Δημήτρης Καραγεώργος

# Θέματα Εργοδικής Θεωρίας Ramsey

Διδακτορική Διατριβή

Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα, Ιούνιος 2022

Εισηγητής: Βασιλική Φαρμάκη


Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Μιχαήλ Ανούσης

Βασιλική Φαρμάκη

Νίκος Φραντζικινάκης

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

Μιχαήλ Ανούσης

Απόστολος Γιαννόπουλος

Κωνσταντίνος Γρυλλάκης

Παντελής Δοδός

Κωνσταντίνος Τύρος

Βασιλική Φαρμάκη

Νίκος Φραντζικινάκης

*Στους γονείς μου!*

# Περιεχόμενα

**Εισαγωγή** **xi**

**Ευχαριστίες** **xxii**

## I Θεωρία Ramsey 1

**1 Εισαγωγικές Έννοιες** **3**

1.1 Τα Θεμελιώδη Αποτελέσματα της Θεωρίας Ramsey 4
1.2 Τα Θεωρήματα Hindman και Milliken-Taylor 5
1.3 Διαμεριστικά Αποτελέσματα σε Χώρους Λέξεων 6
1.3α′ Θεώρημα Hales-Jewett 7
1.3β′ Θεώρημα Carlson 8
1.3γ′ Διαμεριστικά Αποτελέσματα για $\omega$-located Λέξεις 10
1.4 Το Θεώρημα Nash-Williams 14
1.5 Υπερφίλτρα 15
1.6 Coideal 16
1.6α′ Selective Coideal στο $\mathbb{N}$ 18
1.6β′ Semiselective Coideal στο $\mathbb{N}$ 19
1.6γ′ Ramsey Coideal στο $\mathbb{N}$ 21

**2 Coideal και Θεωρία Ramsey 23**

2.1 Coideal σε κατευθυνόμενα σύνολα 25

2.2 Semiselective* βάσεις coideal και η ιδιότητα Ramsey 31

2.3 Ένα Θεώρημα τύπου Nash-Williams για Coideal σε κατευθυνόμενα σύνολα 36

2.4 Αποτελέσματα Τοπολογικής Θεωρίας Ramsey για Κατευθυνόμενα Σύνολα 42

**II Τοπολογικά Δυναμικά Συστήματα 49**

**3 Στοιχεία Τοπολογικών Δυναμικών Συστημάτων 51**

3.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες 51

3.2 Αποτελέσματα Επαναφοράς 54

**4 Τοπολογικά Δυναμικά Συστήματα και Δίκτυα 57**

4.1 Βάσεις coideal με την ιδιότητα-D 58

4.2 Τοπολογικά Δυναμικά Συστήματα σε Κατευθυνόμενες Μερικές Ημιομάδες 63

**III Εργοδικοί Μέσοι Ανεξάρτητων Πολυωνύμων 79**

**5 Εισαγωγικές Έννοιες 81**

5.1 Nilmanifolds 82

5.1α′ Ορισμοί και βασικές ιδιότητες 82

5.1β′ Ομοιόμορφη κατανομή σε nilmanifolds 84

5.2 Εργοδική Θεωρία 86

5.2α′ Συστήματα που διατηρούν το μέτρο 87

5.2β′ Εργοδικότητα 87

5.2γ′ Παράγοντες 88

5.2δ′ Δεσμευμένη μέση τιμή 88
5.2ε′ Εργοδικά Θεωρήματα 89
5.2στ′ Χαρακτηριστικοί παράγοντες 89
5.2ζ′ Ημινόρμες και nilfactors 90

**6 Κύρια Αποτελέσματα 93**
6.1 Σύγκλιση εργοδικών μέσων ανεξάρτητων πολυωνύμων 95
6.1α′ Μια Εφαρμογή σε τοπολογικά δυναμικά συστήματα 100
6.1β′ Μια εφαρμογή στη συνδυαστική 102
6.2 Σύγκλιση πάνω σε πρώτους 105
6.2α′ Μία ακολουθία 105
6.2β′ Πολλές ακολουθίες 106
6.3 Επαναφορά πάνω σε μετατοπισμένους πρώτους 108

**7 Αποδείξεις των αποτελεσμάτων 111**
7.1 Αποτελέσματα ομοιόμορφης κατανομής 112
7.2 Αποτελέσματα σύγκλισης και επαναφοράς 116
7.3 Σύγκλιση πάνω σε πρώτους 122
7.3α′ Επαναφορά πάνω σε μετατοπισμένους πρώτους 125

**Βιβλιογραφία 127**

# Εισαγωγή

Η διατριβή αυτή αποτελείται από τρία μέρη. Τα δύο πρώτα μέρη είναι σχετικά ανεξάρτητα από το τρίτο με κοινό σημείο την έννοια του coideal και της κοινής δουλειάς της ίδιας ομάδας ανθρώπων και περιέχουν αποτελέσματα στη θεωρία Ramsey και στα τοπολογικά δυναμικά συστήματα. Το τρίτο μέρος από την άλλη περιέχει αποτελέσματα στην εργοδική θεωρία.

Στο πρώτο μέρος αναπτύσσουμε μια θεωρία που επεκτείνει την κλασσική τοπολογική θεωρία Ramsey και περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις αποτελέσματα, από την αντίστοιχη θεωρία για coideal στο σύνολο των φυσικών αριθμων των Louveau, Mathias, Farah και Todorcevic, το διαμεριστικό αποτέλεσμα για ακολουθίες πεπερασμένων υποσυνόλων φυσικών αριθμών των Milliken και Taylor, αλλά και διαμεριστικά αποτελέσματα σε λέξεις του Carlson, των Bergelson, Blass και Hindman και της Φαρμάκη.

Το σημείο εκκίνησης για την τοπολογική θεωρία Ramsey ήταν το Θεώρημα Nash-Williams [NW], όπου για μια διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U}$ του συνόλου $[\mathbb{N}]_*$ των γνησίως αυξουσών απείρων ακολουθιών των φυσικών αριθμών εφοδιασμένου με την τοπολογία της κατά σημείου σύγκλισης, που είναι κλειστή ως προς την τοπολογία αυτή και κάθε άπειρο υποσύνολο $A$ των φυσικών αριθμών υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο $B$ του $A$ τέτοιο ώστε είτε $[B]_* \subseteq \mathcal{U}$ είτε $[B]_* \subseteq [\mathbb{N}]_* \setminus \mathcal{U}$. Αργότερα αποδείχθηκε από τους Galvin και Prikry στο [GP] ότι και οι διαμεριστικές οικογένειες $\mathcal{U}$ που είναι Borel έχουν την ίδια ιδιότητα. Τα θεωρήματα αυτά ισχυροποιήθηκαν προς δύο κατευθύνσεις.

Από τη μια πλευρά ο Louveau στο [Lo] επέλεξε τα άπειρα σύνολα $A$ και $B$

από ένα μη τετριμμένο Ramsey υπερφίλτρο των φυσικών αριθμών και αργότερα ο Mathias στο [M], ο Farah στο [F] και ο Todocervic στο [T], τα επέλεξαν από ένα semiselective coideal των φυσικών αριθμών επίσης.

Από την άλλη πλευρά, αυτά τα τοπολογικά αποτελέσματα επεκτάθηκαν από τον Milliken και τον Taylor στα [Mi] και [Ta] αντίστοιχα, αποδεικνύοντας ανάλογα αποτελέσματα για το σύνολο των πεπερασμένων μη κενών υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ αντί για το σύνολο των φυσικών αριθμών. Επιπλέον, ανάλογα τοπολογικά διαμεριστικά αποτελέσματα για λέξεις σε ένα πεπερασμένο αλφάβητο αποδείχθηκαν αρχικά από τον Carlson στο [C] και αργότερα από τους Bergelson, Blass και Hindman στο [BBH] και τους Φαρμάκη και Νεγρεπόντη στο [FaN]. Επίσης, διαμεριστικά αποτελέσματα τύπου Nash-Williams, έδωσε η Φαρμάκη στο [Fa] για $\omega$-located λέξεις με μεταβλητή σε ένα άπειρο αλφάβητο που κυριαρχείται από μια αύξουσα ακολουθία και ο ίδιος συγγραφέας με τον Κουτσογιάννη στο [FaK1] στο σύνολο των ρητών αριθμών.

Ενοποιούμε αυτές τις δύο θεωρίες, που έχουν ως κοινό κομμάτι το κλασσικό θεώρημα Nash-Williams, αναπτύσσοντας μια τοπολογική θεωρία Ramsey για δίκτυα. Αυτό είναι το περιεχόμενο της εργασίας:

> V. Farmaki, D. Karageorgos, A. Koutsogiannis, A. Mitropoulos, *Abstract topological Ramsey theory for nets*, Topology and its Applications **201** (2016), 314-329.

Συγκεκριμένα, ορίζουμε τις έννοιες του coideal, της βάσης coideal και του semiselective* coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο$(X, \prec)$ που αποτελούν γενικεύσεις των αντίστοιχων εννοιών στους φυσικούς αριθμούς. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι κάθε semiselective* βάση coideal $\mathcal{B}$ στο $X$ για την οποία $B - x \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και κάθε $x \in X$, όπως και κάθε semiselective* coideal στο $X$, έχει την ιδιότητα Ramsey*. Δηλαδή για κάθε φυσικό αριθμό $n$, κάθε οικογένεια $\mathcal{F}$ του $[X]_*$ και κάθε $A \in \mathcal{B}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ ώστε, είτε $[B]_* \subseteq \mathcal{F}$ είτε $[B]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{F}$. Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν το περιεχόμενο του Θεωρήματος 2.2.6 και του Πορίσματος 2.2.8.

Έπειτα, στο Θεώρημα 2.3.6 παίρνουμε ένα αποτέλεσμα τύπου Nash-Williams για άπειρα κατευθυνόμενα σύνολα, το οποίο είναι ένα διαμεριστικό αποτέλεσμα για το σύνολο $[X]_*^{<\infty}$, των ολικά διατεταγμένων πεπερασμένων υποσυνόλων του X. Συγκεκριμένα, για μια διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{F}$ του συνόλου $[X]_*^{<\infty}$ και για κάθε στοιχείο A μιας semiselective* βάσης coideal $\mathcal{B}$ στο X, βρίσκουμε $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ ώστε, είτε το $[B]_*^{<\infty}$ να περιέχεται στο $[X]_*^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$, είτε κάθε άπειρη αύξουσα ακολουθία στοιχείων του B να έχει αρχικό τμήμα στο $\mathcal{F}$.

Εφοδιάζοντας το σύνολο $[X]_*$ των ολικά διατεταγμένων άπειρων υποσυνόλων του X με την σχετική τοπολογία της τοπολογίας γινόμενο του $\{0,1\}^X$, το Θεώρημα 2.3.6 έχει ως συνέπεια ότι, για κάθε διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U}$ του $[X]_*$, η οποία είναι κλειστή ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης και κάθε στοιχείο A μιας semiselective* βάσης coideal μπορούμε να βρούμε $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ ώστε, είτε το $[B]_*$ να περιέχεται στο $\mathcal{U}$, είτε το $[B]_*$ να περιέχεται στο $[X]_* \setminus \mathcal{U}$. Επιπλέον, δείχνουμε στο Πόρισμα 2.4.12 ότι κάθε διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U}$ του $[X]_*$, που είναι Borel ικανοποιεί την ίδια ιδιότητα.

Τέλος, αφού τα semiselective coideal στο σύνολο των φυσικών αριθμών είναι semiselective* χρησιμοποιώντας τα τοπολογικά διαμεριστικά αποτελέσματα που παίρνουμε, για το σύνολο των πεπερασμένων μη κενών υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, όπως επίσης και για το σύνολο των λέξεων, είναι δυνατόν, ορίζοντας κατάλληλες semiselective* βάσεις coideal όπως στις προτάσεις 2.2.4, 2.2.5, τα αποτελέσματα των Milliken [Mi] και Taylor [Ta] για την περίπτωση των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και των Carlson [C], Φαρμάκη [Fa] και Bergelson, Blass και Hindman [BBH] να επαναδιατυπωθούν. Συνεπώς, εμπεριέχονται στην θεωρία που παρουσιάζουμε και ενοποιούνται κάτω από αυτή.

Στο δεύτερο μέρος της διατριβής παρουσιάζουμε αποτελέσματα επαναφοράς και πολλαπλής επαναφοράς για τοπολογικά δυναμικά συστήματα πάνω σε μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα ως προς μια βάση coideal που είναι κατάλληλη γι αυτή.

Αφετηρία μας είναι τα θεωρήματα επαναφοράς του Birkhoff και των Furstenberg και Weiss. Αρχικά ο Birkhoff, ο οποίος είναι ο κύριος υπεύθυνος για τη δημιουργία των τοπολογικών δυναμικών συστημάτων ως ανεξάρτητου κλάδου, στο [Bi] απέδειξε ότι για μια συνεχή συνάρτηση $T$ από ένα συμπαγή χώρο $X$ στον εαυτό του, υπάρχει στοιχείο $x$ στον $X$ τέτοιο ώστε $\lim_{k\in\mathbb{N}} T^{n_k}(x) = x$ για κάποια ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών.

Το αποτέλεσμα του Birkhoff γενικεύτηκε από τους Fustenberg και Weiss στο [FuW] σε δύο κατευθύνσεις. Ορίζοντας τα σημεία επαναφοράς, εντόπισαν συνθήκες για την ύπαρξή τους και απέδειξαν ένα Θεώρημα τύπου Birkhoff πολλαπλής επαναφοράς. Επιπλέον επέκτειναν τα αποτελέσματά τους για συστήματα της μορφής $(T^F)_{F\in[\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}}$, όπου $[\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}$ είναι το σύνολο των μη κενών πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, αντί για τα συστήματα $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ που χρησιμοποίησαν νωρίτερα.

Παρουσιάζουμε λοιπόν μια γενική θεωρία τοπολογικών δυναμικών συστημάτων, που περιέχει και ενοποιεί τα προηγούμενα αποτελέσματα. Αυτό είναι το περιεχόμενο της εργασίας:

> V. Farmaki, D. Karageorgos, A. Koutsogiannis, A. Mitropoulos, *Topological dynamics on nets*, Topology and its Applications **201** (2016), 414-431.

Τα αποτελέσματά μας αφορούν τοπολογικά δυναμικά δυναμικά συστήματα της μορφής $(X, T^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, όπου $\Lambda$ είναι μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα. Στο Θεώρημα 4.2.8 αποδεικνύουμε ότι σε ένα τέτοιο σύστημα μπορούμε να βρούμε ένα σημείο B-επαναφοράς, δηλαδή $\lim_{\lambda\in A} T^\lambda(x_0) = x_0$, για κάποιο $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$, όπου το $B$ είναι ένα στοιχείο μιας κατάλληλης βάσης coideal $\mathcal{B}$ στο $\Lambda$ η οποία θα πρέπει να έχει επιπλέον μια ιδιότητα την οποία ονομάζουμε D. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μια επέκταση του αποτελέσματος επαναφοράς του Birkhoff.

Επίσης, καταφέρνουμε να πάρουμε και ένα αποτέλεσμα πολλαπλής επαναφοράς στο Θεώρημα 4.2.20, επεκτείνοντας το αντίστοιχο αποτέλεσμα των Furstenberg και Weiss [FuW]. Η ακριβής διατύπωση αυτού του αποτελέσματος είναι η ακόλουθη:

**Θεώρημα.** *Έστω $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, $\mathcal{B}$ μια κατάλληλη βάση coideal στην $(\Lambda, \prec, *)$ με την ιδιότητα-D, $m \in \mathbb{N}$, $(X, T_1^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$,*

*..., $(X, T_m^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $\Lambda$-τοπολογικά δυναμικά συστήματα ενός συμπαγούς μετρικού χώρου $(X, d)$ τα οποία περιέχονται όλα σε μια μεταθετική ομάδα $G$ ομοιομορφισμών του $X$. Υποθέτουμε επιπλέον, ότι τα συστήματα $(X, T_i^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ αλλά και $(X, (T_i^\lambda)^{-1})_{\lambda\in\Lambda}$ είναι ισοσυνεχή για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Τότε για κάθε $B \in \mathcal{B}$ υπάρχουν $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$ και $x_0 \in X$ ώστε,*

$$\lim_{\lambda\in A} T_i^\lambda(x_0) = x_0 \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Τέλος, υποδεικνύουμε ένα τρόπο για να εφαρμόσουμε αυτά τα αποτελέσματα σε τοπολογικά δυναμικά συστήματα πάνω σε λέξεις.

Στο τρίτο μέρος ασχολούμαστε με σύγκλιση εργοδικών μέσων και τις συνέπειες που έχουν σε προβλήματα επαναφοράς στη συνδυαστική και τη θεωρία αριθμών.

Η μελέτη της οριακής συμπεριφοράς στον $L^2(\mu)$ πολλαπλών εργοδικών μέσων της μορφής

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{a_1(n)}f_1 \cdot \ldots \cdot T^{a_\ell(n)}f_\ell, \tag{1}$$

σε ένα σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, όπου $(a_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_\ell(n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθίες ακεραίων, $T : X \to X$ είναι ένας αντιστρέψιμος μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο σε ένα χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{B}, \mu)$ και $f_1, \ldots, f_\ell \in L^\infty(\mu)$, έχει υπάρξει μεγάλης σημασίας για την περιοχή της εργοδικής θεωρίας. Πρωτοπόρος σε αυτό υπήρξε ο Furstenberg στο [Fu], όπου πρώτος μελέτησε μέσους όπως στην (1) για την περίπτωση των ακολουθιών $a_i(n) = in$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, με σκοπό να δώσει μια εργοδική απόδειξη του θεωρήματος του Szemerédi πάνω σε αριθμητικές προόδους. Συγκεκριμένα απέδειξε ότι αν $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ τότε

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n}A \cap T^{-2n}A \ldots \cap T^{-\ell n}A) > 0$$

αλλά άφησε ανοιχτό το ερώτημα της ύπαρξης του ορίου. Οι Host και Kra έδωσαν θετική απάντηση στο [HK] για την ύπαρξη του παραπάνω ορίου αλλά και πιο γενικά και για το όριο της (1).

Οι Bergelson και Leibman στο [BL] μελέτησαν την περίπτωση, όπου οι ακολουθίες $a_i$ είναι ακέραια πολυώνυμα, δηλαδή πολυώνυμα που δίνουν ακέραιες τιμές στους ακεραίους, χωρίς σταθερό όρο και απέδειξαν μια πολυωνυμική επέκταση του θεωρήματος του Szemerédi.

Ένα άλλο ερώτημα που προκύπτει μελετώντας την οριακή συμπεριφορά των εργοδικών μέσων όπως αυτών της (1), είναι αν το όριο υπάρχει τι μπορούμε να πούμε γι αυτό. Προς αυτή την κατεύθυνση και για την περίπτωση των ασθενών mixing συστημάτων $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, δηλαδή το σύστημα $(X\times X, \mathcal{B}\times\mathcal{B}, \mu\times\mu, T\times T)$ είναι εργοδικό, οι Fustenberg, Katznelson και Ornstein απέδειξαν στο [FKO] ότι αν $a_i(n) = in$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, οι πολλαπλοί εργοδικοί μέσοι της (1) συγκλίνουν στο γινόμενο των ολοκληρωμάτων των $f_i$. O Bergelson στο [B] επέκτεινε αυτό το αποτέλεσμα για την περίπτωση που οι $a_i$ είναι ουσιωδώς διακεκριμένα ακέραια πολυώνυμα, δηλαδή είναι πολυώνυμα και οι διαφορές τους δεν είναι σταθερές. Επιπλέον, οι Φραντζικινάκης και Kra στο [FK] απέδειξαν το ίδιο αποτέλεσμα υποθέτοντας ότι το σύστημα είναι καθολικά εργοδικό και για την περίπτωση που οι $a_i$ είναι ανεξάρτητα ακέραια πολυώνυμα, δηλαδή κάθε μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός στους ακεραίους των $a_i$ δεν είναι σταθερός. Η σημασία της ακριβής γνώσης του ορίου για ένα σύστημα έγκειται στο γεγονός ότι θα είχε εκ των προτέρων, ως συνέπειες καλά αποτελέσματα επαναφοράς και αποτελέσματα στη συνδυαστική.

Η σύγκλιση πολλαπλών εργοδικών μέσων με περισσότερους από ένα μετασχηματισμούς που μετατίθενται μεταξύ τους μελετήθηκε επίσης. Για την περίπτωση ακέραιων πολυωνύμων με διαφορετικούς βαθμούς στο [CFH] και για την περίπτωση με ακέραια μέρη πραγματικών πολυωνύμων επίσης με διαφορετικούς βαθμούς στο [K].

Επίσης, υπάρχουν αποτελέσματα και σε μη πολυωνυμικές περιπτώσεις. Οι Bergelson και Håland-Knutson στο [BK] ασχολήθηκαν με την περίπτωση των μέσων με ακέραια μέρη tempered συναρτήσεων σε ασθενώς mixing συστήματα, ενώ ο Φραντζικινάκης ασχολήθηκε με την περίπτωση μέσων με ακέραια μέρη από λογαριθμο-εκθετικές Hardy συναρτήσεις πολυωνυμικής τάξης, στο [F2] για ένα μετασχηματισμό $T$ και στο [F4] για πολλούς $T_i$ που μετατίθενται, όπου επίσης έδειξε ([F2]) ότι για την υπογραμμική περίπτωση η υπόθεση της αντιμεταθετικότητας των $T_i$ μπορεί να παραλειφθεί. Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν σύγκλιση στο αναμενόμενο όριο, δηλαδή με την υπόθεση της εργοδικότητας, το όριο να είναι ίσο με το γινόμενο των ολοκληρωμάτων των $f_i$. Τα αποτελέσματα στα [F2] και [F4] ισχύουν και για γενικά συστήματα, μια συμπεριφορά που δεν είχαμε για καμία κλάση πολυωνύμων, με πολλαπλά πολυώνυμα βαθμού μεγαλύτερου του ένα.

Στη διατριβή αυτή μελετάμε τη σύγκλιση πολλαπλών εργοδικών μέσων πάνω σε ακέραια μέρη πραγματικών πολυωνύμων της μορφής

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{[p_1(n)]}f_1 \cdot \ldots \cdot T^{[p_\ell(n)]}f_\ell. \tag{2}$$

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε καταγράφονται στην εργασία:

> D. Karageorgos, A. Koutsogiannis. *Integer part independent polynomial averages and applications along primes*. Studia Mathematica **249** (2019), 233–257.

Αποδεικνύουμε ότι, αν οι ακολουθίες $(p_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (p_\ell(n))_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελούνται από ισχυρά ανεξάρτητα πολυώνυμα, δηλαδή κάθε μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός τους έχει τουλάχιστον έναν άρρητο μη σταθερό συντελεστή και υποθέτοντας την εργοδικότητα του συστήματος $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ το όριο στην (2) υπάρχει στον $L^2(\mu)$ καθώς το $N \to \infty$ και είναι το γινόμενο των ολοκληρωμάτων των $f_i$. Αυτό είναι το περιεχόμενο του Θεωρήματος 6.1.3 ([KK], Θεώρημα 2.1) και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

**Θεώρημα.** *Έστω $\ell \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα, $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ένα εργοδικό σύστημα και $f_1, \ldots, f_\ell \in L^\infty(\mu)$. τότε*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{[p_1(n)]}f_1 \cdot \ldots \cdot T^{[p_\ell(n)]}f_\ell = \int f_1\, d\mu \cdot \ldots \cdot \int f_\ell\, d\mu, \tag{3}$$

*όπου η σύγκλιση συμβαίνει στον $L^2(\mu)$.*

Χρησιμοποιώντας την εργοδική ανάλυση σε ένα γενικό σύστημα το παραπάνω όριο είναι το γινόμενο των δεσμευμένων μέσων τιμών των $f_i$ αντίστοιχα, δηλαδή $\mathbb{E}(f_1|\mathcal{I}(T)) \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}(f_\ell|\mathcal{I}(T))$. Μάλιστα αυτή είναι η πρώτη φορά που έχουμε ύπαρξη και ακριβή έκφραση του ορίου για γενικές πολλαπλές πολυωνυμικές εκφράσεις. Το αποτέλεσμα αυτό αν και είναι διατυπωμένο στη γλώσσα της εργοδικής θεωρίας είναι εκ φύσεως συνδυαστικό. Πράγματι, άμεσες εφαρμογές του θεωρήματος 6.1.3 είναι το αποτέλεσμα επαναφοράς του θεωρήματος 6.1.5 και συνέπεια της αρχής του Furstenberg τα αποτελέσματα συνδυαστικής που διατυπώνονται στα θεωρήματα 6.1.7 και 6.1.8. Αξίζει να αναφέρουμε ότι με το αποτέλεσμα αυτό παίρνουμε εφαρμογές και στα τοπολογικά δυναμικά συστήματα, όπως είναι το περιεχόμενο του Θεωρήματος 6.1.9 και του Πορίσματος 6.1.11, αλλά και επιπλέον εφαρμογές στη συνδυαστική, όπως βλέπουμε στο Θεώρημα 6.1.14 και στο Πόρισμα 6.1.17.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 6.1.3 ακολουθούμε την προσέγγιση που υπάρχει στα [F1] και [F2] από τον Φραντζικινάκη και χρησιμοποιούμε κάποια αποτελέσματα του Leibman [L] και των Host και Kra [HK]. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.2.4 (Λήμμα 4.7 στο [F2]), που λέει ότι ο nilfactor είναι ο χαρακτηριστικός παράγων για την οικογένεια των πολυωνύμων που δουλεύουμε και το θεώρημα δομής των Host και Kra (Θεώρημα 5.2.3), αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα 6.1.3 για την περίπτωση που το σύστημα είναι nilsystem. Για να το πετύχουμε αυτό ολοκληρώνουμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.1.1, ένα αποτέλεσμα ομοιόμορφης κατανομής σε nilmanifolds που αποδείχθηκε πρώτα από τον Φραντζικινάκη στο [F1] για την περίπτωση λογαριθμο-εκθετικών Hardy συναρτήσεων. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.1 χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 5.1.9, ένα κεντρικό αποτέλεσμα ομοιόμορφης κατανομής για πολυωνυμικές ακολουθίες σε συνεκτικές και απλά συνεκτικές ομάδες Lie, που οφείλεται στον Leibman [L].

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.2.1 από το [F2], ένα αποτέλεσμα σύγκλισης πολλαπλών εργοδικών μέσων από μια πολυωνυμική ακολουθία και το Θεώρημα 6.1.3 μαζί με κάποια αποτελέσματα από το [K1], αποδεικνύουμε τα Θεωρήματα 6.2.3 και 6.2.5 αντίστοιχα μαζί με τις συνέπειές τους.

Τέλος, αποδεικνύουμε τα Θεωρήματα 6.3.1 and 6.3.2, που είναι τα αποτελέματα επαναφοράς σε μετατοπισμένους πρώτους $\mathbb{P}-1$ και $\mathbb{P}+1$, μαζί με τις συνέπειές τους που είναι το περιεχόμενο των Θεωρημάτων 6.3.3 και 6.3.4 χρησιμοποιώντας την αρχή του Furstenberg.

# Ευχαριστίες

Πρώτα, θα ήθελα να ευχαριστήσω και να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην επιβλέπουσά μου, Καθηγήτρια Βασιλική Φαρμάκη για τη συνεχή υποστήριξη, την καθοδήγηση και το ειλικρινές της ενδιαφέρον. Πίστεψε σε μένα αρκετά ώστε να με δεχτεί ως μαθητή της και δεν έπαψε ποτέ να με πιστεύει, κάτι που απαιτούσε τεράστια υπομονή από μέρους της μερικές φορές. Πέρα από το γεγονός ότι ήταν πάντα εκεί για να απαντήσει σε κάθε είδους ερώτημά μου, μου παρείχε ιδέες και ευκαιρίες που δε θα μπορούσα να φανταστώ σαν φοιτητής και αυτά που έμαθα από την ερευνητική της εμπειρία βελτίωσαν τις ικανότητές μου και μου έδωσαν εφόδια για το μέλλον. Όλα αυτά τα χρόνια ανέπτυξα μια εξαιρετική σχέση μαζί της. Ιδιαίτερα, τα τελευταία χρόνια που ήταν δύσκολα τόσο στο ακαδημαϊκό κομμάτι όσο και στο προσωπικό, ήταν εκεί για να με στηρίξει υπομονετικά και άνευ όρων. Ο σεβασμός που τρέφω για την προσωπικότητά της, τη βαθειά γνώση του αντικειμένου της και τον ενθουσιασμό της για έρευνα είναι μεγάλος, όπως επίσης και η εκτίμηση για ότι έχει κάνει για μένα.

Εκτός από την επιβλέπουσά μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Νίκο Φραντζικινάκη, που μου έκανε την τιμή να είναι μέλος στην τριμελή επιτροπή, αλλά κυρίως για τις ιδέες που πρότεινε, τις γόνιμες συζητήσεις και τις εποικοδομητικές υποδείξεις που έκανε. Η συνεργασία του και η θετική του στάση, πραγματικά χαίρουν την εκτίμησή μου, όπως επίσης και η βαθειά γνώση του αντικειμένου του. Θα ήταν αμέλειά μου όμως να μην αναφέρω και το πόσο γενναιόδωρος οικοδεσπότης υπήρξε όποτε βρέθηκα στο Ηράκλειο.

Πέραν τούτου, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου και στον Καθηγητή Μιχαήλ Ανούση που επίσης μου έκανε την τιμή να είναι μέλος της τριμελούς επιτροπής. Η εκτίμηση που τρέφω για το πρόσωπό του είναι επίσης μεγάλη.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω και όλους τους καθηγητές μου από το τμήμα Μαθηματικών για όλα αυτά που με δίδαξαν στην τάξη. Θα σταθώ όμως ιδιαιτέρως στους καθηγητές Ευστάθιο Βασιλείου, Αποστόλη Γιαννόπουλο, Κωνσταντίνο Γρυλλάκη, Αριστείδη Κατάβολο, Μαρία Παπατριανταφύλλου και Μαρία Φραγκουλοπούλου που υπήρξαν δάσκαλοι για μένα και κινητήριος δύναμη για να ασχοληθώ περισσότερο και σε μεγαλύτερο βάθος με τα μαθηματικά και μου παρείχαν άμεση ή έμμεση ακαδημαϊκή υποστήριξη. Να ευχαριστήσω επίσης τον Αναπληρωτή Καθηγητή Παντελή Δοδό και τον Καθηγητή Δημήτρη Γατζουρα, που δυστυχώς έφυγε πρόωρα από τη ζωή, για τη στήριξή τους όταν τη χρειάστηκα. Τέλος, να εκφράσω και την ευγνωμοσύνη μου για τον Ομότιμο Καθηγητή Στυλιανό Νεγρεπόντη για τη συνεχή ακαδημαϊκή υποστήριξή του αλλά και για τις ευχάριστες συζητήσεις που είχαμε.

Φυσικά, δε θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω τους συναδέλφους και φίλους μου Ανδρέα Κουτσογιάννη και Ανδρέα Μητρόπουλο που μου παρείχαν ένα ευχάριστο εργασιακό περιβάλλον, για τη συνεργασία που είχαμε κάτω από δύσκολες συνθήκες, αλλά κυρίως για τις ωραίες στιγμές που μοιραστήκαμε τότε.

Επίσης, είμαι ευγνώμων για όλους τους φίλους μου έξω από το ακαδημαϊκό περιβάλλον για την υποστήριξή τους, τη φιλία τους και που κάνουν τη ζωή πιο ενδιαφέρουσα και ευχάριστη αλλά και για την Αγγελική και το Ιολάκι που υπήρξαν σημαντικά κομμάτια της ζωής μου αυτή την περίοδο.

Τέλος, χρωστάω αιώνια ευγνωμοσύνη στους γονείς μου και στον αδερφό μου που με ενθάρρυναν και με βοήθησαν σε κάθε στάδιο της προσωπικής και ακαδημαϊκής μου ζωής. Μου λείπει αφάνταστα ο αγαπημένος μου πατέρας που δε βρίσκεται πια στη ζωή. Η χαρά του που τελειώνει αυτό το ταξίδι θα ήταν σίγουρα μεγαλύτερη από τη δική μου και με θλίβει ιδιαιτέρως που δε θα τη μοιραστώ μαζί του. Ο ρόλος που έπαιξε στη ζωή μου ήταν και παραμένει τεράστιος.

# Μέρος I

# Θεωρία Ramsey

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγικές Έννοιες

Το 1927 ο van der Waerden [vdW] απέδειξε ότι αν το σύνολο των φυσικών αριθμών διαμεριστεί σε πεπερασμένα το πλήθος σύνολα, τότε κάποιο από αυτά περιέχει αυθαίρετα μεγάλη αριθμητική πρόοδο, ενώ ο Ramsey [R] το 1929 απέδειξε ότι αν το σύνολο των $k$-άδων φυσικών αριθμών διαμεριστεί σε πεπερασμένα το πλήθος σύνολα, τότε υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο των φυσικών, ώστε το σύνολο των $k$-άδων του να εμπεριέχεται σε κάποιο σύνολο της διαμέρισης. Τα δύο αυτά θεμελιώδη θεωρήματα, αποτέλεσαν την αρχή της θεωρίας Ramsey και είναι συνέπειες της αρχής του περιστερεώνα.

Το 1965 ο Nash-Williams [NW] απέδειξε ότι για κάθε διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U} \subseteq [\mathbb{N}]$ η οποία είναι κλειστή ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης και για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο, υπάρχει $B \subseteq A$ άπειρο ώστε, είτε $[B] \subseteq \mathcal{U}$ είτε $[B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$. Οι Galvin και Prikry [GP] το 1973 απέδειξαν ένα αντίστοιχο του θεωρήματος Nash-Williams για μια διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U}$ που είναι Borel ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.

Το 1974 ο Hindman [H] έδειξε ότι αν οι φυσικοί αριθμοί διαμεριστούν σε πεπερασμένα χρώματα, τότε υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολό τους, του οποίου όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα να είναι μονοχρωματικά. Το ανάλογο πολυδιάστατο αποτέλεσμα για $k$-άδες φυσικών αριθμών απεδείχθη ανεξάρτητα από τους Milliken [Mi] το 1975 και Taylor [Ta] το 1976.

Οι Hales και Jewett το 1963 είχαν διαμεριστικά αποτελέσματα πάνω σε λέξεις ως προς ένα πεπερασμένο αλφάβητο και ο Carlson το 1988 επεξέτεινε τα αποτελέσματά τους αποδεικνύοντας απειροδιάστατα ανάλογα αποτελέσματα. Οι Bergelson, Blass και Hindman [BBH] το 1994 είχαν αντίστοιχα αποτελέσματα σε located λέξεις, ενώ η Φαρμάκη [Fa] το 2009 έδωσε ανάλογα αποτελέσματα σε λέξεις πάνω σε άπειρο αλφάβητο.

