Η ελλειπτική ανισότητα Harnack και εφαρμογές

Αθανάσιος Κόκκινος
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Ειδίκευση στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Σεπτέμβριος 2021

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Επιβλέποντες

Π. Γιαννιώτης, καθηγητής

Γ. Μπαρμπάτης, καθηγητής(επιβλέπων)

Ι. Στρατής, καθηγητής

Ευχαριστίες

Η συγγραφή της παρούσας εργασίας υπήρξε ένα αξέχαστο ταξίδι γνώσεων για μένα και είναι ηθική υποχρεωσή μου να ευχαριστήσω και τους ανθρώπους που συντέλεσαν σε αυτό.
Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητη κ. Γεράσιμο Μπαρμπάτη, για τον ποιοτικό χρόνο που μου διέθεσε, τις πολύτιμες συμβουλές και την αμέριστη βοήθεια του για την επιτυχή ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας, σε μία δύσκολη περίοδο για τον κόσμο μας, που μόνο με τηλεδιασκέψεις μπορούσαμε να επικοινωνήσουμε.
Τέλος ευχαριστώ και την οικογενειά μου για την αμέριστη σύμπαράσταση της, με στόχο να συνεχίσω την όμορφη πορεία μου πάνω στον κόσμο των μαθηματικών.

Στον παππού Θανάση και στον παππού Στασινό,
που με τον τρόπο ζωής τους με δίδαξαν πολλά

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί η ελλειπτική ανισότητα Harnack του Moser καθώς και εφαρμογές αυτής στην ομαλότητα ασθενών λύσεων. Θα ξεκινήσουμε με την απόδειξη όλων των απαραίτητων προτάσεων, ώστε να φτάσουμε στο τέλος του δεύτερου κεφαλαίου και να παρουσιάσουμε την απόδειξη της ανισότητας Harnack με την βοήθεια των δύο σημαντικών θεωρημάτων του Moser. Ύστερα θα παρουσιάσουμε σημαντικές συνέπειες της ανισότητας Harnack στις ασθενείς λύσεις της ελλειπτικής μερικής διαφορικής εξίσωσης υπό μορφή απόκλισης, όπου η πιο σημαντική είναι η συνέχεια αυτών κατα Hölder .

The object of this thesis is to study Moser's elliptic Harnack inequality and its application on the regularity of weak solutions. Considering first with the proves of necessary propositions, we move to present the proof of Harnack inequality, which we used two important theorems of Moser. After that, we show concequenses of Harnack inequality on weak solutions of elliptic partial differential equations in divergence form, where the most important is Hölder condition.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

1.1 Χρήσιμα Σύνολα

Έστω Ω ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο του $\mathbb{R}^d$. λέμε ότι το U περιέχεται συμπαγώς στο Ω και συμβολίζουμε $U \subset\subset \Omega$ αν:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \bar{U} \subset \Omega \\ &(2) \quad \bar{U} \text{ συμπαγές} \end{aligned}$$

Ορισμός 1.1.1. *Ορίζουμε τα σύνολα:*

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \{u : \Omega \to \mathbb{C}, \int_\Omega |u|^p dx < +\infty\} \\ L^p_{loc}(\Omega) &= \{u : \Omega \to \mathbb{C}, u \text{ μετρήσιμη και } u \in L^p(U), \text{ για κάθε } U \subset\subset \Omega\} \\ C^\infty_c(\Omega) &= \{u : \Omega \to \mathbb{C}, u \in C^\infty \text{ και } supp(u) \subset\subset \Omega\} \end{aligned}$$

Κάθε συνάρτηση ϕ που ανήκει στο $C^\infty_c(\Omega)$ καλείται συνάρτηση δοκιμής και είναι μία απειροδιαφορίσιμη συνάρτηση με συμπαγή φορέα.

1.2 Ασθενώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 1.2.1. *Λέμε ότι η συνάρτηση $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη αν υπάρχουν συναρτήσεις $g_1, ..., g_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ τέτοιες ώστε :*

$$\int_\Omega u(x)\phi_{x_i}(x)dx = -\int_\Omega g_i(x)\phi(x)dx$$

για κάθε $1 \le i \le n$ και για κάθε $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$.

Αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη, τότε οι συναρτήσεις $g_1, ..., g_n$ είναι μοναδικές, τις ονομάζουμε μερικές παραγώγους της u και τις συμβολίζουμε u_{x_i}.
Η μοναδικότητα των μερικών παραγώγων έπεται από το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 1.2.2. *Αν η $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ είναι τέτοια ώστε*

$$\int_\Omega u\phi dx = 0 \text{ για κάθε } \phi \in C^\infty_c(\Omega)$$

τότε $u = 0$ στο Ω.

Είναι φανερό, λόιπόν, ότι έχουμε μοναδικότητα των μερικών παραγώγων, καθώς αν για μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση u είχαμε δύο διαφορετικές μερικές παραγώγους, τότε με την βοήθεια του Λήμματος 1.2.2 θα καταλήξουμε ότι είναι ίσες.
Πράγματι, έστω $g_1, ..., g_n, \hat{g_1}, ..., \hat{g_n} \in L^1_{loc}(\Omega)$ και $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$,τότε:

$$\int_\Omega u(x)\phi_{x_i}(x)dx = -\int_\Omega g_i(x)\phi(x)dx$$
$$\int_\Omega u(x)\phi_{x_i}(x)dx = -\int_\Omega \hat{g}_i(x)\phi(x)dx$$

Αφού τα αριστερά μέλη είναι ίσα, τότε θα είναι και τα δεξιά, άρα:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega g_i(x)\phi(x)dx = \int_\Omega \hat{g}_i(x)\phi(x)dx \\ \Rightarrow \quad & \int_\Omega (g_i(x) - \hat{g}_i(x))\phi(x)dx = 0 \\ \Rightarrow \quad & g_i(x) - \hat{g}_i(x) = 0 \\ \Rightarrow \quad & g_i(x) = \hat{g}_i(x) \end{aligned}$$

1.3 Χώροι Sobolev

Πρέπει όμως να εξετάσουμε και την τοπολογία των συναρτήσεων που είναι ασθενώς παραγωγίσιμες, άρα θα ορίσουμε για αρχή το σύνολο που περιέχει τέτοιες συναρτήσεις.

Ορισμός 1.3.1. *Έστω $p \geq 1$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Ορίζουμε:*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \text{ασθενώς παραγωγίσιμη και } u_{x_i} \in L^p(\Omega)\}$$

Ο $W^{1,p}(\Omega)$ ονομάζεται χώρος Sobolev.
Πριν ορίσουμε την νόρμα που θα ακολουθήσουμε σε αυτό τον γραμμικό χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 1.2.2 και το παράκατω λήμμα για να βρούμε νόρμα στον χώρο $W^{1,p}(\Omega)$.

Λήμμα 1.3.2. *Αν $p \in [1, +\infty)$ και $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, τότε ισχύει η ανισότητα,*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) + g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Τώρα θα ορίσουμε την νόρμα που θα χρησιμοποιήσουμε στον χώρο $W^{1,p}(\Omega)$.

Πρόταση 1.3.3. *Η απεικόνιση,*

$$\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)} : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

με τύπο

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big(\int_{\Omega} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

είναι νόρμα στο $W^{1,p}(\Omega)$.

<u>Απόδειξη</u>

$$
\begin{aligned}
1) \quad & \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq 0, \text{διότι } |u|^p \geq 0 \text{ και } |\nabla u|^p \geq 0 \\
2) \quad & \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0 \Rightarrow \Big(\int_{\Omega} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx \Big)^{\frac{1}{p}} = 0 \\
& \Rightarrow \int_{\Omega} |u|^p dx = 0 \\
& \Rightarrow u = 0 \\
3) \quad & \|\lambda u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big(\int_{\Omega} (|\lambda u|^p + |\nabla(\lambda u)|^p) dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\
= \quad & |\lambda| \Big(\int_{\Omega} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\
= \quad & |\lambda| \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\
4) \quad & \text{Εφαρμόζουμε την ανισότητα Minkowski :} \\
& (|x_1 + y_1|^p + |x_2 + y_2|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|x_1^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} + (|y_1|^p + |y_2|^p)^{\frac{1}{p}} \\
& \text{για } x_1 = |f|, x_2 = |\nabla f|, y_1 = |g|, y_2 = |\nabla g|. \\
& \text{Έχουμε,} \\
& \|f + g\|_{W^{1,p}} = \Big(\int \big(|f + g|^p + |\nabla f + \nabla g|^p \big) dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\
\leq \quad & \left(\int \left(\big(|f|^p + |\nabla f|^p\big)^{\frac{1}{p}} + \big(|g|^p + |\nabla g|^p\big)^{\frac{1}{p}} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|(|f|^p + |\nabla f|^p)^{\frac{1}{p}} + (|g|^p + |\nabla g|^p)^{\frac{1}{p}}\|_p \\
&\leq \|(|f|^p + |\nabla f|^p)^{\frac{1}{p}}\|_p + \|(|g|^p + |\nabla g|^p)^{\frac{1}{p}}\|_p \\
&= \Big(\int |f|^p + |\nabla f|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int |g|^p + |\nabla g|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{W^{1,p}} + \|g\|_{W^{1,p}}
\end{aligned}
$$

Όσο αφορά την σύγκλιση στον χώρο $W^{1,p}(\Omega)$ με την νόρμα $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ είναι φανερό ότι χρησιμοποιώντας την νόρμα $\|\cdot\|_p$ στον χώρο $L^p(\Omega)$ έχουμε ότι,

$$
u_k \to u \text{ στον } W^{1,p}(\Omega) \iff \begin{cases} (u_k) \to u & , \text{ στον } L^p(\Omega) \\ (u_k)_{x_i} \to u_{x_i} & , \text{ στον } L^p(\Omega) \end{cases}
$$

Έχοντας ορίσει νόρμα ως συνέπεια έρχεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.3.4. *Ο $W^{1,p}(\Omega)$ εφοδιασμένος με $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ είναι χώρος Banach*

Απόδειξη

Έστω u_k ακολουθία Cauchy στον $W^{1,p}(\Omega)$. Τότε οι ακολουθίες (u_k) και $(u_{k_{x_i}})$ με $i = 1,..,n$ είναι ακολουθίες Cauchy στον $L^p(\Omega)$, καθώς για $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$
\begin{aligned}
& \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \epsilon, \forall n, m \geq n_0 \\
\Rightarrow\ & \Big(\int_\Omega |u_n - u_m|^p + |\nabla(u_n - u_m)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \epsilon, \forall n, m \geq n_0 \\
\Rightarrow\ & \int_\Omega |u_n - u_m|^p + |\nabla(u_n - u_m)|^p dx < \epsilon^p, \forall n, m \geq n_0 \\
\Rightarrow\ & \Big(\int_\Omega |u_n - u_m|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \text{ και } \Big(\int_\Omega |\nabla(u_n - u_m)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \epsilon, \forall n, m \geq n_0 \\
\Rightarrow\ & \|u_n - u_m\|_p < \epsilon \text{ και } \|\nabla(u_n - u_m)\|_p < \epsilon, \forall n, m \geq n_0
\end{aligned}
$$

Ο $L^p(\Omega)$ είναι πλήρης χώρος, άρα αφού (u_k) και $(u_{k_{x_i}})$ με $i = 1,..,n$ είναι ακολουθίες Cauchy , τότε υπάρχουν $u, g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega)$ ώστε

$$
(u_k) \to u \text{ και } (u_k)_{x_1} \to g_1, .., (u_k)_{x_n} \to g_n \text{ στον } L^p(\Omega), \text{ καθώς } k \to +\infty
$$

Έστω $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $i = 1, ..., n$ έχουμε ότι

$$
\int_\Omega u_k \phi_{x_i} dx = -\int_\Omega u_{k_{x_i}} \phi dx
$$

όπου εφαρμόσαμε παραγοντική ολοκήρωση και στο σύνορο μηδενίστηκε λόγω της συνάρτησης δοκιμής.
Παίρνοντας το όριο $k \to +\infty$,έχουμε ότι

$$\int_\Omega u\phi_{x_i}dx = -\int_\Omega g_i \phi dx$$

αφού ισχύει για κάθε συνάρτηση δοκιμής έχουμε ότι η u είναι ασθενώς παραγώγισιμη και $u_{x_i} = g_i$.
Άρα $u \in W^{1,p}(\Omega)$ και $(u_k) \to u$ και $(u_k)_{x_1} \to g_1, .., (u_k)_{x_n} \to g_n$ στον $L^p(\Omega)$, καθώς $k \to +\infty$, δηλαδή

$$\begin{cases} u_k \to u & , \text{ στον } L^p(\Omega) \\ u_{k_{x_i}} \to u_{x_i} & , \text{ στον } L^p(\Omega) \end{cases}$$

Συνοψίζοντας

$$\begin{cases} (u_k) \to u, \text{ στον } W^{1,p}(\Omega) \\ u \in W^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

Άρα $W^{1,p}(\Omega)$ είναι χώρος Banach.

