



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΕΙΑΣ

**ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ ΚΑΙ ΝΕΕΣ**

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ»

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

**Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΤΡΟΧΙΑΚΩΝ ΜΕΣΩ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ: ΑΠΟ ΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ CHLADNI
ΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΡΟΧΙΑΚΩΝ ΤΟΥ ΑΤΟΜΟΥ ΤΟΥ ΥΔΡΟΓΟΝΟΥ**

ΚΑΤΣΑΚΟΥΛΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΧΗΜΙΚΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2021

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

**Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΤΡΟΧΙΑΚΩΝ ΜΕΣΩ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ: ΑΠΟ ΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ CHLADNI
ΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΡΟΧΙΑΚΩΝ ΤΟΥ ΑΤΟΜΟΥ ΤΟΥ ΥΔΡΟΓΟΝΟΥ**

ΚΑΤΣΑΚΟΥΛΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΧΗΜΙΚΟΣ

A.M.: 161104

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ:

Σταμπάκη-Χατζηπαναγιώτη Δέσποινα

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια ΕΚΠΑ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Ψαρουδάκης Νικόλαος

Σιγάλας Μιχαήλ

Σταμπάκη-Χατζηπαναγιώτη Δέσποινα

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 16/9/2021

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1: θεωρητικό μέρος	
Ευχαριστίες	1
Περίληψη	2
Abstract	3
1.1. Ο σκοπός της εργασίας	5
1.2. Διδασκαλία της κβαντικής θεωρίας	5
1.3. Οι αναλογίες ως διδακτικό εργαλείο	8
1.4. Οι αναλογίες ως εργαλείο στη διδασκαλία της κβαντικής θεωρίας	10
1.5. Στοιχεία διδακτικής στην πρόταση διδασκαλίας	11
2. Στοιχεία της κβαντικής θεωρίας	
2.1. Ανασκόπηση της κβαντικής θεωρίας έως το 1924	13
2.2. Δυϊσμός	16
2.3. Προέλευση της εξίσωσης του Schrödinger	18
2.4. Η αρχή της απροσδιοριστίας	18
2.5. Η σημασία της εξίσωσης του Schrödinger	19
2.6. Τροχιακά	20
2.7. Λύση της εξίσωσης του Schrödinger για το άτομο του υδρογόνου	24
2.8. Ο κβαντικός αριθμός m_s	24
2.9. Η απαγορευτική αρχή του Pauli	25
2.10. Δόμηση πολυηλεκτρονιακών ατόμων	26
2.11. Συμβολισμός και γραφικές παραστάσεις των τροχιακών και των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων του ατόμου του υδρογόνου	27
2.12. Κομβικές επιφάνειες και κομβικά επίπεδα	36
3. Στοιχεία κυματικής: κύμα-διάδοση-ανάκλαση-διάθλαση-συμβολή-στάσιμα κύματα-συντονισμός-κυματική εξίσωση- συσχέτιση ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων/τροχιακών και ακουστικής	38
4. Σχήματα Chladni	
4.1. Τι είναι τα σχήματα Chladni και αιτιολόγηση της χρήσης τους στην πρόταση διδασκαλίας	46
4.2. Αναφορές της ομοιότητας των σχημάτων Chladni με προβολές των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου στη βιβλιογραφία	63

4.3. Ομοιότητες μεταξύ των σχημάτων πέραν των περιγραμμάτων τους	66
4.4. Ιστορικό υπόβαθρο των σχημάτων Chladni	70
4.5. Εξίσωση των σχημάτων Chladni	75
Κεφάλαιο 2: πειραματικό μέρος	
2.1. Εφαρμογή στην τάξη	82
2.2. Ορολογία που χρησιμοποιήθηκε	82
2.3. Σχέδιο μαθήματος	83
2.4-2.6. Οι στόχοι του μαθήματος και η τεκμηρίωση τους	85
2.7. Επικουρικά στοιχεία για μια ενδεικτική υλοποίηση	89
2.8. Αξιολόγηση	89
2.9. Επιλογή του κατάλληλου προτύπου για την κατασκευή της διάταξης	90
2.10. Οδηγίες για το στήσιμο του πειράματος	
2.10.1. Εξοπλισμός	91
2.10.2. Οδηγίες κατασκευής της διάταξης για τον εισηγητή	91
2.10.3. Επικινδυνότητα	93
2.10.4. Κρίσιμα σημεία	93
2.10.5. Παράγοντες καθορισμού ενός σχήματος Chladni	94
2.11. Οι ερωτήσεις του φύλλου εργασίας και η τεκμηρίωση τους	96
2.12. Αποτελέσματα	101
Κεφάλαιο 3: συζήτηση	
3.1. Συζήτηση των αποτελεσμάτων	107
3.2. Δυνατά σημεία της πρότασης διδασκαλίας	108
3.3. Αδύναμα σημεία της πρότασης διδασκαλίας	110
3.4. Προτάσεις για επόμενες έρευνες που αξιοποιούν σχήματα Chladni	111
Κεφάλαιο 4: βιβλιογραφία	
Βιβλιογραφία	113
Παράρτημα	125

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η ολοκλήρωση της προσπάθειας για εντονότερη και εις βάθος κατανόηση της κβαντικής θεωρίας που έχετε μπροστά σας πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του Θεού. Μετά την επαρκή φοίτηση στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα Διδακτική της Χημείας και Νέες Εκπαιδευτικές Τεχνολογίες (Δι.Χη.Ν.Ε.Τ.) αξιώνομαι να παρουσιάσω στους αγαπητούς μας δασκάλους τη διπλωματική εργασία που με πολύ κόπο, με μεγάλο μεράκι, ετοιμάστηκε με σκοπό την βαθύτερη κατανόηση των τροχιακών.

Θεωρούμε από την πλευρά μας ότι η παρούσα διατριβή θα είναι ένα λιθαράκι στο οικοδόμημα της γνώσης που καλείται να σηκώσει κάθε μαθητής, φοιτητής αλλά και εκπαιδευτικός. Επιχειρείται η αποσαφήνιση εννοιών που η προσέγγιση τους είναι μια πρόκληση έως τις μέρες μας: άραγε υπάρχει ένας πιο ελκυστικός τρόπος παρουσίασης μιας φλέγουσας ενότητας του καταρρακωμένου μαθήματος της χημείας;

Θεωρούμε ότι τέτοιου είδους μεταπτυχιακά προγράμματα μπορούν να βοηθήσουν όντως ουσιαστικά τους εκπαιδευτές και, άρα, ακολούθως, τους εκπαιδευόμενους.

Ευχαριστώ όσους κοπίασαν για την ύπαρξη και συνέχιση του συγκεκριμένου μεταπτυχιακού προγράμματος.

Πρωτίστως, την επιβλέπουσα καθηγήτρια για την εμπιστοσύνη προς εμένα κατά την ανάθεση του θέματος. Θεωρώ ότι η αλληλεπίδραση μας ήταν ευτύχημα. Ακόμη, τους καθηγητές της τριμελούς επιτροπής μου που προήγαγαν αυτή τη δουλειά με τις πράγματι εύστοχες παρεμβάσεις τους.

Θεωρώ υποχρέωση μου να ευχαριστήσω και τη σύζυγο μου για την ποικιλότητα στήριξη κατά το χρονικό διάστημα των σπουδών μας.

Ακόμη, ευχαριστώ τους μαθητές που συμμετείχαν και τους εκπαιδευτικούς τους για τη συνεργασία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται η συσχέτιση των σχημάτων των τροχιακών/ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων-ισοπύκνων του ατόμου του υδρογόνου με το φαινόμενο, ευρύτερα γνωστό από το 1802, που σήμερα καλείται «σχήματα Chladni» δηλαδή με τη μορφοποίηση και οπτικοποίηση διδιάστατων στάσιμων κυμάτων.

Προκειμένου να υποστηριχθεί η συσχέτιση, στο κεφάλαιο 1 παρατίθενται στοιχεία της κβαντικής θεωρίας, στοιχεία της κυματικής, παρουσιάζονται τα σχήματα Chladni, παρουσιάζεται το ιστορικό υπόβαθρο των σχημάτων Chladni, παραβάλλονται επιλεγμένα σχήματα Chladni με ηλεκτρονιακές πυκνότητες του ατόμου του υδρογόνου, δίνονται οι βιβλιογραφικές που αφορούν τη επιχειρούμενη συσχέτιση, λύνεται η εξίσωση του Schrödinger για το άτομο του υδρογόνου και, κατόπιν, παρατίθεται το μαθηματικό υπόβαθρο των σχημάτων Chladni.

Ακόμη, παρέχονται οδηγίες για τη δημιουργία ιδιοκατασκευής που παράγει σχήματα Chladni καθώς και σενάριο διδασκαλίας με φύλλο εργασίας που αξιοποιεί τη διδασκαλία και την ιδιοκατασκευή.

Επιχειρήθηκε η εφαρμογή σενάριου διδασκαλίας της συσχέτισης των σχημάτων των τροχιακών-ισοπύκνων με τα σχήματα Chladni (που δημιουργήθηκαν επί τόπου με τη προτεινόμενη ιδιοκατασκευή), τόσο σε πιλοτική διδασκαλία όσο και σε δείγμα μαθητών Γ Λυκείου (κεφάλαιο 2) και συζητούνται τα αποτελέσματα των φύλλων εργασίας των μαθητών. Επίσης σχολιάζονται τα δυνατά και αδύναμα σημεία της διδασκαλίας αυτής (κεφάλαιο 3).

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Διδασκαλία των τροχιακών/ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων του υδρογόνου/υδρογονοειδών ατόμων

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: τροχιακό, ηλεκτρονιακή πυκνότητα, υδρογονοειδή άτομα, στάσιμο κύμα, συντονισμός, κομβική/μη κομβική επιφάνεια, σχήμα Chladni.

ABSTRACT

In this work the attempt is made to correlate the shapes of hydrogen electron orbital/densities-contours with the effect, widely known since 1802, today known as Chladni figures, namely with the formation and visualization of two-dimensional standing waves.

In order to support the correlation, in chapter 1, components of the quantum theory are displayed, followed by components of the wave theory, Chladni figures are presented, the historical background of Chladni figures is presented, selected Chladni figures are compared to hydrogen electron densities, the literature reports on the correlation attempted in here are provided, along with solving the Schrödinger equation for the hydrogen atom and providing the mathematical background of Chladni figures.

Further, instructions are provided for a self-made assembly which produces Chladni figures as well as a teaching scenario with a worksheet which utilizes the said teaching and the self-made assembly.

The application of a teaching scenario aiming to correlate orbital-contour shapes with Chladni figures (produced on the spot by the said assembly) was attempted during a pilot teaching as well as during teaching to last grade senior high school students (chapter 2) and the results of students' worksheets are discussed. Further, the strong and weak points of the said teaching are brought up (chapter 3).

THEME AREA: Teaching the electron orbitals/densities of hydrogen-like atoms

KEYWORDS: orbital, electron density, hydrogen atom, hydrogen-like atoms, standing wave, resonance, nodal/antinodal surface, Chladni figure.

Κεφάλαιο 1: Θεωρητικό μέρος

1.1. Ο σκοπός της εργασίας

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η συσχέτιση των σχημάτων των τροχιακών/ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων-ισοπύκνων του ατόμου του υδρογόνου με τα σχήματα Chladni διότι πιστεύεται ότι μπορεί να διευκολύνει το έργο του εκπαιδευτικού που καλείται να αναπτύξει τη σχετική ενότητα. Το αρχικό έρεισμα για την επιδίωξη αυτού του σκοπού ήταν η ομοιότητα που παρατηρήσαμε μεταξύ ορισμένων σχημάτων Chladni με τα σχήματα ορισμένων ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων του ατόμου του υδρογόνου, και των υδρογονοειδών ατόμων και ιόντων, μέσω προβολής των ισόπυκνων καμπυλών. Βρέθηκε ότι η ομοιότητα έχει παρατηρηθεί και από άλλους και ότι έχει αξιοποιηθεί στο πλαίσιο της διδασκαλίας των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου· οι σχετικές προσπάθειες φέρονται στο προσκήνιο.

Προκειμένου να υποστηριχθεί η συσχέτιση, στο κεφάλαιο 1 παρατίθενται στοιχεία της κβαντικής θεωρίας, στοιχεία της κυματικής, παρουσιάζονται τα σχήματα Chladni, παρουσιάζεται το ιστορικό υπόβαθρο των σχημάτων Chladni, παραβάλλονται επιλεγμένα σχήματα Chladni με ηλεκτρονιακές πυκνότητες του ατόμου του υδρογόνου, δίνονται οι βιβλιογραφικές αναφορές ανάλογες της συσχέτισης που επιχειρείται στη παρούσα εργασία, λύνεται η εξίσωση του Schrödinger για το άτομο του υδρογόνου και, κατόπιν, παρατίθεται το μαθηματικό υπόβαθρο των σχημάτων Chladni.

1.2. Διδασκαλία της κβαντικής θεωρίας

Η εν λόγω διδασκαλία δεν είναι από τις πλέον ανέφελες.

Εμφανίζονται όλες οι συνήθεις δυσκολίες της Χημείας, δηλαδή μαθηματικές εξισώσεις, (Sheehan, M., 2010), νέο λεξιλόγιο (Cassels, J.R.T., Johnstone, A.H., 1980), συμβολική φύση (Staver, J.R., Lumpe, A., 1995), και προαπαιτούμενη κατανόηση βασικών αρχών της Χημείας.

Η ενότητα εμφανίζει και ειδικές δυσκολίες, δηλαδή την κατανόηση του δυϊσμού και της κβαντικής απροσδιοριστίας. Μάλιστα, οι τελευταίες έννοιες εισάγονται de novo και εισάγονται μαζί. Με έρεισμα τη φιλοσοφία της επιστήμης (Kuhn, T., 1970), η προσπάθεια για κατανόηση αυτών των εννοιών είναι μια εννοιολογική σύγκρουση ανάμεσα στο παλαιό ερμηνευτικό πρότυπο (αμιγώς σωματιδιακή συμπεριφορά του ηλεκτρονίου και αιτιοκρατικές (ντετερμινιστικές) στιβάδες) και στο νέο ερμηνευτικό πρότυπο (δυϊσμός και πιθανοκρατικά τροχιακά). Αλλιώς διατυπωμένο οι έννοιες αυτές συνιστούν μια «μετατόπιση του ερμηνευτικού προτύπου» (paradigm shift) κατά Kuhn.

Η εξίσωση Schrödinger, όποτε δίνεται στην Γθμια εκπαίδευση, δεν τίθεται προς λύση και, άρα, οι εκπαιδευόμενοι δεν μπορούν να εξάγουν οι ίδιοι τους κβαντικούς αριθμούς. Αντ' αυτού, τους δέχονται εισηγμένους κατευθείαν ως παράπλευρη απαίτηση της εξίσωσης Schrödinger.

Σε όλα αυτά έρχεται να προστεθεί η έλλειψη εργαστηριακής άσκησης και/ή επίδειξης που αφορά τα τροχιακά/ηλεκτρονιακές πυκνότητες.

Ως αποτέλεσμα των δυσκολιών, οι εννοιολογικές παρανοήσεις στην κβαντική θεωρία είναι λεγεώνα (**πίνακας 1** του **παραρτήματος**).

Δεδομένου ότι οι παρανοήσεις, σε οποιονδήποτε γνωστικό τομέα, δεν είναι πάντα προβλέψιμες ¹, ο δάσκαλος πρέπει να τις ανασύρει ειδάλλως παραμένουν: έχει παρατηρηθεί διατήρηση ορισμένων αντιλήψεων που αποκτήθηκαν στο λύκειο και αφορούν την κβαντική θεωρία έως και το τρίτο έτος πανεπιστημιακών σπουδών (Fletcher, P., Johnston, I., 1999).

Μοιραία, η ενότητα χαρακτηρίζεται, εξ αρχής, δύσκολη. Ο χαρακτηρισμός μιας ενότητας ως δύσκολης μπορεί να αποτελέσει εσωτερικό κίνητρο που να προάγει τη μάθηση, αλλά μπορεί να οδηγήσει και σε αυτοεκπληρούμενη προφητεία αποτυχίας στην κατανόηση (Rosenthal, R, Jacobson, L., 2003).

Το πρόβλημα της διδασκαλίας των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων/τροχιακών και, γενικότερα, της κβαντικής θεωρίας έχει θέλξει την προσοχή μελετητών και έχει οδηγήσει σε πλήθος ετερόκλητων προσπαθειών που επιχειρούν να το απαλύνουν αξιοποιώντας διαφορετικές οπτικές γωνίες.

Για τη δόμηση των πολυηλεκτρονιακών ατόμων και τον ευκολότερο σχεδιασμό του ηλεκτρονιακού νέφους έχουν προταθεί **μνημονικοί κανόνες** (Parsons, R., 1989· Gil. M., 1995), όπως ο κανόνας των βελών (κανόνας του Madelung).

Προκειμένου να μειωθεί η αβεβαιότητα του εκπαιδευόμενου, η επιστημονικά αποδεκτή άποψη για το τι γίνεται μέσα στο άτομο έχει οπτικοποιηθεί αξιοποιώντας **υπολογιστικές προσομοιώσεις** (Dori, Y. J., Barak, M., 2001· Tully, S., et al., 2012· Saputra, A., et al., 2015). Αυτή η πρόταση ενέχει όλα τα πλεονεκτήματα μιας υπολογιστικής απεικόνισης, όπως είναι, μεταξύ άλλων, η δυνατότητα στρέψης των μοντέλων των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων στην οθόνη και, άρα η δυνατότητα παρατήρησης τους από διαφορετικές οπτικές γωνίες, καθώς και η δυνατότητα αναπαραγωγής των πιθανών κινήσεων του ηλεκτρονίου. Τα μοντέλα μπορούν να εκτυπωθούν, πλέον, τριδιάστατα (Griffith, K., Cataldo, R., Fogarty, K., 2016).

Μια άλλη προσέγγιση είναι η **απλούστευση του μαθηματικού μέρους** (Mak, T., Wai-Kee Li, 2000), η οποία, προφανώς, δεν μπορεί να ξεπεράσει κάποιο όριο.

¹ Τουλάχιστον για τρεις λόγους: i) ενίοτε, δεν έχουν συνειδητοποιηθεί ούτε από τον εκπαιδευόμενο (Σκουμιάς, Μ., Χατζηνικήτας, Β., 2000), ii) η οικοδομούμενη γνώση έχει εντελώς προσωπικό χαρακτήρα, όπως παρατηρεί και ο εποικοδομισμός (Driver, R., Guesne, E., Tiberghien, A., 1985), και iii) ενίοτε, είναι ασταθείς, π.χ. υποχωρούν και εμφανίζονται εκ νέου, ή συνυπάρχουν μεταξύ τους ή με την επιστημονικά αποδεκτή άποψη ως συνθετικό μοντέλο (Vosniadou, S., 1994).

Προκειμένου να δειχθεί η εγκυρότητα της εξίσωσης του Schrödinger, έχει προταθεί **η εξαγωγή της εξίσωσης με διάφορους τρόπους**, π.χ. από τις εξισώσεις του Maxwell, την παλαιά κβαντική θεωρία και την ειδική θεωρία της σχετικότητας (Kang, H.J., 2018).

Άλλη προσέγγιση συνιστά η ένταξη, στη διδασκαλία, της **επιστημολογίας**, της **φιλοσοφίας της επιστήμης**, και **του ιστορικού υποβάθρου** (Irwin, A., 2000). Αυτή η πολύπλευρη εξέταση της κβαντικής θεωρίας, εκτός του ότι ανοίγει ορίζοντες σε νέα ενδιαφέροντα, ρίχνει φως σε πτυχές της αρχικής θεωρίας· έτσι, η κβαντική θεωρία κατακτάται εκτενέστερα.

Ειδικά όσον αφορά την ένταξη του ιστορικού υποβάθρου, έχει προταθεί **η έναρξη όχι από την περιγραφή του πλανητικού μοντέλου αλλά απευθείας με την περιγραφή του κβαντομηχανικού μοντέλου**, διότι ακόμη και εάν καταφέρει ο εκπαιδευόμενος να δομήσει το κβαντομηχανικό μοντέλο, το πλανητικό μοντέλο συνυπάρχει και σε πολλές περιπτώσεις λόγω της απλότητας του τελικά το αντικαθιστά (Τουμαζάτος, Δ., 2015). **Ωστόσο, σε δεύτερο χρόνο, η παράθεση όλων των θεωριών**, και μάλιστα κατά χρονολογική σειρά (**εικόνα 2**) **είναι**, επίσης, **καλή ιδέα**, διότι δείχνει ότι κάθε ερμηνεία εγκλείει την προηγούμενη, δηλ. δείχνεται η βαθμίδωση των ανακαλύψεων. Με τη σειρά της, η παράθεση της βαθμίδωσης των ανακαλύψεων μπορεί να δώσει μια εξήγηση για την τελική μορφή της κβαντικής θεωρίας όπως διδάσκεται σήμερα.

Ακόμη, έχει προταθεί **η ενιαία παρουσίαση στα μαθήματα Χημείας και Φυσικής** και η υπογράμμιση ότι η κβαντική θεώρηση του ατόμου δίνει τη δυνατότητα ερμηνείας φυσικών και χημικών φαινομένων (Κοντογεωργίου, Α., Μικρόπουλος, Τ., 2004).

Επίσης, υπάρχουν **πειραματικές δραστηριότητες** που μπορούν να θέλξουν το ενδιαφέρον των διδασκομένων **για την κβαντομηχανική**, και, άρα, να δράσουν ως εισαγωγή στην κβαντομηχανική. Τέτοιες δραστηριότητες είναι, μεταξύ άλλων, το φαινόμενο διπλής σχισμής και η περίθλαση.

Πως γίνεται η διδασκαλία της κβαντικής θεωρίας στην πράξη;

Στη Βθμια εκπαίδευση, η διδακτική προσέγγισή που ακολουθείται από το σχολικό βιβλίο κατά την εισαγωγή στην εν λόγω ενότητα, είναι η έμφαση στην κατανόηση των εννοιών («conceptual approach») πριν από τους υπολογισμούς («procedural approach») καθώς και έμφαση στην ιστορία της εξέλιξης των εννοιών. Ο λόγος που επιλέγεται αυτή η προσέγγιση είναι ότι η ενότητα της κβαντικής θεωρίας απαιτεί γνωστική ωριμότητα του επιπέδου τυπικής λογικής σκέψης κατά Piaget. Οι έφηβοι των 15 ετών έχουν αρχίσει να εισέρχονται σε αυτό το στάδιο, όμως, οι πιο πολλοί μαθητές δουλεύουν ακόμα στο γνωστικό επίπεδο των συγκεκριμένων λογικών πράξεων (concrete). Στο τυπικό στάδιο βρίσκονται οι καλοί στα μαθηματικά, για τους οποίους φάνηκε ότι είναι καλοί και στη Χημεία (κυρίως κατεύθυνσης). Η ηλικία και το φύλο δεν φαίνεται να διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο σε επίπεδο λυκείου και πάνω (μόνο το 40-60% ενηλίκων 20-30 ετών (Keating, D., 1979) ή, αλλιώς διατυπωμένο, το ένα τρίτο των ενηλίκων (Dasen, P., 1994) θα κατακτήσουν πλήρως τις δεξιότητες της τυπικής

σκέψης (αφαιρετική-κριτική, formal) ενώ οι υπόλοιποι θα κατακτήσουν μόνο ορισμένες διαστάσεις της. Το συμπέρασμα ότι η τυπική σκέψη θα κατακτηθεί από λιγότερους από τους μισούς ενήλικες φαίνεται και από ποσοστά % concrete/formal που έχουν αναφερθεί για τη Βθμια εκπαίδευση (90/10 σε 297 μαθητές γυμνασίου· 80/20 σε 221 μαθητές λυκείου) και για την Γθμια εκπαίδευση (60/40 σε 336 φοιτητές πανεπιστημίου· 90/10 σε 67 σπουδαστές τεχνολογικών ιδρυμάτων) (Sheehan, M., 2010).

1.3. Οι αναλογίες ως διδακτικό εργαλείο

Το ενδιαφέρον για τις αναλογίες ως εργαλεία διδασκαλίας ανάγεται στην εποχή του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. Από τότε μέχρι σήμερα, εκτενής έρευνα στο θέμα αυτό έχει αναδείξει τον σημαντικό ρόλο των αναλογιών στη μάθηση εννοιών των φυσικών επιστημών και στην κατανόηση φυσικών φαινομένων από ανήλικους και από ενήλικους (Goswami, U., 1991).

Στο πλαίσιο μιας εποικοδομητικής προσέγγισης (constructivism) της μάθησης, η χρήση αναλογιών περιλαμβάνει την αναζήτηση για ομοιότητες μεταξύ του οικείου και του αγνώστου (Kim, M., Choi, K., 2003). Οι αναλογίες παίρνουν τη μορφή μοντέλων, μεταφορών, κυριολεξίας και παρομοιώσεων. Σε μια αναλογία διακρίνεται η έννοια/κατάσταση/φαινόμενο που επιχειρείται να κατανοηθεί, που καλείται **στόχος**, και η οικεία έννοια στη βάση της οποίας θα εποικοδομηθεί η κατανόηση του στόχου, καλούμενη **βάση**. **Η αναλογία περιγράφεται ως το εργαλείο συσχέτισης των δύο μερών (εικόνα 1):**



Εικόνα 1. Μερικές από τις ιδιότητες της βάσης και του στόχου α) της αναλογίας «η ζωή είναι ταξίδι» (από: Lezhu, S., 2008) και β) της πολύ γνωστής, στη Χημεία, αναλογίας, του πλανητικού ατομικού μοντέλου κατά Bohr (από: Naseriazar, A., Ozmen, H., Badrian, A., 2011).

Οι ομοιότητες που μοιράζεται η βάση με τον στόχο καθιστούν τα δύο μέρη από αρκετά όμοια ως πανομοιότυπα. Μια συνήθης αντιστοιχισή κοινών διαδικασιών είναι αυτή της ροής του νερού μέσα από υδραυλικούς σωλήνες/λάστιχα με τη ροή ηλεκτρικού ρεύματος μέσα σε μεταλλικούς αγωγούς. Ακόμη, οι διδιάστατες και τριδιάστατες απεικονίσεις που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία των ατόμων και των μορίων μπορούν να θεωρηθούν, επίσης, αναλογίες (Gabel, D., 1998).

Μπορούν να διακριθούν τρεις τρόποι παραγωγής αναλογιών: α) μέσω μιας αρχής λειτουργίας/νόμου/εξίσωσης, οπότε ο στόχος αναγνωρίζεται ως ένα άλλο παράδειγμα της τυπικής αρχής (generation via a former principle), β) μέσω δημιουργίας μιας βάσης τροποποιώντας ορισμένα χαρακτηριστικά του στόχου (generation via transformation), γ) μέσω συσχέτισης ανακαλώντας από τη μνήμη μια βάση η οποία, αν και μπορεί να διαφέρει σε πολλές απόψεις από τον στόχο, εξακολουθεί να έχει σημαντικά παρόμοια χαρακτηριστικά (generation via association) (Clemens, J., 1998).

Εκτός από χρήσιμη ως ένα εργαλείο διδασκαλίας, μια αναλογία μπορεί να είναι χρήσιμη ως ένα εργαλείο λογικής και κατανόησης. Μάλιστα, κατά ενδιαφέροντα τρόπο, **έχει διατυπωθεί το ερώτημα εάν η νοητική κατασκευή μοντέλων έχει οντολογικές ρίζες** (Harrison, A, Treagust, D., 2000). Έτσι, εκτός από τις διδακτικές αναλογίες που παρατίθενται από τον εκπαιδευτικό, έχουν διερευνηθεί και οι αυθόρμητες (spontaneous) αναλογίες, δηλ. αυτές που σχηματίζονται χωρίς εκπαιδευτική παρέμβαση, και οι αυτοδημιούργητες (self-generated) αναλογίες, δηλ. αυτές που σχηματίζονται πάλι από τους μαθητές αλλά κατόπιν ορισμένης παρότρυνσης. Η διερεύνηση των αυθόρμητων και των αυτοδημιούργητων αναλογιών έχει, κι αυτή, σημασία για τη διδασκαλία αφού λανθασμένες/ελλιπείς αναλογίες οδηγούν με μεγαλύτερη πιθανότητα σε εννοιολογική παρανόηση (Φώτου, Ν., 2018).

Οι εκπαιδευόμενοι οι οποίοι μαθαίνουν μέσω αναλογιών επιδεικνύουν εννοιολογικές αλλαγές ευχερέστερα (Brown, 1992· Akerson, Flick & Lederman, 2000· Duit & Treagust, 2003), έχουν μεγαλύτερη κατανόηση του αντικειμένου καθώς και καλύτερη ανάκληση σε σύγκριση με εκπαιδευόμενους που μαθαίνουν παραδοσιακά, πιθανώς διότι η αναλογία δρα ως ενδιάμεσος μεταβατικός κρίκος μεταξύ του στόχου και της βάσης (Glynn & Takahashi, 1998).

Ειδικά όσοι μαθαίνουν μέσω αναλογιών που αξιοποιούν μοντέλα, εμπλέκονται εκτενέστερα σε επιχειρηματολογία και αναλογική λογική, συγχρονίζουν ευχερέστερα πληροφορίες με μοντέλα (Pluta, Buckland, Chinn, Duschl & Duncan, 2008), ασκούν εκτενέστερη κριτική σε επιστημονικά μοντέλα (Penner, Giles, Lehrer & Schauble, 1997), και συγκροτούν ευχερέστερα δικά τους μοντέλα (White, 1993).

Οι αναλογίες εφαρμόζονται στη διδασκαλία επιτυχημένα, αρκεί να τηρούνται οι εξής συνθήκες: η αναλογία να είναι κατανοητή και οικεία για τον μαθητή, οι αντιστοιχίσεις μεταξύ βάσης και στόχου

να είναι ξεκάθαρες, τουλάχιστον κάποιες λύσεις της βάσης να μπορούν να μεταφερθούν στον στόχο, και, ιδανικά, η αναλογία να έχει δοκιμαστεί επί μακρόν ώστε να διαπιστωθεί ότι δεν δημιουργεί παρανοήσεις. Ειδικά, και οι αναλογίες μπορούν να δυσκολεύουν (π.χ., τη μάθηση του mole (Rowell, J.A., Dawson, C.J., 1980)).

Πέρα από τις παραπάνω προϋποθέσεις, η χρήση αναλογιών μπορεί να επιφέρει διδακτικό αποτέλεσμα, πιθανότατα, μόνο όταν οι εκπαιδευόμενοι έχουν υποθετικο-παραγωγική ικανότητα (Gabel, D., 1998). Για αυτό, πρωτίστως ανειδίκευτο κοινό και μαθητές μικρότερων ηλικιών που διδάσκονται μέσω αναλογίας η οποία ενέχει μοντελοποίηση, ίσως να μην αντιληθούν την ύπαρξη ενός ορίου στην ισχύ των διδακτικών μοντέλων (Lederman, N.G., Abd-El-Khalick, F., Bell, R.L., Schwartz, R.S., 2002). Αλλιώς διατυπωμένο, τα διδακτικά μοντέλα μπορούν να εκληφθούν ως ακριβή αντίγραφα της φύσης και της πραγματικότητας (67% μαθητών 7ης τάξης μικτών ικανοτήτων (Treagust, D., Chittleborough, G., Mamiala, T. 2002), 23% διακεκριμένων μαθητών 11ης τάξης (Grosslight, L., Unger, C., Jay, E., Smith, C.L., 1991). Ακόμη, ενίοτε, δεν είναι αντιληπτό το ότι δημιουργούνται για συγκεκριμένο σκοπό (12% μαθητών 7ης τάξης, 36% μαθητών 11ης τάξης), ούτε η αξία τους στην παραγωγή προβλέψεων (Grosslight, L., Unger, C., Jay, E., Smith, C.L., 1991). Ο κίνδυνος αυτής της παρανόησης περιορίζεται στο μέτρο που ο εκπαιδευτικός θα διατυπώσει ρητά το ότι υπάρχουν όρια στο μοντέλο, και περιορίζεται κι άλλο στο μέτρο που θα δείξει το που «σπάει» η αναλογία.

1.4. Οι αναλογίες ως εργαλείο στη διδασκαλία της κβαντικής θεωρίας

Για τη διδασκαλία της κβαντικής θεωρίας έχει προταθεί, μεταξύ άλλων, η χρήση αναλογιών. Όμως, η προσπάθεια επινόησης αναλογιών στην κβαντική θεωρία, τις περισσότερες φορές, είναι ελάχιστα επιτυχής. Οι παραπάνω προϋποθέσεις δεν τηρούνται λόγω της ελλιπούς αντιστοίχισης των μακροσκοπικών Νευτώνειων φαινομένων με το υποατομικό σύμπαν (Rayner-Canham, G., 1994· Fortman, J., 1993· Garofalo., A., 1997· Bonneau, M., 1991· Ma Ngai Ling, 1996· Pendarvis R., 1997).

Ως μια αναλογία στη διδασκαλία των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων/τροχιαχών, ο εντοπισμός της θέσης του ηλεκτρονίου έχει παρομοιαστεί με τον εντοπισμό μιας μπαλαρίνας που κινείται πολύ γρήγορα σε σκηνή την οποία φωτίζει μια στροβοσκοπική λάμπα: σε κάθε άναμμα της λάμπας η χορεύτρια βρίσκεται σε άλλη θέση. Αν σημειωθεί η θέση της μπαλαρίνας κάθε φορά που ανάβει η λάμπα, τελικά προκύπτει ένα σχέδιο στο οποίο παρατηρείται ότι κάπου υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα να βρίσκεται η χορεύτρια (Fortman, J., 1993· Rayner-Canham, G., 1994). Η αντιστοίχιση της κίνησης ενός ηλεκτρονίου με την κίνηση μιας μπαλαρίνας εξακολουθεί να χρησιμοποιείται και, μάλιστα, και πέρα από τον εντοπισμό της θέσης του ηλεκτρονίου (π.χ., Carafoli, E., Danieli, G.A., Longo, G.O., 2010, s. 172· Kakalios, J., 2011).

Ως άλλη αναλογία, ένας φοιτητής μένει στη φοιτητική εστία του Πανεπιστημίου. Υποχρεωτικά θα βρίσκεται σε αυτόν τον χώρο, δηλ. η πιθανότητα εύρεσης του εκεί είναι 1 (κανονικοποιημένη). Αυτός ο χώρος χωρίζεται σε δύο μέρη, τον μικρό της βιβλιοθήκης και τον πολύ μεγαλύτερο υπόλοιπο. Αν και ο φοιτητής επισκέπτεται πολύ συχνά τη βιβλιοθήκη (μεγάλη πυκνότητα πιθανότητας) εν τούτοις είναι πιο πιθανό να βρεθεί έξω από αυτή επειδή ο χώρος αυτός είναι μεγαλύτερος (Ma Ngai Ling, 1996).

Μια ακόμη αναλογία που επίσης πραγματεύεται την πιθανοκρατία της κίνησης του ηλεκτρονίου, και με καλά αποτελέσματα, καλεί στην καταγραφή ανά, π.χ., 10 λεπτά, της θέσης ενός τερματοφύλακα μιας ποδοσφαιρικής ομάδας: η πιθανότητα της εύρεσης του τερματοφύλακα είναι μεγαλύτερη εντός της «μικρής» περιοχής του γηπέδου, χωρίς να αποκλείεται και η εύρεση του τερματοφύλακα στη «μεγάλη» περιοχή (Τουμαζάτος, Δ., 2015).

Ως προσέγγιση του πως προκύπτουν τα σχήματα των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων του ατόμου του υδρογόνου, κομματάκια ενός βαριού υλικού (μαρμάρου) έχουν αφεθεί να πέσουν διαδοχικά από μικρό ύψος πάνω σε κατάλληλα διαμορφωμένο χαρτί και, ακολούθως, έχουν καταγραφεί τα περιγράμματα των σχημάτων που προκύπτουν (Specht, Z., Raley, D., 2013).

Σε ένα κατάστημα παπουτσιών υπάρχουν ράφια σε διάφορα ύψη. Πάνω στα ράφια υπάρχουν κουτιά παπουτσιών και κάθε κουτί χωράει ένα ζεύγος παπουτσιών (αναλογία με την αρχή του Pauli) (Bonneau, M., 1991).

Ο πρωτεύον κβαντικός αριθμός έχει αντιστοιχηθεί σε μια πόλη, ο δευτερεύον κβαντικός αριθμός στην γειτονιά, ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός στην οδό (Goh et al. 1994).

Δεσμίδες από μπαλόνια έχουν πιαστεί κατά τρόπο που αναδεικνύει λοβούς και κομβικές επιφάνειες θυμίζοντας κάποια από τα σχήματα των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων του ατόμου του υδρογόνου (Samoshin, V., 1998), και καραμέλες Smarties διαφορετικών χρωμάτων έχουν τοποθετηθεί σε ικανή απόσταση μεταξύ τους εντός ρηχής στιβάδας νερού οπότε η ανάμειξη των διαφορετικών χρωμάτων μέσω της διάχυσης δίνει μια εικόνα της πιθανοκρατικής φύσης και της αρχής της υπέρθεσης (Miller, J., 2000).

Δεν βρήκαμε αναφορές που να προτάσσουν σκεπτικισμό έναντι των αναφερθέντων αναλογιών. Ωστόσο, υπάρχει ένα όριο πέραν του οποίου οποιαδήποτε αναλογία «σπάει» έτσι, εν προκειμένω, κάθε μία από τις αναφερθείσες αναλογίες αναδεικνύει, λιγότερο ή περισσότερο αποτελεσματικά, μόνο ένα ή δύο γνωρίσματα κοινά μεταξύ της βάσης και του στόχου.

1.5. Στοιχεία διδακτικής στην πρόταση διδασκαλίας

Η πρόταση διδασκαλίας οδεύει μέσω μοντέλου οπτικοποίησης με τους μαθητές να έχουν άμεση εμπειρική παρατήρηση των διδιάστατων στάσιμων κυμάτων. Έχοντας στο νου ότι εάν η διδασκαλία

βασίζεται μόνο σε μετωπική παράδοση, τότε μπορεί να οδηγήσει στην παθητικοποίηση (Gess-Newsome, J., Lederman, N.G., 1999), δεν επιδιώχθηκε η παράθεση έτοιμων γνώσεων αλλά επιδιώχθηκε, κατά το δυνατό, η καθοδήγηση των εκπαιδευομένων ώστε να καταλήγουν οι ίδιοι στις επιστημονικά αποδεκτές απόψεις.

Έχοντας συνειδητοποιήσει την αποτελεσματικότητα του, επιδιώχθηκε η ένταξη στοιχείων του εποικοδομητικού μοντέλου κατά Driver και Oldham (1986): δηλ. το να υπάρχει, πρώτα, προσανατολισμός ώστε να προκληθεί ενδιαφέρον, και το να περιοριστεί το πλαίσιο αναφοράς. Στο τέλος κάθε στόχου του φύλλου εργασίας το νέο γνωστικό απόκτημα διατυπώθηκε ρητά και στο τέλος του μαθήματος διατυπώθηκε ρητά το μήνυμα εξόδου ².

Λήφθηκε μέριμνα για την ελαχιστοποίηση του μαθηματικού φορμαλισμού· ωστόσο, αναγνωρίζεται και ότι ο μαθηματικός φορμαλισμός επιζητείται από τους μαθητές ως μέσο επιβεβαίωσης των νόμων και των θεωριών, κυρίως όταν πρόκειται για αντιδιαισθητικούς νόμους και θεωρίες (Moore, 2006; Egdall, 2014).

Λήφθηκε μέριμνα για τη χρήση όσο το δυνατό απλούστερης γλώσσας έχοντας υπόψη ότι όταν χρησιμοποιήθηκαν οι λέξεις ζάχαρη, πορτοκάλια και ντουζίνα αντί για χημικές ουσίες και mole, μαθητές Βθμιας εκπαίδευσης δεν είχαν κανένα πρόβλημα να κατανοήσουν την έννοια mole (D.L. Gabel, J.V., 1986). Ωστόσο, αναγνωρίζεται και ο κίνδυνος της υπεραπλούστευσης, δηλ. ο κίνδυνος του υποβιβασμού μιας διδασκόμενης έννοιας κάτω από τη ζώνη επικείμενης ανάπτυξης κατά Vygotsky.

Ένα άλλο στοιχείο του εποικοδομισμού είναι η γνωστοποίηση των στόχων της επίδειξης στους εκπαιδευόμενους. Σύμφωνα με τον καθηγητή παιδαγωγικής στη Σορβόννη R. Cousinet, συνιστά την πρώτη αρχή της μάθησης. Όταν οι εκπαιδευόμενοι έχουν επίγνωση της μάθησης τους, έχουν ενδιαφέρον, δηλ. εσωτερικό κίνητρο, με αποτέλεσμα και την πρόκληση της ενεργού συμμετοχής (Ματσαγγούρας, Η.Γ., 2009). Ωστόσο, στην παρούσα εργασία, η γνωστοποίηση των στόχων στους εκπαιδευόμενους δεν διατυπώθηκε εκ των προτέρων ώστε να μη χαθεί το στοιχείο της ανακάλυψης που αφορά τη συσχέτιση των σχημάτων της επίδειξης με τα σχήματα των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων που απεικονίζονται στα βιβλία· οι στόχοι ήταν διαθέσιμοι για τους μαθητές μόνο στην αρχή του φύλλου εργασίας.

Στην παρούσα εργασία προσφέρονται στον εκπαιδευτικό εξηγήσεις πιθανότατα περισσότερες από όσες θα κρίνει ότι πρέπει να προσφέρει στους εκπαιδευόμενους. Ο εκπαιδευτικός είναι υποχρεωμένος να ξέρει πολύ περισσότερα για να περάσει, χωρίς παρανοήσεις, ένα πολύ μικρό μέρος αυτών που ξέρει στους εκπαιδευόμενους, κατόπιν συνεκτίμησης της νοητικής τους ηλικίας και

² Η δημιουργία ενός μηνύματος εξόδου και, γενικότερα, ενός λογότυπου («slogan», «verbal code» κατά Piaget) βοηθάει πάρα πολύ.

του γνωστικού τους υποβάθρου. Έτσι, π.χ., εάν οι εκπαιδευόμενοι γνωρίζουν μόνο τα σχήματα των τροχιακών s και p , τότε ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να αναφερθεί μόνο στα σχήματα των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων που αντιστοιχούν σε αυτά τα τροχιακά.

2. Στοιχεία της κβαντικής θεωρίας

2.1. Ανασκόπηση της κβαντικής θεωρίας έως το 1924

Οι πρώτοι που μίλησαν για κάποια κβάντωση, δηλ. ασυνέχεια, κατά την περιγραφή της φύσης, ήταν ο Λεύκιππος με τον Δημόκριτο και τον Επίκουρο που θεώρησαν ότι ο κόσμος είναι φτιαγμένος από πολύ μικρά αδιαίρετα σωματίδια, **τα άτομα**. Ωστόσο, η τελευταία άποψη παραμερίστηκε για αιώνες επειδή, μετά τη διατύπωση της άποψης, ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης διατύπωσαν την άποψη ότι δεν μπορεί να υπάρχει ασυνέχεια στην ύλη. Η θέση ισομορφισμού του Αριστοτέλη είναι ότι ναι μεν η ύλη είναι διαιρετή, αλλά επ' άπειρον διαιρετή, δηλ. συνεχής. Ωστόσο, ο ίδιος ο Πλάτωνας, αλλού, εξήγησε τη δομή του κόσμου αξιοποιώντας ορθογώνια τρίγωνα· μάλιστα, ο Werner Heisenberg σχολιάζοντας το κείμενο του Πλάτωνα πρότεινε, ενθουσιασμένος, ότι η ύλη αποτελείται από ορθογώνια τρίγωνα που αφού ταιριάζουν συγκροτώντας ισοσκελή τρίγωνα σχηματίζουν τα υπόλοιπα κανονικά γεωμετρικά στερεά (Heisenberg, W., 1973).

Η ατομική θεωρία επανήλθε από τον Dalton (1803) μέσω μακροσκοπικών παρατηρήσεων στη συμπεριφορά των αερίων.

Ακολούθησε ο Thomson (Thomson, J.J., 1897· Thomson, J.J., 1905· Thomson, J.J., 1912) ο οποίος εφάρμοσε υψηλό δυναμικό σε σωλήνα με ελάχιστο αέριο με αποτέλεσμα την εκπομπή ακτίνων από την κάθοδο οι οποίες προκαλούσαν τον φθορισμό ουσίας επικάλυψης της επιφάνειας απέναντι από την κάθοδο και τον φθορισμό του ελάχιστου αερίου. Η εκπομπή ακτίνων ήταν μια συμπεριφορά που ομοιάζε στη συμπεριφορά του φωτός, αλλά ο Thomson απέδειξε ότι, τελικά, η ακτινοβολία ήταν σωματίδια με αρνητικό φορτίο ίσο με $1,76 \times 10^8$ C/g εκφρασμένο ως αναλογία του φορτίου προς τη μάζα του σωματιδίου. Τα σωματίδια ονομάστηκαν **ηλεκτρόνια**, και το φαινόμενο, το φαινόμενο Thomson, αξιοποιήθηκε στην τηλεόραση.

Το 1896 ο Becquerel ανακάλυψε τη ραδιενέργεια και το ζεύγος Pierre και Marie Curie ανακάλυψε τρεις τύπους ραδιενεργού ακτινοβολίας, τις ακτίνες α , β και γ . Κρίνοντας από τη διεύθυνση και το μέτρο της απόκλισης των ακτίνων α , β και εντός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου (οι ακτίνες α και β , αποκλίνουν αντίθετα με τις ακτίνες β να αποκλίνουν περισσότερο, ενώ οι γ δεν αποκλίνουν) βγήκε το συμπέρασμα ότι τα σωματίδια α έχουν θετικό φορτίο και είναι βαρύτερα από τα σωματίδια β που έχουν αρνητικό φορτίο, ενώ οι ακτίνες γ δεν έχουν σωματίδια, ούτε φορτίο.

Το 1909, ο Millikan, μέσω του πειράματος της σταγόνας (Millikan, R.A., 1913) υπολόγισε, για πρώτη φορά, το φορτίο ($1,6 \times 10^{-9}$ C) του ηλεκτρονίου και υπολόγισε ακόμη ακριβέστερα τη μάζα ($9,10 \times 10^{-28}$ g) του ηλεκτρονίου.

Οι υπολογισμοί του φορτίου και της μάζας, καθώς και η παρέκκλιση όταν εφαρμόζεται εξωτερικό ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο συνομολογούν την υλική συνιστώσα των ηλεκτρονίων.

Το 1910, ο Rutherford κρίνοντας από τις γωνίες σκέδασης των σωματιδίων α ενώ έπεφταν σε φύλλο χρυσού (περιορισμένη, μόνο, σκέδαση υπό μεγάλες γωνίες, με την ανάκλαση να γίνεται εκτενέστερα και με επικρατούσα συμπεριφορά τη διέλευση χωρίς αλλαγή της διεύθυνσης), κατέληξε στο συμπέρασμα ότι σχεδόν όλη η μάζα και το θετικό φορτίο του ατόμου βρίσκεται σε μια πολύ μικρή περιοχή αυτού, που ονομάστηκε πυρήνας, και ότι ο υπόλοιπος χώρος, που είναι ο περισσότερος, ενέχει τα ηλεκτρόνια τα οποία θεώρησε ότι κινούνται σε τροχιές γύρω από τον πυρήνα.

Το 1919, ο Rutherford έδειξε ότι στον πυρήνα υπάρχουν σωματίδια με θετικό φορτίο τα οποία ονόμασε **πρωτόνια**.

Το 1932, ο Chadwick κρίνοντας από τον βομβαρδισμό φύλλων βηρυλλίου κατέληξε στο συμπέρασμα ότι στον πυρήνα υπάρχουν και σωματίδια ίσης μάζας με τα πρωτόνια, χωρίς φορτίο, τα οποία ονόμασε **νετρόνια**.

Η πειραματικά παρατηρούμενη ηλεκτρική ουδετερότητα του ατόμου εξασφαλίζεται θεωρώντας το πλήθος των πρωτονίων ίσο με το πλήθος των ηλεκτρονίων.

Κατά τη μελέτη της ακτινοβολίας μέλανος σώματος, το 1900 ο Planck ³ διατύπωσε την πολύ σπουδαία άποψη ότι η ενέργεια του φωτός, εκπέμπεται ή απορροφάται κατά ποσότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της στοιχειώδους ενέργειας $E = h\nu$, δηλ. $2h\nu, 3h\nu, \dots$, με $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J s. Κάλεσε το στοιχειώδες ποσό ενέργειας quantum, οπότε η διατύπωση ισοδυναμεί με το ότι η ενέργεια εκπέμπεται ή απορροφάται κατά κβάντα.

Το 1905, ο Einstein απέδωσε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, δηλ. την παραγωγή ρεύματος κατά την πρόσπτωση φωτός σε μεταλλική επιφάνεια, στην πρόσπτωση των κβάντα φωτός, τα οποία ονόμασε **φωτόνια**. Η πρόσπτωση των φωτονίων και η εξαγωγή ηλεκτρονίων από τη μεταλλική επιφάνεια θύμιζε τη συμπεριφορά σωματιδίων.

³ Προσπαθώντας να βρει έναν τρόπο, ο Planck καθόρισε τον τρόπο που τα υλικά απορροφούν και εκπέμπουν την ακτινοβολία κατά τον τότε παραδοσιακό τρόπο παρουσιάζοντάς τα σαν να περιείχαν ένα σύστημα «αντηχείων», ηλεκτρικών φορτίων που ταλαντεύονταν σαν να ήταν συνδεδεμένα σε ελατήρια παρόμοια μ' αυτά του Νόμου του Hook με διαφορετικές ελαστικότητες. Έτσι, ένα υλικό μπορούσε να θεωρηθεί ότι είχε ένα άπειρο σύστημα τέτοιων ελατηρίων διαφορετικής ακαμψίας καθώς απορροφούσε και μετέδιδε ενέργεια διαφορετικών συχνοτήτων. Η θεωρία αυτή δεν επιβεβαιώθηκε πλήρως στα υπέρυθρα μήκη κύματος και ο ίδιος ο Planck την ανασκεύασε (Planck, M., 1900).

Προκειμένου να εξηγήσει τη μορφή των γραμμών του φάσματος εκπομπής του υδρογόνου, ο Bohr έλαβε υπόψη τη κβάντωση της ακτινοβολίας του Planck και εισήγαγε την άποψη ότι τα ηλεκτρόνια κινούνται γύρω από τον πυρήνα σε καθορισμένες κυκλικές τροχιές εισάγοντας έναν αυθαίρετο κβαντικό αριθμό $n \in \mathbb{N}^*$, με τους μεγαλύτερους αριθμούς να υποδεικνύουν εξώτερες τροχιές. Η κβάντωση στη θέση σήμαινε και κβάντωση στην ενέργεια, άρα και κβάντωση στην ολική στροφορμή, αλλά και κβάντωση σε μία από τις τρεις καρτεσιανές συνιστώσες της ολικής στροφορμής, καθώς και κβάντωση στις μεταπτώσεις: μόνο συγκεκριμένα ποσά ενέργειας ακτινοβολίας απορροφώνται ή εκπέμπονται όταν το ηλεκτρόνιο μεταπίπτει σε ανώτερη ή κατώτερη ενέργεια, αντίστοιχα.

Όμως, η κλασική μηχανική προβλέπει πτώση του σώματος που εκτελεί κυκλική κίνηση στο κέντρο της κίνησης λόγω κεντρομόλου επιτάχυνσης από το ετερόνυμο φορτίο των πρωτονίων, δηλ. το ηλεκτρόνιο θα έπρεπε να πέφτει, τελικά, πάνω στον πυρήνα. Κάτι τέτοιο όμως, ενώ είναι γνωστό ότι ενίοτε συμβαίνει, και καλείται σύλληψη του ηλεκτρονίου (electron capture), προφανώς δεν γίνεται σε όλα τα ηλεκτρόνια.

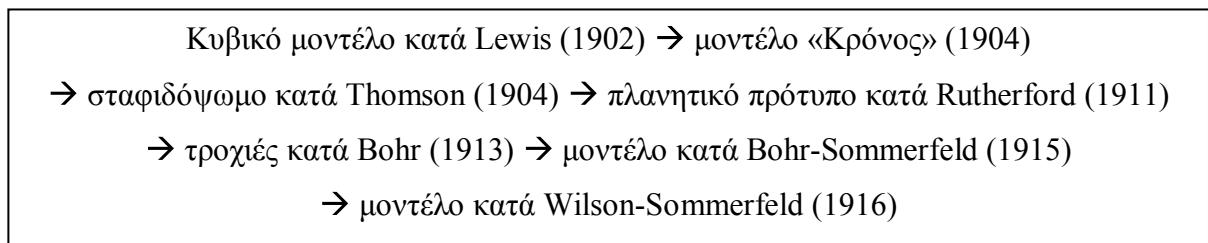
Η πρώτη προσπάθεια διόρθωσης της θεωρίας ώστε να ταιριάζει με τις παρατηρήσεις ήταν το 1915 η διόρθωση Bohr-Sommerfeld που αντικατέστησε τις κυκλικές τροχιές με ελλειπτικές.

Υπήρξε και δεύτερη προσπάθεια διόρθωσης, το 1916, η διόρθωση Wilson-Sommerfeld.

Η θεωρία του Bohr και οι βελτιωμένες μορφές της ήταν η τελευταία προσέγγιση της ατομικής δομής που παραδέχονταν τροχιές και αμιγώς σωματιδιακή συμπεριφορά των ηλεκτρονίων.

Η ατομική θεωρία των ετών 1900-1924 (δηλ. έως πριν από τη διατύπωση του de Broglie), σήμερα είναι γνωστή ως **ημικλασική προσέγγιση** ή **παλαιά κβαντική θεωρία**.

Κατά τη διάρκεια αυτών των ετών, τα ατομικά μοντέλα τροποποιούνταν σύμφωνα με τα καινούργια δεδομένα (**εικόνα 2**).



Εικόνα 2. Χρονική διαδοχή των κύριων μοντέλων της ατομικής θεωρίας πριν από την επικράτηση της κβαντομηχανικής.

2.2. Δυϊσμός

Στην προσπάθεια να ερμηνεύσει το γεγονός ότι το ηλεκτρόνιο δεν καταλήγει στον πυρήνα, ο de Broglie, το 1924 διατύπωσε χωρίς πειραματικά δεδομένα τη θεωρία περί δυϊσμού του ηλεκτρονίου προτείνοντας ότι το ηλεκτρόνιο έχει και ιδιότητες κύματος και, συγκεκριμένα, στάσιμου κύματος. Στην εποχή του ήταν γνωστό ότι ορισμένα μόνο σχήματα εμφανίζει και το στάσιμο κύμα, και, επιπλέον, ήταν γνωστό ότι το στάσιμο κύμα δεν μεταφέρει ενέργεια. Άρα, το ηλεκτρόνιο δεν θα ακτινοβολούσε (έχανε) ενέργεια και δεν θα κατέληγε στον πυρήνα:

«..de Broglie conceived an electron revolving about the atomic nucleus as being connected with a hypothetical wave train, and made intelligible to some extent the discrete character of Bohr's "permitted" paths by the stationary (standing) character of the corresponding waves..».

(Einstein, A., 1956, σ. 59).

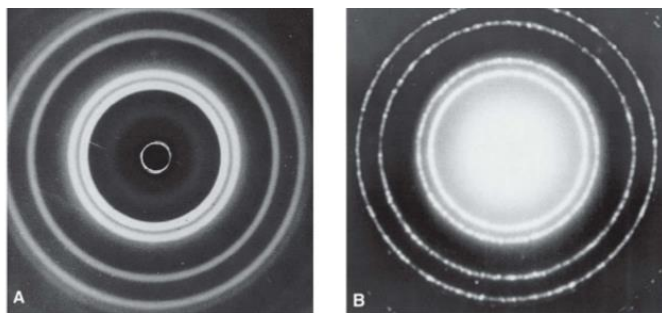
Πρότεινε ότι το μήκος κύματος ηλεκτρονίου μάζας m και ταχύτητας u είναι

$$\lambda = h / mu.$$

Ο τύπος βγαίνει αυθόρμητα από το πόρισμα $E = mc^2$ της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας η οποία ήταν γνωστή σε εκείνη την εποχή, και από τον τύπο της ενέργειας του κβάντου του Planck $E = h\nu$.

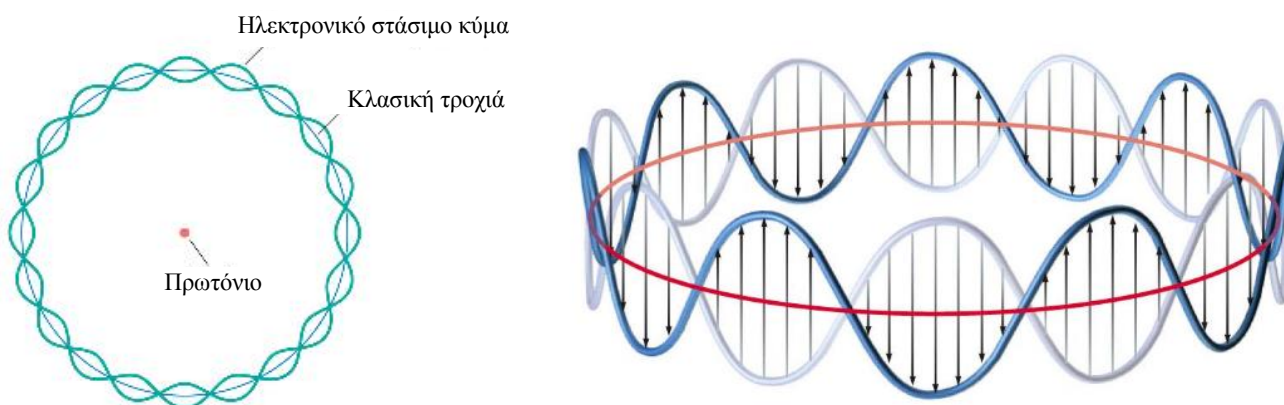
Συσχετίζει τη φύση της ακτινοβολίας με τη φύση της ύλης.

