ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Κοσμολογία στη θεωρία Einstein-Aether

Διδακτορική Διατριβή

Ρουμελιώτης Μιχαήλ
AM: 2017522

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Κοσμολογία στη θεωρία Einstein-Aether

Διδακτορική διατριβή

Ρουμελιώτης Μιχαήλ
ΑΜ: 2017522

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Θεοδόσιος Χριστοδουλάκης, Καθηγητής
(Κύριος επιβλέπων)
Θεοχάρης Αποστολάτος, Καθηγητής
Βασίλειος Σπανός, Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, 2021

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θέλω απο την θέση αυτή να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή Θεοδόσιο Χριστοδουλάκη για την απεριόριστη βοήθεια που μου έχει προσφέρει απο τα φοιτητικά μου χρόνια μέχρι και την συγγραφή αυτής της διατριβής. Υπήρξε για μένα όλα αυτά τα χρόνια δάσκαλος, φίλος, σύμβουλος σε κάθε δύσκολη είτε και εύκολη στιγμή της ζωής μου. Το ελάχιστο που θα μπορούσα να προσφέρω απο την θέση αυτή στον μεγάλο δάσκαλο μου είναι να του αφιερώσω αυτή την διδακτορική μου διατριβή.

Θέλω να ευχαριστήσω επίσης και την ερευνητική ομάδα του δασκάλου μου με την οποία δουλέψαμε μαζί αυτά τα χρόνια δηλαδή τους ερευνητές και διδάκτορες Πέτρο Τερζή, Ανδρόνικο Παλιαθανάση. Η συμβολή τους και η βοήθεια τους στάθηκε για μένα πολύτιμη και καθοριστική στην συγγραφή της διατριβής. Επίσης πολλά ευχαριστώ στον ερευνητή διδάκτορα Αλέξανδρο Καραγιώργο για την καθοριστική βοήθεια του στην εγκατάσταση της LaTeX και του Mathematica, απαραίτητων εργαλείων για την διδακτορική διατριβή. Επίσης θέλω να ευχαριστήσω και τον διδάκτορα ερευνητή Θεόδωρο Παΐλα για την βοήθεια του στη LaTeX όποτε την χρειάστηκα.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω και την μητέρα μου Βαρβάρα Ρουμελιώτη για την βοήθεια που μου έχει προσφέρει όλα τα χρόνια της ζωής μου, καθώς και την σύζυγο μου Πλατανιά -Ρουμελιώτη Αγγελική για την υπομονή και την ενθάρρυνση να συνεχίσω και να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην διατριβή αυτή παρουσιάζουμε αρχικά τον χώρο λύσεων των εξισώσεων πεδίου της θεωρίας Eistein-Aether για την περίπτωση του χωρόχρονου FLRW καθώς και για την περίπτωση του χωρόχρονου Locally Rotationally Symmetric (LRS) Bianchi Type III . Στην περίπτωση του FLRW βρίσκουμε ανηγμένες Λαγκρανζιανές που αναπαράγουν σωστά τις εξισώσεις κίνησης. Οι εξισώσεις αυτές δεν επιδέχονται λύσεις για όλο τον χώρο των αρχικών παραμέτρων. Οι ανηγμένες Λαγκρανζιανές συνάγονται μέσω ολοκλήρωσης των μη ουσιωδών συντεταγμένων στην ολική δράση και περιγράφουν σωστά την δυναμική οποτεδήποτε υπάρχουν λύσεις των εξισώσεων. Τελικά στην FLRW περίπτωση υπάρχει μια ανωμαλία καμπυλότητας, ενώ στην περίπτωση του Bianchi Type III υπάρχουν επιλογές του εύρους των παραμέτρων για τις οποίες δεν υπάρχει ανωμαλία καμπυλότητας. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε τον χώρο λύσεων για τις εξισώσεις πεδίου της θεωρίας Eistein-Aether για την περίπτωση του χωρόχρονου vacuum Bianchi Type V . Βρίσκουμε τμήματα του πεδίου ορισμού των αρχικών παραμέτρων για τα οποία οι ανηγμένες εξισώσεις πεδίου δεν επιδέχονται καμία λύση. Οποτεδήποτε υπάρχουν λύσεις εξετάζεται η φυσική τους ερμηνεία μέσα απο την συμπεριφορά των βαθμωτών Ricci και Kretschmann, καθώς επίσης και η ταυτοποίηση του τελεστή ενέργειας-ορμής σε σχέση με ένα ιδανικό ρευστό. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου δεν παρατηρείται καμία ανωμαλία και άλλες όπου το ενεργό ρευστό είναι ισοτροπικό.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το κύριο πλαίσιο στις τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας είναι οι νέες γεωμετρικές μεταβλητές που εισάγονται στην δράση Einstein- Hilbert της γενικής σχετικότητας, (για μια τελευταία ανασκόπηση αναφερόμαστε στα [1, 2]) .Οι τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας αποτελουν ένα θέμα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος για την επιστημονική κοινότητα τα τελευταία χρόνια γιατί μπορούν να περιγράψουν παρατηρήσημα φαινόμενα [3, 4, 5, 6, 7, 8] με γεωμετρική προσέγγιση. Πιο συγκεκριμμένα οι γεωμετρικές μεταβλητές που εισάγονται στην δράση Einstein-Hilbert, εισάγουν νέες συνιστώσες στις βαρυτικές εξισώσεις πεδίου. Αυτό αλλάζει την δυναμική των εξισώσεων πεδίου με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να περιγράφουν σωστά διάφορα παρατηρήσημα φαινόμενα [9].

Στην εργασία αυτή ενδιαφερόμαστε για την Einstein-Aether θεωρία [10, 11, 12, 13, 14]. Σε αυτή την θεωρία εισάγεται ένα μοναδιαίο χρονοειδές διανυσματικό πεδίο το οποίο περιγράφει την κίνηση του αιθέρα και εισάγεται στην βαρυτική δράση. Η τροποποίηση αυτή προσθέτει στην δράση Einstein-Hilbert ένα κινητικό όρο τετραγωνικό στις συναλλοιωτες παραγώγους πεδίου καθώς και έναν πολλαπλασιαστή Lagrange εξασφαλίζοντας ότι το διανυσματικό πεδίο είναι μοναδιαίο. Με βάση τον ορισμό της η βαρύτητα Einstein-Aether είναι μια θεωρία δεύτερης τάξης, ωστόσο, εξαιτίας της ύπαρξης μη γραμμικών όρων στο πεδίο του αιθέρα, υπάρχουν ελάχιστες ακριβείς λύσεις. Για εφαρμογές της βαρύτητας Einstein-Aether στις κοσμολογικές μελέτες παραπέμπουμε στις [15, 16, 17, 18, 19]. Αυτή η τροποποίηση παραβιάζει αυθόρμητα την συμμετρία Lorentz [20], επιλέγοντας ένα κατάλληλο πλαίσιο σε κάθε σημείο στον χωρόχρονο διατηρώντας παράλληλα την τοπική περιστροφική συμμετρία. Οι εξισώσεις του βαρυτικού πεδίου είναι δεύτερης τάξης και αντιστοιχούν στις μεταβολές της δράσης σε σχέση με τον μετρικό τανυστή, το πεδίο του αιθέρα και τον πολλαπλασιαστή Lagrange. Υπάρχουν διάφορες εφαρμογές της θεωρίας Einstein-Aether σε κοσμολογικές μελέτες. Έχει χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει την τελευταία φάση επιτάχυνσης του σύμπαντος, ως εναλλακτική λύση στα μοντέλα σκοτεινής ενέργειας [21], αλλά και για την πρώιμη εποχή της ανάπτυξης του σύμπαντος [22]. Επίσης , η Einstein-Aether θεωρία μπορεί να θεωρηθεί ως το κλασικό όριο της βαρύτητας Horava [23, 24]. Ορισμένες ακριβείς λύσεις καθώς και ποιοτική ανάλυση αυτής της θεωρίας σε κοσμολογικές μελέτες σε στατικούς σφαιρικώς συμμετρικούς χωρόχρονους μπορεί να βρεθεί στα [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36] και στις εκεί παραπομπές.

Η βασική ιδέα στη θεωρητική φυσική είναι η μαθηματική περιγραφή της φύσης. Η αρχή της στασιμότητας της δράσης περιγράφει καλά τα φαινόμενα από όλες τις περιοχές της φυσικής, τη Νευτώνεια μηχανική, τη γενική σχετικότητα και την κβαντική μηχανική. Προϋπόθεση για την εφαρμογή αυτής της αρχής της στασιμότητας της δράσης είναι η ύπαρξη μιας Λαγκρανζιανής συνάρτησης. Αυτή η συνάρτηση αποτελείται από το βαθμωτό Ricci στην περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας του Einstein, συμπληρώνεται από έναν κινητικό όρο του πεδίου του αιθέρα και από ένα πολλαπλασιαστή Lagrange που εξασφαλίζει τη μοναδιαία συνθήκη για την περίπτωση της θεωρίας Einstein-Aether.

Ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων δεν περιγράφεται μονοσήμαντα από μία μόνο συνάρτηση Lagrange [37]. Πράγματι, είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερες από μία συναρτήσεις Lagrange, για παράδειγμα, οποιαδήποτε μη γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας $\dot{q}$, π.χ. $f(\dot{q})$, περιγράφει το ελεύθερο σωματίδιο στη μηχανική του Νεύτωνα. Στην γενική σχετικότητα, η Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι συνάρτηση του μετρικού τανυστή και των πρώτων και δεύτερων μερικών παραγώγων του (μέσω του βαθμωτού Ricci). Αυτή η αρχή δράσης Einstein-Hilbert αναπαράγει σωστά τις εξισώσεις πεδίου όταν όλες οι συνιστώσες της μετρικής μεταβάλλονται ανεξάρτητα. Ωστόσο, όταν λαμβάνονται υπόψη συγκεκριμένες μετρικές, συνήθως επιβάλλοντας κάποια συμμετρία, η κατάσταση δεν είναι απλή. Εάν η συμμετρία επιβληθεί στην πλήρη δράση και οι πλεονάζουσες μεταβλητές ολοκληρωθούν εκτός της δράσης, η ανηγμένη δράση μπορεί να μεταβάλλεται μόνο σε σχέση με τις υπόλοιπες εξαρτημένες μεταβλητές. Οι επακόλουθες εξισώσεις κίνησης μπορούν ή όχι να είναι ισοδύναμες με τις ανηγμένες εξισώσεις Einstein, π.χ οι εξισώσεις που προκύπτουν από την επιβολή της συμμετρίας στις πλήρεις εξισώσεις πεδίου του Einstein. Όταν είναι ισοδύναμες η αντίστοιχη ανηγμένη Λαγκρανζιανή καλείται έγκυρη. Ένα πολύ γνωστό παράδειγμα μιας μη έγκυρης περίπτωσης είναι η οικογένεια κατηγοριών B των μοντέλων Bianchi (βλέπε π.χ. [38], [39] και αναφορές σε αυτά). Σε αυτή την περίπτωση μπορεί κανείς να ψάξει για άλλη Λαγκρανζιανή που να αναπαραγάγει σωστά τις ανηγμένες εξισώσεις Einstein [40]. Η σημασία της ύπαρξης μιας Λαγκρανζιανής περιγραφής ενός δεδομένου συνόλου εξισώσεων έγκειται στις μεθόδους προσέγγισης της αναλυτικής Μηχανικής που μπορούν να εφαρμοστούν για να μελετήσουν την εξέλιξη των εξισώσεων πεδίου και την ενσωμάτωσή τους [41, 42, 43, 44, 45, 46, 47]. Εξάλλου, στην προσέγγιση minisuperspace (όπου η ανηγμένη Λαγκρανζιανή παίρνει τη μορφή μιας σημειακής Λαγκρανζιανής), τα κβαντικά ανάλογα των κλασικών ολοκληρωμάτων της κίνησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συμπληρωματικές συνθήκες στις εξισώσεις Wheeler-DeWitt [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54].

Η κλάση των χωρικών ομογενών κοσμολογιών Bianchi περιέχει πολλά σημαντικά κοσμολογικά μοντέλα, συμπεριλαμβανομένου του τυπικού χωρόχρονου Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) και του γνωστού σύμπαντος Mixmaster (Bianchi IX) [55]. Στα μοντέλα Bianchi ο χωρόχρονος φυλοποιείται απο τρισδιάστατες ομογενείς υπερεπιφάνειες [56, 57]. Οι αντίστοιχες γεωμετρίες είναι συνεπώς ομογενείς στο χώρο, πράγμα που σημαίνει ότι οι φυσικές μεταβλητές εξαρτώνται μόνο από τη χρονική μεταβλητή. Αυτό μειώνει τις εξισώσεις Einstein και άλλες δυναμικές εξισώσεις από μερικές σε συζευγμένες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Συνολικά, υπάρχουν εννέα μοντέλα Bianchi τα οποία καθορίζονται από τις πιθανές εννέα διαφορετικές τρισδιάστατες άλγεβρες που κατασκευάζονται από τις ισομετρίες του μετρικού τανυστή (βλ. για παράδειγμα [56, 58]). Το κύριο πλεονέκτημα των κοσμολογικών μοντέλων Bianchi είναι ότι σε αυτά τα μοντέλα οι βαρυτικές εξισώσεις πεδίου μειώνονται σε ένα σύστημα συζευγμένων, συνήθων διαφορικών εξισώσεων με ανεξάρτητη μεταβλητή οποιαδήποτε συνάρτηση $f(t)$ παραμετροποίησης της "κατεύθυνσης χρόνου". Εξάλλου, τα μοντέλα Bianchi ομαδοποιούνται σε δύο κατηγορίες, A και B (σύμφωνα με το ίχνος $c^{\alpha}_{\alpha\beta}$ του τανυστή σταθερών δομής να είναι μηδέν ή μη μηδέν, αντίστοιχα), ενώ κάθε κατηγορία χωρίζεται σε διάφορους τύπους. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μια κύρια διαφορά μεταξύ αυτών των δύο τάξεων είναι ότι για τις βαρυτικές εξισώσεις πεδίου που ανήκουν στα μοντέλα της κατηγορίας A η ανηγμένη Λαγκρανζιανή είναι έγκυρη [59], ενώ για τα μοντέλα της κατηγορίας B η αντίστοιχη ανηγμένη Λαγκρανζιανή είναι, γενικά, μη έγκυρη εκτός από κάποιες περιπτώσεις (Χωρόχρονοι LRS, βλέπε π.χ. [39]). Ωστόσο, για το γενικό στοιχείο γραμμής τύπου V, αν και ανήκει στην κατηγορία B, υπάρχει έγκυρη Λαγκρανζιανή [40].

Στο κενό και για τη θεωρία Einstein-Aether, μελετάμε την ύπαρξη αναλυτικών λύσεων και περιγραφή των χωροχρόνων με μιά ανηγμένη Λαγκρανζιανή για τρείς χωροχρόνους ειδικού ενδιαφέροντος, ο ομογενής και ισότροπος χώρος που περιγράφεται από το στοιχείο μήκους FLRW, ο χωρόχρονος LRS Bianchi III και για τον χωρόχρονο Bianchi V. Και οι δύο πρώτοι χωρόχρονοι έχουν μια έγκυρη ανηγμένη δράση στην δράση Einstein-Hilbert, παρά το ότι η ύπαρξη μιας ανηγμένης Λαγκρανζιανής δεν είναι βέβαιη στην κοσμολογία Einstein-Aether.

Οι χωρόχρονοι Bianchi περιέχουν διάφορα σημαντικά κοσμολογικά μοντέλα που έχουν χρησιμοποιηθεί για να περιγράψουν τις ανισοτροπίες του αρχέγονου σύμπαντος και την εξέλιξη σε ένα ισότροπο σύμπαν όπως παρατηρείται σήμερα [60, 61, 62, 63]. Στο πλαίσιο της ΓΣ, οι εξισώσεις πεδίου για τους χωρόχρονους Bianchi δέχονται ακριβείς λύσεις, για παράδειγμα δείτε [64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74] και τις εκεί παραπομπές . Στην περίπτωση που περιλαμβάνονται πηγές ύλης στην ΓΣ του Einstein, όπως ηλεκτρομαγνητικό ρευστό, ιδανικό αέριο και βαθμωτό πεδίο, ορισμένες ακριβείς λύσεις προσδιορίστηκαν προηγουμένως στα [75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84].

Ενδιαφέρομαστε επίσης για τις ακριβείς λύσεις των εξισώσεων πεδίου για τον χωρόχρονο Bianchi V στην βαρύτητα Einstein-Aether [11, 12]. Πρόσφατα, [85, 92] βρέθηκαν ακριβείς λύσεις για την περίπτωση των χωροχρόνων Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) , LRS Bianchi III και Bianchi V στη θεωρία Einstein-Aether. Εκει αποδείχθηκε ότι υπάρχουν ακριβείς λύσεις μόνο για συγκεκριμένες περιοχές τιμών των ελεύθερων παραμέτρων σύζευξης για το πεδίο του αιθέρα. Αυτές οι ακριβείς λύσεις έχουν εφαρμοστεί [86] για τον προσδιορισμό των ανομοιογενών κοσμολογικών λύσεων στη θεωρία Einstein-Aether. Άλλες μελέτες που μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία για τα ανισότροπα μοντέλα βαρύτητας Einstein-Aether βασίζονται στη μέθοδο της ανάλυσης κρίσιμου σημείου, όπου καθορίζονται ειδικές λύσεις στα κρίσιμα σημεία που περιγράφουν την ασυμπτωτική συμπεριφορά για την εξέλιξη των εξισώσεων του πεδίου [87, 88, 89, 90, 91].

Το περίγραμμα αυτής της διατριβής έχει ως εξής:

Στο Παράρτημα δίνονται και αποδεικνύονται βασικές σχέσεις και ιδιότητες του τανυστικού λογισμού. Οι βασικές ιδιότητες και οι ορισμοί της θεωρίας Einstein-Aether δίδονται στο Κεφάλαιο 1. Επιπλέον, παράγουμε τις εξισώσεις πεδίου για τους χωροχρόνους της μελέτης μας. Τα Κεφάλαια 2 και 3 συμπεριλαμβάνουν το κύριο υλικό της ανάλυσης μας, εκεί καθορίζουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες υπάρχουν αναλυτικές λύσεις για τις εξισώσεις πεδίου στην θεωρία Einstein-Aether και παρουσιάζουμε ολόκληρο το χώρο λύσεων. Αυτό γίνεται για το FLRW και την τοπικά περιστροφικά συμμετρική κοσμολογία (LRS) Bianchi Type III . Επί πλέον, καθορίζουμε τις συνθήκες έτσι ώστε η ανηγμένη Λαγκρανζιανή να είναι έγκυρη και με αυτόν τον τρόπο, ταξινομούμε επίσης τους χωροχρόνους που βρέθηκαν εδώ. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε τη λύση των εξισώσεων πεδίου της κοσμολογίας Bianchi Type V , για την περίπτωση όπου το πεδίο του αιθέρος είναι είτε παράλληλο με τον συν-κινούμενο παρατηρητή (κατηγορία A), είτε όχι (κατηγορία B). Για αυτές τις δύο κατηγορίες εντοπίζουμε τις σχέσεις μεταξύ των σταθερών σύζευξης c_i της θεωρίας, ώστε οι εξισώσεις πεδίου να δέχονται λύσεις. Και για τις δύο κατηγορίες υπάρχουν ανισότροπες λύσεις, ενώ στην πρώτη κατηγορία, όπου το πεδίο του αιθέρα είναι παράλληλο με κινούμενο παρατηρητή, υπάρχει μια ισότροπη λύση που αντιστοιχεί σε ένα χωρόχρονο FLRW με μη μηδενική χωρική καμπυλότητα. Επί πλέον, η φυσική περιγραφή του αντίστοιχου τανυστή ενέργειας ορμής υπολογίζεται σε όλες τις περιπτώσεις και στη συνέχεια χρησιμοποιείται για την κατανόηση των φυσικών ιδιοτήτων των χωροχρόνων που προκύπτουν.

Στο επόμενο Κεφάλαιο 5 αναφέρουμε τις εξισώσεις πεδίου της θεωρίας Einstein-Aether για την περίπτωση που το βασικό διάνυσμα είναι το u^k. Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των εξισώσεων που βρήκαμε με αυτές του Κεφαλαίου 2 όπου το βασικό δίανυσμα είναι το u_k και βρίσκουμε τις τυχόν διαφορές. Στην συνέχεια μελετούμε πότε μηδενίζεται η διαφορά αυτή.

Τέλος στο Κεφάλαιο 6 αναφέρουμε τα συμπεράσματα μας.

1

ΒΑΡΥΤΗΤΑ EINSTEIN-ÆTHER

Θεωρούμε έναν χώρο με μετρική $g_{\mu\nu}$ καθώς και το u^a που είναι ένα μοναδιαίο χρονοειδές διανυσματικό πεδίο το οποίο περιγράφει την κίνηση του αιθέρα, $u^a u_a = -1$. Σε ένα τετραόγκο V αυτού του χώρου ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής. Αυτό αποτελεί το ολοκλήρωμα της δράσης, που κάτω απο την μεταβολή των μετρικών συνιστωσων, δίνει τις βαρυτικές εξισώσεις πεδίου για τη βαρύτητα Einstein-aether και δίνεται από την ακόλουθη έκφραση [10]

$$S_{AE} = \int d^4x\sqrt{-g}R + \int d^4x\sqrt{-g}\left(K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + \lambda\left(u^c u_c + 1\right)\right), \tag{1.1}$$

όπου g η ορίζουσα της $g_{\mu\nu}$, $K^{\alpha\beta\mu\nu}$ περιγράφει τη σύζευξη μεταξύ του πεδίου του αιθέρα και της βαρύτητας και ορίζεται ως εξής:

$$K^{\alpha\beta\mu\nu} \equiv c_1 g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + c_2 g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + c_3 g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} + c_4 g^{\mu\nu}u^\alpha u^\beta. \tag{1.2}$$

με c_1, c_2, c_3 και c_4 να είναι αδιάστατες σταθερές.

Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$K^{\beta\alpha\nu\mu} = K^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{1.3}$$

Πράγματι

$K^{\alpha\beta\mu\nu} = c_1 g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + c_2 g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + c_3 g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} + c_4 g^{\mu\nu}u^\alpha u^\beta = c_1 g^{\beta\alpha}g^{\nu\mu} + c_2 g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu} +$

$c_3 g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu} + c_4 g^{\nu\mu} u^\beta u^\alpha = K^{\beta\alpha\nu\mu}$

λόγω της συμμετριας της μετρικής $g^{\mu\nu}$.

Η συνάρτηση λ στην (1.1) είναι ένας πολλαπλασιαστής Lagrange ο οποίος εξασφαλίζει τον μοναδιαίο χαρακτήρα του διανυσματικού πεδίου του αιθέρα. Τελικά, R είναι το βαθμωτό Ricci του υποκείμενου χωροχρόνου με μετρική g_{ab}, και περιγράφει τον όρο της Γενικής Σχετικότητας του Einstein στην παρούσα θεωρία.

Οι δυναμικές εξισώσεις λαμβάνονται με την απαιτούμενη μη μεταβλητότητα του ολοκληρώματος της δράσης (1.1) υπό αυθαίρετες μεταβολές ως προς τη μετρική, $\frac{\delta S_{AE}}{\delta g^{ab}} = 0$, το πεδίο του αιθέρα $\frac{\delta S_{AE}}{\delta u_a} = 0$ και τον πολλαπλασιαστή Lagrange λ, $\frac{\delta S_{AE}}{\delta \lambda} = 0$. Η τελευταία αυτή εξίσωση παρέχει τον μοναδιαίο περιορισμό για το διανυσματικό πεδίο του αιθέρα.

Ειδικότερα, η μεταβολή σε σχέση με τον μετρικό τανυστή δίνει τις βαρυτικές εξισώσεις πεδίου.

1.1 Εύρεση των εξισώσεων βαρυτικού πεδίου στην βαρύτητα Einstein-Aether

• Ας θεωρήσουμε μία μικρή μεταβολή $\delta g_{\mu\nu}$ της μετρικής στον όγκο αυτό, (θεωρώντας ως βασικό διάνυσμα το u_κ), η οποία ισοδυναμεί με αλλαγή στην τροχιά, και ότι παντού στο όριο του ∂V, (την τριεπιφάνεια ας την πούμε S), ισχύει $\delta g_{\mu\nu} = 0$ και $\delta g_{\mu\nu;\kappa} = 0 \ \forall \ \delta g_{\mu\nu}$. Η μεταβολή αυτή επιφέρει μία μεταβολή στην δράση δS_{AE}:

$$\delta S_{AE} = \int_V ((\delta\sqrt{-g})(K^{\alpha\beta\mu\nu} u_{\mu;\alpha} u_{\nu;\beta} + \lambda(g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + 1) + R) + \sqrt{-g}(\delta(K^{\alpha\beta\mu\nu}) u_{\mu;\alpha} u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu} \delta(u_{\mu;\alpha}) u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu} u_{\mu;\alpha} \delta(u_{\nu;\beta}) + \delta \mathrm{R} + \lambda(\delta(g^{\alpha\beta}) u_\alpha u_\beta))) d^4x. \tag{1.4}$$

Θέλουμε $\delta S_{AE} = 0 \ \forall \ \delta g_{\mu\nu}$.

Ισχύει $\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta \mathrm{g}}{2\sqrt{-g}}$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (7.1), (7.2). έχουμε:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta \mathrm{g}}{2\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\delta \mathrm{g}_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{-g}\right) \delta \mathrm{g}^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

Ισχύει:

$$\delta \mathrm{R} = \delta\left(g^{\beta\nu} R_{\beta\nu}\right) = \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}). \tag{1.6}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_V \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = 0$.

Η (1.4) λόγω των (1.5), (1.6) και (7.16) γίνεται:

$$\delta S_{AE} = \int_V ((\delta\sqrt{-g})(K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + \lambda(g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta + 1) + R) + \sqrt{-g}(\delta(K^{\alpha\beta\mu\nu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu}\delta(u_{\mu;\alpha})u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}\delta(u_{\nu;\beta}) + \delta\mathrm{R} + \lambda(\delta(g^{\alpha\beta})u_\alpha u_\beta)))d^4x$$

$$\delta S_{AE} = \int_V \frac{1}{2}\left(-\sqrt{-g}\right)\delta\mathrm{g}^{\mu\nu}g_{\mu\nu}(K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + \lambda(g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta + 1) + R) + \sqrt{-g}(\delta(K^{\alpha\beta\mu\nu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu}\delta(u_{\mu;\alpha})u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}\delta(u_{\nu;\beta}) + \delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) + \lambda(\delta(g^{\alpha\beta})u_\alpha u_\beta)))d^4x$$

$$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu})(R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2})d^4x + \int_V \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})d^4x + \int_V -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})(K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + \lambda\left(g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta + 1\right))d^4x + \int_V \sqrt{-g}(\delta(K^{\alpha\beta\mu\nu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu}\delta(u_{\mu;\alpha})u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}\delta(u_{\nu;\beta}) + \lambda\left(\delta(g^{\alpha\beta})u_\alpha u_\beta\right))d^4x \tag{1.7}$$

Είναι

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{\mathrm{Rg}_{\mu\nu}}{2} \tag{1.8}$$

ο τανυστής Einstein.

Επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα της δράσης είναι (χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2}$) καθώς και το γεγονός ότι το $\int_V \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})d^4x = 0$ γίνεται:

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int_V -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})(K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + \lambda\left(g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta + 1\right))d^4x$ $+\int_V \sqrt{-g}(\delta(K^{\alpha\beta\mu\nu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu}\delta(u_{\mu;\alpha})u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}\delta(u_{\nu;\beta}) - \lambda\left(\delta(g^{\alpha\beta})u_\alpha u_\beta\right))d^4x.$

Βρίσκουμε τώρα την μεταβολή του τανυστή $K^{\alpha\beta\mu\nu}$ ως προς $g^{\mu\nu}$ με βασικό το u_κ θα έχουμε :

$\delta(K^{\alpha\beta\mu\nu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} = c_4 g^{\rho\sigma}\delta(u^\alpha)u^\beta u_{\rho;\alpha}u_{\sigma;\beta} + c_4 g^{\rho\sigma}u^\alpha\delta(u^\beta)u_{\rho;\alpha}u_{\sigma;\beta} + c_4\delta(g^{\mu\nu})u^\alpha u^\beta u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_1\delta(g^{\alpha\beta})g^{\mu\nu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_1 g^{\alpha\beta}\delta(g^{\mu\nu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_2\delta(g^{\alpha\mu})g^{\beta\nu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_2 g^{\alpha\mu}\delta(g^{\beta\nu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_3\delta(g^{\alpha\nu})g^{\beta\mu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_3 g^{\alpha\nu}\delta(g^{\beta\mu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta}$

Επομένως απο την πρόταση (7.15) θα έχουμε ότι η μεταβολή του I ως προς $g^{\mu\nu}$ με βασικό το u_κ θα μας δώσει:

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int_V -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})(K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + \lambda\left(g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta + 1\right))d^4x +$ $\int_V \sqrt{-g}(c_4 g^{\rho\sigma}\delta(u^\alpha)u^\beta u_{\rho;\alpha}u_{\sigma;\beta} + c_4 g^{\rho\sigma}u^\alpha\delta(u^\beta)u_{\rho;\alpha}u_{\sigma;\beta} + c_4\delta(g^{\mu\nu})u^\alpha u^\beta u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_1\delta(g^{\alpha\beta})g^{\mu\nu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} +$

$c_1 g^{\alpha\beta}\delta(g^{\mu\nu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta}+c_2\delta(g^{\alpha\mu})g^{\beta\nu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta}+c_2 g^{\alpha\mu}\delta(g^{\beta\nu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta}+c_3\delta(g^{\alpha\nu})g^{\beta\mu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta}+$
$c_3 g^{\alpha\nu}\delta(g^{\beta\mu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta}+\frac{1}{2}K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\nu;\beta}\left(-g^{\lambda\rho}u_\lambda\right)\left(\delta \mathrm{g}_{\rho\mu;\alpha}+\delta \mathrm{g}_{\rho\alpha;\mu}-\delta \mathrm{g}_{\mu\alpha;\rho}\right)+$
$\frac{1}{2}K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}\left(-g^{\lambda\rho}u_\lambda\right)\left(\delta \mathrm{g}_{\rho\nu;\beta}+\delta \mathrm{g}_{\rho\beta;\nu}-\delta \mathrm{g}_{\nu\beta;\rho}\right)+\delta(g^{\mu\nu})\lambda \mathrm{u}_\mu u_\nu)d^4x.$

Παρατηρούμε ότι

$-\frac{1}{2}\int_V K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u_{\lambda;\alpha}g^{\sigma\rho}u_\sigma\sqrt{-g}\delta \mathrm{g}_{\rho\kappa;\beta}d^4x$
$=-\frac{1}{2}\int_V K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u_{\lambda;\alpha}u^\rho\sqrt{-g}\delta \mathrm{g}_{\rho\kappa;\beta}d^4x$
$=-\frac{1}{2}\int_V \sqrt{-g}(\delta \mathrm{g}_{\rho\kappa}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\lambda;\alpha})_{;\beta}d^4x+\frac{1}{2}\int_V\sqrt{-g}(K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\lambda;\alpha})_{;\beta}\delta \mathrm{g}_{\rho\kappa}d^4x$

Η ποσότητα $\delta \mathrm{g}_{\rho\kappa}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\lambda;\alpha}$ είναι τανυστής της μορφής $\delta \mathrm{g}_{\rho\kappa}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\lambda;\alpha}=V^\beta$, άρα το ολοκλήρωμα

$-\frac{1}{2}\int_V\sqrt{-g}(\delta \mathrm{g}_{\rho\kappa}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\lambda;\alpha})_{;\beta}d^4x=-\frac{1}{2}\int_V\sqrt{-g}V^\beta{}_{;\beta}d^4x$

λόγω της πρότασης 7 θα γίνει:

$-\frac{1}{2}\int_V\sqrt{-g}V^\beta{}_{;\beta}d^4x=-\frac{1}{2}\int_V\sqrt{-g}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\sqrt{-g}V^\beta)d^4x=$

$-\frac{1}{2}\int_V\frac{\partial}{\partial x^\beta}\sqrt{-g}V^\beta d^4x=-\frac{1}{2}\int_{\partial V}\sqrt{-g}\delta \mathrm{g}_{\rho\kappa}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\lambda;\alpha}d^3x$ (Λόγω του θεωρήματος 14)

Όμως το $\delta \mathrm{g}_{\rho\kappa}$ πάνω στο σύνορο ∂V είναι 0. Επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι 0.

Συνεπως καταλήγουμε στο εξής:

$$-\frac{1}{2}\int_V K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u_{\lambda;\alpha}g^{\sigma\rho}u_\sigma\sqrt{-g}\delta \mathrm{g}_{\rho\kappa;\beta}d^4x=\frac{1}{2}\int_V\sqrt{-g}(K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\lambda;\alpha})_{;\beta}\delta \mathrm{g}_{\rho\kappa}d^4x$$

Το προηγούμενο ολοκλήρωμα μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω για να έχουμε την μεταβολή $\delta g^{\mu\nu}$ χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.2) και τελικά καταλήγουμε στην σχέση:

$$-\frac{1}{2}\int_V K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u_{\lambda;\alpha}g^{\sigma\rho}u_\sigma\sqrt{-g}\delta \mathrm{g}_{\rho\kappa;\beta}d^4x=-\frac{1}{2}\int_V\sqrt{-g}(g_{\rho\mu}g_{\kappa\nu}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\lambda;\alpha})_{;\beta}\delta \mathrm{g}^{\mu\nu}d^4x \tag{1.9}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (1.9) συνάγουμε ότι η μεταβολή της δράσης μας δίνει την σχέση:

$\int_V\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d^4x-\int_V\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})\lambda\left(g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta+1\right))d^4x$
$-\int_V\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})(K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta})d^4x+$
$\int_V\sqrt{-g}[c_2\delta g^{\mu\nu}g^{\beta\sigma}u_{\sigma;\beta}u_{\mu;\nu}+c_1\delta g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}u_{\alpha;\mu}u_{\beta;\nu}+c_1\delta g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta}+$
$c_2\delta \mathrm{g}^{\mu\nu}g^{\alpha\sigma}u_{\sigma;\alpha}u_{\nu;\mu}+c_3u_{;\mu}{}^\beta u_{\nu;\beta}\delta \mathrm{g}^{\mu\nu}+c_3u_{;\nu}{}^\alpha u_{\mu;\alpha}\delta \mathrm{g}^{\mu\nu}$
$c_4g^{\beta\lambda}u^\alpha u_{\beta;\alpha}u_{\lambda;\mu}\delta\left(g^{\nu\mu}u_\nu\right)+c_4g^{\alpha\lambda}u^\beta u_{\lambda;\alpha}u_{\alpha;\beta}\delta\left(g^{\nu\mu}u_\mu\right)+c_4\delta(g^{\mu\nu})u^\alpha u^\beta u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta}$
$-(\frac{1}{2}g_{\lambda\nu}g_{\rho\mu}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta})_{;\alpha}\delta \mathrm{g}^{\mu\nu})+(-\frac{1}{2}g_{\alpha\nu}g_{\rho\mu}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta})_{;\lambda}\delta \mathrm{g}^{\mu\nu}$
$+(\frac{1}{2}g_{\alpha\nu}g_{\lambda\mu}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta})_{;\rho}\delta \mathrm{g}^{\mu\nu}+(-\frac{1}{2}g_{\lambda\nu}g_{\rho\mu}K^{\beta\alpha\kappa\lambda}u^\rho u_{\kappa;\beta})_{;\alpha}\delta \mathrm{g}^{\mu\nu}$
$-(\frac{1}{2}g_{\alpha\mu}g_{\rho\nu}K^{\beta\alpha\kappa\lambda}u^\rho u_{\kappa;\beta})_{;\lambda}\delta \mathrm{g}^{\mu\nu}+(+\frac{1}{2}g_{\alpha\mu}g_{\lambda\nu}K^{\beta\alpha\kappa\lambda}u^\rho u_{\kappa;\beta})_{;\rho}\delta g^{\mu\nu}]d^4x.$

Άρα η μεταβολή ως προς τον μετρικό τανυστή δίνει τις εξισώσεις βαρυτικού πεδίου:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \tag{1.10}$$

όπου $G_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής Einstein και $T_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής για την θεωρία Einstein-Aether και ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = {} & \frac{1}{2}g_{\mu\nu}K^{\alpha\beta\rho\sigma}u_{\rho;\alpha}u_{\sigma;\beta} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\lambda(g^{\alpha\beta}u_{\alpha}u_{\beta}+1)+ \\
& - c_1 g^{\alpha\beta}(u_{\alpha;\mu}u_{\beta;\nu} + u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta}) - c_2 g^{\alpha\beta}(u_{\mu;\nu}u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}u_{\nu;\mu}) - c_3 g^{\alpha\beta}(u_{\alpha;\mu}u_{\nu;\beta} + u_{\mu;\alpha}u_{\beta;\nu})+ \\
& - c_4 u^{\alpha}u^{\beta}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} - c_4(g^{\lambda\alpha}u_{\mu}u^{\beta}u_{\lambda;\nu}u_{\alpha;\beta} + g^{\beta\lambda}u^{\alpha}u_{\nu}u_{\beta;\alpha}u_{\lambda;\mu}) - \lambda u_{\mu}u_{\nu}+ \\
& + (\frac{1}{2}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^{\rho}u_{\kappa;\beta}g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^{\rho}u_{\kappa;\beta}g_{\rho\nu}g_{\lambda\mu})_{;\alpha} + (\frac{1}{2}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^{\rho}u_{\kappa;\beta}g_{\rho\mu}g_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^{\rho}u_{\kappa;\beta}g_{\rho\nu} \\
& - (\frac{1}{2}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^{\rho}u_{\kappa;\beta}g_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^{\rho}u_{\kappa;\beta}g_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu})_{;\rho}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

• Η μεταβολή σε σχέση με τον «αιθέρα» παρέχει την εξίσωση κίνησης που ικανοποιεί ο «αιθέρας». Θεωρούμε μία μεταβολή του u_{κ} στον τετραόγκο V έστω δu_{κ}. Θεωρούμε ότι η μικρή μεταβολή του u_{κ} είναι τέτοια ώστε το $\delta u_{\kappa} = 0$ είναι παντού μηδέν στο σύνορο ∂V. Η μεταβολή αυτή επιφέρει μία μεταβολή στην δράση δS_{AE}, ως προς u_{κ}.

Θεωρούμε τώρα την μεταβολή του ολοκληρώματος της δράσης ως προς u_{κ}.

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}(\delta(K^{\alpha\beta\mu\nu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu}\delta(u_{\mu;\alpha})u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}\delta(u_{\nu;\beta})$
$+\lambda\left(g^{\alpha\beta}\delta(u_{\alpha})u_{\beta} + g^{\alpha\beta}u_{\alpha}\delta(u_{\beta})\right))d^4x$

Θέλουμε $\delta S_{AE} = 0 \ \forall \ \delta u_{\kappa}$.

Απο την πρόταση 16 συνάγουμε

$\int_V \sqrt{-g}K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\nu;\beta}\delta\mathrm{u}_{\mu;\alpha}d^4x = \int_V \sqrt{-g}K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\nu;\beta}(\delta\mathrm{u}_{\mu})_{;\alpha}d^4x =$
$\int_V \sqrt{-g}(\delta\mathrm{u}_{\mu}K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\nu;\beta})_{;\alpha}d^4x - \int_V \sqrt{-g}(K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\nu;\beta})_{;\alpha}\delta\mathrm{u}_{\mu}d^4x.$

Η ποσότητα $\delta\mathrm{u}_{\mu}K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\nu;\beta}$ είναι τανυστής της μορφής $\delta\mathrm{u}_{\mu}K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\nu;\beta} = V^{\alpha}$, άρα το ολοκλήρωμα

$\int_V \sqrt{-g}(\delta\mathrm{u}_{\mu}K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\nu;\beta})_{;\alpha}d^4x = \int_V \sqrt{-g}V^{\alpha}{}_{;\alpha}d^4x$

λόγω της πρότασης 7 θα γίνει:

$\int_V \sqrt{-g}V^{\alpha}{}_{;\alpha}d^4x = \int_V \sqrt{-g}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\sqrt{-g}V^{\alpha})d^4x =$
$\int_V \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\sqrt{-g}V^{\alpha}d^4x = \int_{\partial V}\sqrt{-g}\delta\mathrm{u}_{\mu}K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\nu;\beta}d^3x$ (Λόγω του θεωρήματος 14)

Όμως το $\delta\mathrm{u}_{\mu}$ πάνω στο σύνορο ∂V είναι 0. Επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι 0.

Συνεπως καταλήγουμε στο εξής:

$$\int_V \sqrt{-g}K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\nu;\beta}\delta\mathrm{u}_{\mu;\alpha}d^4x = -\int_V \sqrt{-g}(K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\nu;\beta})_{;\alpha}\delta\mathrm{u}_{\mu}d^4x \tag{1.12}$$

Η μεταβολή του $K^{\alpha\beta\mu\nu}$ ως προς u_κ θα μας δώσει:

$\delta(K^{\alpha\beta\mu\nu})u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} = c_4 g^{\mu\nu}\delta(u^\alpha)u^\beta u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_4 g^{\mu\nu}u^\alpha\delta(u^\beta)u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta}$.

