

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών



Διπλωματική Εργασία
με τίτλο

**Μελέτη χρόνων διακοπής
μέσω της ταυτότητας του Wald
και εφαρμογές**

Συγγραφέας:

Οικονομίδης Ιάκωβος-Δαυίδ

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:

Ευτυχία Βαγγελάτου

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών σπουδών «*Μαθηματικά*»
με ειδίκευση στη «*Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα*»

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα, 2021

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει σκοπό την επισκόπηση αποτελεσμάτων που αφορούν την μελέτη χρόνων διακοπής μέσω μιας ταυτότητας που εισάχθηκε από τον Abraham Wald (1944), τον ιδρυτή της ακολουθιακής στατιστικής ανάλυσης, και στη συνέχεια επεκτάθηκε και γενικεύτηκε από διάφορους ερευνητές. Ο χρόνος διακοπής είναι μια τυχαία μεταβλητή, η οποία συνήθως εκφράζει το χρόνο μέχρις ότου συμβεί ένα γεγονός, που σχετίζεται με την εξέλιξη μιας συγκεκριμένης στοχαστικής ανέλιξης. Η κατανομή ενός χρόνου διακοπής τις περισσότερες φορές είναι δύσκολο να προσδιοριστεί και για το λόγο αυτό στην παρούσα διπλωματική θα εκμεταλλευτούμε την ταυτότητα του Wald (ή παραλλαγές αυτής) για να την προσδιορίσουμε έμμεσα μέσω της γεννήτριας συνάρτησής της. Η εργασία αποτελείται από τρία κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα απαραίτητα αποτελέσματα από την θεωρία πιθανοτήτων και των στοχαστικών ανελίξεων όπως χρόνοι διακοπής, τυχαίοι περίπατοι, martingales και αλλαγή μέτρου πιθανότητας που χρειάζονται για την θεμελίωση της ταυτότητας του Wald αλλά και των επεκτάσεών της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα γίνει μια σύντομη εισαγωγή στην στατιστική θεωρία σαρώσεων (scan statistics) και ρών επιτυχιών (run statistics). Στην συνέχεια θα δοθούν οι ορισμοί χρόνων διακοπής που θα μελετηθούν και οι αντίστοιχες επεκτάσεις της ταυτότητας του Wald με σκοπό την εύρεση της κατανομής των χρόνων διακοπής αλλά και αθροισμάτων διακοπής που σχετίζονται με εμφανίσεις διαφόρων ρών αποτελεσμάτων σε ακολουθίες δοκιμών. Κλείνοντας το δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται μερικές εφαρμογές με την χρήση των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

Το τρίτο κεφάλαιο αφορά εφαρμογές στην θεωρία χρεοκοπίας (ruin theory). Στην αρχή παρουσιάζονται εφαρμογές που αφορούν χρόνους εξόδου τυχαίων περιπάτων από ένα διάστημα της μορφής $[a, b]$ οι οποίοι θα συνδυαστούν με την έννοια του χρόνου χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής επιχείρησης. Έπειτα γίνεται σύντομη περιγραφή του μοντέλου χρεοκοπίας δίνοντας τους ανάλογους ορισμούς των χρόνων διακοπής και επέκταση της ταυτότητας του Wald σε αυτό το μοντέλο. Τέλος παρουσιάζονται αριθμητικές εφαρμογές για τον υπολογισμό της κατανομής των χρόνων διακοπής με χρήση κατάλληλου υπολογιστικού πακέτου (MATLAB).

Abstract

The present thesis aims to review results concerning the study of stopping times through an identity introduced by Abraham Wald (1944), the founder of sequential statistical analysis which was later extended and generalized by a number of researchers. Stopping time is a random variable which is often referred to as the time until an event, associated with the evolution of a certain stochastic process, will occur. The explicit distribution of a stopping time is often very difficult to determine. Therefore in this thesis we review results that take advantage of Wald's identity or its extensions in order to implicitly determine the distribution of a stopping time through its generating function. The work consists of three chapters.

In the first chapter we present results from probability theory such as stopping times, random walks, martingales and change of probability measure which are necessary for the establishment of Wald's identity, its variants and related results.

In the second chapter we initially present briefly an introduction to the theory of run and scans statistics. By exploiting appropriate extensions of Wald's identity we review results that determine the generating function of the distribution of certain stopping times and stopped sums associated with the occurrence of specific events in a sequence of outcomes.

In the third chapter we review some applications of Wald's identity in ruin theory. Initially, we review results concerning exit times of random walks from an interval of the form $[a, b]$ that will be associated with the concept of the time of ruin of an insurance company. The ruin model is then briefly described, offering appropriate definitions of stopping times and extending Wald's identity in order to be applicable in this setup. Finally, we present applications where we numerically calculate the distribution of the time of ruin using appropriate computational software package (MATLAB).

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω την κυρία Βαγγελάτου Ευτυχία που δέχτηκε να συνεργαστούμε στο πλαίσιο της συγγραφής της διπλωματικής εργασίας, για τις χρήσιμες υποδείξεις της και τον χρόνο που αφιέρωσε όλους αυτούς τους μήνες. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Χελιώτη Δημήτρη για την συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή αλλά και για την συνεισφορά του συγγράμματος “ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ” που αποτέλεσε βασικό εγχειρίδιο στην εργασία. Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ στον κύριο Μπούτσικα Μιχαήλ, καθηγητή μου από τις προπτυχιακές μου σπουδές για την συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή καθώς και για τις πολύτιμες οδηγίες και παρατηρήσεις όλα αυτά τα χρόνια από την έναρξη των προπτυχιακών σπουδών μέχρι και την λήξη των μεταπτυχιακών σπουδών μου καθώς αποτέλεσε πηγή έμπνευσης στις ακαδημαϊκές μου σπουδές.

Περιεχόμενα

1. Martingales και Χρόνοι διακοπής	1
1.1 Εισαγωγικές έννοιες	1
1.2 Οι εξισώσεις του Wald και η σύνδεση με τα martingales	7
1.3 Αλλαγή μέτρου και ο μετασχηματισμός Esscher	14
2. Εφαρμογή Χρόνων Διακοπής στην Θεωρία Ροών επιτυχιών	23
2.1 Εισαγωγικές έννοιες	23
2.2 Από κοινού κατανομή πλήθους επιτυχιών και πλήθους ροών	28
2.2.1 Δοκιμές από την κατανομή Bernoulli	28
2.2.2 Δοκιμές με m δυνατά αποτελέσματα	35
2.3 Εφαρμογές	40
2.3.1 Η από κοινού κατανομή ροής επιτυχιών, αποτυχιών και του αντίστοιχου χρόνου διακοπής από δοκιμές Bernoulli	40
2.3.2 Εύρεση της κατανομής χρόνου διακοπής T προερχόμενος από ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bernoulli	42
2.3.3 Εύρεση της κατανομής χρόνου διακοπής T προερχόμενος από ανεξάρτητες και ισόνομες τρίτιμες μεταβλητές (trinomial steps)	43
3. Εφαρμογή της ταυτότητας του Wald στη Θεωρία Χρεοκοπίας	47
3.1 Μελέτη χρόνου διακοπής μέσω τυχαίου περιπάτου από εκθετικά άλματα .	47
3.2 Εισαγωγή στη Θεωρία χρεοκοπίας	55
3.3 Γενικά αποτελέσματα στο μοντέλο χρεοκοπίας Sparre Andersen μέσω προσέγγισης από μείξη Erlang	57
3.4 Αριθμητικές Εφαρμογές	72
3.4.1 Εφαρμογή στο μοντέλο κλασικό μοντέλο Cramér–Lundberg	72
3.4.2 Εφαρμογή στο μοντέλο Sparre Andersen μέσω προσέγγισης από μια μεικτή Erlang κατανομή	75

Παράρτημα	79
Κώδικας της εφαρμογής 3.4.1	79
Κώδικας της εφαρμογής 3.4.2	81
 Βιβλιογραφία	 83

Κεφάλαιο 1. Martingales και Χρόνοι διακοπής

1. Εισαγωγικές έννοιες

Ορισμός 1.1.1. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Μία *αύξουσα* ακολουθία σ -αλγεβρών $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (δηλαδή $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}$) με $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}, \forall n \in \mathbb{N}$, καλείται *διήθηση* (filtration) στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Ορισμός 1.1.2. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μία διήθηση στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ καλείται *προσαρμοσμένη* (adapted) στην $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, όταν η X_n είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η δημιουργία μιας διήθησης είναι πολλές φορές εύκολη υπόθεση, αρκεί να έχουμε στη διάθεσή μας μία ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές όπως φαίνεται και στη συνέχεια. Έστω, λοιπόν, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$) ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Αν θέσουμε $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$, τότε η $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι διήθηση στην \mathcal{F} και η ακολουθία $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ αφού η X_n είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Η $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι η ελάχιστη διήθηση στην \mathcal{F} όπου η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι προσαρμοσμένη σε αυτήν.

Από δω και στο εξής, με \mathcal{L}^k θα συμβολίζουμε τον διανυσματικό χώρο των τ.μ. X που είναι ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας για τις οποίες είναι $\mathbb{E}(|X|^k) < +\infty$.

Ορισμός 1.1.3. Έστω $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ διήθηση στην \mathcal{F} . Θα λέμε ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *martingale* ως προς την $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ όταν ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $X_n \in \mathcal{L}^1$, δηλαδή $\mathbb{E}(|X_n|) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι \mathcal{F}_n -προσαρμοσμένη, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (iii) $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ σ.π., $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αν η σχέση (iii) παραπάνω ισχύει ως ανισότητα \geq ή \leq τότε η ακολουθία καλείται *submartingale* ή *supermartingale* αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που ισχύει η ιδιότητα (ii), τότε η ιδιότητα (iii) μπορεί να πάρει τις εξής ισοδύναμες εκφράσεις:

- $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] = 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{E}\left[\frac{X_{n+1}}{X_n} | \mathcal{F}_n\right] = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ υπό την προϋπόθεση ότι $X_n \neq 0$.

Παράδειγμα 1.1.1. Έστω $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Για $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων S_n με

$$S_0 := 0 \quad \text{και} \quad S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

και τη διήθηση $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ και $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Η ακολουθία $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ καλείται απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος στο \mathbb{Z} και είναι martingale ως προς τη διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Πράγματι, έχουμε τα εξής:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(|S_n|) = \mathbb{E}(|X_1 + \dots + X_n|) \leq \mathbb{E}(|X_1|) + \dots + \mathbb{E}(|X_n|) = n < +\infty$$

και επομένως $S_n \in \mathcal{L}^1, \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Η S_n είναι \mathcal{F}_n -προσαρμοσμένη ως συνάρτηση των X_1, \dots, X_n και

(iii) Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} + S_n | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) + S_n = \mathbb{E}(X_{n+1}) + S_n = S_n$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει διότι η S_n είναι \mathcal{F}_n -προσαρμοσμένη, ενώ η τρίτη και η τέταρτη ισχύουν διότι οι X_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή 0.

Παράδειγμα 1.1.2. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ διήθηση στην \mathcal{F} και $X \in \mathcal{L}^1$. Θεωρούμε την ακολουθία $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με $X_n := \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$. Τότε η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Πράγματι

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)|) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| | \mathcal{F}_n)) \leq \mathbb{E}(|X|) < +\infty$$

και συνεπώς $X_n \in \mathcal{L}^1$.

(ii) Η τ.μ. X_n είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη $\forall n \in \mathbb{N}$ αφού η $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη εξ ορισμού.

(iii) Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) = X_n,$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει διότι $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ (από την γνωστή ιδιότητα των δεσμευμένων μέσων τιμών που είναι γνωστή ως «ιδιότητα του πύργου» - tower property).

Παράδειγμα 1.1.3. Θεωρούμε τις ακολουθίες $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ όπως αυτές ορίστηκαν στο Παράδειγμα 1.1.1. Αν $W_n := S_n^2 - n$ τότε η ακολουθία $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Πράγματι, είναι

$$\mathbb{E}(|W_n|) \leq \mathbb{E}(|S_n^2|) + n \leq n^2 + n < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

και άρα $W_n \in \mathcal{L}^1$. Επίσης, η W_n είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη ως συνάρτηση των X_1, \dots, X_n . Επιπλέον, ισχύει ότι $W_{n+1} - W_n = S_{n+1}^2 - (n+1) - S_n^2 + n = 2X_{n+1}S_n$ και επομένως

$$\mathbb{E}(W_{n+1} - W_n | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(2X_{n+1}S_n | \mathcal{F}_n) = 2S_n \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 2S_n \mathbb{E}(X_{n+1}) = 0.$$

Παρατήρηση 1.1.1. Έστω (Ω, \mathcal{F}) μετρήσιμος χώρος. Αν $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι martingale ως προς μια διήθηση $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ στην \mathcal{F} τότε είναι και martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Αυτό ισχύει διότι η \mathcal{F}_n είναι διήθηση αφού $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$. Επιπλέον, οι τ.μ. X_1, X_2, \dots είναι $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ προσαρμοσμένες, αντιστοίχως, και, για κάθε n ,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_n) = X_n.$$

(η πρώτη ισότητα προκύπτει από την tower property διότι $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{G}_n$).

Πρόταση 1.1.1. Έστω $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Τότε ισχύει

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_m) = X_m, \quad \forall n \geq m.$$

Απόδειξη.

Προφανώς ισχύει για $n = m$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \geq m$, δηλαδή $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_m) = X_m$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n + 1$. Πράγματι,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_m) = X_m.$$

Επομένως επαγωγικά ισχύει για κάθε $n \geq m$. □

Πρόταση 1.1.2. Αν $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία martingale ως προς τη διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, τότε

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη.

Από υπόθεση ισχύει ότι $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας μέση τιμή και στα δύο μέλη έχουμε $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X_n), \forall n \in \mathbb{N}$ απ' όπου έπεται ότι $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n), \forall n \in \mathbb{N}$ και αναδρομικά $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0), \forall n \in \mathbb{N}$. □

Ορισμός 1.1.4. Έστω (Ω, \mathcal{F}) μετρήσιμος χώρος. Μία συνάρτηση $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ καλείται *χρόνος διακοπής* (stopping time) ως προς τη διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ όταν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\{T \leq n\} = \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Πόρισμα 1.1.1. Έστω $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i) $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$
- ii) $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη.

(i) \Rightarrow (ii). Αν $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $\{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) \Rightarrow (i). Αν $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n, \forall k \in \{1, \dots, n\}$. Επομένως $\{T \leq n\} = \bigcup_{k=1}^n \{T = k\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}$. \square

Παράδειγμα 1.1.4. Ρίχνουμε ένα νόμισμα στους χρόνους $1, 2, \dots$ και ένας παίκτης κερδίζει ή χάνει 1 ευρώ ανάλογα με την ένδειξη του νομίσματος. Έστω ότι ο παίκτης αρχίζει να παίζει το παιχνίδι με 10 ευρώ και αποφασίζει να παίξει έως ότου φτάσει στα 20 ή χάσει (0 ευρώ). Αν θέσουμε ως X_n το ποσό του παίκτη κατά τη n -οστή ρίψη, τότε το παιχνίδι θα σταματήσει τη στιγμή T , όπου

$$T = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = 20 \text{ ή } X_n = 0\}.$$

Η συνάρτηση T είναι χρόνος διακοπής ως προς την $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ όπου $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Αυτό ισχύει διότι

$$\{T = n\} = \{0 < X_1 < 20\} \cap \dots \cap \{0 < X_{n-1} < 20\} \cap (\{X_n = 20\} \cup \{X_n = 0\}) \in \mathcal{F}_n.$$

Από τον ορισμό του χρόνου διακοπής μπορούμε να βγάλουμε το εξής χρήσιμο συμπέρασμα. Για να είναι μια συνάρτηση T χρόνος διακοπής σε μια διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ απαιτούμε να ισχύει ότι $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως αφού $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ τότε $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}, \forall n \in \mathbb{N}$ και η T είναι και \mathcal{F} -μετρήσιμη. Άρα η T είναι τυχαία μεταβλητή.

Πόρισμα 1.1.2. Έστω (Ω, \mathcal{F}) μετρήσιμος χώρος και $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ διήθηση στην \mathcal{F} . Αν $T, S : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ χρόνοι διακοπής στην $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ τότε οι συναρτήσεις $\sup\{T, S\}, \inf\{T, S\}, T + S$ είναι χρόνοι διακοπής στην $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Απόδειξη.

Ισχύει ότι

$$\{\inf\{T, S\} \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

αφού τα $\{T \leq n\}, \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}$ και \mathcal{F}_n είναι σ -άλγεβρα. Όμοια,

$$\{\sup\{T, S\} \leq n\} = \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

αφού τα $\{T \leq n\}, \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}$ και \mathcal{F}_n είναι σ -άλγεβρα. Τέλος,

$$\{T + S \leq n\} = \bigcup_{\substack{k, l \in \mathbb{N} \\ k+l \leq n}} (\{T \leq l\} \cap \{S \leq k\}) \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

αφού τα $\{T \leq l\}, \{S \leq k\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}$ και \mathcal{F}_n είναι σ -άλγεβρα. \square

Ορισμός 1.1.5. Έστω $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ α.τ.μ. (ακολουθία τυχαίων μεταβλητών) σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Η ακολουθία $\{X_{T \wedge n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ που ορίζεται ως:

$$X_n^T := X_{T \wedge n} = \begin{cases} X_i, & T = i < n \\ X_n, & T \geq n \end{cases}$$

όπου T χρόνος διακοπής, καλείται *σταματημένη* (stopped) στο T .

Π.χ. αν $T = i$ τότε η σταματημένη $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στο T θα είναι η $\{X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_i, X_i, X_i, \dots\}$

Πρόταση 1.1.3. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ διήθηση στην \mathcal{F} . Θεωρούμε $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ α.τ.μ. και T χρόνος διακοπής στην $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Έχουμε τα εξής:

- i) Αν η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale, τότε και η $\{X_{T \wedge n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale.
- ii) Αν η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -submartingale, τότε και η $\{X_{T \wedge n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -submartingale.
- iii) Αν $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -supermartingale, τότε και η $\{X_{T \wedge n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -supermartingale.

Θεώρημα 1.1.1 (Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής). Έστω $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ α.τ.μ. με $X_n \in \mathcal{L}^1, \forall n \in \mathbb{N}$ και T τυχαία μεταβλητή με $T: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- i) Η T είναι φραγμένη τ.μ.
- ii) $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ και $\exists M \in \mathbb{R}: |X_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$
- iii) $\mathbb{E}(T), \mathbb{E}(|X_0|) < +\infty$ και $\exists M \in \mathbb{R}: |X_n - X_{n-1}| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

τότε ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_T)$.

Αν επιπλέον η T είναι χρόνος διακοπής ως προς την φυσική (ελάχιστη) διήθηση της $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, τότε:

- Αν $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ martingale $\implies \mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.
- Αν $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ submartingale $\implies \mathbb{E}(X_T) \geq \mathbb{E}(X_0)$.
- Αν $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ supermartingale $\implies \mathbb{E}(X_T) \leq \mathbb{E}(X_0)$.

Απόδειξη.

(i) Αφού η τ.μ. T είναι φραγμένη τότε $\exists M \in \mathbb{R}: T \leq M$. Επομένως $\forall n \geq M$ είναι $\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_T)$. Άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_T).$$

(ii) Αφού $\mathbb{P}(T < \infty) = 1 \implies X_{T \wedge n} \xrightarrow{\sigma, \beta} X_T$. Επίσης αφού $|X_n| \leq M$ συνεπάγεται ότι

$$\mathbb{E}(|X_n|) < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα από το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_T)$.

(iii) Ισχύει ότι $X_{T \wedge n} = X_0 + \sum_{k=1}^{T \wedge n} (X_k - X_{k-1})$. Άρα

$$|X_{T \wedge n}| = \left| X_0 + \sum_{k=1}^{T \wedge n} (X_k - X_{k-1}) \right| \leq |X_0| + \left| \sum_{k=1}^{T \wedge n} (X_k - X_{k-1}) \right| \leq |X_0| + TM.$$

Αφού $\mathbb{E}(T) < \infty$ και άρα $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T \wedge n} = X_T$. Επίσης

$$\mathbb{E}(|X_0| + TM) = \mathbb{E}(X_0) + M\mathbb{E}(T) < \infty$$

και από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται το ζητούμενο.

Για το δεύτερο μέρος του θεωρήματος, παρατηρούμε ότι, αφού $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι martingale τότε ισχύει ότι και $(X_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι martingale και άρα $\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0)$ από όπου προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$. Όμοια αφού $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ submartingale (αντίστοιχα supermartingale) τότε ισχύει ότι $(X_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ submartingale (αντ. supermartingale) και άρα $\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) \geq \mathbb{E}(X_0)$ (αντ. $\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) \leq \mathbb{E}(X_0)$) και άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_T) \geq \mathbb{E}(X_0)$ (αντ. $\mathbb{E}(X_T) \leq \mathbb{E}(X_0)$). \square

Παράδειγμα 1.1.5. Έστω $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$ και $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με $S_0 := 0$ και $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ο συμμετρικός απλός τυχαίος περίπατος στο \mathbb{Z} . Θεωρούμε την τ.μ. T_k με

$$T_k = \inf \{n \geq 0 : S_n = k\} \text{ και } T = T_a \wedge T_b \text{ για } a < 0 < b \text{ και } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Τότε ισχύει ότι :

(i) $\mathbb{E}(T) < +\infty$

(ii) $\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{|a|}{b + |a|}$

(iii) $\mathbb{E}(T) = |a|b$

Πράγματι

(i) Θεωρούμε την α.τ.μ. $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}} : M_n = S_n^2 - n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Η $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι martingale (βλ. παράδειγμα 1). Από την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι και $(M_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι martingale. Άρα θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{T \wedge n}) &= \mathbb{E}(M_0) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{E}(S_{T \wedge n}^2 - T \wedge n) = 0 \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(S_{T \wedge n}^2) = \mathbb{E}(T \wedge n), \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

όμως $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(T \wedge n) = \mathbb{E}(T)$ από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και $|S_{T \wedge n}^2| \leq \max\{|a|^2, b^2\}$ και επομένως

$$\mathbb{E}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(T \wedge n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S_{T \wedge n}^2) \leq \max\{|a|^2, b^2\} < \infty$$

(ii) Η $\{S_{T \wedge n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι martingale αφού η $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι martingale και άρα $\mathbb{E}(S_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(S_0) = 0$ και αφού $|S_{T \wedge n}| \leq \max\{|a|, b\}$ σ.π., από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(S_T) = 0$$

αφού $|S_{T \wedge n}| \leq \max\{|a|, b\}$ και $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ λόγω του (i). Ισχύει ότι $\{T < \infty\} = \{T_a < T_b\} \cup \{T_b < T_a\}$ και άρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_T) &= \mathbb{E}(S_T 1_{\{T_a < T_b\}} + S_T 1_{\{T_b < T_a\}}) = \mathbb{E}(S_T 1_{\{T_a < T_b\}}) + \mathbb{E}(S_T 1_{\{T_b < T_a\}}) \\ &= a\mathbb{P}(T_a < T_b) + b\mathbb{P}(T_b < T_a) = 0. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$a(1 - \mathbb{P}(T_b < T_a)) + b\mathbb{P}(T_b < T_a) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(T_b < T_a) = \frac{-a}{-a+b} = \frac{|a|}{|a|+b}.$$

(iii) Αφού ισχύει ότι $\mathbb{E}(T) < \infty$, $\mathbb{E}(M_0) = 0 < \infty$ και

$$|M_n - M_{n-1}| = |S_n^2 - n - S_{n-1}^2 + (n-1)| = |S_n^2 - S_{n-1}^2 - 1| \leq 2(n-1) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$$

τότε (από το (iii) του θεωρήματος επιλεκτικής διακοπής)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(S_T^2) = \mathbb{E}(T)$$

και τελικά,

$$\mathbb{E}(T) = a^2\mathbb{P}(T_a < T_b) + b^2\mathbb{P}(T_b < T_a) = a^2 \frac{b}{-a+b} + b^2 \frac{-a}{-a+b} = |a|b.$$

2. Οι εξισώσεις του Wald και η σύνδεση με τα martingales

Θεώρημα 1.2.1 (Wald's first identity). Έστω $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ α.τ.μ. ανεξάρτητες και ισόνομες με $X_n \in \mathcal{L}^1, \forall n \in \mathbb{N}$ και T χρόνος διακοπής στην $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $\mathbb{E}(T) < \infty$. Τότε ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_T) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(T).$$

Απόδειξη.

Είναι $X_1 + \dots + X_T = \sum_{n=1}^{\infty} X_n 1_{\{T \geq n\}}$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_T) &= \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n 1_{\{T \geq n\}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n 1_{\{T \geq n\}}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_n 1_{\{T \geq n\}} | \mathcal{F}_{n-1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[1_{\{T \geq n\}} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[1_{\{T \geq n\}} \mathbb{E}(X_n)] \\
&= \mathbb{E}(X_1) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(T)
\end{aligned}$$

Η τέταρτη ισότητα ισχύει διότι έχουμε ότι $1_{\{T \geq n\}} = 1 - 1_{\{T \leq n-1\}}$ που είναι \mathcal{F}_{n-1} -μετρήσιμη. □

Το παρακάτω θεώρημα (ή και γενικεύσεις του) είναι γνωστό ως *θεμελιώδης ταυτότητα του Wald* όπου την εισήγαγε ο Abraham Wald (1944) για την μελέτη αθροισμάτων στην περιοχή της ακολουθιακής ανάλυσης (sequential analysis) και παίζει σημαντικό ρόλο στην μελέτη της από κοινού κατανομής των αθροισμάτων διακοπής (stop sum) και του αντίστοιχου χρόνου διακοπής. Η παρακάτω διατύπωση καθώς απόδειξη του αποτελέσματος αυτού προέρχεται σχεδόν αυτούσια από την αρχική εργασία του Wald. Εδώ θεωρείται ένας συγκεκριμένος χρόνος διακοπής: έως η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων εξέλθει ενός διαστήματος. Σε επόμενο θεώρημα όμως θα δούμε ότι η ταυτότητα αυτή επεκτείνεται μέσω του θεωρήματος επιλεκτικής διακοπής για κάθε χρόνο διακοπής.

Θεώρημα 1.2.2 (A fundamental identity). Έστω $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ α.τ.μ., $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ και T χρόνος διακοπής όπου $T = \min\{n: S_n \leq a \text{ ή } S_n \geq b\}$, και a, b πραγματικοί αριθμοί με $a < b$, με $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. Τότε ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}[e^{tS_T} [\varphi(t)]^{-T}] = 1,$$

για κάθε t μιγαδικό ώστε η $\varphi(t) := \mathbb{E}(e^{tX_1})$ να ορίζεται, να είναι πεπερασμένη και να ισχύει $|\varphi(t)| \geq 1$.

Απόδειξη.

Έστω A υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου όπου $\mathbb{E}(e^{tX_1}) = \varphi(t)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένος αριθμός $\forall t \in A$. Για $n \in \{0, 1, \dots\}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
[\varphi(t)]^n &= \mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}[e^{tS_T + t(S_n - S_T)}] \\
&= \mathbb{E}[e^{tS_T + t(S_n - S_T)} | T \leq n] \mathbb{P}(T \leq n) + \mathbb{E}[e^{tS_n} | T > n] (1 - \mathbb{P}(T \leq n))
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι οι τ.μ. $S_T = X_1 + \dots + X_T$ και $S_n - S_T = X_{T+1} + \dots + X_n$ είναι ανεξάρτητες δεδομένου ότι $T \leq n$, και θα έχουμε ότι :

$$\mathbb{E}[e^{tS_T + t(S_n - S_T)} | T \leq n] = \mathbb{E}[e^{tS_T} [\varphi(t)]^{n-T} | T \leq n]$$

Επομένως,

$$[\varphi(t)]^n = \mathbb{P}(T \leq n) \mathbb{E}[e^{tS_T} [\varphi(t)]^{n-T} | T \leq n] + (1 - \mathbb{P}(T \leq n)) \mathbb{E}[e^{tS_n} | T > n]$$

και συνεπώς

$$1 = \mathbb{P}(T \leq n) \mathbb{E}[e^{tS_T}[\varphi(t)]^{-T} | T \leq n] + (1 - \mathbb{P}(T \leq n)) \mathbb{E}[e^{tS_n} | T > n][\varphi(t)]^{-n}$$

Έστω B υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου όπου $|\varphi(t)| \geq 1$ και $C = A \cap B$.

Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{P}(T \leq n)) = 0$ και $|\mathbb{E}[e^{tS_n} | T > n]|$ είναι φραγμένη συνάρτηση του n , τότε στο C έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1 - \mathbb{P}(T \leq n)) \frac{\mathbb{E}[e^{tS_n} | T > n]}{[\varphi(t)]^n} \right] = 0$$

και επίσης

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T \leq n) \mathbb{E}[e^{tS_T}[\varphi(t)]^{-T} | T \leq n] = \mathbb{E}[e^{S_T t}[\varphi(t)]^{-T}]$$

Συνεπώς $\mathbb{E}[e^{S_T t}[\varphi(t)]^{-T}] = 1, \forall t \in C$ □

Στο παραπάνω θεώρημα έχει τεθεί και η συνθήκη $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. Αποδεικνύεται όμως (βλ. Wald(1944)) ότι η συνθήκη αυτή ισχύει για το χρόνο διακοπής $T = \min\{n: S_n \geq a \text{ ή } S_n \leq b\}$ (με την προϋπόθεση ότι οι X_i δεν εκφυλίζονται στο 0) και επομένως θα μπορούσε να παραληφθεί από την εκφώνηση.

Από το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει το ακόλουθο και πάλι για χρόνο διακοπής της μορφής $T = \min\{n: S_n \geq a \text{ ή } S_n \leq b\}$.

Θεώρημα 1.2.3 (Πρώτη και δεύτερη εξίσωση του Wald). Αν ισχύουν οι υποθέσεις του παραπάνω Θεωρήματος 1.2.2 τότε

i) $\mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T)$ (Πρώτη εξίσωση του Wald)

ii) $\mathbb{E}[(S_T - T\mathbb{E}(X_1))^2] = \text{Var}(X_1)\mathbb{E}(T)$ (Δεύτερη εξίσωση του Wald)

Απόδειξη.

i) Είναι $\frac{d}{dt} [e^{S_T t}[\varphi(t)]^{-T}]_{t=0} = S_T - \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} T = S_T - \mathbb{E}(X_1)T$

όπου $\varphi(0) = 1$ και $\varphi'(0) = \mathbb{E}(X_1)$. Άρα $\mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T)$.

ii) Είναι

$$\frac{d^2}{dt^2} [e^{S_T t}[\varphi(t)]^{-T}] = \left\{ \left[S_T - \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} T \right]^2 - T \frac{\varphi''(t)\varphi(t) - [\varphi'(t)]^2}{[\varphi(t)]^2} \right\} e^{S_T t}[\varphi(t)]^{-T}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} [e^{S_T t}[\varphi(t)]^{-T}]_{t=0} = [S_T - T\mathbb{E}(X_1)]^2 - T[\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}^2(X_1)]$$

Όπου $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = \mathbb{E}(X_1), \varphi''(0) = \mathbb{E}(X_1^2)$.

Άρα $\mathbb{E}[(S_T - T\mathbb{E}(X_1))^2] = \text{Var}(X_1)\mathbb{E}(T)$. □

Το παραπάνω αποτέλεσμα επεκτείνεται τώρα στις δύο επόμενες προτάσεις για οποιοδήποτε χρόνο διακοπής χρησιμοποιώντας τη θεωρία των Martingales.

Πρόταση 1.2.1 (Wald's First identity via martingale). Έστω $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ α.τ.μ. ανεξάρτητες και ισόνομες με $X_n \in \mathcal{L}^1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ και T χρόνος διακοπής στην $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $E(T) < +\infty$. Έστω επίσης $S_n = X_1 + \dots + X_n$ με $S_0 = 0, \mu = E(X_1)$ και $M_n = S_n - n\mu, n \in \mathbb{N}$. Τότε η στοχαστική διαδικασία $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale και αν ισχύει μία από τις συνθήκες (i), (ii), (iii) του θεωρήματος επιλεκτικής διακοπής για την $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και το χρόνο T , τότε:

$$\mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T)$$

Απόδειξη.

Έστω $M_n = S_n - n\mu, \forall n \in \mathbb{N}$ με $\mathbb{E}(X_1) := \mu$. Θα δειχθεί ότι η α.τ.μ. $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale. Πράγματι,

i) $\mathbb{E}(|M_n|) \leq \mathbb{E}(|S_n|) + n\mu \leq n\mu + n\mu = 2n\mu < \infty$ αφού $X_n \in \mathcal{L}^1$

ii) Η M_n είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη ως συνάρτηση των X_1, \dots, X_n .

iii) Επίσης,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}[S_{n+1} - (n+1)\mu|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] - (n+1)\mu \\ &= \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - (n+1)\mu = S_n + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - (n+1)\mu \\ &= S_n + \mu - (n+1)\mu = S_n - n\mu = M_n. \end{aligned}$$

Άρα η στοχαστική διαδικασία $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale. Αν ισχύει μια από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος επιλεκτικής διακοπής τότε θα έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$$

και με αντικατάσταση γίνεται

$$\mathbb{E}(S_T - \mu T) = 0 \text{ και συνεπώς } \mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T) \quad \square$$

Πρόταση 1.2.2 (Wald's second identity via martingale). Έστω $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ α.τ.μ. ανεξάρτητες και ισόνομες με $X_n \in \mathcal{L}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ και T χρόνος διακοπής στην $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $E(T) < +\infty$. Έστω επίσης $\mu = E(X_1), \sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ και

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad Z_n = S_n - n\mu, \quad Y_n = Z_n^2 - n\sigma^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε η στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale και αν ισχύει μία από τις συνθήκες (i), (ii), (iii) του θεωρήματος επιλεκτικής διακοπής για την $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και το χρόνο T , τότε

$$\mathbb{E} \left[(S_T - T \mathbb{E}(X_1))^2 \right] = \text{Var}(X_1) \mathbb{E}(T).$$

Απόδειξη.

Έστω $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ α.τ.μ. με $Z_n = S_n - n\mu$ και $Y_n = Z_n^2 - n\sigma^2$ όπου $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, $\text{Var}(X_1) = \sigma^2$. Θα δειχθεί ότι η α.τ.μ. $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale.

i) Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|Y_n|) &\leq \mathbb{E}(Z_n^2) + n\sigma^2 \leq \mathbb{E}(S_n^2) + 2n\mu\mathbb{E}(S_n) + n^2\mu^2 + n\sigma^2 \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k^2 + 2\sum_{k=0}^{n-1} X_{k+1}S_k\right) + 2n^2\mu^2 + n^2\mu^2 + n\sigma^2 \\ &= n(\sigma^2 + \mu^2) + 2\sum_{k=1}^n k(\sigma^2 + \mu^2) + \mu + 2n^2\mu^2 + n^2\mu^2 + n\sigma^2 < \infty \end{aligned}$$

αφού $X_n \in \mathcal{L}^2$.

ii) Η Y_n είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη αφού η X_n είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη.

$$iii) \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}[Z_{n+1}^2 - (n+1)\sigma^2|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Z_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - (n+1)\sigma^2 = Y_n$$

η παραπάνω ισότητα ισχύει διότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1} - (n+1)\mu)^2|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^2|\mathcal{F}_n] - 2(n+1)\mu\mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] + (n+1)^2\mu^2 \\ &= S_n^2 - 2nS_n\mu + \mathbb{E}(X_{n+1}^2) - 2(n+1)\mu^2 + (n+1)^2\mu^2 \\ &= (S_n - n\mu)^2 + \sigma^2 = Z_n^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Άρα η α.τ.μ. $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με $Y_n = (S_n - n\mu)^2 - n\sigma^2$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale. Αν ισχύει μια από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος επιλεκτικής διακοπής τότε θα έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}(Y_T) = \mathbb{E}(Y_0) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[(S_T - T\mu)^2] = \sigma^2\mathbb{E}(T) \quad \square$$

Στην συνέχεια παρουσιάζεται η επέκταση της θεμελιώδους ταυτότητας του Wald μέσω του θεωρήματος επιλεκτικής διακοπής.