Η αξιωματική ιδέα του de Broglie έγινε αμέσως αποδεκτή από τον Einstein, και οι φυσικοί Clinton Davisson και Lester Germer που τότε εργάζονταν στην τηλεφωνική εταιρεία Bell, επιβεβαίωσαν την κυματική συνιστώσα των ηλεκτρονίων μέσω της περίθλασης δεσμών ηλεκτρονίων από κρύσταλλο νικελίου (Davisson, C.J., Germer, L.H., 1927): τα πρότυπα περίθλασης των δεσμών είναι όμοια με τα πρότυπα περίθλασης των ακτίνων X από κρυστάλλους, όπως φαίνεται στην **εικόνα 3**. Αυτό δείχνει ότι τα ηλεκτρόνια συμπεριφέρονται κατά τον ίδιο τρόπο που συμπεριφέρονται οι ακτίνες X στα πειράματα αυτά και εφόσον οι ακτίνες X έχουν κυματικό χαρακτήρα, άρα και **τα ηλεκτρόνια έχουν και κυματικό χαρακτήρα όταν είναι ελεύθερα.**

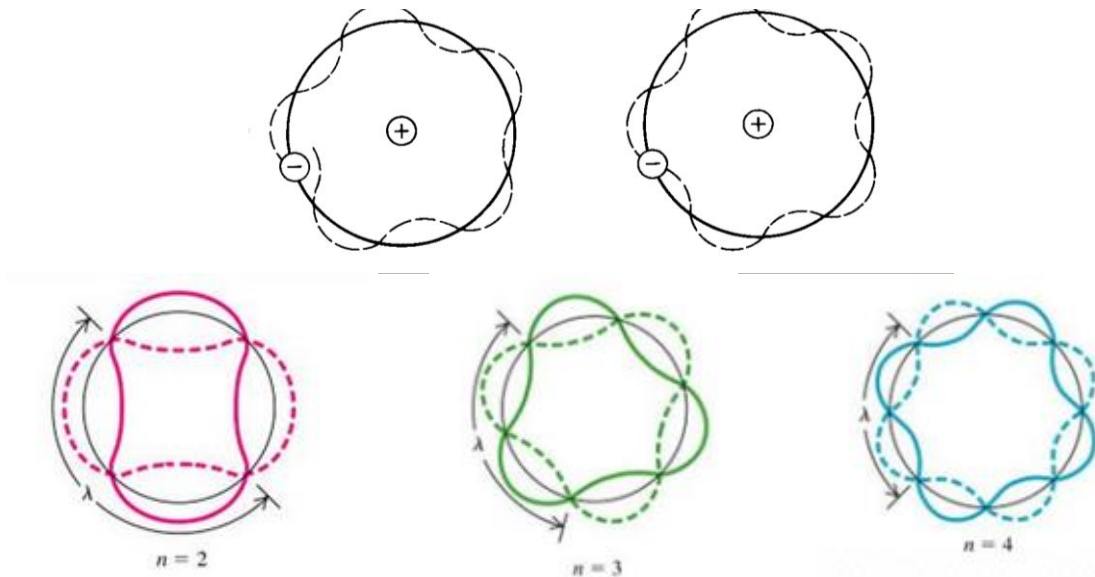


Εικόνα 3. (A) πρότυπο περίθλασης ακτίνων X σε φύλλο αλουμινίου · (B) πρότυπο περίθλασης ηλεκτρονίων σε φύλλο αλουμινίου.

Στις **εικόνες 4 και 5** φαίνονται αναπαραστάσεις του ηλεκτρονιακού στάσιμου κύματος όπως το συνέλαβε ο de Broglie:



Εικόνα 4. Κλασική τροχιά και ηλεκτρονιακό στάσιμο κύμα όπως το φαντάστηκε ο de Broglie. Η δεύτερη εικόνα (από: Oxtoby, D., Gillis, H., Campion, A., 2008) είναι μια τριδιάστατη απεικόνιση της πρώτης. Φαίνονται οι δεσμοί και οι κοιλίες.



Εικόνα 5. Μη επιτρεπτή και επιτρεπτή τροχιά ηλεκτρονιακού στάσιμου κύματος όπως το φαντάστηκε ο de Broglie. Στην κάτω σειρά φαίνονται τα σχήματα των στάσιμων κυμάτων ανάλογα με τον κβαντικό αριθμό όπως τα φαντάστηκε ο de Broglie (από: Rieke, M., 2002).

Σήμερα, αυτή η απεικόνιση δεν είναι επιστημονικά αποδεκτή: το ηλεκτρόνιο δεν διαγράφει κλασικές τροχιές.

Με έρεισμα τον τύπο του de Broglie, την αρχή διατήρησης της ενέργειας και την εξίσωση των κυμάτων, το 1926, ο Schrödinger παρήγαγε την εξίσωση που περιγράφει τις ιδιότητες του ηλεκτρονίου ως κύματος (Schrödinger, E., 1926). Η εξίσωση εφαρμόστηκε από τον ίδιο και από άλλους και σε άλλα συστήματα, όπως, μεταξύ άλλων, για φρέαρ τριγωνικών ή ορθογώνιων τοιχωμάτων πεπερασμένου ή απείρου δυναμικού, για δυναμικό δ, για αρμονικό ταλαντωτή, για άκαμπτο στροφέα, και πάντα βρέθηκε σύμφωνη με τα πειραματικά αποτελέσματα.

2.3. Προέλευση της εξίσωσης του Schrödinger

Δίνεται στο μέρος II του **παραρτήματος**.

2.4. Η αρχή της απροσδιοριστίας

Το 1927, ο Heisenberg διατυπώνει την αρχή της αβεβαιότητας ή της απροσδιοριστίας (Heisenberg, W. 1927): δεν μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια και η θέση και η ορμή ενός σωματιδίου και όσο αυξάνεται η ακρίβεια στον προσδιορισμό του ενός μεγέθους, μειώνεται η ακρίβεια στον προσδιορισμό του άλλου. Η σημερινή διατύπωση είναι

$$\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2,$$

και οι τυπικές αποκλίσεις των αντίστοιχων μετρήσεων.

Η θέση αυτή, αρχικά, είχε ληφθεί ως λέγουσα ότι ο λόγος που δεν μπορεί να επιτευχθούν ταυτόχρονες ακρίβειες είναι η δική μας παρέμβαση, δηλ., αρχικά, είχε αποδοθεί στο φαινόμενο του παρατηρητή (Masanao, O., 2003). Η εν λόγω εντύπωση άφηνε ανοικτό το ενδεχόμενο ότι, στο μέλλον, με καλύτερα όργανα, ίσως τα καταφέρουμε. Πολλά εγχειρίδια Χημείας δεν δηλώνουν την ύπαρξη των δύο εκδοχών. Ο ίδιος ο Heisenberg δίδασκε αφήνοντας την εντύπωση ότι οφείλεται στην αδυναμία της δικής μας οργανολογίας (Brumfiel, G., 2012). Ωστόσο, σήμερα υπάρχουν πειραματικές ενδείξεις (Erhart, J., et al., 2012· Rozema, L.A., et al., 2012) ότι η κβαντική απροσδιοριστία οφείλεται και στη δική μας παρέμβαση, αλλά ότι έχει και ένα **εγγενές μέρος**. Αλλιώς διατυπωμένο, σήμερα, ως μέτρηση ορίζεται οποιαδήποτε αλληλεπίδραση σωματιδίων και όχι η κατ' ανάγκη συμμετοχή ορισμένου παρατηρητή (π.χ. Landau, L. D., Lifshitz, E. M., 1977).

2.5. Η σημασία της εξίσωσης Schrödinger

Στην κλασική μηχανική, η μαθηματική πρόβλεψη της τροχιάς και της ενέργειας ενός συστήματος γίνεται με εξισώσεις που προκύπτουν από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Το ανάλογο του νόμου του Νεύτωνα στην κβαντομηχανική, είναι η εξίσωση του Schrödinger.

Η εξίσωση του Schrödinger βασίζεται στην κυματική εξίσωση του Maxwell. Οι λύσεις της εξίσωσης ενός κύματος, 1, 2 ή 3 διαστάσεων, στάσιμου ή μη, δίνουν τη συνάρτηση θέσης του εν λόγω κύματος, δηλ. τη συνάρτηση που περιγράφει τη θέση οποιουδήποτε σημείου του μέσου σε συνάρτηση με τον χρόνο κατά την εμφάνιση του εν λόγω κύματος· αυτή είναι η **κυματοσυνάρτηση**. Επομένως, και η εξίσωση του Schrödinger δίνει ως λύση κυματοσυνάρτηση του συστήματος.

Σύμφωνα με την ερμηνεία της Κοπεγχάγης (δηλ. κατά Bohr και Heisenberg), η λύση της εξίσωσης του Schrödinger είναι η πληρέστερη δυνατή περιγραφή που μπορεί να δοθεί για ένα φυσικό σύστημα. Μάλιστα, οι λύσεις δεν περιγράφουν μόνο υποατομικά, ατομικά ή μοριακά συστήματα, αλλά και μακροσκοπικά συστήματα, πιθανώς και όλο το σύμπαν (Franck, L., 2012). **Η εξίσωση ισχύει σε όλες τις θεωρίες που βασίζονται στην κβαντομηχανική**, π.χ. στη θεωρία του κβαντικού πεδίου (που λαμβάνει υπ' όψη και την ειδική θεωρία της σχετικότητας), καθώς και στη θεωρία της κβαντικής βαρύτητας, αλλά και στη θεωρία των χορδών.

Ωστόσο, η εξίσωση του Schrödinger δεν είναι ο μόνος τρόπος παραγωγής προβλέψεων στην κβαντομηχανική. Άλλοι τρόποι είναι η μηχανική των μητρών (matrix mechanics) κατά Heisenberg και τα ολοκληρώματα δρόμου (path integrals) κατά Feynman.

2.6. Τροχιακά

Στην κβαντική θεωρία, κάθε καλώς συμπεριφερόμενη μονοηλεκτρονιακή συνάρτηση θέσης του ενός ηλεκτρονίου καλείται **τροχιακό** (σήμερα, πλέον, ανεξάρτητα από το εάν προκύπτει ως λύση της εξίσωσης του Schrödinger' ως καλή συμπεριφορά ορίζεται η ικανοποίηση των προϋποθέσεων που βρίσκονται στο τέλος της παρούσας παραγράφου). Ο όρος προτάθηκε από τον Mulliken, το 1932 ακριβώς ώστε να επέλθει διαφοροποίηση από τον όρο τροχιά του μοντέλου του Bohr (Mulliken, R.S., 1932). Ο λόγος που έπρεπε να επέλθει αυτή η διαφοροποίηση είναι ότι, κατά την τρέχουσα επιστημονική άποψη, το τροχιακό δεν δίνει την απόλυτη θέση του σωματιδίου ενδιαφέροντος, πράγμα που έκαναν οι τροχιές, αλλά δίνει μόνο ένα μέτρο της πιθανότητας του να βρεθεί το σωματίδιο σε ορισμένο σημείο ή χώρο. Για την ακρίβεια, το τροχιακό πολλαπλασιασμένο επί τον συζυγή του μιγαδικό αριθμό αποτελεί την πυκνότητα της πιθανότητας του να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σε ένα στοιχείο του χώρου (αλλιώς, στοιχείο όγκου, voxel) ορισμένης απόστασης και γωνίας από τον πυρήνα. Επομένως,

τροχιακό είναι η εν λόγω κυματοσυνάρτηση,

και ισχύει ότι:

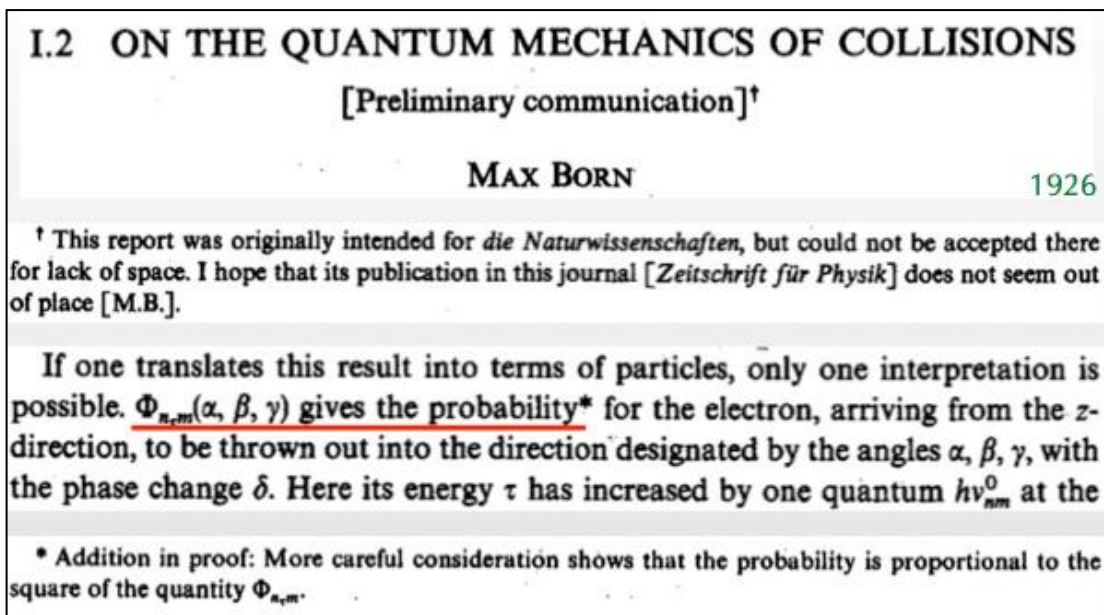
$$\text{Πιθανότητα: } P = \psi \psi^* dV = |\psi|^2 dV,$$

$$\text{Πυκνότητα πιθανότητας: } P/dV = \psi\psi^* = |\psi|^2,$$

όπου $dV=dx dy dz$, το στοιχείο όγκου, και $|\psi|$, το μέτρο της ψ .

Αλλιώς διατυπωμένο, η κυματοσυνάρτηση δεν είναι ντετερμινιστική συνάρτηση θέσης όπως στην κλασική Φυσική, αλλά πιθανοκρατική συνάρτηση θέσης. Η παρανόηση που θέλει το τροχιακό να είναι καθαυτός ο χώρος που συχνάζουν τα ηλεκτρόνια είναι πολύ διαδεδομένη ακόμα και σήμερα, εν μέρει λόγω της ισχυρής αγκίστρωσης στο τροχιακό μοντέλο κατά Bohr που διδάχθηκαν οι προηγούμενες γενιές.

Η σχέση του τροχιακού με την πιθανότητα εύρεσης του ηλεκτρονίου σε ένα σημείο ή σε ορισμένο χώρο δεν ήταν προφανής από την αρχή της διατύπωσης της εξίσωσης του Schrödinger. Η **εικόνα 6** αποτελεί την πρώτη σελίδα από το πρωτότυπο δημοσίευμα του Born ο οποίος εισήγαγε την μαθηματική σχέση μεταξύ της λύσης της εξίσωσης του Schrödinger και της εν λόγω πιθανότητας ως μέρος της καλούμενης **στατιστικής ερμηνείας** του, ή αλλιώς **κανόνα του Born**. Σημειώνεται η αρχική θέση του ίδιου του Born.



Εικόνα 6. Το κείμενο του Born απορρίφθηκε κατά την πρώτη υποβολή του και κατά τη δεύτερη υποβολή του η εν λόγω μαθηματική σχέση ήταν μόνο υποσημείωση στην πρώτη θέση που ήθελε την πιθανότητα ίση με την ίδια την κοματοσυνάρτηση (από: Born, M., 1926).

Το ότι η πιθανότητα εύρεσης δίνεται από το τετράγωνο του τροχιακού έχει, πλέον, αποδειχθεί πειραματικά (Sinha, U., Couteau, C., Jennewein, T., Laflamme, R., Weihs, G., 2010) αλλά ακόμα και σήμερα δεν έχει κατορθωθεί να εξαχθεί από κάποια άλλη αρχή ή αρχές της κβαντικής θεωρίας κατά κοινώς αποδεκτό τρόπο η αρχική σύλληψη της διατύπωσης του κανόνα του Born παραμένει ad hoc.

Επίσης, η σημασία του ότι η πιθανότητα εύρεσης δίνεται από το τετράγωνο του τροχιακού και όχι από το τροχιακό καθαυτό ή υψωμένο σε κάποια άλλη δύναμη εξακολουθεί να μην είναι από τις πλέον προφανείς.

Για αυτό, αν και η στατιστική ερμηνεία του Born αποτελεί μέρος της επικρατούσας ερμηνείας της κβαντικής θεωρίας, της ερμηνείας της Κοπεγχάγης, ακόμα και σήμερα αποτελεί αντικείμενο μελέτης μέσω πλήθους ετερόκλητων προσεγγίσεων (Gao, S., 2013; Ball, P., 2019).

Η στατιστική ερμηνεία του Born μας λέει ότι το τροχιακό δεν αφορά φυσικό κύμα όπως νόμιζε αρχικά ο Schrödinger, αλλά αφορά **κύμα πιθανότητας**.

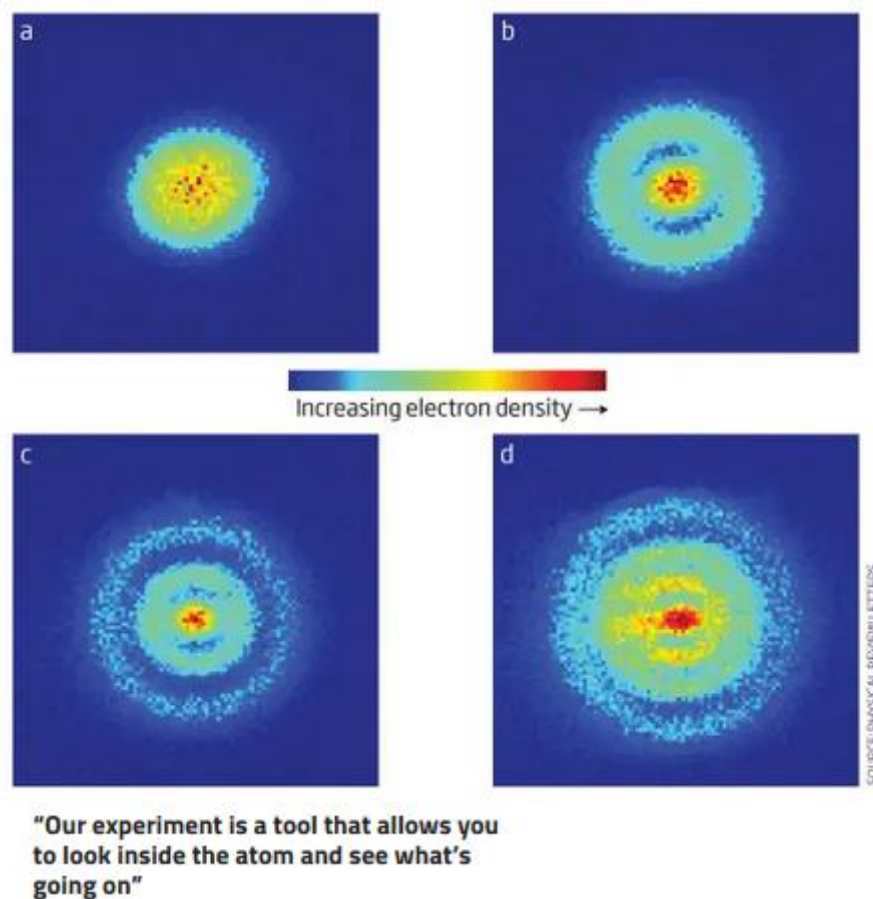
Η ερμηνεία αυτή οδηγεί στο ερώτημα εάν τα μαθηματικά προβλεπόμενα τροχιακά υπάρχουν κάπου στη φύση ή αποτελούν μια αμιγώς μαθηματική πρόβλεψη, μια αμιγώς θεωρητική οντότητα.

Εάν δεν υπάρχουν στη φύση, τότε κάθε θεωρητική υποστήριξη τους και κάθε αναφορά σε αυτά, π.χ. στα σχήματά τους, πιθανώς να είναι προϊόν ενός βολικού για εμάς τρόπου σκέψης (εργαλειοκρατία, ινστρουμενταλισμός (instrumentalism)) ακόμη και όσον αφορά το απλούστερο στοιχείο, το υδρογόνο

(Scerri E.R., 2001· Mulder, P., 2010). Επίσης, εάν δεν υπάρχουν στη φύση, τότε δεν θα μπορεί να παρατηρηθούν πειραματικά.

Το ερώτημα έχει απασχολήσει εκτενώς την ακαδημαϊκή κοινότητα (π.χ., Scerri, E.R., 2001· Mulder, P., 2010· Labarca, M., Lombardi, O., 2010· Matta, C.F., Gillespie, R.J., 2002· Pascual, J.I. et al., 2000· Schwarz, W.H.E., 2006).

Μάλιστα, συγγραφείς στο καταξιωμένο περιοδικό Nature που αξίωσαν την άμεση παρατήρηση τροχιακών (Zuo, J.M., Kim, M., O'Keeffe, M., Spence, J.C.H., 1999) και που επαινέθηκαν για αυτό από συγγραφείς σε άλλα καταξιωμένα περιοδικά, αργότερα δέχθηκαν την κριτική μέρους της ακαδημαϊκής κοινότητας. Η κριτική θα είχε αποφευχθεί εάν οι συγγραφείς είχαν κάνει λόγο για παρατήρηση της συνιστάμενης ηλεκτρονιακής πυκνότητας (Scerri, E.R., 2001) καθώς το γεωμετρικό σχήμα ενός τροχιακού είναι πολύ όμοιο με το σχήμα της αντίστοιχης πυκνότητας (**παρ. 2.11.**) και καθώς η ηλεκτρονιακή πυκνότητα είναι εν γένει παρατηρήσιμη. Παρομοίως, μετά τη δημοσίευση ενός πιο πρόσφατου άρθρου (Stodolna, A.S. et al., 2013) κάποιες πηγές σχολιασμού ερμήνευσαν πως αναφέρθηκε η άμεση παρατήρηση των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου (π.χ., Commissariat, T., 2013· Smeenk, C.T.L., 2013) παρόλο που οι συγγραφείς του πρωτότυπου άρθρου έκαναν λόγο για ηλεκτρονιακή πυκνότητα (**εικόνα 7**).



Εικόνα 7. Φωτογραφίες διεγερμένων καταστάσεων του ατόμου του υδρογόνου εφαρμόζοντας μικροσκοπία φωτοϊοντισμού. Σημειώνεται από τους ίδιους του συγγραφείς ότι η χρωματική κλίμακα αφορά την ηλεκτρονιακή πυκνότητα (από: Stodolna, A.S. et al., 2013).

Η ταύτιση των τροχιακών, με την ηλεκτρονιακή πυκνότητα αποτελεί μια αναγνωρισμένη παρανόηση (πίνακας 1 του παραρτήματος) οφειλόμενη, εν μέρει, στα πολύ όμοια σχήματα (παρ. 2.11.) η οποία παρανόηση μπορεί να μεταφέρει, λανθασμένα, την παρατηρησιμότητα της πυκνότητας και στα τροχιακά.

Ο σκεπτικισμός για την ύπαρξη, για την παρατηρησιμότητα και για την απόδοση φυσικής σημασίας στα τροχιακά δυσχεραίνεται επιπλέον από το ότι, ενίοτε, ως τροχιακό ορίζεται ο φυσικός χώρος που πιθανώς να βρεθεί το ηλεκτρόνιο (π.χ. λεξικό Χημείας της Οξφόρδης, Daintith, J., 2004), ο οποίος ορισμός αποκλίνει σαφώς από τον ορισμό του Mulliken.

Προκειμένου το ψ^* να μπορεί να έχει φυσική σημασία πρέπει το τροχιακό σε όλο το πεδίο ορισμού του

- να είναι συνεχές. Ασυνεχής συνάρτηση αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο απειρισμού της παραγώγου 1^{ης} τάξης στα σημεία ασυνέχειας· αυτό σημαίνει απειρισμό της ορμής εφόσον ο τελεστής της ορμής είναι παράγωγος 1^{ης} τάξης. Ασυνεχής συνάρτηση, επίσης, θα έρχονταν σε αντίθεση με την επόμενη συνθήκη.
- να έχει συνεχή μερική παράγωγο 1^{ης} τάξης ως προς κάθε χωρική συντεταγμένη. Ασυνεχής παράγωγος 1^{ης} τάξης αφήνει το ανοικτό το ενδεχόμενο απειρισμού της παραγώγου 2^{ης} τάξης στα σημεία της ασυνέχειας· αυτό σημαίνει απειρισμό της ενέργειας εφόσον ο τελεστής της ενέργειας είναι παράγωγος 2^{ης} τάξης.
- να είναι μονότιμο, ώστε να έχει και μονότιμο ψ^* .
- να πληροί τις οριακές συνθήκες του εκάστοτε συστήματος.
- να είναι ολοκληρώσιμο, δηλ. πεπερασμένο ώστε να έχει ολοκληρώσιμο, δηλ. πεπερασμένο ψ^* γιατί δεν έχει νόημα η άπειρη πιθανότητα. Μια συνέπεια αυτής της απαίτησης είναι το τροχιακό να είναι μηδέν στο άπειρο. Η απαίτηση αυτή δεν ισχύει σε σπάνιες περιπτώσεις.
- να είναι κανονικοποιημένο και να δίνει ορθογώνιες μεταξύ τους ιδιοσυναρτήσεις. Η απαίτηση της κανονικοποίησης νοείται ως έστω πολλαπλασιασμός με κατάλληλο συντελεστή κανονικοποίησης προκειμένου να προκύπτει ως άθροισμα των πιθανοτήτων η μονάδα. Η απαίτηση της ορθογωνικότητας εξασφαλίζει ότι διαφορετικές ιδιοσυναρτήσεις του τροχιακού αντιπροσωπεύουν αμοιβαίως αποκλειόμενες φυσικές καταστάσεις. Η απαίτηση για κανονικοποίηση και η απαίτηση για ορθογωνικότητα μπορούν να δηλωθούν, από κοινού, ως απαίτηση για ορθοκανονικότητα (Griffiths, D., 1995· Pauling, L., Wilson, B., 2012).

2.7. Λύση της εξίσωσης του Schrödinger για το άτομο του υδρογόνου

Δίνεται στο μέρος III του **παραρτήματος**.

2.8. Ο κβαντικός αριθμός m_s

Στη σύγχρονη μορφή της κβαντομηχανικής, για την πλήρη περιγραφή της κατάστασης του ηλεκτρονίου εμπλέκεται και ένας τέταρτος κβαντικός αριθμός: ο **(μαγνητικός) κβαντικός αριθμός του spin, τον m_s** .

Αυτός ο αριθμός προέκυψε κατά τον χειρισμό μιας άλλης έννοιας: του κβαντικού αριθμού του spin, s .

Ο κβαντικός αριθμός του spin, s , εισήχθηκε ως μια νέα, για την εποχή της, ιδιότητα του ηλεκτρονίου. Ένας λόγος που εισήχθηκε ο s ήταν για να εξηγηθεί το γεγονός ότι όταν οι φασματικές

γραμμές του υδρογόνου παρατηρηθούν υπό πολύ μεγάλη ανάλυση εμφανίζονται διπλές, με λεπτή δομή. Ο άλλος λόγος που εισήχθηκε ο s ήταν για να εξηγηθεί το αποτέλεσμα του πειράματος των Gerlach και Stern (Gerlach, W. Stern, O., 1922): αν διοχετευθεί δέσμη ατόμων Ag ή οποιουδήποτε ατόμου με μονήρες ηλεκτρόνιο μέσα σε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο, τότε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από το κινούμενο ηλεκτρόνιο αλληλεπιδρά με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο και παρατηρείται διαχωρισμός των ατόμων σε δύο ομάδες που δείχνει ότι υπάρχουν δύο ισοδύναμες τιμές του μαγνητικού πεδίου του e . Αλλιώς διατυπωμένο, παρατηρείται κβάντωση της στροφομής του ηλεκτρονίου. Για αυτούς τους δύο λόγους, ο Pauli εισήγαγε, εμπειρικά, έναν νέο βαθμό ελευθερίας στο ηλεκτρόνιο με δύο δυνατές τιμές: $\pm\frac{1}{2}$. Οι Unlebeck και Goudsmit (Uhlenbeck, G., Goudsmit, S., 1926) πρότειναν ότι αυτός ο νέος βαθμός ελευθερίας είναι μια νεοφανής ιδιότητα του ηλεκτρονίου την οποία ονόμασαν ιδιοστροφομή (spin). Επρόκειτο για εγγενή στροφομή του ηλεκτρονίου, δηλ. το αντιμετωπίσαν ως σωματίδιο που περιστρέφεται. Αυτή η υπόθεση δεν έγινε πιστευτή αρχικά από τον Pauli (Tomonaga., S., 1997) έως ότου το 1925 απέδωσε τον βαθμό ελευθερίας που είχε εισαγάγει στο spin. Αυτή η απόφαση δικαιολογήθηκε μαθηματικά εκ των υστέρων, το 1928, μέσω της εξίσωσης του Dirac, δηλ. της σχετικιστικής μορφής της εξίσωσης του Schrödinger. Η εξίσωση του Dirac προβλέπει τα πειραματικά παρατηρούμενα επίπεδα ενέργειας του υδρογόνου καθώς και τους τέσσερις κβαντικούς αριθμούς. Ωστόσο, σήμερα, πιστεύεται ότι η ιδιοστροφομή του ηλεκτρονίου διακρίνεται από την τροχιακή στροφομή του. Ο πρώτος λόγος για αυτό είναι ότι η ιδιοστροφομή παίρνει όχι μόνο ακέραιες αλλά και ημιακέραιες τιμές. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι το μέτρο της ιδιοπεριστροφής, όπως η μάζα ηρεμίας και το φορτίο του ηλεκτρονίου, δεν μεταβάλλεται. Περαιτέρω, πιστεύεται ότι η ιδιοστροφομή του ηλεκτρονίου διακρίνεται από ενδεχόμενη περιστροφή του καθώς, σε περίπτωση περιστροφής του, θεωρώντας το ως σφαίρα, η ταχύτητα περιφοράς του στον ισημερινό θα έπρεπε να υπερβαίνει κατά πολύ την ταχύτητα του φωτός (π.χ., Τραχανάς, Σ., 2016). Συγκεκριμένα, έχει προταθεί ότι η ιδιοστροφομή δεν σχετίζεται με την εσωτερική δομή του ηλεκτρονίου αλλά με την κυματική ιδιότητα του (Belifante, F.J., 1939· Ohanian, H., 1986). Σήμερα, είμαστε στο στάδιο αποδοχής της εγγενούς ιδιότητας του ηλεκτρονίου που καλείται ιδιοστροφομή χωρίς μακροσκοπικό ανάλογο και χωρίς να κατανοείται ακριβώς πώς αυτή συνάδει με την κυματική ιδιότητα.

2.9. Η απαγορευτική αρχή του Pauli

Προκειμένου να αντιστοιχηθούν ηλεκτρόνια στα τροχιακά πολυηλεκτρονιακών ατόμων, αξιοποιείται, μεταξύ άλλων, η απαγορευτική αρχή του Pauli.

Αυτή η αρχή εισηγείται ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν ηλεκτρόνια με την ίδια τετράδα κβαντικών αριθμών ταυτόχρονα, οπότε αφού υπάρχει κβαντικός αριθμός με πεδίο ορισμού μόνο δύο

τιμές (με βάση το m_s), σε κάθε τροχιακό του υδρογόνου μπορούν να αντιστοιχηθούν το πολύ δύο ηλεκτρόνια, το ένα με $\text{spin } +\frac{1}{2}$ και το άλλο με $\text{spin } -\frac{1}{2}$, κάθε φορά.

Η απαγορευτική αρχή του Pauli διατυπώθηκε το 1925 για τα ηλεκτρόνια και το 1940 διευρύνθηκε από τον ίδιο τον Pauli, ώστε να εισηγείται ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν φερμιόνια, δηλ. σωματίδια με ημιακέραια spin στην ίδια κβαντική κατάσταση στο ίδιο κβαντικό σύστημα, ταυτόχρονα.

Μποζόνια (σωματίδια με ακέραια spin) δεν υπόκεινται στην αρχή του Pauli. Έτσι, μια εναλλακτική διατύπωση είναι ότι η κυματοσυνάρτηση που αφορά δύο σωματίδια ενός κβαντικού συστήματος είναι αντισυμμετρική για τα φερμιόνια και συμμετρική για τα μποζόνια.

Η απαγορευτική αρχή του Pauli, που αφορά μικρή εμβέλεια μεταξύ σωματιδίων, μαζί με την ηλεκτρική άπωση, που αφορά μεγαλύτερη εμβέλεια μεταξύ σωματιδίων συνιστούν δύο λόγους που δύο μακροσκοπικά αντικείμενα δεν καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο ταυτόχρονα (Dyson, F. J., Lenard, A., 1967).

2.10. Δόμηση πολυηλεκτρονιακών ατόμων

Εφαρμόζοντας την αρχή του Pauli, στον **πίνακα 2** φαίνεται η δόμηση των ηλεκτρονίων σε πολυηλεκτρονιακά άτομα έως και τα τροχιακά 3d.

Πίνακας 2.

n	ℓ	m_ℓ	m_s	τροχιακά	υποστιβάδες	στιβάδες
1	0	0	$+\frac{1}{2}$	1s	1s (2e ⁻)	K (2e ⁻)
			$-\frac{1}{2}$			
2	0	0	$+\frac{1}{2}$	2s	2s (2e ⁻)	L (8e ⁻)
			$-\frac{1}{2}$			
	1	-1	$+\frac{1}{2}$	2p ₋₁	2p (6e ⁻)	
			$-\frac{1}{2}$			
		0	$+\frac{1}{2}$	2p ₀		
			$-\frac{1}{2}$			
+1	$+\frac{1}{2}$	2p ₊₁				
	$-\frac{1}{2}$					
3	0	0	$+\frac{1}{2}$	3s	3s (2e ⁻)	M (18)
			$-\frac{1}{2}$			
	1	-1	$+\frac{1}{2}$	3p ₋₁	3p (6e ⁻)	
			$-\frac{1}{2}$			
		0	$+\frac{1}{2}$	3p ₀		
			$-\frac{1}{2}$			
		+1	$+\frac{1}{2}$	3p ₊₁		
			$-\frac{1}{2}$			
	2	-2	$+\frac{1}{2}$	3d ₋₂	3d (10e ⁻)	
			$-\frac{1}{2}$			
		-1	$+\frac{1}{2}$	3d ₋₁		
			$-\frac{1}{2}$			
		0	$+\frac{1}{2}$	3d ₀		
			$-\frac{1}{2}$			
+1		$+\frac{1}{2}$	3d ₊₁			
		$-\frac{1}{2}$				
+2	$+\frac{1}{2}$	3d ₊₂				
	$-\frac{1}{2}$					

2.11. Συμβολισμός και γραφικές παραστάσεις των τροχιακών και των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων του ατόμου του υδρογόνου

Έχοντας επιλύσει την εξίσωση του Schrödinger στο άτομο του υδρογόνου, αναπαριστάνεται η πιθανότητα με την οποία μπορεί να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σε ορισμένη απόσταση και υπό ορισμένη γωνία από τον πυρήνα.

Σε συμφωνία με τη φυσική σημασία των κβαντικών αριθμών όπως προέκυψε στην παρ..., κάθε τιμή του n αντιστοιχίζεται σε μια στιβάδα, ή, φλοιό π.χ. 1,2,3..

κάθε τιμή του ζεύγους n, ℓ αντιστοιχίζεται σε μια υποστιβάδα, ή, υποφλοιό, π.χ. 1s, 2s, 3p..

κάθε τιμή της τριάδας n, ℓ, m_ℓ , αντιστοιχίζεται σε ένα ατομικό τροχιακό π.χ., 1s, 2p₁, 3p₋₁, 3d₁.

Ο όροι (υπο)στιβάδα και (υπο)φλοιός έχουν διατηρηθεί από το μοντέλο του Bohr, αλλά, πλέον, έχουν διαφορετική σημασία.

Πρώτα, παρατίθεται ο συμβολισμός των υποφλοιών:

για $\ell = 0$, ο υποφλοιός καλείται s (από το sharp).

Για $\ell = 1$, ο υποφλοιός καλείται p (από το principal).

Για $\ell = 2$, ο υποφλοιός καλείται d (από το diffuse).

Για $\ell = 3$, ο υποφλοιός καλείται f (από το fundamental).

Η ετυμολογία της προέλευσης των συμβόλων έχει να κάνει με τις εντυπώσεις που αποκομίζονται από τις αντίστοιχες φασματικές γραμμές αλκαλίων. Οι περαιτέρω υποφλοιοί συμβολίζονται αλφαβητικά παραλείποντας το γράμμα j (δηλ. με g, h, i, k..) (Griffiths, D., 1995) γιατί σε μερικές γλώσσες δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ των γραμμάτων i και j (Atkins, P., de Paula, J., Friedman, R., 2009).

Αξιοποιώντας τους κβαντικούς αριθμούς που παράχθηκαν στο μέρος III του **παραρτήματος**, λαμβάνοντας υπόψη το πεδίο ορισμού κάθε κβαντικού αριθμού, ένα τροχιακό συμβολίζεται, πληρέστερα,

$$\psi_{n, \ell, m_\ell} = n \ell m_\ell^4,$$

δηλ.,

$$\psi_{1,0,0} = 1s$$

$$\psi_{2,0,0} = 2s$$

$$\psi_{2,1,-1} = 2p_{-1}$$

$$\psi_{2,1,0} = 2p_0$$

$$\psi_{2,1,1} = 2p_1$$

$$\psi_{3,0,0} = 3s$$

$$\psi_{3,1,-1} = 3p_{-1}$$

$$\psi_{3,1,0} = 3p_0$$

$$\psi_{3,1,1} = 3p_1$$

$$\psi_{3,2,-2} = 3d_{-2}$$

$$\psi_{3,2,-1} = 3d_{-1}$$

$$\psi_{3,2,0} = 3d_0$$

⁴ Λαμβάνοντας υπόψη και τον m_s , ακολουθείται ο συμβολισμός $\psi_{n, \ell, m_\ell, m_s}$, ή, εναλλακτικά, $|n, \ell, m_\ell, m_s\rangle$. Κάθε τιμή της τετράδας n, ℓ, m_ℓ, m_s , αντιστοιχεί σε ένα ηλεκτρόνιο.

$$\psi_{3,2,1} = 3d_1$$

$$\psi_{3,2,2} = 3d_2$$

όσον αφορά τα τροχιακά από 1s έως και 3d.

Για $m_l = 0$, το φανταστικό μέρος της κυματοσυνάρτησης, η αξιμουθιακή συνάρτηση, μηδενίζεται, δηλ. η κυματοσυνάρτηση είναι πραγματικός αριθμός οπότε μπορεί να αναπαρασταθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Για να αναπαρασταθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες και τα τροχιακά με $m_l \neq 0$, το φανταστικό μέρος των τροχιακών απομακρύνεται λαμβάνοντας έναν συγκεκριμένο γραμμικό συνδυασμό των τροχιακών ίδιας στιβάδας και υποστιβάδας αλλά αντίθετων m_l . Π.χ. για τα τροχιακά $2p$, δεδομένου ότι

$$\begin{aligned}\psi_{2,1,0} &= 2p_0 = R(r) (3/4\pi)^{1/2} \cos\theta, \\ \psi_{2,1,-1} &= 2p_{-1} = R(r) (3/8\pi)^{1/2} \eta\mu\theta e^{-\phi i}, \\ \psi_{2,1,1} &= 2p_1 = -R(r) (3/8\pi)^{1/2} \eta\mu\theta e^{\phi i},\end{aligned}$$

λαμβάνονται οι συγκεκριμένοι γραμμικοί συνδυασμοί

$$\begin{aligned}i (1/2)^{1/2} [2p_1 + 2p_{-1}] &= i (1/2)^{1/2} R(r) (3/8\pi)^{1/2} \eta\mu\theta (e^{-\phi i} - e^{\phi i}), \\ (1/2)^{1/2} [2p_1 - 2p_{-1}] &= - (1/2)^{1/2} [R(r) (3/8\pi)^{1/2} \eta\mu\theta] (e^{\phi i} + e^{-\phi i})\end{aligned}$$

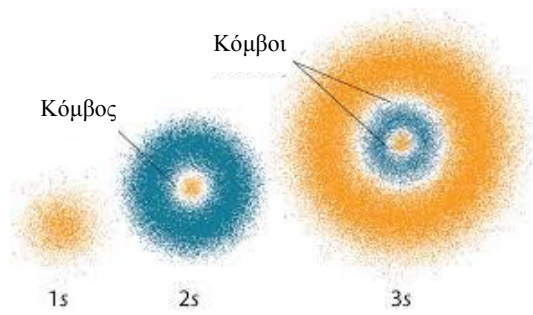
οπότε, αξιοποιώντας τον τύπο του Euler ($e^{\phi i} = \cos\phi + i \eta\mu\phi$) από όπου προκύπτει ότι $\eta\mu\phi = (e^{\phi i} - e^{-\phi i})/2i$ και ότι $\cos\phi = (e^{\phi i} + e^{-\phi i})/2$, προκύπτει ότι οι συγκεκριμένοι γραμμικοί συνδυασμοί γράφονται

$$\begin{aligned}i (1/2)^{1/2} [2p_1 + 2p_{-1}] &= R(r) (3/4\pi)^{1/2} \eta\mu\theta \cos\phi = (3/4\pi)^{1/2} x/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = p_x \\ (1/2)^{1/2} [2p_1 - 2p_{-1}] &= - (1/2)^{1/2} R(r) (3/4\pi)^{1/2} \eta\mu\theta \eta\mu\phi = - (3/4\pi)^{1/2} y/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = p_y\end{aligned}$$

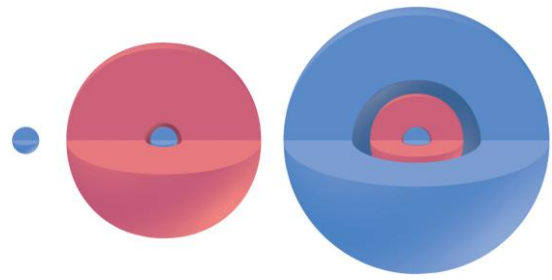
οπότε προκύπτουν γραμμικοί συνδυασμοί τροχιακών οι οποίοι αποτελούν πραγματικά τροχιακά (real orbitals) και, έτσι, μπορούν να σχεδιαστούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Κάθε ένα από τα συγκεκριμένα πραγματικά τροχιακά συμβολίζεται με το σύμβολο των τροχιακών που περιλαμβάνει (π.χ. p) φέροντας ως δείκτη το σύμβολο του καρτεσιανού άξονα στον οποίο εκτείνεται (x και y , αντίστοιχα). Το πραγματικό τροχιακό p_0 λαμβάνει το σύμβολο p_z .

Η απεικόνιση γραμμικών συνδυασμών ενεργειακά εκφυλισμένων τροχιακών, δηλ. τροχιακών ίδιας στιβάδας και υποστιβάδας, αντί των στοιχειωδών τροχιακών που προκύπτουν ως λύσεις του Schrödinger είναι αποδεκτή διότι η εξίσωση είναι γραμμική δηλ. οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός λύσεων της είναι επίσης μια άλλη λύση της.

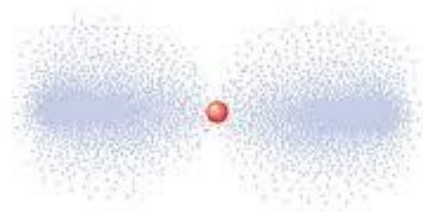
Για να σχεδιαστούν τα εν λόγω πραγματικά τροχιακά, οι εξισώσεις τους εισάγονται σε υπολογιστή και, με το πέρασμα του χρόνου σχεδιάζεται μια κουκκίδα στη θέση που βρίσκεται το ηλεκτρόνιο κάθε στιγμή. Έτσι, λαμβάνονται εικόνες με περισσότερο ή λιγότερο στικτά μέρη τα οποία υποδηλώνουν, αντίστοιχα, μεγαλύτερη και μικρότερη πυκνότητα της πιθανότητας εύρεσης του ηλεκτρονίου σε εκείνη την περιοχή του χώρου, σε συμφωνία με τη συμπεριφορά της ακτινικής συνάρτησης $R(r)$ και της γωνιακής συνάρτησης Y_{ℓ}^m (**εικόνα 8**):



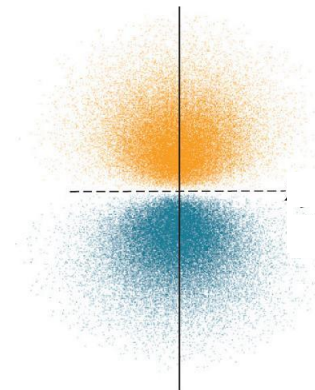
(α)



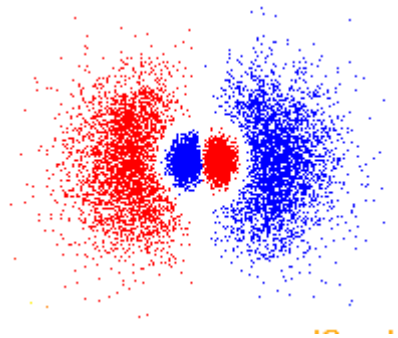
(β)



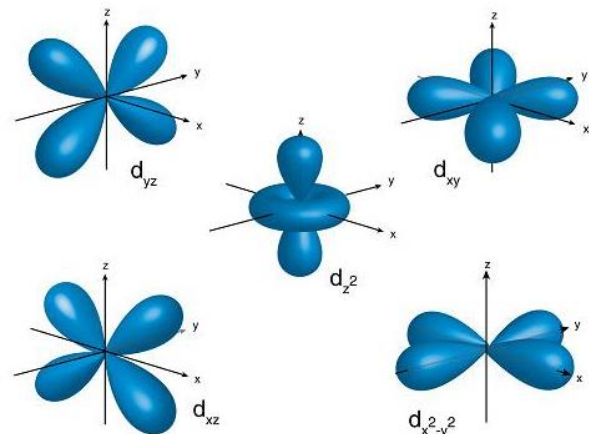
(γ)



(δ)



(ε)



(ζ)

Εικόνα 8. (α), (β): αναπαραστάσεις κοκκίδων και τα αντίστοιχα χωροπληρωτικά μοντέλα των $1s$, $2s$, $3s$ · (γ), (δ): αναπαραστάσεις κοκκίδων τροχιακών $2p$ διαφορετικού προσανατολισμού · (ε): αναπαράσταση κοκκίδων του $3p$ · (ζ): χωροπληρωτικά μοντέλα των πέντε τροχιακών d .

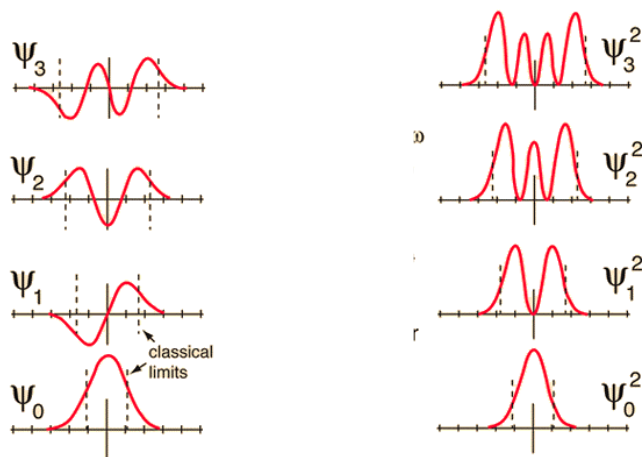
Τα τροχιακά s έχουν σφαιρική συμμετρία, ενώ τα υπόλοιπα τροχιακά, όχι.

Τα χωροπληρωτικά μοντέλα δεν πρέπει να εκληφθούν ως περιχαράκωση του χώρου που μπορεί να βρεθεί το ηλεκτρόνιο. Ακόμη, ένα ανώτερο τροχιακό, π.χ. το 3s στην **εικόνα 8** σχηματίζεται λαμβάνοντας υπόψη όλες τις απεικονιζόμενες κουκκίδες του σχήματος και όχι μόνο τις εξώτερες μπλε κουκκίδες. Σημειωτέον, οι κουκκίδες δεν αντιπροσωπεύουν το ίδιο το ηλεκτρόνιο αλλά τη θέση του ηλεκτρονίου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Οι εν λόγω παρανοήσεις είναι αναγνωρισμένες στη βιβλιογραφία (**πίνακας 1** του **παραρτήματος**).

Οι γραφικές παραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη ρουτίνα της διδασκαλίας των τροχιακών και των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων είναι εκείνες των ψ , ψ^2 και $4\pi r^2\psi^2$. Ας παρατεθούν μερικά στοιχεία τους:

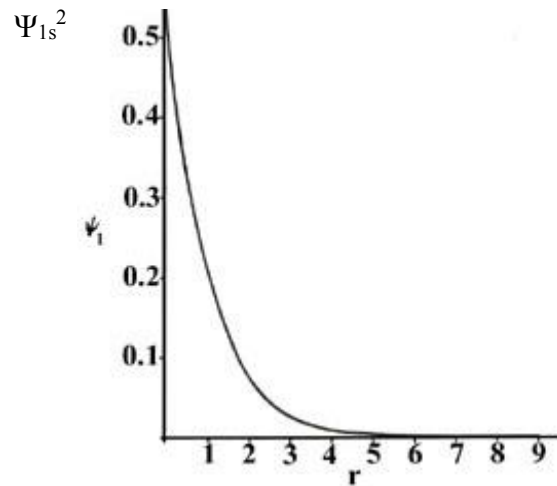
Οι γραφικές παραστάσεις του ψ είναι οι παραστάσεις των καθαυτών τροχιακών. Σε αυτές, μπορούν να διακριθούν οι φάσεις ταλάντωσης.

Οι γραφικές παραστάσεις του ψ^2 είναι οι παραστάσεις της πυκνότητας της πιθανότητας του να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σε ορισμένη απόσταση από τον πυρήνα. Σε αυτές δεν διακρίνονται οι φάσεις ταλάντωσης, καθώς έχουν χαθεί κατά τον τετραγωνισμό (**εικόνα 9**) ο οποίος δίνει την απόλυτη τιμή του μιγαδικού που είναι, εν γένει, μια κυματοσυνάρτηση. Οι γραφικές παραστάσεις του ψ^2 τείνουν να έχουν λιγότερο σφαιρικούς λοβούς (δηλ. περισσότερο κωδωνοειδείς ή απιοειδείς) από ό,τι οι γραφικές παραστάσεις της ψ , αλλά έχουν τον ίδιο αριθμό λοβών στους ίδιους τόπους, οπότε, είναι, κατά τα άλλα, αναγνωρίσιμες.



Εικόνα 9. Αντιστοίχιση των γραφικών παραστάσεων της ψ και της ψ^2 .

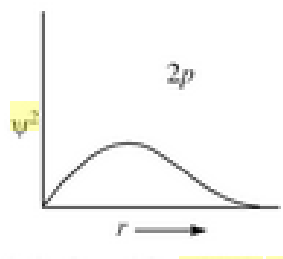
Η πυκνότητα του ηλεκτρονιακού νέφους του τροχιακού 1s (δηλ. το Ψ_{1s}^2) είναι μέγιστη στον πυρήνα και μικραίνει όσο απομακρυνόμαστε χωρίς ποτέ, όμως, να μηδενίζεται, όπως φαίνεται στην **εικόνα 10**:



Απόσταση από τον πυρήνα.

Εικόνα 10. $\psi_{1s}^2(r)$

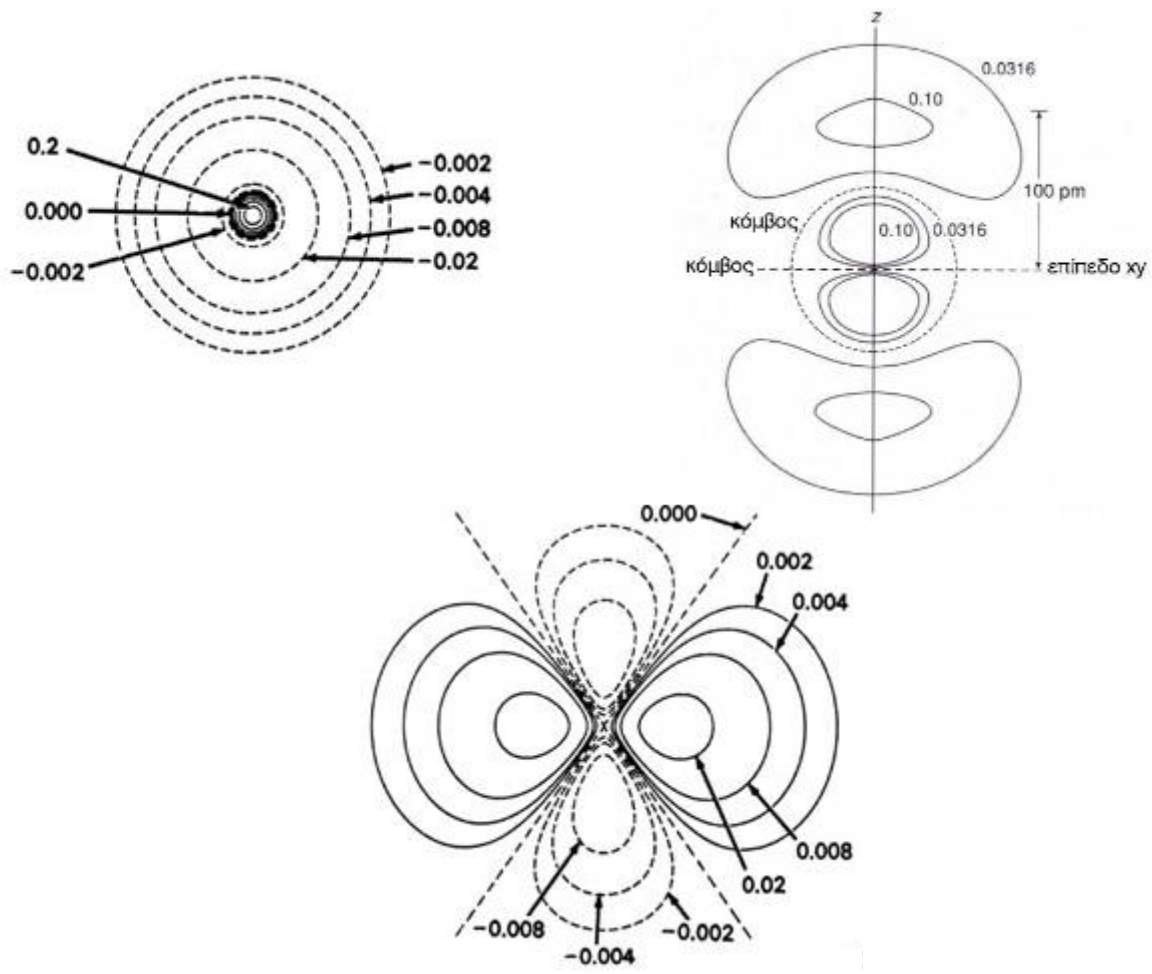
Όμως, η πυκνότητα του ηλεκτρονιακού νέφους των τροχιακών p, είναι μηδενική στον πυρήνα και μέγιστη σε κάποιο άλλο σημείο, στην ακτίνα του Bohr, όπως φαίνεται στην **εικόνα 11**:



Εικόνα 11. $\psi_{2p}^2(r)$

Ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης του ψ^2 μπορεί να γίνει με τις **ισόπυκνες καμπύλες**, δηλαδή με διαγράμματα ίσης ηλεκτρονιακής πυκνότητας κατά μήκος του περιγράμματος (contour) όπως δείχνεται στην **εικόνα 12**. Αντιστοιχούν στις ισοϋψείς καμπύλες που χρησιμοποιούνται στη γεωγραφία

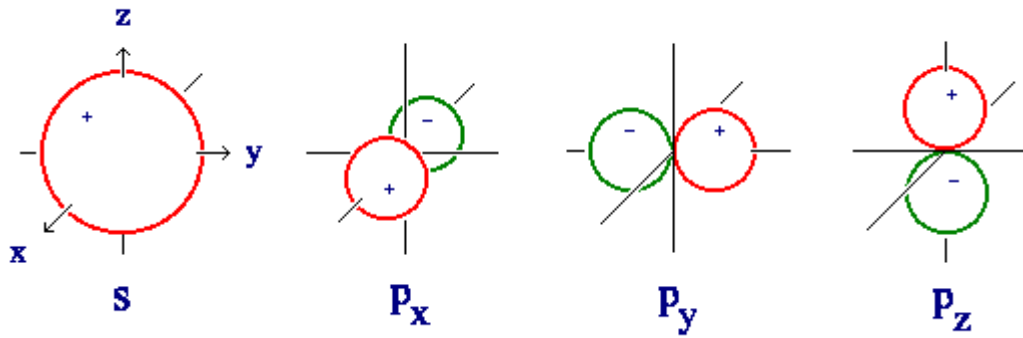
για να δείξουν την τοπογραφία και στις ισοβαρείς καμπύλες που χρησιμοποιούνται στη μετεωρολογία για να δείξουν την ατμοσφαιρική πίεση.



Εικόνα 12. Ισόπικνες ηλεκτρονιακής κατανομής των 2s, 3pz και 3d, αντίστοιχα.

Οι τιμές που αναγράφονται στις καμπύλες εκφράζουν το κλάσμα της ηλεκτρονιακής πυκνότητας ενώ τα πρόσημα εκφράζουν το πρόσημο της κυματοσυνάρτησης παρόλο που το απεικονιζόμενο μέγεθος, το ψ^2 , είναι πάντα θετικό.

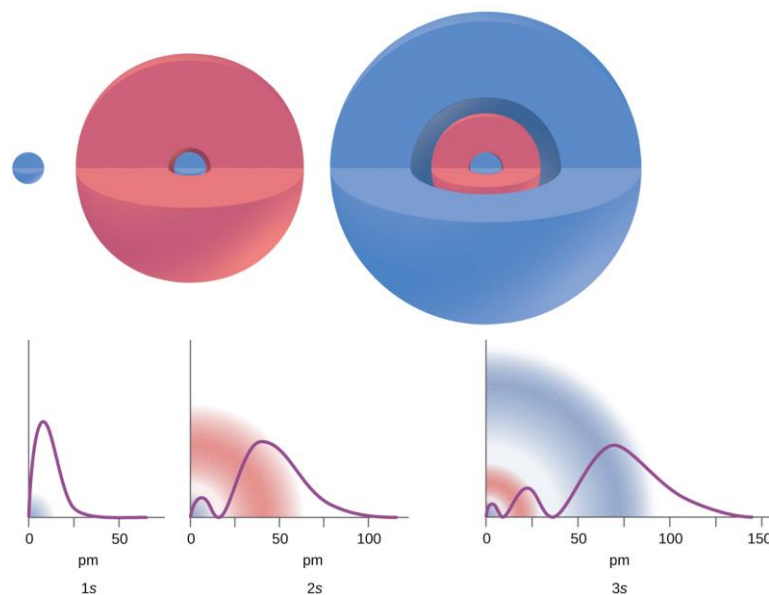
Επειδή το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί και πολύ μακριά από τον πυρήνα, οπότε δυσκολεύεται η αναπαράσταση, ορίζεται μια περιοχή του χώρου με πιθανότητα εύρεσης 90, 95 ή 99% παρέχοντας αναπαραστάσεις όπως αυτές τις **εικόνας 13**:



Εικόνα 13. Περιγράμματα των τροχιακών 1s, 2_x, 2_y και 2_z.

Η αναπαράσταση μόνο μέσω των περιγραμμάτων δεν πρέπει να εκληφθεί ως λέγουσα ότι το ηλεκτρόνιο διατρέχει το περίγραμμα των σχημάτων.

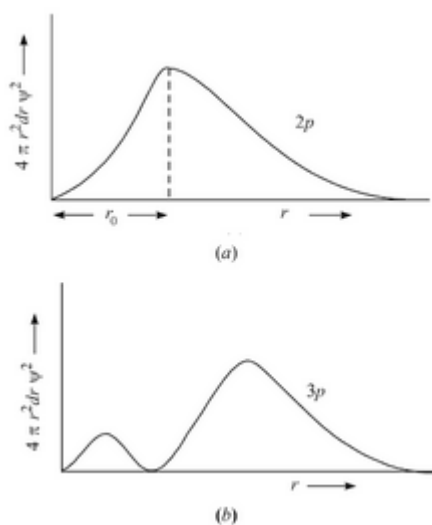
Οι γραφικές παραστάσεις του $4\pi r^2 \psi^2(r)$ είναι οι παραστάσεις της πυκνότητας της πιθανότητας του να βρεθεί το ηλεκτρόνιο επί σφαίρας ακτίνας r ⁵. Η πυκνότητα πιθανότητας αυτού του είδους μεγιστοποιείται, πάλι, στην ακτίνα Bohr. Π.χ., για τα τροχιακά s (**εικόνα 14**):



Εικόνα 14. Η συνάρτηση $4\pi r^2 \psi^2(r)$ των τροχιακών 1s, 2s και 3s.