Επομένως χρησιμοποιώντας την (1.12) και την προηγούμενη μεταβολή του $K^{\alpha\beta\mu\nu}$ ως προς u_κ καταλήγουμε ότι $\forall\ \delta u_\kappa$

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}(c_4 g^{\mu\nu}\delta(u^\alpha)u^\beta u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_4 g^{\mu\nu}u^\alpha\delta(u^\beta)u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu}\delta(u_{\mu;\alpha})u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}\delta(u_{\nu;\beta}) + 2\lambda g^{\alpha\beta}\delta(u_\alpha)u_\beta)d^4x = 0$

$\int_V \sqrt{-g}(c_4 g^{\alpha\kappa}g^{\mu\nu}u^\beta\delta(u_\kappa)u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_4 g^{\alpha\kappa}g^{\mu\nu}u^\beta\delta(u_\kappa)u_{\nu;\alpha}u_{\mu;\beta} - (K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\nu;\beta})_{;\alpha}\delta u_\mu - (K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha})_{;\beta}\delta u_\nu + 2\lambda g^{\kappa\beta}u_\beta\delta(u_\kappa))d^4x = 0$

$\Longrightarrow \int_V \sqrt{-g}(c_4 g^{\alpha\kappa}g^{\mu\nu}u^\beta\delta(u_\kappa)(u_{\nu;\alpha}u_{\mu;\beta} + u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta}) - (c_4 g^{\kappa\nu}u^\alpha_{;\alpha}u^\beta u_{\nu;\beta} + c_4 g^{\kappa\nu}u^\alpha u^\beta_{;\alpha}u_{\nu;\beta} + K^{\beta\alpha\kappa\nu}u_{\nu;\alpha;\beta})\delta u_\kappa -$

$\left(c_4 g^{\nu\kappa}u^\beta{}_{;\alpha}u^\alpha u_{\nu;\beta} + c_4 g^{\nu\kappa}u^\alpha{}_{;\alpha}u^\beta u_{\nu;\beta} + K^{\alpha\beta\nu\kappa}u_{\nu;\alpha;\beta}\right)\delta u_\kappa + 2\lambda u^\kappa\delta(u_\kappa)\big)\, d^4x = 0$

Έτσι προκύπτει και η δεύτερη εξίσωση κίνησης με μεταβολή ως προς u_κ

$$c_4 g^{\mu\nu}u^\alpha u_{\nu;\beta}u_{\mu;\alpha}g^{\kappa\beta} - c_4 g^{\mu\kappa}g^{\alpha\lambda}u_{\lambda;\beta}u^\beta u_{\mu;\alpha} - c_4 g^{\mu\kappa}u^\alpha u^\beta_{;\beta}u_{\mu;\alpha} - K^{\alpha\beta\mu\kappa}u_{\mu;\alpha;\beta} + \lambda g^{\alpha\kappa}u_\alpha = 0 \tag{1.13}$$

• Τέλος, απο την μεταβολή δS_{AE} ως προς το λ

Θέλουμε $\delta S_{AE} = 0\ \forall\ \delta\lambda$.

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}\delta(\lambda)(g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta + 1)d^4x = 0\ \forall\ \delta\lambda$

Επομένως

$$u^a u_a + 1 = 0. \tag{1.14}$$

Είναι λοιπόν ξεκάθαρο ότι η βαρύτητα Einstein-Aether είναι μια θεωρία δεύτερης τάξης, αφορά μια τετραδιάστατη πολλαπλότητα και περιλαμβάνει δεκαπέντε εξισώσεις. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι κατά την θεώρηση μας δεν έχουμε υποθέσει καθόλου ύλη και ο τανυστής ενέργειας-ορμής, της θεωρίας Einstein-Aether, παράγεται από τον δεύτερο και τον τρίτο όρο της δράσης. Συνεχίζουμε την ανάλυσή μας επιλέγοντας την υποκείμενη γεωμετρία που είναι (α) χωρόχρονος FLRW, (β) χωρόχρονος LRS Bianchi typeIII και τέλος τον χωρόχρονο Bianchi Type V . Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις του πεδίου ανάγονται σε συνήθεις συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις με το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

1.2 Φυσική ερμηνεία

Για να αποδώσουμε μια πιθανή φυσική σημασία στις λύσεις που λαμβάνονται για την περίπτωση του Bianchi Type V, υπολογίζουμε τον τανυστή Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ και τον ερμηνεύουμε ως τανυστή ενέργειας-ορμής ενός ρευστού γράφοντας $G_{\mu\nu} = T^{(eff)}_{\mu\nu}$. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$T^{(eff)}_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} + 2q_{(\mu}u_{\nu)} + \pi_{\mu\nu}, \tag{1.15}$$

όπου ρ είναι η ενεργειακή πυκνότητα του ρευστού, u_μ είναι η 4-ταχύτητα, q_μ το διάνυσμα ροής θερμότητας, p η πίεση και $\pi_{\mu\nu}$ ο ανισοτροπικός τανυστής τάσεων. Οι σχέσεις που καθιστούν δυνατή την ταυτοποίηση είναι

$$\Pi_{\mu\nu} = G_{\alpha\beta}h^{\alpha}{}_{\mu}h^{\beta}{}_{\nu} = p\,h_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu}, \quad \pi_{\mu\nu} = \Pi_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\Pi^{\kappa}{}_{\kappa}h_{\mu\nu} = \Pi_{\mu\nu} - p\,h_{\mu\nu} \tag{1.16}$$

$$\rho = G_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \quad p = \frac{1}{3}\Pi^{\kappa}{}_{\kappa} \tag{1.17}$$

$$q_\nu = -G_{\alpha\beta}u^\alpha h^{\beta}{}_{\nu}, \tag{1.18}$$

στο οποίο $h_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής προβολής ορθογώνιος προς την ταχύτητα u^μ ο οποίος ορίζεται ως

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu, \quad \text{με} \quad u_\mu u^\mu = -1 \tag{1.19}$$

2

FLRW

Το γενικό στοιχείο μήκους του χωρόχρονου FLRW είναι:

$$ds^2 = -M^2(t)\,dt^2 + a^2(t)\left(\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2\right), \tag{2.1}$$

όπου $a(t)$ δηλώνει τον παράγοντα κλίμακας (περιγράφει την αλλαγή του μεγέθους του τρισδιάστατου χώρου καθώς παρέρχεται ο χρόνος), $M(t)$ είναι η λεγόμενη συνάρτηση χρονικής παρόδου και k χαρακτηρίζει τη χωρική καμπυλότητα της τρισδιάστατης υπερ-επιφάνειας ($k = 0 \Rightarrow$ επίπεδος χώρος, $k = 1 \Rightarrow$ χώρος σταθεράς θετικής καμπυλότητας $k = -1 \Rightarrow$ χώρος σταθερής αρνητικής καμπυλότητας).

Όσον αφορά το διανυσματικό πεδίο του αιθέρα u_a θέλουμε να έχει τις συμμετρίες της παραπάνω μετρικής. Γνωρίζουμε ότι οι συμμετρίες μιας μετρικής εκφράζονται μέσω των πεδίων Killing της μετρικής. Επιβάλλουμε τις συμμετρίες της παραπάνω μετρικής στο διανυσματικό πεδίο του αιθέρα $L_\xi u_a = 0$. Λόγω της επιβολής αυτής στο πεδίο του αιθέρα το μειώνει στη μορφή $u_a = T'(t)\,\delta_a^t \leftrightarrow u^a = -\dfrac{T'(t)}{M(t)^2}\delta_t^a$, όπου ο τόνος δηλώνει παράγωγο ως προς t. Θα μπορούσαμε αυτό να το διαπιστώσουμε και ως εξής:

Από την πρόταση (7.20) έχουμε ότι τα πεδία Killing της μετρικής $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$ με συντεταγμένες $\{\theta, \phi\}$ είναι:

$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial\phi}$,

$\xi_2 = \cos(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot(\theta)\sin(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}$,

$\xi_3 = \sin(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot(\theta)\cos(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}$.

Ο χώρος λοιπόν είναι μέγιστα συμμετρικός καθως για $n = 2$ το πλήθος των πεδίων Killing είναι $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(2+1)}{2} = 3$. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $u_\mu = \{u_0(\theta,\phi), u_1(\theta,\phi)\}$ και επιβάλουμε να έχει τις συμμετρίες της παραπάνω μετρικής, δηλαδή θα πρέπει $L_{\xi_1}(u_\mu) = L_{\xi_2}(u_\mu) = L_{\xi_3}(u_\mu) = 0$.

Το $L_{\xi_1}(u_\mu) = \left\{{u_0}^{(0,1)}(\theta,\phi), {u_1}^{(0,1)}(\theta,\phi)\right\}$.

Για να ισχύει $L_{\xi_1}(u_\mu) = 0$ το $u_\mu = \{u_0(\theta), u_1(\theta)\}$

Απαιτώντας τώρα $L_{\xi_2}(u_\mu) = L_{\xi_3}(u_\mu) = 0$ συνάγουμε τις σχέσεις:

$\{\cos(\phi)u_0'(\theta) + \csc^2(\theta)u_1(\theta)\sin(\phi), u_0(\theta)(-\sin(\phi)) + \cos(\phi)u_1'(\theta) - \cot(\theta)u_1(\theta)\cos(\phi)\}$

και

$\{\sin(\phi)u_0'(\theta) - \csc^2(\theta)u_1(\theta)\cos(\phi), u_0(\theta)\cos(\phi) + \sin(\phi)u_1'(\theta) - \cot(\theta)u_1(\theta)\sin(\phi)\}$

Επομένως θα πρέπει:

$\cos(\phi)u_0'(\theta) + \csc^2(\theta)u_1(\theta)\sin(\phi) = 0$, για κάθε θ και ϕ.

Δηλαδή αν $u_1(\theta) \neq 0$ τότε $\frac{u_0'(\theta)\sin^2(\theta)}{u_1(\theta)} = -\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = c$ για κάθε θ και ϕ. Αδύνατο, άρα $u_1(\theta) = 0$ και τότε $u_0(\theta) = c$. Από τις προηγούμενες σχέσεις συνάγουμε ότι $u_0(\theta) = 0$ και καταλήγουμε στην τελική μορφή του διανυσματικού πεδίου που είναι $u_\mu = \{0, 0\}$.

Ο χώρος με μετρική το τρισδιάστατο κομμάτι της FLRW είναι μέγιστα συμμετρικός (έχει τον μέγιστο αριθμό πεδίων Killing δηλαδή $\frac{1}{2}n(n+1)$, με $n = 3$ επομένως ο αριθμός των πεδίων Killing της εν λόγω μετρικής είναι 6). Επιβάλλοντας στο διανυσματικό πεδίο του αιθέρα να έχει τις συμμετρίες της FLRW μετρικής, καταλήγουμε το διανυσματικό πεδίο u_μ να είναι αστρόβιλο και έτσι να υπάρχουν λύσεις μόνο με ορθογώνιες υπερεπιφάνειες.

Από την εξίσωση περιορισμού (1.14) έπεται άμεσα

$$-\left(\frac{T'}{M}\right)^2 + 1 = 0, \tag{2.2}$$

το οποίο δίνει $T(t) = \mu_1 + \mu_2 \int M(t)\,dt$, $(\mu_2)^2 = 1$.

Επιπλέον, η μόνη μη μηδενική συνιστώσα της (1.13) παρέχει τον πολλαπλασιαστή Lagrange λ :

$$\lambda(t) = \frac{3}{a^2M^3}\left[(c_1 + c_2 + c_3)\,Ma'^2 + c_2a\,(a'M' - Ma'')\right]. \tag{2.3}$$

Τέλος, με τη χρήση της (2.2) και της (2.3), οι βαρυτικές εξισώσεις πεδίου (1.10) γίνονται

$$-2kM^2 + (-2 + c_1 + 3c_2 + c_3)a'^2 = 0, \tag{2.4}$$

$$2kM^3+2(-2+c_1+3c_2+c_3)aa'M'-(-2+c_1+3c_2+c_3)M((a')^2+2aa'')=0. \quad (2.5)$$

Το γεγονός ότι το στοιχείο μήκους είναι βαθμωτό μας δίνει την ελευθερία να επιλέξουμε τη χρονική συνιστώσα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, επιλέγουμε την συνάρτηση χρονικής παρόδου $M\,(t) = a\,(t)$ (σύμμορφος χρόνος).

Πράγματι αν θεωρήσουμε μία αυθαίρετη αλλαγή χρόνου $t = f(\bar{t})$ τότε έχουμε $M(t).dt = M(f(\bar{t})).f'(\bar{t}).d(\bar{t}) = \overline{M}(\bar{t}).d\bar{t}$ το δε $a(t) = a(f(\bar{t})) = \overline{a}(\bar{t})$, άρα $M(f(\bar{t})).f'(\bar{t}) = \overline{M}(\bar{t})$ και $a(t) = \overline{a}(\bar{t})$. Επομένως $M(t) = \frac{\overline{M}(\bar{t})}{f'(\bar{t})}$ και λύνοντας την διαφορική εξίσωση $\overline{a}(\bar{t}) = \frac{\overline{M}(\bar{t})}{f'(\bar{t})}$ βρίσκουμε κατάλληλη $f(t)$ που να πληροί την συνθήκη που θέλουμε.

Επομένως το στοιχείο γραμμής γίνεται

$$ds^2 = a^2\,(t)\left(-dt^2 + \frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2\right), \quad (2.6)$$

και οι εξισώσεις βαρυτικού πεδίου ανάγονται στις:

$$-2ka^2 + (-2 + c_1 + 3c_2 + c_3)a'^2 = 0, \quad (2.7)$$

$$(-2 + c_1 + 3c_2 + c_3)((a')^2 - aa'') = 0. \quad (2.8)$$

2.1 Αναλυτικές λύσεις

Προχωράμε διερευνώντας την ύπαρξη λύσεων για τις εξισώσεις του πεδίου (2.7) και (2.8). Η τελευταία υπονοεί ότι η ανάλυσή μας μπορεί να ταξινομηθεί ανάλογα με το εάν ο συνδυασμός σταθερών $-2+c_1+3c_2+c_3$ είναι ίσος ή διαφορετικός από το μηδέν.

2.1.1 Περίπτωση 1: $-2 + c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$

Στην περίπτωση αυτή η (2.8) ικανοποιείται ταυτοτικά, ενώ η (2.7) υπαγορεύει ότι

$$k = 0, \quad (2.9)$$

έτσι η λύση περιγράφεται από την παραπάνω εξίσωση και οποιαδήποτε $a(t)$. Αυτή η ιδιαιτερότητα αντικατοπτρίζεται στο γεγονός ότι η αντίστοιχη ανηγμένη Λαγκρανζιανή είναι μία ολική παράγωγος (βλ. επόμενη ενότητα). Η μετρική γίνεται

$$\{(-a^2,0,0,0),(0,a^2,0,0),(0,0,r^2a^2,0),(0,0,0,r^2a^2sin(\theta)^2)\}, \quad (2.10)$$

και ο πολλαπλασιαστής Lagrange λ, υπολογίζεται να είναι λόγω της (2.3)

$$\lambda\left(t\right)=-\frac{3((-2+c_2)(a')^2+c_2aa'')}{a^4}. \tag{2.11}$$

Το βαθμωτό Ricci υπολογίζεται ως $R=g^{\mu\kappa}R_{\mu\kappa}=g^{\mu\kappa}R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\kappa}\Longrightarrow R=\frac{6a''(t)}{a(t)^3}$, και επειδή το $a(t)$ δεν προσδιορίζεται μπορεί να υπάρχουν επιλογές για τις οποίες υπάρχουν ή δεν υπάρχουν ανωμαλίες καμπυλότητας.

2.1.2 Περίπτωση 2: $-2+c_1+3c_2+c_3\neq 0$

1) Αν $k=0$ τότε η (2.7) υποδηλώνει ότι $a(t)=ca$ που ικανοποιεί επίσης την (2.8), ενώ ο πολλαπλασιαστής Lagrange γίνεται μηδέν ($\lambda=0$) και η μετρική ανάγεται στην

$$\{\{-ca^2,0,0,0\},\{0,ca^2,0,0\},\{0,0,ca^2r^2,0\},\{0,0,0,ca^2r^2\sin(\theta)^2\}\}, \tag{2.12}$$

η οποία φυσικά αναπαριστά τον χωρόχρονο Minkowski σε σφαιρικές-πολικές συντεταγμένες.

2) Αν $\omega\equiv k*(-2+c_1+3c_2+c_3)^{-1}>0$ χρησιμοποιώντας τις (2.7) και (2.8) καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση

$$a''(t)-\frac{2ka(t)}{c_1+3c_2+c_3-2}=0 \tag{2.13}$$

η οποία δίνει λύση $a(t)=m_1e^{\pm\sqrt{2}\sqrt{\omega}t}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω $a(t)$ με διαφορετικές σταθερές ολοκλήρωσης m_1,m_2 που αντιστοιχούν στα πρόσημα συν και πλην δεν είναι λύση. Δηλαδή η $a(t)=m_1e^{\sqrt{2}t\sqrt{\omega}}+m_2e^{-\sqrt{2}t\sqrt{\omega}}$ δεν είναι λύση. Αυτό οφείλεται στην μη γραμμικότητα των εξισώσεων βαρυτικού πεδίου. Το αντίθετο πρόσημο $\omega<0$ δίνει ένα φανταστικό μέρος για την $a(t)$ και αυτό δεν είναι επιτρεπτό γιατί δεν έχει φυσικό νόημα φανταστικό στοιχείο μήκους.

(Πράγματι αν $\frac{k}{c_1+3c_2+c_3-2}<0$ τότε η λύση της (2.13) είναι $a(t)=m_1e^{i\sqrt{2}t\sqrt{-\frac{k}{c_1+3c_2+c_3-2}}}$)

Ο πολλαπλασιαστής Lagrange λ, υπολογίζεται μέσω της (2.3) ως εξής:

$$\lambda\left(t\right)=\frac{6(c_1+c_2+c_3)\omega}{a(t)^2}. \tag{2.14}$$

Η μετρική γίνεται:

$$\{\{-a(t)^2, 0, 0, 0\}, \{0, \frac{a(t)^2}{1-kr^2}, 0, 0\}, \{0, 0, r^2 a(t)^2, 0\}, \{0, 0, 0, a(t)^2 r^2 \sin(\theta)^2\}\}. \tag{2.15}$$

Το αντίστοιχο βαθμωτό Ricci είναι $R = \frac{6(k+2\omega)e^{-2\sqrt{2}t\sqrt{\omega}}}{m_1^2}$ το οποίο φαίνεται να έχει ανωμαλία καμπυλότητας όταν $t \to -\infty$. Για να είναι ασφαλές το συμπέρασμα είναι καλύτερο να μεταβούμε στον κοσμολογικό χρόνο τ όπου $\tau = \int a(t)\,dt$ και για τον οποίο $M(\tau) = 1$: Συγκεκριμμένα υπολογίζουμε τον κοσμολογικό χρόνο $\tau = \int a(t)\,dt = \frac{m_1 e^{\sqrt{2}t\sqrt{\omega}}}{\sqrt{2}\sqrt{\omega}}$ όταν $a(t) = m_1 e^{\sqrt{2}t\sqrt{\omega}}$. Λύνοντας ως προς t έχουμε τον μετασχηματισμό $t = \frac{\log\left(\frac{\sqrt{2}\tau\sqrt{\omega}}{\mathrm{m1}}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{\omega}}$. Στον νέο αυτόν χρόνο το βαθμωτό Ricci βρίσκεται ως $R = \frac{3(k+2\omega)}{\tau^2\omega}$, αποκαλύπτοντας την ανωμαλία στο $\tau = 0$. Να σημειωθεί ότι η σταθερά $\frac{\omega}{(k+2\omega)}$ είναι ουσιώδης,, όπως μπορεί να δει κάποιος μετά την απαλοιφή του τ ανάμεσα στο παραπάνω βαθμωτό Ricci και στο $Q \equiv g^{\mu\nu}R_{,\mu}R_{,\nu} = -\frac{36(k+2\omega)^2}{\tau^6\omega^2}$ επιτυγχάνοντας έτσι μία αναλλοίωτη σχέση μεταξύ $(R,\, Q)$ στην οποία εμφανίζεται η σταθερά. Πράγματι μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $Q = -\frac{4\omega R^3}{3(k+2\omega)}$

Αν εξετάσουμε τον τανυστή Riemann και βρούμε τις μη μηδενικές συνιστώσες του θα βρούμε ότι είναι οι εξής τρεις:

$$\frac{k m_1^2 r^2 (c_1+3c_2+c_3) e^{\frac{2\sqrt{2}\sqrt{k}t}{\sqrt{c_1+3c_2+c_3-2}}}}{(kr^2-1)(c_1+3c_2+c_3-2)},$$

$$\frac{k m_1^2 r^4 \sin^2(\theta)(c_1+3c_2+c_3) e^{\frac{2\sqrt{2}\sqrt{k}t}{\sqrt{c_1+3c_2+c_3-2}}}}{c_1+3c_2+c_3-2}$$

$$\frac{k m_1^2 r^2 \sin^2(\theta)(c_1+3c_2+c_3) e^{\frac{2\sqrt{2}\sqrt{k}t}{\sqrt{c_1+3c_2+c_3-2}}}}{(kr^2-1)(c_1+3c_2+c_3-2)}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου το $c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$ έχουμε ότι για $k < 0$ το $\omega \equiv k(-2)^{-1} > 0$ και τότε λαμβάνουμε τον χωρόχρονο Minkowski, αφού ο τανυστής Riemann είναι 0.

2.2 Περιγραφή της ανηγμένης Λαγκρανζιανής

Για τον χωρόχρονο με στοιχείο γραμμής (2.1) το βαθμωτό Ricci $R = g^{\mu\kappa}R_{\mu\kappa}$ όπου $R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\kappa}$ υπολογίζεται να είναι ίσο με

$$R = \frac{6a''(t)}{a(t)M(t)^2} - \frac{6a'(t)M'(t)}{a(t)M(t)^3} + \frac{6a'^2}{a(t)^2M(t)^2} + \frac{6k}{a(t)^2}. \tag{2.16}$$

Αντικαθιστούμε στη δράση (1.1) την παραπάνω έκφραση για το R, $u^a = -\frac{T'(t)}{M(t)^2}\delta_t^a$ για το διανυσματικό πεδίο (αιθέρα) καθώς και την τιμή της ορίζουσας $\sqrt{-\mathrm{detg}} = r^2 a(t)^3 \sin(\theta)\sqrt{\frac{1}{1-kr^2}}M(t)$. Για την εύρεση της ανηγμένης

Λαγκρανζιανής πυκνότητας, παρατηρούμε ότι, στο ολοκλήρωμα της δράσης οι χωρικές συνιστωσες παράγουν ένα ολοκλήρωμα πάνω στον τριδιάστατο όγκο που τελικά μας δίνει μία σταθερά. Επομένως για τον υπολογισμό της ανηγμένης Λαγκρανζιανής πυκνότητας, αυτό που τελικά μας ενδιαφέρει, είναι οι επιμέρους συναρτήσεις της που έχουν χρονική μεταβολή. Λαμβάνοντας υπόψιν το τελευταίο και κάνοντας της παραπάνω αντικαταστάσεις καταλήγουμε στην μορφή της ανηγμένης Λαγκρανζιανής πυκνότητας που είναι η

$$\mathcal{L}_{FLRW} = \frac{a}{M^7}(M^8(6k + a^2\lambda) - 6aM^5a'M' - c_4a^2M'^2T'^4 + M^6(6a'^2 + a(-a\lambda T'^2 + 6a''))+ \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
&+ 2c_4a^2MM'T'^3T'' - 2aM^3M'T'(3c_2a'T' + (c_1 + c_2 + c_3)aT'')+ \\
&+ a^2M^2T'^2((c_1 + c_2 + c_3)M'^2 - c_4(T'')^2) \\
&+ M^4(3(c_1 + 3c_2 + c_3)a'^2T'^2 + 6c_2aa'T'T'' + (c_1 + c_2 + c_3)a^2(T'')^2)).
\end{aligned}$$

Προκειμένου να ελεγχθεί η εγκυρότητα της ανηγμένης Λαγκρανζιανής πυκνότητας $\mathcal{L}_{FLRW}$, πρέπει πρώτα να αντλήσουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler - Lagrange. Εάν αυτές οι εξισώσεις λυθούν αλγεβρικά ως προς τις επιταχύνσεις και αντικατασταθούν στις ανηγμένες εξισώσεις της θεωρίας (1.10), (1.13), (1.14) και οι προκύπτουσες εξισώσεις είναι ταυτότητες, θα πούμε ότι η $\mathcal{L}_{FLRW}$, είναι έγκυρη καθώς αναπαράγει σωστά την ανηγμένη δυναμική.

Στην **πρώτη περίπτωση**, $-2 + c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$ μετά τις αντικαταστάσεις $T\,(t) = \mu_1 + \mu_2 \int M\,(t)\,dt$, $(\mu_2)^2 = 1$, $M\,(t) = a\,(t)$ η Λαγκρανζιανή πυκνότητα γίνεται

$$\mathcal{L}_{FLRW} = 6ka^2 + 6a'^2 + 6aa'' \equiv 6ka^2 + 6(aa')'. \tag{2.18}$$

Εφαρμόζοντας την (7.13) στην (2.18) και παίρνοντας τις παραγώγους ως προς $a(t)$ θα έχουμε:

$\frac{\partial L}{\partial a} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\right) + \frac{d^2}{\mathrm{dt}^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{a}}\right) = 0$

Είναι λοιπόν προφανές ότι η προηγούμενη εξίσωση Euler-Lagrange της (2.18) ως προς $a(t)$ δίνει $k\,a = 0$ έτσι η Λαγκρανζιανή είναι έγκυρη για $k = 0$ και τότε δεν καθορίζει ένα συγκεκριμένο $a(t)$, συμφωνώντας με τις ανηγμένες εξισώσεις που έχουμε βρει.

Στη **δεύτερη περίπτωση** $-2+c_1+3c_2+c_3 \neq 0$ η Λαγκρανζιανή πυκνότητα (2.17) είναι επίσης έγκυρη.

Πράγματι, αρχικά στην (2.17) παίρνουμε τις τέσσερεις εξισώσεις Euler-Lagrange ως προς $\{M(t), \lambda(t), T(t), a(t)\}$ και μετά κάνουμε τις αντικαταστάσεις $T\,(t) = \mu_1 + \mu_2 \int M\,(t)\,dt$, $(\mu_2)^2 = 1$,$M\,(t) = a\,(t)$ και καταλήγουμε στις εξής τέσσερεις εξισώσεις:

Πρώτον η εξίσωση Euler-Lagrange ως προς $M(t)$ είναι

$a(t)\left(6c_2a(t)a''(t)+a'(t)^2(-9c_1-21c_2-9c_3+6)+6ka(t)^2+2a(t)^4\lambda(t)\right)=0$

Η δεύτερη εξίσωση ως προς $\lambda(t)$ είναι ταυτότητα

Η τρίτη εξίσωση ως προς $T(t)$ είναι:

$\epsilon a(t)(3c_2a^{(3)}(t)a(t)^2+3a'(t)^3(c_1+2c_2+c_3)+3a(t)^4\lambda(t)a'(t)-2a(t)a'(t)a''(t)(3c_1+6c_2+3c_3)+a(t)^5\lambda'(t))=0$

Τέλος η τέταρτη εξίσωση που είναι ως προς $a(t)$ είναι:

$a(t)\left(-2a(t)a''(t)(c_1+3c_2+c_3-2)+a'(t)^2(c_1+3c_2+c_3-2)+2ka(t)^2\right)=0$ Όπως βλέπουμε απο την 1) της 3.1.2 Περίπτωση 2 αν $k=0$ απο τις λύσεις προκύπτει $a(t)=$ ca καθώς και $\lambda(t)=0$. Αντικαθιστώντας στα προηγούμενα οι τέσσερεις εξισώσεις γίνονται ταυτότητες και έτσι η Λαγκρανζιανή είναι έγκυρη.

Στην περίπτωση που το $\frac{\kappa}{c_1+3c_2+c_3-2}>0$ στις τέσσερεις προηγούμενες εξισώσεις Euler-Lagrange ως προς $\{M(t),\lambda(t),T(t),a(t)\}$ κάνουμε τις αντικαταστάσεις $a(t)=m_1e^{\frac{\pm\sqrt{2}\sqrt{k}t}{\sqrt{c_1+3c_2+c_3-2}}}$ και $\lambda(t)=\frac{6k(c_1+c_2+c_3)e^{-\frac{\pm2\sqrt{2}\sqrt{k}t}{\sqrt{c_1+3c_2+c_3-2}}}}{m_1^2(c_1+3c_2+c_3-2)}$ οι τέσσερεις γίνονται ταυτότητες και έτσι η Λαγκρανζιανή είναι έγκυρη.

Συμβαίνει όμως και το αντίστροφο, δηλαδή:

Αν πάρουμε τις τρείς εξισώσεις Euler-Lagrange μετά την αντικατάσταση των $\{M(t),T(t)\}$ και λύνοντας την πρώτη ως προς $\lambda(t)$ έχουμε:

$\lambda(t)=\frac{-6c_2a(t)a''(t)+3a'(t)^2(3c_1+7c_2+3c_3-2)-6ka(t)^2}{2a(t)^4}$ Αντικαθιστώντας την προηγούμενη τιμή του $\lambda(t)$ στις δύο επόμενες εξισώσεις Euler-Lagrange έχουμε:

$\epsilon a(t)a'(t)(-2a(t)a''(t)(c_1+3c_2+c_3-2)+a'(t)^2(c_1+3c_2+c_3-2)+2ka(t)^2)=0$

και

$a(t)\left(-2a(t)a''(t)(c_1+3c_2+c_3-2)+a'(t)^2(c_1+3c_2+c_3-2)+2ka(t)^2\right)=0$

Αν το $a(t)=$ ca τότε αναγκαστικά το $k=0$

Αν η $a(t)$ δεν είναι σταθερά τότε η λύση της διαφορικής $-2a(t)a''(t)(c_1+3c_2+c_3-2)+a'(t)^2(c_1+3c_2+c_3-2)+2ka(t)^2=0$ δίνει $a(t)=m_2\cosh^2\left(\frac{\sqrt{k}(t-2(c_1+3c_2+c_3-2)m_1)}{\sqrt{2}\sqrt{c_1+3c_2+c_3-2}}\right)$ που είναι λύση των παραπάνω ανηγμένων εξισώσεων κίνησης, αν $\frac{\kappa}{c_1+3c_2+c_3-2}>0$

Επομένως συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι στον FLRW δεν υπάρχει λύση πάντα αλλά όταν υπάρχει οι αντίστοιχες Λαγκρανζιανές είναι έγκυρες. Ακόμα και στην περίπτωση που δεν υπαρχει λύση των εξισώσεων κίνησης η αντίστοιχη ανηγμένη Λαγκρανζιανή δεν έχει και αυτή λύση. Επίσης ενδιαφέρον είναι ότι υπάρχει περίπτωση οι εξισώσεις κίνησης να επιδέχονται λύση για κάθε $a(t)$ και η αντίστοιχη Λαγκρανζιανή είναι ολική παράγωγος.

3

LRS BIANCHI TYPE III

Συνεχίζουμε την ανάλυσή μας εξετάζοντας το διαγώνιο χωρόχρονο LRS Bianchi Type III με θεμελιώδες στοιχείο μήκους

$$ds^2 = -M^2(t)\,dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + e^{-2x}dy^2\right) + b^2(t)\,dz^2, \tag{3.1}$$

που δέχεται τα ακόλουθα τέσσερα πεδία Killing:

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \xi_3 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad \xi_4 = 2y\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - e^{2x})\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.2}$$

Επιβάλλουμε τις τρείς πρώτες συμμετρίες στο γενικό διανυσματικό πεδίο του αιθέρα $u_\mu = \{u_0(t,x,y,z), u_1(t,x,y,z), u_2(t,x,y,z), u_3(t,x,y,z)\}$

Αυτό σημαίνει ότι απαιτούμε $L_{\xi_1}u_\mu = 0$, $L_{\xi_2}u_\mu = 0$, $L_{\xi_3}u_\mu = 0$.

Τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

$L_{\xi_1}u_\mu = \left\{u_0^{(0,0,1,0)}(t,x,y,z), u_1^{(0,0,1,0)}(t,x,y,z), u_2^{(0,0,1,0)}(t,x,y,z), u_3^{(0,0,1,0)}(t,x,y,z)\right\}$

$L_{\xi_2}u_\mu = \left\{u_0^{(0,0,0,1)}(t,x,y,z), u_1^{(0,0,0,1)}(t,x,y,z), u_2^{(0,0,0,1)}(t,x,y,z), u_3^{(0,0,0,1)}(t,x,y,z)\right\}$

$L_{\xi_3}u_\mu = \Big\{yu_0^{(0,0,1,0)}(t,x,y,z) + u_0^{(0,1,0,0)}(t,x,y,z), yu_1^{(0,0,1,0)}(t,x,y,z) + u_1^{(0,1,0,0)}(t,x,y,z),$
$yu_2^{(0,0,1,0)}(t,x,y,z) + u_2^{(0,1,0,0)}(t,x,y,z) + u_2(t,x,y,z),$
$yu_3^{(0,0,1,0)}(t,x,y,z) + u_3^{(0,1,0,0)}(t,x,y,z)\Big\}$

Από τις δύο πρώτες συμπεραίνουμε ότι

$u_\mu = \{u_0(t,x), u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x)\}$

με συνέπεια η τρίτη να γίνει

$L_{\xi_3} u_\mu = \left\{ u_0^{(0,1)}(t,x), u_1^{(0,1)}(t,x), u_2^{(0,1)}(t,x) + u_2(t,x), u_3^{(0,1)}(t,x) \right\}$. Λύνοντας την διαφορική εξίσωση $u_2^{(0,1)}(t,x) + u_2(t,x) = 0$ καταλήγουμε στην λύση $u_2(t,x) = e^{-x} u_2(t)$.

Οι σχέσεις $L_{\xi_1} u_\mu = L_{\xi_2} u_\mu = L_{\xi_3} u_\mu = 0$ καταλήγουν στο $u_\mu = \{u_0(t), u_1(t), e^{-x} u_2(t), u_3(t)\}$.

Στην συνέχεια απαιτούμε το u_μ να είναι αστρόβιλο, που σημαίνει ότι η συναλλοίωτη παράγωγος είναι συμμετρική, δηλαδή $u_{\mu;\kappa} - u_{\kappa;\mu} = 0$, το οποίο τελικά μας δείχνει ότι το u_μ είναι κλίση κάποιου βαθμωτού, έτσι οι λύσεις που θα βρούμε για το διανυσματικό πεδίο του αιθέρα είναι υπερεπίπεδα ορθογώνιες. Εφαρμόζωντας τα προηγούμενα στην τελευταία μορφή του u_μ έχουμε το αποτέλεσμα:

$$u_{\mu;\kappa} - u_{\kappa;\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -u_1'(t) & -e^{-x} u_2'(t) & -u_3'(t) \\ u_1'(t) & 0 & e^{-x} u_2(t) & 0 \\ e^{-x} u_2'(t) & -e^{-x} u_2(t) & 0 & 0 \\ u_3'(t) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για να είναι το πεδίο αστρόβιλο θα πρέπει $u_2(t) = 0$, $u_1(t) = \lambda_1$, $u_3(t) = \lambda_3$.

Απλοποιείται έτσι παραιτέρω το u_μ και παίρνει την μορφή:

$u_\mu = \{u_0(t), \lambda_1, 0, \lambda_3\}$

Τέλος βρίσκουμε την παράγωγο Lie του προηγούμενου u_μ ως προς το τέταρτο πεδίο Killing ξ_4 .

$L_{\xi_4} u_\mu = \{0, 0, 2\lambda_1, 0\}$. Απαιτώντας και $L_{\xi_4} u_\mu = 0$ (ως συμμετρία του χωρόχρονου) έχουμε ότι $\lambda_1 = 0$. Παίρνουμε με αυτόν τον τρόπο την τελική μορφή του u_μ που είναι: $u_\mu = \{u_0(t), 0, 0, \lambda_3\}$.

Χρησιμοποιούμε επίσης την σχέση (1.14) οπότε καταλήγουμε στην $\frac{\lambda_3^2}{b(t)^2} - \frac{u_0(t)^2}{M(t)^2} + 1 = 0$ και φτάνουμε στην τελική μορφή:

$$u^a = \frac{u_0(t)}{-M^2} \delta_t^a + \frac{\lambda_3}{b(t)^2} \delta_z^a, \qquad u_0(t) = \frac{M}{b} \sqrt{\lambda_3^2 + b^2}. \tag{3.3}$$

Όπως κάναμε στην προηγούμενη περίπτωση του FLRW επιλέγουμε τον χρόνο έτσι ώστε $M(t) = a(t)$ το οποίο αποδεικνύεται εξίσου χρήσιμο στην παρούσα κατάσταση, καθώς με αυτό το u^a και το στοιχείο μήκους (3.1) η τέταρτη συνιστώσα της εξίσωσης (1.13) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\lambda_3 \left(b(t)\lambda(t) - \frac{(c_1+c_3)(a'(t)b'(t) + a(t)b''(t))}{a(t)^3} \right)}{b(t)^3} = 0, \tag{3.4}$$

υπονοώντας ότι πρέπει να διερευνήσουμε ξεχωριστά τις υποθέσεις $\lambda_3 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$.

Η γενική προσέγγιση στην προσπάθεια εύρεσης του χώρου λύσεων είναι να λύσουμε αλγεβρικά δύο από τις εξισώσεις όσον αφορά τις επιταχύνσεις $a''(t), b''(t)$ και να αντικαταστήσουμε το αποτέλεσμα στις υπόλοιπες. Με αυτόν τον τρόπο εμφανίζονται συγκεκριμένοι κλάδοι όταν μηδενίζονται οι παρονομαστές των αντίστοιχων εκφράσεων. Αυτό μπορεί να συμβεί είτε για συγκεκριμένα εύρη τιμών των σταθερών είτε για συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ των $a(t), b(t)$. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε όλες τις περιπτώσεις που εμφανίζονται.

Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση που το $\lambda_3 = 0$, τότε ο συντελεστής της $b''(t)$ στην (1,1) συνιστώσα της (1.10) είναι $\frac{c_2-1}{b(t)}$. Έτσι προκύπτει η πρώτη περίπτωση που είναι η ακόλουθη:

3.0.1 Περίπτωση 1: $\lambda_3 = 0, \quad c_2 = 1$

Η σκιαγράφηση της διαδικασίας επίλυσης έχει ως εξής:

Η (0,0) συνιστώσα της (1.10) είναι
$\frac{-2b(t)^2(3c_1+3c_3+5)a'(t)^2+2a(t)b(t)(2b(t)a''(t)-a'(t)b'(t))-a(t)^2\left(-2b(t)b''(t)+3(1+c_3+1)b'(t)^2+2b(t)^2\right)+2a(t)^4b(t)^2\lambda(t)}{2a(t)^2b(t)^2} = 0$

Λύνουμε ως προς $\lambda(t)$ την προηγούμενη σχέση και έχουμε:
$\lambda(t) = \frac{1}{2a(t)^4b(t)^2}\left(2a(t)^2b(t)^2 + 10b(t)^2a'(t)^2 + 6c_1b(t)^2a'(t)^2 + 6c_3b(t)^2a'(t)^2 + \right.$
$-4a(t)b(t)^2a''(t) + 2a(t)b(t)a'(t)b'(t) - 2a(t)^2b(t)b''(t) + 3c_1a(t)^2b'(t)^2 + 3c_3a(t)^2b'(t)^2 +$
$\left.3a(t)^2b'(t)^2\right)$

Αντικαθιστούμε το $\lambda(t)$ στην πρώτη συνιστώσα της (1.13) και γίνεται $-\frac{qa'^2}{a(t)^2} - \frac{qb'^2}{2b(t)^2} - 1 = 0$ όπου έχουμε αντικαταστήσει $c_3 = -c_1 + q - 1$.

Αυτή η έκφραση μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο όταν $q < 0$.

Η προηγούμενη έκφραση παραμένει αναλλοίωτη κάτω απο τον μετασχηματισμό $a(t) \to \lambda a(t), b(t) \to \mu b(t)$, δηλαδή η σχέση είναι αναλλοίωτη ως προς τις ανεξάρτητες ανακλιμακώσεις των $a(t)$, $b(t)$.

