



ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
Τμήμα Φυσικής  
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας & Μηχανικής

---

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

---

*ΑΥΤΟΟΜΟΙΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΔΙΣΚΩΝ ΠΡΟΣΑΥΞΗΣΗΣ  
ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΝΕΟΓΕΝΝΗΤΑ ΑΣΤΡΑ*

της  
Παρασκευής Κατσιαβριά  
Α.Μ. 201600063

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ  
Ν.ΒΛΑΧΑΚΗΣ  
Καθηγητής

---

Ακαδημαϊκό έτος: 2020 - 2021



NATIONAL & KAPODISTRIAN UNIVERSITY of ATHENS  
SCHOOL OF NATURAL SCIENCES  
Department of Physics  
Section of Astrophysics, Astronomy & Mechanics

---

DISSERTATION

---

*SELF-SIMILAR MODELS OF ACCRETION DISCS  
AROUND YOUNG STELLAR OBJECTS*

of  
Paraskevi Katsiavria  
R.N. 201600063

SUPERVISING PROFESSOR  
N.VLAHAKIS  
Professor

---

Academic year: 2020 - 2021

# Ευχαριστίες

Η παράδοση της παρούσας πτυχιακής εργασίας, σημαίνει την ολοκλήρωση των προπτυχιακών μου σπουδών στο τμήμα φυσικής. Με την ευκαιρία αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που συνέβαλλαν στο να επιλέξω την φυσική ως αντικείμενο σπουδών, τον πατέρα και την μεγάλη αδελφή μου Άννα, τους καθηγητές μου στην φυσική κ. Ζιαμπά και κ. Παπαθεοδώρου, τον κ. Γερμάνη και όλους τους ανθρώπους στην Εταιρία Αστρονομίας και Διαστήματος Βόλου που έθεσαν τις βάσεις για την αγάπη μου προς την αστροφυσική.

Ευχαριστώ ιδιαίτερω τον κ. Βλαχάκη, ο οποίος με τον τρόπο του τόσο απέναντι στην φυσική όσο και στους φοιτητές με ενέπνεε πάντα να κοιτώ την φυσική ως ένα αρμονικά φτιαγμένο σύνολο κι όχι μια κουρελού μαθημάτων. Τον ευχαριστώ επίσης που δέχθηκε να αναλάβει την επίβλεψη και καθοδήγησή μου για την εκπόνηση της πτυχιακής μου εργασίας, για τις τόσες φορές που έλυσε τις ατελείωτες απορίες μου και την συνεργασία μας που δεν ήταν απρόσωπη παρά το γεγονός ότι το μεγαλύτερο μέρος της έγινε μέσω υπολογιστή λόγω της πανδημίας.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω και στην οικογένειά μου, τους γονείς, και τις αδελφές μου για την υποστήριξη και την υπομονή τους κατά την εκπόνηση της εργασίας μου και καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Ευχαριστώ την Άννα, που αν και ήταν μακριά με άκουγε για ώρες στο τηλέφωνο και ξεδιάλυσε τους πάσης φύσεως προβληματισμούς μου και για τις πολλές φορές που απάντησε «Ναι!» στο μήνυμα: «Άννα, μπορείς να με βοηθήσεις με κάτι;». Την Ξανθίπη που άλλαξε αναρίθμητες φορές το πρόγραμμα μελέτης της ώστε να μην με ενοχλούν το βιολί και το πιάνο και την Ελένη για τα ευχάριστα διαλείμματα ανέμεσα στις ατελείωτες ώρες εργασίας. Την Βασιλική την ευχαριστώ για όλα τα πρωινά που χαμήλωσε ή έκλεισε την τηλεόραση και για τα επιτραπέζια που παίζαμε μαζί όταν στο τέλος της ημέρας σταματούσα το διάβασμα. Στην Ελευθερία χρωστάω ξεχωριστές ευχαριστίες για τις βόλτες που κάναμε όσο καιρό έκανα την εργασία μου, γιατί αν δεν ήταν αυτές θα είχα χαζέψει από τις πολλές ώρες που ήμουν κλεισμένη στο σπίτι. Δεν μπορώ να ευχαριστήσω αρκετά την φίλη μου Δέσποινα για την πολύτιμη βοήθειά της (αν δεν ήσουν εσύ, ακόμα θα παιδεύομουν με την Python). Ευχαριστώ και την φίλη μου Ανθή, για την αγάπη της και που πάντα ανεχόταν τα μεγάλα διαστήματα σιγής από μέρους μου λόγω του μεγάλου φόρτου εργασίας.

Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους της ενορίας του Αγίου Γερασίμου Ιλισίων και ιδιαίτερα την Χριστίνα μου και την οικογένεια Zirojević, που δεν με άφησαν να αισθανθώ ποτέ μόνη τα χρόνια των σπουδών μου που ήμουν μακριά από το σπίτι μου.

– Έλενα, τα τελευταία πέντε χρόνια της ζωής μας τα περάσαμε μαζί στις ίδιες αίθουσες και αντιμετωπίσαμε μαζί όλες τις δυσκολίες που συναντά ένας φοιτητής στο φυσικό Αθήνας. Ευχαριστώ πολύ που με στήριξες και ήσουν πάντα εκεί. Χωρίς εσένα, δεν ξέρω αν θα έπαιρνα ποτέ πτυχίο...

– Μαμά και μπαμπά, θα χρειαστώ μια ολόκληρη σελίδα να απαριθμήσω όλους τους λόγους για τους οποίους σας είμαι ευγνώμων. Ευχαριστώ που με ενθαρρύνετε να συνεχίσω και να ξεπεράσω τις δυσκολίες που αντιμετώπισα σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Αυτή η εργασία είναι αφιερωμένη σε εσάς.

Δόξα τῷ Θεῷ πάντων ἕνεκεν.

Παρασκευή  
2021

*Isn't it splendid to think of all the things there are to find out?  
It makes me feel glad to be alive – it's such an interesting world.*

*Anne of Green Gables, Lucy M. Montgomery*

# Περιεχόμενα

<b>Περίληψη</b>	<b>2</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>4</b>
1.1 Ιστορική Αναδρομή . . . . .	4
1.2 Μαγνητισμένοι πίδακες . . . . .	5
1.3 Δημιουργία των πιδάκων . . . . .	7
1.4 Προέλευση του μαγνητικού πεδίου . . . . .	7
1.5 Το πρότυπο των MAES . . . . .	8
<b>2 Το Θεωρητικό Πλαίσιο των MAES</b>	<b>9</b>
2.1 Μαγνητοϋδροδυναμική . . . . .	9
2.1.1 Κινητική Θεωρία πλάσματος . . . . .	9
2.1.2 Περιγραφή ενός ρευστού . . . . .	10
2.2 Μοντελοποίηση των MAES . . . . .	13
2.2.1 Διάχυση Μαγνητικού Πεδίου . . . . .	13
2.2.2 Στάσιμη Κατάσταση . . . . .	14
2.2.3 Αξονική Συμμετρία . . . . .	14
2.2.4 Συντελεστές Μεταφοράς . . . . .	15
2.2.5 Μη-σχετικιστική Μαγνητοϋδροδυναμική . . . . .	16
2.3 Κρίσιμα σημεία μιας στάσιμης ροής . . . . .	16
2.3.1 Ο άνεμος του Parker . . . . .	16
2.3.2 Κρίσιμα σημεία σε MAES . . . . .	17
<b>3 Μαγνητισμένοι Δίσκοι Προσαύξησης</b>	<b>18</b>
3.1 Περιγραφή των Δίσκων Προσαύξησης . . . . .	18
3.1.1 Τυρβώδεις, λεπτοί, Κεπλεριανοί δίσκοι . . . . .	18
3.1.2 Τυρβώδεις, λεπτοί, μαγνητισμένοι δίσκοι . . . . .	20
3.2 Πρόβλημα Απώλειας Στροφορμής . . . . .	21
3.3 Προσαύξηση Ύλης στον Δίσκο . . . . .	23
3.4 Εκροή Ύλης από τον Δίσκο . . . . .	25
3.4.1 Μεταφορά της ύλης στους πίδακες . . . . .	25
3.4.2 Στάσιμη εκροή ύλης . . . . .	25
3.4.3 Κατακόρυφη κίνηση ύλης στον δίσκο & πίδακες . . . . .	27
3.5 Σύνδεση παραμέτρων δίσκου-πιδάκων . . . . .	28
3.5.1 Αδιάστατες παράμετροι . . . . .	28
<b>4 Αυτοόμοιες Λύσεις</b>	<b>29</b>
4.1 Εισαγωγή . . . . .	29
4.2 Σύστημα διαφορικών εξισώσεων . . . . .	31
4.2.1 Εξίσωση Ορμής . . . . .	32

4.2.2	Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο . . . . .	37
4.2.3	Εξίσωση Επαγωγής . . . . .	38
4.2.4	Καταστατική Εξίσωση . . . . .	40
4.2.5	Εξίσωση Ενέργειας . . . . .	40
4.3	Αναπαράσταση εξισώσεων σε μορφή πινάκων . . . . .	46
4.4	Κρίσιμα Σημεία . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Αριθμητική Ολοκλήρωση</b>	<b>49</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	49
5.2	Αρχικές Συνθήκες . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Κώδικας &amp; Ολοκλήρωση</b>	<b>53</b>
6.1	Κώδικας ολοκλήρωσης με τον ολοκληρωτή solve _ inr . . . . .	53
6.2	Κώδικας ολοκλήρωσης με τον ολοκληρωτή LSODA . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Αποτελέσματα Ολοκλήρωσης (:)</b>	<b>58</b>
	<b>Βιβλιογραφικές Αναφορές</b>	<b>59</b>

# Περίληψη

Οι αστροφυσικοί δίσκοι προσαύξησης συναντώνται γύρω από πολλές από τις παρατηρούμενες δομές στο σύμπαν, επηρεάζοντας άμεσα την εξέλιξή τους. Παρά το γεγονός ότι η ανακάλυψη και η μελέτη τους ξεκινούν ήδη από τον 18<sup>ο</sup> αιώνα, συνεχίζουν μέχρι σήμερα να συνοδεύονται από πολλά αναπάντητα ερωτήματα. Στην παρούσα πτυχιακή εργασία, γίνεται μια προσπάθεια μελέτης της δυναμικής στο εσωτερικό ενός μαγνητισμένου δίσκου προσαύξησης στα πλαίσια της μη-ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής. Κατ' αρχάς, παρατίθενται ορισμένα στοιχεία σχετικά με την παρατήρηση των δίσκων και των πιδάκων, από τους οποίους συνήθως συνοδεύονται, προκειμένου να εξηγηθεί η επιλογή του προτύπου των MAES για την μελέτη των δίσκων. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται αναλυτικά το θεωρητικό πλαίσιο των MAES, βάσει του οποίου ο δίσκος διαπερνάται από ένα μεγάλης κλίμακας μαγνητικό πεδίο κι έπειτα εξετάζονται τα είδη των δίσκων, καθώς και οι διαδικασίες προσαύξησης και εκροής ύλης. Η επεξεργασία και αδιαστατοποίηση των εξισώσεων της μη-ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής (παρουσία διάχυσης του μαγνητικού πεδίου και ιξώδους) γίνεται χρησιμοποιώντας την συμμετρία της αυτοομοιότητας, μέσω της οποίας το σύστημα ΜΔΕ μετατρέπεται σε ένα απλούστερο σύστημα ΣΔΕ. Επιπλέον, εξετάζεται η επιλογή της εξίσωσης ενέργειας και συζητάται η διαφοροποίηση της εργασίας αυτής σε σχέση με προηγούμενες σχετικές εργασίες <sup>[1]</sup> λόγω της θεώρησης ότι η κίνηση του πλάσματος γίνεται αδιαβατικά κατά μήκος των γραμμών ροής και όχι των γραμμών μαγνητικής ροής. Ερμηνεύεται ακόμα η σημασία των κρίσιμων σημείων της ροής και επιλέγονται κατάλληλες αρχικές συνθήκες και τιμές για τις ελεύθερες παραμέτρους του προβλήματος. Τέλος, γίνεται μια αναφορά στους κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν στην προσπάθεια ολοκλήρωσης του συστήματος των ΣΔΕ.

# Abstract

In astrophysics, accretion discs play an important role in the evolution of many other structures. However, there is a plethora of unanswered questions regarding the physical processes that explain all acquired observations of discs and their related jets. In the present study, an attempt is made to investigate the dynamics inside a magnetized accretion disc in a non-ideal magneto-hydrodynamic framework. At first, an observational and theoretical argument is introduced, in favor of the «disc wind» paradigm, where accretion and ejection are interdependent, thus the MAES paradigm is considered appropriate to describe the disc and jets. The theoretical framework of MAES is thoroughly presented, explaining why an accretion disc should be threaded by a large scale magnetic field. Additionally, the types of accretion discs are explored, along with the accretion and ejection processes in turbulent, quasi-Keplerian discs. Then, within the non-ideal MHD framework (diffusion of the magnetic field and viscosity are present), a complete system of PDEs is presented and simplified into a system of ODEs using a self-similar ansatz. The approach of the energy equation is being discussed as well as the differentiation of this work from other related works <sup>[1]</sup>, by considering adiabatic transport of plasma along the stream lines and not the magnetic field lines, as it is often assumed. The importance of critical points in the flow is explained and an extensive discussion is made regarding the initial values and the set of free disc parameters. Finally, the programs used in an attempt to integrate the acquired system of ODEs are adduced and explained.



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Ιστορική Αναδρομή

Η μελέτη περιαστρικών δίσκων γύρω από νεαρά άστρα έχει μακρά ιστορία. Οι Kant, Laplace κ.α. συνειδητοποίησαν τον 18<sup>ο</sup> αιώνα, ότι το Ηλιακό σύστημα πιθανώς να σχηματίστηκε μέσα σε κάτι στο οποίο αναφέρονταν ως «περιστρεφόμενος δίσκος». Γύρω στα 1980 με την ανάπτυξη της αστρονομίας υπερύθρου και μικροκυμάτων ( $mm$ ), μας δόθηκε η δυνατότητα να παρατηρήσουμε άμεση εκπομπή από το αέριο και την σκόνη σε δίσκους γύρω από νεαρά άστρα (pre-main-sequence solar-mass stars). Σήμερα, οι δίσκοι αυτοί παρατηρούνται σε μεγάλο εύρος του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, από ακτίνες  $X$  έως μικροκυματική ακτινοβολία ( $mm$ ).

Η εστιασμένη εκροή ύλης υπό μορφή πίδακων είναι ένα ευρέως παρατηρούμενο φαινόμενο και συνδέεται με διάφορα αστροφυσικά αντικείμενα. Ειδικότερα, εντός τους Γαλαξία, συνδέεται με νεαρά ή υπό δημιουργία άστρα (Young Stellar Objects) και με διπλά συστήματα με συμπαγή συνοδό (microquasars, X-Ray binaries, κατακλυσμιαίους μεταβλητούς). Εκτός του Γαλαξία, πίδακες παρατηρούνται σε ενεργούς γαλαξιακούς πυρήνες (Active Galactic Nuclei), ενώ συνδέονται επίσης και με εκλάμψεις ακτίνων  $\gamma$  (Gamma Ray Bursts). Όλα τα παραπάνω αντικείμενα εμφανίζουν τις εξής ιδιότητες: *i*) οι πίδακες έχουν σχεδόν κυλινδρικό σχήμα, *ii*) η παρουσία των πίδακων συνδέεται με την ύπαρξη ενός δίσκου προσαύξησης που περιβάλλει το κεντρικό αντικείμενο και *iii*) η ισχύς που μεταφέρουν οι πίδακες αποτελεί ένα αρκετά μεγάλο μέρος της ισχύος προσαύξησης.

Στα 1940, μοντέλα για τους δίσκους προέρχονταν από βασικές αρχές της φυσικής. Αργότερα χρειάστηκε να επικαλεστούμε την ύπαρξη ενός άγνωστου μηχανισμού αναδιανομής της στροφορμής στον δίσκο. Στα επόμενα χρόνια προτάθηκαν πολλά μοντέλα στην προσπάθεια περιγραφής του φαινομένου, κάποια από τα οποία θα αναφέρουμε εδώ.

Σημαντική υπήρξε η συνεισφορά των Shakura και Sunyaev με την εργασία που δημοσίευσαν το 1973 [2], στην οποία περιγράφουν ένα μοντέλο λεπτών, χαμηλής θερμοκρασίας δίσκων, οι οποίοι περιστρέφονται Κεπλεριανά και το ενεργό ιζώδες μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας σχέσης:  $\nu = \alpha C_s H$ . Σύμφωνα με την σχέση αυτή, το ιζώδες στο εσωτερικό των δίσκων είναι ανάλογο της ταχύτητας του ήχου  $C_s$ , της κλίμακας ύψους του δίσκου  $H$  και μιας σταθεράς  $\alpha$ , η οποία αποκαλείται  $\alpha$ -παράμετρος. Οι δίσκοι στους οποίους χρησιμοποιείται αυτή η αναλογία, ονομάζονται  $\alpha$ -δίσκοι. Με βάση την εργασία των Shakura και Sunyaev ο δίσκος βρίσκεται σε κατάσταση τοπικής θερμικής ισορροπίας και όλη η ενέργεια που παράγεται λόγω του ιζώδους, ακτινοβολείται πλήρως από την επιφάνεια. Όμως, παρόλο που η μελέτη αυτή μας δίνει μια καλή περιγραφή των δίσκων, αδυνατεί να εξηγήσει τους παρατηρούμενους πίδακες.

Προκειμένου να εξηγήσουν την εκροή ύλης υπό μορφή πιδάκων από έναν δίσκο προσαύξησης, οι Blandford και Payne δημοσίευσαν το 1982 μια εργασία στην οποία περιγράφεται το εξής μοντέλο [3]: ένας λεπτός, Κεπλεριανός δίσκος προσαύξησης διαπερνάται από ένα μεγάλης κλίμακας μαγνητικό πεδίο, το οποίο μπορεί να αποσπά ενέργεια και στροφορμή από αυτόν. Σε μεγάλες αποστάσεις από τον δίσκο, εστίαση της εκροής σε ένα ζεύγος αντιπαράλληλων πιδάκων, κάθετων στον δίσκο, οφείλεται στην τοροειδή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου. Αποδεικνύεται έτσι, ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ μιας εκροής πλάσματος με ένα μεγάλης κλίμακας μαγνητικό πεδίο που διαπερνά τον δίσκο, μπορεί να εξηγήσει την παρατηρούμενη επιτάχυνση και εστίαση του υλικού των πιδάκων.

Για τη μελέτη των δίσκων προσαύξησης είναι σημαντικό να προσδιορίσουμε τους κυρίαρχους μηχανισμούς που ρυθμίζουν την μεταφορά στροφορμής και την ροή μάζας υπό διάφορες συνθήκες. Καταλήγουμε λοιπόν σ' ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων μαγνητοϋδροδυναμικής που περιγράφουν έναν δίσκο προσαύξησης, το οποίο είναι πολύ δύσκολο να επιλυθεί αναλυτικά στην γενικότερη δυνατή περίπτωση, καθιστώντας την μελέτη των δίσκων ένα περίπλοκο πρόβλημα. Το πρόβλημα αυτό, είναι δυνατόν να απλουστευθεί χρησιμοποιώντας ορισμένες προσεγγίσεις, οι οποίες αφορούν την γεωμετρία και το ιξώδες των δίσκων αλλά και την ύπαρξη ή όχι μαγνητικού πεδίου καθώς και την διάχυσή του.

Γιατί όμως να μελετήσουμε τους δίσκους προσαύξησης; Κάποιοι από τους λόγους που καθιστούν σημαντική την μελέτη των αντικειμένων αυτών είναι οι εξής: Η πρόσπτωση ύλης σε συμπαγή αντικείμενα (λευκούς νάνους, αστέρες νετρονίων και μελανές οπές) – η οποία συνοδεύεται από απώλεια μεγάλου ποσού δυναμικής ενέργειας – αποτελεί μηχανισμό έκλυσης ενέργειας με μεγάλη απόδοση (μεγαλύτερη ακόμα και από την απόδοση των θερμοπυρηνικών αντιδράσεων που συμβαίνουν στα κέντρα των άστρων). Ακόμα, οι δίσκοι προσαύξησης είναι γενικά οι τροφοδότες της συντριπτικής πλειοψηφίας των ενεργητικών φαινομένων που παρατηρούμε, συμπεριλαμβανομένων και των εκροών πλάσματος, των οποίων καθορίζουν τις αρχικές συνθήκες. Τέλος, αποτελούν το περιβάλλον στο οποίο δημιουργούνται οι πλανήτες και η κατανόησή τους είναι απαραίτητη αν θέλουμε να καταλάβουμε τον μηχανισμό δημιουργίας αστρικών συστημάτων όπως το Ηλιακό [4].

## 1.2 Μαγνητισμένοι πίδακες

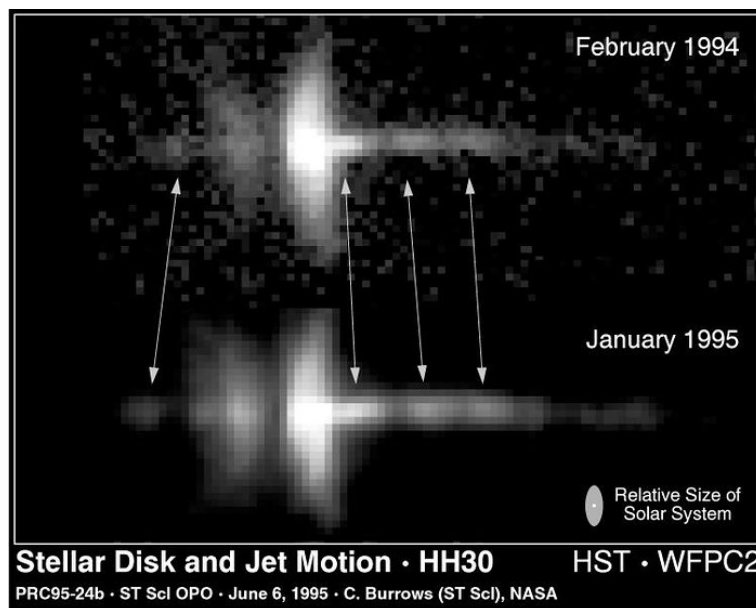
Η παρατήρηση των πιδάκων γίνεται είτε μέσω φάσματος (βλέπουμε γραμμές εκπομπής μετατοπισμένες προς το ιώδες) είτε μέσω απεικόνισης (στο ίδιο με πριν μήκος κύματος για YSOs και στο ράδιο για συμπαγή αντικείμενα). Οι εικόνες δείχνουν πίδακες πολύ καλά εστιασμένους, με μικρό γωνιακό άνοιγμα. Οι φυσικές συνθήκες που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις δείχνουν ότι οι πίδακες είναι υπερηχητικοί. Πράγματι, οι γραμμές εκπομπής που παίρνουμε απαιτούν θερμοκρασίες  $T \sim 10^4 K$ , οπότε η ταχύτητα του ήχου θα είναι  $C_s \sim 10 km/s$ , ενώ οι τυπικές ταχύτητες των πιδάκων είναι  $v_j \sim 300 km/s$ . Το γωνιακό άνοιγμα μιας βαλλιστικής υδροδυναμικής ροής δίνεται από την σχέση  $\tan \theta = C_s/v_j$ , από όπου προκύπτει ότι  $\theta \sim 5^\circ$  για YSOs, τιμή που συνάδει με τις παρατηρήσεις. Άρα οι πίδακες μπορεί να είναι βαλλιστικοί με αδρανειακούς περιορισμούς, οι οποίοι συνδέονται άμεσα με την διαδικασία προσαύξησης.

Παρατηρήσεις στους ενεργούς γαλαξιακούς πυρήνες, οδήγησαν τους Blandford & Rees το 1974 να προτείνουν το μοντέλο της «διπλής εκτόνωσης» [5]. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, το κεντρικό αντικείμενο εκπέμπει μια σφαιρικά συμμετρική ροή, η οποία περιορίζεται χωρικά και ανακατευθύνεται σε δύο πίδακες με αντίθετη κατεύθυνση από την εξωτερική κλίση πίεσης. Πράγματι, η περιστροφή του γαλαξία θα μπορούσε να δημιουργήσει μια δισκοειδή, ανιστροπική κατανομή ύλης γύρω από το κέντρο του. Επομένως, θεωρητικά, το εκρέον πλάσμα μπορεί να συγκεντρωθεί κατά μήκος του άξονα περιστροφής του γαλαξία (όπου υπάρχει λιγότερη ύλη) και κατά συνέπεια να επιταχυνθεί όπως σ' ένα ακροφύσιο De Laval.

Την ιδέα αυτή εφάρμοσαν για νεαρά αστρικά αντικείμενα (στο εξής YSOs) οι Canto [6] και Köniogl [7], χωρίς επιτυχία, καθώς το μοντέλο παρουσιάζε σημαντικά μειονεκτήματα, σχετιζόμενα με αστάθειες Kelvin-Helmholtz, οι οποίες κατέστρεφαν γρήγορα το ακροφύσιο. Επιπλέον, με το μοντέλο δεν κατάφεραν να εξηγήσουν την προέλευση της σφαιρικής ροής.

Μετέπειτα παρατηρήσεις, όπως αυτές του HH 30 του σχήματος 1.1 δείχνουν ότι οι πίδακες είναι ήδη εστιασμένοι κοντά στο κεντρικό άστρο, χωρίς ένδειξη ύπαρξης κάποιας σημαντικής εξωτερικής πίεσης. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι οι πίδακες πρέπει να είναι αυτοεστιαζόμενοι. Σύμφωνα με τον Ferreira [1], τέτοιου είδους παρατηρήσεις αποκλείουν προτάσεις όπως αυτή της εστίασης των πιδάκων από εξωτερικό πολοειδές μαγνητικό πεδίο.

Το μοναδικό μοντέλο, ικανό να περιγράψει την επιτάχυνση πλάσματος ταυτόχρονα με την αυτο-εστίαση, βασίζεται στην δράση ενός μεγάλης κλίμακας μαγνητικού πεδίου, το οποίο φέρεται από τον πίδακα. Οι Blandford [8] και Lovelace [9] πρότειναν ανεξάρτητα το 1976, πως αν ένα μεγάλης κλίμακας μαγνητικό πεδίο διαπερνά έναν δίσκο προσαύξηση, τότε αυτό θα μπορούσε να αποσπά ενέργεια από αυτόν και να επιταχύνει σωματίδια (ζεύγη ηλεκτρονίων/ποζιτρονίων στα μοντέλα τους). Αργότερα, οι Chan & Henriksen [10] το 1980 έδειξαν, χρησιμοποιώντας μια απλοποιημένη διάταξη, ότι ένα τέτοιο πεδίο μπορεί όντως να διατηρήσει μια εστιασμένη ροή πλάσματος. Οι Blandford & Payne [3] διεκπεραίωσαν το 1982 πλήρεις υπολογισμούς σχετικά με την αλληλεπίδραση μιας ροής πλάσματος (αποτελούμενη από πρωτόνια και ηλεκτρόνια) και ενός μαγνητικού πεδίου, οι οποίοι έδειξαν ταυτόχρονη επιτάχυνση και αυτο-εστίαση της ροής.



Σχήμα 1.1: Περιαστρικός δίσκος και πίδακας σε κίνηση

Εικόνα από το Διαστημικό Τηλεσκόπιο Hubble όπου φαίνεται ένα υπό δημιουργία άστρο που αποκαλείται HH30. Οι εικόνες έχουν ληφθεί με διαφορά ενός έτους κι έτσι γίνεται φανερή η κίνηση ποσοτήτων αερίου με μεγάλη ταχύτητα (όπως δείχνουν τα βέλη), τα οποία εκτινάσσονται από τον πρωτοαστέρα (με ταχύτητα περίπου  $800000\text{km/h}$ ).

Credit: C. Burrows (STScI & ESA), the WFPC 2 Investigation Definition Team, NASA, K. Stapelfeldt (JPL), A Watson (LowellObservatory)

### 1.3 Δημιουργία των πιδάκων

Υπάρχουν τρεις καταστάσεις δυνητικά ικανές να ωθήσουν μαγνητισμένους πίδακες από έναν πρωτοαστέρα [1]:

- **ο πρωτοαστέρας από μόνος του:** αποκλειστικά αστρικοί άνεμοι αποσπούν την ενέργειά τους από τον ίδιο τον πρωτοαστέρα.
- **ο δίσκος προσαύξησης από μόνος του:** «άνεμοι δίσκου» (disc winds) παράγονται από μια μεγάλη ακτινική επέκταση του δίσκου, χάρη στην ύπαρξη ενός μεγάλης κλίμακας μαγνητικού πεδίου. Οι πίδακες αυτοί τρέφονται με ύλη και ενέργεια που παρέχονται αποκλειστικά από την διαδικασία προσαύξησης.
- **η ζώνη αλληλεπίδρασης μεταξύ του δίσκου και του πρωτοαστέρα:** αυτοί οι «X-άνεμοι» (X-winds) σχηματίζονται σε μια μικρή περιοχή γύρω από την μαγνητόπαυση μεταξύ του δίσκου και του πρωτοαστέρα

Τα μοντέλα αποκλειστικά αστρικών ανέμων είναι λιγότερο πιθανά να επιλεγούν για την περιγραφή των πιδάκων, διότι οι παρατηρούμενοι πίδακες μεταφέρουν υπερβολικά πολλή ορμή. Για να ωθήσει από μόνος του κάποιον πίδακα, ένας πρωτοαστέρας θα έπρεπε να είναι πολύ φωτεινότερος ή να περιστρέφεται ταχύτερα από ότι παρατηρούμε [11]. Μένουν λοιπόν, οι άνεμοι δίσκου και οι X-άνεμοι και από τα παρατηρησιακά δεδομένα, είναι δύσκολο να επιλέξουμε ένα από τα δύο μοντέλα. Σε μια ανάλυσή του, ο Lívio το 1997 [12] συγκέντρωσε αρκετά επιχειρήματα υπέρ του μοντέλου των ανέμων δίσκου. Η βασική ιδέα είναι να βρούμε ένα μοντέλο, το οποίο να μπορεί να περιγράψει τους πίδακες από διάφορα αστροφυσικά πλαίσια (YSOs, AGN, X-ray binaries). Το μοναδικό «καθολικό» συστατικό που απαιτείται, είναι ένας δίσκος προσαύξησης που να διαπερνάται από μεγάλης κλίμακας μαγνητικό πεδίο. Ένα τέτοιο πρότυπο εξηγεί ποσοτικά όλες τις γνωστές συσχετίσεις προσαύξησης-εκροής και είναι συνεπές με κάθε πλαίσιο: νερά άστρα, microquasars και AGN.

