

Το θεώρημα Borsuk-Ulam
και εφαρμογές στη Συνδυαστική,
τη Γεωμετρία και την Ανάλυση

Διπλωματική Εργασία
Δέσποινα Σταματάκη

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2021

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Απόστολος Γιαννόπουλος, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Παντελής Δοδός, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Ιωάννης Εμμανουήλ, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
2	Στοιχεία Αλγεβρικής Τοπολογίας	11
2.1	Τοπολογικοί χώροι	11
2.2	Ομοτοπία	12
2.3	Γεωμετρικά simplicial complexes	15
2.4	Τριγωνισμοί	18
2.5	Αφηρημένα simplicial complexes	19
2.6	Διάσταση των γεωμετρικών υλοποιήσεων	21
2.7	Simplicial complexes και μερικώς διατεταγμένα σύνολα	22
3	Το θεώρημα Borsuk-Ulam	25
3.1	Ισοδύναμες μορφές του Θεωρήματος Borsuk-Ulam	25
3.2	Μια γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος	27
3.3	Το Λήμμα του Tucker	31
3.4	Δύο αποδείξεις του Λήμματος του Tucker	32
4	Εφαρμογές στη Γεωμετρία και τη Συνδυαστική	39
4.1	Το θεώρημα Ham-Sandwich	39
4.2	Χρωματιστές διαμερίσεις και περιδέραια	42
4.2.1	Χρωματιστές διαμερίσεις	42
4.2.2	Περιδέραια	43
4.3	Η εικασία του Kneser	45
4.4	Γενικευμένα γραφήματα Kneser: το θεώρημα του Dol'nikov	47
4.5	Το λήμμα του Gale και το θεώρημα του Schrijver	50
5	Εφαρμογές στην Ασυμπτωτική Γεωμετρική Ανάλυση	53
5.1	Τυχαίες στροφές και τυχαίες τομές κυρτών σωμάτων	53
5.2	Το πρόβλημα του Knaster	60
5.3	Το πρόβλημα του Knaster και το θεώρημα Dvoretzky	61
5.4	Ανισότητες συγκέντρωσης για νόρμες και το θεώρημα Dvoretzky	70
5.4.1	Ανισότητα δύο επιπέδων για την συγκέντρωση στο χώρο του Gauss	72

5.4.2	Unconditional νόρμες	75
5.4.3	Συγκέντρωση για νόρμες με καλή unconditional δομή	77
5.4.4	Πιθανοθεωρητική διχοτομία και το θεώρημα του Dvoretzky	80
	Βιβλιογραφία	85

Συμβολισμός και Ορισμοί

Αν S είναι ένα σύνολο, με $|S|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του S και με 2^S το δυναμοσύνολο του S . Με $\binom{s}{k}$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του S που έχουν πληθικότητα ακριβώς ίση με k και θέτουμε $\binom{s}{\leq k} = \bigcup_{i=0}^k \binom{s}{i}$. Επίσης, με $[n]$ συμβολίζουμε το πεπερασμένο σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$.

Το σύμβολο \mathbb{R}^d συμβολίζει τον Ευκλείδειο χώρο διάστασης d . Τα σημεία του \mathbb{R}^d είναι διανύσματα γραμμής $x = (x_1, \dots, x_d)$ και e_1, e_2, \dots, e_d είναι η συνήθης ορθοκανονική του βάση. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{R}^d$ ορίζεται ως εξής:

$$\langle x, y \rangle = xy^T = x_1y_1 + \dots + x_dy_d.$$

Η Ευκλείδεια νόρμα του x είναι

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}.$$

Η ℓ_p -νόρμα, $1 \leq p < \infty$ είναι $\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_d|^p)^{1/p}$. Η ℓ_∞ -νόρμα είναι $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}$.

Υπερεπίπεδο στον \mathbb{R}^d είναι ένας αφινικός υπόχωρος διάστασης $d-1$, ένα σύνολο της μορφής $\{x \in \mathbb{R}^d : \langle a, x \rangle = b\}$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}^d$ και κάποιον $b \in \mathbb{R}$. Ένας (κλειστός) ημίχωρος είναι ένα σύνολο της μορφής $\{x \in \mathbb{R}^d : \langle a, x \rangle \leq b\}$.

Η μοναδιαία μπάλα $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$ συμβολίζεται με B^d και η μοναδιαία $(d-1)$ -διάστατη σφαίρα είναι το σύνολο $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$.

Ένα σύνολο λέγεται κυρτό αν για κάθε $x, y \in C$ το ευθύγραμμο τμήμα xy περιέχεται στο C . Η κυρτή θήκη ενός συνόλου $X \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι η τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το X και συμβολίζεται με $\text{conv}(X)$. Κάθε σημείο $x \in \text{conv}(X)$ μπορεί να γραφτεί ως κυρτός συνδυασμός σημείων του X : υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in X$ και πραγματικοί αριθμοί $a_1, \dots, a_n \geq 0$ ώστε $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ και $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

Κυρτό πολύτοπο είναι η κυρτή θήκη ενός πεπερασμένου συνόλου στον \mathbb{R}^d . Κάθε κυρτό πολύτοπο μπορεί να εκφραστεί ως η τομή πεπερασμένων το πλήθος (κλειστών) ημιχώρων. Αντίστροφα, αν η τομή πεπερασμένων το πλήθος ημιχώρων είναι φραγμένο σύνολο, τότε είναι κυρτό πολύτοπο. Μια έδρα ενός κυρτού πολύτόπου P είναι είτε το P είτε μια τομή $P \cap h$, όπου h είναι υπερεπίπεδο που δεν «τεμαχίζει» το P (δηλαδή, δεν τέμνουν το P και οι δύο ανοικτοί ημίχωροι που ορίζει το h).

Τα γραφήματα τα θεωρούμε απλά και χωρίς κατεύθυνση εκτός αν επισημάνουμε κάτι διαφορετικό. Γράφημα G είναι ένα ζεύγος (V, E) , όπου V είναι ένα σύνολο (σύνολο κορυφών) και $E \subseteq \binom{V}{2}$ είναι το σύνολο ακμών. Για δοσμένο γράφημα G , γράφουμε $V(G)$ για το σύνολο κορυφών και $E(G)$ για το σύνολο ακμών του G .

Πλήρες γράφημα καλείται ένα γράφημα που έχει όλες τις πιθανές ακμές, δηλαδή είναι της μορφής $(V, \binom{V}{2})$. Το πλήρες γράφημα με n κορυφές συμβολίζεται με K_n .

Ένα γράφημα καλείται διμερές αν το σύνολο κορυφών του μπορεί να διαμεριστεί σε δύο ξένα σύνολα V_1 και V_2 (κλάσεις χρώματος) έτσι ώστε κάθε ακμή να συνδέει κορυφή του V_1 με κορυφή του V_2 . Ένα πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n}$ έχει $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ και $E = \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$, άρα $|E| = m \cdot n$.

Υπεργράφημα είναι ένα ζεύγος (V, E) όπου V είναι ένα (συνήθως πεπερασμένο) σύνολο και $E \subseteq 2^V$ είναι ένα σύστημα υποσυνόλων του V .

Ένα υπεργράφημα λέγεται k -ομοιόμορφο αν όλες οι ακμές του έχουν πληθικότητα k . Ένα υπεργράφημα λέγεται k -διμερές αν υπάρχει διαμέριση του V σε k ξένα σύνολα V_1, V_2, \dots, V_k έτσι ώστε $|e \cap V_i| \leq 1$ για κάθε $e \in E$ και κάθε $i \in [k]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα της Αλγεβρικής Τοπολογίας, το θεώρημα Borsuk-Ulam. Αρχικά θα δούμε έξι ισοδύναμες μορφές του θεωρήματος καθώς και μια γεωμετρική απόδειξή του.

Θεώρημα Borsuk-Ulam: Για κάθε $n \geq 0$, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες, και αληθεί-
ουν:

- (1) Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ υπάρχει ένα σημείο $x \in S^n$ με $f(x) = f(-x)$.
- (2) Για κάθε αντιποδική απεικόνιση $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, δηλαδή συνεχή απεικόνιση με την ιδιότητα ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in S^n$, υπάρχει ένα σημείο $x \in S^n$ με $f(x) = 0$.
- (3) Δεν υπάρχει αντιποδική απεικόνιση $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$.
- (4) Δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ που να είναι αντιποδική στο σύνορο, δηλαδή να ικανοποιεί την $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in S^{n-1} = \partial B^n$.
- (5) Για κάθε κάλυμμα F_1, \dots, F_{n+1} της σφαίρας S^n από $n+1$ κλειστά σύνολα, υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο του καλύμματος που περιέχει ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων, δηλαδή υπάρχει $1 \leq i \leq n+1$ τέτοιος ώστε $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$.
- (6) Για κάθε κάλυμμα U_1, \dots, U_{n+1} της σφαίρας S^n από $n+1$ ανοικτά σύνολα, υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο του καλύμματος που περιέχει ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων.

Βοηθάει να έχουμε στο μυαλό μας και να κάνουμε τη σύγκριση με το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer:

Θεώρημα του Brouwer: Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : B^n \rightarrow B^n$ έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x \in B^n$ έτσι ώστε $f(x) = x$.

Όπως θα δούμε, το θεώρημα του Brouwer προκύπτει από τη μορφή (4) του θεωρήματος Borsuk-Ulam.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το θεώρημα Borsuk-Ulam είναι ισοδύναμο με ένα σπουδαίο αποτέλεσμα της Συνδυαστικής, το Λήμμα του Tucker. Για την διατύπωση του Λήμματος του Tucker χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς. Έστω T τριγωνισμός της n -διάστατης μπάλας B^n . Ο T λέγεται *αντιδιαμετρικά συμμετρικός στο σύνορο* της B^n αν το υποσύνολο των simplices του T που βρίσκονται στην $S^{n-1} = \partial B^n$ είναι τριγωνισμός της S^{n-1} και ισχύει: αν $\sigma \subset S^{n-1}$ είναι simplex του T τότε το $-\sigma$ είναι επίσης simplex του T .

Λήμμα του Tucker: Έστω T τριγωνισμός της B^n αντιδιαμετρικά συμμετρικός στο σύνορο. Έστω $\lambda : V(T) \rightarrow \{+1, -1, +2, -2, \dots, +n, -n\}$ «ονοματισμός» των κορυφών του T που ικανοποιεί την $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ για κάθε κορυφή $v \in \partial B^n$, δηλαδή η λ είναι αντιδιαμετρική. Τότε, υπάρχει ένα simplex διάστασης 1, μια ακμή δηλαδή, που είναι συμπληρωματικό, δηλαδή οι κορυφές του έχουν ονοματιστεί με αντίθετους αριθμούς.

Εκτός από την απόδειξη της ισοδυναμίας του Λήμματος του Tucker με το θεώρημα Borsuk-Ulam, παρουσιάζουμε και δύο αποδείξεις του.

Στο Κεφάλαιο 4 θα παρουσιάσουμε κάποιες από τις πιο γνωστές εφαρμογές του θεωρήματος Borsuk-Ulam στη Γεωμετρία και τη Συνδυαστική:

- (α) *Το θεώρημα Ham-Sandwich.* Έστω $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$ πεπερασμένα μέτρα Borel στον \mathbb{R}^d τέτοια ώστε κάθε υπερεπίπεδο να έχει μέτρο μηδέν για κάθε μ_i , $i = 1, \dots, d$. Τότε, υπάρχει υπερεπίπεδο h τέτοιο ώστε $\mu_i(h^+) = \mu_i(h^-) = \frac{1}{2}\mu_i(\mathbb{R}^d)$, $i = 1, \dots, d$, όπου h^+, h^- οι ημιχώροι που ορίζει το h .

Αποδεικνύουμε επίσης την ακόλουθη εκδοχή του θεωρήματος για πεπερασμένα σύνολα: Έστω $A_1, A_2, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ πεπερασμένα σύνολα. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο h που διχοτομεί ταυτόχρονα τα A_1, \dots, A_d . Η φράση «το h διχοτομεί το A_i » σημαίνει εδώ ότι κάθε ανοικτός ημιχώρος που ορίζεται από το h περιέχει το πολύ $\frac{1}{2}|A_i|$ σημεία του A_i . Αν το A_i έχει περιττό πλήθος σημείων $2k + 1$, τότε κάθε ανοικτός ημιχώρος περιέχει το πολύ k σημεία και τουλάχιστον ένα σημείο ανήκει στο υπερεπίπεδο.

- (β) *Χρωματιστές Διαμερίσεις και Περιδέραια.* Αποδεικνύουμε, ως εφαρμογή του θεωρήματος Ham-Sandwich, ένα θεώρημα των Akiyama και Alon: Έστω σύνολα A_1, A_2, \dots, A_d με n σημεία το καθένα, σε γενική θέση στον \mathbb{R}^d . Έστω πως τα σημεία του A_1 είναι κόκκινα, του A_2 είναι μπλε και ούτω καθεξής (δηλαδή κάθε A_i έχει διαφορετικό χρώμα). Τότε τα σημεία της ένωσης $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_d$ μπορούν να διαμεριστούν σε χρωματιστές d -άδες (κάθε d -άδα να περιέχει ένα σημείο από κάθε χρώμα) με ξένες κυρτές θήκες.

Μια εφαρμογή είναι το λεγόμενο «θεώρημα του περδέραιου»: Κάθε (ανοικτό) περιδέραιο με d -είδη πολύτιμων λίθων (άρτιου πλήθους από το καθένα) μπορεί να χωριστεί μεταξύ δύο ληστών με το πολύ d τομές. Μια δεύτερη απόδειξη αυτού του αποτελέσματος μπορεί να δοθεί με χρήση του θεωρήματος Hobby-Rice: Έστω $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$ συνεχή μέτρα πιθανότητας στο $[0, 1]$. Τότε υπάρχουν διαμερίση του $[0, 1]$ σε $d + 1$ διαστήματα I_0, I_1, \dots, I_d και πρόσημα $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d \in \{-1, 1\}$ με $\sum_{j=0}^d \varepsilon_j \cdot \mu_i(I_j) = 0$ για $i = 1, \dots, d$.

- (γ) *Εικασία του Kneser.* Διατυπώνουμε μια εικασία του Kneser στη γλώσσα της θεωρίας γραφημάτων και περιγράφουμε την απόδειξή της από τον Lovász. Θεωρούμε το $\binom{[n]}{k}$ ως το σύνολο

κορυφών ενός γραφήματος και συνδέουμε δύο κορυφές αν τα αντίστοιχα k -σύνολα είναι ξένα. Θυμίζουμε ότι k -χρωματισμός ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι μια απεικόνιση $c : V \rightarrow [k]$ τέτοια ώστε $c(u) \neq c(v)$ όταν το $\{u, v\} \in E$ είναι ακμή. Ο χρωματικός αριθμός του G συμβολίζεται με $\chi(G)$ και είναι ο μικρότερος k για τον οποίο το G έχει k -χρωματισμό.

Έστω X πεπερασμένο σύνολο και έστω $\mathcal{F} = 2^X$. Το γράφημα Kneser του \mathcal{F} , το οποίο συμβολίζεται με $KG(\mathcal{F})$, έχει το \mathcal{F} ως σύνολο κορυφών και δύο σύνολα F_1, F_2 είναι «γειτονικά» (τα ενώνει ακμή) αν και μόνο αν $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Δηλαδή,

$$KG(\mathcal{F}) = (F, \{\{F_1, F_2\} : F_1, F_2 \in \mathcal{F} \text{ και } F_1 \cap F_2 = \emptyset\}).$$

Συμβολίζουμε με $KG_{n,k}$ το γράφημα Kneser που αντιστοιχεί στο $\mathcal{F} = \binom{[n]}{k}$ (το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $[n]$ με πλήθος στοιχείων k). Τότε, η εικασία του Kneser (που αποδείχθηκε από τον Lovász) είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη πρόταση: Για κάθε $k > 0$ και $n \geq 2k-1$, ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος Kneser $KG_{n,k}$ είναι $\chi(KG_{n,k}) = n-2k+2$.

- (δ) *Γενικευμένα γραφήματα Kneser και το θεώρημα του Dol'nikov.* Αν \mathcal{F} είναι μια οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X , ένας χρωματισμός $c : X \rightarrow [m]$ είναι (σωστός) m -χρωματισμός του (X, \mathcal{F}) αν ο c δεν δημιουργεί καμία μονοχρωματική ακμή, δηλαδή $|c(F)| > 1$ για κάθε $F \in \mathcal{F}$. Ο χρωματικός αριθμός $\chi(\mathcal{F})$ είναι ο μικρότερος m για τον οποίο το (X, \mathcal{F}) έχει m -χρωματισμό. Εδώ ενδιαφερόμαστε μόνο για την ύπαρξη 2-χρωματισμών, δηλαδή την περίπτωση $m = 2$.

Ορίζουμε ως m -colorability defect και συμβολίζουμε $cd_m(\mathcal{F})$ το ελάχιστο μέγεθος ενός υποσυνόλου $Y \subseteq X$ με την ιδιότητα ότι το σύστημα των συνόλων της οικογένειας \mathcal{F} που δεν περιέχουν σημεία του Y επιδέχεται m -χρωματισμό. Δηλαδή,

$$cd_m(\mathcal{F}) = \min\{|Y| : \text{το } (X \setminus Y, \{F \in \mathcal{F} : F \cap Y = \emptyset\}) \text{ είναι } m\text{-χρωματισμένο}\}$$

είναι ο μικρότερος αριθμός κορυφών που πρέπει να αφαιρεθεί από το \mathcal{F} ώστε να παραχθεί ένα m -χρωματισμένο υπεργράφημα. Δίνουμε δύο αποδείξεις του θεωρήματος του Dol'nikov: Για κάθε πεπερασμένο σύστημα συνόλων (X, \mathcal{F}) έχουμε

$$\chi(KG(\mathcal{F})) \geq cd_2(\mathcal{F}).$$

Η μία από τις αποδείξεις, η αρχική απόδειξη του θεωρήματος από τον Dol'nikov, βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα που είναι συνέπεια του θεωρήματος Borsuk-Ulam: Έστω $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_d$ οικογένειες από μη κενά κυρτά συμπαγή σύνολα στον \mathbb{R}^d . Υποθέτουμε ότι για κάθε $i = 1, \dots, d$ η οικογένεια \mathcal{C}_i έχει αυτοτομές, δηλαδή $C \cap C' \neq \emptyset$ για κάθε $C, C' \in \mathcal{C}_i$. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο που τέμνει όλα τα σύνολα της $\bigcup_{i=1}^d \mathcal{C}_i$.

- (ε) *Το Λήμμα του Gale και το θεώρημα του Schrijver.* Δίνουμε άλλη μία γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος Lovász-Kneser, που βασίζεται στο Λήμμα του Gale: Για κάθε $d \geq 0$ και κάθε $k \geq 1$ υπάρχει σύνολο $X \subset S^d$ με $2k+d$ σημεία έτσι ώστε κάθε ανοικτό ημισφαίριο της S^d να περιέχει τουλάχιστον k σημεία του X .

Με την ίδια σχεδόν απόδειξη θα πάρουμε ένα ισχυρότερο θεώρημα, το οποίο αποδείχθηκε από τον Schrijver αμέσως μετά από την απόδειξη της εικασίας του Kneser. Χρειαζόμαστε πρώτα

κάποιους ορισμούς. Λέμε ότι ένα υποσύνολο $S \in \binom{[n]}{k}$ είναι ευσταθές αν δεν περιέχει δύο γειτονικά σημεία modulo n (αν $i \in S$ τότε $i+1 \notin S$ και αν $n \in S$ τότε $1 \notin S$). Με άλλα λόγια, το S αντιστοιχεί σε ένα ανεξάρτητο σύνολο του κύκλου C_n . Συμβολίζουμε με $\binom{[n]}{k}_{\text{stab}}$ την οικογένεια των ευσταθών k -υποσυνόλων του $[n]$. Το γράφημα Schrijver είναι το

$$SG_{n,k} = KG \left(\binom{[n]}{k}_{\text{stab}} \right).$$

Είναι υπογράφημα του γραφήματος Kneser $KG_{n,k}$ και μάλιστα έχουν τον ίδιο χρωματικό αριθμό. Το θεώρημα του Schrijver ισχυρίζεται ότι για κάθε $n \geq 2k \geq 0$ ισχύει $\chi(SG_{n,k}) = \chi(KG_{n,k})$.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε κάποιες εφαρμογές του θεωρήματος Borsuk-Ulam στην ασυμπτωτική γεωμετρική ανάλυση. Η πρώτη αφορά τη σύγκριση ολικών και τοπικών παραμέτρων για συμμετρικά κυρτά σώματα σε μεγάλες διαστάσεις. Ορίζουμε την *ελάχιστη περιγεγραμμένη ακτίνα της τομής t στρωφών* ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον \mathbb{R}^n θέτοντας

$$r_t(K) = \min\{\rho > 0 : u_1(K) \cap \dots \cap u_t(K) \subseteq \rho B_2^n \text{ για κάποιους } u_1, \dots, u_t \in O(n)\},$$

και την «μεγαλύτερη ακτίνα» μιας τυχαίας $\lceil n/k \rceil$ -διάστατης κεντρικής τομής του K θέτοντας

$$R_k(K) = \min \left\{ R > 0 : \nu_{n, \lceil n/k \rceil}(E : K \cap E \subseteq R(B_2^n \cap E)) \geq 1 - \frac{1}{k+1} \right\}$$

όπου $\lceil x \rceil$ είναι ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με x . Ο V. Milman απέδειξε ότι αν $R > R_k(K)$ τότε ξεκινώντας από ένα σύνολο ανά δύο κάθετων $\lceil n/k \rceil$ -διάστατων υποχώρων ξ_1, \dots, ξ_k που ικανοποιούν την $K \cap \xi_i \subseteq R(B_2^n \cap \xi_i)$ και επίσης την $\bigoplus \sum \xi_i = \mathbb{R}^n$, μπορούμε να ορίσουμε $u_1, \dots, u_t \in O(n)$, $t \leq 2k$, τέτοιους ώστε

$$\frac{1}{t} \sum_{j=1}^t u_j(K^\circ) \supseteq \frac{1}{R\sqrt{k}} B_2^n.$$

Λόγω δυϊσμού έχουμε $u_1^*(K) \cap \dots \cap u_t^*(K) \subseteq R\sqrt{k} B_2^n$, δηλαδή

$$r_{2k}(K) \leq \sqrt{k} R_k(K).$$

Χρησιμοποιώντας κλασικά αποτελέσματα της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας και το θεώρημα Borsuk-Ulam αποδεικνύουμε μια αντίστροφη ανισότητα: Έστω $t \geq 2$ ένας ακέραιος και $n \geq 2(t+1)$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n , η τυχαία $\lfloor \frac{n}{c_1 t} \rfloor$ -διάστατη τομή $K \cap E$ του K ικανοποιεί την

$$R(K \cap E) \leq c_2 \sqrt{t} r_t(K),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Συνεχίζουμε με το πρόβλημα του Knaster το οποίο διατυπώνεται ως εξής: Είναι σωστό ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ και κάθε επιλογή σημείων $x_1, \dots, x_k \in S^{n-1}$, όπου $k = n-m+1$, υπάρχει $U \in SO(n)$ τέτοιος ώστε $f(Ux_1) = \dots = f(Ux_k)$; Κίνητρο για το πρόβλημα του Knaster ήταν ένα θεώρημα του Hopf το οποίο δίνει καταφατική απάντηση στο πρόβλημα όταν

$k = 2$, γενικεύοντας έτσι το θεώρημα Borsuk-Ulam. Περιγράφουμε την απόδειξη του ακόλουθου αποτελέσματος του Kakutani: Έστω $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής πραγματική συνάρτηση. Τότε, υπάρχουν τρία σημεία P_1, P_2, P_3 της S^2 , κάθετα ανά δύο, τέτοια ώστε $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3)$. Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει στον \mathbb{R}^n αν υποθέσουμε ότι έχουμε n σημεία $x_1, \dots, x_n \in S^{n-1}$ τα οποία σχηματίζουν ορθοκανονική βάση (δηλαδή, το πρόβλημα του Knaster έχει καταφατική απάντηση σε αυτήν την πολύ ειδική περίπτωση).

Το πρόβλημα του Knaster σχετίζεται με το κλασικό θεώρημα του Dvoretzky το οποίο ισχυρίζεται ότι κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα έχει υπόχωρο «μεγάλης διάστασης» που είναι C -ισομορφικός με τον Ευκλείδειο χώρο, όπου C είναι μια απόλυτη σταθερά. Ο V. Milman βελτίωσε την αρχική εκτίμηση του Dvoretzky δείχνοντας το ακόλουθο θεώρημα: Έστω X ένας n -διάστατος χώρος με νόρμα και $\varepsilon \in (0, 1)$. Μπορούμε να βρούμε ακέραιο $k \geq c\varepsilon^2 \log n$ και έναν k -διάστατο υπόχωρο F του X τέτοιον ώστε $d(F, \ell_2^k) \leq 1 + \varepsilon$, όπου d είναι η απόσταση Banach-Mazur. Σε γεωμετρική γλώσσα, το παραπάνω διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής: Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n , τότε για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ μπορούμε να βρούμε $k \geq c\varepsilon^2 \log n$, έναν υπόχωρο $F \in G_{n,k}$, όπου $G_{n,k}$ είναι η πολλαπλότητα Grassmann όλων των k -διάστατων υποχώρων του \mathbb{R}^n , και ένα ελλειψοειδές \mathcal{E} στον F τέτοια ώστε

$$\mathcal{E} \subseteq K \cap F \subseteq (1 + \varepsilon)\mathcal{E}.$$

Το παράδειγμα του ℓ_∞^n δείχνει ότι η λογαριθμική εξάρτηση του k από το n είναι βέλτιστη αν σταθεροποιήσουμε μια μικρή τιμή του ε .

Η απόδειξη του Milman δείχνει ότι, για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$, κάθε n -διάστατος χώρος με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ έχει υπόχωρο F διάστασης

$$k \geq c_1 \varepsilon^2 n (M/b)^2$$

με $d(F, \ell_2^k) \leq 1 + \varepsilon$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, $b = \max\{\|x\| : x \in S^{n-1}\}$ και $M = \int_{S^{n-1}} \|x\| d\sigma(x)$. Η παράμετρος

$$k(X) = n(M/b)^2$$

είναι η λεγόμενη «χρίσιμη διάσταση» του X . Ο ακριβής τρόπος με τον οποίο συνδέονται μεταξύ τους οι τρεις παράμετροι n , ε και k , οι οποίες εμπλέκονται στο θεώρημα δεν έχει αποσαφηνιστεί. Είναι χρήσιμο να ορίσουμε μία νέα παράμετρο: Για δεδομένο $\varepsilon \in (0, 1)$ και για κάθε n -διάστατο χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ συμβολίζουμε με $k(X, \varepsilon)$ τον μεγαλύτερο ακέραιο k για τον οποίο υπάρχει k -διάστατος υπόχωρος του X ο οποίος είναι $(1 + \varepsilon)$ -Ευκλείδειος, και για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ ορίζουμε

$$k(n, \varepsilon) = \inf\{k(X, \varepsilon) : \dim(X) = n\}.$$

Το θεώρημα του Milman μας δίνει $k(n, \varepsilon) \geq c\varepsilon^2 \log n$, και ο Schechtman απέδειξε το ακόλουθο ισχυρότερο αποτέλεσμα: Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_0 > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$, κάθε $n \geq 1$ και κάθε n -διάστατο χώρο με νόρμα X , υπάρχουν

$$k \geq c_0 (\varepsilon / \log^2(\varepsilon^{-1})) \log n$$

και k -διάστατος υπόχωρος F του X τέτοια ώστε $d(F, \ell_2^k) \leq 1 + \varepsilon$.

Ο V. Milman παρατήρησε ότι καταφατική απάντηση στο πρόβλημα του Knaster θα είχε ως συνέπεια μια απόδειξη του θεωρήματος Dvoretzky με πολύ καλή εξάρτηση από το ε . Υποθέτοντας καταφατική απάντηση στο πρόβλημα του Knaster για $m = 1$ και κάθε n , μπορούμε να πάρουμε την εκτίμηση

$$k(X) \geq c(n, \varepsilon) \log n / \log(2/\varepsilon)$$

για κάθε n -διάστατο χώρο με νόρμα X , όπου $c(n, \varepsilon) \rightarrow 1$ όταν $n \rightarrow \infty$ και $\varepsilon \rightarrow 0$. Μάλιστα το ίδιο ισχύει, με μια ελαφρώς διαφορετική εκτίμηση, αν η εικασία είναι σωστή για πολύ μικρότερα δείγματα σημείων $\{x_i\}_{i=1}^{k_0}$: αρκεί να πάρουμε $k_0 \simeq n^\alpha$ για κάποιο σταθερό $\alpha > 0$.

Οι Kashin και Szarek απέδειξαν όμως ότι η απάντηση στο πρόβλημα του Knaster είναι αρνητική όταν $m = 1$, τουλάχιστον όταν το n είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό το αρνητικό αποτέλεσμα ισχύει και για τιμές του k που είναι κάπως μικρότερες από n , αλλά αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο να ισχύει κάποιο θεώρημα τύπου Knaster για $k \simeq n^\alpha$ και κάποια σταθερά $\alpha > 0$. Για να διατυπώσουμε το θεώρημα των Kashin και Szarek είναι χρήσιμο να εισαγάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Αν $d, n \in \mathbb{N}$ με $d \leq n$, και αν A είναι ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^d και $U: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια ισομετρία, τότε λέμε ότι η U είναι «εμφύτευση Knaster» του A στον ℓ_∞^n αν η $\|U(x)\|_\infty$ είναι σταθερή για $x \in A$. Με αυτήν την ορολογία, οι Kashin-Szarek απέδειξαν ότι για κάθε k στο \mathbb{N} υπάρχει $A = \{x_1, \dots, x_k\} \subset S^{k-1}$ τέτοιο ώστε αν $n \leq k \lfloor \log(k/2) \rfloor / 32$ τότε δεν υπάρχει εμφύτευση Knaster U του A στον ℓ_∞^n . Συνέπεια του θεωρήματος είναι ότι η $\|U(x_i)\|_\infty$ δεν μπορεί να είναι σταθερή αν $k = n$ και το n είναι αρκετά μεγάλο. Έτσι, η απάντηση στο πρόβλημα του Knaster είναι αρνητική για αρκετά μεγάλα n , ακόμα κι αν περιορίσουμε το ερώτημα στην κλάση των κυρτών συναρτήσεων. Περιγράφουμε το επιχείρημα των Kashin-Szarek, καθώς και ένα μεταγενέστερο σχετικό θεώρημα των Hinrichs-Richter.

Κλείνουμε την εργασία με ένα πιο πρόσφατο θεώρημα των Βαλέττα και Παούρη, το οποίο βελτιώνει την εκτίμηση του Schechtman για την εξάρτηση από το ε στο θεώρημα του Dvoretzky: Για κάθε χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ υπάρχει γραμμική εικόνα B της B_X τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ να έχουμε

$$k_r(B, \varepsilon) \geq c\varepsilon \log n / \log(1/\varepsilon).$$

Με άλλα λόγια, η τυχαία k -διάστατη τομή του B με $k \leq c\varepsilon \log n / \log(1/\varepsilon)$ είναι $(1 + \varepsilon)$ -σφαιρική με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - n^{-c\varepsilon}$. Η απόδειξη είναι τεχνική και μακροσκελής: χρησιμοποιεί την L^1 - L^2 ανισότητα του Talagrand, το θεώρημα Alon-Milman, και, για μία ακόμη φορά, το θεώρημα Borsuk-Ulam.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά τον επιβλέποντα καθηγητή μου Α. Γιαννόπουλο που πάντα στα προπτυχιακά και μεταπτυχιακά μαθήματα αποτελούσε πηγή έμπνευσης για εμένα, που μου πρότεινε ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα και αφιέρωσε τόσο προσωπικό του χρόνο για την εκπόνηση της εργασίας μου.

Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές μου Π. Δοδό και Ι. Εμμανουήλ που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου αλλά και την γιαγιά μου για την στήριξή τους και την αγάπη τους καθόλη την διάρκεια των σπουδών μου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοιχεία Αλγεβρικής Τοπολογίας

2.1 Τοπολογικοί χώροι

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε κάποιους βασικούς ορισμούς της Γενικής Τοπολογίας.

Ορισμός 2.1.1. Τοπολογικός χώρος είναι ένα ζεύγος (X, \mathcal{O}) , όπου X είναι ένα (συνήθως άπειρο) σύνολο και $\mathcal{O} \subseteq 2^X$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X . Τα μέλη της \mathcal{O} καλούνται ανοικτά σύνολα και ισχύει $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$. Επίσης, η τομή πεπερασμένων το πλήθος ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο και η αυθαίρετη ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

Για παράδειγμα, η κλασική τοπολογία του \mathbb{R} και γενικότερα του \mathbb{R}^d ορίζεται ως εξής: Ένα σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι ανοικτό αν για κάθε $x \in U$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε η $B_\varepsilon(x)$ να περιέχεται στο U . Ο ίδιος ορισμός ισχύει και σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο.

Υπόχωρος. Έστω (X, \mathcal{O}) τοπολογικός χώρος. Κάθε υποσύνολο $Y \subseteq X$ ορίζει έναν υπόχωρο, τον τοπολογικό χώρο $(Y, \{U \cap Y : U \in \mathcal{O}\})$.

Για παράδειγμα, έστω $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ αυθαίρετο σύνολο. Τότε τα ανοικτά σύνολα της τοπολογίας του υποχώρου που ορίζεται από το Y είναι ακριβώς οι τομές των ανοικτών συνόλων του \mathbb{R}^d με το Y .

Σύμβαση. Πάντα θα θεωρούμε ότι οι δοσμένοι τοπολογικοί χώροι είναι Hausdorff. Δηλαδή, για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα U και V ώστε $x \in U$ και $y \in V$.

Έστω (X_1, \mathcal{O}_1) και (X_2, \mathcal{O}_2) τοπολογικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : X_1 \rightarrow X_2$ λέγεται συνεχής αν και μόνο αν οι αντίστροφες εικόνες ανοικτών συνόλων είναι ανοικτά σύνολα. Δηλαδή, αν $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_1$ για κάθε $V \in \mathcal{O}_2$.

Σύμβαση. Πάντα θα θεωρούμε ότι όλες οι απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων είναι συνεχείς.

Δύο χώροι οι οποίοι «μετρικά» μπορεί να μοιάζουν διαφορετικοί, τοπολογικά μπορεί να είναι «ίδιοι». Αυτή η έννοια των «ίδιων τοπολογικά χώρων» ονομάζεται ομοιομορφισμός.

Ορισμός 2.1.2. Ένας ομοιομορφισμός των τοπολογικών χώρων (X_1, \mathcal{O}_1) και (X_2, \mathcal{O}_2) είναι μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ τέτοια ώστε για κάθε $U \subseteq X_1$ να ισχύει $\varphi(U) \in \mathcal{O}_2$ αν και μόνο αν $U \in \mathcal{O}_1$. Δηλαδή, πρέπει οι φ και φ^{-1} να είναι συνεχείς.

Χρειάζεται προσοχή στο ότι αν μια συνάρτηση f μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων είναι ένα προς ένα, επί και συνεχής, αυτό δεν εξασφαλίζει ότι η f^{-1} είναι συνεχής. Επομένως πρέπει να ελέγχουμε τόσο την f όσο και την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.

Ένα σύνολο F σε έναν τοπολογικό χώρο X λέγεται κλειστό αν το συμπλήρωμα του είναι ανοικτό. Η κλειστή θήκη ενός συνόλου $Y \subseteq X$ συμβολίζεται με $\text{cl}_X(Y)$ και είναι η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων του X που περιέχουν το Y . Για $Y \subseteq X = \mathbb{R}^d$ έχουμε $\text{cl}(Y) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, Y) = 0\}$, όπου $\text{dist}(x, Y) := \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$. Το σύνορο του Y είναι το σύνολο $\partial(Y) = \text{cl}(Y) \cap \text{cl}(X \setminus Y)$ και το εσωτερικό του Y είναι το σύνολο $\text{int}(Y) := Y \setminus \partial(Y)$.

Ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}^d$ λέγεται συμπαγές αν και μόνο αν το X είναι κλειστό και φραγμένο. Γενικά, ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται συμπαγής αν για κάθε ανοικτό κάλυμμα \mathcal{U} του X με $X = \bigcup \mathcal{U}$ υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ με $X = \bigcup \mathcal{U}_0$. Τέλος, σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υποακολουθία.

Αν ο X είναι συμπαγής και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε η f έχει ελάχιστο, δηλαδή, υπάρχει $x \in X$ ώστε $f(x) \leq f(y)$ για κάθε $y \in X$. Επίσης, κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε συμπαγή μετρικό χώρο είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2.2 Ομοτοπία

Στην Αλγεβρική Τοπολογία, δύο χώροι θεωρούνται «ίδιοι» κάτω από την έννοια της ομοτοπίας. Πριν δούμε όμως την έννοια της ομοτοπίας, ας δούμε πρώτα μια πιο εύκολη έννοια, την συστέλλουσα παραμόρφωση.

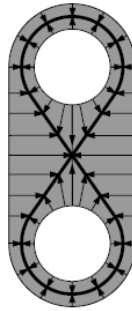
Ορισμός 2.2.1. Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq X$, τότε συστέλλουσα παραμόρφωση του X στο Y είναι μια οικογένεια συνεχών απεικονίσεων $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$, $f_t : X \rightarrow X$ (όπου μπορούμε να βλέπουμε την παράμετρο t σαν χρόνο) ώστε:

- f_0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση του X ,
- $f_t(y) = y$ για κάθε $y \in Y$ και για κάθε $t \in [0, 1]$,
- $f_1(X) = Y$.

Επειδή η εξάρτηση των απεικονίσεων από τον χρόνο t πρέπει να είναι συνεχής, συχνά ορίζουμε απεικόνιση $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ με $F(x, t) = f_t(x)$ συνεχής.

Αυτό σημαίνει ότι για δοθέντα $x \in X$, $t \in [0, 1]$ και για αυθαίρετα μικρή περιοχή V του $F(x, t)$, υπάρχουν $\delta > 0$ και περιοχή U του x ώστε $F(x', t') \in V$ για κάθε $x \in U$ και για κάθε $t' \in (t - \delta, t + \delta)$. Επίσης, $F(x, 0) = x$ για κάθε $x \in X$, $F(y, t) = y$ για κάθε $y \in Y$ και για κάθε $t \in [0, 1]$, $F(x, 1) \in Y$ για κάθε $x \in X$. Αν λοιπόν μια τέτοια συστέλλουσα παραμόρφωση υπάρχει, λέμε ότι το Y είναι συστολή μέσω παραμόρφωσης του X .

- Για παράδειγμα, το σχήμα 8 είναι συστολή μέσω παραμόρφωσης του παρακάτω σχήματος με τις δύο τρύπες:



Δηλαδή, η γκρι περιοχή μπορεί με συνεχή τρόπο να συσταλεί στο σχήμα 8 ενόσω τα σημεία του 8 μένουν σταθερά.