Τα αποτελέσματα αυτά τα παρουσιάζουμε στην αρχή του κεφαλαίου μιας τα θεωρούμε σημαντικά, πηγή έμπνευσης και τα χρησιμοποιούμε στην παρούσα διατριβή. Στην συνέχεια, δίνουμε τις έννοιες των υπερφίλτρων και coideal, καθώς και κάποιες βασικές ιδιότητές τους και αποτελέσματα πάνω σε αυτά.

Τέλος, δίνουμε τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιούμε στο πρώτο μέρος της διατριβής

Με $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών. Για ένα άπειρο σύνολο $M$ με $[M] = \{L \subseteq M : L \text{ άπειρο}\}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των άπειρων υποσυνόλων του $M$, ενώ με $[M]^{<\infty} = \{L \subseteq M : L$ πεπερασμένο $\}$ και $[M]^k = \{(m_1, \dots, m_k) : m_1 < \dots < m_k \in M\}$ τα σύνολα των πεπερασμένων υποσυνόλων του $M$ και των διατεταγμένων $k$-άδων με στοιχεία από το $M$. Για $A \in [\mathbb{N}]$ και $n \in \mathbb{N}$ θα συμβολίζουμε με $A - n = \{m \in \mathbb{N} : n < m\}$ τα στοιχεία του $A$ που είναι μεγαλύτερα του $n$.

## 1.1 Τα Θεμελιώδη Αποτελέσματα της Θεωρίας Ramsey

Στη παράγραφο αυτή δίνουμε κάποια θεμελιώδη αποτελέσματα της Θεωρίας Ramsey.

Έστω $X$ ένα σύνολο και $r \in \mathbb{N}$. Μια συνάρτηση $c : X \to \{1, \dots, r\}$ θα λέγεται $r$-*χρωματισμός* ή πιο απλά *χρωματισμός* του $X$. Αν $c^{-1}(\{i\}) = C_i$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant r$, τότε $X = C_1 \cup \dots C_r$. Ένα υποσύνολο $Y$ του $X$ θα λέγεται μονοχρωματικό αν υπάρχει $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ ώστε $Y \subseteq C_{i_0}$.

**Θεώρημα 1.1.1 (Αρχή του περιστερεώνα).** *Έστω* $A$ *ένα άπειρο σύνολο και* $B \subseteq A$. *Τότε είτε το* $B$ *είναι άπειρο είτε το* $A \setminus B$ *είναι άπειρο.*

Στη συνέχεια αναφέρουμε το Θεώρημα του Ramsey το οποίο αποτελεί, όπως θα μπορούσε να πει κανείς μια "πολυδιάστατη"μορφή της Αρχής του Περιστερεώνα.

**Θεώρημα 1.1.2 (Ramsey, [R]).** *Για κάθε* $k \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ *άπειρο και* $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^k$ *υπάρχει* $B \subseteq A$ *άπειρο ώστε, είτε* $[B]^k \subseteq \mathcal{F}$, *είτε* $[B]^k \subseteq [\mathbb{N}]^k \setminus \mathcal{F}$.

**Θεώρημα 1.1.3 (van der Waerden, [vdW]).** *Έστω* $k, r \in \mathbb{N}$. *Αν* $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$, *μια διαμέριση των φυσικών αριθμών, τότε υπάρχει* $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ *ώστε το* $C_{i_0}$ *να περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους* $k$, *δηλαδή υπάρχουν* $a, b \in \mathbb{N}$ *ώστε* $a + jb \in C_{i_0}$ *για κάθε* $1 \leqslant j \leqslant k - 1$.

Σημειώνουμε εδώ, ότι εν γένει δεν μπορούμε να βρούμε πάντα άπειρη αριθμητική πρόοδο σε κάποιο από τα $C_i$.

Το θεώρημα van der Waerden αναφέρεται σε αριθμητικές προόδους του $\mathbb{N}$ ή του $\mathbb{Z}$. Το πολυδιάστατο ανάλογο είναι το ακόλουθο Θεώρημα, που επεκτείνει το Θεώρημα van der Waerden στο $\mathbb{N}^m$. Η απόδειξη αυτού, οφείλεται στον Gallai, παρόλο που δε δημοσίευσε ποτέ το αποτέλεσμά του.

**Θεώρημα 1.1.4 (Gallai).** *Έστω* $m, r \in \mathbb{N}$ *και* $\mathbb{N}^m = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ , *μια διαμέριση του* $\mathbb{N}^m$ *σε* $r$ *χρώματα. Τότε για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο* $F$ *του* $\mathbb{N}^m$ *υπάρχουν* $1 \leqslant i_0 \leqslant r$, $a \in \mathbb{N}^m$ *και* $b \in \mathbb{N}$, *ώστε* $a + Fb \subseteq C_{i_0}$.

## 1.2 Τα Θεωρήματα Hindman και Milliken-Taylor

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το διαμεριστικό θεώρημα Hindman ([H]) (Θεώρημα 1.2.1), το οποίο αναφέρεται σε πεπερασμένα αθροίσματα υποσυνόλων του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών. .

Για μια ακολουθία φυσικών αριθμών $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ θέτουμε,

$$FS(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{i\in F} x_i : F \in [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0} \right\},$$

να είναι το σύνολο των πεπερασμένων αθροισμάτων της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Το θεώρημα Hindman ([H]) διατυπώνεται ως εξής:

**Θεώρημα 1.2.1** (**Hindman**, [H]). *Έστω* $r \in \mathbb{N}$ *και* $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ *μια διαμέριση των φυσικών αριθμών. Τότε υπάρχει μια ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *φυσικών αριθμών ώστε*

$$FS(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_{i_0}.$$

Επίσης, διατυπώνουμε το θεώρημα των Milliken [Mi] και Taylor [Ta] (Θεώρημα 1.2.2), για k-άδες πεπερασμένων αθροισμάτων το οποίο γενικεύει ταυτόχρονα τα Θεωρήματα των Hindman και Ramsey.

Για $\alpha, \beta \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ θα γράφουμε $\alpha < \beta$ αν $\max \alpha < \min \beta$. Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο $\mathbb{N}$, $x_\alpha = \sum_{n\in\alpha} x_n$ και θέτουμε

$$[FS(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]^k = \{\{x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_k}\} : \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in [\mathbb{N}]^{<\infty},\ \text{με}\ \alpha_1 < \ldots < \alpha_k\}.$$

να είναι k-άδες πεπερασμένων αθροισμάτων.

**Θεώρημα 1.2.2** (**Milliken-Taylor**, [Mi], [Ta]). *Έστω* $k, r \in \mathbb{N}$, $[\mathbb{N}]^k = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ *και έστω μια ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *φυσικών αριθμών. Τότε υπάρχουν* $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ *και μια ακολουθία* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *φυσικών αριθμών με* $FS(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ώστε*

$$[FS(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]^k \subseteq C_{i_0}.$$

## 1.3 Διαμεριστικά Αποτελέσματα σε Χώρους Λέξεων

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε κάποια διαμεριστικά αποτελέσματα πάνω σε λέξεις, τα οποία θεωρούμε σημαντικά και αποτελούν κομμάτι της σύγχρονης θεωρίας Ramsey.

### 1.3α′ Θεώρημα Hales-Jewett

Έστω $\Sigma$ ένα πεπερασμένο σύνολο το οποίο θα αποκαλούμε *αλφάβητο*. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα συμβολίζουμε με $\Sigma^n$ το σύνολο των διατεταγμένων πεπερασμένων ακολουθιών με στοιχεία από το $\Sigma$ μήκους $n$. Ακριβέστερα,

$$\Sigma^n = \{w = (w_1, \dots, w_n) : a_i \in \Sigma, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Επίσης θέτουμε,

$$W(\Sigma) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma^n.$$

Τα στοιχεία του $W(\Sigma)$ θα τα λέμε *λέξεις* ως προς το $\Sigma$ ή πιο απλά λέξεις αν το αλφάβητο $\Sigma$ είναι ξεκάθαρο. Το *μήκος* μιας λέξης $w$ ως προς το $\Sigma$ θα το συμβολίζουμε με $|w|$ και είναι ο μοναδικός φυσικός αριθμός για τον οποίο $w \in \Sigma^n$, ενώ με $|\Sigma|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του $\Sigma$. Για μια λέξη $w = (w_1, \dots, w_n)$, συνήθως θα παραλείπουμε τις παρενθέσεις και τα κόμματα και θα γράφουμε $w = w_1 \cdots w_n$.

Ένα στοιχείο $\upsilon \notin \Sigma$ θα το αποκαλούμε *μεταβλητή*. Μια *λέξη με μεταβλητή* ως προς το $\Sigma$ είναι μια λέξη ως προς το $\Sigma \cup \{\upsilon\}$ όπου η μεταβλητή $\upsilon$ εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά, έτσι το σύνολο των λέξεων με μεταβλητή είναι

$$W(\Sigma; \upsilon) := W(\Sigma \cup \{\upsilon\}) \setminus W(\Sigma).$$

Αν $w$ είναι μια λέξη με μεταβλητή και $a \in \Sigma \cup \{\upsilon\}$ με $w(a)$ θα συμβολίζουμε τη λέξη ως προς το $\Sigma \cup \{v\}$ που προκύπτει από τη $w$ αντικαθιστώντας όλες τις εμφανίσεις της μεταβλητής $v$ με το $a$. Αν $a \in \Sigma$ τότε $w(a) \in W(\Sigma)$, ενώ $w(v) = w$.

Το ακόλουθο θεώρημα οφείλεται στους Hales και Jewett [HJ].

**Θεώρημα 1.3.1 (Hales & Jewett,**[HJ]**).** *Έστω $k, r \in \mathbb{N}$ με $k \geqslant 2$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, αν $n \geqslant N$, για κάθε αλφάβητο $\Sigma$ με $|\Sigma| = k$ και κάθε χρωματισμό $\Sigma^n = C_1 \cup \dots \cup C_r$ του $\Sigma^n$ υπάρχει μια λέξη με μεταβλητή $w$ με $|w| = n$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{w(a) : a \in \Sigma\}$ να είναι μονοχρωματικό. Δηλαδή υπάρχει $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ ώστε $\{w(a) : a \in \Sigma\} \subseteq C_{i_0}$.*

Το θεώρημα Hales-Jewett θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της σύγχρονης θεωρίας Ramsey, καθώς επεκτείνει όχι μόνο το θεώρημα van der Waerden αλλά και το θεώρημα Gallai. Ταυτόχρονα, αποτέλεσε πηγή έμπνευσης με τις εφαρμογές του αλλά και με τις επεκτάσεις του που ακολούθησαν.

### 1.3β′ Θεώρημα Carlson

Στο $W(\Sigma \cup \{\upsilon\})$ ορίζουμε την πράξη $*$ ως εξής: αν $w = w_1 w_2 \cdots w_l$, $u = u_1 u_2 \cdots u_m \in W(\Sigma \cup \{\upsilon\})$, θέτουμε

$$w * u = w_1 w_2 \cdots w_l u_1 u_2 \cdots u_m.$$

Έστω τώρα $\vec{s} = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια άπειρη ακολουθία λέξεων με μεταβλητή. Μια επίσης άπειρη ακολουθία $\vec{t} = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θα λέγεται *reduction* της $\vec{s}$ αν υπάρχει άπειρη ακολουθία $\vec{u} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $W(\Sigma \cup \{\upsilon\})$ και γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$, με $k_1 = 1$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$t_n = s_{k_n}(a_{k_n}) * s_{k_n+1}(a_{k_n+1}) * \ldots * s_{k_{n+1}-1}(a_{k_{n+1}-1}).$$

Θα γράφουμε τότε ότι $\vec{t} = \vec{s}[\vec{u}]$. Η $\vec{t}$ θα λέγεται reduction με μεταβλητή αν κάθε όρος της είναι λέξη με μεταβλητή.

Μια λέξη $w \in W(\Sigma \cup \{\upsilon\})$ θα λέγεται *reduced λέξη* της ακολουθίας $\vec{s}$ αν υπάρχει λέξη $u = a_1 \cdots a_k \in W(\Sigma; \upsilon)$ ώστε

$$w = s_1(a_1) * s_2(a_2) * \cdots * s_k(a_k).$$

Θα γράφουμε $w = \vec{s}[u]$. Σημειώνουμε εδώ ότι η $\vec{s}[u]$ είναι λέξη με μεταβλητή αν και μόνο αν η $u$ είναι λέξη με μεταβλητή, δηλαδή αν κάποιο από τα $a_i$ είναι το $\upsilon$. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι η $\vec{s}[u]$ είναι μια reduced λέξη με μεταβλητή της $\vec{s}$. Πλέον έχουμε ότι χρειαζόμαστε για να διατυπώσουμε το ακόλουθο διαμεριστικό θεώρημα που οφείλεται στον Carlson.

**Θεώρημα 1.3.2 (Carlson,[C]).** *Έστω* $\Sigma$ *ένα πεπερασμένο αλφάβητο και* $\vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *μια ακολουθία στο* $W(\Sigma;\upsilon)$*. Τότε για κάθε χρωματισμό* $W(\Sigma;\upsilon) = C_1 \cup \ldots C_r$ *του* $W(\Sigma;\upsilon)$*, υπάρχει reduction* $\vec{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *της* $\vec{s}$ *και* $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ *ώστε όλες οι reduced λέξεις με μεταβλητή της* $\vec{t}$ *να βρίσκονται στο* $C_{i_0}$*.*

Έστω $\vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $W(\Sigma;\upsilon)$. Μια *extraction* της $\vec{s}$ θα λέγεται μια reduction κάποιας υπακολουθίας της $\vec{s}$. Δηλαδή η ακολουθία $\vec{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $W(\Sigma\cup\{\upsilon\})$ θα είναι μια extraction της $\vec{s}$ αν υπάρχει υπακολουθία $(s_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $\vec{s}$, ακολουθία $\vec{u} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο$W(\Sigma \cup \{\upsilon\})$ και υπακολουθία $(k_{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $k_{l_1} = k_1$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$t_n = s_{k_{l_n}}(a_{l_n}) * s_{k_{l_n+1}}(a_{l_n+1}) * \ldots * s_{k_{l_{n+1}-1}}(a_{l_{n+1}-1}).$$

Η $\vec{t}$ θα λέγεται extraction με μεταβλητή αν κάθε όρος της είναι λέξη με μεταβλητή.

Ομοίως μια *extracted* λέξη $w$ της $\vec{s}$ θα είναι μια reduced λέξη κάποιας υπακολουθίας της $\vec{s}$. Δηλαδή αν υπάρχει $(s_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $\vec{s}$ και λέξη $u = a_1 \cdots a_l \in W(\Sigma \cup \{\upsilon\})$ ώστε

$$w = s_{k_1}(a_1) * s_{k_2}(a_2) * \cdots * s_{k_l}(a_l).$$

Επίσης η $w$ είναι λέξη με μεταβλητή αν και μόνο αν η $u$ είναι λέξη με μεταβλητή. Με $\mathrm{E}[\vec{s}]$ και $\mathrm{EV}[\vec{s}]$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των extracted λέξεων και των extracted λέξεων μεταβλητή αντίστοιχα της $\vec{s}$.

**Θεώρημα 1.3.3 (Carlson, [C]).** *Έστω* $\Sigma$ *ένα πεπερασμένο αλφάβητο με* $|\Sigma| \geqslant 2$ *και* $\vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *μια ακολουθία στο* $W(\Sigma;\upsilon)$*. Τότε για κάθε χρωματισμό* $\mathrm{EV}(\vec{s}) = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ *του συνόλου* $\mathrm{EV}[\vec{s}]$ *των extracted λέξεων με μεταβλητή της* $\vec{s}$*, υπάρχει μια extraction* $\vec{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *της* $\vec{s}$ *και* $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ *ώστε* $\mathrm{EV}[\vec{t}] \subseteq C_{i_0}$*.*

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια εκδοχή του θεωρήματος 1.3.3 σχετικά με extracted λέξεις και αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τον Carlson [C] και τους Furstenberg και Katznelson [FK1].

**Θεώρημα 1.3.4.** *Έστω $\Sigma$ ένα πεπερασμένο αλφάβητο με $|\Sigma| \geqslant 2$ και $\vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $W(\Sigma; \upsilon)$. Τότε για κάθε χρωματισμό $\mathrm{E}(\vec{s}) = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ του συνόλου $\mathrm{E}[\vec{s}]$ των extracted λέξεων της $\vec{s}$, υπάρχει μια extraction $\vec{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $\vec{s}$ και $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ ώστε $\mathrm{E}[\vec{t}] \subseteq C_{i_0}$.*

Τα προηγούμενα αποτελέσματα που σχετίζονται με ακολουθίες λέξεων με μεταβλητή μπορούν να χαρακτηριστούν απειροδιάστατες επεκτάσεις του θεωρήματος Hales-Jewett. Ειδικά το θεώρημα 1.3.3, του Carlson ενοποιεί και επεκτείνει αρκετά αποτελέσματα της Θεωρίας Ramsey, όπως το Θεώρημα Hindman.

### 1.3γ′ Διαμεριστικά Αποτελέσματα για $\omega$-located Λέξεις

Οι Bergelson, Blass και Hindman στο [BBH] απέδειξαν ανάλογα διαμεριστικά αποτελέσματα με αυτά του Carlson για located λέξεις (λέξεις με φορέα) ως προς ένα πεπερασμένο αλφάβητο, που είναι συναρτήσεις από ένα πεπερασμένο υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών στο αλφάβητο.

Στα αποτελέσματα των Carlson [C] καθώς και σε αυτά των Bergelson, Blass και Hindman [BBH] το αλφάβητο $\Sigma$ ήταν πεπερασμένο. Μάλιστα δεν ισχύουν αν το αλφάβητο $\Sigma$ υποτεθεί άπειρο γιατί τότε θα μπορούσαμε να βρίσκουμε πάντα άπειρη μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο στους φυσικούς, κάτι που δεν ισχύει όπως αναφέραμε και προηγουμένως.

Η Φαρμάκη [Fa] επέκτεινε τα παραπάνω αποτελέσματα των Carlson [C] και Bergelson, Blass και Hindman [BBH] για ένα άπειρο αλφάβητο $\Sigma$, το οποίο κυριαρχείται από μια ακολουθία $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ φυσικών αριθμών, ορίζοντας τις $\omega$-located λέξεις ως προς ένα άπειρο αλφάβητο $\Sigma$ που κυριαρχούνται από την ακολουθία $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ φυσικών αριθμών.

Έστω $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ ένα άπειρο αριθμήσιμο αλφάβητο και $\vec{k} = (k)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Μια *$\omega$-located λέξη* ως προς το $\Sigma$ που κυριαρχείται από την $\vec{k}$ είναι μια συνάρτηση $w$ από ένα μη-κενό, πεπερασμένο υποσύνολο $F$ του $\mathbb{N}$ στο αλφάβητο $\Sigma$ τέτοια ώστε $w(n) = w_n \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k_n}\}$ για κάθε $n \in F$.

Έτσι, το σύνολο $L(\Sigma,\vec{k})$ όλων των (σταθερών) *ω-located λέξεων* ως προς το $\Sigma$ που φράσσονται από την $\vec{k}$ είναι:

$$L(\Sigma,\vec{k}) = \big\{w = w_{n_1}\dots w_{n_l} : l \in \mathbb{N}, n_1 < \dots < n_l \in \mathbb{N} \text{ και}$$

$$w_{n_i} \in \{a_1, a_2, \dots, a_{k_{n_i}}\} \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant l\big\}.$$

Συμβολίζουμε με $\mathrm{dom}(w) = \{n_1, \dots, n_l\}$ το πεδίο ορισμού (domain) της ω-located λέξης $w = w_{n_1} \cdots x_{n_l}$.

Έστω $\upsilon \notin \Sigma$ μια μεταβλητή. Το σύνολο $L(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ όλων των *ω-located λέξεων με μεταβλητή* ως προς το $\Sigma$ που κυριαρχούνται από την ακολουθία $\vec{k}$ είναι:

$$L(\Sigma,\vec{k};\upsilon) = \big\{w = w_{n_1}\dots w_{n_l} : l \in \mathbb{N},\ n_1 < \dots < n_l \in \mathbb{N},$$

$$w_{n_i} \in \{\upsilon, \alpha_1, \dots, \alpha_{k_{n_i}}\} \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant l$$

$$\text{και υπάρχει } 1 \leqslant i \leqslant l \text{ με } w_{n_i} = \upsilon\big\}.$$

Οι λέξεις και οι located λέξεις είναι ω-λέξεις και ω-located λέξεις αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου η ακολουθία $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερή.

Θέτουμε $L(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k}\} = L(\Sigma,\vec{k})\cup L(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$. Εφοδιάζουμε το σύνολο $L(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k}\}$ με την ακόλουθη σχέση: για $w, u \in L(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k}\}$, τότε

$$w \prec u \Leftrightarrow \max \mathrm{dom}(w) < \min \mathrm{dom}(u).$$

Αν $w = w_{n_1}\cdots w_{n_r},\ u = u_{m_1}\cdots u_{m_l} \in L(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k}\}$ με $w \prec u$ ορίζουμε την λέξη

$$w * u = w_{n_1}\cdots w_{n_r}u_{m_1}\cdots u_{m_l} \in L(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k}\}. \tag{1.1}$$

Θα ορίσουμε τώρα για κάθε $p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ τις συναρτήσεις

$$T_p : L(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k}\} \to L(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k}\}.$$

Έστω $w = w_{n_1}\dots w_{n_l} \in L(\Sigma\cup\{\upsilon\}$. Θέτουμε $T_0(w) = w$ και για $p \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$T_p(w) = u_{n_1}\cdots u_{n_l},$$

όπου για $1 \leqslant i \leqslant l$ ορίζουμε, $u_{n_i} = w_{n_i}$ αν $w_{n_i} \in \Sigma$, $u_{n_i} = \alpha_p$ αν $w_{n_i} = \upsilon$ και $k_{n_i} \geqslant p$ και τέλος $u_{n_i} = \alpha_{k_{n_i}}$ αν $w_{n_i} = \upsilon$ και $k_{n_i} < p$.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ αν $w = w_{n_1} \ldots w_{n_l} \in L(\Sigma \cup \{\upsilon\}$ έχουμε $\mathrm{dom}(T_p(w)) = \mathrm{dom}(w)$, $T_p(w) = w$, αν $w \in L(\Sigma, \vec{k})$ και $T_p(w) = T_{p_w}(w)$ αν $w \in L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $p \geqslant p_w = k_{n_w}$, όπου

$$n_w = \max\{n_i : 1 \leqslant i \leqslant l,\ w_{n_i} = \upsilon\}.$$

Επίσης,

$$T_p(w * u) = T_p(w) * T_p(u) \ \text{ για κάθε } \ w, u \in L(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k}\} \ \text{ με } \ w < u$$

και

$$T_p(L(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k}\}) = L(\Sigma, \vec{k}) \ \text{ για κάθε } \ p \in \mathbb{N}.$$

Μπορούμε να διατυπώσουμε τώρα το επόμενο διαμεριστικό θεώρημα για $\omega$-located λέξεις ως προς ένα άπειρο αλφάβητο $\Sigma$ που απεδείχθη από την Φαρμάκη ([Fa]).

**Θεώρημα 1.3.5 (Φαρμάκη**, [Fa]). *Έστω $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ ένα άπειρο αριθμήσιμο αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μια μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ και $r, s \in \mathbb{N}$. Αν*

$$L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) = A_1 \cup \ldots \cup A_r \ \textit{ και } \ L(\Sigma, \vec{k}) = C_1 \cup \ldots \cup C_s,$$

*τότε υπάρχουν μια ακολουθία $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ με $w_n < w_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $1 \leqslant i_0 \leqslant r$, $1 \leqslant j_0 \leqslant s$ ώστε*

$$T_{p_1}(w_{n_1}) * \ldots * T_{p_\lambda}(w_{n_\lambda}) \in A_{i_0},$$

*για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \cdots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ώστε $0 \leqslant p_i \leqslant k_{n_i}$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \lambda$ και $0 \in \{p_1, \ldots, p_\lambda\}$ και*

$$T_{p_1}(w_{n_1}) * \ldots * T_{p_\lambda}(w_{n_\lambda}) \in C_{j_0},$$

*για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \cdots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_\lambda \in \mathbb{N}$ ώστε $1 \leqslant p_i \leqslant k_{n_i}$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \lambda$.*

Το Θεώρημα 1.3.5 για ακολουθίες $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $k_n = k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συμπίπτει με το ανάλογο διαμεριστικό θεώρημα των Bergelson, Blass και Hindman, [BBH] για located λέξεις ως προς ένα πεπερασμένο αλφάβητο, ενώ για την περίπτωση $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $k_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το Θεώρημα 1.3.5 έχει ως συνέπεια το διαμεριστικό θεώρημα του Hindman [H].

Επίσης στο [Fa], η Φαρμάκη απέδειξε και τα "extraction"ανάλογα αποτελέσματα, τα οποία αποτελούν ισχυρότερη μορφή του θεωρήματος 1.3.5 για extracted $\omega$-located λέξεις μιας διατεταγμένης ακολουθίας $\omega$-located λέξεων με μεταβλητή.

Έστω $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ ένα άπειρο αριθμήσιμο αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μια μεταβλητή και $\vec{k} = (\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ μια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Θέτουμε,

$$L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) = \{\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} : w_n \in L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \text{ και } w_n \prec w_{n+1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.$$

Έστω $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Μια *extracted $\omega$-located λέξη* της $w$ με *μεταβλητή* είναι μια $\omega$-located λέξη με μεταβλητή

$$u = T_{p_1}(w_{n_1}) * \ldots * T_{p_\lambda}(w_{n_\lambda}) \in L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon),$$

όπου $\lambda \in \mathbb{N},\ n_1 < \cdots < n_\lambda \in \mathbb{N},\ p_1, \ldots, p_\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $0 \leqslant p_i \leqslant k_{n_i}$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \lambda$ και $0 \in \{p_1, \ldots, p_\lambda\}$.
Το σύνολο όλων των extracted $\omega$-located λέξεων της $w$ με μεταβλητή συμβολίζεται με $\mathrm{EV}[\vec{w}]$.

Μια *extracted $\omega$-located λέξη* της $w$ είναι μια $\omega$-located λέξη

$$z = T_{p_1}(w_{n_1}) * \ldots * T_{p_\lambda}(w_{n_\lambda}) \in L(\Sigma, \vec{k}),$$

όπου $\lambda \in \mathbb{N},\ n_1 < \cdots < n_\lambda \in \mathbb{N},\ p_1, \ldots, p_\lambda \in \mathbb{N}$ με $1 \leqslant p_i \leqslant k_{n_i}$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \lambda$.
Το σύνολο όλων των extracted $\omega$-located λέξεων της $w$ συμβολίζεται με $\mathrm{E}[\vec{w}]$.
Έστω

$$\mathrm{EV}^\infty(\vec{w}) = \{\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : u_n \in \mathrm{EV}(\vec{w}) \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Αν $\vec{u} \in \mathrm{EV}^\infty(\vec{w})$, τότε λέμε ότι η $\vec{u}$ είναι μια *extraction* της $\vec{w}$ και γράφουμε $\vec{u} \prec \vec{w}$. Σημειώνουμε ότι $\vec{u} \prec \vec{w}$ αν και μόνο αν $\mathrm{EV}[\vec{u}] \subseteq \mathrm{EV}[\vec{w}]$.

**Θεώρημα 1.3.6 (Φαρμάκη**, [Fa]**).** *Έστω $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \}$ ένα άπειρο αριθμήσιμο αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μια μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ μια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $r, s \in \mathbb{N}$. Αν*

$$L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) = A_1 \cup \ldots \cup A_r \quad \textit{και} \quad L(\Sigma, \vec{k}) = C_1 \cup \ldots \cup C_s$$

*τότε υπάρχουν μια extraction $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $\vec{w}$ και $1 \leqslant i_0 \leqslant r$, $1 \leqslant j_0 \leqslant s$ ώστε*

$$\mathrm{EV}(\vec{u}) \subseteq A_{i_0} \quad \textit{και} \quad E(\vec{u}) \subseteq C_{j_0}.$$

## 1.4 Το Θεώρημα Nash-Williams

Στην παράγραφο αυτή διατυπώνουμε το κλασικό διαμεριστικό θεώρημα της θεωρίας Ramsey για το σύνολο $[\mathbb{N}]$ όλων των απείρων αυξουσών ακολουθιών φυσικών αριθμών που απεδείχθη από τον Nash-Williams [NW], αλλά και δύο ισχυρότερα θεωρήματα που απεδείχθησαν από τον Ellentuck [E] και τους Galvin και Prikry [GP] αντίστοιχα.

Έστω $t, s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$. θα γράφουμε $t < s$, αν $\max t < \min s$. Επίσης με, $t \sqsubseteq s$ θα συμβολίζουμε αν $t$ είναι ένα αρχικό τμήμα του $s$, δηλαδή αν είτε $t \in \{\emptyset, s\}$ είτε υπάρχει $y \in s$ ώστε $t = \{x \in s : x < y\}$. Για $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $M \in [\mathbb{N}]$, θέτουμε $[s, M] = \{s \cup L : L \in [M], s < L\}$.

Η τοπολογία της *κατά σημείο σύγκλισης* είναι η τοπολογία που έχει ως βάση τα σύνολα $\left\{[a, \mathbb{N}] : a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}\right\}$, ενώ η τοπολογία *Ellentuck* στο σύνολο $\mathbb{N}$ είναι η τοπολογία που έχει ως βάση τα σύνολα $\{[a, M] : a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}, M \in [\mathbb{N}]\}$. Προφανώς, η τοπολογία Ellentuck είναι ασθενέστερη της τοπολογίας της κατά σημείο σύγκλισης.

**Θεώρημα 1.4.1 (Ellentuck**, [E]**).** *Έστω $\mathcal{U}$ μια διαμεριστική οικογένεια του $[\mathbb{N}]$, η οποία είναι ανοικτή ως προς την τοπολογία Ellentuck. Για κάθε $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $A \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο υπάρχει $B \subseteq A$ άπειρο ώστε, είτε $[a, B] \subseteq \mathcal{U}$, είτε $[a, B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$.*

**Θεώρημα 1.4.2** (**Nash-Williams**, [NW]). *Έστω* $\mathcal{U}$ *μια διαμεριστική οικογένεια του* $[\mathbb{N}]$*, η οποία είναι κλειστή ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης. Για κάθε* $A \subseteq \mathbb{N}$ *άπειρο υπάρχει* $B \subseteq A$ *άπειρο ώστε, είτε* $[B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$*, είτε* $[B] \subseteq \mathcal{U}$*.*

Οι Galvin και Prikry [GP] απέδειξαν ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα, αντίστοιχο του Θεωρήματος 1.4.2 για μια διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U}$ που είναι Borel ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.

**Θεώρημα 1.4.3** (**Galvin & Prikry**, [GP]). *Έστω* $\mathcal{U}$ *μια διαμεριστική οικογένεια του* $[\mathbb{N}]$*, η οποία είναι Borel ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης. Για κάθε* $A \subseteq \mathbb{N}$ *άπειρο υπάρχει* $B \subseteq A$ *άπειρο ώστε, είτε* $[B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$*, είτε* $[B] \subseteq \mathcal{U}$*.*

## 1.5 Υπερφίλτρα

Δίνουμε στη συνέχεια τους ορισμούς των φίλτρων και υπερφίλτρων, ισοδύναμους χαρακτηρισμούς και κάποιες βασικές τους ιδιότητες. Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα υπερφίλτρα μπορεί κάποιος να βρει στο [CN]

**Ορισμός 1.5.1.** Ένα *φίλτρο* $\mathcal{F}$ σε ένα μη κενό σύνολο $X$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του $X$ που ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:

(i) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $A \neq \emptyset$.

(ii) Αν $A, B \in \mathcal{F}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(iii) Αν $A \in \mathcal{F}$ και $A \subseteq B \subseteq X$, τότε $B \in \mathcal{F}$.

Σημειώνουμε εδώ ότι κάθε οικογένεια που έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών περιέχεται σε κάποιο φίλτρο.

**Ορισμός 1.5.2.** Έστω $X$ ένα μη κενό σύνολο και $x \in X$. Ένα *υπερφίλτρο* στο $X$ είναι ένα μεγιστικό (maximal) φίλτρο στο $X$. Το σύνολο όλων των υπερφίλτρων του $X$ συμβολίζεται με $\beta X$ και αναφέρεται ως *Stone-Cech συμπαγοποίηση* του $X$. Το σύνολο $\mathcal{U}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$ είναι υπερφίλτρο στο $X$ και ονομάζεται *τετριμμένο (principal)* υπερφίλτρο που παράγεται από το $x$.

**Πρόταση 1.5.3.** *Έστω $X$ ένα μη κενό σύνολο και $p$ φίλτρο στο $X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το $p$ είναι υπερφίλτρο στο $X$.*

(ii) *Αν $F \subseteq X$ ώστε $A \cap F \neq \emptyset$ για κάθε $A \in p$, τότε $F \in p$.*

(iii) *Αν $F \subseteq X$, τότε είτε $F \in p$ είτε $F^c \in p$.*

(iv) *Αν $A, B \subseteq X$ με $A \cup B \in p$, τότε είτε $A \in p$ είτε $B \in p$.*

Τέλος, αποδεικνύεται ότι σε κάθε άπειρο σύνολο μπορούμε να βρούμε υπερφίλτρο που δεν είναι τετριμμένο.

## 1.6 Coideal

Η έννοια του coideal αποτέλεσε για τη Θεωρία Ramsey ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο. Ο Mathias στο [M] χρησιμοποίησε τα selective coideal, τα οποία αναφέρει ως “happy famiies”για να επεκτείνει τα θεωρήματα των Galvin και Prikry [GP] και του Silver [S]. Ο Glasner [G] μελέτησε τα coideal και τη σχέση που έχουν με την Stone-Cech συμπαγοποίηση, χρησιμοποιώντας τον όρο “divisible property”. Ο Farah [F] εισήγαγε τα semiselective coideal, ενώ πιο πρόσφατα, οι Samet και Tsaban [ST] μελέτησαν τα coideal σε σχέση με την Θεωρία Ramsey, όπου τα αναφέρουν ως superfilter.