Ορισμός 1.3.5. *Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως η κλειστή θήκη του $C_c^\infty(\Omega)$ ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.*

Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega) \text{ και } W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$$

Θεώρημα 1.3.6. *Έστω $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, τότε :*

$$\|u\|_{\frac{dp}{d-p}} \leq c\|Du\|_p, \qquad p < d$$

όπου το c εξαρτάται από το p και d.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε την ανισότητα για $u \in C_c^\infty(\Omega)$.
Θέτουμε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.

Ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \Big|\int_{-\infty}^{x_i} |D_i u(x_1,...,x_{i-1},\xi,x_{i+1},...,x_d)d\xi\Big| \\ &\leq \int_{-\infty}^{x_i} |D_i u(x_1,...,x_{i-1},\xi,x_{i+1},...,x_d)d\xi \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x_1,...,x_{i-1},\xi,x_{i+1},...,x_d)d\xi \end{aligned}$$

με $x=(x_1,...,x_d)$ για $1\leq i\leq d$.
Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο της ανισότητας για $1\leq i\leq d$ θα έχουμε ότι:

$$|u(x)|^d \leq \prod_{i=1}^{d}\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x_1,...,x_{i-1},\xi,x_{i+1},...,x_d)dx_i$$

Άρα,

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \Big(\prod_{i=1}^{d}\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x_1,...,x_{i-1},\xi,x_{i+1},...,x_d)dx_i\Big)^{\frac{1}{d-1}}$$

Έπεται ότι,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|D_1 u|dx_1\Big)^{\frac{1}{d-1}}\Big(\prod_{i\neq 1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x_1,...,x_{i-1},\xi,x_{i+1},...,x_d)dx_i\Big)^{\frac{1}{d-1}}$$

Επαγωγικά θα έχουμε ότι:

$$\int_\Omega |u(x)|^{\frac{d}{d-1}}dx \leq \Big(\prod_{i=1}^{d}\int_\Omega |D_i u|dx\Big)^{\frac{1}{d-1}}$$

και άρα,

$$\|u\|_{\frac{d}{d-1}} \leq \Big(\prod_{i=1}^{d}\int_\Omega |D_i u|dx\Big)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{d}\int_\Omega\sum_{i=1}^{d}|D_i u|dx$$

από την ανισότητα γεωμετρικού-αριθμητικού μέσου.
Οπότε,

$$\|u\|_{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{1}{d}\|Du\|_1$$

Για $\gamma > 1$ εφαρμόζουμε την τελευταία ανισότητα για την συνάρτηση $|u|^\gamma$ και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \||u^\gamma|\|_{\frac{d}{d-1}} &\leq \frac{\gamma}{d}\int_\Omega |u|^{\gamma-1}|Du|dx \\ &\leq \frac{\gamma}{d}\Big\||u|^{\gamma-1}\Big\|_q \|Du\|_p \text{ για } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \end{aligned}$$

όπου εφαρμόσαμε την ανισότητα Hölder. Για $p < \gamma$ και $\gamma = \frac{(d-1)p}{d-p}$ έχουμε από πράξεις ότι,

$$\frac{\gamma d}{d-1} = \frac{\gamma p}{p-1}$$

Άρα για $q = \frac{p}{p-1}$ έχουμε ότι $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, άρα:

$$\|u\|^\gamma_{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{\gamma}{d}\|u\|^{\gamma-1}_{\frac{p}{p-1}}\|Du\|_p$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \|u\|^\gamma_{\frac{\gamma d}{d-1}} &\leq \frac{\gamma}{d}\|u\|^{\gamma-1}_{\frac{\gamma p}{p-1}}\|Du\|_p \\ &\leq \frac{\gamma}{d}\|u\|^{\gamma-1}_{\frac{\gamma d}{d-1}}\|Du\|_p \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} & \|u\|^\gamma_{\frac{\gamma d}{d-1}} \leq \frac{\gamma}{d}\|u\|^{\gamma-1}_{\frac{\gamma d}{d-1}}\|Du\|_p \\ \Leftrightarrow\ & \|u\|_{\frac{\gamma d}{d-1}} \leq c\|Du\|_p \\ \Leftrightarrow\ & \|u\|_{\frac{\frac{(d-1)p}{d-p}d}{d-1}} \leq c\|Du\|_p \\ \Leftrightarrow\ & \|u\|_{\frac{dp}{d-1}} \leq c\|Du\|_p \end{aligned}$$

Θεώρημα 1.3.7. *Έστω $1 \leq p < d$ και $u \in W^{1,p}(B(x_0,R))$. Τότε*

$$\Big(\fint_{B(x_0,R)} |u|^{\frac{dp}{d-p}}\Big)^{\frac{d-p}{dp}} \leq c\Big(R^p\fint_{B(x_0,R)}|Du|^p dx + \fint_{B(x_0,R)}|u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},$$

όπου c_0 εξαρτάται μόνο από το p και q.

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας αρκεί να δείξουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $x_0 = 0$ και $R = 1$, καθώς με την αλλαγή μεταβλητής $y = Rx$ μπορούμε να έρθουμε στην ζητούμενη ανισότητα, οπότε $u \in W^{1,p}(B(0,1))$. Επεκτείνουμε την ακτίνα μία μονάδα παραπάνω και πηγαίνουμε στην μπάλλα $B(0,2)$, θετοντας

$$\tilde{u}(x) = u\Big(\frac{x}{|x|^2}\Big), \qquad |x| > 1$$

Για λόγους ευκολίας θα συμβολίζουμε,

$$u(x) = u\Big(\frac{x}{|x|^2}\Big), \qquad |x| > 1$$

. Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει:

$$\|u\|_{W^{1,p}(B(0,2))} \leq c_1 \|u\|_{W^{1,p}(B(0,1))}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
(\|u\|_{W^{1,p}(B(0,2))})^p &= \int_{B(0,2)} (\|u\|^p + \|\nabla u\|^p)dx \\
&= \int_{B(0,1)} (\|u\|^p + \|\nabla u\|^p)dx + \int_{B(0,2)\setminus B(0,1)} (\|u\|^p + \|\nabla u\|^p)dx \\
& \quad \text{Θέτουμε στο δεύτερο ολοκλήρωμα } y = \frac{x}{\|x\|^2} \\
&= \int_{B(0,1)} (\|u\|^p + \|\nabla u\|^p)dx + c\int_{B(0,1)} (\|u\|^p + \|\nabla u\|^p)dy \\
&\leq c_1 \int_{B(0,1)} (\|u\|^p + \|\nabla u\|^p)dx \\
&\Rightarrow \|u\|_{W^{1,p}(B(0,2))} \leq c_1 \|u\|_{W^{1,p}(B(0,1))}
\end{aligned}$$

Θεωρούμε μία $\eta \in C_c^\infty(B(0,2))$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
&\eta = 1, \text{ στο } B(0,1) \\
&\eta \geq 0 \text{ στο } B(0,1) \\
&\text{Υπάρχει } c > 0 \text{ τέτοιο ώστε } |D\eta| < c
\end{aligned}$$

Θέτουμε $v = \eta u \in W^{1,p}(B(0,2))$ και έχουμε από το Θεώρημα 1.3.6 ότι,

$$\Big(\int_{B(0,2)} |v|^{\frac{dp}{d-p}} dx\Big)^{\frac{d-p}{dp}} \leq c_2\Big(\int_{B(0,2)} |Dv|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Αν παραγωγίσουμε την Dv θα πάρουμε,

$$Dv = \eta Du + uD\eta$$

Ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} |Dv|^p &= |\eta Du + uD\eta|^p \\ &\leq c_3|Du|^p + c_3|u|^p \\ &= c_3(|Du|^p + |u|^p) \end{aligned}$$

Άρα λόγω της ανισότητας,

$$\|u\|_{W^{1,p}(B(0,2))} \leq c_1\|u\|_{W^{1,p}(B(0,1))}$$

έχουμε ότι,

$$\int_{B(0,2)} |Dv|^p dx \leq c_4\Big(\int_{B(0,1)} |Du|^p dx + \int_{B(0,1)} |u|^p dx\Big)$$

Τέλος ισχύουν ότι

$$\begin{aligned} &1) \quad \Big(\int_{B(0,2)} |v|^{\frac{dp}{d-p}} dx\Big)^{\frac{d-p}{dp}} \leq c_2\Big(\int_{B(0,2)} |Dv|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &2) \quad \int_{B(0,1)} |u|^{\frac{dp}{d-p}} dx \leq \int_{B(0,2)} |v|^{\frac{dp}{d-p}} dx \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε,

$$\Big(\fint_{B(0,1)} |u|^{\frac{dp}{d-p}}\Big)^{\frac{d-p}{dp}} \leq c\Big(\fint_{B(0,1)} |Du|^p dx + \fint_{B(0,1)} |u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

1.4 Ανισότητα Harnack στην εξίσωση Laplace

Θα ασχοληθούμε με την ανισότητα Harnack στις ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, παρόλα αυτά η ανισότητα Harnack υφίσταται και στις αρμονικές λύσεις της εξίσωσης Laplace.

Θεώρημα 1.4.1. *Θεωρούμε u θετική λύση της εξίσωσης Laplace* $\Delta u = 0$ *στο συμπαγές σύνολο* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*. Τότε για οποιοδήποτε ανοικτό, συνεκτικό υποσύνολο* $U \subset\subset \Omega$ *έχουμε ότι:*

$$\sup_U u \leq c \inf_U u,$$

όπου c εξαρτάται μόνο από το σύνολο U.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι η απόσταση του συνόρου Ω με το σύνολο U έχει απόσταση $4R$, άρα $dist(\partial\Omega, U) = 4R$. Έστω $x \neq y$, που ανήκουν και τα δύο στο U, τέτοια ώστε $|x - y| \leq R$. Τότε από το Θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} u(x) &= \fint_{B(x,2R)} u(z)dz \\ &= \frac{1}{\omega_d 2^d R^d} \int_{B(x,R)} u(z)dz \\ &\geq \frac{1}{\omega_d 2^d R^d} \int_{B(y,R)} u(z)dz \\ &\geq \frac{1}{2^d} \int_{B(y,R)} u(z)dz \\ &= \frac{u(y)}{2^d} \end{aligned}$$

Τώρα για κάθε $x, y \in U$ λόγω συμπάγειας μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο πλήθος μπαλών ακτίνας μικρότερης του R η καθεμία, που να δημιουργούν έναν αλυσιδωτό δρόμο από τον x στον y μήκους N (όπου εξαρτάται από την διάμετρο του U και το R). Άρα έχουμε ότι:

$$u(x) \geq 2^{-Nd} u(y)$$

Οπότε έχουμε ότι,

$$\sup_U u \leq c \inf_U u,$$

Πριν ξεκινήσουμε την περιγραφή της ανισότητας Harnack στις ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι σημαντικό να αναφέρουμε, ότι η ανισότητα Harnack υφίσταται και στις παραβολικού τύπου μερικές διαφορικές εξισώσεις, ο αναγνώστης μπορεί να κοιτάξει την εργασία, των Düzgün, Mosconi και Vespri, με τίτλο Harnack and Pointwise Estimates for Degenerate or Singular Parabolic Equations (2019).

2 Ελλειπτική Εξίσωση σε Μορφή Απόκλισης

2.1 Ασθενείς Λύσεις-Υπολύσεις-Υπερλύσεις

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{d} D_j\Big(\alpha^{ij}(x)D_i u(x)\Big) = 0$$

Οι συντελεστές α^{ij} είναι φραγμένες μετρήσιμες συναρτησείς, ισχύει $\alpha^{ij}(x) = \alpha^{ji}(x)$ και ικανοποιούν την συνθήκη ομοιόμορφης ελλειπτικότητας. Οπότε υπάρχουν σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ με,

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} \alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

δηλαδή ο πίνακας που ορίζει την ελλειπτική εξίσωση έχει ιδιοτιμές που ανήκουν στο διάστημα $[\lambda, \Lambda]$.

