



ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΥΛΙΚΩΝ ΜΕ ΔΙΑΣΠΟΡΑ
ΚΑΙ ΜΕΤΑΥΛΙΚΩΝ ΣΕ 1 ΚΑΙ 2
ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

STUDY ON DISPERSIVE MATERIALS
AND METAMATERIALS IN 1 AND 2
DIMENSIONS

Συγγραφέας:
ΠΑΡΑΜΑΚΑΡΙΟΣ ΣΑΥΒΑΣ
ΠΑΠΑΜΑΚΑΡΙΟΣ ΣΑΒΒΑΣ

Επιβλέπων καθηγητής: Κοσμάς Α. Τσακμακίδης

Τομέας Φυσικής Συμπυκνωμένης Ύλης

Athens 2021

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα εκπονήθηκε στα πλαίσια της πτυχιακής εργασίας για το τμήμα Φυσικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, για τον τομέα Φυσικής Συμπυκνωμένης Ύλης, υπό την επίβλεψη και την καθοδήγηση του καθηγητή Κοσμά Α. Τσακμακίδη. Στην εργασία γίνεται ενδελεχής μελέτη υλικών που παρουσιάζουν διασπορά και μεταϊλικών, με τη χρήση μοντέλων προσομοιώσεων σε 1 και 2 διαστάσεις με τη χρήση της μεθόδου Finite Difference Time Domain-FDTD. Όλη η εργασία, συμπεριλαμβανομένων των κώδικων προγραμματισμού για την μοντελοποίηση των προβλημάτων έχουν γίνει εξ' ολοκλήρου από το γράφοντα. Οι γραφικές απεικονίσεις και προσομοιώσεις έγιναν στο πρόγραμμα Matlab της Mathworks. Αρχικά, γίνεται μία συνοπτική αναφορά στη θεωρία που χρειάζεται για την κατανόηση του ηλεκτρομαγνητισμού και των εξισώσεων Maxwell που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο FDTD. Στη συνέχεια, γίνεται λεπτομερής ανάλυση της μεθόδου FDTD και του αλγόριθμου Yee, που είναι ο πυρήνας της μεθόδου, και αναλυτική εξαγωγή των αλγορίθμων που χρειάζονται για τη μελέτη των προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής φύσης. Γίνεται επιπλέον μία μικρή ανάλυση στα υλικά και πως αυτά κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τις ιδιότητες που παρουσιάζουν, ενώ τέλος αναλύονται και οι υπολογιστικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των προβλημάτων. Η μελέτη των υλικών με διασπορά ξεκινά από τη 1 διάσταση. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται μελέτη του ελεύθερου χώρου και απλών προβλημάτων για την κατανόηση της μεθόδου FDTD και στη συνέχεια η μελέτη των υλικών Drude, Debye και Lorentz, καθώς επίσης και σύγκριση των αποτελεσμάτων των 3 υπολογιστικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται. Η ίδια μελέτη γίνεται και στις 2 διαστάσεις, μετά από αναλυτικό σχολιασμό της εξαγωγής του αλγόριθμου για τη μελέτη διδιάστατων υλικών. Τέλος, γίνεται θεωρητική και υπολογιστική μελέτη μεταϊλικών σε 2 διαστάσεις. Επιπρόσθετα, μετά από κάθε μελέτη και προσομοίωση για κάθε υλικό, ακολουθεί αναλυτικός σχολιασμός και συμπεράσματα για την ισχύ της μεθόδου FDTD και το κατά πόσο ικανοποιητικά είναι τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων σε σχέση με τη θεωρία που αναλύεται σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

Abstract

The current research was carried out as a graduate assignment (thesis) for the department of Physics of the National and Kapodistrian University of Athens, in the field of Condensed Matter Physics, under the supervision of Professor Kosmas L. Tsakmakidis. The study thoroughly examines the materials which present dispersion and metamaterials, with the use of simulation models in 1 and 2 dimensions using the Finite Difference Time Domain – FDTD method. The whole study including the programming codes for the modelisation of the problems have been carried out solely by the writer. The Matlab Mathwork program was used for the graphic illustrations and simulations. Initially, a brief reference to the theory is presented, which is necessary for the understanding of electromagnetism and Maxwell's equations, which are used in the FDTD method. Next, a detailed analysis of the FDTD method and the Yee algorithm is presented, which is the core of the method and analytical deduction of the algorithm needed for the study of electromagnetic problems. There is a brief analysis of the materials and how they are categorized according to the properties they present. Then, the computational methods that are used for solving the problems are analyzed. The study of the materials with dispersion (dispersive materials) begins with dimension 1. Specifically, the free space and simple problems are studied in order to understand the FDTD method and then the Drude, Debye and Lorentz materials are studied, in conjunction with a comparison of results of the 3 computational methods that are used. The same study is carried out on dimensions 2, after a thorough discussion of the extraction of the algorithm for the study of two-dimensional materials. Finally, there is a theoretical and computational study of metamaterials in 2 dimensions. Furthermore, every study and simulation for each material is followed by an analytical discussion and conclusion for the validity of the FDTD method and the extent to which the results of the simulations in relation to the theory is analyzed separately in each case.

Περιεχόμενα

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Εισαγωγική θεωρία | 1 |
| 1.1 | Εισαγωγή στην ηλεκτροδυναμική | 1 |
| 1.2 | Εισαγωγή στη μέθοδο FDTD | 3 |
| 1.3 | Υλικά στην ηλεκτρομαγνητική θεώρηση | 7 |
| 1.3.1 | Γενικά | 7 |
| 1.3.2 | Απλά διηλεκτικά υλικά | 7 |
| 1.3.3 | Διηλεκτικά υλικά με διασπορά | 8 |
| 1.3.4 | Γνωστά υλικά με διασπορά | 11 |
| 1.4 | Μέθοδοι που θα χρειαστούν στην επίλυση των προβλημάτων | 12 |
| 1.4.1 | Ανάλυση των 3 μεθόδων μετασχηματισμού από τον χώρο των συχνοτήτων στον χώρο του χρόνου | 12 |
| 1.4.2 | Μετασχηματισμός Fourier | 15 |
| 2 | Μελέτη της FDTD σε 1 διάσταση | 16 |
| 2.1 | Ελεύθερος χώρος | 16 |
| 2.1.1 | Συνοριακές συνθήκες | 18 |
| 2.2 | Διηλεκτρικά υλικά | 20 |
| 2.2.1 | Προσομοίωση διαφορετικών πηγών | 21 |
| 2.3 | Διηλεκτρικά υλικά με γραμμικές απώλειες | 24 |
| 3 | Υλικά με διασπορά σε 1 διάσταση | 27 |
| 3.1 | Υλικό Debye σε 1 διάσταση | 29 |
| 3.1.1 | Επίλυση με τη μέθοδο RC | 29 |
| 3.1.2 | Επίλυση με τη μέθοδο ADE | 32 |
| 3.1.3 | Επίλυση με τη μέθοδο μετασχηματισμού Z | 35 |
| 3.1.4 | Σύγκριση των αποτελεσμάτων των μεθόδων | 36 |
| 3.2 | Υλικό Drude σε 1 διάσταση | 38 |
| 3.2.1 | Επίλυση με τη μέθοδο RC | 39 |
| 3.2.2 | Επίλυση με τη μέθοδο ADE | 44 |
| 3.2.3 | Επίλυση με τη μέθοδο μετασχηματισμού Z | 47 |
| 3.2.4 | Σύγκριση 3 μεθόδων | 50 |
| 3.3 | Υλικό Lorentz σε 1 διάσταση | 52 |
| 3.3.1 | Επίλυση με τη μέθοδο RC | 53 |
| 3.3.2 | Επίλυση με τη μέθοδο ADE | 59 |
| 3.3.3 | Επίλυση με τη μέθοδο μετασχηματισμού Z | 62 |
| 3.3.4 | Σύγκριση 3 μεθόδων | 66 |
| 4 | Μελέτη της FDTD σε 2 διαστάσεις | 70 |
| 4.1 | Ελεύθερος χώρος | 70 |
| 4.2 | Προσομοίωση διαφορετικών πηγών | 73 |
| 4.3 | Απορροφητικές συνθήκες Mur | 77 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5 | Υλικά με διασπορά σε 2 διαστάσεις | 83 |
| 5.1 | Υλικό Lorentz σε 2 διαστάσεις | 83 |
| 5.2 | Υλικό Drude σε 2 διαστάσεις | 91 |
| 6 | Δομές μεταλλικών | 100 |
| 6.1 | Εισαγωγή | 100 |
| 6.2 | Μεταλλικά σε 2 διαστάσεις | 101 |
| 7 | Κώδικες | 111 |
| | Βιβλιογραφία | 170 |

1 Εισαγωγική θεωρία

1.1 Εισαγωγή στην ηλεκτροδυναμική

Όλη η ηλεκτρομαγνητική θεωρήση έχει βασιστεί στις εξισώσεις *Maxwell* [1]:

$$\text{Νόμος Faraday: } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{M} \text{ (διαφορική μορφή)} (1.1\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} d\vec{A} = - \oint_l \vec{E} d\vec{l} - \iint_A \vec{M} d\vec{A} \text{ (ολοκληρωτική μορφή)} (1.1\beta)$$

$$\text{Νόμος Ampere: } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{J} \text{ (διαφορική μορφή)} (1.2\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{D} d\vec{A} = - \oint_l \vec{H} d\vec{l} - \iint_A \vec{J} d\vec{A} \text{ (ολοκληρωτική μορφή)} (1.2\beta)$$

$$\text{Νόμος Gauss για ηλεκτρικό πεδίο: } \nabla \cdot \vec{D} = 0 \text{ (διαφορική μορφή)} (1.3\alpha)$$

$$\oint \oint_A \vec{D} d\vec{A} = 0 \text{ (ολοκληρωτική μορφή)} (1.3\beta)$$

$$\text{Νόμος Gauss για μαγνητικό πεδίο: } \nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ (διαφορική μορφή)} (1.4\alpha)$$

$$\oint \oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0 \text{ (ολοκληρωτική μορφή)} (1.4\beta)$$

Τα στοιχεία που εμφανίζονται στις εξισώσεις αυτές είναι τα εξής (με μονάδες μέτρησης):

\vec{E} : Ηλεκτρικό πεδίο (Volts/meter)

\vec{D} : Πυκνότητα ηλεκτρικής ροής (coulombs/meter²)

\vec{H} : Μαγνητικό πεδίο (ampers/meter)

\vec{B} : Πυκνότητα μαγνητικής ροής (weber/meter²)

A: Τροχιά 3Δ-επιφάνειας

$d\vec{A}$: Διαφορικό κανονικοποιημένο διάνυσμα που χαρακτηρίζει την επιφάνεια A (meter²)

l: Σύνορο επιφάνειας A

$d\vec{l}$: Διαφορικό διάνυσμα που χαρακτηρίζει το μήκος l

\vec{J} : Ηλεκτρικό ρεύμα (ampers/meter²)

\vec{M} : Μαγνητικό ρεύμα (volts/meter²).

Για τις ανάγκες της συγκεκριμένης εργασίας έχουμε υποθέσει ότι $\vec{J} = \vec{M} = 0$.

Κύριες εξισώσεις για την επίλυση των προβλημάτων είναι οι:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \text{ (1.5)}, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{H} \text{ (1.6).}}$$

Για γραμμικά, ιστροπικά, χωρίς διασπορά(δηλαδή χωρίς να έχουν ιδιότητες που εξαρτώνται από την συχνότητα,όπως θα δούμε παρακάτω) υλικά, η σχέση μεταξύ \vec{D} , \vec{E} και \vec{B} , \vec{H} είναι:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \text{ , } \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \text{ , όπου:}$$

ϵ :Ηλεκτρική επιδεκτικότητα(*farads/meter*)
 ϵ_0 :Επιδεκτικότητα κενού($8.854 * 10^{-12}$ *farads/meter*)
 ϵ_r :Σχετική επιδεκτικότητα(αδιάστατο μέγεθος)
 μ :Μαγνητική επιδεκτικότητα(*henrys/meter*)
 μ_0 :Μαγνητική επιδεκτικότητα κενού($4\pi * 10^{-7}$ *henrys/meter*)
 μ_r :Σχετική μαγνητική επιδεκτικότητα(αδιάστατο μέγεθος).

Έχοντας υπόψιν τα παραπάνω, οι εξισώσεις (1.5),(1.6) γίνονται:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \text{ (1.5α) και } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{B} \text{ (1.6α)}$$

Θα θεωρήσουμε ότι έχουμε *transverse – magnetic mode (TM_z)* σε 2 διαστάσεις, που περιλαμβάνει τα στοιχεία H_y, H_x, E_z για να λύσουμε τις εξισώσεις (1.5),(1.6). Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών είναι:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \text{ (1.7), } \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \text{ (1.8), } \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \text{ (1.9) .}$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις σε 1 διάσταση είναι(θεωρώντας ηλεκτρικό πεδίο στον z-άξονα και μαγνητικό πεδίο μόνο στον x-άξονα):

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} \text{ (1.10), } \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \text{ (1.11)}$$

Το παραπάνω σύνολο εξισώσεων θα μας απασχολήσουν κατά κύριο λόγο για την επίλυση των προβλημάτων που θα μελετηθούν. Θα επικεντρωθούμε στην λύση προβλημάτων σε 1 και 2 διαστάσεις, επομένως η περίπτωση των 3 διαστάσεων δεν θα αναλυθεί περαιτέρω.

1.2 Εισαγωγή στη μέθοδο FDTD

Αρχικά, για να αναλυθεί η μέθοδος Finite Differential Time Domain(FDTD) πρέπει να γίνει αναφορά στον πυρήνα της μεθόδου, τον αλγόριθμο του *Yee* [2]. Ο αλγόριθμος του *Yee* αποτελείται από ένα σύνολο εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών οι οποίες λύνουν τις χρονοεξαρτώμενες εξισώσεις του *Maxwell*, όπου αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 1.1. Το αξιοσημείωτο με τον αλγόριθμο του *Yee* είναι ότι μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο παράλληλα στον χρόνο και τον χώρο, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του *Maxwell*, από το να υπολογίζουμε ξεχωριστά το ηλεκτρικό πεδίο κάθε φορά και από εκεί το μαγνητικό πεδίο όπως ορίζει η εξίσωση κύματος, που είναι μία αρκετά χρονοβόρα διαδικασία.

Γενικά, θα δουλέψουμε σε 1 και 2 διαστάσεις, επομένως η ανάλυση θα γίνει για αυτές τις περιπτώσεις. Για την περίπτωση των 2 διαστάσεων έχουμε : $(i, j) = (i\Delta x, j\Delta y)$, με i τον αριθμό των βημάτων στον x -άξονα και j τον αριθμό των βημάτων στον y -άξονα. Εισαγάγοντας και τον χρόνο ως $n\Delta t$, με n τον αριθμό των χρονικών βημάτων, προκύπτει ο συμβολισμός, για οποιαδήποτε συνάρτηση u : $u(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) = u_{i,j}^n$ (1.2.1). Τα i, j, n είναι ακέραιοι, θετικοί αριθμοί.

Ο *Yee* χρησιμοποίησε την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (κεντρικών-διαφορών) για να κάνει τις μερικές παραγωγούς στον χρόνο και στον χώρο. Πιο συγκεκριμένα, η μερική παράγωγος της συνάρτησης u ως προς τον x -άξονα για δεδομένο χρόνο $t_n = n\Delta t$ θα είναι:

$$\frac{\partial u(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)}{\partial x} = \frac{u_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} \quad (1.2.2),$$

ενώ ως προς τον άξονα y θα είναι:

$$\frac{\partial u(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1/2}^n - u_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \quad (1.2.3)$$

και τέλος ως προς τον χρόνο θα είναι:

$$\frac{\partial u(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (1.2.4).$$

Στην 1 διάσταση, ομοίως, θα έχουμε:

$$\frac{\partial u(i\Delta x, n\Delta t)}{\partial x} = \frac{u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{\Delta x} \quad (1.2.5)$$

$$\frac{\partial u(i\Delta x, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1/2} - u_i^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (1.2.6).$$

Σημείωση: Ο υπολογιστής δεν δέχεται στο πρόγραμμα τις τιμές $\pm 1/2$, καθώς δέχεται μόνο ακέραιους αριθμούς. Επομένως, όπως θα δούμε και παρακάτω στις προσομοιώσεις τα $\pm 1/2$ θα γίνουν αντίστοιχα ± 1 .

Με βάση τα παραπάνω, θα γράψουμε τις εξισώσεις του *Maxwell* οι οποίες αναπτύχθηκαν στο εδάφιο (1.1) με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στις 2 και 1 διαστάσεις:

$$\frac{\partial H_{x(i,j)}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_{z(i,j)}}{\partial y} \Rightarrow \boxed{\frac{H_{x(i,j)}^{n+1} - H_{x(i,j)}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \frac{E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j)}^n}{\Delta y}} \quad (1.2.7)$$

$$\frac{\partial H_{y(i,j)}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_{z(i,j)}}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{H_{y(i,j)}^{n+1} - H_{y(i,j)}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \frac{E_{z(i+1,j)}^n - E_{z(i,j)}^n}{\Delta x}} \quad (1.2.8)$$

$$\frac{\partial E_{z(i,j)}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_{y(i,j)}}{\partial x} - \frac{\partial H_{x(i,j)}}{\partial y} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{E_{z(i,j)}^{n+1} - E_{z(i,j)}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i,j)}^n}{\Delta x} - \frac{H_{x(i,j+1)}^n - H_{x(i,j)}^n}{\Delta y} \right)} \quad (1.2.9), \text{για τις}$$

2 διαστάσεις.

$$\frac{\partial E_{z(i)}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_{x(i)}}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{E_{z(i)}^{n+1} - E_{z(i)}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{H_{x(i+1)}^n - H_{x(i)}^n}{\Delta x}} \quad (1.2.10)$$

$$\frac{\partial H_{x(i)}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_{z(i)}}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{H_{x(i)}^{n+1} - H_{x(i)}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \frac{E_{z(i+1)}^n - E_{z(i)}^n}{\Delta x}} \quad (1.2.11), \text{για τη 1}$$

διάσταση.

Εμείς θα υποθέσουμε ότι $\Delta x = \Delta y$ και ότι $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, όπου c_0 η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Σε πρώτη φάση οι εξισώσεις θα έχουν την μορφή:

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^n - \frac{1}{\mu} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j)}^n \right) \quad (1.2.7\alpha)$$

$$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^n + \frac{1}{\mu} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(E_{z(i+1,j)}^n - E_{z(i,j)}^n \right) \quad (1.2.8\alpha)$$

$$E_{z(i,j)}^{n+1} = E_{z(i,j)}^n + \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i,j)}^n - H_{y(i,j+1)}^n + H_{y(i,j)}^n \right) \quad (1.2.9\alpha)$$

$$E_{z(i)}^{n+1} = E_{z(i)}^n + \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(H_{x(i+1)}^n - H_{x(i)}^n \right) \quad (1.2.10\alpha)$$

$$H_{x(i)}^{n+1} = H_{x(i)}^n + \frac{1}{\mu} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(E_{z(i+1)}^n - E_{z(i)}^n \right) \quad (1.2.11\alpha)$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν ευραίως για τις ανάγκες των προσομοιώσεων. Ανάλογα με τις ανάγκες του προβλήματος, οι τελικές εξισώσεις θα αναγράφονται στο αντίστοιχο εδάφιο καθώς θα έχουμε αρκετές παραλλαγές ανάλογα με το εάν μελετάμε μία πηγή στον ελεύθερο χώρο ή εάν υπάρχει κάποιο υλικό, εάν το υλικό αυτό παρουσιάζει διασπορά στο ηλεκτρικό ή/και μαγνητικό πεδίο και άλλα. Η βασική διαφοροποίηση κάθε φορά ωστόσο, εντοπίζεται στους συντελεστές $\frac{1}{\epsilon}$ και $\frac{1}{\mu}$ οι οποίοι ανάλογα με το πρόβλημα παίρνουν διαφορετικές

μορφές και τιμές όπως θα δούμε παρακάτω.

Επίσης, πολύ σημαντικό στοιχείο για την κατασκευή του κώδικα που θα κάνουμε τις προσομοιώσεις των προβλημάτων που θα μελετήσουμε, είναι ο ρυθμός υπολογισμού του παράγοντα $\frac{\Delta t}{\Delta x}$. Αναφερόμενοι στον κενό χώρο, ένα κύμα δεν μπορεί να έχει ταχύτητα διάδοσης μεγαλύτερη από αυτήν της ταχύτητας του φωτός. Δηλαδή πρέπει πάντα $\frac{\Delta x}{\Delta t} = c_0 \implies \frac{\Delta t c_0}{\Delta x} = S$, όπου S ο παράγοντας αριθμητικής ευστάθειας. Για να λειτουργήσει σωστά το πρόγραμμα, και γενικότερα ο αλγόριθμος των πεπερασμένων διαφορών που αναπτύχθηκε παραπάνω, πρέπει ο παράγοντας σταθερότητας S να είναι $S \leq 1$. Για λόγους ευκολίας και σταθερότητας, σε όλες τις προσομοιώσεις έχει θεωρηθεί ότι ο παράγοντας $S=0.5$, δηλαδή $\Delta t = \frac{\Delta x}{2c_0}$ (1.2.11).

Συνήθως, το πρώτο μέγεθος που ορίζουμε σε ένα πρόβλημα είναι το μέγεθος της κυψελίδας που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε, Δx . Το μέγεθος της κυψελίδας κάθε φορά εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του προβλήματος που μελετάμε ή/και από τις πόσες κυψελίδες Δx θέλουμε να σχηματίζουν ένα μήκος κύματος (λ).

Για τον υπολογισμό του μήκους κύματος που διεγείρει η πηγή μας, χρησιμοποιούμε το φάσμα της πηγής, δηλαδή την εξίσωση της πηγής στο πεδίο των συχνοτήτων. Ένας εύκολος τρόπος να υπολογίζουμε κάθε φορά το μήκος κύματος που διεγείρει η πηγή, είναι να επιλέγουμε την κεντρική συχνότητα του παλμού που έχουμε ορίσει να διαδίδεται το ηλεκτρομαγνητικό κύμα (f_0) στον κενό χώρο (δηλαδή έχουμε ταχύτητα διάδοσης c_0) και να χρησιμοποιούμε την σχέση $\lambda = \frac{c_0}{f_0}$ (1.2.12α). Εδώ θα επιλέξουμε σε κάθε μήκος κύματος να 'χωράνε' 10 κυψελίδες συνολικά, επομένως η σχέση από την οποία θα υπολογίζουμε το Δx θα είναι :

$$\Delta x = \frac{\lambda}{10} \quad (1.2.12\beta).$$

Ο πιο σωστός τρόπος υπολογισμού του Δx ωστόσο, είναι να υπολογίζουμε από το γράφημα του φάσματος της πηγής, την τιμή της μέγιστης συχνότητας που διεγείρει η πηγή μας. Έτσι, θα υπολογίζουμε το ελάχιστο μήκος κύματος με το οποίο έχουμε διάδοση του παλμού, από την σχέση $\lambda_{min} = \frac{c_0}{f_{0(max)}}$ (1.2.12γ)

και κατ' επέκταση το Δx θα υπολογίζεται τελικά από την σχέση $\Delta x = \frac{\lambda_{min}}{10}$ (1.2.12δ).

Αφού έχουμε υπολογίσει το Δx υπολογίζουμε και το Δt , από την σχέση (1.2.11).

Έχοντας κάνει όλη την παραπάνω ανάλυση, έχουμε τα απαραίτητα εφόδια για να αποφανθούμε με τι θα ισούται τελικά ο παράγοντας $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ που επηρεάζεται στις εξισώσεις του αλγορίθμου. Παίρνουμε ως παράδειγμα την πιο απλή περίπτωση της σχέσης (1.2.10α) στον ελεύθερο χώρο όπου $\epsilon = \sqrt{\epsilon_0}$, $\epsilon_r = 1$:

$$E_{z(i)}^{n+1} = E_{z(i)}^n + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(H_{x(i+1)}^n - H_{x(i)}^n \right).$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\sqrt{\mu_0}$ και τα δύο μέρη της εξίσωσης και θεωρούμε ότι ο παράγοντας $\sqrt{\mu_0}$ απορροφάται από το ηλεκτρικό πεδίο E_z με κατάλληλο μετασχηματισμό. Έτσι, δεδομένου ότι $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, προκύπτει :

$$E_{z(i)}^{n+1} = E_{z(i)}^n + c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(H_{x(i+1)}^n - H_{x(i)}^n \right), \text{ όπου από την σχέση (1.2.11) τελικά προκύπτει:}$$

$$E_{z(i)}^{n+1} = E_{z(i)}^n + 0.5 \left(H_{x(i+1)}^n - H_{x(i)}^n \right).$$

Με την ίδια λογική είναι εύκολο να υπολογίζουμε κάθε φορά τον παράγοντα που εμφανίζεται στον αλγόριθμό μας, υπό την προϋπόθεση ότι βρισκόμαστε στον κενό χώρο και $\epsilon = \sqrt{\epsilon_0}$.

Είναι πολύ σημαντικό όταν μελετάμε τα προβλήματα και εκτελούμε τις προσομοιώσεις, η τιμή του Δt να είναι πάντα τέτοια ώστε να μην υπερβαίνει την τιμή $\frac{\Delta x}{c_0}$. Σε περίπτωση που η τιμή του Δt ξεπερνάει αυτήν την οριακή τιμή, τότε το πρόγραμμά μας θα τρέξει εντελώς λανθασμένα, ειδικά σε μεγάλους χρόνους.

Περαιτέρω ανάλυση της βασικής θεωρίας της μεθόδου *FDTD* θα γίνει παρακάτω, εξατομικευμένα όπου χρειάζεται ανάλογα με το πρόβλημα που μελετάμε, όπως για παράδειγμα στα υλικά με διασπορά, τις μεθόδους επίλυσης, τις απορροφητικές συνθήκες όπου χρειάζεται και άλλα.

1.3 Υλικά στην ηλεκτρομαγνητική θεωρήση

1.3.1 Γενικά

Στην καθημερινότητά μας συναντάμε πλήθος υλικών. Αυτά που μας απασχολούν περισσότερο για την μελέτη αλλά και τις απεριόριστες εφαρμογές τους είναι τα υλικά που χωρίζονται σε 3 μεγάλες κατηγορίες: αγωγοί, μονωτές και διηλεκτρικά. Οι αγωγοί είναι τα υλικά που περιέχουν απεριόριστο απόθεμα ηλεκτρονίων που κινούνται ελεύθερα προς κάθε κατεύθυνση στο εσωτερικό τους, επομένως για παράδειγμα όταν έχουμε να μελετήσουμε έναν αγωγό μπορούμε να τον προσομοιώνουμε με τον ελεύθερο χώρο. Ένας μονωτής αντιθέτως, δεν επιτρέπει στα ηλεκτρόνια να κινηθούν στο εσωτερικό του, επομένως είναι σαν τα ελεύθερα ηλεκτρόνια να προσκρούουν σε τοίχωμα που δεν έχουν την δυνατότητα να διαπεράσουν. Ένας μονωτής μπορεί να προσομοιωθεί κυρίως με την θεωρήση ενός μεταλλικού υλικού στα σύνορα του προβλήματος που μελετάμε. Η σημαντικότερη και πιο ενδιαφέρουσα κατηγορία, που θα μελετηθεί εκτενώς παρακάτω, είναι αυτή των ημιαγωγών (ή καλύτερα, διηλεκτρικών). Στην κατηγορία αυτή, τα ηλεκτρόνια εντός του υλικού, είναι προσκολλημένα πάνω σε συγκεκριμένα άτομα ή μόρια και έχουν την δυνατότητα να κινούνται λίγο στο εσωτερικό του υλικού. Στην γενική περίπτωση, η ηλεκτρική επιδεκτικότητα ϵ και η μαγνητική διαπερατότητα μ ισούται με 1 στην περίπτωση των αγωγών, ενώ με 0 στην περίπτωση των μονωτών. Τα υλικά αυτά, είναι υλικά με διασπορά στο ηλεκτρικό πεδίο και οι ιδιότητές τους εξαρτώνται από την επιδεκτικότητα ϵ η οποία τώρα είναι συνάρτηση της συχνότητας. Δηλαδή, ανάλογα με την συχνότητα συντονισμού και άλλες παραμέτρους που θα αναλυθούν παρακάτω, τα υλικά αυτά μπορούν να συμπεριφέρονται είτε σαν αγωγοί, είτε σαν μονωτές. Μία εξειδικευμένη περίπτωση υλικών με διασπορά, αποτελούν τα μεταύλικά, όπου εκεί έχουμε ένα πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο καθώς έχουμε υλικά που παρουσιάζουν διασπορά στο ηλεκτρικό αλλά και στο μαγνητικό πεδίο, δηλαδή υλικά στα οποία η ηλεκτρική επιδεκτικότητα ϵ αλλά και η μαγνητική διαπερατότητα μ είναι συναρτήσεις της συχνότητας. Παρακάτω θα αναλυθούν κάποιες κατηγορίες υλικών, ποιοτικά, με τις αναλυτικές σχέσεις ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου να βρίσκονται στην εκάστοτε προσομοίωση [3].

1.3.2 Απλά διηλεκτρικά υλικά

Η πιο απλή περίπτωση υλικών που παρατηρούμε συμπεριφορά διαφορετική από αυτήν στον ελεύθερο χώρο, είναι αυτή των διηλεκτρικών υλικών. Τότε το μόνο που αλλάζει, είναι στον χώρο που ορίζουμε εμείς στο πρόβλημά μας μία ηλεκτρική επιδεκτικότητα διαφορετική της μονάδας, ας την ονομάσουμε ϵ_1 , δηλαδή αλλάζει το ϵ_r . Τότε θα έχουμε διαφοροποίηση στον παλμό μας στο σημείο που ξεκινάει το διηλεκτρικό, χωρίς ωστόσο στον χώρο του υλικού ο παλμός να αλλάζει ξανά.

Στην δεύτερη περίπτωση των διηλεκτρικών έχουμε τα διηλεκτρικά υλικά με απώλειες. Αυτό σημαίνει τώρα ότι υπάρχει αγωγιμότητα και ρεύμα αγωγιμότητας αντίστοιχα που επηρεάζεται στις εξισώσεις του *Maxwell*. Τότε, θα έχουμε έναν χώρο στο πρόβλημά μας ο οποίος θα έχει διαφορετική επιδεκτικότητα ϵ_1 αλλά

και έναν επιπλέον όρο αγωγιμότητας ο οποίος θα λειτουργεί ως απόσβεση, με αποτέλεσμα ο παλμός να φθίνει εντός του διηλεκτρικού υλικού.

1.3.3 Διηλεκτικά υλικά με διασπορά

Η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην ύλη καθορίζεται από 3 βασικές ιδιότητες του υλικού, την επιδεκτικότητα ϵ , την διαπερατότητα μ και την αγωγιμότητα σ . Στην πραγματικότητα, κάθε μία από αυτές τις παραμέτρους εξαρτάται από την συχνότητα των κυμάτων που χρησιμοποιούμε και σταθερές που καθορίζουν τις ιδιότητες του υλικού που μελετάμε. Τέτοια υλικά ονομάζονται **μέσα με διασπορά** [4]. Το χαρακτηριστικό των μέσων με διασπορά είναι ότι η ταχύτητα του κύματος εξαρτάται από την συχνότητά του. Η ταχύτητα του κύματος ονομάζεται κυματική (ή φασική) ταχύτητα και ορίζεται ως $u = \frac{\omega}{k}$, όπου ω : συχνότητα κύματος και k : το κυματόνυσμά του. Εάν δεν έχουμε εξάρτηση από την συχνότητα, τότε η κυματική ταχύτητα ισούται με την ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό, c_0 , και το κύμα συμπεριφέρεται σαν να βρίσκεται σε αγωγίμο μέσο, δηλαδή στον ελεύθερο χώρο. Μπορούμε να πούμε δηλαδή ότι στον κενό χώρο ισχύει $c_0^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ ενώ σε ένα υλικό με διασπορά ισχύει $u^2 = \frac{1}{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$.

Για να εξηγήσουμε την εξάρτηση των χαρακτηριστικών της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην ύλη, χρησιμοποιούμε ένα απλοποιημένο μοντέλο για την συμπεριφορά των ηλεκτρονίων σε διηλεκτρικά μέσα. Θεωρούμε ότι τα ηλεκτρόνια ταλαντώνονται γύρω από μία θέση ισορροπίας, όπου βρίσκονται τα μόρια που είναι προσκολλημένα τα ηλεκτρόνια. Θα έχουμε αρχικά μία δύναμη δεσμού, όμοια με τη δύναμη ενός ελατηρίου σταθεράς $k_{e\lambda}$: $F_\delta = -k_{e\lambda}x = -m\omega_0^2x$, όπου x η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, m η μάζα του ηλεκτρονίου και ω_0 η φυσική συχνότητα ταλάντωσης. Η δεύτερη δύναμη που επεισέρχεται σε αυτήν την απλή θεώρηση, είναι αυτή της απόσβεσης λόγω ταλάντωσης: $F_{\alpha\pi} = -m\gamma \frac{dx}{dt}$, όπου η παράμετρος γ είναι ένα μετρήσιμο μέγεθος των συγχρούσεων των ηλεκτρονίων εντός του μορίου στην μονάδα του χρόνου και $\frac{dx}{dt}$ η ταχύτητα \dot{x} . Συνήθως χρησιμοποιούμε τον όρο $t_0 = 1/\gamma$ που ορίζει τον μέσο χρόνο μεταξύ των συγχρούσεων αυτών. Τέλος, παρουσία ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος συχνότητας ω , πολωμένου στη διεύθυνση x , στο ηλεκτρόνιο θα ασκείται η κινητήρια δύναμη: $F_\kappa = qE$, όπου q το φορτίο του ηλεκτρονίου(e) και E το ηλεκτρικό πεδίο. Έτσι, από τον δεύτερο νόμο του *Newton* γίνεται:

$$m\ddot{x} = F_{o\lambda} = F_\delta + F_{\alpha\pi} + F_\kappa \implies \boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{q}{m}E} \quad (1.3.1).$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την γενική κατάσταση που ακολουθεί κάθε γνωστό διηλεκτρικό υλικό. Έτσι υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες που χωρίζονται ως εξής:

- Διηλεκτρικά, $\omega_0 \neq 0, \gamma \neq 0$.
- Αγωγοί, $\omega_0 = 0, \gamma = 0$, όπως προαναφέρθηκε.
- *Plasma*, $\omega_0 \neq 0, \gamma = 0$.

Θεωρούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει ημιτονοειδή εξάρτηση συχνότητας ω , δηλαδή $E(t) = E_0 e^{j\omega t}$. Τότε η εξίσωση (1.3.1) θα έχει την λύση $x(t) = x_0 e^{j\omega t}$, όπου το x πρέπει να ικανοποιεί την μιγαδική αναπαράσταση της (1.3.1) η οποία είναι, αντικαθιστώντας την τελεστή $\partial_t \rightarrow j\omega$:

$$-mx + j\omega\gamma x + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E \quad (1.3.1a).$$

Με την παραπάνω προσέγγιση ουσιαστικά θεωρούμε ότι με τις μικρές αυτές ταλαντώσεις εξαιτίας της εφαρμογής ηλεκτρικού πεδίου δημιουργούνται ηλεκτρικά δίπολα με διπολική ροπή $p = ex$. Τότε, η ροπή ανά μονάδα όγκου, για N ηλεκτρόνια θα γίνει:

$$P = Np = Nex = \frac{Ne^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma} E = \epsilon_0 \chi(\omega) E.$$

Η ηλεκτρική μετατόπιση ($D = \epsilon_0 E + P$) θα γίνει $D = \epsilon_0(1 + \chi(\omega))E = \epsilon(\omega)E$. Δηλαδή, το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει άμεση εξάρτηση πια από την συχνότητα του κύματος και τις ιδιότητες του υλικού. Τότε η επιδεκτικότητα θα έχει άμεση εξάρ-

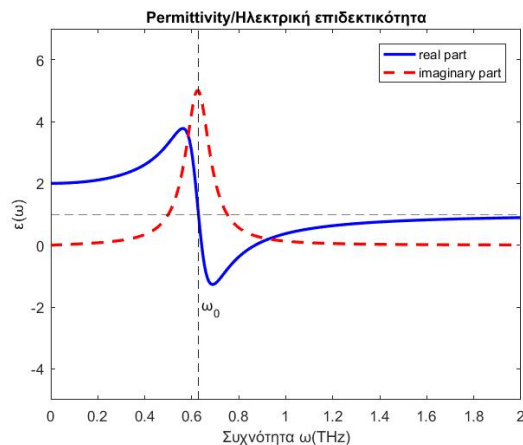
τηση από την συχνότητα και θα ισούται με $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma}$, όπου

ορίζοντας ως συχνότητα πλάσματος $\omega_p = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$, γίνεται τελικά:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma} \quad (1.3.2).$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτή η σχέση είναι γνωστή και ως σχέσης διασποράς στο μοντέλο *Lorentz*. Ωστόσο οι εφαρμογές της ποικίλουν ανάλογα με τις ιδιότητες που επιλέγουμε.

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την βάση για την μελέτη των υλικών με διασπορά που θα μελετήσουμε παρακάτω. Το πραγματικό μέρος της διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon(\omega)$ αφορά τις διαθλαστικές ιδιότητες του υλικού, ενώ το φανταστικό μέρος τις απορροφητικές ιδιότητες του υλικού. Μία ποιοτική αναπαράσταση, ώστε να δούμε αυτές τις ιδιότητες γραφικά, βρίσκεται παρακάτω για τυχαίες τιμές της κεντρικής συχνότητας ω_0 .



Σχήμα 1: Πραγματικό και φανταστικό μέρος της ηλεκτρικής επιδεκτικότητας

Το Γράφημα 1.3.1 παραπάνω αποτελεί μία ποιοτική γραφική αναπαράσταση της εξίσωσης (1.3.2). Παρατηρούμε ότι στην περιοχή της κεντρικής συχνότητας του υλικού ω_0 , το $\epsilon(\omega)$ παρουσιάζει μία ανώμαλη συμπεριφορά. Πιο συγκεκριμένα, για το πραγματικό μέρος παρατηρούμε ότι πέφτει απότομα παρουσιάζοντας ισχυρή απορρόφηση του κύματος. Για συχνότητες μακριά από την συχνότητα συντονισμού, το υλικό φαίνεται να παρουσιάζει κανονική διασπορά. Μάλιστα, για συχνότητες αρκετά μεγαλύτερες από ω_0 το πραγματικό μέρος του $\epsilon(\omega)$ τείνει στο ϵ_0 που εδώ ισούται με 1. Για το φανταστικό μέρος, παρατηρούμε ότι μακριά από την συχνότητα συντονισμού μηδενίζεται, επομένως σε εκείνες τις περιοχές έχουμε μηδενική, ή ελάχιστη, απορρόφηση του κύματος από το υλικό. Στο ω_0 παρουσιάζει την μέγιστη απορρόφηση, το πραγματικό μέρος μηδενίζεται ενώ το φανταστικό μέρος γίνεται μέγιστο.

Όλα τα παραπάνω έχουν μεγάλη σημασία όταν τα μελετάμε σε σύγκριση με το φάσμα της πηγής που χρησιμοποιούμε. Δηλαδή, με την απεικόνιση της πηγής στο πεδίο των συχνοτήτων. Θα δούμε παρακάτω στις προσομοιώσεις, πόσο διαφορετικά συμπεριφέρεται το ηλεκτρικό πεδίο ανάλογα σε ποιο εύρος συχνοτήτων έχουμε ορίσει την πηγή μας, δηλαδή τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Για να υπολογίζουμε το φάσμα της πηγής χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό *Fourier* της πηγής.

1.3.4 Γνωστά υλικά με διασπορά

Στην παρούσα εργασία θα επικεντρωθούμε στην επίλυση προβλημάτων με συγκεκριμένα υλικά. Κάποια από τα υλικά/μοντέλα είναι:

- Υλικό **Debye**: $\epsilon(\omega) = \epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} + \frac{\chi_1}{1 + j\omega t_0}$,

όπου ϵ_r η διηλεκτρική σταθερά, σ η αγωγιμότητα, χ_1 κάποια σταθερά που σχετίζεται με την ηλεκτρική επιδεκτικότητα.

- Υλικό **plasma**, ή υλικό **Drude** : $\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega(j\nu_c - \omega)}$,

όπου $\omega_p = 2\pi f_p$ με f_p η συχνότητα πλάσματος, ν_c η συχνότητα κρούσεων των ηλεκτρονίων (αντίστοιχη του γ που ορίσαμε παραπάνω).

- Υλικό **Lorentz**: $\epsilon(\omega) = \epsilon_r + \frac{\epsilon_1}{1 + j2\delta_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$,

όπου ϵ_1 σταθερά, ω_0 η κεντρική συχνότητα του υλικού, δ_0 μία σταθερά.

Για να υπολογίσουμε την ηλεκτρική μετατόπιση τώρα και κατ' επέκταση το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, θα έχουμε σχέσεις με διασπορά της μορφής:

$D(\omega) = \epsilon_0 E(\omega)$. Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι στον χώρο των συχνοτήτων.

Εμείς θέλουμε να τις μετατρέψουμε στον χώρο του χρόνου ώστε να μπορούμε να τρέξουμε τις προσομοιώσεις και να πάρουμε τα ζητούμενα αποτελέσματα. Για να γίνει ο αλγόριθμος αυτός, υπάρχουν τρεις μέθοδοι οι οποίες θα αναπτυχθούν λεπτομερώς παρακάτω. Επιγραμματικά είναι οι :

- **Recursive Convolution Method**, εφεξής θα γράφεται ως μέθοδος *RC*.
- **Auxilliary Differential Equation Method**, εφεξής θα γράφεται ως μέθοδος *ADE*.
- **Z-transform Method**, εφεξής θα γράφεται ως μέθοδος μετασχηματισμού *Z*.

1.4 Μέθοδοι που θα χρειαστούν στην επίλυση των προβλημάτων

Θα μιλήσουμε λεπτομερώς για τις 3 μεθόδους που θα χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε τα προβλήματα σε υλικά με διασπορά, καθώς επίσης και για τον μετασχηματισμό *Fourier* που είναι πολύ σημαντικός για να βγάζουμε ασφαλή συμπεράσματα από τους υπολογισμούς μας.

1.4.1 Ανάλυση των 3 μεθόδων μετασχηματισμού από τον χώρο των συχνοτήτων στον χώρο του χρόνου

Για ευκολία και καλύτερη κατανόηση των μεθόδων, θα χρησιμοποιήσουμε μία πάρα πολύ απλή περίπτωση όπου η διηλεκτρική σταθερά ϵ εξαρτάται από το ω ως $\epsilon \propto \frac{1}{j\omega}$. Θεωρούμε την επιδεκτικότητα $\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0}$, όπου σ η αγωγιμότητα και ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά στο κενό, που περιγράφει ένα απλό υλικό που παρουσιάζει απώλειες. Τότε, η ηλεκτρική μετατόπιση θα ισούται με $D(\omega) = \epsilon(\omega)E(\omega) \Rightarrow D(\omega) = E(\omega) + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0}E(\omega)$ (1.4.1α). Ο πρώτος όρος είναι απλά μία σταθερά, ίση με τη μονάδα μάλιστα, η οποία όταν κάνουμε την μετατροπή στο πεδίο του χρόνου δεν θα αλλάξει. Ο δεύτερος όρος μας ενδιαφέρει, που υπάρχει ο παράγοντας $\frac{1}{j\omega}$.

Στην μέθοδο **RC**, στην ουσία χρησιμοποιούμε την ανάλυση *Fourier* για να κάνουμε μετατροπή από το πεδίο των συχνοτήτων στο πεδίο του χρόνου. Ο παράγοντας $\frac{1}{j\omega}$, από την ανάλυση *Fourier* θα μας δώσει ένα ολοκλήρωμα στο πεδίο του χρόνου. Επομένως η ηλεκτρική μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου θα είναι:

$$D(t) = E(t) + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^t E(t') dt' \quad (1.4.1\beta)$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να προσεγγιστεί ως άθροισμα n χρονικών βημάτων Δt :

$$\int_0^t E(t') dt' \Rightarrow \Delta t \sum_{i=0}^n E^i.$$

Άρα η εξίσωση (1.4.1β) θα γίνει $D^n(t) = E^n(t) + \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} \sum_{i=0}^n E^i$ (1.4.1γ), καθώς

τώρα τα πεδία E , D ορίζονται για χρόνο $t = n\Delta t$. Για να υπολογίσουμε τη σχέση για το ηλεκτρικό πεδίο την χρονική στιγμή t , δηλαδή τον όρο E^n , χωρίζουμε τον n -οστό όρο του αθροίσματος που μας δίνει το E^n . Προκύπτει δηλαδή:

$D^n = E^n + \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} E^n + \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} \sum_{i=0}^{n-1} E^i$. Λύνοντας ως προς τον παράγοντα E^n παίρνουμε:

$$E^n = \frac{D^n - \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} E^i \right)}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0}} \quad (1.4.2).$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο από την τρέχουσα τιμή του, την τρέχουσα τιμή του D και τις προηγούμενες τιμές του E . Θα θέσουμε για ευκολία στους υπολογισμούς τον όρο του αθροίσματος ως:

$$I^n = \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} \sum_{i=0}^{n-1} E^i.$$

Τελικά, έχουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων, που μας δίνουν την ζητούμενη του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε χρονική στιγμή $t = n\Delta t$ και χωρικό σημείο (i σε 1 διάσταση, ή (i, j) σε 2 διαστάσεις):

$$\boxed{E^n = \frac{D^n - I^{n-1}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0}}, \quad I^n = I^{n-1} + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} E^n} \quad (1.4.3)$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το άθροισμα που υπάρχει στην εξίσωση (1.4.2) απλά, σε κάθε σημείο n , προσθέτει την τιμή του E^n με τον σταθερό όρο στις προηγούμενες τιμές του αθροίσματος για $n - 1$. Επομένως δεν είναι απαραίτητο να αποθηκεύει ο αλγόριθμός μας όλες τις τιμές του E^n από το 0 έως το n .

Στην μέθοδο **ADE**, χρησιμοποιούμε κατά κύριο λόγο το γεγονός ότι η παράγωγος ενός μεγέθους μπορεί να υπολογιστεί ως πράξεις πεπερασμένων διαφορών. Γράφουμε την εξίσωση (1.4.1α) στην μορφή $D(\omega) = E(\omega) + S(\omega)$, όπου $S(\omega) = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} E(\omega)$. Τότε, θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο μέσω της νέας συνάρτησης $S(\omega)$. Έχουμε $(j\omega\epsilon_0)S(\omega) = \sigma E(\omega)$. Στο πεδίο του χρόνου το $j\omega$ γίνεται πρώτη παράγωγος ως προς τον χρόνο, δηλαδή θα έχουμε στο πεδίο του χρόνου :

$$\epsilon_0 \frac{dS(t)}{dt} = \sigma E(t).$$

Για τον υπολογισμό της παραγώγου χρησιμοποιούμε την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, που μας δίνει $\frac{dS(t)}{dt} = \frac{S^n - S^{n-1}}{\Delta t}$. Το S προσεγγίζεται για δύο χρονικά βήματα που χρειάζονται για τον υπολογισμό της παραγώγου. Εάν είχαμε όρο $(j\omega)^2$ τότε θα είχαμε υπολογισμό δεύτερης παραγώγου ως προς τον χρόνο που θα υπολογιζόταν ως εξής: $\frac{d^2 S(t)}{dt^2} = \frac{S^n - 2S^{n-1} + S^{n-2}}{\Delta t^2}$. Εδώ προ-

κύπτει $\epsilon_0 \frac{S^n - S^{n-1}}{\Delta t} = \sigma E^n$ και λύνοντας ως προς S^n παίρνουμε:

$$S^n = S^{n-1} + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} E^n \quad (1.4.4)$$

Τελικά, το ηλεκτρικό πεδίο θα υπολογίζεται από την σχέση:

$$E^n = \frac{D^n - S^{n-1}}{1 + \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0}}, S^n = S^{n-1} + \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} E^n \quad (1.4.5).$$

Τέλος, στην μέθοδο μετασχηματισμού \mathbf{Z} , χρησιμοποιούμε μία πιο άμεση ανάλυση καθώς μετατρέπουμε τις εξισώσεις από το πεδίο των συχνοτήτων στο πεδίο του Z με τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

| Πεδίο συχνοτήτων | Πεδίο Z |
|---|--|
| 1 | 1 |
| $\frac{1}{j\omega}$ | $\frac{1}{1 - z^{-1}}$ |
| $\frac{1}{(j\omega)^2}$ | $\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$ |
| $\frac{1}{\alpha + j\omega}$ | $\frac{1}{1 - z^{-1}e^{-\alpha\Delta t}}$ |
| $\frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2) + j2\alpha\omega - \omega^2}$ | $\frac{e^{-\alpha\Delta t} \sin(\beta\Delta t) z^{-1}}{1 - 2e^{-\alpha\Delta t} \cos(\beta\Delta t) z^{-1} + e^{-2\alpha\Delta t} z^{-2}}$ |
| $\frac{\alpha + j\omega}{(\alpha^2 + \beta^2) + j2\alpha\omega - \omega^2}$ | $\frac{e^{-\alpha\Delta t} \cos(\beta\Delta t) z^{-1}}{1 - 2e^{-\alpha\Delta t} \cos(\beta\Delta t) z^{-1} + e^{-2\alpha\Delta t} z^{-2}}$ |

Στην περίπτωση που μελετάμε, έχουμε $\frac{1}{j\omega} \Rightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}$. Επομένως η εξίσωση (1.4.1α) θα γίνει:

$$D(z) = E(z) + \frac{\sigma\Delta t/\epsilon_0}{1 - z^{-1}} E(z). \text{ Ορίζουμε και πάλι τον δεύτερο όρο ως}$$

$$S(z) = \frac{\sigma\Delta t/\epsilon_0}{1 - z^{-1}} E(z) = z^{-1} S(z) + \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} E(z). \text{ Άρα το } D(z) \text{ θα γίνει:}$$

$$D(z) = E(z) + z^{-1} S(z) + \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} E(z) \quad (1.4.6). \text{ Λύνοντας ως προς το ηλεκτρικό πεδίο } E(z) \text{ προκύπτει: } E(z) = \frac{D(z) - z^{-1} S(z)}{1 + \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0}}.$$

Για να μετατρέψουμε την συνάρτηση αυτή από το πεδίο του Z στο πεδίο του χρόνου, αντικαθιστούμε το $E(z)$ με $E^n, z^{-1} E(z)$ με E^{n-1} και αν υπάρχει όρος ανώτερης τάξης, όπως $z^{-2}, z^{-2} E(z)$ με E^{n-1} . Τελικά, προκύπτει ακριβώς η ίδια εξίσωση με τις άλλες δύο μεθόδους που μελετήσαμε παραπάνω:

$$E^n = \frac{D^n - S^{n-1}}{1 + \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0}}, S^n = S^{n-1} + \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} E^n \quad (1.4.7).$$

Το γεγονός ότι και οι 3 τρόποι μας έδωσαν ίδιες εξισώσεις οφείλεται στην απλή μορφή που πήραμε για την διηλεκτρική σταθερά. Όπως θα δούμε παρακάτω σε πιο περίπλοκα συστήματα, έχει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον η μελέτη των αποτελεσμάτων που δίνουν οι 3 μέθοδοι και οι σχετικές προσεγγίσεις που γίνονται.

1.4.2 Μετασχηματισμός Fourier

Ο μετασχηματισμός *Fourier* είναι ένα πάρα πολύ χρήσιμο εργαλείο καθώς μας επιτρέπει την μετατροπή συναρτήσεων που ορίζονται στο πεδίο του χρόνου σε συναρτήσεις που ορίζονται στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα. Στην ανάλυση των κυμάτων είναι πολύ σημαντικό όταν έχουμε μία πηγή, για παράδειγμα Γκαουσιανή ή ημιτονοειδή, να γνωρίζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση στο πεδίο των συχνοτήτων και από εκεί να εξαγάγουμε το φάσμα της πηγής και κατά συνέπεια το μήκος κύματος που διεγείρει η εκάστοτε πηγή. Έτσι μπορούμε για παράδειγμα να υπολογίσουμε τα αντίστοιχα dx, dt όπως αυτά ορίστηκαν παραπάνω.

Ο μετασχηματισμός *Fourier* για μία συνάρτηση $f(t)$, t πραγματικός αριθμός και ω η συχνότητα, ορίζεται ως:

$$\hat{f}(\omega) = \int f(x)e^{-it\omega} dt, f(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\omega)e^{i\omega} d\omega \quad (1.4.8)$$

Οι υπολογισμοί μπορεί να είναι περίπλοκοι πολλές φορές, ωστόσο στην παρούσα εργασία δεν θα μας απασχολήσουν τόσο. Αυτό διότι όλη η ανάλυση και η μελέτη που χρειάζεται γίνεται μέσω του λογισμικού *Matlab* της *Mathworks*, όπου έχει έτοιμη την εντολή *fft* που μας δίνει απευθείας τον μετασχηματισμό *Fourier* της ζητούμενης συνάρτησης ορίζοντας απλά κάποιες παραμέτρους.

2 Μελέτη της FDTD σε 1 διάσταση

2.1 Ελεύθερος χώρος

Για αρχή, θα μελετήσουμε την μέθοδο *FDTD* στο πιο απλό ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα που υπάρχει. Θα θεωρήσουμε έναν παλμό, Γκαουσιανό, ο οποίος διαδίδεται σε 1 διάσταση στον ελεύθερο χώρο.

