



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Φυσικής Συμπυκνωμένης Ύλης

Πτυχιακή Εργασία
Αλέξανδρος Σουλάι
Α.Μ. : 1110201700151

**ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ
ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΣΕ ΣΥΧΝΟΤΙΚΑ
ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ**

Επιβλέπων : **Κοσμάς Α. Τσακμακίδης**

ΑΘΗΝΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2021

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πτυχιακή αυτή αποτελεί μια μίξη υπολογιστικής φυσικής και ηλεκτρομαγνητισμού, χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα προγράμματα και λογισμικό θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (FDTD) ώστε να προσεγγίσουμε την ηλεκτρομαγνητική θεωρία με τελικό σκοπό να προσομοιάσουμε υλικά των οποίων η διηλεκτρική σταθερά εμφανίζει εξάρτηση από την συχνότητα (frequency-dependent media).

Η εργασία είναι προσεκτικά δομημένη με κατάλληλο τρόπο ώστε να γίνεται η σταδιακή μετάβαση από τα βασικά μέρη της θεωρίας στο τελικό σημείο το οποίο αποτελεί την εφαρμογή της FDTD στα συχνοτικά εξαρτημένα υλικά.

Στο πρώτο κεφάλαιο, θα αναφερθούμε στα βασικότερα κομμάτια της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, τα οποία είναι απαραίτητα για την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, θα αναλύσουμε την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου, πιο συγκεκριμένα θα δούμε πως αποτελεί μια ικανοποιητική προσέγγιση της πραγματικότητας, γεγονός που θα επιβεβαιώσουμε από τις προσομοιώσεις τις οποίες θα πραγματοποιήσουμε.

Στο τρίτο κεφάλαιο, θα εφαρμόσουμε την FDTD σε κενό χώρο αλλά και σε μέσα με σταθερή διηλεκτρική σταθερά, εισάγοντας έτσι τα θεμέλια για τον τελικό μας στόχο.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο, θα εφαρμόσουμε την FDTD σε συχνοτικά εξαρτημένα υλικά, θα συγκρίνουμε διάφορες προσεγγιστικές μεθόδους και θα εξετάσουμε διάφορα συχνοτικά εξαρτημένα υλικά όπως τα υλικά Debye, Drude και Lorentz.

Επίσης, στο τέλος της εργασίας υπάρχουν τα κατάλληλα προγράμματα (σε γλώσσα Matlab) τα οποία εκτελούν τις προσομοιώσεις στις οποίες αναφερόμαστε.

Κλείνοντας την εισαγωγή, θέλω να πω ότι τώρα που βρίσκομαι στο τέλος της πτυχιακής μου εργασίας, νιώθω την ανάγκη να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα της, Κοσμά Α. Τσακμακίδη, για την παρότρυνση ενασχόλησης μου με αυτό το ιδιαίτερα ενδιαφέρον θέμα, για την συνεχή επίβλεψη καθόλη τη διάρκεια της εργασίας αλλά και για τις πολλές και εύστοχες συμβουλές και παρατηρήσεις.

Αθήνα, Ιούλιος 2021
Αλέξανδρος Σουλιάι

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο I : Αναφορές στη βασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία

1.1 - Εισαγωγή.....	σελ. 4
1.2 - Εξισώσεις Maxwell.....	σελ. 4
1.3 - Ηλεκτρική μετατόπιση και βοηθητικό πεδίο H.....	σελ. 6
1.4 - Εξισώσεις Maxwell σε μία διάσταση.....	σελ. 6

Κεφάλαιο II : Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου

2.1 - Εισαγωγή.....	σελ. 8
2.2 - Ο αλγόριθμος του Yee.....	σελ. 8
2.3 - Πεπερασμένες διαφορές.....	σελ. 10
2.4 - Εξισώσεις γραμμένες στον υπολογιστή.....	σελ. 12
2.5 - Βρόχος επανάληψης της μεθόδου.....	σελ. 12
2.6 - Αριθμητική διασπορά.....	σελ. 14

Κεφάλαιο III : Εφαρμογή της FDTD σε απλές περιπτώσεις

3.1 - Εισαγωγή.....	σελ. 16
3.2 - FDTD σε κενό χώρο.....	σελ. 16
3.3 - Απορροφητικές συνθήκες.....	σελ. 18
3.4 - Διάδοση σε διηλεκτρικό μέσο.....	σελ. 21
3.5 - Διαφορετικά είδη παλμών.....	σελ. 23
3.6 - Επιλογή μεγέθους χωρικού κελιού.....	σελ. 28
3.7 - Διάδοση σε διηλεκτρικό με απώλειες.....	σελ. 31

Κεφάλαιο IV : Επεκτάσεις σε συχνοτικά εξαρτημένα υλικά

4.1 - Εισαγωγή.....	σελ. 33
4.2 - Συχνοτικά εξαρτημένα υλικά.....	σελ. 33
4.3 - Υλικά Debye.....	σελ. 35
4.4 - Υλικά Drude.....	σελ. 44
4.5 - Υλικά Lorentz.....	σελ. 47

Βιβλιογραφία.....	σελ.51
--------------------------	---------------

Παράρτημα : Προγράμματα σε Matlab.....	σελ.52
-----------------------------------------------	---------------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΑΝΑΦΟΡΕΣ ΣΤΗ ΒΑΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1.1 Εισαγωγή

Ο ηλεκτρομαγνητισμός αποτελεί ένα ευρύ πεδίο της Φυσικής, συνεπώς είναι πολύ δύσκολο -στα πλαίσια της πτυχιακής αυτής- να αναλύσουμε την ηλεκτρομαγνητική θεωρία στο σύνολό της, αντί αυτού θα επιλέξουμε τα πιο βασικά σημεία τα οποία είναι αναγκαία για να επιτεύξουμε το στόχο που θέλουμε.

1.2 Εξισώσεις Maxwell

Ως αφητηρία είναι συνετό να έχουμε τις εξισώσεις του Maxwell. Οι εξισώσεις αυτές οι οποίες ανακαλύφθηκαν (στη σημερινή τους μορφή) περίπου το 1870, κατάφεραν για πρώτη φορά να ενοποιήσουν τα ηλεκτρικά με τα μαγνητικά πεδία και συνεχίζουν να χρησιμοποιούνται ευρέως μέχρι και σήμερα.

Εξίσωση Gauss : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (1.1)

Μη ύπαρξη μαγνητικού φορτίου : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (1.2)

Εξίσωση Faraday : $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (1.3)

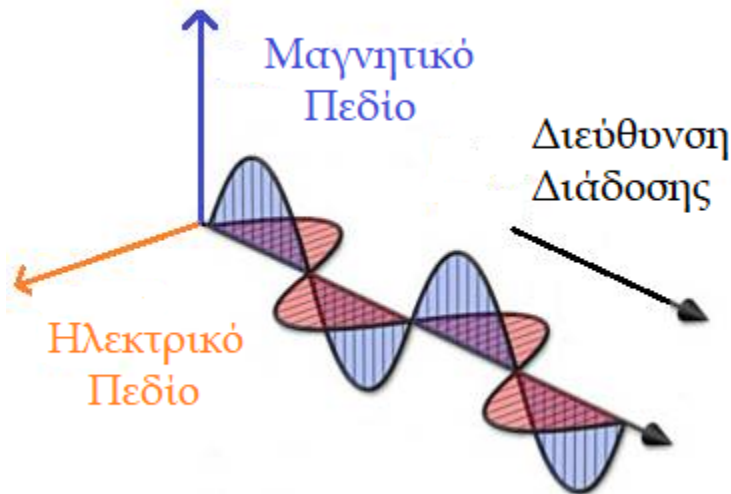
Εξίσωση Ampère-Maxwell : $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (1.4)

Σε κενό χώρο, στο οποίο δεν έχουμε φορτία και ρεύμα, η 1.4 παίρνει την μορφή :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.5)$$

Βλέπουμε ξεκάθαρα πως υπάρχει μια αλληλεξάρτηση μεταξύ ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, πιο συγκεκριμένα όμως μπορούμε να διακρίνουμε πως ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο επάγει ένα μαγνητικό πεδίο και αντίστροφα ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο επάγει ένα ηλεκτρικό πεδίο. Αυτή η σύνδεση των πεδίων θα αποτελέσει την βάση της θεωρίας με την οποία θα κάνουμε τις προσομοιώσεις, όπως θα δούμε παρακάτω.

Από τις παρατηρήσεις που έχουν γίνει γνωρίζουμε πως το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι μεταξύ τους κάθετα, γεγονός που επιβεβαιώνεται και από τις παραπάνω εξισώσεις. Επίσης, ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός πως τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια, δηλαδή η διεύθυνση διάδοσης τους είναι κάθετη στα κύματα, έτσι έχουμε 3 διαφορετικά διανύσματα : \mathbf{E} , \mathbf{B} , και \mathbf{k} τα οποία όλα μεταξύ τους κάθετα.



ΣΧΗΜΑ 1.1 : Απεικόνιση ενός διαδιδόμενου Η/Μ πεδίου

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όντας κύματα, υπακούν στους νόμους της κυματικής. Τα Η/Μ κύματα διαδίδονται με ταχύτητα ίση με αυτή του φωτός, για την οποία ισχύει : $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$. Άρα η κυματική εξίσωση για τα ηλεκτρικά και μαγνητικά κύματα αντίστοιχα είναι τα εξής :

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

Επίσης, από την ταχύτητα του φωτός και την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, έχουμε $c = \lambda f$. Με την σχέση αυτή μπορούμε να εναλλάσσουμε μεταξύ μήκος κύματος και συχνότητας, ωστόσο αργότερα θα δούμε, ότι τις περισσότερες φορές, είναι προτιμότερη η χρήση της συχνότητας. Τέλος δεν ξεχνάμε τα φαινόμενα συμβολής των κυμάτων –τα οποία δεν θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε μαθηματικά- διότι θα εμφανίζονται παρακάτω στις προσομοιώσεις.

1.3 Ηλεκτρική μετατόπιση και βοηθητικό πεδίο \mathbf{H}

Στις παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιούμε τα διανυσματικά πεδία \mathbf{E} και \mathbf{B} για να κάνουμε την ανάλυσή μας, ωστόσο μερικές φορές για μεγαλύτερη ευκολία στις πράξεις μπορούμε να καταφύγουμε στη χρήση της ηλεκτρικής μετατόπισης \mathbf{D} και του βοηθητικού πεδίου \mathbf{H} .

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.8)$$

Όπου ϵ και μ , η διηλεκτρική και διαμαγνητική σταθερά του υλικού αντίστοιχα. Στο κενό χώρο έχουμε προφανώς $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ και $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Για την ανάλυση μας -σε αρχικό στάδιο- δεν μας ενδιαφέρει το \mathbf{D} , όμως συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε το \mathbf{H} αντί του πιο οικείου \mathbf{B} , διότι οι εξισώσεις του Maxwell μπορούν έτσι να διατυπωθούν κομψότερα. Πέραν όμως του αισθητικού, οι νέες βελτιωμένες εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν πιο ευέλικτα.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} \quad (1.10)$$

Για να πάμε από την 1η στη 2η εξίσωση αρκεί να «αλλάξουμε» θέση στα \mathbf{E} και \mathbf{H} και να αντικαταστήσουμε το ϵ_0 με το $-\mu_0$. Όπως θα δούμε έπειτα αυτός ο μετασχηματισμός λόγω της ευκολίας που παρέχει, είναι απαραίτητος για την ανάπτυξη της μεθόδου.

1.4 Εξισώσεις Maxwell σε μια διάσταση

Οι εξισώσεις στις οποίες αναφερθήκαμε αναφέρονται σε όλο το χώρο, δηλαδή τα διανύσματα \mathbf{E} και \mathbf{H} εκφράζονται με αυτόν τον τρόπο :

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k} \quad (1.11)$$

όπου \mathbf{i} το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση του x και ούτω καθεξής. Τα τρισδιάστατα προβλήματα είναι σαφώς πιο δύσκολα να αντιμετωπιστούν και στα πλαίσια της πτυχιακής αυτής θα ασχοληθούμε μόνο με μονοδιάστατα προβλήματα.

Έστω ότι έχουμε ένα ηλεκτρικό πεδίο στη διεύθυνση του x και το βοηθητικό πεδίο H στη διεύθυνση του y . Τα πεδία θα πρέπει να διαδίδονται στη διεύθυνση κάθετη στα x και y δηλαδή στη διεύθυνση του z . Σε μαθηματική μορφή :

$$\mathbf{E} = E_x(z) \mathbf{i} \text{ και } \mathbf{H} = H_y(z) \mathbf{j} \quad (1.12)$$

Στη μία διάσταση, κάνοντας τις πράξεις, παρατηρούμε πως οι εξισώσεις του Maxwell γίνονται ακόμα πιο απλές.

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (1.14)$$

Με αυτές τις απλές σχέσεις θα εδραιώσουμε τη βάση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου. Θα χρειαστούμε και κάποια επιπλέον εργαλεία τα οποία θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο προτού προχωρήσουμε στις πρώτες προσομοιώσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (FDTD)

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, θα περιγράψουμε την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου, η οποία στηρίζεται στον αλγόριθμο του Yee (1966) ο οποίος χρησιμοποιείται ευρέως από την επιστημονική κοινότητα μέχρι και σήμερα. Η μέθοδος αποτελεί ίσως το πιο σημαντικό κομμάτι της πτυχιακής αυτής μιας και με αυτή μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τις προσομοιώσεις με τις οποίες θα μελετήσουμε τα διάφορα μέσα.

2.2 Ο αλγόριθμος του Yee

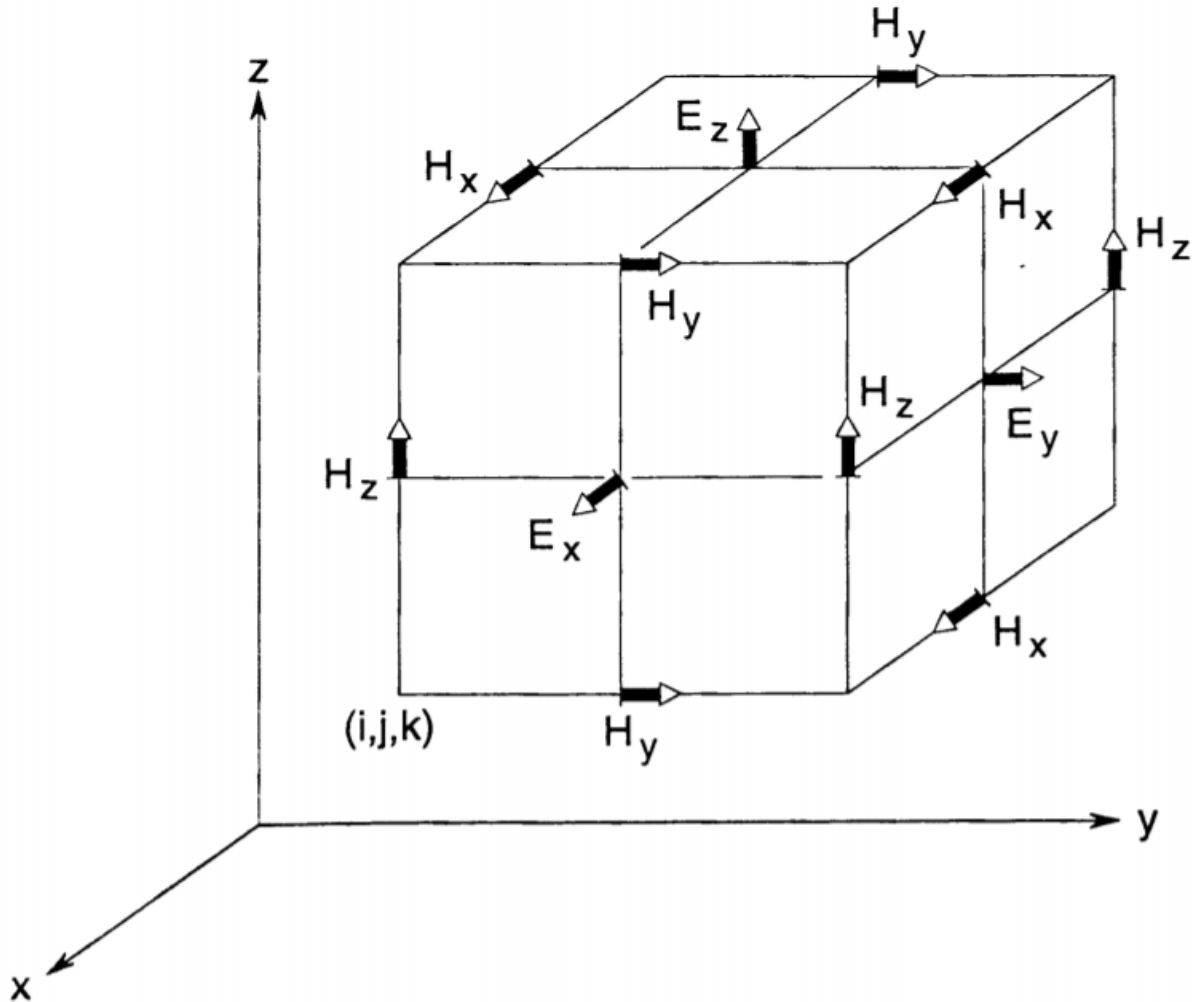
Ο Kane Yee κατάφερε να αναπτύξει μια υπολογιστική μέθοδο η οποία μπορεί να εφαρμοστεί με σχετική ευκολία σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε τρεις διαστάσεις, στον κενό χώρο με ή χωρίς παρουσία φορτίου και ρεύματος αλλά και σε διηλεκτρικά υλικά. Αρχικά θα δούμε πως ο αλγόριθμος εφαρμόζεται στις τρεις διαστάσεις με μηδενικά φορτία και ρεύματα, και ύστερα θα ανάγουμε την γενική αυτή περίπτωση στην απλούστερη μια διάσταση.

Η “ισχύς” του αλγορίθμου του Yee πηγάζει από την απλότητά του, η οποία μας επιτρέπει να τον εφαρμόσουμε σε ένα ευρύ φάσμα πεδιακών προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα :

1 - Ο αλγόριθμος κάνει επίλυση και για τα δύο πεδία (ηλεκτρικό και μαγνητικό) στο χώρο αλλά και στο χρόνο, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Maxwell που αναφέρονται στο στροβιλισμό των πεδίων αντί να λύσει μόνο για το ηλεκτρικό ή μόνο για το μαγνητικό πεδίο με την χρήση της κυματικής εξίσωσης. Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε τις ηλεκτρικές αλλά και τις μαγνητικές ιδιότητες ενός υλικού με ένα ευθύ αλλά και εύκολο τρόπο, πάντα με περισσότερη ακρίβεια.

2 - Θέλοντας να προσεγγίσουμε τις χωρικές και χρονικές μερικές παραγώγους, τοποθετούμε τις τιμές των συνιστωσών των πεδίων (E_x , E_y , E_z , H_x , H_y , H_z) σε συγκεκριμένες θέσεις κάθε κελιού που είναι γνωστό ως “κελί του Yee” (Yee cell).

Χρησιμοποιώντας ένα μοναδιακό χωρικό πλέγμα μπορούμε να αναπαραστήσουμε το κελί του Yee και τις επιμέρους συνιστώσες του με το παρακάτω σχήμα :



ΣΧΗΜΑ 2.1 : Θέσεις συνιστωσών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στο κελί Yee.

Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι όλες τοποθετημένες είτε στα κέντρα των πλευρών είτε στα μέσα των ακμών του κυβικού πλέγματος, με διεύθυνση και φορά αυτήν του άξονα που υποδηλώνει ο δείκτης τους. Βλέπουμε πως κάθε συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} έχει περιβάλλεται από 4 συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου \mathbf{B} και, αντίστοιχα, κάθε συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου περικλείεται από 4 συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου. Με τον τρόπο αυτό ο αλγόριθμος του Yee λαμβάνει υπόψη του τις εξισώσεις του Maxwell, εφόσον τοποθετεί τις πεδιακές συνιστώσες σε συγκεκριμένα σημεία και μεριμνά, όπως θα δούμε παρακάτω, για την προσέγγιση των μερικών διαφορικών παραγώγων με πεπερασμένες διαφορές.

3 - Όλοι οι υπολογισμοί για το \mathbf{E} στο χώρο πραγματοποιούνται και αποθηκεύονται για ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο χρησιμοποιώντας τα προηγουμένως αποθηκευμένα δεδομένα για

το **H**. Ύστερα οι υπολογισμοί για το **H** γίνονται με τα δεδομένα για το **E** που μόλις υπολογίσαμε. Ο κύκλος μπορεί να επαναληφθεί για να βρούμε τις επόμενες τιμές για το **E** από τις νέες τιμές που βρήκαμε για το **H**. Η διαδικασία αυτή τελειώνει μέχρι να ολοκληρωθούν όλα τα χρονικά βήματα.

Ο βρόχος επανάληψης είναι ξεχωριστός για το κάθε πεδίο, αποφεύγοντας έτσι τα προβλήματα που μπορεί να προκύψουν από την επίλυση ταυτόχρονων εξισώσεων και από πολύπλοκες πράξεις πινάκων.

2.3 Πεπερασμένες διαφορές

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση u . Θέλουμε να την αναπτύξουμε κατά Taylor, γύρω από ένα σημείο x_0 .

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta x \frac{\partial u(x_0)}{\partial x} + O(\Delta x^2) \quad (2.1)$$

Αν θέλουμε να αγνοήσουμε τους όρους δευτέρας τάξης, μπορούμε να πούμε πως $O(\Delta x^2) = 0$. Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα για το πεδίο **H** και λύνουμε ως προς την μερική παράγωγο, έτσι έχουμε :

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{H(y_0 + \Delta y) - H(y_0)}{\Delta y} \quad (2.2)$$

Ομοίως εργαζόμαστε και για την χρονική μερική παράγωγο :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H(t_0 + \Delta t) - H(t_0)}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Η 2.3 ισχύει για οποιοδήποτε πεδίο, συνεπώς μπορούμε να αντικαταστήσουμε το **H** με το **E** ώστε να φτάσουμε στην ίδια σχέση και για το **E**. Ωστόσο, όπως θα δούμε παρακάτω είναι πιο βολικό να έχουμε τις τιμές του **E** να απέχουν $\pm \Delta t/2$ από το σημείο t_0 , σημειώνουμε ότι η διαφορά μεταξύ των τιμών παραμένει ίδια. Άρα η 2.3 γίνεται :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E(t_0 + \Delta t/2) - E(t_0 - \Delta t/2)}{\Delta t} \quad (2.4)$$

Εφαρμόζουμε τα ίδια βήματα στη χωρική παράγωγο για το βοηθητικό πεδίο **H** και έτσι η 2.2 γίνεται εν τέλει :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H(x_0 + \Delta x/2) - H(x_0 - \Delta x/2)}{\Delta x} \quad (2.5)$$

Η ερώτηση που προκύπτει είναι γιατί κάναμε αυτές τις αλλαγές και φτάσαμε στις εξισώσεις 2.4 και 2.5. Ο λόγος είναι πως τα πεδία βρίσκονται σε διαφορετικά χρονικά και χωρικά σημεία μεταξύ τους, η αλλαγή αυτή είναι απαραίτητη ώστε να μην υπάρχει σύγχυση η οποία μπορεί να οδηγήσει σε λάθος αποτελέσματα. Στο σχήμα 2.1 βλέπουμε πως οι συνιστώσες του \mathbf{E} απέχουν κατά $\Delta x/2$ ($\Delta x =$ μήκος του κύβου) Άρα στο ίδιο σημείο x_0 έχουμε τις σχέσεις :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H(x_0 + \Delta x/2) - H(x_0 - \Delta x/2)}{\Delta x} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{E(x_0 + \Delta x) - E(t_0)}{\Delta x} \quad (2.6)$$

Και στις μερικές χρονικές παραγώγους, στο ίδιο χρονικό σημείο, θα έχουμε κάτι αντίστοιχο, εφόσον τα \mathbf{E} και \mathbf{H} απέχουν χρονικά κατά $\Delta t/2$. (Αν δεν απείχαν, δεν θα μπορούσαμε να εκτελέσουμε τον βρόχο επανάληψης τον οποίο αναφέρουμε στο υποκεφάλαιο 2.2, διότι θα έπρεπε να λύσουμε ταυτόχρονες εξισώσεις, τις οποίες είπαμε πως θέλουμε να αποφύγουμε)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H(t_0 + \Delta t) - H(t_0)}{\Delta t} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E(t_0 + \Delta t/2) - E(t_0 - \Delta t/2)}{\Delta t} \quad (2.4)$$

Έχοντας αυτά υπόψη, μπορεί να θέλουμε να εκφράσουμε ένα χωροχρονικό σημείο ενός πεδίου. Προκειμένου να υπάρχει μια κομψότητα στις τελικές μας σχέσεις θα αποφύγουμε από το χρησιμοποιήσουμε τις παρενθέσεις για όλες τις συντεταγμένες, και αντί αυτού θα εκφράσουμε τον χρόνο γράφοντας τον προς τα πάνω. (superscript - όχι δύναμη!) Έτσι, για παράδειγμα, η 2.4 η οποία αναφέρει διαφορά στο χρόνο μεταξύ 2 τιμών του \mathbf{E} αλλά οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο χωρικό σημείο θα γίνει ως εξής :

$$\frac{E(t_0 + \Delta t/2) - E(t_0 - \Delta t/2)}{\Delta t} = \frac{E^{n+1/2}(k) - E^{n-1/2}(k)}{\Delta t} \quad (2.7)$$

Ομοίως εφαρμόζουμε αυτόν τον φορμαλισμό σε όλες τις εξισώσεις 2.3 έως 2.6. Βλέπουμε πως υπάρχουν δύο αλλαγές. Η πρώτη, είναι πως έχουμε αλλάξει την μεταβλητή του χώρου x με μια μεταβλητή k . Ο λόγος είναι για να αποφύγουμε την σύγχυση μεταξύ Δx και x , στον υπολογιστή στον οποίο θα πραγματοποιήσουμε τις προσομοιώσεις, τέτοια λογικά λάθη εμφανίζονται συχνά.

Η δεύτερη είναι πως αντί για $t_0 \pm \Delta t/2$, έχουμε $n \pm 1/2$. Ο λόγος είναι ο ίδιος, θέλουμε να αποφύγουμε τα λογικά λάθη.

2.4 Εξισώσεις γραμμένες στον υπολογιστή

Προηγουμένως, δεν εξηγήσαμε γιατί έχουμε το $\pm 1/2$. Για να το κάνουμε αυτό, χρειάζεται να δούμε πως οι πεπερασμένες διαφορές μπορούν να γραφούν στον υπολογιστή. Αυτό που είναι βασικό στους υπολογιστές, είναι πως οι πράξεις είναι πάντα διακριτές, και τα δεδομένα και στοιχεία τα οποία χρησιμοποιούμε είναι διακριτά. Βασική αρχή είναι πως προσεγγίζουμε περισσότερο την θεωρία με περισσότερες πράξεις.

Στην εξίσωση 2.7 έχουμε πως η χρονική διαφορά των δύο τιμών του E είναι Δt . Η χρονική διαφορά δύο οποιοδήποτε διαδοχικών τιμών του E παραμένει πάλι Δt . Το Δt γίνεται μονάδα στο νέο φορμαλισμό, αυτό σημαίνει πως το n αναφέρεται σε χρόνο " $n \cdot \Delta t$ " και αντίστοιχα το k σε χώρο " $k \cdot \Delta x$ ", αυτό το βήμα είναι απαραίτητο ώστε να μεταβούν οι εξισώσεις από το χαρτί στο πρόγραμμα.

Στις πεπερασμένες διαφορές έχουμε $E(t_0)$, το επόμενο χρονικό σημείο το οποίο αναφέρεται στο ίδιο χωρικό σημείο θα είναι το $E(t_0 + \Delta t)$, το μεθεπόμενο θα είναι το $E(t_0 + 2\Delta t)$ και ούτω καθεξής. Αντίστοιχα στον υπολογιστή θα έχουμε E_0, E_1, E_2, \dots . Το ίδιο συμβαίνει και για τα χωρικά σημεία τα οποία απέχουν μεταξύ τους Δx .

Αν περιγράψουμε το πρόβλημα με άπειρα σημεία τότε θα έχουμε κάνει την πιο σωστή προσέγγιση της πραγματικότητας. Ωστόσο, αυτό είναι αδύνατο από άποψη υπολογιστικής ισχύς, μια προσομοίωση απείρων σημείων θα χρειαζόταν άπειρο χρόνο ώστε να πραγματοποιηθεί. Αυτό που ψάχνουμε είναι μια αρκετά καλή προσέγγιση η οποία να μπορεί να πραγματοποιηθεί σε εύλογο χρονικό διάστημα. Σε επόμενα υποκεφάλαια θα δούμε τις συγκεκριμένες τιμές που πρέπει να εισάγουμε σε διάφορα μεγέθη ώστε να κάνουμε τις πιο κατάλληλες προσομοιώσεις.

2.5 Βρόχος επανάληψης της μεθόδου

Επιστρέφουμε στις εξισώσεις του Maxwell στη μια διάσταση. Αν εφαρμόσουμε την θεωρία των πεπερασμένων διαφορών στις εξισώσεις 1.13 και 1.14 και εισάγουμε τον φορμαλισμό της εξίσωσης 2.7, θα έχουμε τις εξισώσεις σε αυτή την μορφή :

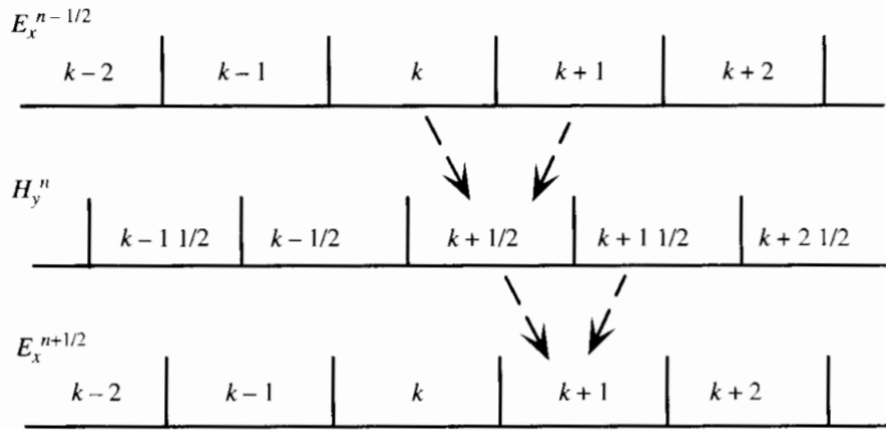
$$\frac{E_x^{n+1/2}(k) - E_x^{n-1/2}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)}{\Delta x} \quad (2.8)$$

$$\frac{H_y^{n+1}(k+1/2) - H_y^n(k+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{E_x^{n+1/2}(k+1) - E_x^{n+1/2}(k)}{\Delta x} \quad (2.9)$$

Ο βρόχος επανάληψης που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι παραπάνω εξισώσεις λύνοντας όμως ως προς E_x και H_y .

$$E_x^{n+1/2}(k) = E_x^{n-1/2}(k) - \frac{\Delta t}{\Delta x \varepsilon_0} H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2) \quad (2.8b)$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{\Delta t}{\Delta x \mu_0} E_x^{n+1/2}(k+1) - E_x^{n+1/2}(k) \quad (2.9b)$$



ΣΧΗΜΑ 2.2 : Σχηματική αναπαράσταση του αλγόριθμου.

Βλέπουμε πως για να βρούμε τις τιμές του \mathbf{E} , χρειαζόμαστε την προηγούμενη τιμή του \mathbf{E} καθώς και τις τιμές για το \mathbf{H} . Ύστερα με τις νέες τιμές του \mathbf{E} , βρίσκουμε και τις επόμενες τιμές για το \mathbf{H} . Στο σημείο αυτό, ολοκληρώνεται ο βρόχος για μια φορά. Αν τον επαναλάβουμε θα βρούμε τις ακόμα πιο επόμενες τιμές για το \mathbf{E} και \mathbf{H} , θα προχωρήσουμε δηλαδή στις πράξεις οι οποίες θα εκφράζονται από το $n+1$ αντί για το n . Το φυσικό νόημα δηλαδή, είναι πως προχωράμε την χρονική εξέλιξη του συστήματος που μελετάμε κατά χρόνο Δt .

Το \mathbf{E} και το \mathbf{H} διαφέρουν κατά απόλυτη τιμή μερικές τάξεις μεγέθους, για αυτό είναι φρόνιμο το να μεταβούμε σε ένα νέο σύστημα μονάδων για το οποίο το \mathbf{E} θα έχει τιμές ανάλογες με το \mathbf{H} . Αν θεωρήσουμε ότι :

$$\tilde{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E \quad (2.10)$$

Τότε οι εξισώσεις γίνονται :

$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_x^{n-1/2}(k) - \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} [H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)] \quad (2.8c)$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k)] \quad (2.9c)$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις αποτελούν το θεμέλιο της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου. Προκειμένου να προχωρήσουμε με την εφαρμογή της μεθόδου, θα πρέπει να δούμε πρώτα και το πρόβλημα της αριθμητικής διασποράς.

2.6 Αριθμητική διασπορά

Οι εξισώσεις 2.8c και 2.9c, εμπεριέχουν αρκετούς όρους, τα **E** και **H** αλλάζουν αναλόγως τι σκοπεύουμε να μελετήσουμε, τα μ_0 και ε_0 είναι σταθερές, άρα αυτό που πρέπει να ορίσουμε είναι τα Δx και Δt .

Οι τιμές των μεγεθών αυτών παίζουν πρωταρχικό ρόλο στο πως θα συμπεριφερθεί το κύμα το οποίο θέλουμε να προσομοιάσουμε. Αναλόγως τις τιμές τους, αλλάζει και η ταχύτητα διάδοσης γεγονός το οποίο μπορεί να εισάγει μερικά αριθμητικά σφάλματα αφού το κύμα θα παρουσιάσει μια μη-φυσική διασπορά (ακόμη και στον κενό χώρο). Χωρίς να μείνουμε πολύ στις μαθηματικές πράξεις, θα πρέπει να βρούμε τις κατάλληλες τιμές για τα Δx και Δt , ώστε να μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το εκάστοτε κύμα με όσο το δυνατόν περισσότερη ακρίβεια.

Ας αρχίσουμε με το Δx . Για να έχουμε μια καλή προσομοίωση θα πρέπει το Δx , να είναι τουλάχιστον δέκα φορές μικρότερο από το μήκος κύματος του κύματος του οποίου θέλουμε να μοντελοποιήσουμε. Θα πρέπει να ισχύει δηλαδή :

$$\Lambda = \frac{\lambda_0}{\Delta x} > 10 \quad (2.11)$$

Όσο πιο μεγάλο το Λ -δηλαδή όσο πιο μικρό το Δx -, τόσο πιο λεπτομερής θα είναι η ανάλυσή μας, ωστόσο θα χρειαζόμαστε περισσότερη μνήμη και υπολογιστική ισχύ. Στα πλαίσια της εργασίας αυτής, θα αρκεστούμε στην ακρίβεια του $\Delta x = \lambda_0/10$.

Για να ολοκληρώσουμε τα πρέπει να δούμε τι τιμή θα έχει το Δt . Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται με ταχύτητα ίση με αυτή του φωτός, c . Δηλαδή σε χρονικό διάστημα Δt , το κύμα θα διανύσει απόσταση $\Delta x = c\Delta t$. Δηλαδή $\Delta t = \Delta x/c$. Βλέπουμε πως αν εισάγουμε μεγαλύτερη τιμή για το Δt , θα έχουμε κύμα με ταχύτητα διάδοσης $v > c$, το οποίο είναι άνευ φυσικού νοήματος. Θα πρέπει να ισχύει $\Delta t \leq \Delta x/c$.

Αυτά ισχύουν στη μία διάσταση. Αν έχουμε μοντελοποίηση διδιάστατου κύματος θα πρέπει η διαγώνια ταχύτητα να είναι ίση ή μικρότερη με την ταχύτητα του φωτός. Ομοίως και αν κάνουμε μοντελοποίηση τρισδιάστατου κύματος. Επομένως, η επιλογή του Δt , θα πρέπει να γίνεται με γνώμονα αυτή την έκφραση :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{nc}} \quad (2.12)$$

Η έκφραση αυτή ονομάζεται “όριο Courant”. Το n αναφέρεται στον αριθμό των διαστάσεων στον οποίο κάνουμε την προσομοίωση. Εμείς, θα ασχοληθούμε εξ ολοκλήρου στη μια διάσταση, θα μπορούσαμε δηλαδή να πούμε ότι $\Delta t = \Delta x/c$. Ωστόσο είναι προτιμότερο να επιλέξουμε ένα Δt το οποίο να ικανοποιεί την συνθήκη του Courant για όλες τις περιπτώσεις ώστε αν χρειαστεί να μεταβούμε σε διδιάστατες ή τρισδιάστατες μοντελοποιήσεις, να αλλάξουμε όσο το δυνατόν λιγότερα μεγέθη. Άρα :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2c} \quad (2.12b)$$

Με αυτή την επιλογή και θυμίζοντας από τον ηλεκτρομαγνητισμό ότι $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ οι εξισώσεις 2.8c και 2.9c, φτάνουν στην τελική και πιο κομψή τους μορφή.