Σε αυτήν την περίπτωση οι κατάλληλοι μετασχηματισμοί που τελικά επιλύουν την εξίσωση είναι:

$$a(t) = e^{\frac{\int \cos(f(t))\,dt}{\sqrt{-q}}}, b(t) = e^{\frac{\sqrt{2}\int \sin(f(t))\,dt}{\sqrt{-q}}}, \tag{3.5}$$

και οι υπόλοιπες εξισώσεις της (1.10) γίνονται:

$\sin(f(t))\left(\sqrt{-q}f'(t) + \sin(f(t)) + \left(-\sqrt{2}\right)\cos(f(t))\right) = 0$

$e^{-2x}\sin(f(t))\left(\sqrt{-q}f'(t) + \sin(f(t)) + \left(-\sqrt{2}\right)\cos(f(t))\right) = 0$

$\cos(f(t))\left(-\exp\left(-\frac{2\left(\int \cos(f(t))\,dt - \sqrt{2}\int \sin(f(t))\,dt\right)}{\sqrt{-q}}\right)\right)$

$(\sqrt{2}\sqrt{-q}f'(t) + \sqrt{2}\sin(f(t)) - 2\cos(f(t))) = 0$

Οι εξισώσεις αυτές ικανοποιούνται εάν η $f(t)$ υπακούει στη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$f'(t) = \frac{\sqrt{2}\cos(f(t)) - \sin(f(t))}{\sqrt{-q}}. \tag{3.6}$$

Η λύση της είναι:

$$f(t) = -2\tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\left(3\sqrt{6}\tanh\left(\frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{-q}t - m_1 q)}{2q}\right) + 3\sqrt{2}\right)\right). \tag{3.7}$$

Για να διερευνήσουμε τη συμπεριφορά των ανωμαλιών υπολογίζουμε το βαθμωτό Ricci συναρτήσει της $f(t)$ χωρίς να εισαχθεί η συγκεκριμένη έκφραση που δίνεται παραπάνω. Το αποτέλεσμα είναι:

$$R = \frac{e^{\frac{1}{3}(-2)\sqrt{2}f(t)}\left(\sqrt{2}\cos(f(t))-\sin(f(t))\right)^{2/3}\left(2\sqrt{2}\sin(2f(t))+\cos(2f(t))-2q-7\right)}{q}$$

Οι όροι που περιλαμβάνονται στις δύο παρενθέσεις είναι προφανώς πεπερασμένοι, αφού $|\cos(t)| \leq 1$ και $|\sin(t)| \leq 1$. Έτσι ο μόνος όρος που μπορεί να απειρισθεί είναι ο εκθετικός. Ωστόσο, μπορεί κανείς να δει ότι η $f(t)$ είναι φραγμένη για κάθε t και για όλα τα εύρη των σχετικών παραμέτρων (q, m_1). Επομένως συμπεραίνουμε ότι η περιγραφόμενη γεωμετρία δεν έχει ανωμαλίες.

Θεωρώντας τώρα ότι ($\lambda_3 = 0, \quad c_2 \neq 1$ μπορούμε να λύσουμε την (1,1) συνιστώσα της (1.10) ως προς $b''(t)$ και παίρνουμε την σχέση

$$b''(t) = \frac{b(t)\left(-\frac{a'(t)b'(t)(c_1+c_2+c_3)}{a(t)b(t)}+\frac{(c_1+2c_2+c_3-1)\left(a'(t)^2-a(t)a''(t)\right)}{a(t)^2}+\frac{b'(t)^2(c_1+c_2+c_3)}{2b(t)^2}\right)}{c_2-1}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του $b''(t)$ στην (1.10) η (3,3) συνιστώσα της έχει συντελεστή του $a''(t)$ τον:

$$-\frac{b(t)^2(c_1+c_3+1)(c_1+3c_2+c_3-2)}{(c_2-1)a(t)^3}$$

Επομένως η επόμενη περίπτωση είναι η:

3.0.2 Περίπτωση 2: $(\lambda_3 = 0, \quad c_2 \neq 1, \quad$ **και** $\quad 1 + c_1 + c_3 = 0)$ **ή** $(\lambda_3 = 0, \quad c_2 \neq 1, \quad$ **και** $\quad -2 + c_1 + 3c_2 + c_3 = 0)$

Για την περίπτωση ($\lambda_3 = 0, \quad c_2 \neq 1, \quad$ και $\quad 1 + c_1 + c_3 = 0$) βρίσκουμε ότι μετά την προηγούμενη αντικατάσταση η (0,0) συνιστώσα της (1.10) είναι

$$\frac{4(2-3c_2)b(t)^2a'(t)^2+2a(t)b(t)(2c_2b(t)a''(t)+(2-3c_2)a'(t)b'(t))+a(t)^2\left(2c_2b(t)b''(t)-3(c_2-1)b'(t)^2-2b(t)^2\right)+2a(t)^4b(t)^2\lambda(t)}{2a(t)^2b(t)^2}$$

και λύνοντας ως προς $\lambda(t)$ έχουμε:

$$\lambda(t) = \tfrac{1}{2a(t)^4b(t)^2}\,(2a(t)^2b(t)^2 - 8b(t)^2a'(t)^2 + 12c_2b(t)^2a'(t)^2 - 4a(t)b(t)a'(t)b'(t)+$$
$$-4c_2a(t)b(t)^2a''(t) + 6c_2a(t)b(t)a'(t)b'(t) - 2c_2a(t)^2b(t)b''(t) + 3c_2a(t)^2b'(t)^2 - 3a(t)^2b'(t)^2)$$

Θέτοντας $c_2 = q+1$ και αντικαθιστώντας το $\lambda(t)$ καταλήγουμε ότι η πρώτη

συνιστώσα της (1.13) είναι
$-\frac{2a'(t)b'(t)}{a(t)b(t)} - \frac{2a'(t)^2}{a(t)^2} - \frac{b'(t)^2}{2b(t)^2} - \frac{1}{q} = 0$

Η προηγούμενη έκφραση παραμένει αναλλοίωτη κάτω απο τον μετασχηματισμό $a(t) \to \lambda a(t)b(t) \to \mu b(t)$, δηλαδή η σχέση είναι αναλλοίωτη ως προς τις ανεξάρτητες ανακλιμακώσεις των $a(t)$, $b(t)$ και κάνοντας την αντικατάσταση $a(t) = e^{\int a_1(t)\,dt + \int b_1(t)\,dt}$ και $b(t) = e^{\int b_1(t)\,dt - 2\int a_1(t)\,dt}$ καταλήγουμε στην σχέση $-\frac{1}{2}9b_1(t)^2 - \frac{1}{q} = 0$. Η τιμή του $b_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{-q}}$ μας δίνει μέσω της (1,1) συνιστώσας της (1.10) την $a_1(t) = \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt{-q}}$ και τελικά βρίσκουμε ότι η (3,3) συνιστώσα της (1.10) παίρνει την ποτέ μηδενιζόμενη μορφή $e^{\frac{\sqrt{2}qt}{(-q)^{3/2}}}$.

Για την δεύτερη περίπτωση ($\lambda_3 = 0, \quad c_2 \neq 1, \quad$ και $\quad -2+c_1+3c_2+c_3 = 0$) βρίσκουμε ότι μετά την προηγούμενη αντικατάσταση η (0,0) συνιστώσα της (1.10) είναι
$\frac{(3c_2-5)b(t)^2a'(t)^2+a(t)b(t)(2c_2b(t)a''(t)+(2-3c_2)a'(t)b'(t))+a(t)^2\left(c_2b(t)b''(t)+3(c_2-1)b'(t)^2-b(t)^2\right)+a(t)^4b(t)^2\lambda(t)}{a(t)^2b(t)^2}$

και λύνοντας ως προς $\lambda(t)$ έχουμε:

$\lambda(t) = \frac{1}{a(t)^4b(t)^2}\left(a(t)^2b(t)^2 + 5b(t)^2a'(t)^2 - 3c_2b(t)^2a'(t)^2 - 2a(t)b(t)a'(t)b'(t) + \right.$
$\left. -2c_2a(t)b(t)^2a''(t) + 3c_2a(t)b(t)a'(t)b'(t) - c_2a(t)^2b(t)b''(t) - 3c_2a(t)^2b'(t)^2 + 3a(t)^2b'(t)^2\right)$

Θέτοντας $c_2 = q+1$ και αντικαθιστώντας το $\lambda(t)$ καταλήγουμε ότι η πρώτη συνιστώσα της (1.13) είναι
$-\frac{2a'(t)b'(t)}{a(t)b(t)} + \frac{a'(t)^2}{a(t)^2} + \frac{b'(t)^2}{b(t)^2} - \frac{1}{q} = 0$

Η προηγούμενη έκφραση παραμένει αναλλοίωτη κάτω απο τον μετασχηματισμό $a(t) \to \lambda a(t), b(t) \to \mu b(t)$, δηλαδή η σχέση είναι αναλλοίωτη ως προς τις ανεξάρτητες ανακλιμακώσεις των $a(t)$, $b(t)$ και κάνοντας την αντικατάσταση $a(t) = e^{\int a_1(t)\,dt + \int b_1(t)\,dt}$ και $b(t) = e^{\int b_1(t)\,dt - 2\int a_1(t)\,dt}$ καταλήγουμε στην σχέση $9a_1(t)^2 - \frac{1}{q} = 0$. Η τιμή του $a_1(t) = \frac{i}{3\sqrt{-q}}$ μας δίνει μέσω της (1,1) συνιστώσας της (1.10) την $b_1(t) = \frac{2i}{3\sqrt{-q}}$ και τελικά βρίσκουμε ότι η (3,3) συνιστώσα της (1.10) παίρνει την ποτέ μηδενιζόμενη μορφή $4e^{-\frac{2it}{\sqrt{-q}}}$.

Επομένως, δεν υπάρχει λύση σε αυτές τις περιπτώσεις.

3.0.3 Περίπτωση 3: $\lambda_3 = 0, \quad c_2 \neq 1, \quad$ και $\quad (1+c_1+c_3)(-2+c_1+3c_2+c_3) \neq 0$

Αν αντικαταστήσουμε τα c_3, c_2 ως

$$c_3 = -c_1 + \mu - 1 \quad , \quad c_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{\mu\sigma^2}{2} - \mu + 3\right), \tag{3.8}$$

μπορούμε να λύσουμε τη μη μηδενική συνιστώσα της (1.13) σε σχέση με το $\lambda(t)$ και αντικαθιστούμε στην (1.10).

Πράγματι η μη μηδενική συνιστώσα της (1.13) είναι η πρώτη και η λύση της ως προς $\lambda(t)$ μας δίνει:

$$\lambda(t) = \frac{a(t)b(t)\left(\mu\left(\sigma^2+2\right)-6\right)(a(t)b''(t)-a'(t)b'(t))+2b(t)^2\left(a(t)\left(\mu\left(\sigma^2+2\right)-6\right)a''(t)+\left(6-2\mu\left(\sigma^2-1\right)\right)a'(t)^2\right)-\mu\left(\sigma^2-4\right)a(t)^2b'(t)^2}{6a(t)^4b(t)^2}$$

Η αντικατάσταση στην (1.10) θα μας δώσει την (0,0) συνιστώσα της που είναι:

$$\frac{4\mu\left(\sigma^2+2\right)a(t)b(t)a'(t)b'(t)+4\mu\left(\sigma^2-1\right)b(t)^2a'(t)^2+a(t)^2\left(\mu\left(\sigma^2-4\right)b'(t)^2-12b(t)^2\right)}{12a(t)^2b(t)^2} = 0$$

Όπως μπορούμε εύκολα να δούμε, το αριστερό μέλος της τελευταίας εξίσωσης δέχεται μια συμμετρία ανακλιμάκωσης $a \to \omega_1 a, \quad b \to \omega_2 b$ και δεν περιέχει επιταχύνσεις. Έτσι, αν κάνουμε την αντικατάσταση $a = e^{\int a_1 dt}, b = e^{\int b_1 dt}$ η προαναφερθείσα εξίσωση γίνεται:

$$\frac{1}{12}\left(4\mu\left(\sigma^2+2\right)a_1(t)b_1(t)+4\mu\left(\sigma^2-1\right)a_1(t)^2+\mu\left(\sigma^2-4\right)b_1(t)^2-12\right)=0. \tag{3.9}$$

που είναι μια τετραγωνική μορφή ως προς $a_1(t), b_1(t)$ και μπορεί να λυθεί με την αντικατάσταση:

$$a_1(t) = \frac{2\cosh(f(t))}{\sqrt{3\mu}\sigma} - \frac{\sigma(2\sinh(f(t)))}{2\left(\sqrt{3\mu}\sigma\right)}, b_1(t) = \frac{\sigma(2\sinh(f(t)))}{\sqrt{3\mu}\sigma} + \frac{2\cosh(f(t))}{\sqrt{3\mu}\sigma} \tag{3.10}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές των $a_1(t), b_1(t)$ στις υπόλοιπες συνιστώσες της (1.10) καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$-\frac{(\sigma\sinh(f(t))+\cosh(f(t)))\left(3\sqrt{\mu}\sigma f'(t)+\sqrt{3}(\sigma\cosh(f(t))+4\sinh(f(t)))\right)}{3\sqrt{3}\sigma}=0$$

$$-\frac{e^{-2x}(\sigma\sinh(f(t))+\cosh(f(t)))\left(3\sqrt{\mu}\sigma f'(t)+\sqrt{3}(\sigma\cosh(f(t))+4\sinh(f(t)))\right)}{3\sqrt{3}\sigma}=0$$

$$-\frac{\exp\left(-\frac{2\left(\int(2\cosh(f(t))-\sigma\sinh(f(t)))\,dt-2\int(\sigma\sinh(f(t))+\cosh(f(t)))\,dt\right)}{\sqrt{3}\sqrt{\mu}\sigma}\right)}{3\sigma}$$

$$(\sigma\sinh(f(t))-2\cosh(f(t)))\left(\sqrt{3}\sqrt{\mu}\sigma f'(t)+\sigma\cosh(f(t))+4\sinh(f(t))\right)=0.$$

Διαπιστώνουμε ότι υπάρχει λύση εάν η $f(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$f'(t) = -\frac{1}{\sqrt{3\mu}\sigma}\left(\sigma\cosh(f(t))+4\sinh(f(t))\right), \tag{3.11}$$

που έχει λύση:

$$f(t) = -2\tanh^{-1}\left(\frac{4}{\sigma} - \frac{\sqrt{\sigma-4}\sqrt{\sigma+4}\tan\left(\frac{1}{6}\left(3c_1\sqrt{\sigma-4}\sqrt{\sigma+4}-\frac{\sqrt{3}\sqrt{\sigma-4}\sqrt{\sigma+4}t}{\sqrt{\mu}\sigma}\right)\right)}{\sigma}\right). \tag{3.12}$$

Το ολοκλήρωμα $\int a_1(t)\,dt$ το γράφουμε ως εξής:

$\int a_1(t)\,dt = \int \frac{a_1(f(t))}{f'(t)}\,df(t) = \int \frac{\sigma\sinh(f(t))-2\cosh(f(t))}{\sigma\cosh(f(t))+4\sinh(f(t))}\,df(t)$, κάνοντας τους ίδιους υπολογισμούς για το $b_1(t)$ καταλήγουμε στην τελική λύση που είναι η εξής:

$$a(t) = e^{-\frac{6\sigma f(t)}{\sigma^2-16}}(\sigma\cosh(f(t))+4\sinh(f(t)))^{\frac{\sigma^2+8}{\sigma^2-16}},\ b(t) = e^{\frac{6\sigma f(t)}{\sigma^2-16}}(\sigma\cosh(f(t))+4\sinh(f(t)))^{-\frac{2\left(\sigma^2-4\right)}{\sigma^2-16}}, \tag{3.13}$$

Η τιμή του $\lambda(t)$ είναι

$$\lambda(t) = -\frac{\left(\sigma^2-4\right)e^{\frac{12\sigma f(t)}{\sigma^2-16}}(3\cosh(2f(t))+2\mu-3)(\sigma\cosh(f(t))+4\sinh(f(t)))^{-\frac{2\left(\sigma^2+8\right)}{\sigma^2-16}}}{3\mu\sigma^2}$$

όπου η $f(t)$ πρέπει να αντικατασταθεί από την παραπάνω δεδομένη τιμή. Η συμπεριφορά των ανωμαλιών είναι ποιοτικά παρόμοια με την προηγούμενη μη τετριμμένη περίπτωση όταν τα εύρη των σταθερών που εμφανίζονται στην $f(t)$ περιορίζονται κατάλληλα. Διαφορετικά, η γεωμετρία αναπτύσσει ανωμαλίες σε πεπερασμένα t.

Πράγματι το βαθμωτό Ricci στην περίπτωση μας είναι:

$$R = -\frac{1}{\mu\sigma^2}2e^{\frac{12\sigma f(t)}{\sigma^2-16}}(\sigma\cosh(f(t))+4\sinh(f(t)))^{-\frac{3\sigma^2}{\sigma^2-16}}(-(\sigma\cosh(f(t))+4\sinh(f(t)))$$
$$\sigma(\sinh(2f(t))-\mu\sigma)+(\sigma^2-8)\sinh^2(f(t))+12\cosh^2(f(t))-$$
$$2\sqrt{3}\sqrt{\mu}\sigma f'(t)\cosh(f(t))(\sigma\sinh(f(t))+4\cosh(f(t))))$$

Η δε συνάρτηση $f(t)$ είναι:

$$f(t,\sigma,\mu,m1) = -2\tanh^{-1}\left(\frac{4}{\sigma}-\frac{\sqrt{\sigma-4}\sqrt{\sigma+4}\tan\left(\frac{1}{6}\left(3m_1\sqrt{\sigma-4}\sqrt{\sigma+4}-\frac{\sqrt{3}\sqrt{\sigma-4}\sqrt{\sigma+4}t}{\sqrt{\mu}\sigma}\right)\right)}{\sigma}\right)$$

Αυτές οι περιπτώσεις εξαντλούν την υπόθεση $\lambda_3 = 0$.

Απομένει λοιπόν να εξετάσουμε την υπόθεση $\lambda_3 \neq 0$.

Η στρατηγική είναι τώρα να επιλύσουμε την συνιστώσα $(0,0)$ της (1.10) για τον πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda(t)$ και να αντικαταστήσουμε στις δύο μη μηδενικές συνιστώσες της (1.13). Με αυτόν τον τρόπο εμφανίζονται μερικοί κλάδοι. Στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής της $b''(t)$ στην τέταρτη συνιστώσα της (1.13) είναι $-\frac{\lambda 3(c_1+c_2+c_3)}{a(t)^2 b(t)\left(b(t)^2+\lambda 3^2\right)}$ και ο συντελεστής της $a''(t)$ στην τέταρτη συνιστώσα της (1.13) είναι $-\frac{2c_2\lambda 3}{a(t)^3 b(t)^2}$

Εξετάζουμε τώρα λοιπόν τον κλάδο.

3.0.4 Περίπτωση 4: $\lambda_3 \neq 0 \quad c_1+c_2+c_3=0 \quad c_2=0$

Στην περίπτωση αυτή η (0,0) συνιστώσα της (1.10) είναι:

$\frac{2a'(t)b'(t)}{a(t)b(t)} + \frac{a'(t)^2}{a(t)^2} + a(t)^2\lambda(t)\left(\frac{\lambda 3^2}{b(t)^2}+1\right) - 1 = 0$ και λύνοντας ως προς $\lambda(t)$ έχουμε:

$$\lambda(t) = \frac{b(t)\left(-2a(t)a'(t)b'(t) - b(t)a'^2 + a(t)^2 b(t)\right)}{a(t)^4\left(b(t)^2 + {\lambda_3}^2\right)}. \tag{3.14}$$

Όταν αυτό αντικατασταθεί στην πρώτη και την τέταρτη συνιστώσα της (1.13) καταλήγουμε στην μοναδική εξίσωση:

$$-\frac{2a'(t)b'(t)}{a(t)b(t)} - \frac{a'^2}{a(t)^2} + 1 = 0. \tag{3.15}$$

Όπως και πριν, υπάρχει συμμετρία ανακλιμάκωσης και έτσι μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση

$$a(t) = e^{\int \frac{\sinh(f(t))}{\sqrt{3}}\,dt + \int \frac{\cosh(f(t))}{\sqrt{3}}\,dt}, b(t) = e^{\int \frac{\cosh(f(t))}{\sqrt{3}}\,dt - 2\int \frac{\sinh(f(t))}{\sqrt{3}}\,dt} \tag{3.16}$$

που ικανοποιεί την εξίσωση.

Όσον αφορά τις εξισώσεις (1.13) και (1.10) καταλήγουμε στα εξής: αφ΄ενός μεν η (1.13) ικανοποιείται αφ΄ετέρου δε η (1.10) γίνεται:

$\left\{\{0,0,0,0\}, \left\{0, -\frac{1}{3}(\cosh(f(t)) - 2\sinh(f(t)))\left(-\sqrt{3}f'(t) - 2\sinh(f(t)) + \cosh(f(t))\right), 0, 0\right\},\right.$
$\left\{0, 0, -\frac{1}{3}e^{-2x}(\cosh(f(t)) - 2\sinh(f(t)))\left(-\sqrt{3}f'(t) - 2\sinh(f(t)) + \cosh(f(t))\right), 0\right\},$
$\left.\left\{0,0,0,\frac{2}{3}(\sinh(f(t)) + \cosh(f(t)))\left(-\sqrt{3}f'(t) - 2\sinh(f(t)) + \cosh(f(t))\right)e^{-2\sqrt{3}\int \sinh(f(t))\,dt}\right\}\right\}$

Παρατηρούμε ότι μια λύση θα υπάρξει μετά την παραπάνω αντικατάσταση, εάν ικανοποιείται η διαφορική εξίσωση

$$f'(t) = \frac{\cosh(f(t)) - 2\sinh(f(t))}{\sqrt{3}}. \tag{3.17}$$

Τέλος, η λύση της (3.17) προκύπτει ως

$$f(t) = 2\tanh^{-1}\left(2 - \sqrt{3}\tanh\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}m_1 + t\right)\right)\right). \tag{3.18}$$

Επίσης το $u_\mu = \left\{e^{\sqrt{3}\int \sinh(f(t))\,dt}\sqrt{\exp\left(\frac{2\left(\int \cosh(f(t))\,dt - 2\int \sinh(f(t))\,dt\right)}{\sqrt{3}}\right) + \lambda_3^2}, 0, 0, \lambda_3\right\}$ καθώς και το βαθμωτό Ricci υπολογίζεται ως $R = 0$ ενώ το βαθμωτό Kretschmann είναι $Kr \equiv R^{abcd}R_{abcd} = \frac{1}{12}\left(e^{2f(t)} - 3\right)^6$. Κάνοντας τον επανακαθορισμό $t = \tau - \sqrt{3}m_1$ προκύπτει ότι η m_1 δεν είναι ουσιώδης βαρυτική σταθερά καθώς και η ύπαρξη ανωμαλιών σε πεπερασμένα διαστήματα του τ.

Αν τώρα $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ και $c_2 \neq 0$, τότε στην εξίσωση (1.10) ο συντελεστής του $b''(t)$ στην $(2,2)$ και στην $(3,3)$ συνιστώσα είναι αντίστοιχα $\frac{c_2 - 1}{b(t)}$ και $\frac{(c_2-1)e^{-2x}}{b(t)}$.

Έτσι προκύπτει ο επόμενος κλάδος:

3.0.5 Περίπτωση 5: $\lambda_3 \neq 0 \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0 \quad c_2 = 1$

Λύνουμε τώρα την τέταρτη συνιστωσα της (1.13) ως προς τον πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda(t)$ λαμβάνοντας

$$\lambda(t) = -\frac{a'(t)b'(t) + a(t)b''(t)}{a(t)^3 b(t)}. \tag{3.19}$$

Αν αντικαταστήσουμε το παραπάνω $\lambda(t)$ στη πρώτη συνιστώσα της (1.13), καταλήγουμε στο

$$a''(t) = \frac{a'(t)b'(t)}{b(t)} + \frac{a'^2}{a(t)}. \tag{3.20}$$

Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω (3.20) στην (1.10) παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει λύση αφού οι συνιστώσες του $(0,0)$, $(3,3)$ γίνονται οι αδύνατες εξισώσεις $-\frac{\lambda 3^2 a'^2}{a(t)^2 b(t)^2} - 1 = 0, \quad \frac{\lambda 3^2 a'^2 + a(t)^2 b(t)^2}{a(t)^4} = 0$ αντίστοιχα.

Προχωρούμε τώρα στον επόμενο κλάδο:

3.0.6 Περίπτωση 6: $\lambda_3 \neq 0 \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0 \quad c_2 \neq 0, c_2 \neq 1$

Επειδή $\lambda_3 \neq 0, c_2 \neq 0$, μπορούμε να λύσουμε τη τέταρτη συνιστώσα της (1.13) ως προς τον πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda(t)$ έχοντας ως αποτέλεσμα

$$\lambda\left(t\right) = -\frac{c_2\left(a'(t)b'(t) + a(t)b''(t)\right)}{a(t)^3 b(t)}. \tag{3.21}$$

Αν αντικαταστήσουμε την (3.21) στην πρώτη συνιστώσα της (1.13) και την λύσουμε ως προς $a''(t)$ προκύπτει

$$a''(t) = a'(t)\left(\frac{a'(t)}{a(t)} + \frac{b'(t)}{b(t)}\right). \tag{3.22}$$

Εάν το $a(t)$ είναι σταθερό, δεν υπάρχει λύση αφού η $(0,0)$ συνιστώσα της (1.10) γίνεται $-1 = 0$.

Για $a(t)$ μη σταθερό, μετά την αντικατάσταση του (3.22) σε (1.10), η $(2,2)$ συνιστώσα του δίνει

$$\frac{(c_2 - 1)\left(a'(t)b'(t) + a(t)b''(t)\right)}{a(t)b(t)} = 0, \tag{3.23}$$

που ικανοποιείται από το πρώτο ολοκλήρωμα $a(t)b'(t) = m$. Αν $m = 0$ τότε

$b(t) = \mathrm{cb}$ και η αντικατάσταση στην (1.10) κάνει την $(0,0)$ συνιστώσα

$$\frac{a'^2\left(-(c_2-1)cb^2-c_2{\lambda_3}^2\right)-cb^2a(t)^2}{cb^2a(t)^2}=0. \tag{3.24}$$

Αυτή η εξίσωση ολοκληρώνεται εύκολα με αποτέλεσμα να έχουμε τη συνολική λύση

$$a(t)=m_1e^{\frac{cbt\epsilon}{\sqrt{-c_2cb^2-c_2\lambda_3^2+cb^2}}}, b(t)=cb. \tag{3.25}$$

με $\epsilon^2=1$

Το βαθμωτό Ricci είναι $R=-\frac{2c_2\left(\mathrm{cb}^2+\lambda_3^2\right)e^{-\frac{2\mathrm{cb}t}{\sqrt{-c_2\mathrm{cb}^2-c_2\lambda_3^2+\mathrm{cb}^2}}}}{\mathrm{m1}^2\left((c_2-1)\mathrm{cb}^2+c_2\lambda_3^2\right)}$

και φαίνεται ότι τείνει στο άπειρο καθώς $t\to\pm\infty$ αναλόγως της τιμής του cb.

Στην περίπτωση που το $m\neq 0$ το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως $b'(t)=\frac{m}{a(t)}$ το οποίο ανάγει την πρώτη συνιστώσα της (1.13) στην μορφή:

$$\frac{2c_2\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}\left(-a(t)b(t)a''(t)+b(t)a'^2+ma'(t)\right)}{a(t)^5b(t)^2}=0. \tag{3.26}$$

Αν ο συντελεστής του $b(t)$ που είναι ο $a'^2-a(t)a''(t)$ μηδενίζεται τότε η παραπάνω εξίσωση υπαγορεύει $a(t)=\mathrm{ca}$ και έτσι $b(t)=\frac{mt}{ca}+m_1$ η οποία διαμορφώνει την $(0,0)$ συνιστώσα της (1.10) στην εξίσωση $-1=0$ υποδεικνύοντας ότι δεν υπάρχει λύση.

Σε διαφορετική περίπτωση, αν $a'^2-a(t)a''(t)\neq 0$ τότε η (3.26) μπορεί να λυθεί ως προς $b(t)$ δίνοντας

$$b(t)=-\frac{ma'(t)}{a'^2-a(t)a''(t)}. \tag{3.27}$$

Αντικαθιστούμε την (3.27) στο ολοκλήρωμα $b'(t)=\frac{m}{a(t)}$ και καταλήγουμε στην εξίσωση

$-\frac{ma'(t)\left(a(t)^2a^{(3)}(t)+a'(t)^3-2a(t)a'(t)a''(t)\right)}{a(t)\left(a'(t)^2-a(t)a''(t)\right)^2}=0.$

Λύνοντας την προηγούμενη διαφορική εξίσωση έχουμε τις εξής δύο έγκυρες λύσεις:

$a(t)=\frac{e^{-\sqrt{m_2}(m_3+t)}\left(2m_1m_2+e^{\sqrt{m_2}(m_3+t)}\right)^2}{4m_2^2}$, $b(t)=-\frac{m\sqrt{m_2}\left(2m_1m_2-e^{\sqrt{m_2}(m_3+t)}\right)}{m_1\left(2m_1m_2+e^{\sqrt{m_2}(m_3+t)}\right)}$ και την $a(t)=\frac{e^{-\sqrt{m_2}(m_3+t)}\left(2m_1m_2e^{\sqrt{m_2}(m_3+t)}+1\right)^2}{4m_2^2}$, $b(t)=\frac{m\sqrt{m_2}\left(2m_1m_2e^{\sqrt{m_2}(m_3+t)}-1\right)}{m_1\left(2m_1m_2e^{\sqrt{m_2}(m_3+t)}+1\right)}$ όπου $m_2=-\frac{c_2\lambda_3^2m_1^2+m^2}{(c_2-1)m^2}$ και στις δύο παραπάνω λύσεις, καθώς και το $u_\mu=\left\{\frac{a(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}}{b(t)},0,0,\lambda_3\right\}$.

Για την πρώτη περίπτωση το βαθμωτό Ricci είναι:

$$R=-\frac{32\mathrm{c2}\left(m^2+\lambda 3^2\mathrm{m1}^2\right)\left(\mathrm{c2}\lambda 3^2\mathrm{m1}^2+m^2\right)^4\exp\left(2(m_3+t)\sqrt{-\frac{\mathrm{c2}\lambda 3^2\mathrm{m1}^2+m^2}{(\mathrm{c2}-1)m^2}}\right)}{(\mathrm{c2}-1)m^2\left((\mathrm{c2}-1)m^2e^{(m_3+t)\sqrt{-\frac{\mathrm{c2}\lambda 3^2\mathrm{m1}^2+m^2}{(\mathrm{c2}-1)m^2}}}-2\mathrm{m1}\left(\mathrm{c2}\lambda 3^2\mathrm{m1}^2+m^2\right)\right)^4}$$

Στην δεύτερη περίπτωση είναι:

$$R=-\frac{32\mathrm{c2}\left(m^2+\lambda 3^2\mathrm{m1}^2\right)\left(\mathrm{c2}\lambda 3^2\mathrm{m1}^2+m^2\right)^4\exp\left(2(m_3+t)\sqrt{-\frac{\mathrm{c2}\lambda 3^2\mathrm{m1}^2+m^2}{(\mathrm{c2}-1)m^2}}\right)}{(\mathrm{c2}-1)m^2\left(m^2\left(2\mathrm{m1}e^{(m_3+t)\sqrt{-\frac{\mathrm{c2}\lambda 3^2\mathrm{m1}^2+m^2}{(\mathrm{c2}-1)m^2}}}-\mathrm{c2}+1\right)+2\mathrm{c2}\lambda 3^2\mathrm{m1}^3e^{(\mathrm{m3}+t)\sqrt{-\frac{\mathrm{c2}\lambda 3^2\mathrm{m1}^2+m^2}{(\mathrm{c2}-1)m^2}}}\right)^4}$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $t=\tau-m_3$ παρατηρούμε ότι η m_3 είναι απορροφήσιμη.

Και στις δύο αυτές περιπτώσεις το βαθμωτό Ricci έχει τη γενική μορφή $R=\frac{A\exp(2B\tau)}{(C\exp(B\tau)+D)^4}$, όπου A,B,C,D είναι συναρτήσεις των παραμέτρων που εμφανίζονται στις λύσεις. Ως εκ τούτου, υπάρχουν εύρη των παραμέτρων για τις οποίες τα C,D γίνονται θετικά και έτσι το παραπάνω βαθμωτό είναι πεπερασμένο.

Τέλος, υπάρχει μια κάπως περίεργη περίπτωση στην οποία επιλύουμε το ολοκλήρωμα σε σχέση με την $a(t)$ και έτσι λαμβάνουμε $a(t)=\frac{m}{b'(t)}$. Τότε μπορούμε να λύσουμε αλγεβρικά την πρώτη συνιστώσα της (1.13) που είναι η

$-\frac{2c_2\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}b'(t)\left(b(t)b''(t)^2-b(t)b^{(3)}(t)b'(t)+b'(t)^2b''(t)\right)}{m^3b(t)^2}=0$ ως προς $b^{(3)}(t)$ και έχουμε:

$$b^{(3)}(t)=\frac{b''^2}{b'(t)}+\frac{b'(t)b''(t)}{b(t)}. \tag{3.28}$$

Ο φαινομενικός κλάδος $b''(t)=0$ οδηγεί στην $b(t)=m_1t+m_2$ που με την σειρά του οδηγεί στην $a(t)=ca$ και έχει ήδη προηγουμένως δειχθεί ότι δεν δίνει λύση.

Αν αντικαταστήσουμε την (3.28) καθώς και την $a(t)=\frac{m}{b'(t)}$, τότε η (0,0) συνιστώσα της (1.10) μας δίνει

$$-\frac{c_2{\lambda_3}^2b''^2+b(t)^2\left((c_2-1)b''^2+b'^2\right)-2(c_2-1)b(t)b'^2b''(t)}{b(t)^2b'^2}=0. \tag{3.29}$$

Η λύση της (3.29) είναι:

$b(t)=\sqrt{\frac{c_2\lambda_3^2+(c_2-1)^2m_1^2}{c_2-1}}\tan\left(\frac{(m_2+t)\sqrt{c_2\lambda_3^2+(c_2-1)^2m_1^2}}{2(c_2-1)^{3/2}m_1}\right)$

Η λύση της (3.29) καθώς και η σχέση $a(t)=\frac{m}{b'(t)}$ δίνουν την τελική μορφή της λύσης

$$a(t)=\frac{2(c_2-1)^2mm_1\cos^2\left(\frac{(m_2+t)\sqrt{c_2}{\lambda_3}^2+(c_2-1)^2m_1^2}{2(c_2-1)^{3/2}m_1}\right)}{c_2{\lambda_3}^2+(c_2-1)^2{m_1}^2}. \tag{3.30}$$

Το βαθμωτό Ricci είναι:

$R=-\frac{c_2\left((c_2-1)^2m_1^2+\lambda_3^2\right)\left(c_2\lambda_3^2+(c_2-1)^2m_1^2\right)^2\sec^4\left(\frac{(m_2+t)\sqrt{c_2\lambda_3^2+(c_2-1)^2m_1^2}}{2(c_2-1)^{3/2}m_1}\right)}{2(c_2-1)^7m^2m_1^4}$

Το $u_\mu=\left\{\frac{a(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}}{b(t)},0,0,\lambda_3\right\}$, οπότε κάνοντας την αντικατάσταση $t=\tau-m_2$ παρατηρούμε ότι η m_2 είναι απορροφήσιμη.

Η γενική μορφή του βαθμωτού Ricci είναι $R=\frac{A}{cos(B\tau)^4}$ που προφανώς αποκλίνει σε πεπερασμενα διαστήματα του τ.

Τελειώνουμε με την τελευταία περίπτωση.

3.0.7 Περίπτωση 7: $\lambda_3\neq 0 \quad c_1+c_2+c_3\neq 0$

Αντικαθιστούμε $c_3=-c_1-c_2+q$ όπου $q\neq 0$. Τότε η τέταρτη συνιστώσα της (1.13) είναι

$\frac{\lambda_3\left(\frac{(c_2-q)\left(a'(t)b'(t)+a(t)b''(t)\right)}{a(t)^3}+b(t)\lambda(t)\right)}{b(t)^3}=0$

επειδή $\lambda_3\neq 0$ η προηγούμενη σχέση οδηγεί στην ακόλουθη μορφή για τον πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda(t)$:

$$\lambda\left(t\right)=-\frac{\left(c_2-q\right)\left(a'(t)b'(t)+a(t)b''(t)\right)}{a(t)^3b(t)}. \tag{3.31}$$

Αν αντικαταστήσουμε την (3.31) στην πρώτη συνιστώσα της (1.13) και στην (3,3) συνιστώσα της (1.10) δημιουργείται ένα σύστημα εξισώσεων το οποίο πάντοτε μπορεί να λυθεί ως προς $a''(t),b''(t)$.

$$\begin{aligned}a''(t)=\frac{1}{4a(t)b(t)^2\left(b(t)^2+{\lambda_3}^2\right)}&\left(4c_2a(t)b(t)a'(t)\left(b(t)^2+{\lambda_3}^2\right)b'(t)+2a'^2\left(b(t)^2+{\lambda_3}^2\right)\left(b(t)^2(c_2+q+1)\right.\right.\\&\left.\left.+a(t)^2b(t)^2\left(qb'^2+2b(t)^2+2{\lambda_3}^2\right)\right)\right.\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}b''(t)=&-\frac{1}{2qa(t)^2b(t)^3(b(t)^2+\lambda_3^2)}(2a(t)b(t)a'(t)(b(t)^2+\lambda_3^2)b'(t)(b(t)^2(2c_2^2-2c_2+q)+2(c_2-1)c_2\lambda_3^2)\\&+2a'(t)^2(b(t)^2+\lambda_3^2)^2(b(t)^2(c_2^2+c_2(q-1)-2q)+c_2\lambda_3^2(c_2+q))\\&+a(t)^2b(t)^2(b(t)^2((c_2-2)qb'(t)^2+4c_2\lambda_3^2)+c_2\lambda_3^2(qb'(t)^2+2\lambda_3^2)+2c_2b(t)^4))\end{aligned} \tag{3.33}$$

Αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές των $a''(t),b''(t)$ στην (1.10) και βρίσκουμε μόνο δύο διαφορετικές εξισώσεις τις $(0,0)=0$ και $(1,1)=0$ που είναι οι εξής:

$-\frac{1}{2a(t)^2b(t)^2\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)}\left(2a'(t)^2\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)\left(b(t)^2(c_2+q-1)+\lambda_3^2(c_2+q)\right)+\right.$

$4(c_2-1)a(t)b(t)a'(t)\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)b'(t)+a(t)^2b(t)^2\left(qb'(t)^2+2b(t)^2+2\lambda_3^2\right))=0$

$\frac{1}{4qa(t)^2b(t)^4\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)}\left(-2b(t)^2+\lambda_3^2\left(\lambda_3^4\left(2c_2^3+c_2^2(q-2)-2c_2q(q+1)-q^3\right)+\right.\right.$

$2\lambda_3^2b(t)^2\left(2c_2^3+c_2^2(q-3)+c_2\left(-2q^2-3q+1\right)+q\left(-q^2+q+2\right)\right)+$

$b(t)^4\left(2c_2^3+c_2^2(q-4)-2c_2\left(q^2+2q-1\right)+q\left(-q^2+2q+3\right)\right))a'(t)^2-$

$4a(t)b(t)b(t)^2+\lambda_3^2\left((c_2-1)\lambda_3^2\left(2c_2^2-c_2(q+2)-q^2\right)+\right.$

$b(t)^2\left(2c_2^3-c_2^2(q+4)+c_2\left(-q^2+2q+2\right)-q(q+1)\right))a'(t)b'(t)+$

$a(t)^2b(t)^2\left(2b(t)^4\left(-2c_2^2+c_2(q+2)+(q-1)q\right)-\right.$

$\lambda_3^2\left(2c_2^2-c_2(q+2)-q^2\right)\left(qb'(t)^2+2\lambda_3^2\right)+b(t)^2$

$q\left(-2c_2^2+c_2(q+6)+q^2-3q-4\right)b'(t)^2-2\lambda_3^2\left(4c_2^2-2c_2(q+2)-2q^2+q\right)))=$

0

που είναι τετραγωνικές ως προς $a'(t), b'(t)$. Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $(0,0)=0$ ως προς b'^2 και να αντικαταστήσουμε το αποτέλεσμα στην εξίσωση (3.32) λαμβάνοντας με αυτόν τον τρόπο την πολύ απλή εξίσωση

$$\frac{a''(t)}{a(t)}-\frac{a'(t)b'(t)}{a(t)b(t)}-\frac{a'^2}{a(t)^2}=0. \tag{3.34}$$

Η εξίσωση αυτή έχει βαθμωτή συμμετρία και μπορεί να αναχθεί σε διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $a(t)=e^{\int a_1(t)\,dt}$ η οποία τελικά μπορεί να λυθεί ως προς $a(t)$ με αποτέλεσμα $a(t)=e^{m_1\int b(t)\,dt}$.

Αν αντικαταστήσουμε αυτό το $a(t)$ στις (0,0) και (1,1) συνιστώσες της (1.10) και απαλείψουμε το b'^2 λαμβάνουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$2m_1\left(2{c_2}^2-c_2(q+4)-q^2+q+2\right)b'(t)+{m_1}^2b(t)^2\left(2{c_2}^2-c_2(q+4)-q^2+q+2\right)+ \tag{3.35}$$

$$+2{c_2}^2{\lambda_3}^2{m_1}^2-2c_2{\lambda_3}^2{m_1}^2-c_2{\lambda_3}^2{m_1}^2q+2c_2-{\lambda_3}^2{m_1}^2q^2-q-2=0.$$

Εάν $m_1=0$ τότε από τον ορισμό του $a(t)=$ ca η παραπάνω εξίσωση γίνεται $2c_2-q-2=0$ που ισοδυναμεί με $c_1-c_2+c_3=-2$.