Θεωρούμε ότι έχουμε ηλεκτρικό πεδίο στην x κατεύθυνση και μαγνητικό πεδίο στην y κατεύθυνση. Τότε οι εξισώσεις του *Maxwell* για τον ελεύθερο χώρο θα είναι:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

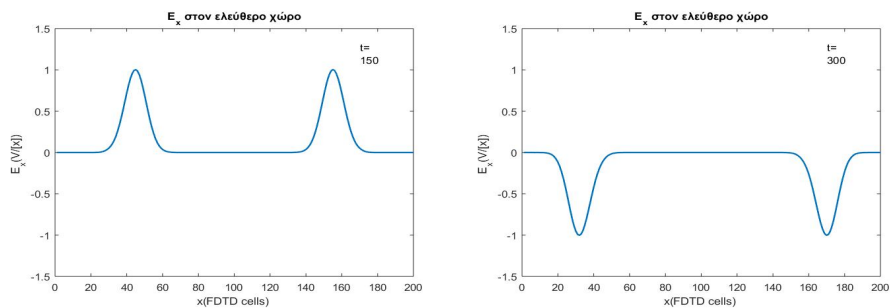
Παίρνουμε κεντρικές διαφορές για τις μερικές παραγώγους και προκύπτει:

$$\frac{E_{x(i)}^{n+1} - E_{x(i)}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{H_{y(i+1)}^n - H_{y(i)}^n}{\Delta x}, \quad \frac{H_{y(i)}^{n+1} - H_{y(i)}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \frac{E_{x(i+1)}^n - E_{x(i)}^n}{\Delta x}$$

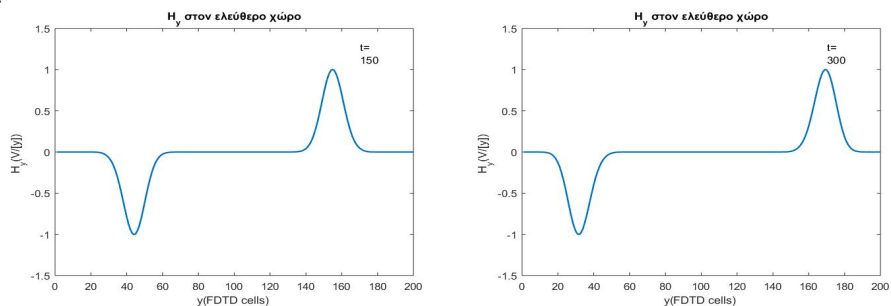
Κάνοντας τις προσεγγίσεις που αναλύσαμε στην θεωρία, τελικά προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$E_{x(i)}^{n+1} = E_{x(i)}^n + 0.5 * (H_{y(i+1)}^n - H_{y(i)}^n) \quad \text{και} \\ H_{y(i)}^{n+1} = H_{y(i)}^n + 0.5 * (E_{x(i)}^n - E_{x(i+1)}^n).$$

Για να αναπαραστήσουμε γραφικά τις παραπάνω σχέσεις και να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο χρησιμοποιούμε έναν Γκαουσιανό παλμό στο κέντρο του χώρου. Ο παλμός είναι της μορφής $pulse = exp(-0.5 * \left(\frac{t - t_0}{\sigma}\right)^2)$, όπου $t = n\Delta t$ όπως είπαμε, t_0 μία σταθερά που έχει να κάνει με την χρονική στιγμή της έναρξης του παλμού και σ το πόσο θα "απλώνεται" ο παλμός (η διασπορά της Γκαουσιανής). Επιλέγουμε έναν χώρο με 200 κελιά, δηλαδή το $x = i\Delta x = 200$ και παίρνουμε τα στιγμιότυπα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου για δύο χρονικές στιγμές. Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει για την πηγή $t_0 = 40$ και $\sigma = 12$. Τα αποτελέσματα είναι τα εξής (ο κώδικας βρίσκεται στο παράρτημα, 1.1):



Σχήμα 2: Ηλεκτρικό πεδίο στον ελεύθερο χώρο.



Σχήμα 3: Μαγνητικό πεδίο στον ελεύθερο χώρο.

Παρατηρούμε ότι ο παλμός ανακλάται όταν φτάνει στα τοιχώματα του προβλήματος. Γενικά, βλέπουμε πως συμπεριφέρεται η πηγή που έχει τοποθετηθεί στο κέντρο του χώρου του προβλήματος ($x = y = 100$) και έχει ομαλή διάδοση του παλμού καθώς δεν υπάρχει κάποιο υλικό για να την διαφοροποιήσει. Ουσιαστικά, το πρόγραμμα υπολογίζει τις τιμές E_x και E_y ξεχωριστά. Αφού υπολογιστούν οι τιμές του E_x , υπολογίζεται η τιμή της πηγής. Ουσιαστικά απλά θέτουμε μία τιμή του E_x στο κελί που θέλουμε να ξεκινάει ο παλμός μας. Τέτοιου είδους πηγές, ονομάζονται *hard source* καθώς θέτουμε μία συγκεκριμένη τιμή σε συγκεκριμένο σημείο του προβλήματος. Τέλος, για να αποφύγουμε την ανάκλαση όταν ο παλμός φτάνει στα τοιχώματα, χρησιμοποιούμε **συνοριακές συνθήκες**.

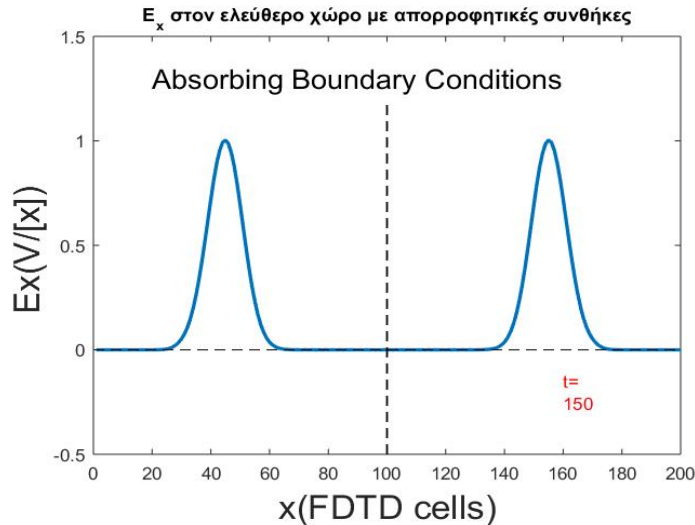
2.1.1 Συνοριακές συνθήκες

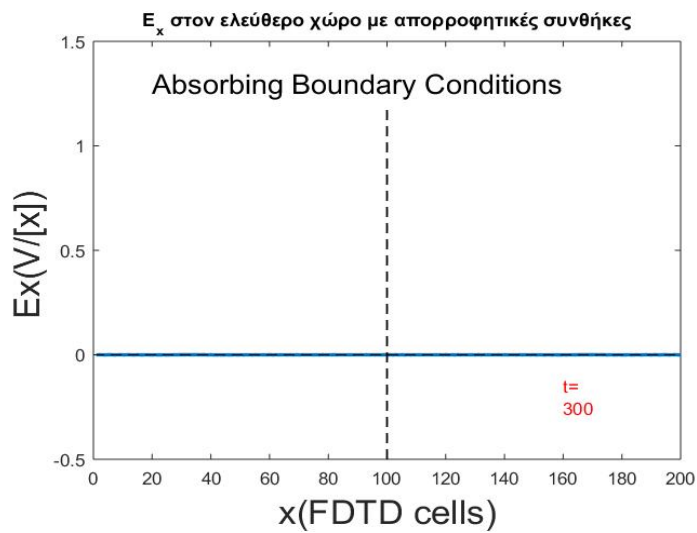
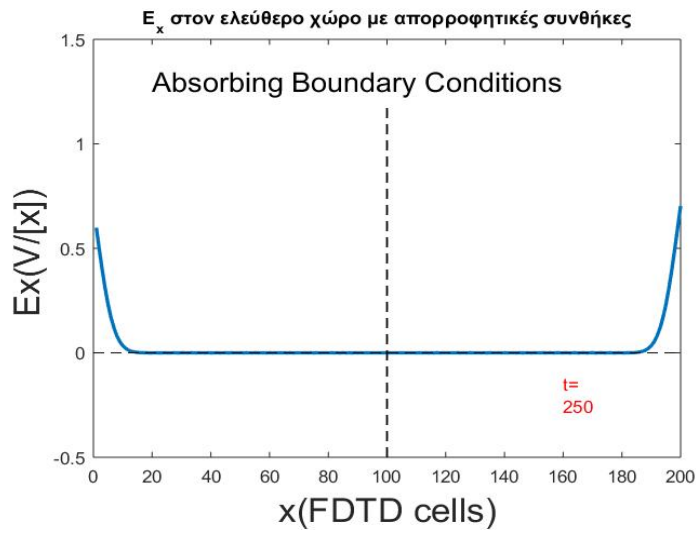
Οι συνοριακές συνθήκες είναι απαραίτητες, όπως παρατηρήσαμε παραπάνω, για να μην έχουμε ανάκλαση του παλμού από τα τοιχώματα του προβλήματος. Κανονικά, στην μέθοδο *FDTD* για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο E πρέπει να γνωρίζουμε τις αντίστοιχες τιμές του μαγνητικού πεδίου H μία χρονική στιγμή μετά. Έτσι όμως στα άκρα του προβλήματος δεν θα έχουμε την τιμή στην μία πλευρά. Ωστόσο, σκεφτόμαστε ότι έξω από τον χώρο το προβλήματος δεν υπάρχουν καθόλου πηγές. Έτσι, τα πεδία στις άκρες πρέπει να διαδίδονται έξω από τα τοιχώματα του προβλήματος. Ουσιαστικά θα βρούμε έναν τρόπο να υπολογίσουμε την τιμή του πεδίου στο άκρο, μέσω της τιμής που έχει δίπλα σε αυτό.

Έστω ότι ψάχνουμε την απορροφητική συνθήκη στο αριστερό τοίχωμα όπου $i = 0$. Στον ελεύθερο χώρο, γνωρίζουμε ότι το κύμα διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός, c_0 . Τότε σε ένα χρονικό βήμα της *FDTD* θα έχει διανύσει απόσταση $d = c_0 \Delta t = c_0 \frac{\Delta x}{2c_0} = 0.5\Delta x$. Επομένως καταλαβαίνουμε ότι εάν η απόσταση d ισούται με το μήκος ενός κελιού, i , τότε χρειάζεται δύο χρονικά βήματα n ώστε το κύμα να περάσει από το κελί. Έτσι, η απορροφητική συνθήκη που μπορούμε να θέσουμε στο αριστερό και το δεξί άκρο (όπου $i = 200$) αντίστοιχα είναι ότι :

$$\boxed{E_x^n(0) = E_x^{n-2}(1)} \quad (2.1.1\alpha) \quad \text{και} \quad \boxed{E_x^n(200) = E_x^{n-2}(199)} \quad (2.1.1\beta).$$

Ουσιαστικά, αποθηκεύουμε την τιμή $E_x(1)$ για δύο χρονικά βήματα και στην συνέχεια την θέτουμε στην τιμή $E_x(0)$. Έτσι υπολογίζουμε την τιμή στα άκρα του προβλήματος χρησιμοποιώντας την τιμή του ακριβώς δίπλα σημείου. Τα στιγμιότυπα τώρα για το ηλεκτρικό πεδίο θα γίνουν (κώδικας 1.2):





Σχήμα 4: Ηλεκτρικό πεδίο στον ελεύθερο χώρο με απορροφητικές συνθήκες.

2.2 Διηλεκτρικά υλικά

Για να κάνουμε την προσομοίωση του προβλήματος όπου ένας παλμός ο οποίος διαδίδεται στο κενό προς τα δεξιά και προσκρούει σε υλικό με διηλεκτρική σταθερά ϵ_r , προσθέτουμε την διηλεκτρική σταθερά ϵ_r στις εξισώσεις του *Maxwell*:

$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E}$ (1.5α) και $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{H}$ (1.6α) όπου μας δίνουν σε 1 διάσταση για $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ μετά την μετατροπή που είπαμε για τα πεδία:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_r \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

Από την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για τις μερικές παραγώγους παίρνουμε:

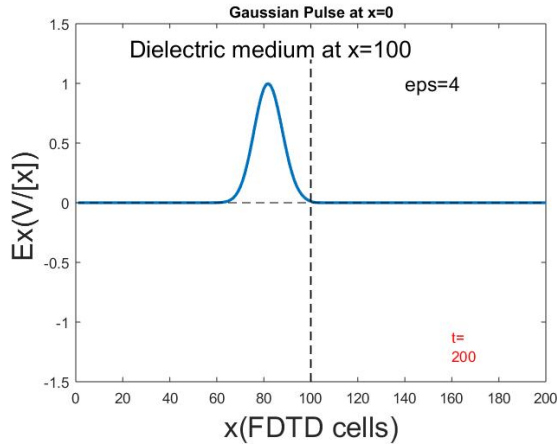
$$\frac{E_{x(i)}^{n+1} - E_{x(i)}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon_r \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{H_{y(i+1)}^n - H_{y(i)}^n}{\Delta x}, \quad \frac{H_{y(i)}^{n+1} - H_{y(i)}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{E_{x(i+1)}^n - E_{x(i)}^n}{\Delta x},$$

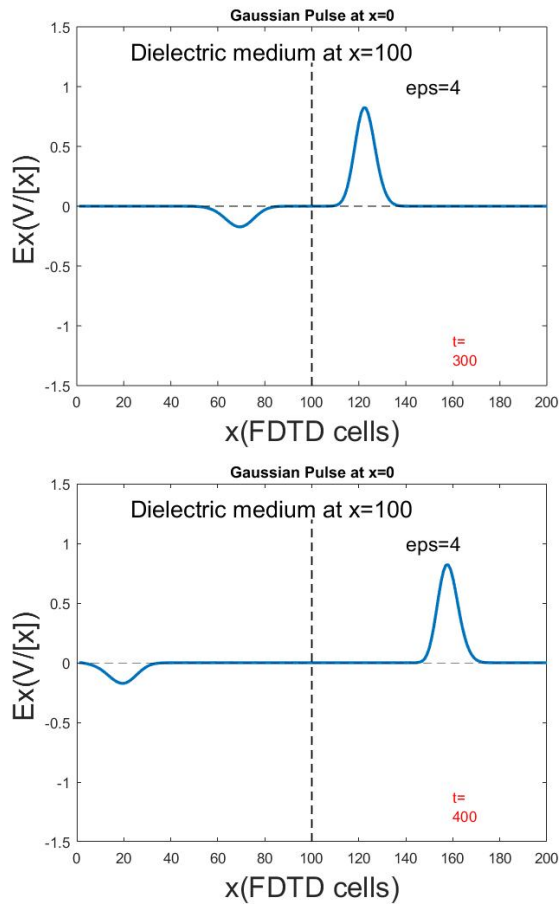
όπου ο παράγοντας $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,5$. Τελικά παίρνουμε τις σχέσεις:

$$E_{x(i)}^{n+1} = E_{x(i)}^n + \frac{0.5}{\epsilon_r} * (H_{y(i+1)}^n - H_{y(i)}^n) \text{ και}$$

$$H_{y(i)}^{n+1} = H_{y(i)}^n + 0.5 * (E_{x(i)}^n - E_{x(i+1)}^n).$$

Χρησιμοποιούμε τον ίδιο παλμό με τις προηγούμενες προσομοιώσεις, επιλέγουμε αυτή τη φορά όμως η πηγή να βρίσκεται στο αριστερό άκρο του προβλήματος. Τοποθετούμε το διηλεκτρικό (ορίζουμε $\epsilon_r = 4$) στη μέση του χώρου του προβλήματος και προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα (κώδικας 1.3):





Σχήμα 5: Παλμός προσκρούει σε διηλεκτικό υλικό.

Παρατηρούμε ότι λόγω της παρουσίας του διηλεκτρικού υλικού, ένα μέρος του παλμού περνά και διαδίδεται μέσα στο υλικό, ενώ το υπόλοιπο μέρος ανακλάται με αντίθετο μάλιστα πλάτος.

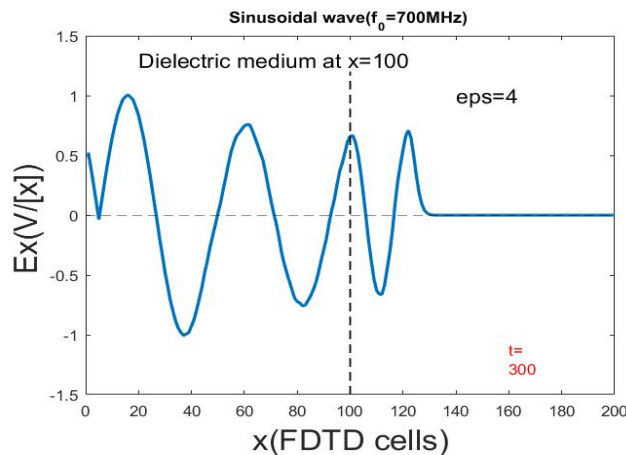
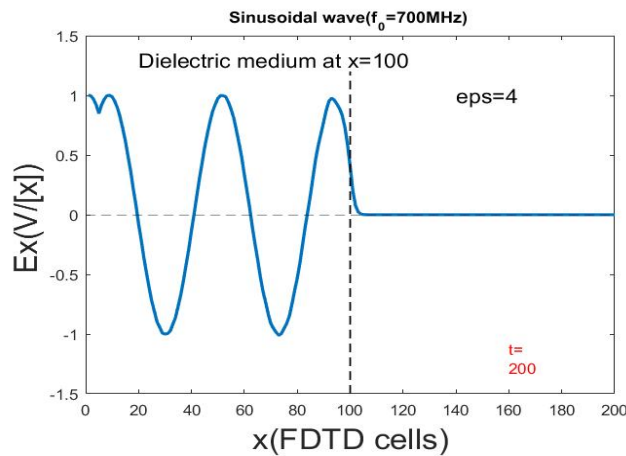
2.2.1 Προσομοίωση διαφορετικών πηγών

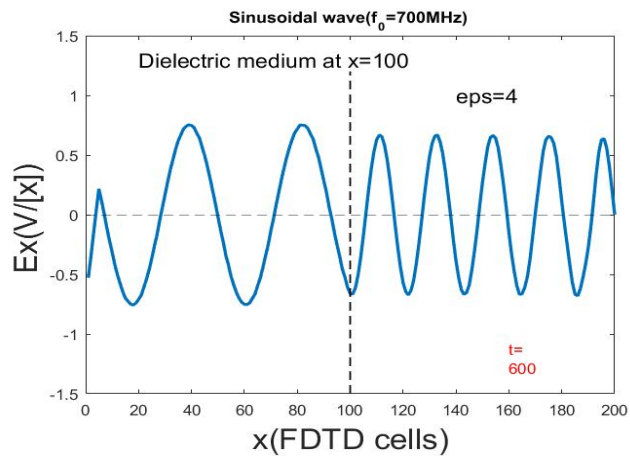
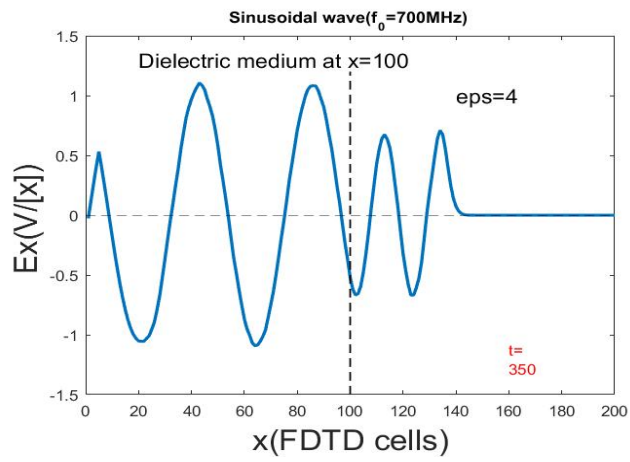
Στις πρώτες προσομοιώσεις, χρησιμοποιήσαμε ως πηγή έναν γκαουσιανό παλμό. Μεγάλο ενδιαφέρον έχει ωστόσο να μελετήσουμε ένα ημιτονοειδές σήμα που στέλνει μία πηγή ημιτόνων, λεγόμενη και ως *Hard Source*. Αυτό που πρέπει να αλλάξει στο πρόγραμμα είναι η παράμετρος *pulse* που πρέπει να γίνει:

$\text{pulse} = \sin(2\pi f_0 \Delta t n)$, όπου f_0 η επιθυμητή συχνότητα του παλμού που ορίζουμε, και $n\Delta t$ ουσιαστικά είναι ο χρόνος t όπως προαναφέραμε. Τώρα, η επιλογή της συχνότητας παίζει μεγάλο ρόλο για τον παλμό, καθώς μέσω της μέγιστης

συχνότητας που διεγείρει ο παλμός υπολογίζουμε το ελάχιστο μήκος κύματος και από εκεί το Δx και κατ' επέκταση το Δt όπως αναλύσαμε στην θεωρία.

Θα μελετήσουμε τώρα το φαινόμενο όπου ένα ημιτονοειδές σήμα προσκρούει σε ένα απλό διηλεκτρικό υλικό. Περιμένουμε ένα μέρος του παλμού να περνάει το υλικό και το υπόλοιπο να ανακλάται, δημιουργώντας συμβολή κυμάτων με τα κύματα που οδεύουν προς τα δεξιά προερχόμενα από την πηγή που τώρα βρίσκεται στο σημείο $x = 5$ (κώδικας 1.4). Χρησιμοποιούμε ως κεντρική συχνότητα του παλμού $f_0 = 700\text{MHz}$, άρα θα επιλέξουμε ένα $\Delta x = 0.01$ το οποίο θα μας δώσει $\Delta t = 0.01/2c_0$, όπου c_0 η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό. Παίρνουμε τα εξής, πολύ ενδιαφέροντα, στιγμιότυπα:





Σχήμα 6: Ημιτονοειδής παλμός προσκρούει σε διηλεκτικό υλικό.

Παρατηρούμε πράγματι ότι ένα μέρος του κύματος διέρχεται από το υλικό, μειώνοντας το πλάτος και το μήκος κύματός του, και το υπόλοιπο μέρος ανακλάται προς τα αριστερά. Εκεί, συναντά το κύμα που έρχεται από την πηγή και δημιουργείται το φαινόμενο της συμβολής, για αυτό παρατηρούμε μεγάλες αυξομειώσεις στο πλάτος του κύματος που βρίσκεται στο αριστερό μέρος του προβλήματος, δηλαδή στον ελεύθερο χώρο. Τέλος, παρατηρούμε ότι στο δεξί μέρος που βρίσκεται το απλό διηλεκτρικό, δεν έχουμε απώλειες και για αυτό διαδίδεται εντός του υλικού με σταθερή ταχύτητα και πλάτος.

2.3 Διηλεκτρικά υλικά με γραμμικές απώλειες

Μέχρι τώρα, οι προσομοιώσεις που κάναμε ήταν είτε στον κενό χώρο, είτε σε κάποιο απλό διηλεκτρικό το οποίο άλλαζε το πλάτος και την ταχύτητα του παλμού. Τώρα, θα μελετήσουμε την περίπτωση που ένα διηλεκτρικό υλικό χαρακτηρίζεται από αγωγιμότητα και έχει γραμμικές απώλειες.

Αρχικά, οι χρονοεξαρτημένες εξισώσεις του *Maxwell* που χρησιμοποιούμε τώρα είναι:

$$\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{J} \text{ και } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

όπου $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ η πυκνότητα ρεύματος, και σ η αγωγιμότητα. Παρατηρούμε ότι έχουμε έναν επιπλέον όρο, την αγωγιμότητα, ο οποίος πρέπει να μειώνει το πεδίο που μελετάμε. Αντικαθιστούμε την πυκνότητα ρεύματος στον νόμο του *Ampere* και έχουμε:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{E}, \text{ η οποία σε 1 διάσταση θα δώσει:}$$

$$\frac{\partial E_x(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\partial H_y(t)}{\partial z} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} E_x(t).$$

Κάνοντας, κατά τα γνωστά, την αλλαγή μεταβλητής $\underline{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E$ έχουμε τις τελικές εξισώσεις που μας αφορούν για το συγκεκριμένο πρόβλημα, που δεν είναι άλλες από τις:

$$\frac{\partial E_x(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_r \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial H_y(t)}{\partial z} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} E_x(t) \text{ και } \frac{\partial H_y(t)}{\partial z} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_x(t)}{\partial z}.$$

Παρατηρούμε ήδη, ότι στην εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου υπάρχει ένας γραμμικός όρος ο οποίος θα μειώνει συνέχεια το ηλεκτρικό πεδίο, όταν το κύμα βρίσκεται εντός του διηλεκτρικού υλικού με απώλειες. Για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για την χρονική και χωρική παράγωγο, ενώ για τον σταθερό γραμμικό όρο θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση ότι ισούται με τον μέσο όρο δύο διαδοχικών χρονικών βημάτων. Έχουμε δηλαδή:

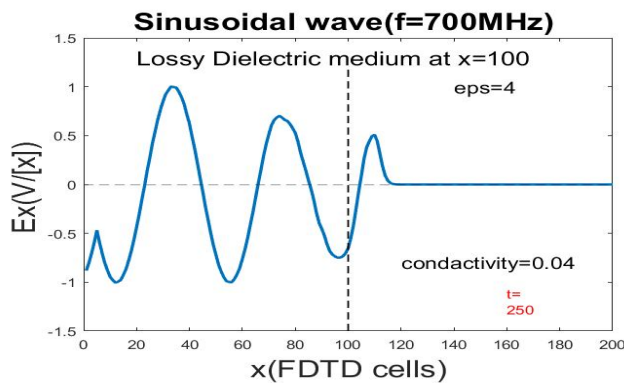
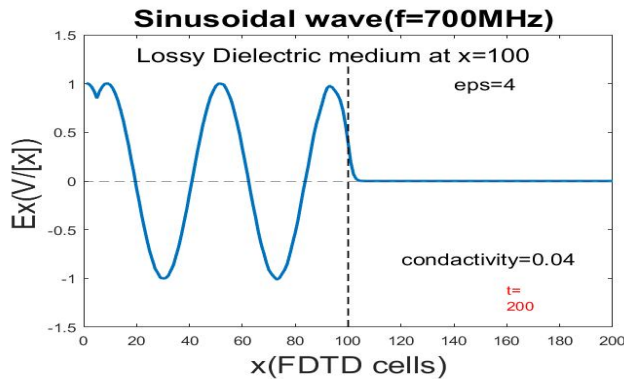
$$\frac{E_x^{n+1}(k) - E_x^n(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\epsilon_r \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{H_y^n(k+1) - H_y^n(k)}{\Delta x} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{E_x^{n+1}(k) + E_x^n(k)}{2}.$$

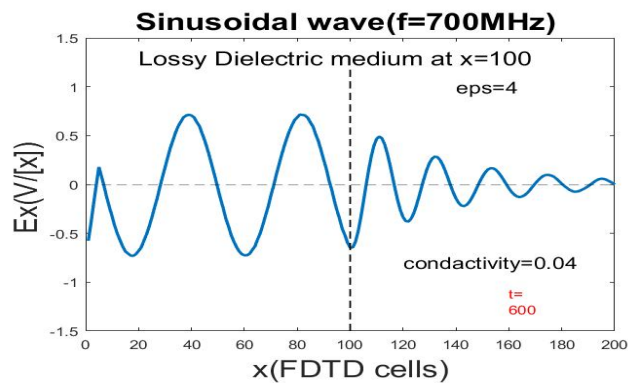
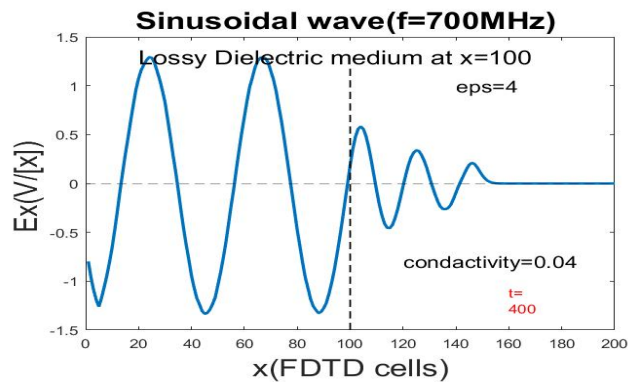
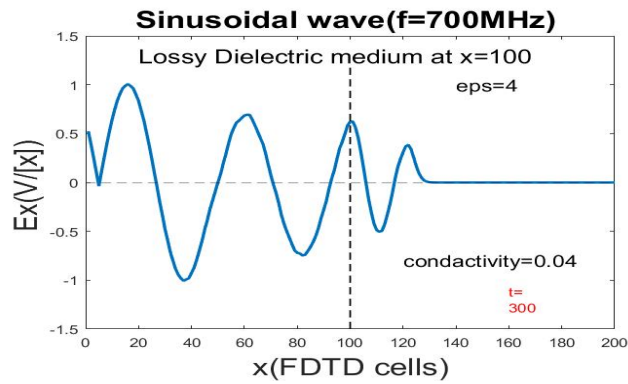
Χρησιμοποιούμε τώρα το γεγονός ότι $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{2}$ (άρα και $\Delta t = \frac{\Delta x}{2c_0}$ όπως έχουμε πει) και προκύπτει τελικά:

$$E_x^{n+1}(k) \left(1 + \frac{\Delta t \sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r}\right) = E_x^n(k) \left(1 - \frac{\Delta t \sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r}\right) - \frac{0.5}{\epsilon_r} [H_y^n(k+1) - H_y^n(k)] \implies$$

$$\implies E_x^{n+1}(k) = E_x^n(k) \frac{\left(1 - \frac{\Delta t \sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r}\right)}{\left(1 + \frac{\Delta t \sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r}\right)} - \frac{0.5}{\epsilon_r \left(1 - \frac{\Delta t \sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r}\right)} [H_y^n(k+1) - H_y^n(k)].$$

Αυτή είναι η εξίσωση που θα βάλουμε στο πρόγραμμά μας ώστε να κάνουμε μία σωστή προσομοίωση για ένα ημιτονοειδή παλμό που αλληλεπιδρά με ένα διηλεκτρικό υλικό που παρουσιάζει απώλειες λόγω αγωγιμότητας. Στην προσομοίωση χρησιμοποιείται μία ημιτονοειδής πηγή συχνότητας $f_0 = 700\text{MHz}$, άρα επιλέγουμε ένα $dx = 0.01$ και αντίστοιχα το dt . Η διηλεκτρική σταθερά εδώ ισούται με $\epsilon_r = 4$, ενώ η αγωγιμότητα $\sigma = 0.04$. Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων (κώδικας 1.5)





Σχήμα 7: Ημιτονοειδής παλμός προσchrύει σε διηλεκτικό υλικό με απώλειες.

Παρατηρούμε πράγματι, πως ο παλμός φθίνει εντός του υλικού όπως αναμενόταν από την εξαγωγή των εξισώσεων για ένα απλό διηλεκτρικό υλικό με απώλειες.

3 Υλικά με διασπορά σε 1 διάσταση

Ως υλικά με γραμμική διασπορά ορίζονται αυτά τα οποία η ηλεκτρική επιδεκτικότητα και η μαγνητική διαπερατότητα εξαρτώνται από την συχνότητα. Για αυτόν τον λόγο, τα υλικά με διασπορά έχουν μεταβλητή ταχύτητα διάδοσης κύματος (καθώς η ταχύτητα διάδοσης ορίζεται ως $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}}$).

Παρακάτω, θα μελετηθούν οι ιδιότητες 3 υλικών με διασπορά: *Debye*, *Drude* και *Lorentz* με την χρήση 3 πολύ αποδοτικών προσεγγίσεων της *FDTD* που είναι, όπως αναφέραμε στην θεωρία, οι *RC*, *ADE* και *Z method*. Και οι 3 μέθοδοι βασίζονται στην πυκνότητα ροής.

Έχουμε τις εξισώσεις *Maxwell*:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{H}, \quad \vec{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \quad \text{και} \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E},$$

όπου D είναι η ηλεκτρική πυκνότητα ροής (ηλεκτρική μετατόπιση). Κάνουμε τους μετασχηματισμούς σε Γκαουσιανές μονάδες:

$$\underline{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E \quad \text{και} \quad \underline{D} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} D,$$

προκύπτουν τελικά οι εξισώσεις *Maxwell* οι οποίες τώρα εξαρτώνται από τον χρόνο και την συχνότητα και ισχύουν πάντα ανεξαρτήτως το είδος του υλικού:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \vec{\nabla} \times \vec{H}, \\ \vec{D}(\omega) &= \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega), \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \vec{\nabla} \times \vec{E}. \end{aligned}$$

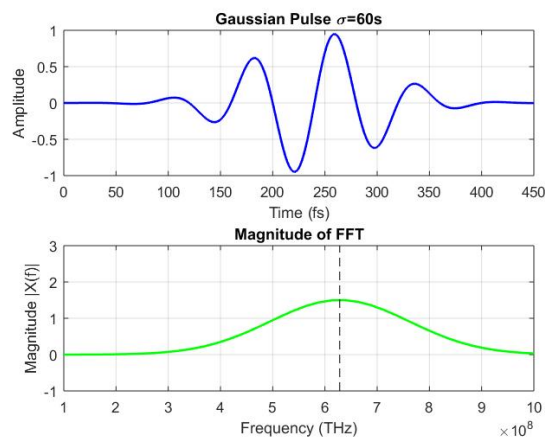
Σε αυτήν την περίπτωση που έχουμε να μελετήσουμε συχνότητες υλικών, είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε να χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό *Fourier* που αναφέρθηκε στη θεωρία(1.4.2). Αυτό χρειάζεται επειδή πρέπει να γνωρίζουμε για κάθε υλικό που μελετάμε στις αντίστοιχες συχνότητες, τι μέρος του φάσματος συχνοτήτων καταλαμβάνει κάθε φορά, καθώς ανάλογα με το φάσμα της πηγής έχουμε διαφορετική συμπεριφορά του κύματος όταν αυτό διαδίδεται εντός του υλικού με διασπορά που εξαρτάται από την συχνότητα.

Για αυτό, παραθέτω έναν απλό κώδικα ο οποίος μας επιτρέπει να κάνουμε εύκολα και γρήγορα τον μετασχηματισμό *Fourier* οποιασδήποτε πηγής και μας δίνει το φάσμα της στο πεδίο των συχνοτήτων, όπως για παράδειγμα η παρακάτω τυχαία πηγή:

$$pulse = exp(-0.5(n - n_0)^2 / (\sigma)^2) * sin(2\pi f_0 dt n),$$

η οποία για την συχνότητα $f_0 = 100GHz$ θα μας δώσει την παρακάτω μορφή στο πεδίο του χρόνου και, με τον μετασχηματισμό *Fourier*, στο πεδίο των συχνοτήτων.

Η μετατροπή γίνεται με την χρήση της εντολής συνάρτησης *fft* του *Matlab* (κώδικας 1.6) και το αποτέλεσμα είναι το εξής:



Σχήμα 8: Παλμός (πεδίο χρόνου) και φάσμα παλμού (πεδίο συχνοτήτων).

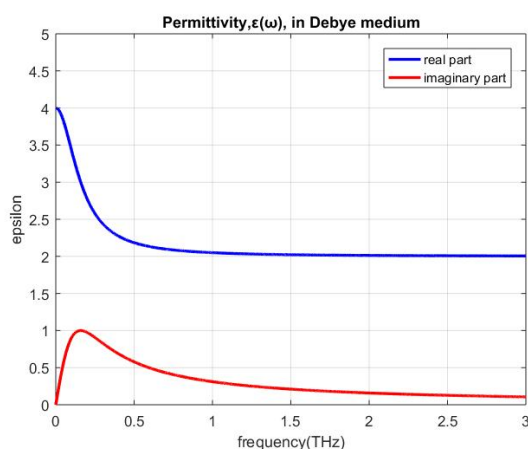
Γενικά, για το φάσμα των παλμών που θα χρησιμοποιηθούν στις προσομοιώσεις μας, μας ενδιαφέρει το που βρίσκεται το μέγιστο. Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό *Fourier* το μέγιστο θα πρέπει να βρίσκεται στην συχνότητα που ορίζουμε εμείς ως συχνότητα διάδοσης του κύματος, f_0 . Με αυτόν τον τρόπο μάλιστα, υπολογίζουμε από το γράφημα του φάσματος την μέγιστη συχνότητα που διεγείρει η πηγή και όπως έχουμε αναφέρει από εκεί υπολογίζουμε το ελάχιστο μήκος κύματος που διεγείρει η πηγή και κατ' επέκταση το Δx που χρησιμοποιούμε στις προσομοιώσεις. Τέλος, το φάσμα της πηγής είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στην μελέτη των υλικών με διασπορά, καθώς υπολογίζουμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος της ηλεκτρικής επιδεκτικότητας, ή και της μαγνητικής διαπερατότητας, και μπορούμε να κάνουμε την σύγκριση για το φάσμα συχνοτήτων που διεγείρει το υλικό και αντίστοιχα η πηγή το οποίο μας οδηγεί σε διαφορετικές ιδιότητες.

3.1 Υλικό Debye σε 1 διάσταση

Ένα υλικό *Debye* χαρακτηρίζεται από την σχέση:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} + \frac{\chi_1}{1 + j\omega t_0},$$

όπου ϵ_r η διηλεκτρική σταθερά, σ η αγωγιμότητα, χ_1 κάποια σταθερά που σχετίζεται με την ηλεκτρική επιδεκτικότητα. Ένα απλό γράφημα για να καταλάβουμε τη μορφή που έχει η παραπάνω επιδεκτικότητα συναρτήσει της συχνότητας για $\epsilon_r = 2$, $\sigma = 0,01$, $\chi_1 = 2$, $t_0 = 0,001\mu s$ είναι:



Σχήμα 9: Πραγματικό και φανταστικό μέρος σχετικής επιδεκτικότητας σε υλικό *Debye*.

Για μεγάλες συχνότητες το φανταστικό μέρος μηδενίζεται ενώ το πραγματικό μέρος ισούται με $\epsilon_r = 2$.

3.1.1 Επίλυση με τη μέθοδο RC

Για να δημιουργήσουμε την προσομοίωση *FDTD* για το μέσο *Debye* πρέπει να μετατρέψουμε την εξίσωση διασποράς από το πεδίο των συχνοτήτων στο πεδίο του δειγματικού χρόνου. Με την μέθοδο *RC* αρχικά αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ηλεκτρικής μετατόπισης D το $\epsilon(\omega)$:

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega)\vec{E}(\omega) \implies \vec{D}(\omega) = \left[\epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} + \frac{\chi_1}{1 + j\omega t_0} \right] \vec{E}(\omega)$$

και μελετάμε τον κάθε όρο ξεχωριστά.

Ο πρώτος όρος $\vec{D}(\omega) = \epsilon_r\vec{E}(\omega)$ πολύ απλά στο πεδίο του χρόνου θα γίνει $\vec{D}(t) = \epsilon_r\vec{E}(t)$ καθώς δεν υπάρχει εξάρτηση από την συχνότητα.

Ο δεύτερος όρος θα μας δώσει $\vec{D}(\omega) = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} \vec{E}(\omega) = I(t)$. Όπως είδαμε και στην θεωρία (1.4.1) ο παράγοντας $\frac{1}{j\omega}$ μας δίνει από την ανάλυση *Fourier* ολοκλήρωμα στο πεδίο του χρόνου. Επομένως θα έχουμε:

$$D(t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^t E(t') dt'. \text{ Κάνουμε την προσέγγιση άθροισης } n \text{ χρονικών βημάτων}$$

$$\Delta t: \int_0^t E(t') dt' \implies \Delta t \sum_{i=0}^n E^i.$$

Άρα η εξίσωση θα γίνει $D^n(t) = \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} \sum_{i=0}^n E^i$. Για να υπολογίσουμε τη σχέση για το ηλεκτρικό πεδίο την χρονική στιγμή t , δηλαδή τον όρο E^n , χωρίζουμε τον n -οστό όρο του αθροίσματος που μας δίνει το E^n . Προκύπτει δηλαδή:

$$D^n = \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} E^n + \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} \sum_{i=0}^{n-1} E^i. \text{ Λύνοντας ως προς τον παράγοντα } E^n \text{ παίρνουμε:}$$

$$E^n = \frac{D^n - \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} E^i \right)}{\frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0}}. \text{ Μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο}$$

από την τρέχουσα τιμή του, την τρέχουσα τιμή του D και τις προηγούμενες τιμές του E . Θα θέσουμε για ευκολία στους υπολογισμούς τον όρο του αθροίσματος

$$\omega\text{s: } I^n = \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} \sum_{i=0}^{n-1} E^i. \text{ Τελικά, αυτό που μένει από τον δεύτερο όρο είναι η σχέση}$$

$$I^n = I^{n-1} + \frac{\sigma\Delta t}{\epsilon_0} E^n.$$

Για τον τρίτο όρο έχουμε $\vec{D}(\omega) = \frac{\chi_1}{1 + j\omega t_0} \vec{E}(\omega) = S(\omega)$ (ο όρος αυτός χαρακτηρίζεται και ως όρος *Debye*). Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Fourier* θα πάρουμε:

$\frac{\chi_1}{t_0} e^{-(t/t_0)} u(t)$, όπου $u(t)$ είναι η συνάρτηση βήματος που μας δίνει 0 για $t < 0$ και 1 για $t > 0$. Προφανώς επειδή ο χρόνος είναι πάντα μεγαλύτερος του 0 η συνάρτηση είναι ίση με 1. Έτσι, ο αντίστροφος μετασχηματισμός *Fourier* της $S(\omega)$ θα μας δώσει:

$$S(t) = \frac{\chi_1}{t_0} \int_0^t e^{-(t'-t)/t_0} E(t') dt' \text{ στο πεδίο του χρόνου. Χρησιμοποιούμε την}$$

προσέγγιση άθροισης:

$$S^n = \frac{\chi_1\Delta t}{t_0} \sum_{i=0}^n e^{-\Delta t(n-i)/t_0} E^i = \frac{\chi_1\Delta t}{t_0} \left(E^n + \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\Delta t(n-i)/t_0} E^i \right).$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι:

$$S^{n-1} = \frac{\chi_1 \Delta t}{t_0} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\Delta t(n-1-i)/t_0} E^i = \frac{\chi_1 \Delta t}{t_0} e^{\Delta t/t_0} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\Delta t(n-i)/t_0} E^i.$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση για το S^n προκύπτει τελικά:

$$S^n = \frac{\chi_1 \Delta t}{t_0} E^n + e^{-\Delta t/t_0} S^{n-1}.$$

Τελικά, η σχέση για την ηλεκτρική μετατόπιση στο πεδίο του δειγματικού χρόνου n θα είναι:

$$D^n = \epsilon_r E^n + I^n + S^n = \epsilon_r E^n + \left[I^{n-1} + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} E^n \right] + \left[\frac{\chi_1 \Delta t}{t_0} E^n + e^{-\Delta t/t_0} S^{n-1} \right].$$

Λύνοντας ως προς το E^n , τελικά προκύπτει:

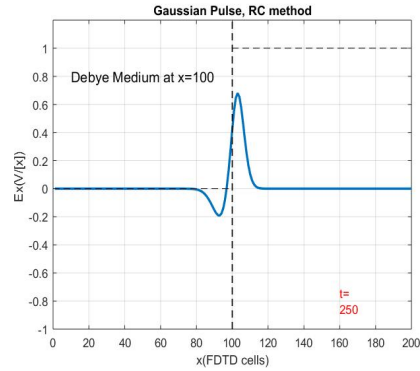
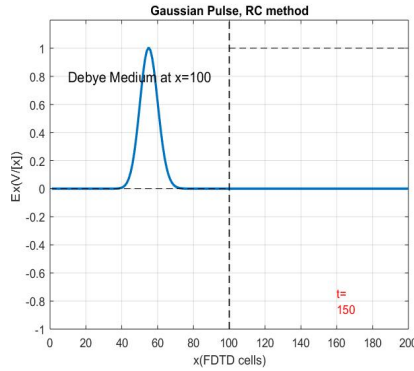
$$E^n = \frac{D^n - I^{n-1} - e^{-\Delta t/t_0} S^{n-1}}{\epsilon_r + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} + \frac{\chi_1 \Delta t}{t_0}},$$

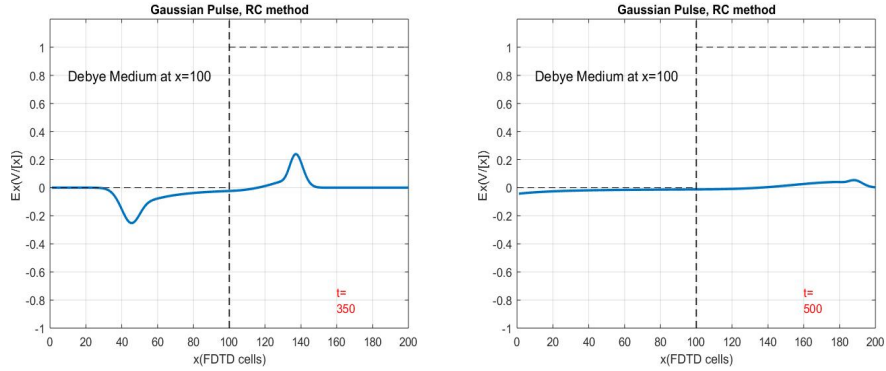
$$\text{όπου } S^n = \frac{\chi_1 \Delta t}{t_0} E^n + e^{-\Delta t/t_0} S^{n-1} \text{ και } I^n = I^{n-1} + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} E^n.$$

Για την προσομοίωση θα χρησιμοποιήσουμε μία πηγή που προκαλεί έναν Γκαουσιανό παλμό:

$$pulse = exp\left(-0.5 * \left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2\right), \text{ με } t_0 = 50, \sigma = 10 \text{ και για το μέσο Debye}$$

τις σταθερές $\epsilon_r = 2$, $\sigma = 0,01$, $\chi_1 = 2$, $t_0 = 0,001\mu s$ και $\epsilon_0 = 8,8 * 10^{-12}$ η διηλεκτρική σταθερά στον κενό χώρο (εδώ έχω θεωρήσει ως t τα χρονικά βήματα n και όχι τον συνολικό χρόνο $t = n\Delta t$). Ο χώρος αποτελείται από 200 κελιά και το μέσο βρίσκεται από το 100 έως το 200. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων είναι τα εξής(κώδικας 1.7):





Σχήμα 10: Γκαουσιανός παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Debye*.

Παρατηρούμε ότι ένα μέρος του παλμού διέρχεται και διαδίδεται εντός του υλικού, όπου φθίνει συνέχεια μέχρι που μηδενίζεται ενώ το υπόλοιπο μέρος ανακλάται προς τα αριστερά και απορροφάται από τις συνοριακές συνθήκες που έχουμε βάλει στα τοιχώματα. Αυτό περιμέναμε καθώς πρόκειται για υλικό με απώλειες.

3.1.2 Επίλυση με τη μέθοδο ADE

Για τη μέθοδο *ADE* πάλι θα μελετήσουμε τον κάθε όρο ξεχωριστά. Ο πρώτος όρος προφανώς δεν αλλάζει καθώς δεν έχουμε εξάρτηση από την συχνότητα.

Για τον δεύτερο όρο $\vec{D}(\omega) = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} \vec{E}(\omega) = I(t)$ έχουμε $(j\omega\epsilon_0)I(\omega) = \sigma E(\omega)$.

Στο πεδίο του χρόνου το $j\omega$ γίνεται πρώτη παράγωγος ως προς τον χρόνο, δηλαδή θα έχουμε στο πεδίο του χρόνου :

$$\epsilon_0 \frac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t).$$

Για τον υπολογισμό της παραγωγού χρησιμοποιούμε την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, που μας δίνει $\frac{dI(t)}{dt} = \frac{I^n - I^{n-1}}{\Delta t}$. Τελικά ο δεύτερος όρος θα μας δώσει:

$$I^n = I^{n-1} + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} E^n \text{ όπως αναμενόταν από αυτά που αναφέραμε και στη θεωρία (1.4.1).}$$

Για τον τρίτο όρο θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{D}(\omega) &= \frac{\chi_1}{1 + j\omega t_0} \vec{E}(\omega) = S(\omega) \implies (1 + j\omega t_0)S(\omega) = \chi_1 E(\omega) \implies \\ \implies S(\omega) + j\omega t_0 S(\omega) &= \chi_1 E(\omega). \end{aligned}$$

Αυτή η σχέση, στο πεδίο του χρόνου θα γραφτεί ως $s(t) + \frac{ds(t)}{dt} = \chi_1 e(t)$, το οποίο με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών θα ισούται με :

$$\frac{S^n + S^{n-1}}{2} + t_0 \frac{S^n - S^{n-1}}{\Delta t} = \chi_1 E(t).$$

Λύνουμε ως προς S^n και τελικά παίρνουμε:

$$S^n = \frac{\left(1 - \frac{\Delta t}{2t_0}\right)}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2t_0}\right)} S^{n-1} + \frac{\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right) \chi_1}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2t_0}\right)} E^n.$$

Συνολικά οι 3 όροι θα μας δώσουν:

$$D^n = \epsilon_r E^n + I^n + S^n = \epsilon_r E^n + \left[I^{n-1} + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} E^n \right] + \left[\frac{\chi_1 \Delta t}{t_0} E^n + \frac{\left(1 - \frac{\Delta t}{2t_0}\right)}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2t_0}\right)} S^{n-1} \right].$$

Λύνοντας ως προς το E^n , τελικά προκύπτει:

$$E^n = \frac{D^n - I^{n-1} - \frac{\left(1 - \frac{\Delta t}{2t_0}\right)}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2t_0}\right)} S^{n-1}}{\epsilon_r + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} + \frac{\chi_1 \Delta t}{t_0}},$$

όπου $S^n = \frac{\left(1 - \frac{\Delta t}{2t_0}\right)}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2t_0}\right)} S^{n-1} + \frac{\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right) \chi_1}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2t_0}\right)} E^n$ και $I^n = I^{n-1} + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} E^n$.

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση μοιάζει αρκετά με την σχέση που προέκυψε για την μέθοδο *RC*. Στην πραγματικότητα, σκεφτόμαστε την μαθηματική προσέγγιση:

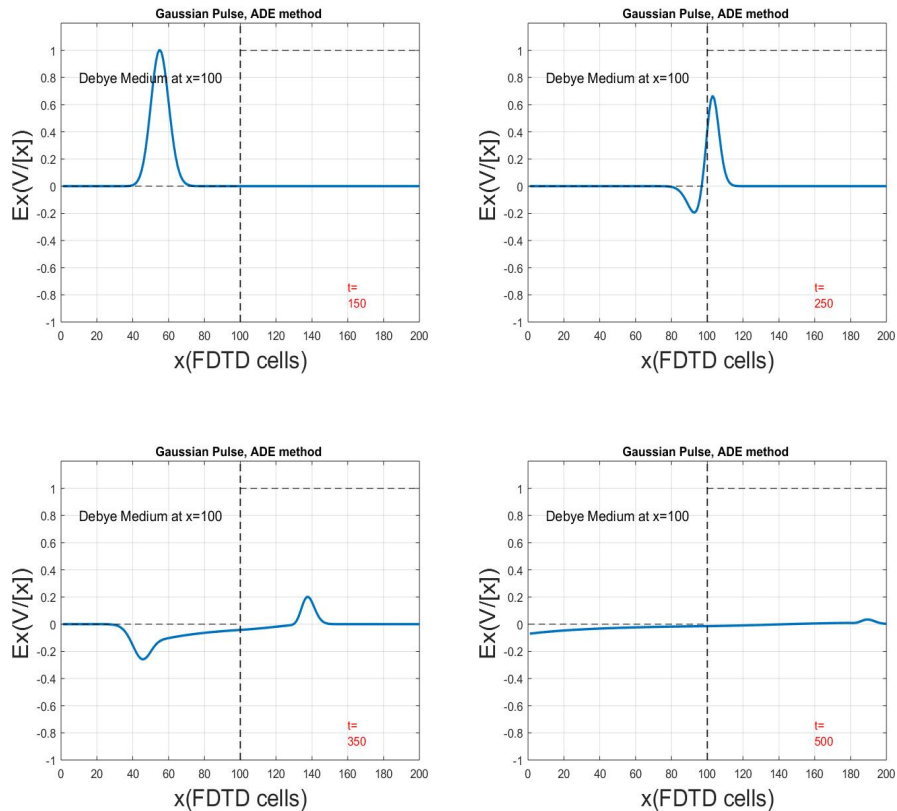
$$1 - \epsilon \cong e^{-\epsilon} \text{ και } \frac{1}{1 + \epsilon} \cong e^{-\epsilon}, \text{ για } \epsilon \ll 1, \text{ που συνδυάζοντάς τις προκύπτει :}$$

$$\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \cong e^{-2\epsilon}.$$

$$\text{Θέτοντας } \epsilon = \frac{\Delta t}{2t_0} \text{ τότε έχουμε την προσέγγιση } \frac{\left(1 - \frac{\Delta t}{2t_0}\right)}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2t_0}\right)} \cong e^{-\frac{\Delta t}{t_0}}. \text{ Άρα μένει}$$

να προσδιορίσουμε τότε ο όρος $\frac{\Delta t}{t_0}$ είναι πολύ μικρότερος του 1. Σκεφτόμαστε με όμοιο τρόπο όπως και στην περίπτωση του χώρου, όπου παίρνουμε το Δx να είναι τουλάχιστον 10 φορές μικρότερο από το ελάχιστο μήκος κύματος που διεγείρει το μέσο. Έτσι και εδώ, όταν έχουμε όρο *Debye* που περιέχει το t_0 πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι τα χρονικά βήματα θα είναι μικρά σε σχέση με το t_0 . Δηλαδή, θα πρέπει να είναι $\Delta t \leq t_0/10$ ώστε να εξασφαλίσουμε ότι θα ισχύει η παραπάνω προσέγγιση και θα έχουμε ένα καλά ορισμένο πρόβλημα που θα μας δώσει ένα καλό αποτέλεσμα.

Για τις προσομοιώσεις με την μέθοδο *ADE*, χρησιμοποιούμε ακριβώς την ίδια πηγή με πριν $pulse = \exp\left(-0.5 * \left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2\right)$, με $t_0 = 50$, $\sigma = 10$ και για το μέσο *Debye* τις σταθερές $\epsilon_r = 2$, $\sigma = 0,01$, $\chi_1 = 2$, $t_0 = 0,001\mu s$ και $\epsilon_0 = 8,8 * 10^{-12}$, το ίδιο μέσο με διασπορά και τον ίδιο χώρο. Τα αποτελέσματα είναι τα παρακάτω (κώδικας 1.8):



Σχήμα 11: Γκαουσιανός παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Debye*.