$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_x^{n-1/2}(k) - \frac{1}{2}[H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)] \quad (2.8d)$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{1}{2}[\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k)] \quad (2.9d)$$

Με αυτές τις σχέσεις πλέον, έχουμε τελειώσει με την θεωρία της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου. Τώρα έχουμε την δυνατότητα να προχωρήσουμε στη μοντελοποίηση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και εν τέλει στην μελέτη διαφορών διηλεκτρικών υλικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ FDTD ΣΕ ΑΠΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

3.1 Εισαγωγή

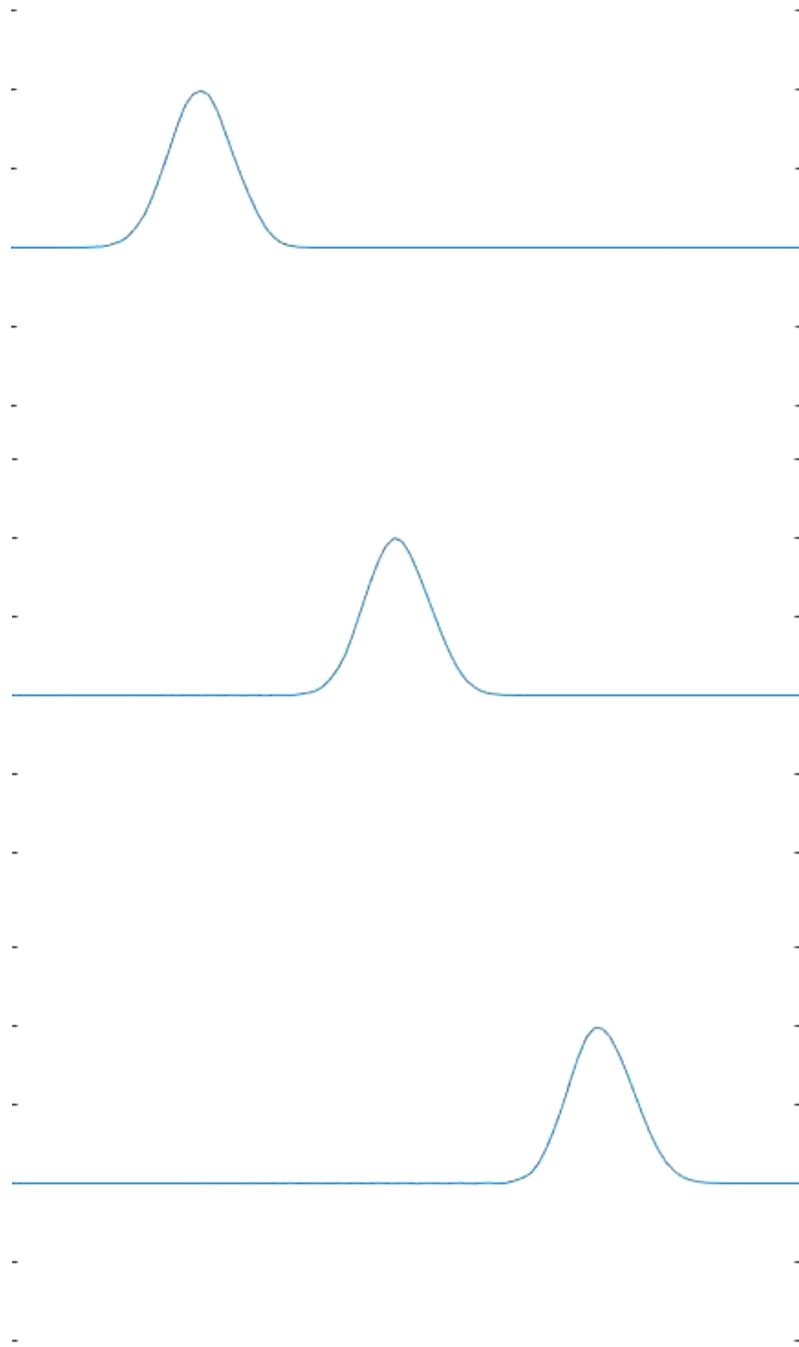
Όπως αναφέραμε πριν, έχουμε τα απαραίτητα εργαλεία ώστε να εφαρμόσουμε την θεωρία πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου. Παρά όλα αυτά, ο τελικός μας στόχος είναι να μελετήσουμε τα συχνοτικά εξαρτημένα υλικά των οποίων η μοντελοποίηση αποτελεί μια περίτεχνη διαδικασία. Για να φτάσουμε σε αυτό το σημείο θα πρέπει πρώτα να κοιτάξουμε τα φαινόμενα τα οποία είναι πιο εύκολα να μελετηθούν, θα εφαρμόσουμε δηλαδή την FDTD στις πιο απλές περιπτώσεις και αφού αποκτήσουμε μια σχετική οικειότητα θα μπορέσουμε να προχωρήσουμε στο τελευταίο και πιο ενδιαφέρον κεφάλαιο της εργασίας αυτής.

3.2 FDTD σε κενό χώρο

Η πιο απλή περίπτωση μοντελοποίησης κύματος είναι διάδοση στο κενό χώρο. Στο κενό χώρο δεν υπάρχει κάτι το οποίο θα διαταράξει το κύμα μας, το μόνο που θα συμβεί είναι πως αυτό θα διανύσει μια απόσταση σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Δηλαδή, η πιο απλή περίπτωση είναι και αυτή η οποία δεν έχει ενδιαφέρον. Ωστόσο, όπως είπαμε και πριν αποτελεί το πρώτο βήμα για να κατακτήσουμε την προσομοίωση συχνοτικών υλικών.

Αρχικά, θα ξεκινήσουμε με ένα γκαουσιανό παλμό. Εισάγουμε στο πρόγραμμα στη χρονική στιγμή 0 και στο χωρικό σημείο 0 τον γκαουσιανό κύμα. Ο βρόχος επανάληψης θα υπολογίσει τις νέες τιμές για το κύμα με αποτέλεσμα αυτό να φαίνεται πως κινείται στο χώρο.

Εκτελώντας το πρόγραμμα βλέπουμε τις παρακάτω εικόνες για διαφορετικά χρονικά σημεία. Σημειώνουμε εδώ ότι η παρακάτω προσομοίωση αναφέρεται σε χώρο 100 κελιών και σε χρόνο 200 χρονικών βημάτων.

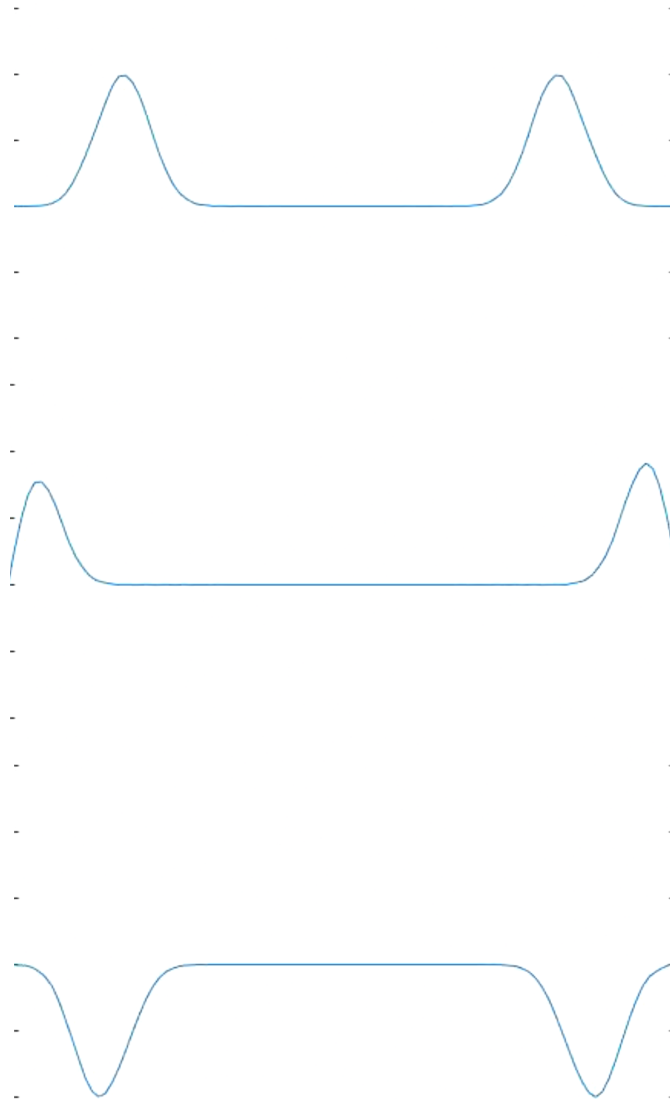


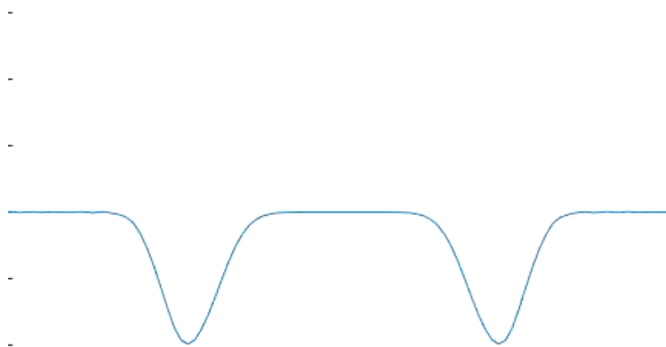
ΣΧΗΜΑ 3.1 : Γκαουσιανό κύμα το οποίο διαδίδεται σε κενό χώρο. Το κύμα ξεκινάει από τα αριστερά και φτάνει στα δεξιά με την πάροδο του χρόνου.
(Βλέπε Παράρτημα : **1dgauss-freespace**)

Στις αναλύσεις μας θα ασχοληθούμε με γκαουσιανά και ημιτονοειδή κύματα. Θα πούμε περισσότερα για αυτά σε επόμενο υποκεφάλαιο.

3.3 Απορροφητικές συνθήκες

Ένα πρόβλημα το οποίο δημιουργείται σε όλες τις προσομοιώσεις, ακόμα και στην περίπτωση του απλού κενού χώρου, είναι το κύμα να διανύσει όλο το χώρο που εμείς έχουμε ορίσει. Το πρόγραμμά μας, στην περίπτωση που αυτό συμβεί, θα αντιμετωπίσει το τέλος του χώρου ως μια ανακλαστική επιφάνεια με αποτέλεσμα το κύμα να ανακλαστεί πλήρως στην αντίθετη κατεύθυνση. Αν αυτό είναι επιθυμητό για την ανάλυσή μας τότε δεν χρειάζεται να αλλάξουμε τίποτα στο πρόγραμμα, ωστόσο αν θέλουμε να μην υπάρχει αυτή η συμπεριφορά θα πρέπει να εισάγουμε τις απορροφητικές συνθήκες.





ΣΧΗΜΑ 3.2 : Γκαουσιανά κύματα το οποίο διαδίδονται και ανακλώνται στην αρχή και τέλος του χώρου. Παρατηρούμε πως υπάρχει ταυτόχρονα και αντιστροφής του πλάτους. (Βλέπε Παράρτημα : **dualgauss-noabcs**)

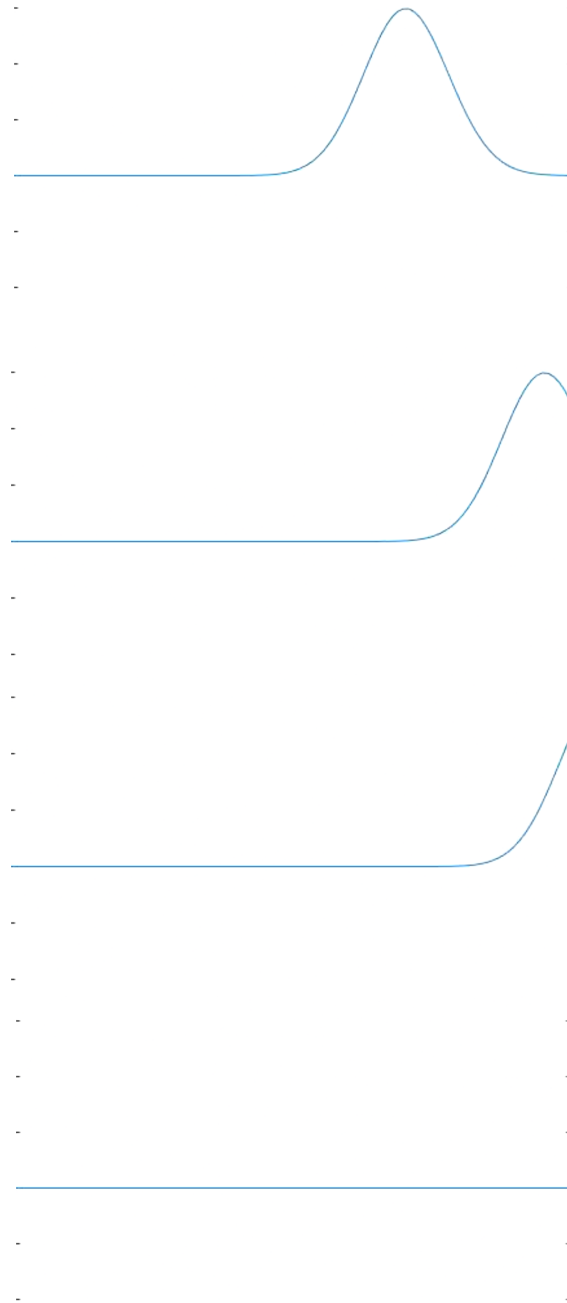
Όπως αναφέρεται και στο όνομά τους, οι απορροφητικές συνθήκες καθορίζουν μια περιοχή στην οποία αν βρεθεί το κύμα θα απορροφηθεί πλήρως. Εμείς θέλουμε οι περιοχές αυτές να είναι το τέλος και η αρχή του κενού μας χώρου ώστε να μην υπάρχουν τυχόν ανακλάσεις. Μεταφράζοντας το αυτό στην γλώσσα του υπολογιστή, πρέπει οι τιμές του **E** να γίνονται μηδενικές για αυτές τις δύο συγκεκριμένες χωρικές τιμές.

Για να το πετύχουμε αυτό θα πρέπει να κινηθούμε με έναν όχι τόσο προφανή τρόπο. Κανείς θα μπορούσε να σκεφτεί να εισάγουμε μια συνθήκη στο πρόγραμμα η οποία να λέει : “Αν το κύμα φτάσει στο σημείο x τότε στο σημείο αυτό θα πάρει τιμή μηδέν”. Αν εφαρμόσουμε αυτή τη σκέψη το αποτέλεσμα θα είναι να καταστραφεί όλη η προσομοίωση αφού το κύμα θα αρχίζει να συμπεριφέρεται με έναν μη φυσικό τρόπο. Για να εφαρμόσουμε τις ακραίες απορροφητικές συνθήκες (Absorbing Boundary Conditions - ABCs) θα πρέπει να διορθώσουμε αυτό το λογικό σφάλμα.

Η σωστή ενέργεια είναι αν αποφύγουμε πλήρως τα “if”. Από την στιγμή που το κύμα χρειάζεται δύο χρονικά βήματα για να διασχίσει ένα χωρικό κελί, μια ορθή σκέψη μας λέει πως θα πρέπει να ισχύσει το εξής :

$$E_x^n(0) = E_x^{n-2}(1) \quad (3.1)$$

Στο πρόγραμμά μας είναι σχετικά απλό να εφαρμόσουμε την 3.1. Θα χρειαστεί να αποθηκεύσουμε την τιμή του $E_x(1)$ για δύο χρονικά βήματα και να την εισάγουμε στην $E_x(0)$. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την εφαρμογή αυτή στο τέλος του χώρου προσομοίωσης.



ΣΧΗΜΑ 3.3 : Γκαουσιανό κύμα προσπίπτει στο τέλος του χώρου. Έχοντας εισάγει την απορροφητική συνθήκη βλέπουμε πως δεν υπάρχει ανάκλαση. Ύστερα από αρκετά χρονικά βήματα το κύμα απορροφάται πλήρως. (Βλέπε Παράρτημα : **1dWITHabs**)

3.4 Διάδοση σε διηλεκτρικό μέσο

Έχοντας δει τις πιο απλές περιπτώσεις εφαρμογής της FDTD μπορούμε τώρα να δούμε και κάτι πιο σύνθετο, πιο συγκεκριμένα θα εξετάσουμε την περίπτωση ενός διηλεκτρικού. Για τους σκοπούς της πτυχιακής αυτής θα εξετάσουμε υλικά τα οποία έχουν $\mu = \mu_0$.

Οι εξισώσεις του Maxwell σε περίπτωση διηλεκτρικού γράφονται με παρόμοιο τρόπο ως εξής :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} \quad (3.3)$$

Το ε_r είναι η διηλεκτρική σταθερά του υλικού, θυμίζουμε ότι $\varepsilon_r \geq 1$. Αν ακολουθήσουμε την ίδια ανάλυση που είχαμε κάνει στο δεύτερο κεφάλαιο, θα καταλήξουμε στις δύο εξισώσεις τις οποίες χρησιμοποιήσαμε για τον βρόχο επανάληψης, όμως θα υπάρχει μια μικρή διαφορά η οποία οφείλεται στον παράγοντα ε_r .

$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_x^{n-1/2}(k) + \frac{1/2}{\varepsilon_r} [H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)] \quad (3.4)$$

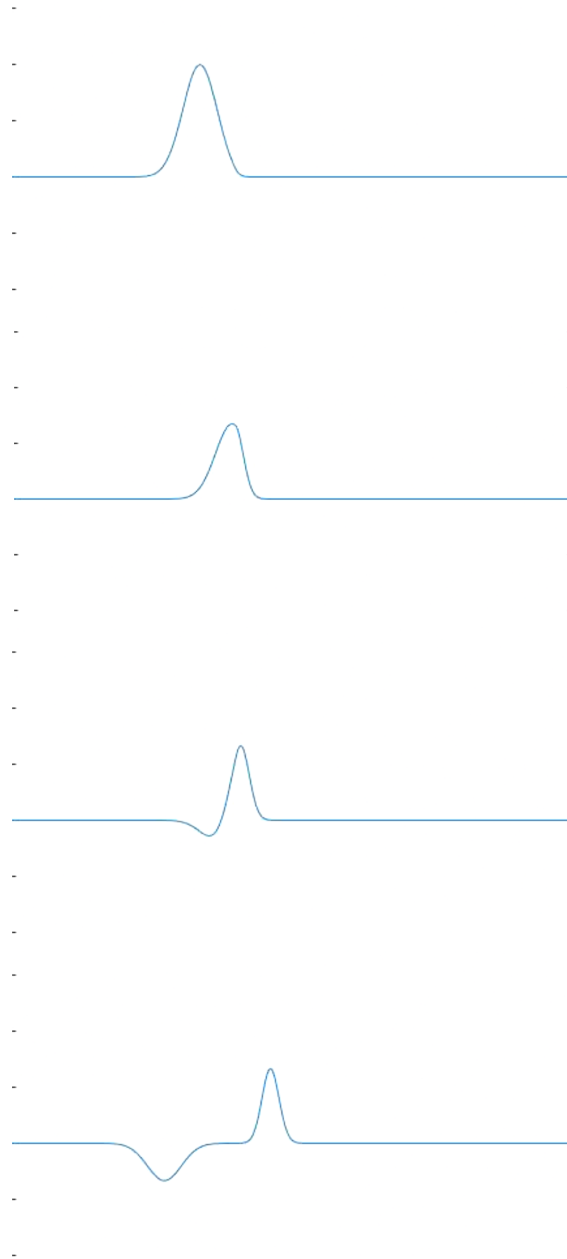
ενώ η 2η παραμένει η ίδια :

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{1}{2} [\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k)] \quad (3.5)$$

Για να δούμε πως αλληλεπιδρά ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα όταν αυτό προσπίπτει σε διηλεκτρικό θα πρέπει να υπάρχει μια χωρική περιοχή η οποία να ταυτίζεται με τον κενό χώρο και μια δεύτερη η οποία είναι το διηλεκτρικό μας. Δεν έχει νόημα να κάνουμε μια προσομοίωση η οποία έχει το διηλεκτρικό παντού στο χώρο, το αποτέλεσμα θα είναι ίδιο με την προσομοίωση στον κενό χώρο απλά το κύμα θα έχει μια μικρότερη ταχύτητα διάδοσης. Για να το εφαρμόσουμε αυτό στο πρόγραμμα θα πρέπει να ορίσουμε μια μεταβλητή έστω “cb” η οποία για κάποιες τιμές του χώρου (από 1 έως kstart-1) θα ισούται με 1/2 ενώ για τις υπόλοιπες (kstart έως space) με $1/2\varepsilon_r$.