- Πιο κατανοητό παράδειγμα είναι η συστέλλουσα παραμόρφωση ενός δακτυλίου $R = \{re^{i\vartheta} \mid 1 \leq r \leq 2\}$ στον κύκλο $C = \{e^{i\vartheta}\} \subseteq R$ με $F : R \times [0, 1] \rightarrow R$, όπου

$$F(re^{i\vartheta}, t) = (t + (1 - t)r)e^{i\vartheta}.$$

Είναι

$$\begin{aligned} F(re^{i\vartheta}, 0) &= re^{i\vartheta} \\ F(re^{i\vartheta}, 1) &= e^{i\vartheta} \in C \\ F(e^{i\vartheta}, t) &= e^{i\vartheta}. \end{aligned}$$

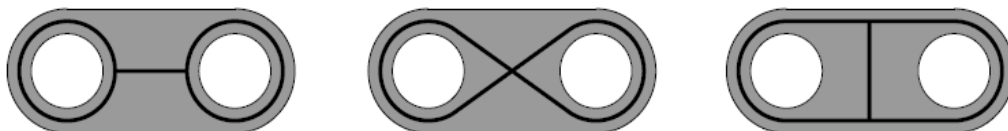
Ορισμός 2.2.2. Δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : X \rightarrow Y$ λέγονται ομοτοπικές (γράφουμε $f \sim g$) αν υπάρχει «μεταξύ τους» μια οικογένεια $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ απεικονίσεων $f_t : X \rightarrow Y$, που εξαρτάται με συνεχή τρόπο από το t , έτσι ώστε $f_0 = f$ και $f_1 = g$.

Η συνάρτηση $F(x, t) := f_t(x)$ είναι συνεχής $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ και καλείται ομοτοπία από την f στην g , με $F(x, 0) = f(x)$ και $F(x, 1) = g(x)$.

Ορισμός 2.2.3. Δύο χώροι X και Y λέγονται ομοτοπικά ισοδύναμοι αν υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow X$ ώστε η $g \circ f$ να είναι ομοτοπική με την id_X και η $f \circ g$ να είναι ομοτοπική με την id_Y , και τότε γράφουμε $X \simeq Y$.

Ένας χώρος που είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με ένα σημείο λέγεται συσταλτός.

Αν ο Y είναι συστολή μέσω παραμόρφωσης του X , τότε οι X και Y είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι. Όμως, η συστολή μέσω παραμόρφωσης δεν είναι σχέση ισοδυναμίας. Για να είναι δύο χώροι ομοτοπικά ισοδύναμοι απαιτούμε να υπάρχει ένας τρίτος χώρος Z έτσι ώστε οι X και Y να είναι ομοιομορφικοί με συστολές μέσω παραμορφώσεως του Z . Δεν είναι προφανές ότι αυτή η σχέση είναι μεταβατική, όμως θα το δούμε παρακάτω. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα οι τρεις χώροι είναι όλοι ομοτοπικά ισοδύναμοι.



Πρόταση 2.2.4. (i) $X \simeq X$.

(ii) $X \simeq Y \implies Y \simeq X$.

(iii) Αν $X \simeq Y$ και $Y \simeq Z$ τότε $X \simeq Z$.

Απόδειξη. (i) Αν πάρουμε $f = g = id_X$ έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Βγαίνει από τη συμμετρικότητα του ορισμού.

(iii) Αφού $X \simeq Y$ και $Y \simeq Z$ έχουμε $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Z$ και $Z \xrightarrow{q} Y \xrightarrow{g} X$, δηλαδή υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ ώστε

$$g \circ f \sim id_X, \quad f \circ g \sim id_Y,$$

και υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $p : Y \rightarrow Z$, $q : Z \rightarrow Y$ ώστε

$$p \circ q \sim id_Y, \quad q \circ p \sim id_Z.$$

Άρα έχουμε τις ομοτοπίες

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow X \text{ από την } g \circ f \text{ στην } id_X,$$

$$G : Y \times [0, 1] \rightarrow Y \text{ από την } f \circ g \text{ στην } id_Y,$$

$$P : Y \times [0, 1] \rightarrow Y \text{ από την } g \circ p \text{ στην } id_Y,$$

$$Q : Z \times [0, 1] \rightarrow Z \text{ από την } p \circ q \text{ στην } id_Z.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $X \simeq Z$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $p \circ f : X \rightarrow Z$ είναι ομοτοπική με την $g \circ q : Z \rightarrow X$. Άρα πρέπει να δείξουμε ότι $(p \circ f) \circ (g \circ q) \sim id_X$ και $(g \circ q) \circ (p \circ f) \sim id_Z$.

Ορίζουμε $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ με

$$H(x, t) = \begin{cases} g(P(f(x), 2t)) & , \text{ αν } 0 \leq t \leq 1/2 \\ F(x, 2t - 1) & , \text{ αν } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

- Για $t = 0$ έχουμε $H(x, 0) = g(P(f(x), 0)) = g(q \circ p(f(x))) = g(q(p(f(x))))$.

- Για $t = 1$ έχουμε $H(x, 1) = F(x, 1) = x$.

- Για $t = 1/2$ έχουμε $H(x, 1/2) = g(P(f(x), 1)) = g(f(x))$ και $H(x, 1/2) = F(x, 0) = g(f(x))$.

Άρα, δείξαμε ότι $(g \circ q) \circ (p \circ f) \sim id_Z$.

Ομοίως, ορίζουμε $L : Z \times [0, 1] \rightarrow Z$ με

$$L(z, t) = \begin{cases} p(G(q(z), 2t)) & , \text{ αν } 0 \leq t \leq 1/2 \\ Q(z, 2t - 1) & , \text{ αν } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

- Για $t = 0$ έχουμε $L(z, 0) = p(G(q(z), 0)) = p(f(g(q(z))))$.

- Για $t = 1$ έχουμε $L(z, 1) = Q(z, 1) = z$.

- Για $t = 1/2$ έχουμε $L(z, 1/2) = p(G(q(z), 1)) = p(q(z))$ και $L(z, 1/2) = Q(z, 0) = p(q(z))$.

Άρα, δείξαμε ότι $(p \circ f) \circ (g \circ q) \sim id_X$. Άρα, $X \simeq Z$. □

2.3 Γεωμετρικά simplicial complexes

Για να μελετήσουμε και να χειριστούμε περίπλοκα σχήματα, είναι βολικό να τα δούμε ως ένωση «απλών οικοδομικών υλικών». Αυτά τα «οικοδομικά υλικά» είναι απλά γεωμετρικά αντικείμενα όπως σημεία, ευθύγραμμα τμήματα, τρίγωνα, τετράεδρα και κυρτά πολύτοπα, τα οποία ονομάζουμε *simplices*.

Ορισμός 2.3.1. Έστω $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$. Αυτά λέγονται *αφφινικά εξαρτημένα* αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a_0, a_1, \dots, a_k , όχι όλοι μηδέν, ώστε $\sum_{i=0}^k a_i v_i = 0$ και $\sum_{i=0}^k a_i = 0$. Διαφορετικά, τα v_0, v_1, \dots, v_k λέγονται *αφφινικά ανεξάρτητα*.

Αφφινική ανεξαρτησία για δύο σημεία σημαίνει ότι δεν ταυτίζονται, για τρία σημεία ότι δεν είναι συνευθειακά, για τέσσερα σημεία ότι δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, κλπ. Αντίστροφα, ένα επίπεδο ορίζεται από τρία αφφινικά ανεξάρτητα σημεία, κλπ.

Λήμμα 2.3.2. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) τα $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα,
- (ii) τα $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0 \in \mathbb{R}^d$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα,
- (iii) τα $(1, v_0), (1, v_1), \dots, (1, v_k) \in \mathbb{R}^{d+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη. (i) \implies (ii) Αν έχουμε $a_1(v_1 - v_0) + a_2(v_2 - v_0) + \dots + a_k(v_k - v_0) = 0$ τότε

$$(-a_1 - a_2 - \dots - a_k)v_0 + a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k = 0,$$

άρα $a_1 = \dots = a_k = 0$ (και $-(a_1 + \dots + a_k) = 0$) διότι $-(a_1 + \dots + a_k) + \sum_{i=1}^k a_i = 0$ και τα v_0, v_1, \dots, v_k είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Άρα, τα $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(ii) \implies (i) Έστω a_0, a_1, \dots, a_k , όχι όλοι μηδέν, ώστε $\sum_{i=0}^k a_i = 0$ και $a_0v_0 + a_1v_1 + \dots + a_kv_k = 0$. Τότε,

$$a_1(v_1 - v_0) + a_2(v_2 - v_0) + \dots + a_k(v_k - v_0) + (a_0 + a_1 + \dots + a_k)v_0 = 0,$$

και αφού $\sum_{i=0}^k a_i = 0$ έχουμε

$$a_1(v_1 - v_0) + a_2(v_2 - v_0) + \dots + a_k(v_k - v_0) = 0.$$

Επίσης, οι a_1, \dots, a_k δεν είναι όλοι μηδέν, αλλιώς θα είχαμε και $a_0 = 0$. Αυτό είναι άτοπο διότι τα $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα, τα v_0, v_1, \dots, v_k είναι αφφινικά ανεξάρτητα.

(i) \implies (iii) Έστω a_0, a_1, \dots, a_k , όχι όλοι μηδέν, ώστε

$$a_0(1, v_0) + a_1(1, v_1) + \dots + a_k(1, v_k) = (0, 0).$$

Τότε,

$$(a_0 + a_1 + \dots + a_k, a_0v_0 + a_1v_1 + \dots + a_kv_k) = (0, 0),$$

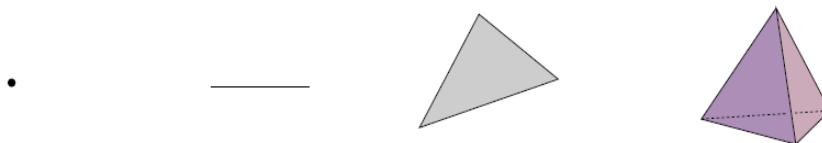
δηλαδή $\sum_{i=0}^k a_i = 0$ και $\sum_{i=0}^k a_i v_i = 0$. Αφού οι a_i δεν είναι όλοι μηδέν και τα v_0, v_1, \dots, v_k είναι αφφινικά ανεξάρτητα, έχουμε άτοπο. Άρα, τα $(1, v_0), (1, v_1), \dots, (1, v_k)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(iii) \implies (i) Έστω ότι υπάρχουν a_i , όχι όλοι μηδέν, με $\sum_{i=0}^k a_i = 0$ και $\sum_{i=0}^k a_i v_i = 0$. Γι' αυτά τα a_i έχουμε

$$a_0(1, v_0) + a_1(1, v_1) + \dots + a_k(1, v_k) = (0, 0),$$

το οποίο είναι άτοπο διότι τα $(1, v_0), \dots, (1, v_k)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα, τα v_i είναι αφινικά ανεξάρτητα. \square

Ορισμός 2.3.3. *Simplex* σ είναι η κυρτή θήκη ενός πεπερασμένου και αφινικά ανεξάρτητου συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Τα σημεία του A ονομάζονται *κορυφές* του σ και η *διάσταση* του σ είναι $\dim(\sigma) := |A| - 1$. Άρα, ένα k -simplex έχει $k + 1$ κορυφές.



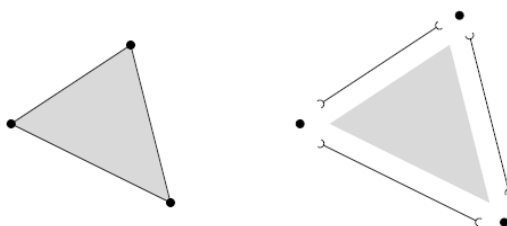
Ορισμός 2.3.4. Η κυρτή θήκη ενός τυχόντος υποσυνόλου των κορυφών ενός simplex σ ονομάζεται *έδρα* του σ . Κάθε έδρα ενός simplex είναι simplex. Δηλαδή, αν v_0, \dots, v_k είναι οι κορυφές ενός k -simplex σ και $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_r}\} \subseteq \{v_0, \dots, v_k\}$ τότε τα v_{i_0}, \dots, v_{i_r} ορίζουν ένα r -simplex που ονομάζεται r -διάστατη έδρα του σ .

Ισχύει ακόμη: Οι μηδενοδιάστατες έδρες ενός k -simplex σ είναι οι $k + 1$ κορυφές του. Το ίδιο το σ αποτελεί έδρα του εαυτού του καθώς και το κενό σύνολο.

Οι r -διάστατες έδρες ενός k -simplex με $r < k$ ονομάζονται *γνήσιες*. Για κάθε κορυφή v_i του σ , η έδρα που παράγεται από τα $v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ καλείται *έδρα απέναντι* από το v_i .

Κάθε έδρα που είναι $(k - 1)$ -simplex καλείται *συνοριακή έδρα*. Η ένωση αυτών καλείται *σύνορο* του σ και συμβολίζεται με $\partial(\sigma)$. Το συμπλήρωμα του $\partial(\sigma)$ στο σ , δηλαδή το $\text{int}(\sigma) = \sigma \setminus \partial(\sigma)$, είναι το εσωτερικό του σ και συχνά καλείται *ανοικτό simplex*. Ουσιαστικά το εσωτερικό του σ προκύπτει αν αφαιρέσουμε από το σ όλες τις μικρότερης διάστασης έδρες του.

Για παράδειγμα, (α) οι έδρες ενός τριγώνου (ενός 2-simplex) είναι το ίδιο το τρίγωνο, οι τρεις ακμές του, οι τρεις κορυφές του και το κενό σύνολο, (β) αν $\{a_0\}$ είναι ένα 0-simplex τότε $\partial(\{a_0\}) = \emptyset$ και $\text{int}(\{a_0\}) = \{a_0\}$.



Ορισμός 2.3.5. Μια μη κενή οικογένεια Δ από simplices λέγεται *simplicial complex* αν ισχύουν τα εξής:

- (1) Κάθε έδρα ενός simplex $\sigma \in \Delta$ είναι επίσης simplex του Δ . Δηλαδή, το Δ περιέχει όλες τις έδρες όλων των στοιχείων του.
- (2) Η τομή $\sigma_1 \cap \sigma_2$, όπου $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$, είναι έδρα και του σ_1 και του σ_2 .

Η ένωση όλων των simplices ενός simplicial complex Δ καλείται *πολύεδρο* (ή *στερεό*) του Δ και συμβολίζεται με $\|\Delta\|$.

Η διάσταση ενός simplicial complex Δ είναι η μέγιστη από τις διαστάσεις των simplices που περιέχει το Δ , δηλαδή $\dim(\Delta) := \max\{\dim(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$ και το Δ περιέχει simplices διαστάσεων μικρότερων ή ίσων από $\dim(\Delta)$.

Το σύνολο κορυφών του Δ συμβολίζεται με $V(\Delta)$ και είναι η ένωση όλων των κορυφών των στοιχείων του Δ .

Για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$ όπου $n = \dim(\Delta)$, το σύνολο των i -simplices του Δ με $i \leq k$ ονομάζεται k -σκελετός του Δ και συμβολίζεται με Δ^k . Για παράδειγμα, ένα σύνολο που αποτελείται από ένα simplex σ και όλες τις έδρες του σ είναι ένα simplicial complex και το στερεό του είναι το σ .

Για ένα simplicial complex που αποτελείται μόνο από το κενό simplex, ορίζουμε ότι έχει διάσταση -1 . Τα 0-διάστατα simplicial complexes είναι σύνολα σημείων και τα 1-διάστατα simplicial complexes είναι γραφήματα που οι ακμές τους δεν τέμνονται.



Θα ασχοληθούμε μόνο με πεπερασμένα simplicial complexes.

Όπως και στο simplex, μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό όλων των simplices ενός simplicial complex Δ , το οποίο αποτελεί μια διαμέριση του πολύεδρου $\|\Delta\|$. Έτσι, για κάθε $x \in \|\Delta\|$ υπάρχει ακριβώς ένα $\sigma \in \Delta$ που περιέχει το x στο εσωτερικό του και ονομάζεται *φορέας* του x (συμβολίζεται με $\text{supp}(x)$).

Λήμμα 2.3.6. Το σύνολο όλων των εδρών ενός simplex είναι simplicial complex.

Απόδειξη. Έστω $V \subset \mathbb{R}^d$ αφηρημένα ανεξάρτητο και $F, G \subseteq V$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\text{conv}(F) \cap \text{conv}(G) = \text{conv}(F \cap G)$. Ο εγκλεισμός $\text{conv}(F \cap G) \subseteq \text{conv}(F) \cap \text{conv}(G)$ ισχύει διότι $A \subseteq B \Rightarrow \text{conv}(A) \subseteq \text{conv}(B)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\text{conv}(F) \cap \text{conv}(G) \subseteq \text{conv}(F \cap G)$.

Έστω $x \in \text{conv}(F) \cap \text{conv}(G)$. Τότε,

$$x = \sum_{u \in F} a_u \cdot u = \sum_{v \in G} b_v \cdot v \quad \text{με } a_u, b_v \geq 0 \quad \text{και} \quad \sum_{u \in F} a_u = \sum_{v \in G} b_v = 1.$$

Αφαιρώντας, έχουμε

$$\sum_{u \in F \setminus G} a_u \cdot u - \sum_{v \in G \setminus F} b_v \cdot v + \sum_{w \in F \cap G} (a_w - b_w)w = 0.$$

Αφού το $F \cup G$ είναι αφηρικώς ανεξάρτητο, πρέπει οι συντελεστές $a_u, u \in F \setminus G$ και $b_v, v \in G \setminus F$ να είναι ίσοι με 0 και $a_w = b_w$ για κάθε $w \in F \cap G$. Έπεται ότι $\sum_{w \in F \cap G} = 1$ και

$$x = \sum_{w \in F \cap G} a_w \cdot w,$$

άρα $x \in \text{conv}(F \cap G)$. □

Συμβολισμός. Ένα simplicial complex που αποτελείται από ένα αυθαίρετο n -διάστατο simplex G και όλες τις έδρες του θα συμβολίζεται με G^n .

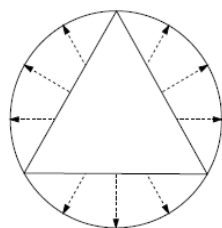
Ορισμός 2.3.7. Ένα υπο-simplicial complex ενός συμπλόκου Δ είναι ένα υποσύνολο του Δ που είναι από μόνο του simplicial complex.

Για παράδειγμα, ένα υπο-simplicial complex ενός συμπλόκου Δ είναι ο k -σκελετός $\Delta^{\leq k}$.

2.4 Τριγωνισμοί

Ορισμός 2.4.1. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ένα simplicial complex Δ καλείται *τριγωνισμός* του X αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : X \rightarrow \|\Delta\|$.

Ο πιο απλός τριγωνισμός της σφαίρας S^{n-1} είναι το σύνορο ενός n -simplex αφαιρώντας τη μοναδική n -διάστατη έδρα και διατηρώντας όλες τις γνήσιες r -διάστατες έδρες, $r < n$.



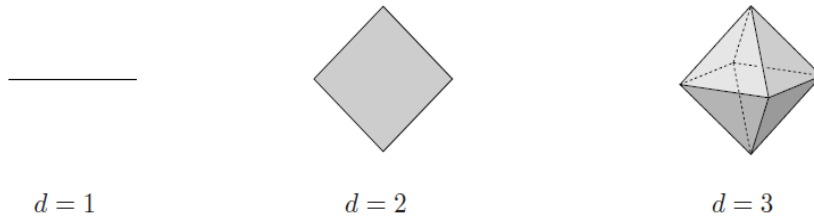
«Ουσιαστικά θέλουμε ο τοπολογικός χώρος μας να είναι ομοιομορφικός με έναν χώρο που είναι φτιαγμένος από απλά οικοδομικά υλικά (simplices)».

Άλλοι τριγωνισμοί της σφαίρας προκύπτουν από τα κυρτά πολύτοπα.

Ορισμός 2.4.2. Ένα κυρτό πολύτοπο $P \subseteq \mathbb{R}^d$ καλείται simplicial αν όλες οι γνήσιες έδρες του είναι simplices. Για παράδειγμα, για τα 3-διάστατα κυρτά πολύτοπα πρέπει οι 2-διάστατες έδρες τους να είναι τρίγωνα.

Αν P είναι ένα κυρτό πολύτοπο διάστασης d , τότε το ∂P είναι ομοιομορφικό με την S^{d-1} . Σημαντικοί και συμμετρικοί τριγωνισμοί της S^{d-1} προκύπτουν από cross-polytopes.

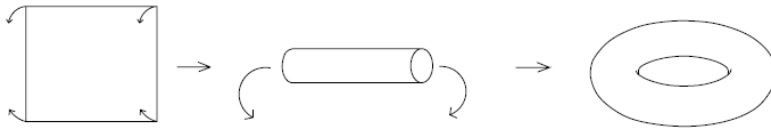
Ορισμός 2.4.3. Το d -διάστατο cross-polytope είναι η κυρτή θήκη των διανυσμάτων της συνήθους ορθοκανονικής βάσης και των αντιθέτων τους. Μπορούμε επίσης να το δούμε ως τη μοναδιαία μπάλα $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq 1\}$, όπου $\|\cdot\|_1$ είναι η ℓ_1 -νόρμα.



Παράδειγμα βασικού τριγωνισμού του τρισδιάστατου κύβου I^3 από πέντε 3-διάστατα simplices:

$$\{0, 1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 7\}, \{2, 4, 6, 7\}, \{1, 2, 4, 7\} \text{ και } \{1, 4, 5, 7\}.$$

Στη σύγχρονη αλγεβρική τοπολογία, τα simplicial complexes θεωρούνται «παλιομοδίτικα», διότι αν επιτρέψουμε διαφορετικούς τρόπους «κολλήματος» των «οικοδομικών υλικών» μπορούμε να περιγράψουμε πιο «οικονομικά» τους χώρους. Για παράδειγμα, το τετράγωνο στον \mathbb{R}^3 γίνεται τόρος,



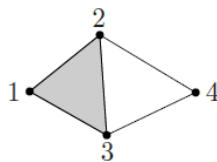
ενώ για τον τριγωνισμό του τόρου απαιτούνται αρκετά simplices.

2.5 Αφηρημένα simplicial complexes

Θα εισαγάγουμε ένα αντικείμενο της Συνδυαστικής που ονομάζεται αφηρημένο simplicial complex. Για να το ξεχωρίσουμε από τα simplicial complexes που είδαμε στην Παράγραφο 2.3, θα καλούμε εκείνα γεωμετρικά simplicial complexes. Ωστόσο, δεν θα τηρήσουμε τον διαχωρισμό τους και θα δούμε ότι ένα αφηρημένο complex και ένα γεωμετρικό complex είναι ουσιαστικά δύο διαφορετικές περιγραφές του ίδιου αντικειμένου.

Ορισμός 2.5.1. Ένα αφηρημένο simplicial complex είναι ένα ζεύγος (V, K) όπου V σύνολο και $K \subseteq 2^V$ κλειστό ως προς υποσύνολα, δηλαδή αν $F \in K$ και $G \subseteq F$ τότε $G \in K$. Τα σύνολα του K ονομάζονται αφηρημένα simplices. Η διάσταση του K είναι ο αριθμός $\dim(K) := \max\{|F| - 1 : F \in K\}$.

Κάθε γεωμετρικό complex Δ ορίζει ένα αφηρημένο complex. Τα σημεία του αφηρημένου complex είναι κορυφές των simplices του Δ , οπότε θέτουμε $V := V(\Delta)$ και τα σύνολα του αφηρημένου complex είναι τα σύνολα κορυφών των simplices του Δ . Το ζεύγος (V, K) που προκύπτει έτσι, είναι αφηρημένο complex.



Στο παράδειγμα, $V = \{1, 2, 3, 4\}$ και

$$K = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \emptyset\}.$$

Σε αυτή την κατάσταση, το Δ καλείται γεωμετρική υλοποίηση του K , και το πολύεδρο $\|\Delta\|$ του Δ λέγεται (επίσης) πολύεδρο του K .

Κάθε αφηρημένο complex (V, K) όπου V πεπερασμένο, έχει γεωμετρική υλοποίηση. Αν $n := |V| - 1$ ορίζουμε το V να είναι το σύνολο κορυφών ενός n -διάστατου simplex G^n . Ορίζουμε ως subcomplex του G^n το $\Delta := \{\text{conv}(F) : F \in K\}$. Αυτό είναι ένα γεωμετρικό complex. Άρα, ένα αφηρημένο complex με $n + 1$ κορυφές μπορεί να υλοποιηθεί στον \mathbb{R}^n (πιο κάτω θα δούμε ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα).

Τώρα, θα δούμε την πολύ σημαντική έννοια της simplicial απεικόνισης, που είναι το αντίστοιχο της συνεχούς απεικόνισης στη Συνδυαστική.

Ορισμός 2.5.2. Έστω K και L δύο αφηρημένα complexes. Simplicial απεικόνιση του K στο L είναι μια συνάρτηση $f : V(K) \rightarrow V(L)$ που απεικονίζει simplices σε simplices, δηλαδή $f(F) \in L$ αν $F \in K$.

Μια 1-1 και επί simplicial απεικόνιση που και η αντίστροφη της είναι simplicial, ονομάζεται ισομορφισμός των αφηρημένων complexes. Αν τα K και L είναι ισόμορφα, γράφουμε $K \simeq L$ και ουσιαστικά έχουμε τις «ίδιες» οικογένειες συνόλων με διαφορετικά ονόματα κορυφών.

Μια τυχούσα simplicial απεικόνιση μπορεί να απεικονίζει ένα k -simplex K σε ένα ℓ -simplex L με $\ell \leq k$.

Ορισμός 2.5.3. Έστω Δ_1 και Δ_2 γεωμετρικά simplicial complexes, και έστω K_1 και K_2 τα αντίστοιχα αφηρημένα simplicial complexes, και $f : V(K_1) \rightarrow V(K_2)$ simplicial απεικόνιση του K_1 στο K_2 . Ορίζουμε απεικόνιση $\|f\| : \|\Delta_1\| \rightarrow \|\Delta_2\|$, την αφηρητική επέκταση της f , επεκτείνοντας την f αφηρητικά στα εσωτερικά των simplices του Δ_1 ως εξής: αν $\sigma = \text{supp}(x) \in \Delta_1$ και v_0, v_1, \dots, v_k είναι οι κορυφές του σ , τότε το x γράφεται (μοναδικά) ως κυρτός συνδυασμός $x = \sum_{i=0}^k a_i v_i$ με $a_i \geq 0$ για κάθε i και $\sum_{i=0}^k a_i = 1$, και έτσι έχουμε

$$\|f\|(x) = \sum_{i=0}^k a_i f(v_i).$$

Παρατήρηση. (1) Το x γράφεται μονοσήμαντα ως κυρτός συνδυασμός των v_i . Πράγματι, μια τέτοια αναπαράσταση υπάρχει διότι $x \in \text{conv}\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$, και έστω προς άτοπο ότι υπάρχουν διαφορετικά $a_i, b_i \geq 0$ με $\sum_{i=0}^k a_i = \sum_{i=0}^k b_i = 1$ ώστε

$$x = \sum_{i=0}^k a_i v_i \quad \text{και} \quad x = \sum_{i=0}^k b_i v_i.$$

Τότε, αφαιρώντας έχουμε

$$\sum_{i=0}^k (a_i - b_i) v_i = 0 \quad \text{και} \quad \sum_{i=0}^k (a_i - b_i) = 0$$

ενώ δεν ισχύει $a_i = b_i$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, k$. Άτοπο, αφού τα v_i , $i = 0, 1, \dots, k$ είναι αφηρικά ανεξάρτητα.

(2) Η απεικόνιση $\|f\|$ είναι καλά ορισμένη γιατί το σύνολο $\{f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ είναι πάντα το σύνολο κορυφών ενός simplex του Δ_2 .

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση που δεν θα αποδείξουμε.

Πρόταση 2.5.4. Για κάθε simplicial απεικόνιση f όπως στον Ορισμό 2.5.3, η $\|f\|$ είναι συνεχής απεικόνιση $\|\Delta_1\| \rightarrow \|\Delta_2\|$. Αν η f είναι 1-1 τότε και η $\|f\|$ είναι 1-1, και αν η f είναι ισομορφισμός τότε η $\|f\|$ είναι ισομορφισμός.

Συνοψίζοντας, κάθε πεπερασμένη οικογένεια συνόλων η οποία είναι κλειστή ως προς υποσύνολα, μπορεί να θεωρηθεί ως αφηρημένο complex που ορίζει μοναδικά ως προς ισομορφισμό έναν τοπολογικό χώρο, το πολύεδρο που προκύπτει από την γεωμετρική υλοποίηση.

Simplicial απεικονίσεις μεταξύ complexes δίνουν συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ των αντίστοιχων τοπολογικών χώρων. Αντιστρόφως, ένας τοπολογικός χώρος που τριγωνοποιείται (βλ. Ορισμός 2.4.1) μπορεί να περιγραφεί από ένα αφηρημένο complex.

Σύμβαση: Στη συνέχεια, όταν γράφουμε simplicial complex θα εννοούμε αφηρημένο complex και θα μιλάμε για το πολύεδρο $\|\Delta\|$ ενός αφηρημένου complex K . Επίσης, θα χρησιμοποιούμε τοπολογικές έννοιες όπως «το K είναι συσταλτό» αντί για «το $\|K\|$ είναι συσταλτό».

2.6 Διάσταση των γεωμετρικών υλοποιήσεων

Θεώρημα 2.6.1 (θεώρημα γεωμετρικής υλοποίησης). Κάθε πεπερασμένο d -διάστατο complex K έχει γεωμετρική υλοποίηση στον \mathbb{R}^{2d+1} .

Για $d = 1$ το θεώρημα ουσιαστικά μας λέει ότι κάθε γραφημα μπορεί να αναπαρασταθεί στον \mathbb{R}^3 με έδρες ευθύγραμμα τμήματα.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα θα χρειαστούμε κάποια βοηθητικά αποτελέσματα.

Λήμμα 2.6.2. Αν το K είναι complex και $f : V(K) \rightarrow \mathbb{R}^d$ είναι μια 1-1 απεικόνιση τέτοια ώστε το $f(F \cup G)$ να είναι αφηρικά ανεξάρτητο για κάθε $F, G \in K$, τότε η αντιστοίχιση

$$F \mapsto \sigma_F := \text{conv}(f(F))$$

δίνει μια γεωμετρική υλοποίηση του K στον \mathbb{R}^d .

Απόδειξη. Αφού το $f(F \cup G)$ είναι αφηρικά ανεξάρτητο, η κυρτή θήκη $\text{conv}(f(F \cup G))$ είναι simplex με σύνολο κορυφών το $f(F \cup G)$. Τότε, τα σ_F και σ_G θα είναι δύο έδρες του και από το Λήμμα 2.3.7 θα έχουμε $\sigma_F \cap \sigma_G = \sigma_{F \cap G}$, άρα πράγματι παίρνουμε μια γεωμετρική υλοποίηση του K . \square

Ορισμός 2.6.3. Η καμπύλη $\{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ με $\gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$ είναι η καμπύλη των ροπών στον \mathbb{R}^d .

Λήμμα 2.6.4. Κανένα υπερεπίπεδο δεν τέμνει την καμπύλη των ροπών $\gamma \subset \mathbb{R}^d$ περισσότερες από d φορές. Συνεπώς, κάθε σύνολο από $d + 1$ διαφορετικά σημεία της γ είναι αφηρικά ανεξάρτητο. Επίσης, αν η γ τέμνει ένα υπερεπίπεδο h σε d διαφορετικά σημεία, τότε διασχίζει το h από τη μία στην άλλη πλευρά, σε κάθε τομή.

Απόδειξη. Ένα υπερεπίπεδο h έχει εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d = b$, με $(a_1, \dots, a_d) \neq 0$. Αν ένα σημείο $\gamma(t)$ ανήκει στο h τότε $a_1t^1 + a_2t^2 + \dots + a_dt^d = b$. Άρα, τα σημεία τομής της γ με το h αντιστοιχούν στις ρίζες του πολυωνύμου

$$p(t) = \left(\sum_{i=1}^d a_i t^i \right) - b$$

που έχει βαθμό το πολύ d . Ένα τέτοιο πολυώνυμο έχει το πολύ d ρίζες, άρα και η γ τέμνει το h το πολύ d φορές.

Αν το πολυώνυμο έχει d διαφορετικές ρίζες, δηλαδή η γ τέμνει το h σε d διαφορετικά σημεία, τότε το πολυώνυμο αλλάζει συνεχώς πρόσημο, άρα η γ περνάει από τον έναν ημίχωρο στον άλλον σε κάθε τομή. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.1. Έστω $f : V(K) \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε οι κορυφές του K να αντιστοιχίζονται σε διαφορετικά σημεία της καμπύλης των ροπών γ στον \mathbb{R}^{2d+1} . Τότε, για $F, G \in K$ έχουμε $|F \cup G| \leq (d+1) + (d+1) = 2d+2$ και άρα, από το Λήμμα 2.6.4, τα αντίστοιχα σημεία του $f(F \cup G)$ είναι αφηνικά ανεξάρτητα. Από το Λήμμα 2.6.2 έχουμε το ζητούμενο. \square

2.7 Simplicial complexes και μερικώς διατεταγμένα σύνολα

Υπενθυμίζουμε ότι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο είναι ένα ζεύγος (P, \leq) όπου P είναι ένα σύνολο και \leq είναι μια διμελής σχέση με τις ιδιότητες

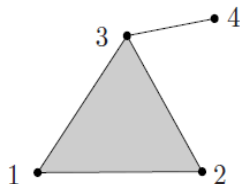
- $x \leq x$ για κάθε $x \in P$,
- αν $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$, όπου $x, y, z \in P$,
- αν $x \leq y$ και $y \leq x$ τότε $x = y$, όπου $x, y \in P$.

Θα δούμε ότι υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των (πεπερασμένων) complexes και των (πεπερασμένων) μερικά διατεταγμένων συνόλων. Κάθε μερικά διατεταγμένο σύνολο αντιστοιχίζεται μοναδικά ως προς ισομορφισμό σε έναν τοπολογικό χώρο.

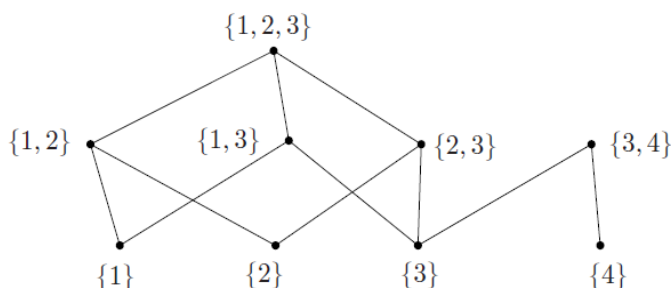
Ορισμός 2.7.1. Το διατεταγμένο complex ενός μερικά διατεταγμένου συνόλου P είναι το complex $\Delta(P)$ του οποίου κορυφές είναι τα στοιχεία του P και τα simplices του είναι όλες οι αλυσίδες, δηλαδή τα μερικά διατεταγμένα υποσύνολα $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ με $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ στο P .

Το μερικά διατεταγμένο σύνολο των εδρών ενός complex K είναι το μερικά διατεταγμένο σύνολο $P(K)$ που αποτελείται από όλα τα μη κενά simplices του K διατεταγμένα με την σχέση του «περιέχονται».

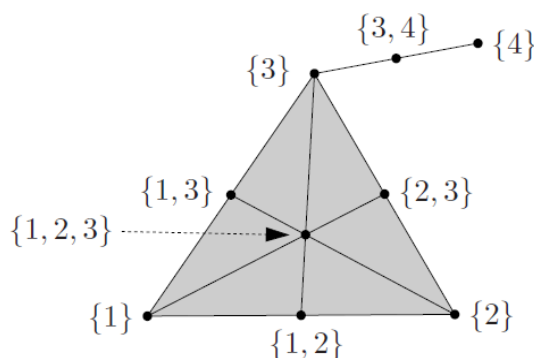
Για παράδειγμα, το complex K



έχει μερικά διατεταγμένο σύνολο εδρών $P(K)$ το



Παίρνουμε όλα τα μη κενά simplices του K και τα διατάσσουμε με την σχέση του «περιέχεται». Από αυτό το μερικά διατεταγμένο σύνολο $P(K)$ μπορούμε να φτιάξουμε το διατεταγμένο το complex $\Delta(P(K))$.



Η παραπάνω διαδικασία, που οδηγεί από το αρχικό complex K στο $P(K)$ (μερικά διατεταγμένο σύνολο εδρών) και μετά στο διατεταγμένο complex $\Delta(P(K))$ είναι πολύ σημαντική και δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.7.2. Για ένα complex K , το complex

$$\text{sd}(K) := \Delta(P(K))$$

ονομάζεται (πρώτη) βαρυκεντρική υποδιαίρεση του K .

Οι κορυφές του $\text{sd}(K)$ είναι τα μη κενά simplices του K και τα simplices του $\text{sd}(K)$ είναι αλυσίδες από simplices του K , με την σχέση του «περιέχεται».

Για δοθείσα γεωμετρική υλοποίηση του K ισχύει ότι τα $\|\text{sd}(K)\|$ και $\|K\|$ είναι ομοιομορφικά.

Ορισμός 2.7.3. Έστω (P_1, \leq_1) και (P_2, \leq_2) δύο μερικά διατεταγμένα σύνολα. Μια απεικόνιση $V(\Delta(P_1)) \rightarrow V(\Delta(P_2))$ ονομάζεται μονότονη αν ισχύει $x \leq_1 y \implies f(x) \leq_2 f(y)$.

Πρόταση 2.7.4. Κάθε μονότονη απεικόνιση $f : P_1 \rightarrow P_2$ μεταξύ μερικά διατεταγμένων συνόλων είναι και simplicial απεικόνιση $V(\Delta(P_1)) \rightarrow V(\Delta(P_2))$ μεταξύ των διατεταγμένων συμπλόκων τους.

Απόδειξη. Αρκεί να πάρουμε ένα σύνολο κορυφών $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ του $\Delta(P_1)$ που αποτελούν simplex του $\Delta(P_1)$ και είναι αλυσίδα στο P_1 και να δείξουμε ότι το $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)\}$ είναι simplex του $\Delta(P_2)$. Το ζητούμενο έπεται από το γεγονός ότι η f είναι μονότονη. \square

Πόρισμα 2.7.5. Έστω K_1 και K_2 simplicial complexes. Έστω f τυχούσα απεικόνιση που αντιστοιχίζει σε κάθε simplex $F \in K_1$ ένα simplex $f(F) \in K_2$, όπου η f δεν επάγεται απαραίτητα από κάποια αντιστοίχιση κορυφών, και έστω ότι αν $F' \subseteq F$ τότε $f(F') \subseteq f(F)$. Τότε, η f μπορεί να θεωρηθεί ως simplicial απεικόνιση του $\text{sd}(K_1)$ στο $\text{sd}(K_2)$ και έτσι επάγει μια απεικόνιση $\|f\| : \|K_1\| \rightarrow \|K_2\|$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το θεώρημα Borsuk-Ulam

3.1 Ισοδύναμες μορφές του Θεωρήματος Borsuk-Ulam

Μία από τις διατυπώσεις του θεωρήματος Borsuk-Ulam είναι η εξής:

«Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ υπάρχει $x \in S^n$ έτσι ώστε $f(x) = f(-x)$.»