⁵ Αυτό προκύπτει από το ότι η πιθανότητα του να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σε στοιχείο όγκου dV εσωτερικής ακτίνας r και εξωτερικής ακτίνας $r + dr$ είναι $R^2 dV = R^2 d(4\pi r^3/3) = R^2 4\pi r^2 dr$.

Ομοίως, μεγιστοποίηση στην ακτίνα του Bohr, γίνεται και στην $4\pi^2 \psi^2(r)$ των τροχιακών p (εικόνα 15):



Εικόνα 15. Η συνάρτηση $4\pi^2 \psi^2(r)$ των τροχιακών 2p και 3p.

(Housecroft, C.E., Sharpe, A.G., 2001).

Τα σχετικιστικά τροχιακά, έχουν άλλα σχήματα, π.χ., κάποια p γίνονται σφαιρικά ενώ άλλα διατηρούν λοβούς, και κάποια d μοιάζουν με s και p ενώ άλλα διατηρούν λοβούς, κ.ο.κ. Αυτό γίνεται σημαντικό στα βαρύτερα μέταλλα, π.χ. κοντά στον Cu (White, H.E., 1931; Szabo, A., 1969).

2.12. Κομβικές επιφάνειες και κομβικά επίπεδα

Τα σημεία που δεν μπορεί να υπάρξει το ηλεκτρόνιο είναι τα σημεία μηδενισμού της ψ . Ονομάζονται κομβικά, ή, διατηρώντας την ορολογία των στάσιμων κυμάτων, δεσμικά σημεία (nodes).

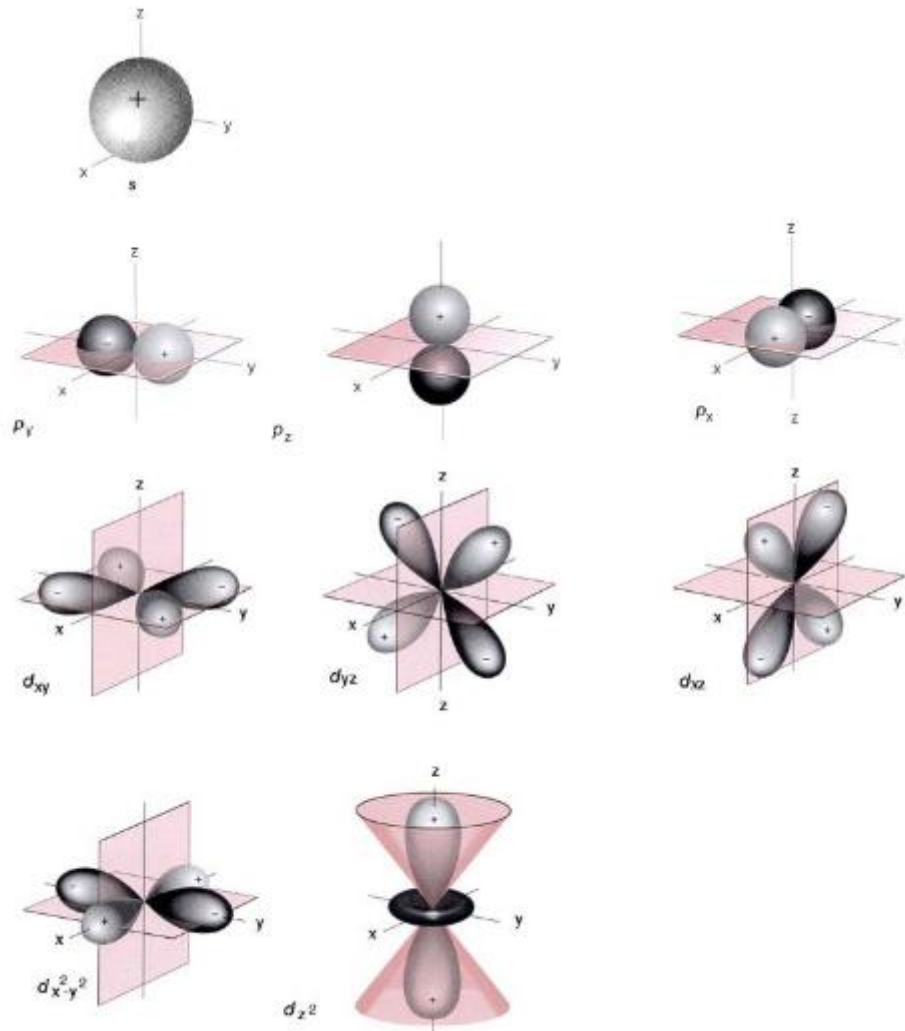
Δεδομένου ότι

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi),$$

πρόκειται για τα σημεία μηδενισμού είτε του ακτινικού μέρους $R(r)$ (οπότε λαμβάνονται **ακτινικά κομβικά σημεία**, radial nodes), είτε του γωνιακού μέρους Y_l^m (οπότε λαμβάνονται **γωνιακά κομβικά σημεία**, angular nodes).

Στην περίπτωση τριδιάστατων σχημάτων, όπως είναι τα σχήματα των τροχιακών και των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων, τα κομβικά σημεία μπορούν να αποτελούν ένα επίπεδο, οπότε μιλάμε για κομβικό επίπεδο (nodal plane), ή μια καμπύλη επιφάνεια οπότε μιλάμε για κομβική επιφάνεια (nodal

surface). Συγκεκριμένα, τα ακτινικά κομβικά σημεία αποτελούν καμπύλες επιφάνειες, πιο συγκεκριμένα, σφαίρες, και τα γωνιακά κομβικά σημεία αποτελούν είτε επίπεδα, είτε κωνική επιφάνεια (εικόνα 16):



Εικόνα 16. Γραφική παράσταση του γωνιακού μέρους των τροχιακών s , p και d . Με μοβ σκίαση φαίνονται τα κομβικά επίπεδα και, στην περίπτωση του d_{z^2} , η κωνική κομβική επιφάνεια.

Το πλήθος ακτινικών κομβικών σημείων είναι $(n-l-1)$, το πλήθος γωνιακών κομβικών σημείων είναι l , οπότε το πλήθος όλων των κομβικών σημείων είναι $(n-1)$. Στο πλήθος $(n-1)$ δεν ενέχεται η ακτινική κομβική επιφάνεια του απείρου που πρέπει να προσμετρηθεί επιπλέον, ούτε ενέχεται ο πυρήνας.

Όσο περισσότερες είναι οι κομβικές επιφάνειες μιας ηλεκτρονιακής πυκνότητας, τόσο η ηλεκτρονιακή πυκνότητα είναι μετατοπισμένη προς τον πυρήνα, άρα, τόσο χαμηλότερη είναι η ενέργεια των ηλεκτρονίων με την εν λόγω πυκνότητα.

Στις σχετικιστικές ηλεκτρονιακές πυκνότητες, οι δεσμοί, ή, κόμβοι μετατρέπονται σε ψευδο-κόμβους, δηλ. σε σημεία στα οποία η ψ είναι πολύ κοντά στο μηδέν όμως δεν μηδενίζεται. Ως αποτέλεσμα, **στα σχετικιστικά τροχιακά του ατόμου του υδρογόνου δεν υπάρχουν κομβικές επιφάνειες** (White, H.E., 1931· Szabo, A., 1969).

Για αυτό, η θεώρηση των σχετικιστικών ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων αντί της θεώρησης των μη σχετικιστικών είναι μια από τις προτεινόμενες απαντήσεις στη συνήθη απορία των εκπαιδευομένων «**πως το ηλεκτρόνιο ταξιδεύει μεταξύ ετερόσημων λοβών, π.χ. μεταξύ των λοβών της πυκνότητας του τροχιακού p_x , αφού θα πρέπει να διέλθει από κομβικό σημείο**» (Nelson, P.G., 1990).

3. Στοιχεία κυματικής

Κύμα:

μια διάδοση διαταραχής ενός πεδίου και ενέχει την ταλάντωση κάποιου μεγέθους. Προέρχεται από το αρχαιοελληνικό ρήμα κύω, δηλ. φουσκώνω. Κάθε κύμα μεταφέρει ορμή, δηλ. ενέργεια.

Κλασικά, τα κύματα θεωρούνταν υλικά, μηχανικά, δηλ. απαιτούσαν κάποιο μέσο διάδοσης. Π.χ., ο ήχος δεν διαδίδεται στο κενό. Ο Huygens πρότεινε για πρώτη φορά ότι και το φως είναι κύμα αλλά άυλο (Huygens, C., 1690), σε αντίθεση με την επικρατούσα πεποίθηση του Νεύτωνα ότι το φως ήταν δέσμη σωματιδίων. Ο Young επιβεβαίωσε την κυματική φύση του φωτός το 1802 (Young, T., 1802) με το πείραμα των δύο σχισμών. Από την εποχή των εξισώσεων του Maxwell είναι γνωστό ότι φως είναι ένα ηλεκτρικό πεδίο και ένα μαγνητικό πεδίο που ταλαντώνονται κάθετα μεταξύ τους και κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης. Για αυτό, αποδίδεται στο φως ο όρος ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Ακόμη, είναι γνωστό ότι το φως διαδίδεται και στο κενό, δηλ. πρόκειται για την περίπτωση ενός άυλου κύματος.

Με κριτήριο τον αριθμό των χωρικών διαστάσεων στις οποίες διαδίδεται ένα κύμα, τα κύματα μπορούν να διαδίδονται σε έναν άξονα (μονοδιάστατα κύματα), σε δύο κάθετους άξονες (διδιάστατα ή επίπεδα κύματα) ή σε τρεις κάθετους άξονες (τριδιάστατα κύματα).

Με κριτήριο το ποιο είναι το πεδίο διάδοσης, εκτός από τα μηχανικά κύματα (μεταξύ άλλων: ήχος, σεισμικά κύματα, κύματα σοκ) και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, υπάρχουν, μεταξύ άλλων, τα βαρυτικά κύματα (διαταραχές του βαρυτικού πεδίου). Επιπλέον, σήμερα είναι γνωστές ταλαντούμενες χημικές αντιδράσεις, δηλ. αντιδράσεις στις οποίες η συγκέντρωση τουλάχιστον ενός συμμετέχοντος σώματος κυμαίνεται περιοδικά μεταξύ δύο τιμών (π.χ., η αντίδραση Belousov-Zhabotinsky).

Με κριτήριο τη διεύθυνση ταλάντωσης του ταλαντούμενου μεγέθους ως προς τον άξονα διάδοσης, τα κύματα διακρίνονται σε διαμήκη, όταν η ταλάντωση γίνεται παράλληλα με τον άξονα διάδοσης, και σε εγκάρσια, όταν η ταλάντωση γίνεται κάθετα προς τον άξονα διάδοσης. Ενώ τα μηχανικά κύματα μπορούν να είναι είτε διαμήκη, είτε εγκάρσια, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια.

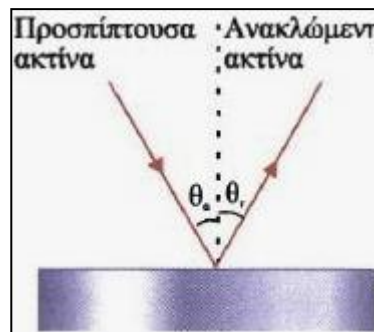
Θεωρείται ότι όλα τα κύματα έχουν κάποιες κοινές ιδιότητες: διάδοση, απορρόφηση, περίθλαση, πόλωση, ανάκλαση, διάθλαση και συμβολή.

Διάδοση

Η διάδοση σε κάθε μέσο είναι διαφορετική. Σε κάθε μέσο το κύμα έχει διαφορετική ταχύτητα, διαφορετικό μήκος κύματος, αλλά ίδια συχνότητα. Μια σταθερά που μας δείχνει τη συμπεριφορά κύματος μέσα σε ένα μέσο διάδοσης είναι ο δείκτης διάθλασης του μέσου: $n = c / u$, όπου c , η ταχύτητα του φωτός στο κενό και u , η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο μέσο. Π.χ., $n_{H_2O} = 1,33$, δηλ. το φως ταξιδεύει 1,33 φορές γρηγορότερα στο κενό από ό,τι στο νερό.

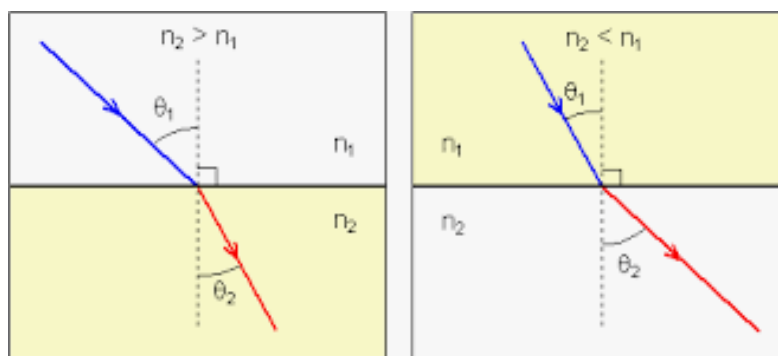
Ανάκλαση:

η επιστροφή κύματος στο μέσο διάδοσης κατά την πρόσπτωση του σε διεπιφάνεια (επιφάνεια διαχωρισμού από άλλο μέσο). Σε κάθε ανάκλαση, η γωνία πρόσπτωσης (η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση διάδοσης του προσπίπτοντος κύματος με την κάθετη στη διεπιφάνεια) ισούται με τη γωνία ανάκλασης (τη γωνία που σχηματίζει η κάθετη στη διεπιφάνεια με τη διεύθυνση διάδοσης του ανακλώμενου κύματος).



Διάθλαση:

η συνέχιση κύματος σε άλλο μέσο διάδοσης κατά την πρόσπτωση του σε διεπιφάνεια. Η διεύθυνση διάδοσης του διαθλώμενου κύματος μπορεί είτε να συγκλίνει προς την κάθετο στη διεπιφάνεια, είτε να αποκλίνει από την κάθετο στη διεπιφάνεια ανάλογα με τη σχέση που έχουν μεταξύ τους οι δείκτες διάθλασης των δύο μέσων: όταν το δεύτερο μέσο έχει μικρότερο δείκτη διάθλασης, ο άξονας διάδοσης του διαθλώμενου κύματος αποκλίνει από την κάθετο, ενώ σε μέσο με μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης, ο άξονας διάδοσης του διαθλώμενου κύματος συγκλίνει προς την κάθετο.



Η διάθλαση εκφράζεται με τον νόμο του Snell: $(\eta\mu\theta_1 / \eta\mu\theta_2) = u_1 / u_2 = n_2 / n_1$, όπου u , η ταχύτητα διάδοσης σε κάθε μέσο.

Στην περίπτωση που ο δείκτης διάθλασης του δεύτερου μέσου διάδοσης είναι μικρότερος από τον δείκτη διάθλασης του πρώτου μέσου διάδοσης και, επιπλέον, η γωνία πρόσπτωσης γίνει μεγαλύτερη από μια κρίσιμη τιμή, τότε γίνεται ολική ανάκλαση. Η ολική ανάκλαση αξιοποιείται στις **οπτικές ίνες**.

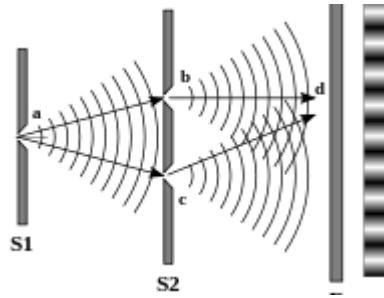
Κατά την πρόσπτωση ενός κύματος σε μια διεπιφάνεια, ένα μέρος μπορεί να ανακλαστεί και το υπόλοιπο μέρος μπορεί να διαθλαστεί.

Συμβολή:

η αλγεβρική πρόσθεση (υπέρθθεση) του πλάτους δύο κυμάτων. Συντελείται όταν διαδίδονται στο ίδιο μέσο, με την ίδια διεύθυνση. Όταν οι φάσεις τους συμπίπτουν ($\Delta\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) τότε τα πλάτη τους προστίθενται απολύτως, δηλ. γίνεται ενισχυτική συμβολή (constructive interference), ενώ όταν οι φάσεις τους είναι αντίθετες ($\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), τότε τα πλάτη τους αφαιρούνται απολύτως, δηλ. γίνεται ακυρωτική συμβολή (destructive interference).

Εναλλακτικά διατυπωμένο, εφόσον τηρούνται οι αναφερθείσες προϋποθέσεις της συμβολής, όταν συναντιέται όρος με όρος και κοιλάδα με κοιλάδα, τότε το συνιστάμενο πλάτος είναι το άθροισμα των μεμονωμένων πλατών, ενώ όταν συναντιέται όρος με κοιλάδα, τότε το συνιστάμενο πλάτος είναι μηδενικό.

Ειδικά όσον αφορά το φως, η συμβολή παρατηρήθηκε μέσω του πειράματος των δύο σχισμών επιβεβαιώνοντας την κυματική φύση του φωτός: μονοχρωματικό φως που διέρχεται από δύο παράλληλες σχισμές εύρους συγκρίσιμου με το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτός επάγει εναλλασσόμενες φωτεινές και σκοτεινές ζώνες, κροσσούς συμβολής, στο πέτασμα πίσω από τις σχισμές το οποίο υποδηλώνει κυματική συμπεριφορά (**εικόνα 17**).

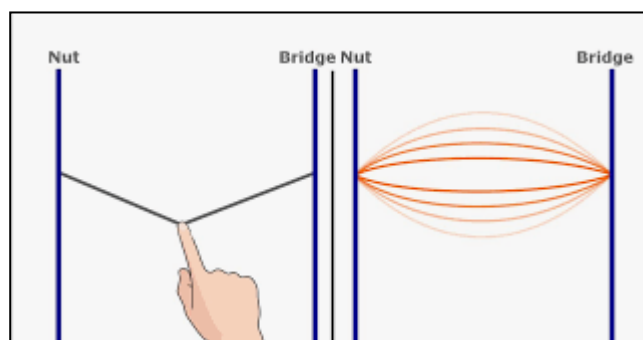


Εικόνα 17. Πλάτος σχισμών π.χ. 150 μm και απόσταση μεταξύ των κέντρων των σχισμών π.χ. 600 μm (από: Pearson, B.J., Eferris, N., Strauss, R., Li, H., Jackson, D.P., 2018).

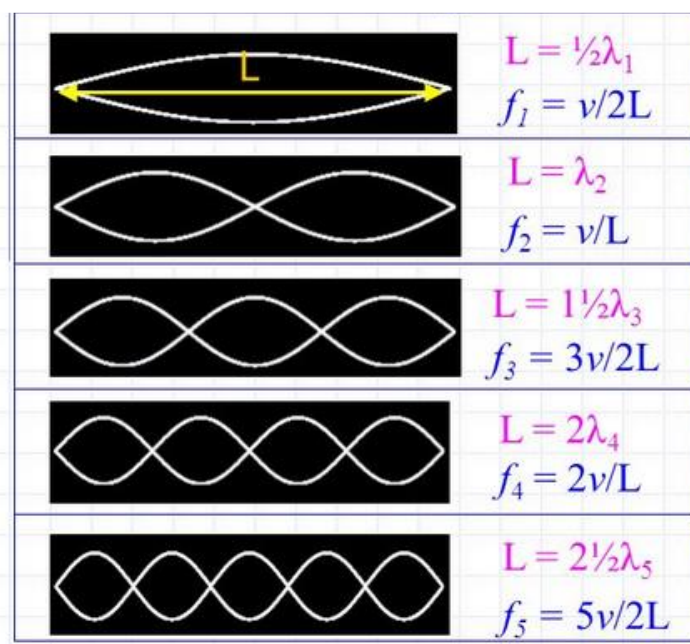
(Όταν τα εύρη των σχισμών και/ή η απόσταση των σχισμών είναι σημαντικά μεγαλύτερα από το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτός και/ή η απόσταση των σχισμών από το πέτασμα είναι πολύ μικρή τότε παρατηρούνται στο πέτασμα απλώς δύο φωτεινές περιοχές).

Στάσιμα κύματα

Ειδικά στην περίπτωση της συμβολής υπό ίσες συχνότητες, ίσα πλάτη αλλά και αντίθετη φορά, η συμβολή οδηγεί σε συνύπαρξη ενισχυτικών και ακυρωτικών συμβολών. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία του μέσου διάδοσης, πλέον, δεν ταλαντώνονται όλα όσο το πλάτος των επί μέρους ταλαντώσεων, αλλά άλλα σημεία ταλαντώνονται με αυξημένο πλάτος (κοιλίες) και άλλα δεν ταλαντώνονται καθόλου (δεσμοί ή κόμβοι). Τα συνιστάμενα κύματα καλούνται στάσιμα κύματα. Δηλαδή, συνοψίζοντας, **στάσιμα κύματα είναι τα κύματα που προκύπτουν από την ενισχυτική και ακυρωτική συμβολή δύο απλών (δηλ. μη στάσιμων' αλλιώς: μονοχρωματικών) κυμάτων ίδιας διεύθυνσης, ίδιας συχνότητας, ίδιου πλάτους και αντίθετης φοράς (εικόνα 18)**. Άλλη περίπτωση επαγωγής τους είναι η μετατόπιση του μέσου διάδοσης κατά φορά αντίθετη από τη φορά διάδοσης:

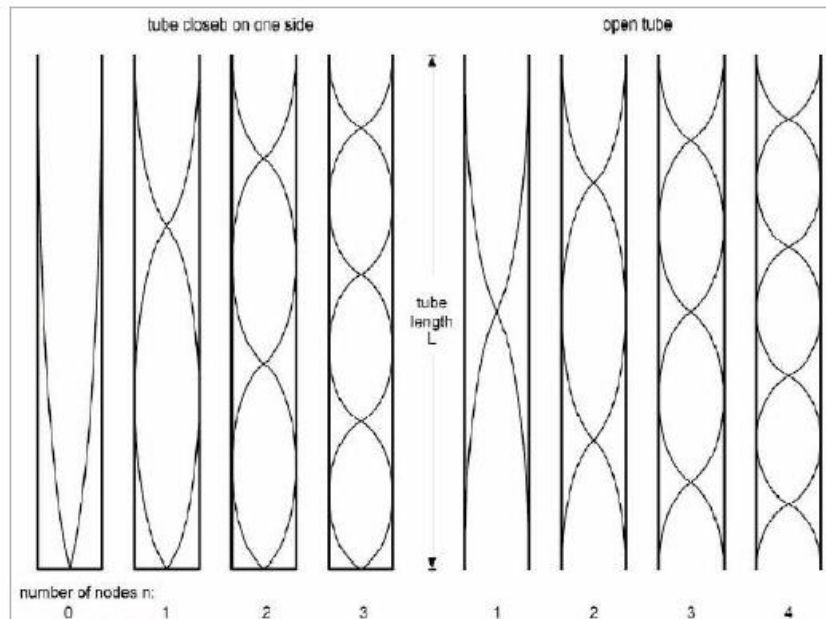


Εικόνα 18. Αντιπροσωπευτική αναπαράσταση μονοδιάστατου στάσιμου κύματος.



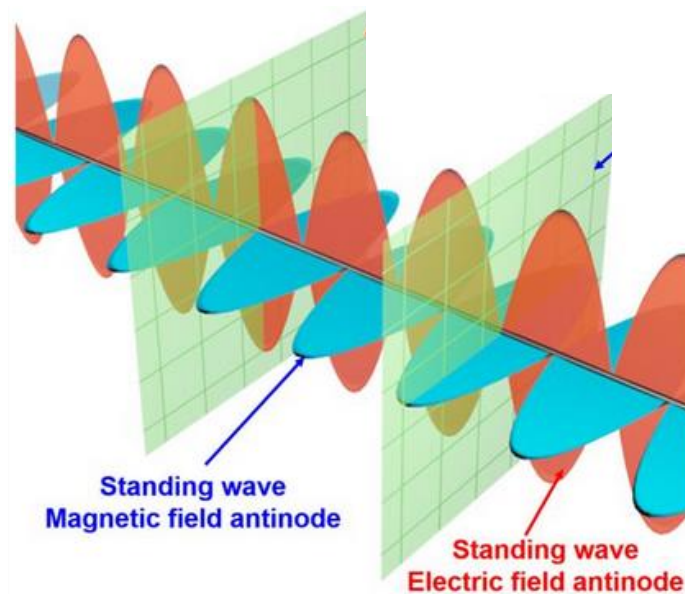
Εικόνα 19. Στάσιμα κύματα με διαδοχικά μήκη κύματος που διαφέρουν κατά $\lambda/2$. Π.χ., στο πρώτο από πάνω κύμα παρατηρούνται 2 κόμβοι και 1 κοιλία, ενώ στο πέμπτο κύμα παρατηρούνται 6 κόμβοι και 5 κοιλίες.

Μια ενδεχόμενη παρανόηση για τα στάσιμα κύματα είναι ότι για να προκύψουν χρειάζονται καθήλωση των άκρων τους, όπως π.χ. φαίνεται στις **εικόνες 19 20**, και όπως γίνεται, π.χ., στις τεντωμένες χορδές μιας κιθάρας. Ωστόσο, **στάσιμα κύματα μπορούν να εμφανιστούν σε μια χορδή με ένα, με δύο ή με κανένα καθηλωμένο άκρο** όπως φαίνεται στην **εικόνα 20**. **Η ύπαρξη τους δεν εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες που θα επιβάλουμε στο μέσο διάδοσης τους. Από τις οριακές συνθήκες, όμως, εξαρτάται η ειδική εξίσωση τους και το σχήμα τους** όπως φαίνεται στην **εικόνα 20** όσον αφορά το σχήμα (για έναν κατάλογο με τις ειδικές εξισώσεις μονοδιάστατου στάσιμου κύματος υπό κάθε οριακή συνθήκη: Σημειώσεις διαλέξεων. (2012). Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης, κεφάλαιο 5, Waves II, https://www2.physics.ox.ac.uk/sites/default/files/2012-09-04/waves2_pdf_16294.pdf).



Εικόνα 20. Σωλήνας με ένα κλειστό άκρο στα αριστερά, ανοικτός σωλήνας στα δεξιά. Στο ελεύθερο άκρο προκύπτει πάντα κοιλία και στο καθηλωμένο άκρο πάντα δεσμός. Εξάρτηση του σχήματος των στάσιμων κυμάτων που σχηματίζονται από τις περιοριστικές συνθήκες.

Στάσιμα κύματα δεν σχηματίζουν μόνο τα μηχανικά κύματα αλλά και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, π.χ., στον φούρνο μικροκυμάτων (π.χ., Saslow, W., 2002, σ. 659). Τα στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι περίπτωση τριδιάστατου στάσιμου κύματος (**εικόνα 21**):



Εικόνα 21. Το αναπαριστάμενο στάσιμο ηλεκτρομαγνητικό κύμα δεν διαδίδεται κατά τον εικονιζόμενο άξονα· τα πεδία E και B , απλώς, ταλαντώνονται κάθετα στον άξονα. Σημειώνονται οι κοιλίες του κάθε πεδίου.

Σε όλες τις περιπτώσεις στάσιμου κύματος, (π.χ., μονοδιάστατου, διδιάστατου, ηλεκτρομαγνητικού κύματος) **όταν τα όρια είναι ελεύθερα** συμμετέχουν στην ταλάντωση και, μάλιστα, **συνιστούν κοιλίες, ενώ τα κλειστά όρια** δεν συμμετέχουν στην ταλάντωση, δηλ. **συνιστούν δεσμούς** (Fleisch, D., Kinnaman, L., 2015) (εικόνα 20).

Συντονισμός:

η εξίσωση της συχνότητας του διεγέρτη και της συχνότητας ταλάντωσης. Κατά τον συντονισμό συντρέχει μεγιστοποίηση του πλάτους της ταλάντωσης. Αυτή η μεγιστοποίηση συνιστά και εναλλακτικό ορισμό του συντονισμού.

Εάν δοθεί έμφαση στον ορισμό του συντονισμού ως μεγιστοποίηση του πλάτους ταλάντωσης, τότε ανακύπτει αυθόρμητα ότι τα στάσιμα κύματα, εξ' ορισμού τους, βρίσκονται σε κατάσταση συντονισμού (Fang, T., 2007· Augoyard J., Torgue, H., 2014, σ. 99, 104), κάτι το οποίο, ειδιάλλως, είναι, ίσως, λιγότερο προφανές.

Πίνακας 3. Η ορολογία που αφορά ορισμένες ενδεικτικές συχνότητες συντονισμού (ιδιοσυχνότητες), άρα, και τα στάσιμα κύματα που θα προέκυπταν από αυτές. Ειδικά στην περίπτωση στάσιμου κύματος σε χορδή (δηλ. μονοδιάστατου στάσιμου κύματος), οι ιδιοσυχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας στοιχειώδους συχνότητας.

Συχνότητα	Αύξων αρ.			
$1 \cdot f = 440 \text{ Hz}$	$n = 1$	θεμελιώδη συχνότητα	1 ^η αρμονική	1 st partial
$2 \cdot f = 880 \text{ Hz}$	$n = 2$	1 ^η υπέρτονος	2 ^η αρμονική	2 nd partial
$3 \cdot f = 1320 \text{ Hz}$	$n = 3$	2 ^η υπέρτονος	3 ^η αρμονική	3 rd partial
$4 \cdot f = 1760 \text{ Hz}$	$n = 4$	3 ^η υπέρτονος	4 ^η αρμονική	4 th partial

Κυματική εξίσωση

Το 1746, ο d'Alembert ανακάλυψε την εξίσωση του μονοδιάστατου απλού (δηλ. μη στάσιμου) ηχητικού κύματος (D'Alembert, Jean Le Rond, 1747) και, σε 10 χρόνια, ο Euler ανακάλυψε την εξίσωση του τριδιάστατου απλού κύματος (Remarques sur les Memoires précédens de M. Bernoulli, 1755· Speiser, D., 2008). Το 1755, ο Bernoulli εισήγαγε την έννοια του στάσιμου ηχητικού κύματος (Bernoulli, D., 1755· Bhatia, R., 2005, σ. 3), με τον όρο στάσιμο κύμα να υιοθετείται το 1860 (Melde, F., 1860· Alwyn, S., 2006, σ. 683). Η γενική εξίσωση μονοδιάστατου κύματος είναι:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

με y την κυματοσυνάρτηση, δηλ. τη συνάρτηση θέσης των σημείων ταλάντωσης και u , την ταχύτητα του κύματος. Είναι μια γραμμική, ομοιογενής, μερικώς διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης, με εξαρτημένη μεταβλητή την τεταγμένη y και με ανεξάρτητες μεταβλητές την τεταγμένη, x , και τον χρόνο, t (D'Alembert, Jean Le Rond, 1747).

Το πιο απλό κύμα που περιγράφεται μαθηματικά είναι το ημιτονοειδές ή αρμονικό.

$$y(x,t) = A(x,t) \eta\mu(kx - \omega t + \varphi),$$

όπου A , το πλάτος, του κύματος ως, εν γένει, συνάρτηση του x και του t , k , ο κυματάριθμος, ω , η κυκλική συχνότητα, και φ , η φάση.

Συνθετότερα κύματα μπορούν, ενίοτε, να αναλυθούν σε άθροισμα πολλών αρμονικών κυμάτων.

Συσχέτιση ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων/τροχιακών και ακουστικής

Είναι γνωστό ότι ο De Broglie εξήγαγε τη θεωρία δυϊσμού του ηλεκτρονίου από την παρατήρηση του ότι στο μοντέλο του Bohr για το άτομο του υδρογόνου επιτρέπονταν ορισμένες μόνο τροχιές (**παρ. 2.2.**) προκειμένου το ηλεκτρόνιο να μην «πέφτει» στον πυρήνα λόγω έλξης από το ετερόνυμο φορτίο. Στην εποχή του ήταν γνωστό ότι ορισμένα μόνο σχήματα εμφανίζει και το στάσιμο κύμα. Έτσι, οδηγήθηκε στην εικασία ότι το ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται -ενίοτε- ως στάσιμο κύμα.

Επομένως, ο Schrödinger παρήγαγε την εξίσωση του «απλώς» εφαρμόζοντας στα υποατομικά σωματίδια την εξίσωση που περιγράφει ένα κύμα (κυματική εξίσωση). Ωστόσο, ο Schrödinger δεν χρειάστηκε να λύσει ο ίδιος τις διαφορικές εξισώσεις. Ήξερε τις λύσεις γιατί ήταν ήδη γνωστές το 1926: η αρχή του νήματος των διαφορικών είχε ήδη ξετυλιχτεί από τον Νεύτωνα στο 2ο κεφάλαιο του *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*, όπου είχαν εισαχθεί για πρώτη φορά τρία είδη διαφορικών εξισώσεων και οι λύσεις τους. Το 1695, ο J. Bernoulli εισήγαγε τη διαφορική εξίσωση Bernoulli και έναν χρόνο αργότερα ο Leibniz την είχε λύσει (Leibniz, G.W., 1695). Μετά τη λύση τους, οι διαφορικές εξισώσεις δεν περιήλθαν στα αμιγώς θεωρητικά μαθηματικά που στερούνται πρακτική εφαρμογή, αλλά δουλεύτηκαν και άλλο στην ακουστική (μελέτη του ήχου): το 1746, ο d'Alembert ανακάλυψε την εξίσωση του μονοδιάστατου, μη στάσιμου ηχητικού κύματος (D'Alembert, Jean Le Rond, 1747) και, σε 10 χρόνια, ο Euler ανακάλυψε την εξίσωση του τριδιάστατου, μη στάσιμου κύματος (*Remarques sur les Memoires precedens de M. Bernoulli*, 1755· Speiser, D., 2008). Το 1755, ο Bernoulli εισήγαγε την έννοια του στάσιμου ηχητικού κύματος (Bernoulli, D., 1755· Bhatia, R., 2005, MAA, σ. 3), με τον όρο στάσιμο κύμα να υιοθετείται το 1860 (Melde, F., 1860· Alwyn, S., 2006, σ. 279).

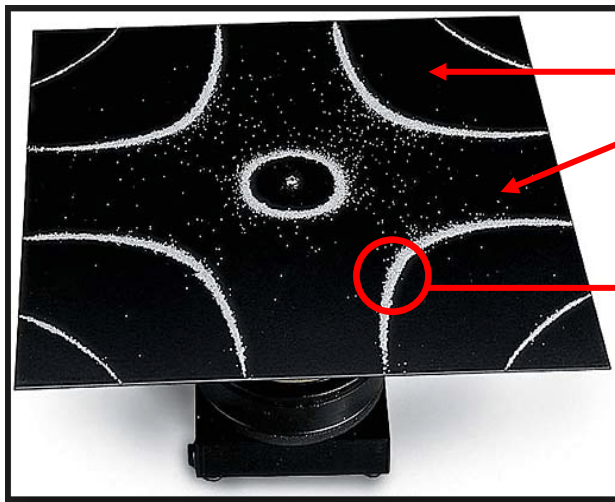
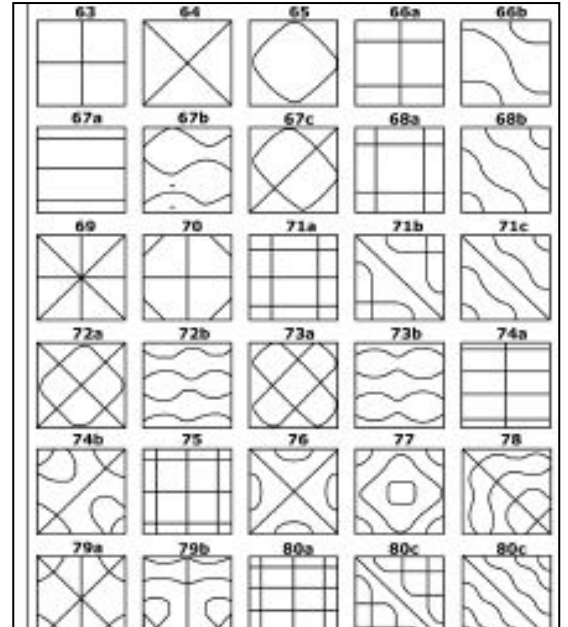
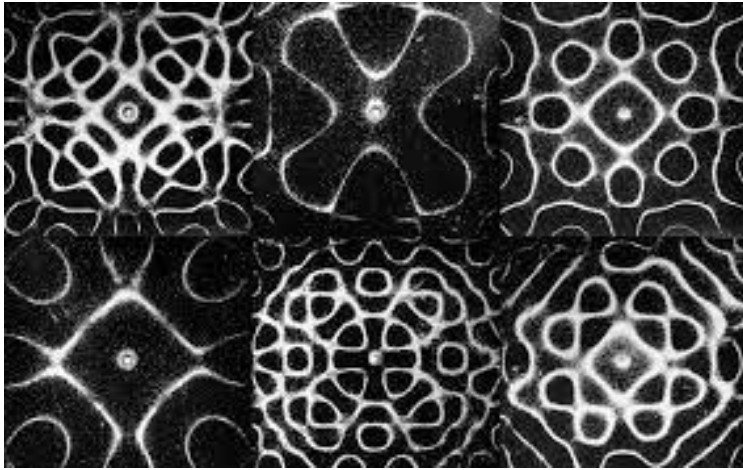
Το γεγονός ότι **τα μαθηματικά θεμέλια της σύγχρονης κβαντομηχανικής είναι τα μαθηματικά της ακουστικής** εξηγεί το γιατί η προσέγγιση της κβαντομηχανικής κατά Schrödinger καλείται και **κυματομηχανική** (εγκυκλοπαίδεια Britannica) (σε αντιδιαστολή με τη μηχανική των μητρών και τα ολοκληρώματα δρόμου).

Έτσι, **η επιλογή μιας πειραματικής δραστηριότητας της ακουστικής**, εν προκειμένω των σχημάτων Chladni, **για τη διδασκαλία των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων**, με αφορμή την ομοιότητα των σχημάτων σε επιλεγμένες περιπτώσεις, **φαίνεται δικαιολογημένη**. Ειδικά, η ζωντανή επίδειξη ενός στάσιμου κύματος είναι πολύ καλός τρόπος περιγραφής της κυματικής συμπεριφοράς αφού **ρωτώντας γιατί τα ηλεκτρόνια σχηματίζουν μόνο ορισμένα τροχιακά είναι σαν να ερωτάται πως η χορδή της κιθάρας ξέρει τι ήχο να βγάλει όταν δονείται ή πως οι κόκκοι του αλατιού ξέρουν σε τι σχήματα να συσσωρευτούν όταν δονείται η πλάκα** (κβάντωση).

4. Σχήματα Chladni

4.1. Τι είναι τα σχήματα Chladni και αιτιολόγηση της χρήσης τους στην πρόταση διδασκαλίας

Αναζητώντας μια πειραματική δραστηριότητα που να σχετίζεται με σχήματα ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων καταλήξαμε στο φαινόμενο, ευρύτερα γνωστό από το 1802, που σήμερα καλείται **σχήματα Chladni** (Chladni E.F.F., 1802), τα οποία οφείλονται σε **διδιάστατα στάσιμα κύματα** (π.χ., Natta, G., Farina, M., 1972, σ. 39-41· Hutchins, C., 1981· Hansen, U., 2009· Harvard Natural Sciences Lecture Demonstrations, 2019) (**εικόνα 22**).



Μη κομβική επιφάνεια (antinodal surface)

Κομβική γραμμή (nodal line)

Εικόνα 22. Αριστερά: σχήματα Chladni που παράγονται μέσω του σύγχρονου τρόπου που αξιοποιεί γενήτρια δονήσεων. Δεξιά: σχέδια των σχημάτων που αποκόμισε ο Chladni δονώντας μια σιδερένια πλάκα που είχε άμμο πάνω της με το δοξάρι του βιολιού του (από: Chladni E.F.F., 1802). Οι γραμμές αποτελούνται από κομβικά σημεία.

Κατά τη δόνηση της πλάκας γίνονται ενισχυτικές και ακυρωτικές συμβολές μεταξύ των κυμάτων. Στις περιπτώσεις εκείνες στις οποίες επέρχεται συντονισμός, **τα σημεία της πλάκας που ταλαντώνονται (μη κομβικά σημεία, anti-nodes)** αποδιώχνουν το υλικό επικάλυψης (μαγειρικό άλας ή άμμο) πάνω στην επιφάνεια της πλάκας, ενώ **τα σημεία που δεν ταλαντώνονται (δεσμοί, ή, κόμβοι, nodes)** δημιουργούν γραμμές που εμφανίζονται λόγω συσσώρευσης του υλικού επικάλυψης. Αλλιώς διατυπωμένο, το υλικό πάνω στην επιφάνεια οδεύει και σωρεύεται προς τα σημεία στα οποία το υλικό

έχει χαμηλότερη ενέργεια, δημιουργώντας εμφανείς γραμμές. Το φαινόμενο οφείλεται στο ίδιο είδος κύματος που παρατηρείται στον συντονισμό σύρματος σπιδάλ με καθηλωμένο το ένα άκρο, μια επίδειξη που αποτελεί τη συνηθέστερη επίδειξη στάσιμου κύματος σε μια σχολική τάξη. Η διαφορά είναι ότι **στο φαινόμενο της διδακτικής πρότασης μας τα κύματα διαδίδονται όχι σε μία, αλλά σε δύο χωρικές διαστάσεις**. Οι ηλεκτρονιακές πυκνότητες, πάλι, γύρω από τον πυρήνα του ατόμου του υδρογόνου έχουν κατανομή στάσιμου κύματος η οποία κατανομή εκτείνεται στις τρεις χωρικές διαστάσεις.

Έτσι, οι τρεις περιπτώσεις δεν ταυτίζονται: εξελίσσονται σε διαστάσεις διαφορετικού πλήθους και, επιπλέον, **στο σύρμα σπιδάλ και στα σχήματα Chlandi δημιουργούνται μηχανικά στάσιμα κύματα, ενώ στις ηλεκτρονιακές πυκνότητες το στάσιμο κύμα αφορά την κατανομή των πυκνοτήτων των πιθανοτήτων** (κατά την ερμηνεία Born). Ωστόσο, **οι τρεις περιπτώσεις εμφανίζουν αναλογία με αποτέλεσμα την ομοιότητα μερικών σχημάτων Chladni με τα σχήματα των εν λόγω πυκνοτήτων** κατόπιν προβολής των ισόπυκνων καμπυλών ορισμένης πιθανότητας σε μη κομβικό επίπεδο που περιέχει δύο από τους καρτεσιανούς άξονες. **Η ανάδειξη αυτής της αναλογίας συνιστά τον σκοπό της εργασίας.**

Τα σχέδια Chladni ενδιαφέροντος, ταξινομημένα με τρόπο που διευκολύνει την ανάδειξη της αναλογίας παρέχονται στην **εικόνα 23**.

Διάμετροι →
Κόκκοι

↓
0

1

2

3

4

5

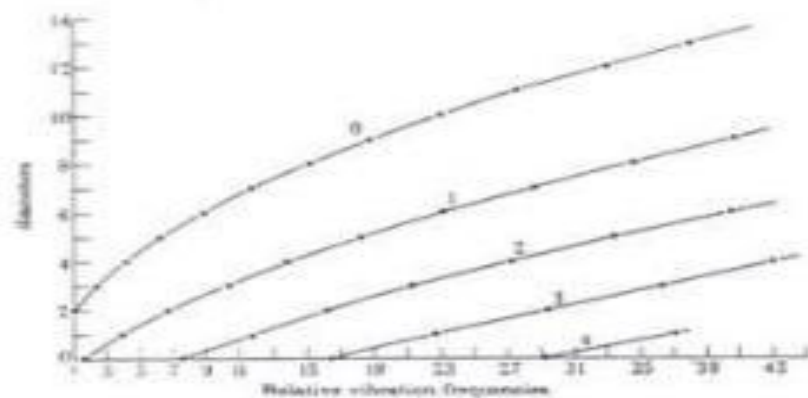
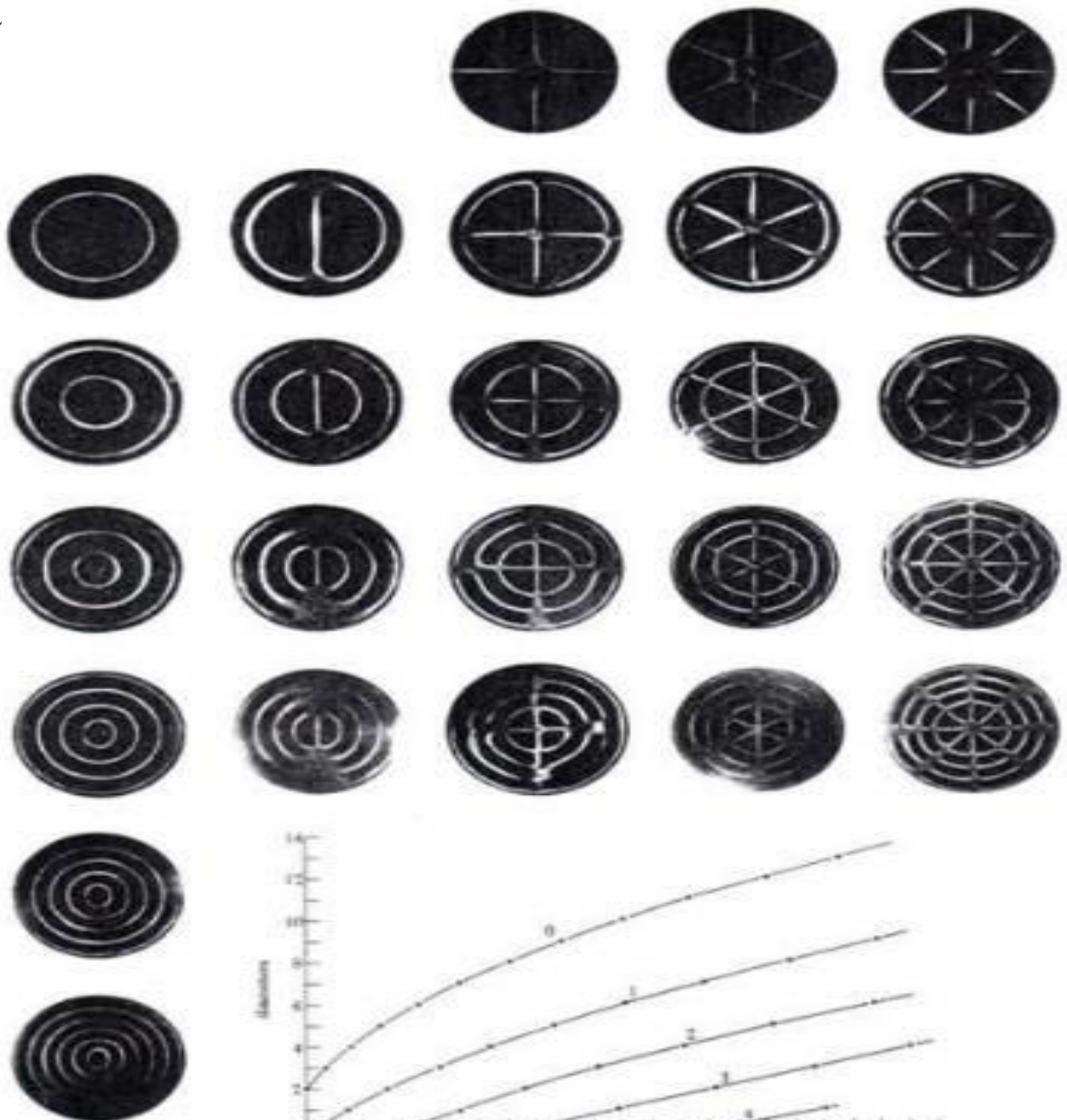
6

1

2

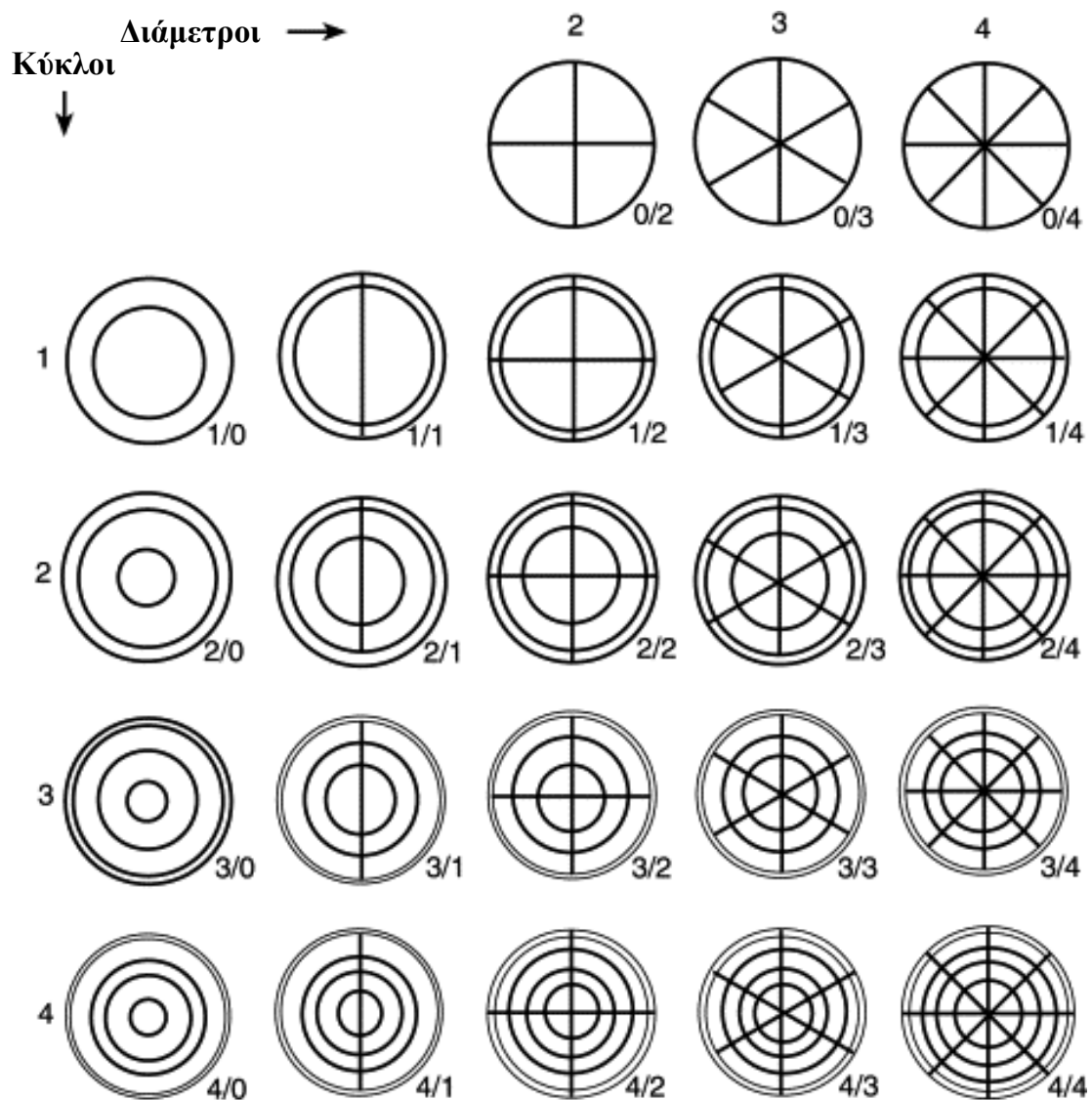
3

4



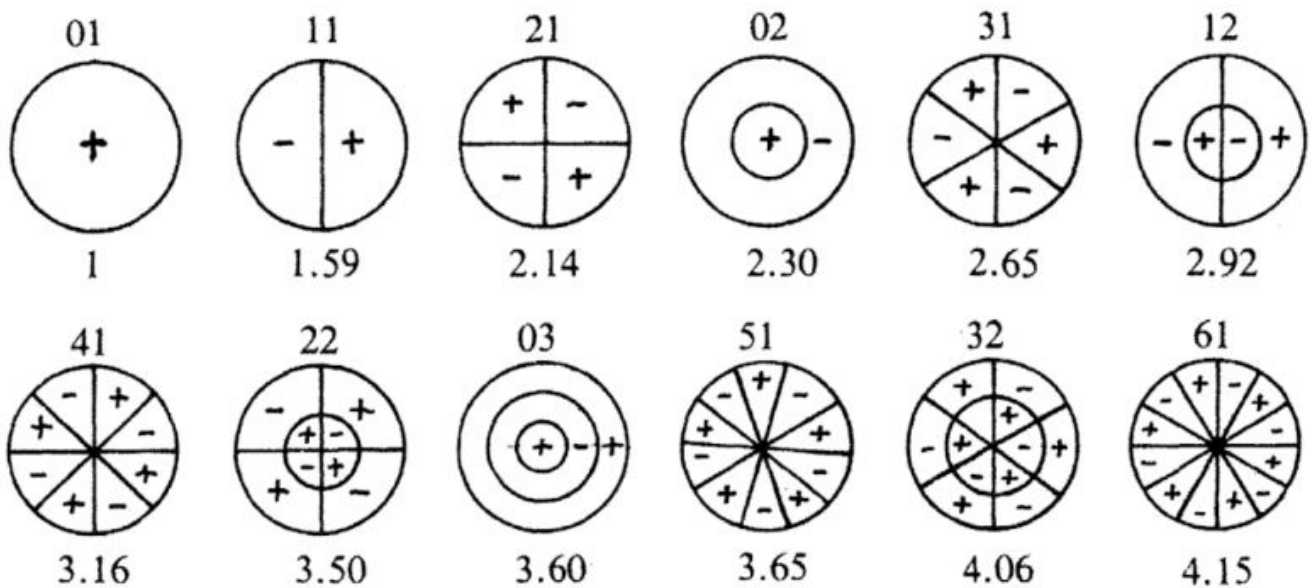
Εικόνα 23. Σχήματα Chladni σε κυκλική μεμβράνη ελεύθερων άκρων υπό διάφορες ιδιοσυχνότητες. Φαίνονται δύο είδη συμμετρίας, ακτινική και κυκλική, που μπορούν να συνυπάρχουν. Προς τα κάτω αυξάνει το πλήθος των κυκλικών κομβικών γραμμών. Προς τα δεξιά αυξάνει το πλήθος των ακτινικών κομβικών γραμμών (από: Main, P., 2015, σ. 19).

Προκειμένου να εντυπωθούν καλύτερα τα σχήματα Chladni ενδιαφέροντος με αυτήν την ταξινόμηση, δίνονται και ως σχέδια, στις αντίστοιχες θέσεις (έχουν παραλειφθεί τα δύο κατώτερα σχήματα της πρώτης στήλης) στην **εικόνα 24**:



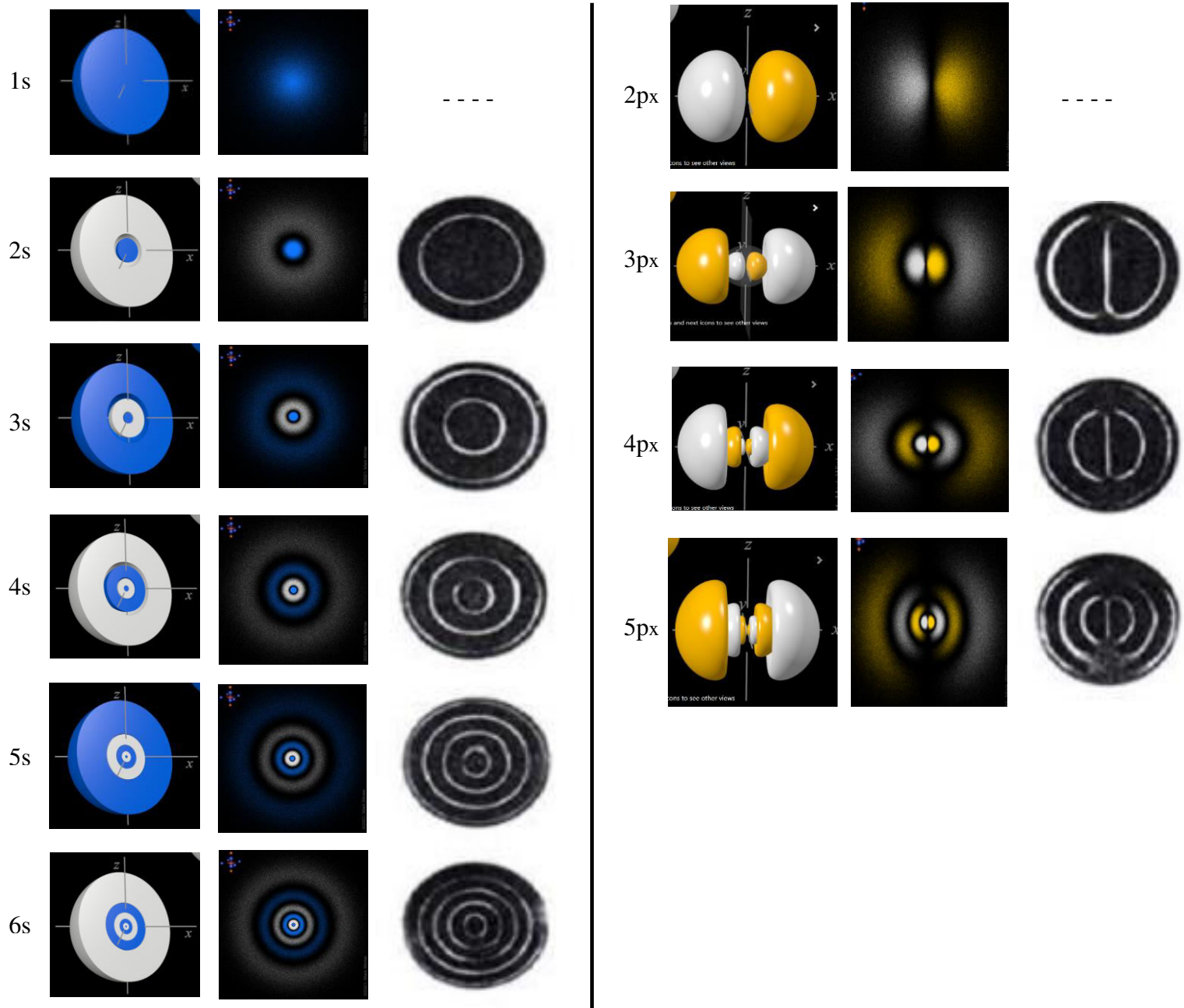
Εικόνα 24: τα σχέδια των σχημάτων Chladni της **εικόνας 23** πλην των δύο κατώτερων σχημάτων της πρώτης στήλης. Οι δύο αριθμοί δίπλα σε κάθε κύκλο είναι το πλήθος κυκλικών κομβικών γραμμών ακολουθούμενο από το πλήθος ακτινικών κομβικών γραμμών. Σε κάθε σχέδιο, ο εξώτερος κύκλος αναπαριστά την κυκλική πλάκα (η εικόνα από: *Errede, S., 2017*· μερικά από τα σχήματα, διαφορετικά ταξινομημένα από: *Chladni, E.F.F., 1787*· όλα τα σχήματα, διαφορετικά ταξινομημένα από: *Radez, M., 2001*).

Προς διευκόλυνση της οπτικοποίησης των ταλαντώσεων που εκτελούν οι πλάκες των σχημάτων Chladni ενδιαφέροντος, σημειώνονται με πρόσημα οι φάσεις μερικών ταλαντώσεων τους στην **εικόνα 25**.