1 έως kstart-1 : κενός χώρος
kstart έως space : διηλεκτρικό

space : ο αριθμός όλων των χωρικών κελιών
kstart : το σημείο που ξεκινά το διηλεκτρικό



ΣΧΗΜΑ 3.4 : Ένα κύμα που διαδίδεται στο κενό χώρο προσπίπτει σε διηλεκτικό με $\epsilon_r = 4$. Το αποτέλεσμα είναι ένα μέρος να διαδοθεί μέσα στο μέσο ενώ το άλλο να ανακλαστεί πίσω.
(Βλέπε Παράρτημα : **dielectric1D**)

Όπως βλέπουμε υπάρχει μια διάδοση ενός μέρος του κύματος, και μια ανάκλαση του υπολοίπου. Το φαινόμενο αυτό περιγράφεται πλήρως από την θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού, και οι λόγοι πλάτος ανακλώμενου προς πλάτος προσπίπτοντος και πλάτος διαδιδόμενου προς πλάτος προσπίπτοντος εξαρτώνται μόνο από την διηλεκτρική σταθερά του υλικού.

$$\frac{I_{Reflected}}{I_{Incident}} = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right| \quad (3.6)$$

$$\frac{I_{Transmitted}}{I_{Incident}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (3.7)$$

και για τα n (δείκτης διάθλασης) στα υλικά με $\mu = \mu_0$ ισχύει :

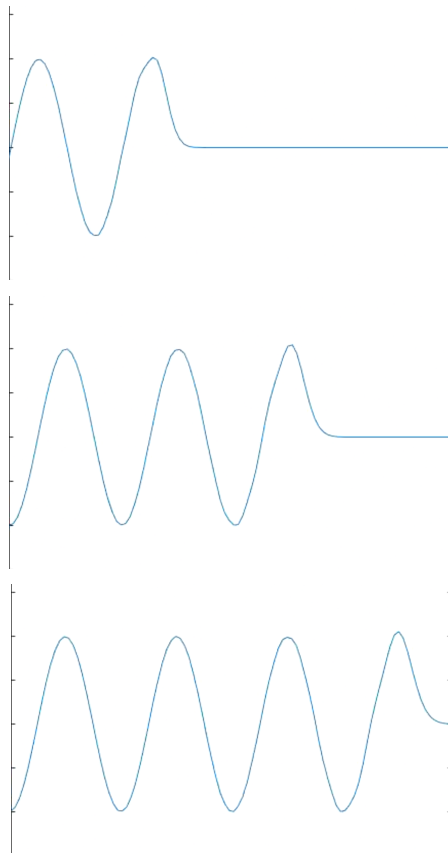
$$n \simeq \sqrt{\epsilon_r} \quad (3.8)$$

Για το παράδειγμά μας, θα για $\epsilon_r = 4$, θα πρέπει -βάσει θεωρίας- τα 2/3 του πλάτους του κύματος να διαδοθούν εντός του διηλεκτρικού ενώ το 1/3 θα πρέπει να ανακλαστεί. Αν δούμε την πρώτη και τελευταία εικόνα του σχήματος 3.4, θα δούμε πως συμβαίνει ακριβώς αυτό, τα διαδιδόμενα και ανακλώμενα πλάτη αντιστοιχούν σε 2/3 και 1/3 του αρχικού κύματος αντίστοιχα, έχουμε δηλαδή μια πρώτη επαφή με την επαλήθευση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας με την χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου.

3.5 Διαφορετικά είδη παλμών

Στα σχήματα 3.1 έως και 3.4, έχουμε δει την εφαρμογή της FDTD πάνω σε γκαουσιανά κύματα. Ο λόγος για την επιλογή αυτή είναι πιο πολύ αισθητικός μιας και τα φαινόμενα τα οποία περιγράψαμε πιο πριν απεικονίζονται πιο όμορφα με αυτούς τους παλμούς. Υπάρχουν πολλών ειδών παλμοί, όπως ο τριγωνικός, ο ορθογώνιος, ο τετραγωνικός κτλ. Στην πτυχιακή αυτή θα ασχοληθούμε με τους γκαουσιανούς, τους οποίους είδαμε και πριν, και με τα ημιτονοειδή κύματα τα οποία παρουσιάζουν και αυτά ένα ενδιαφέρον.

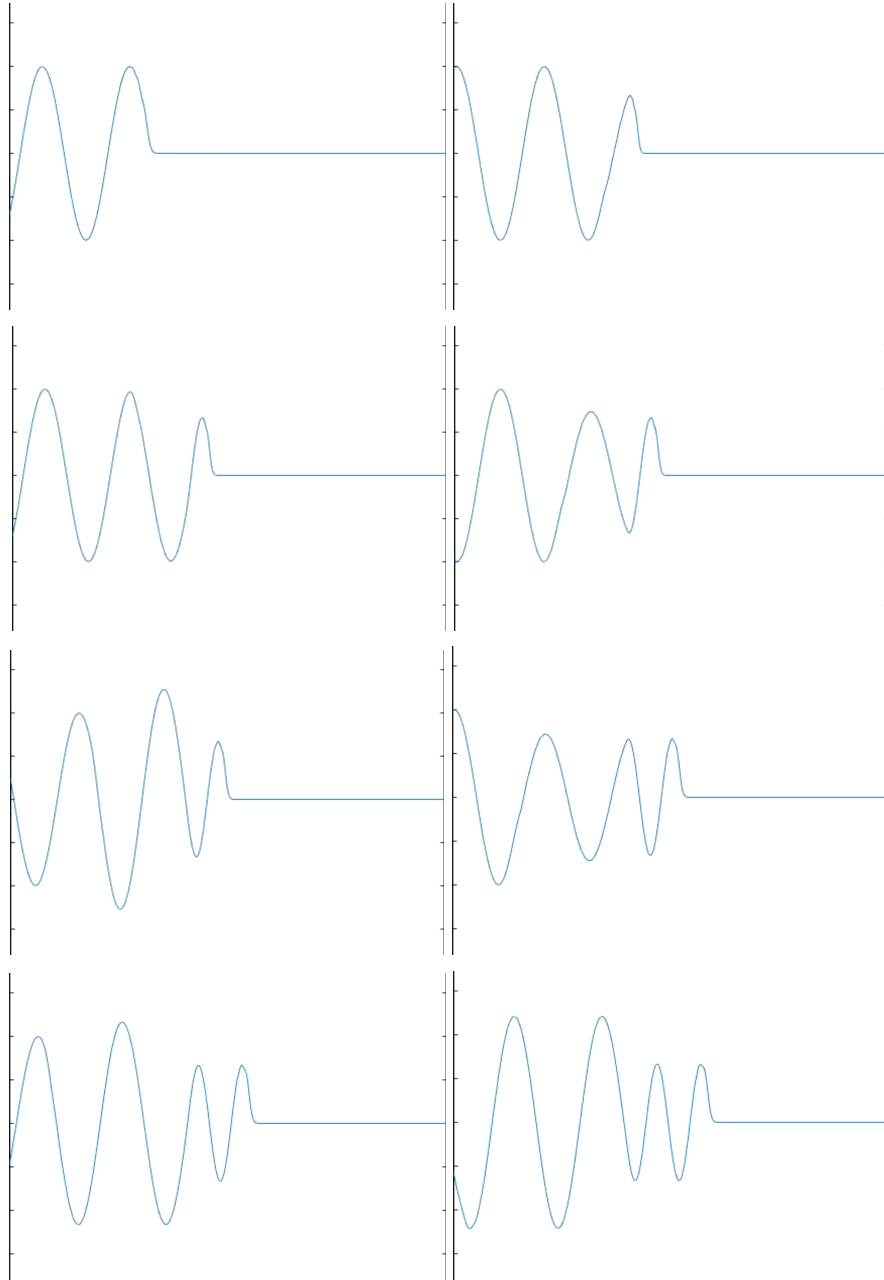
Στα ημιτονοειδή, σχεδόν όλα τα φαινόμενα που είδαμε είναι ακριβώς τα ίδια όπως με το γκαουσιανό κύμα, αυτό που αλλάζει είναι το σχήμα το οποίο βλέπουμε στην οθόνη μας. Παρακάτω έχουμε ότι εφαρμόσαμε στο υποκεφάλαιο 3.2, ωστόσο με ημιτονοειδές αντί για γκαουσιανό κύμα.



ΣΧΗΜΑ 3.5 : Ημιτονοειδές κύμα το οποίο διαδίδεται στο κενό χώρο.
(Βλέπε Παράρτημα : **1dsine-freespace**)

Πιο πριν είπαμε πως σχεδόν όλα τα φαινόμενα είναι ίδια. Εκεί που υπάρχει μια βασική διαφορά είναι στο φαινόμενο της ανάκλασης. Όπως είδαμε και στο υποκεφάλαιο 3.4, όταν ένα κύμα προσπίπτει σε διηλεκτρικό ή πιο γενικά προσπίπτει σε υλικό με διαφορετικό δείκτη διάθλασης, το κύμα υφίσταται ανάκλαση αλλά και μετάδοση. Ομοίως, αυτό θα συμβεί και για ένα ημιτονοειδές κύμα, ωστόσο η διαφορά θα βρίσκεται στο γεγονός πως το ανακλώμενο κύμα θα “συναντήσει” όχι κενό χώρο όπως το γκαουσιανό, αλλά το υπόλοιπο μέρος του κύματος.

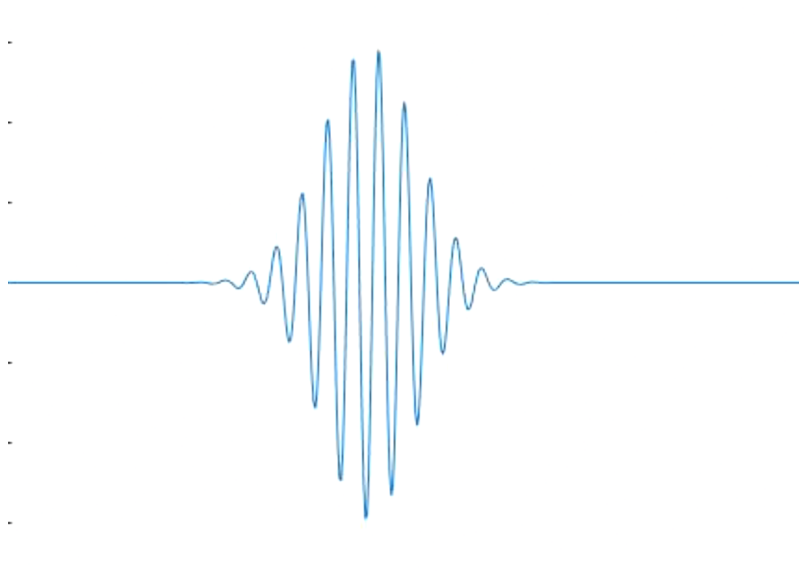
Αυτό που θα συμβεί λοιπόν, πέρα από τα φαινόμενα της μετάδοσης αλλά και της ανάκλασης, είναι επαλληλία κυμάτων. Θα δούμε δηλαδή να υπάρχουν ενισχυτικές συμβολές στο κύμα αλλά και καταστροφικές, με αποτέλεσμα το ημιτονοειδές κύμα να αλλάζει δραστηκά μορφή.



ΣΧΗΜΑ 3.6 : Συμβολή ανακλώμενου και προσπίπτοντος κύματος. Σημειώνουμε πως το τελικό σχήμα του κύματος απέχει αρκετά από την πρώτη εικόνα. (Βλέπε Παράρτημα : **sinedielectric1D**)

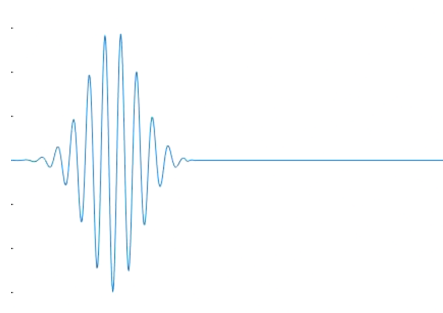
Παρατηρήσαμε το φαινόμενο της συμβολής. Βλέπουμε πως αυτή η διαφορά οφείλεται στο ότι στο δεύτερο πρόγραμμα “γεννάμε” συνεχώς το ημιτονοειδές κύμα, -το ημίτονο είναι περιοδική συνάρτηση- αν γεννούσαμε ημιτονοειδές κύμα με μήκος που αντιστοιχεί σε 2 περιόδους, τότε δεν θα βλέπαμε το περίεργο αυτό φαινόμενο. Αντίθετα θα είχαμε ακριβώς την περίπτωση του γκαουσιανού κύματος με μηδενική συμβολή.

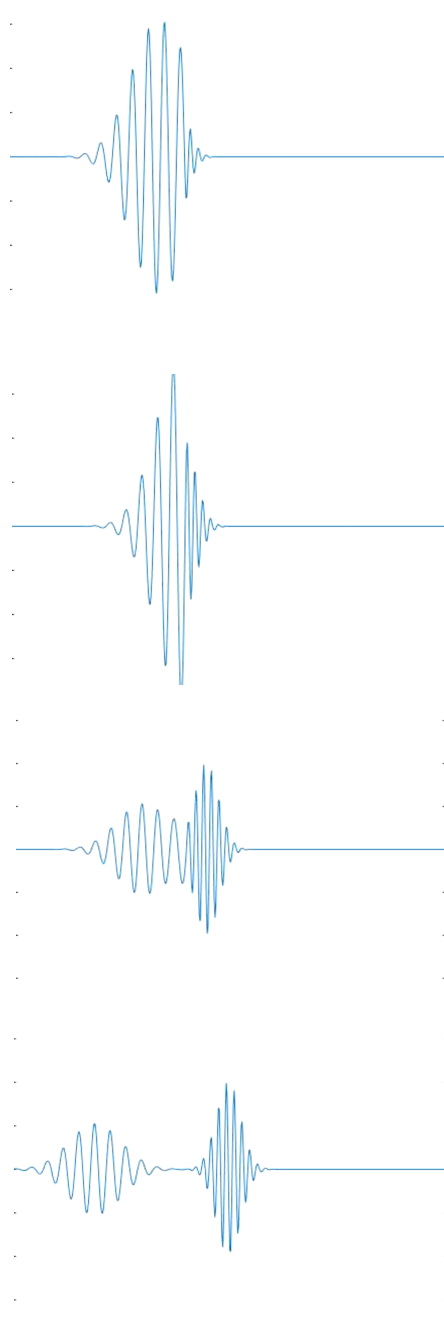
Αναλόγως με τις εκάστοτε ανάγκες μπορούμε να δημιουργήσουμε και τον ανάλογο παλμό, μπορούμε να φτιάξουμε ακόμα και ημιτονοειδές κύμα συγκεκριμένου μήκους όπως είπαμε και πιο πάνω. Ωστόσο, μπορούμε να φτιάξουμε και την ειδική περίπτωση του κυματοπακέτου, μια “υβριδική” μορφή μεταξύ γκαουσιανού και ημιτονοειδούς κύματος. Ο τρόπος δημιουργίας είναι πολύ απλός, θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το ημιτονοειδές μας κύμα με την έκφραση ενός γκαουσιανού κύματος. Το αποτέλεσμα φαίνεται και πιο κάτω :



ΣΧΗΜΑ 3.7 : Διάδοση του λεγόμενου “κυματοπακέτου”. Βλέπουμε πως αποτελεί μια “μίξη” μεταξύ ημιτονοειδούς αλλά και γκαουσιανού παλμού.
(Βλέπε Παράρτημα : **wavepacketfreespace**)

Μπορούμε επίσης να δούμε και την περίπτωση της πρόσπτωσης κυματοπακέτου σε διηλεκτρικό.





ΣΧΗΜΑ 3.8 : Κυματοπακέτο το οποίο συναντά διηλεκτρικό. Βλέπουμε πως οι γραμμές γίνονται πιο πυκνές στο μεταδιδόμενο κύμα ενώ αντίστοιχα πιο αραιές στο ανακλώμενο.
(Βλέπε Παράρτημα : **wavepacketdielectric1D**)

Βλέπουμε και εδώ το φαινόμενο της παρουσίας διηλεκτρικού. Παρατηρούμε πως υπάρχει μια “μικρή” συμβολή -αυτή υπάρχει σε όλες τις ανακλάσεις, απλά εδώ είναι πιο αισθητή- μεταξύ ανακλώμενου και προσπίπτοντος κύματος ωστόσο αυτή διαρκεί λίγο και δεν αλλάζει τα τελικά αποτελέσματά μας.

3.6 Επιλογή μεγέθους χωρικού κελιού

Πριν στη θεωρία είχαμε πει πως ορίζουμε το Δt συναρτήσει της ταχύτητας του φωτός c και του μεγέθους χωρικού κελιού Δx , ώστε να ισχύει πάντα : $c \cdot \Delta t / \Delta x = 1/2$. Άρα μένει να εισάγουμε μόνο την τιμή του Δx . Αυτό που πρέπει να προσέχουμε είναι πως οι τιμές πρέπει να είναι “ευσταθείς” δηλαδή να μην προκαλούν αριθμητικές διασπορές στις προσομοιώσεις που εκτελούμε.

Αυτό σημαίνει πως πρέπει να μεριμνήσουμε για το Δx σε κάθε διαφορετική μοντελοποίηση που κάνουμε. Εφόσον έχουμε πει πως θα ασχοληθούμε με τρεις διαφορετικούς τύπους κυμάτων, λογικό είναι η ανάλυσή μας να διαφέρει ανά περίπτωση. Θυμίζουμε πως η επιλογή του κύματος έρχεται πρώτη στο πρόγραμμα, έπειτα ακολουθεί η επιλογή του Δx .

Ημιτονοειδή Κύματα : Εδώ πρέπει να θυμηθούμε πως εκφράζονται μαθηματικά τα ημιτονοειδή ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

$$\vec{E} = E_0 \sin(kx - \omega t) \quad (3.9)$$

Ας αγνοήσουμε αρχικά τον όρο kx , και ας επικεντρωθούμε στο ω . Το ω είναι ένα σταθερό μέγεθος και αυτό σημαίνει πως ένα τέτοιο κύμα -όπως αυτό που περιγράφει η 3.9- εκφράζεται από μια και μοναδική συχνότητα. $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \omega/2\pi$. Και $c = \lambda f \Rightarrow \lambda = c/f$. Έχουμε και την τελική έκφραση για το λ :

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (3.10)$$

Και για το Δx ισχύει :

$$\Delta x = \frac{\lambda}{10} = \frac{\pi c}{5\omega} \quad (3.11)$$

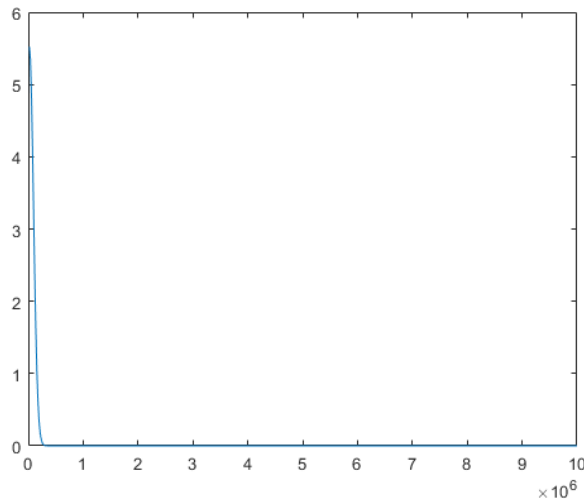
Άρα βρήκαμε και την τελική σχέση για το Δx . Αν εφαρμόσουμε την 3.11 θα έχουμε μια ομαλή προσομοίωση. Το Δt θα βγει με τις πράξεις τις οποίες έχουμε αναφέρει και δεν χρειάζεται να αναφερθούμε σε αυτό, ούτε εδώ ούτε στις άλλες περιπτώσεις κυμάτων.

Γκαουσιανά Κύματα : Εδώ τα πράγματα είναι αρκετά πιο περίπλοκα. Αν και αρχικά χρησιμοποιήσαμε αυτά τα κύματα για τις πρώτες προσομοιώσεις -για αισθητικούς λόγους, όπως είπαμε- η μοντελοποίησή τους αποτελεί δύσκολη διαδικασία λόγω της εύρεσης του Δx .

