμάτων τους, με τα πειραματικά και παρατηρησιακά δεδομένα.

Όπως ακριβώς συμβαίνει και με την κβαντική θεωρία του **Planck**, η θεωρία της σχετικότητας του **Einstein**, μολονότι φαινομενικά έρχεται σε αντίθεση με τον κλασικό κόσμο της καθημερινής εμπειρίας, στην πραγματικότητα είναι καθόλα συμβατή με αυτόν. Πράγματι, στην περίπτωση της ειδικής θεωρίας, η μη σχετικιστική κλασική μηχανική, αναχτάται στο όριο όπου η σχετική ταχύτητα κίνησης των δύο συστημάτων αναφοράς τείνει στο μηδέν. Κατ' αναλογία, η γενική θεωρία της σχετικότητας, δίνει ως ειδική περίπτωση τη συνήθη Ευκλείδεια περιγραφή, όταν αγνοηθεί η καμπύλωση του χωροχρόνου λόγω της παρουσίας της βαρύτητας, δηλαδή όταν ο μετρικός τανυστής εκφυλιστεί στο δέλτα του **Kronecker**.

Σήμερα βρισκόμαστε στο επόμενο στάδιο εξέλιξης της θεωρίας. Τα παρατηρησιακά δεδομένα, συγκλίνουν σε αποτελέσματα, των οποίων η ερμηνεία επιτάσσει την ανάγκη περαιτέρω επέκτασης της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν η ύπαρξη της σκοτεινής ύλης και της σκοτεινής ενέργειας, καθώς και η παρατηρούμενη στο σύμπαν ανισοτροπία. Στο πλαίσιο αυτό, έχουν αναπτυχθεί και εξα-

κολουθούν να αναπτύσσονται οι λεγόμενες τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας. Αυτές αφορούν, είτε στην αλλαγή μορφής της δράσης του βαρυτικού πεδίου (θεωρίες $F(R)$, $F(T)$), είτε στην τροποποίηση της ίδιας της γεωμετρίας του χωροχρόνου (Finsler, Lagrange), με τρόπο τέτοιο ώστε να παραμένει πλήρως συμβατή με τη γεωμετρία Riemann. Στην παρούσα διατριβή, θα μελετήσουμε μία συγκεκριμένη κλάση τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας, που χρησιμοποιούν ως υπόβαθρο τη γεωμετρία Finsler.

Η έρευνα στην κοσμολογία έχει αναπτυχθεί σημαντικά στη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, τόσο από παρατηρησιακής όσο και από θεωρητικής άποψης. Πιο συγκεκριμένα, με τη βοήθεια μίας σειράς παρατηρήσεων της κοσμικής μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου, βρισκόμαστε σε μία εποχή όπου η επιμελής εξέταση των πρώιμων στιγμών του σύμπαντος έχει καταστεί δυνατή. Το παράδειγμα της πληθωριστικής κοσμολογίας, το οποίο είχε προταθεί τις προηγούμενες δεκαετίες, εφαρμόστηκε για την κατανόηση των αρχικών συνθηκών στην κοσμολογία της θερμής μεγάλης έκρηξης, και σύντομα έγινε η επικρατέστερη θεωρία για την περιγραφή του πρώιμου σύμπαντος. Είναι ενδιαφέρον να γνωρίζουμε παρόλα αυτά, πως η πληθωριστική κοσμολογία δεν είναι το μοναδικό πρότυπο που περιγράφει το πρώιμο σύμπαν. Εξάλλου, τα γενικά πληθωριστικά μοντέλα παρουσιάζουν δυσκολία στο να εξηγήσουν την ύπαρξη του ιδιάζοντος σημείου κατά τη στιγμή της γένεσης του σύμπαντος. Ως συνέπεια πρόσφατων πειραματικών εξελίξεων και θεωρητικών προκλήσεων, πολλές νέες προτάσεις έχουν διατυπωθεί από κοσμολόγους για τη θεωρία του πρώιμου σύμπαντος, πέρα από το πρότυπο της πληθωριστικής $\Lambda - CDM$ κοσμολογίας. Συγκεκριμένα, υπάρχει ένα προ της μεγάλης έκρηξης σενάριο, η διαμόρφωση του εκπυρωτικού/κυκλικού σύμπαντος, το υποτιθέμενο παράδειγμα του αναφαινόμενου σύμπαντος, και από την οπτική των φαινομενολογικών θεωρήσεων, η Κοσμολογία αερίου χορδών, καθώς και σενάρια με Αναπήδηση ύλης.

Στο ερευνητικό πεδίο της Κοσμολογικής Αναπήδησης, σε συνδυασμό με τις πιθανές αναλύσεις της σημειακής ανωμαλίας της μεγάλης έκρηξης, αξιοσημείωτη πρόοδος έχει επιτευχθεί από κοσμολόγους κατά την περασμένη δεκαετία.

Στην παρούσα εργασία, έχει υιοθετηθεί η αθροιστική σύμβαση του Einstein, σύμφωνα με την οποία, κάθε βωβός (επαναλαμβανόμενος επάνω και κάτω) δείκτης, αθροίζεται σε όλο το εύρος τιμών του.

Η παρούσα διατριβή διαρθρώνεται σε έξι Κεφάλαια:

Στο Κεφάλαιο 0, δίνεται ο γενικός ορισμός της διαφορίσιμης πολλαπλότητας, αναλύονται τα βασικά χαρακτηριστικά των διαφόρων γεωμετρικών αντικειμένων (πραγματικές συναρτήσεις, διανύσματα, τανυστές) επί αυτής και εισάγονται οι έννοιες της εφαπτόμενης και της νηματικής δέσμης.

Στο Κεφάλαιο 1, αναπτύσσονται τα κύρια στοιχεία της γεωμετρίας του φυσικού χωροχρόνου της γενικής σχετικότητας, της γεωμετρίας Riemann. Μεταξύ άλλων μελετώνται, ο μετρικός τανυστής, η συναλλοίωτη διαφορίση, η συνοχή, η παράλληλη μετατόπιση, οι γεωδαισιακές, η καμπυλότητα, η απόκλιση των γεωδαισιακών και οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί.

Στο Κεφάλαιο 2, εξετάζεται μία φυσική γενίκευση της γεωμετρίας Riemann, η

γεωμετρία **Finsler**. Μελετάται η θεμελίωση της γεωμετρίας σε δύο εκδοχές ανάλογα με τη χρησιμοποιούμενη συνοχή, τη θεωρία **Berwald** και τη θεωρία **Cartan**.

Στο Κεφάλαιο 3, περιγράφονται οι βασικές έννοιες της γενικής σχετικότητας, της βαρύτητας και της κοσμολογίας. Συγκεκριμένα, παράγονται οι εξισώσεις πεδίου του **Einstein** από αρχή ελαχίστου, οι λύσεις τους (βαρυτικά κύματα) για την περίπτωση ασθενούς πεδίου, οι εξισώσεις **Raychaudhuri**, η μετρική **FLRW** και οι εξισώσεις **Friedman** για ομογενές και ισότροπο σύμπαν. Μελετώνται επίσης, το καθιερωμένο πρότυπο της κοσμολογίας, ο κοσμολογικός πληθωρισμός και οι θεωρίες βαθμωτού - τανυστή.

Στο Κεφάλαιο 4, όλα τα παραπάνω εφαρμόζονται στην κοσμολογία **Finsler - Randers**, όπου η ύλη κινείται στο χωρόχρονο, υπό την ταυτόχρονη επίδραση βαρυτικού και ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 5, αναπτύσσεται το φαινόμενο της Κοσμολογικής Αναπήδησης και εξετάζεται η δυνατότητα υλοποίησης αναπήδησης, σε διάφορα μοντέλα τροποποιημένης βαρύτητας, τα οποία βασίζονται σε γεωμετρίες **Finsler** και τύπου **Finsler**. Συγκεκριμένα, διερευνώνται οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για τη δημιουργία αναπήδησης, στην *general very special relativity*, στο χωρόχρονο **Finsler - Randers**, σε γενικευμένη βαρύτητα τύπου **Finsler** στην εφαπτόμενη δέσμη, καθώς και σε μία θεωρία βαθμωτού - τανυστή σε νηματική δέσμη.

Κεφάλαιο 0

Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

Η έννοια της πολλαπλότητας, αποτελεί γενίκευση της έννοιας της επιφάνειας. Ο ρόλος των πολλαπλοτήτων στη διαφορική γεωμετρία είναι σπουδαίος, καθώς σε αυτές ορίζονται όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα, που αφορούν το θεωρούμενο σύστημα. Κατά τη μελέτη της βαρύτητας, μας ενδιαφέρουν οι πολλαπλότητες που φέρουν μία επιπλέον επιθυμητή ιδιότητα, τη διαφορισιμότητα. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, καθώς επιτρέπει την κατασκευή, σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας, ενός εφαπτόμενου χώρου, ο οποίος έχει δομή διανυσματικού χώρου.

0.1 Η έννοια της Διαφορίσιμης Πολλαπλότητας

0.1.1 Χάρτης και συμβιβαστοί Χάρτες

Έστω M και N δύο σύνολα, για τα οποία κάθε δύο διακριτά σημεία, έχουν γειτονιές οι οποίες είναι ξένες μεταξύ τους. Τέτοια σύνολα ονομάζονται τοπολογικοί χώροι Hausdorff. Ορίζουμε μία απεικόνιση $\phi : M \rightarrow N$ από το χώρο M στο χώρο N , δηλαδή μία διαδικασία αντιστοίχισης, σε κάθε σημείο του M , ενός συγκεκριμένου σημείου του N . Ορίζουμε τη σύνθεση $\psi \circ \phi : M \rightarrow O$ δύο απεικονίσεων $\phi : M \rightarrow N$ και $\psi : N \rightarrow O$, ως εξής:

$$(\psi \circ \phi)(p) = \psi(\phi(p)), \quad p \in M \quad (1)$$

Θεωρούμε ότι η $\phi : M \rightarrow N$ είναι 1 προς 1 και ορίζουμε την αντίστροφη απεικόνιση $\phi^{-1} : N \rightarrow M$, οπότε έχουμε:

$$(\phi^{-1} \circ \phi)(p) = p \quad (2)$$

Θεωρούμε ακόμη, ότι η ϕ είναι αμφισυνεχής, δηλαδή είναι ένας διαφορομορφισμός. Σε αυτή την περίπτωση, οι χώροι M και N καλούνται διαφορομορφικοί. Έστω U μία περιοχή ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου Hausdorff, V μία ανοικτή περιοχή του \mathbb{R}^n και ο διαφορομορφισμός $\phi : U \rightarrow V$, με:

$$p \mapsto \phi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p)), \quad p \in M \quad (3)$$

Το διατεταγμένο ζεύγος (U, ϕ) , καλείται τοπικό σύστημα συντεταγμένων ή χάρτης του M και η n -άδα $(x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$, είναι οι συντεταγμένες του σημείου p σε αυτό το σύστημα. Έστω μία συλλογή χαρτών $\{(U_\kappa, \phi_\kappa)\}$, με $\kappa \in I$, όπου οι περιοχές U_κ καλύπτουν πλήρως τον M , δηλαδή ισχύει:

$$\bigcup_{\kappa \in I} U_\kappa = M \quad (4)$$

Θεωρούμε δύο περιοχές U_κ και U_λ , για τις οποίες ισχύει:

$$U_\kappa \cap U_\lambda \neq \emptyset \quad (5)$$

Αν η απεικόνιση

$$\phi_{\lambda\kappa} = \phi_\lambda \circ \phi_\kappa^{-1} : \phi_\kappa(U_\kappa \cap U_\lambda) \rightarrow \phi_\lambda(U_\kappa \cap U_\lambda) \quad (6)$$

με

$$(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto (x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'}) \quad (7)$$

είναι C^r , αν δηλαδή οι συνιστώσες της έχουν συνεχείς παραγώγους r τάξης, τότε λέμε ότι οι χάρτες (U_κ, ϕ_κ) και $(U_\lambda, \phi_\lambda)$, είναι C^r συμβιβαστοί. Η $\phi_{\lambda\kappa}$, ορίζει έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων στην περιοχή $U_\kappa \cap U_\lambda$ και είναι 1 προς 1. Η αντίστροφη απεικόνιση, ορίζεται ως εξής:

$$\phi_{\lambda\kappa}^{-1} = \phi_{\kappa\lambda} \quad (8)$$

0.1.2 Άτλας και ισοδύναμοι Άτλαντες

Θεωρούμε μία συλλογή $\{(U_\kappa, \phi_\kappa)\}$, με $\kappa \in I$, αποτελούμενη από C^r συμβιβαστούς χάρτες. Υποθέτουμε και πάλι, ότι οι περιοχές U_κ , καλύπτουν πλήρως το χώρο M . Μία τέτοια συλλογή, ονομάζεται C^r άτλας του M . Ορίζουμε τώρα την ισοδυναμία μεταξύ ατλάντων, ως εξής: Δύο C^r άτλαντες $\{(U_\kappa, \phi_\kappa)\}_{\kappa \in I}$ και $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda \in I'}$ λέγονται ισοδύναμοι, αν η συλλογή $\{(U_\mu, \phi_\mu)\}_{\mu \in I \cup I'}$, είναι C^r άτλας.

0.1.3 Ορισμός Διαφορίσιμης Πολλαπλότητας

Κατόπιν της παραπάνω ανάλυσης, είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ορισμό της διαφορίσιμης πολλαπλότητας: Ένας συνεκτικός τοπολογικός χώρος Hausdorff, εφοδιασμένος με μία κλάση ισοδυναμίας C^r ατλάντων ονομάζεται C^r n -διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Μία C^∞ διαφορίσιμη πολλαπλότητα, ονομάζεται λεία πολλαπλότητα.

0.2 Γεωμετρικά αντικείμενα στην Πολλαπλότητα

0.2.1 Παραμετρική καμπύλη στην Πολλαπλότητα

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, τα γεωμετρικά αντικείμενα που αφορούν τη βαρύτητα, ορίζονται σε διαφορίσιμες πολλαπλότητες. Έστω M διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Θεωρούμε C^r με $r \geq 1$ απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$:

$$t \mapsto \gamma(t) \quad (9)$$

Η γ καλείται C^r καμπύλη της M με παράμετρο t . Στην ειδική περίπτωση $r = \infty$, η γ λέγεται λεία καμπύλη της M .

0.2.2 Εφαπτόμενος χώρος - Ανταλλοίωτα Διανύσματα

Συμβολίζουμε $\mathcal{F}M$ το σύνολο των λείων πραγματικών συναρτήσεων επί της M και έστω $f \in \mathcal{F}M$ λεία πραγματική συνάρτηση. Το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης γ στο σημείο $p = \gamma(t)$, ορίζεται ως η απεικόνιση:

$$X : \mathcal{F}M \rightarrow \mathbb{R} \quad (10)$$

Όπου:

$$X(f) = \frac{df}{dt} \quad (11)$$

Η τελευταία σχέση δείχνει, ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα X , είναι απλώς ο διαφορικός τελεστής $\frac{d}{dt}$. Με τον ίδιο τρόπο, ορίζονται τα εφαπτόμενα διανύσματα, για κάθε άλλη C^r παραμετρική καμπύλη, που διέρχεται από το δεδομένο σημείο p . Έτσι, το σύνολο των διαφορικών τελεστών σε κάποιο σημείο της πολλαπλότητας, συμπίπτει με το σύνολο των εφαπτομένων διανυσμάτων, όλων των παραμετρικών καμπυλών που περνούν από το σημείο αυτό και συνεπώς, συνιστούν πραγματικό διανυσματικό χώρο. Ο χώρος αυτός καλείται εφαπτόμενος στο σημείο p της πολλαπλότητας M και συμβολίζεται ως T_pM . Τα στοιχεία του χώρου αυτού, λέγονται ανταλλοίωτα διανύσματα. Ένα διανυσματικό πεδίο X , σε μία περιοχή U της πολλαπλότητας, ορίζεται με την αντιστοίχιση, σε κάθε σημείο p της περιοχής, ενός διανύσματος του εφαπτόμενου χώρου T_pM . Αν η πολλαπλότητά μας θεωρηθεί λεία, μπορούμε να ορίσουμε ένα λείο διανυσματικό πεδίο, αν για κάθε $f \in \mathcal{F}M$, η συνάρτηση $X(f) : U \rightarrow \mathbb{R}$, είναι λεία. Ο χώρος των λείων διανυσματικών πεδίων, συμβολίζεται ως CM . Μία βάση του χώρου αυτού, αποτελείται από ένα σύνολο λείων γραμμικά ανεξάρτητων διανυσματικών πεδίων και καλείται κινούμενο πλαίσιο. Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων (U, ϕ) . Η δράση του διανύσματος $X = \frac{d}{dt}$, που είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη γ , σε μία πραγματική συνάρτηση f , δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) &= \frac{d}{dt}[(f \circ \phi^{-1})(\phi \circ \gamma)] \\ &= \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\mu} \frac{d(\phi \circ \gamma)^\mu}{dt} \end{aligned} \quad (12)$$

ή

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} \quad (13)$$

Η τελευταία εξίσωση, οδηγεί στην εξής μορφή του εφαπτόμενου διανύσματος $\frac{d}{dt}$, σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx^\mu}{dt} \partial_\mu \quad (14)$$

Όπου:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (15)$$

Όπως γνωρίζουμε από το διανυσματικό λογισμό, κάθε διάνυσμα εκφράζεται σε μία συγκεκριμένη βάση, ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης, με συντελεστές τις συνιστώσες του διανύσματος. Στην περίπτωση μας, τα διανύσματα ∂_μ , αποτελούν τη φυσική βάση του εφαπτόμενου χώρου στις συντεταγμένες x^μ , ενώ τα $X^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$, είναι οι συνιστώσες του διανύσματος X στη δεδομένη βάση. Προφανώς, η επιλογή της φυσικής βάσης δεν είναι υποχρεωτική, καθώς ο εφαπτόμενος χώρος, όπως και κάθε άλλος διανυσματικός χώρος, μπορεί να παραχθεί από οποιαδήποτε άλλα διανύσματα βάσης $e_{(\mu)}$. Οι συνιστώσες του X , υπολογίζονται από τη δράση του διαφορικού τελεστή $X = \frac{d}{dt}$, στις συντεταγμένες x^ν , με τη χρήση της προτελευταίας σχέσης:

$$\begin{aligned} X(x^\nu) &= \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{dx^\nu}{dt} = X^\nu \end{aligned} \quad (16)$$

Το παραπάνω πρόβλημα, μπορεί να διατυπωθεί και αντίστροφα: Δοθέντος ενός διανυσματικού πεδίου X , εκπεφρασμένου στη φυσική βάση $X = X^\mu \partial_\mu$, είναι δυνατός ο προσδιορισμός μίας καμπύλης, στην οποία το X είναι εφαπτόμενο, μέσω της σχέσης:

$$X^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \quad (17)$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση, έχει πάντα μοναδική λύση, δεδομένου του αρχικού σημείου $x^\mu(p)$ σε μία περιοχή του. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο, έχει μία μοναδική οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών, σε μία περιοχή οποιουδήποτε σημείου της πολλαπλότητας.

0.2.3 Δυϊκός χώρος - Συναλλοίωτα Διανύσματα

Ορίζουμε τώρα το δυϊκό χώρο T_p^*M του εφαπτόμενου χώρου, ως το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων:

$$\omega(X) = \langle \omega, X \rangle: T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (18)$$

Όπως και ο εφαπτόμενος χώρος, έτσι και ο δυϊκός του, έχει δομή πραγματικού διανυσματικού χώρου. Τα στοιχεία του χώρου αυτού, λέγονται δυϊκά ή συναλλοίωτα διανύσματα.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα συναλλοίωτου διανύσματος, αποτελεί η βαθμίδα μίας συνάρτησης $f \in \mathcal{F}M$, η οποία για ένα διάνυσμα $X = \frac{d}{dt}$, ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} df(X) &= df\left(\frac{d}{dt}\right) \\ &= \frac{df}{dt} \end{aligned} \quad (19)$$

Αντικαθιστώντας $f = x^\mu$ και $X = \partial_\nu$ στην τελευταία έκφραση, αποκτούμε:

$$\begin{aligned} dx^\mu(\partial_\nu) &= \langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \\ &= \delta_\nu^\mu \end{aligned} \quad (20)$$

Η παραπάνω ισότητα δείχνει, ότι το σύνολο $\{dx^\mu\}$, αποτελεί τη δυϊκή βάση της φυσικής βάσης ∂_ν . Επομένως, κάθε δυϊκό διάνυσμα, μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων αυτής της βάσης:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \quad (21)$$

Όπως και για τον εφραπτόμενο χώρο, έτσι και για το δυϊκό του, μπορεί να επιλεγεί οποιαδήποτε άλλη βάση $\theta^{(\nu)}$. Λόγω της δυϊκότητας των δύο χώρων, μεταξύ των διανυσμάτων βάσης τους, θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη:

$$\langle e_{(\mu)}, \theta^{(\nu)} \rangle = \delta_\mu^\nu \quad (22)$$

0.2.4 Τανυστές

Ένας τανυστής k ανταλλοίωτης και l συναλλοίωτης τάξης T σε μία πολλαπλότητα M , ορίζεται ως η πολυγραμμική απεικόνιση:

$$T : \underbrace{T_p^*M \times \cdots \times T_p^*M}_k \text{ στοιχεία} \times \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_l \text{ στοιχεία} \rightarrow \mathbb{R}$$

Ο χώρος $T_p(k, l)$ ή T_l^k που ορίζεται από το σύνολο των (k, l) τανυστών σε ένα συγκεκριμένο σημείο p της πολλαπλότητας M , έχει δομή διανυσματικού χώρου. Μεταξύ δύο (k, l) και (r, s) τανυστών T και S , μπορεί να οριστεί μία πράξη πολλαπλασιασμού, η οποία καλείται τανυστικό γινόμενο, ως εξής:

$$\otimes : T_p(k, l) \times T_p(r, s) \rightarrow T_p(k+r, l+s)$$

με

$$(T \otimes S)(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k+r)}; X_{(1)}, \dots, X_{(l+s)})$$

$$= T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}; X_{(1)}, \dots, X_{(l)})S(\omega^{(k+1)}, \dots, \omega^{(k+r)}; X_{(l+1)}, \dots, X_{(l+s)}) \quad (23)$$

Με βάση τον ορισμό και τις ιδιότητες των ταχυστών, γίνεται εύκολα αντιληπτό, ότι οι πραγματικές συναρτήσεις είναι $(0, 0)$ ταχυστές, τα ανταλλοίωτα διανύσματα είναι $(1, 0)$ ταχυστές, ενώ τα συναλλοίωτα διανύσματα είναι $(0, 1)$ ταχυστές. Ένα ταχυστικό πεδίο στην πολλαπλότητα M , προκύπτει από την αντιστοίχιση ενός ταχυστή, σε κάθε σημείο της M . Από τη συνθήκη γραμμικότητας για την απεικόνιση T , αποκτούμε:

$$\begin{aligned} T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}; X_{(1)}, \dots, X_{(l)}) &= T(\theta^{(v_1)}, \dots, \theta^{(v_k)}; e_{(\mu_1)}, \dots, e_{(\mu_l)})\omega_{v_1}^{(1)} \dots \omega_{v_k}^{(k)} X_{(1)}^{\mu_1} \dots X_{(l)}^{\mu_l} \\ &= T(\theta^{(v_1)}, \dots, \theta^{(v_k)}; e_{(\mu_1)}, \dots, e_{(\mu_l)}) \times e_{(v_1)}(\omega^{(1)}) \dots e_{(v_k)}(\omega^{(k)})\theta^{(\mu_1)}(X_{(1)}) \dots \theta^{(\mu_l)}(X_{(l)}) \\ &= T(\theta^{(v_1)}, \dots, \theta^{(v_k)}; e_{(\mu_1)}, \dots, e_{(\mu_l)}) \\ &\quad \times (e_{(v_1)} \otimes \dots \otimes e_{(v_k)} \otimes \theta^{(\mu_1)} \otimes \dots \otimes \theta^{(\mu_l)})(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}; X_{(1)}, \dots, X_{(l)}) \end{aligned} \quad (24)$$

Οι συνιστώσες ενός (k, l) ταχυστή T , έχουν τη μορφή:

$$T^{v_1 \dots v_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} = T(\theta^{(v_1)}, \dots, \theta^{(v_k)}; e_{(\mu_1)}, \dots, e_{(\mu_l)}) \quad (25)$$

Και επομένως:

$$T = T^{v_1 \dots v_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} e_{(v_1)} \otimes \dots \otimes e_{(v_k)} \otimes \theta^{(\mu_1)} \otimes \dots \otimes \theta^{(\mu_l)} \quad (26)$$

Η τελευταία εξίσωση, δείχνει ότι το σύνολο

$$e_{(v_1)} \otimes \dots \otimes e_{(v_k)} \otimes \theta^{(\mu_1)} \otimes \dots \otimes \theta^{(\mu_l)} \quad (27)$$

παράγει το χώρο των (k, l) ταχυστών και ως εκ τούτου, αποτελεί μία βάση του $T_p(k, l)$. Όπως και προηγουμένως, η φυσική βάση του χώρου, είναι αυτή που προκύπτει από το τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

$$\partial_{v_1} \otimes \dots \otimes \partial_{v_k} \otimes dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_l} \quad (28)$$

Η μορφή ενός (k, l) ταχυστή T στην παραπάνω βάση, είναι η ακόλουθη:

$$T = T^{v_1 \dots v_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} \partial_{v_1} \otimes \dots \otimes \partial_{v_k} \otimes dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_l} \quad (29)$$

Εκτελούμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων:

$$(x^1, x^2, \dots, x^p) \rightarrow (x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{p'}) \quad (30)$$

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων, η φυσική βάση μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\partial_{v'_1} \otimes \dots \otimes \partial_{v'_k} \otimes dx^{\mu'_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu'_l} \\ &= \frac{\partial x^{v_1}}{\partial x^{v'_1}} \partial_{v_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial x^{v_k}}{\partial x^{v'_k}} \partial_{v_k} \otimes \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial x^{\mu'_l}}{\partial x^{\mu_l}} dx^{\mu_l} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_k}}{\partial x^{\nu'_k}} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu'_l}}{\partial x^{\mu_l}} \partial_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\nu_k} \otimes dx^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_l} \quad (31)$$

Η μορφή του ταυυστή, θα πρέπει να είναι η ίδια στα δύο συστήματα συντεταγμένων, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} \partial_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\nu_k} \otimes dx^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_l} \\ &= T^{\nu'_1 \dots \nu'_k}_{\mu'_1 \dots \mu'_l} \partial_{\nu'_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\nu'_k} \otimes dx^{\mu'_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu'_l} \\ &= T^{\nu'_1 \dots \nu'_k}_{\mu'_1 \dots \mu'_l} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_k}}{\partial x^{\nu'_k}} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu'_l}}{\partial x^{\mu_l}} \partial_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\nu_k} \otimes dx^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_l} \end{aligned} \quad (32)$$

Από την τελευταία σχέση, αποκτούμε το νόμο μετασχηματισμού των συνιστωσών του ταυυστή:

$$T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} = T^{\nu'_1 \dots \nu'_k}_{\mu'_1 \dots \mu'_l} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_k}}{\partial x^{\nu'_k}} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu'_l}}{\partial x^{\mu_l}} \quad (33)$$

Ή αντίστροφα:

$$T^{\nu'_1 \dots \nu'_k}_{\mu'_1 \dots \mu'_l} = T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} \frac{\partial x^{\nu'_1}}{\partial x^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu'_k}}{\partial x^{\nu_k}} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_l}}{\partial x^{\mu'_l}} \quad (34)$$

Η θέση στην οποία τοποθετείται ο i -οστός ανταλλοίωτος ή συναλλοίωτος δείκτης ενός ταυυστή T , καλείται i -οστή ανταλλοίωτη ή συναλλοίωτη αντίστοιχα ταυυστική θήκη του T . Ένας (k, l) ταυυστής T , λέγεται συμμετρικός στις ανταλλοίωτες θέσεις α, β , αν ισχύει η ισότητα:

$$\begin{aligned} & T(\omega^{(1)}, \dots, \underbrace{\omega^{(\alpha)}}_{\text{θέση } \alpha}, \dots, \underbrace{\omega^{(\beta)}}_{\text{θέση } \beta}, \dots, \omega^{(k)}; X_{(1)}, \dots, X_{(l)}) \\ &= T(\omega^{(1)}, \dots, \underbrace{\omega^{(\beta)}}_{\text{θέση } \alpha}, \dots, \underbrace{\omega^{(\alpha)}}_{\text{θέση } \beta}, \dots, \omega^{(k)}; X_{(1)}, \dots, X_{(l)}) \end{aligned} \quad (35)$$

Ή υπό μορφή συνιστωσών:

$$T^{\nu_1 \dots \nu_\alpha \dots \nu_\beta \dots \nu_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} = T^{\nu_1 \dots \nu_\beta \dots \nu_\alpha \dots \nu_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} \quad (36)$$

Με ανάλογο τρόπο, ορίζεται η συμμετρικότητα ενός ταυυστή, σε δύο συναλλοίωτες θέσεις. Ομοίως, ένας (k, l) ταυυστής T καλείται αντισυμμετρικός στις ανταλλοίωτες θέσεις α, β , αν ισχύει:

$$\begin{aligned} & T(\omega^{(1)}, \dots, \underbrace{\omega^{(\alpha)}}_{\text{θέση } \alpha}, \dots, \underbrace{\omega^{(\beta)}}_{\text{θέση } \beta}, \dots, \omega^{(k)}; X_{(1)}, \dots, X_{(l)}) \\ &= -T(\omega^{(1)}, \dots, \underbrace{\omega^{(\beta)}}_{\text{θέση } \alpha}, \dots, \underbrace{\omega^{(\alpha)}}_{\text{θέση } \beta}, \dots, \omega^{(k)}; X_{(1)}, \dots, X_{(l)}) \end{aligned} \quad (37)$$

Ή για τις συνιστώσες:

$$T^{v_1 \dots v_\alpha \dots v_\beta \dots v_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} = -T^{v_1 \dots v_\beta \dots v_\alpha \dots v_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} \quad (38)$$

Όπως και προηγουμένως, ανάλογα ορίζεται η αντισυμμετρικότητα ενός τανυστή, σε δύο συναλλοίωτες θέσεις. Δοθέντος ενός (k, l) τανυστή T , μπορεί να προκύψει ένας τανυστής, συμμετρικός σε οποιονδήποτε αριθμό n ανταλλοίωτων ή συναλλοίωτων θέσεων, ως εξής:

$$T^{v_1 \dots v_k}_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r) \dots \mu_l} = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\text{ανακατατάξεις} \\ \text{δεικτών} \\ \mu_1 \dots \mu_r}} T^{v_1 \dots v_k}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r \dots \mu_l} \quad (39)$$

Με ανάλογο τρόπο, μπορεί να προκύψει ένας αντισυμμετρικός τανυστής:

$$T^{v_1 \dots v_k}_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r] \dots \mu_l} = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\text{άρτιες} \\ \text{ανακατατάξεις} \\ \text{δεικτών} \\ \mu_1 \dots \mu_r}} T^{v_1 \dots v_k}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r \dots \mu_l} \\ - \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\text{περιττές} \\ \text{ανακατατάξεις} \\ \text{δεικτών} \\ \mu_1 \dots \mu_r}} T^{v_1 \dots v_k}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r \dots \mu_l} \quad (40)$$

Από τις δύο τελευταίες εκφράσεις, συνάγεται ότι είναι δυνατή η ανάλυση ενός τανυστή, σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό τμήμα, ως προς οποιοσδήποτε δύο ανταλλοίωτες ή συναλλοίωτες θέσεις. Για παράδειγμα, για ένα συναλλοίωτο τανυστή τέταρτης τάξης, έχουμε:

$$T_{\mu\nu\kappa\lambda} = T_{(\mu\nu)\kappa\lambda} + T_{[\mu\nu]\kappa\lambda} \quad (41)$$

Όπου το συμμετρικό και το αντισυμμετρικό τμήμα του τανυστή, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$T_{(\mu\nu)\kappa\lambda} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu\kappa\lambda} + T_{\nu\mu\kappa\lambda}) \quad (42)$$

και

$$T_{[\mu\nu]\kappa\lambda} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu\kappa\lambda} - T_{\nu\mu\kappa\lambda}) \quad (43)$$

Ένας τανυστής καλείται πλήρως συμμετρικός, όταν είναι συμμετρικός σε όλες τις θέσεις του, ανταλλοίωτες ή συναλλοίωτες. Όμοιος είναι και ο ορισμός ενός πλήρως αντισυμμετρικού τανυστή. Ένας πλήρως αντισυμμετρικός $(0, m)$ τανυστής, ονομάζεται διαφορική μορφή. Το σύνολο των m -διαφορικών μορφών μίας πολλαπλότητας, ορίζει διανυσματικό χώρο, ο οποίος συμβολίζεται ως Λ^m . Η πράξη του πολλαπλασιασμού που ορίζεται μεταξύ δύο διαφορικών μορφών A τάξης $(0, m)$ και B τάξης $(0, n)$, λέγεται σφηνοειδές γινόμενο και ορίζεται από τη σχέση:

$$\wedge : \Lambda^m \times \Lambda^n \rightarrow \Lambda^{m+n} \quad (44)$$

με

$$A \wedge B = \frac{(m+n)!}{m!n!} A_{[\mu_1 \dots \mu_m} B_{\nu_1 \dots \nu_n]} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_m} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_n} \quad (45)$$

Όπου η πλήρως αντισυμμετρική συναλλοίωτη βάση, ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} = & \sum_{\substack{\text{άρτιες} \\ \text{ανακατατάξεις} \\ \text{δεικτών} \\ \mu_1 \dots \mu_m}} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_m} \\ & - \sum_{\substack{\text{περιττές} \\ \text{ανακατατάξεις} \\ \text{δεικτών} \\ \mu_1 \dots \mu_m}} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_m} \end{aligned} \quad (46)$$

Μία άλλη πράξη που αφορά τους τανυστές, είναι η συστολή ως προς έναν ανταλλοίωτο και ένα συναλλοίωτο δείκτη. Συγκεκριμένα, η συστολή ενός (k, l) τανυστή, ως προς τους i και j δείκτες, ορίζεται ως η απεικόνιση:

$$C_j^i : T_p(k, l) \rightarrow T_p(k-1, l-1) \quad (47)$$

με

$$C_j^i T = T(\dots, \theta^{(\alpha)}, \dots; \dots, e_{(\alpha)}, \dots) \quad (48)$$

Όπου το $\theta^{(\alpha)}$ έχει τοποθετηθεί στην i συναλλοίωτη θέση και το $e_{(\alpha)}$ στην j ανταλλοίωτη θέση του τανυστή, ενώ το α , παίζει το ρόλο βωβού δείκτη και επομένως αθροίζεται. Οι συνιστώσες του τανυστή $C_j^i T$ που προκύπτει από τη συστολή, υπολογίζονται σε μία δεδομένη βάση ως εξής:

$$\begin{aligned} & C_j^i T^{\nu_1 \dots \nu_{k-1}}_{\mu_1 \dots \mu_{l-1}} \\ & = T(\theta^{(\nu_1)} \dots, \theta^{(\nu_{i-1})}, \theta^{(\alpha)}, \dots, \theta^{(\nu_{k-1})}; e_{(1)}, \dots, e_{(\mu_{j-1})}, e_{(\alpha)}, \dots, e_{(\mu_{l-1})}) \\ & = T^{\nu_1 \dots \nu_{i-1} \alpha \dots \nu_{k-1}}_{\mu_1 \dots \mu_{j-1} \alpha \dots \mu_{l-1}} \end{aligned} \quad (49)$$

Και πάλι ο επαναλαμβανόμενος δείκτης α αθροίζεται.

0.2.5 Φυσική σημασία των Τανυστών

Οι τανυστές είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι σε πολλούς διαφορετικούς τομείς της φυσικής, με ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών, οι κυριότερες εκ των οποίων αφορούν τη μηχανική, τον ηλεκτρομαγνητισμό και τη δυναμική των ρευστών. Διάφορα φυσικά μεγέθη, αναπαριστάνονται μαθηματικά μέσω τανυστών, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις, όπου τα υπό μελέτη φυσικά συστήματα, είναι σχετικιστικά. Στην ειδική περίπτωση όπου ο τανυστής που αναπαριστά μία φυσική ποσότητα είναι δεύτερης τάξης (γεγονός αρκετά σύνηθες στη φυσική), η αναπαράστασή του σε μία συγκεκριμένη βάση, λαμβάνει τη γνωστή σε όλους μας μορφή ενός πίνακα. Το μεγάλο πλεονέκτημα που προκύπτει από τη χρήση των τανυστών, είναι ότι καθιστούν τα φυσικά μεγέθη που αναπαριστούν, ανεξάρτητα από το σύστημα αναφοράς (σύστημα συντεταγμένων) που χρησιμοποιεί ο εκάστοτε παρατηρητής.

0.3 Απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων

Μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων M και N , δεδομένης μίας απεικόνισης $\phi : M \rightarrow N$, μπορούν να οριστούν οι ακόλουθες απεικονίσεις: Η οπισθοχώρηση(1) από την N στην M και η προώθηση(2) από την M στην N . Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος ορισμού των παραπάνω απεικονίσεων, για τα διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα που ορίζονται επί των πολλαπλοτήτων M και N . Ειδικότερα, για μία πραγματική συνάρτηση $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, η οπισθοχώρηση από την N στην M , ορίζεται ως εξής:

$$\phi^* f : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi^* f = f \circ \phi \quad (50)$$

Λόγω του παραπάνω ορισμού, για ένα διάνυσμα $X : \mathcal{F}M \rightarrow \mathbb{R}$, ορισμένο σε ένα σημείο p της πολλαπλότητας M , η προώθηση από την M στην N , ορίζεται ως εξής:

$$\phi_* X : \mathcal{F}N \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\phi_* X)(f) = X(\phi^* f) \quad (51)$$

Με ανάλογο τρόπο, για ένα συναλλοίωτο διάνυσμα $\sigma : T_q N \rightarrow \mathbb{R}$, η οπισθοχώρηση από την N στην M , δίνεται από τη σχέση:

$$\phi^* \sigma : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\phi^* \sigma)(X) = \sigma(\phi_* X) \quad (52)$$

Θεωρούμε τώρα, ότι η απεικόνιση ϕ , είναι διαφορομορφισμός. Στην περίπτωση αυτή, είναι δυνατόν να οριστεί η αντίστροφη απεικόνιση ϕ^{-1} , οπότε οι απεικονίσεις των προηγούμενων ορισμών, μπορούν επίσης να αντιστραφούν. Με τον τρόπο αυτό, η προώθηση μίας πραγματικής συνάρτησης $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ από την N στην M , ορίζεται ως εξής:

$$\phi_* g : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_* g = g \circ (\phi^{-1}) \quad (53)$$

Αντίστοιχα, η οπισθοχώρηση από την N στην M , ενός ανταλλοίωτου διανύσματος $Y : \mathcal{F}N \rightarrow \mathbb{R}$, ορισμένου σε ένα σημείο q της πολλαπλότητας N , δίνεται από την έκφραση:

$$\phi^* Y : \mathcal{F}M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\phi^* Y)(g) = Y(\phi_* g) \quad (54)$$

Ενώ η προώθηση από την M στην N , ενός συναλλοίωτου διανύσματος $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, θα είναι:

$$\phi_* \omega : T_q N \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\phi_* \omega)(Y) = \omega(\phi^* Y) \quad (55)$$

Οι παραπάνω ορισμοί, επεκτείνονται εύκολα, για τα αντίστοιχα βαθμωτά, ανταλλοίωτα και συναλλοίωτα διανυσματικά πεδία, που ορίζονται επί των πολλαπλοτήτων M και N . Γενικεύοντας, αποκτούμε την προώθηση από την M στην N , ενός αυθαίρετου (k, l) ταυυστικού πεδίου T :

$$(\phi_* T)(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(k)}, Y^{(1)}, \dots, Y^{(l)}) = T(\phi^* \sigma^{(1)}, \dots, \phi^* \sigma^{(k)}, \phi^* Y^{(1)}, \dots, \phi^* Y^{(l)}) \quad (56)$$

Και ομοίως την οπισθοχώρηση από την N στην M , ενός (k, l) ταυυστικού πεδίου S :

$$(\phi^* S)(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, X^{(1)}, \dots, X^{(l)}) = S(\phi_* \omega^{(1)}, \dots, \phi_* \omega^{(k)}, \phi_* X^{(1)}, \dots, \phi_* X^{(l)}) \quad (57)$$

1 pullback

2 pushforward

0.4 Νηματικές Δέσμες

0.4.1 Εφαπτόμενη Δέσμη

Θεωρούμε μία λεία πολλαπλότητα M διάστασης n . Σε κάθε σημείο p της πολλαπλότητας, τα εφαπτόμενα διανύσματα σε αυτό, ορίζουν τον εφαπτόμενο χώρο T_pM . Με τον τρόπο αυτό, κάθε σημείο, εκτός από τη θέση x^μ επί της M , χαρακτηρίζεται επίσης από τη θέση $y^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ στον εφαπτόμενο χώρο T_pM . Η ένωση των εφαπτόμενων χώρων που κατασκευάζονται σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας M , καλείται εφαπτόμενη δέσμη της M

$$TM = \cup_{p \in M} T_pM \quad (58)$$

Από τον ορισμό της διαφορίσιμης πολλαπλότητας, αποδεικνύεται εύκολα ότι η TM έχει δομή διαφορίσιμης πολλαπλότητας διάστασης $2n$. Η εφαπτόμενη δέσμη, βρίσκει ευρεία εφαρμογή στη μελέτη φυσικών συστημάτων. Η πολλαπλότητα M αναπαριστά το χωρόχρονο ($n = 4$), οπότε η εφαπτόμενη δέσμη TM , είναι μία οκταδιάστατη πολλαπλότητα, στην οποία κάθε σημείο p , έχει τέσσερις συντεταγμένες θέσης x^μ και τέσσερις συντεταγμένες ταχύτητας $y^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$. Το σημαντικό πλεονέκτημα του να εργάζεται κανείς στην εφαπτόμενη δέσμη, είναι ο διπλάσιος αριθμός βαθμών ελευθερίας. Η εφαπτόμενη δέσμη, μπορεί να θεωρηθεί ως το γεωμετρικό ανάλογο του φασικού χώρου της κλασικής μηχανικής. Αν αντί της ταχύτητας y^μ , ληφθεί η ορμή $p^\mu = m y^\mu$, προκύπτει η συνεφαπτόμενη δέσμη, η οποία έχει δομή καθόλα όμοια με αυτή της TM . Η εφαπτόμενη δέσμη αποτελεί ειδική περίπτωση νηματικής δέσμης, με νήματα τους εφαπτόμενους χώρους στα διάφορα σημεία της πολλαπλότητας. Για λόγους πληρότητας, δίνεται στην επόμενη παράγραφο ο γενικός ορισμός της νηματικής δέσμης.

0.4.2 Ορισμός Νηματικής Δέσμης

Μία C^k νηματική δέσμη (E, M, π, G) , με τυπικό νήμα F , αποτελείται από τις C^k διαφορίσιμες πολλαπλότητες E, M, F , μία C^k ομάδα Lie G (δομική ομάδα), αποτελούμενη από C^k αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις του F στον εαυτό του με πράξη τη σύνθεση, μία οικογένεια $\{U_j\}_{j \in J}$ από περιοχές χαρτών της M που την καλύπτουν ($\cup_{j \in J} U_j = M$) και την C^k επί απεικόνιση (προβολή) $\pi : E \rightarrow M$. Ο χώρος M λέγεται βάση της νηματικής δέσμης. Η σχέση μεταξύ των παραπάνω στοιχείων της νηματικής δέσμης, περιγράφεται από τις εξής απαιτήσεις:

(1) Τοπικά η νηματική δέσμη είναι τετριμμένη. Αυτό σημαίνει ότι οι περιοχές $\pi^{-1}(U_j)$ που καλύπτουν την E , μπορούν να απεικονιστούν αμφιδιαφορίσιμα στο χώρο $U_j \times F$. Υπάρχουν C^k αμφιδιαφορίσιμες Ψ_j που εξαρτώνται από την περιοχή U_j τέτοιες ώστε $\Upsilon_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$. Αν $p \in U_j$ τότε $\pi^{-1}(p) = F_p$ είναι το νήμα που βρίσκεται πάνω από το p . Οι απεικονίσεις Ψ_j , $\forall u \in \pi^{-1}(p)$ έχουν πεδίο τιμών το ζευγάρι $(p, \Phi_{j,p}(u)) \in U_j \times F$, όπου οι απεικονίσεις: $\Phi_{j,p} : \pi^{-1}(p) \rightarrow F$ είναι C^k αμφιδιαφορίσιμες. Οι απεικονίσεις $\Phi_{j,p}$ εξαρτώνται από την περιοχή U_j και το σημείο p . Οι διάδες $\{(U_j, \Psi_j)\}$ αποτελούν τις ροπικές τετριμμενοποιήσεις της νηματικής δέσμης. Επειδή οι

Ψ_j είναι αμφιδιαφορίσιμες θα είναι $\dim E = \dim M + \dim F$.

(2) Η σχέση συμβατότητας δύο απεικονίσεων $\Phi_{j,p}, \Phi_{i,p}$ στο $p \in U_j \cap U_i$ θα είναι η απαίτηση να είναι οι απεικονίσεις: $\Phi_{j,p} \circ \Phi_{i,p}^{-1} : F \rightarrow F$ μέλη της ομάδας $\text{Lie } G$. Η ομάδα $\text{Lie } G$ είναι η δομική ομάδα της νηματικής δέσμης και περιγράφει το συσχετισμό των τετριμμένων υποδεσμών $\{(U_j, \Psi_j)\}$. Για παράδειγμα αν $G = \{e\}$ τότε η νηματική δέσμη είναι καθολικά τετριμμενοποιήσιμη δηλαδή υπάρχει απεικόνιση $\Psi : E \rightarrow M \times F$ αμφιδιαφορίσιμη. Μία τέτοια νηματική δέσμη λέγεται τετριμμένη.

(3) Οι απεικονίσεις $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ για τις οποίες $p \rightarrow g_{ij}(p) = \Phi_{i,p} \circ \Phi_{j,p}^{-1}$ είναι C^k διαφορίσιμες και λέγονται συναρτήσεις μεταβατικότητας. Οι g_{ij} και ικανοποιούν τη σχέση $g_{ij}(p)g_{jk}(p) = g_{ik}(p)$.

0.4.3 Φυσική σημασία των Νηματικών Δεσμών

Μολονότι η εις βάθος κατανόηση των νηματικών δεσμών είναι μία μαθηματικώς σύνθετη διαδικασία, η μελέτη τους είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη γεωμετρία των θεωριών βαθμίδας και συμβάλλει στην απόκτηση σημαντικής γεωμετρικής διαίσθησης. Συγκεκριμένα, στη γεωμετρική θεμελίωση θεωριών βαθμίδας, χρησιμοποιούνται οι αποκαλούμενες κύριες νηματικές δέσμες, δηλαδή αυτές των οποίων η δομική ομάδα και το τυπικό νήμα ταυτίζονται. Η έννοια της νηματικής δέσμης, είναι πολύ γενικότερη αυτής της εφαιπτόμενης δέσμης. Για παράδειγμα, ο χωρόχρονος της Νευτώνειας μηχανικής, έχει τη δομή νηματικής δέσμης, με βάση τον R^1 χρόνο και νήματα τον R^3 χώρο. Τα σημεία διαφορετικών νημάτων (σημεία του χώρου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές), δεν έχουν φυσική σύνδεση μεταξύ τους. Αντίθετα, ο χωρόχρονος Minkowski της ειδικής σχετικότητας, δεν έχει τη δομή νηματικής δέσμης, αφού ο διαχωρισμός του σε χώρο και χρόνο, εξαρτάται από τον εκάστοτε παρατηρητή.

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας *Riemann*

Η γενική θεωρία της σχετικότητας του Einstein, αποκάλυψε την ύπαρξη μίας αμφίδρομης σχέσης εξάρτησης μεταξύ ύλης και χωροχρόνου, η οποία αντανακλάται σε μία αντίστοιχη σχέση μεταξύ βαρύτητας και γεωμετρίας. Έτσι, η γεωμετρία του χωροχρόνου υποδεικνύει στην ύλη πώς να κινηθεί, ενώ η παρουσία της βαρύτητας υποδεικνύει στο χωρόχρονο πώς να καμπυλωθεί. Η σχέση αυτή καθιστά σαφές, γιατί τα βαρυτικά φαινόμενα, αναλύονται και ερμηνεύονται με όρους διαφορικής γεωμετρίας. Στο παρόν κεφάλαιο, θα αναπτυχθούν με συντομία οι βασικές έννοιες της διαφορικής γεωμετρίας, οι οποίες είναι χρήσιμες για τη μελέτη της βαρύτητας και της κοσμολογίας.

1.1 Μετρικός Τανυστής

Σε μία πολλαπλότητα M , η μέτρηση μηκών και γωνιών, γίνεται μέσω του μετρικού τανυστή, ο οποίος ορίζεται ως η απεικόνιση:

$$g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.1)$$

Οι βασικές ιδιότητες του μετρικού τανυστή, είναι οι ακόλουθες: 1) Μη εκφυλισμένος:

$$g(X, Y) = 0, \forall Y \in T_p M \Leftrightarrow X = 0 \quad (1.2)$$

2) Συμμετρικός:

$$g(X, Y) = g(Y, X), \forall X, Y \in T_p M \quad (1.3)$$

3) Θετικά ορισμένος:

$$g(X, X) > 0, \forall X \in T_p M, X \neq 0 \quad (1.4)$$

Το μέτρο $|X|$ ενός διανύσματος X , ορίζεται από τη σχέση:

$$|X| = \sqrt{g(X, X)}, X \in T_p M \quad (1.5)$$

Ενώ η πράξη του εσωτερικού γινομένου \cdot δύο διανυσμάτων X και Y στον εφαπτόμενο χώρο T_pM , από τη σχέση:

$$\cdot : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.6)$$

με

$$X \cdot Y = g(X, Y) = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu \quad (1.7)$$

Συνδυάζοντας τις εκφράσεις αυτές, με τη γνωστή αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου

$$X \cdot Y = |X||Y| \cos(X, Y) \quad (1.8)$$

βρίσκουμε το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ των δύο διανυσμάτων:

$$\cos(X, Y) = \frac{g(X, Y)}{\sqrt{g(X, X)g(Y, Y)}} \quad (1.9)$$

Η τελευταία σχέση, παρέχει τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται, ώστε τα διανύσματα X και Y , να είναι κάθετα μεταξύ τους:

$$g(X, Y) = 0 \quad (1.10)$$

Μία δομή που εφοδιάζει κάθε σημείο μίας πολλαπλότητας M με μία μετρική, ονομάζεται μετρικό τανυστικό πεδίο στην M . Η κανονική μορφή της Ριμάνειας μετρικής, είναι ο 4×4 μοναδιαίος πίνακας:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1) \quad (1.11)$$

Μπορούμε πάντα να επιλέξουμε μία βάση του χώρου, τέτοια ώστε σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο, η μετρική να λάβει την κανονική της μορφή. Αξίζει να σημειωθεί, ότι ο χωρόχρονος *Minkowski*, ο οποίος χρησιμοποιείται στη γενική θεωρία της σχετικότητας, δεν είναι Ριμάνειος, αλλά ψευδοριμάνειος. Η μετρική του χώρου αυτού, παραβιάζει τις ιδιότητες 1 και 3, δηλαδή είναι εκφυλισμένη και αρνητική. Στην περίπτωση αυτή, η κανονική μορφή της μετρικής, σε ένα δεδομένο σημείο του χωροχρόνου, είναι:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad (1.12)$$

Τότε λέμε, ότι ο μετρικός χώρος, είναι τοπικά *Minkowski* με υπογραφή *Lorentz*. Το μέτρο ενός διανύσματος στο χώρο αυτό, δεν είναι υποχρεωτικά θετικό, αλλά μπορεί να είναι θετικό, μηδενικό ή αρνητικό. Τα διανύσματα αυτά, καλούνται χωροειδή, φωτοειδή και χρονοειδή αντίστοιχα, το ίδιο και οι ολοκληρωτικές καμπύλες των αντίστοιχων διανυσματικών πεδίων. Θεωρούμε τώρα δύο σημεία της πολλαπλότητας, το p με συντεταγμένες x^μ και το q με συντεταγμένες $x^\mu + dx^\mu$, τα οποία απέχουν απειροστή απόσταση μεταξύ τους. Η απόσταση ds μεταξύ των δύο σημείων, ορίζεται από τη σχέση:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.13)$$

Θεωρούμε τώρα μία παραμετρική καμπύλη $\gamma(t)$. Αν t_1 και t_2 , είναι οι τιμές της παραμέτρου t στα σημεία p και q αντίστοιχα, το μήκος της καμπύλης μεταξύ των δύο σημείων, θα είναι:

$$l_\gamma(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Οι καμπύλες που αναπαριστούν φυσικές τροχιές σωματιδίων στο χωρόχρονο, μπορεί να είναι χρονοειδείς ή φωτοειδείς. Στην πρώτη περίπτωση, το μέτρο του χρονοειδούς εφαπτόμενου διανύσματος είναι αρνητικό και συνεπώς, αρνητικό είναι και το μήκος της καμπύλης. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί, πραγματοποιώντας αναπαράμετρηση της καμπύλης και ορίζοντας ως παράμετρο τον ιδιόχρονο:

$$d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \tag{1.15}$$

Η τετραταχύτητα U , ορίζεται ως το εφαπτόμενο διάνυσμα μίας φυσικής τροχιάς στο χωρόχρονο και δίνεται, για χρονοειδή $x(\tau)$ τροχιά, από τη σχέση:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{1.16}$$

Το μέτρο της τετραταχύτητας είναι:

$$\begin{aligned}
g(U, U) &= g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \\
&= g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\
&= -c^2
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Ανάλογος είναι ο ορισμός της τετραταχύτητας για φωτοειδή τροχιά. Η τετραορμή ενός σωματιδίου, αποτελεί τη σχετικιστική γενίκευση της κλασικής ορμής και ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
p^\mu &= mU^\mu \\
&= m \frac{dx^\mu}{d\tau}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Με μέτρο:

$$p^\mu p_\mu = -m^2 c^2 \tag{1.19}$$

Με τη βοήθεια του μετρικού τανυστή, μπορεί να οριστεί ο τανυστής Levi-Civita, ο οποίος αναπαριστά το στοιχείο όγκου μίας n -διάστατης πολλαπλότητας στη φυσική βάση, ως η απεικόνιση:

$$\sqrt{|g|} d^n x = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \tag{1.20}$$

Όπου g η ορίζουσα της μετρικής. Χρησιμοποιώντας τη μετρική, μπορούμε να ορίσουμε μία 1 προς 1 και επί απεικόνιση, μεταξύ του εφαπτόμενου $T_p M$ και του δυϊκού $T_p^* M$ χώρου:

$$X^* = g(X, \dots) \tag{1.21}$$

Ή για τις συνιστώσες:

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu \quad (1.22)$$

Ο μετρικός τανυστής, έχει ιδιαίτερη σημασία στη μελέτη της βαρύτητας, καθώς εμπεριέχει όλη την πληροφορία για το βαρυτικό πεδίο. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, όλες οι ποσότητες που αφορούν το χωρόχρονο, όπως η συσχετισμένη συνοχή και ο τανυστής καμπυλότητας, προκύπτουν από το μετρικό τανυστή.