Μια περιγραφή που μπορούμε να δώσουμε, στην περίπτωση $n = 2$, είναι η εξής: Ας υποθέσουμε ότι ξεφουσκώνουμε μια πλαστική μπάλα, την τσαλακώνουμε και την κάνουμε επίπεδη. Τότε, υπάρχουν δύο σημεία στην επιφάνεια της μπάλας που ήταν αντιδιαμετρικά και τώρα βρίσκονται το ένα πάνω στο άλλο. Μια άλλη δημοφιλής ερμηνεία του θεωρήματος, στην περίπτωση $n = 2$, λέει ότι πάντα υπάρχουν αντιδιαμετρικά σημεία στη Γη που έχουν την ίδια θερμοκρασία και, ταυτόχρονα, την ίδια ατμοσφαιρική πίεση.

Βοηθάει να έχουμε στο μυαλό μας και να κάνουμε τη σύγκριση με το *θεώρημα σταθερού σημείου* του Brouwer:

«Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : B^n \rightarrow B^n$ έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x \in B^n$ έτσι ώστε $f(x) = x$.»

Όπως θα δούμε παρακάτω, το θεώρημα Borsuk-Ulam συνεπάγεται το θεώρημα του Brouwer. Μία διαφορά είναι ότι το θεώρημα Borsuk-Ulam χρησιμοποιεί, εκτός της τοπολογίας των θεωρούμενων χώρων, και τη συμμετρία της απεικόνισης $x \mapsto -x$, η οποία συχνά ονομάζεται αντιδιαμετρικότητα της σφαίρας S^n .

Όπως είπαμε, το θεώρημα Borsuk-Ulam έχει πολλές ισοδύναμες διατυπώσεις.

Θεώρημα 3.1.1 (θεώρημα Borsuk-Ulam). *Για κάθε $n \geq 0$, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες, και αληθεύουν:*

(BU1a) (Borsuk) *Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ υπάρχει ένα σημείο $x \in S^n$ με $f(x) = f(-x)$.*

(BU1b) *Για κάθε αντιποδική απεικόνιση $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, δηλαδή συνεχή απεικόνιση με την ιδιότητα ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in S^n$, υπάρχει ένα σημείο $x \in S^n$ με $f(x) = 0$.*

- (BU2a) Δεν υπάρχει αντιποδική απεικόνιση $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$.
- (BU2b) Δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ που να είναι αντιποδική στο σύνορο, δηλαδή να ικανοποιεί την $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in S^{n-1} = \partial B^n$.
- (LS-c) (*Lyusternik-Shnirel'man, Borsuk*) Για κάθε κάλυμμα F_1, \dots, F_{n+1} της σφαίρας S^n από $n+1$ κλειστά σύνολα, υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο του καλύμματος που περιέχει ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων, δηλαδή υπάρχει $1 \leq i \leq n+1$ τέτοιος ώστε $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$.
- (LS-o) Για κάθε κάλυμμα U_1, \dots, U_{n+1} της σφαίρας S^n από $n+1$ ανοικτά σύνολα, υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο του καλύμματος που περιέχει ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων.

Απόδειξη. (BU1a) \implies (BU1b) Αφού η f είναι αντιποδική, δηλαδή $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in S^n$ και υπάρχει $x_0 \in S^n$ ώστε $f(-x_0) = f(x_0)$, συμπεραίνουμε ότι $f(x_0) = 0$.

(BU1b) \implies (BU1a) Θεωρούμε την $g(x) = f(x) - f(-x)$. Η g είναι αντιποδική: είναι συνεχής διότι η f είναι συνεχής και $g(-x) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)) = -g(x)$. Από το (BU1b) υπάρχει $x \in S^n$ ώστε $g(x) = 0$, άρα $f(x) = f(-x)$.

(BU1b) \implies (BU2a) Μια αντιποδική συνάρτηση $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ ορίζει ουσιαστικά μια απεικόνιση από την S^n στον \mathbb{R}^n που δεν μηδενίζεται πουθενά, αφού $0 \notin S^{n-1}$ και $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Αυτό είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει την (BU1b).

(BU2a) \implies (BU1b) Έστω $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ αντιποδική συνάρτηση που δεν μηδενίζεται πουθενά. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε μια αντιποδική συνάρτηση $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$ με $f(x) = f(x)/\|f(x)\|$, η οποία δεν μηδενίζεται πουθενά. Άτοπο.

(BU2b) \implies (BU2a) Η προβολή $\pi : (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ του άνω ημισφαιρίου της S^n στην B^n είναι ομοιομορφισμός.

Έστω $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ αντιποδική συνάρτηση. Αυτή ορίζει $g : B^n \rightarrow S^{n-1}$ αντιποδική στο σύνορο ∂B^n με $g(x) = f(\pi^{-1}(x))$. Άτοπο.

(BU2a) \implies (BU2b) Έστω $g : B^n \rightarrow S^{n-1}$ αντιποδική στο σύνορο ∂B^n . Χρησιμοποιώντας πάλι την προβολή του άνω ημισφαιρίου της S^n στην B^n , ορίζουμε συνάρτηση $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ με $f(x) = g(\pi(x))$ και $f(-x) = -g(\pi(x))$ για κάθε x στο άνω ημισφαίριο. Η f ορίζεται σε ολόκληρη την S^n και είναι συνεχής, αφού η g είναι συνεχής σε κάθε κλειστό ημισφαίριο και επίσης συνεχής στον ισημερινό της S^n αφού η g είναι αντιποδική στο ∂B^n . Από την κατασκευή, η $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ είναι αντιποδική. Άτοπο.

(LS-o) \implies (LS-c) Θα δείξουμε αυτή τη συνεπαγωγή με δύο τρόπους:

Α' τρόπος: Έστω F_1, \dots, F_{n+1} κλειστά σύνολα που αποτελούν κάλυμμα της S^n . Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε i ορίζουμε $U_i^\varepsilon = \{x \in S^n : \text{dist}(x, F_i) < \varepsilon\}$. Αφήνουμε το $\varepsilon \rightarrow 0$ και θεωρούμε ακολουθία (x_n) στην S^n με $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, F_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(-x_n, F_i) = 0$ για κάποιο i . Λόγω συμπίεσης της S^n , υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία της (x_n) . Αφού το F_i είναι κλειστό, το όριο της υπακολουθίας ανήκει στο F_i κι έτσι έχουμε το ζητούμενο.

Β' τρόπος: Έστω F_1, \dots, F_{n+1} κλειστά σύνολα που αποτελούν κάλυμμα της S^n . Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε F_i ορίζουμε $U_i^\varepsilon = \{x \in S^n : \text{dist}(x, F_i) < \varepsilon\}$. Έστω ότι δεν υπάρχει κάποιο F_i το οποίο να περιέχει ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων. Τότε υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε η διάμετρος κάθε F_i να είναι μικρότερη από $2 - \varepsilon_0$. Είναι $F_i \subseteq U_i^{\varepsilon_0/2}$ και έτσι τα ανοικτά σύνολα $U_1^{\varepsilon_0/2}, \dots, U_{n+1}^{\varepsilon_0/2}$

αποτελούν κάλυμμα της S^n και κανένα από τα $U_i^{\varepsilon_0/2}$ δεν περιέχει ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων. Άτοπο.

(LS-c) \implies (LS-o) Έστω U_1, \dots, U_{n+1} ανοικτά σύνολα που αποτελούν κάλυμμα της S^n . Για κάθε $x \in S^n$ βρίσκουμε ανοικτή περιοχή V_x του x ώστε $\overline{V_x} \subseteq U_i$ για κάποιο i . Η οικογένεια $\{V_x : x \in S^n\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα της S^n , άρα υπάρχουν $x_1, \dots, x_N \in S^n$ έτσι ώστε $S^n = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_N}$. Για κάθε $i = 1, \dots, n+1$ ορίζουμε $J_i = \{1 \leq k \leq N : \overline{V_{x_k}} \subseteq U_i\}$ και $F_i = \bigcup_{k \in J_i} \overline{V_{x_k}}$. Τα σύνολα F_1, \dots, F_{n+1} αποτελούν κάλυμμα της S^n και $F_i \subseteq U_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n+1$.

Έστω, προς άτοπο, ότι δεν υπάρχει i ώστε το U_i να περιέχει ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων. Τότε, δεν υπάρχει i ώστε το F_i να περιέχει ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων. Άτοπο.

(BU1a) \implies (LS-c) Έστω F_1, \dots, F_{n+1} κλειστά σύνολα που αποτελούν κάλυμμα της S^n . Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με

$$f(x) = (\text{dist}(x, F_1), \dots, \text{dist}(x, F_{n+1})).$$

Από το (BU1a) υπάρχει $x \in S^n$ με $f(x) = f(-x) = y \in \mathbb{R}^n$. Αν η i -συντεταγμένη του y είναι ίση με 0 τότε τα x και $-x$ ανήκουν στο F_i . Αν για κάθε i , η i -συντεταγμένη του y είναι διαφορετική από το 0, τότε τα x και $-x$ ανήκουν στο F_{n+1} .

(LS-c) \implies (BU2a) Έστω $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ αντιποδική απεικόνιση, δηλαδή η f είναι συνεχής και $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in S^n$. Θεωρούμε ένα n -simplex στον \mathbb{R}^n που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Προβάλλουμε τις έδρες του διάστασης $n-1$ στην S^{n-1} και παίρνουμε ένα κάλυμμα της S^{n-1} από κλειστά σύνολα F_1, \dots, F_{n+1} . Τότε, η f ορίζει ένα κάλυμμα της S^n από τα κλειστά σύνολα $f^{-1}(F_1), \dots, f^{-1}(F_{n+1})$, με την ιδιότητα ότι κανένα από τα $f^{-1}(F_i)$, $i = 1, \dots, n+1$ δεν περιέχει ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων. Άτοπο. \square

Θεώρημα 3.1.2. (BU2b) \implies *θεώρημα του Brouwer.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα του Brouwer χρησιμοποιώντας το (BU2b). Έστω, προς άτοπο, συνεχή συνάρτηση $f : B^n \rightarrow B^n$ η οποία δεν έχει σταθερό σημείο. Ορίζουμε συνεχή συνάρτηση $F : B^n \rightarrow S^{n-1}$ ως εξής: Για κάθε $x \in B^n$ θεωρούμε την ημιευθεία που ξεκινάει από το $f(x)$, διέρχεται από το x και τέμνει το $\partial B^n \subset S^{n-1}$ σε κάποιο σημείο. Αυτό το σημείο ορίζουμε ως $F(x)$. Τότε, η F περιορισμένη στην S^{n-1} είναι η ταυτοτική απεικόνιση και είναι αντιδιαμετρική. Άτοπο από το (BU2b). \square

3.2 Μια γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος

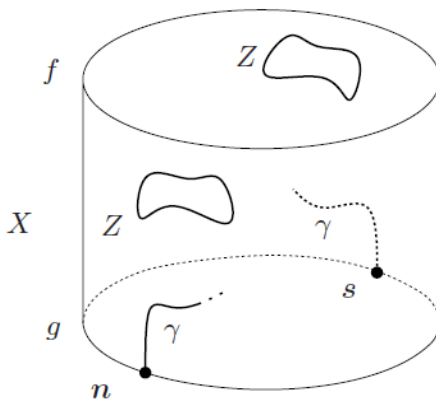
Απόδειξη του θεωρήματος Borsuk-Ulam. Θα αποδείξουμε την (BU1b) μορφή του θεωρήματος, δηλαδή ότι αν $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μια συνεχής και αντιποδική συνάρτηση τότε υπάρχει $x \in S^n$ ώστε $f(x) = 0$.

Διασηθητικά: Έστω $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ η προβολή Βορρά-Νότου – αν $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ τότε $g(x) = (x_1, \dots, x_n)$ και η g έχει δύο σημεία μηδενισμού, τον βόρειο και νότιο πόλο, δηλαδή τα $n = (0, \dots, 0, 1)$ και $s = (0, \dots, 0, -1)$ αντίστοιχα.

Θεωρούμε τον $(n+1)$ -διάστατο χώρο $X := S^n \times [0, 1]$ (έναν «κούφιο» κύλινδρο) και την απεικόνιση $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $F(x, t) := (1-t)g(x) + tg(x)$, ουσιαστικά μια ομοτοπία των f και g .

Για να το δούμε γεωμετρικά, έχουμε δύο κόπιες της S^n (μπορούμε να τις σκεφτόμαστε στον \mathbb{R}^{n+2}), μία με την απεικόνιση g και μία με την f . Συνδέουμε τα σημεία των δύο σφαιρών με ευθύγραμμα τμήματα και η απεικόνιση F ορίζεται μέσω γραμμικής παρεμβολής.

Για παράδειγμα, αν $n = 1$ παίρνουμε έναν κύλινδρο όπως στο σχήμα:



Η αντιδιαμετρικότητα της S^n επεκτείνεται στον X με την $\nu : (x, t) \mapsto (-x, t)$ και έτσι η F είναι αντιποδική με $F(\nu(x, t)) = F(-x, t) = -F(x, t)$.

Έστω προς άτοπο ότι η f δεν έχει σημεία μηδενισμού. Μελετάμε το σύνολο μηδενισμού $Z := F^{-1}(0)$. Το Z είναι μονοδιάστατη συμπαγής πολλαπλότητα και οι συνιστώσες του είναι κύκλοι και μονοπάτια.

Τα ακραία σημεία αυτών των μονοπατιών βρίσκονται στην άνω ($t = 1$) ή στην κάτω ($t = 0$) σφαίρα S^n και είναι τα σημεία μηδενισμού της f ή της g αντίστοιχα. Αντιθέτως, οι κύκλοι δεν αγγίζουν την άνω και κάτω σφαίρα S^n . Με την υπόθεση λοιπόν ότι η f δεν έχει σημεία μηδενισμού και από το γεγονός ότι η g έχει δύο ακριβώς σημεία μηδενισμού στους πόλους (n και s), πρέπει να υπάρχει ένα μονοπάτι γ που συνδέει τον βόρειο πόλο n με το νότιο πόλο s . Επιπλέον, το σύνολο Z παραμένει αναλλοίωτο με την απεικόνιση ν . Όμως, αν ακολουθήσουμε την γ ξεκινώντας από το n , το άλλο κομμάτι που ξεκινάει από το s πρέπει να συμπεριφέρεται με συμμετρικό τρόπο. Όμως τότε βλέπουμε ότι τα δύο άκρα δεν συναντώνται ποτέ. Άρα, δεν υπάρχει στον X συμμετρικό μονοπάτι που να συνδέει το n με το s . Άτοπο.

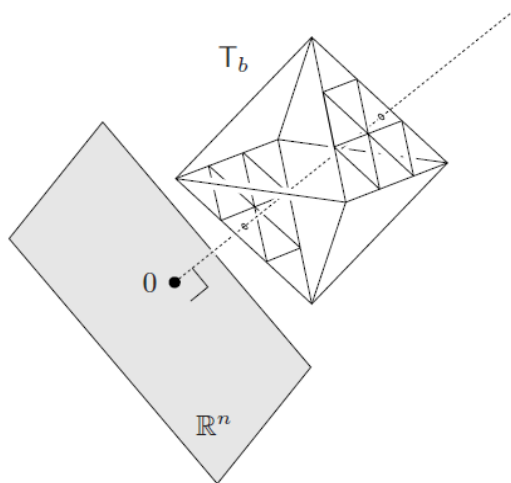
Σημείωση: Αυτό το επιχειρήμα μας δείχνει ότι το πλήθος των σημείων μηδενισμού μιας αντιποδικής απεικόνισης, όπως η f , είναι άρτιο, και συγκεκριμένα το διπλάσιο ενός περιττού αριθμού.

Αυστηρή απόδειξη: Έχουμε τις ίδιες ιδέες που θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ.

Υπενθυμίζουμε την ℓ_1 -νόρμα $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ για ένα $x \in \mathbb{R}^n$, και έτσι η μοναδιαία σφαίρα που αντιστοιχεί σε αυτήν είναι η $\widehat{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_1 = 1\}$. Ουσιαστικά, αυτή η σφαίρα είναι το σύνορο ενός cross-polytope (Ορισμός 2.4.3), για παράδειγμα η \widehat{S}^2 είναι η επιφάνεια ενός κανονικού οκταέδρου. Η \widehat{S}^n είναι ομοιομορφική με την S^n και θα θεωρήσουμε αυτήν για το υπόλοιπο της απόδειξης. Ο χώρος $X = \widehat{S}^n \times [0, 1]$ είναι η ένωση πεπερασμένων το πλήθος κυρτών πολυτόπων (πρισματών με έδρες simplices). Έστω $\widehat{S}^n \times \{0\}$ η κάτω σφαίρα και $\widehat{S}^n \times \{1\}$ η άνω σφαίρα. Ακόμη, οι τριγωνισμοί του X που θα θεωρήσουμε είναι γεωμετρικοί και το X θα είναι το πολύεδρο (στερεό) του τριγωνισμού και έτσι τα simplices είναι γεωμετρικά και περιέχονται στον X .

Επιλέγουμε έναν αρκετά λεπτό πεπερασμένη τριγωνισμό T του X που σέβεται την συμμετρία του X με την ν με την εξής έννοια: Κάθε simplex $\sigma \in T$ αντιστοιχίζεται αμφιμονοσήμαντα στο «αντίθετο» simplex $\nu(\sigma) \in T$ και $\sigma \cap \nu(\sigma) = \emptyset$. Επίσης, η T περιέχει τριγωνισμούς T_t (top) και T_b (bottom) των άνω και κάτω σφαιρών \widehat{S}^n αντίστοιχα, ως subcomplexes.

Έστω g η ορθογώνια προβολή της \widehat{S}^n στον \mathbb{R}^n έτσι ώστε τα n και s , δηλαδή τα σημεία μηδενισμού της g , να βρίσκονται στο εσωτερικό ενός n -διάστατου simplex του τριγωνισμού T_b , όπως φαίνεται (για $n = 2$) στο σχήμα:



Έστω προς άτοπο ότι η $f : \widehat{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ δεν έχει σημεία μηδενισμού. Λόγω συμπίεσης της \widehat{S}^n υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\|f(x)\| \geq \varepsilon$ για κάθε $x \in \widehat{S}^n$. Όπως και στο διασθητικό επιχειρήμα που περιγράψαμε παραπάνω, θεωρούμε την

$$F(x, t) := (1 - t)g(x) + tf(x).$$

Έστω T τριγωνισμός του X και έστω απεικόνιση $\overline{F} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ που συμφωνεί με την F στις κορυφές $\nu(T)$ του T και επεκτείνεται αφινικά σε κάθε simplex του T (όπως στην αφινική επέκταση στον Ορισμό 2.5.3). Αφού η F είναι ομοιόμορφα συνεχής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|F(y) - \overline{F}(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $y \in X$, αρκεί ο τριγωνισμός T να είναι αρκετά λεπτός. Ως εκ τούτου, έχουμε:

(α) η F δεν έχει σημεία μηδενισμού στην άνω σφαίρα,

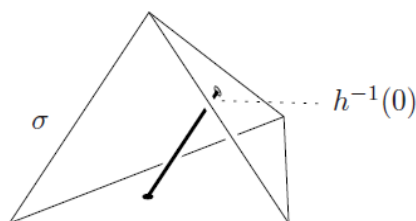
και η \overline{F} συμπίπτει με την g στην κάτω σφαίρα αφού η g είναι αφινική, άρα

(β) η \overline{F} μηδενίζεται σε ακριβώς δύο σημεία στην κάτω σφαίρα, τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό n -διάστατων (αντιδιαμετρικών) simplices του T_b .

Έστω τώρα \tilde{F} η απεικόνιση που προκύπτει από μια μικρή και αντιδιαμετρική διαταραχή της \overline{F} . Επιλέγουμε απεικόνιση $P_0 : V(T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $P_0(\nu(u)) = -P_0(u)$ για κάθε $u \in V(T)$. Επεκτείνουμε αφινικά την P_0 σε κάθε simplex του T και έχουμε την απεικόνιση $P : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Τέλος, θέτουμε $\tilde{F} = \overline{F} + P$.

Αν όλες οι τιμές της P είναι αρκετά κοντά στο 0 τότε για την \tilde{F} ισχύουν οι ιδιότητες (α) και (β). Πράγματι, αν η \bar{F} δεν έχει σημείο μηδενισμού σε κάποιο simplex του $T_t \cup T_b$ τότε επίσης η \tilde{F} δεν έχει σημείο μηδενισμού εκεί, αν η διαταραχή είναι αρκετά μικρή. Αν $\sigma \in T_b$ είναι simplex του τριγωνισμού της κάτω σφαίρας που περιέχει ένα από τα δύο σημεία μηδενισμού της \bar{F} , τότε η \bar{F} περιορισμένη στο σ αντιστοιχίζει το σ αμφιμονοσήμαντα σε κάποιο n -διάστατο simplex τ του \mathbb{R}^n με το 0 στο εσωτερικό του. Πάλι, μια μικρή διαταραχή (μπορούμε να την φανταστούμε ως μικρή κίνηση των κορυφών του τ) δεν αλλάζει την κατάσταση.

Αν $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μια αφινική απεικόνιση, τότε το $h^{-1}(0)$ είναι είτε το κενό σύνολο είτε ένας αφινικός υπόχωρος διάστασης τουλάχιστον 1. Έστω τώρα ένα $(n+1)$ -διάστατο simplex σ και $h : \sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ αφινική απεικόνιση. Η h καλείται generic αν το $h^{-1}(0)$ είναι το κενό σύνολο ή ένα ευθύγραμμο τμήμα στο εσωτερικό του σ με τις άκρες του στο εσωτερικό δύο (διαφορετικών) n -διάστατων εδρών του σ :



Αν αναπαραστήσουμε μια αφινική απεικόνιση $h : \sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ από την $(n+2)$ -άδα των τιμών της στις κορυφές του σ , τότε φτιάχνουμε με όλες αυτές τις απεικονίσεις έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο διάστασης $n(n+2)$.

Μια διαταραγμένη απεικόνιση $\tilde{F} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ καλείται generic αν είναι generic σε κάθε simplex του T με πλήρη διάσταση. Αν το T έχει $2N$ κορυφές τότε ο χώρος όλων των πιθανών αντιδιαμετρικών διαταραχών P_0 στο $V(T)$ έχει διάσταση nN . Οι απεικονίσεις P_0 που οδηγούν σε μη-generic \tilde{F} έχουν μέτρο μηδέν στον χώρο αυτό (υπενθυμίζουμε ότι τα u και $\nu(u)$ ανήκουν σε διαφορετικά simplices του T). Έτσι, υπάρχουν μικρές διαταραχές P_0 της \bar{F} ώστε η \tilde{F} να είναι generic.

Θεωρώντας ότι η \tilde{F} είναι generic και τα σημεία μηδενισμού της ικανοποιούν τις σχέσεις (α) και (β), έχουμε ότι το $\tilde{F}^{-1}(0)$ είναι ένα πολυγωνικό μονοπάτι που αποτελείται από τμήματα και δεν έχει διακλαδώσεις. Πράγματι, κάθε n -simplex $\tau \in T$ είναι έδρα για ακριβώς δύο $(n+1)$ -simplices $\sigma_1, \sigma_2 \in T$ εκτός αν $\tau \in T_b \cup T_t$ οπότε το τ είναι έδρα ακριβώς ενός $(n+1)$ -simplex $\sigma \in T$. Άρα, οι συνιστώσες του $\tilde{F}^{-1}(0)$ είναι κλειστοί πολυγωνικοί κύκλοι που δεν τέμνουν την άνω και κάτω σφαίρα, και ένα πολυγωνικό μονοπάτι γ . Το γ αποτελείται από πεπερασμένα το πλήθος τμήματα και συνδέει το \tilde{n} με το \tilde{s} , δηλαδή τα σημεία μηδενισμού της \tilde{F} στην άνω και κάτω σφαίρα.

Επιλέγουμε μονάδα μέτρησης μήκους έτσι ώστε η γ να έχει μήκος 1 και έστω $\gamma(z)$ το σημείο της γ σε απόσταση z από το \tilde{n} , όπου $z \in [0, 1]$. Αφού η γ είναι συμμετρική ως προς την ν , έχουμε $\nu(\gamma(z)) = \gamma(1-z)$, και ειδικότερα $\nu(\gamma(1/2)) = \gamma(1/2)$. Άτοπο, διότι η ν δεν έχει σταθερά σημεία. Άρα, η συνεχής και αντιποδική συνάρτηση $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ έχει σημείο μηδενισμού, δηλαδή αποδείξαμε το θεώρημα Borsuk-Ulam. \square

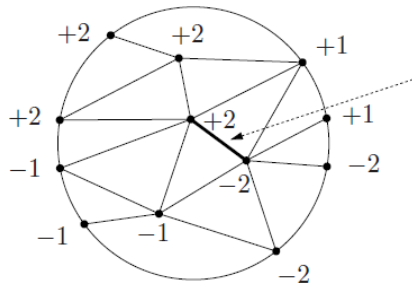
3.3 Το Λήμμα του Tucker

Σε αυτή την παράγραφο, θα αποδείξουμε το θεώρημα Borsuk-Ulam χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα της Συνδυαστικής, το Λήμμα του Tucker. Μάλιστα θα δούμε ότι αυτά τα δύο είναι ισοδύναμα.

Ορισμός 3.3.1. Έστω T τριγωνισμός της n -διάστατης μπάλας B^n . Ο T λέγεται *αντιδιαμετρικά συμμετρικός στο σύνορο της B^n* αν το σύνολο των simplices του T που περιέχονται στην $S^{n-1} = \partial B^n$ είναι τριγωνισμός της S^{n-1} και ισχύει: αν $\sigma \subset S^{n-1}$ είναι simplex του T τότε το $-\sigma$ είναι επίσης simplex του T .

Θεώρημα 3.3.2 (Λήμμα του Tucker). Έστω T τριγωνισμός της B^n αντιδιαμετρικά συμμετρικός στο σύνορο. Έστω $\lambda : V(T) \rightarrow \{+1, -1, +2, -2, \dots, +n, -n\}$ «ονοματισμός» των κορυφών του T που ικανοποιεί την $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ για κάθε κορυφή $v \in \partial B^n$, δηλαδή η λ είναι αντιδιαμετρική. Τότε, υπάρχει ένα simplex διάστασης 1, μια ακμή δηλαδή, που είναι συμπληρωματικό, δηλαδή οι κορυφές του έχουν ονοματιστεί με αντίθετους αριθμούς.

Ένα 2-διάστατο σχήμα που περιγράφει το λήμμα είναι το παρακάτω:



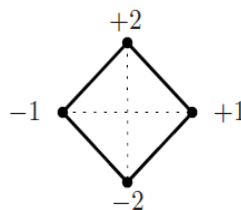
Πριν ξεκινήσουμε να αποδεικνύουμε όσα είπαμε στην αρχή της παραγράφου, θα αναδιατυπώσουμε το λήμμα του Tucker χρησιμοποιώντας simplicial απεικονίσεις στο σύνορο ενός cross-polytope.

Συμβολίζουμε με \diamond^{n-1} το αφηρημένο complex με σύνολο κορυφών

$$V(\diamond^{n-1}) = \{+1, -1, +2, -2, \dots, +n, -n\}$$

και έστω ότι ένα σύνολο $F \subseteq V(\diamond^{n-1})$ σχηματίζει simplex όταν δεν υπάρχει $i \in [n]$ ώστε $i \in F$ και $-i \in F$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.3 μπορούμε να δούμε το \diamond^{n-1} ως το συνοριακό complex του n -διάστατου cross-polytope. Ειδικότερα, $\|\diamond^{n-1}\| \simeq S^{n-1}$.

Για παράδειγμα, όταν $n = 2$:



Θεώρημα 3.3.3 (αναδιατύπωση του Λήμματος του Tucker). Έστω T τριγωνισμός της B^n αντιδιαμετρικά συμμετρικός στο σύνορο. Τότε, δεν υπάρχει απεικόνιση $\lambda : V(T) \rightarrow V(\diamond^{n-1})$ η οποία να είναι simplicial απεικόνιση του T στο \diamond^{n-1} και αντιδιαμετρική στο σύνορο.

Θεώρημα 3.3.4. Το θεώρημα Borsuk-Ulam και το λήμμα του Tucker είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την μορφή (BU2b):

«Δεν υπάρχει απεικόνιση $B^n \rightarrow S^{n-1}$ αντιποδική στο σύνορο.»

(BU2b) \implies (TL) Έστω ότι υπάρχει simplicial απεικόνιση λ του T στο \diamond^{n-1} αντιποδική στο σύνορο. Αν πάρουμε την αφινική επέκταση $\|\lambda\|$ τότε έχουμε μια συνεχή απεικόνιση $B^n \rightarrow S^{n-1}$ αντιδιαμετρική στο σύνορο. Άτοπο.

(TL) \implies (BU2b) Για να αποδείξουμε αυτή την κατεύθυνση, θα υποθέσουμε ότι υπάρχει $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ (συνεχής) απεικόνιση, αντιποδική στο σύνορο, και θα κατασκευάσουμε T και λ που έρχονται σε αντίθεση με το λήμμα του Tucker.

Έστω T ένας τριγωνισμός της B^n αντιποδικός στο σύνορο και τέτοιος ώστε τα simplices του να έχουν διάμετρο το πολύ δ . Για να προσδιορίσουμε το δ , θέτουμε $\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{n}}$. Έτσι, για κάθε $y \in S^{n-1}$ έχουμε $\|y\|_\infty \geq \varepsilon$, δηλαδή τουλάχιστον μία συνιστώσα του y είναι κατ' απόλυτη τιμή τουλάχιστον ε . Διαφορετικά, θα είχαμε $\sum_{i=1}^n y_i^2 < 1$.

Συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε συμπαγές σύνολο είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε αν η απόσταση δύο σημείων $x, x' \in B^n$ είναι μικρότερη από δ , τότε $\|f(x) - f(x')\|_\infty < 2\varepsilon$. Αυτό είναι το δ που φράσσει την διάμετρο των simplices του T .

Ορίζουμε $\lambda : V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ με

$$\lambda(v) = +k(v) \text{ αν } f(v)_{k(v)} > 0 \text{ και } \lambda(v) = -k(v) \text{ αν } f(v)_{k(v)} < 0,$$

όπου $k(v) := \min\{i : |f(v)_i| \geq \varepsilon\}$.

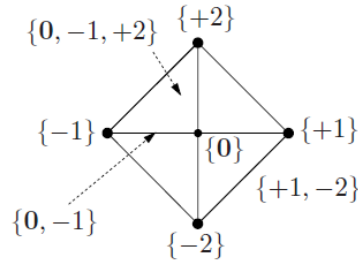
Αφού η f είναι αντιποδική στο ∂B^n , έχουμε $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ για κάθε κορυφή v πάνω στο σύνορο. Από το Λήμμα του Tucker υπάρχει συμπληρωματική ακμή (μήκους μικρότερου από δ). Έστω $i = \lambda(v) = -\lambda(v') > 0$. Τότε, $f(v)_i \geq \varepsilon$ και $f(v')_i \leq -\varepsilon$, άρα $\|f(v) - f(v')\|_\infty \geq 2\varepsilon$. Άτοπο. \square

3.4 Δύο αποδείξεις του Λήμματος του Tucker

Πρώτη απόδειξη. Αρχικά θα προσδιορίσουμε κάποιες απαιτήσεις για τον τριγωνισμό T και θα θεωρήσουμε τη μοναδιαία μπάλα της ℓ_1 -νόρμας \widehat{B}^n αντί για την Ευκλείδεια μπάλα B^n .

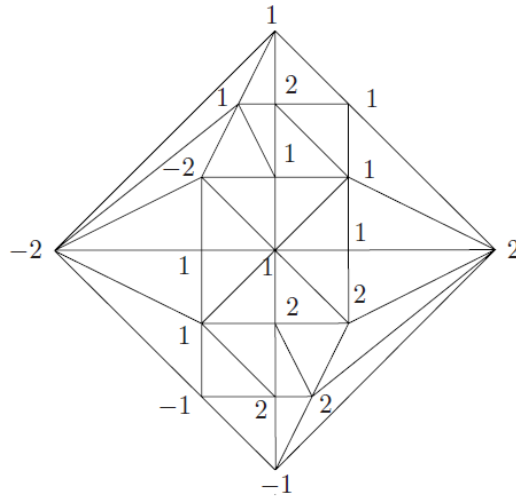
Έστω \boxplus^n ο «φυσικός» τριγωνισμός της \widehat{B}^n . Συγκεκριμένα, κάθε simplex του \boxplus^n είτε βρίσκεται στο \diamond^{n-1} (δηλαδή στο σύνορο) είτε ισούται με $\tau \cup \{0\}$ για κάποιο $\tau \in \diamond^{n-1}$ (δηλαδή είναι ένας κώνος με βάση τ και κορυφή το 0).

Για παράδειγμα, για $n = 2$, μερικά από τα simplices είναι:



Θα αποδείξουμε λοιπόν το Λήμμα του Tucker για τριγωνισμούς T της \widehat{B}^n που είναι αντιδιαμετρικά συμμετρικοί στο σύνορο και που εκλεπτύνουν το \mathbb{T}^n ως εξής: αν $\sigma \in T$ τότε υπάρχει $\tau \in \mathbb{T}^n$ με $\sigma \subseteq \tau$. Αυτή η συνθήκη ουσιαστικά απαιτεί το πρόσημο των συντεταγμένων να είναι σταθερό στο σχετικό εσωτερικό του σ , για κάθε $\sigma \in T$. Ας ονομάσουμε έναν τέτοιο τριγωνισμό T , ειδικό τριγωνισμό της \widehat{B}^n .

Για παράδειγμα, για $n = 2$, ένας ειδικός τριγωνισμός με απεικόνιση ονοματισμού λ είναι:



Κάτι τέτοιο είναι εφικτό αν χρησιμοποιήσουμε βαρυκεντρική υποδιαίρεση (βλ. Ορισμό 2.7.2).

Έστω λοιπόν T ειδικός τριγωνισμός της B^n και απεικόνιση ονοματισμού

$$\lambda : V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$$

αντιδιαμετρική στο σύνορο. Θα θεωρήσουμε simplices όλων των πιθανών διαστάσεων και θα ξεχωρίσουμε μια «κλάση» από αυτά, στην οποία η λ συμπεριφέρεται με συγκεκριμένο τρόπο, θα ορίσουμε ένα γράφημα πάνω σε αυτά τα simplices και θα οδηγηθούμε σε άτοπο δείχνοντας ότι αυτό το γράφημα έχει ακριβώς μία κορυφή με περιττό βαθμό.

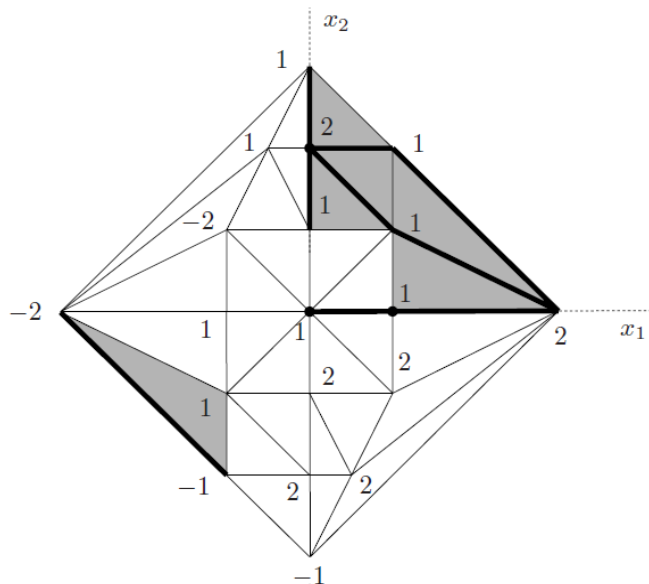
Για ένα simplex $\sigma \in T$, θέτουμε $\lambda(\sigma) := \{\lambda(v) : v \text{ κορυφή του } \sigma\}$. Επίσης, έστω x ένα σημείο στο σχετικό εσωτερικό του σ . Θέτουμε

$$S(\sigma) := \{+i : x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{-i : x_i < 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Αφού το T είναι ειδικός τριγωνισμός, για κάθε x στο σχετικό εσωτερικό του σ το $S(\sigma)$ παραμένει το ίδιο (το κενό simplex και το $\{0\}$ αντιστοιχίζονται στο \emptyset).

Ένα simplex καλείται happy αν $S(\sigma) \subseteq \lambda(\sigma)$. Δηλαδή, είναι σαν ένα «προκαθορισμένο» σύνολο ονοματισμού $S(\sigma)$ να προκύπτει στις κορυφές του σ , και τότε το σ είναι happy.

Παράδειγμα ενός happy simplex:



διότι $\lambda(\sigma) = \{1, -1, -2\}$ και $S(\sigma) = \{-1, -2\}$, δηλαδή $S(\sigma) \subseteq \lambda(\sigma)$.

Ας δούμε αρχικά κάποιες ιδιότητες ενός happy simplex. Έστω σ ένα happy simplex και έστω $k = |S(\sigma)|$. Τότε, το σ βρίσκεται στον k -διάστατο γραμμικό υπόχωρο L_σ που παράγεται από k άξονες συντεταγμένων x_i , όπου $i \in S(\sigma)$ είτε $-i \in S(\sigma)$. Άρα, $\dim(\sigma) \leq k$.

Ακόμη, ισχύει ότι $\dim(\sigma) \geq k - 1$ αφού χρειάζονται τουλάχιστον k κορυφές ώστε το σ να είναι happy. Αν $\dim(\sigma) = k - 1$ τότε το σ καλείται tight και χρειάζονται οι ονοματισμοί όλων των κορυφών του ώστε να είναι happy. Αν $\dim(\sigma) = k$ τότε το σ καλείται loose και τότε ο ονοματισμός κάποιας κορυφής είτε προκύπτει δύο φορές είτε δεν εμφανίζεται στο $S(\sigma)$. Ένα συνοριακό happy simplex είναι πάντα tight ενώ ένα μη συνοριακό μπορεί να είναι loose ή tight. Το simplex $\{0\}$ είναι πάντα happy και loose.

Ορίζουμε ένα (μη κατευθυνόμενο) γράφημα G , του οποίου οι κορυφές είναι happy simplices και αν $\sigma, \tau \in T$ είναι κορυφές του G τότε συνδέονται με ακμή αν

- (α) τα σ και τ είναι αντιδιαμετρικά συνοριακά simplices, δηλαδή $\sigma = -\tau \subset \partial \widehat{B}^n$ ή
- (β) το σ είναι συνοριακή έδρα του τ , δηλαδή $\dim(\sigma) = \dim(\tau) - 1$, με $\lambda(\sigma) = S(\tau)$, άρα οι ονοματισμοί των κορυφών του σ αρκούν ώστε το τ να είναι happy.

Το simplex $\{0\}$ ως κορυφή του G έχει βαθμό 1, αφού συνδέεται με ακριβώς μία ακμή με ένα simplex ώστε το $\lambda(0)$ να το κάνει happy. Θα αποδείξουμε ότι αν δεν υπάρχει συμπληρωματική ακμή τότε

κάθε άλλη κορυφή του G έχει βαθμό 2. Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο, διότι το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού είναι άρτιο.

Στην θεωρία γραφημάτων ισχύουν τα ακόλουθα:

- Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$ (handshaking lemma).
- Πόρισμα του παραπάνω: το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού είναι άρτιο.