**Ορισμός 1.6.1.** Μια οικογένεια $\mathcal{H}$ υποσυνόλων ενός συνόλου $X$ θα λέμε ότι είναι ένα *coideal* στο $X$ αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{H}$ και $X \in \mathcal{H}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{H}$ και $A \subseteq B$, τότε $B \in \mathcal{H}$.

(iii) Αν $A \cup B \in \mathcal{H}$, τότε είτε $A \in \mathcal{H}$ είτε $B \in \mathcal{H}$.

Τα coideal είναι έννοιες "μεγάλου"για τα υποσύνολα του X. Επιπλέον παρατηρούμε ότι τα υπερφίλτρα είναι coideal που είναι κλειστά ως προς τις πεπερασμένες τομές, που σημαίνει ότι είναι κατά μία έννοια ελαχιστικά coideal.

**Παράδειγμα 1.6.2.** Το σύνολο $[\mathbb{N}]$ όλων των απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ είναι coideal στο $\mathbb{N}$, το οποίο δεν είναι υπερφίλτρο, αφού δεν είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές.

**Παράδειγμα 1.6.3.** Το σύνολο

$$\mathcal{H}_d = \left\{ A \in [\mathbb{N}] : d^*(A) := \limsup_n \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} > 0 \right\}$$

είναι ένα coideal στο $\mathbb{N}$.

**Παράδειγμα 1.6.4.** Το σύνολο $AP$ των απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ που περιέχουν αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους είναι coideal στο $\mathbb{N}$, το οποίο δεν είναι υπερφίλτρο, αφού δεν είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές.

**Πρόταση 1.6.5.** *Έστω $X$ ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{H}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $X$. Το $\mathcal{H}$ είναι coideal στο $X$ αν και μόνο αν είναι ένωση υπερφίλτρων στο $X$.*

**Ορισμός 1.6.6.** Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{B}$ ενός μη κενού συνόλου $X$ θα λέγεται *βάση coideal* στο $X$ αν ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν $A \cup B \in \mathcal{B}$, τότε υπάρχει $C \in \mathcal{B}$ ώστε είτε $C \subseteq A$ είτε $C \subseteq B$.

Προφανώς ένα coideal στο $X$ είναι μια βάση coideal στο $X$.

**Παράδειγμα 1.6.7.** Το σύνολο $[2\mathbb{N}]$ των απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ που περιέχει μόνο άρτιους αριθμούς είναι βάση coideal στο $\mathbb{N}$, αλλά δεν είναι coideal.

**Παράδειγμα 1.6.8.** Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $M$ άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Η οικογένεια $\mathcal{B} = \{[M]^k : M \in [\mathbb{N}]\}$ είναι βάση coideal στο $\mathbb{N}$.

**Πρόταση 1.6.9.** *Έστω $X$ ένα μη-κενό σύνολο και $\mathcal{H}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $X$. Το $\mathcal{H}$ είναι coideal στο $X$ αν και μόνο αν υπάρχει βάση coideal $\mathcal{B}$ ώστε $\mathcal{H} = \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$, όπου $\mathcal{L}_{\mathcal{B}} = \{A \subseteq X :$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $B \subseteq A\}$.*

### 1.6α′ Selective Coideal στο $\mathbb{N}$

**Ορισμός 1.6.10.** Έστω $\mathcal{H} \subseteq [\mathbb{N}]$ ένα coideal στο $\mathbb{N}$. Το $\mathcal{H}$ θα λέγεται *selective* αν για κάθε φθίνουσα ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathcal{H}$, υπάρχει $B \in \mathcal{H}$ ώστε $B - n \subseteq A_n$, για κάθε $n \in B$. Το σύνολο $B$ θα λέγεται *διαγωνοποίηση* της $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Παράδειγμα 1.6.11.** Το coideal $\mathcal{H} = [\mathbb{N}]$ των απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ είναι selective coideal.

Το παρακάτω παράδειγμα είναι του Mathias και μπορεί κάποιος να το βρει στο [T].

**Παράδειγμα 1.6.12.** Έστω $\mathcal{A}$ μια άπειρη οικογένεια των άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, τέτοια ώστε $A \cap B$ να είναι πεπερασμένο για κάθε ζεύγος διακεκριμένων συνόλων $A, B$ της $\mathcal{A}$. Αν $\mathcal{H}$ είναι η συλλογή των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ που δεν μπορούν να καλυφθούν από πεπερασμένο το πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε το $\mathcal{H}$ είναι selective coideal στο $\mathbb{N}$.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει ένα άλλο τρόπο να χαρακτηρίσουμε τα selective coideal στο $\mathbb{N}$.

**Πρόταση 1.6.13.** *Έστω $\mathcal{H} \subseteq [\mathbb{N}]$ ένα coideal στο $\mathbb{N}$. Το $\mathcal{H}$ ειναι selective αν και μόνο αν ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:*

(i) *Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathcal{H}$, υπάρχει $B \in \mathcal{H}$ ώστε το σύνολο $B \setminus A_n$ να είναι πεπερασμένο για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Για κάθε $A \in \mathcal{H}$ και για κάθε διαμέριση $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ του $A$ από ξένα ανά δύο σύνολα, όπου κάθε $F_n$ είναι πεπερασμένο, υπάρχει $B \in \mathcal{H}$, $B \subseteq A$ ώστε $|B \cap F_n| \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

*Η πρώτη ιδιότητα θα λέγεται $(p)$ και η δεύτερη $(q)$.*

## 1.6β′ Semiselective Coideal στο $\mathbb{N}$

**Ορισμός 1.6.14.** Έστω $\mathcal{H} \subseteq [\mathbb{N}]$ ένα coideal στο $\mathbb{N}$. Ένα υποσύνολο $\mathcal{R}$ του $\mathcal{H}$ θα λέγεται *dense-open* στο $\mathcal{H}$ αν ικανοποιεί τις επόμενες δύο ιδιότητες:

(i) Για κάθε $B \in \mathcal{H}$ υπάρχει $C \in \mathcal{R}$ με $C \subseteq B$.

(ii) Αν $C \in \mathcal{R}$ και $B \in \mathcal{H}$ με $B \subseteq C$, τότε $B \in \mathcal{R}$.

Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο ότι η dense-open ιδιότητα στο $\mathcal{H}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές.

**Ορισμός 1.6.15 (Todorcevic, [T]).** Έστω $\mathcal{H} \subseteq [\mathbb{N}]$ ένα coideal στο $\mathbb{N}$. Το $\mathcal{H}$ λέγεται *semiselective* αν ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

(i) Για κάθε ακολουθία $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από dense-open υποσύνολα του $\mathcal{H}$ και κάθε $A \in \mathcal{H}$, υπάρχει $B \in \mathcal{H}$ με $B \subseteq A$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $C_n \in \mathcal{R}_n$ ώστε το σύνολο $B \setminus C_n$ να είναι πεπερασμένο.

(ii) Για κάθε $A \in \mathcal{H}$ και για κάθε διαμέριση $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ του $A$ από ξένα ανά δύο σύνολα, όπου κάθε $F_n$ είναι πεπερασμένο, υπάρχει $B \in \mathcal{H}$ με $B \subseteq A$ ώστε $|B \cap F_n| \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Στις επόμενες δύο προτάσεις δίνουμε δύο ισοδύναμους χαρακτηρισμούς για τα semiselective coideal του $\mathbb{N}$.

**Πρόταση 1.6.16 (Todorcevic, [T]).** *Έστω $\mathcal{H}$ ένα coideal στο $\mathbb{N}$. Το $\mathcal{H}$ ειναι semiselective αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από dense-open υποσύνολα του $\mathcal{H}$ και κάθε $A \in \mathcal{H}$, υπάρχει $B \in \mathcal{H}$ με $B \subseteq A$ ώστε $B - n \in \mathcal{R}_n$ για κάθε $n \in B$.*

**Πρόταση 1.6.17.** *Έστω $\mathcal{H}$ ένα coideal στο $\mathbb{N}$. Το $\mathcal{H}$ ειναι semiselective αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(\mathcal{R}_b)_{b\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}$ από dense-open υποσύνολα του $\mathcal{H}$ και κάθε $A \in \mathcal{H}$, υπάρχει $B \in \mathcal{H}$ με $B \subseteq A$ ώστε $B - b \in \mathcal{R}_b$ για κάθε $b \in [B]^{<\infty}$.*

Η πρώτη ιδιότητα ενός semiselective coideal στο $\mathbb{N}$ είναι ασθενέστερη από την αντίστοιχη πρώτη ιδιότητα ενός selective coideal $\mathbb{N}$, ενώ οι δεύτερες ιδιότητες είναι ίδιες. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι ένα selective coideal sto $\mathbb{N}$ είναι semiselective. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για ένα παράδειγμα semiselective coideal που δεν είναι selective παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [F, Παράδειγμα 2.1].

Θα διατυπώσουμε τώρα ένα διαμεριστικό θεώρημα για το σύνολο $[\mathbb{N}]$ των άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ως προς μια semiselective βάση coideal στο $\mathbb{N}$, το οποίο απεδείχθη από τον Farah ([F]). Πριν δώσουμε το θεώρημα, αναφέρουμε ότι ένα υποσύνολο $\mathcal{U}$ του $[\mathbb{N}]$ είναι κλειστό ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης, αν ταυτίζοντας κάθε στοιχείο του $[\mathbb{N}]$ με ένα στοιχείο του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, το σύνολο $\mathcal{U}$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $[\mathbb{N}]$ ως προς την σχετική τοπολογία του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

**Θεώρημα 1.6.18 (Farah, [F]).** *Έστω $\mathcal{B}$ μια semiselective βάση coideal στο $\mathbb{N}$. Για κάθε υποσύνολο $\mathcal{U}$ του $[\mathbb{N}]$ κλειστό ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης και κάθε $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ υπάρχει $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ με $B \subseteq A$ ώστε είτε $[B] \subseteq \mathcal{U}$ είτε $[B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$.*

### 1.6γ′ Ramsey Coideal στο $\mathbb{N}$

Η έννοια του Ramsey υπεφίλτρου στο σύνολο των φυσικών αριθμών ορίστηκε από τον Louveau [Lo], ενώ αργότερα η ανάλογη έννοια για coideals στο σύνολο των φυσικών αριθμών εμφανίστηκε στα [M], [F] από τους Mathias και Farah αντίστοιχα.

**Ορισμός 1.6.19.** Έστω $\mathcal{H}$ ένα coideal στο $\mathbb{N}$. Το $\mathcal{H}$ λέγεται *Ramsey* αν για κάθε $n, r \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}$ με $[A]^n = C_1 \cup \ldots \cup C_r$, υπάρχουν $B \in \mathcal{H}$ με $B \subseteq A$ και $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ ώστε $[B]^n \subseteq C_{i_0}$.

Ο Mathias στο [M] απέδειξε ότι κάθε selective coideal στο $\mathbb{N}$ είναι Ramsey, ενώ ο Farah στο [F] απέδειξε ότι κάθε semiselective coideal στο $\mathbb{N}$ είναι Ramsey. Επιπλέον κατασκεύασε παράδειγμα Ramsey coideal στο $\mathbb{N}$ που δεν είναι semiselective [F, Παράδειγμα 2.2].

# Κεφάλαιο 2

## Coideal και Θεωρία Ramsey

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε το πλαίσιο και τα αποτελέσματα του πρώτου μέρους της διατριβής. Τα αποτελέσματα αυτά, προέρχονται από την εργασία

> V. Farmaki, D. Karageorgos, A. Koutsogiannis, A. Mitropoulos, *Abstract topological Ramsey theory for nets*, Topology and its Applications **201** (2016), 314-329.

Συγκεκριμένα, στο Θεώρημα 2.4.8 αποδεικνύουμε μια γενίκευση του κλασικού θεωρήματος Nash-Williams, το οποίο ταυτόχρονα περιλαμβάνει μια ενιαία επέκταση της αντίστοιχης θεωρίας για coideal στο σύνολο των φυσικών αριθμών που απεδείχθη από τους Louveau [Lo], Mathias [M] και Farah [F], των διαμεριστικών θεωρημάτων Milliken [Mi] και Taylor [T] για ακολουθίες πεπερασμένων μη κενών υποσυνόλων φυσικών αριθμών , των διαμεριστικών θεωρημάτων για ακολουθίες λέξεων και για ακολουθίες located λέξεων που απεδείχθησαν από τους Carlson [C] και Bergelson, Blass και Hindman [BBH] αντίστοιχα, και των διαμεριστικών θεωρημάτων για ακολουθίες $\omega$-located λέξεων που απεδείχθησαν από την Φαρμάκη [Fa].

Πιο αναλυτικά, εισάγουμε πρώτα τις έννοιες του coideal και της βάσης coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο$(X, \prec)$ και σημειώνουμε ότι η κλάση των coideal στο $X$ περιέχει την κλάση των υπερφίλτρων στο $X$ και περιέχεται στην κλάση των βάσεων coideal στο $X$. Στη συνέχεια εισάγουμε την κλάση των semiselective* βάσεων coideal στο $X$ και αποδεικνύουμε ότι κάθε semiselective* βάση coideal $\mathcal{B}$ στο $X$ ώστε $B - x \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και κάθε $x \in X$, αντίστοιχα κάθε semiselective* coideal στο $X$, έχει την ιδιότητα Ramsey*, δηλαδή για κάθε φυσικό αριθμό $n$, κάθε οικογένεια $\mathcal{F}$ του $[X]_*$ και κάθε $A \in \mathcal{B}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ ώστε, είτε $[B]_* \subseteq \mathcal{F}$ είτε $[B]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{F}$.

Επιπρόσθετα, στο Θεώρημα 2.3.6 παίρνουμε ένα διαμεριστικό αποτέλεσμα στο $[X]_*^{<\infty}$, όπου για μια διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{F}$ του συνόλου $[X]_*^{<\infty}$ και για κάθε στοιχείο $A$ μιας semiselective* βάσης coideal $\mathcal{B}$ στο $X$, βρίσκουμε $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ ώστε, είτε το $[B]_*^{<\infty}$ να περιέχεται στο $[X]_*^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$, είτε κάθε άπειρη αύξουσα ακολουθία στοιχείων του $B$ έχει αρχικό τμήμα στο $\mathcal{F}$.

Εφοδιάζοντας το σύνολο $[X]_*$ των ολικά διατεταγμένων άπειρων υποσυνόλων του $X$ με την σχετική τοπολογία της τοπολογίας γινόμενο του $\{0,1\}^X$, το Θεώρημα 2.3.6 έχει ως συνέπεια ότι, για κάθε διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U}$ του $[X]_*$, η οποία είναι κλειστή ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης και για κάθε στοιχείο $A$ μιας semiselective* βάσης coideal $\mathcal{B}$ μπορούμε να βρούμε $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ ώστε, είτε το $[B]_*$ να περιέχεται στο $\mathcal{U}$, είτε το $[B]_*$ να περιέχεται στο $[X]_* \setminus \mathcal{U}$. Επιπλέον, δείχνουμε στο Πόρισμα 2.4.12 ότι κάθε διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U}$ του $[X]_*$, που είναι Borel ικανοποιεί την ίδια ιδιότητα.

Τέλος, αφού τα semiselective coideal στο σύνολο των φυσικών αριθμών είναι semiselective*, χρησιμοποιώντας τα τοπολογικά διαμεριστικά αποτελέσματα που παίρνουμε, για το σύνολο των πεπερασμένων μη κενών υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, όπως επίσης για το σύνολο των λέξεων, είναι δυνατόν, ορίζοντας κατάλληλες semiselective* βάσεις coideal όπως στις προτάσεις 2.2.4, 2.2.5 αποτελέσματα όπως των Milliken [Mi] και Taylor [Ta] για την περίπτωση των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και των Carlson [C], Φαρμακη [Fa] και Bergelson, Blass και Hindman [BBH] να επαναδιατυπωθούν. Συνεπώς, εμπεριέχονται στην θεωρία που παρουσιάζουμε στο κεφάλαιο αυτό και ενοποιούνται κάτω από αυτή.

## 2.1 Coideal σε κατευθυνόμενα σύνολα

Στην ενότητα αυτή, εισάγουμε πρώτα στους Ορισμούς 2.1.1 και 2.1.2, την έννοια του coideal σε ένα άπειρο σύνολο, εφοδιασμένο με μια σχέση που το κάνει κατευθυνόμενο σύνολο, επεκτείνοντας ανάλογες έννοιες που ορίστηκαν προηγουμένως για το σύνολο των φυσικών αριθμών στα [M], [F] and [ST]. Κάθε υπερφίλτρο στο σύνολο αυτό είναι coideal και επιπλέον η ένωση μιας οικογένειας υπερφίλτρων στο $X$ θα είναι επίσης coideal.

Επίσης, εισάγουμε την έννοια της βάσης coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο (Ορισμός, 2.1.6). Μια βάση coideal παράγει ένα μοναδικό coideal, το οποίο αποτελείται από τα υποσύνολα του $X$ που έχουν ως υποσύνολο ένα στοιχείο της βάσης. Αναφέρουμε στη συνέχεια κάποια παραδείγματα από βάσεις coideal, που παίζουν κεντρικό ρόλο στη θεωρία Ramsey (Παραδείγματα, 2.1.8, 2.1.9, 2.1.10 και 2.1.11).

Τέλος, εισάγουμε στον Ορισμό 2.1.12, τις έννοιες της Ramsey και Ramsey$^*$ βάσης coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο. Η έννοια ενός Ramsey υπερφίλτρου στο σύνολο των φυσικών αριθμών ορίστηκε στο [Lo], ενώ αργότερα ανάλογες έννοιες για coideal στο σύνολο των φυσικών αριθμών εμφανίστηκαν στα [M], [F] και [ST]. Η ιδιότητα Ramsey$^*$ για μια βάση coideal είναι ασθενέστερη από την ιδιότητα Ramsey, αλλά καταλήγει να είναι η κατάλληλη έννοια για τη γενική περίπτωση των coideal σε κατευθυνόμενο σύνολο, αφού αρκετά coideal που παίζουν κεντρικό ρόλο στη θεωρία Ramsey, είναι Ramsey$^*$ αλλά δεν είναι Ramsey (Παρατηρήσεις, 2.1.13, 2.1.15 και 2.1.16 και Προτάσεις 2.1.17 και 2.1.18).

**Ορισμός 2.1.1.** Ένα μη κενό σύνολο $X$, θα λέγεται *κατευθυνόμενο* σύνολο αν είναι εφοδιασμένο με μία σχέση $\prec$, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε $x, y \in X$ με $x \prec y$, τότε $x \neq y$.

(ii) Για κάθε $x, y, z \in X$ με $x \prec y$ και $y \prec z$, τότε $x \prec z$.

(iii) Για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει $z \in X$ ώστε $x \prec z$ και $y \prec z$.

Θα γράφουμε τότε $(X, \prec)$.

**Ορισμός 2.1.2.** Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο. Ένα υποσύνολο $\mathcal{H}$ του $[X]$ θα λέγεται *coideal* στο $(X, \prec)$ αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε $A \in \mathcal{H}$ και $x \in X$ υπάρχει $z \in A$ ώστε $x \prec z$.

(ii) Αν $A \cup B \in \mathcal{H}$, τότε είτε $A \in \mathcal{H}$ είτε $B \in \mathcal{H}$.

(iii) Αν $A \in \mathcal{H}$ και $A \subseteq B \subseteq X$, τότε $B \in \mathcal{H}$.

Για $A \subseteq X$, $s \in [X]^{<\infty}$ και $x \in X$, $A - \emptyset = A$ και για $s \neq \emptyset$,

$$A - s = \{x \in A : y \prec x \ \text{ για κάθε } \ y \in s\},$$

$$A - x = A - \{x\} = \{z \in A : x \prec z\}.$$

**Παρατήρηση 2.1.3.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο. Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο $X$ θα λέγεται* adequate *αν $A - x \neq \emptyset$ για κάθε $A \in \mathcal{U}$ και $x \in X$. Έτσι ένα adequate υπερφίλτρο στο $X$ είναι ένα coideal στο $X$, το οποίο είναι επίσης κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές.*

**Παρατήρηση 2.1.4.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο. Κάθε ένωση από adequate υπερφίλτρα στο $X$ είναι ένα coideal στο $(X, \prec)$.*

**Πρόταση 2.1.5.** *Έστω $\mathcal{H} \subseteq [X]$ ένα coideal στο $(X, \prec)$, $A \in \mathcal{H}$ και $s \in [X]^{<\infty}$. Τότε $A - s \in \mathcal{H}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $x \in X$. Τότε $A - x \in \mathcal{H}$, αφού $A \setminus (A - x) \notin \mathcal{H}$. Για $s = \{x_1, \ldots, x_k\} \in [X]^{<\infty}_{>0}$, $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $A - s \in \mathcal{H}$, αφού

$$A \setminus (A - s) = A \setminus (A - x_1) \cup \ldots \cup A \setminus (A - x_k) \notin \mathcal{H}.$$

□

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό της βάσης coideal.

**Ορισμός 2.1.6.** Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο. Ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του $[X]$ θα λέγεται *βάση coideal* στο $(X, \prec)$ αν ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

(i) Για κάθε $A \in \mathcal{B}$ και $x \in X$ υπάρχει $z \in A$ ώστε $x \prec z$.

(ii) Αν $A \cup B \in \mathcal{B}$, τότε υπάρχει $C \in \mathcal{B}$ ώστε είτε $C \subseteq A$ είτε $C \subseteq B$.

Προφανώς, ένα coideal στο $(X, \prec)$ είναι μια βάση coideal στο $(X, \prec)$. Η σχέση που συνδέει τα coideal και τις βάσεις coideal φαίνεται στην ακόλουθη πρόταση. Πριν δώσουμε την πρόταση για κάθε $\mathcal{B} \subseteq [X]^\infty$, θέτουμε

$$\mathcal{L}_\mathcal{B} = \{A \subseteq X : \ \text{υπάρχει } B \in \mathcal{B} \text{ με } B \subseteq A\}.$$

**Πρόταση 2.1.7.** *Έστω $\mathcal{H} \subseteq [X]^\infty$. Το $\mathcal{H}$ είναι coideal στο $(X, \prec)$ αν και μόνο αν υπάρχει μια βάση coideal, $\mathcal{B} \subseteq [X]^\infty$ τέτοια ώστε $\mathcal{H} = \mathcal{L}_\mathcal{B}$.*

*Απόδειξη.* Αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση coideal στο $(X, \prec)$, τότε το $\mathcal{L}_\mathcal{B}$ είναι ένα coideal, γιατί αν υπάρχει $D \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $D \subseteq A \cup B$, τότε $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ και άρα υπάρχει $C \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε είτε $C \subseteq D \cap A \subseteq A$ είτε $C \subseteq D \cap B \subseteq B$.

Αν $\mathcal{H}$ είναι ένα coideal, τότε $\mathcal{H}$ είναι μια βάση coideal και $\mathcal{H} = \mathcal{L}_\mathcal{H}$. □

Στη συνέχεια δίνουμε κάποια παραδείγματα σχετικά με βάσεις coideal.

**Παράδειγμα 2.1.8.** Το σύνολο $[\mathbb{N}]$ είναι ένα coideal στο $\mathbb{N}$ με τη συνήθη διάταξη, σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα.

**Παράδειγμα 2.1.9.** Έστω $k \in \mathbb{N}$. Για $M \in [\mathbb{N}]$ έστω $[M]^k = \{\{m_1, \ldots, m_k\} : m_i \in M, 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Η οικογένεια $\{[M]^k : M \in [\mathbb{N}]\}$ είναι μια βάση coideal στο σύνολο $[\mathbb{N}]^k$ εφοδιασμένο με τη λεξικογραφική διάταξη, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του Ramsey [R].

**Παράδειγμα 2.1.10.** Έστω $[\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων μη κενών υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Αν $F_1, F_2 \in [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}$, θέτουμε $F_1 \prec F_2$ αν $\max F_1 < \min F_2$. Τότε, το $([\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}, \prec)$ είναι ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο.

Αν $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}$ ακολουθία ώστε $F_n \prec F_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$\mathrm{FU}((F_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{\cup_{i\in\alpha} F_i : \alpha \in [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}\}.$$

Η οικογένεια

$$\{\mathrm{FU}((F_n)_{n\in\mathbb{N}}) : (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0} \text{ με } F_n \prec F_{n+1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}$$

είναι μια βάση coideal στο $([\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}, \prec)$, σύμφωνα με το θεώρημα του Hindman [H] (Θεώρημα 1.2.1).

**Παράδειγμα 2.1.11.** Έστω $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ μια αύξουσα ακολουθία. Το σύνολο των $\omega$-located λέξεων ως προς το $\Sigma$ με μεταβλητή, που κυριαρχούνται από την ακολουθία $\vec{k}$ όπως αναφέραμε και προηγουμένως είναι το σύνολο:

$$L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) = \{w = w_{n_1} \ldots w_{n_l} : l \in \mathbb{N}, n_1 < \ldots < n_l \in \mathbb{N},$$

$$w_{n_i} \in \{\upsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{n_i}}\} \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant l$$

$$\text{και υπάρχει } 1 \leqslant i \leqslant l \text{ με } w_{n_i} = \upsilon\}.$$

Το σύνολο $\mathrm{dom}(w) = \{n_1, \ldots, n_l\}$ είναι το πεδίο ορισμού της $\omega$-located λέξης $w = w_{n_1} \ldots w_{n_l}$. Αν $w, u \in L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, ορίζουμε τη σχέση $w \prec u$ αν $\max \mathrm{dom}(w) < \min \mathrm{dom}(u)$. Τότε το $(L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon), \prec)$ είναι ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο. Έστω

$$L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) = \{\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} : w_n \in L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \text{ και } w_n \prec w_{n+1} \text{ αν } n \in \mathbb{N}\}$$

και $\mathrm{EV}(\vec{w})$ το σύνολο όλων των extracted $\omega$-located λέξεων μιας ακολουθίας $\vec{w} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Τότε η οικογένεια

$$\{\mathrm{EV}(\vec{w}) : \vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)\}$$

είναι μια βάση coideal στο $(L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon), \prec)$, σύμφωνα με το διαμεριστικό θεώρημα για ω-located λέξεις που αποδείχθηκε από την Φαρμάκη [Fa] (Θεώρημα 1.3.5), και νωρίτερα από τους Bergelson, Blass και Hindman [BBH] για την ειδικότερη περίπτωση του πεπερασμένου αλφαβήτου.

Πριν δώσουμε τις έννοιες των Ramsey και Ramsey$^*$ βάσεων coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο $(X, \prec)$, θέτουμε

$$[A]_*^{<\infty} = \{(x_1, \dots, x_n) : n \in \mathbb{N}, x_1 \prec \dots \prec x_n \in A\} \cup \{\emptyset\}$$

και

$$[A]_*^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \prec \dots \prec x_n \in A\},$$

για $A \subseteq X$ και $n \in \mathbb{N}$.

**Ορισμός 2.1.12.** Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια βάση coideal στο $(X, \prec)$.

(i) Η $\mathcal{B}$ θα λέγεται *Ramsey* αν για κάθε $n, r \in \mathbb{N}$ και κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $[A]^n = C_1 \cup \dots \cup C_r$, υπάρχουν $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ και $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ ώστε $[B]^n \subseteq C_{i_0}$.

(ii) Η $\mathcal{B}$ θα λέγεται *Ramsey*$^*$ αν για κάθε $n, r \in \mathbb{N}$ και κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $[A]_*^n = C_1 \cup \dots \cup C_r$, υπάρχουν $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ και $1 \leqslant i_o \leqslant r$ ώστε $[B]_*^n \subseteq C_{i_0}$.

**Παρατήρηση 2.1.13.** *Αν μια βάση coideal στο $(X, \prec)$ είναι Ramsey, τότε προφανώς είναι Ramsey$^*$.*

**Παρατήρηση 2.1.14.** *Αν $(X, \prec)$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο, τότε μια βάση coideal στο $X$ είναι Ramsey αν και μόνο αν είναι Ramsey$^*$, αφού $[A]^n = [A]_*^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{B}$.*

**Παρατήρηση 2.1.15.** *Η οικογένεια $\mathcal{B} = \{\mathrm{EV}[\vec{w}] : \vec{w} = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)\}$ είναι βάση coideal και όπως αποδείχθηκε από την Φαρμάκη [Fa] και από τους Bergelson, Blass και Hindman [BBH] για την περίπτωση του πεπερασμένου αλφαβήτου είναι Ramsey$^*$ στο $(L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon), \prec)$, αλλά δεν είναι Ramsey, σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.17 που βλέπουμε παρακάτω..*

**Παρατήρηση 2.1.16.** *Η βάση coideal*

$$\mathcal{B} = \{FU((F_n)_{n\in\mathbb{N}}) : (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0} \text{ με } F_1 \prec F_2 \prec \ldots\},$$

*όπως αποδείχθηκε από τους Milliken [Mi] και Taylor [Ta] είναι Ramsey$^*$ στο , αλλά δεν είναι Ramsey σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.18*

**Πρόταση 2.1.17.** *Η βάση coideal*

$$\mathcal{B} = \{EV[\vec{w}] : \vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)\}$$

*στο* $(L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon), \prec)$ *δεν είναι Ramsey.*

*Απόδειξη.* Έστω $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και έστω $[EV[\vec{w}]]^2 = C_1 \cup C_2$, όπου

$$C_1 = \left\{\{w_1, w_2\} \in [EV[\vec{w}]]^2 : w_1 \prec w_2\right\} \text{ και } C_2 = [EV(\vec{w})]^2 \setminus C_1.$$

Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι Ramsey και έστω $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ ακολουθία ώστε είτε $[EV[\vec{u}]]^2 \subseteq C_1$ είτε $[EV[\vec{u}]]^2 \subseteq C_2$. Επειδή $\{u_1, u_1 * u_2\} \notin C_1$ η πρώτη εκδοχή δεν ισχύει. Επίσης, αφού $\{u_1, u_2\} \notin C_2$ και η δεύτερη εκδοχή δεν ισχύει, άτοπο. Άρα, η $\mathcal{B}$ δεν είναι Ramsey. □

**Πρόταση 2.1.18.** *Η βάση coideal*

$$\mathcal{B} = \{FU((F_n)_{n\in\mathbb{N}}) : (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}, \text{ με } F_1 \prec F_2 \prec \ldots\}$$

*στο* $([\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}, \prec)$ *είναι Ramsey$^*$, αλλά δεν είναι Ramsey.*

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα Milliken-Taylor (Θεώρημα 1.2.2) είναι άμεσο ότι η βάση coideal

$$\mathcal{B} = \{FU((F_n)_{n\in\mathbb{N}}) : (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}, \text{ με } F_1 \prec F_2 \prec \ldots\}$$

είναι Ramsey$^*$. Ανάλογα με την προηγούμενη πρόταση αποδεικνύεται και ότι η βάση coideal $\mathcal{B}$ δεν είναι Ramsey.

□

## 2.2 Semiselective* βάσεις coideal και η ιδιότητα Ramsey

Ο Farah [F] όρισε την έννοια του semiselective coideal στο $\mathbb{N}$. Δίνουμε την έννοια της semiselective* βάσης coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο, επεκτείνοντας την ανάλογη έννοια που ορίστηκε στο σύνολο των φυσικών αριθμών.

Σημειώνουμε ότι η έννοια της semiselective* βάσης coideal ενδείκνυται ώστε να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε διαγώνια επιχειρήματα, προκειμένου να αποδείξουμε τα αποτελέσματά μας παρακάτω.

Στο Θεώρημα 2.2.6 δείχνουμε ότι κάθε semiselective* βάση coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο $(X, \prec)$ που ικανοποιεί την ιδιότητα $B - x \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $x \in X$, είναι Ramsey* και παίρνουμε ως συνέπεια ότι κάθε semiselective* coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο είναι Ramsey*.

Επιπλέον, στις Προτάσεις 2.2.4 και 2.2.5 αποδεικνύεται ότι οι βάσεις coideal που αναφέρθηκαν στα Παραδείγματα 2.1.10 και 2.1.11 στο σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων των φυσικών αριθμών και στο σύνολο των ω-located λέξεων με μεταβλητή αντίστοιχα, είναι semiselective* και επιπλέον ικανοποιούν την δεύτερη ιδιότητα. Επομένως, έχουμε μια διαφορετική απόδειξη ότι αυτές οι βάσεις coideal είναι Ramsey*.

**Ορισμός 2.2.1.** Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο, $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια βάση coideal στο $X$ και $A \in \mathcal{B}$. Ένα σύνολο $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$ θα λέγεται *dense-open* στην $\mathcal{B}$ (αντίστοιχα *dense-open* στην $\mathcal{B}$ ως προς το $A$) αν ισχύουν οι επόμενες δύο συνθήκες:

(i) Για κάθε $B \in \mathcal{B}$, (αντίστοιχα για κάθε $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$) υπάρχει $C \in \mathcal{R}$ με $C \subseteq B$.

(ii) Για κάθε $C \in \mathcal{R}$ και για κάθε $B \in \mathcal{B}$ με $B \subseteq C$, έχουμε ότι $B \in \mathcal{R}$.

**Ορισμός 2.2.2.** Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο. Μια βάση coideal $\mathcal{B} \subseteq [X]$ στο $(X, \prec)$ θα λέγεται *semiselective** αν για κάθε οικογένεια $(\mathcal{R}_s)_{s \in [X]_*^{<\infty}}$, με $\mathcal{R}_s \subseteq \mathcal{B}$, από dense-open σύνολα στην $\mathcal{B}$, και για κάθε $B \in \mathcal{B}$

υπάρχει $B' \in \mathcal{B}$ με $B' \subseteq B$ ώστε για κάθε $s \in [B']^{<\infty}_*$ και $\widetilde{B} \subseteq B' - s$, $\widetilde{B} \in \mathcal{B}$, να έχουμε ότι $\widetilde{B} \in \mathcal{R}_s$.

**Πρόταση 2.2.3.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο, $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια semiselective$^*$ βάση coideal στο $(X, \prec)$ και $A \in \mathcal{B}$. Τότε για κάθε οικογένεια $(\mathcal{R}^A_s)_{s \in [X]^{<\infty}_*}$, με $\mathcal{R}^A_s \subseteq \mathcal{B}$ από dense-open σύνολα στην $\mathcal{B}$ ως προς το $A$, υπάρχει $B' \in \mathcal{B}$, με $B' \subseteq A$ ώστε για κάθε $s \in [B']^{<\infty}_*$ και $\widetilde{B} \subseteq B' - s$, $\widetilde{B} \in \mathcal{B}$, να έχουμε ότι $\widetilde{B} \in \mathcal{R}^A_s$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την οικογένεια $(\mathcal{R}^A_s)_{s \in [X]^{<\infty}_*}$, με $\mathcal{R}^A_s \subseteq \mathcal{B}$ από dense-open σύνολα στην $\mathcal{B}$ ως προς το $A$ για κάθε $s \in [X]^{<\infty}_*$. Για $s \in [X]^{<\infty}_*$, ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{R}_s = \mathcal{R}^A_s \cup \{B \in \mathcal{B} : \nexists C \in \mathcal{B}, C \subseteq A \cap B\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{R}_s$ είναι dense-open στην $\mathcal{B}$.