Τότε η πρώτη συνιστώσα του (1.13) δίνει

$$b''(t)=\frac{b(t)b'^2}{b(t)^2+{\lambda_3}^2} \tag{3.36}$$

Αντικαθιστούμε την (3.36), $m_1=0$, $a(t)=$ ca και $c_1-c_2+c_3=-2$ στην (1.10) και καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση

$$(c_2-1)b'^2+b(t)^2+{\lambda_3}^2=0, \tag{3.37}$$

η οποία μπορεί να λυθεί εύκολα με αποτέλεσμα την τελική μορφή της λύσης:

$$a(t) = ca,\, b(t) = -\frac{\lambda_3 \tan\left(\frac{\sqrt{c_2-1}t}{1-c_2} - m_1\right)}{\sqrt{-\tan^2\left(\frac{\sqrt{c_2-1}t}{1-c_2} - m_1\right) - 1}} \tag{3.38}$$

$$a(t) = ca,\, b(t) = \frac{\lambda_3 \tan\left(\frac{\sqrt{c_2-1}t}{1-c_2} - m_1\right)}{\sqrt{-\tan^2\left(\frac{\sqrt{c_2-1}t}{1-c_2} - m_1\right) - 1}} \tag{3.39}$$

$$a(t) = ca,\, b(t) = -\frac{\lambda_3 \tan\left(m_1 + \frac{\sqrt{c_2-1}t}{1-c_2}\right)}{\sqrt{-\tan^2\left(m_1 + \frac{\sqrt{c_2-1}t}{1-c_2}\right) - 1}} \tag{3.40}$$

$$a(t) = ca,\, b(t) = \frac{\lambda_3 \tan\left(m_1 + \frac{\sqrt{c_2-1}t}{1-c_2}\right)}{\sqrt{-\tan^2\left(m_1 + \frac{\sqrt{c_2-1}t}{1-c_2}\right) - 1}} \tag{3.41}$$

Το $u_\mu = \left\{\frac{a(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}}{b(t)}, 0, 0, \lambda_3\right\}$, και κάνοντας τον μετασχηματισμό $t = \tau - \frac{1-c_2}{\sqrt{c_2-1}}m_1$ εξαφανίζεται η σταθερά m_1 που σημαίνει ότι είναι απορροφήσιμη. Αυτή η λύση, σύμφωνα με το εύρος του c_2 έχει υπογραφή ουδέτερη ή Minkowski. Και στις τέσσερις αυτές περιπτώσεις, τα βαθμωτά Ricci και Kretschmann είναι σταθερά και δίνονται από

$R = -\frac{2c_2}{(c_2-1)\mathrm{ca}^2}$, $kr = \frac{4\left(c_2^2-2c_2+2\right)}{(c_2-1)^2\mathrm{ca}^4}$

αντίστοιχα. Ο πίνακας Wronski των βαθμωτών Ricci και Kretschmann ως προς τις $(c_2,\, ca)$ είναι

$W = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial c_2}\left(-\frac{2c_2}{(c_2-1)\mathrm{ca}^2}\right) & \frac{\partial}{\partial \mathrm{ca}}\left(-\frac{2c_2}{(c_2-1)\mathrm{ca}^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial c_2}\frac{4\left(c_2^2-2c_2+2\right)}{(c_2-1)^2\mathrm{ca}^4} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{ca}}\frac{4\left(c_2^2-2c_2+2\right)}{(c_2-1)^2\mathrm{ca}^4} \end{pmatrix}$

και η ορίζουσα του πίνακα W είναι

$-\frac{32(c_2-2)}{(c_2-1)^3\mathrm{ca}^7}$.

Αυτό σημαίνει ότι και τα δύο $(c_2,\, ca)$ είναι ουσιώδη δεδομένου ότι η ορίζουσα του πίνακα Wronski $\frac{\partial\,(R\,kr)}{\partial\,(c_2\,ca)}$ που είναι $-\frac{32(c_2-2)}{(c_2-1)^3\mathrm{ca}^7}$ δεν μηδενίζεται για όλα τα $ca, c_2 \neq 2$. Παρατηρούμε ότι τα $(c_2,\, ca)$ είναι ουσιώδεις βαρυτικές σταθερές καθώς μπορούμε να λύσουμε το παραπάνω σύστημα και να βρούμε τα c_2, ca ως προς τα βαθμωτά R, kr . Πράγματι μία απο τις λύσεις του συστήματος είναι $\left\{c_2 = \frac{\mathrm{R}\left(\sqrt{2\mathrm{kr}-\mathrm{R}^2}+\mathrm{R}\right)}{\mathrm{R}^2-\mathrm{kr}}, ca = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2\mathrm{kr}-\mathrm{R}^2}-\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2-\mathrm{kr}}}\right\}$. Επιπλέον, η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή Riemann μηδενίζεται υποδεικνύοντας ότι δεν υπάρχουν ανώτερες παράγωγοι βαθμωτών καμπυλότητας. Επίσης έχουμε ελέγξει και τα 14 βαθμωτά καμπυλότητας και είναι όλα σταθερά. Πράγματι θεωρώντας την μετρική (3.41) τα αποτελέσματα είναι:

$$\left\{-\frac{2c_2}{(c_2-1)\mathrm{ca}^2},\frac{4\left(c_2^2-2c_2+2\right)}{(c_2-1)^2\mathrm{ca}^4},-\frac{2c_2\left(c_2^2-3c_2+3\right)}{(c_2-1)^3\mathrm{ca}^6},\frac{2\left(c_2^4-4c_2^3+6c_2^2-4c_2+2\right)}{(c_2-1)^4\mathrm{ca}^8},\frac{4c_2^2}{3(c_2-1)^2\mathrm{ca}^4},-\frac{4c_2^3}{9(c_2-1)^3\mathrm{ca}^6},\right.$$

$$\left.0,0,-\frac{2(c_2-2)^2c_2}{3(c_2-1)^3\mathrm{ca}^6},\frac{4c_2^2\left(c_2^2-c_2+1\right)}{9(c_2-1)^4\mathrm{ca}^8},0,-\frac{2(c_2-2)^2c_2^3}{3(c_2-1)^5\mathrm{ca}^{10}},\frac{4c_2^2\left(c_2^2-3c_2+3\right)\left(c_2^2-c_2+1\right)}{9(c_2-1)^6\mathrm{ca}^{12}},0\right\}$$

και είναι συναρτήσεις των βαθμωτών Ricci και Kretschmann. Πράγματι λύνοντας τα βαθμωτά Ricci και Kretschmann ως προς c_2, ca και αντικαθιστώντας στα υπόλοιπα βαθμωτα καμπυλότητας έχουμε

$$\left\{R,\mathrm{kr},-\frac{1}{8}R\left(R^2-3\mathrm{kr}\right),\frac{1}{16}\left(\mathrm{kr}^2+2\mathrm{kr}R^2-R^4\right),\frac{R^2}{3},\frac{R^3}{18},0,0,\right.$$

$$\left.-\frac{1}{12}R\left(R^2-2\mathrm{kr}\right),\frac{1}{72}R^2\left(\mathrm{kr}+R^2\right),0,\frac{1}{48}\left(2\mathrm{kr}R^3-R^5\right),-\frac{1}{576}R^2\left(R^2-3\mathrm{kr}\right)\left(\mathrm{kr}+R^2\right),0\right\}$$

έτσι δεν υπάρχουν άλλα ανεξάρτητα βαθμωτά εκτος των Ricci και Kretschmann. Έχουμε έτσι την ενδιαφέρουσα περίπτωση ενός χώρου CSI (Constant Scalar Invariant) χώρου [93]. Για τη συγκεκριμένη τιμή $c_2 = 2$ η γεωμετρία είναι μέγιστα συμμετρική και τα βαθμωτά Ricci και Kretschmann είναι εξαρτημμένα μεταξύ τους.

Στην περίπτωση που το $m_1 \neq 0$ ο συντελεστής του $b'(t)$ στην (3.35) γράφεται $(c_2-q-1)(2c_2+q-2)$. Αν $c_2 = q+1$ τότε η (3.35) γίνεται $\lambda_3^2 m_1^2 q + q \neq 0$. Αν $c_2 = \frac{2-q}{2}$ τότε η (3.35) γίνεται $-2\left(\lambda_3^2 m_1^2 q + q\right) \neq 0$. Έτσι μπορούμε να λύσουμε την διαφορική εξίσωση (3.35) και η λύση που βρίσκουμε είναι της μορφής $b(t) = \omega_1 \tan(m_2 + t\omega_2)$ τοτε το $a(t) = \cos^{-\frac{m_1\omega_1}{\omega_2}}(m_2+t\omega_2)$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των $a(t), b(t)$ που βρήκαμε στην πρώτη συνιστώσα της (1.13) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\omega_1^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\left(\lambda_3^2 + (\lambda_3-\omega_1)(\lambda_3+\omega_1)\cos(2(m_2+t\omega_2)) + \omega_1^2\right)$$

$$\left(m_1^2\left(\lambda_3^2+\omega_1^2\right) + m_1^2(\lambda_3-\omega_1)(\lambda_3+\omega_1)\cos(2(m_2+t\omega_2)) - m_1\omega_1\omega_2 - 2\omega_2^2\right) = 0$$

Στην περίπτωση που το $\lambda_3 = \omega_1$ η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\omega_1^2\left(2m_1^2\omega_1^2 - m_1\omega_1\omega_2 - \omega_2^2\right) = 0$$

Επειδή το $\lambda_3 = \omega_1 \neq 0$ η σχέση γίνεται 0 όταν $2m_1^2\omega_1^2 - m_1\omega_1\omega_2 - \omega_2^2 = 0$ δηλαδή όταν $\omega_1 = -\frac{\omega_2}{2m_1}$ ή όταν $\omega_1 = \frac{\omega_2}{m_1}$

Επίσης η (1,1) συνιστώσα της (1.10) γίνεται

$m_1^2\omega_1^2(2c_2+6q-1) + 2m_1\omega_1\omega_2(2c_2-q-2) + (m_1^2\omega_1^2+1)\cos(2(m_2+t\omega_2)) - q\omega_2^2 + 1 = 0$ και στην περίπτωση που $\omega_1 = -\frac{\omega_2}{2m_1}$ γίνεται

$\frac{1}{4}\left(\omega_2^2(-6c_2+6q+7) + (\omega_2^2+4)\cos(2(m_2+t\omega_2)) + 4\right) = 0$ που δεν γίνεται μηδέν για κάθε t. Όμοια και στην περίπτωση που το $\omega_1 = \frac{\omega_2}{m_1}$ τότε η (1,1) συνιστώσα της (1.10) γίνεται $\omega_2^2(6c_2+3q-5) + (\omega_2^2+1)\cos(2(m_2+t\omega_2)) + 1 = 0$ που δεν γίνεται μηδέν για κάθε t. Έχουμε ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα και τα ίδια συμπεράσματα στην περίπτωση που το $\lambda_3 = -\omega_1$.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι εάν $m_1 \neq 0$ όλοι οι κλάδοι που εμφανίζονται δεν οδηγούν σε λύση.

Η ανηγμένη Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι:

$$\mathcal{L}_{III} = \frac{1}{b^5 M^7}(-c_4\lambda_3^4 a^2 M^6 b'^2 - 2(c_1+c_3)\lambda_3^2 a^2 b^2 M^6 b'^2 + a^2 b^4 M^4(\lambda_3^2 M^4 \lambda + (c_1+c_2+c_3)u_0^2 b'^2)+ \tag{3.42}$$

$$+ 2c_4\lambda_3^2 a^2 b^3 M^3 u_0 b'(u_0 M' - M u_0') + b^6(M^8(-2+a^2\lambda) - 4aM^5 a' M' +$$
$$- c_4 a^2 u_0^4 M'^2 + 2c_4 a^2 M u_0^3 M' u_0' - 2aM^3 u_0 M'(2c_2 u_0 a' + (c_1+c_2+c_3)a u_0')+$$
$$+ a^2 M^2 u_0^2((c_1+c_2+c_3)M'^2 - c_4 u_0'^2) + M^4(2(c_1+2c_2+c_3)u_0^2 a'^2 + 4c_2 a u_0 a' u_0' +$$
$$+ (c_1+c_2+c_3)a^2 u_0'^2) + M^6(-a^2 u_0^2 \lambda + 2a'^2 + 4aa''))+$$
$$+ 2ab^5 M^3(-aM^2 b' M' - c_2 a u_0^2 b' M' + c_2 M u_0 b'(2u_0 a' + a u_0') + M^3(2a'b' + ab'')))$$

Η παραπάνω Λαγκρανζιανή πυκνότητα μπορεί να θεωρηθεί έγκυρη δεδομένου ότι οι ληφθείσες εξισώσεις Euler-Lagrange ικανοποιούνται από τις παραπάνω δοθείσες λύσεις στις εξισώσεις κίνησης.

Πράγματι για την **Περίπτωση 1** $\lambda_3 = 0, \quad c_2 = 1$ οι εξισώσεις Euler-Lagrange, ως προς $M(t), \lambda(t), u_0(t), a(t), b(t)$ όταν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $M(t) = a(t)$, $u_0(t) = \mathrm{a}(t)$, $c_3 = -c_1 + q - 1$ καθώς και την

$\lambda(t) = \frac{1}{2a(t)^4 b(t)^2}\left(2a(t)^2 b(t)^2 + 10b(t)^2 a'(t)^2 + 6c_1 b(t)^2 a'(t)^2 + 6c_3 b(t)^2 a'(t)^2 + \right.$
$-4a(t)b(t)^2 a''(t) + 2a(t)b(t)a'(t)b'(t) - 2a(t)^2 b(t) b''(t) + 3c_1 a(t)^2 b'(t)^2 + 3c_3 a(t)^2 b'(t)^2 +$
$\left. 3a(t)^2 b'(t)^2\right)$ καταλήγουν στις εξής μορφές:

Ως προς $M(t)$ είναι $a(t)b(t)(c_1 + c_3 - q + 1)\left(2b(t)^2 a'(t)^2 + a(t)^2 b'(t)^2\right) = 0$,

ως προς $\lambda(t)$ είναι αληθής,

ως προς $u_0(t)$ είναι

$a(t)b(t)\left(2b(t)^2 a'(t)^2(3c_1 + 3c_3 - 2q + 3) + a(t)^2\left(b'(t)^2(3c_1 + 3c_3 - 2q + 3) + 2b(t)^2\right)\right) = 0$

ως προς $a(t)$ είναι $\frac{qa(t)\left(-2a(t)b(t)a'(t)b'(t) + 2b(t)^2\left(a'(t)^2 - a(t)a''(t)\right) + a(t)^2 b'(t)^2\right)}{b(t)} = 0$

και τέλος ως προς $b(t)$ είναι

$a(t)b(t)\left(2qa(t)b(t)a'(t)b'(t) - 2qb(t)^2 a'(t)^2 + a(t)^2\left(2qb(t)b''(t) - qb'(t)^2 + 2b(t)^2\right)\right) = 0$

Κάνοντας τώρα τις αντικαταστάσεις

$$a(t) = e^{\frac{\int \cos(f(t))\,dt}{\sqrt{-q}}}, b(t) = e^{\frac{\sqrt{2}\int \sin(f(t))\,dt}{\sqrt{-q}}}, \tag{3.43}$$

και την (3.6) γίνονται όλες οι παραπάνω εξισώσεις Euler-Lagrange αληθείς.

Για την **Περίπτωση 2**: $(\lambda_3 = 0, \quad c_2 \neq 1,$ **και** $1 + c_1 + c_3 = 0)$ **ή** $(\lambda_3 = 0, \quad c_2 \neq 1,$ **και** $-2 + c_1 + 3c_2 + c_3 = 0)$

Για την **πρώτη υποπερίπτωση** ($\lambda_3 = 0, \quad c_2 \neq 1, \quad$ **και** $\quad 1 + c_1 + c_3 = 0$) οι εξισώσεις Euler-Lagrange, ως προς $M(t), \lambda(t), u_0(t), a(t), b(t)$ όταν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $M(t) = a(t)$, $u_0(t) = \mathrm{a}(t)$, $c_2 = q + 1$ καθώς και την

$\lambda(t) = \frac{1}{2a(t)^4 b(t)^2} \left(2a(t)^2 b(t)^2 - 8b(t)^2 a'(t)^2 + 12c_2 b(t)^2 a'(t)^2 - 4a(t)b(t)a'(t)b'(t) + \right.$
$\left. -4c_2 a(t)b(t)^2 a''(t) + 6c_2 a(t)b(t)a'(t)b'(t) - 2c_2 a(t)^2 b(t)b''(t) + 3c_2 a(t)^2 b'(t)^2 - 3a(t)^2 b'(t)^2\right)$

καταλήγουν στις εξής μορφές:

Ως προς $M(t)$ είναι αληθής,

ως προς $\lambda(t)$ είναι αληθής,

ως προς $u_0(t)$ είναι

$a(t)b(t)\left(4qa(t)b(t)a'(t)b'(t) + 4qb(t)^2 a'(t)^2 + a(t)^2\left(qb'(t)^2 + 2b(t)^2\right)\right) = 0$

ως προς $a(t)$ είναι

$\frac{qa(t)\left(2a(t)b(t)(a'(t)b'(t) + a(t)b''(t)) - 4b(t)^2\left(a'(t)^2 - a(t)a''(t)\right) - a(t)^2 b'(t)^2\right)}{b(t)} = 0$

και τέλος ως προς $b(t)$ είναι

$a(t)b(t)\left(-4qb(t)^2 a'(t)^2 + 2qa(t)b(t)\left(2b(t)a''(t) + a'(t)b'(t)\right) + a(t)^2\left(2qb(t)b''(t) - qb'(t)^2 + 2b(\right.\right.$

0

Αν λύσουμε την τέταρτη κατα σειρά ως προς $b''(t)$ θα έχουμε $b''(t) = \frac{-4a(t)b(t)^2 a''(t) - 2a(t)b(t)a'(t)b'(t) + 4b(t)^2 a'(t)^2 + a(t)^2 b'(t)^2}{2a(t)^2 b(t)}$ και αντικαθιστώντας στην πέμπτη κατά σειρά εξίσωση έχουμε $a(t)b(t) = 0$ πράγμα που είναι αδύνατον. Άρα δεν υπάρχει λύση.

Για την **δεύτερη υποπερίπτωση** ($\lambda_3 = 0, \quad c_2 \neq 1, \quad$ **και** $\quad -2 + c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$) οι εξισώσεις Euler-Lagrange, ως προς $M(t), \lambda(t), u_0(t), a(t), b(t)$ όταν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $M(t) = a(t)$, $u_0(t) = \mathrm{a}(t)$, $c_2 = q + 1$ καθώς και την

$\lambda(t) = \frac{1}{a(t)^4 b(t)^2} \left(a(t)^2 b(t)^2 + 5b(t)^2 a'(t)^2 - 3c_2 b(t)^2 a'(t)^2 - 2a(t)b(t)a'(t)b'(t) + \right.$
$\left. -2c_2 a(t)b(t)^2 a''(t) + 3c_2 a(t)b(t)a'(t)b'(t) - c_2 a(t)^2 b(t)b''(t) - 3c_2 a(t)^2 b'(t)^2 + 3a(t)^2 b'(t)^2\right)$

καταλήγουν στις εξής μορφές:

Ως προς $M(t)$ είναι αληθής,

ως προς $\lambda(t)$ είναι αληθής,

ως προς $u_0(t)$ είναι

$a(t)b(t)\left(2qa(t)b(t)a'(t)b'(t) - qb(t)^2 a'(t)^2 + a(t)^2\left(b(t)^2 - qb'(t)^2\right)\right) = 0$

ως προς $a(t)$ είναι

$\frac{qa(t)\left(a(t)b(t)(a(t)b''(t) - 2a'(t)b'(t)) + b(t)^2\left(a'(t)^2 - a(t)a''(t)\right) + a(t)^2 b'(t)^2\right)}{b(t)} = 0$

και τέλος ως προς $b(t)$ είναι

$a(t)b(t)\left(qb(t)^2 a'(t)^2 + 2qa(t)b(t)\left(b(t)a''(t) - a'(t)b'(t)\right) + a(t)^2\left(-2qb(t)b''(t) + qb'(t)^2 + b(t)^2\right)\right.$

0

Αν λύσουμε την τέταρτη κατα σειρά ως προς $b''(t)$ θα έχουμε $b''(t) = \frac{a(t)b(t)^2 a''(t) + 2a(t)b(t)a'(t)b'(t) - b(t)^2 a'(t)^2 - a(t)^2 b'(t)^2}{a(t)^2 b(t)}$ και αντικαθιστώντας στις προηγούμενες θα έχουμε:

Ως προς $M(t)$ είναι αληθής, ως προς $\lambda(t)$ είναι αληθής, ως προς $u_0(t)$ είναι
$a(t)b(t)\left(2qa(t)b(t)a'(t)b'(t)-qb(t)^2a'(t)^2+a(t)^2\left(b(t)^2-qb'(t)^2\right)\right)=0$
ως προς $a(t)$ είναι αληθής και τέλος ως προς $b(t)$ είναι
$a(t)b(t)\left(-6qa(t)b(t)a'(t)b'(t)+3qb(t)^2a'(t)^2+a(t)^2\left(3qb'(t)^2+b(t)^2\right)\right)=0$. Προσθέτοντας τώρα τις δύο εξισώσεις που απέμειναν έχουμε $4a(t)^3b(t)^3 = 0$ πράγμα που είναι αδύνατον. Άρα δεν υπάρχει λύση.

Για την **Περίπτωση 3**: $\lambda_3 = 0, \quad c_2 \neq 1,$ **και** $(1+c_1+c_3)(-2+c_1+3c_2+c_3) \neq 0$οι εξισώσεις Euler-Lagrange, ως προς $M(t), \lambda(t), u_0(t), a(t), b(t)$ όταν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $M(t) = a(t)$, $u_0(t) = \mathrm{a}(t)$ και αντικαταστήσουμε τα c_3, c_2 ως

$$c_3 = -c_1 + \mu - 1 \quad , \quad c_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{\mu\sigma^2}{2} - \mu + 3\right), \tag{3.44}$$

καταλήγουν στις εξής μορφές:

Ως προς $M(t)$ είναι
$a(t)b(t)\left(12a(t)^4b(t)^2\lambda(t)+12b(t)^2\left(\mu\left(\sigma^2-1\right)-2\right)a'(t)^2-\right.$
$2a(t)b(t)\left(2b(t)\left(\mu\left(\sigma^2+2\right)-6\right)a''(t)-3\left(\mu\left(\sigma^2+2\right)-2\right)a'(t)b'(t)\right)-$
$\left.a(t)^2\left(2b(t)\left(\mu\left(\sigma^2+2\right)-6\right)b''(t)-3\mu\left(\sigma^2-4\right)b'(t)^2+12b(t)^2\right)\right)=0,$
ως προς $\lambda(t)$ είναι αληθής,
ως προς $u_0(t)$ είναι
$a(t)\sqrt{b(t)^2}\left(6a(t)^4b(t)^2\lambda(t)+4b(t)^2\left(\mu\left(\sigma^2-1\right)-3\right)a'(t)^2+\right.$
$a(t)b(t)\left(\mu\left(\sigma^2+2\right)-6\right)\left(a'(t)b'(t)-2b(t)a''(t)\right)+$
$\left.a(t)^2\left(\mu\left(\sigma^2-4\right)b'(t)^2-b(t)\left(\mu\left(\sigma^2+2\right)-6\right)b''(t)\right)\right)=0$
ως προς $a(t)$ είναι
$\frac{1}{a(t)b(t)}\mu\left(-\left(\sigma^2-4\right)a(t)^2b'(t)^2-4\left(\sigma^2-1\right)b(t)^2\left(a'(t)^2-a(t)a''(t)\right)+\right.$
$\left.2a(t)b(t)\left(\left(\sigma^2-4\right)a'(t)b'(t)+\left(\sigma^2+2\right)a(t)b''(t)\right)\right)=0$
και τέλος ως προς $b(t)$ είναι
$a(t)b(t)$
$\left(4\mu\left(\sigma^2-1\right)b(t)^2a'(t)^2-2\mu a(t)b(t)\left(2\left(\sigma^2+2\right)b(t)a''(t)+\left(\sigma^2-4\right)a'(t)b'(t)\right)+\right.$
$\left.a(t)^2\left(-2\mu\left(\sigma^2-4\right)b(t)b''(t)+\mu\left(\sigma^2-4\right)b'(t)^2+12b(t)^2\right)\right)=0$
Αν στις παραπάνω εξισώσεις κάνουμε τις αντικαταστάσεις
$\lambda(t) = -\frac{\left(\sigma^2-4\right)e^{\frac{12\sigma f(t)}{\sigma^2-16}}(3\cosh(2f(t))+2\mu-3)(\sigma\cosh(f(t))+4\sinh(f(t)))^{-\frac{2\left(\sigma^2+8\right)}{\sigma^2-16}}}{3\mu\sigma^2}$, την (3.11) και την (3.13) παρατηρούμε ότι και οι πέντε εξισώσεις Euler-Lagrange γίνονται αληθείς.

Για την **Περίπτωση 4**: $\lambda_3 \neq 0 \quad c_1+c_2+c_3 = 0 \quad c_2 = 0$ οι εξισώσεις Euler-Lagrange, ως προς $M(t), \lambda(t), u_0(t), a(t), b(t)$ όταν κάνουμε τις προηγούμενες αντικαταστάσεις καθώς και τις $M(t) = a(t)$, $u_0(t) = \frac{a(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}}{b(t)}$ καταλήγουν στις εξής μορφές:

Ως προς $M(t)$ είναι
$a(t)b(t)\left(2a(t)b(t)a'(t)b'(t)+b(t)^2a'(t)^2+a(t)^4\lambda(t)\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)-a(t)^2b(t)^2\right)=0,$
ως προς $\lambda(t)$ είναι αληθής,
ως προς $u_0(t)$ είναι
$a(t)b(t)\lambda(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}=0,$
ως προς $a(t)$ είναι
$b(t)a''(t)+a(t)b''(t)=\frac{b(t)a'(t)^2}{a(t)}$
και τέλος ως προς $b(t)$ είναι
$a(t)b(t)^3a'(t)^2+\lambda_3^2a(t)^5b(t)\lambda(t)+a(t)^3b(t)^3=2a(t)^2b(t)^3a''(t)$

Αν στις παραπάνω εξισώσεις κάνουμε τις αντικαταστάσεις (3.14), (3.16), (3.17) παρατηρούμε ότι και οι πέντε εξισώσεις Euler-Lagrange γίνονται αληθείς.

Για την **Περίπτωση 5**: $\lambda_3 \neq 0 \quad c_1+c_2+c_3=0 \quad c_2=1$ οι εξισώσεις Euler-Lagrange, ως προς $M(t),\lambda(t),u_0(t),a(t),b(t)$ όταν κάνουμε τις προηγούμενες αντικαταστάσεις καθώς και τις $M(t)=a(t)$, $u_0(t)=\frac{a(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}}{b(t)}$ καταλήγουν στις εξής μορφές:

Ως προς $M(t)$ είναι
$a(t)b(t)\left(-b(t)a'(t)^2\left(2b(t)^2+3\lambda_3^2\right)+a(t)^4b(t)\lambda(t)\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)+a(t)\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)\right.$
$\left.\left(2b(t)a''(t)-a'(t)b'(t)\right)+a(t)^2\left(\lambda_3^2b''(t)+b(t)^2b''(t)-b(t)^3\right)\right)=0,$
ως προς $\lambda(t)$ είναι αληθής,
ως προς $u_0(t)$ είναι
$a(t)b(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda 3^2}\left(a(t)^4b(t)\lambda(t)-2b(t)a'(t)^2+\right.$
$\left.a(t)\left(2b(t)a''(t)-a'(t)b'(t)\right)+a(t)^2b''(t)\right)=0$
ως προς $a(t)$ είναι
$\lambda_3\left(-a''(t)+\frac{a'(t)b'(t)}{b(t)}+\frac{a'(t)^2}{a(t)}\right)=0$
και τέλος ως προς $b(t)$ είναι
$a(t)b(t)\left(\lambda_3^2a(t)^4b(t)\lambda(t)-\lambda_3^2b(t)a'(t)^2+\right.$
$\left.\lambda_3^2a(t)\left(2b(t)a''(t)-a'(t)b'(t)\right)+a(t)^2\left(\lambda_3^2b''(t)+b(t)^3\right)\right)=0$. Λύνουμε την τέταρτη και πέμπτη εξίσωση ως προς $a''(t),b''(t)$ αντίστοιχα και έχουμε
$a''(t)=a'(t)\left(\frac{a'(t)}{a(t)}+\frac{b'(t)}{b(t)}\right)$ και
$b''(t)=-\frac{a'(t)b'(t)}{a(t)}-\frac{b(t)\left(a'(t)^2+a(t)^4\lambda(t)\right)}{a(t)^2}-\frac{b(t)^3}{\lambda_3^2}$. Αντικαθιστώντας στις υπόλοιπες έχουμε ότι η εξίσωση ως προς $M(t)$ γίνεται
$\frac{a(t)b(t)\left(b(t)^2+2\lambda_3^2\right)\left(\lambda_3^2a'(t)^2+a(t)^2b(t)^2\right)}{\lambda_3}=0$ ενώ η εξίσωση ως προς $u_0(t)$ είναι
$\frac{a(t)b(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}\left(\lambda_3^2a'(t)^2+a(t)^2b(t)^2\right)}{\lambda_3}=0$ και όπως διαπιστώνουμε δεν υπάρχει λύση.

Για την **Περίπτωση 6**: $\lambda_3 \neq 0 \quad c_1+c_2+c_3=0 \quad c_2 \neq 0, c_2 \neq 1$ οι εξισώσεις Euler-Lagrange, ως προς $M(t), \lambda(t), u_0(t), a(t), b(t)$ όταν κάνουμε τις προηγούμενες αντικαταστάσεις καθώς και τις $M(t)=a(t)$, $u_0(t)=\frac{a(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}}{b(t)}$ καθως και την (3.21) και θεωρήσουμε το $a(t)=ca$ καταλήγουν στις εξής μορφές:

c$ab(t)=0$, αληθής, αληθής, (c_2-1)c$ab(t)b''(t)=0$, c$ab(t)=0$, άρα δεν υπάρχει λύση σε αυτή την περίπτωση.

Αν το $a(t)$ δεν είναι σταθερό τότε κάνοντας τις αντικαταστάσεις $c_1+c_2+c_3=0$, $M(t)=a(t)$, $u_0(t)=\frac{a(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}}{b(t)}$ και (3.21) καταλήγουμε οι εξισώσεις Euler-Lagrange ως προς $M(t), \lambda(t), u_0(t), a(t), b(t)$ να γίνονται αντίστοιχα:

Ως προς $M(t)$ είναι

$a(t)b(t)\left(a(t)^2b(t)^3+b(t)a'(t)^2\left((3c_2-1)b(t)^2+3c_2\lambda_3^2\right)+\right.$

$\left.2a(t)\left(a'(t)b'(t)\left((2c_2-1)b(t)^2+c_2\lambda_3^2\right)-c_2b(t)a''(t)\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)\right)\right)=0,$

ως προς $\lambda(t)$ είναι αληθής,

ως προς $u_0(t)$ είναι

$2c_2a(t)b(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}\left(a(t)a'(t)b'(t)+b(t)\left(a'(t)^2-a(t)a''(t)\right)\right)=0$

ως προς $a(t)$ είναι

$\frac{1}{a(t)b(t)}\left(-c_2\lambda_3^2a(t)a'(t)b'(t)-(c_2-1)b(t)^3\left(a'(t)^2-a(t)a''(t)\right)+\right.$

$\left.c_2\lambda_3^2b(t)\left(a(t)a''(t)-a'(t)^2\right)+(c_2-1)a(t)^2b(t)^2b''(t)\right)=0,$

και τέλος ως προς $b(t)$ είναι

$a(t)b(t)\left(a(t)^2b(t)^3+b(t)a'(t)^2\left(-(c_2-1)b(t)^2-c_2\lambda_3^2\right)-\right.$

$\left.2a(t)\left(b(t)a''(t)\left(-(c_2-1)b(t)^2-c_2\lambda_3^2\right)+c_2\lambda_3^2a'(t)b'(t)\right)\right)=0$. Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις (3.25) στις προηγούμενες εξισώσεις προκύπτουν όλες αληθείς. Η περίπτωση $a(t)=$ ca και $b(t)=\frac{mt}{ca}+m_1$ όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει δεν οδηγεί σε λύση.

Επίσης θεωρώντας τις προηγούμενες εξισώσεις Euler-Lagrange μετά τις αντικαταστάσεις $c_1+c_2+c_3=0$, $M(t)=a(t)$, $u_0(t)=\frac{a(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}}{b(t)}$ και (3.21) και κάνοντας τις επιπλέον αντικαταστάσεις $a(t)=\frac{e^{-\sqrt{m_2}(m_3+t)}\left(2m_1m_2+e^{\sqrt{m_2}(m_3+t)}\right)^2}{4m_2^2}$, $b(t)=-\frac{m\sqrt{m_2}\left(2m_1m_2-e^{\sqrt{m_2}(m_3+t)}\right)}{m_1\left(2m_1m_2+e^{\sqrt{m_2}(m_3+t)}\right)}$ και την

$a(t)=\frac{e^{-\sqrt{m_2}(m_3+t)}\left(2m_1m_2e^{\sqrt{m_2}(m_3+t)}+1\right)^2}{4m_2^2}$, $b(t)=\frac{m\sqrt{m_2}\left(2m_1m_2e^{\sqrt{m_2}(m_3+t)}-1\right)}{m_1\left(2m_1m_2e^{\sqrt{m_2}(m_3+t)}+1\right)}$ όπου $m_2=-\frac{c_2\lambda_3^2m_1^2+m^2}{(c_2-1)m^2}$ και στις δύο παραπάνω λύσεις, καταλήγουμε ότι και οι πέντε εξισώσεις Euler-Lagrange είναι αληθείς.

Τέλος στην ίδια περίπτωση θεωρώντας τις προηγούμενες εξισώσεις Euler-Lagrange μετα τις αντικαταστάσεις $c_1+c_2+c_3=0$, $M(t)=a(t)$, $u_0(t)=\frac{a(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}}{b(t)}$ και (3.21) κάνοντας τις επιπλέον αντικαταστάσεις

$b(t)=\sqrt{\frac{c_2\lambda_3^2+(c_2-1)^2m_1^2}{c_2-1}}\tan\left(\frac{(m_2+t)\sqrt{c_2\lambda_3^2+(c_2-1)^2m_1^2}}{2(c_2-1)^{3/2}m_1}\right)$ και (3.30) καταλήγουμε ότι και οι πέντε εξισώσεις Euler-Lagrange είναι αληθείς.

Τελειώνουμε με την τελευταία περίπτωση **Περίπτωση 7**: $\lambda_3 \neq 0 \quad c_1 + c_2 + c_3 \neq 0$ Οι πεντε εξισώσεις Euler-Lagrange, ως προς $M(t), \lambda(t), u_0(t), a(t), b(t)$ όταν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $M(t) = a(t)$, $u_0(t) = \frac{a(t)\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}}{b(t)}$, $c_3 = -c_1 - c_2 + q$ όπου $q \neq 0$, (3.31), είναι:

Ως προς $M(t)$ είναι

$\frac{1}{b(t)^2+\lambda_3^2} a(t)b(t)\left(2b(t)a'(t)^2\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)\left(b(t)^2(3c_2+3q-1)+3\lambda_3^2(c_2+q)\right)-\right.$
$2a(t)\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)\left(2c_2 b(t)a''(t)\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)+a'(t)b'(t)\left(b(t)^2(-4c_2+q+2)-2c_2\lambda_3^2\right)\right)+$
$\left.a(t)^2 b(t)^2\left(b(t)\left(3qb'(t)^2+2\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)\right)-2q\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)b''(t)\right)\right)=0,$

ως προς $\lambda(t)$ είναι αληθής,

ως προς $u_0(t)$ είναι

$\frac{1}{\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}} a(t)b(t)\left(-2c_2\lambda_3^4 a(t)a'(t)b'(t)+2\lambda_3^4 b(t)\left(c_2 a(t)a''(t)-(c_2+q)a'(t)^2\right)+\right.$
$2b(t)^5\left(c_2 a(t)a''(t)-(c_2+q)a'(t)^2\right)-b(t)^3\left(a(t)\left(qa(t)b'(t)^2-4c_2\lambda_3^2 a''(t)\right)+4\lambda_3^2(c_2+q)a'(t)^2\right)+$
$\left.\lambda_3^2 a(t)b(t)^2\left((q-4c_2)a'(t)b'(t)+qa(t)b''(t)\right)+a(t)b(t)^4\left((q-2c_2)a'(t)b'(t)+qa(t)b''(t)\right)\right)=$
$0,$

ως προς $a(t)$ είναι

$\left(2\lambda_3^4 a(t)(c_2+q)a'(t)b'(t)+2\lambda_3^4 b(t)(c_2+q)\left(a'(t)^2-a(t)a''(t)\right)+2b(t)^5(c_2+q-1)\left(a'(t)^2-a(\right.\right.$
$b(t)^3\left(a(t)\left(qa(t)b'(t)^2-2\lambda_3^2(2c_2+2q-1)a''(t)\right)+2\lambda_3^2(2c_2+2q-1)a'(t)^2\right)+$
$\left.2\lambda_3^2 a(t)b(t)^2\left(c_2 a'(t)b'(t)-(c_2-1)a(t)b''(t)\right)-2a(t)b(t)^4\left(qa'(t)b'(t)+(c_2-1)a(t)b''(t)\right)\right)/$
$a(t)b(t)\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)=0,$

και τέλος ως προς $b(t)$ είναι

$\frac{1}{b(t)^2+\lambda_3^2} a(t)b(t)\left(-2b(t)a'(t)^2\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)\left(b(t)^2(c_2+q-1)+\lambda_3^2(c_2+q)\right)+\right.$
$2a(t)\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)\left(2b(t)a''(t)\left((c_2-1)b(t)^2+c_2\lambda_3^2\right)+a'(t)b'(t)\left(qb(t)^2-2c_2\lambda_3^2\right)\right)+.$
$\left.a(t)^2 b(t)^2\left(2q\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)b''(t)+b(t)\left(2\left(b(t)^2+\lambda_3^2\right)-qb'(t)^2\right)\right)\right)=0.$

Αντικαθιστώντας $2c_2 - q - 2 = 0$ καθώς και τις (3.38), (3.39), (3.40), (3.41) καταλήγουμε ότι και οι πέντε εξισώσεις είναι αληθείς.

Οι παραπάνω εξισώσεις Euler-Lagrange, αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $q = c_2 - 1$, $a(t) = e^{m_1 \int b(t)\,dt}$ και απαλείψουμε το $b''(t)$ και το $b'(t)^2$ καταλήγουν στην σχέση $\frac{(c_2-1)b(t)^2\left(\lambda_3^2 m_1^2+1\right)e^{m_1\int b(t)\,dt}}{\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}} = 0$ που όμως δεν μπορεί να γίνει 0 αφού το $q = c_2 - 1 \neq 0$.

Επίσης οι εξισώσεις Euler-Lagrange, αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $q = 2 - 2c_2$, $a(t) = e^{m_1 \int b(t)\,dt}$ και απαλείψουμε το $b''(t)$ και το $b'(t)^2$ καταλήγουν στην σχέση $-\frac{4(c_2-1)b(t)^2\left(\lambda_3^2 m_1^2+1\right)e^{m_1\int b(t)\,dt}}{\sqrt{b(t)^2+\lambda_3^2}} = 0$ που όμως δεν μπορεί να γίνει 0 αφου το $q = c_2 - 1 \neq 0$.

Τέλος οι παραπάνω εξισώσεις Euler-Lagrange, αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $b(t) = \omega_1 \tan(m_2 + t\omega_2)$, $a(t) = \cos^{-\frac{m_1\omega_1}{\omega_2}}(m_2 + t\omega_2)$ καταλήγουν σε σχέσεις που δεν γίνονται αληθείς για κάθε t.

Στην επόμενη ενότητα ξεκινάμε την ανάλυσή μας επιλέγοντας ως υποκείμενη γεωμετρία εκείνη του χωρόχρονου Bianchi Type V. Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις πεδίου ανάγονται σε συνήθεις, συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις με το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

4

BIANCHI TYPE V

Το γενικό διαγώνιο στοιχείο μήκους Bianchi Type V είναι:

$$ds^2 = -M(t)^2dt^2 + a(t)^2b(t)^2dx^2 + e^{-2x}\left(a(t)^4dy^2 + b\left(t\right)^4dz^2\right), \tag{4.1}$$

με τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία Killing:
$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial y}$,
$\xi_2 = \frac{\partial}{\partial z}$,
$\xi_3 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$.

Προκειμένου να βρούμε μια συμβατή αρχική μορφή για το διανυσματικό πεδίο του αιθέρα, θα πρέπει πρώτα να έχει τις συμμετρίες που προκύπτουν απο τους παραπάνω γεννήτορες, δηλαδή $L_{\xi_\alpha}u_\mu = 0$ κάτι που υπαγορεύει ότι
$u_\mu = \{u_0(t), u_1(t), e^{-x}u_2(t), e^{-x}u_3(t)\}$.

Απο τα ξ_1, ξ_2 έχουμε ότι:
$u_\mu = \{u_0(t,x), u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x)\}$.