1.2 Συναλλοίωτη Διαφόριση

Όπως μπορεί εύκολα να αποδειχθεί, η μερική παράγωγος ενός οποιουδήποτε (k, l) τανυστή ως προς τις χωροχρονικές συντεταγμένες, δεν αποτελεί τανυστή, καθώς ο νόμος μετασχηματισμού της κάτω από επιτρεπτούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, περιέχει και μη τανυστικούς όρους. Για το λόγο αυτό, είναι αναγκαίος ο ορισμός μίας νέας πράξης διαφορίσης, η δράση της οποίας σε τανυστές, να διατηρεί τον τανυστικό τους χαρακτήρα. Ορίζουμε τη συναλλοίωτη διαφορίση ή γραμμική συνοχή D ενός τανυστικού πεδίου σε μία πολλαπλότητα, ως την απεικόνιση:

$$D : C_l^k M \rightarrow C_{l+1}^k M \quad (1.23)$$

με

$$T \mapsto DT \quad (1.24)$$

και συνιστώσες:

$$(DT)^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\mu_1 \dots \mu_{l+1}} = D_{\mu_{l+1}} T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} \quad (1.25)$$

όπου $C_l^k M$ το σύνολο των (k, l) τανυστικών πεδίων της πολλαπλότητας M . Ως γενίκευση της μερικής διαφορίσης, η νέα αυτή πράξη, θα πρέπει να έχει ορισμένες βασικές ιδιότητες:

1) Γραμμικότητα:

$$D(aT + bS) = aDT + bDS \quad (1.26)$$

2) Κανόνας του *Leibniz* για τις συνιστώσες:

$$\begin{aligned} & D_{\mu_{l+n+1}} (T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} V^{\nu_{k+1} \dots \nu_{k+m}}_{\mu_{l+1} \dots \mu_{l+n}}) \\ &= (D_{\mu_{l+n+1}} T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\mu_1 \dots \mu_l}) V^{\nu_{k+1} \dots \nu_{k+m}}_{\mu_{l+1} \dots \mu_{l+n}} \\ &+ T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\mu_1 \dots \mu_l} (D_{\mu_{l+n+1}} V^{\nu_{k+1} \dots \nu_{k+m}}_{\mu_{l+1} \dots \mu_{l+n}}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

3) Το δ_μ^ν , πρέπει να έχει μηδενική συναλλοίωτη παράγωγο:

$$D_\nu \delta_\mu^\nu = 0 \quad (1.28)$$

Η συνθήκη αυτή, είναι ισοδύναμη με την απαίτηση, οι πράξεις της συναλλοίωτης διαφορίσης και της συστολής, να μετατίθενται μεταξύ τους, για οποιοδήποτε τανυστικό πεδίο:

$$D(C_j^i T) = C_j^i (DT) \quad (1.29)$$

4) Για λόγους συμβατότητας με την έννοια της παραγώγου, η συναλλοίωτη παράγωγος μίας πραγματικής συνάρτησης, πρέπει να συμπίπτει με τη μερική παράγωγο αυτής:

$$D_\mu f = \partial_\mu f \quad (1.30)$$

Η κατευθυνόμενη συναλλοίωτη διαφορίση, ορίζεται ως η απεικόνιση:

$$D_X : CM \times C_l^k M \rightarrow C_l^k M \quad (1.31)$$

με

$$(X, T) \mapsto D_X T \quad (1.32)$$

τέτοια ώστε:

$$D_X T(\underbrace{\dots, \dots}_{k \text{ θέσεις}}, \underbrace{\dots, \dots}_{l \text{ θέσεις}}) = DT(\underbrace{\dots, \dots}_{k \text{ θέσεις}}, \underbrace{\dots, \dots}_{l \text{ θέσεις}}, X) \quad (1.33)$$

Όπου:

$$X = \frac{d}{dt} \quad (1.34)$$

Από τον παραπάνω ορισμό, συνάγεται ότι η κατευθυνόμενη συναλλοίωτη παράγωγος $D_{e_{(\mu)}} T$ ενός ταχυστικού πεδίου T , με κατεύθυνση το διάνυσμα βάσης $e_{(\mu)}$, δίνει την μ συνιστώσα της συναλλοίωτης παραγώγου DT του πεδίου σε αυτή τη βάση. Αποδεικνύεται πολύ εύκολα, ότι η κατευθυνόμενη συναλλοίωτη παράγωγος, διατηρεί όλες τις ιδιότητες της συναλλοίωτης παραγώνου που προαναφέρθηκαν:

$$D_X(aT + bS) = aD_X T + bD_X S \quad (1.35)$$

$$D_X(T \otimes V) = (D_X T) \otimes V + T \otimes (D_X V) \quad (1.36)$$

$$D_X(C_j^i T) = C_j^i (D_X T) \quad (1.37)$$

και

$$D_X f = X(f) = \frac{df}{dt} \quad (1.38)$$

Έστω $(1, 1)$ ταχυστής T . Σε μία βάση $e_{(\mu)}$ για τον εφαπτόμενο χώρο και $\theta^{(\nu)}$ για το δυϊκό χώρο, λόγω των ιδιοτήτων 2 και 4, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} D_{e_{(\mu)}} T &= D_{e_{(\mu)}} (T_\lambda^\kappa e_{(\kappa)} \otimes \theta^{(\lambda)}) \\ &= (e_{(\mu)} T_\lambda^\kappa) e_{(\kappa)} \otimes \theta^{(\lambda)} \\ &\quad + T_\lambda^\kappa (D_{e_{(\mu)}} e_{(\kappa)}) \otimes \theta^{(\lambda)} \\ &\quad + T_\lambda^\kappa e_{(\kappa)} \otimes (D_{e_{(\mu)}} \theta^{(\lambda)}) \end{aligned} \quad (1.39)$$

Ορίζουμε τους συντελεστές συνοχής $G_{\mu\kappa}^\sigma$, ως εξής:

$$D_{e_{(\mu)}} e_{(\kappa)} = G_{\kappa\mu}^\sigma e_{(\sigma)} \quad (1.40)$$

ή

$$G_{\kappa\mu}^{\sigma} = \langle D_{e_{(\mu)}} e_{(\kappa)}, \theta^{(\sigma)} \rangle \quad (1.41)$$

Λόγω της ιδιότητας 3, έχουμε:

$$\begin{aligned} D_{e_{(\mu)}} \delta_{\lambda}^{\kappa} &= D_{e_{(\mu)}} \langle e_{(\lambda)}, \theta^{(\kappa)} \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle e_{(\lambda)}, D_{e_{(\mu)}} \theta^{(\kappa)} \rangle &= - \langle D_{e_{(\mu)}} e_{(\lambda)}, \theta^{(\kappa)} \rangle \\ &= -G_{\lambda\mu}^{\kappa} \end{aligned} \quad (1.42)$$

και επομένως:

$$D_{e_{(\mu)}} \theta^{(\lambda)} = -G_{\sigma\mu}^{\lambda} \theta^{(\sigma)} \quad (1.43)$$

Με αυτόν τον τρόπο, για τον $(1, 1)$ ταυυστή T , στη φυσική βάση, μπορούμε να γράψουμε:

$$D_{\partial_{\mu}} T = (\partial_{\mu} T_{\lambda}^{\kappa} + G_{\sigma\mu}^{\kappa} T_{\lambda}^{\sigma} - G_{\lambda\mu}^{\sigma} T_{\sigma}^{\kappa}) \partial_{\kappa} \otimes dx^{\lambda} \quad (1.44)$$

Η τελευταία εκφραση, μπορεί να γενικευθεί, για οποιονδήποτε (k, l) ταυυστή. Συγκεκριμένα, για ένα ανταλλοιώτο διάνυσμα X , η συναλλοιώτη παράγωγος λαμβάνει τη μορφή:

$$D_{\mu} X^{\nu} = \partial_{\mu} X^{\nu} + G_{\mu\lambda}^{\nu} X^{\lambda} \quad (1.45)$$

Εκτελούμε τώρα έναν επιτρεπτό μετασχηματισμό συντεταγμένων. Εξ ορισμού, η συναλλοιώτη διαφορήση, πρέπει να διατηρεί τον ταυυστικό χαρακτήρα. Επομένως, ο νόμος μετασχηματισμού της DX , θα πρέπει να είναι:

$$\begin{aligned} D_{\mu'} X^{\nu'} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} D_{\mu} X^{\nu} \\ &\Rightarrow \frac{\partial X^{\nu'}}{\partial x^{\mu'}} + G_{\lambda'\mu'}^{\nu'} X^{\lambda'} \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + G_{\lambda\mu}^{\nu} X^{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Οι συνιστώσες $\frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$, μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^{\nu'}}{\partial x^{\mu'}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} X^{\nu} \right) \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} X^{\nu} \right) \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} X^{\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Λόγω της τελευταίας σχέσης, ο νόμος μετασχηματισμού της συναλλοιώτης παραγώγου, γίνεται:

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} X^{\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + G_{\mu'\lambda'}^{\nu'} X^{\lambda'}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} + G_{\mu\lambda}^\nu X^\lambda \right) \\
&\Rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} X^\nu + G_{\lambda'\mu'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} X^\lambda \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} G_{\lambda\mu}^\nu X^\lambda \\
&\Rightarrow \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} + G_{\lambda'\mu'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} G_{\lambda\mu}^\nu \right) X^\lambda = 0 \quad (1.48)
\end{aligned}$$

Η επιλογή του διανυσματικού πεδίου με συνιστώσες X^λ είναι αυθαίρετη, οπότε ο όρος εντός των παρενθέσεων, πρέπει να μηδενίζεται ταυτοτικά. Συνεπώς, ο νόμος μετασχηματισμού των συντελεστών συνοχής, θα είναι:

$$G_{\lambda\mu}^\nu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} G_{\lambda'\mu'}^{\nu'} + \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \quad (1.49)$$

Η τελευταία σχέση, δείχνει με τρόπο προφανή, ότι κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων, οι συντελεστές συνοχής $G_{\mu\lambda}^\nu$, δε μετασχηματίζονται ως συνιστώσες ταυυστή. Η επιλογή της παραπάνω συνοχής, δεν είναι μονοσήμαντη, αλλά εξαρτάται από τις απαιτήσεις που θέτουμε, κατά τον ορισμό της συναλλοίωτης διαφορίσης. Ωστόσο, οποιαδήποτε άλλη συνοχή και αν επιλεγεί, θα έχει τον ίδιο ακριβώς νόμο μετασχηματισμού με την παραπάνω. Οι συντελεστές συνοχής, μπορούν να αναλυθούν σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό τμήμα, ως εξής:

$$G_{\mu\lambda}^\nu = V_{\mu\lambda}^\nu + W_{\mu\lambda}^\nu \quad (1.50)$$

όπου

$$V_{\mu\lambda}^\nu = \frac{1}{2}(G_{\mu\lambda}^\nu + G_{\lambda\mu}^\nu) \quad (1.51)$$

και

$$W_{\mu\lambda}^\nu = \frac{1}{2}(G_{\mu\lambda}^\nu - G_{\lambda\mu}^\nu) \quad (1.52)$$

Ο ταυυστής στρέψης T του χώρου, ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\lambda}^\nu &= G_{\mu\lambda}^\nu - G_{\lambda\mu}^\nu \\
&= 2W_{\mu\lambda}^\nu \quad (1.53)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο μετασχηματισμού των συντελεστών συνοχής, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί, πως η στρέψη είναι ταυυστής:

$$G_{\mu\lambda}^\nu - G_{\lambda\mu}^\nu = (G_{\mu'\lambda'}^{\nu'} - G_{\lambda'\mu'}^{\nu'}) \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \quad (1.54)$$

Αντίθετα, οι ποσότητες $V_{\mu\lambda}^\nu$, δεν είναι συνιστώσες ταυυστή, καθώς μετασχηματίζονται ακριβώς όπως οι συντελεστές συνοχής. Επομένως, τα $V_{\mu\lambda}^\nu$, αποτελούν συντελεστές

συναλλοίωτης, με επιπλέον απαίτηση, τη συμμετρικότητα ως προς τους συναλλοίωτους δείκτες. Ως απεικόνιση, ο ταυιστής στρέψης, μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$T : CM \times CM \rightarrow CM \quad (1.55)$$

με

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y] \quad (1.56)$$

Όπου ο μεταθέτης δύο διανυσμάτων, δίνεται από τη σχέση:

$$[X, Y] = XY - YX : CM \times CM \rightarrow CM \quad (1.57)$$

Στη φυσική βάση, οι συνιστώσες του ταυιστή στρέψης, θα είναι:

$$T(\partial_\mu, \partial_\nu) = T^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda \quad (1.58)$$

1.3 Διαφόριση *Lie*

Σε μία πολλαπλότητα M , θεωρούμε μία μονοπαραμετρική ομάδα αμφιδιαφορίσιμων απεικονίσεων $\phi_t : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, με την ιδιότητα:

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{(t+s)} \quad (1.59)$$

Με την ομάδα αυτή, συσχετίζεται ένα μοναδικό λείο διανυσματικό πεδίο X , το οποίο αντιστοιχεί στο εφαπτόμενο διάνυσμα μίας παραμετρικής καμπύλης $\gamma(t)$, σε κάποιο δεδομένο σημείο p της πολλαπλότητας M :

$$X(p) = \frac{d}{dt} \quad (1.60)$$

Η πρόταση αυτή μπορεί να διατυπωθεί και αντίστροφα, δηλαδή η ομάδα ϕ_t , μπορεί να γεννηθεί από το πεδίο X . Ορίζουμε την παράγωγο *Lie* ενός (k, l) ταυιστή T , σε κάποιο σημείο p της πολλαπλότητας M , ως την απεικόνιση:

$$\mathcal{L} : T_p M \times T_l^k M \rightarrow T_l^k M \quad (1.61)$$

με

$$\mathcal{L}_X T^{\mu_1, \dots, \mu_k}_{\nu_1, \dots, \nu_l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* [T^{\mu_1, \dots, \mu_k}_{\nu_1, \dots, \nu_l}(\phi_t(p))] - T^{\mu_1, \dots, \mu_k}_{\nu_1, \dots, \nu_l}(p)}{t} \quad (1.62)$$

Εξόρισμού, οι ιδιότητες της παραγώγου *Lie*, είναι όμοιες με εκείνες της συναλλοίωτης παραγώγου: 1) Γραμμικότητα:

$$\mathcal{L}_X(aT + bS) = a\mathcal{L}_X T + b\mathcal{L}_X S \quad (1.63)$$

2) Κανόνας του *Leibniz*:

$$\mathcal{L}_X(T \otimes S) = \mathcal{L}_X T \otimes S + T \otimes \mathcal{L}_X S \quad (1.64)$$

3) Μεταθετικότητα με την πράξη της συστολής:

$$\mathcal{L}_X C_j^i T = C_j^i \mathcal{L}_X T \quad (1.65)$$

4) Αναγωγή στη συνήθη παράγωγο, όταν δρα σε πραγματικές συναρτήσεις:

$$\mathcal{L}_X f = X(f) = \frac{df}{dt} \quad (1.66)$$

Για ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα $Y \in CM$, αποδεικνύεται εύκολα, ότι η παράγωγος Lie, έχει τη μορφή:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad (1.67)$$

Ομοίως, για ένα συναλλοίωτο διάνυσμα ω , προκύπτει η σχέση:

$$\langle \mathcal{L}_X \omega, Y \rangle = X \langle \omega, Y \rangle - \langle \omega, [X, Y] \rangle, \quad Y \in T_p M \quad (1.68)$$

Γενικεύοντας, αποκτούμε την ακόλουθη έκφραση της παραγωγής Lie, για έναν (k, l) τανυστή:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X T)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} &= X^\lambda (\partial_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}) \\ &- (\partial_\lambda X^{\mu_1}) T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} - \dots - (\partial_\lambda X^{\mu_k}) T^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \lambda}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\ &+ (\partial_{\nu_1} X^\lambda) T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} + \dots + (\partial_{\nu_l} X^\lambda) T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_{l-1} \lambda} \end{aligned} \quad (1.69)$$

1.4 Παράλληλη μετατόπιση και μετρική συμβατότητα

Σε μία πολλαπλότητα M , θεωρούμε παραμετρική καμπύλη $\gamma(t)$, με εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο:

$$X = \frac{d}{dt} \quad (1.70)$$

Θεωρούμε ακόμη, ότι η πολλαπλότητα M , είναι εφοδιασμένη με τη συνοχή D , με συντελεστές $G_{\mu\lambda}^{\nu}$. Ορίζουμε την παράλληλη μετατόπιση ενός (k, l) τανυστή T ως προς τη συνοχή D , ως τη συνθήκη

$$D_X T = 0 \quad (1.71)$$

επί της καμπύλης $\gamma(t)$. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι ο τανυστής T , είναι σταθερός κατά μήκος της $\gamma(t)$, ως προς τη συνοχή D . Έστω δύο διανυσματικά πεδία Y και Z , τα οποία μετατοπίζονται παράλληλα κατά μήκος της καμπύλης $\gamma(t)$, ως προς τη συνοχή D . Η συναλλοίωτη παράγωγος του εσωτερικού γινομένου των δύο πεδίων κατά μήκος της $\gamma(t)$, θα είναι:

$$\begin{aligned} D_X g(Y, Z) &= X^\kappa D_\kappa (g_{\mu\nu} Y^\mu Z^\nu) \\ &= X^\kappa (D_\kappa g_{\mu\nu}) Y^\mu Z^\nu \end{aligned} \quad (1.72)$$

Η ποσότητα αυτή, είναι εν γένει μη μηδενική, εκτός και αν ισχύει ταυτοτικά:

$$Dg = 0 \quad (1.73)$$

Η τελευταία συνθήκη, καλείται μετρική συμβατότητα και είναι ιδιαίτερα σημαντική στη φυσική, καθώς οδηγεί σε διατήρηση του μέτρου ενός διανύσματος και της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων.

1.5 Γεωδαισιακές

Σε μία πολλαπλότητα M , αναζητούμε μία καμπύλη $\gamma(t)$, η οποία θα αποτελεί γενίκευση της ευθείας. Μία γνωστή ιδιότητα της ευθείας στον Ευκλείδειο χώρο, είναι ότι αποτελεί τη συντομότερη διαδρομή, μεταξύ δύο σημείων τα οποία συνδέει. Θα μπορούσαμε επομένως, να ορίσουμε τις γεωδαισιακές, ως καμπύλες ελάχιστου μήκους, μεταξύ δύο σημείων της πολλαπλότητας M . Ωστόσο, ο παραπάνω ορισμός μπορεί να αποδειχθεί προβληματικός, σε περιπτώσεις όπου ο μετρικός τανυστής είναι αόριστος, οπότε μπορούμε να έχουμε καμπύλες μηδενικού μήκους. Συνεπώς, θα πρέπει να αναζητήσουμε ένα γενικότερο ορισμό. Για το σκοπό αυτό, απαιτούμε η $\gamma(t)$, να μεταφέρει παράλληλα το εφαπτόμενο διάνυσμά της, όπως ακριβώς συμβαίνει και με την ευθεία στον Ευκλείδειο χώρο:

$$D_X X = 0 \quad (1.74)$$

Η παραπάνω ιδιότητα, είναι καθοριστικής σημασίας στη μελέτη της βαρύτητας. Οι καμπύλες που μεταφέρουν παράλληλα το εφαπτόμενο διάνυσμάτους, αναπαριστούν φυσικές τροχιές σωματιδίων στο χωρόχρονο. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το εφαπτόμενο διάνυσμα μίας τέτοιας τροχιάς, συμπίπτει με την τετραταχύτητα του σωματιδίου. Η τελευταία, είναι ανάλογη της τετραορμής, η οποία όπως είναι γνωστό, είναι διατηρούμενη ποσότητα, εφόσον δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις. Προκειμένου λοιπόν το μέτρο του εφαπτόμενου στην τροχιά διανύσματος να διατηρείται, θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη της μετρικής συμβατότητας:

$$D_X g(X, X) = X^k D_k (g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu) = 0 \quad (1.75)$$

Από το συνδυασμό της τελευταίας σχέσης με το μηδενισμό του τανυστή στρέψης, προκύπτει η συνοχή Levi-Civita ∇ , καθώς και οι συντελεστές συνοχής $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, οι οποίοι είναι γνωστοί και ως σύμβολα Christoffel και ορίζουν με μοναδικό τρόπο τη συνοχή. Με κυκλική εναλλαγή δεικτών, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla_\kappa g_{\mu\nu} &= \partial_\kappa g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0 \\ \nabla_\nu g_{\kappa\mu} &= \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\kappa\lambda} = 0 \\ \nabla_\mu g_{\nu\kappa} &= \partial_\mu g_{\nu\kappa} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\lambda\kappa} - \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda g_{\nu\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (1.76)$$

Με αφαίρεση της δεύτερης και της τρίτης σχέσης από την πρώτη, αποκτούμε:

$$2\Gamma_{[\mu\kappa]}^\lambda g_{\lambda\nu} + 2\Gamma_{[\nu\kappa]}^\lambda g_{\mu\lambda} - 2\Gamma_{(\nu\mu)}^\lambda g_{\lambda\kappa} = \partial_\kappa g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\mu g_{\nu\kappa} \quad (1.77)$$

Λόγω μηδενισμού της στρέψης, η τελευταία ισότητα λαμβάνει τη μορφή:

$$2\Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\lambda\kappa} = \partial_\nu g_{\kappa\mu} + \partial_\mu g_{\nu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu} \quad (1.78)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $g^{k\rho}$ και αλλάζοντας κάποιους βωβούς δείκτες, έχουμε:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\nu g_{\kappa\mu} + \partial_\mu g_{\nu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \quad (1.79)$$

Θα εστιάσουμε σε μια ιδιαίτερος ενδιαφέρουσα κλάση καμπυλών επί της πολλαπλότητας M , οι οποίες αποκαλούνται γεωδαισιακές. Εξισώνοντας το διάνυσμα X της σχέσης (1.70) με το εφαπτόμενο διάνυσμα \dot{x} των συντεταγμένων καμπυλών, με τη χρήση της συνοχής Levi-Civita, καθώς και των ιδιοτήτων της συναλλοίωτης διαφορίσης, η απαίτηση της μετρικής συμβατότητας για το \dot{x} , γίνεται:

$$\begin{aligned}\nabla_X X = 0 &\Leftrightarrow \nabla_X \left(\frac{dx^\nu}{dt} \partial_\nu \right) = \frac{d}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \partial_\nu + \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \\ &= \left(\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right) \partial_\lambda = 0\end{aligned}\quad (1.80)$$

ή

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0 \quad (1.81)$$

Η έκφραση αυτή καλείται εξίσωση γεωδαισιακών και έχει ως λύσεις φυσικές τροχιές σωματιδίων στο χωρόχρονο, απουσία άλλων δυνάμεων. Αξίζει να σημειωθεί, πως η παραμετροποίηση κάθε λύσης της παραπάνω εξίσωσης, περιορίζεται σε μία κλάση παραμέτρων

$$t = a\lambda + b \quad (1.82)$$

Όπου a και b αυθαίρετες σταθερές. Οι παράμετροι που ανήκουν στην παραπάνω κλάση, καλούνται συσχετισμένες παράμετροι.

1.6 Ο Τανυστής Καμπυλότητας

Ο τανυστής καμπυλότητας που αντιστοιχεί στη συνοχή D με συντελεστές $G_{\mu\nu}^\lambda$, ορίζεται ως η απεικόνιση:

$$Q : CM \times CM \times CM \rightarrow CM \quad (1.83)$$

με

$$Q(X, Y)Z = [D_X, D_Y]Z - D_{[X, Y]}Z \quad (1.84)$$

Στη φυσική βάση, οι συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας, έχουν τη μορφή:

$$Q(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\kappa = Q_{\kappa\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \quad (1.85)$$

όπου

$$Q_{\kappa\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu G_{\kappa\nu}^\lambda - \partial_\nu G_{\kappa\mu}^\lambda + G_{\rho\mu}^\lambda G_{\kappa\nu}^\rho - G_{\rho\nu}^\lambda G_{\kappa\mu}^\rho \quad (1.86)$$

Η ονομασία τανυστής καμπυλότητας, οφείλεται στο γεγονός, ότι στον παραπάνω τανυστή, εμπεριέχεται όλη η πληροφορία που αφορά την καμπυλότητα του χωροχρόνου, αποτέλεσμα της οποίας είναι η παρουσία της βαρύτητας. Για το λόγο αυτό, ο τανυστής καμπυλότητας, είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στη γενική θεωρία της σχετικότητας και την κοσμολογία. Ως άμεση συνέπεια του ορισμού, προκύπτει ότι ο Q , είναι αντισυμμετρικός ως προς τους δύο τελευταίους συναλλοίωτους δείκτες:

$$Q_{\kappa\mu\nu}^\lambda = -Q_{\kappa\nu\mu}^\lambda \quad (1.87)$$

Από τη συστολή του τανυστή καμπυλότητας, προκύπτει ο $(2,0)$ τανυστής

$$Q_{\mu\nu} = Q^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad (1.88)$$

ο οποίος καλείται τανυστής Ricci. Το ίχνος του τελευταίου

$$Q = g^{\mu\nu} Q_{\mu\nu} \quad (1.89)$$

λέγεται βαθμωτή καμπυλότητα ή καμπυλότητα Ricci. Σε μία πολλαπλότητα M , εφοδιασμένη με τη συνοχή Levi-Civita, ο τανυστής καμπυλότητας καλείται τανυστής του Riemann και συμβολίζεται ως $R^{\lambda}_{\kappa\mu\nu}$. Ομοίως, ο τανυστής Ricci, συμβολίζεται ως $R_{\mu\nu}$ και το βαθμωτό Ricci, ως R . Σε σχέση με το γενικό τανυστή καμπυλότητας, ο τανυστής του Riemann, έχει τις επιπλέον συμμετρίες:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda} \quad (1.90)$$

και

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu} \quad (1.91)$$

από όπου προκύπτει άμεσα, ότι ο τανυστής Ricci $R_{\mu\nu}$, είναι συμμετρικός:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (1.92)$$

Σημειώνεται, ότι ο $R_{\mu\nu}$, αποτελεί τη μοναδική ανεξάρτητη συστολή του τανυστή Riemann.

1.7 Ταυτότητες *Bianchi*

Από τις σχέσεις ορισμού του τανυστή καμπυλότητας του Riemann και του τανυστή στρέψης, προκύπτουν εύκολα οι ακόλουθες ισότητες, οι οποίες είναι γνωστές ως ταυτότητες *Bianchi*:

$$\mathcal{U}_{X,Y,Z} [D_X T(X,Y) - T([X,Y],Z) - Q(X,Y)Z] = 0 \quad (1.93)$$

και

$$\mathcal{U}_{X,Y,Z} [D_X Q(Y,Z) - Q(Y,Z)D_X - Q([X,Y],Z)] = 0 \quad (1.94)$$

Το σύμβολο $\mathcal{U}_{X,Y,Z}$, υποδηλώνει ότι στους όρους εντός των αγκυλών, πραγματοποιείται άθροιση για όλες τις κυκλικές μεταθέσεις των δεικτών X, Y, Z . Με αντικατάσταση των συνιστωσών της καμπυλότητας και της στρέψης, η πρώτη ταυτότητα *Bianchi*, λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{X,Y,Z} [X^\rho D_\rho (T^{\lambda}_{\mu\nu} Y^\nu Z^\mu) - T^{\lambda}_{\mu\nu} Z^\mu (X^\rho \partial_\rho Y^\nu - Y^\rho \partial_\rho X^\nu) - Q^{\lambda}_{\kappa\mu\nu} X^\mu Y^\nu Z^\kappa] &= 0 \\ \Rightarrow \mathcal{U}_{X,Y,Z} [(D_\rho T^{\lambda}_{\mu\nu}) X^\rho Y^\nu Z^\mu + T^{\lambda}_{\mu\nu} (D_\rho Y^\nu) X^\rho Z^\mu + (D_\rho Z^\mu) X^\rho Y^\nu & \\ - T^{\lambda}_{\mu\nu} (X^\rho Z^\mu - X^\mu Z^\rho) \partial_\rho Y^\nu - Q^{\lambda}_{\kappa\mu\nu} X^\mu Y^\nu Z^\kappa] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \cup_{\mu,\nu,\kappa} [D_\mu T^\lambda_{\kappa\nu} - Q^\lambda_{\kappa\mu\nu}] X^\mu Y^\nu Z^\kappa \\
& + \cup_{X,Y,Z} [T^\lambda_{\mu\nu} (D_\rho X^\nu)(Y^\mu Z^\rho - Y^\rho Z^\mu - Y^\mu Z^\rho + Y^\rho Z^\mu)] \\
& + \cup_{X,Y,Z} [T^\lambda_{\mu\nu} T^\nu_{\sigma\rho} Z^\mu X^\rho Y^\sigma] = 0 \\
& \Rightarrow \cup_{\mu,\nu,\kappa} [D_\mu T^\lambda_{\kappa\nu} - Q^\lambda_{\kappa\mu\nu} + T^\lambda_{\kappa\rho} T^\rho_{\nu\mu}] = 0 \tag{1.95}
\end{aligned}$$

Ομοίως, η δεύτερη ταυτότητα *Bianchi*, γίνεται:

$$\begin{aligned}
& \cup_{X,Y,Z} [X^\rho U^\lambda D_\rho (Q^\kappa_{\lambda\mu\nu} Y^\mu Z^\nu) \\
& - Q^\kappa_{\lambda\mu\nu} (X^\rho D_\rho Y^\mu - Y^\rho D_\rho X^\mu - X^\rho Y^\sigma T^\mu_{\sigma\rho}) Z^\nu U^\lambda] = 0 \\
& \Rightarrow \cup_{X,Y,Z} [X^\rho Y^\mu D_\rho (Q^\kappa_{\lambda\mu\nu} Z^\nu) + Q^\kappa_{\lambda\mu\nu} Y^\rho Z^\nu D_\rho X^\mu + Q^\kappa_{\lambda\mu\nu} T^\mu_{\sigma\rho} X^\rho Y^\sigma Z^\nu] = 0 \\
& \Rightarrow \cup_{X,Y,Z} [(D_\rho Q^\kappa_{\lambda\mu\nu}) X^\rho Y^\mu Z^\nu + Q^\kappa_{\lambda\mu\nu} (X^\rho Y^\mu D_\rho Z^\nu + Y^\rho Z^\nu D_\rho X^\mu) \\
& + Q^\kappa_{\lambda\mu\nu} T^\mu_{\sigma\rho} X^\rho Y^\sigma Z^\nu] = 0 \\
& \Rightarrow \cup_{\rho,\mu,\nu} [D_\rho Q^\kappa_{\lambda\mu\nu}] X^\rho Y^\sigma Z^\nu + \cup_{X,Y,Z} [(Q^\kappa_{\lambda\mu\nu} + Q^\kappa_{\lambda\nu\mu}) Y^\rho Z^\nu D_\rho X^\mu] \\
& + \cup_{\rho,\sigma,\nu} [Q^\kappa_{\lambda\mu\nu} T^\mu_{\sigma\rho}] X^\rho Y^\sigma Z^\nu = 0 \\
& \Rightarrow \cup_{\rho,\mu,\nu} [D_\rho Q^\kappa_{\lambda\mu\nu} + Q^\kappa_{\lambda\sigma\nu} T^\sigma_{\mu\rho}] = 0 \tag{1.96}
\end{aligned}$$

όπου $U \in CM$, βοηθητικό διανυσματικό πεδίο. Λαμβάνοντας υπόψιν τις ιδιότητες του τανυστή *Riemann* καθώς και το γεγονός, ότι στη συνοχή *Levi-Civita*, όλες οι συνιστώσες του τανυστή στρέψης μηδενίζονται, αποκτούμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$R^\lambda_{[\kappa\mu\nu]} = 0 \tag{1.97}$$

και

$$\nabla_{[\sigma} R_{\rho\kappa]\mu\nu} = 0 \tag{1.98}$$

Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα, με τις σχέσεις ορισμού του τανυστή *Ricci* και του βαθμωτού *Ricci*, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
& \nabla_{[\sigma} R_{\rho\kappa]\mu\nu} = \nabla_\sigma R_{\rho\kappa\mu\nu} + \nabla_\kappa R_{\sigma\rho\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\kappa\sigma\mu\nu} = 0 \\
& \Leftrightarrow g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} (\nabla_\sigma R_{\rho\kappa\mu\nu} + \nabla_\kappa R_{\sigma\rho\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\kappa\sigma\mu\nu}) \\
& = -\nabla^\mu R^\nu_{\kappa\nu\mu} + \nabla_\kappa R^\nu_{\nu} - \nabla^\nu R^\mu_{\kappa\mu\nu} \\
& = \nabla_\kappa R - 2\nabla^\mu R_{\kappa\mu} = 0 \\
& \Rightarrow \nabla^\nu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = 0 \tag{1.99}
\end{aligned}$$

Η ποσότητα εντός της παρένθεσης, ονομάζεται τανυστής του *Einstein*:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.100}$$

Η προτελευταία σχέση, δείχνει ότι ο τανυστής του *Einstein*, έχει μηδενική απόκλιση και επομένως, διατηρείται:

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0 \tag{1.101}$$

Επιπλέον, ο $G_{\mu\nu}$, είναι συμμετρικός:

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} \tag{1.102}$$

1.8 Γεωδαισιακή Απόκλιση

Σε μία πολλαπλότητα M , θεωρούμε μία λεία μονοπαραμετρική οικογένεια γεωδαισιακών $\gamma(s, t)$. Θεωρούμε ακόμη, ότι η παράμετρος $s \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή, ενώ η t συσχετισμένη. Στην περίπτωση αυτή, η απεικόνιση

$$(t, s) \rightarrow \gamma(s, t) = \gamma_s(t) \quad (1.103)$$

είναι διαφορίσιμη. Οι γεωδαισιακές $\gamma_s(t)$, ορίζουν μία διδιάστατη πολλαπλότητα, με χάρτη (t, s) . Σε κάθε καμπύλη της οικογένειας, το εφαπτόμενο διάνυσμα

$$T = \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.104)$$

θα πρέπει να μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του, οπότε:

$$\nabla_T T = 0 \quad (1.105)$$

Η, σε τανυστική μορφή:

$$T^b \nabla_b T^a = 0 \quad (1.106)$$

Ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο απόκλισης:

$$X = \frac{\partial}{\partial s} \quad (1.107)$$

Το πεδίο X , μετρά την απειροστή μετατόπιση, από τη γεωδαισιακή $\gamma_s(t)$, προς την $\gamma_{(s+ds)}(t)$. Εκτελούμε την ακόλουθη αναπαραμέτρηση:

$$t \rightarrow t' = b(s)t + c(s) \quad (1.108)$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα, μεταβάλλεται ως εξής:

$$T \rightarrow T' = \frac{1}{b(s)} T \quad (1.109)$$

Ενώ η μεταβολή του διανύσματος απόκλισης, εξαρτάται από τη συναρτησιακή μορφή των $b(s)$ και $c(s)$. Θεωρούμε, ότι η μετρική του χώρου και η συνοχή με την οποία αυτός είναι εφοδιασμένος, είναι τέτοιες ώστε η στρέψη, να είναι μηδενική. Η συνάρτηση $b(s)$, μπορεί να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο, ώστε τα διανύσματα X και T , να είναι κάθετα μεταξύ τους:

$$X^a T_a = 0 \quad (1.110)$$

Αρχικά, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$t \rightarrow t'' = b(s)t \quad (1.111)$$

Θέλουμε το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος, να είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου s . Για το σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$T^a(t, s) T_a(t, s) = g_{ab} T^a T^b = f(s) \neq 0 \quad (1.112)$$

και επομένως

$$b(s) = |f(s)|^{\frac{1}{2}} \quad (1.113)$$

Τα διανύσματα X, T , συνιστούν τη φυσική βάση, σε κάθε σημείο της διδιάστατης πολλαπλότητας. Συνεπώς:

$$[X, T] = 0 \quad (1.114)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του τανυστή στρέψης, αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\begin{aligned} \nabla_X T &= \nabla_T X \\ \Leftrightarrow X^a \nabla_a T^b &= T^a \nabla_a X^b \end{aligned} \quad (1.115)$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \nabla_T g(X, T) &= T^b \nabla_b (X^a T_a) \\ &= T^b T_a \nabla_b X^a + X^a T^b \nabla_b T_a \\ &= T_a X^b \nabla_b T^a \\ &= \frac{1}{2} X^b \nabla_b (T_a T^a) = 0 \end{aligned} \quad (1.116)$$

Επειδή έχουμε υποθέσει, ότι το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος παραμένει σταθερό, από την τελευταία ισότητα, προκύπτει ότι και το εσωτερικό γινόμενο $X^a T_a$, είναι σταθερό κατά μήκος κάθε γεωδαισιακής. Εκτελούμε τώρα το μετασχηματισμό:

$$t'' \rightarrow t' = t'' + c(s) \quad (1.117)$$

Η μορφή του $c(s)$, μπορεί να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο, ώστε η καμπύλη

$$\gamma'(s) = \gamma_s(0), \quad s \in \mathbb{R} \quad (1.118)$$

να είναι ορθογώνια προς όλες τις γεωδαισιακές. Στην περίπτωση αυτή, θα έχουμε:

$$X_a T^a = 0, \quad t = 0 \Rightarrow X_a T^a = 0, \quad \forall t \quad (1.119)$$

Το διανυσματικό πεδίο

$$v = \nabla_T X = \frac{DX}{dt} \quad (1.120)$$

μετρά το ρυθμό μεταβολής της απόστασης μεταξύ γειτονικών γεωδαισιακών. Από φυσικής άποψης, η τιμή του πεδίου σε κάποιο σημείο p της πολλαπλότητας, μπορεί να ερμηνευθεί ως η σχετική ταχύτητα γειτονικών γεωδαισιακών, ως προς τη γεωδαισιακή που διέρχεται από το p . Με ανάλογο τρόπο, το πεδίο

$$a = \nabla_T \nabla_T X = \frac{D^2 X}{dt^2} \quad (1.121)$$

μπορεί να ερμηνευθεί ως η σχετική επιτάχυνση μεταξύ γειτονικών γεωδαισιακών, με συνιστώσες:

$$a^a = T^\gamma \nabla_\gamma (T^b \nabla_b X^a)$$

$$\begin{aligned}
&= T^\gamma \nabla_\gamma (X^b \nabla_b T^a) \\
&\quad (T^\gamma \nabla_\gamma X^b)(\nabla_b T^a) + T^\gamma X^b \nabla_\gamma \nabla_b T^a \\
&= (X^\gamma \nabla_\gamma T^b)(\nabla_b T^a) + T^\gamma X^b \nabla_\gamma \nabla_b T^a + T^\gamma X^b \nabla_b \nabla_\gamma T^a - T^\gamma X^b \nabla_b \nabla_\gamma T^a \\
&\quad = (X^\gamma \nabla_\gamma T^b)(\nabla_b T^a) + T^\gamma X^b \nabla_b \nabla_\gamma T^a + T^\gamma X^b (\nabla_\gamma \nabla_b - \nabla_b \nabla_\gamma) T^a \\
&\quad = X^\gamma \nabla_\gamma (T^b \nabla_b T^a) - T^\gamma X^b (\nabla_b \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_b) T^a \\
&\quad = -T^\gamma X^b (\nabla_b \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_b) T^a \tag{1.122}
\end{aligned}$$

Όμως, από τον ορισμό του ταυυστή καμπυλότητας του *Riemann*, ισχύει:

$$\begin{aligned}
(\nabla_b \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_b) &= -R^a_{\delta\gamma b} T^\delta \\
&= R^a_{\delta b\gamma} T^\delta \tag{1.123}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, στην έκφραση των συνιστωσών της σχετικής επιτάχυνσης, αποκτούμε την εξίσωση της γεωδαισιακής απόκλισης:

$$a^a + R^a_{\delta b\gamma} T^\delta X^b T^\gamma = 0 \tag{1.124}$$

ή

$$\nabla_T \nabla_T X^a + R^a_{\delta b\gamma} T^\delta X^b T^\gamma = 0 \tag{1.125}$$

Από την τελευταία ισότητα, συνάγεται ότι για κάθε οικογένεια γεωδαισιακών, ο μηδενισμός της σχετικής επιτάχυνσης, είναι δυνατός μόνο στην περίπτωση που ο χώρος έχει μηδενική καμπυλότητα. Η μηδενική σχετική επιτάχυνση, έχει ως αποτέλεσμα τόσο την απομάκρυνση, όσο και την περιστροφή των απειροστά κοντινών γεωδαισιακών, ως προς μία γεωδαισιακή αναφοράς. Επομένως, αν κάποιες γεωδαισιακές ήταν αρχικά παράλληλες μεταξύ τους, η παραλληλία τους θα πάψει να υφίσταται, εξαιτίας της καμπύλωσης του χωροχρόνου. Εφόσον ο πρώτος όρος της τελευταίας ισότητας ερμηνεύθηκε ως επιτάχυνση, είναι λογικό, ο δεύτερος όρος να ερμηνευθεί ως δύναμη. Πρόκειται για τη λεγόμενη παλιρροϊκή δύναμη, η οποία ασκείται σε οτιδήποτε κινείται κατά μήκος των γεωδαισιακών. Όπως φαίνεται και από τη μαθηματική μορφή της, η παλιρροϊκή δύναμη, δεν εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της οικογένειας των γεωδαισιακών, αλλά μόνο από την καμπυλότητα του χωροχρόνου. Η εξάρτηση αυτή, αντανακλά την αμιγώς γεωμετρική προέλευση της παλιρροϊκής δύναμης, η οποία δεν δημιουργείται από κάποιο φυσικό πεδίο, αλλά εξ ολοκλήρου από τη γεωμετρία του χωροχρόνου.

1.9 Σύμμορφοι Μετασχηματισμοί της Μετρικής

Θα εξετάσουμε μία ειδική κατηγορία μετασχηματισμών της μετρικής οι οποίοι γενικεύουν την ιδιότητα της διατήρησης των γωνιών μεταξύ διανυσμάτων. Οι μετασχηματισμοί αυτοί έχουν ποικίλες εφαρμογές στη Φυσική, με κυριότερες τις Θεωρίες Βαθμωτού-Ταυυστή, οι οποίες επεκτείνουν τη Γενική θεωρία της Σχετικότητας.

Θεωρούμε μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα M διάστασης n με μετρική $g_{\mu\nu}$. Έστω $a(x) \in \mathcal{F}M$. Ένας σύμμορφος μετασχηματισμός της μετρικής ορίζεται ως

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \alpha(x)g_{\mu\nu} \quad (1.126)$$

Η αντίστροφη μετρική δίνεται από

$$\tilde{g}^{\mu\kappa}\tilde{g}_{\kappa\nu} = \delta_\nu^\mu \Rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha(x)}g^{\mu\nu} \quad (1.127)$$

Θέτοντας

$$B_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2\alpha}g^{\lambda\sigma} [g_{\nu\sigma}\partial_\mu\alpha + g_{\mu\sigma}\partial_\nu\alpha - g_{\mu\nu}\partial_\sigma\alpha] = \frac{1}{2\alpha} [\delta_\nu^\lambda\partial_\mu\alpha + \delta_\mu^\lambda\partial_\nu\alpha - g_{\mu\nu}\partial^\lambda\alpha] \quad (1.128)$$

τα σύμβολα Christoffel μετασχηματίζονται ως

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2\alpha}g^{\lambda\sigma} [\partial_\mu(\alpha g_{\nu\sigma}) + \partial_\nu(\alpha g_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma(\alpha g_{\mu\nu})] \\ &= \frac{1}{2\alpha}g^{\lambda\sigma} \{ [g_{\nu\sigma}\partial_\mu\alpha + g_{\mu\sigma}\partial_\nu\alpha - g_{\mu\nu}\partial_\sigma\alpha] + [\alpha\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \alpha\partial_\nu g_{\mu\sigma} - \alpha\partial_\sigma g_{\mu\nu}] \} \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + B_{\mu\nu}^\lambda \end{aligned} \quad (1.129)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (1.128) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_\rho B_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} \left(\partial_\rho \frac{1}{\alpha} \right) [\delta_\nu^\lambda\partial_\mu\alpha + \delta_\mu^\lambda\partial_\nu\alpha - g_{\mu\nu}\partial^\lambda\alpha] \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha} [\delta_\nu^\lambda\partial_\rho\partial_\mu\alpha + \delta_\mu^\lambda\partial_\rho\partial_\nu\alpha - (\partial_\rho g_{\mu\nu})\partial^\lambda\alpha - g_{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\lambda\alpha] \\ &= -\frac{1}{2\alpha^2}\partial_\rho\alpha [\delta_\nu^\lambda\partial_\mu\alpha + \delta_\mu^\lambda\partial_\nu\alpha - g_{\mu\nu}\partial^\lambda\alpha] \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha} [\delta_\nu^\lambda\partial_\rho\partial_\mu\alpha + \delta_\mu^\lambda\partial_\rho\partial_\nu\alpha - (\partial_\rho g_{\mu\nu})\partial^\lambda\alpha - g_{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\lambda\alpha] \\ &= \frac{1}{2\alpha} [\delta_\nu^\lambda\partial_\rho\partial_\mu\alpha + \delta_\mu^\lambda\partial_\rho\partial_\nu\alpha - (\partial_\rho g_{\mu\nu})\partial^\lambda\alpha - g_{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\lambda\alpha] \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha^2} [g_{\mu\nu}\partial_\rho\alpha\partial^\lambda\alpha - \delta_\nu^\lambda\partial_\rho\alpha\partial_\mu\alpha - \delta_\mu^\lambda\partial_\rho\alpha\partial_\nu\alpha] \end{aligned} \quad (1.130)$$

Ο σύμμορφος τανυστής Ricci γράφεται

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\mu\nu} &= \partial_\lambda \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\rho\lambda}^\lambda \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho - \tilde{\Gamma}_{\rho\nu}^\lambda \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\rho \\
&= \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \partial_\lambda B_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\nu B_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho + B_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda B_{\mu\nu}^\rho \\
&\quad + B_{\rho\lambda}^\lambda B_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda B_{\mu\lambda}^\rho - B_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho - B_{\rho\nu}^\lambda B_{\mu\lambda}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \\
&= R_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} [2\partial_\mu \partial_\nu \alpha - (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \partial^\lambda \alpha - g_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda \alpha] + \frac{1}{2\alpha^2} [g_{\mu\nu} \partial_\lambda \alpha \partial^\lambda \alpha - 2\partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha] \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha} [n\partial_\mu \partial_\nu \alpha + \partial_\mu \partial_\nu \alpha - \partial_\mu \partial_\nu \alpha] - \frac{1}{2\alpha^2} [\partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha - n\partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha - \partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha] \\
&\quad + \frac{1}{2\alpha} [n\partial_\rho \alpha + \partial_\rho \alpha - \partial_\rho \alpha] \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \frac{1}{2\alpha} [\delta_\nu^\rho \partial_\mu \alpha + \delta_\mu^\rho \partial_\nu \alpha - g_{\mu\nu} \partial^\rho \alpha] \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \\
&\quad + \frac{1}{4\alpha^2} [n\partial_\rho \alpha + \partial_\rho \alpha - \partial_\rho \alpha] [\delta_\nu^\rho \partial_\mu \alpha + \delta_\mu^\rho \partial_\nu \alpha - g_{\mu\nu} \partial^\rho \alpha] \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha} [\delta_\lambda^\rho \partial_\mu \alpha + \delta_\mu^\rho \partial_\lambda \alpha - g_{\lambda\mu} \partial^\rho \alpha] \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \frac{1}{2\alpha} [\delta_\nu^\lambda \partial_\rho \alpha + \delta_\rho^\lambda \partial_\nu \alpha - g_{\nu\rho} \partial^\lambda \alpha] \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \\
&\quad - \frac{1}{4\alpha^2} [\delta_\nu^\lambda \partial_\rho \alpha + \delta_\rho^\lambda \partial_\nu \alpha - g_{\rho\nu} \partial^\lambda \alpha] [\delta_\lambda^\rho \partial_\mu \alpha + \delta_\mu^\rho \partial_\lambda \alpha - g_{\mu\lambda} \partial^\rho \alpha] \\
&= R_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} \left[(2-n)\partial_\mu \partial_\nu \alpha - (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \partial^\lambda \alpha - g_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda \alpha + n\partial_\lambda \alpha \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda \partial_\mu \alpha \right. \\
&\quad \left. + \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda \partial_\nu \alpha - g_{\mu\nu} \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \partial^\rho \alpha - \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda \partial_\mu \alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \alpha + g_{\lambda\mu} \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \partial^\rho \alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \alpha \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda \partial_\nu \alpha + g_{\nu\rho} \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \partial^\lambda \alpha \right] + \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \alpha \partial^\lambda \alpha - \partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha + \frac{n}{2} \partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha \right. \\
&\quad \left. + \frac{n}{4} (\partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha + \partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha - g_{\mu\nu} \partial_\lambda \alpha \partial^\lambda \alpha) - \frac{1}{4} (\partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha + \partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha - g_{\mu\nu} \partial_\lambda \alpha \partial^\lambda \alpha) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} (n\partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha + \partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha - \partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha) + \frac{1}{4} (\partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha + g_{\mu\nu} \partial_\lambda \alpha \partial^\lambda \alpha - \partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha) \right] \\
&= R_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} \left[(2-n)\partial_\mu \partial_\nu \alpha - g_{\mu\nu} (\partial_\lambda \partial^\lambda \alpha + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \partial^\rho \alpha) \right. \\
&\quad \left. - \partial^\rho \alpha (\partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda g_{\lambda\mu} + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda g_{\lambda\nu}) - (2-n)\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \alpha \right] \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2} \left[g_{\mu\nu} \partial_\lambda \alpha \partial^\lambda \alpha - \frac{n}{4} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \alpha \partial^\lambda \alpha + \left(\frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{n}{4} \right) \partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha \right] \\
&= R_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} [(2-n)\nabla_\mu \nabla_\nu \alpha - g_{\mu\nu} \square \alpha] \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2} \left[\left(1 - \frac{n}{4}\right) g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \alpha \nabla^\lambda \alpha + \frac{3}{2} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \nabla_\mu \alpha \nabla_\nu \alpha \right]
\end{aligned} \tag{1.131}$$

όπου ο τελεστής d'Alembert \square ορίζεται ως $\square = \nabla_\lambda \nabla^\lambda$. Η σύμμορφη βαθμωτή καμπυλότητα Ricci θα είναι

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{R}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (1-n) \square \alpha - \frac{1}{4\alpha^3} (n^2 - 7n + 6) \nabla_\lambda \alpha \nabla^\lambda \alpha \quad (1.132)$$

Η εξίσωση γεωδαισιακών της σύμμορφης μετρικής, από τις σχέσεις (1.129) και (1.81), γράφεται

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\lambda^2} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = B_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (1.133)$$

Σημειώνεται ότι, η σύμμορφη μετρική, δεν περιγράφει κάποιο φυσικό βαρυτικό πεδίο και συνεπώς οι αντίστοιχες γεωδαισιακές δεν αναπαριστούν φυσικές τροχιές σωματιδίων στον χωρόχρονο. Παρ' όλα αυτά, κάθε φωτεινής τροχιά παραμένει φωτεινής έπειτα από σύμμορφο μετασχηματισμό

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (1.134)$$

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του εδαφίου, η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων X, Y όπως ορίστηκε στην σχέση (1.9), διατηρείται

$$\cos(X, Y) = \frac{g(X, Y)}{\sqrt{g(X, X)g(Y, Y)}} = \frac{a^{-1} \tilde{g}(X, Y)}{\sqrt{a^{-1} \tilde{g}(X, X) a^{-1} \tilde{g}(Y, Y)}} = \frac{\tilde{g}(X, Y)}{\sqrt{\tilde{g}(X, X) \tilde{g}(Y, Y)}} \quad (1.135)$$

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Γεωμετρίας *Finsler*

Στο παρόν Κεφάλαιο, μελετώνται οι βασικές έννοιες της Γεωμετρίας *Finsler*, η οποία αποτελεί μία φυσική γενίκευση της Γεωμετρίας *Riemann*. Μολονότι η γεωμετρία αυτή φέρει το όνομα του *Paul Finsler*, καθοριστικής σημασίας για τη θεμελίωσή της, υπήρξε η συμβολή του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή. Για το λόγο αυτό, η γεωμετρία *Finsler* είναι γνωστή και ως Γεωμετρία του Λογισμού των Μεταβολών.

2.1 Η χρησιμότητα της Γεωμετρίας *Finsler*

Αν και η Γεωμετρία *Finsler* δεν είναι ευρέως γνωστή, κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, έχει ενταθεί το ερευνητικό ενδιαφέρον για τη χρήση της σε διάφορους τομείς της σύγχρονης φυσικής, όπως είναι οι τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας, η κβαντική βαρύτητα και η κοσμολογία. Το γεγονός αυτό οφείλεται, τόσο στα ευρήματα των παρατηρήσεων και πειραμάτων, όσο και στις ίδιες τις ιδιότητες της συγκεκριμένης γεωμετρίας. Είναι γνωστό, ότι σε πολύ μεγάλες κλίμακες παρατήρησης, το σύμπαν φαίνεται ομογενές και ισότροπο. Ωστόσο, τα αποτελέσματα των κοσμολογικών μελετών έχουν δείξει, ότι η παραπάνω παραδοχή αποτελεί προσέγγιση, καθώς σε σχετικά μικρές κλίμακες, συγκεκριμένα σε ακτίνα μικρότερη από 10^8 έτη φωτός, υπάρχει ασθενής ανισοτροπία, η οποία αποδίδεται σε τρεις κύριους μηχανισμούς: Στο αρχέγονο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, στον κοσμολογικό πληθωρισμό, καθώς και στην κοσμική μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου (CMBR). Η ανισοτροπία αυτή, θεωρείται ότι γεννήθηκε κατά τη διάρκεια εκτεταμένων αλλαγών φάσης στο πρώιμο σύμπαν. Γίνεται λοιπόν εύκολα αντιληπτό, πως η ερμηνεία αυτής της ανισοτροπίας, απαιτεί την υιοθέτηση ενός γεωμετρικού πλαισίου γενικότερου από το *Rimάνειο*. Φυσικά, υπάρχουν και τοπικά ανισοτροπικές θεωρίες σε χώρο *Riemann*, όπως είναι τα μοντέλα *Bianchi*. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα της γεωμετρίας *Finsler* έναντι των θεωριών αυτών, έγκειται στο γεγονός, ότι ενσωματώνει την τοπική ανισοτροπία ως εγγενή ιδιότητα του χωροχρόνου. Η ανισοτροπία αυτή καλείται δυναμική, καθώς προκύπτει μέσα από την ίδια τη γεωμετρική δομή του χωροχρόνου και όχι από έξτρα όρους που προστίθενται με το χέρι στην αρχική θεωρία. Θα μπορούσε συνεπώς να λεχθεί ότι η αντισοτροπία αυτή πηγάζει από το πεδίο ενός υποθετικού

σωματιδίου, το οποίο καλούμε Ανισοτρόπιο. Αυτή η τοπικά ανισοτροπική δομή του χωροχρόνου, επεκτείνει με φυσικό τρόπο τη γεωμετρία *Riemann*, καθώς είναι πλήρως συμβατή με τις αρχές της γενικής σχετικότητας. Σε μία τέτοια τροποποιημένη θεωρία, το βαρυτικό πεδίο και τα δυναμικά του, εξαρτώνται όχι μόνο από το θεωρούμενο χωροχρονικό σημείο, αλλά και από την κατεύθυνση αναφοράς. Επιπλέον, η Γεωμετρία *Finsler* είναι κατάλληλη για την περιγραφή συστημάτων που παρουσιάζουν αυθόρμητη παραβίαση των συμμετριών *Lorentz* και *CPT*, συμβάλλοντας έτσι στην ερμηνεία διαφόρων φαινομένων της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων και προσφέροντας προοπτικές ανάπτυξης νέων θεωριών μεγάλης ενοποίησης, μέσω της επέκτασης του καθιερωμένου προτύπου (*SME*). Στη Γεωμετρία *Finsler*, η έννοια της απόστασης διαφέρει αρκετά από αυτό που κλασικά αντιλαμβανόμαστε ως μήκος: Το γραμμικό στοιχείο ενός χώρου *Finsler*, εμπεριέχει, εκτός από τη χωροχρονική απόσταση x , την ταχύτητα y της κίνησης. Εξαιτίας αυτής της εξάρτησης από την ταχύτητα, κάθε γεωμετρικό αντικείμενο στο χωρόχρονο *Finsler*, ορίζεται στην επαπτόμενη δέσμη. Σε πιο αφηρημένες θεωρήσεις χώρων *Finsler*, η συντεταγμένη y , μπορεί να θεωρηθεί ως ένα όρισμα κατεύθυνσης. Επίσης, η έννοια της καμπυλότητας ενός χωροχρόνου *Finsler*, είναι διαφορετική από τη Ριμάνεια εκδοχή της: Στη Γεωμετρία *Riemann*, η μη μηδενική καμπυλότητα του χωροχρόνου, αποκαλύπτει την παρουσία βαρυτικού πεδίου, εξαιτίας της ύπαρξης μάζας. Επιπροσθέτως, στη Γεωμετρία *Finsler*, μία μη μηδενική καμπυλότητα, παρέχει την επιπλέον πληροφορία, ότι η μάζα βρίσκεται σε κίνηση, αφού η καμπυλότητα, όπως και κάθε άλλο γεωμετρικό αντικείμενο, εξαρτάται από την ταχύτητα (ή κατεύθυνση) της κίνησης. Τέλος, από υπολογιστικής άποψης, η Γεωμετρία *Finsler*, επιτρέπει τον υπολογισμό της μετρικής του χωροχρόνου, απευθείας από τη Λαγκραντζιανή του υπό μελέτη συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένης μίας Λαγκραντζιανής, η οποία παίζει το ρόλο της θεμελιώδους συνάρτησης δομής, ο μετρικός τανυστής δίνεται από την Εισιανή. Χαρακτηριστικά παραδείγματα χώρων *Finsler* με εφαρμογή στην Φυσική, αποτελούν η *General Very Special Relativity (GVSR)*, ο χώρος *Finsler - Randers (FR)*, καθώς και οι διμερείς (*bipartite*) μετρικές. Στην *GVSR*, προσδιορίζεται η εξέλιξη του σύμπαντος, στο πλαίσιο μίας μετρικής η οποία παραβιάζει ρητά την συμμετρία *Lorentz*, συναρτήσει ενός υποθετικού αρχέγονου διανυσματικού πεδίου και μίας σταθεράς, η οποία μετρά την απόκλιση της θεωρίας από τη Ριμάνεια. Στη θεωρία *FR*, η παρουσία ενός διανυσματικού πεδίου (π.χ. ηλεκτρομαγνητικού πεδίου) συζευγμένου με το βαρυτικό πεδίο, διαταράσσει τη Ριμάνεια δομή του χωροχρόνου, προκαλώντας την περιστροφή των γεωδαισιακών και επάγοντας τοπική ανισοτροπία, η οποία αντανακλάται σε έξτρα όρους, οι οποίοι προστίθενται σε όλες τις εξισώσεις και τις γεωμετρικές ποσότητες της θεωρίας. Οι συνεισφορές αυτές εμπεριέχουν τη χρονική παράγωγο της μηδενικής συνιστώσας του διανυσματικού πεδίου, η οποία παίζει το ρόλο της μεταβολής της ανισοτροπίας. Οι διμερείς (*bipartite*) μετρικές, είναι κατάλληλες για μία γεωμετρικοποίηση της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων και χρησιμοποιούνται στην *SME*, για την ερμηνεία φαινομένων όπως είναι οι ταλαντώσεις νετρίνων και μεσονίων. Οι μετρικές αυτές περιλαμβάνουν μία διαταραχή, η οποία προστίθεται στη μετρική *Riemann* με εναλλασσόμενο πρόσημο, αντανακλώντας τον ενεργειακό εκφυλισμό των Φερμιονικών καταστάσεων με αντίρροπα σπιν. Τέλος, όπως θα φανεί σε επόμενο κεφάλαιο, ορισμένα μοντέλα που βασίζονται στη Γεωμετρία *Finsler* επιδέχονται ταλαντωτικές λύσεις, γεγονός που τις καθιστά κατάλληλες για τη μελέτη της Κοσμολογικής Αναπήδησης (*bounce*).

2.2 Θεμελιώδης συνάρτηση δομής

Σε μία πολλαπλότητα Riemann, το γραμμικό στοιχείο έχει τη μορφή:

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j} \quad (2.1)$$

Η σχέση αυτή δείχνει, ότι η απόσταση ds μεταξύ δύο σημείων p με συντεταγμένες x και q με συντεταγμένες $x + dx$, που απέχουν απειροστά μεταξύ τους, είναι συνάρτηση των συντεταγμένων θέσης x^i και των διαφορικών τους dx^i , όπως παρατηρήθηκε αρχικά από τον Bernhard Riemann.:

$$ds = F(x^1, \dots, x^n, dx^1, \dots, dx^n)(=: F(x, dx)). \quad (2.2)$$

Η συνάρτηση $F(x, y)$ (με $y = dx$), πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

$$F(x, y) > 0, \quad \forall y \neq 0 \quad (2.3)$$

$$F(x, -y) = F(x, y) \quad (2.4)$$

$$F(x, ky) = kF(x, y), \quad \forall k > 0 \quad (2.5)$$

Η αναγκαιότητα ικανοποίησης των παραπάνω συνθηκών, έχει φυσική προέλευση. Η πρώτη (θετικότητα) εκφράζει την απαίτηση ότι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι πάντα θετική, η δεύτερη (αρτιότητα) την απαίτηση να είναι η απόσταση ανεξάρτητη της κατεύθυνσης, δηλαδή το μήκος του τμήματος pq να είναι ίσο με αυτό του qp . Τέλος, η τρίτη συνθήκη (ομογένεια) εξασφαλίζει τη συμβατότητα της συνάρτησης F με την έννοια της απόστασης, καθώς εγγυάται ότι αν θεωρήσουμε το σημείο q να απέχει από το p k φορές περισσότερο από πριν, το μήκος pq θα είναι επίσης k φορές μεγαλύτερο.