### 1.4 Προέλευση του μαγνητικού πεδίου

Δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα από που προέρχεται το μαγνητικό πεδίο, υπάρχουν όμως δύο ακραία ενδεχόμενα. Το πρώτο είναι το μαγνητικό πεδίο να επάγεται από το υλικό που «πέφτει» προς το κέντρο, δημιουργώντας έτσι μια συγκέντρωση ροής στην εσωτερική περιοχή του δίσκου. Το δεύτερο, βασίζεται σ' ένα τοπικό δυναμό στον δίσκο. Το πιθανότερο σενάριο είναι η πραγματικότητα να βρίσκεται κάπου μεταξύ των δύο ακραίων περιπτώσεων, δηλαδή ένα επαγόμενο μαγνητικό πεδίο που να ενισχύεται από τον μηχανισμό του τοπικού δυναμό. Το πεδίο μπορεί να είναι είτε διπολικό είτε τετραπολικό, ωστόσο μόνο η διπολική διάταξη μπορεί να εξωθήσει πίδακες από Κεπλεριανούς δίσκους προσαύξησης [13]. Επειδή το πρόβλημα της προέλευσης του μαγνητικού πεδίου είναι περίπλοκο, απλώς θεωρούμε την ύπαρξη ενός μεγάλης κλίμακας μαγνητικού πεδίου, του οποίου η κατανομή και η ένταση είτε επιβάλλονται είτε προκύπτουν ως συνθήκες στασιμότητας στις μαγνητισμένες δομές προσαύξησης/εκροής ύλης (Magnetized Accretion-Ejection Structures, στο εξής MAES).

## 1.5 Το πρότυπο των MAES

Υποθέτουμε την ύπαρξη ενός μεγάλης κλίμακας μαγνητικού πεδίου, διπολικής τοπολογίας, το οποίο διαπερνά κάθετα τον δίσκο προσαύξησης και που επιτρέπει στο εκρέον πλάσμα να ρέει κατά μήκος των ανοιχτών δυναμικών γραμμών. Το πεδίο αυτό αποσπά στροφορμή και ενέργεια από τον δίσκο και τις μεταφέρει στο εκρέον πλάσμα. Στις μελέτες των αστροφυσικών πίδακων πλάσματος (π.χ. Blandford & Payne 1982 [3]) ο δίσκος αντιμετωπίζεται ως μια συνοριακή συνθήκη, συνήθως με την θεώρηση ότι πρόκειται για έναν «τυπικό» δίσκο προσαύξησης με ιξώδες ( $\alpha$ -δίσκος) [2], ο οποίος μάλιστα μπορεί να υποστηρίξει τους πίδακες. Ωστόσο, εφόσον οι πίδακες απάγουν στροφορμή από τον δίσκο, θα επηρεάζουν σημαντικά και την δυναμική του.

Η μελέτη των MAES, όπου η προσαύξηση και η εκροή είναι αλληλένδετες διαδικασίες, απαιτεί μια νέα θεωρία για τους δίσκους προσαύξησης ύλης. Τα βασικά ερωτήματα που πρέπει να απαντηθούν από κάθε ρεαλιστικό μοντέλο μιας στάσιμης, μαγνητισμένης δομής προσαύξησης-εκροής είναι:

1. ποιοί είναι οι βασικοί φυσικοί μηχανισμοί εντός του δίσκου;
2. ποιές είναι οι φυσικές συνθήκες που επιτρέπουν προσαύξηση & εκροή;
3. μπορούμε να συνδέσουμε τις ιδιότητες του πίδακα με αυτές του δίσκου;

Για να απαντήσουμε αυτά τα ερωτήματα, πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν το πλήρες διδιάστατο πρόβλημα (όχι τριδιάστατο, χάρη στην ύπαρξη αξονικής συμμετρίας) και να μην θεωρήσουμε τον δίσκο ως απείρως λεπτό, όπως συμβαίνει στην συμβατική θεωρία δίσκων. Στις MAES, ο ρυθμός προσαύξησης στον δίσκο παρουσιάζει ακτινικές διακυμάνσεις καθώς το υλικό εκτοξεύεται. Η σύνδεση μεταξύ προσαύξησης και εκροής σε μια MAES μετράται μέσω της ποσότητας  $\xi = \frac{d \ln M_{\alpha}}{d \ln r}$ , η οποία καλείται «δείκτης εκροής». Αυτή η παράμετρος (που μπορεί να μεταβάλλεται εντός του δίσκου) μετρά την τοπική απόδοση εκροής. Σε έναν «τυπικό» δίσκο προσαύξησης, ισχύει παντού  $\xi = 0$ , δηλαδή υπάρχει ένας σταθερός ρυθμός προσαύξησης. Για μια πλήρη μελέτη των MAES, πρέπει να θεωρήσουμε την ποσότητα  $\xi$  ως συνάρτηση των χαρακτηριστικών παραμέτρων του δίσκου.

## Κεφάλαιο 2

# Το Θεωρητικό Πλαίσιο των MAES

### 2.1 Μαγνητοϋδροδυναμική

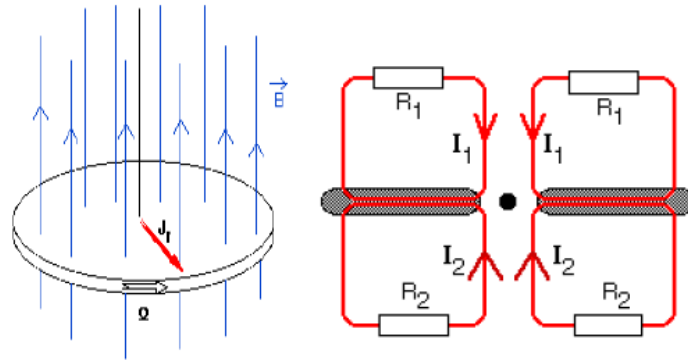
Η μαγνητοϋδροδυναμική (magnetohydrodynamics/MHD) είναι το θεωρητικό πλαίσιο που απαιτείται για την περιγραφή της αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός ιονισμένου αερίου (πλάσματος) και του μαγνητικού πεδίου. Ξεκινώντας από την μαγνητοστατική, μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα τους βασικούς μηχανισμούς.

Μια περιγραφή μηδενικής τάξης μιας MAES είναι αυτή ενός αγωγίμου περιστρεφόμενου δίσκου, ο οποίος διεπερνάται από ένα μαγνητικό πεδίο, ευθυγραμμισμένο με τον άξονα περιστροφής του (όμοια με τον τροχό του Barlow). Σύμφωνα με τον νόμο της επαγωγής του Faraday, μια ηλεκτρεγερτική δύναμη κατά μήκος του δίσκου  $e = \int (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \int \Omega r B_z dr$ , δημιουργεί διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού μεταξύ του κέντρου και των ορίων του δίσκου. Εάν ένα αγωγίμο καλώδιο συνδέει το κέντρο με το άκρο, κλείνοντας έτσι το ηλεκτρικό κύκλωμα, επάγεται ηλεκτρικό ρεύμα στην ακτινική διεύθυνση. Λόγω αυτού του ρεύματος  $I$ , στον δίσκο ασκείται δύναμη Laplace,  $F = I B_z dr$ , η οποία θα επιβραδύνει την περιστροφή του δίσκου (νόμος του Lenz). Θα μπορούσαμε επιπλέον να πούμε ότι το μαγνητικό πεδίο «αντιστέκεται» στην διάτμηση που προκαλείται από την περιστροφή (το ρεύμα  $I$  επάγει μια τοροειδή συνιστώσα  $B_\varphi$ , γι' αυτό ο τροχός του Barlow σταματάει). Όμως αυτή η μηχανική αντιμετώπιση του προβλήματος αγνοεί την ηλεκτρομαγνητική του φύση κι έτσι μπορεί να ξεχάσει κάποιος ότι τα ηλεκτρικά ρεύματα πρέπει να διατηρούνται και να μπορούν να ρέουν στον δίσκο.

Στην αστροφυσική, οι δίσκοι είναι φτιαγμένοι από αέριο, το οποίο δεδομένου ότι μπορεί να διασχίσει τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές θα συσσωρευθεί προς το κεντρικό αντικείμενο καθώς χάνει στροφορμή. Η στροφορμή αυτή συνδέεται με το ηλεκτρικό ρεύμα που ρέει στους πίδακες: η κινητική ενέργεια των πιδάκων «τρέφεται» από την ροή μαγνητικής ενέργειας που παρέχεται στην επιφάνεια του δίσκου. Να σημειωθεί ότι, ενώ οι γραμμές ροής του εκρέοντος υλικού εκτείνονται στο άπειρο, οι γραμμές του ρεύματος πυκνότητας πρέπει να επιστρέφουν και να κλείνουν στον δίσκο, όπου και βρίσκεται η ηλεκτρεγερτική δύναμη.

#### 2.1.1 Κινητική Θεωρία πλάσματος

Όπως είδαμε προηγουμένως, το πλάσμα σ' έναν δίσκο προσαύξησης, αλληλεπιδρά με το μαγνητικό πεδίο που διαπερνά τον δίσκο. Επομένως, πρέπει να αντιμετωπίσουμε αυτοσυνεπώς το πρόβλημα κίνησης των φορτίων στα ηλεκτρομαγνητικά πεδία καθώς και το πρόβλημα δημιουργίας των πεδίων από τα ρεύματα και τις πυκνότητες φορτίων του πλάσματος. Ταυτόχρονα, βλέπουμε ότι είναι χρήσιμη η στατιστική περιγραφή, διότι αναφερόμαστε σε μεγάλο πλήθος σωματιδίων.



Σχήμα 2.1: Αριστερά: Ένας περιστρεφόμενος δίσκος που διαπερνάται από μαγνητικό πεδίο, επάγει ηλεκτρικό ρεύμα, το οποίο οδηγεί σε απώλεια στροφορμής (magnetic braking). Δεξιά: Μία MAES μπορεί να θεωρηθεί ως δύο αλληλένδετα ηλεκτρικά κυκλώματα, με καθένα από αυτά να αντιστοιχεί σε έναν πίδακα. Ασύμμετροι πίδακες μπορούν επομένως να προκύψουν ακόμα και από συμμετρικό πολοειδές πεδίο. [14]

Θεωρούμε, λοιπόν, την συνάρτηση κατανομής  $f_\alpha = f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$  (πυκνότητα σωματιδίων στον 6-διάστατο φασικό χώρο των ταχυτήτων  $\vec{v}$  και των θέσεων  $\vec{r}$ ) ενός πληθυσμού σωματιδίων  $\alpha$ . Η ολική χρονική παράγωγος της συνάρτησης κατανομής, δίνει την εξίσωση Boltzmann:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_\alpha + \left( \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{v}} \right) f_\alpha = \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{coll}. \quad (2.1)$$

όπου  $\nabla_{\vec{v}}$  η παράγωγος ως προς την ταχύτητα και  $\vec{F}$  η δύναμη που ασκείται στα σωματίδια του πληθυσμού  $\alpha$  και μπορεί να είναι ηλεκτρομαγνητικής ή βαρυτικής φύσεως. Η μεταβολή της συνάρτησης κατανομής με τον χρόνο μπορεί να οφείλεται σε κρούσεις (π.χ. σκεδάσεις Coulomb), εξ' αιτίας των οποίων μεταβάλλεται ο αριθμός των φορτίων στην μονάδα του φασικού όγκου. Στην περίπτωση απουσίας κρούσεων, ο όρος του δεξιού μέλους μηδενίζεται και η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται εξίσωση Vlasov:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_\alpha + \left( \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{v}} \right) f_\alpha = 0$$

Από την κινητική εξίσωση Boltzmann μπορούμε να πάρουμε τις εξισώσεις ροπών, πολλαπλασιάζοντάς την με διάφορες συναρτήσεις της ταχύτητας  $\psi(\vec{v}) = m, m\vec{v}, m\vec{v}^2, \dots$  και ολοκληρώνοντας στον χώρο των ταχυτήτων. Χρησιμοποιούμε και τον ορισμό της μέσης τιμής:

$$\langle \psi(\vec{v}) \rangle = \frac{1}{n} \iiint_{\vec{v}} \psi(\vec{v}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{v}, \quad n = \int \int \int_{\vec{v}} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{v}$$

όπου  $n$  η αριθμητική χωρική πυκνότητα των σωματιδίων. Παίρνουμε έτσι, τις εξισώσεις διατήρησης μάζας (εξίσωση συνέχειας), ορμής και ενέργειας για κάθε πληθυσμό  $\alpha$  του πλάσματος.

### 2.1.2 Περιγραφή ενός ρευστού

Οι περισταρικοί δίσκοι και οι πίδακες που σχετίζονται με αυτούς, απαρτίζονται από σκόνη και αέριο, τα οποία αποτελούνται από ουδέτερα στοιχεία, ιόντα και ηλεκτρόνια. Θα έπρεπε λοιπόν να τους αντιμετωπίσουμε ως ένα μείγμα πολλών συστατικών. Ωστόσο, αυτό είναι πολύ περίπλοκο, κυρίως όταν μελετάμε την ενέργεια του συστήματος. Στην περίπτωση όμως που όλα τα συστατικά είναι καλά συζευγμένα (μέσω κρούσεων), η αντιμετώπισή τους ως ένα ρευστό είναι αποδεκτή.

Για κάθε είδος  $\alpha$ , ορίζουμε την αριθμητική πυκνότητα  $n_\alpha$ , τη μάζα  $m_\alpha$ , το ηλεκτρικό φορτίο  $q_\alpha$ , την ταχύτητα  $\vec{v}_\alpha$  και την πίεση  $P_\alpha$ . Η εξίσωση κίνησης για το κάθε είδος είναι:

$$\rho_\alpha \frac{D\vec{v}_\alpha}{Dt} = -\vec{\nabla} P_\alpha - \rho_\alpha \vec{\nabla} \Phi_G + \sum_\beta \vec{F}_{\beta\alpha} + n_\alpha q_\alpha (\vec{E} + \vec{v}_\alpha \times \vec{B}) \quad (2.2)$$

όπου  $D./Dt = \partial./\partial t + \vec{v}_\alpha \cdot \nabla$  η παράγωγος Lagrange,  $\rho_\alpha = n_\alpha m_\alpha$ ,  $\Phi_G$  το βαρυτικό δυναμικό του κεντρικού αντικειμένου και  $\vec{F}_{\alpha\beta}$  οι δυνάμεις κρούσης από τα υπόλοιπα είδη  $\beta$ . Μπορούμε να ορίσουμε την μέση ροή ως:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \\ \rho \vec{u} &= \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha \\ P &= \sum_\alpha n_\alpha k_B T \\ \vec{J} &= \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha \end{aligned} \quad (2.3)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα,  $\vec{u}$  η ταχύτητα,  $P$  η πίεση,  $\vec{J}$  η πυκνότητα ρεύματος και  $k_B$  η σταθερά του Boltzmann. Η περιγραφή του ενός ρευστού μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν το πλάσμα παρουσιάζει αρκετές συγκρούσεις. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλα τα είδη συστατικών του πλάσματος βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία  $T$ . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε απόκλιση υπάρχει μεταξύ της μέσης ροής και ενός συστατικού, είδους  $\alpha$ , είναι αμελητέα, δηλαδή  $\|\vec{v}_\alpha - \vec{u}\| \ll \|\vec{u}\|$ . Επικαλούμενοι τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Newton ( $\sum_{\beta,\alpha} \vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{0}$ ) και την τοπική ηλεκτρική ουδετερότητα ( $\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha = 0$ ), παίρνουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν την δυναμική ενός ρευστού:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} &= 0 \\ \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} &= -\nabla P - \rho \nabla \Phi_G + \vec{\nabla} \mathbf{T} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} \end{aligned} \quad (2.4)$$

αθροίζοντας σε όλα τα είδη  $\alpha$ . Ακόμη κι αν το μεγαλύτερο μέρος της ροής αποτελείται από ουδέτερα στοιχεία, αυτά αισθάνονται την μαγνητική δύναμη μέσω των συγκρούσεων (κυρίως) με ιόντα και ηλεκτρόνια, διότι  $\vec{J} \times \vec{B} = (1 + X)(\vec{F}_i n + \vec{F}_e n)$  όπου  $X = \rho_i / \rho_n$  ο λόγος πυκνότητας ιόντων προς ουδέτερα στοιχεία.

Η εξέλιξη του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου περιγράφεται πλήρως από τις εξισώσεις του Maxwell (στο κενό)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho_* \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.8)$$

όπου  $\rho_*$  η πυκνότητα του ελεύθερου ηλεκτρικού φορτίου. Από το νόμο του Faraday (εξίσωση 2.8) βλέπουμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μεταβάλλεται ως  $E/B \sim L/ct \sim U/c$  όπου  $L$  η χαρακτηριστική κλίμακα μήκους του προβλήματος και  $U$  η μέση ταχύτητα του πλάσματος. Αντίστοιχα, από το νόμο του Ampère (εξίσωση 2.7), βλέπουμε να ισχύει ότι:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \sim \frac{E/(cT)}{B/L} \sim \left(\frac{L}{cT}\right)^2 \sim \left(\frac{U}{c}\right)^2 \ll 1 \quad \text{όταν } U \ll c$$



Συνεπώς, στην περίπτωση μη σχετικιστικής κίνησης του πλάσματος, ο νόμος του Faraday, μπορεί να γραφεί ως  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ , επομένως μπορούμε να γράψουμε το ηλεκτρικό πεδίο ως κλίση ενός βαθμωτού ηλεκτρικού δυναμικού  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ . Από το νόμο του Ampère παίρνουμε ότι η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος δίνεται από την σχέση:

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (2.9)$$

και σχετίζεται άμεσα με το μαγνητικό πεδίο. Υπό την ίδια προσέγγιση, της μη σχετικιστικής κίνησης του πλάσματος, η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου είναι:

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.10)$$

Ο πρώτος όρος είναι της τάξης  $(U/c)^2$ , οπότε μπορούμε να τον αγνοήσουμε και άρα παίρνουμε  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ , σχέση που δηλώνει την ύπαρξη κλειστών ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

Η διατήρηση της ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου περιγράφεται από την σχέση:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_{MHD} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (2.11)$$

όπου  $W = W_e + W_m = \frac{B^2}{8\pi} + \frac{E^2}{8\pi}$  η πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και

$$\vec{S}_{MHD} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.12)$$

το άνωσμα Poynting, το οποίο εκφράζει την ροή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας που απομένει στο πεδίο μετά την αλληλεπίδρασή του με το πλάσμα (ο όρος  $\vec{J} \times \vec{E}$  εκφράζει την αλληλεπίδραση αυτή). Στη μη σχετικιστική περίπτωση η πυκνότητα ηλεκτρικής ενέργειας μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα ( $W_e/W_m \sim (U/c)^2$ ).

Για να είναι κλειστό το σύστημα εξισώσεων πρέπει να γνωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$ . Η εξίσωση αυτή προκύπτει από την εξίσωση ορμής για τα ηλεκτρόνια συνεπώς με την προσέγγιση του ενός ρευστού και είναι ο γενικευμένος νόμος του Ohm:

$$\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{\sigma} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{n_e c e} - \frac{\vec{\nabla} P_e}{n_e e} - \left( \frac{\rho_n}{\rho} \right)^2 \frac{(\vec{J} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{m_{in} n_i f_{in} c^2} \quad (2.13)$$

όπου  $\sigma$  είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα του πλάσματος,  $n_e$ ,  $n_i$  η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων και των ιόντων αντίστοιχα,  $m_{i,n}$  η ανηγμένη μάζα ιόντων και ουδέτερων σωματιδίων και  $f_{i,n}$  η συχνότητα των κρούσεων μεταξύ των σωματιδίων αυτών. Στο δεξί μέλος της εξίσωσης ο πρώτος όρος ονομάζεται όρος Ohm, ο δεύτερος όρος Hall, ενώ ο τρίτος αντιπροσωπεύει μια πηγή ηλεκτρικού πεδίου λόγω κάποιας βαθμίδας στην πίεση των ηλεκτρονίων. Ο τελευταίος όρος εκφράζει την αμφιπολική διάχυση και εμφανίζεται στην εξίσωση αν θεωρήσουμε ότι στο πλάσμα εκτός από πρωτόνια και ηλεκτρόνια, έχουμε και ουδέτερα σωματίδια πυκνότητας  $\rho_n$  (neutrals, τα οποία συναντάμε στην περίπτωση των περιστασιακών δίσκων σε πρωτοαστέρες όπου η ύλη δεν είναι πλήρως ιονισμένη).

Όλοι οι όροι στο δεξί μέλος της εξίσωσης 2.13 είναι αμελητέοι σε σχέση με τον όρο  $\vec{u} \times \vec{B}$  σε κάθε περίπτωση που το πλάσμα είναι καλά συζευγμένο και ιονισμένο ( $\rho_n \ll \rho$ ) και αν ισχύει ταυτόχρονα  $\sigma \rightarrow \infty$  (ιδεατή MHD), ο γενικευμένος νόμος του Ohm γράφεται στην απλοποιημένη μορφή:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \quad (2.14)$$

Η τελευταία εξίσωση που χρειαζόμαστε για να κλείσει το σύστημα είναι αυτή της ενέργειας, η οποία είναι η πιο περίπλοκη και μπορεί να γραφεί με διάφορες μορφές. Μια από τις δυνατές εκφράσεις είναι η εξίσωση της εσωτερικής ενέργειας:

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \Gamma - \Lambda \quad (2.15)$$

όπου  $S$  είναι η ειδική εντροπία του πλάσματος,  $\Gamma$  όλοι οι όροι θέρμανσης και  $\Lambda$  όλοι οι όροι ψύξης του πλάσματος. Επισημαίνουμε εδώ ότι οι όροι μεταφοράς (π.χ. conduction) μπορεί να προκαλούν ψύξη του πλάσματος σ' ένα σημείο και θέρμανσή του κάπου αλλού.

Στην αδιαβατική περίπτωση  $\Gamma = \Lambda$ , η εξίσωση 2.15 ολοκληρώνεται και προκύπτει η πολυτροπική εξίσωση:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{σταθερό} \quad (2.16)$$

όπου  $\gamma$  είναι ο πολυτροπικός δείκτης, ο οποίος παίρνει τιμές από 1 (ισόθερμη περίπτωση) έως  $\gamma = 5/3$  (αδιαβατική περίπτωση) για ένα μονοατομικό αέριο.

## 2.2 Μοντελοποίηση των ΜΑΕΣ

Ο στόχος μας σε αυτή την ενότητα είναι να περιγράψουμε έναν δίσκο προσαύξησης που διαπερνάται από ένα μεγάλης κλίμακας μαγνητικό πεδίο διπολικής τοπολογίας. Για να διαχειριστούμε το πρόβλημα αυτό, στη συγκεκριμένη παράγραφο θα μελετήσουμε μερικές υποθέσεις που κάνουμε για να το απλοποιήσουμε.

### 2.2.1 Διάχυση Μαγνητικού Πεδίου

Εάν υποθέσουμε ότι στην περιοχή του δίσκου ισχύει η ιδεατή μαγνητοϋδροδυναμική ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), η πρόσπτωση υλικού προς το κεντρικό αντικείμενο δεν θα είναι δυνατή, διότι το πλάσμα δεν θα μπορεί να διασχίσει τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές. Αυτό συμβαίνει γιατί στην ιδεατή MHD συναντάμε το φαινόμενο του «παγώματος» των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου με το πλάσμα (flux freezing). Αυτό σημαίνει ότι το πλάσμα με το μαγνητικό πεδίο μπορούν να θεωρηθούν ως ένα πλαστικό υλικό, το οποίο κάμπτεται, παραμορφώνεται, συστρέφεται, κλπ. και ανάλογα με τις συνθήκες που επικρατούν, το πλάσμα «οδηγεί» το μαγνητικό πεδίο ή αντιστρόφως το πεδίο «οδηγεί» το πλάσμα [15],[4].

Πρέπει επομένως, για να έχουμε προσαύξηση υλικού, μέσα στον δίσκο η ηλεκτρική αγωγιμότητα  $\sigma$  να μην είναι άπειρη, αλλά πεπερασμένη. Εφόσον θα ισχύει πλέον η μη-ιδεατή μαγνητοϋδροδυναμική (resistive MHD), ο νόμος του Ohm μπορεί να γραφεί ως:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} + \frac{\vec{J}}{\sigma} \quad (2.17)$$

Παίρνοντας τον στροβιλισμό της εξίσωσης 2.17 σε συνδυασμό με το νόμο του Faraday, παίρνουμε την εξίσωση επαγωγής, η οποία μας δίνει την χρονική εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (2.18)$$

όπου  $\eta = c^2/4\pi\sigma$  ο συντελεστής μαγνητικής διάχυσης. Ο πρώτος όρος της εξίσωσης 2.18 περιγράφει την οριζόντια κίνηση του πλάσματος προς το κεντρικό αντικείμενο (advection), ενώ ο δεύτερος περιγράφει το φαινόμενο διάχυσης του πεδίου (diffusion), χάρη στο οποίο το πλάσμα δύναται να διασχίσει τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές.

Επειδή η σχέση μεταξύ των δύο όρων του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.18 είναι καθοριστική για την συμπεριφορά του πλάσματος, ορίζουμε τον μαγνητικό αριθμό Reynolds ως εξής:

$$\mathcal{R}_m = \frac{\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})}{\eta \nabla^2 \vec{B}} \sim \frac{UB}{\eta \frac{L}{L^2}}$$

$$\mathcal{R}_m = \frac{UL}{\eta} \quad (2.19)$$

Όταν  $\mathcal{R}_m \gg 1$  βρισκόμαστε σε περιοχή ιδεατής MHD (frozen-in πεδίο & πλάσμα), ενώ όταν  $\mathcal{R}_m \ll 1$  βρισκόμαστε σε περιοχή μη-ιδεατής MHD (resistive MHD) και υπερισχύει η διάχυση του μαγνητικού πεδίου.

### 2.2.2 Στάσιμη Κατάσταση

Από τις παρατηρήσεις αστροφυσικών πιδάκων, έχουμε δει ότι όλοι τους εμφανίζουν ίδιες κινήσεις ή/και αποκοπή υλικού, γεγονός που υποδεικνύει ότι είτε είναι επιρρεπείς σε κάποιες αστάθειες είτε ότι η εκροή είναι μια διακοπτόμενη διαδικασία. Ωστόσο, οι χρονικές κλίμακες που σχετίζονται με τις μεταβολές που μπορούν να συμβούν στους πίδακες είναι πολύ μεγαλύτερες από τις χρονικές κλίμακες που αφορούν τον υποκείμενο δίσκο προσαύξησης. Επομένως, για την μελέτη του προβλήματος των ΜΑΕS, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα είναι στάσιμο, δηλαδή  $\partial./\partial t = 0$ .

### 2.2.3 Αξονική Συμμετρία

Το σύστημα πιδάκων-δίσκων προσαύξησης εμφανίζει συμμετρία περιστροφής γύρω από κάποιον σταθερό άξονα. Μελετώντας το σύστημα σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(\varpi, \varphi, z)$  και θεωρώντας πως ο άξονας του πίδακα είναι ο κατακόρυφος άξονας, συνεπάγεται ότι όλες οι φυσικές ποσότητες του προβλήματος είναι ανεξάρτητες της μεταβλητής  $\varphi$ , οπότε θα ισχύει  $\partial./\partial \varphi = 0$ . Θα ισχύει λοιπόν ότι  $E_\varphi = 0$ , οπότε κάθε ποσότητα μπορεί ν' αναλυθεί σε μια πολοειδή (επίπεδο  $(\varpi, z)$ ) και μια τοροειδή συνιστώσα, π.χ.:

$$\vec{u} = \vec{u}_p + \Omega \varpi \hat{\varphi}, \quad \vec{B} = \vec{B}_p + B_\varphi \hat{\varphi} \quad (2.20)$$

Ένα διπολικό μαγνητικό πεδίο μπορεί να περιγραφεί από μια πολοειδή συνιστώσα της μορφής

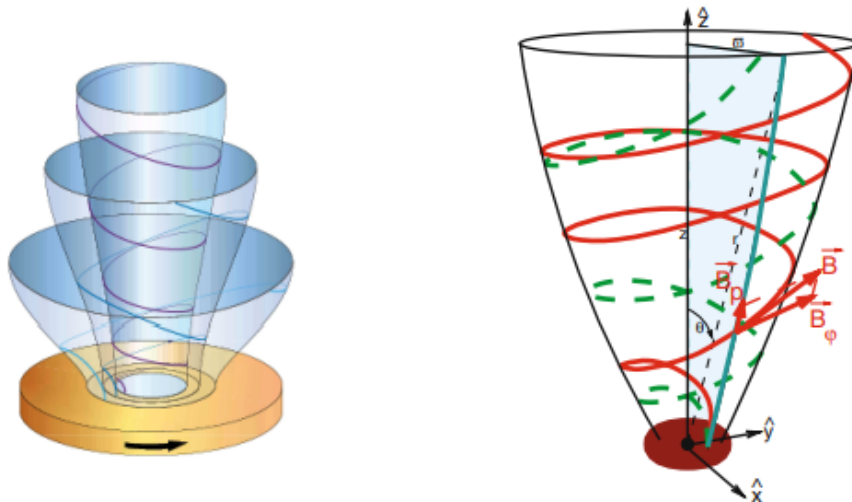
$$\vec{B}_p = \vec{\nabla} \alpha \times \frac{\hat{\varphi}}{\varpi} \quad (2.21)$$

και ένα περιττού τύπου τοροειδές πεδίο:  $B_\varphi(\varpi, -z) = -B_\varphi(\varpi, z)$ . Η συνάρτηση  $\alpha = \alpha(\varpi, z)$  ονομάζεται συνάρτηση μαγνητικής ροής και συνδέεται με το ανυσματικό δυναμικό του  $\vec{B}$  μέσω της σχέσης  $\alpha = \varpi A_\varphi$ .