Άρα έχουμε:
$L_{\xi_3}u_\mu = \left\{u_0^{(0,1)}(t,x), u_1^{(0,1)}(t,x), u_2^{(0,1)}(t,x) + u_2(t,x), u_3^{(0,1)}(t,x) + u_3(t,x)\right\}$

Λύνοντας τις δύο διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν έχουμε την παραπάνω μορφή του διανυσματικού πεδίου του αιθέρα που είναι
$u_\mu = \{u_0(t), u_1(t), e^{-x}u_2(t), e^{-x}u_3(t)\}$.

Ένας περαιτέρω περιορισμός επιβάλλεται από την υπόθεση ότι το u_μ πρέπει να είναι αστρόβιλο, δηλαδή $u_{\mu;\nu} - u_{\nu;\mu} = 0$. Φυσικά, αυτός ο επιπλέον περιορισμός ¨σκοτώνει¨ τον πιθανώς ενδιαφέροντα διαμήκη βαθμό ελευθερίας του πεδίου, αλλά έχει επίσης πολλά πλεονεκτήματα. Διασφαλίζει ότι οι λύσεις του u_μ που θα βρεθούν (όπως επίσης τα u^μ) θα είναι ορθογώνιες προς τις υπερ-επιφάνειες που ορίζονται από το αντίστοιχο δυναμικό, επιτρέποντας έτσι την ανάκτηση μετρικών με την υψηλότερη συμμετρία (π.χ. FLRW σε κατάλληλο όριο) στην οποία αυτή η συνθήκη είναι υποχρεωτική. Κάνει επίσης εφικτή την πιθανή επαφή με τη βαρύτητα Horava στην οποία η ύπαρξη ενός φυσικού χρόνου T (εδώ αναγνωρίζεται από το προαναφερθέν δυναμικό) έχει μεγάλη σημασία. Τελευταίο, αλλά όχι λιγότερο σημαντικό, απλοποιεί τις (διαφορετικά δύσχρηστες) εξισώσεις που πρέπει να επιλυθούν. Αυτές οι απαιτήσεις, μαζί με τη χρήση του (1.14) δίνουν το προηγούμενο αποτέλεσμα για το u_μ στην ακόλουθη αρχική μορφή (λ_1 είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης):

$$u_\mu = \{u_0(t), \lambda_1, 0, 0\}, \qquad u_0\,(t) = \frac{M(t)\sqrt{a(t)^2 b(t)^2 + \lambda_1^2}}{a(t)b(t)}. \tag{4.2}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την εγγενή ελευθερία επαναπαραμετροποίησης του χρόνου και επιλέγουμε το χρόνο έτσι ώστε $M(t) = a(t)b(t)$, τότε το $u_\mu = \left\{\sqrt{a(t)^2 b(t)^2 + \lambda_1^2}, \lambda_1, 0, 0\right\}$ και η δεύτερη συνιστώσα της εξίσωσης (1.13) λαμβάνει τη μορφή

$$\lambda_1 a^{-6} b^{-6} \left((c_1 + c_3) \left(-b^2 a'^2 - ab\,(ba'' + 4a'b') + a^2 \left(-bb'' - b'^2 + 2b^2 \right) \right) + a(t)^4 b^4 \lambda \right) = 0, \tag{4.3}$$

υποδεικνύοντας ότι πρέπει να διερευνήσουμε ξεχωριστά τις δύο κατηγορίες λύσεων όπου: Κατηγορία A όταν $\lambda_1 = 0$ και Κατηγορία B όταν $\lambda_1 \neq 0$.

Η γενική προσέγγιση που υιοθετούμε για να βρούμε τον χώρο λύσεων είναι ακριβως η ίδια με αυτή που χρησιμοποιήσαμε και στην περίπτωση του LRS Bianchi Type III. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε όλες τις περιπτώσεις που εμφανίζονται.

4.0.1 Λύσεις κατηγορίας A

Η στρατηγική για την εύρεση του χώρου λύσεων είναι, κατά κάποιο τρόπο, παρόμοια με αυτήν που υιοθετήθηκε στο [85]: Αλγεβρικά λύνουμε τρεις από τις εξισώσεις ως προς $\lambda(t)$, $a''(t)$, $b''(t)$ και αντικαθιστούμε στις υπόλοιπες, λαμβάνοντας έτσι έναν αριθμό εξισώσεων που περιλαμβάνουν μόνο παραγώγους πρώτης τάξης. Η συνέπεια αυτών των εξισώσεων μαζί με τον μηδενισμό των διαφόρων παρονομαστών που εμφανίζονται σε ολόκληρη τη διαδικασία υποδηλώνουν ότι η ύπαρξη λύσεων στις εξισώσεις πεδίου σχετίζεται άμεσα με το εύρος τιμών των συντελεστών c_1, c_2, c_3 και c_4 της θεωρίας.

Σε αυτήν την κατηγορία υπάρχουν τρεις πιθανές περιπτώσεις μελέτης, που αντιστοιχούν σε

Περίπτωση A_1 $\quad c_1 + 3c_2 + c_3 - 2 = 0$

Περίπτωση A_2 $\quad c_1 + 3c_2 + c_3 - 2 \neq 0 \qquad q = 0$

Περίπτωση A_3 $\quad c_1 + 3c_2 + c_3 - 2 \neq 0 \qquad q \neq 0$

όπου $q = \frac{1}{5}(5c_1 + 9c_2 + 5c_3 - 4)$.

Η μόνη μη μηδενική συνιστώσα της (1.13) ορίζει τον πολλαπλασιαστή Lagrange

$\lambda = \frac{1}{5a(t)^4 b(t)^4} \left(5a(t)^2(-3c_2 + 5q + 4)b'(t)^2 - \right.$
$a(t)b(t) \left(2(6c_2 + 5q + 4)a'(t)b'(t) - 15c_2 a(t)b''(t)\right) + 5b(t)^2 \left(3c_2 a(t)a''(t) + (3c_2 - 5q - 4)a'(t)^2\right.$

ο οποίος στη συνέχεια αντικαθίσταται στην (1.10) δίνοντας το τελικό σύνολο εξισώσεων προς επίλυση σε αυτήν την κατηγορία.

Περίπτωση A_1

Η υπόθεση οδηγεί στην $q = \frac{6(1-c_2)}{5}$ και αντικαθιστώντας στην (1.10) υπολογίζουμε τη διαφορά $(0,0)-(1,1) = -\frac{3\left(2(c_2-1)a(t)b(t)a'(t)b'(t)-(c_2-1)b(t)^2a'(t)^2+a(t)^2\left(b(t)^2-(c_2-1)b'(t)^2\right)\right)}{a(t)^2b(t)^2} - \left(\frac{-6(c_2-1)a(t)b(t)a'(t)b'(t)+3(c_2-1)b(t)^2a'(t)^2+a(t)^2\left(3(c_2-1)b'(t)^2+b(t)^2\right)}{a(t)^2b(t)^2}\right) = -4$.

Δεν υπάρχει λοιπόν λύση σε αυτήν την περίπτωση.

Περίπτωση A_2

Οι παραδοχές αυτής της υπόθεσης κάνουν την $(0,0)$ συνιστώσα της (1.10)

$$\frac{12}{5}\left(1 - c_2\right)\frac{a'b'}{ab} - 1 = 0, \tag{4.4}$$

υποδεικνύοντας ότι πρέπει $c_2 \neq 1$ για να υπάρχουν λύσεις. Όπως μπορούμε να δούμε εύκολα η παραπάνω εξίσωση επιδέχεται τη βαθμωτή συμμετρία $a \to \omega_1 a, \quad b \to \omega_2 b$, έτσι, αν κάνουμε την αντικατάσταση

$$a(t) = \exp\left[\int \left(a_1\left(t\right) + b_1\left(t\right)\right)dt\right], \quad b(t) = \exp\left[\int \left(a_1\left(t\right) - b_1\left(t\right)\right)dt\right], \tag{4.5}$$

η προαναφερθείσα εξίσωση μετατρέπεται στην

$$\frac{12}{5}(1 - c_2)\left(a_1(t)^2 - b_1(t)^2\right) - 1 = 0, \tag{4.6}$$

η οποία είναι τετραγωνική μορφή ως προς $a_1(t), b_1(t)$, και μπορεί να παραμετροποιηθεί από

$$a_1(t) = \frac{m}{2}\sinh(f(t)),\, b_1(t) = \frac{m}{2}\cosh(f(t)), \quad m = \sqrt{\frac{5}{3(c_2-1)}}. \tag{4.7}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω μορφές των $a_1(t), b_1(t)$ στις υπόλοιπες συνιστώσες της (1.10) προκύπτει ότι όλες είναι μηδενικές εκτός από τις (1,1), (2,2) και (3,3) που είναι οι παρακάτω:

$$2\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{c_2-1}f'(t)\cosh(f(t)) + 4\cosh^2(f(t)) = 0$$

$$\tfrac{1}{5}(2\cosh(f(t)) - 3\sinh(f(t)))\left(\sqrt{15}\sqrt{c_2-1}f'(t) + 10\cosh(f(t))\right)e^{\frac{2\sqrt{\frac{5}{3}}\int\cosh(f(t))\,dt}{\sqrt{c_2-1}}-2x} = 0$$

$$\tfrac{1}{5}(3\sinh(f(t)) + 2\cosh(f(t)))\left(\sqrt{15}\sqrt{c_2-1}f'(t) + 10\cosh(f(t))\right)e^{-\frac{2\sqrt{\frac{5}{3}}\int\cosh(f(t))\,dt}{\sqrt{c_2-1}}-2x} = 0.$$

Βρίσκουμε ότι υπάρχει μια λύση εάν η $f(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$2\cosh f(t)\,(2m\cosh f(t) + f'(t)) = 0, \tag{4.8}$$

με λύσεις

$$f(t) = \frac{i\pi}{2}(2\kappa+1),\ \kappa\in\mathbb{Z}, \quad \text{ή} \quad f(t) = -2\tanh^{-1}(\tan(m(t-t_0))), \tag{4.9}$$

- Αν $f(t) = \frac{i\pi}{2}(2\kappa+1)$, η λύση είναι πραγματική εάν $c_2 < 1$ και, στη συνέχεια οι $a(t), b(t)$ γίνονται

  $$a(t) = b(t) = \exp\frac{\epsilon m}{2}t, \quad \epsilon = \pm 1, \tag{4.10}$$

  αποδίδοντας το στοιχείο μήκους

  $$ds^2 = e^{2\epsilon m t}\left(-dt^2 + dx^2 + e^{-2x}dy^2 + e^{-2x}dz^2\right).$$

  Οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή Riemann είναι:

  $$\left\{\frac{(3c_2+2)e^{\frac{2\sqrt{\frac{5}{3}}t\epsilon}{\sqrt{1-c_2}}-4x}}{c_2-1}, \frac{(3c_2+2)e^{\frac{2\sqrt{\frac{5}{3}}t\epsilon}{\sqrt{1-c_2}}-2x}}{c_2-1}\right\}$$

  Ο τανυστής Riemann είναι μηδέν όταν $c_2 = -\frac{2}{3}$, έτσι λαμβάνουμε το χωρόχρονο Minkowski σε αυτήν την περίπτωση. Το αντίστοιχο βαθμωτό Ricci είναι

  $$R = -\frac{2(3c_2+2)}{c_2-1}\exp(-2\epsilon m\,t) \tag{4.11}$$

που έχει μια ανωμαλία καμπυλότητας στο $t \to \pm\infty$ ανάλογα με την τιμή του ϵ.

Για αυτήν τη λύση, τα φυσικά χαρακτηριστικά του τανυστή ενέργειας-ορμής περιγράφουν ένα ιδανικό ρευστό με ενεργειακή πυκνότητα και συνιστώσα πίεσης:

$\rho = \frac{3c_2+2}{c_2-1} \exp\left(-2\epsilon m\, t\right),\ p = -\frac{1}{3}\rho.$

- Αν $f\left(t\right) = -2\tanh^{-1}\left(\tan\left(m\left(t-t_0\right)\right)\right)$, η λύση των εξισώσεων πεδίου δίνεται από τις συναρτήσεις

$$a(t) = \sqrt{\sin\left(m\left(t-t_0\right)\right) + \cos\left(m\left(t-t_0\right)\right)},\ b(t) = \sqrt{\sin\left(m\left(t-t_0\right)\right) - \cos\left(m\left(t-t_0\right)\right)}, \tag{4.12}$$

Ως εκ τούτου, το στοιχείο μήκους γίνεται

$ds^2 = \cos(2m(t-t_0))\left(dt^2 - dx^2\right) + e^{-2x}\left(1+\sin(2m(t-t_0))\right)dy^2 -$

$e^{-2x}\left(1-\sin(2m(t-t_0))\right)dz^2$

με $c_2 > 1$.

Το αντίστοιχο βαθμωτό Ricci είναι $\left(3\left(m^2+1\right)\cos(4m(t-t_0)) + 7m^2+3\right)\sec^3(2m(t-t_0))$ που αναπτύσσει ανωμαλίες καμπυλότητας σε πεπερασμένα διαστήματα.

Το $u_\mu = \left\{\sqrt{\sin(m(t-t_0)) - \cos(m(t-t_0))}\sqrt{\sin(m(t-t_0)) + \cos(m(t-t_0))}, 0, 0, 0\right\}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $\tau = t - t_0$ βλέπουμε ότι η μεταβλητή t_0 είναι απορροφήσιμη.

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι το όρισμα $T \equiv 2m\tau$ εκτείνεται στο πρωτεύον διάστημα $[0, 2\pi]$ και ο ρόλος των συντεταγμένων τ, x ως χρονοειδής και χωροειδής είναι εναλλάξιμος. Δηλαδή όταν $\frac{\pi}{2} < T < \frac{3\pi}{2}$ τότε η τ είναι χρονοειδής εφ'όσον $\cos 2m\tau < 0$ ενώ όταν $\frac{3\pi}{2} < T \leq 2\pi$ ή $0 \leq T < \frac{\pi}{2}$ τότε η x είναι χρονοειδής εφ'όσον $\cos 2m\tau > 0$. Η συνιστώσα g_{yy} είναι πάντα θετική (ή μηδέν για $T = \frac{3\pi}{2}$) και η συνιστώσα g_{zz} είναι αρνητική (ή μηδέν για $T = \frac{\pi}{2}$). Έτσι, σε ολόκληρο το πρωτεύον διάστημα του T, η υπογραφή του στοιχείου μήκους είναι ουδέτερη.

Οι νόρμες $|\xi_i|^2 \equiv g_{\mu\nu}\xi_i^\mu\xi_i^\nu$ των διανυσμάτων Killing είναι $|\xi_1|^2 = e^{-2x}(\sin T + 1)$, $|\xi_2|^2 = e^{-2x}(\sin T - 1)$, $|\xi_3|^2 = e^{-2x}\left(-e^{2x}\cos T + \sin T\left(y^2+z^2\right) + y^2 - z^2\right)$. Τα δύο πρώτα διανύσματα μηδενίζονται μόνο στα σημεία του πρωτεύοντος διαστήματος $T = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα, ενώ το τρίτο διάνυσμα γίνεται μηδέν εντός του διαστήματος ενδιαφέροντος. Όλα αυτά μπορεί να είναι ενδεικτικά ότι υπάρχουν ορίζοντες. Ωστόσο, ο ουδέτερος χαρακτήρας της υπογραφής περιπλέκει κάπως το ζήτημα.

Το παραπάνω στοιχείο μήκους αντιστοιχεί σε ένα ιδανικό ρευστό

$$\rho = \frac{3 - m^2 + 3\,(1+m^2)\cos(4m\tau)}{2\cos^3(m\tau)} \tag{4.13}$$

$$p = -\frac{1 + 5m^2 + (1+m^2)\cos(4m\tau)}{2\cos^3(m\tau)} \tag{4.14}$$

με καταστατική εξίσωση $p = \rho w$ και παράμετρο

$$w = -\frac{1 + 5m^2 + (1+m^2)\cos(4m\tau)}{3 - m^2 + 3\,(1+m^2)\cos(4m\tau)}. \tag{4.15}$$

Περίπτωση A_3

Σε αυτήν την περίπτωση επιλύουμε πρώτα τις (2,2) και (3,3) συνιστώσες της (1.10) ως προς τις επιταχύνσεις $a''(t), b''(t)$. Το αποτέλεσμα είναι:

$a''(t) = \big(b(t)^2 a'(t)^2 \left(\frac{1}{5}(-5c_1 - 9c_2 + 5q + 4) + c_1 - 3c_2 + 4\right) -$
$6a(t)b(t)a'(t)b'(t)\left(\frac{1}{5}(-5c_1 - 9c_2 + 5q + 4) + c_1 + c_2\right) + a(t)^2\left(5qb'(t)^2 - 2b(t)^2\right)\big)/$
$4a(t)b(t)^2\left(\frac{1}{5}(-5c_1 - 9c_2 + 5q + 4) + c_1 + 3c_2 - 2\right)$,
$b''(t) = \big(5qb(t)^2 a'(t)^2 - 6a(t)b(t)a'(t)b'(t)\left(\frac{1}{5}(-5c_1 - 9c_2 + 5q + 4) + c_1 + c_2\right) +$
$a(t)^2\left(b'(t)^2\left(\frac{1}{5}(-5c_1 - 9c_2 + 5q + 4) + c_1 - 3c_2 + 4\right) - 2b(t)^2\right)\big)/$
$4a(t)^2 b(t)\left(\frac{1}{5}(-5c_1 - 9c_2 + 5q + 4) + c_1 + 3c_2 - 2\right)$

Ο παρονομαστής έχει τον όρο $\frac{1}{5}(-5c_1 - 9c_2 + 5q + 4) + c_1 + 3c_2 - 2 = \frac{6c_2}{5} + q - \frac{6}{5}$, οπότε πρέπει να ελέγξουμε τι θα συμβεί εάν $q = \frac{6}{5}(1 - c_2)$. Στην περίπτωση αυτή οι συνιστώσες (0,0) και (1,1) της (1.10) γίνονται

$$-\frac{3\left(2(c_2-1)a(t)b(t)a'(t)b'(t) - (c_2-1)b(t)^2 a'(t)^2 + a(t)^2\left(b(t)^2 - (c_2-1)b'(t)^2\right)\right)}{a(t)^2 b(t)^2} = 0,$$

$$\frac{-6(c_2-1)a(t)b(t)a'(t)b'(t) + 3(c_2-1)b(t)^2 a'(t)^2 + a(t)^2\left(3(c_2-1)b'(t)^2 + b(t)^2\right)}{a(t)^2 b(t)^2} = 0$$

και έτσι έχουμε $(0,0) - (1,1) = -4$ οπότε αντιμετωπίζουμε ασυμβατότητα.

Για την υποπερίπτωση που το $q \neq \frac{6}{5}(1 - c_2)$, αντικαθιστούμε τις παραπάνω επιταχύνσεις στην εξίσωση (1.10). Η (0,0) συνιστώσα της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$-\frac{2a(t)b(t)a'(t)b'(t)\left(\frac{1}{5}(-5c_1 - 9c_2 + 5q + 4) + c_1 + 9c_2 - 8\right) + 5qb(t)^2 a'(t)^2 + a(t)^2\left(5qb'(t)^2 + 6b(t)^2\right)}{2a(t)^2 b(t)^2} = 0$$

και επιδέχεται μια συμμετρία κλιμάκωσης $a \to \omega_1 a, \quad b \to \omega_2 b$. Έτσι, αν κάνουμε μια αντικατάσταση παρόμοια με την (4.5) και συγκεκριμένα

$a(t) = \exp\left[\int\left(-a_1(t) + b_1(t)\right)dt\right], \quad b(t) = \exp\left[\int\left(a_1(t) + b_1(t)\right)dt\right]$,

η παραπάνω εξίσωση απλοποιείται στην

$$\frac{1}{30}a_1(t)^2(8(9c_2 - 5q - 9)) - \frac{1}{30}b_1(t)^2(12(6c_2 + 5q - 6)) = 1. \tag{4.16}$$

Για να παραμετροποιήσουμε την παραπάνω εξίσωση, πρέπει να ελέγξουμε την υπόθεση $q = \frac{1}{5}(9c_2 - 9)$. Σημειώνουμε ότι η εναλλακτική $(6c_2 + 5q - 6) = 0$ υποδηλώνει $q = \frac{6}{5}(1 - c_2)$ που οδηγεί σε ασυμβατότητα όπως αναφέρεται στην αρχή αυτής της ενότητας.

- Έαν $q = \frac{9}{5}(c_2 - 1)$ τότε η εξίσωση (4.16) δίνει

$$b_1(t) = \pm \left(\sqrt{6}\sqrt{1-c_2}\right)^{-1}. \tag{4.17}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την παραπάνω μορφή των $a(t), b(t)$ στις εξισώσεις των επιταχύνσεων $a''(t), b''(t)$ και έχουμε τις εξής νέες εξισώσεις:

$$(-a_1'(t) - 2b_1(t)a_1(t) + a_1(t)^2 + b_1(t)^2)\, e^{b_1(t)t - \int a_1(t)\,dt} = \frac{\left(12(c_2-1)b_1(t)a_1(t) + 6(c_2-1)a_1(t)^2 - 1\right)e^{b_1(t)t - \int a_1(t)\,dt}}{6(c_2-1)}$$

$$(a_1'(t) + 2b_1(t)a_1(t) + a_1(t)^2 + b_1(t)^2)\, e^{\int a_1(t)\,dt + b_1(t)t} = \frac{\left(-12(c_2-1)b_1(t)a_1(t) + 6(c_2-1)a_1(t)^2 - 1\right)e^{\int a_1(t)\,dt + b_1(t)t}}{6(c_2-1)}.$$

Αφαιρώντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις κατα μέλη καταλήγουμε στην σχέση

$$(-a_1'(t) - \frac{12(c_2-1)b_1(t)a_1(t) + 6(c_2-1)a_1(t)^2 - 1}{6(c_2-1)} - 2b_1(t)a_1(t) + a_1(t)^2 + b_1(t)^2) -$$
$$\left(a_1'(t) - \frac{-12(c_2-1)b_1(t)a_1(t) + 6(c_2-1)a_1(t)^2 - 1}{6(c_2-1)} + 2b_1(t)a_1(t) + a_1(t)^2 + b_1(t)^2\right) = 0$$

και χρησιμοποιώντας την (4.17) φτάνουμε σε μία διαφορική εξίσωση ως προς $a_1(t)$

$$a_1'(t) \pm 4\left(\sqrt{6}\sqrt{1-c_2}\right)^{-1} a_1(t) = 0, \tag{4.18}$$

που έχει τη λύση $a_1(t) = m_1 \exp(\mp 4nt)$ με m_1 μια σταθερά ολοκλήρωσης και $n^{-1} = \sqrt{6(1-c_2)}$. Τέλος, οι συντελεστές κλίμακας $a(t), b(t)$ δίνονται από τις

$$a(t) = \exp\left(\frac{2t - 3(c_2-1)m_1 e^{-\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}t}{\sqrt{1-c_2}}}}{2\sqrt{6-6c_2}}\right),$$

$$b(t) = \exp\left(\frac{3(c_2-1)m_1 e^{-\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}t}{\sqrt{1-c_2}}} + 2t}{2\sqrt{6-6c_2}}\right)$$

Οι προηγούμενες εκφράσεις γράφονται

$$a(t) = \exp \epsilon \left(2nt + c\, e^{-4nt}\right),\ b(t) = \exp \epsilon \left(2nt - c\, e^{-4nt}\right), \tag{4.19}$$

όπου $\epsilon^2 = 1$ και $c = -\frac{3(c_2-1)m_1}{2\sqrt{6-6c_2}}$ ένας επαναπροσδιορισμός των m_1 και $c_2 < 1$. Το αντίστοιχο βαθμωτό Ricci βρίσκεται

$$R = 2e^{-4nt(\epsilon+2)}\left(64c^2n^2 - 3e^{8nt}(1-4n^2)\right), \tag{4.20}$$

το οποίο παρουσιάζει ανωμαλίες καμπυλότητας όταν $t \to \pm\infty$ για $\epsilon = -1$ και όταν $t \to -\infty$ για $\epsilon = 1$.

Η παραπάνω λύση περιγράφει ένα ιδανικό ρευστό όταν $\epsilon = 1$, καθώς και ένα μη ιδανικό ρευστό στην περίπτωση που το $\epsilon = -1$.

Η πυκνότητα ενέργειας και η συνιστώσα της πίεσης δίνονται απο τις εκφράσεις

$$\rho = e^{-4n(\epsilon+2)t}\left(3e^{8nt}(4n^2-1) - 64c^2n^2\right), \; p = -e^{-4n(\epsilon+2)t}\left(e^{8nt}(4n^2-1) + 64c^2n^2\right), \tag{4.21}$$

ενώ για την περίπτωση που το $\epsilon = -1$ δεν έχουμε ιδανικό ρευστό οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή τάσεων $\pi_{\mu\nu}$ είναι

$$\pi_{yy} = -\pi_{zz} = -32cn^2(\epsilon-1)\exp\left(-4nt - 2x + 4c\epsilon e^{-4nt}\sqrt{2n^2+1}\right) \tag{4.22}$$

- Αν $(9c_2 - 5q - 9) \neq 0$ η εξίσωση (4.16) μπορεί να παραμετροποιηθεί ως

$$a_1(t) = \frac{\sqrt{15}\cosh(f(t))}{2\sqrt{(9c_2-5q-9)}}, \; b_1(t) = \frac{\sqrt{5}\sinh(f(t))}{\sqrt{2(6c_2+5q-6)}}. \tag{4.23}$$

Τώρα, αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές των $a_1(t), b_1(t)$ στις υπόλοιπες συνιστώσες (1.10) βρίσκουμε ότι οι (1,1), (2,2), (3,3) γίνονται αντίστοιχα

$$\cosh(f(t))\left(\sqrt{10}(6c_2+5q-6)f'(t) + 20\sqrt{6c_2+5q-6}\cosh(f(t))\right) = 0$$

$$\Big(10\cosh(f(t))\left(\sqrt{6}\sqrt{9c_2-5q-9}\sinh(f(t)) + 2\sqrt{6c_2+5q-6}\cosh(f(t))\right) +$$
$$f'(t)\left(\sqrt{15}\sqrt{6c_2+5q-6}\sqrt{9c_2-5q-9}\sinh(f(t)) + \sqrt{10}(6c_2+5q-6)\cosh(f(t))\right)\Big) = 0$$

$$\Big(20\sqrt{6c_2+5q-6}\cosh^2(f(t)) - 5\sqrt{6}\sqrt{9c_2-5q-9}\sinh(2f(t)) +$$
$$f'(t)\left(\sqrt{10}(6c_2+5q-6)\cosh(f(t)) - \sqrt{15}\sqrt{9c_2-5q-9}\sqrt{6c_2+5q-6}\sinh(f(t))\right)\Big) = 0$$

και βρίσκουμε ότι υπάρχει μια λύση εάν το $f(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\cosh(f(t))\left(\sqrt{10}(6c_2+5q-6)f'(t)+20\sqrt{6c_2+5q-6}\cosh(f(t))\right)=0. \tag{4.24}$$

– Όταν $\cosh(f(t))=0$ έχουμε

$$f(t)=\frac{i\pi}{2}\left(2\kappa+1\right),\ \kappa\in\mathbb{Z} \tag{4.25}$$

Για αυτές τις συναρτήσεις $f(t)$, καθορίζεται η λύση των εξισώσεων πεδίου

$$a(t)=b(t)=e^{\epsilon kt},\quad k=\sqrt{\frac{5}{2(6-5q-6c_2)}}, \tag{4.26}$$

και το στοιχείο μήκους γίνεται

$$ds^2=e^{4\epsilon kt}\left(-dt^2+dx^2+e^{-2x}dy^2+e^{-2x}dz^2\right). \tag{4.27}$$

Ο τανυστής Riemann έχει τις εξής μη μηδενικές συνιστώσες:

$$\left\{-\frac{(6c_2+5q+4)e^{\frac{2\sqrt{10}t\epsilon}{\sqrt{-6c_2-5q+6}}-4x}}{6c_2+5q-6},\frac{(6c_2+5q+4)e^{\frac{2\sqrt{10}t\epsilon}{\sqrt{-6c_2-5q+6}}-4x}}{6c_2+5q-6},\right.$$
$$\left.-\frac{(6c_2+5q+4)e^{\frac{2\sqrt{10}t\epsilon}{\sqrt{-6c_2-5q+6}}-2x}}{6c_2+5q-6},\frac{(6c_2+5q+4)e^{\frac{2\sqrt{10}t\epsilon}{\sqrt{-6c_2-5q+6}}-2x}}{6c_2+5q-6}\right\}$$

Στην ειδική περίπτωση που $q=-\frac{1}{5}(6c_2+4)$ (οπότε ισχύει $q<\frac{6(1-c_2)}{5}$) ο τανυστής Riemann είναι 0 και έτσι λαμβάνουμε τον χωρόχρονο Minkowski.

Αν το $q>\frac{6}{5}\left(1-c_2\right)$ τότε η λύση είναι

$$a(t)=b(t)=e^{\frac{\left(i\sqrt{\frac{5}{2}}t\right)\epsilon}{\sqrt{6c_2+5q-6}}}, \tag{4.28}$$

και το στοιχείο μήκους γίνεται

$$ds^2=e^{-2x+\frac{2i\sqrt{10}t\epsilon}{\sqrt{6c_2+5q-6}}}\left(-e^{2x}d(t)^2+e^{2x}d(x)^2+d(y)^2+d(z)^2\right). \tag{4.29}$$

που δεν οδηγεί σε λύση γιατί το στοιχείο μήκους είναι μιγαδικό.

Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του q το αντίστοιχο βαθμωτό Ricci είναι

$$R=-6e^{-4\epsilon kt}\left(4k^2-1\right), \tag{4.30}$$

που έχει μια ανωμαλία καμπυλότητας στο $t\to\pm\infty$ ανάλογα με το πρόσημο του ϵ, αν είναι συν ή μείον 1. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής περιγράφει ένα ιδανικό ρευστό, παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση.

Πράγματι ο ανισοτροπικός τανυστής τάσεων είναι

$\pi_{\mu\nu} = 0$ και το διάνυσμα θερμότητας $q_\mu = 0$. Άρα ο τανυστής ενέργειας μιμείται ένα ιδανικό ρευστό. Η πίεση $p = \frac{(6c_2+5q+4)e^{-\frac{2\sqrt{10}t\epsilon}{\sqrt{-6c_2-5q+6}}}}{6c_2+5q-6}$

Η πυκνότητα ενέργειας $\rho = -\frac{3(6c_2+5q+4)e^{-\frac{2\sqrt{10}t\epsilon}{\sqrt{-6c_2-5q+6}}}}{6c_2+5q-6}$

Έτσι η παράμετρος w της καταστατικής εξίσωσης $p = w\rho$ είναι:$-(1/3)$

– Όταν $\cosh f(t) \neq 0$ η λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.24) είναι

$$f(t) = -2\tanh^{-1}\left(\tan\left(A\left(t - t_0\right)\right)\right), \quad A = \sqrt{10(6c_2 + 5q - 6)^{-1}}, \tag{4.31}$$

που σημαίνει ότι,

$a(t) = \cos^{1/4} 2A(t - t_0) \left(\frac{1+\tan A(t-t_0)}{1-\tan A(t-t_0)}\right)^{-B}$,

$b(t) = \cos^{1/4} 2A(t - t_0) \left(\frac{1+\tan A(t-t_0)}{1-\tan A(t-t_0)}\right)^{B}$

με $B = \sqrt{3(8(6 - 5A^2q))^{-1}}$.

Το αντίστοιχο στοιχείο μήκους είναι

$$ds^2 = \cos(2At)\left(-dt^2 + dx^2 + e^{-2x}\left(\left(\frac{1+\tan At}{1-\tan At}\right)^{-4B} dy^2 + \left(\frac{1+\tan At}{1-\tan At}\right)^{4B} dz^2\right)\right), \tag{4.32}$$

όπου ¨καταργήσαμε¨ το t_0 με έναν επαναπροσδιορισμό της συντεταγμένης $t \mapsto t+t_0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτό το στοιχείο μήκους περιγράφει ένα ιδανικό ρευστό. Πράγματι, ο ανισοτροπικός τανυστής τάσεων είναι $\pi_{\mu\nu} = 0$ και το διάνυσμα ροής θερμότητας $q_\mu = 0$. Η πίεση

$p = -\frac{\sec^6(A(t-t_o))\left(\left(A^2+1\right)(9c_2-5q-9)\cos(4A(t-t_o))+5A^2(9c_2-10q-9)+9c_2-5q-9\right)}{2(9c_2-5q-9)(\tan^2(A(t-t_o))-1)^3}$

Η πυκνότητα ενέργειας

$\rho = \frac{3\sec^6(A(t-t_o))\left(\left(A^2+1\right)(9c_2-5q-9)\cos(4A(t-t_o))+A^2(-3c_2+10q+3)+9c_2-5q-9\right)}{2(9c_2-5q-9)(\tan^2(A(t-t_o))-1)^3}$

Έτσι η παράμετρος w της καταστατικής εξίσωσης $p = w\rho$ είναι

$w = -\frac{\left(A^2+1\right)(9c_2-5q-9)\cos(4A(t-t_o))+5A^2(9c_2-10q-9)+9c_2-5q-9}{3((A^2+1)(9c_2-5q-9)\cos(4A(t-t_o))+A^2(-3c_2+10q+3)+9c_2-5q-9)}$

Το βαθμωτό Ricci δίνεται ως

$$R = -\left(3 + A^2(9 - 32B^2) + 3(A^2+1)\cos(4At)\right)\sec^3(2At), \tag{4.33}$$

που αποκλίνει για $t = \frac{\pi}{4A}(2\kappa + 1)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Συνεχίζουμε την ανάλυσή μας με την παραγωγή της δεύτερης κατηγορίας λύσεων στις οποίες το u^a δεν είναι παράλληλο προς έναν συν-κινούμενο παρατηρητή.

4.0.2 Λύσεις κατηγορίας B

Για τη δεύτερη κατηγορία λύσεων όπου $\lambda_1 \neq 0$, η στρατηγική είναι τώρα να λύσουμε πρώτα τη δεύτερη συνιστώσα της (1.13) ως προς τον πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda(t)$ οπότε έχουμε:

$\lambda(t) = -\frac{1}{a(t)^4 b(t)^4}$
$(c_1 + c_3)\left(2a(t)^2 b(t)^2 - b(t)^2 a'(t)^2 - 4a(t)b(t)a'(t)b'(t) - a(t)^2 b'(t)^2 -\right.$
$\left. a(t)b(t)^2 a''(t) - a(t)^2 b(t) b''(t)\right)$.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε αυτό το $\lambda(t)$ στην πρώτη συνιστώσα του (1.13) και επίσης στις συνιστώσες της (1.10). Εάν, από τις προκύπτουσες εξισώσεις, επιλύσουμε την πρώτη συνιστώσα του (1.13) και την (2,2) συνιστώσα της (1.10) ως προς τις επιταχύνσεις $a''(t), b''(t)$, οι παρονομαστές των παραπάνω επιταχύνσεων περιέχουν την έκφραση

$\left(a(t)^2 b(t)^2 (c_1 + c_3 + 1) + \lambda_1^2 (c_1 + c_3)\right)\left(a(t)^2 b(t)^2 (c_1 + 3c_2 + c_3) + 2c_2 \lambda_1^2\right)$

Εξετάζοντας τον πιθανό μηδενισμό της προηγούμενης έκφρασης προκύπτουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

$$a^2 b^2 (c_1 + c_3 + 1) + \lambda_1^2 (c_1 + c_3) = 0, c_1 + c_3 + 1 \neq 0 \qquad \text{(Περίπτωση } B_1\text{)}$$

$$c_2 = 0, c_1 + c_3 = 0 \qquad \text{(Περίπτωση } B_2\text{)}$$

$$a^2 b^2 (c_1 + 3c_2 + c_3) + 2c_2 \lambda_1^2 = 0, c_1 + 3c_2 + c_3 \neq 0, \qquad \text{(Περίπτωση } B_3\text{)}$$

$$\left(a(t)^2 b(t)^2 (c_1 + c_3 + 1) + \lambda_1^2 (c_1 + c_3)\right)\left(a(t)^2 b(t)^2 (c_1 + 3c_2 + c_3) + 2c_2 \lambda_1^2\right) \neq 0, c_2 \neq 0, c_1 + c_3 = 0 \qquad \text{(Περίπτωση } B_4\text{)}$$

$$\left(a(t)^2 b(t)^2 (c_1 + c_3 + 1) + \lambda_1^2 (c_1 + c_3)\right)\left(a(t)^2 b(t)^2 (c_1 + 3c_2 + c_3) + 2c_2 \lambda_1^2\right) \neq 0, c_1 + c_3 \neq 0 \qquad \text{(Περίπτωση } B_5\text{)}$$

Περίπτωση B_1

Αν $a^2 b^2 (c_1 + c_3 + 1) + \lambda_1^2 (c_1 + c_3) = 0$ και $c_1 + c_3 + 1 \neq 0$.

Η περίπτωση προκύπτει όταν $a^2 b^2 (c_1 + c_3 + 1) + \lambda_1^2 (c_1 + c_3) = 0$ και αν υποθέσουμε ότι $(c_1 + c_3 + 1) = 0$ τότε $(c_1 + c_3) = 0$ διότι $\lambda_1 \neq 0$, έτσι καταλήγουμε σε $1 = 0$, άτοπο.

Εαν τώρα $c_1+c_3+1\neq 0$ τότε απο τις εξισώσεις συνάγουμε ότι η $b(t)$ είναι σταθερή και αντικαθιστώντας στην (1.10) καταλήγουμε η (0,1) συνιστώσα να είναι
$\frac{8\lambda_1 a'(t)^2}{a(t)^2\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{c_1+c_3+1}}}=0$, έτσι καταλήγουμε και η $a(t)$ να είναι σταθερή. Όταν αντικαταστήσουμε αυτές τις σταθερές τιμές στην (1.10), καταλήγουμε ότι οι (0,0) και (1,1) συνιστώσες γίνονται αντίστοιχα
$-\frac{c_1^2+c_1(-2c_2+2c_3+2)-2c_2(c_3+1)+c_3(c_3+2)}{c_1+c_3}=0$
$-\frac{c_1^2+2c_1(c_2+c_3)+2c_2(c_3+1)+c_3^2}{c_1+c_3}=0$
Έτσι $(0,0)+(1,1)=-2(c_1+c_3+1)=0$ που είναι αδύνατο, επομένως δεν υπάρχει λύση σε αυτήν την περίπτωση.

Περίπτωση B_2

Αν $c_2=0$ και $c_1+c_3=0$.

Η περίπτωση προκύπτει όταν υποθέσουμε $a^2b^2(c_1+c_3+1)+\lambda_1^2(c_1+c_3)\neq 0$ και $a(t)^2b(t)^2(c_1+3c_2+c_3)+2c_2\lambda_1^2=0$. Αν $c_1+3c_2+c_3=0$ καταλήγουμε σε $c_2=0$ και τελικά $c_1+c_3=0$.

Με την παραπάνω υπόθεση η εξίσωση περιορισμού, δηλ. η (0,0) συνιστώσα της (1.10), γίνεται

$$\frac{8a'b'}{ab}+\frac{2a'^2}{a^2}+\frac{2b'^2}{b^2}-3=0. \tag{4.34}$$

Όπως και πριν, η υπάρχουσα συμμετρία κλιμάκωσης δείχνει ότι η αντικατάσταση
$a(t)=\exp\left[\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{3}\sinh(f(t))\ +\cosh(f(t))\right)dt\right]$,
$b(t)=\exp\left[\frac{1}{2}\int\left(\cosh(f(t))-\sqrt{3}\sinh(f(t))\right)dt\right]$,
ικανοποιεί την παραπάνω έκφραση. Οι υπόλοιπες μη μηδενικές εξισώσεις της (1.10) είναι
$(1,1)=-2\sinh(f(t))\left(f'(t)+2\sinh(f(t))\right)=0$
$(2,2)=\left(f'(t)+2\sinh(f(t))\right)\left(\sqrt{3}\cosh(f(t))-2\sinh(f(t))\right)e^{2\sqrt{3}\int\sinh(f(t))\,dt-2x}=$
0
$(3,3)=\left(f'(t)+2\sinh(f(t))\right)\left(2\sinh(f(t))+\sqrt{3}\cosh(f(t))\right)\left(-e^{-2\left(\sqrt{3}\left(\int\sinh(f(t))\,dt\right)+x\right)}\right)=$
$0.$

Επιλύονται εάν το $f(t)$ υπακούει στη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$-2\sinh(f(t))\left(f'(t)+2\sinh(f(t))\right)=0. \tag{4.35}$$

Οι λύσεις της είναι

$$f(t) = i\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}, \quad \text{or} \quad f(t) = 2\coth^{-1} e^{2t-m_1}, \tag{4.36}$$

όπου m_1 είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης.

- Αν $f(t) = i\kappa\pi$ η λύση είναι

$$a(t) = e^{\frac{t\epsilon}{2}}, \quad b(t) = e^{\frac{t\epsilon}{2}}, \tag{4.37}$$

  και το στοιχείο μήκους γίνεται

$$ds^2 = e^{2\epsilon t}\left(-dt^2 + dx^2 + e^{-2x}dy^2 + e^{-2x}dz^2\right), \tag{4.38}$$

  με τον τανυστή Riemann ίσο με το μηδέν, υποδεικνύοντας το χωρόχρονο Minkowski.