Θεωρούμε μία καμπύλη $C = (x^i) = (x^i(t))$ στην πολλαπλότητα. Το μήκος s του τμήματος της καμπύλης για $a \leq t \leq b$ δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$s = \int_a^b F(x, \frac{dx}{dt}) dt \quad (2.6)$$

Εκτελώντας μία αναπαραμέτρηση της C : $t \rightarrow \tau$, για $c \leq \tau \leq d$, το μήκος s γίνεται:

$$s = \int_c^d F(x, \frac{dx}{d\tau}) d\tau \quad (2.7)$$

Όμως

$$\int_a^b F(x, dx/dt) dt \equiv \int_a^b F(x, dx/d\tau \cdot d\tau/dt) dt \quad (2.8)$$

και

$$\int_c^d F(x, \frac{dx}{d\tau}) d\tau \equiv \int_a^b F(x, \frac{dx}{d\tau}) \frac{d\tau}{dt} \cdot dt \quad (2.9)$$

Και επομένως:

$$F(x, ky) = kF(x, y) \quad (y = \frac{dx}{d\tau}, k = \frac{d\tau}{dt}) \quad (2.10)$$

2.3 Μετρικός Τανυστής και Τανυστής στρέψης του *Cartan*

Όπως και σε κάθε άλλη διαφορική γεωμετρία, έτσι και στη Γεωμετρία *Finsler*, οι σημαντικότερες γεωμετρικές ποσότητες εκφράζονται σε τανυστική μορφή. Επειδή το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στη μελέτη θεωριών βαρύτητας που βασίζονται στη Γεωμετρία *Finsler*, εστιάζουμε κυρίως σε τανυστές οι οποίοι έχουν ανάλογο στη Γεωμετρία *Riemann*. Επιπλέον, υπάρχουν τανυστές με ιδιαίτερη γεωμετρική σημασία, οι οποίοι μηδενίζονται στο χώρο *Riemann* και συνεπώς, αποτελούν υπό μία έννοια ένα μέτρο του βαθμού διαφοροποίησης της Γεωμετρίας *Finsler* από την *Riemann*. Ο μετρικός τανυστής του χώρου *Finsler*, ορίζεται από την σχέση

$$g_{ij}(x, y) = (\partial^2 F^2 / \partial y^i \partial y^j) / 2 \quad (2.11)$$

και έχει όλες τις επιθυμητές ιδιότητες που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 1.1. Στην περίπτωση του χώρου *Riemann*, ο g_{ij} , συμπίπτει με τη μετρική *Riemann*. Λόγω της συνθήκης ομογένειας της F , το τετράγωνο του μέτρου του διανύσματος y^i θα είναι:

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x, y) y^i y^j \quad (2.12)$$

Ένας άλλος τανυστής με ιδιαίτερη γεωμετρική σημασία, είναι ο τανυστής στρέψης του *Cartan*, ο οποίος ορίζεται ως

$$C_{ijk} = (\partial g_{ij} / \partial y^k) / 2 \quad (2.13)$$

Λόγω της τελευταίας σχέσης, ο τανυστής C_{ijk} έχει την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα

$$C_{\alpha\beta\gamma} y^\alpha = C_{\alpha\beta\gamma} y^\beta = C_{\alpha\beta\gamma} y^\gamma = 0 \quad (2.14)$$

Από τον ορισμό του μετρικού τανυστή, προκύπτει αμέσως ότι σε χώρο *Riemann*, ο τανυστής C_{ijk} είναι πάντα μηδενικός. Υπό την έννοια αυτή, ο C_{ijk} , είναι ένα μέτρο της απόκλισης του χώρου *Finsler* από το χώρο *Riemann*, γεγονός που δικαιολογεί και τη μεγάλη σημασία του στη Γεωμετρία *Finsler*.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, είναι χρήσιμο αντί της μετρικής *Finsler* g_{ij} να λαμβάνεται η εγγυτατοποιημένη μετρική *Riemann* r_{ij} . Στην περίπτωση αυτή, θεωρείται ότι η φυσική γεωμετρία περιγράφεται από τη μετρική *Finsler*, ενώ η βαρυτική γεωμετρία από την εγγυτατοποιημένη μετρική *Riemann*. Αν \tilde{g}_{ij} η μετρική *Riemann*, έχουμε

$$r_{ij}(x) = g_{ij}(x, y(x)) \approx \tilde{g}_{ij}(x, y(x))$$

Μία ζωντανή αναπαράσταση της διαφοροποίησης μεταξύ των τριών γεωμετριών (*Euclidean*, *Riemann* και *Finsler*), αποτυπώνεται στην επιστολή του *Paul Finsler* προς τον *Makoto Matsumoto*, σύμφωνα με την οποία: Αν ληφθεί το δευτερόλεπτο ως μονάδα μέτρησης του χρόνου και το έτος φωτός ως μονάδα μέτρησης της απόστασης, τότε η μοναδιαία επιφάνεια είναι μία σφαίρα ακτίνας 300000 χιλιόμετρα. Κάθε σημείο του χώρου συνδέεται με μία τέτοια σφαίρα, οπότε ορίζεται η απόσταση μετρημένη σε μονάδες χρόνου. Στο χώρο αυτό, η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων είναι μία ευθεία γραμμή, οπότε η γεωμετρία του χωροχρόνου είναι η *Euclidean*. Παρουσία του βαρυτικού πεδίου,

μία ακτίνα φωτός δεν είναι ευθεία γραμμή, αλλά γεωδαισιακή. Αν αυτή θεωρηθεί ως η ελάχιστη διαδρομή, τότε η γεωμετρία του χώρου είναι η **Riemann**. Επιπροσθέτως, σε ένα ανισοτροπικό μέσο, η ταχύτητα του φωτός δεν παραμένει σταθερή, αλλά εξαρτάται από την κατεύθυνση αναφοράς. Στην περίπτωση αυτή, η γεωμετρία του χώρου είναι η **Finsler**. Σε αυτή, η μοναδιαία επιφάνεια δεν είναι πλέον σφαίρα, αλλά μία υπερεπιφάνεια σε κάθε εφαπτόμενο χώρο του χώρου **Finsler**, η οποία ονομάζεται δείκτρια του Καραθεοδωρή και ορίζεται από την εξίσωση:

$$F(x, y) = 1, \quad x = \text{constant} \quad (2.15)$$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο χώρος **Finsler - Randers**, όπου μία ακτίνα φωτός θεωρείται ως η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων, υπό την ταυτόχρονη παρουσία βαρυτικού και ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Ο εφαπτόμενος χώρος M_x ενός χώρου **Finsler** M , δεν είναι Ευκλείδειος, αλλά ένας χώρος **Minkowski**. Με τη βοήθεια της έννοιας της δείκτριας, ένας χώρος **Finsler**, μπορεί να θεωρηθεί τοπικά **Minkowski**. Ωστόσο, εκτελώντας μία κατάλληλη διαμέριση του χώρου σε μικρές περιοχές, είναι δυνατόν να προσεγγίσουμε τοπικά τη μετρική **Finsler**, από μία μετρική **Riemann**. Με τον τρόπο αυτό, ο χώρος **Finsler**, μπορεί να θεωρηθεί τοπικά **Riemann**.

2.4 Συνοχή και Τανυστής Καμπυλότητας

2.4.1 Θεωρία *Berwald*

Σε αντίθεση με τη γεωμετρία **Riemann**, όπου χρησιμοποιείται κατά κόρον η συνοχή **Levi - Civita**, υπάρχουν ποικίλες συνοχές οι οποίες εφοδιάζουν ένα χώρο **Finsler**. Για πρώτη φορά, η έννοια της συνοχής εισήχθη σε χώρο **Finsler** από τον **Berwald**, ο οποίος μελέτησε ένα πρόβλημα ακρότατου στη μεταβολή μήκους καμπυλών, τη λεγόμενη θεωρία των γενικών τροχιών. Το ακρότατο αυτό, ορίζει τις γεωδαισιακές καμπύλες του χώρου **Finsler** με θεμελιώδη συνάρτηση δομής $F(x, y)$:

$$\delta \int_a^b F(x(t), dx/dt) dt = 0 \quad (2.16)$$

Η εξίσωση των γεωδαισιακών έχει τη μορφή:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + Y_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (2.17)$$

όπου τα σύμβολα **Christoffel** $Y_{jk}^i(x, y)$ που προκύπτουν από το μετρικό τανυστή $g_{ij}(x, y)$ στο x^i είναι:

$$Y_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r} \right). \quad (2.18)$$

σύμφωνα με τον Berwald, έχουμε:

$$2G^i(x, y) = Y_{jk}^i(x, y)y^j y^k \quad (2.19)$$

ή, διαφορίζοντας δύο φορές:

$$G_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}, G_{jk}^i = \frac{\partial G_j^i}{\partial y^k} \quad (2.20)$$

όπου τα $G_{jk}^i(x, y)$, είναι συμμετρικά ως προς τους δύο κάτω δείκτες. Λόγω της συνθήκης ομογένειας της $F(x, y)$, η εξίσωση των γεωδαισιακών λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + G_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (2.21)$$

Γενικά, μπορούμε να ορίσουμε μία γραμμική συνοχή που εφοδιάζει την πολλαπλότητα *Finsler*

$$\Gamma = \{\Gamma_{jk}^i(x)\} \quad (2.22)$$

ως ένα σύνολο ποσοτήτων $\Gamma_{jk}^i(x)$, οι οποίες μεταβάλλονται κάτω από αλλαγές συντεταγμένων, σύμφωνα με τον ακόλουθο νόμο μετασχηματισμού:

$$\bar{\Gamma}_{bc}^a(\bar{x}) = \Gamma_{jk}^i(x) X_i^a X_b^j X_c^k + X_i^a X_{bc}^i \quad (2.23)$$

$$X_i^a = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \quad (2.24)$$

$$X_b^j = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \quad (2.25)$$

$$X_{bc}^i = \frac{\partial X_b^i}{\partial \bar{x}^c} \quad (2.26)$$

Για τον ορισμό της συναλλοίωτης διαφορίσης, θεωρούμε ένα ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $V^i(x)$. Η συναλλοίωτη παράγωγος του πεδίου αυτού, είναι ένα (1, 1) τανυστικό πεδίο, με συνιστώσες:

$$V_{;j}^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + V^r \Gamma_{rj}^i. \quad (2.27)$$

Όπως αναφέρθηκε στην Παράγραφο 1.4, η έννοια της παράλληλης μετατόπισης αποτελεί ιδιότητα της συνοχής που εφοδιάζει το χωρόχρονο και όχι του ίδιου του χωρόχρονου. Αυτό σημαίνει ότι στον ίδιο χώρο, διαφορετικές συνοχές μετατοπίζουν με διαφορετικό τρόπο το ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο παράλληλα προς τον εαυτό του. Η καταλληλότητα ή μη μίας συνοχής για τη μελέτη της βαρύτητας, καθορίζεται από το κατά πόσο αυτή ικανοποιεί τη συνθήκη μετρικής συμβατότητας. Για μία μετρικά συμβατή συνοχή, η συναλλοίωτη παράγωγος του μετρικού τανυστή μηδενίζεται:

$$\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.28)$$

Επομένως, αν δύο διανύσματα V^μ και W^ν μετατοπιστούν παράλληλα κατά μήκος μίας καμπύλης $x^k(\lambda)$, το εσωτερικό τους γινόμενο θα πρέπει να διατηρείται:

$$\frac{D}{d\lambda}(g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu) = \left(\frac{D}{d\lambda}g_{\mu\nu}\right)V^\mu W^\nu + g_{\mu\nu}\left(\frac{D}{d\lambda}V^\mu\right)W^\nu + g_{\mu\nu}V^\mu\left(\frac{D}{d\lambda}W^\nu\right) = 0 \quad (2.29)$$

Η παραπάνω απαίτηση, διασφαλίζει τη διατήρηση της νόρμας κάθε διανύσματος, καθώς και της έννοιας της ορθογωνιότητας, κάτω από παράλληλη μετατόπιση. Η απαίτηση της μετρικής συμβατότητας, είναι ιδιαίτερα σημαντική στη μελέτη των γεωδαισιακών. Στην περίπτωση της συνοχής **Berwald**, η συνθήκη μετρικής συμβατότητας δεν ικανοποιείται, καθώς μετά από παράλληλη μετατόπιση ενός διανύσματος κατά μήκος μίας καμπύλης σε ένα πεδίο $y(s)$ και επιστροφή του στο αρχικό σημείο κατά μήκος της ίδιας καμπύλης στο ίδιο πεδίο, δεν διατηρεί αναλλοίωτο το μέτρο του διανύσματος. Όπως συμβαίνει και στη γεωμετρία **Riemann**, ο τανυστής καμπυλότητας προκύπτει λαμβάνοντας το μεταθέτη των δεύτερων παραγώγων ενός ανταλλοίωτου διανυσματικού πεδίου. Στην περίπτωση της συνοχής **Berwald**, έχουμε:

$$V^i_{;j;k} - V^i_{;k;j} = V^h H^i_{hjk} - V^i|_h H^h_{0jk} \quad (2.30)$$

όπου

$$|_h = \partial/\partial y^h \quad (2.31)$$

Ακόμη, λόγω του τανυστικού χαρακτήρα της μερικής παραγώγου, έχουμε:

$$V^i_{;j}|_k - V^i|_k;j = V^h G^i_{hjk} \quad (2.32)$$

όπου ο τανυστής

$$G^i_{hjk} = \partial G^i_{hj}/\partial y^k \quad (2.33)$$

είναι συμμετρικός. Ο H^i_{hjk} καλείται τανυστής καμπυλότητας **Berwald**. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο G^i_{hjk} είναι επίσης ένας τανυστής καμπυλότητας. Μία σημαντική ιδιότητα του τανυστή καμπυλότητας **Berwald**, είναι η ακόλουθη:

$$H^i_{hjk} = H^i_{0jk|_h} \quad (2.34)$$

η οποία προκύπτει ως συνέπεια του ορισμού:

$$G^i_{jk} = \partial G^i_j/\partial y^k \quad (2.35)$$

Η σχέση αυτή απλοποιεί σημαντικά τους υπολογισμούς, και ως εκ τούτου αποτελεί ένα βασικό πλεονέκτημα της συνοχής **Berwald**. Παραμένει ωστόσο το μειονέκτημα του μη μετρικού χαρακτήρα της συγκεκριμένης συνοχής, με αποτέλεσμα να μην είναι η πλέον κατάλληλη επιλογή για τη μελέτη της βαρύτητας και της κοσμολογίας. Μία σημαντική κλάση χώρων **Finsler**, είναι οι λεγόμενοι ομοπαράλληλοι χώροι ή χώροι **Berwald**, στους οποίους ισχύει:

$$G^i_{hjk} = 0 \quad (2.36)$$

Αξίζει να σημειωθεί, ότι οι συνιστώσες G_{jk}^i της συνοχής Berwald, εξαρτώνται μόνο από τη θέση x . Μία άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα των συγκεκριμένων χώρων, είναι η εξής:

$$C_{ijk|h} = 0 \quad (2.37)$$

Μία άλλη ειδική κατηγορία χώρων *Finsler* που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, είναι οι διδιάστατοι χώροι. Μπορούμε να εισάγουμε ένα φυσικό πεδίο - πλαίσιο:

$$(1_i, m_i) \quad (2.38)$$

όπου:

$$1_i = F_{|i} \quad (2.39)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα m_i , είναι ορθογώνιο στο 1_i και συνεπώς, κάθε τανυστής μπορεί να εκφραστεί με βαθμωτούς συντελεστές σε αυτή τη βάση. Ορίζουμε τη γωνία Landsberg θ , η οποία αποτελεί γενίκευση του ορίσματος των πολικών συντεταγμένων:

$$\partial\theta/\partial y^i = m_i \quad (2.40)$$

Για τη βαθμωτή καμπυλότητα και τη σταθερή καμπυλότητα, ισχύουν οι σχέσεις:

$$H_{0i0j} = KF^2 h_{ij} \quad (2.41)$$

$$H_{hijk} = K(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}) \quad (2.42)$$

όπου K ένα βαθμωτό πεδίο το οποίο λαμβάνεται ως σταθερό στην τελευταία σχέση, και ο γωνιακός μετρικός τανυστής h_{ij} , δίνεται από την έκφραση:

$$h_{ij} = L(\partial^2 F/\partial y^i \partial y^j) = g_{ij} - 1_i 1_j \quad (2.43)$$

2.4.2 Θεωρία *Cartan*

Γενικά, μπορούμε να ορίσουμε μία μη γραμμική συνοχή που εφοδιάζει την πολλαπλότητα *Finsler*, ως ένα σύνολο ποσοτήτων $\Gamma_j^i(x, y)$, οι οποίες μεταβάλλονται κάτω από αλλαγές συντεταγμένων, σύμφωνα με τον ακόλουθο νόμο μετασχηματισμού:

$$\bar{\Gamma}_b^a(\bar{x}, \bar{y}) = \Gamma_j^i(x, y) X_i^a X_b^j + X_i^a X_{0b}^i, \quad (2.44)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος ενός βαθμωτού πεδίου $S(x, y)$, ορίζεται ως εξής:

$$S_{;i} = \frac{\partial S}{\partial x^i} - \frac{\partial S}{\partial y^r} \Gamma_i^r, \quad (2.45)$$

και η παράλληλη μετατόπιση ενός διανυσματικού πεδίου V^i :

$$\frac{dV^i}{ds} + \Gamma_j^i(x, \frac{dx}{ds}) V^j = 0 \quad (2.46)$$

Σύμφωνα με τους Synge και Taylor, ένα σύνολο ποσοτήτων:

$$N_j^i(x, y) = Y_{0j}^i - C_{jr}^i Y_{00}^r, \quad (2.47)$$

είναι μία μη γραμμική συνοχή. Εδώ, οι συντελεστές C_{jr}^i , είναι Finsler. Θέλουμε μία Finsler συνοχή, που δεν είναι συνάρτηση μόνο της θέσης X , αλλά εξαρτάται από μία γενική μη-γραμμική συνοχή $\{\Gamma_j^i(x, y)\}$:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial y^k}, \quad (2.48)$$

Οι συντελεστές N_j^i , συμπίπτουν με τους G_j^i του Berwald. Συνεπώς:

$$N_j^i = G_j^i = F_{0j}^i \quad (2.49)$$

Το σύνολο $\{F_{jk}^i\}$ είναι η συνοχή Cartan. Επομένως, στις θεωρίες των Berwald και Cartan, χρησιμοποιείται ίδια μη γραμμική συνοχή. Η μη γραμμική συνοχή, που μελετήθηκε για πρώτη φορά συστηματικά από τον Kawaguchi, έχει ιδιαίτερη σημασία στη γεωμετρία Finsler. Σε μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα M διάστασης n , θεωρούμε μία καμπύλη $C : x^i = x^i(t)$ με παράμετρο t . Θεωρούμε ακόμη, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dx^i}{dt} e_i, \quad \frac{de_i}{dt} = \Gamma_{ij}^k(x(t)) \frac{dx^j}{dt} e_k \quad (2.50)$$

όπου οι συναρτήσεις $\Gamma_{ij}^k(x)$, είναι γνωστές σε κάθε περιοχή συντεταγμένων της πολλαπλότητας. Οι λύσεις $\{P(t), e_i(t)\}$, προσδιορίζονται με αρχικές συνθήκες $\{P(0), e_i(0)\}$. Η συνάρτηση $P(t)$, σχηματίζει μία καμπύλη C^* , σε έναν ομοπαράλληλο χώρο N διάστασης n . Τα $e_i(t)$, είναι διανυσματικά πεδία κατά μήκος της C^* . Θεωρούμε ότι για μικρές τιμές της παραμέτρου t , τα $e_i(t)$ αποτελούν ένα συνοριακό πεδίο κατά μήκος της C^* , λαμβάνοντας τις αρχικές τιμές των $\{e_i(0)\}$ έτσι ώστε να είναι ένα σύνορο στο $P(0)$. Η καμπύλη C^* που προκύπτει, λέγεται ένα ανάπτυγμα της C στον N , ενώ το σύνολο $\{\Gamma_{ij}^k(x)\}$, ομοπαράλληλη συνοχή. Σε μία πολλαπλότητα M , με ομοπαράλληλη συνοχή $\Gamma = \{\Gamma_{ij}^k(x)\}$, θεωρούμε μία μετρική Riemann

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j \quad (2.51)$$

Θεωρούμε ακόμη, ότι για το πεδίο $\{e_i(t)\}$ κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης, ισχύει η σχέση:

$$g_{ij} = e_i e_j \quad (2.52)$$

Η τελευταία εξίσωση, ορίζει το εσωτερικό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο N . Για το λόγο αυτό, το σύνολο $\{\Gamma_{ij}^k(x)\}$, ονομάζεται Ευκλείδεια συνοχή. Προκειμένου το $\{\Gamma_{ij}^k(x)\}$ να είναι Ευκλείδεια συνοχή, θα πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}, \quad \Gamma_{ijk} = g_{jr} \Gamma_{ik}^r. \quad (2.53)$$

Η έννοια της Ευκλείδειας συνοχής, μπορεί να γενικευθεί σε χώρο *Finsler*, ακολουθώντας τη μέθοδο του *Cartan*. Στην περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις του προηγούμενου αναπτύγματος, λαμβάνουν τη μορφή:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dx^i}{dt} e^i, \frac{de^i}{dt} = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{dx^j}{dt} + C_{ij}^k \frac{dy^j}{dt} \right) e_k \quad (2.54)$$

όπου οι συνιστώσες $\Gamma_{ij}^k(x, y)$ και $C_{ij}^k(x, y)$, είναι *Finslerian* και λαμβάνουν γνωστές τιμές σε κάθε περιοχή συντεταγμένων. Η καμπύλη $\bar{C} : x^i = x^i(t), y^i = y^i(t)$ του χώρου γραμμικών στοιχείων \bar{M} , προκύπτει από μία καμπύλη $C : x^i = x^i(t)$ της πολλαπλότητας M , μαζί με ένα πεδίο κατεύθυνσης $y^i = y^i(t)$, που ορίζεται κατά μήκος της C . Η συνθήκη της Ευκλείδειας συνοχής

$$g_{ij} = e_i e_j \quad (2.55)$$

γενικεύεται μέσω των σχέσεων:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}, \Gamma_{ijk} = g_{jr} \Gamma_{ik}^r \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = C_{ijk} + C_{jik}, C_{ijk} = g_{jr} C_{ik}^r \quad (2.57)$$

Το σύστημα αξιωμάτων του *Cartan* περιλαμβάνει τις ακόλουθες τέσσερις συνθήκες διατυπωμένες σε ένα σταθεροποιημένο σημείο (x, y) , το οποίο θα αποκαλούμε *στηρικτικό στοιχείο*:

C_1) Αν διανύσματα X και y έχουν την ίδια κατεύθυνση, δηλαδή $X = py, p > 0$, τότε το μήκος του X είναι ίσο με την τιμή $F(x, X)$. Αυτή η συνθήκη γράφεται

$$g_{ij}(x, X) X^i X^j = F^2(x, X) \quad (2.58)$$

λόγω του ότι $g_{ij}(x, y) = g_{ij}(x, X)$.

C_2) Έστω X, Y δύο διανύσματα. Αν το y περιστραφεί απειροστά x , με σταθερά X, Y , τα συναλλοίωτα διαφορικά DX, DY ικανοποιούν την $g_{ij}(x, y) X^i DY^j = g_{ij}(x, y) Y^i DX^j$. Γενικά, η συναλλοίωτη διαφορίαση DX του X δίνεται από

$$DX^i = dX^i + X^r (\Gamma_{rj}^i(x, y) dx^j + C_{rj}^i(x, y) dy^j) \quad (2.59)$$

Επειδή ισχύει ότι $dx = dX = dY = 0$ η τελευταία γράφεται

$$C_{ijk} = C_{jik} \quad (2.60)$$

C_3) Αν η κατεύθυνση σταθερού διανύσματος X συμπίπτει με εκείνη του y , το συναλλοίωτο διαφορικό που αντιστοιχεί σε μία απειροστή περιστροφή γύρω από το (x, y)

μηδενίζεται, δηλαδή $DX^i = X^r C_{rj}^i(x, y) dy^j = 0$. Δεδομένου ότι $X = py, p > 0$ θα έχουμε ότι

$$X^r C_{rij}(x, X) = 0 \quad (2.61)$$

C_4) Θεωρούμε απειροστή παράλληλη μετατόπιση του (x, y) στο $(x + dx, y)$. Έστω $F_{jk}^i(x, y)$ οι συντελεστές της συνοχής. Αν τα F_{jk}^i είναι συμμετρικά στους κάτω δείκτες. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$Dy^i = 0 = dy^i + y^r (\Gamma_{rj}^i(x, y) dx^j + C_{rj}^i(x, y) dy^j) \quad (2.62)$$

Από την τελευταία. $dy^i = -y^r \Gamma_{rj}^i dx^j$, άρα

$$DX^i = dX^i + X^r (\Gamma_{rj}^i dx^j - C_{rj}^i \Gamma_{0k}^j dx^k) \quad (2.63)$$

επομένως

$$F_{rj}^i = \Gamma_{rj}^i - C_{rs}^i \Gamma_{0j}^s \quad (2.64)$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$T_{jk}^i = F_{jk}^i - F_{kj}^i = (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i) - (C_{jr}^i \Gamma_{0k}^r - C_{kr}^i \Gamma_{0j}^r) = 0 \quad (2.65)$$

Παρατηρήσεις

α) Από την (C_2) και την (2.57) προκύπτει ότι τα C_{ijk} είναι οι συνιστώσες του τανυστή στρέψης Cartan του χώρου Finsler.

β) Από τα (C_1) , (C_3) , προκύπτει ότι g_{ij} είναι ο μετρικός τανυστής του χωροχρόνου Finsler.

γ) Αντικαθιστώντας $F_{ijk} = g_{jr} F_{ik}^r$ στην (2.56), αποκτούμε

$$g_{ij|k} = 0 = \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - F_{ijk} - F_{jik} \quad (2.66)$$

όπου $\delta/\delta x^k = \partial/\partial x^k - F_{0k}^r \partial/\partial y^r$. Με βάση την τελευταία

$$F_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^i} - \frac{\delta g_{ki}}{\delta x^j} \right) \quad (2.67)$$

Τα F_{jk}^i είναι τα σύμβολα Christoffel, που προκύπτουν από την g_{ij} ως προς τις δ-παραγωγίσεις.

Ορίζουμε στην συνέχεια τον πρώτο τανυστή του Cartan. Στην πολλαπλότητα Finsler M , σε σταθεροποιημένο σημείο (x, y) , θεωρούμε τον εφαπτόμενο χώρο M_x , ο οποίος είναι χώρος Riemann με μετρική

$$d\sigma^2 = g_{ij}(x, y) dy^i dy^j, \quad (2.68)$$

Τα σύμβολα **Christoffel** της $g_{ij}(x, y)$ δίνονται από

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial y^j} \right), \quad (2.69)$$

Ο τανυστής καμπυλότητας **Riemann** του M_x ορίζεται ως ο πρώτος τανυστής καμπυλότητας του **Cartan** για τον χώρο M :

$$S_{rjk}^i = \frac{\partial C_{rj}^i}{\partial y^k} - \frac{\partial C_{rk}^i}{\partial y^j} + C_{rj}^s C_{sk}^i - C_{rk}^s C_{sj}^i = C_{rk}^s C_{sj}^i - C_{rj}^s C_{sk}^i \quad (2.70)$$

Από την κατασκευή του, ο πρώτος τανυστής καμπυλότητας μηδενίζεται στους χώρους **Riemann**.

Θα ορίσουμε τώρα τον δεύτερο και τον τρίτο τανυστή καμπυλότητας του **Cartan**. Στο στηρικτικό στοιχείο (x, y) , ορίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα l^i στην διεύθυνση του (x^i, y^i) ως

$$l^i = \frac{y^i}{F(x, y)} \quad (2.71)$$

Θέτουμε

$$\Gamma_{kj}^{*i} = \Gamma_{kj}^i - C_{kh}^i \Gamma_{rj}^h y^r \quad (2.72)$$

Ο δεύτερος τανυστής καμπυλότητας του **Cartan** δίνεται από

$$P_{jkh}^i = F \frac{\partial \Gamma_{jk}^{*i}}{\partial y^h} + C_{jm}^i C_{hk|r}^m l^r - C_{jh|k}^i \quad (2.73)$$

Ορίζουμε

$$K_{jkh}^i = \left(\frac{\partial \Gamma_{jh}^{*i}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jh}^{*i}}{\partial y^l} \frac{\partial G^i}{\partial y^h} \right) - \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^{*i}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^{*i}}{\partial y^l} \frac{\partial G^i}{\partial y^h} \right) + \Gamma_{mk}^{*i} \Gamma_{jh}^{*m} - \Gamma_{mh}^{*i} \Gamma_{jk}^{*m} \quad (2.74)$$

όπου οι συναρτήσεις G^i δίνονται από την (2.18). Ο τρίτος τανυστής καμπυλότητας του **Cartan** έχει τη μορφή

$$R_{jkh}^i = K_{jkh}^i + C_{jm}^i K_{rkh}^m y^r \quad (2.75)$$

Οι τανυστές καμπυλότητας **Berwald** και **Cartan**, διαφέρουν μεταξύ τους. Ωστόσο, επειδή η μη γραμμική συνοχή των δύο θεωριών είναι κοινή, μεταξύ των τανυστών H_{hjk}^i και R_{hjk}^i , ισχύει η σχέση:

$$H_{0jk}^i = R_{0jk}^i \quad (2.76)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε έναν χώρο **Riemann**, ο δεύτερος τανυστής καμπυλότητας P_{jkh}^i του **Cartan** μηδενίζεται, ενώ ο τρίτος R_{jkh}^i είναι ανάλογος του τανυστή **Riemann**.

Κεφάλαιο 3

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, Βαρύτητα και Κοσμολογία

Έως τώρα, αναπτύχθηκαν οι βασικές έννοιες της Διαφορικής Γεωμετρίας, μέσω της οποίας αναλύθηκαν τα κύρια γεωμετρικά χαρακτηριστικά του χωροχρόνου. Οι ταυιστές που αναπαριστούν αυτά τα χαρακτηριστικά, καθώς και η συνοχή που εφοδιάζει το χωρόχρονο, συνδέονται μέσω της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, με τις ιδιότητες της ύλης που κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας, η παρουσία της οποίας ευθύνεται για την καμπύλωση του χωροχρόνου. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι γεωδαισιακές του χώρου **Riemann**, αναπαριστούν φυσικές τροχιές σωματιδίων στο φυσικό χωρόχρονο. Λόγω της μορφής της εξίσωσης των γεωδαισιακών, ο προσδιορισμός αυτών των τροχιών προϋποθέτει την γνώση των συνιστωσών της συνοχής. Η δυναμική του βαρυτικού πεδίου, εμπεριέχεται εξ ολοκλήρου στις εξισώσεις του **Einstein**, οι οποίες προκύπτουν μέσω του Λογισμού των Μεταβολών, από την στασιμοποίηση του συναρτησιακού δράσης. Η μελέτη συγκεκριμένων λύσεων των εξισώσεων αυτών, οι οποίες θεωρούνται ως κατάλληλες για την περιγραφή της μετρικής δομής του σύμπαντος (κοσμολογικά μοντέλα), καθώς και η ανάδειξη των αντίστοιχων ενεργειακών συνθηκών, συνθέτουν το αντικείμενο της Κοσμολογίας.

3.1 Εξισώσεις Πεδίου του *Einstein*

3.1.1 Το Ολοκλήρωμα Δράσης του Βαρυτικού Πεδίου

Θεωρούμε χωρόχρονο με μετρική **Riemann** $g_{\mu\nu}$, εφοδιασμένο με τη συνοχή **Levi-Civita** $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$. Η συνολική δράση δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$S = \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x \quad (3.1)$$

οπου \mathcal{L} είναι η Λαγκραντζιανή πυκνότητα και το στοιχείο όγκου $\sqrt{-g}d^4x$ δίνεται από την (1.20) για $n = 4$.

Η γεωμετρική περιγραφή της βαρύτητας δίνεται από τους συντελεστές της μετρικής $g_{\mu\nu}$ και τις συνιστώσες της συνοχής $G_{\mu\lambda}^\nu$. Με βάση αυτό η δράση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα της συνεισφοράς της γεωμετρίας του χωρόχρονου, S_G , και της συνεισφοράς της ύλης, S_M , ως ακολούθως

$$S = \frac{1}{2\kappa}S_G + S_M \equiv \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_G d^4x + \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^4x \quad (3.2)$$

όπου κ σταθερά η οποία εξαρτάται από το Νευτώνειο όριο της θεωρίας.

Εν γένει, η βαρυτική Λαγκραντζιανή πυκνότητα \mathcal{L}_G θα είναι μία συνάρτηση του δυναμικού πεδίου $g_{\mu\nu}$ και των διαφορών τάξεων παραγώγων. Στην περίπτωση εξάρτησης μόνο από το $g_{\mu\nu}$ και τις πρώτες παραγώγους του, η \mathcal{L}_G θα είναι τετριμμένη. Αποδεικνύεται εύκολα θεωρώντας ένα τοπικά αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων γύρω από ένα σταθεροποιημένο σημείο P για το οποίο ισχύει $g_{\mu\nu}(\bar{x}) = \eta_{\mu\nu}$ και $\partial_\lambda g_{\mu\nu}(\bar{x}) = 0$, όπου η μετρική Minkowski δίνεται από την (1.12). Η ισχύς αυτών των συνθηκών αποτελεί μία γεωμετρική διατύπωση της Ασθενούς Αρχής Ισοδυναμίας, σύμφωνα με την οποία ένας παρατηρητής σε ελεύθερη πτώση δεν αντιλαμβάνεται τοπικά την επίδραση της βαρύτητας. Επειδή το σημείο P έχει επιλεγεί αυθαίρετα οι παραπάνω συνθήκες επεκτείνονται σε κάθε σημείο του χωρόχρονου. Επομένως μία μη τετριμμένη Λαγκραντζιανή πυκνότητα θα εξαρτάται και από τις δεύτερες παραγώγους της μετρικής. Μία ποσότητα επί της πολυπλοκότητας η οποία ικανοποιεί αυτή την απαίτηση είναι η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci, R , η οποία δίνεται από την (1.89). Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί πως η καμπυλότητα Ricci R είναι η μόνη βαθμωτή ποσότητα που προκύπτει από τη μετρική και τις παραγώγους της έως και δευτέρας τάξης.

Από τα προηγούμενα ορίζεται η δράση Hilbert ως

$$S_H \equiv \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (3.3)$$

3.1.2 Λογισμός των Μεταβολών

Θεωρούμε μεταβολή $\delta g^{\mu\nu}$ της μετρικής. Τότε η μεταβολή της δράσης Hilbert υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \int \delta(\sqrt{-g} R) d^4x = \int (R \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta R) d^4x \\ &= \int [R \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})] d^4x \end{aligned} \quad (3.4)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση τετραγωνικών πινάκων A ,

$$\ln(\det A) = \text{tr}(\ln A) \quad (3.5)$$

προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\det(g_{\mu\nu})} \delta(g_{\mu\nu}) &= \text{tr}((g_{\mu\nu})^{-1} \delta(g_{\mu\nu})) \Rightarrow \\
\frac{1}{g} \delta g &= g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \Rightarrow \\
\delta g &= -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

και η τελευταία συνεπάγεται ότι

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-\delta g) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{3.7}$$

Η μεταβολή των συμβόλων Christoffel είναι

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2} \delta [g^{\kappa\lambda} (\partial_{\nu} g_{\mu\kappa} + \partial_{\mu} g_{\nu\kappa} - \partial_{\kappa} g_{\mu\nu})] \\
&= \frac{1}{2} \delta g^{\kappa\lambda} (\partial_{\nu} g_{\mu\kappa} + \partial_{\mu} g_{\nu\kappa} - \partial_{\kappa} g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_{\nu} \delta g_{\mu\kappa} + \partial_{\mu} \delta g_{\nu\kappa} - \partial_{\kappa} \delta g_{\mu\nu}) \\
&= g_{\kappa\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \delta g^{\kappa\lambda} + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\nabla_{\nu} \delta g_{\mu\kappa} + \nabla_{\mu} \delta g_{\nu\kappa} - \nabla_{\kappa} \delta g_{\mu\nu} \\
&\quad + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \delta g_{\rho\kappa} + \Gamma_{\kappa\nu}^{\rho} \delta g_{\mu\rho} + \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} \delta g_{\rho\kappa} + \Gamma_{\kappa\mu}^{\rho} \delta g_{\nu\rho} - \Gamma_{\nu\kappa}^{\rho} \delta g_{\mu\rho} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\rho} \delta g_{\rho\nu}) \\
&= g_{\kappa\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \delta g^{\kappa\lambda} + g^{\kappa\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \delta g_{\rho\kappa} + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\nabla_{\nu} \delta g_{\mu\kappa} + \nabla_{\mu} \delta g_{\nu\kappa} - \nabla_{\kappa} \delta g_{\mu\nu}) \\
&= g_{\kappa\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \delta g^{\kappa\lambda} - g_{\kappa\rho} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \delta g^{\kappa\lambda} - \frac{1}{2} (g_{\mu\kappa} \nabla_{\nu} \delta g^{\kappa\lambda} + g_{\nu\kappa} \nabla_{\mu} \delta g^{\kappa\lambda} + \nabla^{\lambda} \delta g_{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{2} (g_{\mu\kappa} \nabla_{\nu} \delta g^{\kappa\lambda} + g_{\nu\kappa} \nabla_{\mu} \delta g^{\kappa\lambda} - g_{\mu\kappa} g_{\nu\rho} \nabla^{\lambda} \delta g^{\kappa\rho})
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Για τη μεταβολή του τανυστή Ricci, από την προηγούμενη θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= \delta \left[\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \right] \\
&= \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \\
&= \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \\
&= \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \tag{3.9} \\
&= -\frac{1}{2} \left(g_{\mu\kappa} \nabla_\lambda \nabla_\nu \delta g^{\kappa\lambda} + g_{\nu\kappa} \nabla_\lambda \nabla_\mu \delta g^{\kappa\lambda} - g_{\mu\kappa} g_{\nu\rho} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \delta g^{\kappa\rho} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(g_{\mu\kappa} \nabla_\nu \nabla_\lambda \delta g^{\kappa\lambda} + g_{\lambda\kappa} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g^{\kappa\lambda} - g_{\mu\kappa} g_{\lambda\rho} \nabla_\nu \nabla^\lambda \delta g^{\kappa\rho} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \nabla_\lambda \left(g_{\nu\kappa} \nabla_\mu \delta g^{\kappa\lambda} - g_{\mu\kappa} g_{\nu\rho} \nabla^\lambda \delta g^{\kappa\rho} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(g_{\lambda\kappa} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g^{\kappa\lambda} - g_{\mu\kappa} \nabla_\nu \nabla_\rho \delta g^{\kappa\rho} \right) \\
\Rightarrow g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \nabla_\lambda \left(\nabla_\kappa \delta g^{\kappa\lambda} - g_{\kappa\rho} \nabla^\lambda \delta g^{\kappa\rho} \right) + \frac{1}{2} \nabla_\nu \left(g_{\lambda\kappa} \nabla^\nu \delta g^{\kappa\lambda} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \nabla_\kappa \nabla_\rho \delta g^{\kappa\rho} \\
&= \nabla_\lambda g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \nabla_\kappa \delta g^{\lambda\kappa} \\
&= \nabla_\lambda \left(g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\kappa \delta g^{\lambda\kappa} \right) \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω, η δS_H γίνεται

$$\begin{aligned}
\delta S_H &= \int \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \\
&\quad + \int \sqrt{-g} \nabla_\lambda \left(g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\kappa \delta g^{\lambda\kappa} \right) d^4x \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Stokes, για ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο f^μ επί όγκου

$$\int_V \nabla_\mu f^\mu \sqrt{|g|} d^n x = \oint_{\partial V} n_\mu f^\mu \sqrt{|\gamma|} d^{n-1} x \tag{3.12}$$

όπου $|\gamma|$ η ορίζουσα της μετρικής του συνόρου ως υπερεπιφάνεια του M διάστασης $n-1$ και n_μ μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂V . Ολοκληρώνοντας σε ολόκληρο το χώρο M και υποθέτοντας πως στο άπειρο θα μηδενίζονται τόσο οι μεταβολές $\delta g^{\mu\nu}$ όσο και οι πρώτες παράγωγοί τους, έχουμε ότι η σχέση (3.11) γράφεται

$$\begin{aligned}
\delta S_H &= \int \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \\
&\quad + \oint \sqrt{|\gamma|} n_\lambda \left(g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\kappa \delta g^{\lambda\kappa} \right) d^3x \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Ο συνοριακός όρος θα είναι μηδενικός στο άπειρο, συνεπώς η τελευταία γίνεται

$$\delta S_H = \int \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \tag{3.14}$$

Ελαχιστοποιούμε την συνολική δράση (3.2) με $S_G = S_H$, και αποκτούμε

$$\begin{aligned} \delta S &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2\kappa} \delta S_H + \delta S_M &= 0 \\ \Rightarrow \int \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Καθώς οι μεταβολές $\delta g^{\mu\nu}$ είναι τυχαίες, η ολοκληρωτέα συνάρτηση μηδενίζεται σε κάθε σημείο. Καθώς η ορίζουσα της μετρικής δεν μηδενίζεται, λαμβάνουμε τελικά

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa \left[-\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \quad (3.16)$$

Ο ταυστής ενέργειας ορμής ορίζεται ως

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (3.17)$$

και η (3.16) λαμβάνει την τελική μορφή

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.18)$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί διατύπωση των εξισώσεων του Einstein για το βαρυτικό πεδίο. Το Νευτώνειο όριο της θεωρίας μας δίνει για την σταθερά κ την τιμή $8\pi G/c^4$. Το ίχνος της (3.18) μας δίνει

$$R = -\kappa T \quad (3.19)$$

οπότε η (3.18) μπορεί να επαναγραφεί ως εξής

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (3.20)$$

Ειδικότερα, στην περίπτωση όπου ο χωρόχρονος δεν περιλαμβάνει πεδία ύλης, θα έχουμε πως ο ταυστής ενέργειας ορμής είναι μηδενικός, οπότε οι εξισώσεις Einstein για το βαρυτικό πεδίο στο κενό απλοποιούνται στη μορφή

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.21)$$

3.2 Ασθενές βαρυτικό πεδίο και βαρυτικά κύματα

Η μη γραμμική μορφή των εξισώσεων πεδίου του Einstein έχει ως συνέπεια η αναλυτική επίλυσή τους στην γενική περίπτωση να καθίσταται αδύνατη. Οι υπολογισμοί διευκολύνονται σημαντικά αν το βαρυτικό πεδίο θεωρηθεί ασθενές. Η μελέτη του ασθενούς βαρυτικού πεδίου εμφανίζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον εξαιτίας της σύνδεσής του με τα βαρυτικά κύματα. Η ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων αποτελεί ένα σπουδαίο επίτευγμα των τελευταίων ετών προσφέροντας νέες προοπτικές στην σύγχρονη Κοσμολογία και Αστρονομία.

3.2.1 Γραμμικοποιημένες Εξισώσεις Πεδίου

Θεωρούμε μετρική της μορφής

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.22)$$

όπου η μετρική Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ δίνεται από την (1.12) και το πεδίο $h_{\mu\nu}$ είναι ένα συμμετρικό ταυστικό πεδίο το οποίο θεωρούμε ασθενές, $|h_{\nu}^{\nu}| \ll 1$. Οι εξισώσεις πεδίου του Einstein διατηρώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης ως προς το διαταρακτικό πεδίο $h_{\mu\nu}$. Η διαδικασία αυτή είναι αντιστρέψιμη και σε σχετικά μεγάλες παρατήρησης δεν οδηγεί σε σημαντική απώλεια πληροφορίας. Αντιστρέφοντας την σχέση (3.22) γράφουμε

$$1g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}$$

Από την ιδιότητα $g^{\mu\kappa}g_{\kappa\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$, αγνοώντας όρους ανώτερης τάξης, προκύπτει ότι

$$(\eta^{\mu\kappa} + \tilde{h}^{\mu\kappa})(\eta_{\kappa\nu} + h_{\kappa\nu}) = \delta_{\nu}^{\mu} \Rightarrow \tilde{h}^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu} \quad (3.23)$$

άρα η αντίστροφη μετρική θα είναι

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (3.24)$$

Υπολογίζουμε τα σύμβολα Christoffel σε πρώτη τάξη ως προς $h_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa} (\partial_{\nu}g_{\mu\kappa} + \partial_{\nu}g_{\nu\kappa} - \partial_{\kappa}g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{\lambda\kappa}) [\partial_{\nu}(\eta_{\mu\kappa} + h_{\mu\kappa}) + \partial_{\mu}(\eta_{\nu\kappa} + h_{\nu\kappa}) - \partial_{\kappa}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})] \\ &= \eta^{\lambda\kappa} (\partial_{\nu}h_{\mu\kappa} + \partial_{\mu}h_{\nu\kappa} - \partial_{\kappa}h_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ο ταυστής Ricci λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa}^{\kappa} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\kappa}^{\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^{\kappa} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\kappa\lambda}\partial_{\kappa}(\partial_{\nu}h_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}h_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\eta^{\kappa\lambda}\partial_{\nu}(\partial_{\kappa}h_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}h_{\kappa\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\mu\kappa}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^{\lambda}\partial_{\nu}h_{\mu\lambda} + \partial^{\lambda}\partial_{\mu}h_{\nu\lambda} - \partial^{\lambda}\partial_{\lambda}h_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\partial^{\lambda}h_{\mu\lambda} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h + \partial_{\nu}\partial^{\kappa}h_{\mu\kappa}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^{\kappa}\partial_{\mu}h_{\nu\kappa} + \partial^{\kappa}\partial_{\nu}h_{\mu\kappa} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h) \end{aligned} \quad (3.26)$$

όπου ο τελεστής d'Alembert για επίπεδο χωρόχρονο δίνεται από $\square = \partial^{\lambda}\partial_{\lambda}$ και $h = h_{\nu}^{\nu}$ το ίχνος του ταυστή $h_{\mu\nu}$.

Η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ σε πρώτη τάξη θα είναι

$$R = \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \square h \quad (3.27)$$

Είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις πεδίου ως

$$\frac{1}{2}(\partial^{\kappa}\partial_{\mu}h_{\nu\kappa} + \partial^{\kappa}\partial_{\nu}h_{\mu\kappa} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_{\kappa}\partial_{\lambda}h^{\kappa\lambda} - \square h) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.28)$$

3.2.2 Βαρυτικά Κύματα

Θεωρούμε τώρα ένα διαταρακτικό πεδίο της μορφής

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Απουσία πεδίων ύλης ($T_{\mu\nu} = 0$), οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις πεδίου για τις συνιστώσες $\mu = \nu = 1$ γράφονται

$$\begin{aligned} \partial_1\partial_1 h_+ + \partial_2\partial_1 h_\times + \partial_1\partial_1 h_+ + \partial_2\partial_1 h_\times - \square h_+ \\ -\partial_1\partial_1 h_+ - \partial_1\partial_2 h_\times - \partial_2\partial_1 h_\times + \partial_2\partial_2 h_+ = 0 \\ \Rightarrow \partial_0\partial_0 h_+ - \partial_3\partial_3 h_+ = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Αντίστοιχα για τις $\mu = 1, \nu = 2$ συνιστώσες έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_1\partial_1 h_\times - \partial_2\partial_1 h_+ + \partial_1\partial_2 h_+ + \partial_2\partial_2 h_\times - \square h_\times = 0 \\ \Rightarrow \partial_0\partial_0 h_\times - \partial_3\partial_3 h_\times = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Θέτοντας τις συνήθεις χωροχρονικές συντεταγμένες $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ οι τελευταίες δύο σχέσεις γράφονται αντίστοιχα

$$\frac{\partial^2 h_+}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_+}{\partial z^2} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 h_\times}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_\times}{\partial z^2} = 0 \quad (3.33)$$

Από τη μορφή των εξισώσεων (3.32), (3.33) φαίνεται πως πρόκειται για εξισώσεις κύματος που διαδίδονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο κατά μήκος της διεύθυνσης z με ταχύτητα $c = 1$. Και για τα δύο κύματα το κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης είναι το επίπεδο Oxy , και συνεπώς τα βαρυτικά κύματα είναι εγκάρσια.

3.3 Συναλλοίωτη Κινηματική

3.3.1 Η έννοια της Ομοτοπίας

Έστω M πολλαπλότητα και ανοικτό χωρίο $O \subset M$. Μία ομοτοπία στο O είναι μία μονοπαραμετρική οικογένεια λείων καμπυλών τέτοια ώστε για κάθε σημείο p του O υπάρχει μοναδική καμπύλη της οικογένειας η οποία διέρχεται από αυτό. Με αυτό τον τρόπο, οι εφαπτόμενες στην ομοτοπία αποτελούν ένα διανυσματικό πεδίο επί του O , και αντίστροφα, κάθε συνεχές διανυσματικό πεδίο επί του O παράγει μία ομοτοπία στο O . Στη συνέχεια του παρόντος Εδαφίου θα εργαζόμαστε σε χωρίο O στον χωρόχρονο M με μετρική g_{ab} .

3.3.2 Εξισώσεις *Raychaudhuri*

Έστω μία ομοτοπία χρονοειδών γεωδαισιακών. Χωρίς βλάβη γενικότητας, οι γεωδαισιακές παραμετροποιούνται από τον ιδιόχρονο τ , ούτως ώστε το διανυσματικό πεδίο ξ^a των εφαπτομένων να είναι κανονικοποιημένο, $\xi^a \xi_a = -1$. Ορίζουμε το τανυστικό πεδίο B_{ab}

$$B_{ab} = \nabla_b \xi_a \quad (3.34)$$

το οποίο είναι αμιγώς χωρικό, δηλαδή

$$B_{ab} \xi^a = B_{ab} \xi^b = 0 \quad (3.35)$$

Η φυσική ερμηνεία του B_{ab} μπορεί να φανεί από τις ακόλουθες θεωρήσεις. Έστω μία ομαλή μονοπαραμετρική υποοικογένεια $\gamma_s(t)$ γεωδαισιακών στην ομοτοπία, και έστω η_a το ορθογώνιο διάνυσμα απόκλισης από το γ_0 . Τότε το η_a αναπαριστά μία απειροστή χωρική μετατόπιση από το γ_0 σε μία κοντινή γεωδαισιακή στην υποοικογένεια. Θα έχουμε

$$\mathcal{L}_\xi \eta^a = 0 \quad (3.36)$$

όπου \mathcal{L}_ξ η παράγωγος Lie στη διεύθυνση ξ^a . Συνεπώς

$$\xi^b \nabla_b \eta_a = \eta^b \nabla_b \xi_a = B_b^a \eta^b \quad (3.37)$$

Από την τελευταία σχέση το B_b^a αποτελεί ένδειξη του κατά πόσο αποτυγχάνει το η^a να μετατοπιστεί παράλληλα. Ένας παρατηρητής επί της γεωδαισιακής γ_0 θα υπολόγιζε πως οι γειτονικές γεωδαισιακές επιμηκύνονται και περιστρέφονται σύμφωνα με την γραμμική απεικόνιση B_b^a .

Θεωρούμε τη χωρική μετρική

$$h_{ab} = g_{ab} + \xi_a \xi_b \quad (3.38)$$

Συνεπώς, $h_b^a = g^{ac} h_{cb}$ είναι ο τελεστής προβολής επί του υποχώρου στον εφαπτόμενο χώρο ο οποίος είναι κάθετος στο ξ_a . Ορίζουμε την διαστολή θ , παραμόρφωση σ_{ab} και τον στροβιλισμό ω_{ab} από τις σχέσεις

$$\theta = B^{ab} h_{ab} \quad (3.39)$$

$$\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab} \quad (3.40)$$

$$\omega_{ab} = B_{[ab]} \quad (3.41)$$

όπου $B_{(ab)}, B_{[ab]}$ είναι το συμμετρικό και το αντισυμμετρικό τμήμα του τανυστή B_{ab} , αντίστοιχα:

$$B_{(ab)} = (1/2)(B_{ab} + B_{ba}) \quad (3.42)$$

$$B_{[ab]} = (1/2)(B_{ab} - B_{ba}) \quad (3.43)$$

Από τα προηγούμενα ο τανυστής B_{ab} αναλύεται ως

$$B_{ab} = \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \quad (3.44)$$

Από την σχέση (3.35) παρατηρούμε πως η παραμόρφωση και ο στροβιλισμός είναι αμιγώς χωρικά,

$$\sigma_{ab}\xi^b = \omega_{ab}\xi^b = 0 \quad (3.45)$$

Από την σχέση (3.37) συνεπάγεται πως κατά μήκος κάθε γεωδαισιακής στην ομοτοπία, το θ μετρά τη μέση επέκταση ανάμεσα στις απειροστά κοντινές γειτονικές γεωδαισιακές. Το ω_{ab} , ως αντισυμμετρικό κομμάτι της γραμμικής απεικόνισης B_{ab} , μετρά τον στροβιλισμό τους, ενώ το σ_{ab} μετρά την παραμόρφωσή τους, δηλαδή μία αρχική σφαίρα στον εφαπτόμενο χώρο η οποία μετατοπίζεται κατά Lie κατά μήκος του ξ_a θα παραμορφωθεί σε ένα ελλειψοειδές με κύριους άξονες οι οποίοι δίνονται από τα ιδιοδιανύσματα του σ_b^a , και ρυθμούς που δίνονται από τις ιδιοτιμές του σ_b^a .

Από την εξίσωση γεωδαισιακής απόκλισης (1.124) μπορούμε να λάβουμε σχέσεις για τον ρυθμό μεταβολής της διαστολής, της παραμόρφωσης και του στροβιλισμού, όμως έχουμε την δυνατότητα να τις παράξουμε απευθείας. Θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \xi^c \nabla_c B_{ab} &= \xi^c \nabla_c \nabla_b \xi^a = \xi^c \nabla_b \nabla_c \xi_a + R_{cba}^d \xi^c \xi_d \\ &= \nabla_b (\xi^c \nabla_c \xi_a) - (\nabla_b \xi^c) (\nabla_c \xi_a) + R_{cba}^d \xi^c \xi_d \\ &= -B_b^c B_{ac} + R_{cba}^d \xi^c \xi_d \end{aligned} \quad (3.46)$$

Λαμβάνοντας το ίχνος της τελευταία σχέσης θα έχουμε

$$\xi^c \nabla_c \theta = \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}\xi^c \xi^d \quad (3.47)$$

Το μηδενικού ίχνους, συμμετρικό κομμάτι της εξίσωσης (3.46) μας δίνει

$$\begin{aligned} \xi^c \nabla_c \sigma_{ab} &= -\frac{2}{3}\theta\sigma_{ab} - \sigma^{ac}\sigma_b^c - \omega_{ac}\omega_b^c + \frac{1}{3}h_{ab}(\sigma_{cd}\sigma^{cd} - \omega_{cd}\omega^{cd}) \\ &\quad + C_{cbad}\xi^c \xi^d + \frac{1}{2}\bar{R}_{sb} \end{aligned} \quad (3.48)$$

όπου \bar{R}_{sb} είναι το χωρικό, μηδενικού ίχνους τμήμα του R_{sb} ,

$$\bar{R}_{sb} = h_{ac}h_{bd}R^{cd} - \frac{1}{3}h_{ab}h_{cd}R^{cd} \quad (3.49)$$

Τελικά, το αντισυμμετρικό τμήμα της εξίσωσης (3.46) μας δίνει

$$\xi^c \nabla_c \omega_{ab} = -\frac{2}{3}\theta\omega_{ab} - 2\sigma_{[b\omega_a]c}^c \quad (3.50)$$

Η εξίσωση (3.47) αποκαλείται εξίσωση Raychaudhuri και είναι ουσιαστικής σημασίας για την μελέτη χωροχρονικών ιδιομορφιών.

3.3.3 Ενεργειακές συνθήκες

Εστιάζουμε στον τελευταίο όρο της δεξιάς πλευράς της εξίσωσης (3.47). Από τις εξισώσεις πεδίου (3.18), μπορούμε να γράψουμε αυτό τον όρο ως

$$R_{ab}\xi^a\xi^b = 8\pi\left(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right) = 8\pi\left(T_{ab}\xi^a\xi^b + \frac{1}{2}T\right) \quad (3.51)$$

Από φυσικής άποψης, ο όρος $T_{ab}\xi^a\xi^b$ αναπαριστά την πυκνότητα ενέργειας της ύλης, όπως μετράται από έναν παρατηρητή με τετραταχύτητα ξ^a . Είναι γενικά παραδεκτό πως σε κάθε φυσικά υλοποιήσιμη περίπτωση, η πυκνότητα ενέργειας είναι μη αρνητική,

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0 \quad (3.52)$$

για κάθε χρονοειδές ξ^a . Αυτή η υπόθεση είναι γνωστή ως ασθενής ενεργειακή συνθήκη. Ωστόσο, είναι φυσικά ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι ο ταχυστής ενέργειας ορμής της ύλης δεν θα λάβει τόσο μεγάλες αρνητικές τιμές ώστε το δεξιό σκέλος της εξίσωσης (3.51) να γίνει αρνητικό

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \geq -\frac{1}{2}T \quad (3.53)$$

Αυτή η υπόθεση για κάθε χρονοειδές ξ^a καλείται ισχυρή ενεργειακή συνθήκη. Χάριν πληρότητας, αναφέρουμε ακόμα μία ενεργειακή συνθήκη η οποία θεωρείται ότι ισχύει σε κάθε φυσικά υλοποιήσιμη περίπτωση. Για όλες τις χρονοειδείς ξ^a με $t \geq 0$, η έκφραση $-T_b^a\xi^b$ θα πρέπει να παριστά ένα χρονοειδές διάνυσμα με κατεύθυνση προς το μέλλον ή μηδενικού μήκους διάνυσμα. Εφόσον για κάθε παρατηρητή με τετραταχύτητα ξ^a η ποσότητα $-T_b^a\xi^b$ φυσικά αναπαριστά το τετραδιάνυσμα πυκνότητας ενέργειας-ορμής της ύλης. Η συνθήκη αυτή είναι γνωστή ως κυρίαρχη ενεργειακή συνθήκη, και ερμηνεύεται λέγοντας πως ο ρυθμός μεταβολής της ροής ενέργειας της ύλης θα είναι πάντα μικρότερος από την ταχύτητα του φωτός. Παρατηρούμε πως η κυρίαρχη ενεργειακή συνθήκη συνεπάγεται την ασθενή ενεργειακή συνθήκη, μα σε κάθε άλλη περίπτωση αυτές οι τρεις ενεργειακές συνθήκες είναι μαθηματικά ανεξάρτητες.

Ο ταχυστής τάσης T_{ab} είναι συμμετρικός ως προς τους δείκτες του, αλλά από την στιγμή που η μετρική g_{ab} δεν είναι θετικώς ορισμένη, η διανυσματική γραμμική απεικόνιση $-T_b^a\xi^b$ θα πρέπει να μην είναι διαγωνοποιήσιμη, δηλαδή να μην έχει τέσσερα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι ολοι οι ταχυστές τάσης T_{ab} οι οποίοι αναπαριστούν φυσικά ρεαλιστικές περιπτώσεις είναι διαγωνοποιήσιμοι, με εξαίρεση τον ταχυστή τάσης ο οποίος εκφράζει το μηδενικό ρευστό. Ο T_{ab} θα έχει τη μορφή

$$T_{ab} = \rho l_a l_b + p_1 x_a x_b + p_2 y_a y_b \quad (3.54)$$

όπου το l_a είναι μηδενικού μήκους και τα x_a, y_a αποτελούν ορθοκανονικά χωροειδή διανύσματα τα οποία είναι κάθετα στο l_a . Τα ιδιοδιανύσματα του T_b^a που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι αυτομάτως ορθογώνια, ενώ τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή μπορούν να επιλεγούν ως ορθογώνια. Συνεπώς ο T_{ab} θα διαγωνιοποιείται στη μορφή

$$T_{ab} = \rho l_a l_b + p_1 x_a x_b + p_2 y_a y_b \quad (3.55)$$

όπου $\{t^a, x^a, y^a, z^a\}$ είναι ορθοκανονική βάση με το t^a χρονοειδές. Η ιδιοτιμή ρ μπορεί να ερμηνευθεί ως η πυκνότητα ενέργειας της ύλης σε ηρεμία, ενώ οι ιδιοτιμές $p_i, i = 1, 2, 3$ καλούνται κύριες πιέσεις. Για T_{ab} στη μορφή (3.55), οι προαναφερθείσες ενεργειακές συνθήκες είναι ισοδύναμες με τις ακόλουθες.