Η φυσική σημασία της συνάρτησης μαγνητικής ροής  $\alpha(\varpi, z)$  φαίνεται αν υπολογίσουμε την μαγνητική ροή που διέρχεται από μια επιφάνεια κάθετη στο πολοειδές επίπεδο. Ειδικότερα:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{sx.2.21}}{=} \iint_S \vec{\nabla} \alpha \times \left( \frac{\hat{\varphi}}{\varpi} \right) \cdot d\vec{S} \stackrel{\Theta. Stokes}{=} \int_C \left( \frac{\alpha \hat{\varphi}}{\varpi} \right) d\vec{l}$$

Προκύπτει λοιπόν ότι  $\Phi = 2\pi\alpha(\varpi, z)$ , δηλαδή η σχέση  $\alpha(\varpi, z) = \text{σταθερό}$ , περιγράφει μια επιφάνεια σταθερής κατακόρυφης μαγνητικής ροής (σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2: Αριστερά: Πίδακες με αξονική συμμετρία απαρτίζονται από μαγνητικές επιφάνειες σταθερής μαγνητικής ροής «αγκιστρωμένες» στον δίσκο. Το σχήμα κάθε επιφάνειας καθορίζεται από την ισορροπία στο επίπεδο που τέμνει κάθετα στις γραμμές μαγνητικής ροής [14] Δεξιά: Σχηματική αναπαράσταση μιας γραμμής ροής (διακεκομμένη) και μιας δυναμικής γραμμής (συνεχής). Οι προβολές και των δύο γραμμών στο πολοειδές επίπεδο (σκιασμένο επίπεδο) ταυτίζονται (στην περίπτωση της ιδεατής MHD). Η εξίσωση της επιφάνειας μαγνητικής ροής είναι  $\alpha(\varpi, z) = \text{σταθερό}$  [16]

## 2.2.4 Συντελεστές Μεταφοράς

Μελετώντας τις MAES μπορούμε να διακρίνουμε δύο βασικές περιοχές του προβλήματος, οι οποίες διαχωρίζονται με την βοήθεια του μαγνητικού αριθμού Reynolds, τον οποίο ορίσαμε προηγουμένως (σχέση 2.19). Στην περιοχή των πιδάκων ισχύει  $\mathcal{R}_m \gg 1$ , δηλαδή οι πίδακες περιγράφονται από την ιδεατή MHD. Στο πλαίσιο αυτό, το πεδίο επικρατεί αρχικά του πλάσματος και το παρασύρει κατά μήκος των πιδάκων.

Στην περιοχή του δίσκου ισχύει  $\mathcal{R}_m \sim 1$ , οπότε έχουμε ταυτόχρονα διάχυση του μαγνητικού πεδίου και φαινόμενα μεταφοράς. Εντός του δίσκου, επικρατεί το βαρυτικό πεδίο, το οποίο έλκει το πλάσμα προς το κεντρικό αντικείμενο. Το πλάσμα με τη σειρά του παρασύρει και μπλέκει τις δυναμικές γραμμές. Η παραμόρφωση αυτή των δυναμικών γραμμών δεν μπορεί να διατηρηθεί, διότι διεγείρονται διαφόρων ειδών αστάθειες (π.χ. μαγνητοπεριστροφική αστάθεια [17]) που οδηγούν σε μια τυρβώδη κατάσταση στο εσωτερικό του δίσκου.

Σε τυρβώδεις καταστάσεις, όλοι οι συντελεστές μεταφοράς ενισχύονται, έχοντας ως συνέπεια την δημιουργία μη ομαλών συντελεστών, όπως είναι για παράδειγμα η διάχυση του μαγνητικού πεδίου  $\eta$  και το ιξώδες  $\nu_v$ . Ο προσδιορισμός των συντελεστών αυτών απαιτεί την ανάπτυξη μιας θεωρίας μαγνητοϋδροδυναμικής τύρβης εντός των δίσκων προσαύξησης. Εφόσον δεν υπάρχει τέτοια θεωρία, στην μοντελοποίηση των MAES χρησιμοποιούμε απλές εκφράσεις για τους μη ομαλούς συντελεστές (όπως για παράδειγμα την περιγραφή των  $\alpha$ -δίσκων από τους Shakura & Sunyaev [2]) τις οποίες θα αναλύσουμε στη συνέχεια.

Λόγω της Κεπλεριανής περιστροφής στον δίσκο, είναι δυνατόν να υπάρξουν ανισοτροπίες στην διάχυση του μαγνητικού πεδίου. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε δύο συντελεστές για την περιγραφή της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου μέσα στον δίσκο: ο  $\eta_p$  που αναφέρεται στην διάχυση του πεδίου στο πολοειδές επίπεδο  $(\varpi, z)$ , και ο  $\eta_\varphi$  που σχετίζεται με την διάχυση στην αξιμουθιακή διεύθυνση  $\hat{\varphi}$ .

### 2.2.5 Μη-σχετικιστική Μαγνητουδροδυναμική

Οι παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι στους δίσκους προσαύξησης και στους πίδακες γύρω από πρωταστέρες (YSOs), η ύλη παραμένει πάντα μη-σχετικιστική ( $U \ll c$ ). Επομένως, τουλάχιστον στην περίπτωση των YSOs, οι προσεγγίσεις που εφαρμόσαμε προηγουμένως στις εξισώσεις του Maxwell είναι συνεπείς για την μελέτη των ΜΑΕΣ χρησιμοποιώντας μη-σχετικιστική μαγνητουδροδυναμική.

## 2.3 Κρίσιμα σημεία μιας στάσιμης ροής

Όπως είδαμε προηγουμένως, θεωρήσαμε ότι η κατάσταση στους δίσκους είναι στάσιμη. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, όλα είναι χρονοεξαρτώμενα. Εάν η ύλη που αποβάλλεται από τον δίσκο δεν έχει την απαραίτητη ενέργεια ώστε να διαφύγει από την βαρυτική του έλξη, θα ξαναπέσει σε αυτόν, αλλάζοντας έτσι τις συνθήκες εκροής. Μια στάσιμη κατάσταση θα επιτευχθεί τελικά μετά από χρόνο που σχετίζεται με την φύση των κυμάτων που διαδίδονται προς τον δίσκο και του παρέχουν πληροφορίες σχετικά με ό,τι γίνεται στους πίδακες.

Η ανάλυση της στάσιμης ροής απαιτεί να ληφθούν υπ' όψιν, κατά κάποιον τρόπο, όλοι οι χρονοεξαρτώμενοι μηχανισμοί ανατροφοδότησης. Αυτό επιτυγχάνεται με την απαίτηση ότι από την στιγμή που θα επιτευχθεί η στάσιμη κατάσταση, καμία πληροφορία (δηλαδή κανένα κύμα) δεν μπορεί να διαδοθεί από το άπειρο (στην  $z$ -διεύθυνση) στον δίσκο προσαύξησης. Υπάρχει μόνο ένας τρόπος για να επιτευχθεί αυτό: η ύλη πρέπει να ρέει πιο γρήγορα από κάθε κύμα, αφήνοντας έτσι τον δίσκο αποσυνδεδεμένο από τον περίγυρό του.

### 2.3.1 Ο άνεμος του Parker

Μελετάμε πρώτα το απλό μοντέλο μιας σφαιρικά συμμετρικής, ισόθερμης, υδροδυναμικής ροής. Ένα τέτοιο μοντέλο προτάθηκε αρχικά από τον Parker (1958) προκειμένου να εξηγήσει τον ηλιακό άνεμο. Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η διατήρηση μάζας και η διατήρηση ορμής γράφονται:

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} + \frac{d\rho}{\rho} + 2\frac{dr}{r} &= 0 \\ u\frac{du}{dr} + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

όπου η πίεση του αερίου είναι  $P = \rho C_s^2$  και  $C_s$  η (σταθερή) ταχύτητα του ήχου. Από τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει ότι η ακτινική ταχύτητα του ηλιακού ανέμου συναρτηθεί της απόστασης  $r$  δίνεται από την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{du}{dr} = 2C_s^2 \frac{u^2}{r^2} \frac{(r - r_c)}{(u^2 - C_s^2)} \quad (2.23)$$

όπου  $r_c = GM/(2C_s^2)$ .

Βλέπουμε ότι στην περίπτωση που  $r = r_c$  και  $u = u_c = C_s$ , εμφανίζεται μια απροσδιοριστία. Το σημείο  $(r_c, u_c)$  ονομάζεται κρίσιμο σημείο της ροής και στον άνεμο Parker είναι το σημείο πέραν του οποίου η ροή γίνεται υπερηχητική. Επομένως, για να είναι η λύση του ανέμου Parker στάσιμη, θα πρέπει να διέρχεται από το κρίσιμο αυτό σημείο. Έτσι, εάν συμβεί κάποια διαταραχή στον ηλιακό άνεμο, αυτή δεν μπορεί να διαδοθεί προς τα πίσω ώστε να επηρεάσει την εκροή. Δηλαδή, μόνο οι υπερηχητικές λύσεις είναι στάσιμες.

### 2.3.2 Κρίσιμα σημεία σε MAES

Σε αντίθεση με τον άνεμο Parker, όπου η πληροφορία μπορούσε να μεταφέρεται μόνο μέσω των ηχητικών κυμάτων, σε ένα μαγνητισμένο μέσο, υπάρχουν τρία είδη κυμάτων που μπορούν να μεταφέρουν πληροφορία. Ειδικότερα σε μια μαγνητισμένη δομή προσαύξησης-εκροής, η δύναμη Lorentz σε συνδυασμό με την κλίση πίεσης του πλάσματος, οδηγεί στη δημιουργία τριών ειδών μαγνητοϋδροδυναμικών κυμάτων:

- τα κύματα Alfvén ( $A$ ), τα οποία προκαλούν μόνο μαγνητικές διαταραχές κατά μήκος του αδιατάρακτου μαγνητικού πεδίου  $B_o$  κι έχουν φασική ταχύτητα

$$V_A = \frac{B_o}{\sqrt{4\pi\rho_o}}$$

- δύο ειδών μαγνητοϋδροδυναμικά κύματα, το αργό ( $SM$ ) και το γρήγορο ( $FM$ ), τα οποία προκαλούν τόσο μαγνητικές διαταραχές, όσο και συμπίεσεις/αραιώσεις πλάσματος κι έχουν φασική ταχύτητα:

$$V_{SM,FM}^2 = \frac{1}{2} \left( V_A^2 + C_s^2 \mp \sqrt{(V_A^2 + C_s^2)^2 - 4V_A^2 C_s^2 \cos^2 \theta} \right)$$

όπου  $\theta$  η γωνία μεταξύ του αδιατάρακτου  $B_o$  και της διεύθυνσης διάδοσης του κύματος (δηλαδή της διαταραχής).

Στο πλαίσιο της ιδεατής MHD, δηλαδή στους πίδακες, τα τρία αυτά είδη κυμάτων μπορούν να διαδίδονται ελεύθερα μεταφέροντας πληροφορία. Το γεγονός αυτό δημιουργεί τρία σημεία απροσδιοριστίας κατά μήκος κάθε μαγνητικής επιφάνειας (επιφάνεια με σταθερή μαγνητική ροή).

Όπως είδαμε και στον άνεμο Parker, για να είναι χρονοανεξάρτητη (στάσιμη) η εκροή ύλης από μια MAES, η λύση σε κάθε μαγνητική επιφάνεια θα πρέπει να διέρχεται και από τα τρία κρίσιμα σημεία: το αργό μαγνητοχηητικό, το Alfvén και το γρήγορο μαγνητοχηητικό. Με τον τρόπο αυτό, εάν συμβεί κάποια διαταραχή σε κάποιο σημείο του πίδακα, θα είναι αδύνατον για αυτή να διαδοθεί προς τον δίσκο και να επηρεάσει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες γίνεται η εκροή.

Εντός του δίσκου προσαύξησης, τα υψηλά επίπεδα τύρβης οδηγούν σε έντονη μαγνητική διάχυση και την ανάπτυξη μεγάλων ταχυτήτων. Η διάχυση του πεδίου έχει ως συνέπεια, τα MHD κύματα να αποσβάνουν πολύ γρήγορα, επομένως δεν εμφανίζονται τα τρία σημεία απροσδιοριστίας που αναφέραμε στον δίσκο. Στα πλαίσια της περιγραφής  $\alpha$ -δίσκων προσαύξησης [2], τριβή εμφανίζεται μόνο στην αξιμουθιακή εξίσωση κίνησης (εξίσωση στροφορμής). Η παρουσία τριβής αποσβάνει τα ακουστικά κύματα κι έτσι δεν υπάρχει κάποια απροσδιοριστία που να σχετίζεται με την κίνηση αυτή (παρόλο που η περιστροφή είναι υπερηχητική). Αντίθετα, στις πολοειδείς εξισώσεις κίνησης (ακτινική και κατακόρυφη), δεν υπάρχει τριβή, άρα μπορούν να εμφανιστούν στον δίσκο σημεία απροσδιοριστίας που να σχετίζονται καθαρά με ακουστικά κύματα. Το ηχητικό κρίσιμο σημείο που συναντά η ροή, είναι το σημείο όπου η ταχύτητα του πλάσματος γίνεται ίση με την ταχύτητα του ήχου:

$$C_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$$

Η θέση ωστόσο του σημείου αυτού δεν είναι καθορισμένη και μπορεί να είναι είτε εντός του δίσκου, είτε λίγο έξω από την επιφάνειά του. Υπάρχει ακόμα ένα κρίσιμο σημείο στον δίσκο, το οποίο βρίσκεται στο ισημερινό επίπεδο (midplane) του δίσκου. Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πως τα κρίσιμα σημεία προκύπτουν από τις εξισώσεις, καθώς και το πώς επηρεάζουν την ολοκλήρωση του συστήματος των εξισώσεων.

## Κεφάλαιο 3

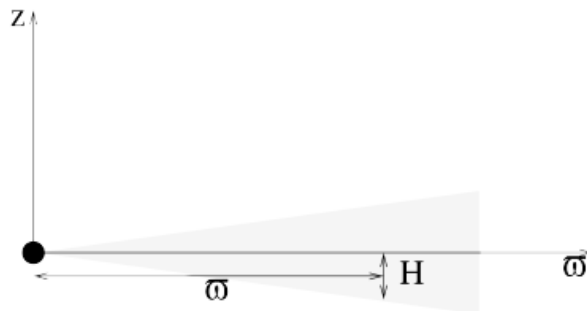
# Μαγνητισμένοι Δίσκοι Προσαύξης

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε ορισμένα στοιχεία της θεωρίας περιγραφής των αστροφυσικών δίσκων προσαύξης από τους οποίους εκρέουν πίδακες. Ειδικότερα, θα μελετήσουμε τυρβώδεις λεπτούς δίσκους που περιστρέφονται Κεπλεριανά καθώς και τυρβώδεις, λεπτούς δίσκους, οι οποίοι περιστρέφονται υποκεπλεριανά και διαπερνώνται από μαγνητικό πεδίο. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στο πρόβλημα απώλειας στροφορμής, δηλαδή στον τρόπο με τον οποίο η ύλη του δίσκου «πέφτει» προς το κεντρικό αντικείμενο. Τέλος, θα δούμε τον μηχανισμό που είναι υπεύθυνος για την μετάβαση από την διαδικασία πρόσπτωσης στην διαδικασία εκροής της ύλης.

### 3.1 Περιγραφή των Δίσκων Προσαύξης

#### 3.1.1 Τυρβώδεις, λεπτοί, Κεπλεριανοί δίσκοι

Ο πιο απλός τρόπος περιγραφής ενός αστροφυσικού δίσκου προσαύξης είναι να θεωρήσουμε λεπτό δίσκο, που δεν διαπερνάται από μαγνητικό πεδίο, δεν εκρέει ύλη από αυτόν και η πρόσπτωση του υλικού προς το κεντρικό αντικείμενο γίνεται αποκλειστικά λόγω απώλειας στροφορμής μέσω του μηχανισμού του ιξώδους. Ένας τέτοιος δίσκος χαρακτηρίζεται ως «τυπικός» (standard accretion disc - SAD).



Σχήμα 3.1: Λεπτός δίσκος προσαύξης

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την κατακόρυφη δομή ενός τέτοιου δίσκου, δηλαδή την σχέση μεταξύ του πάχους  $H$  και της ακτινικής απόστασης  $\varpi$  από το κεντρικό αντικείμενο, υποθέτουμε υδροστατική ισορροπία στην  $\hat{z}$ -κατεύθυνση (σε κυλινδρικές συντεταγμένες):

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho \frac{GMz}{\varpi^3} \quad (3.1)$$

όπου  $-\rho \frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \cdot \hat{z} \approx -\rho \frac{GMz}{\varpi^3}$  είναι η προβολή της δύναμης βαρύτητας ανά όγκο στην κατακόρυφη διεύθυνση. Θεωρώντας επιπλέον ότι ο δίσκος είναι ισόθερμος, δηλαδή ότι ισχύει  $dP = C_s^2 d\rho$  με  $C_s = \sqrt{P/\rho}$  την ισόθερμη ταχύτητα του ήχου, λύνουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε ότι η πυκνότητα είναι της μορφής:

$$\rho(\varpi, z) = \rho(\varpi, z=0) e^{-(z/H)^2} \quad \text{με} \quad H = \frac{C_s \sqrt{2}}{\sqrt{GM/\varpi^3}} \quad (3.2)$$

όπου  $H(\varpi)$  είναι η κατακόρυφη κλίμακα ύψους του δίσκου, δηλαδή η απόσταση από το επίπεδο  $z=0$  στην οποία τα διάφορα φυσικά μεγέθη έχουν αλλάξει σημαντικά.

Γράφουμε στη συνέχεια την ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης ορμής:

$$u_\varpi \frac{du_\varpi}{d\varpi} - \frac{u_\phi^2}{\varpi} = -\frac{GM}{\varpi^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varpi} \quad (3.3)$$

Εάν υποθέσουμε ότι η κυρίαρχη δύναμη στην  $\hat{\varpi}$  κατεύθυνση είναι η βαρύτητα, μπορούμε να θεωρήσουμε αμελητέο τον όρο της πίεσης καθώς και την δύναμη αδράνειας που σχετίζεται με την ταχύτητα  $u_\varpi$ , προκύπτει ότι το ρευστό περιστρέφεται Κεπλεριανά καθώς η ταχύτητα περιστροφής του δίσκου είναι:

$$u_\phi \simeq \sqrt{\frac{GM}{\varpi}} = \varpi \Omega_K \quad (3.4)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση την έκφραση για την κατακόρυφη κλίμακα ύψους του δίσκου  $H(\varpi)$ , βρίσκουμε τον εξής αδιάστατο λόγο:

$$\varepsilon = \frac{h(\varpi)}{\varpi} = \frac{C_s \sqrt{2}}{u_\phi} \quad (3.5)$$

Για να είναι ο δίσκος πράγματι λεπτός, ώστε ο υπολογισμός που πραγματοποιήσαμε να είναι αυτοσυνεπής, πρέπει ο λόγος της σχέσης 3.5 να είναι  $\varepsilon \ll 1$  ή να ισχύει ότι  $u_\phi \ll C_s$ . Η τελευταία ανισότητα δικαιολογεί την απόφασή μας να αγνοήσουμε τον όρο της πίεσης στην εξίσωση 3.3, καθώς η επιτάχυνση λόγω της κλίσης πίεσης  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varpi}$  είναι τάξης μεγέθους  $\sim C_s^2/\varpi$ , είναι πολύ μικρότερη από την φυγόκεντρο και την βαρυτική.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι για έναν λεπτό δίσκο που περιστρέφεται Κεπλεριανά πρέπει να ισχύει ότι:

$$\varepsilon = \frac{h(\varpi)}{\varpi} \ll 1 \quad (3.6)$$

Ζητώντας να ικανοποιείται η τελευταία σχέση, παίρνουμε την εξής ιεραρχία ταχυτήτων στο εσωτερικό ενός SAD:

$$u_\varpi \ll C_s \ll u_\phi \quad (3.7)$$

όπου  $u_\phi$  είναι η Κεπλεριανή ταχύτητα περιστροφής.

Τέλος, σ' έναν «τυπικό» δίσκο προσαύξησης, από την εξίσωση συνέχειας, μπορούμε να προσδιορίσουμε τον ρυθμό προσρόφησης της ύλης. Συγκεκριμένα, θεωρώντας ότι από έναν κύκλο ακτίνας  $\varpi$ , σε χρόνο  $dt$  περνάει μάζα  $2\pi\varpi |u_\varpi| dt \Sigma$ , όπου  $\Sigma$  είναι η επιφανειακή πυκνότητα ( $\Sigma \simeq 2H\rho$ ), ο ρυθμός πρόπτωσης ύλης προς το κεντρικό αντικείμενο προκύπτει να είναι:

$$\dot{M}_\alpha = \frac{dM}{dt} = 2\pi\varpi |u_\varpi| \Sigma = \text{σταθ.} \quad (3.8)$$

Στην στάσιμη κατάσταση ενός SAD, όπου δεν έχουμε εκροή ύλης από την επιφάνεια του δίσκου, η ποσότητα  $\dot{M}_\alpha$  παραμένει σταθερή σε όλες τις ακτίνες  $\varpi$ .



### 3.1.2 Τυρβώδεις, λεπτοί, μαγνητισμένοι δίσκοι

Ένας πιο ακριβής τρόπος περιγραφής των αστροφυσικών δίσκων προσαύξης είναι να θεωρήσουμε λεπτούς δίσκους, που να διαπερνώνται από μαγνητικό πεδίο. Αυτοί οι δίσκοι μπορούν να αποβάλλουν στροφορμή μέσω δύο μηχανισμών: αυτόν του ιξώδους και αυτόν της εκροής μάζας λόγω ύπαρξης του μεγάλης κλίμακας μαγνητικού πεδίου. Η ύλη, καθώς διαφεύγει από τους δίσκους αυτούς σχηματίζει πίδακες, οπότε τους αποκαλούμε Jet Emitting discs (JED) και διαφέρουν από τους «τυπικούς» δίσκους (SAD) σε ορισμένα βαρικά σημεία, τα οποία θα δούμε στη συνέχεια.

Η πρώτη βασική διαφορά μεταξύ των SAD και JED έγκειται στα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση των JED, παίρνουμε την σχέση [18]

$$\dot{M}_a(\varpi_i) = \dot{M}_a(\varpi_e) - 2\dot{M}_j \quad (3.9)$$

όπου  $\varpi_i$  και  $\varpi_e$  είναι η ακτινική απόσταση στο εσωτερικό και το εξωτερικό όριο του δίσκου αντίστοιχα. Με  $\dot{M}_j$  συμβολίζουμε τον ρυθμό μεταφοράς της ύλης από καθεμία από τις δύο επιφάνειες του δίσκου προς τους πίδακες. Από την σχέση 3.9 βλέπουμε ότι, σε αντίθεση με τους SAD, ο ρυθμός προσαύξης μάζας δεν είναι σταθερός και μεταβάλλεται με την ακτινική απόσταση  $\varpi$ , λόγω της εκροής υλικού. Σε μια τυχαία απόσταση από το κεντρικό αντικείμενο, μπορούμε να εκφράσουμε τον ρυθμό προσαύξης μάζας  $\dot{M}_a(\varpi)$  σαν συνάρτηση της παραμέτρου  $\xi$  [19]:

$$\xi = \frac{d \ln}{d \ln \varpi} \left( \frac{\dot{M}_a(\varpi)}{\dot{M}_a(\varpi_e)} \right) \quad (3.10)$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η παράμετρος αυτή είναι ένα μέτρο της ικανότητας του δίσκου να αποβάλλει υλικό, και γι' αυτό ονομάζεται και «δείκτης εκροής» (ejection index). Καθώς μεγαλώνουν οι τιμές της παραμέτρου  $\xi$ , αυξάνεται η ποσότητα του υλικού που απομακρύνεται από τον δίσκο και μεταφέρεται στους πίδακες. Από την σχέση 3.10, μέσω της 3.9, η πρώτη γράφεται ως:

$$\frac{2\dot{M}_j}{\dot{M}_a(\varpi_e)} = 1 - \left( \frac{\varpi_i}{\varpi_e} \right)^\xi \simeq \xi \ln \left( \frac{\varpi_e}{\varpi_i} \right) \quad (3.11)$$

με την τελευταία προσέγγιση να ισχύει μόνο για  $\xi \ll 1$ .

Ακόμα ένα σημείο στο οποίο οι μαγνητισμένοι δίσκοι διαφοροποιούνται από τους «τυπικούς», είναι ότι η ύπαρξη του μαγνητικού πεδίου έχει ως συνέπεια την περιστροφή των πρώτων με υποκεπλευριανή ταχύτητα, μικρότερη δηλαδή της Κεπλευριανής γωνιακής ταχύτητας  $\Omega_K$ . Ο λόγος που συμβαίνει αυτό μπορεί να φανεί εάν συγκρίνουμε τις εξισώσεις ορμής σε κάθε περίπτωση.

Στο εσωτερικό ενός μαγνητισμένου, η εξίσωση ορμής είναι η εξής:

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\rho\vec{\nabla}\Phi_G - \vec{\nabla}P - \vec{\nabla} \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}}{4\pi} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} \quad (3.12)$$

Σε σχέση με την 3.3, βλέπουμε ότι στην τελευταία εξίσωση εμφανίζονται επιπλέον όροι, οι οποίοι σχετίζονται με το μαγνητικό πεδίο και το ιξώδες, οι οποίοι επηρεάζουν την δυναμική του δίσκου. Πιο αναλυτικά, ο όρος  $\vec{\nabla} \left( \frac{B^2}{8\pi} \right)$  εκφράζει την πίεση του μαγνητικού πεδίου και επηρεάζει κυρίως την κατακόρυφη συνιστώσα της εξίσωσης ορμής. Ο όρος  $\frac{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}}{4\pi}$  εκφράζει την δύναμη της μαγνητικής τάσης και επηρεάζει σημαντικά την ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης ορμής, καθώς η δύναμη αυτή προσπαθεί να «ισιώσει» τις μαγνητικές γραμμές που έχουν καμπυλώσει, πάνω στο πολοειδές επίπεδο [4].

Η μαγνητική τάση λοιπόν, αντισταθμίζει την δύναμη της βαρύτητας κι έτσι, μαζί με την κλίση της πίεσης, οδηγούν στην υποκευλιεριανή περιστροφή του δίσκου, δηλαδή  $\Omega < \Omega_K$  (θεωρώντας και πάλι ότι  $u_{\varpi} \ll 1$ ).

Η ύπαρξη του μαγνητικού πεδίου έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη διαφόρων ειδών ασταθειών στο εσωτερικό του δίσκου. Ένα τέτοιο παράδειγμα η μαγνητοπεριστροφική αστάθεια [17], αλλά γενικά στο σύστημα καταλήγει να επικρατεί μια έντονη τυρβώδης κατάσταση, η οποία οδηγεί στην εμφάνιση φαινομένων μεταφοράς. Τέτοια φαινόμενα είναι το ιζώδες (ο όρος  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}$  στην 3.12), που μπορεί να περιγραφεί μέσω του συντελεστή κινηματικού ιζώδους  $\nu_v$ , καθώς και η διάχυση του μαγνητικού πεδίου, η οποία μπορεί να περιγραφεί από αντίστοιχους συντελεστές  $\eta_p$  και  $\eta_\varphi$  (στο πολοειδές επίπεδο και την αξιμουθιακή διεύθυνση αντίστοιχα).

Η διάχυση του πεδίου στο εσωτερικό ενός μαγνητισμένου δίσκου, είναι απαραίτητη για την πρόσπτωση υλικού στο κεντρικό αντικείμενο, εφόσον το πλάσμα πρέπει να μπορεί να διασχίσει τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές. Αυτό σημαίνει ότι εντός του δίσκου, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σύστημα εξισώσεων της ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής, αλλά αυτό της μη ιδεατής. Η χρήση δύο συντελεστών για την περιγραφή του φαινομένου διάχυσης του πεδίου, οφείλεται στο γεγονός ότι η ταχύτητα περιστροφής του υλικού στον δίσκο γύρω από το κεντρικό αντικείμενο είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα πρόσπτωσής του σε αυτό. Ισχύει δηλαδή ότι:

$$\frac{1}{2}\rho u_p^2 \ll \frac{1}{2}\rho u_\varphi^2 \quad (3.13)$$

συνεπώς η διάχυση του πεδίου στην αξιμουθιακή κατεύθυνση είναι εντονότερη με αποτέλεσμα να υπάρχει ανισοτροπία μεταξύ των συντελεστών  $\eta_p$  και  $\eta_\varphi$ .