Πρόταση 1.2.3 (Wald's fundamental identity via martingale). Έστω $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ α.τ.μ. ανεξάρτητες και ισόνομες με $X_n \in \mathcal{L}^1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ και T χρόνος διακοπής στην $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Έστω επίσης

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad M_n := e^{tS_n - nk(t)}, \quad k(t) = \log[\varphi(t)], \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Για κάθε t έτσι ώστε η ποσότητα $\varphi(t) := \mathbb{E}(e^{tX_1})$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη. Τότε η στοχαστική διαδικασία $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ -martingale και αν ισχύει μία από τις συνθήκες (i),(ii),(iii) του θεωρήματος επιλεκτικής διακοπής για την $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ και το χρόνο T , τότε

$$\mathbb{E}[e^{tS_T}[\varphi(t)]^{-T}] = 1$$

Απόδειξη. Θα δειχθεί ότι η α.τ.μ $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ -martingale. Είναι

$$i) \mathbb{E}(|M_n|) \leq |\mathbb{E}(M_n)| = \left| \frac{\mathbb{E}(e^{t(X_1 + \dots + X_n)})}{[\varphi(t)]^n} \right| = 1 < \infty \Rightarrow M_n \in \mathcal{L}^1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ii) Η M_n είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη αφού η X_n είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη.

iii) Επίσης

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{e^{t(X_1+\dots+X_{n+1})}}{[\varphi(t)]^{n+1}}|\mathcal{F}_n\right) = \frac{e^{t(X_1+\dots+X_n)}}{[\varphi(t)]^{n+1}}\mathbb{E}(e^{tX_{n+1}}|\mathcal{F}_n) \\ &= \frac{e^{a(X_1+\dots+X_n)}}{[\varphi(t)]^{n+1}}\varphi(t) = \frac{e^{a(X_1+\dots+X_n)}}{[\varphi(t)]^n} = M_n, \forall n \in \mathbb{N}^*\end{aligned}$$

Άρα η α.τ.μ. $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ -martingale. Αν ισχύει μια από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος επιλεκτικής διακοπής τότε θα έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_1) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[e^{S_T t}[\varphi(t)]^{-T}] = 1.$$

□

Το ακόλουθο λήμμα είναι απαραίτητο για την απόδειξη του παρακάτω Θεωρήματος 1.2.5 που αποτελεί μια ακόμη μια επέκταση της θεμελιώδους ισότητας του Wald που οφείλεται στον Ramsay (1990).

Λήμμα 1.2.1. Για κάθε χρόνο διακοπής T ως προς $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, με ακέραιες τιμές και για $n \geq 1$ ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}[e^{tS_{T \wedge n}} z^{T \wedge n}] = 1 + [z\varphi(t) - 1]F_n(z, t)$$

για $t, z \in \mathbb{C}$: ώστε να ορίζονται οι παραπάνω μέσες τιμές και να είναι πεπερασμένες, όπου $S_n = X_1 + \dots + X_n$ και $F_n(z, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[e^{tS_k} z^k \mathbf{1}_{\{T > k\}}]$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{tS_{T \wedge n}} z^{T \wedge n}] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{tS_k} z^k \mathbf{1}_{\{T=k\}}] + \mathbb{E}[e^{tS_n} z^n \mathbf{1}_{\{T > n\}}] \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{tS_k} z^k (1_{\{T \geq k\}} - 1_{\{T > k\}})] + \mathbb{E}[e^{tS_n} z^n \mathbf{1}_{\{T > n\}}] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[e^{tS_{k+1}} z^{k+1} \mathbf{1}_{\{T > k\}}] - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}[e^{tS_k} z^k \mathbf{1}_{\{T > k\}}] \\ &= z \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[e^{tS_k} e^{tX_{k+1}} z^k \mathbf{1}_{\{T > k\}}] - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[e^{tS_k} z^k \mathbf{1}_{\{T > k\}}] - 1 \right) \\ &= z\varphi(t) \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[e^{tS_k} z^k \mathbf{1}_{\{T > k\}}] - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[e^{tS_k} z^k \mathbf{1}_{\{T > k\}}] - 1 \right) \\ &= z\varphi(t)F_n(z, t) - [F_n(z, t) - 1] \\ &= 1 + [z\varphi(t) - 1]F_n(z, t) \quad \square\end{aligned}$$

Θεώρημα 1.2.5 (The Fundamental identity, Ramsay (1990)). Για κάθε χρόνο διακοπής T με τιμές στο \mathbb{N}^* ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}[e^{tS_T} z^T 1_{\{T < \infty\}}] = 1 + [z \varphi(t) - 1] F(z, t)$$

αν και μόνο αν για κάποιο $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}[e^{tS_n} z^n 1_{\{T > n\}}] = O(n^{-(1+\varepsilon)})$$

για t, z μιγαδικοί ώστε να ορίζονται οι παραπάνω μέσες τιμές και να είναι πεπερασμένες.

Απόδειξη.

Θεωρούμε την ποσότητα

$$F(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{tS_k} z^k 1_{\{T > k\}}]$$

για t, z μιγαδικούς ώστε να ορίζονται οι μέσες τιμές $\mathbb{E}[e^{tS_k} z^k 1_{\{T > k\}}]$ και να είναι πεπερασμένες ποσότητες για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$. Αφού η $F(z, t)$ είναι σειρά τότε θα συγκλίνει αν για κάποιο $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}[e^{tS_n} z^n 1_{\{T > n\}}] = O(n^{-(1+\varepsilon)})$$

Από το Λήμμα 1.2.1. ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[e^{tS_{T \wedge n}} z^{T \wedge n}] = 1 + [z \varphi(t) - 1] F_n(z, t)$$

Για $n \rightarrow +\infty$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\mathbb{E}[e^{tS_T} z^T 1_{\{T < \infty\}}] + \mathbb{E}[e^{tS_T} z^T 1_{\{T = \infty\}}] = 1 + [z \varphi(t) - 1] F(z, t)$$

Όμως για κάποιο $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι: $\mathbb{E}[e^{tS_n} z^n 1_{\{T > n\}}] = O(n^{-(1+\varepsilon)})$ τότε θα έχουμε ότι $\mathbb{E}[e^{tS_T} z^T 1_{\{T = \infty\}}] = 0$ και με αυτό το βήμα ολοκληρώνεται η απόδειξη \square

Τέλος, ο Ramsay (1990) γενίκευσε και το αρχικό αποτέλεσμα του Wald (Θεώρημα 1.2.2.) για χρόνο διακοπής της μορφής

$$T = \inf \{n: S_n \notin (b_n, a_n)\}, \quad a_n, b_n > 0, n \in \mathbb{N}$$

ενώ υπενθυμίζεται ότι το αρχικό αποτέλεσμα ήταν για σταθερές ακολουθίες $a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$. Συγκεκριμένα, αν t_0 είναι η μοναδική πραγματική ρίζα της εξίσωσης $\varphi'(t) = 0$, ο Ramsay (1990) απέδειξε και με την βοήθεια του προηγούμενου αποτελέσματος το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.2.6 (Wald's Identity). Αν $t \in \mathcal{C} := \{t \in \mathbb{C}: -b < \text{Re}(t) < a, 0 < b, a \leq +\infty\}$ και ισχύει ένα από τα παρακάτω

- (i) $t_0 < u < a, 0 < b_n \leq +\infty$ και $(u - t_0)(a_{n+1} - a_n) < \ln[|\varphi(t)^{-1} \varphi(t_0)|]$
- (ii) $-b < u < t_0, 0 < a_n \leq +\infty$ και $(t_0 - u)(b_{n+1} - b_n) < \ln[|\varphi(t)^{-1} \varphi(t_0)|]$

όπου $u = \text{Re}(t)$, για κάποια $a \leq +\infty, b > 0$, τότε ισχύει ότι :

$$\mathbb{E}[e^{tS_T}[\varphi(t)]^{-T} 1_{\{T < \infty\}}] = 1.$$

Απόδειξη.

βλ. Ramsay (1990) "On a fundamental identity for stopping times and its application to risk theory" □

3. Αλλαγή μέτρου και ο μετασχηματισμός Esscher

Ορισμός 1.3.1. Έστω (Ω, \mathcal{F}) μετρήσιμος χώρος και \mathbb{P}, \mathbb{Q} πεπερασμένα μέτρα σε αυτόν. Θα λέμε ότι το μέτρο \mathbb{Q} είναι *απόλυτα συνεχές* (absolutely continuous) ως προς το \mathbb{P} , αν $\forall A \in \mathcal{F}$ ώστε να ισχύει $\mathbb{P}(A) = 0$, τότε και $\mathbb{Q}(A) = 0$. Συμβολικά θα γράφουμε $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.

Παράδειγμα 1.3.1. Έστω \mathbb{P}, \mathbb{Q} μέτρα πιθανότητας στον (Ω, \mathcal{F}) , με $\mathbb{Q}(A) := \mathbb{P}(A|B)$, όπου $\mathbb{P}(B) > 0$. Τότε αν για κάποιο $C \in \mathcal{F}$ με $\mathbb{P}(C) = 0$, τότε από τον ορισμό του \mathbb{Q} είναι:

$$\mathbb{Q}(C) = \mathbb{P}(C|B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(B)} = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(C) = 0. \text{ Άρα } \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}.$$

Παρατήρηση 1.3.1.

i) Στο παραπάνω παράδειγμα θα μπορούσαμε να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν θέταμε ως

$$\mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_A X], \text{ όπου } X = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} 1_B$$

ii) Αν \mathbb{P} είναι μέτρο πιθανότητας σε ένα χώρο (Ω, \mathcal{F}) και X τ.μ. με $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = 1$, τότε και το $\mathbb{Q} : \mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_A X]$ είναι μέτρο πιθανότητας.

Πράγματι, ικανοποιεί τα αξιώματα Kolmogorov,

- $\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_{\Omega} X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = 1$
- Αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ακολουθία ενδεχομένων στην \mathcal{F} ξένων ανά δύο τότε:

$$\mathbb{Q}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[1_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} X\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i} X\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_{A_i} X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}(A_i)$$

Θεώρημα 1.3.1 (Radon-Nikodym). Έστω \mathbb{P} μέτρο πιθανότητας στον (Ω, \mathcal{F}) και \mathbb{Q} πεπερασμένο μέτρο σε αυτόν. Αν $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ τότε υπάρχει μοναδική μη αρνητική τ.μ. X ώστε $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_A X]$, $\forall A \in \mathcal{F}$. Η τ.μ. X ονομάζεται *παράγωγος Radon-Nikodym* (Radon-Nikodym derivative) και συμβολίζεται με $X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Παρατήρηση 1.3.2. Αν υποθέσουμε ότι η τ.μ. Y είναι ολοκληρώσιμη, τότε έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y) = \int Y d\mathbb{Q} = \int Y \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = \int Y X d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(YX)$$

Παράδειγμα 1.3.2. Έστω X τ.μ. με $X \sim N(0,1)$ κάτω από το μέτρο \mathbb{P} . Η σ.π.π. της X είναι $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε ότι :

$$\mathbb{P}(X \in (a, b)) = \int 1_{(a,b)} d\mathbb{P}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Μας ενδιαφέρει η εξής πιθανότητα :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in (a - \mu, b - \mu)) &= \int 1_{(a-\mu, b-\mu)} d\mathbb{P}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a-\mu}^{b-\mu} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = \int_a^b e^{x\mu - \frac{1}{2}\mu^2} f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x\mu - \frac{1}{2}\mu^2} 1_{[a,b]} d\mathbb{P}(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{X\mu - \frac{1}{2}\mu^2} 1_{[a,b]} \right] \end{aligned}$$

Άρα από το θεώρημα *Radon-Nikodym* $\exists \mathbb{Q}$ μέτρο με : $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{X\mu - \frac{1}{2}\mu^2} 1_A \right]$ με παράγωγο *Radon-Nikodym*: $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{X\mu - \frac{1}{2}\mu^2}$.

Αν ενδιαφερόμαστε για το:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[X \leq a] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{X\mu - \frac{1}{2}\mu^2} 1_{[X \leq a]} \right] = \int e^{X\mu - \frac{1}{2}\mu^2} 1_{[X \leq a]} d\mathbb{P}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a-\mu} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mathbb{P}(X \leq a - \mu). \end{aligned}$$

Δηλαδή όταν $X \sim N(0,1)$ κάτω από το μέτρο \mathbb{P} , τότε η $X \sim N(\mu, 1)$ κάτω από το μέτρο \mathbb{Q} .

Από το παραπάνω θεώρημα γίνεται σαφές πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα νέο μέτρο \mathbb{Q} για να υπολογίσουμε ποσότητες που μας ενδιαφέρουν κάτω από το

παλιό μέτρο \mathbb{P} . Στην ειδική περίπτωση που ισχύει $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = 1$, τότε και το \mathbb{Q} είναι μέτρο πιθανότητας όπως αναφέρθηκε στην Παρατήρηση 1.3.1. Ενδιαφέρον έχει να εξετάσουμε τι γίνεται αν στην θέση της τυχαίας μεταβλητής έχουμε μια στοχαστική διαδικασία που είναι martingale. Έτσι έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.3.1. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στοχαστική διαδικασία σε αυτόν. Αν $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ η φυσική διήθηση που παράγεται από την $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ και η $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μη αρνητικό martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\mathbb{E}(L_n) = 1$ για κάθε n , τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}$ στην \mathcal{F} με $\tilde{\mathbb{P}} \ll \mathbb{P}$ έτσι ώστε

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[L_n; A], \quad A \in \mathcal{F}_n$$

Απόδειξη.

Έστω μέτρο $\tilde{\mathbb{P}}$ που ορίζεται ως $\tilde{\mathbb{P}}_n(A) = \mathbb{E}[L_n; A] = \mathbb{E}[L_n 1_A]$, $A \in \mathcal{F}_n$. Αφού $\mathbb{E}(L_n) = 1$ έχουμε ότι $\tilde{\mathbb{P}}_n$ είναι μέτρο πιθανότητας για κάθε n . Έστω $k < n$ και $A \in \mathcal{F}_k$. Τότε

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_n(A) &= \mathbb{E}[L_n; A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[L_n; A | \mathcal{F}_k]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[L_n 1_A | \mathcal{F}_k]] = \mathbb{E}[1_A \mathbb{E}[L_n | \mathcal{F}_k]] \\ &= \mathbb{E}[1_A L_k] = \mathbb{E}[L_k; A] = \tilde{\mathbb{P}}_k(A) \end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία $\{\tilde{\mathbb{P}}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι σταθερή και $\tilde{\mathbb{P}}_n$ είναι μέτρο πιθανότητας για κάθε n από όπου προκύπτει ότι $\tilde{\mathbb{P}}(A) = \tilde{\mathbb{P}}_n(A)$, $A \in \mathcal{F}_n$ αποδεικνύοντας έτσι το ζητούμενο

□

Στην συνέχεια θα δούμε πώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το νέο μέτρο πιθανότητας ώστε να βρίσκουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ή ακόμα και την μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής κάτω από το παλιό μέτρο. Το θεώρημα που ακολουθεί είναι γνωστό και ως *Likelihood Ratio Identity* και παίζει καθοριστικό ρόλο για την σύνδεση του παλαιού μέτρου πιθανότητας και του νέου μέτρου πιθανότητας σε συνδυασμό με martingale και χρόνο διακοπής.

Είναι τώρα εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν Y είναι μια ολοκληρώσιμη και \mathcal{F}_n -μετρήσιμη τ.μ. τότε η Y είναι τ.μ. και στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}_n, \tilde{\mathbb{P}})$ (στον οποίο όπως είδαμε παραπάνω $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = L_n$) και επομένως θα ισχύει ότι

$$\tilde{\mathbb{E}}[Y] = \int Y d\tilde{\mathbb{P}} = \int Y \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = \mathbb{E}[Y L_n].$$

Μία τ.μ. Z θα θεωρείται \mathcal{F}_T μετρήσιμη αν η τ.μ. $Z 1_{[T=n]}$ είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη για κάθε n .

Θεώρημα 1.3.2. Έστω μια σ.δ. $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και μέτρο $\tilde{\mathbb{P}}$ όπως ορίστηκαν στην προηγούμενη πρόταση. Αν T είναι χρόνος διακοπής και $G \in \mathcal{F}_T$ με $G \subseteq \{T < \infty\}$, τότε

$$\mathbb{P}(G) = \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{L_T}; G \right]$$

Επίσης αν Z τ.μ. που είναι \mathcal{F}_T -μετρήσιμη και είναι 0 όταν $\{T = \infty\}$, τότε

$$\mathbb{E}(Z) = \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{Z}{L_T} \right]$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε αρχικά $G \subseteq \{T \leq k\}$ για καθορισμένο $k < \infty$ (και άρα $1_G = 1_G 1_{\{T \leq k\}}$). Από την παρατήρηση πριν το θεώρημα (αφού η τ.μ. $Y = 1_G/L_T$ είναι \mathcal{F}_k -μετρήσιμη) θα ισχύει ότι

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1_G}{L_T} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{1_G}{L_T} L_k \right]$$

και επίσης από την ιδιότητα του martingale έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{L_T} 1_G \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{L_k}{L_T} 1_G \right] = \mathbb{E} \left[\frac{L_k}{L_T} 1_G 1_{\{T \leq k\}} \right] = \sum_{n=1}^k \mathbb{E} \left[\frac{L_k}{L_n} 1_G 1_{\{T=n\}} \right] \\ &= \sum_{n=1}^k \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\frac{L_k}{L_n} 1_G 1_{\{T=n\}} \mid \mathcal{F}_n \right] \right] = \sum_{n=1}^k \mathbb{E} \left[\frac{1}{L_n} 1_G 1_{\{T=n\}} \mathbb{E}[L_k \mid \mathcal{F}_n] \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{L_n} 1_G 1_{\{T=n\}} L_n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} [1_G 1_{\{T=n\}}] = \mathbb{E} [1_G 1_{\{T \leq k\}}] \\ &= \mathbb{E} [1_G] = \mathbb{P}(G) \end{aligned}$$

Όπου η πέμπτη ισότητα ισχύει διότι η τ.μ. $\frac{1}{L_n} 1_G 1_{\{T=n\}}$ είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη ενώ η έκρη ισχύει γιατί η σ.δ. $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale.

Εφαρμόζοντας το παραπάνω για $G \cap \{T \leq k\} \subseteq \{T \leq k\}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(G \cap \{T \leq k\}) = \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{L_T}; G \cap \{T \leq k\} \right]$$

Θέτοντας $A_k = G \cap \{T \leq k\}$ τότε $A_k \subseteq A_{k+1}$ δηλαδή η ακολουθία ενδεχομένων $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και συνεπώς $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k \right)$ για $k \rightarrow \infty$ (και το ίδιο για $\tilde{\mathbb{P}}$). Επομένως

$$\mathbb{P}(G) = \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{L_T}; G \right] \quad \text{για κάθε } G \subseteq \{T < \infty\}$$

Το παραπάνω τώρα επεκτείνεται κατά τον γνωστό τρόπο (χρησιμοποιώντας κλασικές μετροθεωρητικές τεχνικές) από δείκτριες για οποιοσδήποτε τ.μ. \square

Ορισμός 1.3.2 (Esscher Transform). Έστω X τ.μ. σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και h μία σταθερά. Τότε το μέτρο πιθανότητας \mathbb{P}_h ορίζεται ως:

$$\frac{d\mathbb{P}_h^X}{d\mathbb{P}} := \frac{e^{hX}}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{hX}]}$$

και ονομάζεται *μετασχηματισμένο μέτρο Esscher* (Esscher transform) του \mathbb{P} ως προς τ.μ. X και σταθερά h . Για κάθε $A \in \mathcal{F}$ θα ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_h(1_A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}_h^X}(1_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(1_A \frac{e^{hX}}{\mathbb{E}[e^{hX}]}\right) = \int_A \frac{e^{hX}}{\mathbb{E}[e^{hX}]} d\mathbb{P}$$

Παρατήρηση 1.3.3. Αν $f(x)$ είναι η σ.π. της τ.μ. X κάτω από το μέτρο \mathbb{P} τότε η συνάρτηση πυκνότητας $f(x; h)$ υπό το μέτρο \mathbb{P}_h^X του μετασχηματισμού Esscher είναι

$$f(x; h) = \frac{e^{hx}}{\mathbb{E}[e^{hX}]} f(x)$$

με την προϋπόθεση ότι η ποσότητα $\mathbb{E}[e^{hX}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{hX}]$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη.

Παράδειγμα 1.3.3. Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

και $\mathbb{E}[e^{hX}] = e^{h\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 h^2}$. Αν ορίσουμε την νέα τ.μ. $Y = \frac{e^{hX}}{\mathbb{E}[e^{hX}]}$ σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Esscher τότε

$$\begin{aligned} f_Y(x) = f(x; h) &= \frac{e^{hx}}{\mathbb{E}[e^{hX}]} f(x) = \frac{e^{hx}}{e^{h\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 h^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2 h)]^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Συνεπώς όταν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ κάτω από το μέτρο \mathbb{P} τότε η $X \sim N(\mu + \sigma^2 h, \sigma^2)$ κάτω από το μέτρο \mathbb{P}_h^X που είναι το μέτρο του μετασχηματισμού Esscher ως προς την τ.μ. X με σταθερά h .

Ο μετασχηματισμός μέτρου Esscher είναι γνωστός στην βιβλιογραφία και ως *εκθετικά κεκλιμένο μέτρο* (Exponential tilted measure ή Exponential change of measure).

Βασικές ιδιότητες μετασχηματισμού Esscher

i) Αν $k(t) = \log \mathbb{E}[e^{tX}]$ τότε υπό τον μετασχηματισμό Esscher ως προς την X με σταθερά h είναι

$$\begin{aligned} k_h(t) &= \log \mathbb{E}_h[e^{tX}] = \log \mathbb{E} \left[e^{tX} \frac{e^{hX}}{\mathbb{E}[e^{hX}]} \right] = \log \frac{\mathbb{E}[e^{(h+t)X}]}{\mathbb{E}[e^{hX}]} \\ &= k(h+t) - k(h) \end{aligned}$$

ii) Για την μέση τιμή και την διακύμανση της τ.μ. X υπό τον μετασχηματισμό Esscher είναι :

$$\mathbb{E}_h(X) = \frac{d}{dt} k_h(t)|_{t=0} = k'(h), \quad \text{Var}_h(X) = \frac{d^2}{dt^2} k_h(t)|_{t=0} = k''(h)$$

iii) Ο μετασχηματισμός Esscher με σταθερά h_2 του μετασχηματισμού Esscher με σταθερά h_1 είναι πάλι μετασχηματισμός Esscher με σταθερά $h_1 + h_2$.

Αν $S_n = X_1 + \dots + X_n$ όπου X_1, X_2, \dots, X_n είναι ανεξάρτητες τ.μ. τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_h^{S_n}}(S_n) &= \mathbb{E} \left(S_n \frac{e^{hS_n}}{\mathbb{E}[e^{hS_n}]} \right) = \mathbb{E} \left(S_n \prod_{i=1}^n \frac{e^{hX_i}}{\mathbb{E}[e^{hX_i}]} \right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left(X_k \prod_{i=1}^n \frac{e^{hX_i}}{\mathbb{E}[e^{hX_i}]} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left(X_k \frac{e^{hX_k}}{\mathbb{E}[e^{hX_k}]} \right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}_h^{X_k}}(X_k) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.3.4. Στο προηγούμενο παράδειγμα είχαμε ότι $X \sim_{\mathbb{P}} N(\mu, \sigma^2)$ τότε $X \sim_{\mathbb{P}_h} N(\mu + h\sigma^2, \sigma^2)$. Επειδή σε αυτή την περίπτωση,

$$k(t) = \log \mathbb{E}(e^{tX}) = \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2,$$

υπό το νέο μέτρο \mathbb{P}_h θα ισχύει ότι

$$k_h(t) = k(h+t) - k(h) = \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t(2h+t) = (\mu + h\sigma^2)t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2$$

που είναι ο λογάριθμος της ροπογεννήτριας της κατανομής της τ.μ. X υπό το \mathbb{P}_h . Επίσης, αν υπό το μέτρο \mathbb{P} ισχύει ότι $X_i \sim N(i, \sigma^2)$ και $S_n = X_1 + \dots + X_n$ τότε

$$S_n \sim_{\mathbb{P}} N\left(\frac{n(n+1)}{2}, n\sigma^2\right)$$

και υπό το μετασχηματισμένο μέτρο Esscher (ως προς την S_n με σταθερά h) θα είναι

$$S_n \sim_{\mathbb{P}_h^{S_n}} N\left(\frac{n(n+1)}{2} + hn\sigma^2, n\sigma^2\right)$$

Για κάθε τ.μ. X_i υπό το μετασχηματισμένο μέτρο Esscher (ως προς την X_i με σταθερά h) θα είναι

$$X_i \sim_{\mathbb{P}_h^{X_i}} N(i + h\sigma^2, \sigma^2).$$

Παρατήρηση 1.3.4. Στον Ορισμό 1.3.2. είδαμε το μετασχηματισμένο μέτρο Esscher μιας τυχαίας μεταβλητής μέσω της παραγώγου *Radon-Nikodym*. Έστω ότι έχουμε την ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ και την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τους $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, τότε η παράγωγος *Radon-Nikodym* σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Esscher για τις τυχαίες μεταβλητές S_n θα είναι:

$$\frac{d\mathbb{P}_h^{S_n}}{d\mathbb{P}} := \frac{e^{hS_n}}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{hS_n}]} = \frac{e^{h(X_1+\dots+X_n)}}{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{hX_i}]}.$$

Θεωρούμε τώρα την στοχαστική διαδικασία $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ με

$$L_n = \frac{e^{hS_n}}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{hS_n}]}, \quad n = 1, 2, \dots$$

όπου X_1, X_2, \dots είναι ανεξάρτητες τ.μ. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η παραπάνω αποτελεί μη αρνητικό martingale ως προς την φυσική της διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Πράγματι ($\mathbb{E} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}$), για $k < n$,

$$\mathbb{E} \left(\frac{e^{hS_n}}{\mathbb{E}[e^{hS_n}]} \middle| \mathcal{F}_k \right) = \frac{e^{hS_k} \mathbb{E}(e^{h(S_n-S_k)} | \mathcal{F}_k)}{\mathbb{E}[e^{hS_n}]} = \frac{e^{hS_k} \mathbb{E}(e^{h(S_n-S_k)})}{\mathbb{E}[e^{hS_n}]} = \frac{e^{hS_k}}{\mathbb{E}[e^{hS_k}]} = L_k$$

Επίσης, $\mathbb{E}(L_n) = 1, n = 1, 2, \dots$. Επομένως, όπως και στην Πρόταση 1.3.1 ορίζουμε στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_h \ll \mathbb{P}$ έτσι ώστε

$$\mathbb{P}_h(A) = \mathbb{E}[L_n; A], \quad A \in \mathcal{F}_n.$$

Επιπλέον για κάθε τυχαία μεταβλητή Y που είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη θα ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}_h(Y) = \mathbb{E}(YL_n) = \mathbb{E} \left(Y \frac{e^{hS_n}}{\mathbb{E}[e^{hS_n}]} \right) = \frac{\mathbb{E}(Y e^{h(X_1+\dots+X_n)})}{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{hX_i}]}.$$

Η παραπάνω παρατήρηση αν και απλή είναι σημαντική γιατί συνδυάζοντάς την με το Θεώρημα 1.3.2. μπορεί να μας δώσει ενδιαφέροντα αποτελέσματα για το πώς συνδέεται η κατανομή ενός χρόνου διακοπής T και του αθροίσματος διακοπής S_T (π.χ. βλ. Boutsikas, Rakitzis και Antzoulakos (2011)).

Θεώρημα 1.3.3. Έστω T χρόνος διακοπής που σχετίζεται με την ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ και Y τυχαία μεταβλητή \mathcal{F}_T -μετρήσιμη. Τότε

$$\mathbb{E}(Y e^{hS_T} 1_{[T < \infty]}) = \mathbb{E}_h \left(Y \prod_{i=1}^T \mathbb{E}[e^{hX_i}] 1_{[T < \infty]} \right)$$

Για κάθε h πραγματικό αριθμό τέτοιο ώστε οι παραπάνω μέσες τιμές να υπάρχουν.

Απόδειξη.

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.3.2. για το μέτρο $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}_h$ και την τ.μ. $Z = Y e^{hS_T} 1_{[T < \infty]}$. □

Στο Θεώρημα 1.2.5 έγινε μια γενίκευση της θεμελιώδους εξίσωσης του Wald μόνο που κάποιες ποσότητες αν και καλά ορισμένες είναι αρκετά δύσκολο να τις γνωρίζουμε ή να έχουν κλειστή μορφή. Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να μας βοηθήσει στο να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία βρίσκοντας τη ζητούμενη μέση τιμή υπό ένα διαφορετικό μέτρο.

Πρόταση 1.3.2. Αν $\mathbb{P}(T < \infty) = \mathbb{P}_h(T < \infty) = 1$, τότε

$$\mathbb{E}(e^{hS_T} z^T) = \mathbb{E}_h \left[\left(z \mathbb{E}(e^{hX_1}) \right)^T \right]$$

για κάθε πραγματικούς αριθμούς z, h έτσι ώστε οι παραπάνω μέσες τιμές να υπάρχουν. Στην ειδική περίπτωση που είναι $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(e^{hS_T}) = \mathbb{E}_h \left[\left(\mathbb{E}(e^{hX_1}) \right)^T \right]$$

Απόδειξη.

Από το Θεώρημα 1.3.3 είναι $\mathbb{E}(Y e^{hS_T}) = \mathbb{E}_h(Y \prod_{i=1}^T \mathbb{E}[e^{hX_i}])$. Στην περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ αποτελείται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές τότε $\prod_{i=1}^T \mathbb{E}[e^{hX_i}] = [\mathbb{E}(e^{hX_1})]^T$. Θέτοντας $Y = z^T$ (αφού η τυχαία μεταβλητή $z^T 1_{[T=n]} = z^n 1_{[T=n]}$ είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη για κάθε n) άμεσα προκύπτει το ζητούμενο. \square

Πρόταση 1.3.3. Αν υπάρχει πραγματική συνάρτηση w_z έτσι ώστε $\mathbb{E}(e^{w_z X_1}) = 1/z$ και $\mathbb{P}(T < \infty) = \mathbb{P}_{w_z}(T < \infty) = 1$, τότε

$$\mathbb{E}(e^{hS_T} z^T) = \mathbb{E}_{w_z}(e^{(h-w_z)S_T})$$

για κάθε πραγματικούς αριθμούς z, h έτσι ώστε οι παραπάνω μέσες τιμές υπάρχουν. Στην ειδική περίπτωση που είναι $h = 0$ θα έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(z^T) = \mathbb{E}_{w_z}(e^{-w_z S_T})$$

Απόδειξη.

Αν θέσουμε $Y = z^T e^{(h-w_z)S_T}$ τότε η τυχαία μεταβλητή $Y 1_{[T=n]} = z^T e^{(h-w_z)S_T} 1_{[T=n]}$ είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη για κάθε n . Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.3.3 υπό τα μέτρα \mathbb{P} και \mathbb{P}_{w_z} οδηγούμαστε στην σχέση

$$\mathbb{E}(e^{(h-w_z)S_T} e^{w_z S_T} z^T) = \mathbb{E}_{w_z} \left[e^{(h-w_z)S_T} z^T \left(\mathbb{E}(e^{hX_1}) \right)^T \right]$$

και επειδή από υπόθεση $[z \mathbb{E}(e^{w_z X_1})]^T = 1$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση. \square

Οι παραπάνω προτάσεις υποδηλώνουν ότι αν γνωρίζουμε την κατανομή του αθροίσματος διακοπής S_T τότε αμέσως ξέρουμε και την κατανομή του χρόνου διακοπής T και αντιστρόφως.

Κεφάλαιο 2. Εφαρμογή Χρόνων Διακοπής στην Θεωρία Ροών επιτυχιών

1. Εισαγωγικές έννοιες

Έστω X_1, X_2, \dots, X_m τυχαίο δείγμα μεγέθους m από πληθυσμό με κατανομή $F_X(x), x \in \mathbb{R}$ και Y_1, Y_2, \dots, Y_n τυχαίο δείγμα μεγέθους n από πληθυσμό με κατανομή $F_Y(x), x \in \mathbb{R}$. Ένα συχνό πρόβλημα που μας απασχολεί είναι ο έλεγχος της υπόθεσης $H_0: F_X(x) = F_Y(x)$ για κάθε τιμή x έναντι της $H_1: F_X(x) \neq F_Y(x)$ για κάποιο x . Έχουν προταθεί διάφοροι παραμετρικοί έλεγχοι στην περίπτωση που η κατανομές των πληθυσμών είναι γνωστές καθώς και μη παραμετρικοί.

Το 1940 οι Abraham Wald και Jacob Wolfowitz δημοσίευσαν το άρθρο “On a Test Whether Two Samples are from the same Population” στο οποίο έγινε μελέτη για τον παραπάνω έλεγχο. Αναλυτικότερα ο έλεγχος γνωστός και ως “Wald–Wolfowitz runs test” είναι ένας μη παραμετρικός έλεγχος όπου η στατιστική συνάρτηση βασίζεται στην κατανομή του πλήθους των ρών από παρατηρήσεις που προέρχονται από κάθε δείγμα. Ακόμα η ίδια τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να γίνει ο έλεγχος αν ένα δείγμα αποτελεί τυχαίο δείγμα. Πέρα από το στατιστικό κομμάτι ενδιαφέρον έχει και η πιθανοθεωρητική μελέτη της κατανομής ρών επιτυχιών και άλλων ποσοτήτων που σχετίζονται με αυτές.

Οι Markos V. Koutras και N. Balakrishnan δημοσίευσαν το 2001 το σύγγραμμα με τίτλο “Runs and Scans with Applications” το οποίο αποτελεί μία εκτενή επισκόπηση στην θεωρία Στατιστικών συναρτήσεων Σάρωσης και Ροών επιτυχιών. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε μερικά αποτελέσματα από την σκοπιά της μελέτης των χρόνων διακοπής τα οποία είναι πλέον γνωστά στην θεωρία συναρτήσεων Σάρωσης και Ροών επιτυχιών.