Ορισμός 2.1.1. *(Ασθενής λύση) Μία συνάρτηση $u \in H^1(\Omega)$ καλείται ασθενής λύση της εξίσωσης $Lu = 0$ αν για όλες τις $\phi \in H_0^1(\Omega)$ έχουμε ότι*

$$\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j \phi \, dx = 0$$

Παρατηρούμε οτι με τον ορισμό 2.1.1 κάθε κλασική λύση είναι και αυτή ασθενής λύση της ελλειπτικής εξίσωσης με μορφή απόκλισης.
Πράγματι, αν $u \in C^2(\overline{\Omega})$, τότε ισχύει ότι:

$$Lu = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} D_j\Big(\alpha^{ij}(x)D_i u(x)\Big) = 0 \text{ στο } \Omega$$

Πολλαπλασιάζουμε με μία τυχαία συνάρτηση δοκιμής $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ και έχουμε ότι:

$$\sum_{i,j} D_j\Big(\alpha^{ij}(x)D_i u(x)\Big)\phi(x) = 0 \text{ στο } \Omega$$

Ολοκληρώνουμε στο Ω και έχουμε ότι:

$$\int_\Omega \sum_{i,j} D_j\Big(\alpha^{ij}(x)D_iu(x)\Big)\phi(x)\,dx = 0$$

Εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες και έχουμε ότι:

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x)D_iu(x)\phi(x)\,ds - \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x)D_iu(x)D_j\phi(x)\,dx = 0$$

Η ϕ μηδενίζεται σε μία περιοχή του συνόρου, άρα το συνοριακό ολοκλήρωμα κάνει μηδέν,οπότε :

$$-\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x)D_iu(x))D_j\phi(x)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x)D_iu(x)D_j\phi(x)\,dx = 0$$

Άρα πράγματι η u είναι ασθενής λύση.
Επίσης με την μελέτη ασθενών λύσεων δεν μας ενδιαφέρει η συνέχεια των συντελεστών α^{ij}, αρκεί να είναι φραγμένοι και μετρήσιμοι όπως αναφέραμε και στον ορισμό της ελλειπτικής εξίσωσης. Τέλος να σημειώσουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι εξαιρετικά δύσκολο να δοθεί σε κλειστή μορφή ακόμα και σε μικρότερες διαστάσεις ή σε πιο απλοποιημένη μορφή, για παράδειγμα ο πίνακας συντελεστών να είναι ο μοναδιαίος.
Θα ορίσουμε τώρα κάποιες βοηθητικές συναρτήσεις, που θα μας ανοίξουν τον δρόμο για την απόδειξη των θεωρημάτων του Moser , οπου και θα μας δώσουν την ανισότητα Harnack.
Έστω $u \in W^{1,2}(\Omega)$ τότε ισχύει ότι ,

$$Lu \geq 0 \Rightarrow \sum_{i,j} D_j\Big(\alpha^{ij}(x)D_iu(x)\Big) \geq 0 \text{ στο } \Omega$$

Πολλαπλασιάζουμε με μία τυχαία θετική συνάρτηση δοκιμής $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ και έχουμε ότι:

$$\sum_{i,j} D_j\Big(\alpha^{ij}(x)D_iu(x)\Big)\phi(x) \geq 0 \text{ στο } \Omega$$

Ολοκληρώνουμε στο Ω και έχουμε ότι:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} D_j\Big(\alpha^{ij}(x) D_i u(x)\Big)\phi(x)\, dx \geq 0$$

Εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες και έχουμε ότι:

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{i,j} \Big(\alpha^{ij}(x) D_i u(x)\Big)\phi(x)\, ds - \int_{\Omega} \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u(x) D_j \phi(x)\, dx \geq 0$$

Η ϕ μηδενίζεται σε μία περιοχή του συνόρου, άρα το συνοριακό ολοκλήρωμα κάνει μηδέν,οπότε :

$$-\int_{\Omega} \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u(x) D_j \phi(x)\, dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u(x) D_j \phi(x)\, dx \leq 0$$

Ορισμός 2.1.2. *(Ασθενής υπολύση ή ασθενής κάτω λύση) Μία συνάρτηση $u \in H^1(\Omega)$ καλείται ασθενής υπολύση της εξίσωσης $Lu = 0$ και συμβολίζουμε $Lu \geq 0$ αν για όλες τις $\phi \in H_0^1(\Omega)$ με $\phi \geq 0$ στο Ω έχουμε ότι*

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j \phi\, dx \leq 0$$

Άντιστοιχα με μία αλλαγή μόνο στις φορές των ανισοτήτων έχουμε ότι:

Ορισμός 2.1.3. *(Ασθενής υπερλύση ή ασθενής άνω λύση) Μία συνάρτηση $u \in H^1(\Omega)$ καλείται ασθενής ύπερλυση της εξίσωσης $Lu = 0$ και συμβολίζουμε $Lu \leq 0$ αν για όλες τις $\phi \in H_0^1(\Omega)$ με $\phi \geq 0$ στο Ω έχουμε ότι,*

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j \phi\, dx \geq 0$$

Λήμμα 2.1.4. *(i)Έστω $u \in C^2(\Omega)$ υπολύση,δηλαδη $Lu \geq 0$ και έστω $f \in C^2(\mathbb{R})$ κύρτη με $f' \geq 0$. Τότε $f \circ u$ είναι μία υπολύση.*
(ii)Έστω $u \in C^2(\Omega)$ υπερλύση, δηλαδη $Lu \geq 0$ και έστω $f \in C^2(\mathbb{R})$ είναι κοίλη με $f' \geq 0$. Τότε $f \circ u$ είναι μία υπερλύση.
(iii)Έστω υ μία λύση και $f \in C^2(\mathbb{R})$ κυρτή, τότε $f \circ u$ είναι υπολύση.

Απόδειξη

(i) Ισχύει ότι,

$$
\begin{aligned}
L(f\circ u) &= \sum_{i,j} D_j\Big(a^{ij}(x)f'(u)D_ju\Big)\\
&= \sum_{i,j}(a^{ij}(x)D_iuf''(u)D_ju) + \sum_{i,j} f'(u)D_j\Big(a^{ij}(x)D_iu\Big)\\
&= f''(u)\sum_{i,j}\Big(a^{ij}(x)D_iuD_ju\Big) + f'(u)Lu
\end{aligned}
$$

Ισχύει ότι,

- $f'(u) \geq 0$
- $f''(u) \geq 0$ διότι η f είναι κυρτή
- Λόγω της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας έχουμε ότι

  $$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} \alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

  θέτουμε $\xi = u$ άρα

  $$0 \leq \lambda|u|^2 \leq \sum_{i,j} a^{ij}(x)D_iuD_ju$$

Οπότε, $L(f\circ u) \geq 0$, δηλαδή η $f\circ u$ είναι υπολύση.

(ii) Ισχύει ότι,

$$L(f\circ u) = f''(u)\sum_{i,j}\Big(a^{ij}(x)D_iuD_ju\Big) + f'(u)Lu.$$

Ισχύει ότι,

- $f'(u) \geq 0$

- $f''(u) \leq 0$ διότι η f είναι κοίλη

- Λόγω της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας έχουμε ότι

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} \alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

θέτουμε $\xi = u$ άρα

$$0 \leq \lambda|u|^2 \leq \sum_{i,j} a^{ij}(x)D_iuD_ju$$

Οπότε $L(f \circ u) \leq 0$, δηλαδή η $f \circ u$ είναι υπερλύση.

(iii) Ισχύει ότι,

$$L(f \circ u) = f''(u)\sum_{i,j}\Big(a^{ij}(x)D_iuD_ju\Big) + f'(u)Lu$$

Ισχύει ότι,

- $Lu = 0$, διότι είναι λύση

- $f''(u) \geq 0$ διότι η f είναι κυρτή

- Λόγω της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας έχουμε ότι

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} \alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

θέτουμε $\xi = u$ άρα

$$0 \leq \lambda|u|^2 \leq \sum_{i,j} a^{ij}(x)D_iuD_ju$$

Οπότε $L(f \circ u) \geq 0$, δηλαδή η $f \circ u$ είναι υπολύση.
Το Λήμμα 2.1.4 ισχύει για συνεχείς υπο-υπέρ λύσεις, θα δείξουμε ότι ισχύει και για ασθενείς υπο-υπερ λύσεις.

Λήμμα 2.1.5. *Έστω u ασθενής υπολύση στο Ω, δηλαδή $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Έστω f συνάρτηση που ικανοποιεί τις ολοκληρώσιμες συνθήκες για τον κανόνα της αλυσίδας στην ασθενή παράγωγο (δηλαδή $\sup|f'(x)| + \sup|f''(x)| < \infty$) με $D_i(f \circ u) = f'(u)D_i(u)$ και $D_i(f' \circ u) = f''(u)D_i(u)$ για $i = 1, ..., d$. Τότε:*
(i)Αν u είναι μία υπολύση, δηλαδή $Lu \geq 0$ και f είναι κύρτη με $f' \geq 0$. Τότε $f \circ u$ είναι υπολύση.
(ii)Αν u είναι μία υπερλύση, δηλαδή $Lu \leq 0$ και f είναι κοίλη με $f' \geq 0$. Τότε $f \circ u$ είναι υπερλύση.

Απόδειξη

(i)
Ισχύει ότι,

$$\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i(f \circ u) D_j\phi \, dx = \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) f'(u) D_i u D_j \phi \, dx$$

Ισχύει ότι,

$$D_j(f'(u)\phi) = f''(u)D_j(u)\phi + f'(u)D_j(\phi) \Rightarrow f'(u)D_j(\phi) = D_j(f'(u)\phi) - f''(u)D_j(u)\phi$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) f'(u) D_i u D_j \phi \, dx &= \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u \Big(D_j \Big(f'(u)\phi \Big) - f''(u) D_j(u)\phi \Big) \, dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u \Big(D_j(f'(u)\phi) \Big) \, dx \\
&\quad - \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u \Big(D_j(f''(u) D_j(u))\phi \Big) \, dx
\end{aligned}$$

- $f''(u) \geq 0$ διότι είναι κυρτή

- $\phi \geq 0$

- Λόγω της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας έχουμε ότι

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} \alpha^{ij}(x) \xi_i \xi_j$$

θέτουμε $\xi = Du$ άρα

$$0 \le \lambda |u|^2 \le \sum_{i,j} a^{ij}(x) D_i u D_j u \tag{2. 1}$$

Άρα ,

$$\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j \Big(f''(u) D_j(u) \Big) \phi \, dx \ge 0$$
$$\Rightarrow \quad -\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j (f''(u) D_j(u)) \phi \, dx \le 0$$

Επίσης,

$$Lu \ge 0, \text{ άρα } \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u (D_j (f'(u)\phi)) \, dx \le 0$$

Οπότε,

$$\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i (f \circ u) D_j \phi \, dx \le 0$$

Συνεπώς η $f \circ u$ είναι μία ασθενής υπολύση.

(ii)
Ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i (f \circ u) D_j \phi \, dx &= \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) f'(u) D_i u D_j \phi \, dx \\ &= \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u (D_j (f'(u)\phi)) \, dx \\ &\quad - \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u (D_j (f''(u) D_j(u)) \phi \, dx \end{aligned}$$

Ισχύουν τα εξής:

- $f''(u) \le 0$ διότι είναι κοίλη

- $\phi \ge 0$

- Από την σχέση (2. 1) έχουμε ότι:

$$0 \leq \lambda |u|^2 \leq \sum_{i,j} a^{ij}(x) D_i u D_j u$$

Άρα ,

$$\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u (D_j \Big(f''(u) D_j(u) \Big) \phi \, dx \leq 0$$

και συνεπώς

$$-\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u (D_j \Big(f''(u) D_j(u) \Big) \phi \, dx \geq 0.$$

Επίσης $Lu \leq 0$ άρα

$$\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u (D_j \Big(f'(u) \phi) \Big) \, dx \geq 0.$$

Οπότε,

$$\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i \Big(f \circ u \Big) D_j \phi \, dx \geq 0$$

Συνεπώς η $f \circ u$ είναι μία ασθενής υπερλύση.

Λήμμα 2.1.6. *Έστω u ασθενής υπολύση της εξίσωσης $Lu = 0$ και $k \in \mathbb{R}$. Τότε η*

$$v(x) = \max(u(x), k) = \begin{cases} u(x) & , u(x) \geq k \\ k & , u(x) < k \end{cases}$$

είναι μία ασθενής υπολύση.

Απόδειξη

Θεωρούμε την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(y) = \max(y, k)$, τότε $v = f \circ u$. Προσεγγίζουμε την f από μια ακολουθία $f_n \in C^2(\mathbb{R})$ κυρτών συναρτήσεων με $f_n(y) = f(y)$, για $y \notin (k - \frac{1}{n}, k + \frac{1}{n})$ και $0 \leq f_n'(y) \leq 1$.
Είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$v_n = f_n \circ u \to f \circ u = v \in H^1(\Omega)$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i v(D_j\phi))\, dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i(v_n) D_j\phi\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i(f_n\circ u) D_j\phi\, dx \leq 0\end{aligned}$$

Πράγματι,

- $f_n'(u) \geq 0$ επειδη $f_n'(y) = 1$, καθώς βρισκόμαστε έξω από περιοχή του k

- f_n κυρτές

- u υπολύση

και από το λήμμα 2.1.5 παίρνουμε το ζητούμενο. Άρα $f\circ u$ υπολύση.
Αντίστοιχα,έχουμε ότι:

Λήμμα 2.1.7. *Έστω u ασθενής ύπερλυση της εξίσωσης $Lu = 0$ και $k\in\mathbb{R}$. Τότε η*

$$v(x) = \min(u(x), k) = \begin{cases} u(x) & , u(x) \leq k \\ k & , u(x) > k \end{cases}$$

είναι μία ασθενής υπερλύση.

Απόδειξη

Αφού η u είναι ασθενής υπερλύση, αυτό σημαίνει ότι η $-u$ είναι ασθενής υπολύση. Οπότε η $\max(-u(x), k)$ είναι ασθενής υπολύση σύμφωνα με το Λήμμα 2.1.6. Όμως,

$$-\max(-u(x), k) = \min(u(x), k)$$

Άρα η $\min(u(x), k)$ είναι ασθενής υπερλύση.