Η μοντελοποίηση των φαινομένων μεταφοράς που εμφανίζονται σ' έναν μαγνητισμένο δίσκο προσαύξησης μπορεί να γίνει ορίζοντας στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου ( $z = 0$ , midplane) τις εξής αδιάστατες παραμέτρους [1], [20]:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{\eta_p}{v_A h} \\ \chi_m &= \frac{\eta_p}{\eta_\varphi} \\ \mathcal{P}_m &= \frac{\nu_v}{\eta_p} \end{aligned} \quad (3.14)$$

όπου  $v_A$  η ταχύτητα Alfvén. Η παράμετρος  $\alpha_m$  αποτελεί ένα μέτρο του επιπέδου της τυρβής (level of turbulence) στο εσωτερικό του δίσκου, εξ' αιτίας του μαγνητικού πεδίου, ενώ η παράμετρος  $\chi_m$  μετρά τον βαθμό ανισοτροπίας (degree of anisotropy) της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου μεταξύ του πολοειδούς επιπέδου και της  $\hat{\varphi}$ -διεύθυνσης. Τέλος, η παράμετρος  $\mathcal{P}_m$  ονομάζεται μαγνητικός αριθμός Prandtl και αποτελεί ένα μέτρο σύγκρισης μεταξύ του ιζώδους και της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στον δίσκο. Συνήθεις τιμές για τις παραμέτρους αυτές είναι:  $\alpha_m < 1$ ,  $\chi_m \sim 1$  και  $\mathcal{P}_m \sim 1$ , με το τελευταίο να σημαίνει ίδια επίπεδα ενεργού ιζώδους και διάχυσης του μαγνητικού πεδίου. Στην περίπτωση που η διάχυση του μαγνητικού πεδίου στην τοροειδή διεύθυνση είναι πολύ μεγαλύτερη, παίρνουμε  $\chi_m \ll 1$ .

### 3.2 Πρόβλημα Απώλειας Στροφορμής

Ένα από τα πιο βασικά θέματα στην περιγραφή των αστροφυσικών δίσκων προσαύξησης είναι αυτό στο οποίο αναφερόμαστε ως «το πρόβλημα απώλειας στροφορμής», δηλαδή μέσω ποιων φυσικών μηχανισμών η περιστρεφόμενη γύρω από το αντικείμενο ύλη χάνει ενέργεια και στροφορμή, ώστε να μπορέσει να κινηθεί ακτινικά προς το κέντρο. Δύο από τους επικρατέστερους μηχανισμούς, κατάλληλους να εξηγήσουν το φαινόμενο είναι: οι μαγνητοϋδροδυναμικές εκροές (πίδακες-jets) και το ενεργό ιζώδες.

Οι μαγνητοϋδροδυναμικές εκροές μπορούν να απάγουν την στροφορμή που μεταφέρεται τόσο από την ύλη όσο και από το μαγνητικό πεδίο. Σύμφωνα με την θεωρία δημιουργίας των πιδάκων, καθώς το υλικό «πέφτει» προς το κεντρικό αντικείμενο, ένα μεγάλο μέρος της ενέργειας και της στροφορμής του συστήματος του δίσκου τροφοδοτεί την εκροή ύλης, δημιουργώντας δύο αντίθετης κατεύθυνσης πίδακες. Παρατηρήσεις δίσκων γύρω από πρωτοαστέρες έχουν δείξει ότι οι πίδακες που υπάρχουν σ' αυτούς μεταφέρουν ενέργεια και στροφορμή ίδιας τάξης μεγέθους με αυτή που χάνεται από τον δίσκο, επιβεβαιώνοντας έτσι την υπόθεση ότι αποτελούν έναν από τους βασικότερους μηχανισμούς απώλειας στροφορμής σε αυτού του είδους τα συστήματα.

Πέραν της ύπαρξης των πιδάκων, στο εσωτερικό του δίσκου, η ταχύτητα περιστροφής της ύλης εξαρτάται από την ακτινική απόσταση  $\varpi$ , με αποτέλεσμα να έχουμε περιοχές που περιστρέφονται με διαφορετικές ταχύτητες. Η διαφορά αυτή έχει ως αποτέλεσμα της ανάπτυξη δυνάμεων εσωτερικής τριβής (κρούσεις μεταξύ των μορίων), οι οποίες με την σειρά τους οδηγούν στην μεταφορά ορμής από τα ταχύτερα στα πιο αργά περιστρεφόμενα μέρη του δίσκου. Αυτός είναι ο μηχανισμός του μοριακού ιξώδους, αλλά αποδυναμώνεται πως αδυνατεί να αποσπάσει σημαντικές ποσότητες στροφορμής από τον δίσκο.

Ωστόσο, υπάρχει ένας παρόμοιος μηχανισμός, που ονομάζεται ενεργό ιξώδες και είναι πιο σημαντικός. Στην περίπτωση αυτή, οι τυρβώδεις κινήσεις του πλάσματος εντός του δίσκου, οδηγούν στην δημιουργία δινών, οι οποίες λειτουργούν όπως τα μόρια στο μοριακό ιξώδες. Επομένως, η ύπαρξη της τύρβης οδηγεί στην κατακρήμνιση ενέργειας από τους μεγαλύτερους (μεγάλες δίνες) στους μικρότερους (μικρές δίνες) σχηματισμούς και τελικά στην απαγωγή ενέργειας και στροφορμής από το σύστημα.

Στην περίπτωση των μαγνητισμένων δίσκων προσαύξης, ο μηχανισμός του ενεργού ιξώδους μπορεί να εφαρμοστεί θεωρώντας ότι αυτό οφείλεται σε δίνες μαγνητικού πεδίου αντί για δίνες ρευστού. Στις εργασίες τους οι Balbus και Hawley [17], έχουν δείξει ότι σε έναν δίσκο όπου υπάρχει ένα σχετικά ασθενές μαγνητικό πεδίο, αναπτύσσεται το είδος της αστάθειας στο οποίο έχουμε ήδη αναφερθεί και είναι η μαγνητοπεριστροφική αστάθεια (Magnetorotational instability-MRI). Η ύπαρξη της αστάθειας αυτής οδηγεί στην δημιουργία τυρβώδους κατάστασης, η οποία μπορεί και απάγει ενέργεια και στροφορμή από το σύστημα. Από εδώ και στο εξής λοιπόν, όποτε αναφερόμαστε σε ιξώδες, θα εννοούμε τον μηχανισμό του ενεργού ιξώδους.

Ένας τρόπος να συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους απαγωγής στροφορμής και να δούμε πότε καθεμία από αυτές επικρατεί στον δίσκο, είναι να ορίσουμε μία νέα παράμετρο  $\Lambda$ . Για τον προσδιορισμό της παραμέτρου αυτής, ξεκινάμε από την αζιμουθιακή ( $\hat{\phi}$ ) συνιστώσα της εξίσωσης ορμής (σε κυλινδρικές συντεταγμένες):

$$\rho \left( u_{\varpi} \frac{\partial u_{\phi}}{\partial \varpi} + u_z \frac{\partial u_{\phi}}{\partial z} + \frac{u_{\phi} u_z}{\varpi} \right) = F_{\phi} + (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\phi} \quad (3.15)$$

όπου  $F_{\phi}$  είναι η μαγνητική ροπή που ασκείται στο πλάσμα λόγω του μεγάλης κλίμακας μαγνητικού πεδίου («jet» torque) και  $(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\phi}$  η «ιξώδης» ροπή τυρβώδους προέλευσης, η οποία πιθανώς οφείλεται στην ύπαρξη μικρής κλίμακας μαγνητικού πεδίου. Η σχέση αυτή μπορεί εύκολα να γραφεί και ως εξής:

$$\rho \vec{u}_p \cdot \vec{\nabla} (\varpi u_{\phi}) = \varpi F_{\phi} + \varpi (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\phi} \quad (3.16)$$

Διαιρώντας την εξίσωση 3.16 με τον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους της, ορίζουμε την παράμετρο  $\Lambda$  στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου:

$$\Lambda = \left| \frac{Jet\ torque}{Turbulent\ torque} \right|_{z=0} = \left| \frac{F_{\phi}}{(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\phi}} \right|_{z=0} \quad (3.17)$$

κι έτσι η εξίσωση στροφορμής (3.15) γράφεται συναρτήσει της νέας παραμέτρου ως [1]:

$$1 + \Lambda = \left. \frac{\rho \vec{u}_p \cdot \vec{\nabla} (\varpi u_{\phi})}{\varpi (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\phi}} \right|_{z=0} \quad (3.18)$$

### 3.3 Προσαύξηση Ύλης στον Δίσκο

Στην παρούσα ενότητα, ακολουθώντας την εργασία του Ferreira [1] θα δούμε τους παράγοντες που επηρεάζουν την πρόσπτωση υλικού και ειδικότερα τον τρόπο με τον οποίο το σχήμα των μαγνητικών δυναμικών γραμμών, εντός του δίσκου, επιδρά στην διαδικασία προσαύξησης της ύλης. Επειδή ο δίσκος είναι τυρβώδης, καθώς η ύλη κινείται προς το κεντρικό αντικείμενο, κάμπει τις πολοειδείς δυναμικές γραμμές, η παραμετροποίηση των οποίων μπορεί να βρεθεί από το νόμο του Ohm και συγκεκριμένα από την  $\hat{\varphi}$  συνιστώσα.

$$J_\varphi = \frac{\sigma}{c} (u_z B_\varpi - u_\varpi B_z) \quad (3.19)$$

Στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου, όπου θεωρούμε ότι η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική ( $u_z = 0$ ), αν λύσουμε την τελευταία εξίσωση ως προς την ακτινική ταχύτητα  $u_\varpi$ , παίρνουμε τον μαγνητικό αριθμό Reynolds:

$$R_m \equiv \frac{u_\varpi \varpi}{\eta_p} \Big|_{(\varpi,0)} = \frac{4\pi \varpi J_\varphi}{c B_z} \Big|_{(\varpi,0)} \quad (3.20)$$

όπου  $\eta_p = c^2/4\pi\sigma$ , ο μη ομαλός συνελεστής διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στο πολοειδές επίπεδο.

Για να δούμε πως σχετίζεται ο μαγνητικός αριθμός Reynolds με την προσαύξηση της ύλης στους δίσκους, ορίζουμε την χαρακτηριστική κλίμακα ύψους της συνάρτησης μαγνητικής ροής  $l(\varpi)$ , δηλαδή την κατακόρυφη απόσταση από το ισημερινό επίπεδο του δίσκου στο οποίο η συνάρτηση  $\alpha(\varpi, z)$  αλλάζει σημαντικά, ως:

$$\frac{\alpha(\varpi, 0)}{l^2} = - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \Big|_{(\varpi,0)} \quad (3.21)$$

Θεωρώντας ότι η συνάρτηση μαγνητικής ροής μεταβάλλεται με την ακτινική απόσταση, βάσει ενός νόμου δύναμης, ορίζουμε αυτόν τον εκθέτη  $\beta$  ως εξής:

$$\beta = \frac{d \ln \alpha(\varpi, z)}{d \ln \varpi} \quad (3.22)$$

Επιπλέον, στις ενότητες 2.2.1 και 2.2.3 είδαμε ότι το ρεύμα  $J_\varphi$  και το μαγνητικό πεδίο  $B_z$  συνδέονται με την συνάρτηση μαγνητικής ροής  $\alpha(\varpi, z)$  μέσω της εξίσωσης επαγωγής και της σχέσης 2.21 αντίστοιχα, άρα ο ακτινικός μαγνητικός αριθμός Reynolds γίνεται κατά προσέγγιση:

$$R_m = \frac{4\pi \varpi J_\varphi}{c B_z} \Big|_{(\varpi,0)} \sim \frac{\varpi^2}{l^2} \quad (3.23)$$

Από την σχέση 3.23 βλέπουμε πως στην περίπτωση που οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι κατακόρυφες εντός του δίσκου, δηλαδή ισχύει  $l \sim \varpi$  (που σημαίνει ότι η τιμή της συνάρτησης μαγνητικής ροής δεν αλλάζει σημαντικά καθώς απομακρυνόμαστε από το ισημερινό επίπεδο μέχρι να βγούμε από τον δίσκο ή διαφορετικά ότι  $B_p \simeq B_z$  παντού εντός του δίσκου), ο μαγνητικός αριθμός Reynolds θα είναι  $R_m \sim 1$  και στην εξίσωση επαγωγής θα υπάρχει ισορροπία μεταξύ της οριζόντιας μεταφοράς υλικού (advection) και της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου (diffusion). Υπό αυτές τις συνθήκες, το πλάσμα μπορεί να διασχίσει τις δυναμικές γραμμές και να κατευθυνθεί προς το κεντρικό αντικείμενο, αλλά δεν είναι δυνατή η εκροή ύλης.

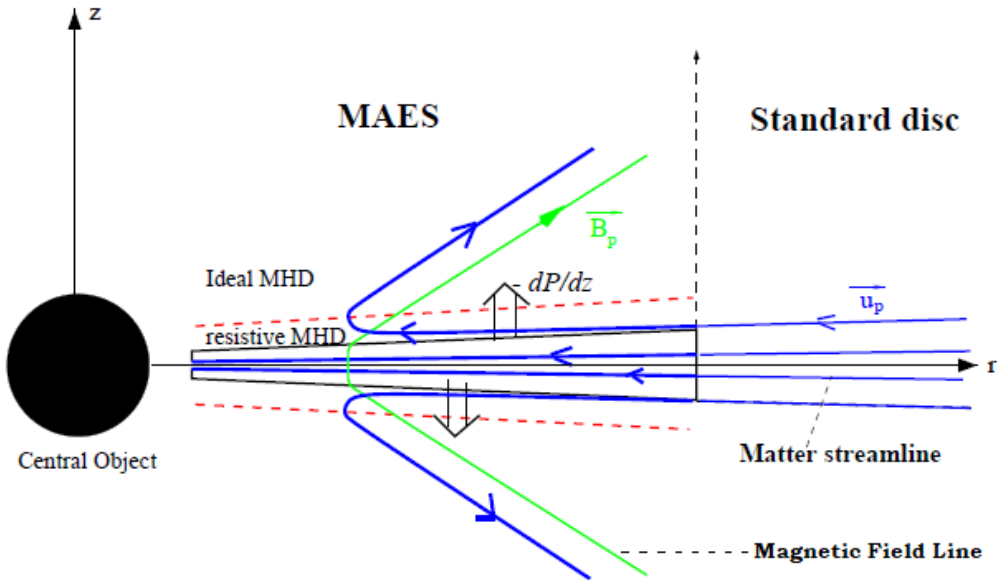
Προκειμένου να είναι δυνατή η εκροή, πρέπει οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές να κάμπτονται ελαφρώς μέσα στον δίσκο και να μην είναι εντελώς κατακόρυφες, δηλαδή να ισχύει  $l \ll \varpi$ . Εφόσον ικανοποιείται αυτή η συνθήκη, το πλάσμα μπορεί να διαφεύγει από τις επιφάνειες του δίσκου και να μεταφέρεται στους πίδακες. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός Reynolds

$\mathcal{R}_m$  θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος της μονάδας στο εσωτερικό του δίσκου, αλλά όχι πολύ μεγάλος καθώς βρισκόμαστε στην περιοχή της μη-ιδεατής μαγνητουδροδυναμικής.

Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή, θα δούμε πώς σχετίζεται ο μαγνητικός αριθμός Reynolds με την παράμετρο  $\Lambda$  που ορίσαμε προηγουμένως. Έχουμε καταλήξει στην εξίσωση 3.18 για την αζιμουθιακή συνιστώσα της εξίσωσης ορμής. Σε αυτή, η μοντελοποίηση της ροπής λόγω των πίδακων (δηλαδή του όρου  $F_\varphi$ ) είναι μία ξεκάθαρη και κατανοητή διαδικασία, ωστόσο δεν ισχύει το ίδιο για τον όρο της τύρβης. Για να απλοποιηθεί η εξίσωση 3.18, χρησιμοποιούμε τους ορισμούς των παραμέτρων, όπως δόθηκαν στην σχέση 3.14, ενώ παράλληλα για τον όρο της τύρβης παίρνουμε την εξής προσέγγιση:  $\varpi (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\varphi}) = \vec{\nabla} (\varpi \vec{T}_v)$ , όπου  $T_v \sim a_v P$  [2], [1]. Γνωρίζουμε ακόμα ότι στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου ισχύει  $u_p = u_{\varpi 0}$  κι επειδή μελετάμε λεπτούς δίσκους, ισχύει η σχέση 3.5. Η εφαρμογή όλων αυτών στην σχέση 3.18, μας επιτρέπει να γράψουμε την εξίσωση στροφορμής στο midplane ως:

$$1 + \Lambda \simeq R_m \left( \frac{\eta_p}{\nu_v} \right) = \frac{R_m}{\mathcal{P}_m} \tag{3.24}$$

Παίρνοντας μια τυπική τιμή  $\mathcal{P}_m \sim 1$ , βλέπουμε ότι ένας «τυπικός» δίσκος προσαύξης, στον οποίο κυριαρχεί το ενεργό ιξώδες σαν μηχανισμός απώλειας στροφορμής ( $\Lambda \ll 1$ ) απαιτεί κατακόρυφες πολοειδείς δυναμικές γραμμές, δηλαδή  $\mathcal{R}_m \sim 1$ . Αντίθετα, στην περίπτωση που οι πίδακες απαγάουν το μεγαλύτερο μέρος της στροφορμής ενός δίσκου ( $\Lambda \gg 1$ ), προκειμένου να σχηματιστούν οι πίδακες, απαιτούνται «λυγισμένες» μαγνητικές επιφάνειες, δηλαδή πρέπει να είναι:  $\mathcal{R}_m \sim \Lambda \sim \varepsilon^{-1}$  [19].



Σχήμα 3.2: Σχηματική απεικόνιση μιας Μαγνητισμένης Δομής Προσαύξης-Εκροής MAES. Με μπλε χρώμα απεικονίζονται οι γραμμές ροής και με πράσινο απεικονίζονται οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές.[1]

### 3.4 Εκροή Ύλης από τον Δίσκο

#### 3.4.1 Μεταφορά της ύλης στους πίδακες

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα παρουσιάσουμε ορισμένα στοιχεία σχετικά με την εκροή ύλης από τον δίσκο και κυρίως τον τρόπο με τον οποίο η ύλη «περνάει» από την διαδικασία πρόσπτωσης στην διαδικασία εκροής. Προκειμένου να μελετήσουμε την διαδικασία εκροής, ξεκινάμε γράφοντας τις δύο πολοειδείς συνιστώσες της εξίσωσης ορμής:

$$\hat{\omega} : \left( \vec{u}_p \cdot \vec{\nabla} \right) u_{\varpi} \simeq \frac{u_{\varphi}^2}{\varpi} - \Omega_K^2 \varpi + \frac{F_{\varpi}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varpi} \quad (3.25)$$

$$\hat{z} : \left( \vec{u}_p \cdot \vec{\nabla} \right) u_z \simeq -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \Omega_K^2 z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{B_{\varpi}^2 + B_{\varphi}^2}{8\pi} \quad (3.26)$$

στις οποίες έχουμε θεωρήσει ότι η μαγνητική τάση ( $F_{\varpi}/\rho$ ) συνεισφέρει σημαντικά μόνο στην ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης ορμής, ενώ η μαγνητική πίεση ( $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{B^2}{8\pi}$ ) επηρεάζει μόνο την κατακόρυφη δομή του δίσκου.

Στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου η συνολική ροπή (μαγνητική + ιξώδης) είναι αρνητική, γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα ο δίσκος να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα λίγο μικρότερη της κεπλεριανής  $\Omega_K$  οδηγώντας το πλάσμα να κινηθεί προς το κεντρικό αντικείμενο ( $u_{\varpi} < 0$ ). Όμως στην επιφάνεια του δίσκου, προκύπτει μια ροή με κατεύθυνση «προς τα έξω» ( $u_{\varpi}^+ > 0$ , όπου με «+» συμβολίζονται οι τιμές των φυσικών μεγεθών στην επιφάνεια του δίσκου) διότι τόσο η μαγνητική τάση  $F_{\varpi}$  (της οποίας η επίδραση στο πλάσμα ενισχύεται από την μείωση της πυκνότητας) όσο και η φυγόκεντρος δύναμη υπερνικούν την βαρύτητα ( $\Omega^+ > \Omega_K$ ).

Υποθέτουμε ότι η ύλη που μεταφέρεται στους πίδακες προέρχεται από τα εσώτερα στρώματα του δίσκου με  $u_z^+ > 0$  και ο φυσικός μηχανισμός που εξηγεί την υπόθεση αυτή «κρύβεται» στην εξίσωση 3.26: η μοναδική δύναμη που μπορεί πάντα να υπερσχύει ταυτόχρονα της βαρύτητας και της μαγνητικής πίεσης είναι η κλίση πίεσης του πλάσματος [1], [19]. Εντός του δίσκου, επιτυγχάνεται μια οιονεί μαγνητοστατική ισορροπία, καθώς η ύλη κατευθύνεται προς το mid-plane ( $u_z < 0$ ) ενώ παράλληλα κινείται προς το κεντρικό αντικείμενο. Ωστόσο, το πλάσμα που προέρχεται από μια εξώτερη περιοχή του δίσκου, θα καταλήξει εν τέλει στα ανώτερα στρώματα σε μια μικρότερη ακτίνα. Στην περιοχή αυτή, η κλίση πίεσης του πλάσματος υπερσχύει ελάχιστα δίνοντας στο πλάσμα μια θετική κατακόρυφη ταχύτητα ( $u_z^+ > 0$ ) απομακρύνοντάς το από τον δίσκο, σε μια απόσταση που εξαρτάται από την τοπική εξίσωση ενέργειας του δίσκου.

#### 3.4.2 Στάσιμη εκροή ύλης

Εάν στο σύστημα ενός δίσκου προσαύξησης πληρούνται οι απαραίτητες προϋποθέσεις (δηλαδή περιστροφή, ανοιχτές δυναμικές γραμμές και διάχυση μαγνητικού πεδίου), τότε θα έχουμε σίγουρα εκροή ύλης. Ωστόσο, προκειμένου να είναι στάσιμη η εκροή, απαιτείται ακόμα μια συνθήκη.

Η διαδικασία προσαύξησης χαρακτηρίζεται από μια αρνητική αζιμουθιακή συνιστώσα της δύναμης Lorentz ( $F_{\varphi} < 0$ ), ενώ για να συμβεί μαγνητική επιτάχυνση στους πίδακες, η συνιστώσα αυτή πρέπει να είναι θετική. Η εν λόγω συνιστώσα της δύναμης Lorentz δίνεται από την σχέση:

$$F_{\varphi} = \frac{1}{c} (J_z B_{\varpi} - B_z J_{\varpi}) \quad (3.27)$$

επομένως η απαραίτητη αλλαγή προσήμου εξαρτάται κυρίως από την ακτινική συνιστώσα του ρεύματος  $J_\varpi$  ή ισοδύναμα από την κατακόρυφη μεταβολή της αξιμουθιακής συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου, εφόσον τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$J_\varpi = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \quad (3.28)$$

Για να μεταβούμε από την πρόσπτωση στην εκροή, το ρεύμα  $J_\varpi$  πρέπει να ελαττώνεται σημαντικά σε μια κλίμακα ύψους. Από την αξιμουθιακή συνιστώσα της εξίσωσης του δυναμό (2.18), μπορούμε να πάρουμε την σχέση:

$$\frac{4\pi}{c} \eta_\varphi \frac{\partial J_\varpi}{\partial z} = \varpi \vec{B}_p \cdot \vec{\nabla} \Omega - \frac{\partial (u_z B_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial (u_\varpi B_\varphi)}{\partial \varpi} + \frac{\eta_\varphi}{\varpi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varpi} + \eta_\varphi \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varpi^2} - \eta_\varphi \frac{B_\varphi}{\varpi^2} \quad (3.29)$$

την οποία ολοκληρώνουμε κατακόρυφα στο εσωτερικό του δίσκου από το σημείο  $z = 0$ , μέχρι κάποιο τυχαίο  $z$  λίγο έξω από την επιφάνειά του. Επειδή η ακτινική ταχύτητα πρόσπτωσης  $u_\varpi$  και το αξιμουθιακό πεδίο  $B_\varphi$  είναι αμελητέα στον δίσκο, μπορούμε να αγνοήσουμε τους τέσσερις τελευταίους όρους του δεξιού μέλους της εξίσωσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση [1]:

$$\frac{4\pi}{c} \eta_\varphi J_\varpi \simeq \frac{4\pi}{c} \eta_{\varphi 0} J_{\varpi 0} + \varpi \int_0^z dz \vec{B}_p \cdot \vec{\nabla} \Omega - B_\varphi u_z \quad (3.30)$$

όπου με τον δείκτη «0» συμβολίζονται οι τιμές των διαφόρων μεγεθών στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου. Ο όρος  $B_\varphi u_z$  περιγράφει το φαινόμενο οριζόντιας μεταφοράς πλάσματος (advection), οπότε είναι σημαντικός μόνο στις επιφάνειες του δίσκου κι όχι στο εσωτερικό του όπου κυριαρχεί η διάχυση του μαγνητικού πεδίου.

Στην εξίσωση 3.30, ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους περιγράφει το ρεύμα που οφείλεται στην ηλεκτρεγερτική δύναμη και δείχνει την εξάρτηση του ρεύματος  $J_\varpi$  από το ακτινικό ρεύμα που διαπερνά το midplane του δίσκου. Ο δεύτερος όρος περιγράφει το ρεύμα που οφείλεται στην διαφορική περιστροφή, το οποίο διατρέχει τον δίσκο με αντίθετη φορά από το ρεύμα του πρώτου όρου διότι  $\nabla \Omega < 0$ , οπότε ο όρος αυτός έχει συνολικά αρνητικό πρόσημο.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το κατακόρυφο προφίλ του ρεύματος  $J_\varpi$  ελέγχεται κυρίως από τον λόγο του όρου της διαφορικής περιστροφής προς τον όρο του επαγόμενου ρεύματος [19]. Η δημιουργία πιδάκων δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την διαφορική περιστροφή, καθώς αυτή είναι υπεύθυνη για την κατακόρυφη ελάττωση του ρεύματος  $J_\varpi$ . Ωστόσο, το ρεύμα λόγω της διαφορικής περιστροφής που αντισταθμίζει το ρεύμα στο midplane δεν πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερο από το τελευταίο (κατά απόλυτη τιμή), διότι στην περίπτωση αυτή το  $J_\varpi$  θα έπαιρνε πολύ αρνητικές τιμές, γεγονός που θα οδηγούσε σε αφύσικα μεγάλες τιμές του  $B_z$  στην επιφάνεια του δίσκου.

Για να ελέγξουν την σχέση μεταξύ των ρευμάτων οι Ferreira & Pelletier [19] όρισαν μια παράμετρο  $\Gamma$  ως τον λόγο του του όρου της διαφορικής περιστροφής προς τον όρο του επαγόμενου ρεύματος στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου:

$$\Gamma \simeq \left. \frac{B_\varpi \varpi \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi}}{\frac{4\pi}{c} \eta_\varphi \frac{\partial J_\varpi}{\partial z}} \right|_{z=0} \quad (3.31)$$

Χρησιμοποιώντας τη νέα αυτή παράμετρο, η ακτινική συνιστώσα του ρεύματος μπορεί να γραφεί ως:

$$\eta_\varphi J_\varpi \simeq \eta_{\varphi 0} J_{\varpi 0} \left[ 1 - \Gamma \frac{1}{2} \left( \frac{z}{h(\varpi)} \right)^2 \right] \quad (3.32)$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται η σημασία της παραμέτρου  $\Gamma$ , την οποία πρέπει να θέσουμε  $\Gamma \sim 1$  ώστε να εξασφαλίσουμε την αντιστροφή του προσήμου της δύναμης Lorentz αποκλειστικά στις επιφάνειες του δίσκου και κατά συνέπεια την εκροή της ύλης.

Η στάσιμη εκροή ύλης επιτυγχάνεται μόνο όταν οι δύο πρώτοι όροι του δεξιού μέλους της εξίσωσης 3.30 είναι συγκρίσιμοι, το οποίο με την βοήθεια των παραμέτρων της σχέσης 3.14, μπορεί να εκφραστεί μέσω της σχέσης:

$$\Lambda \sim \Lambda_c \equiv \frac{3\chi_m}{\alpha_m^2 \mathcal{P}_m \varepsilon} \quad (3.33)$$

Για  $\Lambda > \Lambda_c$  η περιστροφή της ύλης στην επιφάνεια του δίσκου επιβραδύνεται, ενώ για  $\Lambda < \Lambda_c$  δεν υπάρχει αρκετή ενέργεια ώστε να τροφοδοτήσει την μεγάλη ποσότητα ύλης που προσπαθεί να διαφύγει από τον δίσκο. Επομένως, η σχέση 3.33 αποτελεί απαραίτητη συνθήκη για την στασιμότητα της εκροής.

### 3.4.3 Κατακόρυφη κίνηση ύλης στον δίσκο & πίδακες

Προηγούμενος, στην υποενότητα 3.4.1, υποθέσαμε ότι με κάποιον τρόπο το υλικό του δίσκου μπορεί να κινηθεί από τα εσώτερα στρώματα προς τις επιφάνειες, όπου «φορτώνεται» στις μαγνητικές δυναμικές γραμμές και διαφεύγει από αυτόν προς τους πίδακες. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τις συνθήκες που καθιστούν δυνατή την κατακόρυφη κίνηση υλικού μέσα στον δίσκο. [19]

Στο θεωρητικό πλαίσιο των «τυπικών» δίσκων προσαύξησης (SAD), όταν η θερμική πίεση του πλάσματος αντισταθμίζει την βαρυτική έλξη από το κεντρικό αντικείμενο, επιτυγχάνεται μια κατάσταση που προσεγγίζει την ισορροπία. Στο θεωρητικό πλαίσιο των MAES όμως η μαγνητική πίεση στην πολοειδή και την τοροειδή διεύθυνση και η μαγνητική τάση (λόγω του  $B_z$ ) περιορίζουν επιπλέον το πλάσμα του δίσκου (magnetic pinching). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαγνητισμένοι δίσκοι να είναι πιο λεπτοί από τους υδροδυναμικούς και στο εσωτερικό τους η κατάσταση μαγνητοϋδροστατικής ισορροπίας περιγράφεται από την κατακόρυφη συνιστώσα της εξίσωσης ορμής, η οποία γράφεται:

$$\frac{\partial P}{\partial z} \simeq -\rho \Omega_K^2 z + \frac{1}{c} (J_\varpi B_\varphi - J_\varphi B_\varpi) \quad (3.34)$$

Από την εξίσωση αυτή βλέπουμε ότι κάθε κατακόρυφη κίνηση που προκύπτει λόγω απόκλισης από την ισορροπία αυτή στο εσωτερικό του δίσκου, είτε θα οδηγήσει στην μεταφορά ύλης προς το midplane εξ' αιτίας των δυνάμεων συμπίεσης, είτε θα οδηγήσει στην μεταφορά ύλης στις επιφάνειες του δίσκου, εφόσον η κλίση πίεσης του πλάσματος καταφέρει να υπερνικήσει τις υπόλοιπες δυνάμεις. Επομένως, η μοναδική περίπτωση στην οποία έχουμε κατακόρυφη μεταφορά υλικού από το εσωτερικό προς τις επιφάνειες είναι αυτή στην οποία η κλίση πίεσης του πλάσματος, υπερνικά τις δυνάμεις συμπίεσης του δίσκου.