(i) Έστω $B \in \mathcal{B}$. Αν υπάρχει $C \in \mathcal{B}$, $C \subseteq A \cap B$, τότε υπάρχει $D \in \mathcal{R}^A_s \subseteq \mathcal{R}_s$ με $D \subseteq C \subseteq B$. Αλλιώς, $B \in \mathcal{R}_s$.

(ii) Έστω $C \in \mathcal{R}_s$ και $B \in \mathcal{B}$ με $B \subseteq C$. Αν $C \in \mathcal{R}^A_s$, τότε $B \in \mathcal{R}^A_s \subseteq \mathcal{R}_s$. Αν $C \notin \mathcal{R}^A_s$, τότε δεν υπάρχει $D \in \mathcal{B}$, $D \subseteq A \cap C$. Επομένως, $B \in \mathcal{R}_s$.

Αφού η $\mathcal{B}$ είναι semiselective$^*$ βάση coideal, υπάρχει $B' \in \mathcal{B}$, $B' \subseteq A$ ώστε για κάθε $s \in [B']^{<\infty}_*$ και $\widetilde{B} \subseteq B' - s$, $\widetilde{B} \in \mathcal{B}$ έχουμε ότι $\widetilde{B} \in \mathcal{R}^A_s$. □

**Πρόταση 2.2.4.** *Η βάση coideal*

$$\mathcal{B} = \{\mathrm{EV}(\vec{w}) : \vec{w} = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)\}$$

*στο $(L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon), \prec)$ είναι semiselective$^*$ και $B - s \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $s \in [L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)]^{<\infty}_*$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathrm{EV}(\vec{w}) \in \mathcal{B}$, όπου $\vec{w} = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και έστω $s = (s_1, \ldots, s_m) \in [L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)]^{<\infty}_*$, $m \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\mathrm{EV}(\vec{w}) - s = \mathrm{EV}(\vec{w}) - s_m = \mathrm{EV}(\vec{w} - s_m) \in \mathcal{B},$$

όπου $\vec{w} - s_m = (w_n)_{n=n_0}^{\infty} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ με

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : \min \mathrm{dom}(w_n) > \max \mathrm{dom}(s_m)\}.$$

Έστω $(\mathcal{R}_s)_{s \in [L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)]_*^{<\infty}}$, με $\mathcal{R}_s \subseteq \mathcal{B}$, που έχει την ιδιότητα dense-open στην $\mathcal{B}$ για κάθε $s \in [L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)]_*^{<\infty}$, και έστω $\mathrm{EV}(\vec{w}) \in \mathcal{B}$, όπου $\vec{w} = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$.

Σύμφωνα με την ιδιότητα (i) του Ορισμού 2.2.1, υπάρχει $\vec{s}_1 = (s_n^1)_{n \in \mathbb{N}} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ με $\mathrm{EV}(\vec{s}_1) \subseteq \mathrm{EV}(\vec{w})$ ώστε $\mathrm{EV}(\vec{s}_1) \in \mathcal{R}_{\emptyset}$.

Υποθέτουμε ότι έχουν κατασκευαστεί $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ με

$$\mathrm{EV}(\vec{s}_k) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{EV}(\vec{s}_1) \subseteq \mathrm{EV}(\vec{w})$$

και έστω $\vec{s}_i = (s_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ για κάθε $i \in \{1, \dots, k\}$. Θα κατασκευάσουμε $\vec{s}_{k+1}$. Έστω $\{t_1, \dots, t_\lambda\} = \mathrm{EV}(s_1^1, \dots, s_k^k)$. Σύμφωνα με την ιδιότητα (i) του Ορισμού 2.2.1, υπάρχουν $\vec{s}_{k+1}^{\,1}, \dots, \vec{s}_{k+1}^{\,\lambda} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ ώστε

$$\mathrm{EV}(\vec{s}_{k+1}^{\,\lambda}) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{EV}(\vec{s}_{k+1}^{\,1}) \subseteq \mathrm{EV}(\vec{s}_k - s_k^k)$$

και $\mathrm{EV}(\vec{s}_{k+1}^{\,i}) \in \mathcal{R}_{t_i}$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \lambda$. θέτουμε $\vec{s}_{k+1} = \vec{s}_{k+1}^{\,\lambda}$ και έστω $\vec{s}_{k+1} = (s_n^{k+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Σύμφωνα με την ιδιότητα (ii) του Ορισμού 2.2.1, $\mathrm{EV}(\vec{s}_{k+1}) \in \mathcal{R}_{t_i}$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \lambda$.

Θέτουμε $\vec{s} = (s_1^1, s_2^2, \dots) \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Τότε $\mathrm{EV}(\vec{s}) \subseteq \mathrm{EV}(\vec{w})$, αφού $s_1^1 \prec s_2^2 \prec \dots$ και $s_n^n \in \mathrm{EV}(\vec{w})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $s \in [\mathrm{EV}(\vec{s})]_*^{<\infty}$ και $\mathrm{EV}(\vec{u}) \subseteq \mathrm{EV}(\vec{s}) - s = \mathrm{EV}(\vec{s} - s)$. Έστω $s \neq \emptyset$. Τότε θέτουμε

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : s \in \mathrm{EV}((s_1^1, \dots, s_n^n))\}.$$

Αφού $s \in [\mathrm{EV}((s_1^1, \dots, s_{n_0}^{n_0}))]_*^{<\infty}$, έχουμε ότι $\mathrm{EV}(\vec{s}_{n_0+1}) \in \mathcal{R}_s$. Τότε, σύμφωνα με την ιδιότητα (ii) του Ορισμού 2.2.1, έχουμε ότι $\mathrm{EV}(\vec{s} - s_{n_0}^{n_0}) \in \mathcal{R}_s$, αφού $\mathrm{EV}(\vec{s} - s_{n_0}^{n_0}) \subseteq \mathrm{EV}(\vec{s}_{n_0+1})$. Επομένως, $\mathrm{EV}(\vec{u}) \in \mathcal{R}_s$, αφού

$$\mathrm{EV}(\vec{u}) \subseteq \mathrm{EV}(\vec{s} - s_{n_0}^{n_0}) = \mathrm{EV}(\vec{s} - s).$$

□

Ανάλογα αποδεικνύεται και η επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 2.2.5.** *Η βάση coideal*

$$\mathcal{B} = \{FU((F_n)_{n\in\mathbb{N}}) : (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0} \text{ με } F_n \prec F_{n+1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\},$$

*στο* $([\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}, \prec)$*, είναι semiselective** *και* $B - s \in \mathcal{B}$ *για κάθε* $B \in \mathcal{B}$ *και* $s \in [[\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}]^{<\infty}$.

Θα αποδείξουμε ότι κάθε semiselective* βάση coideal $\mathcal{B}$ σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο $X$ για την οποία ισχύει $B - x \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $x \in X$ είναι Ramsey* και ως συνέπεια παίρνουμε ότι κάθε semiselective* coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο είναι Ramsey*.

Για μια οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq [X]^{<\infty}_*$ και για $y \in X$, όπου $(X, \prec)$ είναι ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο, ορίζουμε,

$$\mathcal{F} - y = \{s \in \mathcal{F} : \text{ είτε } s = \emptyset, \text{ είτε } s = (x_1, \dots, x_n) \text{ για } n \in \mathbb{N} \text{ και } y \prec x_1\},$$

και

$$\mathcal{F}(y) = \{s \in [X]^{<\infty}_* : s = \emptyset \text{ αν } \{y\} \in \mathcal{F}, s = (x_1, \dots, x_n) \text{ αν } (y, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{F}\}.$$

**Θεώρημα 2.2.6.** *Έστω* $(X, \prec)$ *ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο,* $\mathcal{B} \subseteq [X]$ *μια semiselective** *βάση coideal στο* $(X, \prec)$ *ώστε* $B - x \in \mathcal{B}$ *για κάθε* $B \in \mathcal{B}$ *και* $x \in X$ *και έστω* $\kappa \in \mathbb{N}$*. Για κάθε* $A \in \mathcal{B}$ *και* $\mathcal{F} \subseteq [X]^{<\infty}_*$ *υπάρχει* $B \in \mathcal{B}$*, με* $B \subseteq A$ *ώστε είτε* $[B]^\kappa_* \subseteq \mathcal{F}$*, είτε* $[B]^\kappa_* \subseteq [X]^{<\infty}_* \setminus \mathcal{F}$*.*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $\kappa$. Για $\kappa = 1$ το θεώρημα ισχύει, αφού η $\mathcal{B}$ είναι βάση coideal και για κάθε $A \in \mathcal{B}$ και $\mathcal{F} \subseteq [X]^{<\infty}_*$

$$A = (\mathcal{F} \cap A) \cup (([X]^{<\infty}_* \setminus \mathcal{F}) \cap A)\,.$$

Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για κάποιον $\kappa \in \mathbb{N},\ k > 1$. Έστω $A \in \mathcal{B}$ και $\mathcal{F} \subseteq [X]^{<\infty}_*$. Για κάθε $x \in X$ θέτουμε,

$$\mathcal{R}_{\{x\}} = \{\widetilde{B} \in \mathcal{B} : \widetilde{B} \subseteq X - x \text{ με } [\widetilde{B}]^\kappa_* \subseteq \mathcal{F}(x) \text{ ή } [\widetilde{B}]^\kappa_* \subseteq [X]^{<\infty}_* \setminus \mathcal{F}(x)\}$$

και

$$\mathcal{R}_s = \mathcal{B} \text{ για κάθε } s \in [X]^{<\infty}_* \setminus \{\{x\} : x \in X\}.$$

Για $x \in X$ και $B \in \mathcal{B}$, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει $\widetilde{B} \in \mathcal{B}$, $\widetilde{B} \subseteq B - x$ ώστε είτε $[\widetilde{B}]^\kappa_* \subseteq \mathcal{F}(x)$ είτε $[\widetilde{B}]^\kappa_* \subseteq [X]^{<\infty}_* \setminus \mathcal{F}(x)$. Άρα, $\widetilde{B} \in \mathcal{R}_{\{x\}}$. Επίσης, για κάθε $C \in \mathcal{R}_{\{x\}}$ και για κάθε $B \in \mathcal{B}$ με $B \subseteq C$ έχουμε ότι $B \in \mathcal{R}_{\{x\}}$.

Από τα παραπάνω επιχειρήματα οι οικογένειες $\mathcal{R}_s$, για $s \in [X]^{<\infty}_*$ έχουν την ιδιότητα dense-open στην $\mathcal{B}$. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι semiselective* βάση coideal υπάρχει $B' \in \mathcal{B}$, $B' \subseteq A$ ώστε για κάθε $x \in B'$ και $B_0 \subseteq B' - x$, $B_0 \in \mathcal{B}$ έχουμε ότι $B_0 \in \mathcal{R}_x$. Άρα, $B' - x \in \mathcal{R}_x$ για κάθε $x \in B'$, αφού $B' - x \in \mathcal{B}$. Έστω

$$B_1 = \{x \in B' : [B' - x]^\kappa_* \subseteq \mathcal{F}(x)\}$$

και

$$B_2 = \{x \in B' : [B' - x]^\kappa_* \subseteq [X]^{<\infty}_* \setminus \mathcal{F}(x)\}.$$

Αφού $B' \in \mathcal{B}$, $B' = B_1 \cup B_2$ και η $\mathcal{B}$ είναι βάση coideal, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε είτε $B \subseteq B_1$ είτε $B \subseteq B_2$ και φυσικά $B \subseteq A$. Αν $B \subseteq B_1$, έχουμε ότι $[B - x]^\kappa_* \subseteq \mathcal{F}(x)$ για κάθε $x \in B$ και ισοδύναμα ότι $[B]^{\kappa+1}_* \subseteq \mathcal{F}$. Επίσης, αν $B \subseteq B_2$, έχουμε ότι, $[B - x]^\kappa_* \subseteq [X]^{<\infty}_* \setminus \mathcal{F}(x)$ για κάθε $x \in B$ και ισοδύναμα ότι $[B]^{\kappa+1}_* \subseteq [X]^{<\infty}_* \setminus \mathcal{F}$. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Το παραπάνω διαμεριστικό θεώρημα έχει ως συνέπεια την ύπαρξη επιπλέον βάσεων coideal.

**Πόρισμα 2.2.7.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο, $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια semiselective* βάση coideal στο $(X, \prec)$ ώστε $B - x \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $x \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η οικογένεια $\{[A]^n_* : A \in \mathcal{B}\}$ είναι μια βάση coideal στο $([X]^n_*, \prec)$, όπου για $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in [X]^n_*$, ορίζουμε $(x_1, \ldots, x_n) \prec (y_1, \ldots, y_n)$ αν $x_n \prec y_1$.*

Το Θεώρημα 2.2.6 συνεπάγεται ότι κάθε semiselective* coideal $\mathcal{H}$ σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο $(X, \prec)$ είναι Ramsey*.

**Πόρισμα 2.2.8.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο, $\mathcal{H} \subseteq [X]$ ένα semiselective* coideal στο $(X, \prec)$ και έστω $\kappa \in \mathbb{N}$. Για κάθε $A \in \mathcal{B}$ και $\mathcal{F} \subseteq [X]^{<\infty}_{*}$ υπάρχει $B \in \mathcal{H}$, $B \subseteq A$ ώστε είτε $[B]^{\kappa}_{*} \subseteq \mathcal{F}$ είτε $[B]^{\kappa}_{*} \subseteq [X]^{<\infty}_{*} \setminus \mathcal{F}$.*

Η βάση coideal $\mathcal{B} = \{\mathrm{EV}(\vec{w}) : \vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)\}$ στο κατευθυνόμενο σύνολο $(L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon), \prec)$ είναι semiselective*, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.4, και $B - x \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $x \in L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Επομένως, από το Θεώρημα 2.2.6 έπεται ότι είναι Ramsey*, ένα αποτέλεσμα το οποίο έχει αποδειχθεί από τον Carlson [C] και από την Φαρμάκη [Fa].

**Πόρισμα 2.2.9** ([C], [Fa])**.** *Η βάση coideal $\mathcal{B} = \{\mathrm{EV}(\vec{w}) : \vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)\}$ στο κατευθυνόμενο σύνολο $(L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon), \prec)$ είναι Ramsey*.*

Το επόμενο πόρισμα του Θεωρήματος 2.2.6 είναι ένα αποτέλεσμα που έχει αποδειχτεί προηγουμένως από τους Milliken [Mi] και Taylor [Ta].

**Πόρισμα 2.2.10** ([M], [Ta] )**.** *Η βάση coideal $\mathcal{B} = \{\mathrm{FU}((F_n)_{n\in\mathbb{N}}) : (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}$ με $F_n \prec F_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}\}$ στο κατευθυνόμενο σύνολο $([\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}, \prec)$ είναι Ramsey*.*

*Απόδειξη.* Η βάση coideal $\mathcal{B}$ είναι semiselective*, όπως είδαμε στην Πρόταση 2.2.5, και $B - x \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $x \in [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.6, η $\mathcal{B}$ είναι Ramsey*. □

## 2.3 Ένα Θεώρημα τύπου Nash-Williams για Coideal σε κατευθυνόμενα σύνολα

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε ένα διαμεριστικό θεώρημα (Θεώρημα 2.3.6), για το σύνολο όλων των ολικά διατεταγμένων υποσυνόλων ενός άπειρου κατευθυνόμενου συνόλου. Συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι για μια διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{F}$ του συνόλου όλων των μη-κενών, ολικά διατεταγμένων, πεπερασμένων υποσυνόλων ενός άπειρου κατευθυνόμενου συνόλου $X$ και για ένα στοιχείο $A$ μιας semiselective* βάσης coideal $\mathcal{B}$ στο $X$ με

$B - s \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $s \in [X]^{<\infty}_*$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $B \subseteq A$ ώστε, είτε όλα τα ολικά διατεταγμένα πεπερασμένα υποσύνολα του B είναι στοιχεία του συμπληρώματος του $\mathcal{F}$, είτε κάθε άπειρη αύξουσα ακολουθία στοιχείων του B έχει αρχικό τμήμα στο $\mathcal{F}$.

Αυτό το διαμεριστικό θεώρημα είναι ένα τύπου Nash-Williams αποτέλεσμα για $\mathcal{B}$ στο X, καθώς στην ειδική περίπτωση όπου $\mathcal{B} = [\mathbb{N}]^\infty$ και $X = \mathbb{N}$ παίρνουμε ένα αποτέλεσμα που πρώτα έχει αποδειχθεί από τον Nash-Williams στο [NW].

Μια ισοδύναμη μορφή του Θεωρήματος 2.3.6 δίνεται στο Θεώρημα 2.3.7, το οποίο έχει κεντρικό ρόλο στις αποδείξεις των αποτελεσμάτων μας στην επόμενη παράγραφο.

Δίνουμε πρώτα την απαραίτητη ορολογία που θα χρειαστούμε για τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου.

Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο.

- Για $t, s \in [X]^{<\infty}_*$, γράφουμε $t \prec s$, αν είτε $\emptyset \in \{t, s\}$ είτε $t, s \neq \emptyset$ και $x \prec y$ για κάθε $x \in t$ και $y \in s$.
- Αν t είναι ένα αρχικό τμήμα του s, δηλαδή αν είτε $t \in \{\emptyset, s\}$ είτε αν υπάρχει $y \in s$ ώστε $t = \{x \in s : x \prec y\}$ θα γράφουμε $t \sqsubseteq s$.
- Για $A \subseteq X$ θέτουμε, $[A]_* = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A : x_n \prec x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}\}$.
- Για $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [X]_*$ και $s \in [X]^{<\infty}_*$ γράφουμε, $s \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, αν είτε $s = \emptyset$ είτε $s = (x_1, \ldots, x_m)$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$.
- Έστω $t, s \in [X]^{<\infty}_*$ με $t \prec s$. Αν $t = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ και $s = (s_1, \ldots, s_m)$, $m \in \mathbb{N}$, θέτουμε
$$t \otimes s = (x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_m).$$
  Αν $t = \emptyset$, θέτουμε $t \otimes s = s$ και αν $s = \emptyset$, θέτουμε $t \otimes s = t$.

**Ορισμός 2.3.1.** Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο. Για κάθε $A \in [X]$ και $t \in [X]^{<\infty}_*$ θέτουμε,

(i) $[t, A]_* = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [X]_* : t \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - t \in [A]_*\}$,

(ii) $[\emptyset, A]_* = [A]_*$, και

(iii) $[t, A]_*^{<\infty} = \{t_1 \in [X]_*^{<\infty} : t_1 \sqsubseteq t\} \cup \{t \otimes s : s \in [A]_*^{<\infty}$ και $t \prec s\}$.

**Ορισμός 2.3.2.** Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο, $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια βάση coideal στο $X$, $A \in \mathcal{B}$, $t \in [X]_*^{<\infty}$ και $\mathcal{F} \subseteq [X]_*^{<\infty} \setminus \{\emptyset\}$. Θα λέμε ότι

(i) Το $A$ *δέχεται (accepts)* το $t$, αν για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [t, A]_*$ υπάρχει $s \in \mathcal{F}$ ώστε $s \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Το $A$ *απορρίπτει (rejects)* το $t$, αν δεν υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ που να δέχεται το $t$.

(iii) Το $A$ *αποφασίζει (decides)* για το $t$, αν το $A$ είτε δέχεται το $t$, είτε απορρίπτει το $t$.

**Παρατήρηση 2.3.3.** *Έστω $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια semiselective* βάση coideal στο $(X, \prec)$ ώστε $B - s \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $s \in [X]_*^{<\infty}$ και έστω $\mathcal{F} \subseteq [X]_*^{<\infty} \setminus \{\emptyset\}$. Τότε το $A \in \mathcal{B}$ δέχεται (απορρίπτει) το $t \in [X]_*^{<\infty}$ αν και μόνο αν το $A - t$ δέχεται (απορρίπτει) το $t$.*

**Λήμμα 2.3.4.** *Έστω $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια βάση coideal στο $X$ και $\mathcal{F} \subseteq [X]_*^{<\infty} \setminus \{\emptyset\}$.*

(i) *Αν το $A \in \mathcal{B}$ δέχεται (απορρίπτει) το $t \in [X]_*^{<\infty}$, τότε κάθε $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ δέχεται (απορρίπτει) το $t$.*

(ii) *Για κάθε $A \in \mathcal{B}$ και $t \in [X]_*^{<\infty}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ που αποφασίζει για το $t$.*

(iii) *Αν το $A \in \mathcal{B}$ δέχεται το $t \in [X]_*^{<\infty}$, τότε το $A$ δέχεται το $t_x = t \cup \{x\}$, για κάθε $x \in A - t$.*

(iv) *Αν το $A \in \mathcal{B}$ απορρίπτει το $t \in [X]_*^{<\infty}$, τότε*

$$C = \{x \in A - t : A \text{ δέχεται } t \cup \{x\}\} \notin \mathcal{L}_{\mathcal{B}}.$$

*Απόδειξη.* Το (i) είναι άμεσο από τους ορισμούς.

Για το (ii) θεωρούμε $A \in \mathcal{B}$ και $t \in [X]^{<\infty}_*$. Αν το $A$ απορρίπτει το $t$, τότε το $A$ αποφασίζει για το $t$. Αλλιώς, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ που δέχεται το $t$ και άρα το $B$ αποφασίζει για το $t$.

Για το (iii) θεωρούμε $x \in A - t$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [t_x, A]_*$. Τότε $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [t, A]_*$. Αφού το $A$ δέχεται το $t$, υπάρχει $s \in \mathcal{F}$ ώστε $s \sqsubseteq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Άρα, το $A$ δέχεται το $t_x$.

Τέλος για το (iv) υποθέτουμε ότι $C \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$. Τότε υπάρχει $\widetilde{C} \in \mathcal{B}$ ώστε $\widetilde{C} \subseteq C$. Αφού $\widetilde{C} \subseteq A$, σύμφωνα με το (i), το $\widetilde{C}$ απορρίπτει το $t$.

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [t, \widetilde{C}]_*$. Τότε υπάρχει $x_{n_0} \in \widetilde{C} - t$, $n_0 \in \mathbb{N}$, με την ιδιότητα $t_{x_{n_0}} = t \cup \{x_{n_0}\} \sqsubseteq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Αφού $x_{n_0} \in \widetilde{C} \subseteq C$, το $A$ δέχεται το $t_{x_{n_0}}$ και ισοδύναμα υπάρχει $s \in \mathcal{F}$ ώστε $s \sqsubseteq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Επομένως το $\widetilde{C}$ δέχεται το $t$, το οποίο είναι άτοπο. □

**Λήμμα 2.3.5.** *Έστω* $\mathcal{B} \subseteq [X]$ *μια semiselective** *βάση coideal στο* $(X, \prec)$ *ώστε* $B - s \in \mathcal{B}$ *για κάθε* $B \in \mathcal{B}$ *και* $s \in [X]^{<\infty}_*$ *και έστω* $\mathcal{F} \subseteq [X]^{<\infty}_* \setminus \{\emptyset\}$. *Για κάθε* $A \in \mathcal{B}$ *υπάρχει* $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ *ώστε το* $B$ *αποφασίζει για κάθε* $t \in [B]^{<\infty}_*$.

*Απόδειξη.* Για κάθε $s \in [X]^{<\infty}_*$ θέτουμε,

$$\mathcal{R}_s = \{B' \in \mathcal{B} : B' \text{ αποφασίζει για το } s\}.$$

Από τα (i) και (ii) του Λήμματος 2.3.4, η οικογένεια $\mathcal{R}_s$, για $s \in [X]^{<\infty}_*$, έχει την ιδιότητα dense-open. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι semilective* βάση coideal, για κάθε $A \in \mathcal{B}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ ώστε για κάθε $s \in [B]^{<\infty}_*$ και $\widetilde{B} \subseteq B - s$, $\widetilde{B} \in \mathcal{B}$ έχουμε ότι $\widetilde{B} \in \mathcal{R}_s$. Άρα, για κάθε $s \in [B]^{<\infty}_*$ έχουμε ότι $B - s \in \mathcal{B}$ και ότι το $B - s$ αποφασίζει για το $s$. Επομένως, το $B$ αποφασίζει για κάθε $s \in [B]^{<\infty}_*$. □

**Θεώρημα 2.3.6.** *Έστω* $(X, \prec)$ *ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο,* $\mathcal{B} \subseteq [X]$ *μια semiselective** *βάση coideal στο* $X$ *ώστε* $B - s \in \mathcal{B}$ *για κάθε* $B \in \mathcal{B}$ *και* $s \in [X]^{<\infty}_*$ *και έστω* $\mathcal{F} \subseteq [X]^{<\infty}_* \setminus \{\emptyset\}$. *Για κάθε* $A \in \mathcal{B}$ *υπάρχει* $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$

*ώστε, είτε* $[B]_*^{<\infty} \cap \mathcal{F} = \emptyset$*, είτε για κάθε* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [B]_*$ *να υπάρχει* $s \in \mathcal{F}$ *ώστε* $s \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

*Απόδειξη.* Έστω $A \in \mathcal{B}$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.5, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ το οποίο αποφασίζει για κάθε $s \in [B]_*^{<\infty}$. Αν το $B$ δέχεται το $\emptyset$, τότε η δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος ισχύει.

Έστω ότι το $B$ απορρίπτει το $\emptyset$. Ορίζουμε τις οικογένειες $(\mathcal{L}_s)_{s\in[X]_*^{<\infty}}$ ως εξής: Για $s \in [B]_*^{<\infty}$ ώστε το $B$ απορρίπτει το $s$ θέτουμε

$$\mathcal{L}_s = \{C \in \mathcal{B} : C \text{ απορρίπτει } s_x = s \cup \{x\}, \text{ για κάθε } x \in C - s\}$$

και $\mathcal{L}_s = \mathcal{B}$ αλλιώς.

Θα αποδείξουμε ότι οι οικογένειες $\mathcal{L}_s$, για $s \in [X]_*^{<\infty}$ έχουν την ιδιότητα dense-open στην $\mathcal{B}$ στο $B$. Έστω $s \in [B]_*^{<\infty}$ ώστε το $B$ να απορρίπτει το $s$.

Για την πρώτη συνθήκη έχουμε θεωρούμε $B_1 \in \mathcal{B}$, με $B_1 \subseteq B$. Τότε, σύμφωνα με το (i) του Λήμματος 2.3.4, το $B_1$ απορρίπτει το $s$ και άρα σύμφωνα με το (iv) του Λήμματος 2.3.4, έχουμε ότι

$$C_1 = \{x \in B_1 - s : B_1 \text{ δέχεται το } s_x = s \cup \{x\}\} \notin \mathcal{L}_{\mathcal{B}}.$$

Αφού το $B$ αποφασίζει για κάθε $s \in [B]_*^{<\infty}$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.3.3 και το (i) του Λήμματος 2.3.4, για κάθε $s \in [B]_*^{<\infty}$ έχουμε ότι το $B - s$ και ισοδύναμα το $B_1 - s$ αποφασίζει για κάθε $s$. Επομένως $B_1 - s = C_1 \cup C_2$, όπου

$$C_2 = \{x \in B_1 - s : B_1 \text{ απορρίπτει } s_x = s \cup \{x\}\}.$$

Αφού $B_1 - s \in \mathcal{B}$ και $C_1 \notin \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$, έχουμε ότι $C_2 \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$. Επομένως, υπάρχει $C \in \mathcal{B}$, $C \subseteq C_2 \subseteq B_1$ και $C \in \mathcal{L}_s$.

Για τη δεύτερη συνθήκη θεωρούμε $B_1 \in \mathcal{B}$ και $C \in \mathcal{L}_s$ με $B_1 \subseteq C$. Τότε $C \in \mathcal{B}$ και το $C$ απορρίπτει κάθε $s_x = s \cup \{x\}$ για $x \in C - s$. Επομένως $B_1 \in \mathcal{L}_s$, αφού $B_1 \in \mathcal{B}$ και $B_1 \subseteq C$.

Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι semiselective$^*$ υπάρχει $B' \in \mathcal{B}$, $B' \subseteq B$ ώστε για κάθε $s \in [B']_*^{<\infty}$ και $\widetilde{B} \subseteq B' - s$, $\widetilde{B} \in \mathcal{B}$ έχουμε ότι $\widetilde{B} \in \mathcal{L}_s$. Θα αποδείξουμε ότι το $B'$ απορρίπτει κάθε $s \in [B']_*^{<\infty}$.

Πράγματι, θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο μήκος $|s|$ του $s$. Αν $|s| = 0$, τότε $s = \emptyset$ και το $B'$ απορρίπτει το $\emptyset$, αφού το $B$ απορρίπτει το $\emptyset$ και $B' \subseteq B$.

Υποθέτουμε ότι το $B'$ απορρίπτει κάθε $s \in [B']^n_*$. Έστω $s \cup \{x\} \in [B']^{n+1}_*$, όπου $s \in [B']^n_*$ και $x \in B' - s$. Αφού $B' - s \in \mathcal{L}_s$ και το $B'$ απορρίπτει το $s$ από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι το $B' - s$ απορρίπτει το $s \cup \{x\}$ και ισοδύναμα ότι το $B'$ απορρίπτει το $s \cup \{x\}$. Επομένως το $B'$ απορρίπτει το $s \in [B']^{<\infty}_*$.

Αν $s \in [B']^{<\infty}_* \cap \mathcal{F}$, τότε το $B'$ δέχεται το $s$, άρα $[B']^{<\infty}_* \cap \mathcal{F} = \emptyset$ και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. □

Στη συνέχεια δίνουμε μια ισοδύναμη εκδοχή του Θεωρήματος 2.3.6.

**Θεώρημα 2.3.7.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο, $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια semiselective* βάση coideal στο $X$ ώστε $B - s \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $s \in [X]^{<\infty}_*$, και έστω $t \in [X]^{<\infty}_*$ και $\mathcal{F} \subseteq [X]^{<\infty}_* \setminus \{\emptyset\}$. Για κάθε $A \in \mathcal{B}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ ώστε, είτε $[t, B]^{<\infty}_* \cap \mathcal{F} = \emptyset$, είτε για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [t, B]_*$ υπάρχει $s \in \mathcal{F}$ ώστε $s \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

*Απόδειξη.* Αν $t = \emptyset$, τότε το θεώρημα ταυτίζεται με το Θεώρημα 2.3.6. Υποθέτουμε ότι $t \neq \emptyset$. Έστω $A \in \mathcal{B}$. Αν υπάρχει $t_1 \sqsubseteq t$ με $t_1 \in \mathcal{F}$ έχουμε προφανώς την δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος. Έστω $t_1 \notin \mathcal{F}$ για κάθε $t_1 \sqsubseteq t$. Θέτουμε

$$\mathcal{F}_1 = \{s \in \mathcal{F} : t \sqsubseteq s\} \text{ και } \mathcal{F}_2 = \{(s - t) : s \in \mathcal{F}_1\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $s \in \mathcal{F}_2$, τότε $t \otimes s \in \mathcal{F}_1$ και $\emptyset \notin \mathcal{F}_2$, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.6, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A - t$ ώστε, είτε $[B]^{<\infty}_* \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$, είτε για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [B]_*$ υπάρχει $s \in \mathcal{F}_2$ ώστε $s \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε, είτε $[t, B]^{<\infty}_* \cap \mathcal{F} = \emptyset$, είτε για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [t, B]_*$ υπάρχει $s \in \mathcal{F}$ ώστε $s \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Το Θεώρημα 2.3.7 έχει ως συνέπεια το επόμενο αποτέλεσμα για ένα semiselective* coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο.

**Θεώρημα 2.3.8.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο, $\mathcal{H} \subseteq [X]$ ένα semiselective* coideal στο $(X, \prec)$, $t \in [X]^{<\infty}_*$ και $\mathcal{F} \subseteq [X]^{<\infty}_* \setminus \{\emptyset\}$. Για κάθε $A \in \mathcal{H}$ υπάρχει $B \in \mathcal{H}$, $B \subseteq A$ ώστε, είτε $[t, B]^{<\infty}_* \cap \mathcal{F} = \emptyset$, είτε για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [t, B]_*$ υπάρχει $s \in \mathcal{F}$ ώστε $s \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

## 2.4 Αποτελέσματα Τοπολογικής Θεωρίας Ramsey για Κατευθυνόμενα Σύνολα

Στο κεφάλαιο αυτό στόχος μας είναι να εντοπίσουμε τις τοπολογικές ιδιότητες που απαιτούνται, για μια διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U}$ του συνόλου $[X]_*$, των απείρων διατεταγμένων ακολουθιών του $(X, \prec)$, εφοδιασμένου με τη σχετική τοπολογία της τοπολογίας γινόμενο του $\{0,1\}^X$, ούτως ώστε για κάθε semiselective$^*$ βάση coideal $\mathcal{B}$ στο $X$, με $B - s \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $s \in [X]_*^{<\infty}$, να είναι $\mathcal{B}$-πλήρως (completely) Ramsey$^*$. Δηλαδή για κάθε στοιχείο $A \in \mathcal{B}$ να υπάρχει στοιχείο $B \in \mathcal{B}$ με $B \subseteq A$ ώστε, είτε όλες οι άπειρες διατεταγμένες ακολουθίες του $B$ να είναι στοιχεία του $\mathcal{U}$, είτε όλες οι άπειρες διατεταγμένες ακολουθίες του $B$ να είναι στοιχεία του συμπληρώματος του $\mathcal{U}$. Αυτό επιτυγχάνεται όταν η $\mathcal{U}$ είναι κλειστή ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης χρησιμοποιώντας το διαμεριστικό Θεώρημα 2.3.7 και είναι το περιεχόμενο του Θεωρήματος 2.4.7.

Επιπλέον, αποδεικνύουμε (Θεώρημα 2.4.10 και Πόρισμα 2.4.12) ότι κάθε διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U}$ του $[X]_*$, που είναι Borel υποσύνολο του $[X]_*$, είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey$^*$. Τέλος, δείχνουμε (Θεώρημα 2.4.17) ότι κάθε $\mathcal{B}$-Baire$^*$ διαμεριστική οικογένεια του $[X]_*$ (Ορισμός 2.4.16)είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey$^*$.