Ορισμός 2.1.1. Έστω Z_1, Z_2, \dots ακολουθία δίτιμων τυχαίων μεταβλητών («δοκιμές») των οποίων οι τιμές μπορούν να θεωρηθούν ως επιτυχία (Success) ή αποτυχία (Failure). Ορίζουμε ως *ροή (run)* την μη διακοπτόμενη ακολουθία από τιμές των μεταβλητών ίδιου τύπου (επιτυχία ή αποτυχία).

Παράδειγμα 2.1.1. Έστω Z_1, \dots, Z_{10} δείγμα από την κατανομή Bernoulli και έχουμε λάβει μια πραγματοποίηση με τις εξής δέκα τιμές: 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0. Η πρώτη τιμή 0 αποτελεί μια ροή μήκους ένα. Η δεύτερη ροή από τον αριθμό 1 έχει μήκος τρία, έπειτα ακολουθεί μια ροή από 0 μήκους ένα. Τέταρτη ροή μήκους ένα από την τιμή 1 και τέλος ακολουθεί η ροή μήκους τέσσερα από τιμή 0.

Πέρα από την μελέτη των ρών πολλές φορές ενδιαφερόμαστε για μεταβλητές που σχετίζονται με αυτές. Έστω λοιπόν η τυχαία μεταβλητή T_k που εκφράζει το πλήθος από δοκιμές μέχρι την εμφάνιση της ροής k συνεχόμενων επιτυχιών που παρατηρείται για πρώτη φορά. Η τυχαία μεταβλητή T_k είναι χρόνος διακοπής και ορίζεται ως:

$$T_k = \min\{n \in \mathbb{N}: Z_{n-k+1} = \dots = Z_n = 1\} = \min\left\{n \in \mathbb{N}: \prod_{j=n-k+1}^n Z_j = 1\right\}$$

$$= \min\left\{n \in \mathbb{N}: \sum_{j=n-k+1}^n Z_j = k\right\},$$

με ($Z_i = 0, i \leq 0$).

Στην ειδική περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές Z_1, Z_2, \dots είναι ανεξάρτητες και ισόνομες από την κατανομή Bernoulli, τότε η κατανομή του χρόνου διακοπής T_k είναι γνωστή και είναι η *Γεωμετρική κατανομή τάξης k* (*Geometric Distribution of order k*). Η κατανομή αυτή αποτελεί μια γενίκευση της γνωστής Γεωμετρικής κατανομής. Για περισσότερες πληροφορίες προτείνεται στον αναγνώστη το σύγγραμμα "Runs and Scans with Applications" των N. Balakrishnan και Markos V. Koutras.

Στην συνέχεια θα δούμε και μια πρόταση επέκτασης των παραπάνω εννοιών. Όπως αναφέρθηκε, η τυχαία μεταβλητή T_k είναι χρόνος διακοπής που μετράει πλήθος δοκιμών μέχρι μια συγκεκριμένη ροή επιτυχιών συμβεί για πρώτη φορά. Παρακάτω θα δούμε τρία νέα σχήματα απαρίθμησης και τους αντίστοιχους χρόνους διακοπής που μετράνε μια αλληλουχία επιτυχιών που πραγματοποιείται για την r -οστή φορά όπου r θετικός ακέραιος αριθμός. Πρώτα όμως ας ορίσουμε τις παρακάτω δύο τυχαίες μεταβλητές

$$R_t = \prod_{j=t}^{t+k-1} Z_j, t = 1, 2, \dots, n - k + 1 \quad \text{και} \quad \hat{R}_t = \begin{cases} R_t, & \text{αν } \sum_{i=1}^{k-1} \hat{R}_{t-i} = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

οι οποίες θα μας βοηθήσουν να ορίσουμε τα σχήματα απαρίθμησης που ακολουθούν.

Το πρώτο σχήμα προέρχεται από τον Feller (1968) και είναι το εξής: Αν έχουμε k διαδοχικές επιτυχίες που εμφανίζονται, μετράμε το μήκος μέχρι τότε και η διαδικασία μέτρησης των επιτυχιών της επόμενης ροής ξεκινάει από την αρχή. Η απαριθμήτρια αυτού του σχήματος συμβολίζεται συνήθως με $N_{n,k}$ και υπολογίζεται σύμφωνα με την σχέση: $N_{n,k} = \sum_{t=1}^{n-k+1} \hat{R}_t$. Αυτό το σχήμα απαρίθμησης ονομάζεται *μη αλληλοεπικαλυπτόμενη απαρίθμηση* (*non-overlapping counting*). Ο αντίστοιχος χρόνος διακοπής για την r -οστή εμφάνιση μιας ροής επιτυχιών μήκους k συμβολίζεται με $T_{r,k}^{(1)}$

και η κατανομή του αναφέρεται ως *Τύπου I κατανομή χρόνου αναμονής (Type I waiting time distribution)*.

Παράδειγμα 2.1.2. Έστω ότι έχουμε την εξής πραγματοποίηση από 16 δίτιμες μεταβλητές:

$$F S S S F F S S S S F F F S F S$$

τότε ο χρόνος διακοπής $T_{r,k}^{(I)}$ παίρνει τις εξής τιμές για συγκεκριμένα r και k :

$$\begin{aligned} T_{1,2}^{(I)} &= 3, & \underline{F S S} S F F S S S S F F F S F S. \\ T_{2,2}^{(I)} &= 8, & \underline{F S S S F F S S} S S F F F S F S. \\ T_{3,2}^{(I)} &= 10, & \underline{F S S S F F S S S S} F F F S F S. \\ T_{1,3}^{(I)} &= 4, & \underline{F S S S} F F S S S S F F F S F S. \\ T_{2,3}^{(I)} &= 9, & \underline{F S S S F F S S S} S F F F S F S. \end{aligned}$$

Το δεύτερο σχήμα απαρίθμησης λειτουργεί ως εξής: Μετράμε μία διαδοχή k ή περισσότερων διαδοχικών επιτυχιών (S) ως μία ροή ανεξάρτητα από το πόσες επιτυχίες περιέχει. Έτσι με την βοήθεια της τυχαίας μεταβλητής R_t ορίζουμε την $G_{n,k} = \sum_{t=1}^{n-k+1} (1 - Z_{t-1}) R_t$ που αποτελεί την απαριθμήτρια σε αυτό το σχήμα. Ο χρόνος διακοπής που αντιστοιχεί στην r -οστή εμφάνιση μιας ροής επιτυχιών μήκους (τουλάχιστον) k συμβολίζεται με $T_{r,k}^{(II)}$ και η κατανομή του αναφέρεται ως *Τύπου II κατανομή χρόνου αναμονής (Type II waiting time distribution)*.

Παράδειγμα 2.1.2 (συνέχεια). Για την ίδια πραγματοποίηση ο χρόνος $T_{r,k}^{(II)}$ παίρνει τις εξής τιμές για συγκεκριμένα r και k :

$$\begin{aligned} T_{1,2}^{(II)} &= 3, & \underline{F S S} S F F S S S S F F F S F S. \\ T_{2,2}^{(II)} &= 8, & \underline{F S S S F F S S} S S F F F S F S. \end{aligned}$$

ενώ $T_{3,2}^{(II)} > 16$, διότι δεν εμφανίζεται νέα ροή επιτυχιών μήκους 2 έπειτα από τις 4 επιτυχίες.

$$\begin{aligned} T_{1,3}^{(II)} &= 4, & \underline{F S S S} F F S S S S F F F S F S. \\ T_{2,3}^{(II)} &= 9, & \underline{F S S S F F S S S} S F F F S F S. \end{aligned}$$

Τέλος, το τρίτο σχήμα απαρίθμησης προτάθηκε από τον Ling (1988a) και είναι γνωστό στην βιβλιογραφία ως *επικαλυπτόμενη απαρίθμηση (overlapping counting)*. Σύμφωνα με αυτό το σχήμα κάθε εμφάνιση m ($\geq k$) διαδοχικών επιτυχιών μετράται ως $m - k + 1$ επικαλυπτόμενες ροές μήκους k . Για παράδειγμα 4 συνεχόμενες επιτυχίες

στις δοκιμές 10,11,12,13 μετρώνται ως τρεις επικαλυπτόμενες ροές μήκους 2, η 1^η ροή από τις επιτυχίες στις δοκιμές 10,11, η 2^η ροή από τις δοκιμές 11,12 και 3^η ροή από τις 12,13. Η τυχαία μεταβλητή που απαριθμεί αυτό το σχήμα είναι η $M_{n,k}$ και βρίσκεται από την σχέση $M_{n,k} = \sum_{t=1}^{n-k+1} R_t$. Ο χρόνος διακοπής που αντιστοιχεί στην r -οστή εμφάνιση μιας επικαλυπτόμενη ροή επιτυχιών μήκους k συμβολίζεται με $T_{r,k}^{(III)}$ και η κατανομή του αναφέρεται ως *Τύπου III κατανομή χρόνου αναμονής (Type III waiting time distribution)*.

Παράδειγμα 2.1.2 (συνέχεια). Στην περίπτωση που υπάρχει επικαλυπτόμενη καταμέτρηση θεωρώντας ξανά την ίδια πραγματοποίηση των 16 δοκιμών, τότε ο χρόνος διακοπής $T_{r,k}^{(III)}$ για συγκεκριμένα r και k παίρνει τις εξής τιμές:

$$\begin{aligned} T_{1,2}^{(III)} &= 3, & \underline{FSS} S F F S S S S F F F S F S. \\ T_{2,2}^{(III)} &= 4, & \underline{FSSS} F F S S S S F F F S F S. \\ T_{3,2}^{(III)} &= 8, & \underline{FSSS F F S S} S S F F F S F S. \\ T_{4,2}^{(III)} &= 9, & \underline{FSSS F F S S S} S F F F S F S. \\ T_{5,2}^{(III)} &= 10, & \underline{FSSS F F S S S S} F F F S F S. \\ T_{1,3}^{(III)} &= 4, & \underline{FSSS} F F S S S S F F F S F S. \\ T_{2,3}^{(III)} &= 9, & \underline{FSSS F F S S S S} F F F S F S. \\ T_{3,3}^{(III)} &= 10, & \underline{FSSS F F S S S S} F F F S F S. \end{aligned}$$

Στην ειδική περίπτωση που οι δίτιμες τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες και ισόνομες από την κατανομή Bernoulli τότε η κατανομή του χρόνου διακοπής $T_{r,k}^{(\cdot)}$ ονομάζεται *Αρνητική Διωνυμική κατανομή τάξης k (Negative Binomial Distribution of order k)*. Στην περίπτωση που $k = 1$ παίρνουμε την κλασική *Αρνητική Διωνυμική κατανομή* ενώ για $r = 1$ η κατανομή της τ.μ. $T_{1,k}$ είναι η *Γεωμετρική κατανομή τάξης k* που προαναφέρθηκε στο αυτό το κεφάλαιο. Αναλυτικότερα για κάθε χρόνο διακοπής που παρουσιάστηκε παραπάνω η κατανομή διαφέρει ανάλογα τον τύπο του. Έτσι για $T_{r,k}^{(I)}$ η κατανομή ονομάζεται *Τύπου I Αρνητική Διωνυμική κατανομή τάξης k (Type I Negative Binomial Distribution of order k)*, για $T_{r,k}^{(II)}$ η κατανομή ονομάζεται *Τύπου II Αρνητική Διωνυμική κατανομή τάξης k (Type II Negative Binomial Distribution of order k)* και τέλος για $T_{r,k}^{(III)}$ η κατανομή ονομάζεται *Τύπου III Αρνητική Διωνυμική κατανομή τάξης k (Type III Negative Binomial Distribution of order k)*.

Οι N. Balakrishnan και Markos V. Koutras (2001) παρουσίασαν μια επισκόπηση της γενικής μεθόδου εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα μέσω της οποίας μπορούν να υπολογιστούν διάφορες ποσότητες που αφορούν τις παραπάνω τ.μ. (π.χ. συνάρτηση κατανομής, συνάρτηση πιθανότητας, πιθανογεννήτρια και άλλες χρήσιμες

ποσότητες). Παρακάτω δίνονται οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις των τεσσάρων κατανομών που προηγήθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο:

(i) Έστω T_k χρόνος διακοπής με κατανομή την Γεωμετρική κατανομή τάξης k . Τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση θα είναι:

$$G_{T_k}(z) = \frac{(pz)^k(1-pz)}{1-z+qp^kz^{k+1}}$$

(ii) Έστω $T_{r,k}^{(I)}$ χρόνος διακοπής με κατανομή την Τύπου I Αρνητική Διωνυμική κατανομή τάξης k . Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση θα είναι:

$$G_{T_{r,k}^{(I)}}(z) = \left(\frac{(pz)^k(1-pz)}{1-z+qp^kz^{k+1}} \right)^r$$

(iii) Έστω $T_{(r,k)}^{(II)}$ χρόνος διακοπής με κατανομή την Τύπου II Αρνητική Διωνυμική κατανομή τάξης k . Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση θα είναι:

$$G_{T_{(r,k)}^{(II)}}(z) = \frac{p^{rk}q^{r-1}z^{rk+r-1}(1-pz)}{(1-z+qp^kz^{k+1})^r}$$

(iv) Έστω $T_{(r,k)}^{(III)}$ χρόνος διακοπής με κατανομή την Τύπου III Αρνητική Διωνυμική κατανομή τάξης k . Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση θα είναι:

$$G_{T_{(r,k)}^{(III)}}(z) = \frac{(1-pz)(pz)^{k+r-1}(1-z+qp^{k-1}z^k)^{r-1}}{(1-z+qp^kz^{k+1})^r}$$

Από τις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις εύκολα μπορούμε να εξάγουμε την συνάρτηση πιθανότητας μέσω της γνωστής διαδικασίας παραγωγίσης:

$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{\left[\frac{d^k}{dz^k} G(z) \right]_{z=0}}{k!}$$

Νωρίτερα δόθηκε ο ορισμός της ροής επιτυχιών (*run*) καθώς και χρόνοι διακοπής που συνδέονται με την έννοια αυτή. Στην συνέχεια θα δοθεί ένας άλλος ορισμός που θα αποτελέσει γενίκευση για την ροή επιτυχιών με την διαφορά ότι θα αναφερόμαστε σε μια μικρότερη συλλογή τιμών συγκεκριμένου μήκους.

Ορισμός 2.1.2. Ο όρος *γενικευμένη ροή τύπου $\frac{k}{m}$* (*generalized run of type $\frac{k}{m}$*) καλείται μια συλλογή διαδοχικών δοκιμών $Z_i, Z_{i+1}, \dots, Z_{i+j-1}$ μήκους $j \leq m$ όπου ο αριθμός των επιτυχιών (successes) που περιλαμβάνονται είναι τουλάχιστον k ($\sum_{r=i}^{i+j-1} Z_r \geq k$).

Παράδειγμα 2.1.1 (συνέχεια). Οι δέκα τιμές $F S S S F F S S S$ μπορούμε να πούμε ότι αποτελούν μια γενικευμένη ροή επιτυχιών τύπου $3/10$ ή μια γενικευμένη ροή επιτυχιών τύπου $2/10$ με βάση τον παραπάνω ορισμό, κ.ο.κ.

Γενικότερο ενδιαφέρον έχει η μελέτη ποσοτήτων οι οποίες σχετίζονται με την έννοια της γενικευμένης ροής. Έστω λοιπόν η τυχαία μεταβλητή $T_k^{(m)}$ που μετράει το πλήθος βημάτων μέχρι να παρατηρηθεί για πρώτη φορά μια γενικευμένη ροή τύπου $\frac{k}{m}$. Έτσι η τυχαία μεταβλητή $T_k^{(m)}$ είναι χρόνος διακοπής και ορίζεται ως:

$$T_k^{(m)} = \min \left\{ n \in \mathbb{N}: \sum_{j=\max\{n-m+1,1\}}^n Z_j \geq k \right\} = \min \left\{ n \in \mathbb{N}: \sum_{j=\max\{n-m+1,1\}}^n Z_j = k \right\}.$$

Στην ειδική περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές Z_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες από την κατανομή Bernoulli τότε η κατανομή του χρόνου διακοπής $T_k^{(m)}$ είναι γνωστή και ως *Γεωμετρική κατανομή τάξης $\frac{k}{m}$* (*Geometric Distribution of order $\frac{k}{m}$*). Οι τυχαίες μεταβλητές $T_k^{(m)}$ και T_k συνδέονται άμεσα καθώς και η κατανομή τους. Συγκεκριμένα λοιπόν όταν $m = k$ τότε έχουμε ότι $T_k^{(k)} = T_k$. Επιπλέον για $m = k$ η κατανομή Γεωμετρική κατανομή τάξης $\frac{k}{k}$ ταυτίζεται με την Γεωμετρική κατανομή τάξης.

2. Από κοινού κατανομή πλήθους επιτυχιών και πλήθους ροών

2.1. Δοκιμές από την κατανομή Bernoulli

Στη συνέχεια πρόκειται να εξαχθούν κάποιες επεκτάσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων για ροές επιτυχιών (βλ. D.L. Antzoulakos και M. V. Boutsikas (2005)). Οι επεκτάσεις αυτές αρχικά θα παρουσιαστούν με αυτοδύναμη απόδειξη, αλλά στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούν εναλλακτικά να εξαχθούν και από τα αποτελέσματα που αφορούν χρόνους διακοπής του 1^{ου} Κεφαλαίου (και συγκεκριμένα από την ταυτότητα λόγου πιθανοφανειών, Θεώρημα 1.3.2)

Συγκεκριμένα, παρακάτω μας ενδιαφέρει η εύρεση της από κοινού κατανομής επιτυχιών (1-successes), αποτυχιών (0-failures) και της εμφάνισης συγκεκριμένης αλληλουχίας επιτυχιών-αποτυχιών (patterns).

Υποθέτουμε ότι Z_1, Z_2, \dots είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών («δοκιμών») από την κατανομή Bernoulli με παράμετρο p . Επιπλέον θεωρούμε \mathcal{E} να είναι ένα σύνολο από μια αλληλουχία (pattern), έστω γενικά m πραγματοποιήσεων από τις παραπάνω δοκιμές, δηλαδή $\mathcal{E} \in \{0,1\}^m$. Εν συνεχεία θα ορίσουμε κάποιες τυχαίες μεταβλητές που η μελέτη τους παρουσιάζει ενδιαφέρον.

Ορισμός 2.2.1. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές X_n, S_n και F_n , όπου

X_n : είναι το πλήθος εμφανίσεων του σχηματισμού \mathcal{E} στις n προσπάθειες (σύμφωνα με κάποιο σχήμα απαρίθμησης),

S_n : είναι ο συνολικός αριθμός επιτυχιών που έχουν εμφανιστεί στις n προσπάθειες,

F_n : είναι ο συνολικός αριθμός αποτυχιών που έχουν εμφανιστεί στις n προσπάθειες.

Προφανώς από τον ορισμό ισχύει ότι: $S_n := \sum_{i=1}^n Z_i$ και $F_n := n - S_n$. Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X_n θα είναι:

$$f_n(x|p) = \mathbb{P}(X_n = x | Z_i \sim \text{Bernoulli}(p)), \quad x = 0, 1, \dots$$

και η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X_n και S_n θα είναι:

$$f_n(x, y|p) = \mathbb{P}(X_n = x, S_n = y | Z_i \sim \text{Bernoulli}(p)), \quad x = 0, 1, \dots, \quad y = 0, 1, \dots, n.$$

Οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις των X_n και (X_n, S_n) αντίστοιχα θα είναι:

$$\mathbb{E}(w^{X_n} | p) = \sum_{x=0}^{\infty} w^x f_n(x|p), \quad \mathbb{E}(w^{X_n} w_1^{S_n} | p) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^n w^x w_1^y f_n(x, y|p).$$

Σύμφωνα με την επόμενη πρόταση, αν γνωρίζουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X_n τότε είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε και την από κοινού κατανομή των (X_n, S_n) εφαρμόζοντας έναν απλό μετασχηματισμό στην πιθανότητα επιτυχίας p .

Πρόταση 2.2.1. Έστω X_n και S_n τυχαίες μεταβλητές έτσι όπως ορίστηκαν παραπάνω. Τότε ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}(w^{X_n} w_1^{S_n} | p) = (pw_1 + q)^n \mathbb{E}\left(w^{X_n} \left| \frac{pw_1}{pw_1 + q} \right.\right).$$

Απόδειξη.

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των (X_n, S_n) μπορεί να γραφτεί ως

$$f_n(x, y|p) = a_n(x, y) p^y q^{n-y}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad y = 0, 1, \dots, n$$

Όπου $a_n(x, y)$ είναι ο αριθμός διατάξεων από y επιτυχίες και $n - y$ αποτυχίες έτσι ώστε σε κάθε διάταξη ο αριθμός εμφάνισης του μοτίβου \mathcal{E} είναι ίσος με x . Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(w^{X_n} w_1^{S_n} | p) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^n a_n(x, y) p^y q^{n-y} w^x w_1^y$$

$$\begin{aligned}
&= (pw_1 + q)^n \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^n a_n(x, y) \left(\frac{pw_1}{pw_1 + q}\right)^y \left(\frac{q}{pw_1 + q}\right)^{n-y} w^x \\
&= (pw_1 + q)^n \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^n f_n(x, y | \frac{pw_1}{pw_1 + q}) w^x \\
&= (pw_1 + q)^n \sum_{x=0}^{\infty} f_n(x | \frac{pw_1}{pw_1 + q}) w^x \\
&= (pw_1 + q)^n \mathbb{E}\left(w^{X_n} \middle| \frac{pw_1}{pw_1 + q}\right).
\end{aligned}$$

αποδεικνύοντας έτσι το ζητούμενο. \square

Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός της μέσης τιμής στο δεξί μέρος της ισότητας της πρότασης ουσιαστικά γίνεται αλλάζοντας το μέτρο πιθανότητας του χώρου.

Με την βοήθεια της παραπάνω πρότασης μπορούμε με παρόμοιο τρόπο να βρούμε την από κοινού κατανομή των (X_n, S_n, F_n) γνωρίζοντας μονάχα την κατανομή της X_n όπως φαίνεται παρακάτω.

Πόρισμα 2.2.1. Για τις τυχαίες μεταβλητές (X_n, S_n, F_n) και X_n ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\mathbb{E}(w^{X_n} w_1^{S_n} w_0^{F_n} | p) = (pw_1 + qw_0)^n \mathbb{E}\left(w^{X_n} \middle| \frac{pw_1}{pw_1 + qw_0}\right).$$

Απόδειξη.

Είναι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(w^{X_n} w_1^{S_n} w_0^{F_n} | p) &= \mathbb{E}(w^{X_n} w_1^{S_n} w_0^{n-S_n} | p) \\
&= w_0^n \mathbb{E}\left(w^{X_n} \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^{S_n} \middle| p\right) \\
&= w_0^n \left(\frac{pw_1}{w_0} + q\right)^n \mathbb{E}\left(w^{X_n} \middle| \frac{\frac{pw_1}{w_0}}{\frac{pw_1}{w_0} + q}\right) \\
&= (pw_1 + qw_0)^n \mathbb{E}\left(w^{X_n} \middle| \frac{pw_1}{pw_1 + qw_0}\right)
\end{aligned}$$

Όπου στην τρίτη ισότητα εφαρμόστηκε η παραπάνω πρόταση καταλήγοντας έτσι στο ζητούμενο. \square

Εάν η εύρεση της πιθανογεννήτριας σε κλειστή μορφή δεν είναι εφικτή τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Διπλή γεννήτρια όπου υπάρχει αντίστοιχο αποτέλεσμα με το παραπάνω.

Πόρισμα 2.2.2. Έστω

$$G(w, w_1, w_0; z|p) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(w^{X_n} w_1^{S_n} w_0^{F_n} | p) z^n \quad \text{και} \quad \mathcal{G}(w; z|p) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(w^{X_n} | p) z^n$$

οι Διπλές Γεννήτριες συναρτήσεις των (X_n, S_n, F_n) και X_n αντίστοιχα. Τότε η σχέση που θα τις συνδέει είναι η εξής:

$$G(w, w_1, w_0; z|p) = \mathcal{G}\left(w; z(pw_1 + qw_0) \middle| \frac{pw_1}{pw_1 + qw_0}\right)$$

Απόδειξη.

Είναι

$$G(w, w_1, w_0; z|p) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(w^{X_n} w_1^{S_n} w_0^{F_n} | p) z^n$$

Κάνοντας αντικατάσταση της μέσης τιμής από το Πόρισμα 2.2.1 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} G(w, w_1, w_0; z|p) &= \sum_{n=0}^{\infty} (pw_1 + qw_0)^n \mathbb{E}\left(w^{X_n} \middle| \frac{pw_1}{pw_1 + qw_0}\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z(pw_1 + qw_0))^n \mathbb{E}\left(w^{X_n} \middle| \frac{pw_1}{pw_1 + qw_0}\right) \\ &= \mathcal{G}\left(w; z(pw_1 + qw_0) \middle| \frac{pw_1}{pw_1 + qw_0}\right) \quad \square \end{aligned}$$

Πέρα από την μελέτη των X_n, S_n και F_n θα ασχοληθούμε με την συμπεριφορά χρόνων διακοπής και μεταβλητών που συσχετίζονται με αυτές. Έτσι είμαστε σε θέση να ορίσουμε τις παρακάτω νέες τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός 2.2.2. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές T_r, S_{T_r} και F_{T_r} , όπου

T_r : είναι ο χρόνος αναμονής (πλήθος δοκιμών) μέχρι την r -οστή εμφάνιση του σχηματισμού \mathcal{E} ,

S_{T_r} : είναι ο συνολικός αριθμός επιτυχιών μέχρι την r -οστή εμφάνιση του \mathcal{E} ,

F_{T_r} : είναι ο συνολικός αριθμός αποτυχιών μέχρι την r -οστή εμφάνιση του \mathcal{E} .

Όμοια θα έχουμε ότι: $S_{T_r} := \sum_{i=1}^{T_r} Z_i$ και $F_{T_r} := T_r - S_{T_r}$. Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής T_r θα είναι:

$$h_r(n|p) = \mathbb{P}(T_r = n | Z_i \sim \text{Bernoulli}(p)), \quad n = 1, 2, \dots$$

και η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών T_r και S_{T_r} θα είναι:

$$h_r(n, y|p) = \mathbb{P}(T_r = n, S_{T_r} = y | Z_i \sim \text{Bernoulli}(p)), \quad n = 1, 2, \dots, \quad y = 0, 1, \dots, n.$$

Οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις των T_r και (T_r, S_{T_r}) αντίστοιχα θα είναι:

$$\mathbb{E}(z^{T_r}|p) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n h_r(n|p), \quad \mathbb{E}(z^{T_r} z_1^{S_{T_r}}|p) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y=0}^n z^n z_1^y h_r(n, y|p).$$

Παραπάνω δόθηκαν δυο σχέσεις που συνδέουν την κατανομή των (X_n, S_n, F_n) με την X_n . Αντίστοιχα αποτελέσματα μπορούν αποδοθούν και στην περίπτωση των τυχαίων μεταβλητών T_r, S_{T_r} και F_{T_r} . Έτσι θα δούμε ότι αν η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής T_r είναι γνωστή, τότε είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε και την από κοινού κατανομή των (T_r, S_{T_r}) σύμφωνα με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.2.2. Αν $\mathbb{E}(z^{T_r} z_1^{S_{T_r}}|p)$ και $\mathbb{E}(z^{T_r}|p)$ είναι οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις των (T_r, S_{T_r}) και T_r αντίστοιχα, τότε η σχέση που τις συνδέει είναι η:

$$\mathbb{E}(z^{T_r} z_1^{S_{T_r}}|p) = \mathbb{E}\left((z(pz_1 + q))^{T_r} \middle| \frac{pz_1}{pz_1 + q}\right).$$

Απόδειξη.

Η συνάρτηση πιθανότητας των (T_r, S_{T_r}) μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$h_r(n, y|p) = b_r(n, y) p^y q^{n-y}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad y = 0, 1, \dots, n$$

όπου $b_r(n, y)$ είναι ο αριθμός διατάξεων από y επιτυχίες και $n - y$ αποτυχίες έτσι ώστε στο τελευταίο στοιχείο κάθε διάταξης ο σχηματισμός \mathcal{E} εμφανίζεται για r -οστή φορά. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(z^{T_r} z_1^{S_{T_r}}|p) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y=0}^n b_r(n, y) p^y q^{n-y} z^n z_1^y \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y=0}^n b_r(n, y) \left(\frac{pz_1}{pz_1 + q}\right)^y \left(\frac{q}{pz_1 + q}\right)^{n-y} (z(pz_1 + q))^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y=0}^n h_r\left(n, y \middle| \frac{pz_1}{pz_1 + q}\right) (z(pz_1 + q))^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} h_r\left(n \middle| \frac{pz_1}{pz_1 + q}\right) (z(pz_1 + q))^n \\ &= \mathbb{E}\left((z(pz_1 + q))^{T_r} \middle| \frac{pz_1}{pz_1 + q}\right) \end{aligned}$$

Αποδεικνύοντας έτσι το ζητούμενο. □

Είναι αξιοπρόσεκτο ότι η παραπάνω Πρόταση 2.2.2 προκύπτει άμεσα και από την Πρόταση 1.3.2 στο 1^ο Κεφάλαιο. Πράγματι, εκεί είδαμε ότι αν T είναι χρόνος διακοπής τότε γενικά ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(e^{hS_T Z^T}) = \mathbb{E}_h \left[\left(z \mathbb{E}(e^{hX_1}) \right)^T \right].$$

Αν λοιπόν θέσουμε $T = T_r$, $h = \ln z_1$, $X_i = Z_i$ τότε προκύπτει ότι

$$\mathbb{E} \left(z_1^{S_{T_r} Z^{T_r}} \right) = \mathbb{E}_{\ln z_1} \left[\left(z \mathbb{E}(z_1^{Z_1}) \right)^{T_r} \right] = \mathbb{E}_{\ln z_1} [(z(pz_1 + q))^{T_r}]$$

και αν $f(x)$ είναι η σ.π. της τ.μ. X κάτω από το μέτρο \mathbb{P} τότε η συνάρτηση πυκνότητας $f(x; h)$ υπό το μέτρο \mathbb{P}_h^Z του μετασχηματισμού Esscher είναι

$$f(x; h) = \frac{e^{hx}}{\mathbb{E}[e^{hx}]} f(x) = \frac{z_1^x}{\mathbb{E}[z_1^X]} f(x) = \frac{z_1^x}{(pz_1 + q)} f(x)$$

και άρα υπό το μέτρο \mathbb{P}_h^Z ισχύει ότι

$$\mathbb{P}_h(X = 1) = f(1; h) = \frac{z_1^1}{(pz_1 + q)} \mathbb{P}(X = 1) = \frac{z_1 p}{pz_1 + q}$$

υποδηλώνοντας ότι υπό το μέτρο αυτό οι επιτυχίες εμφανίζονται με πιθανότητα $\frac{z_1 p}{pz_1 + q}$.

Και στην περίπτωση των τυχαίων μεταβλητών T_r, S_{T_r} και F_{T_r} η από κοινού κατανομή της τριάδας (T_r, S_{T_r}, F_{T_r}) μπορεί να βρεθεί γνωρίζοντας μόνο την κατανομή της T_r . Αυτό μας οδηγεί στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 2.2.3. Οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις των (T_r, S_{T_r}, F_{T_r}) και T_r συνδέονται ως εξής:

$$\mathbb{E} \left(z^{T_r} z_1^{S_{T_r}} z_0^{F_{T_r}} \mid p \right) = \mathbb{E} \left((z(pz_1 + qz_0))^{T_r} \mid \frac{pz_1}{pz_1 + qz_0} \right).$$

Απόδειξη.

Είναι

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(z^{T_r} z_1^{S_{T_r}} z_0^{F_{T_r}} \mid p \right) &= \mathbb{E} \left(z^{T_r} z_1^{S_{T_r}} z_0^{T_r - S_{T_r}} \mid p \right) \\ &= \mathbb{E} \left((zz_0)^{T_r} \left(\frac{z_1}{z_0} \right)^{S_{T_r}} \mid p \right) \\ &= \mathbb{E} \left((z(pz_1 + qz_0))^{T_r} \mid \frac{pz_1}{pz_1 + qz_0} \right). \end{aligned}$$

Όπου στην τρίτη ισότητα εφαρμόστηκε η Πρόταση 2.2.2 αποδεικνύοντας το ζητούμενο. \square

Με παρόμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση των (X_n, S_n, F_n) και X_n , ακολουθεί η σχέση που συνδέει τις Διπλές γεννήτριες των τυχαίων μεταβλητών (T_r, S_{T_r}, F_{T_r}) και T_r .

Πόρισμα 2.2.4. Έστω

$$H(z, z_1, z_0; w|p) := \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(z^{T_r} z_1^{S_{T_r}} z_0^{F_{T_r}} | p \right) w^r \text{ και } \mathcal{H}(z; w|p) := \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}(z^{T_r} | p) w^r$$

οι Διπλές Γεννήτριες συναρτήσεις των (T_r, S_{T_r}, F_{T_r}) και T_r αντίστοιχα. Τότε η σχέση που τις συνδέει είναι η εξής:

$$H(z, z_1, z_0; w|p) = \mathcal{H} \left(z(qz_0 + pz_1); w \left| \frac{pz_1}{pz_1 + qz_0} \right. \right)$$

Απόδειξη.

Είναι

$$\begin{aligned} H(z, z_1, z_0; w|p) &= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(z^{T_r} z_1^{S_{T_r}} z_0^{F_{T_r}} | p \right) w^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} \left((z(pz_1 + qz_0))^{T_r} \left| \frac{pz_1}{pz_1 + qz_0} \right. \right) w^r \\ &= \mathcal{H} \left(z(qz_0 + pz_1); w \left| \frac{pz_1}{pz_1 + qz_0} \right. \right) \end{aligned}$$

Όπου στην δεύτερη ισότητα έγινε εφαρμογή του Πορίσματος 2.2.3 αποδεικνύοντας την σχέση. \square

Μέχρι τώρα είδαμε σχέσεις που ισχύουν στην τριάδα X_n, S_n, F_n με την X_n και στην T_r, S_{T_r}, F_{T_r} με την T_r . Τα παραπάνω αποτελέσματα θα συνδυαστούν αφού η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X_n έπεται από την κατανομή της T_r μέσω της σχέσης $\mathbb{P}(X_n \geq r) = \mathbb{P}(T_r \leq n)$ για $r, n = 1, 2, \dots$

Η σχέση που συνδέει τις Διπλές γεννήτριες των τυχαίων μεταβλητών X_n και T_r αποδείχθηκε από τον Koutras (1997) και είναι:

$$\mathcal{G}(w; z|p) = \frac{(w-1)\mathcal{H}(z; w|p) + 1}{w(1-z)}$$

Η επόμενη πρόταση αποτελεί γενίκευση της παραπάνω σχέσης μιας και αφορά τις από κοινού τυχαίες μεταβλητές (X_n, S_n, F_n) και (T_r, S_{T_r}, F_{T_r}) .

Πρόταση 2.2.3. Η σχέση που συνδέει τις Διπλές γεννήτριες των τυχαίων μεταβλητών (X_n, S_n, F_n) και (T_r, S_{T_r}, F_{T_r}) είναι η εξής

$$G(w, w_1, w_0; z|p) = \frac{(w-1)H(z, w_1, w_0; w|p) + 1}{w(1-z(pw_1 + qw_0))}$$

Απόδειξη.