Έστω $\sigma \in T$. Θα διακρίνουμε περιπτώσεις:

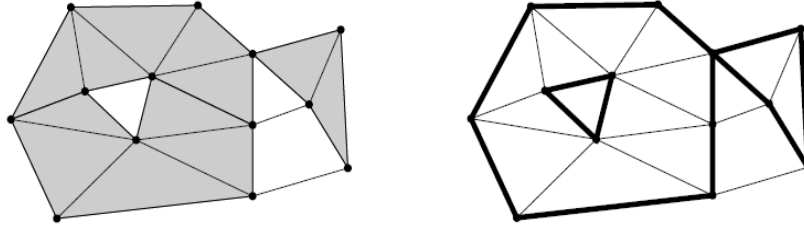
1. Το σ είναι tight happy simplex. Τότε, κάθε γειτονιά τ του σ είτε ισούται με $-\sigma$ είτε έχει το σ ως συνοριακή έδρα. Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:
 - 1.1. Το σ βρίσκεται στο σύνορο $\partial \widehat{B}^n$. Τότε το $-\sigma$ είναι ένα γειτονικό του simplex. Κάθε άλλο γειτονικό τ έχει το σ ως συνοριακή έδρα, δηλαδή $\dim(\sigma) = \dim(\tau) - 1$. Έχουμε το σ να βρίσκεται στον γραμμικό υπόχωρο L_σ διάστασης $k := \dim(\sigma) + 1$ και η τομή $L_\sigma \cap \widehat{B}^n$ να είναι ένα k -διάστατο cross-polytope, όπου τα simplices του T που βρίσκονται στον L_σ το τριγωνοποιούν. Αφού το σ είναι συνοριακό $(k - 1)$ -διάστατο simplex, τότε αποτελεί έδρα ακριβώς ενός k -simplex. Άρα, $\deg(\sigma) = 2$.
 - 1.2. Το σ δεν βρίσκεται στο σύνορο $\partial \widehat{B}^n$. Με παρόμοιο επιχείρημα, όπως πριν, το σ αποτελεί συνοριακή έδρα ακριβώς δύο simplices που γίνονται happy με το $\lambda(\sigma)$. Άρα, $\deg(\sigma) = 2$.
2. Το σ είναι ένα loose happy simplex. Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:
 - 2.1. Έχουμε $S(\sigma) = \lambda(\sigma)$, άρα ο ίδιος ονοματισμός κορυφής προκύπτει δύο φορές στο σ . Τότε, το σ είναι γειτονικό με ακριβώς δύο συνοριακές του έδρες και δεν αποτελεί το ίδιο συνοριακή έδρα κάποιου άλλου happy simplex. Άρα, $\deg(\sigma) = 2$.
 - 2.2. Υπάρχει $i \in \lambda(\sigma) \setminus S(\sigma)$. Τότε $-i \notin S(\sigma)$ γιατί θα είχαμε συμπληρωματική ακμή. Ένα γειτονικό simplex του σ είναι η συνοριακή έδρα του σ που δεν περιέχει κορυφή με ονοματισμό i . Επίσης, το σ αποτελεί συνοριακή έδρα ενός loose simplex σ' που είναι happy με $S(\sigma') = \lambda(\sigma) = S(\sigma) \cup \{i\}$. Άρα, $\deg(\sigma) = 2$.

Επομένως, δείξαμε ότι το G έχει μοναδική κορυφή περιττού βαθμού. Άτοπο. \square

Δεύτερη απόδειξη. Θα χρειαστούμε κάποιες έννοιες. Έστω K ένα simplicial complex. Ονομάζουμε k -αλυσίδα ένα σύνολο C_k που αποτελείται από (κάποια) k -διάστατα simplices του K , $k = 0, 1, \dots, \dim(K)$. Μια k -αλυσίδα C_k αποτελείται μόνο από simplices διάστασης k και άρα δεν αποτελεί simplicial complex. Η κενή αλυσίδα συμβολίζεται με 0 αντί για \emptyset .

Αν C_k και D_k είναι k -αλυσίδες, το άθροισμά τους $C_k + D_k$ είναι k -αλυσίδα και προκύπτει από την συμμετρική διαφορά $C_k \Delta D_k$ των C_k και D_k . Προφανώς ισχύει $C_k + C_k = 0$.

Με τους παραπάνω ορισμούς, αν έχουμε ένα k -διάστατο simplex $F \in K$ τότε το σύνορο του F είναι η $(k - 1)$ -αλυσίδα ∂F που αποτελείται από τις συνοριακές έδρες του F (δηλαδή αυτές με διάσταση $\dim(F) - 1$). Επομένως το ∂F έχει $k + 1$ simplices. Αν έχουμε μια k -αλυσίδα $C_k = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ τότε το σύνορο ορίζεται ως $\partial C_k = \partial F_1 + \partial F_2 + \dots + \partial F_m$. Άρα αποτελείται από τα $(k - 1)$ -διάστατα simplices που προκύπτουν περιττό αριθμό φορές ως συνοριακές έδρες των simplices του C_k . Για παράδειγμα:



Σημαντικές ιδιότητες του τελεστή του συνόρου είναι:

(α) $\partial(C_k + D_k) = \partial C_k + \partial D_k,$

(β) $\partial\partial C_k = 0$ για κάθε k -αλυσίδα C_k .

Αν f είναι simplicial απεικόνιση ενός complex K σε ένα complex L , τότε αυτή επάγει μια απεικόνιση $f_{\#k}$ που αντιστοιχίζει k -αλυσίδες του K σε k -αλυσίδες του L . Αν $C_k = \{F\}$ είναι μια k -αλυσίδα που αποτελείται από ένα μόνο simplex, τότε ορίζουμε $f_{\#k}(C_k)$ ως $\{f(F)\}$ αν το $f(F)$ είναι k -διάστατο simplex του L , αλλιώς ως 0. Επεκτείνουμε γραμμικά για τυχούσα αλυσίδα $\{F_1, \dots, F_m\}$ ορίζοντας $f_{\#k}(\{F_1, F_2, \dots, F_m\}) = f_{\#k}(\{F_1\}) + f_{\#k}(\{F_2\}) + \dots + f_{\#k}(\{F_m\})$.

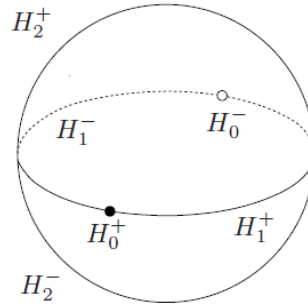
Ισχύει επίσης $f_{\#k}(\partial C_k) = \partial f_{\#k}(C_k)$ για κάθε k -αλυσίδα C_k .

Τώρα, για την απόδειξη του λήμματος του Tucker, θα προσθέσουμε κάποιες απαιτήσεις για τον τριγωνισμό T της B^n . Για $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ορίζουμε:

$$H_k^+ = \{x \in S^{n-1} : x_{k+1} \geq 0, x_{k+2} = x_{k+3} = \dots = x_n = 0\},$$

$$H_k^- = \{x \in S^{n-1} : x_{k+1} \leq 0, x_{k+2} = x_{k+3} = \dots = x_n = 0\}.$$

Για $n = 3$ έχουμε:



Επομένως, τα H_{n-1}^+ και H_{n-1}^- είναι το «Βόρειο» και το «Νότιο» ημισφαίριο της S^{n-1} , το $H_{n-2}^+ \cup H_{n-2}^-$ είναι ο $(n - 2)$ -διάστατος «ισημερινός», κλπ., και τέλος τα H_0^+ και H_0^- είναι ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων. Τέλος, για τον T υποθέτουμε ότι για κάθε $i = 0, 1, \dots, n - 1$ υπάρχουν subcomplexes που τριγωνοποιούν τα H_i^+ και H_i^- .

Θα αποδείξουμε το λήμμα του Tucker στη μορφή του Θεωρήματος 3.3.3. Για την απόδειξη δεν χρειάζεται η απεικόνιση λ να «πηγαίνει» στο \diamond^{n-1} , μπορεί να πηγαίνει σε οποιονδήποτε αντιδιαμετρικά συμμετρικό τριγωνισμό L της S^{n-1} . Θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.4.1. Έστω T τριγωνισμός της B^n όπως περιγράφουμε παραπάνω, έστω K το αντιδιαμετρικά συμμετρικό τμήμα του T που είναι τριγωνισμός της S^{n-1} και έστω L ακόμη ένας (πεπερασμένος) αντιδιαμετρικά συμμετρικός τριγωνισμός της S^{n-1} . Έστω $f : V(K) \rightarrow V(L)$ simplicial απεικόνιση του K στο L . Τότε έχουμε:

- (i) Έστω A_{n-1} μία $(n-1)$ -αλυσίδα που αποτελείται από όλα τα $(n-1)$ -διάστατα simplices του K . Τότε, είτε η $(n-1)$ -αλυσίδα $C_{n-1} := f_{\#n-1}(A_{n-1})$ είναι κενή, είτε αποτελείται από όλα τα $(n-1)$ -διάστατα simplices του L . Δηλαδή, είτε κάθε $(n-1)$ -simplex του L έχει άρτιο πλήθος προ-εικόνων είτε καθένα από αυτά έχει περιττό πλήθος προ-εικόνων.
- (ii) Αν \bar{f} είναι μια simplicial απεικόνιση του T στο L και f είναι ο περιορισμός της \bar{f} στο σύνορο, δηλαδή στο $V(K)$, τότε $\deg_2(f) = 0$.
- (iii) Αν f είναι μια αντιποδική simplicial απεικόνιση του K στο L τότε $\deg_2(f) = 1$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.4.1, αν υπήρχε simplicial απεικόνιση λ του T στο L που είναι αντιδιαμετρική στο σύνορο, θα είχε άρτιο βαθμό από το (ii) και περιττό βαθμό από το (iii). Αυτό είναι άτοπο, και έτσι αποδεικνύεται το λήμμα του Tucker. \square

Μένει να αποδείξουμε την Πρόταση 3.4.1.

Απόδειξη. (i) Αν η C_{n-1} δεν είναι ούτε η κενή αλυσίδα ούτε η αλυσίδα όλων των $(n-1)$ -διάστατων simplices του L , τότε υπάρχουν δύο $(n-1)$ -διάστατα simplices με κοινή συνοριακή έδρα και το ένα ανήκει στην C_{n-1} ενώ το άλλο όχι. Τότε αυτή η κοινή έδρα ανήκει στο ∂C_{n-1} . Επίσης, ισχύει ότι

$$\partial C_{n-1} = \partial f_{\#n-1}(A_{n-1}) = f_{\#n-2}(\partial A_{n-1}) = 0,$$

αφού κάθε $(n-2)$ -διάστατο simplex του K είναι συνοριακή έδρα ακριβώς δύο simplices του A_{n-1} . Άτοπο.

(ii) Έστω A_n η n -αλυσίδα που αποτελείται από όλα τα n -simplices του T . Τότε, $A_{n-1} = \partial A_n$. Επίσης ισχύει ότι $f_{\#n}(A_n) = 0$ αφού το L δεν έχει n -simplices. Άρα,

$$C_{n-1} = f_{\#n-1}(A_{n-1}) = \partial \bar{f}_{\#n}(A_n) = \partial 0 = 0.$$

(iii) Έστω A_k^+ η k -αλυσίδα που αποτελείται από όλα τα k -simplices του K που περιέχονται στο k -διάστατο «ημισφαίριο» H_k^+ (όπως το ορίσαμε στις απαιτήσεις του T), και ομοίως ορίζουμε την A_k^- . Θέτουμε $A_k := A_k^+ + A_k^-$. Για $k = 1, 2, \dots, n-1$ είναι

$$\partial A_k^+ = \partial A_k^- = A_{k-1}.$$

Αν θέσουμε $C_k^+ := f_{\#k}(A_k^+)$, $C_k^- := f_{\#k}(A_k^-)$ και $C_k = f_{\#k}(A_k)$ παίρνουμε

$$\partial C_k^+ = \partial C_k^- = C_{k-1}$$

διότι $\partial C_k^+ = \partial f_{\#k}(A_k^+) = f_{\#k-1}(\partial A_k^+) = f_{\#k-1}(A_{k-1}) = C_{k-1}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $C_{n-1} \neq 0$. Έστω προς άτοπο ότι $C_{n-1} = C_{n-1}^+ + C_{n-1}^- = 0$. Τότε έχουμε προφανώς

$$(*) \quad C_{n-1}^+ = C_{n-1}^-.$$

Επίσης, το A_{n-1}^+ είναι αντιδιαμετρικό με το A_{n-1}^- και αφού η f είναι αντιποδική απεικόνιση έχουμε ότι οι C_{n-1}^+ και C_{n-1}^- είναι αντιδιαμετρικές. Από την (*) έπεται ότι η αλυσίδα $D_{n-1} := C_{n-1}^+ = C_{n-1}^-$ είναι αντιδιαμετρικά συμμετρική. Έτσι,

$$C_{n-2} = \partial C_{n-1}^+ = \partial D_{n-1}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτό για επαγωγική υπόθεση, έστω για $k > 0$ ότι $C_k = \partial D_{k+1}$ για μια αντιδιαμετρικά συμμετρική αλυσίδα D_{k+1} . Για να ολοκληρώσουμε την επαγωγή, παρατηρούμε ότι η αλυσίδα D_{k+1} μπορεί να διαμεριστεί σε δύο αλυσίδες $D_{k+1} = E_{k+1} + E_{k+1}^{\text{antip}}$, έτσι ώστε η E_{k+1}^{antip} να είναι αντιδιαμετρική της E_{k+1} (χωρίζουμε τα simplices της D_{k+1} σε αντιδιαμετρικά ζεύγη και μοιράζουμε κάθε ζεύγος στις E_{k+1} και E_{k+1}^{antip}). Άρα, έχουμε

$$C_k = C_k^+ + C_k^- = \partial(E_{k+1} + E_{k+1}^{\text{antip}}).$$

Λόγω αντιδιαμετρικότητας παίρνουμε $C_k^+ + \partial E_{k+1} = C_k^- + \partial E_{k+1}^{\text{antip}}$ και η $D_k := C_k^+ + \partial E_{k+1}$ είναι μια αντιδιαμετρικά συμμετρική αλυσίδα. Εφαρμόζοντας τον τελεστή συνόρου παίρνουμε

$$\partial D_k = \partial C_k^+ + \partial \partial E_{k+1} = \partial C_k^+ = C_{k-1},$$

και ολοκληρώνεται το επαγωγικό βήμα.

Πηγαίνοντας προς τα πίσω, για $k = 1$ έχουμε ότι το C_0 θα είναι το σύνορο μιας αντιδιαμετρικά συμμετρικής 1-αλυσίδας. Ταυτόχρονα, το C_0 αποτελείται μόνο από δύο αντιδιαμετρικά σημεία (0-simplices) ενώ το σύνορο μιας αντιδιαμετρικά συμμετρικής 1-αλυσίδας αποτελείται πάντοτε από άρτιο πλήθος ζευγών αντιδιαμετρικών σημείων. Άτοπο. \square

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

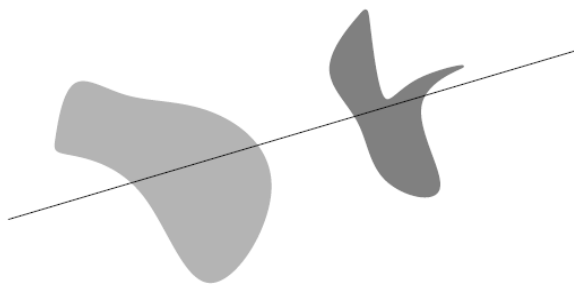
Εφαρμογές στη Γεωμετρία και τη Συνδυαστική

4.1 Το θεώρημα Ham-Sandwich

Η ανεπίσημη εκδοχή του θεωρήματος, απ' όπου πήρε και το όνομά του, είναι:

«Για κάθε sandwich που αποτελείται από ζαμπόν, τυρί και ψωμί, υπάρχει υπερεπίπεδο που τέμνει το sandwich και διχοτομεί ταυτόχρονα τα τρία υλικά.»

Η μαθηματική διατύπωση είναι ότι για οποιαδήποτε d αντικείμενα στον \mathbb{R}^d υπάρχει υπερεπίπεδο που τα διχοτομεί ταυτόχρονα.



Το γεωμετρικό αυτό αποτέλεσμα έχει ενδιαφέρουσες συνέπειες. Αρχικά όμως, πρέπει να δούμε κάποια βασικά στοιχεία θεωρίας μέτρου.

Ορισμός 4.1.1. Έστω X μη κενό σύνολο. Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ οικογένεια συνόλων.

Η \mathcal{A} λέγεται σ -άλγεβρα αν $\mathcal{A} \neq \emptyset$ και είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα και τις αριθμήσιμες ενώσεις (ή τομές). Δηλαδή πρέπει:

(α) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$.

(β) Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία συνόλων στην \mathcal{A} τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Έπεται ότι αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία συνόλων στην \mathcal{A} τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Πράγματι, αφού $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ από το (α) έχουμε $(A_n^c)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, άρα από το (β) έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{A}$ και από το (α) σε συνδυασμό με τους κανόνες de Morgan βλέπουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Ορισμός 4.1.2. Έστω $X \neq \emptyset$ και \mathcal{A} μια σ -άλγεβρα στο X . Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ καλείται μέτρο αν:

(α) $\mu(\emptyset) = 0$,

(β) Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην \mathcal{A} τότε $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Τα σύνολα για τα οποία ορίζεται το μ καλούνται μετρήσιμα.

Ορισμός 4.1.3. Ονομάζουμε μέτρο Borel του \mathbb{R}^d ένα μέτρο $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ όπου \mathcal{A} είναι η Borel σ -άλγεβρα, δηλαδή η μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του \mathbb{R}^d .

Ένα μέτρο Borel λέγεται πεπερασμένο αν $0 < \mu(\mathbb{R}^d) < +\infty$.

Θεώρημα 4.1.4 (το θεώρημα Ham-Sandwich για μέτρα). Έστω $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$ πεπερασμένα μέτρα Borel στον \mathbb{R}^d τέτοια ώστε κάθε υπερεπίπεδο να έχει μέτρο μηδέν για κάθε μ_i , $i = 1, \dots, d$. Τότε, υπάρχει υπερεπίπεδο h τέτοιο ώστε $\mu_i(h^+) = \mu_i(h^-) = \frac{1}{2} \mu_i(\mathbb{R}^d)$, $i = 1, \dots, d$, όπου h^+, h^- οι ημιχώροι που ορίζει το h .

Απόδειξη. Έστω $u = (u_0, u_1, \dots, u_d)$ ένα σημείο της S^d . Αν τουλάχιστον ένα από τα u_1, \dots, u_d είναι μη μηδενικό, τότε μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο σημείο u τον ημιχώρο

$$h^+(u) := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : u_1 x_1 + \dots + u_d x_d \leq u_0\}.$$

Προφανώς, αντιδιαμετρικά σημεία της S^d αντιστοιχούν σε αντίθετους ημιχώρους.

Για $u \in S^d$ της μορφής $(u_0, 0, \dots, 0)$ με $u_0 = \pm 1$ έχουμε

$$h^+((1, 0, \dots, 0)) = \mathbb{R}^d \quad \text{και} \quad h^+((-1, 0, \dots, 0)) = \emptyset.$$

Ορίζουμε συνάρτηση $f : S^d \rightarrow S^d$ με $f(u) = (f_1(u), \dots, f_d(u))$ όπου $f_i(u) := \mu_i(h^+(u))$.

Αν για κάποιο $u_0 \in S^d$ έχουμε $f(u_0) = f(-u_0)$ τότε το σύνορο του ημιχώρου $h^+(u_0)$ είναι το ζητούμενο υπερεπίπεδο. (Δεν ισχύει $f((1, 0, \dots, 0)) = f((-1, 0, \dots, 0))$, άρα πράγματι το $h^+(u_0)$ είναι ημιχώρος.)

Για να εφαρμόσουμε λοιπόν το θεώρημα Borsuk-Ulam αρκεί να δείξουμε ότι η f που ορίσαμε είναι συνεχής. Έστω $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία σημείων της S^d που συγκλίνει στο $u \in S^d$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mu_i(h^+(u_n)) \rightarrow \mu_i(h^+(u))$. Αν ένα σημείο x δεν ανήκει στο σύνορο του $h^+(u)$ τότε για μεγάλα n έχουμε $x \in h^+(u_n)$ αν και μόνο αν $x \in h^+(u)$. Έστω g η χαρακτηριστική συνάρτηση του $h^+(u)$ και g_n η χαρακτηριστική συνάρτηση του $h^+(u_n)$. Έχουμε $g_n(x) \rightarrow g(x)$ για κάθε $x \notin \partial h^+(u)$ και αφού το $\partial h^+(u)$ έχει μ_i -μέτρο μηδέν από την υπόθεση, έχουμε $g_n \rightarrow g$ σχεδόν παντού. Εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης¹ έχουμε

$$\mu_i(h^+(u_n)) = \int g_n d\mu_i \rightarrow \int g d\mu_i = \mu_i(h^+(u)),$$

διότι οι g_n είναι φραγμένες από την $\mathbf{1}$ που είναι ολοκληρώσιμη ως προς το πεπερασμένο μέτρο μ_i . \square

¹Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: Έστω f_n μ -ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού. Αν υπάρχει $g \geq 0$ ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Θεώρημα 4.1.5 (το θεώρημα Ham–Sandwich για σύνολα σημείων). Έστω $A_1, A_2, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ πεπερασμένα σύνολα. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο h που διχοτομεί ταυτόχρονα τα A_1, \dots, A_d .

Σχόλιο. Η φράση «το h διχοτομεί το A_i » σημαίνει ότι κάθε ανοικτός ημιχώρος που ορίζεται από το h περιέχει το πολύ $\frac{1}{2}|A_i|$ σημεία του A_i . Αν το A_i έχει περιττό πλήθος σημείων $2k + 1$, τότε κάθε ανοικτός ημιχώρος περιέχει το πολύ k σημεία και τουλάχιστον ένα σημείο ανήκει στο υπερεπίπεδο.

Απόδειξη. Η ιδέα είναι απλή: θα αντικαταστήσουμε τα σημεία των A_i με μικροσκοπικές μπάλες (με κέντρο το εκάστοτε σημείο) και θα εφαρμόσουμε το θεώρημα που αποδείξαμε για μέτρα.

Αρχικά, έστω πως κάθε A_i έχει περιττό πλήθος στοιχείων. Έστω ακόμη ότι τα A_1, \dots, A_d βρίσκονται σε γενική θέση, δηλαδή δεν υπάρχουν δύο σημεία από διαφορετικά A_i που συμπίπτουν και δεν υπάρχουν $d + 1$ σημεία της ξένης ένωσης των A_i , $i = 1, \dots, d$ στο ίδιο υπερεπίπεδο. Έστω A_i^ε το σύνολο που προκύπτει από το A_i ως εξής: αντικαθιστούμε κάθε σημείο του A_i με μια μπάλα ακτίνας ε με κέντρο το σημείο. Διαλέγουμε $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε να μην τέμνονται $d + 1$ μπάλες του $\bigcup A_i^\varepsilon$ από το ίδιο υπερεπίπεδο.

Έστω h ένα υπερεπίπεδο που διχοτομεί ταυτόχρονα τα σύνολα A_i^ε . Αφού το A_i^ε αποτελείται από περιττό πλήθος από μπάλες, το h πρέπει να τέμνει τουλάχιστον μία από αυτές. Όμως, αφού το πολύ d μπάλες μπορούν να τμηθούν ταυτόχρονα, το h τέμνει ακριβώς μία μπάλα του A_i^ε . Επίσης, η μπάλα αυτή διχοτομείται από το h , άρα το h διέρχεται από το κέντρο της. Ως εκ τούτου, το h διχοτομεί κάθε A_i .

Έστω τώρα ότι τα A_1, \dots, A_d βρίσκονται σε αυθαίρετη θέση και πάλι όμως έχουν περιττό πλήθος στοιχείων. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα επιχείρημα διαταραχής. Για κάθε $\eta > 0$, έστω $A_{i,\eta}$ το σύνολο που προκύπτει από το A_i αν μετακινήσουμε κάθε σημείο του A_i το πολύ κατά η έτσι ώστε τα $A_{1,\eta}, \dots, A_{d,\eta}$ να είναι σε γενική θέση. Έστω h_η υπερεπίπεδο που διχοτομεί τα $A_{i,\eta}$, με $h_\eta = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle \alpha_\eta, x \rangle = \beta_\eta\}$. Λόγω συμπάγειας, υπάρχει σημείο $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{d+1}$ που είναι σημείο συσσώρευσης των $(\alpha_\eta, \beta_\eta)$ καθώς $\eta \rightarrow 0$. Έστω h το υπερεπίπεδο που ορίζεται από την εξίσωση $\langle \alpha, x \rangle = \beta$. Έστω ακολουθία $\eta_1 > \eta_2 > \dots$, συγκλίνουσα στο 0, τέτοια ώστε $(\alpha_{\eta_j}, \beta_{\eta_j}) \rightarrow (\alpha, \beta)$. Αν ένα σημείο x βρίσκεται σε απόσταση $\delta > 0$ από το h , τότε βρίσκεται σε απόσταση τουλάχιστον $\frac{\delta}{2}$ από το h_{η_j} για αρκετά μεγάλο j . Άρα, αν έχουμε k σημεία του A_i σε έναν από τους ανοικτούς ημιχώρους που ορίζει το h , τότε για αρκετά μεγάλο j οι αντίστοιχοι ημιχώροι που ορίζει το h_{η_j} περιέχουν τουλάχιστον k σημεία του A_{i,η_j} . Άρα, το h διχοτομεί κάθε A_i .

Τέλος, αν κάποιο από τα A_i έχει άρτιο πλήθος σημείων, διαγράφουμε ένα αυθαίρετο σημείο από κάθε A_i που έχει άρτιο πλήθος σημείων και διχοτομούμε τα περιττού πλήθους σημείων σύνολα που έχουν προκύψει. Προσθέτοντας ξανά τα διαγραμμένα σημεία, δεν χαλάει η διχοτόμηση των συνόλων, αν λάβουμε υπ' όψιν το σχόλιο για την έννοια της διχοτόμησης πριν την απόδειξη. \square

Πόρισμα 4.1.6. Έστω $A_1, A_2, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ ξένα πεπερασμένα σύνολα σε γενική θέση (δηλαδή, έτσι ώστε να μην υπάρχουν $d + 1$ σημεία της ξένης ένωσης των A_i στο ίδιο υπερεπίπεδο). Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο h που διχοτομεί κάθε A_i και σε κάθε ανοικτό ημιχώρο περιέχονται ακριβώς $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ σημεία του A_i , και άρα το πολύ ένα σημείο του A_i ανήκει στο υπερεπίπεδο h .

Απόδειξη. Αρχικά, εφαρμόζουμε το θεώρημα Ham–Sandwich 4.1.5 και έχουμε ένα υπερεπίπεδο h που διχοτομεί τα A_i . Το πρόβλημα όμως είναι το εξής: το h μπορεί να περιέχει μέχρι και d σημεία ενός A_i (αν υπάρχουν και A_i άρτιου πλήθους στοιχείων).

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε το h να είναι το οριζόντιο υπερεπίπεδο $x_d = 0$. Έστω $B := h \cap (A_1 \cup \dots \cup A_d)$, το οποίο αποτελείται από το πολύ d αφφινικά ανεξάρτητα σημεία. Θέλουμε να μετακινήσουμε το h ώστε να πετύχουμε το ζητούμενο (δηλαδή, μόνο ένα σημείο από κάθε A_i περιττού πλήθους στοιχείων να βρίσκεται πάνω στο h).

Αφού τα σημεία του B είναι αφφινικά ανεξάρτητα μπορούμε να τα αφήσουμε στο h ή να τα μετακινήσουμε πάνω από το h ή κάτω από το h . Για να πάρουμε ένα $C \subset h$ με d σημεία που να είναι αφφινικά ανεξάρτητα, προσθέτουμε στο B ακόμη $d - |B|$ σημεία. Δηλαδή, για κάθε $\alpha \in C$ διαλέγουμε ένα α' . Είτε $\alpha' = \alpha$ (για τα νέα σημεία και για τα σημεία του B που μένουν στο h) είτε $\alpha' = \alpha + \varepsilon \cdot e_d$ είτε $\alpha' = \alpha - \varepsilon \cdot e_d$.

Έστω $h' = h'(\varepsilon)$ το υπερεπίπεδο που ορίζεται από τα d σημεία $\alpha, \alpha' \in C$. Για κάθε επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$, τα α' αραμένουν αφφινικά ανεξάρτητα (ώστε το $h'(\varepsilon)$ να είναι καλά ορισμένο) και η $\varepsilon \mapsto h'(\varepsilon)$ είναι συνεχής. Το h' είναι το ζητούμενο υπερεπίπεδο για κάθε επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$. \square

Σημείωση. Το θεώρημα Ham-Sandwich ήταν εικασία του Steinhaus και αποδείχθηκε από τον Banach.

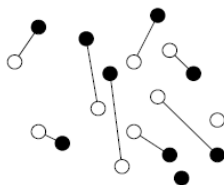
4.2 Χρωματιστές διαμερίσεις και περιδέραια

4.2.1 Χρωματιστές διαμερίσεις

Ακολουθεί μια απλή και όμορφη εφαρμογή του Θεωρήματος Ham-Sandwich για σύνολα σημείων (Θεώρημα 4.1.5).

Θεώρημα 4.2.1 (Akiyama και Alon). Έστω σύνολα A_1, A_2, \dots, A_d με n σημεία το καθένα, σε γενική θέση στον \mathbb{R}^d . Έστω πως τα σημεία του A_1 είναι κόκκινα, του A_2 είναι μπλε και ούτω καθεξής (δηλαδή κάθε A_i έχει διαφορετικό χρώμα). Τότε τα σημεία της ένωσης $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_d$ μπορούν να διαμεριστούν σε χρωματιστές d -άδες (κάθε d -άδα να περιέχει ένα σημείο από κάθε χρώμα) με ξένες κυρτές θήκες.

Στο σχήμα που ακολουθεί η προσπάθεια να βρεθεί η διαμέριση που εγγυάται το θεώρημα δεν είναι πλήρως επιτυχημένη.



Απόδειξη. Με επαγωγή στο n . Αν ο $n > 1$ είναι περιττός, τότε από το θεώρημα Ham-Sandwich υπάρχει υπερεπίπεδο h που διχοτομεί κάθε A_i και περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε χρώμα. Τα σημεία πάνω στο h αποτελούν μια d -άδα και έπειτα προχωράμε με επαγωγή θεωρώντας τα υποσύνολα που περιέχονται στους ανοικτούς ημιχώρους που ορίζει το h .

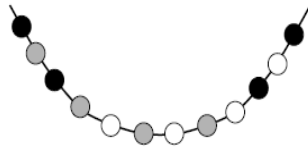
Αν ο n είναι άρτιος, επικαλούμαστε το Πρόρισμα 4.1.6 και έχουμε έτσι ένα υπερεπίπεδο h που διχοτομεί κάθε A_i και δεν τέμνει κανένα A_i . Έτσι σχηματίζονται με κάθε βήμα-διχοτόμηση οι ζητούμενες d -άδες. \square

4.2.2 Περιδέραια

Το θεώρημα που θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε παρακάτω συνοδεύεται με μια ιστορία. Δύο ληστές έχουν κλέψει ένα πολύτιμο περιδέραιο ανεκτίμητης αξίας με πολύτιμους λίθους (διαμάντια, ρουμπίνια, σμαράγδια κλπ.) που είναι δεμένοι με χρυσό. Οι δύο ληστές δεν γνωρίζουν την ακριβή αξία των λίθων και έτσι θέλουν να χωρίσουν το περιδέραιο με τέτοιο τρόπο ώστε ο καθένας να πάρει ίσο αριθμό λίθων από το κάθε είδος. Όμως, λόγω της χρυσής αλυσίδας που δένει τους λίθους πρέπει να το κάνουν με το μικρότερο δυνατό αριθμό τομών.

Υποθέτουμε ότι το περιδέραιο είναι ανοικτό με δύο άκρες και υπάρχουν d είδη πολύτιμων λίθων με άρτιο πλήθος το καθένα.

Θεώρημα 4.2.2 (necklace theorem). *Κάθε (ανοικτό) περιδέραιο με d -είδη πολύτιμων λίθων (άρτιου πλήθους το καθένα) μπορεί να μοιραστεί δίκαια από δύο ληστές με το πολύ d τομές.*

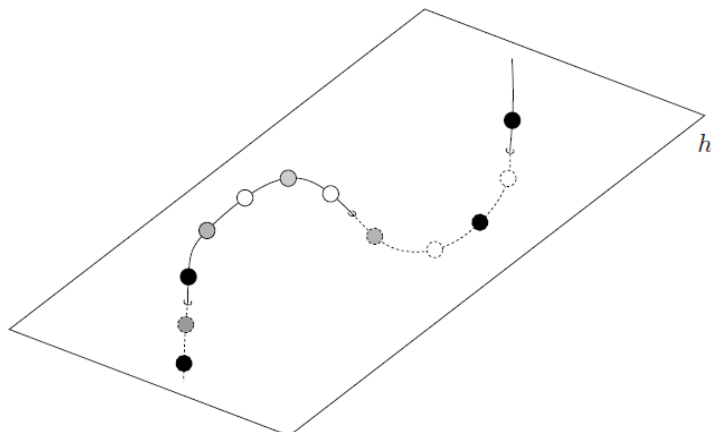


Πρώτη απόδειξη. Τοποθετούμε το περιδέραιο στον \mathbb{R}^d κατά μήκος της καμπύλης των ροπών, που έχει παραμετρική έκφραση την $\gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$. Αν το περιδέραιο έχει n πολύτιμους λίθους συνολικά, ορίζουμε

$$A_i = \{\gamma(k) : \text{ο } k \text{ λίθος είναι του } i \text{ είδους}, k = 1, 2, \dots, n\}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Τα σημεία του A_i είναι οι λίθοι του i -είδους.

Από το Πρόρισμα 4.1.6, υπάρχει υπερεπίπεδο h που διχοτομεί ταυτόχρονα κάθε A_i . Αυτό το h τέμνει την γ και το περιδέραιο κατά μήκος της σε d το πολύ σημεία (Λήμμα 2.6.4). Όλα τα A_i έχουν άρτιο πλήθος λίθων, άρα το h δεν περιέχει λίθους, επομένως αυτές ήταν οι ζητούμενες τομές. \square



Θα δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη στην οποία θα χρησιμοποιήσουμε ένα συνεχές μέτρο πιθανότητας στο $[0, 1]$, δηλαδή ένα μέτρο πιθανότητας μ στο $[0, 1]$ ώστε η $x \mapsto \int_0^x d\mu$ να είναι συνεχής. Η απόδειξη θα προκύψει από μια ουσιαστικά συνεχή έκδοση του Θεωρήματος 4.2.2.

Θεώρημα 4.2.3 (Hobby-Rice). Έστω $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$ συνεχή μέτρα πιθανότητας στο $[0, 1]$. Τότε υπάρχουν διαμέριση του $[0, 1]$ σε $d+1$ διαστήματα I_0, I_1, \dots, I_d και πρόσημα $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d \in \{-1, 1\}$ με $\sum_{j=0}^d \varepsilon_j \cdot \mu_i(I_j) = 0$ για $i = 1, \dots, d$.

Δεύτερη απόδειξη. Έστω ότι έχουμε t_i λίθους του i -είδους και $n := \sum_{i=1}^d t_i$. Τοποθετούμε το περιδέραιο στο $[0, 1]$, με τον k -οστό λίθο να αντιστοιχεί στο διάστημα $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Ορίζουμε δείκτριες συναρτήσεις $f_i : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ για $x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ με $f_i(x) = 1$ αν ο k -οστός λίθος είναι του i -είδους και $f_i(x) = 0$ αλλιώς. Κάθε συνάρτηση f_i ορίζει ένα μέτρο μ_i στο $[0, 1]$, με

$$\mu_i(A) := \frac{t_i}{n} \int_A f_i(x) dx.$$

Δηλαδή το $\mu_i(A)$ δηλώνει το ποσοστό των λίθων του i -είδους που βρίσκονται στο τμήμα A του περιδέραιου.

Γι' αυτά τα μ_i εφαρμόζουμε τη συνεχή έκδοση του Θεωρήματος 4.2.2. Συμφωνούμε ότι ο πρώτος ληστής παίρνει τα διαστήματα με πρόσημο $+$ και ο δεύτερος αυτά με πρόσημο $-$. Η διαμέριση αυτή είναι δίκαιη αλλά μπορεί να μην είναι ακέραια. Χρειάζεται μια διαδικασία «στρογγυλοποίησης». Αν μια τομή υποδιαιρεί έναν λίθο i -είδους, τότε είτε η τομή δεν χρειάζεται είτε υπάρχει κι άλλη τέτοια τομή σε κάποιο λίθο του ίδιου είδους και τότε μετακινούμε τις δύο τομές ώστε να μην τέμνουν τους λίθους, χωρίς να χαλάσει η ισορροπία. \square

Απόδειξη της συνεχούς έκδοσης του Θεωρήματος 4.2.2. Για κάθε $x = (x_1, x_2, \dots, x_d, x_{d+1}) \in S^d$ διαμερίζουμε το διάστημα $[0, 1]$ σε $d+1$ τμήματα με μήκη $x_1^2, x_2^2, \dots, x_{d+1}^2$. Έτσι, οι τομές γίνονται στα σημεία $z_i := x_1^2 + \dots + x_i^2$, $z_0 = 0$, $z_{d+1} = 1$, με $z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_d \leq z_{d+1}$.

Το πρόσημο ε_j του διαστήματος $I_j = [z_{j-1}, z_j]$ ορίζεται ως $\text{sign}(x_j)$. Έτσι ορίζονται συνεχείς συναρτήσεις $g_i : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ με

$$g_i(x) := \sum_{j=1}^{d+1} \text{sign}(x_j) \cdot \mu_i([z_{j-1}, z_j])$$

να είναι το πλήθος των λίθων i -είδους που παίρνει ο πρώτος ληστής μείον το πλήθος αυτών που παίρνει ο δεύτερος. Η συνάρτηση είναι προφανώς αντιποδική, άρα από το θεώρημα Borsuk-Ulam υπάρχει $x \in S^d$ ώστε $g_i(x) = 0$. \square

4.3 Η εικασία του Kneser

Μία από τις πιο θεαματικές εφαρμογές τοπολογικών μεθόδων στη Συνδυαστική είναι η απόδειξη που έδωσε ο Lovász για μια εικασία του Kneser.

Ο Kneser, το 1955, διατύπωσε το ακόλουθο πρόβλημα.

Εικασία 4.3.1. Έστω k και n δύο φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Έστω N ένα σύνολο με n στοιχεία και N_k το σύνολο όλων των υποσυνόλων του N με k στοιχεία. Αν f είναι μια συνάρτηση από το N_k σε ένα σύνολο M , με την ιδιότητα ότι $f(K_1) \neq f(K_2)$ αν $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, αν $m(k, n, f)$ είναι το πλήθος των στοιχείων του M και $m(k, n) = \min_f m(k, n, f)$, τότε για σταθερό k υπάρχουν αριθμοί $m_0 = m_0(k)$ και $n_0 = n_0(k)$ έτσι ώστε $m(k, n) = n - m_0$ για $n \geq n_0$, όπου $m_0(k) \geq 2k - 2$ και $n_0(k) \geq 2k - 1$ (οι δύο ανισότητες ενδέχεται να είναι ισότητες).