**Ορισμός 2.4.1.** Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια βάση coideal στο $X$.

(i) Ένα υποσύνολο $\mathcal{U} \subseteq [X]_*$ λέγεται $\mathcal{B}$-*Ramsey*$^*$ αν για κάθε $A \in \mathcal{B}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ ώστε, είτε $[B]_* \subseteq \mathcal{U}$ είτε $[B]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}$.

(ii) Αν για κάθε $A \in \mathcal{B}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ ώστε $[B]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}$, τότε το σύνολο $\mathcal{U}$ λέγεται $\mathcal{B}$-*Ramsey*$^*$ *null*.

**Ορισμός 2.4.2.** Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια βάση coideal στο $X$.

(i) Ένα υποσύνολο $\mathcal{U} \subseteq [X]_*$ λέγεται *$\mathcal{B}$-πλήρως (completely) Ramsey** αν για κάθε $t \in [X]_*^{<\infty}$ και $A \in \mathcal{B}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ ώστε, είτε $[t, B]_* \subseteq \mathcal{U}$ είτε $[t, B]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}$.

(ii) Αν για κάθε $t \in [X]_*^{<\infty}$ και $A \in \mathcal{B}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ ώστε $[t, B]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}$, τότε το σύνολο $\mathcal{U}$ λέγεται *$\mathcal{B}$-πλήρως (completely) Ramsey* null*.

**Παρατήρηση 2.4.3.** *Αν $\mathcal{U} \subseteq [X]_*$ είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey*, τότε είναι $\mathcal{B}$-Ramsey*.*

**Παρατήρηση 2.4.4.** *Ένα σύνολο $\mathcal{U} \subseteq [X]_*$ είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey* (αντίστοιχα είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey* null) αν και μόνο αν για κάθε $t \in [X]_*^{<\infty}$ η οικογένεια*

$$\mathcal{U}^t = \left\{\vec{x} - t : \vec{x} \in \mathcal{U} \cap [t, X]_*\right\},$$

*είναι $\mathcal{B}$-Ramsey* (αντίστοιχα είναι $\mathcal{B}$-Ramsey* null), όπου για $\vec{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θέτουμε $\vec{x} - t = (x_n)_{n \geqslant n_0}$ και $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : t \prec \{x_n\}\}$. Αυτό συμβαίνει γιατί $[t, B]_* \subseteq \mathcal{U}$, αν και μόνο αν $[B - t]_* \subseteq \mathcal{U}^t$.*

**Παρατήρηση 2.4.5.** *Αν $(\mathcal{U}_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του $[X]_*$, τότε $(\cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n)^t = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n^t$ για κάθε $t \in [X]_*^{<\infty}$.*

Θεωρούμε το σύνολο $[X]_*$, εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία της τοπολογίας γινόμενο του $\{0, 1\}^X$. Τα βασικά ανοικτά σύνολα αυτής της τοπολογίας είναι της μορφής $[t, X]_*$, για $t \in [X]_*^{<\infty}$, όπου

$$[t, X]_* = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [X]_* : t \sqsubseteq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

**Ορισμός 2.4.6.** Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο. Ταυτίζοντας κάθε στοιχείο $\vec{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [X]_*$ με την χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_{\sigma(\vec{x})} \in \{0, 1\}^X$ του συνόλου $\sigma(\vec{x}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$, εφοδιάζουμε το σύνολο $[X]_*$ με την σχετική τοπολογία $\mathcal{T}$ της τοπολογίας γινόμενο (ισοδύναμα με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης) του $\{0, 1\}^X$. Μια βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$ είναι η οικογένεια $\left\{[t, X]_* : t \in [X]_*^{<\infty}\right\}$.

Επομένως, μια οικογένεια $\mathcal{U} \subseteq [X]_*$ είναι κλειστή ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης (ισοδύναμα $\mathcal{T}$-κλειστή) αν το $\{\chi_{\sigma(\vec{s})} : \vec{s} \in \mathcal{U}\}$ είναι κλειστό στο $\{0,1\}^X$ ως προς την τοπολογία γινόμενο.

**Θεώρημα 2.4.7.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια semiselective* βάση coideal στο $X$ ώστε $B - s \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $s \in [X]_*^{<\infty}$. Τότε κάθε διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U}$ του $[X]_*$, η οποία είναι κλειστή ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης, είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey*.*

*Απόδειξη.* Έστω $t \in [X]_*^{<\infty}$ και $A \in \mathcal{B}$. Θέτουμε

$$\mathcal{F} = \{s \in [X]_*^{<\infty} : \text{ υπάρχει } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U} \text{ ώστε } s \sqsubseteq (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\} \subseteq [X]_*^{<\infty}\}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.7, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ ώστε, είτε

$$[t, B]_*^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}, \text{ είτε} \tag{2.1}$$

$$\text{για κάθε } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [t, B]_* \text{ υπάρχει } s \in [X]_*^{<\infty} \setminus \mathcal{F} \text{ ώστε } s \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{2.2}$$

Αν ισχύει η (2.1), τότε $[t, B]_* \subseteq \mathcal{U}$. Πράγματι, έστω $\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [t, B]_*$. Τότε $(x_1, \dots, x_n) \in [t, B]_*^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\vec{z}_n = (z_m^n)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ ώστε $(x_1 \dots, x_n) \sqsubseteq (z_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$. Αφού η $\mathcal{U}$ είναι κλειστή ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης και $(\vec{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στο $\vec{x}$, έχουμε ότι $\vec{x} \in \mathcal{U}$. Επομένως, $[t, B]_* \subseteq \mathcal{U}$.

Αν ισχύει η (2.2) τότε για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [t, B]_*$ υπάρχει $s \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ το οποίο ανήκει στο $[X]_*^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$. Επομένως, $[t, B]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}$. □

Από το Θεώρημα 2.4.7 έπεται άμεσα το επόμενο ισχυρότερο θεώρημα Nash-Williams, καθώς αν $\mathcal{U} \subseteq [X]_*$ είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey*, τότε είναι $\mathcal{B}$-Ramsey*.

**Θεώρημα 2.4.8.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο, $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μία semiselective* βάση coideal στο $X$ ώστε $B - s \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $s \in [X]_*^{<\infty}$. Για κάθε διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U}$ του $[X]_*$, η οποία είναι κλειστή ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης και για κάθε $A \in \mathcal{B}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ ώστε, είτε $[B]_* \subseteq \mathcal{U}$, είτε $[B]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}$.*

**Πόρισμα 2.4.9.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $\mathcal{H} \subseteq [X]$ ένα semiselective$^*$ coideal στο $X$. Τότε κάθε διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{U}$ του $[X]_*$, η οποία είναι κλειστή ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης, είναι $\mathcal{H}$-πλήρως Ramsey$^*$.*

**Θεώρημα 2.4.10.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια semiselective$^*$ βάση coideal στο $X$ ώστε $B - s \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $s \in [X]_*^{<\infty}$. Τότε η οικογένεια των $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey$^*$ υποσυνόλων του $[X]_*$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις και επίσης η οικογένεια των $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey$^*$ null υποσυνόλων του $[X]_*$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις.*

*Απόδειξη.* Έστω $(\mathcal{U}_n)_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey$^*$ υποσυνόλων του $[X]_*$. Θα αποδείξουμε ότι $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n$ είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey$^*$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n$ είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey$^*$ null αν $\mathcal{U}_n$ είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey$^*$ null για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Έστω $(\mathcal{U}_n)_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey$^*$ null υποσυνόλων του $[X]_*$ και έστω $t \in [X]_*^{<\infty}$ και $A \in \mathcal{B}$. Ορίζουμε τις οικογένειες $(\mathcal{R}_s)_{s \in [X]_*^{<\infty}}$ ως εξής: Για $s \in [X]_*^{<\infty}$ ώστε $t \prec s$ θέτουμε

$$\mathcal{R}_s = \{B \in \mathcal{B} : [s, B]_* \cap (\mathcal{U}_n)^t = \emptyset \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}, n \leqslant |s|\},$$

όπου με $|s|$ συμβολίζουμε το μήκος του $s$ και το $(\mathcal{U}_n)^t$ έχει οριστεί στις Παρατηρήσεις 2.4.4. Διαφορετικά, θέτουμε $\mathcal{R}_s = \mathcal{B}$.

Θα δείξουμε ότι οι οικογένειες $\mathcal{R}_s$, για $s \in [X]_*^{<\infty}$ έχουν την ιδιότητα dense-open. Έστω $s \in [X]_*^{<\infty}$ ώστε $t \prec s$ με $|s| = n_0$ .

Για την πρώτη συνθήκη θεωρούμε, $B \in \mathcal{B}$. Αφού οι οικογένειες $\mathcal{U}_0, \dots \mathcal{U}_{n_0}$ είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey$^*$ null, υπάρχει $C \in \mathcal{B}$, $C \subseteq B$ ώστε $[t \otimes s, C]_* \cap \mathcal{U}_n = \emptyset$ για κάθε $n \in \{0, \dots, n_0\}$. Επομένως, $C \in \mathcal{R}_s$.

Για τη δεύτερη, έστω $B \in \mathcal{R}_s$ και $C \in \mathcal{B}$, $C \subseteq B$. Τότε, προφανώς $C \in \mathcal{R}_s$. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι semiselective$^*$ βάση coideal, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ ώστε για κάθε $s \in [B]_*^{<\infty}$ και $B_1 \subseteq B-s, B_1 \in \mathcal{B}$ έχουμε ότι $B_1 \in \mathcal{R}_s$. Επομένως, $[\emptyset, B]_* \cap (\mathcal{U}_0)^t = \emptyset$ και ισοδύναμα $[t, B]_* \cap \mathcal{U}_0 = \emptyset$. Ειδικότερα, $[\emptyset, B]_* \cap (\mathcal{U}_n)^t = \emptyset$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [\emptyset, B]_* \cap (\mathcal{U}_n)^t$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αν $s = (x_1, \dots, x_n)$, τότε $B - s \in \mathcal{R}_s$, άρα $[s, B-s]_* \cap (\mathcal{U}_n)^t = \emptyset$, άτοπο αφού $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [s, B-s]_* \cap (\mathcal{U}_n)^t$. Επομένως, $[\emptyset, B]_* \cap (\mathcal{U}_n)^t = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ισοδύναμα $[t, B]_* \cap \mathcal{U}_n = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Τα επόμενα πορίσματα έπονται άμεσα από το Θεώρημα 2.4.10.

**Πόρισμα 2.4.11.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια semiselective* βάση coideal στο $X$ ώστε $B - s \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $s \in [X]_*^{<\infty}$ (ή $\mathcal{B} \subseteq [X]$ ένα semiselective* coideal στο $X$). Τότε η οικογένεια όλων των $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey* υποσυνόλων του $[X]_*$ είναι μια σ-άλγεβρα.*

**Πόρισμα 2.4.12.** *Έστω $(X, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια semiselective* βάση coideal στο $X$ ώστε $B - s \in \mathcal{B}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και $s \in [X]_*^{<\infty}$ (ή $\mathcal{B} \subseteq [X]$ ένα semiselective* coideal στο $X$). Τότε κάθε Borel υποσύνολο του $[X]_*$ είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey*.*

**Παρατήρηση 2.4.13.** *Το Πόρισμα 2.4.12 για το coideal $[\mathbb{N}]$ στο $\mathbb{N}$ με την συνήθη διάταξη δίνει ένα αποτέλεσμα που αποδείχθηκε από τους Galvin-Prikry στο [GP].*

**Παρατήρηση 2.4.14.** *Το Πόρισμα 2.4.12 και η Πρόταση 2.2.5 συνεπάγονται ότι κάθε Borel υποσύνολο του $[[\mathbb{N}]_{>0}^{<\infty}]_*$ είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey*, όπου $\mathcal{B} = \{FU((F_n)_{n\in\mathbb{N}}) : (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]_{>0}^{<\infty}$, με $F_1 \prec F_2 \prec \dots\}$. Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα που απεδείχθη προηγουμένως από τους Milliken στο [Mi] και Taylor [Ta].*

**Παρατήρηση 2.4.15.** *Σύμφωνα με το Πόρισμα 2.4.12 και την Πρόταση 2.2.4 κάθε Borel υποσύνολο του* $[L(\Sigma,\vec{k};\upsilon)]_*$ *είναι* $\mathcal{B}$*-πλήρως Ramsey*$^*$*, όπου* $\mathcal{B} = \{\mathrm{EV}(\vec{w}) : \vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\}$*. Το αποτέλεσμα αυτό απεδείχθη από τον Carlson [C] και από την Φαρμάκη [Fa] και νωρίτερα από τους Bergelson, Blass και Hindman [BBH] για την περίπτωση του πεπερασμένου αλφαβήτου.*

**Ορισμός 2.4.16.** Έστω $(X,\prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq [X]$ μια βάση coideal στο $X$

(i) Ένα $\mathcal{U} \subseteq [X]_*$ θα λέγεται $\mathcal{B}$-*Baire*$^*$ αν για κάθε $t \in [X]_*^{<\infty}$ και κάθε $A \in \mathcal{B}$ υπάρχουν $s \in [X]_*^{<\infty}$ και $B \in \mathcal{B}$, με $B \subseteq A$ και $[s,B]_* \subseteq [t,A]_*$ ώστε είτε $[s,B]_* \subseteq \mathcal{U}$, είτε $[s,B]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}$.

(ii) Αν για κάθε $t \in [X]_*^{<\infty}$ και κάθε $A \in \mathcal{B}$ υπάρχουν $s \in [X]_*^{<\infty}$ και $B \in \mathcal{B}$ με $B \subseteq A$, τέτοια ώστε $[s,B]_* \subseteq [t,A]_*$ και $[s,B]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}$, τότε το σύνολο $\mathcal{U}$ λέγεται $\mathcal{B}$-*meager*$^*$.

Αν ένα υποσύνολο $\mathcal{U} \subseteq [X]_*$ είναι $\mathcal{B}$-πλήρως Ramsey$^*$, τότε είναι προφανώς $\mathcal{B}$-Baire$^*$ και φυσικά αν το $\mathcal{U}$ είναι $\mathcal{B}$-Ramsey null $^*$, τότε το $\mathcal{U}$ είναι $\mathcal{B}$-meager$^*$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή, σύμφωνα με τον Todorcevic (Λήμμα 7.5 στο [T]) δεν ισχύει. Στο επόμενο θεώρημα θα αποδείξουμε ότι οι δυο έννοιες ταυτίζονται στην περίπτωση της semiselective$^*$ βάσης coideal.

**Θεώρημα 2.4.17.** *Έστω* $(X,\prec)$ *ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και* $\mathcal{B} \subseteq [X]$ *μια semiselective*$^*$ *βάση coideal στο* $X$ *ώστε* $B - s \in \mathcal{B}$ *για κάθε* $B \in \mathcal{B}$ *και* $s \in [X]_*^{<\infty}$*. Τότε κάθε* $\mathcal{B}$*-Baire*$^*$ *υποσύνολο του* $[X]_*$ *είναι* $\mathcal{B}$*-πλήρως Ramsey*$^*$*.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{U}$ ένα $\mathcal{B}$-Baire$^*$ υποσύνολο του $[X]_*$, $t \in [X]_*^{<\infty}$ και $A \in \mathcal{B}$. Για $s \in [X]_*^{<\infty}$ με $t \prec s$ θέτουμε,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_s = \{B \in \mathcal{B} : [s,B]_* \subseteq \mathcal{U}^t\} \cup \{B \in \mathcal{B} : [s,B]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}^t\}\\ \cup\{B \in \mathcal{B} : [s,B']_* \nsubseteq \mathcal{U}^t \text{ και } [s,B']_* \nsubseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}^t\\ \text{για κάθε } B' \in \mathcal{B}, B' \subseteq B\}\end{aligned}$$

Η οικογένεια $\mathcal{R}_s$ έχει την ιδιότητα dense-open. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι μια semiselective* βάση coideal, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ ώστε για κάθε $s \in [B]_*^{<\infty}$ και $B_1 \subseteq B - s$, $B_1 \in \mathcal{B}$ έχουμε ότι$B_1 \in \mathcal{R}_s$. Τότε $B - s \in \mathcal{B}$ και $B - s \in \mathcal{R}_s$ για κάθε $s \in [B]_*^{<\infty}$. Έστω

$\mathcal{F}_1 = \{s \in [B]_*^{<\infty} : [s, B]_* \subseteq \mathcal{U}^t\}$,

$\mathcal{F}_2 = \{s \in [B]_*^{<\infty} : [s, B]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}^t\}$, και

$\mathcal{F}_3 = \{s \in [B]_*^{<\infty} : [s, B']_* \nsubseteq \mathcal{U}^t$ και $[s, B']_* \nsubseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}^t$ για κάθε $B' \in \mathcal{B}, B' \subseteq B\}$.

Αφού $B - s \in \mathcal{R}_s$ για κάθε $s \in [B]_*^{<\infty}$, έχουμε $[B]_*^{<\infty} = F_1 \cup F_2 \cup F_3$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.6, υπάρχει $B_1 \in \mathcal{B}$, $B_1 \subseteq B$ ώστε, είτε

$$[B_1]_*^{<\infty} \cap \mathcal{F}_1 = \emptyset, \text{ είτε} \tag{2.3}$$

$$\text{για κάθε } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\emptyset, B_1]_* \text{ υπάρχει } s \in \mathcal{F}_1 \text{ με } s \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{2.4}$$

Αν ισχύει η περίπτωση (2.4), τότε $[\emptyset, B_1]_* \subseteq \mathcal{U}^t$. Αλλιώς, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.3.6 για την οικογένεια $\mathcal{F}_2$ υπάρχει $B_2 \in \mathcal{B}$, $B_2 \subseteq B_1$ ώστε, είτε

$$[B_2]_*^{<\infty} \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset, \text{ είτε} \tag{2.5}$$

$$\text{για κάθε } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\emptyset, B_2]_* \text{ υπάρχει } s \in \mathcal{F}_2 \text{ με } s \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{2.6}$$

Αν ισχύει η (2.6), τότε $[\emptyset, B_2]_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}^t$. Αλλιώς, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.3.6 για την οικογένεια $\mathcal{F}_3$ υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$, $B_3 \subseteq B_2$ ώστε, είτε

$$[B_3]_*^{<\infty} \cap \mathcal{F}_3 = \emptyset, \text{ είτε} \tag{2.7}$$

$$\text{για κάθε } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [B_3]_* \text{ υπάρχει } s \in \mathcal{F}_3 \text{ ώστε } s \sqsubseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{2.8}$$

Θα αποδείξουμε ότι η τελευταία περίπτωση δεν μπορεί να συμβαίνει.

Αφού $[B_3]_*^{<\infty} \cap \mathcal{F}_1 = \emptyset$, $[B_3]_*^{<\infty} \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$, έχουμε ότι $[B_3]_*^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}_3$. Αφού η $\mathcal{U}$ έχει την ιδιότητα Baire* το ίδιο ισχύει και για την οικογένεια $\mathcal{U}^t$. Άρα υπάρχουν $r \in [X]_*^{<\infty}$ και $B' \in \mathcal{B}$, $B' \subseteq B_3$ ώστε $[r, B']_* \subseteq [\emptyset, B_3]_*$ και είτε $[r, B']_* \subseteq \mathcal{U}^t$ είτε $[r, B']_* \subseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}^t$. Αφού $r \in [B_3]_*^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}_3$ και $B' \subseteq B$ έχουμε ότι $[r, B']_* \nsubseteq \mathcal{U}^t$ και $[r, B']_* \nsubseteq [X]_* \setminus \mathcal{U}^t$, το οποίο είναι άτοπο. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

# Μέρος II

# Τοπολογικά Δυναμικά Συστήματα

# Κεφάλαιο 3

# Στοιχεία Τοπολογικών Δυναμικών Συστημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε αρχικά τον ορισμό του τοπολογικού δυναμικού συστήματος, του υποσυστήματος και της τροχιάς ενός σημείου. Στη συνέχεια αναφερόμαστε στα ελαχιστικά τοπολογικά δυναμικά συστήματα, δηλαδή συστήματα που δεν περιέχουν γνήσια υποσυστήματα, στην ύπαρξή τους και στους ισοδύναμους χαρακτηρισμούς της έννοιας αυτής. Τέλος, βλέπουμε τη σύνδεση των ελαχιστικών τοπολογικών δυναμικών συστημάτων, με φαινόμενα επαναφοράς, διατυπώνοντας τα θεωρήματα Birkhoff [Bi] και Furstenberg-Weiss [FuW]. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη για περισσότερες λεπτομέρειες, όπως και αποδείξεις αυτών των αποτελεσμάτων στο [Fu1].

## 3.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

**Ορισμός 3.1.1.** Έστω $(X, d)$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $G$ μια ημιομάδα συνεχών συναρτήσεων από τον $X$ στον εαυτό του. Τότε το ζεύγος $(X, G)$ λέγεται *τοπολογικό δυναμικό σύστημα*.

Αν η $G$ είναι κυκλική ημιομάδα, δηλαδή $G = \{T^n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου $T : X \to X$ συνεχής συνάρτηση, το σύστημα $(X, G)$ συμβολίζεται με $(X, T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ή πιο απλά με $(X, T)$.

**Ορισμός 3.1.2.** Έστω $(X, G)$ ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Αν $Y$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $X$, το οποίο είναι $G$-αναλλοίωτο, δηλαδή $T(Y) \subseteq Y$ για κάθε $T \in G$, τότε το ζεύγος $(Y, G|_Y)$ είναι τοπολογικό δυναμικό σύστημα και λέγεται *υποσύστημα* του $(X, G)$ (με την σχετική τοπολογία).

**Ορισμός 3.1.3.** Έστω $(X, G)$ ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα και $x_0 \in X$. Το σύνολο $\mathcal{O} = \{gx_0 : g \in G\}$ λέγεται *τροχιά* του $x_0$.

Αν $(X, T)$ ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα, τροχιά του $x_0$ λέγεται το σύνολο $\mathcal{O} = \{T^n x_0 : n \in \mathbb{N}\}$.

**Παράδειγμα 3.1.4.** Θεωρούμε την ομάδα πηλίκο $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\}$, την οποία συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ και μπορούμε να την ταυτίσουμε με ένα κύκλο. Μεταξύ του $\mathbb{T}$ και του διαστήματος $[0, 1)$ υπάρχει μια $1-1$ και επί αντιστοιχία στέλνοντας κάθε στοιχείο $x+\mathbb{Z}$ του $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ στο $x-[x]$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του $x$. Για $x \in \mathbb{R}$ θα γράφουμε $x \mod 1 = x - [x]$.

Εφοδιάζοντας τον $\mathbb{T}$ με τη μετρική

$$d(x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z}) = \min_{m\in\mathbb{Z}} |x - y + m|,$$

γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος. Η $T : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ με $T(x) = x + a \mod 1$ για $a \in [0, 1)$ είναι συνεχής, οπότε το ζεύγος $(\mathbb{T}, T)$ είναι ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα.

Αν το $a$ είναι ρητός κάθε τροχιά είναι περιοδική, ενώ αν το $a$ είναι άρρητος κάθε τροχιά είναι πυκνή στο $\mathbb{T}$.

**Παράδειγμα 3.1.5.** Για $k \geqslant 2$, έστω $X = \{1, 2, \dots, k\}^{\mathbb{Z}}$ ο χώρος των ακολουθιών με τιμές στο $\{1, 2, \dots, k\}$ και δείκτες στο $\mathbb{Z}$. Αν $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ δύο ακολουθίες στο $X$, θεωρούμε τον ακέραιο $N(x, y) = \min\{n \geqslant 0 : x_n \neq y_n \text{ ή } x_{-n} \neq y_{-n}\}$. Ορίζουμε τότε μια μετρική στον $X$ με

$$d(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{N(x,y)}} & \text{αν } x \neq y, \\ 0 & \text{αν } x = y. \end{cases}$$

Ο $X$ εφοδιασμένος με τη μετρική που ορίσαμε γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος. Θεωρούμε τώρα στον $X$ την απεικόνιση $T : X \to X$ με $(T(x))_n = x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ο $T$ είναι ομοιομορφισμός και άρα το ζεύγος $(X, T)$ είναι ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα.

**Ορισμός 3.1.6.** Έστω $(X, G)$ ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα και $(Y, G|_Y)$ ένα υποσύστημά του. Το $(Y, G|_Y)$ λέγεται *ελαχιστικό* υποσύστημα αν για κάθε κλειστό και $G$-αναλλοίωτο υποσύνολο $Z$ του $Y$ ισχύει είτε $Z = \emptyset$ είτε $Z = Y$.

Το $(X, G)$ είναι ελαχιστικό σύστημα αν για κάθε $(Y, G|_Y)$ υποσύστημα του $(X, G)$ ισχύει είτε $Y = \emptyset$ είτε $Y = X$.

Με χρήση του λήμματος Zorn, αποδεικνύεται η ύπαρξη ενός ελαχιστικού υποσυστήματος σε κάθε τοπολογικό δυναμικό σύστημα, οπότε έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 3.1.7.** *Κάθε τοπολογικό δυναμικό σύστημα* $(X, G)$ *έχει τουλάχιστον ένα ελαχιστικό υποσύστημα.*

**Πρόταση 3.1.8.** *Έστω* $(X, G)$ *τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $(X, G)$ *είναι ελαχιστικό.*

(ii) $X = \overline{\mathcal{O}(x)}$ *για κάθε* $x \in X$.

(iii) $X = \bigcup_{g \in G} g^{-1}(U)$ *για κάθε ανοικτό υποσύνολο* $U$ *του* $X$.

Το επόμενο πόρισμα έπεται άμεσα από την Πρόταση 3.1.8 και παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος του Birkhoff [Bi] όπως επίσης και του θεωρήματος Furstenberg-Weiss.

**Πόρισμα 3.1.9.** *Έστω* $(X, T)$ *τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $(X, T)$ *είναι ελαχιστικό.*

(ii) $X = \overline{\mathcal{O}_T(x)}$ *για κάθε* $x \in X$.

(iii) $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(U)$ *για κάθε ανοικτό υποσύνολο* $U$ *του* $X$.

Το τοπολογικό δυναμικό σύστημα που ορίσαμε στο παράδειγμα 3.1.4 είναι ελαχιστικό αν ο α είναι άρρητος, ενώ το σύστημα που ορίσαμε στο παράδειγμα 3.1.5 δεν είναι ελαχιστικό αφού η απεικόνιση έχει σταθερό σημείο. Για παράδειγμα το $x = (\dots, 1, 1, 1, \dots)$.

## 3.2 Αποτελέσματα Επαναφοράς

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το θεμελιώδες θεώρημα του Birkhoof.

**Θεώρημα 3.2.1 (Birkhoff, [Bi]).** *Έστω* $(X, T)$ *τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Τότε υπάρχουν* $x_0 \in X$ *και μια ακολουθία φυσικών αριθμών* $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *με* $n_k \to \infty$*, ώστε*

$$T^{n_k}(x_0) \to x_0.$$

**Ορισμός 3.2.2.** Έστω $(X, T)$ ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Ένα σημείο $x_0 \in X$ λέγεται *σημείο επαναφοράς* (*recurrent*), αν υπάρχει μια ακολουθία φυσικών αριθμών $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ με $n_k \to \infty$, ώστε

$$T^{n_k}(x_0) \to x_0.$$

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος Birkhoff είναι η ύπαρξη σημείου επαναφοράς σε κάθε τοπολογικό δυναμικό σύστημα.

**Πόρισμα 3.2.3.** *Σε κάθε τοπολογικό δυναμικό σύστημα* $(X, T)$ *υπάρχει σημείο επαναφοράς* $x_0 \in X$.

Το θεώρημα Furstenberg-Weiss [FuW] αποτελεί μια γενίκευση του θεωρήματος του Birkhoff στην περίπτωση όπου έχουμε περισσότερες από μία συνεχείς συναρτήσεις από τον συμπαγή μετρικό χώρο $X$ στον εαυτό του, οι οποίες μετατίθενται μεταξύ τους, το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη σημείου του $X$ που είναι σημείο επαναφοράς ταυτόχρονα ως προς κάθε συνάρτηση ξεχωριστά. Συνεπώς, το θεώρημα Furstenberg-Weiss αποτελεί το πολυδιάστατο ανάλογο του θεωρήματος επαναφοράς του Birkhoff και αναφέρεται και ως θεώρημα πολλαπλής επαναφοράς.

**Θεώρημα 3.2.4 (Furstenberg-Weiss, [FuW]).** *Έστω $X$ συμπαγής μετρικός χώρος και $(X, T_1), (X, T_2), \ldots, (X, T_l)$ τοπολογικά δυναμικά συστήματα, όπου $T_1, T_2, \ldots, T_l : X \to X$ συνεχείς συναρτήσεις που ανά δύο μετατίθενται. Τότε υπάρχουν $x_0 \in X$ και μια ακολουθία φυσικών αριθμών $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ με $n_k \to \infty$, ώστε*

$$T_1^{n_k}(x_0) \to x_0, T_2^{n_k}(x_0) \to x_0, \ldots, T_l^{n_k}(x_0) \to x_0.$$

# Κεφάλαιο 4

## Τοπολογικά Δυναμικά Συστήματα και Δίκτυα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα του δεύτερου μέρους της διατριβής. Τα αποτελέσματα αυτά, προέρχονται από την εργασία:

> V. Farmaki, D. Karageorgos, A. Koutsogiannis, A. Mitropoulos, *Topological dynamics on nets*, Topology and its Applications **201** (2016), 414-431.

Σημείο εκκίνησης είναι τα θεωρήματα επαναφοράς των Birkhoff και των Furstenberg και Weiss. Αρχικά, ο Birkhoff [Bi], έδειξε ότι κάθε τοπολογικό δυναμικό σύστημα έχει σημείο επαναφοράς. Οι Furstenberg και Weiss [FuW], απέδειξαν το θεώρημα van der Waerden δίνοντας μια αναδιατύπωση του θεωρήματος σε γλώσσα τοπολογικών δυναμικών συστημάτων. Αυτό ήταν επί της ουσίας ένα αποτέλεσμα πολλαπλής επαναφοράς το οποίο επεξέτεινε το θεώρημα του Birkhoff.

Παρουσιάζουμε λοιπόν μια γενική θεωρία τοπολογικών δυναμικών συστημάτων, που περιέχει και ενοποιεί τα προηγούμενα αποτελέσματα. Αποδεικνύουμε αποτελέσματα επαναφοράς και πολλαπλής επαναφοράς για τοπολογικά δυναμικά συστήματα πάνω σε μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, ως προς μια βάση coideal που είναι κατάλληλη για αυτή την ημιομάδα.

Επιπλέον, υποδεικνύουμε ένα τρόπο για να εφαρμόσουμε αυτά τα αποτελέσματα σε τοπολογικά δυναμικά συστήματα πάνω σε λέξεις.

Συγκεκριμένα, ορίζουμε πρώτα τα τοπολογικά δυναμικά συστήματα πάνω σε μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα. Στο Θεώρημα 4.2.8 δείχνουμε ότι ένα τέτοιο σύστημα έχει σημείο B-επαναφοράς, όπου B είναι στοιχείο μιας κατάλληλης βάσης coideal με την ιδιότητα-D. Η έννοια αυτή επεκτείνει την κλασική έννοια του σημείου επαναφοράς στα τοπολογικά δυναμικά συστήματα.

Τελικά, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.2.8 παίρνουμε στο Θεώρημα 4.2.20 ένα αποτέλεσμα πολλαπλής επαναφοράς, επεκτείνοντας το Θεώρημα Furstenberg-Weiss.

## 4.1 Βάσεις coideal με την ιδιότητα-D

Στην ενότητα αυτή ορίζουμε (Ορισμός 4.1.5) την ιδιότητα-D για μια βάση coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο $(\Lambda, \prec)$ και αποδεικνύουμε (Θεώρημα 4.1.9) ότι κάθε δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο έχει ένα συγκλίνων υποδίκτυο της μορφής $(x_\lambda)_{\lambda \in A}$, όπου $A$ είναι ένα στοιχείο μιας βάσης coideal $\mathcal{B}$ στο $\Lambda$ με την ιδιότητα-D. Επιπλέον, πετυχαίνουμε το σύνολο $A$ να περιέχεται σε ένα δοθέν στοιχείο $B$ της βάσης coideal $\mathcal{B}$. Το αποτέλεσμα αυτό θα αποτελέσει το σημείο εκκίνησης, προκειμένου να αποδείξουμε αποτελέσματα επαναφοράς (recurrence) και τα πολυδιάστατα ανάλογά τους που είναι αποτελέσματα πολλαπλής επαναφοράς (multiple recurrence) για τοπολογικά δυναμικά συστήματα συνεχών συναρτήσεων από έναν συμπαγή μετρικό χώρο στον εαυτό του, σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο ως προς μια βάση coideal με την ιδιότητα-D.

Αρχικά υπενθυμίζουμε την έννοια της βάσης coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο που δώσαμε στο πρώτο μέρος.

**Ορισμός 4.1.1.** Έστω $(\Lambda, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο. Ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του $[\Lambda]$ λέγεται *βάση coideal* στο $(\Lambda, \prec)$ αν ικανοποιεί τις επόμενες δύο ιδιότητες:

(i) Για κάθε $A \in \mathcal{B}$ και $\lambda_1 \in \Lambda$ υπάρχει $\lambda_2 \in A$ ώστε $\lambda_1 \prec \lambda_2$.

(ii) Αν $A \cup B \in \mathcal{B}$, τότε υπάρχει $C \in \mathcal{B}$ ώστε είτε $C \subseteq A$ είτε $C \subseteq B$.

**Παρατήρηση 4.1.2.** *Έστω $(\Lambda, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq [\Lambda]$ μια βάση coideal στο $(\Lambda, \prec)$. Κάθε στοιχείο $A$ της $\mathcal{B}$ είναι ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο.*

**Παρατήρηση 4.1.3.** *Αν $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι ένα δίκτυο στο σύνολο $X$, όπου $(\Lambda, \prec)$ είναι ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $\mathcal{B}$ μια βάση coideal στο $(\Lambda, \prec)$, τότε για κάθε $A \in \mathcal{B}$, το $(x_\lambda)_{\lambda\in A}$ είναι ένα υποδίκτυο του $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.*

Θα ορίσουμε τώρα την ιδιότητα-p για μια βάση coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο, επεκτείνοντας την ανάλογη έννοια για coideal στο σύνολο των φυσικών αριθμών, όπως μπορεί να δει κάποιος στα [M], [F], [ST] και [T], την οποία αναφέραμε στο πρώτο μέρος. Ένα υπερφίλτρο στο σύνολο των φυσικών αριθμών με την ιδιότητα-p αναφέρεται και ως p-point υπερφίλτρο.