Αυτά τα κύματα δεν εκφράζονται από μια συχνότητα όπως τα ημιτονοειδή, αντιθέτως έχουν ένα φάσμα συχνοτήτων το οποίο δεν γνωρίζουμε καν εξαρχής. Εμείς ορίζουμε τα μεγέθη της γκαουσιανής συνάρτησης -συνάρτηση του χρόνου- τα t_0 και spread τα οποία αλλάζουν το σχήμα του κύματος, ωστόσο το φάσμα συχνοτήτων εξακολουθεί να υπάρχει και παραμένει άγνωστο. Θα πρέπει να βρούμε μια συχνότητα από το πλήθος αυτό (f_{MAX}) για να υπολογίσουμε το Δx . Έχουμε την σχέση :

$$\Delta x = \frac{\lambda_{min}}{10} = \frac{c}{10f_{max}} \quad (3.11b)$$

Η ερώτηση λοιπόν είναι πως βρίσκουμε το f_{MAX} . Θυμίζουμε πως η σχέση που έχουμε για το γκαουσιανό κύμα είναι μια συνάρτηση του χρόνου, επομένως για να δούμε την μορφή του σε πεδίο συχνοτήτων θα πρέπει να κάνουμε ένα μετασχηματισμό Fourier στην έκφραση του κύματος. Θα χρειαστεί να πολλαπλασιάσουμε με ένα παράγοντα f_0 γιατί αλλιώς το σχήμα θα αναφέρεται σε συχνότητες από 0 έως 1 Hz (Ο λόγος είναι πως έχουμε seconds στον εκθέτη στην έκφραση του γκαουσιανού κύματος, για σωστότερη ανάλυση θα πρέπει να βάλουμε ns, τότε οι συχνότητες θα κυμαίνονται από 0 έως 10^6 Hz, ωστόσο για ευκολία απλά πολλαπλασιάζουμε με ένα f_0). Ορίζουμε f_{MAX} την συχνότητα με ύψος 5-10% του μέγιστου ύψους.

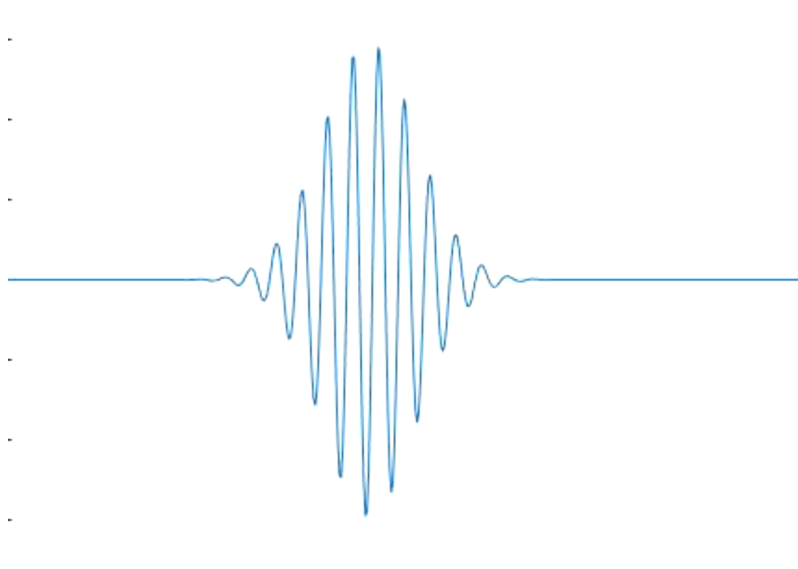


ΣΧΗΜΑ 3.9 : FFT (γρήγορος μετασχηματισμός Fourier) σε γκαουσιανό κύμα με κεντρική συχνότητα 1 MHz. Το κύμα έχει $t_0 = 300$ spread = 30. Η μέγιστη συχνότητα αντιστοιχεί περίπου στα 0.3 MHz.
(Βλέπε Παράρτημα : **fftgauss**)

Κυματοπακέτα : Προχωράμε τώρα και στο τελευταίο είδος κυμάτων. Τα κυματοπακέτα είπαμε πως εκφράζονται από ένα γκαουσιανό αλλά και ένα ημιτονοειδές κύμα. Η ερώτηση που προκύπτει είναι η πολλή προφανής : Με ποιον τρόπο θα βρούμε το Δx ; Θα πάρουμε τον τρόπο του ημιτονοειδούς ή του γκαουσιανού; Ή μια “μίξη” των δύο τρόπων;

Πολύ συνοπτικά, θα πρέπει να ακολουθήσουμε το απλό τρόπο εύρεσης Δx όπως ακριβώς στο ημιτονοειδές κύμα. Το κυματοπακέτο εκφράζεται μαθηματικά από τον πολλαπλασιασμό ενός γκαουσιανού και ενός ημιτονοειδούς, θα πρέπει να βρούμε το Δx σαν να είχαμε μόνο το ημιτονοειδές κύμα στην μοντελοποίησή μας.

Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει πως το γκαουσιανό κομμάτι δεν μας ενδιαφέρει. Θα πρέπει το γκαουσιανό κύμα να έχει μια μορφή η οποία να επιτρέπει σε 8-12 περιόδους του ημιτονοειδούς κύματος να εμφανίζονται, ούτε λιγότερο, ούτε περισσότερο. Ο λόγος είναι πως η “καλύτερες” προσομοιώσεις εμφανίζονται για αυτή την περίπτωση, αλλιώς θα έχουμε ξανά αριθμητική διασπορά. (Παραθέτουμε το ΣΧΗΜΑ 3.7 ξανά)



Σε τελική ανάλυση, το Δx είναι και κάτι το οποίο μπορούμε να βρούμε και με λιγότερη επιδεξιότητα, χρησιμοποιώντας την μέθοδο δοκιμής και λάθους. Αν έχουμε μια προσομοίωση και περιμένουμε κάποια συγκεκριμένα αποτελέσματα θα έχουμε μια ιδέα στο “τι θα περιμένουμε”. Αν αυτό που βλέπουμε απέχει από το αναμενόμενο, θα χρειαστεί να αλλάξουμε το Δx μέχρι να μην εμφανίζεται η αριθμητική διασπορά.

Συνήθως, αν χρειαστεί να τρέξουμε πολλές σημειώσεις και εισάγουμε μια τιμή για το Δx η οποία μας βγάζει νόημα εμπειρικά, και εν τέλει το πρόγραμμα τρέχει ομαλά χωρίς ανεπιθύμητες διασπορές, δεν θα χρειαστεί να υπολογίσουμε αναλυτικά το Δx .

3.7 Διάδοση σε διηλεκτρικό με απώλειες

Πλέον έχουμε δει τις απλές περιπτώσεις εφαρμογής της FDTD και τον τρόπο επιλογής μεγέθους κελιού, για να είμαστε πλήρως προετοιμασμένοι να αντιμετωπίσουμε τα συχνοτικά εξαρτημένα υλικά θα χρειαστεί να δούμε και την ειδική περίπτωση του διηλεκτρικού με απώλειες.

Για να κάνουμε την ανάλυσή μας θα πρέπει να ξεκινήσουμε με τις εξισώσεις του Maxwell για την περίπτωση που υπάρχει αγωγιμότητα στο υλικό. Έχουμε :

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} \quad (3.13)$$

όπου \mathbf{J} η πυκνότητα ρεύματος :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.14)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην 3.12 και μεταβαίνοντας στη μία διάσταση :

$$\frac{\partial \tilde{E}_x(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial H_y(t)}{\partial z} - \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \tilde{E}_x(t) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial H_y(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial \tilde{E}_x(t)}{\partial z} \quad (3.16)$$

Γράφουμε τις παραπάνω εξισώσεις στο διακριτό πεδίο του χρόνου και παίρνουμε :

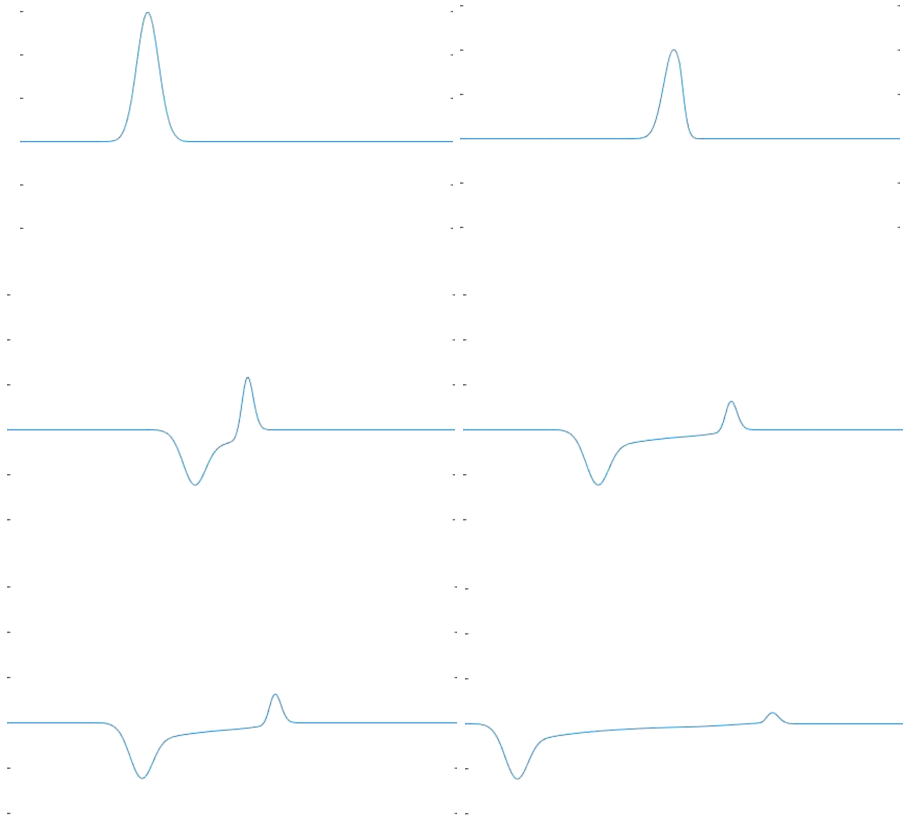
$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) - \tilde{E}_x^{n-1/2}(k)}{\Delta t} &= -\frac{1}{\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)}{\Delta x} \\ &- \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \frac{\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) + \tilde{E}_x^{n-1/2}(k)}{2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Αυτό που απομένει είναι να λύσουμε ως προς το E_x και έτσι φτάνουμε στον τελικό μας αλγόριθμο.

$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) = \frac{1 - \frac{\Delta t \cdot \sigma}{2\epsilon_r \epsilon_0}}{1 + \frac{\Delta t \cdot \sigma}{2\epsilon_r \epsilon_0}} \tilde{E}_x^{n-1/2}(k) - \frac{1/2}{\epsilon_r \cdot (1 + \frac{\Delta t \cdot \sigma}{2\epsilon_r \epsilon_0})} [H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)] \quad (3.18)$$

Έχοντας την σχέση αυτή μπορούμε να προσομοιάσουμε ένα υλικό το οποίο έχει ηλεκτρικές απώλειες, χρειάζεται απλώς να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση σε γλώσσα υπολογιστή στο ανάλογο πρόγραμμα.

Όπως στη περίπτωση του απλού διηλεκτρικού, ορίζουμε ένα χωρικό εύρος στο οποίο θα έχουμε το υλικό που μελετάμε, με το υπόλοιπο χώρο να είναι κενός χώρος.



ΣΧΗΜΑ 3.10 : Προσομοίωση διηλεκτρικού με αγωγιμότητα. Υπάρχει ξανά το φαινόμενο της ανάκλασης, ωστόσο το μεταδιδόμενο κύμα αρχίζει να φθίνει λόγω των απωλειών.

(Βλέπε Παράρτημα : **lossydielectric1D**)

Βλέπουμε πως η μόνη διαφορά είναι πως υπάρχουν απώλειες στο μεταδιδόμενο κύμα, αν αφήσουμε την προσομοίωση να τρέξει για αρκετή ώρα το κύμα θα μηδενιστεί πλήρως. Για μεγαλύτερη τιμή της αγωγιμότητας, προφανώς θα έχουμε ταχύτερη ελάττωση του πλάτους του κύματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΣΕ ΣΥΧΝΟΤΙΚΑ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ

4.1 Εισαγωγή

Είδαμε την βασική θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού, την θεωρία των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου και τις εφαρμογές αυτής σε απλές περιπτώσεις. Πλέον είμαστε πλήρως εξοπλισμένοι για να προχωρήσουμε στο τελευταίο και πιο ενδιαφέρον κεφάλαιο. Εδώ θα δούμε προσομοιώσεις που αναφέρονται σε συχνοτικά εξαρτημένα υλικά τα οποία είναι σαφώς πιο ενδιαφέροντα λόγω της πολυπλοκότητας της ερμηνείας τους. Προφανώς λόγω της δυσκολίας που έχουν αυτά τα υλικά θα είναι και πιο δύσκολη η προσομοίωσή τους, ωστόσο με τα εργαλεία που ήδη διαθέτουμε θα μπορέσουμε να διασχίσουμε τα πιο “δύσβατα” μέρη της εφαρμογής της FDTD.

4.2 Συχνοτικά εξαρτημένα υλικά

Τα περισσότερα υλικά εμφανίζουν διαφορετικές διηλεκτρικές σταθερές ή/και διαφορετική μαγνητική διαπερατότητα για διαφορετικές συχνότητες προσπίπτοντων κυμάτων, τα υλικά αυτά ονομάζονται και υλικά με διασπορά. Τα γκαουσιανά κύματα τα οποία εξετάζουμε, αποτελούνται από φάσματα συχνοτήτων, επομένως όταν αυτά προσπέσουν σε υλικά με διασπορά το αποτέλεσμα θα είναι να αλλοιωθεί η μορφή του “φακέλου” του κύματος γεγονός που οφείλεται στη διαφορετική ταχύτητα με την οποία διαδίδονται οι διάφορες “συνιστώσες – κύματα” από τα οποία αυτός αποτελείται.

Πριν εξετάσουμε ξεχωριστά το κάθε είδος συχνοτικά εξαρτημένου υλικού, θα πρέπει πρώτα να δούμε πως περιγράφει η θεωρία γενικά όλα τα υλικά και ύστερα να δούμε τις διαφορετικές περιπτώσεις μία προς μία. Για αυτό το λόγο θα εξετάσουμε το παράδειγμα ενός υλικού με ηλεκτρικές απώλειες, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό το οποίο εμφανίζει διασπορά. Στα πλαίσια της εργασίας -όπως έχουμε ήδη πει- θα ασχοληθούμε με υλικά για τα οποία $\mu = \mu_0$, άρα μας ενδιαφέρει μόνο η διηλεκτρική σταθερά ϵ του υλικού.

Στο κεφάλαιο 1, είχαμε διαμορφώσει τις εξισώσεις του Maxwell για κενό χώρο, για υλικό στο οποίο θα υπάρχουν ηλεκτρικές απώλειες λόγω αγωγιμότητας θα έχουμε τις εξισώσεις του Maxwell :

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_e \quad (4.1)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (4.2)$$

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E} \quad (4.3)$$

Βλέπουμε την νέα εξίσωση 4.3 και τον επιπρόσθετο όρο στην 4.1 ο οποίος αναφέρεται στις ηλεκτρικές απώλειες. Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στο πεδίο του χρόνου, ωστόσο εμείς αναφέραμε πως το ε εξαρτάται από την συχνότητα. Για να φτάσουμε σε μια σχέση η οποία έχει ε για το οποίο ισχύει $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ θα πρέπει να κάνουμε μετασχηματισμό Fourier σε όλες τις εξισώσεις αυτές.

$$\nabla \times \dot{\vec{H}} = j\omega \dot{\vec{D}} + \dot{\vec{J}}_e \quad (4.4)$$

$$\dot{\vec{D}} = \varepsilon \dot{\vec{E}} \quad (4.5)$$

$$\dot{\vec{J}}_e = \sigma \dot{\vec{E}} \quad (4.6)$$

Τα dot αναφέρονται στο ότι έχουμε πλέον μιγαδικά μεγέθη. Το j είναι η μιγαδική μονάδα ωστόσο επιλέγουμε το j ώστε να αποφύγουμε την σύγχυση που μπορεί να προκαλέσει το i . Αντικαθιστούμε στην 4.4 τις εξισώσεις 4.5 και 4.6. Έχουμε :

$$\nabla \times \dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon \dot{\vec{E}} + \sigma \dot{\vec{E}} = (j\omega + \sigma) \dot{\vec{E}} = j\omega\left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right) \dot{\vec{E}}$$

Αν θεωρήσουμε $\varepsilon(\omega)$ τον όρο της παρένθεσης θα έχουμε :

$$\nabla \times \dot{\vec{H}} = j\omega \dot{\varepsilon}(\omega) \dot{\vec{E}} = j\omega \dot{\vec{D}}$$

Και συνεπώς :

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}'(t)}{\partial t} \quad (4.7)$$

$$\vec{D}'(\omega) = \epsilon'(\omega) \vec{E} \quad (4.8)$$

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \quad (4.9)$$

Βλέπουμε πως οι εξισώσεις 4.7 και 4.8 περιγράφουν γενικά τα συχνοτικά εξαρτημένα υλικά, η 4.8 είναι σχεδόν ίδια με 1.7 αλλά αναφέρεται σε μιγαδικά πεδία και σε μιγαδική διηλεκτρική σταθερά ενώ η 4.7 μοιάζει με τον νόμο του Ampère σε κενό χώρο, η απουσία του ρεύματος J_e έχει ενσωματωθεί στο $\epsilon(\omega)$.

Η εξίσωση 4.9 αναφέρεται στην έκφραση του ϵ για το παράδειγμα που πήραμε, δεν αποτελεί γενική περίπτωση, η μεγάλη διαφορά στα υλικά που θα δούμε πιο αναλυτικά παρακάτω είναι πως το ϵ αλλάζει, αναλόγως με την έκφραση για το ϵ θα έχουμε ριζικές διαφορές στις συμπεριφορές των υλικών.