3.1.3 Επίλυση με τη μέθοδο μετασχηματισμού Z

Η πιο γρήγορη μέθοδος εξαγωγής των εξισώσεων που χρειάζονται για την επίλυση και την μελέτη υλικών με διασπορά είναι η μέθοδος Z. Όπως αναφέρθηκε στην θεωρία (1.4.1), με την μέθοδο αυτή γλιτώνουμε υπολογισμούς ολοκληρωμάτων και μερικών παραγώγων, καθώς το μόνο που χρειάζεται είναι η μετατροπή από το πεδίο των συχνοτήτων στο πεδίο των Z και από εκεί στο πεδίο του χρόνου σύμφωνα με τον πίνακα που υπάρχει στη θεωρία. Πιο συγκεκριμένα, στο υλικό *Debye* είδαμε ότι έχουμε την ηλεκτρική μετατόπιση:

$$\vec{D}(\omega) = \left[\epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} + \frac{\chi_1}{1 + j\omega t_0} \right] \vec{E}(\omega).$$

Χρησιμοποιώντας απευθείας τους μετασχηματισμούς από τον πίνακα της μεθόδου Z, προκύπτει:

$$D(z) = \epsilon_r E(z) + \frac{\sigma \Delta t / \epsilon_0}{1 - z^{-1}} E(z) + \frac{\chi_1 \Delta t / t_0}{1 - e^{-\Delta t / t_0} z^{-1}} E(z).$$

Ορίζουμε τις αντίστοιχες παραμέτρους I, S όπως και προηγουμένως και έχουμε:

$$I(z) = \frac{\sigma \Delta t / \epsilon_0}{1 - z^{-1}} E(z) = z^{-1} I(z) + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} E(z) \text{ και}$$

$$S(z) = \frac{\chi_1 \Delta t / t_0}{1 - e^{-\Delta t / t_0} z^{-1}} E(z) = e^{-\Delta t / t_0} z^{-1} S(z) + \frac{\chi_1 \Delta t}{t_0} E(z).$$

Τώρα η ηλεκτρική μετατόπιση θα γράφεται ως:

$$D(z) = \epsilon_r E(z) + z^{-1} I(z) + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} E(z) + e^{-\Delta t / t_0} z^{-1} S(z) + \frac{\chi_1 \Delta t}{t_0} E(z),$$

όπου λύνοντας ως προς E^n μας δίνει:

$$E(z) = \frac{D(z) - z^{-1} I(z) - e^{-\Delta t / t_0} z^{-1} S(z)}{\epsilon_r + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} + \frac{\chi_1 \Delta t}{t_0}}.$$

Το επόμενο μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου μετασχηματισμού Z είναι η μεταφορά από το πεδίο των Z στο πεδίο του χρόνου. Πολύ απλά, αντικαθιστούμε το $E(z)$ με E^n , το $z^{-1} E(z)$ με E^{n-1} και ομοίως για τα I, S . Τελικά θα έχουμε:

$$E^n = \frac{D^n - I^{n-1} - e^{-\Delta t / t_0} S^{n-1}}{\epsilon_r + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} + \frac{\chi_1 \Delta t}{t_0}},$$

$$\text{όπου } S^n = \frac{\chi_1 \Delta t}{t_0} E^n + e^{-\Delta t / t_0} S^{n-1} \text{ και } I^n = I^{n-1} + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} E^n.$$

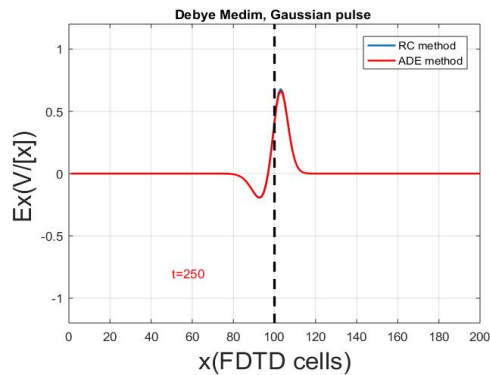
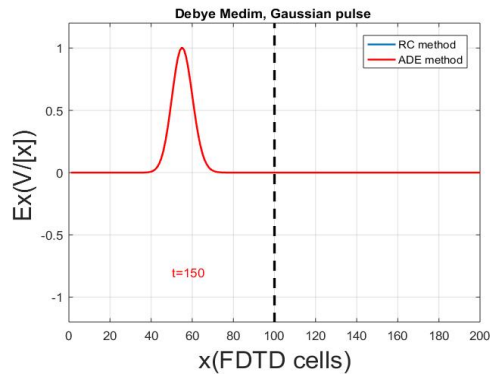
Οι σχέσεις είναι ακριβώς ίδιες με αυτές που βρήκαμε με τον μέθοδο RC, επομένως οι προσομοιώσεις θα είναι ίδιες με αυτές στο σχήμα 10. Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου μετασχηματισμού Z σε σχέση με την μέθοδο RC είναι ότι δεν χρειάστηκε να υπολογίσουμε κανένα ολοκλήρωμα.

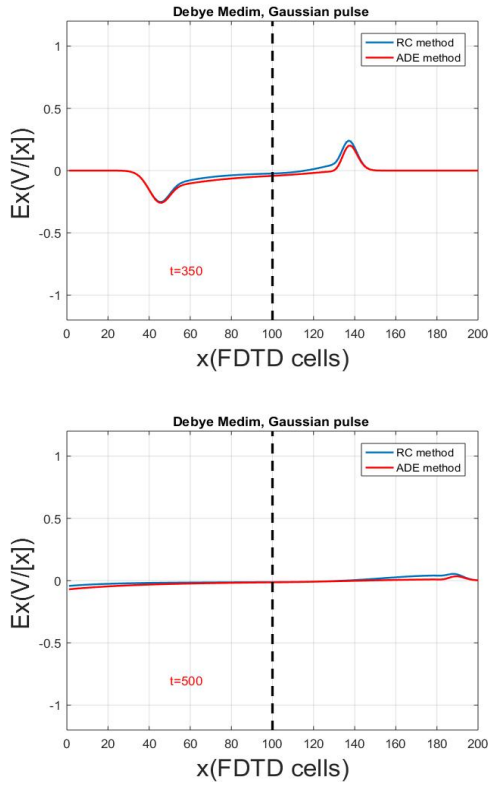
3.1.4 Σύγκριση των αποτελεσμάτων των μεθόδων

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση των 3 μεθόδων που αναλύθηκαν και υπολογίστηκαν αναλυτικά παραπάνω. Δεδομένου ότι η μέθοδος μετασχηματισμού Z μας έδωσε ίδια αποτελέσματα με την μέθοδο RC η σύγκριση θα γίνει μεταξύ των μεθόδων RC και ADE .

Σημείωση: Ένας εύκολος τρόπος για να συγκρίνουμε εύκολα και γρήγορα τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, είναι να αποθηκεύουμε κάθε φορά τις τιμές που μας δίνει το πρόγραμμα όταν το τρέχουμε και στην συνέχεια να κάνουμε το γράφημα των τιμών αυτών σε ξεχωριστό πρόγραμμα. Αυτό γίνεται με τις εντολές *foopen*, *fprintf* και *fclose* όπου φαίνονται σε κάθε κώδικα που υπάρχει στο τέλος. Έτσι, αποθηκεύουμε τις τιμές των προσομοιώσεων σε ένα αρχείο για κάθε μέθοδο, στη συνέχεια γράφουμε νέο κώδικα όπου διαβάζει τις τιμές αυτές και δημιουργεί την γραφική παράσταση όπου τώρα υπάρχουν 2 και 3 καμπύλες για σύγκριση (κώδικας 1.9).

Τα αποτελέσματα της σύγκρισης των 3 μεθόδων για το πρόβλημα ενός παλμού που αλληλεπιδρά με ένα υλικό *Debye* είναι τα παρακάτω:





Σχήμα 12: Σύγκριση των μεθόδων για παλμό που προσκρούει σε υλικό *Debye*.

Παρατηρούμε ότι όταν ο παλμός εισέρχεται στο υλικό, υπάρχουν κάποιες διαφορές στις προσομοιώσεις μας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός της προσέγγισης που αναλύσαμε παραπάνω, $\frac{\left(1 - \frac{\Delta t}{2t_0}\right)}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2t_0}\right)} \cong e^{-\frac{\Delta t}{t_0}}$, που είναι και αυτή που διαφορο-

ποιεί τις εξισώσεις και κατ' επέκταση τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων. Εδώ έχουμε $t_0 = 1 * 10^{-9}$ και $\Delta t = 1,5 * 10^{-10}$, επομένως πράγματι $\Delta t \cong t_0/10$ και πρόκειται για μία πολύ καλή προσέγγιση που μας δίνει αρκετά κοντινά αποτελέσματα. Εάν είχαμε επιλέξει Δt λίγο πιο μικρό, τότε θα είχαμε $\Delta t \leq t_0/10$ και θα είχαμε ακόμα πιο όμοια αποτελέσματα.

3.2 Υλικό Drude σε 1 διάσταση

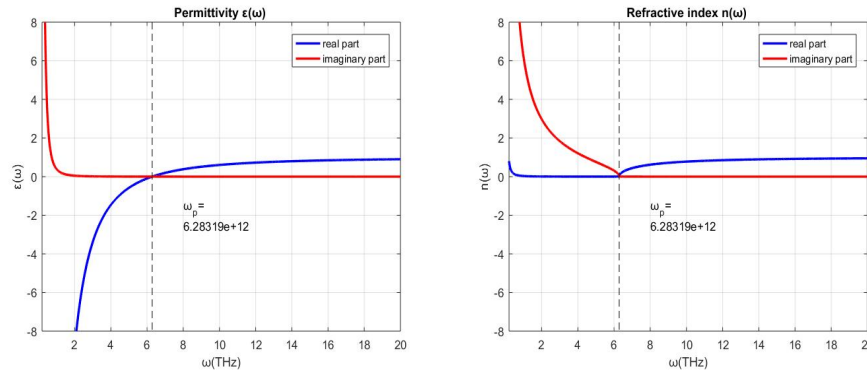
Τα υλικά *Drude*, ή αλλιώς unmagnetized Plasma, χαρακτηρίζονται από την εξής σχέση:

$$\epsilon^*(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega(iv_c - \omega)},$$

Όπου $\omega_p = 2\pi f_p$ η συχνότητα συντονισμού (πλάσματος) του υλικού και v_c μία σταθερά που προσδιορίζει την συχνότητα σύγκρουσης των ηλεκτρονίων. Εδώ παρατηρούμε ότι $\omega_0 = 0$ και πρόκειται για χαρακτηριστική περίπτωση αγωγού, όπως αναφέραμε στη θεωρία.

Τα συγκεκριμένα υλικά παρουσιάζουν πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, εξαιτίας της εμφάνισης της συχνότητας πλάσματος του υλικού. Σε αυτήν την συχνότητα, η σχετική επιδεκτικότητα $\epsilon(\omega)$ μηδενίζεται. Εάν έχουμε έναν παλμό που διαδίδεται με συχνότητα κάτω από αυτήν την συχνότητα πλάσματος τότε το υλικό συμπεριφέρεται σαν μέταλλο, ενώ αν ο παλμός διαδίδεται με συχνότητα μεγαλύτερη από αυτήν της συχνότητας πλάσματος τότε το υλικό γίνεται διαφανές και είναι σαν να διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο. Πρόκειται για μία πολύ ιδιαίτερη ιδιότητα όπως θα δούμε και στις προσομοιώσεις παρακάτω.

Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $\epsilon(\omega)$, για τις τιμές $f_p = 1THz$ και $v_c = 0,01THz$ καθώς επίσης και ο δείκτης διάθλασης του υλικού, $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r \epsilon(\omega)}$, για $\epsilon_r = 1$ θα είναι:



Σχήμα 13: Επιδεκτικότητα και δείκτης διάθλασης για υλικό *Drude*.

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 13, έχει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον η περιοχή συχνοτήτων γύρω από την συχνότητα πλάσματος, καθώς η επιδεκτικότητα από αρνητική μηδενίζεται απότομα και μετά γίνεται θετική. Το γεγονός αυτός θα έχει και μεγάλη φυσική σημασία στις προσομοιώσεις.

3.2.1 Επίλυση με τη μέθοδο RC

Για να λύσουμε το πρόβλημα με την Recursive Convolution, αρχικά γράφουμε την εξίσωση για την επιδεκτικότητα $\epsilon(\omega)$ σε πιο απλή μορφή, χρησιμοποιώντας την μέθοδο των απλών κλασμάτων:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2/v_c}{j\omega} - \frac{\omega_p^2/v_c}{v_c + j\omega}.$$

$$\text{Η ηλεκτρική μετατόπιση τότε θα είναι: } D(\omega) = \left[1 + \frac{\omega_p^2/v_c}{j\omega} - \frac{\omega_p^2/v_c}{v_c + j\omega} \right] E(\omega).$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος είναι σταθερός, ο δεύτερος όρος είναι σταθερά επί το $\frac{1}{j\omega}$ και ο τρίτος όρος πάλι σταθερά επί $\frac{1}{const + j\omega}$, όπου εδώ $const = v_c$. Παρατηρούμε ότι είναι ίδια ακριβώς μορφή, δηλαδή, με την περίπτωση του υλικού *Debye*, μόνο που αλλάζουν οι σταθερές. Επομένως μπορούμε εύκολα να γράψουμε το αποτέλεσμα, ακολουθώντας τα ίδια βήματα που ακολουθήσαμε στην παράγραφο 3.1.1 . Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι:

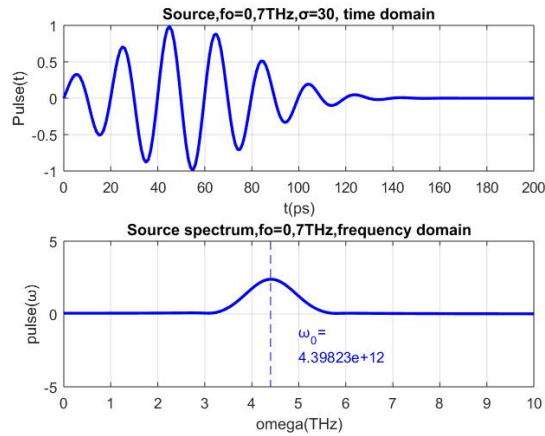
$$E^n = D^n - I^{n-1} - e^{-\Delta t v_c} S^{n-1},$$

$$\text{όπου } S^n = -\frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} E^n + e^{-\Delta t v_c} S^{n-1} \text{ και } I^n = I^{n-1} + \frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} E^n.$$

Για τις προσομοιώσεις, θα χρησιμοποιήσουμε μία διαφορετική πηγή. Θα δημιουργήσουμε μία πηγή που θα προκαλεί έναν 'φάκελο', που θα είναι συνδιασμός ενός Γκαουσιανού και ενός ημιτονοειδούς παλμού. Η μορφή που θα έχει ο παλμός είναι:

$$pulse = exp\left(-0.5 * \left(\frac{n - n_0}{\sigma}\right)^2\right) * sin(2\pi f_0 \Delta t n), \text{ όπου } n \text{ είναι τα χρονικά βήματα, } \sigma \text{ η διασπορά του Γκαουσιανού παλμού, } f_0 \text{ η συχνότητα του ημιτονοειδούς παλμού.}$$

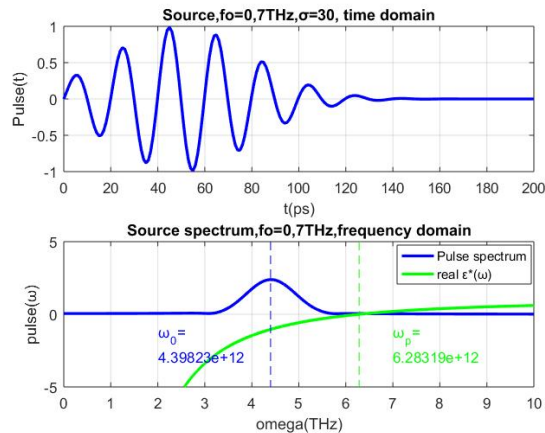
Για $f_0 = 0,7THz$, $\sigma=30$, $n_0 = 50$, έχουμε τον παρακάτω παλμό και το φάσμα του (χρησιμοποιούμε τον κώδικα 1.6 με την εντολή *fft*):



Σχήμα 14: Παλμός και το φάσμα του.

Παρατηρούμε ότι το μέγιστο του φάσματος βρίσκεται στο σημείο όπου η συχνότητα $f = f_0$. Τώρα, από το παραπάνω φάσμα θα υπολογίσουμε και το Δx . Εδώ έχουμε $\lambda_{min} = 4,3 * 10^{-4}$, άρα θα επιλέξουμε $\Delta x = 4,3 * 10^{-5}$.

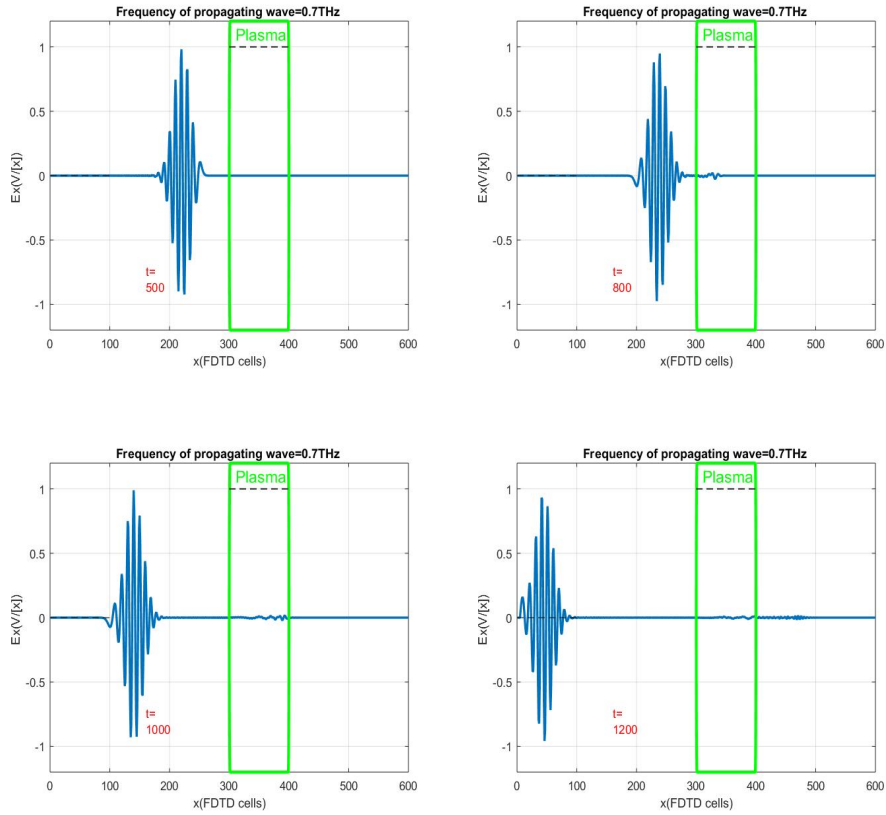
Σε σύγκριση με το πραγματικό μέρος της επιδεκτικότητας $\epsilon(\omega)$ για ένα υλικό *Drude* το φάσμα θα είναι (κώδικας 1.10):



Σχήμα 15: Παλμός και το φάσμα του και πραγματικό μέρος επιδεκτικότητας.

Έχουμε επομένως έναν παλμό με συχνότητα μικρότερη από την συχνότητα πλάσματος του μέσου με διασπορά. Για τις προσομοιώσεις, θεωρούμε έναν χώρο

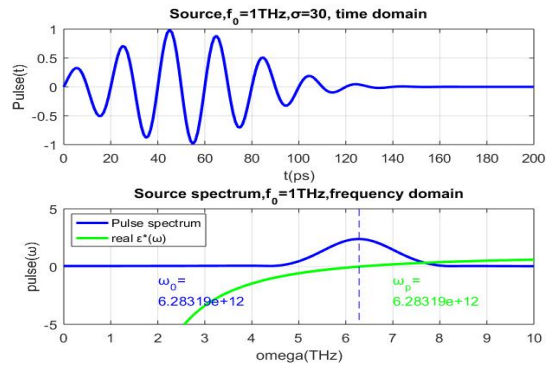
με 600 κελιά, και τοποθετούμε το υλικό *Drude* στο χώρο από 300 έως 400. Τα αποτελέσματα είναι τα εξής (κώδικας 1.11):



Σχήμα 16: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Drude*.

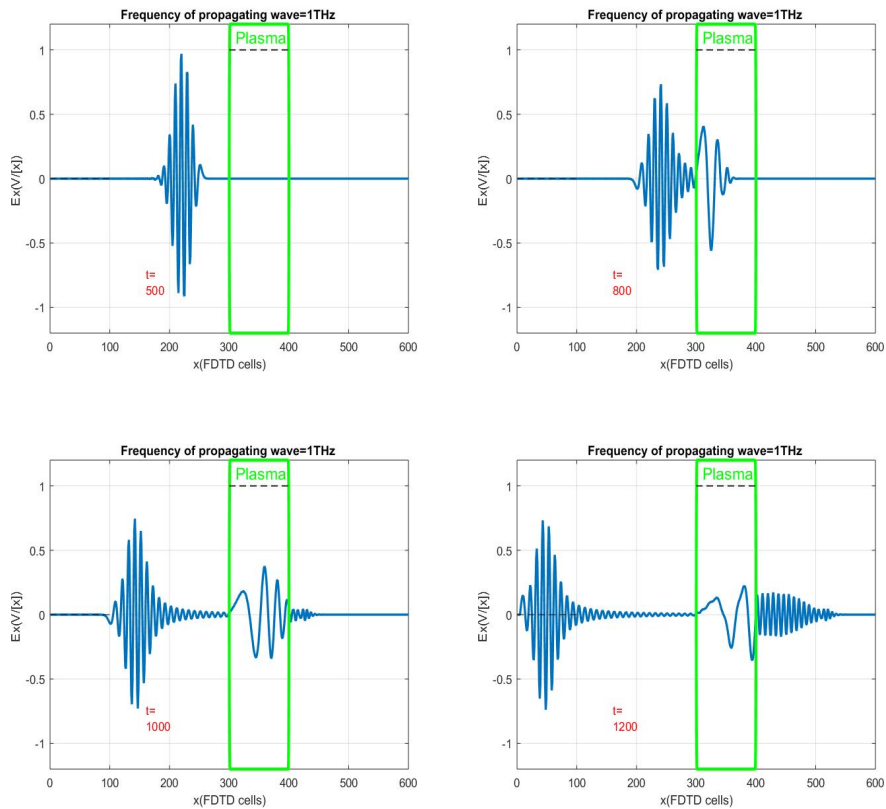
Παρατηρούμε πράγματι ότι εάν η συχνότητα του παλμού είναι μικρότερη από την συχνότητα πλάσματος του υλικού, τότε το υλικό συμπεριφέρεται σχεδόν σαν μέταλλο. Βλέπουμε ότι ένα πολύ μικρό μέρος του παλμού εισέρχεται στο υλικό, διαδίδεται κατά έναν 'περίεργο' τρόπο μέσα σε αυτό και στην συνέχεια εξέρχεται και διαδίδεται στον κενό χώρο.

Η επόμενη περίπτωση είναι ο παλμός να έχει ακριβώς ίδια συχνότητα με την συχνότητα πλάσματος. Δηλαδή τώρα θα έχουμε $f_0 = 1THz$, αφήνοντας όλα τα υπόλοιπα ίδια. Παρατηρούμε τώρα, ότι το μέγιστο του φάσματος του παλμού συμπίπτει με την συχνότητα πλάσματος, όπου το πραγματικό μέρος της επιδεκτικότητας μηδενίζεται. Ο παλμός, το φάσμα του και το πραγματικό μέρος της επιδεκτικότητας θα είναι:



Σχήμα 17: Παλμός και το φάσμα του και πραγματικό μέρος επιδεκτικότητας.

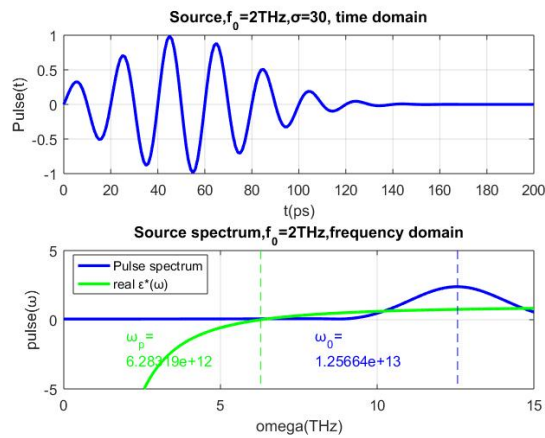
Οι αντίστοιχες προσομοιώσεις θα είναι:



Σχήμα 18: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Drude*.

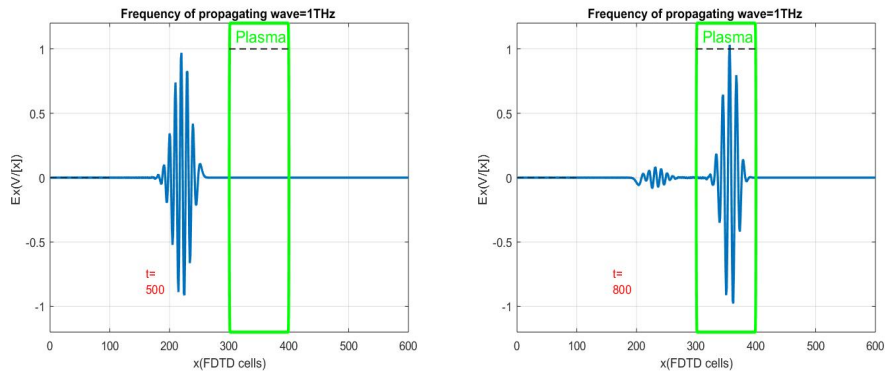
Παρατηρούμε τώρα μία ακανόνιστη συμπεριφορά. Ένα μέρος του παλμού εισέρχεται στο υλικό, διαδίδεται μέσα σε αυτό κατά έναν περίεργο τρόπο και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με διαφορετική μορφή και συνεχίζει να διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο, ενώ το υπόλοιπο μέρος του παλμού ανακλάται προς τα αριστερά.

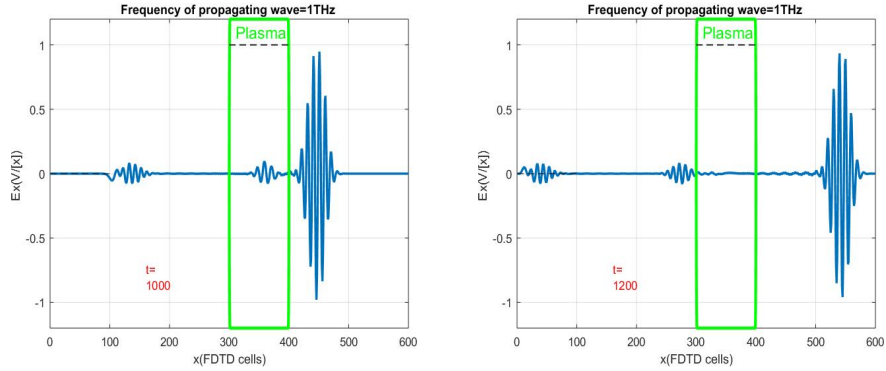
Τελευταία περίπτωση, είναι αυτή που η συχνότητα του παλμού είναι μεγαλύτερη από την συχνότητα πλάσματος. Παρατηρούμε τώρα ότι οι συχνότητες που διεγείρει η πηγή βρίσκονται στο θετικό μέρος της επιδεκτικότητας, άρα αναμένουμε μία συμπεριφορά σαν διαφανές υλικό. Επιλέγουμε $f_0 = 2THz$. Το γράφημα της πηγής, του φάσματος και του πραγματικού μέρους της επιδεκτικότητας θα είναι:



Σχήμα 19: Παλμός και το φάσμα του και πραγματικό μέρος επιδεκτικότητας.

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων θα είναι (κώδικας 1.11):





Σχήμα 20: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Drude*.

Παρατηρούμε πράγματι, ότι ο παλμός διαπερνά σχεδόν ολόκληρος το υλικό, διαδίδεται μέσα σε αυτό με πολύ μικρές απώλειες και εξέρχεται και συνεχίζει να διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο. Οι μικρές απώλειες που υπάρχουν, φτάνοντας στο τοίχωμα ανακλώνται προς τα αριστερά, για αυτό και στα γραφήματα παρατηρούμε δύο κυματοπακέτα να πηγαίνουν προς τα αριστερά.

3.2.2 Επίλυση με τη μέθοδο ADE

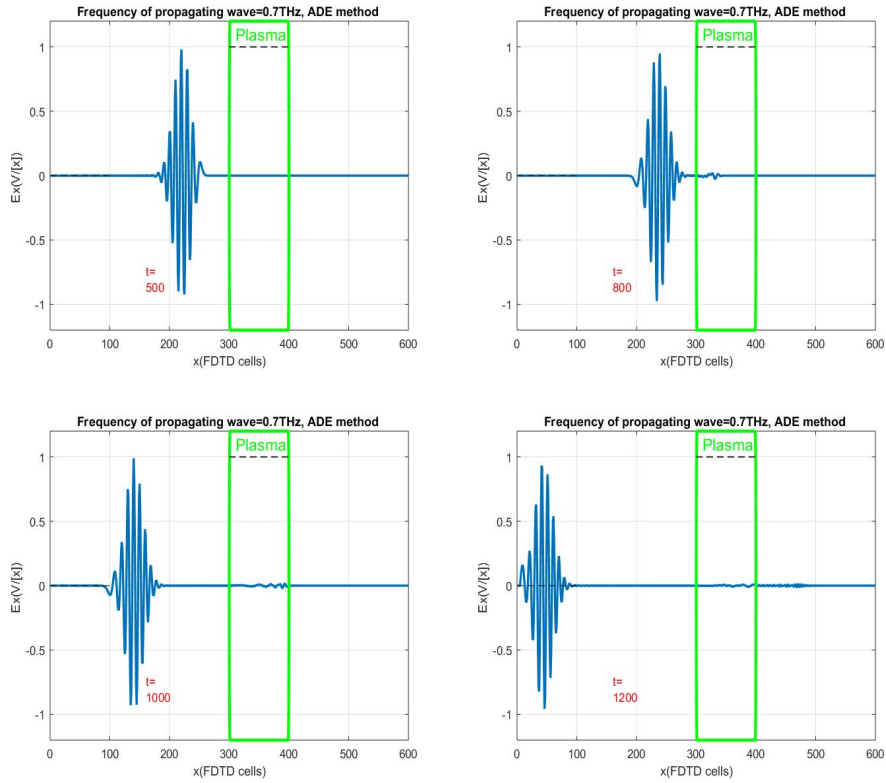
Όπως παρατηρήσαμε και στη μέθοδο *RC*, οι όροι είναι πανομοιότυποι με το υλικό *Debye* που λύσαμε αναλυτικά. Επομένως μπορούμε πολύ εύκολα να γράψουμε τις εξισώσεις που διέπουν την λύση του προβλήματος υλικού *Drude* με την μέθοδο *ADE*:

$$E^n = D^n - I^{n-1} - \frac{(1 - 0,5\Delta t v_c)}{(1 + 0,5\Delta t v_c)} S^{n-1},$$

$$\text{όπου } S^n = -\frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} E^n + \frac{(1 - 0,5\Delta t v_c)}{(1 + 0,5\Delta t v_c)} S^{n-1} \text{ και } I^n = I^{n-1} + \frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} E^n.$$

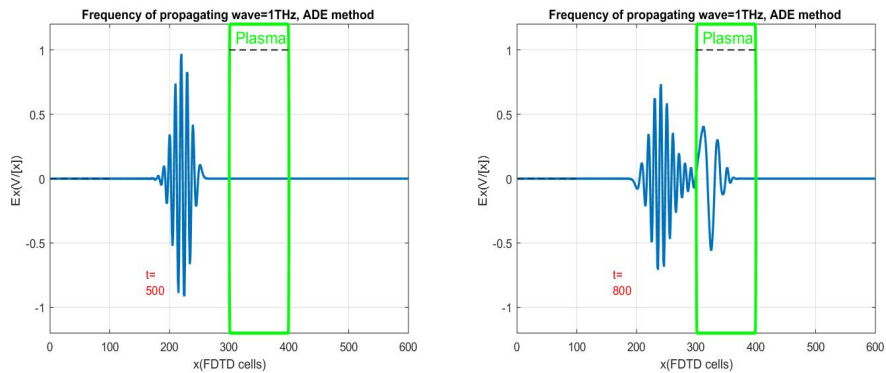
Αντιλαμβανόμαστε ότι ο παλμός και το φάσμα του παλμού, καθώς επίσης και η επιδεκτικότητα δεν έχουν σχέση με την μέθοδο που χρησιμοποιούμε για να προσεγγίσουμε το πρόβλημα. Επομένως, τα Σχήματα 15, 17 και 19 που αφορούν τα 3 αυτά μεγέθη δεν αλλάζουν, καθώς δεν αλλάζει ο παλμός ή η συχνότητα πλάσματος που χρησιμοποιούμε για τις προσομοιώσεις μας.

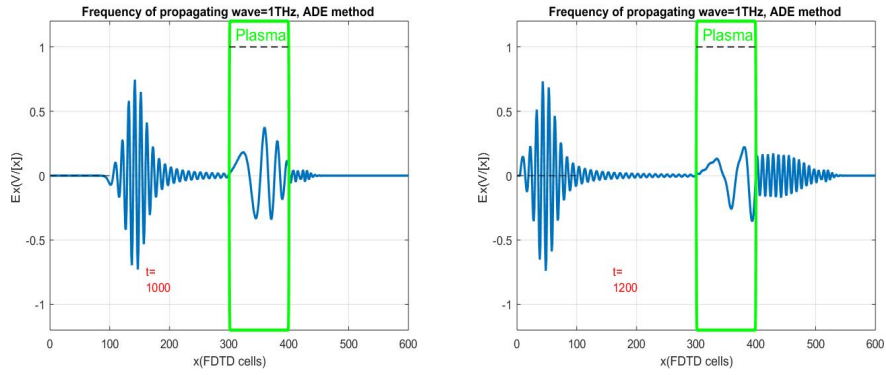
Για την πρώτη περίπτωση, όπου η συχνότητα του παλμού είναι μικρότερη από την συχνότητα του μέσου ($f_0 = 0,7THz$ και $f_p = 1THz$, Σχήμα 15) οι προσομοιώσεις μας δίνουν (κώδικας 1.12):



Σχήμα 21: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Drude*.

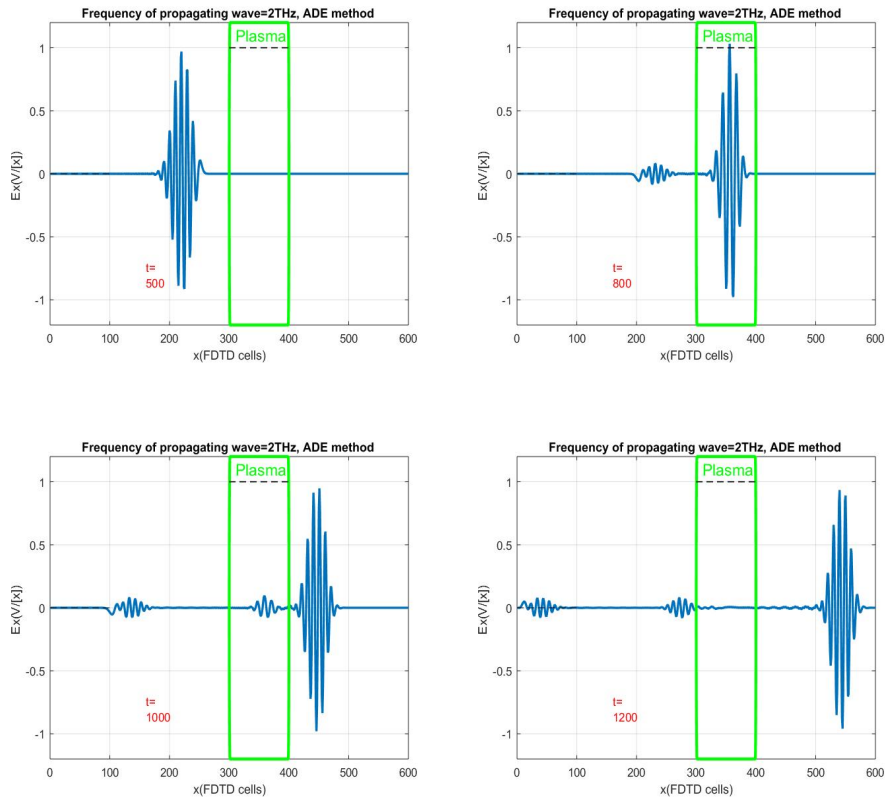
Για την δεύτερη περίπτωση όπου η συχνότητα του παλμού είναι ίση με την συχνότητα πλάσματος του μέσου ($f_0 = f_p = 1THz$, Σχήμα 17) θα έχουμε:





Σχήμα 22: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Drude*.

Τέλος, για την τρίτη περίπτωση ($f_0 = 2THz$ και $f_p = 1THz$, Σχήμα 19) θα είναι:



Σχήμα 23: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Drude*.

Και στις 3 περιπτώσεις, παρατηρείται μεγάλη ομοιότητα με τα αποτελέσματα της μεθόδου RC . Αυτό είναι κάτι αναμενόμενο βέβαια, γιατί και πάλι ισχύει η μαθηματική προσέγγιση $\frac{(1 - 0.5\Delta t v_c)}{(1 + 0.5\Delta t v_c)} \cong e^{-\Delta t v_c}$. Είδαμε ότι για να ισχύει απόλυτα αυτή η προσέγγιση θα πρέπει $\Delta t v_c \leq 0,1$. Για τις τιμές που χρησιμοποιούμε σε όλες τις προσομοιώσεις για το υλικό *Drude*, το Δx είναι της τάξης του 10^{-5} άρα θα έχουμε Δt της τάξης του 10^{-13} πάντα και το v_c είναι της τάξης του 10^{10} . Επομένως το γινόμενο τους θα είναι της τάξης του 10^{-3} το οποίο είναι πολύ μικρότερο της μονάδας. Έτσι η προσέγγιση περιμένουμε να ισχύει απόλυτα και για αυτό παρατηρούμε τόσο μεγάλη ομοιότητα στις δύο μεθόδους. Αυτό όμως, θα το δούμε αναλυτικά παρακάτω στην σύγκριση των 3 μεθόδων.

3.2.3 Επίλυση με τη μέθοδο μετασχηματισμού Z

Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο μετασχηματισμού Z για την επίλυση του προβλήματος, χωρίς όμως τη χρήση της αναδρομικής σχέσης I^n . Θα δούμε ότι το αποτέλεσμα θα είναι ακριβώς ίδιο. Γράφουμε την σχετική επιδεκτικότητα στη μορφή:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2/v_c}{j\omega} - \frac{\omega_p^2/v_c}{v_c + j\omega}.$$

Συμβουλευόμαστε τον πίνακα της θεωρίας για το μετασχηματισμό Z, αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση και προκύπτει για την επιδεκτικότητα στον χώρο των Z:

$$\epsilon(z) = \frac{1}{\Delta t} + \frac{\omega_p^2/v_c}{1 - z^{-1}} - \frac{\omega_p^2/v_c}{1 - e^{-v_c\Delta t}z^{-1}}.$$

Η ηλεκτρική μετατόπιση θα είναι: $D(z) = \epsilon(z)E(z)\Delta t$. Άρα θα έχουμε:

$$D(z) = E(z) + \frac{\omega_p^2\Delta t}{v_c} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-v_c\Delta t}z^{-1}} \right] E(z).$$

Θεωρούμε το δεύτερο όρο ως: $S(z) = \frac{\omega_p^2\Delta t}{v_c} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-v_c\Delta t}z^{-1}} \right] E(z)$ και λύνουμε την ηλεκτρική μετατόπιση ως προς E :

$$E(z) = D(z) - z^{-1}S(z),$$

$$\text{όπου } S(z) = (1 + e^{-v_c\Delta t})z^{-1}S(z) - e^{-v_c\Delta t}z^{-2}S(z) + \frac{\omega_p^2\Delta t}{v_c}(1 - e^{-v_c\Delta t})E(z).$$

Το $z^{-1}S(z)$ θα μας δώσει S^{n-1} και το $z^{-2}S(z)$ θα μας δώσει S^{n-2} . Τελικά, θα έχουμε:

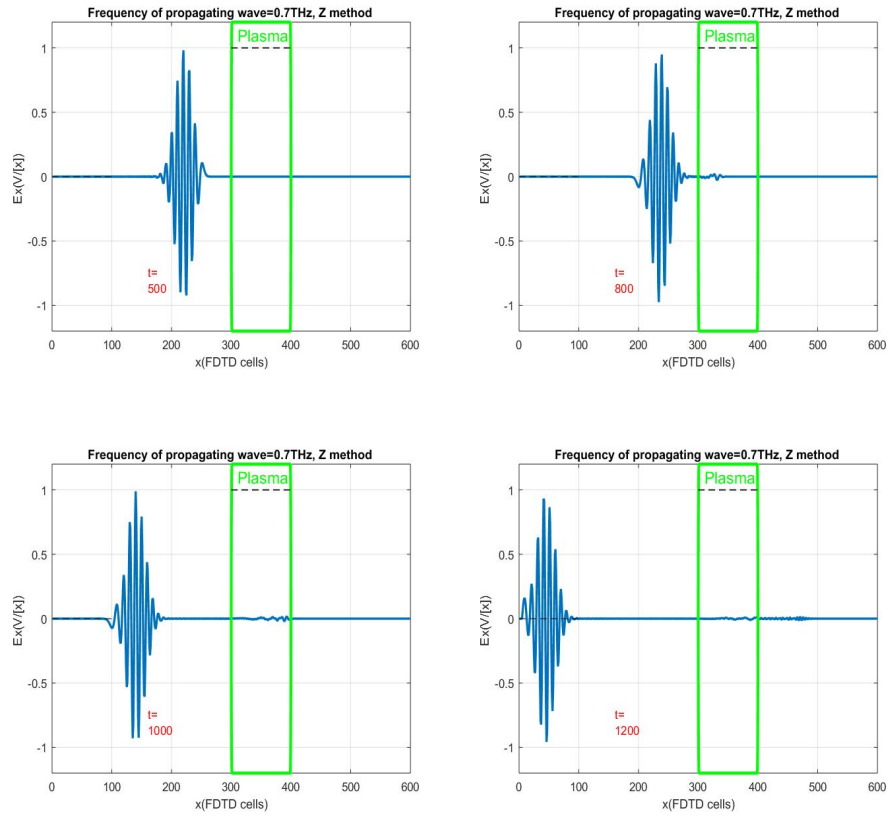
$$E^n = D^n - S^{n-1},$$

$$\text{όπου } S^n = (1 + e^{-v_c\Delta t})S^{n-1} - e^{-v_c\Delta t}S^{n-2} + \frac{\omega_p^2\Delta t}{v_c}(1 - e^{-v_c\Delta t})E^n.$$

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις είναι ίδιες με αυτές που υπολογίσαμε

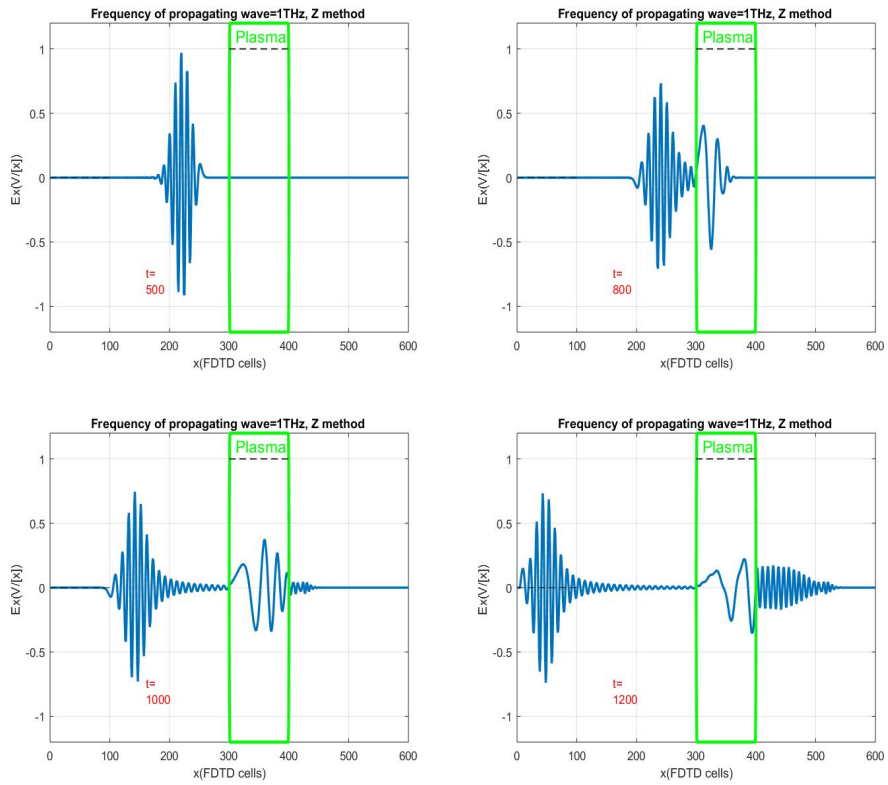
για τη μέθοδο RC , θεωρώντας και την αναδρομική σχέση I^n . Και πάλι για τις προσομοιώσεις θα ισχύουν τα σχήματα 15,17 και 19.

Για την πρώτη περίπτωση (σχήμα 15), τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων θα είναι (κώδικας 1.13):



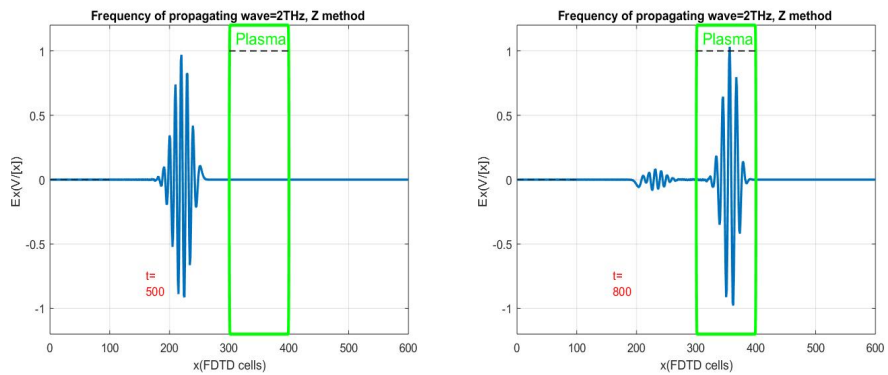
Σχήμα 24: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά $Drude$.

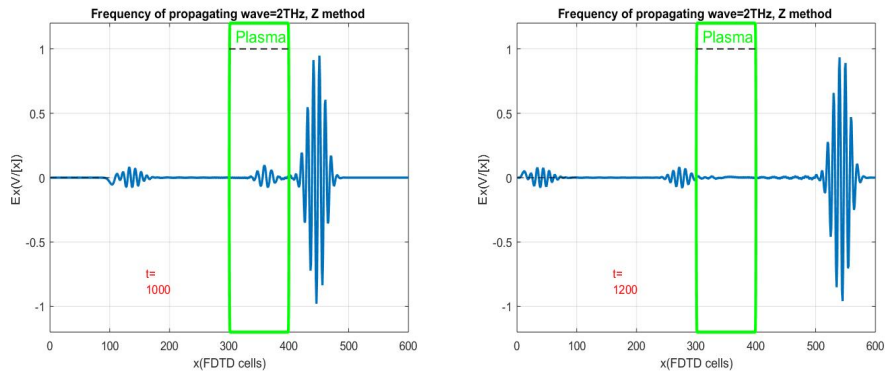
Για τη δεύτερη περίπτωση (σχήμα 17) όπου η συχνότητα του παλμού είναι ίση με την συχνότητα πλάσματος θα έχουμε:



Σχήμα 25: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Drude*.

Τέλος, για την τρίτη περίπτωση όπου η συχνότητα του παλμού είναι μεγαλύτερη θα έχουμε:





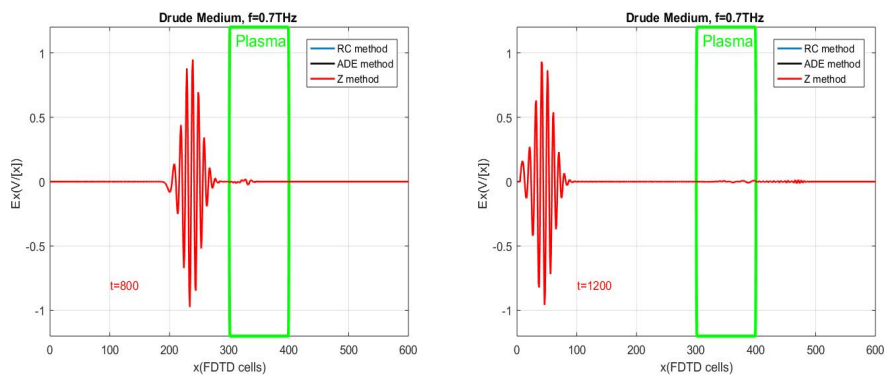
Σχήμα 26: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Drude*.

Παρατηρούμε και πάλι πολλές ομοιότητες με τις άλλες δύο μεθόδους. Αυτό θα φανεί καλύτερα στην σύγκριση των 3 μεθόδων. Εδώ, λόγω της ομοιότητας των εξισώσεων αναμέναμε να έχουμε αρκετές ομοιότητες.

3.2.4 Σύγκριση 3 μεθόδων

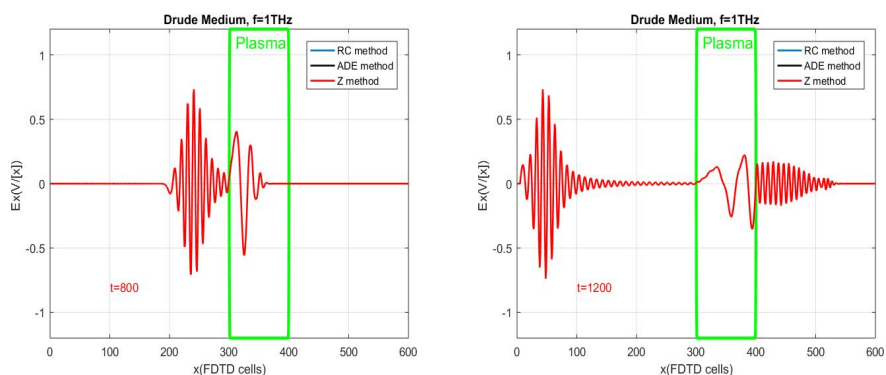
Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση των 3 μεθόδων. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα χρησιμοποιώντας των κώδικα 1.9 . Το μόνο που χρειάζεται να αλλάξουμε είναι τον χώρο που χρησιμοποιούμε (τώρα χρησιμοποιούμε 600 κελιά) και φυσικά τα ονόματα των αρχείων που θέλουμε το πρόγραμμα να διαβάζει τις τιμές που περιέχονται σε αυτά.

Για την πρώτη περίπτωση (σχήμα 15) θα έχουμε:



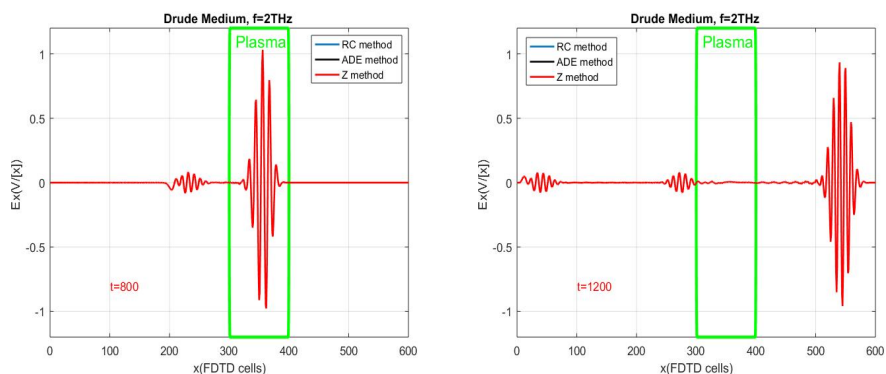
Σχήμα 27: Σύγκριση 3 μεθόδων σε υλικό με διασπορά *Drude*.

Για την δεύτερη περίπτωση (σχήμα 17) θα έχουμε:



Σχήμα 28: Σύγκριση 3 μεθόδων σε υλικό με διασπορά *Drude*.

Τέλος, για την τρίτη περίπτωση (σχήμα 19) θα έχουμε:



Σχήμα 29: Σύγκριση 3 μεθόδων σε υλικό με διασπορά *Drude*.

Παρατηρούμε σε κάθε περίπτωση μία τέλεια ομοιότητα στα αποτελέσματα των 3 μεθόδων. Από αυτά που σχολιάσαμε σε κάθε μέθοδο θα μπορούσαμε να πούμε ότι το αναμέναμε, καθώς στην μέθοδο *ADE* ισχύει απόλυτα η προσέγγιση που την διαφοροποιεί από την μέθοδο *RC*, και η μέθοδος μετασχηματισμού *Z* με τη σειρά της μας δίνει ακριβώς ίδιες εξισώσεις με τη μέθοδο *RC*.

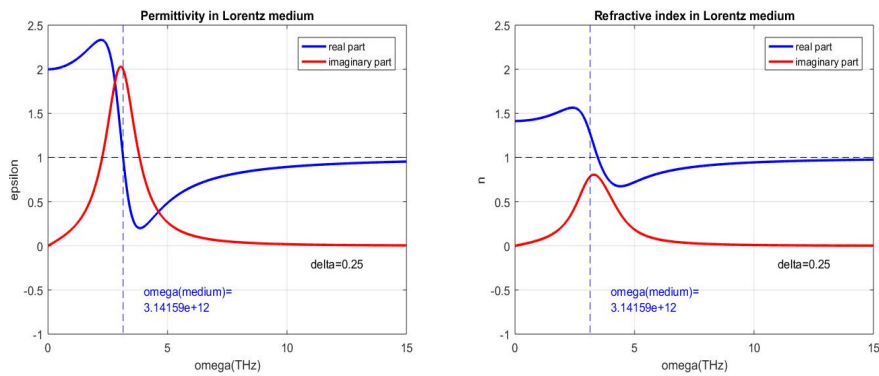
3.3 Υλικό Lorentz σε 1 διάσταση

Ένα υλικό Lorentz χαρακτηρίζεται από την εξής σχέση:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_r + \frac{\epsilon_1}{1 + 2j\delta_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2},$$

όπου ϵ_r , ϵ_1 , δ_0 χαρακτηριστικές σταθερές του υλικού και $\omega_0 = 2\pi f_0$ η συχνότητα συντονισμού του υλικού. Οι σταθερές ϵ_r και ϵ_1 έχουν να κάνουν με το ύψος της καμπύλης της επιδεκτικότητας ενώ η σταθερά δ_0 αφορά το πλάτος της καμπύλης. Ο δείκτης διάθλασης και σε αυτήν την περίπτωση υπολογίζεται από τη σχέση $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r \epsilon(\omega)}$. Πρόκειται για χαρακτηριστική περίπτωση διηλεκτρικού υλικού, καθώς $\omega_0 \neq 0$ όπως αναφέραμε και στη θεωρία.