Συνοψίζοντας, για την εκροή ύλης, γνωρίζουμε τα εξής: καθώς το υλικό του δίσκου προσπίπτει στο κεντρικό αντικείμενο, πλάσμα από τις εξωτερικές περιοχές του δίσκου φτάνει στα ανώτερα στρώματα των εσωτερικών περιοχών του, όπου η θερμική πίεση το «σπρώχνει» κατακόρυφα προς τα πάνω. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την κίνηση υλικού προς την επιφάνεια του δίσκου. Στην περιοχή όμως αυτή, η αζιμουθιακή συνιστώσα της δύναμης Lorentz αλλάζει πρόσημο (γίνεται από αρνητική θετική), οπότε το πλάσμα που έρχεται από τα κατώτερα στρώματα του δίσκου «φορτώνεται» στις μαγνητικές δυναμικές γραμμές και αρχίζει να επιταχύνεται προς τα έξω μέσω του μαγνητοπεριστροφικού μηχανισμού. Η διαδικασία αυτή της εκροής μπορεί να αναπαρασταθεί σχηματικά πάνω στο πολοειδές επίπεδο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.2.



### 3.5 Σύνδεση παραμέτρων δίσκου-πίδακων

Η σύνδεση ενός αστροφυσικού δίσκου προσαύξης με τους πίδακες που ξεκινούν από αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της μελέτης του συστήματος των MAES. Ωστόσο, η πλήρης ανάλυση της φυσικής των πίδακων και η συσχέτιση των διαφόρων παραμέτρων που προκύπτουν με τις παραμέτρους του δίσκου, βρίσκονται έξω από τα όρια ενδιαφέροντος της παρούσας εργασίας. Θα δούμε παρόλα αυτά ορισμένα στοιχεία της συσχέτισης αυτής, τα οποία θα επικαλεστούμε στην συνέχεια.

#### 3.5.1 Αδιάστατες παράμετροι

Ένας δίσκος προσαύξης, στο πλαίσιο της μη ιδεατής MHD περιγράφεται από 11 μεταβλητές: τις ίδιες 8 με τις οποίες περιγράφονται οι πίδακες (ιδεατή MHD) και 3 συντελεστές διάχυσης & μεταφοράς. Στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις αρχικές τιμές των διαφόρων φυσικών μεγεθών που εμφανίζονται στο πρόβλημα. Σε μια συγκεκριμένη ακτίνα  $r_0$  γράφουμε:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \rho_0 \Omega_K^2 h^2 \\
 T_0 &= \frac{GMm_p}{k_B \varpi_0} \varepsilon^2 \\
 u_{r,0} &= -u_0 = -m_s \varepsilon \Omega_K \varpi_0 \quad \text{όπου} \quad m_s = 2q\mu \frac{1+\Lambda}{\Lambda} = \alpha_v \varepsilon (1 + \Lambda) \\
 \left. \frac{du_z}{dz} \right|_{z=0} &= \frac{u_0}{\varpi_0} (\xi - 1) \\
 \Omega_0 &= \delta \Omega_K \quad \text{όπου} \quad \delta = \left( 1 - \varepsilon^2 \left[ \frac{m_s^2}{2} + 2(2 - \beta) + \mu \mathcal{R}_m \right] \right)^{1/2} \quad (3.35) \\
 \rho_0 &= \frac{\dot{M}_{a0}}{4\pi \Omega_K \varpi_0^3 m_s \varepsilon^2} \\
 B_0 &= \left( \frac{\mu}{m_s} \right)^{1/2} \left( \frac{\dot{M}_{a0} \Omega_K}{\varpi_0} \right)^{1/2} \quad \text{όπου} \quad \mu = \frac{B_0^2}{4\pi P_0} \\
 \left. \frac{dB_\phi}{dz} \right|_{z=0} &= -4\pi J_{r,0} = -q \frac{B_0}{h} \quad \text{όπου} \quad q = \frac{\alpha_m \mathcal{P}_m \Lambda \varepsilon}{2\mu^{1/2}} \delta \\
 J_{\phi,0} &= \mathcal{R}_m \frac{B_0}{4\pi \varpi_0} \quad \text{όπου} \quad \mathcal{R}_m = \mathcal{P}_m (1 + \Lambda)
 \end{aligned}$$

όπου  $\nu_v = \alpha_v \Omega_K h^2$ ,  $\Omega_K = \sqrt{GM/\varpi_0^3}$  και  $\dot{M}_{a0} = \dot{M}_a(\varpi_0)$ . Η παράμετρος  $\beta = d \ln a / d \ln \varpi_0$  (3.22) περιγράφει την κατανομή της μαγνητικής ροής, ενώ η τιμή της παραμετρού  $\Lambda$  πρέπει να ικανοποιεί την σχέση 3.33. Συνεπώς, εκτός από τις παραμέτρους που φαίνονται στην σχέση 3.33 ( $\varepsilon$ ,  $\alpha_m$ ,  $\chi_m$ ,  $\mathcal{P}_m$ ), εμφανίζονται ακόμα τρεις: η παράμετρος κατανομής της μαγνητικής ροής  $\beta$ , η παράμετρος  $\mu$  που περιγράφει πόσο ισχυρό είναι το μαγνητικό πεδίο και ο δείκτης εκροής  $\xi$ .

Ορισμένες από τις ποσότητες της σχέσης 3.35, θα τις χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για τον προσδιορισμό των αρχικών συνθηκών του προβλήματος που θα προκύψει.

## Κεφάλαιο 4

# Αυτοόμοιες Λύσεις

### 4.1 Εισαγωγή

Προκειμένου να μελετήσουμε την δυναμική στο εσωτερικό ενός αστροφυσικού δίσκου προσαύξησης, θα πρέπει να λύσουμε στην περιοχή αυτή το πλήρες σύστημα εξισώσεων της μη ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής (resistive MHD). Ωστόσο η διαδικασία αυτή απαιτεί δύσκολες και χρονοβόρες 2D και 3D αριθμητικές προσομοιώσεις.

Θεωρώντας το σύστημα στάσιμο ( $\partial/\partial t = 0$ ) και συμμετρικό ως προς την αξιμουθιακή γωνία ( $\partial/\partial\varphi = 0$ ), υποθέσεις που έχουμε εξηγήσει προηγουμένως, το σύστημα αυτό απλοποιείται μέχρι έναν βαθμό, παραμένει όμως δύσκολο να λυθεί καθώς συνεχίζει να είναι σύστημα μη γραμμικών, μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ). Αναζητώντας όμως λύσεις συγκεκριμένης μορφής, μπορούμε να μετατρέψουμε το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ), το οποίο μπορούμε να χειριστούμε με μεγαλύτερη ευκολία.

Υποθέτουμε ότι η βαρύτητα είναι η κυρίαρχη πηγή ενέργειας και σχετίζεται θεμελιωδώς με την δυναμική των δίσκων προσαύξησης. Επομένως, εάν μία MAES εκτείνεται σε μεγάλο εύρος ακτίνων, η πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας κατά πάσα πιθανότητα ακολουθεί την ακτινική κλίμακα που επιβάλλεται από την πυκνότητα βαρυτικής ενέργειας. Το βαρυτικό δυναμικό σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφεται [1]:

$$\Phi_G(r, z) = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{-1/2} \quad (4.1)$$

Εφόσον ο δίσκος είναι ένα σύστημα που υπόκειται στην δράση της βαρύτητας, η οποία κυριαρχεί, κάθε φυσική ποσότητα  $A(r, z)$  θα περιγράφεται από μια εξίσωση ανάλογης μορφής, δηλαδή  $A(r, z) = G_A(r) f_A\left(\frac{z}{r}\right)$ . Επειδή η βαρύτητα είναι νόμος δύναμης της ακτινικής απόστασης, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη υπόθεση:

$$A(r, z) = A_e \left(\frac{r}{r_e}\right)^{a_A} f_A(\chi) \quad (4.2)$$

όπου  $\chi = z/h(r) = z/\varepsilon r$  είναι η αυτοόμοια μεταβλητή και  $r_e$  η εξωτερική ακτίνα του δίσκου. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση αυτή της αυτοομοιότητας, λύνοντας το σύστημα εξισώσεων κατά μήκος μίας γραμμής ροής ( $\Psi = \text{const.}$ ), μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις φυσικές ποσότητες που εμπλέκονται στο πρόβλημα κατά μήκος κάθε άλλης γραμμής ροής. Επειδή μελετάμε τον δίσκο προσαύξησης και αναφερόμαστε σε μη ιδεατή μαγνητοϋδροδυναμική (resistive MHD) οι γραμμές ροής δεν ταυτίζονται με τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές όπως συμβαίνει στην ιδεατή MHD (για παράδειγμα στους πίδακες) [14].

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, ως αυτοόμοια μεταβλητή θα χρησιμοποιήσουμε την πολική γωνία  $\theta$  των πολικών συντεταγμένων, επομένως κάθε άγνωστη φυσική ποσότητα  $Q(r, \theta)$  θα γραφεί στην μορφή:

$$Q(r, \theta) = K_0 r^{\lambda_Q} f_Q(\theta) \quad (4.3)$$

όπου  $K_0$  οι μονάδες κάθε ποσότητας  $Q$  και  $f_Q(\theta)$  οι άγνωστοι του προβλήματος.

Καθότι το σύστημα ΣΔΕ που θα προκύψει θα ολοκληρωθεί με την βοήθεια κώδικα, πρέπει οι εξισώσεις να είναι αδιάστατες. Ορίζουμε λοιπόν τρεις βασικές μονάδες μέτρησης, βάσει των οποίων θα υπολογίσουμε τις μονάδες όλων των υπόλοιπων μεγεθών. Οι μονάδες που επιλέγουμε είναι οι εξής:  $r_0, u_0$  και  $B_0$ , όπου  $r_0$  αντιστοιχεί στην ακτινική απόσταση στην βάση της γραμμής ροής στο επίπεδο  $z = 0$  (midplane του δίσκου), ενώ  $B_0$  και  $u_0$  είναι αντίστοιχα οι τιμές του μαγνητικού πεδίου και της αξιμουθιακής ταχύτητας περιστροφής του δίσκου στο ίδιο σημείο.

Για να αδιαστατοποιήσουμε την πίεση, θεωρούμε ως μονάδα την τιμή της μαγνητικής πίεσης στη βάση της γραμμής ροής, δηλαδή  $P_0 = B_0^2/8\pi$ . Χρησιμοποιώντας την τιμή αυτή και τον ορισμό της ταχύτητας του ήχου για πολυτροπικό ρευστό  $C_s^2 = \gamma P/\rho$ , βρίσκουμε την μονάδα πυκνότητας να είναι  $\rho_0 = B_0^2/8\pi u_0^2$ . Στη συνέχεια, μέσω της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων, βρίσκουμε την μονάδα θερμοκρασίας να είναι  $T_0 = \mu m u_0^2/k_B$ , με  $T_0$  να είναι η θερμοκρασία στη βάση της γραμμής ροής. Μπορούμε επομένως να γράψουμε:

Συνιστώσες Μαγνητικού Πεδίου

$$\begin{aligned} B_r(r, \theta) &= B_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_{B_r}} f_1(\theta) \\ B_\theta(r, \theta) &= B_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_{B_\theta}} f_2(\theta) \\ B_\varphi(r, \theta) &= B_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_{B_\varphi}} f_3(\theta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Καταστατικά Μεγέθη

$$\begin{aligned} P(r, \theta) &= \frac{B_0^2}{8\pi} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_P} f_0(\theta) \\ \rho(r, \theta) &= \frac{B_0^2}{8\pi u_0^2} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_\rho} f_4(\theta) \\ T(r, \theta) &= \frac{\mu m u_0^2}{k_B} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_T} f_5(\theta) \end{aligned}$$

Για την αδιαστατοποίηση του βαθμωτού ηλεκτρικού δυναμικού  $\Phi(r, \theta)$ , χρησιμοποιούμε τις μονάδες  $\Phi_0 = r_0 u_0 B_0/c$ , όπως προκύπτει από την εξίσωση επαγωγής. Επομένως έχουμε:

Βαθμωτό Ηλεκτρικό Δυναμικό

$$\Phi(r, \theta) = \frac{r_0 u_0 B_0}{c} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_\Phi} f_\Phi(\theta) \quad (4.5)$$

Οι συντελεστές των φαινομένων μεταφοράς (ιξώδες και διάχυση του μαγνητικού πεδίου) μετρώνται σε μονάδες μήκους επί μονάδες ταχύτητας, δηλαδή γράφουμε:

Συντελεστές Φαινομένων Μεταφοράς

$$\begin{aligned} \nu_\nu(r, \theta) &= r_0 u_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_{\nu_\nu}} f_{\nu_\nu}(\theta) \\ \eta_p(r, \theta) &= r_0 u_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_{\eta_p}} m_p(\theta) \\ \eta_\varphi(r, \theta) &= r_0 u_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_{\eta_\varphi}} m_t(\theta) \end{aligned} \quad (4.6)$$

όπου η μορφή των συναρτήσεων  $f_{\nu_\nu}(\theta)$ ,  $m_p(\theta)$  και  $m_t(\theta)$  θα επιλεγεί στη συνέχεια.

Έπειτα γράφουμε την συνάρτηση ροής ως εξής:

$$\Psi(r, \theta) = \Psi_0 r^\kappa f_\Psi(\theta) \quad (4.7)$$

και από την εξίσωση συνέχειας παίρνουμε:

$$\vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \rho u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho u_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (4.8)$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες ισχύει ότι:

$$4\pi \rho \vec{u}_p = \vec{\nabla} \Psi \times \frac{\hat{\varphi}}{\varpi} \quad (4.9)$$

όπου  $\vec{u}_p = u_\varpi \hat{\varpi} + u_z \hat{z}$  η πολοειδής ταχύτητα.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} 4\pi \rho (u_r \hat{r} + u_\theta \hat{\theta}) &= \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{r \sin \theta} \Psi(r, \theta) \hat{\varphi} \right) \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{r \sin \theta} \Psi(r, \theta) \hat{\varphi} \right) &= \frac{1}{\sin \theta} r^{\kappa-2} f'_\Psi \hat{r} - \frac{1}{\sin \theta} f_\Psi \kappa r^{\kappa-2} \hat{\theta} \\ 4\pi \rho u_r &= \frac{1}{\sin \theta} r^{\kappa-2} f'_\Psi \Rightarrow u_r(r, \theta) = \frac{1}{4\pi \rho \sin \theta} r^{\kappa-2} f'_\Psi \\ 4\pi \rho u_\theta &= -\kappa \frac{1}{\sin \theta} r^{\kappa-2} f_\Psi \Rightarrow u_\theta(r, \theta) = -\kappa \frac{1}{4\pi \rho \sin \theta} r^{\kappa-2} f_\Psi \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$u_\varphi(r, \theta) = u_0 \Omega(r, \theta) r \sin \theta \quad (4.11)$$

Προκειμένου να είναι αδιάστατες οι συνιστώσες  $u_p$  και  $u_\varphi$ , πρέπει και η συνάρτηση ροής να είναι αδιάστατη, οπότε βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} &\text{Συνάρτηση Ροής} \\ \Psi(r, \theta) &= \frac{B_0^2 r_0^2}{u_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^\kappa f_\Psi(\theta) \end{aligned} \quad (4.12)$$

και οι ταχύτητες γίνονται:

$$\begin{aligned} &\text{Συνιστώσες Ταχύτητας} \\ u_r(r, \theta) &= \frac{2u_0}{\sin \theta} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{(\kappa-2-\lambda_\rho)} \frac{f'_\Psi(\theta)}{f_4(\theta)} \\ u_\theta(r, \theta) &= -\frac{2\kappa u_0}{\sin \theta} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{(\kappa-2-\lambda_\rho)} \frac{f_\Psi(\theta)}{f_4(\theta)} \\ u_\varphi(r, \theta) &= u_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_\Omega+1} \omega(\theta) \sin \theta \end{aligned} \quad (4.13)$$

## 4.2 Σύστημα διαφορικών εξισώσεων

Αφού γράψαμε όλες τις φυσικές ποσότητες που επλέκονται στο πρόβλημα στην μορφή της εξίσωσης 4.3, μπορούμε πλέον να μετασχηματίσουμε το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων της μη ιδεατής MHD, σ' ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων με πρώτες παραγώγους ως προς την μεταβλητή  $\theta$ . Κατά την διάρκεια της αλλαγής αυτής, θα προσδιορίσουμε τους εκθέτες  $\lambda_Q$  στους νόμους δύναμης των διάφορων φυσικών ποσοτήτων.

### 4.2.1 Εξίσωση Ορμής

Στην περίπτωση της μη ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής, δεδομένης της στασιμότητας, η εξίσωση ορμής γράφεται :

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}P - \rho\vec{\nabla}\Phi_G + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} \quad (4.14)$$

όπου οι όροι του δεξιού μέλους είναι διαδοχικά η κλίση της πίεσης, η βαρύτητα, η δύναμη Lorentz (με  $\mu_0\vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$  την πυκνότητα του ρεύματος) και οι δυνάμεις λόγω ιξώδους (όπου  $\mathbf{T}$  είναι ο τανυστής τυρβώδους τάσης, ο οποίος συνδέεται με το κινηματικό ιξώδες  $\nu_v$  ) Πρωτού να αναλύσουμε την εξίσωση ορμής σε συνιστώσες, πρέπει να προσδιορίσουμε την μορφή των ρευμάτων καθώς και τον όρο του ιξώδους.

Στην ενότητα 3.2 είδαμε πως σε ένα αστροφυσικό δίσκο προσαύξησης υπάρχουν δύο βασικοί μηχανισμοί μέσω των οποίων αποσπάται στροφορμή από το σύστημα. Απαγωγή στροφορμής από τον δίσκο μπορούμε να έχουμε λόγω ύπαρξης μαγνητοϋδροδυναμικών εκροών (πίδακες) ή λόγω ροπών που ασκούνται στον δίσκο από το ενεργό ιξώδες. Στην σχέση 3.17 ορίσαμε την παράμετρο  $\Lambda$  μέσω της οποίας μπορούμε να συγκρίνουμε τους δύο μηχανισμούς και δίνεται από την εξίσωση :

$$\Lambda = \left| \frac{Jet\ Torque}{Turbulent\ Torque} \right|_{z=0} = \left| \frac{F_\varphi}{(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\varphi}} \right|_{z=0} = \left| \frac{\left( \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} \right) \cdot \hat{\varphi}}{(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\varphi}} \right| \quad (4.15)$$

Αν  $\Lambda < 1$  τότε έχουμε απαγωγή στροφορμής λόγω ιξώδους, ενώ αν  $\Lambda \geq 1$  τότε έχουμε απαγωγή στροφορμής μέσω των ροπών του μαγνητικού πεδίου (πίδακες).

Ο μηχανισμός του ενεργού ιξώδους αποσπά στροφορμή από τον δίσκο μεταφέροντας ορμή από την  $\hat{\varphi}$  στην  $\hat{\omega}$  κατεύθυνση. Η μεταφορά αυτή εκφράζεται μέσω του στοιχείου  $\sigma_{\varphi\varphi}$  του τανυστή ιξώδους  $\mathbf{T}$  (σε κυλινδρικές συντεταγμένες) [15]:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

για τον οποίο έχουμε υποθέσει ότι τα υπόλοιπα στοιχεία δεν συνεισφέρουν σημαντικά κι έτσι τα θεωρούμε αμελητέα. Επειδή η επεξεργασία των εξισώσεων θα γίνει σε σφαιρικές συντεταγμένες, μετασχηματίζουμε τον πίνακα στις συντεταγμένες αυτές κι έχουμε:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\theta\sigma_{\varphi\varphi} \\ 0 & 0 & \cos\theta\sigma_{\varphi\varphi} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Στα πλαίσια της εργασίας αυτής, θεωρούμε ότι ένας αστροφυσικός δίσκος προσαύξησης είναι λεπτός (δηλαδή  $\theta \simeq \pi/2$  στο εσωτερικό του), το μη μηδενικό στοιχείο του τανυστή  $\mathbf{T}$  σε σφαιρικές συντεταγμένες θα είναι περίπου ίσο με το αντίστοιχο στοιχείο σε κυλινδρικές, δηλαδή θα ισχύει:  $\sigma_{\varphi\varphi} \simeq \sigma_{r\varphi}$ . Άρα ο τανυστής γίνεται:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{r\varphi} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Επομένως, το μοναδικό στοιχείο του τανυστή του ιξώδους που χρειάζεται να υπολογίσουμε είναι το  $\sigma_{r\varphi}$ , το οποίο γνωρίζουμε από την υδροδυναμική θεωρία των δίσκων και δίνεται από την σχέση [21], [22]:

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{\eta\nu}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \right] = \eta\nu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\varphi}{r} \right) \quad (4.19)$$

όπου  $\eta\nu$  είναι ο συντελεστής δυναμικού ιξώδους και συνδέεται με τον συντελεστή κινηματικού

ιξώδους μέσω της σχέσης:  $\eta\nu = \rho\nu_\nu$ . Αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση τα απαραίτητα αδιάστατα μεγέθη όπως αυτά ορίζονται στις σχέσεις 4.4, 4.6 και 4.13, προκύπτει ότι το στοιχείο  $\sigma_{r\varphi}$  του τανυστή δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{B_0^2}{8\pi} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{(\lambda_\rho + \lambda_{\nu\nu} + \lambda_\Omega)} \lambda_\Omega \sin \theta f_4(\theta) f_{\nu\nu}(\theta) \omega(\theta) \quad (4.20)$$

Τελικά, μπορούμε να υπολογίσουμε τον τελευταίο όρο της εξίσωσης ορμής 4.14 (δύναμη λόγω ιξώδους), τον οποίο βρίσκουμε να είναι:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \left( \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} \right) \cdot \hat{\varphi} \quad (4.21)$$

Για να υπολογίσουμε την δύναμη Lorentz στην εξίσωση ορμής πρέπει να βρούμε την έκφραση των συνιστωσών του ρεύματος  $\vec{J}$ . Ξεκινώντας από τον νόμο του Ampère (σχέση 4.22) και χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις για τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου από την εξίσωση 4.4 βρίσκουμε τα ρεύματα να είναι:

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (4.22)$$

#### Συνιστώσες Ηλεκτρικού Ρεύματος

$$\begin{aligned} J_r(r, \theta) &= \frac{c}{4\pi} B_0 \frac{r^{\lambda_{B_\varphi}-1}}{r_0^{\lambda_{B_\varphi}}} (f_3'(\theta) + \cot \theta f_3(\theta)) \\ J_\theta(r, \theta) &= -\frac{c}{4\pi} B_0 (1 + \lambda_{B_\varphi}) \frac{r^{\lambda_{B_\varphi}-1}}{r_0^{\lambda_{B_\varphi}}} f_3(\theta) \\ J_\varphi(r, \theta) &= \frac{c}{4\pi} B_0 \left( (\lambda_{B_\theta} + 1) \frac{r^{\lambda_{B_\theta}-1}}{r_0^{\lambda_{B_\theta}}} f_2(\theta) - \frac{r^{\lambda_{B_r}-1}}{r_0^{\lambda_{B_r}}} f_1'(\theta) \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Έχοντας προσδιορίσει τις εκφράσεις όλων των απαραίτητων μεγεθών, μπορούμε τώρα να επεξεργαστούμε κάθε συνιστώσα της εξίσωσης ορμής ξεχωριστά.

**$\hat{r}$  συνιστώσα εξίσωσης ορμής**

Η προβολή της εξίσωσης 4.14 στην ακτινική διεύθυνση ( $\hat{r}$ ) μας δίνει την ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης ορμής, η οποία είναι:

$$\rho \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2 + u_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} - \rho \frac{GM}{r^2} + \frac{1}{c} (J_\theta B_\varphi - J_\varphi B_\theta) \quad (4.24)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις εκφράσεις για τις ταχύτητες, τα μαγνητικά πεδία, την πυκνότητα και την πίεση από την 4.4 και τα ρεύματα από την 4.23, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{B_0^2}{2\pi} \frac{(\kappa - 2 - \lambda_\rho)}{\sin^2 \theta} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2(\kappa-2)-\lambda_\rho} \frac{f_\Psi'^2}{f_4} + \frac{B_0^2}{2\pi} \frac{\kappa^2}{\sin \theta} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2(\kappa-2)-\lambda_\rho} \frac{f_\Psi^2}{f_4} - \\ & - \frac{B_0^2}{8\pi} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2(\lambda_\Omega+1)+\lambda_\rho} f_4 \omega^2 \sin^2 \theta - \\ & - \frac{B_0^2}{2\pi} \frac{\kappa}{\sin^2 \theta} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2(\kappa-2)-\lambda_\rho} \frac{f_\Psi}{f_4^2} (f_\Psi'' f_4 - f_\Psi' f_4' - f_\Psi' f_4 \cot \theta) + \\ & + \lambda_P \frac{B_0^2}{8\pi} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_P} f_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} \frac{GM}{r_0 u_0^2} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_\rho-1} f_4 + \frac{B_0^2}{4\pi} (\lambda_{B_\varphi} + 1) \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2\lambda_{B_\varphi}} f_3^2 + \\ & + \frac{B_0^2}{4\pi} (\lambda_{B_\theta} + 1) \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2\lambda_{B_\theta}} f_2^2 - \frac{B_0^2}{4\pi} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_{B_r} + \lambda_{B_\theta}} f_1' f_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Απαιτούμε τώρα όλοι οι εκθέτες των  $r$  να είναι ίσοι μεταξύ τους, οπότε παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} 2(\kappa - 2) - \lambda_\rho &= \lambda_\rho - 1, & \lambda_P &= \lambda_\rho - 1 \\ 2\lambda_\Omega + 2 + \lambda_\rho &= \lambda_\rho - 1, & \lambda_\rho - 1 &= \lambda_{B_\varphi} \\ \lambda_\rho - 1 &= \lambda_{B_\theta}, & \lambda_{B_r} + \lambda_{B_\theta} &= \lambda_\rho - 1 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Αν εκφράσουμε όλους του εκθέτες  $\lambda_Q$  συναρτήσει της παραμέτρου  $\kappa$ , παίρνουμε:

$$\lambda_\rho = \kappa - \frac{3}{2}, \quad \lambda_P = \kappa - \frac{5}{2} \quad (4.27)$$

$$\lambda_\Omega = -\frac{3}{2}, \quad \lambda_{B_r} = \lambda_{B_\theta} = \lambda_{B_\varphi} = \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{5}{2} \right)$$

Εφόσον απαιτούμε να ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις για τους εκθέτες και για  $r \neq 0$ , προκύπτει η αδιάστατη διαφορική εξίσωση για την  $\hat{r}$  συνιστώσα της εξίσωσης ορμής, στην οποία έχουμε μόνο συναρτήσεις του  $\theta$  και παραγώγους τους ως προς την ίδια μεταβλητή. Η εξίσωση αυτή είναι:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\sin^2 \theta} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{f_\Psi'^2}{f_4} - \kappa \frac{f_\Psi}{f_4^2} (f_\Psi'' f_4 - f_\Psi' f_4' - f_\Psi' f_4 \cot \theta) + \kappa^2 \frac{f_\Psi^2}{f_4} \right\} - 2f_1' f_2 - \\ & - f_4 \omega^2 \sin^2 \theta + \left( \kappa - \frac{5}{2} \right) f_0 - \lambda f_4 + \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_3^2 + \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Βλέπουμε ότι θεωρώντας αυτοόμοια μορφή για τις λύσεις του προβλήματος, πράγματι καταφέραμε να μετατρέψουμε την μερική διαφορική εξίσωση σε συνήθη, με παραγώγους μόνο ως προς την αυτοόμοια μεταβλητή  $\theta$  ( $f'$  σημαίνει  $df/d\theta$ ).