Από το Πόρισμα 2.2.2 ισχύει ότι

$$G(w, w_1, w_0; z|p) = \mathcal{G}\left(w; z(pw_1 + qw_0) \middle| \frac{pw_1}{pw_1 + qw_0}\right)$$

Με την βοήθεια της σχέσης παραπάνω έχουμε

$$\mathcal{G}\left(w; z(pw_1 + qw_0) \middle| \frac{pw_1}{pw_1 + qw_0}\right) = \frac{(w-1)\mathcal{H}\left(z(pw_1 + qw_0); w \middle| \frac{pw_1}{pw_1 + qw_0}\right) + 1}{w(1 - z(pw_1 + qw_0))}$$

Από το Πρόρισμα 2.2.4 έχουμε ότι

$$\mathcal{H}\left(z(pw_1 + qw_0); w \middle| \frac{pw_1}{pw_1 + qw_0}\right) = H(z, w_1, w_0; w|p)$$

Κάνοντας αντικατάσταση στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει το ζητούμενο. \square

2.2. Δοκιμές με m δυνατά αποτελέσματα

Μέχρι τώρα τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω αφορούσαν χρόνους διακοπής και αθροίσματα διακοπής που προέρχονταν από ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την κατανομή Βernoulli με παράμετρο p .

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές Z_1, Z_2, \dots είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, με στήριγμα το σύνολο $\{0, 1, \dots, m\}$, ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{z,p})$ όπου υπό το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_{z,p}$ ισχύει το εξής

$$\mathbb{P}_{z,p}(Z_n = i) = \frac{p_i z_i}{\sum_{j=0}^m p_j z_j}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad n \geq 1$$

με $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_m)$, $z_i > 0$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $p_0 = 1 - \sum_{i=1}^m p_i$, όπου $p_i \in (0, 1)$. Όταν $\mathbf{z} = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ τότε έχουμε ότι $\mathbb{P}_{\mathbf{1},p}(Z_n = i) = p_i$, $i = 0, 1, \dots, m$, $n \geq 1$. Επιπλέον θα θεωρούμε ένα χρόνο διακοπής T σε σχέση με την ακολουθία Z_1, Z_2, \dots με $\mathbb{P}_{z,p}(T < \infty) = 1$ για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς z_0, z_1, \dots, z_m γύρω από μια περιοχή του 0. Αντίστοιχα θεωρούμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων $S_{n,i}$ που εκφράζουν τον συνολικό αριθμό εμφάνισης της τιμής "i" στις n πρώτες μεταβλητές (δοκιμές) $\mathbf{Z}_n = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$. Έτσι θα ισχύει ότι

$$S_{n,i} = \sum_{j=1}^n 1_{\{Z_j=i\}}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad n \geq 1$$

Η επόμενη πρόταση μας δίνει έναν τρόπο να εκφράσουμε την από κοινού πιθανογεννήτρια συνάρτηση των $(T, \mathbf{S}_T) = (T, S_{T,0}, S_{T,1}, \dots, S_{T,m})$ υπό το μέτρο $\mathbb{P}_{\mathbf{1},p}$ μέσω της πιθανογεννήτριας συνάρτησης του χρόνου διακοπής T κάτω από το μέτρο $\mathbb{P}_{z,p}$. Ουσιαστικά πρόκειται για γενίκευση της σχέσης

$$\mathbb{E}(e^{hS_T Z^T}) = \mathbb{E}_h \left[\left(z \mathbb{E}(e^{hX_1}) \right)^T \right]$$

που απεδείχθη παραπάνω (και μέσω της ταυτότητας του Wald) και αφορούσε δίτιμες δοκιμές και συγκεκριμένο χρόνο διακοπής. Εδώ γενικότερα θεωρούμε δοκιμές με $m + 1$ τιμές και οποιοδήποτε χρόνο διακοπής.

Πρόταση 2.2.4. Η από κοινού πιθανογεννήτρια συνάρτηση των $(T, \mathbf{S}_T) = (T, S_{T,0}, S_{T,1}, \dots, S_{T,m})$ ικανοποιεί την σχέση

$$\mathbb{E}_{\mathbf{1},p} \left(u^T z_0^{S_{T,0}} z_1^{S_{T,1}} \dots z_m^{S_{T,m}} \right) = \mathbb{E}_{z,p} \left(\left(u \sum_{i=0}^m p_i z_i \right)^T \right)$$

για όλα τα $u, z_0, z_1, \dots, z_m \in (0, \infty)$ γύρω από μια περιοχή του 0 έτσι ώστε οι παραπάνω μέσες τιμές να υπάρχουν.

Απόδειξη.

Έστω $\mathbf{S}_n = (S_{n,0}, \dots, S_{n,m})$ και ορίζουμε το σύνολο

$$E_n(\mathbf{s}_n) = \left\{ \mathbf{x} \in \{0,1, \dots, m\}^n : \sum_{i=1}^n (1_{\{x_i=0\}}, \dots, 1_{\{x_i=m\}}) = \mathbf{s}_n \right\},$$

Όπου $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{s}_n = (s_{n,0}, \dots, s_{n,m})$ και $\sum_{i=0}^m s_{n,i} = n$. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του (T, \mathbf{S}_T) μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{z,p}(T = n, \mathbf{S}_T = \mathbf{s}_n) &= \sum_{\mathbf{x} \in \{0,1, \dots, m\}^n} \mathbb{P}_{z,p}(T = n, \mathbf{S}_T = \mathbf{s}_n | \mathbf{Z}_n = \mathbf{x}) \mathbb{P}_{z,p}(\mathbf{Z}_n = \mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in E_n(\mathbf{s}_n)} \mathbb{P}_{z,p}(T = n | \mathbf{Z}_n = \mathbf{x}) \prod_{i=0}^m \left(\frac{p_i z_i}{\sum_{j=0}^m p_j z_j} \right)^{s_{n,i}} \\ &= a(n, \mathbf{s}_n) \prod_{i=0}^m \left(\frac{p_i z_i}{\sum_{j=0}^m p_j z_j} \right)^{s_{n,i}} \end{aligned}$$

Όπου $a(n, \mathbf{s}_n)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων \mathbf{x} στο $E_n(\mathbf{s}_n)$ έτσι ώστε ο χρόνος διακοπής T να πάρει την τιμή n όταν $\mathbf{Z}_n = \mathbf{x}$. Έτσι παίρνουμε την εξής σχέση

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{1},p} \left(u^T z_0^{S_{T,0}} z_1^{S_{T,1}} \dots z_m^{S_{T,m}} 1_{\{T < \infty\}} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{s}_n} \mathbb{P}_{\mathbf{1},p}(T = n, \mathbf{S}_n = \mathbf{s}_n) u^n \prod_{i=0}^m z_i^{s_{n,i}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{s}_n} a(n, \mathbf{s}_n) u^n \prod_{i=0}^m (p_i z_i)^{s_{n,i}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(u \sum_{i=0}^m p_i z_i \right)^n \sum_{\mathbf{s}_n} a(n, \mathbf{s}_n) \prod_{i=0}^m \left(\frac{p_i z_i}{\sum_{j=0}^m p_j z_j} \right)^{s_{n,i}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(u \sum_{i=0}^m p_i z_i \right)^n \sum_{\mathbf{s}_n} \mathbb{P}_{z,p}(T = n, \mathbf{S}_n = \mathbf{s}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(u \sum_{i=0}^m p_i z_i \right)^n \mathbb{P}_{z,p}(T = n) \\ &= \mathbb{E}_{z,p} \left(\left(u \sum_{i=0}^m p_i z_i \right)^T 1_{\{T < \infty\}} \right). \end{aligned}$$

Τέλος από το γεγονός ότι $\mathbb{P}_{z,p}(T < \infty) = 1$ άμεσα οδηγούμαστε στο ζητούμενο. \square

Παρατήρηση 2.2.1. Θεωρούμε ως $S_T = \sum_{i=0}^m iS_{T,i} = \sum_{j=1}^T Z_j$. Θέτουμε $z_i = z^i$ για $i = 0, 1, \dots, m$ τότε από την Πρόταση 2.2.4 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbf{1},\mathbf{p}}(u^T z^{S_T}) &= \mathbb{E}_{\mathbf{1},\mathbf{p}}(u^T z^{0S_{T,0}} z^{1S_{T,1}} \dots z^{mS_{T,m}}) \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{z}},\mathbf{p}}\left(\left(u \sum_{i=0}^m p_i z^i\right)^T\right) \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{z}},\mathbf{p}}\left(\left(u \mathbb{E}_{\mathbf{1},\mathbf{p}}(z^{Z_1})\right)^T\right)\end{aligned}$$

με $\tilde{\mathbf{z}} = (z^0, z^1, \dots, z^m)$. Η παραπάνω σχέση είναι η ίδια με αυτή που πήραμε στην Πρόταση 1.3.2 για $h = \ln(z)$ και $z = u$ μονάχα που εκεί είχαμε πραγματικές τυχαίες μεταβλητές, όπως και είναι ίδια με την σχέση της Πρότασης 2.2.2 που αφορούσε τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\{0,1\}$. Επιπρόσθετα αξίζει να σημειωθεί ότι στην Πρόταση 2.2.4 αν θέσουμε όπου $u = (\sum_{i=0}^m p_i z_i)^{-1}$ τότε έχουμε

$$\mathbb{E}_{\mathbf{1},\mathbf{p}}\left(\left(\sum_{i=0}^m p_i z_i\right)^{-T} z_0^{S_{T,0}} z_1^{S_{T,1}} \dots z_m^{S_{T,m}}\right) = 1$$

που μπορεί να θεωρηθεί ως μια εκτεταμένη μορφή της ταυτότητας του Wald που είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω ταυτότητα ως προς z_j έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mathbf{1},\mathbf{p}}\left(-T \left(\sum_{i=0}^m p_i z_i\right)^{-T-1} p_j z_0^{S_{T,0}} z_1^{S_{T,1}} \dots z_m^{S_{T,m}} + \left(\sum_{i=0}^m p_i z_i\right)^{-T} z_0^{S_{T,0}} \dots S_{T,j} z_j^{S_{T,j}-1} \dots z_m^{S_{T,m}}\right) = 0$$

και για $\mathbf{z} = \mathbf{1}$ γίνεται

$$\mathbb{E}_{\mathbf{1},\mathbf{p}}(S_{T,j}) = p_j \mathbb{E}_{\mathbf{1},\mathbf{p}}(T)$$

Με παρόμοιο τρόπο αν θέσουμε ως $W_j = S_{T,j} - p_j T$, με την παραγωγή της σχέσης ως προς z_j δύο φορές παίρνουμε την σχέση

$$\text{Var}_{\mathbf{1},\mathbf{p}}(W_j) = p_j(1 - p_j) \mathbb{E}_{\mathbf{1},\mathbf{p}}(T)$$

αναγνωρίζοντας ότι πρόκειται για την πρώτη και δεύτερη ταυτότητα του Wald. Ενώ αν παραγωγίσουμε την σχέση μια ως προς z_i και μετά ως προς z_j για $i \neq j$ τότε παίρνουμε

$$\text{Cov}_{\mathbf{1},\mathbf{p}}(W_j, W_i) = -p_j p_i \mathbb{E}_{\mathbf{1},\mathbf{p}}(T).$$

Άλλη μια περίπτωση όπου εμφανίζεται κάποια παραλλαγή της ταυτότητας του Wald όπως θα δούμε παρακάτω, είναι όταν η ακολουθία Z_1, Z_2, \dots αποτελείται από ανταλλάξιμες δοκιμές ορισμένες στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_e)$ οι οποίες παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0, 1, \dots, m\}$. Πριν δοθούν τα βασικά αποτελέσματα ας δούμε τον ορισμό για τις ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός 2.2.3. Οι τυχαίες μεταβλητές Z_1, Z_2, \dots, Z_n θα λέμε ότι είναι *ανταλλάξιμες* (*exchangeable*) αν η από κοινού κατανομή των (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) είναι ίδια με την από κοινού κατανομή των $(Z_{\pi_1}, Z_{\pi_2}, \dots, Z_{\pi_n})$ για κάθε μετάθεση $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ των δεικτών $(1, 2, \dots, n)$. Έτσι έχουμε ότι

$$(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) \stackrel{d}{=} (Z_{\pi_1}, Z_{\pi_2}, \dots, Z_{\pi_n})$$

Δηλαδή η συνάρτηση πιθανότητας ή η συνάρτηση κατανομής των δύο παραπάνω τυχαίων διανυσμάτων θα είναι ίδιες.

Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε τρεις σφαίρες σε μία κάλπη, δύο μαύρες και μία άσπρη. Τραβάμε μια την φορά χωρίς επανατοποθέτηση και σημειώνουμε το χρώμα της σφαίρας. Ορίζουμε ως

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } i\text{-οστή σφαίρα είναι άσπρη} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε οι Z_1, Z_2, Z_3 είναι ανταλλάξιμες. Πράγματι τα πιθανά αποτελέσματα από το πείραμα θα είναι τα $(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$. Έτσι μελετώντας τις πιθανότητες των συνόλων βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_e(Z_1 = 0, Z_2 = 0, Z_3 = 1) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}_e(Z_1 = 0, Z_2 = 1, Z_3 = 0) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}_e(Z_1 = 1, Z_2 = 0, Z_3 = 0) &= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Που είναι ίδιες για κάθε μετάθεση και συνεπώς είναι ανταλλάξιμες.

Όπως προηγουμένως θεωρούμε χρόνο διακοπή T ο οποίος προέρχεται από την ακολουθία Z_1, Z_2, \dots και επίσης η τυχαία μεταβλητή $S_{n,i}$ μετράει τον συνολικό αριθμό εμφάνισης της τιμής 'i' στο διάνυσμα \mathbf{Z}_n . Η κατανομή των Z_i κάτω από το μέτρο $\mathbb{P}_{z,p}$ είναι η ίδια όπως πριν αποτελούμενη από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ενώ κάτω από το μέτρο \mathbb{P}_e είναι ανταλλάξιμες. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{D} = \{\mathbf{p} \in [0,1]^m : p_1 + p_2 + \dots + p_m \leq 1\}$. Το θεώρημα του *de Finetti* για διακριτές τυχαίες μεταβλητές μας λέει ότι υπάρχει μέτρο πιθανότητας στο σύνολο \mathcal{D} με αθροιστική συνάρτηση κατανομής G έτσι ώστε

$$\mathbb{P}_e(\mathbf{Z}_n = \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{D}} \prod_{i=0}^m p_i^{r_{n,i}(\mathbf{x})} dG(\mathbf{p}), \quad n \geq 1$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $r_{n,i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n 1_{\{x_j=i\}}$, $i = 0, 1, \dots, m$. Η επόμενη πρόταση μας δίνει την σχέση που συνδέει την πιθανογεννήτρια του (T, \mathbf{S}_T) όταν έχουμε ανταλλάξιμες δοκιμές κάτω από το μέτρο \mathbb{P}_e και την πιθανογεννήτρια της T στην περίπτωση που έχουμε ανεξάρτητες δοκιμές υπό το μέτρο $\mathbb{P}_{z,p}$. Υποθέτουμε ξανά ότι $\mathbb{P}_e(T < \infty) = \mathbb{P}_{z,p}(T < \infty) = 1$, $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$.

Πρόταση 2.2.5. Η από κοινού πιθανογεννήτρια του (T, \mathbf{S}_T) για ανταλλάξιμες δοκιμές ικανοποιεί την σχέση

$$\mathbb{E}_e \left(u^T z_0^{S_{T,0}} z_1^{S_{T,1}} \dots z_m^{S_{T,m}} \right) = \int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}_{z,p} \left(\left(u \sum_{i=0}^m p_i z_i \right)^T \right) dG(\mathbf{p})$$

Για όλα τα $u, z_0, z_1, \dots, z_m \in (0, \infty)$ γύρω από μια περιοχή του 0 έτσι ώστε οι παραπάνω μέσες τιμές να υπάρχουν.

Απόδειξη.

Αν Y τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε η $Y1_{\{T=n\}}$ να είναι $\sigma(\mathbf{X}_n)$ -μετρήσιμη τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $\varphi_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $Y1_{\{T=n\}} = \varphi_n(\mathbf{X}_n)$ και εμπλέκοντας το θεώρημα *de Finetti* έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_e(Y1_{\{T<\infty\}}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_e(Y1_{\{T=n\}}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{x}} \varphi_n(\mathbf{x}) \mathbb{P}_e(\mathbf{X}_n = \mathbf{x}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{x}} \varphi_n(\mathbf{x}) \int_{\mathcal{D}} \prod_{i=0}^m p_i^{r_{n,i}(\mathbf{x})} dG(\mathbf{p}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{D}} \sum_{\mathbf{x}} \varphi_n(\mathbf{x}) \mathbb{P}_{\mathbf{1},p}(\mathbf{X}_n = \mathbf{x}) dG(\mathbf{p}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}_{\mathbf{1},p}(Y1_{\{T=n\}}) dG(\mathbf{p}) \\ &= \int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}_{\mathbf{1},p}(Y1_{\{T<\infty\}}) dG(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Αν θέσουμε όπου $Y = u^T z_0^{S_{T,0}} z_1^{S_{T,1}} \dots z_m^{S_{T,m}}$ τότε η $Y1_{\{T=n\}}$ είναι $\sigma(\mathbf{X}_n)$ -μετρήσιμη τ.μ. και επομένως έχουμε

$$\mathbb{E}_e \left(u^T z_0^{S_{T,0}} z_1^{S_{T,1}} \dots z_m^{S_{T,m}} 1_{\{T<\infty\}} \right) = \int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}_{\mathbf{1},p} \left(u^T z_0^{S_{T,0}} z_1^{S_{T,1}} \dots z_m^{S_{T,m}} 1_{\{T<\infty\}} \right) dG(\mathbf{p})$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.2.4 στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}_e \left(u^T z_0^{S_{T,0}} z_1^{S_{T,1}} \dots z_m^{S_{T,m}} 1_{\{T<\infty\}} \right) = \int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}_{z,p} \left(\left(u \sum_{i=0}^m p_i z_i \right)^T 1_{\{T<\infty\}} \right) dG(\mathbf{p})$$

και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\mathbb{P}_e(T < \infty) = \mathbb{P}_{z,p}(T < \infty) = 1$ ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

Παρατήρηση 2.2.2. Τα αποτελέσματα στις Προτάσεις 2.2.4 και 2.2.5 ισχύουν ακόμα και στην περίπτωση που $\mathbb{P}_e(T < \infty) < 1$ ή $\mathbb{P}_{z,p}(T < \infty) < 1$, βάζοντας μέσα στις μέσες τιμές την δείκτρια συνάρτηση $1_{[T < \infty]}$.

Παρατήρηση 2.2.3. Στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.5 είχαμε την σχέση $\mathbb{E}_e(Y 1_{[T < \infty]}) = \int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}_{1,p}(Y 1_{\{T < \infty\}}) dG(\mathbf{p})$. Αν υποθέσουμε ότι $\mathbb{P}_e(T < \infty) = \mathbb{P}_{z,p}(T < \infty) = 1$ τότε παίρνουμε την $\mathbb{E}_e(Y) = \int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}_{1,p}(Y) dG(\mathbf{p})$. Αν θέσουμε $Y = S_{T,i}$, από την Παρατήρηση 2.2.1 έχουμε ότι $\mathbb{E}_{1,p}(S_{T,i}) = p_i \mathbb{E}_{1,p}(T)$ και αντικαθιστώντας την στην αρχική σχέση έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_e(S_{T,i}) = \int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}_{1,p}(S_{T,i}) dG(\mathbf{p}) = \int_{\mathcal{D}} p_i \mathbb{E}_{1,p}(T) dG(\mathbf{p}).$$

Με ανάλογο τρόπο από την Παρατήρηση 2.2.1 έχουμε τις σχέσεις

$$\text{Var}_e(W_i) = \int_{\mathcal{D}} p_i(1 - p_i) \mathbb{E}_{1,p}(T) dG(\mathbf{p}), \quad \text{Cov}_e(W_i, W_j) = - \int_{\mathcal{D}} p_i p_j \mathbb{E}_{1,p}(T) dG(\mathbf{p})$$

Όπου $W_i = S_{T,i} - p_i T$, $i, j = 0, 1, \dots, m$, $i \neq j$. Επιπλέον ισχύει $\mathbb{E}_e(T) = \int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}_{1,p}(T) dG(\mathbf{p})$.

Παρατήρηση 2.2.4. Όπως στην Παρατήρηση 2.2.1, κάτω από τις υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5 έχουμε την σχέση

$$\mathbb{E}_e(u^T z^{S_T}) = \int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{z}},p} \left(\left(u \mathbb{E}_{1,p}(z^{Z_1}) \right)^T \right) dG(\mathbf{p}),$$

Με $S_T = \sum_{j=1}^T Z_j$, $\tilde{\mathbf{z}} = (z^0, z^1, \dots, z^m)$. Επιπλέον θα ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_e(S_T) = \int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}_{1,p}(Z_1) \mathbb{E}_{1,p}(T) dG(\mathbf{p}).$$

3. Εφαρμογές

3.1 Η από κοινού κατανομή ροής επιτυχιών, αποτυχιών και του αντίστοιχου χρόνου διακοπής από δοκιμές Bernoulli.

Έστω T_r ο χρόνος αναμονής (πλήθος δοκιμών) μέχρι την r -οστή εμφάνιση της αλληλουχίας

$$\varepsilon = \left\{ 11, 101, 1001, \dots, 1 \underbrace{00 \dots 0}_{k-2} 1 \right\}, \quad k \geq 2$$

(δύο επιτυχίες που διαφέρουν το πολύ k δοκιμές) από τιμές που προέρχονται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από την κατανομή Βεργουίλι με παράμετρο p .

Ο Αντζουλακος (2001) χρησιμοποιώντας το επικαλυπτόμενο σχήμα απαρίθμησης απέδειξε ότι η Πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής T_r είναι

$$\mathbb{E}(z^{T_r}|p) = \frac{(pz)^2(1 - (qz)^{k-1})}{(1 - qz)(1 - qz - pz(qz)^{k-1})} \left(\frac{pz(1 - (qz)^{k-1})}{(1 - qz - pz(qz)^{k-1})} \right)^{r-1}, \quad r \geq 1$$

Εφαρμόζοντας το Πρόγραμμα 2.2.3 παίρνουμε άμεσα την από κοινού πιθανογεννήτρια συνάρτηση των (T_r, S_{T_r}, F_{T_r}) που είναι

$$\mathbb{E}\left(z^{T_r} z_1^{S_{T_r}} z_0^{F_{T_r}} | p\right) = \frac{pzz_1}{1 - qzz_0} \left(\frac{pzz_1(1 - (qzz_0)^{k-1})}{1 - qzz_0 - pzz_1(qzz_0)^{k-1}} \right)^r, \quad r \geq 1$$

Η παραπάνω σχέση είναι χρήσιμη καθώς μπορούμε να έχουμε την πιθανογεννήτρια των τυχαίων μεταβλητών $S_{T_r}, F_{T_r}, (T_r, S_{T_r}), (T_r, F_{T_r}), (S_{T_r}, F_{T_r})$ θέτοντας τα ορίσματα z, z_1, z_0 ίσα με 1 αναλόγως το ζητούμενο.

Για παράδειγμα θέτοντας $z = z_0 = 1$ η σχέση που παίρνουμε για την S_{T_r} είναι

$$\mathbb{E}\left(z_1^{S_{T_r}} | p\right) = z_1 \left(\frac{z_1(1 - q^{k-1})}{1 - z_1 q^{k-1}} \right)^r$$

που είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Αρνητικής διωνυμικής κατανομής (μετατοπισμένης κατά 1) με παραμέτρους r και $1 - q^{k-1}$ με στήριγμα $\{r + 1, r + 2, \dots\}$.

Επιπλέον αφού γνωρίζουμε την ποσότητα $\mathbb{E}\left(z^{T_r} z_1^{S_{T_r}} z_0^{F_{T_r}} | p\right)$ σε κλειστή μορφή για κάθε $r \geq 1$ τότε μπορούμε να βρούμε την Διπλή γεννήτρια $H(z, z_1, z_0; w|p) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(z^{T_r} z_1^{S_{T_r}} z_0^{F_{T_r}} | p\right) w^r$ που είναι η εξής

$$H(z, z_1, z_0; w|p) = 1 + \frac{w(pzz_1)^2(1 - (qzz_0)^{k-1})}{(1 - qzz_0)(1 - qzz_0 - w(pzz_1) - (pzz_1)(qzz_0)^{k-1}(1 - w))}.$$

Αν εκμεταλλευτούμε την Πρόταση 2.2.3 λόγω του ότι γνωρίζουμε την $H(z, z_1, z_0; w|p)$, άμεσα προκύπτει η $G(w, w_1, w_0; z|p)$ όπως δίνεται στην συνέχεια

$$G(w, w_1, w_0; z|p) = \frac{1 - qzw_0 + pzw_1 - wpzw_1 - pzw_1(qzw_0)^{k-1}(1 - w)}{(1 - qzw_0)(1 - qzw_0 - w(pzw_1) - (pzw_1)(qzw_0)^{k-1}(1 - w))}.$$

Τέλος αν είχαμε είχε χρησιμοποιηθεί το πρώτο σχήμα απαρίθμησης (μη-επικαλυπτόμενο) τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του χρόνου παραμονής T_r αποδείχθηκε από τον Koutras (1996) ότι είναι η

$$\mathbb{E}(z^{T_r}|p) = \left(\frac{(pz)^2(1 - (qz)^{k-1})}{(1 - qz)(1 - qz - pz(qz)^{k-1})} \right)^r, \quad r \geq 1$$

Εφαρμόζοντας ξανά το Πόρισμα 2.2.3 παίρνουμε άμεσα την από κοινού πιθανογεννήτρια συνάρτηση των (T_r, S_{T_r}, F_{T_r}) που είναι η

$$\mathbb{E}\left(z^{T_r} z^{S_{T_r}} z_0^{F_{T_r}} \mid p\right) = \left(\frac{(pzz_1)^2(1 - (qzz_0)^{k-1})}{(1 - qzz_0)(1 - qzz_0 - pzz_1(qzz_0)^{k-1})}\right)^r, \quad r \geq 1$$

Αρκετά αποτελέσματα που προκύπτουν από την παραπάνω σχέση αποδείχθηκαν από τους Chadjiconstantinidis και Koutras (2001) με διαφορετική μεθοδολογία. \square

Παρατήρηση 2.3.1 Παραπάνω είδαμε περιπτώσεις και παραδείγματα όπου γνωρίζοντας την κατανομή (πιο συγκεκριμένα την γεννήτρια) ενός χρόνου διακοπής (μέσω οποιασδήποτε μεθόδου, π.χ. μέσω εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή Αλυσίδα), μπορούσαμε άμεσα να εξάγουμε την κατανομή ενός αθροίσματος διακοπής, και πιο συγκεκριμένα την από κοινού γεννήτρια του χρόνου διακοπής και του αθροίσματος διακοπής.

Υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις όμως που είναι επιθυμητό να εργαστούμε αντίστροφα: έχουμε γνώση για την κατανομή του αθροίσματος διακοπής S_T και να αναζητάμε από αυτήν την κατανομή του χρόνου διακοπής T . Σε αυτή την περίπτωση είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε κάποια μέθοδο αντιστροφής η οποία μας την δίνει η Πρόταση 1.3.3 και είναι η σχέση

$$\mathbb{E}(z^T) = \mathbb{E}_{w_z}(e^{-w_z S_T})$$

Όπου η w_z είναι πραγματική συνάρτηση που η εύρεση της γίνεται μέσω της σχέσης

$$z\mathbb{E}(e^{w_z Z_1}) = 1$$

Οι επόμενες εφαρμογές βασίζονται σε αυτή την διαδικασία μεθόδου εύρεσης της πιθανογεννήτριας συνάρτησης του χρόνου διακοπής από την γεννήτρια του αθροίσματος διακοπής.

3.2. Εύρεση της κατανομής χρόνου διακοπής T προερχόμενος από ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bernoulli.

Αρχικά παρουσιάζουμε ένα τετριμμένο παράδειγμα για να δούμε πως εφαρμόζεται η παραπάνω μέθοδος. Έστω $Z_i \sim Be(p)$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και T ο χρόνος (πλήθος δοκιμών) μέχρι την εμφάνιση της r -οστής επιτυχίας. Έτσι για την τυχαία μεταβλητή του σταματημένου αθροίσματος είναι προφανές ότι θα ισχύει $S_T = r$. Σύμφωνα τώρα με την Παρατήρηση 2.3.1 θα έχουμε την σχέση

$$\mathbb{E}(z^T) = \mathbb{E}_{w_z}(e^{-w_z S_T}) = \mathbb{E}_{w_z}(e^{-w_z r}) = e^{-w_z r}.$$

Για την εύρεση της w_z θα λύσουμε την εξίσωση $z\mathbb{E}(e^{w_z Z_1}) = 1$ ως προς w_z η οποία με αντικατάσταση είναι $z(q + pe^{w_z}) = 1$ και μας οδηγεί στην $w_z = \ln\left(\frac{1-z(1-p)}{zp}\right)$. Συνεπώς η πιθανογεννήτρια της T θα είναι η

$$\mathbb{E}(z^T) = e^{-r \cdot \ln\left(\frac{1-z(1-p)}{zp}\right)} = \left(\frac{1-z(1-p)}{zp}\right)^{-r} = \left(\frac{zp}{1-z(1-p)}\right)^r$$

που είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Αρνητικής διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους r και p με στήριγμα $\{r, r+1, r+2, \dots\}$, επαληθεύοντας το γνωστό αποτέλεσμα που αφορά την κατανομή του πλήθους των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση r επιτυχιών. \square

3.3. Εύρεση της κατανομής χρόνου διακοπής T προερχόμενος από ανεξάρτητες και ισόνομες τρίτιμες μεταβλητές (trinomial steps).

Έστω Z_1, Z_2, \dots ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο σύνολο $\{-1, 0, 1\}$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(Z_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(Z_i = -1) = q, \quad \mathbb{P}(Z_i = 0) = 1 - p - q$$

Θεωρούμε T τον χρόνο μέχρι ο τυχαίος περίπατος S_n περάσει για πρώτη φορά τις τιμές $b > 0$ ή $-a < 0$ αντίστοιχα. Υπολογίζοντας την ροπογεννήτρια συνάρτηση κάθε Z_i προκύπτει ότι $\mathbb{E}(e^{wZ_1}) = qe^{-w} + pe^w + 1 - p - q$, όπου για την τιμή $w^* = \ln(q/p)$ παίρνουμε την σχέση $\mathbb{E}(e^{w^*Z_1}) = 1$. Έτσι από την Πρόταση 1.3.2 έχουμε ότι $\mathbb{E}(e^{w^*S_T}) = 1$ και αναλύοντας την μέση τιμή θα είναι $e^{w^*b}\mathbb{P}(S_T = b) + e^{w^*a}(1 - \mathbb{P}(S_T = b)) = 1$. Επομένως

$$\mathbb{P}(S_T = b) = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{-a}}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^{-a}}, & p \neq q \\ \frac{a}{a+b}, & p = q \end{cases}.$$

Προκειμένου να βρούμε την πιθανογεννήτρια (και συνεπώς την κατανομή) του χρόνου διακοπής T θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση από την Πρόταση 1.3.3. Έτσι λύνοντας την εξίσωση $u\mathbb{E}(e^{w_u Z_1}) = 1$ ως προς w_u , οδηγούμαστε στην λύση που είναι

$$e^{w_u} = \frac{1}{2p} \left(-1 + q + p + u^{-1} + \sqrt{(-1 + q + p + u^{-1})^2 - 4pq} \right).$$

Στην συνέχεια υπό το μέτρο πιθανότητας \mathbb{P}_{w_u} παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{w_u}(Z_1 = 1) &= \frac{e^{w_u}\mathbb{P}(Z_1 = 1)}{\mathbb{E}(e^{w_u Z_1})} = e^{w_u}pu, \\ \mathbb{P}_{w_u}(Z_1 = -1) &= \frac{e^{-w_u}\mathbb{P}(Z_1 = -1)}{\mathbb{E}(e^{w_u Z_1})} = e^{-w_u}qu. \end{aligned}$$

Επομένως υπό το νέο μέτρο πιθανότητας \mathbb{P}_{w_u} με $u \in (0, 1]$, η ακολουθία S_n είναι και πάλι τυχαίος περίπατος με βήμα Z_i που παίρνει τιμές στο $\{-1, 0, 1\}$ και πιθανότητες $e^{-w_u}qu, u(1-p-q), e^{w_u}pu$, αντίστοιχα. Από την στιγμή που $T < \infty$, χρησιμοποιώντας την σχέση της Πρότασης 1.3.3 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(u^T) &= \mathbb{E}_{w_u}(e^{-w_u S_T}) = e^{-w_u b} \mathbb{P}_{w_u}(S_T = b) + e^{w_u a} (1 - \mathbb{P}_{w_u}(S_T = b)) \\ &= \frac{(h_u^{-b} - h_u^a) \left(1 - \left(\frac{h_u^{-2} q}{p}\right)^{-a}\right)}{\left(\frac{h_u^{-2} q}{p}\right)^b - \left(\frac{h_u^{-2} q}{p}\right)^{-a}} + h_u^a, \quad u \in (0,1]\end{aligned}$$

Όπου

$$h_u = \frac{1 - (1 - p - q)u + \sqrt{(1 - (1 - p - q)u)^2 - 4pqu^2}}{2pu}$$

Παραγωγίζοντας την $\mathbb{E}(u^T)$ ως προς u και θέτοντας $u = 1$ παίρνουμε την μέση τιμή της T που είναι για $p \neq q$ η εξής

$$\mathbb{E}(T) = \frac{b \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a\right) - a \left(\frac{q}{p}\right)^a \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^b\right)}{(p - q) \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right)}$$

Ενώ για $p = q$ έχουμε ότι $\mathbb{E}(T) = ab(2p)^{-1}$ και $Var(T) = ab(1 + a^2 + b^2 - 6p)(12p^2)^{-1}$. Επιπρόσθετα μπορούμε να βρούμε την δεσμευμένη πιθανογεννήτρια του χρόνου T δοθέντος ότι ο τυχαίος περίπατος θα χτυπήσει το πάνω φράγμα b . Για να γίνει αυτό θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.3.3 θέτοντας $Y = u^T 1_{\{S_T=b\}}$ και $h = 0$ όπου παίρνουμε την σχέση

$$\mathbb{E}(u^T | S_T = b) = \frac{\mathbb{E}(u^T 1_{\{S_T=b\}})}{\mathbb{P}(S_T = b)} = \frac{\mathbb{E}_{w_u}(e^{-w_u S_T} 1_{\{S_T=b\}})}{\mathbb{P}(S_T = b)} = \frac{e^{-w_u b} \mathbb{P}_{w_u}(S_T = b)}{\mathbb{P}(S_T = b)}$$

Πλέον όλες οι ποσότητες είναι γνωστές και με την αντικατάστασή τους στην παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(u^T | S_T = b) = \frac{h_u^{-b} \left(1 - \left(\frac{h_u^{-2} q}{p}\right)^{-a}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^{-a}}{\left(\frac{h_u^{-2} q}{p}\right)^b - \left(\frac{h_u^{-2} q}{p}\right)^{-a} \cdot 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{-a}}, \quad \text{για } p \neq q$$

ενώ ισχύει

$$\mathbb{E}(u^T | S_T = b) = \frac{h_u^{-b} \left(1 - \left(\frac{h_u^{-2} q}{p}\right)^{-a}\right) \cdot \frac{a+b}{a}}{\left(\frac{h_u^{-2} q}{p}\right)^b - \left(\frac{h_u^{-2} q}{p}\right)^{-a}}, \quad \text{για } p = q$$

Ακόμα για την δεσμευμένη μέση τιμή του T παραγωγίζοντας τις παραπάνω ποσότητες έχουμε

$$\mathbb{E}(T | S_T = b) = \frac{b \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a\right) \left(1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right) - 2a \left(\frac{q}{p}\right)^a \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^b\right)}{(p - q) \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a\right) \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right)}, \quad \text{για } p \neq q$$

και

$$\mathbb{E}(T|S_T = b) = \frac{b(2a + b)}{6p}, \quad \text{για } p = q \quad \square$$

Κλείνοντας, είναι άξιο αναφοράς ότι η Παρατήρηση 2.3.1 θα μας χρησιμεύσει αρκετά στην επόμενη ενότητα όπου θα μελετηθούν χρόνοι διακοπής που θα εκφράζουν την στιγμή που θα επέλθει χρεοκοπία σε μία ασφαλιστική εταιρία. Αναλυτικότερα εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.3.3 θα έχουμε γνώση για την κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας όπου οι ζημιές (τιμές των μεταβλητών Z_i) θα προέρχονται αυτή τη φορά από συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Κεφάλαιο 3. Εφαρμογή της ταυτότητας του Wald στη θεωρία Χρεοκοπίας.