Εμείς θα εκφράσουμε αυτό το πρόβλημα σε διαφορετική γλώσσα, και θα το δούμε σαν ένα πρόβλημα στη θεωρία γραφημάτων. Παίρνουμε $N = [n]$ και γράφουμε $\binom{[n]}{k}$ αντί για N_k . Θεωρούμε το $\binom{[n]}{k}$ ως το σύνολο κορυφών ενός γραφήματος και συνδέουμε δύο κορυφές αν τα αντίστοιχα k -σύνολα είναι ξένα. Έτσι, η απεικόνιση f γίνεται χρωματισμός του γραφήματος, όπου το M είναι ένα σύνολο από χρώματα και το πρόβλημα του Kneser ζητάει τον χρωματικό αριθμό του γραφήματος.

Θυμίζουμε ότι k -χρωματισμός ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι μια απεικόνιση $c : V \rightarrow [k]$ τέτοια ώστε $c(u) \neq c(v)$ όταν το $\{u, v\} \in E$ είναι ακμή. Ο χρωματικός αριθμός του G συμβολίζεται με $\chi(G)$ και είναι ο μικρότερος k για τον οποίο το G έχει k -χρωματισμό.

Έστω X πεπερασμένο σύνολο και έστω $\mathcal{F} \subseteq 2^X$. Το γράφημα Kneser του \mathcal{F} , το οποίο συμβολίζεται με $KG(\mathcal{F})$, έχει το \mathcal{F} ως σύνολο κορυφών και δύο σύνολα F_1, F_2 είναι «γειτονικά» (τα ενώνει ακμή) αν και μόνο αν $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Δηλαδή,

$$KG(\mathcal{F}) = (F, \{\{F_1, F_2\} : F_1, F_2 \in \mathcal{F} \text{ και } F_1 \cap F_2 = \emptyset\}).$$

Συμβολίζουμε με $KG_{n,k}$ το γράφημα Kneser που αντιστοιχεί στο $\mathcal{F} = \binom{[n]}{k}$ (το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $[n]$ με πλήθος στοιχείων k).

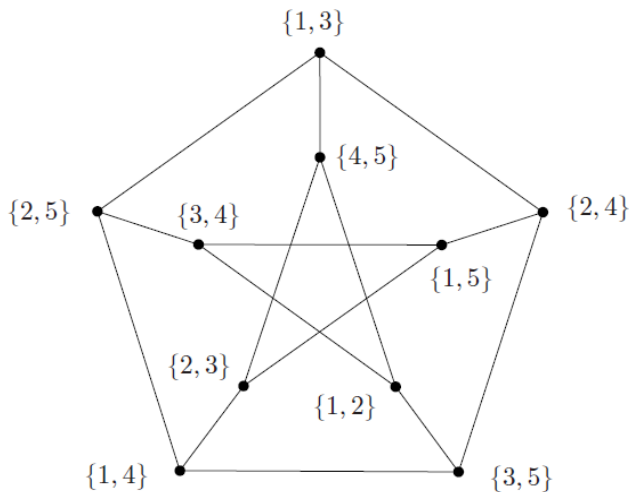
Τότε, η εικασία του Kneser είναι ότι $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$ για κάθε $n \geq 2k - 1$.

Παραδείγματα 4.3.2. (α) $KG_{n,1}$ είναι το πλήρες γράφημα K_n με $\chi(K_n) = n$.

(β) Το $KG_{2k-1,k}$ είναι γράφημα χωρίς ακμές, επομένως $\chi(KG_{2k-1,k}) = 1$.

(γ) Στο $KG_{2k,k}$ κάθε σύνολο είναι γειτονικό με το συμπλήρωμά του και $\chi(KG_{2k,k}) = 2$ για κάθε $k \geq 1$.

(δ) Ενδιαφέρον παράδειγμα είναι το $KG_{5,2}$, το οποίο αποτελεί πολλές φορές αντιπαράδειγμα στη θεωρία γραφημάτων, με $\chi(KG_{5,2}) = 3$.



Θεώρημα 4.3.3 (Lovász-Kneser). Για κάθε $k > 0$ και $n \geq 2k - 1$, ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος Kneser $KG_{n,k}$ είναι $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$.

Σχόλια 4.3.4. Τα γραφήματα Kneser $KG_{n,k}$ είναι πολύ ενδιαφέροντα διότι παρουσιάζουν μεγάλους χρωματικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, αν $n = 3k - 1$, παρόλο που στο $KG_{3k-1,k}$ δεν σχηματίζονται τρίγωνα ο χρωματικός αριθμός του είναι $k + 1$.

Επίσης, είναι ενδιαφέροντα (και ίσως γι' αυτό είναι δύσκολη η απόδειξη της εικασίας του Kneser) διότι παρουσιάζεται μεγάλη απόσταση ανάμεσα στον χρωματικό αριθμό και τον κλασματικό χρωματικό τους αριθμό. Ο κλασματικός χρωματικός αριθμός $\chi_f(G)$ ενός γραφήματος G ορίζεται ως το infimum (συγκεκριμένα minimum) των κλασμάτων $\frac{\alpha}{b}$ ώστε το $V(G)$ να μπορεί να καλυφθεί από α ανεξάρτητα σύνολα και κάθε κορυφή να καλύπτεται τουλάχιστον b φορές. Πάντα ισχύει $\chi_f(G) \leq \chi(G)$ και πολλές μέθοδοι για να βρούμε κάτω φράγμα για τον $\chi(G)$ χρησιμοποιούν τον $\chi_f(G)$. Αυτό σημαίνει ότι στα γραφήματα με μεγάλο $\chi(G)$ και μικρό $\chi_f(G)$, όπως τα γραφήματα Kneser, δεν έχουμε καλά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, ισχύει ότι

$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)},$$

και μάλιστα

$$\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leq \chi_f(G) \leq \chi(G),$$

όπου $\alpha(G)$ είναι ο βαθμός ανεξαρτησίας του G . (Ένα σύνολο κορυφών καλείται ανεξάρτητο αν οποιεσδήποτε δύο κορυφές του δεν σχηματίζουν ακμή. Ο μέγιστος πληθάριθμος ενός τέτοιου συνόλου είναι ο βαθμός ανεξαρτησίας του G .)

Πρόταση 4.3.5 (άνω φράγμα για τον χρωματικό αριθμό). Ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος Kneser $KG_{n,k}$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από $n - 2k + 2$.

Απόδειξη. Χρωματίζουμε τις κορυφές του γραφήματος Kneser με $\chi(B) := \min\{\min B, n - 2k + 2\}$. Έτσι αντιστοιχούμε ένα χρώμα $\chi(B) \in \{1, 2, \dots, n - 2k + 2\}$ σε κάθε υποσύνολο $B \in \binom{[n]}{k}$.

Αν δύο σύνολα B και B' έχουν το ίδιο χρώμα $\chi(B) = \chi(B') = i < n - 2k + 2$ τότε δεν μπορούν να είναι ξένα διότι περιέχουν το στοιχείο i .

Αν δύο σύνολα B και B' έχουν $\chi(B) = \chi(B') = n - 2k + 2$, τότε και τα δύο περιέχονται στο σύνολο $\{n - 2k + 2, \dots, n\}$. Αυτό όμως έχει $n - (n - 2k + 2) + 1 = 2k - 1$ στοιχεία και άρα τα B και B' δεν είναι ξένα. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.3. Θεωρούμε το γράφημα Kneser $KG_{n,k}$ και θέτουμε $d := n - 2k + 1$.

Έστω $X \subset S^d$ ένα σύνολο με n σημεία τέτοιο ώστε κάθε υπερεπίπεδο που περνάει από το κέντρο της S^d να μην περιέχει περισσότερα από d σημεία του X . Αυτό επιτυγχάνεται με ένα σύνολο σε γενική θέση, αφού είμαστε στον \mathbb{R}^{d+1} και ζητάμε να μην υπάρχουν $d + 1$ σημεία του σε ένα υπερεπίπεδο που διέρχεται από το 0.

Έστω ότι το σύνολο κορυφών του $KG_{n,k}$ είναι $\binom{X}{k}$ αντί για $\binom{[n]}{k}$ (δηλαδή ταυτίζουμε τα στοιχεία του $[n]$ με σημεία του X). Θα συνεχίσουμε με εις άτοπον απαγωγή.

Έστω ότι ένας σωστός χρωματισμός του $KG_{n,k}$ υπάρχει, με το πολύ $n - 2k + 1 = d$ χρώματα. Σταθεροποιούμε έναν τέτοιο χρωματισμό και ορίζουμε σύνολα $A_1, \dots, A_d \subseteq S^d$ έτσι ώστε για $x \in S^d$ να έχουμε $x \in A_i$ αν υπάρχει τουλάχιστον μία k -άδα $F \in \binom{X}{k}$ του χρώματος i που να περιέχεται στο ανοικτό ημισφαίριο $H(x) = \{y \in S^d : \langle x, y \rangle > 0\}$ με κέντρο το x . Τέλος θέτουμε $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_d)$. Τότε τα A_1, \dots, A_d είναι ανοικτά σύνολα και το A_{d+1} είναι κλειστό.

Αυτά τα $d + 1$ σύνολα αποτελούν κάλυμμα της S^d και από το γενικευμένο θεώρημα Lyusternik-Shnirel'man υπάρχουν $i \in [d + 1]$ και $x \in S^d$ ώστε $x, -x \in A_i$. [Υπενθυμίζουμε τη διατύπωση του θεωρήματος: Αν η S^d καλύπτεται από $d + 1$ σύνολα A_1, \dots, A_{d+1} , καθένα από τα οποία είναι είτε ανοικτό είτε κλειστό, τότε υπάρχει i τέτοιο ώστε $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$.]

Αν $i \leq d$ τότε έχουμε δύο ξένες k -άδες χρωματισμένες με το ίδιο χρώμα i . Η μία είναι στο ανοικτό ημισφαίριο $H(x)$ και η άλλη στο αντίθετο, $H(-x)$. Επομένως, ο χρωματισμός που έχουμε θεωρήσει δεν είναι σωστός.

Αν $i = d + 1$ τότε το $H(x)$ περιέχει το πολύ $k - 1$ σημεία του X . Ομοίως και το $H(-x)$. Επομένως, ο «ισημερινός» (δηλαδή η τομή της S^d με ένα υπερεπίπεδο που διέρχεται από το 0) έχει τουλάχιστον $n - 2(k - 1) = n - 2k + 2 = d + 1$ σημεία του X . Αυτό είναι άτοπο από την επιλογή του X .

Άρα, σε συνδυασμό με την Πρόταση 4.3.5 έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του θεωρήματος. \square

4.4 Γενικευμένα γραφήματα Kneser: το θεώρημα του Dol'nikov

Η απόδειξη του θεωρήματος Lovász-Kneser στην προηγούμενη παράγραφο, μας δίνει ένα πιο γενικό αποτέλεσμα: ένα κάτω φράγμα για τον χρωματικό αριθμό του γραφήματος Kneser $KG(F)$ για ένα τυχόν πεπερασμένο σύστημα συνόλων \mathcal{F} .

Υπενθυμίζουμε την έννοια του χρωματικού αριθμού ενός υπεργραφήματος. Αν \mathcal{F} είναι μια οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X , ένας χρωματισμός $c : X \rightarrow [m]$ είναι (σωστός) m -χρωματισμός του (X, \mathcal{F}) αν ο c δεν δημιουργεί καμία μονοχρωματική ακμή, δηλαδή $|c(F)| > 1$ για

κάθε $F \in \mathcal{F}$. Ο χρωματικός αριθμός $\chi(\mathcal{F})$ είναι ο μικρότερος m για τον οποίο το (X, \mathcal{F}) έχει m -χρωματισμό. Εδώ ενδιαφερόμαστε μόνο για την ύπαρξη 2-χρωματισμών, δηλαδή την περίπτωση $m = 2$.

Ορίζουμε ως m -colorability defect και συμβολίζουμε $cd_m(\mathcal{F})$ το ελάχιστο μέγεθος ενός υποσυνόλου $Y \subseteq X$ με την ιδιότητα ότι το σύστημα των συνόλων της οικογένειας \mathcal{F} που δεν περιέχουν σημεία του Y επιδέχεται m -χρωματισμό. Δηλαδή,

$$cd_m(\mathcal{F}) = \min\{|Y| : \text{το } (X \setminus Y, \{F \in \mathcal{F} : F \cap Y = \emptyset\}) \text{ είναι } m\text{-χρωματίσιμο}\}.$$

Θεώρημα 4.4.1 (Dol'nikov). Για κάθε πεπερασμένο σύστημα συνόλων (X, \mathcal{F}) έχουμε

$$\chi(KG(\mathcal{F})) \geq cd_2(\mathcal{F}).$$

Σχόλιο: Πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτό το φράγμα δεν είναι πάντοτε ακριβές και ότι γενικά ο ακριβής προσδιορισμός του $cd_2(\mathcal{F})$ είναι δύσκολος.

Αν το \mathcal{F} αποτελείται από τα υποσύνολα του $[n]$ με k στοιχεία, όπου $n \geq 2k$, τότε αφού διαγράψουμε $n - 2k + 1$ σημεία έχουμε ως οικογένεια όλα τα υποσύνολα με k στοιχεία ενός συνόλου με $2k - 1$ στοιχεία. Σε οποιονδήποτε χρωματισμό αυτού του συνόλου με δύο χρώματα, ένα από τα χρώματα έχει τουλάχιστον k σημεία και υπάρχει μονοχρωματικό σύνολο k σημείων. Άρα $cd_2(\mathcal{F}) \geq n - 2k + 2$, και βλέπουμε ότι το Θεώρημα 4.4.1 γενικεύει το θεώρημα Lovász-Kneser.

Πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1. Έστω $d := \chi(KG(\mathcal{F}))$. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.3 θεωρούμε ως σύνολο αναφοράς του \mathcal{F} ένα σύνολο σημείων $X \subset S^d$ σε γενική θέση, δηλαδή υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν $d + 1$ σημεία σε κάποιον «ισημερινό» της S^d .

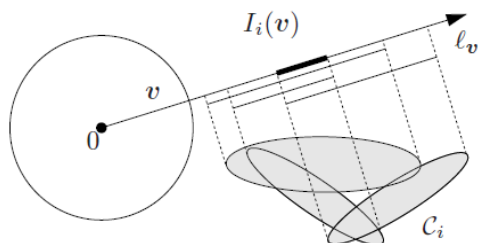
Για $x \in S^d$, ορίζουμε $x \in A_i$ αν το ανοικτό ημισφαίριο $H(x)$ περιέχει σύνολο $F \in \mathcal{F}$ χρωματισμένο με το i -χρώμα, $i \in [d]$. Θέτουμε επίσης $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_d)$. Εφαρμόζουμε την κατάλληλη μορφή του θεωρήματος Lyusternik-Shnirel'man και έτσι βρίσκουμε $x \in S^d$ και $i \in [d]$ ώστε $x_i - x \in A_i$.

Δεν μπορεί να ισχύει $i \leq d$ γιατί τότε θα είχαμε δύο σύνολα του \mathcal{F} με το ίδιο χρώμα i τα οποία να βρίσκονται σε διαφορετικά ημισφαίρια. Επομένως, $i = d + 1$.

Χρωματίζουμε τα σημεία του $H(x)$ κόκκινα και τα σημεία του $H(-x)$ μπλέ. Αυτά που μένουν, δηλαδή αυτά που βρίσκονται στον ισημερινό, τα χρωματίζουμε λευκά και λόγω της γενικής θέσης των σημείων του X είναι το πολύ d . Άρα, $cd_2(\mathcal{F}) \leq d$. \square

Θα δούμε τώρα και την αρχική απόδειξη του θεωρήματος από τον Dol'nikov, η οποία βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα που είναι συνέπεια του θεωρήματος Borsuk-Ulam.

Λήμμα 4.4.2. Έστω C_1, C_2, \dots, C_d οικογένειες από μη κενά κυρτά συμπαγή σύνολα στον \mathbb{R}^d . Υποθέτουμε ότι για κάθε $i = 1, \dots, d$ η οικογένεια C_i έχει αυτοτομές, δηλαδή $C \cap C' \neq \emptyset$ για κάθε $C, C' \in C_i$. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο που τέμνει όλα τα σύνολα της $\bigcup_{i=1}^d C_i$.

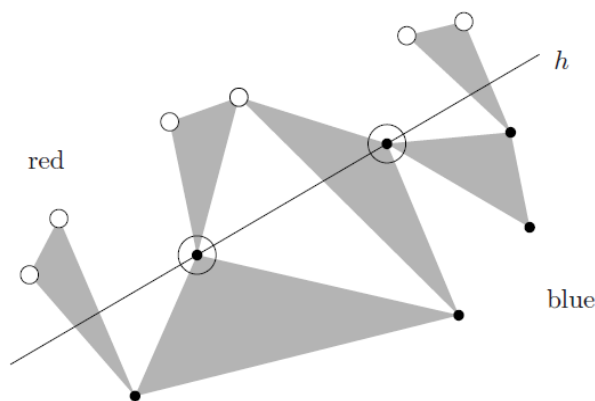


Απόδειξη. Έστω $v \in S^{d-1}$ διάνυσμα το οποίο ορίζει ευθεία l_v στον \mathbb{R}^d που περιέχει το v , διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει την ίδια κατεύθυνση με το v . Θεωρούμε τις ορθογώνιες προβολές των συνόλων της C_i πάνω στην l_v . Κάθε μία από αυτές τις προβολές είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα και κάθε δύο από αυτά τέμνονται. Έπεται, απευθείας ή από το μονοδιάστατο θεώρημα Helly, ότι η τομή όλων αυτών των διαστημάτων είναι ένα μη κενό διάστημα $I_i(v)$. Έστω $m_i(v)$ το μέσο του διαστήματος $I_i(v)$.

Ορίζουμε αντιποδική συνάρτηση $f : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ θέτοντας $f(v)_i := f_i(v) = \langle m_i(v), v \rangle$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $v \in S^{d-1}$ με $f_1(v) = f_2(v) = \dots = f_d(v)$. Πράγματι, ορίζουμε μια νέα αντιποδική συνάρτηση $g : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ με $g_i = f_i - f_d$. Από το Θεώρημα (BU1b) υπάρχει σημείο μηδενισμού της g , άρα υπάρχει $v \in S^{d-1}$ ώστε $g(v) = 0$ και τότε $f_1(v) = f_2(v) = \dots = f_d(v)$.

Γι' αυτό το v , όλα τα μέσα $m_i(v)$, $i = 1, \dots, d$ συμπίπτουν, άρα το υπερεπίπεδο που διέρχεται από αυτά και είναι κάθετο στην l_v είναι το ζητούμενο, αφού τέμνει όλα τα σύνολα της $C_1 \cup \dots \cup C_d$. \square

Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1. Έστω ότι υπάρχει d -χρωματισμός του γραφήματος Κνεσερ $KG(\mathcal{F})$. Αυτό σημαίνει ότι το \mathcal{F} μπορεί να διαμεριστεί σε συστήματα συνόλων $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d$ έτσι ώστε κάθε δύο σύνολα του \mathcal{F}_i να έχουν κοινό σημείο.



Τοποθετούμε τα σημεία του συνόλου αναφοράς X στον \mathbb{R}^d (σημειώνουμε ότι στην πρώτη απόδειξη τα σημεία είχαν τοποθετηθεί στον \mathbb{R}^{d+1}). Απαιτούμε τα σημεία να είναι σε γενική θέση, δηλαδή να μην υπάρχουν $d + 1$ σημεία του X στο ίδιο υπερεπίπεδο. Ορίζουμε d οικογένειες κυρτών

συνόλων στον \mathbb{R}^d θέτοντας

$$C_i = \{\text{conv}(F) : F \in \mathcal{F}_i\}.$$

Αυτές οι C_i ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Λήμματος 4.4.2, άρα υπάρχει υπερεπίπεδο h που τέμνει όλες τις κυρτές θήκες όλων των $F \in \mathcal{F}$.

Χρωματίζουμε τα σημεία του X που βρίσκονται στον έναν ανοικτό ημίχωρο που ορίζει το h με κόκκινο χρώμα, τα σημεία του X που βρίσκονται στον άλλον ανοικτό ημίχωρο με μπλε χρώμα, και αυτά που βρίσκονται πάνω στο h λευκά. Στο h βρίσκονται το πολύ d σημεία, άρα $\text{cd}_2(\mathcal{F}) \leq d$. \square

4.5 Το λήμμα του Gale και το θεώρημα του Schrijver

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ακόμα μία γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος Lovász-Kneser. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.5.1 (λήμμα του Gale). *Για κάθε $d \geq 0$ και κάθε $k \geq 1$ υπάρχει σύνολο $X \subset S^d$ με $2k + d$ σημεία έτσι ώστε κάθε ανοικτό ημισφαίριο της S^d να περιέχει τουλάχιστον k σημεία του X .*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την εξής ισοδύναμη μορφή του λήμματος:

Υπάρχουν σημεία $v_1, v_2, \dots, v_{2k+2}$ στον \mathbb{R}^{d+1} τέτοια ώστε κάθε ανοικτός ημίχωρος, του οποίου το σύνορο είναι υπερεπίπεδο που περνάει από το 0, περιέχει τουλάχιστον k από αυτά.

Θα χρησιμοποιήσουμε την καμπύλη των ροπών (Ορισμός 2.6.3) την οποία όμως θεωρούμε στον \mathbb{R}^{d+1} , στο υπερεπίπεδο $x_1 = 1$. Είναι

$$\bar{\gamma} := \{(1, t, t^2, \dots, t^d) \in \mathbb{R}^{d+1} : t \in \mathbb{R}\}.$$

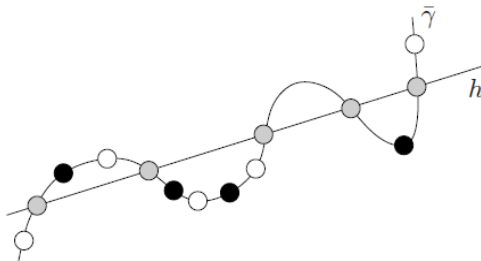
Παίρνουμε οποιαδήποτε $2k + d$ διακεκριμένα σημεία της $\bar{\gamma}$ και τα ονομάζουμε $w_1, w_2, \dots, w_{2k+d}$ με τη σειρά που εμφανίζονται κατά μήκος της καμπύλης. Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε $w_i := \bar{\gamma}_i$ για $1 \leq i \leq 2k + d$. Καλούμε τα σημεία w_2, w_4, \dots άρτια και τα σημεία w_1, w_3, \dots περιττά. Επίσης, ορίζουμε $v_i := (-1)^i w_i$.

Έστω h ένα υπερεπίπεδο που διέρχεται από το 0 και έστω h^+ και h^- οι δύο ανοικτοί ημιχώροι που ορίζονται από αυτό. Ισχυριζόμαστε ότι ο h^+ , και όμοια ο h^- , περιέχει τουλάχιστον k από τα σημεία v_i . Αφού $v_i = w_i$ αν ο i είναι άρτιος και $v_i = -w_i$ αν ο i είναι περιττός, πρέπει να αποδείξουμε ότι το πλήθος των άρτιων w_i στον h^+ συν το πλήθος των περιττών w_i στον h^- είναι τουλάχιστον k .

Από το Λήμμα 2.6.4 βλέπουμε ότι κάθε υπερεπίπεδο h που διέρχεται από το 0 δεν τέμνει την $\bar{\gamma}$ περισσότερες από d φορές. Επίσης, αν υπάρχουν d τομές, τότε η $\bar{\gamma}$ διασχίζει το h και περνάει από τον έναν ημίχωρο στον άλλον σε κάθε σημείο τομής.

Για τυχόν υπερεπίπεδο h που διέρχεται από το 0, το μετακινούμε με συνεχή τρόπο ώστε να περιέχει το 0 και ακριβώς d σημεία του $W := \{w_1, \dots, w_{d+2k}\}$, ενώ κανένα σημείο του W δεν περνάει από τη μία πλευρά στην άλλη κατά τη διάρκεια αυτής της μετακίνησης. Αυτό γίνεται ως εξής: αν έχουμε $j < d$ σημεία του W στο h , περιστρέφουμε το h γύρω από κάποιο $(d-2)$ -επίπεδο που περιέχει αυτά τα σημεία και το 0, μέχρι να συναντήσουμε άλλο ένα σημείο του W .

Έτσι, υποθέτουμε ότι το h τέμνει την $\bar{\gamma}$ σε ακριβώς d σημεία, τα οποία βρίσκονται όλα στο W . Ορίζουμε W_{on} να είναι το υποσύνολο των d σημείων του W που βρίσκονται στο h , και θέτουμε $W_{\text{off}} := W \setminus W_{\text{on}}$ το σύνολο των υπόλοιπων $2k$ σημείων. Σε κάθε σημείο του W_{on} η $\bar{\gamma}$ περνάει από τη μία πλευρά του h στην άλλη. Χρωματίζουμε ένα $w_i \in W_{\text{off}}$ μαύρο αν είναι άρτιο και βρίσκεται στον h^+ ή αν είναι περιττό και βρίσκεται στον h^- . Αλλιώς, το χρωματίζουμε λευκό.



Εύκολα βλέπουμε ότι κατά μήκος της $\bar{\gamma}$ τα μαύρα και λευκά σημεία του W_{off} εναλλάσσονται. Πράγματι, έστω w, w' δύο διαδοχικά σημεία του W_{off} πάνω στην $\bar{\gamma}$, με j σημεία του W_{on} ανάμεσά τους. Αν ο j είναι άρτιος, τότε τα w και w' βρίσκονται στον ίδιο ημιχώρο, το ένα από αυτά είναι περιττό και το άλλο άρτιο, άρα το ένα είναι λευκό και το άλλο μαύρο. Αν ο j είναι περιττός, τότε τα w και w' είναι σε διαφορετικούς ημιχώρους, αλλά είναι και τα δύο άρτια ή και τα δύο περιττά, άρα το ένα είναι μαύρο και το άλλο λευκό. Επομένως, το πλήθος των μαύρων σημείων είναι τουλάχιστον $\lfloor \frac{1}{2} |W_{\text{off}}| \rfloor \geq k$. \square

Απόδειξη του θεωρήματος Lovász-Kneser. Θεωρούμε το γράφημα Kneser $KG_{n,k}$ και θέτουμε $d := n - 2k$. Έστω $X \subset S^d$ όπως στο Λήμμα του Gale. Ταυτίζουμε το $[n]$ με το X , οπότε οι κορυφές του $KG_{n,k}$ είναι τα υποσύνολα του X με k σημεία.

Έστω προς άτοπο ότι έχουμε επιλέξει έναν (σωστό) $(d+1)$ -χρωματισμό του $KG_{n,k}$. Ορίζουμε σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_{d+1} \subseteq S^d$ θέτοντας $x \in A_i$ αν υπάρχει τουλάχιστον μία k -άδα $F \in \binom{X}{k}$ με χρώμα i στο ανοικτό ημισφαίριο $H(x)$ με κέντρο το x .

Τώρα τα A_1, \dots, A_{d+1} σχηματίζουν ανοικτό κάλυμμα της S^d , αφού κάθε $H(x)$ περιέχει τουλάχιστον μία k -άδα από το Λήμμα του Gale. Από το θεώρημα Lyusternik-Schnirel'man για ανοικτά καλύμματα υπάρχουν $i \in [d+1]$ και $x \in S^d$ με $x, -x \in A_i$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο όπως στην προηγούμενη απόδειξη: διότι έχουμε δύο ξένες k -άδες με χρώμα i , μία στο $H(x)$ και μία στο $H(-x)$. \square

Με την ίδια σχεδόν απόδειξη θα πάρουμε ένα ισχυρότερο θεώρημα, το οποίο αποδείχθηκε από τον Schrijver αμέσως μετά από την απόδειξη της εικασίας του Kneser.

Ορισμός 4.5.2 (γράφημα Schrijver). Λέμε ότι ένα υποσύνολο $S \in \binom{[n]}{k}$ είναι ευσταθές αν δεν περιέχει δύο γειτονικά σημεία modulo n (αν $i \in S$ τότε $i+1 \notin S$ και αν $n \in S$ τότε $1 \notin S$). Με άλλα λόγια, το S αντιστοιχεί σε ένα ανεξάρτητο σύνολο του κύκλου C_n . Συμβολίζουμε με $\binom{[n]}{k}_{\text{stab}}$ την οικογένεια των ευσταθών k -υποσυνόλων του $[n]$.

Το γράφημα Schrijver είναι το

$$SG_{n,k} = KG \left(\binom{[n]}{k}_{\text{stab}} \right).$$

Είναι υπογράφημα του γραφήματος Kneser $KG_{n,k}$ και μάλιστα έχουν τον ίδιο χρωματικό αριθμό. Για παράδειγμα, για το $KG_{5,2}$, το $SG_{5,2}$ είναι ένας 5-κύκλος.

Θεώρημα 4.5.3 (Schrijver). Για κάθε $n \geq 2k \geq 0$ ισχύει $\chi(SG_{n,k}) = \chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$.

Απόδειξη. Πορευόμαστε όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος Lovász-Kneser χρησιμοποιώντας μια ισχυρότερη μορφή του Λήμματος του Gale:

Υπάρχει σύνολο $X \subset S^d$ με $2k + d$ σημεία τέτοιο ώστε, αν ταυτίσουμε κατάλληλα το X με το $[n]$, έχει την ιδιότητα ότι κάθε ανοικτό ημισφαίριο περιέχει ευσταθή k -άδα.

Θέτουμε $d := n - 2k$ και για κάθε $x \in S^d$ θεωρούμε το ημισφαίριο $H(x)$ με κέντρο το x . Τοποθετούμε n σημεία στην S^d όπως στο ισχυρό λήμμα του Gale. Έτσι, για κάθε $x \in S^d$ το $H(x)$ περιέχει μια ευσταθή k -άδα. Θεωρούμε (σωστό) χρωματισμό του $SG_{n,k}$ με t χρώματα, όπου $t = n - 2k + 1 = d + 1$. Ορίζουμε κάλυμμα της S^d ως εξής: για κάθε $1 \leq i \leq t$ θέτουμε A_i το σύνολο των $x \in S^d$ για τα οποία το $H(x)$ περιέχει μια ευσταθή k -άδα με χρώμα i . Έχουμε $\bigcup_{i=1}^t A_i = S^d$, και τα A_i είναι ανοικτά σύνολα.

Έστω προς άτοπο, με βάση το θεώρημα Lyusternik-Schnirel'man ότι υπάρχει $x \in S^d$ και $1 \leq i \leq t$ ώστε $x, -x \in A_i$. Τότε όμως τα $H(x)$ και $H(-x)$ περιέχουν ευσταθείς k -άδες του ίδιου χρώματος και $H(x) \cap H(-x) = \emptyset$, άρα ο χρωματισμός δεν είναι σωστός. Επομένως έχουμε ότι $t \geq n - 2k + 1$, άρα $\chi(SG_{n,k}) = n - 2k + 2$. \square

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εφαρμογές στην Ασυμπτωτική Γεωμετρική Ανάλυση

5.1 Τυχαίες στροφές και τυχαίες τομές κυρτών σωμάτων

Δουλεύουμε στον \mathbb{R}^n ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και γράφουμε $|\cdot|$ για την επαγόμενη Ευκλείδεια νόρμα. Συμβολίζουμε την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και σφαίρα με B_2^n και S^{n-1} αντίστοιχα. Γράφουμε σ για το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1} και μ_n για το μέτρο πιθανότητας Haar στην $O(n)$. Η πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ των k -διάστατων υποχώρων του \mathbb{R}^n είναι εφοδιασμένη με το μέτρο πιθανότητας Haar $\nu_{n,k}$.

Κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n επάγει τη νόρμα $\|x\|_K = \inf\{t > 0 : x \in tK\}$. Το πολικό σώμα $\{y \in \mathbb{R}^n : \max_{x \in K} |\langle y, x \rangle| \leq 1\}$ του K συμβολίζεται με K° . Ορίζουμε

$$M(K) = \int_{S^{n-1}} \|x\|_K d\sigma(x) \text{ και } M^*(K) = \int_{S^{n-1}} \|x\|^* d\sigma(x),$$

όπου $\|x\|^* = \|x\|_{K^\circ} = \max_{y \in K} |\langle x, y \rangle|$. Δηλαδή, $M = M(K)$ είναι η μέση τιμή της νόρμας του K στη σφαίρα και $M^* = M^*(K)$ είναι το μέσο πλάτος του K . Παρατηρήστε ότι $M^* = M(K^\circ)$.

Ορίζουμε επίσης a και b τις μικρότερες θετικές σταθερές για τις οποίες ισχύει η ανισότητα $(1/a)|x| \leq \|x\|_K \leq b|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή, a είναι η περιγεγραμμένη ακτίνα του K — την οποία συμβολίζουμε επίσης με $R(K)$ — και $1/b$ είναι η εγγεγραμμένη ακτίνα του K — την οποία συμβολίζουμε επίσης με $r(K)$. Το γινόμενο ab είναι η «γεωμετρική απόσταση» $d_G(K, B_2^n)$ των K και B_2^n .

Ορίζουμε την ελάχιστη περιγεγραμμένη ακτίνα της τομής t στροφών του K θέτοντας

$$r_t(K) = \min\{\rho > 0 : u_1(K) \cap \dots \cap u_t(K) \subseteq \rho B_2^n \text{ για κάποιους } u_1, \dots, u_t \in O(n)\},$$

και την «μεγαλύτερη ακτίνα» μιας τυχαίας $\lceil n/k \rceil$ -διάστατης κεντρικής τομής του K θέτοντας

$$R_k(K) = \min \left\{ R > 0 : \nu_{n, \lceil n/k \rceil}(E : K \cap E \subseteq R(B_2^n \cap E)) \geq 1 - \frac{1}{k+1} \right\}$$

όπου $[x]$ είναι ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με x . Στο [56] αποδεικνύεται ότι

$$r_{2k}(K) \leq \sqrt{k}R_k(K).$$

Πιο συγκεκριμένα, αν $R > R_k(K)$ τότε ξεκινώντας από ένα σύνολο ανά δύο κάθετων $[n/k]$ -διάστατων υποχώρων ξ_1, \dots, ξ_k που ικανοποιούν την $K \cap \xi_i \subseteq R(B_2^n \cap \xi_i)$ και επίσης την $\bigoplus \sum \xi_i = \mathbb{R}^n$, μπορούμε να ορίσουμε $u_1, \dots, u_t \in O(n)$, $t \leq 2k$, τέτοιους ώστε

$$\frac{1}{t} \sum_{j=1}^t u_j(K^\circ) \supseteq \frac{1}{R\sqrt{k}} B_2^n.$$

Λόγω δυϊσμού έχουμε $u_1^*(K) \cap \dots \cap u_t^*(K) \subseteq R\sqrt{k}B_2^n$, δηλαδή

$$r_{2k}(K) \leq \sqrt{k}R_k(K).$$

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ότι ισχύει και αντίστροφη ανισότητα:

Ποιοτική Διατύπωση: Έστω $A = \{s \in \mathbb{Z} : s \geq 2\}$. Υπάρχουν συναρτήσεις $f : A \rightarrow A$ και $g : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ τέτοιες ώστε

$$R_{f(t)}(K) \leq g(t)r_t(K)$$

για κάθε $t \in A$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n αν το n είναι αρκετά μεγάλο (δεδομένου του t).

Η περίπτωση όπου το t ή το k είναι της τάξης του $(b/M(K))^2$ έχει μελετηθεί λεπτομερώς. Είναι γνωστό (και συνδέεται με το θεώρημα Dvoretzky) ότι αν $k \geq c(b/M(K))^2$, τότε οι περισσότερες $[n/k]$ -διάστατες τομές του K ικανοποιούν την

$$\frac{1}{2M(K)} B_2^n \cap \xi \subseteq K \cap \xi \subseteq \frac{2}{M(K)} B_2^n \cap \xi,$$

συνεπώς, $R_k(K) \leq 2/M(K)$. Από την άλλη πλευρά, είναι γνωστό ότι αν $t \geq c(b/M(K))^2$, τότε υπάρχουν $u_1, \dots, u_t \in O(n)$ τέτοιοι ώστε

$$\frac{M(K)}{2} |x| \leq \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \|u_i(x)\|_K \leq 2M(K)|x|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

απ' όπου έπεται ότι $r_t(K) \leq 2/M(K)$. Αποδεικνύεται επίσης ότι αν $k(K)$ και $t(K)$ είναι οι μικρότεροι ακέραιοι για τους οποίους ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις τότε $k(K) \simeq t(K)$ ως προς απόλυτη σταθερά. Το πρόβλημα που συζητάμε εδώ είναι η συμπεριφορά της ποσότητας $r_i(K)$ για σταθερές μικρές τιμές του t .

Θα χρειαστούμε κάποια κλασικά αποτελέσματα, με πρώτη την « M^* -ανισότητα» η οποία συγκρίνει τη διάμετρο των τυχαίων τομών, διάστασης ανάλογης του n , ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον \mathbb{R}^n με το μέσο πλάτος $M^*(K)$ του K . Μια ακριβής ποσοτική μορφή αυτής της ανισότητας δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.1 (M^* -ανισότητα). Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n και έστω $\lambda, \varepsilon \in (0, 1)$. Τότε,

$$R(K \cap E) \leq \frac{M^*(K)}{(1-\varepsilon)\sqrt{1-\lambda}}$$

για όλους τους E σε ένα υποσύνολο $A_{n,k}$ της $G_{n,k}$ σχεδόν πλήρους μέτρου, όπου $k = \lfloor \lambda n \rfloor$.

Άμεση συνέπεια της M^* -ανισότητας είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.2 (άνω φράγμα για τη διάμετρο). Έστω $\varepsilon, \lambda \in (0, 1)$. Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n , και αν r_1 είναι η λύση της εξίσωσης

$$M^*(K \cap rB_2^n) = (1 - \varepsilon)\sqrt{1 - \lambda r},$$

τότε $R(K \cap E) \leq r_1$ για όλους τους υποχώρους E σε ένα υποσύνολο $\mathcal{A}(\lambda)$ της $G_{n, [\lambda n]}$ μέτρου $\nu_{n, [\lambda n]}(\mathcal{A}(\lambda)) \geq 1 - c_1 \exp(-c_2 \varepsilon^2 (1 - \lambda)n)$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Με άλλα λόγια, λύνοντας την εξίσωση $M^*(K \cap rB_2^n) \asymp \sqrt{1 - \lambda r}$, παίρνουμε άνω φράγμα για τη διάμετρο της τυχαίας $[\lambda n]$ -διάστατης τομής του K .

Θα χρειαστούμε επίσης το «λήμμα της απόστασης» το οποίο δείχνει ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε την γεωμετρική απόσταση ενός συμμετρικού κυρτού σώματος από την Ευκλείδεια μπάλα αν οι παράμετροι M και M^* είναι συγκρίσιμες με τους $1/b$ και a αντίστοιχα.