**Ορισμός 4.1.4.** Έστω $(\Lambda, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο. Μια βάση coideal $\mathcal{B} \subseteq [\Lambda]$ στο $(\Lambda, \prec)$ έχει την *ιδιότητα-p* αν για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $A_n \in \mathcal{B}$ και $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, υπάρχει $A \in \mathcal{B}$ ώστε $A \setminus A_n$ είναι πεπερασμένο σύνολο για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορίζουμε τώρα την ιδιότητα-(D) για μια βάση coideal σε ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο, η οποία είναι ασθενέστερη από την ιδιότητα-p.

**Ορισμός 4.1.5.** Έστω $(\Lambda, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο. Μια βάση coideal $\mathcal{B} \subseteq [\Lambda]$ στο $(\Lambda, \prec)$ έχει την *ιδιότητα-D* αν για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $A_n \in \mathcal{B}$ και $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, υπάρχει $A \in \mathcal{B}$, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τέτοιο ώστε

$$k_n = \max\{k \in \mathbb{N} : \text{υπάρχουν } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in A \setminus A_n \text{ με } \lambda_1 \prec \cdots \prec \lambda_k\}.$$

**Παράδειγμα 4.1.6.** Το σύνολο $[\mathbb{N}]$ των άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ είναι ένα coideal στο $\mathbb{N}$ με την συνήθη διάταξη, όπως έχουμε δει, το οποίο προφανώς έχει την ιδιότητα-p, επομένως θα έχει και την ιδιότητα-D.

**Παράδειγμα 4.1.7.** Έστω $[\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}$ το σύνολο όλων των μη κενών πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Για $F_1, F_2 \in [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}$ ορίζουμε $F_1 \prec F_2$ αν $\max F_1 < \min F_2$. Τότε το $([\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}, \prec)$ είναι ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο.

Η βάση coideal στο $([\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}, \prec)$,

$$\mathcal{B} = \{\mathrm{FU}((F_n)_{n\in\mathbb{N}}) : (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0} \text{ με } F_1 \prec F_2 \prec \dots\}$$

του Παραδείγματος 2.1.10 δεν έχει την ιδιότητα-p, αλλά έχει την ιδιότητα-D. Πράγματι, θεωρούμε την ακολουθία $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, με $A_k \in \mathcal{B}$ και $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$. Αν $A_k = \mathrm{FU}((F^k_n)_{n\in\mathbb{N}})$, όπου $(F^k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}$ $F^k_1 \prec F^k_2 \prec \dots$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε θέτουμε $A = \mathrm{FU}((F^k_k)_{k\in\mathbb{N}})$. Τότε $A \in \mathcal{B}$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$

$$k - 1 = \max\{n \in \mathbb{N} : \text{ υπάρχει } F_1 \prec \dots \prec F_n \in A \setminus A_k \text{ με } F_1 \prec \dots \prec F_n\}.$$

**Παράδειγμα 4.1.8.** Στο Παράδειγμα 2.1.11, είδαμε ότι τα σύνολα

$$\mathcal{B}_1 = \{\mathrm{E}(\vec{w}) : \vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)\}$$

και

$$\mathcal{B}_2 = \{\mathrm{EV}(\vec{w}) : \vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)\}$$

είναι βάσεις coideal στα $(L(\Sigma, \vec{k}), \prec)$ και $(L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon), \prec)$ αντίστοιχα. Οι δύο αυτές βάσεις coideal δεν έχουν την ιδιότητα-p, αλλά έχουν την ιδιότητα-D. Πράγματι, θεωρούμε μια ακολουθία $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, με $A_k = \mathrm{E}(\vec{w_k})$, όπου $\vec{w_k} = (w^k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, και $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$. Θέτουμε $\vec{w} = (w^k_k)_{k\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $A = \mathrm{E}(\vec{w})$. Τότε $A \in \mathcal{B}_1$. Επίσης, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$k - 1 = \max\{n \in \mathbb{N} : \text{ υπάρχουν } w_1, \dots, w_n \in A \setminus A_k \text{ me } w_1 \prec \dots \prec w_n\}.$$

Επομένως, η $\mathcal{B}_1$ έχει την ιδιότητα-D. Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{B}_2$ έχει την ιδιότητα-D.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας. Σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο, ξέρουμε ότι κάθε δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ έχει συγκλίνων υποδίκτυο. Στο επόμενο θεώρημα, πετυχαίνουμε ότι αυτό το υποδίκτυο μπορεί να εντοπιστεί σε ένα στοιχείο ενός coideal με την ιδιότητα-D. Πιο συγκεκριμένα να έχει τη μορφή $(x_\lambda)_{\lambda\in A}$, όπου $A$ είναι ένα στοιχείο μιας βάσης coideal $\mathcal{B}$ στο $\Lambda$ με την ιδιότητα-D. Μάλιστα, μπορούμε επιπλέον να πετύχουμε το $A$ να είναι υποσύνολο ενός ήδη δοθέντος στοιχείου $B$ της $\mathcal{B}$.

Έστω $(\Lambda, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο σε έναν τοπολογικό χώρο $X$. Για $x_0 \in X$, γράφουμε $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x_0$, αν $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο $x_0$, δηλαδή αν για κάθε περιοχή $V$ του $x_0$, υπάρχει $\lambda_0 = \lambda_0(V) \in \Lambda$ ώστε $x_\lambda \in V$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ με $\lambda_0 \prec \lambda$.

Ανάλογα, για ένα στοιχείο $A$ της βάσης coideal $\mathcal{B}$ στο $(\Lambda, \prec)$ και για $x_0 \in X$, γράφουμε $\lim\limits_{\lambda\in A} x_\lambda = x_0$, αν το δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in A}$ συγκλίνει στο $x_0$, δηλαδή αν για κάθε περιοχή $V$ του $x_0$, υπάρχει $\lambda_0 = \lambda_0(V) \in A$ ώστε $x_\lambda \in V$ για κάθε $\lambda \in A$ με $\lambda_0 \prec \lambda$.

**Θεώρημα 4.1.9.** *Έστω $(X, d)$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $(\Lambda, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στον $X$. Για κάθε βάση coideal $\mathcal{B}$ στο $(\Lambda, \prec)$ με την ιδιότητα-D και κάθε $B \in \mathcal{B}$ υπάρχει $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$, ώστε το υποδίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in A}$ του $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ να συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του $X$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{B}$ μια βάση coideal στο $(\Lambda, \prec)$ με την ιδιότητα-D και $B \in \mathcal{B}$. Θέτουμε $\widehat{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leqslant \epsilon\}$ για $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ να είναι η κλειστή μπάλα κέντρου $x$ και ακτίνας $\varepsilon$. Αφού ο $(X, d)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, έχουμε ότι $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m_1} \widehat{B}(x_i^1, \frac{1}{2})$, για κάποια $x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1 \in X$.

Έστω $A_1 = B$. Αφού $A_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{m_1} C_i$, όπου

$$C_i = \left\{\lambda \in A_1 : x_\lambda \in \widehat{B}(x_i^1, \frac{1}{2})\right\},$$

και η $\mathcal{B}$ είναι μια βάση coideal υπάρχουν $A_2 \in \mathcal{B}$, $A_2 \subseteq A_1$ και $1 \leqslant i_1 \leqslant m_1$ ώστε $A_2 \subseteq C_{i_1}$ και άρα $\{x_\lambda : \lambda \in A_2\} \subseteq \widehat{B}(x_{i_1}^1, \frac{1}{2})$. Συνεχίζουμε ανάλογα.

Αφού $\widehat{B}(x^1_{i_1}, \frac{1}{2})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, υπάρχουν $x^2_1, \dots, x^2_{m_2} \in X$, ώστε $\widehat{B}(x^1_{i_1}, \frac{1}{2}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_2} \widehat{B}(x^2_i, \frac{1}{4})$ οπότε υπάρχει $A_3 \in \mathcal{B}$, $A_3 \subseteq A_2$ και $1 \leqslant i_2 \leqslant m_2$ ώστε

$$\{x_\lambda : \lambda \in A_3\} \subseteq \widehat{B}(x^1_{i_1}, \frac{1}{2}) \cap \widehat{B}(x^2_{i_2}, \frac{1}{4}).$$

Επαγωγικά, κατασκευάζουμε μια ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $A_n \in \mathcal{B}$ και $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, και μια ακολουθία από κλειστές μπάλες $\widehat{B}(x^n_{i_n}, \frac{1}{2^n})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$\{x_\lambda : \lambda \in A_{n+1}\} \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \widehat{B}(x^j_{i_j}, \frac{1}{2^j}) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Έστω, $\{x_0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \widehat{B}(x^n_{i_n}, \frac{1}{2^n})$. Αφού η βάση coideal $\mathcal{B}$ έχει την ιδιότητα-D υπάρχει $C \in \mathcal{B}$, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$k_n = \max\{k \in \mathbb{N} : \text{υπάρχει } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in C \setminus A_n \text{ με } \lambda_1 \prec \dots \prec \lambda_k\}.$$

Από αυτό έπεται ότι το σύνολο $C \setminus A_1$ δεν περιέχει στοιχείο του $\mathcal{B}$. Έτσι, επειδή $C \in \mathcal{B}$ και $C = (C \setminus A_1) \cup (C \cap A_1)$, υπάρχει $A \in \mathcal{B}$, $A \subseteq C \cap A_1$. Τότε $A \subseteq C$, $A \in \mathcal{B}$, $A \subseteq B = A_1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ υπάρχει $q_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ώστε

$$q_n = \max\{k \in \mathbb{N} : \text{υπάρχει } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in A \setminus A_n \text{ με } \lambda_1 \prec \dots \prec \lambda_k\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{\lambda\in A} x_\lambda = x_0$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $1/2^{n_0} < \varepsilon$. Τότε $d(x_\lambda, x_0) \leqslant 1/2^{n_0} < \varepsilon$, για κάθε $\lambda \in A_{n_0+1}$. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_{q_{n_0+1}} \in A \setminus A_{n_0+1}$ με $\lambda_1 \prec \dots \prec \lambda_{q_{n_0+1}}$. Αφού δεν υπάρχει $\lambda \in A \setminus A_{n_0+1}$ με $\lambda_{q_{n_0+1}} \prec \lambda$ και $A \in \mathcal{B}$, υπάρχει $\lambda_0 \in A \cap A_{n_0+1}$ ώστε $\lambda_{q_{n_0+1}} \prec \lambda_0$. Επομένως, για κάθε $\lambda \in A$ με $\lambda_0 \prec \lambda$ έχουμε ότι $\lambda \in A_{n_0+1}$ και άρα $d(x_\lambda, x_0) \leqslant 1/2^{n_0} < \varepsilon$. Οπότε έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Το Θεώρημα 4.1.9 για το κατευθυνόμενο σύνολο $([\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}, \prec)$ και για την βάση coideal $\mathcal{B}$ του παραδείγματος 4.1.7 δίνει ένα αποτέλεσμα που απεδείχθη από τους Furstenberg και Weiss στο [FuW]. Επίσης, για την περίπτωση που το κατευθυνόμενο σύνολο είναι $(L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon), \prec)$ των $\omega$-located λέξεων και για την βάση coideal $\mathcal{B}$ του παραδείγματος 4.1.8 είναι ένα αποτέλεσμα που απεδείχθη από τους Φαρμάκη και Κουτσογιάννη στο [FaK].

## 4.2 Τοπολογικά Δυναμικά Συστήματα σε Κατευθυνόμενες Μερικές Ημιομάδες

Στην ενότητα αυτή, ορίζουμε τις έννοιες της κατευθυνόμενης μερικής ημιομάδας $\Lambda$, της κατάλληλης (suitable) βάσης coideal και τα τοπολογικά δυναμικά συστήματα, πάνω σε κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα. Σκοπός μας είναι, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1.9 της προηγούμενης παραγράφου, να αποδείξουμε αποτελέσματα επαναφοράς και πολλαπλής επαναφοράς για τοπολογικά δυναμικά συστήματα σε μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, ως προς μια κατάλληλη βάση coideal για αυτήν, επεκτείνοντας τα θεωρήματα επαναφοράς των Birkhoff [Bi] και Furstenberg-Weiss [FuW].

Συγκεκριμένα, στο Θεώρημα 4.2.8 αποδεικνύουμε ότι ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα $(X, T^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ έχει ένα σημείο B-επαναφοράς (Ορισμός 4.2.7), όπου B είναι ένα σύνολο που περιέχεται σε μια κατάλληλη βάσης coideal $\mathcal{B}$, με την ιδιότητα-D. Η έννοια αυτή επεκτείνει την κλασική έννοια του σημείου επαναφοράς στα τοπολογικά δυναμικά συστήματα που μελετήθηκαν από τους Furstenberg και Weiss. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.2.8 αποδεικνύουμε (Θεώρημα 4.2.20), με κάποιες επιπλέον υποθέσεις, ένα αποτέλεσμα πολλαπλής επαναφοράς, ανάλογο του Θεωρήματος 4.2.8, επεκτείνοντας το θεώρημα Furstenberg-Weiss.

**Ορισμός 4.2.1.** Έστω $(\Lambda, \prec)$ ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο και έστω ότι για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ με $\lambda_1 \prec \lambda_2$ ορίζεται ένα μοναδικό στοιχείο $\lambda_1 * \lambda_2 \in \Lambda$. Η τριάδα $(\Lambda, \prec, *)$ λέγεται *κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα*, αν για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ με $\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \lambda_3$ ισχύουν $\lambda_1 \prec \lambda_2 * \lambda_3$, $\lambda_1 * \lambda_2 \prec \lambda_3$ και $(\lambda_1 * \lambda_2) * \lambda_3 = \lambda_1 * (\lambda_2 * \lambda_3)$.

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό της κατάλληλης βάσης coideal σε μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα.

**Ορισμός 4.2.2.** Έστω $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα. Μια βάση coideal $\mathcal{B}$ στην $(\Lambda, \prec)$ θα λέγεται *κατάλληλη* (*suitable*) για την $(\Lambda, \prec, *)$ αν κάθε $B \in \mathcal{B}$ έχει την ιδιότητα $\lambda_1 * \lambda_2 \in B$ για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in B$ με $\lambda_1 \prec \lambda_2$.

Αν μια βάση coideal $\mathcal{B}$ είναι κατάλληλη για μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα $(\Lambda, \prec, *)$, τότε για κάθε $B \in \mathcal{B}$, η $(B, \prec, *)$ είναι επίσης κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα.

Ορίζουμε τώρα την κεντρική έννοια αυτής της ενότητας, την έννοια του τοπολογικού δυναμικού συστήματος σε μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα.

**Ορισμός 4.2.3.** Έστω $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα. Μια οικογένεια $\{T^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ συνεχών συναρτήσεων από έναν συμπαγή μετρικό χώρο $X$ στον εαυτό του είναι ένα $\Lambda$-*τοπολογικό δυναμικό σύστημα* του $X$ αν

$$T^{\lambda_1} \circ T^{\lambda_2} = T^{\lambda_1 * \lambda_2},$$

για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ με $\lambda_1 \prec \lambda_2$.

Προφανώς, αν η $\mathcal{B}$ είναι μια κατάλληλη βάση coideal για την $(\Lambda, \prec, *)$ και $B \in \mathcal{B}$, τότε η οικογένεια $\{T^\lambda\}_{\lambda \in B}$ είναι επίσης ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα του $X$.

**Παράδειγμα 4.2.4.** Έστω $X$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε η ακολουθία $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ένα $\mathbb{N}$-τοπολογικό δυναμικό σύστημα του $X$.

**Παράδειγμα 4.2.5.** Το $([\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}, \prec)$ είναι ένα άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο (Παράδειγμα 2.1.10), οπότε η τριάδα $([\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}, \prec, \cup)$ είναι μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα. Η βάση coideal $\mathcal{B} = \{FU((F_n)_{n \in \mathbb{N}}) : (F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}$ με $F_n \prec F_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}\}$ που ορίστηκε στο παράδειγμα αυτό είναι μια κατάλληλη βάση coideal για αυτήν την ημιομάδα. Αν $T_n : X \to X$ είναι συνεχής απεικόνιση για κάθε $n \in \mathbb{N}$ από έναν συμπαγή μετρικό χώρο $X$ στον εαυτό του, για $F = \{n_1 < \cdots < n_k\} \in [\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}$ θέτουμε

$$T^F = T_{n_1} \circ \ldots \circ T_{n_k}.$$

Τότε $\{T^F\}_{F\in[\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}}$ είναι ένα $[\mathbb{N}]^{<\infty}_{>0}$-τοπολογικό δυναμικό σύστημα του X. Ειδικότερα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $T_n$ με το $T^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $T : X \to X$ είναι μια συνεχής απεικόνιση.

**Παράδειγμα 4.2.6.** Η τριάδα $(L(\Sigma, \vec{k}), \prec, \star)$, είναι μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα όπου $(L(\Sigma, \vec{k}), \prec)$ είναι το άπειρο κατευθυνόμενο σύνολο του παραδείγματος 2.1.11 και $\star$ είναι είναι η σχέση (1.1). Η βάση coideal $\mathcal{B} = \{EV(\vec{w}) : \vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)\}$ που ορίστηκε επίσης στο παράδειγμα αυτό, είναι μια κατάλληλη βάση coideal για αυτήν την ημιομάδα. Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων από τον X στον εαυτό του και $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία φυσικών αριθμών. Για $w = w_{n_1} \dots w_{n_\lambda} \in L(\Sigma, \vec{k})$ θέτουμε

$$T^w = T_{n_1}^{l_{n_1} w_{n_1}} \circ \dots \circ T_{n_\lambda}^{l_{n_\lambda} w_{n_\lambda}}.$$

Τότε η οικογένεια $\{T^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$ είναι ένα $L(\Sigma, \vec{k})$-τοπολογικό δυναμικό σύστημα του X.

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό του σημείου επαναφοράς (recurrent) ενός τοπολογικού δυναμικού συστήματος για μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, ως προς μια κατάλληλη βάση coideal. Έπειτα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1.9, αποδεικνύουμε την ύπαρξη τέτοιων σημείων στην περίπτωση όπου η βάση coideal έχει την ιδιότητα-D.

**Ορισμός 4.2.7.** Έστω $(X, d)$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, $\{T^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ένα Λ-τοπολογικό δυναμικό σύστημα στον X, $\mathcal{B}$ μια κατάλληλη βάση coideal στο $(\Lambda, \prec, *)$ και $B \in \mathcal{B}$. Ένα σημείο $x_0$ του X λέγεται σημείο B-*επαναφοράς* (B-*recurrent*) αν

$$\lim_{\lambda\in A} T^\lambda(x_0) = x_0, \text{ για κάποιο } A \in \mathcal{B} \text{ με } A \subseteq B.$$

**Θεώρημα 4.2.8.** *Έστω $(X, d)$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, $\{T^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ένα Λ-τοπολογικό δυναμικό σύστημα στον X, $\mathcal{B}$ μια κατάλληλη βάση coideal στο $(\Lambda, \prec, *)$ με την ιδιότητα-D και $B \in \mathcal{B}$. Τότε ο X περιέχει σημείο B-επαναφοράς.*

*Απόδειξη.* Έστω $x \in X$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.9, υπάρχουν $A \in \mathcal{B}$, $A \subseteq B$ και $x_0 \in X$ ώστε $\lim_{\lambda \in A} T^\lambda(x) = x_0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\lambda_0 \in A$ ώστε $d(T^\lambda(x), x_0) < \varepsilon/2$, για κάθε $\lambda \in A$ με $\lambda_0 \prec \lambda$. Επιλέγουμε ένα $\lambda_1 \in A$ με $\lambda_0 \prec \lambda_1$. Επειδή η $T^{\lambda_1}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο X, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $y \in X$ με $d(y, x_0) < \delta$, τότε $d(T^{\lambda_1}(y), T^{\lambda_1}(x_0)) < \varepsilon/2$. Αφού $\lim_{\lambda \in A} T^\lambda(x) = x_0$, υπάρχει $\lambda_2 \in A$, με $\lambda_1 \prec \lambda_2$ ώστε $d(T^{\lambda_2}(x), x_0) < \delta$. Τότε, $d(T^{\lambda_1}(T^{\lambda_2}(x)), T^{\lambda_1}(x_0)) < \varepsilon/2$, συνεπώς $d(T^{\lambda_1 * \lambda_2}(x), T^{\lambda_1}(x_0)) < \varepsilon/2$. Αφού $\lambda_1 * \lambda_2 \in A$ και $\lambda_0 \prec \lambda_1 * \lambda_2$, έχουμε ότι $d(T^{\lambda_1 * \lambda_2}(x), x_0) < \varepsilon/2$. Έπεται ότι, $d(T^{\lambda_1}(x_0), x_0) < \varepsilon$ και άρα, $\lim_{\lambda \in A} T^\lambda(x_0) = x_0$. □

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος για $\Lambda = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = [\mathbb{N}]$ και $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, όπου T είναι συνεχής συνάρτηση από έναν συμπαγή μετρικό χώρο $(X, d)$ στον εαυτό του, το τοπολογικό δυναμικό σύστημα, είναι το θεώρημα επαναφοράς (recurrence) του Birkhoff [Bi] (Θεώρημα 3.2.1).

Στόχος μας τώρα είναι να εντοπίσουμε τα σημεία επαναφοράς ενός τοπολογικού δυναμικού συστήματος σε μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα ως προς μια κατάλληλη βάση coideal σε ένα δοθέν υποσύνολο του χώρου. Αρχικά, θα αναζητήσουμε σημεία σχεδόν επαναφοράς, καθώς η κλάση τους είναι ευρύτερη από την κλάση των σημείων επαναφοράς.

**Ορισμός 4.2.9.** Έστω $(X, d)$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, $\{T^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ένα Λ-τοπολογικό δυναμικό σύστημα στον X, $\mathcal{B}$ μια κατάλληλη βάση coideal στην $(\Lambda, \prec, *)$ και $B \in \mathcal{B}$.

(i) Ένα σημείο $x_0$ του X θα λέγεται σημείο B-*σχεδόν επαναφοράς* (B-*almost recurrent*) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και $\lambda_0 \in \Lambda$, υπάρχουν $\lambda \in B$, $\lambda_0 \prec \lambda$ ώστε $d(T^\lambda(x_0), x_0) < \varepsilon$.

(ii) Ένα κλειστό υποσύνολο F του X θα λέγεται σύνολο B-*σχεδόν επαναφοράς* (B-*almost recurrent*) αν για κάθε $\varepsilon > 0$, $\lambda_0 \in \Lambda$ και $x \in F$, υπάρχουν $y \in F$ και $\lambda \in B$, $\lambda_0 \prec \lambda$ ώστε $d(T^\lambda(y), x) < \varepsilon$.

Στο ακόλουθο παράδειγμα θα επισημάνουμε έναν τρόπο να εντοπίζουμε υποσύνολα σχεδόν επαναφοράς ενός συμπαγούς μετρικού χώρου.

**Παράδειγμα 4.2.10.** Έστω $(X, d)$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, $\mathcal{B}$ μια κατάλληλη βάση coideal με την ιδιότητα-D και $B \in \mathcal{B}$. Θέτουμε $F(X)$ να είναι το σύνολο των μη κενών κλειστών υποσυνόλων του $X$ το οποίο εφοδιάζουμε με την μετρική Hausdorff $\widetilde{d}$, όπου

$$\widetilde{d}(K, M) = \max\{\sup_{x \in K} d(x, M), \sup_{x \in M} d(x, K)\}.$$

Το ζεύγος $(F(X), \widetilde{d})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Θεωρούμε ένα $\Lambda$-τοπολογικό δυναμικό σύστημα του $(X, d)$, $\{T^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ και ορίζουμε,

$$\widetilde{T}^\lambda : F(X) \to F(X) \text{ με } \widetilde{T}^\lambda(K) = T^\lambda(K).$$

Τότε το $\{\widetilde{T}^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ είναι ένα $\Lambda$-τοπολογικό δυναμικό σύστημα του $(F(X), \widetilde{d})$. Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.8, υπάρχουν $A \in \mathcal{B}$, $A \subseteq B$ και $K \in F(X)$ τέτοια ώστε

$$\lim_{\lambda \in A} \widetilde{T}^\lambda(K) = K.$$

Τότε το $K$ είναι ένα σημείο $B$-επαναφοράς του $F(X)$ και είναι έναB-σχεδόν υποσύνολο επαναφοράς του $X$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι κάθε υποσύνολο σχεδόν επαναφοράς του $X$ περιέχει σημεία σχεδόν επαναφοράς του $X$.

**Πρόταση 4.2.11.** *Έστω $(X, d)$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, $\{T^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ένα $\Lambda$-τοπολογικό δυναμικό σύστημα του $X$, $\mathcal{B}$ μια κατάλληλη βάση coideal και $B \in \mathcal{B}$. Κάθε υποσύνολο $B$-σχεδόν επαναφοράς $F$ του $X$ περιέχει σημεία $B$-σχεδόν επαναφοράς του $X$.*

*Απόδειξη.* Έστω $F$ ένα υποσύνολο $B$-σχεδόν επαναφοράς του $X$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και $\lambda_0 \in \Lambda$. Επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθίες $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $F$, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $B$ με $\lambda_n \prec \lambda_{n+1}$ και $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $0 < \varepsilon_n < \varepsilon/2$, τέτοιες ώστε

$$d(T^{\lambda_{n+1}}(x_{n+1}), x_n) < \varepsilon_{n+1} \text{ και } d(T^{\lambda_n}(x), x_{n-1}) < \varepsilon_n,$$

για τα $x \in X$ με $d(x, x_n) < \varepsilon_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, αφού το $F$ είναι σύνολο $B$-σχεδόν επαναφοράς, για $x_0 \in F$ και $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ υπάρχει $\lambda_1 \in B$ με $\lambda_0 \prec \lambda_1$ και $x_1 \in F$ ώστε $d(T^{\lambda_1}(x_1), x_0) < \varepsilon_1$. Έστω ότι έχουμε βρει $x_0, x_1, \dots, x_n \in F$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in B$ με $\lambda_1 \prec \dots \prec \lambda_n$ και $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n < \varepsilon/2$ τέτοια ώστε $d(T^{\lambda_i}(x_i), x_{i-1}) < \varepsilon_i$, για κάθε $i = 1, \dots, n$. Επειδή $T^{\lambda_n}$ είναι συνεχής συνάρτηση, υπάρχει $0 < \varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon_n$ ώστε αν $x \in X$ και $d(x, x_n) < \varepsilon_{n+1}$, τότε $d(T^{\lambda_n}(x), T^{\lambda_n}(x_n)) < \varepsilon_n - d(T^{\lambda_n}(x_n), x_{n-1})$. Άρα, όταν $d(x, x_n) < \varepsilon_{n+1}$ έχουμε ότι

$$d(T^{\lambda_n}(x), x_{n-1}) \leqslant d(T^{\lambda_n}(x), T^{\lambda_n}(x_n)) + d(T^{\lambda_n}(x_n), x_{n-1}) < \varepsilon_n.$$

Αφού το $F$ είναι σύνολο $B$-σχεδόν επαναφοράς, υπάρχουν $\lambda_{n+1} \in B$ με $\lambda_n \prec \lambda_{n+1}$ και $x_{n+1} \in F$ ώστε $d(T^{\lambda_{n+1}}(x_{n+1}), x_n) < \varepsilon_{n+1}$.

Ισχυριζόμαστε ότι αν $i, j \in \mathbb{N}$ με $i < j$, τότε

$$d(T^{\lambda_{i+1} * \dots * \lambda_j}(x_j), x_i) < \varepsilon_{i+1}.$$

Πράγματι, αν $d(T^{\lambda_j}(x_j), x_{j-1}) < \varepsilon_j$ έχουμε ότι $d(T^{\lambda_{j-1}}(T^{\lambda_j}(x_j)), x_{j-2}) < \varepsilon_{j-1}$, και αφού $\lambda_{j-1} \prec \lambda_j$, έχουμε ότι $d(T^{\lambda_{j-1} * \lambda_j}(x_j), x_{j-2}) < \varepsilon_{j-1}$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία παίρνουμε ότι $d(T^{\lambda_{i+1} * \dots * \lambda_j}(x_j), x_i) < \varepsilon_{i+1} \leqslant \varepsilon_1 = \varepsilon/2$.

Αφού ο $X$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος υπάρχουν $i, j \in \mathbb{N}$ με $i < j$ ώστε $d(x_i, x_j) < \varepsilon/2$. Τότε,

$$d(T^{\lambda_{i+1} * \dots * \lambda_j}(x_j), x_j) \leqslant d(T^{\lambda_{i+1} * \dots * \lambda_j}(x_j), x_i) + d(x_i, x_j) < \varepsilon.$$

Για $x = x_j$ και $\lambda = \lambda_{i+1} * \dots * \lambda_j \in B$ έχουμε ότι $\lambda_0 \prec \lambda$ και $d(T^{\lambda}(x), x) < \varepsilon$. □

Ορίζουμε τώρα τα σύνολα επαναφοράς ενός συμπαγούς μετρικού χώρου ως προς ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα σε μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, προκειμένου να εντοπίσουμε σημεία επαναφοράς σε αυτά.

**Ορισμός 4.2.12.** Έστω $(X, d)$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, $\{T^{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ ένα $\Lambda$-τοπολογικό δυναμικό σύστημα στον $X$ και $\mathcal{B}$ μια κατάλληλη βάση coideal στην $(\Lambda, \prec, *)$.

(i) Ένα κλειστό υποσύνολο $F$ του $X$ θα λέγεται σύνολο $B$-*επαναφοράς* ($B$-*recurrent*), για $B \in \mathcal{B}$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και $x \in F$, υπάρχουν $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$ και $y \in F$ τέτοια ώστε $d(T^\lambda(y), x) < \varepsilon$, για κάθε $\lambda \in A$.

(ii) Ένα κλειστό υποσύνολο $F$ του $X$ θα λέγεται *σύνολο επαναφοράς* (*recurrent*), αν είναι σύνολο $B$-επαναφοράς ($B$-recurrent) για κάθε $B \in \mathcal{B}$.

Ένα υποσύνολο $B$-επαναφοράς του $X$, για $B \in \mathcal{B}$, είναι σύνολο $B$-σχεδόν επαναφοράς και σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.11, περιέχει σημεία $B$-σχεδόν επαναφοράς. Όπως θα δείξουμε στην Πρόταση 4.2.19 παρακάτω, μπορούμε να εντοπίσουμε τα σημεία $B$-επαναφοράς σε ένα ομοιογενές υποσύνολο $B$-επαναφοράς του $X$. Προς αυτή την κατεύθυνση δίνουμε πρώτα τους κατάλληλους ορισμούς, ξεκινώντας από αυτόν του ελαχιστικού δυναμικού συστήματος.

**Ορισμός 4.2.13.** Έστω $(X, d)$ συμπαγής μετρικός χώρος, $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα και $\{T^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ένα $\Lambda$-τοπολογικό δυναμικό σύστημα του $X$. Το σύστημα λέγεται *ελαχιστικό (minimal)* αν δεν υπάρχει γνήσιο κλειστό υποσύνολο $Y \subset X$ που να είναι $T^\lambda$-αναλλοίωτο για κάθε $\lambda \in \Lambda$.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Zorn, κάποιος μπορεί να δείξει ότι υπάρχει ένα μη-κενό κλειστό υποσύνολο $Y$ του $X$ ώστε το σύστημα $\{T^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ περιορισμένο στο $Y$ να είναι ελαχιστικό. Η επόμενη πρόταση [Fu1, Λήμμα 1.14], αποτελεί ένα χαρακτηρισμό για ένα ελαχιστικό τοπολογικό δυναμικό σύστημα, στην περίπτωση που η $\Lambda$ είναι ημιομάδα.

**Πρόταση 4.2.14 (Furstenberg, [Fu1]).** *Έστω $(X, d)$ συμπαγής μετρικός χώρος, $G$ μια ημιομάδα και $\{T^g\}_{g\in G}$ ένα $G$-τοπολογικό δυναμικό σύστημα του $X$. Το σύστημα $\{T^g\}_{g\in G}$ είναι ελαχιστικό αν για κάθε ανοικτό υποσύνολο $U$ του $X$, υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ ώστε*

$$\bigcup_{i=1}^{n} (T^{g_i})^{-1}(U) = X.$$

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό του ομοιογενούς υποσυνόλου του $X$ ως προς μιας οικογένειας $\{T_i\}_{i\in I}$ συνεχών συναρτήσεων από τον $X$ εαυτό του που δρουν στο $X$.

**Ορισμός 4.2.15 (Furstenberg, [Fu1]).** Έστω $(X, d)$ συμπαγής μετρικός χώρος και $F$ ένα κλειστό υποσύνολο του $X$. Το $F$ θα λέγεται *ομοιογενές* ως προς μια οικογένεια $\{T_i\}_{i\in I}$ συνεχών συναρτήσεων από τον $X$ στον εαυτό του, αν υπάρχει μια ομάδα $G$ ομοιομορφισμών του $X$ καθένας από τους οποίους μετατίθεται με κάθε $T_i$ ώστε το $G$ να αφήνει το $F$ αναλλοίωτο και το $(F, G)$ να είναι ελαχιστικό.

Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε ότι ένα ομοιογενές υποσύνολο του $X$ είναι σύνολο επαναφοράς, αν ικανοποιεί μια ασθενέστερη συνθήκη από αυτή στον Ορισμό 4.2.12.

**Πρόταση 4.2.16.** *Έστω $(X, d)$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, $\{T^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ένα $\Lambda$-τοπολογικό δυναμικό σύστημα του $X$, $\mathcal{B}$ μια κατάλληλη βάση coideal στην $(\Lambda, \prec, *)$ και $B \in \mathcal{B}$. Αν ένα κλειστό υποσύνολο $F$ του $X$ είναι ομοιογενές ως προς το σύστημα $\{T^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x, y \in F$ και $A \in \mathcal{B}$, $A \subseteq B$ τέτοια ώστε*

$$d(T^\lambda(y), x) < \varepsilon \text{ για κάθε } \lambda \in A,$$

*τότε το $F$ είναι σύνολο $B$-επαναφοράς.*

*Απόδειξη.* Αφού το $F$ είναι ομοιογενές ως προς το σύστημα $\{T^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, υπάρχει μια ομάδα $G$ ομοιομορφισμών, καθένας από τους οποίους μετατίθεται με κάθε $T^\lambda$ ώστε το $G$ να αφήνει αναλλοίωτο το $F$ και το σύστημα $(F, G)$ να είναι ελαχιστικό.