2.2 Εκτιμήσεις Moser

Πριν προχωρήσουμε στις εκτιμήσεις του Moser θα δείξουμε δύο βασικά λήμματα. Θεωρούμε μία θετική συνάρτηση u στο Ω και την απεικόνιση:

$$\phi(p,\Omega) = \left(\fint_\Omega u^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Λήμμα 2.2.1. *Ισχύει ότι,*

$$\begin{array}{ll} 1) & \lim_{p\to\infty}\phi(p,\Omega)=\sup_\Omega u=\phi(\infty,\Omega) \\ 2) & \lim_{p\to-\infty}\phi(p,\Omega)=\inf_\Omega u=\phi(-\infty,\Omega) \end{array}$$

Απόδειξη

Για αρχή θα δείξουμε ότι η $\phi(p,\Omega)$ είναι αύξουσα συνάρτηση.
Θεωρούμε $p<p'$.
Για του συζυγείς εκθέτες $\frac{p'}{p'-p}$, $\frac{p'}{p}$ από την ανισότητα Hölder έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^p\,dx \le \frac{1}{|\Omega|}\Big(\int_\Omega dx\Big)^{\frac{p'-p}{p'}}\Big(\int_\Omega u^{p'}\,dx\Big)^{\frac{p}{p'}} \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^p\,dx \le \frac{1}{|\Omega|}\Big(\int_\Omega dx\Big)^{\frac{p'-p}{p'}}\Big(\int_\Omega u^{p'}\,dx\Big)^{\frac{p}{p'}} \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^p\,dx \le \frac{1}{|\Omega|}|\Omega|^{\frac{p'-p}{p'}}\Big(\int_\Omega u^{p'}\,dx\Big)^{\frac{p}{p'}} \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^p\,dx \le |\Omega|^{\frac{-p}{p'}}\Big(\int_\Omega u^{p'}\,dx\Big)^{\frac{p}{p'}} \end{aligned}$$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στην $\frac{1}{p}$,άρα

$$\begin{aligned} & \Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le |\Omega|^{\frac{-1}{p'}}\Big(\int_\Omega u^{p'}\,dx\Big)^{\frac{1}{p'}} \\ \Rightarrow\ & \Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^{p'}\,dx\Big)^{\frac{1}{p'}} \\ \Rightarrow\ & \phi(p,\Omega)\le\phi(p',\Omega) \end{aligned}$$

Άρα η $\phi(p,\Omega)$ είναι αύξουσα.

Αυτό μας δίνει ότι:

$$\phi(p,\Omega)\le\phi(\infty,\Omega)=\lim_{n\to+\infty}\phi(p,\Omega)$$

Έστω $\epsilon>0$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A=\{x\in\Omega, u(x)\ge\sup_\Omega(u)-\epsilon\}$$

Άρα για το A έχουμε ότι $|A| > 0$. Οπότε,

$$\begin{aligned}
\phi(p,\Omega) &= \Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_A u^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_A (\sup_\Omega(u)-\epsilon)^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{\sup_\Omega(u)-\epsilon}{|\Omega|^{\frac{1}{p}}}|A|^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε ότι,

$$\phi(p,\Omega) \geq \frac{\sup_\Omega(u)-\epsilon}{|\Omega|^{\frac{1}{p}}}|A|^{\frac{1}{p}}$$

Θα πάρουμε τώρα τα όρια και στα δύο μέλη και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty}\phi(p,\Omega) &\geq \lim_{p\to\infty}\frac{\sup_\Omega(u)-\epsilon}{|\Omega|^{\frac{1}{p}}}|A|^{\frac{1}{p}} \\
\lim_{p\to\infty}\phi(p,\Omega) &\geq \sup_\Omega(u)-\epsilon
\end{aligned}$$

Αφήνουμε το ε να πάει στο μηδέν, οπότε :

$$\phi(\infty,\Omega) \geq \sup_\Omega(u)$$

Ισχύει και ότι:

$$\phi(\infty,\Omega) \leq \sup_\Omega(u)$$

Συνοψίζοντας, λοιπόν, έχουμε ότι:

$$\phi(\infty,\Omega) = \sup_\Omega(u)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι:

$$\phi(-\infty,\Omega) = \inf_\Omega(u)$$

Λόγω του ότι η ϕ είναι αύξουσα έχουμε ότι :

$$\phi(p,\Omega) \geq \phi(-\infty,\Omega)$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x\in\Omega, u(x) \leq \inf_\Omega(u)+\epsilon\}$$

Άρα για το A έχουμε ότι $|A| > 0$. Οπότε,

$$\begin{aligned}\phi(p, R) &= \Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_A u^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_A (\inf_\Omega(u) + \epsilon)^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{\inf_\Omega(u) + \epsilon}{|\Omega|^{\frac{1}{p}}}|A|^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Άρα έχουμε ότι,

$$\phi(p, \Omega) \leq \frac{\inf_\Omega(u) + \epsilon}{|\Omega|}|A|^{\frac{1}{p}}$$

Θα πάρουμε τώρα τα όρια και στα δύο μέλη και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\lim_{p\to-\infty}\phi(p, \Omega) &\leq \lim_{p\to-\infty}\frac{\inf_\Omega(u) + \epsilon}{|\Omega|}|A|^{\frac{1}{p}} \\ \lim_{p\to-\infty}\phi(p, \Omega) &\leq \inf_\Omega(u) + \epsilon\end{aligned}$$

Αφήνουμε το ε να πάει στο μηδέν, οπότε :

$$\phi(-\infty, \Omega) \geq \inf_\Omega(u)$$

Ισχυεί και ότι:

$$\phi(-\infty, \Omega) \geq \inf_\Omega(u)$$

Συνοψίζοντας, λοιπόν, έχουμε ότι:

$$\phi(-\infty, \Omega) = \inf_\Omega(u)$$

Λήμμα 2.2.2. *(i) Έστω u θετική υπολύση της εξίσωσης $Lu = 0$ και για $q > \frac{1}{2}$ υποθέτουμε ότι:*

$$v = u^q \in L^2(\Omega)$$

Για κάθε $\eta \in H_0^1(\Omega)$ έχουμε ότι:

$$\int_\Omega \eta^2|Dv|^2\,dx \leq \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2q}{2q-1})^2\int_\Omega |D\eta|^2 v^2\,dx$$

(ii) Αν η u είναι μία θετική ύπερλυση, τότε η ανισότητα ισχύει για $q < \frac{1}{2}$.

Απόδειξη

(i) Για $q = 0$ ισχύει η ανισότητα.
Πράγματι για $q = 0$ έχουμε ότι:

$$v = 1$$

Οπότε,

$$\int_\Omega \eta^2 |Dv|^2 \, dx = 0, \text{ διότι } |Dv| = |D(1)| = 0$$

$$\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2q}{2q-1})^2 \int_\Omega |D\eta|^2 v^2 \, dx = 0, \text{ διότι } v = 0$$

Υποθέτουμε ότι $q > \frac{1}{2}$
Θέτουμε :

$$f(x) = x^{2q}$$

Παρατηρούμε ότι,

- Η u είναι υπολύση
- Η $f(x) = x^{2q}$ έχει θετική παράγωγο
  Πράγματι,
  $f'(x) = 2qx^{2q-1} > 0$, διότι $q > \frac{1}{2}$
- Η $f(x) = x^{2q}$ είναι κυρτή για $q > \frac{1}{2}$
  Πράγματι,
  $f''(x) = 2q(2q-1)x^{2q-2} > 0$, διότι $q > \frac{1}{2}$

Άρα από το Λήμμα 1.2.1 έχουμε ότι η $f \circ u$ είναι υπολύση. Στον Ορισμό 2.1.2 θεωρούμε για συνάρτηση δοκιμής την,

$$\phi = f' \circ u \cdot \eta^2$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j \phi \, dx &= \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j (f'(u) \cdot \eta^2) \, dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j u \Big(f''(u) \eta^2 \Big) dx \\
&\quad + 2 \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u \Big(f'(u) \eta \Big) D_j \eta \, dx \\
&= 2q(2q-1) \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j u \Big(u^{2q-2} \eta^2 \Big) \, dx \\
&\quad + 4q \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j \eta \Big(u^{2q-1} \eta \Big) dx \\
&= 2q(2q-1) \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j u \Big(u^{2q-2} \eta^2 \Big) dx \\
&\quad + 4q \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j \eta \Big(u^{2q-1} \eta \Big) \, dx
\end{aligned}$$

Αφού η u είναι υπολύση, τότε :

$$\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j \phi \, dx \leq 0$$

Άρα έχουμε, ότι:

$$2q(2q-1) \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j u \Big(u^{2q-2} \eta^2 \Big) dx \leq -4q \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j \eta \Big(u^{2q-1} \eta \Big) \, dx \tag{1}$$

Από την συνθήκη ελλειπτικότητας ισχύει ότι,

$$2q(2q-1)\lambda \int_\Omega |Du|^2 u^{2q-2} \eta^2 \, dx \leq 2q(2q-1) \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j u \Big(u^{2q-2} \eta^2 \Big) dx$$

Άρα από την ανισότητα (1) έχουμε ότι:

$$2q(2q-1)\lambda\int_\Omega\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuD_ju\Big(u^{2q-2}\eta^2\Big)dx \leq -4q\int_\Omega\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuD_j\eta\Big(u^{2q-1}\eta\Big)dx$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
2q(2q-1)\lambda\int_\Omega|Du|^2u^{2q-2}\eta^2\,dx &\leq -4q\int_\Omega\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuu^{2q-1}\eta D_j\eta\,dx\\
&\leq \Big|4q\int_\Omega\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuu^{2q-1}\eta D_j\eta\,dx\Big|\\
&\leq 4q\int_\Omega\sum_{i,j}|\alpha^{ij}(x)D_iuu^{2q-1}\eta D_j\eta|\,dx\\
&\leq 4q\int_\Omega u^{2q-1}|\eta|\Big|\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuD_j\eta\Big|dx
\end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Cauchy–Schwarz , άρα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuD_j\eta\Big| &\leq \Big(\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuD_ju\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_i\eta D_j\eta\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \Lambda^{\frac{1}{2}}|Du|\Lambda^{\frac{1}{2}}|D\eta|\\
&\leq \Lambda|Du||D\eta|
\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
2q(2q-1)\lambda\int_\Omega|Du|^2u^{2q-2}\eta^2\,dx &\leq 4q\int_\Omega|\eta|u^{2q-1}\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuD_j\eta\,dx\\
&\leq 4q\int_\Omega|\eta|u^{2q-1}\Lambda|Du|D\eta|\,dx\\
&= 4q\Lambda\int_\Omega|\eta|u^{2q-1}|Du|D\eta|\,dx
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy–Schwarz , έχουμε ότι:

$$4q\Lambda\int_\Omega|\eta|u^{2q-1}|Du|D\eta|\,dx \leq 4q\Lambda\Big(\int_\Omega\eta^2u^{2q-2}|Du|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Θέτουμε

$$A = 2q\Lambda(\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}$$
$$B = (\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}$$

Από την ανισότητα Young έχουμε ότι:

$$2AB \leq \epsilon A^2 + \frac{1}{\epsilon}B^2$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
2q(2q-1)\lambda\int_\Omega |Du|^2u^{2q-2}\eta^2\,dx &\leq 4q\Lambda\int_\Omega |\eta|u^{2q-1}|Du|D\eta|\,dx \\
&\leq \epsilon A^2 + \frac{1}{\epsilon}B^2 \\
&\leq 2q\Lambda\Big(\epsilon\int_\Omega \eta^2u^{2q-2}|Du|^2\,dx + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx\Big) \\
&= 2q\Lambda\epsilon\int_\Omega \eta^2u^{2q-2}|Du|^2\,dx + \frac{2q\Lambda}{\epsilon}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx
\end{aligned}$$

Θέτουμε,

$$\epsilon = \frac{2q-1}{2}\frac{\lambda}{\Lambda}$$

Το $\epsilon > 0$, διότι $q > \frac{1}{2}$. Οπότε έχουμε ότι,

$$2q(2q-1)\lambda\int_\Omega |Du|^2u^{2q-2}\eta^2\,dx \leq 2q\Lambda\frac{2q-1}{2}\frac{\lambda}{\Lambda}\int_\Omega \eta^2u^{2q-2}|Du|^2\,dx + \frac{2q\Lambda}{\frac{2q-1}{2}\frac{\lambda}{\Lambda}}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx$$