4.3 Υλικά Debye

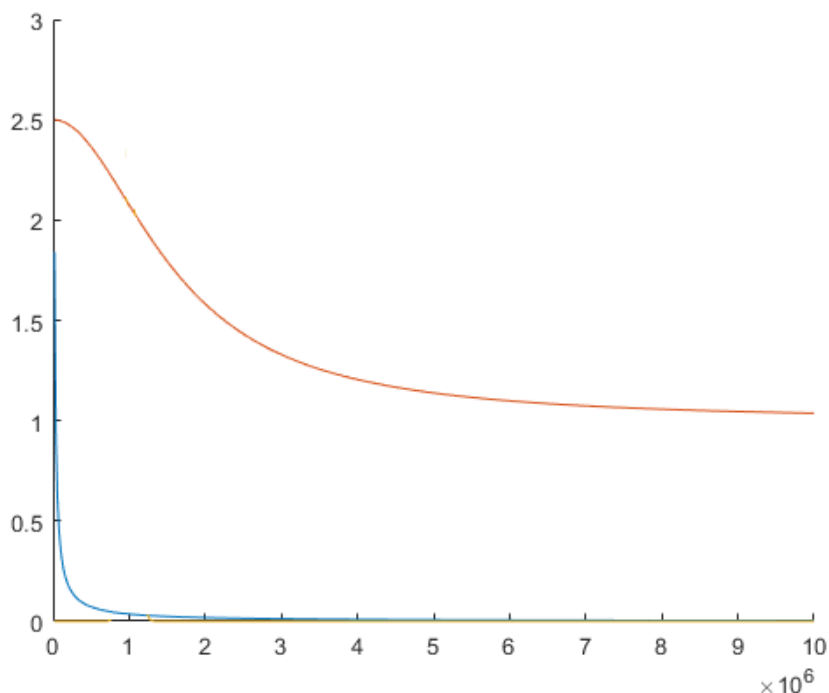
Αρχικά θα μελετήσουμε τα υλικά Debye. Η περίπτωση των υλικών αυτή είναι η πιο απλή στις μιγαδικές διηλεκτρικές σταθερές. Εδώ η μιγαδική διηλεκτρική σταθερά περιγράφεται, στο πεδίο της συχνότητας, από μια εξίσωση με ένα μόνο πόλο, πρώτης τάξης.

$$\epsilon_r'(\omega) = \epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} + \frac{\chi_1}{1 + j\omega\epsilon_0} \quad (4.10)$$

Παρατηρούμε τρεις ξεχωριστούς όρους. Ο πρώτος είναι η διηλεκτρική σταθερά του υλικού η οποία αντιστοιχεί στην περίπτωση άπειρης συχνότητας, σημειώνουμε ότι είναι καθαρά πραγματικός αριθμός. Ο δεύτερος όρος είναι καθαρά μιγαδικός και αντιστοιχεί στην αγωγιμότητα του υλικού η οποία τώρα εξαρτάται από την συχνότητα, μπορούμε βέβαια, να εξετάσουμε -αν το θελήσουμε- και την περίπτωση για $\sigma = 0$. Τέλος, ο τρίτος όρος (όρος Debye) έχει και πραγματικό αλλά και φανταστικό μέρος και αντιστοιχεί στην ηλεκτρική επιδεκτικότητα του υλικού, με το χ να ορίζεται ως εξής :

$$\chi_1 = \varepsilon_r - \varepsilon_s \quad (4.11)$$

Όπου ε_s η διηλεκτρική σταθερά του υλικού για μηδενική συχνότητα. Μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημα της 4.10 συναρτήσει της συχνότητας, ώστε να δούμε την συμπεριφορά της. Όμως, θα πρέπει να κάνουμε πρώτα το γράφημα του πραγματικού μέρους του ε_s και ύστερα του φανταστικού μέρους ώστε να γίνει σωστά η ανάλυσή μας.



ΣΧΗΜΑ 4.1 : Γράφημα της διηλεκτρικής σταθεράς όπως περιγράφεται από την 4.10 Η πορτοκαλί γραμμή αντιστοιχεί στο πραγματικό μέρος και η γαλάζια στο φανταστικό. $\chi = 1.5$, $\varepsilon_r = 1$, $t_0 = 10^{-7}$, $s = 0.02$.

Βλέπουμε πως υπάρχει μια σαφής εξάρτηση από την συχνότητα και στο φανταστικό αλλά και στο πραγματικό μέρος. Για μεγάλες τιμές της συχνότητας μπορούμε να πούμε πως η διηλεκτρική σταθερά μένει σταθερή δηλαδή το υλικό δεν εμφανίζει διασπορά, ωστόσο αυτό δεν ισχύει αν εργαστούμε σε συχνότητες 1-4 MHz.

Προχωράμε στην μοντελοποίηση. Έχουμε την διηλεκτρική σταθερά ως ένα μιγαδικό μέγεθος το οποίο εξαρτάται από την συχνότητα. Για να την χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει στους τύπους μας να έχουμε \mathbf{E} , \mathbf{D} και \mathbf{H} τα οποία να είναι και αυτά μιγαδικά με εξάρτηση από το ω , όπως λένε οι τύποι 4.4, 4.5 και 4.6 που είδαμε πιο πάνω. Ωστόσο οι προσομοιώσεις εργάζονται στο πεδίο του χρόνου επομένως είναι απαραίτητο να μετασχηματίσουμε τις σχέσεις οι οποίες

βρίσκονται στο πεδίο της συχνότητας ώστε να είναι στο πεδίο του χρόνου. Θα δούμε πως γίνεται αυτό με τρεις μεθόδους :

Μέθοδος επαναληπτικής συνέλιξης (Recursive Convolution Method - RC)

Ορίζουμε το εξής μέγεθος :

$$S(\omega) = \frac{\chi_1}{1 + j\omega\varepsilon_0} E(\omega) \quad (4.12)$$

Για να πάμε στο πεδίο του χρόνου θα χρειαστεί να κάνουμε έναν αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην 4.12. Ο μετασχηματισμός του όρου Debye είναι ο εξής : $(\chi_1/t_0)e^{-(t-t_0)}u(t)$, όπου $u(t)$ η συνάρτηση Heaviside ή αλλιώς βηματική συνάρτηση. Έτσι η 4.12 γίνεται :

$$S(t) = \frac{\chi_1}{t_0} \int_0^t e^{-(t-t')/t_0} E(t') dt' \quad (4.13)$$

Έχοντας αυτή την έκφραση, το επόμενο βήμα είναι να την μεταφέρουμε στην “γλώσσα” του προγράμματος, δηλαδή στο διακριτό πεδίο του χρόνου.

$$S^n = \chi_1 \frac{\Delta t}{t_0} \sum_{i=0}^n e^{-\Delta t(n-i)/t_0} E^i \quad (4.14)$$

$$S^n = \chi_1 \frac{\Delta t}{t_0} (E^n + \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\Delta t(n-i)/t_0} E^i) \quad (4.14b)$$

Παρατηρούμε :

$$S^{n-1} = \chi_1 \frac{\Delta t}{t_0} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\Delta t(n-1-i)/t_0} E^i \quad (4.15)$$

$$S^{n-1} = \chi_1 \frac{\Delta t}{t_0} e^{\Delta t/t_0} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\Delta t(n-i)/t_0} E^i \quad (4.15b)$$

Επομένως, η τελική έκφραση για το 4.14 γίνεται πιο κομψά ως εξής :

$$S^n = \chi_1 \frac{\Delta t}{t_0} E^n + e^{-\Delta t/t_0} S^{n-1} \quad (4.16)$$

Όπως βλέπουμε έχουμε ένα βρόχο επανάληψης για το μέγεθος S. Από την περίπτωση του υλικού με ηλεκτρικές απώλειες έχουμε και τον βρόχο επανάληψης για το μέγεθος I, και από την γενική σχέση για το D μπορούμε να εξάγουμε τον βρόχο που θα μας δώσει το E.

$$D^n = \varepsilon_r E^n + I^n + S^n \quad (4.17)$$

$$D^n = \varepsilon_r E^n + \left[\frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon_0} E^n + I^{n-1} \right] + \left[\chi_1 \frac{\Delta t}{t_0} E^n + e^{-\Delta t/t_0} S^{n-1} \right] \quad (4.17b)$$

Λύνουμε ως προς E :

$$E^n = \frac{D^n + I^{n-1} + e^{-\Delta t/t_0} S^{n-1}}{\varepsilon_r + \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon_0} + \chi_1 \frac{\Delta t}{t_0}} \quad (4.18a)$$

$$I^n = I^{n-1} + \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon_0} E^n \quad (4.18b)$$

$$S^n = e^{-\Delta t/t_0} S^{n-1} + \chi_1 \frac{\Delta t}{t_0} E^n \quad (4.18c)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις εκφράζουν ένα βρόχο επανάληψης με τον οποίο μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τα υλικά Debye. Θα πρέπει να εισάγουμε τον βρόχο αυτό ανάμεσα από τον βρόχο επανάληψης FDTD ώστε να “τρέξει” σωστά το πρόγραμμα. Ο βρόχος επανάληψης FDTD ορίζεται από μια επανάληψη για την εύρεση του D και μια για την εύρεση του H, οι εξισώσεις 4.18 θα πρέπει να εισαχθούν ανάμεσα από τις δύο αυτές επαναλήψεις. Σχηματικά :

$$D \Rightarrow 4.18a \Rightarrow 4.18b \Rightarrow 4.18c \Rightarrow H \Rightarrow \text{repeat loop}$$



ΣΧΗΜΑ 4.2 : Μοντελοποίηση ενός γκαουσιανού παλμού ο οποίος προσπίπτει σε μέσο Debye.
(Βλέπε Παράρτημα : **debyeRC**)

Στο σχήμα βλέπουμε να παρουσιάζονται τρία διαφορετικά φαινόμενα. Το πρώτο είναι το βασικό φαινόμενο της ανάκλασης και της μετάδοσης λόγω παρουσίας διηλεκτρικού. Το δεύτερο είναι η ελάττωση της έντασης του μεταδιδόμενου κύματος λόγω ηλεκτρικών απωλειών. Και τέλος, το τρίτο φαινόμενο είναι και αυτό που χαρακτηρίζει το υλικό Debye. Βλέπουμε πως το σχήμα του παλμού -πέρα από τις απώλειες λόγω αγωγιμότητας- αλλάζει, πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε πως η “καμπάνα” του παλμού ολοένα και μεγαλώνει ενώ αντίστοιχα το ύψος του μικραίνει. Όπως είπαμε τα μέσα που θα μελετήσουμε παρουσιάζουν διαφορά στη σχέση για την διηλεκτρική σταθερά επομένως, θα υπάρξει και διαφορά στα φαινόμενα που παρουσιάζουν. Θα δούμε πιο αναλυτικά και τα υπόλοιπα φαινόμενα στα επόμενα υποκεφάλαια.

Μέθοδος βοηθητικής διαφορικής εξίσωσης (Auxiliary Differential Equation Method - ADE)

Προχωράμε τώρα στη δεύτερη μέθοδο. Θα πάρουμε την εξίσωση 4.12 και θα ακολουθήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση για να βρούμε έναν νέο βρόχο επανάληψης. Έχουμε την 4.12 και την γράφουμε ως εξής :

$$(1 + j\omega t_0)S(\omega) = \chi_1 E(\omega) \quad (4.19)$$

Τώρα θα πάμε κατευθείαν στο πεδίο του χρόνου κάνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

$$S(t) + t_0 \frac{dS(t)}{dt} = \chi_1 E(t) \quad (4.20)$$

Στη συνέχεια μεταφράζουμε την 4.20 στον υπολογιστή σε διακριτή μορφή :

$$\frac{S^n + S^{n-1}}{2} + t_0 \frac{S^n - S^{n-1}}{\Delta t} = \chi_1 E^n \quad (4.21)$$

Ο τελευταίος όρος εκφράζει το ηλεκτρικό πεδίο γραμμένο απευθείας από συνεχή σε διακριτή μορφή. Ο δεύτερος όρος είναι εφαρμογή των πεπερασμένων διαφορών τις οποίες είδαμε εκτενώς στο κεφάλαιο δύο. Τέλος, στον πρώτο όρο πήραμε το μέγεθος S γραμμένο σε διακριτή μορφή και το προσεγγίσαμε μεταξύ δύο χρονικών βημάτων. Για να συνεχίσουμε την ανάλυσή μας θα πρέπει να λύσουμε την 4.21 ως προς το S^n ώστε να καταλήξουμε τελικά στο βρόχο επανάληψης.

$$S^n = \frac{(1 - \frac{\Delta t}{2t_0})}{(1 + \frac{\Delta t}{2t_0})} S^{n-1} + \frac{\frac{\Delta t}{t_0} \chi_1 E^n}{(1 + \frac{\Delta t}{2t_0})} \quad (4.22)$$

Και έτσι έχουμε την σχέση επανάληψης για το S. Οι σχέσεις επανάληψης για τα υπόλοιπα μεγέθη παραμένουν ίδιες όπως στη μέθοδο επαναληπτικής συνέλιξης, και ακριβώς όπως πριν θα πρέπει να εισάγουμε τις σχέσεις ενδιάμεσα στον κεντρικό επαναληπτικό βρόχο FDTD.



ΣΧΗΜΑ 4.3 : Μοντελοποίηση ενός γκαουσιανού παλμού ο οποίος προσπίπτει σε μέσο Debye, με την χρήση μεθόδου ADE.
(Βλέπε Παράρτημα : **debyeADE**)

Βλέπουμε πως τα αποτελέσματα της ADE δεν διαφέρουν καθόλου από αυτά της RC. Ωστόσο, βλέπουμε πως οι δύο σχέσεις για το S διαφέρουν μεταξύ τους επομένως θα έπρεπε να δίνουν και διαφορετικά αποτελέσματα. Στην περίπτωση μας έχουμε επιλέξει τις κατάλληλες τιμές ώστε να μην διαφέρουν καθόλου οι δύο προσομοιώσεις, παρά όλα αυτά, θα πρέπει να βρούμε έναν γενικό κανόνα ώστε να μην υπάρχει διαφορά αλλιώς η μέθοδος ADE θα καθίσταται αναξιόπιστη. Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της ADE, θα πρέπει να ισχύει :

$$\frac{(1 - \frac{\Delta t}{2t_0})}{(1 + \frac{\Delta t}{2t_0})} \cong e^{-\Delta t/t_0} \quad (4.23)$$

Είχαμε αναφέρει στο τρίτο κεφάλαιο πως το Δx θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 10 φορές μικρότερο από το λ του κύματος που χρησιμοποιούμε. Και εδώ ισχύει κάτι αντίστοιχο, για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την ADE θα πρέπει Δt να είναι τουλάχιστον 10 φορές μικρότερο από t_0 . Θυμίζουμε πως αν έχουμε γκαουσιανό παλμό στην προσομοίωση μας το χαρακτηριστικό μέγεθος t_0 που περιγράφει το σχήμα του παλμού διαφέρει από το t_0 που αναφέρουμε στις παραπάνω εξισώσεις. Χρειάζεται, επομένως προσοχή όταν ορίζουμε τις μεταβλητές ώστε να αποφύγουμε τα λογικά λάθη.

Μέθοδος μετασχηματισμού Z (Z transform Method - Z)

Κλείνοντας με τις μεθόδους τις οποίες θα μελετήσουμε, θα εξετάσουμε τώρα την μέθοδο μετασχηματισμού Z. Ο λόγος που εξετάζουμε την μέθοδο αυτή είναι για να διευκολυνθούμε στις πράξεις που θα χρειαστεί να κάνουμε ώστε να βρούμε τις σχέσεις που περιγράφουν τον βρόχο επανάληψης ο οποίος μοντελοποιεί το υλικό που μελετάμε. Πιο συγκεκριμένα θέλουμε να αποφύγουμε τα περίπλοκα ολοκληρώματα στο πεδίο του χρόνου που είδαμε στη μέθοδο RC, αντί αυτού θα μεταβούμε στο πεδίο Z στο οποίο οι πράξεις γίνονται απλοί πολλαπλασιασμοί.

Στην περίπτωση του υλικού Debye, η χρήση της μεθόδου αυτής οδηγεί στα ακριβώς ίδια αποτελέσματα όπως η μέθοδος της επαναληπτικής συνέλιξης. Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει πως η μέθοδος Z-transform οδηγεί πάντοτε στα ίδια αποτελέσματα με την RC, όπως και η ADE, η Z-transform κινείται με διαφορετικό τρόπο, έτσι το αποτέλεσμά της ενδέχεται να είναι και αυτό διαφορετικό.

Έστω λοιπόν πως βρισκόμαστε στο διακριτό πεδίο του χρόνου. Τότε μια συνεχής συνάρτηση $x(t)$ θα γραφτεί ως εξής :

$$x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - n\Delta t) \quad (4.24)$$

Όπου Δt το χρονικό βήμα και το δ αναφέρεται στην συνάρτηση Dirac για την οποία $\delta(t) = 1$ αν $t = 0$ αλλιώς $\delta(t) = 0$. Ο μετασχηματισμός Z λοιπόν ορίζεται ως εξής :

$$Z[X(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (4.25)$$

Παρατηρούμε πως η δύναμη z^{-1} αντιστοιχεί σε χρονικό βήμα Δt . Αντίστοιχα η δύναμη z^{-2} αντιστοιχεί σε δύο χρονικά βήματα ($2\Delta t$) και η μονάδα ή αλλιώς z^0 αντιστοιχεί σε μηδενικό χρονικό βήμα.

Επιστρέφουμε στην αρχική μας εξίσωση :

$$D(\omega) = \left(\varepsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0} + \frac{\chi_1}{1 + j\omega t_0} \right) E(\omega) \quad (4.26)$$

Στο πεδίο του Z γίνεται :

$$D(z) = \varepsilon_r E(z) + \frac{\sigma \cdot \Delta t / \varepsilon_0}{1 - z^{-1}} E(z) + \frac{\chi_1 \cdot \Delta t / t_0}{1 + z^{-1}} E(z) \quad (4.27)$$

Όπως και πριν εισάγουμε βοηθητικά μεγέθη :

$$I(z) = \frac{\sigma \cdot \Delta t / \varepsilon_0}{1 - z^{-1}} E(z) = z^{-1} I(z) + \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon_0} E(z) \quad (4.28)$$

$$S(z) = \frac{\chi_1 \cdot \Delta t / t_0}{1 - e^{-\Delta t / t_0} z^{-1}} E(z) = e^{\Delta t / t_0} z^{-1} S(z) + \frac{\chi_1 \cdot \Delta t}{t_0} E(z) \quad (4.29)$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω η εξίσωση 4.27 γίνεται :

$$D(z) = \varepsilon_r E(z) + z^{-1} I(z) + \frac{\sigma \cdot \Delta t}{\varepsilon_0} E(z) + e^{\Delta t / t_0} z^{-1} S(z) + \frac{\chi_1 \cdot \Delta t}{t_0} E(z) \quad (4.30)$$

Και ύστερα όπως με την RC λύνουμε ως προς E :

$$E(z) = \frac{D(z) - z^{-1} I(z) - e^{\Delta t / t_0} z^{-1} S(z)}{\varepsilon_r + \frac{\sigma \cdot \Delta t}{\varepsilon_0} + \frac{\chi_1 \cdot \Delta t}{t_0}} \quad (4.31)$$

Στο σημείο αυτό φανερώνεται η χρησιμότητα της μεθόδου μετασχηματισμού Z. Για να επιστρέψουμε στο διακριτό πεδίο του χρόνου, αρκεί να αντικαταστήσουμε το $E(z)$ με το E^n , το $z^{-1}I(z)$ με το I^{n-1} και ούτω καθεξής. Κάνοντας ακριβώς αυτό στην 4.31 θα καταλήξουμε στις εξισώσεις 4.18 οι οποίες είναι οι τις ίδιες σχέσεις με την μέθοδο RC. Προφανώς και η μοντελοποίηση είναι ακριβώς η ίδια.

Έχοντας πλέον, μια πρώτη επαφή με τα εργαλεία αυτά μπορούμε να συνεχίσουμε την ανάλυση μας και στα υπόλοιπα είδη συχνοτικών εξαρτημένων υλικών.

4.4 Υλικά Drude

Προχωράμε στα υλικά Drude. Όπως είπαμε η διαφορά συμπεριφοράς των συχνοτικών εξαρτημένων υλικών οφείλεται στις διαφορετικές σχέσεις οι οποίες περιγράφουν την διηλεκτρική τους σταθερά. Για τα υλικά Drude έχουμε την εξής σχέση για το $\epsilon(\omega)$:

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega(j\nu_c - \omega)} \quad (4.32)$$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα των υλικών Drude είναι το πλάσμα. Με την σχέση αυτή θα μπορέσουμε να κάνουμε μοντελοποίηση του πλάσματος το οποίο εμφανίζει ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες συμπεριφορές.

Σχετικά με τους όρους της σχέσης, παρατηρούμε κάποια νέα μεγέθη. Το ω_p είναι η κυκλική συχνότητα του πλάσματος και το ν_c η συχνότητα κρούσης ηλεκτρονίου. Στις προσομοιώσεις που θα κάνουμε παρακάτω τα μεγέθη αυτά θα εισαχθούν στο πρόγραμμα ως ανεξάρτητες μεταβλητές, επομένως δεν χρειάζεται να μείνουμε παραπάνω σε αυτές.