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $G_0$ του $G$ ώστε, για κάθε $x, y \in F$, $\min\limits_{g\in G_0} d(g(x), y) < \varepsilon/2$.

Πράγματι, έστω $\{U_i\}_{i=1}^k$ ένα πεπερασμένο κάλυμμα του $F$ από ανοικτά σύνολα διαμέτρου μικρότερη από $\varepsilon/2$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.14, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant k$ μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο $\{g_1^i, \dots, g_{m_i}^i\}$

τέτοιο ώστε $\bigcup_{j=1}^{m_i}(g_j^i)^{-1}(U_i) = F$. Θέτουμε $G_0 = \{g_j^i : 1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant m_i\}$. Τότε για κάθε $x, y \in F$ έχουμε ότι $y \in U_{i_0}$ για κάποιο $i_0 \in \{1, \dots, \kappa\}$ και $x \in (g_{j_0}^{i_0})^{-1}(U_{i_0})$ για κάποιο $j_0 \in \{1, \dots, m_{i_0}\}$. Τότε $g_{j_0}^{i_0}(x) \in U_{i_0}$ και επειδή το $U_{i_0}$ έχει διάμετρο μικρότερη από $\varepsilon/2$, έχουμε ότι $\min_{g \in G_0} d(g(x), y) \leqslant d(g_{j_0}^{i_0}(x), y) < \varepsilon/2$.

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ και $z \in F$. Βρίσκουμε ένα $\delta > 0$ ώστε αν $x_1, x_2 \in X$ με $d(x_1, x_2) < \delta$, τότε $d(g(x_1), g(x_2)) < \varepsilon/2$, για κάθε $g \in G_0$. Από υπόθεση, υπάρχουν $x, y \in F$ και $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$ τέτοια ώστε $d(T^\lambda(y), x) < \delta$, για κάθε $\lambda \in A$. Τότε $d(g(T^\lambda(y)), g(x)) < \varepsilon/2$, για κάθε $g \in G_0$ και $\lambda \in A$. Εφόσον κάθε $g \in G_0$ μετατίθεται με κάθε $T^\lambda$, θα έχουμε ότι $d(T^\lambda(g(y)), g(x)) = d(g(T^\lambda(y)), g(x)) < \varepsilon/2$, για κάθε $g \in G_0$ και $\lambda \in A$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ισχυρισμό, μπορούμε να βρούμε$g \in G_0$ ώστε $d(g(x), z) < \varepsilon/2$. Τότε, $d(T^\lambda(g(y)), z) \leqslant d(T^\lambda(g(y)), g(x)) + d(g(x), z) < \varepsilon$, για κάθε $\lambda \in A$. Επομένως το $F$ είναι σύνολο $B$-επαναφοράς, αφού $A \in \mathcal{B}$, με $A \subseteq B$ και $g(y) \in F$. $\square$

Ως συνέχεια της προηγούμενης Πρότασης έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

**Πρόταση 4.2.17.** *Έστω* $(X, d)$ *ένας συμπαγής μετρικός χώρος,* $(\Lambda, \prec, *)$ *μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα,* $\{T^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *ένα* $\Lambda$*-τοπολογικό δυναμικό σύστημα του* $X$*,* $\mathcal{B}$ *μια κατάλληλη βάση coideal στην* $(\Lambda, \prec, *)$ *και* $B \in \mathcal{B}$*. Αν ένα κλειστό υποσύνολο* $F$ *του* $X$ *είναι ομοιογενές ως προς το σύστημα* $\{T^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *και σύνολο* $B$*-επαναφοράς, τότε για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχουν ένα σημείο* $x_0 \in F$ *και* $A \in \mathcal{B}$ *με* $A \subseteq B$ *τέτοια ώστε*

$$d(T^\lambda(x_0), x_0) < \varepsilon, \ \textit{για κάθε } \lambda \in A.$$

*Απόδειξη.* Αφού το $F$ είναι ομοιογενές σύνολο ως προς το σύστημα $\{T^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, υπάρχει μια ομάδα $G$ ομοιομορφισμών καθένας από τους οποίους μετατίθεται με κάθε $T^\lambda$ ώστε η $G$ να αφήνει το $F$ αναλλοίωτο και $(F, G)$ να είναι ελαχιστικό. Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της ομοιογένειας όπως στην προηγούμενη πρόταση, βρίσκουμε πεπερασμένο υποσύνολο $G_0$ του $G$ ώστε, για κάθε $x_1, x_2 \in F$, $\min_{g \in G_0} d(g(x_1), x_2) < \varepsilon/2$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x_1, x_2 \in X$ και $d(x_1, x_2) < \delta$, να ισχύει $d(g(x_1), g(x_2)) < \varepsilon/2$, για κάθε $g \in G_0$.

Θεωρούμε ένα $x \in F$. Αφού το $F$ είναι σύνολο $B$-επαναφοράς, υπάρχουν $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$ και $y \in F$ τέτοια ώστε $d(T^\lambda(y), x) < \delta$, για κάθε $\lambda \in A$.

Επειδή κάθε $g \in G_0$ μετατίθεται με κάθε $T^\lambda$, έχουμε ότι

$$d(T^\lambda(g(y)), g(x)) = d(g(T^\lambda(y)), g(x)) < \varepsilon/2,$$

για κάθε $g \in G_0$ και $\lambda \in A$.

Επιλέγουμε ένα $g \in G_0$ με $d(g(x), g(y)) < \varepsilon/2$. Τότε για κάθε $\lambda \in A$ έχουμε ότι

$$d(T^\lambda(g(y)), g(y)) \leqslant d(T^\lambda(g(y)), g(x)) + d(g(x), g(y)) < \varepsilon.$$

Θέτουμε $x_0 = g(y) \in F$ και έχουμε το ζητούμενο □

Έπειτα δείχνουμε (Πρόταση 4.2.19) ότι, στην περίπτωση όπου η βάση coideal $\mathcal{B}$ έχει την ιδιότητα-D και η οικογένεια $\{T^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ είναι ισοσυνεχής, το σύνολο όλων των σημείων $B$-επαναφοράς ενός ομοιογενούς υποσυνόλου επαναφοράς $F$ του $X$, για $B \in \mathcal{B}$, είναι ένα πυκνό στο $F$.

**Ορισμός 4.2.18.** Μια οικογένεια $\{T_i\}_{i \in I}$ συνεχών συναρτήσεων από έναν συμπαγή μετρικό χώρο $(X, d)$ στον εαυτό του θα λέγεται *ισοσυνεχής*, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$, τότε

$$d(T^i(x), T^i(y)) < \varepsilon, \text{ για κάθε } i \in I.$$

**Πρόταση 4.2.19.** *Έστω $(X, d)$ ένα συμπαγής μετρικός χώρος, $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, $\{T^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ένα $\Lambda$-τοπολογικό δυναμικό σύστημα του $X$, το οποίο είναι ισοσυνεχές, $\mathcal{B}$ μια κατάλληλη βάση coideal στην $(\Lambda, \prec, *)$ με την ιδιότητα-D και $B \in \mathcal{B}$. Τότε κάθε ομοιογενές υποσύνολο επαναφοράς $F$ του $X$ περιέχει σημεία $B$-επαναφοράς. Επιπλέον το σύνολο των σημείων $B$-επαναφοράς του $F$ είναι πυκνό στο $F$.*

*Απόδειξη.* Έστω $V$ ένα ανοικτό υποσύνολο του $X$ ώστε $V \cap F \neq \emptyset$. Μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο $V'$ ώστε $V' \subseteq V$, $V' \cap F \neq \emptyset$ και $\delta > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $d(x, V') < \delta$, τότε $x \in V$.

Επειδή το $F$ είναι ομοιογενές ως προς το σύστημα $\{T^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, υπάρχει μια ομάδα $G$ ομοιομορφισμών που μετατίθενται με κάθε $\{T^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ώστε η $G$ αφήνει το $F$ αναλλοίωτο και το σύστημα $(F, G)$ να είναι ελαχιστικό. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.14, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $G_0$ της $G$ ώστε $F \subseteq \bigcup\limits_{g\in G_0} g^{-1}(V')$.

Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_1, x_2 \in X$ με $d(x_1, x_2) < \varepsilon$, τότε $d(g(x_1), g(x_2)) < \delta$ για κάθε $g \in G_0$. Αφού το $F$ είναι ομοιογενές υποσύνολο επαναφοράς του $X$, σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.17, υπάρχουν ένα σημείο $x_0 \in F$ και $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$ τέτοια ώστε $d(T^\lambda(x_0), x_0) < \varepsilon$, για κάθε $\lambda \in A$. Στη συνέχεια βρίσκουμε ένα $g \in G_0$ με $g(x_0) \in V'$. Τότε $d(T^\lambda(g(x_0)), g(x_0)) < \delta$, για κάθε $\lambda \in A$. Αφού $g(x_0) \in V'$, έχουμε ότι $T^\lambda(g(x_0)) \in V$ για κάθε $\lambda \in A$. Επομένως, για κάθε ανοικτό σύνολο $V$ με $V \cap F \neq \emptyset$ υπάρχουν $A \in \mathcal{B}$, με $A \subseteq B$ και $x' = g(x_0) \in V \cap F$ ώστε $T^\lambda(x') \in V$ για κάθε $\lambda \in A$.

Συνεπώς, δεδομένου ότι $\{T^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ είναι ισοσυνεχές, για κάθε ανοικτό σύνολο $V$ με $V \cap F \neq \emptyset$ υπάρχουν $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$ και ένα ανοικτό σύνολο $V_1$ τέτοια ώστε

$$V_1 \cap F \neq \emptyset, \overline{V_1} \subseteq V \text{ και } T^\lambda(V_1) \subseteq V \text{ για κάθε } \lambda \in A.$$

Έστω $V_0$ ένα ανοικτό υποσύνολο του $X$ ώστε $V_0 \cap F \neq \emptyset$. Κατασκευάζουμε επαγωγικά μια ακολουθία $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανοικτών συνόλων και μια ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{B}$, με $B \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{V_n} \subseteq V_{n-1}, V_n \cap F \neq \emptyset \text{ και } T^\lambda(V_n) \subseteq V_{n-1} \text{ για κάθε } \lambda \in A_n.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διάμετρος των $V_n$ τείνει στο $0$. Τότε $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \cap F = \{x_0\}$ με $x_0 \in V_0$. Μένει να αποδείξουμε ότι το $x_0$ είναι ένα σημείο $B$-επαναφοράς του $F$.

Πράγματι, αφού η βάση coideal $\mathcal{B}$ έχει την ιδιότητα-D υπάρχει $C \in \mathcal{B}$, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τέτοιο ώστε

$$k_n = \max\{k \in \mathbb{N} : \text{ υπάρχουν } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in C \setminus A_n \text{ με } \lambda_1 \prec \cdots \prec \lambda_k.\}$$

Από αυτό έπεται ότι το σύνολο $C \setminus A_1$ δεν περιέχει στοιχείο της $\mathcal{B}$. Έτσι, επειδή $C \in \mathcal{B}$, υπάρχει $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq C \cap A_1$. Τότε $A \subseteq C$, $A \in \mathcal{B}$, $A \subseteq A_1 \subseteq B$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ υπάρχει $q_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τέτοιο ώστε

$$q_n = \max\{k \in \mathbb{N} : \text{ υπάρχει } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in A \setminus A_n \text{ με } \lambda_1 \prec \cdots \prec \lambda_k\}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η διάμετρος των $V_n$ τείνει στο 0, επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$ ώστε η διάμετρος του $V_{n_0}$ να είναι μικρότερη από $\varepsilon$. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_{q_{n_0+1}} \in A \setminus A_{n_0+1}$ με $\lambda_1 \prec \cdots \prec \lambda_{q_{n_0+1}}$. Τότε υπάρχει $\lambda_0 \in A \cap A_{n_0+1}$ ώστε $\lambda_{q_{n_0+1}} \prec \lambda_0$. Για κάθε $\lambda \in A$ με $\lambda_0 \prec \lambda$ έχουμε ότι $\lambda \in A \cap A_{n_0+1}$ και άρα $T^\lambda(x_0) \in V_{n_0}$. Αφού $x_0 \in V_{n_0}$, έχουμε ότι $d(T^\lambda(x_0), x_0) < \varepsilon$, για κάθε $\lambda \in A$ με $\lambda_0 \prec \lambda$. Επομένως, $\lim\limits_{\lambda \in A} T^\lambda(x_0) = x_0$, οπότε το $x_0$ είναι ένα σημείο B-επαναφοράς του F και επειδή $x_0 \in V_0$ έπεται το ζητούμενο. $\square$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση, θα αποδείξουμε με κάποιες επιπλέον υποθέσεις, ένα πολυδιάστατο θεώρημα επαναφοράς (multiple recurrence theorem), ανάλογο του Θεωρήματος 4.2.8, το οποίο επεκτείνει το Θεώρημα των Furstenberg-Weiss (Θεώρημα 3.2.4).

**Θεώρημα 4.2.20.** *Έστω $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, $\mathcal{B}$ μια κατάλληλη βάση coideal στην $(\Lambda, \prec, *)$ με την ιδιότητα-D, $m \in \mathbb{N}$, $(X, T_1^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, …, $(X, T_m^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, Λ-τοπολογικά δυναμικά συστήματα ενός συμπαγούς μετρικού χώρου $(X, d)$ τα οποία περιέχονται όλα σε μια μεταθετική ομάδα G ομοιομορφισμών του X. Υποθέτουμε επιπλέον, ότι τα συστήματα $(X, T_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ αλλά και $(X, (T_i^\lambda)^{-1})_{\lambda \in \Lambda}$ είναι ισοσυνεχή για κάθε $i = 1, \dots, m$. Τότε για κάθε $B \in \mathcal{B}$ υπάρχουν $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$ και $x_0 \in X$ ώστε,*

$$\lim_{\lambda \in A} T_i^\lambda(x_0) = x_0 \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

*Απόδειξη.* Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $(X, G)$ είναι ελαχιστικό, αλλιώς αντικαθιστούμε το X με ένα G-ελαχιστικό υποσύνολο του X. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $m$.

Για $m = 1$ το θεώρημα ισχύει λόγω του Θεωρήματος 4.2.8. Υποθέτουμε τώρα ότι το θεώρημα ισχύει για κάποιον $m \in \mathbb{N}$ με $m > 1$. Έστω $B \in \mathcal{B}$

και $\{T_1^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \ldots, \{T_{m+1}^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $m+1$ το πλήθος $\Lambda$-τοπολογικά δυναμικά συστήματα που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος. Θέτουμε,

$$S_i^\lambda = T_i^\lambda \circ (T_{m+1}^\lambda)^{-1} \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Αφού η $G$ είναι μεταθετική ομάδα, ισχύει $S_i^{\lambda_1 * \lambda_2} = S_i^{\lambda_1} \circ S_i^{\lambda_2}$ για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in B$ με $\lambda_1 \prec \lambda_2$ και $1 \leqslant i \leqslant m$. Επομένως, $\{S_1^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \ldots, \{S_m^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ είναι ένα $\Lambda$-τοπολογικά δυναμικά συστήματα του $X$ που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος. Επομένως, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης υπάρχουν $y_0 \in X$ και $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$ τέτοια ώστε

$$\lim_{\lambda\in A} S_i^\lambda(y_0) = y_0 \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ υπάρχει $\lambda_i \in A$ ώστε

$$d(T_i^\lambda((T_{m+1}^\lambda)^{-1}(y_0)), y_0) = d(S_i^\lambda(y_0), y_0) < \varepsilon/2, \text{ για κάθε } \lambda \in A \text{ με } \lambda_i \prec \lambda.$$

Θεωρούμε ένα $\lambda_0 \in A$ με $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \prec \lambda_0$. Τότε για κάθε $\lambda \in A$ με $\lambda_0 \prec \lambda$ έχουμε ότι

$$d(T_i^\lambda((T_{m+1}^\lambda)^{-1}(y_0)), y_0) < \varepsilon/2, \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, m+1.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.9, υπάρχουν $y_1 \in X$ και $A_1 \in \mathcal{B}$ με $A_1 \subseteq A$ τέτοια ώστε

$$\lim_{\lambda\in A_1} (T_{m+1}^\lambda)^{-1}(y_0) = y_1.$$

Αφού $\{T_i^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, για $i = 1, \ldots, m+1$, είναι ισοσυνεχή συστήματα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta$, τότε $d(T_i^\lambda(x), T_i^\lambda(y)) < \varepsilon/2$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$ και $i = 1, \ldots, m+1$. Επιλέγουμε $\lambda_1 \in A_1$ με $\lambda_0 \prec \lambda_1$, τέτοιο ώστε $d((T_{m+1}^\lambda)^{-1}(y_0), y_1) < \delta$, για κάθε $\lambda \in A_1$ με $\lambda_1 \prec \lambda$. Επομένως, $d(T_i^\lambda((T_{m+1}^\lambda)^{-1}(y_0)), T_i^\lambda(y_1)) < \varepsilon/2$, για κάθε $\lambda \in A_1$ με $\lambda_1 \prec \lambda$ και κάθε $i = 1, \ldots, m+1$. Συνεπώς, για κάθε $\lambda \in A_1$ με $\lambda_1 \prec \lambda$ και κάθε $i = 1, \ldots, m+1$ έχουμε ότι

$$d(T_i^\lambda(y_1), y_0) \leqslant d(T_i^\lambda(y_1), T_i^\lambda((T_{m+1}^\lambda)^{-1}(y_0))) + d(T_i^\lambda((T_{m+1}^\lambda)^{-1}(y_0)), y_0) < \varepsilon.$$

Έστω $C \in \mathcal{B}$, με $C \subseteq A_1 - \lambda_1 \subseteq B$. Τότε

$$\max\{d(T_i^\lambda(y_1), y_0)i = 1, \ldots, m+1\} < \varepsilon \text{ για κάθε } \lambda \in C.$$

Θεωρούμε τον συμπαγή μετρικό χώρο $(X^{m+1}, \widetilde{d})$, όπου

$$\widetilde{d}((y_1, \ldots, y_{m+1}), (x_1, \ldots, x_{m+1})) = \max\{d(y_i, x_i) : i = 1, \ldots, m+1\}$$

και τα $\Lambda$-τοπολογικά δυναμικά συστήματα $\{\widetilde{T}^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ του $X^{m+1}$, όπου $\widetilde{T}^\lambda = T_1^\lambda \times \cdots \times T_{m+1}^\lambda$, τα οποία είναι ισοσυνεχή. Θέτουμε $\Delta^{m+1} = \{(x, \ldots, x) : x \in X\} \subseteq X^{m+1}$ να είναι το διαγώνιο υποσύνολο του $X^{m+1}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $G$ δρα στον $X^{m+1}$ αντικαθιστώντας κάθε $g \in G$ με $g \times \ldots \times g$. Τότε οι συναρτήσεις $\widetilde{T}^\lambda$, για $\lambda \in \Lambda$, μετατίθενται με τις συναρτήσεις του $G$, το $G$ αφήνει το $\Delta^{m+1}$ αναλλοίωτο και το σύστημα $(\Delta^{m+1}, G)$ είναι ελαχιστικό. Επομένως, το $\Delta^{m+1}$ είναι ομοιογενές σύνολο ως προς το $(\widetilde{T}^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.19, για να αποδείξουμε το θεώρημα, αρκεί να δείξουμε ότι το $\Delta^{m+1}$ είναι σύνολο B-επαναφοράς. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.16, αρκεί για ένα δοθέν $\varepsilon > 0$ να βρούμε $x, y \in X$ και $C \in \mathcal{B}$ με $C \subseteq B$ τέτοια ώστε

$$\widetilde{d}(\widetilde{T}^\lambda((y, \ldots, y)), (x, \ldots, x)) = \max\{d(T_i^\lambda(y), x) : i = 1, \ldots, m+1\} < \varepsilon,$$

για κάθε $\lambda \in C$. Όμως έχουμε ήδη αποδείξει, ότι για ένα δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $y_1, y_0 \in X$ και $C \in \mathcal{B}$ με $C \subseteq B$ τέτοια ώστε

$$\max\{d(T_i^\lambda(y_1), y_0) : i = 1, \ldots, m+1\} < \varepsilon,$$

για κάθε $\lambda \in C$. Συνεπώς, το $\Delta^{m+1}$ είναι σύνολο επαναφοράς και έπεται το ζητούμενο. □

**Πόρισμα 4.2.21.** *Έστω $(\Lambda, \prec, *)$ μια κατευθυνόμενη μερική ημιομάδα, $\mathcal{B}$ μια κατάλληλη βάση coideal στην $(\Lambda, \prec, *)$ με την ιδιότητα-D, $m \in \mathbb{N}$, $(X, T_1^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, ..., $(X, T_m^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ να είναι $\Lambda$-τοπολογικά δυναμικά συστήματα ενός συμπαγούς μετρικού χώρου $(X, d)$ τα οποία περιέχονται όλα σε μια μεταθετική ομάδα $G$ ομοιομορφισμών του $X$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι τα συστήματα $(X, T_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$*

*και* $(X, (T_i^\lambda)^{-1})_{\lambda\in\Lambda}$ *είναι ισοσυνεχή για κάθε* $i = 1, \dots, m$. *Τότε, για κάθε μη-κενό ανοικτό υποσύνολο* $U$ *του* $X$ *και* $B \in \mathcal{B}$ *υπάρχει* $C \in \mathcal{B}$, $C \subseteq B$ *ώστε*

$$\bigcap_{i=1}^{m} (T_i^\lambda)^{-1}(U) \neq \emptyset \text{ για κάθε } \lambda \in C.$$

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.14, υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $G_0$ του $G$ ώστε $X = \bigcup_{g\in G_0} g^{-1}(U)$. Λόγω του Θεωρήματος 4.2.20, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$ ώστε $\lim_{\lambda\in A} T_i^\lambda(x_0) = x_0$, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$. Θεωρούμε ένα $g \in G_0$ με $x_0 \in g^{-1}(U)$. Τότε, υπάρχει $\lambda_0 \in A$ ώστε $T_i^\lambda(x_0) \in g^{-1}(U)$ για κάθε $\lambda \in A$ με $\lambda_0 \prec \lambda$ και κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$. Έστω $C \in \mathcal{B}$ με $C \subseteq A - \lambda_0 \subseteq B$. Τότε, $g(x_0) \in \bigcap_{i=1}^{m} (T_i^\lambda)^{-1}(U)$, για κάθε $\lambda \in C$. □

# Μέρος III

# Εργοδικοί Μέσοι Ανεξάρτητων Πολυωνύμων

# Κεφάλαιο 5

## Εισαγωγικές Έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε το πλαίσιο του τρίτου μέρους της διατριβής. Συγκεκριμένα στην πρώτη ενότητα ορίζουμε τις έννοιες του nilmanifold και nilsystem και αναφέρουμε κάποιες ιδιότητες και αποτελέσματα σχετικά με αυτά. Έπειτα, παραθέτουμε κάποια αποτελέσματα ομοιόμορφης κατανομής πάνω σε nilmanifolds. Στη δεύτερη ενότητα δίνουμε κάποια στοιχεία εργοδικής θεωρίας, τα κλασσικά εργοδικά θεωρήματα και ορίζουμε τις ημινόρμες σε ένα σύστημα. Επιπλέον, παραθέτουμε το θεώρημα δομής των Host και Kra που μας επιτρέπει να περάσουμε ένα πρόβλημα σύγκλισης από ένα σύστημα σε nilsystem.

Τέλος, δίνουμε τον απαραίτητο συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε σ' αυτό το μέρος της διατριβής. Με $\mathbb{P}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ θα συμβολίζουμε τα σύνολα των πρώτων, φυσικών, ακεραίων, ρητών, πραγματικών και μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα. Για $N \in \mathbb{N}$ θα γράφουμε $[1, N]$ για να συμβολίζουμε το σύνολο $\{1, \ldots, N\}$. Για μια μετρήσιμη συνάρτηση $f$ σε ένα χώρο μέτρου $X$ και ένα μετασχηματισμό $T : X \to X$, θα γράφουμε $Tf$ για τη σύνθεση $f \circ T$. Με $\mathbb{T}^s = \mathbb{R}^s/\mathbb{Z}^s$ θα συμβολίζουμε τον τόρο διάστασης $s$. Με $e(t) = e^{2\pi i t}$ θα συμβολίζουμε την εκθετική απεικόνιση και με $[\cdot]$ θα συμβολίζουμε τη συνάρτηση του ακέραιου μέρους.

## 5.1 Nilmanifolds

Σε αυτή την ενότητα αυτή αφού δώσουμε τον ορισμό του nilmanifold για μια μηδενοδύναμη ομάδα Lie και κάποια παραδείγματα από nilmanifolds, αναφέρουμε κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με αυτά. Έπειτα εισάγουμε μια απεικόνιση μέσω της δράσης της ομάδας στο nilmanifold, στην οποία θα αναφερόμαστε ως nilrotation και ορίζουμε ένα σύστημα πάνω στο nilmanifold, το οποίο θα αποκαλούμε nilsystem. Έπειτα ορίζουμε πότε μια ακολουθία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη και αναφέρουμε τα κλασικά θεωρήματα ομοιόμορφης κατανομής του Weyl πάνω στον τόρο. Τέλος, διατυπώνουμε ένα αποτέλεσμα του Leibman, θεώρημα 5.1.9 σχετικά με ομοιόμορφη κατανομή πολυωνυμικών ακολουθιών από ένα nilmanifold. Όλες οι αποδείξεις υπάρχουν ή μπορούν να βγουν από τα [L], [CG], [KN] και [HK1]. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με nilmanifolds και τροχιές πάνω σε αυτά παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [AGH], [L], [Le], [P] και [HK1].

### 5.1α′ Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Εστω $G$ μια ομάδα, και $e \in G$ το ταυτοτικό της στοιχείο. Αν $g, h \in G$ με $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ θα συμβολίζουμε τον μεταθέτη των $g$ και $h$. Αν $A, B \subseteq G$ θα γράφουμε $[A, B]$ για την υποομάδα της $G$ που παράγεται από το $\{[g, h] : g \in A, h \in B\}$. Η κατωτέρα κεντρική σειρά

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots G_i \supseteq G_{i+1} \supseteq \ldots$$

ορίζεται επαγωγικά θέτοντας, $G_1 = G$ και $G_{i+1} = [G, G_i]$ για $i \geqslant 1$. Θα λέμε ότι η $G$ είναι μηδενοδύναμη τάξης $k$ αν $G_{k+1} = \{e\}$.

**Ορισμός 5.1.1.** Έστω $G$ μια μηδενοδύναμη ομάδα Lie τάξης $k$ και $\Gamma$ μια διακριτή συ-συμπαγής υποομάδα της $G$, δηλαδή το πηλίκο $G/\Gamma$ είναι συμπαγές ως προς την τοπολογία πηλίκο. Ο χώρος $X = G/\Gamma$ θα λέγεται *nilmanifold βήματος* $k$ ή απλά *nilmanifold*.

**Παράδειγμα 5.1.2.** Έστω $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ η ομάδα με πράξη

$$(m, x, y) \cdot (n, z, w) = (m + n, x + z \mod 1, y + w + 2mz \mod 1).$$

Τότε, $G_2 = [G, G] = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{T}$ και άρα η $G$ είναι μηδενοδύναμη τάξης 2. Η υποομάδα $\Gamma = \mathbb{Z} \times \{0\} \times \{0\}$ είναι διακριτή και συ-συμπαγής, συνεπώς ο $X = G/\Gamma$ είναι ένα nilmanifold βήματος 2.

Επίσης, παραδείγματα από nilmanifolds προκύπτουν παίρνοντας καρτεσιανά γινόμενα από nilmanifolds. Συγκεκριμένα αν $X_i = G_i/\Gamma_i$ είναι nilmanifolds βήματος $k$ για $i = 1, \dots, m$, τότε η ομάδα $G = G_1 \times \cdots \times G_m$ είναι μηδενοδύναμη τάξης $k$. Η υποομάδα της $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_m$ είναι διακριτή και συ-συμπαγής και άρα ο $X = G/\Gamma = X_1 \times \cdots \times X_m$ είναι επίσης nilmanifold βήματος $k$.

Η ομάδα $G$ δρα στον $G/\Gamma$ με μεταφορές. Τη δράση αυτή από ένα στοιχείο $a \in G$ θα τη συμβολίζουμε με $T_a$ και θα γράφουμε $T_a(g\Gamma) = (ag)\Gamma$. Το *μέτρο Haar* του $X$, είναι το μοναδικό μέτρο πιθανότητας που μένει αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της $G$ και θα το συμβολίζουμε με $m_X$. Με $\mathcal{G}/\Gamma$ θα συμβολίζουμε την Borel σ-άλγεβρα του $G/\Gamma$.

**Ορισμός 5.1.3.** Έστω $X = G/\Gamma$ ένα nilmanifold βήματος $k$, $\mathcal{G}/\Gamma$ η Borel σ-άλγεβρα του $X$, $m_X$ το κανονικοποιημένο μέτρο Haar στον $X$, $a \in G$ και $T_a : X \to X$ με $T_a(x) = ax$ για $x \in X$. Θα λέμε τότε ότι η τετράδα $(X, \mathcal{G}/\Gamma, m_X, T_a)$, είναι ένα *nilsystem βήματος* $k$ ή πιο απλά ένα *nilsystem*.

Την απεικόνιση $T_a$ αλλά και το στοιχείο $a$ της $G$ θα τα αποκαλούμε *nilrotations*.

**Παράδειγμα 5.1.4.** Αν $G$ είναι μια συμπαγής αβελιανή ομάδα, $\mathcal{G}$ η Borel σ-άλγεβρα της $G$, $m_G$ το μέτρο Haar της $G$, $a \in G$ και $T_a : G \to G$ με $T_a(g) = ag$ για $g \in G$. Το σύστημα $(G, \mathcal{G}, m_G, T_a)$, είναι ένα nilsystem βήματος 1 που λέγεται *στροφή*.

Το σύνηθες παράδειγμα στροφής είναι στροφή στο μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T}$ όπου $T_a : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ με $(x) = x + a \mod 1$, για $a \in \mathbb{T}$.

**Παράδειγμα 5.1.5.** Θεωρούμε το nilmanifold βήματος 2, $X = G/\Gamma$ του παραδείγματος 5.1.2, την Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{X}$ και $m_X$ το μέτρο Haar του X. Θεωρώντας επιπλέον τον μετασχηματισμό $T_a : X \to X$ που προκύπτει από τη δράση του στοιχείου $a = (1, \alpha, \beta)$ για $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$, στο X, παίρνουμε το nilsystem βήματος 2, $(X, \mathcal{X}, m_x, T_a)$.

**Ορισμός 5.1.6.** Έστω $X = G/\Gamma$ ένα nilmanifold βήματος k. Θα λέμε ότι ένα κλειστό υποσύνολο Y του X είναι ένα *subnilmanifold* του X αν υπάρχει $x \in X$ και μια κλειστή υποομάδα H της G τέτοια ώστε $Y = Hx$.

Αν $Y = Hx$ είναι ένα subnilmanifold του $X = G/\Gamma$ που περιέχει το $e_X$, όπου H είναι κλειστή υποομάδα της G, $x \in X$ , τότε η $\Delta = H \cap \Gamma$ είναι διακριτή συ-συμπαγής ομάδα της H και μπορούμε να ταυτίσουμε το Y με το nilmanifold $H/\Delta$.

### 5.1β′ Ομοιόμορφη κατανομή σε nilmanifolds

Έστω $\exp : \mathfrak{g} \to G$ η εκθετική απεικόνιση, όπου $\mathfrak{g}$ είναι η άλγεβρα Lie της G. Αν η G είναι συνεκτική και απλά συνεκτική ομάδα Lie η εκθετική απεικόνιση είναι ένα προς ένα και επί. Οπότε για $b \in G$ και $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε το στοιχείο $b^s$ της G να είναι $b^s = \exp(s\phi)$, όπου $\phi \in \mathfrak{g}$ είναι τέτοιο ώστε $\exp(\phi) = b$.

Αν $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $X = G/\Gamma$ είναι ένα nilmanifold με G συνεκτική και απλά συνεκτική ομάδα Lie, θα λέμε ότι η ακολουθία $(b^{a(n)}x)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι *ομοιόμορφα κατανεμημένη* ή *ισοκατανεμημένη* σε ένα subnilmanifold Y της X, αν για κάθε $F \in C(Y)$ έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} F(b^{a(n)}x) = \int F \, dm_Y.$$

Αν η ακολουθία $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, δεν είμαστε υποχρεωμένοι να υποθέσουμε ότι η G είναι συνεκτική και απλά συνεκτική.

Ένα nilrotation $T_b$, όπου $b \in G$ θα λέγεται *εργοδικό*, ή θα λέμε ότι δρα *δρα εργοδικά* στον X, αν η ακολουθία $(b^n\Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πυκνή στον X. Πολλές φορές θα αναφερόμαστε στο στοιχείο $b \in G$ ότι είναι εργοδικό ή ότι δρα εργοδικά αντί για την απεικόνιση $T_b$. Αν $b \in G$ είναι εργοδικό, τότε για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(b^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στον X, ένα αποτέλεσμα που οφείλεται στον Lesigne [Le], για την περίπτωση που το X είναι συνεκτικό και στον Leibman [L] για τη γενική περίπτωση. Αν το nilmanifold X είναι συνεκτικό και το b δρα εργοδικά στην X, τότε για κάθε $r \in \mathbb{N}$ το στοιχείο $b^r$ δρα επίσης εργοδικά στο X.

Στη συνέχεια αναφέρουμε κάποια αποτελέσματα, ουσιώδη για να αποδείξουμε ιδιότητες ομοιόμορφης κατανομής, για ακολουθίες πάνω σε nilmanifolds. Διατυπώνουμε πρώτα τα κλασικά θεωρήματα ομοιόμορφης κατανομής του Weyl στον $\mathbb{T}^\ell$, [W].