Κάνοντας απαλοιφές και διαιρώντας και τα δύο μέλη με $2q(2q-1)\lambda$ έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |Du|^2u^{2q-2}\eta^2\,dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \eta^2u^{2q-2}|Du|^2\,dx + \frac{2\Lambda^2}{(2q-1)^2\lambda^2}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx \\
\Rightarrow\ &\int_\Omega |Du|^2u^{2q-2}\eta^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \eta^2u^{2q-2}|Du|^2\,dx \leq \frac{2\Lambda^2}{(2q-1)^2\lambda^2}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx \\
\Rightarrow\ &\frac{1}{2}\int_\Omega \eta^2u^{2q-2}|Du|^2\,dx \leq \frac{2\Lambda^2}{(2q-1)^2\lambda^2}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με 2, άρα έχουμε ότι:

$$\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\,dx \quad\leq\quad \frac{4\Lambda^2}{(2q-1)^2\lambda^2}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx$$

Οπότε:

$$\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\,dx \quad\leq\quad \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2}{2q-1})^2\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx$$

Τώρα αφού $v = u^q$, ισχύει ότι $|Dv|^2 = |qu^{q-1}Du|^2 = q^2u^{2q-2}|Du|^2$

$$\int_\Omega \eta^2\frac{|Dv|^2}{q^2}\,dx \quad\leq\quad \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2}{2q-1})^2\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx$$

Πολλαπλασιάζοντας με $q^2 > 0$ και στα δύο μέλη καταλήγουμε στην ζητούμενη ανισότητα,

$$\int_\Omega \eta^2|Dv|^2\,dx \quad\leq\quad \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2q}{2q-1})^2\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx$$

(ii)Έστω $q < 0$ θέτουμε:

$$f(u) = -x^{2q}$$

- Η u είναι υπερλύση
- Η $f(x) = -x^{2q}$ έχει θετική παράγωγο
  Πράγματι,
  $f'(x) = -2qx^{2q-1} > 0$, διότι $q < 0$
- Η $f(x) = x^{2q}$ είναι κοίλη για $q > \frac{1}{2}$
  Πράγματι,
  $f''(x) = -2q(2q-1)x^{2q-2} > 0$, διότι $q < 0$

Άρα από το Λήμμα 1.2.1 έχουμε ότι η $f(u)$ είναι ύπερλύση. Από τον Ορισμό 2.1.3 θεωρούμε για συνάρτηση δοκιμής την,

$$\phi = f' \circ u \cdot \eta^2$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j \phi \, dx &= \int_\Omega 2q(1-2q) \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j u u^{2q-2} \eta^2 \, dx \\ &\quad + \int_\Omega 4q \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u u^{2q-1} \eta D_j \eta \, dx\end{aligned}$$

Αφού η u είναι υπερλύση, τότε :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j \phi \, dx \geq 0 \\ \Rightarrow \quad &\int_\Omega 2q(1-2q) \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j u u^{2q-2} \eta^2 \, dx + \int_\Omega 4q \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u u^{2q-1} \eta D_j \eta \, dx \geq 0 \\ \Rightarrow \quad &2q(1-2q) \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j u u^{2q-2} \eta^2 \, dx \geq -4q \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u u^{2q-1} \eta D_j \eta \, dx\end{aligned}$$

Άρα έχουμε, ότι:

$$2q(2q-1) \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j u u^{2q-2} \eta^2 \, dx \leq 4q \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u u^{2q-1} \eta D_j \eta \, dx \tag{1}$$

Από την συνθήκη ελλειπτικότητας και το γεγονός ότι $q < 0$ ισχύει ότι,

$$2q(2q-1)\lambda \int_\Omega |Du|^2 u^{2q-2} \eta^2 \, dx \leq 2q(2q-1) \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j u u^{2q-2} \eta^2 \, dx$$

Άρα,

$$2q(2q-1)\lambda \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u D_j u u^{2q-2} \eta^2 \, dx \leq 4q \int_\Omega \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) D_i u u^{2q-1} \eta D_j \eta \, dx$$

Επειδή $q < 0$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
2q(2q-1)\lambda\int_\Omega |Du|^2u^{2q-2}\eta^2\,dx &\leq 4q\int_\Omega\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuu^{2q-1}\eta D_j\eta\,dx\\
&\leq \Big|4q\int_\Omega\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuu^{2q-1}\eta D_j\eta\,dx\Big|\\
&= -4q\Big|\int_\Omega\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuu^{2q-1}\eta D_j\eta\,dx\Big|\\
&\leq -4q\int_\Omega\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuu^{2q-1}|\eta|D_j\eta\,dx\\
&\leq -4q\int_\Omega|\eta|u^{2q-1}\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuD_j\eta\,dx
\end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Cauchy–Schwarz , άρα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuD_j\eta &\leq \Big(\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuD_ju\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_i\eta D_j\eta\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \Lambda^{\frac{1}{2}}|Du|\Lambda^{\frac{1}{2}}|D\eta|\\
&\leq \Lambda|Du||D\eta|
\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
2q(2q-1)\lambda\int_\Omega |Du|^2u^{2q-2}\eta^2\,dx &\leq -4q\int_\Omega|\eta|u^{2q-1}\sum_{i,j}\alpha^{ij}(x)D_iuD_j\eta\,dx\\
&\leq -4q\int_\Omega|\eta|u^{2q-1}\Lambda|Du|D\eta|\,dx\\
&\leq -4q\Lambda\int_\Omega(|\eta|u^{q-1}|Du|)(u^q|D\eta|)\,dx\\
&= -4q\Lambda\int_\Omega|\eta|u^{2q-1}|Du|D\eta|\,dx
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy–Schwarz , έχουμε ότι:

$$-4q\Lambda\int_\Omega|\eta|u^{2q-1}|Du|D\eta|\,dx \leq -4q\Lambda\Big(\int_\Omega\eta^2u^{2q-2}|Du|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Αν θέσουμε τώρα,

$$A = -2q\Lambda(\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\, dx)^{\frac{1}{2}}$$
$$B = (\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\, dx)^{\frac{1}{2}}$$

Από την ανισότητα Young έχουμε ότι:

$$2AB \le \epsilon\frac{A}{2} + \frac{1}{\epsilon}B$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
2q(2q-1)\lambda\int_\Omega |Du|^2 u^{2q-2}\eta^2\, dx &\le -4q\Lambda\int_\Omega |\eta| u^{2q-1}|Du|D\eta|\, dx \\
&\le \epsilon\frac{A}{2} + \frac{1}{\epsilon}B \\
&\le -2q\Lambda\epsilon(\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\, dx + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\, dx) \\
&= -2q\Lambda\epsilon\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\, dx - \frac{2q\Lambda}{\epsilon}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\, dx)
\end{aligned}$$

θέτουμε,

$$\epsilon = \frac{1-2q}{2}\frac{\lambda}{\Lambda}$$

Το $\epsilon > 0$, διότι $q < 0$. Οπότε έχουμε ότι,

$$2q(2q-1)\lambda\int_\Omega |Du|^2 u^{2q-2}\eta^2\, dx \le -2q\Lambda\frac{1-2q}{2}\frac{\lambda}{\Lambda}\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\, dx - \frac{2q\Lambda}{\frac{1-2q}{2}\frac{\lambda}{\Lambda}}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\, dx$$

Κάνοντας απαλοιφές και διαιρώντας και τα δύο μέλη με $2q(1-2q)\lambda < 0$ έχουμε ότι,

$$
\begin{aligned}
& -\int_\Omega |Du|^2 u^{2q-2}\eta^2\,dx \geq -\frac{1}{2}\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\,dx - \frac{2\Lambda^2}{(1-2q)^2\lambda^2}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx \\
\Rightarrow\ & -\int_\Omega |Du|^2 u^{2q-2}\eta^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\,dx \geq -\frac{2\Lambda^2}{(2q-1)^2\lambda^2}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx \\
\Rightarrow\ & -\frac{1}{2}\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\,dx \geq -\frac{2\Lambda^2}{(2q-1)^2\lambda^2}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{2}\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\,dx \leq \frac{2\Lambda^2}{(2q-1)^2\lambda^2}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx
\end{aligned}
$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με 2, άρα έχουμε ότι:

$$
\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\,dx \quad \leq \quad \frac{4\Lambda^2}{(2q-1)^2\lambda^2}\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx
$$

Οπότε:

$$
\int_\Omega \eta^2 u^{2q-2}|Du|^2\,dx \quad \leq \quad \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2}{2q-1})^2\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx
$$

Τώρα αφού $v = u^q$, ισχύει ότι $|Dv|^2 = |qu^{q-1}Du|^2 = q^2 u^{2q-2}|Du|^2$

$$
\int_\Omega \eta^2 \frac{|Dv|^2}{q^2}\,dx \quad \leq \quad \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2}{2q-1})^2\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx
$$

Πολλαπλασιάζοντας με $q^2 > 0$ και στα δύο μέλη καταλήγουμε στην ζητούμενη ανισότητα,

$$
\int_\Omega \eta^2 |Dv|^2\,dx \quad \leq \quad \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2q}{2q-1})^2\int_\Omega u^{2q}|D\eta|^2\,dx
$$

(iii) Έστω $0 < q < \frac{1}{2}$.

Τότε θεωρούμε την u^{2q}, η οποία είναι υπολύση της εξίσωσης $Lu = 0$ και συνεχίζουμε παρόμοια, οι πράξεις παραλείπονται.

Έχοντας τώρα τα δύο λήμματα, θα παρουσιάσουμε την απόδειξη των δύο θεωρημάτων του Moser , τα οποία θα χρειαστούν για την απόδειξη της ανισότητας Harnack.

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω u θετική υπολύση της εξίσωσης $Lu = 0$ ορισμένη στην μπάλα $B(x_0, 4R) \subset \mathbb{R}^d, (R > 0)$ και $p > 1$. Τότε*

$$\sup_{B(x_0,R)}(u) \leq c_1(\frac{p}{p-1})^{\frac{2}{p}}\left(\fint_{B(x_0,2R)} u^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

όπου η σταθερά c_1 εξαρτάται από το d και το $\frac{\Lambda}{\lambda}$.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι, η ανισότητα δεν εξαρτάται από ποιο κέντρο x_0 ή ακτίνα θα διαλέξουμε για την ανοικτή μπάλα, καθώς όποια και να διαλέξουμε αν κάνουμε μία κατάλληλη κλιμακοποίηση μπορούμε να πάμε σε οποια μπάλα επιθυμούμε. Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε ότι,

$$R = 1 \text{ και } x_0 = 0$$

Για $r > 0$ θα συμβολίζουμε στο εξής:

$$B_r = B(0, r)$$

Έστω $0 < r' < r \leq 2r'$.
Θεωρούμε συνάρτηση $\eta \in H_0^1(B_r)$ τέτοια ώστε:

$$\eta = \begin{cases} 1 & , \text{ στο } B_{r'} \\ 0 & , \text{ στο } \mathbb{R}^d \setminus B_r \end{cases}$$

$$|D\eta| \leq \frac{m}{r - r'}$$

Θέτουμε,

$$v = u^q, \qquad q > \frac{1}{2}$$

Από το Θεώρημα 1.3.7 (Ανισότητα Sobolev) έχουμε οτι:

$$\Big(\fint_{B_{r'}} v^{\frac{2d}{d-2}}\Big)^{\frac{d-2}{d}} dx \le c\Big(r'^2 \fint_{B_{r'}} |Dv|^2 dx + \fint_{B_{r'}} v^2 dx\Big), d \ge 2$$

Θα ελέγξουμε πρώτα για $d \ge 3$.
Από το Λήμμα 2.2.2 έχουμε ότι:

$$\int_\Omega \eta^2 |Dv|^2 \, dx \le \frac{\Lambda^2}{\lambda^2} (\frac{2q}{2q-1})^2 \int_\Omega |D\eta|^2 v^2 \, dx$$

και επειδή $supp(u) \subset B_r$, έχουμε ότι:

$$\int_{B_r} \eta^2 |Dv|^2 \, dx \le \frac{\Lambda^2}{\lambda^2} (\frac{2q}{2q-1})^2 \int_{B_r} |D\eta|^2 v^2 \, dx$$

Όμως ισχύει ότι,

$$|D\eta| \le \frac{m}{r - r'}$$

Άρα,

$$\int_{B_r} \eta^2 |Dv|^2 \, dx \le \frac{\Lambda^2}{\lambda^2} (\frac{2q}{2q-1})^2 \int_{B_r} (\frac{m}{r-r'})^2 v^2 \, dx$$

Αφού $\eta = 1$ στο $B_{r'}$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_{B_{r'}} |Dv|^2 \, dx \le \frac{\Lambda^2}{\lambda^2} (\frac{2q}{2q-1})^2 \int_{B_r} (\frac{m}{r-r'})^2 v^2 \, dx$$

Εν τέλει,

$$\begin{aligned}
\Big(\fint_{B_{r'}} v^{\frac{2d}{d-2}} dx\Big)^{\frac{d-2}{d}} &\le c\Big(r'^2 \fint_{B_{r'}} |Dv|^2 dx + \fint_{B_{r'}} v^2 dx\Big), \\
&\le c\Big(r'^2 \frac{1}{|B_{r'}|} \frac{\Lambda^2}{\lambda^2} (\frac{2q}{2q-1})^2 \int_{B_r} (\frac{m}{r-r'})^2 v^2 \, dx + \fint_{B_{r'}} v^2 dx\Big) \\
&= c \int_{B_r} v^2 dx \Big(r'^2 \frac{1}{|B_r|} \frac{\Lambda^2}{\lambda^2} (\frac{2q}{2q-1})^2 \frac{m^2}{r-r'} + \frac{1}{|B_{r'}|}\Big) \\
&= c \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} v^2 dx \Big(r'^2 \frac{\Lambda^2}{\lambda^2} (\frac{2q}{2q-1})^2 \frac{m^2}{r-r'} + 1\Big)
\end{aligned}$$