- Αν $f(t) = 2\coth^{-1} e^{2t-m_1}$ η λύση είναι

$$a(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{e^{m_1}-e^{2t}}{e^{m_1}+e^{2t}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt[4]{1-e^{4t-2m_1}}, \quad b(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{e^{m_1}-e^{2t}}{e^{m_1}+e^{2t}}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt[4]{1-e^{4t-2m_1}}, \tag{4.39}$$

  με το αντίστοιχο στοιχείο μήκους

$$ds^2 = \kappa^2\sinh(2\tau)\left(d\tau^2 - dx^2 + e^{-2x}\tanh^{\sqrt{3}}(\tau)dy^2 + e^{-2x}\tanh^{-\sqrt{3}}(\tau)dz^2\right), \tag{4.40}$$

  όπου $\kappa^2 = 2e^{-m_1}$ και $\tau = t + ln(\frac{\kappa}{\sqrt{2}})$.

  Ο τανυστής Ricci γίνεται $R_{\mu\nu} = 0$, έτσι το παραπάνω στοιχείο μήκους, ενώ είναι κενό στο πλαίσιο της παρούσας θεωρίας, περιγράφει επίσης και μια λύση κενού για την ΓΣ. Η παρούσα λύση δεν υποστηρίζει μια ερμηνεία ρευστού λόγω του ότι το $T_{\mu\nu} = 0$ παρόλο που υπάρχει μη τετριμμένο $u_\mu = \left\{\sqrt{\lambda_1^2 - e^{2t-2m_1} + e^{-2t}}, \lambda_1, 0, 0\right\}$.

  Το βαθμωτό Kretschmann ισούται με

$$Kr \equiv R^{\mu\nu\kappa\lambda}R_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{96}{\kappa^4}\,\mathrm{csch}^6(2\tau), \tag{4.41}$$

  σηματοδοτώντας την ύπαρξη ανωμαλίας στο $\tau = 0$. Σημειώστε ότι το κ είναι μια ουσιώδης βαρυτική σταθερά. Πράγματι υπολογίζοντας το βαθμωτό $\mathrm{DKr} \equiv g^{\mu\nu}Kr_{,\mu}Kr_{,\nu} = -\frac{24\sqrt[6]{2}3^{5/6}\mathrm{kr}^{13/6}}{k^{4/3}} - 6\sqrt{6}\mathrm{kr}^{5/2}$ προκύπτει μία αναλλοίωτη σχέση μεταξύ $(Kr,\ DKr)$ στην οποία εμφανίζεται η σταθερά. Επισης ο χρονοειδής χαρακτήρας μεταξύ τ, x εναλλάσσεται καθώς το τ εκτείνεται στο διάστημα $(-\infty, \infty)$. Ωστόσο, οι συνιστώσες g_{yy}, g_{zz} της μετρικής που περιγράφονται από το παραπάνω στοιχείο μήκους γίνονται φανταστικές για $\tau \in (-\infty, 0)$. Κατά συνέπεια, το επιτρεπόμενο εύρος είναι $\tau \in (0, \infty)$ με τη ανωμαλία να βρίσκεται στο $\tau = 0$. Σε αυτό το εύρος η υπογραφή είναι $(+, -, +, +)$ που υποδηλώνει ότι το x είναι χρονοειδής μεταβλητή.

Οι νόρμες $|\xi_i|^2 \equiv g_{\mu\nu}\xi_i^\mu \xi_i^\nu$ των διανυσμάτων Killing είναι:

$|\xi_1|^2 = k^2 e^{-2x} \sinh(2\tau) \tanh^{\sqrt{3}}(\tau),$

$|\xi_2|^2 = k^2 e^{-2x} \sinh(2\tau) \tanh^{-\sqrt{3}}(\tau),$

$|\xi_3|^2 = k^2 \sinh(2t) \left(e^{-2x} y^2 \tanh^{\sqrt{3}}(\tau) + e^{-2x} z^2 \tanh^{-\sqrt{3}}(\tau) - 1\right).$

Οι δύο πρώτες είναι θετικά ορισμένες στο επιτρεπόμενο εύρος για τ και $x \in (-\infty, +\infty)$. Αλλά η τρίτη μηδενίζεται στην υπερ-επιφάνεια $e^{2x} = y^2 \tanh^{\sqrt{3}}(\tau) + z^2 \tanh^{-\sqrt{3}}(\tau)$ υποδεικνύοντας μία περίπλοκη διαμέριση του χωροχρόνου σε αιτιακά αποσυνδεδεμένες περιοχές. Φυσικά, μια πιο λεπτομερής περιγραφή απαιτεί τη διερεύνηση της γεωδαισιακής δομής που βρίσκεται πολύ έξω από το πεδίο της παρούσας εργασίας.

Περίπτωση B_3

Η περίπτωση αυτή προκύπτει όταν υποθέσουμε ότι $a(t)^2 b(t)^2 (c_1 + 3c_2 + c_3) + 2c_2\lambda_1^2 = 0$ και $c_1 + 3c_2 + c_3 \neq 0$

Σε αυτήν την περίπτωση καταλήγουμε στην σχέση $a(t)b(t) = \lambda_1\sqrt{-2c_2}(c_1 + 3c_2 + c_3)^{-1/2}$ και αν αντικαταστήσουμε αυτήν την έκφραση στις συνιστώσες της (1.10) καταλήγουμε στο ότι η (1,2) συνιστώσα γίνεται:

$\frac{32c_2\lambda_1^7(c_1+c_3)a'(t)^2(c_1+c_2+c_3)^2}{a(t)^2(c_1+3c_2+c_3)^3} = 0$

Παρατηρούμε ότι $c_2 \neq 0$ διότι $a(t)b(t) \neq 0$. Αν $c_1 + c_3 = 0$ τότε $c_2 = 0$ επειδή $(c_1 + 3c_2 + c_3)\, a(t)^2 b(t)^2 + 2c_2\lambda_1^2 = 0$ και έτσι $c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$, άτοπο.

Αν $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ τότε $c_2 = 0$ επειδή $(c_1 + 3c_2 + c_3)\, a(t)^2 b(t)^2 + 2c_2\lambda_1^2 = 0$ και έτσι $c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$, άτοπο. Έτσι κατ΄ανάγκη $a'(t) = 0$ και $a(t) =$ ca, που συνεπάγεται το αποτέλεσμα

$(0,0) + (1,1) =$
$\frac{c_1^2+(c_2+2c_3)c_1+6c_2^2+c_3^2+c_2(c_3-6)}{2c_2} - \frac{c_1^2+5c_2c_1+2c_3c_1+6c_2^2+c_3^2-2c_2+5c_2c_3}{2c_2} =$
$-2(c_1 + c_3 + 1) = 0.$

Ωστόσο, αυτή η σχέση καθιστά την υπόλοιπη εξίσωση (1.10) ασύμβατη με τις παραδοχές του δεδομένου κλάδου. Πράγματι, όταν $c_3 = -c_1 - 1$ η (0,0) συνιστώσα της (1.10) γίνεται $\frac{1}{2}\left(6c_2 + \frac{1}{c_2} - 7\right) = 0$ που σημαίνει ότι $c_2 = \frac{1}{6}$ ή $c_2 = 1$.

Αν $c_2 = 1$ τότε $2a(t)^4 b(t)^4 \left(a(t)^2 b(t)^2 + \lambda_1^2\right)^{3/2} = 0$, άτοπο.

Αν $c_2 = \frac{1}{6}$ τότε η πρώτη συνιστώσα της (1.13) γίνεται $-\frac{3\sqrt{15}}{2\left(\lambda_1^2\right)^{3/2}} = 0$, άτοπο. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει λύση.

Περίπτωση B_4

Η παραπάνω ανάλυση αντιστοιχεί στην τελευταία περίπτωση όπου μηδενίζονται οι παρονομαστές. Έτσι μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους των επιταχύνσεων $a''(t), b''(t)$ και να τις αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (1.10). Αυτή η ενέργεια έχει ως αποτέλεσμα η συνιστώσα (0,1) να είναι

$$2\lambda_1(c_1+c_3)\left(\lambda_1 b a' + a\left(b\sqrt{a^2b^2+\lambda_1^2}+\lambda_1 b'\right)\right)(ab)^{-3} = 0. \tag{4.42}$$

Διάφορες περιπτώσεις θα προκύψουν από την παραπάνω εξίσωση.

Όταν $c_1 + c_3 = 0$, οι μόνες ανεξάρτητες συνιστώσες της (1.10) είναι οι (0,0) και (1,1). Εάν τις διαφορίσουμε ως προς t, χρησιμοποιήσουμε ξανά τους τύπους των επιταχύνσεων και αφαιρέσουμε κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς των παραπάνω εκφράσεων, καταλήγουμε στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- Αν $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_3 = 0$, $ab = c_b$ τότε το διανυσματικό πεδίο του αιθέρα είναι $u_\mu = \left\{\sqrt{\mathrm{cb}^2+\lambda_1^2}, \lambda_1, 0, 0\right\}$

  Η (1.13) γίνεται

  $\left\{-\frac{\sqrt{\mathrm{cb}^2+\lambda_1^2}\lambda(t)}{\mathrm{cb}^2}, \frac{\lambda_1\lambda(t)}{\mathrm{cb}^2}, 0, 0\right\} = 0$

  και άρα $\lambda(t) = 0$. Οι συνιστώσες (0,0) και (1,1) της (1.10) είναι αντίστοιχα:

  $-\frac{4a'(t)^2}{a(t)^2} - \frac{2c_2\lambda_1^2}{\mathrm{cb}^2} - 3 = 0$ και

  $-\frac{4a'(t)^2}{a(t)^2} + \frac{2c_2\lambda_1^2}{\mathrm{cb}^2} + 1 = 0$

  Τότε η διαφορά (0,0)-(1,1) των συνιστωσών της (1.10) δίνει $-\frac{4c_2\lambda_1^2}{\mathrm{cb}^2} - 4 = 0$ υπονοώντας $\mathrm{cb} = i\sqrt{c_2}\lambda_1$. Η μετρική είναι

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\mathrm{cb}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{cb}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x}a(t)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{cb}^4 e^{-2x}}{a(t)^4} \end{pmatrix}$$

Με αυτήν την τιμή για το cb η συνιστώσα (0,0) της (1.10) γίνεται

$$-\frac{4a'(t)^2}{a(t)^2} - 1 = 0, \tag{4.43}$$

που έχει τη λύση

$$a(t) = e^{m_1 + \frac{it\epsilon}{2}} \tag{4.44}$$

με $\epsilon = \pm 1$, m_1 μια σταθερά ολοκλήρωσης και όλες οι εξισώσεις έχουν πλέον ικανοποιηθεί.

Πράγματι, η (1.10) μετα την αντικατάσταση του cb καταλήγει στην μορφή

$$\begin{pmatrix} -\frac{4a'(t)^2}{a(t)^2} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4a'(t)^2}{a(t)^2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{-2x}a(t)^2\left(a(t)^2 - 2a''(t)a(t) + 6a'(t)^2\right)}{c_2\lambda_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_2 e^{-2x}\lambda_1^2\left(a(t)^2 + 2a''(t)a(t) + 2a'(t)^2\right)}{a(t)^6} \end{pmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας την (4.44) στον προηγούμενο πίνακα παρατηρούμε ότι τον μηδενίζει. Το στοιχείο μήκους στην προκειμένη περίπτωση είναι

$ds^2 = e^{-2(2m_1 + it\epsilon + x)}\left(c_2^2\lambda_1^4 d(z)^2 + d(y)^2 e^{8m_1 + 4it\epsilon}\right) + c_2\lambda_1^2 d(t)^2 - c_2\lambda_1^2 d(x)^2$

Σε αυτό το στάδιο, οι επαναπροσδιορισμοί

$\left\{y \to \mu e^{-2m_1}Y, z \to \frac{e^{2m_1}Z}{\mu}, t \to iT, x \to X, c_2 \to \frac{\mu^2}{\lambda_1^2}\right\}$

μεταβάλλουν το στοιχείο μήκους στην απλή τελική μορφή

$$ds^2 = \mu^2\left(-dT^2 - dX^2 + e^{-2T\epsilon - 2X}dY^2 + e^{2T\epsilon - 2X}dZ^2\right), \tag{4.45}$$

ενώ το διανυσματικό πεδίο του αιθέρα μετατρέπεται στο $u_\mu = \left\{-\sqrt{\mu^2 - \lambda_1{}^2}, \lambda_1, 0, 0\right\}$ το οποίο, για να είναι πραγματικό, συνεπάγεται τον περιορισμό $\lambda_1^2 < |\mu|^2$.

Το βαθμωτό Ricci είναι $R = \frac{8}{\mu^2}$. Λόγω του αναλλοίωτου της προηγούμενης σχέσης το μ είναι ουσιώδης βαρυτική σταθερά.

Επίσης οι μη μηδενικοί όροι του τανυστή Riemann είναι:

$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left\{\mu^2 e^{-2(T\epsilon + X)}, \mu^2 e^{2T\epsilon - 2X}, \mu^2\epsilon e^{-2(T\epsilon + X)}, \mu^2\epsilon e^{2T\epsilon - 2X}\right\}$

Το βαθμωτό Kretschmann $Kr \equiv R^{abcd}R_{abcd}$ ισούται με

$\frac{32}{\mu^4}$

τέλος η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή Riemann είναι 0.

Το παραπάνω στοιχείο μήκους αντιπροσωπεύει μια γεωμετρία χωρίς ανωμαλίες, λόγω του ότι έχει μηδενιστεί η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή Riemann καθώς και τα δεκατέσσερα βαθμωτά καμπυλότητας είναι πολυώνυμα του βαθμωτού Ricci $R = \frac{8}{\mu^2}$.

Πράγματι υπολογίζοντας και τα 14 βαθμωτά καμπυλότητας βρίσκουμε $\left\{\frac{8}{\mu^2}, \frac{32}{\mu^4}, \frac{32}{\mu^6}, \frac{64}{\mu^8}, \frac{64}{3\mu^4}, -\frac{32(\epsilon-3)(\epsilon+3)}{9\mu^6}, 0, 0, 0, \frac{256}{3\mu^8}, 0, 0, \frac{1024}{3\mu^{12}}, 0\right\}$
όπου εύκολα βλέπουμε ότι είναι συναρτήσεις του βαθμωτού Ricci $\left\{R, \frac{R^2}{2}, \frac{R^3}{16}, \frac{R^4}{64}, \frac{R^2}{3}, -\frac{1}{144}R^3(\epsilon-3)(\epsilon+3), 0, 0, 0, \frac{R^4}{48}, 0, 0, \frac{R^6}{768}, 0\right\}$.
Ο χωρόχρονος δεν είναι μέγιστα συμμετρικός, αφου δεν υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει η σχέση $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = c(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu})$.

Σημειώστε ότι, δεδομένου ότι η γεωμετρία δέχεται μόνο ένα επιπλέον πεδίο Killing $(1, 0, \epsilon Y, -\epsilon Z)$, έχουμε την ενδιαφέρουσα περίπτωση ενός CSI χωρόχρονου [94].

Παρά το ουδέτερο της υπογραφής του στοιχείου μήκους, ερευνούμε την προκύπτουσα ερμηνεία του τανυστή $T_{\mu\nu}$ ως ένα ιδανικό ρευστό:

$$\rho = \frac{2}{\mu^2}\ ,\ p = -\frac{2}{\mu^2}\ ,\ q_\kappa = 0,\ \pi_{\mu\nu} = 0 \tag{4.46}$$

με καταστατική εξίσωση $p + \rho = 0$ δηλαδή ο $T_{\mu\nu}$ μιμείται την κοσμολογική σταθερά.

- Αν $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_3 = 0$, $ab \neq c_b$ τότε με την εφαρμογή των ίδιων βημάτων όπως πριν καταλήγουμε σε $ab =$ σταθερό, που έρχεται σε αντίθεση με την αρχική υπόθεση αυτής της περίπτωσης. Επομένως δεν υπάρχει λύση εδώ.

Περίπτωση B_5

Τώρα μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση (4.42) ως διαφορική εξίσωση ως προς $b(t)$ λαμβάνοντας

$$b(t) = \frac{2\lambda_1^2 e^{m_1+t}}{e^{2t}a(t) - \lambda_1^2 e^{2m_1}a(t)}, \tag{4.47}$$

με m_1 μια σταθερά ολοκλήρωσης.

Όταν αυτό αντικατασταθεί στην (1.13) λαμβάνουμε απο την πρώτη συνιστώσα της μια διαφορική εξίσωση ως προς $a(t)$

$$\frac{(c_1+c_3)e^{-4(m_1+t)}\left(e^{2t}-\lambda_1^2e^{2m_1}\right)\left(\lambda_1^2e^{2m_1}+e^{2t}\right)\left(2a'(t)\left(e^{2t}-\lambda_1^2e^{2m_1}\right)+a(t)\left(\lambda_1^2e^{2m_1}+e^{2t}\right)\right)^2}{8\lambda_1^7a(t)^2} = 0$$

η οποία έχει τη λύση

$a(t) = \frac{m_2 e^{t/2}}{\sqrt{e^{2t}-\lambda_1^2 e^{2m_1}}}$. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα $a(t), b(t)$ ικανοποιούνται οι (1.13) και (1.14) και η (1.10) μας δίνει το αποτέλεσμα

$(0,0) = -\frac{6(c_1+3c_2+c_3-2)e^{2(m_1+t)}\lambda_1^2}{\left(e^{2t}-e^{2m_1}\lambda_1^2\right)^2} = 0$

$(1,1) = \frac{6(c_1+3c_2+c_3-2)e^{2(m_1+t)}\lambda_1^2}{\left(e^{2t}-e^{2m_1}\lambda_1^2\right)^2} = 0$

$(2,2) = \frac{3(c_1+3c_2+c_3-2)e^{2t-2x}m_2^4}{2\lambda_1^2\left(e^{2t}-e^{2m_1}\lambda_1^2\right)^2} = 0$

$(3,3) = \frac{24(c_1+3c_2+c_3-2)e^{4m_1+2t-2x}\lambda_1^6}{m_2^4\left(e^{2t}-e^{2m_1}\lambda_1^2\right)^2} = 0$

Τα παραπάνω οδηγούν στους τελικούς παράγοντες κλίμακας

$$a(t) = \frac{m_2 e^{t/2}}{\sqrt{e^{2t}-\lambda_1^2 e^{2m_1}}},\ b(t) = \frac{2\lambda_1^2 e^{m_1+\frac{t}{2}}}{m_2\sqrt{e^{2t}-\lambda_1^2 e^{2m_1}}} \tag{4.48}$$

με την υπόθεση $c_1 + 3c_2 + c_3 = 2$.

Η μετρική που προκύπτει είναι

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{4\lambda 1^4 e^{2(\mathrm{m}1+t)}}{\left(e^{2t}-\lambda 1^2 e^{2\mathrm{m}1}\right)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\lambda 1^4 e^{2(\mathrm{m}1+t)}}{\left(e^{2t}-\lambda 1^2 e^{2\mathrm{m}1}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{m}2^4 e^{2t-2x}}{\left(e^{2t}-\lambda 1^2 e^{2\mathrm{m}1}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16\lambda 1^8 e^{4\mathrm{m}1+2t-2x}}{\mathrm{m}2^4\left(e^{2t}-\lambda 1^2 e^{2\mathrm{m}1}\right)^2} \end{pmatrix}$$

Το αντίστοιχο στοιχείο μήκους με την υπόθεση $c_1+3c_2+c_3 = 2$ προκύπτει ως

$ds^2 = \frac{e^{2t-2x}\left(-4\lambda_1^4 m_2^4 d(t)^2 e^{2(m_1+x)}+4\lambda_1^4 m_2^4 d(x)^2 e^{2(m_1+x)}+m_2^8 d(y)^2+16\lambda_1^8 e^{4m_1}d(z)^2\right)}{m_2^4\left(e^{2t}-\lambda_1^2 e^{2m_1}\right)^2}$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $t \to \log(\lambda_1) + m_1 + t$, $x \to m_1^2 + x + \log(2)$, $y \to \frac{4\lambda_1^2 e^{m_1^2+m_1}y}{m_2^2}$, $z \to \frac{e^{m_1^2}e^{-m_1}m_2^2 z}{\lambda_1^2}$

το στοιχείο μήκους καταλήγει στην απλούστερη μορφή

$$ds^2 = \lambda_1^2 \mathrm{csch}^2 t\left(-dt^2 + dx^2 + e^{-2x}dy^2 + e^{-2x}dz^2\right), \tag{4.49}$$

Επιπλέον, το $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{\lambda_1^2}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu})$, αποκαλύπτοντας τον χωροχρόνο ως μέγιστα συμμετρικό με βαθμωτό Ricci $R = \frac{12}{\lambda_1^2}$.

Εάν διερευνήσουμε περαιτέρω τις φυσικές ιδιότητες του τανυστή ενέργειας-ορμής για την παραπάνω λύση, βρίσκουμε ότι

$$\rho = \frac{3}{\lambda_1^2}\ ,\ p = -\frac{3}{\lambda_1^2}\ ,\ q_\kappa = 0,\ \pi_{\mu\nu} = 0 \tag{4.50}$$

συμπεραίνουμε ότι αντιστοιχεί σε ένα ιδανικό ρευστό με καταστατική εξίσωση $p + \rho = 0$ και μηδενική αγωγή θερμότητας, δηλαδή μιμείται την κοσμολογική σταθερά.

4.1 Bianchi Type V LRS

Το γενικό διαγώνιο στοιχείο μήκους Bianchi Type V LRS είναι:

$$ds^2 = e^{-2x}a(t)^2 d(y)^2 + e^{-2x}a(t)^2 d(z)^2 + b(t)^2 d(x)^2 - d(t)^2 M(t)^2 \tag{4.51}$$

με τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία Killing :
$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial y}$,
$\xi_2 = \frac{\partial}{\partial z}$,
$\xi_3 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$.
$\xi_4 = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$.

Τα ξ_1, ξ_2, ξ_3 είναι τα ίδια με αυτά του Bianchi Type V. Αυτά μαζί με τον περιορισμό ότι το διανυσματικό πεδίο πρέπει να είναι αστρόβιλο μας δίνουν ακριβώς την προηγούμενη μορφή του διανυσματικού πεδίου $u_\mu = \{u_0(t), \lambda_1, 0, 0\}$. Παρατηρούμε ότι η παράγωγος Lie του u_μ ως προς το διανυσματικό πεδίο ξ_4 δίνει

$L_{\xi_4} u_\mu = \{0, 0, 0, 0\}$.

Αυτό σημαίνει ότι το u_μ έχει την συμμετρία ξ_4 του χώρου και έτσι δεν μεταβάλλεται η αρχική μορφή του διανυσματικού πεδίου. Αυτές οι απαιτήσεις, μαζί με τη χρήση της (1.14) δίνουν το αποτέλεσμα στην ακόλουθη αρχική μορφή (λ_1 είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης):

$$u^a = \frac{u_0(t)}{-M^2}\delta^a_t + \frac{\lambda_1}{b(t)^2}\delta^a_x, \qquad u_0(t) = \frac{a(t)\sqrt{b(t)^2 + \lambda_1^2}}{b(t)}. \tag{4.52}$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε το χρόνο έτσι ώστε $M(t) = a(t)$ οπότε, η δεύτερη συνιστώσα της εξίσωσης (1.13) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{1}{a(t)^3 b(t)^4}\Big(\lambda_1 a(t)^3 \left(b(t)^2\lambda(t) + 2(c_1 + c_3)\right) - 2a(t)^2(c_1 + c_3)\sqrt{b(t)^2 + \lambda_1^2}\, b'(t) - \tag{4.53}$$
$$a(t)b(t)(c_1 + c_3)\left(2a'(t)\sqrt{b(t)^2 + \lambda_1^2} - \lambda_1 b''(t)\right) + \lambda_1 b(t)(c_1 + c_3)a'(t)b'(t)\Big) = 0$$

Ο συντελεστής του $\lambda(t)$ περιέχει το λ_1 υπονοώντας ότι πρέπει να διερευνήσουμε ξεχωριστά τις δύο κατηγορίες λύσεων όπου: Κατηγορία Α όταν $\lambda_1 = 0$ και Κατηγορία Β όταν $\lambda_1 \neq 0$.

Εμεις στην παρούσα διατριβή θα ασχοληθούμε με την Κατηγορία Α. Η δεύτερη συνιστώσα της (1.13) εμφανίζει την μορφή:

$$\frac{2(c_1+c_3)\left(b(t)a'(t)-a(t)b'(t)\right)}{a(t)^2b(t)^3}=0 \tag{4.54}$$

Σε αυτήν την κατηγορία υπάρχουν δύο πιθανές περιπτώσεις μελέτης, που αντιστοιχούν σε

Περίπτωση A_1 $\quad c_1+c_3=0 \quad c_2<\frac{2}{3}$

Περίπτωση A_2 $\quad c_1+c_3\neq 0 \quad q<0$

όπου $q=c_1+3c_2+c_3-2$.

4.1.1 Περίπτωση A_1

Η μη μηδενική συνιστώσα της (1.13) δίνει την τιμή του $\lambda(t)$

$\lambda(t)=\frac{c_2\left(-2a(t)b(t)^2a''(t)+a(t)b(t)a'(t)b'(t)+4b(t)^2a'(t)^2-a(t)^2b(t)b''(t)+a(t)^2b'(t)^2\right)}{a(t)^4b(t)^2}$

Οι παραδοχές αυτής της υπόθεσης και η παραπάνω τιμή του $\lambda(t)$ οδηγούν την (0,1) συνιστώσα της (1.10) στην μορφή

$\frac{2a'(t)}{a(t)}-\frac{2b'(t)}{b(t)}=0$

με λύση $b(t)=\mathrm{cb}a(t)$. Κάνοντας όλες τις παραπάνω αντικαταστάσεις η (0,0) συνιστώσα της (1.10) είναι

$3(2-3c_2)\mathrm{cb}^2a'(t)^2-6a(t)^2=0$ και δίνει λύση

$a(t)=\mathrm{ca}e^{\frac{(\sqrt{2}t)\epsilon}{\sqrt{-(3c_2-2)\mathrm{cb}^2}}}$ όπου $\epsilon^2=1$

Τότε το στοιχείο μήκους είναι:

$ds^2=\mathrm{ca}^2d(y)^2e^{\frac{2t\epsilon}{\sqrt{\left(1-\frac{3c_2}{2}\right)\mathrm{cb}^2}}-2x}+\mathrm{ca}^2d(z)^2e^{\frac{2t\epsilon}{\sqrt{\left(1-\frac{3c_2}{2}\right)\mathrm{cb}^2}}-2x}+\mathrm{ca}^2\mathrm{cb}^2d(x)^2e^{\frac{2t\epsilon}{\sqrt{\left(1-\frac{3c_2}{2}\right)\mathrm{cb}^2}}}-\mathrm{ca}^2d(t)^2e^{\frac{2t\epsilon}{\sqrt{\left(1-\frac{3c_2}{2}\right)\mathrm{cb}^2}}}$

και είναι πραγματικός αριθμός επειδή $c_2<\frac{2}{3}$. Η τιμή τότε του $\lambda(t)$ είναι:

$\lambda(t)=-\frac{6c_2e^{-\frac{2t\epsilon}{\sqrt{\left(1-\frac{3c_2}{2}\right)\mathrm{cb}^2}}}}{(3c_2-2)\mathrm{ca}^2\mathrm{cb}^2}$

Η μόνη μη μηδενική τιμή του τανυστή Riemann είναι:

$\frac{3c_2\mathrm{ca}^2e^{\frac{2t\epsilon}{\sqrt{\left(1-\frac{3c_2}{2}\right)\mathrm{cb}^2}}-2x}}{3c_2-2}$

Αν $c_2=0$ έχουμε τον χωρόχρονο Minkowski , γιατί μηδενίζεται ο τανυστής Riemann.

4.1.2 Περίπτωση A_2

Τότε η δεύτερη συνιστώσα της (1.13) είναι η (4.54), επομένως λόγω των υποθέσεων της Περίπτωσης A_2 θα έχουμε:

$b(t) = \mathrm{cb}a(t)$. Η μόνη μη μηδενική συνιστώσα της (1.13) μας δίνει την τιμή του $\lambda(t)$:

$\lambda(t) = -\frac{3\left(c_2 a(t)a''(t) - c_1 a'(t)^2 - 2c_2 a'(t)^2 - c_3 a'(t)^2\right)}{a(t)^4}$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στην (0,0) συνιστώσα της (1.10) καταλήγουμε στην σχέση

$-\frac{3qa'(t)^2}{2a(t)^2} - \frac{3}{\mathrm{cb}^2} = 0$

η λύση της οποίας είναι

$a(t) = \mathrm{ca}e^{\frac{(i\sqrt{2}t)\epsilon}{\mathrm{cb}\sqrt{q}}}$ με $\epsilon^2 = 1$

Το δε στοιχείο μήκους είναι

$ds^2 = \mathrm{ca}^2\mathrm{cb}^2 d(x)^2 e^{\frac{2i\sqrt{2}t\epsilon}{\mathrm{cb}\sqrt{q}}} + \mathrm{ca}^2 d(y)^2 e^{-2x+\frac{2i\sqrt{2}t\epsilon}{\mathrm{cb}\sqrt{q}}} + \mathrm{ca}^2 d(z)^2 e^{-2x+\frac{2i\sqrt{2}t\epsilon}{\mathrm{cb}\sqrt{q}}} - \mathrm{ca}^2 d(t)^2 e^{\frac{2i\sqrt{2}t\epsilon}{\mathrm{cb}\sqrt{q}}}$

και είναι πραγματικός αριθμός όταν $q < 0$. Η τιμή τότε του $\lambda(t)$ είναι

$\lambda(t) = -\frac{6(-2c_2+q+2)e^{-\frac{2i\sqrt{2}t\epsilon}{\mathrm{cb}\sqrt{q}}}}{\mathrm{ca}^2\mathrm{cb}^2 q}$, το βαθμωτό Ricci είναι

$R = -\frac{6(q+2)e^{-\frac{2i\sqrt{2}t\epsilon}{\mathrm{cb}\sqrt{q}}}}{\mathrm{ca}^2\mathrm{cb}^2 q}$

Στην περίπτωση που το $q = -2$ δηλαδή $c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$ ο τανυστής Riemann μηδενίζεται και έχουμε τότε τον χωρόχρονο Minkowski .

Παρατηρούμε ότι η A_1 είναι υποπερίπτωση της A_2. Πράγματι, αν το $c_1 + c_3 = 0$ και $c_2 < \frac{2}{3}$ τότε το $q = 3c_2 - 2$ και $q < 0$, επομένως οι λύσεις της Περίπτωσης A_1 περιέχονται στις λύσεις της A_2.

5

ΣΥΝΑΛΛΟΙΩΤΟ U_μ ΕΝΑΝΤΙ ΑΝΤΑΛΛΟΙΩΤΟΥ U^μ

Η δράση που περιγράφει την κίνηση με βασικό το u_k είναι

$$S_{AE} = \int d^4x\sqrt{-g}R + \int d^4x\sqrt{-g}\left(K^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + \lambda\left(u^c u_c + 1\right)\right), \tag{5.1}$$

Τις εξισώσεις πεδίου που προκύπτουν απο την δράση τις έχουμε ήδη βρεί και είναι οι (1.10), (1.13), (1.14).

Αν προσπαθήσουμε να παραγάγουμε τις εξισώσεις θεωρώντας ως βασικό το διανυσματικό πεδίο u^k, η δράση που δίνει τις βαρυτικές εξισώσεις πεδίου για την βαρύτητα Einstein-Aether δίνεται απο την παρακάτω εκφραση:

$$S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}\left(R + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} + \lambda\left(g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta + 1\right)\right)d^4x \tag{5.2}$$

όπου το $K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$ περιγράφει την σύζευξη ανάμεσα στο διανυσματικό πεδίο του αιθέρα και την βαρύτητα και ορίζεται ως

$$K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = c_3\delta^\alpha{}_\nu\delta^\beta{}_\mu + c_2\delta^\alpha{}_\mu\delta^\beta{}_\nu + c_1 g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + c_4 g_{\mu\nu}u^\alpha u^\beta \tag{5.3}$$

με c_1, c_2, c_3 και c_4 αδιάστατες σταθερές.

Η μεταβολή ως προς τον μετρικό τανυστή, θεωρώντας ως βασικό διάνυσμα το u^k, δίνει τις βαρυτικές εξισώσεις πεδίου

$$G_{ab} = W_{ab}, \tag{5.4}$$

όπου G_{ab} είναι ο τανυστής Einstein και W_{ab} είναι ο τανυστής ενέργειας - ορμης που θα πρέπει να υπολογίσουμε.

• Η μεταβολή ως προς $g_{\mu\nu}$ επιφέρει στην δράση S_{AE} την μεταβολή

$\delta S_{AE} = \int_V \left((\delta\sqrt{-g})\left(R + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} + \lambda\left(g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta + 1\right)\right) + \sqrt{-g}\left(\delta(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu})u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\delta(u^\mu{}_{;\alpha})u^\nu{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\mu{}_{;\alpha}\delta(u^\nu{}_{;\beta}) + \delta\mathrm{R} + \lambda\delta(g_{\alpha\beta})u^\alpha u^\beta\right)\right) d^4x$

Χρησιμοποιώντας την (1.5) καθως και τις σχέσεις πριν απο αυτή καταλήγουμε ότι το ολοκλήρωμα της μεταβολής της δράσης γίνεται:

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu})(R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2})d^4x + \int_V \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})d^4x + \int_V -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} + \lambda\left(g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta + 1\right))d^4x + \int_V \sqrt{-g}(\delta(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu})u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\delta(u^\mu{}_{;\alpha})u^\nu{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\mu{}_{;\alpha}\delta(u^\nu{}_{;\beta}) + \lambda\delta(g_{\alpha\beta})u^\alpha u^\beta)d^4x$

Από την πρόταση (7.21) έχουμε ότι το $\int_V \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})d^4x = 0$ και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2}$ το ολοκλήρωμα της μεταβολής της δράσης γράφεται:

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int_V -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} + \lambda\left(g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta + 1\right))d^4x + \int_V \sqrt{-g}(\delta(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu})u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\delta(u^\mu{}_{;\alpha})u^\nu{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\mu{}_{;\alpha}\delta(u^\nu{}_{;\beta}) + \lambda\delta(g_{\alpha\beta})u^\alpha u^\beta)d^4x$

Η μεταβολή δS_{AE} ως προς $g^{\mu\nu}$ με βασικό το u^k θα μας δώσει:

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})d^4x + \int_V -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})[K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} + \lambda\left(g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta + 1\right)]d^4x$
$+ \int_V \sqrt{-g}\left[c_1\delta(g^{\alpha\beta})g_{\mu\nu}u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} + c_1 g^{\alpha\beta}\delta(g_{\mu\nu})u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} + c_4 u^\alpha u^\beta\delta(g_{\mu\nu})u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta}\right.$
$\left. + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\delta\left(u^\mu{}_{;\alpha}\right)u^\nu{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\mu{}_{;\alpha}\delta\left(u^\nu{}_{;\beta}\right) + \lambda\delta(g_{\alpha\beta})u^\alpha u^\beta\right] d^4x =$

Αλλάζοντας κατάλληλα τους δείκτες έχουμε

$c_1\delta(g^{\alpha\beta})g_{\mu\nu}u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} = c_1\delta(g^{\mu\nu})g_{\alpha\beta}u^\alpha{}_{;\mu}u^\beta{}_{;\nu}$

$c_1 g^{\alpha\beta}\delta(g_{\mu\nu})u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} = -c_1 g^{\alpha\beta}g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu}u^\rho{}_{;\alpha}u^\sigma{}_{;\beta}\delta(g^{\mu\nu})$

$c_4 u^\alpha u^\beta\delta(g_{\mu\nu})u^\mu{}_{;\alpha}u^\nu{}_{;\beta} = -c_4 u^\alpha u^\beta g_{\sigma\mu}g_{\rho\nu}\delta(g^{\mu\nu})u^\sigma{}_{;\alpha}u^\rho{}_{;\beta}$

Παρατηρούμε ότι

$K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\delta\left(u^\mu{}_{;\alpha}\right)u^\nu{}_{;\beta} = K^{\beta\alpha}{}_{\nu\mu}u^\mu{}_{;\alpha}\delta\left(u^\nu{}_{;\beta}\right) = K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\delta\left(u^\nu{}_{;\beta}\right)u^\mu{}_{;\alpha}$

Άρα $K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\delta\left(u^\mu{}_{;\alpha}\right)u^\nu{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\mu{}_{;\alpha}\delta\left(u^\nu{}_{;\beta}\right) = 2K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\delta\left(u^\mu{}_{;\alpha}\right)u^\nu{}_{;\beta}$

Ισχύει ότι $u^\mu{}_{;\alpha} = u^\mu{}_{,\alpha} + u^\lambda\Gamma^\mu_{\lambda\alpha} \Longrightarrow \delta u^\mu{}_{;\alpha} = \delta u^\mu{}_{,\alpha} + \delta\left(u^\lambda\Gamma^\mu_{\lambda\alpha}\right) \Longrightarrow \delta u^\mu{}_{;\alpha} = u^\lambda\delta(\Gamma^\mu_{\lambda\alpha})$

Λόγω της (7.10) έχουμε

$$\delta\Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} = \frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left(\delta \mathrm{g}_{\rho\lambda;\alpha} + \delta \mathrm{g}_{\rho\alpha;\lambda} - \delta \mathrm{g}_{\lambda\alpha;\rho}\right) \tag{5.5}$$

Επομένως $2K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\delta\left(u^\mu{}_{;\alpha}\right)u^\nu{}_{;\beta} = 2K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\nu{}_{;\beta}u^\lambda\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left(\delta \mathrm{g}_{\rho\lambda;\alpha} + \delta \mathrm{g}_{\rho\alpha;\lambda} - \delta \mathrm{g}_{\lambda\alpha;\rho}\right)$.