1. Μελέτη χρόνου διακοπής μέσω τυχαίου περιπάτου από εκθετικά άλματα

Στην παράγραφο θα αυτή δούμε κάποια αποτελέσματα, που αφορούν τυχαίους περιπάτους με εκθετικά άλματα, τα οποία μπορούμε να εξάγουμε μέσω των γενικευμένων ταυτοτήτων του Wald. Οι Εφαρμογές 3.1.2, 3.1.3 προέρχονται από την εργασία των Boutsikas, Antzoulakos και Rakitzis (2011).

3.1.1 Άνω φραγμένος εκθετικός τυχαίος περίπατος

Σε αυτή την παράγραφο θα εξεταστεί ένα τετριμμένο παράδειγμα ώστε να γίνει αντιληπτό με απλό τρόπο πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ισότητα του Wald για τον προσδιορισμό της κατανομής ενός χρόνου διακοπής που σχετίζεται με μια ακολουθία εκθετικά κατανεμημένων τ.μ.. Έστω X_1, X_2, \dots τυχαίο δείγμα από ανεξάρτητες και ισοόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ και T ο χρόνος μέχρι το μερικό άθροισμά τους $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, να ξεπεράσει για πρώτη φορά μία σταθερά $a \in \mathbb{R}_+$. Δηλαδή είναι

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq a\}$$

Σκοπός μας είναι η εύρεση της κατανομής του χρόνου T προσδιορίζοντας μονάχα την κατανομή του αθροίσματος διακοπής S_T . Λόγω της ισχυρής ιδιότητας Markov, αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή θα έχουμε ότι $S_T =_d a + X$ όπου $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, ανεξάρτητη από τις X_i . Έτσι, με βάση την μεθοδολογία που χρησιμοποιήσαμε στις εφαρμογές του προηγούμενου κεφαλαίου, αρχικά θα λύσουμε την εξίσωση $z\mathbb{E}(e^{w_z X_1}) = 1$ ως προς w_z , και τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.3, θα ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(e^{hS_T} Z^T) = \mathbb{E}_{w_z}(e^{(h-w_z)S_T}).$$

Η ροπογεννήτρια της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ είναι η $\mathbb{E}(e^{tX_1}) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$, $|t| < \lambda$ και με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση έχουμε την εξίσωση

$$z \frac{\lambda}{\lambda - w_z} = 1, \quad |w_z| < \lambda$$

και παίρνουμε την λύση

$$w_z = \lambda(1 - z), \quad |w_z| < \lambda.$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε την σχέση από την Πρόταση 1.3.3 (με $h = 0$) που είναι η $\mathbb{E}(Z^T) = \mathbb{E}_{w_z}(e^{-w_z S_T})$. Υπό το μέτρο πιθανότητας \mathbb{P}_{w_z} κάθε τ.μ. X_i θα έχει κατανομή με σ.π.π.

$$f_{w_z}(x) = \frac{e^{w_z x} f(x)}{E(e^{w_z X})} = \frac{e^{w_z x} \lambda e^{-\lambda x}}{\frac{\lambda}{\lambda - w_z}} = (\lambda - w_z) e^{-(\lambda - w_z)x} = \lambda z e^{-\lambda z x},$$

δηλαδή ακολουθεί και πάλι εκθετική κατανομή με παράμετρο λz .

Κάνοντας αντικατάσταση για w_z που βρήκαμε είναι

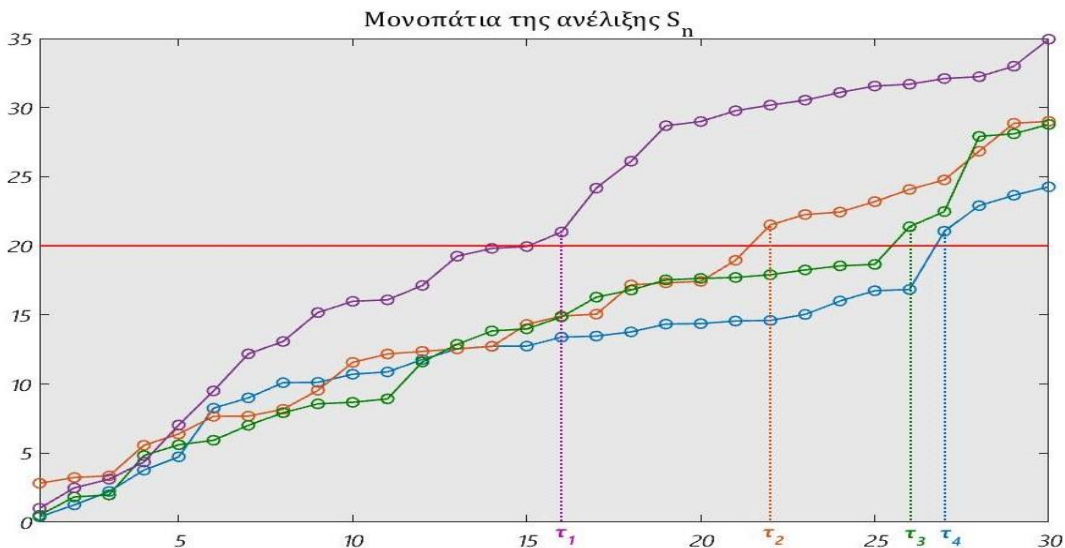
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(z^T) &= \mathbb{E}_{w_z}(e^{-w_z S_T}) = \mathbb{E}_{w_z}(e^{-w_z(a+X)}) \\ &= e^{-aw_z} \mathbb{E}_{w_z}(e^{-w_z X}) = e^{-aw_z} \frac{(\lambda - w_z)}{(\lambda - w_z) + w_z} \\ &= e^{-\lambda(1-z)} \frac{(\lambda - \lambda(1-z))}{\lambda} = e^{-\lambda a(1-z)} z\end{aligned}$$

Δηλαδή προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}(z^{T-1}) = e^{\lambda a(z-1)}$$

που είναι η πιθανογεννήτρια της κατανομής Poisson με παράμετρο λa και συνεπώς βρήκαμε ότι η κατανομή του χρόνου διακοπής T ακολουθεί την κατανομή Poisson (μετατοπισμένη κατά ένα). Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο διότι ο παραπάνω χρόνος $T - 1$ συμπίπτει με το πλήθος των συμβάντων μέχρι το χρόνο a σε μια ομογενή διαδικασία Poisson (όπου οι ενδιαμέσοι χρόνοι μεταξύ συμβάντων είναι εκθετικοί με παράμετρο λ), το οποίο είναι γνωστό ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λa . \square

Στο σχήμα που ακολουθεί έχει γίνει προσομοίωση 4 μονοπατιών (τροχιών) της ανέλιξης $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ με τις τυχαίες μεταβλητές Z_i να ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1$. Σε κάθε μονοπάτι βρέθηκαν οι τιμές $(\tau_1 = 16, \tau_2 = 22, \tau_3 = 26$ και $\tau_4 = 27)$ του χρόνου διακοπής $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq 20\}$.



Από το παραπάνω αποτέλεσμα ο χρόνος $\tau - 1$ ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda a = 20 \cdot 1 = 20$ και επομένως η αναμενόμενη τιμή του είναι $\mathbb{E}(\tau) = 21$. Αν και οι παρατηρήσεις είναι λίγες (τέσσερις τιμές) η εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής του χρόνου τ από τα δεδομένα είναι 21,75 που είναι αρκετά κοντά στην τιμή που αναμέναμε.

Στην συνέχεια ας δούμε και μία γενικότερη εφαρμογή από την προηγούμενη. Αυτή τη φορά ο τυχαίος περίπατος θα αποτελείται από εκθετικά άλματα με δύο κατευθύνσεις προς τα πάνω και προς τα κάτω διαφορετικής παραμέτρου. Επιπρόσθετα ο χρόνος διακοπής σε αυτή την περίπτωση θα εκφράζει το πλήθος των βημάτων μέχρι ο τυχαίος περίπατος εξέλθει του διαστήματος $[-a, b]$.

3.1.2. Άνω και κάτω φραγμένος τυχαίος περίπατος με εκθετικά άνω και κάτω άλματα.

Έστω Z_1, Z_2, \dots ανεξάρτητες τ.μ. με

$$Z_i = \begin{cases} X_i, & \text{με πιθανότητα } p \\ -Y_i, & \text{με πιθανότητα } 1 - p \end{cases}$$

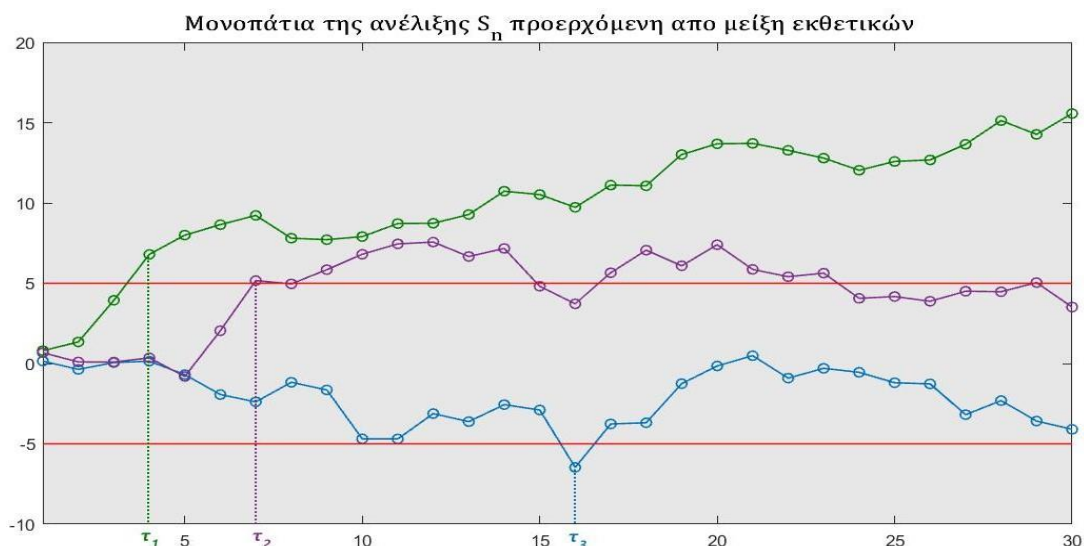
Όπου X_1, X_2, \dots και Y_1, Y_2, \dots ανεξάρτητες τ.μ. με $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ και $Y_i \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Επομένως η σ.π.π κάθε Z_i θα είναι η μείξη $f(x) = pf_1(x) + (1-p)f_2(-x)$, όπου $f_i(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}$, για $x \geq 0$, $i = 1, 2$ και η ροπογεννήτρια τους θα είναι η

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{wZ_1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{wx} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (pe^{wx} f_1(x) + (1-p)e^{wx} f_2(-x)) dx \\ &= \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - w} + \frac{(1-p)\lambda_2}{\lambda_2 + w}. \end{aligned}$$

Ως μια πρώτη εφαρμογή θεωρούμε T να είναι ο χρόνος διακοπής μέχρι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_n := \sum_{i=1}^n Z_i$ περάσει πάνω από την τιμή b ή κάτω από την τιμή $-a$ για πρώτη φορά, με $a, b \in \mathbb{R}_+$. Δηλαδή θα ισχύει ότι

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq b \text{ ή } S_n \leq -a\}$$

Επίσης (βλ. Karlin και Taylor (1975), σελ.264) ο χρόνος διακοπής T είναι πεπερασμένος σχεδόν βέβαια και επομένως ισχύει ότι $\mathbb{E}(T) < \infty$. Στην συνέχεια θα δούμε κάποια αποτελέσματα για το άθροισμα διακοπής S_T καθώς και για τον χρόνο T .



Στο παραπάνω σχήμα έχει γίνει προσομοίωση 3 τυχαίων μονοπατιών (τροχιών) της ανέλιξης $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ με τις τυχαίες μεταβλητές Z_i να ακολουθούν την μείξη εκθετικών με παραμέτρους $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ και βάρη μείξης $p = \frac{1}{2}$. Σε κάθε μονοπάτι βρέθηκαν οι τιμές ($\tau_1 = 4, \tau_2 = 7$ και $\tau_3 = 16$) του χρόνου διακοπής $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq 5 \text{ ή } S_n \leq -5\}$.

Προκειμένου να βρούμε την πιθανότητα $\mathbb{P}(S_T \geq b)$ θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα του Wald. Λύνοντας την σχέση $\mathbb{E}(e^{wZ_1}) = 1$ ως προς w παίρνουμε την τιμή

$$w^* = (1 - p)\lambda_1 - p\lambda_2$$

Και συνεπώς από την σχέση $\mathbb{E}(e^{wS_T}) = \mathbb{E}_w \left(\left(\mathbb{E}(e^{wZ_1}) \right)^T \right)$ της Πρότασης 1.3.2 για $w = w^*$, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(e^{w^*S_T}) = \mathbb{E}_{w^*} \left(\left(\mathbb{E}(e^{w^*Z_1}) \right)^T \right) = \mathbb{E}_{w^*}(1^T) = 1.$$

Έτσι από την ταυτότητα έχουμε ότι

$$1 = \mathbb{E}(e^{w^*S_T}) = \mathbb{E}(e^{w^*S_T} | S_T \geq b) \mathbb{P}(S_T \geq b) + \mathbb{E}(e^{w^*S_T} | S_T \leq -a) (1 - \mathbb{P}(S_T \geq b))$$

και λύνοντας ως προς $\mathbb{P}(S_T \geq b)$ προκύπτει η σχέση

$$\mathbb{P}(S_T \geq b) = \frac{1 - \mathbb{E}(e^{w^*S_T} | S_T \leq -a)}{\mathbb{E}(e^{w^*S_T} | S_T \geq b) - \mathbb{E}(e^{w^*S_T} | S_T \leq -a)}$$

Χρησιμοποιώντας την ισχυρή ιδιότητα Markov θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{w^*S_T} | S_T \geq b) &= e^{wb} \mathbb{E} \left(e^{w^*(S_T - b)} | S_T - b \sim \text{Exp}(\lambda_1) \right) = e^{wb} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - w^*} \\ \mathbb{E}(e^{w^*S_T} | S_T \leq -a) &= e^{-wa} \mathbb{E} \left(e^{-w^*(-S_T - a)} | -S_T - a \sim \text{Exp}(\lambda_2) \right) = e^{-wa} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + w^*} \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω και για $w^* \neq 0$ είναι

$$\mathbb{P}(S_T \geq b) = \frac{1 - e^{-w^*a} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + w^*}}{e^{w^*b} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - w^*} - e^{-w^*a} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + w^*}} = \frac{1 - \frac{\lambda_2 e^{-((1-p)\lambda_1 - p\lambda_2)a}}{(1-p)(\lambda_1 + \lambda_2)}}{\frac{\lambda_1 e^{((1-p)\lambda_1 - p\lambda_2)b}}{p(\lambda_1 + \lambda_2)} - \frac{\lambda_2 e^{-((1-p)\lambda_1 - p\lambda_2)a}}{(1-p)(\lambda_1 + \lambda_2)}}$$

Ενώ όταν $w^* = 0$ από την παραπάνω για $w^* \rightarrow 0$ είναι

$$\mathbb{P}(S_T \geq b) = \frac{\lambda_1 + a\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + (b + a)\lambda_1\lambda_2}.$$

Στην συνέχεια για να εξάγουμε την πιθανογεννήτρια του χρόνου διακοπής T θα εφαρμοστεί η Πρόταση 1.3.3 όπου καλούμαστε να λύσουμε την εξίσωση $\mathbb{E}(e^{w_u Z_1}) = u^{-1}$ ως προς w_u , με την λύση αυτής να δίνει

$$w_u = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + u((1-p)\lambda_2 - p\lambda_1) + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + u((1-p)\lambda_2 - p\lambda_1))^2 + 4(1-u)\lambda_1\lambda_2}}{2}$$

Η συνάρτηση w_u είναι γνησίως φθίνουσα ως προς $u \in [0,1]$, με $w_0 = \lambda_1$ και $w_1 = \max\{0, (1-p)\lambda_1 - p\lambda_2\}$ και έτσι $0 < w_u < \lambda_1$ για $u \in (0,1)$. Υπό το νέο μέτρο \mathbb{P}_w η σ.π.π. κάθε Z_i θα είναι

$$\begin{aligned} f_w(x) &= \frac{e^{wx}f(x)}{\mathbb{E}(e^{wZ_1})} = \frac{e^{wx}(p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} 1_{\{x \geq 0\}} + (1-p)\lambda_2 e^{\lambda_2 x} 1_{\{x < 0\}})}{\frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - w} + \frac{(1-p)\lambda_2}{\lambda_2 + w}} \\ &= \begin{cases} c_w(\lambda_1 - w)e^{-(\lambda_1 - w)x}, & x \geq 0 \\ (1 - c_w)(\lambda_2 + w)e^{-(\lambda_2 + w)(-x)}, & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Με

$$c_w = \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - w} \left(\frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - w} + \frac{(1-p)\lambda_2}{\lambda_2 + w} \right)^{-1}, \quad (0 < c_w < 1 \text{ για } -\lambda_2 < w < \lambda_1).$$

Δηλαδή η κατανομή των Z_i κάτω από το μέτρο \mathbb{P}_{w_u} είναι η πάλι μίξη εκθετικών με βάρος μίξης $c_{w_u} = \frac{up\lambda_1}{\lambda_1 - w_u}$ και παραμέτρους των δύο εκθετικών $\lambda_1 - w_u$ και $\lambda_2 + w_u$ αντίστοιχα. Και πάλι για τον χρόνο διακοπής T υπό το νέο μέτρο \mathbb{P}_{w_u} είναι πεπερασμένος σχεδόν βέβαια. Εφαρμόζοντας λοιπόν την Πρόταση 1.3.3 βρίσκουμε την πιθανογεννήτρια του χρόνου T όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u^T) &= \mathbb{E}_{w_u}(e^{-w_u S_T}) \\ &= \mathbb{E}_{w_u}(e^{-w_u S_T} | S_T \geq b) \mathbb{P}_{w_u}(S_T \geq b) \\ &\quad + \mathbb{E}_{w_u}(e^{-w_u S_T} | S_T \leq -a) (1 - \mathbb{P}_{w_u}(S_T \geq b)) \\ &= \frac{(\lambda_1 - w_u)e^{-w_u b}}{(\lambda_1 - w_u) + w_u} \mathbb{P}_{w_u}(S_T \geq b) + \frac{(\lambda_2 + w_u)e^{w_u a}}{(\lambda_2 + w_u) - w_u} (1 - \mathbb{P}_{w_u}(S_T \geq b)) \end{aligned}$$

Παραπάνω είχε δοθεί σε κλειστή μορφή η πιθανότητα του ενδεχομένου $\{S_T \geq b\}$ υπό το μέτρο \mathbb{P} . Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Esscher υπό το νέο μέτρο \mathbb{P}_{w_u} οδηγούμαστε στην σχέση

$$\mathbb{P}_{w_u}(S_T \geq b) = \frac{1 - \frac{\lambda_2 + w_u}{(1 - c_{w_u})(\lambda_1 + \lambda_2)} e^{-\beta_u a}}{\frac{\lambda_1 - w_u}{c_{w_u}(\lambda_1 + \lambda_2)} e^{\beta_u b} - \frac{\lambda_2 + w_u}{(1 - c_{w_u})(\lambda_1 + \lambda_2)} e^{-\beta_u a}},$$

Με $\beta_u = (1 - c_{w_u})(\lambda_1 - w_u) - c_{w_u}(\lambda_2 + w_u)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, παρουσιάζουμε την επόμενη πρόταση

Πρόταση 3.1.1. Έστω S_n τυχαίος περίπατος με κατανομή των αλμάτων την $F(x) = pF_1(x) + (1-p)(1 - F_2(-x))$, με $F_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ για $i = 1,2$ και $p \in (0,1)$. Αν T είναι ο χρόνος μέχρι ο τυχαίος περίπατος βγει από το διάστημα $(-a, b)$ με $a, b > 0$, τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του T δίνεται από τον τύπο

$$\mathbb{E}(u^T) = \frac{\left(\frac{\lambda_1 - w_u}{\lambda_1 e^{w_u b}} - \frac{(\lambda_2 + w_u)e^{w_u a}}{\lambda_2}\right) \left(1 - \frac{(\lambda_2 + w_u)^2 e^{-\beta_u a}}{u(1-p)\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)}\right)}{\frac{(\lambda_1 - w_u)^2 e^{\beta_u b}}{up\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)} - \frac{(\lambda_2 + w_u)^2 e^{-\beta_u a}}{u(1-p)\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)}} + \frac{(\lambda_2 + w_u)e^{w_u a}}{\lambda_2},$$

με $u \in (0,1)$ όπου

$$\beta_u = -\sqrt{\left(\lambda_1 - \lambda_2 + u((1-p)\lambda_2 - p\lambda_1)\right)^2 + 4(1-u)\lambda_1\lambda_2},$$

$$w_u = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2 + u((1-p)\lambda_2 - p\lambda_1) - \beta_u). \quad \square$$

Επιπλέον από την Πρόταση 1.3.3 μπορούμε να εξάγουμε την από κοινού γεννήτρια των T και S_T όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u^T e^{xS_T}) &= \mathbb{E}_{w_u}(e^{xS_T} e^{-w_u S_T}) \\ &= \mathbb{E}_{w_u}(e^{xS_T} e^{-w_u S_T} | S_T \geq b) \mathbb{P}_{w_u}(S_T \geq b) \\ &\quad + \mathbb{E}_{w_u}(e^{xS_T} e^{-w_u S_T} | S_T \leq -a) \mathbb{P}_{w_u}(S_T \leq -a) \\ &= \frac{(\lambda_1 - w_u)e^{(x-w_u)b}}{(\lambda_1 - w_u) - (x - w_u)} \mathbb{P}_{w_u}(S_T \geq b) \\ &\quad + \frac{(\lambda_2 + w_u)e^{(w_u-x)a}}{(x - w_u) + (\lambda_2 + w_u)} (1 - \mathbb{P}_{w_u}(S_T \geq b)) \end{aligned}$$

όπου οι τιμές των w_u και $\mathbb{P}_{w_u}(S_T \geq b)$ έχουν δοθεί παραπάνω.

Αν ενδιαφερόμαστε για την δεσμευμένη πιθανογεννήτρια του χρόνου T ως προς το ενδεχόμενο $\{S_T \geq b\}$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u^T | S_T \geq b) \mathbb{P}(S_T \geq b) &= \mathbb{E}(u^T 1_{\{S_T \geq b\}}) = \mathbb{E}_{w_u}(e^{-w_u S_T} 1_{\{S_T \geq b\}}) \\ &= \mathbb{E}_{w_u}(e^{-w_u S_T} | S_T \geq b) \mathbb{P}_{w_u}(S_T \geq b) \end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα εφαρμόσαμε την Πρόταση 1.3.3. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς την ποσότητα $\mathbb{E}(u^T | S_T \geq b)$ οδηγούμαστε στο ζητούμενο αφού οι υπόλοιπες ποσότητες υπολογίστηκαν νωρίτερα. Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται στην επόμενη πρόταση

Πρόταση 3.1.2. Έστω S_n τυχαίος περίπατος με κατανομή των αλμάτων την $F(x) = pF_1(x) + (1-p)(1 - F_2(-x))$, με $F_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ για $i = 1, 2$ και $p \in (0,1)$. Αν T είναι ο χρόνος μέχρι ο τυχαίος περίπατος βγει από το διάστημα $(-a, b)$ με $a, b > 0$, τότε η δεσμευμένη πιθανογεννήτρια συνάρτηση του T , δοθέντος ότι $\{S_T \geq b\}$, είναι η

$$\mathbb{E}(u^T | S_T \geq b) = \frac{(\lambda_1 - w_u)e^{-w_u b}}{\lambda_1} \frac{\mathbb{P}_{w_u}(S_T \geq b)}{\mathbb{P}(S_T \geq b)}, \quad u \in (0,1)$$

όπου οι ποσότητες $w_u, \mathbb{P}(S_T \geq b), \mathbb{P}_{w_u}(S_T \geq b)$ υπολογίστηκαν νωρίτερα στο κεφάλαιο. \square

Από την Πρόταση 3.1.2 μπορούμε να εξάγουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες $\mathbb{P}(T = m | S_T \geq b)$ καθώς και ποσότητες όπως $\mathbb{E}(T | S_T \geq b)$.

Να αναφέρουμε ότι στην περίπτωση που έχουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ και $p = \frac{1}{2}$, ο τυχαίος περίπατος S_n ακολουθεί την κατανομή Laplace με παραμέτρους 0 και $\frac{1}{\lambda}$ αντίστοιχα και πυκνότητα: $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε η πιθανογεννήτρια του χρόνου T θα είναι

$$\mathbb{E}(u^T) = \frac{(e^{a\lambda\tilde{u}} + e^{b\lambda\tilde{u}})u}{1 - \tilde{u} + (1 + \tilde{u})e^{(a+b)\lambda\tilde{u}}}$$

με $\tilde{u} = \sqrt{1 - u}$. Έτσι παραγωγίζοντας την πιθανογεννήτρια και για $u \rightarrow 1$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}(T) = \frac{2 + b\lambda + a\lambda(1 + b\lambda)}{2},$$

$$\text{Var}(T) = \lambda \frac{6(a + b) + 3(a + b)^2\lambda + (a + b)^3\lambda^3 + ab(a^2 + b^2)\lambda^3}{12}.$$

Επιπλέον η ποσότητα $\mathbb{E}(u^T e^{xS_T})$ θα είναι η ακόλουθη

$$\mathbb{E}(u^T e^{xS_T}) = \frac{\left(\frac{\lambda(1-\tilde{u})e^{(x-\lambda\tilde{u})}}{\lambda-x} - \frac{\lambda(1-\tilde{u})e^{(\lambda\tilde{u}-x)a}}{x+\lambda}\right)(\lambda u - (1-\tilde{u})^2 e^{2\lambda\tilde{u}a})}{(1-\tilde{u})^2 e^{-2\lambda\tilde{u}b} - (1+\tilde{u})^2 e^{2\lambda\tilde{u}a}} + \frac{\lambda(1+\tilde{u})}{x+\lambda} e^{(\lambda\tilde{u}-x)a}.$$

Ακόμα η δεσμευμένη πιθανογεννήτρια του χρόνου T ως προς το ενδεχόμενο $\{S_T \geq b\}$ γίνεται

$$\mathbb{E}(u^T | S_T \geq b) = \frac{e^{\lambda b\tilde{u}}(2 + a\lambda + b\lambda)(1 - \tilde{u}) \left(-u + e^{2a\lambda\tilde{u}}(2 - u + 2\tilde{u})\right)}{(1 + a\lambda)\left((1 - e^{2(a+b)\lambda\tilde{u}})(u - 2) + 2(1 + e^{2(a+b)\lambda\tilde{u}})\tilde{u}\right)}$$

και παραγωγίζοντας την σχέση αυτή καθώς $u \rightarrow 1$ έχουμε την δεσμευμένη μέση τιμή

$$\mathbb{E}(T | S_T \geq b) = \frac{12 + \lambda[2a^3\lambda^2(1+b\lambda) + 3a^2\lambda(2+b\lambda)^2 + b(12+b\lambda(6+b\lambda)) + a(24+4\lambda(24+b\lambda(9+b\lambda)))]}{6(1+a\lambda)(2+(a+b)\lambda)}.$$

Έως τώρα τα αποτελέσματα που είδαμε αφορούσαν τον χρόνο διακοπής T που έφρασε με άνω και κάτω φράγμα τον τυχαίο περίπατο S_n . Αυτή τη φορά θα μελετήσουμε το ίδιο πρόβλημα μονάχα που ο χρόνος διακοπής θα είναι ο

$$T = \inf(n \in \mathbb{N} : S_T \geq b)$$

για σταθερά $b > 0$. Αυτή τη φορά για να εξασφαλιστεί η συνθήκη $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ θα πρέπει να έχουμε θετική μέση τιμή των Z_i και συνεπώς θέλουμε να ισχύει $\mathbb{E}(Z_1) = \frac{p}{\lambda_1} - \frac{1-p}{\lambda_2} > 0$. Όμως υπό το μετασχηματισμένο μέτρο \mathbb{P}_{w_u} αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή των Z_i είναι θετική πάντα, ανεξαιρέτως από το πρόσημο της $\mathbb{E}(Z_1)$, κάνοντας ανάλυση της παρακάτω μέσης τιμής ως συνάρτησης της w_u η οποία είναι

$$\mathbb{E}_{w_u}(Z_1) = \frac{c_{w_u}}{\lambda_1 - w_u} - \frac{1 - c_{w_u}}{\lambda_2 + w_u} = \frac{p\lambda_1 u}{(\lambda_1 - w_u)^2} - \frac{(1-p)\lambda_2 u}{(\lambda_2 + w_u)^2} > 0$$

για κάθε τιμή $u \in (0,1)$. Επομένως ισχύει ότι $\mathbb{P}_{w_u}(T < \infty) = 1, u \in (0,1)$ και από την σχέση της Πρότασης 1.3.3 (ή από το Θεώρημα 1.3.3 θέτοντας $Y = u^T e^{(x-w_u)S_T}$) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(u^T 1_{\{T < \infty\}}) &= \mathbb{E}_{w_u}(e^{-w_u S_T} 1_{\{T < \infty\}}) = \mathbb{E}_{w_u}(e^{-w_u S_T} | T < \infty) \mathbb{P}_{w_u}(T < \infty) \\ &= \mathbb{E}_{w_u}(e^{-w_u S_T} | T < \infty) = \frac{(\lambda_1 - w_u)e^{-w_u b}}{\lambda_1}, \quad u \in (0,1)\end{aligned}$$

Καθώς $u \rightarrow 1$ παίρνουμε τιμή για την πιθανότητα $\mathbb{P}(T < \infty) = \frac{(\lambda_1 - w_1)e^{-w_1 b}}{\lambda_1}$. Από το γεγονός ότι $\mathbb{E}(u^T 1_{\{T < \infty\}}) = \mathbb{E}(u^T | T < \infty) \mathbb{P}(T < \infty)$ ακολουθεί η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.1.3. Έστω S_n τυχαίος περίπατος με κατανομή των αλμάτων την $F(x) = pF_1(x) + (1-p)(1 - F_2(-x))$, με $F_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ για $i = 1,2$ και $p \in (0,1)$. Αν T είναι ο χρόνος μέχρι ο τυχαίος περίπατος περάσει την τιμή b με $b > 0$ για πρώτη φορά, τότε η δεσμευμένη πιθανογεννήτρια συνάρτηση του T ως προς το $\{T < \infty\}$ δίνεται από την σχέση

$$\mathbb{E}(u^T | T < \infty) = \frac{\lambda_1 - w_u}{\lambda_1 - w_1} e^{(w_1 - w_u)b}, \quad u \in (0,1)$$

όπου η τιμή w_u δόθηκε ωρίτερα στην παράγραφο. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \begin{cases} \frac{p(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1} e^{-((1-p)\lambda_1 - p\lambda_2)b}, & (1-p)\lambda_1 - p\lambda_2 \geq 0 \\ 1 & , (1-p)\lambda_1 - p\lambda_2 < 0 \end{cases}$$

□

Τέλος να αναφέρουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε δεσμευμένες πιθανότητες της μορφής $\mathbb{P}(T = m | T < \infty)$ από την Πρόταση 3.1.3 παραγωγίζοντας την σχέση της δεσμευμένης πιθανογεννήτριας ως προς u καθώς $u \rightarrow 1$.

Τα αποτελέσματα της παραγράφου αυτής δίνουν έμφαση στον υπολογισμό ποσοτήτων που αφορούν τον χρόνο διακοπής T ο οποίος εξαρτάται από τα βήματα που ο τυχαίος περίπατος χρειάζεται για να εξέλθει από ένα συγκεκριμένο διάστημα της μορφής $[a, b]$ ή $[-\infty, b]$. Στην πορεία θα ασχοληθούμε με μια ιδιαίτερη ανέλιξη της οποίας η τροχιά κάνει άλματα και μοντελοποιεί το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρίας στη διάρκεια του χρόνου. Τα άλματα που κάνει είναι προς τα κάτω και οφείλονται στις υποχρεώσεις (ζημιές) που πρέπει να καλύψει, ενώ ο χρόνος διακοπής εκφράζει το πλήθος των ζημιών που θα γίνουν έως ότου το πλεόνασμα ξεπεράσει κάποιο άνω όριο ασφαλείας ή γίνει αρνητικό (δηλαδή οδηγήσει σε χρεοκοπία την εταιρία).

2. Εισαγωγή στη Θεωρία χρεοκοπίας.

Η θεωρία χρεοκοπίας ασχολείται με την μαθηματική μοντελοποίηση, που αφορά συνήθως μια ασφαλιστική εταιρία, όπου εξετάζεται στοχαστικά η στιγμή που θα επέλθει η χρεοκοπία της εταιρίας.

Η ασφαλιστική εταιρία έχοντας ένα αρχικό αποθεματικό $u \geq 0$ καλείται να αναλάβει αποζημιώσεις που έχουν προκληθεί από ζημιές (*claim arrival*) ύψους $X_i, i = 1, 2, \dots$ σύμφωνα με μία απαριθμήτρια στοχαστική ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$. Οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιών (*claim inter-arrival times*) θα συμβολίζονται με T_i και έτσι έχουμε την σχέση:

$$N(t) = \sup \left\{ n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^n T_i < t \right\}.$$

Στο μοντέλο αυτό που γενικεύτηκε από τον Sparre Andersen (1957) υποθέτουμε ότι οι μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κοινή κατανομή F , ομοίως οι T_1, T_2, \dots είναι μη αρνητικές ανεξάρτητες και ισόνομες με κοινή κατανομή K και οι τυχαίες μεταβλητές $T_i, i \in \mathbb{N}$ και $X_i, i \in \mathbb{N}$ είναι ανεξάρτητες.