Για τις τιμές $\epsilon_r = 1$, $\epsilon_1 = 1$, $\delta_0 = 0,25$ και $f_0 = 0,5THz$ η επιδεκτικότητα και ο δείκτης διάθλασης του υλικού είναι (κώδικας 1.14):



Σχήμα 30: Επιδεκτικότητα και δείκτης διάθλασης για υλικό Lorentz.

Από το Σχήμα 30 παραπάνω, παρατηρούμε μία πολύ ενδιαφέρουσα συμπεριφορά της επιδεκτικότητας. Πρόκειται για ένα υλικό με πολύ ιδιαίτερες ιδιότητες και παράξενη συμπεριφορά όπως θα δούμε παρακάτω. Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της επιδεκτικότητας χαρακτηρίζουν τις διαθλαστικές (*refractive*) και απορροφητικές (*absorptive*) ιδιότητες του υλικού αντίστοιχα.

Μεγάλο ενδιαφέρον έχει η μελέτη της περιοχής συχνοτήτων γύρω από την συχνότητα συντονισμού ω_0 . Παρατηρούμε ότι το πραγματικό μέρος μειώνεται πολύ απότομα και φτάνει σε τιμή χαμηλότερη του $\epsilon_r = 1$, γεγονός που προκαλεί ανώμαλη διασπορά. Στην περιοχή αυτή, θα έχουμε την μέγιστη απορρόφηση καθώς εκεί παρατηρείται και το μέγιστο του φανταστικού μέρους. Για να έχουμε ομαλή διασπορά, πρέπει το πραγματικό μέρος της επιδεκτικότητας να είναι αύξουσα συνάρτηση της συχνότητας ω . Ομαλή διασπορά λοιπόν θα έχουμε στα 'πτερύγια'

των καμπυλών, αριστερά και δεξιά της συχνότητας συντονισμού του υλικού, εκεί δηλαδή που αρχίζει και τελειώνει η καμπύλη του φανταστικού μέρους όπου στην περιοχή αυτή το πραγματικό μέρος είναι αύξουσα συνάρτηση της συχνότητας. Για αρκετά μεγαλύτερες συχνότητες διάδοσης του κύματος από τη συχνότητα συντονισμού του υλικού, παρατηρούμε ότι το φανταστικό μέρος γίνεται μηδέν, ενώ το πραγματικό μέρος γίνεται μονάδα. Εκεί αναμένουμε το υλικό να συμπεριφέρεται σαν να είναι ο ελεύθερος χώρος.

3.3.1 Επίλυση με τη μέθοδο RC

Η μέθοδος *RC* δεν συνίσταται στην συγκεκριμένη περίπτωση, καθώς έχει περιπλοκούς υπολογισμούς ολοκληρωμάτων λόγω της ύπαρξης του δεύτερης τάξης πόλου $(j\omega)^2$ στον παρονομαστή της επιδεκτικότητας. Ωστόσο, η συλλογιστική πορεία δεν αλλάζει. Η διαφορά τώρα είναι ότι αυτός ο όρος θα μας δώσει $(\Delta t\omega_0)^2$ όταν κάνουμε τη μετατροπή του ολοκληρώματος σε άθροισμα και θα έχουμε έναν επιπλέον όρο όπου ο εκθετικός παράγοντας θα πρέπει να είναι υψωμένος στο τετράγωνο και η ποσότητα να υπολογίζεται για δύο προηγούμενα βήματα αντί για ένα όπως είδαμε στα άλλα υλικά.

Η ηλεκτρική μετατόπιση θα είναι $D(\omega) = \epsilon(\omega)E(\omega)$, που ισούται με

$$D(\omega) = \epsilon_r E(\omega) + \frac{\epsilon_1}{1 + 2j\delta_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} E(\omega). \quad \text{Θέτουμε τον δεύτερο όρο}$$

$$S(\omega) = \frac{\epsilon_1}{1 + 2j\delta_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} E(\omega) \quad \text{και καταλήγουμε στις σχέσεις:}$$

$$(\omega_0^2 + j\omega_0\delta_0 + (j\omega)^2)S(\omega) = \omega_0^2\epsilon_1 E(\omega) \quad \text{και} \quad D(\omega) = \epsilon_r E(\omega) + S(\omega).$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο *RC* τώρα θα έχουμε έναν παράγοντα που θα μας δίνει $(\Delta t\omega_0)^2 e^{-\delta_0\omega_0\Delta t} S^{n-1}$ και έναν άλλο παράγοντα που θα μας δώσει $e^{-2\delta_0\omega_0\Delta t} S^{n-2}$. Για $\epsilon_r = 1$, οι εξισώσεις που προκύπτουν μετά από μερικές πράξεις είναι:

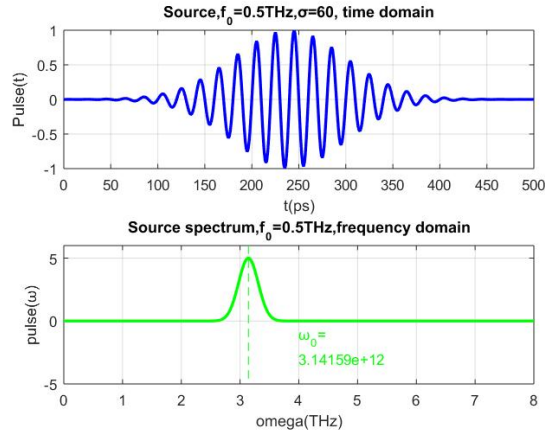
$$E^n = D^n - S^n, \quad \text{όπου}$$

$$S^n = (2 - (\Delta t\omega_0)^2) e^{-\delta_0\omega_0\Delta t} S^{n-1} - e^{-2\delta_0\omega_0\Delta t} S^{n-2} + (\epsilon_1(\Delta t\omega_0)^2) e^{-\delta_0\omega_0\Delta t} E^n.$$

Όπως προαναφέρθηκε, στο συγκεκριμένο υλικό έχει μεγάλο ενδιαφέρον η μελέτη της περιοχής συχνοτήτων κοντά στην συχνότητα συντονισμού του υλικού. Για αυτό, παρακάτω θα γίνουν προσομοιώσεις με συχνότητα διάδοσης του κύματος ίση , μεγαλύτερη και τέλος αρκετά μεγαλύτερη συγκριτικά με τη συχνότητα συντονισμού του υλικού.

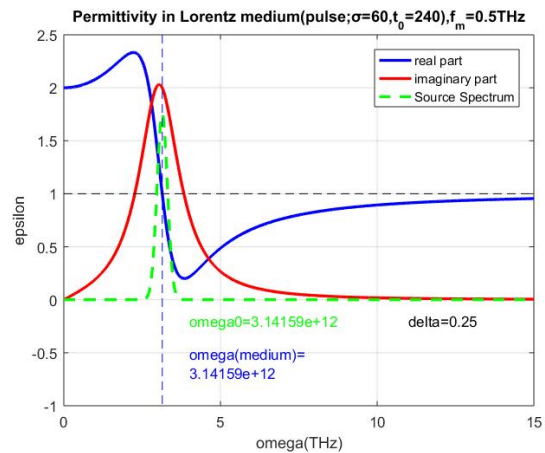
Θα χρησιμοποιήσουμε έναν παλμό της μορφής: $pulse = \exp\left(-0.5 * \left(\frac{n - n_0}{\sigma}\right)^2\right) * \sin(2\pi f_0 \Delta t n)$, όπου n είναι τα χρονικά βήματα, σ η διασπορά του Γκαουσιανού

παλμού, f_0 η συχνότητα του ημιτονοειδούς παλμού. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε $n_0 = 240$ και $\sigma = 60$ για να δημιουργήσουμε έναν 'φάκελο' με μεγαλύτερο διακρότημα μέσα. Ομοίως με τις προηγούμενες περιπτώσεις υπολογίζουμε το Δx και Δt από το φάσμα του παλμού. Για $f_0 = 0,5THz$ ο παλμός και το φάσμα του παλμού είναι (κώδικας 1.6):



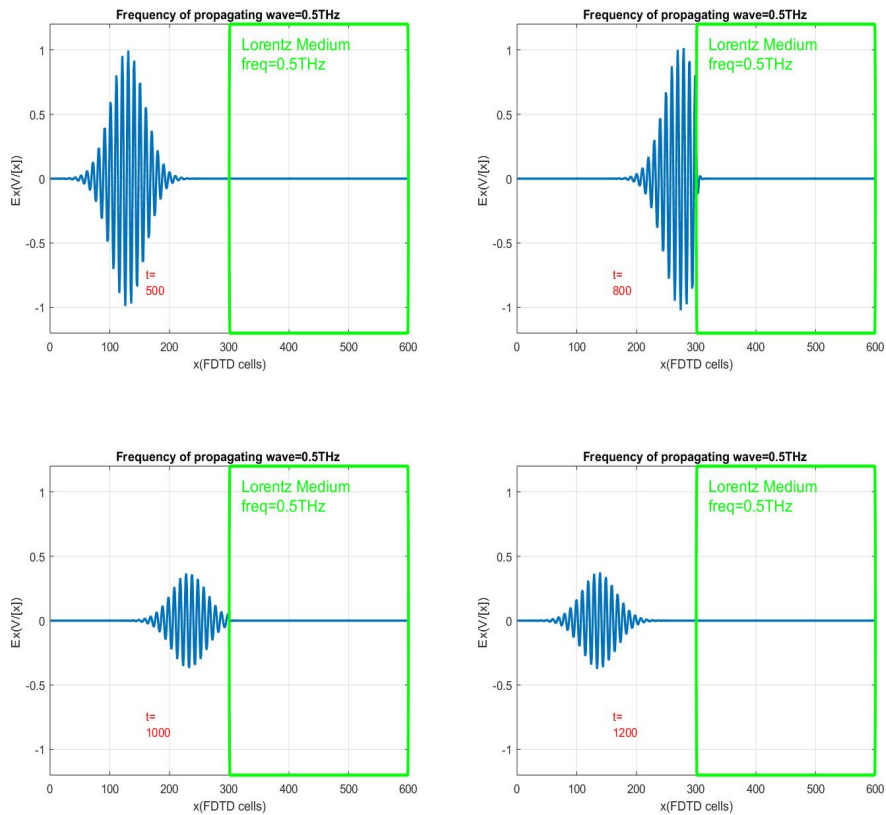
Σχήμα 31: Παλμός και φάσμα παλμού για $f_0 = 0,5THz$.

Για την πρώτη περίπτωση, όπου $f_0 = 0,5THz$ συχνότητα κύματος είναι ίση με τη συχνότητα συντονισμού του υλικού, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος σε σύγκριση με το φάσμα της πηγής θα είναι (κώδικας 1.14):



Σχήμα 32: Επιδεικτικότητα και φάσμα παλμού για $f_0 = 0,5THz$.

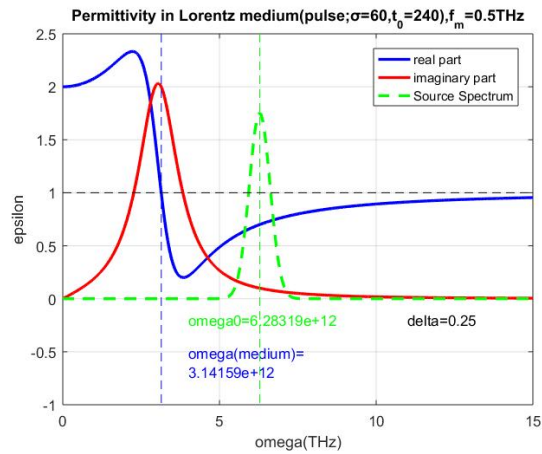
Για τις προσομοιώσεις, θεωρούμε έναν χώρο που αποτελείται από 600 κελιά συνολικά και τοποθετούμε το υλικό *Lorentz* στο χώρο από 300 έως 600. Τα αποτελέσματα για την πρώτη περίπτωση όπου $f_0 = 0,5THz$, με τη μέθοδο *RC* είναι τα εξής (κώδικας 1.15):



Σχήμα 33: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Lorentz*.

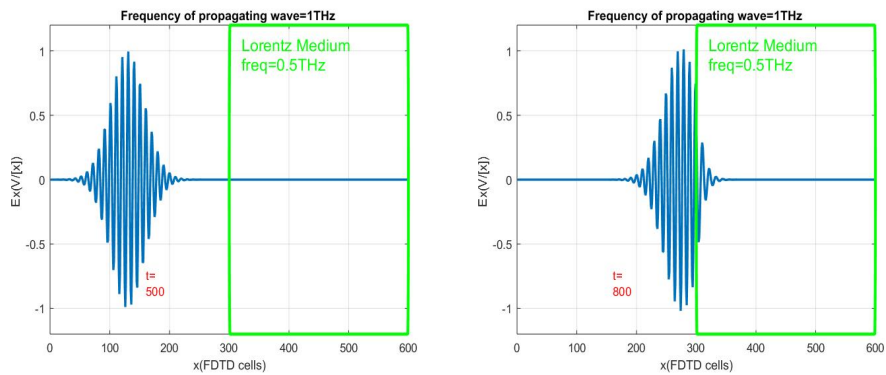
Όπως αναφέραμε και παραπάνω, ένα υλικό με διασπορά *Lorentz* στην συχνότητα συντονισμού παρουσιάζει ανώμαλη διασπορά λόγω της απότομης μείωσης του πραγματικού μέρους της επιδεκτικότητας και μέγιστη απορρόφηση εξαιτίας του μέγιστου που παρουσιάζει το φανταστικό μέρος της επιδεκτικότητας. Έτσι, όταν ένας παλμός έχει ίδια συχνότητα διάδοσης με τη συχνότητα συντονισμού του Λορεντζιανού μέσου, παρατηρούμε ότι πράγματι έχουμε πολύ μεγάλη απορρόφηση, καθώς δεν διαδίδεται καθόλου το κύμα μέσα στο μέσο και το μέρος που ανακλάται είναι αρκετά μικρότερο από το αρχικό κύμα. Αυτό συμβαίνει γιατί το φάσμα του παλμού συμπίπτει με αυτήν την απότομη μείωση του πραγματικού μέρους και το μέγιστο του φανταστικού μέρους της επιδεκτικότητας.

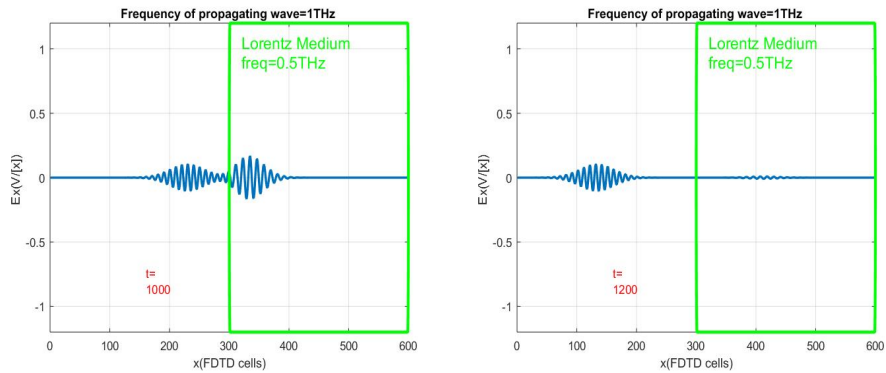
Για τη δεύτερη περίπτωση, επιλέγουμε η συχνότητα διάδοσης του κύματος να είναι λίγο μεγαλύτερη από την συχνότητα συντονισμού του υλικού. Επιλέγουμε $f_0 = 1THz$. Το φάσμα σε σύγκριση με την επιδεκτικότητα θα είναι τώρα:



Σχήμα 34: Επιδεκτικότητα και φάσμα παλμού για $f_0 = 1THz$.

Τώρα παρατηρούμε ότι το φάσμα της πηγής βρίσκεται στο δεξί άκρο του φασματικού μέρους, επομένως αναμένουμε μικρότερη απορρόφηση από το μέσο, και βρίσκεται στην αύξουσα καμπύλη του πραγματικού μέρους, επομένως αναμένουμε ομαλή διασπορά. Οι αντίστοιχες προσομοιώσεις για αυτήν την περίπτωση θα είναι (κώδικας 1.15):

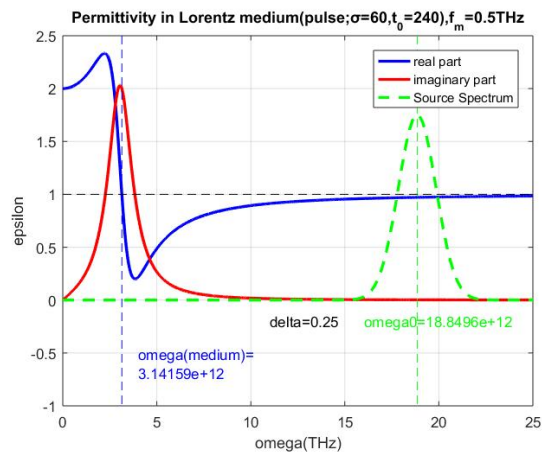




Σχήμα 35: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Lorentz*.

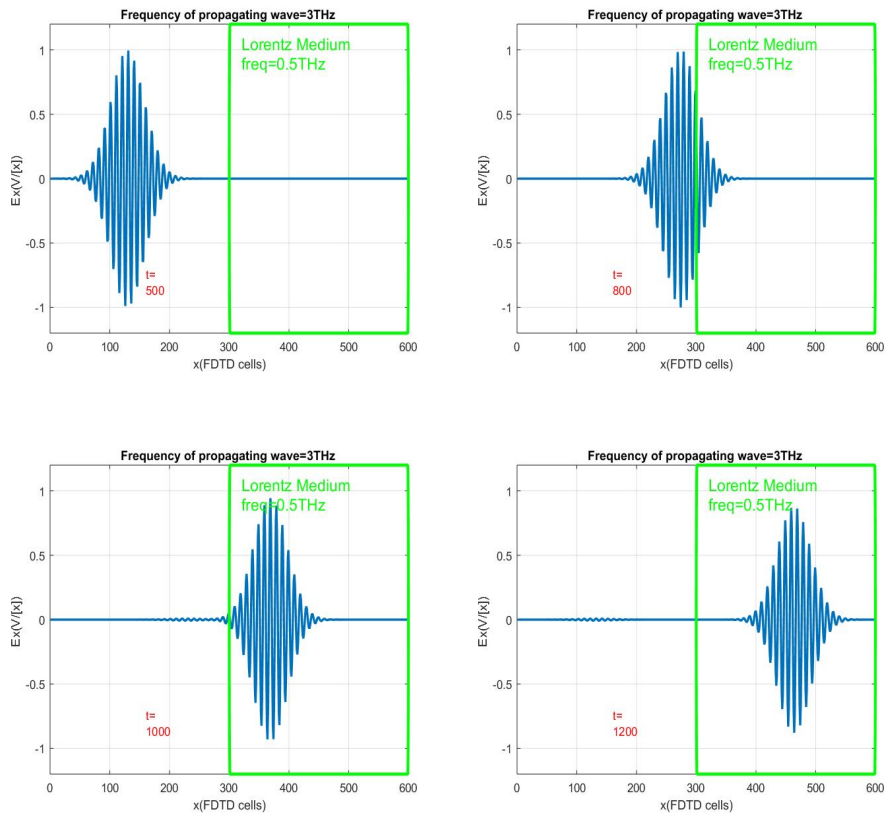
Παρατηρούμε από τα στιγμιότυπα στο Σχήμα 35 ότι ο παλμός διαδίδεται τώρα μέσα στο μέσο, όπως είχαμε υποθέσει. Μάλιστα, βλέπουμε ότι υπάρχει ομαλή διασπορά καθώς ο παλμός διαδίδεται εντός του μέσου και απορροφάται ομαλά, ενώ το υπόλοιπο μέρος του παλμού, το οποίο είναι εμφανώς μειωμένο, ανακλάται προς τα αριστερά.

Η τρίτη περίπτωση που θα μελετήσουμε, είναι η συχνότητα διάδοσης του κύματος να είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την συχνότητα συντονισμού του υλικού. Επιλέγουμε συχνότητα διάδοσης του κύματος $f_0 = 3THz$. Το φάσμα της πηγής σε σύγκριση με την επιδεκτικότητα θα είναι:



Σχήμα 36: Επιδεκτικότητα και φάσμα παλμού για $f_0 = 3THz$.

Παρατηρούμε τώρα ότι το φάσμα της πηγής βρίσκεται σε περιοχή συχνοτήτων όπου το φανταστικό μέρος της επιδεκτικότητας έχει γίνει μηδέν, επομένως αναμένουμε να μην έχουμε απορρόφηση όσο ο παλμός διαδίδεται εντός του υλικού. Επίσης, παρατηρούμε ότι βρίσκεται σε μία περιοχή συχνοτήτων όπου το πραγματικό μέρος είναι λίγο μικρότερο από τη μονάδα, επομένως αναμένουμε να έχουμε μία πολύ μικρή έως ελάχιστη ανάκλαση του παλμού όταν προσκρούει στο υλικό. Οι αντίστοιχες προσομοιώσεις είναι (κώδικας 1.15):



Σχήμα 37: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Lorentz*.

Πράγματι, από τα στιγμιότυπα στο Σχήμα 37 παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει απορρόφηση εντός του υλικού ενώ παράλληλα έχουμε και μία ελάχιστη ανάκλαση του παλμού προς τα αριστερά, όπως είχαμε υποθέσει από τις παρατηρήσεις που έγιναν στο Σχήμα 36. Δηλαδή ο παλμός όταν εισέρχεται στο μέσο μειώνεται ελάχιστα ακαριαία και το υπόλοιπο μέρος του ανακλάται, χωρίς να έχουμε απορρόφηση.

3.3.2 Επίλυση με τη μέθοδο ADE

Η πιο εύκολη και άμεση, ίσως, μέθοδος να μελετήσουμε ένα πολύπλοκο υλικό Lorentz είναι η ADE. Αρχικά, γράφουμε την επιδεκτικότητα ως εξής:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_r + \frac{\omega_0^2 \epsilon_1}{\omega_0^2 + j\omega 2\delta_0\omega_0 + (j\omega)^2}.$$

Τότε, η ηλεκτρική μετατόπιση, D , θα γίνει: $D(\omega) = \epsilon(\omega)E(\omega)$ το οποίο θα ισούται με $D(\omega) = \epsilon_r E(\omega) + \frac{\omega_0^2 \epsilon_1}{\omega_0^2 + j\omega 2\delta_0\omega_0 + (j\omega)^2} E(\omega)$. Θέτουμε το δεύτερο όρο $S(\omega) = \frac{\omega_0^2 \epsilon_1}{\omega_0^2 + j\omega 2\delta_0\omega_0 + (j\omega)^2} E(\omega)$ και προκύπτει $(\omega_0^2 + j\omega 2\delta_0\omega_0 + (j\omega)^2) S(\omega) = \omega_0^2 \epsilon_1 E(\omega)$.

Όπως έχουμε προαναφέρει, στη μέθοδο ADE ο παράγοντας $(j\omega)$ θα μας δώσει την πρώτη παράγωγο της ποσότητας που επιδρά και ο παράγοντας $(j\omega)^2$ θα μας δώσει τη δεύτερη παράγωγο αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών η πρώτη παράγωγος θα είναι:

$$\frac{dS(t)}{dt} \cong \frac{S^n - S^{n-2}}{2\Delta t}, \text{ ενώ η δεύτερη παράγωγος θα είναι:}$$

$\frac{d^2S(t)}{dt^2} \cong \frac{S^n - 2S^{n-1} + S^{n-2}}{\Delta t^2}$. Ο λόγος που υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο κατά αυτόν τον τρόπο, δηλαδή παίρνοντας δύο προηγούμενα χρονικά βήματα, είναι για να υπάρχει αντιστοιχία με τη δεύτερη παράγωγο που υποχρεωτικά χρειάζεται δύο προηγούμενα χρονικά βήματα. Κάνοντας τις προσεγγίσεις των πεπερασμένων διαφορών, προκύπτει:

$$\omega_0^2 S^{n-1} + 2\delta_0\omega_0 \frac{S^n - S^{n-2}}{2\Delta t} + \frac{S^n - 2S^{n-1} + S^{n-2}}{\Delta t^2} = \omega_0^2 \epsilon_1 E^{n-1}. \text{ Κάνοντας με-}$$

ρικές πράξεις θα έχουμε:

$$S^n \left(\frac{\delta_0\omega_0}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t^2} \right) + S^{n-1} \left(\omega_0^2 - \frac{2}{\Delta t^2} \right) + S^{n-2} \left(-\frac{\delta_0\omega_0}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t^2} \right) = \omega_0^2 \epsilon_1 E^{n-1}$$

$$\rightarrow S^n = - \left(\frac{\omega_0^2 - \frac{2}{\Delta t^2}}{\frac{\delta_0\omega_0}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t^2}} \right) S^{n-1} - \left(-\frac{\delta_0\omega_0}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t^2} \right) S^{n-2} + \frac{\omega_0^2 \epsilon_1}{\left(\frac{\delta_0\omega_0}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t^2} \right)} E^{n-1}$$

$$\rightarrow S^n = \frac{(2 - \Delta t^2 \omega_0^2)}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)} S^{n-1} - \frac{(1 - \Delta t \delta_0 \omega_0)}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)} S^{n-2} + \frac{((\Delta t \omega_0)^2 \epsilon_1)}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)} E^{n-1}.$$

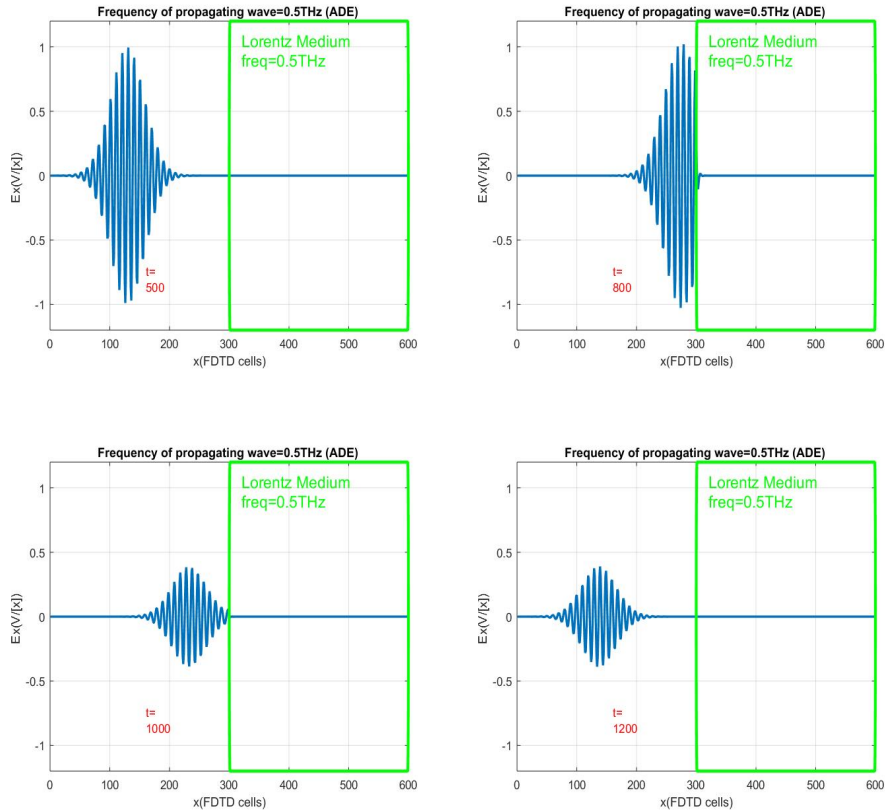
Για $\epsilon_r = 1$ οι εξισώσεις που προκύπτουν τελικά είναι:

$E^n = D^n - S^n$, όπου

$$S^n = \frac{(2 - \Delta t^2 \omega_0^2)}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)} S^{n-1} - \frac{(1 - \Delta t \delta_0 \omega_0)}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)} S^{n-2} + \frac{((\Delta t \omega_0)^2 \epsilon_1)}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)} E^{n-1}.$$

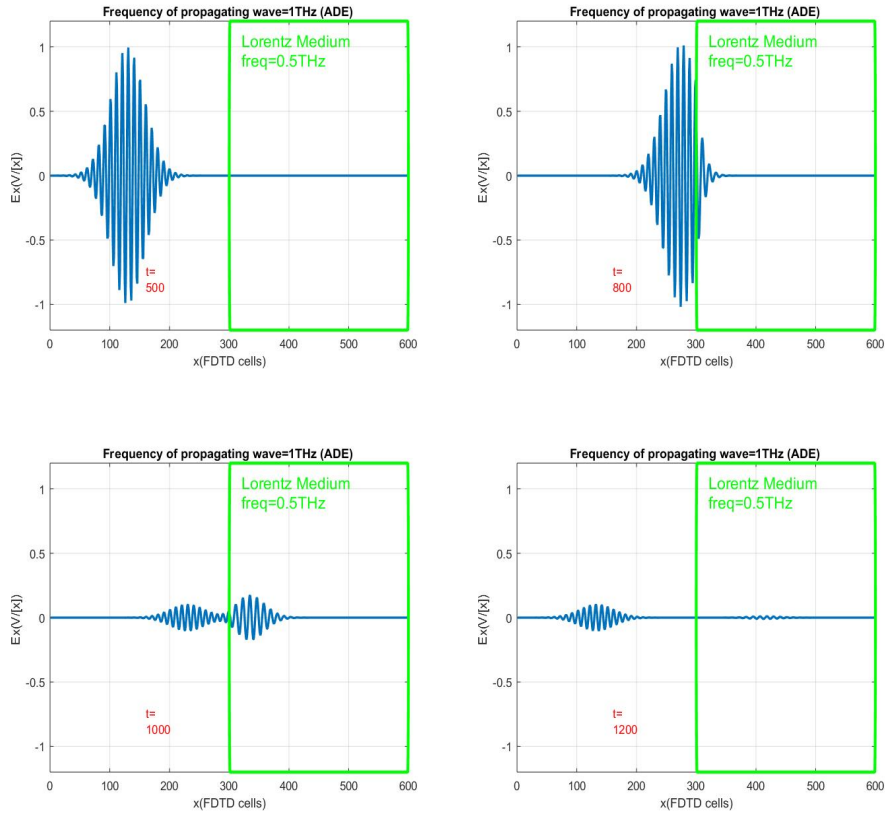
Για τις προσομοιώσεις χρησιμοποιούμε την ίδια ακριβώς πηγή που χρησιμοποιήσαμε για τη μελέτη με τη μέθοδο *RC* παραπάνω καθώς επίσης και τις ίδιες συχνότητες διάδοσης του κύματος. Έτσι, η πηγή και το φάσμα της πηγής δεν θα αλλάξουν. Το μόνο που αλλάζει είναι οι εξισώσεις που χρησιμοποιούμε στον κώδικα για να υπολογίσουμε τελικά το ηλεκτρικό πεδίο. Το μέσο έχει πάντα ίδια συχνότητα συντονισμού $f = 0,5THz$.

Για την πρώτη περίπτωση, όπου $f_0 = 0,5THz$ (Σχήμα 32) οι προσομοιώσεις δίνουν (κώδικας 1.16):



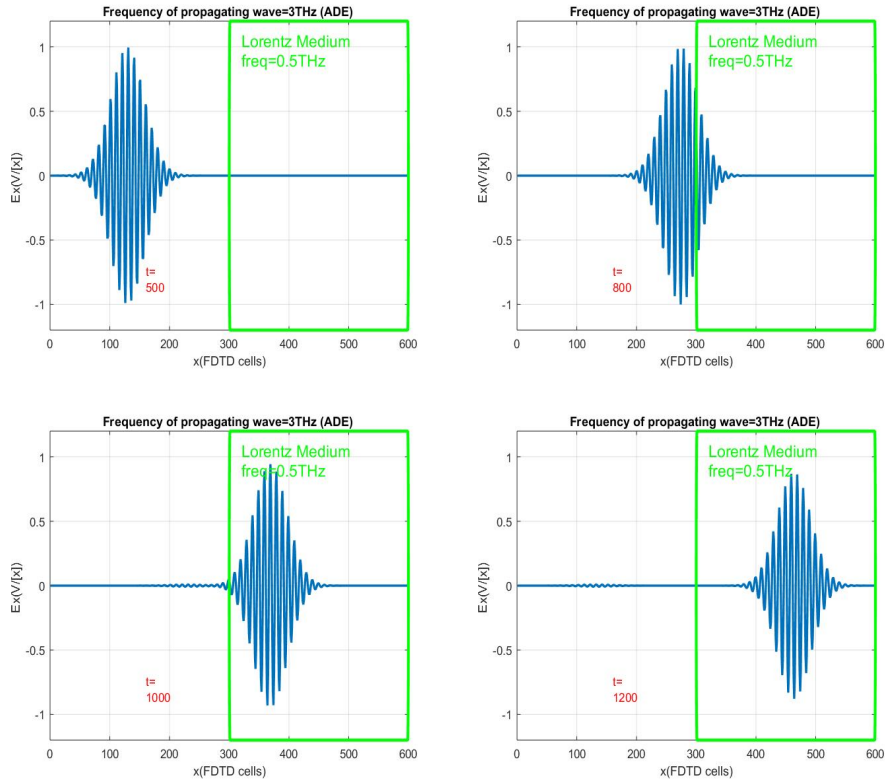
Σχήμα 38: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Lorentz*.

Για τη δεύτερη περίπτωση, όπου η συχνότητα του κύματος, $f_0 = 1THz$ είναι λίγο μεγαλύτερη από τη συχνότητα συντονισμού του υλικού, $f = 0,5THz$ (Σχήμα 34), οι προσομοιώσεις με τη μέθοδο *ADE* είναι:



Σχήμα 39: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Lorentz*.

Τέλος, για την τρίτη περίπτωση όπου η συχνότητα του κύματος, $f_0 = 3THz$, είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τη συχνότητα συντονισμού του υλικού (Σχήμα 36), οι αντίστοιχες προσομοιώσεις είναι:



Σχήμα 40: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Lorentz*.

Και στις 3 περιπτώσεις, στα σχήματα δηλαδή 38, 39, 40, παρατηρούμε πολύ μεγάλη ομοιότητα των προσομοιώσεων της μεθόδου *ADE* με αυτές στα σχήματα 33, 35, 37, της μεθόδου *RC*. Ποιοτικά, έχουμε ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση. Δηλαδή και πάλι το μέσο λειτουργεί όπως είχαμε υποθέσει σε κάθε συχνότητα. Αναλυτικότερη μελέτη θα γίνει παρακάτω στη σύγκριση των 3 μεθόδων.

3.3.3 Επίλυση με τη μέθοδο μετασχηματισμού *Z*

Η τρίτη και τελευταία μέθοδος που χρησιμοποιούμε για τη μελέτη ενός υλικού *Lorentz* με τη μέθοδο *FDTD* είναι η μέθοδος μετασχηματισμού *Z*. Πρόκειται για μία εύκολη και άμεση μέθοδο καθώς το μόνο που χρειάζεται είναι να φέρουμε σε μία βολική μορφή την εξίσωσή μας και στη συνέχεια να κάνουμε τους απαραίτητους μετασχηματισμούς από τον πίνακα που υπάρχει στη θεωρία.

Η ηλεκτρική μετατόπιση όπως είδαμε παραπάνω θα είναι $D(\omega) = \epsilon_r E(\omega) + S(\omega)$. Τώρα, θα γράψουμε το $S(\omega)$ σε μία λίγο παραλλαγμένη μορφή. Θεωρούμε:

$$S(\omega) = \frac{\gamma\beta}{(\alpha^2 + \beta^2) + j\omega 2\alpha + (j\omega)^2} \epsilon_1 E(\omega), \text{ όπου}$$

$$\gamma = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \delta_0^2}}, \alpha = \delta_0 \omega_0, \beta = \omega_0 \sqrt{1 - \delta_0^2}.$$

Ο λόγος που γράφουμε την εξίσωση σε αυτή τη μορφή είναι για να υπάρχει αντιστοίχιση με τη μορφή των εξισώσεων στον πίνακα με τους μετασχηματισμούς Z. Η παραπάνω εξίσωση είναι σε μία ικανοποιητική μορφή ώστε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Z. Χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς που υπάρχουν στη θεωρία στην παράγραφο 1.4.1 και προκύπτει στο πεδίο του Z:

$$S(z) = \frac{e^{-\alpha\Delta t} \sin(\beta\Delta t) \Delta t z^{-1}}{1 - 2e^{-\alpha\Delta t} \cos(\beta\Delta t) z^{-1} + e^{-2\alpha\Delta t} z^{-2}} \gamma \epsilon_1 E(z) \implies$$

$$(1 - 2e^{-\alpha\Delta t} \cos(\beta\Delta t) z^{-1} + e^{-2\alpha\Delta t} z^{-2}) S(z) = e^{-\alpha\Delta t} \sin(\beta\Delta t) \Delta t z^{-1} \gamma \epsilon_1 E(z).$$

Τώρα, το μόνο που μένει είναι να μεταφέρουμε την εξίσωση από το πεδίο του Z στο πεδίο του χρόνου. Αυτό γίνεται εύκολα, καθώς ο παράγοντας z^0 μας δίνει S^n , ο παράγοντας z^{-1} μας δίνει S^{n-1} και ο παράγοντας z^{-2} μας δίνει S^{n-2} . Επομένως θα έχουμε:

$$S^n - 2e^{-\alpha\Delta t} \cos(\beta\Delta t) S^{n-1} + e^{-2\alpha\Delta t} S^{n-2} = e^{-\alpha\Delta t} \sin(\beta\Delta t) \Delta t \gamma \epsilon_1 E^{n-1} \implies$$

$$S^n = 2e^{-\alpha\Delta t} \cos(\beta\Delta t) S^{n-1} - e^{-2\alpha\Delta t} S^{n-2} + e^{-\alpha\Delta t} \sin(\beta\Delta t) \Delta t \gamma \epsilon_1 E^{n-1}.$$

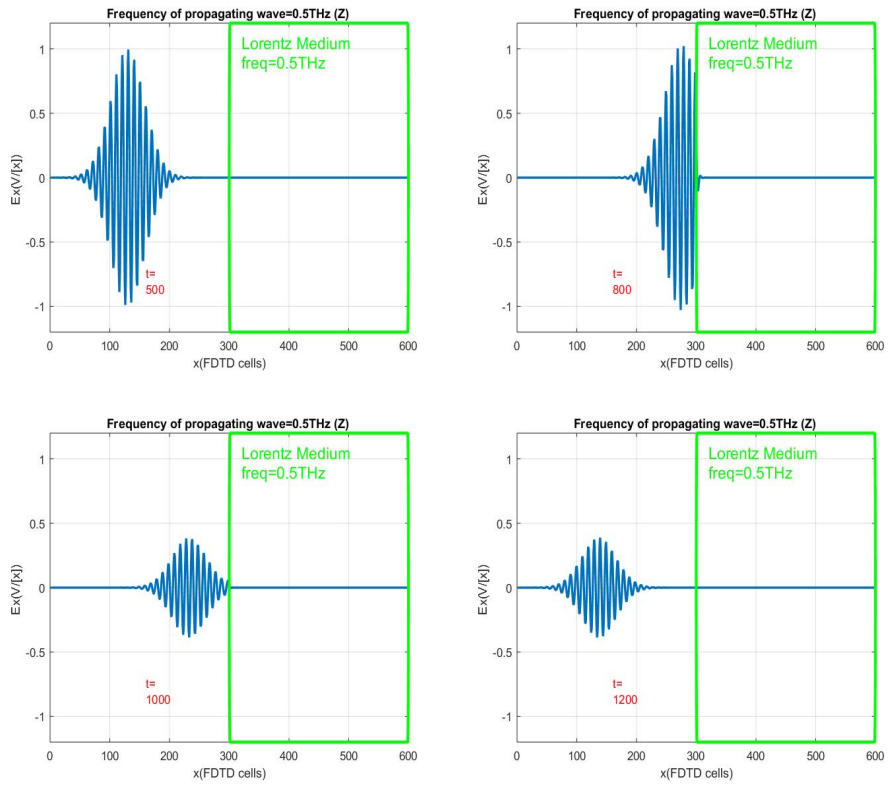
Τελικά, οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε για τις προσομοιώσεις (θεωρώντας $\epsilon_r = 1$) θα είναι:

$$E^n = D^n - S^n, \text{ όπου}$$

$$S^n = 2e^{-\alpha\Delta t} \cos(\beta\Delta t) S^{n-1} - e^{-2\alpha\Delta t} S^{n-2} + e^{-\alpha\Delta t} \sin(\beta\Delta t) \Delta t \gamma \epsilon_1 E^{n-1}.$$

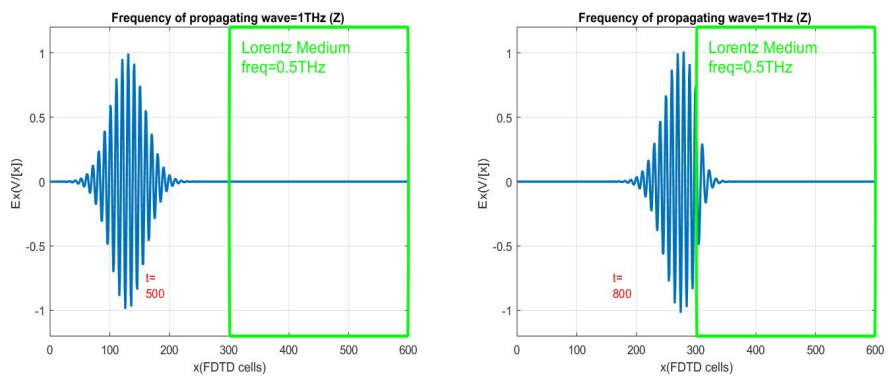
Για τις προσομοιώσεις θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια πηγή με τις προηγούμενες μεθόδους, RC και ADE. Θα εξετάσουμε και πάλι τις 3 περιπτώσεις για τη συχνότητα διάδοσης του κύματος. Αυτό που αλλάζει στη μελέτη του προβλήματος, είναι οι εξισώσεις για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου στον κώδικα που χρησιμοποιούμε. Η συχνότητα συντονισμού του υλικού παραμένει $f = 0,5THz$.

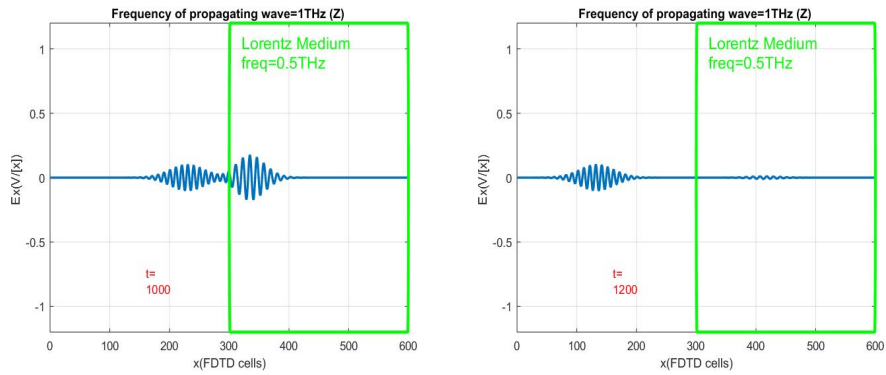
Για την πρώτη περίπτωση, όπου $f_0 = 0,5THz$ (Σχήμα 32), οι προσομοιώσεις θα είναι (κώδικας 1.17):



Σχήμα 41: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Lorentz*.

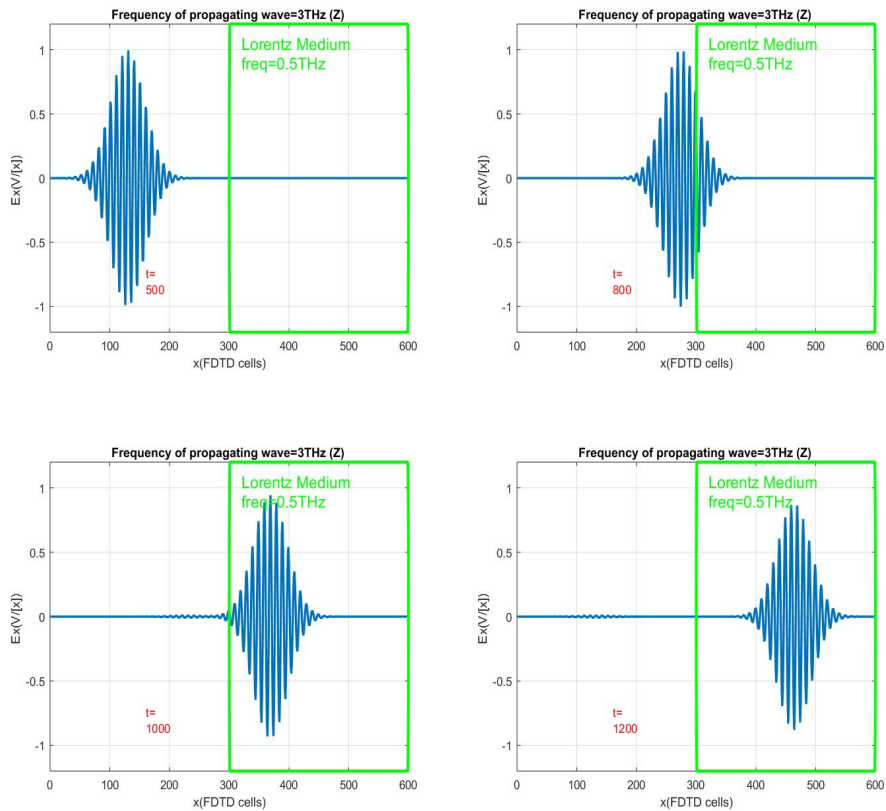
Για τη δεύτερη περίπτωση, όπου $f_0 = 1THz$ (Σχήμα 34), θα έχουμε:





Σχήμα 42: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Lorentz*.

Τέλος, για $f_0 = 3THz$ (Σχήμα 36), οι προσομοιώσεις δίνουν:



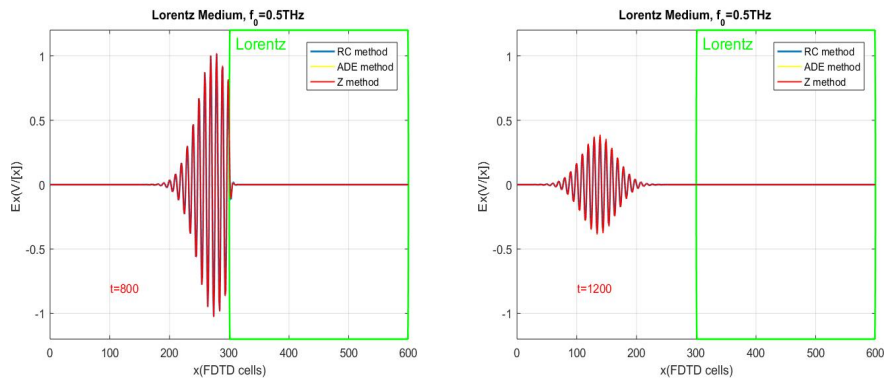
Σχήμα 43: Παλμός προσκρούει σε υλικό με διασπορά *Lorentz*.

Παρατηρούμε και πάλι ότι έχουμε πολλές ομοιότητες με τις άλλες δύο μεθόδους. Είναι πολύ ικανοποιητικό το γεγονός ότι η συμπεριφορά του υλικού, ανεξαρτήτως μεθόδου μελέτης, είναι όπως ακριβώς είχαμε υποθέσει βάση των χαρακτηριστικών του. Λεπτομερής σύγκριση των 3 μεθόδων θα γίνει παρακάτω.

3.3.4 Σύγκριση 3 μεθόδων

Στην περίπτωση του υλικού *Lorentz*, έχει μεγάλο ενδιαφέρον να μελετήσουμε και τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων των τριών μεθόδων που κάναμε, *RC*, *ADE* και μετασχηματισμού *Z* αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι για κάθε περίπτωση έχουμε διαφορετικές εξισώσεις για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου. Ωστόσο, οι προσομοιώσεις φαίνονται αρκετά όμοιες σε κάθε περίπτωση. Για αυτό πρέπει να δώσουμε σημασία στις μαθηματικές προσεγγίσεις που γίνονται και να δούμε πως συνδέονται οι μέθοδοι μεταξύ τους. Για την σύγκριση, χρησιμοποιούμε τον κώδικα 1.9, αλλάζοντας απλά το όνομα του αρχείου που περιέχει τις τιμές της εκάστοτε προσομοίωσης.

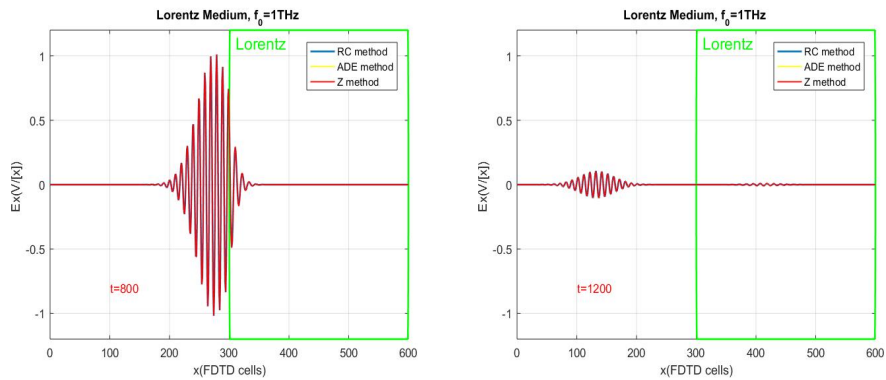
Για την πρώτη περίπτωση, όπου $f_0 = 0,5THz$ (Σχήμα 32), η σύγκριση μας δίνει:



Σχήμα 44: Σύγκριση 3 μεθόδων σε υλικό με διασπορά *Lorentz*.

Παρατηρούμε ότι οι τρεις μέθοδοι σχεδόν συμπίπτουν. Με βεβαιότητα μπορούμε να πούμε ότι τα αποτελέσματα της μέθοδου *ADE* συμπίπτουν πλήρως με αυτά της μεθόδου μετασχηματισμού *Z*, καθώς η κίτρινη καμπύλη επικαλύπτεται από την κόκκινη καμπύλη. Παρατηρείται επίσης μία ελάχιστη, έως ανεπαίσθητη, απόκλιση της μεθόδου *RC* (μπλε γραμμή), εάν παρατηρήσουμε πολύ κοντά τις καμπύλες στο στιγμιότυπο την $t = 800$, σε σύγκριση με τις άλλες δύο μεθόδους.

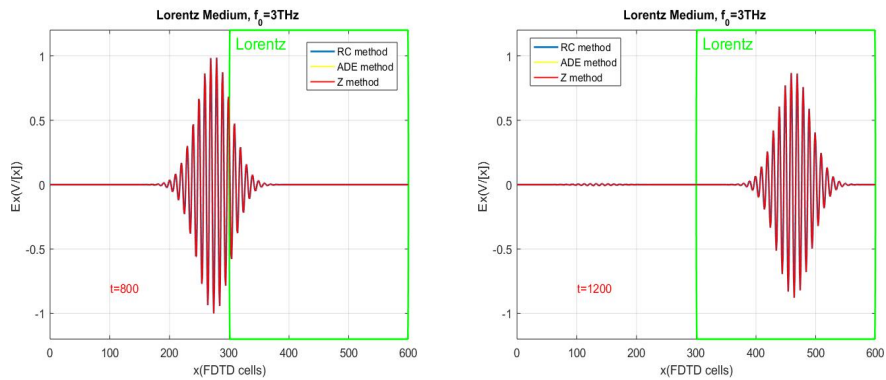
Για τη δεύτερη περίπτωση, όπου $f_0 = 1THz$ (Σχήμα 34), η σύγκριση μας δίνει:



Σχήμα 45: Σύγκριση 3 μεθόδων σε υλικό με διασπορά *Lorentz*.

Από το Σχήμα 45, παρατηρούμε ότι και στη δεύτερη περίπτωση φαίνεται οι τρεις μέθοδοι να συμπίπτουν πλήρως. Εδώ μάλιστα δεν παρατηρείται αυτή η πάρα πολύ μικρή απόκλιση της μεθόδου *RC* που παρατηρήσαμε στην προηγούμενη περίπτωση.

Τέλος, για την τρίτη περίπτωση, όπου $f_0 = 3THz$ (Σχήμα 36), η σύγκριση μας δίνει:



Σχήμα 46: Σύγκριση 3 μεθόδων σε υλικό με διασπορά *Lorentz*.

Και πάλι παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των 3 διαφορετικών μεθόδων με τις οποίες προσεγγίσαμε το πρόβλημα του υλικού *Lorentz* συμπίπτουν.

Τα παραπάνω αποτελέσματα και συμπεράσματα μπορεί να φαίνονται παράδοξα, καθώς έχουμε διαφορετικούς παράγοντες στις εξισώσεις που εξαγάγουμε για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε μέθοδο αντίστοιχα. Ωστόσο, δεν

είναι τόσο παράξενα τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα αν μελετήσουμε τις μαθηματικές προσεγγίσεις που επιδέχονται αυτοί οι παράγοντες.

Επειδή έχουμε να μελετήσουμε περίπλοκες εξισώσεις, θα μελετήσουμε κάθε παράγοντα ξεχωριστά για να εξετάσουμε τι μαθηματικές προσεγγίσεις γίνονται και αν είναι λογικό να βρίσκουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στην σύγκριση των 3 μεθόδων. Εξετάζουμε τους συντελεστές που επηρεάζονται στην εξίσωση για το S^n σε κάθε μέθοδο.