Με ανάλογο τρόπο όπως και στην (1.9) έχουμε:

$\int_V \sqrt{-g}2K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\nu{}_{;\beta}u^\lambda\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\delta \mathrm{g}_{\rho\lambda;\alpha}d^4x = -\int_V \sqrt{-g}\left(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\nu{}_{;\beta}u^\lambda g^{\mu\rho}\right)_{;\alpha}\delta g_{\rho\lambda}d^4x = \int_V \sqrt{-g}\left(K^{\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}u^\tau{}_{;\beta}u^\lambda g^{\sigma\rho}g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu}\right)_{;\alpha}\delta g^{\mu\nu}d^4x = \int_V \sqrt{-g}\left(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\tau}u^\tau{}_{;\beta}u^\lambda g_{\lambda\nu}\right)_{;\alpha}\delta g^{\mu\nu}d^4x.$

$\int_V \sqrt{-g}2K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\nu{}_{;\beta}u^\lambda\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\delta \mathrm{g}_{\rho\alpha;\lambda}d^4x = -\int_V \sqrt{-g}\left(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^\nu{}_{;\beta}u^\lambda g^{\mu\rho}\right)_{;\lambda}\delta g_{\rho\alpha d^4x} = \int_V \sqrt{-g}\left(K^{\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}u^\tau{}_{;\beta}u^\lambda g^{\sigma\rho}g_{\rho\mu}g_{\alpha\nu}\right)_{;\lambda}\delta g^{\mu\nu}d^4x = \int_V \sqrt{-g}\left(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\tau}u^\tau{}_{;\beta}u^\lambda g_{\alpha\nu}\right)_{;\lambda}\delta g^{\mu\nu}d^4x.$

$\int_V \sqrt{-g} - 2K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^{\nu}{}_{;\beta}u^{\lambda}\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\delta g_{\lambda\alpha;\rho}d^4x = \int_V \sqrt{-g}\left(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^{\nu}{}_{;\beta}u^{\lambda}g^{\mu\rho}\right)_{;\rho}\delta g_{\lambda\alpha}d^4x =$
$-\int_V \sqrt{-g}\left(K^{\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}u^{\tau}{}_{;\beta}u^{\lambda}g^{\sigma\rho}g_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu}\right)_{;\rho}\delta g^{\mu\nu}d^4x = -\int_V \sqrt{-g}\left(K^{\alpha\beta\rho\tau}u_{\tau;\beta}u_{\mu}g_{\alpha\nu}\right)_{;\rho}\delta g^{\mu\nu}d^4x.$

Επομένως

$\int_V \sqrt{-g}2K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\delta\left(u^{\mu}{}_{;\alpha}\right)u^{\nu}{}_{;\beta}d^4x = \int_V \sqrt{-g}(\left(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\tau}u^{\tau}{}_{;\beta}u^{\lambda}g_{\lambda\nu}\right)_{;\alpha}\delta g^{\mu\nu} + \left(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\tau}u^{\tau}{}_{;\beta}u^{\lambda}g_{\alpha\nu}\right)_{;\lambda}\delta g^{\mu\nu}$
$\left(-K^{\alpha\beta\rho\tau}u_{\tau;\beta}u_{\mu}g_{\alpha\nu}\right)_{;\rho}\delta g^{\mu\nu})d^4x.$

Τελικά η μεταβολή δS_{AE} ως προς $g^{\mu\nu}$ με βασικό το u^k θα μας δώσει:

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu})[G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^{\mu}{}_{;\alpha}u^{\nu}{}_{;\beta} + \lambda\left(g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}+1\right))$
$+c_1 g_{\alpha\beta}u^{\alpha}{}_{;\mu}u^{\beta}{}_{;\nu} - c_1 g^{\alpha\beta}g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu}u^{\rho}{}_{;\alpha}u^{\sigma}{}_{;\beta} - c_4 u^{\alpha}u^{\beta}g_{\sigma\mu}g_{\rho\nu}u^{\sigma}{}_{;\alpha}u^{\rho}{}_{;\beta}$
$+(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\tau}u^{\tau}{}_{;\beta}u^{\lambda}g_{\lambda\nu})_{;\alpha} + (K^{\alpha\beta}{}_{\mu\tau}u^{\tau}{}_{;\beta}u^{\lambda}g_{\alpha\nu})_{;\lambda} - (K^{\alpha\beta\rho\tau}u_{\tau;\beta}u_{\mu}g_{\alpha\nu})_{;\rho}]d^4x = 0$

Άρα η μεταβολή ως προς τον μετρικό τανυστή δίνει τις εξισώσεις βαρυτικού πεδίου:

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} &- \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^{\mu}{}_{;\alpha}u^{\nu}{}_{;\beta} + \lambda\left(g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}+1\right)) + \\ &+ c_1 g_{\alpha\beta}u^{\alpha}{}_{;\mu}u^{\beta}{}_{;\nu} - c_1 g^{\alpha\beta}g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu}u^{\rho}{}_{;\alpha}u^{\sigma}{}_{;\beta} - c_4 u^{\alpha}u^{\beta}g_{\sigma\mu}g_{\rho\nu}u^{\sigma}{}_{;\alpha}u^{\rho}{}_{;\beta} + \\ &+ \frac{1}{2}(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\tau}u^{\tau}{}_{;\beta}u^{\lambda}g_{\lambda\nu} + K^{\alpha\beta}{}_{\nu\tau}u^{\tau}{}_{;\beta}u^{\lambda}g_{\lambda\mu})_{;\alpha} + \frac{1}{2}(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\tau}u^{\tau}{}_{;\beta}u^{\lambda}g_{\alpha\nu} + K^{\alpha\beta}{}_{\nu\tau}u^{\tau}{}_{;\beta}u^{\lambda}g_{\alpha\mu})_{;\lambda} - \\ &- \frac{1}{2}(K^{\alpha\beta\rho\tau}u_{\tau;\beta}u_{\mu}g_{\alpha\nu} + K^{\alpha\beta\rho\tau}u_{\tau;\beta}u_{\nu}g_{\alpha\mu})_{;\rho} - \lambda u_{\mu}u_{\nu} = 0.\end{aligned} \tag{5.6}$$

- Η μεταβολή ως προς u^{μ} επιφέρει στην δράση S_{AE} την μεταβολή:

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}\left(\delta\left(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^{\mu}{}_{;\alpha}u^{\nu}{}_{;\beta}\right) + \lambda\delta\left(g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}\right)\right)d^4x =$
$\int_V \sqrt{-g}\Big(\delta(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu})u^{\mu}{}_{;\alpha}u^{\nu}{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\delta\left(u^{\mu}{}_{;\alpha}\right)u^{\nu}{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^{\mu}{}_{;\alpha}\delta\left(u^{\nu}{}_{;\beta}\right) + \lambda g_{\alpha\beta}\delta(u^{\alpha})u^{\beta} +$
$\lambda g_{\alpha\beta}u^{\alpha}\delta(u^{\beta})\Big)d^4x$

Λόγω της (5.3) έχουμε:

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}(\delta(K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu})u^{\mu}{}_{;\alpha}u^{\nu}{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\delta(u^{\mu}{}_{;\alpha})u^{\nu}{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^{\mu}{}_{;\alpha}\delta(u^{\nu}{}_{;\beta}) +$
$\lambda(g_{\alpha\beta}\delta(u^{\alpha})u^{\beta} + g_{\alpha\beta}u^{\alpha}\delta(u^{\beta}))d^4x =$
$\int_V \sqrt{-g}\left(c_4\delta u^{\alpha}u^{\beta}g_{\mu\nu}u^{\mu}{}_{;\alpha}u^{\nu}{}_{;\beta} + c_4 u^{\alpha}\delta u^{\beta}g_{\mu\nu}u^{\mu}{}_{;\alpha}u^{\nu}{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^{\nu}{}_{;\beta}\delta\left(u^{\mu}{}_{;\alpha}\right) +\right.$
$\left.K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^{\mu}{}_{;\alpha}\delta\left(u^{\nu}{}_{;\beta}\right) + 2\lambda g_{\rho\alpha}u^{\alpha}\delta u^{\rho}\right)d^4x =$
$\int_V \sqrt{-g}\left(2c_4\delta(u^{\rho})u^{\alpha}u_{\nu;\rho}u^{\nu}{}_{;\alpha} + K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^{\nu}{}_{;\beta}\delta\left(u^{\mu}{}_{;\alpha}\right) +\right.$
$\left.K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^{\mu}{}_{;\alpha}\delta\left(u^{\nu}{}_{;\beta}\right) + 2\lambda g_{\rho\alpha}u^{\alpha}\delta u^{\rho}\right)d^4x.$

Τότε $K^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}u^{\nu}{}_{;\beta}\delta\left(u^{\mu}{}_{;\alpha}\right) = K^{\beta\alpha}{}_{\nu\mu}u^{\mu}{}_{;\alpha}\delta\left(u^{\nu}{}_{;\beta}\right)$ λογω της Πρότασης 23.

Επομένως

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}\left(2c_4\delta(u^{\rho})u^{\alpha}u_{\nu;\rho}u^{\nu}{}_{;\alpha} + 2K^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta}\delta\left(u^{\rho}{}_{;\alpha}\right) +\right.$
$\left.+2\lambda g_{\rho\alpha}u^{\alpha}\delta u^{\rho}\right)d^4x.$

Με ανάλογο τρόπο όπως και στην (5.11) έχουμε:

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}\left(2c_4\delta(u^{\rho})u^{\alpha}u_{\nu;\rho}u^{\nu}{}_{;\alpha} - 2(K^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta})_{;\alpha}\delta\left(u^{\rho}\right) +\right.$
$\left.+2\lambda g_{\rho\alpha}u^{\alpha}\delta u^{\rho}\right)d^4x.$

Αναπτύσοντας λοιπόν την $(K^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta})_{;\alpha}$ καταλήγουμε στην

$(K^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta})_{;\alpha} = c_4u^{\alpha}{}_{;\alpha}u^{\beta}g_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta} + c_4u^{\alpha}u^{\beta}{}_{;\alpha}g_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta} + K^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta;\alpha}$.

Τότε το

$\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}2\delta(u^\rho)\left(c_4u^\alpha u_{\nu;\rho}u^{\nu}{}_{;\alpha} - c_4u^{\alpha}{}_{;\alpha}u^{\beta}g_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta} - c_4u^{\alpha}u^{\beta}{}_{;\alpha}g_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta} - K^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta;\alpha}+\right.$
$\left.+\lambda g_{\rho\alpha}u^\alpha\right)d^4x$.

Θέλουμε $\delta S_{AE} = 0\ \forall\delta(u^\rho)$

Άρα η εξισώση του πεδίου του αιθέρα είναι:

$$c_4u^\alpha u_{\nu;\rho}u^{\nu}{}_{;\alpha} - c_4u^{\alpha}{}_{;\alpha}u^{\beta}g_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta} - c_4u^{\alpha}u^{\beta}{}_{;\alpha}g_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta} - K^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta;\alpha} + \lambda g_{\rho\alpha}u^\alpha = 0 \quad (5.7)$$

- Τέλος, απο την μεταβολή δS_{AE} ως προς το λ

  Θέλουμε $\delta S_{AE} = 0\ \forall\ \delta\lambda$.

  $\delta S_{AE} = \int_V \sqrt{-g}\delta(\lambda)(g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta + 1)d^4x = 0\ \forall\ \delta\lambda$

  Επομένως

$$u^a u_a + 1 = 0. \quad (5.8)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η μεταβολή ως προς λ μας δίνει ακριβώς την ίδια εξίσωση και στις δύο περιπτώσεις. Ελέγχουμε τώρα τις άλλες δύο εξισώσεις.

Πρώτα ελέγχουμε την μεταβολή ως προς το διανυσματικό πεδίο δηλαδή τις (5.7) και (1.13). Η (1.13) έχει ελεύθερο δείκτη τον κ επάνω, η (5.7) έχει ελεύθερο δείκτη τον ρ κάτω. Για να μπορέσουμε να τις συγκρίνουμε πολλαπλασιάζουμε την (5.7) με το $g^{\rho\kappa}$.

$c_4u^\alpha u_{\nu;\rho}u^{\nu}{}_{;\alpha}g^{\rho\kappa} - c_4u^{\alpha}{}_{;\alpha}u^{\beta}g_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta}g^{\rho\kappa} - c_4u^{\alpha}u^{\beta}{}_{;\alpha}g_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta}g^{\rho\kappa} - K^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu}u^{\nu}{}_{;\beta;\alpha}g^{\rho\kappa} +$
$\lambda g_{\rho\alpha}u^\alpha g^{\rho\kappa} = 0$

Τελικά καταλήγουμε στην σχέση

$$c_4u^\alpha u_{\nu;\rho}u^{\nu}{}_{;\alpha}g^{\rho\kappa} - c_4u^{\alpha}{}_{;\alpha}u^{\beta}u^{\kappa}{}_{;\beta} - c_4u^{\alpha}u^{\beta}{}_{;\alpha}u^{\kappa}{}_{;\beta} - K^{\alpha\beta\kappa\nu}u_{\nu;\beta;\alpha} + \lambda u^\kappa = 0 \quad (5.9)$$

Τροποποιούμε την (1.13) και έχουμε

$c_4g^{\mu\nu}u^\alpha u_{\nu;\beta}u_{\mu;\alpha}g^{\kappa\beta} - c_4g^{\mu\kappa}g^{\alpha\lambda}u_{\lambda;\beta}u^\beta u_{\mu;\alpha} - c_4g^{\mu\kappa}u^\alpha u^{\beta}_{;\beta}u_{\mu;\alpha} - K^{\alpha\beta\mu\kappa}u_{\mu;\alpha;\beta} + \lambda g^{\alpha\kappa}u_\alpha =$
0

$c_4u^\alpha u_{\nu;\rho}u^{\nu}{}_{;\alpha}g^{\kappa\rho} - c_4u^{\alpha}{}_{;\beta}u^{\beta}u^{\kappa}{}_{;\alpha} - c_4u^{\alpha}u^{\beta}_{;\beta}u^{\kappa}{}_{;\alpha} - K^{\beta\alpha\kappa\mu}u_{\mu;\alpha;\beta} + \lambda u^\kappa = 0$

Η τελική μας εξίσωση είναι:

$$c_4u^\alpha u_{\nu;\rho}u^{\nu}{}_{;\alpha}g^{\rho\kappa} - c_4u^{\beta}{}_{;\alpha}u^{\alpha}u^{\kappa}{}_{;\beta} - c_4u^{\beta}u^{\alpha}_{;\alpha}u^{\kappa}{}_{;\beta} - K^{\alpha\beta\kappa\nu}u_{\nu;\beta;\alpha} + \lambda u^\kappa = 0 \quad (5.10)$$

Παρατηρούμε ότι οι (5.10), (5.9) είναι ίδιες. Δεν παρατηρείται διαφορά ούτε στην εξίσωση πεδίου που εκφράζει την μεταβολή ως προς το διανυσματικό πεδίο.

Μένει να εξετάσουμε τις βαρυτικές εξισώσεις που συνάγονται απο την μεταβολή της μετρικής. Η εξίσωση που προκύπτει θεωρώντας ως βασικό το u_κ είναι ο συνδυασμός των εξισώσεων (1.10) και (1.11).

Η εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &- \frac{1}{2}g_{\mu\nu}K^{\alpha\beta\rho\sigma}u_{\rho;\alpha}u_{\sigma;\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\lambda(g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta + 1) + \\
&+ c_1 g^{\alpha\beta}(u_{\alpha;\mu}u_{\beta;\nu} + u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta}) + c_2 g^{\alpha\beta}(u_{\mu;\nu}u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}u_{\nu;\mu}) + c_3 g^{\alpha\beta}(u_{\alpha;\mu}u_{\nu;\beta} + u_{\mu;\alpha}u_{\beta;\nu}) + \\
&+ c_4 u^\alpha u^\beta u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_4(g^{\lambda\alpha}u_\mu u^\beta u_{\lambda;\nu}u_{\alpha;\beta} + g^{\beta\lambda}u^\alpha u_\nu u_{\beta;\alpha}u_{\lambda;\mu}) + \lambda u_\mu u_\nu - \\
&- (\frac{1}{2}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\rho\nu}g_{\lambda\mu})_{;\alpha} - (\frac{1}{2}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\rho\mu}g_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\rho} \\
&+ (\frac{1}{2}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu})_{;\rho} = 0.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Θεωρώντας τώρα την διαφορά $\Delta_{\mu\nu} = (5.11) - (5.6)$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mu\nu} &= 2c_1 g^{\alpha\beta}u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_2 g^{\alpha\beta}(u_{\alpha;\beta}u_{\mu;\nu} + u_{\beta;\alpha}u_{\nu;\mu}) \\
&+ c_3 g^{\alpha\beta}(u_{\mu;\alpha}u_{\beta;\nu} + u_{\alpha;\mu}u_{\nu;\beta}) + 2c_4 g^{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_4 u^\beta u_{\alpha;\beta}(u_\mu u^\alpha{}_{;\nu} + u_\nu u^\alpha{}_{;\mu}) \\
&+ 2\lambda u_\mu u_\nu - (g_{\lambda\mu}g_{\rho\nu}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta} + g_{\lambda\nu}g_{\rho\mu}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta})_{;\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Αναπτύσσουμε την σχέση $(g_{\lambda\mu}g_{\rho\nu}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta} + g_{\lambda\nu}g_{\rho\mu}K^{\alpha\beta\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta})_{;\alpha} =$
$(c_1 g^{\alpha\beta}g^{\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu} + c_1 g^{\alpha\beta}g^{\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\rho\nu}g_{\lambda\mu})_{;\alpha} +$
$(c_2 g^{\alpha\lambda}g^{\beta\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu} + c_2 g^{\alpha\lambda}g^{\beta\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\rho\nu}g_{\lambda\mu})_{;\alpha} +$
$(c_3 g^{\alpha\kappa}g^{\beta\lambda}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu} + c_3 g^{\alpha\kappa}g^{\beta\lambda}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\rho\nu}g_{\lambda\mu})_{;\alpha} +$
$(c_4 u^\alpha u^\beta g^{\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu} + c_4 u^\alpha u^\beta g^{\lambda\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta}g_{\rho\nu}g_{\lambda\mu})_{;\alpha} =$
$c_1 g^{\alpha\beta}u^\rho{}_{;\alpha}u_{\nu;\beta}g_{\rho\mu} + c_1 g^{\alpha\beta}u^\rho u_{\nu;\beta;\alpha}g_{\rho\mu} +$
$c_1 g^{\alpha\beta}u^\rho{}_{;\alpha}u_{\mu;\beta}g_{\rho\nu} + c_1 g^{\alpha\beta}u^\rho u_{\mu;\beta;\alpha}g_{\rho\nu} +$
$c_2 g^{\beta\kappa}u^\rho{}_{;\nu}u_{\kappa;\beta}g_{\rho\mu} + c_2 g^{\beta\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta;\nu}g_{\rho\mu} +$
$c_2 g^{\beta\kappa}u^\rho{}_{;\mu}u_{\kappa;\beta}g_{\rho\nu} + c_2 g^{\beta\kappa}u^\rho u_{\kappa;\beta;\mu}g_{\rho\nu} +$
$c_3 g^{\alpha\kappa}u^\rho{}_{;\alpha}u_{\kappa;\nu}g_{\rho\mu} + c_3 g^{\alpha\kappa}u^\rho u_{\kappa;\nu;\alpha}g_{\rho\mu} +$
$c_3 g^{\alpha\kappa}u^\rho{}_{;\alpha}u_{\kappa;\mu}g_{\rho\nu} + c_3 g^{\alpha\kappa}u^\rho u_{\kappa;\mu;\alpha}g_{\rho\nu} +$
$c_4 u^\alpha{}_{;\alpha}u^\beta u_\mu u_{\nu;\beta} + c_4 u^\alpha u^\beta{}_{;\alpha}u_\mu u_{\nu;\beta} +$
$c_4 u^\alpha u^\beta u_{\mu;\alpha}u_{\nu;\beta} + c_4 u^\alpha u^\beta u_\mu u_{\nu;\beta;\alpha} +$
$c_4 u^\alpha{}_{;\alpha}u^\beta u_\nu u_{\mu;\beta} + c_4 u^\alpha u^\beta{}_{;\alpha}u_\nu u_{\mu;\beta} +$
$c_4 u^\alpha u^\beta u_{\nu;\alpha}u_{\mu;\beta} + c_4 u^\alpha u^\beta u_\nu u_{\mu;\beta;\alpha}.$

Αντικαθιστούμε την προηγούμενη σχέση στην (5.12) και καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$$\Delta_{\mu\nu} = -c_1 g^{\alpha\beta}\left(u_\nu u_{\mu;\beta;\alpha} + u_\mu u_{\nu;\beta;\alpha}\right) - c_2 g^{\alpha\beta}\left(u_\mu u_{a;\beta;\nu} + u_\nu u_{\alpha;\beta;\mu}\right) - c_3 g^{\alpha\beta}\left(u_\nu u_{\beta;\mu;\alpha} + u_\mu u_{\beta;\nu;\alpha}\right) + \tag{5.13}$$

$$c_4 u^\alpha u_{\beta;\alpha}\left(u_\mu u^\beta{}_{;\nu} + u_\nu u^\beta{}_{;\mu}\right) - c_4 u^\alpha{}_{;\alpha} u^\beta (u_\nu u_{\mu;\beta} + u_\mu u_{\nu;\beta}) - c_4 u^\alpha u^\beta{}_{;\alpha}(u_\nu u_{\mu;\beta} + u_\mu u_{\nu;\beta}) -$$
$$c_4 u^\alpha u^\beta\left(u_\nu u_{\mu;\beta;\alpha} + u_\mu u_{\nu;\beta;\alpha}\right) + 2\lambda u_\mu u_\nu.$$

Στην (5.10) αντικαθιστούμε την μορφή του $K^{\alpha\beta\mu\nu}$ απο την (1.2) και έτσι μετατρέπεται στην μορφή (για συντομογραφία $(eq2)^\kappa$):

$$(\mathrm{eq2})^\kappa := -c_1 g^{\alpha\beta} g^{\mu\kappa} u_{\mu;\alpha;\beta} - c_2 g^{\alpha\mu} g^{\beta\kappa} u_{\mu;\alpha;\beta} - c_3 g^{\alpha\kappa} g^{\beta\mu} u_{\mu;\alpha;\beta} - c_4 g^{\mu\kappa} u^\alpha u^\beta u_{\mu;\alpha;\beta} + \tag{5.14}$$

$$c_4 g^{\kappa\beta} g^{\mu\nu} u^\alpha u_{\mu;\alpha} u_{\nu;\beta} - c_4 g^{\alpha\lambda} g^{\mu\kappa} u^\beta u_{\mu;\alpha} u_{\lambda;\beta} - c_4 g^{\mu\kappa} u^\alpha u^\beta{}_{;\beta} u_{\mu;\alpha} +$$
$$\lambda g^{\alpha\kappa} u_\alpha = 0.$$

Πολλαπλασιάζω την (5.14) με $g_{\nu\kappa}$ και προκύπτει η σχέση:

$(\mathrm{eq2})_\nu = (\mathrm{eq2})^\kappa g_{\nu\kappa} = -c_1 g^{\alpha\beta} u_{\nu;\alpha;\beta} - c_2 g^{\alpha\mu} u_{\mu;\alpha;\nu} - c_3 g^{\beta\mu} u_{\mu;\nu;\beta} - c_4 u^\alpha u^\beta u_{\nu;\alpha;\beta} +$ $c_4 g^{\mu\rho} u^\alpha u_{\mu;\alpha} u_{\rho;\nu} - c_4 g^{\alpha\lambda} u^\beta u_{\nu;\alpha} u_{\lambda;\beta} - c_4 u^\alpha u^\beta{}_{;\beta} u_{\nu;\alpha} + \lambda u_\nu = 0.$

Αν θεωρήσουμε το άθροισμα $(\mathrm{eq2})_\nu u_\mu + (\mathrm{eq2})_\mu u_\nu$ έχουμε:

$$(\mathrm{eq2})_\nu u_\mu + (\mathrm{eq2})_\mu u_\nu = -c_1 g^{\alpha\beta}\left(u_\nu u_{\mu;\alpha;\beta} + u_\mu u_{\nu;\alpha;\beta}\right) - c_2 g^{\beta\alpha}\left(u_\nu u_{\alpha;\beta;\mu} + u_\mu u_{\alpha;\beta;\nu}\right) - \tag{5.15}$$

$$c_3 g^{\alpha\beta}\left(u_\nu u_{\beta;\mu;\alpha} + u_\mu u_{\beta;\nu;\alpha}\right) - c_4 u^\alpha u^\beta\left(u_\nu u_{\mu;\beta;\alpha} + u_\mu u_{\nu;\beta;\alpha}\right) + c_4 u^\alpha u_{\beta;\alpha}\left(u^\beta{}_{;\nu} u_\mu + u^\beta{}_{;\mu}\right.$$
$$c_4 g^{\beta\lambda} u^\alpha u_{\lambda;\alpha}\left(u_\nu u_{\mu;\beta} + u_\mu u_{\nu;\beta}\right) - c_4 u^\beta u^\alpha{}_{;\alpha}(u_\nu u_{\mu;\beta} + u_\mu u_{\nu;\beta}) + 2\lambda \mathrm{u}_\mu u_\nu.$$

Συγκρίνοντας τις (5.15) και (5.13) καταλήγουμε:

$$(\mathrm{eq2})_\nu u_\mu + (\mathrm{eq2})_\mu u_\nu = \Delta_{\mu\nu} \tag{5.16}$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά $\Delta_{\mu\nu} = 0$ δυνάμει της εξίσωσης του πεδίου του αιθέρα.

6

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτή τη διατριβή μελετήσαμε την ύπαρξη ακριβών λύσεων για τις εξισώσεις πεδίου στη θεωρία παραβίασης της αναλλοιώτητας του Lorentz γνωστή ως βαρύτητα Einstein-Aether. Αρχικά έχουμε διερευνήσει τις δυναμικές εξισώσεις της θεωρίας αυτής για την περίπτωση των γεωμετριών FLRW και LRS Bianchi τύπου III. Η ύπαρξη ή η μη ύπαρξη λύσεων στις ανηγμένες εξισώσεις εξαρτάται από την τιμή διαφόρων συνδυασμών των αρχικών παραμέτρων $c_I, I = 1...4$ που εμφανίζονται στο ολοκλήρωμα της δράσης (1.1).

Στην περίπτωση του FLRW ανακτάται η μετρική Minkowski για τις δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις $k = 0$ ή $c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$. Η περίπτωση $-2 + c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$ αξίζει να σημειωθεί δεδομένου ότι, από τη μία πλευρά, η δυναμική επιβάλλει $k = 0$, ενώ από την άλλη πλευρά το $a(t)$ παραμένει ελεύθερο αν και ο χρόνος έχει καθοριστεί από την επιλογή $M(t) = a(t)$. Οσο αφορά την πυκνότητα της ανηγμένης Λαγκρανζιανής $\mathcal{L}_{FLRW}$ αναπαράγει σωστά τη ανηγμένη δυναμική σε όλες τις περιπτώσεις, ακόμα και εκεί όπου το $a(t)$ παραμένει μη καθορισμένο. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο συνδυασμός των αρχικών παραμέτρων $c_1 + 3c_2 + c_3$ εισάγεται στις (2.7), (2.8), και κατά συνέπεια ταξινομεί τις επακόλουθες λύσεις που βρέθηκαν, είναι ακριβώς αυτό που αναμένεται από τα ευρήματα στο [24] που εφαρμόζονται στην περίπτωση ενός πεδίου αιθέρα που έχει μηδενικά διάτμηση, επιτάχυνση και περιστροφή (λόγω του ότι η χωρική φέτα είναι ομογενής και ισοτροπική). Ωστόσο, σημειώνουμε ότι αυτός ο συνδυασμός δεν είναι ο μόνος που εμφανίζεται σε εκφράσεις που περιλαμβάνουν τον πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda(t)$ όπως στην (1.11) (όταν φυσικά αντικαθίσταται το συγκεκριμένο $\lambda(t)$ του Κεφαλαίου 3) ή στις (2.3), (2.17), στην πραγματικότητα αναμένονται τόσοι διαφορετικοί συνδυασμοί, ώστε να ακυρώνουν τους παρόμοιους του (2.3). Ο λόγος για αυτό είναι ότι στο [24] ο μοναδιαίος χαρακτήρας του u^a δεν επιβάλλεται μέσω ενός πολλαπλασιαστή Lagrange στο επίπεδο της δράσης, αλλά μάλλον απευθείας στις δυναμικές εξισώσεις.

Στην περίπτωση του χωρόχρονου LRS Bianchi Type III η κατάσταση αλλάζει δραστικά όσον αφορά την ύπαρξη λύσεων στις ανηγμένες εξισώσεις. Υπάρχουν σημαντικά μεγάλα τμήματα του χώρου παραμέτρων για τα οποία δεν υπάρχει λύση. Για τις περιπτώσεις όπου υπάρχουν λύσεις, η ανηγμένη Λαγκρανζιανή πυκνότητα $\mathcal{L}_{III}$ τις ανακτά σωστά, υποδεικνύοντας ότι είναι έγκυρη. Αξίζει να σημειωθεί ότι, όταν δεν υπάρχουν λύσεις για τις ανηγμένες εξισώσεις, η δυναμική της Λαγκρανζιανής που δίνεται από το $\mathcal{L}_{III}$ δεν οδηγεί επίσης σε λύσεις. Έτσι, για καθεμία από αυτές τις περιπτώσεις, η αντίστοιχη Λαγκρανζιανή αποτελεί ένα εξαιρετικά μη τετριμμένο παράδειγμα μη συμβατής δυναμικής.

Εάν κάποιος θα ήθελε να έρθει σε επαφή με τη βαρύτητα του Horava, όπου ένας φυσικός χρόνος T είναι βασικής σημασίας, μπορεί κανείς να πει ότι ο υψηλός βαθμός συμμετρίας του στοιχείου μήκους της $FLRW$ περιορίζει το u_a ώστε να είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου $T \equiv T(t)$. Στην περίπτωση της γεωμετρίας του χωρόχρονου LRS Bianchi Type III, η μικρότερη συμμετρία επιτρέπει έναν κατ΄αρχήν φυσικό χρόνο $T(t,z) \equiv \int u_0(t)dt + \lambda_3 z$. Αυτό δείχνει περισσότερη ομοιότητα με τη βαρύτητα Horava.

Οι καθαρές λύσεις Einstein-Hilbert δεν καλύπτονται από τη μέθοδο μας λόγω της χρήσης της εξίσωσης μοναδιακότητας για τη σύνδεση μεταξύ $u_a(t)$ και του $M(t)$. Ωστόσο, δεδομένου ότι οι Λαγκρανζιανές πυκνότητες $\mathcal{L}_{FLRW}$, $\mathcal{L}_{III}$ ισχύουν για όλες τις περιπτώσεις στις οποίες υπάρχουν λύσεις στις ανηγμένες εξισώσεις, μπορούμε εύκολα να ανακτήσουμε τις καθαρές λύσεις Einstein-Hilbert λαμβάνοντας υπόψη την περίπτωση $T(t) = \mu_1$ για το πρώτο και $u_0(t) = 0, \lambda_3 = 0$ για το δεύτερο μοντέλο.

Στην συνέχεια για την υποκείμενη γεωμετρία υποθέσαμε ότι είναι ο χωρόχρονος Bianchi Type V , με ένα πίνακα που υπαγορεύεται από τον μηδενισμό του συνδέσμου G_{tx}. Σημειώστε ότι αυτή η μορφή του στοιχείου μήκους, αν και με δύο ανεξάρτητες συναρτήσεις του χρόνου, δεν είναι συμμετρικά τοπικά περιστροφική, δηλαδή δεν δέχεται ένα τέταρτο πεδίο Killing. Περιορίσαμε επίσης τη μορφή του πεδίου του αιθέρα επιβάλλοντας σε αυτό τις συμμετρίες της γεωμετρίας, φτάνοντας έτσι σε δύο πιθανές περιπτώσεις. Και για τα δύο μοντέλα της μελέτης μας προσδιορίσαμε τις εξισώσεις πεδίου και παρουσίασαμε τον χώρο λύσης τους. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο μας για τη LRS Bianchi Type III [85], διαπιστώνουμε επίσης ότι υπάρχουν ακριβείς λύσεις μόνο για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων ζεύξης της θεωρίας Einstein-Aether.

Όταν το πεδίο του αιθέρα είναι παράλληλο με τον συν-κινούμενο παρατηρητή, διαπιστώσαμε ότι υπάρχει μια ακριβής λύση που αντιστοιχεί σε ιδανικό ρευστό στην περίπτωση A_2 , όταν $c_1 + 3c_2 + c_3 - 2 \neq 0$, $q = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση είναι ο χωρόχρονος Friedmann--Lemaître--Robertson--Walker με μη μηδενική χωρική καμπυλότητα. Από την άλλη πλευρά, στην περίπτωση A_3, όταν $c_1 + 3c_2 + c_3 - 2 \neq 0$, $q \neq 0$ βρίσκουμε τόσο λύσεις που δεν αντιστοιχούν σε ιδανικό ρευστό όσο και λύσεις που αντιστοιχούν σε ιδανικό ρευστό. Η τελευταία περίπτωση είναι όταν επιπλέον $(9c_2 - 5q - 9) \neq 0$, και τότε βρίσκεται μια λύση που αντιστοιχεί σε ιδανικό ρευστό.

Όταν το πεδίο αιθέρα δεν είναι παράλληλο με τον συν-κινούμενο παρατηρητή διαπιστώσαμε ότι υπάρχει μια ακριβής λύση που αντιστοιχεί σε ιδανικό ρευστό στην περίπτωση B_4 , όταν $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_3 = 0$, $ab = c_b$. Υπάρχουν δύο πιθανές περιοριστικές σχέσεις για τις σταθερές ζεύξης, όταν υπάρχουν ακριβείς λύσεις. Αυτά συμβαίνουν στην περίπτωση B_2 όπου $c_2 = 0$, $c_1 + c_3 = 0$, και στην περίπτωση B_5 όπου $c_1 + c_3 \neq 0$.

Τέλος, θα θέλαμε να σχολιάσουμε εν συντομία την υπόθεση LRS: Ο πίνακας των συντελεστών κλίμακας είναι τώρα $\gamma_{\mu\nu} = diag\{a^2, a^2, b^2\}$ που έχει ως αποτέλεσμα μη μηδενικό G_{tx} στοιχείο του τανυστή Einstein. Τώρα η γεωμετρία δέχεται το τέταρτο πεδίο Killing $\xi_4 = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$. Το πεδίο του αιθέρα παραμένει το ίδιο, καθώς $L_{\xi_4} u_a = 0$, και έτσι η ταξινόμηση σύμφωνα με το λ_1 είναι μηδέν ή μη μηδέν. Υπάρχει ωστόσο μια σημαντική διαφορά στο χώρο των λύσεων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της κατηγορίας Α ($\lambda_1 = 0$) υπάρχει μόνο μία οικογένεια λύσεων που περιγράφονται από τους παράγοντες κλίμακας $a(t) = m_2 \exp \frac{(\sqrt{2}t)\epsilon}{m_1\sqrt{(2-Q)}}$ και $b(t) = m_1 a(t)$ όπου $\epsilon = \pm 1$, $Q = c_1 + 3c_2 + c3 < 2$ ώστε να είναι πραγματική η λύση, με τον χωρόχρονο Minkowski να αντιστοιχεί στην τιμή $Q = 0$.Σημειώστε επίσης ότι, εάν εξεταζόταν ένα ελεύθερο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αντί για το πεδίο του αιθέρα, το στοιχείο μήκους που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία θα οδηγούσε μόνο στη λύση του κενού ενώ το στοιχείο LRS θα είχε μη τετριμμένες λύσεις. Όλα αυτά τα θέματα είναι υπό εξέταση και θα παρουσιαστούν σε μελλοντική εργασία.

Πριν τελειώσουμε τη συζήτησή μας, μια σύντομη αναφορά, σχετικά με τη βιωσιμότητα των ακριβών λύσεων που βρέθηκαν εδώ όταν εξετάζονται

Περ.	**Συν.**	**Ισ.Χ**	**R.**
A_{3i}	$(9c_2 - 5q - 9) \neq 0$		
	$f\left(t\right) = \frac{i\pi}{2}\left(2\kappa + 1\right)$	Ναι	$-6e^{-4\epsilon kt}\left(4k^2 - 1\right)$
A_{3ii}	$(9c_2 - 5q - 9) \neq 0$	Όχι	$-\left(\rho_0 + \rho_1 \cos(4\rho_2 t)\right)$
	$f(t) = -2\tanh^{-1}\left(\tan\left(A\left(t - t_0\right)\right)\right)$		$\sec^3(2\rho_2 t)$
B_{2i}	$c_2 = 0\ ,\ f(t) = i\kappa\pi$	N.M	0
B_{2ii}	$c_2 = 0\ ,\ f(t) = 2\coth^{-1} e^{2t - m_1}$	Όχι	$\frac{96}{\kappa^4}\, csch^6\left(2\tau\right))$
B_4	$c_1 + c_3 = 0\ ,\ a\left(t\right)b\left(t\right) = c_b$	Όχι	$\frac{8}{\mu^2}$ (όχι ανωμαλίες)

Πίνακας 6.1: Φυσικά αποδεκτοί ακριβείς χωρόχρονοι Bianchi V στην θεωρία Einstein-Aether , **Περ.**$\equiv$ **Περίπτωση**, **Συν** $\equiv$ **Συνθήκες**, **Ισ. Χ** $\equiv$ **Ισοτροπος χωρόχρονος**, **R** $\equiv$ **βαθμωτό Ricci**

υπό το φως των τιμών ή και του εύρους των τιμών των σταθερών σύζευξης του αιθέρα που δίδονται από τις παρατηρήσεις (δείτε, π.χ. [95, 96, 97]). Στο [95] έχουν εφαρμοστεί τα δεδομένα βαρυτικών κυμάτων για το συμβάν GW170817 , ενώ στο [96] οι περιορισμοί έχουν δημιουργηθεί με τη χρήση κοσμικών ακτίνων εξαιρετικά υψηλής ενέργειας.

Με τη χρήση των αποτελεσμάτων αυτών των εργασιών, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η λύση της υπόθεσης A_2 για το Bianchi Type V δεν είναι βιώσιμη αφού το c_2 δεν βρίσκεται στο εύρος τιμών όπως δίνεται από το [95]. Για την περίπτωση A_3 του Bianchi Type V μόνο η λύση με $(9c_2 - 5q - 9) \neq 0$ είναι φυσικά αποδεκτή, ενώ η ακριβής λύση στην οποία $q = \frac{9}{5}(c_2 - 1)$ απορρίπτεται από τις παρατηρήσεις.

Όσον αφορά την οικογένεια B λύσεων, οι B_2 και B_4 είναι αποδεκτές λύσεις εάν τις θεωρήσουμε στα χαμηλότερα όριά τους $c_2 \rightarrow 0 \quad$ και $c_1 + c_3 \rightarrow 0$ αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον πίνακα.

7

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε σχέσεις χρειαστήκαμε στην πορεία της εργασίας.

Ορισμός 1:

Θεωρούμε τους 4^4 αριθμούς $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, οι οποίοι ορίζονται με τις εξής συμβάσεις:

α) Αν δύο δείκτες είναι ίσοι τότε $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$

β) $\epsilon^{0123} = 1$

γ) Σε οποιαδηποτε αντιμετάθεση δεικτών το συμβολο ϵ αλλάζει πρόσημο $\epsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

Για το σύμβολο ϵ ισχύει η εξής πρόταση:

Πρόταση 2:

Έστω T τυχαίος πίνακας και $|T|$ η ορίζουσα του. Τότε ισχύει η σχέση $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathbf{T}^{\mu}{}_{\alpha}\mathbf{T}^{\nu}{}_{\beta}\mathbf{T}^{\rho}{}_{\gamma}\mathbf{T}^{\sigma}{}_{\delta} = |\mathbf{T}|\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

Απόδειξη

Θεωρούμε την παράσταση $\sigma^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\mu}{}_{\alpha}T^{\nu}{}_{\beta}T^{\rho}{}_{\gamma}T^{\sigma}{}_{\delta}$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η παράσταση αυτή αλλάζει πρόσημο όταν δύο δείκτες αντιμετατεθούν:

$\sigma^{\lambda\kappa\chi\psi} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\lambda}{}_{\alpha}T^{\kappa}{}_{\beta}T^{\chi}{}_{\gamma}T^{\psi}{}_{\delta} = -\epsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}T^{\kappa}{}_{\beta}T^{\lambda}{}_{\alpha}T^{\chi}{}_{\gamma}T^{\psi}{}_{\delta} = -\sigma^{\kappa\lambda\chi\psi}$

Επομένως είναι ανάλογη με το $\epsilon^{\lambda\kappa\chi\psi}$. Δηλαδή έχουμε $\sigma^{\lambda\kappa\chi\psi} = x\epsilon^{\lambda\kappa\chi\psi}$. Για να προσδιορίσουμε την τιμή του x θέτουμε στην παραπάνω σχέση $\lambda\kappa\chi\psi = 0123$ και έχουμε:

$\sigma^{0123} = x\epsilon^{0123} \Longrightarrow \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} T^0{}_\alpha T^1{}_\beta T^2{}_\gamma T^3{}_\delta = x$

Με απευθείας υπολογισμό μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} T^0{}_\alpha T^1{}_\beta T^2{}_\gamma T^3{}_\delta = |T|$. Επομένως $x = |T|$

Στην συνέχεια θεωρούμε έναν χώρο με μετρική $g_{\mu\nu}$. Η ορίζουσα της συμβολίζεται με g. Ας θεωρήσουμε μια μικρή μεταβολή $\delta \mathrm{g}_{\mu\nu}$ της μετρικής στον χώρο αυτό.