(1) Η ασθενής ενεργειακή συνθήκη θα ικανοποιείται αν και μόνο αν

$$\rho \geq 0, \rho + p_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq 3) \quad (3.56)$$

(2) Η ισχυρή ενεργειακή συνθήκη θα ικανοποιείται αν και μόνο αν

$$\rho + \sum_i p_i \geq 0, \rho + p_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq 3) \quad (3.57)$$

Με τον τρόπο αυτό οι ασθενής και η ισχυρή ενεργειακές συνθήκες θα ικανοποιούνται μόνο αν $\rho \geq 0$ και δεν υπάρχουν αρνητικές πιέσεις συγκρίσιμου μεγέθους με την ρ .

(3) Η κυρίαρχη ενεργειακή συνθήκη θα ικανοποιείται αν και μόνο αν

$$\rho \geq |p_i|, \quad (1 \leq i \leq 3) \quad (3.58)$$

Θεωρούμε στην συνέχεια την περίπτωση ενός ιδανικού ρευστού με ταυστή ενέργειας-ορμής της μορφής

$$T^{ab} = \rho \xi^a \xi^b + p h^{ab} \quad (3.59)$$

όπου $h^{ab} = g^{ab} + \xi^a \xi^b$. Ως προς το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί την κίνηση της ύλης, ο ταυστής T_{ab} είναι διαγώνιος και αναπαρίσταται σε μορφή πίνακα με κύρια διαγώνιο (ρ, p, p, p) . Οι ενεργειακές συνθήκες (3.56), (3.57), (3.58) θα έχουν την ακόλουθη μορφή.

(1) Η ασθενής ενεργειακή συνθήκη

$$\rho \geq 0, \rho + p \geq 0 \quad (3.60)$$

(2) Η ισχυρή ενεργειακή συνθήκη

$$\rho + p \geq 0, \rho + 3p \geq 0 \quad (3.61)$$

(3) Η κυρίαρχη ενεργειακή συνθήκη

$$\rho \geq |p| \quad (3.62)$$

Επανερχόμαστε στην Εξίσωση Raychaudhuri, (3.47). Εφόσον ισχύει η εξίσωση (3.18) και η ισχυρή ενεργειακή συνθήκη (3.53), τότε ο τελευταίος όρος στο δεξί σκέλος της εξίσωσης (3.47) θα είναι αρνητικός. Η φυσική ερμηνεία αυτού του γεγονότος αποτελεί έκφραση του ελκτικού χαρακτήρα της βαρύτητας. Εάν η ομοτοπία είναι ορθογώνια

υπερεπιφάνεια, θα έχουμε $\omega_{ab} = 0$, οπότε και ο τρίτος όρος μηδενίζεται. Ο δεύτερος όρος, $-\sigma_{ab}\sigma^{ab}$ είναι μη θετικός. Από τα προηγούμενα θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 &\leq 0 \Rightarrow \\ \frac{d\theta^{-1}}{d\tau} &\geq \frac{1}{3} \Rightarrow \\ \theta^{-1}(\tau) &\geq \theta_0^{-1} + \frac{1}{3}\tau\end{aligned}\quad (3.63)$$

όπου θ_0 είναι η αρχική τιμή της διαστολής θ . Υποθέτουμε ότι $\theta_0 < 0$, δηλαδή η ομοτοπία είναι αρχικά συγκλίνουσα σε σημείο. Τότε η τελευταία εξίσωση δηλώνει πως η θ δεν είναι φραγμένη για κάποιον ιδιόχρονο $\tau \leq \frac{3}{|\theta_0|}$. Γενικά, το αποτέλεσμα αυτό δηλώνει την ύπαρξη ιδιάζοντος σημείου στην ομοτοπία, και όχι ιδιάζον σημείο στην δομή του χωρόχρονου.

3.3.4 Η περίπτωση των μηδενικών γεωδαισιακών

Εξετάζουμε στην συνέχεια την περίπτωση ομοτοπιών από μηδενικές γεωδαισιακές. Εκτελούμε ομοπαράλληλη αναπαράμετρηση των γεωδαισιακών με παραμετρο $\lambda = c_1\tau + c_2$. Αντίθετα με την χρονοειδή περίπτωση δεν υπάρχει φυσικός τρόπος να κανονικοποιηθεί το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο k^a ώστε να προσαρμόζεται ο παράγοντας κλίμακας c_1 σε διαφορετικές γεωδαισιακές. Στην χρονοειδή περίπτωση, περιορίσαμε τα διανύσματα απόκλισης η^a ώστε να είναι ορθογώνια στα ξ^a . Υπάρχουν δύο κύριοι λόγοι για αυτό τον περιορισμό:

(1) Εάν $\xi_a\xi^a$ σταθερό, ισχύει ότι

$$\xi^a\nabla_a(\xi_b\eta^b) = \xi^a\xi_b\nabla_a\eta^b = \xi_b\mathcal{L}_\xi\eta^b + \eta^a\xi_b\nabla_a\xi^b \quad (3.64)$$

Συνεπώς ο όρος $\xi_a\eta^a$ είναι σταθερός κατά μήκος κάθε γεωδαισιακής, και η μη ορθογώνια συνιστώσα του η^a δεν έχει επίπτωση στους υπολογισμούς.

(2) Τα διανύσματα απόκλισης τα οποία διαφέρουν μόνο κατά πολλαπλάσιο του ξ^a αναπαριστούν μετατοπίσεις στην ίδια γειτονική γεωδαισιακή. Η ορθογωνιότητα διορθώνει μία φυσική συνθήκη βαθμίδας επί των η^a .

Στην περίπτωση ομοτοπιών από μηδενικές γεωδαισιακές, οι δύο προηγούμενοι λόγοι εξακολουθούν να συντρέχουν, αλλά οδηγούν σε δύο νέους ανεξάρτητους περιορισμούς.

(1*) Για κάθε διανυσματικό πεδίο απόκλισης η σχέση (3.64) εξακολουθεί να ισχύει

$$k^a\nabla_a(k_b\eta^b) = k_b\mathcal{L}_k\eta^b + \eta^ak_b\nabla_ak^b = 0 \quad (3.65)$$

συνεπώς η ποσότητα $k_b\eta^b$ διατηρείται το κατά μήκος των γεωδαισιακών. Αυτό συνεπάγεται πως ένα τυχαίο διάνυσμα απόκλισης η^a γράφεται ως $\eta^a = \eta_\parallel^a + \eta_\perp^a$, όπου το

διάνυσμα η_{\perp}^a είναι κάθετο στο k^a και το μη κάθετο διάνυσμα η_{\parallel}^a το οποίο μετατόπιζεται παράλληλα στον εαυτό του κατα μήκος της γεωδαισιακής. Αξίζει να σημειωθεί πως η ανάλυση αυτή δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Με αυτό τον τρόπο, η συμπεριφορά του η_{\parallel}^a δεν έχει επίπτωση στους υπολογισμούς, και μπορούμε να εστιάσουμε σε διανύσματα απόκλισης κάθετα στο k^a .

(2*) Τα διανύσματα απόκλισης τα οποία διαφέρουν μόνο κατά πολλαπλάσιο του k^a αναπαριστούν μετατοπίσεις στην ίδια γειτονική γεωδαισιακή. Η ορθογωνιότητα διορθώνει μία φυσική συνθήκη βαθμίδας επί των η^a . Ορίζουμε την σχέση \sim των διανυσμάτων απόκλισης

$$\eta^a \sim \zeta^a \Leftrightarrow (\exists \nu) \eta^a - \zeta^a = \nu k^a \quad (3.66)$$

Παρατηρούμε πως η \sim αποτελεί σχέση ισοδυναμίας και πως δύο διανύσματα απόκλισης στην ίδια κλάση αναπαριστούν μετατοπίσεις στην ίδια γειτονική γεωδαισιακή. Εφόσον το k^a είναι μηδενικό και κάθετο στον εαυτό του, ο περιορισμός (2*) είναι ανεξάρτητος του (1*), και μας επιτρέπει να εστιάσουμε τη μελέτη μας στον διδιάστατο υπόχωρο που ορίζεται από την σχέση ισοδυναμίας \sim . Έστω V_p ο εφαπτόμενος χώρος στο σημείο $p \in M$. Τα εφαπτόμενα διανύσματα του V_p τα οποία είναι κάθετα στο k^a αποτελούν έναν τριδιάστατο υπόχωρο τον οποίο συμβολίζουμε ως \bar{V}_p . Σε αντιστοιχία με την κατασκευή της σχέσης ισοδυναμίας \sim , ορίζουμε το χώρο $(\hat{V})_p$ ο οποίος αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας των διανυσμάτων του \bar{V}_p τα οποία ικανοποιούν την σχέση $x^a - y^a = \nu k^a$. Τότε ο \hat{V}_p είναι ένας διδιάστατος διανυσματικός χώρος ο οποίος δεν μπορεί να ταυτοποιηθεί με κάποιον υπόχωρο του \bar{V}_p με φυσικό τρόπο. Δεν υπάρχει διαισθητικός τρόπος να αναλύσουμε τα διανύσματα $t^a \in V_p$ ως άθροισμα διανυσμάτων του \bar{V}_p και διανυσμάτων που δεν ανήκουν στο \bar{V}_p . Θεωρώντας όμως πως $t^a \in \bar{V}_p$ τότε μπορούμε να επιλέξουμε $\hat{t}_a \in \hat{V}_p$ μέσω της σχέσης ισοδυναμίας που προαναφέρθηκε. Για κάθε δυϊκό διάνυσμα $\mu_a \in (V_p)^*$ μπορούμε να θεωρήσουμε δυϊκό διάνυσμα $\bar{\mu}_a \in (\hat{V}_p)^*$, περιορίζοντας τις τιμές του μ_a στα διανύσματα του \bar{V}_p . Επίσης $\bar{\mu}_a$ ορίζει ένα δυϊκό διάνυσμα $\hat{\mu}_a \in (\hat{V}_p)^*$ αν και μόνο αν $\bar{\mu}_a k^a = \mu_a k^a$.

Η προηγούμενη κατασκευή γενικεύεται στην περίπτωση ενός τανυστή $T_{b_1, \dots, b_l}^{a_1, \dots, a_k}$ στον V_p . Ο $T_{b_1, \dots, b_l}^{a_1, \dots, a_k}$ θα ορίζει έναν τανυστή $\hat{T}_{b_1, \dots, b_l}^{a_1, \dots, a_k}$ επί του \hat{V}_p , αν και μόνο αν συστέλλοντας ως οποιονδήποτε από τους δείκτες με το k_a ή το k^a , και συστέλλοντας ως προς τους υπόλοιπους δείκτες με διανύσματα ή δυϊκά διανύσματα τα οποία ορίζουν στοιχεία του \hat{V}_p ή του $(\hat{V}_p)^*$, το αποτέλεσμα είναι μηδέν.

Η μετρική του χωρόχρονου g_{ab} ικανοποιεί την προηγούμενη ιδιότητα και συνεπώς ορίζει με τη σειρά της έναν τανυστή επί του \hat{V}_p , τον οποίο θα συμβολίζουμε ως \hat{h}_{ab} . Ο τανυστής αυτός είναι θετικά ορισμένος, με υπογραφή $++$, επί του \hat{V}_p . Σημειώνεται πως ο τανυστής \bar{h}_{ab} επί του \bar{V}_p ο οποίος λαμβάνεται περιορίζοντας τις τιμές του g_{ab} στα διανύσματα του \bar{V}_p είναι εκφυλισμένος, εφόσον $\bar{h}_{ab} k^b = 0$. Συνεπώς η \bar{h}_{ab} δεν συνιστά μετρική \bar{V}_p . Επιπλέον η αντίστροφη μετρική επί του \hat{h}^{ab} προκύπτει με φυσικό τρόπο από την g^{ab} , με βάση την προηγούμενη κατασκευή.

Θεωρούμε τώρα μία ομοτοπία μηδενικών γεωδαισιακών με εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο k^a . Το τανυστικό πεδίο

$$B_{ab} = \nabla_b k_a \quad (3.67)$$

ικανοποιεί την προηγούμενη ιδιότητα, άρα θα παράγει τανυστικό πεδίο \hat{B}_{ab} . Αναλύουμε το \hat{B}_{ab} ως εξής

$$\hat{B}_{ab} = -\frac{1}{2}\theta\hat{h}_{ab} + \hat{\sigma}_{ac} + \hat{\omega}_{ab} \quad (3.68)$$

όπου

$$\theta = \hat{h}^{ab}\hat{B}_{ab} \quad (3.69)$$

$$\hat{\sigma}_{ab} = \hat{B}_{(ab)} - \frac{1}{2}\theta\hat{h}_{ab} \quad (3.70)$$

$$\hat{\omega}_{ab} = \hat{B}_{[ab]} \quad (3.71)$$

είναι αντίστοιχα η διαστολή, η παραμόρφωση και ο στροβιλισμός στην ομοτοπία. Αντιπαραβάλλοντας τις σχέσεις (3.40) και (3.69) αποδίδουμε τη μετατροπή του παράγοντα $1/3$ σε $1/2$ στην ελάττωση της διάστασης των θεωρούμενων χώρων από 3 σε 2. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα τα οποία οδήγησαν στην σχέση (3.46) στην χρονοειδή περίπτωση, θα έχουμε

$$k^c\nabla_c B_{ab} + B_b^c B_{ac} = R_{cba}^d k_d k^c \quad (3.72)$$

Η αντίστοιχη σχέση επί του \hat{V}_p είναι

$$k^c\nabla_c \hat{B}_{ab} + \hat{B}_b^c \hat{B}_{ac} = \widehat{R_{cba}^d} k_d k^c \quad (3.73)$$

Αντικαθιστώντας την (3.68), το συμμετρικό, το άιχνο και το αντισυμμετρικό μέρος της εξίσωσης αντίστοιχα, θα είναι

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} + \hat{\omega}_{ab}\hat{\omega}^{ab} - R_{cd}k^c k^d \quad (3.74)$$

$$k^c\nabla_c \hat{\sigma}_{ab} = -\theta\hat{\sigma}_{ab} + \widehat{C_{cbad}^d} k_c k^d \quad (3.75)$$

$$k^c\nabla_c \hat{\omega}_{ab} = -\theta\hat{\omega}_{ab} \quad (3.76)$$

Παρατηρούμε πως ο τελευταίος όρος του δεξιού μελους της εξίσωσης (3.75) μηδενίζεται αν και μόνο αν $C_{cbad}^d k_c k^d x^a x^b = 0$ για κάθε x^a, y^b ορθογώνια στο k^a .

Η φύση της εξίσωσης (3.74) για την διαστολή σε μηδενικές γεωδαισιακές παρουσιάζει σημαντική ομοιότητα με την εξίσωση Raychaudhuri (3.47). Η αξιοσημείωτη διαφορά είναι πως με χρήση των εξισώσεων Einstein, λαμβάνουμε

$$R_{ab}k^a k^b = 8\pi T_{ab}k^a k^b \quad (3.77)$$

Συνεπώς για να διασφαλιστεί πως ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (3.74) είναι μη θετικός, απαιτείται να ισχύει ότι

$$T_{ab}k^ak^b \geq 0 \quad (3.78)$$

για κάθε μηδενικό διάνυσμα k^a . Εάν ισχύει η ισχυρή ενεργειακή συνθήκη (3.53) τότε για κάθε χρονοειδές ξ^a θα έχουμε $T_{ab}\xi^a\xi^b - \frac{1}{2}T\xi^a\xi_a \geq 0$, και από αυτό το γεγονός η εξίσωση (3.78) θα ισχύει για κάθε μηδενικό k^a . Αντίστοιχα, εάν ισχύει η ασθενής ενεργειακή συνθήκη (3.56), θα έχουμε ότι η εξίσωση (3.78) θα ικανοποιείται για κάθε μηδενικό k^a . Για διαγωνιοποιήσιμο T_{ab} , από την εξίσωση (3.54), ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση (3.78) για κάθε μηδενικό k^a , είναι πως

$$\rho + p_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (3.79)$$

Η τελευταία σχέση ορίζει τη λεγόμενη μηδενική ενεργειακή συνθήκη. Στην περίπτωση του ιδανικού ρευστού του προηγούμενου υποεδαφίου, η συνθήκη έχει τη μορφή

$$\rho + p \geq 0 \quad (3.80)$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι οι απαιτήσεις επί του T_{ab} που εξασφαλίζουν ότι ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (3.74) είναι μη θετικός, είναι ασθενέστερες από τις αντίστοιχες απαιτήσεις στην χρονοειδή περίπτωση.

Κατά αναλογία με την (3.63), υποθέτοντας πως $R_{ab}k^ak^b \geq 0$ και πως η ασθενής ή η ισχυρή ενεργειακή συνθήκη ικανοποιείται, η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (3.74) για την διαστολή θ με αρχική συνθήκη $\theta(\lambda_0) = \theta_0 < 0$ εγγυάται την ύπαρξη πεπερασμένου $\check{\lambda}$, με $\check{\lambda} \leq 2/|\theta_0|$, έτσι ώστε

$$\lim_{\lambda \rightarrow \check{\lambda}} \theta(\lambda) = -\infty \quad (3.81)$$

3.4 Κοσμολογία FLRW

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σε αρκετά μεγάλες κλίμακες παρατήρησης, η κατανομή ύλης και ενέργειας στο Σύμπαν, φαίνεται σε οποιονδήποτε παρατηρητή ομογενής και ισότροπη. Υποθέτουμε ότι οι ιδιότητες αυτές διατηρούνται ανεξάρτητα από το σημείο παρατήρησης και τον προσανατολισμό του παρατηρητή στον χώρο. Αναζητούμε επομένως μία μετρική η οποία περιγράφει έναν ομογενή και ισότροπο χωρόχρονο η οποία θα είναι ταυτόχρονα ανεξάρτητη της θέσης και της κατεύθυνσής του. Στο παρόν εδάφιο κατασκευάζουμε τη μετρική **Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker** και μελετούμε τις εξισώσεις κίνησης οι οποίες προκύπτουν από αυτήν, οι οποίες είναι γνωστές ως εξισώσεις **Friedmann**.

3.4.1 Η έννοια της Υπερεπιφάνειας

Προκειμένου να γίνουν σαφείς οι ιδιότητες της ομογένειας και ισοτροπίας στο χωρόχρονο, είναι χρήσιμο να αναφερθούμε στην έννοια της υπερεπιφάνειας σε μία πολλαπλότητα. Θεωρούμε μία λεία πολλαπλότητα M διάστασης n . Έστω μία διαφορίσιμη συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Για ω στο πεδίο τιμών της f , η αντίστροφη εικόνα

$f^{-1}(\{\omega\}) = \{p \in M : f(p) = \omega\}$ ορίζει μία υποπολλαπλότητα $\Sigma \subset M$ διάστασης $n - 1$. Η Σ καλείται υπερεπιφάνεια της M . Σε κάθε σημείο $p \in M$ ο εφαπτόμενος χώρος $T_p\Sigma$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο T_pM . Ένα διάνυσμα $k^a \in T_pM$ θα είναι ορθογώνιο στη Σ στο σημείο p εάν $k^a \perp T_p\Sigma$. Για ένα ορθογώνιο διάνυσμα k^a χρονοειδές, χωροειδές ή φωτοειδές, η Σ θα λέγεται αντίστοιχα χωροειδής, χρονοειδής ή φωτοειδής.

3.4.2 Μετρική ομογενούς και ισότροπου χωροχρόνου

Έστω $\phi : M \rightarrow M$ αμφιδιαφόριση. Η ϕ θα λέγεται ισομετρία εάν για κάθε $p \in M$ και για κάθε $v, w \in T_pM$ ισχύει

$$\langle v, w \rangle_p = \langle df(v), df(w) \rangle_{\phi(p)} \quad (3.82)$$

Ο χωρόχρονος λέγεται χωρικά ομογενής αν υπάρχει μονοπαραμετρική οικογένεια χωροειδών υπερεπιφανειών $\{\Sigma_t\}$ με την ιδιότητα $\cup_t \Sigma_t = M$, τέτοιες ώστε για κάθε t για κάθε $p, q \in \Sigma_t$ υπάρχει ισομετρία $\phi : M \rightarrow M$ τέτοια ώστε $\phi(p) = q$. Ο χωρόχρονος θα λέγεται χωρικά ισότροπος εάν υπάρχει οικογένεια καμπυλών $\{C_\gamma\}$ με εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο u^μ τέτοιες ώστε $\cup_\gamma C_\gamma = M$, και σε κάθε σημείο $p \in M$ και για κάθε δύο διανύσματα $v, w \in T_pM$ κάθετα στο u^μ , υπάρχει ισομετρία που απεικονίζει το v στο w . Παρατηρούμε πως οι έννοιες της ομογένειας και της ισοτροπίας δεν συνδέονται απαραίτητα μεταξύ τους. Από φυσικής άποψης, ο ορισμός της ισοτροπίας εγγυάται την ισοδυναμία όλων των κατευθύνσεων στο χώρο. Η καθετότητα του διανυσματικού πεδίου U στις υπερεπιφάνειες εξασφαλίζει για έναν παρατηρητή σε μία δεδομένη χρονική στιγμή δεν υπάρχει προτιμητέος χωρικός προσανατολισμός.

Ορίζουμε τη μετρική στην τριδιάστατη υπερεπιφάνεια Σ_t

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j \quad (3.83)$$

Η γ_{ij} αποτελεί το χωρικό μέρος της ζητούμενης μετρικής $g_{\mu\nu}$ του χωροχρόνου. Λόγω της ισοτροπίας του χώρου, ο τανυστής καμπυλότητας Riemann στην Σ_t θα είναι

$${}^{(3)}R_{ijkl} = k\gamma_{k[i}\gamma_{j]l} \quad (3.84)$$

όπου το $k \in \mathbb{R}$ θα είναι σταθερό λόγω των απαιτήσεων ομογένειας και ισοτροπίας του χώρου. Επομένως

$${}^{(3)}R_{ij} = 2k\gamma_{ij} \quad (3.85)$$

$${}^{(3)}R = 6k \quad (3.86)$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε έναν χώρο σταθερής καμπυλότητας. Δύο τέτοιο χώροι με την ίδια καμπυλότητα είναι πάντοτε ισομετρικοί. Επιπλέον, δύο χωροι σταθερής καμπυλότητας με ομόσημα k θα είναι τοπικά ισομετρικοί. Επομένως, αρκεί να διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για το k :

(1) Αν $k > 0$ το σύμπαν θα έχει τη δομή de Sitter χώρου. Γεωμετρικά, ο χώρος αυτός αναπαριστά μία σφαίρα ακτίνας $R(t)$ εντός τετραδιάστατου Ευκλείδειου χώρου. Η σφαίρα θα δίνεται από την εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2(t) \quad (3.87)$$

Ειδικότερα, στην περίπτωση της μοναδιαίας σφαίρας, η μετρική σε πολικές συντεταγμένες έχει τη μορφή

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2 \quad (3.88)$$

όπου $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ είναι η μετρική της διδιάστατης μοναδιαίας σφαίρας.

(2) Αν $k = 0$ το σύμπαν θα είναι επίπεδο και η μετρική θα συμπίπτει με εκείνη του τριδιάστατου Ευκλείδειου χώρου

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2 \quad (3.89)$$

(3) Αν $k < 0$ το σύμπαν έχει δομή αντί de Sitter χώρου. Η μετρική του χώρου είναι εκείνη ενός υπερβολοειδούς εντός τετραδιάστατου Ευκλείδειου χώρου με υπογραφή Lorentz. Ως προς κάποιο καθολικό αδρανειακό παρατηρητή ο χώρος θα περιγράφεται από την εξίσωση

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2(t) \quad (3.90)$$

Ειδικότερα, στην περίπτωση μοναδιαίου υπερβολοειδούς, η μετρική σε πολικές συντεταγμένες έχει τη μορφή

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2 \quad (3.91)$$

Η συνάρτηση $R(t)$ καλείται παράγοντας κλίμακας. Εκτελώντας αναπαραμέτρηση ως προς το συντεταγμένο χρόνο t του ισοτροπικού παρατηρητή, έχουμε

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) d\sigma^2 \quad (3.92)$$

Ορίζοντας την συνάρτηση

$$r(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi), & k > 0 \\ \chi, & k = 0 \\ \sinh(\chi), & k < 0 \end{cases} \quad (3.93)$$

Θα έχουμε πως

$$\frac{d\chi}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (3.94)$$

και με αντικατάσταση της τελευταίας στην (3.92), λαμβάνουμε την μετρική FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (3.95)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να κανονικοποιήσουμε τις τιμές της καμπυλότητας k σε 0, 1 ή -1. Οι τρεις αυτές περιπτώσεις αντιστοιχούν σε ένα επίπεδο, κλειστό ή

ανοικτό σύμπαν. Ο παράγοντας κλίμακας $R(t)$ μπορεί να κανονικοποιηθεί ώστε να γίνει αδιάστατος. Θα συμβολίζουμε τον αδιάστατο παράγοντα κλίμακας ως $a(t)$, και η μετρική FLRW (3.95) λαμβάνει τη μορφή

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (3.96)$$

Η τελευταία σχέση ορίζει το συγκινούμενο σύστημα συντεταγμένων ενώ το r καλείται συγκινούμενη απόσταση. Η μετατόπιση προς το ερυθρό όταν ο παράγοντας κλίμακας είναι a είναι ίση με

$$z = \frac{1}{a} - 1 \quad (3.97)$$

3.4.3 Εξισώσεις *Friedmann*

Η κατασκευή της μετρικής FLRW του ομογενούς και ισότροπου χωρόχρονου επιτρέπει τον προσδιορισμό της χρονικής εξέλιξης του Σύμπαντος. Με χρήση των εξισώσεων πεδίου του Einstein (3.18), είναι δυνατός ο καθορισμός της εξέλιξης του παράγοντα κλίμακας $a(t)$.

Για την μετρική FLRW, υπολογίζουμε τα σύμβολα Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = a\dot{a} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{a}}{a} & 0 & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{kr}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r(1 - kr^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.99)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot \theta \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{1}{r} & \cot \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

Οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας Ricci θα είναι

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (3.102)$$

$$R_{11} = \frac{2\dot{a}^2 + 2k + a\ddot{a}}{1 - kr^2} \quad (3.103)$$

$$R_{22} = r^2 (2\dot{a}^2 + 2k + a\ddot{a}) \quad (3.104)$$

$$R_{33} = r^2 (2\dot{a}^2 + 2k + a\ddot{a}) \sin^2 \theta \quad (3.105)$$

Η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci ισούται με

$$R = 6 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right] \quad (3.106)$$

Υποθέτουμε πως, σε μεγάλη κλίμακα, η ύλη και η ενέργεια στο σύμπαν ικανοποιούν την εξίσωση του ιδανικού ρευστού

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (3.107)$$

όπου ρ η πυκνότητα ενέργειας, P η πίεση, και U^μ η τετραταχύτητα του ρευστού. Η καταστατική εξίσωση που περιγράφει το ιδανικό ρευστό εκφράζεται ως η σχέση που συνδέει την πίεση P με την πυκνότητα ενέργειας ρ . Στην περίπτωση μας

$$P = w\rho \quad (3.108)$$

Η διατήρηση του τανυστή ενέργειας ορμής $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ συνεπάγεται

$$\partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\mu = 0 \quad (3.109)$$

Για $\nu = 0$ λαμβάνουμε την εξίσωση διατήρησης

$$\begin{aligned} \partial_0 T_0^0 + \Gamma_{01}^1 T_0^0 + \Gamma_{02}^2 T_0^0 + \Gamma_{03}^3 T_0^0 - \Gamma_{01}^1 T_1^0 - \Gamma_{02}^2 T_2^0 - \Gamma_{03}^3 T_3^0 &= 0 \\ \Rightarrow -\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(-\rho) - 3\frac{\dot{a}}{a}P &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\rho} + 3H(\rho + P) &= 0 \end{aligned} \quad (3.110)$$

όπου $H = \frac{\dot{a}}{a}$ είναι η παράμετρος **Hubble**, η φυσική σημασία της οποίας έγκειται στο γεγονός πως εκφράζει το ρυθμό διαστολής του Σύμπαντος.

Γράφουμε τις εξισώσεις πεδίου για $\mu\nu = 00$

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3P) \quad (3.111)$$

και για $\mu\nu = ij$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2k}{a^2} = 4\pi G(\rho - P) \quad (3.112)$$

Αντικαθιστώντας την προτελευταία σχέση στην τελευταία, λαμβάνουμε τις εξισώσεις **Friedmann**

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (3.113)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3P) \quad (3.114)$$

Ειδικότερα στην περίπτωση επίπεδου σύμπαντος $k = 0$, η σχέση (3.113) δίνει την κρίσιμη τιμή για την πυκνότητα ενέργειας

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \Rightarrow \rho = \rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (3.115)$$

Μία άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση χωρόχρονου είναι το σύμπαν **Milne**, για το οποίο η συνολική πυκνότητα ενέργειας μηδενίζεται. Οι εξισώσεις (3.113), (3.114) λαμβάνουν τη μορφή

$$\dot{a}^2 = -k \quad (3.116)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi GP \quad (3.117)$$

Γνωρίζοντας την κρίσιμη τιμή ρ_{cr} για την πυκνότητα ενέργειας από την σχέση (3.115), είμαστε σε θέση να εκφράσουμε την γεωμετρική **FLRW** δομή του χώρου ως ακολούθως:

- (α) Ένας χωρόχρονος σταθερής καμπυλότητας θα περιγράφει ένα ανοικτό σύμπαν αν και μόνο αν $\rho < \rho_{cr}$.
- (β) Ένας χωρόχρονος σταθερής καμπυλότητας θα περιγράφει ένα επίπεδο σύμπαν αν και μόνο αν $\rho = \rho_{cr}$.
- (γ) Ένας χωρόχρονος σταθερής καμπυλότητας θα περιγράφει ένα κλειστό σύμπαν αν και μόνο αν $\rho > \rho_{cr}$.

Με την χρήση της ταυτότητας **Bianchi** αποκτούμε

$$\nabla_\mu G_\nu^\mu = 0 \Rightarrow \nabla_\mu \left(R_\nu^\mu - \frac{1}{2}R g_\nu^\mu \right) = 0 \Rightarrow \nabla_\mu R_\nu^\mu - \frac{1}{2}g_\nu^\mu \partial_\mu R = 0 \quad (3.118)$$

Για την συνιστώσα $\nu = 0$, προκύπτει μία ενδιαφέρουσα συνθήκη για την χρονική εξέλιξη του σύμπαντος:

$$\begin{aligned}
\partial_0 R_0^0 + 3\Gamma_{01}^1 R_1^1 - \Gamma_{01}^1 R_1^1 - \Gamma_{02}^2 R_2^2 - \Gamma_{03}^3 R_3^3 - \frac{1}{2}\partial_0 R &= 0 \Rightarrow \\
3\frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + 9H\frac{\ddot{a}}{a} - 3H\left(2H^2 + 2\frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) - 3\frac{d}{dt}\left(H^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) &= 0 \Rightarrow \\
6H\frac{\ddot{a}}{a} - 6H^3 - 6H\frac{k}{a^2} - 6H\dot{H} - 3\frac{d}{dt}\left(\frac{k}{a^2}\right) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{k}{a^2}\right) = H\frac{\ddot{a}}{a} - H^3 - H\dot{H} - H\frac{k}{a^2} &\Rightarrow \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{k}{a^2}\right) = -2H\frac{k}{a^2} &\Rightarrow \\
d\left(\frac{k}{a^2}\right) = -2\frac{k}{a^2}\frac{da}{a} &\Rightarrow \\
d\left[\ln\left(\frac{k}{a^2}\right)\right] = -2d\ln a &\quad (3.119)
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία με αρχικές συνθήκες $k(t_0) = k_0$, $a(t_0) = a_0$ θα είναι

$$\begin{aligned}
\frac{k/a^2}{k_0/a_0^2} &= \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} \Rightarrow \\
k &= k_0 \quad (3.120)
\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση συνάγεται πως η χωρική καμπυλότητα k διατηρείται σταθερή κατά την εξέλιξη του σύμπαντος.

3.5 Το καθιερωμένο πρότυπο της Κοσμολογίας

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήθηκε η μετρική FLRW, η οποία χαρακτηρίζει ένα σύμπαν χωρικά ομογενές και ισότροπο σε μεγάλη κλίμακα. Κάθε ένα από τα συστατικά του σύμπαντος μπορεί σε ικανοποιητική προσέγγιση να θεωρηθεί ως ιδανικό ρευστό με καταστατική εξίσωση που δίνεται από την (3.108) και τανυστή ενέργειας-ορμής που δίνεται από την (3.107). Στο πλαίσιο αυτό έχουν αναπτυχθεί πλήθος μοντέλων με πιο διαδεδομένο το λεγόμενο Καθιερωμένο Πρότυπο της Κοσμολογίας, $\Lambda - \text{CDM}$.

Σύμφωνα με αυτό, και αξιοποιώντας τα δεδομένα από το διαστημικό παρατηρητήριο Planck, θεωρείται ότι η συνολική ύλη και ενέργεια του σύμπαντος αποτελείται από συνήθη

ύλη σε ποσοστό 4,9%, σκοτεινή ύλη σε ποσοστό 6,8% και σκοτεινή ενέργεια σε ποσοστό 68,3%. Σε επίπεδο κοσμολογικού ρευστού, το $\Lambda - CDM$ περιλαμβάνει την ψυχρή μάζα υπό μορφή κωνιορτού, την ακτινοβολία και την κοσμολογική σταθερά.

Χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση (3.108) και την εξίσωση διατήρησης (3.110) θα έχουμε ότι

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)H = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \quad (3.121)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε

$$\rho = c_0 a^{-3(1+w)} \quad (3.122)$$

όπου c_0 θετική σταθερά. Ο κωνιορτός αποτελεί μη σχετικιστική ύλη (βαριόνια, ηλεκτρόνια, υποθετικά σωματίδια της σκοτεινής ύλης) στην οποία δεν υπάρχουν κρούσεις για την οποία ισχύει $w = 0$. Για παράδειγμα, για τα άστρα και τους γαλαξίες η πίεση είναι αμελητέα σε σύγκριση με την πυκνότητα ενέργειας. Ένα σύμπαν στο οποίο η πυκνότητα ενέργειας οφείλεται κυρίως στον κωνιορτό λέγεται σύμπαν κυριαρχούμενο από ύλη. Η σχέση (3.122) δίνει $\rho = c_0 a^{-3}$, η οποία ερμηνεύεται ως η ελάττωση της αριθμητικής πυκνότητας των σωματιδίων καθώς το σύμπαν διαστέλλεται. Για τον κωνιορτό η πυκνότητα ενέργειας κυριαρχείται από την ενέργεια ηρεμίας, η οποία είναι ανάλογη της αριθμητικής πυκνότητας.

Από την άλλη πλευρά, ο όρος ακτινοβολία χρησιμοποιείται για να περιγράψει είτε την πραγματική ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, είτε σωματίδια με μάζα τα οποία κινούνται σε σχετικιστικές ταχύτητες αρκετά κοντά στην ταχύτητα του φωτός ώστε να μην διακρίνονται από φωτόνια, τουλάχιστον όσον αφορά την καταστατική εξίσωση. Η ακτινοβολία είναι ιδανικό ρευστό και συνεπώς έχει ταυστή ενέργειας ορμής που δίνεται από την σχέση (3.107). Μπορούμε να εκφράσουμε τον $T_{\mu\nu}$ ως προς την ένταση $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ πεδίου A_μ ,

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu - \frac{1}{4} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right) \quad (3.123)$$

Εξισώνοντας τα ίχνη των σχέσεων (3.107) και (3.123) προκύπτει $w = 1/3$ στην σχέση (3.108). Τότε η εξίσωση (3.121) γράφεται

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4\frac{\dot{a}}{a} \quad (3.124)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση,

$$\rho = c_1 a^{-4} \quad (3.125)$$

όπου c_1 θετική σταθερά. Ένα σύμπαν για το οποίο η πυκνότητα ενέργειας προέρχεται κυρίως από ακτινοβολία θα λέγεται σύμπαν κυριαρχούμενο από ακτινοβολία. Παρατηρούμε ότι η πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας μειώνεται ελαφρώς ταχύτερα από εκείνη της ύλης. Αυτό συμβαίνει διότι η αριθμητική πυκνότητα των φωτονίων μειώνεται με τον ίδιο ρυθμό όπως η αριθμητική πυκνότητα των μη σχετικιστικών σωματιδίων, ενώ σε ατομικό επίπεδο τα φωτόνια θα χάνουν ενέργεια με ρυθμό a^{-1} καθώς μετατοπίζονται

προς το ερυθρό. Ομοίως, τα σχετικιστικά σωματίδια με μάζα θα χάνουν ενέργεια καθώς επιβραδύνονται στις συγκινούμενες συντεταγμένες. Πιστεύεται ότι το σύμπαν κυριαρχείται από ύλη, και πως το πηλίκο πυκνότητας ενέργειας από ύλη προς πυκνότητα ενέργειας από ακτινοβολία είναι της τάξεως 10^6 . Ωστόσο, σε κάποια πρώιμη φάση του σύμπαντος, η πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας θα κυριαρχούσε.

Ο όρος σκοτεινή ενέργεια αφορά μία μη παρατηρήσιμη και απροσδιόριστης φύσεως μορφή ενέργειας η οποία είναι χρήσιμη για την ερμηνεία της επιταχυνόμενης διαστολής του Σύμπαντος. Η κοσμολογική σταθερά Λ έχει εισαχθεί στην προσπάθεια απόδοσης ενέργειας και ορμής στο κενό. Οι εξισώσεις πεδίου με την εισαγωγή της κοσμολογικής σταθεράς γράφονται

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.126)$$

και ο ταυιστής ενέργειας-ορμής του κενού έχει τη μορφή

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \quad (3.127)$$

Η τελευταία σχέση συμφωνεί με την θεώρηση του κενού ως ιδανικού ρευστού με πυκνότητα ενέργειας

$$\rho = -P = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (3.128)$$

Συνεπώς στην εξίσωση (3.108) έχουμε $w = -1$, και η εξίσωση (3.122) γράφεται

$$\rho = c_0 \quad (3.129)$$

δηλαδή η πυκνότητα ενέργειας του κενού είναι ανεξάρτητη του a . Εφόσον οι πυκνότητες ενέργειας της ύλης και της ακτινοβολίας μειώνονται, σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν η σταθερή μη μηδενική πυκνότητα ενέργειας του κενού θα κυριαρχεί σε πολύ μεγάλους χρόνους. Στην περίπτωση αυτή το Σύμπαν λέγεται κυριαρχούμενο από το κενό.

Στο δεξί μέλος της εξίσωσης (3.113), ο πρώτος όρος είναι πάντα θετικός καθώς η πυκνότητα ενέργειας είναι θετική για όλα τα συστατικά του Σύμπαντος. Επίσης ο τελευταίος όρος μπορεί να αγνοηθεί επειδή σύμφωνα με τις παρατηρήσεις το Σύμπαν σε μεγάλη κλίμακα θεωρείται ως επίπεδο, έχει δηλαδή μηδενική χωρική καμπυλότητα. Επομένως η εξίσωση (3.113) μπορεί να γραφεί ως

$$\dot{a}^2 \approx \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 \quad (3.130)$$

Το δεύτερο μέλος της τελευταίας σχέσης είναι γνήσια θετικό για $t > 0$ και επομένως $\dot{a} > 0$. Αυτό το συμπέρασμα συμφωνεί με τις παρατηρήσεις οι οποίες συναινούν στο ότι το Σύμπαν διαστέλλεται. Επειδή $\dot{a} > 0$ η συνάρτηση $a(t)$ είναι γνήσιως αύξουσα, το οποίο σημαίνει ότι υπήρξε χρονική στιγμή $t_0 = 0$, για την οποία η εξίσωση (3.113) εμφάνισε ιδιάζον σημείο $a(t_0) = 0$. Το σημείο αυτό λαμβάνεται ως η στιγμή της Μεγάλης Έκρηξης.

Θεωρώντας πως η πυκνότητα ενέργειας είναι θετική και η πίεση μη αρνητική, μπορούμε να εκτιμήσουμε την ταχύτητα διαστολής σε ένα σύμπαν το οποίο κυριαρχείται από ύλη και διαστέλλεται συνεχώς. Από την εξίσωση διατήρησης (3.110)

$$\begin{aligned}\frac{d(\rho a^3)}{dt} &= a^3 \left(\dot{\rho} + 3\rho \frac{\dot{a}}{a} \right) \\ &= -3Pa^2 \dot{a} \\ &\leq 0\end{aligned}\tag{3.131}$$

Καθώς $\frac{d(\rho a^3)}{dt} \leq 0$ και $a \rightarrow \infty$ λαμβάνουμε ότι

$$\rho a^2 \rightarrow 0\tag{3.132}$$

Από την εξίσωση Friedmann (3.114) θα έχουμε

$$\dot{a}^2 \rightarrow |k|\tag{3.133}$$

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στα ακόλουθα συμπεράσματα:

(1) Στην περίπτωση ανοικτού σύμπαντος ο παράγοντας κλίμακας ικανοποιεί την σχέση

$$\dot{a} \rightarrow 1\tag{3.134}$$

συνεπώς για μεγάλους χρόνους ο ρυθμός διαστολής του σύμπαντος τείνει να γίνει σταθερός.

(2) Στην περίπτωση επίπεδου σύμπαντος ο παράγοντας κλίμακας ικανοποιεί την σχέση

$$\dot{a} \rightarrow 0\tag{3.135}$$

συνεπώς η διαστολή θα είναι συνεχιζόμενη αλλά ο ρυθμός διαστολής θα επιβραδύνεται συνεχώς.

(3) Στην περίπτωση κλειστού σύμπαντος η εξίσωση Friedmann (3.114) γράφεται

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - 1\tag{3.136}$$

Λόγω της σχέσης (3.132) και του γεγονότος $\dot{a}^2 \geq 0$, θα πρέπει να υπάρχει άνω φράγμα a_M στον παράγοντα κλίμακας. Τότε, από την εξίσωση Friedmann (3.113)

$$\ddot{a} \rightarrow -\frac{4\pi G}{3}(\rho + P)a_M < 0\tag{3.137}$$

Από την τελευταία σχέση, ο παράγοντας κλίμακας θα λαμβάνει τη μέγιστη τιμή a_M και στην συνέχεια θα αρχίσει να φθίνει έως το μηδέν, οδηγώντας το σύμπαν στην Μεγάλη Σύνθλιψη. Σε αυτή την περίπτωση το σύμπαν είναι χωρικά και χρονικά πεπερασμένο.

Μία χρήσιμη κοσμολογική παράμετρος είναι ο συγκινούμενος χρόνος, ο οποίος ορίζεται ως η απειροστή απόσταση την οποία διανύει το φως σε απειροστό χρόνο

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \quad (3.138)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση, προκύπτει η συνολική απόσταση που έχει διανύσει το φως από την στιγμή της Μεγάλης Έκρηξης έως σήμερα, η οποία ονομάζεται συγκινούμενος ορίζοντας

$$\eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (3.139)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της παραμέτρου Hubble

$$\eta = \int_0^a \frac{da'}{a' a' H(a')} \quad (3.140)$$

Ορίζουμε την συγκινούμενη ακτίνα Hubble ως

$$R_H = \frac{1}{aH(a)} \quad (3.141)$$

Η φυσική σημασία της συγκινούμενης ακτίνας Hubble έγκεται στο γεγονός ότι καθορίζει τη μέγιστη απόσταση που μπορεί να καλυφθεί από ένα σωματίδιο ανά λογαριθμική μεταβολή του παράγοντα κλίμακας $a(t)$. Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει πως ο συγκινούμενος ορίζοντας η θα ισούται με το λογαριθμικό ολοκλήρωμα της συγκινούμενης ακτίνας Hubble R_H σε όλο το χρονικό εύρος από την απαρχή του σύμπαντος έως σήμερα.

3.6 Κοσμολογικός Πληθωρισμός

Το καθιερωμένο πρότυπο $\Lambda - CDM$ το οποίο αναπτύχθηκε στο προηγούμενο εδάφιο, επιχειρεί να περιγράψει τη δομή και την εξέλιξη του σύμπαντος στο πλαίσιο της Κοσμολογίας FLRW. Ωστόσο, στην προσπάθεια αυτή προκύπτουν μερικά προβλήματα, όπως είναι η αδυναμία ερμηνείας της παρατηρούμενης χωρικά ομογενούς κατανομής της ύλης και ενέργειας του σύμπαντος σε μεγάλη κλίμακα, η οποία γίνεται έκδηλη στην κοσμική μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου (CMBR).

3.6.1 Η αναγκαιότητα τροποποίησης του καθιερωμένου προτύπου

Στις πρώιμες φάσεις εξέλιξης, το Σύμπαν χαρακτηριζόταν από πολύ υψηλή πυκνότητα ύλης και ακτινοβολίας, καθώς και από πολύ υψηλή θερμοκρασία ($T \propto a^{-1}$). Με άλλα λόγια η ύλη βρισκόταν σε κατάσταση πλήρως ιονισμού και αδιαφάνειας στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Αργότερα, η διαστολή του σύμπαντος είχε ως αποτέλεσμα την

σημαντική μείωση της θερμοκρασίας, η οποία διατάραξε την θερμοδυναμική ισορροπία μεταξύ ύλης και ακτινοβολίας με συνέπεια τον σχηματισμό των ατόμων από τον συνδιασμό ηλεκτρονίων με πυρήνες (εποχή επανασύνδεσης). Στο στάδιο αυτής της εξέλιξης του Σύμπαντος η ύλη έγινε διαφανής στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

Η χωρικά ομογενής κατανομή της ακτινοβολίας υποβάθρου σε μεγάλες κλίμακες μαρτυρά ότι υπήρξε κάποια εποχή όπου η ακτίνα **Hubble** κάλυπτε εξ' ολοκλήρου το παρατηρούμενο σύμπαν. Έπειτα από αυτή την εποχή, η επίδραση των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων θα πρέπει να ήταν αμελητέα σε σύγκριση με αυτή των βαρυτικών. Για το λόγο αυτό το παραπάνω θα πρέπει να προηγήθηκε του σχηματισμού των ατόμων.

Σε σύμπαν κυριαρχούμενο από ακτινοβολία και ύλη, ο ρυθμός μεταβολής της συγκινούμενης ακτίνας **Hubble** είναι θετικός, επομένως ο συγκινούμενος ορίζοντας θα λάμβανε πολύ μικρές τιμές με αποτέλεσμα να είναι αδύνατη η επίτευξη θερμοδυναμικής ισορροπίας μεταξύ περιοχών που απέχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους.

Τα παραπάνω αποδεικνύουν την αδυναμία του καθιερωμένου προτύπου της Κοσμολογίας να ερμηνεύσει παρατηρούμενη χωρική ομογένεια του Σύμπαντος, εφ' όσον υποτεθεί ότι το καθιερωμένο πρότυπο της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων και η γενική θεωρία της σχετικότητας διατηρούν την ισχύ τους στις πρώιμες φάσεις εξέλιξης.

Συνεπώς είναι επιτακτική η ανάγκη τροποποίησης του προτύπου έτσι ώστε, πριν από την περιοχή επανασύνδεσης, ο συγκινούμενος ορίζοντας να λαμβάνει τιμές αρκετά μεγαλύτερες συγκριτικά με το σημερινό παρατηρούμενο σύμπαν. Αυτό ισοδυναμεί με την απαίτηση ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας **Hubble** να είναι αρνητικός πριν από την εποχή επανασύνδεσης, και θετικός έπειτα από αυτήν. Επομένως

$$\frac{dR_H}{dt} < 0 \Leftrightarrow -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0 \Leftrightarrow \ddot{a} > 0 \quad (3.142)$$

Σε αυτή την μικρής διάρκειας εποχή το σύμπαν θα πρέπει να χαρακτηριζόταν από επιταχυνόμενη διαστολή, η οποία μείωσε τον παράγοντα κλίμακας a κατά 28 τάξεις μεγέθους. Αυτή η εποχή καλείται κοσμολογικός πληθωρισμός.

Το ζητούμενο τώρα είναι ο προσδιορισμός του μηχανισμού του κοσμολογικού πληθωρισμού, δηλαδή του τρόπου με τον οποίο το σύμπαν οδηγήθηκε στο να κυριαρχείται αρχικά από ακτινοβολία, στην συνέχεια από ύλη και αργότερα από το κενό. Σημειώνεται ότι κατά τη διάρκεια του κοσμολογικού πληθωρισμού, τα συστατικά του σύμπαντος εξακολουθούν να χαρακτηρίζονται από τον τανυστή ενέργειας-ορμής ενός ιδανικού ρευστού, και συνεπώς οι εξισώσεις **Friedmann** διατηρούν την ισχύ τους. Από τις απαιτήσεις $\ddot{a} > 0$, $\rho > 0$ συνεπάγεται ότι $P < -\frac{\rho}{3}$, συνθήκη που διαφέρει από τις αντίστοιχες για την ακτινοβολία και την συνήθη ύλη. Εκτός από την χωρική ομογένεια ο κοσμολογικός πληθωρισμός χρησιμοποιείται για την ερμηνεία και άλλων ιδιοτήτων του Σύμπαντος σε μεγάλη κλίμακα, όπως είναι η χωρική ισοτροπία, η επιπεδότητα και η μη ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων.

3.6.2 Το βαθμωτό πεδίο *inflaton*

Η επικρατέστερη θεωρία για τον μηχανισμό του κοσμολογικού πληθωρισμού αποδίδει το φαινόμενο στην ύπαρξη ενός βαθμωτού πεδίου ϕ , το οποίο είναι γνωστό με το όνομα **inflaton**. Σε έναν επίπεδο χώρο Minkowski, η Λαγκραντζιανή πυκνότητα ενός τέτοιου πεδίου γράφεται

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi - V(\phi) \quad (3.143)$$

Οι τρεις όροι στο δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης εκφράζουν αντίστοιχα την κινητική ενέργεια, την ενέργεια βαθμίδας και την δυναμική ενέργεια του πεδίου. Σε συναλλοίωτη μορφή, μπορούμε να γράψουμε τους δύο πρώτους όρους ως $-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$. Γενικεύοντας σε χωρόχρονο Riemann, η Λαγκραντζιανή πυκνότητα λαμβάνει τη μορφή

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \quad (3.144)$$

Στασιμοποιούμε το ολοκλήρωμα δράσης της $\mathcal{L}_\phi(\phi, \partial_\mu\phi)$

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= \int \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_\phi d^4x = 0 \\ \Rightarrow \int \sqrt{-g} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] d^4x &= 0 \\ \Rightarrow \int \sqrt{-g} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial \phi} \delta \phi + \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] d^4x &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial \phi} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial (\partial_\mu \phi)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.145)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι είναι αμελητέα η συνεισφορά του συνοριακού όρου στο άπειρο. Από την σχέση (3.144) οδηγεί στις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial \phi} + \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) &= 0 \Rightarrow \\ g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{dV}{d\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.146)$$

Ορίζοντας τον τελεστή του d'Alembert

$$\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \quad (3.147)$$

η σχέση (3.146) γράφεται

$$\square \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.148)$$

Η τελευταία σχέση εμπεριέχει τη δυναμική του βαθμωτού πεδίου ϕ και είναι γνωστή ως εξίσωση Klein-Gordon.

Θεωρούμε χωρόχρονο με μετρική FLRW μηδενικής χωρικής καμπυλότητας και υποθέτουμε ότι το βαθμωτό πεδίο ϕ είναι χωρικά ομογενές. Τότε η εξίσωση (3.148) γράφεται

$$g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \phi \right) - \frac{dV}{d\phi} = 0 \Rightarrow$$

$$-\ddot{\phi} - \left(\frac{1}{a^2} a\dot{a} + \frac{1}{a^2 r^2} a\dot{a}r^2 + \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \right) \dot{\phi} - \frac{dV}{d\phi} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.149)$$

Ο ταυστής ενέργειας-ορμής που αντιστοιχεί στο πεδίο ϕ λαμβάνει τη μορφή

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (3.150)$$

Υπολογίζοντας τη μεταβολή

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi) &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L}_\phi + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_\phi \\ &= \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi - V(\phi) \right) - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \phi \right] \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.151)$$

ο ταυστής ενέργειας-ορμής (3.150) γίνεται

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + V(\phi) \right) \quad (3.152)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την εξίσωση (3.107), θα έχουμε

$$\partial_\mu \phi = \sqrt{\rho_\phi + P_\phi} U_\mu \quad (3.153)$$

$$P_\phi = -\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi - V(\phi) \quad (3.154)$$

Αντικαθιστώντας την προτελευταία σχέση στην τελευταία, αποκτούμε

$$\begin{aligned} P_\phi &= -\frac{1}{2} (\rho_\phi + P_\phi) U^\lambda U_\lambda - V(\phi) \\ &= \frac{1}{2} (\rho_\phi + P_\phi) - V(\phi) \Rightarrow \\ \rho_\phi &= P_\phi + 2V(\phi) \end{aligned} \quad (3.155)$$

και επομένως

$$\rho_\phi = -\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + V(\phi) \quad (3.156)$$

Λόγω της χωρικής ομογένειας του πεδίου ϕ , λαμβάνουμε

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.157)$$

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.158)$$

Η απαίτηση $P_\phi < 0$ επιβάλλει την σχέση $V(\phi) > \dot{\phi}^2/2$, γεγονός που συνεπάγεται ότι $\rho_\phi > 0$, και επομένως η θεωρία μας ικανοποιεί την ασθενή ενεργειακή συνθήκη (3.56). Υιοθετώντας την προσέγγιση αργής κύλισης για το πεδίο ϕ , επιβάλλουμε τις ακόλουθες συνθήκες

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad \ddot{\phi} \sim 0 \quad (3.159)$$

Στην περίπτωση αυτή, θα έχουμε

$$\rho_\phi \approx V(\phi) \quad (3.160)$$

$$P_\phi \approx -V(\phi) \quad (3.161)$$

Παρατηρούμε πως ισχύει $\rho_\phi \approx -P_\phi$, αποτέλεσμα που παρουσιάζει σημαντική ομοιότητα με την θεώρηση του κενού ως ιδανικού ρευστού στην σχέση (3.128). Θεωρώντας δυναμικό της μορφής

$$V(\phi) = \frac{m^2\phi^2}{2} \quad (3.162)$$

και αγνοώντας τις συνεισφορές όλων των άλλων πεδίων ύλης, προκύπτει η παράμετρος Hubble αργής κύλισης

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}V(\phi) = \frac{4\pi Gm^2\phi^2}{3} \quad (3.163)$$

Η εξίσωση (3.149) λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} &= 0 \Rightarrow \\ \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} m\phi\dot{\phi} + m^2\phi &= 0 \end{aligned} \quad (3.164)$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση έχει την προφανή λύση $\phi = 0$. Για $\phi \neq 0$ και συμβολίζοντας με t_e τον χρόνο τερματισμού της πληθωριστικής εποχής, μία μη τετριμμένη λύση είναι η

$$\phi(t) = \phi(t_e) - m\sqrt{\frac{3}{4\pi G}} t \quad (3.165)$$

Με αντικατάσταση της τελευταίας, η σχέση (3.113) γραφεται

$$\begin{aligned} H^2(t) &= \frac{4\pi Gm^2}{3} \left(\phi(t_e) - m\sqrt{\frac{3}{4\pi G}} t \right)^2 \Rightarrow \\ H(t) &= H_e - m^2 t, \quad H_e = H(t_e) \Rightarrow \\ \frac{\dot{a}}{a} &= H_e - m^2 t \end{aligned} \quad (3.166)$$

Η λύση της τελευταίας δίνει τη μορφή του παράγοντα κλίμακας $a(t)$

$$a(t) = a_e \exp [H_e(t - t_e) - m^2(t - t_e)^2], \quad a_e = a(t_e) \quad (3.167)$$

Συμβολίζοντας με t_b τον χρόνο έναρξης της πληθωριστικής εποχής, θα πρέπει

$$m^2(t_b - t_e)^2 - H_e(t_b - t_e) > 64 \quad (3.168)$$

Μία θεωρία συμβατή με τα παραπάνω αποτελέσματα συνιστά κατάλληλη επιλογή ως κοσμολογικό πληθωριστικό μοντέλο για την ερμηνεία της παρατηρούμενης σε μεγάλη κλίμακα χωρικά ομογενούς κατανομής της ύλης και της ακτινοβολίας στο Σύμπαν.