Θέτουμε $\bar{c} = c\Big(r'^2 \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2q}{2q-1})^2 \frac{m^2}{(r-r')^2} + 1\Big)$, οπότε:

$$\begin{aligned} & \Big(⨍_{B_{r'}} v^{\frac{2d}{d-2}} dx\Big)^{\frac{d-2}{d}} \leq \bar{c} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_{r'}} v^2 dx \\ \iff \quad & \Big(\frac{1}{|B_{r'}|} \int_{B_{r'}} v^{\frac{2d}{d-2}} dx\Big)^{\frac{d-2}{d}} \leq \bar{c} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_{r'}} v^2 dx \\ \iff \quad & \Big(\int_{B_{r'}} v^{\frac{2d}{d-2}} dx\Big)^{\frac{d-2}{d}} \leq \bar{c} \int_{B_r} v^2 dx \end{aligned}$$

Ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} & \bar{c} = r'^2 \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2q}{2q-1})^2 \frac{m^2}{(r-r')^2} + 1 \\ \iff \quad & \bar{c} \leq \Big(r'^2 \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2q}{2q-1})^2 \frac{m^2}{(r-r')^2} + m^2\Big) \\ \iff \quad & \bar{c} \leq m^2 \Big(r'^2 \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2q}{2q-1})^2 \frac{1}{(r-r')^2} + 1\Big) \\ \iff \quad & \bar{c} \leq c' \Big(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2q}{2q-1})^2 (\frac{r'}{r-r'})^2 + 1\Big) \end{aligned}$$

άρα, λοιπόν, έχουμε :

$$\Big(⨍_{B_{r'}} v^{\frac{2d}{d-2}}\Big)^{\frac{d-2}{d}} \leq \bar{c} \int_{B_r} v^2 dx$$

Θέτουμε $s = 2q$ με $|s| \geq \mu > 0$.Το μ θα επιλεγεί στην συνέχεια.
Επειδή $r \leq 2r'$, έχουμε οτι:

$$\begin{aligned} & r \leq 2r' \\ \iff \quad & r - r' \leq r' \\ \iff \quad & \frac{r'}{r-r'} \geq 1 \\ \iff \quad & (\frac{r'}{r-r'})^2 \geq 1 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\bar{c} &\leq c'\Big(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2q}{2q-1})^2(\frac{r'}{r-r'})^2+1\Big)\\
&\leq c'\Big(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}(\frac{2q}{2q-1})^2(\frac{r'}{r-r'})^2+(\frac{r'}{r-r'})^2\Big)\\
&= c'(\frac{r'}{r-r'})^2(\frac{2q}{2q-1})^2\Big(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}+(\frac{2q-1}{2q})^2\Big)\\
&= c'(\frac{r'}{r-r'})^2(\frac{s}{s-1})^2\Big(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}+(\frac{s-1}{s})^2\Big)
\end{aligned}$$

Θέτουμε,

$$c''=c'\Big(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}+(\frac{s-1}{s})^2\Big)$$

Οπότε,

$$\bar{c}\leq c''(\frac{r'}{r-r'})^2(\frac{s}{s-1})^2$$

οπου c'' εξαρτάται από το μ,Λ και το λ.
Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$\phi(p,R)=(\fint_{B(x_0,R)} v^p\,dx)^{\frac{1}{p}}$$

Ισχύει ότι,

$$\begin{aligned}
\phi(\frac{ds}{d-2},r') &= \Big(\fint_{B_{r'}} v^{\frac{ds}{d-2}}\,dx\Big)^{\frac{d-2}{ds}}\\
&\leq \Big(\bar{c}\fint_{B_{r'}} v^s dx\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq \Big(c''(\frac{r'}{r-r'})^2(\frac{s}{s-1})^2\fint_{B_{r'}} v^s dx\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq c''^{\frac{1}{s}}(\frac{r'}{r-r'})^{\frac{2}{s}}(\frac{s}{s-1})^{\frac{2}{s}}\Big(\fint_{B_{r'}} v^2 dx\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq c_3(\frac{r'}{r-r'})^{\frac{2}{s}}(\frac{s}{s-1})^{\frac{2}{s}}\phi(s,r)
\end{aligned}$$

Θα κάνουμε τώρα μία διαδοχική εφαρμογή της παραπάνω σχέσης.
Θεωρούμε τα εξής:

$$
\begin{aligned}
s_n &= (\frac{d}{d-2})^n p \\
r_n &= 1 + 2^{-n} \\
r'_n &= r_{n+1} > \frac{r_n}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi(s_{n+1}, r_{n+1}) &= \phi((\frac{d}{d-2})^{n+1} p, 1 + 2^{-n-1}) \\
&\leq c_3\big((\frac{1+2^{-n-1}}{1+2^{-n}-1-2^{-n-1}}) \cdot \frac{(\frac{d}{d-2})^n p}{(\frac{d}{d-2})^n p - 1}\big)^{\frac{2}{p(\frac{d}{d-2})^n}} \phi(s_n, r_n) \\
&= c_3\big((\frac{1+2^{-n-1}}{2^{-n-1}}\big)^{\frac{2}{p(\frac{d}{d-2})^n}} \cdot \big(\frac{(\frac{d}{d-2})^n p}{(\frac{d}{d-2})^n p - 1}\big)^{\frac{2}{p(\frac{d}{d-2})^n}} \phi(s_n, r_n) \\
&= \left(c_3^{\frac{p(\frac{d}{d-2})^n}{2n}} (\frac{1+2^{-n-1}}{2^{-n-1}})^{\frac{2}{pn}} \cdot (\frac{(\frac{d}{d-2})^n p}{(\frac{d}{d-2})^n p - 1})^{\frac{2}{pn}}\right)^{n(\frac{d}{d-2})^{-n}} \phi(s_n, r_n)
\end{aligned}
$$

Θέτουμε

$$
c_4 = \left(c_3^{\frac{(\frac{d}{d-2})^n}{n}} (\frac{1+2^{-n-1}}{2^{-n-1}})^{\frac{2}{pn}} \cdot (\frac{(\frac{d}{d-2})^n p}{(\frac{d}{d-2})^n p - 1})^{\frac{2}{pn}}\right)
$$

Άρα,

$$
\phi(s_{n+1}, r_{n+1}) \leq c_4^{n(\frac{d}{d-2})^{-n}} \phi(s_n, r_n)
$$

Αναδρομικά ισχύει ότι,

$$
\phi(s_{n+1}, r_{n+1}) \leq c_4^{n(\frac{d}{d-2})^{-n}} \phi(s_n, r_n) \leq c_4^{(\frac{d}{d-2})+2(\frac{d}{d-2})^{-2}+\ldots+n(\frac{d}{d-2})^{-n}} \phi(s_1, r_1)
$$

Τώρα λόγω της σύγκλισης της σειράς $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu(\frac{d}{d-2})^{-\nu}$ (από κριτήριο λόγου), έχουμε ότι:

$$
\phi(s_{n+1}, r_{n+1}) \leq c_4^{\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu(\frac{d}{d-2})^{-\nu}} \phi(s_1, r_1)
$$

Θέτουμε,

$$
c_5 = c_4^{\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu(\frac{d}{d-2})^{-\nu}}
$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
\phi(s_{n+1}, r_{n+1}) &\leq c_5\phi(s_0, r_0) \\
&\leq c_5c_3(\frac{r_0'}{r_0 - r_0'})^{\frac{2}{s_0}}(\frac{s_0}{s_0 - 1})^{\frac{2}{s_0}}\phi(s_0, r_0) \\
&= c_5c_3(\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + 1 - 1 - \frac{1}{2}})^{\frac{2}{p}}(\frac{p}{p - 1})^{\frac{2}{p}}\phi(p, 2) \\
&= c_5c_33^{\frac{2}{p}}(\frac{p}{p - 1})^{\frac{2}{p}}\phi(p, 2)
\end{aligned}$$

Θέτουμε,

$$c_6 = c_5c_33^{\frac{2}{p}}$$

Άρα,

$$\phi(s_{n+1}, r_{n+1}) \leq c_6(\frac{p}{p - 1})^{\frac{2}{p}}\phi(p, 2)$$

Άφήνουμε το n να τείνει στο $+\infty$ άρα:

$$\phi(+\infty, 1) \leq c_6(\frac{p}{p - 1})^{\frac{2}{p}}\Big(\fint_{B(x_0,2)} u^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sup_{B(x_0,1)}(u) \leq c_6(\frac{p}{p - 1})^{\frac{2}{p}}\Big(\frac{1}{|B(x_0, 2)|}\int_{B(x_0,2)} u^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Με μία αλλαγη στην κλίμακα μπορούμε να πάρουμε οποιαδήποτε ακτίνα θέλουμε και από το Λήμμα 2.2.1 έχουμε ότι,

$$\sup_{B(x_0,R)}(u) \leq c_1(\frac{p}{p - 1})^{\frac{2}{p}}\Big(\fint_{B(x_0,2R)} u^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Για να αποδείξουμε την ανισότητα Harnack θα αποδείξουμε και το τελευταίο θεώρημα, το οποίο θα μας δώσει μία εκτίμηση για το μέγιστο κάτω φράγμα της ασθενούς λύσης της ελλειπτική εξίσωσης που εξετάζουμε.

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω $0 < p < \frac{d}{d-2}$ και $d \geq 3$ και u θετική υπερλύση στην μπάλα $B(x_0, 4R)$, τότε*

$$\Big(\fint_{B(x_0,2R)} u^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c_2}{\big(\frac{d}{d-2} - p\big)^2}\inf_{B(x_0,R)} u,$$

όπου το c_2 εξαρτάται από d και $\frac{\Lambda}{\lambda}$.

Απόδειξη
Έστω $\epsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι,

$$(\fint_{B(x_0,2R)}(u+\epsilon)^p)^{\frac{1}{p}}dx \leq \frac{c_2}{(\frac{d}{d-2}-p)^2}\inf_{B(x_0,R)}(u+\epsilon)$$

Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος βρίσκουμε ότι, για $s \leq -\mu$:

$$\phi(\frac{ds}{d-2},r') \geq \frac{1}{c}(\frac{r'}{r-r'})^{-\frac{2}{|s|}}\phi(s,r)$$

Θεωρούμε ότι $s_n = -(\frac{d}{d-2})^n p, r_n = 2+2^{-n}$ και $r'_n = r_{n+1} = 2+2^{-n-1}$.
Ισχύει ότι,

$$\begin{aligned}
\phi(s_{n+1},r_{n+1}) &\geq \frac{1}{c}(\frac{2+2^{-n-1}}{2^{-n}-2^{-n-1}})^{\frac{2}{(\frac{d}{d-2})^n p}}\phi(s_n,r_n) \\
&= \frac{1}{c}(2^{n+2}+1)^{\frac{2}{(\frac{d}{d-2})^n p}}\phi(s_n,r_n) \\
&= c'^{n(\frac{d}{d-2})^{-n}}\phi(s_n,r_n) \\
&\geq c'^{\sum_{\nu=1}^{n}\nu(\frac{d}{d-2})^{\nu}}\phi(s_1,r_1) \\
&\geq c''\phi(-\mu,3)
\end{aligned}$$

Αν αφήσουμε το $n \to +\infty$, τότε θα έχουμε ότι:

$$\phi(-\infty,2) \geq c''\phi(-\mu,3)$$

Οπότε,

$$\phi(-\mu,3) \leq c'''\phi(-\infty,2) \leq c'''\phi(-\infty,1)$$

Η τελευταία ανισότητα συμβαίνει επειδή το inf είναι γνήσιως φθίνουσα συνάρτηση.
Ισχύει ότι,

$$
\begin{aligned}
&\Big(\fint_{B_{r'}} v^{\frac{2d}{d-2}}dx\Big)^{\frac{d-2}{d}} \leq c\fint_{B_r} v^2 dx\\
\Rightarrow\ &\Big(\fint_{B_{r'}} u^{\frac{2d}{d-2}q}dx\Big)^{\frac{d-2}{d}} \leq c\fint_{B_r} u^{2q} dx\\
\Rightarrow\ &\Big(\fint_{B_{r'}} u^{\frac{2d}{d-2}q}dx\Big)^{\frac{d-2}{2qd}} \leq c\Big(\fint_{B_r} u^{2q} dx\Big)^{\frac{1}{2q}}\\
\Rightarrow\ &\phi(\frac{2d}{d-2}q, r') \leq c\phi(2q, r)\\
\Rightarrow\ &\phi(p, r') \leq c\phi(\mu, r)\\
\Rightarrow\ &\phi(p, 2) \leq c\phi(\mu, 3)
\end{aligned}
$$