Πρόταση 3:

Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

$$\delta \mathrm{g} = \delta \mathrm{g}_{\mu\nu} \mathrm{g}\mathrm{g}^{\mu\nu} \tag{7.1}$$

$$\delta \mathrm{g}^{\lambda\alpha} = \delta \mathrm{g}_{\mu\nu} \left(-g^{\mu\alpha}\right) g^{\nu\lambda} \tag{7.2}$$

Απόδειξη

α) Για την (7.1)

Είναι: $g = g_{0\kappa} g_{1\lambda} g_{2\mu} g_{3\nu} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ και $\frac{1}{g} = g^{0\kappa} g^{1\lambda} g^{2\mu} g^{3\nu} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$

$$\delta \mathrm{g} = \delta \mathrm{g}_{0\kappa} g_{1\lambda} g_{2\mu} g_{3\nu} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} + g_{0\kappa} \delta \mathrm{g}_{1\lambda} g_{2\mu} g_{3\nu} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} + g_{0\kappa} g_{1\lambda} \delta \mathrm{g}_{2\mu} g_{3\nu} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} + g_{0\kappa} g_{1\lambda} g_{2\mu} \delta \mathrm{g}_{3\nu} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \tag{7.3}$$

$\frac{g_{1\alpha} g_{2\beta} g_{3\gamma}}{g} = g_{1\alpha} g_{2\beta} g_{3\gamma} g^{0\kappa} g^{1\lambda} g^{2\mu} g^{3\nu} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = g^{0\kappa} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \delta^\lambda{}_\alpha \delta^\mu{}_\beta \delta^\nu{}_\gamma = g^{0\kappa} \epsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma}$

$\Longrightarrow \frac{1}{g} \epsilon^{\kappa\alpha\beta\gamma} g_{1\alpha} g_{2\beta} g_{3\gamma} = g^{0\kappa} \epsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\kappa\alpha\beta\gamma} = g^{0\kappa}$

$\Longrightarrow \epsilon^{\kappa\alpha\beta\gamma} g_{1\alpha} g_{2\beta} g_{3\gamma} = \mathrm{g}\mathrm{g}^{0\kappa}$

Ομοίως:

$\epsilon^{\alpha\lambda\beta\gamma} g_{0\alpha} g_{2\beta} g_{3\gamma} = \mathrm{g}\mathrm{g}^{1\lambda}, \quad \epsilon^{\alpha\beta\mu\gamma} g_{0\alpha} g_{1\beta} g_{3\gamma} = \mathrm{g}\mathrm{g}^{2\mu}, \quad \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} g_{0\alpha} g_{1\beta} g_{2\gamma} = \mathrm{g}\mathrm{g}^{3\nu}$

Οπότε:

$(7.3) \longrightarrow \delta \mathrm{g} = \delta \mathrm{g}_{0\kappa} \mathrm{g}\mathrm{g}^{0\kappa} + \delta \mathrm{g}_{1\lambda} \mathrm{g}\mathrm{g}^{1\lambda} + \delta \mathrm{g}_{2\mu} \mathrm{g}\mathrm{g}^{2\mu} + \delta \mathrm{g}_{3\nu} \mathrm{g}\mathrm{g}^{3\nu}$

$\Longrightarrow \delta \mathrm{g} = \delta \mathrm{g}_{\mu\nu} \mathrm{g}\mathrm{g}^{\mu\nu}$

β) Για την (7.2)

$g^{\mu\alpha} g_{\mu\nu} = \delta^\alpha{}_\nu \Longleftrightarrow \delta \mathrm{g}^{\mu\alpha} g_{\mu\nu} = \delta \mathrm{g}_{\mu\nu} \left(-g^{\mu\alpha}\right)$

$\delta \mathrm{g}^{\mu\alpha} g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta \mathrm{g}_{\mu\nu} \left(-g^{\mu\alpha}\right) g^{\nu\lambda} \Longleftrightarrow \delta \mathrm{g}^{\mu\alpha} \delta^\lambda{}_\mu = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\lambda} \delta \mathrm{g}_{\mu\nu}$

$\Longleftrightarrow \delta \mathrm{g}^{\lambda\alpha} = \delta \mathrm{g}_{\mu\nu} \left(-g^{\mu\alpha}\right) g^{\nu\lambda}$

Ορισμός 4:

Οι συντελεστές συσχέτισης ορίζονται ως εξής:

$\Gamma^\mu{}_{\beta\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(g_{\rho\nu,\beta} - g_{\beta\nu,\rho} + g_{\rho\beta,\nu}\right)$

Η συναλλοίωτη παράγωγος για έναν συναλλοίωτο τανυστή 2ας τάξεως και έναν ανταλλοίωτο τανυστή 2ας τάξεως είναι:

Ορισμός 5:

$$T_{\mu\nu;\lambda} = T_{\mu\nu,\lambda} - T_{\kappa\mu} \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} - T_{\kappa\nu} \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda},$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = T^{\mu\nu}{}_{,\lambda} + T^{\kappa\mu}\Gamma^{\nu}{}_{\kappa\lambda} + T^{\kappa\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\kappa\lambda} \tag{7.4}$$

όπου $\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu}$ οι συντελεστές συσχέτισης.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.4) έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 6:

$g_{\mu\nu;\lambda} = 0$ καθώς και $g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0$

Απόδειξη

Πράγματι,

$g_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}+g_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}g_{\rho\nu}g^{\rho\sigma}\left(g_{\sigma\mu,\lambda} - g_{\lambda\mu,\sigma} + g_{\sigma\lambda,\mu}\right)+\frac{1}{2}g_{\rho\mu}g^{\rho\sigma}\left(g_{\sigma\nu,\lambda} - g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\sigma\lambda,\nu}\right) =$

$\frac{1}{2}\delta^{\sigma}{}_{\nu}\left(g_{\sigma\mu,\lambda} - g_{\lambda\mu,\sigma} + g_{\sigma\lambda,\mu}\right) + \frac{1}{2}\delta^{\sigma}{}_{\mu}\left(g_{\sigma\nu,\lambda} - g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\sigma\lambda,\nu}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(g_{\nu\mu,\lambda} - g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu}\right) =$

$g_{\nu\mu,\lambda}$.

Επομένως $g_{\nu\mu,\lambda} - g_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu} - g_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} = 0$

Άρα $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$

Όμοια $g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = g^{\mu\sigma}g^{\nu\kappa}g_{\sigma\kappa;\lambda} = 0$

Πρόταση 7: Για ένα τυχαίο πίνακα M ισχύει

$$\mathrm{Tr}\left\{M^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}M(x)\right\} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\ln \mathrm{Det}M(x) \tag{7.5}$$

όπου Det δηλώνει την ορίζουσα και Tr το ίχνος που είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα.

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε την σχέση (7.5) θεωρούμε την μεταβολή στον $\ln \mathrm{Det}M(x)$ σε σχέση με την μεταβολή $\delta \mathrm{x}^{\lambda}$ στο x^{λ}:

$\delta ln\mathrm{Det}M = \ln \mathrm{Det}(\delta M + M) - \ln \mathrm{Det}M$

$= \ln \frac{\mathrm{Det}(\delta \mathrm{M}+M)}{\mathrm{Det}M}$

$= \ln \mathrm{Det}M^{-1}(\delta \mathrm{M} + M)$

$= \ln \mathrm{Det}(I + M^{-1}(\delta \mathrm{M}))$

Κρατώντας τώρα απο την ορίζουσα μόνο τα στοιχεία πρωτης τάξεως ως προς δM μπορούμε να πούμε ότι

$\delta ln\mathrm{Det}M = \ln(Tr(M^{-1}\delta M) + 1)$

Αναπτύσσοντας την ln σε δυναμοσειρά και κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης ως προς δM έχουμε τελικά ότι:

$\delta ln\mathrm{Det}M = Tr(M^{-1}\delta M)$

Παίρνοντας τους συντελεστές του $\delta \mathrm{x}^{\lambda}$ και στα δυο μέρη έχουμε την σχέση (7.5)

Πρόταση 8:

Θα αποδείξουμε την σχέση $V^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{-g}V^{\mu})$, όπου $g = Detg_{\mu\nu}$.

Απόδειξη

Η συναλλοίωτη παράγωγος ενος συναλλοίωτου διανύσματος είναι:

$$V^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + V^{\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\mu\lambda} \tag{7.6}$$

Σημειώνουμε ότι το $\Gamma^{\mu}{}_{\mu\lambda}$ δίνεται απο τον τύπο

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(g_{\rho\mu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\mu} - g_{\mu\lambda,\rho}\right) = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}g_{\rho\mu,\lambda} \tag{7.7}$$

Αν εφαρμόσουμε την σχέση (7.5) στην περίπτωση που ο πίνακας M είναι ο πίνακας $g_{\rho\mu}$, βρίσκουμε χρησιμοποιώντας και την (7.7) ότι

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{(g_{\rho\mu})^{-1}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}g_{\rho\mu}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\ln(Det g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\ln(\mathrm{g}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\sqrt{g} \tag{7.8}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (7.6), βρίσκουμε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος είναι ακριβώς η

$$V^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{g}V^{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{-g}V^{\mu}) \tag{7.9}$$

Πρόταση 9:

Τα $\delta\mathrm{g}_{\mu\nu}, \quad \delta\mathrm{g}_{\mu\nu;\kappa}, \quad \delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}$ είναι τανυστές.

Απόδειξη

Έστω η αλλαγή της μετρικής $g_{\mu\nu} \longrightarrow \overline{g_{\mu\nu}}$. Είναι:

$\overline{g_{\mu\nu}}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \delta\mathrm{g}_{\mu\nu}(x) \Longrightarrow$ (αναφερόμενοι σε συγκεκριμένο σημείο x)

$\delta\mathrm{g}_{\mu\nu}(x) = \overline{g_{\mu\nu}}(x) - g_{\mu\nu}(x)$: είναι τανυστής ως διαφορά τανυστών.

Ακολούθως και το $\delta\mathrm{g}_{\mu\nu;\kappa}$ είναι τανυστής.

Επειδή $\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(g_{\rho\nu,\beta} - g_{\beta\nu,\rho} + g_{\rho\beta,\nu}\right)$ καθώς και $\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} = g^{\rho\mu}\Gamma_{\rho\beta\nu} \Longrightarrow$ $\Gamma_{\rho\beta\nu} = g_{\rho\kappa}\Gamma^{\kappa}{}_{\beta\nu}$ που σημαίνει ότι $\Gamma_{\rho\beta\nu} = \frac{1}{2}g^{\kappa\mu}g_{\rho\kappa}\left(g_{\mu\nu,\beta} - g_{\beta\nu,\mu} + g_{\mu\beta,\nu}\right) = \frac{1}{2}\left(g_{\rho\nu,\beta} - g_{\beta\nu,\rho} + g_{\rho\beta,\nu}\right)$

Επομένως:

$\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left(\delta\mathrm{g}_{\rho\nu,\beta} - \delta\mathrm{g}_{\beta\nu,\rho} + \delta\mathrm{g}_{\rho\beta,\nu}\right) + \Gamma_{\beta\nu\rho}\delta\mathrm{g}^{\rho\mu}$

χρησιμοποιώντας τώρα την (7.4) έχουμε

$\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left(\delta\mathrm{g}_{\rho\nu;\beta} - \delta\mathrm{g}_{\beta\nu;\rho} + \delta\mathrm{g}_{\rho\beta;\nu}\right) + \Gamma_{\beta\nu\rho}\delta\mathrm{g}^{\rho\mu}$

$+\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left(\delta\mathrm{g}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \delta\mathrm{g}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\rho} + \delta\mathrm{g}_{\beta\sigma}\left(-\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho}\right) + \delta\mathrm{g}_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} + \delta\mathrm{g}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta} + \delta\mathrm{g}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\beta}\right)$

$\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left(\delta\mathrm{g}_{\rho\nu;\beta} - \delta\mathrm{g}_{\beta\nu;\rho} + \delta\mathrm{g}_{\rho\beta;\nu}\right) + \Gamma_{\beta\nu\rho}\delta\mathrm{g}^{\rho\mu} + \delta\mathrm{g}_{\rho\sigma}g^{\rho\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta} =$

$\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left(\delta\mathrm{g}_{\rho\nu;\beta} - \delta\mathrm{g}_{\beta\nu;\rho} + \delta\mathrm{g}_{\rho\beta;\nu}\right) + \Gamma_{\beta\nu\rho}\delta\mathrm{g}^{\rho\mu} + \delta\mathrm{g}^{\kappa\tau}g_{\rho\kappa}\left(-g^{\rho\mu}\right)g_{\sigma\tau}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta} =$

$\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left(\delta\mathrm{g}_{\rho\nu;\beta} - \delta\mathrm{g}_{\beta\nu;\rho} + \delta\mathrm{g}_{\rho\beta;\nu}\right) + \Gamma_{\beta\nu\rho}\delta\mathrm{g}^{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\beta\lambda}\delta\mathrm{g}^{\mu\lambda}.$

$\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left(\delta\mathrm{g}_{\rho\nu;\beta} - \delta\mathrm{g}_{\beta\nu;\rho} + \delta\mathrm{g}_{\rho\beta;\nu}\right)$

Άρα

$$\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left(\delta \mathrm{g}_{\rho\nu;\beta} - \delta \mathrm{g}_{\beta\nu;\rho} + \delta \mathrm{g}_{\rho\beta;\nu}\right) \tag{7.10}$$

Το αντικείμενο $\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}$ είναι τανυστής, αφού τα $g_{\mu\nu}$ και $\delta \mathrm{g}_{\mu\nu;\kappa}$ είναι τανυστές.

Πρόταση 10

Ισχύει $[\delta, \partial] = \mathbf{0}$

Απόδειξη

Ξεκινώντας απο τον ορισμό της μερικής παραγώγου

$g_{\mu\nu,\kappa} = \lim_{h^\kappa \longrightarrow 0} \frac{g_{\mu\nu}(h^\kappa + x^\kappa) - g_{\mu\nu}(x^\kappa)}{h^\kappa}$, έχουμε:

$\delta(g_{\mu\nu,\kappa}) = \delta(\lim_{h^\kappa \longrightarrow 0} \frac{g_{\mu\nu}(h^\kappa + x^\kappa) - g_{\mu\nu}(x^\kappa)}{h^\kappa}) \Longrightarrow$

$\delta(g_{\mu\nu,\kappa}) = \lim_{h^\kappa \longrightarrow 0} \left\{\frac{\overline{g_{\mu\nu}}(h^\kappa + x^\kappa) - \overline{g_{\mu\nu}}(x^\kappa)}{h^\kappa} - \frac{g_{\mu\nu}(h^\kappa + x^\kappa) - g_{\mu\nu}(x^\kappa)}{h^\kappa}\right\} \Longrightarrow$

$\delta(g_{\mu\nu,\kappa}) = \lim_{h^\kappa \longrightarrow 0} \left\{\frac{\overline{g_{\mu\nu}}(h^\kappa + x^\kappa) - \overline{g_{\mu\nu}}(x^\kappa) - g_{\mu\nu}(h^\kappa + x^\kappa) + g_{\mu\nu}(x^\kappa)}{h^\kappa}\right\} \Longrightarrow$

$\delta(g_{\mu\nu,\kappa}) = \lim_{h^\kappa \longrightarrow 0} \left\{\frac{[\overline{g_{\mu\nu}}(h^\kappa + x^\kappa) - g_{\mu\nu}(h^\kappa + x^\kappa)] - [\overline{g_{\mu\nu}}(x^\kappa) - g_{\mu\nu}(x^\kappa)]}{h^\kappa}\right\} \Longrightarrow$

$\delta(g_{\mu\nu,\kappa}) = \lim_{h^\kappa \longrightarrow 0} \left\{\frac{\delta \mathrm{g}_{\mu\nu}(h^\kappa + x^\kappa) - \delta \mathrm{g}_{\mu\nu}(x^\kappa)}{h^\kappa}\right\} \Longrightarrow$

$\delta(g_{\mu\nu,\kappa}) = (\delta g_{\mu\nu})_{,\kappa}$

Δηλαδή $[\delta, \partial] = 0$.

που σημαίνει ότι η μερική παράγωγος αντιμετατίθεται με την μεταβολή. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και στην περίπτωση της μεταβολής και ως προς u_κ.

Ορισμός 11

Ο τανυστής Riemann ορίζεται ως: $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta\kappa} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta\nu}$.

Ορισμός 12

Ο τανυστής Ricci δίνεται απο τον τύπο: $R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\kappa}$

Ορισμός 13

Το βαθμωτό Ricci ορίζεται: $R = g^{\mu\kappa}R_{\mu\kappa} = g^{\mu\kappa}R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\kappa}$

Θεώρημα 14 (Απόκλισης του Gauss)

$\int_V \nabla\vec{F} d^4x = \int_{\partial V} \vec{F} d^3x$

Πρόταση 15

Θεωρώντας μεταβολή της $g_{\mu\nu}$ και βασικό το u_κ ισχύει η σχέση $\delta \mathrm{u}_{\mu;\alpha} = -\frac{1}{2}g^{\rho\lambda}u_\lambda\left(\delta \mathrm{g}_{\rho\mu;\alpha} - \delta \mathrm{g}_{\alpha\mu;\rho} + \delta \mathrm{g}_{\rho\alpha;\mu}\right)$

Απόδειξη

Πράγματι

$u_{\mu;\alpha} = u_{\mu,\alpha} - u_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} \Longrightarrow \delta \mathrm{u}_{\mu;\alpha} = \delta \mathrm{u}_{\mu,\alpha} - \delta\left(u_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}\right) \Longrightarrow \delta \mathrm{u}_{\mu;\alpha} = -u_\lambda \delta(\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha})$ και λόγω της (7.10) έχουμε

$\delta \mathrm{u}_{\mu;\alpha} = -\frac{1}{2}g^{\rho\lambda}u_\lambda\left(\delta \mathrm{g}_{\rho\mu;\alpha} - \delta \mathrm{g}_{\alpha\mu;\rho} + \delta \mathrm{g}_{\rho\alpha;\mu}\right)$.

Πρόταση 16

Θεωρώντας μεταβολή του u_κ ισχύει η σχέση $\delta \mathrm{u}_{\mu;\alpha} = (\delta \mathrm{u}_\mu)_{;\alpha}$

Απόδειξη

Παίρνοντας μεταβολή ως προς το u_κ θα έχουμε :

Γνωρίζουμε ότι $u_{\mu;\alpha} = u_{\mu,\alpha} - u_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} \Longrightarrow \delta \mathrm{u}_{\mu;\alpha} = \delta(\mathrm{u}_{\mu,\alpha}) - \delta\left(u_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\right)$.

Λόγω της πρότασης (7.10) θα έχουμε:

$\delta(u_{\mu,\alpha}) = (\delta u_\mu)_{,\alpha}$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι:

$\delta \mathrm{u}_{\mu;\alpha} = (\delta u_\mu)_{,\alpha} - (\delta u_\lambda)\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}$

$\Longrightarrow \delta \mathrm{u}_{\mu;\alpha} = (\delta \mathrm{u}_\mu)_{;\alpha}$

Θεωρούμε έναν γενικό (αλλά απειροστό) μετασχηματισμό της μορφής

$$(x')^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x) \tag{7.11}$$

Ας δούμε τώρα πώς μετασχηματίζεται ένα τετράνυσμα A^μ κάτω απο το μετασχηματισμό (7.11)

$A'^\mu(x') = \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\kappa} A^\kappa(x) = (\delta^\mu{}_\kappa - \xi^\mu{}_{,\kappa})\left(A^\kappa(x') + \xi^\lambda A^\kappa{}_{,\lambda} + ...\right) =$

$A^\mu(x') + \xi^\lambda A^\mu{}_{,\lambda} - \xi^\mu{}_{,\lambda} A^\lambda(x') \Longrightarrow$

$A'^\mu(x') - A^\mu(x') = \xi^\lambda A^\mu{}_{,\lambda}(x') - \xi^\mu{}_{,\lambda} A^\lambda(x')$

Ορισμός 17

Η παράγωγος Lie ως προς ένα διανυσματικό πεδίο ξ ορίζεται

$L_\xi A^\mu = A'^\mu(x') - A^\mu(x') = \xi^\lambda A^\mu{}_{,\lambda}(x') - \xi^\mu{}_{,\lambda} A^\lambda(x')$

Ορισμός 18

Γενικεύοντας, η παράγωγος Lie ως προς ξ του τανυστή $T^{\mu\ldots\kappa}_{\rho\ldots\nu}$ ορίζεται:

$L_\xi T^{\mu\ldots\kappa}_{\rho\ldots\nu} = T'^{\mu\ldots\kappa}_{\rho\ldots\nu}(x') - T^{\mu\ldots\kappa}_{\rho\ldots\nu}(x') = \xi^\lambda T^{\mu\ldots\kappa}_{\rho\ldots\nu,\lambda} - \xi^\mu_{,\lambda} T^{\lambda\ldots\kappa}_{\rho\ldots\nu} - \ldots - \xi^\kappa_{,\lambda} T^{\mu\ldots\lambda}_{\rho\ldots\nu} + \xi^\lambda_{,\rho} T^{\mu\ldots\kappa}_{\lambda\ldots\nu} + \ldots + \xi^\lambda_{,\nu} T^{\mu\ldots\kappa}_{\rho\ldots\lambda}$

Ορισμός 19

Στην ειδική περίπτωση που ο τανυστής που εξετάζουμε είναι η μετρική $g_{\mu\nu}$ και ικανοποιείται η σχέση

$L_\xi g_{\mu\nu} = 0 \Longleftrightarrow \xi^\lambda g_{\mu\nu,\lambda} + \xi^\lambda_{,\mu} g_{\lambda\nu} + \xi^\lambda_{,\nu} g_{\mu\lambda} = 0$

τότε το ξ ονομάζεται διάνυσμα Killing και είναι συμμετρία του χωρόχρονου.

Πρόταση 20

Τα πεδία Killing της διδιάστατης σφαίρας με συντεταγμένες $\{\theta, \phi\}$ και με μετρική $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$ είναι:

$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial \phi}$,

$\xi_2 = \cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta} - \cot(\theta)\sin(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}$,

$\xi_3 = \sin(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot(\theta)\cos(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}$

Απόδειξη

Έχουμε ότι $L_\xi g_{\mu\nu} = 0$

$\Longleftrightarrow \xi^\lambda g_{\mu\nu,\lambda} + \xi^\lambda_{,\mu} g_{\lambda\nu} + \xi^\lambda_{,\nu} g_{\mu\lambda} = 0$

• Αν $\mu = \nu = \theta$ έχουμε:

${\xi^\lambda}_{,\theta} g_{\lambda\theta} = 0 \Longrightarrow {\xi^\theta}_{,\theta} g_{\theta\theta} = 0 \Longrightarrow {\xi^\theta}_{,\theta} = 0 \Longrightarrow \xi^\theta = c_1(\phi)$.

• Αν $\mu = \nu = \phi$ έχουμε:

$\xi^\lambda g_{\phi\phi,\lambda} + \xi^\lambda_{,\phi} g_{\lambda\phi} + \xi^\lambda_{,\phi} g_{\phi\lambda} = 0$

$\xi^\lambda g_{\phi\phi,\lambda} + 2\xi^\lambda_{,\phi} g_{\lambda\phi} = 0$

$\xi^\theta g_{\phi\phi,\theta} + 2{\xi^\phi}_{,\phi} g_{\phi\phi} = 0$

$\xi^\theta \cos(\theta) + {\xi^\phi}_{,\phi} \sin(\theta) = 0$

${\xi^\phi}_{,\phi} = c_1\phi(-\cot(\theta))$

$\xi^\phi = c_2(\theta) - \cot(\theta)\int c_1(\phi)\, d\phi$

• Αν $\mu = \theta$, $\nu = \phi$ έχουμε:

$\xi^\lambda_{,\theta} g_{\lambda\phi} + \xi^\lambda_{,\phi} g_{\theta\lambda} = 0$

$\xi^\phi_{,\theta} g_{\phi\phi} + \xi^\theta_{,\phi} g_{\theta\theta} = 0$

${\xi^\phi}_{,\theta} \sin^2(\theta) + {\xi^\theta}_{,\phi} = 0$

$\sin^2(\theta)(\frac{\int c_1(\phi)\, d\phi}{\sin^2(\theta)} + c_2(\theta)') + c_1(\phi)' = 0$

$c_1(\phi)' + \int c_1(\phi)\, d\phi = -c_2(\theta)' \sin^2(\theta) = c_3$

Επομένως

$c_2(\theta)' = -\frac{c_3}{\sin^2(\theta)}$

Άρα $c_2(\theta) = c_3 \cot(\theta) + c_4$

Επίσης

$$c_1(\phi)' + \int c_1(\phi)\, d\phi = c_3 \tag{7.12}$$

Παραγωγίζουμε ως προς ϕ την (7.12) και καταλήγουμε στην σχέση:

$c_1''(\phi) + c_1(\phi) = 0 \Longrightarrow c_1(\phi) = c_6 \sin(\phi) + c_5 \cos(\phi)$

Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην (7.12) και έχουμε:

$-c_5 \sin(\phi) + c_6 \cos(\phi) + c_5 \sin(\phi) - c_6 \cos(\phi) = c_3$

Άρα $c_3 = 0$, επομένως $c_2(\theta) = c_4$ και $c_1(\phi) = c_6 \sin(\phi) + c_5 \cos(\phi)$.

Συμπεραίνουμε ότι

$\xi^\theta = c_6 \sin(\phi) + c_5 \cos(\phi)$

$\xi^\phi = c_4 - \cot(\theta)(c_5 \sin(\phi) - c_6 \cos(\phi))$

Θέτουμε τώρα $\xi = \begin{pmatrix} \xi^\theta \\ \xi^\phi \end{pmatrix}$

Τότε τα πεδία Killing της παραπάνω μετρικής είναι

$\xi_1 = \frac{\partial \xi}{\partial c_4}|_{(c_4,c_5,c_6)=(0,0,0)} = \frac{\partial}{\partial\phi}$

$\xi_2 = \frac{\partial \xi}{\partial c_5}|_{(c_4,c_5,c_6)=(0,0,0)} = \cos(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot(\theta)\sin(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}$

$\xi_3 = \frac{\partial \xi}{\partial c_6}|_{(c_4,c_5,c_6)=(0,0,0)} = \sin(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta} + \cot(\theta)\cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}$

Ας θυμηθούμε από την Θεωρητική Μηχανική πώς εξάγονται οι εξισώσεις Euler-Lagrange απο την στασιμότητα του ολοκληρώματος της δράσης.

Έστω η δράση $I_1 = \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)\right) dt$ μιάς διαδρομής (1)

Αν παραλλάξουμε λίγο την διαδρομή, ώστε :

$q \longrightarrow \varepsilon + q, \dot{q} \longrightarrow \dot{\varepsilon} + \dot{q}, \ddot{q} \longrightarrow \ddot{q} + \ddot{\varepsilon}$, με $\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2) = \dot{\varepsilon}(t_1) = \dot{\varepsilon}(t_2) = 0$

Η δράση τωρα της παραλλαγμένης διαδρομής είναι $I_2 = \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, \varepsilon + q(t), \dot{\varepsilon} + \dot{q}(t), \ddot{q}(t) + \ddot{\varepsilon}\right) dt$ (2)

Για να είναι η (1) η φυσική διαδρομή, πρέπει η μεταβολή της δράσεως σε πρώτη τάξη να είναι μηδέν $\forall \varepsilon$. Έχουμε:

$\delta\mathrm{I} = I_2 - I_1 = \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, \varepsilon + q(t), \dot{\varepsilon} + \dot{q}(t), \ddot{q}(t) + \ddot{\varepsilon}\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)\right) dt$

$\delta\mathrm{I} = \int_{t_1}^{t_2} [L\left(t, q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)\right) + \frac{\partial L}{\partial q}\varepsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\ddot{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2, \dot{\varepsilon}^2, \ddot{\varepsilon}^2\right)]dt - \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)\right) dt$

$\delta\mathrm{I} \simeq \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\varepsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\ddot{\varepsilon}\right) dt$

Είναι $\frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\varepsilon\right) - \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\varepsilon}$

$\frac{d^2}{\mathrm{dt}^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\varepsilon\right) - \frac{d^2}{\mathrm{dt}^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\varepsilon - 2\frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\dot{\varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\ddot{\varepsilon}$

Οπότε: $\delta\mathrm{I} \simeq \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{d^2}{\mathrm{dt}^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\right) dt - 2\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\dot{\varepsilon} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\varepsilon\right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{\mathrm{dt}^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\varepsilon\right) dt$

$\delta\mathrm{I} \simeq \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{d^2}{\mathrm{dt}^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\right) dt + 2\int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{\mathrm{dt}^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\varepsilon dt - 2\left[\frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\varepsilon\right]_{t_1}^{t_2} + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\varepsilon\right]_{t_1}^{t_2} + \left[\frac{d}{\mathrm{dt}}\left((\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\varepsilon\right)]_{t_1}^{t_2}$

$\delta\mathrm{I} \simeq \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{\mathrm{dt}^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\right) dt - 2\left[\frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\varepsilon\right]_{t_1}^{t_2} + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\varepsilon\right]_{t_1}^{t_2} + \left[\frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\varepsilon\right]_{t_1}^{t_2} + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\dot{\varepsilon}\right]_{t_1}^{t_2}$

Επειδή $\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2) = \dot{\varepsilon}(t_1) = \dot{\varepsilon}(t_2) = 0$ έχουμε:

$\delta\mathrm{I} \simeq \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{\mathrm{dt}^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\right) dt$

Θέλουμε $\delta\mathrm{I} = 0\ \forall \varepsilon \Longleftrightarrow$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{\mathrm{dt}^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) = 0 \tag{7.13}$$

Πρόταση 21

Το ολοκλήρωμα $\int_V \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = 0$.

Απόδειξη

Λογω των ορισμών 11,12,13 έχουμε :

$R_{\beta\nu} = R^{\mu}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}\left(\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\right) - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\mu}$

$$\delta\mathrm{R}_{\beta\nu} = \delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu,\nu} - \delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu,\mu} + \delta\left(\left(\Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\right)\right) - \delta\left(\Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\mu}\right) \tag{7.14}$$

Λόγω της (7.10) το $\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}$ είναι τανυστής οπότε έχουμε:

$\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu;\mu} = \delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}$

$\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu;\nu} = \delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\rho\mu} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}$

Άρα $-\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu;\mu} + \delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu;\nu} = -\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu,\mu} + \delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu,\nu} - \delta\left(\Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\mu}\right) + \delta\left(\Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\right)$

$$\delta \mathrm{R}_{\beta\nu} = -\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu;\mu} + \delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu;\nu} \tag{7.15}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_V \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} d^4x$ λόγω της (7.15), γίνεται:

$$\int_V \sqrt{-g} g^{\beta\nu}\delta R_{\beta\nu} d^4x = \int_V \sqrt{-g} g^{\beta\nu}(-\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu;\mu} + \delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu;\nu}) d^4x \tag{7.16}$$

Συμπεραίνουμε λόγω της (7.10) ότι:

$$\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\mu}\left(\delta \mathrm{g}_{\rho\nu;\beta} - \delta \mathrm{g}_{\beta\nu;\rho} + \delta \mathrm{g}_{\rho\beta;\nu}\right) \tag{7.17}$$

και

$$\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu} = \frac{1}{2} g^{\rho\mu}\left(\delta \mathrm{g}_{\rho\beta;\mu} - \delta \mathrm{g}_{\beta\mu;\rho} + \delta \mathrm{g}_{\rho\mu;\beta}\right) \tag{7.18}$$

Εν συνεχεία:

$\int_V \sqrt{-g} g^{\beta\nu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu;\mu} d^4x = \int_V \sqrt{-g}(g^{\beta\nu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu})_{;\mu} d^4x - \int_V \sqrt{-g} g^{\beta\nu}{}_{;\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} d^4x.$

Λόγω της Πρότασης 5 έχουμε $\int_V \sqrt{-g} g^{\beta\nu}{}_{;\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} d^4x = 0$

Επομένως λόγω της Πρότασης 7 έχουμε:

$\int_V \sqrt{-g}(g^{\beta\nu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu})_{;\mu} d^4x = \int_V \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{-g} g^{\beta\nu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu})\sqrt{-g} d^4x = \int_V \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{-g} g^{\beta\nu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}) d^4x.$

Χρησιμοποιώντας το Θεωρήμα 14 (Απόκλισης του Gauss)καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$\int_V \sqrt{-g} g^{\beta\nu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu;\mu} d^4x = \int_{\partial V} \sqrt{-g} g^{\beta\nu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} d^3x.$

Λόγω της (7.17) έχουμε:

$\int_V \sqrt{-g} g^{\beta\nu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu;\mu} d^4x = \int_{\partial V} \sqrt{-g} g^{\beta\nu}\frac{1}{2} g^{\rho\mu}\left(\delta \mathrm{g}_{\rho\nu;\beta} - \delta \mathrm{g}_{\beta\nu;\rho} + \delta \mathrm{g}_{\rho\beta;\nu}\right) d^3x$

Λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι η μικρή μεταβολή του $g_{\mu\nu}$ είναι τέτοια ώστε το $\delta g_{\mu\nu} = 0$ καθώς και οι συναλλοίωτες παράγωγοι του είναι παντού μηδέν στο σύνορο ∂V, έχουμε ως συμπέρασμα ότι το ολοκλήρωμα $\int_V \sqrt{-g} g^{\beta\nu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu;\mu} d^4x = 0$

Όμοια το ολοκλήρωμα $\int_V \sqrt{-g} g^{\beta\nu}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu;\mu} d^4x = 0$ Επομένως το ολοκλήρωμα (7.16) ισούται με μηδέν.

8

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] T. Clifton, P.G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, Phys. Rept. **513**, 1 (2012)

[2] L. Amendola and S. Tsujikawa, Dark Energy: Theory and Observations, Cambridge University Press, Cambridge, (2010)

[3] S. Perlmutter, et al., Astrophys. J. **517**, 565 (1998)

[4] A. G. Riess, et al., Astron. J. **116**, 1009 (1998)

[5] P. Astier et al., Astrophys. J. **659**, 98 (2007)

[6] N. Suzuki et al., Astrophys. J. **746**, 85 (2012)

[7] E. Komatsu et al., Astrophys. J. Suppl. **192**, 18 (2011)

[8] P.A.R. Ade et al. A&A. **571**, A16 (2014)

[9] S. Tsujikawa, Lect. Notes Phys. 800, 99 (2010)

[10] T. Jacobson and D. Mattingly, Phys. Rev. D **64**, 024028 (2001)

[11] W. Donnelly and T. Jacobson, Phys. Rev. D **82**, 064032 (2010)

[12] W. Donnelly and T. Jacobson, Phys. Rev. D **82**, 081501 (2010)

[13] I. Carruthers and T. Jacobson, Phys. Rev. D **83**, 024034 (2011)

[14] S. M. Carroll and E. A. Lim, Phys. Rev. D **70**, 123525 (2004)

[15] H. Wei, X.-P. Yan and Y.-N. Zhou, Gen. Relat. Gravit. 46, 1719 (2014)

[16] X. Meng and X. Du, Phys. Lett. B 710, 493 (2012)

[17] J.D. Barrow, Phys. Rev. D 85, 047503 (2012)

[18] C. Armendariz-Picon, N.F. Sierr and J. Garriga, JCAP 1007, 010 (2010)

[19] R.A. Battye, F. Pace and D. Trinh, Phys. Rev. D 96, 064041 (2017)

[20] C. Heinicke, P. Baekler and F.W. Hehl, Phys. Rev. D **72**, 025012 (2005)

[21] X. Meng and X. Du, Phys. Lett. B **710**, 493 (2012)

[22] J. D. Barrow, Phys. Rev. D **85**, 047503 (2012)

[23] D. Garfinkle and T. Jacobson, Phys. Rev. Lett. **107**, 191102 (2011)

[24] T. Jacobson, Phys. Rev. D **89**, 081501 (2014)

[25] P. Sandin, B. Alhulaimi and A. Coley, Phys. Rev. D **87**, 044031 (2013)

[26] A. A. Coley, G. Leon, P. Sandin and J. Latta, JCAP **12**, 010 (2015)

[27] J. Latta, G. Leon and A. Paliathanasis, JCAP **16**, 051 (2016)

[28] A.B. Balakin and V.A. Popov, JCAP 04, 025 (2017)

[29] A.B. Balakin and J.P.S. Lemos, Annal. Phys. **350**, 454 (2014)

[30] C. Eling and T. Jacobson, Class. Quantum Grav. **23**, 5625 (2006)

[31] C. Eling and T. Jacobson, Class. Quantum Grav. **23**, 5643 (2006)

[32] A.R. Solomon and J.D. Barrow, Phys. Rev. D 89, 024001 (2014)

[33] E. Barausse, T. Jacobson and T.P. Sotiriou, Phys. Rev. D **83**, 124043 (2011)

[34] E. Barausse, T.P. Sotiriou and I. Vega, Phys. Rev. D **93**, 044044 (2016)

[35] C. Gao and Y.-G. Sen, Phys. Rev. D **88**, 103508 (2013)

[36] B. Alhulaimi, A. Coley and P. Sandin, J. Math. Phys. 54, 042503 (2013)

[37] G. Morandi, G. Ferrario, G. LoVecchio, G. Marmo and C. Rubano, Phys. Rep. 188, 147 (1990)

[38] M. A. H. MacCallum, H. Taub, Commun. Math. Phys. 25, 173 ”189 (1972)

[39] T. Christodoulakis, E. Korfiatis, Nuov. Cim. B (1994) 109: 1155. https://doi.org/10.1007/BF02726679

[40] T. Christodoulakis, E. Korfiatis, A.Paschos, Phys.Rev.D54:2691-2698 (1996) Erratum-ibid. D56: 5279-5280 (1997)

[41] A. Maciejewski and M. Szydlowski, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 2031 (1998)

[42] A. Ferragut, J. Llibre and C. Pantazi, Chaos, Solitons and Fractals **48**, 12 (2013)

[43] A. Ferragut, J. Llibre and C. Pantazi, Chaos **23**, 013119 (2013)

[44] J. Llibre, J. Math. Phys. **46**, 072901 (2015)

[45] P.G.L. Leach, M.C. Nucci and S. Cotsakis, J. Nonlinear Math. Phys. **8**, 475 (2001)

[46] S. Basilakos, M. Tsamparlis and A. Paliathanasis, Phys. Rev. D **83**, 103512 (2011)

[47] N. Dimakis, A. Giacomini and A. Paliathanasis, EPJC **77**, 458 (2017)

[48] K.V. Kuchar and M.P.Jr. Ryan, Phys. Rev. D **40**, 3982 (1989)

[49] J. Martin, Phys. Rev. D **49**, 5086 (1994)

[50] C. Simeone, J. Math. Phys. **39**, 3131 (1998)

[51] T. Christodoulakis, N. Dimakis, P.A. Terzis and G. Doulis, Phys. Rev. D **90**, 024052 (2014)

[52] T. Christodoulakis, N. Dimakis, P.A. Terzis, B. Vakili, E. Melas and Th. Grammenos, Phys. Rev. D **89**, 044031 (2014)

[53] T. Christodoulakis, N. Dimakis, P.A. Terzis, G. Doulis and Th. Grammenos, J. Geom. Phys. **71**, 127 (2013)

[54] A. Paliathanasis, M. Tsamparlis, S. Basilakos and J.D. Barrow, Phys. Rev. D **93**, 043528 (2016)

[55] C.W. Misner, Phys. Rev. Lett. 22, 1071 (1969)

[56] M.P.Jr. Rayan and L.C. Shepley, Homogeneous Relativistic Cosmologies. Princeton University Press, Princeton (1975)

[57] C.W. Misner, Phys. Rev. D **186**, 1319 (1969)

[58] Petros A. Terzis, arXiv:1304.7894 [math.RT] (2013)

[59] M.A.H. MacCallum, In: Hawking, S.W., Israel, W. General Relativity: An Einstein Centenary Survey, Cambridge University Press, Cambridge (1979)

[60] C.W. Misner, Astroph. J. 151, 431 (1968)

[61] K.C. Jacobs, Astrophys J. 153, 661 (1968)

[62] C.B Collins and S.W. Hawking, Astroph. J. 180, 317 (1973)

[63] J.D. Barrow, Mon. Not. R. Astron. Soc. 175, 359 (1976)

[64] E. Kasner, American J. Math. 43, 217 (1921)

[65] D. Lorenz, Phys. Lett. A 79, 19 (1980)

[66] J. Hajj-Boutros, J. Math. Phys. 27, 1592 (1986)

[67] T. Christodoulakis and P.A. Terzis, J. Math. Phys. 47, 102502 (2006)

[68] T. Christodoulakis and P.A. Terzis, Class. Quantum Grav. 24, 875 (2007)

[69] A. Harvey and D. Tsoubelis, Phys. Rev. D 15, 2734 (1977)

[70] P.A. Terzis and T. Christodoulakis, Class. Quantum Grav. 29, 235007 (2012)

[71] D. Lorenz, Astroph. Sp. Sci. 85, 69 (1982)

[72] P.A. Terzis and T. Christodoulakis, Gen. Relativ. Gravit. 41, 469 (2009)

[73] D. Lorenz, Phys. Rev. D 22, 1848 (1980)

[74] N. Dimakis, P.A. Terzis and T. Christodoulakis, Phys. Rev. D 99, 023536 (2019)

[75] A.P. Billyard, A.A. Coley, R.J. van den Hoogen, J. Ibanez and I. Olagasti, Class. Quantum Grav. 16, 4035 (1999)

[76] J.M. Aguirregabiria, A. Feinstein and J. Ibanez, Phys. Rev. D 48, 4662 (1993)

[77] M. Tsamparlis and A. Paliathanasis, Gen. Relat. Gravit. 43, 1861 (2011)

[78] A. Banerjee and N.O. Santos, Il Nuovo Cimento B 67, 31 (1982)

[79] B.K. Nayak and G.B. Bhuyan, Gen. Relat. Gravit. 19, 939 (1987)

[80] R. Venkateswarlu and J. Satish, Int. J. Theor. Phys. 53, 1879 (2014)

[81] A. Paliathanasis, L. Karpathopoulos, A. Wojnar and S. Capozziello, EPJC 76, 225 (2016)

[82] A. Paliathanasis, J.D. Barrow and P.G.L. Leach, Phys. Rev. D 94, 023525 (2016)

[83] A. Paliathanasis, J.L. Said and J.D. Barrow, Phys. Rev. D 97, 044008 (2018)

[84] T. Pailas, P.A. Terzis and T. Christodoulakis, Class. Quantum Grav. 35, 145003 (2018)

[85] M. Roumeliotis, A. Paliathanasis, P.A. Terzis and T. Christodoulakis, EPJC 79, 349 (2019)

[86] A. Paliathanasis, Inhomogeneous spacetimes in Einstein-æther Cosmology, submitted (2019)

[87] A.A. Coley, G. Leon, P. Sandin and J. Latta, JCAP 15, 12 (2015)

[88] J. Latta, G. Leon and A. Paliathanasis, JCAP 16, 051 (2016)

[89] B. Alhulaimi, R. J. van den Hoogen and A. A. Coley, JCAP 17, 045 (2017)

[90] A.A. Coley, G. Leon, P. Sandin and J. Latta, JCAP 12, 010 (2015)

[91] Coley, A., Leon, G. Static spherically symmetric Einstein-aether models Gen Relativ Gravit 51, 115 (2019).

[92] M. Roumeliotis, A. Paliathanasis, P.A. Terzis and T. Christodoulakis, EPJC 80, 239 (2020)

[93] A. Coley, S. Hervik and N. Pelavas, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 3053.

[94] A. Coley, S. Hervik and N. Pelavas, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 3053.

[95] J. Oost, S. Mukohyama and A. Wang, Phys. Rev. D 97, 124023 (2018)

[96] J.W. Elliott, G.D. Moore and H. Stoica, JHEP 0508, 066 (2005)

[97] K. Yagi, D. Blas, N. Yunes and E. Barausse, Phys. Rev. Lett. **112**, no. 16, 161101 (2014)