Συνεχίζουμε την ανάλυσή μας αναπτύσσοντας την 4.32 ως άθροισμα μερικών κλασμάτων :

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2/\nu_c}{j\omega} - \frac{\omega_p^2/\nu_c}{\nu_c + j\omega} \quad (4.33)$$

Όπως και στα υλικά Debye θα μπορούσαμε και εδώ να εργαστούμε και με τις τρεις διαφορετικές μεθόδους, ωστόσο αυτό δεν θα ήταν φρόνιμο. Όπως είπαμε, όταν εξηγήσαμε τις μεθόδους, ανάλογα με την περίπτωση η κάθε μέθοδος αποδεικνύεται και η πιο κατάλληλη. Επομένως, για λόγους εξοικονόμησης χρόνου αλλά και ευκολίας θα χρησιμοποιήσουμε μόνο μια μέθοδο, στην περίπτωση των υλικών Drude θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο μετασχηματισμού Z.

Όπως και πριν, θα πάρουμε την σχέση για την διηλεκτρική σταθερά και θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Z .

$$\varepsilon'(z) = \frac{1}{\Delta t} + \frac{\omega_p^2/v_c}{1 - z^{-1}} - \frac{\omega_p^2/v_c}{1 - e^{-v_c \cdot \Delta t} z^{-1}} \quad (4.34)$$

Θυμίζουμε πως η σχέση μεταξύ D και E στο πεδίο του Z γράφεται ως εξής :

$$D(z) = \varepsilon'(z)E(z)\Delta t \quad (4.35)$$

Αντικαθιστούμε την 4.34 στην 4.35 και παίρνουμε :

$$D(z) = E(z) + \frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-v_c \cdot \Delta t} z^{-1}} \right] E(z) \quad (4.36)$$

Κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα έχουμε :

$$D(z) = E(z) + \frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} \left[\frac{(1 - e^{-v_c \cdot \Delta t}) z^{-1}}{1 - (1 - e^{-v_c \cdot \Delta t}) z^{-1} + e^{-v_c \cdot \Delta t} z^{-2}} \right] E(z) \quad (4.37)$$

Στο σημείο αυτό θα χρειαστεί να ορίσουμε ένα βοηθητικό μέγεθος S , προφανώς τα μεγέθη αυτά θα διαφέρουν ανά περίπτωση συχνοτικά εξαρτημένου υλικού.

$$S(z) = \frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} \left[\frac{(1 - e^{-v_c \cdot \Delta t})}{1 - (1 - e^{-v_c \cdot \Delta t}) z^{-1} + e^{-v_c \cdot \Delta t} z^{-2}} \right] E(z) \quad (4.38)$$

Λύνοντας ως προς E :

$$E(z) = D(z) - z^{-1} S(z) \quad (4.39a)$$

Το D το υπολογίζουμε από το βρόχο FDTD, το S από :

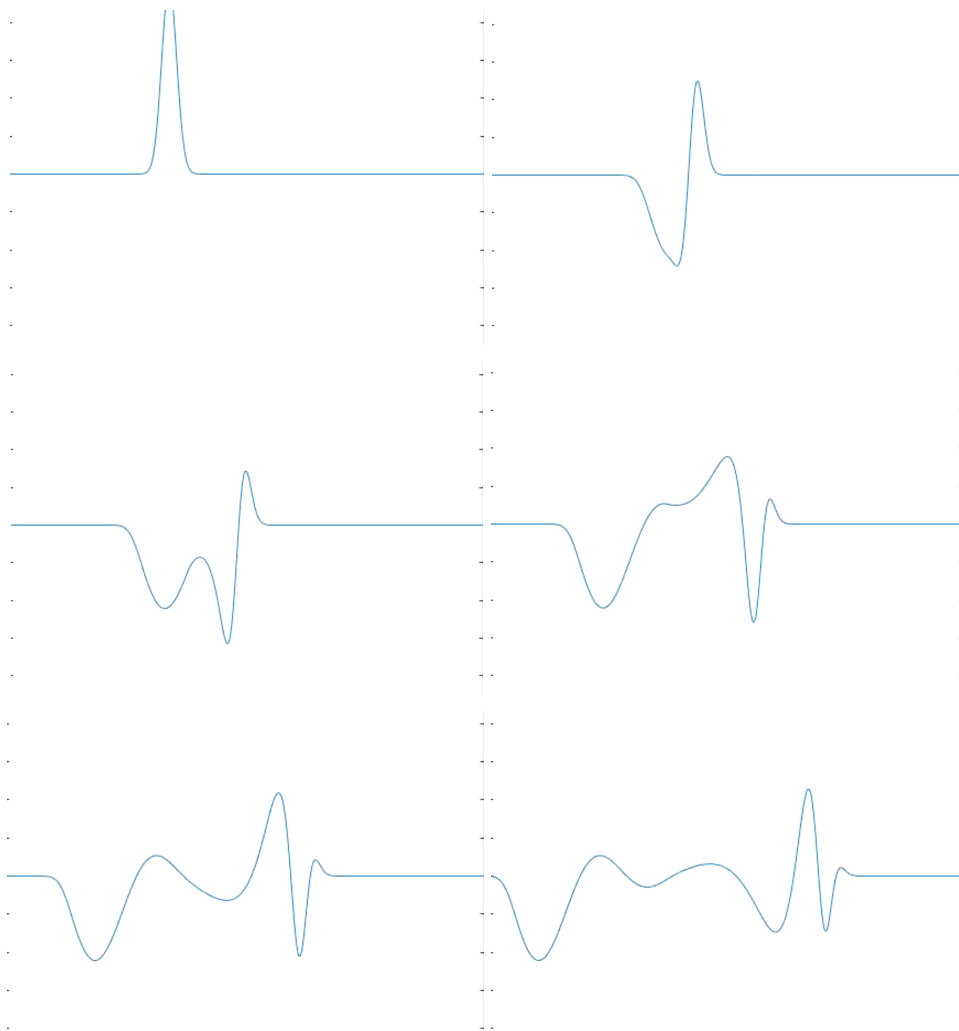
$$S(z) = (1 - e^{-v_c \cdot \Delta t}) z^{-1} S(z) - e^{-v_c \cdot \Delta t} z^{-2} S(z) + \frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c} (1 - e^{-v_c \cdot \Delta t}) E(z) \quad (4.39b)$$

Και τέλος μεταβαίνουμε από το πεδίο Z στο διακριτό πεδίο χρόνου :

$$E^n = D^n - S^{n-1} \quad (4.40a)$$

$$S^n = (1 - e^{-v_c \cdot \Delta t})S^{n-1} - e^{-v_c \cdot \Delta t}S^{n-2} + \frac{\omega_p^2 \Delta t}{v_c}(1 - e^{-v_c \cdot \Delta t})E^n \quad (4.40b)$$

Έχουμε φτάσει πλέον στις τελικές μας σχέσεις, αυτό που μένει είναι να τις μεταφέρουμε στον υπολογιστή και να πραγματοποιήσουμε την προσομοίωση.



ΣΧΗΜΑ 4.4 : Μοντελοποίηση ενός γκαουσιανού παλμού ο οποίος προσπίπτει σε μέσο Debye, με την χρήση μεθόδου ADE.

(Βλέπε Παράρτημα : **drudeZtrans**)

Βλέπουμε στο σχήμα μια ιδιόρρυθμη συμπεριφορά του κύματος το οποίο προσπίπτει σε πλάσμα. Το πλάσμα παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον σαν συχνοτικό υλικό, για χαμηλές συχνότητες -πολύ χαμηλότερες από την συχνότητα πλάσματος- συμπεριφέρεται ως ένα τέλεια

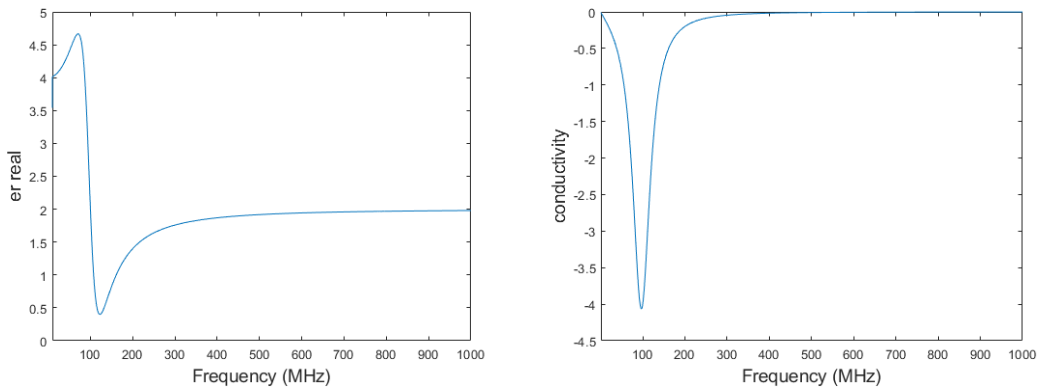
αγώγιμο μέσο, ενώ για μεγάλες συχνότητες συμπεριφέρεται σαν να είναι κενός χώρος. Τέλος για συχνότητα ίδια με την συχνότητα πλάσματος έχουμε τον λεγόμενο “ηλεκτρονικό συντονισμό” ή “συντονισμό πλάσματος” κατά τον οποίο η διηλεκτρική σταθερά πέφτει στο μηδέν.

4.5 Υλικά Lorentz

Φτάνουμε πλέον στα υλικά Lorentz. Τα υλικά αυτά είναι τα πιο δύσκολα να μοντελοποιηθούν λόγω της πολυπλοκότητας της σχέσης η οποία περιγράφει την διηλεκτρική σταθερά τους. Στα προηγούμενα δύο υλικά, οι συναρτήσεις οι οποίες περιγράφουν τις διηλεκτρικές σταθερές τους, ήταν απλοί πόλοι πρώτης τάξης. Τώρα στα υλικά Lorentz θα δούμε την πιο απλή περίπτωση διηλεκτρικής σταθεράς που περιγράφεται από μια συνάρτηση μονού πόλου αλλά δεύτερης τάξης. Πιο συγκεκριμένα :

$$\varepsilon'_r(\omega) = \varepsilon_r + \frac{\varepsilon_1}{1 + j2\delta_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (4.41)$$

Όπως στην περίπτωση του υλικού Debye, μπορούμε να δούμε πως η πραγματική διηλεκτρική σταθερά και η αγωγιμότητα μεταβάλλονται συναρτήσει της συχνότητας κάνοντας την γραφική παράσταση της 4.41.



ΣΧΗΜΑ 4.5 : Γραφική παράσταση διηλεκτρικής σταθεράς και αγωγιμότητας για τιμές : $\varepsilon_r = 2$, $\varepsilon_1 = 2$, $f_0 = 100$ MHz και $\delta = 0.25$.

Συνεχίζουμε αντικαθιστώντας την 4.41 στην 4.8 :

$$D(\omega) = \varepsilon_r E(\omega) + \frac{\varepsilon_1}{1 + j2\delta_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} E(\omega) \quad (4.42)$$

Ομοίως, όπως και πριν, ορίζουμε ένα βοηθητικό μέγεθος S :

$$S(\omega) = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_1}{\omega_0^2 + j2\delta_0\omega_0 + (j\omega)^2} E(\omega) \quad (4.43)$$

Έχοντας την σχέση 4.43 θα προχωρήσουμε με την ανάλυσή μας χρησιμοποιώντας την μέθοδο βοηθητικής διαφορικής εξίσωσης (ADE). Αξίζει να σημειώσουμε πως στο κεφάλαιο αυτό έχουμε μελετήσει τρεις διαφορετικές μεθόδους με τις οποίες φτάνουμε σε ένα βρόχο επανάληψης, και επίσης έχουμε μελετήσει τρία διαφορετικά συχνοτικά εξαρτημένα υλικά. Από την ανάλυσή που έχουμε κάνει προκύπτει πως η κάθε μέθοδος είναι πιο κατάλληλη για την ανάλυση ενός συγκεκριμένου υλικού.

Είδος υλικού	Πιο κατάλληλη μέθοδος
Debye	RC
Drude	Z-transform
Lorentz	ADE

Φέρνουμε την 4.43 σε μια πιο εύχρηστη μορφή :

$$(\omega_0^2 + j\omega 2\delta_0\omega_0 + (j\omega)^2)S(\omega) = \omega_0^2 \varepsilon_1 E(\omega) \quad (4.44)$$

Μεταβαίνουμε στο διακριτό πεδίο του χρόνου :

$$\omega_0^2 S^{n-1} + 2\delta_0\omega_0 \frac{S^n - S^{n-2}}{2\Delta t} + \frac{S^n - 2S^{n-1} + S^{n-2}}{\Delta t^2} = \omega_0^2 \varepsilon_1 E^{n-1} \quad (4.45)$$

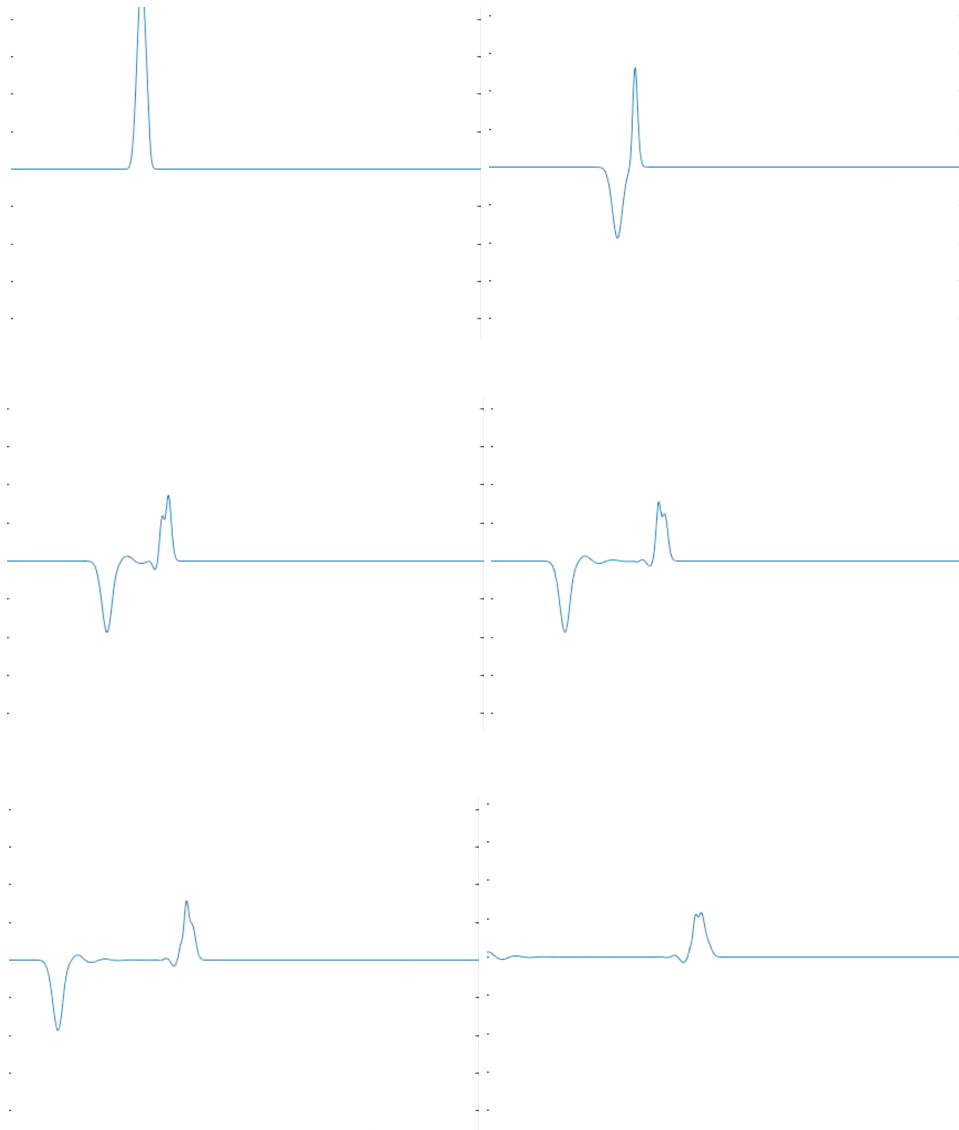
Λόγω της ύπαρξης του τετραγώνου, θα πρέπει να προσεγγίσουμε τον τρίτο όρο με πεπερασμένες διαφορές δευτέρας τάξης. Εξαιτίας αυτού, δεν θα πρέπει να πάρουμε τις πεπερασμένες διαφορές στον δεύτερο όρο για ένα χρονικό βήμα, αλλά για δύο. Τώρα θα πρέπει να λύσουμε την 4.45 ως προς S^n και φτάνουμε έτσι στη σχέση :

$$S^n = \frac{2 - \Delta t^2 \omega_0^2}{1 + \Delta t \delta_0 \omega_0} S^{n-1} - \frac{1 - \Delta t \delta_0 \omega_0}{1 + \Delta t \delta_0 \omega_0} S^{n-2} + \frac{\Delta t^2 \omega_0^2 \varepsilon_1}{1 + \Delta t \delta_0 \omega_0} E^{n-1} \quad (4.46)$$

Αυτός είναι ο βρόχος επανάληψης για το S. Το D το βρίσκουμε από το κεντρικό βρόχο FDTD και επομένως μας μένει η σχέση με την οποία θα εξάγουμε τον βρόχο για το E. Αυτή η σχέση είναι η 4.42 εκφρασμένη στο διακριτό πεδίο του χρόνου.

$$D^n = \varepsilon_r E^n + S^n \rightarrow E^n = \frac{D^n - S^n}{\varepsilon_r} \quad (4.47)$$

Έχουμε όλα τα απαραίτητα εργαλεία ώστε να προχωρήσουμε πλέον στη προσομοίωση.



ΣΧΗΜΑ 4.6 : Μοντελοποίηση ενός γκαουσιανού παλμού, το οποίο προσπίπτει σε μέσο Lorentz. (Βλέπε Παράρτημα : `lorentzADE`)

Στο σχήμα βλέπουμε άλλη μια ενδιαφέρουσα συμπεριφορά από ένα συχνοτικά εξαρτημένο υλικό. Το κύμα στα αριστερά εξαφανίζεται λόγω απορροφητικών συνθηκών, ωστόσο το κύμα στα δεξιά φθίνει και θα αποσβήσει τελείως μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] - Allen Taflove, Computational Electrodynamics : the finite-difference time domain method, Artech House, Boston - London, 1995.
- [2] - Dennis M. Sullivan, Electromagnetic Simulation Using The FDTD Method, IEEE Press Series on RF and Microwave Technology, 2000.
- [3] - David J. Griffiths, Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική, Β' έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2017.
- [4] - Ι.Δ. Βεργάδος, Κλασική Ηλεκτροδυναμική, Εκδόσεις Συμεών, 2002.
- [5] - Κοσμάς Λ. Τσακμακίδης, Η συχνοτικά εξαρτημένη μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου, Θεσσαλονίκη, 2002.
- [6] - Adrian Biran & Moshe Breiner, Matlab για μηχανικούς, Εκδόσεις Τζιόλα, 1999.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΕ MATLAB

Κλείνοντας την πτυχιακή αυτή, θα παραθέσουμε εδώ τα προγράμματα σε MATLAB τα οποία έχουμε χρησιμοποιήσει. Το κάθε πρόγραμμα θα εκτελέσει μια προσομοίωση πανομοιότυπη με το κάθε σχήμα στο οποίο αναφέρεται. Υπενθυμίζουμε πως οι μονάδες είναι όλες γραμμένες στο S.I.