**$\hat{\theta}$  συνιστώσα εξίσωσης ορμής**

Επαναλαμβάνουμε την ανωτέρω διαδικασία για την προβολή της εξίσωσης 4.14 στην διεύθυνση  $\hat{\theta}$  της εξίσωσης ορμής, για την οποία παίρνουμε:

$$\rho \left( u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} - \frac{u_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{1}{c} (J_r B_\varphi - J_\varphi B_r) \quad (4.29)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση αυτή τις εκφράσεις για τις ταχύτητες, τα μαγνητικά πεδία, την πυκνότητα και την πίεση από την 4.4 και τα ρεύματα από την 4.23, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & -\frac{B_0^2}{2\pi} \frac{\kappa(\kappa-2-\lambda_\rho)}{\sin^2 \theta} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2(\kappa-2)-\lambda_\rho} \frac{f'_\Psi f_\Psi}{f_4} - \frac{B_0^2}{2\pi} \frac{\kappa}{\sin^2 \theta} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2(\kappa-2)-\lambda_\rho} \frac{f'_\Psi f_\Psi}{f_4} + \\ & + \frac{B_0^2}{2\pi} \frac{\kappa^2}{\sin \theta} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2(\kappa-2)-\lambda_\rho} \frac{f_\Psi}{f_4^2} (f'_\Psi f_4 - f_\Psi f'_4 - f_\Psi f_4 \cot \theta) + \frac{B_0^2}{8\pi} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_P} f'_0 - \\ & - \frac{B_0^2}{8\pi} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2(\lambda_\Omega+1)+\lambda_\rho} f_4 \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{B_0^2}{4\pi} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2\lambda_{B_\varphi}} f_3 (f'_3 + f_3 \cot \theta) + \\ & - \frac{B_0^2}{4\pi} (\lambda_{B_\theta} + 1) \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_{B_r} + \lambda_{B_\theta}} f_2 f_1 + \frac{B_0^2}{4\pi} \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2\lambda_{B_r}} f'_1 f_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις 4.27 που προέκυψαν από την προηγούμενη εξίσωση με την απαίτηση όλοι οι εκθέτες του  $r$  να είναι ίσοι μεταξύ τους, οπότε αν ισχύει και  $r \neq 0$  παίρνουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\sin^2 \theta} \left\{ -\frac{\kappa}{2} \frac{f_\Psi f'_\Psi}{f_4} + \kappa^2 \frac{f_\Psi}{f_4^2} (f'_\Psi f_4 - f_\Psi f'_4 - f_\Psi f_4 \cot \theta) \right\} + 2f'_1 f_1 - \\ & - \omega^2 f_4 \sin \theta \cos \theta + f'_0 + 2f_3 f'_3 + 2f_3^2 \cot \theta - \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_1 f_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

 **$\hat{\varphi}$  συνιστώσα εξίσωσης ορμής**

Ομοίως προκύπτει από την 4.14 η  $\hat{\varphi}$  συνιστώσα της εξίσωσης ορμής:

$$\rho \left( u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi u_\theta}{r} + \frac{u_\varphi u_\theta \cot \theta}{r} \right) = \frac{1}{c} (J_r B_\theta - J_\theta B_r) + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} \quad (4.32)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση αυτή τις εκφράσεις για τις ταχύτητες, τα μαγνητικά πεδία, την πυκνότητα και την πίεση από την 4.4, τα ρεύματα από την 4.23 και τον όρο  $\sigma_{r\varphi}$  του ιξώδους από την εξίσωση 4.20 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & (\lambda_\Omega + 1) \frac{1}{r_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\kappa-2+\lambda_\Omega} \omega f'_\Psi - \kappa \frac{1}{r_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\kappa-2+\lambda_\Omega} f_\Psi (\omega' + \omega \cot \theta) - \\ & - \kappa \frac{1}{r_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\kappa-2+\lambda_\Omega} \omega f_\Psi - \frac{1}{r_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\kappa-2+\lambda_\Omega} \omega f_\Psi \cot \theta - \lambda_\Omega \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_\Omega + \lambda_\rho + \lambda_{\nu_v}} \omega f_4 f_{\nu_v} \sin \theta - \\ & - \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_{B_\varphi} + \lambda_{B_\theta}} f_2 (f'_3 + f_3 \cot \theta) - (\lambda_{B_\varphi} + 1) \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_{B_\varphi} - \lambda_{B_\theta}} f_2 (f'_3 + f_3 \cot \theta) - \\ & - \frac{1}{2} \lambda_\Omega (\lambda_\Omega + \lambda_\rho + \lambda_{\nu_v}) \frac{1}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_\rho + \lambda_\Omega + \lambda_{\nu_v}} \omega f_4 f_{\nu_v} \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$



Οι εξισώσεις 4.27 ινακοποιούνται, ενώ από την απαίτηση όλοι οι εκθέτες του  $r$  να είναι μεταξύ τους ίσοι, βρίσκουμε ότι η τιμή του εκθέτη για την ακτινική εξάρτηση του συντελεστή κινηματικού ιξώδους  $\nu_\nu(r, \theta)$  είναι:

$$\lambda_{\nu_\nu} = \frac{1}{2} \quad (4.34)$$

Η αδιάστατη συνήθης διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$\begin{aligned} f'_\Psi \omega + 2\kappa f_\Psi \omega' + 2\kappa \omega f_\Psi \cot \theta + 2\kappa \omega f_\Psi + 2\omega f_\Psi \cot \theta + 2f_2 f'_3 + \\ + 2f_2 f_3 \cot \theta + \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_1 f_3 - \frac{3}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) \omega f_4 f_{\nu_\nu} \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Η μορφή της συνάρτησης  $f_{\nu_\nu}(\theta)$  επιλέγεται από εμάς ώστε η τιμή της να είναι μέγιστη στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου ( $z = 0$ ) και να μειώνεται καθώς πλησιάζουμε στο όριο του δίσκου και τελικά να μηδενίζεται έξω από αυτόν, όταν πλέον δεν υπάρχει ιξώδες. Επομένως, για την  $f_{\nu_\nu}(\theta)$  επιλέγουμε την μορφή:

$$f_{\nu_\nu}(\theta) = f_{\nu_\nu 0} \cdot \exp \left[ - \left( \frac{z}{h(r)} \right)^4 \right] = f_{\nu_\nu 0} \cdot \exp \left[ - \left( \frac{\cos \theta}{\epsilon \sin \theta} \right)^4 \right] \quad (4.36)$$

όπου  $f_{\nu_\nu 0}$  η τιμή της συνάρτησης στο midplane του δίσκου (δηλαδή για  $\theta = \pi/2$ ) Για λόγους πληρότητας, παραθέτουμε και τις εκφράσεις των τριών συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$ , όπως προκύπτουν από τον νόμο του Ohm ( $\vec{E} = -\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} + \frac{\vec{J}}{\sigma}$ ), συναρτήσει των γνωστών πλέον μεγεθών  $\vec{u}$ ,  $\vec{B}$  και  $\vec{J}$ :

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{4\pi\eta\rho}{c^2} J_r - \frac{1}{c} (u_\theta B_\varphi - u_\varphi B_\theta) \\ E_\theta &= \frac{4\pi\eta\rho}{c^2} J_\theta + \frac{1}{c} (u_r B_\varphi - u_\varphi B_r) \\ E_\varphi &= \frac{4\pi\eta\rho}{c^2} J_\varphi - \frac{1}{c} (u_r B_\theta - u_\theta B_r) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις 4.4, 4.6, 4.13, 4.23 στις σχέσεις 4.37, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{c} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}(\kappa-7)} u_0 B_0 (f'_3 + \cot \theta f_3) + \frac{2\kappa u_0 B_0}{\sin \theta} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}(\kappa-7)} \frac{f_\Psi f_3}{f_4} + \right. \\ &\quad \left. + u_0 B_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}(\kappa-5)} \omega f_2 \sin \theta \right] \\ E_\theta &= \frac{1}{c} \left[ \frac{2u_0 B_0}{\sin \theta} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}(\kappa-7)} \frac{f'_\Psi f_3}{f_4} - u_0 B_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}(\kappa-5)} \omega f_1 \sin \theta \right] - \\ &\quad - \frac{1}{c} \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}(\kappa-7)} u_0 B_0 m_p f_3 \\ E_\varphi &= \frac{1}{c} \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) u_0 B_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}(\kappa-7)} m_t f_2 - \frac{1}{c} u_0 B_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}(\kappa-7)} m_t f'_1 - \\ &\quad - \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial u_0 B_0}{\sin \theta} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}(\kappa-7)} \frac{f'_\Psi f_2}{f_4} - u_0 B_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}(\kappa-5)} \omega f_1 \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

### 4.2.2 Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο

Ξεκινάμε με τον νόμο του Gauss, τον οποίο ολοκληρώνουμε και παίρνουμε τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου πάνω στο πολοειδές επίπεδο συναρτήσει της συνάρτησης μαγνητικής ροής  $\alpha$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin \theta B_r) = \frac{\partial}{\partial \theta}(-r \sin \theta B_\theta) \quad (4.39)$$

Αν  $\alpha(r, \theta)$ , είναι η συνάρτηση μαγνητικής ροής, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha(r, \theta)}{\partial \theta} = r^2 \sin \theta B_r &\Rightarrow B_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \alpha(r, \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \alpha(r, \theta)}{\partial r} = -r \sin \theta B_\theta &\Rightarrow B_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \alpha(r, \theta)}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Επομένως, η πολοειδής συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\vec{B}_p = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \alpha(r, \theta)}{\partial \theta} \hat{r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \alpha(r, \theta)}{\partial r} \hat{\theta} \quad (4.41)$$

Στην ακτινική συνιστώσα της τελευταίας εξίσωσης, χρησιμοποιούμε την μορφή του  $B_r$  που δίνεται στην σχέση 4.4 και παίρνουμε ότι:

$$f_1(\theta) = \frac{r_0^{\lambda_{B_r}}}{B_0} r^{-\alpha} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \alpha(r, \theta)}{\partial \theta} \quad (4.42)$$

όπου  $\alpha = \lambda_{B_r} + 2$ . Η συνάρτηση  $f_1$  είναι αποκλειστικά συνάρτηση του  $\theta$  και στο δεξί μέρος της εξίσωσης 4.42 έχουμε συναρτήσεις τόσο του  $\theta$ , όσο και του  $r$ . Συνεπώς για να ισχύει η σχέση αυτή, η συνάρτηση μαγνητικής ροής πρέπει να έχει τη μορφή:

$$\alpha(r, \theta) = \frac{B_0}{r_0^{\lambda_{B_r}}} r^\alpha f_\alpha(\theta) \quad (4.43)$$

Μπορούμε να συνδέσουμε την παράμετρο  $\alpha$  με την παράμετρο  $\kappa$  μέσω του  $\lambda_{B_r}$ , από όπου και προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\kappa = \frac{3}{2} - 2\alpha \quad (4.44)$$

Επανερχόμαστε στον νόμο του Gauss, που σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται ως:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta B_\theta) = 0 \quad (4.45)$$

Αντικαθιστώντας τα  $B_r$  και  $B_\theta$  από την σχέση 4.4, προκύπτει η ακόλουθη αδιάστατη συνήθης διαφορική εξίσωση:

$$\frac{1}{2} \left( \kappa + \frac{3}{2} \right) f_1 + f_1' + f_2 \cot \theta = 0 \quad (4.46)$$

### 4.2.3 Εξίσωση επαγωγής

Συνδυάζοντας τον νόμο του Faraday ( $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ) με τον νόμο του Ohm ( $\vec{E} = -\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} + \frac{c}{4\pi\sigma} \vec{\nabla} \times \vec{B}$ ) παίρνουμε την εξίσωση επαγωγής (εξίσωση του δυναμó):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times [\eta(\vec{\nabla} \times \vec{B})] = 0 \quad (4.47)$$

όπου  $\eta$ , ο τανυστής διάχυσης του μαγνητικού πεδίου.

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_p(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \eta_p(r, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & \eta_\varphi(r, \theta) \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Το  $\eta$  δεν είναι σταθερό, αλλά μεταβάλλεται μέσα στον δίσκο, ενώ θα πρέπει να μηδενίζεται έξω από αυτόν.

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{\nabla} \times [(\vec{u} \times \vec{B}) - \eta(\vec{\nabla} \times \vec{B})] = 0 \Rightarrow (\vec{u} \times \vec{B}) - \eta(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = c\vec{\nabla}\Phi(r, \theta) \quad (4.49)$$

όπου  $c$  η ταχύτητα του φωτός και  $\Phi(r, \theta)$  το ηλεκτρικό δυναμικό, το οποίο συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο μέσω της σχέσης  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ .

$$\vec{u} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \\ u_r & u_\theta & u_\varphi \\ B_r & B_\theta & B_\varphi \end{vmatrix} = \hat{r}(u_\theta B_\varphi - u_\varphi B_\theta) - \hat{\theta}(u_r B_\varphi - u_\varphi B_r) + \hat{\varphi}(u_r B_\theta - u_\theta B_r) \quad (4.50)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\varphi) - \frac{\partial B_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right] \hat{\varphi} \quad (4.51)$$

#### $\hat{r}$ συνιστώσα εξίσωσης επαγωγής

Από την εξίσωση 4.49, μέσω των εξισώσεων και 4.51 παίρνουμε την  $r$  συνιστώσα της εξίσωσης επαγωγής, η οποία είναι:

$$u_\theta B_\varphi - u_\varphi B_\theta = \frac{\eta_p}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\varphi) + c \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (4.52)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση αυτή τις εκφράσεις για τις ταχύτητες, τα μαγνητικά πεδία, την πυκνότητα και την πίεση από την 4.4, τον συντελεστή διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στην πολοειδή κατεύθυνση από την 4.6 και το ηλεκτρικό πεδίο από την 4.5 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & -\frac{2\kappa}{\sin \theta} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\kappa-2-\lambda_\rho+\lambda_{B_\varphi}} \frac{f_\Psi f_3}{f_4} - \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_\Omega+1+\lambda_{B_\theta}} \omega f_2 \sin \theta - \\ & - \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_{\eta_p}+\lambda_{B_\varphi}-1} m_p (f_3' + f_3 \cot \theta) - \lambda_\Phi \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_\Phi} f_\Phi = 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Ζητώντας όλοι οι εκθέτες των  $r$  να είναι μεταξύ τους ίσοι, βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι σχέσεις 4.27 και βρίσκουμε τον εκθέτη του ηλεκτρικού πεδίου να είναι:

$$\lambda_\Phi = \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{3}{2} \right) \quad (4.54)$$

Η αδιάστατη εξίσωση που προκύπτει γράφεται:

$$\frac{2\kappa}{\sin\theta} \frac{f_\Psi f_3}{f_4} + \omega f_2 \sin\theta + m_p f_3' + m_p f_3 \cot\theta + \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{3}{2} \right) f_\Phi = 0 \quad (4.55)$$

### $\hat{\theta}$ συνιστώσα εξίσωσης επαγωγής

Παίρνουμε τώρα την  $\hat{\theta}$  συνιστώσα εξίσωσης επαγωγής:

$$u_\varphi B_r - u_r B_\varphi + \frac{\eta_p}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) = c \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (4.56)$$

Με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίσαμε την  $\hat{r}$  συνιστώσα, βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι σχέσεις 4.27 και 4.54 και η αδιάστατη συνήθης διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$f_1 \omega \sin\theta - \frac{1}{\sin\theta} \frac{f_\Psi f_3}{f_4} + \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) m_p f_3 - f_\Phi' = 0 \quad (4.57)$$

### $\hat{\varphi}$ συνιστώσα εξίσωσης επαγωγής

Επαναλαμβάνουμε την ανωτέρω διαδικασία για την  $\hat{\varphi}$  συνιστώσα εξίσωσης επαγωγής, που είναι:

$$u_r B_\theta - u_\theta B_r - \frac{\eta_\varphi}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) = \frac{c}{r \sin\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (4.58)$$

Χρησιμοποιώντας την μορφή του συνελεστή διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στην αξιμωθιακή κατεύθυνση από την σχέση 4.6, βρίσκουμε ότι ο εκθέτης του  $r$  στην έκφραση αυτή είναι:

$$\lambda_{\eta_\varphi} = \frac{1}{2} \quad (4.59)$$

και η αδιάστατη εξίσωση που προκύπτει τελικά είναι:

$$\frac{2}{\sin\theta} \frac{f_\Psi f_2}{f_4} + \frac{2\kappa}{\sin\theta} \frac{f_\Psi f_1}{f_4} - \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) m_t f_2 + m_t f_1' = 0 \quad (4.60)$$

Ορίζουμε:

$$\begin{aligned} m_p(\theta) &= m_{p0} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z}{h(r)} \right)^2 \right] = m_{p0} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos\theta}{\epsilon \sin\theta} \right)^2 \right] \\ m_t(\theta) &= m_{t0} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z}{h(r)} \right)^2 \right] = m_{t0} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos\theta}{\epsilon \sin\theta} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.61)$$

όπου  $m_{p0}$  και  $m_{t0}$  οι τιμές της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στο midplane ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ). Επιλέγουμε την συγκεκριμένη μορφή (gaussian), διότι θέλουμε η διάχυση να είναι μέγιστη στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου και να ελαττώνεται όσο απομακρυνόμαστε από αυτό, καθώς επίσης γιατί θέλουμε η διάχυση να μηδενίζει έξω από τον δίσκο, στην περιοχή της ιδεατής μαγνητουδρودυναμικής.

#### 4.2.4 Καταστατική Εξίσωση

Σε όλες τις εξισώσεις που έχουμε αναλύσει μέχρι τώρα, εμπεριέχονται οι συναρτήσεις  $f(\theta)$  που σχετίζονται με την πίεση και την πυκνότητα, επομένως η ολοκλήρωση του συστήματος θα μας δώσει την δυνατότητα να δούμε πως μεταβάλλονται στο εσωτερικό του δίσκου οι ποσότητες αυτές. Ωστόσο, η τρίτη και τελευταία καταστατική ποσότητα, η θερμοκρασία, δεν εμφανίζεται στις παραπάνω εξισώσεις, οπότε χρειαζόμαστε μία σχέση από την οποία να μπορούμε να υπολογίσουμε την θερμοκρασία γνωρίζοντας την πίεση και την πυκνότητα. Η εξίσωση αυτή δεν είναι διαφορική αλλά αλγεβρική και συγκεκριμένα παίρνουμε την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων:

$$P = \rho \left( \frac{k_B}{\mu m} \right) T \quad (4.62)$$

όπου  $\mu$  το μέσο μοριακό βάρος,  $m$  η μάζα του πρωτονίου και  $k_B$  η σταθερά του Boltzmann. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις πίεσης, πυκνότητας και θερμοκρασίας από την εξίσωση 4.4 και χρησιμοποιώντας τους εκθέτες  $\lambda$  της σχέση 4.27, βρίσκουμε ότι:

$$\lambda_T = -1 \quad (4.63)$$

και η αδιάστατη εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$f_0 = f_4 \cdot f_5 \quad (4.64)$$

Από την τελευταία αυτή εξίσωση, γνωρίζοντας τις συναρτήσεις πίεσης και πυκνότητας,  $f_0$  και  $f_4$  αντίστοιχα, μπορούμε να υπολογίσουμε την  $f_5$ , η οποία αντιστοιχεί στην θερμοκρασία.

#### 4.2.5 Εξίσωση Ενέργειας

Η τελευταία εξίσωση που χρειαζόμαστε για να κλείσει το σύστημα, είναι αυτή που συνδέει την εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του συστήματος με την πίεση και την πυκνότητα [4]:

$$e = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} \quad (4.65)$$

μέσω της οποίας μπορούμε να γράψουμε τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο ως εξής:

$$Q = \frac{1}{\gamma - 1} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} P - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad (4.66)$$

όπου με  $Q$ , συμβολίζεται ο ρυθμός παροχής ή απώλειας ενέργειας του πλάσματος, και με  $\gamma$  συμβολίζεται ο πολυτροπικός δείκτης. Θεωρούμε ότι η κίνηση σε μια γραμμή ροής, η οποία στην περιοχή του δίσκου δεν ταυτίζεται με την γραμμή μαγνητικής ροής, είναι αδιαβατική, δηλαδή  $Q = 0$ . Στην πραγματικότητα, το πλάσμα του δίσκου μπορεί να κερδίζει ενέργεια λόγω θέρμανσης Joule, ιξώδους, τυρβώδων κινήσεων ή ακόμα και από την ύπαρξη κάποιας εξωτερικής πηγής ενέργειας. Αντίστοιχα, μπορεί να χάνει ενέργεια λόγω ύπαρξης τύρβης ή από εκπομπή ακτινοβολίας. Από αυτά καταλαβαίνουμε ότι το  $Q$  δεν μπορεί να είναι στην πραγματικότητα μηδενικό, αλλά θα είναι ίσο με τη διαφορά του ρυθμού της εισερχόμενης ενέργειας στο σύστημα ( $\Gamma$ ) με τον ρυθμό της εξερχόμενης από αυτό ενέργειας ( $\Lambda$ ), δηλαδή:

$$Q = \Lambda - \Gamma \quad (4.67)$$

Αν λάβουμε υπόψιν την θέρμανση Joule, την θέρμανση λόγω ιξώδους (viscous heating) καθώς και την ψύξη λόγω ακτινοβολίας, η ποσότητα  $Q$  μπορεί να γραφεί ως:

$$Q = \frac{4\pi}{c^2} (\eta \cdot \vec{J}) \cdot \vec{J} + \eta_\nu \left( \varpi \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} \right)^2 = \frac{4\pi}{c^2} (\eta \cdot \vec{J}) \cdot \vec{J} + \frac{\sigma_{\varpi\varphi}^2}{\eta_\nu} - \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_{rad} \quad (4.68)$$

Στην σχέση 4.68 συσχετίσαμε τον όρο θέρμανσης λόγω ιξώδους με το στοιχείο  $\sigma_{\omega\varphi}$  του τανυστή  $\mathbf{T}$ , χρησιμοποιώντας τυπολόγιο. Σε σφαιρικές συντεταγμένες, με την υπόθεση ότι ο δίσκος είναι λεπτός, ισχύει ότι  $\sigma_{\omega\varphi} \simeq \sigma_{r\varphi}$ . Για τον όρο ψύξης, ισχύει ότι η ροή ενέργειας δι' ακτινοβολίας προσδιορίζεται από την σχέση:

$$\vec{S}_{rad} = -\frac{c}{\kappa\rho}\vec{\nabla}P_{rad} \quad (4.69)$$

όπου  $\kappa$  ο συντελεστής μέσης αδιαφάνειας Rossland του πλάσματος και  $P_{rad}$  η πίεση ακτινοβολίας [1]. επομένως, συνδυάζοντας τις σχέσεις 4.66 και 4.68 η εξίσωση ενέργειας γράφεται:

$$\frac{1}{\gamma-1}\vec{u}\cdot\vec{\nabla}P - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho = \frac{4\pi}{c^2}(\eta\cdot\vec{J})\cdot\vec{J} + \frac{\sigma_{r\varphi}^2}{\eta\nu} - \frac{c}{\kappa\rho}\vec{\nabla}P_{rad} \quad (4.70)$$

Στην τελευταία σχέση δεν φαίνεται η συνεισφορά της τύρβης ( $\vec{\nabla}\vec{q}_{turb} = \Lambda_{turb} - \Gamma_{turb}$ ) διότι θεωρούμε ότι ούτε προσθέτει ούτε αποσπά ενέργεια από το σύστημα, παρά μόνο αναδιανέμει την υπάρχουσα ενέργεια μέσα στον δίσκο.

Συνοψίζοντας βλέπουμε ότι, η πλήρης εξίσωση ενέργειας είναι δύσκολο να επιλυθεί ταυτόχρονα με τις υπόλοιπες διαφορικές εξισώσεις. Αυτό συμβαίνει διότι εμφανίζονται σε αυτή όροι με παραγώγους των άγνωστων συναρτήσεων στο τετράγωνο (στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της εξίσωσης 4.70), κάτι που καθιστά την επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων ακόμα πιο περίπλοκο. Ακόμα, εισάγονται νέες δυσκολίες, αφού η τοπική αδιαφάνεια  $\kappa$  μεταβάλλεται εντός του δίσκου τόσο στην ακτινική όσο και στην κατακόρυφη διεύθυνση και ταυτόχρονα γνωρίζουμε μόνο την έκφραση για την πίεση ακτινοβολίας στην περίπτωση ενός οπτικά πυκνού μέσου ( $P_{rad} = \alpha T^4$ ), ενώ στον δίσκο το υλικό μπορεί να είναι οπτικά αραιό ήδη από το midplane. Επομένως, η ρεαλιστική αντιμετώπιση της εξίσωσης ενέργειας είναι πρακτικά αδύνατη, τουλάχιστον στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

Προκειμένου να αποφευχθούν όλες οι δυσκολίες που εισάγει στο πρόβλημα η χρήση της πλήρους εξίσωσης ενέργειας, στις περισσότερες μελέτες των δίσκων προσαύξησης χρησιμοποιείται η αδιαβατική προσέγγιση. Αποκλειστικά στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την εξίσωση 4.66, από όπου προκύπτει η γνωστή πολυτροπική εξίσωση:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = 0 \Rightarrow \frac{P}{\rho^\gamma} = const. = K(\Psi) \Rightarrow P = K(\Psi)\rho^\gamma \quad (4.71)$$

όπου  $K(\Psi)$  είναι μια ποσότητα που παραμένει σταθερή κατά μήκος μιας συγκεκριμένης γραμμής ροής  $\Psi = \text{σταθερό}$  (όχι απαραίτητα ίδια για όλες τις γραμμές ροής).

Ξεκινάμε λοιπόν από την σχέση:

$$P = K(\Psi)\rho^\gamma \quad (4.72)$$

και σε αυτή αντικαθιστούμε τις εκφράσεις πίεσης και πυκνότητας από την σχέση 4.4. Προκύπτει έτσι ότι η σταθερά  $K(\Psi)$  πρέπει να έχει την μορφή:

$$K(\Psi) = C\Psi^N = C(\Psi_0 r^\kappa f_\Psi)^N = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} r^{(\lambda_P - \lambda_\rho \cdot \gamma)} \frac{f_0}{f_4^\gamma} \quad (4.73)$$

όπου το  $C$  είναι μια σταθερά αναλογίας, την οποία θα προσδιορίσουμε αργότερα από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος και  $N$  ένας νόμος δύναμης, ο οποίος για να ισχύει η σχέση 4.73 πρέπει να ισούται με:

$$N = \frac{3\gamma - 5}{2\kappa} - (\gamma - 1) \quad (4.74)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις αυτές μπορούμε να εκφράσουμε την συνάρτηση  $f_0$  της πίεσης, συναρτήσει των συναρτήσεων πυκνότητας και ροής μάζας,  $f_4$  και  $f_\Psi$  αντίστοιχα, μέσω της εξίσωσης:

$$f_0 = C \cdot K_0 f_\Psi^N \cdot f_4^\gamma \quad (4.75)$$

με  $K_0 = \Psi_0^N \rho_0^\gamma / P_0$  μια σταθερά, συναρτήσει των μονάδων μέτρησης της πίεσης, της πυκνότητας και της συνάρτησης ροής μάζας.