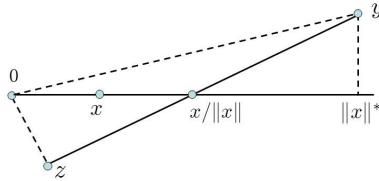
Λήμμα 5.1.3 (V. Milman). Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^n τέτοια ώστε $a^{-1}|x| \leq \|x\| \leq b|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αν

$$(5.1.1) \quad \left(\frac{\|x\|}{b}\right)^2 + \left(\frac{\|x\|^*}{a}\right)^2 = t > 1$$

για κάποιο $x \in S^{n-1}$, τότε

$$d_G(K, B_2^n) \leq \frac{1}{t-1},$$

όπου K είναι η μοναδιαία μπάλα του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.



Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $x \in S^{n-1}$ ικανοποιεί την (5.1.1) και επιλέγουμε $y \in K$ τέτοιο ώστε $\|x\|^* = \langle y, x \rangle$. Παρατηρήστε ότι $|y| \leq a$. Θα δουλέψουμε στο επίπεδο $E = \text{span}\{x, y\}$. Αν $z = (1 + \lambda)\frac{x}{\|x\|} - \lambda y$ (για κάποιον $\lambda > 0$) είναι το σημείο που έχει τη μικρότερη Ευκλείδεια νόρμα πάνω στην ευθεία που συνδέει τα $\frac{x}{\|x\|}$ και y , έχουμε

$$\|z\| \geq (1 + \lambda) - \lambda\|y\| \geq 1$$

γιατί $y \in K$, άρα $|z| \geq 1/b$.

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $\Delta(0, z, x/\|x\|)$ και $\Delta(y, \|x\|^*x, x/\|x\|)$ είναι όμοια. Συνεπώς,

$$\frac{\|x\|}{b} \leq \frac{|z|}{1/\|x\|} \leq \frac{\sqrt{a^2 - (\|x\|^*)^2}}{\sqrt{a^2 - (\|x\|^*)^2 + (\|x\|^* - \|x\|^{-1})^2}},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\frac{1}{a^2b^2} \leq \frac{1 - (\|x\|^*/a)^2}{\|x\|^2a^2 - 2\|x\|\|x\|^* + 1}.$$

Η τελευταία ανισότητα γράφεται στη μορφή

$$(5.1.2) \quad \frac{1}{a^2b^2} \leq \frac{2\|x\|\|x\|^*}{a^2b^2} + 1 - \left[\left(\frac{\|x\|}{b} \right)^2 + \left(\frac{\|x\|^*}{a} \right)^2 \right] \leq \frac{1}{ab}t + 1 - t.$$

Θέτοντας $u = \frac{1}{ab}$ παίρνουμε

$$u^2 - tu + t - 1 = (u - 1)(u - (t - 1)) \leq 0.$$

Αφού $u \leq 1$ πρέπει να έχουμε $u \geq t - 1$, το οποίο δείχνει ότι

$$d_G(K, B_2^n) \leq ab = \frac{1}{u} \leq \frac{1}{t - 1},$$

όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 5.1.4. Ισχύει η ακόλουθη παραλλαγή του Λήμματος 5.1.3. Έστω L και L^* οι μέσοι Lévy των $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|^*$ στην S^{n-1} . Αν

$$\left(\frac{L}{b} \right)^2 + \left(\frac{L^*}{a} \right)^2 = t > 1$$

τότε

$$d_G(K, B_2^n) \leq \frac{1}{t - 1}.$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 5.1.3 αφού μπορούμε πάντα να βρούμε $x \in S^{n-1}$ με $\|x\| \geq L$ και $\|x\|^* \geq L^*$.

Επίσης, είναι γνωστό ότι

$$|M - L| \leq \frac{c_1 b}{\sqrt{n}} \quad \text{και} \quad |M^* - L^*| \leq \frac{c_1 a}{\sqrt{n}}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Παίρνοντας υπόψη μας το γεγονός ότι $M/b \leq 1$ και $M^*/a \leq 1$ βλέπουμε ότι

$$\left(\frac{L}{b} \right)^2 + \left(\frac{L^*}{a} \right)^2 \geq \left(\frac{M}{b} - \frac{c_1}{\sqrt{n}} \right)^2 + \left(\frac{M^*}{a} - \frac{c_1}{\sqrt{n}} \right)^2 \geq \left(\frac{M}{b} \right)^2 + \left(\frac{M^*}{a} \right)^2 - \frac{2c_1}{\sqrt{n}}.$$

Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι

$$\left(\frac{M}{b} \right)^2 + \left(\frac{M^*}{a} \right)^2 = t > 1 + \frac{2c_1}{\sqrt{n}}$$

μπορούμε και πάλι να συμπεράνουμε ότι

$$d_G(K, B_2^n) \leq \frac{1}{t - (1 + 2c_1/\sqrt{n})}.$$

Συνδυάζοντας το Λήμμα 5.1.3 με την M^* -ανισότητα παίρνουμε την ακόλουθη τεχνική πρόταση.

Πρόταση 5.1.5. Έστω $\lambda \in (0, 1)$ και έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n . Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε r να είναι η λύση της εξίσωσης

$$M^*(K \cap rB_2^n) = \sqrt{\frac{\delta + \lambda}{\delta + 1}} r.$$

Τότε, για τον τυχαίο υπόχωρο $E \in G_{n, \lfloor \lambda n \rfloor}$ και μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ έχουμε:

(α) Αν $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ και $0 < \delta < 1 - 2\lambda$, τότε

$$(5.1.3) \quad R(K^\circ \cap E) \leq \frac{c\sqrt{\delta + \lambda}}{\delta} \frac{1}{r}.$$

(β) Αν $1 - 2\lambda \leq \delta$, τότε

$$(5.1.4) \quad R(K^\circ \cap E) \leq \frac{c}{\sqrt{1 - \lambda}} \frac{\delta + 1}{\delta} \frac{1}{r}.$$

Απόδειξη. Έστω $0 < s < \delta$ μια σταθερά που εξαρτάται από το δ και θα επιλεγεί κατάλληλα. Ορίζουμε $\rho > 0$ μέσω της εξίσωσης

$$M^*(K^\circ \cap \rho^{-1}B_2^n) = \sqrt{\frac{1 - \lambda}{s + 1}} \frac{1}{\rho}.$$

Από το Θεώρημα 5.1.2 γνωρίζουμε ότι με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - c_1 \exp(-c_2 s^2(1 - \lambda)n)$ ο τυχαίος $E \in G_{n, \lfloor \lambda n \rfloor}$ ικανοποιεί την

$$(5.1.5) \quad R(K^\circ \cap E) \leq 1/\rho.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\rho < r$: Αν $\rho \geq r$ τότε το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την (5.1.5). Ορίζουμε το κυρτό σώμα $T = \text{co}((K \cap rB_2^n) \cup \rho B_2^n)$. Αφού $\rho < r$, έχουμε $\rho B_2^n \subseteq T \subseteq rB_2^n$. Επίσης, από τον ορισμό του T βλέπουμε ότι $T \supseteq K \cap rB_2^n$ και $T^\circ \supseteq K^\circ \cap \frac{1}{\rho}B_2^n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} (M^*(T)/r)^2 + (M(T)\rho)^2 &\geq (M^*(K \cap rB_2^n)/r)^2 + (M^*(K^\circ \cap \rho^{-1}B_2^n)\rho)^2 \\ &= \frac{\delta + \lambda}{\delta + 1} + \frac{1 - \lambda}{s + 1} \\ &= 1 + \frac{\delta - s}{(\delta + 1)(s + 1)}(1 - \lambda). \end{aligned}$$

Χειριζόμαστε τις δύο περιπτώσεις ως εξής:

(α) Ορίζουμε $\gamma = \frac{s + \lambda}{s + 1} \frac{\delta + 1}{\delta + \lambda}$. Αφού $s < \delta$, έχουμε $0 < \gamma < 1$ και

$$\gamma(M^*(T)/r)^2 + (M(T)\rho)^2 \geq \frac{s + \lambda}{s + 1} + \frac{1 - \lambda}{s + 1} = 1.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1.3 παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &\leq \frac{(\sqrt{(\delta + 1)(s + \lambda)} + \sqrt{(s + 1)(\delta + \lambda)})\sqrt{(\delta + 1)(s + 1)}}{(\delta - s)(1 - \lambda)} \frac{1}{r} \\ &\leq \frac{2(\delta + 1)^{3/2}\sqrt{\delta + \lambda}}{(\delta - s)(1 - \lambda)} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $s = \delta/2$ παίρνουμε την (5.1.3).

(β) Ορίζουμε $\beta = \frac{s+1}{\delta+1}$. Αφού $s < \delta$ έχουμε $0 < \beta < 1$ και

$$(M^*(T)/r)^2 + \beta(M(T)\rho)^2 \geq \frac{\delta + \lambda}{\delta + 1} + \frac{s + 1}{\delta + 1} \frac{1 - \lambda}{s + 1} = 1.$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το Λήμμα 5.1.3 και παίρνουμε

$$(5.1.6) \quad \frac{1}{\rho} \leq \frac{(\sqrt{\delta+1} + \sqrt{s+1})\sqrt{(\delta+1)(s+1)}}{(\delta-s)\sqrt{1-\lambda}} \frac{1}{r} \leq \frac{2(\delta+1)}{\delta-s} \frac{\sqrt{s+1}}{\sqrt{1-\lambda}} \frac{1}{r}.$$

Τώρα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: Αν $\delta < 1$ επιλέγουμε $s = \delta/2$, ενώ αν $\delta \geq 1$ επιλέγουμε $s = 1/2$. Τότε, από την (5.1.6) παίρνουμε την (5.1.4). \square

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.1.5 και το θεώρημα Borsuk-Ulam μπορούμε να πάρουμε την ακόλουθη εκτίμηση για το πρόβλημα.

Θεώρημα 5.1.6 (Γιαννόπουλος-V. Milman). Έστω $t \geq 2$ ένας ακέραιος και $n \geq 2(t+1)$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n , η τυχαία $\lfloor \frac{n}{c_1 t} \rfloor$ -διάστατη τομή $K \cap E$ του K ικανοποιεί την

$$R(K \cap E) \leq c_2 \sqrt{tr_t(K)},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάποιο συμμετρικό κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n και κάποιον $\rho > 0$ υπάρχουν στροφές $u_1, \dots, u_t \in O(n)$ τέτοιες ώστε

$$u_1(K) \cap \dots \cap u_t(K) \subseteq \rho B_2^n.$$

Έστω k ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο $\lambda = \frac{k}{n} > \frac{t}{t+1}$. Υπάρχει $r > 0$ τέτοιος ώστε $M^*(u_j(K) \cap \rho B_2^n) = \sqrt{(3n+k)/4nr}$ για κάθε $j = 1, \dots, t$. Μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 5.1.5 και να βρούμε υποσύνολα \mathcal{L}_j της $G_{n,k}$ με μέτρο σχεδόν ίσο με 1 (μεγαλύτερο από $1 - c_1 \exp(-c_2(n-k))$) τέτοια ώστε

$$(5.1.7) \quad [u_j(K)]^\circ \cap E \subseteq \frac{c_1}{r} \sqrt{\frac{n}{n-k}} (B_2^n \cap E)$$

για κάθε $E \in \mathcal{L}_j$. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε $\mathcal{L} \subseteq G_{n,k}$ με $\nu_{n,k}(\mathcal{L}) > 0$ τέτοιο ώστε η (5.1.7) να ισχύει για κάθε $j \leq t$ και $E \in \mathcal{L}$. Αν $E \in \mathcal{L}$, περνώντας στα πολικά σώματα παίρνουμε

$$P_E(u_j(K)) \supseteq \sqrt{\frac{n-k}{n}} c_2 r (B_2^n \cap E) \quad , \quad j = 1, \dots, t.$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι γνησίως κυρτό. Μπορούμε τότε να ορίσουμε μια απεικόνιση $T : S(E) \rightarrow \mathbb{R}^{t(n-k)}$ ως εξής: Για δεδομένο $\vartheta \in S(E)$ βρίσκουμε $x_j = a_j \vartheta \in \text{bd}(P_E(u_j(K)))$, $j = 1, \dots, t$. Τότε έχουμε $x_j = P_E(y_j)$ για ένα (μοναδικό) σημείο $y_j \in \text{bd}(u_j(K))$. Ορίζουμε

$$T(\vartheta) = (y_1 - x_1, \dots, y_t - x_t),$$

όπου ταυτίζουμε τον $(E^\perp)^t$ με τον $\mathbb{R}^{t(n-k)}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η T είναι μια περιττή συνεχής συνάρτηση στην $S(E)$. Από την επιλογή του k , έχουμε $t(n-k) < k$. Μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε το αντιποδικό θεώρημα του Borsuk και να βρούμε $\vartheta \in S(E)$ τέτοιο ώστε $T(\vartheta) = 0$. Θεωρούμε ένα δείκτη $j_0 \leq t$ για τον οποίο ο $a_{j_0} = |x_{j_0}|$ είναι ο ελάχιστος δυνατός. Αφού $x_{j_0} = y_{j_0}$, έχουμε $x_{j_0} \in u_{j_0}(K) \cap E$, και αφού $a_{j_0} = \min_{j \leq t} a_j$ βλέπουμε ότι $x_{j_0} \in u_1(K) \cap \dots \cap u_t(K) \cap E$.

Από την άλλη πλευρά, το x_{j_0} ανήκει επίσης στο σύνορο της προβολής $P_E(u_{j_0}(K))$, και αυτό μας δίνει

$$c_2 r \sqrt{\frac{n-k}{n}} \leq |x_{j_0}| \leq R(u_1(K) \cap \dots \cap u_t(K) \cap E) \leq \rho.$$

Έτσι παίρνουμε ένα άνω φράγμα για το r συναρτήσει των ρ και t :

$$r \leq c_3 \sqrt{\frac{n}{n-k}} \rho.$$

Έστω s ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο $(n-s)/n \leq \sqrt{(3n+k)/4n}$. Ορίζουμε $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (που εύκολα βλέπουμε ότι ανήκει στο $(0, 1)$) έτσι ώστε να ισχύει

$$M^*(K \cap rB_2^n) = (1-\varepsilon) \sqrt{(n-s)/nr} = \sqrt{(3n+k)/(4n)} r.$$

Από το Θεώρημα 5.1.2 υπάρχει υποσύνολο \mathcal{L}' της $G_{n,s}$ με μέτρο σχεδόν ίσο με 1, τέτοιο ώστε

$$R(K \cap E) \leq r \leq c_3 \sqrt{\frac{n}{n-k}} \rho$$

για κάθε $E \in \mathcal{L}'$. Μένει να εκτιμήσουμε τους s και $n/(n-k)$ συναρτήσει του t . Είχαμε $k \leq nt/(t+1) + 1$, το οποίο μας δίνει

$$\frac{n}{n-k} \leq 2(t+1)$$

αν υποθέσουμε ότι $n \geq 2(t+1)$. Επίσης, αφού $(n-s)/n \leq \sqrt{(3n+k)/4n}$, έχουμε

$$s = n \frac{(n-k)/4n}{1 + \sqrt{(3n+k)/4n}} \geq \frac{n}{16(t+1)}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □

Με βάση τον ορισμό των παραμέτρων $r_t(K)$ και $R_k(K)$ μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το Θεώρημα 5.1.6 ως εξής.

Θεώρημα 5.1.7. Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε ακέραιο $t \geq 2$ και κάθε $n \geq 2(t+1)$, να ισχύει η ανισότητα

$$R_{c_1 t}(K) \leq c_2 \sqrt{t} r_t(K)$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n .

5.2 Το πρόβλημα του Knaster

Το πρόβλημα του Knaster [42] είναι το εξής:

Πρόβλημα 5.2.1. Είναι σωστό ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ και κάθε επιλογή σημείων $x_1, \dots, x_k \in S^{n-1}$, όπου $k = n - m + 1$, υπάρχει $U \in SO(n)$ τέτοιος ώστε $f(Ux_1) = \dots = f(Ux_k)$;

Κίνητρο για το πρόβλημα του Knaster ήταν ένα θεώρημα του Hopf το οποίο δίνει καταφατική απάντηση στο Πρόβλημα 5.2.1 όταν $k = 2$, γενικεύοντας έτσι το θεώρημα Borsuk-Ulam. Είναι γνωστό ότι το Πρόβλημα 5.2.1 έχει αρνητική απάντηση όταν $m > 2$, καθώς και στην περίπτωση $m = 2$ για κάποιες τιμές του n (βλ. Makeev [49] και Chen [18] για αναφορές). Στην περίπτωση $m = 1$ κάποιες μερικές θετικές απαντήσεις είχαν δοθεί: εκτός από την περίπτωση $n = 2$ που ελέγχεται εύκολα, η απάντηση είναι καταφατική στη διάσταση $n = 3$ (βλ. Floyd [28]) ή όταν τα x_1, \dots, x_n σχηματίζουν ορθοκανονική βάση (βλ. Kakutani [40] και Yamabe-Yojobo [67]).

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε την απόδειξη του αποτελέσματος του Kakutani.

Θεώρημα 5.2.2 (Kakutani). Έστω $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής πραγματική συνάρτηση. Τότε, υπάρχουν τρία σημεία P_1, P_2, P_3 της S^2 , κάθετα ανά δύο, τέτοια ώστε $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3)$.

Απόδειξη. Έστω S^2 η μοναδιαία σφαίρα στον \mathbb{R}^3 με κέντρο την αρχή των αξόνων $O = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Θέτουμε $Q_1 = (1, 0, 0)$, $Q_2 = (0, 1, 0)$ και $Q_3 = (0, 0, 1)$. Συμβολίζουμε επίσης με G την ομάδα όλων των στροφών σ της S^2 , ισοδύναμα των στροφών του \mathbb{R}^3 γύρω από το O . Η G είναι συμπαγής πολλαπλότητα διάστασης 3.

Για κάθε $\sigma \in G$ θεωρούμε το σημείο $\varphi(\sigma) = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως εξής:

$$x = f(\sigma^{-1}(Q_1)), \quad y = f(\sigma^{-1}(Q_2)), \quad z = f(\sigma^{-1}(Q_3)).$$

Η $\sigma \mapsto \varphi(\sigma)$ είναι συνεχής απεικόνιση από την G στον \mathbb{R}^3 . Για να αποδείξουμε το θεώρημα, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει στροφή $\sigma \in G$ τέτοια ώστε το $\varphi(\sigma)$ να ανήκει στην ευθεία $\ell : x = y = z$ στον \mathbb{R}^3 .

Έστω προς άτοπο ότι αυτό δεν ισχύει. Θεωρούμε την προβολή p του \mathbb{R}^3 στο επίπεδο $\pi : x + y + z = 0$ το οποίο είναι κάθετο στην ℓ . Τότε, η $\sigma \mapsto \psi(\sigma) = p(\varphi(\sigma))$ είναι συνεχής απεικόνιση από την G στο π . Από την υπόθεση, η εικόνα $\psi(G)$ της G δεν περιέχει το $O = (0, 0, 0)$.

Έστω H η υποομάδα της G που αποτελείται από όλες τις στροφές της σφαίρας γύρω από την ευθεία ℓ . Η H είναι ισόμορφη με την ομάδα των στροφών του επιπέδου π γύρω από την αρχή των αξόνων O , και μπορούμε να συμβολίσουμε τα στοιχεία της H με σ_ϑ , $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, όπου ϑ είναι η γωνία περιστροφής γύρω από τον άξονα ℓ , την οποία μετράμε έτσι ώστε $\sigma_{\frac{2\pi}{3}}(Q_i) = Q_{i+1}$ για $i = 1, 2, 3 \pmod{3}$.

Συμβολίζουμε με τ_ϑ την στροφή του επιπέδου π γύρω από την αρχή των αξόνων του O που αντιστοιχεί στην σ_ϑ . Τότε,

$$\psi(\sigma_{\vartheta + \frac{2\pi}{3}}) = \tau_{\frac{2\pi}{3}}(\psi(\sigma_\vartheta)) \quad \text{και} \quad \psi(\sigma_{\vartheta + \frac{4\pi}{3}}) = \tau_{\frac{4\pi}{3}}(\psi(\sigma_\vartheta)).$$

Έστω $C_{\vartheta_1, \vartheta_2}$ η καμπύλη που σχηματίζεται στο π από την $\psi(\sigma_\vartheta)$ για $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$. Τότε, οι καμπύλες $C_{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}}$ και $C_{\frac{4\pi}{3}, 2\pi}$ σχηματίζονται αν εφρμόσουμε τις στροφές $\tau_{\frac{2\pi}{3}}$ και $\tau_{\frac{4\pi}{3}}$ αντίστοιχα στην καμπύλη $C_{0, \frac{2\pi}{3}}$.

Έστω α η μεταβολή της γωνίας γύρω από το O στο επίπεδο π όταν το σημείο $\psi(\sigma_\theta)$ κινείται πάνω στην καμπύλη $C_{0, \frac{2\pi}{3}}$ από το $\psi(\sigma_0)$ στο $\psi(\sigma_{\frac{2\pi}{3}})$ ή ισοδύναμα όταν το θ κινείται από το 0 στο $\frac{2\pi}{3}$. Τότε το α πρέπει να είναι της μορφής $\alpha = 2m\pi + \frac{2\pi}{3}$ για κάποιον $m \in \mathbb{Z}$. Έτσι, καθώς το θ μεταβάλλεται από το 0 στο 2π , η συνολική μεταβολή της γωνίας του $\psi(\sigma_\theta)$ γύρω από το O στο επίπεδο π είναι $6m\pi + 2\pi = (3m + 1) \cdot 2\pi$.

Από την άλλη πλευρά, μπορούμε να θεωρήσουμε την H σαν μια κλειστή καμπύλη στην πολλαπλότητα της τοπολογικής ομάδας G . Τότε, είναι γνωστό ότι η $2H$ είναι ομοτοπική με το μηδέν στην G . Συνεπώς, η καμπύλη $2C_{0, 2\pi}$, που είναι η εικόνα της $2H$ μέσω της απεικόνισης $\sigma \mapsto \psi(\sigma)$, πρέπει να είναι κι αυτή ομοτοπική με το μηδέν στο π^* , όπου π^* είναι το ανοικτό σύνολο που προκύπτει αν αφαιρέσουμε το O από το επίπεδο π . Αυτό όμως είναι αδύνατο, διότι η συνολική μεταβολή της γωνίας στην καμπύλη $2C_{0, 2\pi}$ είναι $2(3m + 1) \cdot 2\pi \neq 0$.

Καταλήξαμε σε άτοπο, συνεπώς έχουμε αποδείξει το θεώρημα. \square

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.2 ο Kakutani έδωσε την απάντηση στο εξής πρόβλημα του Rademacher: Αν K είναι ένα φραγμένο κλειστό κυρτό σύνολο στον \mathbb{R}^3 , είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε έναν κύβο που περιγράφεται στο K ;

Θεώρημα 5.2.3. *Κάθε φραγμένο κλειστό κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^3 έχει περιγεγραμμένο κύβο.*

Απόδειξη. Έστω S^2 η σφαίρα στον \mathbb{R}^3 με κέντρο την αρχή των αξόνων $O = (0, 0, 0)$. Για κάθε σημείο $P \in S^2$ θεωρούμε δύο παράλληλα εφαπτόμενα επίπεδα στο K τα οποία είναι κάθετα στο διάνυσμα OP . Αυτά τα δύο επίπεδα μπορεί να συμπίπτουν αν το K είναι επίπεδο κυρτό σύνολο. Έστω $f(P)$ η κάθετη απόσταση αυτών των δύο επιπέδων. Η $f(P)$ είναι προφανώς πραγματική συνάρτηση ορισμένη στην S^2 . Επιπλέον παίρνει την ίδια τιμή σε αντιποδικά σημεία της S^2 , όμως αυτό δεν θα μας χρειαστεί.

Από το Θεώρημα 5.2.2 υπάρχουν τρία σημεία P_1, P_2, P_3 στην S^2 , κάθετα ανά δύο, τέτοια ώστε $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3)$. Είναι τότε φανερό ότι τα έξι αντιστοιχα εφαπτόμενα επίπεδα σχηματίζουν έναν κύβο ο οποίος είναι περιγεγραμμένος στο K . \square

Στην ίδια εργασία ο Kakutani παρατηρεί ότι το ερώτημα αν μπορούμε να εγγράψουμε κύβο σε τυχόν φραγμένο ανοικτό υποσύνολο K του \mathbb{R}^3 έχει αρνητική απάντηση. Το αντιπαράδειγμα δίνει ένα ανοικτό τετράεδρο στον \mathbb{R}^3 το οποίο είναι πολύ επίπεδο. Θεωρούμε ένα κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ στο (x, y) -επίπεδο, οι διαγώνιοι AC και BD του οποίου δεν είναι κάθετες, και μετακινούμε την κορυφή A στην κατεύθυνση του z -άξονα και σε μικρή απόσταση. Τότε, το τετράεδρο $A'BCD$ που δημιουργείται δεν έχει εγγεγραμμένο κύβο.

Το ερώτημα αν το Θεώρημα 5.2.2 γενικεύεται σε μεγαλύτερες διαστάσεις τίθεται από τον Kakutani: Είναι σωστό ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 4$, μπορούμε να βρούμε n σημεία $P_1, \dots, P_n \in S^{n-1}$, κάθετα ανά δύο, ώστε $f(P_1) = \dots = f(P_n)$; Όπως είπαμε, το ερώτημα αυτό είναι ειδική περίπτωση του προβλήματος του Knaster, στο οποίο έδωσαν αργότερα καταφατική απάντηση οι Yamabe-Yojobo [67].

5.3 Το πρόβλημα του Knaster και το θεώρημα Dvoretzky

Το κλασικό θεώρημα του Dvoretzky [23] ισχυρίζεται ότι κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα έχει υπόχωρο «μεγάλης διάστασης» που είναι C -ισομορφικός με τον Ευκλείδειο χώρο, όπου

C είναι μια απόλυτη σταθερά. Ο V. Milman [51] βελτίωσε την αρχική εκτίμηση του Dvoretzky δείχνοντας το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.3.1 (Dvoretzky-Milman). Έστω X ένας n -διάστατος χώρος με νόρμα και $\varepsilon \in (0, 1)$. Μπορούμε να βρούμε ακέραιο $k \geq c\varepsilon^2 \log n$ και έναν k -διάστατο υπόχωρο F του X τέτοιον ώστε $d(F, \ell_2^k) \leq 1 + \varepsilon$, όπου d είναι η απόσταση Banach-Mazur.

Σε γεωμετρική γλώσσα, το παραπάνω διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής: Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n , τότε για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ μπορούμε να βρούμε $k \geq c\varepsilon^2 \log n$, έναν υπόχωρο $F \in G_{n,k}$, όπου $G_{n,k}$ είναι η πολλαπλότητα Grassmann όλων των k -διάστατων υποχώρων του \mathbb{R}^n , και ένα ελλειψοειδές \mathcal{E} στον F τέτοια ώστε

$$\mathcal{E} \subseteq K \cap F \subseteq (1 + \varepsilon)\mathcal{E}.$$

Το παράδειγμα του ℓ_∞^n δείχνει ότι η λογαριθμική εξάρτηση του k από το n είναι βέλτιστη αν σταθεροποιήσουμε μια μικρή τιμή του ε .

Η απόδειξη του Milman για το Θεώρημα 5.3.1 δείχνει ότι, για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$, κάθε n -διάστατος χώρος με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ έχει υπόχωρο F διάστασης

$$(5.3.1) \quad k \geq c_1 \varepsilon^2 n (M/b)^2$$

με $d(F, \ell_2^k) \leq 1 + \varepsilon$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, $b = \max\{\|x\| : x \in S^{n-1}\}$ και $M = \int_{S^{n-1}} \|x\| d\sigma(x)$. Η παράμετρος

$$k(X) = n(M/b)^2$$

είναι η λεγόμενη «κρίσιμη διάσταση» του X . Ο ακριβής τρόπος με τον οποίο συνδέονται μεταξύ τους οι τρεις παράμετροι n , ε και k , οι οποίες εμπλέκονται στο Θεώρημα 5.3.1, δεν έχει αποσαφηνιστεί. Είναι χρήσιμο να ορίσουμε μία νέα παράμετρο: Για δεδομένο $\varepsilon \in (0, 1)$ και για κάθε n -διάστατο χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ συμβολίζουμε με $k(X, \varepsilon)$ τον μεγαλύτερο ακέραιο k για τον οποίο υπάρχει k -διάστατος υπόχωρος του X ο οποίος είναι $(1 + \varepsilon)$ -Ευκλείδειος, και για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ ορίζουμε

$$k(n, \varepsilon) = \inf\{k(X, \varepsilon) : \dim(X) = n\}.$$

Το θεώρημα του Milman μας δίνει $k(n, \varepsilon) \geq c\varepsilon^2 \log n$, και ο Schechtman [61] απέδειξε το ακόλουθο ισχυρότερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.3.2 (Schechtman). Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_0 > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$, κάθε $n \geq 1$ και κάθε n -διάστατο χώρο με νόρμα X , υπάρχουν

$$k \geq c_0 (\varepsilon / \log^2(\varepsilon^{-1})) \log n$$

και k -διάστατος υπόχωρος F του X τέτοια ώστε $d(F, \ell_2^k) \leq 1 + \varepsilon$.

Ο V. Milman παρατήρησε στο [54] ότι καταφατική απάντηση στο πρόβλημα του Knaster θα είχε ως συνέπεια μια απόδειξη του θεωρήματος Dvoretzky με πολύ καλή εξάρτηση από το ε . Υποθέτοντας καταφατική απάντηση στο πρόβλημα του Knaster για $m = 1$ και κάθε n , μπορούμε να πάρουμε την εκτίμηση

$$k(X) \geq c(n, \varepsilon) \log n / \log(2/\varepsilon)$$

για κάθε n -διάστατο χώρο με νόρμα X , όπου $c(n, \varepsilon) \rightarrow 1$ όταν $n \rightarrow \infty$ και $\varepsilon \rightarrow 0$. Μάλιστα το ίδιο ισχύει, με μια ελαφρώς διαφορετική εκτίμηση, αν η εικασία είναι σωστή για πολύ μικρότερα δείγματα σημείων $\{x_i\}_{i=1}^{k_0}$: αρκεί να πάρουμε $k_0 \simeq n^\alpha$ για κάποιο σταθερό $\alpha > 0$.

Θεώρημα 5.3.3 (V. Milman). *Εστω ότι το πρόβλημα του Knaster έχει καταφατική απάντηση. Τότε, για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$, κάθε $n \geq 1$ και κάθε n -διάστατο χώρο με νόρμα X , υπάρχουν*

$$k \geq \alpha(n, \varepsilon) \log n / \log(1/\varepsilon)$$

και k -διάστατος υπόχωρος F του X τέτοια ώστε $d(F, \ell_2^k) \leq 1 + \varepsilon$, όπου $\alpha(n, \varepsilon) \rightarrow 1$ καθώς $n \rightarrow \infty$ και $\varepsilon \rightarrow 0$.

Σχήμα της απόδειξης. Θεωρούμε ένα 2ε -δίκτυο \mathcal{N} στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^k , με τον μικρότερο δυνατό πληθώρα $N(k, 2\varepsilon)$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{N} \subset S^k$, ότι για κάθε $y \in S^k$ υπάρχει $x \in \mathcal{N}$ ώστε $|x - y| \leq 2\varepsilon$ και ότι ο αριθμός $N(k, 2\varepsilon)$ είναι ο ελάχιστος δυνατός πληθώρα ενός υποσυνόλου της S^k με αυτή την ιδιότητα. Είναι γνωστό ότι

$$N(k, 2\varepsilon) \leq \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{1}{(\varepsilon/2)^{k-1}}.$$

Μάλιστα, χρησιμοποιώντας μια πολύ πιο τεχνική εκτίμηση των Kabatianski και Levenstein, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι

$$k \geq \alpha(n, \varepsilon) \log n / \log(1/2\varepsilon),$$

όπου $\alpha(n, \varepsilon) \rightarrow 1$ καθώς $n \rightarrow \infty$ και $\varepsilon \rightarrow 0$.

Θεωρούμε τώρα έναν n -διάστατο χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Η συνάρτηση $f(x) = \|x\|$ είναι Lipschitz συνεχής στην S^{n-1} . Υποθέτουμε ότι $n = N(k, 2\varepsilon)$ και σταθεροποιούμε ένα 2ε -δίκτυο \mathcal{N} με $|\mathcal{N}| = n$ στη μοναδιαία σφαίρα S^{k-1} κάποιου (σταθερού) k -διάστατου υποχώρου E του \mathbb{R}^n . Υποθέτοντας ότι το πρόβλημα του Knaster έχει καταφατική απάντηση, μπορούμε να βρούμε $T \in SO(n)$ έτσι ώστε η f να είναι σταθερή στο $T(\mathcal{N})$. Παρατηρούμε ότι το $T(\mathcal{N})$ είναι 2ε -δίκτυο για τη σφαίρα $T(S^{k-1})$ του $F = T(E)$. Κάνοντας κανονικοποίηση μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $y \in T(\mathcal{N})$ ισχύει

$$|y| = 1 = \|y\|.$$

Παρατηρήστε ότι $\|x\| \leq \|x\|_D$ για κάθε $x \in F$, όπου $D = \text{absconv}\{y : y \in T(\mathcal{N})\}$. Τότε, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι

$$\|x\| \leq \frac{1}{1 - c\varepsilon^2} |x|$$

για κάθε $x \in F$, όπου $c \in (0, 1)$ κατάλληλη απόλυτη σταθερά. Από την άλλη πλευρά, για κάθε $x \in T(S^{k-1})$ υπάρχει $y \in T(\mathcal{N})$ τέτοιο ώστε $|x - y| \leq 2\varepsilon$. Συνεπώς,

$$\|x\| \geq \|y\| - \|x - y\| \geq 1 - \frac{1}{1 - c\varepsilon^2} |x - y| \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{1 - c\varepsilon^2}.$$

Επεται ότι $d(K \cap F, \ell_2^k) \leq 1 + 2\varepsilon + C\varepsilon^2$ για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$. □

Οι Kashin και Szarek [41] απέδειξαν ότι η απάντηση στο πρόβλημα του Knaster είναι αρνητική όταν $m = 1$, τουλάχιστον όταν το n είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό το αρνητικό αποτέλεσμα ισχύει και

για τιμές του k που είναι κάπως μικρότερες από n , αλλά αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο να ισχύει κάποιο θεώρημα τύπου Knaster για $k \simeq n^\alpha$ και κάποια σταθερά $\alpha > 0$.

Για να διατυπώσουμε το θεώρημα των Kashin και Szarek είναι χρήσιμο να εισαγάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Αν $d, n \in \mathbb{N}$ με $d \leq n$, και αν A είναι ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^d και $U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια ισομετρία, τότε λέμε ότι η U είναι «εμφύτευση Knaster» του A στον ℓ_∞^n αν η $\|U(x)\|_\infty$ είναι σταθερή για $x \in A$.

Θεώρημα 5.3.4 (Kashin-Szarek). Για κάθε k στο \mathbb{N} υπάρχει $A = \{x_1, \dots, x_k\} \subset S^{k-1}$ τέτοιο ώστε αν $n \leq k \lfloor \log(k/2) \rfloor / 32$ τότε δεν υπάρχει εμφύτευση Knaster U του A στον ℓ_∞^n .

Συνέπεια του θεωρήματος είναι ότι η $\|U(x_i)\|_\infty$ δεν μπορεί να είναι σταθερή αν $k = n$ και το n είναι αρκετά μεγάλο. Έτσι, η απάντηση στο πρόβλημα του Knaster είναι αρνητική για αρκετά μεγάλα n , ακόμα κι αν περιορίσουμε το ερώτημα στην κλάση των κυρτών συναρτήσεων.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.4 βασίζεται στα ακόλουθα δύο λήμματα.

Λήμμα 5.3.5. Έστω $d \in \mathbb{N}$ και E ένας d -διάστατος υπόχωρος του L_2 και $S_E := \{f \in E : \|f\|_2 = 1\}$ η σφαίρα του. Τότε, $\max\{\|f\|_\infty : f \in S_E\} \geq \sqrt{d}$. Συνεπώς, αν $\delta > 0$ και \mathcal{S} είναι ένα δ -δίκτυο της S_E , τότε

$$\max\{\|f\|_\infty : f \in \mathcal{S}\} \geq (1 - \delta^2/2)\sqrt{d}.$$

Αν ο E είναι κάποιος d -διάστατος υπόχωρος του ℓ_2^n τότε τα αντίστοιχα κάτω φράγματα είναι $\sqrt{d/n}$ και $(1 - \delta^2/2)\sqrt{d/n}$.

Σχήμα της απόδειξης. Έστω $\{\varphi_j\}_{j=1}^d$ μια ορθοκανονική βάση του E . Τότε η $\mathcal{S}_\varphi = \left(\sum_{j=1}^d |\varphi_j|^2\right)^{1/2}$ είναι το κατά σημείο supremum των $|f|$ πάνω από όλες τις $f \in \mathcal{S}$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε $\sqrt{d} = \|\mathcal{S}_\varphi\|_2 \leq \|\mathcal{S}_\varphi\|_\infty$. Αν \mathcal{S} είναι ένα δ -δίκτυο της S_E , τότε η κυρτή θήκη του \mathcal{S} περιέχει την $(1 - \delta^2/2)S_E$, και αυτό δίνει την δεύτερη εκτίμηση. Το ίδιο επιχειρήμα δουλεύει για τον L_2 και τον L_∞ σε κάθε χώρο πιθανότητας. Συνεπώς, η παραλλαγή του λήμματος για τον ℓ_2^n και τον ℓ_∞^n έπεται με κανονικοποίηση. \square

Για το δεύτερο λήμμα, συμβολίζουμε με $w_1, \dots, w_N, \dots, w_{2N}$ τις διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού $2N$ -γώνου στην S^1 . Ειδικότερα, $w_{N+j} = -w_j$ για κάθε $j = 1, \dots, N$. Θέτουμε επίσης $P_N = \{w_1, \dots, w_N\}$.

Λήμμα 5.3.6. Έστω $n, N \in \mathbb{N}$ και έστω $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια εμφύτευση Knaster του P_N στον ℓ_∞^n . Αν A είναι η κοινή τιμή των $\|\sigma(w_j)\|_\infty$, $j = 1, \dots, N$, τότε $A \leq 2/\sqrt{N}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\sigma_1 = \sigma/A$. Τότε η σ_1 είναι αναγκαστικά της μορφής $\sigma_1(x) = (\langle x, y_s \rangle)_{s=1}^n$ για κάποια $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν τα εξής:

- (α) $|\langle w_i, y_s \rangle| \leq 1$ για κάθε $i = 1, \dots, N$ και $s = 1, \dots, n$.
- (β) για κάθε $i = 1, \dots, N$ υπάρχει $s_i \in \{1, \dots, n\}$ τέτοιος ώστε $|\langle w_i, y_{s_i} \rangle| = 1$.