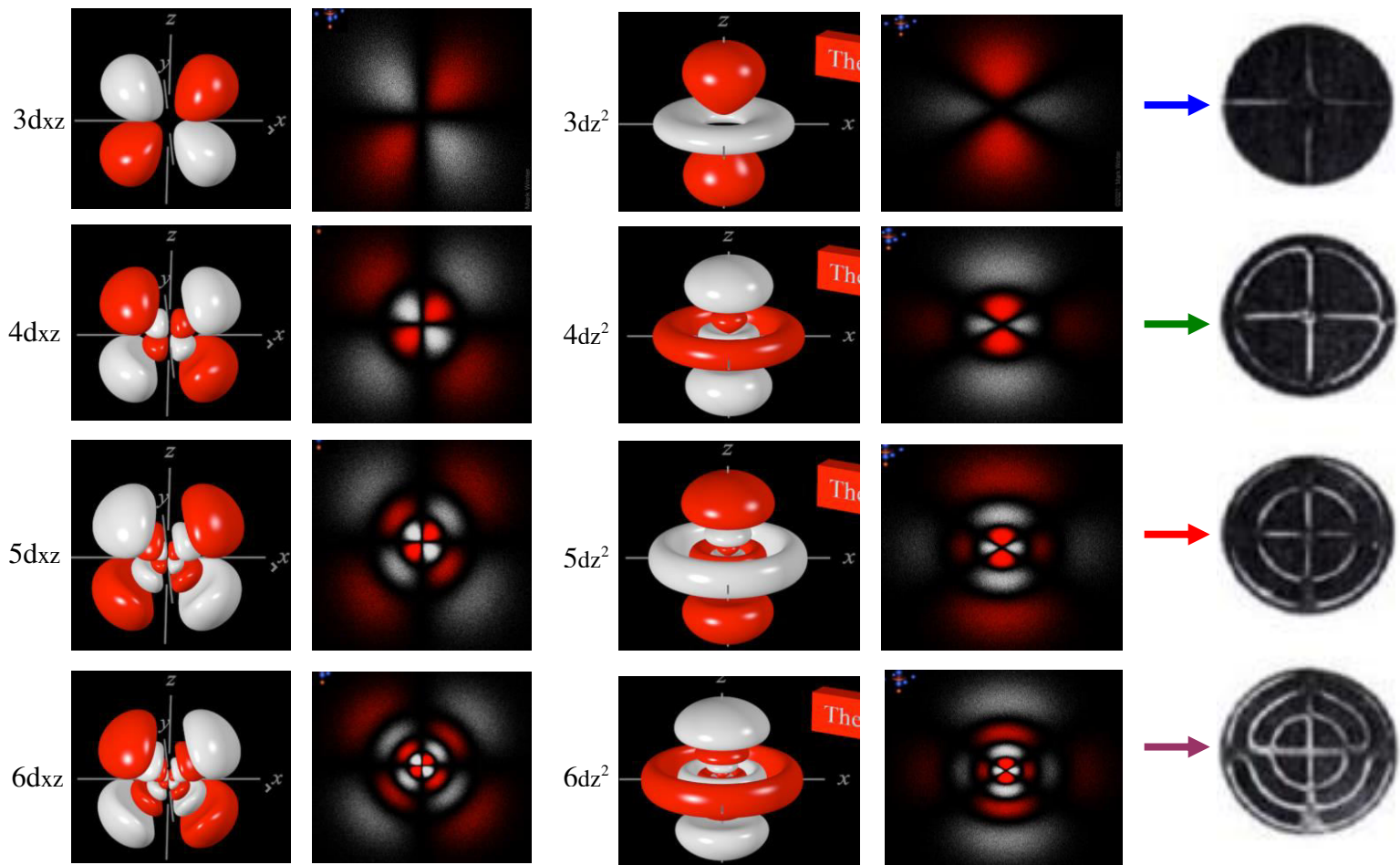


Εικόνα 25. Σχέδια ταλαντούμενης ιδανικής κυκλικής μεμβράνης καθλωμένων άκρων. Με πρόσημα σημειώνονται οι φάσεις της ταλάντωσης. Οι δύο αριθμοί πάνω από κάθε κύκλο είναι το πλήθος ακτινικών κομβικών γραμμών ακολουθούμενο από το πλήθος κυκλικών κομβικών γραμμών. Κάτω από κάθε κύκλο σημειώνεται η ιδιοσυχνότητα κάθε ταλάντωσης ως κλάσμα ως προς τη θεμελιώδη συχνότητα (από: Politzer, D., 2018, σ. 16). Σε κάθε σχέδιο, ο εξώτερος κύκλος αναπαριστά την κυκλική περίμετρο που αποτελεί κομβική επιφάνεια. Οι φάσεις ταλαντώσεων υπό ορισμένες ιδιοσυχνότητες καθώς και οι ιδιοσυχνότητες λαμβάνονται υπόψη από τους σχεδιαστές μηχανών με ταλαντούμενα εξαρτήματα, π.χ. ραπτικών μηχανών.

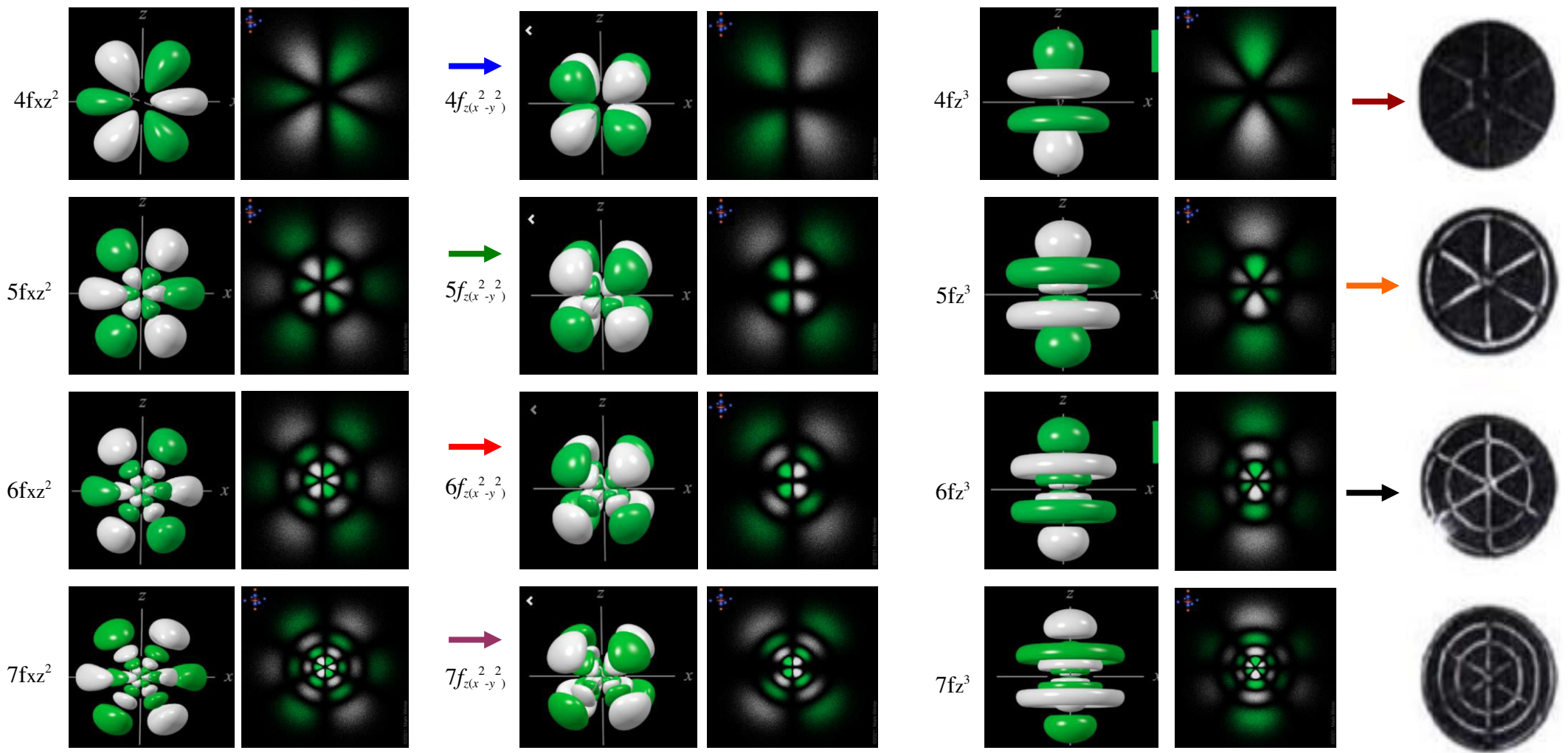
Η αναλογία αναδεικνύεται εκτενώς στις **εικόνες 26, 27, 28** και **29**.



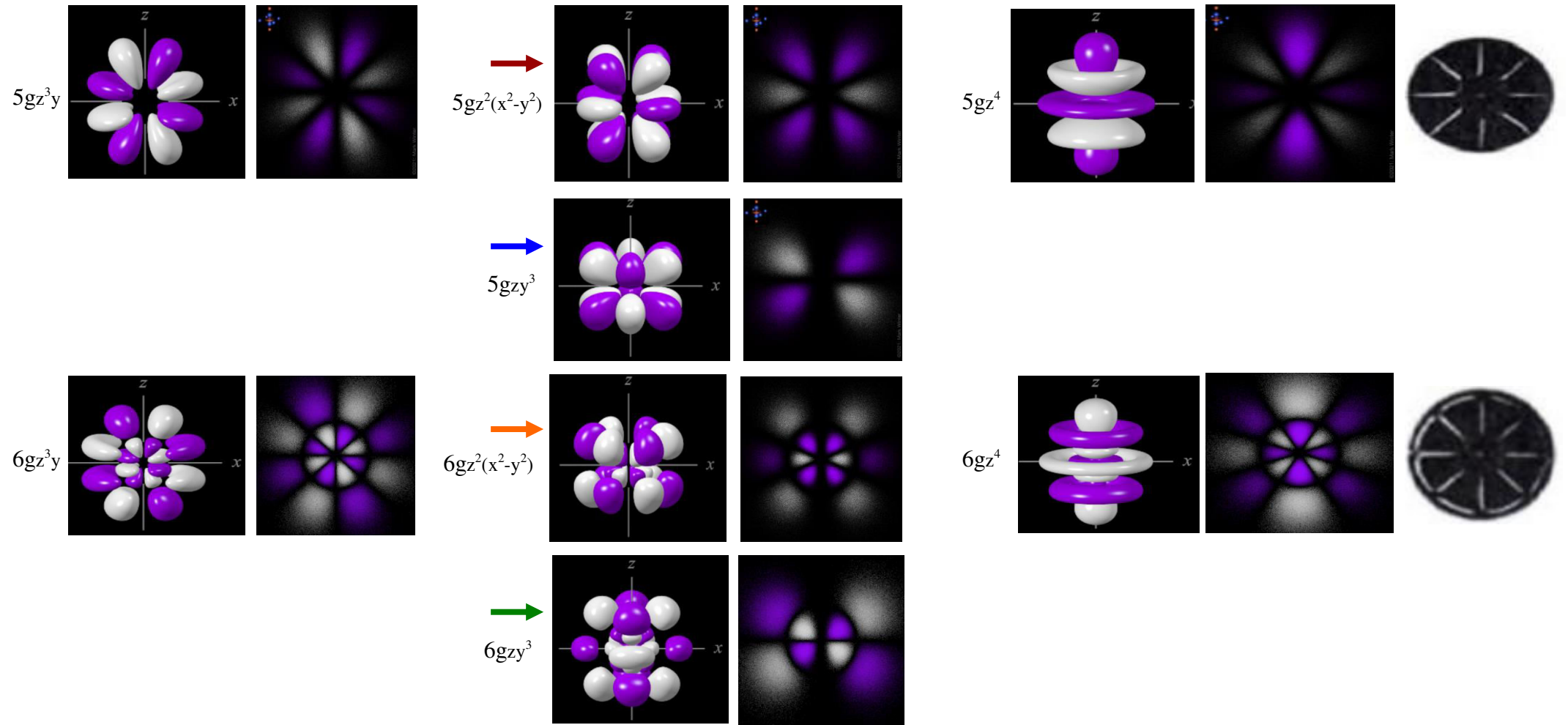
Εικόνα 26. Από αριστερά, πρώτη στήλη: τομές των χωροπληρωτικών μοντέλων των τροχιακών $1s$ έως $6s$ προκειμένου να απεικονιστεί και το εσωτερικό μέρος των τροχιακών· δεύτερη στήλη: προβολές των αντίστοιχων τροχιακών της πρώτης στήλης· τρίτη στήλη: τα σχήματα Chladni που θυμίζουν της αντίστοιχες προβολές τις δεύτερης στήλης· τέταρτη στήλη: χωροπληρωτικά μοντέλα των τροχιακών $2p_x$ έως $6p_x$ · πέμπτη στήλη: προβολές των αντίστοιχων τροχιακών της τέταρτης στήλης· έκτη στήλη: τα σχήματα Chladni που θυμίζουν τις αντίστοιχες προβολές της πέμπτης στήλης. Οι προβολές παράχθηκαν μέσω μιας υπολογιστικής μεθόδου Monte Carlo (χωροπληρωτικά μοντέλα και προβολές αυτών από: Winter, M., 2002-2021· σχήματα Chladni από: Main, P., 2015, σ. 19). Στις κυκλικές πλάκες ελεύθερων άκρων δεν προκύπτει σχήμα Chladni που να αντιστοιχεί στα τροχιακά $1s$ και $2p$.



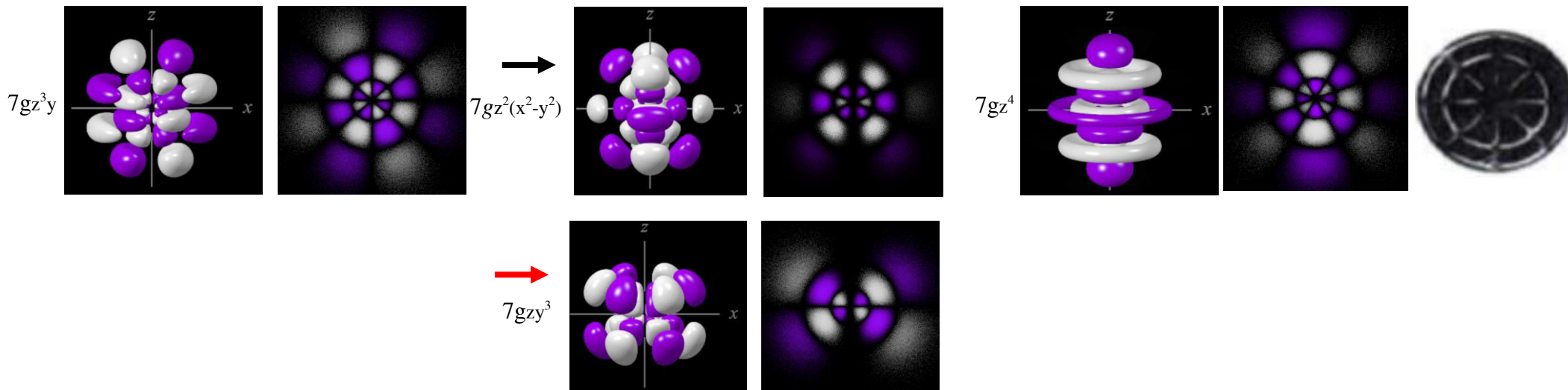
Εικόνα 27. Από αριστερά, πρώτη στήλη: χωροπληρωτικά μοντέλα των τροχιακών $3dxz$ έως $7dxz$ · δεύτερη στήλη: προβολές των αντίστοιχων τροχιακών της πρώτης στήλης· τρίτη στήλη: χωροπληρωτικά μοντέλα των τροχιακών $3dz^2$ έως $7dz^2$ · τέταρτη στήλη: προβολές των αντίστοιχων τροχιακών της τέταρτης στήλης· πέμπτη στήλη: τα σχήματα Chladni που θυμίζουν τις αντίστοιχες προβολές της δεύτερης στήλης· ωστόσο και της τέταρτης στήλης κατόπιν περιστροφής 45° . Οι προβολές παράχθηκαν μέσω μιας υπολογιστικής μεθόδου Monte Carlo (χωροπληρωτικά μοντέλα και προβολές αυτών από: Winter, M., 2002-2021· σχήματα Chladni από: Main, P., 2015, σ. 19).



Εικόνα 28. Από αριστερά, πρώτη στήλη: χωροπληρωτικά μοντέλα των τροχιακών $4fxz^2$ έως $7fxz^2$ · δεύτερη στήλη: προβολές των αντίστοιχων τροχιακών της πρώτης στήλης· τρίτη στήλη: χωροπληρωτικά μοντέλα των τροχιακών $4f_{z(x^2-y^2)}$ έως $7f_{z(x^2-y^2)}$ · τέταρτη στήλη: προβολές των αντίστοιχων τροχιακών της τρίτης στήλης· πέμπτη στήλη: χωροπληρωτικά μοντέλα των τροχιακών $4f_z^3$ έως $7f_z^3$ · έκτη στήλη: προβολές των αντίστοιχων τροχιακών της πέμπτης στήλης· έβδομη στήλη: τα σχήματα Chladni που θυμίζουν τις αντίστοιχες προβολές της δεύτερης στήλης· ωστόσο και της εκτης στήλης κατόπιν περιστροφής $22,5^\circ$. Οι προβολές παράχθηκαν μέσω μιας υπολογιστικής μεθόδου Monte Carlo (χωροπληρωτικά μοντέλα και προβολές αυτών από: Winter, M., 2002-2021· σχήματα Chladni από: Main, P., 201, σ. 19).



(α)



(β)

Εικόνα 29. Από αριστερά, πρώτη στήλη: χωροπληρωτικά μοντέλα των τροχιακών $5gz^3y$ έως $7gz^3y$; δεύτερη στήλη: προβολές των αντίστοιχων τροχιακών της πρώτης στήλης; τρίτη στήλη, δεξιά από τα gz^3y : χωροπληρωτικά μοντέλα των τροχιακών $5gz^2(x^2-y^2)$ έως $7gz^2(x^2-y^2)$; τρίτη στήλη, κάτω από τα $gz^2(x^2-y^2)$: χωροπληρωτικά μοντέλα των τροχιακών gzy^3 ; τέταρτη στήλη: προβολές των αντίστοιχων τροχιακών της τρίτης στήλης; πέμπτη στήλη: χωροπληρωτικά μοντέλα των τροχιακών $5gz^4$ έως $7gz^4$; έκτη στήλη: προβολές των αντίστοιχων τροχιακών της πέμπτης στήλης; έβδομη στήλη: τα σχήματα Chladni που θυμίζουν τις αντίστοιχες προβολές της δεύτερης στήλης; ωστόσο και της εκτης στήλης κατόπιν περιστροφής $11,25^\circ$. Οι προβολές παράχθηκαν μέσω μιας υπολογιστικής μεθόδου Monte Carlo (χωροπληρωτικά μοντέλα και προβολές αυτών από: Winter, M., 2002-2021; σχήματα Chladni από: Main, P., 2015, σ. 19).

Η αναλογία αναδεικνύεται ευκολότερα υποθέτοντας ότι **η εξώτερη κυκλική κομβική γραμμή κάθε εικονιζόμενου σχήματος Chladni αντιστοιχεί στην κομβική επιφάνεια του απείρου**. Διατυπώνοντας αυτό το στοιχείο της αναλογίας ρητά στους εκπαιδευόμενους αποφεύγεται η δυνητική παρανόηση ότι η ύπαρξη ορίου στην πλάκα υπονοεί την ύπαρξη ορίου και στα τροχιακά.

Όσα τροχιακά p , d , f , g δεν απεικονίζονται, έχουν προβολές ίδιες με κάποια από τις υπόλοιπες απεικονισμένες προβολές.

Οι απεικονισμένες προβολές των τροχιακών έχουν επιβεβαιωθεί από διάφορες πηγές.

Γιατί ορισμένα σχήματα Chladni θυμίζουν προβολές τροχιακών;

Αμφότερα τα τροχιακά και τα σχήματα Chladni ξεκινούν από την ίδια γενική εξίσωση, την κυματική εξίσωση (**παρ. 2.3. και 4.5**, αντίστοιχα)· ωστόσο καταλήγουν σε διαφορετική ειδική εξίσωση λόγω διαφορετικών αρχικών και οριακών συνθηκών σε κάθε περίπτωση καθώς και λόγω του όρου δυναμικής ενέργειας που λαμβάνεται υπόψη για τα τροχιακά. Επομένως, οι ομοιότητες και οι διαφορές μεταξύ τροχιακών και σχημάτων Chladni πρέπει να αναζητηθούν μεταξύ του γινομένου των πολωνύμων Legendre και Laguerre των τροχιακών (**παρ. 2.3**) και της ειδικής εξίσωσης κάθε σχήματος Chladni, π.χ. για την περίπτωση κυκλικής πλάκας ελεύθερων άκρων, του γινομένου που ενέχει τη συνάρτηση Bessel (**παρ. 4.7**).

Υπάρχουν σχήματα Chladni που αναλογούν σε όλα τα τροχιακά;

Φαίνεται ότι κάθε ένα από τα τροχιακά $4fz(x^2-y^2)$, $5fz(x^2-y^2)$, $6fz(x^2-y^2)$, $7fz(x^2-y^2)$ (τέταρτη στήλη της **εικόνας 28**) έχει προβολή η οποία δεν μοιάζει με τις προβολές των υπόλοιπων τροχιακών f αντίστοιχου n . Έτσι, αυτά τα τροχιακά δεν αναλογούν στα σχήματα Chladni που αναλογούν τα υπόλοιπα τροχιακά f αντίστοιχου n . Ωστόσο, κάθε ένα από αυτά τα τροχιακά έχει προβολή η οποία μοιάζει με προβολή των $3dxz$, $4dxz$, $5dxz$, $6dxz$, αντίστοιχα. Έτσι, κάθε ένα από τα τροχιακά $4fz(x^2-y^2)$, $5fz(x^2-y^2)$, $6fz(x^2-y^2)$, $7fz(x^2-y^2)$ αναλογεί στο σχήμα Chladni στο οποίο αναλογούν και τα τροχιακά $3dxz$, $4dxz$, $5dxz$, $6dxz$, αντίστοιχα.

Ομοίως, φαίνεται ότι κάθε ένα από τα τροχιακά $5gzy^3$, $6gzy^3$, $7gzy^3$ έχει προβολή (τέταρτη στήλη της **εικόνας 29**) η οποία δεν μοιάζει με τις προβολές των υπόλοιπων τροχιακών g αντίστοιχου n . Έτσι, αυτά τα τροχιακά δεν αναλογούν στα σχήματα Chladni που αναλογούν τα υπόλοιπα τροχιακά g αντίστοιχου n . Ωστόσο, κάθε ένα από αυτά τα τροχιακά έχει προβολή η οποία μοιάζει με προβολή των $3dxz$, $4dxz$, $5dxz$, $6dxz$, αντίστοιχα. Έτσι, κάθε ένα από τα τροχιακά $5gzy^3$, $6gzy^3$, $7gzy^3$ αναλογεί στο σχήμα Chladni στο οποίο αναλογούν και τα τροχιακά $3dxz$, $4dxz$, $5dxz$, $6dxz$, αντίστοιχα.

Ομοίως, φαίνεται ότι κάθε ένα από τα τροχιακά $5gz^2(x^2-y^2)$, $6gz^2(x^2-y^2)$, $7gz^2(x^2-y^2)$ έχει προβολή (τέταρτη στήλη της **εικόνας 29**) η οποία δεν μοιάζει με τις προβολές των υπόλοιπων τροχιακών g αντίστοιχου n . Έτσι, αυτά τα τροχιακά δεν αναλογούν στα σχήματα Chladni που αναλογούν τα υπόλοιπα τροχιακά g αντίστοιχου n . Ωστόσο, κάθε ένα από αυτά τα τροχιακά έχει προβολή η οποία μοιάζει με προβολή των $4fxz^2$, $5fxz^2$, $6fxz^2$, αντίστοιχα. Έτσι, κάθε ένα από τα τροχιακά $5gz^2(x^2-y^2)$,

$6gz^2(x^2-y^2)$, $7gz^2(x^2-y^2)$ αναλογεί στο σχήμα Chladni στο οποίο αναλογούν και τα τροχιακά $4fxz^2$, $5fxz^2$, $6fxz^2$, αντίστοιχα.

Κάθε τροχιακό f , g που αναλογεί σε σχήμα Chladni άλλο από εκείνο που αναλογούν τα υπόλοιπα τροχιακά ίδιου n και ίδιου m καθώς και το σχήμα Chladni στο οποίο αναλογεί σημειώνονται με βέλη ίδιου χρώματος.

Η αναλογία των τροχιακών με σχήματα Chladni φαίνεται να επεκτείνεται και στα τροχιακά h και i (κατόπιν σύγκρισης σχεδίων ταλαντώσεων κυκλικών μεμβρανών σε μεγαλύτερες ιδιοσυχνότητες (Tufoi, M. et al., 2014, σχήμα 1· Nave, C. R., 2016) και των προβολών των τροχιακών h και I (Winter, M., 2002-2021) (οι συγκριτικές απεικονίσεις δεν παρατίθενται).

Επομένως, **φαίνεται ότι υπάρχουν σχήματα Chladni που αναλογούν σε όλα τα τροχιακά.**

Είναι η αναλογία τέλεια;

Κατ' αρχάς, υπάρχουν λοβοί των προβολών των dz^2 , fz^3 , gz^4 με εμβαδά άνισα συγκρίνοντας με τα εμβαδά των υπόλοιπων λοβών ίδιας ακτίνας στην ίδια προβολή. Αντίθετα, οι μη κομβικές επιφάνειες, δηλ. οι κυκλικοί τομείς, ίδιας ακτίνας όλων των εικονιζόμενων σχημάτων Chladni έχουν εμβαδά ίσα μεταξύ τους στο ίδιο σχήμα Chladni (**εικόνες 27, 28 και 29**). Αυτό φαίνεται να δημιουργεί μια πρώτη ασυνέπεια στην αναλογία.

Δεύτερον, οι διερχόμενοι από το κέντρο άξονες συμμετρίας παρακείμενων λοβών ίδιας ακτίνας των προβολών των gzy^3 σχηματίζουν εναλλάξ οξείες και αμβλείες γωνίες. Αντίθετα, οι διερχόμενοι από το κέντρο άξονες συμμετρίας των παρακείμενων μη κομβικών επιφανειών, δηλ. των κυκλικών τομέων, ίδιας ακτίνας όλων των εικονιζόμενων σχημάτων Chladni σχηματίζουν γωνίες ίσες στο ίδιο σχήμα Chladni. (**εικόνα 29**). Αυτό φαίνεται να δημιουργεί μια δεύτερη ασυνέπεια στην αναλογία.

Τρίτον, στις προβολές διακρίνονται κομβικές επιφάνειες ενώ στα σχήματα Chladni διακρίνονται κομβικές γραμμές. Παρόλο που αυτή η ασυνέπεια μπορεί να διορθωθεί, απλώς, θεωρώντας ότι, στην πραγματικότητα, τα κομβικά σύνολα στα σχήματα Chladni έχουν ορισμένο πάχος, οι διαδοχικές κομβικές επιφάνειες των προβολών απέχουν μεταξύ τους ολοένα περισσότερο όσο πιο εξωτερικά βρίσκονται. Αντίθετα, οι διαδοχικές κομβικές γραμμές όλων των εικονιζόμενων σχημάτων Chladni ισαπέχουν μεταξύ τους στο ίδιο σχήμα Chladni. Αυτό φαίνεται να δημιουργεί μια τρίτη ασυνέπεια στην αναλογία.

Δεν βρέθηκαν σχήματα Chladni ή σχέδια ταλαντώσεων κυκλικών μεμβρανών που να πληρούν και αυτές τις τρεις γεωμετρικές προδιαγραφές.

Διατυπώνεται η άποψη ότι οι τρεις αυτές γεωμετρικές ασυνέπειες της αναλογίας έχουν να κάνουν, επιπροσθέτως στις διαφορές μεταξύ του γινομένου των πολωνύμων Legendre και Laguerre και του γινομένου που ενέχει τη συνάρτηση Bessel, με το ότι κατά την απεικόνιση των τροχιακών, πρώτον, απεικονίζεται μια περιοχή του χώρου με μόνο μερική πιθανότητα εύρεσης του ηλεκτρονίου του υδρογόνου, και, δεύτερον, το μέτρο αυτής της πιθανότητας αναλογεί στην πυκνότητα των

απεικονιζόμενων σημείων. Αντίθετα στα σχήματα Chadni, αλλά και γενικότερα στις ταλαντώσεις μεμβρανών, δεν υπάρχουν παρόμοιες απαιτήσεις ως φυσικοί περιορισμοί, δηλ. ως αρχικές ή οριακές συνθήκες, και, έτσι, η μη κομβική επιφάνεια αφορά όλα τα ταλαντούμενα σημεία ανεξαρτήτως του πλάτους ταλάντωσης τους. Τέτοιες απαιτήσεις δεν υπάρχουν ούτε ως προς την απεικόνιση των σχημάτων Chlandi όταν χρησιμοποιούμε σχέδια. Π.χ., στις **εικόνες 25** και **30** το πρόσημο υποδηλώνει μια φάση ταλάντωσης όλης της μη κομβικής περιοχής χωρίς διαβάθμιση του πλάτους της ταλάντωσης.

Γιατί μόνο ορισμένα σχήματα Chladni θυμίζουν προβολές τροχιακών;

Δεν έχουν όλα τα σχήματα Chladni την ίδια ειδική εξίσωση. Λόγω διαφορετικής γεωμετρίας της πλάκας, λόγω ύπαρξης σημείων καθήλωσης, και λόγω του πλήθους των σημείων καθήλωσης, τα σχήματα Chladni κάθε περίπτωσης έχουν διαφορετική ειδική εξίσωση (ωστόσο, είναι δυνατό να υπάρχουν ίδια σχήματα Chladni σε πλάκες διαφορετικών σχημάτων, δηλ. ίδια σχήματα Chladni διαφορετικής ειδικής εξίσωσης).

Ποια σχήματα Chladni αναμένονται να θυμίζουν προβολές τροχιακών;

Θεωρητικά,

- η χρήση, ειδικά, κυκλικής πλάκας προσομοιώνει τη σφαιρική συμμετρία του ατόμου του υδρογόνου (όπου ως σφαιρική συμμετρία του ατόμου του υδρογόνου νοείται η εξάρτηση της δυναμικής ενέργειας του ηλεκτρονίου από το $1/r$).

- η παροχή δονήσεων από το κέντρο της πλάκας προσομοιώνει την αλληλεπίδραση με τον πυρήνα στο κέντρο του ατόμου του υδρογόνου.

- το ότι δεν καθηλώνεται κανένα εσωτερικό σημείο της πλάκας προσομοιώνει την ανυπαρξία άλλων εσωτερικών επιδράσεων.

Επομένως, **η χρήση κυκλικής πλάκας καθηλωμένων άκρων, ταλαντούμενης από το κέντρο της, θεωρητικά, αναμένεται να παράγει τα περισσότερα σχήματα Chladni που θα θυμίζουν προβολές τροχιακών**. Αλλιώς διατυπωμένο, η ειδική εξίσωση της κυκλικής πλάκας καθηλωμένων άκρων αναμένεται να είναι πλησιέστερα στην ειδική εξίσωση των τροχιακών (στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν ορθογώνια και κυκλική πλάκα ελεύθερων άκρων).

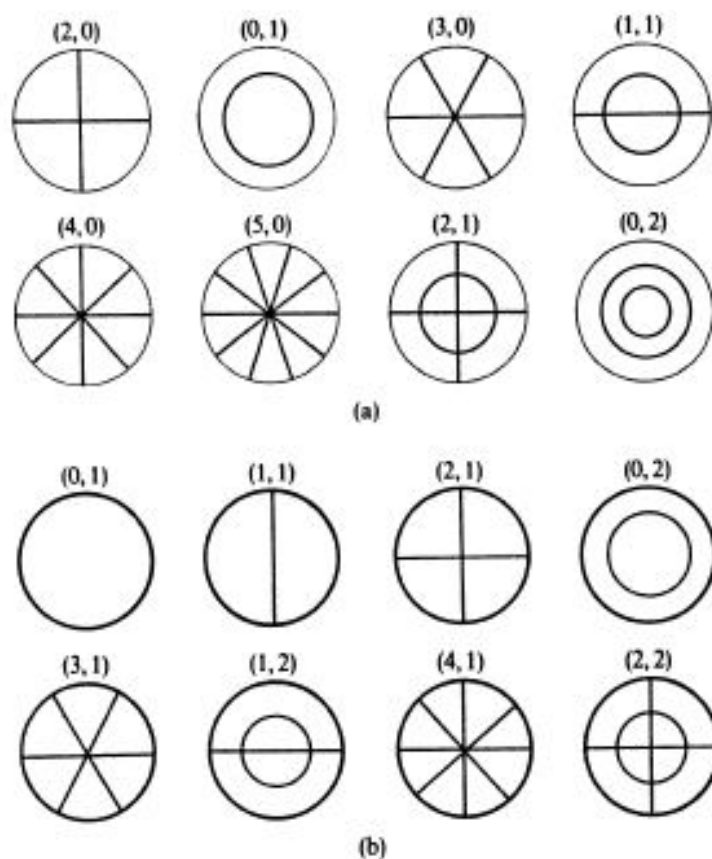
Φαίνεται ότι αυτή η υπόθεση επιβεβαιώνεται από τρεις παρατηρήσεις:

1) η κυκλική περίμετρος των κυκλικών πλακών καθηλωμένων άκρων είναι πάντα κομβική επιφάνεια (**εικόνα 30(b)**) και αντιστοιχίζοντας την στην κομβική επιφάνεια του απείρου η αντιστοιχία γίνεται καλά. Αντίθετα, η κυκλική περίμετρος των κυκλικών πλακών ελεύθερων άκρων είναι πάντα μη κομβική επιφάνεια (**εικόνα 30(a)**) η οποία, όσο αυξάνεται το πλήθος των κυκλικών κομβικών γραμμών συρρικνώνεται ανάμεσα στην κυκλική περίμετρο και την εξωτερική κυκλική κομβική γραμμή (συμπέρασμα από την παρατήρηση των **εικόνων 23** και/ή **24** και/ή **26-29**) οπότε, κατά την αντιστοιχία,

τείνει να «χαθεί» μια μη κομβική επιφάνεια των τροχιακών· αυτό δημιουργεί μια ασυνέπεια στην αναλογία.

2) από την άλλη πλευρά, όσο μειώνεται το πλήθος των κυκλικών κομβικών γραμμών, η εξωτερική κυκλική κομβική επιφάνεια απομακρύνεται από την κυκλική περίμετρο οπότε δεν μπορεί να θεωρηθεί ως η κομβική επιφάνεια του απείρου, πράγμα που υποτίθεται για τα σχήματα με περισσότερες κυκλικές κομβικές επιφάνειες. Αυτό δημιουργεί μια επιπλέον ασυνέπεια.

3) στα σχήματα Chladni κυκλικής πλάκας ελεύθερων άκρων απουσιάζει το σχήμα Chladni που έχει μόνο μία ακτινική κομβική γραμμή και που δεν έχει καμία κυκλική κομβική γραμμή (το σχήμα Chladni που θα αντιστοιχούσε στο ζεύγος αριθμών (1,0) της **εικόνας 30(α)**) (για αυτήν τη διαφορά ανάμεσα στις ταλαντώσεις των δύο ειδών κυκλικών πλακών: Kirchhoff, G., 1850· Fletcher, N.H., Rossing, T.D., 2013, σ. 79· Errede, S., 2017, σ. 23). Έτσι, σε κυκλική πλάκα ελεύθερων άκρων δεν προκύπτει σχήμα Chladni που μπορεί να αντιστοιχιστεί στα τροχιακά $2p$.

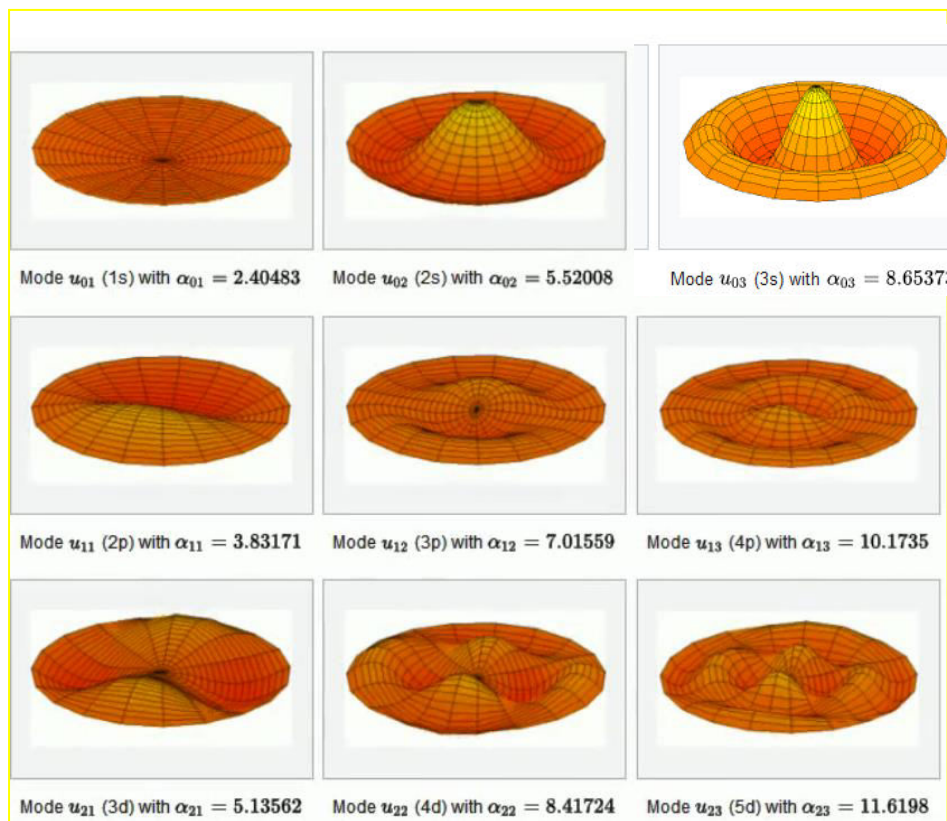


Εικόνα 30. Σχέδια των ταλαντώσεων κυκλικών πλακών (α) ελεύθερων άκρων και (β) καθηλωμένων άκρων σε μερικές από τις πρώτες ιδιοσυχνότητες. Οι δύο αριθμοί πάνω από κάθε κύκλο είναι το πλήθος ακτινικών κομβικών γραμμών ακολουθούμενο από το πλήθος κυκλικών κομβικών γραμμών. Σε κάθε σχέδιο (α), ο εξώτερος κύκλος αναπαριστά την κυκλική περίμετρο που αποτελεί μη κομβική επιφάνεια (αχνότερη σχεδίαση). Σε κάθε σχέδιο (β), ο εξώτερος κύκλος αναπαριστά την κυκλική περίμετρο που αποτελεί κομβική επιφάνεια (εντονότερη σχεδίαση).

Στην κυκλική πλάκα ελεύθερων άκρων δεν εμφανίζεται σχέδιο που να αντιστοιχεί στο ζεύγος (1,1).

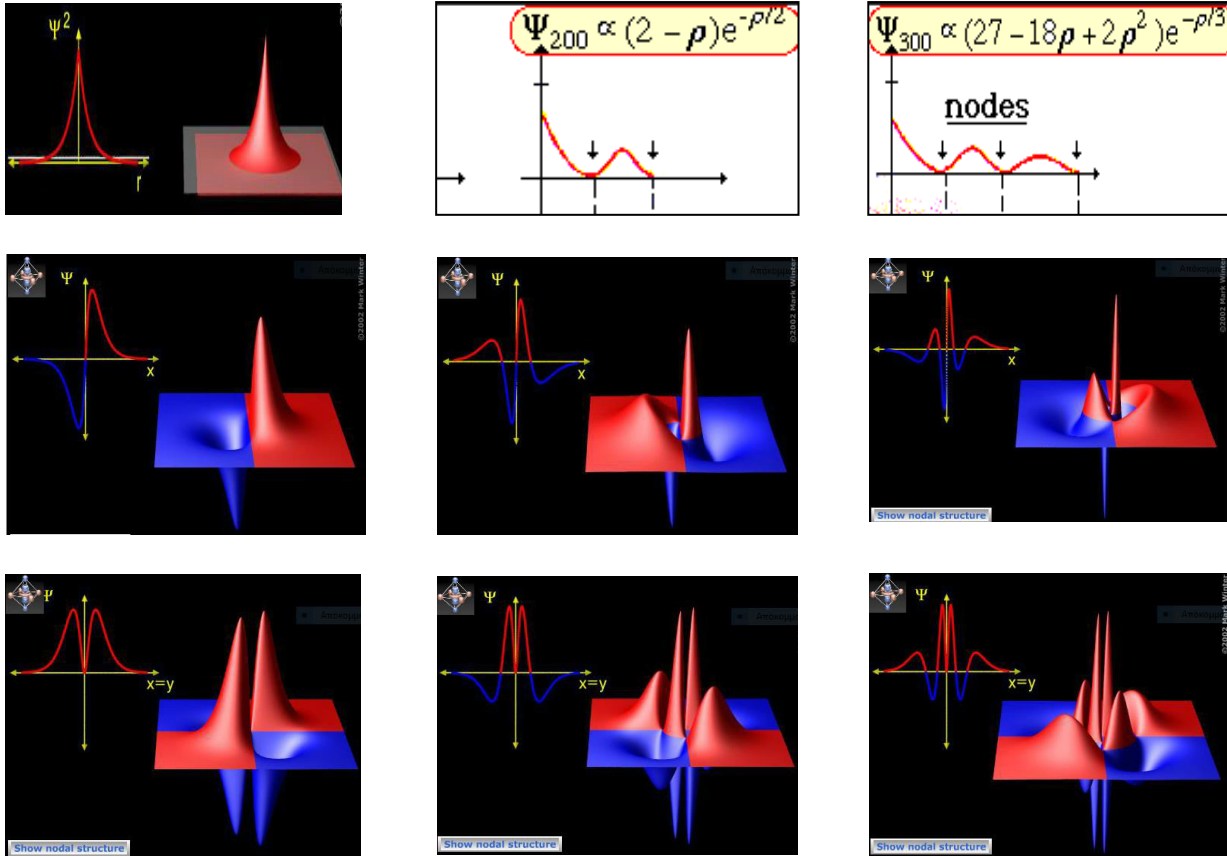
(η εικόνα από: Fletcher, N.H., Rossing, T.D., 2013, σ. 79).

Επιπλέον, ως επιστέγασμα των παραπάνω παρατηρήσεων, παρατηρήθηκε ότι ταλαντούμενες κυκλικές μεμβράνες καθηλωμένων άκρων αντιστοιχίζονται σε τροχιακά 1s, 2s, 3s, 2p, 3p, 4p, 3d, 4d, 5d ρητά αλλά και μέσω κινούμενων εικόνων, στο λήμμα της Wikipedia που αφορά τη δόνηση κυκλικών μεμβρανών καθηλωμένων άκρων (**εικόνα 31**):



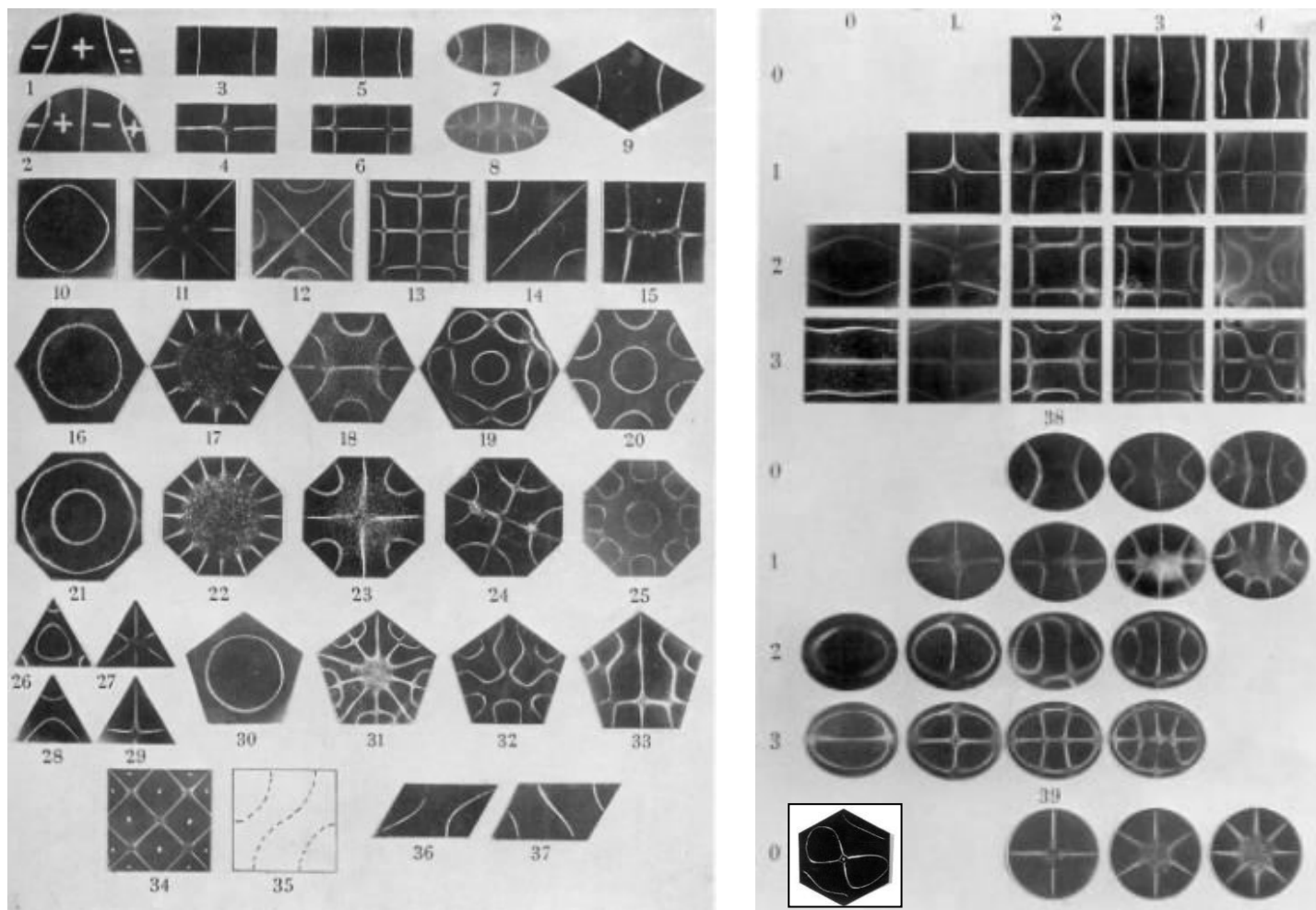
Εικόνα 31. Υπολογιστικές αναπαραστάσεις (Matlab) των δονήσεων κυκλικής μεμβράνης τυμπάνου στις ιδιοσυχνότητες (η εικόνα από: https://en.wikipedia.org/wiki/Vibrations_of_a_circular_membrane#Animations_of_several_vibration_modes, άδεια Wikipedia commons, 2018). Σε αυτές τις προσομοιώσεις τα αντίστοιχα τροχιακά διατρέχουν την εικόνα από αριστερά προς τα δεξιά: 1s, 2s, 3s, 2p, 3p, 4p, 3d, 4d, 5d.

Προκειμένου να αναδειχθούν καλύτερα οι δηλούμενες αντιστοιχίες μεταξύ δονήσεων κυκλικής μεμβράνης καθηλωμένων άκρων και τροχιακών, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας συγκροτήθηκε η **εικόνα 32** ώστε κάθε αναπαράσταση της **εικόνας 31** να αντιστοιχεί στην αναπαράσταση της αντίστοιχης θέσης της **εικόνας 32**.



Εικόνα 32. Υπολογιστικές αναπαραστάσεις του τετραγώνου της ακτινικής συνάρτησης του $1s$ και απλώς της ακτινικής συνάρτησης των υπόλοιπων τροχιακών. Τα αντίστοιχα τροχιακά διατρέχουν την εικόνα από αριστερά προς τα δεξιά: $1s, 2s, 3s, 2p, 3p, 4p, 3d, 4d, 5d$ (από: Winter, M., 2002-2021, Lester, I.M., 1997).

Ωστόσο, σχήματα Chladni που θυμίζουν προβολές τροχιακών προκύπτουν και σε πλάκες ελεύθερων άκρων καθώς και άλλων γεωμετριών (**εικόνα 33**):



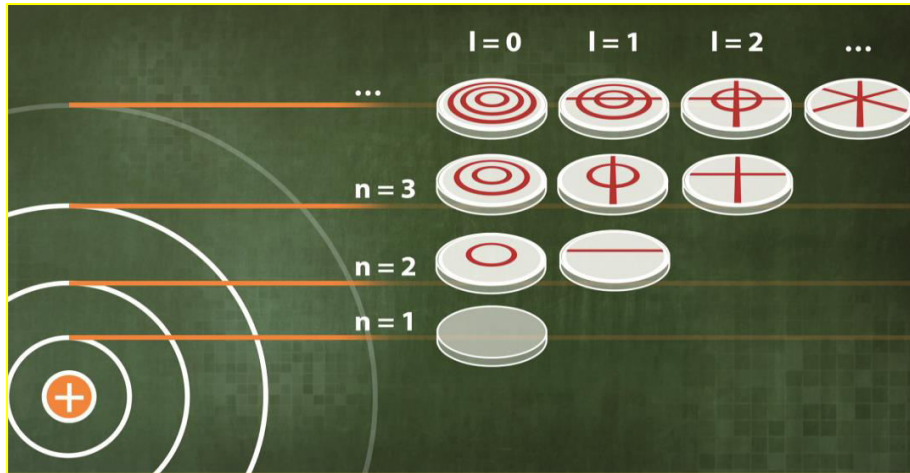
Εικόνα 33. Σχήματα Chladni σε πλάκες ελεύθερων άκρων διάφορων γεωμετριών υπό διάφορες ιδιοσυχνότητες (οι εικόνες από: Waller, D., 1952· το πλαισιωμένο σχήμα Chladni με άσπρο φόντο: προέρχεται από ανώνυμη πηγή).

Η εύρεση στόχου, δηλ. κυμάτων παρόμοιας αντίστοιχης μορφής, ώστε να συγκροτηθούν αναλογίες που περιλαμβάνουν σχήματα Chladni σε πλάκες άλλων γεωμετριών, αποτελεί μια ξεχωριστή πρόκληση.

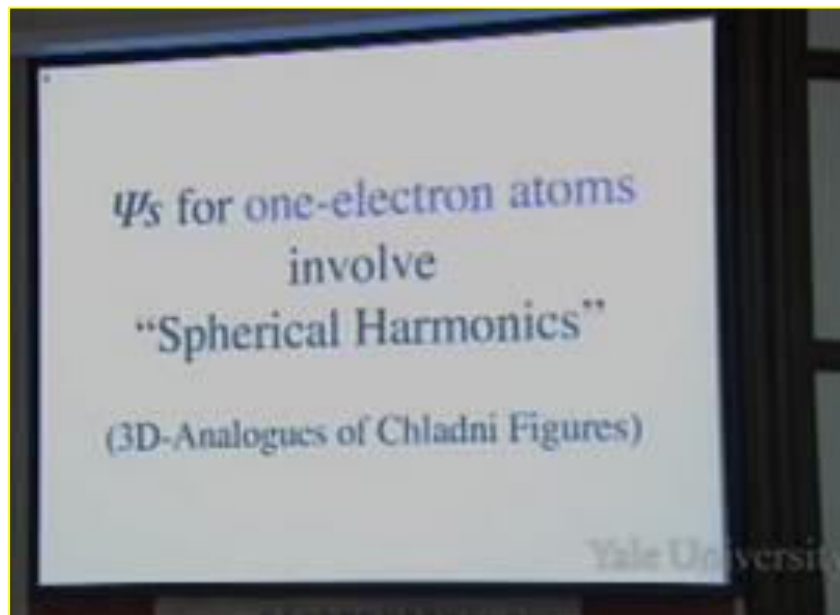
Παρόλο που η αντιστοιχία στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας γίνεται καλύτερα με σχήματα Chladni κυκλικών πλακών καθηλωμένων άκρων, τα σχήματα Chladni που χρησιμοποιούνται στις **εικόνες 23, 24, 26, 27, 28, 29** για να γίνει η αντιστοιχία είναι σχήματα Chladni κυκλικών πλακών ελεύθερων άκρων. Ο λόγος είναι ότι δεν κατορθώθηκε το να βρεθούν σχήματα Cladni ενδιαφέροντος σε κυκλικές πλάκες καθηλωμένων άκρων παρά μόνο σχέδια αυτών, π.χ., οι **εικόνες 25** και **30**. Η χρήση κυκλικών πλακών ελεύθερων άκρων για να γίνει η αντιστοιχία παρουσιάζει τις τρεις ασυνέπειες που αναφέρονται αριθμημένες παραπάνω.

4.2. Αναφορές της ομοιότητας των σχημάτων Chladni με προβολές των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου στη βιβλιογραφία

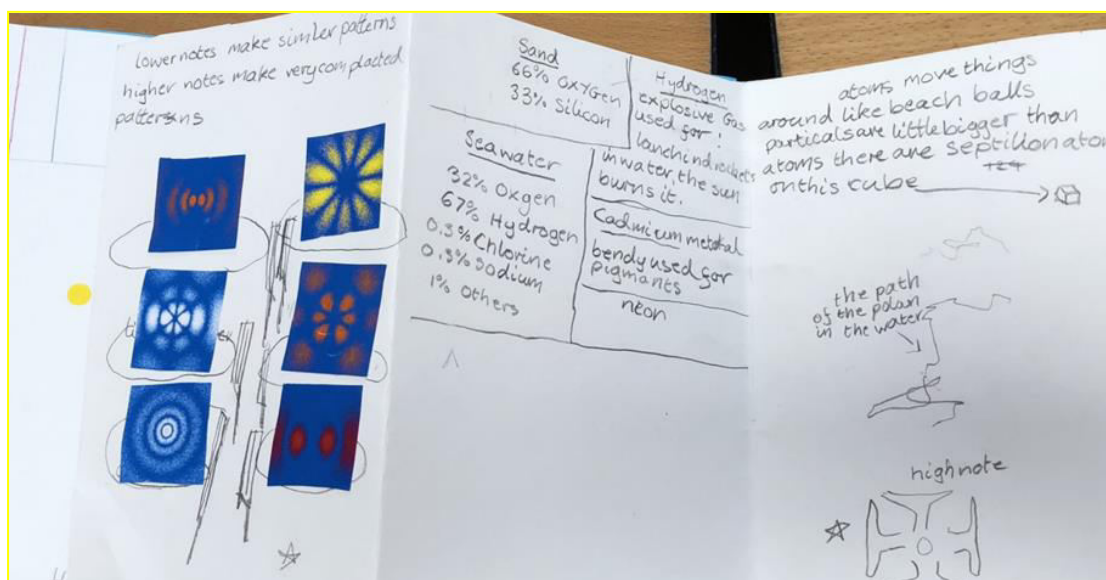
Η εν λόγω ομοιότητα έχει παρατηρηθεί στη βιβλιογραφία (π.χ., Natta, G., et al., 1972, σ. 43· Joachim, R., 1974, σ. 49· Mainzer, K., 1996, σ. 380· Lüth, H., 2015, σ. 50· Ubben, M., Heusle, S., 2018, **εικόνα 34**) και έχει αξιοποιηθεί ως εισαγωγή στην κβαντική θεωρία (π.χ., McBride, J.M., 2009, **εικόνα 35**· Kimberly, D., Major, K., Wall, D. Mason, H., 2018, **εικόνα 36**) αλλά και στην καθαυτή διδασκαλία των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου (Janusson., E., et al., 2020, **εικόνα 37**):



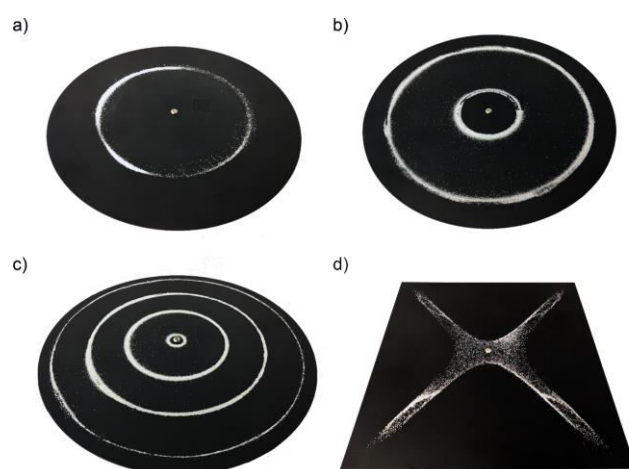
Εικόνα 34. «..σημειώστε ότι οι κόμβοι $\Phi_{n,l,m}(r, \varphi, \theta = \pi/2)$ των διδιάστατων τομών των συναρτήσεων ταλάντωσης είναι παρόμοιοι με τα καλά γνωστά σχήματα Chladni..» (από: Ubben, M., Heusle, S., 2018· η εικόνα είναι το σχήμα 4 της ίδιας παραπομπής).



Εικόνα 35. Στιγμιότυπο από διάλεξη των ανοικτών μαθημάτων του Πανεπιστημίου του Yale (από: McBride, J.M., 2009).

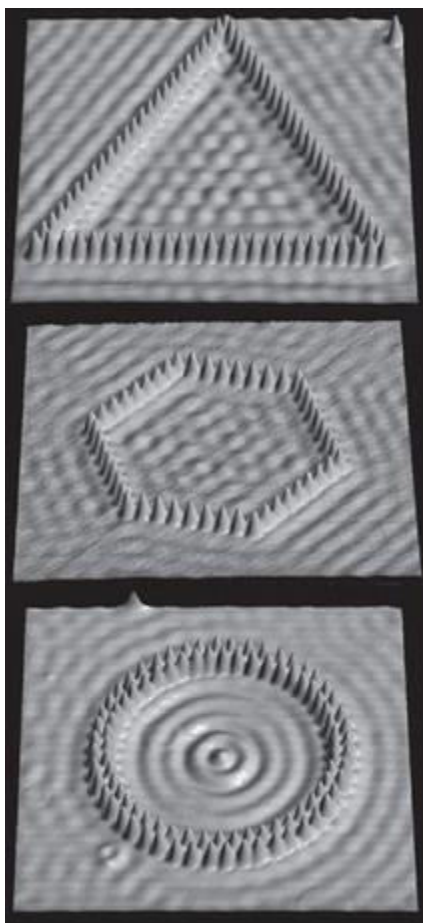


Εικόνα 36. «..φαίνεται να μην υπάρχει καλύτερη αναλογία για ένα άτομο από ένα μουσικό όργανο. Έτσι, εισαγάγαμε τα παιδιά στα σχήματα Chladni. ..επειδή είχαν δει τα σχήματα των ηλεκτρονιακών τροχιακών, συνέλαβαν την αντιστοιχία μεταξύ των στάσιμων κυμάτων στις πλάκες και στο άτομο..» (από πρακτικό εργαστήριο στο οποίο συμμετείχαν 40 παιδιά ηλικίας 8-9 ετών του δημοτικού St. James, στο Λονδίνο (Kimberly, D., Major, K., Wall, D. Mason, H., 2018)).



Εικόνα 37. «..επιλέξαμε τη χρήση πλακών Chladni που επιδέχονται συντονισμό οδηγώντας σε διδιάστατα στάσιμα κύματα τα οποία εξυπηρετούν σε αναπαράσταση τομής των ατομικών τροχιακών.» (από: Janusson., E., et al., 2020 η εικόνα είναι το σχήμα 3 της ίδιας παραπομπής).

Συναφής κρίνεται και μια παραπομπή (Douglas, K., 2016, 3^ο κεφάλαιο) στην οποία αναφέρονται ως αίτιο των σχημάτων Chladni τα διδιάστατα κύματα και στην αμέσως επόμενη παράγραφο παρατίθενται εικόνες του σχήματος που προκύπτει από τον φυσικό περιορισμό των στάσιμων κυμάτων της κατανομής ηλεκτρονίων αυτή τη φορά στον κβαντικό κόσμο (**εικόνα 38**):



Εικόνα 38.: «..φτιάξαμε ένα κουτί για τα ηλεκτρόνια μας και είδαμε πως λύνεται η εξίσωση του Schrödinger σε εκείνο το συγκεκριμένο περιβάλλον» (από: Collins G., 1993` η εικόνα προέρχεται από τη συλλογή της IBM: Corral Collage, STM image gallery, <http://www.almaden.ibm.com/vis/stm/corral.html#stm17>).