Η σχέση 4.75 παρουσιάζει μια ανωμαλία όταν αντικαθιστούμε σ' αυτή τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή τις τιμές των συναρτήσεων  $f(\theta)$  στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου. Συγκεκριμένα, για  $\theta = \pi/2$  θα ισχύει  $f_\Psi(\pi/2) = 0$  και ταυτόχρονα  $f_0(\pi/2) \neq 0$ , επομένως η 4.75 δεν μπορεί να ικανοποιείται. Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα επανερχόμαστε στην σχέση 4.66 και θεωρούμε ότι η σταθερά  $K(\Psi)$ , είναι σταθερή ανεξάρτητα της συνάρτησης ροής, δηλαδή:

$$K = C = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} r^{(\lambda_P - \lambda_\rho \cdot \gamma)} \frac{f_0}{f_4^\gamma} \quad (4.76)$$

Για να ισχύει η σχέση 4.76, πρέπει το δεξί μέλος της σχέσης να είναι ανεξάρτητο της ακτινικής απόστασης  $r$ , δηλαδή  $\lambda_P - \lambda_\rho \cdot \gamma = 0$ , οπότε προκύπτει η παρακάτω σχέση μεταξύ των  $\kappa$  και  $\gamma$ :

$$\kappa = \frac{3\gamma - 5}{2(\gamma - 1)} \quad (4.77)$$

Αν στην τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε τον πολυτροπικό δείκτη  $\gamma$  με την τιμή που παίρνει στην αδιαβατική περίπτωση ( $\gamma = 5/3$ ), βλέπουμε να προκύπτει  $\kappa = 0$ .<sup>1</sup>

Ταυτόχρονα, για να ικανοποιείται η 4.76 θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{f_0}{f_4^\gamma} = C \frac{\rho_0^\gamma}{P_0} = \text{σταθερό}$$

από όπου τελικά παίρνουμε:

$$\frac{f_0}{f_4^\gamma} = K_0 \quad (4.78)$$

και τώρα η σταθερά  $K_0$  προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

<sup>1</sup>Από την λύση του συστήματος ΣΔΕ, οι Blandford & Payne [3] βρήκαν για τις παραμέτρους  $\kappa = 0$  και  $\alpha = \frac{3}{4}$  (ξ και β αντίστοιχα στην εργασία τους), τιμές που επιβεβαιώνουν τα παραπάνω αποτελέσματα.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις, καθώς και τους εκθέτες του ακτινικού μέρους κάθε φυσικής ποσότητας, όπως έχουν προκύψει από την μέχρι τώρα επεξεργασία. Συγκεκριμένα, οι εξισώσεις είναι:

Από την εξίσωση ορμής:

$$\begin{aligned} \hat{r} : & \frac{4}{\sin^2 \theta} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{f_{\Psi}^{\prime 2}}{f_4} - \kappa \frac{f_{\Psi}}{f_4^2} (f_{\Psi}^{\prime\prime} f_4 - f_{\Psi} f_4' - f_{\Psi}' f_4 \cot \theta) + \kappa^2 \frac{f_{\Psi}^2}{f_4} \right\} - 2f_1' f_2 - \\ & - f_4 \omega^2 \sin^2 \theta + \left( \kappa - \frac{5}{2} \right) f_0 - \lambda f_4 + \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_3^2 + \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_2^2 = 0 \\ \hat{\theta} : & \frac{4}{\sin^2 \theta} \left\{ -\frac{\kappa}{2} \frac{f_{\Psi} f_{\Psi}'}{f_4} + \kappa^2 \frac{f_{\Psi}}{f_4^2} (f_{\Psi}' f_4 - f_{\Psi} f_4' - f_{\Psi} f_4 \cot \theta) \right\} + 2f_1' f_1 - \\ & - \omega^2 f_4 \sin \theta \cos \theta + f_0' + 2f_3 f_3' + 2f_3^2 \cot \theta - \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_1 f_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi} : & f_{\Psi}' \omega + 2\kappa f_{\Psi} \omega' + 2\kappa \omega f_{\Psi} \cot \theta + 2\kappa \omega f_{\Psi} + 2\omega f_{\Psi} \cot \theta + 2f_2 f_3' + \\ & + 2f_2 f_3 \cot \theta + \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_1 f_3 - \frac{3}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) \omega f_4 f_{\nu} \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

Από τον νόμο του Gauss για το μαγνητικό πεδίο:

$$\frac{1}{2} \left( \kappa + \frac{3}{2} \right) f_1 + f_2' + f_2 \cot \theta = 0 \quad (4.80)$$

Από την εξίσωση επαγωγής:

$$\begin{aligned} \hat{r} : & \frac{2\kappa}{\sin \theta} \frac{f_{\Psi} f_3}{f_4} + \omega f_2 \sin \theta + m_p f_3' + m_p f_3 \cot \theta + \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{3}{2} \right) f_{\Phi} = 0 \\ \hat{\theta} : & f_1 \omega \sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{f_{\Psi}' f_3}{f_4} + \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) m_p f_3 - f_{\Phi}' = 0 \\ \hat{\phi} : & \frac{2}{\sin \theta} \frac{f_{\Psi}' f_2}{f_4} + \frac{2\kappa}{\sin \theta} \frac{f_{\Psi} f_1}{f_4} - \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) m_t f_2 + m_t f_1' = 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

Από την καταστατική εξίσωση:

$$f_0 = f_4 \cdot f_5 \quad (4.82)$$

Από την εξίσωση ενέργειας:

$$f_0 = K_0 f_4^{\gamma} \quad (4.83)$$

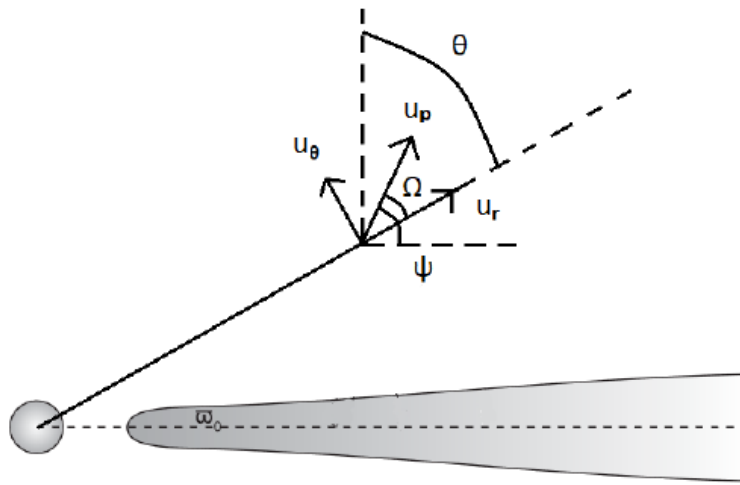
και οι εκθέτες που βρήκαμε είναι:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{3}{2} - 2\alpha, \quad \lambda_{\rho} = \kappa - \frac{3}{2}, \quad \lambda_P = \kappa - \frac{5}{2} \\ \lambda_{B_r} &= \lambda_{B_{\theta}} = \lambda_{B_{\varphi}} = \frac{\kappa}{2} - \frac{5}{4} \\ \lambda_{u_r} &= \lambda_{u_{\theta}} = \lambda_{u_{\varphi}} = -\frac{1}{2} \\ \lambda_{\eta_p} &= \lambda_{\eta_{\varphi}} = \lambda_{\nu} = \frac{1}{2} \\ \lambda_{\Omega} &= -\frac{3}{2}, \quad \lambda_{\Phi} = \frac{\kappa}{2} - \frac{3}{4}, \quad \lambda_T = -1 \end{aligned} \quad (4.84)$$



Το σύστημα στο οποίο καταλήξαμε, είναι ένα κλειστό σύστημα εννέα συνήθων διαφορικών εξισώσεων με εννέα αγνώστους (τις συναρτήσεις  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \omega, f_\Psi, f_\Phi$ ), το οποίο θεωρητικά μπορούμε να λύσουμε και από την λύση να βρούμε όλες τις φυσικές ποσότητες που υπεισέρχονται στο πρόβλημα που μελετάμε.

Ενώ λοιπόν θεωρητικά το παραπάνω σύστημα είναι επιλύσιμο με την χρήση αριθμητικών μεθόδων και την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή, στην πραγματικότητα η επίλυσή του παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες. Μια από τις δυσκολίες που παρουσιάζονται είναι η εμφάνιση δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης  $f_\Psi$  ως προς την μεταβλητή  $\theta$  σε κάποιες από τις εξισώσεις. Η επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης είναι δύσκολη, επομένως αναζητούμε τρόπους που να μειώνουν την τάξη των εξισώσεων, καθιστώντας την λύση τους ευκολότερη. Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι να καταφύγουμε στην γεωμετρία του φυσικού συστήματος. Ειδικότερα, μπορούμε να εισάγουμε την μεταβλητή  $\psi$ , δηλαδή την γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του οριζόντιου άξονα και του πολοειδούς ανύσματος της ταχύτητας  $\vec{u}_p$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.1: Γεωμετρία των γωνιών που χρησιμοποιούνται για την αποφυγή των δεύτερων παραγώγων της συνάρτησης  $f_\Psi$ , όπου  $\psi$  είναι η γωνία μεταξύ του  $\vec{u}_p$  και του οριζόντιου άξονα  $\varpi$ ,  $\Omega$  είναι η γωνία μεταξύ του  $\vec{u}_p$  και του  $\vec{u}_r$ , ενώ  $\theta$  είναι η γωνία των σφαιρικών συντεταγμένων.

Από την γεωμετρία του σχήματος αυτού προκύπτει η σχέση:  $\psi - \Omega + \theta = \frac{\pi}{2}$  και μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} \cos \Omega &= \cos \left( \psi + \theta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{u_r}{u_p} \Rightarrow \sin(\psi + \theta) = \frac{u_r}{u_p} \\ \sin \Omega &= \sin \left( \psi + \theta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{u_\theta}{u_p} \Rightarrow \cos(\psi + \theta) = \frac{u_\theta}{u_p} \end{aligned} \quad (4.85)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και αντικαθιστώντας στη συνέχεια τις εκφράσεις των συνιστωσών της ταχύτητας από την σχέση 4.13, προκύπτει ότι:

$$f'_\Psi = -\kappa f_\Psi \tan(\psi + \theta) \quad (4.86)$$

και τέλος, παραγωγίζοντας την τελευταία εξίσωση ως προς  $\theta$ , παίρνουμε την σχέση:

$$f''_\Psi = \kappa^2 f_\Psi \tan^2(\psi + \theta) - \frac{\kappa f_\Psi}{\cos^2(\psi + \theta)} (1 + \psi') \quad (4.87)$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις 4.86 και 4.87 στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που γράψαμε προηγουμένως, απαλοίφοντας έτσι τις παραγώγους της συνάρτησης  $f_{\Psi}(\theta)$  από τις εξισώσεις, ώστε τελικά στο σύστημα να εμφανίζονται μόνο πρώτες παράγωγοι των συναρτήσεων ως προς την μεταβλητή  $\theta$ . Με την αντικατάσταση αυτή, εισήχθει στο πρόβλημα μια νέα μεταβλητή, η  $\psi = \psi(\theta)$ , η οποία θα υπολογισθεί μαζί με τις υπόλοιπες άγνωστες συναρτήσεις των διάφορων φυσικών ποσοτήτων, με την επίλυση του συστήματος.

Στο σύστημα εξισώσεων, στο οποίο καταλήξαμε, περιλαμβάνονται και δύο αλγεβρικές σχέσεις: η καταστατική εξίσωση και η εξίσωση ενέργειας. Αντικαθιστώντας την συνάρτηση  $f_0(\theta)$  και την παράγωγό της από την εξίσωση ενέργειας και υπολογίζοντας την συνάρτηση  $f_5$  από την καταστατική εξίσωση, μειώνουμε τον αριθμό των αγνώστων του προβλήματος κατά δύο.

Το σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων που προκύπτει τελικά, είναι το εξής:

$$2f_1'f_2 - \frac{4\kappa^2}{\sin^2\theta} \frac{f_{\Psi}^2}{f_4} \frac{1}{\cos^2(\psi+\theta)} \psi' + \frac{4\kappa}{\sin^2\theta} \frac{f_{\Psi}f_4'}{f_4^2} = -\frac{2\kappa^2}{\sin^2\theta} \frac{f_{\Psi}^2}{f_4} \tan(\psi+\theta) - \frac{4\kappa^3}{\sin^2\theta} \frac{f_{\Psi}^2}{f_4} \tan^2(\psi+\theta) + \frac{4\kappa^2}{\sin^2\theta} \frac{f_{\Psi}^2}{f_4} \frac{1}{\cos^2(\psi+\theta)} - \frac{4\kappa^2}{\sin^3\theta} \frac{f_{\Psi}^2}{f_4} \cot\theta \tan(\psi+\theta) + \frac{4\kappa^2}{\sin^2\theta} \frac{f_{\Psi}^2}{f_4} - f_4\omega^2 \sin^2\theta + \left(\kappa - \frac{5}{2}\right) K_0 f_4^{\gamma} - \lambda f_4 + \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) f_3^2 + \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) f_2^2 \quad (4.88)$$

$$\frac{4\kappa^2}{\sin^2\theta} \frac{f_{\Psi}^2 f_4'}{f_4^2} + K_0 \gamma f_4^{\gamma-1} f_4' + 2f_3 f_3' + 2f_1' f_1 = -\frac{2\kappa^2}{\sin^2\theta} \frac{f_{\Psi}^2}{f_4} \tan(\psi+\theta) + \frac{4\kappa^3}{\sin^2\theta} \frac{f_{\Psi}^2}{f_4} \tan(\psi+\theta) + \frac{4\kappa^2}{\sin^3\theta} \frac{f_{\Psi}^2}{f_4} \cos\theta + \omega^2 f_4 \cos\theta \sin\theta - 2f_3^2 \cot\theta + \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) f_1 f_2 \quad (4.89)$$

$$2\kappa\omega' f_{\Psi} + 2f_2 f_3' = \kappa f_{\Psi} \omega \tan(\psi+\theta) - 2\kappa f_{\Psi} \omega \cot\theta - 2\kappa\omega f_{\Psi} - 2f_{\Psi} \omega \cot\theta - 2f_2 f_3 \cot\theta - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) f_1 f_3 + \frac{3}{2} \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \omega f_4 f_{\nu} \sin\theta \quad (4.90)$$

$$m_p f_3' = -\frac{2\kappa}{\sin\theta} \frac{f_{\Psi} f_3}{f_4} - \omega f_2 \sin\theta - m_p f_3 \cot\theta - \frac{1}{2} \left(\kappa - \frac{3}{2}\right) f_{\Phi} \quad (4.91)$$

$$f_{\Phi}' = f_1 \omega \sin\theta + \frac{\kappa}{\sin\theta} \frac{f_3 f_{\Psi}}{f_4} \tan(\psi+\theta) + \frac{1}{2} \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) m_p f_3 \quad (4.92)$$

$$m_t f_1' = \frac{2\kappa}{\sin\theta} \frac{f_2 f_{\Psi}}{f_4} \tan(\psi+\theta) - \frac{2\kappa}{\sin\theta} \frac{f_{\Psi} f_1}{f_4} + \frac{1}{2} \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) m_t f_2 \quad (4.93)$$

$$f_2' = -f_2 \cot\theta - \frac{1}{2} \left(\kappa + \frac{3}{2}\right) f_1 \quad (4.94)$$

$$f_{\Psi}' = -\kappa f_{\Psi} \tan(\psi+\theta) \quad (4.95)$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, σε ένα σύστημα 8 εξισώσεων με 8 αγνώστους. Στη μορφή όμως που είναι γραμμένες οι εξισώσεις 4.88 – 4.95, δεν είναι δυνατόν να τις επεξεργαστεί ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής, επομένως θα πρέπει να τις γράψουμε σε μια μορφή πιο κατάλληλη.

### 4.3 Αναπαράσταση εξισώσεων σε μορφή πινάκων

Η επίλυση περίπλοκων συστημάτων διαφορικών εξισώσεων, όπως αυτό που περιγράψαμε προηγουμένως, γίνεται με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή, χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους (π.χ. μέθοδοι Runge–Kutta). Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου ολοκλήρωσης και κατ' επέκταση του κατάλληλου ολοκληρωτή, γίνεται ανάλογα με το πόσο εύκολα ή πόσο δύσκολα είναι διαχειρίσιμες οι διαφορικές εξισώσεις του εκάστοτε προβλήματος (stiff or non-stiff equations) [15].

Ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή:

$$y'(t) = f(t, y) \quad (4.96)$$

όπου  $y(t)$  είναι ένα διάνυσμα, το οποίο περιέχει όλες τις άγνωστες συναρτήσεις του προβλήματος. Όσον αφορά τους αλγορίθμους αριθμητικής ολοκλήρωσης, στην πλειονότητά τους, είναι διαμορφωμένοι ώστε τα συστήματα ΣΔΕ να γράφονται σε αυτή την μορφή.

Στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων στο οποίο έχουμε καταλήξει, και που περιγράφει το πρόβλημα που θέλουμε να μελετήσουμε, δεν είναι δυνατόν να λύσουμε τις εξισώσεις ως προς την παράγωγο της κάθε άγνωστης συνάρτησης ξεχωριστά, ώστε να φέρουμε το σύστημα στην μορφή της εξίσωσης 4.96. Ακολουθώντας προηγούμενες εργασίες που έχουν γίνει στο συγκεκριμένο θέμα (π.χ. Ferreira [1], Ferreira & Pelletier [19] κ.α.), γράφουμε το σύστημα των ΣΔΕ που περιγράφει την κατακόρυφη δομή ενός δίσκου προσαύξησης στην μορφή:

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{F} = \mathcal{P} \quad (4.97)$$

όπου  $\mathcal{P}$  είναι ένα διάνυσμα και  $\mathcal{M}$  ένας πίνακας συναρτήσεων των άγνωστων συναρτήσεων  $f(\theta)$ , ενώ το διάνυσμα  $\mathcal{F}$  περιέχει τις παραγώγους των άγνωστων συναρτήσεων και γράφεται ως:

$$\mathcal{F} = \left[ f'_\Psi(\theta) \quad \psi'(\theta) \quad f'_1(\theta) \quad f'_2(\theta) \quad f'_3(\theta) \quad \omega'(\theta) \quad f'_4(\theta) \quad f'_\Phi(\theta) \right]^T \quad (4.98)$$

Οι πίνακες  $\mathcal{P}$  και  $\mathcal{M}$  είναι οι εξής:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} -\frac{2\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} \tan(\psi + \theta) - \frac{4\kappa^3}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} \tan^2(\psi + \theta) + \frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} \frac{1}{\cos^2(\psi + \theta)} - \\ -\frac{4\kappa^2}{\sin^3 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} \cot \theta \tan(\psi + \theta) + \frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} - f_4 \omega^2 \sin^2 \theta + \\ \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) K_0 f_4^\gamma - \lambda f_4 + \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_3^2 + \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_2^2 \\ -\frac{2\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} \tan(\psi + \theta) + \frac{4\kappa^3}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} \tan(\psi + \theta) + \frac{4\kappa^2}{\sin^3 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} \cos \theta + \\ + \omega^2 f_4 \cos \theta \sin \theta - 2 f_3^2 \cot \theta + \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_1 f_2 \\ \kappa f_\Psi \omega \tan(\psi + \theta) - 2\kappa f_\Psi \omega \cot \theta - 2\kappa \omega f_\Psi - 2 f_\Psi \omega \cot \theta - \\ - 2 f_2 f_3 \cot \theta - \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_1 f_3 + \frac{3}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) \omega f_4 f_{\nu} \sin \theta \\ -\frac{2\kappa}{\sin \theta} \frac{f_\Psi f_3}{f_4} - \omega f_2 \sin \theta - m_p f_3 \cot \theta - \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{3}{2} \right) f_\Phi \\ f_1 \omega \sin \theta + \frac{\kappa}{\sin \theta} \frac{f_3 f_\Psi}{f_4} \tan(\psi + \theta) + \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) m_p f_3 \\ \frac{2\kappa}{\sin \theta} \frac{f_2 f_\Psi}{f_4} \tan(\psi + \theta) - \frac{2\kappa}{\sin \theta} \frac{f_\Psi f_1}{f_4} + \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) m_t f_2 \\ - f_2 \cot \theta - \frac{1}{2} \left( \kappa + \frac{3}{2} \right) f_1 \\ - \kappa f_\Psi \tan(\psi + \theta) \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta \cos^2(\psi+\theta)} \frac{f_\Psi^2}{f_4} & 2f_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{4\kappa}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2f_1 & 0 & 2f_3 & 0 & \gamma K_0 f_4^{\gamma-1} - \frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2f_2 & 2\kappa f_\Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

Για να βρούμε τις συναρτήσεις  $f(\theta)$ , πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$\mathcal{F} = \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{P} \quad (4.101)$$

με  $\mathcal{M}^{-1}$  τον αντίστροφο πίνακα του πίνακα  $\mathcal{M}$ . Οι δύο πίνακες ικανοποιούν την σχέση:

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{M} = \mathcal{I} \quad (4.102)$$

όπου  $\mathcal{I}$  είναι ο ταυτοτικός πίνακας.<sup>2</sup>

#### 4.4 Κρίσιμα Σημεία

Προκειμένου το σύστημα να έχει λύση, είναι απαραίτητο ο πίνακας  $\mathcal{M}$  να είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή θα πρέπει η ορίζουσα του να είναι μη μηδενική (non-singular matrix). Θα πρέπει δηλαδή στο διάστημα που μελετάμε να ισχύει:

$$\det \mathcal{M} \neq 0 \quad (4.103)$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα του πίνακα  $\mathcal{M}$ , βρίσκουμε ότι δίνεται από την σχέση:

$$\det \mathcal{M} = -\frac{8\kappa^3}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^3}{f_4} m_p m_t \frac{1}{\cos^2(\psi + \theta)} \cdot \left( -\frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4^2} + \gamma K_0 f_4^{(\gamma-1)} \right) \quad (4.104)$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η ορίζουσα αυτή δεν είναι πάντα διάφορη του μηδενός, διότι για κάποιες τιμές της γωνίας  $\theta$ , οι τιμές που παίρνουν οι συναρτήσεις  $f(\theta)$  έχουν σαν αποτέλεσμα τον μηδενισμό της. Τα σημεία στα οποία η συνθήκη 4.103 δεν ικανοποιείται ονομάζονται κρίσιμα σημεία της ροής [1] και χρειάζονται προσεκτική αντιμετώπιση. Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία θέτουμε  $\det \mathcal{M} = 0$ , από όπου προκύπτει ότι:

$$\det \mathcal{M} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\psi + \theta)} \cdot \left( -\frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4^2} + \gamma K_0 f_4^{(\gamma-1)} \right) = 0 \quad (4.105)$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των φυσικών μεγεθών και την σχέση  $C_s = \gamma P / \rho$  για την ταχύτητα του ήχου, βρίσκουμε ότι η σχέση για τον μηδενισμό της ορίζουσας μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή:

$$\frac{1}{\cos^2(\psi + \theta)} \cdot (u_\theta^2 - C_s^2) = 0 \quad (4.106)$$

Από την σχέση 4.106, βλέπουμε ότι στην περίπτωση της μη-ιδεατής μαγνητουδρودυναμικής, στο εσωτερικό ενός δίσκου προσαύξησης, εμφανίζονται δύο κρίσιμα σημεία. Το πρώτο βρίσκεται στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου (midplane), καθώς για  $\theta = \pi/2$  η γωνία  $\psi$  παίρνει την τιμή

<sup>2</sup>Ταυτοτικός πίνακας  $\mathcal{I}_N$ , μεγέθους  $N$  είναι ο  $N \times N$  πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ίσα με 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία ίσα με 0.

$\psi(\frac{\pi}{2}) = \pi$  κι έτσι η ποσότητα  $\cos(\psi + \theta)$  μηδενίζει, με αποτέλεσμα η ορίζουσα να απειρίζεται. Το κρίσιμο αυτό σημείο είναι κομβικό, διότι όλες οι λύσεις του συστήματος πρέπει να διέρχονται από αυτό. Το δεύτερο κρίσιμο σημείο που συναντά η ροή, βρίσκεται στη γωνία  $\theta$  όπου η ταχύτητα  $u_\theta$  γίνεται ίση με την ταχύτητα του ήχου  $C_s$ . Για τον λόγο αυτό το δεύτερο κρίσιμο σημείο λέγεται ηχητικό, όπως είδαμε και στην υποενότητα 2.3.2.

Βλέπουμε λοιπόν ότι για τα δύο κρίσιμα σημεία που μόλις αναλύσαμε, ο πίνακας  $\mathcal{M}$  δεν μπορεί να αντιστραφεί, επομένως το σύστημα δεν μπορεί να γραφεί στην μορφή της εξίσωσης 4.101 για κάθε τιμή της μεταβλητής  $\theta$ . Μπορούμε όμως να ολοκληρώσουμε το σύστημα εξισώσεων ξεκινώντας αμέσως μετά το πρώτο και σταματώντας αμέσως πριν το δεύτερο κρίσιμο σημείο, για όλες τις ενδιάμεσες τιμές της γωνίας  $\theta$ .

Ο πίνακας  $\mathcal{M}^{-1}$  υπολογίζουμε ότι είναι ο εξής:

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A & B & 0 & C & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_p} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\kappa f_\Psi} & -\frac{f_2}{\kappa f_\Psi m_p} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(\gamma K_0 f_4^{\gamma-1} - \frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4^2}\right)} & 0 & E & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

$$A = -\frac{\sin^2 \theta}{4\kappa^2} \frac{f_4}{f_\Psi^2} \cos^2(\psi + \theta)$$

$$B = \frac{\cos^2(\psi + \theta)}{\kappa f_4} \cdot \frac{1}{\left(\gamma K_0 f_4^{\gamma-1} - \frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4^2}\right)}$$

$$C = \frac{2f_3 \cos^2(\psi + \theta)}{\kappa f_4 m_p} \cdot \frac{1}{\left(\gamma K_0 f_4^{\gamma-1} - \frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4^2}\right)}$$

$$D = \frac{\frac{8\kappa}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{f_\Psi^2}{f_4^2} (f_1 + \kappa f_2) - 2K_0 \gamma f_2 f_4^{\gamma-1}}{\frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\cos^2(\psi + \theta)} \frac{f_\Psi^2}{f_4} m_t} \cdot \frac{1}{\left(\gamma K_0 f_4^{\gamma-1} - \frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4^2}\right)}$$

$$E = -\frac{2f_3}{m_p \cdot \left(\gamma K_0 f_4^{\gamma-1} - \frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4^2}\right)}$$

$$G = -\frac{2f_1}{m_t \cdot \left(\gamma K_0 f_4^{\gamma-1} - \frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4^2}\right)}$$

## Κεφάλαιο 5

# Αριθμητική Ολοκλήρωση

### 5.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, ξεκινήσαμε από το πλήρες σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων της μη-ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής και το μετατρέψαμε σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, ως προς την μεταβλητή  $\theta$ , χρησιμοποιώντας την συμμετρία της αυτοομοιότητας (self-similar ansatz). Ορίζοντας τις διάφορες φυσικές ποσότητες με τρόπο ώστε να είναι αδιάστατες και αντικαθιστώντας τις στις εξισώσεις, καταλήγουμε σε ένα αδιάστατο σύστημα.

Προκειμένου να απλοποιήσουμε περαιτέρω το πρόβλημα, θεωρήσαμε ότι κατά μήκος των γραμμών ροής ισχύει η αδιαβατική προσέγγιση και παράλληλα χρησιμοποιήσαμε την γεωμετρία του συστήματος ώστε το σύστημα εξισώσεων να περιέχει μόνο πρώτες παραγώγους των αρχικών παραμέτρων. Τέλος, γράψαμε το σύστημα με τρόπο κατάλληλο για υπολογιστή, καταλήγοντας στην μορφή:

$$\mathcal{F} = \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{P} \quad (5.1)$$

### 5.2 Αρχικές Συνθήκες

Έχοντας καταλήξει σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, για να βρούμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται τα διάφορα φυσικά μεγέθη εντός του δίσκου προσαύξησης, πρέπει να ολοκληρώσουμε το σύστημα αυτό. Το πρόβλημα που πρέπει να λύσουμε, είναι ένα πρόβλημα αρχικών συνθηκών, επομένως πρέπει να καθορίσουμε τις απαραίτητες αρχικές συνθήκες.

Η ολοκλήρωση ξεκινάει από το ισημερινό επίπεδο του δίσκου (midplane), επομένως οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι οι τιμές των άγνωστων συναρτήσεων  $f(\theta)$  στο επίπεδο  $\theta = \pi/2$ . Ωστόσο, το σημείο αυτό, όπως αναφέραμε και στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου, αποτελεί ένα από τα δύο κρίσιμα σημεία, γεγονός που δημιουργεί ορισμένα προβλήματα στην ολοκλήρωση, για τα οποία θα δούμε τον τρόπο αντιμετώπισης στη συνέχεια.

#### Για το μαγνητικό πεδίο

Προκειμένου να καθορίσουμε τις αρχικές τιμές των συναρτήσεων, μέσω των οποίων εκφράζονται οι τρεις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου, πρέπει να δούμε τις τιμές των συνιστωσών αυτών στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου. Θεωρούμε λοιπόν ότι στο midplane το μαγνητικό πεδίο διαπερνά κάθετα τον δίσκο, δηλαδή έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα  $B_z$  ή  $B_\theta$ , ενώ η ακτινική συνιστώσα είναι  $B_r = 0$ . Επιπλέον, εντός του δίσκου η αζιμουθιακή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου αναμένεται να είναι μικρής έντασης και ειδικότερα στο ισημερινό επίπεδο,

πρέπει να είναι μηδενική. Επιλέγουμε η κατακόρυφη συνιστώσα να είναι  $B_z = 1$ , δηλαδή  $B_\theta = -1$  (η κανονικοποίηση του μαγνητικού πεδίου γίνεται ως προς την τιμή αυτού στη βάση μιας γραμμής ροής), άρα για τις συναρτήσεις  $f_1(\theta)$ ,  $f_2(\theta)$  και  $f_3(\theta)$  παίρνουμε τις εξής αρχικές τιμές:

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -1 \\ f_3\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

### Για τις ταχύτητες

Έχουμε ορίσει τις αδιάστατες συνιστώσες της ταχύτητας, όπως φαίνεται στην σχέση 4.13. Στο midplane του δίσκου, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας θα είναι μηδενική, δηλαδή  $u_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . Συνεπώς, η συνάρτηση  $f_\Psi(\theta)$  που σχετίζεται με την συγκεκριμένη συνιστώσα της ταχύτητας, θα έχει αρχική τιμή:

$$f_\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (5.3)$$

Εφόσον ισχύει ότι  $u_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , η μόνη πολοειδής συνιστώσα της ταχύτητας που είναι μη μηδενική είναι η ακτινική και μάλιστα λόγω της προσαύξησης μάζας, αυτή θα έχει κατεύθυνση προς το κεντρικό αντικείμενο. Για τον λόγο αυτό, η γωνία  $\psi(\theta)$  που ορίσαμε όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1, θα έχει αρχική τιμή:

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad (5.4)$$

Ως μονάδα μέτρησης της ταχύτητας έχουμε ορίσει την τιμή της ταχύτητας περιστροφής στην βάση μιας γραμμής ροής, επομένως θα είναι  $u_\varphi = u_0$ . Η τιμή της συνάρτησης  $\omega(\theta)$ , μέσω της οποίας εκφράζεται η αξιμουθιακή συνιστώσα της ταχύτητας θα είναι αρχικά:

$$\omega\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (5.5)$$

Όπως είδαμε στην υποενότητα 3.1.1, στο εσωτερικό ενός SAD ισχύει η σχέση 3.7 για την ιεραρχία των ταχυτήτων, δηλαδή:

$$u_\varpi \ll C_s \ll u_\phi \quad (5.6)$$

οπότε η αρχική τιμή της συνάρτησης που σχετίζεται με την ταχύτητα αυτή θα πρέπει να είναι μικρότερη της μονάδας. Ωστόσο, στην αρχικοποίηση αυτής της τιμής συναντάμε ένα πρόβλημα. Από τον ορισμό των ταχυτήτων στην σχέση 4.13, βλέπουμε ότι η συνάρτηση που σχετίζεται με την ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας είναι η  $f'_\Psi(\theta)$ . Η συνάρτηση  $f_\Psi(\theta)$  σχετίζεται με την συνάρτηση ροής μάζας και συνδέεται με την πρώτη παράγωγό τη μέσω της σχέσης 4.95. Στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου, η σχέση αυτή γίνεται:

$$f'_\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\kappa f_\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.7)$$

Εξ αιτίας της σχέσης 5.3, στην τελευταία εμφανίζεται μια απροσδιοριστία της μορφής  $0 \cdot \infty$ . Πρακτικά, η  $f_\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$  δε μπορεί να πάρει ακριβώς μηδενική τιμή, διότι συναντάται ως παρονομαστής σε διάφορα σημεία του αντιστρόφου πίνακα  $\mathcal{M}^{-1}$ , θα πάρει ωστόσο μια πολύ μικρή τιμή. Ως εκ τούτου, για να αρθεί η απροσδιοριστία, επιλέγουμε την τιμή  $f_\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$  να είναι τόσο μικρή ώστε η  $f'_\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$  να παίρνει μια πεπερασμένη τιμή. Τελικά, η αρχική τιμή της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας, θα δίνεται από μια σχέση της μορφής:

$$u_r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 u_0 \frac{f'_\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f_4\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (5.8)$$

Από την σχέση 5.7, βλέπουμε ότι η πεπερασμένη τιμή της  $f'_\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , θα είναι μικρότερη του μηδενός λόγω του προσήμου «-», δηλαδή η ακτινική ταχύτητα θα έχει αρχικά κατεύθυνση προς το κεντρικό αντικείμενο, γεγονός που συνάδει με την διαδικασία της προσαύξησης.