- Όρος S^{n-1} . Έχουμε τους συντελεστές για κάθε μέθοδο:

$$RC : (2 - (\Delta t \omega_0)^2) e^{-\delta_0 \omega_0 \Delta t}, ADE : \frac{(2 - \Delta t^2 \omega_0^2)}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)}, Z : 2e^{-\alpha \Delta t} \cos(\beta \Delta t).$$

Για τη σύγκριση της μεθόδου RC και της ADE , χρησιμοποιούμε τη μαθηματική προσέγγιση $\frac{1}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)} \cong e^{-\Delta t \delta_0 \omega_0}$. Είδαμε ότι για να ισχύει απόλυτα αυτή η προσέγγιση θα πρέπει $\Delta t \delta_0 \omega_0 \leq 0,1$. Στις προσομοιώσεις παραπάνω έχουμε ω_0 της τάξεως του 10^{12} , Δt της τάξεως του 10^{-13} και $\delta_0 = 0,25$. Επομένως το γινόμενο των τριών σταθερών μας δίνει κάτι πράγματι μικρότερο του 0,1, άρα αυτή η προσέγγιση θεωρούμε ότι ισχύει απόλυτα.

Για τη σύγκριση του παράγοντα της μεθόδου Z , εργαζόμαστε ως εξής. Πρώτα, κάνουμε ανάπτυγμα $Taylor$ για το εκθετικό και το συνημίτονο:

$$2e^{-\alpha \Delta t} \cos(\beta \Delta t) \cong 2 \left(\frac{1}{1 + \alpha \Delta t} \right) \left(1 - \frac{(\beta \Delta t)^2}{2} \right) = \frac{2 - (\beta \Delta t)^2}{1 + \alpha \Delta t} = \frac{2 - \omega_0^2 (1 - \delta_0^2) \Delta t^2}{1 + \omega_0 \delta_0 \Delta t}.$$

Στη συνέχεια, επειδή το δ_0 είναι αρκετά μικρότερο από τη μονάδα, τότε το δ_0^2 θα το θεωρήσουμε αμελητέο. Επομένως η ποσότητα που μένει μετά τις προσεγγίσεις είναι $\frac{2 - \omega_0^2 \Delta t^2}{1 + \omega_0 \delta_0 \Delta t}$ που είναι ο ίδιος παράγοντας που χρησιμοποιούμε στη μέθοδο ADE , και κάνοντας και την προσέγγιση για τον παρονομαστή και το εκθετικό προκύπτει ο παράγοντας που χρησιμοποιούμε στη μέθοδο RC . Επομένως για τον όρο S^{n-1} οι μαθηματικές προσεγγίσεις ισχύουν απόλυτα και μπορούμε να υποθέσουμε ότι θα μας δώσει τα ίδια αποτελέσματα.

- Όρος S^{n-2} . Έχουμε τους συντελεστές για κάθε μέθοδο:

$$RC : e^{-2\delta_0 \omega_0 \Delta t}, ADE : \frac{(1 - \Delta t \delta_0 \omega_0)}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)}, Z : e^{-2\alpha \Delta t}.$$

Ο όρος για το μετασχηματισμό Z είναι $e^{-2\delta_0 \omega_0 \Delta t}$, επομένως ο όρος ισούται με τον όρο της μεθόδου RC . Οπότε μένει να κάνουμε τη σύγκριση με τον όρο της μεθόδου ADE . Όπως είδαμε, ισχύει η μαθηματική προσέγγιση

$\frac{1}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)} \cong e^{-\Delta t \delta_0 \omega_0}$. Άρα, προσθέτοντας και τον αριθμητή θα έχουμε $\frac{(1 - \Delta t \delta_0 \omega_0)}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)} \cong e^{-2\Delta t \delta_0 \omega_0}$. Επομένως, για τον όρο S^{n-2} οι τρεις μέθοδοι έχουν ίδιους συντελεστές μετά τις προσεγγίσεις, άρα είναι λογικό να μας δώσουν τα ίδια αποτελέσματα.

• Όρος E^{n-1} . Έχουμε τους συντελεστές για κάθε μέθοδο:

$$RC : (\epsilon_1(\Delta t\omega_0)^2)e^{-\delta_0\omega_0\Delta t}, ADE : \frac{((\Delta t\omega_0)^2\epsilon_1)}{(1 + \Delta t\delta_0\omega_0)}, Z : e^{-\alpha\Delta t} \sin(\beta\Delta t)\Delta t\gamma\epsilon_1.$$

Ο όρος του ημίτονου προσεγγίζεται μαθηματικά ως $\sin(\beta\Delta t) \cong (\beta\Delta t)$, εάν $\beta\Delta t \ll 1$. Υπενθυμίζεται ότι το $\beta = \omega_0\sqrt{1 - \delta_0^2}$. Εδώ έχουμε ω_0 της τάξεως του 10^{12} και το δ_0^2 είναι αρκετά μικρότερο της μονάδας επομένως ο όρος με τη ρίζα προσεγγιστικά ισούται με τη μονάδα. Άρα $\omega_0\Delta t \ll 1$ και ισχύει η προσέγγιση για το ημίτονο. Κάνοντας και την προσέγγιση για το εκθετικό, ο όρος για τη μέθοδο Z θα μας δώσει

$$\begin{aligned} e^{-\alpha\Delta t} \sin(\beta\Delta t)\Delta t\gamma\epsilon_1 &\cong \frac{1}{1 + \alpha\Delta t} \beta\Delta t\gamma\Delta t\epsilon_1 = \\ &= \frac{(\omega_0\sqrt{1 - \delta_0^2}\Delta t)}{1 + \delta_0\omega_0\Delta t} \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \delta_0^2}} \Delta t\epsilon_1 \cong \frac{\omega_0^2\Delta t^2\epsilon_1}{1 + \delta_0\omega_0\Delta t}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι μετά τις προσεγγίσεις ο όρος του μετασχηματισμού Z γίνεται ίδιος με τον όρο της μεθόδου ADE. Επιπλέον, κάνοντας και την προσέγγιση για το εκθετικό $\frac{1}{(1 + \Delta t\delta_0\omega_0)} \cong e^{-\Delta t\delta_0\omega_0}$, που είδαμε ότι ισχύει, προκύπτει ότι ο όρος ισούται και με τον όρο της μεθόδου RC. Άρα οι όροι παράγοντες μετά τις προσεγγίσεις είναι ίσοι και είναι λογικό να μας δώσουν ίδια αποτελέσματα στις προσομοιώσεις.

Συμπερασματικά, είδαμε ότι παρόλο που σε κάθε μέθοδο έχουμε διαφορετικές εξισώσεις για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου είναι απολύτως λογικό να παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα στις προσομοιώσεις. Οι παραπάνω μαθηματικές προσεγγίσεις είναι πολύ σημαντικές για την εγχυρότητα της μελέτης που γίνεται στα υλικά με τη μέθοδο FDTD. Θα ήταν παράδοξο άλλωστε, οι 3 μέθοδοι να μας έδιναν πολύ διαφορετικά αποτελέσματα. Για αυτό, είναι πολύ σημαντικό να γίνεται με προσοχή η επιλογή των τιμών που χρησιμοποιούμε σε κάθε πρόβλημα, ώστε να ισχύουν οι μαθηματικές προσεγγίσεις και να μην υπάρχουν σημαντικές αποκλίσεις στη μελέτη των προσομοιώσεων.

4 Μελέτη της FDTD σε 2 διαστάσεις

4.1 Ελεύθερος χώρος

Όπως και στη 1 διάσταση, για αρχή θα μελετήσουμε τη μέθοδο *FDTD* στην πιο απλοϊκή μορφή της. Θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου ένας Γκαουσιανός παλμός διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο, αυτή τη φορά στις 2 διαστάσεις.

Οι εξισώσεις που προκύπτουν από τη μελέτη των εξισώσεων *Maxwell* θα είναι λίγο παραλλαγμένες για τις δύο διαστάσεις, καθώς τώρα θα έχουμε συνολικά 6 πεδία $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$. Εδώ θα μελετήσουμε την περίπτωση του *transverse magnetic (TM) mode*, όπου έχουμε E_z, H_x, H_y .

Όπως αναφέραμε και στη θεωρία αλλά και στη 1 διάσταση, κάνουμε τους μετασχηματισμούς σε Γκαουσιανές μονάδες: $\underline{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E$ και $\underline{D} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} D$. Οι κανονικοποιημένες εξισώσεις *Maxwell* θα είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \vec{\nabla} \times \vec{H}, \\ \vec{D}(\omega) &= \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega), \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \vec{\nabla} \times \vec{E}.\end{aligned}$$

Θεωρώντας ότι τα πεδία που έχουμε είναι τα E_z, H_x, H_y , οι εξισώσεις *Maxwell* θα γίνουν:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_z}{\partial t} &= \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ D_z(\omega) &= \epsilon(\omega) E_z(\omega) \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} &= -\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial x}.\end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν τις εξισώσεις *Maxwell* στις 2 διαστάσεις που θα μας απασχολήσουν σε κάθε πρόβλημα που θα μελετήσουμε στο διδιάστατο χώρο. Για να εξαγάγουμε τις εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στην προσομοίωση, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για τις 3 παραπάνω χρονικά και χωρικά εξαρτημένες εξισώσεις *Maxwell*. Οι εξισώσεις, όπως είδαμε και στη θεωρία, θα είναι:

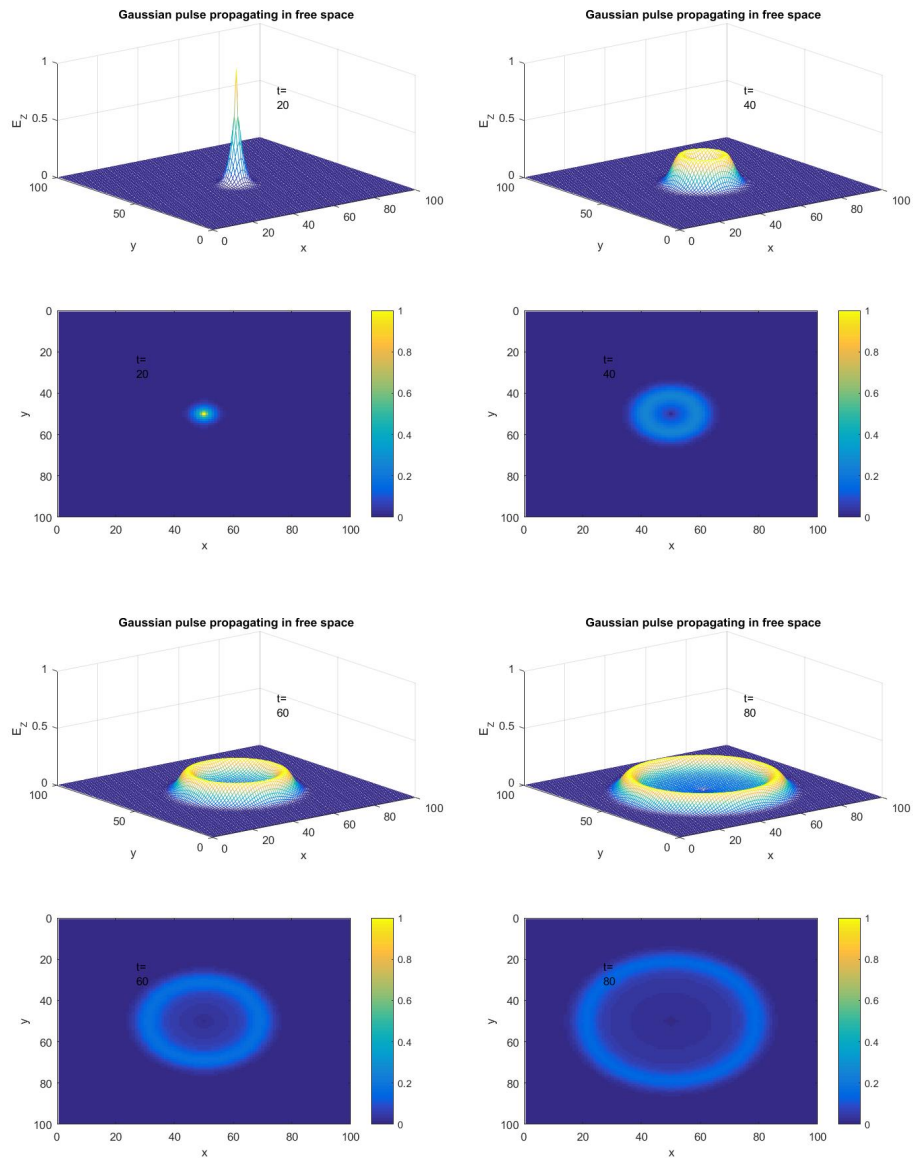
$$\begin{aligned}\frac{D_z^{n+1}(i, j) - D_z^n(i, j)}{\Delta t} &= \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{H_y^n(i+1, j) - H_y^n(i, j)}{\Delta x} \right) - \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{H_y^n(i, j+1) - H_y^n(i, j)}{\Delta x} \right), \\ \frac{H_x^{n+1}(i, j+1) - H_x^n(i, j+1)}{\Delta t} &= -\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta x} \right), \\ \frac{H_y^{n+1}(i+1, j) - H_y^n(i+1, j)}{\Delta t} &= \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j)}{\Delta x} \right).\end{aligned}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις είναι πολύ σημαντικό να σημειωθεί ότι τα $n+1, n$ στην πραγματικότητα είναι $n+1/2, n-1/2$. Ωστόσο ένας υπολογιστής δεν δέχεται μη-ακέραιες τιμές για αυτό χρησιμοποιούμε $+1$ και 0 . Το ίδιο ισχύει και για τα χωρικά βήματα i, j . Επίσης, θυμόμαστε ότι ο παράγοντας που υπάρχει μπροστά στο 2ο μέρος των εξισώσεων, είναι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στον κενό χώρο, $c_0 = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$. Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι γεγονός ότι $\Delta t = \frac{\Delta x}{2c_0}$, όπου Δx είναι 10 φορές μικρότερο από το ελάχιστο μήκος κύματος που διεγείρει κάθε φορά η πηγή μας. Επομένως ο συντελεστής που υπάρχει στο δεύτερο μέρος των εξισώσεων θα αντικατασταθεί με το $1/2$, όπως ακριβώς και στη 1 διάσταση.

Για τις προσομοιώσεις θα χρησιμοποιήσουμε μία Γκαουσιανή πηγή της μορφής $pulse = exp(-0.5 * (\frac{n - n_0}{\sigma})^2)$, όπου $n = t\Delta t$ όπως είπαμε, n_0 μία σταθερά που έχει να κάνει με την χρονική στιγμή της έναρξης του παλμού και σ το πόσο θα 'απλώνεται' ο παλμός (η διασπορά της Γκαουσιανής). Επιλέγουμε για την προσομοίωσή μας $n_0 = 20$ και $\sigma = 6$. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης έναν τετραγωνικό χώρο διαστάσεων 100 επί 100, με την πηγή να τοποθετείται ακριβώς στη μέση του προβλήματος. Για αρχή, δεν χρησιμοποιούμε κάποια συνοριακή συνθήκη.

Οι προσομοιώσεις στις 2 διαστάσεις είναι πραγματικά πολύ ενδιαφέρουσες. Με τη βοήθεια του λογισμικού *Matlab* μπορούμε να αναπαραστήσουμε με όποιο τρόπο θέλουμε τις προσομοιώσεις μας, είτε σε κάτοψη είναι σε κάποιο 3D μοντέλο, γεγονός που μας επιτρέπει τη λεπτομερή μελέτη των προβλημάτων.

Παρακάτω παρατίθενται οι προσομοιώσεις για έναν Γκαουσιανό παλμό που διαδίδεται στον κενό χώρο σε 2 διαστάσεις, χρησιμοποιώντας 2 μορφές αναπαράστασης του προβλήματος, μία τρισδιάστατη μορφή και μία κάτοψης για να υπάρχει μία πληρέστερη εικόνα των προσομοιώσεων στις 2 διαστάσεις. Για αυτήν την αναπαράσταση χρησιμοποιούμε την εντολή *subplot* του *Matlab* που μας επιτρέπει την ταυτόχρονη αναπαράσταση δύο γραφημάτων. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων είναι τα εξής (κώδικας 1.18):



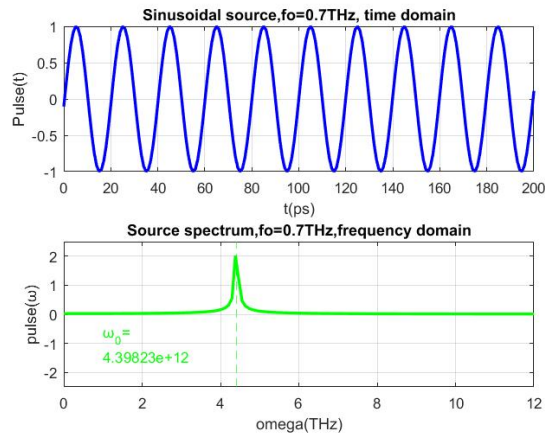
Σχήμα 47: Γκαουσιανός παλμός διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο, 2Δ .

Είναι πράγματι πολύ ενδιαφέρον όπως φαίνεται στα γραφήματα στο Σχήμα 47 ο τρόπος με τον οποίο διαδίδεται, σε πραγματικά διδιάστατα μοντέλα, ένας παλμός ακόμα και στο απλούστερο πρόβλημα.

4.2 Προσομοίωση διαφορετικών πηγών

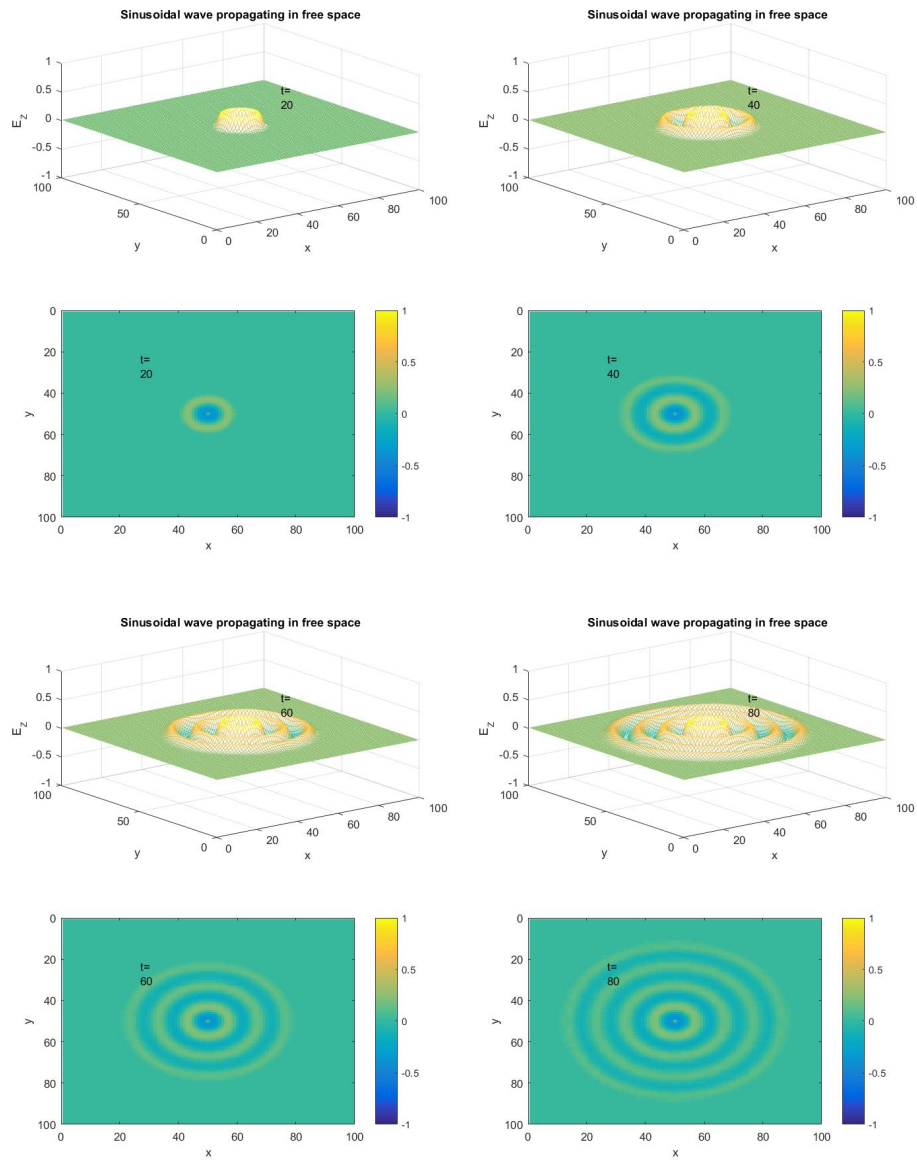
Μεγάλο ενδιαφέρον στις 2 διαστάσεις παρουσιάζει επίσης η προσομοίωση μίας διαφορετικής πηγής. Θα δούμε πως διαδίδεται στο διδιάστατο ελεύθερο χώρο μία ημιτονοειδής πηγή αλλά και μία πηγή που συνδιάζει έναν ημιτονοειδή και έναν γκαουσιανό παλμό. Ο κώδικας παραμένει ο ίδιος με πριν (κώδικας 1.18), το μόνο που χρειάζεται να αλλάξουμε κάθε φορά είναι το *pulse* με την πηγή που θέλουμε να μελετήσουμε και αντίστοιχα τα dx και dt ανάλογα με τη συχνότητα της πηγής που επιλέγουμε.

Αρχικά, θεωρούμε μία πηγή της μορφής $pulse = \sin(2\pi f_0 \Delta t(n - n_0))$, όπου n είναι τα χρονικά βήματα και f_0 η συχνότητα του ημιτονοειδούς παλμού. Για $f_0 = 0,7THz$ η πηγή και το αντίστοιχο φάσμα της θα είναι:



Σχήμα 48: Πηγή και φάσμα πηγής ημιτονοειδούς παλμού.

Κατά τα γνωστά, για να κάνουμε τις προσομοιώσεις χρειάζεται να υπολογίσουμε το dx και από εκεί το dt που επηρεάζεται μάλιστα στην εξίσωση της πηγής. Από το φάσμα του παλμού στο Σχήμα 48, υπολογίζεται ότι το ελάχιστο μήκος κύματος που διεγείρει η πηγή είναι $\lambda_{min} = 4.3 * 10^{-4}m$, άρα αφού θέλουμε το dx να είναι 10 φορές μικρότερο, επιλέγουμε $dx = 4.3 * 10^{-5}$ και $dt = \frac{dx}{2c_0}$ με c_0 να ισούται με την ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό. Είναι πολύ σημαντικό να επιλέγουμε σωστά τα dx και dt ώστε να έχουμε όσο πιο σωστές προσομοιώσεις γίνεται. Όπως προαναφέρθηκε, εάν δεν γίνει σωστή επιλογή των dx , dt , τότε μπορεί να πρόγραμμα να τρέξει τελείως λάθος. Οι αντίστοιχες προσομοιώσεις, λοιπόν, για τη διάδοση ενός ημιτονοειδούς παλμού στον ελεύθερο χώρο θα είναι:



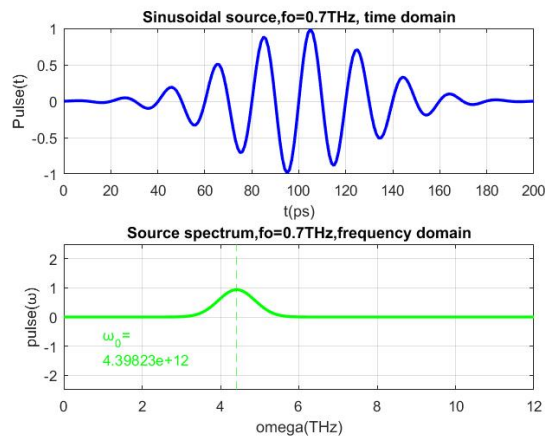
Σχήμα 49: Ημιτονοειδής παλμός διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο, 2Δ .

Και πάλι παρατηρούμε πως διαδίδεται ένας ημιτονοειδής παλμός στις 2 διαστάσεις.

Στην τρίτη και τελευταία περίπτωση, θα μελετήσουμε πως διαδίδεται ένας συνδυασμός των δύο παραπάνω πηγών στον ελεύθερο χώρο στις 2 διαστάσεις. Θεωρούμε μία πηγή τώρα της μορφής

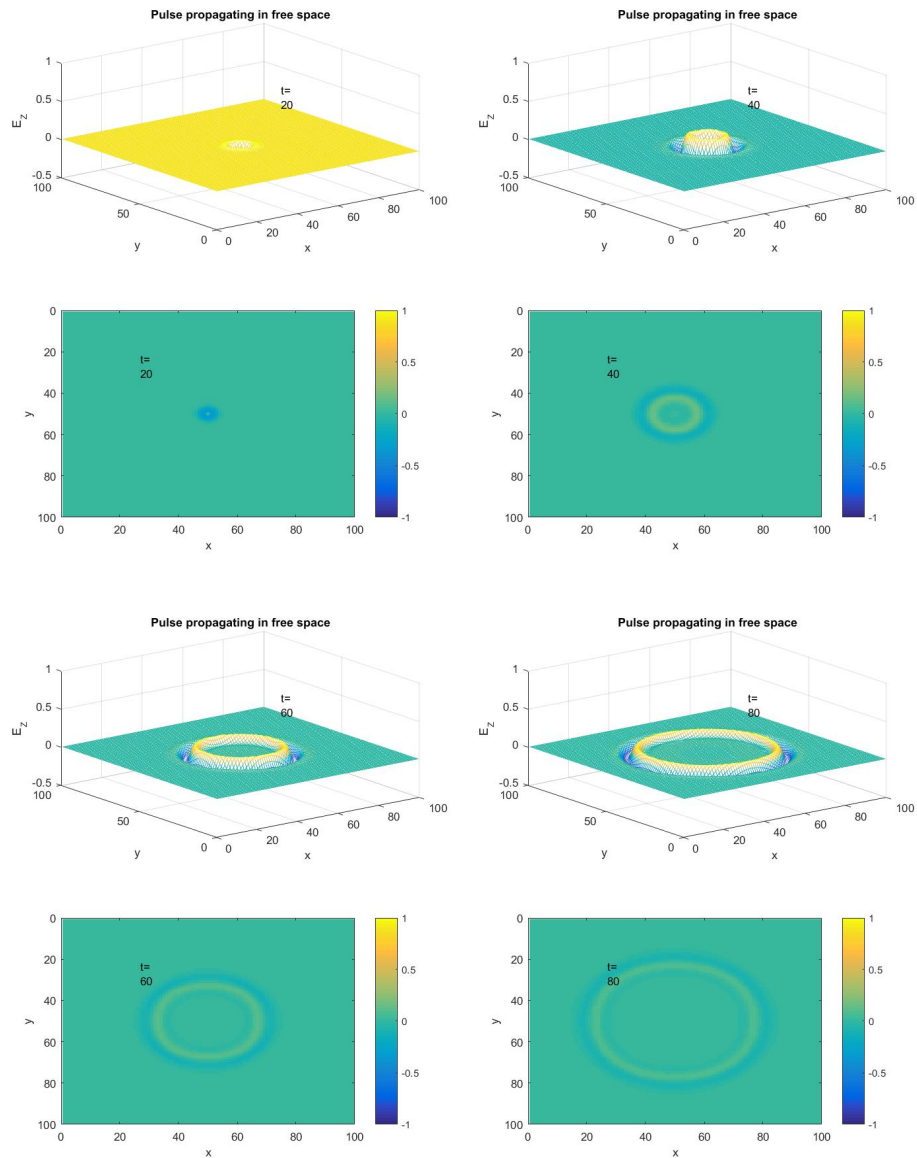
$$pulse = exp\left(-0.5 * \left(\frac{n - n_0}{\sigma}\right)^2\right) * sin(2\pi f_0 \Delta t(n - n_0)),$$

όπου n είναι τα χρονικά βήματα, σ η διασπορά του Γκαουσιανού παλμού, f_0 η συχνότητα του ημιτονοειδούς παλμού. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε $f_0 = 0,7THz$, $\sigma = 6$ και $n_0 = 20$. Η πηγή και το φάσμα της πηγής θα είναι:



Σχήμα 50: Πηγή και φάσμα πηγής ημιτονοειδούς παλμού.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για τον υπολογισμό των dx και dt καθώς και εδώ περιέχεται το dt στην εξίσωση της πηγής. Το μόνο που θα χρειαστεί να αλλάξουμε στον κώδικα 1.18 είναι η εξίσωση για το $pulse$ και αντίστοιχα τα dx και dt που θα επιλέξουμε. Οι προσομοιώσεις για αυτήν την τρίτη περίπτωση πηγής δίνουν:



Σχήμα 51: Συνδιασμός ημιτονοειδούς και Γκαουσιανού παλμού διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο, 2Δ.

Οι παραπάνω πηγές θα χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη υλικών με διασπορά παρακάτω, οπότε είναι σημαντικό να γνωρίζουμε πως συμπεριφέρονται στον ελεύθερο χώρο στις 2 διαστάσεις.

4.3 Απορροφητικές συνθήκες Mur

Η μελέτη προβλημάτων σε δύο διαστάσεις παρουσιάζει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον με τα αποτελέσματα που δίνει. Για αυτό είναι πολύ σημαντικό να χρησιμοποιούνται στα προβλήματα και συνοριακές συνθήκες. Μία από τις συνοριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται στη μελέτη της μεθόδου *FDTD* σε 2 διαστάσεις, είναι η απορροφητική συνθήκη *Mur* 1ης και 2ης τάξης. Οι συνοριακές συνθήκες αυτές βασίζονται στις συνθήκες που επικρατούν στα άκρα των κυματικών εξισώσεων που μελετάμε.

Μία μερική διαφορική εξίσωση που επιτρέπει την διάδοση ενός κύματος μόνο σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις ονομάζεται κυματική εξίσωση μίας διεύθυνσης διάδοσης. Όταν η διαφορική εξίσωση αυτή εφαρμόζεται στα εξωτερικά τοιχώματα μίας προσομοίωσης *FDTD*, τότε η κυματική εξίσωση μίας μεριάς απορροφά αριθμητικά τα κύματα που τείνουν να βγουν έξω από τα τοιχώματα του προβλήματος. Για να κατανοηθεί καλύτερα το συγκεκριμένο φαινόμενο, πρέπει να μελετήσουμε αναλυτικά τις εξισώσεις κύματος και πως αυτές μας δίνουν στα άκρα τους τις συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες. Επειδή έχουμε να μελετήσουμε πάλι χρονικά και χωρικά εξαρτώμενες εξισώσεις θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για να τις μετατρέψουμε σε αλγοριθμικό πρόβλημα και να τις χρησιμοποιήσουμε στη μελέτη της μεθόδου *FDTD*.

Αρχικά, θεωρούμε την κυματική εξίσωση σε 2 διαστάσεις. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, t) :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Μετά από μερικές πράξεις θεωρώντας τελεστές για τις συντεταγμένες x, y, t και κάνοντας ανάπτυγμα *Taylor* προκύπτει για τις 4 πλευρές του προβλήματός μας η δεύτερης τάξης απορροφητική συνθήκη :

$$\underline{x = 0} : \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\underline{x = h} : \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

$$\underline{y = 0} : \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (1.3)$$

$$\underline{y = h} : \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (1.4)$$

Ο *Mur* κατασκεύασε ένα μοτίβο πεπερασμένων διαφορών για τις απορροφητικές συνθήκες που προκύπτουν από τις εξισώσεις (1.1-1.4). Βασίστηκε κατά κύριο λόγο στον αλγόριθμό του *Yee* και υπολόγισε τις μερικές παραγώγους με την μέθοδο

των κεντρικών διαφορών για ένα σημείο $(1/2, j)$, μελετώντας για αρχή την εξίσωση (1.1) και την απορροφητική συνθήκη στο σύνορο $x = 0$. Έχουμε λοιπόν για $U = E = E_z$ (για συντομία θα αναφέρεται απλά E):

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial^2 E |_{1/2, j}^n}{\partial x \partial t} &= \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{\partial E |_{1/2, j}^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial E |_{1/2, j}^{n-1}}{\partial x} \right) = \\
&= \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(\frac{E |_{1, j}^{n+1} - E |_{0, j}^{n+1}}{\Delta x} \right) - \left(\frac{E |_{1, j}^{n-1} - E |_{0, j}^{n-1}}{\Delta x} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2\Delta t \Delta x} (E |_{1, j}^{n+1} - E |_{0, j}^{n+1} - (E |_{1, j}^{n-1} - E |_{0, j}^{n-1})). \quad (2.1)
\end{aligned}$$

Για την 2η μερική παράγωγο ως προς το χρόνο, ως προς τα σημεία $(0, j), (1, j)$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial^2 E |_{1/2, j}^n}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E |_{0, j}^n}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 E |_{1, j}^n}{\partial t^2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{E |_{0, j}^{n+1} - 2E |_{0, j}^n + E |_{0, j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right] + \left[\frac{E |_{1, j}^{n+1} - 2E |_{1, j}^n + E |_{1, j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right] \right) = \\
&= \frac{1}{2(\Delta t)^2} (E |_{0, j}^{n+1} - 2E |_{0, j}^n + E |_{0, j}^{n-1} + E |_{1, j}^{n+1} - 2E |_{1, j}^n + E |_{1, j}^{n-1}). \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Για την δεύτερη μερική παράγωγο ως προς y , στα σημεία $(0, j), (1, j)$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial^2 E |_{1/2, j}^n}{\partial y^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E |_{0, j}^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E |_{1, j}^n}{\partial y^2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{E |_{0, j+1}^n - 2E |_{0, j}^n + E |_{0, j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] + \left[\frac{E |_{1, j+1}^n - 2E |_{1, j}^n + E |_{1, j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] \right) = \\
&= \frac{1}{2(\Delta y)^2} (E |_{0, j+1}^n - 2E |_{0, j}^n + E |_{0, j-1}^n + E |_{1, j+1}^n - 2E |_{1, j}^n + E |_{1, j-1}^n). \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Για πληρότητα υπολογίζω και τις μερικές παραγώγους για το $\frac{\partial^2 E |_{i, 1/2}^n}{\partial y \partial t}, \frac{\partial^2 E |_{i, 1/2}^n}{\partial x^2}$ που χρειάζονται για τον υπολογισμό των συνοριακών συνθηκών στα όρια όπου $y = 0, y = h$:

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial^2 E |_{1/2, j}^n}{\partial y \partial t} &= \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{\partial E |_{i, 1/2}^{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial E |_{i, 1/2}^{n-1}}{\partial y} \right) = \\
&= \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(\frac{E |_{i, 1}^{n+1} - E |_{i, 0}^{n+1}}{\Delta y} \right) - \left(\frac{E |_{i, 1}^{n-1} - E |_{i, 0}^{n-1}}{\Delta y} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2\Delta t \Delta y} (E |_{i, 1}^{n+1} - E |_{i, 0}^{n+1} - (E |_{i, 1}^{n-1} - E |_{i, 0}^{n-1})) \quad (2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{\partial^2 E |_{1/2,j}^n}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E |_{i,0}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E |_{i,1}^n}{\partial x^2} \right) = \\
& = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{E |_{i+1,0}^n - 2E |_{i,0}^n + E |_{i-1,0}^n}{(\Delta x)^2} \right] + \left[\frac{E |_{i+1,1}^n - 2E |_{i,1}^n + E |_{i-1,1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \right) = \\
& = \frac{1}{2(\Delta x)^2} (E |_{i+1,0}^n - 2E |_{i,0}^n + E |_{i-1,0}^n + E |_{i+1,1}^n - 2E |_{i,1}^n + E |_{i-1,1}^n). \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (2.1-2.3) για το σύνορο $x = 0$, τις αντικαθιστούμε στην (1.1) και υπολογίζουμε ως προς $E |_{1,j}^{n+1}$, που είναι και το ζητούμενο E_z . Μετά από μερικές πράξεις προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned}
E |_{1,j}^{n+1} &= -E |_{1,j}^{n-1} + A (E |_{1,j}^{n+1} + E |_{0,j}^{n-1}) + B (E |_{0,j}^n + E |_{1,j}^n) + \\
&+ C (E |_{0,j+1}^n - 2E |_{0,j}^n + E |_{0,j-1}^n + E |_{1,j+1}^n - 2E |_{1,j}^n + E |_{1,j-1}^n) \quad (2.6), \text{ όπου:}
\end{aligned}$$

$$A = \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x}$$

$$B = \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x}$$

$$C = \frac{(c\Delta t)^2}{2\Delta x(c\Delta t + \Delta x)}$$

θεωρώντας ότι $\Delta x = \Delta y$.

Με την ίδια λογική , εργαζόμαστε και για τα 4 σύνορα του προβλήματος.

Η παραπάνω σχέση (2.6) αποτελεί την απορροφητική συνθήκη *Mur* 2ης τάξης. Υπάρχει και η 1ης τάξης η οποία είναι:

$$E |_{1,j}^{n+1} = -E |_{1,j}^{n-1} + A (E |_{1,j}^{n+1} + E |_{0,j}^{n-1}) + B (E |_{0,j}^n + E |_{1,j}^n) + \quad (2.7).$$

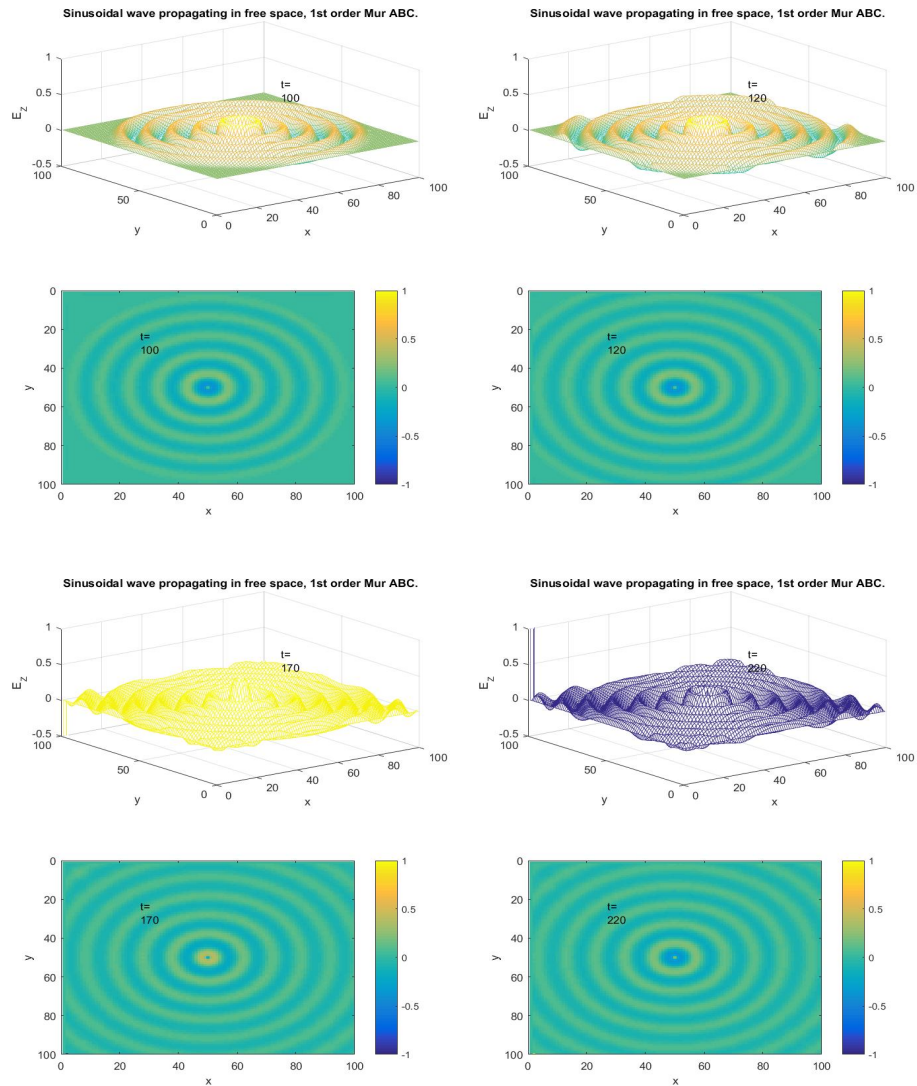
Στην απορροφητική συνθήκη *Mur* 1ης τάξης ουσιαστικά λείπει ο διορθωτικός όρος που προκύπτει από τις μερικές παραγώγους 2ης τάξης.

Παρακάτω θα μελετήσουμε πως συμπεριφέρεται ο παλμός για αυτές τις συνοριακές συνθήκες στην περίπτωση που τις βάλουμε μόνο στην κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου E_z . Έχει μεγάλο ενδιαφέρον να μελετήσουμε κατά πόσο επηρεάζει το πρόβλημα η επιλογή συνοριακών συνθηκών 1ης τάξης ή με τη διόρθωση των συνοριακών συνθηκών *Mur* 2ης τάξης.

Για τις προσομοιώσεις θα χρησιμοποιήσουμε έναν παλμό της μορφής $pulse = \sin(2\pi f_0 \Delta t (n - n_0))$, όπου n είναι τα χρονικά βήματα και f_0 η συχνότητα του

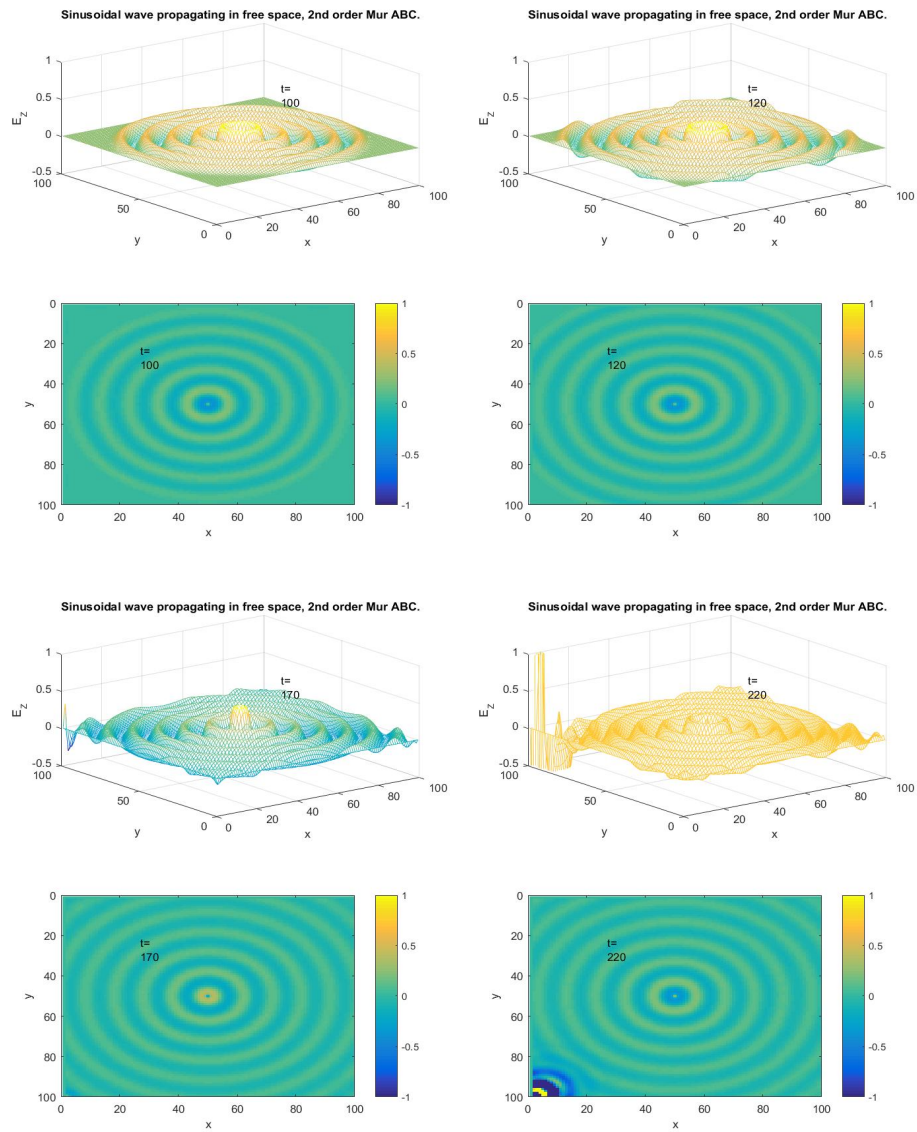
ημιτονοειδούς παλμού. Χρησιμοποιούμε τα ίδια χαρακτηριστικά της πηγής όπως στην περίπτωση που μελετήσαμε παραπάνω στο Σχήμα 49.

Για την περίπτωση που χρησιμοποιούμε συνοριακές συνθήκες *Mur* 1ης τάξης οι προσομοιώσεις δίνουν (κώδικας 1.19):



Σχήμα 52: Ημιτονοειδής παλμός στον ελεύθερο χώρο με συνοριακές συνθήκες *Mur* 1ης τάξης, 2Δ .

Οι αντίστοιχες προσομοιώσεις χρησιμοποιώντας όμως τώρα τις συνοριακές συνθήκες *Mur* 2ης τάξης (πάλι με τον κώδικα 1.19, απλά επιλέγοντας συνοριακές συνθήκες 2ης τάξης που είναι σαν σχόλιο στον κώδικα) προκύπτει:



Σχήμα 53: Ημιτονοειδής παλμός στον ελεύθερο χώρο με συνοριακές συνθήκες *Mur* 2ης τάξης, 2Δ.

Από τις προσομοιώσεις παραπάνω στα Σχήματα 52 και 53 παρατηρούμε ότι οι συνοριακές συνθήκες *Mur* δουλεύουν ικανοποιητικά. Ωστόσο, στο Σχήμα 53 παρατηρούμε ότι για τις συνοριακές συνθήκες 2ης τάξης όταν ο παλμός διαδίδεται εκτός των συνόρων του προβλήματος σε μεγάλους χρόνους η συνοριακή συνθήκη χαλάει. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε στην κάτω αριστερά γωνία (εκεί που ο υπολογιστής θεωρεί την αντίστοιχη αρχή των αξόνων) η προσομοίωση χαλάει και μας δίνει ένα πολύ περίεργο αποτέλεσμα.

Αντιθέτως, οι συνοριακές συνθήκες *Mur* 1ης τάξης φαίνεται να λειτουργούν άψογα στην προσομοίωση. Για αυτό το λόγο, στις επόμενες προσομοιώσεις και όπου είναι αναγκαίο θα χρησιμοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες *Mur* 1ης τάξης.

5 Υλικά με διασπορά σε 2 διαστάσεις

Η προσομοίωση προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής φύσης σε δύο διαστάσεις αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στη μελέτη και την κατανόηση της συμπεριφοράς των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διαδίδονται σε υλικά. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων σε υλικά με διασπορά, αυτή τη φορά όμως σε δύο διαστάσεις που είναι πιο κοντά στο πραγματικό πρόβλημα. Παρακάτω θα γίνει μελέτη των υλικών *Lorentz* και *Drude* με διασπορά στο ηλεκτρικό πεδίο.

Η ανάλυση των προβλημάτων δεν διαφέρει από τη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στα προβλήματα στη 1 διάσταση. Η μελέτη και η εξαγωγή των εξισώσεων που θα χρησιμοποιηθούν στους κώδικες θα γίνει μέσω της μεθόδου *ADE*, όπως ακριβώς έγινε στο κομμάτι 3.2.2 για το υλικό *Drude* και 3.3.2 για το υλικό *Lorentz* αντίστοιχα. Η διαφορά τώρα είναι, όπως είδαμε και στον ελεύθερο χώρο, ότι οι εξισώσεις αφορούν τις συνιστώσες E_z , H_x και H_y .

5.1 Υλικό Lorentz σε 2 διαστάσεις

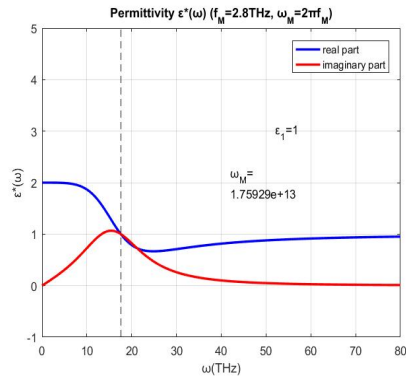
Όπως είδαμε και στη 1 διάσταση, η σχέση η οποία χαρακτηρίζει την επιδεκτικότητα ενός υλικού *Lorentz* είναι:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_r + \frac{\epsilon_1}{1 + 2j\delta_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2},$$

όπου ϵ_r , ϵ_1 , δ_0 χαρακτηριστικές σταθερές του υλικού και $\omega_0 = 2\pi f_0$ η συχνότητα συντονισμού του υλικού. Οι σταθερές ϵ_r και ϵ_1 έχουν να κάνουν με το ύψος της καμπύλης της επιδεκτικότητας ενώ η σταθερά δ_0 αφορά το πλάτος της καμπύλης. Ο δείκτης διάθλασης και σε αυτήν την περίπτωση υπολογίζεται από τη σχέση $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r \epsilon(\omega)}$. Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της επιδεκτικότητας χαρακτηρίζουν τις διαθλαστικές (*refractive*) και απορροφητικές (*absorptive*) ιδιότητες του υλικού αντίστοιχα.

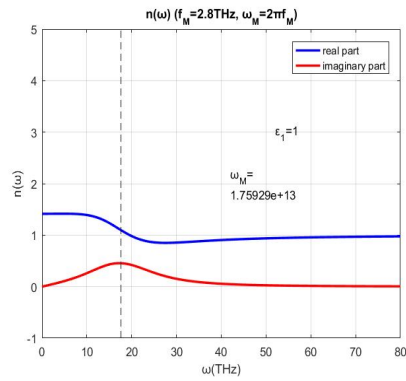
Παρακάτω θα επικεντρωθούμε στη μελέτη 3 περιπτώσεων. Στις δύο πρώτες θα μελετήσουμε τη διαφοροποίηση στις προσομοιώσεις αλλάζοντας το ύψος της επιδεκτικότητας μέσω του συντελεστή ϵ_1 , ενώ στην τρίτη περίπτωση θα αλλάξουμε τη συχνότητα διάδοσης του παλμού που προσχρούει στο υλικό.

Στην πρώτη περίπτωση, επιλέγουμε τις τιμές $\delta_0 = 0,5$, $\epsilon_r = 1$ και $\epsilon_1 = 1$. Επίσης, επιλέγουμε η συχνότητα συντονισμού του υλικού να είναι $f_0 = 2,8THz$. Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της επιδεκτικότητας σε αυτή την περίπτωση θα είναι (κώδικας 1.14):



Σχήμα 54: Πραγματικό και φανταστικό μέρος επιδεκτικότητας για υλικό Lorentz

Αντίστοιχα, ο δείκτης διάθλασης $n(\omega)$ στην συγκεκριμένη περίπτωση θα είναι:

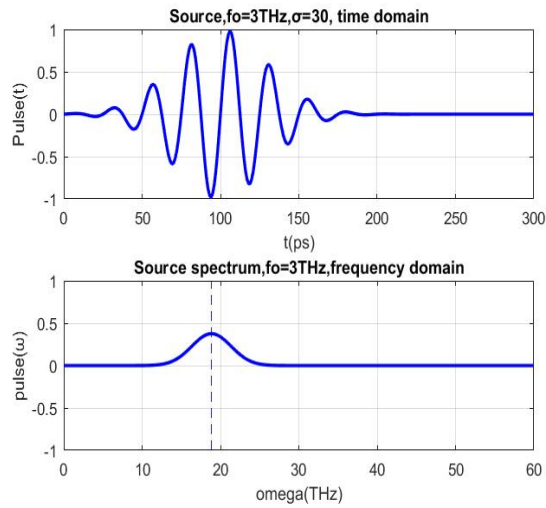


Σχήμα 55: Πραγματικό και φανταστικό μέρος δείκτη διάθλασης για υλικό Lorentz

Για την προσομοίωση, θα χρησιμοποιήσουμε μία πηγή που παράγει έναν παλμό με εξίσωση:

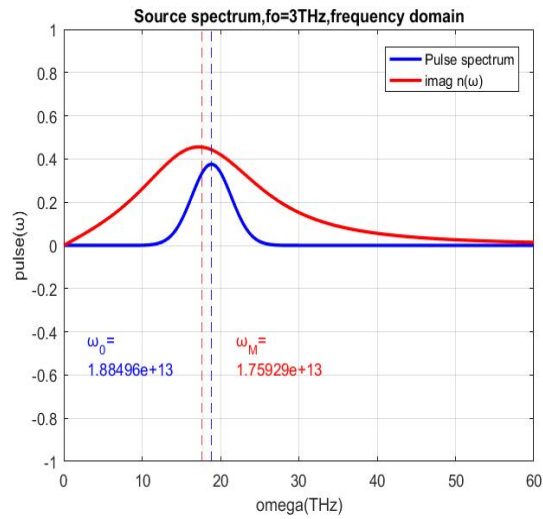
$$pulse = exp\left(-0.5 * \left(\frac{n - n_0}{\sigma}\right)^2\right) * sin(2\pi f_0 \Delta t (n - n_0)),$$

όπου n είναι τα χρονικά βήματα, σ η διασπορά του Γκαουσιανού παλμού, f_0 η συχνότητα του ημιτονοειδούς παλμού. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε $f_0 = 3THz$, $\sigma = 30$ και $n_0 = 100$. Η πηγή και το φάσμα της πηγής θα είναι (ξανά κώδικας 1.14):



Σχήμα 56: Πηγή και φάσμα πηγής για $f = 3THz$.

Το φάσμα του παλμού σε αυτήν την περίπτωση, σε σύγκριση με το δείκτη διάθλασης του υλικού, θα είναι:



Σχήμα 57: Φάσμα πηγής και φανταστικό μέρος δείκτη διάθλασης.