Θέτουμε $Q = \text{conv}(P_N \cup (-P_N))$ και Q° το πολικό του. Τότε το Q° είναι ένα κανονικό $2N$ -γωνο περιγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο. Η συνθήκη (α) είναι ισοδύναμη με την « $y_s \in Q^\circ$ για κάθε $s = 1, \dots, n$ » και η συνθήκη (β) μας λέει ότι για κάθε πλευρά του Q° υπάρχει κάποιος δείκτης s

τέτοιος ώστε είτε το y_s ή το $-y_s$ να ανήκει σε αυτή την πλευρά, συγκεκριμένα ο s_i για την πλευρά που εφάπτεται στο μοναδιαίο κύκλο στο w_i . Αφού ένα σημείο μπορεί να ανήκει σε δύο το πολύ πλευρές του Q° (αυτό συμβαίνει όταν το σημείο είναι κορυφή) πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον $k := \lceil N/2 \rceil$ διακεκριμένα σημεία ανάμεσα στα y_{s_i} . Παρατηρήστε επίσης ότι $|y_{s_i}| \geq 1$ για κάθε $i = 1, \dots, N$, από το (β).

Υπολογίζουμε τώρα τη νόρμα Hilbert-Schmidt $\|\sigma_1\|_{\text{HS}} = (\text{tr}(\sigma_1^* \sigma_1))^{1/2}$ με δύο τρόπους. Έχουμε

$$\|\sigma_1\|_{\text{HS}} = \left(\sum_{s=1}^n |y_s|^2 \right)^{1/2} \geq (N/2)^{1/2}$$

από τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν, αλλά επίσης, επειδή η σ_1 είναι πολλαπλάσιο μιας ισομετρίας του \mathbb{R}^2 , έχουμε $\|\sigma_1\|_{\text{HS}} = \sqrt{2}/A$. Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε $A \leq 2/\sqrt{N}$, όπως ισχυρίζεται το λήμμα. \square

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το θεώρημα των Kashin και Szarek.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.4. Θέτουμε $d = \lfloor \log(k/2) \rfloor$ και θεωρούμε ένα σύνολο \mathcal{S} με πληθάνο $m < (4/\sqrt{3})^d < k/2$ τέτοιο ώστε το $\mathcal{S} \cup (-\mathcal{S})$ να είναι 1-δίκτυο της S^{d-1} . Στη συνέχεια, θέτουμε $N = k - m$ (παρατηρήστε ότι $N > k/2$) και θεωρούμε το σύνολο P_N του Λήμματος 5.3.6. Ταυτίζοντας τους \mathbb{R}^d και \mathbb{R}^2 με κατάλληλους d -διάστατους και 2-διάστατους υποχώρους του \mathbb{R}^k μπορούμε να σκεφτόμαστε όλα αυτά τα σύνολα ως υποσύνολα της S^{k-1} , και να ορίσουμε $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_k\} = \mathcal{S} \cup P_N$. Τώρα, έστω $n \in \mathbb{N}$ και σ μια ισομετρία από τον ℓ_2^k (ή της γραμμικής θήκης του \mathcal{V}) στον ℓ_2^n . Αφού το $\sigma(\mathcal{S}) \cup (-\sigma(\mathcal{S}))$ είναι 1-δίκτυο για τη σφαίρα του d -διάστατου χώρου $E = \sigma(\mathbb{R}^d)$, από το Λήμμα 5.3.5 έπεται ότι

$$\max_{1 \leq i \leq k} \|\sigma(v_i)\|_\infty \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d}{n}}.$$

Από την άλλη πλευρά, το Λήμμα 5.3.6 συνεπάγεται ότι

$$\min_{1 \leq i \leq k} \|\sigma(v_i)\|_\infty \leq \frac{2}{\sqrt{N}} < 2\sqrt{\frac{2}{p}}.$$

Άρα, η ακολουθία $\{\|\sigma(v_i)\|_\infty\}_{i=1}^k$ δεν μπορεί να είναι σταθερή αν $n \leq kd/32 = k \lfloor \log(k/2) \rfloor / 32$, το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα. \square

Ένα ερώτημα που διατυπώνεται στο [41] αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο να μπορούν να χρησιμοποιηθούν ιδέες που σχετίζονται με το πρόβλημα του Knaster για μια απόδειξη του θεωρήματος Dvoretzky. Θα μπορούσε ίσως να ισχύει ότι αν $n \geq kd$ τότε για κάθε συνεχή $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ και κάθε $x_1, \dots, x_k \in S^{d-1}$ υπάρχει ισομετρία $U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $f(Ux_1) = \dots = f(Ux_k)$. Αυτό αληθεύει για την $f(x) = \|x\|_\infty$.

Οι Hinrichs και Richter, συνεχίζοντας στην ίδια κατεύθυνση, έδωσαν νέα αντιπαράδειγματα σε χαμηλότερες διαστάσεις. Για την περιγραφή των αποτελεσμάτων τους υπενθυμίζουμε κάποιον συμβολισμό και εισάγουμε μερικές ακόμη έννοιες:

- Αν $M \subseteq \mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $\text{absconv}(M)$ την κυρτή θήκη του $M \cup (-M)$.

- Για την περίπτωση $m = 1$ της εικασίας του Knaster θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση $x \mapsto \|x\|_\infty = \max\{|x[i]| : i = 1, \dots, n\}$.
- Για την περίπτωση $m = 2$ θα χρησιμοποιήσουμε τις απεικονίσεις

$$f_{(l, n-l)}(x) = (f_1(x), f_2(x)) = \left(\max_{1 \leq i \leq l} |x[i]|, \max_{l+1 \leq i \leq n} |x[i]| \right), \quad 1 \leq l \leq n.$$

- Για $M \subseteq S^{d-1}$ και για μια συνεχή απεικόνιση $f : S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, μια γραμμική ισομετρία $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται εμφύτευση Knaster του M ως προς την f αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $f(T(p)) = c$ για κάθε $p \in M$.

Το πρώτο λήμμα των Hinrichs και Richter γενικεύει το Λήμμα 5.3.5 και περιγράφει υποσύνολα της σφαίρας που οι εμφυτεύσεις Knaster τους έχουν αναγκαστικά μεγάλη σταθερά.

Λήμμα 5.3.7. Έστω $M \subseteq S^{d-1}$ και $\delta > 0$ ώστε $\delta B_2^d \subseteq \text{absconv}(M)$. Τότε, κάθε εμφύτευση Knaster ϱ του M στον \mathbb{R}^n ως προς την $f = (f_1, f_2) = f_{(l, n-l)}$ με σταθερά $c = (c_1, c_2)$ ικανοποιεί την

$$lc_1^2 + (n-l)c_2^2 \geq \delta^2 d.$$

Απόδειξη. Για $s = 1, 2$ αφού η f_s είναι κυρτή και άρτια, από την $f_s(\varrho(p)) = c_s$ για $p \in M$ έπεται ότι $f_s(x) \leq c_s$ για κάθε $x \in \text{absconv}(\varrho(M)) = \varrho(\text{absconv}(M))$. Από την υπόθεση ότι $\delta B_2^d \subseteq \text{absconv}(M)$ και το γεγονός ότι οι f_s είναι ομογενείς συμπεραίνουμε ότι

$$f_s(x) \leq \frac{c_s}{\delta} \quad \text{για κάθε } x \in \varrho(B_2^d).$$

Έστω y_1, \dots, y_d μια ορθοκανονική βάση του $\varrho(\mathbb{R}^d)$. Ορίζουμε $y, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ με

$$y[i] = \left(\sum_{j=1}^d y_j[i]^2 \right)^{1/2} \quad \text{και} \quad x_i = \frac{1}{y[i]} \sum_{j=1}^d y_j[i] y_j.$$

Τότε, από την $x_i(i) = y_i$ έπεται ότι $f_s(x_i) \geq y_i$ για $s = 1$ αν $i \leq \ell$ και για $s = 2$ αν $i > \ell$, αντίστοιχα. Άρα,

$$d = \sum_{j=1}^d |y_j|^2 = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^n y_j[i]^2 = \sum_{i=1}^n y[i]^2 \leq \sum_{i=1}^{\ell} f_1(x_i)^2 + \sum_{i=\ell+1}^n f_2(x_i)^2,$$

και αφού $|x_i| = 1$ βλέπουμε ότι

$$d \leq \ell \frac{c_1^2}{\delta^2} + (n-\ell) \frac{c_2^2}{\delta^2}.$$

□

Στην περίπτωση $l = n$ το Λήμμα 5.3.7 μας δίνει το εξής:

Πόρισμα 5.3.8. Έστω $M \subseteq S^{d-1}$ και $\delta > 0$ ώστε $\delta B_2^d \subseteq \text{absconv}(M)$. Τότε, κάθε εμφύτευση Knaster ϱ του M στον \mathbb{R}^n ως προς την $f = \|\cdot\|_\infty$ με σταθερά c ικανοποιεί την

$$nc^2 \geq \delta^2 d.$$

Το δεύτερο λήμμα των Hinrichs και Richter αντικαθιστά το Λήμμα 5.3.6 και δίνει σύνολα τα οποία δίνουν «μικρές» σταθερές.

Λήμμα 5.3.9. Έστω $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ και $p_1, \dots, p_r \in S^1$ διακεκριμένα σημεία τέτοια ώστε $\|p_1 - p_j\|_2 \leq \varepsilon$ για κάθε $1 < j \leq r$. Τότε κάθε εμφύτευση Knaster του $\{p_1, \dots, p_r\}$ στον \mathbb{R}^n ως προς την $f = (f_1, f_2) = f_{(l, n-l)}$ με σταθερά $c = (c_1, c_2)$ ικανοποιεί την

$$\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (c_1^2 + c_2^2 - 4\varepsilon) \leq 1.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(5.3.2) \quad \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (c_1^2 - 2\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{\ell} \varrho(p_1)[i]^2$$

και

$$\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (c_2^2 - 2\varepsilon) \leq \sum_{i=\ell+1}^n \varrho(p_1)[i]^2,$$

οπότε το λήμμα έπεται διότι

$$\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (c_1^2 + c_2^2 - 4\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^n \varrho(p_1)[i]^2 = |\varrho(p_1)|^2 = 1.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c_1 > 0$, αλλιώς η (5.3.2) ισχύει τετριμμένα. Έστω $\{q_1, q_2\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\varrho(\mathbb{R}^2)$. Τότε $\varrho(S^1) = \{q(\varphi) : 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, όπου $q(\varphi) = \cos(\varphi)q_1 + \sin(\varphi)q_2$. Υπάρχουν γωνίες $\varphi_j \in [0, 2\pi)$, $1 \leq j \leq r$, τέτοιες ώστε $\varrho(p_j) = q(\varphi_j)$. Για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχουν $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$(5.3.3) \quad q(\varphi)[i] = a_i \cos(\varphi + b_i).$$

Ορίζουμε

$$A = \{i \in \{1, \dots, \ell\} : |q(\varphi_j)[i]| = c_1 \text{ για κάποιον } j \in \{1, \dots, r\}\}.$$

Για κάθε $i \in A$ υπάρχει $j \in \{1, \dots, r\}$ τέτοιος ώστε $|\varrho(p_j)[i]| = |q(\varphi_j)[i]| = c_1$. Από την

$$\left| |\varrho(p_1)[i]| - c_1 \right| = \left| |\varrho(p_1)[i]| - |\varrho(p_j)[i]| \right| \leq |\varrho(p_1) - \varrho(p_j)| \leq \varepsilon$$

βλέπουμε ότι

$$|\varrho(p_1)[i]| \in [c_1 - \varepsilon, c_1 + \varepsilon] \quad \text{και} \quad \varrho(p_1)[i]^2 \geq (\max\{c_1 - \varepsilon, 0\})^2.$$

Αφού από την $c_1 \leq 1$ έπεται ότι $(\max\{c_1 - \varepsilon, 0\})^2 \geq c_1^2 - 2\varepsilon$, συμπεραίνουμε ότι

$$c_1^2 - 2\varepsilon \leq \varrho(p_1)[i]^2 \quad \text{για κάθε } i \in A.$$

Για κάθε $j \in \{1, \dots, r\}$ υπάρχει $i \in A$ τέτοιος ώστε $|q(\varphi_j)[i]| = c_1$, γιατί

$$\max\{|q(\varphi_j)[i]| : 1 \leq i \leq \ell\} = f_1(\varrho(p_j)) = c_1.$$

Όμως, από την (5.3.3) βλέπουμε ότι η $|q(\cdot)[i]|$ παίρνει την τιμή $c_1 > 0$ για τέσσερις τοπολύ τιμές της γωνίας φ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ και αφού το $\{p_1, \dots, p_r\}$, άρα και το $\{q(\varphi_1), \dots, q(\varphi_r)\}$, δεν περιέχει ζεύγος αντιποδικών σημείων, για δύο το πολύ γωνίες από το $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$. Έτσι παίρνουμε $r \leq 2|A|$, δηλαδή $\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \leq |A|$. Τώρα, για την (5.3.2) γράφουμε

$$\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (c_1^2 - 2\varepsilon) \leq \sum_{i \in A} \varrho(p_1)[i]^2 \leq \sum_{i=1}^{\ell} \varrho(p_1)[i]^2.$$

□

Παρόμοιο επιχείρημα δίνει το ακόλουθο, στην περίπτωση $m = 1$.

Πόρισμα 5.3.10. Έστω $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ και $p_1, \dots, p_r \in S^1$ διακεκριμένα σημεία τέτοια ώστε $\|p_1 - p_j\|_2 \leq \varepsilon$ για κάθε $1 < j \leq r$. Τότε κάθε εμφύτευση Knaster του $\{p_1, \dots, p_r\}$ στον \mathbb{R}^n ως προς την $f = \|\cdot\|_\infty$ με σταθερά c ικανοποιεί την

$$\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (c^2 - 2\varepsilon) \leq 1.$$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε τα δύο θεωρήματα των Hinrichs και Richter.

Θεώρημα 5.3.11. Το πρόβλημα του Knaster έχει αρνητική απάντηση όταν $m = 1$ για $n \in \{61, 63, 65\}$ και για $n \geq 67$.

Απόδειξη. Στη σφαίρα S^2 μπορούμε να βρούμε ένα συμμετρικό δίκτυο $N = -N \subset S^2$ με 22 σημεία τέτοιο ώστε οι γεωδαισιακές μπάλες ακτίνας $\alpha = 27.82$ με κέντρα τα σημεία του N να καλύπτουν την S^2 . Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \|x\|_\infty$ στην S^{n-1} . Για σταθερό $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ επιλέγουμε $k = n$ σημεία p_1, \dots, p_n στις σφαίρες $S^1 \subset S^2 \subset S^{n-1}$ ως εξής. Επιλέγουμε $p_1, \dots, p_{n-10} \in S^1$ και $p_{n-9}, \dots, p_n \in S^2$ με $|p_1 - p_j| \leq \varepsilon$, $1 < j \leq n-10$, και $\{p_{n-10}, \dots, p_n\} \cup \{-p_{n-10}, \dots, -p_n\} = N$.

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει $\varrho \in SO(n)$ με την ιδιότητα $f(\varrho(p_1)) = \dots = f(\varrho(p_n)) = c$. Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 5.3.8 για το $M = \{p_{n-10}, \dots, p_n\}$. Αφού $(\cos \alpha)B_2^3 \subseteq \text{absconv}(N) = \text{absconv}(M)$, παίρνουμε

$$nc^2 \geq 3 \cos^2 \alpha.$$

Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 5.3.10 για το $\{p_1, \dots, p_{n-10}\}$ παίρνουμε

$$\left\lceil \frac{n-10}{2} \right\rceil (c^2 - 2\varepsilon) \leq 1.$$

Συνεπώς,

$$\varepsilon \geq \frac{1}{2} \left(\frac{3 \cos^2 \alpha}{n} - \left\lceil \frac{n-10}{2} \right\rceil^{-1} \right).$$

Όμως το δεξιό μέλος είναι γνήσια θετικό αν $n \in \{61, 63, 65\}$ ή $n \geq 67$. Γι' αυτές τις τιμές του n καταλήγουμε σε άτοπο αν επιλέξουμε το ε αρκετά μικρό. □

Θεώρημα 5.3.12. Το πρόβλημα του Knaster έχει αρνητική απάντηση όταν $m = 2$ για $n \geq 8$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f = f_{(\lceil n/2 \rceil, n - \lceil n/2 \rceil)}$. Έστω $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$.

Υποθέτουμε αρχικά ότι ο n είναι άρτιος. Επιλέγουμε τα σημεία p_1, \dots, p_k , $k = n - m + 1 = n - 1$, σε έναν μεγάλο κύκλο $S^1 \subset S^{n-1}$ ως εξής. Τα p_1, \dots, p_{n-3} ικανοποιούν την $|p_1 - p_j| \leq \varepsilon$ για $1 < j \leq n - 3$. Τα υπόλοιπα δύο σημεία p_{n-2}, p_{n-1} επιλέγονται έτσι ώστε τα $\{p_{n-3}, p_{n-2}, p_{n-1}\} \cup \{-p_{n-3}, -p_{n-2}, -p_{n-1}\}$ να είναι κορυφές κανονικού εξαγώνου. Υποθέτουμε ότι υπάρχει στροφή $\rho \in SO(n)$ τέτοια ώστε η $f(\rho(p_j)) = c = (c_1, c_2)$ να είναι σταθερή για $1 \leq j \leq n - 1$. Το σύνολο $M = \{p_{n-3}, p_{n-2}, p_{n-1}\}$ ικανοποιεί την $\frac{\sqrt{3}}{2} B_2^2 \subseteq \text{absconv}(M)$ αφού το τελευταίο σύνολο είναι κανονικό εξαγώνο. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.3.7 με $\ell = \lceil n/2 \rceil = n/2$ παίρνουμε

$$\frac{n}{2}(c_1^2 + c_2^2) \geq \frac{3}{2}.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.3.9 για τα p_1, \dots, p_{n-3} παίρνουμε

$$\frac{n-2}{2}(c_1^2 + c_2^2 - 4\varepsilon) \leq 1,$$

διότι $\lceil (n-3)/2 \rceil = (n-2)/2$. Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες καταλήγουμε στην

$$\varepsilon \geq (n-6)/4n(n-2) > 0.$$

Έτσι έχουμε αντίφαση αν επιλέξουμε τα σημεία να ικανοποιούν την $\varepsilon < (n-6)/4n(n-2)$.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι ο $n \geq 9$ είναι περιττός. Επιλέγουμε $p_1, \dots, p_{n-4} \in S^1$ έτσι ώστε $|p_1 - p_j| \leq \varepsilon$ για $1 < j \leq n-4$ και τα $p_{n-3}, p_{n-2}, p_{n-1} \in S^1$ έτσι ώστε τα σημεία του $M \cup (-M)$ να είναι οι κορυφές κανονικού οκταγώνου, όπου $M = \{p_{n-4}, \dots, p_{n-1}\}$. Υποθέτουμε πάλι ότι υπάρχει στροφή $\rho \in SO(n)$ τέτοια ώστε η $f(\rho(p_j)) = c = (c_1, c_2)$ να είναι σταθερή για $1 \leq j \leq n-1$. Τώρα έχουμε $\delta B_2^2 \subseteq \text{absconv}(M)$ με $\delta^2 = (2 + \sqrt{2})/4$. Από το Λήμμα 5.3.7 με $\ell = \lceil n/2 \rceil = (n+1)/2$ παίρνουμε

$$\frac{n+1}{2}c_1^2 + \frac{n-1}{2}c_2^2 \geq \frac{2 + \sqrt{2}}{2},$$

άρα

$$\frac{n+1}{2}(c_1^2 + c_2^2) \geq \frac{2 + \sqrt{2}}{2}.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.3.9 στα p_1, \dots, p_{n-4} παίρνουμε

$$\frac{n-3}{2}(c_1^2 + c_2^2 - 4\varepsilon) \leq 1,$$

αφού $\lceil (n-4)/2 \rceil = (n-3)/2$. Έπεται, τελικά, ότι

$$\varepsilon \geq \frac{\sqrt{2}n - 8 - 3\sqrt{2}}{4(n+1)(n-3)} > 0,$$

το οποίο οδηγεί πάλι σε άτοπο αν το ε είναι αρκετά μικρό. \square

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με την περίπτωση $k = 2$ για την οποία η βέλτιστη εξάρτηση από το ε στο θεώρημα Dvoretzky είναι γνωστή.

Θεώρημα 5.3.13. Για κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$ υπάρχει 2-διάστατος υπόχωρος E τέτοιος ώστε

$$d_{BM}(K \cap E, B_2^2) \leq 1 + \frac{2\pi^2}{3(n+1)^2}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη που θα δώσουμε οφείλεται στον M. Gromov. Παρουσιάζεται στο [54] και χρησιμοποιεί μια μη τετριμμένη γενίκευση του θεωρήματος Borsuk-Ulam. Θεωρούμε την S^n για n περιττό. Τότε η ομάδα \mathbb{Z}_p δρα ελεύθερα στην S^n : εισάγουμε μια μιγαδική δομή στον $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^k$, όπου $k = (n+1)/2$, και τότε το γινόμενο με τις πρωταρχικές ρίζες $\sqrt[p]{1}$ της μονάδας ορίζει μια ελεύθερη δράση της \mathbb{Z}_p . Η γενίκευση του θεωρήματος Borsuk-Ulam λέει ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ και $n = p-1$ υπάρχει μια τροχιά $\{x_1, \dots, x_p\}$ για την δράση τέτοια ώστε η $f(x_i)$ να είναι σταθερή για $1 \leq i \leq p$. Τα σημεία x_1, \dots, x_p ανήκουν σε κάποιον 2-διάστατο υπόχωρο E του \mathbb{R}^{n+1} και σχηματίζουν ε -δίκτυο στη σφαίρα $S(E) - S^1$, με $\varepsilon = 2\pi/(2p)$. Τώρα, εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον E με την ιδιότητα ότι $\|x_i\| = |x_i| = 1$, $i = 1, \dots, p$ πρέπει να ισχύει

$$\frac{1}{1 + \varepsilon^2/6}|x| \leq \|x\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon^2/2}|x|$$

για κάθε $x \in E$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. \square

5.4 Ανισότητες συγκέντρωσης για νόρμες και το θεώρημα Dvoretzky

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε ένα πιο πρόσφατο αποτέλεσμα των Βαλέττα και Παούρη από το [59]. Στη γλώσσα του μέτρου Gauss και των κανονικών τυχαίων διανυσμάτων, το θεώρημα Dvoretzky-Milman μας λέει ότι για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον \mathbb{R}^n μπορούμε να βρούμε $T \in GL(n)$ τέτοιον ώστε

$$(5.4.1) \quad \mathbb{P}(|\|TG\| - \mathbb{E}\|TG\|| > t\mathbb{E}\|TG\|) \leq C \exp(-ct^2 \log n)$$

για κάθε $t > 0$, όπου $G \sim N(\mathbf{0}, I_n)$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι αν επιλέξουμε τον $T \in GL(n)$ έτσι ώστε το $T^{-1}(B_X)$ να έχει ως ελλειψοειδές μέγιστου όγκου την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, τότε η κρίσιμη διάσταση $k(T^{-1}(B_X))$ είναι τουλάχιστον της τάξης του $\log n$. Αυτό είναι μάλιστα ακριβές, διότι $k(B_\infty^n) \approx \log n$. Όμως, σε αυτή την ειδική ακραία περίπτωση του ℓ_∞^n είναι γνωστό ότι

$$(5.4.2) \quad ce^{-Ct \log n} \leq \mathbb{P}(|\|G\|_\infty - \mathbb{E}\|G\|_\infty| > t\mathbb{E}\|G\|_\infty) \leq Ce^{-ct \log n}$$

για κάθε $t \in (0, 1)$. Τίθεται έτσι, φυσιολογικά, το ακόλουθο ερώτημα.

Ερώτημα 5.4.1. Είναι σωστό ότι για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον \mathbb{R}^n υπάρχει $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε

$$\mathbb{P}(|\|TG\|_\infty - \mathbb{E}\|TG\|_\infty| > t\mathbb{E}\|TG\|_\infty) \leq C \exp(-c \max\{t^2, t\} \log n)$$

για κάθε $t > 0$;

Θα δούμε ότι το Ερώτημα 5.4.1 έχει καταφατική απάντηση αν υποθέσουμε ότι ο χώρος με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ δεν έχει ακραία *unconditional* σταθερά (ο ορισμός δίνεται στην Παράγραφο 5.4.2).

Θεώρημα 5.4.2 (Βαλέττας-Παούρης). Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Τότε, υπάρχει $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε, για κάθε $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|\|TG\| - \mathbb{E}\|TG\|| > t\mathbb{E}\|TG\|\right) \leq C \exp\left(-c \max\{t^2, t\} \log\left(\frac{en}{(\text{unc}(X))^2}\right)\right).$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.2 χρησιμοποιεί την L^1 - L^2 ανισότητα του Talagrand και το θεώρημα Borsuk-Ulam.

Χρησιμοποιώντας ένα άλλο κλασικό εργαλείο, το θεώρημα Alon-Milman [5], μπορούμε να συμπεράνουμε ότι σε κάθε n -διάστατο χώρο με νόρμα υπάρχει καλή τοπική unconditional δομή. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.4.2 και την διχοτομία που περιγράψαμε πιο πάνω, οι Βαλέττας και Παούρης απέδειξαν το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.4.3 (Βαλέττας-Παούρης). Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα, που η μοναδιαία του μπάλα B_X έχει ελλειψοειδές μέγιστου όγκου την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και έστω $0 < \delta < 1/2$. Τότε έχουμε την ακόλουθη διχοτομία:

- Είτε ο τυχαίος υπόχωρος E με $\dim(E) = k \geq n^{1/2-\delta}$ ικανοποιεί την

$$\mathbb{P}(|\|G\|_{E \cap B_X} - \mathbb{E}\|G\|_{E \cap B_X}| > t\mathbb{E}\|G\|_{E \cap B_X}) \leq Ce^{-ct^2k}$$

για κάθε $t > 0$,

- Ή υπάρχουν υπόχωρος F με $\dim(F) = m \geq c\sqrt{n}$ και αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός $T : F \rightarrow F$ ώστε

$$\mathbb{P}(|\|TG\|_{F \cap B_X} - \mathbb{E}\|TG\|_{F \cap B_X}| > t\mathbb{E}\|TG\|_{F \cap B_X}) \leq Ce^{-c\delta \max\{t^2, t\} \log m}$$

για κάθε $t > 0$, όπου G είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα και $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Αυτό το θεώρημα, το οποίο μπορούμε να σκεφτόμαστε ως πιθανοθεωρητική εκδοχή του θεωρήματος Alon-Milman για το μέτρο Gauss, είναι αρκετό για να δώσουμε καταφατική απάντηση στο Ερώτημα 5.4.1.

Θεώρημα 5.4.4. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Υπάρχει $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε

$$\mathbb{P}(|\|TG\| - \mathbb{E}\|TG\|| > t\mathbb{E}\|TG\|) \leq Ce^{-c \max\{t^2, t\} \log n}$$

για κάθε $t > 0$, όπου G είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα και $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Το Θεώρημα 5.4.4 έχει άμεση σχέση με την απόδειξη του Milman για το θεώρημα του Dvoretzky. Αν ορίσουμε $k_r(X, \varepsilon)$ τον μέγιστο k για τον οποίο ο τυχαίος k -διάστατος υπόχωρος του X είναι $(1 + \varepsilon)$ -σφαιρικός με πιθανότητα, ας πούμε, μεγαλύτερη από $1/2$, τότε το επιχείρημα του Milman δείχνει ότι $k_r(X, \varepsilon) \geq c\varepsilon^2 k(X)$. Από το Θεώρημα 5.4.4 και ένα γνωστό επιχείρημα διακριτοποίησης μέσω δικτύου, έπεται το εξής αποτέλεσμα.

Πόρισμα 5.4.5 (Βαλέττας-Παούρης). Για κάθε χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ υπάρχει γραμμική εικόνα B της B_X τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ να έχουμε

$$k_r(B, \varepsilon) \geq c\varepsilon \log n / \log(1/\varepsilon).$$

Με άλλα λόγια, η τυχαία k -διάστατη τομή του B με $k \leq c\varepsilon \log n / \log(1/\varepsilon)$ είναι $(1 + \varepsilon)$ -σφαιρική με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - n^{-c\varepsilon}$.

Το Πρόσκιμα 5.4.5 δείχνει επίσης ότι

$$k(n, \varepsilon) \geq c\varepsilon \log n / \log(1/\varepsilon),$$

κάτι που βελτιώνει το θεώρημα του Schechtman κατά έναν παράγοντα της τάξης του $\log(1/\varepsilon)$. Αυτό είναι το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα, και το πρόβλημα να δοθεί η βέλτιστη εκτίμηση από κάτω για την συνάρτηση $k(n, \varepsilon)$ παραμένει ανοικτό.

5.4.1 Ανισότητα δύο επιπέδων για την συγκέντρωση στο χώρο του Gauss

Ξεκινάμε από την κλασική ανισότητα συγκέντρωσης στον χώρο του Gauss. Για κάθε συνάρτηση Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, έχουμε ότι

$$(5.4.3) \quad \mathbb{P}(|f(G) - \mathbb{E}(f(G))| > t) \leq 2 \exp(-t^2/2L^2)$$

για κάθε $t > 0$, όπου G είναι ένα τυπικό n -διάστατο κανονικό τυχαίο διάνυσμα. Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον \mathbb{R}^n τότε από την (5.4.3) συμπεραίνουμε ότι

$$(5.4.4) \quad \mathbb{P}(|\|G\| - \mathbb{E}\|G\|| > t\mathbb{E}\|G\|) \leq 2 \exp(-t^2k/2)$$

για κάθε $t > 0$, όπου

$$k = k(X) = k(B_X) := (\mathbb{E}\|G\|/b)^2$$

είναι η κρίσιμη διάσταση του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και

$$b = b(X) = b(B_X) := \max\{\|x\| : \|x\|_2 = 1\}$$

είναι η σταθερά Lipschitz της νόρμας $\|\cdot\|$. Για την περιοχή των μεγάλων αποκλίσεων είναι γνωστό ότι αυτή η εκτίμηση είναι ακριβής: για κάθε $t \geq 1$ έχουμε

$$(5.4.5) \quad \mathbb{P}(\|G\| \geq (1+t)\mathbb{E}\|G\|) \geq c \exp(-Ct^2k),$$

όπου $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Για την περιοχή των μικρών αποκλίσεων, όταν $0 < t < 1$, υπάρχουν πολλά παραδείγματα που δείχνουν ότι αυτές οι εκτιμήσεις δεν είναι βέλτιστες. Θα αποδείξουμε την ακόλουθη διχοτομία:

Θεώρημα 5.4.6 (Βαλέττας-Παούρης). Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα, που η μοναδιαία του μπάλα B_X έχει ελλειψοειδές μέγιστου όγκου την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και έστω $0 < \delta < 1/2$. Τότε, ισχύει η ακόλουθη διχοτομία:

- Είτε ο τυχαίος υπόχωρος E με $\dim(E) = k \geq n^{1/2-\delta}$ ικανοποιεί την

$$\mathbb{P}(|\|G\|_{E \cap B_X} - \mathbb{E}\|G\|_{E \cap B_X}| > t\mathbb{E}\|G\|_{E \cap B_X}) \leq Ce^{-ct^2k}$$

για κάθε $t > 0$,

- Ή υπάρχουν υπόχωρος F με $\dim(F) = m \geq c\sqrt{n}$ και αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός $T : F \rightarrow F$ ώστε

$$\mathbb{P}(|\|TG\|_{F \cap B_X} - \mathbb{E}\|TG\|_{F \cap B_X}| > t\mathbb{E}\|TG\|_{F \cap B_X}) \leq Ce^{-c\delta \max\{t^2, t\} \log m}$$

για κάθε $t > 0$, όπου G είναι τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα και $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Το πρώτο εργαλείο που χρειαζόμαστε είναι η L^1 - L^2 ανισότητα του Talagrand για τον χώρο του Gauss, την οποία συζητήσαμε, σε ένα γενικότερο πλαίσιο, στην προηγούμενη παράγραφο. Στον χώρο του Gauss παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα 5.4.7. *Εστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια απολύτως συνεχής συνάρτηση. Τότε,*

$$(5.4.6) \quad \text{Var}_{\gamma_n}(f) \leq C \sum_{i=1}^n \frac{\|\partial_i f\|_{L^2}^2}{1 + \log(\|\partial_i f\|_{L^2}/\|\partial_i f\|_{L^1})},$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $\partial_i f$ είναι η i -οστή μερική παράγωγος της f .

Είναι φυσιολογικό να περιμένουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να οδηγήσει σε βελτίωση των γνωστών εκθετικών ανισοτήτων συγκέντρωσης που προκύπτουν από την ανισότητα Poincaré. Αρχίζουμε με μια πρώτη εφαρμογή του Θεωρήματος 5.4.7 σε αυτή την κατεύθυνση. Για κάθε συνάρτηση Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$b = b(f) = \inf\{t > 0 : |f(x) - f(y)| \leq t\|x - y\|_2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^n\}$$

και

$$a = a(f) = \inf\{t > 0 : |f(x) - f(y)| \leq t\|x - y\|_\infty \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Αφού $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$(5.4.7) \quad b \leq a \leq b\sqrt{n}.$$

Παρατηρήστε ότι αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον \mathbb{R}^n και η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, τότε η δυϊκή νόρμα $\|y\|_* = \sup\{\langle x, y \rangle : \|x\| \leq 1\}$ της $\|\cdot\|$ ικανοποιεί την

$$(5.4.8) \quad \|\nabla f(x)\|_* \leq L.$$

Σημειώνουμε ότι η $\nabla f(x)$ είναι καλά ορισμένη σχεδόν παντού από το θεώρημα του Rademacher.

Υποθέτουμε ότι η f είναι αναλλοίωτη ως προς μεταθέσεις συντεταγμένων. Αυτό σημαίνει ότι $f \circ P_\tau = f$ για κάθε μετάθεση $\tau : [n] \rightarrow [n]$, όπου P_τ είναι ο πίνακας μεταθέσεων που ορίζεται από τις $P_\tau(e_i) = e_{\tau(i)}$, $i = 1, \dots, n$. Για κάθε $\lambda > 0$ βλέπουμε ότι η $h = e^{\lambda f}$ είναι επίσης αναλλοίωτη ως προς μεταθέσεις συντεταγμένων, και ικανοποιεί την

$$\partial_i h = \partial_i(h \circ P_\tau) = \langle P_\tau^* \circ \nabla h \circ P_\tau, e_i \rangle = (\partial_{\tau(i)} h) \circ P_\tau$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. Αφού ο P_τ είναι ορθογώνιος, βλέπουμε ότι

$$\lambda^p \mathbb{E}(e^{p\lambda f}) |\partial_i f|^p = \|\partial_i h\|_{L^p}^p = \|\partial_{\tau(i)} h\|_{L^p}^p$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$ και κάθε $p > 0$. Αφού όλες οι μερικές παράγωγοι της h έχουν την ίδια L^2 -νόρμα, για $p = 2$ παίρνουμε

$$\|\partial_i h\|_{L^2}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\partial_i h\|_{L^2}^2 = \frac{\lambda^2}{n} \mathbb{E}(e^{2\lambda f}) \|\nabla f\|_{L^2}^2 \leq \frac{\lambda^2 b(f)^2}{n} \mathbb{E}(e^{2\lambda f})$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. Παρόμοιο επιχείρημα δείχνει ότι

$$\|\partial_i h\|_{L^1} \leq \frac{\lambda a(f)}{n} \mathbb{E}(e^{\lambda f}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Εισάγοντας αυτές τις εκτιμήσεις στο Θεώρημα 5.4.7 βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}(e^{2\lambda f}) - (\mathbb{E}(e^{\lambda f}))^2 \leq \frac{C\lambda^2 b^2}{1 + \log(nb^2/a^2)} \mathbb{E}(e^{2\lambda f})$$

για κάθε $\lambda > 0$. Θέτοντας

$$\varrho^2 = \frac{Cb^2}{1 + \log(nb^2/a^2)}$$

και εφαρμόζοντας τα παραπάνω για τη συνάρτηση $F := f - \mathbb{E}(f)$ με $\lambda = s/\varrho$, βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\psi(s) := \mathbb{E}(e^{2sF/\varrho})$ έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi(s) - 1}{s} = 0,$$

και

$$(1 - s^2)\psi(s) \leq \psi^2(s/2) \quad \text{για κάθε } 0 < s < 1.$$

Τότε, δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι $\psi(s) \leq 1/(1 - s^2)^{-2}$ για κάθε $0 < s < 1$, και ειδικότερα ότι $\psi(1/\sqrt{2}) \leq 4$. Από την κλασική ανισότητα συγκέντρωσης (5.4.3) και την ανισότητα Markov παίρνουμε:

Πρόταση 5.4.8. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση αναλλοίωτη ως προς μεταθέσεις συντεταγμένων, η οποία ικανοποιεί τις $|f(x) - f(y)| \leq b\|x - y\|_2$ και $|f(x) - f(y)| \leq a\|x - y\|_\infty$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Τότε,

$$(5.4.9) \quad \mathbb{P}(|f(G) - \mathbb{E}(f(G))| > t) \leq 4 \exp\left(-c \max\left\{\frac{t^2}{b^2}, \frac{t}{b} \sqrt{\log(nb^2/a^2)}\right\}\right)$$

για κάθε $t > 0$, όπου G είναι ένα τυπικό n -διάστατο κανονικό τυχαίο διάνυσμα.

Θα δείξουμε ότι παρόμοια ανισότητα συγκέντρωσης εξακολουθεί να ισχύει αν αφαιρέσουμε την υπόθεση ότι η f είναι αναλλοίωτη ως προς μεταθέσεις συντεταγμένων. Θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα, το οποίο είναι συνέπεια του Θεωρήματος 5.4.7.

Λήμμα 5.4.9. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια απολύτως συνεχής συνάρτηση. Θέτουμε

$$R(f) = \frac{\mathbb{E}\|\nabla f(G)\|_2^2}{\sum_{i=1}^n (\mathbb{E}|\partial_i f(G)|)^2}.$$

Τότε,

$$(5.4.10) \quad \text{Var}(f(G)) \leq C \frac{\mathbb{E}\|\nabla f(G)\|_2^2}{1 + \log R(f)}.$$

Θα δείξουμε την ακόλουθη ανισότητα απόκλισης δύο επιπέδων, στο πνεύμα της αντίστοιχης ανισότητας του Talagrand για την εκθετική κατανομή.