**Καταστατικά μεγέθη & Ηλεκτρικό πεδίο**

Για την αρχικοποίηση της πίεσης, χρησιμοποιούμε την παράμετρο  $\beta$  του πλάσματος, η οποία προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της πίεσης για  $r = r_0$  και  $\theta = \pi/2$  ως εξής:

$$P_{th} \left( r_0, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{B_0}{8\pi} \cdot f_0 \left( \frac{\pi}{2} \right) \iff f_0 \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{P_{th}}{P_{mag}} = \beta \quad (5.9)$$

Το  $\beta$  αποτελεί ελεύθερη παράμετρο το προβλήματος, την τιμή της οποίας θα καθορίσουμε στη συνέχεια.

Την αρχική τιμή της πυκνότητας, την προσδιορίζουμε χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των λεπτών δίσκων. Στην υποενότητα 3.1.1, ορίζουμε το πάχος του λεπτού δίσκου μέσω της σχέσης 3.5. Αντικαθιστώντας στην σχέση αυτή τις τμές των διαφόρων μεγεθών για  $\theta = \pi/2$ , δεδομένου ότι η ταχύτητα του ήχου δίνεται από την σχέση  $C_s^2 = \gamma P/\rho$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{C_s}{u_\varphi} \Rightarrow \frac{\gamma P}{\rho} = \varepsilon^2 u_\varphi^2 \\ \gamma \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_P - \lambda_\rho} \frac{f_0(\theta)}{f_4(\theta)} &= \varepsilon^2 \Rightarrow \gamma \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-1} \frac{f_0(\theta)}{f_4(\theta)} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}, r=r_0} = \varepsilon^2 \\ f_4 \left( \frac{\pi}{2} \right) &= \gamma \frac{\beta}{\varepsilon^2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Μία ακόμη ποσότητα που χρειάζεται να προσδιορίσουμε, είναι η σταθερά  $K_0$  που προκύπτει στην εξίσωση ενέργειας (§4.2.5, 4.78). Επειδή είναι σταθερά, αρκεί να βρούμε μια τιμή και ο πιο απλός τρόπος να το κάνουμε αυτό, είναι να χρησιμοποιήσουμε την σχέση 4.78 και τις τιμές των συναρτήσεων  $f_0$  και  $f_4$  στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου, από όπου προκύπτει:

$$K_0 = \frac{f_0 \left( \frac{\pi}{2} \right)}{f_4 \left( \frac{\pi}{2} \right)} \Rightarrow K_0 = \frac{\varepsilon^{2\gamma}}{\gamma \beta \gamma^{-1}} \quad (5.11)$$

Οι επόμενες αρχικές συνθήκες που πρέπει να καθορίσουμε, αφορούν βαθμωτό δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου και τους συντελεστές διάχυσης και μεταφοράς. Όπως είπαμε και προηγουμένως, η ποσότητα  $f_\Psi \left( \frac{\pi}{2} \right)$  συναντάται ως παρονομαστής σε ορισμένες από τις εξισώσεις κάτω που δημιουργεί πρόβλημα, εφόσον ισχύει η σχέση 5.3. Ένας τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος αυτού είναι στις εξισώσεις όπου το  $f_\Psi(\theta)$  εμφανίζεται ως παρονομαστής, να απαιτήσουμε και οι αριθμητές των κλασμάτων να μηδενίζονται, ώστε να έχουμε απροσδιοριστία του τύπου 0/0 [15].

Οι παρονομαστές που μηδενίζονται στο πρώτο κρίσιμο σημείο, βρίσκονται στις διαφορικές εξισώσεις των  $\psi'$  και  $\omega'$ . Στις δύο αυτές εξισώσεις λοιπόν, ζητάμε οι αριθμητές να μηδενίζονται για  $\theta = \pi/2$ , από όπου παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & -\frac{2\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} \tan(\psi + \theta) - \frac{4\kappa^3}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} \tan^2(\psi + \theta) + \frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} \frac{1}{\cos^2(\psi + \theta)} - \\ & - \frac{4\kappa^2}{\sin^3 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} \cot \theta \tan(\psi + \theta) + \frac{4\kappa^2}{\sin^2 \theta} \frac{f_\Psi^2}{f_4} - f_4 \omega^2 \sin^2 \theta + \\ & + \left( \kappa - \frac{5}{2} \right) K_0 f_4^\gamma - \lambda f_4 + \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_3^2 + \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_2^2 \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

και

$$\begin{aligned} & m_p \left[ - \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_1 f_3 - 2\kappa f_\Psi \omega \cot \theta - 2\kappa \omega f_\Psi - 2f_\Psi \omega \cot \theta + \right. \\ & \left. + \kappa f_\Psi \omega \tan(\psi + \theta) - 2f_2 f_3 \cot \theta + \frac{3}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) \omega f_4 f_\nu \sin \theta \right] - \\ & - 2f_2 \left[ - \frac{2\kappa^2}{\sin \theta} \frac{f_\Psi^2 f_3}{f_4} - \omega f_2 \sin \theta - m_p f_3 \cot \theta - \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{3}{2} \right) f_\Phi \right] \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$



Αντικαθιστώντας όλες τις γνωστές αρχικές τιμές, από την σχέση 5.12 προκύπτει ότι:

$$\left. \frac{f_{\Psi}}{\cos(\psi + \theta)} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (5.14)$$

το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση  $f_{\Psi}(\theta)$  θα πρέπει να μηδενίζει πιο γρήγορα από την  $\cos(\psi + \theta)$  καθώς  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία στην σχέση 5.13, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{3}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) m_{p0} f_4 \left( \frac{\pi}{2} \right) f_{\nu,0} + 2 \left( \kappa - \frac{3}{2} \right) f_{\Phi} \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (5.15)$$

Στην σχέση αυτή, εμφανίζονται τρεις άγνωστες ποσότητες, η  $f_{\Phi} \left( \frac{\pi}{2} \right)$ , η  $m_{p0}$  και η  $f_{\nu,0}$ . Για να βρούμε την  $f_{\Phi} \left( \frac{\pi}{2} \right)$ , ανατρέχουμε στην  $\hat{r}$ -συνιστώσα της εξίσωσης επαγωγής (σχέση 4.91), την οποία υπολογίζουμε στο ισημερινό επίπεδο του δίσκου:

$$m_p f_3' + \frac{2\kappa}{\sin \theta} \frac{f_{\Psi} f_3}{f_4} + \omega f_2 \sin \theta + m_p f_3 \cot \theta + \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{3}{2} \right) f_{\Phi} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (5.16)$$

η οποία γίνεται:

$$m_{p0} f_3' \left( \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{3}{2} \right) f_{\Phi} \left( \frac{\pi}{2} \right) - 1 = 0 \quad (5.17)$$

όπου για την τιμή της ποσότητας  $f_3' \left( \frac{\pi}{2} \right)$  χρησιμοποιούμε την σχέση  $\left. \frac{dB_{\phi}}{dz} \right|_{z=0} = -q \frac{B_0}{h}$  (3.35).

Οι αρχικές τιμές των συναρτήσεων που συνδέονται με τους συντελεστές διάχυσης και μεταφοράς, σχετίζονται μεταξύ τους μέσω της παραμέτρου  $\chi_m$ , που μετράει την ανισοτροπία της διάχυσης του πεδίου μέσα στον δίσκο και του μαγνητικού αριθμού Prandtl  $\mathcal{P}_m$ , μέσω των σχέσεων:

$$\begin{aligned} m_p \left( \frac{\pi}{2} \right) &= m_{p0} = \chi_m m_{t0} \\ f_{\nu,0} \left( \frac{\pi}{2} \right) &= f_{\nu,0} = \mathcal{P}_m m_{p0} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Στη συνέχεια, λύνουμε την σχέση 5.15, ως προς την συνάρτηση που αφορά το βαθμωτό δυναμικό κι έχουμε:

$$f_{\Phi} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{m_{p0} f_3' \left( \frac{\pi}{2} \right) - 1}{\frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{3}{2} \right)} \quad (5.19)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 5.17, 5.18 και 5.19 παίρνουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\frac{3}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) f_4 \left( \frac{\pi}{2} \right) \mathcal{P}_m m_{p0}^2 - 4 f_3' \left( \frac{\pi}{2} \right) m_{p0} + 4 = 0 \quad (5.20)$$

Η αρχική τιμή της ποσότητας  $m_{p0}$  δεν επιλέγεται τυχαία, αλλά εξαρτάται από το πάχος του δίσκου [Σπ]. Η εξάρτηση αυτή μπορεί να φανεί χρησιμοποιώντας την πολυτροπική σχέση:

$$C_s^2 = \gamma \frac{P}{\rho} \Leftrightarrow C_s^2 = \frac{\gamma f_0 \left( \frac{\pi}{2} \right)}{f_4 \left( \frac{\pi}{2} \right)} \quad (5.21)$$

και αντικαθιστώντας σε αυτή την ταχύτητα του ήχου που προκύπτει από την προσέγγιση των λεπτών δίσκων ως:  $C_s = \simeq \sqrt{\lambda \varepsilon}$ . Η παράμετρος  $\lambda = G M / r_0 u_0^2$  προκύπτει από την αδιαστατοποίηση της ακτινικής συνιστώσας της εξίσωσης ορμής.

Συνδυάζοντας όλες τελευταίες σχέσεις, βρίσκουμε ότι η τιμή της διάχυσης στο πολοειδές επίπεδο στο midplane του δίσκου, σχετίζεται με το πάχος  $\varepsilon$  μέσω της σχέσης:

$$\frac{3}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) \frac{\gamma \beta}{\lambda \varepsilon^2} \mathcal{P}_m m_{p0}^2 - 4 f_3' \left( \frac{\pi}{2} \right) m_{p0} + 4 = 0 \quad (5.22)$$

οπότε επιλέγοντας τις τιμές των παραμέτρων προσδιορίζουμε την τιμή του  $m_{p0}$  και κατά συνέπεια τις αρχικές τιμές των μεγεθών που συνδέονται με αυτό μέσω των προηγούμενων σχέσεων.

## Κεφάλαιο 6

# Κώδικας & Ολοκλήρωση

Για την ολοκλήρωση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων με αρχικές συνθήκες αυτές που προέκυψαν και συζητήθηκαν στα κεφάλαια 4 και 5, έγινε μια προσπάθεια με τους ολοκληρωτές `solve_ivp` και `LSODA` της βιβλιοθήκης `SciPy` της γλώσσας προγραμματισμού `python`. Οι τιμές των ελεύθερων παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

$$\beta = 1.25 \quad \lambda = 1.1 \quad \varepsilon = 0.1 \quad (6.1)$$

και η ολοκλήρωση έγινε σε ένα διάστημα:

$$\theta \in \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right) \quad (6.2)$$

Αρχικά, έγιναν δοκιμές με τον ολοκληρωτή `solve_ivp`, ο οποίος ωστόσο δεν κατάφερε να ολοκληρώσει με επιτυχία το σύστημα. Στη συνέχεια, έγιναν δοκιμές με τον ολοκληρωτή `LSODA`. Και στους δύο κώδικες, οι οποίοι παρατίθενται στη συνέχεια, ακολουθείται η εξής διαδικασία:

Ορίζουμε τη μεταβλητή του προβλήματος και τις ελεύθερες παραμέτρους, καθώς και τις συναρτήσεις  $m_p$ ,  $m_t$  και  $f_{\nu_i}$ . Γράφουμε στη συνέχεια τους πίνακες  $\mathcal{M}$  και  $\mathcal{P}$ , αντιστρέφουμε τον πίνακα  $\mathcal{M}$  και υπολογίζουμε το γινόμενο τους σύμφωνα με την σχέση 4.101. Τότε καλείται ο ολοκληρωτής στον οποίο δίνουμε όλες τις απαραίτητες αρχικές τιμές των συναρτήσεων  $f(\theta)$ .

### 6.1 Κώδικας ολοκλήρωσης με τον ολοκληρωτή `solve_ivp`

```
from scipy.integrate import solve_ivp
import numpy as np
import mpmath
import matplotlib.pyplot as plt

#f*M = P
#f = [f[0], f[1], f[2], f[3], f[4], f[5], f[6], f[7]]
#f = [fy      y      f1      f2      f3      w      f4      fphi]
k_def = 0.5

t_def = 0.005
lam_def = 1.1
e_def = 0.1
b_def = 1.25
chi = 0.2
Pr = 0.2
```

```

def rhs(theta, f, k=k_def, t=t_def, lam=lam_def, e=e_def, b=b_def):
    p = chi*t
    a = Pr*p
    fn = a*np.exp(-(np.cos(theta)/e*np.sin(theta))**4)
    mp = p*np.exp(-0.5*(np.cos(theta)/e*np.sin(theta))**2)
    mt = t*np.exp(-0.5*(np.cos(theta)/e*np.sin(theta))**2)
    g = (k_def-2.5)/(k_def-1.5)
    Q = e**(2*g) / (g**g) * b**(g-1)

    #print(f)
    M = np.matrix([
        [0, (-(4*k**2)/(np.sin(theta))**2*(np.cos(theta+f[1]))**2)*f[0]**2/f[6],
         2*f[3], 0, 0, 0, (4*k)/(np.sin(theta))**2*(f[0]**2/f[6]**2), 0],
        [0, 0, 2*f[2], 0, 2*f[4], 0, g*Q*f[0]**((0))*f[6]**(g-1)-
         (4*k**2)/(np.sin(theta))**2*(f[0]**2/f[6]**2), 0],
        [0, 0, 0, 0, 2*f[3], 2*k*f[0], 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, mp, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],
        [0, 0, mt, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],
        [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    ], dtype='float')

    #print(M)
    M_inv = np.linalg.inv(M)

    P = np.matrix([
        [-(2*k**2/(np.sin(theta))**2)*(f[0]**2 / f[6])*np.tan(f[1] +theta) -
         (4*k**3 / (np.sin(theta))**2)*(f[0]**2 / f[6])*np.tan(f[1] + theta)**2+
         (4*k**2 / (np.sin(theta))**2)* (f[0]**2 / f[6])*(1/(np.cos(f[1]+theta))**2)
         - (4*k**2 / (np.sin(theta)**3))*(f[0]**2 / f[6])*mpmath.cot(theta)
         *np.tan(f[1]+theta) + (4*k**2 / (np.sin(theta)**2))*(f[0]**2/f[6]) -
         f[6]*f[5]**2 *(np.sin(theta)**2)+ (k-(5/2))* Q *f[0]**(0)*f[6]**g -lam*f[6]
         + (k-(1/2))*f[4]**2 + (k-(1/2))*f[3]**2],
        [k*Q*(0)* f[0]**(0) *np.tan(f[1] + theta) -
         (2*k**2/(np.sin(theta)**2))*(f[0]**2 / f[6])*np.tan(f[1] + theta) +
         (4*k**3 / (np.sin(theta)**2))*(f[0]**2 / f[6])*np.tan(f[1]+theta) +
         (4*k**2 / (np.sin(theta)**3))*(f[0]**2 / f[6])*np.cos(theta) +
         f[5]**2 *f[6] *np.cos(theta)*np.sin(theta) - 2*f[4]**2*mpmath.cot(theta)
         + (k-(1/2))*f[2]*f[3] ],
        [k*f[0]*f[5]*np.tan(f[1] + theta) - 2*k*f[0]*f[5]*mpmath.cot(theta)-
         2*k*f[5]*f[0]-2*f[0]*f[5]*mpmath.cot(theta)-2*f[3]*f[4]*mpmath.cot(theta)
         - (k - (1/2))*f[2]*f[4] + (3/2)*(k - (1/2))*f[5]*f[6]*fn*np.sin(theta) ],
        [-(2*k/np.sin(theta))*(f[0]*f[4] / f[6]) - f[5]*f[3]*np.sin(theta) -
         mp*f[4]*mpmath.cot(theta) -(1/2)*(k-(3/2))*f[7] ],
        [f[2]*f[5]*np.sin(theta) +
         (k/np.sin(theta))*(f[4]*f[0] / f[6])*np.tan(f[1] + theta) +
         (1/2)*(k-(1/2))*mp*f[4]],
        [(2*k/np.sin(theta))*(f[3]*f[0] / f[6])*np.tan(f[1] + theta) -

```

```

    (2*k/np.sin(theta))*(f[0]*f[2] / f[6]) + (1/2)*(k-(1/2))*mt*f[3] ,
    [-f[1]*mpmath.cot(theta)-(1/2)*(k+3/2)*f[2]] ,
    [-k*f[0]*np.tan(f[1] + theta)] ,
    ], dtype='float ')

MinvP = M_inv*P

return [MinvP[0].item() ,MinvP[1].item() ,MinvP[2].item() ,MinvP[3].item()
        ,MinvP[4].item() ,MinvP[5].item() ,MinvP[6].item() ,MinvP[7].item()]

res = solve_ivp(rhs, (np.pi/2-0.01, np.pi/2-1.),
                [0.001, 3.2, 0.02, 1., 0.01, 1.,
                 (((k_def-2.5)/(k_def-1.5))*b_def) / (e_def**2) , 1.4])

plt.plot(res.t, res.y.T)
plt.legend(["fy", "y", "f1", "f2", "f3", "w", "f4", "fphi"], loc="lower right")
plt.xlabel('theta')
plt.show()

resT = res.y.T
x = resT.reshape(resT.shape)
np.savetxt('results.txt', x)

res_t_T = res.t.T
t = res_t_T.reshape(res_t_T.shape)
np.savetxt('theta.txt', t)

```

## 6.2 Κώδικας ολοκλήρωσης με τον ολοκληρωτή LSODA

```

import scipy.integrate as integ
import numpy as np
import mpmath
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.linalg import solve

#f*M = P
#f = [f[0], f[1], f[2], f[3], f[4], f[5], f[6], f[7]]
#f = [fy, y, f1, f2, f3, w, f4, fphi]
k_def = 0.5
t_def = 0.005
lam_def = 1.1
e_def = 0.1
b_def = 1.25
chi = 0.2
Pr = 0.2

```

```

def rhs(theta, f, k=k_def, t=t_def, lam=lam_def, e=e_def, b=b_def, p = p_def):
    p = chi*t
    a = Pr*p
    fn = a*np.exp(-(np.cos(theta)/e*np.sin(theta))**4)
    mp = p*np.exp(-0.5*(np.cos(theta)/e*np.sin(theta))**2)
    mt = t*np.exp(-0.5*(np.cos(theta)/e*np.sin(theta))**2)
    g = (k_def-2.5)/(k_def-1.5)
    Q = e**(2*g) / (g**g) * b**(g-1)

M = np.matrix([
    [0, (-4*k**2)/((np.sin(theta))**2*(np.cos(theta+f[1]))**2)*f[0]**2/f[6],
     2*f[3], 0, 0, 0, (4*k)/(np.sin(theta))**2*(f[0]**2/f[6]**2), 0],
    [0, 0, 2*f[2], 0, 2*f[4], 0,
     g*Q*f[0]**(0)*f[6]**(g-1)-(4*k**2)/(np.sin(theta))**2*(f[0]**2/f[6]**2),
     0],
    [0, 0, 0, 0, 2*f[3], 2*k*f[0], 0,0],
    [0,0,0,0,mp,0,0,0],
    [0,0,0,0,0,0,0,1],
    [0,0,mt,0,0,0,0,0],
    [0,0,0,1,0,0,0,0],
    [1,0,0,0,0,0,0,0]
    ], dtype='float ')

#print (M)
M_inv = np.linalg.inv(M)

P = np.matrix([
    [-(2*k**2/(np.sin(theta))**2)*(f[0]**2 / f[6])*np.tan(f[1] +theta) -
     (4*k**3 / (np.sin(theta))**2)*(f[0]**2 / f[6])*np.tan(f[1] + theta)**2 +
     (4*k**2 / (np.sin(theta))**2)* (f[0]**2 / f[6])*(1/(np.cos(f[1]+theta))**2)
     - (4*k**2 / (np.sin(theta)**3))*(f[0]**2 / f[6])*mpmath.cot(theta)
     *np.tan(f[1]+theta) + (4*k**2 / (np.sin(theta)**2))*(f[0]**2/f[6])
     - f[6]*f[5]**2 *(np.sin(theta)**2)+ (k-(5/2))* Q *f[0]**(0)*f[6]**g
     -lam*f[6] + (k-(1/2))*f[4]**2 + (k-(1/2))*f[3]**2],
    [k*Q*(0)* f[0]**(0) *np.tan(f[1] + theta) -
     (2*k**2/(np.sin(theta)**2))*(f[0]**2 / f[6])*np.tan(f[1] + theta)
     + (4*k**3 / (np.sin(theta)**2))*(f[0]**2 / f[6])*np.tan(f[1]+theta)
     + (4*k**2 / (np.sin(theta)**3))*(f[0]**2 / f[6])*np.cos(theta) + f[5]**2
     *f[6] *np.cos(theta)*np.sin(theta) - 2*f[4]**2*mpmath.cot(theta)
     + (k-(1/2))*f[2]*f[3] ],
    [k*f[0]*f[5]*np.tan(f[1] + theta) - 2*k*f[0]*f[5]*mpmath.cot(theta)-
     2*k*f[5]*f[0] - 2*f[0]*f[5]*mpmath.cot(theta) -
     2*f[3]*f[4]*mpmath.cot(theta) - (k - (1/2))*f[2]*f[4] +
     (3/2)*(k - (1/2))*f[5]*f[6]*fn*np.sin(theta) ],
    [-(2*k/np.sin(theta))*(f[0]*f[4] / f[6]) - f[5]*f[3]*np.sin(theta) -
     mp*f[4]*mpmath.cot(theta) -(1/2)*(k-(3/2))*f[7] ],
    [f[2]*f[5]*np.sin(theta) +
     (k/np.sin(theta))*(f[4]*f[0] / f[6])*np.tan(f[1] + theta) +
     (1/2)*(k-(1/2))*mp*f[4]],
    [(2*k/np.sin(theta))*(f[3]*f[0] / f[6])*np.tan(f[1] + theta) -

```

```

    (2*k/np.sin(theta))*(f[0]*f[2] / f[6]) + (1/2)*(k-(1/2))*mt*f[3]],
    [-f[1]*mpmath.cot(theta)-(1/2)*(k+3/2)*f[2]],
    [-k*f[0]*np.tan(f[1] + theta)],
        ], dtype='float ')

# MinvP = M_inv*P

MinvP = solve(M_inv,P)

return [MinvP[0].item(),MinvP[1].item(),MinvP[2].item(),MinvP[3].
        item(),MinvP[4].item(),MinvP[5].item(),MinvP[6].item(),
        MinvP[7].item()]

tmin = (np.pi/2-1)
tmax = np.pi/2-0.01

Nmax = 100000

tspace = np.linspace(tmin,tmax,Nmax)

res = integ.solve_ivp(rhs, [tmin, tmax],
    np.array([0.001, 3.2, 0.02, 1., 0.01, 1.,
    (((k_def-2.5)/(k_def-1.5))*b_def) / (e_def**2) ,
    (p_def*B_z - 1)/0.5*(1.5-k_def)]),
    method='LSODA', atol = 1e-4, rtol=1e-6)

resT = res.y.T
x = resT.reshape(resT.shape)
np.savetxt('results.txt',x)

res_t_T = res.t.T
t = res_t_T.reshape(res_t_T.shape)
np.savetxt('theta.txt',t)

for i in range(res.y.shape[0]):
    plt.plot(res.t[:-1], res.y[i], label=f'$X_{i}(t)$')
    plt.xlabel('$\theta$') # the horizontal axis represents the angle
    plt.legend() # show how the colors correspond to the components of X
    plt.gca().invert_xaxis()
    plt.show()

```

## Κεφάλαιο 7

# Αποτελέσματα Ολοκλήρωσης (;)

Σε αυτό το σημείο κάθε εργασίας συνήθως παρατίθενται τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα που έχουν προκύψει. Ήδη ξεκινώντας την εργασία αυτή, περίμενα με ανυπομονησία την στιγμή που θα γέμιζα τις σελίδες αυτές με τα προσεκτικά επιμελημένα διαγράμματα και θα έβλεπα πως διαφοροποιούνται τα αποτελέσματα της δουλειάς μου από τις εργασίες ανθρώπων που ασχολούνται για πολλά χρόνια με το συγκεκριμένο θέμα. Ωστόσο αυτό δεν είναι δυνατόν, καθώς δεν κατάφερα να τελειώσω την ολοκλήρωση του συστήματος. Έλλειψη χρόνου και γνώσεων που δεν είναι σπάνια στην εκπόνηση μιας πτυχιακής εργασίας.

Όταν πριν από λίγες εβδομάδες συνειδητοποίησα ότι δεν προλάβαινα να τελειώσω με τον τρόπο που θα ήθελα την εργασία, ομολογώ ότι απογοητεύτηκα. Δεν ήταν λίγες οι φορές που σκέφτηκα να συνεχίσω την προσπάθεια μέχρι να προκύψουν πράγματι τα πολυπόθητα αποτελέσματα. Αυτό όμως θα σήμαινε να καθυστερήσω την παράδοση της πτυχιακής εργασίας και συνεπώς την απόκτηση του πτυχίου. Αλλά πότε θα τελείωνε αυτή η μελέτη; Είπα ήδη ότι υπάρχουν άνθρωποι που ασχολούνται με το θέμα αυτό περισσότερα χρόνια από ότι εγώ υπάρχω σε αυτόν τον κόσμο. Και τι είναι αυτό που με εμποδίζει από το να συνεχίσω την μελέτη μετά το τέλος των προπτυχιακών μου σπουδών; Από την στιγμή που τόσο μου άρεσε το θέμα και η τελειομανία μου θέλει να το δει ολοκληρωμένο, μάλλον τίποτα.

Δεν ξέρω αν όντως θα καταφέρω ποτέ να συμπληρώσω τις κενές σελίδες αυτής της εργασίας. Ακόμα κι αν δεν το κάνω, κάποιος άλλος θα βρεθεί να ολοκληρώσει αυτό το πρόβλημα και στην περίπτωση αυτή, θα έχω βάλει κι εγώ ένα λιθαράκι στο να απαντηθεί μια από τις ατελείωτες ερωτήσεις τους σύμπαντος.

# Βιβλιογραφικές Αναφορές

- [1] J. Ferreira. *Theory of magnetized accretion discs driving jets*. 2002, pp. 229-277. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00000899>.
- [2] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev. «Black holes in binary systems. Observational appearance.» In: 500 (June 1973), pp. 33-51.
- [3] R. D. Blandford and D. G. Payne. «Hydromagnetic flows from accretion disks and the production of radio jets.» In: 199 (June 1982), pp. 883-903.
- [4] A. Mastichiadis and N. Vlahakis. *High Energy Astrophysics*. 2015. URL: <http://hdl.handle.net/11419/3100>.
- [5] R. D. Blandford and M. J. Rees. «A “twin-exhaust” model for double radio sources.» In: 169 (Dec. 1974), pp. 395-415.
- [6] J. Canto. «A stellar wind model for Herbig-Haro objects». In: 86.3 (June 1980), pp. 327-338.
- [7] A. Konigl. «On the nature of bipolar sources in dense molecular clouds.» In: 261 (Oct. 1982), pp. 115-134.
- [8] R. D. Blandford. «Accretion Disc Electrodynamics — A Model for Double Radio Sources». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 176.3 (Sept. 1976), pp. 465-481. ISSN: 0035-8711. eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/176/3/465/9332949/mnras176-0465.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/176.3.465>.
- [9] R. V. E. Lovelace. «Dynamo model of double radio sources». In: 262.5570 (Aug. 1976), pp. 649-652.
- [10] K. L. Chan and R. N. Henriksen. «On the supersonic dynamics of magnetized jets of thermal gas in radio galaxies». In: 241 (Oct. 1980), pp. 534-551.
- [11] W. M. DeCampli. «T Tau winds.» In: 244 (Feb. 1981), pp. 124-146.
- [12] M. Livio. «The Formation Of Astrophysical Jets». In: *Astronomical Society of the Pacific Conference Series* 121 (Jan. 1997). Ed. by D. T. Wickramasinghe, G. V. Bicknell, and L. Ferrario, p. 845.
- [13] J. Ferreira. «Magnetically-driven jets from Keplerian accretion discs». In: *Astronomy and Astrophysics* 319 (1996), pp. 340-359.
- [14] Jonathan Ferreira. «MHD Disc Winds». In: *Lecture Notes in Physics* (2006), pp. 181-207.
- [15] V. Spyarakos. «Magnetized Accretion Discs Driving Jets». MA thesis. National and Kapodistrian University of Athens, 2020.
- [16] N. Vlahakis. «Output from MHD Models. In: Garcia P., Ferreira J. (eds) *Jets from Young Stars IV. Lecture Notes in Physics*. In: Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, 51-108, vol 793. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-02289-0\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-02289-0_3).



- [17] Steven A. Balbus and John F. Hawley. «A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. I. Linear Analysis». In: 376 (July 1991), p. 214.
- [18] J. Ferreira and G. Pelletier. «Magnetized accretion-ejection structures. 1. General statements». In: 276 (Sept. 1993), p. 625.
- [19] J. Ferreira and G. Pelletier. «Magnetized accretion-ejection structures. III. Stellar and extragalactic jets as weakly dissipative disk outflows.» In: 295 (1995), pp. 807-832.
- [20] F. Casse and J. Ferreira. «Magnetized accretion-ejection structures IV. Magnetically-driven jets from resistive, viscous, Keplerian discs». In: 1999.
- [21] N. Vlahakis. *Fluid Dynamics*. Papazisi Publications, 2019.
- [22] Paulo J. V. Garcia. «Physical Processes in Circumstellar Disks around Young Stars». In: 2011.