4.3. Ομοιότητες μεταξύ των σχημάτων πέραν των περιγραμμάτων τους

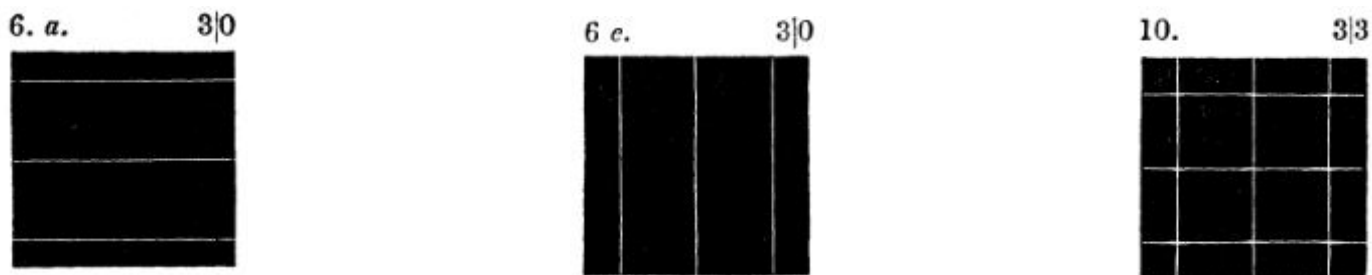
Οι ομοιότητες μεταξύ των σχημάτων Chladni και των προβολών τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου που έχουν επισημανθεί στη βιβλιογραφία αφορούν το πλήθος και το είδος των κομβικών γραμμών και μη κομβικών περιοχών (χωρίς την εκτενή αντιστοιχία που δίνεται στην παρούσα εργασία).

Μια πρόσθετη ομοιότητα που έχει διατυπωθεί λιγότερο ή περισσότερο ρητά έγκειται στον κβαντισμό αμφότερων των σχημάτων: τα σχήματα Chladni σχηματίζονται μόνο στις ιδιοσυχνότητες συντονισμού των πλακών (κβαντισμός συχνοτήτων) (εικόνα 25) όπως τα τροχιακά προκύπτουν μόνο θεωρώντας ορισμένους (κβαντικούς) αριθμούς n , l , m_l .

Ακολουθούν τρεις ακόμη ομοιότητες που παρατηρήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας και που δεν βρέθηκαν στη βιβλιογραφία. Η μια ομοιότητα έγκειται στη **δυναμική υπέρθεση αμφότερων των σχημάτων**, η δεύτερη ομοιότητα έγκειται στον **δυναμικό εκφυλισμό αμφότερων των**

σχημάτων και στην άρση του, και η τρίτη ομοιότητα έγκειται στην **αύξηση της πολυπλοκότητας** **αμφοτέρων των σχημάτων συναρτήσει της ενέργειας των τροχιακών και της ενέργειας της δόνησης των σχημάτων Chladni, αντίστοιχα.**

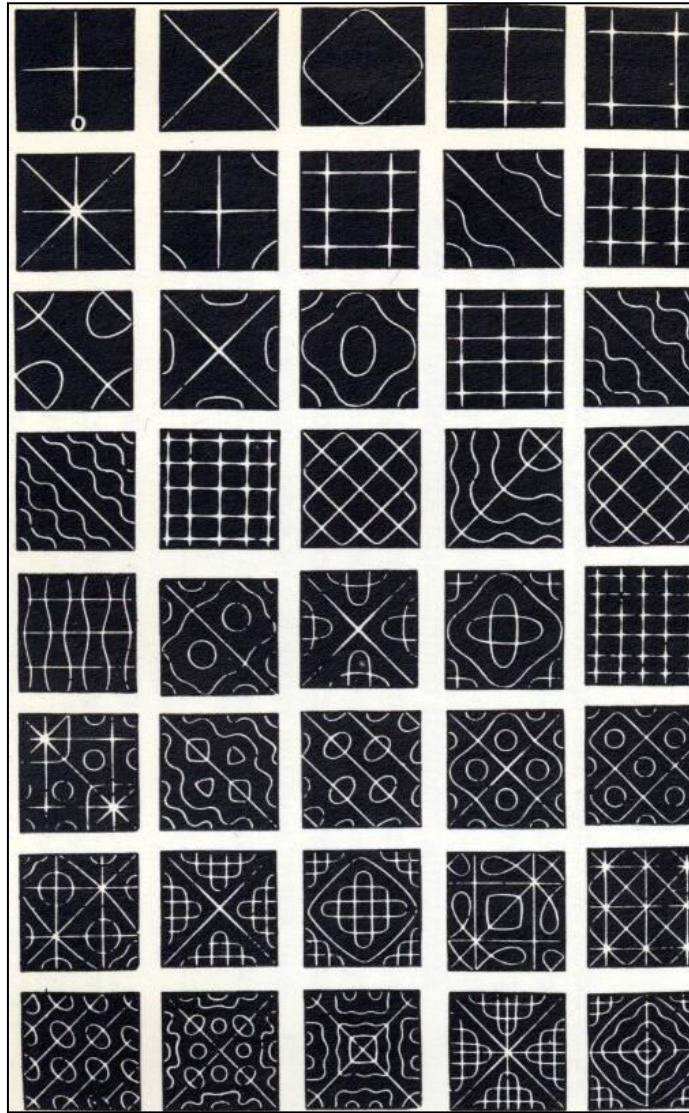
Έχει παρατηρηθεί ότι ορισμένα σχήματα Chladni που προκύπτουν στις μεγαλύτερες συχνότητες είναι σύνθεση, υπέρθεση, απλούστερων σχημάτων Chladni, δηλ. μικρότερων συχνοτήτων (π.χ., Wheatstone, C., 1833, **εικόνα 39**)) το οποίο εξηγείται στην **παρ. 4.5**.



Εικόνα 39. Από αριστερά προς τα δεξιά: το τρίτο σχήμα Chladni προκύπτει από την υπέρθεση των άλλων δύο. (από: Wheatstone, C., 1833).

Παρατηρώντας τα σχήματα Chladni ενδιαφέροντος (**εικόνες 26, 27, 28 και 29**) και/ή τα σχέδια τους (**εικόνες 24 και 25**) φαίνεται ότι η υπέρθεση ισχύει και για τα σχήματα Chladni ενδιαφέροντος. Π.χ., το σχήμα Chladni που αντιστοιχεί στο τροχιακό $3px$ μπορεί να θεωρηθεί υπέρθεση των σχημάτων Chladni που αντιστοιχούν στα τροχιακά $2s$ και $2px$. Όμως, το ίδιο μπορεί να θεωρηθεί και για τις εικονιζόμενες προβολές των αντίστοιχων τροχιακών αλλά, ακόμη περαιτέρω, και για τα ίδια τα αντίστοιχα τροχιακά.

Ερχόμενοι στη δεύτερη παρατηρούμενη ομοιότητα εκτός βιβλιογραφίας, ανατρέχοντας στην **εικόνα 40** από αριστερά προς τα δεξιά, παρατηρείται ότι η $1^{\text{η}}$ αναπαράσταση είναι εκφυλισμένη με τη $2^{\text{η}}$ και ότι η $7^{\text{η}}$ αναπαράσταση είναι εκφυλισμένη με τη $12^{\text{η}}$. Ως εκφυλισμός ορίζεται στο παρόν η ταύτιση ορισμένων σχημάτων Chladni κατόπιν μετασχηματισμού συμμετρίας (στροφή γύρω από έναν άξονα συμμετρίας) που, στην περίπτωση της τετράγωνης πλάκας είναι η στροφή κατά 90° .



Εικόνα 40. Αναπαραστάσεις σχημάτων Chladni (Chladni E.F.F., 1802).

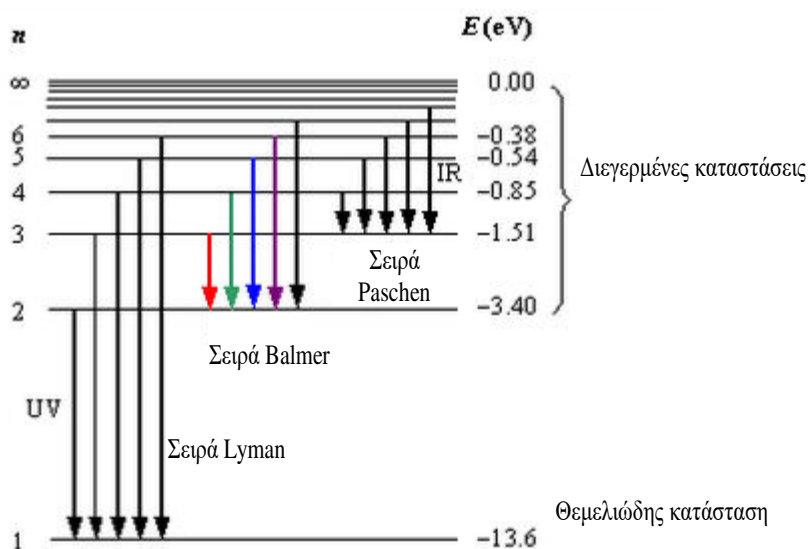
Ακόμη, παρατηρείται ότι αυτός ο εκφυλισμός μπορεί να αρθεί απλώς καταστρέφοντας τη συμμετρία με το πέρασμα από τετράγωνη σε ορθογώνια πλάκα, αφού, όπως παρατηρήσαμε και εμείς, το σχήμα Chladni εξαρτάται και από τη γεωμετρία της πλάκας.

Όμως, αντίστοιχος εκφυλισμός σχήματος (και ενέργειας) υπάρχει και στα τροχιακά: απουσία εξωτερικού πεδίου και τα τρία τροχιακά p_x , p_y , p_z του ίδιου φλοιού έχουν την ίδια ενέργεια. Περαιτέρω, στα τροχιακά υπάρχει και αντίστοιχη μερική άρση του εκφυλισμού τους που συντρέχει εάν εφαρμοστεί εξωτερικό στατικό (ανομοιογενές) μαγνητικό ή ηλεκτρικό πεδίο (φαινόμενα Zeeman και Stark, αντίστοιχα), π.χ. κατά τον άξονα z , οπότε το τροχιακό κατά τον άξονα z επηρεάζεται διαφορετικά από ό,τι τα άλλα δύο, δηλ. ο εκφυλισμός του αίρεται (η άλλη περίπτωση άρσης του εκφυλισμού των τροχιακών είναι όταν υπάρχουν πολυηλεκτρονιακά άτομα λόγω της αλληλεπίδρασης των ηλεκτρονίων (υποσημ. 5 του μέρους III του παραρτήματος)).

Δεδομένου ότι στα τροχιακά μπορεί να επέλθει ακόμη περαιτέρω άρση του εκφυλισμού, π.χ. μέσω εφαρμογής καταλληλότερου εξωτερικού πεδίου ή σχετικιστικών διορθώσεων (εξίσωση Dirac), αυτή η περαιτέρω άρση του εκφυλισμού των τροχιακών θα μπορούσε να αντιστοιχεί στο πέρασμα από ορθογώνια σε πολυγωνική πλάκα στα σχήματα Chladni.

Ερχόμενοι στην τρίτη παρατηρούμενη ομοιότητα εκτός βιβλιογραφίας, όπως παρατηρήσαμε και στη δική μας εφαρμογή, **όσο αυξάνει η ιδιοσυχνότητα, τόσο αυξάνει η πολυπλοκότητα των σχημάτων Chladni: απλούστερα σχήματα Chladni αντικαθίστανται από πιο πολύπλοκα, δηλ. τα μήκη των ακμών σιγά σιγά μικραίνουν και το εμβαδόν των κενών (μη κομβικών) περιοχών συρρικνώνεται.** Η αύξηση της πολυπλοκότητας αυξανόμενης της ιδιοσυχνότητας αναμένεται από τη συνακόλουθη μείωση του μήκους κύματος· οι συνδυασμοί από την ενισχυτικές και τις ακυρωτικές συμβολές των κυμάτων αυξάνονται. Αλλιώς διατυπωμένο, καθώς προσφέρεται περισσότερη ενέργεια, ολοένα και περισσότερες περιοχές ταλαντώνονται εκτός φάσης και, άρα, αυξάνεται η κατάτμηση της επιφάνειας της πλάκας σε ολοένα περισσότερες μη κομβικές επιφάνειες και κομβικές γραμμές.

Όμως την ίδια τάση εμφανίζουν και οι ηλεκτρονιακές πυκνότητες το οποίο γίνεται αντιληπτό είτε όταν θεωρείται το πέρασμα σε πυκνότητες ίδιου n αλλά μεγαλύτερου n (π.χ., $1s \rightarrow 2s \rightarrow 3s \rightarrow \dots$), είτε όταν θεωρείται το πέρασμα $s \rightarrow p \rightarrow d \rightarrow f$ θεωρώντας ίδιο n σε πολυηλεκτρονιακά άτομα ή υπό εξωτερικό (ανομοιογενές) μαγνητικό πεδίο στο άτομο του υδρογόνου. Ως αποτέλεσμα, η εν λόγω αύξηση της πολυπλοκότητας αυξανόμενης της ενέργειας επεκτείνεται και στις φασματικές γραμμές του υδρογόνου όπως φαίνεται στην **εικόνα 41** και, συγκεκριμένα, παρατηρείται αύξηση της «πολυπλοκότητας» (πλησίασμα) και μεταξύ των φασματικών σειρών και μείωση των διαφορών μέσα σε κάθε φασματική σειρά.



Εικόνα 41. Τα ενεργειακά επίπεδα του ατόμου του υδρογόνου με μερικές μεταπτώσεις στις οποίες οφείλονται οι φασματικές γραμμές. Πηγαίνοντας από τη μετάπτωση μεγαλύτερης ενέργειας προς τη μετάπτωση μικρότερης ενέργειας: σειρά Lyman – σειρά Balmer (μερικώς ορατής ακτινοβολίας) – σειρά Paschen – σειρά Brackett - σειρά Pfund (οι δύο τελευταίες σειρές δεν εμφανίζονται στην εικόνα).

Η αύξηση της πολυπλοκότητας αυξανόμενης της ενέργειας στο ηλεκτρόνιο μπορεί να εξηγηθεί μαθηματικά: αύξηση της ενέργειας του ηλεκτρονίου σημαίνει αύξηση του πλήθους των ακεραίων αριθμών της λύσης της εξίσωσης Schrödinger και, άρα, αύξηση της πολυπλοκότητας. Αλλιώς διατυπωμένο, κάθε συνεχές σύνολο ιδιοτιμών ενός ερμιτιανού τελεστή είναι το όριο ενός διακριτού συνόλου ιδιοτιμών αυτού (και ο χαμιλτονιανός τελεστής που εμφανίζεται στην εξίσωση του Schrodinger για το άτομο του υδρογόνου είναι ερμιτιανός).

Ακόμη, **η αύξηση της πολυπλοκότητας αυξανόμενης της ενέργειας στο ηλεκτρόνιο μπορεί να προβλεφθεί αναλογικά από τα σχήματα Chladni θεωρώντας ένα στοιχείο της αναλογίας:** δεδομένου ότι ο χώρος που μπορεί να βρεθεί το ηλεκτρόνιο έχει αντιστοιχηθεί στις μη κομβικές περιοχές, η συρρίκνωση των μη κομβικών περιοχών αντιστοιχεί σε περιορισμό του ηλεκτρονίου στον χώρο, δηλ. σε αύξηση της πολυπλοκότητας των τροχιακών.

Αυτή η αναλογική πρόβλεψη από τα σχήματα Chladni μπορεί να γίνει όχι μόνο θεωρώντας το αναφερθέν στοιχείο της αναλογίας αλλά και/ή θεωρώντας τη στατιστική ερμηνεία του Born: εάν το μήκος του φυσικού στάσιμου κύματος αντιστοιχηθεί με το μήκος του στάσιμου κύματος που περιγράφει την κατανομή του ηλεκτρονίου, τότε η μείωση του μήκους του φυσικού κύματος αντιστοιχεί σε μείωση του μήκους του κύματος που περιγράφει την κατανομή του ηλεκτρονίου (γνωστού και ως «κύματος πιθανότητας»). Η μείωση του μήκους του κύματος που περιγράφει την κατανομή συνάδει με περιορισμό της κίνησης του ηλεκτρονίου στον χώρο, οπότε με αύξηση της πολυπλοκότητας.

4.4. Ιστορικό υπόβαθρο των σχημάτων Chladni

Τα σχήματα έλαβαν το όνομα τους από τον Ernst Florens Friedrich Chladni. Το 1787, στο βιβλίο του *Entdeckungen über die Theorie des Klanges* (σημ.: Ανακαλύψεις στη θεωρία του ήχου), ανέφερε ότι η τριβή δοξαριού σε κυκλική, τετράγωνη, ή ορθογώνια πλάκα επί της οποίας έχει τεθεί λίγη άμμος προκαλεί συντονισμό σε κάθε θεμελιώδη συχνότητα. Η άμμος αναπηδάει έως ότου κατακαθίσει σε σημεία που δεν ταλαντώνονται δημιουργώντας γεωμετρικά καθορισμένα σχήματα.

Το φαινόμενο είχε αναφερθεί ήδη από τον Λεονάρντο Ντα Βίντσι στο σημειωματάριο του (Wheatstone, C., 1833), και επίσης από τον Γαλιλαίο (Wheatstone, C., 1833). Ο Γαλιλαίος είχε προσέξει ότι μικρά κομμάτια από τρίχες ζώων πάνω σε ηχητική πλάκα μουσικού οργάνου αναπηδούσαν απότομα ενώ άλλα δεν φαίνονταν να κινούνται καθόλου και έγραψε για αυτό στο «Galileo Galilei. Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, 1632» (σημ.: Διάλογος που αφορά τα δύο μεγάλα συστήματα του κόσμου).

Κατόπιν, περίπου στο 1680, ο Robert Hooke του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης πρότεινε την παρατήρηση των δονήσεων πλάκας στην οποία είχε επιθέσει αλεύρι κατά την τριβή με δοξάρι (Wheatstone, C., 1833).

Ο Chladni δεν ανέφερε τα πειράματα του Γαλιλαίου και του Hooke στα συγγράμματα του. Χωρίς να είναι γνωστό το εάν ήταν γνώστης αυτών, ήταν ο πρώτος που εξέτασε το φαινόμενο συστηματικά. Ως πηγή έμπνευσης του ανέφερε τα ηλεκτρικά σχήματα του Lichtenberg (τα οποία σήμερα κατατάσσονται στη μορφοκλασματική γεωμετρία (fractal)) (εικόνα 42):



Εικόνα 42. Στιγμιότυπο από τη δημιουργία σχημάτων Lichtenberg σε ξύλο κόντρα πλακέ μέσω ελεγχόμενης ηλεκτρικής εκκένωσης. Το χαρακτηριστικό τους είναι το δενδριτικό σχήμα.

Ωστόσο, ούτε ο Chladni προσέφερε μια μαθηματική εξήγηση.

Όταν επέδειξε την τεχνική του στο Παρίσι, ο Ναπολέων εντυπωσιάστηκε τόσο ώστε έθεσε ένα κιλό χρυσάφι ως βραβείο για αυτόν που θα έβρισκε την μαθηματική εξήγηση (Stöckmann, H.J., 2007). Το βραβείο κέρδισε η **Sophie Germain**, η οποία, αν και με λάθη, είχε την ορθή προσέγγιση (Germain, S., 1821). Ο **Lagrange** και ο **Poisson** βελτίωσαν περαιτέρω τη λύση.

Ο **Kirchhoff** βρήκε το σωστό μαθηματικό μοντέλο το 1850 (Kirchhoff, G., 1850), θεωρώντας τα σχήματα Chladni τετράγωνης πλάκας ως ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε ιδιοσυναρτήσεις ενός διαρμονικού τελεστή¹. Έτσι, κατάφερε, να λύσει το πρόβλημα των σχημάτων Chladni για την ειδική περίπτωση στρογγυλής πλάκας καθώς, λόγω της συμμετρίας της, επιδέχεται ευκολότερη μαθηματική λύση. Ωστόσο, η ιδιοσυχνότητα στην οποία προκύπτουν τα σχήματα σε περιπτώσεις άλλων πλακών ήταν πολύ δύσκολη για να λυθεί ακόμα (Gander, M.J., Wanner, G., 2012).

Αν και το πρόβλημα περιγραφής των σχημάτων Chladni είναι πρόβλημα ταλαντούμενης πλάκας είτε ελεύθερων, είτε καθλωμένων άκρων, απλουστεύεται κατά πολύ στην περίπτωση της ύπαρξης καθλωμένων άκρων (clamped, fixed boundaries), και ο **W. Voigt** βρήκε τη γενική λύση των σχημάτων Chladni το 1893 (Voigt, W., 1893) για ορθογώνια πλάκα μέσω στοιχειώδους ολοκλήρωσης αλλά με δύο ή τέσσερα καθλωμένα οριακά σημεία.

Η κατάσταση στο 1894 περιγράφεται από τον Rayleigh:

¹ Διαρμονικός τελεστής: $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$. Ισοδύναμα: το τετράγωνο του τελεστή Laplace, Δ^2 . Ανακύπτει σε προβλήματα Φυσικής που αφορούν την ελαστικότητα των στερεών.

«Το πρόβλημα των σχημάτων της ορθογώνιας πλάκας χωρίς καθηλωμένα άκρα είναι έκτακτης δυσκολίας, και έχει αντέξει σε οποιαδήποτε επίθεση, ως επί το πλείστον»
(ελεύθερη απόδοση από: Rayleigh, J.W.S, 1894, σ. 372).

Ο Rayleigh δοκίμασε να αξιοποιήσει στις πλάκες ελεύθερων άκρων αντί του διαρμονικού τελεστή την εξίσωση του Helmholtz ² (Lord Rayleigh, 1911) μειώνοντας σημαντικά τη μαθηματική πολυπλοκότητα. Η εξίσωση του Helmholtz είχε λυθεί, με τη σειρά της, για πολλά στοιχειώδη σχήματα, από τον 19ο αιώνα: για ορθογώνια μεμβράνη από τον **Siméon Denis Poisson** το 1829 (Poisson, S.D., 1829), για ισόπλευρο τρίγωνο από τον **Gabriel Lamé** το 1852 (Lamé, G., 1852), για κυκλική μεμβράνη από τον **Alfred Clebsch** το 1862 (Clebsch, A., 1862) και για ελλειπτική μεμβράνη από τον **Émile Mathieu**. Όμως, είχε λυθεί υπό την απαίτηση της ύπαρξης καθηλωμένων άκρων.

Σε ένα πρωτοπόρο σύγγραμμα (Ritz, W., 1909), ο **Walter Ritz** παρουσίασε μια **μέθοδο υπολογισμού των σχημάτων Chladni σε πλάκες ελεύθερων άκρων**: αντί του να αναζητείται η μερικώς διαφορική ιδιοτιμή άμεσα ή θέτοντας περιοριστικές συνθήκες, πρότεινε την αξιοποίηση της αρχής της ελαχιστοποίησης της ενέργειας («Prinzip der kleinsten Wirkung»), από την οποία, μάλιστα, μπορούσαν να εξαχθούν οι εν λόγω εξισώσεις και συνθήκες. Ο Ritz κατάφερε να λύσει το πρόβλημα για τετράγωνη πλάκα με απόκλιση περίπου 1%, για 18 μοτίβα στο μέσο του εύρους των ιδιοσυχνοτήτων (Gander, M.J., Wanner G., 2012).

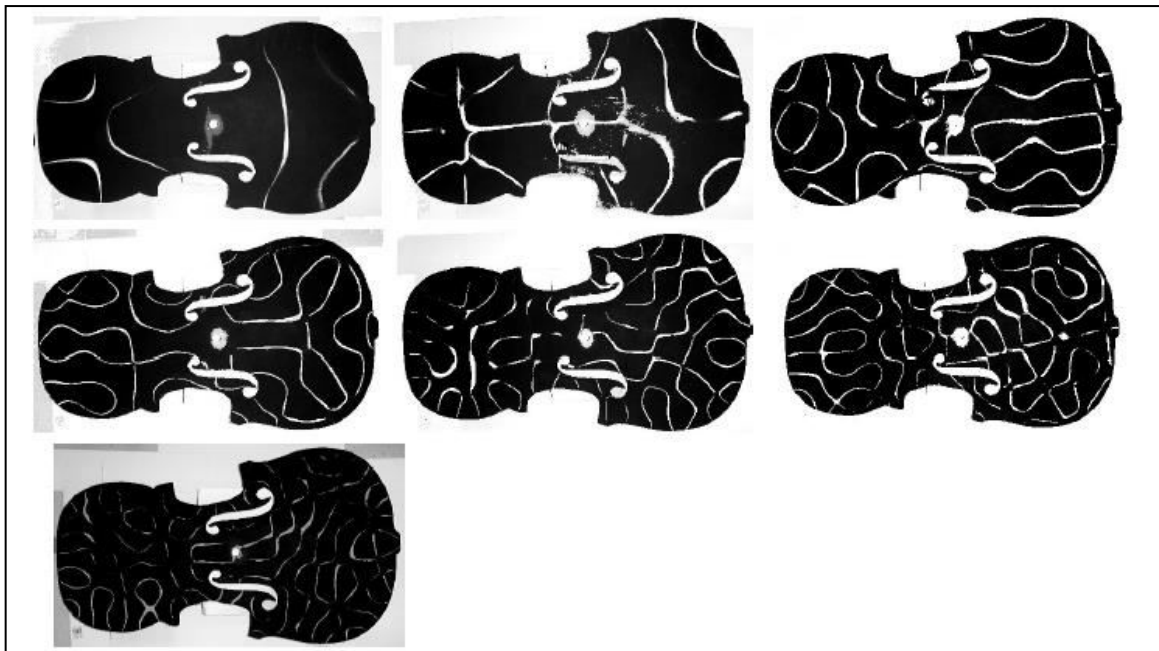
Το 1932, ένας πωλητής πάγου ρώτησε την καθηγήτρια Φυσικής του Royal Free Hospital Medical School του Λονδίνου **Mary D. Waller** «γιατί το κουδουνάκι του ποδηλάτου μου χτυπάει όταν ακουμπάει ένα κομμάτι ξηρού πάγου;» (Waller, M.D., 1941) και η μελέτη της επανέφερε στο προσκήνιο τα σχήματα Chladni βελτιώνοντας τη μαθηματική εξήγηση (Waller, M.D, 1961, **εικόνα 43**).

² Εξίσωση Helmholtz: $(\nabla^2 + k^2)A = 0$, όπου k , ο κυματάριθος, και A το πλάτος. Από τον ορισμό φαίνεται ότι αποτελεί γενικότερη περίπτωση της εξίσωσης Laplace: $\nabla^2 f = \Delta f = 0$. Η εξίσωση Laplace για τον χώρο ανακύπτει σε προβλήματα Φυσικής που αφορούν τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, τη σεισμολογία και την ακουστική διότι είναι μια χρονοανεξάρτητη μορφή της κυματικής εξίσωσης. Η εξίσωση Helmholtz προκύπτει από την κυματική εξίσωση μέσω της μεθόδου διαχωρισμού των μεταβλητών.

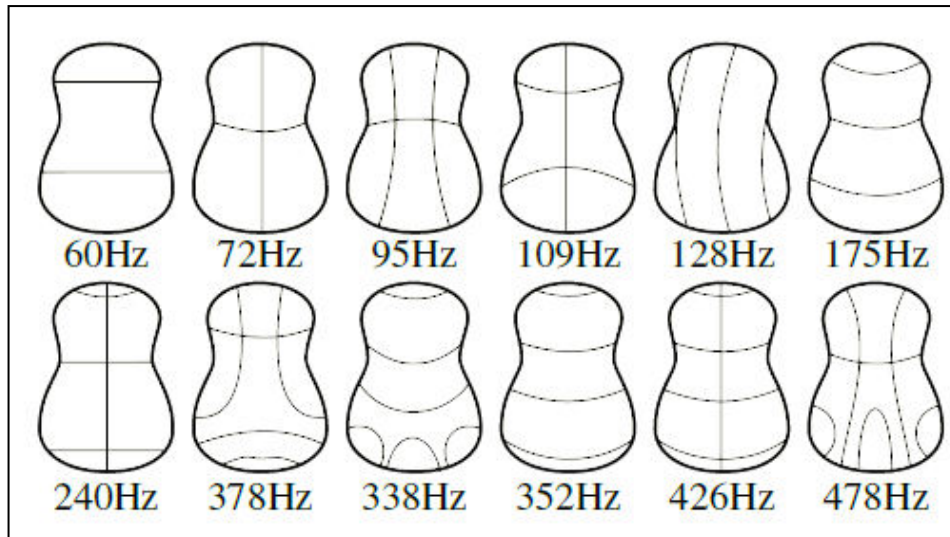


Εικόνα 43. Η Mary Desiree Waller παράγει σχήματα Chladni με ψήγμα στερεού CO₂. Με αυτόν τον τρόπο παράχθηκαν τα σχήματα Chladni της [εικόνας 31](#).

Εκτός από θεωρητικό ενδιαφέρον, τα σχήματα Chladni αξιοποιούνταν στην κατασκευή βιολιών, κιθάρων και τσέλο, έως ότου προστέθηκαν πιο σύγχρονες τεχνικές. Η τεχνική αποσκοπούσε στον έλεγχο του ήχου που δίνει ένα τέτοιο όργανο κρίνοντας από τα σχήματα που προέκυπταν κατά την τριβή ενός δοξαριού στο σκαρί του οργάνου ([εικόνες 44, 45 και 46](#)). Αυξάνοντας τη δύναμη και την ταχύτητα της τριβής οξύνεται ο τόνος.



*Εικόνα 44. Πλάκες Chladni 120 cm με σχήμα βιολιού στις ιδιοσυχνότητες 145.2 , 268.0 , 762.4, 954.1 , 1452.3 , 1743.5 , 2238.6 Hz, με τις δονήσεις ορμώμενες από το κέντρο τους (από: *Experimental Nonlinear Physics Group*, τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο του Toronto).*



Εικόνα 45. Τεχνητή απεικόνιση σχημάτων Chladni στο σκαρί κιθάρας υπό διάφορες ιδιοσυχνότητες (άδεια Wikimedia commons).



Εικόνα 46. Απεικόνιση σχημάτων Chladni σε μεταλλική πλάκα 17 in. x 14 in. σχήματος κιθάρας στα 200 Hz (από: Martin Sagendorf, Educational Innovations, Inc., Η.Π.Α., 2017).

Στις μέρες μας, το ενδιαφέρον για τα σχήματα Chladni έχει αναβιώσει λόγω της εξέτασης του **κβαντικού χάους** θεωρώντας τα τοιχώματα πρόσπτωσης των σωματιδίων ως ασύμμετρες πλάκες δόνησης (Stöckmann, H.J., 2007). Επίσης, έχουν συμπεριληφθεί στη μελέτη διαφορετικών θεματικών πεδίων όπως της σεισμολογίας (Flores, J., 2007), της νανομηχανικής (Dorrestijn, M., 2007). (Chakram, S., et al., 2014) της απεικόνισης (Dennis, M., 2007), της όρασης (Wolf, F., 2007) και εξακολουθούν να εμπνέουν καλλιτέχνες (https://www.youtube.com/watch?v=tqANg0y_Fz0).

Σήμερα, πλέον, οι ιδιοσυχνότητες και τα πλάτη των σχημάτων Chladni μπορούν να μετρηθούν με μετρήσεις Doppler με laser ή με αναλυτή φάσματος μέσω ακουστικής ολογραφίας στο εγγύς εύρος (Lindemann T., Vella, A., 2015), ενώ τα μοτίβα μπορούν να προβλεφτούν μαθηματικά και να απεικονιστούν, π.χ., με Matlab (Xiao, W., 2010), ή με Mathematica (Kverno, D., Nolen, J., 2013).

Σήμερα, η σχεδόν πλήρης μαθηματική πρόβλεψη των πειραματικών σχημάτων γίνεται μεν κατά Rayleigh υπό κατάλληλες οριακές συνθήκες αλλά όταν λαμβάνεται υπόψη επιπλέον και η σύζευξη μεταξύ της πλάκας και του εκάστοτε διεγέρτη (Xiao W., 2010. σ. 44· Tuan, P.H. et al., 2015).

Ο Chladni συμπεράνε ότι ο ήχος ταξιδεύει κατά κύματα. Ήταν ο πρώτος επιστήμονας που κατέδειξε καθαρά αυτήν τη σύνδεση.

Η έκδοση του βιβλίου του Chladni του 1802 μεταφράστηκε στα Αγγλικά και εκδόθηκε μόλις το 2015 (Chladni, E., 2015).

Η παραγωγή σχημάτων Chladni αποτελεί σταθερή επίδειξη του Μουσείου Φυσικής Ιστορίας του Πανεπιστημίου του Harvard με στόχο, μεταξύ άλλων, να δειχθεί η πολυπλοκότητα των σχημάτων που προκύπτουν όταν αυξάνονται οι διαστάσεις της δόνησης (<https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/chladni-plates>).

4.5. Εξίσωση των σχημάτων Chladni

Σήμερα είναι γνωστό ότι η γενική εξίσωση των σχημάτων Chladni είναι η γενική εξίσωση του διδιάστατου κύματος, δηλ. μια γραμμική, ομοιογενής, μερικώς διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης, με εξαρτημένη μεταβλητή την κατηγμένη z και με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές (τετμημένη, x, τεταγμένη, y, και τον χρόνο, t),

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

όπου u, η ταχύτητα του κύματος, $0 \leq t$, $0 \leq x \leq L_1$, $0 \leq y \leq L_2$, με L_1, L_2 οι εν γένει διαφορετικές, διαστάσεις ορθογώνιας πλάκας (Wheatstone, C., 1833· Rayleigh, J.W.S., 1894· Pain H. J., 2005).

Η γενική εξίσωση του διδιάστατου κύματος, μπορεί να γραφεί αλλιώς:

$$z = A \cdot \left. \frac{\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu} \right\} \frac{2\pi x}{L_1} \cdot \left. \frac{\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu} \right\} \frac{2\pi y}{L_2} \cdot \left. \frac{\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu} \right\} \omega t .$$

όπου $\left. \frac{\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu} \right\}$ σημαίνει είτε ημ., είτε συνημ., ανάλογα με τις οριακές συνθήκες.

(Pain H. J., 2005, σ. 247· Xiao W., 2010, σ. 29).

Η γενική εξίσωση του διδιάστατου κύματος προκύπτει από τη γενική εξίσωση του μονοδιάστατου κύματος αξιοποιώντας την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων. Το μέρος που ενέχει τον

χρόνο διατηρείται το ίδιο. Η γενική εξίσωση του μονοδιάστατου στάσιμου κύματος αποτελεί συνήθη διδακτέα ύλη της Βθμιας εκπαίδευσης.

Η **γενική** εξίσωση του διδιάστατου κύματος ανακλύπει ακριβώς η ίδια σε ποικίλα φυσικά προβλήματα, όπως είναι οι ταλαντώσεις είτε μουσικού τυμπάνου, είτε υμενίου (μεμβράνης) σαπουνό νερού που φέρεται συγκρατούμενο π.χ. σε δακτύλιο, είτε μεταλλικής πλάκας ελεύθερων άκρων. Σε κάθε ένα πρόβλημα, όμως, προκύπτει η δική του **ειδική** εξίσωση και λύση λόγω του ότι πρόκειται για διαφορετικές υλικές ιδιότητες (π.χ., φυσική κατάσταση, πάχος, ελαστικότητα, διατμητική τάση, ροπή) αλλά και λόγω της εφαρμογής εν γένει διαφορετικών **αρχικών** και **οριακών συνθηκών** που ταιριάζουν στο κάθε πρόβλημα.

Διαφορετικές υλικές ιδιότητες;

Τα σχήματα Chladni μπορούν να προκύψουν

- i) δονώντας τη μεμβράνη τυμπάνου,
- ii) δονώντας πλάκα, τυπικά με δοξάρι βιολιού, καθηλωμένη σε σημείο της, και στη σύγχρονη εποχή
- iii) δονώντας μεταλλική πλάκα μέσω ηχείου.

Η εύρεση της ειδικής εξίσωσης των σχημάτων Chladni σε πλάκα απλοποιείται κατά πολύ προσεγγίζοντας την πλάκα ως ιδανική ³ μεμβράνη το οποίο ακολουθείται και στην παρούσα εργασία.

Οριακές συνθήκες;

Οι οριακές συνθήκες (boundary conditions) συνιστούν τους περιορισμούς που επιβάλλει το φυσικό περιβάλλον. **Δεν προκύπτουν αυθόρμητα: πρέπει να απαιτήσουμε την ισχύ τους** ώστε η λύση να είναι η λύση του φυσικού προβλήματος που μας απασχολεί κάθε φορά.

Συγκεκριμένα, οι οριακές συνθήκες είναι άλλες για ένα καθηλωμένο (clamped) σημείο, άλλες για καθηλωμένα όρια της ταλαντούμενης μεμβράνης (οπότε το πρόβλημα είναι πρόβλημα καθηλωμένης μεμβράνης), και άλλες για ελεύθερα όρια (οπότε το πρόβλημα είναι πρόβλημα ελεύθερης μεμβράνης, ή, ισοδύναμα διατυπωμένο, κλειστής επιφάνειας ⁴).

Τα σχήματα Chladni στο δικό μας πλαίσιο συνιστούν πρόβλημα ελεύθερης μεμβράνης (Rayleigh, J.W.S., 1894, σ. 371· Waller, M., 1939· Tuan, P.H. et al., 2015· D'Alessio, S.J.D., 2021) κατ' αναλογία με το μονοδιάστατο στάσιμο κύμα ήχου σε σωλήνα με ανοικτά και τα δύο άκρα του (Parry, A., Curtis, M., 2003) ή με νήμα που έχει ελεύθερα και τα δύο άκρα του. Άρα, εν προκειμένω τα όρια συνιστούν κοιλίες (**παρ. 3**).

³ Λεπτή, τεντωμένη, πλήρως εύκαμπτη, ομοιογενής, σταθερής μηχανικής τάσης και πυκνότητας, όπου γίνονται εγκάρσιες ταλαντώσεις.

⁴ Στην τοπολογία, κλειστή επιφάνεια είναι η επιφάνεια που δεν έχει όριο και είναι και συμπαγής.

Στο δικό μας πλαίσιο, το σημείο από όπου εφορμούν οι δονήσεις, εν προκειμένω το κέντρο της πλάκας, προφανώς ακολουθεί την ταλαντωτική κίνηση της πλάκας, οπότε δεν συνιστά σημείο καθήλωσης (δηλ. ακινητοποίησης) αυτής. Γι' αυτό, δεν υπάρχει οριακή συνθήκη που αφορά το κέντρο της πλάκας.

Αφού τα καθηλωμένα όρια συνιστούν κόμβους, για παραλληλόγραμμη πλάκα εν γένει διαφορετικών διαστάσεων L_1, L_2 , πρέπει $z(L_1, y, t) = z(x, L_2, t) = 0$, και για κυκλική πλάκα ακτίνας L , πρέπει $z(L, y, t) = z(x, L, t) = 0 \forall t \geq 0$. Επιπροσθέτως, οι ρυθμοί μεταβολής της συνάρτησης θέσης ως προς κάθε ανεξάρτητη χωρική μεταβλητή πρέπει να μηδενίζονται στα άκρα ώστε να προκύπτει τοπικό ακρότατο στα άκρα:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=L_1} = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{y=L_2} = 0, \quad \text{για ορθογώνια πλάκα, και}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{y=L} = 0, \quad \text{για κυκλική πλάκα.}$$

Οι οριακές συνθήκες καθηλωμένων ορίων είναι οι **συνθήκες Dirichlet** των σχημάτων Chladni.

Για ελεύθερη μεμβράνη, αρκούν μόνο οι δοσμένες συνθήκες με τις μερικές παραγώγους ώστε να προκύπτει ολικό ακρότατο στα άκρα.

Οι οριακές συνθήκες ελεύθερης μεμβράνης είναι οι **συνθήκες Neumann** των σχημάτων Chladni.

Αφού **στο δικό μας πλαίσιο** πρόκειται για πρόβλημα ελεύθερης μεμβράνης ταλαντώμενου κέντρου, **ισχύουν μόνο οι δοσμένες συνθήκες Neumann** (Tuan, P.H. et al., 2015· Skrodzki, M., Reitebuch, U., Polthier, K., 2016· D'Alessio, S.J.D., 2021).

Επίσης, σε οποιαδήποτε περίπτωση σχήματος Chladni σε πλάκα, θεωρείται ότι, αρχικά, η πλάκα ξεκινάει από την αρχή του συστήματος αναφοράς. Άρα, για παραλληλόγραμμη πλάκα εν γένει διαφορετικών διαστάσεων L_1, L_2 , πρέπει $z(x, y, 0) = 0 \forall x$ με $0 \leq x \leq L_1$ και $\forall y$ με $0 \leq y \leq L_2$, και για κυκλική πλάκα ακτίνας L , πρέπει $z(x, y, 0) = 0 \forall x, y$ με $0 \leq x, y \leq L$. Επιπλέον, η αρχική ταχύτητα όλης της πλάκας είναι μηδέν, δηλ. πρέπει:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

(αυτές είναι δύο **αρχικές συνθήκες** των σχημάτων Chladni). (Xiao W., 2010. σ. 30).

Επομένως,

η ειδική εξίσωση των δικών μας σχημάτων Chladni είναι:

γενική εξίσωση του διδιάστατου κύματος σε πλάκα + οριακές συνθήκες Neumann + αρχικές συνθήκες,

ή, αλλιώς διατυπωμένο, είναι

**η ειδική εξίσωση διδιάστατου κύματος σε τετράγωνη ή κυκλική πλάκα ελεύθερων άκρων
ταλαντώμενου κέντρου,
με την πλάκα θεωρούμενη ως (ιδανική) μεμβράνη.**

Ποια είναι η ειδική εξίσωση των δικών μας σχημάτων Chladni;

Για τετράγωνη πλάκα μήκους ακμής L, ελεύθερων άκρων, δονούμενη από το κέντρο της, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, είναι η εξίσωση

$$z(x, y, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \sigma_{\nu\nu} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \sigma_{\nu\nu} \left(\frac{m\pi y}{L} \right) \cdot [A_{n,m} \cdot \eta\mu(\omega_{n,m}t) + B_{n,m} \cdot \sigma_{\nu\nu}(\omega_{n,m}t)]$$

όπου $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ σταθερές $\in \mathbb{R}$ οι οποίες διαφέρουν για κάθε τιμή των n, m. Για να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες πρέπει n, m να $\in \mathbb{N}$ (Waller M., 1939· Parry, A., Curtis, M., 2003· Xiao W., 2010. σ. 35· D'Alessio, S.J.D., 2021).

Η ύπαρξη συνημίτονων με αυτά τα ορίσματα στο πρώτο μέρος της εξίσωσης εξασφαλίζει τη μεγιστοποίηση του πλάτους για $x, y=L$, δηλ. εξασφαλίζει το να είναι τα όρια κοιλίες, αφού απαιτήσαμε να είναι ελεύθερα και αφού στα ελεύθερα όρια σχηματίζονται πάντα κοιλίες.

Κάθε ένα από τα γινόμενα των συνημίτονων του πρώτου όρου της εξίσωσης αντιστοιχεί και σε ένα σχήμα. **Το τελικό σχήμα προκύπτει από την υπέρθεση αυτών των στοιχειωδών σχημάτων.** Στην περίπτωση που ορισμένα σχήματα προκύπτουν πάνω από μία φορά, το τελικό σχήμα διαμορφώνεται ανάλογα με την τιμή του συντελεστή με τον οποίο συμμετέχουν τα στοιχειώδη σχήματα στην παραπάνω ειδική εξίσωση.

Ο δεύτερος όρος του γινομένου, δηλ. ο όρος με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις οι οποίες ενέχουν ως όρισμα τον χρόνο, επηρεάζει την τιμή του πλάτους αλλά όχι το σχήμα του κύματος. Για αυτό, συχνά παραλείπεται στη βιβλιογραφία, όπως συχνά παραλείπονται και οι δύο παραπάνω αρχικές συνθήκες αφού ενέχουν μόνο τον χρόνο.

Όταν $(n_1, m_1) = (m_2, n_2)$, τότε τα σχήματα είναι τα ίδια, δηλ. προκύπτει **εκφυλισμός** των σχημάτων.

Οι ιδιοσυχνότητες δίνονται από την εξίσωση

$$\omega = \frac{\pi u}{L} \sqrt{n^2 + m^2}, \quad \text{όπου } u, \text{ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος,}$$

από την οποία εξάγεται ότι οι ιδιοσυχνότητες δεν είναι η μια ακέραιο πολλαπλάσιο της άλλης όπως στην περίπτωση του μονοδιάστατου στάσιμου κύματος σε μια χορδή.

Η ειδική εξίσωση διδιάστατου στάσιμου κύματος **σε κυκλική πλάκα** είτε ελεύθερων είτε καθλωμένων άκρων, δονούμενη από το κέντρο της, σε πολικές συντεταγμένες (r, φ) , δίνεται από την εξίσωση

$$z(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} J_n(K_{n,m} \cdot r) \cdot [\eta\mu(n\varphi) + \sigma\upsilon\nu(n\varphi)] \cdot [A_{n,m} \cdot \eta\mu(\omega_{n,m}t) + B_{n,m} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega_{n,m}t)]$$

όπου J_n είναι η νιοστής τάξης συνάρτηση Bessel ⁵ του πρώτου είδους η οποία διαφέρει ανάλογα με το εάν πρόκειται για ελεύθερα ή για καθηλωμένα άκρα, και, όπου $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ σταθερές $\in \mathbb{R}$ οι οποίες διαφέρουν για κάθε τιμή των n , m (Parry, A., Curtis, M., 2003· Fetter, A.L., Walecka, J.D., 2003, σ. 279· Daileda, R., 2012· Zeleny, E., 2008· Mehta, P., 2009, σ. 15, 17)

Στις ρίζες της ειδικής εξίσωσης στις οποίες μηδενίζεται η J_n προκύπτουν ακτινικές κομβικές επιφάνειες. Στις ρίζες τάξης $< n$ (δηλ. πριν από την ρίζα νιοστής τάξης) της J_n , προκύπτουν κομβικές επιφάνειες οι οποίες εμφανίζονται ως ομόκεντροι κύκλοι πλήθους $\leq n-1$.

Κάθε τμήμα που περιλαμβάνει την J_n και τους τριγωνομετρικούς όρους με όρισμα το φ αντιστοιχεί και σε ένα σχήμα. **Το τελικό σχήμα προκύπτει από την υπέρθεση αυτών των στοιχειωδών σχημάτων.** Στην περίπτωση που ορισμένα σχήματα προκύπτουν πάνω από μία φορά, το τελικό σχήμα διαμορφώνεται ανάλογα με την τιμή του συντελεστή με τον οποίο συμμετέχουν τα στοιχειώδη σχήματα στην παραπάνω ειδική εξίσωση.

Το τμήμα που περιλαμβάνει τους τριγωνομετρικούς όρους με όρισμα τον χρόνο, επηρεάζει την τιμή του πλάτους αλλά όχι το σχήμα του κύματος. Για αυτό, συχνά παραλείπεται στη βιβλιογραφία.

Η μαθηματική πρόβλεψη των ιδιοσυχνοτήτων και των σχημάτων που αποκομίζονται πειραματικά είναι καλύτερη μέσω της εξίσωσης πλακών και όχι μεμβρανών καθώς η θεώρηση των πλακών ως ιδανικές μεμβράνες αποτελεί οπωσδήποτε μια υπεραπλούστευση. Η μαθηματική πρόβλεψη είναι σχεδόν πλήρης εάν ληφθεί υπόψη και η σύζευξη μεταξύ της πλάκας και του εκάστοτε διεγέρτη, δηλ. εάν στη γενική εξίσωση τεθεί η συνάρτηση θέσης της πηγής των δονήσεων, έστω f :

$$\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y,t)$$

(Xiao W., 2010. σ. 44· Tuan, P.H. et al., 2015) (η οποία πηγή δεν χρειάζεται να βρίσκεται απαραίτητα στο κέντρο της πλάκας). Ωστόσο, ακόμη και με αυτήν την πρόνοια, παραμένει ακόμα χώρος για αποκλίσεις των πειραματικά λαμβανόμενων ιδιοσυχνοτήτων και σχημάτων από τα μαθηματικώς προβλεπόμενα επειδή η ταλάντωση δεν είναι αμιγώς εγκάρσια όπως γίνεται δεκτό όταν παράγεται η γενική κυματική εξίσωση.

⁵ Η συνάρτηση Bessel ανακύπτει κατά την εύρεση ειδικών λύσεων της εξίσωσης του Laplace, και γενικότερα της εξίσωσης του Helmholtz σε κυλινδρικές ή σφαιρικές πολικές συντεταγμένες, οπότε ανακύπτει στα προβλήματα Φυσικής που αφορούν τις εν λόγω εξισώσεις.

Η εξίσωση οποιουδήποτε στάσιμου κύματος είναι γραμμική. Μια συνέπεια της γραμμικότητας είναι ότι το άθροισμα οποιωνδήποτε δύο λύσεων είναι και πάλι μια λύση ⁶· έτσι δικαιολογείται η εμφάνιση του αθροίσματος στις ειδικές εξισώσεις.

⁶ Αυτή η συνέπεια της γραμμικότητας λέγεται «υπέρθωση» ή «επαλληλία».

Κεφάλαιο 2: πειραματικό μέρος

2.1. Εφαρμογή στην τάξη

Το διδακτικό σενάριο εφαρμόστηκε σε 49 μαθητές της Γ λυκείου θετικής κατεύθυνσης του βου ΓΕΛ Καλλιθέας, του Γυμνασίου Α.Τ. Έμπωνα Ρόδου και του «Ροδίων Παιδεία», στο πλαίσιο του μαθήματος της Χημείας, παρουσία των καθηγητών Χημείας των σχολείων, κατά το δεύτερο εξάμηνο της σχολικής χρονιάς 2018-2019. Προηγήθηκε μια πιλοτική εφαρμογή σε μαθητές της Γ λυκείου θετικής κατεύθυνσης του 1ου Πειραματικού ΓΕΛ Αθηνών κατά το σχολικό έτος 2017-2018.

Η δειγματοληψία ήταν ανεξάρτητη της σχολικής επίδοσης, της κοινωνικής προέλευσης και του φύλλου, επειδή αυτοί οι παράγοντες δεν ενέχονταν στον σκοπό της εργασίας· μοναδικό κριτήριο αποτέλεσε η προθυμία συμμετοχής στην εργασία. Οι μαθητές που συμμετείχαν κυμαίνονταν από τους λεγόμενους «πολύ αδύναμους» έως τους λεγόμενους «πολύ καλούς».

Κατά την υλοποίηση της πρότασης αποφεύχθηκε εντελώς ο χειρισμός του υπολογιστή και του ενισχυτή από τους μαθητές. Ο λόγος για αυτό ήταν ότι **ο χειριστής πρέπει να σαρώνει αργά και προσεκτικά όλο το εύρος συχνότητων**. Επιπλέον λόγος ήταν ότι **η ένταση του ενισχυτή** πρέπει να είναι τόσο μεγάλη ώστε να παράγονται σχήματα στις ιδιοσυχνότητες, αλλά **όχι πολύ μεγάλη, ώστε να προκληθεί καταστροφή του ηχείου** και/ή ο ενισχυτής (το οποίο συνέβη στην πιλοτική μας εφαρμογή) (**υποσημ. 14, 15 παρ. 2.10.5**). Για τον ίδιο λόγο, **καλό είναι να μην εφαρμόζονται τα σήματα για πολύ**. Στη δική μας υλοποίηση, η δημιουργία σχημάτων Chladni από τους εκπαιδευόμενους περιορίστηκε στη δημιουργία σχημάτων με μικρόφωνο από υψίφωνη μαθήτρια.

2.2. Ορολογία που χρησιμοποιήθηκε

Από την πιλοτική, ακόμα, εφαρμογή κατέστη σαφές ότι υπάρχει **ένα ζήτημα που αφορά την ορολογία των στάσιμων κυμάτων**: η διδασκαλία των στάσιμων κυμάτων στη Βθμια εκπαίδευση ενέχει τους όρους δεσμοί και κοιλίες, ενώ αρχικά είχαμε χρησιμοποιήσει τους όρους κόμβος, κομβική επιφάνεια και μη κομβική επιφάνεια καθώς ο όρος «κομβική επιφάνεια» υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, στην ενότητα των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων/τροχιακών. Έτσι, όμως, δημιουργήθηκε η ανάγκη ρητής αντιστοίχισης. Για αυτό, υπήρξε η σκέψη να χρησιμοποιηθούν μόνο οι όροι δεσμός, δεσμικές και αντιδεσμικές επιφάνειες. Ωστόσο, οι όροι δεσμικός και αντιδεσμικός έχουν ήδη άλλη επικρατούσα έννοια στο πλαίσιο της Χημείας, στη θεωρία των μοριακών τροχιακών (MOT). Τελικά επιλέχθηκε η χρήση των όρων κομβικές και μη κομβικές επιφάνειες αλλά και να υποδηλωθεί η ισοδυναμία των όρων δεσμός και κόμβος καθώς και των όρων μη κομβικός και μη δεσμικός, στο εισαγωγικό τμήμα του φύλλου εργασίας. Κατά τη φάση της επίδειξης οι όροι παραθέτονταν πάντα μαζί. Όσον αφορά τη σύγχυση των όρων δεσμικός/αντιδεσμικός με την έννοια που αποδίδεται στο πλαίσιο της MOT, μια δεύτερη ματιά, φανερώνει ότι οι έννοιες δεν έρχονται σε αντίθεση καθώς, και στις δύο περιπτώσεις, ο όρος δεσμικός χαρακτηρίζει μια κατάσταση μικρότερης ενέργειας και ο όρος αντιδεσμικός χαρακτηρίζει μια κατάσταση μεγαλύτερης ενέργειας.

2.3. Σχέδιο μαθήματος

Τίτλος: η διδασκαλία των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου μέσω αναλογίας: από τα σχήματα Chladni στα σχήματα των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων.

Σύντομη περιγραφή: η δραστηριότητα αξιοποιεί ενισχυτικές και ακυρωτικές συμβολές μεταξύ των κυμάτων που σχηματίζονται και συμβάλλουν κατά τη δόνηση μιας πλάκας: ένα κοινό ηχείο πάνω στο οποίο έχει συγκολληθεί κατάλληλα μια μεταλλική πλάκα δέχεται σήμα από ενισχυτή που, με τη σειρά του, δέχεται σήμα από υπολογιστή. Πάνω στην πλάκα προστίθεται κοινό μαγειρικό αλάτι και, ακολούθως, διατρέχεται αργά ένα εύρος συχνοτήτων. Στις περιπτώσεις εκείνες στις οποίες επέρχεται συντονισμός δημιουργούνται στάσιμα κύματα, οπότε, δημιουργούνται, ιδανικά, συμμετρικά σχήματα λόγω συσσώρευσης του άλατος στα μη ταλαντούμενα σημεία. Οι εκπαιδευόμενοι προσανατολίζονται στην ομοιότητα επιλεγμένων σχημάτων με επιλεγμένα σχήματα των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου. Ακολουθεί καθοδηγούμενη συζήτηση για το πώς μπορεί τα σχήματα να συνδέονται με τη διδακτέα ύλη για την αιτία των σχημάτων των τροχιακών για το τι αφορά το στάσιμο κύμα σε κάθε περίπτωση για την αύξηση της πολυπλοκότητας των σχημάτων τροχιακών των πυκνοτήτων όσο αυξάνει η ενέργεια του ηλεκτρονίου του υδρογόνου.

Μάθημα: Χημεία

Σύνδεση με αναλυτικό πρόγραμμα: τροχιακά του ατόμου του υδρογόνου

Τάξη: Γ λυκείου και/ή Γθμια εκπαίδευση με διδακτέα ύλη που ενέχει εισαγωγή στην κβαντική θεωρία

Προβλεπόμενος χρόνος: 1 διδακτική ώρα

Μορφή: επίδειξη με καθοδηγούμενη συζήτηση

Πορεία/φάσεις:

1) επίδειξη από τον εισηγητή

2) καθοδηγούμενη συζήτηση: √ ανάδειξη ιστορικού υποβάθρου √ ερμηνευτική προσέγγιση της επίδειξης (εξήγηση της αρχής του φαινομένου - συσχέτιση με διδακτέα ύλη) √ απόπειρες επίτευξης κάθε στόχου κατά σειρά, ιδανικά εκμαιεύοντας τις επιθυμητές ρητές διατυπώσεις από τους εκπαιδευόμενους √ επιβεβαιωτικές διατυπώσεις από τον εισηγητή

3) φύλλο εργασίας για εμπέδωση και αξιολόγηση.

Μέθοδος: Άμεση διδασκαλία (δασκαλοκεντρική) κατά την 1η φάση, μικτή διδασκαλία κατά τη 2η φάση, έμμεση διδασκαλία (μαθητοκεντρική) κατά την 3η φάση.

Προαπαιτούμενη γνώση: **1)** ο ποιοτικός ορισμός του στάσιμου κύματος, **2)** εξοικείωση με τα σχήματα των τροχιακών.

■ Η γνώση ότι η εξίσωση του Schrödinger προέκυψε από την εξίσωση του κύματος οπωσδήποτε επικουρεί την κατανόηση της παρούσας εφαρμογής, αλλά δεν είναι απαραίτητη. Ωστόσο, παρέχεται συνοπτικά στο εισαγωγικό τμήμα του φύλλου εργασίας.

Σκοπός: η συσχέτιση των σχημάτων των τροχιακών στο άτομο του υδρογόνου με τα σχήματα της επίδειξης (σχήματα Chladni).

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

- 1) Να διαπιστώσουν ότι ορισμένα σχήματα των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου παρουσιάζονται, προβαλλόμενα σε δύο διαστάσεις, σε ένα φαινόμενο του μακρόκοσμου.
- 2) Να γνωρίσουν ότι η κυματοσυνάρτηση είναι εξίσωση στάσιμου κύματος.
- 3) Να συσχετίσουν την αύξηση της πολυπλοκότητας των σχημάτων των τροχιακών του υδρογόνου με την αύξηση της ενέργειας του ηλεκτρονίου του.

Προϊόντα της διδακτικής πρότασης: 1) ιδιοκατασκευή για την παραγωγή σχημάτων Chladni 2) σενάριο διδασκαλίας με φύλλο εργασίας που αξιοποιεί την ιδιοκατασκευή.

Λέξεις κλειδιά: τροχιακό, άτομο του υδρογόνου, στάσιμο κύμα, συντονισμός, (αντι)κομβική επιφάνεια, σχήμα Chladni.