3.7 Θεωρίες Βαθμωτού-Τανυστή

Θα μελετήσουμε μία συγκεκριμένη κατηγορία τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας, οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνά στην σωματιδιακή φυσική για την περιγραφή μοντέλων ενοποίησης, όπως είναι η Θεωρία Χορδών. Στον χωρόχρονο Riemann θεωρούμε ανεξάρτητα πεδία $g_{\mu\nu}$, ϕ , καθώς και πραγματικές συναρτήσεις $A(\phi)$, $B(\phi)$. Η συνολική δράση δίνεται από

$$S = \int \sqrt{-g} [A(\phi)R + B(\phi)\mathcal{L}_\phi] d^4x + 2\kappa S_M(\psi_i, g_{\mu\nu}) \quad (3.169)$$

όπου η Λαγκραντζιανή πυκνότητα \mathcal{L}_ϕ δίνεται από την σχέση (3.144). Μία συνήθης επιλογή για τα A, B αποτελεί η θεωρία Brans-Dicke, με

$$A(\phi) = \phi, \quad B(\phi) = 2\omega/\phi \quad (3.170)$$

όπου ω παράμετρος. Η δράση σε αυτή την περίπτωση είναι

$$S_{BD} = \int \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right] d^4x + 2\kappa S_M(\psi_i, g_{\mu\nu}) \quad (3.171)$$

όπου η $B(\phi)$ έχει απορροφηθεί από το δυναμικό $V(\phi)$. Ένα σύστημα με δράση της μορφής (3.171) λέγεται σύστημα Jordan. Η μεταβολή της δράσης θα είναι

$$\delta S_{BD} = \int d^4x \left(\frac{\delta S_{BD}}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{\delta S_{BD}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right) \quad (3.172)$$

Ορίζουμε

$$C^\lambda \equiv \phi g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \phi g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu + \delta g^{\lambda\mu} \nabla_\mu \phi - g^{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\kappa \phi \quad (3.173)$$

και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\phi \delta R &= \phi R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda \left(\phi g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \phi g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu \right) - \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu \right) \nabla_\lambda \phi \\
&= \phi R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda \left(\phi g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \phi g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\nabla_\mu \delta g^{\lambda\mu} + \nabla_\nu \delta g^{\lambda\nu} - g_{\nu\sigma} \nabla^\lambda \delta g^{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} \nabla^\lambda \delta g^{\nu\sigma} - \nabla_\nu \delta g^{\nu\lambda} + \nabla_\sigma \delta g^{\lambda\sigma} \right) \nabla_\lambda \phi \\
&= \phi R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda \left(\phi g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \phi g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu \right) + \left(\nabla_\mu \delta g^{\lambda\mu} - g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \delta g^{\mu\nu} \right) \nabla_\lambda \phi \\
&= \phi R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda \left(\phi g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \phi g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu \right) + \nabla_\mu \left(\delta g^{\lambda\mu} \nabla_\lambda \phi \right) - \left(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi \right) \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad - \nabla_\kappa \left(g^{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \right) + g_{\mu\nu} \left(\nabla^\lambda \nabla_\lambda \phi \right) \delta g^{\mu\nu} \\
&= \phi R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square \phi - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda C^\lambda
\end{aligned} \tag{3.174}$$

Επίσης θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_{BD}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} &= \phi \delta(\sqrt{-g} R) + \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(-\frac{\omega}{\phi} \partial_\lambda \partial^\lambda \phi - V(\phi) \right) - \frac{\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad - \kappa \sqrt{-g} \left[-\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \\
&= \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi R \delta g^{\mu\nu} + \phi \delta R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(-\frac{\omega}{\phi} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - V \right) - \frac{\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \kappa T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
&= \sqrt{-g} \nabla_\lambda C^\lambda + \sqrt{-g} \left[\phi R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square \phi - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi R + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega}{\phi} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi - \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right) \right] \delta g^{\mu\nu} + T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.175}$$

όπως και

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_{BD}}{\delta \phi} \delta \phi &= \sqrt{-g} \left[R \delta \phi + \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \delta \phi - \frac{\omega}{\phi} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \delta \phi + \partial_\mu \phi \partial^\mu \delta \phi) - \frac{dV}{d\phi} \delta \phi \right] \\
&= \sqrt{-g} \left\{ \left[R + \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V' \right] \delta \phi - \nabla_\mu \left(\frac{\omega}{\phi} \delta \phi \partial^\mu \phi \right) + \left(\partial_\mu \frac{\omega}{\phi} \right) (\partial^\mu \phi) \delta \phi \right. \\
&\quad \left. + (\nabla_\mu \nabla^\mu \phi) \frac{\omega}{\phi} \delta \phi - \nabla^\mu \left(\frac{\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \right) \delta \phi + \left(\partial^\mu \frac{\omega}{\phi} \right) (\partial_\mu \phi) \delta \phi + (\nabla^\mu \nabla_\mu \phi) \frac{\omega}{\phi} \delta \phi \right\} \\
&= \sqrt{-g} \left\{ \nabla_\mu \left(-\frac{2\omega}{\phi} \delta \phi \partial^\mu \phi \right) + \left[R - \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{2\omega}{\phi} \square \phi - \frac{dV}{d\phi} \right] \delta \phi \right\} \quad (3.176)
\end{aligned}$$

Υποθέτοντας πως οι συνοριακοί όροι μηδενίζονται στο άπειρο, από τις τρεις τελευταίες σχέσεις προκύπτουν οι εξίσωσεις πεδίου

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \right) \quad (3.177)$$

όπου $G_{\mu\nu}$ ο ταυιστής Einstein και για $\omega \neq 0$, \square είναι ο τελεστής

$$\square \phi = -\frac{\phi}{2\omega} \left(R - \frac{dV}{d\phi} \right) + \frac{1}{2\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi \quad (3.178)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις πεδίου (3.177) εμφανίζονται αρκετά διαφοροποιημένες από τις αντίστοιχες της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (3.18). Τόσο ο παράγοντας $1/\phi$ που πολλαπλασιάζει τη σταθερά της βαρύτητας κ , όσο και ο επιπρόσθετος όρος πηγής που εμφανίζεται στην συνεισφορά της ύλης, οφείλονται στην δυναμική του βαθμωτού πεδίου.

Η εξίσωση (3.178) εμπεριέχει την δυναμική του βαθμωτού πεδίου ϕ . Λαμβάνοντας το ίχνος της (3.177) προκύπτει πως

$$R = \frac{1}{\phi} \left(-\kappa T + 3\square \phi + 2V + \frac{\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) \quad (3.179)$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για το ω :

α) Αν $\omega \neq -3/2$, αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (3.178), θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\square \phi &= \frac{1}{2\omega} \left(\kappa T - 3\square \phi - 2V - \frac{\omega}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi \right) + \frac{\frac{dV}{d\phi} \phi}{2\omega} + \frac{1}{2\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi \\
&\Rightarrow \square \phi = \left(\frac{1}{3+2\omega} \right) (\kappa T - 2V + \frac{dV}{d\phi} \phi) \quad (3.180)
\end{aligned}$$

β) Αν $\omega = -3/2$, ισχύει

$$2V - \frac{dV}{d\phi}\phi = \kappa T \quad (3.181)$$

γ) Αν $\omega = 0$, η σχέση (3.176) γράφεται

$$R = \frac{dV}{d\phi} \quad (3.182)$$

Προκειμένου να απλοποιήσουμε τη μορφή της δράσης Brans-Dicke, εκτελούμε έναν σύμμορφο μετασχηματισμό της μετρικής $g_{\mu\nu}$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu} \quad (3.183)$$

και του βαθμωτού πεδίου ϕ

$$\phi = \exp \left[\sqrt{\frac{2\kappa}{3+2\omega}} \tilde{\phi} \right], \quad \omega \neq -3/2 \quad (3.184)$$

Η σύμμορφη βαθμωτή καμπυλότητα Ricci (1.132) για $n = 4$ θα είναι

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \frac{R}{\phi} - \frac{3}{\phi^2} \square\phi + \frac{3}{2\phi^3} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \Rightarrow \\ \phi R &= \phi^2 \tilde{R} + 3\square\phi - \frac{3}{2\phi} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \end{aligned} \quad (3.185)$$

Απουσία πεδίων ύλης, το ολοκλήρωμα δράσης Brans-Dicke λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} S_{BD}^{(G)} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \phi^{-2} \left[\phi^2 \tilde{R} - \frac{1}{\phi} \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + 3\square\phi - V(\phi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} - \frac{1}{2} \frac{2\kappa}{3+2\omega} (2\omega + 3) \tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \tilde{\phi} \nabla_\nu \tilde{\phi} + 3\phi^{-2} \square\phi - \phi^{-2} V(\phi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} + 2\kappa \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(-\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \tilde{\phi} \nabla_\nu \tilde{\phi} - U(\tilde{\phi}) \right) \end{aligned} \quad (3.186)$$

όπου

$$U(\tilde{\phi}) \equiv \frac{V(\phi) - 3\square\phi}{2\kappa\phi^2} \quad (3.187)$$

Παρατηρούμε πως ο όρος

$$2\kappa \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(-\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \tilde{\phi} \nabla_\nu \tilde{\phi} - U(\tilde{\phi}) \right)$$

της προτελευταίας σχέσης, αντιπροσωπεύει τη δράση βαθμωτού πεδίου $\tilde{\phi}$ με δυναμικό $U(\tilde{\phi})$. Η σχέση (3.171) γίνεται

$$S_{BD} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} + 2\kappa S_M(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\phi}, \psi_i) \quad (3.188)$$

Ένα σύστημα με δράση (3.188) λέγεται σύστημα **Einstein** εξαιτίας της ομοιότητας που παρουσιάζει η μορφή της δράσης με την αντίστοιχη της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας με μετρική $\tilde{g}^{\mu\nu}$ παρουσία βαθμωτού πεδίου ύλης $\tilde{\phi}$.

Στην περίπτωση $\omega = -3/2$ η σχέση (3.186) γίνεται

$$\begin{aligned} S_{BD}^{(G)} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \phi^{-2} \left[\phi^2 \tilde{R} - \frac{1}{\phi} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right) \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + 3\Box\phi - V(\phi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} - 2\kappa \int d^4x \sqrt{-g} U(\phi) \end{aligned} \quad (3.189)$$

η οποία αντιστοιχεί στη δράση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας με μετρική $\tilde{g}^{\mu\nu}$ παρουσία βαθμωτού πεδίου ύλης ϕ με δυναμικό $U(\phi)$.

Θεωρούμε στην συνέχεια τη μετρική (FLRW), (3.96) για ομογενή και ισότροπο χωρόχρονο. Από τις εξισώσεις πεδίου (3.111), (3.112) θα έχουμε

$$\Box\phi = -\ddot{\phi} - g^{ij} \frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \dot{\phi} = -\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} \quad (3.190)$$

$$\nabla_0^2 \phi = \partial_0^2 \phi = \ddot{\phi} \quad (3.191)$$

$$\nabla_i \nabla_j \phi = -\Gamma_{ij}^0 \partial_0 \phi = -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \dot{\phi} = -g_{ij} H \dot{\phi} \quad (3.192)$$

Για $\omega \neq 0$ η σχέση (3.178) δίνει

$$\begin{aligned} -\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} &= -\frac{\phi}{2\omega} \left[6 \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) - \frac{dV}{d\phi} \right] - \frac{1}{2\phi} (\partial_0 \phi)^2 \Rightarrow \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} &= \frac{3\phi}{\omega} \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) - \frac{\phi}{2\omega} \frac{dV}{d\phi} + \frac{\dot{\phi}^2}{2\phi} \end{aligned} \quad (3.193)$$

ενώ για $\omega = 0$, η (3.182) δίνει

$$\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 = \frac{dV/d\phi}{6} \quad (3.194)$$

Από την σχέση (3.180), η προτελευταία γράφεται

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\left(\frac{1}{3+2\omega} \right) [\kappa (-\rho + 3P) - 2V + V'\phi] \quad (3.195)$$

Για το χρονικό μέρος της σχέσης (3.177), θα έχουμε

$$\begin{aligned}
R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R &= \frac{\kappa}{\phi}T_{00} + \frac{1}{\phi}(\nabla_0^2\phi - g_{00}\square\phi) - \frac{V}{2\phi}g_{00} + \frac{\omega}{\phi^2}\left[(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}g_{00}g^{00}(\partial_0\phi)^2\right] \\
&\Rightarrow -3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}6\left[H^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\right] = \frac{\kappa}{\phi}\rho + \frac{1}{\phi}\left(\ddot{\phi} - \dot{\phi} - 3H\dot{\phi}\right) \\
&\quad + \frac{V}{2\phi} + \frac{\omega}{\phi^2}\left[\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right] \\
&\Rightarrow 3H^2 = \frac{\kappa}{\phi}\rho - 3H\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{V}{2\phi} - \omega\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.196}$$

ενώ για το χωρικό μέρος, θα είναι

$$\begin{aligned}
R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R &= \frac{\kappa}{\phi}T_{ij} + \frac{1}{\phi}(\nabla_i\nabla_j\phi - g_{ij}\square\phi) - \frac{V}{2\phi}g_{ij} + \frac{\omega}{\phi^2}\left(\partial_i\phi\partial_j\phi - \frac{1}{2}g_{ij}\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\phi\right) \\
&\Rightarrow \frac{1}{a^2}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a})g_{ij} - 3\left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\right)g_{ij} \\
&= \frac{\kappa}{\phi}Pg_{ij} + \frac{1}{\phi}\left(-H\dot{\phi} + \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}\right)g_{ij} \\
&\quad - \frac{V}{2\phi}g_{ij} + \frac{\omega}{2\phi^2}(\partial_0\phi)^2g_{ij} \\
&\Rightarrow -2\frac{\ddot{a}}{a} - H^2 = \frac{\kappa}{\phi}P + \frac{1}{\phi}\left(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi}\right) - \frac{V}{2\phi} + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.197}$$

και λόγω της (3.196), η τελευταία γίνεται

$$\begin{aligned}
2\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{\kappa}{\phi}P - \frac{1}{\phi}\left(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi}\right) + \frac{V}{2\phi} - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - H^2 \\
&= -\frac{\kappa}{\phi}\left(\frac{\rho}{3} + P\right) - H\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \frac{V}{3\phi} - \frac{\omega}{6}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 \Rightarrow \\
\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{\kappa}{6\phi}(\rho + 3P) + \frac{1}{2\phi}\left(\frac{V}{3} - H\dot{\phi} - \ddot{\phi}\right) - \frac{\omega}{12}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.198}$$

Κεφάλαιο 4

Κοσμολογία *Finsler – Randers*

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, αναπτύχθηκαν οι βασικές έννοιες που αφορούν τη Βαρύτητα και την Κοσμολογία, στο πλαίσιο της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Ως εκ τούτου, η ανάλυση των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων του Σύμπαντος, μέσω της μελέτης των γεωμετρικών αντικειμένων που καθορίζουν τη δομή του, καθώς και των εξισώσεων που διέπουν τη δυναμική του εξέλιξη, έγινε σε χωρόχρονο *Riemann*. Σε αυτή τη θεώρηση, το σύμπαν χαρακτηρίζεται από τη μετρική *FLRW*, με την κατανομή της ύλης και της ενέργειας σε αυτό να περιγράφεται από το καθιερωμένο πρότυπο Λ -*CDM*, με την προσθήκη της πληθωριστικής εποχής, ώστε η θεωρία να είναι συμβατή με τα παρατηρησιακά δεδομένα. Κατά την κατασκευή της μετρικής *FLRW* στην παράγραφο 3.4, έγιναν ορισμένες υποθέσεις, αναφορικά με τις ιδιότητες του Σύμπαντος. Σε αυτές περιλαμβάνονται η χωρική ομογένεια, η ισοτροπία και η επιπεδότητα. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι παραπάνω παραδοχές είναι αληθείς, σε μεγάλες κλίμακες παρατήρησης. Σε μικρότερες κλίμακες, συγκεκριμένα σε ακτίνα μικρότερη από 100 megaparsec, η ύπαρξη ασθενούς ανισοτροπίας του χωροχρόνου, έχει παρατηρήσιμη επίπτωση στις κοσμολογικές παραμέτρους, γεγονός που καθιστά επιτακτική την ανάγκη τροποποίησης της βαρύτητας. Μία τέτοια τροποποίηση, οδηγεί στις λεγόμενες ανισοτροπικές θεωρίες πεδίου. Στο παρόν κεφάλαιο καθώς και στο επόμενο, θα ασχοληθούμε με μία συγκεκριμένη κλάση τέτοιων θεωριών, οι οποίες χρησιμοποιούν ως υπόβαθρο για το χωρόχρονο τη γεωμετρία *Finsler*. Τα πλεονεκτήματα που προκύπτουν από την επιλογή της γεωμετρίας αυτής, ως κατάλληλης για τη μελέτη των βαρυτικών φαινομένων, αναλύθηκαν εκτενώς στην παράγραφο 2.1.

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα εξετάσουμε μία συγκεκριμένη τροποποίηση στη μετρική δομή του χωροχρόνου, η οποία είναι γνωστή ως χωρόχρονος *Finsler – Randers*. Σε αυτόν, η απόκλιση από την ισοτροπική συμπεριφορά αποδίδεται στην ανισοτροπική πίεση ενός αρχέγονου διανυσματικού πεδίου, όπως π.χ. το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Ο χωρόχρονος *Finsler-Randers* παρέχει ένα κατάλληλο υπόβαθρο για την μελέτη της εξέλιξης του Σύμπαντος. Συγκεκριμένα, στο [83] μελετάται ένα κοσμολογικό σενάριο όπου οι εξισώσεις πεδίου συμπεριλαμβάνουν έναν έξτρα όρο γεωμετρικής προέλευσης, ο οποίος συμπεριφέρεται ως ένα ιδανικό ρευστό σκοτεινής ενέργειας. Επιπλέον, εισάγεται

η χρονική εξάρτηση της κοσμολογικής σταθεράς $\Lambda(t)$, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως συνεισφορά ενός όρου μεταβλητού κενού.

4.1 Κοσμολογία τύπου *FLRW* σε χωρόχρονο *Finsler–Randers*

Στην παράγραφο αυτή, θα μελετήσουμε ένα κοσμολογικό μοντέλο τύπου *FLRW*, στο οποίο η βαρύτητα εμφανίζεται συζευγμένη με ένα ασθενές διαταραχτικό διανυσματικό πεδίο. Η πλήρης ανάλυση του μοντέλου βασίζεται στο [63]. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, η παρουσία ενός τέτοιου πεδίου προσδίδει στο χωρόχρονο ασθενή τοπική ανισοτροπία, η ύπαρξη της οποίας συντελεί στην τροποποίηση τόσο των εξισώσεων πεδίου (εισάγοντας επιπλέον βαθμούς ελευθερίας), όσο και των βασικών κοσμολογικών παραμέτρων του συστήματος.

Η επίτευξη πληρέστερων γεωμετρικών δομών, μέσω της εισαγωγής επιπρόσθετων βαθμών ελευθερίας στη δυναμική του υπό μελέτη συστήματος, συνιστά συνήθη επιλογή σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας. Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί η $F(R, T)$ θεωρία βαρύτητας η οποία περιλαμβάνεται στο πλαίσιο των Θεωριών *Riemann-Cartan*. Σε αυτή, τόσο η τυχαία συναρτησιακή μορφή της Λαγκρατζιανής, όσο και η συγκεκριμένη αλλά μη ειδική συνοχή, προσδίδουν στη θεωρία έξτρα βαθμούς ελευθερίας. Η καμπυλότητα και η στρέψη συμπεριφέρονται ως δύο δυναμικά πεδία, σχετιζόμενα με τη βαρύτητα [89].

4.1.1 Μετρική *Finsler – Randers*

Θεωρούμε ότι οι γεωδαισιακές του 4-διάστατου χωρόχρονου παράγονται από μία *Lagrangian* η οποία αποτελεί τη μετρική συνάρτηση δομής *Finsler-Randers*

$$F(x, y) = \sigma(x, y) + \phi(x)\hat{k}_\alpha y^\alpha \quad (4.1)$$

όπου

$$\sigma(x, y) = \sqrt{a_{\kappa\lambda}(x)y^\kappa y^\lambda}, \alpha, \kappa, \lambda \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (4.2)$$

και $a_{\kappa\lambda}(x)$ είναι η μετρική *FLRW*

$$a_{\kappa\lambda}(x) = \text{diag}(1, -\frac{a^2}{1 - kr^2}, -a^2 r^2, -a^2 r^2 \sin^2 \theta). \quad (4.3)$$

με $k = 0, \pm 1$ για ένα επίπεδο, κλειστό και ανοιχτό σύμπαν αντίστοιχα.

Έχουμε θεωρήσει το συγχινούμενο σύστημα συντεταγμένων (x^μ) . Το επαπτόμενο διάνυσμα $y^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ παριστά την τετραταχύτητα του συγχινούμενου παρατηρητή κατά μήκος μίας οικογένειας κοσμικών γραμμών σε ένα ανισοτροπικό σύμπαν. Η παράμετρος μήκος τόξου s αντιπροσωπεύει τον ιδίοχρονο και οι σταθερές είναι κανονικοποιημένες στο σύστημα μονάδων *Lorentz* ($c = 1$).

Σταθεροποιούμε την κατεύθυνση $y = \dot{x}$ για την οποία $\sigma(x, \dot{x}) = 1$. Θεωρούμε το αρχέγονο διανυσματικό πεδίο

$$u_\alpha(x) = \hat{k}_\alpha \phi(x), \quad |u_\alpha| \ll 1 \quad (4.4)$$

ως εγγενή ιδιότητα της γεωμετρίας του χωρόχρονου. Το βαθμωτό πεδίο $\phi(x)$ εμπεριέχει την πληροφορία για την ανισοτροπία του σύμπαντος. Μία γραμμική προσέγγιση στη μεταβολή της ανισοτροπίας για μικρά x δίνεται από

$$\phi(x) \approx \phi(0) + \partial_\mu \phi(0) x^\mu \quad (4.5)$$

4.1.2 Εγγυτατοποιημένη μετρική και επιλογή συνοχής

Ο μετρικός τανυστής του χώρου *Finsler* έχει τη μορφή

$$f_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1}{\sigma}(u_\mu y_\nu + u_\nu y_\mu) - \frac{\beta}{\sigma^3} y_\mu y_\nu + u_\mu u_\nu \quad (4.6)$$

όπου

$$g_{\mu\nu}(x, y) = \frac{F}{\sigma}(x, y) a_{\mu\nu}(x), \quad \beta(x, y) = \phi(x) \hat{k}_\alpha y^\alpha = u_\alpha(x) y^\alpha \quad (4.7)$$

Η υπόθεση ασθενούς πεδίου δίνει $f_{\mu\nu}(x, y) \approx g_{\mu\nu}(x, y)$, με υπογραφή $(+, -, -, -)$. Το τετράγωνο του μήκους ενός ανταλλοίωτου διανύσματος X^μ θα είναι

$$|X|^2 = f_{\mu\nu}(x, y) X^\mu X^\nu \approx g_{\mu\nu}(x, y) X^\mu X^\nu \quad (4.8)$$

Οι συνιστώσες της συνοχής δίνονται από

$$\gamma_{\lambda\mu}^\kappa(x, y) = \left[\frac{1}{2} g^{\kappa\rho} (g_{\rho\lambda, \kappa} + g_{\rho\kappa, \lambda} - g_{\lambda\mu, \rho}) \right] (x, y) \quad (4.9)$$

Τα σύμβολα **Christoffel** για την εγγυτατοποιημένη μετρική *Riemann* είναι τα εξής

$$\begin{aligned} r_{\lambda\mu}^\kappa(x) &= \gamma_{\nu\mu}^\alpha(x, y(x)) + C_{\mu\rho}^\kappa(x, y(x)) \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\nu}(x) \\ &+ C_{\lambda\rho}^\kappa(x, y(x)) \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}(x) - g^{\alpha\sigma}(x, y(x)) C_{\lambda\mu\rho}(x, y(x)) \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma}(x) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Κατ' αναλογία με τη σχέση (2.17), η εξίσωση των γεωδαισιακών έχει τη μορφή

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + r_{\rho\sigma}^\mu(x) y^\rho y^\sigma = 0 \quad (4.11)$$

λόγω των ιδιοτήτων της στρέψης του **Cartan** (2.14).

Θεωρούμε πως το διανυσματικό πεδίο y^a είναι στάσιμο

$$y_{,v}^\mu = -r_{\rho\nu}^\mu y^\rho \quad (4.12)$$

Στην περίπτωση αυτή η *Finslerian* δ-συναλλοιώτη παράγωγος ενός τυχαίου διανυσματικού πεδίου $X^a(x)$ είναι

$$X_{;\beta}^a(x, y(x)) = X_{,\beta}^a(x) + \Gamma_{\rho\beta}^{*a}(x, y(x))X^\rho(x) \quad (4.13)$$

και ταυτίζεται με την συναλλοιώτη παράγωγο του *Cartan*

$$X_{|\beta}^a(x, y(x)) = X_{,\beta}^a(x) - \frac{\partial X^a}{\partial y^\rho}(x, y(x))G_\beta^\rho(x, y(x)) + \Gamma_{\rho\beta}^{*a}(x, y(x))X^\rho(x) \quad (4.14)$$

όπως και με την *Riemann* συναλλοιώτη παράγωγο $\nabla_\beta X^a(x)$. Αυτό συμβαίνει διότι $r_{\lambda\mu}^\kappa(x) = \Gamma_{\lambda\mu}^{*\kappa}(x, y(x))$, όπου $\Gamma_{\lambda\mu}^{*\kappa}$ είναι οι συνιστώσες της συνοχής του *Cartan*

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{*\kappa}(x, y) = \left(\gamma_{\lambda\mu}^\kappa - C_{\lambda\rho}^\kappa G_\mu^\rho - C_{\rho\mu}^\kappa G_\lambda^\rho + C_{\lambda\mu\rho} G_\nu^\rho g^{\nu\kappa} \right)(x, y) \quad (4.15)$$

με

$$G_\nu^\mu = \frac{\partial G^\mu}{\partial y^\nu} 2G^\mu = \gamma_{\rho\sigma}^\mu y^\rho y^\sigma \quad (4.16)$$

Ο τανυστής στρέψης του *Cartan* έχει τη μορφή

$$C_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sigma} \mathcal{S}_{(\mu\nu\lambda)}(a_{\mu\nu}u_\lambda) - \frac{1}{\sigma^3} \mathcal{S}_{(\mu\nu\lambda)}(y_\mu y_\nu u_\lambda) - \frac{\beta}{\sigma^3} \mathcal{S}_{(\mu\nu\lambda)}(a_{\mu\nu}y_\lambda) \right\} \quad (4.17)$$

όπου $\mathcal{S}_{(\mu\nu\lambda)}$ είναι το άθροισμα επί των κυκλικών μεταθέσεων των δεικτών.

Λόγω της υπόθεσης ασθενούς πεδίου $|u_a| \ll 1$, οι συνιστώσες του τανυστή στρέψης του *Cartan*, που είναι ανάλογες των συνιστωσών του πεδίου u_a , μπορούν να αμεληθούν. Συνεπώς η προσέγγιση για τα σύμβολα *Christoffel* γράφεται

$$A_{\lambda\nu}^\kappa(x) \approx \gamma_{\lambda\nu}^\kappa(x, y(x)) \quad (4.18)$$

Οι συνιστώσες της εγγυτατοποιημένης ομοπαράλληλικής συνοχής είναι

$$A_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} + \frac{a^2}{1 - kr^2} z_t \quad (4.19)$$

$$A_{22}^0 = a\dot{a}r^2 + a^2 r^2 z_t \quad (4.20)$$

$$A_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta + a^2 r^2 \sin^2 \theta z_t \quad (4.21)$$

$$A_{01}^1 = A_{02}^2 = A_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} + z_t \quad (4.22)$$

$$A_{22}^1 = -r(1 - kr^2)(1 - rz_t) \quad (4.23)$$

$$A_{11}^1 = \frac{kr}{1 - kr^2} + z_t \quad (4.24)$$

$$A_{33}^1 = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta (1 + rz_r) \quad (4.25)$$

$$A_{12}^2 = A_{13}^3 = \frac{1}{r} + z_r \quad (4.26)$$

$$A_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta z_\theta \quad (4.27)$$

$$A_{23}^3 = \cot \theta + z_\theta \quad (4.28)$$

όπου οι ποσότητες

$$z_\mu(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{\sigma} \right)_{,\mu} (x, y(x)) \quad (4.29)$$

σχετίζονται με τη μεταβολή της ανισοτροπίας, και έχουμε θεωρήσει ότι

$$F/\sigma = 1 + u_\alpha y^\alpha / \sigma \approx 1 \quad (4.30)$$

Τα z_μ μπορούν να θεωρηθούν ως τανυστικές φυσικές ποσότητες της μορφής

$$z_\mu(x) = \frac{u_{\alpha|\mu} y^\alpha}{2}(x) \quad (4.31)$$

Λόγω της συγκινούμενης φύσης του $y^\alpha = (1, 0, 0, 0)$, για $|u_\alpha| \ll 1$, έχουμε

$$z_\mu(x) = u_{0,\mu}(x)/2. \quad (4.32)$$

4.1.3 Καμπυλότητα και τανυστής *Ricci*

Ο τανυστής καμπυλότητας λαμβάνει τη μορφή

$$L_{\lambda\mu\nu}^\kappa = A_{\lambda\nu,\mu}^\kappa - A_{\lambda\mu,\nu}^\kappa + A_{\lambda\nu}^\rho A_{\rho\mu}^\kappa - A_{\lambda\mu}^\rho A_{\rho\nu}^\kappa \quad (4.33)$$

Ο υπολογισμός του τανυστή *Ricci* απλοποιείται αν λάβουμε υπόψιν ότι $z_{\mu,\nu} = 0$, $z_\mu^2 \approx 0$. Τότε θα έχουμε

$$L_{00} = -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} z_t \right) \quad (4.34)$$

$$L_{11} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k + 4a\dot{a}z_t)/(1 - kr^2) \quad (4.35)$$

$$L_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k + 4a\dot{a}z_t) r^2 - kr^3 z_r - \cot \theta z_\theta \quad (4.36)$$

$$L_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k + 4a\dot{a}z_t) r^2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta z_\theta \quad (4.37)$$

Η βαθμωτη καμπυλότητα είναι

$$L = g^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \quad (4.38)$$

Η εξίσωση γεωδαισιακής απόκλισης (1.125) στην περίπτωση ενός ιδανικού ρευστού κατά μήκος των γειτονικών κοσμικών γραμμών μπορεί να γενικευθεί εντός του πλαισίου *Finsler* ως

$$\frac{\delta^2 \xi^\mu}{\delta s^2} + L_{\nu\rho\sigma}^\mu y^\nu y^\rho \xi^\sigma \quad (4.39)$$

όπου $\frac{\delta}{\delta s}$ είναι η *Finsler* δ-συνοχή κατά μήκος της γεωδαισιακής.

Εντός του χωρόχρονου *Finsler* η έννοια της σταθερής καμπυλότητας K ορίζεται ως

$$L_{\kappa\lambda\mu\nu} = K(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu}) \quad (4.40)$$

4.1.4 Εξισώσεις πεδίου *Einstein* και εξίσωση *Friedmann*

Ο ταυσιτής Ενέργειας-Ορμής σε ένα *Finslerian* ιδανικό ρευστό για έναν συγκινούμενο παρατηρητή ορίζεται ως

$$T_{\mu\nu}(x, y(x)) = (\mu + P)y_\mu(x)y_\nu(x) - Pg_{\mu\nu}(x, y(x)) \quad (4.41)$$

όπου $P(x)$, $\mu(x)$ είναι η πίεση και η πυκνότητα ενέργειας του ρευστού, αντίστοιχα.

Εφόσον το $y = (1, 0, 0, 0)$ ως προς τις συγκινούμενες συντεταγμένες, το διάνυσμα $y^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ είναι η τετραταχύτητα του ρευστού. Συνεπώς ο ταυσιτής Ενέργειας-Ορμής $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\mu, -\frac{F}{\sigma}a_{ij}P)$ γράφεται

$$T_{00} = \mu \quad (4.42)$$

$$T_{ij} = -P\frac{F}{\sigma}a_{ij} \quad (4.43)$$

$$T = T^\mu_\mu = \frac{\sigma}{F}\mu - 3P \quad (4.44)$$

όπου $F/\sigma \approx 1$ στο όριο ασθενούς πεδίου.

Οι εξισώσεις πεδίου *Einstein*

$$L_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\alpha\nu}^\alpha = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) \quad (4.45)$$

λαμβάνουν τη μορφή

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}}{a}z_t = -\frac{4\pi G}{3}(\mu + 3P) \quad (4.46)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} + 4\frac{\dot{a}}{a}z_t = 4\pi G(\mu - P) \quad (4.47)$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις, προκύπτει η εξίσωση *Friedmann*

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\dot{a}}{a}z_t = \frac{8\pi G}{3}\mu - \frac{k}{a^2} \quad (4.48)$$

Η εξίσωση αυτή διαφέρει από την αντίστοιχη της κλασικής *FLRW* θεωρίας, ως προς τον όρο ανισοτροπίας $\frac{\dot{a}}{a}z_t$.

Η παράμετρος z_t που εμφανίζεται στην εξίσωση (4.48) έχει το ρόλο της μεταβολής της ανισοτροπίας και υπολογίζεται ως

$$z_t = \frac{(F - \sigma)_{,0}}{2\sigma} = \frac{1}{2}\hat{k}_0\phi(x)_{,0} \quad (4.49)$$

Από την εξίσωση (4.49) προκύπτει ότι η z_t έχει τις ίδιες μονάδες με την παράμετρο *Hubble*. Η z_t εξαρτάται από τις γεωμετρικές ιδιότητες του χωροχρόνου και αποτελεί εγγενές χαρακτηριστικό της *Finslerian* δομής. Από τη μορφή του ταυσιτή στρέψης του *Cartan* (4.17), η χρονική του συνιστώσα C_{000} μπορεί να υπολογισθεί απ' ευθείας ως $C_{000} = \frac{u_0}{2}$, και διαφορίζοντας ως προς τον ιδιόχρονο, αποκτούμε

$$z_t = C_{000,0} \quad (4.50)$$

4.1.5 Βασικές Κοσμολογικές παράμετροι

Παραθέτουμε τις κύριες ανισοτροπικές παραμέτρους στο πλαίσιο της γεωμετρίας *Finsler*.

Ο ανισοτροπικός παράγοντας κλίμακας ορίζεται κατά μήκος κάθε κοσμικής γραμμής. Η κλίμακα μήκους προκύπτει ως αναπαραμέτρηση κατά το εραπτόμενο διανυσματικό πεδίο $v(s)$ κατά μήκος των κοσμικών γραμμών

$$S(s) = \tilde{a}(v(s)) \quad (4.51)$$

Η ανισοτροπική παράμετρος **Hubble** είναι

$$\tilde{H} = \frac{\dot{S}}{S} = \frac{1}{3}\tilde{\Theta} \quad (4.52)$$

όπου

$$\tilde{\Theta} = y_{;\mu}^{\mu} - C_{\mu\lambda}^{\lambda} \dot{y}^{\mu} \quad (4.53)$$

είναι η διαστολή στον *Finsler* χωρόχρονο. Η ανισοτροπική παράμετρος **Hubble** μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση **Friedmann** (4.48) ως

$$\tilde{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}\mu - \frac{k}{a^2} = H^2 + Hz_t \quad (4.54)$$

Εφόσον $H^2 > 0$ μπορούμε να απαιτήσουμε $H^2 \gg |Hz_t|$. Η παράμετρος πυκνότητας μπορεί να ορισθεί ως προς την ανισοτροπική παράμετρο **Hubble** (4.54)

$$\tilde{\Omega}_{\mu} = \frac{8\pi G}{3\tilde{H}^2}\mu = \frac{\mu}{\tilde{\mu}_{crit}} \quad (4.55)$$

όπου η κρίσιμη πυκνότητα μ_{crit} ισούται με

$$\tilde{\mu}_{crit} = \frac{3\tilde{H}^2}{8\pi G} \quad (4.56)$$

Η παράμετρος επιβράδυνσης ορίζεται ως προς τον ανισοτροπικό παράγοντα κλίμακας (4.51)

$$\tilde{q} = -S\ddot{S}/\dot{S}^2 \quad (4.57)$$

Η εξίσωση **Friedmann** (4.48) μπορεί να επαναγραφεί στη μορφή

$$\tilde{\Omega} - 1 = k/(\tilde{H}^2 a^2) \quad (4.58)$$

Από τα προηγούμενα μπορούμε να διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση (1). Αν $\mu < \mu_{crit}$ τότε $\tilde{\Omega} < 1$ ή $k < 0$, δηλαδή το Σύμπαν είναι ανοικτό.

Περίπτωση (2). Αν $\mu > \mu_{crit}$ τότε $\tilde{\Omega} > 1$ ή $k > 0$, δηλαδή το Σύμπαν είναι κλειστό.

Περίπτωση (3). Αν $\mu = \mu_{crit}$, τότε $\tilde{\Omega} = 1$ ή $k = 0$, δηλαδή το Σύμπαν είναι επίπεδο.

Μπορούμε να εκφράσουμε την ανιστροπική παράμετρο \tilde{H} συναρτήσει της μετατόπισης προς το ερυθρό, της παρούσας τιμής της παραμέτρου Hubble H_0 , και των παρατηρήσιμων ποσοτήτων $\Omega_{R_0} \approx 10^{-4}$ (ακτινοβολία), $\Omega_{M_0} \approx 0.3$ (ύλη), $\Omega_{\Lambda_0} \approx 0.7$ (κοσμολογική σταθερά), $\Omega_{c_0} = 1 - \Omega_0 \approx 0$ (καμπυλότητα):

$$H(z) = H_0 E(z) = H_0 [\Omega_{M_0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{R_0}]^{1/2} \quad (4.59)$$

Παρατηρούμε πως η μορφή της \tilde{H} εξαρτάται από την ανιστροπική παράμετρο z_t .

Η εξίσωση συνεχείας $T_{0;\mu}^\mu = 0$ λαμβάνει τη μορφή

$$\dot{\mu} - 2z_t \mu + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} + z_t \right) (\mu + P) = 0 \quad (4.60)$$

Ένα ιδανικό κοσμολογικό ρευστό ικανοποιεί την καταστατική εξίσωση

$$P = w\mu \quad (4.61)$$

όπου $w = 0$ για σύμπαν κυριαρχούμενο από ύλη και $w = 1/3$ για σύμπαν κυριαρχούμενο από ακτινοβολία. Η εξίσωση συνεχείας (4.60) γίνεται

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -3(1+w) \left(\frac{\dot{a}}{a} + z_t \right) \quad (4.62)$$

και ολοκληρώνοντας την τελευταία, αποκτούμε

$$\mu \propto a^{-3(1+w)} \exp(-(3w+1)u_0/2) \quad (4.63)$$

Για ένα σύμπαν που κυριαρχείται από ύλη, η τελευταία σχέση δίνει

$$\mu \propto a^{-3} \exp(-u_0/2) \quad (4.64)$$

ενώ για ένα σύμπαν που κυριαρχείται από ακτινοβολία, η προτελευταία σχέση δίνει

$$\mu \propto a^{-4} \exp(-u_0) \quad (4.65)$$

Αυτή η ασυμπτωτική συμπεριφορά υποδηλώνει ότι η ασθενής ανιστροπία επηρεάζει την ομογένεια.

Από τον ορισμό της ανιστροπικής παραμέτρου Hubble (4.54) μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια του χρόνου αναθέασης(1)

$$\tilde{t}_0 - \tilde{t}_* = \int_0^{z_*} \frac{dz'}{(1+z')\tilde{H}(z')} \quad (4.66)$$

όπου t_0 είναι η τωρινή ηλικία του σύμπαντος και t_* είναι η ηλικία του σύμπαντος όταν η μετατόπιση προς το ερυθρό ήταν $z = z_*$. Η γενική έκφραση για την χρονική εξέλιξη του σύμπαντος γίνεται

$$\tilde{t}(z) = \int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z')\tilde{H}(z')} \quad (4.67)$$

1 Lookback time.

καθώς $z \rightarrow \infty$ στην απαρχή του σύμπαντος.

Από την υπόθεση ασθενούς ανισοτροπίας και την σχέση (4.59), λαμβάνουμε το ανάπτυγμα για μικρά z_t

$$\tilde{t}_0 = t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} T_k z_t^k \quad (4.68)$$

όπου

$$T_k = H_0^{-k-1} \binom{-1/2}{k} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z)E(z)^{k+1}} \quad (4.69)$$

4.1.6 Εξισώσεις *Raychaudhuri*

Για ένα ιδανικό ρευστό η εξίσωσης *Raychaudhuri* (3.47) έχει τη μορφή

$$\dot{\tilde{\Theta}} = -\frac{1}{3}\tilde{\Theta}^2 - \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\omega}^2 - 4\pi G(\mu + 3P) + (y_{;\kappa}^{\mu} y^{\kappa})_{;\mu} \quad (4.70)$$

όπου $\tilde{\Theta}$ είναι η *Finslerian* διαστολή (4.53), ενώ $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\omega}$ η *Finslerian* παραμόρφωση και ο στροβιλισμός αντίστοιχα, που ορίζονται ως

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \Lambda_{(ijk)} - \frac{1}{3}\tilde{\Theta}h_{ik} - 2C_{ikm}y^m - \dot{y}_l y_k - \dot{y}_k y_l \quad (4.71)$$

$$\tilde{\omega}_{ik} = \Lambda_{[ik]} + \dot{y}_l y_k - \dot{y}_k y_l \quad (4.72)$$

όπου Λ_{ij} είναι η *Finslerian* δ -συναλλοιώτη παράγωγος και C_{ikm} ο τανυστής στρέψης του *Cartan*.

Η εξίσωση *Raychaudhuri* (4.70) είναι ευθεία εφαρμογή της *Finslerian* παραγώγου *Lie* για ύλη υπό μορφή κονιορτού, και συμπεριλαμβάνει την ανισοτροπική βαρυτική επιρροή της ύλης κατά μήκος των κοσμικών γραμμών, η οποία εκφράζεται από παλιρροϊκή δύναμη πεδίου

$$L_{\mu\nu}y^{\mu}y^{\nu} = 4\pi G(\mu + 3P) \quad (4.73)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.53) και (4.57), λαμβάνουμε για μικρά z_t τη γραμμικοποιημένη εξίσωση *Raychaudhuri*

$$\frac{1}{3}\tilde{\Theta}^2\tilde{q} = 4\pi G(\mu + 3P)\frac{H}{\tilde{H}} + f(a, \dot{a}, \ddot{a}, z_t) \quad (4.74)$$

όπου

$$f(a, \dot{a}, \ddot{a}, z_t) = \frac{12\pi G}{\tilde{H}}\mu z_t - \frac{9kz_t}{2\tilde{H}\alpha^2} - 3\frac{\dot{\alpha}^3}{\tilde{H}\alpha^3} + \frac{3\ddot{\alpha}z_t}{2\tilde{H}} - 3\frac{H}{\tilde{H}} \quad (4.75)$$

Το πρόσημο του δεξιού μέλους της τελευταίας σχέσης καθορίζει το είδος της διαστολής. Όταν ο πληθωρισμός κυριαρχεί για περισσότερο χρόνο, η διαστολή επιταχύνεται. Συνεπώς μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, αν $f(a, \dot{a}, \ddot{a}, z_t) < 0$ τότε αυτός ο όρος συνεισφέρει στην επιτάχυνση του σύμπαντος, και επομένως συμπεριφέρεται ως βοηθητικό πεδίο του πληθωρισμού. Στην δεύτερη περίπτωση όπου $f(a, \dot{a}, \ddot{a}, z_t) > 0$ ο όρος θα επιβραδύνει τη διαστολή. Η επίδραση αυτή στο ρυθμό της διαστολής είναι χαρακτηριστική της *Finslerian* δομής του χωρόχρονου.

4.1.7 Λύσεις των εξισώσεων πεδίου *Einstein*

Θεωρούμε σε αυτήν την παράγραφο ότι η μεταβολή της ανισοτροπίας z_t (4.49) είναι σταθερή και ότι το σύμπαν είναι ομογενές με σταθερή πυκνότητα μ .

Σε ένα σύμπαν κυριαρχούμενο από ύλη, από την ολοκλήρωση της εξίσωσης Friedmann (4.48), θα αποκτήσουμε λύση για τον παράγοντα κλίμακας. Εισάγουμε την παράμετρο

$$\eta = \int_0^t \frac{d\omega}{a(\omega)} \quad (4.76)$$

η οποία καλείται σύμμορφος ιδιόχρονος και μετρά το τόξο σε ακτίνια που διανύει ένα φωτόνιο επί μίας σφαίρας ακτίνας $a(t)$. Μελετούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του παράγοντα κλίμακας

$$a(t) \equiv a(t(\eta)) = \bar{a}(\eta) \rightarrow 0 \quad (4.77)$$

όπου $cdt = ad\eta$. Υποθέτοντας ότι το σύμπαν καταλαμβάνει τον ίδιο όγκο σα να ήταν κλειστό ($k = 1$), η σταθερή πυκνότητα λαμβάνει την τιμή

$$\mu = \frac{M}{2\pi^2 a^3} \quad (4.78)$$

όπου M είναι η συνολική μάζα του σύμπαντος. Από την εξίσωση

$$\frac{\dot{a}}{a} = \bar{a}^{-2} \dot{\bar{a}} \quad (4.79)$$

και την σχέση (4.78), η εξίσωση Friedmann (4.48) γίνεται

$$\left(\dot{\bar{a}} + \frac{z_t}{2} \bar{a}^2 \right)^2 = \frac{z_t^2}{4} \bar{a}^4 - k \bar{a}^2 + \frac{4GM}{3\pi} \bar{a} \quad (4.80)$$

Θεωρούμε ότι στο πρώιμο Σύμπαν η επιτάχυνση είναι πολύ γρήγορη. Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την παραδοχή ότι ταχύτητα της διαστολής \dot{a} λαμβάνει μεγάλες τιμές. Οπότε ανεξαρτήτως προσήμου της z_t , μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\dot{\bar{a}} + \frac{z_t}{2} \bar{a}^2 > 0 \quad (4.81)$$

Έστω $a_* = \frac{2GM}{3\pi}$. Ολοκληρώνοντας την σχέση (4.80) με αρχική συνθήκη $a(0) = 0$, θα έχουμε

$$t = -\frac{z_t}{2} \left\{ \int_0^a \frac{\sqrt{x^4 - 4k/z_t^2 x^2 + 8a_*/z_t^2 x}}{kx - 2a_*} dx + \int_0^a \frac{x^2}{kx - 2a_*} dx \right\} \quad (4.82)$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις Περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $k = 0$. Τότε η σχέση (4.82) δίνει

$$t = \frac{z_t}{2} \left[\frac{a^3}{6a_*} + \frac{1}{2a_*} \int_0^a \sqrt{x^4 + 8a_*/z_t^2 x} dx \right] \quad (4.83)$$

και για μικρά z_t λαμβάνουμε τη λύση

$$t = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{a_*}} a^{3/2} + 1/(12a_*) a^3 z_t / c + O(z_t^2) \quad (4.84)$$

Περίπτωση 2: $k = -1$. Τότε η σχέση (4.82) δίνει

$$t = -\frac{z_t}{4} \left[a^2/2 + 2a_* a + 4a_*^2 \log |a - 2a_*| + I_1 = \int_0^a \frac{\sqrt{x^4 - 4/z_t^2 x^2 + 8a_*/z_t^2 x}}{x - 2a_*} dx \right] \quad (4.85)$$

όπου και για μικρά z_t λαμβάνουμε τη λύση

$$t = \sqrt{a(a + 2a_*)} - a_* \log \left(1 + a/a_* + \sqrt{a(a + 2a_*)}/a_* \right) \quad (4.86)$$

Περίπτωση 2: $k = +1$. Τότε η σχέση (4.82) δίνει

$$t = \frac{z_t}{2} \left[a^2/2 - 2a_* a + 4a_*^2 \log |a + 2a_*| + \int_0^a \frac{\sqrt{x^4 + 4/z_t^2 x^2 + 8a_*/z_t^2 x}}{x + 2a_*} dx \right] \quad (4.87)$$

και για μικρά z_t λαμβάνουμε τη λύση

$$t = -\sqrt{a(2a_* - a)} + a_* \arccos(1 - a/a_*) + (a^2/4 - a_* a + 2a_*^2 \log |a + 2a_*|) z_t + O(z_t^2) \quad (4.88)$$

Ο πρωτεύων όρος σε όλες τις προηγούμενες λύσεις αντιπροσωπεύει τις λύσεις των εξισώσεων πεδίου που αντιστοιχούν στη μετρική *FLRW*. Για μικρά a το ανάπτυγμα έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά $t \sim a^{3/2}$ ή ισοδύναμα $a \sim t^{2/3}$.

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου το σύμπαν κυριαρχείται από ακτινοβολία. Εισάγοντας την καταστατική εξίσωση

$$P = \frac{1}{3} \mu_{rad} \quad (4.89)$$

και ολοκληρώνοντας την εξίσωση *Friedmann* (4.48), λαμβάνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\dot{a} a + 3z_t/2a^2 = -kt + C_1 \quad (4.90)$$

όπου C_1 σταθερά. Ολοκληρώνοντας την τελευταία με αρχική συνθήκη $a(0) = 0$, θα έχουμε

$$a(t) = \frac{\sqrt{2}}{3z_t} \{ (C_0 z_t + k) (1 - \exp(-3z_t t)) - 3kz_t t \}^{1/2} \quad (4.91)$$

όπου C_0 σταθερά. Το ανάπτυγμα της λύσης για μικρά z_t είναι

$$a(t) = \sqrt{t} \left\{ \sqrt{2C_0 - kt} + \frac{t(kt - 3C_0)}{2\sqrt{2C_0 - kt}} \cdot z_t + O(z_t^2) \right\} \quad (4.92)$$

4.1.8 Συμπεράσματα

Η μελέτη του μοντέλου FLRW σε εγγυτατοποιημένη μετρική *Finsler-Randers* παρέχει τροποποιημένες εξισώσεις *Friedmann*. Η συνεισφορά της μεταβολής της ανισοτροπίας z_t αντανακλά τον *Finslerian* χαρακτήρα της γεωμετρίας του χωροχρόνου. Ο παράγοντας κλίμακας $a(t)$ καθορίζει πλήρως την εξέλιξη κάθε φυσικής ποσότητας που εξαρτάται από τον ιδιόχρονο t , όπως είναι η πυκνότητας της ύλης, της ακτινοβολίας και του κενού. Συνεπώς η χρονική εξέλιξη ενός ομογενούς και ισοτροπικού σύμπαντος εμπεριέχεται εξ'ολοκλήρου στον παράγοντα κλίμακας. Με τη βοήθεια του παράγοντα κλίμακας, ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος εκφράζει μία τοπική διατήρηση ενέργειας.

Αν λάβουμε υπόψιν την εξάρτηση της ροής θερμότητας από την κατεύθυνση παραβιάζουμε την υπόθεση της ισοτροπίας. Η θεώρηση αυτή μας οδηγεί στο να τροποποιήσουμε τον παράγοντα κλίμακας στη μορφή $\tilde{a}(v(s))$ σύμφωνα με την σχέση (4.51), ώστε να είναι συμβατή με το γεωμετρικό πλαίσιο του τοπικά ανισοτροπικού χωρόχρονου. Το διάνυσμα $v(s)$ αναπαριστά το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα κατά μήκος των κοσμικών γραμμών δηλαδή των γραμμών ροής του κοσμολογικού ρευστού.

Η πλήρης εικόνα μπορεί με φυσικό τρόπο να περιγραφεί εντός τοπικά ανισοτροπικών μετρικών δομών του σύμπαντος. Η ενσωμάτωση ενός αρχέγονου διανυσματικού πεδίου στη χωρική γεωμετρία του χώρου μπορεί να αποδοθεί από έναν χώρο τύπου *Finsler-Randers*. Η παρουσία ενός μαγνητικού πεδίου είναι αποτέλεσμα ενός ιδανικού ρευστού υψηλής αγωγιμότητας μέσα σε έναν χωρόχρονο *Finsler*.

Η ύπαρξη ενός διανυσματικού πεδίου ως συστατικού της γεωμετρίας του χωροχρόνου, καθιστά τη δομή *Finsler - Randers*, ένα κατάλληλο γεωμετρικό πλαίσιο για την περιγραφή ενός σύμπαντος, το οποίο χαρακτηρίζεται από ασθενή τοπική ανισοτροπία. Ωστόσο, το συγκεκριμένο μοντέλο, παρουσιάζει σημαντική απόκλιση από τα παρατηρησιακά δεδομένα, αναφορικά με την ερμηνεία της ανισοτροπίας που οφείλεται στην κοσμική μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου. Πιο συγκεκριμένα, ένα αρχέγονο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, ικανό να εξηγήσει την προερχόμενη από την CMB ανισοτροπία, θα είχε σημαντική επίδραση στην πόλωση της τελευταίας, γεγονός που δεν επιβεβαιώνεται από τις παρατηρήσεις. Για το σκοπό αυτό, έχουν προταθεί επεκτάσεις της θεωρίας, οι οποίες περιλαμβάνουν διορθώσεις που αμβλύνουν αυτή την απόκλιση.

Μία τέτοια πρόσφατη εφαρμογή της δομής *Finsler-Randers* δίνεται στο [84]. Συγκεκριμένα, μελετάται η επέκταση των σφαιρικά συμμετρικών λύσεων *Schwarzschild* και *Schwarzschild-De Sitter*, μέσω μίας διαταραχής τύπου *Finsler-Randers*, η οποία προκύπτει μέσω της εισαγωγής ενός διανυσματικού πεδίου. Το φυσικό πλαίσιο μελέτης αυτού του τοπικά ανισοτροπικού μοντέλου, είναι η εφαπτόμενη δέσμη μίας χωροχρονικής πολλαπλότητας. Προσδιορίζονται οι γενικευμένες εξισώσεις πεδίου, καθώς και οι γεωδαισιακές καμπύλες και παρατηρείται η διαφοροποίησή τους από τις αντίστοιχες της γενικής σχετικότητας.

4.2 Ασθενές βαρυτικό πεδίο σε χώρο *Finsler – Randers* και βαρυτικά κύματα

Στο παρόν εδάφιο, επιχειρείται μία γενίκευση της γραμμικοποιημένης θεωρίας πεδίου της παραγράφου 3.2, σε έναν τοπικά ανισοτροπικό χωρόχρονο, υπό την ταυτόχρονη παρουσία ενός ασθενούς βαρυτικού και ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Σε αυτό το πλαίσιο, δίνεται επίσης μία εφαρμογή της θεωρίας στα βαρυτικά κύματα. Η ανάλυση βασίζεται στο [77]. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, η μορφή των εξισώσεων πεδίου που καθορίζουν τη δυναμική της θεωρίας, καθώς και των γεωμετρικών αντικειμένων που την περιγράφουν, εμφανίζεται τροποποιημένη με όρους ανισοτροπίας, οι οποίοι προκύπτουν ως αποτέλεσμα της συνεισφοράς του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

4.2.1 Γραμμικοποιημένη Θεωρία Βαρύτητας

Θεωρούμε έναν χώρο *Finsler - Randers* του οποίου η μετρική λαμβάνει τη μορφή

$$F(x, y) = \sqrt{(a_{ij}(x)y^i y^j)} + kA_i(x)y^i \quad (4.93)$$

Ο πρώτος όρος αποτελεί το Ριμάνειο τμήμα της μετρικής και ο δεύτερος όρος είναι μία 1-μορφή που οφείλεται στην παρουσία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η μετρική αυτή περιγράφει την συμπεριφορά της ύλης που κινείται υπό την επίδραση ενός βαρυτικού και ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Το διανυσματικό δυναμικό A_i συνδέεται με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο F_{ij} μέσω της σχέσης

$$F_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j} \quad (4.94)$$

Θα υποθέσουμε στην συνέχεια πως το βαρυτικό πεδίο είναι ασθενές. Για την γραμμικοποίηση της Θεωρίας, διασπούμε το Ριμάνειο τμήμα της σχέσης (4.93) σε μία μετρική *Minkowski* συν μία μικρή διαταραχή

$$\tilde{a}_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}, \quad |h_{ij}| \ll 1 \quad (4.95)$$

Στο παρόν εδάφιο, η χρήση του συμβόλου \tilde{a} πάνω από το γράμμα ενός γεωμετρικού αντικειμένου, θα υποδηλώνει ότι αυτό αναφέρεται στο ασθενές πεδίο. Σε πρώτη τάξη ως προς τη διαταραχή, η μετρική συνάρτηση *Finsler-Randers* (4.93) γίνεται

$$F(x, y) = \sqrt{[(\eta_{ij} + h_{ij}(x, y))y^i y^j]} + kA_i(x)y^i \quad (4.96)$$

Ο γραμμικοποιημένος μετρικός τανυστής γράφεται

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} + \frac{2k}{\sigma'} y^s A_s A_{(ij)} + k^2 A_i A_j + \frac{k}{\sigma'} y^l A_l \theta_{ij} \quad (4.97)$$

όπου

$$\sigma' = \sqrt{(\eta_{ij}y^i y^j)} \quad (4.98)$$

$$\theta_{ij} = \eta_{ij} - \sigma'^{-2} \eta_{si} \eta_{jl} y^s y^l \quad (4.99)$$

$$A_{(ij)} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) \quad (4.100)$$

Παρατηρούμε ότι, η παρουσία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, προσδίδει στον χωροχρονοτοπική ανισοτροπία. Το πρώτο μέρος $\eta_{ij} + h_{ij}$ της σχέσης (4.97) είναι Ριμάνειο και περιγράφει την κίνηση της ύλης στο ασθενές βαρυτικό πεδίο. Το δεύτερο μέρος, το οποίο σχετίζεται με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, είναι *Finslerian* και συνεπώς είναι τοπικά ανισοτροπικό.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην Γεωμετρία *Finsler* υπάρχουν πολλές διαφορετικές συνοχές για τον ορισμό της συναλλοίωτης διαφόρισης. Οι πλέον διαδεδομένες είναι η συνοχή *Berwald* και η συνοχή του *Cartan*. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η επιλογή της πρώτης απλοποιεί σημαντικά τους υπολογισμούς, ωστόσο παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι είναι μετρικά συμβατή μόνο στον οριζόντιο χώρο επί της εφαπτόμενης δέσμης. Από την άλλη πλευρά, η δεύτερη είναι συχνά καταλληλότερη καθώς είναι μετρικά συμβατή στον συνολικό χώρο (διατηρεί τη νόρμα ενός διανύσματος έπειτα από παράλληλη μετατόπιση) και συνεπώς είναι ρεαλιστικότερη, καθώς πλησιάζει περισσότερο την Κλασική Φυσική και την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Για τους παραπάνω λόγους η επιλογή της συνοχής *Berwald* είναι καταλληλότερη σε Θεωρίες Μεγάλης Ενοποίησης όπως είναι η επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου της Φυσικής Στοιχειωδών Σωματιδίων, όπου ο μη μετρικός χαρακτήρας της συνοχής δεν επηρεάζει την αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας *Lorentz*. Αντίθετα, η συνοχή *Cartan* είναι προτιμότερη σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας, όπου η μετρική συμβατότητα αποτελεί σημαντική συνθήκη για τη μελέτη των γεωδαισιακών του χώρου. Στην συνέχεια θα παράξουμε τις εξισώσεις πεδίου της Θεωρίας και για τη μία και για την άλλη επιλογή συνοχής.

Οι συντελεστές της συνοχής *Berwald* η οποία εφοδιάζει το χώρο *Finsler-Randers* έχει τη μορφή

$$L_{ij}^l = \alpha_{ij}^l + E_{ij}^l, \quad (4.101)$$

όπου α_{ij}^l είναι τα σύμβολα *Cristoffel* για τη μετρική *Riemann*, και τα E_{ij}^l δίνονται από

$$E_{ij}^l = \frac{1}{2} \left(\alpha_{ij} y^k F_k^l + u_i F_j^l + u_j F_i^l \right) \alpha^{-1} - \frac{1}{2} u_i u_j y^k F_k^l \alpha^{-3} \quad (4.102)$$

με

$$u_i = u_i(x, y) = \frac{\alpha_{ij} y^j}{\alpha(x, y)} \quad (4.103)$$

$$\alpha = \alpha(x, y) = \left(\alpha_{ij}(x) y^i y^j \right)^{1/2} \quad (4.104)$$

Σημειώνουμε πως από τις σχέσεις (4.101) και (4.102), το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο υπεισέρχεται στους συντελεστές της συνοχής του χώρου. Από την στασιμοποίηση της

δράσης που ανιστοιχεί στην Λαγκρατζιανή (4.93)

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y^m} \right) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^m} = 0 \quad (4.105)$$

προκύπτει η εξίσωση των γεωδαισιακών του χώρου Randers

$$\frac{dy^m}{d\lambda} + L_{ij}^m(x, y)y^i y^j = 0 \quad (4.106)$$

Από την τελευταία σχέση και την σχέση (4.101), προκύπτει η εξίσωση Lorentz

$$\frac{d^2 x^m}{d\lambda^2} + \alpha_{ij}^m \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} + k F_j^m \frac{dx^j}{d\lambda} = 0 \quad (4.107)$$

όπου η παράμετρος λ είναι ομοπαράλληλη. Η σχέση αυτή είναι η εξίσωση κίνησης ενός φορτισμένου σωματιδίου υπό την επίδραση βαρυτικού και ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Εισάγοντας την διαταραχή h_{ij} όπως στην σχέση (4.95), η τελευταία γράφεται

$$\frac{d^2 x^m}{d\lambda^2} + \tilde{\alpha}_{ij}^m \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} + k F_j^m \frac{dx^j}{d\lambda} = 0 \quad (4.108)$$

όπου

$$\tilde{\alpha}_{ij}^m = \frac{1}{2} n^{ml} (\partial_i h_{jl} + \partial_j h_{im} - \partial_l h_{ij}) \quad (4.109)$$

είναι οι συντελεστές της συνοχής της ασθενούς μετρικής $\tilde{\alpha}_{ij}$.