Πρόταση 5.4.10. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση Lipschitz που ικανοποιεί τις $|f(x) - f(y)| \leq b\|x - y\|_2$ και $|f(x) - f(y)| \leq a\|x - y\|_\infty$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, και

$$\|\partial_i f\|_{L^1} \leq A, \quad i = 1, \dots, n.$$

Αν $F = f - \mathbb{E}(f)$ τότε, για κάθε $\lambda > 0$,

$$(5.4.11) \quad \text{Var}(e^{\lambda F}) \leq \frac{C\lambda^2 b^2}{\log\left(e + \frac{b^2}{aA}\right)} \mathbb{E}(e^{2\lambda F}).$$

Επιπλέον, για κάθε $t > 0$,

$$(5.4.12) \quad \mathbb{P}(|f(G) - \mathbb{E}(f(G))| > t) \leq 4 \exp\left(-c \max\left\{\frac{t^2}{b^2}, \frac{t}{b} \sqrt{\log(e + b^2/(aA))}\right\}\right).$$

Απόδειξη. Για κάποιο σταθερό $\lambda > 0$ εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.4.9 για τη συνάρτηση $e^{\lambda F}$. Παίρνουμε

$$\text{Var}(e^{\lambda F}) \leq C\lambda^2 \frac{\mathbb{E}(\|\nabla f\|_2^2 e^{2\lambda F})}{1 + \log\left(\frac{\mathbb{E}\|\nabla f\|_2^2 e^{2\lambda F}}{w}\right)},$$

όπου

$$w = \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}|\partial_i f| e^{\lambda F})^2.$$

Αφού

$$\mathbb{E}\|\nabla f\|_2^2 e^{2\lambda F} \leq b^2 \mathbb{E}(e^{2\lambda F})$$

και η συνάρτηση $z \mapsto \frac{z}{1 + \log(z/w)}$ είναι αύξουσα στο $[w, \infty)$, έχουμε

$$\text{Var}(e^{\lambda F}) \leq \frac{C\lambda^2 b^2}{1 + \log(b^2 \mathbb{E}(e^{2\lambda F})/w)} \mathbb{E}(e^{2\lambda F}).$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, το άνω φράγμα για τις L^1 -νόρμες $\|\partial_i f\|_{L^1}$ και το γεγονός ότι $\|\nabla f(x)\|_1 \leq a$ σχεδόν παντού, παίρνουμε την (5.4.11). Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα μπορούμε να πάρουμε την (5.4.12). \square

Παρατήρηση 5.4.11. Ο λογάριθμος στην (5.4.12) είναι όμοιος με αυτόν στην (5.4.9) χωρίς την παράμετρο A . Σημειώνουμε ότι η μικρότερη δυνατή τιμή της A ικανοποιεί την $A \leq a$. Στόχος μας είναι να συνθέσουμε τη συνάρτηση με κατάλληλο διαγώνιο πίνακα και να βελτιώσουμε αυτό το φράγμα σε $A \leq a/n$, κάτι που είναι απαραίτητο για να επιτύχουμε την εκτίμηση (5.4.9).

5.4.2 Unconditional νόρμες

Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας n -διάστατος χώρος με νόρμα. Υπενθυμίζουμε ότι αν $\{b_i\}_{i=1}^n$ είναι μια βάση του X , τότε η unconditional σταθερά της βάσης $\{b_i\}_{i=1}^n$ ορίζεται από την

$$\text{unc}\{b_i\}_{i=1}^n = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i t_i b_i \right\| : \left\| \sum_{i=1}^n t_i b_i \right\| = 1 \right\},$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλες τις επιλογές προσήμων $\varepsilon_i = \pm 1$ και όλες τις ακολουθίες συντελεστών $\{t_i\}_{i=1}^n$. Τότε, η unconditional σταθερά του X είναι η ποσότητα

$$\text{unc}(X) = \inf\{\text{unc}\{b_i\}_{i=1}^n : \{b_i\}_{i=1}^n \text{ είναι μια βάση του } X\}.$$

Λέμε ότι ο X είναι 1-unconditional αν $\text{unc}(X) = 1$. Μια απλή συνέπεια του θεωρήματος του John είναι το γεγονός ότι $\text{unc}(X) \leq \sqrt{n}$ για κάθε n -διάστατο χώρο με νόρμα X . Αυτό το φράγμα είναι βέλτιστο υπό την έννοια ότι υπάρχουν n -διάστατοι χώροι με νόρμα E (ένα παράδειγμα μας δίνουν οι τυχαίοι υπόχωροι του ℓ_∞^m που έχουν διάσταση ανάλογη του m) που ικανοποιούν την $\text{unc}(E) \geq c\sqrt{n}$ για μια απόλυτη σταθερά $c > 0$.

Θα χρειαστούμε επίσης τον ορισμό της θέσης που ελαχιστοποιεί την παράμετρο M . Λέμε ότι μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον \mathbb{R}^n ελαχιστοποιεί την παράμετρο M αν

$$\mathbb{E}\|G\| \leq \mathbb{E}\|TG\|$$

για κάθε $T \in SL(n)$, όπου G είναι ένα τυπικό n -διάστατο τυχαίο διάνυσμα. Αυτή η θέση που ελαχιστοποιεί την παράμετρο M -χαρακτηρίζεται από την ισοτροπική συνθήκη

$$(5.4.13) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\|x\|, \vartheta \rangle \langle x, \vartheta \rangle d\gamma_n(x) = \frac{\mathbb{E}\|G\|}{n}$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$.

Πρόταση 5.4.12. Έστω $\|\cdot\|$ μια 1-unconditional νόρμα στον \mathbb{R}^n που είναι στη θέση που ελαχιστοποιεί την παράμετρο M . Τότε, έχουμε τις ακόλουθες ανισότητες:

(α) Για κάθε $t > 0$,

$$(5.4.14) \quad \mathbb{P}(|\|G\| - \mathbb{E}\|G\|| > t\mathbb{E}\|G\|) \leq C \exp\left(-c \max\{t^2 k, t\sqrt{k \log(en/k)}\}\right),$$

όπου $k = k(X)$ και $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

(β) Ειδικότερα $k \geq c \log n$, άρα για κάθε $t > 0$,

$$(5.4.15) \quad \mathbb{P}(|\|G\| - \mathbb{E}\|G\|| > t\mathbb{E}\|G\|) \leq C \exp\left(-c \max\{t^2, t\} \log n\right),$$

όπου $C, c > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \|x\|$. Αφού η f είναι unconditional και κυρτή, βλέπουμε ότι η $x_i \mapsto \partial_i f(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του $|x_i|$. Τότε, από την ανισότητα αναδιάταξης του Chebyshev παίρνουμε

$$\mathbb{E}|\partial_i f(G)| \cdot \mathbb{E}|g_i| \leq \mathbb{E}|g_i \partial_i f(G)| = \frac{\mathbb{E}(f(G))}{n},$$

άρα

$$\|\partial_i f\|_{L^1(\gamma_n)} \leq \frac{c_1 \mathbb{E}(f(G))}{n}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$(5.4.16) \quad a(f) = \max\{\|x\| : \|x\|_\infty \leq 1\} \quad \text{και} \quad \mathbb{E}\|G\| \geq c \cdot a(f).$$

Για να το δούμε αυτό, σημειώνουμε ότι

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n g_i e_i \right\| = \mathbb{E}_\varepsilon \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i |g_i| e_i \right\| \geq \mathbb{E}_\varepsilon \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbb{E} |g_i| e_i \right\| = \sqrt{2/\pi} \left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\|,$$

από την ανισότητα Jensen και την υπόθεση ότι η $\|\cdot\|$ είναι unconditional. Για τον άλλο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι

$$\|i : \ell_\infty^m \rightarrow X\| = \max_{\|x\|_\infty \leq 1} \|x\| = \max_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\|.$$

Από την Πρόταση 5.4.10 και αυτές τις εκτιμήσεις, προκύπτει άμεσα η (5.4.14).

(β) Εφαρμόζοντας την (5.4.14) με $t \approx 1$ και παίρνοντας υπόψιν μας την (5.4.5) βλέπουμε ότι $k \geq c \log(en/k)$, και έπεται η (5.4.15). \square

5.4.3 Συγκέντρωση για νόρμες με καλή unconditional δομή

Δείχνουμε τώρα ότι το Ερώτημα 5.4.1 έχει καταφατική απάντηση για χώρους με νόρμα που δεν έχουν κακή σταθερά unconditional βάσης. Το κύριο αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 5.4.13. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Τότε, υπάρχει $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε, για κάθε $t > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\left| \|TG\| - \mathbb{E}\|TG\| \right| > t \mathbb{E}\|TG\| \right) \leq C \exp \left(-c \max\{t^2, t\} \log \left(\frac{en}{(\text{unc}(X))^2} \right) \right).$$

Η απόδειξη βασίζεται στην Πρόταση 5.4.10 και το θεώρημα Borsuk-Ulam.

Λήμμα 5.4.14. Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 -ομαλή συνάρτηση με φραγμένες μερικές παραγώγους, και έστω $q > 0$. Υπάρχει διαγώνιος πίνακας $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ τέτοιος ώστε

$$\|\Lambda\|_{\text{HS}} = 1$$

και

$$\|\partial_i(f \circ \Lambda)\|_{L^q(\gamma_m)} = \|\partial_j(f \circ \Lambda)\|_{L^q(\gamma_m)} \quad \text{για κάθε } i, j = 1, \dots, m.$$

Απόδειξη. Για κάθε $1 \leq j \leq m-1$ θεωρούμε τη συνάρτηση $h_j : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h_j(\lambda) := \lambda_j \|(\partial_j f) \circ \Lambda\|_{L^q} - \lambda_{j+1} \|(\partial_{j+1} f) \circ \Lambda\|_{L^q},$$

όπου $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και την συνέχεια των $\partial_j f$ βλέπουμε ότι η h_j είναι συνεχής. Από την συμμετρία του γ_m προκύπτει ότι η h_j είναι περιττή: για κάθε $\lambda \in S^{m-1}$ έχουμε ότι $h_j(-\lambda) = -h_j(\lambda)$. Τώρα, θεωρούμε την απεικόνιση $H : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ που ορίζεται από την

$$H(\lambda_1, \dots, \lambda_m) := (h_1(\lambda), \dots, h_{m-1}(\lambda)).$$

Τότε, η H είναι συνεχής και περιττή. Από το αντιποδικό θεώρημα Borsuk-Ulam συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\lambda \in S^{m-1}$ τέτοιο ώστε $H(\lambda) = 0$, το οποίο σημαίνει ότι

$$(5.4.17) \quad \|(\partial_i f) \circ \Lambda\|_{L^q(\gamma_m)} = \|(\partial_j f) \circ \Lambda\|_{L^q(\gamma_m)} \quad \text{για κάθε } i, j = 1, \dots, m.$$

Έπεται ότι $\|\partial_i(f \circ \Lambda)\|_{L^q} = \|\partial_j(f \circ \Lambda)\|_{L^q}$ για κάθε $i, j = 1, \dots, m$, και έχουμε το λήμμα. \square

Παρατήρηση 5.4.15. Αν η f δεν είναι σταθερή σε κανέναν γνήσιο υπόχωρο του \mathbb{R}^m τότε $\lambda_i > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε πρώτα ότι το σύνολο $\sigma := \{i : \lambda_i \neq 0\}$ είναι μη κενό. Αν υποθέσουμε ότι $\sigma^c \neq \emptyset$ τότε από την (5.4.17) συμπεραίνουμε ότι $\|(\partial_i f) \circ \Lambda\|_{L^q} = 0$ για κάθε $i \in \sigma$. Λόγω συνέχειας, παίρνουμε $(\partial_i f) \circ \Lambda \equiv 0$ για κάθε $i \in \sigma$, άρα $\partial_i f \equiv \mathbf{0}$ στον $\Lambda(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^\sigma \equiv \text{span}\{e_i : i \in \sigma\}$. Με άλλα λόγια, η $f|_{\mathbb{R}^\sigma}$ είναι σταθερή. Από την (5.4.17) βλέπουμε επίσης ότι όλοι οι λ_j πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο. Αφού $H(\lambda) = H(-\lambda) = 0$, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\lambda_j \geq 0$ για κάθε $j = 1, \dots, m$.

Λήμμα 5.4.16. Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 -ομαλή συνάρτηση Lipschitz που δεν είναι σταθερή σε κανέναν γνήσιο υπόχωρο. Τότε, υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ τέτοιοι ώστε $\sum_{j=1}^m \lambda_j^2 = 1$ και

$$\|\partial_j(f \circ \Lambda)\|_{L^1(\gamma_m)} \leq \frac{1}{m} a(f \circ \Lambda), \quad j = 1, \dots, m$$

όπου $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Απόδειξη. Αφού η f έχει υποτεθεί C^1 -ομαλή, μπορούμε να θεωρήσουμε έναν διαγώνιο πίνακα Λ ο οποίος ικανοποιεί το συμπέρασμα του Λήμματος 5.4.14. Χρησιμοποιώντας επίσης την Παρατήρηση 5.4.15 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_j > 0$ για κάθε $1 \leq j \leq m$. Τώρα, παρατηρούμε ότι

$$\|\partial_j(f \circ \Lambda)\|_{L^1(\gamma_m)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \|\partial_j(f \circ \Lambda)\|_{L^1(\gamma_m)} = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^m} \|\nabla(f \circ \Lambda)\|_1 d\gamma_m \leq \frac{a(f \circ \Lambda)}{m}$$

για κάθε $1 \leq j \leq m$, και έχουμε το λήμμα. \square

Για το επόμενο κύριο αποτέλεσμα εισάγουμε την σταθερά (random unconditional divergence) $\text{rud}(X)$ ενός χώρου με νόρμα $X = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$, που είναι ο μικρότερος $L > 0$ για τον οποίο μπορούμε να βρούμε μια βάση $\{x_i\}_{i=1}^m$ του X με την ιδιότητα ότι

$$(5.4.18) \quad \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| \leq L \cdot \mathbb{E}_\varepsilon \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i a_i x_i \right\|$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $\{a_i\}_{i=1}^m$. Σημειώνουμε ότι $\text{rud}(X) \leq \text{unc}(X)$.

Θεώρημα 5.4.17. Έστω $X = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα και έστω $L = \text{rud}(X)$. Υπάρχει $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε

$$\mathbb{P}\left(\left|\|TG\| - \mathbb{E}\|TG\|\right| > t\mathbb{E}\|TG\|\right) \leq C \exp\left(-c \max\{t^2, t\} \log\left(e + \frac{m}{L^2}\right)\right)$$

για κάθε $t > 0$, όπου G είναι ένα τυπικό m -διάστατο κανονικό τυχαίο διάνυσμα και $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας κατάλληλο αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\|y\| \leq L \cdot \mathbb{E}_\varepsilon \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i y_i e_i \right\|$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$, όπου $\{e_i\}_{i=1}^m$ είναι η συνήθης βάση του \mathbb{R}^m . Ισοδύναμα,

$$(5.4.19) \quad \max_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i y_i e_i \right\| \leq L \cdot \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i y_i e_i \right\|$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$. Υποθέτουμε αρχικά ότι η $\|\cdot\|$ είναι λεία νόρμα. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.4.16 βρίσκουμε έναν διαγώνιο πίνακα $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ τέτοιον ώστε $\|\Lambda\|_{\text{HS}} = 1$ ανδ $\|\partial_i(f \circ \Lambda)\|_{L^q(\gamma_m)} = \|\partial_j(f \circ \Lambda)\|_{L^q(\gamma_m)}$ για κάθε $i, j = 1, \dots, m$. Θέτουμε

$$a_\Lambda := \|\Lambda : \ell_\infty^m \rightarrow X\|, \quad b_\Lambda := \|\Lambda : \ell_2^m \rightarrow X\|, \quad k_\Lambda := \frac{(\mathbb{E}\|\Lambda G\|)^2}{b_\Lambda^2}.$$

Συνδυάζοντας την (5.4.12) με το Λήμμα 5.4.16 παίρνουμε

$$(5.4.20) \quad \mathbb{P}\left(\left|\|\Lambda G\| - \mathbb{E}\|\Lambda G\|\right| > t\mathbb{E}\|\Lambda G\|\right) \leq 4 \exp\left(-ct\sqrt{k_\Lambda \log\left(e + \frac{mb_\Lambda^2}{a_\Lambda^2}\right)}\right)$$

για κάθε $t > 0$. Χρησιμοποιώντας επίσης την (5.4.19), και στο τέλος την αρχή της συστολής, παίρνουμε

$$a_\Lambda = \max_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \lambda_i e_i \right\| \leq L \cdot \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \lambda_i e_i \right\| \leq L\sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{E}\|\Lambda G\|.$$

Εισάγοντας αυτή την εκτίμηση στην (5.4.20) έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\left|\|\Lambda G\| - \mathbb{E}\|\Lambda G\|\right| > t\mathbb{E}\|\Lambda G\|\right) \leq 4 \exp\left(-ct\sqrt{k_\Lambda \log\left(e + \frac{m}{L^2 k_\Lambda}\right)}\right)$$

για κάθε $t > 0$. Εφαρμόζοντας αυτή την ανισότητα με $t \approx 1$ και παίρνοντας υπόψιν την (5.4.5) βλέπουμε ότι $k_\Lambda \geq c \log(e + m/L^2)$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη στη λεία περίπτωση.

Για την γενική περίπτωση χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ και κάθε $\delta \in (0, 1)$ μπορούμε να βρούμε μια λεία νόρμα $\|\cdot\|_\delta$ τέτοια ώστε

$$(5.4.21) \quad (1 - \delta)\|x\| \leq \|x\|_\delta \leq (1 + \delta)\|x\|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$. Σταθεροποιούμε $0 < \delta \leq (7 + \log m)^{-1}$ και εφαρμόζουμε το κύριο αποτέλεσμα (το οποίο έχουμε ήδη αποδείξει στη λεία περίπτωση) για τη νόρμα $\|\cdot\|_\delta$: βρίσκουμε $T = T_\delta \in GL(m)$ τέτοιον ώστε

$$\mathbb{P}\left(\left|\|TG\|_\delta - \mathbb{E}\|TG\|_\delta\right| > t\mathbb{E}\|TG\|_\delta\right) \leq 4 \exp(-ct \log(e + m/L_\delta^2))$$

για κάθε $t > 0$, όπου $L_\delta = \text{rud}(X_\delta)$ και $X_\delta = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\delta)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την (5.4.21) ελέγχουμε ότι αν $t > 8\delta$ τότε

$$\mathbb{P}\left(\left|\|TG\| - \mathbb{E}\|TG\|\right| > t\mathbb{E}\|TG\|\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\|TG\|_\delta - \mathbb{E}\|TG\|_\delta\right| > \frac{t}{2}\mathbb{E}\|TG\|_\delta\right).$$

Έπεται ότι

$$\mathbb{P}\left(\left|\|TG\| - \mathbb{E}\|TG\|\right| > t\mathbb{E}\|TG\|\right) \leq 4 \exp\left(-\frac{c}{2}t \log(e + m/L_\delta^2)\right)$$

για κάθε $t > 8\delta$. Αλλάζοντας λίγο τις απόλυτες σταθερές βλέπουμε ότι αυτή η εκτίμηση εξακολουθεί να ισχύει για κάθε $t > 0$. Παρατηρώντας ότι

$$L_\delta \leq \frac{1 + \delta}{1 - \delta} L \leq 2L,$$

ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

5.4.4 Πιθανοθεωρητική διχοτομία και το θεώρημα του Dvoretzky

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα 5.4.6 και τα πορίσματά του. Θα εχμεταλλευτούμε δύο σημαντικά εργαλεία:

- (i) *Λήμμα Dvoretzky-Rogers* [24]. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα τέτοιος ώστε η μοναδιαία μπάλα B_X του X να έχει ελλειψοειδές μέγιστου όγκου την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{v_i\}_{i=1}^n$ τέτοια ώστε

$$1 = \|v_k\|_2 \geq \|v_k\| \geq \sqrt{\frac{n-k+1}{n}}$$

για κάθε $k = 1, \dots, n$. Ειδικότερα, $\|v_k\| \geq 1/\sqrt{2}$ για κάθε $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Μπορούμε μάλιστα να τροποποιήσουμε την ορθοκανονική βάση $\{v_k\}_{k=1}^n$ και να πάρουμε μια νέα ορθοκανονική βάση $\{w_k\}_{k=1}^n$ με την ιδιότητα ότι $\|w_k\| \geq 1/4$ για κάθε $1 \leq k \leq n$.

- (ii) *Θεώρημα Alon-Milman* [5]. Έστω X ένας χώρος με νόρμα και έστω $T : \ell_\infty^n \rightarrow X$ με $\|Te_i\| \geq 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Ορίζουμε

$$a = \|T : \ell_\infty^n \rightarrow X\| \quad \text{και} \quad M_n = \mathbb{E}_\varepsilon \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i Te_i \right\|.$$

Τότε, υπάρχει $\sigma \subset [n]$ με $|\sigma| \geq cn/a$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{2} \max_{i \in \sigma} |s_i| \leq \left\| \sum_{i \in \sigma} s_i Te_i \right\| \leq 4M_n \max_{i \in \sigma} |s_i|$$

για κάθε ακολουθία συντελεστών $\{s_i\}_{i \in \sigma}$.

Η απόδειξη των Alon και Milman έδινε $\sigma \subset [n]$ με $|\sigma| \geq c\sqrt{n}/M_n$. Η ισχυρότερη διατύπωση του θεωρήματος, όπως το περιγράψαμε παραπάνω, οφείλεται στον Talagrand.

Το Θεώρημα 5.4.6 είναι συνέπεια του ακόλουθου πιο γενικού θεωρήματος.

Θεώρημα 5.4.18. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα που η μοναδιαία του μπάλα B_X έχει ελλειψοειδές μέγιστου όγκου την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και έστω $0 < \delta < 1/2$. Τότε ισχύει τουλάχιστον ένα από τα ακόλουθα:

- Είτε $k(X) \geq n^{1/2-\delta}$,
- Ή υπάρχουν υπόχωρος F με $\dim(F) = m \geq c\sqrt{n}$ και γραμμικός ισομορφισμός $T : F \rightarrow F$ τέτοιος ώστε για κάθε $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\|TZ\| - \mathbb{E}\|TZ\|\right| > t\mathbb{E}\|TZ\|\right) \leq C \exp\left(-c\delta \max\{t^2, t\} \log m\right)$$

όπου $Z \sim N(\mathbf{0}, I_F)$ και $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Θα χρειαστούμε ένα ακόμα βασικό εργαλείο, την αρχή της συστολής.

Θεώρημα 5.4.19 (αρχή της συστολής). Έστω $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ μια ακολουθία ανεξάρτητων συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών Bernoulli και έστω $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ μια αύξουσα κυρτή συνάρτηση. Αν x_1, \dots, x_n είναι διανύσματα σε έναν χώρο με νόρμα X και a_i, b_i είναι πραγματικοί συντελεστές με $|a_i| \leq |b_i|$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, τότε

$$\mathbb{E}F\left(\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i x_i\right\|\right) \leq \mathbb{E}F\left(\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i b_i x_i\right\|\right).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathbb{E}F\left(\left\|\sum_i \varepsilon_i \alpha_i x_i\right\|\right).$$

Παρατηρούμε ότι η φ είναι κυρτή συνάρτηση, διότι οι $F, \|\cdot\|$ είναι κυρτές και η F είναι αύξουσα. Τότε, ο περιορισμός της φ στο συμπαγές κυρτό σύνολο $\prod_{i=1}^n [-b_i, b_i]$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του σε κάποιο ακραίο σημείο $b_\zeta = (\zeta_1 b_1, \dots, \zeta_n b_n)$ όπου $\zeta = \{\zeta_i\}_{i=1}^n \in E_2^n$. Από την συμμετρία των τυχαίων μεταβλητών $(\varepsilon_i)_{i \leq n}$ έχουμε $\varphi(b_\zeta) = \varphi(b_1, \dots, b_n)$ για κάθε $\zeta \in E_2^n$ και έπεται το ζητούμενο. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.18. Έστω $0 < \delta < 1/2$. Μπορούμε να βρούμε ορθοκανονική βάση $\{w_j\}_{j=1}^n$ με $\|w_j\| \geq 1/4$ για κάθε $j = 1, \dots, n$. Ας υποθέσουμε ότι $k(X) \leq n^{1/2-\delta}$. Τότε, έχουμε

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i w_i\right\| \leq \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n g_i w_i\right\| = \mathbb{E}\|G\| = \sqrt{k(X)},$$

χρησιμοποιώντας και την αρχή της συστολής στην πρώτη ανισότητα. Από το θεώρημα Alon-Milman μπορούμε να βρούμε υποσύνολο $\sigma \subset [n]$ με $|\sigma| \geq cn/a \geq c\sqrt{n}$, όπου $a = \|i : \ell_\infty^n \rightarrow X\|$, τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{8} \max_{i \in \sigma} |s_i| \leq \left\|\sum_{i \in \sigma} s_i w_i\right\| \leq 4M_n \max_{i \in \sigma} |s_i|$$

για κάθε ακολουθία συντελεστών $\{s_i\}_{i \in \sigma}$, όπου $M_n = \mathbb{E}\left\|\sum_i \varepsilon_i w_i\right\|$. Αυτό δείχνει ότι ο υπόχωρος $(F, \|\cdot\|)$, όπου $F = \text{span}\{w_i : i \in \sigma\}$, ικανοποιεί την $d(F, \ell_\infty^\sigma) \leq 32M_n \leq C\sqrt{k(X)}$. Από το Θεώρημα 5.4.17 μπορούμε να βρούμε γραμμικό ισομορφισμό $T : F \rightarrow F$ τέτοιον ώστε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\|TZ\| - \mathbb{E}\|TZ\|\right| > t\mathbb{E}\|TZ\|\right) &\leq C \exp\left(-c \max\{t^2, t\} \log(e + c|\sigma|/k(X))\right) \\ &\leq C \exp\left(-c'\delta \max\{t^2, t\} \log|\sigma|\right) \end{aligned}$$

για κάθε $t > 0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Το επόμενο θεώρημα είναι σχεδόν άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.4.18 και μας δίνει το Θεώρημα 5.4.4 και το Πόρισμα 5.4.5.

Θεώρημα 5.4.20. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $S \in GL(n)$ τέτοιος ώστε, για κάθε $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\|SG\| - \mathbb{E}\|SG\|\right| > t\mathbb{E}\|SG\|\right) \leq C \exp\left(-c \max\{t^2, t\} \log n\right),$$

όπου $G \sim N(\mathbf{0}, I_n)$ και $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα, για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$, η τυχαία k -διάστατη τομή του $S^{-1}(B_X)$ με $k \leq c\varepsilon \log n / \log(1/\varepsilon)$ είναι $(1 + \varepsilon)$ -σφαιρική με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - n^{-c\varepsilon}$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η B_X έχει ελλειψοειδές μέγιστου όγκου την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και $k(X) \leq n^{1/3}$, αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Από το Θεώρημα 5.4.18 μπορούμε να βρούμε έναν υπόχωρο F του \mathbb{R}^n με $\dim(F) = m \approx \sqrt{n}$ και $T : F \rightarrow F$ με $T \in GL(F)$ έτσι ώστε, για κάθε $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\|TZ\| - \mathbb{E}\|TZ\|\right| > t\mathbb{E}\|TZ\|\right) \leq C \exp\left(-ct \log n\right)$$

όπου $Z \sim N(\mathbf{0}, I_F)$ και $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Ορίζουμε έναν τελεστή $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ θέτοντας

$$S(x, y) = Tx + \lambda y, \quad x \in F, y \in F^\perp,$$

όπου

$$\lambda = \frac{\mathbb{E}\|TZ\|}{\mathbb{E}\|W\|_2 \log n}, \quad W \sim N(\mathbf{0}, I_{F^\perp}).$$

Από την αρχή της συστολής, την τριγωνική ανισότητα και το γεγονός ότι $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_2$, βλέπουμε ότι

$$(5.4.22) \quad \mathbb{E}\|TZ\| \leq \mathbb{E}\|SG\| \leq \left(1 + \frac{1}{\log n}\right) \mathbb{E}\|TZ\|,$$

όπου $G \sim N(\mathbf{0}, I_n)$ και $Z \sim N(\mathbf{0}, I_F)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον επόμενο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός. Για κάθε $0 < t < 1$ έχουμε ότι

$$(5.4.23) \quad \mathbb{P}\left(\left|\|SG\| - \mathbb{E}\|SG\|\right| > t\mathbb{E}\|SG\|\right) \leq Ce^{-ct \log n}.$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έστω $Z \sim N(\mathbf{0}, I_F)$, $W \sim N(\mathbf{0}, I_{F^\perp})$ και $G = Z + W$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\|SG\| > (1+t)\mathbb{E}\|SG\|) \\ & \leq \mathbb{P}(\|TZ\| > (1+t)\mathbb{E}\|SG\| - \lambda\|W\|) \\ & \leq \mathbb{P}(\|TZ\| > (1+t)\mathbb{E}\|TZ\| - 10\lambda\mathbb{E}\|W\|_2) + \mathbb{P}(\|W\| > 10\mathbb{E}\|W\|_2) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\|TZ\| > (1+t)\mathbb{E}\|TZ\| - \frac{10\mathbb{E}\|TZ\|}{\log n}\right) + \mathbb{P}(\|W\|_2 > 10\mathbb{E}\|W\|_2) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\|TZ\| > \left(1 + \frac{t}{2}\right)\mathbb{E}\|TZ\|\right) + \mathbb{P}(\|W\|_2 > 10\mathbb{E}\|W\|_2) \\ & \leq Ce^{-ct \log n}, \end{aligned}$$

για κάθε $\frac{20}{\log n} < t < 1$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\mathbb{P}(\|W\|_2 > 10\mathbb{E}\|W\|_2) \leq e^{-cn}, \quad W \sim N(\mathbf{0}, I_{F^\perp}).$$

Για την απόκλιση κάτω από τον μέσο, γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|SG\| < (1-t)\mathbb{E}\|SG\|) & \leq \mathbb{P}\left(\|TG\| < (1-t)\left(1 + \frac{1}{\log n}\right)\mathbb{E}\|TG\|\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\|TG\| < \left(1 - \frac{t}{2}\right)\mathbb{E}\|TG\|\right) \\ & \leq Ce^{-ct \log n} \end{aligned}$$

για κάθε $\frac{2}{\log n} < t < 1$, παίρνοντας υπόψιν μας την (5.4.22). Τώρα, έχουμε τον ισχυρισμό για κάθε $t \in (0, 1)$ επιλέγοντας κατάλληλα τις απόλυτες σταθερές. Έχοντας αποδείξει την (5.4.23) βλέπουμε από την (5.4.5) ότι $k(S^{-1}(B_X)) \geq c \log n$, και έπεται το ζητούμενο. \square

Βιβλιογραφία

- [1] K. Borsuk, *Drei sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. **20** (1933) 177–190.
- [2] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam theorem*, written in cooperation with A. Björner and G. M. Ziegler, Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [3] J. Akiyama and N. Alon, *Disjoint simplices and geometric hypergraphs*, In G. S. Blum, R. L. Graham, and J. Malkevitch, editors, Combinatorial Mathematics; Proc. of the Third International Conference (New York, 1985), volume 555, pages 1–3. Annals of the New York Academy of Sciences, 1989.
- [4] N. Alon, *Some recent combinatorial applications of Borsuk-type theorems*, In Algebraic, Extremal and Metric Combinatorics, volume 131 of Lond. Math. Soc. Lecture Note Series, pages 1–12, 1988. Pap. Conf., Montreal 1986.
- [5] N. Alon and V. D. Milman, *Embedding of ℓ_∞^k in finite-dimensional Banach spaces*, Israel J. Math. **45** (1983), 265–280.
- [6] N. Alon and D. B. West, *The Borsuk-Ulam theorem and bisection of necklaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 98:623–628, 1986.
- [7] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs **202** (2015).
- [8] I. K. Babenko and S. A. Bogatyj, *Mapping a sphere into Euclidean space*, Math. Notes, 46(3):683–686, 1989. translation from Mat. Zametki 46, No. 3 (1989), 3–8.
- [9] K. M. Ball, *An elementary introduction to modern convex geometry*, Flavors of Geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **31**, Cambridge Univ. Press (1997).
- [10] I. Bárány, *A short proof of Kneser’s conjecture*, J. Combinatorial Theory, Ser. A, 25:325–326, 1978.
- [11] I. Bárány, *Borsuk’s theorem through complementary pivoting*, Math. Programming, 18:84–88, 1980.
- [12] I. Bárány, *Geometric and combinatorial applications of Borsuk’s theorem*, In J. Pach, editor, New Trends in Discrete and Computational Geometry, volume 10 of Algorithms and Combinatorics, chapter IX, pages 235–249. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.
- [13] I. Bárány and L. Lovász, *Borsuk’s theorem and the number of facets of centrally symmetric polytopes*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 40:323–329, 1982.
- [14] I. Bárány and J. Matoušek, *Simultaneous partitions of measures by k -fans*, Discrete Comput. Geom., 25:317–334, 2001.
- [15] I. Bárány and J. Matoušek, *Equipartition of two measures by a 4-fan*, Discrete Comput. Geom., 27:293–302, 2002.
- [16] S. Boucheron, G. Lugosi and P. Massart, *Concentration inequalities, A Nonasymptotic Theory of Independence*, Oxford University Press, Oxford, 2013.
- [17] S. Chatterjee, *Superconcentration and Related Topics*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2014.

-
- [18] W. Chen, *Counterexamples to Knaster's conjecture*, *Topology*, 37(2):401–405, 1998.
- [19] V. L. Dol'nikov, *Transversals of families of sets*, In *Studies in the theory of functions of several real variables* (Russian), pages 30–36, 109. Yaroslav. Gos. Univ., Yaroslav', 1981.
- [20] V. L. Dol'nikov, *A generalization of the ham sandwich theorem*, *Math. Notes*, 52:771–779, 1992.
- [21] V. L. Dol'nikov, *Transversals of families of sets in \mathbb{R}^n and a connection between the Helly and Borsuk theorems*, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 79:93–107, 1994. Translated from *Russ. Akad. Nauk Matem. Sbornik*, Tom 184, No. 5, 1993.
- [22] A. Dvoretzky, *A theorem on convex bodies and applications to Banach spaces*, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A* **45** (1959), 223–226.
- [23] A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces*, in *Proc. Sympos. Linear Spaces*, Jerusalem (1961), 123–161.
- [24] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **36** (1950), 192–197.
- [25] K. Fan, *A generalization of Tucker's combinatorial lemma with topological applications*, *Ann. Math*, 56:431–437, 1952.
- [26] K. Fan, *Evenly distributed subsets of S^n and a combinatorial application*, *Pac. J. Math.*, 98:323–325, 1982.
- [27] T. Figiel and W. B. Johnson, *Large subspaces of ℓ_∞^n and estimates of the Gordon-Lewis constant*, *Israel J. Math.* **37** (1980), 92–112.
- [28] E. E. Floyd, *Real-valued mappings of spheres*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 957–959.
- [29] R. M. Freund and M. J. Todd, *A constructive proof of Tucker's combinatorial lemma*, *J. Combinatorial Theory, Ser. A*, 30:321–325, 1981.
- [30] A. Giannopoulos and V. D. Milman, *On the diameter of proportional sections of a symmetric convex body*, *International Mathematics Research Notices* (1997) No.1, 5–19.
- [31] A. Giannopoulos and V. D. Milman, *How small can the intersection of a few rotations of a symmetric convex body be?*, *C. R. Acad. Sc. Paris* **325** (1997), 389–393.
- [32] A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Mean width and diameter of proportional sections of a symmetric convex body*, *J. Reine Angew. Math.* **497** (1998), 113–139.
- [33] J. E. Greene, *A new short proof of Kneser's conjecture*, *Amer. Math. Monthly*, 109:918–920, 2002.
- [34] A. Grothendieck, *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le theoreme de Dvoretzky-Rogers*, *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo* **8** (1953), 83–110.
- [35] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [36] C. R. Hobby and J. R. Rice, *A moment problem in L^1 approximation*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16:665–670, 1965.
- [37] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, *Ann. Math.* **80** (1964), 542–550.
- [38] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, *Courant Anniversary Volume*, Interscience, New York (1948), 187–204.
- [39] G. A. Kabatianski and V. I. Levenshtein, *Bounds for packings on a sphere and in space*, *Problems Inform. Transmission* **14** (1978), 1–17.
- [40] S. Kakutani, *A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed convex set in \mathbb{R}^3* , *Ann. of Math. (2)*, 43:739–741, 1943.
- [41] B. S. Kashin and S. J. Szarek, *The Knaster problem and the geometry of high-dimensional cubes*, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* **336** (2003), 931–936.
- [42] B. Knaster, *Problem 4*, *Colloq. Math.*, 1:30, 1947.
- [43] M. Kneser, *Aufgabe 360*, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 58:2. Abteilung, S. 27, 1955.

-
- [44] M. Knebusch, *An algebraic proof of the Borsuk-Ulam theorem for polynomial mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., 84:29–32, 1982.
- [45] A. Litvak, V.D. Milman and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Math. Ann. **312** (1998), 95–124.
- [46] L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy*, J. Combinatorial Theory, Ser. A, 25:319–324, 1978.
- [47] L. Lyusternik and S. Shnirel'man, *Topological Methods in Variational Problems*, (in Russian). Issledovatel'skiĭ Institut Matematiki i Mechaniki pri O. M. G. U., Moscow, 1930.
- [48] L. Lovász and A. Schrijver, *A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs*, Proc. Amer. Math. Soc., 126:275–285, 1998.
- [49] V. V. Makeev, *Some properties of continuous mappings of spheres and problems in combinatorial geometry*, Geometric questions in the theory of functions and sets (Russian), 75–85, Kalinin. Gos. Univ., Kalinin, 1986.
- [50] J. Matoušek, *A combinatorial proof of Kneser's conjecture*, Combinatorica, 24(1):163–170, 2004.
- [51] V. D. Milman, *New proof of the theorem of Dvoretzky on sections of convex bodies*, Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 28–37.
- [52] V.D. Milman, *Geometrical inequalities and mixed volumes in the Local Theory of Banach spaces*, Astérisque **131** (1985), 373–400.
- [53] V.D. Milman, *Random subspaces of proportional dimension of finite dimensional normed spaces: approach through the isoperimetric inequality*, Lecture Notes in Mathematics **1166** (1985), 106–115.
- [54] V. D. Milman, *A few observations on the connection between local theory and some other fields*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 283–289.
- [55] V. D. Milman, *Spectrum of a position of a convex body and linear duality relations*, Israel Math. Conf. Proceedings (IMCP) 3, Festschrift in Honor of Professor I. Piatetski-Shapiro (Part II), Weizmann Science Press of Israel (1990), 151–162.
- [56] V. D. Milman, *Some applications of duality relations*, Lecture Notes in Mathematics **1469** (1991), 13–40.
- [57] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. **1200** (1986), Springer, Berlin.
- [58] V.D. Milman and G. Schechtman, *Global versus Local asymptotic theories of finite-dimensional normed spaces*, Duke Math. Journal **90** (1997), 73–93.
- [59] G. Paouris and P. Valettas, *Dichotomies, structure, and concentration in normed spaces*, Adv. Math. **332** (2018), 438–464.
- [60] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).
- [61] G. Schechtman, *Two observations regarding embedding subsets of Euclidean spaces in normed spaces*, Adv. Math. **200** (2006) 125–135.
- [62] G. Schechtman, *Euclidean sections of convex bodies*, Asymptotic Geometric Analysis, Fields Inst. Commun., vol. 68, Springer, New York, 2013, pp. 271–288.
- [63] A. Schrijver, *Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs*, Nieuw Arch. Wiskd., III. Ser., 26:454–461, 1978.
- [64] H. Steinlein, *Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: A survey*, In A. Granas, editor, Méthodes topologiques en analyse nonlinéaire, volume 95 of Colloqu. Sémin. Math. Super., Sémin. Sci. OTAN (NATO Advanced Study Institute), pages 166–235, Montréal, 1985. Univ. de Montréal Press.
- [65] H. Steinlein, *Spheres and symmetry: Borsuk's antipodal theorem*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 1:15–33, 1993.
- [66] F. E. Su, *Borsuk-Ulam implies Brouwer: a direct construction*, American Math. Monthly, 104:855–859, 1997.
- [67] H. Yamabe and Z. Yujobo, *On continuous functions defined on a sphere*, Osaka Math. J. **2** (1950), 19–22.