Πίνακας 4.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (το είδος στόχου κατά αναθεωρημένη ταξινόμια του Bloom (2001))	Μαθητικές ενέργειες	Διδακτικές ενέργειες	Αξιολόγηση των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων
<p>Να διαπιστώσουν ότι ορισμένα σχήματα των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου παρουσιάζονται, προβαλλόμενα σε δύο διαστάσεις, σε ένα φαινόμενο του μακρόκοσμου». (ΓΝΩΣΗ)</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Παρατήρηση της επίδειξης και επιλεγμένων εικόνων του φύλλου εργασίας. ● Ξεφύλλισμα του σχολικού βιβλίου <p>- Χρόνος 5 λεπτά -</p>	<p>«Γιατί χρησιμοποιούμε αυτήν την επίδειξη στο μάθημα της Χημείας; Ξεφυλλίστε το βιβλίο χημείας σας. Βρίσκετε εικόνες που μοιάζουν με αυτά τα σχήματα; Ίσως σας βοηθήσει περισσότερο η παρατήρηση των ακόλουθων σχημάτων...».</p>	<p>Ερωτήσεις 2, 12</p>
<p>Να γνωρίσουν ότι η κυματοσυνάρτηση του ατόμου του υδρογόνου είναι εξίσωση στάσιμου κύματος. (ΓΝΩΣΗ)</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Απαντήσεις σε ερωτήσεις καθοδηγούμενης ανακάλυψης. <p>- Χρόνος 5 λεπτά -</p>	<p>«Είναι η ομοιότητα, έστω μερικών, σχημάτων της επίδειξης με τα σχήματα των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου που βλέπουμε στα βιβλία μας σύμπτωση;» «Που οφείλονται τα σχήματα της επίδειξης;» «Γιατί η ταλάντωση της πλάκας κάνει το αλάτι να αποκτάει καθορισμένα γεωμετρικά σχήματα;» «Τι είδος κύματος μας θυμίζουν οι όροι «κομβικές/δεσμικές γραμμές» και «μη κομβικές/μη δεσμικές επιφάνειες;»</p>	<p>Ερωτήσεις 4, 9</p>
<p>Να συσχετίσουν την αύξηση της πολυπλοκότητας των σχημάτων των τροχιακών του υδρογόνου με την αύξηση της ενέργειας του ηλεκτρονίου του (ΓΝΩΣΗ)</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Παρατήρηση της επίδειξης. ● Απάντηση σε ερώτηση καθοδηγούμενης ανακάλυψης <p>- Χρόνος 3 λεπτά -</p>	<p>Αυτό που μεταβάλλουμε εδώ είναι μόνο η συχνότητα. Όσο αυξάνουμε τη συχνότητα προσφέρουμε λιγότερη ή περισσότερη ενέργεια;» «Όσο προσφέρουμε περισσότερη ενέργεια, τα σχήματα στην πλάκα γίνονται πιο απλά ή πιο πολύπλοκα;» «Όσο προσφέρουμε περισσότερη ενέργεια το ηλεκτρόνιο μπορεί να περνάει, διαδοχικά, από τροχιακό 1s σε τροχιακό 2s, μετά σε τροχιακό 3s, κ.ο.κ. Άρα, όσο προσφέρουμε περισσότερη ενέργεια, τα σχήματα των τροχιακών γίνονται πιο απλά ή πιο πολύπλοκα;»</p>	<p>Ερώτηση 7</p>

2.4. Στόχος I: να διαπιστώσουν ότι ορισμένα σχήματα των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου παρουσιάζονται, προβαλλόμενα σε δύο διαστάσεις, σε ένα φαινόμενο του μακρόκοσμου

2.4.1. Τεκμηρίωση του στόχου I

Εάν δειχθεί ότι ορισμένα από τα σχήματα των τροχιακών, παρουσιάζονται, έστω προβαλλόμενα σε δύο διαστάσεις, σε ένα φυσικό φαινόμενο του μακρόκοσμου, τότε υποστηρίζεται καλύτερα το άλμα

πίστης προς το ότι το σχήμα του χώρου που βρίσκεται το ηλεκτρόνιο του υδρογόνου ορισμένης ενέργειας με ορισμένη πιθανότητα μπορεί να είναι το τριδιάστατο ανάλογο εκείνων των προβολών.

2.4.2. Ενδεικτική επίτευξη του στόχου I

Ο στόχος I επιτυγχάνεται κατά τη φάση της επίδειξης:

αφότου παρασχεθεί το ιστορικό υπόβαθρο έως την εποχή του Chladni, οι εκπαιδευόμενοι καλούνται να απαντήσουν στο «γιατί χρησιμοποιούμε αυτήν την επίδειξη στο μάθημα της Χημείας». Κατόπιν, τους δίνεται η οδηγία να ξεφυλλίσουν το βιβλίο Χημείας τους. Η συσχέτιση ορισμένων σχημάτων Chladni με το σχήμα κάποιων τροχιακών καθίσταται πλέον εμφανής στους εκπαιδευόμενους εάν κατά την επίδειξη παραχθούν (ή παρουσιαστούν έτοιμα) σχήματα εμφανώς αντίστοιχα με τα σχήματα των πυκνοτήτων/τροχιακών στα βιβλία τους. Τέτοια σχήματα Chladni φαίνονται στην ερώτηση 2 του φύλλου εργασίας.

Μέσω της επίδειξης οι εκπαιδευόμενοι συνειδητοποιούν ότι **δεν σχετίζονται όλα τα σχήματα Chladni με τα σχήματα των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου**, το οποίο γεγονός δίνεται και ρητά από τον εκπαιδευτικό.

2.5. Στόχος II: Να γνωρίσουν ότι η κυματοσυνάρτηση του ατόμου του υδρογόνου είναι εξίσωση στάσιμου κύματος

2.5.1. Τεκμηρίωση του στόχου II

Στην προσπάθεια να ερμηνεύσει το γεγονός ότι το ηλεκτρόνιο δεν καταλήγει στον πυρήνα, ο de Broglie, θεώρησε ότι το ηλεκτρόνιο έχει και ιδιότητες κύματος και, συγκεκριμένα, στάσιμου κύματος (παρ. 2.2.). Δεχόμενοι τη στατιστική ερμηνεία του Born (παρ. 2.6.), **ο όρος στάσιμο κύμα δεν αναφέρεται σε κάποιο φυσικό κύμα αλλά στην κατανομή της πιθανότητας εύρεσης του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα** (π.χ., Eastman, R.H., 1970, σ. 354· Sinclair, B., 2001· Hobson, R., 2003, σ. 382). Επομένως, το σχήμα των τροχιακών οφείλεται σε κατανομή μορφής κύματος και, ειδικά, στάσιμου κύματος.

Μέσω της επίτευξης αυτού του στόχου αναδεικνύεται το αίτιο της ομοιότητας των σχημάτων.

Η λέξη «στάσιμο» αναφέρεται μόνο μια φορά στο τρέχον βιβλίο Χημείας της Γ λυκείου και αυτή η φορά είναι στο παράρτημα του σχετικού κεφαλαίου, κατά την εξήγηση του μικροσκοπίου σάρωσης σήραγγας. Αλλά, και σε αυτήν την αναφορά ακόμη, φέρεται ως μέρος της εξήγησης που διατυπώθηκε από ερευνητή της IBM για την παρατήρηση μεταλλικής επιφάνειας, οπότε ίσως υποτεθεί ότι ισχύει μόνο στη συγκεκριμένη παρατήρηση. Από την άλλη πλευρά, στο τρέχον βιβλίο Φυσικής της Γ λυκείου, υπάρχει εκτενής αναφοράς στα στάσιμα κύματα, αλλά πουθενά ότι τέτοια είναι τα κύματα που αφορούν την κατανομή του ηλεκτρονίου στον ατομικό χώρο.

Η επίτευξη του στόχου II προϋποθέτει την επίτευξη του στόχου I.

2.5.2. Ενδεικτική επίτευξη του στόχου II

Ο στόχος II επιτυγχάνεται κατά τη φάση της επίδειξης.

Μετά την επίτευξη του προηγούμενου στόχο, δημιουργείται η απορία: **είναι η ομοιότητα, έστω μερικών, σχημάτων Chladni με τα απεικονιζόμενα στα βιβλία μας σχήματα των τροχιακών, προβαλλόμενα σε δύο διαστάσεις, σύμπτωση;**

Δεδομένου ότι οι εκπαιδευόμενοι παρατηρούν τη δόνηση της πλάκας, τείνουν να αποδώσουν ως αιτία των σχημάτων Chladni αυτήν τη δόνηση ήδη, χωρίς άλλη εξήγηση. Ωστόσο, ο εισηγητής πρέπει να αναδείξει αυτή τη δόνηση ρητά ως αιτία και, ακόμη, να προχωρήσει αναδεικνύοντας το αποτέλεσμα αυτής της δόνησης, το στάσιμο κύμα που σχηματίζεται. Ο εισηγητής προσθέτει ότι τα σχήματα Chladni δεν έχουν να κάνουν με τον ήχο από το ηχείο: ο ήχος συνιστά διάμηκες κύμα και τα διαμήκη κύματα δεν συμβάλλουν σε αυτό το φαινόμενο.

Το ερώτημα «εάν είναι η ομοιότητα συμπτωματική;» φέρεται στο προσκήνιο. Οι εκπαιδευόμενοι προσανατολίζονται στο «πως η ταλάντωση της πλάκας κάνει το αλάτι να αποκτάει καθορισμένα γεωμετρικά σχήματα», η οποία ερώτηση επιβεβαιώνει στους εκπαιδευόμενους ότι το αίτιο των σχημάτων Chladni είναι η ταλάντωση της πλάκας. Μετά εξηγείται συνοπτικά το πως δημιουργούνται τα σχήματα Chladni αποκαλύπτοντας ρητά ότι το αίτιο είναι η ανάκλαση των μηχανικών εγκάρσιων κυμάτων στα όρια της πλάκας με αποτέλεσμα ενισχυτικές και ακυρωτικές συμβολές μεταξύ των κυμάτων. Γίνεται η ερώτηση «τι θυμίζει αυτή η ορολογία που αφορά τα κύματα»· έτσι, εκμιαεύεται ο όρος «στάσιμο κύμα» και συμπληρώνεται ότι τα σχήματα Chladni οφείλονται σε στάσιμα κύματα, όπως εκείνα που δημιουργούνται σε σύρμα σπιδάλ, μόνο που διαφέρουν στο πλήθος των διαστάσεων που εξελίσσονται. Κατόπιν, διερευνάται εάν τώρα που ξέρουν την εξήγηση των σχημάτων Chladni μπορούν να εξηγήσουν την ομοιότητα με διδιάστατες προβολές των τροχιακών. Ο εισηγητής αναδεικνύει ρητά πως το αίτιο της ομοιότητας είναι ότι η κυματοσυνάρτηση είναι εξίσωση στάσιμου κύματος. Ως επιστέγασμα, ο εισηγητής διατυπώνει, ρητά, ότι σε κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν (σύρμα σπιδάλ, σχήματα Chladni, τροχιακά του ατόμου του υδρογόνου) τα σχήματα οφείλονται σε μονοδιάστατο στάσιμο κύμα, σε διδιάστατο στάσιμο κύμα και σε τριδιάστατο στάσιμο κύμα, αντίστοιχα.

Προαιρετικά ⁷, ο εισηγητής συμπληρώνει ότι, κατά την επικρατούσα άποψη, το μέγεθος που ταλαντώνεται ώστε να σχηματίζει το στάσιμο κύμα στην περίπτωση των τροχιακών δεν είναι το ηλεκτρόνιο, αλλά η ίδιο η κυματοσυνάρτηση. Μάλιστα, επειδή η κυματοσυνάρτηση είναι μέτρο της πιθανότητας του να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σε αυτήν την περιοχή, το στάσιμο κύμα της κυματοσυνάρτησης καλείται και «(στάσιμο) κύμα πιθανότητας» και «(στάσιμο) κύμα κατανομής». Αυτή η αναφορά όχι σε υλικό φυσικό στάσιμο κύμα αλλά σε στάσιμο κύμα πιθανότητας είναι η

⁷ Π.χ., σε περίπτωση εκπαιδευομένων τριτοβάθμιας εκπαίδευσης.

καλούμενη στατιστική ερμηνεία του Born αποτελεί μέρος της επικρατούσας ερμηνείας της κβαντικής θεωρίας, της ερμηνείας της Κοπεγχάγης.

2.6. Στόχος III: Να συσχετίσουν την αύξηση της πολυπλοκότητας των σχημάτων των τροχιακών του υδρογόνου με την αύξηση της ενέργειας του ηλεκτρονίου του.

2.6.1. Τεκμηρίωση του στόχου III

Η αύξηση της πολυπλοκότητας αυξανόμενης της ενέργειας είναι ένα από τα γνωρίσματα των τροχιακών που μπορούν να παρατηρηθούν και με τα σχήματα Chladni (παρ. 4.3.). Υπάρχει ακόμη ένας λόγος, που επιλέξαμε πως αξίζει να δειχθεί αυτό το γνώρισμα:

αυξάνοντας την ιδιοσυχνότητα, δηλ. την ενέργεια, απλούστερα σχήματα Chladni αντικαθίστανται από πιο πολύπλοκα, δηλ. τα μήκη των ακμών σιγά σιγά μικραίνουν και το εμβαδόν των κενών (μη κομβικών) περιοχών συρρικνώνεται. Οι κομβικές γραμμές τείνουν διαδοχικά να καταλάβουν ολοένα μεγαλύτερη επιφάνεια της πλάκας με αποτέλεσμα να αποκομίζεται διαδοχικά η εντύπωση ενός συμπαγούς σχήματος χωρίς κενά.

Αυτό είναι, όμως, ένα παράδειγμα της επιστημονικά αποδεκτής εξήγησης του γιατί δεν γίνεται αντιληπτή η κυματική συμπεριφορά στον μακρόκοσμο: κατά το πέρασμα στον μακρόκοσμο τα μήκη κύματος μικραίνουν με αποτέλεσμα να μην γίνονται αντιληπτά από τις αισθήσεις μας και, κατόπιν, ούτε από τα σύγχρονα όργανα μέτρησης.

Άρα, **τα σχήματα Chladni προσφέρονται για μια εξομοίωση της φαινομενικής απώλειας της κβάντωσης κατά το πέρασμα από τον μικρόκοσμο στον μακρόκοσμο.**

2.6.2. Ενδεικτική επίτευξη του στόχου III

Ο στόχος επιτυγχάνεται κατά τη φάση της επίδειξης:

έχοντας συνδέσει τα σχήματα Chladni με τα σχήματα των τροχιακών κατά την επίτευξη των προηγούμενων στόχων, οι εκπαιδευόμενοι παροτρύνονται να αποφανθούν για το τι γίνεται με την πολυπλοκότητα των σχημάτων της επίδειξης όσο αυξάνει η ιδιοσυχνότητα. Αμέσως μετά καλούνται να βρουν τι γίνεται με την πολυπλοκότητα των τροχιακών όσο αυξάνει η ενέργεια του ηλεκτρονίου:

«αυτό που μεταβάλλουμε εδώ είναι μόνο η συχνότητα. Όσο αυξάνουμε τη συχνότητα προσφέρουμε λιγότερη ή περισσότερη ενέργεια;» «Όσο προσφέρουμε περισσότερη ενέργεια, τι γίνονται τα σχήματα: λιγότερο πολύπλοκα ή περισσότερο πολύπλοκα;» «Όσο προσφέρουμε περισσότερη ενέργεια, το e^- μπορεί να περνάει διαδοχικά από τροχιακό 1s σε τροχιακό 2s, μετά σε τροχιακό 3s, κ.ο.κ. Άρα, όσο προσφέρουμε περισσότερη ενέργεια τα τροχιακά παίρνουν σχήματα λιγότερο πολύπλοκα ή περισσότερο πολύπλοκα;» «Όσο αυξάνεται η ενέργεια, τι γίνεται με την πολυπλοκότητα;» «Όσο το μήκος κύματος μικραίνει, αποκομίζουμε την εντύπωση ενός ενιαίου σχήματος· η πολυπλοκότητα τείνει να μην γίνεται αντιληπτή».

2.7. Επικουρικά στοιχεία για μια ενδεικτική υλοποίηση

Φυσικά, ο εισηγητής μπορεί να κρίνει ότι χρειάζεται να προσθέσει και άλλα στοιχεία στις παραπάνω ενδεικτικές υλοποιήσεις, συνεκτιμώντας τον συνολικό εννοιολογικό φόρτο.

Π.χ., μπορεί να κρίνει πως επικουρεί η ρητή διατύπωση ότι το στάσιμο κύμα είναι εξ' ορισμού σε συντονισμό. Γενικά, η κατανόηση του ότι τα στάσιμα κύματα είναι εξ' ορισμού σε συντονισμό υποβοηθείται από τη χρήση του όρου ιδιοσυχνότητα αντί του όρου συχνότητα.

Επίσης, μπορεί να κρίνει πως επικουρεί η ρητή διατύπωση ότι το ηλεκτρόνιο ανιχνεύεται πάντα ως σωματίδιο γύρω από τον πυρήνα και ότι συμπεριφέρεται ως κύμα όταν είναι ελεύθερο.

2.8. Αξιολόγηση

Η αξιολόγηση των εκπαιδευομένων είναι απαραίτητη για να ελεγχθεί η επίτευξη των στόχων και η τυχούσα δημιουργία νέων εννοιολογικών παρανοήσεων: ως γνωστό, οι συζητήσεις και οι πειραματικές δραστηριότητες σε μια τάξη μπορούν να ερμηνευθούν διαφορετικά από τους μαθητές σε σύγκριση με τις αρχικές προθέσεις των εκπαιδευτικών.

Η αξιολόγηση των εκπαιδευομένων έγινε μέσω φύλλου εργασίας μετά τη φάση της επίδειξης.

Η αξιολόγηση του σεναρίου πραγματοποιήθηκε περιγραφικά μέσω α) κλείδας παρατήρησης από τους παριστάμενους συναδέλφους ειδικοτήτων ΠΕ04 των σχολείων, και β) ξεχωριστού ερωτηματολογίου από τους μαθητές. Αυτό το ερωτηματολόγιο ήταν διάρκειας 4 λεπτών και είχε 9 ερωτήσεις. Από τις 9 ερωτήσεις, οι 2 ήταν ερωτήσεις στάσης ως προς το γνωστικό αντικείμενο. Αυτές ήταν οι ερωτήσεις 7 και 9 και ήταν 4βάθμιας κλίμακας Likert. Οι υπόλοιπες 7 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ήταν ερωτήσεις αξιολόγησης της επίδειξης. Από τις 7 ερωτήσεις αξιολόγησης της επίδειξης, 2 ερωτήσεις ήταν 4βάθμιας κλίμακας Likert. Ο λόγος που επιλέχθηκε κλίμακα Likert με επιλογές άρτιου πλήθους ήταν το να αποκομιστούν θετικές ή αρνητικές αλλά όχι ουδέτερες γνώμες (προσαρμογή από: Ramsden, 1996· The Engineering Professors' Council, 2000).

1) «Το πιο σημαντικό πράγμα που έμαθα σε αυτήν την επίδειξη ήταν..»

2) «Μετά την επίδειξη μου δημιουργήθηκε η εξής απορία ή απορίες..»

3) «Το πιο σκοτεινό & ασαφές σημείο της επίδειξης ήταν..»

4) Υπάρχουν λόγοι που νιώθετε ότι παρεμπόδιζαν την εκμάθησή σας κατά την επίδειξη;

5) «Θα μπορούσα να εξηγήσω τις έννοιες αυτής της επίδειξης σε έναν συμμαθητή μου».

(καθόλου) 0 1 2 3 4 (σίγουρα ναι)

6) «Βρήκα δύσκολο το να συγκεντρωθώ κατά την επίδειξη».

(καθόλου) 0 1 2 3 4 (σίγουρα ναι)

7) «Σκέφτομαι να ψάξω για το θέμα λίγο περισσότερο».

(καθόλου) 0 1 2 3 4 (θα το κάνω)

8) «Μου άρεσε/δεν μου άρεσε το ότι οι εισηγητές..»

9) «Η κβαντική θεωρία είναι κάτι..»

(βαρετό) 0 1 2 3 4 (ενδιαφέρον)

2.9. Επιλογή του κατάλληλου προτύπου για την κατασκευή της διάταξης

Πριν από τον σχεδιασμό της διάταξης που επάγει τα σχήματα Chladni, ανασύραμε πολλές διατάξεις οι οποίες έχουν επινοηθεί για αυτόν τον σκοπό.

Ο απλούστερος τρόπος επαγωγής τους είναι η τριβή δοξαριού επί μεταλλικού επίπεδου υλικού, π.χ., τραπεζιού, ή πλάκας στερεωμένης σε κάθετο άξονα που διέρχεται από κάποιο σημείο της. Αυξάνοντας τη δύναμη και την ταχύτητα της τριβής οξύνεται ο ήχος (toc1955, 2009).

Για την επαγωγή των σχημάτων αρκεί και η δόνηση που προκαλεί η ανθρώπινη φωνή σε τεντωμένη μεμβράνη (tonoscope) (Musical Keys, 2013).

Ωστόσο, με αυτούς τους τρόπους δεν αξιοποιούνται πολλές συχνότητες και, επομένως, δεν αποκομίζεται το πλήθος των σχημάτων που επάγεται με άλλους τρόπους.

Άλλος άκοπος τρόπος έγκειται στην αξιοποίηση ψήγματος στερεού CO₂ (ξηρός πάγος, -78,5 °C), τον οποίο ακουμπάμε (μόνο με τη χρήση λαβίδας και χοντρών γαντιών) επί επίπεδης μεταλλικής πλάκας. Κατά την επαφή επάγεται ταλάντωση του μετάλλου: το μέταλλο μεταφέρει θερμότητα στο ψήγμα, το ψήγμα εξαχνώνεται, και παράγεται αέριο CO₂ το οποίο παρεμβάλλεται μεταξύ του ψήγματος και του μετάλλου· τότε, η επαφή με το ψήγμα διακόπτεται, οπότε η μεταφορά θερμότητας στο ψήγμα διακόπτεται, και σταματάει η έκλυση. Καθώς πιέζεται το ψήγμα στο μέταλλο, η επαφή τους αποκαθίσταται, κ.ο.κ. (η πρόκληση ταλαντωτικής κίνησης εξαρτάται από τη θερμική αγωγιμότητα του υλικού της πλάκας).

Όπως φαίνεται στην **εικόνα 4** του **παραρτήματος** αυτός ο τρόπος μπορεί να δώσει περισσότερα σχήματα σε σύγκριση με την τριβή δοξαριού και την ανθρώπινη φωνή, και αποτελούσε παλαιά τον συνήθη τρόπο επαγωγής των σχημάτων στη βιβλιογραφία· ωστόσο, δεν είναι τόσο αναπαραγωγίμος.

Ο πλέον αναπαραγωγίμος και συνήθης τρόπος έγκειται στη χρήση γεννητριών δονήσεων (vibration generators, ή wave drivers). Η αρχή λειτουργίας τους έγκειται σε έναν ηλεκτρομαγνήτη, δηλ. σε ένα πηνίο διαρρεόμενο από εναλλασσόμενο ηλεκτρικό ρεύμα· ίδια αρχή λειτουργίας αξιοποιείται και στα ηχεία, όπως φαίνεται στην **εικόνα 6** του **παραρτήματος**.

Ανασύραμε πολυάριθμες προσεγγίσεις ιδιοκατασκευών που αξιοποιούν ως γεννήτρια δονήσεων ηχείο όπως φαίνεται στην **εικόνα 7** του **παραρτήματος**.

Στην προσπάθεια να παραχθεί η πλέον προσιτή, αποδοτική, φθηνή, και εύκολη διάταξη επιλέχθηκε η χρήση ηχείου. Η χρήση ηχείου επισύρει τη χρήση ενισχυτή καθώς η κάρτα ήχου ενός υπολογιστή δεν μπορεί να δώσει την απαιτούμενη ένταση ώστε να ξεκινήσει ταλάντωση λόγω του βάρους της μεταλλικής πλάκας.

2.10. Οδηγίες για το στήσιμο του πειράματος

2.10.1. Εξοπλισμός

A) Ιδιοκατασκευή από διαμορφωμένο ηχείο:

Ηχείο AUDIOMASTER, RMS 100W, 8 Ohm, παθητικό ⁸

Πόμολο με πλαστική μαργαρίτα ως βάση και με ντίζα (πλάτος ντίζας, 8 mm, και ύψος ντίζας 10 cm. Το ύψος είναι τέτοιο ώστε να ξεπερνάει το γείσο του ηχείου)

Κόλλα PVC

Ηλεκτροστατικά βαμμένες ⁹ μεταλλικές πλάκες αλουμινίου 26x26x1 cm

Μικρό αλφάδι τύπου φουσαλίδα

Ηλεκτρικό δράπανο

Τρία μεταλλικά παξιμάδια (το ένα, τύπου πεταλούδας) διαμέτρου όσο η διάμετρος της ντίζας

Δύο μεταλλικές ροδέλες διαμέτρου όσο η διάμετρος της ντίζας

Δύο μεταλλικές βίδες διαμέτρου όσο η διάμετρος των εργοστασιακών οπών στο γείσο του ηχείου

Ξύλινη πλάκα 30x10 cm

B) Ενισχυτής INTER-M PA-4000, 120W RMS, 60Hz-20KHz

Γ) Υπολογιστής ή smartphone

Δ) Προαιρετικά: μικρόφωνο (για την πρόκληση δονήσεων αξιοποιώντας τις φωνές μαθητών)

Ε) Καλωδίωση (περιγράφεται)

Ζ) Μαγειρικό αλάτι (ιδανικά, χωρίς υγρασία)

Η) Προαιρετικά: Σύρμα σπιδάλ (για την επίδειξη του μονοδιάστατου στάσιμου κύματος)

Θ) Προαιρετικά: υποπόδιο ρυθμιζόμενης κλίσης (@WORK FT-510) (για τη ρύθμιση της επιπεδότητας της κατασκευής)

Ι) Προαιρετικά: δοξάρι και κολοφώνιο (για την πρόκληση δονήσεων σε μεμονωμένη μεταλλική πλάκα)

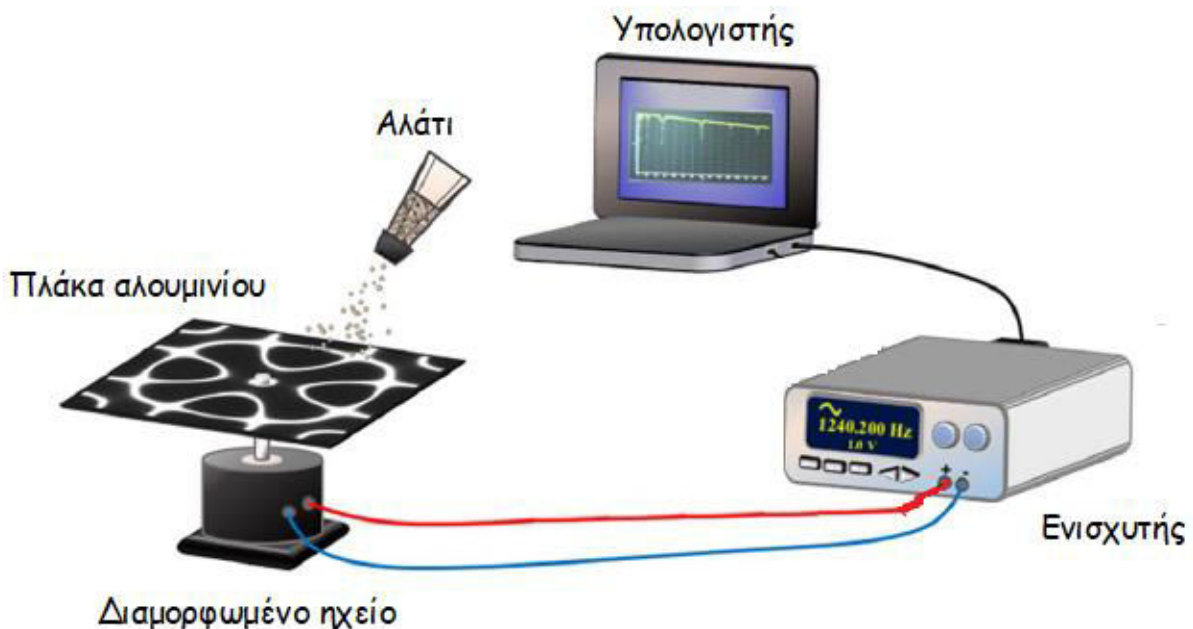
2.10.2. Οδηγίες κατασκευής της διάταξης για τον εισηγητή

⁸ Τα ηχεία που αποκαλούνται «ενεργά» περιλαμβάνουν εντός τους ενισχυτή, σε αντίθεση με τα παραδοσιακά «παθητικά» ηχεία.

⁹ Για την αποφυγή φθοράς με το πέρασμα του χρόνου. Όσον αφορά την μακροχρόνια προστασία, η ανοδίωση θεωρείται ανώτερη της ηλεκτροστατικής βαφής.

Αφαιρέσαμε τον κώνο του ηχείου και κολλήσαμε την πλαστική μαργαρίτα της ντίζας κατευθείαν πάνω στην υποκείμενη μεμβράνη (spider membrane) ελέγχοντας την καθετότητα της ντίζας με το μικρό αλφάδι φυσαλίδας το οποίο στερεώσαμε στο ελεύθερο άκρο της. Στο κέντρο της ξύλινης πλάκας ανοίχτηκε τρύπα διαμέτρου όσο η διάμετρος της μεταλλικής ντίζας του πόμολου και στα 2 άκρα της ξύλινης πλάκας ανοίχτηκαν τρύπες διαμέτρου όσο η διάμετρος των εργοστασιακών οπών στο γείσο του ηχείου. Η ξύλινη πλάκα εφαρμόστηκε στην ντίζα και καθηλώθηκε στο ηχείο περνώντας τις μεταλλικές βίδες αντίστοιχης διαμέτρου στις εργοστασιακές οπές του γείσου και σφίγγοντας με ένα παξιμάδι και μία ροδέλα, αντίστοιχως. Στο κέντρο της πλάκας αλουμινίου ανοίχτηκε τρύπα διαμέτρου όσο η διάμετρος της ντίζας του πόμολου και η πλάκα στερεώθηκε στη ντίζα, από κάτω με το στρογγυλό παξιμάδι και με ροδέλα, και σφίγγοντας την πλάκα από πάνω με το παξιμάδι τύπου πεταλούδας και με ροδέλα. Η διάταξη μπορεί να τεθεί πάνω στο υποπόδιο ώστε να υπάρχει περισσότερο έλεγχος της επιπεδότητας της πλάκας μεταβάλλοντας την κλίση του υποποδίου και ελέγχοντας εκ νέου με το αλφάδι. Οι συχνότητες παρέχονταν μέσω προγράμματος από τον υπολογιστή στον ενισχυτή μέσω συνήθους καλωδίου RCA. Σύρμα για ηχείο περάστηκε σε κροκοδειλάκια του εμπορίου από τα οποία είχε αφαιρεθεί το σύρμα χαλκού και τα κροκοδειλάκια «έπιασαν» τους ακροδέκτες του ηχείου. Το ελεύθερο αρνητικό και το ελεύθερο θετικό άκρο του σύρματος βιδώθηκαν γυμνά στις υποδοχές 8Ω και COM (γείωση) του ενισχυτή, αντίστοιχα.

Η τελική διάταξη δείχνεται στην **εικόνα 47**:



Εικόνα 47. Αναπαράσταση της πειραματικής διάταξης που αξιοποιεί σχήματα Chladni στο δικό μας πλαίσιο εργασίας.

Στην παρούσα εργασία, δοκιμάστηκαν πλάκες πλαστικού, αλουμινίου και σιδήρου, 26x26 cm, στερεωμένες από το κέντρο τους και οι δονήσεις παρέχονταν μόνο από το κέντρο της πλάκας.

2.10.3. Επικινδυνότητα

Σε περίπτωση που ο εισηγητής χρησιμοποιήσει υάλινη πλάκα, αυτή μπορεί να σπάσει, ιδίως στις περιπτώσεις συντονισμού της πλάκας.

Εάν κρίνεται επιθυμητή η χρήση υάλινης πλάκας συνιστάται τρίψιμο των πλευρών με γυαλόχαρτο.

Είναι πιο απίθανο το να σπάσει ένα γυαλί σε συχνότητες πέραν της θεμελιώδους γιατί γίνονται ακυρωτικές συμβολές με τα κύματα που καταφτάνουν.

2.10.4. Κρίσιμα σημεία:

Τα κρίσιμα σημεία του πειράματος όπως αυτό παρατίθεται στην παρούσα εργασία είναι τα εξής:

► Όσο ελαφρύ και εάν είναι το υλικό της πλάκας (π.χ. αλουμίνιο ή plexiglass σε αντίθεση, π.χ., με τον μπρούντζο) η κάθετη κίνηση εξακολουθεί να εμποδίζεται έστω και λίγο, με αποτέλεσμα την πλημμυρή ψύξη του ηλεκτρομαγνήτη από τον εσωτερικό αέρα. Για αυτό **το πλέον σύνηθες πρόβλημα** των ιδιοκατασκευών για σχήματα Chladni που ενέχουν ηχείο **είναι το κάψιμο του ηχείου**, αργά ή γρήγορα. Ως εκ τούτου, **απαιτείται όσον το δυνατόν συντομότερη εφαρμογή των συχνοτήτων** –ιδίως υπό μεγάλες εντάσεις- **έστω και εάν οι συχνότητες είναι εντός των προδιαγραφών του ηχείου**.

► **Η ένταση του ήχου** που παρέχει ο ενισχυτής **πρέπει να βρίσκεται εντός ορισμένου εύρους, ειδικά επέρχεται υπερ-¹⁰ ή υπο-οδήγηση¹¹** («under-» ή «over-drive») **του ηχείου**, αντίστοιχα.

¹⁰ Υπεροδήγηση: ο ενισχυτής δίνει στο ηχείο ρεύμα έντασης μεγαλύτερης από εκείνη που μπορεί να δεχθεί το ηχείο. Π.χ., χρήση ηχείου 50 W και ρύθμιση του ήχου μέσω του ενισχυτή στα 500 W. Το άλλο παράδειγμα υπεροδήγησης είναι χρήση ηχείου ελάχιστης συχνότητας 100 Hz και παροχή ήχου 50 Hz μέσω του ενισχυτή (οι χαμηλές συχνότητες θέλουν περισσότερο ρεύμα εκ μέρους του ενισχυτή). Κατά την υπεροδήγηση επέρχεται θέρμανση του πηνίου του ηχείου και φθορά. Η φθορά επιφέρει «ψαλίδισμα» (clipping) των μεγαλύτερων συχνοτήτων που δίνει το ηχείο (αφού μεγαλύτερες συχνότητες επίσης απαιτούν περισσότερη ενέργεια εκ μέρους του πηνίου, την οποία ενέργεια, όμως, δεν μπορεί να δώσει το πηνίο καθώς βαθμηδόν φθείρεται). Το ψαλίδισμα δεν γίνεται πάντα αισθητό (αρχικά επηρεάζονται μόνο οι συχνότητες υπεράνω του φάσματος του ακουστικού ήχου). Ως αποτέλεσμα δημιουργούνται πολλές αρμονικές συχνότητες ένεκα των οποίων θερμαίνεται περαιτέρω το πηνίο. Άρα δεν πρέπει να παρέχεται στο ηχείο μεγάλη ένταση συνεχόμενα. Μόνο στιγμιαία οι κορυφαίες τιμές έντασης των προδιαγραφών κρίνονται ανεκτές. Για τον λόγο αυτό, καλό είναι η RMS του ενισχυτή να μην είναι υπερδιπλάσια της RMS του ηχείου.

¹¹ Υποοδήγηση: ο ενισχυτής δίνει στο ηχείο ρεύμα έντασης μεγαλύτερης από εκείνη που μπορεί να δώσει ικανοποιητικά. Π.χ., χρήση ενισχυτή των 20 W στα 30 W. Τότε, ο ενισχυτής παράγει «ψαλιδισμένες» (τετραγωνικές) εντάσεις, οπότε κατά το «πλάτωμα» των σημάτων το πηνίο αδρανεύει. Παρόλο που το ηχείο δεν εκτείνεται πέρα από τις προδιαγραφές του όπως κατά την υπεροδήγηση, το πηνίο θερμαίνεται. Οι αρμονικές που

Ένας ακόμη λόγος για να μην αυξάνεται υπερβολικά η ένταση είναι ότι τα υψίσυχνα σήματα γίνονται βαθμηδόν ενοχλητικά. Επίσης, **γενικά είναι καλή η αποφυγή απότομων αυξομειώσεων των εντάσεων**. Ακόμη, εάν η ένταση μιας ιδιοσυχνότητας υπερβεί ορισμένη τιμή δεν επέρχεται συντονισμός αλλά συμπαρασύρεται σε δόνηση όλη η διάταξη, οπότε το αλάτι πέφτει από τα ελεύθερα άκρα.

► Η κόλληση της μαργαρίτας της κατακόρυφης ντίζας δεν μπορεί να γίνει με κοινή κόλλα (ξεκολλάει λόγω των δυνατών δονήσεων). Επειδή η μαργαρίτα ήταν πλαστική, χρησιμοποιήσαμε κόλλα PVC.

► Η κατακόρυφη ντίζα πρέπει να περιορίζεται όσον το δυνατόν περισσότερο από την οριζόντια ξύλινη δοκό. Αυτό είναι απαραίτητο για **να αποφεύγεται ο «θόρυβος» από τυχαία οριζόντια ταλάντωση**.

► **Η πλάκα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο επίπεδη**. Αυτό είναι απαραίτητο για να συγκρατείται το αλάτι στην επιφάνεια.

► **Υπερβολικά λεπτόκοκκα και/ή υγροσκοπικά κοκκώδη υλικά αναπτύσσουν μεγάλη συνάφεια προς τις πλάκες και δεν προσδίδουν σχήματα ακόμη και υπό μεγάλες εντάσεις**, παρόλο που τα μικρόκοκκα υλικά είναι συνήθως πιο ελαφριά. Υλικά που έχουν αναφερθεί στο πλαίσιο των σχημάτων Chladni είναι κρύσταλλοι, άμμος συνηθισμένη ή έγχρωμη ή ενυδρείου, ζάχαρη και μαγειρικό αλάτι.

► Είναι απολύτως απαραίτητο η πλάκα να καθηλωθεί στην οριζόντια δοκό και να διατηρείται επίπεδη.

2.10.5. Παράγοντες καθορισμού ενός σχήματος Chladni

Για την ολόπλευρη κάλυψη του διδάσκοντος, παρατίθενται όλες οι εμπειρικές παρατηρήσεις που έγιναν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας οι οποίες αφορούν τους παράγοντες που υπεισέρχονται στον καθορισμό του σχήματος Chladni.

Σχήμα Chladni = f(ιδιοσυχνότητα, μέγεθος πλάκας, θέση σημείου καθήλωσης, αριθμός σημείων καθήλωσης, σχήμα πλάκας)

■ **Υλικά** χωρίς την κατάλληλη ελαστικότητα και χωρίς την κατάλληλη πυκνότητα είτε θα δονούνται στο σύνολο τους αλλά δεν θα υπάρχει δόνηση διαφοροποιημένη ανά περιοχές και, έτσι, δεν θα δώσουν

παράγονται στις «γωνίες» των τετραγωνικών κυμάτων επάγουν στρεβλωμένο ήχο (που δρα ως προειδοποιητικό σημάδι) και φθείρουν περαιτέρω το ηχείο. Αφού μεγαλύτερες συχνότητες απαιτούν περισσότερη ενέργεια (ρεύμα) γίνεται και ψαλίδισμα των υψηλών συχνοτήτων. Άρα δεν πρέπει να παρέχεται στο ηχείο μεγαλύτερη ισχύ από εκείνη που μπορεί να δώσει ικανοποιητικά ο ενισχυτής σε αντίθεση με την εντύπωση του ότι όταν παρέχουμε στο ηχείο σήμα εντός των προδιαγραφών του δεν θα κάψουμε το ηχείο.

καθόλου σχήματα, είτε δεν θα δονούνται καθόλου. Υπό αυτήν την έννοια, το σχήμα δεν εξαρτάται από το υλικό (Jensen, H.C., 1957) όταν θεωρούνται ομοιογενή υλικά.

Πέραν των μεταλλικών πλακών, σχήματα μπορούν να αποκομιστούν και από πλάκες plexiglass αλλά, κατά τη γνώμη μας, λιγότερο ικανά. Επειδή η διάταξη προορίζονταν για χρήση σε τάξη, αποφεύχθηκε η χρήση γυάλινης πλάκας. Πλάκες ξύλινες ή από χαρτόνι αποδίδουν σχήματα αλλά χάνουν την επιπεδότητα τους ευκολότερα.

■ Όσο αυξάνεται το **μέγεθος της πλάκας** αποκομίζονται τα ίδια σχήματα, αλλά μεγαλύτερα. Επίσης, αποκομίζονται περισσότερα σχήματα καθώς γίνεται συντονισμός σε περισσότερες ιδιοσυχνότητες. Όσο αυξάνει το μέγεθος αυξάνει και το βάρος της πλάκας. Πλάκες που είναι βαριές είτε λόγω μεγάλου μεγέθους, είτε λόγω της φύσης του υλικού τους, αποσβένουν τις ταλαντώσεις, οπότε απαιτείται πιο ικανή στήριξη της πλάκας και μεγαλύτερες εντάσεις. Όμως, οι μεγαλύτερες εντάσεις αυξάνουν την πιθανότητα καψίματος του ηχείου.

■ Μεταβάλλοντας τη **θέση του σημείου καθήλωσης** της πλάκας αποκομίζονται σχήματα μετατοπισμένα ως προς εκείνα της προηγούμενης θέσης καθώς αλλάζουν τα κομβικά και τα μη κομβικά σημεία.

■ Μεταβάλλοντας **το σημείο από το οποίο ξεκινούν οι δονήσεις** δεν παρατηρείται σημαντική μεταβολή των σχημάτων που αποκομίζονται καθώς τα κομβικά και τα μη κομβικά σημεία δεν αλλάζουν.

Για δεδομένη διάταξη, δηλ. με σταθερούς τους υπόλοιπους παράγοντες:

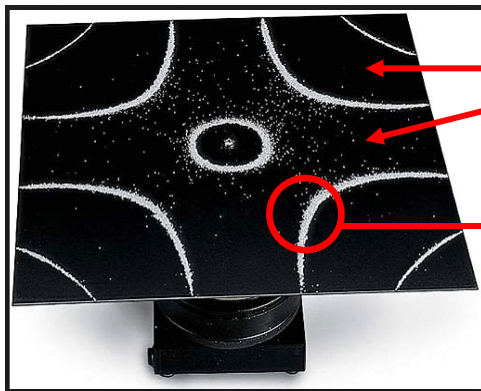
$$\text{Σχήμα Chlandi} = f(\text{ιδιοσυχνότητα}).$$

Η **ιδιοσυχνότητα**, στην οποία αποκομίζεται ένα ορισμένο σχήμα εξαρτάται, με τη σειρά της, από το πάχος της πλάκας, την ελαστικότητα της πλάκας (μέτρο του Young) και την πυκνότητα της πλάκας, που, με τη σειρά τους εξαρτώνται από το υλικό της πλάκας. Επίσης, η συχνότητα του ήχου που παρέχει στο ηχείο ο ενισχυτής δεν μπορεί να παραμένει επί μακρόν πάνω ή κάτω από τις αντίστοιχες προδιαγραφές που ορίζονται για το ηχείο από τον κατασκευαστή (εν προκειμένω, οι ουδοί συχνότητας ήταν 60 Hz και 10 kHz). Για διευκόλυνση του εκπαιδευτικού κατά την ώρα μιας επίδειξης, μπορεί να αξιοποιηθεί ένα πρόγραμμα αναπαραγωγής προεπιλεγμένων συχνοτήτων (π.χ. Matlab).

2.11. Οι ερωτήσεις του φύλλου εργασίας και η τεκμηρίωση τους

2.11.1 Ερώτηση 1:

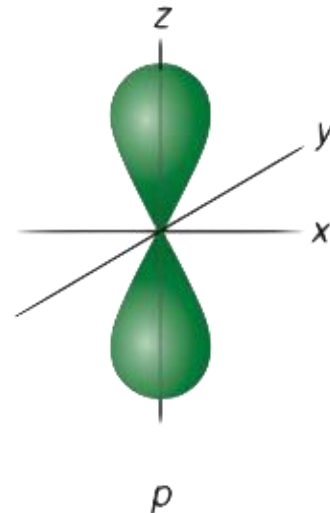
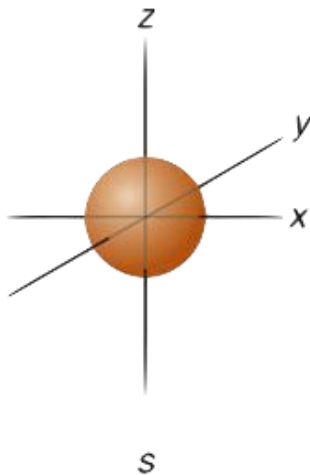
«Κομβικές» ή «μη κομβικές»:



..... επιφάνειες.

..... γραμμές.

Πιστεύω ότι το αλάτι συσσωρεύεται στις γραμμές της πλάκας.



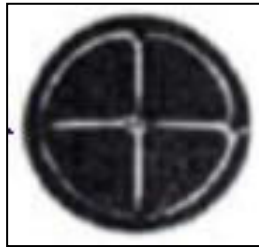
Πιστεύω ότι τα ηλεκτρόνια συσσωρεύονται, με πιθανότητα 90-99%, στις επιφάνειες του ατομικού χώρου.

2.11.2. Τεκμηρίωση της ερώτησης 1:

Η ερώτηση 1 ελέγχει το εάν έχει κατανοηθεί ο όρος «κομβικές επιφάνειες» που φέρεται στο σχολικό βιβλίο και ο όρος «κομβικές γραμμές» οι οποίοι όροι χρησιμοποιήθηκαν στο διδακτικό σενάριο. Ως κατανόηση θεωρείται το να είναι σε θέση ο εκπαιδευόμενος να δείξει τις κομβικές επιφάνειες και γραμμές σε κάθε περίπτωση. Έτσι, η ερώτηση 1 ελέγχει τη γενική ευχέρεια κατανόησης των εν λόγω όρων μετά την εφαρμογή του διδακτικού σεναρίου.

Εάν οι όροι έχουν κατανοηθεί, τότε δεν μένει χώρος για την κατά την άποψη μας πλέον πιθανή παρανόηση ότι «κόκκοι ίσον ηλεκτρόνια». **Επομένως**, η ερώτηση 1 συγκεκριμένα **ελέγχει και** αυτήν **τη δυνητική παρανόηση η οποία κρίνεται ως η πλέον πιθανή** κατά την επίδειξη.

2.11.3. Ερώτηση 2:



Όπως βλέπουμε τα σχήματα από αριστερά προς τα δεξιά, μοιάζουν πολύ με τις ηλεκτρονιακές πυκνότητες που αντιστοιχούν στα τροχιακά..

.....,,,».

2.11.4. Τεκμηρίωση της ερώτησης 2

Η ερώτηση 2 ελέγχει το εάν ο εκπαιδευόμενος είναι εξοικειωμένος με τα σχήματα που αντιστοιχούν στις ηλεκτρονιακές πυκνότητες/τροχιακά τα οποία σχήματα απεικονίζονται στο βιβλίο του και χρησιμοποιήθηκαν στο διδακτικό σενάριο.

Ακόμη, ελέγχει το εάν ο εκπαιδευόμενος μπορεί να αντιστοιχίσει τα τριδιάστατα σχήματα που απεικονίζονται στο βιβλίο του με τα διδιάστατα σχήματα της εικόνας. Εάν η αντιστοίχιση δεν του είναι προφανής/εύκολη, τότε ο εκπαιδευόμενος δεν μπορεί να συνδέσει τα σχήματα Chladni με τα σχήματα των πυκνοτήτων, και άρα δεν μπορεί να επιτευχθεί ο στόχος I. **Επομένως**, η ερώτηση 2 ελέγχει την απόκτηση δύο γνωστικών στοιχείων που προαπαιτούνται για την επίτευξη του στόχου I.

2.11.5. Ερώτηση 3:

«Τα σχήματα που φτιάχνουν οι κόκκοι στην πλάκα (τα σχήματα Chladni) οφείλονται σε...

α) μονοδιάστατο, μη στάσιμο κύμα

β) διδιάστατο στάσιμο κύμα

γ) διδιάστατο ηχητικό κύμα

δ) τριδιάστατο στάσιμο κύμα

2.11.6. Τεκμηρίωση της ερώτησης 3

Η ερώτηση 3 ελέγχει το εάν ο εκπαιδευόμενος μπορεί να αποδώσει το αίτιο των σχημάτων Chladni. Εάν δεν το μπορεί, τότε δεν μπορεί να εντοπίσει κοινό αίτιο με τα σχήματα των

ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων, δηλ. δεν μπορεί να επιτευχθεί ο στόχος II. **Επομένως**, η ερώτηση 3 ελέγχει την απόκτηση του γνωστικού στοιχείου που προαπαιτείται για την επίτευξη του στόχου II.

2.11.7. Ερώτηση 4:

Τα σχήματα που φτιάχνουν οι κόκκοι στην πλάκα και τα σχήματα των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων στο άτομο του υδρογόνου μερικές φορές εμφανίζουν ομοιότητα...

- α) η οποία είναι συμπτωματική
- β) διότι και τα δύο οφείλονται σε στάσιμα κύματα ήχου
- γ) διότι και τα δύο οφείλονται σε στάσιμα κύματα, αν και διαφορετικού είδους
- β) διότι και τα δύο οφείλονται στο ακριβώς ίδιο είδος στάσιμων κυμάτων

2.11.8. Τεκμηρίωση της ερώτησης 4

Η ερώτηση 4 ελέγχει ότι ελέγχει και η ερώτηση 3, καθώς, έμμεσα, και τον ίδιο τον στόχο II.

2.11.9. Ερώτηση 5:

Τα σχήματα που φτιάχνουν οι κόκκοι στην πλάκα, προκύπτουν όταν η πλάκα διατρέχεται από κύμα οποιασδήποτε συχνότητας, αρκεί η πλάκα να είναι τετράγωνη.

- α) Σωστό β) Λάθος γ) Δεν γνωρίζω δ) Άλλο:

2.11.10. Τεκμηρίωση της ερώτησης 5

Η ερώτηση 5 ελέγχει το εάν ο εκπαιδευόμενος έχει συγκρατήσει την κβάντωση των ιδιοσυχνοτήτων. Εάν όχι, τότε δεν μπορεί να καταλήξει στο ότι η αύξηση της ενέργειας σχετίζεται με την αύξηση της πολυπλοκότητας. Επομένως, **η ερώτηση 5 ελέγχει την απόκτηση του γνωστικού στοιχείου που προαπαιτείται για την επίτευξη του στόχου III.**

Μέσω της επιλογής (δ) ελέγχονται άλλες παρανοήσεις που ίσως υπάρχουν.

2.11.11. Ερώτηση 6:

Προσφέρετε ενέργεια στο ηλεκτρόνιο του υδρογόνου οπότε, η ηλεκτρονιακή πυκνότητα μεταβάλλεται. Η νέα πυκνότητα έχει γεωμετρικό σχήμα..

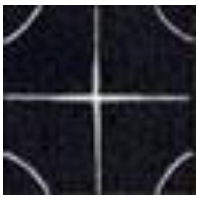
- α) εξίσου πολύπλοκο
- β) περισσότερο πολύπλοκο
- γ) είτε λιγότερο, είτε περισσότερο πολύπλοκο
- δ) λιγότερο πολύπλοκο

2.11.12. Ερώτηση 7:

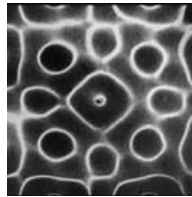
Με ένα δοξάρι που του έχετε βάλει ρετσίνι τρίβετε την πλαϊνή πλευρά της παρακάτω πλάκας. Όποτε τρίβετε ακούγεται ήχος, αλλά οι κόκκοι συσσωρεύονται σε αναγνωρίσιμα σχήματα μόνο μερικές φορές.



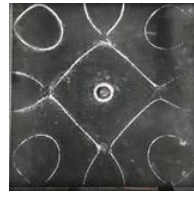
Αυξάνετε σταδιακά τη δύναμη και την ταχύτητα της τριβής. Τι παθαίνει ο ήχος; Με ποια σειρά μπορεί να εμφανίζονται τα παρακάτω σχήματα:



.....



.....



.....



.....

2.11.13. Τεκμηρίωση των ερωτήσεων 6 και 7.

Οι ερωτήσεις 6 και 7 ελέγχουν την επίτευξη του στόχου IV μέσω αναφοράς στις ηλεκτρονικές πυκνότητες και στα σχήματα Chladni, αντίστοιχα.

2.11.14. Ερώτηση 8:

Ποια πρόταση εξηγεί καλύτερα τον λόγο που οι ηλεκτρονιακές πυκνότητες των υδρογονοειδών ατόμων παίρνουν τα σχήματα που βλέπουμε στα βιβλία μας;

- α) η ηλεκτρονιακή πυκνότητα έχει την κατανομή ενός στάσιμου κύματος
- β) το ηλεκτρόνιο είναι και κύμα και, έτσι, διασκορπίζεται την ίδια στιγμή προς αυτές τις συγκεκριμένες κατευθύνσεις
- γ) το ηλεκτρόνιο κινείται μόνο πάνω στο περίγραμμα αυτών των σχημάτων
- δ) όλα των παραπάνω

2.11.15. Τεκμηρίωση της ερώτησης 8

Η ερώτηση 8 ελέγχει την επίτευξη του στόχου II.

Η επιλογή (β) ελέγχει την παρανόηση που θέλει το ηλεκτρόνιο να είναι σωματίδιο σκορπισμένο μέσα στον ατομικό χώρο.

Η επιλογή (γ) ελέγχει την παρανόηση που θέλει το ηλεκτρόνιο να διαγράφει το περίγραμμα των σχημάτων των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων.

Η επιλογή (δ) ελέγχει τη συνύπαρξη των παρανοήσεων, ή, αλλιώς διατυπωμένη, την ύπαρξη συνθετικών εννοιολογικών μοντέλων.

2.11.16. Ερώτηση 9:

Οι γραμμές που σχηματίζουν οι κόκκοι του αλατιού αντιστοιχούν..

- α) στα ηλεκτρόνια
- β) στις κομβικές επιφάνειες των ηλεκτρονίων
- γ) στις μη κομβικές επιφάνειες των ηλεκτρονίων
- δ) στα πρωτόνια και στα νετρόνια που πυρήνα

2.11.17. Τεκμηρίωση της ερώτησης 9

Η ερώτηση 9 ελέγχει ότι ελέγχει και η ερώτηση 1.

2.11.18. Ερώτηση 10:

Όταν λέμε ότι η ηλεκτρονιακή πυκνότητα έχει κατανομή ενός στάσιμου κύματος εννοούμε ότι το ηλεκτρόνιο είναι το ίδιο είδος στάσιμου κύματος που έχουμε και στα σχήματα της επίδειξης.

- α) Σωστό
- β) Λάθος
- γ) Δεν γνωρίζω
- δ) Άλλο:

2.11.19. Τεκμηρίωση της ερώτησης 10

Μέσω της εφαρμογής του διδακτικού σεναρίου μπορεί να αφηθεί η εντύπωση ότι η περιγραφή της κατανομής της ηλεκτρονιακής πυκνότητας από στάσιμο κύμα σημαίνει την ύπαρξη φυσικού (στάσιμου) κύματος, παρόλο.

Αυτή η παρανόηση κρίνεται πιθανή δεδομένου ότι κίνηση του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα πάνω σε περιγράμματα στάσιμου κύματος ήταν η πρώτη υπόθεση και του ίδιου του de Broglie που σήμερα δεν γίνεται αποδεκτή καθώς υπονοεί καθορισμένες τροχιές κατά το πρότυπο των παλαιών τροχιών του Bohr (παρ. 2.2 του θεωρητικού μέρους).

Η ερώτηση 10 ελέγχει αυτήν την πιθανή παρανόηση.

.Μέσω της επιλογής (δ) ελέγχονται άλλες παρανοήσεις που ίσως υπάρχουν.

2.11.20. Ερώτηση 11:

Οι ομόκεντρες σφαίρες των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων που αντιστοιχούν στα τροχιακά s και οι λοβοί των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων που αντιστοιχούν στα τροχιακά p προβλέπονται μεν μαθηματικά, αλλά..

(α) δεν σχηματίζονται στα αλήθεια πουθενά στη φύση.

(β) μπορεί να σχηματίζονται στη φύση` όμως, μόνο στον μικρόκοσμο

(γ) μπορεί να σχηματίζονται στη φύση, και στον μικρόκοσμο και στον μακρόκοσμο

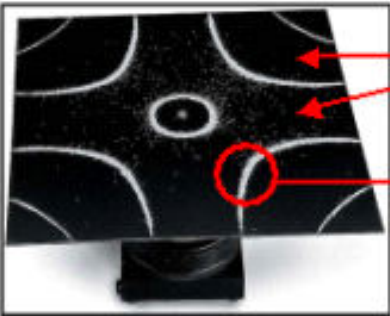

(δ) Άλλο.....

2.11.21. Τεκμηρίωση της ερώτησης 11

Η ερώτηση 11 ελέγχει τον γνωστικό στόχο I, ξεκαθαρίζοντας εάν η πεποίθηση του εκπαιδευομένου αφορά μόνο τον μικρόκοσμο, μόνο τον μακρόκοσμο ή αμφότερους. Επίσης, μπορεί να δώσει πληροφορίες για σχετικές παρανοήσεις.

2.12. Αποτελέσματα

Παρατίθενται ξανά οι ερωτήσεις του φύλλου εργασίας προς διευκόλυνση καθώς και τα αντίστοιχα % ποσοστά των σωστών απαντήσεων στις κλειστές ερωτήσεις (άσκηση αντιστοίχισης και ερ. 1 και 2) και στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Τα % ποσοστά όλων των απαντήσεων σημειώνονται με μπλε και έντονα γράμματα δίπλα από τις αντίστοιχες επιλογές. Οι σωστές απαντήσεις σημειώνονται εξολοκλήρου με μπλε και έντονα γράμματα.

Ερωτήσεις του φύλλου εργασίας με τις απαντήσεις τους.	% ποσοστό απαντήσεων (N=49)
<p>Ερώτηση 1:</p> <p style="text-align: center;">«Κομβικές» ή «μη κομβικές»:</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>Μη κομβικές επιφάνειες.</p> <p>Κομβικές γραμμές.</p> <p>κομβικές</p> </div> </div> <p style="text-align: center;"><i>Πιστεύω ότι το αλάτι συσσωρεύεται στις γραμμές της πλάκας.</i></p>	<p>91%</p>
<p>Ερώτηση 2:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">  </div> <p style="text-align: center;"><i>Όπως βλέπουμε τα σχήματα από αριστερά προς τα δεξιά, μοιάζουν πολύ με τις ηλεκτρονιακές πυκνότητες που αντιστοιχούν στα τροχιακά..</i></p> <p style="text-align: center;">1s 3d 3s 2s</p>	<p>98%</p>
<p>Ερώτηση 3:</p> <p style="text-align: center;"><i>«Τα σχήματα που φτιάχνουν οι κόκκοι στην πλάκα (τα σχήματα Chladni) οφείλονται σε...</i></p> <p style="text-align: center;">α) μονοδιάστατο, μη στάσιμο κύμα (2%)</p> <p style="text-align: center;">β) διδιάστατο στάσιμο κύμα (90%)</p> <p style="text-align: center;">γ) διδιάστατο ηχητικό κύμα (0%)</p> <p style="text-align: center;">δ) τριδιάστατο στάσιμο κύμα (8%)</p>	

Ερώτηση 4:

Τα σχήματα που φτιάχνουν οι κόκκοι στην πλάκα και τα σχήματα των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων στο άτομο του υδρογόνου μερικές φορές εμφανίζουν ομοιότητα...

α) η οποία είναι συμπτωματική (0%)

β) διότι και τα δύο οφείλονται σε στάσιμα κύματα ήχου (5%)

γ) διότι και τα δύο οφείλονται σε στάσιμα κύματα, αν και διαφορετικού είδους (95%)

β) διότι και τα δύο οφείλονται στο ακριβώς ίδιο είδος στάσιμων κυμάτων (0%)

Ερώτηση 5:

Τα σχήματα που φτιάχνουν οι κόκκοι στην πλάκα, προκύπτουν όταν η πλάκα διατρέχεται από κύμα οποιασδήποτε συχνότητας, αρκεί η πλάκα να είναι τετράγωνη.