Ο τανυστής καμπυλότητας υπολογίζεται ως

$$H_{hjk}^i = R_{hjk}^i + E_{hjk}^i \quad (4.110)$$

όπου R_{hjk}^i τανυστής καμπυλότητας Riemann, και τα E_{hjk}^i δίνονται από

$$E_{hjk}^i = \frac{1}{2} Q_{[jk]} \left(F_h^i F_{jk} + \alpha_{hk} F_j^m F_m^i - F_{hj} F_k^i \right) + Q_{[jk]} \left[(u_h \nabla_k F_j^i + y^m \alpha_{hj} \nabla_k F_m^i + u_j \nabla_k F_h^i) \alpha^{-1} - y^m u_h u_j \alpha^{-3} \nabla_k F_m^i \right] \quad (4.111)$$

Η σχέση (4.110) γίνεται

$$H_{hjk}^i(x, y) = \Lambda_{hjk}^i(x) + Q_{[jk]} \left(u_h \nabla_k F_j^i + \dots - \nabla_k F_m^i \right) \quad (4.112)$$

όπου

$$\Lambda_{hjk}^i = R_{hjk}^i + \frac{1}{2} Q_{[jk]} \left(F_h^i F_{jk} + \dots - F_{hj} F_k^i \right) \quad (4.113)$$

$$Q_{[jk]} = \frac{1}{2} (Q_{kj} - Q_{jk}) \quad (4.114)$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη

$$Q_{[jk]} \left(u_h \nabla_k F_j^i + \dot{x}^m \alpha_{hj} \nabla_k F_m^i + u_j \nabla_k F_h^i \right) \alpha^{-1} - \dot{x}^m u_h u_j \alpha^{-3} \nabla_k F_m^i = 0 \quad (4.115)$$

στην (4.110), λαμβάνουμε τη Λαγκραντζιανή

$$\Lambda = \Lambda_{hji}^i \alpha^{hj} = R + k F_{mn} F^{mn}, \quad k \text{ ζωνσταντ.} \quad (4.116)$$

η οποία περιγράφει τα κλασικά βαρυτικά και ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Από την στασιμοποίηση της δράσης

$$\delta I = \delta \int \Lambda \sqrt{|\det \alpha_{ij}|} d^4 x = 0 \quad (4.117)$$

αποκτούμε τις εξισώσεις του ασθενούς πεδίου

$$\left(R_{mn} - \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{mn} R \right) + k \left(F_{nr} F_m^r - \frac{1}{4} \tilde{\alpha}_{mn} F_{rs} F^{rs} \right) = 0 \quad (4.118)$$

Οι τελευταίες είναι οι βαρυτο-ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις **Einstein - Maxwell** του χώρου **Randers** στο κενό υπό την συνθήκη (4.115). Ο τανυστής καμπυλότητας H_{hjk}^i μπορεί να θεωρηθεί ως μία βαρυτο-ηλεκτρομαγνητική καμπυλότητα, η οποία είναι δυνατόν να λεχθεί ότι αφορά μία πηγή βαρυτο-ηλεκτρομαγνητικού ρεύματος. Αξιοσημείωτη είναι η ομοιότητα των εξισώσεων (4.118) με τις αντίστοιχες Ριμάνειες.

Τα σύμβολα **Cristoffel** για τη γραμμικοποιημένη μετρική **Finsler-Randers** (4.97) λαμβάνουν τη μορφή

$$\tilde{L}_{ij}^i = \tilde{a}_{ij}^i + h_{ij}^i \quad (4.119)$$

$$\tilde{H}_{ijk}^i = \tilde{R}_{ijk}^i + h_{ijk}^i \quad (4.120)$$

όπου \tilde{a}_{jk}^i είναι τα σύμβολα **Christoffel** της γραμμικοποιημένης μετρικής **Riemann** και \tilde{R}_{ijk}^i ο αντίστοιχος τανυστής καμπυλότητας

$$\tilde{R}_{ijk}^i = \frac{1}{2} \eta^{is} \left(\partial_{[kl}^2 h_{s]j} \right) - \partial_{[js}^2 h_{lk]} \quad (4.121)$$

Λόγω των σχέσεων (4.119, 4.120) θα έχουμε

$$h_{ij}^m = \frac{1}{2} \left(n_{ij} v^k F_k^m + u_i F_j^m + u_j F_i^m \right) n^{-1} - \frac{1}{2} u_i u_j v^k F_k^m n^{-3} \quad (4.122)$$

$$h_{hjk}^i = \frac{1}{2} Q_{[jk]} \left(F_h^i F_{jk} + n_{hk} F_j^m F_m^i - F_{hj} F_k^i \right) + Q_{[jk]} \left(u_h \partial_k F_j^i + v^m n_{hj} \partial_k F_m^i + u_j \partial_k F_h^i \right) n^{-1} - v^m u_h u_j n^{-3} \partial_k F_m^i \quad (4.123)$$

Χρησιμοποιώντας συναλλοίωτη διαφορίση **Cartan**, ο τρίτος τανυστής καμπυλότητας του **Cartan** (2.75) γράφεται

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{jhc}^i &= R_{jhc}^i + D_{jh|k}^i - D_{jk|h}^i + D_{hk}^i D_{jk}^m - D_{mk}^i D_{jh}^m \\ &\quad + C_{jm}^i (R_{0hk}^m + D_{0h|k}^m - D_{0k|h}^m + D_{sh}^m D_{0k}^s - D_{sk}^m D_{0h}^s) \end{aligned} \quad (4.124)$$

όπου R^i_{jhk} είναι ο τανυστής καμπυλότητας Riemann, το σύμβολο $|$ υποδηλώνει συναλλοίωτη διαφορίση Cartan και ο τανυστής D^i_{jk} έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} D^i_{jk} = & kl^i A_{(j,k)} + \frac{1}{2}k(\omega^i_j A_{0,k} + \omega^i_k A_{0,j} - \omega_{jk} A_{0,s} g^{is}) - C^i_{jk} \\ & + g^{is} k(A_{[s,j]} l_k + A_{[s,k]} l_j) + \frac{k}{\tau} a^{mt} [g^{is} (A_{([t,s])} + A_{[t,0]} p_s \tau) C_{jkm} \\ & - C^i_{km} (A_{[t,j]} + A_{[t,0]} p_j \tau) - C^i_{jm} (A_{[t,k]} + A_{[t,0]} p_k \tau)] \end{aligned} \quad (4.125)$$

με

$$\omega_{ij}(x, y) = \tau(a_{ij} - k^2 A_i A_j), \quad \tau = \frac{F}{a^{\frac{1}{2}}}, \quad l^i = \frac{y^i}{F} \quad (4.126)$$

Η γραμμικοποιημένη μορφή του τανυστή καμπυλότητας του Cartan θα είναι

$$\tilde{K}^i_{jhk} = \tilde{R}^i_{jhk} + \tilde{D}^i_{jh|k} - \tilde{D}^i_{jk|h} + \tilde{C}^i_{jm} (\tilde{R}^m_{0hk} + \tilde{D}^m_{0h|k} - \tilde{D}^m_{0k|h}) \quad (4.127)$$

Οι συντελεστές της συνοχής Cartan για το ασθενές βαρυτο-ηλεκτρομαγνητικό πεδίο λαμβάνουν τη μορφή

$$\tilde{C}_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{J}_{ij}}{\partial y^k} \quad (4.128)$$

και ο αντίστοιχος τανυστής καμπυλότητας Ricci

$$\tilde{K}_{ij} = \tilde{K}^s_{ijs} \quad (4.129)$$

Για ένα ιδανικό ρευστό, κινούμενο εντός χώρου *Finsler - Randers* με καμπυλότητα Cartan \tilde{K}^i_{jhk} , οι εξισώσεις Einstein του ασθενούς πεδίου λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{il} &= k \left(T_{il}(x, y) - \frac{1}{2} T^s_s g_{il} \right) \\ &= \tilde{R}_{il} + E_{il} \end{aligned} \quad (4.130)$$

όπου \tilde{R}_{il} είναι ο τανυστής Ricci του Ριμάνειου χωρόχρονου, E_{il} είναι η συστολή του E^i_{jkl} και T_{il} είναι ο τανυστής Ενέργειας-Ορμής του χωροχρονου *Finsler - Randers*.

4.2.2 Εφαρμογή στα Βαρυτικά Κύματα

Στο σύστημα συντεταγμένων $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, θεωρούμε ένα ασθενές βαρυτικό πεδίο μετρική *Finsler*

$$g_{\mu\nu}(x, y) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, y), \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (4.131)$$

Η μετρική $h_{\mu\nu}$ αναπαριστά μία μικρή ανισοτροπική διαταραχή του επίπεδου χωρόχρονου, η οποία περιγράφει ένα βαρυτικό κύμα. Είναι αξιοσημείωτο ότι, η εξάρτηση της $h(x, y)$

από την ταχύτητα, αναφέρεται μόνο στην διαταραχή του χωρόχρονου και δεν σχετίζεται με την ταχύτητα του κύματος. Το στοιχείο μήκους για ένα επίπεδο βαρυτικό κύμα στον χωρόχρονο, έχει τη μορφή

$$ds^2 = dt^2 - (1 + F[x^0 - x^3, y])(dx^1)^2 - (1 - F[x^0 - x^3, y])(dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (4.132)$$

όπου

$$\delta_{\mu\nu}f(x, y) = h_{\mu\nu}(x, y), \quad |F[x^0 - x^3, y]| \ll 1 \quad (4.133)$$

Αν α είναι το πλάτος, ω η συχνότητα δ η αρχική φάση του κύματος μπορούμε να γράψουμε

$$F[x^0 - x^3, y] = \alpha \sin [\omega(x^0 - x^3) + \delta]y \quad (4.134)$$

Στο όριο όπου το πεδίο είναι ασθενές, οι εξισώσεις πεδίου της Γενικής Σχετικότητας διατηρούν την ισχύ τους. Θεωρούμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}q_{ab}^\mu x^a x^b \quad (4.135)$$

$$q_{ab}^\mu \approx \tilde{L}_{ab}^\mu \approx \epsilon \quad (4.136)$$

όπου L_{ab}^μ είναι τα γραμμικοποιημένα σύμβολα **Christoffel**. Επιλέγουμε τη βαθμίδα **Lorentz**

$$\eta^{\mu\nu}\tilde{L}_{\mu\nu}^\rho = 0 \quad (4.137)$$

Λόγω της υπόθεσης ασθενούς πεδίου θα έχουμε $h_{\mu\nu}^\rho = 0$, και συνεπώς

$$\tilde{L}_{\mu\nu}^\rho = \tilde{a}_{\mu\nu}^\rho \quad (4.138)$$

Από την τελευταία, οδηγούμαστε στην ισοδύναμη βαθμίδα **Lorentz**

$$\partial_\mu h_\lambda^\mu(x, y) - \frac{1}{2}\partial_\lambda h = 0 \quad (4.139)$$

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων, οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις **Einstein** με $\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$, μας παρέχουν την ακόλουθη ισοδύναμη μορφή της εξίσωσης κύματος

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu}(x, y) = 0 \quad (4.140)$$

Ένα συγκεκριμένο σύνολο λύσεων της τελευταίας εξίσωσης είναι τα επίπεδα βαρυτικά κύματα

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(x, y) = C_{\mu\nu} \exp(ik_\sigma(y)x^\sigma) \quad (4.141)$$

$C_{\mu\nu}$ ο σταθερός συμμετρικός ταυστής πόλωσης. Παρατηρούμε ότι το κυματάνυσμα k_σ εξαρτάται μόνο από το y , λόγω της τοπικής ανισοτροπίας της μετρικής. Από τις τελευταίες δύο σχέσεις, λαμβάνουμε ότι το κυματάνυσμα πρέπει να είναι μηδενικό

$$\eta^{\mu\nu}k_\mu(y)k_\nu(y) = k^2 = 0, \quad k_\mu = (\omega, k_1, k_2, k_3) \quad (4.142)$$

Αν επιλέξουμε μία αρμονική συνθήκη βαθμίδας

$$\frac{\partial \tilde{h}_\nu^\mu}{\partial y^\mu} = 0 \quad (4.143)$$

και επιπλέον θεωρήσουμε ότι η \tilde{h}_ν^μ έχει μηδενικό ίχνος, οδηγούμαστε στην εξίσωση κύματος για το άιχνο εγκάρσιο βαρυτικό κύμα

$$\square h_{\mu\nu}^{TT}(x, y) = 0 \quad (4.144)$$

Κατ' αναλογία με την εξίσωση (4.141), ένα συγκεκριμένο σύνολο λύσεων της τελευταίας είναι τα επίπεδα βαρυτικά κύματα

$$h_{\mu\nu}^{TT}(x, y) = C'_{\mu\nu} \exp(ik_a(y)x^a) \quad (4.145)$$

Και σε αυτή την περίπτωση, ο ταυιστής πόλωσης $C'_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικός, και το κυματάνησμα k_a είναι μηδενικό.

Εώς αυτό το σημείο, έχουμε θεωρήσει πως η θέση και η ταχύτητα είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Εισάγουμε στην συνέχεια τη χρονική τους εξάρτηση ως

$$X = (1 + \frac{1}{2}\alpha \sin(\omega t))x^1, \quad Y = (1 - \frac{1}{2}\alpha \sin(\omega t))x^2 \quad (4.146)$$

Τότε θα έχουμε

$$\dot{X} = \frac{1}{2}\alpha \cos(\omega t)x^1, \quad \dot{Y} = -\frac{1}{2}\alpha \cos(\omega t)x^2 \quad (4.147)$$

Ένα επίπεδο βαρυτικό κύμα της μορφής

$$F[x^0 - x^3, y^3] = \alpha \sin[\omega(x^0 - x^3)]y^3, \quad y^3 = (0, 0, 1, 0) \quad (4.148)$$

θα διαδίδεται στην διεύθυνση y^3 . Ας υποθέσουμε ότι ορισμένες δοκιμαστικές μάζες στο επίπεδο $x - y$, βρίσκονται σε ηρεμία σε κύκλο γύρω από μία κεντρική δοκιμαστική μάζα. Ύστερα από χρόνο t , ο κύκλος έχει μετασχηματιστεί σε έλλειψη, με τον κύριο άξονα παράλληλο με τη διεύθυνση x . Ορίζουμε την δείκτρια καμπύλη I_p , να είναι ο κύκλος με κέντρο μηδέν και ακτίνα $\sqrt{[1 + f(x, y)]OP}$, όπου $P(x, y)$ ένα τυχαίο σταθερό σημείο και η συνάρτηση $F(x, y)$ είναι θετική. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο δοκιμαστικές μάζες μπορεί να υπολογιστεί, μέσω της μετρικής *Finsler-Randers*, ως

$$L(x, y) = \frac{\lambda + \sqrt{(f(x, y)\rho^2 + \lambda^2)}}{f(x, y)} \quad (4.149)$$

$$\rho^2 = \frac{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}{X^2 + Y^2} \quad (4.150)$$

$$\lambda = \frac{X\dot{X} + Y\dot{Y}}{X^2 + Y^2} \quad (4.151)$$

4.2.3 Γεωδαισιακή Απόκλιση και Εξισώσεις *Raychaudhuri*

Σε έναν χωρόχρονο *Finsler-Randers*, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την H_{hjk}^i (4.110), και να εκφράσουμε την εξίσωση γεωδαισιακής απόκλισης ως

$$\frac{\delta^2 \xi^i}{\delta \lambda^2} + \bar{H}_{hjk}^i(x, v) \xi^j v^h v^k = 0 \quad (4.152)$$

όπου λ ομοπαράλληλη παράμετρος, \bar{R}_{hk}^i οι συντελεστές της συνοχής του *Cartan*, ξ^i το διάνυσμα απόκλισης, v^k εφαπτόμενα διανύσματα επιφάνειας εμβαπτισμένης στον χωρόχρονο *Randers*,

$$\frac{\delta \xi^i}{\delta \lambda} = \xi^i_{|h} v^h, \quad \xi^i_{|h} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^h} + \bar{R}_{hk}^i(x, v) \xi^k \quad (4.153)$$

Σημειώνουμε πως η εξίσωσης γεωδαισιακής απόκλισης περιέχει δύο όρους. Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην βαρυτική απόκλιση, η οποία παρατηρείται απουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, και σχετίζεται με το Ριμάνειο τμήμα του τανυστή καμπυλότητας. Ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί σε μία μεικτή γεωμετρική και ηλεκτρομαγνητική απόκλιση και σχετίζεται με το *Finsler* τμήμα του τανυστή καμπυλότητας. Ο όρος αυτός συνδέεται με την δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο φορτισμένων σωματιδίων σε ελεύθερη πτώση. Μία ουσιώδης διαφοροποίηση από την περίπτωση *Riemann* είναι ότι η αλληλεπίδραση αυτή προκύπτει ως φυσικό αποτέλεσμα της *Finsler* γεωμετρικής δομής του χωροχρόνου. Στην περίπτωση όπου $E_{hjk}^i = 0$ η σχέση (4.153) ανάγεται στην συνήθη εξίσωση γεωδαισιακής απόκλισης του χώρου *Riemann*

$$\frac{\delta^2 z^i}{\delta u^2} + R_{jkl}^i z^j v^k v^l = 0 \quad (4.154)$$

Απο φυσικής άποψης, τα δύο σωματίδια βρίσκονται σε ελεύθερη πτώση στο παλιρροϊκό πεδίο R_{hjk}^i του χωρόχρονου. Στην περίπτωση όπου $R_{hjk}^i = 0$ ο πρώτος όρος της μετρικής *Finsler-Randers* αντιστοιχεί σε μία μετρική *Minkowski* και συνεπώς ο χώρος *Finsler-Randers* είναι τοπικά *Minkowski*, με

$$\mathcal{F}(x, v) = \sqrt{n_{\mu\nu} v^\mu v^\nu} + k A_i(x) v^i \quad (4.155)$$

Η μοναδική δύναμη που επηρεάζει τα δύο φορτισμένα σωματίδια οφείλεται στην παρουσία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η εξίσωση γεωδαισιακής απόκλισης (4.153) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{\delta^2 z^i}{\delta u^2} + E_{jkl}^i z^j v^k v^l = 0 \quad (4.156)$$

Σε αυτή την περίπτωση οι γεωμετρικές ιδιότητες του πεδίου χαρακτηρίζονται από έναν ομογενή και ανισοτροπικό χώρο. Ο μετρικός τανυστής εξαρτάται μόνο από τις ταχύτητες, οι οποίες παράγουν τις ανισοτροπικές ιδιότητες του καμπυλωμένου χωρόχρονου *Finsler*. Κατά συνέπεια θα υπάρχει ένα πλαίσιο αναφοράς όπου $\bar{R}_{hjk}^i = 0$. Με βάση τα παραπάνω, ο χώρος μπορεί να εφοδιαστεί τοπικά με ένα γεωδαισιακό σύστημα συντεταγμένων το οποίο ορίζεται από τις τροχιές των σωματιδίων που κινούνται κατά μήκος των γεωδαισιακών.

Από κοσμολογικής άποψης, η σχέση (4.155) γράφεται ως

$$\mathcal{F}(x, V) = \sqrt{n_{\mu\nu}V^\mu V^\nu} + kW_i(x)V^i \quad (4.157)$$

όπου $V = \tilde{H}d$ αναπαριστά την κοσμολογική ταχύτητα, η οποία εξαρτάται από την παράμετρο *Hubble* (4.54), d είναι η γεωδαισιακή απόσταση και W_i ένα ανισοτροπικό πεδίο. Οι προηγούμενες θεωρήσεις παρέχονται από το εγγυταπονημένο γεωμετρικό πλαίσιο *Finsler*. Αν το πεδίο W_i προέρχεται από στροβιλισμό, οι γεωδαισιακές του μοντέλου είναι *Riemann*.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.110) και (4.152) η εξίσωση απόκλισης των γεωδαισιακών στο όριο του ασθενούς πεδίου σε χώρο *Randers* λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{d^2z^i}{d\tau^2} + \left(\epsilon_{ljm}^i + R_{ljm}^i\right) \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dz^j}{d\tau} \frac{dx^m}{d\tau} = 0 \quad (4.158)$$

Θεωρώντας ότι δύο φορτισμένα δοκιμαστικά σωματίδια κινούνται αργά, μπορούμε να εκφράσουμε τις τετραταχύτητες ως μοναδιαία διανύσματα στην διεύθυνση του χρόνου

$$\frac{dx^i}{d\tau} = (1, 0, 0, 0) \quad (4.159)$$

Η προσέγγιση πρώτης τάξης για τον τανυστή *Riemann* γράφεται

$$\epsilon_{0j0}^i = \frac{1}{2}\eta^{ik} (\epsilon_{jk,00} - \epsilon_{0j,k0} - \epsilon_{0k,0j} + \epsilon_{00,kj}) \quad (4.160)$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση $\epsilon_{i0} = 0$ ο τανυστής *Riemann* θα είναι

$$\epsilon_{0j0}^i = \frac{1}{2}\epsilon_{j,00}^i \quad (4.161)$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες στην σχέση (4.158), έχουμε

$$\frac{\partial^2 z^i}{\partial \tau^2} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon_j^i}{\partial \tau^2} + 2F_0^i F_j^0 + u_j \frac{\partial F_0^i}{\partial \tau}\right) \frac{\partial z^j}{\partial \tau} = 0 \quad (4.162)$$

Η τελευταία σχέση συμπίπτει με την αντίστοιχη εξίσωση στο όριο του ασθενούς πεδίου σε έναν χώρο *Riemann*, η οποία γράφεται

$$\frac{d^2 n^\mu}{ds^2} + R_{\nu\kappa\lambda}^\mu n^\kappa v^\nu v^\lambda = \Phi^\mu \quad (4.163)$$

όπου

$$\Phi^\mu = k \left(\frac{dF_\kappa^\mu}{ds} v^\kappa + F_\nu^\mu F_\kappa^\nu v^\kappa \right) \quad (4.164)$$

με k σταθερά. Από φυσικής άποψης το Φ^μ αναπαριστά μία μη βαρυτική δύναμη, για παράδειγμα ένα ελατήριο. Μία αξιοσημείωτη διαφορά ανάμεσα στις εξισώσεις (4.163) και

(4.152) είναι πως στην σχέση (4.163) το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει προστεθεί *ad hoc*. Αυτό σημαίνει πως ο όρος Φ^μ έχει τη μορφή μίας εξωτερικής δύναμης αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο γειτονικών φορτισμένων σωματιδίων τα οποία κινούνται σε μη γεωδαισιακές τροχιές. Αντίθετα, στην σχέση (4.152) το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ενσωματώνεται στη γεωμετρία. Στην παρούσα θεώρηση τα δύο φορτισμένα σωματίδια κινούνται επί γεωδαισιακών του χώρου *Finsler* και η σχετική τους επιτάχυνση καθορίζεται από την καμπυλότητα του βαρυτικού και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, η οποία παράγεται από τον ταχυστή ενέργειας-ορμής. Υπό την έννοια αυτή, η δομή του χώρου *Finsler-Randers* αποτελεί κατάλληλη επιλογή ώστε να εκφραστεί με το βέλτιστο τρόπο η θεμελιώδης συσχέτιση μεταξύ φυσικής και γεωμετρίας.

Η εξίσωση *Raychaudhuri* σε χώρο *Finsler-Randers* δίνεται από την σχέση (4.70). Στο όριο του ασθενούς πεδίου, γράφεται

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\tau} = -\frac{1}{3}\tilde{\theta}^2 - \tilde{\sigma}_{ik}\tilde{\sigma}^{ik} + \tilde{\omega}_{ik}\tilde{\omega}^{ik} - K_{il}V^iV^l + \dot{V}_{;i}^i \quad (4.165)$$

όπου K_{il} ο ταχυστής *Cartan* του ασθενούς πεδίου, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\omega}_{ik}$, $\tilde{\sigma}_{ik}$ είναι η γενίκευση της διαστολής, του στροβιλισμού και της παραμόρφωσης αντίστοιχα, στο πλαίσιο *Finsler-Randers*:

$$\tilde{\theta} = \Lambda_{ij}h^{ij} = V_{;i}^i - C_{im}^i \dot{V}^m \quad (4.166)$$

$$\tilde{\omega}_{ik} = \Lambda_{[ik]} + \dot{V}_i V_k - \dot{V}_k V_i \quad (4.167)$$

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \Lambda_{(ik)} - \frac{1}{3}\tilde{\theta}h_{ik} - 2C_{ikm}V^m - \dot{V}_i V_k - \dot{V}_k V_i \quad (4.168)$$

όπου $\Lambda_{(ik)} = V_{i;k}$ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος του εγγυτατοποιημένου χώρου *Riemann* που προσεγγίζει τον χώρο *Finsler-Randers*, και V^i μοναδιαίο διάνυσμα. Στην περίπτωση των γεωδαισιακών ο όρος $\dot{V}_{;i}^i$ των τελευταίων τεσσάρων σχέσεων μηδενίζεται. Η εισαγωγή του ταχυστή *Cartan* στις τρεις τελευταίες σχέσεις αποδίδει μία ανισοτροπική δομή στην εξίσωση *Raychaudhuri* (4.165). Η γραμμικοποιημένη εξίσωση *Raychaudhuri* στον χωρόχρονο *Randers* εκφράζεται αγνοώντας τον στροβιλισμό και την παραμόρφωση ως

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\tau} = -\frac{1}{3}\tilde{\theta}^2 - \tilde{K}_{il}V^iV^l \quad (4.169)$$

Στην περίπτωση όπου $\dot{\tilde{\theta}} = 0$, $\tilde{\sigma}_{ij} = 0$, $\tilde{\omega}_{ij} = \text{σταθ.}$, από την σχέση (4.165) το παλιρροϊκό πεδίο $K_{il}V^iV^l$ οφείλεται στον στροβιλισμό $\tilde{\omega}$, το οποίο δρα ως ενέργεια του κενού (κοσμολογική σταθερά). Με αυτή την έννοια είναι αντίστοιχο της φυγόκεντρου δύναμης της Νευτώνειας θεωρίας.

Κεφάλαιο 5

Κοσμολογική Αναπήδηση σε Τροποποιημένα Μοντέλα Βαρύτητας

Θα μελετήσουμε την υλοποίηση στο πλαίσιο γενικευμένων τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας οι οποίες προκύπτουν από γεωμετρικές *Finsler* ή τύπου-*Finsler*. Πιο συγκεκριμένα, η εσωτερική γεωμετρική δομή εμπλουτίζεται από την εμφάνιση περαιτέρω βαθμών ελευθερίας στις εξισώσεις *Friedmann*, οι οποίοι υπαγορεύουν την ύπαρξη του φαινομένου της Αναπήδησης⁽¹⁾.

Θα μελετηθεί το φαινόμενο σε διάφορα μοντέλα *Finsler* και τύπου-*Finsler* που θα κατασκευαστούν στην συνέχεια. Στις περιπτώσεις της *General Very Special Relativity (GVSR)*, όπως και στην Βαρύτητα τύπου-*Finsler* επί της Εφαπτόμενης Δέσμης, θα αποδείξουμε ότι η υλοποίηση της Αναπήδησης δεν είναι δυνατή, ενώ στον χώρο *Finsler-Randers*, η επαγόμενη βαθμωτή ανισοτροπία ικανοποιεί τις συνθήκες Αναπήδησης, και οι λύσεις Αναπήδησης μπορούν να υπολογισθούν εύκολα. Τελικά, για την γενική κατηγορία των θεωριών οι οποίες συμπεριλαμβάνουν μία μη γραμμική συνοχή, εισάγεται ένα νέο βαθμωτό πεδίο, που δημιουργεί μία δομή Βαθμωτού-Τανυστή η οποία μπορεί να οδηγήσει στην εμφάνιση Αναπήδησης. Αυτά τα χαρακτηριστικά αναδεικνύουν τις δυνατότητες των γεωμετριών *Finsler* και τύπου *Finsler*.

5.1 Η έννοια της Αναπήδησης

Με τον όρο κοσμολογική Αναπήδηση, αναφέρονται σενάρια συμπληρωματικά προς τη θεωρία του κοσμολογικού πληθωρισμού, τα οποία προσφέρουν μία εναλλακτική θέαση του πρώιμου σύμπαντος ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]). Τα σενάρια αυτά, αποτελούν μέρος των λεγόμενων κυκλικών κοσμολογιών, η ονομασία των οποίων οφείλεται στην περιοδική συμπεριφορά που παρουσιάζουν οι λύσεις τους (παλλόμενο σύμπαν). Ιστορικά, η ιδέα της κοσμολογικής αναπήδησης ανήκει στον *Tolman* [8], ο οποίος το 1931 για πρώτη φορά πρότεινε, ότι ένα κλειστό ($k = 1$) σύμπαν, που χαρακτηρίζεται από μία μετρική *FLRW* και

¹ Bounce.

το οποίο έχει ήδη καταρρεύσει σε μία κατάσταση υπερβολικά υψηλής πυκνότητας, είναι δυνατόν να αρχίσει εκ νέου να διαστέλλεται.

Έκτοτε, έχουν αναπτυχθεί διάφορα τέτοια μοντέλα, στα πλαίσια μίας προσπάθειας για συστηματική εξήγηση της προέλευσης του σύμπαντος. Αρχικά, τέτοια σενάρια δεν ήταν αρκετά διαδεδομένα, εξαιτίας της πολύ μικρής πιθανότητας υλοποίησης της αναπήδησης, σε ένα σύμπαν που έχει διασταλεί αρκετά, σε σχέση με το αρχικό του μέγεθος. Συγκεκριμένα, η πιθανότητα αυτή είναι της τάξης του λόγου της ελάχιστης προς τη μέγιστη ακτίνα διαστολής του σύμπαντος [10].

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, το ερευνητικό ενδιαφέρον για μοντέλα Αναπήδησης έχει αυξηθεί θεαματικά. Η χρησιμότητα των κοσμολογιών Αναπήδησης είναι εμφανής: Είναι γνωστό, ότι το καθιερωμένο κοσμολογικό πρότυπο, με την προσθήκη της πληθωριστικής εποχής, εξασφαλίζει όλες τις επιθυμητές ιδιότητες του σύμπαντος σε μεγάλη κλίμακα (επιπεδότητα, ομογένεια, ισοτροπία, μη ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων). Ωστόσο, παρουσιάζει μία σοβαρή παθολογία, η οποία συνίσταται στην σημειακή ανωμαλία που εμφανίζουν οι εξισώσεις **Friedmann**, στο σημείο της μεγάλης έκρηξης, η οποία θεωρείται ως η απαρχή του σύμπαντος. Οι κοσμολογίες Αναπήδησης, προσφέρουν ένα μοναδικό τρόπο εξάλειψης της σημειακής αυτής ανωμαλίας, μέσω μίας συνεχούς μετάβασης του σύμπαντος από συστολική σε διαστολική φάση. Με τον τρόπο αυτό, η μεγάλη έκρηξη αντικαθίσταται από τη μεγάλη Αναπήδηση. Υπό την έννοια αυτή, τα σενάρια Αναπήδησης παρέχουν μία πιο συνεχή εικόνα του πρώιμου σύμπαντος. Μία οπτικοποίηση της αποτελεσματικότητας των σεναρίων Αναπήδησης, σε σύγκριση με άλλα μοντέλα για την επίλυση βασικών κοσμολογικών προβλημάτων, επιτυγχάνεται μέσω του σφηνοειδούς διαγράμματος [9].

Ωστόσο, η υιοθέτηση τέτοιων θεωριών, προϋποθέτει εξ ορισμού την τροποποίηση του κλασικού μαθηματικού ή και φυσικού πλαισίου της βαρύτητας: Στη γενική θεωρία της σχετικότητας, η δημιουργία Αναπήδησης απαγορεύεται, εξαιτίας της μηδενικής ενεργειακής συνθήκης ($\rho + 3p \geq 0$), η οποία επιβάλλεται από την εξίσωση **Raychaudhuri** και επιτάσσει να είναι θετική η ενεργός βαρυτική μάζα. Για το λόγο αυτό, η γένεση Αναπήδησης, απαιτεί την παραβίαση της παραπάνω ενεργειακής συνθήκης. Η παραβίαση αυτή, επιτυγχάνεται μέσω της προσθήκης στην **Lagrangian** πυκνότητα του σύμπαντος, κάποιων εξωτερικών πεδίων με αρνητική πυκνότητα ενέργειας [4],[10]. Ωστόσο, τα πεδία αυτά απαιτούν κάποια προσοχή στο χειρισμό τους, προκειμένου να μην αλλοιώσουν την συνήθη θερμική ιστορία του σύμπαντος, καθώς και τη σειρά των εποχών μετά την Αναπήδηση. Συνεπώς, η υλοποίηση σεναρίων Αναπήδησης είναι δυνατή, είτε στο πλαίσιο θεωριών κβαντικής βαρύτητας [11], όπου οι καταστάσεις αρνητικής ενέργειας είναι ούτως ή άλλως αποδεκτές, είτε στο πλαίσιο τροποποιημένων μοντέλων βαρύτητας [7], τα οποία προκύπτουν με την τροποποίηση της δράσης του βαρυτικού πεδίου ή και της γεωμετρίας του χωροχρόνου. Συγκεκριμένα παραδείγματα θεωριών, όπου μπορούν εύκολα να αποκτηθούν λύσεις Αναπήδησης, αποτελούν τα προ μεγάλης έκρηξης [12], [13] και τα εκφυρωτικά [14], [15] μοντέλα, οι βαρυτικές δράσεις με υψηλότερης τάξης διορθώσεις [1],[16], οι βαρύτητες $f(R)$ [17],[18] και $f(T)$ [19], τα σενάρια Κοσμικών Μεμβρανών [20], [21], η μη σχετικιστική βαρύτητα [22], [23], [24], η θεωρία **Galileon** [25],[26], η έμμαξη βαρύτητα [27], η τροποποιημένη βαρύτητα **Lagrange** [28] και η κβαντική κοσμολογία

βρόγχων [29],[30],[31].

Με βάση την κλίμακα μεγέθους στην οποία αναφέρονται, τα σενάρια Αναπήδησης μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κύριες κατηγορίες [4]: Σε αυτά με Αναπήδηση ύλης και σε εκείνα με εκπυρωτική συστολική φάση. Τα μοντέλα με Αναπήδηση ύλης, είναι κατάλληλα σε κλίμακες μεγέθους μικρότερες της ακτίνας **Hubble**, σε μία εποχή όπου η ύλη θεωρείται ως το κυρίαρχο συστατικό του σύμπαντος. Το βασικό πλεονέκτημα αυτών των μοντέλων, έγκειται στο γεγονός, ότι παρέχουν ένα αναλλοίωτο φάσμα κοσμολογικών διαταραχών κατά τη διάρκεια της Αναπήδησης, αντανακλώντας τον κβαντικό χαρακτήρα των διακυμάνσεων της καμπυλότητας ως διακυμάνσεων του κενού. Ωστόσο, μεταβαίνοντας σε μεγαλύτερες κλίμακες αναφοράς και καθώς η ακτινοβολία αρχίζει να αναπτύσσεται, οι ομογενείς και ισοτροπικές λύσεις της θεωρίας γίνονται ασταθείς. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως αστάθεια **BKL** και έχει μερικώς επιλυθεί με τη διατύπωση της λεγόμενης **BKL mixmaster** κοσμολογίας. Από την άλλη πλευρά, στα εκπυρωτικά μοντέλα, τα οποία χρησιμοποιούνται σε κλίμακες μεγέθους μεγαλύτερες της ακτίνας (**Hubble**), το σύμπαν θεωρείται ότι έχει δομή κοσμολογικού ρευστού, του οποίου η πυκνότητα ενέργειας είναι πολύ μικρότερη από την πίεσή του. Η δομή αυτή αποτρέπει την εμφάνιση της αστάθειας **BKL**. Ωστόσο, οι κοσμολογικές λύσεις των αμιγώς εκπυρωτικών μοντέλων, έχουν μορφή παρόμοια με αυτή των λύσεων επιταχυνόμενης διαστολής, που προκύπτουν από την πληθωριστική κοσμολογία και ως εκ τούτου, παρουσιάζουν σημειακή ανωμαλία στο σημείο της Αναπήδησης. Επιπλέον, το φάσμα των κοσμολογικών διαταραχών στις θεωρίες αυτές, δεν παραμένει αναλλοίωτο σε αλλαγές της κλίμακας. Για το σκοπό αυτό, έχουν αναπτυχθεί τα λεγόμενα νέα εκπυρωτικά μοντέλα, όπου με την προσθήκη κάποιων έξτρα διαστάσεων στη μετρική του σύμπαντος, αποκτούμε ένα αδιαβατικό και επομένως αναλλοίωτο φάσμα διακυμάνσεων, με το τίμημα όμως της επανεμφάνισης της αστάθειας **BKL**. Είναι προφανές, ότι η πληρέστερη δυνατή περιγραφή της Αναπήδησης, προκύπτει από μοντέλα που συνδυάζουν συνεισφορές Αναπήδησης ύλης και εκπυρωτικής συστολής.

Η μελέτη της Κοσμολογικής Αναπήδησης, έχει γενικευθεί και για την περίπτωση ενός ανισοτροπικού σύμπαντος. Στην περίπτωση αυτή, το ενδιαφέρον εστιάζεται κυρίως στην εξέλιξη της ανισοτροπίας του υποβάθρου, κατά τη διάρκεια των διαφόρων φάσεων (Συστολή, Αναπήδηση, Διαστολή) του πρώιμου σύμπαντος. Σε ορισμένα μοντέλα, η ανισοτροπία μειώνεται κατά τη συστολική φάση και παραμένει αρκούντως μικρή κατά τη διάρκεια της Αναπήδησης, σε συμφωνία με τα αντίστοιχα παρατηρησιακά δεδομένα [4]. Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν σενάρια, στα οποία η ελάττωση της ανισοτροπίας κατά την εκπυρωτική συστολική φάση, ακολουθείται από την εκθετική της αύξηση κατά τη διάρκεια της Αναπήδησης, κυρίως λόγω του κβαντικού χαρακτήρα των διακυμάνσεων της καμπυλότητας [54]. Μία άλλη επέκταση, αφορά την περίπτωση ενός σύμπαντος, με δομή διαφορετική από την κλασική **FLRW** μετρική. Για παράδειγμα, για ένα σύμπαν το οποίο αρχίζει να διαστέλλεται μετά την κατάρρευσή του σε μία μελανή οπή, σε μία περιοχή γύρω από την Αναπήδηση, η γεωμετρία του χωροχρόνου έχει τροποποιηθεί δραματικά, εξαιτίας της αστάθειας **BKL**.

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή της Κοσμολογικής Αναπήδησης, αφορά την ερμηνεία της μαγνητογένεσης στο πρώιμο σύμπαν [32]. Η εξήγηση της προέλευσης του αρχέγονου, μεγάλης κλίμακας γαλαξιακού και εξωγαλαξιακού μαγνητικού πεδίου, παραμένει ένα

ανοικτό πρόβλημα της σύγχρονης Κοσμολογίας, εξαιτίας δυσκολιών που εμφανίζονται, κατά την προσπάθεια διαχείρισής του εντός ενός πληθωριστικού πλαισίου. Συγκεκριμένα, μία πληθωριστική προσέγγιση της μαγνητογένεσης, απαιτεί την αυθόρμητη ρήξη της σύμμορφης συμμετρίας της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, προκειμένου να προκύψει ένα παρατηρήσιμο (αρκούντως μεγάλου πλάτους) μαγνητικό πεδίο κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Η ρήξη αυτή επιτυγχάνεται, με την προσθήκη ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ως έξτρα όρου και σύζευξη αυτού, είτε στην καμπυλότητα του σύμπαντος (βαρυτοηλεκτρομαγνητική καμπυλότητα), είτε σε ένα βαθμωτό πεδίο, το οποίο έχει επίσης εισαχθεί *ad hoc*. Τα κύρια προβλήματα που παρουσιάζονται κατά τη διαδικασία αυτή, είναι η οπισθοαντίδραση του ηλεκτρικού πεδίου και το πρόβλημα της ισχυρής ζεύξης. Η υπέρβαση των παραπάνω δυσκολιών, είναι δυνατή με την υιοθέτηση ενός εκφυρωτικού μοντέλου Αναπήδησης.

Μεταξύ των θεωριών τροποποιημένης βαρύτητας, μία ενδιαφέρουσα κατηγορία αποτελούν τα βαρυτικά μοντέλα που βασίζονται στις Γεωμετρίες **Finsler** και τύπου **Finsler**. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, αυτά αποτελούν φυσικές επεκτάσεις της Γεωμετρίας **Riemann** στις οποίες οι φυσικές ποσότητες εξαρτώνται από την τετραταχύτητα του παρατηρητή, και αυτή η εξάρτηση από την ταχύτητα αντανακλά την παραβίαση **Lorentz** της Κινηματικής. Αυτή η ιδιότητα καλείται δυναμική ανισοτροπία ([33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44]). Επιπλέον, οι Γεωμετρίες **Finsler** και τύπου **Finsler** συνδέονται ισχυρά με την ενεργό γεωμετρία εντός ανισοτροπικών μέσων ([45], [46]) και με φυσικό τρόπο υπεισέρχονται στο πρόγραμμα αναλογικής βαρύτητας [47]. Εξαιτίας αυτών των χαρακτηριστικών, οι Γεωμετρίες **Finsler** και τύπου **Finsler** είναι δυνατόν να διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο εντός της κβαντικής βαρύτητας. Η εξάρτηση του μετρικού τανυστή και άλλων ποσοτήτων από τις συντεταγμένες θέσης επί της πολλαπλότητας βάσης και τις μεταβλητές κατεύθυνσης - ταχύτητας επί του εφαιπτόμενου χώρου, υποδηλώνουν ότι το φυσικό γεωμετρικό πλαίσιο για την περιγραφή αυτών των μοντέλων είναι η εφαιπτόμενη δέσμη μίας λείας πολλαπλότητας. Τελικά, στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει εξάρτηση από την ταχύτητα, η Γεωμετρία **Finsler** γίνεται **Riemann**.

Η εσωτερική γεωμετρική δυναμική ανισοτροπία του χωρόχρονου της Γεωμετρίας **Finsler** (σε αντίθεση με την χωρική ανισοτροπία η οποία μπορεί να εμφανίζεται στην Γεωμετρία **Riemann**, όπως για παράδειγμα στους χώρους **Bianchi**) συμπεριλαμβάνεται στην γεωμετρία του χωρόχρονου ως ένα εσωτερικό πεδίο (μεταβλητή) το οποίο επηρεάζει τα γεωμετρικά και φυσικά μεγέθη. Συνεπώς, μας παρέχει το είδος της ανισοτροπίας ως ένα υποθετικό πεδίο, το ανισοτρόπιο, το οποίο παράγει αυτή την απόκλιση από την ισοτροπία, όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 2. Το ανισοτρόπιο εμφανίζεται στις εξισώσεις **Friedmann** και στην παραβίαση **Lorentz** ([48], [49], [50], [51]), οπότε η ανισοτροπία προκύπτει ως ιδιότητα του χωρόχρονου **Finsler** ([48], [49], [52], [53]).

Σήμερα, η έρευνα στο πεδίο της Κοσμολογικής Αναπήδησης συνεχίζεται με αμείωτους ρυθμούς. Συγκεκριμένα, στον τομέα της Σχετικιστικής Υδροδυναμικής, έχει μελετηθεί η υλοποίηση ενός σεναρίου με Αναπήδηση ύλης, στο πλαίσιο μίας θεωρίας επεκτεταμένης βαρύτητας [79], με τη βοήθεια της οποίας εξασφαλίζεται η υπέρβαση των προβλημάτων που ανακύπτουν από την ύστερη κοσμική επιτάχυνση στο πλαίσιο της Κλασικής Βαρύτητας.

Η Αναπήδηση ελέγχεται από την παράμετρο της σύζευξης του εξωτερικού πεδίου με τη Βαρύτητα. Σενάρια με Αναπήδηση μπορούν να εισαχθούν στην ισοδύναμη $f(T)$ τηλεπαράλληλη διατύπωση της Βαρύτητας. Συγκεκριμένα, οι εξισώσεις πεδίου της θεωρίας παρέχουν ένα ισοδύναμο σύστημα, από το οποίο προκύπτουν με συνέπεια οι φάσεις της εξέλιξης του Σύμπαντος, ενώ η ύπαρξη ενός απείρως μακρινού χρονικά ιδιάζοντος σημείου μπορεί να υπερκεραστεί με την υιοθέτηση ενός σεναρίου Αναπήδησης [80].

Η υλοποίηση Αναπήδησης είναι δυνατόν να προκύψει από την εφαρμογή της Ολογραφικής Αρχής στο πρώιμο σύμπαν. Συγκεκριμένα, θεωρώντας ως φράγματα στο υπέρυθρο τους ορίζοντες σωματιδίων και μελλοντικών γεγονότων, η μείωση των οριζόντων σε πρώιμους χρόνους, επιφέρει ως φυσικό αποτέλεσμα την αύξηση της ολογραφικής πυκνότητας ενέργειας σε κλίμακες Αναπήδησης, ενώ προκύπτει και η αναγκαία παραβίαση της μηδενικής ενεργειακής συνθήκης. Επιπλέον, η προσθήκη στους ορίζοντες μίας απλής διόρθωσης οφειλόμενης σε ένα υπέρυθρο φράγμα, οδηγεί σε Αναπηδητικές λύσεις χωρίς σημειακή ανωμαλία, στις οποίες η ελάχιστη τιμή του παράγοντα κλίμακας ελέγχεται από αυτή τη διόρθωση. Τέλος, από την κατασκευή γενικευμένων σεναρίων μέσω της χρήσης επεκτεταμένων υπέρυθρων φραγμάτων, μπορεί να αποκτηθεί ως ειδική περίπτωση η βαρύτητα $F(R)$, καθώς και η υλοποίηση Αναπήδης μέσω αυτής [81].

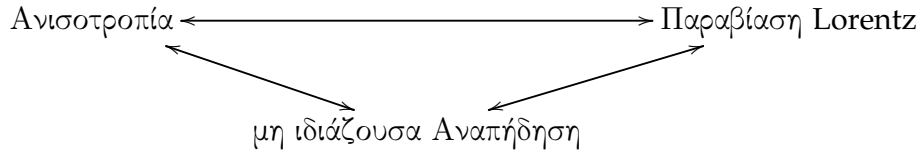
Ένας μηχανισμός υλοποίησης Αναπήδησης, έχει μελετηθεί στα πλαίσια της αποκαλούμενης βαρύτητας **Rastall**, οι λύσεις της οποίας οδηγούν σε κοσμολογικά μοντέλα με ή χωρίς ιδιάζον σημείο. Συγκεκριμένα, έχει προταθεί ένα σενάριο με επίπεδους χωρικούς τομείς και μία σταθερή παράμετρο επιβράδυνσης. Η δημιουργία Αναπήδησης στη συγκεκριμένη θεωρία, οδηγεί στον προσδιορισμό μίας ομοπαράλληλικής καταστατικής εξίσωσης κατά τη διάρκεια του φαινομένου [82].

Στο παρόν Κεφάλαιο, ενδιαφερόμαστε να διερευνήσουμε την υλοποίηση Αναπήδησης στο πλαίσιο τροποποιημένης βαρύτητας η οποία σχετίζεται με Γεωμετρίες **Finsler** και τύπου **Finsler**. Η ανάλυση βασίζεται στο [78]. Συγκεκριμένα, ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε καινούρια χαρακτηριστικά της Γεωμετρίας **Finsler** τα οποία οδηγούν σε λύσεις Αναπήδησης, και να μελετήσουμε την εξέλιξη της εσωτερικής ανισοτροπίας κατά την Αναπήδηση. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι μη ιδιάζουσες Αναπηδήσεις είναι επίσης δυνατές σε μοντέλα τα οποία αυθόρμητα παραβιάζουν την συμμετρία **Lorentz** ([50], [55],[56]). Σε αυτό το πλαίσιο, οι παραβιάσεις της συμμετρίας **Lorentz** οδηγούν σε αλληλεπιδράσεις με τις ανισοτροπίες [57], οπότε μπορούμε να εγκαθιδρύσουμε μία σύνδεση ανάμεσα στα ανισοτροπικά πεδία, την παραβίαση της συμμετρίας **Lorentz**, και τις μη ιδιάζουσες Αναπηδήσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1.

5.2 Συνθήκες Αναπήδησης

Θεωρούμε την συνήθη **FLRW** γεωμετρία, με μετρική

$$[g_{\mu\nu}(x)] = \text{diag} \left(-1, \frac{a^2(t)}{1 - kr^2}, a^2(t)r^2, a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \right), \quad (5.1)$$



Σχήμα 5.1: Σύνδεση ανάμεσα στα ανισοτροπικά πεδία, την παραβίαση της συμμετρίας Lorentz, και τις μη ιδιάζουσες Αναπήδησεις.

όπου $a(t)$ είναι ο παράγοντας κλίμακας και $k = -1, 0, 1$ αντίστοιχα με την περίπτωση ανοικτής, επίπεδης και κλειστής χωρικής γεωμετρίας. Όπως έχουμε αποδείξει, σε αυτή τη γεωμετρία, οι εξισώσεις πεδίου μας οδηγούν στις εξισώσεις Friedmann και Raychaudhuri, τις οποίες γράφουμε σε συμπαγή μορφή ως

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{tot} - \frac{k}{a^2} \quad (5.2)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho_{tot} + P_{tot}) + \frac{k}{a^2} \quad (5.3)$$

όπου G η σταθερά του Νεύτωνα, $H = \dot{a}/a$ η συνάρτηση Hubble, και οι παραγωγίσεις λαμβάνονται ως προς τον κοσμικό χρόνο t . Στις τελευταίες δύο σχέσεις τα ρ_{tot} P_{tot} είναι, αντίστοιχα η ολική πυκνότητα ενέργειας και η πίεση του σύμπαντος, οι οποίες συμπεριλαμβάνουν την ύλη, την ακτινοβολία, την σκοτεινή ενέργεια, και κάθε άλλη βαρυτική ή γεωμετρική συνεισφορά που μπορεί να παρέχει η θεωρία.

Για να αποκτήσουμε μία υλοποίηση Αναπήδησης, χρειαζόμαστε ένα συστελλόμενο σύμπαν, συγκεκριμένα όπου $H < 0$, το οποίο ακολουθείται από ένα διαστελλόμενο σύμπαν, όπου $H > 0$. Λόγω συνέχειας, συνάγουμε ότι στο σημείο Αναπήδησης, θα έχουμε $H = 0$. Επιπλέον, μπορεί να παρατηρηθεί ότι στο σημείο Αναπήδησης και στα γειτονικά του σημεία, ισχύει $\dot{H} > 0$. Από τη μορφή των εξισώσεων (5.2), (5.3) και εστιάζοντας στην περίπτωση ενδιαφέροντος όπου το σύμπαν είναι επίπεδο, συνάγουμε ότι τα προηγούμενα θα ικανοποιούνται εάν

$$\rho_{tot} = 0 \quad (5.4)$$

ακριβώς στο σημείο Αναπήδησης, και αν επιπρόσθετα η μηδενική ενεργειακή συνθήκη παραβιάζεται γύρω από το σημείο Αναπήδησης,

$$\rho_{tot} + P_{tot} < 0 \quad (5.5)$$

Στην περίπτωση μη επίπεδου σύμπαντος, η Αναπήδηση μπορεί να οδηγηθεί από τον όρο καμπυλότητας χωρίς την παραβίαση της μηδενικής ενεργειακής συνθήκης [7]. Επομένως, για να αποκτήσουμε Αναπήδηση, θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε θεωρίες στις οποίες οι επιπλέον συνεισφορές στην ολική πυκνότητα ενέργειας και την πίεση είναι τέτοιες ώστε, η μηδενική ενεργειακή συνθήκη παραβιάζεται περί του σημείου Αναπήδησης, και η απαίτηση της εξίσωσης (5.5) επαληθεύεται. Περαιτέρω, η ολική ενέργεια μηδενίζεται ακριβώς στο σημείο της Αναπήδησης, και η απαίτησης της εξίσωσης (5.4) επαληθεύεται. Όπως θα δειχθεί στην συνέχεια, τα σενάρια τα οποία βασίζονται στην βαρύτητα Finsler, ικανοποιούν αυτές τις αναγκαίες συνθήκες.

5.3 Βαρύτητα *Finsler*

Θα παρουσιάσουμε τα κύρια σημεία της βαρύτητας *Finsler*. Οι βασικές έννοιες της Γεωμετρίας *Finsler* έχουν μελετηθεί διεξοδικά στο Κεφάλαιο 2.

Η μελέτη κοσμολογικών μοντέλων σε χωροχρόνους *Finsler* επιχειρείται στα πλαίσια μίας προσπάθειας γεωμετρικής ερμηνείας των ιδιοτήτων του Σύμπαντος. Συγκεκριμένα, η ελάχιστη επέκταση του κλασσικού ψευδο-Ρήμαν χωρόχρονου της Γενικής Σχετικότητας, επιτυγχάνεται με την υιοθέτηση ενός χωρόχρονου *Berwald*, με την βοήθεια του οποίου είναι δυνατή η κοσμολογική μελέτη ενός χωρικά ομογενούς και ισοτροπικού σύμπαντος, καθώς και η ερμηνεία της σκοτεινής ύλης και της σκοτεινής ενέργειας [85]. Όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 2, η συνοχή *Berwald*, δεν αποτελεί την καταλληλότερη επιλογή για τη μελέτη της βαρύτητας, εξαιτίας του μη μετρικού χαρακτήρα της. Αντίθετα, η συνοχή *Cartan* είναι προτιμότερη, καθώς ικανοποιεί την συνθήκη της μετρικής συμβατότητας.

Η γεωμετρία *Finsler* μπορεί να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο σε μία προσπάθεια συνδιασμού της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου με την Κλασική Βαρύτητα στα πλαίσια μίας γεωμετρικοποίησης της Κβαντικής Μηχανικής. Συγκεκριμένα, έχει προταθεί μία Δυναμική Κβαντική Βαρυτική Θεωρία, στην οποία πέραν της καμπυλότητας που οφείλεται στον ταυνοστή ενέργειας ορμής, υπάρχει μία επιπρόσθετη καμπυλότητα η οποία παράγεται από τα κβαντικά πεδία σε έναν χωρόχρονο *Finsler*, διαμέσω της δράσης του κβαντικού δυναμικού. Εξαιτίας αυτού η χρονική εξέλιξη των σημειακών σωματιδίων περιγράφεται από τις γεωδαισιακές καμπύλες του εκτεταμένου χωρόχρονου [88].

Η βαρύτητα *Finsler* είναι μία γεωμετρική επέκταση της γενικής σχετικότητας, όπου στο ρόλο της μετρικής έχουμε μία πραγματική θεμελιώδη συνάρτηση $F(x, y)$, οριζόμενη επί της εφαπτόμενης δέσμης TM επί λείας χωροχρονικής πολλαπλότητας M . Η μεταβλητή y είναι στοιχείο του εφαπτόμενου χώρου του M σε ένα σημείο x , όπου χάριν απλότητας παραλείπουμε τους δείκτες. Η απόσταση δύο γειτονικών σημείων επί της M ορίζεται ως $ds = F(x, dx)$. Απαιτούμε ότι η F έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Η F είναι συνεχής επί του TM και λεία επί του $\widetilde{TM} \equiv TM \setminus \{0\}$, δηλαδή στον εφαπτόμενο χώρο εκτός της μηδενικής τομής.

(2) Η F είναι θετικά ομογενής βαθμού 1 ως προς το δεύτερο όρισμά της

$$F(x, ky) = kF(x, y), \quad k > 0. \quad (5.6)$$

(3) Η μορφή

$$f_{\mu\nu}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \quad (5.7)$$

ορίζει έναν μη εκφυλισμένο πίνακα επί του TM εκτός του μηδενικού συνόλου $\{(x, y) \in TM | F(x, y) = 0\}$,

$$\det [f_{\mu\nu}] \neq 0. \quad (5.8)$$

Από την συνθήκη ομογένειας (5.6), θα είναι

$$F^2(x, y) = |f_{\mu\nu}(x, y)y^\mu y^\nu| \quad (5.9)$$

συνεπώς η $f_{\mu\nu}(x, y)$ έχει το ρόλο της μετρικής για τον διανυσματικό χώρο που παράγεται από το y . Κατά την μελέτη της βαρύτητας, θεωρείται ότι η μετρική $f_{\mu\nu}(x, y)$ έχει υπογραφή Lorentzian $(-, +, +, +)$.

5.4 Αναπήδηση στην GVSR

Εν γένει, οι αποκλίσεις από τη Θεωρία της Σχετικότητας προκύπτουν από την παραβίαση της συμμετρίας Lorentz. Η μελέτη της παραβίασης της συμμετρίας Lorentz παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη Σύγχρονη Φυσική και προσφέρει προοπτικές στην ανάπτυξη νέων θεωριών και θεμελίωση των υπάρχουσών. Η κλασσική περιγραφή των βαρυτικών φαινομένων στο πλαίσιο της Γεωμετρίας Riemann δεν επιτρέπει την παραβίαση της συμμετρίας Lorentz. Επιπλέον, μέσω της παραβίασης της συμμετρίας Lorentz είναι δυνατή η τροποποίηση των σχέσεων διασποράς της Φυσικής Στοιχειωδών Σωματιδίων με τέτοιο τρόπο ώστε να εξαρτώνται τόσο από τις συντεταγμένες θέσης όσο και από τις ορμές. Η εξάρτηση αυτή επάγει μία αντίστοιχη εξάρτηση της γεωμετρίας του χωροχρόνου από τη διεύθυνση με συνέπεια την εμφάνιση τοπικής ανισοτροπίας [75]. Μία κατάλληλη επιλογή χωροχρονικής γεωμετρίας που ενσωματώνει με εγγενή τρόπο την τοπική ανισοτροπία στη μετρική αποτελεί η Γεωμετρία Finsler.

Ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον Κοσμολογικό μοντέλο Finsler το οποίο παρουσιάζει ρητή παραβίαση της συμμετρίας Lorentz αναπτύσσεται στο πλαίσιο της GVSR [57]. Η μετρική συνάρτηση έχει τη μορφή

$$F(x, y) = (a_{\mu\nu}(x)y^\mu y^\nu)^{(1-b)/2} (n_\kappa y^\kappa)^b \quad (5.10)$$

όπου $a_{\mu\nu}(x)$ είναι η συνήθης FLRW μετρική (5.1). Η θεώρηση αυτής της μετρικής συνάρτησης ενσωματώνει δύο είδη γεωμετριών: Η δυναμική περιγράφεται από τη μετρική Finsler ενώ οι πληροφορίες για τη βαρύτητα κωδικοποιούνται στη μετρική FLRW $g_{\mu\nu}(q)$. Η τελευταία σχέση αποτελεί μία ευθεία κοσμολογική γενίκευση της περιγραφής GVSR, όπου το γραμμικό στοιχείο έχει τη μορφή

$$ds = (\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)^{(1-b)/2} (n_\kappa dx^\kappa)^b \quad (5.11)$$

με $[\eta_{\mu\nu}] = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, το οποίο είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς που παράγονται από την διάσπαση $DISIM_b(2)$ της υποομάδας Lorentz $ISIM(2)$ ([58],[59]). Η 1-μορφή n_κ παριστά ένα αρχέγονο υποθετικό πεδίο. Η εξάρτηση της μετρικής συνάρτησης από το πεδίο n_κ είναι ενδεικτικό του ανισοτροπικού χαρακτήρα της γεωμετρίας του χωροχρόνου. Σημειώνουμε ότι η παράμετρος b ποσοτικοποιεί την απόκλιση από την γεωμετρία Riemann, δηλαδή την παραβίαση Lorentz στον τομέα της βαρύτητας. Από την παραμετροποιημένη μετά-Νευτώνεια ανάλυση [60], και από την χρήση δεδομένων από το

ηλιακό σύστημα, μας παρέχουν τους πλέον αυστηρούς περιορισμούς στην τιμή του b . Δεδομένα από το Gravity Probe B θέτουν το άνω φράγμα $b \leq 10^{-7}$ [61].