Η ανέλιξη πλεονάσματος (*surplus process*) θα συμβολίζεται με $\{U(t), t \geq 0\}$ είναι

$$U(t) := u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Με $c > 0$ να είναι το ασφάλιστρο (*premium income rate*) ανά χρονική μονάδα και θέτουμε ως $U(0) = u$ να είναι το αρχικό αποθεματικό της εταιρίας. Βασιζόμενοι στην ανέλιξη πλεονάσματος ορίζουμε τον χρόνο διακοπής τ που είναι

$$\tau := \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : U(t) < 0\}$$

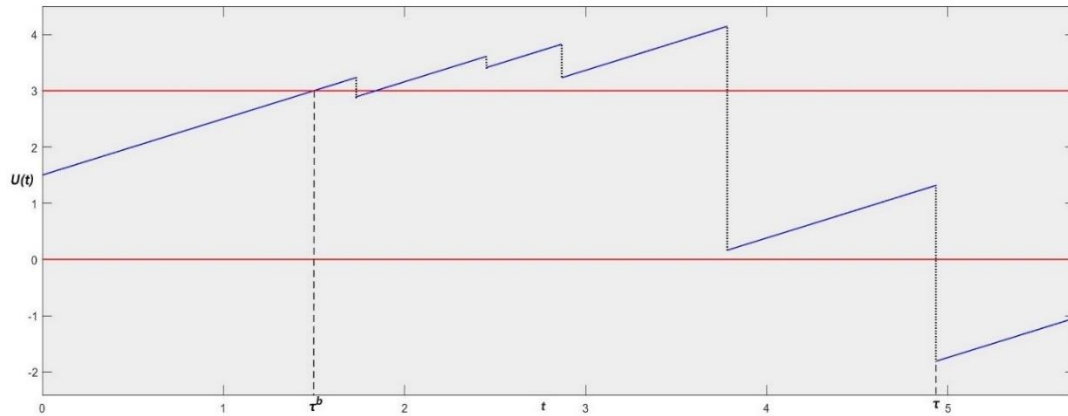
που είναι η στιγμή που η ανέλιξη $\{U(t), t \geq 0\}$ θα γίνει αρνητική για πρώτη φορά και θα συμβολίζει τον χρόνο συμβεί η χρεοκοπία (*ruin*). Το επίκεντρο ενδιαφέροντος της παραγράφου είναι η εύρεση της κατανομής του χρόνου τ , της πιθανότητας χρεοκοπίας και γενικότερα αποτελεσμάτων που συνδέονται αυτήν.

Είναι συχνό να χρησιμοποιείται εναλλακτικά η τυχαία μεταβλητή

$$\tau^b := \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : U(t) \notin [0, b]\}$$

ως χρόνος διακοπής με την σταθερά $b > 0$ να εκφράζει κάποιο επιθυμητό όριο ασφαλείας για την ασφαλιστική εταιρία.

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται, μέσω ενός προσομοιωμένου μονοπατιού της ανέλιξης $\{U(t), t \geq 0\}$, οι χρόνοι διακοπής τ και τ^b των οποίων οι τιμές εμφανώς διαφέρουν.



Σε αυτή την περίπτωση όμως υπάρχει το μειονέκτημα ότι για κάποιο δεδομένο t_0 η ανέλιξη πλεονάσματος να έχει ξεπεράσει την τιμή b δηλαδή $U(t_0) \geq b$ αλλά στην συνέχεια να εμφανιστεί κάποια ζημιά την στιγμή t_1 ώστε να γίνει $U(t_1) \leq b$. Γι' αυτό τον λόγο είναι προτιμότερο να εξετάζουμε την παραπάνω ανέλιξη τις στιγμές που λαμβάνονται οι αποζημιώσεις X_i . Στην συνέχεια δίνεται η ανέλιξη πλεονάσματος διακριτοποιώντας τον χρόνο στις στιγμές που φθάνουν αποζημιώσεις.

Θεωρούμε ως $R_k := \sum_{i=1}^k T_i$, $k = 1, 2, \dots$ τον συνολικό χρόνο μέχρι να ληφθεί η k -οστή ζημιά X_k (*claim arrival times*). Έτσι η ανέλιξη πλεονάσματος μπορεί να γραφεί με την μορφή

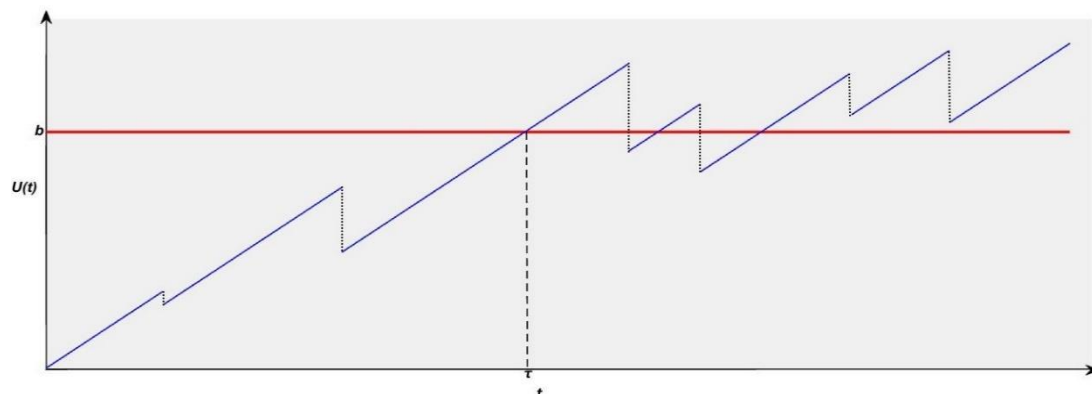
$$S_k = U(R_k) = u + cR_k - \sum_{i=1}^k X_i = u + \sum_{i=1}^k (cT_i - X_i) = u + \sum_{i=1}^k Z_i, \quad k = 1, 2, \dots$$

με $Z_i = cT_i - X_i$. Οι τυχαίες μεταβλητές Z_1, Z_2, \dots είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με από κοινού κατανομή G .

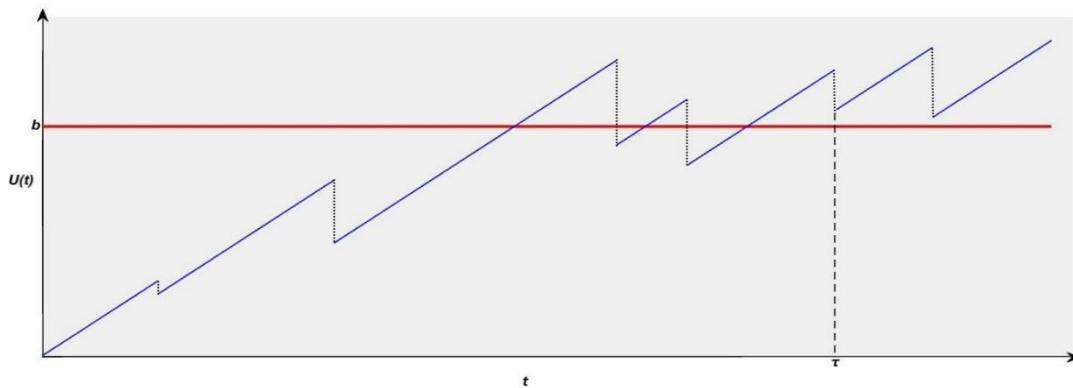
Δηλαδή από την μελέτη της ανέλιξης $\{U(t), t \geq 0\}$ που είναι σε συνεχή χρόνο πάμε στην μελέτη της ανέλιξης $\{S_k, k = 1, 2, \dots\}$ που είναι σε διακριτό χρόνο. Στην περίπτωση αυτή ο αντίστοιχος χρόνος διακοπής θα είναι ο

$$v := \inf\{k: S_k \notin [0, b]\}$$

ο οποίος θα συμβολίζει την στιγμή που η ανέλιξη πλεονάσματος $U(t)$ περάσει για πρώτη φορά τις τιμές 0 ή b μετά την αποζημίωση των ζημιών. Επιπλέον ο χρόνος $v < \infty$ σχεδόν βέβαια (βλ. Karlin και Taylor (1975), σελ.264).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Στο Σχήμα 1 απεικονίζεται ένα μονοπάτι της ανέλιξης πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ με τον χρόνο διακοπής $\tau_1 := \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : U(t) \geq b\}$ να είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή και να δηλώνει την στιγμή που η ανέλιξη ξεπερνάει το όριο b . Στο Σχήμα 2 έχουμε ξανά την ανέλιξη πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ αλλά ο χρόνος διακοπής που λαμβάνουμε είναι ορισμένος σε διακριτό χρόνο δηλαδή έχουμε ότι $\tau_2 := \inf\{k \in \mathbb{N}^* : S_k \geq b\}$ και μετράει την στιγμή που η ανέλιξη θα ξεπεράσει το όριο b αφού έχει ληφθεί η ζημιά. Αν θέλαμε την ανέλιξη $\{S_k, k = 1, 2, \dots\}$ θα κρατούσαμε από την $\{U(t), t \geq 0\}$ τα σημεία από την αρχή κάθε ευθείας.

Μια ποσότητα που είναι σημαντική στην θεωρία χρεοκοπίας είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας (*ruin probability*) η οποία συμβολίζεται με ψ και θα είναι $\psi := \mathbb{P}(S_v < 0) = 1 - \mathbb{P}(S_v > b)$. Μια τέτοια πιθανότητα πολλές φορές είναι ανέφικτο να βρεθεί αν δεν γνωρίζουμε την κατανομή της μεταβλητής S_v . Είναι συχνό λοιπόν να αναζητήσουμε κάποια προσέγγιση ή φράγμα για την ψ . Τέτοια αποτελέσματα υπάρχουν αρκετά στο κλασικό μοντέλο (Cramer-Lundberg) όπως ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg για την πιθανότητα χρεοκοπίας ή την εύρεση του συντελεστή προσαρμογής R (*adjustment coefficient*) μέσω κατάλληλης τεχνικής για να χρησιμοποιηθεί ως ένα άνω φράγμα της πιθανότητας ψ .

Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πως μπορούμε να εφαρμόσουμε την ταυτότητα του Wald για να εξάγουμε αποτελέσματα όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας και άλλα.

3. Γενικά αποτελέσματα στο μοντέλο χρεοκοπίας Sparre Andersen μέσω προσέγγισης από μείξη Erlang.

Παραπάνω ορίσαμε την ανέλιξη $\{S_k, k = 1, 2, \dots\}$ μέσω της οποίας θα γίνει η ανάλυση ώστε να εξάγουμε χρήσιμα αποτελέσματα. Το λήμμα που ακολουθεί δίνει την την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω των παρακάτω ποσοτήτων

$$\mathbb{A}(t) := \mathbb{E}(e^{t(S_v-b)} | S_v \geq b), \quad \mathbb{B}(t) := \mathbb{E}(e^{t(-S_v)} | S_v \leq 0)$$

οι οποίες εκφράζουν την ροπογεννήτριες συναρτήσεις δεδομένου ότι θα ξεπεράσει η ανέλιξη το όριο ασφαλείας (*overshoot*) ή θα επέλθει η χρεοκοπία (*undershoot*) αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα που ακολουθούν αποτελούν μέρος δημοσίευσης των Boutsikas, Rakitzis, and Antzoulakos (2016).

Λήμμα 3.3.1. Αν υπάρχει τιμή $t_0 \neq 0$ που να ικανοποιεί την σχέση $\mathbb{E}(e^{t_0 Z_1}) = 1$, τότε

$$\psi = \frac{e^{bt_0} \mathbb{A}(t_0) - e^{ut_0}}{e^{bt_0} \mathbb{A}(t_0) - \mathbb{B}(-t_0)}.$$

Απόδειξη.

Εκμεταλλευόμαστε την ταυτότητα του Wald $\mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{tZ_1})^{-v} e^{t \sum_{i=1}^v Z_i}) = 1$ και από το γεγονός ότι $\mathbb{E}(e^{t_0 Z_1}) = 1$ παίρνουμε $\mathbb{E}(e^{t_0(S_v-u)}) = 1$ και επομένως

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{t_0(S_v-u)}) &= e^{t_0(b-u)} \mathbb{A}(t_0) (1 - \mathbb{P}(S_v \leq 0)) + e^{-t_0 u} \mathbb{B}(-t_0) \mathbb{P}(S_v \leq 0) \\ &= e^{t_0(b-u)} \mathbb{A}(t_0) (1 - \psi) + e^{-t_0 u} \mathbb{B}(-t_0) \psi \end{aligned}$$

και λύνοντας ως προς ψ οδηγούμαστε στο ζητούμενο. \square

Το παραπάνω λήμμα μας λέει ότι όταν οι δεσμευμένες κατανομές $S_v | S_v > b$ και $S_v | S_v < 0$ είναι γνωστές τότε και η κατανομή του αθροίσματος διακοπής S_v είναι γνωστή.

Κάνοντας κατάλληλη αλλαγή στο μέτρο πιθανότητας \mathbb{P} (χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Esscher) η κατανομή των μεταβλητών X_i και T_i θέτουμε τώρα ότι υπό το \mathbb{P}_w να είναι η

$$\mathbb{P}_w(X_i \leq x) = F_w(x) = \frac{\mathbb{E}(e^{-wX_i} \cdot 1_{\{X_i \leq x\}})}{\mathbb{E}(e^{-wX_i})}, \quad \mathbb{P}_w(T_i \leq x) = K_{cw}(x) = \frac{\mathbb{E}(e^{cwT_i} \cdot 1_{\{T_i \leq x\}})}{\mathbb{E}(e^{cwT_i})}$$

ενώ εξακολουθούν να θεωρούνται ανεξάρτητες. Έτσι η κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $Z_i = cT_i - X_i, i = 1, 2, \dots$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες υπό το μέτρο \mathbb{P}_w , θα δίνεται μέσω της συνέλιξης

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_w(Z_i \leq z) &= \mathbb{P}_w(cT_i - X_i \leq z) = \int K_{cw}\left(\frac{z+x}{c}\right) dF_w(x) \\ &= \frac{\int \mathbb{E}\left(e^{cwT_i} 1_{\{T_i \leq \frac{z+x}{c}\}}\right) e^{-wx} dF(x)}{\mathbb{E}(e^{cwT_i}) \mathbb{E}(e^{-wX_i})} = \frac{\mathbb{E}(e^{w(cT_i - X_i)} 1_{\{cT_i - X_i \leq z\}})}{\mathbb{E}(e^{w(cT_i - X_i)})} \\ &= \frac{\mathbb{E}(e^{wZ_i} 1_{\{Z_i \leq z\}})}{\mathbb{E}(e^{wZ_i})} = G_w(z), \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Δηλαδή υπό το \mathbb{P}_w οι τ.μ. Z_i θα ακολουθούν την w - εκθετικά κεκλιμμένη (tilted) G .

Θεωρούμε ξανά τις ποσότητες

$$\mathbb{A}_w(t) := \mathbb{E}_w(e^{t(S_v-b)} | S_v \geq b), \quad \mathbb{B}_w(t) := \mathbb{E}_w(e^{t(-S_v)} | S_v \leq 0)$$

μέσω των οποίων θα μπορέσουμε να λάβουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας υπό το νέο μέτρο \mathbb{P}_w

Λήμμα 3.3.2 Αν υπάρχει πραγματική συνάρτηση $\chi \neq 0$ έτσι ώστε $\mathbb{E}_w(e^{\chi(w)Z_1}) = 1$, $w \in \mathcal{W}$, η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ_w υπό το μέτρο \mathbb{P}_w θα είναι ίση με

$$\psi_w = \mathbb{P}_w(S_v \leq 0) = \frac{e^{b\chi(w)}\mathbb{A}_w(\chi(w)) - e^{u\chi(w)}}{e^{b\chi(w)}\mathbb{A}_w(\chi(w)) - \mathbb{B}_w(-\chi(w))}$$

Για $w = 0$ έχουμε $\psi_0 = \psi$, $\mathbb{A}_0 = \mathbb{A}$, $\mathbb{B}_0 = \mathbb{B}$, $\chi(0) = t_0$ που είναι το Λήμμα 3.3.1.

Απόδειξη.

Εκμεταλλευόμαστε και πάλι την ταυτότητα του Wald $\mathbb{E}_w(\mathbb{E}_w(e^{tZ_1})^{-v}e^{tS_v}) = 1$ και από το γεγονός ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση $\chi \neq 0$ έτσι ώστε να ισχύει $\mathbb{E}_w(e^{\chi(w)Z_1}) = 1$, $w \in \mathcal{W}$, παίρνουμε $\mathbb{E}_w(e^{\chi(w)(S_v-u)}) = 1$ και επομένως

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_w(e^{\chi(w)(S_v-u)}) \\ &= \mathbb{E}_w(e^{\chi(w)(S_v-u)} | S_v \geq b) \mathbb{P}_w(S_v \geq b) + \mathbb{E}_w(e^{\chi(w)(S_v-u)} | S_v \leq 0) \mathbb{P}_w(S_v \leq 0) \\ &= e^{\chi(w)(b-u)} \mathbb{A}_w(\chi(w)) (1 - \mathbb{P}_w(S_v \leq 0)) + e^{-\chi(w)u} \mathbb{B}_w(-\chi(w)) \mathbb{P}_w(S_v \leq 0) \\ &= e^{\chi(w)(b-u)} \mathbb{A}_w(\chi(w)) (1 - \psi_w) + e^{-\chi(w)u} \mathbb{B}_w(-\chi(w)) \psi_w \end{aligned}$$

και λύνοντας ως προς ψ_w οδηγούμαστε στο ζητούμενο. \square

Το παραπάνω λήμμα παρόμοια με το Λήμμα 3.3.1 μας λέει ότι όταν οι δεσμευμένες κατανομές $S_v | S_v > b$ και $S_v | S_v < 0$ υπό το μετασχηματισμένο μέτρο Esscher \mathbb{P}_w είναι γνωστές τότε και η κατανομή του σταματημένου αθροίσματος S_v υπό το μετασχηματισμένο μέτρο Esscher \mathbb{P}_w είναι άμεσα γνωστή.

Η επόμενη πρόταση λέει ότι αν οι δεσμευμένες κατανομές $S_v | S_v > b$ και $S_v | S_v < 0$ υπό το μετασχηματισμένο μέτρο Esscher \mathbb{P}_w είναι γνωστές τότε και η από κοινού γεννήτρια $\mathbb{E}(r^v e^{xS_v})$ των v, S_v είναι γνωστή

Πρόταση 3.3.1. Αν υπάρχει πραγματική συνάρτηση ρ έτσι ώστε $\mathbb{E}(e^{\rho(r)Z_1}) = r^{-1}$ για $r \in (0,1)$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} i) \quad & \mathbb{E}(r^v e^{xS_v} | S_v \leq 0) = \frac{\psi_{\rho(r)}}{\psi_0} e^{\rho(r)u} \mathbb{B}_{\rho(r)}(\rho(r) - x) \\ ii) \quad & \mathbb{E}(r^v e^{xS_v} | S_v \geq b) = \frac{1 - \psi_{\rho(r)}}{1 - \psi_0} e^{xb + \rho(r)(u-b)} \mathbb{A}_{\rho(r)}(x - \rho(r)) \\ iii) \quad & \mathbb{E}(r^v e^{xS_v}) = (1 - \psi_{\rho(r)}) e^{xb + \rho(r)(u-b)} \mathbb{A}_{\rho(r)}(x - \rho(r)) \\ & + \psi_{\rho(r)} e^{\rho(r)u} \mathbb{B}_{\rho(r)}(\rho(r) - x) \end{aligned}$$

Απόδειξη.

Ο χρόνος διακοπής v είναι πεπερασμένος σ.β. (εφόσον θεωρούμε ότι οι Z_i είναι διάφορες του μηδενός σ.β.) και επομένως $\sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{v=i\}} = 1_{\{v<\infty\}} = 1$ και επομένως είναι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(1_{\{S_v \leq 0\}} r^v e^{x(S_v - u)}) &= \mathbb{E}\left(1_{\{S_v \leq 0\}} r^v e^{x(S_v - u)} \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{v=i\}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(1_{\{S_i \leq 0\}} r^i e^{x(S_i - u)} 1_{\{v=i\}}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(1_{\{S_i \leq 0\}} r^i e^{(x - \rho(r))(S_i - u)} \prod_{j=1}^i e^{\rho(r)Z_j} 1_{\{v=i\}}\right)\end{aligned}$$

Από την στιγμή που $\mathbb{E}(e^{\rho(r)Z_1}) = r^{-1}$ η παραπάνω σχέση μπορεί να εκφραστεί και ως

$$\mathbb{E}(1_{\{S_v \leq 0\}} r^v e^{x(S_v - u)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(Y_i \frac{e^{\rho(r)Z_1}}{\mathbb{E}(e^{\rho(r)Z_1})} \cdots \frac{e^{\rho(r)Z_i}}{\mathbb{E}(e^{\rho(r)Z_i})}\right)$$

με $Y_i = 1_{\{S_i \leq 0\}} e^{(x - \rho(r))(S_i - u)} 1_{\{v=i\}}$. Επειδή για κάθε $i \in \{1, 2, \dots\}$ οι τυχαίες μεταβλητές Y_i είναι $\sigma(Z_1, \dots, Z_i)$ μετρήσιμες από την παρατήρηση 1.3.4 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμένο μέτρο Esscher και να πάρουμε

$$\mathbb{E}\left(Y_i \frac{e^{\rho(r)Z_1}}{\mathbb{E}(e^{\rho(r)Z_1})} \cdots \frac{e^{\rho(r)Z_i}}{\mathbb{E}(e^{\rho(r)Z_i})}\right) = \mathbb{E}_{\rho(r)}(Y_i)$$

και με αντικατάσταση έχουμε

$$\mathbb{E}(1_{\{S_v \leq 0\}} r^v e^{x(S_v - u)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\rho(r)}(Y_i) = \mathbb{E}_{\rho(r)}(1_{\{S_v \leq 0\}} e^{(x - \rho(r))(S_v - u)}),$$

Τελικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(r^v e^{x(S_v - u)} | S_v \leq 0) &= \frac{1}{\psi_0} \mathbb{E}(1_{\{S_v \leq 0\}} r^v e^{x(S_v - u)}) = \frac{1}{\psi_0} \mathbb{E}_{\rho(r)}(1_{\{S_v \leq 0\}} e^{(x - \rho(r))(S_v - u)}) \\ &= \frac{\psi_{\rho(r)}}{\psi_0} \mathbb{E}_{\rho(r)}(e^{(x - \rho(r))(S_v - u)} | S_v \leq 0) \\ &= \frac{\psi_{\rho(r)}}{\psi_0} e^{(\rho(r) - x)u} \mathbb{B}_{\rho(r)}(\rho(r) - x)\end{aligned}$$

καταλήγοντας στο i) διαιρώντας και τα δύο μέλη με την ποσότητα e^{-xu} . Στην συνέχεια με παρόμοιο τρόπο στην παραπάνω απόδειξη αν στην θέση της δείκτριας $1_{\{S_v \leq 0\}}$ βάλουμε την δείκτρια $1_{\{S_v \geq b\}}$ προκύπτει η δεύτερη σχέση

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(r^v e^{x(S_v - u)} | S_v \geq b) &= \frac{1 - \psi_{\rho(r)}}{1 - \psi_0} \mathbb{E}_{\rho(r)}(e^{(x - \rho(r))(S_v - u)} | S_v \geq b) \\ &= \frac{1 - \psi_{\rho(r)}}{1 - \psi_0} e^{xb + \rho(r)(u - b)} \mathbb{A}_{\rho(r)}(x - \rho(r))\end{aligned}$$

καταλήγοντας στο ζητούμενο διαιρώντας και τα δύο μέλη με την ποσότητα e^{-xu}

Τέλος από την σχέση

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(r^v e^{xS_v}) &= \mathbb{E}(r^v e^{xS_v} | S_v \geq b) \mathbb{P}(S_v \geq b) + \mathbb{E}(r^v e^{xS_v} | S_v \leq 0) \mathbb{P}(S_v \leq 0) \\ &= \mathbb{E}(r^v e^{xS_v} | S_v \geq b) (1 - \psi_0) + \mathbb{E}(r^v e^{xS_v} | S_v \leq 0) \psi_0\end{aligned}$$

κάνοντας αντικατάσταση τις σχέσεις $i)$ και $ii)$ προκύπτει το ζητούμενο \square

Σε αυτό το σημείο θα δούμε πως μπορούμε να αξιοποιήσουμε τα αποτελέσματα της Πρότασης 3.3.1 δίνοντας μια απλή εφαρμογή. Στο παράδειγμα που ακολουθεί υποθέτουμε το κλασικό μοντέλο (*Cramer-Lundberg model*) όπου οι εμφανίσεις των ζημιών πραγματοποιούνται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson έντασης λ .

Παράδειγμα 3.3.1. Έστω X_1, X_2, \dots τα ύψη των ζημιών σε μια ασφαλιστική εταιρία και υποθέτουμε ότι είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέση τιμή μ . Επειδή τα ύψη X_i εμφανίζονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson έντασης λ , οι ενδιάμεσοι χρόνοι T_i μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιών ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Έτσι οι τυχαίες μεταβλητές $Z_i = cT_i - X_i$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με σ.π.π.

$$\begin{aligned}g(z) &= \frac{d}{dz} \mathbb{P}(cT_i - X_i \leq z) = \frac{\lambda}{c\mu} \int_{\max\{-z, 0\}}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{c}(z+x)} e^{-\frac{1}{\mu}x} dx \\ &= \begin{cases} \frac{c}{\lambda\mu + c} \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}z}, & z \geq 0 \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda\mu + c} \frac{1}{\mu} e^{\frac{1}{\mu}z}, & z < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

και η ροπογεννήτρια (λόγω ανεξαρτησίας των X_i και T_i) είναι η

$$\mathbb{E}(e^{tZ_i}) = \mathbb{E}(e^{tcT_i}) \mathbb{E}(e^{-tX_i}) = \frac{\lambda}{\lambda - tc} \frac{1/\mu}{1/\mu + t}, \quad -\frac{1}{\mu} < t < \frac{\lambda}{c}.$$

Αφού έχουμε την σ.π.π. $g(z)$ και την ροπογεννήτρια $\mathbb{E}(e^{tZ_i})$, τότε υπό το μέτρο \mathbb{P}_w και για $-\frac{1}{\mu} < w < \frac{\lambda}{c}$ θα έχουμε ότι

$$g_w(x) = \frac{e^{wx} g(x)}{\mathbb{E}(e^{wZ_i})} = \begin{cases} \frac{cw\mu + c}{\lambda\mu + c} \left(\frac{\lambda}{c} - w\right) e^{-\left(\frac{\lambda}{c} - w\right)x}, & x \geq 0 \\ \frac{\lambda\mu - cw\mu}{\lambda\mu + c} \left(w + \frac{1}{\mu}\right) e^{\left(w + \frac{1}{\mu}\right)x}, & x < 0 \end{cases}$$

Από τον ορισμό του κεκλιμένου μέτρου \mathbb{P}_w προκύπτει η ροπογεννήτρια υπο το μέτρο αυτό σύμφωνα με την σχέση

$$\mathbb{E}_w(e^{tZ_i}) = \frac{\mathbb{E}(e^{(w+t)Z_i})}{\mathbb{E}(e^{wZ_i})} = \frac{1}{\left(1 - \frac{c}{\lambda - cw}t\right) \left(1 + \frac{\mu}{w\mu + 1}t\right)}, \quad w, w + t \in \left(-\frac{1}{\mu}, \frac{\lambda}{c}\right)$$

Παρατηρούμε ότι η $g_w(x)$ μπορεί να γραφεί και στην μορφή

$$g_w(x) = p_w f_1(x) + (1 - p_w) f_2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

με $p_w = \frac{cw\mu+c}{\lambda\mu+c}$ και

$$f_1(x) = \left(\frac{\lambda}{c} - w\right) e^{-\left(\frac{\lambda}{c}-w\right)x} 1_{\{x \geq 0\}}, \quad f_2(x) = \left(w + \frac{1}{\mu}\right) e^{\left(w+\frac{1}{\mu}\right)x} 1_{\{x < 0\}}$$

Δηλαδή η κατανομή των Z_i υπό το μέτρο \mathbb{P}_w μπορεί να θεωρηθεί ως μια διακριτή μείξη δύο εκθετικών με πυκνότητες f_1, f_2 και βάρη μείξης $p_w, 1 - p_w$ αντίστοιχα.

Επειδή για δεδομένο $x \in \mathbb{R}$ κάθε τυχαία μεταβλητή Z_i , σύμφωνα με την παραπάνω μείξη, κάνει εκθετικά άλματα (για $x \geq 0$ κάνει άλμα από εκθετική κατανομή με παράμετρο $\frac{\lambda}{c} - w$, ενώ για $x < 0$ κάνει άλμα από εκθετική κατανομή με παράμετρο $w + \frac{1}{\mu}$) τότε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα έλλειψης μνήμης (*memoryless property*) για τον τυχαίο περίπατο S_n προκύπτει ότι

$$\mathbb{B}_w(t) = \mathbb{E}_w(e^{t(-S_v)} | S_v \leq 0) = \frac{w + \frac{1}{\mu}}{w + \frac{1}{\mu} - t}, \quad t < w + \frac{1}{\mu}$$

$$\mathbb{A}_w(t) = \mathbb{E}_w(e^{t(S_v-b)} | S_v \geq b) = \frac{\frac{\lambda}{c} - w}{\frac{\lambda}{c} - w - t}, \quad t < \frac{\lambda}{c} - w$$

Έτσι από το Λήμμα 3.3.2 βρίσκουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας η οποία είναι η

$$\psi_w = \mathbb{P}_w(S_v \leq 0) = \frac{e^{b\chi(w)} A_w(\chi(w)) - e^{u\chi(w)}}{e^{b\chi(w)} A_w(\chi(w)) - \mathbb{B}_w(-\chi(w))} = \frac{e^{b\chi(w)} \frac{\frac{\lambda}{c} - w}{w + \frac{1}{\mu}} - e^{u\chi(w)}}{e^{b\chi(w)} \frac{\frac{\lambda}{c} - w}{w + \frac{1}{\mu}} - \frac{w + \frac{1}{\mu}}{\frac{\lambda}{c} - w}}$$

όπου $\chi(w) = \frac{\lambda}{c} - 2w - \frac{1}{\mu}$ είναι η μη μηδενική λύση της εξίσωσης $\mathbb{E}_w(e^{\chi(w)Z_1}) = 1$.

Από την Πρόταση 3.3.1 αφού γνωρίζουμε την ψ_w μπορούμε να βρούμε την από κοινού κατανομή των v, S_v (βρίσκοντας πρώτα την δεσμευμένη κατανομή των v, S_v ως προς τα ενδεχόμενα $\{S_v \leq 0\}$ και $\{S_v \geq b\}$ αντίστοιχα) αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $\mathbb{E}(e^{\rho(r)Z_1}) = r^{-1}$. Κάνοντας εφαρμογή στην ροπογεννήτρια της Z_i οδηγούμαστε στην λύση

$$\rho(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu} - \sqrt{\left(\frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{c}\right)^2 - \frac{4\lambda r}{c\mu}} \right)$$

για $r \in (0,1)$ με $\rho(r) \in \left(-\frac{1}{\mu}, \frac{\lambda}{c}\right)$. Έτσι οι ποσότητες $A_{\rho(r)}(x - \rho(r)), \mathbb{B}_{\rho(r)}(\rho(r) - x)$ θα είναι

$$\mathbb{A}_{\rho(r)}(x - \rho(r)) = \frac{\frac{\lambda}{c} - \rho(r)}{\frac{\lambda}{c} - x}, \quad x < \frac{\lambda}{c}, \quad \mathbb{B}_{\rho(r)}(\rho(r) - x) = \frac{\rho(r) + \frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mu} + x}, \quad x > -\frac{1}{\mu}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω λύσεις μπορούμε να δώσουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.3.2. Στο κλασικό μοντέλο (*Cramer-Lundberg model*) για την θεωρία χρεοκοπίας με εκθετικές αποζημιώσεις (*claims*), η από κοινού κατανομή των v, S_v δίνεται από

$$i) \quad \mathbb{E}(r^v e^{xS_v} | S_v \leq 0) = \frac{\psi_{\rho(r)}}{\psi_0} e^{\rho(r)u} \frac{\rho(r) + \frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mu} + x}, \quad x > -\frac{1}{\mu}$$

$$ii) \quad \mathbb{E}(r^v e^{xS_v} | S_v \geq b) = \frac{1 - \psi_{\rho(r)}}{1 - \psi_0} e^{xb + \rho(r)(u-b)} \frac{\frac{\lambda}{c} - \rho(r)}{\frac{\lambda}{c} - x}, \quad x < \frac{\lambda}{c}$$

$$iii) \quad \mathbb{E}(r^v e^{xS_v}) = (1 - \psi_{\rho(r)}) e^{xb + \rho(r)(u-b)} \frac{\frac{\lambda}{c} - \rho(r)}{\frac{\lambda}{c} - x} + \psi_{\rho(r)} e^{\rho(r)u} \frac{\rho(r) + \frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mu} + x}$$

, $-\frac{1}{\mu} < x < \frac{\lambda}{c}$

όπου

$$\rho(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu} - \sqrt{\left(\frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{c} \right)^2 - \frac{4\lambda r}{c\mu}} \right) \text{ για } r \in (0,1) \text{ με } \rho(r) \in \left(-\frac{1}{\mu}, \frac{\lambda}{c} \right)$$

και

$$\psi_w = \frac{e^{b\left(\frac{\lambda}{c} - 2w - \frac{1}{\mu}\right)} \left(\frac{\lambda}{c} - w\right)^2 - e^{u\left(\frac{\lambda}{c} - 2w - \frac{1}{\mu}\right)} \left(\frac{\lambda}{c} - w\right) \left(w + \frac{1}{\mu}\right)}{e^{b\left(\frac{\lambda}{c} - 2w - \frac{1}{\mu}\right)} \left(\frac{\lambda}{c} - w\right)^2 - \left(w + \frac{1}{\mu}\right)^2},$$

για $w, w + t \in \left(-\frac{1}{\mu}, \frac{\lambda}{c}\right)$. □

Αξίζει να αναφέρουμε πως αν δεν υπάρχει το όριο ασφαλείας b τότε από την παραπάνω πρόταση καθώς $b \rightarrow \infty$ και για $\lambda\mu < c$ έχουμε

$$\psi_{\rho(r)} = \frac{e^{b\left(\frac{\lambda}{c} - 2\rho(r) - \frac{1}{\mu}\right)} \left(\frac{\lambda}{c} - \rho(r)\right)^2 - e^{u\left(\frac{\lambda}{c} - 2\rho(r) - \frac{1}{\mu}\right)} \left(\frac{\lambda}{c} - \rho(r)\right) \left(\rho(r) + \frac{1}{\mu}\right)}{e^{b\left(\frac{\lambda}{c} - 2\rho(r) - \frac{1}{\mu}\right)} \left(\frac{\lambda}{c} - \rho(r)\right)^2 - \left(\rho(r) + \frac{1}{\mu}\right)^2} \rightarrow 1,$$

$$\psi_0 = \frac{e^{b\left(\frac{\lambda-1}{c-\mu}\right)\frac{\lambda\mu}{c}} - e^{u\left(\frac{\lambda-1}{c-\mu}\right)}}{e^{b\left(\frac{\lambda-1}{c-\mu}\right)\frac{\lambda\mu}{c}} - \frac{c}{\lambda\mu}} \rightarrow \frac{\lambda\mu}{c} e^{u\left(\frac{\lambda-1}{c-\mu}\right)}$$

από την στιγμή που $\chi(\rho(r)) = \frac{\lambda}{c} - 2\rho(r) - \frac{1}{\mu} = \sqrt{\left(\frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{c}\right)^2 - \frac{4\lambda r}{c\mu}} > 0$. Η δεσμευμένη γεννήτρια των v, S_v δεδομένου ότι θα συμβεί η χρεοκοπία είναι

$$\mathbb{E}(r^v e^{xS_v} | S_v < 0) = \frac{c}{\lambda\mu} e^{(\rho(r) - \frac{\lambda+1}{c+\mu})u} \frac{\rho(r) + \frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mu} + x}$$

με $\rho(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu} - \sqrt{\left(\frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{c}\right)^2 - \frac{4\lambda r}{c\mu}} \right)$. Έτσι μπορούμε να εξαγάγουμε την δεσμευμένη μέση τιμή και διακύμανση για τον χρόνο διακοπής v δεδομένου ότι θα συμβεί η χρεοκοπία με την παραγωγή της σχέσης. Τελικά έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(v | S_v \leq 0) = \frac{c + \lambda\mu}{c - \lambda\mu}, \quad \text{Var}(v | S_v \leq 0) = \frac{\lambda((\lambda^2\mu^2 + c^2)u + (c + \lambda\mu)c\mu)}{(c - \lambda\mu)^3}$$

που είναι αποτελέσματα τα οποία έχουν βρεθεί και με διαφορετική μεθοδολογία (βλ. Dickson (2012)).