α) Σωστό (0%)

β) Λάθος (93%)

γ) Δεν γνωρίζω (7%)

δ) Άλλο: (0%)

Ερώτηση 6:

Προσφέρετε ενέργεια στο ηλεκτρόνιο του υδρογόνου οπότε, η ηλεκτρονιακή πυκνότητα μεταβάλλεται. Η νέα πυκνότητα έχει γεωμετρικό σχήμα..

α) εξίσου πολύπλοκο (0%)

β) περισσότερο πολύπλοκο (98%)

γ) είτε λιγότερο, είτε περισσότερο πολύπλοκο (2%)

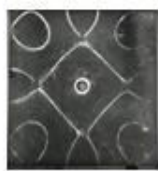
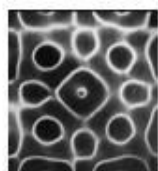
δ) λιγότερο πολύπλοκο (0%)

Ερώτηση 7:

Με ένα δοξάρι που του έχετε βάλει ρετσίνι τρίβετε την πλαϊνή πλευρά της παρακάτω πλάκας. Όταν τρίβετε ακούγεται ήχος, αλλά οι κόκκοι συσσωρεύονται σε αναγνωρίσιμα σχήματα μόνο μερικές φορές.



Αυξάνετε σταδιακά τη δύναμη και την ταχύτητα της τριβής. Τι παθαίνει ο ήχος; Με ποια σειρά μπορεί να εμφανίζονται τα παρακάτω σχήματα;



% ποσοστό
απαντήσεων
(N=49)

(90%)

Ερώτηση 8:

Ποια πρόταση εξηγεί καλύτερα τον λόγο που οι ηλεκτρονιακές πυκνότητες των υδρογονοειδών ατόμων παίρνουν τα σχήματα που βλέπουμε στα βιβλία μας:

- α) η ηλεκτρονιακή πυκνότητα έχει την κατανομή ενός στάσιμου κύματος (85%)
- β) το ηλεκτρόνιο είναι και κύμα και, έτσι, διασκορπίζεται την ίδια στιγμή προς αυτές τις συγκεκριμένες κατευθύνσεις (0%)
- γ) το ηλεκτρόνιο κινείται μόνο πάνω στο περίγραμμα αυτών των σχημάτων (5%)
- δ) όλα των παραπάνω (10%)

Ερώτηση 9:

Οι γραμμές που σχηματίζουν οι κόκκοι του αλατιού αντιστοιχούν..

α) στα ηλεκτρόνια (6%)

β) στις κομβικές επιφάνειες των ηλεκτρονίων (85%)

γ) στις μη κομβικές επιφάνειες των ηλεκτρονίων (4%)

δ) στα πρωτόνια και στα νετρόνια που πυρήνα (0%)

Ερώτηση 10:

Όταν λέμε ότι η ηλεκτρονιακή πυκνότητα έχει κατανομή ενός στάσιμου κύματος εννοούμε ότι το ηλεκτρόνιο είναι το ίδιο είδος στάσιμου κύματος που έχουμε και στα σχήματα της επίδειξης.

α) Σωστό (10%)

β) Λάθος (90%)

γ) Δεν γνωρίζω (0%)

δ) Άλλο (0%)

Ερώτηση 11:

Οι ομόκεντρες σφαίρες των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων που αντιστοιχούν στα τροχιακά s και οι λοβοί των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων που αντιστοιχούν στα τροχιακά p προβλέπονται μεν μαθηματικά, αλλά..

(α) δεν σχηματίζονται στα αλήθεια πουθενά στη φύση (0%)

(β) μπορεί να σχηματίζονται στη φύση· όμως, μόνο στον μικρόκοσμο (0%)

(γ) μπορεί να σχηματίζονται στη φύση, και στον μικρόκοσμο και στον μακρόκοσμο (100%)

(δ) Άλλο (0%)

Κεφάλαιο 3: συζήτηση

3.1. Συζήτηση των αποτελεσμάτων

Οι μαθητές συμπλήρωσαν σωστά την ερώτηση 1 σε μεγάλο ποσοστό (91%) και τη συναφή ερώτηση 9 σε μεγάλο ποσοστό (85%). Φαίνεται ότι η πλειονότητα των μαθητών μπόρεσε να αντεπεξέλθει στον εννοιολογικό φόρτο και, το πιο σημαντικό, φαίνεται ότι η πλειονότητα απέφυγε την κατά τη γνώμη μας πλέον πιθανή παρανόηση ότι «κόκκοι ίσον ηλεκτρόνια». Αυτή η αποφυγή αποδίδεται στο ότι κατά τη φάση της επίδειξης υπήρχε ρητή αποσαφήνιση αυτού του σημείου καθώς είχε εντοπιστεί εκ των προτέρων ο κίνδυνος.

Το εξαιρετικά υψηλό ποσοστό σωστών απαντήσεων (98%) της ερώτησης 2 δείχνει ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές αφενός ήξεραν τα σχήματα των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων/τροχιακών, αφετέρου μπορούσαν να προεκβάλλουν από τα τριδιάστατα σχήματα του σχολικού βιβλίου στα διδιάστατα σχήματα που παρουσιάστηκαν. Αυτό ταιριάζει και με το ποσοστό (100%) της συναφούς ερώτησης 11, οδηγώντας στο συμπέρασμα ότι **ο στόχος I**, που ελέγχονταν από αυτές τις δύο ερωτήσεις, **κατά τα φαινόμενα, επιτεύχθηκε**.

Όσον αφορά το αίτιο των σχημάτων Chladni, αποδόθηκε σωστά σε ποσοστό 90% στην ερώτηση 3, σωστά σε ποσοστό 95% στην ερώτηση 4 και σωστά σε ποσοστό 93% στην ερώτηση 5, δηλ. φαίνεται ότι η πλειονότητα των μαθητών συνέλαβε το αίτιο κατά τη φάση της επίδειξης.

Ειδικά το ποσοστό σωστών απαντήσεων της ερώτησης 4 δείχνει και ικανότητα εννοιολογικού διαχωρισμού του είδους στάσιμου κύματος που προκύπτει σε κάθε περίπτωση. **Κρίνοντας**, λοιπόν, **από το ποσοστό σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 4**, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι **ο στόχος II**, **κατά τα φαινόμενα, επιτεύχθηκε**.

Το ίδιο διαφαίνεται και από το μεγάλο **ποσοστό σωστών απαντήσεων, 85%**, στην ερώτηση 8 που ήλεγχε τον ίδιο στόχο.

Ωστόσο, **η επιλογή της απάντησης δ) της ερώτησης 8 σε ποσοστό 10% μας δείχνει τη δυνατότητα ύπαρξης σύνθετων παρανοήσεων**, κάτι που θα πρέπει να ληφθεί υπόψη με σκοπό τον καλύτερο σχεδιασμό σε περίπτωση μελλοντικής έρευνας. Μια άλλη εξήγηση για το ποσοστό της επιλογής (δ) είναι το ότι οι εκπαιδευόμενοι προτίμησαν την απάντηση που έχει «λίγο από όλα».

Κρίνοντας από το υψηλό ποσοστό σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 10 (90%), φαίνεται να συγκρατήθηκε το μήνυμα ότι πρόκειται για διαφορετικά είδη (στάσιμου) κύματος· ωστόσο όχι από όλους τους εκπαιδευόμενους.

Το υψηλό ποσοστό σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις 6 και 7 (98% και 90%, αντίστοιχα) που ήλεγχαν στον στόχο IV (την αύξηση της πολυπλοκότητας) **συν το γεγονός ότι η εν λόγω αύξηση της πολυπλοκότητας διατυπώθηκε ρητά αυθορμήτως από μερικούς μαθητές σε κάθε τάξη** κατά τη φάση της επίδειξης **μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, κατά τα φαινόμενα, ο στόχος IV επιτεύχθηκε** σε ικανοποιητικό ποσοστό.

Ένα αποτέλεσμα που αφορά όλους τους μαθητές είναι πως δεν γνώριζαν ότι η κυματοσυνάρτηση σχετίζεται, συγκεκριμένα, με στάσιμο (και όχι απλό) κύμα). Η έλλειψη της συγκεκριμένης γνώσης αποδίδεται στο ότι το σχολικό βιβλίο δεν αναφέρει κάτι σχετικό στο κυρίως μέρος (**παρ. 2.5.1.**) και όχι σε άλλους λόγους, όπως είναι, π.χ. η απουσία γνωστικής ωριμότητας του επιπέδου τυπικής λογικής σκέψης· άλλωστε, η απουσία της γνώσης ήταν καθολική. Η απουσία της συγκεκριμένης γνώσης επιβεβαιώθηκε μέσω συζήτησης με τους παριστάμενους καθηγητές Χημείας. Η απουσία μιας αναφοράς στο σχολικό βιβλίο Χημείας αποδίδεται στο ότι το βιβλίο δεν ήθελε να διεισδύσει άλλο σε βάθος.

Ως επιστέγασμα, υπήρξαν περιπτώσεις μαθητών της Γ λυκείου αλλά όχι της θετικής κατεύθυνσης, οι οποίοι παρακολούθησαν προκαταρτική δοκιμή και μάντεψαν τον σκοπό της εργασίας. Αυτή η παρατήρηση δεν μπορεί να αξιολογηθεί έγκυρα αλλά αφήνει την υπόνοια αφενός ότι αυτοί οι μαθητές είχαν ξαναδεί σχήματα πυκνοτήτων/τροχιακών, αφετέρου ότι η απρόσμενη συμπεριφορά του υλικού επικάλυψης της πλάκας καθώς και η συμμετρία των σχημάτων που προκύπτουν μιλάνε από μόνες τους σε όσους έχουν την εν λόγω εξοικείωση.

3.2. Δυνατά σημεία της πρότασης διδασκαλίας

Κρυφή συμμετρία

Το σπουδαιότερο πλεονέκτημα της πρότασης είναι, κατά τη γνώμη μας, η απρόσμενη συμπεριφορά του υλικού επικάλυψης κατά τη δόνηση. Έρχεται στο προσκήνιο η κρυφή συμμετρία που, ενίοτε, υπάρχει στη φύση και, άρα, η ομορφιά της. Αυτή είναι που καθίσταται εσωτερικό κίνητρο για τον παρατηρητή:

«The scientist does not study nature because it is useful to do so. He studies it because he takes pleasure in it, and he takes pleasure in it because it is beautiful. If nature were not beautiful it would not be worth knowing, and life would not be worth living. I am not speaking, of course, of the beauty which strikes the senses, of the beauty of qualities and appearances. I am far from despising this, but it has nothing to do with science. What I mean is that more intimate beauty which comes from the harmonious order of its parts, and which a pure intelligence can grasp»

(Poincaré H., 1908).

Εν προκειμένω μπορεί να γίνει λόγος για γνωστικό εσωτερικό κίνητρο μάθησης (Mc Call, A., 1963), δηλ. ο εκπαιδευόμενος ικανοποιείται όταν αποκτά νέες εμπειρίες και ασχολείται με πνευματικές δραστηριότητες, καθώς και για εσωτερικό κίνητρο αυτοέκφρασης, δηλ. ικανοποιεί την έμφυτη του περιέργεια και δημιουργικότητα.

Ενέχει μακροσκοπικό φυσικό φαινόμενο

Η προτεινόμενη διδασκαλία δεν ενέχει τεχνητές υπολογιστικές αναπαραστάσεις αλλά φέρνει στο προσκήνιο ένα φυσικό φαινόμενο με «ζωντανό» τρόπο. Επιπλέον, το φαινόμενο είναι μακροσκοπικό, άρα περισσότερο απτό.

Θίγει τρεις στόχους

..οι οποίοι κρίνονται σημαντικοί και οι οποίοι τεκμηριώνονται στις **παρ. 2.4-2.6.**, αντίστοιχα.

Αυτοί οι στόχοι είναι:

- Να διαπιστώσουν ότι ορισμένα σχήματα των τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου παρουσιάζονται, προβαλλόμενα σε δύο διαστάσεις, σε ένα φαινόμενο του μακρόκοσμου.
- Να γνωρίσουν ότι η κυματοσυνάρτηση είναι εξίσωση στάσιμου κύματος.
- Να συσχετίσουν την αύξηση της πολυπλοκότητας των σχημάτων των τροχιακών του υδρογόνου με την αύξηση της ενέργειας του ηλεκτρονίου του

Ενέχει θεμελιώδεις έννοιες

Π.χ. στάσιμο κύμα, (αντι)κομβικές επιφάνειες, πολυπλοκότητα

Αναδεικνύει την τομή Χημείας και Φυσικής

Ισοδύναμα διατυπωμένο, αποτελεί μια διαθεματική προσέγγιση.

Αξιοποιεί ιστορικό υπόβαθρο

Κατά τη φάση της επίδειξης των ενδεικτικών υλοποιήσεων γίνεται συνοπτική αναφορά στο ιστορικό υπόβαθρο των σχημάτων Chladni και, ακολούθως, συνδέονται ρητά με την προέλευση της εξίσωσης του Schrödinger.

Οι περισσότερες εισαγωγικές σημειώσεις που αφορούν την ιστορική καταβολή της κβαντικής θεωρίας που λήφθηκαν υπόψη (π.χ., Κατάκης Δ., Πνευματικάκης Γ., 1983), και, όλες οι σχετικές διατριβές οι οποίες έχουν εκπονηθεί στο ΔιΧηNET που λήφθηκαν υπόψη (Στεφανή Χ., 2001· Παπαχρήστου, Β., 2002) ξεκινάνε από τον Planck (1900), δηλαδή από τη διατύπωση της «παλαιάς» κβαντικής θεωρίας, με μικρή αναφορά στον Maxwell (1861). Άλλες σημειώσεις που αφορούν την ιστορική καταβολή της κβαντικής θεωρίας οι οποίες λήφθηκαν υπόψη ξεκινάνε από το 1832 (ειδικοί φούρνοι για την προτυποποίηση της ακτινοβολία μέλανος σώματος από τον Wilhelm Wien) καθώς και από το 1800 (ηλεκτροδότηση δικτύου στο Μανχάταν από τον Thomas Edison) (Goldhaber. A.S., Crease, R.P.. 2015).

Το ιστορικό υπόβαθρο της δικής μας διδακτικής πρότασης ξεκινάει από το 1802, αναδεικνύοντας ότι i) ο Schrödinger είχε ήδη διαθέσιμες τις λύσεις της κυματικής εξίσωσης του [(McBride, J.M., 2009, 11:29:00· Mehra, J., Rechenberg, H., 1987) καθώς και ότι ii) ένας λόγος που είχαν μελετηθεί οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων ήταν η μελέτη της ακουστικής, κατά μεγάλο μέρος, λόγω των σχημάτων Chladni (πόρισμα από την παρ...)]. Συγκεκριμένα, ο Schrodinger είχε μελετήσει ακουστική

στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης ως φοιτητής και, μάλιστα, σε κείμενο του, αξιοποίησε τη φυσική ερμηνεία συναδέλφων του που αφορούσε τον συντονισμό δονούμενου νήματος (Mehra, J., Rechenberg, H., 1987, σ. 604 μέρος II).

Όσον αφορά την αξία ενός ιστορικού υπόβαθρου, φρονείται ως αναπόσπαστο μέρος της σχολικής επιστήμης, συμπληρωματικό στο αμιγώς γνωστικό αντικείμενο καθώς: i) δίνει ένα πιο ανθρώπινο πρόσωπο στην επιστήμη ανάλογα με το μέτρο διείδυσης στα βιογραφικά στοιχεία των επιστημόνων που «άνοιξαν δρόμο»· ii) βοηθάει στην κατανόηση της σταδιακότητας των αναθεωρήσεων που διέπουν την επιστήμη (της ύπαρξης μιας σχετικά λογικής ακολουθίας)· iii) εισηγείται τις τεχνικές και/ή μεθόδους που ακολουθήθηκαν· iv) μπορεί να άρει εννοιολογικές παρανοήσεις (Ματσαγγούρας Η.Γ., 2009), v) φανερώνει ότι ο ένας επιστήμονας αξιοποίησε τα ευρήματα του άλλου, άρα, την ανάγκη συνεργασίας, vi) δείχνει ότι καμία ερμηνεία δεν μπορεί να αξιώσει πως δίνει την πραγματικότητα, παρά μόνο μια ίσως πληρέστερη προσέγγιση της πραγματικότητας.

3.3. Αδύναμα σημεία της πρότασης διδασκαλίας

Κίνδυνος εισαγωγής εννοιολογικών παρανοήσεων

Ως γνωστό, οι συζητήσεις και οι πειραματικές δραστηριότητες σε μια τάξη μπορούν να ερμηνευθούν διαφορετικά από τους μαθητές σε σύγκριση με τις αρχικές προθέσεις των εκπαιδευτικών, ακόμη και όταν οι πειραματικές επιδείξεις πληρούν τα τυπικά κριτήρια (Roadruch 1993)· το ίδιο ισχύει ακόμη και για συμμετοχικές (hands-on) πειραματικές επιδείξεις, εκτός εάν αφορούν συγκεκριμένα θέματα (Gabel, D., 1998). Δεδομένης της λεγεώνας παρανοήσεων που απαντώνται στην κβαντική θεωρία, είναι απαραίτητη η ελαχιστοποίηση αυτού του κινδύνου.

Κρίνεται ότι η πλέον πιθανή παρανόηση που μπορεί να δημιουργηθεί από την επίδειξη είναι η **λανθασμένη αντιστοίχιση των ηλεκτρονίων στους κόκκους άλατος**. Κρίνεται ιδιαίτερα πιθανή λόγω i) της αμιγώς σωματιδιακής φύσης που, ίσως, διατηρείται στους εκπαιδευόμενους παράλληλα, αλλά και ii) της εικόνας του ηλεκτρονιακού νέφους που εισάγει η ίδια η κβαντική θεωρία. **Τα ηλεκτρόνια δεν αντιστοιχούν στους κόκκους, αλλά στα ταλαντούμενα σημεία της πλάκας.**

Επειδή μόνο με τον εντοπισμό των δυσκολιών και των παρανοήσεων μπορεί να επιτευχθεί η άρση τους, η πλέον πιθανή παρανόηση ελέγχεται από τις ερωτήσεις 1 και 10.

Περιορισμένη ενεργή συμμετοχή

Ένα άλλο αδύναμο σημείο της πρότασης είναι η περιορισμένη ενεργή συμμετοχή (για τους λόγους περιορισμού της ενεργού συμμετοχής: **παρ. 2.10.3**).

Η διεύρυνση της ενεργού συμμετοχής, μπορεί να γίνει α) αξιοποιώντας και δεύτερη διδακτική ώρα ώστε να αυξηθεί ο χρόνος δημιουργίας σχημάτων Chladni από τους εκπαιδευόμενους, και, ίσως, β) **εντάσσοντας επαυξημένη πραγματικότητα**, π.χ. προκειμένου να αναδύονται στην οθόνη,

ως πλαίσια κειμένου, οι υποδείξεις «Κομβικές γραμμές» και «Μη κομβικές επιφάνειες» που θα δείχνουν με βέλη τα αντίστοιχα μέρη της εικόνας της ερώτησης 1 του φύλλου εργασίας.

Στο πλαίσιο της δικής μας εφαρμογής, ένα ακόμη αδύναμο σημείο αποτελεί το μικρό στατιστικό δείγμα. Μεγαλύτερο στατικό δείγμα οπωσδήποτε θα οδηγούσε σε στατιστικά εγκυρότερα αποτελέσματα όσον αφορά τους στόχους του φύλλου εργασίας.

3.4. Προτάσεις για επόμενες έρευνες που αξιοποιούν σχήματα Chladni

Οι επόμενες έρευνες θα πρέπει να δώσουν έμφαση στη διόρθωση των αδυναμιών της διδακτικής πρότασης και στην ανάδειξη των δυνατών σημείων της.

Μια καλή συνέχεια είναι μια πολυκεντρική έρευνα, σε πανεπιστημιακούς φοιτητές, που προβλέπει αυξημένη ενεργή συμμετοχή, και που αξιοποιεί μια διάταξη βελτιστοποιημένη όσον αφορά το περίγραμμα των σχημάτων και όσον αφορά τον κίνδυνο πρόκλησης βλάβης της ίδιας της διάταξης.

Η επέκταση σε 2^η διδακτική ώρα, η ένταξη επαυξημένης πραγματικότητας και ο εντοπισμός νέων παρανοήσεων που, ίσως, να εισάγει η δραστηριότητα είναι κάποιοι από τους παράγοντες που χρειάζονται διερεύνηση.

Ακόμη, η διερεύνηση του κατά πόσο είναι δυνατή η δημιουργία τριδιάστατων στάσιμων κυμάτων στο πλαίσιο μιας σχολικής τάξης καθώς και η διερεύνηση της προστιθέμενης αξίας μιας τέτοιας δραστηριότητας ίσως αποτελούσε εφελτήριο για αλλαγή του τρόπου διδασκαλίας των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων/τροχιακών του ατόμου του υδρογόνου (**παράρτημα:** «τριδιάστατα σχήματα Chladni»).

Περαιτέρω, κρίνεται ότι υπάρχει χώρος για να συσχετιστούν ακόμη εκτενέστερα τα σχήματα Chladni με τις ηλεκτρονιακές πυκνότητες του ατόμου του υδρογόνου, δηλ. πέρα από την ομοιότητα μεταξύ των σχημάτων που αναφέρθηκε στο δικό μας διδακτικό σενάριο. Αυτό μπορεί να γίνει, π.χ., τονίζοντας λεπτομερέστερα τον παρατηρούμενο εκφυλισμό που διέπει αμφότερα τα σχήματα των ηλεκτρονιακών πυκνοτήτων/τροχιακών και τα σχήματα Chladni, και/ή χρησιμοποιώντας ανώτερα μαθηματικά για τη δικαιολόγηση των παρατηρούμενων ομοιοτήτων.

Κεφάλαιο 4: βιβλιογραφία

- Βοσνιάδου, Σ. (1998). Νοητικά Μοντέλα της εναλλαγής της μέρας/νύχτας. Στο Βοσνιάδου (Επιμ). Γνωσιακή Ψυχολογία, Εκδόσεις Gutenberg
- Εγκυκλοπαίδεια Britannica. (2019). Λήμμα: wave mechanics. <https://www.britannica.com/science/wave-mechanics>
- Κατάκης, Δ., Πνευματικάκης Γ. (1983). Πανεπιστημιακή Ανόργανος Χημεία, Τόμος Α
- Κοντογεωργίου, Α. Μικρόπουλος, Τ. (2004). Κβαντικό άτομο: Συγκλίνει η διδακτική προσέγγιση του από τον φυσικό και τον χημικό; Στα πρακτικά του 10ου πανελλήνιου συνεδρίου Φυσικής: Εξελιξείς, τάσεις, επιτεύγματα και διδακτική της Φυσικής, τόμος Α', 93-99
- Ματσαγγούρας, Η.Γ. (2009). Εισαγωγή στις επιστήμες της παιδαγωγικής. Αθήνα. Εκδ. Gutenberg
- Παπαχρήστου, Δ.Β. (2002). Το κβαντομηχανικό μοντέλο του ατόμου. Διπλωματική εργασία Δι.Χη.Ν.Ε.Τ.
- Σκουμιός, Μ., Χατζηνικήτα, Β. (2000). Μοντέλα μαθητών για θερμότητα, θερμοκρασία και θερμικά φαινόμενα. Επιθεώρηση της Φυσικής, 31, 58-71
- Στεφανή, Χ. (2001). Το κβαντομηχανικό μοντέλο του ατόμου: Οι εναλλακτικές ιδέες και μία πρόταση διδακτικής προσέγγισης στο Λύκειο. Διατριβή μεταπτυχιακής ειδίκευσης στη διδακτική της Χημείας.
- Τουμαζάτος, Δ. (2015). Προτεινόμενη προσέγγιση της διδασκαλίας στο Γυμνάσιο της σύγχρονης άποψης της επιστήμης για το Άτομο. Ερευνητική εργασία διπλώματος ειδίκευσης, ΔιΧηNET
- Τραχανά, Σ. (2016). Κβαντομηχανική Ι. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
- Φώτου, Ν. (2018). Ο ρόλος των αυτοδημιούργητων αναλογιών στην πραγματοποίηση προβλέψεων σε πρωτόγνωρες –νέες καταστάσεις. 17ο πανελλήνιο συνέδριο Φυσικής, Θεσσαλονίκη.

- Afnan, I. (2011). Quantum Mechanics with Applications. Bentham Science Publishers
- Albanese, A., Vicentini, M. (1997). Why do we believe that an atom is colourless? Reflections about the teaching of the particle model. Science and education, 6(3), 1997, 251-261
- Alwyn, S. (ed.), (2006). Encyclopedia of nonlinear science, Routledge
- Arfken, G. (1985). Laguerre Functions. §13.2 in Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press
- Atkins, P., de Paula, J., Friedman, R. (2009). Quanta, matter, and change: a molecular approach to physical chemistry. Oxford University Press
- Atkins, P.W. (1977). Molecular quantum mechanics Parts I and II: An Introduction to Quantum Chemistry (Vol. 1). Oxford University Press
- Atkins, P.W. (1974). Quanta: A handbook of concepts. Oxford University Press
- Augoyard, J., Torgue, H. (2014). Sonic experience: a guide to everyday sounds. McGill-Queen's Press – MQUP
- Axler, S., Paul, B. Wade, R. (2001). Harmonic function theory. Springer science & business media

- Ball, P. (2019). Mysterious Quantum Rule Reconstructed From Scratch. *Quanta Magazine*. <https://www.quantamagazine.org/the-born-rule-has-been-derived-from-simple-physical-principles-20190213/>)
- Barde, N., Patil S., Kokne, P., Bardapurkar, P. (2015). Deriving time dependent Schrödinger equation from wave-mechanics, Schrödinger time independent equation, classical and Hamilton-Jacobi Equations. *Leonardo Electronic Journal of Practices and Technologies*, 26: 31-48
- Bayer, H.J. (1986). Schülervorstellungen beim Übergang vom Bohrschen zum wellen-mechanischen Atommodell. W. Kuhn (ed.), *Didaktik der Physik. Vorträge auf der Physikertagung 1986 in Gießen (Gießen: DPG-Fachauschuß Didaktik der Physik)*, 249-256
- Belifante, F.J. (1939). On the spin angular momentum of mesons. *Physica*, 6(7-12): 887-898
- Bernoulli, D. (1755). Sur le mélange de plusieurs especes de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps: *Mém. Berlin 1753*, 173-195
- Bernoulli, J. (1695). Explicationes, Annotationes & Additiones ad ea, quae in Actis sup. de Curva Elastica, Isochrone Paracentrica, & Velaria, hinc inde memorata, & paratim controversa legundur; ubi de Linea mediarum directionum, alliisque novis, *Acta Eruditorum*
- Bonneau, M. (1991). The quantum shoe store and electron structure. *J. Chem. Educ.*, 68, 837
- Born, M. (1926). Στο: Wheeler, J. A.; Zurek, W. H. (eds.). *Zur Quantenmechanik der stoßvorgänge [On the quantum mechanics of collisions]*. *Zeitschrift für Physik*, 37, 863-867
- Bourke, P. (2003). Chladni plate, mathematics, 2D. <http://paulbourke.net/geometry/chladni/>
- Brumfiel, G. (2012). Quantum uncertainty not all in the measurement. *Nature*. doi:10.1038/nature.2012.11394
- Burko, L.M. (1996). Physical meaning of complex numbers. *The Physics Teacher*, 34, 260
- Carafoli, E., Danieli, G.A., Longo, G.O. (2010). *The two cultures: shared problems*. Springer science & business media
- Case, M.J., Fraser, M.D. (1999). An investigation into chemical engineering students' understanding of the mole and the use of concrete activities to promote conceptual change. *International Journal of Science Education*, 21(12), 1237–1249
- Cassels, J.R.T., Johnstone, A.H. (1980). *Understanding of Non-Technical Words in Science*. London: The Chemical Society
- Chakram, S., Patil, Y.S., Chang, L., Vengalattore, M. (2014). Dissipation in ultrahigh quality factor SiN membrane resonators, *Phys. Rev. Lett.* 112, 127201
- Chen, P., Luo, Z., Güven, S., Tasoglu, S., Ganesan, A.V., Weng, A., Demirci, U. (2014). Microscale Assembly Directed by Liquid-Based Template. *Advanced Materials*. 26(34): 5936–5941
- Chladni, E.F.F. (1787). *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*. Weidmanns Erben und Reich. <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:EKGK1SP1>
- Chladni E.F.F. (1802). *Die Akustik*. Breitkopf and Härtel.

- Chladni, E.F.F (2015). Treatise on acoustics. Springer-Verlag
- Clebsch, A. (1862). Theorie der Elasticität fester Körper, B. G. Teubner
- Clemens, J. (1998). Observed methods for generating analogies in scientific problem solving. *Cognitive Science*, 12(4): 563-586
- Collins, G. (1993). STM rounds up electron waves at the QM corral. *Physics Today* 46 (11), 17-19
- Commissariat, T. (2013). Quantum microscope peers into the hydrogen atom. *Physics World*. <https://physicsworld.com/a/quantum-microscope-peers-into-the-hydrogen-atom/>
- D’Alembert, Jean Le Rond. (1747). Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration», *Histoire de l’Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin (HAB) pour l’année. 1750*, 214-219.
- Daileda, R.C. (2012). The circular membrane problem. Σημειώσεις διαλέξεων του Πανεπιστημίου του Trinity. http://ramanujan.math.trinity.edu/rdaileda/teach/s12/m3357/lectures/lecture_3_29.pdf
- Daintith, J. (2004). *Oxford Dictionary of Chemistry*. New York: Oxford University Press.
- D’Alessio, S.J.D. (2021). Forced free vibrations of a square plate. *SN Applied Sciences*, 3:60
- Dasen, P. (1994). Culture and cognitive development from a Piagetian perspective. Στο: Lonner, W.J., Malpass, R.S. (ed.), *Psychology and culture*. Boston: Allyn and Bacon
- Davisson, C.J., Germer, L.H. (1927). Diffraction of electrons by a crystal of nickel. *Phys. Rev.* 30 705–740
- Dennis, M. (2007). *Eur. Phys. J. Special Topics* 145, 189
- Dori, Y.J., Barak, M. (2001). Virtual and physical molecular modeling: Fostering model perception and spatial understandin. *Journal of Educational Technology & Society*, 4(1), 61-74
- Dorrestijn, M., Bietsch, A., Açıklan, T., Raman, A., Hegner, M., Meyer, E., Gerber Ch. (2007). Chladni figures revisited based on nanomechanics. *Phys. Rev. Lett.* 98, 026102
- Douglas, K. (2016). *DNA nanoscience: from prebiotic origins to emerging nanotechnology*. CRC Press
- Driver, R., Guesne, E., Tiberghien, A. (Eds.) (1985). *Children’s ideas in science*. Milton Keynes: Open University Press
- Dyson, F.J., Lenard, A. (1967). Stability of matter, Parts I and II. *J. Math. Phys.*, 8, 423–434
- Eastman, R.H. (1970). *General chemistry: experiment and theory*. Holt, Rinehart and Winston, 354
- Egdall, I.M. (2014). Teaching special relativity to lay students. *The Physics Teacher*, 52, 406. DOI: 10.1119/1.4895355
- Einstein, A. (1905). On a heuristic Viewpoint Concerning the Production and transformation of light. *Annalen der Physik* 17, 132–48
- Einstein, A. (1956). *The Einstein Reader* (p. 59). NY: Citadel Press Books, Kensington Publishing Corp
- Elmore, W.C., Heald, M.A. (1986). *Physics of Waves*. NY: Dover Publications

- Erhart, J., Sponar S., Ozawa, M., Sulyok, G., Badurek, G., Hasegawa, Y. (2012). Experimental demonstration of a universally valid error–disturbance uncertainty relation in spin measurements, *Nature Physics* 8, 185–189
- Errede, S. (2017). Σημειώσεις του μαθήματος ακουστικής (Physics 406 Acoustical Physics) του τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου του Illinois. [https://courses.physics.illinois.edu/phys406/sp2017/Lecture Notes/P406POM Lecture Notes/P406POM Lect4 Part2.pdf](https://courses.physics.illinois.edu/phys406/sp2017/Lecture%20Notes/P406POM%20Lecture%20Notes/P406POM%20Lect4%20Part2.pdf)
- Fang, T. (2007). Analysis on non-resonance standingwaves and vibration tracks of strings. *Eur. J. Phys.*28, 665–672
- Fayer, M.D. (2001). *Elements of Quantum Mechanics*. Oxford University Press.
- Fetter, A.L., Walecka, J.D. (2003). *Theoretical mechanics of particles and continua*. NY: Dover Publications.
- Feynman, R., Leighton, R., Sands, M. (1964). *The Feynman lectures on physics*. Addison–Wesley
- Fleisch, D.; Kinnaman, L. (2015). *A student's guide to waves*. Cambridge: Cambridge University Press
- Fletcher, N.H., Rossing, T.D. (2013). *The Physics of Musical Instruments* Springer Science & Business Media, 79.
- Fletcher, P. Johnston, I. (1999). Quantum mechanics: exploring conceptual change. Papers presented at the annual meeting of National Association for Research in Science Teaching. 28
- Flores, J. (2007). Nodal patterns in the seismic response of sedimentary valleys. *Eur. Phys. J. Special Topics* 145, 63–75
- Fortman, J. (1993). Quantum numbers and orbitals. 70, 649, *J. Chem. Educ.*
- Franck, L. (2012), *Do we really understand quantum mechanics*, Cambridge University Press
- Gabel, D.L., Samuel, J.V. (1986). High school students' ability to solve molarity problems and their analog counterparts *Journal of Research in Science Teaching* , 23(2): 165–176
- Gabel, D. (1998). The Complexity of Chemistry and Implications for Teachings. Στο Fraser, B.J., Tobin, K.G. (ed.) *International handbook of science education* 70, 649
- Gander, M.J., Wanner, G. (2012). From Euler, Ritz, and Galerkin to Modern Computing. *SIAM Review (Society for Industrial and Applied Mathematics)*, 54(4)
- Gao, S. (2013). Interpreting the wave function – what are electrons? And how do they move? *Discusiones Filosóficas*, 14(22): 13-23
- Garofallo, A. (1997). Housing electrons: relating quantum numbers, energy levels and electron configurations. *J. Chem. Educ.*, 74, 709
- Gerlach, W. Stern, O. (1922). Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld. *Zeitschrift für Physik*, 9(1): 349–352
- Germain, S. (1821). *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*, Mme. Veuve Courcier, Paris
- Gess-Newsome, Julie, Lederman, Norman G. (Eds.). (1999). *Examining pedagogical content knowledge the construct and its implications for science education*. Springer.

- Goh, N.K., Lian Sai Chia, L.S., Tan, D. (1994). Some analogies for teaching atomic structure at the High school level. *J. Chem. Educ.*, 71, 733
- Goldhaber, A.S., Crease, R.P. (2015). Η στιγμή των κβάντα. Εκδόσεις ΡΟΠΗ
- Goswami, U. (1991). Analogical reasoning. What develops? A review of research and theory. *Child Development*, 62, 1-22
- Griffith, K., Cataldo, R., Fogarty, K. (2016). Do-it-yourself: 3D models of hydrogenic orbitals through 3D printing. *J. Chem. Educ.*, 93(9): 1586-1590
- Griffiths, D. (1995). *Introduction to quantum mechanics*. Prentice Hall
- Griffiths, D. (2008). *Introduction to elementary particles*. Wiley-VCH
- Grosslight, L., Unger, C., Jay, E., & Smith, C.L. (1991). Understanding models and their use in science: Conceptions of middle and high school students and experts. *Journal of Research in Science Teaching*, 28, 799–822
- Hansen, U. (2009). Two-dimensional normal modes: Experiment and finite element analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 125. 2626
- Harrison, A, Treagust, D. (1996). Secondary students' mental models of atoms and molecules: implications for teaching chemistry. *Science Education*, 80, 509-534
- Harrison, A, Treagust, D. (2000). Learning about atoms, molecules and chemical bonds: a case of study of multiple-model use in grade 11 chemistry. *Science Education*, 84, 352-381
- Harvard Natural Sciences Lecture Demonstrations. (2019). <https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/big-chladni-plate>
- Heisenberg, W. (1927). Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43(3–4): 172–198
- Heisenberg, W. (1973). *Der Teil und das Ganze* (München: Deutscher Taschenbuch Verlag), 17
- Hobson, R. (2003). *Physics: concepts and connections*. Prentice Hall/Pearson Education, 382
- Housecroft, C.E., Sharpe, A.G. (2001). *Inorganic chemistry*, Prentice Hall
- Hutchins, C. (1981). The acoustics of violin plates. *Scientific American* 245, 170-186
- Huygens, C. (1690). *Traité de la lumière, où sont expliquées les causes de ce qui luy arrive dans la réflexion, et dans la réfraction, et particulièrement dans l'étrange réfraction du cristal d'Islande*. Pierre van der Aa
- Irwin, A. (2000). Historical case studies: teaching the nature of science in context. *Science Education*, 84: 5-26
- Jacoby, M. (1999). Picture perfect orbitals. *Chemical & Engineering News* 77: 8
- Janusson, E., Penafiel, J., MacLean, S., Macdonald, A., Paci, I. McIndoe, J.S. (2020). Orbital Shaped Standing Waves Using Chladni Plates. *Chem. Educator* 2020, 25, 88–91.
- Jensen, H.C. (1957). Production of Chladni figures, *American Journal of Physics*, 25(3): 203
- Jensen, W. (2007). The origin of the s, p, d, f orbital labels. *J. Chem. Educ.*, 84(5): 757-758

- Joachim, R. (1974). *Chemistry for the modern mind*. Macmillan
- Rayleigh., J.W.S. (1894). *The Theory of Sound, Vol. I*. Macmillan
- Rayleigh., J.W.S. (1896). *The Theory of Sound, Vol. II*. Macmillan
- Johnstone, A.H. (1982). Macro and Micro Chemistry, *School Science Review*, 64(277), 377-379
- Kakalios, J. (2011). *The amazing story of quantum mechanics: a math-free exploration of the science that made our world*. Penguin
- Kang, H. (2018). A New Approach for Introducing Schrödinger's Equation Using Maxwell's Equations, Quantum Mechanics, and Special Relativity. *American Journal of Educational Research*, 6(7): 963-966
- Keating, D. (1979). Adolescent thinking. Στο: J. Adelson (ed.), *Handbook of adolescent psychology*, 211-246. NY: Wiley
- Kim, M., Choi, K. (2003). Access to structural similarity in the analogical problem solving of children. *School Psychology International*, 24(2): 218-231
- Kimberly, D., Major, K., Wall, D., Mason, H. (2018). The QSUM project. The Sun, Space, Art project Centre for Mathematical Sciences. University of Harvard. <https://www.findingpatterns.info/journalblog/2018/7/7/beautiful-day>
- Kirchhoff, G. (1850) *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, *J. Reine Angew. Math.*, 40: 51–88
- Kuhn, T. (1970). *The structure of scientific revolutions*. The University of Chicago Press, 83–84, 151
- Kühnen, C. (1994). *Die atomvorstellungen von studienanfängern naturwissenschaftlicher studiengänge*. Unpublished Masters thesis. University of Bremen
- Kverno, D., Jim Nolen, J. *A Study of Vibrating Plates*. Πανεπιστήμιο του Duke. [https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjcnfulJeXzAhXMyaQKHwLsDYIQFnoECA0QAQ&url=http%3A%2F%2Fwww.phys.nthu.edu.tw%2F~gplab%2Ffile%2F07%2520Standing%2520Waves%2Fchladni%2520patterns%2520\(US\).pdf&u sg=AOvVaw0heN8EL4QFSE_sRt_2wFqc](https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjcnfulJeXzAhXMyaQKHwLsDYIQFnoECA0QAQ&url=http%3A%2F%2Fwww.phys.nthu.edu.tw%2F~gplab%2Ffile%2F07%2520Standing%2520Waves%2Fchladni%2520patterns%2520(US).pdf&u sg=AOvVaw0heN8EL4QFSE_sRt_2wFqc)
- Labarca, M., Lombardi, O. (2010). Why orbitals do not exist? *Found Chem*, 12: 149–157
- Lamé, G. (1852). *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Bachelier
- Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1977). *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory, Vol. 3 (3rd ed.)*, Pergamon Press
- Lederman, N.G., Abd-El-Khalick, F., Bell, R.L., Schwartz, R.S. (2002). Views of nature of science questionnaire: Toward valid and meaningful assessment of learners' conceptions of nature of science. *Journal of Research in Science Teaching*, 39, 497–521
- Leibniz, G.W. (1695). *Notatiunculæ ad Acta Decemb*, 537 et seqq. (1696). *Acta Eruditorum Mar*, 145–147

- Lester, I.M. (1997). Σημειώσεις του μαθήματος «Εισαγωγή στη Γενική Χημεία Ι». Πανεπιστήμιο της Pennsylvania. <https://www.sas.upenn.edu/~milester/courses/chem101/AQMChem101/AQMPages/AQMIIIc.html>
- Lezhou, S. (2008). Metaphors of English learning. *Intercultural Communication Studies* XVII(1), 240-247
- Lindemann T., Vella, A. (2015). Analysis of vibrating plates with acoustic holography and eddy currents. Errede, S.M., University of Illinois
- Lord Rayleigh. (1911). On the calculation of Chladni's figures for a square plate. *Philos. Mag.* 22, 225–229
- Lüth, H. (2015). Quantum physics in the nanoworld: Schrödinger's cat and the dwarfs. Springer International Publishing.
- Ma, N. L. (1996). Quantum Analogies on Campus. *J. Chem. Educ.*, 73, 1016
- Madelung, E. (1936). *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*. Springer Verlag
- Main, P. (2015). Σημειώσεις του μαθήματος Φυσικής της Μουσικής του Πανεπιστημίου του York. https://www-users.york.ac.uk/~pm1/PMweb/Physics_of_Music_notes.pdf
- Mainzer, K. (1996). *Symmetries of nature: a handbook for philosophy of nature and science*. Walter de Gruyter
- Mak, T., Wai-Kee Li. (2000). Probability of locating the electron in a hydrogen atom, 77, 490
- Masanao, O. (2003), Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement, *Physical Review A*, 67 (4): 42105
- Masanao, O. (2003). Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement, *Physical Review A*, 67(4): 42105
- Matta, C.F., Gillespie, R.J. (2002). Understanding and interpreting molecular electron density distributions. *J. Chem. Educ.* 79, 1141–1152
- Mc Call, A. (1963). Invested Self-expression. *A Principle of Human Motivation*, *Psychological Review*, 70, 289-303
- McBride, J.M. [Open Yale Courses]. [2009, Sep 19] 9. Chladni Figures and One-Electron Atoms [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=5kYLE8GhAuE,2018-01-01>
- Mehra, J. Rechenberg, H. (1987). *Erwin Schrödinger and the Rise of Wave Mechanics*. Springer, 695 μέρους I, 604 μέρους II
- Mehta, P. (2009). Vibrations of thin plate with piezoelectric actuator: theory and experiments. Thesis. https://tigerprints.clemson.edu/all_theses/707
- Melde, F. (1860). Ueber die Erregung stehender Wellen eines fadenförmigen Körpers. *Annalen der Physik* 185, 2: 193–215
- Messiah, A. (1999). *Quantum mechanics : two volumes bound as one (unabridged reprint ed.)*. Mineola, NY: Dover Publications

- Meyer, J., Land, R. (2003). Threshold concepts and troublesome knowledge: linkages to ways of thinking and practising within the disciplines. Occasional report 4. University of Edinburgh
- Miller, J., Smith, C., Williams, B. (2000). The M&M superposition principle. *J. Chem. Educ.*, 77, 879
- Millikan, R. A. (1913). On the elementary electric charge and the Avogadro constant. *Phys. Rev.* 2 (2): 109–143
- Mohr, P.J., Taylor, B.N., Newell, D.B. (2012). CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010. *Journal of Physical and Chemical Reference Data.* 41 (4): 043109
- Moore, T.A. (July 2006). Tips on teaching general relativity (with tensors) to undergraduates. AAPT General Relativity Workshop. Pomona College, CA. The American Association of Physics Teachers. <http://www.aapt.org/doorway/TGRU/>
- Mulder, P. (2010). On the alleged non-existence of orbitals. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 41, 178-82
- Mulliken, R.S. (1932). Electronic structures of polyatomic molecules and valence. II. General considerations. *Physical Review.* 41(1): 49–71
- Musical Keys. (2013). Tonoscope DXA 7th April [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=hywIf7QAXQI>
- Naseriazar, A., Ozmen, H., Badrian, A. (2011). Effectiveness of analogies on students' understanding of chemical equilibrium, *Western Anatolia Journal of Educational Science*, 525-534
- Natta, G., Farina, M. (1972). *Stereochemistry*. Longman.
- Nave, C. R. (2016). Ιστοσελίδα του τμήματος Φυσικής και Αστρονομίας του Πανεπιστημίου της Georgia. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Music/cirmem.html>
- Nelson, P.G. (1990). How do electrons get across nodes? *Journal of chemical education*, 67(8): 643-647
- Newton, Isaac. (c.1671). *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (The method of fluxions and infinite series), 1736 [Opuscula, 1744, Vol. I. 66]
- Ochiai, Y., Hoshi, T., Rekimoto, J. (2014). Three-Dimensional Mid-Air Acoustic Manipulation by Ultrasonic Phased Arrays. *PLoS ONE* 9(5): e97590
- Ohanian, H. (1986). What is spin. *Am. J. Phys.*, 54: 500
- Oxtoby, D., Gillis, H., Champion, A. (2008). *Principles of modern chemistry*, 6th ed., Thomson Brooks/Cole: Belmont, CA
- Pain, H.J. (2005). *The physics of vibrations and waves* (6th Edition), John Wiley Sons, Ltd., England
- Parry, A., Curtis, M. (2003). Chladni plates. Project. University of Oklahoma, dpt. of physics and astronomy
- Pascual, J.I., Gomez-Herrero, J., Rogero, C., Baro, A.M., Sanchez-Portal, D., Artacho, E., Ordejon, P., Soler, J.M. (2000). Seeing molecular orbitals. *Chem. Phys. Lett.* 321, 78–82
- Pauling, L., Wilson, B. (2012). *Introduction to quantum mechanics with applications to chemistry*. Courier Corporation

- Pearson, B.J., Eferris, N., Strauss, R., Li, H., Jackson, D.P. (2018). Measurements of slit-width effects in Young's double-slit experiment for a partially-coherentsource. *OSA Continuum* 1(2): 755-763
- Petri, J., Niedderer, H. (1998). A learning pathway in high-school level quantum atomic physics. *international journal of science education*, 20(9): 1075-88
- Planck, M. (1900). On the Theory of the energy distribution law of the Normal spectrum. *Verhalungen der Physikalischen Gesellschaft* 2, 202.
- Planck, M. (1900). On an improvement of Wien's equation for the spectrum. *Annalen der Physik* 1,. 730
- Poincaré, H. (1908). *Science et méthode*
- Poisson, S.D. (1829). Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques. *Mémoires de l'Académie Royal des Sciences de l'Institut de France*, 8, 357-570
- Politzer, D. (2018). Banjo Drum Physics-sound experiments and simple acoustics demos. California Institute of Technology. <http://www.its.caltech.edu/~politzer/air-head-exp/air-head-exp.pdf>
- Schuch, D. (2010). Pythagorean quantization, action(s) and the arrow of time. *J. Phys.: Conf. Ser.* 237, 012020
- Pyykkö, P. (2002). Relativity, gold, closed-shell interactions, and CsAu·NH₃. *Angew. Chem. Int. Ed.* 41, No. 19, 3573-3578
- Radeş, M. (2001). *Encyclopedia of Vibration*, 413-431
- Bhatia, R. (2005). MAA. <https://books.google.gr/books?id=7amWrIrvIUkC&printsec=frontcover&hl=el#v=onepage&q&f=false>
- Ramsden, P. (1996). *Learning to Teach in Higher Education*, Routledge, London.
- Ratner, M.A., Schatz, G.C. (2001). *Quantum mechanics in chemistry*. Prentice Hall
- Rayner-Canham, G. (1994.) Applications and analogies - A student's travels, close dancing, bathtubs, and the shopping mall: More analogies in teaching introductory chemistry. *J. Chem. Educ.*, 71: 943-944
- Remarques sur les Memoires précédens de M. Bernoulli, *Memoires de l'academie des sciences de Berlin*, 9, 1755, 196-222
- Rieke, M. (2002). Σημειώσεις διαλέξεων μαθήματος αστρονομίας του Πανεπιστημίου της Αριζόνα. (2002). http://ircamera.as.arizona.edu/astr_250/Lectures/Lecture_08.htm
- Ritz, W. (1909). Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. In: *Annalen der Physik* 28(4), S. 737–786
- Rosenthal, R., Jacobson, L. (2003). *Pygmalion in the classroom: teacher expectation and pupils' intellectual development*. Irvington publishers/Ardent Media, Inc.
- Rowell, J.A., Dawson, C.J. (1980). Mountain or mole hill: can cognitive psychology reduce the dimensions of conceptual problems in classroom practice? *Science Education*, 64, 693-708
- Rozema L.A., Darabi, A, Mahler, D.H., Hayat, A., Soudagar, Y., Steinberg, A.M. (2012). Violation of Heisenberg's measurement-disturbance relationship by weak measurements. *Phys. Rev. Lett.* 109, 100404

- Rupp, R. (1998). Magic mud and other great experiments. The Complete Home Learning Source Book
- Sakurai, J.J. (1995). Modern quantum mechanics. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley
- Samoshin, V. (1998). Orbital models made of plastic Soda bottles. *J. Chem. Educ.*, 75, 985
- Saputra, A., Canaval, L., Fadiawati S., Diawati, C. Setyorini, M., Kadaritna, N. Kadaryanto, B. (2015). Visualizing three-dimensional hybrid atomic orbitals using winplot: an application for student self instruction. *J. Chem. Educ.*, 92(9): 1557-1558
- Saslow, W. (2002). Electricity, magnetism, and light. Elsevier
- Scerri, E.R. (2001). The recently claimed observation of atomic orbitals and some related philosophical issues. *Philosophy of Science*, 68 (Proceedings), S3: S76-S88.
- Schrödinger, E. (1926). An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical Review*, 28(6): 1049–1070
- Schwarz, W.H.E. (2006). Measuring orbitals: provocation or reality? *Angew. Chem. Int. Ed.* 45, 1508–1517
- Sheehan, M. (2010). Identification of difficult topics in the teaching and learning of chemistry in Irish schools and the development of an intervention programme to target some of these difficulties. University of Limerick. Thesis. <https://ulir.ul.ie/bitstream/handle/10344/432/MSpthesis.pdf;sequence=3>
- Sheldon, A., Bourdon, P., Wade, R. (2001). Harmonic function theory. New York: Springer.
- Sinclair, B. (2001). Viewing standing quantum waves. Σημειώσεις διαλέξεων για τα στάσιμα κύματα (κεφ. 9) της σχολής Φυσικής και Αστρονομίας του Πανεπιστημίου St. Andrews. <https://www.st-andrews.ac.uk/~bds2/optics/quantumwaves.html>
- Sinha, U., Couteau, C., Jennewein, T., Laflamme, R., Weihs, G. (2010). Ruling out multi-order interference in quantum mechanics. *Science*, 329(5990): 418-421
- Skrodzki, M., Reitebuch, U., Polthier, K. (2016). Chladni figures revisited: a peek into the third dimension. AG Mathematical Geometry Processing, Freie University Berlin, Berlin, Germany. Bridges Finland Conference Proceedings. <http://archive.bridgesmathart.org/2016/bridges2016-481.pdf>
- Smeenk, C.T.L. (2013). Viewpoint: a new look at the hydrogen wave function. *Physics* 6, 58
- Sonine, N. (1880). Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries. *Math. Ann.* 16(1): 1–80
- Specht, Z., Raley, D. (2013). Modeling electron density and atomic orbitals using marbles and carbon paper: an exercise for high school students. *J. Chem. Educ.*, 91(1): 151–153
- Speiser, D. (2008). *Discovering the Principles of Mechanics 1600-1800*, 191 (Basel: Birkhäuser)
- Staver, J.R., Lumpe, A. (1995). *Journal of Research in Science Teaching*, v32 n2 p177-93
- Stöckmann, H. J. (2007). Chladni meets Napoleon. *Eur. Phys. J. Special Topics* 145, 15–23
- Stöckmann, H.J. (2007). *Quantum Chaos-An Introduction*. Cambridge university press

Stodolna, A.S., Rouzée, A., Lépine, F., Cohen, S. Robicheaux, F., Gijsbertsen, A., Jungmann, J.H., Bordas, C., Vrakking, M.J.J. (2013). Hydrogen atoms under magnification: direct observation of the nodal Structure of Stark states. *Phys. Rev. Lett.*, 110, 213001

Szabo, A. (1969). Contour diagrams for relativistic orbitals. *Journal of Chemical Education*, 46(10), 678.

Talanquer, V. (2014). Threshold concepts in chemistry: The critical role of implicit schemas. 68, 837, 92(1), 3-9

The Engineering Professors' Council. (2000). The EPC Engineering Graduate Output Standard, EPC occasional paper number 10

Thomson, J.J. (1897). Cathode rays. *Proceedings of the Royal Institution*, 1–14

Thomson, J.J. (1905). On the emission of negative corpuscles by the alkali metals. *Philosophical Magazine*. 6, 10(59): 584–590

Thomson, J.J. (1912). Further experiments on positive rays. *Philosophical Magazine*, 24, 209–253

Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells* (2nd Edition). McGraw-Hill

Tipler, P.A., Mosca, G. (2008). *Physics for scientists and engineers – with Modern Physics* (6th Edition). Freeman

toc1955. (2009). Chladni patterns: aluminum plate and violin bow. [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=tliBfYdddhU>

Tomonaga., S. (1997). *The story of spin*. University of Chicago Press

Treagust, D., Chittleborough, G., Mamiala, T. (2002). Students' understanding of the role of scientific models in learning science. *International Journal of Science Education*, 24, 357–368

Tsaparlis, G., Papaphotis, G. (2002). Quantum-chemical concepts: Are they suitable for secondary students?. *Chemistry Education Research and Practice*, 3(2), 129-144

Tuan, P.H., Wen, C.P., Chiang, P.Y., Yu, Y.T., Liang, H.C., Huang, K.F., Chen, Y.F. (2015). Exploring the resonant vibration of thin plates: Reconstruction of Chladni patterns and determination of resonant wave numbers. *J. Acoust. Soc. Am.* 137 (4)

Tufoi, M., Gillich, G. R., Praisach, Z. I., Ntakpe, J. L., Hatiegan, C., (2014). An Analysis of the Dynamic Behavior of Circular Plates from a Damage Detection Perspective. *RJAV XI*(1), 41-46

Tully, S., Stitt, T., Caldwell, R., Hardock, B., Hanson, R., Maslak, P. (2012). Interactive web-based pointillist visualization of hydrogenic orbitals using Jmol. *J. Chem. Educ.*, 129-131

Ubben, M., Heusle, S. (2018). A haptic model of vibration modes in spherical geometry and its application in atomic physics, nuclear physics and beyond. *European Journal of Physics*, 39: 4

Uhlenbeck, G., Goudsmit, S. (1926). Spinning electrons and the structure of spectra. *Nature*, 117, 2938: 264–265

Varshalovich, D.A., Moskalev, A.N. Khersonskii, V.K. (1988). *Quantum theory of angular momentum*. World Scientific, Singapore

- Vincent, J. (1999). Propagation of errors in freshman chemistry textbooks: a case study using the magnetic moment of a spinning electron. *J. Chem. Educ.*, 76, 1460
- Voigt, W. (1893). Erwiderng. *annalen der physik.* 286(10), 377-380
- Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. *Learning and Instruction*, 4(1), 45–69.
- Waller, M. (1939). Vibrations of free square plates: Part I normal vibrating modes. *Proceedings of the Physical Society*, 51(5): 831-844
- Waller, M. (1961). *Chladni Figures: A Study in Symmetry*, Bell, London
- Waller, M.D. (1941). Solid carbon dioxide as an exciter of vibrations. *Nature*, 148: 185–187
- Waller, M.D. (1952). Vibrations of Free Plates: Line Symmetry. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 211(1105), 265-276
- Watson, G. N. Whittaker, E.T. (1927). *A course of modern analysis*. Cambridge University Press
- Wheatstone, C. (1833). On the figures obtained by strewing sand on vibrating surfaces, commonly called acoustic figures. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (The Royal Society)*, 123: 593–633
- White, H.E. (1931). Pictorial representations of the Dirac electron cloud for hydrogen-like atoms. *Physical Review*, 38(3), 513–520
- Winter, M. (2002-2021). A gallery of orbitals. Πανεπιστήμιο του Sheffield. <https://winter.group.shef.ac.uk/orbitron/>
- Winter R., Solving Schrödinger's equation for the hydrogen atom. Πανεπιστήμιο του Aberystwyth. <http://users.aber.ac.uk/ruw/teach/237/hatom.php>
- Wolf, F. (2007). *Eur. Phys. J. Special Topics* 145, 137
- Wu, J.H., Liu, A. Q., Chen, H. L. (2007). Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions. *J. Appl. Mech.* 2007, 74(6): 1247-1251
- Xiao, W. Supervisor: Madsen, A. (2010). Chladni Pattern, <http://rudar.ruc.dk/bitstream/1800/5190/1/Chladni%20>
- Young, T. (1802). Bakerian lecture on the mechanism of the theory of light and colour. *Philos Trans R Soc Lond*, 92: 12-48
- Zeleny, E. (2008). Chladni Figures. Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/ChladniFigures/>
- Zuo, J.M., Kim, M., O'Keeffe, M., Spence, J.C.H. (1999). Direct observation of d-orbital holes and Cu-Cu bonding in Cu₂O. *Nature* 401: 49-52

Παράρτημα

**I. Ενδεικτικές, ενίοτε αλληλοεπικαλυπτόμενες εννοιολογικές
 παρανοήσεις που αφορούν άμεσα ή έμμεσα τα τροχιακά, όπως φέρονται
 στις αντίστοιχες παραπομπές.**

Πίνακας 1.