Ακολουθούμε την εγγυτατοποιημένη Ριμάνεια προσέγγιση με

$$g_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu}(x, y(x)) \quad (5.12)$$

όπου το $y(x)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στις γραμμές ροής του κοσμολογικού ρευστού (ρευστού ύλης). Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το ρευστό ύλης περιγράφεται από τον ταυστή ενέργειας-ορμής ενός ιδανικού ρευστού

$$T_{\mu\nu} = P_m g_{\mu\nu} + (\rho_m + P_m) y_\mu y_\nu \quad (5.13)$$

όπου ρ_m είναι η πυκνότητα ενέργειας και P_m η πίεση. Οι εξισώσεις πεδίου γι' αυτήν την κατασκευή δίνονται από

$$L_{\mu\nu} - \frac{1}{2} L g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (5.14)$$

$L_{\mu\nu}$ είναι ο ταυστής Ricci της μετρικής $g_{\mu\nu}(x)$ και $L = g^{\mu\nu} L_{\mu\nu}$.

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη κατασκευή σε κοσμολογικό πλαίσιο, θεωρούμε πως το n_κ είναι παράλληλο στις γραμμές ροής του κοσμολογικού ρευστού, και επομένως παράλληλο στην ταχύτητα του συγκινούμενου παρατηρητή, δηλαδή

$$n^\kappa = \lambda y^\kappa \quad (5.15)$$

Συνεπώς, το αρχέγονο διανυσματικό πεδίο n^κ θα γίνεται ο χρονοειδής χαρακτήρας του σύμπαντος σε ύστερη χρονική περίοδο όπου $n^\kappa \ll 1$:

$$n^\kappa = (n(t), 0, 0, 0) \quad (5.16)$$

όπου η χρονική συνιστώσα $n(t)$ είναι αρκούντως μικρή. Ακολουθώντας το [57], αναπτύσσουμε το αρχέγονο διανυσματικό πεδίο n^κ κατά Taylor ως προς τη χρονική στιγμή t_0 , και σε πρώτη τάξη θα είναι

$$n(t) \approx n(t_0) + \dot{n}(t_0)(t - t_0) = At + B \quad (5.17)$$

όπου ορίζουμε

$$A = \dot{n}(t_0), \quad B = n(t_0) - t_0 \dot{n}(t_0) \quad (5.18)$$

Επίπλεον θεωρούμε $A \rightarrow 0, B \rightarrow 0$, και θα ισχύει η προσέγγιση

$$n(t) \approx At + B \quad (5.19)$$

εφ' όσον το $n(t)$, παραμετροποιημένο από τα A, B , απαιτείται να είναι αρκούντως μικρό ώστε να είναι συνεπές με το παρατηρούμενο μικρό φράγμα επί του b .

Αναπτύσσουμε κατά Taylor τις συνιστώσεις της εγγυτατοποιημένης μετρικής (5.12) περί το $b = 0$ και σε πρώτη τάξη θα έχουμε

$$g_{00} = 1 + 2 \ln(At + B)b + O(b^2) \quad (5.20)$$

$$g_{ij} = a_{ij} + a_{ij} [2 \ln(At + B) - 1] b + O(b^2) \quad (5.21)$$

Η συνοχή θα γράφεται ως

$$A_{\mu\nu}^{\rho} = g^{\rho\sigma} \frac{1}{2} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (5.22)$$

και η καμπυλότητα

$$L_{\nu\alpha\beta}^{\mu} = A_{\nu\beta,\alpha}^{\mu} - A_{\nu\alpha,\beta}^{\mu} + A_{\sigma\alpha}^{\mu} A_{\nu\beta}^{\sigma} - A_{\sigma\beta}^{\mu} A_{\nu\alpha}^{\sigma} \quad (5.23)$$

Τα σύμβολα Christoffel λαμβάνουν τη μορφή

$$A_{00}^0 = \frac{Ab}{B} + O(A^2) \quad (5.24)$$

$$(5.25)$$

$$A_{01}^1 = A_{02}^2 = A_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{Ab}{B} + O(A^2) \quad (5.26)$$

$$(5.27)$$

$$A_{ij}^0 = -(1-b) \frac{\dot{a}}{a} a_{ij} - \frac{Ab}{B} a_{ij} + O(A^2) \quad (5.28)$$

$$A_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2} \quad (5.29)$$

$$(5.30)$$

$$A_{22}^1 = -r(1-kr^2) \quad (5.31)$$

$$(5.32)$$

$$A_{33}^1 = -r \sin^2 \theta (1-kr^2) \quad (5.33)$$

$$(5.34)$$

$$A_{12}^2 = A_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad (5.35)$$

$$(5.36)$$

$$A_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad (5.37)$$

$$(5.38)$$

$$A_{23}^3 = \cot \theta \quad (5.39)$$

Γι' αυτές τις επιλογές, οι συνιστώσες του τανυστή Ricci για τη μετρική συνάρτηση (5.10) λαμβάνουν τη μορφή [57]

$$\begin{aligned} L_{00} &= 3 \frac{\ddot{a}}{a} + 3 \frac{Ab}{B} \frac{\dot{a}}{a} + O(A^2) \\ L_{11} &= -\frac{a\dot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2} + \frac{5A}{B} b \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} + O(A^2) \\ L_{22} &= -r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) - \frac{5A}{B} br^2 a\ddot{a} + O(A^2) \\ L_{33} &= -r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta - \frac{5A}{B} br^2 a\ddot{a} \sin^2 \theta \\ &\quad + O(A^2) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Παρατητούμε πως οι επιπρόσθετοι όροι που εμφανίζονται στα σύμβολα **Christoffel** και στις συνιστώσες του ταυυστή **Ricci** είναι οι κυρίαρχοι εφ' όσον πολλαπλασιάζονται με τον παράγοντα Ab/B . Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα, λαμβάνουμε τις ακόλουθες γενικεύσεις των εξισώσεων **Friedmann**

$$H^2 + \frac{k}{a^2} + 2\frac{A}{B}bH = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_m - 2\frac{A}{B}bP_m \left(t + \frac{B}{A} \ln B \right) \right] \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \dot{H} + H^2 + \frac{Ab}{B}H = & -\frac{4\pi G}{3} [(\rho_m + 3P_m) \\ & + 4 \ln(At + B)b(\rho_m + P_m)] \end{aligned} \quad (5.42)$$

Δυστυχώς, όπως μπορεί να παρατηρηθεί, οι παραπάνω εξισώσεις **Friedmann** δεν επιδέχονται λύση Αναπήδησης. Μπορούμε να αποπειραθούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο με διαφορετική προσέγγιση απ' ότι η εξίσωση (16) του [57], αλλά μία λεπτομερής διερεύνηση μίας νέας κατασκευής βρίσκεται πέραν από τους σκοπούς της παρούσας Διατριβής. Στο επόμενο εδάφιο θα εξετάσουμε την περίπτωση μίας άλλης κατασκευής **Finsler**, όπου η υλοποίηση Αναπήδησης είναι εφικτή.

5.5 Αναπήδηση σε χώρο *Finsler – Randers*

Θεωρούμε στην συνέχεια μία διαφορετική κατασκευή **Finsler**, συγκεκριμένα τον χώρο **Finsler-Randers** [62, 63]. Οι λεπτομέρειες του μοντέλου έχουν αναλυθεί εκτενώς στην Παράγραφο 4.1. Στον χώρο αυτό, η μετρική συνάρτηση δίνεται από

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + u_\mu y^\mu, \quad \|u_\mu\| \ll 1 \quad (5.43)$$

$\alpha(x, y) = \sqrt{g_{\kappa\lambda}(x)y^\kappa y^\lambda}$, και $g_{\kappa\lambda}(x)$ είναι η μετρική **FLRW** (5.1) με $\kappa, \lambda, \mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Σε αυτό το κοσμολογικό μοντέλο, ένας σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η μεταβολή της ανισοτροπίας Z_t . Στην περίπτωση της Γεωμετρίας **FLRW**, οι τροποποιημένες εξισώσεις **Friedmann** της γενικευμένης μορφής τύπου **FR** κοσμολογίας μελετήθηκαν στο [63], και γράφονται ως

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m - HZ_t - \frac{k}{a^2} \quad (5.44)$$

$$\dot{H} = -4\pi G (\rho_m + P_m) + \frac{1}{4}HZ_t + \frac{k}{a^2} \quad (5.45)$$

Σε αυτές τις εκφράσεις, ορίσαμε την μεταβολή της ανισοτροπίας ως Z_t ως $Z_t = \dot{u}_0$, την παραγώγο της χρονικής συνιστώσας του μοναδιαίου διανύσματος \hat{u}_a [63]. Αυτή η μεταβολή επηρεάζει το είδος της Γεωμετρίας, όπως είναι φανερό από τις τελευταίες δύο εξισώσεις, και στο όριο $Z_t \rightarrow 0$ ανακτούμε τις συνήθεις εξισώσεις **Friedmann** της Γενικής Σχετικότητας. Τελικά, θεωρήσαμε τον τομέα της ύλης να αντιστοιχεί σε ένα ιδανικό ρευστό με πυκνότητα ενέργειας και πίεση ρ_m και P_m , αντίστοιχα.

Παρατηρώντας τη μορφή των τελευταίων δύο εξισώσεων, μπορούμε να ορίσουμε την ενεργό πυκνότητα ενέργειας και την γεωμετρικής προέλευσης πίεση ως

$$\rho_{FR} \equiv -\frac{3}{8\pi G} H Z_t \quad (5.46)$$

$$P_{FR} \equiv \frac{5}{16\pi G} H Z_t \quad (5.47)$$

Συνεπώς, η ολική πυκνότητα ενέργειας και πίεση, αντίστοιχα, γίνονται $\rho_{tot} = \rho_m + \rho_{FR}$ και $P_{tot} = P_m + P_{FR}$, και οι εξισώσεις **Friedmann** λαμβάνουν τη συνήθη μορφή (5.2) και (5.3). Μπορούμε τώρα να εξετάσουμε ποιές συνθήκες συνάδουν ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες Αναπήδησης των σχέσεων (5.4) και (5.5). Αρχικά, από την σχέση (5.4) συνάγουμε ότι για ένα επίπεδο σύμπαν ακριβώς στο σημείο Αναπήδησης το ρ_m πρέπει να είναι μηδέν, όπως και το ρ_{FR} γίνεται μηδέν ακριβώς στο σημείο Αναπήδησης εφόσον $H = 0$. Αυτή είναι η συνήθης υπόθεση σε πλήθος μοντέλων Αναπήδησης, και αναμένεται να ισχύει στο πρώιμο σύμπαν. Λαμβάνοντας αυτό υπόψιν, επιπλέον παρατηρούμε ότι η συνθήκη της σχέσης 5.5) συνεπάγεται ότι γύρω από το σημείο Αναπήδησης $\rho_{FR} + P_{FR} < 0$, και συνεπώς $H Z_t > 0$. Από τα προηγούμενα παρατηρούμε ότι συνθήκες Αναπήδησης μπορούν να ικανοποιηθούν εάν επιλέξουμε κατάλληλα την μεταβολή της ανισοτροπίας Z_t .

Για να δώσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. εστιάζουμε σε επίπεδη ($k = 0$) FLRW, και θεωρούμε πως ο παράγοντας κλίμακας Αναπήδησης έχει τη μορφή

$$a(t) = a_b(1 + Bt^2)^{1/3} \quad (5.48)$$

όπου a_b είναι η τιμή του παράγοντα κλίμακας στην Αναπήδηση, και B είναι μία θετική παράμετρος η οποία καθορίζει πόσο γρήγορα συμβαίνει η Αναπήδηση. Σε αυτή την περίπτωση, ο χρόνος κυμαίνεται από το $-\infty$ στο $+\infty$, με $t = 0$ στο σημείο Αναπήδησης και όπου, μακριά από την Αναπήδηση, λαμβάνουμε την συνήθη συμπεριφορά Διαστολής. Επίσης θεωρούμε ότι ο τομέας της ύλης είναι απών στο πρώιμο Σύμπαν. Εισάγοντας τα προηγούμενα στην σχέση (5.44), αποκτούμε ότι

$$Z_t = -\frac{2Bt}{3(1 + Bt^2)} \quad (5.49)$$

Συνεπώς αυτή η επιλογή του Z_t , η οποία προέρχεται από την **Finsler** τροποποίηση της γεωμετρίας, δημιουργεί τον παράγοντα κλίμακας Αναπήδησης της σχέσης (5.48). Επιπλέον σημειώνουμε ότι η μεταβολή της ανισοτροπίας Z_t στην πραγματικότητα καθορίζεται από φυσικής άποψης την σημαντική ποσότητα B της σχέσης (5.48).

5.6 Βαρύτητα τύπου *Finsler* στην Εφαπτόμενη Δέσμη

Σε αυτό το εδάφιο εξετάζουμε εάν μπορεί να υλοποιηθεί Αναπήδηση από βαρύτητα τύπου **Finsler** στην εφαπτόμενη δέσμη. Γενικά, θεωρούμε τον όρο τύπου **Finsler** για κάθε μετρική θεωρία στην οποία οι διάφορες δομές μπορούν να εξαρτώνται από ένα σύνολο

εσωτερικών μεταβλητών (y, ϕ , κ.λ.π.) εκτός από τη θέση, ή εξωτερικών μεταβλητών, τις οποίες δηλώνουμε ως x^μ . Στη θεωρία βαρύτητας *Finsler*, η ανισοτροπική κατανομή και οι κινήσεις των σωματιδίων, δημιουργούν διακυμάνσεις της μάζας οι οποίες με τη σειρά τους επάγουν συγκεκριμένα πεδία ταχυτήτων. Επιπλέον, ο ρυθμός χρονομέτρησης των ρολογιών, ο οποίος είναι ουσιώδης για τους υπολογισμούς μεγέθους της μετατόπισης προς το ερυθρό, καθορίζεται από την μετρική γεωμετρία υποβάθρου του χωροχρόνου [49]. Οι επεκτάσεις τύπου *Finsler* της Γενικής Σχετικότητας επί της εφαπτόμενης δέσμης παρουσιάζονται στα [65, 64, 66, 92, 68], και σενάρια Κοσμολογικής Αναπήδησης μελετώνται στα [49, 69, 70].

Στα επόμενα, εστιάζουμε στην εφαπτομένη δέσμη TM μίας πολλαπλότητας M . Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1, η εφαπτόμενη δέσμη προσφέρει μία πληρέστερη φυσική περιγραφή σε σχέση με την πολλαπλότητα βάσης, καθώς ενσωματώνει διπλάσιο αριθμό βαθμών ελευθερίας του υπό μελέτη συστήματος. Με τον τρόπο αυτό, προκύπτει μία πλουσιότερη δομή, όπου τα γεωμετρικά αντικείμενα εξαρτώνται όχι μόνο από τη θέση x επί της πολλαπλότητας M , αλλά και από τη θέση y επί του εφαπτόμενου χώρου T_xM .

Η μελέτη της Βαρύτητας στην εφαπτομένη δέσμη *Lorentz* έχει ιδιαίτερη σημασία στην ανάπτυξη Κοσμολογικών μοντέλων. Συγκεκριμένα, η επέκταση της ανάλυσης των βαρυτικών φαινομένων στην 8-διάστατη εφαπτομένη δέσμη *Lorentz* της χωροχρονικής πολλαπλότητας παρέχει μία πλουσιότερη δομή, εξαιτίας των επιπλέον βαθμών ελευθερίας. Η τύπου *Finsler* χωροχρονική δομή της εφαπτόμενης δέσμης παρέχει διορθωμένες συνεισφορές οι οποίες είναι κατάλληλες για την ερμηνεία διάφορων κοσμολογικών φαινομένων (περιήλιο του Ερμή, βαρυτικοί φακοί, μετατόπιση προς το ερυθρό κ.α.), των οποίων η εξήγηση στο πλαίσιο της Γενικής Σχετικότητας είναι αδύνατη [86].

5.6.1 Γεωμετρία της Εφαπτόμενης Δέσμης

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να παρουσιάσουμε επιγραμματικά τις βασικές έννοιες της γεωμετρίας της εφαπτόμενης δέσμης [71]: Έστω M μία τετραδιάστατη χωροχρονική πολλαπλότητα και TM η εφαπτόμενη δέσμη (58). Το τοπικό σύστημα συντεταγμένων επί της TM συμβολίζεται ως $\{x^\mu, y^a\}$, όπου x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ είναι οι εξωτερικές μεταβλητές (συντεταγμένες στην πολλαπλότητα βάσης) και y^a , $a = 0, 1, 2, 3$ οι εσωτερικές μεταβλητές (νηματικές συντεταγμένες). Ένας τοπικός μετασχηματισμός συντεταγμένων έχει τη μορφή

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^0, \dots, x^3), \quad y^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} y^a \quad (5.50)$$

με $x^a = \delta_\mu^a x^\mu$. Ο μετασχηματισμός θα είναι αντιστρέψιμος αν η ορίζουσα του πίνακα $\left[\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right]$ είναι μη μηδενική.

Επί της TM μπορεί να οριστεί μία μη γραμμική συνοχή N με συντελεστές $N_\mu^a(x, y)$. Εκτελώντας τον τοπικό μετασχηματισμό (5.50), οι συντελεστές της συνοχής στο νέο

σύστημα συντεταγμένων θα δίνονται από τις σχέσεις

$$N_{\mu'}^{a'}(x, y) = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} N_\mu^a(x, y) + \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^{b'} \partial x^{\mu'}} y^{b'} \quad (5.51)$$

Σε κάθε σημείο $(x, y) \in TM$, ορίζουμε την προσαρμοσμένη βάση $\{\delta_\mu, \dot{\partial}_a\}$ του $T_{(x,y)}TM$, η οποία ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\delta_\mu = \frac{\delta}{\delta x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - N_\mu^a \frac{\partial}{\partial y^a}, \quad \dot{\partial}_a = \frac{\partial}{\partial y^a} \quad (5.52)$$

Εκτελώντας τον μετασχηματισμό 5.50, η προσαρμοσμένη βάση θα μετασχηματίζεται κατ' αναλογία με τη φυσική βάση επί της πολλαπλότητας. Συγκεκριμένα θα έχουμε

$$\delta_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \delta_\mu, \quad \dot{\partial}_{a'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} \dot{\partial}_a \quad (5.53)$$

Καλούμε τον υπόχωρο του $T_{(x,y)}TM$ που παράγεται από τα $\{\delta_\mu\}$ οριζόντιο υπόχωρο HTM , και εκείνον που παράγεται από τα $\{\dot{\partial}_a\}$, κατακόρυφο υπόχωρο VTM . Συνεπώς ο εφαπτόμενος χώρος του TM σε κάθε σημείο (x, y) , είναι το άθροισμα Whitney του HTM και του VTM

$$TTM = HTM \oplus VTM. \quad (5.54)$$

Η δυϊκή προσαρμοσμένη βάση $\{dx^\mu, \delta y^a\}$ της προσαρμοσμένης βάσης $\{\delta_\mu, \dot{\partial}_a\}$ ορίζεται από την σχέση

$$\delta y^a = dy^a + N_\nu^a dx^\nu \quad (5.55)$$

Υπό τον μετασχηματισμό (5.50), η δυϊκή προσαρμοσμένη βάση θα μετασχηματίζεται ως

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad \delta y^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \delta y^a \quad (5.56)$$

Ο μεταθέτης (1.57) της προσαρμοσμένης βάσης $E_A = \{\delta_\mu, \dot{\partial}_a\}$ θα έχει τη μορφή

$$[E_A, E_B] = \mathcal{W}_{AB}^C E_C \quad (5.57)$$

και αν $\mathcal{W}_{AB}^C = 0$, η βάση θα ονομάζεται ολονομική. Σε αντίθετη περίπτωση η βάση θα λέγεται μη ολονομική.

Κάνοντας χρήση της προσαρμοσμένης βάσης, μπορούμε να γενικεύσουμε τις ιδιότητες των τανυστών, και τις μεταξύ τους πράξεις, με τρόπο ανάλογο με εκείνον της φυσικής βάσης επί της πολλαπλότητας. Συγκεκριμένα, μπορούμε να εφοδιάσουμε την εφαπτόμενη δέσμη TM με μία διακεκριμένη μετρική (2) \mathcal{G} , της μορφής τύπου Finsler-Sasaki

$$\mathcal{G} = g_{\mu\nu}(x, y) dx^\mu \otimes dx^\nu + v_{ab}(x, y) \delta y^a \otimes \delta y^b \quad (5.58)$$

όπου $\kappa, \lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $\alpha, \beta, \theta \dots = 0, 1, 2, 3$, $g_{\mu\nu}$ η οριζόντια και v_{ab} η κατακόρυφη μετρική, οι οποίες λαμβάνονται με υπογραφή Lorentz $(-, +, +, +)$. Στην περίπτωση αυτή

η TM ονομάζεται εφαπτόμενη δέσμη Lorentz. Κατά αντιστοιχία με την πολλαπλότητα βάσης M , ο ιδιόχρονος υπολογίζεται μέσω των συντελεστών της οριζόντιας μετρικής $g_{\mu\nu}$ από την σχέση

$$d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x, dx) dx^\mu dx^\nu} \quad (5.59)$$

Εισάγουμε την διακεκριμένη d -συνοχή \mathcal{D} ως μία συναλλοίωτη γραμμική διαφορίση η οποία διατηρεί τους υποχώρους HTM και VTM

$$\mathcal{D}_{\delta_\kappa} \delta_\nu = L_{\nu\kappa}^\mu(x, y) \delta_\mu \quad \mathcal{D}_{\dot{\gamma}} \delta_\nu = C_{\nu\gamma}^\mu(x, y) \delta_\mu \quad (5.60)$$

$$\mathcal{D}_{\delta_\kappa} \dot{\partial}_\beta = L_{\beta\kappa}^\alpha(x, y) \dot{\partial}_\alpha \quad \mathcal{D}_{\dot{\gamma}} \dot{\partial}_\beta = C_{\beta\gamma}^\alpha(x, y) \dot{\partial}_\alpha \quad (5.61)$$

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε την οριζόντια και την κατακόρυφη μερική συναλλοίωτη διαφορίση αντίστοιχα, ως εξής

$$X_{|v}^A \equiv \overset{(h)}{D}_v X^A \equiv \delta_\nu X^A + L_{B\nu}^A X^B \quad (5.62)$$

$$X_{|b}^A \equiv \overset{(v)}{D}_b X^A \equiv \dot{\partial}_b X^A + C_{Bb}^A X^B \quad (5.63)$$

Η καμπυλότητα της μη γραμμικής συνοχής ορίζεται ως

$$\Omega_{\nu\kappa}^a = \frac{\delta N_\nu^a}{\delta x^\kappa} - \frac{\delta N_\kappa^a}{\delta x^\nu} \quad (5.64)$$

Ορίζουμε επίσης τον τανυστή στρέψης της διακεκριμένης συνοχής, με συνιστώσες

$$\mathcal{T}_{\nu\kappa}^\mu = L_{\nu\kappa}^\mu - L_{\kappa\nu}^\mu, \quad \mathcal{T}_{\nu\kappa}^a = \Omega_{\nu\kappa}^a, \quad \mathcal{T}_{bc}^a = C_{bc}^a - C_{cb}^a \quad (5.65)$$

Ο τανυστής καμπυλότητας της διακεκριμένης συνοχής στον HTM ως προς την προσαρμοσμένη βάση θα έχει συνιστώσες

$$\bar{R}_{\nu\kappa\lambda}^\mu = \delta_\lambda L_{\nu\kappa}^\mu - \delta_\kappa L_{\nu\lambda}^\mu + L_{\nu\kappa}^\eta L_{\eta\lambda}^\mu - L_{\nu\lambda}^\eta L_{\eta\kappa}^\mu + C_{\nu a}^\mu \Omega_{\kappa\lambda}^a \quad (5.66)$$

Ο αντιστοιχος τανυστής Ricci θα είναι

$$\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^k = \delta_\kappa L_{\mu\nu}^\kappa - \delta_\nu L_{\mu\kappa}^\kappa + L_{\mu\nu}^m L_{m\kappa}^\kappa - L_{\mu\kappa}^m L_{m\nu}^\kappa + C_{\mu a}^\kappa \Omega_{\nu\kappa}^a \quad (5.67)$$

Ο τανυστής καμπυλότητας της διακεκριμένης συνοχής στον VTM ως προς την προσαρμοσμένη βάση θα έχει συνιστώσες

$$S_{bcd}^a = \dot{\partial}_d C_{bc}^a - \dot{\partial}_c C_{bd}^a + C_{bc}^f C_{fd}^a - C_{bd}^f C_{fc}^a \quad (5.68)$$

Ο αντιστοιχος τανυστής Ricci θα είναι

$$S_{ab} = S_{abc}^c = \dot{\partial}_c C_{ab}^c - \dot{\partial}_b C_{ac}^c + C_{ab}^e C_{ec}^c - C_{ac}^e C_{eb}^c \quad (5.69)$$

Από τις σχέσεις (5.67), (5.69) η γενικευμένη βαθμωτή καμπυλότητα Ricci ως προς την προσαρμοσμένη βάση, γράφεται

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} + v^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \equiv \bar{R} + S \quad (5.70)$$

Μία κανονική d -συναγωγή είναι μία γραμμική συναγωγή η οποία είναι συμβατή με την μετρική της σχέσης (5.58), και η οποία διατηρεί, υπό παραλλήλη μετατόπιση, τους HTM και VTM [64]

$$\overset{(h)}{\mathcal{D}}_{\kappa} g_{\mu\nu} = 0, \quad \overset{(h)}{\mathcal{D}}_{\kappa} h_{ab} = 0 \quad (5.71)$$

$$\overset{(v)}{\mathcal{D}}_c g_{\mu\nu} = 0, \quad \overset{(v)}{\mathcal{D}}_c h_{ab} = 0 \quad (5.72)$$

Η κανονική d -συναγωγή μπορεί να οριστεί μοναδικά εάν απαιτηθεί ισχύουν τα ακόλουθες συνθήκες:

(1) Οι συντελεστές $L_{\nu\kappa}^{\mu}, L_{b\kappa}^a, C_{\nu c}^{\mu}, C_{bc}^a$ της μετρικής εξαρτώνται μόνο από $g_{\mu\nu}, v_{\alpha\beta}$ και N_{μ}^{α} .

(2) Οι συντελεστές της συναγωγής $L_{\nu\kappa}^{\mu}$ και $C_{\beta\gamma}^{\alpha}$ είναι συμμετρικοί στους κάτω δείκτες.

Σε αυτή την περίπτωση, οι συντελεστές της κανονικής d -συναγωγής θα είναι [71]:

$$L_{\nu\kappa}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\delta_{\kappa} g_{\rho\nu} + \delta_{\nu} g_{\rho\kappa} - \delta_{\rho} g_{\nu\kappa}) \quad (5.73)$$

$$L_{\beta\kappa}^{\alpha} = \dot{\partial}_{\beta} N_{\kappa}^{\alpha} + \frac{1}{2} v^{\alpha\gamma} (\delta_{\kappa} v_{\beta\gamma} - v_{\delta\gamma} \dot{\partial}_{\beta} N_{\kappa}^{\delta} - v_{\beta\delta} \dot{\partial}_{\gamma} N_{\kappa}^{\delta}) \quad (5.74)$$

$$C_{\nu\gamma}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \dot{\partial}_{\gamma} g_{\rho\nu} \quad (5.75)$$

$$C_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} v^{\alpha\delta} (\dot{\partial}_{\gamma} v_{\delta\beta} + \dot{\partial}_{\beta} v_{\delta\gamma} - \dot{\partial}_{\delta} v_{\beta\gamma}). \quad (5.76)$$

Επί του TM , μία γεωδαισιακή καμπύλη ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dy^a}{d\tau} + 2G^a(x, y) = 0, \quad y^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \quad (5.77)$$

όπου

$$G^a(x, y) \equiv \frac{1}{4} \tilde{g}^{ab} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial y^b \partial x^c} y^c - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x^b} \right) \quad (5.78)$$

$$\mathcal{K} \equiv g_{ab}(x, y) y^a y^b \quad (5.79)$$

$$y^{\mu} \equiv \delta_a^{\mu} y^a \quad (5.80)$$

$$g_{ab} \equiv \delta_a^{\mu} \delta_b^{\nu} g_{\mu\nu} \quad (5.81)$$

$$\tilde{g}_{ab} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial y^b \partial y^a} \quad (5.82)$$

Θέτοντας $y^a(x) = \delta_\mu^a u^\mu(x)$, όπου $u^\mu(x) = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ η τετραταχύτητα και τ ο ιδιόχρονος (5.59), η εξίσωση γεωδαισιακών (5.77) γράφεται

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + 2G^\mu(x, u) = 0 \quad (5.83)$$

Το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στις γεωδαισιακές έχει τη μορφή [64]

$$Y(x, u) \equiv u^\mu \partial_\mu - 2G^a(x, u) \dot{\partial}_a \quad (5.84)$$

το οποίο εκφράζεται στην προσαρμοσμένη βάση $\{\delta_\mu, \dot{\partial}_a\}$ ως

$$Y(x, u) = u^\mu \delta_\mu + (u^\lambda N_\lambda^a(x, u) - 2G^a(x, u)) \dot{\partial}_a \quad (5.85)$$

Έστω $\xi^\mu = dx^\mu/d\lambda$ η προβολή επί του *HTM* ενός εφαπτόμενου διανύσματος επί της *TM*. Θα αποκαλούμε το ξ^μ χρονοειδές, μηδενικό ή χωροειδές αν η ποσότητα $g_{\mu\nu}(x, \xi) \xi^\mu \xi^\nu$ είναι αρνητική, μηδέν ή θετική, αντίστοιχα. Μία καμπύλη $x^A(\lambda)$ με εφαπτόμενο διάνυσμα ξ^μ για $\lambda = \lambda_0$, θα λέγεται χρονοειδής, μηδενική ή χωροειδής αντίστοιχα αν το ξ^μ έχει αυτή την ιδιότητα. Στην περίπτωση χρονοειδών καμπυλών, είναι δυνατός ο ορισμός του ιδιόχρονου. Οι αντίστοιχες γεωδαισιακές αναπαριστούν τις φυσικές τροχιές έμμαζων σωματιδίων στον χωρόχρονο. Κατ' αναλογία, οι τροχιές άμαζων σωματιδίων αναπαρίστανται από μηδενικές γεωδαισιακές.

Για έναν (0,2) τανυστή T επί του *HTM*, το συμμετρικό και το αντισυμμετρικό τμήμα του T αντίστοιχα, θα έχει τη μορφή

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) \quad (5.86)$$

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) \quad (5.87)$$

Με τρόπο ανάλογο όπως στην κατασκευή του Εδαφίου 2.2, επί της *TM* μπορούμε να ορίσουμε μία μετρική ψευδο-*Finsler* μέσω μίας συνάρτησης $F(x, y) : TM \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Η F είναι συνεχής επί της *TM* και λεία στον $\widetilde{TM} \equiv TM \setminus \{0\}$, δηλαδή στην εφαπτόμενη δέσμη εκτός από τη μηδενική δομή, $\{(x, y) \in TM | F(x, y) = 0\}$.

(2) Η F είναι θετικά ομογενής βαθμού ένα ως προς το δεύτερο όρισμά της

$$F(x^\mu, ky^a) = kF(x^\mu, y^a), \quad k > 0 \quad (5.88)$$

(3) Ο Εσσιανός πίνακας $H = (f_{ab})$ με στοιχεία

$$f_{ab}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^a \partial y^b} \quad (5.89)$$

είναι αντιστρέψιμος.

Η $f_{ab}(x, y)$ διαδραματίζει το ρόλο του μετρικού τανυστή ψευδο-Finsler. Από τα προηγούμενα, ένας μετρικός τανυστής ψευδο-Finsler είναι θετικά ομογενής μηδενικού βαθμού ως προς το δεύτερο όρισμά του. Λόγω της ιδιότητας (1), οι ιδιότητες (2), (3) της $F(x, y)$ θα ικανοποιούνται μόνο επί του χρονοειδούς ή μόνο επί του χωροειδούς πεδίου ορισμού της $F(x, y)$. Η υπέρβαση αυτής της δυσκολίας επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας για την μέτρηση αποστάσεων επί της M , την προβολή επί του HTM του μετρικού τανυστή (5.58), η οποία ορίζει έναν ψευδο-μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}(x, y)$. Ο $g_{\mu\nu}(x, y)$ ορίζεται σε ολοκληρητην TM , είναι ομογενής μηδενικού βαθμού ως προς το δεύτερο όρισμά του, και μπορεί να ανακατασκευαστεί από την $F(x, y)$ μέσω της σχέσης $F(x, y) = \sqrt{|g_{\mu\nu}(x, y)y^\mu y^\nu|}$. Ειδικότερα, σε ένα χωροειδές ή ένα χρονοειδές τμήμα της TM αντίστοιχα, θα ισχύει

$$g_{\mu\nu}(x, y) = \delta_\mu^a \delta_\nu^b f_{ab}(x, y) \quad (5.90)$$

$$g_{\mu\nu}(x, y) = -\delta_\mu^a \delta_\nu^b f_{ab}(x, y) \quad (5.91)$$

Από τη σχέση (5.59), λόγω της ομογένειας μηδενικού βαθμού της $g_{\mu\nu}$, ο ιδιόχρονος λαμβάνει τη μορφή

$$\tau = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(-g_{\mu\nu}(x, dx/d\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda \quad (5.92)$$

ανεξάρτητα από την επιλογή της παραμέτρου λ της καμπύλης $x^A(\lambda)$. Για την μετρική ψευδο-Finsler, η εξίσωση των γεωδαισιακών (5.77) γράφεται

$$\frac{dy^a}{d\tau} + \gamma_{\mu\nu}^a y^\mu y^\nu = 0, \quad y^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5.93)$$

όπου τα σύμβολα Christoffel ($\gamma_{\mu\nu}^a$) για την $g_{\mu\nu}$ υπολογίζονται ως

$$\gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad \gamma_{\mu\nu}^a = \delta_\kappa^a \gamma_{\mu\nu}^\kappa \quad (5.94)$$

5.6.2 Εξισώσεις Πεδίου

Είμαστε σε θέση να εκφράσουμε την δράση τύπου-Hilbert επί ενός κλειστού συνόλου ολοκλήρωσης $\mathcal{O} \subset TM$ [65, 64, 66, 92],

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{TM} &= \frac{1}{16\pi G} \mathcal{S}_H + \mathcal{S}_M \\ &\equiv \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{O}} d^8 \mathcal{U} \sqrt{\det \mathcal{G}} \mathcal{L}_H + \int_{\mathcal{O}} d^8 \mathcal{U} \sqrt{\det \mathcal{G}} \mathcal{L}_M \end{aligned} \quad (5.95)$$

, όπου $\det \mathcal{G}$ είναι η ορίζουσα της διακεκριμένης μετρικής (5.58), με

$$\begin{aligned} d^8 \mathcal{U} &= dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dy^0 \wedge dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 \\ &= dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dy^0 \wedge dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 \end{aligned} \quad (5.96)$$

λόγω του μηδενισμού στο εξωτερικό γινόμενο των όρων δy^a που εμπεριέχουν το dx^μ , και όπου το βαρυτικό μέρος της δράσης \mathcal{S}_H κατασκευάζεται από τη βαρυτική Λαγκρατζιανή

$$\mathcal{L}_H = \mathcal{R} = \bar{\mathcal{R}} + \mathcal{S} \quad (5.97)$$

και η δράση της ύλης \mathcal{S}_M από την Λαγκρατζιανή της ύλης \mathcal{L}_M . Στασιμοποιούμε τη συνολική δράση \mathcal{S}_{TM} ως προς τις μετρικές συνιστώσες $g_{\mu\nu}$ $v_{\alpha\beta}$ και τις συνιστώσες N_μ^a της μη γραμμικής συνοχής.

Η μεταβολή των συνιστωσών $\Omega_{\mu\nu}^a$ της καμπυλότητας της μη γραμμικής συνοχής (5.64) είναι

$$\delta\Omega_{\mu\nu}^a = \delta_\nu\delta N_\mu^a - \left(\dot{\partial}_b N_\mu^a\right)\delta N_\nu^b - \delta_\mu\delta N_\nu^a + \left(\dot{\partial}_b N_\nu^a\right)\delta N_\mu^b \quad (5.98)$$

Η μεταβολή των συντελεστών $L_{\nu\kappa}^\mu$ της συνοχής (5.73), (5.74) θα είναι

$$\begin{aligned} \delta L_{\nu\kappa}^\mu = & -\frac{1}{2}\left(g_{\nu m}\overset{(h)}{\mathcal{D}}_\kappa\delta g^{m\mu} + g_{km}\overset{(h)}{\mathcal{D}}_\nu\delta g^{m\mu} - g_{\nu m}g_{\kappa\eta}\overset{(h)}{\mathcal{D}}^\mu\delta g^{mn}\right) \\ & - \left(C_{\nu a}^\mu\delta N_\kappa^a + C_{\kappa a}^\mu\delta N_\nu^a - g^{\mu r}g_{\eta\kappa}\delta N_r^a\right) \end{aligned} \quad (5.99)$$

Η μεταβολή των συντελεστών $C_{\mu a}^\kappa$ της συνοχής (5.75), (5.76) θα είναι

$$\delta C_{\mu a}^\kappa = \frac{1}{2}C_{\mu\nu a}\delta g^{\nu\kappa} - \frac{1}{2}C_{ma}^\kappa g_{\mu\nu}\delta g^{mn} - \frac{1}{2}g_{\mu m}\overset{(v)}{\mathcal{D}}_a\delta g^{m\kappa} \quad (5.100)$$

Η μεταβολή του τανυστή Ricci $\bar{R}_{\mu\nu}$ στον *HTM* (5.67) είναι

$$\begin{aligned} \delta\bar{R}_{\mu\nu} = & \overset{(h)}{\mathcal{D}}_\kappa\left(\delta L_{\mu\nu}^\kappa + C_{\mu a}^\kappa\delta N_\nu^a\right) - \overset{(h)}{\mathcal{D}}_\nu\left(\delta L_{\mu\kappa}^\kappa + C_{\mu a}^\kappa\delta N_\kappa^a\right) + \overset{(v)}{\mathcal{D}}_a\left(\frac{1}{2}\Omega_{\kappa\nu}^a g_{\mu m}\delta g^{m\kappa}\right) \\ & + \left[\overset{(h)}{\mathcal{D}}_\nu C_{\mu a}^\kappa + C_{\mu b}^\kappa L_{\nu a}^b - C_{\mu b}^k\left(\dot{\partial}_a N_\nu^b\right) - \left(\dot{\partial}_a L_{\mu\nu}^\kappa\right)\right]\delta N_\kappa^a \\ & - \left[\overset{(h)}{\mathcal{D}}_\kappa C_{\mu a}^\kappa + C_{\mu b}^\kappa L_{\kappa a}^b - C_{\mu b}^k\left(\dot{\partial}_a N_\kappa^b\right) - \left(\dot{\partial}_a L_{\mu\kappa}^\kappa\right)\right]\delta N_\nu^a \\ & - \frac{1}{2}\left[\Omega_{\kappa\nu}^a C_{\eta a}^m g_{\mu m} - \Omega_{m\nu}^a C_{\eta a}^m g_{\mu\kappa} + \left(\overset{(v)}{\mathcal{D}}_a\Omega_{\kappa\nu}^a\right)g_{\mu\eta}\right]\delta g^{\eta\kappa} \end{aligned} \quad (5.101)$$

Η μεταβολή της βαθμωτής καμπυλότητας Ricci \bar{R} στον *HTM* (5.70) θα είναι

$$\delta\bar{R} = \left(g^{\mu\kappa}\dot{\partial}_a L_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu}\dot{\partial}_a L_{\mu\nu}^\kappa\right)\delta N_\kappa^a + \left(\Omega_{\kappa\mu}^a C_{\nu a}^\kappa + R_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + \mathcal{D}_B Z^B \quad (5.102)$$

όπου

$$\mathcal{D}_B \equiv \delta_B^\mu \overset{(h)}{\mathcal{D}}_\mu + \delta_B^a \overset{(v)}{\mathcal{D}}_a \quad (5.103)$$

$$Z^B = (Z^k, 0) \quad (5.104)$$

$$Z^\kappa \equiv g^{\mu\nu}\delta L_{\mu\nu}^\kappa - g^{\mu\kappa}\delta L_{\mu\nu}^\nu \quad (5.105)$$

Η μεταβολή του τανυστή Ricci S_{ab} στον VTM (5.69) είναι

$$\delta S_{ab} = \mathcal{D}_c \delta C_{ab}^c - \mathcal{D}_b \delta C_{ac}^c \quad (5.106)$$

Η μεταβολή της βαθμωτής καμπυλότητας Ricci \bar{S} στον VTM (5.70) θα είναι

$$\delta S = S_{ab} \delta v^{ab} + \mathcal{D}_B K^B \quad (5.107)$$

όπου

$$K^B = (0, K^c) \quad (5.108)$$

$$K^c \equiv v^{ab} \delta C_{ab}^c - v^{ac} \delta C_{ab}^b \quad (5.109)$$

Εκφράζοντας τον μετρικό τανυστή (5.58) σε μορφή πινάκων, θα έχουμε την ανάλυση

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} g & 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (g_{\mu\nu}) & 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & (v_{ab}) \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

οπότε η μεταβολή της τετραγωνικής ρίζας της ορίζουσας του μετρικού τανυστή θα είναι

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{\det[\mathcal{G}]} &= \delta \left(\sqrt{-\det[g]} \sqrt{-\det[v]} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-\det[g]} \sqrt{-\det[v]}} (\det[g] \delta \det[v] + \det[v] \delta \det[g]) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\det[\mathcal{G}]} (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + v_{ab} \delta v^{ab}) \end{aligned} \quad (5.111)$$

Από τα προηγούμενα, η μεταβολή του γεωμετρικού μέρους S_H της δράσης (5.95) υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \int_O d^8 \mathbf{u} \sqrt{\det[\mathcal{G}]} \left[-\frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + v_{ab} \delta v^{ab}) (\bar{R} + S) \right. \\ &\quad + (g^{\mu\nu} \partial_a L_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \partial_a L_{\mu\nu}^{\kappa}) \delta N_{\kappa}^a \\ &\quad \left. + (\Omega_{\kappa\mu}^a C_{\nu a}^{\kappa} + \bar{R}_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} + S_{ab} \delta v^{ab} + \mathcal{D}_B (Z^B + K^B) \right] \\ &\equiv I + \int_O d^8 \mathbf{u} \mathcal{D}_B \left(\sqrt{\det[\mathcal{G}]} (Z + K)^B \right) \end{aligned} \quad (5.112)$$

Λόγω του Θεωρήματος Stokes, ο τελευταίος όρος της τελευταίας σχέσης γράφεται

$$\int_O d^8 \mathbf{u} \mathcal{D}_B \left(\sqrt{\det[\mathcal{G}]} (Z + K)^B \right) = \oint_{\partial O} d^7 \mathbf{u} \sqrt{|\det[\mathcal{G}]|} n_B (Z + K)^B \quad (5.113)$$

όπου n_B μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο κάθετο στην υπερεπιφάνεια $\partial\mathcal{O} \subset TM$, και \mathcal{G} είναι η μετρική περιορισμένη στην $\partial\mathcal{O}$. Θεωρώντας ότι οι συνοριακοί όροι μηδενίζονται στο άπειρο, η σχέση (5.112) μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} \delta S_H = \int_{\mathcal{O}} d^8\mathbf{u} \sqrt{\det[\mathcal{G}]} & \left[-\frac{1}{2} \left(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + v_{ab} \delta v^{ab} \right) (\bar{R} + S) \right. \\ & + \left(g^{\mu\nu} \dot{\partial}_a L_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \dot{\partial}_a L_{\mu\nu}^k \right) \delta N_k^a \\ & \left. + \left(\Omega_{k\mu}^a C_{\nu a}^k + \bar{R}_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + S_{ab} \delta v^{ab} \right] \end{aligned} \quad (5.114)$$

Επιστρέφοντας στην δράση S_{TM} (5.113), η στασιμοποίηση ως προς $g_{\mu\nu}$, v_{ab} και N_{μ}^a γράφεται

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{O}} d^8\mathbf{u} \sqrt{\det[\mathcal{G}]} \frac{1}{16\pi G} \left[\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\bar{R} + S)g_{\mu\nu} + \Omega_{k\mu}^a C_{\nu a}^k - 8\pi G T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ & + \int_A d^8\mathbf{u} \sqrt{\det[\mathcal{G}]} \frac{1}{16\pi G} \left[S_{ab} - \frac{1}{2}(\bar{R} + S)v_{ab} - 8\pi G Y_{ab} \right] \delta v^{ab} \\ & + \int_A d^8\mathbf{u} \sqrt{\det[\mathcal{G}]} \frac{1}{16\pi G} \left(g^{\mu\kappa} \dot{\partial}_a L_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \dot{\partial}_a L_{\mu\nu}^{\kappa} - 8\pi G \mathcal{T}_a^{\kappa} \right) \delta N_{\kappa}^a = 0 \end{aligned} \quad (5.115)$$

όπου οι τανυστές ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}$, $Y_{\alpha\beta}$, \mathcal{T}_a^k που αντιστοιχούν στον οριζόντιο υπόχωρο, τον κατακόρυφο υπόχωρο και στη μη γραμμική συνοχή αντιστοιχα, θα δίνονται από

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{\det \mathcal{G}}} \frac{\delta(\mathcal{L}_M \sqrt{\det \mathcal{G}})}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (5.116)$$

$$Y_{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{\det \mathcal{G}}} \frac{\delta(\mathcal{L}_M \sqrt{\det \mathcal{G}})}{\delta v^{\alpha\beta}} \quad (5.117)$$

$$\mathcal{T}_a^k = -\frac{2}{\sqrt{\det[\mathcal{G}]}} \frac{\delta(\sqrt{\det[\mathcal{G}]} \mathcal{L}_M)}{\delta N_k^a} \quad (5.118)$$

Από τις τέσσερις τελευταίες σχέσεις, οι εξισώσεις πεδίου στην εφαπτόμενη δέσμη TM θα έχουν τη μορφή [49]:

$$\bar{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}(\bar{R} + S)g_{\mu\nu} + \Omega_{\kappa\mu}^a C_{\nu a}^{\kappa} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (5.119)$$

$$S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\bar{R} + S)v_{\alpha\beta} = 8\pi G Y_{\alpha\beta} \quad (5.120)$$

$$g^{\mu\kappa} \dot{\partial}_a L_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \dot{\partial}_a L_{\mu\nu}^{\kappa} = 8\pi G \mathcal{T}_a^{\kappa} \quad (5.121)$$

Στην ανάλυσή μας, υποθέσαμε ότι οι συντελεστές N_a^K της μη γραμμικής συνοχής, αποτελούν ένα πεδίο ανεξάρτητο από τις μετρικές συνιστώσες $g_{\mu\nu}$ και v_{ab} . Στην περίπτωση όπου η εφαπτόμενη δέσμη θεωρείται εκ των προτέρων εφοδιασμένη με μη γραμμική συνοχή N_a^K παύει να ισχύει, και ο τελευταίος όρος στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (5.119) μηδενίζεται.

5.6.3 Εξισώσεις *Raychaudhuri* και κοσμολογία τύπου *FLRW*

Οι εξισώσεις *Raychaudhuri* της θεωρίας στον οριζόντιο υπόχωρο *HTM* έχουν τη μορφή [77, 49]

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^2 + \omega^2 - \bar{R}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + u^\mu \mathcal{T}_{\mu\kappa}^{\lambda(h)} \mathcal{D}_\lambda Y^\kappa + u^\mu \Omega_{\mu\kappa}^a{}^{(v)} \mathcal{D}_a Y^\kappa \quad (5.122)$$

όπου $R_{\mu\nu}$ ο τανυστής *Ricci* στον *HTM* (5.67), η διαστολή, η παραμόρφωση και ο στροβιλισμός αντίστοιχα, δίνονται από τις σχέσεις

$$\theta \equiv \mathcal{D}_\kappa Y^\kappa \quad (5.123)$$

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \mathcal{D}_{(\mu} Y_{\nu)} - \frac{1}{3}\theta P_{\mu\nu} \quad (5.124)$$

$$\omega_{\mu\nu} \equiv \mathcal{D}_{[\mu} Y_{\nu]} \quad (5.125)$$

και u^μ η τετρααχύτητα, ενώ το εφαπτόμενο στις γεωδαισιακές διανυσματικό πεδίο Y , από την σχέση (5.85).

Οι συντελεστές της συνοχής $L_{\nu\kappa}^0, L_{\nu\kappa}^1, L_{\nu\kappa}^2, L_{\nu\kappa}^3$, στον *HTM* είναι τα σύμβολα *Christoffel* της συνήθους *FLRW* μετρικής, και δίνονται από τις σχέσεις (3.98), (3.99), (3.100), (3.101) αντίστοιχα. Ομοίως, οι μη μηδενικές συνιστώσες $R_{\mu\mu}, \mu = 0, 1, 2, 3$ του τανυστή *Ricci* δίνονται από τις σχέσεις (3.102), (3.103), (3.104), (3.105) ενώ η βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci* δίνεται από την (3.106).

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις πεδίου (5.119) στην μετρική *FLRW* (5.1), εστιάζοντας στην επίπεδη περίπτωση και χρησιμοποιώντας την εξίσωση ιδανικού ρευστού ύλης (3.107) για την ενέργεια και ορμή στο σύμπαν, λαμβάνουμε τις ακόλουθες τροποποιημένες εξισώσεις *Friedmann* [49]:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m - \frac{1}{6}S \quad (5.126)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + 3P_m) - \frac{1}{6}S \quad (5.127)$$

λόγω των επιβαλλόμενων συμμετριών, όλες οι ποσοότητες εξαρτώνται μόνο από το χρόνο.

Από τη μορφή των δύο τελευταίων εξισώσεων, παρατηρούμε ότι προέκυψαν επιπλέον συνεισφορές λόγω της τύπου *Finsler* δομής της εφαπτόμενης δέσμης. Συγκεκριμένα, οι όροι

αυτοί επάγουν την ενεργό πυκνότητα ενέργειας και την πίεση γεωμετρικής προέλευσης, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις

$$\rho_S \equiv -\frac{1}{16\pi G} S \quad (5.128)$$

$$P_S \equiv \frac{1}{16\pi G} S \quad (5.129)$$

Επομένως, η ολική πυκνότητα ενέργειας και η πίεση, θα γράφονται αντίστοιχα $\rho_{tot} = \rho_m + \rho_S$ και $P_{tot} = P_m + P_S$. Οι εξισώσεις Friedmann λαμβάνουν τη συνήθη τους μορφή (5.2) και (5.3). Επιπλέον, η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci S του κατακόρυφου υπόχωρου VTM υπολογίζεται ίση με $S = -2\Lambda$ όπου Λ η κοσμολογική σταθερά [49]. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να ερμηνεύσουμε φυσικά την S ως ενεργό κοσμολογική σταθερά, δηλαδή ως ποσότητα σχετιζόμενη με την ενέργεια του κενού. Προκειμένου τα αποτελέσματα του μοντέλου να συμφωνούν με τα αποτελέσματα του κοσμολογικού μοντέλου, θα πρέπει η S καμπυλότητα να λαμβάνει πολύ μικρές τιμές. Η ουσιώδης διαφορά μεταξύ των μεγεθών Λ και S έγκειται στο ότι η πρώτη προστίθεται *ad hoc* στην θεωρία, ενώ η δεύτερη προκύπτει με τρόπο εγγενή από την ανισοτροπική γεωμετρική δομή του χωροχρόνου.

Για την πυκνότητα ενέργειας ρ και την πίεση P ενός ιδανικού ρευστού, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τις γενικευμένες εξισώσεις Friedmann (5.126), (5.127) σε σχέση με τις ενεργειακές συνθήκες του Υποεδαφίου 3.3.3. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Στην περίπτωση όπου $\rho_m + P_m \geq 0$, $\rho_m + 3P_m \geq 0$ (ισχυρή ενεργειακή συνθήκη) θα έχουμε

$$\dot{H} \leq 0, \quad H^2 + \dot{H} \leq \frac{-S}{6} \quad (5.130)$$

(β) Στην περίπτωση όπου $\rho_m + P_m \geq 0$ (μηδενική ενεργειακή συνθήκη) θα έχουμε

$$\dot{H} \leq 0 \quad (5.131)$$

(γ) Στην περίπτωση όπου $\rho_m \geq 0$, $\rho_m + P_m \geq 0$ (ασθενής ενεργειακή συνθήκη) θα έχουμε

$$H^2 \geq \frac{-S}{6}, \quad \dot{H} \leq 0 \quad (5.132)$$

Θα εξετάσουμε ποιές συνθήκες θα πρέπει να ισχύουν ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις Αναπήδησης (5.4) και (5.5). Ως προς την εξίσωση (5.4), συνάγουμε ότι για ένα επίπεδο σύμπαν ακριβώς στο σημείο Αναπήδησης, θα πρέπει να ισχύει $S = 16\pi G\rho_m$, ενώ ως προς την εξίσωση (5.5) θα πρέπει να ισχύει $\rho_m + P_m < 0$, εφόσον σύμφωνα με τις σχέσεις (5.128) και (5.129), ισχύει $P_S + \rho_S = 0$. Καταλήγουμε ότι, στην περίπτωση επίπεδου σύμπαντος και για την συνήθη ύλη, η υλόποιηση Αναπήδησης δεν είναι δυνατή για το παρόν σενάριο, καθώς προϋποθέτει την παραβίαση και των τριών προαναφερθεισών ενεργειακών συνθηκών. Ωστόσο, η Αναπήδηση είναι εφικτή με την προσθήκη επιπλέον πεδίων [49], αλλά απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή λόγω των περιορισμών επί της S που επιβάλλονται από την σχέση (5.120). Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την τετριμμένη περίπτωση όπου $Y_{\alpha\beta} = 0$, τότε το ίχνος της εξίσωσης (5.120)

$$S = -2\bar{R}. \quad (5.133)$$

Υποθέτουμε ότι το επιπλέον πεδίο μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ιδανικό ρευστό όπως στην σχέση (5.13), με πυκνότητα ενέργειας και πίεση ρ_{eff} και P_{eff} . Η εξίσωση Friedmann (5.126) γίνεται

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_{eff}) - \frac{1}{6}S \quad (5.134)$$

Αντικαθιστώντας την προτελευταία σχέση στην τελευταία(3), θα έχουμε

$$3H^2 + 2\dot{H} + 8\pi G(\rho_m + \rho_{eff})/3 = 0 \quad (5.135)$$

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι, για να επάγει λύση Αναπήδησης το επιπλέον πεδίο όταν $Y_{\alpha\beta} = 0$ για την χωρικά επίπεδη μετρική μας, θα χρειαζόταν να ισχύει $\rho_{eff} < 0$, το οποίο είναι ανεπιθύμητο από φυσικής άποψης.

5.7 Θεωρία Βαθμωτού-Τανυστή στην Νηματική Δέσμη

Στο παρόν εδάφιο, θα εξερευνήσουμε την υλοποίηση Αναπήδησης σε θεωρίες που περιλαμβάνουν τομείς βαθμωτού-τανυστή επί της νηματικής δέσμης. Αυτές οι κατασκευές είναι γενικές, με πλούσια δομή και συμπεριφορά, κάτι το οποίο αποκαλύπτει τις σημαντικές ιδιότητες της Γεωμετρίας τύπου **Finsler**.

Κοσμολογικές εφαρμογές της θεωρίας βαθμωτού-τανυστή που προκύπτει από τη νηματική δέσμη μελετώνται εκτενώς στο [87], τόσο στις πρώιμες όσο και στις ύστερες φάσεις της εξέλιξης του Σύμπαντος. Συγκεκριμένα, η εσωτερική δομή της γεωμετρίας τύπου-Finsler της νηματικής δέσμης επάγει έναν έξτρα βαθμωτό βαθμό ελευθερίας, ο οποίος σχετίζεται με μία ενεργό αλληλεπίδραση ανάμεσα στον τομέα της ύλης και σε αυτόν της σκοτεινής ενέργειας. Η συνεισφορά αυτή έχει σημαντική επίδραση στη μελέτη της θερμικής ιστορίας και της αλληλουχίας των εποχών του Σύμπαντος.

Παρουσιάζουμε αρχικά στο υποεδάφιο 5.7.1 τα βασικά σημεία της κατασκευής, και στην συνέχεια στα υποεδάφια 5.7.2 και 5.7.3 προχωρούμε στην διερεύνηση δύο συγκεκριμένων σεναρίων.

5.7.1 Το θεωρούμενο Μοντέλο

Θεωρούμε έναν νηματοποιημένο χώρο επί μίας ψευδο-Riemann χωροχρονικής πολλαπλότητας M της μορφής $M \times \{\phi^{(1)}\} \times \{\phi^{(2)}\}$, όπου $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ είναι οι νηματικές συντεταγμένες. Υπο μετασχηματισμούς συντεταγμένων στην πολλαπλότητα βάσης, οι νηματικές συντεταγμένες συμπεριφέρονται ως βαθμωτά. Επιπλέον, ο χώρος είναι εφοδιασμένος με μία μη γραμμική συνοχή με συντελεστές $N_\mu^{(\alpha)}(x^\nu, \phi^{(\beta)})$, όπου τα μ, ν λαμβάνουν τιμές από το 0 έως το 3, και τα α, β λαμβάνουμε τις τιμές 1 ή 2 [52]. Οι προσαρμοσμένες βάσεις για τον εφαιπτόμενο και τον συνεφαιπτόμενο χώρο είναι $\{\delta_\mu =$

3 Στην περίπτωση μας, το \bar{R} είναι ίσο με την συνήθη επίπεδη FLRW βαθμωτή καμπυλότητα Ricci της Γενικής Σχετικότητας, λόγω του ότι οι μετρικές συνιστώσες $g_{\mu\nu}(x)$ δεν εξαρτώνται από το y [49].