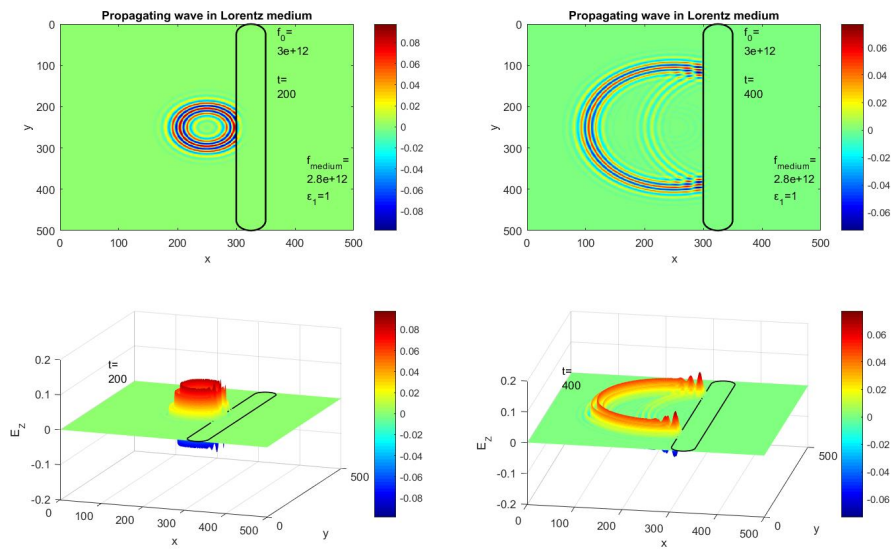
Για τις προσομοιώσεις, όπως είπαμε, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο *ADE* για την εξαγωγή των εξισώσεων. Θυμίζουμε ότι οι εξισώσεις που προκύπτουν για ένα υλικό *Lorentz* είναι:

$$E^n = D^n - S^n, \text{ όπου}$$

$$S^n = \frac{(2 - \Delta t^2 \omega_0^2)}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)} S^{n-1} - \frac{(1 - \Delta t \delta_0 \omega_0)}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)} S^{n-2} + \frac{((\Delta t \omega_0)^2 \epsilon_1)}{(1 + \Delta t \delta_0 \omega_0)} E^{n-1}.$$

Η διαφορά με τη 1 διάσταση, είναι ότι τώρα οι εξισώσεις εξαρτώνται από δύο μεταβλητές i, j . Επίσης όπως είδαμε πρέπει να προστεθεί μία νέα συνιστώσα στο μαγνητικό πεδίο.

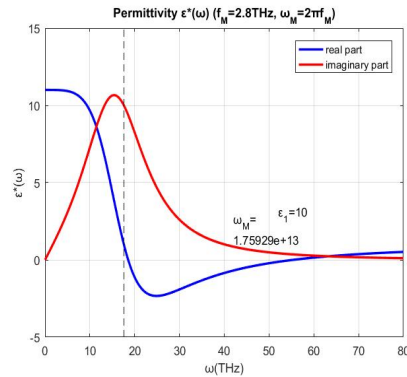
Οι προσομοιώσεις που προκύπτουν για την παραπάνω περίπτωση (όπου $\epsilon_1 = 1$ και $f = 3THz$) είναι (κώδικας 1.20):



Σχήμα 58: Παλμός προσκρούει σε υλικό *Lorentz* σε 2 διαστάσεις.

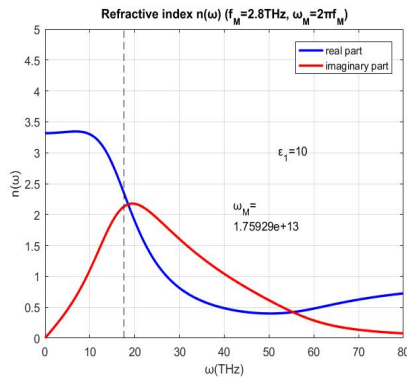
Όπως αναμενόταν από το Σχήμα 57 και την ανάλυση που είχαμε κάνει και στη 1 διάσταση, ένα μέρος του παλμού εισέρχεται στο υλικό και απορροφάται αμέσως ενώ το υπόλοιπο μέρος που έχει μειωθεί ανακλάται προς τα πίσω. Αυτό το περιμέναμε καθώς το φάσμα των συχνοτήτων που διεγείρη η πηγή βρίσκεται πολύ κοντά στο μέγιστο της απορρόφησης (φανταστικό μέρος δείκτη διάθλασης) του υλικού.

Στη δεύτερη περίπτωση που θα μελετήσουμε, διατηρούμε την πηγή ίδια (άρα έχουμε ξανά το Σχήμα 56) και αλλάζουμε στο υλικό την σταθερά $\epsilon_1 = 10$. Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της επιδεκτικότητας τώρα θα είναι:



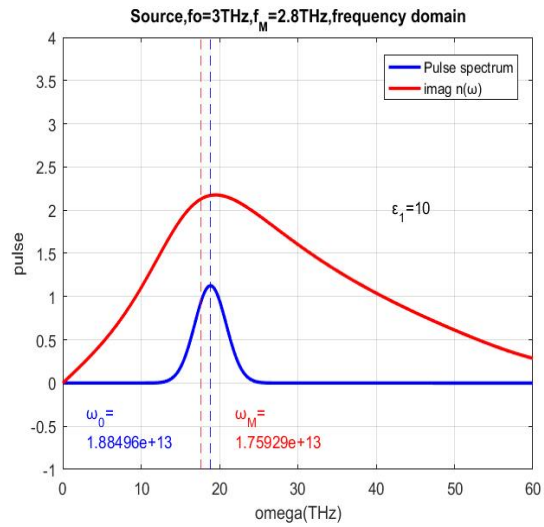
Σχήμα 59: Πραγματικό και φανταστικό μέρος επιδεκτικότητας για υλικό *Lorentz*

Ο αντίστοιχος δείκτης διάθλασης θα είναι:



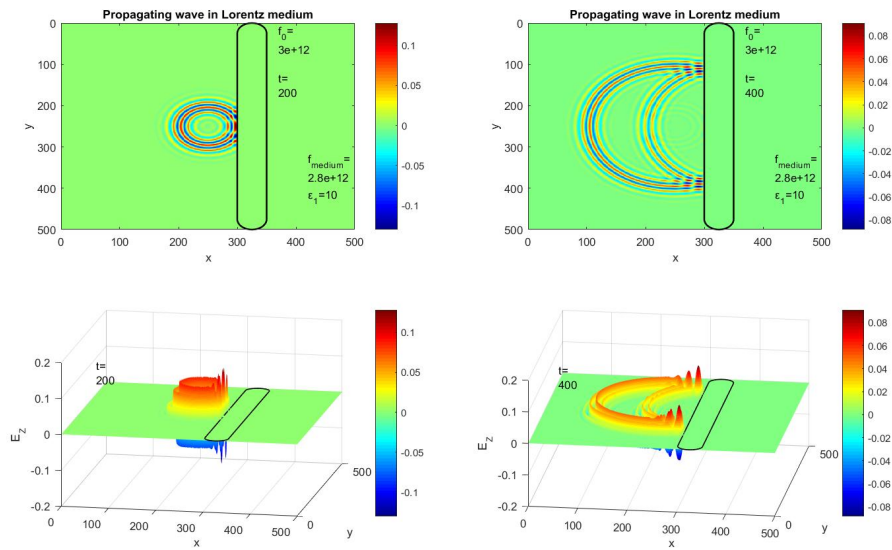
Σχήμα 60: Πραγματικό και φανταστικό μέρος δείκτη διάθλασης για υλικό *Lorentz*

Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες είναι πολύ μεγαλύτερες από την προηγούμενη περίπτωση όπου είχαμε $\epsilon_1 = 1$, γεγονός που σίγουρα θα επηρεάσει το αποτέλεσμα των προσομοιώσεων. Μάλιστα, συγκριτικά με το φάσμα του παλμού το φανταστικό μέρος του δείκτη διάθλασης τώρα θα είναι:



Σχήμα 61: Φάσμα πηγής και φανταστικό μέρος δείκτη διάθλασης.

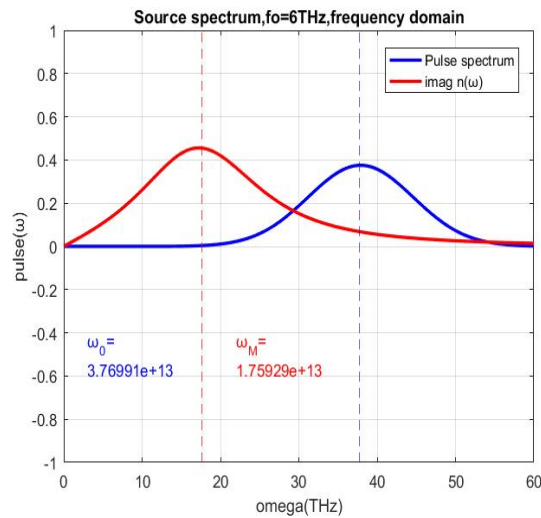
Παρατηρούμε από το Σχήμα 61 ότι η ανακλαστικότητα θα είναι πολύ μεγάλη. Χρησιμοποιώντας τον ίδιο παλμό με την προηγούμενη περίπτωση, τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων τώρα θα είναι (κώδικας 1.20):



Σχήμα 62: Παλμός προσκρούει σε υλικό Lorentz σε 2 διαστάσεις.

Παρατηρούμε πράγματι σε αυτήν την περίπτωση ότι το υλικό συμπεριφέρεται σαν μέταλλο και ανακλά σχεδόν εξ' ολοκλήρου το κύμα που προσκρούει σε αυτό.

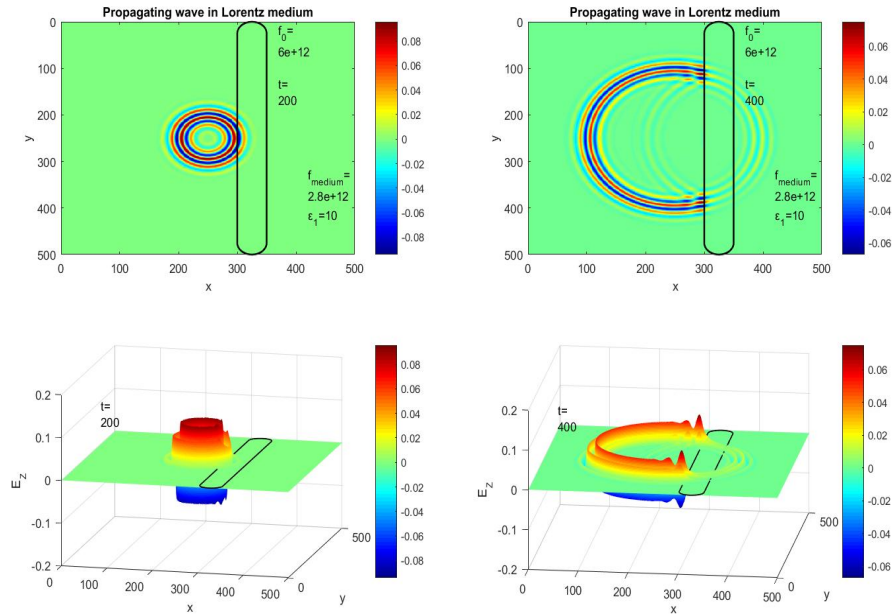
Στην τρίτη και τελευταία περίπτωση που θα μελετήσουμε για το υλικό *Lorentz* σε 2 διαστάσεις θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο παλμό, αλλά αυτή τη φορά θα χρησιμοποιήσουμε συχνότητα διάδοσης κύματος $f = 6THz$. Για το υλικό, θα χρησιμοποιήσουμε $\epsilon_1 = 1$. Το φάσμα του παλμού, σε σύγκριση με το φανταστικό μέρος του δείκτη διάθλασης θα είναι:



Σχήμα 63: Φάσμα πηγής και φανταστικό μέρος δείκτη διάθλασης.

Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε ότι το φάσμα του παλμού βρίσκεται στο χώρο συχνοτήτων όπου ο δείκτης διάθλασης τείνει να μηδενιστεί. Σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει, αναμένουμε το υλικό να παρουσιάζει ομαλή διασπορά στην περιοχή των συγκεκριμένων συχνοτήτων. Το γεγονός ότι η συχνότητα διάδοσης του υλικού είναι μεγαλύτερη από αυτή της συχνότητας συντονισμού του υλικού *Lorentz*, μας υποδεικνύει ότι ο παλμός θα πρέπει να διεγείρει ένα μέρος των ηλεκτρονίων που βρίσκονται στο υλικό και να διαδίδεται μέσα σε αυτό.

Οι προσομοιώσεις που προκύπτουν σε αυτή την περίπτωση είναι (κώδικας 1.20):



Σχήμα 64: Παλμός προσκρούει σε υλικό *Lorentz* σε 2 διαστάσεις.

Από το Σχήμα 64, παρατηρούμε ότι πράγματι, καθώς διαδίδεται ο παλμός ένα μέρος του διαπερνά το υλικό ενώ το υπόλοιπο ανακλάται προς τα πίσω. Μάλιστα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι δεν έχουμε ισχυρή απορρόφηση μέσα στο υλικό, όπως αναμενόταν άλλωστε καθώς το φανταστικό μέρος του δείκτη διάθλασης τείνει να μηδενιστεί σε αυτό το φάσμα συχνοτήτων που βρίσκεται το κύμα.

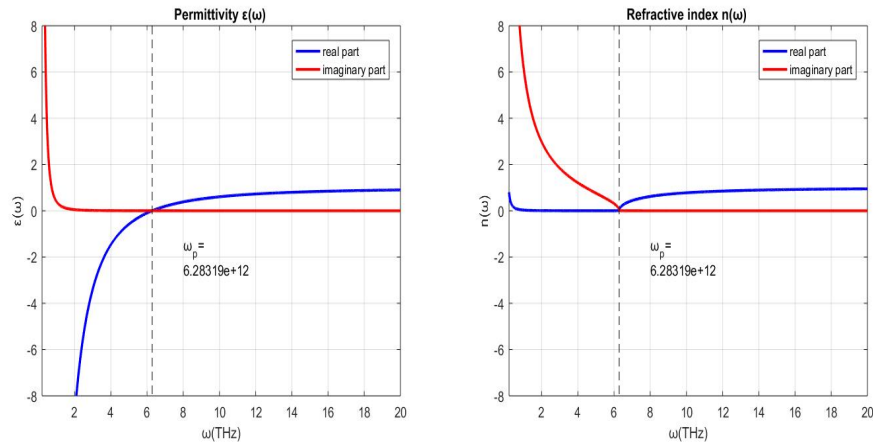
Συμπερασματικά, ένα υλικό *Lorentz* που παρουσιάζει διασπορά στο ηλεκτρικό πεδίο χρίζει ιδιαίτερης μελέτης δεδομένων των ιδιοτήτων του. Στην περίπτωση όπου είχαμε $\epsilon_1 = 10$ και αντίστοιχα μεγάλο ύψος στην καμπύλη της επιδεκτικότητας είναι άξιο παρατήρησης το γεγονός ότι το πραγματικό μέρος της επιδεκτικότητας γύρω από την περιοχή της συχνότητας συντονισμού του υλικού γίνεται αρνητικό. Αυτό προκαλεί την ισχυρή ανάκλαση που παρατηρείται στο Σχήμα 62, σε αντίθεση με την περίπτωση όπου είχαμε $\epsilon_1 = 1$ στο Σχήμα 60 όπου η απορρόφηση ήταν μεγαλύτερη και αντίστοιχα το ανακλώμενο μέρος του κύματος ήταν μικρότερο. Τέλος, για την περίπτωση όπου η συχνότητα διάδοσης του παλμού ήταν σημαντικά μεγαλύτερη από τη συχνότητα συντονισμού του υλικού, είχαμε ομαλή διασπορά εντός του υλικού όπως αναμενόταν και ένα μέρος του κύματος πέραγε μέσα από το υλικό, ενώ το υπόλοιπο ανακλόταν προς τα πίσω.

5.2 Υλικό Drude σε 2 διαστάσεις

Όπως είδαμε και στη 1 διάσταση, τα υλικά *Drude*, ή αλλιώς unmagnetized Plasma, χαρακτηρίζονται από την σχέση:

$$\epsilon^*(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega(iv_c - \omega)},$$

Όπου $\omega_p = 2\pi f_p$ η συχνότητα συντονισμού (πλάσματος) του υλικού και v_c μία σταθερά που προσδιορίζει την συχνότητα σύγκρουσης των ηλεκτρονίων. Εδώ παρατηρούμε ότι $\omega_0 = 0$ και πρόκειται για χαρακτηριστική περίπτωση αγωγού, όπως αναφέραμε στη θεωρία. Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $\epsilon(\omega)$, για τις τιμές $f_p = 1THz$ και $v_c = 0,01THz$ καθώς επίσης και ο δείκτης διάθλασης του υλικού, $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r \epsilon(\omega)}$, για $\epsilon_r = 1$ θα είναι:



Σχήμα 65: Επιδεκτικότητα και δείκτης διάθλασης για υλικό *Drude*.

Το μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζεται στην περιοχή συχνοτήτων γύρω από την συχνότητα πλάσματος, καθώς η επιδεκτικότητα από αρνητική μηδενίζεται απότομα και μετά γίνεται θετική. Το γεγονός αυτός θα έχει και μεγάλο αντίκτυπο στις προσομοιώσεις. Ένα υλικό *Drude*, ανάλογα με το φάσμα των συχνοτήτων που το διεγείρουμε και το μελετάμε παρουσιάζει πολύ διαφορετικές ιδιότητες.

Για την εξαγωγή των εξισώσεων που χρειάζονται για τη μελέτη ενός υλικού *Drude* σε 2 διαστάσεις θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο *ADE*. Ακολουθούμε την ίδια συλλογιστική πορεία που αναλύσαμε στην παράγραφο 3.2.2. Η διαφορά με τη 1 διάσταση, είναι ότι τώρα κάθε συνάρτηση θα είναι 2 μεταβλητών i, j . Οι εξισώσεις που προκύπτουν για το υλικό *Drude* είναι:

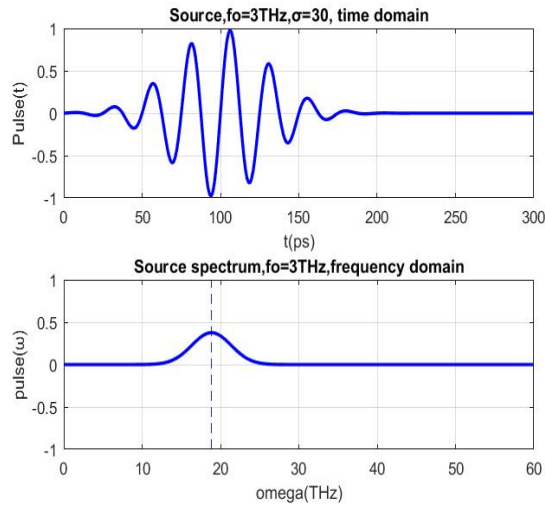
$$E^n = D^n - I^{n-1} - \frac{(1 - 0,5\Delta tv_c)}{(1 + 0,5\Delta tv_c)} S^{n-1},$$

$$\text{όπου } S^n = -\frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} E^n + \frac{(1 - 0,5\Delta tv_c)}{(1 + 0,5\Delta tv_c)} S^{n-1} \text{ και } I^n = I^{n-1} + \frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} E^n.$$

Για τις προσομοιώσεις, θα χρησιμοποιήσουμε την κλασική πηγή που παράγει έναν παλμό με εξίσωση:

$$pulse = exp\left(-0.5 * \left(\frac{n - n_0}{\sigma}\right)^2\right) * sin(2\pi f_0 \Delta t (n - n_0)),$$

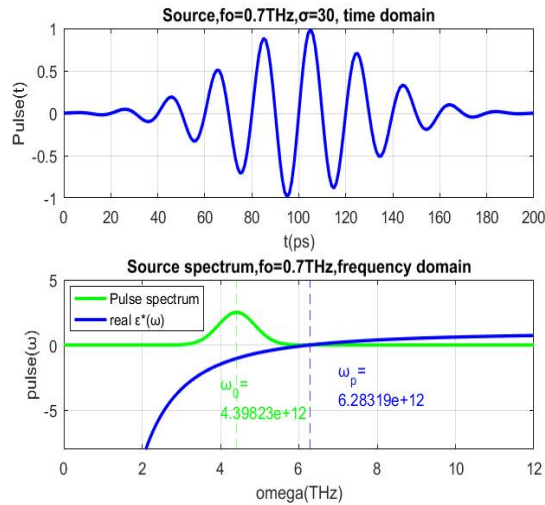
όπου n είναι τα χρονικά βήματα, σ η διασπορά του Γκαουσιανού παλμού, f_0 η συχνότητα του ημιτονοειδούς παλμού. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε $f_0 = 3THz$, $\sigma = 30$ και $n_0 = 100$. Η πηγή και το φάσμα της πηγής θα είναι (ξανά κώδικας 1.14):



Σχήμα 66: Πηγή και φάσμα πηγής για $f_0 = 3THz$.

Έχει μεγάλο ενδιαφέρον στο υλικό *Drude* να μελετήσουμε 3 ξεχωριστές περιπτώσεις για το φάσμα συχνοτήτων που διεγείρει η πηγή, δηλαδή 3 διαφορετικές τιμές για το f_0 . Στην περίπτωση του υλικού *Drude*, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το φάσμα συχνοτήτων που διεγείρει η πηγή σε σχέση με το πραγματικό μέρος της επιδεικτικότητας και του δείκτη διάθλασης του υλικού (Σχήμα 65) αντίστοιχα.

Η πρώτη περίπτωση που θα μελετηθεί, είναι να έχουμε την επιδεκτικότητα και το δείκτη διάθλασης με τις τιμές του Σχήματος 65 και συχνότητα διάδοσης του παλμού $f_0 = 0,7THz$. Η πηγή και το φάσμα της πηγής σε σχέση με το πραγματικό μέρος της επιδεκτικότητας θα είναι:

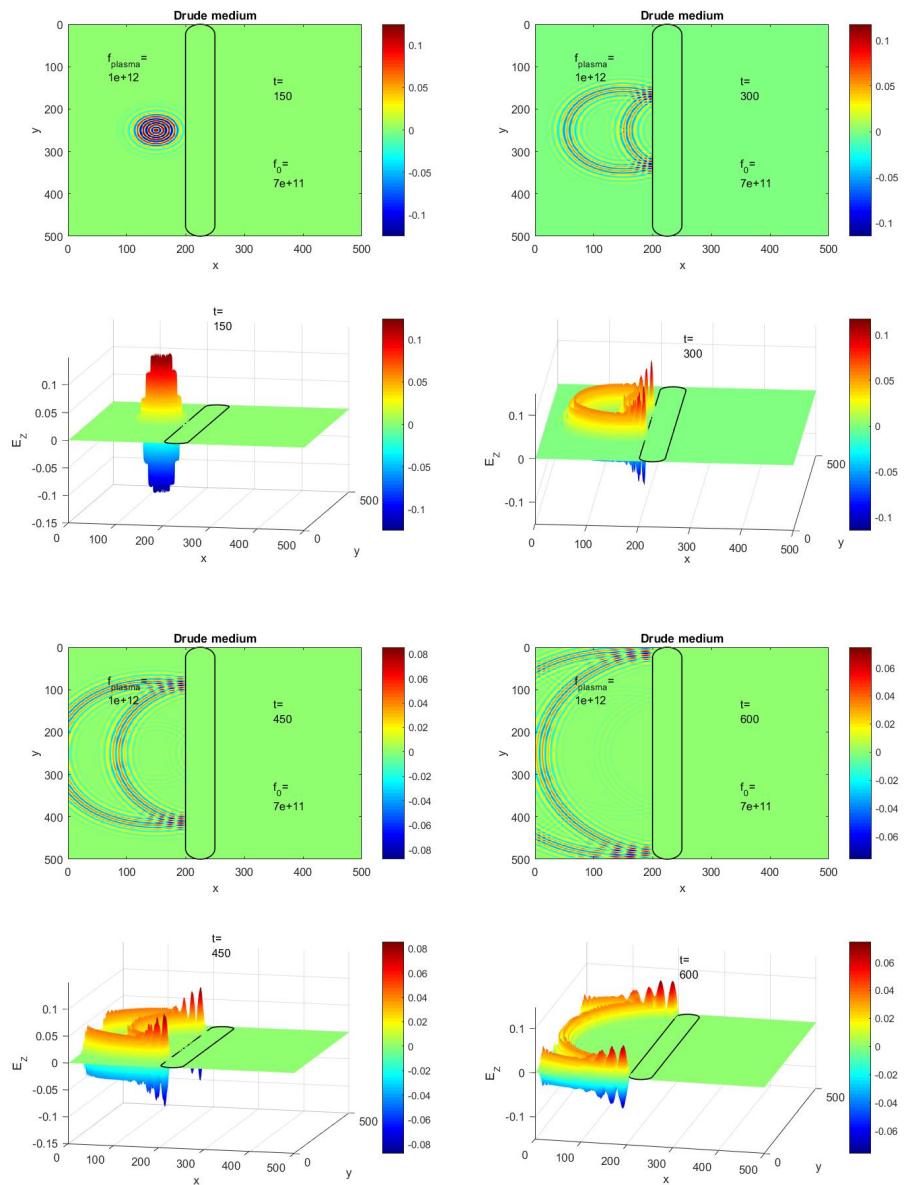


Σχήμα 67: Πηγή, φάσμα πηγής για $f_0 = 0,7THz$ και επιδεκτικότητα.

Από το φάσμα της πηγής στο Σχήμα 67, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, υπολογίζουμε τη μέγιστη συχνότητα που διεγείρει η συγκεκριμένη πηγή. Στη συνέχεια, βρίσκουμε το ελάχιστο μήκος κύματος που διεγείρεται (από τη σχέση $\lambda_{min} = c_0/f_{max}$) και από εκεί υπολογίζουμε το dx (από τη σχέση $dx = \lambda_{min}/10$) και κατ' επέκταση το dt (από τη σχέση $dt = dx/2c_0$) που χρησιμοποιείται στην εξίσωση του παλμού.

Η επιλογή της συχνότητας διάδοσης του κύματος $f_0 = 0,7THz$ δεν έγινε τυχαία. Αν παρατηρήσουμε πολύ προσεκτικά το Σχήμα 67, θα δούμε ότι για την συγκεκριμένη τιμή της συχνότητας το πραγματικό μέρος της επιδεκτικότητας ισούται με $\epsilon(\omega_0) = -1$. Για αυτό το λόγο, αναμένουμε σε αυτή την περίπτωση το υλικό *Drude* σε αυτή την συχνότητα να συμπεριφέρεται σαν ένα τέλειο μέταλλο. Δηλαδή, αναμένουμε να ανακλά πλήρως τον παλμό που προσκρούει σε αυτό, χωρίς να έχει την ιδιότητα να απορροφά ή να διαδίδεται μέσα σε αυτό κάποιο μέρος του αρχικού παλμού.

Για τις προσομοιώσεις θα προσθέσουμε και τις συνοριακές συνθήκες *Mur* όπως αναλύθηκαν στην παράγραφο 4.3. Οι προσομοιώσεις που προκύπτουν για την παραπάνω περίπτωση όπου $f_0 = 0,7THz$ και το πραγματικό μέρος της επιδεκτικότητας γίνεται ακριβώς -1, είναι (κώδικας 1.21):

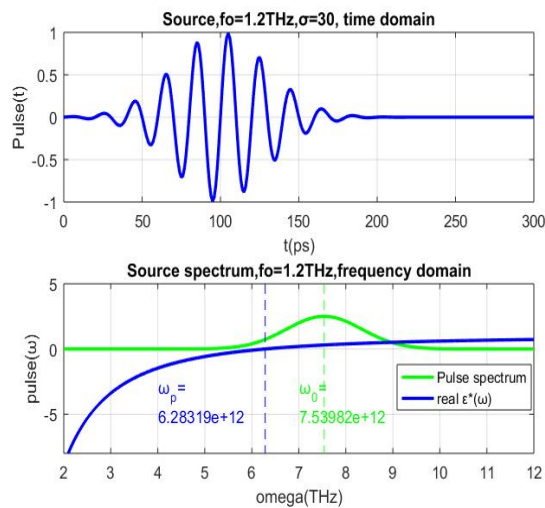


Σχήμα 68: Παλμός προσκρούει σε υλικό *Drude*, 2Δ .

Από το Σχήμα 68, παρατηρούμε ότι πράγματι, όταν ο παλμός προσκρούει στο υλικό *Drude* ανακλάται πλήρως προς τα πίσω. Επίσης ο παλμός δεν απορροφάται, αλλά ούτε και διέρχεται από το υλικό όπως αναμενόταν από τις παρατηρήσεις που

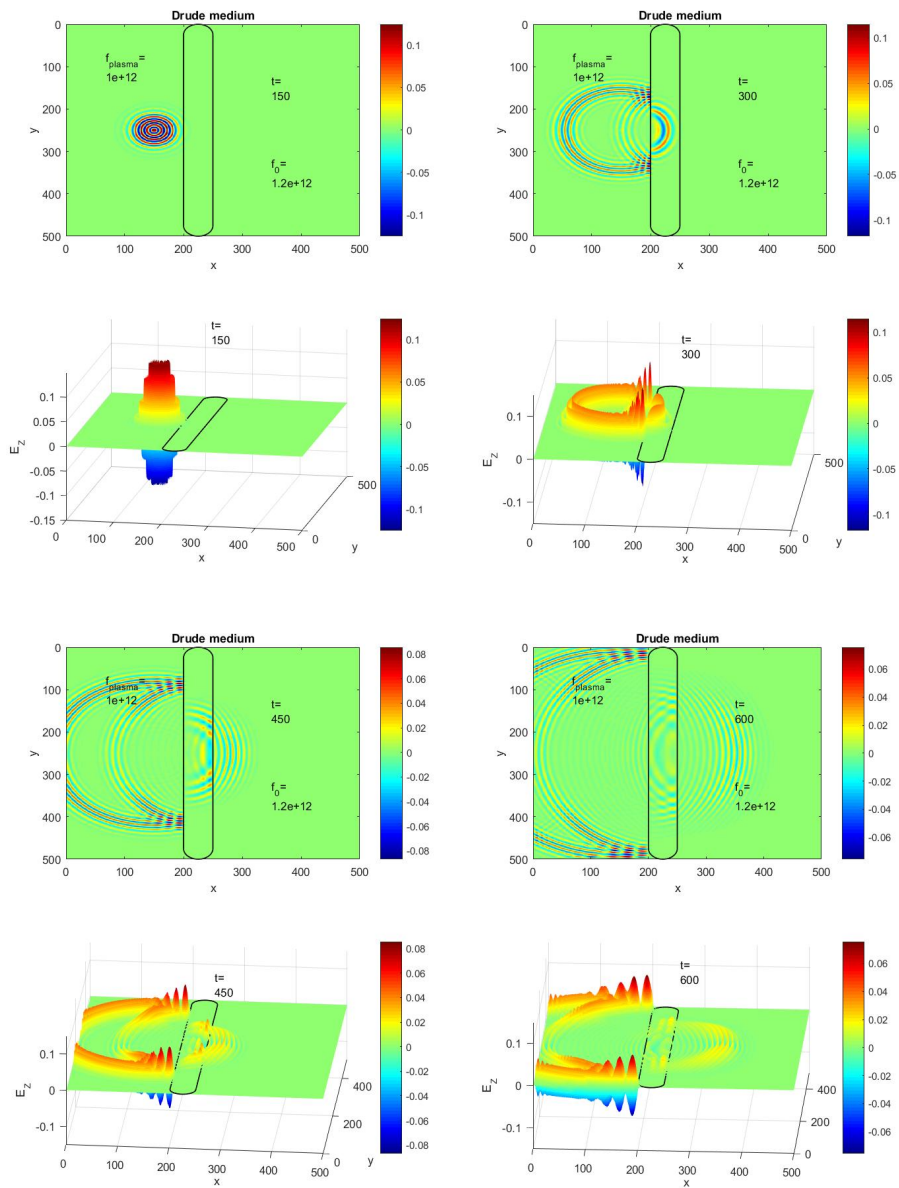
έγιναν παραπάνω. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι ένα υλικό *Drude* που χαρακτηρίζεται ως ημιαγωγός στην συγκεκριμένη συχνότητα φαίνεται να λειτουργεί σαν ένα τέλειο μέταλλο και ανακλά πλήρως τον παλμό που προσκρούει σε αυτό. Αυτό συμβαίνει γιατί όπως είπαμε, η επιδεκτικότητα γίνεται ακριβώς ίση με -1 για την συγκεκριμένη τιμή συχνότητας. Τέλος, παρατηρούμε πόσο σημαντικό είναι να τοποθετούμε σωστές συνοριακές συνθήκες στα τοιχώματα του προβλήματος ώστε να μην έχουμε ανεπιθύμητες ανακλάσεις και να μπορούμε να βγάξουμε ασφαλή συμπεράσματα για τη μελέτη που κάνουμε.

Για τη δεύτερη περίπτωση που θα μελετήσουμε στο υλικό *Drude* σε 2 διαστάσεις, επιλέγουμε ως συχνότητα διάδοσης του κύματος την $f_0 = 1,2THz$. Τα στοιχεία για το υλικό μένουν ως έχουν. Η πηγή και το φάσμα της πηγής σε σχέση με το πραγματικό μέρος της επιδεκτικότητας σε αυτή την περίπτωση θα είναι:



Σχήμα 69: Πηγή, φάσμα πηγής για $f_0 = 1,2THz$ και επιδεκτικότητα.

Όπως και πριν, ακολουθούμε τη γνωστή διαδικασία για τον υπολογισμό του dt από το φάσμα του παλμού που προκαλεί η πηγή. Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε ότι το φάσμα των συχνοτήτων που διαγείρει η πηγή, βρίσκεται σε ένα εύρος συχνοτήτων στο οποίο το πραγματικό μέρος της επιδεκτικότητας είναι αύξουσα συνάρτηση της συχνότητας και στην προκειμένη περίπτωση παίρνει τιμές από 0 έως περίπου 1. Όπως είπαμε και στη 1 διάσταση, όταν έχουμε ένα φάσμα συχνοτήτων που η επιδεκτικότητα συμπεριφέρεται με αυτόν τον τρόπο, αναμένουμε να υπάρχει ομαλή διασπορά εντός του υλικού. Οι προσομοιώσεις που προκύπτουν σε αυτή την περίπτωση είναι (κώδικας 1.21):

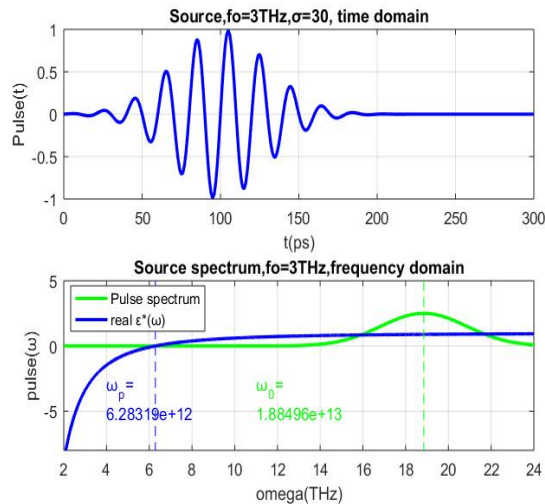


Σχήμα 70: Παλμός προσκρούει σε υλικό *Drude*, 2Δ .

Από το Σχήμα 70, παρατηρούμε ότι πράγματι για αυτές τις συχνότητες παλμού το υλικό συμπεριφέρεται σαν ένα υλικό που παρουσιάζει ομαλή διασπορά. Ένα μέρος του παλμού ανακλάται από τα τοιχώματα του υλικού όταν προσκρούει σε

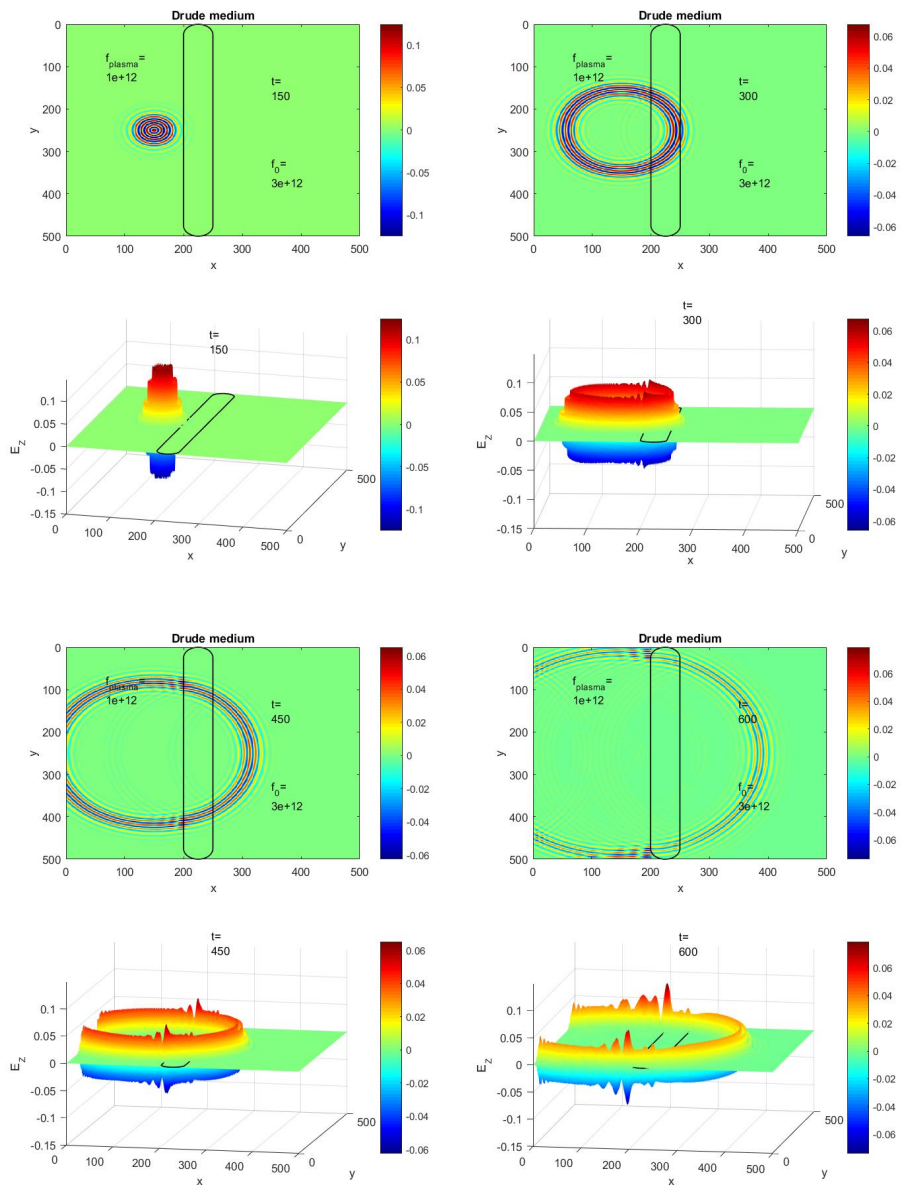
αυτό, ενώ το υπόλοιπο διαδίδεται εντός του υλικού κατά έναν περίεργο τρόπο. Μάλιστα παρατηρούμε ότι σε μεγάλους χρόνους προκαλείται διπλή ανάκλαση από τα τοιχώματα του υλικού όσο ο παλμός διαδίδεται και εξέρχεται από αυτό. Εντός του υλικού παρατηρούμε ότι υπάρχει φαινόμενο διασποράς για αυτές τις συχνότητες, όπως ακριβώς αναμενόταν. Το μέρος του παλμού που δεν απορροφάται από το υλικό, εξέρχεται από αυτό και συνεχίζει να διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο, όπως και πριν αλληλεπιδράσει με το υλικό. Τέλος, και πάλι παρατηρούμε πόσο σημαντική είναι η χρήση συνοριακών συνθηκών σε τέτοια περίπλοκα προβλήματα που χρειάζονται παρατήρηση λεπτομερειών και όσο το δυνατόν λιγότερες παρεκλίσεις.

Στην τρίτη και τελευταία περίπτωση που θα μελετήσουμε, επιλέγουμε η συχνότητα διάδοσης του παλμού να είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη συχνότητα πλάσματος που χαρακτηρίζει το υλικό *Drude*. Επιλέγουμε συχνότητα διάδοσης $f_0 = 3THz$. Τα στοιχεία για το υλικό μένουν ως έχουν και πάλι. Η πηγή και το φάσμα της πηγής σε σχέση με το πραγματικό μέρος της επιδεκτικότητας σε αυτή την περίπτωση θα είναι:



Σχήμα 71: Πηγή, φάσμα πηγής για $f_0 = 3THz$ και επιδεκτικότητα.

Σε αυτή την περίπτωση όπου η συχνότητα διάδοσης του κύματος είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τη συχνότητα πλάσματος του υλικού, παρατηρούμε από το Σχήμα 71 ότι η περιοχή των συχνοτήτων που διεγείρει η πηγή βρίσκεται εκεί όπου το πραγματικό μέρος της επιδεκτικότητας τείνει να γίνει σταθερό και ίσο με 1. Στην περίπτωση αυτή, όπως έχουμε προαναφέρει, αναμένουμε ο παλμός να μην 'βλέπει' το υλικό και το υλικό να συμπεριφέρεται σαν τέλειος αγωγός, δηλαδή σαν να είναι ο ελεύθερος χώρος. Οι προσομοιώσεις που προκύπτουν σε αυτή την περίπτωση θα είναι (κώδικας 1.21):



Σχήμα 72: Παλμός προσκρούει σε υλικό *Drude*, 2Δ .

Από το παραπάνω Σχήμα 72, παρατηρούμε ότι πράγματι το κύμα διαδίδεται σαν να βρίσκεται στον ελεύθερο χώρο και δεν αλληλεπιδρά σχεδόν καθόλου με το υλικό *Drude*. Αυτή η μικρή παρέκλιση που δημιουργείται είναι επειδή ένα μέρος των συ-

χνοτήτων που διεγείρει η πηγή βρίσκεται στο χώρο όπου η επιδεκτικότητα δεν είναι ακριβώς ίση με 1, επομένως δημιουργεί μία πάρα πολύ μικρή ανάκλαση. Για αυτό, είναι πολύ σημαντικό σε τέτοια περίπλοκα προβλήματα όταν κάνουμε προσομοιώσεις να χρησιμοποιούμε μεγάλους χρόνους και σωστές συνοριακές συνθήκες για να προσεγγίζουμε όσο καλύτερα γίνεται το πραγματικό πρόβλημα και να βγάξουμε ασφαλέστερα συμπεράσματα.

Συνοψίζοντας, ένα υλικό *Drude* αποτελεί πολύ ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η διασπορά που παρουσιάζει σαν υλικό στο ηλεκτρικό πεδίο είναι πολύ ιδιαίτερη καθώς προκαλούνται εσωτερικές ανακλάσεις στα τοιχώματα όπως είδαμε. Μάλιστα, όπως είδαμε παραπάνω, ανάλογα με τις συχνότητες που διεγείρει η πηγή που προσκρούει στο υλικό έχουμε τελείως διαφορετική συμπεριφορά του υλικού. Έχει τις ιδιότητες ενός αγωγού, ενός μονωτή και ενός ημιαγωγού με διασπορά ανάλογα με το φάσμα συχνοτήτων που επιλέγουμε σε σχέση με τη συχνότητα πλάσματος που την δημιουργούμε με κατασκευαστικές μεθόδους.

6 Δομές μεταϋλικών

6.1 Εισαγωγή

Μέχρι τώρα τα υλικά που μελετήσαμε παρουσιάζαν διασπορά μόνο στην κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Χρησιμοποιούσαμε τις παρακάτω εξισώσεις *Maxwell* (σε Γκαουσιανές μονάδες) :

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \vec{\nabla} \times \vec{H},$$

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega),$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \vec{\nabla} \times \vec{E}.$$

Για τις παραπάνω εξισώσεις, είχαμε υποθέσει ότι $\vec{B} = \mu \vec{H}$, όπου το $\mu = 1$ πάντα. Έτσι, χρησιμοποιούσαμε απευθείας στις εξισώσεις ότι $\vec{H} = \vec{B}$. Εάν θέλουμε να βάλουμε διασπορά και στο μαγνητικό πεδίο, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε $\mu = \mu(\omega)$ με την μαγνητική διαπερατότητα τώρα να έχει μία ανάλογη μορφή με την ηλεκτρική επιδεκτικότητα και να εξαρτάται άμεσα από τη συχνότητα ω . Επομένως, στην περίπτωση όπου έχουμε διασπορά προς όλες τις κατευθύνσεις και όλα τα πεδία, θα χρησιμοποιούμε επιπλέον τη σχέση $\vec{B} = \mu(\omega) \vec{H}$. Τελικά, στις προσομοιώσεις θα έχουμε τώρα 4 βασικές εξισώσεις που θα πρέπει να χρησιμοποιούμε:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \vec{\nabla} \times \vec{H},$$

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega),$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu(\omega) \vec{H}.$$

Ένα μεταϋλικό, χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι έχει ταυτόχρονα αρνητική ηλεκτρική επιδεκτικότητα αλλά και μαγνητική διαπερατότητα. Σε αυτά τα υλικά, ο δείκτης διάθλασης, που θα είναι $n(\omega) = \pm \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$, θα παίρνει αρνητικές τιμές. Έτσι, πρόκειται για υλικά που παρουσιάζουν αρνητικό δείκτη διάθλασης (negative-refractive-index(NRI)), σε αντίθεση με τα συμβατικά υλικά που έχουν θετικό δείκτη διάθλασης (positive-refractive-index(PRI)). Εδώ να σημειωθεί ότι τα μεταϋλικά δεν υπάρχουν στη φύση, είναι υλικά τα οποία κατασκευάζονται σε εργαστήρια με διάφορες σύγχρονες μεθόδους. Τέτοια υλικά βρίσκονται ακόμα σε πειραματική μελέτη κατά κύριο λόγο και δεν υπάρχει ευρεία χρήση τους, παρά μόνο σε πολύ συγκεκριμένες εφαρμογές.

Η μελέτη τέτοιων μη-συμβατικών υλικών έχει ως αποτέλεσμα νέα, ασυνήθιστα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Όπως θα μελετηθεί και παρακάτω, με τη χρήση ενός μεταύλικου μπορούμε να δημιουργήσουμε μία διάταξη με έναν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο φακό (αντί για κυρτό που είναι συνήθως το σχήμα ενός φακού) και να πετύχουμε τον 'τέλειο φακό' για ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Άλλες εφαρμογές, είναι η αντίστροφη μετατόπιση *Doppler*, η ολική αρνητική διάθλαση, η ακτινοβολία *Cherenkov* καθώς επίσης και τριδιάστατους δακτύλιους ταλαντωτές και πυκνωτές. Οι παραπάνω εφαρμογές μελετήθηκαν αρχικά στο φάσμα συχνοτήτων των μικροκυμάτων αλλά σήμερα μελετώνται και στο οπτικό φάσμα αλλά και σε άλλες συχνότητες. Η μέθοδος *FDTD* συνέβαλλε σε πολύ μεγάλο βαθμό στην μελέτη και την κατανόηση τέτοιων αντισυμβατικών υλικών που αλλάζουν τον τρόπο με τον οποίο μελετάμε τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μέσα σε υλικά. Σε περιοδικές γεωμετρικές διατάξεις η μέθοδος *FDTD* έδωσε εξαιρετικά αποτελέσματα στη μελέτη της διασποράς που παρουσιάζουν αυτά τα υλικά.

Η περίπτωση που θα μας απασχολήσει παρακάτω, είναι να έχουμε διπλή αρνητική επιδεκτικότητα. Δηλαδή θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου η ηλεκτρική επιδεκτικότητα και η μαγνητική διαπερατότητα είναι ταυτόχρονα αρνητικές. Τέτοια υλικά είναι γνωστά ως *double negative metamaterial* ή απλά *double negative material* (DNG). Έως σήμερα, μόνο τέτοια υλικά παρουσιάζουν σταθερό αρνητικό δείκτη διάθλασης όταν αλληλεπιδρούν με ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

6.2 Μεταύλικά σε 2 διαστάσεις

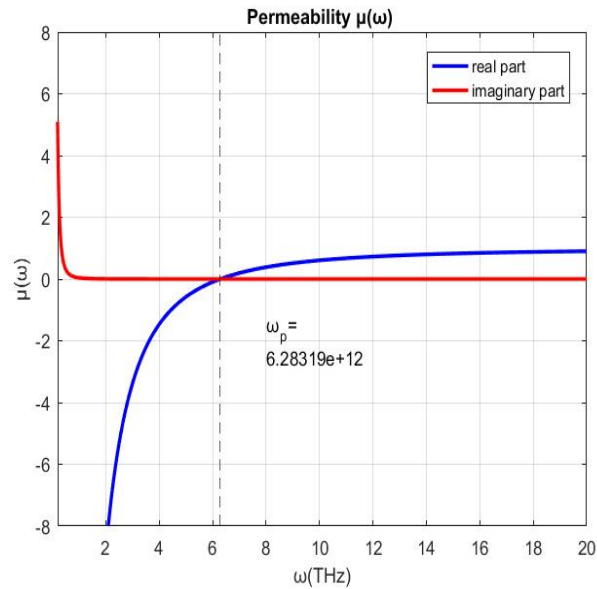
Για τη μελέτη της διασποράς ενός μεταύλικου, θα χρησιμοποιήσουμε τη διασπορά ενός υλικού *Drude*. Η ηλεκτρική επιδεκτικότητα σε ένα υλικό *Drude* όπως είδαμε παραπάνω είναι:

$$\epsilon^*(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega(iv_c - \omega)},$$

Όπου $\omega_p = 2\pi f_p$ η συχνότητα συντονισμού (πλάσματος) του υλικού και v_c μία σταθερά που προσδιορίζει την συχνότητα σύγκρουσης των ηλεκτρονίων. Επιλέγουμε τη μαγνητική διαπερατότητα $\mu(\omega)$ να είναι ίση με την ηλεκτρική επιδεκτικότητα $\epsilon(\omega)$. Δηλαδή θα έχουμε μαγνητική διαπερατότητα:

$$\mu^*(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega(iv_c - \omega)}.$$

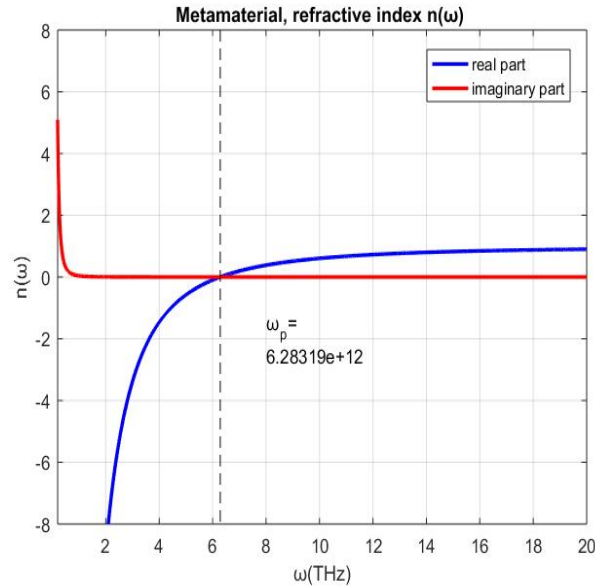
Επιλέγουμε η συχνότητα πλάσματος να είναι $f_p = 1THz$ και η σταθερά $v_c = 0,001THz$. Επιλέγουμε η σταθερά v_c να είναι 1000 φορές μικρότερη από τη συχνότητα πλάσματος για να αποφύγουμε τυχόν ανακλάσεις στο πρόβλημα. Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της διαπερατότητας θα είναι στην περίπτωση αυτή:



Σχήμα 73: Επιδεκτικότητα για υλικό *Drude*.

Όπως είπαμε, ο δείκτης διάθλασης υπολογίζεται από τη σχέση (θεωρώντας ότι τα $\epsilon_1, \mu_1 = 1$) $n(\omega) = \pm \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$. Στα γνωστά υλικά, παίρνουμε κατά σύμβαση το θετικό πρόσημο καθώς έχουμε θετικές τιμές για τα ϵ, μ . Τώρα όμως, μας αφορά το φάσμα συχνοτήτων όπου τα ϵ, μ είναι μικρότερα του 0 καθώς θέλουμε να μελετήσουμε πως συμπεριφέρεται ένα υλικό που έχει ταυτόχρονα ηλεκτρική επιδεκτικότητα και μαγνητική διαπερατότητα αρνητική. Το γινόμενο δύο αρνητικών τιμών όμως μας δίνει θετικό αποτέλεσμα και ο δείκτης διάθλασης n είναι πραγματικός αριθμός. Υπό αυτές τις συνθήκες, πρέπει να πάρουμε το πρόσημο – στον υπολογισμό του δείκτη διάθλασης n . Ως γνωστόν, όταν τα ϵ, μ , είναι ταυτόσημα τότε το κύμα οδεύει προς μία κατεύθυνση, είτε προς τα μπροστά είτε προς τα πίσω ανάλογα το προ πρόσημο που έχουν τα ϵ, μ . Στην περίπτωση που είναι ετερόσημα, όπως είδαμε και στην περίπτωση του υλικού *Drude* (όπου είχαμε θεωρήσει το $\mu = 1$ σταθερό και θετικό) για συχνότητες κύματος παραπλήσιες της συχνότητας πλάσματος που μας δίνει αρνητική επιδεκτικότητα (Σχήμα 68), το κύμα δεν μπορεί να διαδοθεί μέσα στο υλικό καθώς έχουμε φανταστικό δείκτη διάθλασης και έχουμε συμπεριφορά μετάλλου.

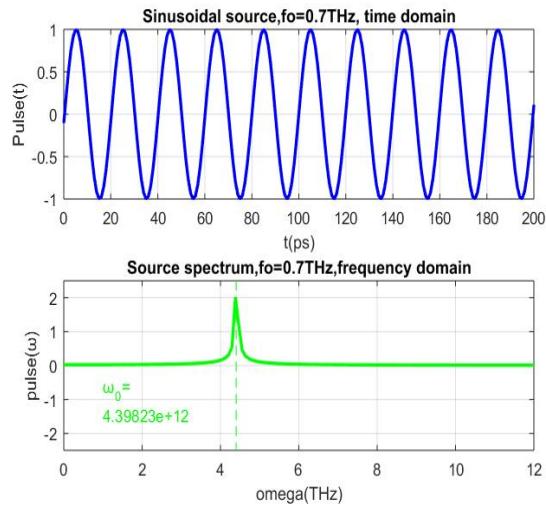
Εδώ έχουμε επιλέξει η μαγνητική διαπερατότητα $\mu(\omega) = \epsilon(\omega)$. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, θα έχουμε έναν δείκτη διάθλασης $n(\omega) = \epsilon(\omega)$. Επομένως, το πραγματικό και φανταστικό μέρος για τον δείκτη διάθλασης, σε όλο το φάσμα των συχνοτήτων (όπου παίρνει, δηλαδή, και θετικές και αρνητικές τιμές) θα είναι:



Σχήμα 74: Δείκτης διάθλασης για υλικό μεταυλικό *Drude*.