Η τελευταία ανισότητα που θα δείξουμε για να τελειώσει η απόδειξη θα είναι :

$$\phi(\mu, 3) \leq c\phi(-\mu, 3)$$

Θέτουμε $v = \log(u)$ και $\phi = \frac{1}{u}\eta^2$, οπου $\eta \in H_0^1(B(x_0, 4))$. Ισχυεί ότι,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_4}\sum_{i,j}\alpha^{i,j}D_i\phi D_j u dx &= \int_{B_4}\alpha^{i,j}\sum_{i,j}D_i(\frac{\eta^2}{u})D_j u dx\\
&= -\int_{B_4}\eta^2\sum_{i,j}\alpha^{i,j}(\frac{1}{u}D_i u)(\frac{1}{u}D_j u)dx + \int_{B_4}2\eta\sum_{i,j}\alpha^{i,j}D_i\eta D_j u)dx\\
&= -\int_{B_4}\eta^2\sum_{i,j}\alpha^{i,j}D_i v D_j v dx + \int_{B_4}2\eta\sum_{i,j}\alpha^{i,j}D_i\eta D_j v dx
\end{aligned}
$$

Όμως έχουμε ότι η u είναι υπερλύση, άρα

$$\int_{B_4}\sum_{i,j}\alpha^{i,j}D_i\phi D_j u dx \geq 0$$

Οπότε έχουμε ότι,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_4}\sum_{i,j}\alpha^{i,j}D_i\phi D_j u dx &\geq 0\\
-\int_{B_4}(\eta)^2\sum_{i,j}\alpha^{i,j}D_i v D_j v dx + \int_{B_4}2\eta\sum_{i,j}\alpha^{i,j}D_i\eta D_j v dx &\geq 0\\
2\int_{B_4}\eta\sum_{i,j}\alpha^{i,j}D_i\eta D_j v dx &\geq \int_{B_4}\eta^2\sum_{i,j}\alpha^{i,j}D_i v D_j v dx
\end{aligned}
$$

Έχουμε, λοιπόν,

$$\int_{B_4} \eta^2 \sum_{i,j} \alpha^{i,j} D_i v D_j v dx \leq 2 \int_{B_4} \eta \sum_{i,j} \alpha^{i,j} D_i \eta D_j v dx$$

Ακόμα από συνθήκη ελλειπτικότητας έχουμε ότι,

$$\lambda \int_{B_4} \eta^2 |Dv|^2 dx \leq \int_{B_4} \eta^2 \sum_{i,j} \alpha^{i,j} D_i v D_j v dx,$$

οπότε προκύπτει η ανισότητα,

$$\lambda \int_{B_4} \eta^2 |Dv|^2 dx \leq \int_{B_4} \eta^2 \sum_{i,j} \alpha^{i,j} D_i v D_j v dx \leq 2 \int_{B_4} \eta \sum_{i,j} \alpha^{i,j} D_i \eta D_j v dx.$$

Όμως από την ανισότητα Hölder και την συνθήκη ελλειπτικότητας παίρνουμε ότι,

$$2 \int_{B_4} \eta \sum_{i,j} \alpha^{i,j} D_i \eta \frac{1}{u} D_j v dx \leq 2\Lambda \Big(\int_{B_4} \eta^2 |Dv|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{B_4} |D\eta|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \lambda \int_{B_4} \eta^2 |Dv|^2 dx &\leq 2\Lambda \Big(\int_{B_4} \eta^2 |Dv|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{B_4} |D\eta|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \quad \int_{B_4} \eta^2 |Dv|^2 dx &\leq 4 \big(\frac{\Lambda}{\lambda} \big)^2 \int |D\eta|^2 dx \end{aligned}$$

Έστω μπάλα $B(y,R) \subset B_{3+\frac{1}{2}}$.
Θέωρούμε συνάρτηση η τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &\eta = 1 \text{ στο } B(y,R) \\ &\eta = 0 \text{ έξω από το } B(y,2R) \cap B_4 \\ &|D\eta| \leq \frac{c}{R} \end{aligned}$$

Άρα,

$$⨍_{B(y,r)} |Dv|^2 dx \leq \frac{\gamma}{R^2}$$

Από την ανισότητα Hölder έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}
\int |Dv|dx &\leq \Big(\int_{B(y,R)} |Dv|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{B(y,R)} dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\frac{\gamma}{R^2}\omega_d R^d\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\omega_d R^d\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{\gamma}\omega_d R^{d-1},
\end{aligned}$$

όπου ω_d είναι ο όγκος μοναδιαίας μπάλας, δηλαδή :

$$\omega_d = \int_{B(0,1)} dx$$

Θέτουμε $\mu = \frac{\alpha}{\omega_d}\sqrt{\gamma}$, οπότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&\big(\int_{B_3} u^{\mu} dx\big)\big(\int_{B_3} u^{-\mu} dx\big) \leq \beta^2 \\
&\big(\int_{B_3} u^{\mu} dx\big) \leq \beta^2\big(\int_{B_3} u^{-\mu} dx\big)^{-1} \\
&\big(\int_{B_3} u^{\mu} dx\big)^{\frac{1}{\mu}} \leq \beta^{\frac{2}{\mu}}\big(\int_{B_3} u^{-\mu} dx\big)^{-\frac{1}{\mu}} \\
&\phi(\mu,3) \leq \beta^{\frac{2}{\mu}}\phi(-\mu,3)
\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\phi(p,2) \leq c\phi(-\infty,1)$$

Όμως,

$$c \leq c'\big(\big(\frac{r'}{r-r'}\big)^2\big(\frac{2q}{2q-1}\big)^2 + 1\big)$$

Ισχύει ότι,

$$\big(\frac{2q}{2q-1}\big)^2 \geq 1$$

Άρα,

$$c \leq c'2\big(\frac{r'}{r-r'}\big)^2\big(\frac{2q}{2q-1}\big)^2$$

Άρα,

$$c < c''\big(\frac{2q}{2q-1}\big)^2$$

Τώρα για να μπορέσουμε να ορίσουμε σωστά την νόρμα στον L_2 χώρο, πρέπει να θέσουμε $p = \frac{2qd}{d-2}$.
Οπότε,

$$c < c''\Big(\frac{2q}{2q-1}\Big)^2 < c''\Big(\frac{\big(\frac{d-2}{d}\big)^2}{\big(\frac{d-2}{d} - p\big)^2} < c_3\Big(\frac{d-2}{d} - p\Big)^{-2}$$

Εν τέλει,

$$\phi(p,2) \leq c_3\Big(\frac{d-2}{d} - p\Big)^{-2}\phi(-\infty,1)$$

$$\Big(\fint_{B(x_0,2)} (u+\epsilon)^p dx\Big) \leq \frac{c_3}{(\frac{d}{d-2} - p)^2} \inf_{B(x_0,1)} (u+\epsilon)$$

Με αλλαγή κλίμακας έχουμε ότι,

$$\Big(\fint_{B(x_0,2R)} (u+\epsilon)^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c_2}{(\frac{d}{d-2} - p)^2} \inf_{B(x_0,R)} (u+\epsilon), \forall \epsilon > 0$$

Αν τώρα αφήσουμε το ε να τείνει στο 0, τότε αποδεικνύεται το θεώρημα και έχουμε ότι,

$$\Big(\fint_{B(x_0,2R)} u^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c_2}{(\frac{d}{d-2} - p)^2} \inf_{B(x_0,R)} (u)$$

2.3 Ανισότητα Harnack

Η ανισότητα Harnack έρχεται ως πόρισμα των Θεωρημάτων 2.2.3 και 2.2.4 (εκτιμήσεις Moser).

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω u θετική λύση της εξίσωσης $Lu = 0$ στο $B(x_0, 4R) \subset \mathbb{R}^d (R > 0)$. Τότε*

$$\sup_{B(x_0,R)} u \leq c_3 \inf_{B(x_0,R)} u$$

με το c_3 να εξαρτάται από το d και το $\frac{\Lambda}{\lambda}$.

Θα δείξουμε το ακόλουθο γενικότερο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.2. *Έστω u ασθενής λύση της εξίσωσης $Lu = 0$ στο $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ και $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, τότε*

$$\sup_{\Omega_0} u \leq c_3 \inf_{\Omega_0} u$$

με το c_3 να εξαρτάται από το d, Ω, Ω_0 και το $\frac{\Lambda}{\lambda}$.

$\underline{\text{Απόδειξη}}$
Θεωρούμε $R < \frac{1}{4} dist(\partial\Omega, \Omega_0)$.
Το $\overline{\Omega_0}$ είναι συμπαγές, αφού $\Omega_0 \subset\subset \Omega$,
άρα καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπαλών $B_i = B_i(x_i, R)$ με $\overline{B(x_i, R)} \subset \Omega$.
Έστω $y_1, y_2 \in \Omega_0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας $y_1 \in B_k, y_2 \in B_{k+m}, m \geq 1$, απαριθμησμένα με τέτοιο τρόπο $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$.
Ισχύει ότι,

$$\begin{aligned}
u(y_1) &\leq \sup_{B_k} u(x) \\
&\leq c_3 \inf_{B_k} u(x) \text{ από την ειδική περίπτωση της ανισότητας Harnack} \\
&\leq c_3 u(x_1) \\
&\leq c_3 \sup_{B_{k+1}} u(x) \text{ αφού } B_k \cap B_{k+1} \neq \emptyset \\
&\leq \ldots \\
&\leq c_3^{m+1} \inf_{B_{k+m}} u(x) \\
&\leq c_3^{m+1} u(y_2)
\end{aligned}$$

Άρα καταληγουμε στο ότι,

$$\sup_{\Omega_0} u \leq c_3^{N+1} \inf_{\Omega_0} u$$

3 Ποιοτικά συμπεράσματα για τις λύσεις της ελλειπτικής εξίσωσης

Με την βοήθεια της ανισότητας Harnack θα εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για τις ασθενείς λύσεις την ελλειπτική εξισώσης σε μορφή απόκλισης. Το πιο σημαντικό απο αυτά θα είναι η ικανοποιηση της συνέχειας κατά Hölder από τις ασθενείς λύσεις. Τα παρακάτω αποτελέσματα έχουν αποδειχθεί από τους Ennio de Giorgi και John Nash ανεξάρτητα ο καθένας. Σε αυτή την εργασία θα παρουσιάσουμε την εκδοχή αυτών των απορροιών από την μελέτη του Jürgen Moser , οπου βασίστηκε στην ανισότητα Harnack .

3.1 Φραγμένη Ασθενής Λύση

Λήμμα 3.1.1. *Έστω $u \in H^1(\Omega)$ ασθενής υπολύση της εξίσωσης $Lu = 0$. Τότε η u είναι ανω φραγμένη σε οποιοδήποτε $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Άρα αν u είναι μία ασθενής λύση, τότε η u είναι φραγμένη σε οποιοδήποτε $\Omega_0 \subset\subset \Omega$.*

Απόδειξη

Από το Λήμμα 2.1.6 έχουμε αποδείξει οτι η συνάρτηση,για κάθε θετικό κ, :

$$v(x) = \max(u(x), \kappa)$$

είναι μία θετική υπολύση.
Η τοπική φραξιμότητα της v, δηλαδή της u έπεται από το Θεώρημα 2.2.3 χρησιμοποιώντας την μέθοδο για την απόδειξη της ανισότητα Harnack . Πράγματι, Το $\overline{\Omega_0}$ είναι συμπαγές, αφού $\Omega_0 \subset\subset \Omega$.
Έστω $R < \frac{1}{4} dist(\partial\Omega, \Omega_0)$.
Οπότε καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπαλών $B_i = B_i(x_i, R)$ με $\overline{B(x_i, R)} \subset \Omega$. Δεν θα ακουμπήσουν το σύνορο και θα είναι μέσα στο Ω. Έστω $x \in \Omega_0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας $x \in B(x_0, R)$
Ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} v(x) &\leq \sup_{B(x_0,R)} v(x) \\ &\leq c_1 (\frac{p}{p-1})^{\frac{2}{p}} \left(\fint_{B(x_0,2R)} v^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Άρα καταληγουμε η v είναι τοπικά ανω φραγμένη,οπότε και η u θα είναι τοπικά ανω φραγμένη.

Οπότε οι ασθενείς υπολύσεις είναι τοπικά ανω φραγμένες.
Όμοια από το Θεώρημα 2.2.4 έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} v(x) &\geq \inf_{B(x_0,R)} v(x) \\ &\geq \frac{\left(\frac{d}{d-2} - p\right)^2}{c_2} \left(\fint_{B(x_0,2R)} v^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Οπότε μία ασθενής υπερλύση είναι τοπικά κάτω φραγμένη. Εαν, έχουμε τώρα μία ασθενής λύση, όπου είναι και ασθενής υπολύση και αθενής υπερλύση, τότε η ασθενής λύση θα είναι και άνω και κάτω τοπικά φραγμένη, άρα θα είναι φραγμένη.