$\partial_\mu - N_\mu^{(\beta)} \partial_{\phi^{(\beta)}}, \partial_{\phi^{(\alpha)}}\}$, όπου ακολουθούμε την αθροιστική σύμβαση για τις τιμές του β , και $\{dx^\mu, \delta\phi^{(\alpha)} = d\phi^{(\alpha)} + N_\mu^{(\alpha)} dx^\mu\}$, όπου ακολουθούμε την αθροιστική σύμβαση για τις τιμές του μ . Η μετρική δομή του χώρου ορίζεται ως [52]:

$$\mathbf{G} = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu + v_{(\alpha)(\beta)}(x) \delta\phi^{(\alpha)} \otimes \delta\phi^{(\beta)} \quad (5.136)$$

Οι μετρικές συνιστώσες για τις νηματικές συντεταγμένες ορίζονται ως $v_{(0)(0)} = v_{(1)(1)} = \phi(x^\mu)$ και $v_{(0)(1)} = v_{(1)(0)} = 0$. Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση ϕ είναι ξεκάθαρα ένα βαθμωτό υπό μετασχηματισμούς των συντεταγμένων. Μία λεπτομερής διερεύνηση της προηγούμενης κατασκευής υπάρχει στο [52]. Το προσαρμοσμένο πλαίσιο έχει τη μορφή

$$\frac{\partial}{\partial Z^M} \equiv \left(\frac{\delta}{\delta x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - N_\alpha^{(1)} \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}} - N_\alpha^{(2)} \frac{\partial}{\partial \phi^{(2)}}, \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}}, \frac{\partial}{\partial \phi^{(2)}} \right) \quad (5.137)$$

$$dZ^M \equiv (dx^\alpha, \delta\phi^{(1)} = d\phi^{(1)} + N_\alpha^{(1)} dx^\alpha, \delta\phi^{(2)} = d\phi^{(2)} + N_\alpha^{(2)} dx^\alpha) \quad (5.138)$$

ορίζουμε το συνδιάνυσμα

$$X_\alpha = \frac{\delta}{\delta x^\alpha}, X_{(1)} = \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}}, X_{(2)} = \frac{\partial}{\partial \phi^{(2)}}, X_M = (X_\alpha, X_{(1)}, X_{(2)}) \quad (5.139)$$

Ο αντίστροφος μετρικός τανυστής ισούται με

$$G^{MN} = [g^{\alpha\beta}, v^{(1)(1)}, v^{(2)(2)}] \quad (5.140)$$

όπου $g^{\alpha\beta}$ είναι η αντίστροφη μετρική της $g_{\alpha\beta}$. Το συνδιάνυσμα (5.139) έχει αντίστροφο $X^N = G^{MN} X_M$, όπου

$$X^{(1)} = \phi^{-1} X_{(1)} = v^{(1)(1)} X_1 \quad (5.141)$$

$$X^{(2)} = \phi^{-1} X_{(2)} = v^{(2)(2)} X_{(2)} \quad (5.142)$$

$$\phi^{-1} = v^{(1)(1)} = v^{(2)(2)} \quad (5.143)$$

Οι συναλλοίωτες διαφορίσεις είναι

$$\nabla \frac{\delta}{\delta x^\alpha} \frac{\delta}{\delta x^\beta} = L_{\beta\alpha}^\gamma \frac{\delta}{\delta x^\gamma} \quad (5.144)$$

$$\nabla \frac{\delta}{\delta x^\alpha} \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}} = L_{(1)\alpha}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}} \quad (5.145)$$

$$\nabla \frac{\delta}{\delta x^\alpha} \frac{\partial}{\partial \phi^{(2)}} = L_{(2)\alpha}^{(2)} \frac{\partial}{\partial \phi^{(2)}} \quad (5.146)$$

$$\nabla \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}} \frac{\delta}{\delta x^\alpha} = C_{\alpha(1)}^{(\beta)} \frac{\delta}{\delta x^\beta} \quad (5.147)$$

$$\nabla \frac{\partial}{\partial y^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}} = C_{(1)(1)}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}} \quad (5.148)$$

$$\nabla \frac{\partial}{\partial y^{(1)}} \frac{\delta}{\delta \phi^{(2)}} = C_{(2)(1)}^{(2)} \frac{\partial}{\partial \phi^{(2)}} \quad (5.149)$$

$$\nabla \frac{\partial}{\partial y^{(2)}} \frac{\delta}{\delta x^\alpha} = E_{\alpha(2)}^\beta \frac{\delta}{\delta x^\beta} \quad (5.150)$$

$$\nabla \frac{\partial}{\partial y^{(2)}} \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}} = E_{(1)(2)}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}} \quad (5.151)$$

$$\nabla \frac{\partial}{\partial \phi^{(2)}} \frac{\partial}{\partial \phi^{(2)}} = E_{(2)(2)}^{(2)} \frac{\partial}{\partial \phi^{(2)}} \quad (5.152)$$

Η δομή της συνοχής δίνεται από

$$\nabla \frac{\partial}{\partial Z^K} \frac{\partial}{\partial Z^M} = \Gamma_{MK}^N \frac{\partial}{\partial Z^N} \quad (5.153)$$

όπου $\Gamma_{MK}^N = \{L_{M\alpha}^N, C_{M(1)}^N, E_{M(2)}^N\}$. Για ένα διάνυσμα $V^M = (V^\alpha, V^{(1)}, V^{(2)})$, οι συναλλοίωτες παράγωγοι ορίζονται ως

$$V_{|\alpha}^\alpha = \frac{\delta V^\alpha}{\delta x^\gamma} + L_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \quad (5.154)$$

$$V_{|(1)}^{(1)} = \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} + C_{(1)(1)}^{(1)} V^{(1)} \quad (5.155)$$

$$V_{||2)}^{(2)} = \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \phi^{(2)}} + E_{(2)(2)}^{(2)} V^{(2)} \quad (5.156)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή στρέψης θα είναι

$$T_{\alpha\beta}^{\gamma} = L_{\alpha\beta}^{\gamma} - L_{\beta\alpha}^{\gamma}, T_{\alpha\beta}^{(1)} = -R_{\alpha\beta}^{(1)}, T_{\alpha\beta}^{(2)} = V_{\beta\alpha}^{(2)} \quad (5.157)$$

$$T_{\alpha(2)}^{\gamma} = C_{\alpha(1)}^{\gamma}, T_{\alpha(1)}^{(1)} = \frac{\partial N_{\alpha(1)}}{\partial \phi^{(1)}} - L_{\alpha(1)}^{(1)}, T_{\alpha(1)}^{(2)} = \frac{\partial N_{\alpha(2)}}{\partial \phi^{(1)}} \quad (5.158)$$

$$T_{\alpha(2)}^{\gamma} = E_{(2)\alpha}^{\gamma}, T_{\alpha(2)}^{(1)} = \frac{\partial N_{\alpha}^{(1)}}{\partial y^{(2)}}, T_{\alpha(2)}^{(2)} = -L_{(2)\alpha}^{(2)} + \frac{\partial N_{\alpha}^{(2)}}{\partial y^{(2)}} \quad (5.159)$$

$$T_{(1)(2)}^{\gamma} = 0, T_{(1)(2)}^{(1)} = -E_{(2)(1)}^{(1)}, T_{(1)(2)}^{(2)} = -C_{(1)(2)}^{(2)} \quad (5.160)$$

$$T_{(1)(1)}^{\gamma} = 0, T_{(1)(1)}^{(1)} = C_{(1)(1)}^{(1)} = 0, T_{(1)(1)}^{(2)} = 0 \quad (5.161)$$

$$T_{(2)(2)}^{\gamma} = 0, T_{(2)(2)}^{(1)} = 0, T_{(2)(2)}^{(2)} = 0 \quad (5.162)$$

Οι τανυστές καμπυλότητας που σχετίζονται με το προσαρμοσμένο πλαίσιο δίνονται από

$$R(X_M, X_N)X_L = \mathcal{R}_{LMN}^K X_K \quad (5.163)$$

$$R_{LMN}^K = X_M \Gamma_{LN}^K - X_N \Gamma_{LM}^K + \Gamma_{LN}^Z \Gamma_{ZM}^K - \Gamma_{LM}^Z \Gamma_{ZN}^K + \Gamma_{LZ}^K W_{NM}^Z \quad (5.164)$$

όπου οι συντελεστές μη ολονομίας είναι

$$[X_M, X_N] = W_{NM}^Z X_Z \quad (5.165)$$

Θεωρούμε την περίπτωση όπου όλοι οι συντελεστές του τανυστή στρέψης είναι μηδενικοί, και όπου

$$v_{\alpha(1)} = v_{(1)\alpha} = v_{\alpha(2)} = v_{(2)\alpha} = v_{(1)(2)} = v_{(2)(1)} = 0 \quad (5.166)$$

Οι τανυστές Ricci δίνονται από

$$\mathcal{R}_{MN} = \{R_{MN\alpha}^{\alpha}, R_{MN(1)}^{(1)}, R_{MN(2)}^{(2)}\} \quad (5.167)$$

όπου

$$R_{MN\alpha}^{\alpha} = \frac{\delta L_{MN}^{\alpha}}{\delta x^{\alpha}} - \frac{\delta L_{M\alpha}^{\alpha}}{\delta x^N} + L_{K\alpha}^{\alpha} L_{MN}^K - L_{KN}^{\alpha} L_{M\alpha}^K \quad (5.168)$$

$$R_{MN(1)}^{(1)} = \frac{\partial C_{MN}^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} - \frac{\partial C_{M(1)}^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} + L_{K\alpha}^{\alpha} L_{MN}^K - L_{KN}^{\alpha} L_{M\alpha}^K \quad (5.169)$$

$$R_{MN(2)}^{(2)} = \frac{\partial E_{MN}^{(2)}}{\partial \phi^{(2)}} - \frac{\partial E_{M(2)}^{(2)}}{\partial \phi^N} + E_{K(2)}^{(2)} E_{MN}^K - E_{KN}^{(2)} E_{M(2)}^K \quad (5.170)$$

Στην ειδική περίπτωση ολονομικής βάσης, δηλαδή, $[\delta_{\mu}, \delta_{\nu}] = 0$, η βαθμωτή καμπυλότητα της d -συνοχής ισούται με

$$\mathcal{R} = R - \frac{2}{\phi} \square \phi + \frac{1}{4\phi^2} \partial^{\mu} \phi \partial_{\mu} \phi, \quad (5.171)$$

όπου R η βαθμωτή καμπυλότητα της συνοχής Levi-Civita, και \square είναι αντίστοιχος τελεστής d'Alembert. Από την άλλη πλευρά, στη γενική περίπτωση, λαμβάνουμε τη βαθμωτή καμπυλότητα ως

$$\tilde{\mathcal{R}} = R - \frac{2}{\phi} \square \phi + \frac{1}{4\phi^2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{\phi} \partial^\mu \phi \partial_{\phi^{(a)}} N_\mu^{(a)} \quad (5.172)$$

Η Λαγκρατζιανή πυκνότητα της θεωρίας έχει τη μορφή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} \sqrt{|G|} \mathfrak{R}, \quad G = |\det(G_{MN})| \quad (5.173)$$

όπου $\mathfrak{R} = \mathcal{R}$ στην περίπτωση ολονομικής βάσης και $\mathfrak{R} = \tilde{\mathcal{R}}$ στην περίπτωση μη ολονομικής βάσης. Στην περίπτωση ολονομικής βάσης, είναι αξιοσημείωτη η ομοιότητα στη μορφή της δράσης που προκύπτει από την Λαγκρατζιανή (5.173) με εκείνη της θεωρίας Brans-Dicke (3.171).

Η δράση λαμβάνει τη μορφή [53]

$$\mathcal{S}_G = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{|\det \mathbf{G}|} \mathcal{L}_G dx^{(N)} \quad (5.174)$$

όπου \mathcal{L}_G λαμβάνεται ίσο με την βαθμωτή καμπυλότητα της d -συνοχής, και $dx^{(N)} = d^4x \wedge d\phi^{(1)} \wedge d\phi^{(2)}$.

Επιπλέον, μπορούμε να προσθέσουμε τον τομέα της ύλης, και η ολική δράση θα γράφεται

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{|\det \mathbf{G}|} \mathcal{L}_G dx^{(N)} + \int \sqrt{|\det \mathbf{G}|} \mathcal{L}_M dx^{(N)} \quad (5.175)$$

Εφ' όσον για τις ορίζουσες $\det \mathbf{G}$ και $\det g$, ισχύει η σχέση $\det \mathbf{G} = \phi^2 \det g$, η τελευταία σχέση γράφεται

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{|\det g|} \phi \mathcal{L}_G dx^{(N)} + \int \sqrt{|\det g|} \phi \mathcal{L}_M dx^{(N)} \quad (5.176)$$

Επιπροσθέτως, οι εξισώσεις Raychaudhuri γι' αυτό το μοντέλο έχουν προσδιοριστεί στο [53], και έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} X^N \tilde{\Theta}|_N &= \{R_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \phi_{,\mu} \phi^{-1} + \frac{1}{2} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \phi^{-1} - \phi_{,\alpha\beta} \phi^{-1} \\ &\quad + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g_{\alpha\beta,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\phi_{,\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{,\mu} \phi_{,\nu})\} X^M X^N \\ &\quad - \frac{1}{3} \tilde{\Theta}^2 - \sigma_K^N \sigma_N^K - \omega_K^N \omega_N^K \end{aligned} \quad (5.177)$$

όπου $\tilde{\Theta}$ η διαστολή, σ η παραμόρφωση, ω ο στροβιλισμός, και θεωρήσαμε τις συνθήκες $T_{mk}^i = R_{mk}^b = 0$.

Στα επόμενα δύο υποεδάφια, μελετούμε χωριστά την υλοποίηση Αναπήδησης στις περιπτώσεις ολονομικής βάσης ($\mathcal{L}_G = \mathcal{R}$) και μη ολονομικής βάσης ($\mathcal{L}_G = \tilde{\mathcal{R}}$).

5.7.2 Αναπήδηση σε Ολονομική Βάση

Θεωρούμε την ολική δράση (5.176) στην περίπτωση ολονομικής βάσης, επιτρέποντας την ύπαρξη ενός δυναμικού για το βαθμωτό πεδίο [53],

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{|\det g|} [\phi \mathcal{R} - V(\phi)] dx^{(N)} \\ & + \int \sqrt{|\det g|} \phi \mathcal{L}_M dx^{(N)}, \end{aligned} \quad (5.178)$$

όπου \mathcal{R} είναι η ολονομική βαθμωτή καμπυλότητα της σχέσης (5.171). Σημειώνουμε εδώ πως η προηγούμενη δράση ανήκει στην κατηγορία **Horndeski**, συνεπώς οι προκύπτουσες εξισώσεις κίνησης θα έχουν εγγυημένα παραγώγους έως και δευτέρας τάξης. Συγκεκριμένα, οι εξισώσεις πεδίου για τη μετρική λαμβάνονται ως

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} = & 8\pi G T_{\mu\nu} + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) \\ & + \frac{1}{4\phi^2} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 - \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right] - \frac{1}{2\phi} g_{\mu\nu} V, \end{aligned} \quad (5.179)$$

όπου $E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής Einstein, $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}$ είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής, και ∇_μ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος Levi-Civita, ενώ η εξίσωση του βαθμωτού πεδίου (επέκταση της εξίσωσης Klein-Gordon) γράφεται ως

$$\square \phi = 2\phi(R - V') + \frac{1}{2\phi} (\nabla \phi)^2 + 32\pi G \mathcal{L}_M \phi, \quad (5.180)$$

$V' = dV/d\phi$. Αξίζει να σημειωθεί ότι, στο παρόν σενάριο, λαμβάνουμε ενεργό αλληλεπίδραση ανάμεσα στο βαθμωτό πεδίο και τον τομέα της ύλης λόγω του μετασχηματισμού από την G -μετρική στην g -μετρική.

Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα στην μετρική FLRW (5.1), εστιάζοντας στην επίπεδη περίπτωση, και αγνοώντας τον τομέα της ύλης, εφ' όσον ενδιαφερόμαστε για την υλοποίηση Αναπήδησης στο πρώιμο σύμπαν, λαμβάνουμε τις ακόλουθες τροποποιημένες εξισώσεις Friedmann

$$3H^2 = -3H \frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\dot{\phi}^2}{8\phi^2} + \frac{1}{2\phi} V \quad (5.181)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{2\phi} (\ddot{\phi} + H\dot{\phi}) + \frac{\dot{\phi}^2}{12\phi^2} + \frac{V}{6\phi} \quad (5.182)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -12\phi (2H^2 + \dot{H}) + \frac{\dot{\phi}^2}{2\phi} + 2\phi V', \quad (5.183)$$

εκ των οποίων μόνο δύο είναι ανεξάρτητες.

Προχωρούμε στην συνέχεια να αποδείξουμε το πως είναι δυνατόν να αποκτήσουμε μία συγκεκριμένη Αναπήδηση εντός αυτής της κατασκευής. Όπως παρατηρήθηκε από τις παραπάνω εξισώσεις, μπορούμε να επιλέξουμε ένα συγκεκριμένο δυναμικό για το βαθμωτό πεδίο το οποίο ικανοποιεί τις γενικές συνθήκες Αναπήδησης (5.4) και (5.5), και συνεπώς να επάγουμε την υλοποίηση Αναπήδησης. Ακολουθούμε την διαδικασία των [19, 27, 26, 28, 73]. Ξεκινάμε αρχικά από το επιθυμητό αποτέλεσμα, δηλαδή επιβάλλουμε μία γνωστή μορφή για τον παράγοντα κλίμακας $a(t)$, η οποία έχει Αναπηδητική συμπεριφορά. Συνεπώς το $H(t)$ είναι επίσης γνωστό. Απαλείφοντας το V από τις εξισώσεις (5.181) και (5.182), λαμβάνουμε την απλής μορφής διαφορική εξίσωση

$$4\phi(t)\ddot{\phi}(t) - \dot{\phi}(t)[\dot{\phi}(t) + 4H(t)\phi(t)] + 8\dot{H}(t)\phi(t)^2 = 0 \quad (5.184)$$

η οποία μπορεί να επιλυθεί ως προς $\phi(t)$. Εισάγοντας τη λύση στην εξίσωση (5.181), αποκτούμε το $V(t)$ ως

$$V(t) = 6H(t)[\dot{\phi}(t) + \phi(t)H(t)] + \frac{\dot{\phi}(t)^2}{4\phi(t)}. \quad (5.185)$$

Τελικά, γνωρίζοντας τα $\phi(t)$ και $V(t)$, και απαλείφοντας το χρόνο, μπορούμε να εξάγουμε την ρητή μορφή του δυναμικού $V(\phi)$. Συνεπώς, αυτό το δυναμικό θα παράγει τον αρχικά επιθυμητό παράγοντα κλίμακας $a(t)$.

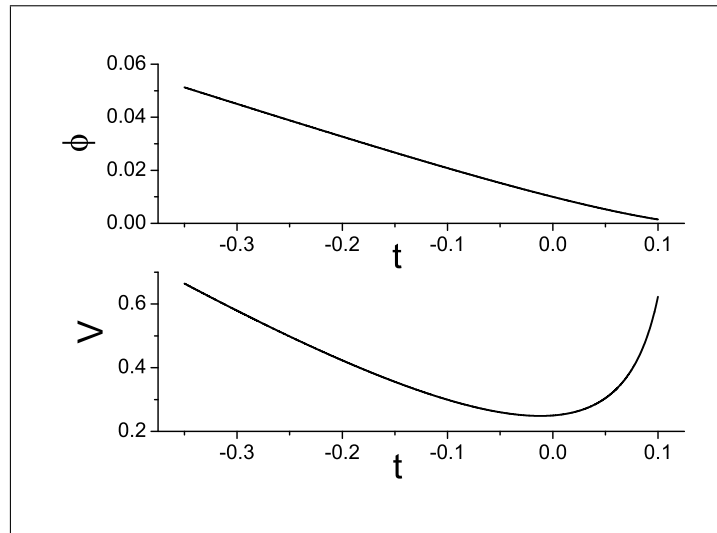
Στην συνέχεια παρέχουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα υλοποίησης Αναπήδησης. Αρχίζουμε εισάγοντας τον επιθυμητό παράγοντα κλίμακας της σχέσης (5.48) και ακολουθούμε τα προηγούμενα βήματα. Εφόσον δεν μπορούν να ληφθούν αναλυτικές λύσεις, επιλούμε την εξίσωση (5.184) αριθμητικά και υπολογίζουμε το $\phi(t)$, και στην συνέχεια υπολογίζουμε το $V(t)$ από την σχέση (5.185). Αυτές οι συναρτήσεις δίνονται στο Σχήμα 2. Από τη γνώση των $\phi(t)$ και $V(t)$, ανακατασκευάζουμε το δυναμικό $V(\phi)$, το οποίο αποδίδεται στο Σχήμα 3.

Συνεπώς, εάν το $V(\phi)$ θεωρηθεί αυτής της μορφής, αποκτούμε την υλοποίηση Αναπήδησης, και ειδικότερα τον παράγοντα κλίμακας της σχέσης (5.48).

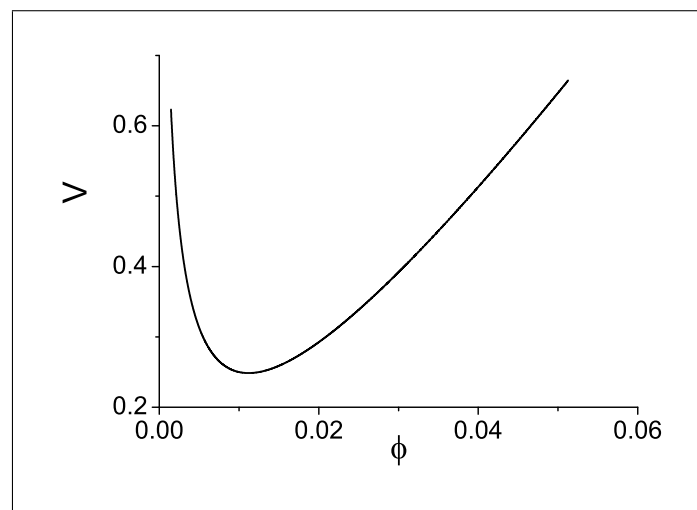
5.7.3 Αναπήδηση σε Μη Ολονομική Βάση

Στην συνέχεια ερευνούμε την μη ολονομική περίπτωση, δηλαδή θεωρούμε την ολική δράση (5.176) με $\mathcal{L}_G = \tilde{\mathcal{R}}$,

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{|g|} \phi \tilde{\mathcal{R}} dx^{(N)} + \int \sqrt{|g|} \phi \mathcal{L}_M dx^{(N)} \quad (5.186)$$



Σχήμα 5.2: Λύσεις για το βαθμωτό πεδίο $\phi(t)$ (άνω γράφημα) και για το δυναμικό $V(t)$ (κάτω γράφημα), για την ολονομική βάση, υπό τον επιβαλλόμενο παράγοντα κλίμακας Αναπήδησης (5.48) με $B = 1$, σε μονάδες όπου $8\pi G = 1$.



Σχήμα 5.3: Ανακατασκευασμένο βαθμωτό δυναμικό $V(\phi)$ από το Σχήμα 5.2, υπό επιβαλλόμενο παράγοντα κλίμακας Αναπήδησης (5.48) με $B = 1$, σε μονάδες όπου $8\pi G = 1$.

όπου $\tilde{\mathcal{R}}$ είναι η μη ολονομική βαθμωτή καμπυλότητα (5.172). Η δράση αυτή οδηγεί στις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης για τη μετρική και το βαθμωτό πεδίο:

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} = & 8\pi G T_{\mu\nu} + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) \\ & + \frac{1}{4\phi^2} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 - \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right] \\ & - \left(\delta_\mu^\lambda \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\lambda \phi \right) N_\lambda \end{aligned} \quad (5.187)$$

$$\square \phi = 2\phi R + \frac{1}{2\phi} (\nabla \phi)^2 + 32\pi G \mathcal{L}_M \phi - \phi D^\mu N_\mu, \quad (5.188)$$

όπου $N_\mu \equiv \partial_{\phi^{(a)}} N_\mu^{(a)}$, και $D_\mu N^\lambda = \delta_\mu N^\lambda + \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda N^\kappa$ είναι η d -συναλλοιώτη παραγωγήιση επί της νηματικής δέσμης, και $\Gamma_{\kappa\mu}^\lambda$ είναι τα σύμβολα Christoffel.

Σημειώνουμε ότι ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (5.188) ο οποίος αντανακλά την εσωτερική δομή της Γεωμετρίας τύπου *Finsler*, μπορεί να θεωρηθεί ότι δρα ως ένα ενεργό δυναμικό ενός βαθμωτού πεδίου ϕ . Εφόσον κάθε άλλη ποσότητα των σχέσεων (5.187) και (5.188) εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες x^μ , αυτό πρέπει να ισχύει επίσης για το N_λ λόγω συνεπείας (ισοδύναμα $\partial_{\phi^{(a)}} \partial_{\phi^{(a)}} N_\mu^{(a)} = 0$ στο κέλυφος(4)).

Εφαρμόζοντας τις προηγούμενες εξισώσεις κίνησης στην μετρική FLRW (5.1), εστιάζοντας στην επίπεδη περίπτωση, και αγνοώντας τον τομέα της ύλης, εφόσον ενδιαφερόμαστε για υλοποίηση Αναπήδησης στο πρώιμο σύμπαν, οδηγούμαστε στις τροποποιημένες εξισώσεις *Friedmann*

$$3H^2 = -3H \frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\dot{\phi}^2}{8\phi^2} - \frac{1}{2} \dot{\phi} N_0 \quad (5.189)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{2\phi} (\ddot{\phi} + H\dot{\phi}) + \frac{\dot{\phi}^2}{12\phi^2} + \frac{1}{3} \dot{\phi} N_0 \quad (5.190)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -12\phi \left(2H^2 + \dot{H} \right) + \frac{\dot{\phi}^2}{2\phi} + \phi \left(\dot{N}^0 + 3HN^0 \right), \quad (5.191)$$

εκ των οποίων μόνο δύο είναι ανεξάρτητες, όπου, λόγω συμμετριών, όλες οι ποσότητες θα εξαρτώνται μόνο από το χρόνο. Συνεπώς, στις εξισώσεις *Friedmann*, λαμβάνουμε μία τροποποίηση η οποία αντανακλά την μη ολονομικότητα της νηματικής δέσμης της υποβόσκουσας Γεωμετρίας τύπου *Finsler*.

Θα αποδειχθεί τώρα πως αυτή η κατασκευή μπορεί να οδηγήσει στην υλοποίηση Αναπήδησης. Από τις εξισώσεις *Friedmann*, (5.189) και (5.190), συνάγουμε ότι είναι δυνατή η επιλογή μίας ορισμένης μη ολονομικής συνάρτησης $N^0(t)$ η οποία θα ικανοποιεί τις συνθήκες Αναπήδησης των σχέσεων (5.4) και (5.5), και συνεπώς θα επάγει την Αναπήδηση. Ξεκινάμε από το επιθυμητό αποτέλεσμα, δηλαδή επιβάλλουμε ως είσοδο έναν

παράγοντα κλίμακας $a(t)$ θα έχει Αναπηδητική συμπεριφορά. Επομένως, το $H(t)$ είναι επίσης γνωστό. Απαλείφοντας το N^0 από τις σχέσεις (5.189) και (5.190), οδηγούμαστε στην ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{\phi}(t) + 5H(t)\dot{\phi}(t) + 2\phi(t)[\dot{H}(t) + 3H(t)^2] = 0, \quad (5.192)$$

η οποία μπορεί να επιλυθεί παρέχοντας το $\phi(t)$. Στην συνέχεια, το $\phi(t)$ αντικαθίσταται στην σχέση (5.189) και μας δίνει το $N^0(t)$ ως

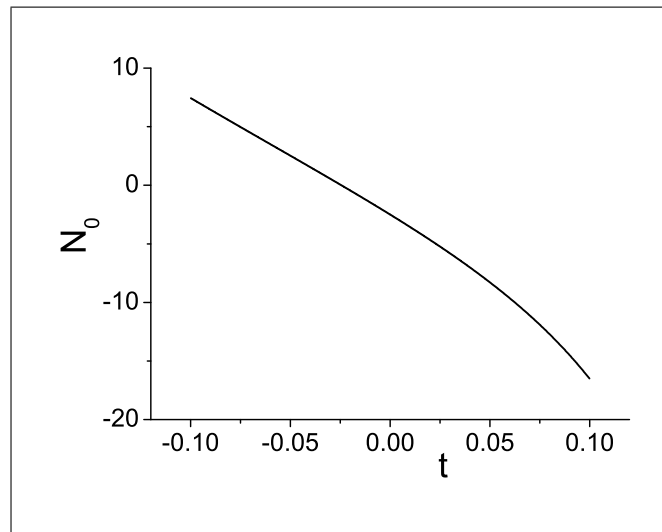
$$N_0(t) = -6 \left[\frac{H(t)}{\phi(t)} + \frac{\dot{\phi}(t)}{24\phi(t)^2} + \frac{H(t)^2}{\dot{\phi}(t)} \right]. \quad (5.193)$$

Συνεπώς αυτή η μορφή του $N_0(t)$, η οποία επάγεται από την μη γραμμική συνοχή της Γεωμετρίας τύπου Finsler, η οποία παράγει τον αρχικά δεδομένο επιθυμητό παράγοντα κλίμακας Αναπήδησης, $a(t)$.

Κλείνουμε το παρόν υποεδάφιο παρέχοντας έν ρητό παράδειγμα υλοποίησης Αναπήδησης. Θα χρησιμοποιήσουμε τον παράγοντα κλίμακας Αναπήδησης της σχέσης (5.48) ως είσοδο, και εφαρμόζουμε τα προηγούμενα βήματα.

Αρχικά, επιλύουμε αριθμητικά την σχέση (5.192) ώστε να καθοριστεί το $\phi(t)$, και τότε χρησιμοποιούμε την σχέση (5.193) για να βρεθεί το $N_0(t)$. Στο σχήμα 5.4, απεικονίζεται η λύση για το $N_0(t)$.

Επομένως, εάν αυτό το $N_0(t)$ επιβληθεί ως είσοδος, λαμβάνουμε την υλοποίηση Αναπήδησης και, ειδικότερα τον παράγοντα κλίμακας Αναπήδησης της σχέσης (5.48).



Σχήμα 5.4: Ανακατασκευασμένο χρονοεξαρτώμενο τμήμα $N_0(t)$ σχετιζόμενο με τη μη γραμμική συνοχή για την μη ολονομική βάση υπό τον επιβαλλόμενο παράγοντα κλίμακας Αναπήδησης της σχέσης (5.48) με $B = 1$, σε μονάδες όπου $8\pi G = 1$.

5.8 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό, διερευνήσαμε την υλοποίηση Αναπήδησης, στο πλαίσιο της βαρύτητας **Finsler** και τύπου **Finsler**. Οι γεωμετρίες **Finsler** και τύπου **Finsler**, αποτελούν φυσικές επεκτάσεις της γεωμετρίας **Riemann**, στις οποίες επιτρέπεται η απευθείας εξάρτηση των φυσικών ποσοτήτων από την τετρααχύτητα του παρατηρητή. Επομένως, η βαρυτική θεωρία που βασίζεται σε βαρύτητα **Finsler** και τύπου **Finsler** παρέχει βαρυτική τροποποίηση, εφόσον επάγει επιπρόσθετους όρους στις εξισώσεις πεδίου. Όταν εφαρμόζεται σε ένα κοσμολογικό πλαίσιο, η πλουσιότερη εσωτερική δομή των γεωμετριών **Finsler** και τύπου **Finsler**, αντανακλάται στους επιπρόσθετους όρους στις προκύπτουσες τροποποιημένες εξισώσεις **Friedmann**. Συνεπώς, οι όροι αυτοί μπορούν να οδηγήσουν σε υλοποιήσεις Αναπήδησης. Στη δική μας ανάλυση, θεωρήσαμε διάφορες **Finsler** και τύπου **Finsler** κατασκευές και εξετάσαμε αν θα μπορούσαν να αποκτηθούν Αναπηδητικές λύσεις.

Ως πρώτο μοντέλο, θεωρήσαμε την αποκαλούμενη **General very special relativity**, η οποία παρουσιάζει ασθενή παραβίαση **Lorentz**, η οποία ποσοτικοποιείται από μία μοναδική παράμετρο, και μία υποθετική 1- μορφή. Όπως αποδείξαμε, υπό γραμμική προσέγγιση, το σενάριο δε μπορεί να οδηγήσει σε Αναπήδηση. Ωστόσο, θεωρώντας το χώρο **Finsler - Randers**, στον οποίο η εσωτερική **Finsler** δομή αντανακλάται στην παρουσία μίας καινούργιας συνάρτησης στις εξισώσεις **Friedmann** (της μεταβολής της ανισοτροπίας), είδαμε ότι οι συνθήκες αναπήδησης μπορούν εύκολα να ικανοποιηθούν και συνεπώς, η αναπήδηση μπορεί να υλοποιηθεί. Ως επόμενη κατασκευή, εξετάσαμε τη βαρύτητα τύπου **Finsler** στην επαπτόμενη δέσμη. Εκτελώντας την ανάλυση και θεωρώντας τους δύο εμπλεκόμενους τανυστές καμπυλότητας, εξαγάγαμε τις εξισώσεις **Friedmann**, οι οποίες περιέχουν μία τροποποίηση προερχόμενη από τη σχετιζόμενη με την επαπτόμενη δέσμη S -καμπυλότητα. Παρόλα αυτά, για απλά μοντέλα και συνήθη ύλη, αυτοί οι επιπρόσθετοι όροι δε μπορούν να οδηγήσουν σε Αναπηδητική λύση, εφόσον δε μπορούν να προκαλέσουν παραβίαση της μηδενικής ενεργειακής συνθήκης. Ως τελευταία κατασκευή, μελετήσαμε θεωρίες οι οποίες περιλαμβάνουν τομείς βαθμωτού - τανυστή στη νηματική δέσμη. Οι θεωρίες αυτές, παρουσιάζουν μία πολύ πλούσια δομή, αποκαλύπτοντας τις ικανότητες της γεωμετρίας τύπου **Finsler**. Συγκεκριμένα, η μη γραμμική συνοχή επάγει ένα νέο βαθμό ελευθερίας, ο οποίος συμπεριφέρεται ως βαθμωτό υπό μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Σε ένα κοσμολογικό πλαίσιο, αυτό το βαθμωτό πεδίο εμφανίζεται στις εξισώσεις **Friedmann**, και επιπλέον η δυναμική του μπορεί να δώσει το έναυσμα για μία Αναπήδηση. Στην περίπτωση μίας ολονομικής βάσης, αποδείξαμε πως η Αναπήδηση θα μπορούσε εύκολα να αποκτηθεί, και παρείχαμε έναν τρόπο ανακατασκευής του δυναμικού, ο οποίος οδηγεί στον επιθυμητό παράγοντα κλίμακας Αναπήδησης. Ομοίως, για την περίπτωση μίας μη ολονομικής βάσης, είδαμε πως η αναπήδηση θα μπορούσε εύκολα να υλοποιηθεί, και παρουσιάσαμε τη διαδικασία ανακατασκευής του χρονικού συντελεστή που σχετίζεται με τη μη γραμμική συνοχή, η οποία επάγει την επιθυμητή Αναπήδηση.

Συνοψίζοντας, είδαμε ότι οι γεωμετρίες **Finsler** και τύπου **Finsler**, αποτελούν φυσικά πλαίσια για την υλοποίηση Κοσμολογικής Αναπήδησης. Εκτός από την εξέλιξη του υποβάθρου, θα μπορούσε κάποιος επιπροσθέτως να ερευνήσει διάφορα σενάρια στα επίπεδα της διαταραχής, εφόσον η διαδικασία των διαταραχών διά μέσου της φάσης της

Αναπήδησης, είναι ισχυρά συσχετισμένη με τη μεταγενέστερη ανάπτυξη της μεγάλης κλίμακας δομής, και επομένως με τις παρατηρήσεις. Μία τέτοια λεπτομερής ανάλυση διαταραχών, βρίσκεται πέρα από το σκοπό της παρούσας διατριβής και αφήνεται για μελλοντική διερεύνηση.

Σύνοψη

Η γενική θεωρία της σχετικότητας, εισήγαγε την ενιαία θεώρηση του χώρου και του χρόνου, ως μίας μοναδικής οντότητας, του χωροχρόνου. Με τον τρόπο αυτό, κάθε φυσική ποσότητα που εξαρτάται από τις χωρικές και χρονικές συντεταγμένες, εκφράζεται σε συναλλοίωτη μορφή με τη χρήση της διαφορικής γεωμετρίας, θεμελιώδη έννοια της οποίας συνιστά η πολλαπλότητα.

Η πολλαπλότητα αποτελεί γενίκευση της επιφάνειας. Ως εκ τούτου, σε μία πολλαπλότητα ορίζονται όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα (βαθμωτά, διανυσματικά και τανυστικά πεδία, ανταλλοίωτα-συναλλοίωτα), με όμοιες ιδιότητες και νόμους μετασχηματισμού όπως και στην επιφάνεια. Αν σε κάθε σημείο μίας πολλαπλότητας κατασκευάσουμε έναν εφαπτόμενο χώρο, η ένωση όλων αυτών των χώρων είναι μία πολλαπλότητα διπλάσιας διάστασης από την αρχική, η οποία καλείται εφαπτόμενη δέσμη. Η γενίκευση της εφαπτόμενης δέσμης ονομάζεται νηματική δέσμη. Στην πολλαπλότητα **Riemann**, οι συνιστώσες του μετρικού τανυστή, καθώς και όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα που αφορούν το χωρόχρονο (συνοχή, καμπυλότητα κτλ), εξαρτώνται από τις συντεταγμένες θέσης επί της πολλαπλότητας. Επειδή η συνήθης διαφορίση ενός διανύσματος ή τανυστή παρέχει μία μη τανυστική μορφή, ορίζεται η πράξη της συναλλοίωτης παραγώγισης. Το γεωμετρικό αυτό πλαίσιο, αποτελεί τη βάση για τη θεμελίωση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Η καμπύλωση του χωροχρόνου, είναι αποτέλεσμα της παρουσίας της βαρύτητας, υπό την επίδραση της οποίας κινείται η ύλη. Οι φυσικές τροχιές σωματιδίων στο χωρόχρονο, αναπαρίστανται από γεωδαισιακές καμπύλες. Η απόκλιση των γεωδαισιακών δημιουργεί τις παλιρροϊκές δυνάμεις.

Μία φυσική γενίκευση της γεωμετρίας **Riemann**, αποτελεί η γεωμετρία **Finsler**, στην οποία όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα εξαρτώνται, εκτός από τη θέση, και από ένα όρισμα κατεύθυνσης ή ταχύτητας. Εξαιτίας αυτής της εξάρτησης από την ταχύτητα, στη γεωμετρία **Finsler**, υπάρχουν διάφορες κατάλληλες συνοχές και ως εκ τούτου, ποικίλοι τρόποι ορισμού της συναλλοίωτης διαφορίσης και της καμπυλότητας. Τις χαρακτηριστικότερες περιπτώσεις, αποτελούν η θεωρία **Berwald** και η θεωρία **Cartan**. Η συνοχή **Cartan** συνιστά καταλληλότερη επιλογή για τη μελέτη θεωριών βαρύτητας, καθώς είναι μετρικά συμβατή, δηλαδή διατηρεί τη νόρμα των διανυσμάτων υπό παράλληλη μετατόπιση, όπως συμβαίνει και με τη συνοχή **Levi - Civita** στη γεωμετρία **Riemann**. Η γεωμετρία **Finsler** είναι χρήσιμη στη μελέτη της βαρύτητας, καθώς ενσωματώνει την τοπική ανισοτροπία ως εγγενή ιδιότητα του χωροχρόνου, περιγράφει συστήματα με αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας **Lorentz**, παρέχει πληροφορία για την κίνηση της μάζας και

επιτρέπει τον απευθείας προσδιορισμό του μετρικού τανυστή από τη Λαγκρανζιανή του συστήματος.

Στη γενική θεωρία της σχετικότητας, η δυναμική του βαρυτικού πεδίου, εμπεριέχεται εξ ολοκλήρου στις εξισώσεις πεδίου του **Einstein**, οι οποίες προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση της δράσης, με τη χρήση του λογισμού των μεταβολών. Στην περίπτωση όπου το πεδίο είναι ασθενές, οι εξισώσεις **Einstein**, παρέχουν ως λύσεις τα βαρυτικά κύματα, με κατάλληλη επιλογή βαθμίδας.

Η γεωμετρική δομή ενός ομογενούς και ισότροπου σύμπαντος, χαρακτηρίζεται από τη μετρική **Friedmann - Lemaitre - Robertson - Walker**, ενώ η χρονική του εξέλιξη, καθορίζεται από τις εξισώσεις **Friedmann**. Η εικόνα αυτή είναι αληθής σε μεγάλες κλίμακες παρατήρησης (σε ακτίνα μεγαλύτερη από 10^8 έτη φωτός), με την κατανομή ύλης και ενέργειας στο σύμπαν να περιγράφεται από το καθιερωμένο πρότυπο της κοσμολογίας, ενώ προστίθεται σε αυτό η πληθωριστική φάση, προκειμένου να είναι δυνατή σε ικανοποιητικό βαθμό, η ερμηνεία των παρατηρούμενων σε μεγάλη κλίμακα ιδιοτήτων του σύμπαντος (ομογένεια, ισοτροπία, επιπεδότητα, μη ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων). Η γεωμετρική περιγραφή του πληθωριστικού μοντέλου, επιτυγχάνεται μέσω μίας θεωρίας, στην οποία ένα βαθμωτό πεδίο, το οποίο ονομάζεται **inflaton**, εμφανίζεται συζευγμένο με τη βαρύτητα. Η ανάλυση αυτή, μπορεί να γενικευθεί στο πλαίσιο των θεωριών βαθμωτού - τανυστή, η πιο διαδεδομένη εκ των οποίων είναι η θεωρία **Brans - Dicke**. Η εξέλιξη της διαστολής, της παραμόρφωσης και του στροβιλισμού στο σύμπαν, περιγράφεται από τις εξισώσεις **Raychaudhuri**, οι οποίες οδηγούν σε συγκεκριμένες ενεργειακές συνθήκες, εφόσον καθένα από τα συστατικά του σύμπαντος (ακτινοβολία, ύλη, ενέργεια του κενού), θεωρείται ως ιδανικό ρευστό, με δεδομένη πυκνότητα ενέργειας και πίεση.

Ωστόσο, σε μικρότερες κλίμακες, παρατηρείται ασθενής ανισοτροπία, η οποία έχει υπολογίσιμη επίπτωση στις κοσμολογικές παραμέτρους, γεγονός που επιτάσσει την ανάγκη τροποποίησης της κλασικής βαρύτητας. Μία κατάλληλη επιλογή για μία τέτοια τροποποίηση, συνιστούν οι θεωρίες βαρύτητας που βασίζονται στις γεωμετρικές **Finsler** και τύπου **Finsler**. Χαρακτηριστικότερα παραδείγματα τέτοιων θεωριών, αποτελούν η **General very special relativity**, η κοσμολογία **Finsler - Randers**, η γενικευμένη βαρύτητα τύπου **Finsler** στην επαπτόμενη δέσμη και μία θεωρία βαθμωτού - τανυστή σε νηματική δέσμη. Στις θεωρίες αυτές, ο **Finslerian** χαρακτήρας της γεωμετρίας, επάγει επιπρόσθετους όρους ανισοτροπίας, με συνέπεια την τροποποίηση των εξισώσεων πεδίου. Υπό ορισμένες προϋποθέσεις, τέτοια μοντέλα μπορούν να είναι κατάλληλα για την κατασκευή σεναρίων κοσμολογικής αναπήδησης, δηλαδή ταλαντωτικών λύσεων που εξασφαλίζουν μία συνεχή μετάβαση του σύμπαντος, από συστολική σε διαστολική φάση. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα των μοντέλων αναπήδησης, έγκειται στη δυνατότητα εξάλειψης της σημειακής ανωμαλίας που παρατηρείται στο σημείο της μεγάλης έκρηξης.

Συγκεκριμένα, στην κοσμολογία Finsler - Randers, καθώς και στη θεωρία βαθμωτού - τανυστή σε νηματική δέσμη, η υλοποίηση Αναπήδησης επιτυγχάνεται εύκολα, ενώ στην GVSR, όπως και στη γενικευμένη βαρύτητα τύπου Finsler στην εφαπτόμενη δέσμη, η κατασκευή Αναπηδητικών λύσεων χωρίς την υιοθέτηση πιο σύνθετων προσεγγίσεων της θεωρίας είναι αδύνατη.

Βιβλιογραφία

- [1] T. Biswas, A. Mazumdar and W. Siegel, *Bouncing universes in string-inspired gravity*, JCAP 0603, 009 (2006).
- [2] Y. F. Cai, T. Qiu, Y. S. Piao, M. Li and X. Zhang, *Bouncing universe with quintom matter*, JHEP 0710, 071 (2007).
- [3] Y. F. Cai, T. t. Qiu, R. Brandenberger and X. m. Zhang, *A Nonsingular Cosmology with a Scale-Invariant Spectrum of Cosmological Perturbations from Lee-Wick Theory*, Phys. Rev. D 80, 023511 (2009).
- [4] Y. F. Cai, D. A. Easson and R. Brandenberger, *Towards a Nonsingular Bouncing Cosmology*, JCAP 1208, 020 (2012).
- [5] Y. F. Cai, *Exploring Bouncing Cosmologies with Cosmological Surveys*, Sci. China Phys. Mech. Astron. 57, 1414 (2014).
- [6] R. Brandenberger and P. Peter, *Bouncing Cosmologies: Progress and Problems*, Found. Phys. 47, no. 6, 797 (2017).
- [7] M. Novello and S. E. P. Bergliaffa, *Bouncing Cosmologies*, Phys. Rept. 463, 127 (2008).
- [8] R. C. Tolman, *On the Theoretical Requirements for a Periodic Behaviour of the Universe*, Phys. Rev. 38, no. 9, 1758 (1931).
- [9] A. Ijjas and P. J. Steinhardt, *Bouncing Cosmology made simple*, Class. Quant. Grav. 35, no. 13, 135004 (2018).
- [10] T. Singh, R. Chaubey and A. Singh, *Bounce conditions for FRW models in modified gravity theories*, Eur. Phys. J. Plus 130, no. 2, 31 (2015).
- [11] A. Barrau, B. Bolliet, M. Schutten and F. Vidotto, *Bouncing black holes in quantum gravity and the Fermi gamma-ray excess*, Phys. Lett. B 772, 58 (2017).
- [12] Gasperini, M.; Giovannini, M.; Veneziano, G. *Perturbations in a nonsingular bouncing universe*. Phys. Lett. B 569, 113-122 (2003).
- [13] Gasperini, M.; Giovannini, M.; Veneziano, G. *Cosmological perturbations across a curvature bounce*. Nucl. Phys. B 694, 206-238 (2004).

- [14] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt and N. Turok, *The ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang*, Phys. Rev. D 64, 123522 (2001).
- [15] J. Khoury, B. A. Ovrut, N. Seiberg, P. J. Steinhardt and N. Turok, *From big crunch to big bang*, Phys. Rev. D 65, 086007 (2002).
- [16] S. Nojiri and E. N. Saridakis, *Phantom without ghost*, Astrophys. Space Sci. 347, 221 (2013).
- [17] K. Bamba, A. N. Makarenko, A. N. Myagky, S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Bounce cosmology from $F(R)$ gravity and $F(R)$ bigravity*, JCAP 1401, 008 (2014).
- [18] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Mimetic $F(R)$ gravity: inflation, dark energy and bounce*, Mod. Phys. Lett. A 29, No. 40, 1450211 (2014).
- [19] Y. -F. Cai, S. -H. Chen, J. B. Dent, S. Dutta and E. N. Saridakis, *Matter Bounce Cosmology with the $f(T)$ Gravity*, Class. Quant. Grav. 28, 215011 (2011).
- [20] Y. Shtanov and V. Sahni, *Bouncing braneworlds*, Phys. Lett. B 557, 1 (2003).
- [21] E. N. Saridakis, *Cyclic Universes from General Collisionless Braneworld Models*, Nucl. Phys. B 808, 224 (2009).
- [22] Brandenberger, R. *Matter bounce in Horava-Lifshitz cosmology*. Phys. Rev. D 80, 43516 (2009).
- [23] Y. F. Cai and E. N. Saridakis, *Non-singular cosmology in a model of non-relativistic gravity*, JCAP 0910, 020 (2009).
- [24] E. N. Saridakis, *Horava-Lifshitz Dark Energy*, Eur. Phys. J. C 67, 229 (2010).
- [25] D. A. Easson, I. Sawicki and A. Vikman, *G-Bounce*, JCAP 1111, 021 (2011).
- [26] T. Qiu, X. Gao and E. N. Saridakis, *Towards anisotropy-free and nonsingular bounce cosmology with scale-invariant perturbations*, Phys. Rev. D 88, no. 4, 043525 (2013).
- [27] Y. F. Cai, C. Gao and E. N. Saridakis, *Bounce and cyclic cosmology in extended nonlinear massive gravity*, JCAP 1210, 048 (2012).
- [28] Y. -F. Cai and E. N. Saridakis, *Cyclic cosmology from Lagrange-multiplier modified gravity*, Class. Quant. Grav. 28, 035010 (2011).
- [29] M. Bojowald, *Absence of singularity in loop quantum cosmology*, Phys. Rev. Lett. 86, 5227 (2001).
- [30] S. D. Odintsov and V. K. Oikonomou, *Matter Bounce Loop Quantum Cosmology from $F(R)$ Gravity*, Phys. Rev. D 90, no. 12, 124083 (2014).
- [31] S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou and E. N. Saridakis, *Superbounce and Loop Quantum Ekpyrotic Cosmologies from Modified Gravity: $F(R)$, $F(G)$ and $F(T)$ Theories*, Annals Phys. 363, 141 (2015).

- [32] F. A. Membiela, *Primordial magnetic fields from a non-singular bouncing cosmology*, Nucl. Phys. B 885, 196 (2014).
- [33] G. Y. Bogoslovsky and H. F. Goenner, *Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry*, Gen. Rel. Grav. 31, 1565 (1999).
- [34] Z. Chang and X. Li, *Lorentz invariance violation and symmetry in Randers-Finsler spaces*, Phys. Lett. B 663, 103 (2008).
- [35] A. P. Kouretsis, M. Stathakopoulos and P. C. Stavrinos, *Imperfect fluids, Lorentz violations and Finsler Cosmology*, Phys. Rev. D 82, 064035 (2010).
- [36] S. I. Vacaru, *Principles of Einstein-Finsler Gravity and Perspectives in Modern Cosmology*, Int. J. Mod. Phys. D 21, 1250072 (2012).
- [37] N. E. Mavromatos, S. Sarkar and A. Vergou, *Stringy Space-Time Foam, Finsler-like Metrics and Dark Matter Relics*, Phys. Lett. B 696, 300 (2011).
- [38] S. I. Vacaru, *Modified Dispersion Relations in Horava-Lifshitz Gravity and Finsler Brane Models*, Gen. Rel. Grav. 44, 1015 (2012).
- [39] N. E. Mavromatos, V. A. Mitsou, S. Sarkar and A. Vergou, *Implications of a Stochastic Microscopic Finsler Cosmology*, Eur. Phys. J. C 72, 1956 (2012).
- [40] R. Gallego Torrome, P. Piccione and H. Vitorio, *On Fermat's principle for causal curves in time oriented Finsler spacetimes*, J. Math. Phys. 53, 123511 (2012).
- [41] S. Basilakos, A. P. Kouretsis, E. N. Saridakis and P. Stavrinos, *Resembling dark energy and modified gravity with Finsler-Randers cosmology*, Phys. Rev. D 88, 123510 (2013).
- [42] S. Basilakos and P. Stavrinos, *Cosmological equivalence between the Finsler-Randers space-time and the DGP gravity model*, Phys. Rev. D 87, No. 4, 043506 (2013).
- [43] M. Hohmann and C. Pfeifer, *Geodesics and the magnitude-redshift relation on cosmologically symmetric Finsler spacetimes*, Phys. Rev. D 95, No. 10, 104021 (2017).
- [44] M. Hohmann, C. Pfeifer and N. Voicu, *Finsler gravity action from variational completion*, arXiv:1812.11161 [gr-qc].
- [45] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, England (1999).
- [46] V. Perlick, *Ray Optics, Fermat's principle and applications to General Relativity*, Springer, Heidelberg (2000).
- [47] C. Barcelo, S. Liberati and M. Visser, *Analogue gravity*, Living Rev. Rel. 8, 12 (2005).
- [48] P. C. Stavrinos and S. I. Vacaru, *Cyclic and Ekpyrotic Universes in Modified Finsler Osculating Gravity on Tangent Lorentz Bundles*, Class. Quant. Grav. 30, 055012 (2013).

- [49] A. Triantafyllopoulos and P. C. Stavrinos, *Weak field equations and generalized FRW cosmology on the tangent Lorentz bundle*, Class. Quant. Grav. 35, no. 8, 085011 (2018).
- [50] A.P. Kouretsis, M. Stathakopoulos, and P.C. Stavrinos, *Covariant kinematics and gravitational bounce in Finsler space-times*, Phys. Rev. D 86 124025 (2012).
- [51] T. Koivisto and D. F. Mota, *Anisotropic Dark Energy: Dynamics of Background and Perturbations*, JCAP 0806, 018 (2008).
- [52] P.C. Stavrinos and S. Ikeda, *Some connections and variational principle to the Finslerian scalar-tensor theory of gravitation*, Rep. Math. Phys. 44 221-230 (1999).
- [53] P. C. Stavrinos and M. Alexiou, *Raychaudhuri equation in the Finsler-Randers space-time and generalized scalar-tensor theories*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 15, no. 03, 1850039 (2017).
- [54] B. Xue and P. J. Steinhardt, *Evolution of curvature and anisotropy near a nonsingular bounce*, Phys. Rev. D 84, 083520 (2011).
- [55] Gasperini, M. *Inflation and broken Lorentz symmetry in the very early universe*. Phys. Lett. 163, 84-86 (1985).
- [56] Gasperini, M. *Repulsive gravity in the very early universe* . Gen. Relat. Gravity 30, 1703-1709 (1998).
- [57] A.P. Kouretsis, M. Stathakopoulos and P.C. Stavrinos, *General very special relativity in Finsler cosmology*, Phys. Rev. D 79 104011 (2010).
- [58] A. G. Cohen and S. L. Glashow, *Very special relativity*, Phys. Rev. Lett. 97, 021601 (2006).
- [59] G. W. Gibbons, J. Gomis and C. N. Pope, *General very special relativity is Finsler geometry*, Phys. Rev. D 76, 081701 (2007).
- [60] C. M. Will, *The Confrontation between general relativity and experiment*, Living Rev. Rel. 9, 3 (2006).
- [61] Q. G. Bailey, R. D. Everett and J. M. Overduin, *Limits on violations of Lorentz Symmetry from Gravity Probe B*, Phys. Rev. D 88, 102001 (2013).
- [62] P. C. Stavrinos, *Congruences of Fluids in a Finslerian Anisotropic Space-Time*. Int. J. Theor. Phys 44, 245 (2005).
- [63] P. C. Stavrinos, A. P. Kouretsis and M. Stathakopoulos, *Friedmann Robertson-Walker model in generalised metric space-time with weak anisotropy*, Gen. Rel. Grav. 40, 1403 (2008).
- [64] S. Vacaru, P. Stavrinos, E. Gaburov and D. Gonța, *Clifford and Riemann-Finsler structures in geometric mechanics and gravity*, Geometry Balkan Press, Bucharest, Romania (2006).

- [65] I. Bucataru, R. Miron, *Finsler-Lagrange geometry*, Editura Academiei Romane (2007).
- [66] R. Miron and M. Anastasiei, *The geometry of Lagrange spaces: theory and applications*, Springer Science & Business Media (2012).
- [67] Pfeifer, C.; Wohlfarth, M.N.R. *Finsler geometric extension of Einstein gravity*. *Phys. Rev. D* 85, 64009 (2012).
- [68] Caianiello, E.R.; Feoli, A.; Gasperini, M.; Scarpetta, G. *Quantum corrections to the space-time metric from geometric phase space quantization*. *Int. J. Theor. Phys.* 29, 131-139 (1990).
- [69] Caianiello, E.R.; Gasperini, M.; Scarpetta, G. *Inflation and singularity prevention in a model for extended-object-dominated cosmology*. *Class. Quantum Gravity* 8, 659 (1991).
- [70] Gasperini, M. *A geometric regularization procedure for the curvature of cosmological background*. In *Proceedings of the Workshop "Advances in Theoretical Physics"*, Vietri, Italy, October 1990. World Scientific: Singapore, 1991.
- [71] R. Miron, S. Watanabe, S. Ikeda, *Some connections on tangent bundle and their applications to general relativity*, *Tensor*, N. S. 46, (1987).
- [72] A. De Felice and S. Tsujikawa, *Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended Galileon dark energy models*, *JCAP* 1202, 007 (2012).
- [73] Y. F. Cai and E. N. Saridakis, *Non-singular Cyclic Cosmology without Phantom Menace*, *J. Cosmol.* 17, 7238 (2011).
- [74] G. Veneziano, *Scale Factor Duality For Classical And Quantum Strings*, *Phys. Lett. B* 265, 287 (1991).
- [75] G. Gireli, S. Liberati, L. Sindoni. *Planck-scale modified dispersion relations and Finsler geometry.*, *Phys. Rev. D* 75, 064015 (2007).
- [76] M.P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, New Jersey (1976).
- [77] P. C. Stavrinos, *Weak gravitational field in Finsler-Randers space and Raychaudhuri equation*. *Gen. Rel. and Grav.* 44, 3029-3045 (2012).
- [78] Georgios Minas, Emmanuel N. Saridakis, Panayiotis C. Stavrinos, Alkiviadis Triantafyllopoulos. *Bounce cosmology in generalized modified gravities*. *Universe* 5(3), 74 (2019).
- [79] A. Y. Shaikh, B. Mishra. *Bouncing scenario of general relativistic hydrodynamics in extended gravity*. *Commun. Theor. Phys.* 73, 025401 (2021).
- [80] W. E. Hanafy, E. N. Saridakis. *$f(T)$ cosmology: From Pseudo-Bang to Pseudo-Rip*. arXiv preprint arXiv:2011.15070 (2020).

- [81] S. I. Nojiri, S. D. Odintsov, E. N. Saridakis. *Holographic bounce*. Nuclear Physics B, 949, 114790 (2019).
- [82] A. Singh, K. C. Mishra. *Aspects of some Rastall cosmologies*. Eur. Phys. J. Plus, 135(9), 1-18 (2020).
- [83] G. Papagiannopoulos, S. Basilakos, A. Paliathanasis, S. Pan, P. Stavrinos. *Dynamics in varying vacuum Finsler-Randers cosmology*. Eur. Phys. J. C 80:816 (2020).
- [84] A. Triantafyllopoulos, S. Basilakos, E. Kapsabelis, P. C. Stavrinos. *Schwartzchild-like solutions in Finsler-Randers gravity*. Eur. Phys. J. C, 80(12), 1-14 (2020).
- [85] M. Hohmann, C. Pfeifer, N. Voicu. *Cosmological Finsler spacetimes*. Universe 6(5) 65 (2020).
- [86] A. Triantafyllopoulos, E. Kapsabelis, P. C. Stavrinos. *Gravitational Field on the Lorentz Tangent Bundle: Generalized Paths and Field Equations*. Eur. Phys. J. Plus, 135, 557 (2020).
- [87] S. Ikeda, E. N. Saridakis, P. C. Stavrinos, A. Triantafyllopoulos. *Cosmology of Lorentz fiber-bundle induced scalar-tensor theories*. Phys. Rev. D. 100, 124035 (2019).
- [88] I. Tavernelli. *Gravitational quantum dynamics: a geometrical perspective*. arXiv preprint arXiv:1801.05689 (2018).
- [89] E. N. Saridakis, S. Myrzakul, K. Myrzakulov, K. Yerzhanov. *Cosmological applications of $f(R,T)$ gravity with dynamical curvature and torsion*. Phys. Rev. D. 102, 023525 (2020).
- [90] Sean M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, San Francisco (2004).
- [91] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman - Princeton University Press, San Francisco (1973).
- [92] C. Pfeifer and M.N.R. Wohlfarth, *Finsler geometric extension of Einstein gravity*. Phys. Rev. D **85** 064009 (2012).
- [93] R. M. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago, Chicago (1984).
- [94] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, Cambridge, Mass. (1971).
- [95] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG, Berlin (1959).