<p>1. «Το τροχιακό είναι i) ο χώρος πιθανού εντοπισμού του ηλεκτρονίου», ii) μια ασαφής τροχιά», iii) η ηλεκτρονιακή πυκνότητα», iv) το ηλεκτρονιακό νέφος» (Στεφανή Χ., 2001).</p>
<p>2. «Το τροχιακό δεν υπάρχει διότι ενέχει φανταστικό μέρος».</p>
<p>3. «Ο πυρήνας περιβάλλεται από ιδιαίτερο χώρο, και αυτός είναι που δίνεται από το $\psi(r)^2$» (Petri, J., Niedderer, H., 1998).</p>
<p>4. «Τα ηλεκτρόνια είναι σωματίδια με ασαφή, «σκονισμένη» τροχιά» (Kuhnen 1994· Petri, J., Niedderer, H., 1998).</p>
<p>4. «Τα σχήματα του χώρου που μπορεί να βρεθούν τα ηλεκτρόνια είναι συμπαγείς φλοιοί, με πάχος» (Bayer, 1986).</p>
<p>5. «Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ της πιθανότητας, της πυκνότητας της πιθανότητας και του τροχιακού»</p>
<p>6. «Ηλεκτρονιακό νέφος σημαίνει σκόρπιο σωματίδιο, εν είδει σύννεφου, την ίδια στιγμή». Αλλιώς διατυπωμένο: «το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται με την ίδια πιθανότητα στον χώρο που περικλείεται από τις ισόπυκνες καμπύλες» (Στεφανή Χ., 2001).</p>
<p>7. «Οι ίδιες οι κυματοσυναρτήσεις είναι φυσικές οντότητες, δηλ. υπάρχουν στη φύση» (Στεφανή Χ., 2001).</p>
<p>8. «Τα ηλεκτρόνια p διατρέχουν τροχιά σχήματος 8» (Tsaparlis, G., Papaphotis, G., 2002).</p>
<p>9. «Τα ηλεκτρόνια διατρέχουν τροχιά η οποία έχει σχήμα κύματος» (Fletcher, P., Johnston, I., 1999).</p>
<p>10. «Τα σχήματα των τροχιακών αναπαριστούν έναν περιχαρακωμένο χώρο» (Tsaparlis, G., Papaphotis, G., 2002).</p>
<p>11. «Όταν μιλάμε για ηλεκτρονικό νέφος, μιλάμε για ένα είδος μήτρας όπου τα ηλεκτρόνια είναι εμφυτευμένα, όπως τα σταγονίδια νερού σε ένα σύννεφο» (Harrison, A., Treagust, D., 1996).</p>

II. Προέλευση της εξίσωσης του Schrödinger

Ένας σύγχρονος τρόπος εξαγωγής της εξίσωσης που αξιοποιεί ανώτερα μαθηματικά είναι το ξεκίνημα από τα αξιώματα Dirac και Neumann, με την κυματοσυνάρτηση να ορίζεται ως μοναδιαίο διάνυσμα σε μιγαδικό χώρο Hilbert, μετά η εφαρμογή μοναδιαίου μετασχηματισμού, άρα ερμιτιανού τελεστή και, κατόπιν, η εφαρμογή της αρχής της αντιστοιχίας (Sakurai, J.J., 1995, σ. 68).

Ωστόσο, ο πλέον εύκολος τρόπος είναι με έρεισμα τα στοιχεία που αναφέρθηκαν, δηλ. από την εξίσωση των κυμάτων. Συμβολίζοντας με ψ την κυματοσυνάρτηση και με $\psi = \psi(x,t)$, η κυματοσυνάρτηση είναι

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

που έχει γενική λύση $\psi = A e^{(t - x/u)\omega i} + B e^{-(t - x/u)\omega i}$. Θεωρώντας διάδοση προς μία διεύθυνση, η λύση είναι $\psi = A e^{(t - x/u)\omega i}$, ή αλλιώς γραμμένη, $\psi = A e^{(vt - x/\lambda)2\pi i}$.

Από τον τύπο του Planck, $E = h\nu = 2\pi\hbar\nu$ (όπου $\hbar = h/2\pi$) και από τον τύπο του de Broglie $\lambda = (h/mu) = 2\pi\hbar / p$, όπου p , η ορμή, προκύπτει

$$\psi = A e^{(2\hbar)(Et - px)}$$

Διαφορίζοντας δύο φορές ως προς x , και λύνοντας ως προς $p^2\psi$,

$$p^2\psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Διαφορίζοντας μία φορά ως προς t και λύνοντας ως προς $E\psi$,

$$E\psi = (-\hbar/i) \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας,

$$E = (p^2 / 2m) + V(x,t) ,$$

άρα, εν προκειμένω, $E\psi = (p^2 / 2m)\psi + V(x,t)\psi$, από όπου προκύπτει

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U\Psi ,$$

ή, στις τρεις χωρικές διαστάσεις,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + U\Psi ,$$

που είναι η χρονοεξαρτώμενη μορφή της εξίσωσης του Schrödinger, από όπου, υποθέτοντας ανεξαρτησία της V από τον χρόνο, προκύπτει η χρονοανεξάρτητη μορφή της εξίσωσης του Schrödinger:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)\psi = 0 .$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφτεί

$$H\psi = E\psi,$$

η οποία είναι η γενική εξίσωση του Schrödinger, όπου:

H , ο χαμιλτονιανός τελεστής ¹²,

ψ , η κυματοσυνάρτηση, η οποία συνιστά την ιδιοσυνάρτηση του τελεστή,

E , η ολική ενέργεια του εκάστοτε συστήματος, η οποία συνιστά την ιδιοτιμή του τελεστή και της ιδιοσυνάρτησης.

Παρόλο που το επίπεδο κύμα ακτινοβολίας είναι ένα ιδιαίτερο είδος κύματος ακτινοβολίας, μέσω ανάλυσης Fourier μπορεί να γραφτεί οποιοδήποτε κύμα ως συνδυασμός επίπεδων κυμάτων, δηλ. το τελευταίο αποτέλεσμα ισχύει για κάθε κύμα ακτινοβολίας.

Σήμερα, εκ των υστέρων, η παραγωγή της εξίσωσης δείχνει εύκολη, όμως κατά Feynman:

«Από που τη βρήκαμε; Δεν είναι δυνατόν να την αντλήσουμε από οτιδήποτε γνωρίζουμε. Προήλθε από το μυαλό του Schrödinger».

Για την προέλευση της εξίσωσης του Schrödinger (Feynman, R., Leighton, R., Sands, M., 1964).

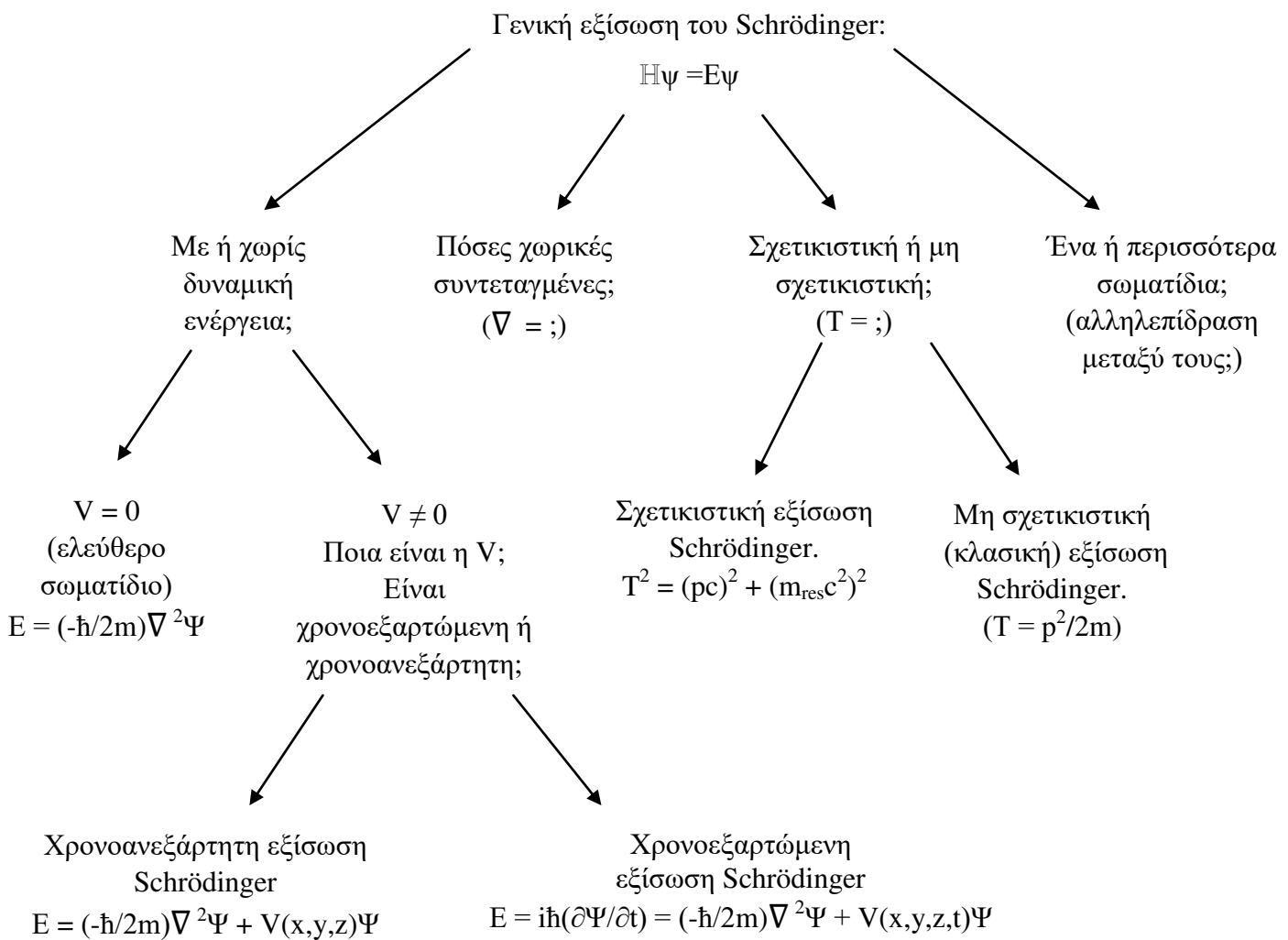
¹² Ο τελεστής ορίζεται γενικά ως μια συνάρτηση που δρα πάνω σε κάποια άλλη συνάρτηση, μετασχηματίζοντάς την κατά έναν καθορισμένο τρόπο. Μπορεί να θεωρηθεί γενίκευση της έννοιας της συνάρτησης. Μπορεί να δρα πάνω σε αριθμούς, διανύσματα, μήτρες, καθώς και σε άλλους τελεστές.

III. Λύση της εξίσωσης του Schrödinger για το άτομο του υδρογόνου

Από το μέρος II προκύπτει ότι η γενική εξίσωση είναι

$$H\psi = E\psi,$$

Σε κάθε ένα φυσικό πρόβλημα, όμως, υπάρχει η δική του **ειδική** εξίσωση και λύση λόγω της εφαρμογής εν γένει διαφορετικών οριακών συνθηκών αλλά και επιπλέον παραμέτρων (**εικόνα 1**) που ταιριάζουν στο κάθε πρόβλημα. Έτσι, η εξίσωση λαμβάνει διαφορετική μορφή στην περίπτωση, μεταξύ άλλων, ελεύθερου σωματιδίου, δυναμικού δ , φρέατος τοιχωμάτων απείρου δυναμικού, φρέατος τοιχωμάτων πεπερασμένου δυναμικού, αρμονικού ταλαντωτή, κβαντικού εκκρεμούς, ή σωματιδίου εντός δακτυλίου.



Εικόνα 1. T : τελεστής της κινητικής ενέργειας · m_{res} : αδρανειακή μάζα · c : η ταχύτητα του φωτός. Η ειδική εξίσωση σε κάθε περίπτωση προκύπτει συνδυάζοντας τις τελικές (κατώτερες) διατυπώσεις σε κάθε κλάδο του διαγράμματος. Όταν θεωρείται η σχετικιστική εξίσωση και πάνω από ένα ηλεκτρόνια, τότε χρειάζεται να ληφθεί υπ' όψη η σύζευξη μεταξύ των τροχιακών στροφορμών και των spin, καθώς και η σύζευξη των spin μεταξύ τους. Η εξάρτηση από τον χρόνο αναφέρεται στην εξάρτηση της δυναμικής ενέργειας και του ψ^2 από τον χρόνο. Η ίδια η κυματοσυνάρτηση είναι πάντα χρονοεξαρτώμενη.

Σήμερα, πλέον, έχουν ανακαλυφθεί διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους προκύπτει η εξίσωση σε διάφορα συστήματα, ή με τους οποίους προκύπτει μια μορφή από την άλλη (π.χ., η χρονοεξαρτώμενη μορφή από την χρονοανεξάρτητη (Barde N., Patil S., Kokne, P., Bardapurkar, P., 2015)).

Στην περίπτωση του ατόμου του υδρογόνου και των υδρογονοειδών ατόμων και ιόντων,

- η δυναμική ενέργεια οφείλεται στην έλξη μεταξύ του πρωτονίου ή πρωτονίων και του ηλεκτρονίου η οποία έλξη έχει σφαιρική συμμετρία αφού είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης από τον πυρήνα (πρόβλημα σφαιρικού φρέατος δυναμικού).

- η δυναμική ενέργεια είναι χρονοανεξάρτητη

- υπάρχει μόνο 1 ηλεκτρόνιο

- η θέση που μπορεί να βρεθεί το ηλεκτρόνιο προσδιορίζεται με τρεις χωρικές διαστάσεις και

- δεν λαμβάνουν χώρα σε σημαντική έκταση τα σχετικιστικά φαινόμενα ¹³.

Αλλιώς διατυπωμένο, ο χαμιλτονιανός τελεστής είναι ο τελεστής της μεταφορικής κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας λόγω της έλξης Coulomb, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το spin.

Ποια είναι η V στην περίπτωση του ατόμου του υδρογόνου και των υδρογονοειδών ατόμων και ιόντων;

Για να βρεθεί, ανακαλείται ο ορισμός του δυναμικού ηλεκτροστατικού πεδίου,

$$\Delta\text{υν.}_{\text{Cb}} = Kc \frac{Q}{r} ,$$

και τον ορισμό της δυναμικής ενέργειας,

$$V = q \Delta\text{υν.}_{\text{Cb}} = Kc \frac{Qq}{r} .$$

Δεδομένου ότι $Kc = 1/4\pi\epsilon_0$, με ϵ_0 τη σταθερά διαπερατότητας του κενού, και χρησιμοποιώντας την ανηγμένη μάζα $\mu = m_e m_p / (m_e + m_p)$ ώστε το πρόβλημα να εκπέσει από πρόβλημα δύο σωματιδίων (πρωτονίου και ηλεκτρονίου) σε πρόβλημα ενός σωματιδίου, η δυναμική ενέργεια είναι:

$$V = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} ,$$

με το αρνητικό πρόσημο να υποδηλώνει την έλξη μεταξύ ηλεκτρονίου και πρωτονίου.

¹³ Τα φαινόμενα που προβλέπει η ειδική θεωρία της σχετικότητας, δηλ. το να εγγίζεται η ταχύτητα του φωτός, και, συνακόλουθα, η αύξηση της μάζας, η συστολή του μήκους και η διαστολή του χρόνου γίνονται σημαντικά στα βαρύτερα άτομα (π.χ., Ryykkö, P., 2002).

Ο τύπος αξιοποιεί σφαιρική πολική συντεταγμένη.

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z , σχετίζονται με τις σφαιρικές πολικές συντεταγμένες ακτινική απόσταση $r \in [0, +\infty)$, πολική γωνία $\theta \in [0, \pi]$, αζιμούθιο $\varphi \in [0, 2\pi)$ μέσω των τύπων

$$\begin{aligned}x &= r \eta\mu\theta \sigma\upsilon\eta\varphi, \\y &= x = r \eta\mu\theta \eta\mu\varphi \quad \text{και} \\z &= r \sigma\upsilon\eta\theta.\end{aligned}$$

Για τις καθαρές μορφές των σφαιρικών συντεταγμένων, ισχύουν οι ισοδύναμοι τύποι

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \sigma\upsilon\nu^{-1}(z/r) \quad \text{και} \\ \varphi &= \varepsilon\varphi^{-1}(y/x).\end{aligned}$$

Αυτοί οι τύποι μετατροπής εννοούν ότι η αρχή των συστημάτων αναφοράς είναι κοινή και ότι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της απόστασης r με τον άξονα z (η πολική γωνία) είναι η γωνία θ (ορισμένα εγχειρίδια χρησιμοποιούν τις γωνίες φ και θ αμοιβαίως αλλαγμένες).

Παραμένοντας σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες, η ειδική εξίσωση του Schrödinger γράφεται

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \psi.$$

(Atkins, P.W., 1977). Τι μπορεί να γίνει με αυτήν τη γραμμική ¹⁴ ομοιογενή ¹⁵, μερικής διαφορική εξίσωση (partial differential equation: PDE) 2^{ης} τάξης σταθερών συντελεστών; Αν και υπάρχουν και άλλοι τρόποι λύσης (π.χ., μετασχηματισμός Laplace), εδώ παρατίθεται η **μέθοδος διαχωρισμού των μεταβλητών** (Tipler, P.A., Mosca, G., 2008), η οποία καλείται και μέθοδος επέκτασης της ιδιοσυνάρτησης.

Αυτή η μέθοδος δικαιολογεί την αξιοποίηση σφαιρικών πολικών συντεταγμένων αντί καρτεσιανών, διότι ειδάλτως ο όρος $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ καθιστά πολύ δύσκολη, αν όχι αδύνατη, την απομόνωση κάθε μίας καρτεσιανής μεταβλητής από τις άλλες δύο (Afnan, I., 2011).

Η παραπάνω εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες, δηλ. ως $\psi = \psi(x, y, z)$, είναι

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \psi = E\psi,$$

οπότε σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες, και φέρνοντας όλους τους όρους από την ίδια πλευρά, η εξίσωση είναι

¹⁴ Γραμμική εξίσωση: οι εξαρτημένες και οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι υψωμένες μόνο στην πρώτη δύναμη.

¹⁵ Ομοιογενής γραμμική διαφορική εξίσωση: η γραμμική διαφορική εξίσωση όπου ο σταθερός όρος της είναι μηδέν.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \eta \mu \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\eta \mu \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \eta \mu^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) \psi = 0$$

Στην αρχή, η καινούργια μορφή δείχνει να περιπλέκει τα πράγματα, όμως, με λίγο χειρισμό μπορεί να απομονωθεί κάθε μία καινούργια μεταβλητή r , θ , ϕ από τις άλλες δύο.

Υποτίθεται ότι $\psi(r,\theta,\phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$, δηλ. ότι υπάρχουν συναρτήσεις τέτοιες ώστε 1) να είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής από τις τρεις και διαφορετικής μεταβλητής, και 2) το γινόμενο τους να ισούται με ψ . Για χάρη ευκολίας, κάθε συνάρτηση συμβολίζεται με το κεφαλαίο γράμμα κάθε μεταβλητής της. Η $R(r)$ καλείται ακτινική συνάρτηση, η $\Theta(\theta)$ καλείται πολική συνάρτηση και η $\Phi(\phi)$ καλείται αζιμουθιακή συνάρτηση. Έτσι, η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R \Theta \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \eta \mu \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\eta \mu \theta \frac{\partial R \Theta \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \eta \mu^2 \theta} \frac{\partial^2 R \Theta \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) R \Theta \Phi = 0$$

δηλ.,

$$\frac{\Theta \Phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R \Phi}{r^2 \eta \mu \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\eta \mu \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{R \Theta}{r^2 \eta \mu^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) R \Theta \Phi = 0$$

Διαιρώντας αμφότερες τις πλευρές με $R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$ και πολλαπλασιάζοντας με r^2 :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta \eta \mu \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\eta \mu \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \eta \mu^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) = 0$$

Το ότι υπάρχει αλγεβρικό άθροισμα συναρτήσεων με διαφορετικές μεταβλητές που ισούται με το μηδέν σημαίνει ότι κάθε συνάρτηση ισούται με μια σταθερά (καλούμενη σταθερά διαχωρισμού, ώστε το άθροισμα των σταθερών να ισούται με μηδέν), δηλ. σημαίνει ότι

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) = A, \text{ με } A = \text{σταθ.},$$

(το ακτινικό μέρος της εξίσωσης, δηλ. το μέρος που ενέχει μόνο τη r)

και ότι

$$\frac{1}{\Theta \eta \mu \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\eta \mu \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \eta \mu^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -A.$$

(το γωνιακό μέρος της εξίσωσης, δηλ. το μέρος που ενέχει μόνο τις θ, φ).

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία εξίσωση με $\eta\mu^2\theta$ και φέρνοντας όλους τους όρους στην ίδια πλευρά,

$$\frac{\eta\mu\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\eta\mu\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + A\eta\mu^2\theta = 0$$

Ομοίως με πριν, το ότι υπάρχει αλγεβρικό άθροισμα συναρτήσεων με διαφορετικές μεταβλητές που ισούται με το μηδέν σημαίνει ότι κάθε συνάρτηση ισούται με μια σταθερά διαχωρισμού, δηλ. σημαίνει ότι

$$\frac{\eta\mu\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\eta\mu\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + A\eta\mu^2\theta = B, \text{ με } B = \text{σταθ.},$$

και ότι

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -B$$

Όμως, έτσι, έχουν προκύψει ομοιογενείς, συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} και 2^{ης} τάξης (ordinary differential equation, ODE) μεταβλητών συντελεστών των οποίων η λύση είναι γνωστή. Για αυτό, η (μη σχετικιστική) ειδική εξίσωση στο άτομο του υδρογόνου και, γενικά, στα μονοηλεκτρονιακά συστήματα έχει ακριβή λύση, ενώ σε άλλα συστήματα, όχι.

Πρώτα λύνεται η αζιμουθιακή συνάρτηση, επειδή η λύση της βοηθάει στο να λυθεί η πολική συνάρτηση που, με τη σειρά της, βοηθάει να λυθεί η ακτινική συνάρτηση. Η επίλυση της αζιμουθιακής συνάρτησης είναι η ευκολότερη από τις τρεις, η επίλυση της πολικής συνάρτησης είναι δυσκολότερη και η επίλυση της ακτινικής συνάρτησης είναι η πιο δύσκολη από όλες.

Οι ακριβείς λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι $\sin\varphi$ και $-\eta\mu\varphi$ και παρουσιάζοντας τη λύση ως υπέρθεση των μεμονωμένων λύσεων είναι

$$\Phi(\varphi) = c_1 \eta\mu\varphi + c_2 \sin\varphi,$$

που, λόγω του τύπου του Euler ($e^{xi} = \cos\chi + i \eta\mu\chi$), μπορούν να γραφτούν και ως

$$\Phi(\varphi) = c_3 e^{m\varphi i} + c_4 e^{-m\varphi i},$$

όπου $B = m^2$.

Επιλέγοντας, ως μαθηματικά βολικό, $c_4 = 0$ (αλλά με $c_3 \neq 0$ για να μην προκύπτει μόνιμα η τετριμμένη λύση $\Phi(\varphi) = 0$),

$$\Phi(\varphi) = c e^{m\varphi i}$$

Μια οριακή συνθήκη της $\Phi(\varphi)$ είναι ότι πρέπει $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi)$, άρα, από την τελευταία εξίσωση θέτοντας $\varphi=0$ και αξιοποιώντας την ταυτότητα του Euler ($e^{\pi i} + 1 = 0$) γίνεται αντιληπτό ότι

πρέπει $m \in \mathbb{N}^*$. Καλείται το m **μαγνητικός κβαντικός αριθμός**. Αφού συμμετέχει στην αξιμουθιακή συνάρτηση **έχει να κάνει με τον προσανατολισμό του σχήματος των τροχιακών. Η κβάντωση του m σημαίνει κβάντωση και του εν λόγω προσανατολισμού.**

Επομένως, η κυματοσυνάρτηση μπορεί να γραφεί:

$$\psi = c R(r) \Theta(\theta) e^{m\phi}.$$

Αφού $B = m^2$, τότε η εξίσωση που περιέχει ως μεταβλητή μόνο τη θ γίνεται

$$\frac{\eta\mu\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\eta\mu\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + A\eta\mu^2\theta - m^2 = 0,$$

που, διαιρώντας με $\eta\mu^2\theta$ και πολλαπλασιάζοντας με $\Theta(\theta)$, γράφεται

$$\frac{1}{\eta\mu\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\eta\mu\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(A - \frac{m^2}{\eta\mu^2\theta} \right) \Theta = 0.$$

Ορίζοντας $\Theta(\theta) = P(\text{συν}\theta)$ και $\text{συν}\theta = \omega$, το διαφορικό $d/d\theta$ γράφεται

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d}{d\omega} = -\eta\mu\theta \frac{d}{d\omega},$$

οπότε η εξίσωση που περιέχει ως μεταβλητή μόνο τη θ γίνεται

$$\frac{1}{\eta\mu\theta} (-\eta\mu\theta) \frac{d}{d\omega} \left(\eta\mu\theta \frac{dP}{d\omega} \frac{d\omega}{d\theta} \right) + \left(A - \frac{m^2}{\eta\mu^2\theta} \right) P = 0,$$

που ισούται με

$$\frac{1}{\eta\mu\theta} (-\eta\mu\theta) \frac{d}{d\omega} \left(\eta\mu\theta (-\eta\mu\theta) \frac{dP}{d\omega} \right) + \left(A - \frac{m^2}{\eta\mu^2\theta} \right) P = 0,$$

που ισούται με

$$\frac{d}{d\omega} \left(\eta\mu^2\theta \frac{dP}{d\omega} \right) + \left(A - \frac{m^2}{\eta\mu^2\theta} \right) P = 0$$

Επειδή $\eta\mu^2\theta + \text{συν}^2\theta = 1$, δηλ. $\eta\mu^2\theta = 1 - \text{συν}^2\theta$ και $\text{συν}^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta$, η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$\frac{d}{d\omega} \left((1 - \omega^2) \frac{dP}{d\omega} \right) + \left(A - \frac{m^2}{1 - \omega^2} \right) P = 0,$$

που ισούται με

$$(1-\omega^2) \frac{d^2P}{d\omega^2} - 2\omega \frac{dP}{d\omega} + \left(A - \frac{m^2}{1-\omega^2} \right) P = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μεν μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, όμως, δεν έχει σταθερούς συντελεστές οπότε δεν εφαρμόζονται οι τρόποι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων της τυπικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ανατρέχοντας στη μαθηματική βιβλιογραφία, η τελευταία εξίσωση είναι η **προσαρτημένη** ή γενική **εξίσωση του Legendre** (associated Legendre equation) που, με ανεξάρτητη μεταβλητή έστω x , γράφεται

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_\ell^m(x) - 2x \frac{d}{dx} P_\ell^m(x) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_\ell^m(x) = 0,$$

όπου έχει εννοηθεί ότι $A = \ell(\ell+1)$.

Η προσαρτημένη εξίσωση του Legendre έχει γνωστές λύσεις: τις **προσαρτημένες συναρτήσεις του Legendre**, που ήδη απεικονίζονται στην εξίσωση ως P_ℓ^m όπου ο άνω δείκτης δεν υποδηλώνει δύναμη αλλά την τάξη της συνάρτησης και ο κάτω δείκτης υποδηλώνει τον βαθμό της συνάρτησης.

Τα ℓ, m μπορούν να είναι μιγαδικοί.

Στην υποπερίπτωση που $m = 0$, η γενική εξίσωση του Legendre καλείται, απλώς, εξίσωση του Legendre που έχει ως λύσεις, απλώς, συναρτήσεις του Legendre.

Στην υποπερίπτωση που $m \neq 0$ και $\ell, m \in \mathbb{N}$, τότε οι προσαρτημένες ή γενικές συναρτήσεις του Legendre καλούνται **προσαρτημένα** ή γενικά **πολυώνυμα του Legendre** (associated Legendre polynomials) παρόλο που δεν είναι πραγματικά πολυώνυμα όταν το m είναι περιττός.

Στην υποπερίπτωση που $m = 0$ και $\ell \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση του Legendre καλείται συνάρτηση του Legendre του 2^{ου} είδους (Q_ℓ ή Q_n).

Αναπτύσσοντας το προσαρτημένο πολυώνυμο Legendre ως πολυώνυμο με συντελεστές, έστω a_ν (δηλ. εφαρμόζοντας την πολυωνυμική μέθοδο), οι αναδρομικοί συντελεστές βρίσκονται να είναι:

$$a_{\nu+2} = \frac{(\nu + |m|)(\nu + |m| + 1) - A}{(\nu + 1)(\nu + 2)} a_\nu,$$

όπου m όπως στη συνάρτηση $\Phi(\varphi)$ (η απόδειξη παρατίθεται στον Fayer, M., 2017, Κεφ. 17).

Σύμφωνα με την πολυωνυμική μέθοδο, ο μηδενισμός του πολυωνύμου σημαίνει μηδενισμό κάθε συντελεστή του, δηλ. το πρόβλημα μας επιδέχεται επίλυση μόνο εάν ο τελευταίος τύπος συγκλίνει ώστε να μπορεί να κολοβωθεί μόλις κριθεί αρκούντως ακριβής. Για να μπορεί να μηδενιστεί μετά κάποιον όρο, έστω ν' , πρέπει $(\nu' + |m|)(\nu' + |m| + 1) = A$, δηλ., θέτοντας $\nu' + |m| = \ell$, πρέπει **$A = \ell(\ell+1)$ με $\ell \in \mathbb{N}$** αφού $\nu' \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{N}$ καθώς πρέπει και **$m \geq |\ell|$** . Αλλιώς διατυπωμένο, η προσαρτημένη εξίσωση του Legendre έχει μη μηδενικές (μη τετριμμένες) και μη ιδιάζουσες λύσεις στο πεδίο ορισμού της (δηλ. στο $[-1, 1]$, αφού έχει ως όρισμα το συνθ) μόνο εάν $A = \ell(\ell+1)$ με $\ell \in \mathbb{N}$ και με το ℓ να περιορίζει το m

αφού πρέπει $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$. Καλείται το **l δευτερεύον ή αζιμουθιακός κβαντικός αριθμός**. Αφού συμμετέχει στην πολική συνάρτηση, **έχει να κάνει με το σχήμα του τροχιακού** (π.χ., με το εάν είναι σφαίρα ή απίων). **Η κβάντωση του l σημαίνει κβάντωση και του εν λόγω σχήματος**.

Η προσαρτημένη εξίσωση του Legendre ανακύπτει συχνά σε προβλήματα Φυσικής κατά την επίλυση της εξίσωσης του Laplace σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες, όπως είναι η προκειμένη περίπτωση, δηλ. κατά τον διαχωρισμό σε μεταβλητές στην περίπτωση του ατόμου του υδρογόνου, στην πολική συνάρτηση $\Theta(\theta)$.

Έχοντας βρει τη λύση της $\Theta(\theta)$, το γωνιακό μέρος της κυματοσυνάρτησης γίνεται

$$\Theta(\theta) \Phi(\varphi) = P_l^m(\cos\theta) e^{m\varphi}.$$

Το γωνιακό μέρος της κυματοσυνάρτησης συμβολίζεται με Y_l^m και καλείται σφαιρικές αρμονικές (οι σφαιρικές αρμονικές είναι το γινόμενο των συναρτήσεων Θ και Φ όχι οι σφαιρικές πολικές συντεταγμένες θ, φ):

$$Y_l^m = \Theta(\theta) \Phi(\varphi) = P_l^m(\cos\theta) e^{m\varphi}$$

Ο όρος **αρμονικές** αναφέρεται σε όλες τις εξισώσεις που συνιστούν λύση της εξίσωσης του Laplace. Μπορούν να γραφτούν ως άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων και αυτό το γνώρισμα τους συνιστά έναν εναλλακτικό ορισμό τους. Όταν οι αρμονικές εξισώσεις ενέχουν όχι καρτεσιανές αλλά σφαιρικές πολικές συντεταγμένες καλούνται **σφαιρικές αρμονικές**. Με τον καιρό, ο όρος σφαιρικές αρμονικές καθιερώθηκε για όλες τις εξισώσεις που συνιστούν λύση της εξίσωσης του Laplace (Axler, S., Paul, B., Wade, R., 2001, σ. 25).

Επιπροσθέτως, το γωνιακό μέρος της κυματοσυνάρτησης πρέπει να κανονικοποιηθεί, δηλ. να πολλαπλασιαστεί με τη σταθερά κανονικοποίησης

$$\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}$$

Επομένως η ακριβής λύση των (κανονικοποιημένων) σφαιρικών αρμονικών είναι

$$Y_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{m\varphi}$$

(Messiah, A., 1999· Watson, G.N., Whittaker, E.T., 1927, p. 392· Griffiths, D., 1995).

Μια εναλλακτική διατύπωση των σφαιρικών αρμονικών είναι

$$Y_l^m = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_{|m|l}(\cos\theta) e^{m\varphi},$$

όπου ο όρος $(-1)^m$ καλείται φάση Condon-Shortley και έχει αφαιρεθεί από το προσαρτημένο πολώνυμο του Legendre, δηλ. από το P_l^m . Για αυτό στην τελευταία εξίσωση δεν περιλαμβάνεται το P_l^m , αλλά το $P_{|m|l}$ (δηλ. με δύο κάτω δείκτες) που υποδηλώνει το υπόλοιπο προσαρτημένο πολώνυμο

του Legendre μετά την αφαίρεση της φάσης Condon-Shortley. (Messiah, A., 1999· Watson, G.N., Whittaker, E.T., 1927).

Οι σφαιρικές αρμονικές χωρίς φανταστικό μέρος είναι

$$Y_{\ell}^m = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!}} \cdot P_{\ell}^m(\cos\theta) \frac{\eta_{\mu}(|m|\varphi)}{\cos(m\varphi)} \quad ,$$

όπου $\frac{\eta_{\mu}(|m|\varphi)}{\cos(m\varphi)}$ σημαίνει είτε $\eta_{\mu}(|m|\varphi)$, είτε $\cos(m\varphi)$. Για $m < 0$, λέμε ότι οι σφαιρικές αρμονικές είναι τύπου ημιτόνου, ενώ για $0 < m$, λέμε ότι οι σφαιρικές αρμονικές είναι τύπου συνημιτόνου (Watson, G.N., Whittaker, E.T. 1927· Varshalovich, D.A., Moskalev, A.N. Khersonskii, V.K., 1988). Αλλιώς διατυπωμένο, οι σφαιρικές αρμονικές μπορούν να γραφτούν ως υπέρθεση αυτών των δύο λύσεων τύπου ημιτόνου και συνημιτόνου.

Αφού $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ και $Y_{\ell}^m = \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$, προκύπτει ότι

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{\ell}^m.$$

Αφού $A = \ell(\ell+1)$ με $\ell \in \mathbb{N}$, πηγαίνοντας όλους τους όρους από την ίδια πλευρά, το ακτινικό μέρος της κυματοσυνάρτησης γράφεται

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) - \ell(\ell+1) = 0,$$

και πολλαπλασιάζοντας με $R(r)$,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \left[\frac{2\mu r^2}{\hbar^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} E - \ell(\ell+1) \right] R(r) = 0.$$

Από αυτήν την εξίσωση δεν μπορεί να ληφθεί η ακτινική συνάρτηση $R(r)$ αμέσως, αλλά πρέπει να γίνουν τρεις αντικαταστάσεις.

Η πρώτη αντικατάσταση γίνεται υποθέτοντας ότι υπάρχει συνάρτηση, έστω $y(r)$, τέτοια ώστε $y(r) = rR(r) \Rightarrow R(r) = y(r) / r$. Έτσι, η τελευταία εξίσωση, διαιρώντας με r , γίνεται

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} + \left[\frac{2\mu e^2}{\hbar^2 4\pi\epsilon_0 r} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] y(r) = 0,$$

οπότε απομακρύνεται η πρώτη μερική παράγωγος.

Η δεύτερη αντικατάσταση γίνεται υποθέτοντας ότι υπάρχει σταθερά, έστω ϵ , τέτοια ώστε

$$\left(\frac{\epsilon}{2} \right)^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}$$

Το αρνητικό πρόσημο στο δεξιό μέλος είναι συνεπές με το ότι η ενέργεια μέσα στο άτομο του υδρογόνου αναμένεται αρνητική. Με αυτήν την αντικατάσταση, η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} + \left[\frac{2\mu e^2}{\hbar^2 4\pi \epsilon_0 r} - \frac{\epsilon^2}{4} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] y(r) = 0.$$

Η τρίτη αντικατάσταση γίνεται υποθέτοντας ότι υπάρχει μεταβλητή, έστω χ , τέτοια ώστε $\chi = r \epsilon \Rightarrow r = \chi / \epsilon \Rightarrow$

$$dr = \frac{dx}{\epsilon} \Rightarrow \frac{d^2 y(r)}{dr^2} = \frac{d}{dr} \frac{dy(r)}{dr} = \epsilon \frac{d}{dx} \epsilon \frac{dy(x)}{dx} = \epsilon^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2},$$

οπότε το ακτινικό μέρος της εξίσωσης του Schrödinger μπορεί να γραφεί

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{2\mu e^2}{\hbar^2 4\pi \epsilon_0 \epsilon x} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] y(x) = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής

$$y_j^{k''}(x) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{2j+k+1}{2x} - \frac{k^2-1}{4x^2} \right) y_j^k(x) = 0, .$$

έχοντας εννοηθεί ότι $2\mu e^2 / (4\pi \epsilon_0 \hbar^2 \epsilon) = (2j+k+1)/2$ και με $l(l+1) = (k^2-1)/4$, από όπου εξάγεται ότι $k = 2l+1$, οπότε $k \in \mathbb{N}$.

Η τελευταία εξίσωση είναι μεν μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, όμως, δεν έχει σταθερούς συντελεστές οπότε δεν εφαρμόζονται οι τρόποι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων της τυπικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ανατρέχοντας στη μαθηματική βιβλιογραφία, η τελευταία εξίσωση είναι η **προσαρτημένη** ή **γενική εξίσωση του Laguerre** (Ratner, M.A., Schatz, G.C., 2001, σ. 90–91· Arfken, G., 1985, σ. 721–731, 726) (associated Laguerre equation) γενικής μορφής, για ανεξάρτητη μεταβλητή έστω χ ,

$$x \frac{d^2}{dx^2} L_n^k(x) + (k+1-x) \frac{dL_n^k(x)}{dx} + n L_n^k(x) = 0$$

παρόλο που συγκρίνοντας τον γενικό τύπο της ακτινική εξίσωσης η οποία προέκυψε και τον γενικό τύπο της εξίσωσης του Laguerre η ταύτιση δεν προκύπτει άμεσα όπως στην περίπτωση της πολικής συνάρτησης και του πολυώνυμου του Legendre.

Όμως, η προσαρτημένη εξίσωση του Laguerre έχει γνωστές λύσεις: τις **προσαρτημένες** ή **γενικές συναρτήσεις του Laguerre**, που ήδη απεικονίζονται στην εξίσωση ως L_n^k , όπου ο άνω δείκτης δεν υποδηλώνει δύναμη αλλά την τάξη της συνάρτησης και ο κάτω δείκτης υποδηλώνει τον βαθμό της συνάρτησης.

Στην υποπερίπτωση που $k = 0$, η προσαρτημένη εξίσωση του Laguerre καλείται, απλώς, εξίσωση του Laguerre που έχει ως λύσεις, απλώς, συναρτήσεις του Laguerre.

Στην υποπερίπτωση που $k \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε οι προσαρτημένες ή γενικές συναρτήσεις του Laguerre καλούνται **προσαρτημένα** ή γενικά **πολυώνυμα του Laguerre** (associated Laguerre polynomials, ή πολυώνυμα Sonine στην παλαιότερη βιβλιογραφία (Sonine N., 1880)). Το πολυώνυμο Laguerre ορίζεται διαφορετικά από διαφορετικούς συγγραφείς. (Griffiths, D., 2008).

Αναπτύσσοντας το προσαρτημένο πολυώνυμο Laguerre ως πολυώνυμο με συντελεστές, έστω a_n (δηλ. εφαρμόζοντας την πολυωνυμική μέθοδο), οι αναδρομικοί συντελεστές βρίσκονται να είναι:

$$a_{v+1} = \frac{-(n - \ell - 1 - v)a_v}{[2(v+1)(\ell+1) + v(v+1)]},$$

όπου ℓ όπως στη συνάρτηση $\Theta(\theta)$ (η απόδειξη παρατίθεται στον Fayer, M., 2017, Κεφ. 17.).

Σύμφωνα με την πολυωνυμική μέθοδο, ο μηδενισμός του πολυωνύμου σημαίνει μηδενισμό κάθε συντελεστή του, δηλ. το πρόβλημα μας επιδέχεται επίλυση μόνο εάν ο τελευταίος τύπος συγκλίνει ώστε να μπορεί να κολοβωθεί μόλις κριθεί αρκούτως ακριβής. Για να μπορεί να μηδενιστεί κατόπιν κάποιου όρου, έστω v' , πρέπει $n - \ell - 1 - v' = 0$, δηλ., πρέπει **$n = v' + \ell + 1$ με $n \in \mathbb{N}^*$** αφού $v', \ell \in \mathbb{N}$. Αλλιώς διατυπωμένο, η προσαρτημένη εξίσωση του Laguerre έχει μη μηδενικές (μη τετριμμένες) λύσεις στο πεδίο ορισμού της μόνο εάν η $n = 1, 2, 3, \dots$. Καλείται το **n , πρωτεύων ή κύριος κβαντικός αριθμός**. Αφού συμμετέχει στην ακτινική συνάρτηση, **έχει να κάνει με την απόσταση του ηλεκτρονίου από τον πυρήνα**. Αλλιώς τοποθετημένο, **είναι ενδεικτικός της έλξης πυρήνα-ηλεκτρονίου. Η κβάντωση του n σημαίνει κβάντωση και του μεγέθους του χώρου που μπορεί να βρεθεί το ηλεκτρόνιο**.

Όσον αφορά την εξίσωση του ακτινικού μέρους στην οποία σκόπιμα καταλήξαμε, οι λύσεις είναι

$$y_j^k(x) = e^{-x/2} x^{(k+1)/2} L_j^k(x).$$

Άρα, κατ' αντιστοιχία, η ακτινική συνάρτηση δίνεται από την εξίσωση

$$R_{n,l}(r) = e^{-r/na_0} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^{\ell+1} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

Η προσαρτημένη εξίσωση του Laguerre ανακύπτει συχνά σε προβλήματα Φυσικής με δύσκολες διαφορικές εξισώσεις, όπως είναι η προκειμένη περίπτωση, δηλ. κατά τον διαχωρισμό σε μεταβλητές στην περίπτωση του ατόμου του υδρογόνου, στην ακτινική συνάρτηση $R(r)$.

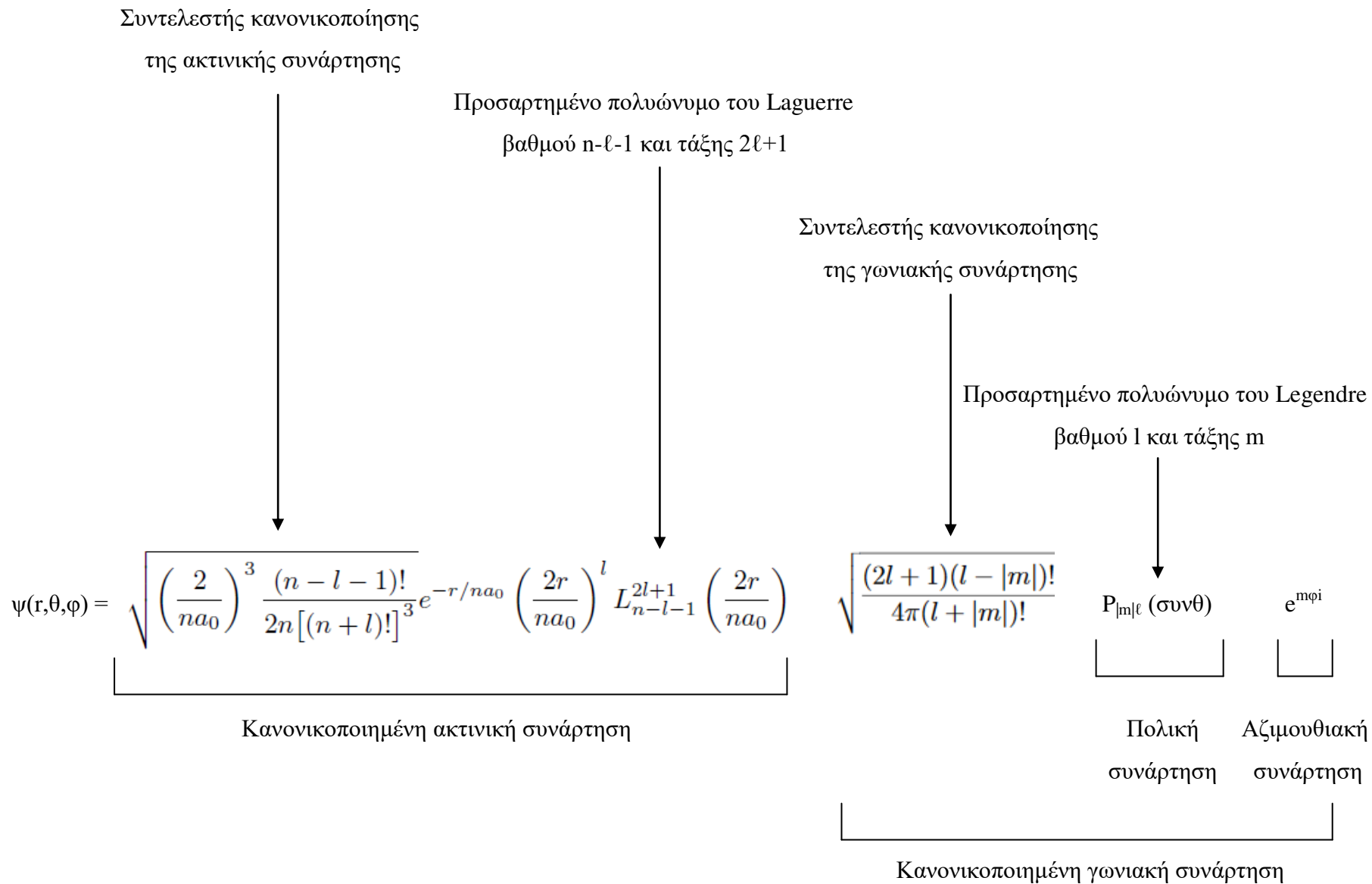
Επιπροσθέτως, η ακτινική συνάρτηση πρέπει να κανονικοποιηθεί, δηλ. πολλαπλασιάζεται με τη σταθερά κανονικοποίησης

$$\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right) \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}.$$

Εντάσσοντας τον όρο $2/na_0$ πριν από το πολυώνυμο του Legendre στο υπόριζο της σταθεράς κανονικοποίησης, η ακριβής λύση της (κανονικοποιημένης) $R(r)$ είναι

$$R_{n,l}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na_0} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right).$$

Επομένως, η κυματοσυνάρτηση μπορεί να γραφεί όπως στην **εικόνα 2**.



Εικόνα 2. Ανάλυση της τελικής ειδικής εξίσωσης του Schrödinger για το άτομο του υδρογόνου· $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e q^2$, η ακτίνα του Bohr·

$n \in \mathbb{N}^*$, ο πρωτεύων κβαντικός αριθμός· $l \in \mathbb{N}$ με $l = 0, 1, \dots, n-1$, ο αζιμουθιακός κβαντικός αριθμός· $m \in \mathbb{N}$ με $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$, ο μαγνητικός κβαντικός

Εάν επιθυμείται η γνώση του τι γίνεται η ψ όσο μεταβάλλεται μόνο η απόσταση από τον πυρήνα, αρκεί να μελετηθεί μόνο η $R(r)$ αφού αυτή αποτελεί το ακτινικό μέρος της ψ .

Εάν επιθυμείται η γνώση του τι γίνεται η ψ όσο μεταβάλλεται μόνο ο προσανατολισμός, αρκεί να μελετηθούν οι σφαιρικές αρμονικές $Y_l^m(\theta, \varphi)$ αφού αυτές αποτελούν το γωνιακό κομμάτι της ψ .

Η $R(r)$ και οι $Y_l^m(\theta, \varphi)$ μπορούν να υπολογιστούν από τους τελικούς τύπους τους ή να ληφθούν έτοιμες από πίνακες του παραρτήματος.

Δεδομένου ότι $\mu = 0,9995me \Rightarrow 4\pi\epsilon_0\hbar^2/\mu e^2 = 0,529 \text{ \AA}$ (\sim μισό Angstrom), η καλούμενη ακτίνα του Bohr: a_0 .

Θέτοντας αυτήν την τιμή στον τύπο που συνδέει την ενέργεια με τη σταθερά ϵ , η ενέργεια του ατόμου του υδρογόνου είναι

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2(j+l+1)^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{(j+l+1)^2}$$

Αφού $k = 2\ell + 1$ και $k, l \in \mathbb{N} \Rightarrow j+l+1 \in \mathbb{N}$. Όμως, έχει ήδη οριστεί το άθροισμα ακεραίου στον όρο $\ell+1$ ως n . Έτσι, η ενέργεια γράφεται

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2 n^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2},$$

δηλ. η ενέργεια του ατόμου του υδρογόνου (απουσία εξωτερικού δυναμικού) εξαρτάται μόνο από το n και όχι από τους άλλους δύο κβαντικούς αριθμούς. Το γεγονός ότι η ενέργεια είναι η ίδια για καταστάσεις που περιγράφονται από διαφορετικά l, m είναι μια περίπτωση εκφυλισμού της ενέργειας. Ο εκφυλισμός αίρεται παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και ανάλογα με την κατεύθυνση του πεδίου. Αυτή η άρση καλείται φαινόμενο Zeeman.

Από τον τύπο της ενέργειας φαίνεται ότι η κβάντωση του n επιφέρει κβάντωση και στις τιμές ενέργειας που μπορεί να έχει το ηλεκτρόνιο του υδρογόνου, κάτι που ίσως περιμέναμε από το ότι η κβάντωση του n επιφέρει κβάντωση και στην απόσταση από τον πυρήνα την οποία μπορεί να έχει το ηλεκτρόνιο. Επίσης, από τον τύπο γίνεται αντιληπτό ότι η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης, δηλ. η μικρότερη ενέργεια, που καλείται και σταθερά Rydberg, είναι αυτή της πρώτης παλαιάς στιβάδας κατά Bohr, και ίση με

$$E_1 = -13,6 \text{ eV} = 109,678 \text{ cm}^{-1} = 2,179 \times 10^{-18} \text{ J.}$$

(Mohr, P.J., Taylor, B.N., Newell, D.B., 2012). Μάλιστα, πολλές φορές η ενέργεια της νιοστής κατάστασης εκφράζεται ως συνάρτηση της ενέργειας της θεμελιώδους κατάστασης:

$$E_n = E_1 / n^2.$$

Επομένως, η εξίσωση του Schrödinger έχει ακριβή λύση στο άτομο του υδρογόνου και, γενικά, στα υδρογονοειδή άτομα όπως και σε ορισμένα άλλα συστήματα, αλλά όχι στα πολυηλεκτρονιακά άτομα

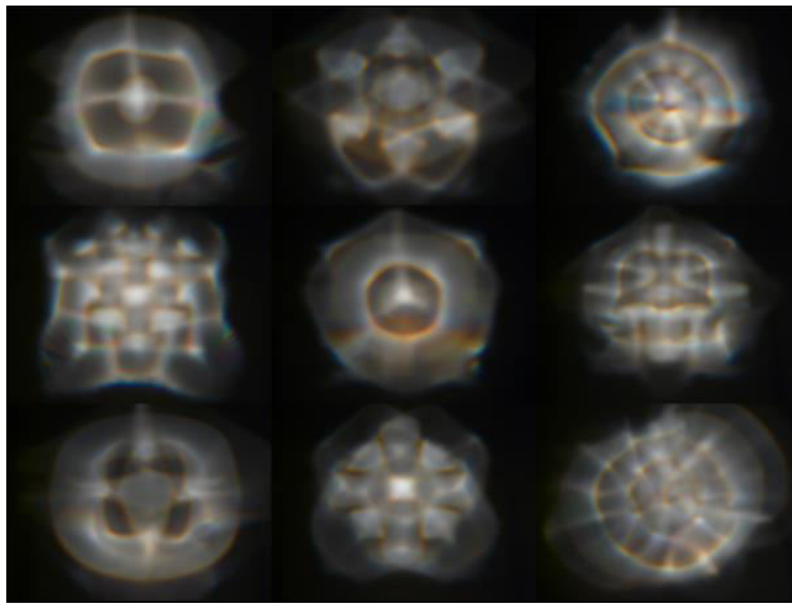
λόγω της αλληλεπίδρασης των ηλεκτρονίων ¹⁶ η οποία καθιστά αδύνατο τον υπολογισμό των όρων των δυναμικών ενεργειών. Η αδυναμία εύρεσης ακριβούς λύσης σε ένα σύστημα πολλών αλληλεπιδρώντων υπομικροσκοπικών σωματιδίων ανακύπτει πολλές φορές στη Φυσική (many-body problem). Έτσι, στα πολυηλεκτρονιακά άτομα ακολουθούνται αναγκαστικά προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης μέσω, μεταξύ άλλων, της θεωρίας διαταραχών (perturbation theory) και της μεθόδου μεταβολών (π.χ., μέθοδος των Hartree-Fock (HF) και μέθοδος του Ritz (variational method)).

¹⁶ Η αλληλεπίδραση αφορά συζεύξεις μεταξύ τροχιακών στροφορμών (L), μεταξύ στροφορμών spin (S) και μεταξύ τροχιακών στροφορμών και στροφορμών spin, δηλ. αφορά συζεύξεις L-L, S-S και L-S, αντίστοιχα (Atkins, P.W., 1974).

IV. Τριδιάστατα σχήματα Chladni

Η δημιουργία σχημάτων Chladni σε δονούμενες πλάκες δεν είναι ο μόνος τρόπος μορφοποίησης και οπτικοποίησης στάσιμων κυμάτων. Οι σχετικές προσπάθειες έχουν εγείρει το επιστημονικό πεδίο που περιγράφεται με τον αγγλικό όρο cymatics (ελλ. απόδ.: κυματική). Ένας στόχος είναι η τριδιάστατη, φυσική (μη υπολογιστική) απεικόνιση των σχημάτων Chladni.

Η καλύτερη προσέγγιση που ανασκοπήθηκε στην παρούσα εργασία είναι ο συντονισμός φυσαλίδων σαπουνόνευρου: (τμήμα φυσικής του MIT, technical services group. (2012). https://www.youtube.com/watch?v=0pnxk3fl_Fo). (εικόνα 3)



Εικόνα 3. Φυσική απεικόνιση των σχημάτων Chladni μέσω συντονισμού φυσαλίδων σαπουνόνευρου σε διάφορες ιδιοσυχνότητες ξεκινώντας από τα 40 Hz. Θεωρητικά, η μέθοδος επιτρέπει την επιθυμητή συσχέτιση με το σχήματα των ατομικών τροχιακών. Αυτή η υλοποίηση επιτρέπει μια αίσθηση βάθους της απεικόνισης.

Ωστόσο, αν και οι φυσαλίδες παρέχουν όντως τριδιάστατο μέσο δόνησης, τα σχήματα που προκύπτουν δεν ωθούνται σε ικανή τριδιάστατη επέκταση.

Μια συναφή προσπάθεια διακρίνεται στα επιφανειακά και εσωτερικά κύματα που προκύπτουν κατά τη διοχεύτηση αέρα σε ορισμένη μάζα ύδατος στον Διεθνή Διαστημικό Σταθμό υπό συνθήκες ελεύθερης πτώσης (<https://www.youtube.com/watch?v=fWS0zWQ8DP4>).

Μια άλλη προσέγγιση για τη φυσική παραγωγή τριδιάστατων σχημάτων Chadni έγκειται στον συντονισμό

α) μη Νευτώνειου υγρού, π.χ. εναιωρήματος αμύλου καλαμποκιού σε νερό (1 μέρος νερού:1,5–2 μέρη αμύλου καλαμποκιού, γνωστού και ως «Oobleck») (Rupp, R., 1998, σ. 235–236). Δεν προκύπτει

ικανή αναπαραγωγή σχημάτων Chladni αλλά προκύπτουν μη γραμμικά στάσιμα κύματα ή, αλλιώς καλούμενα, ρυτίδες Faraday απρόσμενης συμπεριφοράς,

β) Νευτώνειου υγρού. Προκύπτουν γραμμικά κύματα Faraday τα οποία μπορούν να ελεγχθούν και να προσδώσουν σχήματα Chladni (Chen P., et al. 2014).

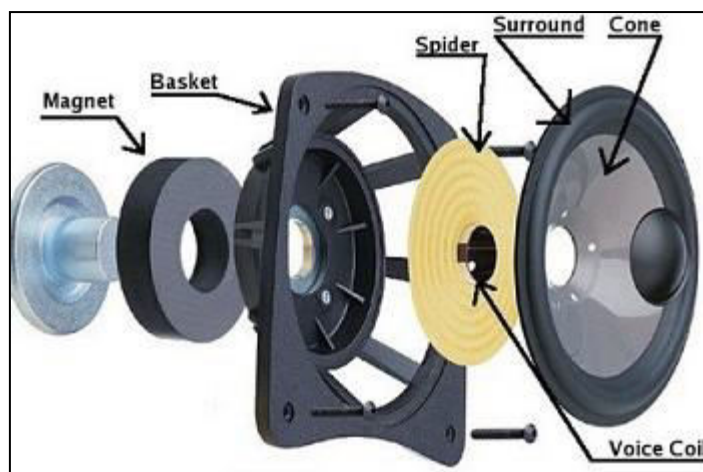
Τριδιάστατα σχήματα Chladni θα μπορούσαν, θεωρητικά, να προκύψουν μέσω ενός άλλου εντυπωσιακού πειράματος κυματικής που ενέχει την αιώρηση σωματιδίων ελαφρούς πολυμερούς (π.χ. φελιζόλ) αξιοποιώντας συμμετρικά τοποθετημένες γεννήτριες υπερήχων. Μια γεννήτρια τέτοιων σχημάτων θα μπορούσε ίσως να είναι αυτή των Ochiai Y., Hoshi T., Rekimoto, J., 2014.

V. Εμπορικές γεννήτριες δονήσεων



Εικόνα 4.

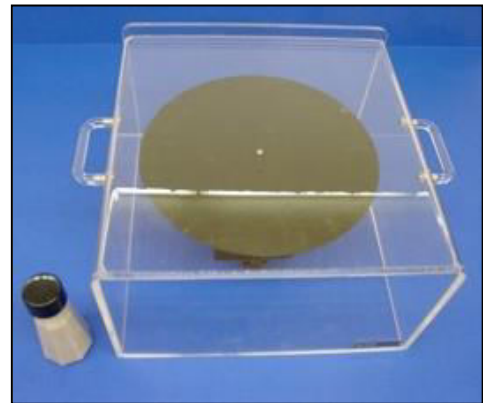
VI. Αρχή λειτουργίας ηχείου



Εικόνα 5. Τα μέρη ενός εμπορικού ηχείου. Από αριστερά προς τα δεξιά: μεταλλικός άξονας, μόνιμος μαγνήτης, γείσο, ανάρτηση τύπου αράχνης, πηνίο (δεν απεικονίζεται η περιτύλιξη με χάλκινο σύρμα), εξωτερική ανάρτηση, κώνος, κομμάτι προστασίας από σκόνη.

Το χάλκινο σύρμα του πηνίου διαρρέεται από εναλλασσόμενο ηλεκτρικό ρεύμα, δημιουργείται μαγνητικό πεδίο εναλλασσόμενης πολικότητας με αποτέλεσμα την έλξη ή την άπωση από τον μόνιμο μαγνήτη και την κάθετη κίνηση του κώνου. Ο κώνος είναι ένα διάφραγμα προσαρτημένο κάθετα στην ανάρτηση τύπου αράχνης. Στην ακουστική, διάφραγμα είναι ο μεταλλάκτης μηχανικών ταλαντώσεων σε ήχο και αντίστροφα. Η ανάρτηση τύπου αράχνης και η εξωτερική ανάρτηση μόνο προσφέρουν έρεισμα στο πηνίο ώστε να μην τρίβεται με τον μαγνήτη. Το κομμάτι προστασίας από τη σκόνη αποτρέπει την είσοδο αδρών σωματιδίων· ωστόσο ενίοτε είναι περατό στον αέρα επιτρέποντας την ψύξη. Για μια επεξήγηση κινουμένων σχεδίων σχετικά με τον τρόπο λειτουργίας των ηχείων ανατρέξτε στο <https://animagraffs.com/loudspeaker/>.

VII. Διάφορες προσεγγίσεις DIY που ανασκοπήθηκαν στις οποίες αξιοποιείται ως γεννήτρια δονήσεων εμπορικό ηχείο



Εικόνα 6.