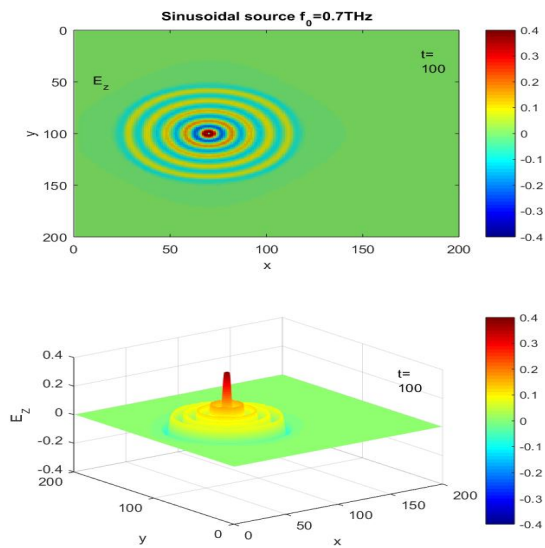
Σε σχέση με όλα τα παραπάνω υλικά που μελετήσαμε, σε αυτή την περίπτωση όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και στο Σχήμα 74 είναι πρώτη φορά που έχουμε αρνητικό δείκτη διάθλασης για ένα φάσμα συχνοτήτων. Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις που μελετούσαμε συμβατικά υλικά, το πραγματικό μέρος του δείκτη διάθλασης ήταν πάντα είτε 0 είτε θετικό.

Σε αυτή την περίπτωση, για να μελετήσουμε τη διασπορά που προκαλεί το μεταυλικό και ο διπλός αρνητικός δείκτης διάθλασης θα χρησιμοποιήσουμε μία ημιτονοειδή πηγή της μορφής $pulse = \sin(2\pi f_0 \Delta t (n - n_0))$, όπου n είναι τα χρονικά βήματα και f_0 η συχνότητα του ημιτονοειδούς παλμού. Θέλουμε η συχνότητα που ο δείκτης διάθλασης παίρνει ακριβώς την τιμή -1 , ώστε να δημιουργήσουμε τις ιδιότητες του τέλει φακού, να συμπίπτει με τη μέγιστη τιμή του φάσματος του παλμού. Εάν παρατηρήσουμε το Σχήμα 74, θα δούμε ότι αυτή η συχνότητα είναι $f = 0,7 THz$. Από το φάσμα του κύματος που προκαλεί η πηγή, κατά τα γνωστά, υπολογίζουμε το ελάχιστο μήκος κύματος που διεγείρει η πηγή και από εκεί αντίστοιχα το dx και το dt που επεισέρχεται στην εξίσωση της πηγής. Η πηγή στο πεδίο του χρόνου καθώς επίσης και στο πεδίο των συχνοτήτων θα είναι (κώδικας 1.22, περιέχει και τον κώδικα για τον υπολογισμό των ϵ , μ και n):



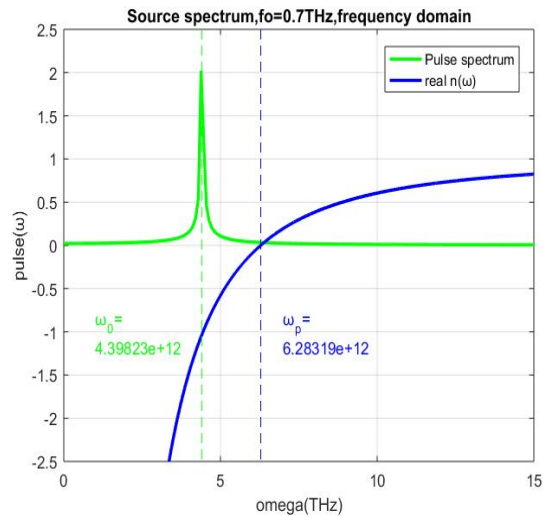
Σχήμα 75: Πηγή και φάσμα πηγής για $f = 0,7THz$.

Στην προσομοίωση στον ελεύθερο χώρο, το κύμα θα έχει την παρακάτω μορφή:



Σχήμα 76: Ημιτονοειδές κύμα για $f = 0,7THz$.

Αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως, είναι το φάσμα του παλμού σε σύγκριση με το πραγματικό μέρος του δείκτη διάθλασης αυτή τη φορά. Έτσι, για συχνότητα διάδοσης κύματος $f = 0,7THz$ και συχνότητα πλάσματος για το υλικό $f_p = 1THz$ θα έχουμε:



Σχήμα 77: Φάσμα πηγής για $f = 0,7THz$ και πραγματικό μέρος δείκτη διάθλασης.

Από το Σχήμα 77 παραπάνω, φαίνεται ξεκάθαρα πως το μέγιστο στο φάσμα του παλμού παρουσιάζεται στην συχνότητα στην οποία ο δείκτης διάθλασης για το υλικό γίνεται ακριβώς -1 . Σε αυτό το φάσμα συχνοτήτων γύρω από τη συχνότητα πλάσματος έχουμε διπλή αρνητική επιδεκτικότητα και αναμένουμε να έχουμε τις πολύ ιδιαίτερες ιδιότητες του μεταλλικού. Εδώ, θα γίνει μία προσπάθεια προσομοίωσης ενός μεταλλικού που παρουσιάζει διασπορά και ιδιότητες ενός "τέλειου φακού".

Για να έχουμε τη δημιουργία ενός "τέλειου φακού" πρέπει να επιλέξουμε πολύ προσεκτικά τη διάταξη την οποία θα χρησιμοποιήσουμε. Θεωρούμε έναν τετραγωνικό χώρο διαστάσεων 200×200 . Τοποθετούμε την πηγή μας στο σημείο $x = 70$ και $y = 100$. Στη συνέχεια, τοποθετούμε το υλικό στο χώρο από $x = 80$ έως $x = 100$. Εδώ να σημειωθεί ότι είναι πολύ σημαντικό να επιλέξουμε οι διαστάσεις του υλικού στον x -άξονα να είναι ακριβώς το διπλάσιο της απόστασης πηγής-υλικού ώστε να πετύχουμε ακριβώς τις ιδιότητες ενός "τέλειου φακού" για το ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται εντός του υλικού. Για να έχουμε ασφαλή αποτελέσματα χωρίς σημαντικές ανακλάσεις από τα τοιχώματα, χρησιμοποιούμε απορροφητικές συνθήκες Mur όπως αυτές αναλύθηκαν στην παράγραφο 4.3 .

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, θα πρέπει να αλλάξουν οι εξισώσεις για το μαγνητικό πεδίο καθώς τώρα θα έχουμε και εκεί διασπορά. Για να προσεγγίσουμε το πρόβλημα και για να εξαγάγουμε τις εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στις προσομοιώσεις θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο *ADE*.

Οι εξισώσεις για το ηλεκτρικό πεδίο θα μείνουν ίδιες, όπως στην περίπτωση που μελετήσαμε στην παράγραφο 5.2 . Εκεί είχαμε βρει τις εξισώσεις:

$$E^n = D^n - I^{n-1} - \frac{(1 - 0,5\Delta tv_c)}{(1 + 0,5\Delta tv_c)} S^{n-1},$$

$$\text{όπου } S^n = -\frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} E^n + \frac{(1 - 0,5\Delta tv_c)}{(1 + 0,5\Delta tv_c)} S^{n-1} \text{ και } I^n = I^{n-1} + \frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} E^n.$$

Η σχέση που συνδέουν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είδαμε ότι είναι από τη θεώρηση του *Maxwell*:

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

$$D_z(\omega) = \epsilon(\omega) E_z(\omega)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Στα παραπάνω, προστίθεται τώρα και η σχέση για το μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \mu(\omega) \vec{H}$. Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία προκύπτει για τη διασπορά στην κατεύθυνση x του μαγνητικού πεδίου:

$$B_x^{n+1}(i, j) = B_x^n(i, j) + 0,5 * (E_z^n(i, j) - E_z^n(i, j + 1))$$

$$H_x^{n+1}(i, j) = B_x^n(i, j) - K_x^n(i, j) - \frac{(1 - 0,5\Delta tv_c)}{(1 + 0,5\Delta tv_c)} J_x^n(i, j)$$

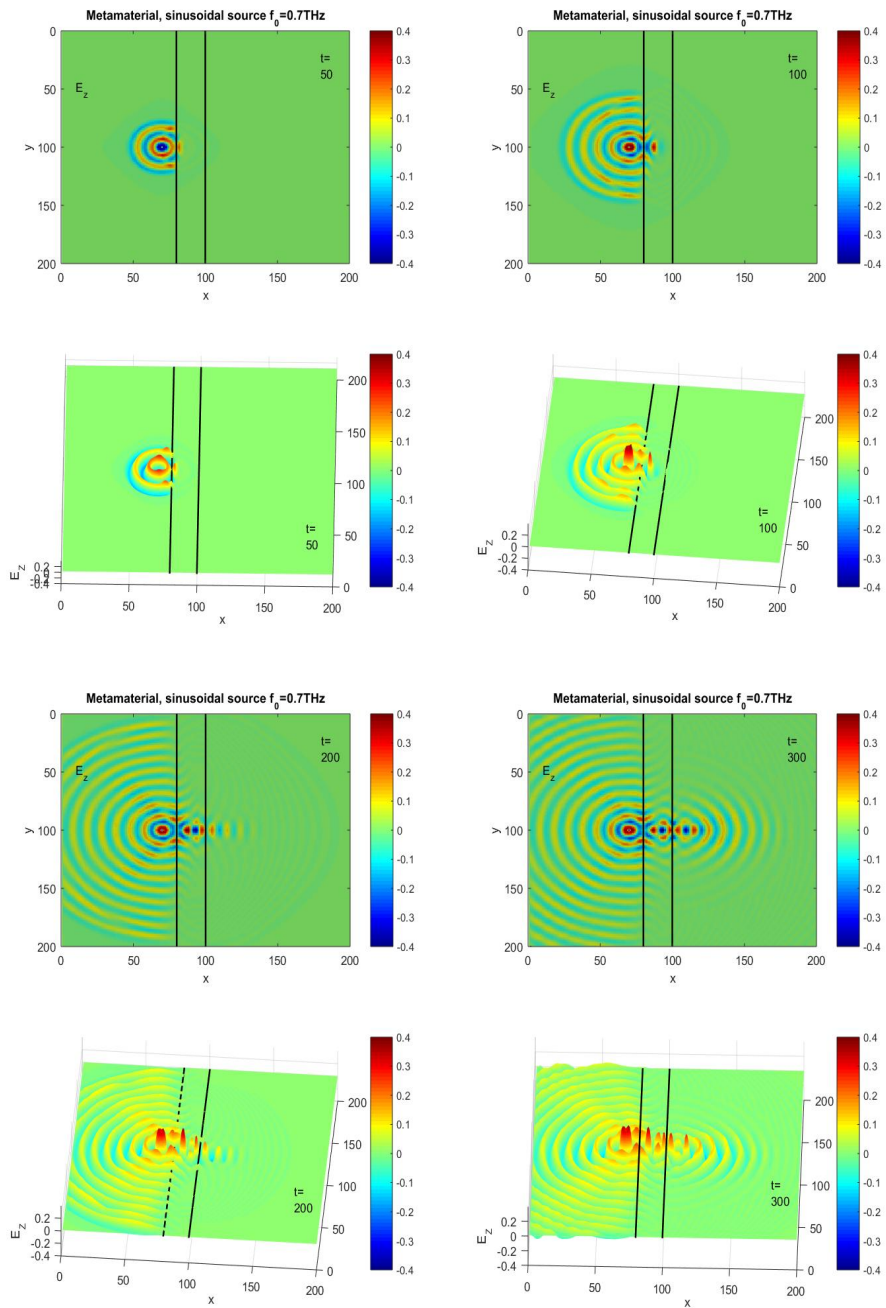
$$K_x^{n+1}(i, j) = K_x^n(i, j) + \frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} H_x^n(i, j)$$

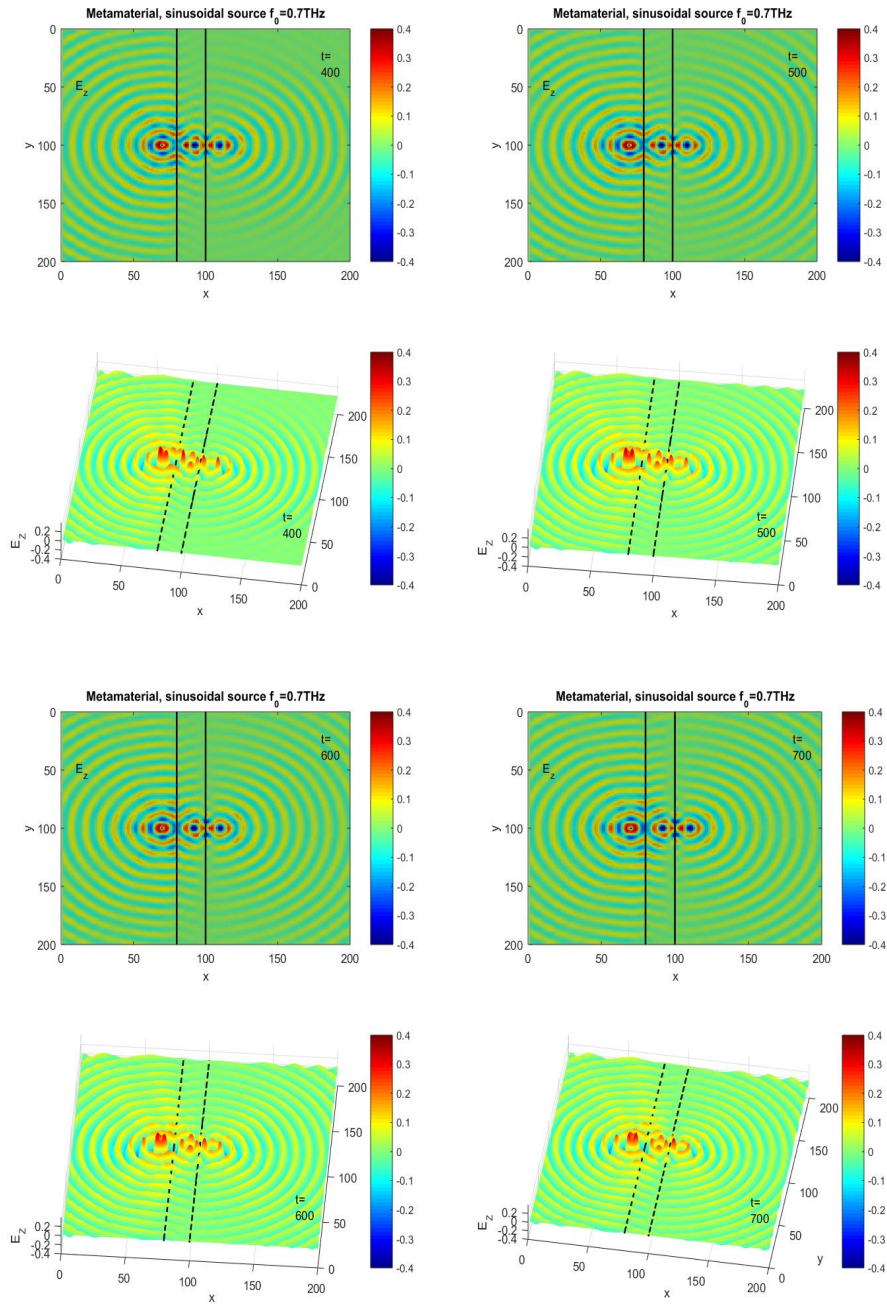
$$J_x^{n+1}(i, j) = \frac{(1 - 0,5\Delta tv_c)}{(1 + 0,5\Delta tv_c)} J_x^n(i, j) + \frac{-\omega_p^2 \Delta t}{v_c} H_x^n(i, j).$$

Για τη διασπορά στην κατεύθυνση y του μαγνητικού πεδίου αλλάζει η 1η εξίσωση:

$B_y^{n+1}(i, j) = B_y^n(i, j) + 0,5 * (E_z^n(i + 1, j) - E_z^n(i, j))$ και οι υπόλοιπες εξισώσεις υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο αλλά για τα στοιχεία H , K και J της y κατεύθυνσης.

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων είναι (κώδικας 1.23):





Σχήμα 78: Παλμός προσκρούει σε μεταλλικό *Drude*, 2Δ.

Από τις παραπάνω προσομοιώσεις στο Σχήμα 78, παρατηρούμε κάτι απίθανο σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε για τα συμβατικά υλικά και την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρήση. Κατά πρώτον, παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει καθόλου ανάκλαση όπως αναμενόταν καθώς το φανταστικό μέρος είναι 0. Κατά δεύτερον, παρατηρούμε ότι ο παλμός εισέρχεται στο μεταϊλικό και συγχλίνει προς το κέντρο του υλικού. Στη συνέχεια, ο παλμός φαίνεται κατά κάποιο τρόπο να επανεκπέμπεται εκτός του υλικού αυτή τη φορά. Βλέπουμε ότι δημιουργούνται συνολικά 3 πηγές. Μάλιστα, ο παλμός στα δεξιά του υλικού είναι ακριβώς ο ίδιος με τον παλμό που υπάρχει στην αρχή του προβλήματος στον κενό χώρο στα αριστερά του υλικού.

Με τις ιδιότητες λοιπόν των μεταϊλικών, καταφέραμε να κατασκευάσουμε ένα πρόβλημα στο οποίο το ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσκρούει στο υλικό και κατοπτρίζεται πλήρως στην άλλη πλευρά του υλικού. Έτσι, πράγματι μπορούμε να έχουμε έναν τέλειο φακό για ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Η διαφορά με τα συμβατικά υλικά είναι ότι με αυτή τη μέθοδο μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν τέλειο ίσιο φακό, και όχι κυρτό όπως είναι οι συμβατικοί φακοί, ο οποίος φαίνεται να δημιουργεί ένα άψογο είδωλο του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Τέλος, μέσω της μεθόδου *FDTD* είδαμε πόσο εύκολα μπορούμε να προσομοιώσουμε τέτοια περίπλοκα υλικά που προσφέρουν απεριόριστες νέες δυνατότητες στο πεδίο του ηλεκτρομαγνητισμού και της μελέτης των υλικών.

7 Κώδικες

1.1. Ελεύθερος χώρος, 1Δ

```
1 %1D FDTD simulation in free space, Ex,Hy
2
3 clear;
4 %Define the parameters of the problem
5 ke=200;
6 kc=ke/2;
7 nsteps=500;
8 t0=40.0;
9 spread=12;
10
11 %Create the fields
12 ex=zeros(1,ke);
13 hy=zeros(1,ke);
14
15 %Open file to write the data
16 fid=fopen('arxeio1.txt','w');
17 fopen(fid);
18
19 for t=1:nsteps
20 for k=2:ke-1
21 ex(k)=ex(k)+.5*(hy(k-1)-hy(k));
22 end
23
24
25 pulse=exp(-.5*((t-t0)/spread)^2);
26 ex(kc)=ex(kc)+pulse;
27
28 for k=1:ke-1
29 hy(k)=hy(k)+.5*(ex(k)-ex(k+1));
30 end
31
32 if t==300; %Define the time step that we want to make the graph
33
34
35 %This command writes the data
36 fprintf(fid,'%f\n',ex);
37
38 %Plot the results
39 plot((1:1:ke),ex,'LineWidth',1.5);
40
41 axis([0 ke -1.5 1.5]);
42
43 Title_={'t=',t};
44 text(170,1.2,Title_,'Color','k');
45
46 xlabel('y(FDTD cells) ');
47 ylabel('H_y(V/[y]) ');
48 M(:,t)= getframe();
49
50 end
51 end
52
53 fclose(fid);
```

1.2. Ελεύθερος χώρος, 1Δ , με απορροφητικές συνθήκες.

```
1 %1D FDTD simulation in free space, Ex,Hy + MOVIE
2
3 clear;
4 ke=200;
5 kc=ke/2;
6 nsteps=350;
7 t0=40.0;
8 spread=12;
9
10 ex=zeros(1,ke);
11 hy=zeros(1,ke);
12
13 %Initializing the vectors for the absorbing boundary conditions
14 ex_low_m2=0.;
15 ex_low_m1=0.;
16 ex_high_m1=0.;
17 ex_high_m2=0.;
18
19
20 M=moviein(ke);
21
22 fid=fopen('arxeio1.txt','w');
23 fopen(fid);
24
25 fig=figure;
26 %Command to write video of the simulation
27 v=VideoWriter('Gaussian_abc.avi');
28 v.FrameRate=30;
29 open(v)
30
31
32 for t=1:nsteps;
33
34 for k=2:ke-1
35 ex(k)=ex(k)+.5*(hy(k-1)-hy(k));
36 end
37
38 ex(1)=ex_low_m2;
39 ex_low_m2=ex_low_m1;
40 ex_low_m1=ex(2);
41
42 ex(ke)=ex_high_m2;
43 ex_high_m2=ex_high_m1;
44 ex_high_m1=ex(ke-1);
45 pulse=exp(-.5*((t-t0)/spread)^2);
46 ex(kc)=ex(kc)+pulse;
47
48 for k=1:ke-1
49 hy(k)=hy(k)+.5*(ex(k)-ex(k+1));
50 end
51
52 fprintf(fid,'%f\n',ex);
53
54
55 if t==300 %Define the time step that we want to make the graph
56
```

```

57 plot((1:1:ke),ex,'LineWidth',2);
58
59
60 axis([0 ke -.5 1.5]);
61 xlim([0,200]);
62 ylim([- .5,1.5]);
63
64 line('XData',[100 100], 'YData', [-.5 1.2], 'LineStyle', '- -', ...
65 'LineWidth', 1, 'Color','k')
66 line('XData',[0 200], 'YData', [0 0], 'LineStyle', '- -', ...
67 'LineWidth', .5, 'Color','k')
68
69 %Here we write some note, or time step on the graph direct
70 xt=20;
71 yt=1.3;
72 text(xt,yt,'Absorbing Boundary Conditions','FontSize',12);
73
74 Title_={'t=',t};
75 text(160,-.2,Title_,'Color','r');
76
77 %Axis name
78 xlabel('x(FDTD cells)','FontSize',20);
79 ylabel('Ex(V/[x]) ','FontSize',20);
80 M= getframe(fig);
81 %Command to write video
82 writeVideo(v,M);
83 end
84 end
85 movie(M,1);
86
87 fclose(fid);

```


1.3. Ελεύθερος χώρος, 1Δ , διηλεκτρικό υλικό.

```
1 %1D FDTD simulation in free space, Ex,Hy+ dielectric medium
2
3 clear;
4 ke=200;
5 kc=ke/2;
6 ks=100;
7 nsteps=500;
8 t0=40.0;
9 spread=12;
10 epsilon=4;
11
12 ex=zeros(1,ke);
13 hy=zeros(1,ke);
14
15
16 ex_low_m2=0.;
17 ex_low_m1=0.;
18 ex_high_m1=0.;
19 ex_high_m2=0.;
20
21
22 M=moviein(ke);
23
24 fid=fopen('arxeio6.txt','w');
25 fopen(fid);
26
27 fig=figure;
28 v=VideoWriter('gauss_diel_medium.avi');
29 v.FrameRate=30;
30 open(v)
31
32
33 for t=1:nsteps
34 for k=2:ke-1
35 k=k+1;
36 cb(k)=.5;
37 end
38 for k=ks:ke-1
39 k=k+1;
40 cb(k)=.5/epsilon;
41 ex(k)=ex(k)+cb(k)*(hy(k-1)-hy(k));
42
43 end
44 %      ex(k)=ex(k)+cb(k)*(hy(k-1)-hy(k));
45
46
47 for k=2:ke-1
48 ex(k)=ex(k)+cb(k)*(hy(k-1)-hy(k));
49 end
50 ex(1)=ex_low_m2;
51 ex_low_m2=ex_low_m1;
52 ex_low_m1=ex(2);
53
54 ex(ke)=ex_high_m2;
55 ex_high_m2=ex_high_m1;
56 ex_high_m1=ex(ke-1);
```

```

57 pulse=exp(-.5*((t-t0)/spread)^2);
58 ex(2)=+pulse;
59
60
61 for k=1:ke-1
62 hy(k)=hy(k)+.5*(ex(k)-ex(k+1));
63 end
64
65 fprintf(fid, '%f\n',ex);
66
67 if t==200
68
69 plot((1:1:ke),ex,'LineWidth',2);
70
71
72 axis([0 ke -1.5 1.5]);
73 titlestring=('Gaussian Pulse at x=0');
74 title(titlestring,'color','k');
75
76
77 xlabel('x(FDTD cells)','FontSize',20);
78 ylabel('Ex(V/[x]) ','FontSize',20);
79
80 line('XData',[100 100], 'YData', [-1.5 1.2], 'LineStyle', '- -',
81     ...
82     'LineWidth', 1, 'Color','k')
83 line('XData',[0 200], 'YData', [0 0], 'LineStyle', '- -', ...
84     'LineWidth', .5, 'Color','k')
85
86
87 Title_={'t=',t};
88 text(160,-1.2,Title_,'Color','r');
89
90 xt=140;
91 yt=1;
92 text(xt,yt,'eps=4','FontSize',14)
93
94
95 xt=20;
96 yt=1.3;
97 text(xt,yt,' Dielectric medium at x=100','FontSize',16);
98
99
100 M= getframe(fig);
101 writeVideo(v,M);
102 end
103 %end %If we want to write the movie make sure we erase the time in
104     command if and this final end
105
106 movie(M,1);
107 fclose(fid);

```

1.4. Ελεύθερος χώρος, 1Δ , διηλεκτρικό υλικό, ημιτονοειδής πηγή.

```
1 %1D FDTD simulation in free space, Ex,Hy with sinusoidal source +
  dielectric medium
2
3 clear;
4 ke=200;
5 kc=ke/2;
6 ks=100;
7 nsteps=600;
8
9
10 S=1;
11 ddx=.01;
12 dt=ddx/(2*3e8);
13 freq_in=700*1e6;
14
15 ex_low_m2=0;
16 ex_low_m1=0;
17
18
19 ex=zeros(1,ke);
20 hy=zeros(1,ke);
21 t0=40.0;
22
23 epsilon=4;
24 M=moviein(ke);
25
26 fid=fopen('arxeio6.txt','w');
27 fopen(fid);
28
29 v=VideoWriter('sin_diel_medium1.avi');
30 v.FrameRate=30;
31 open(v)
32
33 % fig=figure;
34
35 for t=1:nsteps
36 for k=2:ke-1
37
38 cb(k)=.5;
39 end
40 for k=ks:ke-1
41
42 cb(k)=.5/epsilon;
43 end
44 ex(k)=ex(k)+cb(k)*(hy(k-1)-hy(k));
45
46 for k=2:ke-1
47 ex(k)=ex(k)+cb(k)*(hy(k-1)-hy(k));
48 end
49
50 pulse=sin(2*pi*freq_in*dt*t); %Source
51 ex(5)=ex(5)+pulse;
52
53
54 if t>1
55
```

```

56 ex(1)=ex_low_m2;
57 ex_low_m2=ex_low_m1;
58 ex_low_m1=ex(2);
59
60 end
61
62 for k=1:ke-1
63 hy(k)=hy(k)+.5*(ex(k)-ex(k+1));
64 end
65
66
67
68 fprintf(fid, '%f\n',ex);
69
70
71
72 plot((1:1:ke),ex,'LineWidth',2);
73
74 axis([0 ke -1.5 1.5]);
75 titlestring=('Sinusoidal wave(f_0=700MHz) ');
76 title(titlestring,'color','k');
77
78
79 line('XData',[100 100], 'YData', [-1.5 1.2], 'LineStyle', '- -',
80     ...
81     'LineWidth', 1, 'Color','k')
82 line('XData',[0 200], 'YData', [0 0], 'LineStyle', '- -', ...
83     'LineWidth', .5, 'Color','k')
84
85 xt=140;
86 yt=1;
87 text(xt,yt,'eps=4','FontSize',14)
88
89 xt=20;
90 yt=1.3;
91 text(xt,yt,'Dielectric medium at x=100','FontSize',14);
92
93 Title_={'t=',t};
94 text(160,-1.2,Title_,'Color','r');
95
96
97 xlabel('x(FDTD cells)','FontSize',20);
98 ylabel('Ex(V/[x]) ','FontSize',20);
99 M= getframe(fig);
100
101     writeVideo(v,M);
102 end
103
104
105 movie(M,1);
106 fclose(fid);

```

1.5. 1Δ, διηλεκτρικό υλικό με απώλειες, ημιτονοειδής πηγή.

```
1 %1D FDTD simulation in free space, Ex,Hy with sinusoidal source +  
  lossy dielectric medium  
2  
3 clear;  
4 ke=200;  
5 kc=ke/2;  
6 ks=100;  
7 nsteps=600;  
8  
9 ddx=.01;  
10 dt=ddx/(2*3e8);  
11 freq_in=7*1e8;  
12  
13  
14  
15 epsilon=4; %  
16 sigma=0.04;  
17 epsz=8.85419e-12;  
18 eaf=dt*sigma/2*epsz*epsilon;  
19  
20  
21 ex_low_m2=0;  
22 ex_low_m1=0;  
23  
24 ca=ones(ks,1);  
25 cb=zeros(ks,1);  
26 ex=zeros(1,ke);  
27 hy=zeros(1,ke);  
28 ix=zeros(1,ke);  
29  
30 T=0;  
31  
32 fig=figure;  
33  
34 % M=moviein(ke);  
35  
36 fid=fopen('arxeio7.txt','w');  
37 fopen(fid);  
38  
39 % v=VideoWriter('sin_diel__lossy_medium.avi');  
40 % v.FrameRate=30;  
41 % open(v)  
42  
43  
44 for t=1:nsteps;  
45  
46 T=T+1;  
47  
48  
49 for k=2:ks-1;  
50  
51 ex(k)=ex(k)+.5*(hy(k-1)-hy(k));  
52 end  
53  
54 for k=ks:ke-1;  
55
```

```

56 ca(k,1)=(1-eaf)/(1+eaf);
57 cb(k,1)=.5/(epsilon*(1+eaf));
58
59 ex(k)=ca(k,1)*ex(k)+cb(k,1)*(hy(k-1)-hy(k));
60 ex(k)=ex(k)-.0125*ex(k); %loss in the medium
    from cb=0.5/4
61 end
62
63
64 pulse=sin(2*pi*freq_in*dt*t); %Source
65 ex(5)=ex(5)+pulse;
66
67
68 if t>1
69 ex(1)=ex_low_m2;
70 ex_low_m2=ex_low_m1;
71 ex_low_m1=ex(2);
72
73 end
74
75
76 for k=1:ke-1;
77 hy(k)=hy(k)+.5*(ex(k)-ex(k+1));
78 end
79
80
81 % fprintf(fid,' %f\n',ex);
82
83
84 if t==600
85
86 plot((1:1:ke),ex,'LineWidth',2);
87
88
89 axis([0 ke -1.5 1.5]);
90 xlim([0,200]);
91 ylim([-1.5,1.5]);
92 titlestring=(' \fontsize{20}Sinusoidal wave(f=700MHz) ');
93 title(titlestring,'color','k');
94
95
96 line('XData',[100 100], 'YData', [-1.5 1.2], 'LineStyle', '- -',
    ...
97 'LineWidth', 1, 'Color','k')
98 line('XData',[0 200], 'YData', [0 0], 'LineStyle', '- -', ...
99 'LineWidth', .5, 'Color','k')
100
101
102 xt=140;
103 yt=1;
104 text(xt,yt,'eps=4','FontSize',14)
105
106 xt=120;
107 yt=-0.8;
108 text(xt,yt,'conductivity=0.04','FontSize',14)
109
110

```

```
111 xt=20;
112 yt=1.3;
113 text(xt,yt,'Lossy Dielectric medium at x=100','FontSize',16);
114
115 Title_={'t=',t};
116 text(160,-1.2,Title_,'Color','r');
117
118
119 xlabel('x(FDTD cells)','FontSize',20);
120 ylabel('Ex(V/[x]) ','FontSize',20);
121 M= getframe(fig);
122
123 % writeVideo(v,M);
124
125 end
126 end
127
128 % fclose(fid);
```

1.6. Εφαρμογή Fast Fourier Transformation-FFT.

```
1 %FFT example
2 clear;
3 close all;
4 clc
5 c = 3e8;
6
7 freq = 100e6;
8
9
10 ddx=0.075;
11 dt=ddx/6e8;
12
13
14 fsamp = freq*80; % frequency
15 T = 1/fsamp; % time
16 L = 1500; % Length
17 sigma = 60.0; % pulse duration
18 t = (0:450); % time base
19 t0 = 240.0;
20
21 E = (exp(-0.5*(t-t0).^2/(sigma)^2)).*sin(2*pi*freq*dt*(t));
22
23 subplot(2,1,1)
24 plot(t,real(E),'b');
25 title(['Gaussian Pulse \sigma=', num2str(sigma),'s']);
26 xlabel('Time (fs)');
27 ylabel('Amplitude');
28
29 grid on
30 NFFT = 2^nextpow2(L);
31
32 X = fft(E,NFFT)/L;
33
34
35 freq = 0.5*fsamp*linspace(0,1,NFFT/2+1);
36 omega2=2*pi*freq;
37
38 subplot(2,1,2)
39 plot(omega2,30*abs(X(1:NFFT/2+1)),'g--','LineWidth',1.5)
40
41 title('Magnitude of FFT');
42 xlabel('Frequency (THz)')
43 ylabel('Magnitude |X(f)|');
44 xlim([1e8 10e8])
45 grid on
46 line('XData',[6.28319e8 6.28319e8], 'YData', [-0.1 3], 'LineStyle',
47     '- -', ...
48     'LineWidth', .5, 'Color','k')
```


1.7. 1Δ, υλικό Debye με την μέθοδο RC.

```
1 %1D fdt simulation of a frequency dependent material, RC method
2 %Debye medium
3
4 clear;
5 ke=200;
6 kc=ke/2;
7 ks=100;
8 pi=3.141559;
9 epsz=8.8e-12;
10 ddx=0.01;
11 dt=ddx/6e8;
12
13 epsr=2.;
14 sigma=0.01;
15 chi1=2.;
16 tau=0.001e-6;
17 del_exp=exp(-dt/tau);
18
19
20 nsteps=600;
21 t0=50;
22 spread=10;
23
24
25
26 ex_low_m2=0.;
27 ex_low_m1=0.;
28 ex_high_m1=0.;
29 ex_high_m2=0.;
30
31 ga=ones(ks,1);
32 gb=zeros(ks,1);
33 gc=zeros(ks,1);
34 dx=zeros(ke,1);
35 ex=zeros(1,ke);
36 hy=zeros(1,ke);
37 ix=zeros(1,ke);
38 sx=zeros(ke,1);
39
40 T=0;
41
42 % M=moviein(ke);
43 %
44 fid=fopen('DebyeRC.txt','w');
45 fopen(fid);
46 % fig=figure;
47
48 % M=moviein(ke);
49 % v=VideoWriter('Debye_medium.avi');
50 % v.FrameRate=35;
51 % open(v)
52
53
54 for k=ks:ke-1;
55
56 ga(k)=1./(epsr+(sigma*dt/epsz)+(chi1*dt/tau));
```

```

57 gb(k)=sigma*dt/epsz;
58 gc(k)=chi1*dt/tau;
59
60 end
61
62
63
64 for t=1:nsteps;
65
66 T=T+1;
67
68 for k=2:ke;
69 dx(k)=dx(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k));
70
71 end
72
73 pulse=exp(-.5*((t0-T)/spread)^2);
74 dx(5)=dx(5)+pulse;
75
76
77 for k=2:ke-1;
78
79
80 ex(k)=ga(k)*(dx(k)-ix(k)-sx(k));
81 ix(k)=ix(k)+gb(k)*ex(k);
82 sx(k)=del_exp*sx(k)+gc(k)*ex(k);
83
84 end
85
86 ex(1)=ex_low_m2;
87 ex_low_m2=ex_low_m1;
88 ex_low_m1=ex(2);
89
90 ex(ke)=ex_high_m2;
91 ex_high_m2=ex_high_m1;
92 ex_high_m1=ex(ke-1);
93
94 for k=1:ke-1;
95 hy(k)=hy(k)+.5*(ex(k)-ex(k+1));
96 end
97
98
99 if t==150
100 fprintf(fid, '%f\n', ex);
101
102
103
104 plot((1:1:ke), ex, 'LineWidth', 2);
105
106 grid on;
107
108 axis([0 ke -1. 1.2]);
109
110 titlestring=('Gaussian Pulse, RC method');
111 title(titlestring, 'color', 'k');
112
113

```

```

114 line('XData',[100 100], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle', '- -',
    ...
115 'LineWidth', 1, 'Color','k')
116 line('XData',[0 100], 'YData', [0 0], 'LineStyle', '- -', ...
117 'LineWidth', .5, 'Color','k')
118 line('XData',[100 200], 'YData', [1 1], 'LineStyle', '- -', ...
119 'LineWidth', .5, 'Color','k')
120
121 xt = 10;
122 yt =0.8;
123 text(xt, yt, 'Debye Medium at x=100','FontSize',12)
124
125 Title_={'t=',t};
126 text(160,-0.8,Title_,'Color','r');
127
128 xlabel('x(FDTD cells)');
129 ylabel('Ex(V/[x]) ');
130 % M= getframe(fig);
131
132 % writeVideo(v,M);
133
134
135 end
136 end
137
138 % movie(M,1);
139 fclose(fid);

```

1.8. 1Δ, υλικό Debye με την μέθοδο ADE.

```
1 %1D fdtd simulation of a frequency dependent material
2 %Debye medium with Auxiliary Differential Equation Method
3
4 clear;
5 ke=200;
6 kc=ke/2;
7 ks=100;
8 pi=3.141559;
9 epsz=8.8e-12;
10 ddx=0.01;
11 dt=ddx/6e8;
12
13 epsr=2.;
14 sigma=0.01;
15 chi1=2.;
16 tau=0.001e-6;
17 del=(1-(dt/2*tau))/(1+(dt/2*tau));
18
19
20 nsteps=600;
21 t0=50;
22 spread=10;
23
24
25
26 ex_low_m2=0.;
27 ex_low_m1=0.;
28 ex_high_m1=0.;
29 ex_high_m2=0.;
30
31 ga=ones(ks,1);
32 gb=zeros(ks,1);
33 gc=zeros(ks,1);
34 dx=zeros(ke,1);
35 ex=zeros(1,ke);
36 hy=zeros(1,ke);
37 ix=zeros(1,ke);
38 sx=zeros(ke,1);
39
40 T=0;
41
42
43 fid=fopen('DebyeADE.txt','w');
44 fopen(fid);
45 % fig=figure;
46 %
47 % M=moviein(ke);
48 % v=VideoWriter('Debye_medium_ADE.avi');
49 % v.FrameRate=35;
50 % open(v)
51
52
53
54 for k=ks:ke-1;
55
56 ga(k)=1./(epsr+(sigma*dt/epsz)+(chi1*dt/tau));
```

```

57 gb(k)=sigma*dt/epsz;
58 gc(k)=(chi1*dt/tau)/(1+(dt/2*tau));
59
60 end
61
62
63
64 for t=1:nsteps;
65
66 T=T+1;
67 for k=2:ke;
68 dx(k)=dx(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k));
69
70 end
71
72 pulse=exp(-.5*((t0-T)/spread)^2);
73 dx(5)=dx(5)+pulse;
74
75 for k=2:ke-1;
76
77
78 ex(k)=ga(k)*(dx(k)-ix(k)-sx(k));
79 ix(k)=ix(k)+gb(k)*ex(k);
80 sx(k)=del*sx(k)+gc(k)*ex(k);
81
82 end
83
84 ex(1)=ex_low_m2;
85 ex_low_m2=ex_low_m1;
86 ex_low_m1=ex(2);
87
88 ex(ke)=ex_high_m2;
89 ex_high_m2=ex_high_m1;
90 ex_high_m1=ex(ke-1);
91
92
93 for k=1:ke-1;
94 hy(k)=hy(k)+.5*(ex(k)-ex(k+1));
95 end
96
97
98 if t==150
99
100 fprintf(fid, '%f\n',ex);
101
102 plot((1:1:ke),ex,'LineWidth',2);
103
104 grid on;
105
106 axis([0 ke -1. 1.2]);
107
108 titlestring=('Gaussian Pulse, ADE method ');
109 title(titlestring,'color','k');
110
111
112 line('XData',[100 100], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle', '- -',
    ...

```

```

113 'LineWidth', 1, 'Color','k')
114 line('XData',[0 100], 'YData', [0 0], 'LineStyle', '- -', ...
115 'LineWidth', .5, 'Color','k')
116 line('XData',[100 200], 'YData', [1 1], 'LineStyle', '- -', ...
117 'LineWidth', .5, 'Color','k')
118
119 xt = 10;
120 yt =0.8;
121 text(xt, yt, 'Debye Medium at x=100','FontSize',12)
122
123
124 Title_={'t=',t};
125 text(160,-0.8,Title_,'Color','r');
126
127
128 xlabel('x(FDTD cells)','FontSize',20);
129 ylabel('Ex(V/[x]) ','FontSize',20);
130 % M= getframe(fig);
131
132 % writeVideo(v,M);
133 end
134 end
135
136
137 % movie(M,1);
138 fclose(fid);

```

1.9. Τρόπος σύγκρισης μεθόδων της FDTD.

```
1
2 clear;
3
4 A=dlmread('DebyeRC.txt');
5 % B=dlmread('Lorentz_Z.txt');
6 C=dlmread('DebyeADE.txt');
7
8 ke=200;
9
10 y1=A(:,1);
11 % y2=B(:,1);
12 y3=C(:,1);
13
14
15 plot((1:1:ke),y1,'LineWidth',1.5)
16
17 text(50,-0.8,'t=150','Color','r');
18
19
20 xlabel('x(FDTD cells)','FontSize',20);
21 ylabel('Ex(V/[x]) ','FontSize',20);
22 grid on;
23 axis([0 ke -1.2 1.2]);
24
25 %   rectangle('Position',[200,-1.2,400,2.4],'Curvature',1,'
26 %   EdgeColor','y',...
27 %   'LineWidth',2.5)
28 %   line('XData',[200 200], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle','- -',
29 %   ...
30 %   'LineWidth', 2, 'Color','g')
31
32 % xt = 20;
33 % yt =1.05;
34 % text(xt, yt, 'Debye Medium','FontSize',14,'Color','g')
35
36 % xt = 220;
37 % yt =0.9;
38 % text(xt, yt, 'freq=5THz','FontSize',14,'Color','g')
39
40
41 titlestring=('Debye Medim, Gaussian pulse ');
42 title(titlestring,'color','k');
43
44 hold on
45 % plot((1:1:ke),y2,'g-','LineWidth',1.5)
46 plot((1:1:ke),y3,'r-','LineWidth',1.5)
47 hold off
48 % legend('RC method','Z method','ADE method')
49 legend('RC method','ADE method')
50 line('XData',[100 100], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle','- -',
51 %   ...
52 %   'LineWidth', 2, 'Color','k')
```

1.10. Πηγή φάσμα πηγής και γράφημα επιδεκτικότητας $\epsilon(\omega)$.

```

1 % Source + spectrum (time-domain , freq-domain) Drude medium
2
3 clear;
4
5 ddx=1.5e-5;
6 dt=ddx/6e8;
7 nsteps=1500;
8
9 fp=1e12;
10 omegap=2*pi*fp;
11
12 v=0.01e12;
13
14
15 eps_star=zeros;
16 n_index=zeros;
17
18 N=nsteps;
19
20 freq=2e12;
21 freq3=freq;
22 omega3=2*pi*freq;
23 fs = freq*20; % Sampling frequency
24 T = 1/fs; % Unit time [fs]
25 L =1500; % Length of signal
26 spread =30; % Pulse duration
27 N =(0:nsteps); % Time base
28 t0 =50; % Used to centering the pulse
29
30
31
32 pulse = (exp(-0.5*(N-t0).^2./(spread)^2)).*sin(2*pi*freq*dt*(N));
33
34 n = 2^nextpow2(L);
35 %n=2048;
36 Z=fft(pulse,n)/L;
37
38 freq1=linspace(0,20e12,20000);
39 omega=2*pi*freq1;
40
41 d=omegap.^2./v;
42 eps_star= 1 - (omegap.^2)./(omega.^2.+v.*1i*omega);
43
44 real_eps=real(eps_star);
45 imag_eps=imag(eps_star);
46 n_index=sqrt(eps_star);
47 real_n=real(n_index);
48 imag_n=imag(n_index);
49
50 freq = 0.5*fs*linspace(0,1,n/2+1); % (full range) Frequency Vector
51 omega2=2*pi*freq;
52
53 %Graphs for source
54
55 subplot(2,1,1);
56 plot(N,pulse,'b','LineWidth',2)

```



```

57 grid on
58 ylabel('Pulse(t)')
59 xlabel('t(ps)')
60
61 axis([0 200 -1 1]);
62
63 title('Source,f_0=2THz,\sigma=30, time domain')
64
65 subplot(2,1,2);
66 plot(omega2/1e12,100*abs(Z(1:n/2+1)),'b','LineWidth',2)
67 axis([0 15 -5 5]);
68 grid on
69 hold on
70 plot(omega/1e12,real_eps,'g','LineWidth',2)
71 hold off
72 title('Source spectrum,f_0=2THz,frequency domain')
73
74 text(2,-2,Title_1,'Color','g');
75 line('XData',[6.2819 6.2819], 'YData', [-30 25], 'LineStyle', '- -', ...
76 'LineWidth', 0.5, 'Color','g')
77 ;
78 text(8,-2,Title_1,'Color','b');
79
80
81 ylabel('pulse(omega)')
82 xlabel('omega(THz)')
83 line('XData',[12.5664 12.5664], 'YData', [-30 25], 'LineStyle', '- -', ...
84 'LineWidth', 0.5, 'Color','b')
85 legend('Pulse spectrum','real epsilon*(omega)')
86
87 % Graphs for epsilon,n
88
89 % plot(omega/1e12,real_n,'b','LineWidth',2)
90 % hold on
91 % plot(omega/1e12,(imag_n),'r','LineWidth',2)
92 % hold off
93 % grid on
94 % title('Refractive index n(omega) ')
95 % legend('real part','imaginary part')
96 % Title_1={'omega_p=',omegap};
97 % text(8,-2,Title_1,'Color','k');
98 % axis([0.2 20 -8e0 8e0])
99 % line('XData',[6.28319 6.28319], 'YData', [-30 25], 'LineStyle', '- -', ...
100 % 'LineWidth', 0.5, 'Color','k')
101 %
102 % xlabel('omega(THz)')
103 % ylabel('n(omega)')
104 %

```

1.11. Υλικό Drude σε 1Δ, μέθοδος RC.

```

1 %PLASMA programm
2 clear;
3
4 ke=600;
5 kc=300;
6 epsz=8.8e-12;
7 ddx=0.75e-8;
8 dt=ddx/6e8;
9 kstart=200;
10 kend=400;
11 nsteps=1300;
12
13 freq=1e12;
14
15
16
17 ex=zeros(1,ke);
18 dx=zeros(1,ke);
19 hy=zeros(1,ke);
20 ix=zeros(1,ke);
21 sx=zeros(1,ke);
22 sx1=zeros(1,ke);
23 sx2=zeros(1,ke);
24
25
26 t0=50.0;
27 spread=30.0;
28
29
30 ex_low_m1=0.0;
31 ex_low_m2=0.0;
32 ex_high_m1=0.0;
33 ex_high_m2=0.0;
34
35 T=0;
36 fig=figure;
37
38 fid=fopen('plasmaRC.txt','w');
39 fopen(fid);
40
41
42 for t=1:nsteps
43 T=T+1;
44 for k=2:ke
45 dx(k)=dx(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k));
46 end
47 % Source Pulse
48
49 x=sin(2*pi*freq*dt*T);
50 y=exp(-.5*((T-t0)^2/(spread)^2));
51 pulse=x.*y; %Source
52
53
54 dx(5)=+pulse;
55
56

```

```

57 for k=2:ke
58 if (k >= kc & k <= kend)
59 omega=2*pi*1e12;
60 vc=0.01e12;
61 ex(k)=(dx(k)-ix(k)-exp(-vc*dt)*sx(k));
62 ix(k)=ix(k)+((omega^2)*dt/vc)*ex(k);
63 sx(k)=exp(-vc*dt)*sx(k)+(-(omega^2)*dt/vc)*ex(k);
64 else
65 ex(k)=dx(k);
66 end
67 end
68 ex(1)=ex_low_m2;
69 ex_low_m2=ex_low_m1;
70 ex_low_m1=ex(2);
71
72 ex(ke)=ex_high_m2;
73 ex_high_m2=ex_high_m1;
74 ex_high_m1=ex(ke-1);
75
76 for k=1:ke-1
77 hy(k)=hy(k)+0.5*(ex(k)-ex(k+1));
78 end
79
80 if t==900
81
82
83 fprintf(fid,'ex\n');
84
85 fprintf(fid,' %f\n',ex);
86
87
88
89
90
91 plot((1:1:ke),ex,'LineWidth',2);
92
93
94
95
96 grid on;
97 axis([0 ke -1.2 1.2]);
98
99 rectangle('Position',[300,-1.2,100,2.4],'Curvature',1,'EdgeColor','
100 g',...
101 'LineWidth',2.5)
102
103
104 titlestring=('Frequency of propagating wave=1THz ');
105 title(titlestring,'color','k');
106
107
108 line('XData',[300 300],'YData',[-1.5 1.5],'LineStyle','- -',
109 ...
110 'LineWidth',1,'Color','g')
111 line('XData',[400 400],'YData',[-1.5 1.5],'LineStyle','- -',
112 ...

```

```

111 'LineWidth', 1, 'Color','g')
112 line('XData',[0 100], 'YData', [0 0], 'LineStyle', '- -', ...
113 'LineWidth', .5, 'Color','k')
114 line('XData',[300 400], 'YData', [1 1], 'LineStyle', '- -', ...
115 'LineWidth', 1, 'Color','k')
116
117 xt = 10;
118 yt =0.8;
119 text(xt, yt, '', 'FontSize',12)
120
121 xt = 320;
122 yt =1.05;
123 text(xt, yt, 'Plasma', 'FontSize',16, 'Color', 'g')
124
125 xt = 320;
126 yt =0.9;
127 text(xt, yt, 'freq=2000THz', 'FontSize',16, 'Color', 'g')
128
129 Title_={'t=',t};
130 text(160,-0.8,Title_,'Color','r');
131
132
133 xlabel('x(FDTD cells)');
134 ylabel('Ex(V/[x]) ');
135 M= getframe();
136
137 end
138 end
139 Movie(M,1);
140
141 fclose(fid)

```

1.12. Υλικό Drude σε 1Δ, μέθοδος ADE.

```

1 %PLASMA programm with Auxiliary Differential Equation method
2 clear;
3
4 ke=600;
5 kc=300;
6 epsz=8.8e-12;
7 ddx=1.5e-5; % space step
8 dt=ddx/6e8; %time step
9 kstart=200;
10 kend=400;
11 nsteps=1300;
12
13 freq=2e12;
14
15
16
17 ex=zeros(1,ke);
18 dx=zeros(1,ke);
19 hy=zeros(1,ke);
20 ix=zeros(1,ke);
21 sx=zeros(1,ke);
22 sx1=zeros(1,ke);
23 sx2=zeros(1,ke);
24
25
26 t0=50.0;
27 spread=30.0;
28
29
30 ex_low_m1=0.0;
31 ex_low_m2=0.0;
32 ex_high_m1=0.0;
33 ex_high_m2=0.0;
34
35 T=0;
36 fig=figure;
37
38 fid=fopen('plasmaADE.txt','w');
39 fopen(fid);
40
41
42 for t=1:nsteps
43 T=T+1;
44 for k=2:ke
45 dx(k)=dx(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k));
46 end
47 % Source Pulse
48
49 x=sin(2*pi*freq*dt*T);
50 y=exp(-.5*((T-t0)^2/(spread)^2));
51 pulse=x.*y; %Source
52
53
54 dx(5)=+pulse;
55
56

```

```

57 for k=2:ke
58 if (k >= kc & k <= kend)
59 omega=2*pi*1e12;
60 vc=0.01e12;
61 ex(k)=(dx(k)-ix(k)-((1-0.5*vc*dt)/(1+0.5*vc*dt))*sx(k));
62 ix(k)=ix(k)+((omega^2)*dt/vc)*ex(k);
63 sx(k)=((1-0.5*vc*dt)/(1+0.5*vc*dt))*sx(k)-((omega^2)*dt/vc)*ex(k);
64 else
65 ex(k)=dx(k);
66 end
67 end
68 ex(1)=ex_low_m2;
69 ex_low_m2=ex_low_m1;
70 ex_low_m1=ex(2);
71
72 ex(ke)=ex_high_m2;
73 ex_high_m2=ex_high_m1;
74 ex_high_m1=ex(ke-1);
75
76 for k=1:ke-1
77 hy(k)=hy(k)+0.5*(ex(k)-ex(k+1));
78 end
79
80 if t==800
81
82
83 fprintf(fid, '%f\n',ex);
84
85
86
87
88 plot((1:1:ke),ex,'LineWidth',2);
89
90
91
92
93 grid on;
94 axis([0 ke -1.2 1.2]);
95
96 rectangle('Position',[300,-1.2,100,2.4],'Curvature',1,'EdgeColor','
    g',...
97 'LineWidth',2.5)
98
99
100
101 titlestring=('Frequency of propagating wave=2THz, ADE method ');
102 title(titlestring,'color','k');
103
104 line('XData',[300 300], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle', '- -',
    ...
105 'LineWidth', 1, 'Color','g')
106 line('XData',[400 400], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle', '- -',
    ...
107 'LineWidth', 1, 'Color','g')
108 line('XData',[0 100], 'YData', [0 0], 'LineStyle', '- -', ...
109 'LineWidth', .5, 'Color','k')
110 line('XData',[300 400], 'YData', [1 1], 'LineStyle', '- -', ...