Στο Παράδειγμα 3.3.1 είδαμε ότι οι δεσμευμένες κατανομές (overshoot-undershoot) ήταν γνωστές στην περίπτωση που η κατανομή των Z_i ήταν μείξη εκθετικών, διότι χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα έλλειψης μνήμης της εκθετικής κατανομής. Γενικότερα αν θέλουμε να εφαρμόσουμε τα Λήμματα 3.3.1 ή 3.3.2 ή την Πρόταση 3.3.1 θα πρέπει να γνωρίζουμε τις δεσμευμένες κατανομές (overshoot και undershoot) ώστε να υπολογιστούν οι ποσότητες \mathbb{A} και \mathbb{B} . Αυτό τις περισσότερες φορές είναι αρκετά δύσκολο λόγω της πολυπλοκότητας που έχει η τυχαία μεταβλητή S_v . Θα ήταν εύλογο λοιπόν αν μπορούσαμε να χρησιμοποιούσαμε την ιδιότητα έλλειψης μνήμης αν αυτή υπήρχε κατά κάποιον τρόπο σε διάφορες κατανομές του ενδιαφέροντος μας. Τα επόμενα αποτελέσματα θα βοηθήσουν στο να αξιοποιηθεί η πολύτιμη αυτή ιδιότητα μέσω μιας μείξης κατανομών Erlang.

Ορισμός 3.3.1. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής(α.σ.κ) μιας μείξης Erlang (*mixed Erlang distribution*) με παραμέτρους m, η και βάρη μείξης $h_k \in [0,1], k = 1,2, \dots, m$ ώστε $\sum_{k=1}^m h_k = 1$ είναι

$$F_{\mathcal{ME}}(x) := \sum_{k=1}^m h_k F_{\mathcal{E}_{k,\eta}}(x), \quad x \geq 0$$

όπου $F_{\mathcal{E}_{k,\eta}}$ είναι η α.σ.κ. της κατανομής Erlang $\mathcal{E}_{k,\eta}$ με παράμετρο σχήματος k , παράμετρο κλίμακας η και σ.π.π.

$$f_{\varepsilon_{k,\eta}}(x) = \frac{\eta^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\eta x}, \quad x \geq 0$$

Η παραπάνω κλάση κατανομών καλείται κλάση μείξης Erlang (*mixed Erlang class*) και μελετήθηκε από τους Willmot και Woo. Για περισσότερα σχετικά με την κλάση μείξης Erlang ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις συναφείς δημοσιεύσεις των Willmot and Woo (2007), Lee and Lin (2010) και Willmot and Lin (2011).

Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παραπάνω κλάση για να προσεγγίσουμε μέσω αυτής άλλες κατανομές προερχόμενες από μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές (π.χ. βλ. Tijms (1994))

Κάθε συνάρτηση κατανομής H με στήριγμα το $[0, \infty)$ μπορεί να προσεγγιστεί από την ακόλουθη μείξη Erlang

$$H_{\eta}^{(m)}(x) := H(0) + \sum_{k=1}^m p_{k,\eta}^{(m)} F_{\varepsilon_{k,\eta}}(x)$$

για m μεγάλο ώστε $H\left(\frac{m}{\eta}\right) \approx 1$ και

$$p_{k,\eta}^{(m)} := \frac{H\left(\frac{k}{\eta}\right) - H\left(\frac{k-1}{\eta}\right)}{H\left(\frac{m}{\eta}\right)}$$

Με αυτό τον τρόπο προσεγγίζουμε την κατανομή των X_i, T_i μέσω μείξης Erlang για να χρησιμοποιηθεί η γενικευμένη μορφή της ιδιότητας έλλειψης μνήμης (*generalized form of the memoryless property*) όπως φαίνεται στο επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 3.3.3. Αν η κατανομή K των τυχαίων μεταβλητών T_i (αντίστοιχα F των X_i) είναι μείξη Erlang όπως στον Ορισμό 3.3.1, τότε η δεσμευμένη κατανομή $S_v - b$ δοθέντος $S_v > b$ (αντίστοιχα η δεσμευμένη κατανομή $-S_v$ δοθέντος $S_v < 0$) είναι και πάλι μείξη Erlang ίδιας μορφής με παραμέτρους $m, \frac{\eta}{c}$ (αντίστοιχα m, η) και με διαφορετικά βάρη μείξης.

Απόδειξη.

Η πρώτη περίπτωση αποδεικνύεται από τους Boutsikas και Politis (2015) ενώ η δεύτερη περίπτωση αποδεικνύεται από τους Willmot και Woo (2007) \square

Παρατήρηση 3.3.1.

Στις αποδείξεις που δίνονται στις παραπάνω δημοσιεύσεις για το Λήμμα 3.3.3, τα βάρη μείξης που προκύπτουν είναι σε σύνθετη μορφή με αποτέλεσμα να γίνεται αρκετά δύσκολος ο υπολογισμός τους. Παρακάτω θα δούμε (βλ. Πρόταση 3.3.3) ότι ο

υπολογισμός για τα βάρη μείξης γίνεται αρκετά πιο απλός αν εκμεταλλευτούμε για μια ακόμη φορά την θεμελιώδη εξίσωση του Wald.

Σκοπός μας είναι να δοθεί κάποιο αποτέλεσμα που να μην χρειαστεί να υποθέσουμε συγκεκριμένη κατανομή για τις τυχαίες μεταβλητές X_i και T_i όπως έγινε στην Πρόταση 3.3.2 που είχαμε υποθέσει εκθετικές ζημιές και εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιών.

Έστω λοιπόν $X_i \sim F^*$ και $T_i \sim K^*$ με F^*, K^* να είναι οποιεσδήποτε συναρτήσεις κατανομής με στήριγμα το $[0, \infty)$. Εφαρμόζοντας το προσεγγιστικό αποτέλεσμα που είδαμε νωρίτερα, τότε οι συναρτήσεις κατανομής των X_i, T_i προσεγγίζονται μέσω των μείξεων F και K ($F \approx F^*, K \approx K^*$) ως εξής

$$F(x) := \sum_{k=1}^{m_1} d_k F_{\varepsilon_{k, \frac{1}{\alpha}}}(x), \quad x \geq 0, \quad K(x) := \sum_{k=1}^{m_2} h_k F_{\varepsilon_{k, \beta}}(x), \quad x \geq 0$$

όπου $d_k, h_k \in [0, 1]$ βάρη μείξης ώστε $\sum_{k=1}^{m_1} d_k = 1$ και $\sum_{k=1}^{m_2} h_k = 1$. Η ροπογεννήτρια των Z_i δίνεται από

$$\mathbb{E}(e^{wZ_1}) = \mathbb{E}(e^{wcT_1})\mathbb{E}(e^{-wX_1}) = \sum_{i=1}^{m_2} \frac{h_i}{\left(1 - \frac{cw}{\beta}\right)^i} \cdot \sum_{j=1}^{m_1} \frac{d_j}{(1 + \alpha w)^j}, \quad -\frac{1}{\alpha} < w < \frac{\beta}{c}.$$

και υπό το μετασχηματισμένο μέτρο Esscher \mathbb{P}_w γίνεται

$$\mathbb{E}_w(e^{tZ_1}) = \frac{\mathbb{E}(e^{(w+t)Z_1})}{\mathbb{E}(e^{wZ_1})} = \frac{\sum_{i=1}^{m_2} \frac{h_i}{\left(1 - \frac{c}{\beta}(w+t)\right)^i} \sum_{j=1}^{m_1} \frac{d_j}{(1 + \alpha(w+t))^j}}{\sum_{i=1}^{m_2} \frac{h_i}{(1 - cw/\beta)^i} \sum_{j=1}^{m_1} \frac{d_j}{(1 + \alpha w)^j}}$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την μεθοδολογία θα πρέπει να λυθεί η εξίσωση $\mathbb{E}_w(e^{XZ_1}) = 1$. Η εξίσωση αυτή είναι πολυωνυμική βαθμού $(m_1 + m_2)$ και έχει ρίζες έστω $\chi_1(w), \chi_2(w), \dots, \chi_m(w) \in \mathbb{C}$ με $m = m_1 + m_2 - 1$ αφού εξαιρεθεί η τετριμμένη μηδενική λύση της. Ακόμα προκειμένου να δώσουμε την επόμενη πρόταση είναι αναγκαίο να ορίσουμε πρώτα μερικές ποσότητες.

Έστω $\mathbf{a}(w)$ διάνυσμα διάστασης $m \times 1$ (με $m = m_1 + m_2 - 1$) και $\mathbf{B}(w)$ πίνακας διάστασης $m \times m$, με

$$\mathbf{a}(w) := [D_1(w), D_2(w), \dots, D_m(w)]^T,$$

$$\mathbf{B}(w) := \begin{bmatrix} A_{11}(w)A_{12}(w) \dots A_{1,m_2-1}(w) & B_{11}(w)B_{12}(w) \dots B_{1,m_1-1}(w) & C_1(w) \\ A_{21}(w)A_{22}(w) \dots A_{2,m_2-1}(w) & B_{21}(w)B_{22}(w) \dots B_{2,m_1-1}(w) & C_2(w) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}(w)A_{m2}(w) \dots A_{m,m_2-1}(w) & B_{m1}(w)B_{m2}(w) \dots B_{m,m_1-1}(w) & C_m(w) \end{bmatrix}$$

όπου

$$A_{ij}(w) := \frac{e^{\chi_i(w)(b-u)}}{\left(1 - \frac{\chi_i(w)}{\beta/c-w}\right)^j} - \frac{e^{\chi_i(w)(b-u)}}{\left(1 - \frac{\chi_i(w)}{\beta/c-w}\right)^{m_2}}, \quad B_{ij}(w) := \frac{e^{-\chi_i(w)u}}{\left(1 + \frac{\chi_i(w)}{1/\alpha+w}\right)^j} - \frac{e^{-\chi_i(w)u}}{\left(1 + \frac{\chi_i(w)}{1/\alpha+w}\right)^{m_1}},$$

$$C_i(w) := \frac{e^{\chi_i(w)(b-u)}}{\left(1 - \frac{\chi_i(w)}{\beta/c-w}\right)^{m_2}} - 1, \quad D_i(w) := 1 - \frac{e^{-\chi_i(w)u}}{\left(1 + \frac{\chi_i(w)}{1/\alpha+w}\right)^{m_1}}$$

για $-\frac{1}{\alpha} < w < \frac{\beta}{c}$. Επιπλέον συμβολίζουμε με $k'_i(w), i = 1, 2, \dots, m_2 - 1, a(w)$ και $\pi_j(w), j = 1, 2, \dots, m_1 - 1$ τα στοιχεία του $m \times 1$ διανύσματος

$$\mathbf{k}(w) := [\kappa'_1(w), \kappa'_2(w), \dots, \kappa'_{m_2-1}(w), \pi_1(w), \pi_2(w), \dots, \pi_{m_1-1}(w), a(w)]^T$$

$$:= \mathbf{B}^{-1}(w)\mathbf{a}(w)$$

για όλα τα $-\frac{1}{\alpha} < w < \frac{\beta}{c}$ έτσι ώστε η ποσότητα $\mathbf{B}^{-1}(w)$ υπάρχει. Τέλος ορίζουμε

$$\kappa_i(w) := \frac{\kappa'_i(w)}{a(w)}, \quad i = 1, 2, \dots, m_2 - 1$$

Στην επόμενη πρόταση εξάγουμε την από κοινού γεννήτρια των τυχαίων μεταβλητών v και S_v με την βοήθεια των παραπάνω ποσοτήτων.

Πρόταση 3.3.3. Αν $\rho(r) \in \left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{c}\right)$ είναι μία λύση της εξίσωσης $\mathbb{E}(e^{\rho(r)Z_1}) = r^{-1}$, με $r \in (0,1)$, ή ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^{m_2} \frac{h_i}{(1 - c\rho(r)/\beta)^i} \cdot \sum_{j=1}^{m_1} \frac{d_j}{(1 + \alpha\rho(r))^j} = r^{-1}$$

έτσι ώστε η ποσότητα $\mathbf{B}^{-1}(\rho(r))$ υπάρχει, τότε η από κοινού γεννήτρια των v, S_v δίνεται από

$$i) \mathbb{E}(r^v e^{xS_v} | S_v < 0) = \frac{\psi_{\rho(r)}}{\psi_0} e^{\rho(r)u} \sum_{i=1}^{m_1} \frac{\pi_i(\rho(r))}{\left(1 - \frac{\rho(r) - x}{1/\alpha + \rho(r)}\right)^i},$$

$$ii) \mathbb{E}(r^v e^{xS_v} | S_v > b) = \frac{1 - \psi_{\rho(r)}}{1 - \psi_0} e^{xb + \rho(r)(u-b)} \sum_{i=1}^{m_2} \frac{\kappa_i(\rho(r))}{\left(1 - \frac{x - \rho(r)}{\beta/c - \rho(r)}\right)^i}$$

για όλες τις τιμές r, x έτσι ώστε η παραπάνω μέσες τιμές υπάρχουν, με

$$\psi_{\rho(r)} = (a(\rho(r)) + 1)^{-1}, \quad \psi_0 = (a(0) + 1)^{-1}$$

όπου $\kappa_i(w), \pi_i(w), a(w)$ ορίστηκαν παραπάνω.

Απόδειξη.

Θεωρούμε ότι η κατανομή των X_i είναι μείξη Erlang (είτε υπάρχει ως δεδομένο είτε κάνοντας προσέγγιση της πραγματικής κατανομής μέσω της μείξης) με σ.κ. με τύπο $F(x) = \sum_{j=1}^{m_1} d_j F_{\varepsilon_{j, \frac{1}{a}}}(x)$ για $x \geq 0$. Υπό το μέτρο Esscher \mathbb{P}_w η ροπογεννήτρια είναι

$$\mathbb{E}_w(e^{tX_1}) = \sum_{j=1}^{m_1} \frac{d_j}{\left(1 - \frac{t}{\left(\frac{1}{a} + w\right)}\right)^j}$$

που είναι πάλι μείξη Erlang με παραμέτρους $m_1, \frac{1}{a} + w$ και βάρη μείξης $d_j, j = 1, 2, \dots, m_1$. Από το Λήμμα 3.3.3 έχουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή $-S_v | S_v < 0$ είναι και πάλι μείξη Erlang με παραμέτρους m_1 και $\frac{1}{a} + w$ αλλά με άγνωστα και διαφορετικά βάρη μείξης, έστω $\pi_1(w), \pi_2(w), \dots, \pi_{m_1}(w)$ έτσι ώστε $\sum_{j=1}^{m_1} \pi_j(w) = 1$ και άρα θα ισχύει ότι

$$\mathbb{B}_w(t) = \mathbb{E}_w(e^{t(-S_v)} | S_v < 0) = \sum_{j=1}^{m_1} \frac{\pi_j(w)}{\left(1 - \frac{t}{\left(\frac{1}{a} + w\right)}\right)^j}$$

Ομοίως με παραπάνω, η κατανομή των T_i είναι μείξη Erlang (είτε υπάρχει ως δεδομένο είτε κάνοντας προσέγγιση της πραγματικής κατανομής μέσω της μείξης) με σ.κ. με τύπο $K(x) = \sum_{i=1}^{m_2} h_i F_{\varepsilon_{i, \beta}}(x), x \geq 0$. Υπό το μέτρο Esscher \mathbb{P}_w η ροπογεννήτρια είναι

$$\mathbb{E}_w(e^{tT_1}) = \sum_{i=1}^{m_2} \frac{h_i}{\left(1 - \frac{t}{\beta - wc}\right)^i}$$

που είναι ξανά μείξη Erlang με παραμέτρους m_2 και $\beta - wc$ και βάρη μείξης $h_i, i = 1, 2, \dots, m_2$. Από το Λήμμα 3.3.3 έχουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή $S_v - b | S_v > b$ είναι και πάλι μείξη Erlang με παραμέτρους m_2 και $\frac{\beta - wc}{c}$ και με άγνωστα και διαφορετικά βάρη μείξης, έστω $\kappa_1(w), \kappa_2(w), \dots, \kappa_{m_2}(w)$ έτσι ώστε $\sum_{i=1}^{m_2} \kappa_i(w) = 1$ και άρα ισχύει ότι

$$\mathbb{A}_w(t) = \mathbb{E}_w(e^{t(S_v - b)} | S_v > b) = \sum_{i=1}^{m_2} \frac{\kappa_i(w)}{\left(1 - \frac{c}{(\beta - wc)} t\right)^i}$$

Στην συνέχεια θα βρούμε τις άγνωστες τιμές των $\kappa_i(w)$ για $i = 1, \dots, m_2$ και $\pi_i(w)$ για $i = 1, \dots, m_1$ και συνεπώς τις δεσμευμένες γεννήτριες $\mathbb{A}_w(t), \mathbb{B}_w(t)$. Έτσι, εμπλέκοντας την θεμελιώδη ταυτότητα του Wald (*Wald's fundamental Identity*) $\mathbb{E}_w\left(\left(\mathbb{E}_w(e^{tZ_1})\right)^{-v} e^{t(S_v - u)}\right) = 1$ και από το γεγονός ότι $\mathbb{E}_w(e^{X_i(w)Z_1}) = 1$ για $i =$

$1, 2, \dots, m$, αφού είναι λύσεις της εξίσωσης όπως αναφέρθηκε νωρίτερα στην παράγραφο, τότε για τις τιμές $\chi_1(w), \chi_2(w), \dots, \chi_m(w)$ η ταυτότητα γίνεται

$$1 = \mathbb{E}_w(e^{\chi_i(w)(S_v - u)}) = e^{\chi_i(w)(b-u)} \mathbb{A}_w(\chi_i(w))(1 - \psi_w) + e^{-\chi_i(w)u} \mathbb{B}_w(-\chi_i(w))\psi_w$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$. Αντικαθιστώντας τις ποσότητες $\mathbb{A}_w, \mathbb{B}_w$ και θέτοντας ως $a(w) := \psi_w^{-1} - 1$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$e^{\chi_i(w)(b-u)} \sum_{j=1}^{m_2} \frac{a(w)\kappa_j(w)}{\left(1 - \frac{c\chi_i(w)}{\beta - wc}\right)^j} + e^{-\chi_i(w)u} \sum_{j=1}^{m_1} \frac{\pi_j(w)}{\left(1 - \frac{\chi_i(w)}{(1/a + w)}\right)^j} = 1 + a(w)$$

ή ισοδύναμα χρησιμοποιώντας τις ποσότητες $A_{ij}(w), B_{ij}(w), C_i(w), D_i(w)$ γίνεται

$$\sum_{j=1}^{m_2-1} A_{ij}(w)\kappa_j'(w) + \sum_{j=1}^{m_1-1} B_{ij}(w)\pi_j(w) + C_i(w)a(w) = D_i(w), \quad i = 1, \dots, m$$

που είναι σύστημα $m = m_1 + m_2 - 1$ γραμμικών εξισώσεων που λύνεται εύκολα ως προς τις τιμές $\kappa_i'(w), \pi_i(w)$ και $a(w)$ και μπορεί ισοδύναμα να γραφεί σε πιο συμπτυγμένη μορφή ως $\mathbf{k}(w) = \mathbf{B}^{-1}(w)\mathbf{a}(w)$. Τέλος εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.3.1 από την στιγμή που η ποσότητες $\mathbb{A}_w(t), \mathbb{B}_w(t)$ είναι γνωστές με αποτέλεσμα να ολοκληρωθεί η απόδειξη. \square

Από την παραπάνω πρόταση μπορούμε να εξάγουμε μερικές χρήσιμες ποσότητες όπως για παράδειγμα η δεσμευμένη πιθανογεννήτρια του χρόνου διακοπής v δεδομένου ότι θα επέλθει η χρεοκοπία $\mathbb{E}(r^v | S_v < 0)$ και από αυτή την δεσμευμένη πιθανότητα $\mathbb{P}(v = i | S_v < 0), i = 1, 2, \dots$ ή την δεσμευμένη μέση τιμή και διακύμανση $\mathbb{E}(v | S_v < 0), \text{Var}(v | S_v < 0)$. Σε σύγκριση με την Πρόταση 3.3.2 δεν μπορούμε να εξάγουμε σε κλειστή μορφή αυτές τις ποσότητες (πέραν της $\mathbb{E}(r^v | S_v < 0)$ που προκύπτει άμεσα θέτοντας στην Πρόταση 3.3.3 όπου $x = 0$). Αυτό συμβαίνει διότι για να παραγωγιστεί η σχέση $\mathbb{E}(r^v | S_v < 0)$ χρειάζεται να γνωρίζουμε σε κλειστή μορφή την συνάρτηση $\rho(r)$ η οποία όμως προκύπτει από λύση της εξίσωσης $\mathbb{E}(e^{\rho(r)Z_1}) = r^{-1}$. Έτσι μονάχα για δοσμένες αριθμητικές τιμές των παραμέτρων $u, c, b, \alpha, \beta, h_i, d_i$ είναι εφικτός ο υπολογισμός τέτοιων ποσοτήτων. Το ίδιο ισχύει για τις ποσότητες που προκύπτουν από την δεσμευμένη πιθανογεννήτρια $\mathbb{E}(r^v | S_v > b)$.

Από την απόδειξη της Πρότασης 3.3.3 μπορούμε να εξάγουμε το επόμενο πόρισμα για τις δεσμευμένες κατανομές $-S_v | S_v < 0$ (*undershoot*) και $S_v - b | S_v > b$ (*overshoot*) όταν η κατανομή των ζημιών X_i και του χρόνου T_i μεταξύ δύο διαδοχικών αποζημιώσεων είναι μείξη Erlang καθώς και την πιθανότητα χρεοκοπίας ψ_w .

Πόρισμα 3.3.1. Αν η κατανομή των τυχαίων μεταβλητών X_i και T_i υπό το μέτρο πιθανότητας \mathbb{P} είναι μείξη Erlang της μορφής

$$F(x) = \sum_{j=1}^{m_1} d_j F_{\varepsilon_{j, \frac{1}{\alpha}}}(x), \quad x \geq 0, \quad K(x) = \sum_{i=1}^{m_2} h_i F_{\varepsilon_{i, \beta}}(x), \quad x \geq 0$$

τότε υπό το μετασχηματισμένο μέτρο Esscher \mathbb{P}_w ισχύει ότι

i) Η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από την σχέση $\psi_w = \mathbb{P}_w(S_v < 0) = \frac{1}{1+a(w)}$

ii) Η συνάρτηση κατανομής \tilde{F}_{un} (*undershoot*) της τυχαίας μεταβλητής $-S_v | S_v < 0$ είναι μείξη Erlang της μορφής

$$\tilde{F}_{un}(x) = \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i(w) F_{\varepsilon_{i, 1/\alpha+w}}(x), \quad x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i(w) = 1$$

iii) Η συνάρτηση κατανομής \tilde{F}_{ov} (*overshoot*) της τυχαίας μεταβλητής $S_v - b | S_v > b$ είναι μείξη Erlang της μορφής

$$\tilde{F}_{ov}(x) = \sum_{i=1}^{m_2} \kappa_i(w) F_{\varepsilon_{i, (\beta-cw)/c}}(x), \quad x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m_2} \kappa_i(w) = 1$$

με τις ποσότητες $\pi_i(w), \kappa_i(w) := \kappa'_i(w)/a(w), a(w)$ να δίνονται από την σχέση

$$\mathbf{k}(w) := [\kappa'_1(w), \kappa'_2(w), \dots, \kappa'_{m_2-1}(w), \pi_1(w), \pi_2(w), \dots, \pi_{m_1-1}(w), a(w)]^T := \mathbf{B}^{-1}(w)\mathbf{a}(w)$$

ενώ τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν υπό το μέτρο \mathbb{P} θέτοντας στα παραπάνω όπου $w = 0$.

Απόδειξη.

Εμπεριέχεται στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.3. □

Μια ακόμα ποσότητα που μπορούμε να εξαγάγουμε χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Wald είναι η αναμενόμενη τιμή του συνολικού χρόνου R_v την στιγμή που η ανέλιξη πλεονάσματος εξέλθει από το διάστημα $[0, b]$ αλλά και η αναμενόμενη τιμή του χρόνου διακοπής v που συμβολίζει τον αριθμό των αποζημιώσεων που θα χρειαστεί να καλύψει η ασφαλιστική εταιρία έως ότου η ανέλιξη πλεονάσματος εξέλθει από το διάστημα $[0, b]$. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται στην επόμενη πρόταση που προέρχονται από εργασία των M. V. Boutsikas and K. Politis.

Πρόταση 3.3.4. Αν η κατανομή των τυχαίων μεταβλητών X_i και T_i υπό το μέτρο πιθανότητας \mathbb{P} είναι μείξη Erlang όπως στο Πόρισμα 3.3.1, τότε η αναμενόμενη τιμή του συνολικού χρόνου R_v την στιγμή που η ανέλιξη πλεονάσματος εξέλθει από το διάστημα $[0, b]$ καθώς και η αναμενόμενη τιμή του χρόνου διακοπής v δίνονται από

$$i) \quad \mathbb{E}(R_v) = \frac{\mathbb{E}(S_v) - u}{c\mathbb{E}(T_1) - \mathbb{E}(X_1)} \mathbb{E}(T_1),$$

$$ii) \quad \mathbb{E}(v) = \frac{\mathbb{E}(S_v) - u}{c\mathbb{E}(T_1) - \mathbb{E}(X_1)}$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_1) &= \sum_{i=1}^{m_2} h_i \frac{i}{\beta}, & \mathbb{E}(X_1) &= \sum_{i=1}^{m_1} d_i i \alpha, \\ \mathbb{E}(S_v) &= \frac{a(0)}{1 + a(0)} \left(b + \frac{c}{\beta} \sum_{i=1}^{m_2} i \kappa_i(0) \right) - \frac{\alpha}{1 + a(0)} \sum_{i=1}^{m_1} i \pi_i(0) \end{aligned}$$

Απόδειξη.

Αφού η τυχαία μεταβλητή v είναι χρόνος διακοπής ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_k = \sigma((X_j, T_j), j = 1, 2, \dots, k)$, για $k = 1, 2, \dots$ τότε από την πρώτη ταυτότητα του Wald έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(R_v) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^v T_i\right) = \mathbb{E}(v)\mathbb{E}(T_1) \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(S_v) = \mathbb{E}\left(u + \sum_{i=1}^v Z_i\right) = u + \mathbb{E}(v)\mathbb{E}(Z_1).$$

Λύνοντας την δεύτερη σχέση ως προς $\mathbb{E}(v)$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $Z_1 = cT_1 - X_1$ οδηγούμαστε στο *ii)* και κάνοντας αντικατάσταση στην πρώτη σχέση προκύπτει και το *i)*. Το μόνο που μένει είναι να βρεθούν οι ποσότητες $\mathbb{E}(T_1)$, $\mathbb{E}(X_1)$ και $\mathbb{E}(S_v)$. Η εύρεση των $\mathbb{E}(T_1)$ και $\mathbb{E}(X_1)$ είναι άμεση αφού είναι μείξη Erlang. Τέλος για την $\mathbb{E}(S_v)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_v) &= \mathbb{E}(S_v | S_v > b) \mathbb{P}(S_v > b) + \mathbb{E}(S_v | S_v < 0) \mathbb{P}(S_v < 0) \\ &= \left(b + \frac{c}{\beta} \sum_{i=1}^{m_2} i \kappa_i(0) \right) (1 - \psi_0) - \left(\sum_{i=1}^{m_1} \alpha i \pi_i(0) \right) \psi_0 \end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα έγινε εφαρμογή του Λήμματος 3.3.1. Κάνοντας αντικατάσταση, αφού όλες οι ποσότητες είναι γνωστές, προκύπτει το ζητούμενο. \square

Από την Πρόταση 3.3.4 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για να εξάγουμε τις ποσότητες $\mathbb{E}(R_v)$ και $\mathbb{E}(v)$ το μόνο που χρειάζεται να γνωρίζουμε είναι το διάνυσμα $\mathbf{k}(0)$ όπως ορίστηκε στο Πρόσμα 3.3.1.

Στην συνέχεια θα δούμε δύο αριθμητικές εφαρμογές, όπου θα εφαρμοστούν μερικά από τα παραπάνω αποτελέσματα. Συγκεκριμένα στην πρώτη οι υπολογισμοί θα αφορούν το κλασικό μοντέλο των Cramér–Lundberg, ενώ στην δεύτερη θα γίνουν υπολογισμοί σύμφωνα με το ανανεωτικό μοντέλο του Sparre Andersen χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις μέσω μείξης Erlang που παρουσιάστηκαν νωρίτερα στην παράγραφο 3.

4. Αριθμητικές Εφαρμογές

4.1. Εφαρμογή στο μοντέλο κλασικό μοντέλο Cramér–Lundberg

Υποθέτουμε και πάλι ότι μια ασφαλιστική εταιρία από τα δεδομένα που έχει συλλέξει τα χρόνια λειτουργίας της, έχει εκτιμήσει ότι το ύψος των ζημιών X_i κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο $1/\mu = 10/9$ ενώ οι ζημιές εμφανίζονται στη διάρκεια του χρόνου σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού $\lambda = 3$. Συνεπώς οι ενδιάμεσοι χρόνοι T_i μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιών θα ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 3$. Αν συμβολίζουμε με f την σ.π.π. κάθε τυχαίας μεταβλητής X_i υπό το μέτρο \mathbb{P} και με k την σ.π.π. κάθε τυχαίας μεταβλητής T_i υπό το μέτρο \mathbb{P} , τότε θα έχουμε ότι

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{1}{\mu}x} = \frac{10}{9} e^{-\frac{10}{9}x}, x \geq 0, \quad k(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 3e^{-3x}, x \geq 0$$

Η εταιρία ξεκινάει με ένα αρχικό αποθεματικό $u = 2$ χρηματικές μονάδες (χ.μ.), έχει σταθερό ασφάλιστρο $c = 3$ χ.μ. ανά χρονική μονάδα και έχει θέσει ως όριο ασφαλείας $b = 6$ χ.μ.. Σκοπός της εταιρίας είναι να γνωρίζει ποια είναι η πιθανότητα να χρεοκοπήσει προτού το πλεόνασμα της ξεπεράσει το όριο ασφαλείας που έχει θέσει καθώς και την κατανομή του χρόνου v που δηλώνει τον χρόνο που θα περάσει μέχρι το πλεόνασμα της εταιρίας ξεπεράσει για πρώτη φορά το όριο ασφαλείας $b = 6$ ή γίνει αρνητικό.