Program #1 : 1dgauss-freespace

```
space=100; %number of space cells
timesteps=200; %number of time steps
Ex=zeros(1,space);
Hy=zeros(1,space);
t0=20; %function parameter
spread=8; %function parameter
for t=1:timesteps %main FDTD loop starts
for k=2:space-1
Ex(k)=Ex(k)+0.5*(Hy(k-1)-Hy(k)); %calculating Ex from Hy
end
Ex(1)=exp(-0.5*((t-t0)/spread)^2); %pulse set at a specific point
for k=1:space-1
Hy(k)=Hy(k)+0.5*(Ex(k)-Ex(k+1)); %calculating Hy from Ex
end
plot(Ex);
axis([1 space -2 2]); %limits of simulation
M(t) = getframe; %part of command for movie creation, necessary to see the animation
end
```

Program #2 : dualgauss-noabcs

```
space=100;
timesteps=200;
Ex=zeros(1,space);
Hy=zeros(1,space);
t0=20;
spread=8;
for t=1:timesteps
```

```

for k=2:space-1
Ex(k)=Ex(k)+0.5*(Hy(k-1)-Hy(k));
end
Ex(space/2)=exp(-0.5*((t-t0)/spread)^2);
for k=1:space-1
Hy(k)=Hy(k)+0.5*(Ex(k)-Ex(k+1));
end
plot(Ex);
axis([1 space -2 2]);
M(t) = getframe;
end

```

Program #3 : 1dWITHabcs

```

space=100;
timesteps=400;
Ex=zeros(1,space);
Hy=zeros(1,space);
t0=60;
spread=15;
Ex_high_2=0; %boundary conditions
Ex_high_1=0; %boundary conditions
v = VideoWriter('1dWITHabcs.avi'); %creation of video file
open(v) %opening video file
for t=1:timesteps
for k=2:space-1
Ex(k)=Ex(k)+0.5*(Hy(k-1)-Hy(k));
end
Ex(1)=1.5*exp(-.5*((t-t0)/spread)^2);
Ex(space)=Ex_high_2; %boundary conditions
Ex_high_2=Ex_high_1; %boundary conditions
Ex_high_1=Ex(space-1); %boundary conditions
for k=1:space-1
Hy(k)=Hy(k)+0.5*(Ex(k)-Ex(k+1));
end
plot(Ex);
axis([1 space -2 2]);
M(t) = getframe; %recording frame of video file
end
writeVideo(v,M) %writing of video file
close(v); %close of video file

```

Program #4 : dielectric1D

```
space=500;
timesteps=1000;
Ex=zeros(1,space);
Hy=zeros(1,space);
f = 10^6;
T = 1/f;
dt = T/20;
spread = 30;
t0 = 300;
e0 = 8.85*10^-12;
er = 4;
s = 0.04;
c = 3*10^8;
ParS(1:199) = 1;
ParS(200:500) = er;
v = VideoWriter('dielectric1D.avi');
open(v)
for t=1:timesteps
for k=2:space-1
Ex(k)=Ex(k)+(0.5/ParS(k))*(Hy(k-1)-Hy(k));
end
Ex(1)=exp(-.5*((t-t0)/spread)^2);
for k=1:space-1
Hy(k)=Hy(k)+0.5*(Ex(k)-Ex(k+1));
end
plot(Ex);
axis([1 space -2 2]);
M(t) = getframe;
end
writeVideo(v,M)
close(v);
```

Program #5 : 1dsinefreespace

```
space=100;
timesteps=200;
Ex=zeros(1,space);
Hy=zeros(1,space);
t0=20;
spread=8;
```

```

v = VideoWriter('sine1d.avi');
open(v)
for t=1:timesteps
for k=2:space-1
Ex(k)=Ex(k)+0.5*(Hy(k-1)-Hy(k));
end
Ex(1)=sin(10*pi*t/timesteps);
for k=1:space-1
Hy(k)=Hy(k)+0.5*(Ex(k)-Ex(k+1));
end
plot(Ex);
axis([1 space -2 2]);
M(t) = getframe;
end
writeVideo(v,M)
close(v);

```

Program #6 : sinedielectric1D

```

space=500;
timesteps=1000;
Ex=zeros(1,space);
Hy=zeros(1,space);
f = 10^6;
T = 1/f;
dt = T/20;
e0 = 8.85*10^-12;
er = 4;
c = 3*10^8;
ParS(1:199) = 1;
ParS(200:500) = er;
v = VideoWriter('sinedielectric1D.avi');
open(v)
for t=1:timesteps
for k=2:space-1
Ex(k)=Ex(k)+(0.5/ParS(k))*(Hy(k-1)-Hy(k));
end
Ex(1)=sin(10*pi*t/timesteps);;
for k=1:space-1
Hy(k)=Hy(k)+0.5*(Ex(k)-Ex(k+1));
end

```

```

plot(Ex);
axis([1 space -2 2]);
M(t) = getframe;
end
writeVideo(v,M)
close(v);

```

Program #7 : wavepacket-freespace

```

space=500;
timesteps=800;
Ex=zeros(1,space);
Hy=zeros(1,space);
t0=240;
spread=60;
e0 = 8.85*10^-12;
er = 4;
s = 0.04;
f = 3*10^9;
c = 3*10^8;
Dx = c/(10*f);
Dt = Dx/(2*c);
v = VideoWriter('lossydielectric1D.avi');
open(v)
for t=1:timesteps
for k=2:space-1
Ex(k)=Ex(k)+(0.5)*(Hy(k-1)-Hy(k));
end
Ex(1)=1.5*exp(-.5*((t-t0)/spread)^2)*sin(50*pi*t/timesteps);
for k=1:space-1
Hy(k)=Hy(k)+0.5*(Ex(k)-Ex(k+1));
end
plot(Ex);
axis([1 space -2 2]);
M(t) = getframe;
end
writeVideo(v,M)
close(v);

```

Program #8 : wavepacketdielectric1D

```

space=500;

```



```

timesteps=900;
Ex=zeros(1,space);
Hy=zeros(1,space);
t0=240;
spread=60;
e0 = 8.85*10^-12;
er = 4;
s = 0.04;
f = 3*10^9;
c = 3*10^8;
Dx = c/(10*f);
Dt = Dx/(2*c);
ParS(1:199) = 1;
ParS(200:500) = er;
v = VideoWriter('wavepacketdielectric1D.avi');
open(v)
for t=1:timesteps
for k=2:space-1
Ex(k)=Ex(k)+(0.5/ParS(k))*(Hy(k-1)-Hy(k));
end
Ex(1)=1.5*exp(-.5*((t-t0)/spread)^2)*sin(50*pi*t/timesteps);
for k=1:space-1
Hy(k)=Hy(k)+0.5*(Ex(k)-Ex(k+1));
end
plot(Ex);
axis([1 space -2 2]);
M(t) = getframe;
end
writeVideo(v,M)
close(v);

```

Program #9 : fftgauss

```

f = 10^6;
T = 1/f;
dt = T/20;
spread = 30;
t0 = 300;
for i=1:1000
J(i) = i*dt;
end

```

```

for i=1:1000
O(i) = exp(-.5*((i-t0)/spread)^2);
end
Y=fft(O,1024);
P = Y.*conj(Y)/1024;
fo = 10*f*(1:512)/512;
plot(fo,P(1:512))

```

Program #10 : debyeRC

```

space=500; %Total number of space cells
timesteps=1000; %Total number time steps
c=299792458; % the speed of light
dx=0.01; %spacial step
dt=dx/(2*c); %time step
ex=zeros(1,space); %inserting ex variable
hy=zeros(1,space); %inserting hy variable
Dx=zeros(1,space); %inserting Dx variable
ix=zeros(1,space); %inserting ix variable

```

```

ex2=0; %boundary condition
ex1=0; %boundary condition
Ex1=0; %boundary condition
Ex2=0; %boundary condition

```

```

epsz=8.85419e-12; %value of vacuum permittivity
epsilon=2; % relative permittivity of material
sigma=0.01; %conductivity of material

```

```

ga=zeros(1,space); %inserting ga variable
gb=zeros(1,space); %inserting gb variable

```

```

t0=50; %function parameter
spread=10; %function parameter

```

```

sx=zeros(1,space); %inserting sx variable
chi1=2; %parameter of frequency dependent medium
tau=0.000000001; %t0 of medium (frequency dependent)
del_exp=exp(-dt/tau); %not necessary, helps with the writing of the equations later on
gc=zeros(1,space); %inserting gc variable

```

```
%ga variable for free space
```

```
for k=2:100
```

```
    ga(k)=1;
```

```
end
```

```
v = VideoWriter('debyeRC.avi'); %creation of video file
```

```
open(v) %opening of video file
```

```
for j=1:timesteps %fdtd main loop start
```

```
    for k=100:space %setting the non-zero values for parameters (frequency dependent medium  
not free space)
```

```
        gc(k)=(chi1*dt)/tau;
```

```
        ga(k)=1./(epsilon+((sigma*dt)/epsz) +((chi1*dt)/tau));
```

```
        gb(k)=(sigma*dt)/epsz;
```

```
    end
```

```
for k=2:space
```

```
    Dx(k)=Dx(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k)); %loop for Dx
```

```
end
```

```
pulse =exp(-0.5*(t0-j)^2/(spread)^2); %original pulse
```

```
Dx(5)=Dx(5)+pulse; %set pulse at Dx
```

```
for k=2:space %calculating ex from Dx and other parameters
```

```
ex(k)=ga(k)*(Dx(k)-ix(k)-sx(k));
```

```
ix(k)=ix(k)+gb(k)*ex(k);
```

```
sx(k)=del_exp*sx(k)+ gc(k)*ex(k);
```

```
end
```

```
ex(2)=ex2; %absorbing boundary conditions
```

```
ex2=ex1; %absorbing boundary conditions
```

```
ex1=ex(3); %absorbing boundary conditions
```

```
ex(space-1)=Ex2; %absorbing boundary conditions
```

```

Ex2=Ex1; %absorbing boundary conditions
Ex1=ex(space-2); %absorbing boundary conditions

for k=2:space-1 %calculation of hy
    hy(k)=hy(k)+0.5*(ex(k)-ex(k+1));
end

plot(ex,'b'); %plotting of ex
ylim([-1 1]); %limits of plot

```

```

M(j) = getframe; %record movie frame
end
writeVideo(v,M) %save movie frame
close(v); %close movie file

```

Program #11 : debyeADE

```

space=500; %Total number of space cells
timesteps=1000; %Total number time steps
c=299792458; % the speed of light
dx=0.01; %spacial step
dt=dx/(2*c); %time step
ex=zeros(1,space); %inserting ex variable
hy=zeros(1,space); %inserting hy variable
Dx=zeros(1,space); %inserting Dx variable
ix=zeros(1,space); %inserting ix variable

ex2=0; %boundary condition
ex1=0; %boundary condition
Ex1=0; %boundary condition
Ex2=0; %boundary condition

epsz=8.85419e-12; %value of vacuum permittivity
epsilon=2; % relative permittivity of material
sigma=0.01; %conductivity of material

ga=zeros(1,space); %inserting ga variable
gb=zeros(1,space); %inserting gb variable

```

```

t0=50; %function parameter
spread=10; %function parameter

sx=zeros(1,space); %inserting sx variable
chi1=2; %parameter of frequency dependent medium
tau=0.000000001; %t0 of medium (frequency dependent)
del_exp=exp(-dt/tau); %not necessary, helps with the writing of the equations later on
NewGc1=zeros(1,space); %inserting S variable for ADE
NewGc2=zeros(1,space); %inserting 2nd S variable for ADE
frac=dt/tau; %parameter for more elegant calculations

%ga variable for free space

for k=2:100
    ga(k)=1;

end

v = VideoWriter('debyeADE.avi'); %creation of video file
open(v) %opening of video file

for j=1:timesteps %fdtd main loop start

    for k=100:space %setting the non-zero values for parameters (frequency dependent medium
not free space)
        NewGc1(k)=(1-frac/2)/(1+frac/2);
        NewGc2(k)=(frac*chi1)/(1+frac/2);
        ga(k)=1./(epsilon+((sigma*dt)/epsz) +((chi1*dt)/tau));
        gb(k)=(sigma*dt)./epsz;

    end

    for k=2:space
        Dx(k)=Dx(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k)); %loop for Dx
    end

    pulse =exp(-0.5*(t0-j)^2/(spread)^2); %original pulse

```

```
Dx(5)=Dx(5)+pulse; %set pulse at Dx
```

```
for k=2:space %calculating ex from Dx and other parameters
```

```
ex(k)=ga(k)*(Dx(k)-ix(k)-sx(k));
```

```
ix(k)=ix(k)+gb(k)*ex(k);
```

```
sx(k)=NewGc1(k)*sx(k)+ NewGc2(k)*ex(k);
```

```
end
```

```
ex(2)=ex2; %absorbing boundary conditions
```

```
ex2=ex1; %absorbing boundary conditions
```

```
ex1=ex(3); %absorbing boundary conditions
```

```
ex(space-1)=Ex2; %absorbing boundary conditions
```

```
Ex2=Ex1; %absorbing boundary conditions
```

```
Ex1=ex(space-2); %absorbing boundary conditions
```

```
for k=2:space-1 %calculation of hy
```

```
hy(k)=hy(k)+0.5*(ex(k)-ex(k+1));
```

```
end
```

```
plot(ex,'red'); %plotting of ex
```

```
ylim([-1 1]); %limits of plot
```

```
M(j) = getframe; %record movie frame
```

```
end
```

```
writeVideo(v,M) %save movie frame
```

```
close(v); %close movie file
```

Program #12 : drudeZtrans

```
space=800; %Total number of space cells
```

```
kstart=300; %at which point plasma begins
```

```
timesteps=1300; %Total number time steps
```

```
c=299792458; % the speed of light
```

```
dx=1e-9; %spacial step
```

```
dt=dx/(2*c); %time step
```

```
ex=zeros(1,space); %inserting ex variable
```

```
hy=zeros(1,space); %inserting hy variable
```

```
dx=zeros(1,space); %inserting Dx variable
```

```
ix=zeros(1,space); %inserting ix variable
```

```

sx=zeros(1,space); %inserting sx variable
sx1=zeros(1,space); %inserting auxiliary sx1 variable
sx2=zeros(1,space); %inserting auxiliary sx2 variable

t0=150; %function parameter
spread=25; %function parameter

ex2=0; %boundary condition
ex1=0; %boundary condition
Ex1=0; %boundary condition
Ex2=0; %boundary condition

v = VideoWriter('drudeZ.avi'); %creation of video file
open(v) %opening of video file

%%%%%%%%%Main Loop Begins%%%%%%%%%
for t=1:timesteps
    for k=2:space
        dx(k)=dx(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k)); %calculating loop for dx
    end
    pulse=exp(-0.5*(t0-t)^2/(spread)^2); %original gaussian pulse
    dx(5)=dx(5)+pulse; %set pulse at Dx
    for k=2:space %start of drude loop
        if (k >= kstart & k <= space) %check if on plasma
            omega=2*pi*2000e12;
            vc=57e12;
            ex(k)=(dx(k)-sx(k));

sx(k)=(1+exp(-vc.*dt)).*sx1(k)-exp(-vc.*dt).*sx2(k)+((omega^2).*dt/vc).*(1-exp(-vc.*dt)).*ex(
k);
            sx2(k)=sx1(k);
            sx1(k)=sx(k);
        else
            ex(k)=dx(k);
        end
    end
end

    ex(2)=ex2; %absorbing boundary conditions
    ex2=ex1; %absorbing boundary conditions
    ex1=ex(3); %absorbing boundary conditions

```

```

ex(space-1)=Ex2; %absorbing boundary conditions
Ex2=Ex1; %absorbing boundary conditions
Ex1=ex(space-2); %absorbing boundary conditions

    for k=1:KE-1
        hy(k)=hy(k)+0.5*(ex(k)-ex(k+1)); %calculating loop for hy
    end
    plot(ex)
    ylim([-1 1]); %limits of plot
M(t) = getframe; %record movie frame
    end
writeVideo(v,M) %save movie frame
close(v); %close movie file

```

Program #13 : lorentzADE

```

space=500; %Total number of space cells
timesteps=1000; %Total number time steps
c=299792458; % the speed of light
dx=0.01; %spacial step
dt=dx/(2*c); %time step
kstart = 150; %point at which lorentz medium begins
ex=zeros(1,space); %inserting ex variable
hy=zeros(1,space); %inserting hy variable
Dx=zeros(1,space); %inserting Dx variable
sx=zeros(1,space); %inserting sx variable
sx1=zeros(1,space); %inserting sx1 variable
sx2=zeros(1,space); %inserting sx2 variable

ex2=0; %boundary condition
ex1=0; %boundary condition
Ex1=0; %boundary condition
Ex2=0; %boundary condition

epsz=8.85419e-12; %value of vacuum permittivity
epsilon=4; % relative permittivity of material
epsilonL=1; %2nd permittivity
delta = 0.25; %lorentz parameter
fo = 1000*10^6; %central frequency
omega = 2*pi*fo; %central angular frequency

```



```

t0=50; %function parameter
spread=10; %function parameter

Av = ((2-dt*dt*omega*omega)/(1+delta*omega*dt)); %inserting variable into 1st term of S
equation
Bv = ((1-delta*omega*dt)/(1+delta*omega*dt)); %inserting variable into 2nd term of S equation
Cv = ((dt*dt*omega*omega*epsilonL)/(1+delta*omega*dt)); %inserting variable into 3rd term
of S equation

v = VideoWriter('lorentzADE.avi'); %creation of video file
open(v) %opening of video file

for j=1:timesteps %fdtd main loop start

    for k=2:space
        Dx(k)=Dx(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k)); %loop for Dx
    end

    pulse =exp(-0.5*(t0-j)^2/(spread)^2); %original pulse
    Dx(5)=Dx(5)+pulse; %set pulse at Dx

    for k=2:space %calculating ex from Dx and other parameters
    if k >= kstart %checking to see if we are on free space or lorentz medium
    ex(k) = (Dx(k)-sx(k))/epsilon;
    sx(k)=Av*sx1(k)-Bv*sx2(k)+Cv*ex(k);
    sx2(k)=sx1(k);
    sx1(k)=sx(k);
    else
    ex(k) = Dx(k);
    end
    end

    ex(2)=ex2; %absorbing boundary conditions
    ex2=ex1; %absorbing boundary conditions
    ex1=ex(3); %absorbing boundary conditions
    ex(space-1)=Ex2; %absorbing boundary conditions
    Ex2=Ex1; %absorbing boundary conditions
    Ex1=ex(space-2); %absorbing boundary conditions

```

```

for k=2:space-1 %calculation of hy
    hy(k)=hy(k)+0.5*(ex(k)-ex(k+1));
end

```

```

plot(ex); %plotting of ex
ylim([-1 1]); %limits of plot

```

```

M(j) = getframe; %record movie frame
end
writeVideo(v,M) %save movie frame
close(v); %close movie file

```

Program #14 : lossydielectric1D

```

space=300;
timesteps=600;
Ex=zeros(1,space);
Hy=zeros(1,space);
t0=50;
spread=15;
e0 = 8.85*10^-12;
er = 4;
s = 0.04;
f = 3*10^9;
c = 3*10^8;
Dx = c/(10*f);
Dt = Dx/(2*c);
omega = Dt*s/(2*e0*er);
ParF(1:149) = 1;
ParS(1:149) = 0.5;
ParF(150:800) = (1. - omega)/(1. + omega);
ParS(150:800) = 0.5/(er*(1. + omega));
v = VideoWriter('lossydielectric1D.avi');
open(v)
for t=1:timesteps
for k=2:space-1
Ex(k)=ParF(k)*Ex(k)+ParS(k)*(Hy(k-1)-Hy(k));
end
Ex(1)=1.5*exp(-.5*((t-t0)/spread)^2);

```

```
for k=1:space-1
Hy(k)=Hy(k)+0.5*(Ex(k)-Ex(k+1));
end
plot(Ex);
axis([1 space -2 2]);
M(t) = getframe;
end
writeVideo(v,M)
close(v);
```