```

```

111 'LineWidth', 1, 'Color','k')
112
113 xt = 10;
114 yt =0.8;
115 text(xt, yt, '', 'FontSize',12)
116
117 xt = 310;
118 yt =1.1;
119 text(xt, yt, 'Plasma', 'FontSize',14, 'Color', 'g')
120
121
122 Title_={'t=',t};
123 text(160,-0.8,Title_,'Color','r');
124
125
126 xlabel('x(FDTD cells)');
127 ylabel('Ex(V/[x]) ');
128 M= getframe();
129
130 end
131 end
132 Movie(M,1);
133
134 fclose(fid)

```

1.13. Υλικό Drude σε 1Δ, μέθοδος μετασχηματισμού Z.

```
1 %PLASMA programm with Z method
2 clear;
3
4 ke=600;
5 kc=300;
6 epsz=8.8e-12;
7 ddx=4.3e-5; % space step
8 dt=ddx/6e8; %time step
9 kstart=200;
10 kend=400;
11 nsteps=1300;
12
13 freq=0.7e12;
14
15
16 ex=zeros(1,ke);
17 dx=zeros(1,ke);
18 hy=zeros(1,ke);
19 ix=zeros(1,ke);
20 sx=zeros(1,ke);
21 sx1=zeros(1,ke);
22 sx2=zeros(1,ke);
23
24
25 t0=50.0;
26 spread=30.0;
27
28 ex_low_m1=0.0;
29 ex_low_m2=0.0;
30 ex_high_m1=0.0;
31 ex_high_m2=0.0;
32
33 T=0;
34 fig=figure;
35
36 fid=fopen('plasmaZ.txt','w');
37 fopen(fid);
38
39
40
41
42 for t=1:nsteps
43 T=T+1;
44 for k=2:ke
45 dx(k)=dx(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k));
46 end
47 % Source Pulse
48
49 x=sin(2*pi*freq*dt*T);
50 y=exp(-.5*((T-t0)^2/(spread)^2));
51 pulse=x.*y; %Source
52
53
54 dx(5)=+pulse;
55
56
```



```

57 for k=2:ke
58 if (k >= kc & k <= kend)
59 omega=2*pi*1e12;
60 vc=0.01e12;
61 ex(k)=(dx(k)-sx(k));
62 sx(k)=(1+exp(-vc.*dt)).*sx1(k)-exp(-vc.*dt).*sx2(k)+((omega^2).*dt/
    vc).*(1-exp(-vc.*dt)).*ex(k);
63 sx2(k)=sx1(k);
64 sx1(k)=sx(k);
65 else
66 ex(k)=dx(k);
67 end
68 end
69 ex(1)=ex_low_m2;
70 ex_low_m2=ex_low_m1;
71 ex_low_m1=ex(2);
72
73 ex(ke)=ex_high_m2;
74 ex_high_m2=ex_high_m1;
75 ex_high_m1=ex(ke-1);
76
77 for k=1:ke-1
78 hy(k)=hy(k)+0.5*(ex(k)-ex(k+1));
79 end
80
81 if t==1200
82
83
84 fprintf(fid,' %f\n',ex);
85
86
87 plot((1:1:ke),ex,'LineWidth',2);
88
89
90
91 grid on;
92 axis([0 ke -1.2 1.2]);
93
94 rectangle('Position',[300,-1.2,100,2.4],'Curvature',1,'EdgeColor','
    g',...
95 'LineWidth',2.5)
96
97
98
99 titlestring=('Frequency of propagating wave=0.7THz, Z method ');
100 title(titlestring,'color','k');
101
102 line('XData',[300 300], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle', '- -',
    ...
103 'LineWidth', 1, 'Color','g')
104 line('XData',[400 400], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle', '- -',
    ...
105 'LineWidth', 1, 'Color','g')
106 line('XData',[0 100], 'YData', [0 0], 'LineStyle', '- -', ...
107 'LineWidth', .5, 'Color','k')
108 line('XData',[300 400], 'YData', [1 1], 'LineStyle', '- -', ...
109 'LineWidth', 1, 'Color','k')

```

```
110
111
112
113 xt = 310;
114 yt = 1.1;
115 text(xt, yt, 'Plasma', 'FontSize', 14, 'Color', 'g')
116
117
118
119 Title_={'t=',t};
120 text(160,-0.8,Title_,'Color','r');
121
122
123 xlabel('x(FDTD cells)');
124 ylabel('Ex(V/[x]) ');
125
126 M= getframe();
127
128 end
129 end
130 Movie(M,1);
131
132 fclose(fid);
```

1.14. Επιδεικτικότητα, δείκτης διάθλασης για υλικό Lorentz και φάσμα παλμού.

```

1 %Lorentz Medium
2
3 % permittivity of Lorentz medium
4 clear;
5
6 epsr=1;
7 eps1=1;
8 delta=0.25;
9
10 eps_star=zeros;
11
12
13
14 ddx=6e-5;
15 dt=ddx/6e8;
16 nsteps=1500;
17
18 N=nsteps*dt;
19
20 freq=0.5e12;
21 freq3=freq;
22 omega3=2*pi*freq;
23 fs = freq*20;
24 T = 1/fs;
25 L =1500;
26 sigma =60;
27 t =(0:nsteps);
28 t0 =240;
29
30
31 pulse = (exp(-0.5*(t-t0).^2./(sigma)^2)).*sin(2*pi*freq*dt*t);
32
33 n = 2^nextpow2(L);
34 %n=2048;
35 Z=fft(pulse,n)/L;
36
37
38 freq2=0.5e12;
39 omega0=2*pi*freq2;
40 freq1=linspace(0,20e12,20000);
41 omega=2*pi*freq1;
42 eps_star=epsr+eps1*(1+2*i*delta*(omega/omega0)-(omega/omega0).^2)
    .^-1;
43
44
45 real_eps=real(eps_star);
46 imag_eps=imag(eps_star);
47
48 %Refractive Index
49 n_index=sqrt(eps_star);
50 real_n=real(n_index);
51 imag_n=imag(n_index);
52
53 plot(omega/1e12,real_n,'b-','LineWidth',2)
54 axis([0e10 15 -1 2.5]);

```

```

55
56
57 freq = 0.5*fs*linspace(0,1,n/2+1); % (full range) Frequency Vector
58 omega2=2*pi*freq;
59 grid on
60 % title('Permittivity in Lorentz medium(pulse;sigma=60,t_0=240),f_m
    =0.5THz')
61 title('Refractive index in Lorentz medium')
62 ylabel('n')
63 xlabel('omega(THz)')
64
65 hold on
66 plot(omega/1e12,-imag_n,'r-','LineWidth',2)
67
68 % plot(omega2/1e12,35*abs(Z(1:n/2+1)),'g--','LineWidth',2)
69
70 hold off
71 % legend('real part','imaginary part','Source Spectrum')
72 legend('real part','imaginary part')
73 Title_={'omega(medium)=',omega0};
74 text(4,-0.6,Title_,'Color','b');
75 % Title_1={'omega0=3.14159e+12'};
76 % text(4,-.2,Title_1,'Color','g');
77 Title_={'delta=0.25'};
78 text(11,-0.2,Title_,'Color','k');
79
80 line('XData',[3.14159 3.14159], 'YData', [-30 25], 'LineStyle', '-
    -', ...
81 'LineWidth', 0.5, 'Color','g')
82 line('XData',[3.14159 3.14159], 'YData', [-30 25], 'LineStyle', '-
    -', ...
83 'LineWidth', 0.5, 'Color','b')
84
85 line('XData',[0 25e11], 'YData', [1 1], 'LineStyle', '- -', ...
86 'LineWidth', .5, 'Color','k')

```

1.15. Υλικό Lorentz σε 1Δ, μέθοδος RC.

```

1 %Lorentz medium with Recursive Convolution Method
2 clear;
3
4 ke=600;
5 kc=300;
6 epsz=8.8e-12;
7 ddx=6e-5;
8 dt=ddx/6e8;
9 kstart=300;
10 kend=600;
11 nsteps=1500;
12 epsr=1;
13 eps1=1;
14 delta=0.25;
15
16
17 freq=0.5e12;
18
19
20
21 ex=zeros(1,ke);
22 dx=zeros(1,ke);
23 hy=zeros(1,ke);
24 ix=zeros(1,ke);
25 sx=zeros(1,ke);
26 sx1=zeros(1,ke);
27 sx2=zeros(1,ke);
28
29
30 t0=240.0;
31 spread=60.0;
32
33
34 ex_low_m1=0.0;
35 ex_low_m2=0.0;
36 ex_high_m1=0.0;
37 ex_high_m2=0.0;
38
39 T=0;
40 fig=figure;
41
42 fid=fopen('LorentzRC.txt','w');
43 fopen(fid);
44
45
46 for t=1:nsteps
47 T=T+1;
48 for k=2:ke
49 dx(k)=dx(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k));
50 end
51 % Source Pulse
52
53 x=sin(2*pi*freq*dt*T);
54 y=exp(-.5*((T-t0)^2/(spread)^2));
55 pulse=x*y; %Source
56

```

```

57
58 dx(5)=+pulse;
59
60
61 for k=2:ke
62 if (k >= kc & k <= ke)
63 omega=2*pi*0.5e12;
64
65 ex(k)=(1/epsr)*(dx(k)-sx(k));
66
67 sx(k)=((2-(dt*omega)^2)*exp(-delta*omega*dt)).*sx1(k)-(exp(-2*delta
    *omega*dt)).*sx2(k)+((dt^2*omega^2*eps1)*exp(-delta*omega*dt))
    .*ex(k);
68 sx2(k)=sx1(k);
69 sx1(k)=sx(k);
70 else
71 ex(k)=dx(k);
72 end
73 end
74 ex(1)=ex_low_m2;
75 ex_low_m2=ex_low_m1;
76 ex_low_m1=ex(2);
77
78 ex(ke)=ex_high_m2;
79 ex_high_m2=ex_high_m1;
80 ex_high_m1=ex(ke-1);
81
82 for k=1:ke-1
83 hy(k)=hy(k)+0.5*(ex(k)-ex(k+1));
84 end
85
86 if t==1200
87
88 % fprintf(fid,'ex\n');
89
90 fprintf(fid,' %f\n',ex);
91
92
93
94
95
96 plot((1:1:ke),ex,'LineWidth',2);
97
98
99
100
101 grid on;
102 axis([0 ke -1.2 1.2]);
103
104 rectangle('Position',[300,-1.2,300,2.4],'Curvature',1,'EdgeColor','
    g',...
105 'LineWidth',2.5)
106
107
108
109 titlestring=('Frequency of propagating wave=0.5THz ');
110 title(titlestring,'color','k');

```

```

111
112
113 line('XData',[300 300], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle', '- -',
    ...
114 'LineWidth', 1, 'Color','g')
115 %line('XData',[400 400], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle', '- -',
    ...
116 % 'LineWidth', 1, 'Color','g')
117 % line('XData',[0 100], 'YData', [0 0], 'LineStyle', '- -', ...
118 %     'LineWidth', .5, 'Color','k')
119 % line('XData',[300 400], 'YData', [1 1], 'LineStyle', '- -', ...
120 %     'LineWidth', 1, 'Color','k')
121
122
123 xt = 320;
124 yt =1.05;
125 text(xt, yt, 'Lorentz Medium','FontSize',14,'Color','g')
126
127 xt = 320;
128 yt =0.9;
129 text(xt, yt, 'freq=0.5THz','FontSize',14,'Color','g')
130
131 Title_={'t=',t};
132 text(160,-0.8,Title_,'Color','r');
133
134
135 xlabel('x(FDTD cells)');
136 ylabel('Ex(V/[x]) ');
137 M= getframe();
138
139 end
140 end
141 Movie(M,1);
142
143 fclose(fid)

```

1.16. Υλικό Lorentz σε 1Δ, μέθοδος ADE.

```

1 %Lorentz medium with Auxiliary Differential Equation method
2 clear;
3
4 ke=600;
5 kc=300;
6 epsz=8.8e-12;
7 ddx=1e-5;
8 dt=ddx/6e8;
9 kstart=300;
10 kend=600;
11 nsteps=1500;
12 epsr=1;
13 eps1=1;
14 delta=0.25;
15
16
17 freq=3e12;
18
19
20
21 ex=zeros(1,ke);
22 dx=zeros(1,ke);
23 hy=zeros(1,ke);
24 ix=zeros(1,ke);
25 sx=zeros(1,ke);
26 sx1=zeros(1,ke);
27 sx2=zeros(1,ke);
28
29
30 t0=240.0;
31 spread=60.0;
32
33
34 ex_low_m1=0.0;
35 ex_low_m2=0.0;
36 ex_high_m1=0.0;
37 ex_high_m2=0.0;
38
39 T=0;
40 fig=figure;
41
42 fid=fopen('LorentzADE.txt','w');
43 fopen(fid);
44
45
46 for t=1:nsteps
47 T=T+1;
48 for k=2:ke
49 dx(k)=dx(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k));
50 end
51 % Source Pulse
52
53 x=sin(2*pi*freq*dt*T);
54 y=exp(-.5*((T-t0)^2/(spread)^2));
55 pulse=x*y; %Source
56

```



```

57 dx(5)=+pulse;
58
59
60
61 for k=2:ke
62 if (k >= kc & k <= ke)
63 omega=2*pi*0.5e12;
64
65 ex(k)=(1/epsr)*(dx(k)-sx(k));
66
67 sx(k)=((2-(dt*omega)^2)/(1+dt*delta*omega)).*sx1(k)-((1-dt*delta*
        omega)/(1+dt*delta*omega)).*sx2(k)+((dt^2*omega^2*eps1)/(1+
        delta*omega*dt)).*ex(k);
68 sx2(k)=sx1(k);
69 sx1(k)=sx(k);
70 else
71 ex(k)=dx(k);
72 end
73 end
74 ex(1)=ex_low_m2;
75 ex_low_m2=ex_low_m1;
76 ex_low_m1=ex(2);
77
78 ex(ke)=ex_high_m2;
79 ex_high_m2=ex_high_m1;
80 ex_high_m1=ex(ke-1);
81
82 for k=1:ke-1
83 hy(k)=hy(k)+0.5*(ex(k)-ex(k+1));
84 end
85
86
87 if t==1200
88
89 % fprintf(fid,'ex\n');
90
91 fprintf(fid, ' %f\n',ex);
92
93
94
95
96
97 plot((1:1:ke),ex,'LineWidth',2);
98
99
100
101
102 grid on;
103 axis([0 ke -1.2 1.2]);
104
105 rectangle('Position',[300,-1.2,300,2.4],'Curvature',1,'EdgeColor','
        g',...
106 'LineWidth',2.5)
107
108
109
110 titlestring=('Frequency of propagating wave=3THz (ADE) ');

```

```

111 title(titlestring,'color','k');
112
113
114 line('XData',[300 300], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle', '- -',
    ...
115 'LineWidth', 1, 'Color','g')
116 %line('XData',[400 400], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle', '- -',
    ...
117 % 'LineWidth', 1, 'Color','g')
118 % line('XData',[0 100], 'YData', [0 0], 'LineStyle', '- -', ...
119 %     'LineWidth', .5, 'Color','k')
120 % line('XData',[300 400], 'YData', [1 1], 'LineStyle', '- -', ...
121 %     'LineWidth', 1, 'Color','k')
122
123
124 xt = 320;
125 yt =1.05;
126 text(xt, yt, 'Lorentz Medium','FontSize',14,'Color','g')
127
128 xt = 320;
129 yt =0.9;
130 text(xt, yt, 'freq=0.5THz','FontSize',14,'Color','g')
131
132 Title_={'t=',t};
133 text(160,-0.8,Title_,'Color','r');
134
135
136 xlabel('x(FDTD cells)');
137 ylabel('Ex(V/[x]) ');
138 M= getframe();
139 end
140 end
141 Movie(M,1);
142
143 fclose(fid)

```

1.17. Υλικό Lorentz σε 1Δ, μέθοδος μετασχηματισμού Z.

```

1 %Lorentz medium with Z transform method
2 clear;
3
4 ke=600;
5 kc=300;
6 epsz=8.8e-12;
7 ddx=1e-5;
8 dt=ddx/6e8;
9 kstart=300;
10 kend=600;
11 nsteps=1500;
12 epsr=1;
13 eps1=1;
14 delta=0.25;
15
16
17 freq=3e12;
18
19
20 ex=zeros(1,ke);
21 dx=zeros(1,ke);
22 hy=zeros(1,ke);
23 ix=zeros(1,ke);
24 sx=zeros(1,ke);
25 sx1=zeros(1,ke);
26 sx2=zeros(1,ke);
27
28
29 t0=240.0;
30 spread=60.0;
31
32
33 ex_low_m1=0.0;
34 ex_low_m2=0.0;
35 ex_high_m1=0.0;
36 ex_high_m2=0.0;
37
38 T=0;
39 fig=figure;
40
41 fid=fopen('LorentzZ.txt','w');
42 fopen(fid);
43
44
45 for t=1:nsteps
46 T=T+1;
47 for k=2:ke
48 dx(k)=dx(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k));
49 end
50 % Source Pulse
51
52 x=sin(2*pi*freq*dt*T);
53 y=exp(-.5*((T-t0)^2/(spread)^2));
54 pulse=x*y; %Source
55
56

```

```

57 dx(5)=+pulse;
58
59
60 for k=2:ke
61 if (k >= kc & k <= ke)
62 omega=2*pi*0.5e12;
63 a=delta*omega;
64 b=omega*sqrt(1-delta^2);
65 c=omega/sqrt(1-delta^2);
66 ex(k)=(1/epsr)*(dx(k)-sx(k));
67
68 sx(k)=(2*exp(-a*dt)*cos(b*dt)).*sx1(k)-(exp(-2*a*dt)).*sx2(k)+(exp
        (-a*dt)*sin(b*dt)*c*dt*eps1).*ex(k);
69 sx2(k)=sx1(k);
70 sx1(k)=sx(k);
71 else
72 ex(k)=dx(k);
73 end
74 end
75 ex(1)=ex_low_m2;
76 ex_low_m2=ex_low_m1;
77 ex_low_m1=ex(2);
78
79 ex(ke)=ex_high_m2;
80 ex_high_m2=ex_high_m1;
81 ex_high_m1=ex(ke-1);
82
83 for k=1:ke-1
84 hy(k)=hy(k)+0.5*(ex(k)-ex(k+1));
85 end
86
87
88 if t==1200
89 % fprintf(fid,'ex\n');
90
91 fprintf(fid,' %f\n',ex);
92
93
94
95
96
97 plot((1:1:ke),ex,'LineWidth',2);
98
99
100
101
102 grid on;
103 axis([0 ke -1.2 1.2]);
104
105 rectangle('Position',[300,-1.2,300,2.4],'Curvature',1,'EdgeColor','
        g',...
106 'LineWidth',2.5)
107
108
109
110 titlestring=('Frequency of propagating wave=3THz (Z) ');
111 title(titlestring,'color','k');

```

```

112
113
114 line('XData',[300 300], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle', '- -',
    ...
115 'LineWidth', 1, 'Color','g')
116 %line('XData',[400 400], 'YData', [-1.5 1.5], 'LineStyle', '- -',
    ...
117 % 'LineWidth', 1, 'Color','g')
118 % line('XData',[0 100], 'YData', [0 0], 'LineStyle', '- -', ...
119 %     'LineWidth', .5, 'Color','k')
120 % line('XData',[300 400], 'YData', [1 1], 'LineStyle', '- -', ...
121 %     'LineWidth', 1, 'Color','k')
122
123
124 xt = 320;
125 yt =1.05;
126 text(xt, yt, 'Lorentz Medium','FontSize',14,'Color','g')
127
128 xt = 320;
129 yt =0.9;
130 text(xt, yt, 'freq=0.5THz','FontSize',14,'Color','g')
131
132 Title_={'t=',t};
133 text(160,-0.8,Title_,'Color','r');
134
135
136 xlabel('x(FDTD cells)');
137 ylabel('Ex(V/[x]) ');
138 M= getframe();
139 M= getframe();
140
141 end
142 end
143 Movie(M,1);
144
145 fclose(fid)

```

1.18. Ελεύθερος χώρος, 2Δ.

```

1 %2D FDTD TM program
2
3 clear;
4
5 IE=100;
6 JE=100;
7
8 ga=ones(IE,JE);
9 dz=zeros(IE,JE);
10 ez=zeros;
11 hx=zeros(IE,JE);
12 hy=zeros(IE,JE);
13
14 ic=IE/2;
15 jc=JE/2;
16
17 t0=20.0;
18 spread=6.0;
19 T=0;
20 nsteps=100;
21
22 for n=1:nsteps;
23
24
25 for j=2:IE-1;
26 for i=2:IE-1;
27 dz(i,j)=dz(i,j)+0.5*(hy(i,j)-hy(i-1,j)-hx(i,j)+hx(i,j-1));
28
29 end
30 end
31 pulse= exp(-0.5*(power((t0-n)/spread,2)));
32 dz(ic,jc)=pulse;
33
34 for j=2:JE;
35 for i=2:IE;
36 ez(i,j)=ga(i,j).*dz(i,j);
37
38 end
39 end
40
41 for j=2:JE-1;
42 for i=2:IE-1;
43 hx(i,j)=hx(i,j)+0.5*(ez(i,j)-ez(i,j+1));
44 end
45 end
46
47 for j=2:JE-1;
48 for i=2:IE-1;
49 hy(i,j)=hy(i,j)+0.5*(ez(i+1,j)-ez(i,j));
50
51 end
52 end
53
54 if n==80;
55 subplot(2,1,1)
56 mesh(1:1:IE,1:1:JE,ez)

```

```

57 shading interp
58 title('Gaussian pulse propagating in free space')
59
60 axis([0 100 0 100 -0 1]);
61 zlabel('Ez');
62 xlabel('x');
63 ylabel('y');
64 Title_={'t=',n};
65 text(37,7,1,Title_,'Color','k');
66
67 subplot(2,1,2)
68 imagesc((1:1:IE),(1:1:JE),ez,[-0 1])
69 shading interp
70 colorbar
71
72 axis([0 100 0 100 ]);
73 zlabel('Ez');
74 xlabel('x');
75 ylabel('y');
76 Title_={'t=',n};
77 text(27,27,Title_,'Color','k');
78
79
80 M= getframe;
81 end
82 end
83 Movie(M,1);

```

1.19. Απορροφητικές συνθήκες *Mur* 1ης και 2ης τάξης, 2Δ.

```

1 %2D FDTD TM program with Mur absorbing boundary condition
2
3 clear;
4
5 IE=100;
6 JE=100;
7
8 ddx=4.3e-5;
9 dt=ddx/6e8;
10 c0=3e8;
11 ddy=ddx;
12 dt1=dt;
13
14 freq=0.7e12;
15 ga=ones(IE,JE);
16 dz=zeros(IE,JE);
17 ez=zeros(IE,JE);
18 hx=zeros(IE,JE);
19 hy=zeros(IE,JE);
20
21 ez2=zeros(IE,JE);
22 ez1=zeros(IE,JE);
23
24 ic=IE/2;
25 jc=JE/2;
26
27 t0=20.0;
28 spread=6.0;
29 T=0;
30 nsteps=250;
31
32 for n=1:nsteps;
33
34 ez2=ez1; ez1=ez;
35
36 for j=2:JE-1;
37 for i=2:IE-1;
38 dz(i,j)=dz(i,j)+0.5*(hy(i,j)-hy(i-1,j)-hx(i,j)+hx(i,j-1));
39
40 end
41 end
42 % pulse= exp(-0.5*(power((t0-n)/spread,2)));
43 pulse = sin(2*pi*freq*dt*(n-t0));
44 % pulse= exp(-0.5*(power((t0-n)/spread,2))).*sin(2*pi*freq*dt*(n-
45 t0));
46 dz(ic,jc)=pulse;
47
48 for i=2:IE-1;
49 for j=2:JE-1;
50 ez(i,j)=ga(i,j).*dz(i,j);
51 end
52 end
53
54 %Mur's absorbing boundary conditions
55 M1=c0*dt-ddx;

```



```

56 M2=c0*dt+ddx;
57 M=M1/M2;
58 N1=(2*ddx)/M2;
59 O1=((c0*dt)^2.*ddx)/(2*(ddy^2)*M2);
60 MM1=c0*dt-ddy;
61 MM2=c0*dt+ddy;
62 MM=MM1/MM2;
63 N2=(2*ddy)/MM2;
64 O2=((c0*dt)^2).*ddy)/(2*(ddx^2)*MM2);
65
66
67
68
69 %      x=0:
70 for j=2:JE-1;
71 %      ez(2,j)=-ez2(3,j)+M*(ez(3,j)+ez2(2,j))+N1*(ez1(2,j)+
72 %      ez1(3,j))+O1*(ez1(2,j+1)-2*ez1(2,j)+ez1(2,j-1)+ez1(3,j+1)-2*ez1
73 %      (3,j)+ez1(3,j-1));
74 %      1st order Mur
75 ez(2,j)=-ez2(3,j)+M*(ez(3,j)+ez2(2,j))+N1*(ez1(2,j)+ez1(3,j));
76 end
77
78 %      x=h:
79 for j=2:JE-1;
80 %      ez(IE,j)=-ez2(IE-1,j)+M*(ez(IE-1,j)+ez2(IE,j))+N1*(ez1(
81 %      IE-1,j)+ez1(IE,j))+O1*(ez1(IE,j+1)-2*ez1(IE,j)+ez1(IE,j-1)+ez1(
82 %      IE-1,j+1)-2*ez1(IE-1,j)+ez1(IE-1,j-1));
83 %      1st order Mur
84 ez(IE,j)=-ez2(IE-1,j)+M*(ez(IE-1,j)+ez2(IE,j))+N1*(ez1(IE-1,j)+ez1(
85 %      IE,j));
86 end
87
88 %      y=0:
89 for i=2:IE-1;
90 %      ez(i,2)=-ez2(i,3)+MM*(ez(i,3)+ez2(i,2))+N2*(ez1(i,3)+ez1(
91 %      i,2))+O2*(ez1(i+1,2)-2*ez1(i,2)+ez1(i-1,2)+ez1(i+1,3)-2*ez1(i
92 %      ,3)+ez1(i-1,3));
93 %      1st order Mur
94 ez(i,2)=-ez2(i,3)+MM*(ez(i,3)+ez2(i,2))+N2*(ez1(i,3)+ez1(i,2));
95 end
96
97 %      y=h:
98 for i=2:IE-1;
99 %      ez(i,JE)=-ez2(i,JE-1)+MM*(ez(i,JE-1)+ez2(i,JE))+N2*(ez1
100 %      (i,JE-1)+ez1(i,JE))+O2*(ez1(i+1,JE)-2*ez1(i,JE)+ez1(i-1,JE)+ez1
101 %      (i+1,JE-1)-2*ez1(i,JE-1)+ez1(i-1,JE-1));
102 %      1st order Mur
103 ez(i,JE)=-ez2(i,JE-1)+MM*(ez(i,JE-1)+ez2(i,JE))+N2*(ez1(i,JE-1)+ez1
104 %      (i,JE));
105 end

```

```

103 for j=2:JE-1;
104 for i=2:IE-1;
105 hx(i,j)=hx(i,j)+0.5*(ez(i,j)-ez(i,j+1));
106 end
107 end
108
109 for j=2:JE-1;
110 for i=2:IE-1;
111 hy(i,j)=hy(i,j)+0.5*(ez(i+1,j)-ez(i,j));
112
113 end
114 end
115
116 if n==220;
117 subplot(2,1,1)
118 mesh(1:1:IE,1:1:JE,ez)
119 shading interp
120 title('Sinusoidal wave propagating in free space, 1st order Mur ABC
      .')
121
122 axis([0 100 0 100 -0.5 1]);
123 zlabel('Ez');
124 xlabel('x');
125 ylabel('y');
126 Title_={'t=',n};
127 text(37,7,1,Title_,'Color','k');
128
129 subplot(2,1,2)
130 imagesc((1:1:IE),(1:1:JE),ez,[-1 1])
131 shading interp
132 colorbar
133
134 axis([0 100 0 100 ]);
135 zlabel('Ez');
136 xlabel('x');
137 ylabel('y');
138 Title_={'t=',n};
139 text(27,27,Title_,'Color','k');
140
141
142 M= getframe;
143 end
144 end
145 Movie(M,1);

```

1.20. Παλμός προσκρούει σε υλικό *Lorentz*, 2Δ.

```

1 %2D FDTD TM program , pulse hitting Lorentz Medium
2
3 clear;
4
5 ddx=0.3e-5;
6 dt=ddx/6e8;
7 epsr=1;
8 eps1=1;
9 delta=0.5;
10
11 nsteps=500;
12
13 IE=500;
14 JE=500;
15
16 freq=6e12;
17
18 ga=ones(IE,JE);
19 dz=zeros(IE,JE);
20 ez=zeros(IE,JE);
21 hx=zeros(IE,JE);
22 hy=zeros(IE,JE);
23
24 sz=zeros(IE,JE);
25 sz1=zeros(IE,JE);
26 sz2=zeros(IE,JE);
27
28
29
30 ic=100;
31 jc=300;
32
33 t0=100.0;
34 spread=30.0;
35 T=0;
36
37 % v=VideoWriter('2d_free_space_medium.avi');
38 % v.FrameRate=10;
39 % open(v)
40
41
42 for n=3:nsteps;
43
44
45 for j=2:JE-1;
46 for i=2:IE-1;
47 dz(i,j)=dz(i,j)+0.5*(hy(i,j)-hy(i-1,j)-hx(i,j)+hx(i,j-1));
48
49 end
50 end
51
52 x=sin(2*pi*freq*dt*(n-t0));
53 y=exp(-.5*((n-t0)^2/(spread)^2));
54 pulse= x.*y;
55 dz(250,250)=pulse;
56

```

```

57 for i=1:IE;
58 for j=1:JE;
59 if (j >= 300 & j <= 350)
60 %           if (i >=1 & i<=300)
61 omega=2*pi*2.8e12;
62
63 ez(i,j)=(dz(i,j)-sz(i,j));
64
65 sz(i,j)=((2-(dt*omega)^2)/(1+dt*delta*omega)).*sz1(i,j)-((1-dt*
        delta*omega)/(1+dt*delta*omega)).*sz2(i,j)+((dt^2*omega^2*eps1)
        /(1+delta*omega*dt)).*ez(i,j);
66 sz2(i,j)=sz1(i,j);
67 sz1(i,j)=sz(i,j);
68
69 else
70
71 ez(i,j)=ga(i,j).*dz(i,j);
72 end
73 %           end
74 end
75 end
76 %absorbing boundaries condition
77 %
78
79
80
81 for j=2:JE-2;
82 for i=2:IE-2;
83 hx(i,j)=hx(i,j)+0.5*(ez(i,j)-ez(i,j+1));
84 end
85 end
86
87 for j=2:JE-2;
88 for i=2:IE-2;
89
90 hy(i,j)=hy(i,j)+0.5*(ez(i+1,j)-ez(i,j));
91
92 end
93 end
94
95 if n==200;
96 subplot(2,1,1)
97 imagesc(1:1:IE,1:1:JE,ez)
98 shading interp
99 colorbar
100 colormap(jet)
101 axis([0 500 0 500])
102 zlabel('Ez');
103 xlabel('x');
104 ylabel('y');
105 Title_={'t=',n};
106 text(370,150,0.8,Title_,'Color','k');
107 Title_={'f_0=',freq};
108 text(370,40,0.3,Title_,'Color','k');
109 Title_={'f_m_e_d_i_u_m=',omega/(2*pi)};
110 text(420,350,0.3,Title_,'Color','k');
111 text(420,420,'e_1=10','Color','k');

```

```

112 rectangle('Position',[300,0,50,500],'Curvature',1,'EdgeColor','k'
    ,...
113 'LineWidth',1.5)
114 title('Propagating wave in Lorentz medium')
115
116 subplot(2,1,2)
117 surf(1:1:IE,1:1:JE,ez)
118 shading interp
119 colorbar
120 colormap(jet)
121 axis([0 500 0 500 -0.2 0.2]);
122 zlabel('Ez');
123 xlabel('x');
124 ylabel('y');
125 Title_={'t=',n};
126 text(27,250,0.1,Title_,'Color','k');
127 rectangle('Position',[300,0,50,500],'Curvature',1,'EdgeColor','k'
    ,...
128 'LineWidth',1)
129
130
131 M= getframe;
132 % writeVideo(v,M);
133 end
134 end
135 % Movie(M,1);

```

1.21. Παλμός προσκρούει σε υλικό *Drude*, 2Δ. Έχουν προστεθεί και συνο-
ριακές συνθήκες *Mur* για τις ανάγκες του προβλήματος

```

1 %2D FDTD TM program , pulse hitting Drude Medium
2
3 clear;
4
5 ddx=2.5e-5;
6 dt=ddx/6e8;
7
8 % dx=0.75e-8;
9 % dt=dx/6e8;
10
11 dt1=dt;
12 c0=3e8;
13 ddy=ddx;
14
15 %Drude medium properties
16 fp=1e12;
17 omegap=2*pi*fp;
18
19
20 v=0.01e12;
21
22
23 nsteps=500;
24
25 IE=500;
26 JE=500;
27
28 freq=1.2e12;
29
30
31 dz=zeros(IE,JE);
32 ez=zeros(IE,JE);
33 hx=zeros(IE,JE);
34 hy=zeros(IE,JE);
35 iz=zeros(IE,JE);
36 sz=zeros(IE,JE);
37 sxm1=zeros(IE,JE);
38 sxm2=zeros(IE,JE);
39
40 ga=ones(IE,JE);
41
42 ez2=zeros(IE,JE);
43 ez1=zeros(IE,JE);
44
45 ic=100;
46 jc=300;
47
48 t0=100.0;
49 spread=30.0;
50 T=0;
51
52 % u=VideoWriter('2d_drude_medium1.avi');
53 % u.FrameRate=30;
54 % open(u)
55 %

```

```

56
57 for n=3:nsteps;
58
59 ez2=ez1; ez1=ez;
60
61 for j=2:JE-1;
62 for i=2:IE-1;
63 dz(i,j)=dz(i,j)+0.5*(hy(i,j)-hy(i-1,j)-hx(i,j)+hx(i,j-1));
64
65 end
66 end
67
68 x=sin(2*pi*freq*dt*(n-t0));
69 y=exp(-.5*((n-t0)^2/(spread)^2));
70 pulse= x.*y;
71 dz(250,150)=pulse;
72
73 for i=1:IE;
74 for j=1:JE;
75 if (j >= 200 & j <= 250)
76 %           if (i >=100 & i<=200)
77 %           omega=2*pi*2.8e12;
78 %           g=exp(-(v.*dt));
79 %           ez(i,j)=dz(i,j)-sz(i,j);
80 %           sz(i,j)=(1+exp(-v.*dt1)).*sxm1(i,j)-exp(-v.*dt1).*
           sxm2(i,j)+(power(omegap,2).*(dt1./v)).*(1-exp(-v.*dt1)).*ez(i,j)
           );
81
82
83 ez(i,j)=(dz(i,j)-iz(i,j)-((1-0.5*v*dt)/(1+0.5*v*dt)).*sz(i,j));
84 iz(i,j)=iz(i,j)+((omegap^2)*dt1/v)*ez(i,j);
85 sz(i,j)=((1-0.5.*v.*dt)/(1+0.5.*v.*dt))*sz(i,j)+(-(omegap^2)*dt1/v
           )*ez(i,j);
86
87
88 %           sxm2(i,j)=sxm1(i,j);
89 %           sxm1(i,j)=sz(i,j);
90 %
91 else
92 %
93 ez(i,j)=ga(i,j).*dz(i,j);
94 %           end
95 end
96 end
97 end
98 %Mur
99 %Mur's absorbing boundary conditions
100 M1=c0*dt-ddx;
101 M2=c0*dt+ddx;
102 M=M1/M2;
103 N1=(2*ddx)/M2;
104 O1=(((c0*dt)^2.*ddx)/(2*(ddy^2)*M2);
105 MM1=c0*dt-ddy;
106 MM2=c0*dt+ddy;
107 MM=MM1/MM2;
108 N2=(2*ddy)/MM2;
109 O2=(((c0*dt)^2).*ddy)/(2*(ddx^2)*MM2);

```

```

110
111
112
113
114 %      x=0:
115 for j=2:JE-1;
116 %      ez(2,j)=-ez2(3,j)+M*(ez(3,j)+ez2(2,j))+N1*(ez1(2,j)+
      ez1(3,j))+O1*(ez1(2,j+1)-2*ez1(2,j)+ez1(2,j-1)+ez1(3,j+1)-2*ez1
      (3,j)+ez1(3,j-1));
117 %      1st order Mur
118 ez(2,j)=-ez2(3,j)+M*(ez(3,j)+ez2(2,j))+N1*(ez1(2,j)+ez1(3,j));
119 end
120
121 %      x=h:
122 for j=2:JE-1;
123 %      ez(IE,j)=-ez2(IE-1,j)+M*(ez(IE-1,j)+ez2(IE,j))+N1*(ez1(
      IE-1,j)+ez1(IE,j))+O1*(ez1(IE,j+1)-2*ez1(IE,j)+ez1(IE,j-1)+ez1(
      IE-1,j+1)-2*ez1(IE-1,j)+ez1(IE-1,j-1));
124
125 %      1st order Mur
126 ez(IE,j)=-ez2(IE-1,j)+M*(ez(IE-1,j)+ez2(IE,j))+N1*(ez1(IE-1,j)+ez1(
      IE,j));
127 end
128
129 % y=0:
130 for i=2:IE-1;
131 %      ez(i,2)=-ez2(i,3)+MM*(ez(i,3)+ez2(i,2))+N2*(ez1(i,3)+ez1(
      i,2))+O2*(ez1(i+1,2)-2*ez1(i,2)+ez1(i-1,2)+ez1(i+1,3)-2*ez1(i
      ,3)+ez1(i-1,3));
132
133 % 1st order Mur
134 ez(i,2)=-ez2(i,3)+MM*(ez(i,3)+ez2(i,2))+N2*(ez1(i,3)+ez1(i,2));
135 end
136
137 %      y=h:
138 for i=2:IE-1;
139 %      ez(i,JE)=-ez2(i,JE-1)+MM*(ez(i,JE-1)+ez2(i,JE))+N2*(ez1
      (i,JE-1)+ez1(i,JE))+O2*(ez1(i+1,JE)-2*ez1(i,JE)+ez1(i-1,JE)+ez1
      (i+1,JE-1)-2*ez1(i,JE-1)+ez1(i-1,JE-1));
140
141 %      1st order Mur
142 ez(i,JE)=-ez2(i,JE-1)+MM*(ez(i,JE-1)+ez2(i,JE))+N2*(ez1(i,JE-1)+ez1
      (i,JE));
143 end
144
145
146
147 for j=2:JE-2;
148 for i=2:IE-2;
149 hx(i,j)=hx(i,j)+0.5*(ez(i,j)-ez(i,j+1));
150 end
151 end
152
153 for j=2:JE-2;
154 for i=2:IE-2;
155
156 hy(i,j)=hy(i,j)+0.5*(ez(i+1,j)-ez(i,j));

```



```

157
158 end
159 end
160
161 if n==450;
162 subplot(2,1,1)
163 imagesc(1:1:IE,1:1:JE,ez)
164 shading interp
165 colorbar
166 colormap(jet)
167 axis([0 500 0 500])
168 zlabel('Ez');
169 xlabel('x');
170 ylabel('y');
171 Title_={'t=',n};
172 text(350,150,0.3,Title_,'Color','k');
173 Title_={'f_0=',freq};
174 text(350,350,0.3,Title_,'Color','k');
175 Title_={'f_p_l_a_s_m_a=',omegap/(2*pi)};
176 text(67,100,0.3,Title_,'Color','k');
177 rectangle('Position',[200,0,50,500],'Curvature',1,'EdgeColor','k'
    ,...
178 'LineWidth',1)
179 title('Drude medium')
180
181 subplot(2,1,2)
182 surf((1:1:IE),(1:1:JE),ez)
183 shading interp
184 colorbar
185 colormap(jet)
186 axis([0 500 0 500 -0.15 0.15]);
187 zlabel('Ez');
188 xlabel('x');
189 ylabel('y');
190 Title_={'t=',n};
191 text(270,200,0.2,Title_,'Color','k');
192 rectangle('Position',[200,0,50,500],'Curvature',1,'EdgeColor','k'
    ,...
193 'LineWidth',1)
194
195
196 M= getframe;
197 % writeVideo(u,M);
198 end
199 end
200 % Movie(M,1);

```

1.22. Επιδεικτικότητα, δείκτης διάθλασης, παλμός και φάσμα παλμού για *Drude Metamaterial*.

```

1 % Source + spectrum (time-domain , freq-domain) Metamaterial Debye
  medium
2
3 clear;
4
5 ddx=4.3e-5; % space step
6 dt=ddx/6e8; %time step
7 nsteps=1500;
8
9 fp=1e12;
10 omegap=2*pi*fp;
11
12 v=0.001e12;
13
14
15 eps_star=zeros;
16 n_index=zeros;
17
18 N=nsteps;
19
20 freq=0.7e12;
21 freq3=freq;
22 omega3=2*pi*freq;
23 fs = freq*20; % Sampling frequency
24 T = 1/fs; % Unit time [fs]
25 L =1000; % Length of signal
26 spread =30; % Pulse duration
27 N =(0:nsteps); % Time base
28 t0 =100; % Used to centering the pulse
29
30
31
32 pulse = sin(2*pi*freq*dt*(N-t0));
33
34 n = 2^nextpow2(L);
35 %n=2048;
36 Z=fft(pulse,n)/L;
37
38 freq1=linspace(0,20e12,20000);
39 omega=2*pi*freq1;
40
41 d=omegap.^2./v;
42 eps_star= 1 - (omegap.^2)./(omega.^2.+v.*1i*omega);
43
44 real_eps=real(eps_star);
45 imag_eps=imag(eps_star);
46 n_index=sqrt(eps_star);
47 real_n=real(n_index);
48 imag_n=imag(n_index);
49
50 freq = 0.5*fs*linspace(0,1,n/2+1); % (full range) Frequency Vector
51 omega2=2*pi*freq;
52
53
54

```

```

55 subplot(2,1,1);
56 plot(N,pulse,'b','LineWidth',2)
57 grid on
58 ylabel('Pulse(t)')
59 xlabel('t(ps)')
60
61 axis([0 200 -1 1]);
62
63 title('Sinusoidal source,fo=0.7THz, time domain')
64
65 subplot(2,1,2);
66 plot(omega2/1e12,5*abs(Z(1:n/2+1)),'g-','LineWidth',2)
67 axis([0 12 -2.5 2.5]); %
68 grid on
69 % hold on
70 % plot(omega/1e12,real_eps,'b','LineWidth',2)
71 % hold off
72 title('Source spectrum,fo=0.7THz,frequency domain')
73 % Title_1={'omega_p=',omegap};
74 % text(7,-1,Title_1,'Color','b');
75 line('XData',[4.4 4.4], 'YData', [-30 25], 'LineStyle', '- -', ...
76 'LineWidth', 0.5, 'Color','g')
77 Title_1={'omega_0=',omega3};
78 text(1,-1,Title_1,'Color','g');
79
80 %
81 ylabel('pulse(omega)')
82 xlabel('omega(THz)')
83 % line('XData',[6.28319 6.28319], 'YData', [-30 25], 'LineStyle',
84 % '- -', ...
85 % 'LineWidth', 0.5, 'Color','b')
86 % legend('Pulse spectrum','real n(omega)')
87
88
89 % plot(omega/1e12,real_eps,'b','LineWidth',2)
90 % hold on
91 % plot(omega/1e12,(imag_eps),'r','LineWidth',2)
92 % hold off
93 % grid on
94 % title('Metamaterial, refractive index n(omega) ')
95 % legend('real part','imaginary part')
96 % Title_1={'omega_p=',omegap};
97 % text(8,-2,Title_1,'Color','k');
98 % axis([0.2 20 -8e0 8e0])
99 % line('XData',[6.28319 6.28319], 'YData', [-30 25], 'LineStyle',
100 % '- -', ...
101 % 'LineWidth', 0.5, 'Color','k')
102 %
103 % xlabel('omega(THz)')
104 % ylabel('n(omega)')

```

1.23. Μεταλλικό *Drude* σε 2 διαστάσεις.

```
1 %Drude material in 2D, metamaterial project, with Mur's ABC.
2
3 clear;
4
5 ddx=4.3e-5;
6 dt=ddx/6e8;
7 c0=3e8;
8 ddy=ddx;
9 dt1=dt;
10
11 %Drude medium properties
12 fp=1e12;
13 omegap=2*pi*fp;
14
15 v=0.001e12;
16
17
18 nsteps=800;
19
20 IE=200;
21 JE=200;
22
23
24 freq=0.7e12;
25
26
27 dz=zeros(IE,JE);
28 ez=zeros(IE,JE);
29 hx=zeros(IE,JE);
30 hy=zeros(IE,JE);
31 iz=zeros(IE,JE);
32 sz=zeros(IE,JE);
33
34 bx=zeros(IE,JE);
35 by=zeros(IE,JE);
36 kz=zeros;
37 jx=zeros(IE,JE);
38 kx=zeros(IE,JE);
39 jy=zeros(IE,JE);
40 ky=zeros(IE,JE);
41 ga=ones(IE,JE);
42
43 ez2=zeros(IE,JE);
44 ez1=zeros(IE,JE);
45 a=zeros(IE,JE);
46
47
48 t0=50.0;
49
50 T=0;
51
52 % u=VideoWriter('2d_drude_MTM.avi');
53 % u.FrameRate=110;
54 % open(u)
55
56
```

```

57 for n=1:nsteps;
58
59 ez2=ez1; ez1=ez;
60
61
62
63 for i=2:IE-1;
64 for j=2:JE-1;
65
66 dz(i,j)=dz(i,j)+0.5*(hy(i,j)-hy(i-1,j)-hx(i,j)+hx(i,j-1));
67
68
69
70 end
71 end
72
73 x=sin(2*pi*freq*dt*(n-t0));
74
75 pulse= x;
76
77 dz(100,70)=pulse;
78
79 for i=2:IE-1;
80 for j=2:JE-1;
81 if (j >= 80 & j <= 100)
82
83 % Electric field
84 ez(i,j)=(dz(i,j)-iz(i,j)-((1-0.5*v*dt)/(1+0.5*v*dt)).*sz(i,j));
85 iz(i,j)=iz(i,j)+((omegap^2)*dt1/v)*ez(i,j);
86 sz(i,j)=((1-0.5.*v.*dt)/(1+0.5.*v.*dt))*sz(i,j)+(-(omegap^2)*dt1/v
      )*ez(i,j);
87
88 else
89 %
90 ez(i,j)=ga(i,j).*dz(i,j);
91
92 end
93 end
94 end
95
96
97
98
99 %Mur's absorbing boundary conditions
100
101 M1=c0*dt-ddx;
102 M2=c0*dt+ddx;
103 M=M1/M2;
104 N1=(2*ddx)/M2;
105 O1=(((c0*dt)^2.*ddx)/(2*(ddy^2)*M2);
106 MM1=c0*dt-ddy;
107 MM2=c0*dt+ddy;
108 MM=MM1/MM2;
109 N2=(2*ddy)/MM2;
110 O2=(((c0*dt)^2).*ddy)/(2*(ddx^2)*MM2);
111
112

```

```

113
114
115 %      Mur x=0:
116 for j=2:JE-1;
117 %          ez(2,j)=-ez2(3,j)+M*(ez(3,j)+ez2(2,j))+N1*(ez1(2,j)+
          ez1(3,j))+O1*(ez1(2,j+1)-2*ez1(2,j)+ez1(2,j-1)+ez1(3,j+1)-2*ez1
          (3,j)+ez1(3,j-1));
118 %          1st order Mur
119 ez(2,j)=-ez2(3,j)+M*(ez(3,j)+ez2(2,j))+N1*(ez1(2,j)+ez1(3,j));
120 end
121
122 %      Mur x=h:
123 for j=2:JE-1;
124 %          ez(IE,j)=-ez2(IE-1,j)+M*(ez(IE-1,j)+ez2(IE,j))+N1*(ez1(
          IE-1,j)+ez1(IE,j))+O1*(ez1(IE,j+1)-2*ez1(IE,j)+ez1(IE,j-1)+ez1(
          IE-1,j+1)-2*ez1(IE-1,j)+ez1(IE-1,j-1));
125
126 %          1st order Mur
127 ez(IE,j)=-ez2(IE-1,j)+M*(ez(IE-1,j)+ez2(IE,j))+N1*(ez1(IE-1,j)+ez1(
          IE,j));
128 end
129
130 %Mur y=0:
131 for i=2:IE-1;
132 %          ez(i,2)=-ez2(i,3)+MM*(ez(i,3)+ez2(i,2))+N2*(ez1(i,3)+ez1(
          i,2))+O2*(ez1(i+1,2)-2*ez1(i,2)+ez1(i-1,2)+ez1(i+1,3)-2*ez1(i
          ,3)+ez1(i-1,3));
133
134 % 1st order Mur
135 ez(i,2)=-ez2(i,3)+MM*(ez(i,3)+ez2(i,2))+N2*(ez1(i,3)+ez1(i,2));
136 end
137
138 %      Mur y=h:
139 for i=2:IE-1;
140 %          ez(i,JE)=-ez2(i,JE-1)+MM*(ez(i,JE-1)+ez2(i,JE))+N2*(ez1
          (i,JE-1)+ez1(i,JE))+O2*(ez1(i+1,JE)-2*ez1(i,JE)+ez1(i-1,JE)+ez1
          (i+1,JE-1)-2*ez1(i,JE-1)+ez1(i-1,JE-1));
141
142 %          1st order Mur
143 ez(i,JE)=-ez2(i,JE-1)+MM*(ez(i,JE-1)+ez2(i,JE))+N2*(ez1(i,JE-1)+ez1
          (i,JE));
144 end
145
146
147 for i=2:IE-1;
148 for j=2:JE-1;
149
150 bx(i,j)=bx(i,j)+0.5*(ez(i,j)-ez(i,j+1));
151 if (j >= 80 & j <= 100)
152 %Magnetic field x
153 hx(i,j)=(bx(i,j)-kx(i,j)-((1-0.5*v*dt)/(1+0.5*v*dt)).*jx(i,j));
154 kx(i,j)=kx(i,j)+((omegap^2)*dt1/v)*hx(i,j);
155 jx(i,j)=((1-0.5.*v.*dt)/(1+0.5.*v.*dt)).*jx(i,j)+(-(omegap^2)*dt1/v
          )*hx(i,j);
156 else
157 hx(i,j)=hx(i,j)+0.5*(ez(i,j)-ez(i,j+1));
158

```

```

159 end
160 end
161 end
162 for i=2:IE-1;
163 for j=2:JE-1;
164
165 by(i,j)=by(i,j)+0.5*(ez(i+1,j)-ez(i,j));
166 if (j >= 80 & j <= 100)
167 %Magnetic field y
168 hy(i,j)=(by(i,j)-ky(i,j)-((1-0.5*v*dt)/(1+0.5*v*dt)).*jy(i,j));
169 ky(i,j)=ky(i,j)+((omegap^2)*dt1/v)*hy(i,j);
170 jy(i,j)=((1-0.5*v*dt)/(1+0.5*v*dt))*jy(i,j)+(-(omegap^2)*dt1/v
    )*hy(i,j);
171 else
172 hy(i,j)=hy(i,j)+0.5*(ez(i+1,j)-ez(i,j));
173
174 end
175 end
176 end
177
178
179 if n==700;
180 subplot(2,1,1)
181 imagesc(1:1:IE,1:1:JE,ez)
182 view(0,75)
183 shading interp
184 lightangle(-45,30)
185 h.FaceLighting = 'gouraud';
186 h.AmbientStrength = 0.3;
187 h.DiffuseStrength = 0.8;
188 h.SpecularStrength = 0.9;
189 h.SpecularExponent = 25;
190 h.BackFaceLighting = 'unlit';
191 colorbar
192 colormap(jet)
193 axis([000 200 000 200 ])
194 caxis([-0.4 0.4])
195 zlabel('Ez');
196 xlabel('x');
197 ylabel('y');
198 Title_={'t=',n};
199 text(180,30,0.3,Title_,'Color','k');
200 % text(250,250,'Ez (metamaterial)','Color','k');
201 text(10,50,'E_z ','Color','k');
202 rectangle('Position',[80,-10,20,220],'Curvature',1,'EdgeColor','k'
    ,...
203 'LineWidth',1.5)
204 title('Metamaterial, sinusoidal source f_0=0.7THz')
205
206 subplot(2,1,2)
207 surf((1:1:IE),(1:1:JE),ez)
208 % view(0,75)
209 shading interp
210 % lightangle(-45,30)
211 % h.FaceLighting = 'gouraud';
212 % h.AmbientStrength = 0.3;
213 % h.DiffuseStrength = 0.8;

```

```

214 % h.SpecularStrength = 0.9;
215 % h.SpecularExponent = 25;
216 % h.BackFaceLighting = 'unlit';
217 colorbar
218 colormap(jet)
219 axis([000 200 000 200 -0.4 0.4])
220 caxis([-0.4 0.4])
221 zlabel('Ez');
222 xlabel('x');
223 ylabel('y');
224 Title_={'t=',n};
225 text(180,30,0.3,Title_,'Color','k');
226 rectangle('Position',[80,-10,20,220],'Curvature',1,'EdgeColor','k'
227         ,...
228         'LineWidth',1.5)
229
230
231
232 M= getframe;
233 %         writeVideo(u,M);
234
235 end
236 end
237 %         Movie(M,1);

```


Βιβλιογραφία

- [1] Susan C. Hagness Allen Taflove. *Computational Electrodynamics The finite-difference-time-domain method*. Artech House Publishers, Boston,London, 2000.
- [2] Dennis M. Sullivan. *Electromagnetic Simulation using the FDTD method*. IEEE Press, Piscataway,NJ USA, 2000.
- [3] Sofoklis J. Orfanidis. *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University, Piscataway,NJ USA, 2002.
- [4] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics, 3rd edition*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ USA, 1999.