3.2 Συνέχεια κατά Hölder

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $u \in H^1(\Omega)$ είναι μία ασθενής λύση της εξίσωσης $Lu = 0$. Επίσης θεωρούμε οτι ικανοποιούνται οι ελλεπτικές συνθήκες. Τότε η u είναι Hölder συνεχής στο Ω. Πιο ειδικά, για κάθε $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ υπάρχει $\alpha \in (0,1)$ και μία σταθερά c ώστε,*

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \Omega_0$. Το α εξαρτάται από τα $d, \frac{\Lambda}{\lambda}$ και το Ω_0, ενώ το c εξαρτάται από την διαφορά $\sup_{\Omega_0} u - \inf_{\Omega_0} u$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x \in \Omega$. Για $R > 0$ τέτοιο ώστε $B(x,R) \subset \Omega$, θέτουμε

$$M(R) = \sup_{B(x,R)} u \text{ και } m(R) = \inf_{B(x,R)} u$$

Από το προηγούμενο λήμμα $M(R), m(R)$ είναι φραγμένα.
Θέτουμε,

$$\omega(R) = M(R) - m(R)$$

Η $\omega(R)$ είναι η ταλάντωση της u στο $B(x,R)$.

Ισχυρισμός : Ισχυεί η ανισότητα:

$$\omega(r) \leq c_0 \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \omega(R), \qquad \forall r \in (0, \frac{R}{4}]$$

για κάποιο α.
Απόδειξη Ισχυρισμού

Έστω οι συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} &1) \quad M(R)-u \\ &2) \quad u-m(R) \end{aligned}$$

οι οποίες είναι ασθενείς θετικές λύσεις στην $B(x,R)$.
Έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} M(R)-m\Big(\frac{R}{4}\Big) &= M(R)-\inf_{B(x,\frac{R}{4})} u \\ &= M(R)+\sup_{B(x,\frac{R}{4})}(-u) \\ &= \sup_{B(x,\frac{R}{4})}(M(R)-u) \\ &\leq c_1 \inf_{B(x,\frac{R}{4})}(M(R)-u) \text{ από ανισότητα Harnack} \\ &= c_1\Big(M(R)-\sup_{B(x,\frac{R}{4})} u\Big) \\ &= c_1\Big(M(R)-M\Big(\frac{R}{4}\Big)\Big) \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} M\Big(\frac{R}{4}\Big)-m(R) &= \sup_{B(x,\frac{R}{4})}(u-m(R)) \\ &\leq c_1 \inf_{B(x,\frac{R}{4})}(u-m(R)) \text{ από ανισότητα Harnack} \\ &= c_1\Big(\inf_{B(x,\frac{R}{4})} u-m(R)\Big) \\ &= c_1\Big(m\Big(\frac{R}{4}\Big)-m(R)\Big) \end{aligned}$$

Η σταθερά c_1 λόγω του ειδικού θεωρήματος του Harnack , δεν εξαρτάται από την ακτίνα R που θα επιλέξουμε.

Έχουμε τώρα,

$$M(R)-m\Big(\frac{R}{4}\Big)\leq c_1\Big(M(R)-M\Big(\frac{R}{4}\Big)\Big)$$
$$M\Big(\frac{R}{4}\Big)-m(R)\leq c_1\Big(m\Big(\frac{R}{4}\Big)-m(R)\Big)$$

Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες έχουμε ότι,

$$\Big(M(R)-m\Big(\frac{R}{4}\Big)\Big)+\Big(M\Big(\frac{R}{4}\Big)-m(R)\Big)\leq c_1M(R)-c_1M\Big(\frac{R}{4}\Big)+c_1m\Big(\frac{R}{4}\Big)-c_1m(R)$$

Άρα,

$$(c_1+1)M\Big(\frac{R}{4}\Big)-(c_1+1)m\Big(\frac{R}{4}\Big)\leq(c_1-1)M(R)-(c_1-1)m(R)$$

Άρα,

$$M\Big(\frac{R}{4}\Big)-m\Big(\frac{R}{4}\Big)\leq\frac{(c_1-1)}{c_1+1}\Big(M(R)-m(R)\Big)$$

Θέτουμε με $\theta=\frac{c_1-1}{c_1+1}<1$, άρα

$$M\Big(\frac{R}{4}\Big)-m\Big(\frac{R}{4}\Big)\leq\theta\Big(M(R)-m(R)\Big)$$

Δηλαδή,

$$\omega\Big(\frac{R}{4}\Big)\leq\theta\omega(R)$$

Επαγωγικά έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}\omega\Big(\frac{R}{4^n}\Big) &\leq \theta\omega\Big(\frac{R}{4^{n-1}}\Big)\\ &\leq \theta^n\omega(R)\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\omega\Big(\frac{R}{4^n}\Big)\leq\theta^n\omega(R),\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

Θεωρούμε $n\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{R}{4^{n+1}}\leq r\leq\frac{R}{4^n}$$

Επίσης επιλέγουμε ένα θετικό α αρκετά μικρό, ώστε:

$$\theta \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}$$

Μας μένουν δύο βήματα ακόμα για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό. Πρώτον, θα δείξουμε ότι συνάρτηση ω είναι αύξουσα συνάρτηση. Πράγματι,

$$\begin{aligned} R_1 &\leq R_2 \\ \sup_{B(x,R_1)} u &\leq \sup_{B(x,R_2)} u \end{aligned}$$

Ακόμα,

$$\begin{aligned} R_1 &\leq R_2 \\ \inf_{B(x,R_2)} u &\leq \inf_{B(x,R_1)} u \\ -\inf_{B(x,R_1)} u &\leq -\inf_{B(x,R_2)} u \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sup_{B(x,R_1)} u - \inf_{B(x,R_1)} u &\leq \sup_{B(x,R_2)} u - \inf_{B(x,R_2)} u \\ \omega(R_1) &\leq \omega(R_2) \end{aligned}$$

Δεύτερον, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \omega(r) &\leq \omega\left(\frac{R}{4^n}\right) \text{ διότι η ω είναι αύξουσα} \\ &\leq \theta^n \omega(R) \\ &\leq \left(\frac{1}{4^n}\right)^{\alpha} \omega(R) \\ &\leq \left(\frac{4r}{R}\right)^{\alpha} \omega(R) \\ &\leq 4^{\alpha}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} \omega(R) \end{aligned}$$

Άρα,

$$\omega(r) \leq c_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{a} \omega(R), \qquad \forall r \in (0, \frac{R}{4}]$$

όπου $c_0 = 4^\alpha, \alpha > 0$. Αφού αποδείξαμε τον ισχυρισμό, αν $|x-y| = r$, τότε παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &\leq \sup_{B(x,r)} u - \inf_{B(x,r)} u \\ &= \omega(r) \\ &\leq c_0 \frac{\omega(R)}{R^\alpha} r^\alpha \text{ από ισχυρισμό} \\ &= c_0 \frac{\omega(R)}{R^\alpha} |x-y|^\alpha \\ &\leq c|x-y|^\alpha \end{aligned}$$

Αντίστροφα, τώρα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} u(y) - u(x) &\leq c|y-x|^\alpha \\ &\leq c|x-y|^\alpha \end{aligned}$$

Άρα,

$$-c|x-y|^\alpha \leq u(x) - u(y) \leq c|x-y|^\alpha$$

Οπότε,

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^\alpha$$

Συνεπώς μία ασθενώς παραγωγίσιμη λύση της εξίσωσης $Lu = 0$ είναι συνεχής κατά Hölder και αυτό χάρη στην ανισότητα Harnack. Επίσης είναι προφανές, από του α, ότι εξαρτάται από το ϑ, οπου εξαρτάται από την c_1 που προήλθε από την ανισότητα Harnack . Οπότε το α εξαρτάται από $d, \frac{\Lambda}{\lambda}$ και Ω_0, ενώ το c εξαρτάται από την διαφορά $\sup_{\Omega_0} u - \inf_{\Omega_0} u$

3.3 Ισχυρή αρχή του μεγίστου

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω u υπολύση της εξίσωσης $Lu = 0$. Αν για κάποια μπάλα $B(y_0, R) \subset\subset \Omega$ ισχύει:*

$$\sup_{B(y_0,R)} u = \sup_{\Omega} u,$$

τότε η u είναι σταθερή στο Ω.

Απόδειξη

Έστω οτι ισχύει η ισότητα των ελαχίστων άνω φραγμάτων για κάποια μπάλλα $B(x_0, R)$ με $B(x_0, R_0)$ με $B(x_0, 4R_0) \subset \Omega$, άρα

$$\sup_{B(x_0,R_0)} u = \sup_{\Omega} u$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας $\sup_\Omega u < +\infty$, επειδή $\sup_{B(y_0,R} u < \infty$ καθως u υπολύση και από το λήμμα 3.1.1 έχουμε το ζητούμενο.
Για,

$$M > \sup_{\Omega} u$$

Ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} M - u &\geq \sup_{\Omega} u - \sup_{\Omega} u \\ &= 0 \end{aligned}$$

παίρνωντας το όριο έχουμε ότι:

$$M = \sup_{\Omega} u$$

Άρα η $M - u$ είναι μία θετική υπερλύση, οπότε από το Θεώρημα 2.2.4 για $p = 1$ έχουμε ότι,

$$⨍_{B(x_0,2R_0)} (M - u) \leq c \inf_{B(x_0,R_0)} (M - u) = 0$$

διότι $M = \sup_\Omega u = \sup_{B(x_0,R_0)} u$.
Άρα,

$$M - u \leq 0$$

Οπότε $u = M$ για ολα τα $x \in B(x_0, 2R_0)$.
Έστω τώρα $y \in \Omega$.Ορίζουμε μία αλύσίδα μπαλλών $B(x_i, R_i), i = 0, ...m$ με $B(x_i, 4R_i) \subset \Omega$ και $B(x_{i-1}, R_{i-1}) \cap B(x_i, R_i) \neq \emptyset$ για $i = 1, ..m$ και $y \in B(x_m, R_m)$.
Το M είναι το ελάχιστο άνω φράγμα το Ω το οποίο βρίσκεται στην μπάλλα με ακτίνα $2R_0$ άρα και στην μπάλλα με ακτίνα R_0. Επειδή όμως $B(x_0, R_0) \cap B(x_1, R_1) \neq \emptyset$ το M θα βρίσκεται και στην μπάλλα με ακτίνα R_1, άρα :

$$\sup_{B(x_1,R_1)} u = M$$

Επαγωγικά έχουμε ότι,

$$u = M \text{ στο } B(x_m, R_m)$$

Άρα για κάθε $y \in B(x_m, R_m)$ έχουμε ότι $u(y) = M$.
Αφού, λοιπόν, για μια τυχαία μπάλλα και για ένα τυχαίο y δείξαμε οτι η u είναι σταθερή, τότε η u θα είναι σταθερή σε όλο το Ω.

3.4 Θεώρημα Liouville

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω ασθενής λύση της $Lu = 0$ στο $\mathbb{R}^d$. Αν u είναι φραγμένη, τότε είναι σταθερή.*

Απόδειξη

Αφού η u είναι φραγμένη, τότε τα $\inf_{\mathbb{R}^d} u$ και $\sup_{\mathbb{R}^d} u$ είναι πεπερασμένα.
Άρα για κάθε μ με :

$$\mu < \inf_{\mathbb{R}^d} u$$

η συνάρτηση $u - \mu$ είναι μία θετική λύση της εξίσωσης $Lu = 0$ στο $\mathbb{R}^d$. Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας Harnack για κάθε $R > 0$ και για κάθε $\mu < \inf_{\mathbb{R}^d}$ έχουμε ότι,

$$0 \leq \sup_{B(0,R)} u - \mu \leq c\Big(\inf_{B(0,R)} u - \mu\Big),$$

όπου c είναι ανεξάρτητο του R.
Παίρνωντας το όριο, παρατηρούμε οτι μπορούμε να βρούμε ενα τέτοιο μ στο $B(0, R)$, άρα :

$$\mu = \inf_{\mathbb{R}^d} u$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας Harnack γνωρίζουμε οτι η σταθερά c δεν εξαρτάται από το R, άρα :

$$0 \leq \sup_{\mathbb{R}^d} u - \mu \leq c\Big(\inf_{\mathbb{R}^d} u - \mu\Big) = 0$$

Άρα,

$$\mu = \sup_{\mathbb{R}^d} u$$

Οπότε,

$$\sup_{\mathbb{R}^d} u = \inf_{\mathbb{R}^d} u$$

Οπότε,

$$u = \mu \text{ στο } \mathbb{R}^d$$

Συνεπώς η u είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^d$.

Αναφορές

[1] Kassmann M., Harnack inequalities: an introduction, Hindawi Publishing Corporation, Boundary Value Problems, (2007)

[2] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations: Second Edition, American Mathematical Society, (2010)

[3] John F., Partial Differential Equations, 4th ed., Springer, (1982)

[4] Jost J., Partial Differential Equations, Universitext. Springer, (2013)

[5] Moser J., On Harnack's theorem for elliptic dfferential equations, Communications on Pure and Applied Mathematics 14, (1961), 577-591