Ο χρόνος διακοπής που ορίζεται από την παραπάνω διαδικασία είναι ο εξής

$$v = \inf\{n: S_n \notin [0,6]\}.$$

Η ροπογεννήτρια των τυχαίων μεταβλητών $Z_i := cT_i - X_i = 3T_i - X_i$ υπό το μέτρο \mathbb{P} και \mathbb{P}_w (βλ. Παράδειγμα 3.3.1.) αντίστοιχα θα είναι

$$\mathbb{E}(e^{tZ_i}) = \frac{1}{1-t} \cdot \frac{10}{10+9t}, \quad -\frac{10}{9} < t < 1$$

$$\mathbb{E}_w(e^{tZ_i}) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{1-w}t\right)\left(1 + \frac{9}{9w+10}t\right)}, \quad w, w+t \in \left(-\frac{10}{9}, 1\right)$$

Από την Πρόταση 3.3.2. η πιθανότητα χρεοκοπίας υπό το μέτρο \mathbb{P}_w θα είναι

$$\psi_w = \frac{e^{6(-2w-\frac{1}{9})} (1-w)^2 - e^{2(-2w-\frac{1}{9})}(1-w)\left(w+\frac{10}{9}\right)}{e^{6(-2w-\frac{1}{9})} (1-w)^2 - \left(w+\frac{10}{9}\right)^2}, \quad w \in \left(-\frac{10}{9}, 1\right)$$

με την πιθανότητα χρεοκοπίας, θέτοντας όπου $w = 0$ στον παραπάνω τύπο, να είναι

$$\psi_0 = \mathbb{P}(S_v < 0) = \frac{e^{(-\frac{6}{9})} - e^{(-\frac{2}{9})}\frac{10}{9}}{e^{(-\frac{6}{9})} - \left(\frac{10}{9}\right)^2} \approx 0.5217925512.$$

Εφαρμόζοντας ξανά την Πρόταση 3.3.2 η συνάρτηση $\rho(r)$ παίρνει την μορφή

$$\rho(r) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9} - \sqrt{\left(\frac{19}{9}\right)^2 - \frac{40}{9}r} \right), \quad r \in (0,1)$$

με αποτέλεσμα όλες οι ποσότητες της Πρότασης 3.3.2 να είναι γνωστές. Θέτοντας όπου $x = 0$ παίρνουμε την Πιθανογεννήτρια συνάρτηση του χρόνου διακοπής v καθώς και τις δεσμευμένες Πιθανογεννήτριες συναρτήσεις όπως φαίνεται παρακάτω

$$\mathbb{E}(r^v) = (1 - \psi_{\rho(r)})e^{-4\rho(r)}(1 - \rho(r)) + \psi_{\rho(r)}e^{2\rho(r)} \frac{9\rho(r) + 10}{10}$$

$$\mathbb{E}(r^v | S_v \leq 0) = \frac{\psi_{\rho(r)}}{\psi_0} e^{2\rho(r)} \frac{9\rho(r) + 10}{10}, \quad \mathbb{E}(r^v | S_v \geq b) = \frac{1 - \psi_{\rho(r)}}{1 - \psi_0} e^{-4\rho(r)}(1 - \rho(r))$$

Προκειμένου να εξάγουμε τις πιθανότητες που μας ενδιαφέρουν $\mathbb{P}(v = i), i = 1, 2, \dots$ αλλά και $\mathbb{P}(v = i | S_v < 0), \mathbb{P}(v = i | S_v > 6), i = 1, 2, \dots$ θα πρέπει να παραγωγίσουμε τις παραπάνω Πιθανογεννήτριες συναρτήσεις ως προς r για να μέσω της γνωστής σχέσης

$$\mathbb{P}(v = i) = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i \mathbb{E}(r^v)}{dr^i} \right]_{r=0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

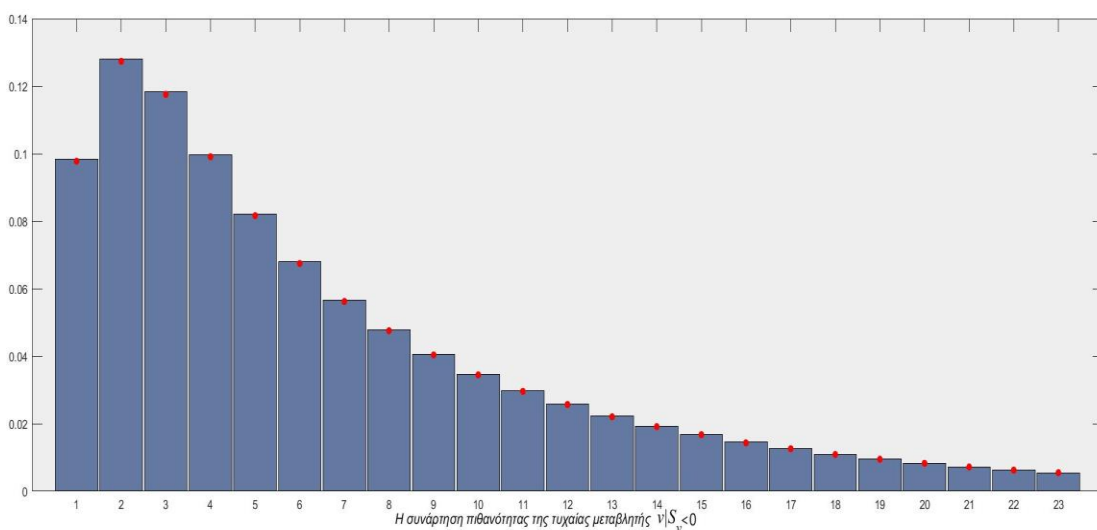
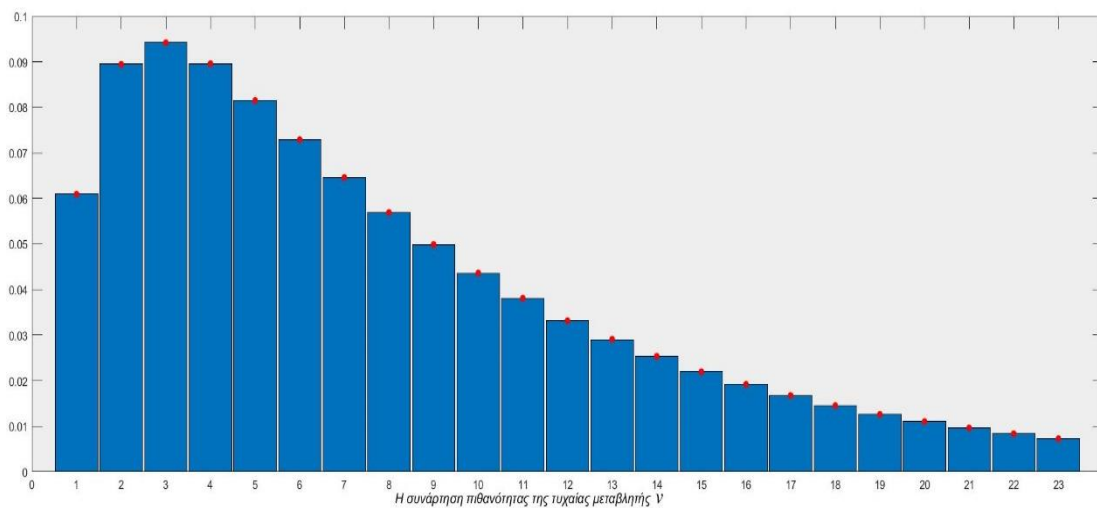
Αυτό όμως αποτελεί πρόβλημα λόγω της πολυπλοκότητας των συναρτήσεων και έτσι θα χρειαστούν αριθμητικές μέθοδοι παραγωγίσης (βλ. Boutsikas, Rakitzis και Antzoulakos (2015)) μέσω κάποιου υπολογιστικού πακέτου (πχ. Mathematica, Matlab). Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι πιθανότητες που υπολογίστηκαν με την χρήση του υπολογιστικού πακέτου Matlab R2018a για τις τιμές $i = 1, 2, \dots, 23$ με ακρίβεια οκτώ δεκαδικών ψηφίων.

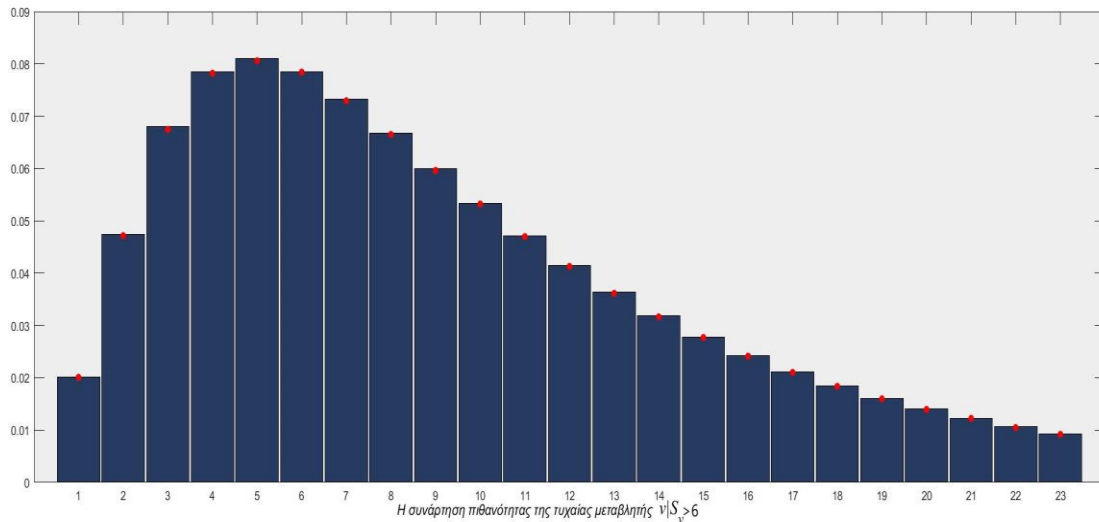
i	$\mathbb{P}(v = i)$	MC estim.	$\mathbb{P}(v = i S_v < 0)$	MC estim.	$\mathbb{P}(v = i S_v > 6)$	MC estim.
1	0.06097203	0.06094618	0.09837669	0.09775237	0.02015822	0.02008665
2	0.08949104	0.08944724	0.12807517	0.12735017	0.04739024	0.04717306
3	0.09425058	0.09419475	0.11833346	0.11756344	0.06797272	0.06748246
4	0.08950621	0.08959770	0.09958729	0.09908714	0.07850629	0.07820473
5	0.08159698	0.08151112	0.08213158	0.08164473	0.08101366	0.08059412
6	0.07297099	0.07293025	0.06793054	0.06746558	0.07847085	0.07842685
7	0.06459401	0.06460458	0.05669812	0.05622347	0.07320956	0.07295674
8	0.05684375	0.05692085	0.04777641	0.04754057	0.06673751	0.06652445
9	0.04984507	0.04989621	0.04058959	0.04037172	0.05994411	0.05964418
10	0.04360933	0.04363481	0.03470843	0.03446714	0.05332147	0.05319733
11	0.03809731	0.03810263	0.02982638	0.02956901	0.04712208	0.04698154
12	0.03324903	0.03317641	0.02572529	0.02569487	0.04145851	0.04128910
13	0.02899815	0.02909978	0.02224782	0.02206501	0.03636373	0.03614394
14	0.02527895	0.02535541	0.01927796	0.01913272	0.03182688	0.03165702
15	0.02202958	0.02195783	0.01672803	0.01672996	0.02781434	0.02770114
16	0.01919352	0.01919325	0.01453001	0.01432567	0.02428206	0.02412517

17	0.01671987	0.01676565	0.01262991	0.01257743	0.02118261	0.02102800
18	0.01456337	0.01453833	0.01098393	0.01087301	0.01846906	0.01836486
19	0.01268399	0.01259764	0.00955596	0.00946508	0.01609713	0.01597506
20	0.01104653	0.01102787	0.00831581	0.00825970	0.01402612	0.01394497
21	0.00962006	0.00961646	0.00723795	0.00718637	0.01221928	0.01224026
22	0.00837755	0.00835462	0.00630063	0.00624870	0.01064378	0.01048183
23	0.00729538	0.00726335	0.00548521	0.00547433	0.00927054	0.00918305

Εκτός από τις τιμές των πιθανοτήτων $\mathbb{P}(v = i)$, $\mathbb{P}(v = i | S_v < 0)$, $\mathbb{P}(v = i | S_v > 6)$, που υπολογίστηκαν εφαρμόζοντας την μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο, δίπλα από κάθε ποσότητα στον παραπάνω πίνακα είναι οι αντίστοιχες εκτιμήσεις (MC estim.) όπου έχει γίνει προσομοίωση με την μέθοδο Monte Carlo (10^7 πλήθος επαναλήψεων).

Η συνάρτηση πιθανότητας για κάθε τυχαία μεταβλητή από τις παραπάνω τρεις παρουσιάζεται στα επόμενα σχήματα μαζί με τις αντίστοιχες προσομοιωμένες τιμές τους (κόκκινες κουκίδες)





4.2. Εφαρμογή στο μοντέλο Sparre Andersen μέσω προσέγγισης από μια μεικτή Erlang κατανομή

Υποθέτουμε ότι μια ασφαλιστική εταιρία από τα δεδομένα που έχει συλλέξει τα χρόνια λειτουργίας της, έχει μια ικανοποιητική εκτίμηση για την κατανομή των ζημιών και των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιών. Έτσι από τα δεδομένα αυτά προσεγγίζει την κατανομή των ζημιών X_i και των ενδιάμεσων χρόνων T_i μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιών μέσω μείξης Erlang της μορφής

$$F(x) = \sum_{j=1}^{m_1} d_j F_{\varepsilon_{j, \frac{1}{\alpha}}}(x), x \geq 0, \quad K(x) = \sum_{i=1}^{m_2} h_i F_{\varepsilon_{i, \beta}}(x), x \geq 0$$

με τις τιμές των παραμέτρων να είναι:

$$m_1 = 5, \quad \alpha = \frac{1}{3}, \quad d_1 = \frac{4}{25}, \quad d_2 = \frac{3}{25}, \quad d_3 = \frac{6}{25}, \quad d_4 = \frac{7}{25}, \quad d_5 = \frac{5}{25}$$

και

$$m_2 = 5, \quad \beta = 3, \quad h_1 = \frac{7}{50}, \quad h_2 = \frac{3}{50}, \quad h_3 = \frac{14}{50}, \quad h_4 = \frac{22}{50}, \quad h_5 = \frac{4}{50}$$

αντίστοιχα. Οι πυκνότητες τους απεικονίζονται στα δύο σχήματα παρακάτω
 Η εταιρία ξεκινάει με ένα αρχικό αποθεματικό $u = 4$, έχει σταθερό ασφάλιστρο $c = 1$ ανά χρονική μονάδα και έχει θέσει ως όριο ασφαλείας $b = 9$. Σκοπός της εταιρίας είναι να γνωρίζει ποια είναι η πιθανότητα να χρεοκοπήσει προτού το πλεόνασμα της ξεπεράσει το όριο ασφαλείας που έχει θέσει.

Ο χρόνος διακοπής που ορίζεται από την παραπάνω διαδικασία είναι ο εξής

$$v = \inf\{k: S_k \notin [0,9]\}.$$

Σύμφωνα με την μεθοδολογία που δόθηκε στην Πρόταση 3.3.3 για να βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, που προκύπτει από το τελευταίο στοιχείο του διανύσματος $\mathbf{k}(0)$, καλούμαστε να λύσουμε πρώτα την εξίσωση $\mathbb{E}(e^{\chi Z_1}) = 1$ ή ισοδύναμα

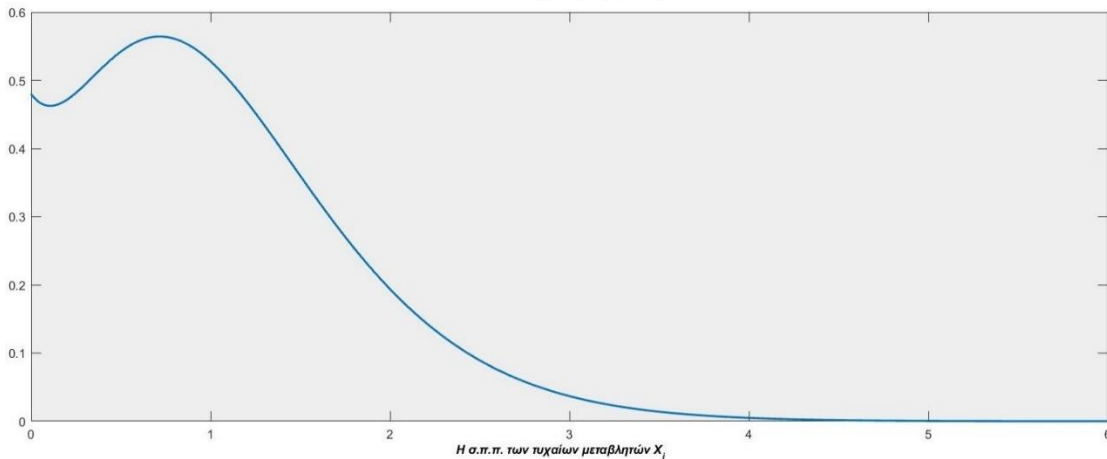
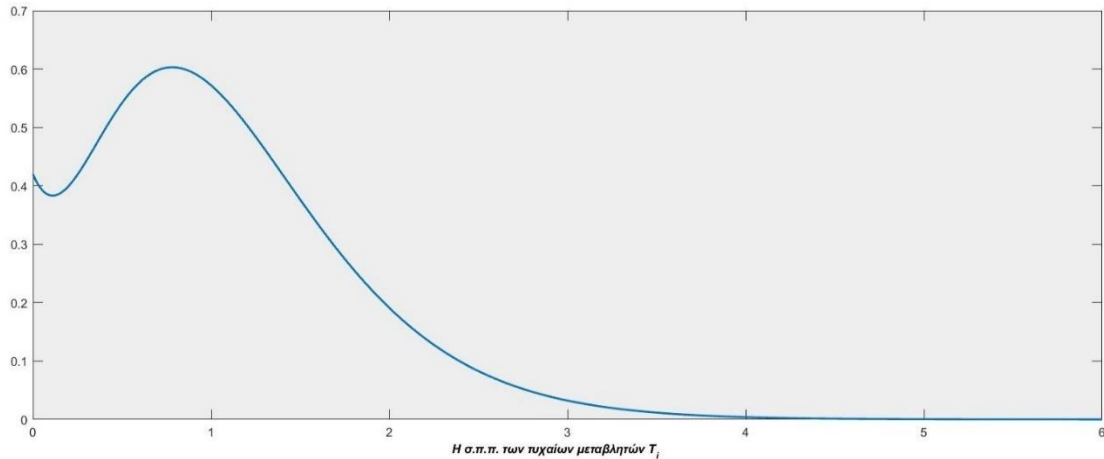
$$\sum_{i=1}^{m_2} \frac{h_i}{\left(1 - \frac{c\chi}{\beta}\right)^i} \cdot \sum_{j=1}^{m_1} \frac{d_j}{(1 + \alpha\chi)^j} = 1$$

για τις τιμές των $\alpha, \beta, c, h_1, \dots, h_{m_2}, d_1, \dots, d_{m_1}$ που δόθηκαν νωρίτερα. Η εξίσωση αυτή είναι πολυωνυμική βαθμού $m_1 + m_2 = 10$. Οι μη μηδενικές ρίζες της είναι οι ακόλουθες

$$\begin{array}{lll} \chi_1 \approx 3.6639, & \chi_4 \approx -4.0711 + 0.6501i, & \chi_7 \approx -4.0711 - 0.6501i, \\ \chi_2 \approx -0.0125, & \chi_5 \approx -2.8936 + 1.4687i, & \chi_8 \approx -2.8936 - 1.4687i, \\ \chi_3 \approx 4.0221, & \chi_6 \approx 3.1279 - 1.4674i, & \chi_9 \approx 3.1279 + 1.4674i. \end{array}$$

Στην συνέχεια αφού βρέθηκαν οι ρίζες, οι ποσότητες $\mathbf{a}(0)$ και $\mathbf{B}(0)$ αποκτούν αριθμητική μορφή με τον πίνακα $\mathbf{B}(0)$ να είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς εφαρμόζοντας την σχέση $\mathbf{k}(0) = \mathbf{B}^{-1}(0)\mathbf{a}(0)$ παίρνουμε τις τιμές του διανύσματος $\mathbf{k}(0)$.

Στα ακόλουθα σχήματα απεικονίζονται οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X_i και T_i για τις δοσμένες τιμές των παραμέτρων



Από το Πόρισμα 3.3.1 (για $w = 0$) προκύπτει η δεσμευμένη κατανομή της μεταβλητής $-S_v | S_v < 0$ (*undershoot*) να είναι και πάλι μείξη Erlang της μορφής:

$$\tilde{F}_{un}(x) = \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i(0) F_{\varepsilon_{i,1/\alpha}}(x), \quad x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i(0) = 1$$

με ίδιες τιμές των παραμέτρων $m_1 = 5$ και $\alpha = 3$ αλλά με διαφορετικά βάρη μείξης π_i ως

$$\begin{aligned} \pi_1(0) &\approx 0.4526, & \pi_2(0) &\approx 0.2911, & \pi_3(0) &\approx 0.1651, \\ \pi_4(0) &\approx 0.0723, & \pi_5(0) &\approx 0.0190. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα η δεσμευμένη κατανομή της μεταβλητής $S_v - b | S_v > b$ (*overshoot*) είναι και πάλι μείξη Erlang της μορφής:

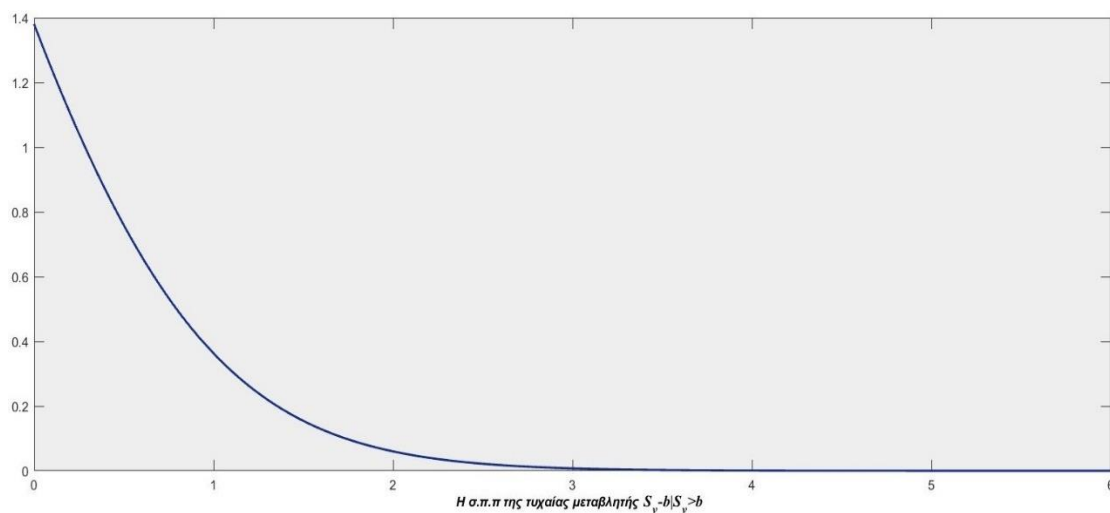
$$\tilde{F}_{ov}(x) = \sum_{i=1}^{m_2} \kappa_i(0) F_{\varepsilon_{i,\beta/c}}(x), \quad x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m_2} \kappa_i(0) = 1$$

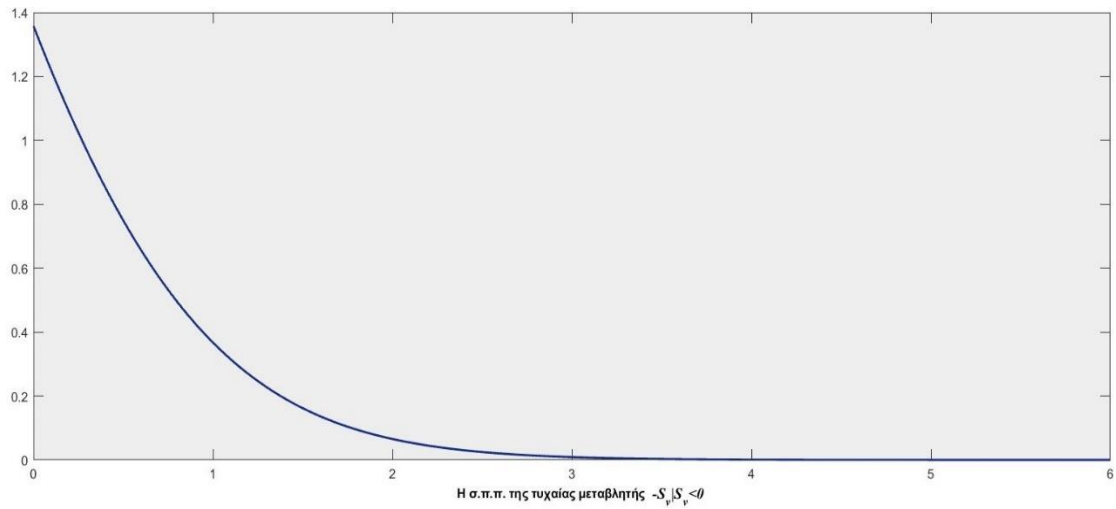
με τις παραμέτρους $m_2 = 5$ και $\frac{\beta}{c} = 3$ και τα νέα βάρη μείξης κ_i να είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} \kappa_1(0) &\approx 0.4604, & \kappa_2(0) &\approx 0.2980, & \kappa_3(0) &\approx 0.1678, \\ \kappa_4(0) &\approx 0.0653, & \kappa_5(0) &\approx 0.0084. \end{aligned}$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας βρίσκεται από την σχέση $\psi_0 = (a(0) + 1)^{-1}$, όπου $a(0)$ είναι το τελευταίο στοιχείο του διανύσματος $\mathbf{k}(0)$, λαμβάνοντας την τιμή να είναι περίπου ίση με $a(0) \approx 0.8804$ και τελικά έχουμε $\psi_0 \approx 0.5317976$.

Στα ακόλουθα σχήματα απεικονίζονται οι σ.π.π. των τυχαίων μεταβλητών $-S_v | S_v < 0$ (*undershoot*) και $S_v - b | S_v > b$ (*overshoot*) για τις δοσμένες τιμές των παραμέτρων που προέκυψαν από τους παραπάνω υπολογισμούς





Επιπλέον από την Πρόταση 3.3.4 εξάγουμε την αναμενόμενη τιμή του χρόνου μέχρι η ανέλιξη πλεονάσματος να εξέλθει από το διάστημα $[0,9]$ η οποία είναι περίπου

$$\mathbb{E}(R_v) \approx 26.94369$$

καθώς και τον αναμενόμενο αριθμό ζημιών που χρειάζονται ώστε η ανέλιξη πλεονάσματος να εξέλθει από το διάστημα $[0,9]$ η οποία είναι περίπου

$$\mathbb{E}(v) \approx 24.79481.$$

Παράρτημα

Κώδικας Εφαρμογής 3.4.1.

```
syms lamda miu c r rfr b u t w

u=2;b=6;miu=0.9;lamda=3;c=3;digits(700);mgf=(lamda/(lamda-t*c))*((1/miu)/(1/miu+t)) ;

Sol0=solve(mgf==1,t);y0=vpa((exp(b*Sol0(1))*((lamda/c)/(1/miu))-
exp(u*Sol0(1)))/(exp(b*Sol0(1))*((lamda/c)/(1/miu))-(1/miu)/(lamda/c)),700) ;

n=30 ;e=sym(10^-30);rfr=sym(zeros(1,n)) ; yrfr=sym(zeros(1,n)) ;pgfv=sym(zeros(1,n+1)) ;
pgfvov=sym(zeros(1,n+1)) ;pgfvun=sym(zeros(1,n+1)) ;

for o=2:n

    digits(700) ;

    rfr(o-1)=vpa(0.5*(lamda/c-1/miu-sqrt((1/miu+lamda/c)^2-4*(lamda*e*(o-1))/(c*miu))),700) ;
    mgfrfr=vpa(1/((1-(c*t)/(lamda-c*rfr(o-1)))*(1+(miu*t)/(rfr(o-1)*miu+1))),700) ;

    Solrfr=vpasolve(mgfrfr==1,t);

    yrfr(o-1)=vpa((exp(b*Solrfr(2))*((lamda/c-rfr(o-1))/(rfr(o-1)+1/miu))-
    exp(u*Solrfr(2)))/(exp(b*Solrfr(2))*((lamda/c-rfr(o-1))/(rfr(o-1)+1/miu))-(rfr(o-1)+1/miu)/(lamda/c-
    rfr(o-1))),700);

    pgfv(o)=vpa(exp(rfr(o-1)*(u-b))*(((lamda/c)-rfr(o-1))/(lamda/c))*(1-yrfr(o-1))+exp(rfr(o-1)*u)*((rfr(o-
    1)+(1/miu))/(1/miu))*yrfr(o-1),700);

    pgfvun(o)=vpa(exp(rfr(o-1)*u)*((rfr(o-1)+(1/miu))/(1/miu))*(yrfr(o-1)/y0),700);

    pgfvov(o)=vpa(exp(rfr(o-1)*(u-b))*(((lamda/c)-rfr(o-1))/(lamda/c))*((1-yrfr(o-1))/(1-y0)),700);

end

dd=sym(zeros(n,n)) ;

for i = 1:n

    dd(1,i)=vpa((pgfv(i+1)-pgfv(i))/e) ;

end

for k = 2:n

    for i = 1:n-k+1

        dd(k,i)=vpa((dd(k-1,i+1)-dd(k-1,i))/(k*e)) ;

    end

end

end

prob=sym(zeros(23,1));

for i=1:23
```

```

prob(i)=dd(i,1);
end
dd1=sym(zeros(n,n)) ;
for i = 1:n
    dd1(1,i)=(pgfvun(i+1)-pgfvun(i))/e ;
end
for k = 2:n
    for i = 1:n-k+1
        dd1(k,i)=(dd1(k-1,i+1)-dd1(k-1,i))/(k*e) ;
    end
end
probun=sym(zeros(23,1));
for i=1:23
    probun(i)=dd1(i,1);
end
dd2=sym(zeros(n,n)) ;
for i = 1:n
    dd2(1,i)=(pgfvov(i+1)-pgfvov(i))/e ;
end
for k = 2:n
    for i = 1:n-k+1
        dd2(k,i)=(dd2(k-1,i+1)-dd2(k-1,i))/(k*e) ;
    end
end
probov=sym(zeros(23,1));
for i=1:23
    probov(i)=dd2(i,1);
end
plot(prob);plot(probov);plot(probun);

```

Κώδικας Εφαρμογής 3.4.2.

```
syms w t i j h d alpha beta c b u m1 m2 k rfr

m1=5 ;m2=5 ;d=[4/25 3/25 6/25 7/25 5/25];h=[7/50 3/50 14/50 22/50 4/50];alpha=1/3 ; beta=3; c=1 ;
b=9 ; u=4 ;

mgf0=sym(zeros(1,4));d=sym(d);h=sym(h);

mgf0(2)=sum(d.*subs(1/(1+alpha*(rfr+t))^k,k,1:m1));

mgf0(4)=sum(d.*subs(1/(1+alpha*w)^k,k,1:m1));

mgf0(1)=sum(h.*subs(1/(1-(c/beta)*(rfr+t))^k,k,1:m2));

mgf0(3)=sum(h.*subs(1/(1-(c/beta)*w)^k,k,1:m2)); mgfw=(mgf0(1)*mgf0(2))/(mgf0(3)*mgf0(4));

mgf=mgf0(3)*mgf0(4);NumSol=vpasolve(mgf==1,w);nzs=zeros(1,m1+m2-1);

nzs(1)=NumSol(3);nzs(2)=NumSol(1);nzs(3)=NumSol(5);nzs(4)=NumSol(4);nzs(5)=Num-
Sol(7);nzs(6)=NumSol(6);nzs(7)=NumSol(9);nzs(8)=NumSol(10);nzs(9)=NumSol(8);

A=sym(zeros(m1+m2-1,m2-1));

for i = 1:m1+m2-1

    for j = 1:m2-1

        A(i,j)=exp(nzs(i)*(b-u))/(1-c*nzs(i)/beta)^j-exp(nzs(i)*(b-u))/(1-c*nzs(i)/beta)^m2 ;

    end

end

B=sym(zeros(m1+m2-1,m1-1));

for i = 1:m1+m2-1

    for j = 1:m1-1

        B(i,j)=exp(nzs(i)*(-u))/(1+alpha*nzs(i))^j-exp(nzs(i)*(-u))/(1+alpha*nzs(i))^m1 ;

    end

end

C=sym(zeros(m1+m2-1,1));

for i = 1:m1+m2-1

    C(i)=exp(nzs(i)*(b-u))/(1-c*nzs(i)/beta)^m2 -1;

end

D=sym(zeros(m1+m2-1,1));

for i = 1:m1+m2-1

    D(i)=1- exp(nzs(i)*(-u))/(1+alpha*nzs(i))^m1;

end
```

```

BM=sym(zeros(m1+m2-1,m1+m2-1));
for i = 1:m1+m2-1
    for j = 1:m2-1
        BM(i,j)=A(i,j);
    end
    for j = m2:m1+m2-2
        BM(i,j)=B(i,j-m2+1);
    end
    BM(i,m1+m2-1)=C(i);
end
K=BM\D ;y0=1/(1+K(m1+m2-1)) ;kapa0=sym(zeros(m2,1));
for i = 1:m2-1
    kapa0(i)=K(i)/K(m1+m2-1);
end
kapa0(m2)=1-kapa0(1)-kapa0(2)-kapa0(3)-kapa0(4);pi0=sym(zeros(m1,1));
for i = m2:m1+m2-2
    pi0(i-m2+1)=K(i);
end
pi0(m1)=1-pi0(1)-pi0(2)-pi0(3)-pi0(4);ET=sum(h.*subs(k/beta,k,1:m2));
EX=sum(d.*subs(k*alpha,k,1:m1));
ESv=(K(m1+m2-1)/(1+K(m1+m2-1)))*(b+(c/beta)*sum(transpose(kapa0).*subs(k,k,1:m2)))-(alpha/(1+K(m1+m2-1)))*sum(transpose(pi0).*subs(k,k,1:m1));
ERv=(ET)*(ESv-u)/(c*ET-EX);
Ev=ERv/ET ;

```


Βιβλιογραφία

- [1] S. Asmussen, H. Albrecher (2010), *Ruin Probabilities*, second ed., World Scientific, Singapore
- [2] D. Williams (1991), *Probability with Martingales*, Cambridge University Press
- [3] Δ. Χελιώτης (2020), *Εισαγωγή στον στοχαστικό λογισμό*, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και βοηθήματα
- [4] Δ. Χελιώτης (2020), *Ένα δεύτερο μάθημα στις πιθανότητες*, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και βοηθήματα
- [5] Z. Brzeiniak and T. Zastawniak (2000), *Basic Stochastic Processes*, Springer Undergraduate Mathematics Series
- [6] Geon H. Choe (2016), *Stochastic Analysis for Finance with Simulations*, Universitext, Springer,
- [7] G. Grimmett and D. Stirzaker (2001), *Probability and Random Processes*, Oxford University Press
- [8] F. C. Klebaner (2005), *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press
- [9] X. Sheldon Lin (2006), *Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance*, John Wiley & Sons, Inc.
- [10] J. Jacod and P. Protter (2004), *Probability Essentials*, Universitext, Springer
- [11] M.V. Boutsikas, A.C. Rakitzis and D.L. Antzoulakos (2011), On the relation between the distributions of stopping time and stopped sum with applications, *arXiv*
- [12] M.V. Boutsikas, A.C. Rakitzis and D.L. Antzoulakos (2014) On the joint distribution of stopping times and stopped sums in multistate exchangeable trials, *Journal of Applied Probability*, vol 51, pp. 483–491
- [13] M.V. Boutsikas, A.C. Rakitzis and D.L. Antzoulakos (2016), On the number of claims until ruin in a two-barrier renewal risk model with Erlang mixtures, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol 294, pp. 124-137
- [14] D.L. Antzoulakos and M.V. Boutsikas (2006), A direct method to obtain the joint distribution of successes, failures and patterns in enumeration problems, *Statistics & Probability Letters*, vol 77, pp. 32–39
- [15] M.V. Boutsikas and K. Politis (2015), Exit Times, Overshoot and Undershoot for a Surplus Process in the Presence of an Upper Barrier, *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol 17,
- [16] M.V. Koutras and V. A. Alexandrou (1995), Runs, Scans and URN Model Distributions: A Unified Markov Chain Approach, *Ann. Inst. Statist. Math*, vol 47, pp. 743-766

- [17] D.L. Antzoulakos (2001), Waiting Times for Patterns in a Sequence of Multistate Trials, *Journal of Applied Probability*, vol 38, pp. 508-518
- [18] N. Balakrishnan and M. V. Koutras (2001), *Runs and Scans with Applications*, Wiley Series in Probability and Statistics
- [19] Y. Miyahara (2004), A Note on Esscher Transformed Martingale Measures for Geometric Levy Processes, ResearchGate
- [20] H. D. Miller (1961), A Generalization of Wald's Identity with Applications to Random Walks, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol 32, pp. 549-560
- [21] A. Wald (1946), Differentiation Under the Expectation Sign in the Fundamental Identity of Sequential, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol 17, pp. 493-497
- [22] H. Cossette, D. Landriault, E. Marceau and K. Moutanabbir (2014), Moment-Based Approximation with Mixed Erlang Distributions, *Variance Advancing the Science of Risk*, vol 10, pp. 166-182
- [23] Colin M. Ramsay (1990), On a fundamental identity for stopping times and its application to risk theory, *Mathematics and Economics*, vol 9, pp. 149-153
- [24] A. Wald (1944), On Cumulative Sums of Random Variables, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol 15, pp. 283-296
- [25] G. E. Willmot and Jae-Kyung Woo (2013), On the Class of Erlang Mixtures with Risk Theoretic Applications, *North American Actuarial Journal*, vol 11, pp. 99-115