**Θεώρημα 5.1.7 (Weyl).** *Έστω $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^\ell$. Η $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στον $\mathbb{T}^\ell$ αν και μόνο αν*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e(\mathbf{h} \cdot a(n)) = 0$$

*για κάθε μη μηδενικό $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^\ell$, όπου $\mathbf{h} \cdot a(n)$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{h}$ και $a(n)$.*

**Θεώρημα 5.1.8 (Weyl).** *Έστω $p(t) = (p_1(t), \ldots, p_\ell(t))$, όπου $p_i(t) \in \mathbb{R}[t]$ για κάθε $i = 1, \ldots, \ell$ και υποθέτουμε ότι για κάθε μη μηδενικό $h \in \mathbb{Z}^\ell$ το πολώνυμο $h \cdot p(t)$ έχει τουλάχιστον ένα μη σταθερό άρρητο συντελεστή. Τότε η ακολουθία $(p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στον $\mathbb{T}^\ell$.*

Αν G είναι μια μηδενοδύναμη ομάδα, τότε μια ακολουθία $g : \mathbb{N} \to G$ της μορφής $g(n) = b_1^{p_1(n)} \cdots b_k^{p_k(n)}$, όπου $b_i \in G$ και $p_i$ είναι πολυώνυμα που παίρνουν ακέραιες τιμές στους ακεραίους για κάθε $1 \leqslant i \leqslant k$ θα λέγεται *πολυωνυμική ακολουθία* στον G. Μια *πολυωνυμική ακολουθία στο nilmanifold* $X = G/\Gamma$ είναι μια ακολουθία της μορφής $(g(n)\Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $g : \mathbb{N} \to G$ είναι μια πολυωνυμική ακολουθία στην G.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα ομοιόμορφης κατανομής αποδείχθηκε από τον Leibman στο [L].

**Θεώρημα 5.1.9** (Θεωρήματα B, C, [L]). *Έστω* $X = G/\Gamma$ *μια nilmanifold όπου* $G$ *είναι συνεκτική και απλά συνεκτική και* $(g(n))_n$ *είναι μια πολυωνυμική ακολουθία στην* $G$. *Έστω* $Z = G/([G,G]\Gamma)$ *και* $\pi : X \to Z$ *είναι η φυσική προβολή. Τότε ισχύει το ακόλουθο:*

(i) *Για κάθε* $x \in X$ *η ακολουθία* $(g(n)x)_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σε μια πεπερασμένη ένωση από subnilmanifolds του* $X$.

(ii) *Για κάθε* $x \in X$ *η ακολουθία* $(g(n)x)_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο* $X$ *αν και μόνο αν η ακολουθία* $(g(n)\pi(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στον* $Z$.

Αν $X = G/\Gamma$ είναι ένα nilmanifold, όπου $G$ είναι συνεκτική και απλά συνεκτική ομάδα Lie, τότε η $Z$ είναι μια συνεκτική συμπαγής αβελιανή ομάδα Lie, επομένως ένας τόρος $\mathbb{T}^s$ για κάποιο $s \in \mathbb{N}$, και σαν συνέπεια κάθε nilrotation στον $Z$ είναι ισομορφικό με μια στροφή στον $\mathbb{T}^s$.

## 5.2 Εργοδική Θεωρία

Στην ενότητα αυτή ορίζουμε πρώτα τα συστήματα που διατηρούν το μέτρο, τα εργοδικά συστήματα και περιγράφουμε συνοπτικά την εργοδική ανάλυση ενός συστήματος. Αναφερόμαστε στους παράγοντες ενός συστήματος και τη δεσμευμένη τιμή μιας συνάρτησης. Έπειτα παραθέτουμε τα κλασσικά εργοδικά θεωρήματα του von Neumann και του Birkhoff και δίνουμε την έννοια του χαρακτηριστικού παράγοντα. Στη συνέχεια, δίνουμε τον ορισμό των ημινορμών, το θεώρημα δομής των Host και Kra [HK] την έννοια του nilfactor ενός συστήματος. Για μια ποιο λεπτομερή ματιά παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [EW], [Fu1] και [HK1].

### 5.2α′ Συστήματα που διατηρούν το μέτρο

Ένα *σύστημα που διατηρεί το μέτρο* ή πιο απλά *σύστημα* είναι μια τετράδα $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$, όπου $(X, \mathcal{X}, \mu)$ είναι χώρος πιθανότητας και $T : X \to X$ είναι μετρήσιμος μετασχηματισμός, δηλαδή $T^{-1}\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$, όπου $T^{-1}\mathcal{X} = \{T^{-1}(A) : A \in \mathcal{X}\}$ και διατηρεί το μέτρο, δηλαδή $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{X}$. Αν επιπλέον ο $T^{-1}$ ορίζεται σχεδόν παντού και είναι μετρήσιμος, τότε το σύστημα θα λέγεται αντιστρέψιμο.

Θα λέμε για τον $T$ ότι διατηρεί το μέτρο $\mu$ και ότι το μέτρο $\mu$ είναι $T$-αναλλοίωτο.

Στη διατριβή αυτή θα θεωρούμε ότι ο $(X, \mathcal{X}, \mu)$ είναι Lebesgue χώρος πιθανότητας και ότι ο $T$ είναι αντιστρέψιμος με την έννοια ότι υπάρχει $X_1 \in \mathcal{X}$ με $\mu(X_1) = 1$ και ο περιορισμός του στο $X_1$ να είναι αντιστρέψιμος.

### 5.2β′ Εργοδικότητα

Έστω $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ ένα σύστημα. Θα λέμε ότι ένα $A \in \mathcal{X}$ είναι $T$-*αναλλοίωτο* αν $T^{-1}A = A$. Το σύστημα $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ θα λέγεται *εργοδικό* αν για κάθε $T$-αναλλοίωτο σύνολο $A \in \mathcal{X}$ ισχύει $\mu(A) = 0$ ή $\mu(A) = 1$.

Ισοδύναμα το σύστημα είναι εργοδικό αν για κάθε $A \in \mathcal{X}$ με $\mu(T^{-1}A \triangle A) = 0$ ισχύει $\mu(A) = 0$ ή $\mu(A) = 1$. Επιπλέον αν το σύστημα $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ είναι εργοδικό και $f \in L^1(\mu)$ με $Tf = f$ σχεδόν παντού, τότε η $f$ είναι σχεδόν παντού ίση με μια σταθερά.

Σε κάποια προβλήματα μπορούμε να περιορίσουμε τη μελέτη μας σε εργοδικά συστήματα αντί για γενικά συστήματα. Αυτό μπορεί να συμβεί αναλύοντας τον χώρο στις εργοδικές συνιστώσες του. Συγκεκριμένα κάθε σύστημα $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ έχει μία *εργοδική ανάλυση*, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε $\mu = \int \mu_t \, d\lambda(t)$, όπου $\lambda$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $[0, 1]$ και τα $\mu_t$ είναι $T$-αναλλοίωτα μέτρα πιθανότητας στον $(X, \mathcal{X})$ τέτοια ώστε τα συστήματα $(X, \mathcal{X}, \mu_t, T)$ να είναι εργοδικά για κάθε $t \in [0, 1]$.

### 5.2γ′ Παράγοντες

Ένας *παράγων (factor)*, του συστήματος $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ είναι ένα σύστημα $(Y, \mathcal{Y}, \nu, S)$ και μια μετρήσιμη απεικόνιση $\pi : X \to Y$, που λέγεται *απεικόνιση παράγοντα (factor map)*, τέτοια ώστε $\mu \circ \pi^{-1} = \nu$ και $S \circ \pi(x) = \pi \circ T(x)$ για $\mu$-σχεδόν κάθε $x \in X$. Αν η απεικόνιση $\pi : X \to Y$ μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι ένα προς ένα, τότε θα λέμε ότι τα συστήματα $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ και $(Y, \mathcal{Y}, \nu, S)$ είναι *ισομορφικά*.

Έστω $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ ένα σύστημα. Μια υπό-σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ της $\mathcal{X}$ θα λέγεται *αναλλοίωτη* αν $T^{-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Αν $(Y, \mathcal{Y}, \nu, S)$ είναι ένας παράγων του συστήματος $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ και $\pi : X \to Y$ μια απεικόνιση παράγοντα, τότε η $\pi^{-1}(\mathcal{Y})$ είναι μια αναλλοίωτη υπό-σ-άλγεβρα της $\mathcal{X}$. Επίσης κάθε αναλλοίωτη υπό-σ-άλγεβρα της $\mathcal{X}$ μπορεί να είναι, εκτός από $\mu$-μηδενικά σύνολα, της μορφής $\pi^{-1}(\mathcal{Y})$ για κάποια απεικόνιση παράγοντα $\pi : X \to Y$ και ένα παράγοντα $(Y, \mathcal{Y}, \nu, S)$. Γι αυτό θα λέμε ότι μια αναλλοίωτη υπό-σ-άλγεβρα της $\mathcal{X}$ είναι ένας παράγων και θα συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα τις σ-άλγεβρες $\mathcal{Y}$ και $\pi^{-1}(\mathcal{Y})$. Με άλλα λόγια, αν $(Y, \mathcal{Y}, \nu, S)$ είναι ένας παράγων του $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$, θα σκεφτόμαστε την $\mathcal{Y}$ σαν μία υπό-σ-άλγεβρα της $\mathcal{X}$.

### 5.2δ′ Δεσμευμένη μέση τιμή

Έστω $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ ένα σύστημα και $\mathcal{Y}$ μια $T$-αναλλοίωτη υπό-σ-άλγεβρα της $\mathcal{X}$. Αν $f \in L^1(\mu)$, η *δεσμευμένη μέση τιμή (conditional expectation)* $\mathbb{E}(f|\mathcal{Y})$ της $f$ ως προς την $\mathcal{Y}$ είναι μια συνάρτηση με $\mathbb{E}(f|\mathcal{Y}) \in L^1(X, \mathcal{Y}, \mu, )$ και

$$\int_A f \, d\mu = \int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{Y}) \, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{Y}$.

Επίσης, για κάθε $f \in L^1(\mu)$ και $g \in L^\infty(X, \mathcal{Y}, \mu, )$ ισχύει

$$\int_X fg \, d\mu = \int_X \mathbb{E}(f|\mathcal{Y}) g \, d\mu,$$

και αντιμετατίθεται με την $T$. Δηλαδή $T\mathbb{E}(f|\mathcal{Y}) = \mathbb{E}(Tf|\mathcal{Y})$. Τέλος, θα λέμε ότι η $f$ είναι ορθογώνια στον $\mathcal{Y}$ αν $\mathbb{E}(f|\mathcal{Y}) = 0$.

### 5.2ε′ Εργοδικά Θεωρήματα

**Θεώρημα 5.2.1 (von Neumann).** *Έστω* $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ *ένα σύστημα και* $\mathcal{I}(T) = \{A \in \mathcal{X} : T^{-1}A = A\}$ *η υπό-σ-άλγεβρα του* $\mathcal{X}$*, των* $T$*-αναλλοίωτων συνόλων. Αν* $f \in L^p(\mu)$ *για* $1 \leqslant p < \infty$*, τότε*

$$\frac{1}{N-M}\sum_{n=M}^{N-1} T^n f \to \mathbb{E}(f|\mathcal{I}(T))$$

*στον* $L^p(\mu)$ *καθώς το* $N-M \to \infty$*. Αν επιπλέον το σύστημα υποτεθεί εργοδικό, τότε το όριο είναι ίσο με* $\int f \, d\mu$*.*

**Θεώρημα 5.2.2 (Birkhoff).** *Έστω* $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ *ένα σύστημα. Αν* $f \in L^1(\mu)$*, τότε*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} T^n f \to \mathbb{E}(f|\mathcal{I}(T))$$

*σχεδόν παντού καθώς το* $N \to \infty$*. Αν επιπλέον το σύστημα υποτεθεί εργοδικό, τότε το όριο είναι ίσο με* $\int f \, d\mu$*.*

Αν $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ είναι ένα σύστημα τότε υπάρχει μια μετρήσιμη απεικόνιση $x \mapsto \mu_x$ ως προς την $\mathcal{I}(T)$, όπου $\mu_x$ είναι μέτρα πιθανότητας στον $X$ με

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{I}(T))(x) = \int f \, d\mu_x$$

για $\mu$-σχεδόν κάθε $x$. Ειδικότερα $\mu = \int \mu_x \, d\mu(x)$ και για $\mu$-σχεδόν κάθε $x$ τα μέτρα $\mu_x$ είναι $T$-αναλλοίωτα και τα συστήματα $(X, \mathcal{X}, \mu_x, T)$ είναι εργοδικά. Άρα έχουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση της εργοδικής ανάλυσης.

### 5.2στ′ Χαρακτηριστικοί παράγοντες

Έστω $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ ένα σύστημα. Θα λέμε ότι η υπό-σ-άλγεβρα $\mathcal{Y}$ του $\mathcal{X}$ είναι ένας *χαρακτηριστικός παράγων (characteristic factor)* για την οικογένεια των ακολουθιών $\{(a_1(n))_n \in \mathbb{N}, \dots, (a_\ell(n))_n \in \mathbb{N}\}$ με τιμές στους ακεραίους αν η $\mathcal{Y}$ είναι T-αναλλοίωτη και η διαφορά

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{a_1(n)}f_1 \cdot \ldots \cdot T^{a_\ell(n)}f_\ell - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{a_1(n)}\tilde{f}_1 \cdot \ldots \cdot T^{a_\ell(n)}\tilde{f}_\ell$$

συγκλίνει στο 0 στον $L^2(\mu)$ καθώς $N \to \infty$, όπου $\tilde{f}_i = \mathbb{E}(f_i|\mathcal{Y})$, $f_i \in L^\infty(\mu)$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Ισοδύναμα, αν $\mathbb{E}(f_i|\mathcal{Y}) = 0$ για κάποιο $1 \leqslant i \leqslant \ell$, τότε

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{a_1(n)}f_1 \cdot \ldots \cdot T^{a_\ell(n)}f_\ell \right\|_{L^2(\mu)} = 0.$$

### 5.2ζ′ Ημινόρμες και nilfactors

Στη συνέχεια δίνουμε τον επαγωγικό ορισμό των ημινορμών $|||\cdot|||_k$. Ειδικότερα ο ορισμός που χρησιμοποιούμε προέρχεται από το [HK] για την εργοδική περίπτωση, το [CFH] για τη γενική περίπτωση και τη χρήση του εργοδικού θεωρήματος του von Neumann.

Έστω $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ ένα σύστημα και $f \in L^\infty(\mu)$. Ορίζουμε επαγωγικά τις ημινόρμες $|||f|||_k$ ως εξής: Για $k = 1$ θέτουμε

$$|||f|||_1 := \|\mathbb{E}(f|\mathcal{I}(T))\|_{L^2(\mu)}.$$

Για $k \geqslant 1$, θέτουμε

$$|||f|||_{k+1}^{2^{k+1}} := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |||\bar{f} \cdot T^n f|||_k^{2^k}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις ημινόρμες μπορούμε να κατασκευάσουμε παράγοντες $\mathcal{Z}_k = \mathcal{Z}_k(T)$ του X που χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα:

$$\text{για } f \in L^\infty(\mu), \mathbb{E}(f|\mathcal{Z}_{k-1}) = 0 \text{ αν και μόνο αν } |||f|||_k = 0.$$

Οι Host και Kra στο [HK] έδειξαν ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ο παράγοντας $\mathcal{Z}_k$ έχει αλγεβρική δομή, στην πραγματικότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι ένα nilsystem βήματος $k$. Αυτό είναι το περιεχόμενο του ακόλουθου θεωρήματος δομής, το οποίο αναφέρουμε για την εργοδική περίπτωση και βρίσκεται στο[HK], Θεώρημα 10.1.

**Θεώρημα 5.2.3 (Host & Kra, [HK]).** *Έστω* $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ *ένα εργοδικό σύστημα και* $k \in \mathbb{N}$*. Τότε ο παράγων* $\mathcal{Z}_k(T)$ *είναι αντίστροφο όριο από nilsystem βήματος* $k$*.*

Όταν λέμε ότι ο $\mathcal{Z}_k$ είναι αντίστροφο όριο από nilsystem βήματος $k$ εννοούμε ότι υπάρχουν $T$-αναλλοίωτες υπό-σ-άλγεβρες $\mathcal{Z}_{k,i}$, $i \in \mathbb{N}$, της $\mathcal{X}$ τέτοιες ώστε $\mathcal{Z}_k = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}_{k,i}$ και για κάθε $i \in \mathbb{N}$, οι παράγοντες που επάγονται από τις σ-άλγεβρες $\mathcal{Z}_{k,i}$ είναι ισομορφικοί με nilsystem βήματος $k$.

Εξαιτίας αυτού του αποτελέσματος θα λέμε ότι ο $\mathcal{Z}_k$ είναι ο *nilfactor* βήματος $k$ του συστήματος. Με με $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(T)$ θα συμβολίζουμε τον μικρότερο παράγοντα που είναι επέκταση όλων των nilfactors πεπερασμένου βήματος δηλαδή, $\mathcal{Z} = \bigvee\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}_k$ και θα τον αποκαλούμε *nilfactor* του συστήματος.

# Κεφάλαιο 6

## Κύρια Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα του τρίτου μέρους της διατριβής. Τα αποτελέσματα αυτά, προέρχονται από την εργασία

> D. Karageorgos, A. Koutsogiannis. *Integer part independent polynomial averages and applications along primes*. Studia Mathematica **249** (2019), 233–257.

Μελετάμε τη σύγκλιση πολλαπλών εργοδικών μέσων πάνω σε ακέραια μέρη πραγματικών πολυωνύμων της μορφής

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{[p_1(n)]}f_1 \cdot \ldots \cdot T^{[p_\ell(n)]}f_\ell \tag{6.1}$$

χρησιμοποιώντας ιδιότητες ομοιόμορφης κατανομής σε πολυωνυμικές ακολουθίες που αναπτύχθηκαν από τον Leibman στο [L] και από τον Φραντζικινάκη στα [F1] και [F2].

Συγκεκριμένα στο κεντρικό μας αποτέλεσμα, που είναι το Θεώρημα 6.1.3, δείχνουμε ότι για πολυωνυμικές ακολουθίες $(p_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (p_\ell(n))_{n\in\mathbb{N}}$, που κάθε μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός τους έχει τουλάχιστον ένα μη σταθερό άρρητο συντελεστή και υπό την υπόθεση της εργοδικότητας του συστήματος $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ το όριο στην (6.1) υπάρχει στον $L^2(\mu)$ καθώς το $N \to \infty$ και είναι το αναμενόμενο, δηλαδή $\int f_1 \ d\mu \cdot \ldots \cdot \int f_\ell \ d\mu$. Έτσι χρησιμοποιώντας την εργοδική ανάλυση σε ένα γενικό σύστημα το παραπάνω όριο είναι το γινόμενο των δεσμευμένων μέσων τιμών των $f_1, \ldots, f_\ell$ αντίστοιχα, δηλαδή $\mathbb{E}(f_1|\mathcal{I}(T)) \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}(f_\ell|\mathcal{I}(T))$. Μάλιστα αυτή είναι αναμφισβήτητα η πρώτη φορά που έχουμε ύπαρξη και ακριβή έκφραση του ορίου για γενικές πολλαπλές πολυωνυμικές εκφράσεις. Επειδή δεν κάνουμε κάποια υπόθεση για το σύστημά το αποτέλεσμα αν και είναι διατυπωμένο στη γλώσσα της εργοδικής θεωρίας είναι εκ φύσεως συνδυαστικό. Πράγματι, άμεσες εφαρμογές του θεωρήματος 6.1.3 είναι το αποτέλεσμα επαναφοράς του θεωρήματος 6.1.5 και συνέπεια της αρχής του Furstenberg τα αποτελέσματα συνδυαστικής που διατυπώνονται στα θεωρήματα 6.1.7 και 6.1.8.

Η ισχυρή φύση των αποτελεσμάτων μας, αντανακλάται και στο γεγονός ότι παίρνουμε εφαρμογές στα τοπολογικά δυναμικά συστήματα, όπως είναι το περιεχόμενο του Θεωρήματος 6.1.9 και του Πορίσματος 6.1.11, αλλά και επιπλέον εφαρμογές στη συνδυαστική, όπως βλέπουμε στο Θεώρημα 6.1.14 και στο Πόρισμα 6.1.17.

Επιπρόσθετα, έχουμε και εφαρμογές στους πρώτους. Συγκεκριμένα παίρνουμε ένα αποτέλεσμα σύγκλισης στους πρώτους, για μια ακολουθία, όπως είναι το Θεώρημα 6.2.3 και η άμεση συνέπειά του, το Θεώρημα 6.2.4, που έιναι ένα τύπου Szemerédi αποτέλεσμα στους πρώτους. Ενώ, στο Θεώρημα 6.2.5 παίρνουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα του θεωρήματος 6.1.3 για σύγκλιση πάνω στους πρώτους, για πολλές ακολουθίες και τις συνέπειες που έχει για επαναφορά και στη συνδυαστική πάνω σε πρώτους.

Τέλος, προκύπτουν αποτελέσματα επαναφοράς στους μετατοπισμένους πρώτους $\mathbb{P} - 1$ και $\mathbb{P} + 1$, όπως είναι το περιεχόμενο των θεωρημάτων 6.3.1 και 6.3.2 και οι συνέπειές τους που τις βρίσκουμε στα θεωρήματα 6.3.3 και 6.3.4 αντίστοιχα.

Θα θέλαμε επίσης να τονίσουμε, ότι κάποιος δεν μπορεί να περιμένει να πάρει αυτά τα καλά αποτελέσματα σύγκλισης και επαναφοράς δουλεύοντας με άλλες κλασικές οικογένειες πολυωνύμων όπως είναι τα ακέραια πολυώνυμα ούτε ακόμα και με ειδικές κατηγορίες τους. Αυτό το γεγονός αναγκάζει κάποιον να δουλέψει με οικογένειες πραγματικών πολυωνύμων που ικανοποιούν κάποιες υποθέσεις τύπου Weyl.

## 6.1 Σύγκλιση εργοδικών μέσων ανεξάρτητων πολυωνύμων

Από το Θεώρημα 1.3 στο [K] προκύπτει σαν ειδική περίπτωση ότι για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$, κάθε σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, $p_1, \ldots, p_\ell$ πραγματικά πολυώνυμα και συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_\ell \in L^\infty(\mu)$ το όριο

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^{[p_1(n)]} f_1 \cdot \ldots \cdot T^{[p_\ell(n)]} f_\ell \tag{6.2}$$

υπάρχει στον $L^2(\mu)$. Ορίζοντας μια έννοια ανεξαρτησίας στα πραγματικά πολυώνυμα πετυχαίνουμε να εξασφαλίσουμε τη σύγκλιση της (6.2) στο αναμενόμενο όριο, δηλαδή στο γινόμενο των ολοκληρωμάτων.

**Ορισμός 6.1.1.** Έστω $\ell \in \mathbb{N}$ και $\{p_1, \ldots, p_\ell\}$ μια οικογένεια πραγματικών πολυωνύμων. Θα λέμε ότι η οικογένεια είναι *ισχυρά ανεξάρτητη* ή ότι τα πολυώνυμα $p_1, \ldots, p_\ell$ είναι *ισχυρά ανεξάρτητα* αν κάθε μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός στους πραγματικούς από τα πολυώνυμα $p_i$ έχει ένα μη σταθερό άρρητο συντελεστή.

Σημειώνουμε ότι μια οικογένεια με ένα στοιχείο, $\{p\}$, όπου $p \in \mathbb{R}[t]$, είναι ισχυρά ανεξάρτητη αν και μόνο αν $p(t) \neq cq(t) + d$ για κάθε $c, d \in \mathbb{R}$ και $q \in \mathbb{Q}[t]$ ή $\mathbb{Z}[t]$ ισοδύναμα.

**Παραδείγματα 6.1.2.** *Η οικογένεια των πολυωνύμων* $\{\sqrt{2}t^3 + t^2, \sqrt{3}t^3 - t\}$ *είναι ισχυρά ανεξάρτητη ενώ οι οικογένειες* $\{\sqrt{5}t^3 + t^2 + \sqrt{6}t, t^2, \sqrt{7}t\}$ *και* $\{\sqrt{2}t^2 + t, \sqrt{5}t^2 - t\}$ *δεν είναι.*

Ο ορισμός της ισχυρής ανεξαρτησίας των πολυώνυμων που δώσαμε ταυτίζεται με τον ορισμό της *καλής* οικογένειας πολυωνύμων που δίνεται στο

[F3], Πρόβλημα 10, για την ειδική περίπτωση που τα πολυώνυμα είναι σταθερά.

Παρακάτω και μέσω των αποδείξεων, γίνεται ξεκάθαρο ότι οι υποθέσεις στα πραγματικά πολυώνυμα είναι κατά κάποια έννοια βέλτιστες, αφού είναι ακριβώς ότι πρέπει να υποθέσει κάποιος για να πάρει αποτελέσματα ομοιόμορφης κατανομής τύπου Weyl, που χρειάζονται για την απόδειξη του κύριου αποτελέσματος, Θεώρημα 6.1.3, δηλαδή ότι το όριο των εργοδικών μέσων πάνω σε ακέραια μέρη ισχυρά ανεξάρτητων πολυωνύμων υπάρχει και είναι το αναμενόμενο.

**Θεώρημα 6.1.3.** *Έστω $\ell \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα, $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ένα εργοδικό σύστημα και $f_1, \dots, f_\ell \in L^\infty(\mu)$. Τότε*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^{[p_1(n)]} f_1 \cdot \ldots \cdot T^{[p_\ell(n)]} f_\ell = \int f_1 \, d\mu \cdot \ldots \cdot \int f_\ell \, d\mu, \tag{6.3}$$

*όπου η σύγκλιση συμβαίνει στον $L^2(\mu)$.*

**Παρατήρηση 6.1.4.** *Η υπόθεση ότι τα πολυώνυμα πρέπει να είναι ισχυρά ανεξάρτητα είναι αναγκαία, αφού ακόμα και για $\ell = 1$, $p(t) = \sqrt{2}t$ και εργοδικές στροφές στον $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, η (6.3) εν γένει δεν ισχύει.*

Στη μελέτη των εργοδικών μέσων πάνω σε πολυώνυμα, σημαντικές είναι οι οικογένειες που αποτελούνται από πεπερασμένο το πλήθος *ανεξάρτητα, ακέραια πολυώνυμα*, δηλαδή κάθε μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός τους στους ακεραίους είναι μη σταθερός. Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι και για τέτοιες οικογένειες δεν είναι αληθές εν γένει ότι κάποιος μπορεί να πετύχει σύγκλιση όπως στην (6.3), στο αναμενόμενο όριο για ένα γενικό εργοδικό σύστημα (βλέπε παρατήρηση μετά το Θεώρημας 6.1.5). Ένα τέτοιο αποτέλεσμα χρειάζεται περισσότερες υποθέσεις για το σύστημα όπως είναι η καθολική εργοδικότητα του συστήματος [FK]. Επομένως, κάποιος είναι στην ουσία αναγκασμένος να δουλέψει με πραγματικά πολυώνυμα για να πετύχει μια τέτοια καλή οριακή συμπεριφορά.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε μια αρχή που οφείλεται στον Furstenberg και μας επιτρέπει από εργοδικά αποτελέσματα να πάρουμε αποτελέσματα στη συνδυαστική. Διατυπώνουμε μια μορφή της που βρίσκεται στο [B0], δίνοντας πρώτα τους ορισμούς της άνω πυκνότητας, άνω πυκνότητας Banach και πυκνότητας στους ακεραίους.

Για ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε την *άνω πυκνότητα* $\bar{d}(A)$, να είναι

$$\bar{d}(A) = \limsup_{N\to\infty} \frac{|A \cap \{1, \ldots, N\}|}{N}.$$

Αν το όριο στην προηγούμενη έκφραση υπάρχει καθώς $N \to \infty$, θα λέμε ότι η τιμή του την οποία θα συμβολίζουμε με $d(A)$, είναι η *πυκνότητα* του $A$. Για ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{Z}$, ορίζουμε την *άνω πυκνότητα Banach*, $d^*(A)$, να είναι

$$d^*(A) = \limsup_{N-M\to\infty} \frac{|A \cap \{M+1, \ldots, N\}|}{N-M}.$$

**Θεώρημα (Αρχή του Furstenberg, [Fu], Θεώρημα 1.1, [B0]).** *Έστω $E$ ένα υποσύνολο των ακεραίων. Τότε υπάρχει ένα σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ και ένα σύνολο $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) = \bar{d}(E)$ τέτοιο ώστε*

$$\bar{d}(E \cap (E - n_1) \cap \ldots \cap (E - n_\ell)) \geqslant \mu(A \cap T^{-n_1}A \cap \ldots \cap T^{-n_\ell}A)$$

*για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$ και $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{Z}$.*

Ως επακόλουθο του Θεωρήματος 6.1.3 παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα επαναφοράς.

**Θεώρημα 6.1.5.** *Έστω $\ell \in \mathbb{N}$ και $p_1, \ldots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα. Τότε για κάθε σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ και $A \in \mathcal{B}$ έχουμε*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu\Big(A \cap T^{-[p_1(n)]}A \cap \ldots \cap T^{-[p_\ell(n)]}A\Big) \geqslant (\mu(A))^{\ell+1}. \qquad (6.4)$$

**Παρατήρηση 6.1.6.** *Η υπόθεση ότι τα πολυώνυμα είναι ισχυρά ανεξάρτητα είναι αναγκαία αφού ακόμα και για* $\ell = 1$ *και* $p(t) = t^2$, *η* (6.4) *εν γένει δεν ισχύει.*

Η προηγούμενη παρατήρηση δείχνει ότι η (6.4) δεν ισχύει εν γένει ακόμα και για οικογένειες ανεξάρτητων, ακέραιων πολυωνύμων. Επομένως, το Θεώρημα 6.1.5 είναι ακόμη μια ένδειξη ότι κάποιος πρέπει να δουλέψει με πραγματικά πολυώνυμα για να έχει καλά κάτω φράγματα όπως αυτά της (6.4) για γενικά συστήματα.

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι τα επιχειρήματά μας δείχνουν ότι η ομοιόμορφη εκδοχή του Θεωρήματος 6.1.3 αλλά και οι συνέπειές του ισχύουν. Με άλλα λόγια, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους συνηθισμένους Cesàro μέσους, $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N}$, στα αποτελέσματά μας με τους αντίστοιχους ομοιόμορφους μέσους, $\lim_{N-M\to\infty} \frac{1}{N-M} \sum_{n=M+1}^{N}$ και την άνω πυκνότητα, $\bar{d}$, με την αντίστοιχη άνω πυκνότητα Banach, $d^*$.

Τότε σε αυτή την περίπτωση η ομοιόμορφη εκδοχή του Θεωρήματος 6.1.5 συνεπάγεται ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ και κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο

$$R_\varepsilon(A) = \Big\{ n \in \mathbb{Z} : \ \mu\Big(A \cap T^{-[p_1(n)]}A \cap \ldots \cap T^{-[p_\ell(n)]}A\Big) > (\mu(A))^{\ell+1} - \varepsilon \Big\}$$

είναι συνδετικό, δηλαδή έχει φραγμένα κενά, που πάει να πει ότι υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $N$ τέτοιος ώστε $R_\varepsilon(A) \cap \{M, \ldots, M+N\} \neq \emptyset$ για κάθε $M \in \mathbb{Z}$.

Θα θέλαμε επιπλέον να επισημάνουμε ότι το γενικό αυτό αποτέλεσμα, το οποίο ισχύει χωρίς καμία υπόθεση για το σύστημα, συνεπάγεται ότι μια οικογένεια από ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα έχει πολύ διαφορετική συμπεριφορά από μια οικογένεια που αποτελείται από γραμμικά ακέραια πολυώνυμα, αφού έρχεται σε αντίθεση με το αντιπαράδειγμα των Bergelson, Host, Kra και Ruzsa στο υψηλότερης τάξης θεώρημα επαναφοράς του Khintchine. Πράγματι, στο [BHK] οι παραπάνω συγγραφείς βρήκαν ένα εργοδικό σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ και ένα σύνολο $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mu\Big(A \cap T^{-n}A \cap T^{-2n}A \cap T^{-3n}A \cap T^{-4n}A\Big) \leqslant \frac{\mu(A)^5}{2} \quad \text{για κάθε} \quad n \neq 0$$

Έτσι, για $p_i(t) = it$ έχουμε ότι η συνδετικότητα του αντίστοιχου $R_\varepsilon(A)$ καταρρέει για συγκεκριμένα εργοδικά συστήματα όταν $\ell \geqslant 4$, καθώς επίσης και για συγκεκριμένα μη εργοδικά συστήματα καταρρέει ακόμα και για $\ell \geqslant 2$. Παραδείγματα που καλύπτουν και τις δύο περιπτώσεις κάποιος μπορεί να βρει στο [BHK].

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.1.5 και την αρχή του Furstenberg, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 6.1.7.** *Έστω $\ell \in \mathbb{N}$ και $p_1, \ldots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα. Τότε για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ έχουμε*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \bar{d}(E \cap (E - [p_1(n)]) \cap \ldots \cap (E - [p_\ell(n)])) \geqslant (\bar{d}(E))^{\ell+1}.$$

Μια άμεση συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος είναι το ακόλουθο:

**Θεώρημα 6.1.8.** *Έστω $\ell \in \mathbb{N}$ και $p_1, \ldots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα. Τότε κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ με $\bar{d}(E) > 0$ περιέχει αριθμητικό σχηματισμό της μορφής.*

$$\{m, m + [p_1(n)], m + [p_2(n)], \ldots, m + [p_\ell(n)]\}$$

*για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ με $[p_i(n)] \neq 0$, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \ell$.*

Το παραπάνω αποτέλεσμα για ακέραια πολυώνυμα χωρίς σταθερό όρο μπορεί κάποιος να το πάρει από το πολυωνυμικό θεώρημα του Szemerédi, Θεώρημα $A_0$, [BL], αλλά στη γενικότητα που το παρουσιάζουμε εδώ δεν είναι ξεκάθαρο σε εμάς αν προκύπτει από προηγούμενα αποτελέσματα στη βιβλιογραφία.

Στις επόμενες δύο εφαρμογές του Θεωρήματος 6.1.3 που παρουσιάζουμε παίρνουμε παρόμοια αποτελέσματα για ακολουθίες από ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα με αυτά που βρίσκονται στο [F4] για ακολουθίες από Hardy συναρτήσεις.

### 6.1α′ Μια Εφαρμογή σε τοπολογικά δυναμικά συστήματα

Έστω $(X, T)$ ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα, όπου $(X, d)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ είναι αντιστρέψιμος συνεχής μετασχηματισμός. Υποθέτουμε ότι ο $T$ είναι ελαχιστικός, δηλαδή $\overline{\{T^n x : \ n \in \mathbb{N}\}} = X$ για κάθε $x \in X$, επομένως, για κάθε $x \in X$ και κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο $U$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : \ T^n x \in U\}$ είναι συνδετικό. Τότε υπάρχει ένα $T$-αναλλοίωτο μέτρο Borel που δίνει θετικές τιμές σε κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο. Επομένως λόγω συνδετικότητας, για κάθε $x \in X$ και κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο $U$ έχουμε

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_U(T^n x) > 0. \tag{6.5}$$

Το όριο αυτό στην πραγματικότητα υπάρχει. Από το Θεώρημα 6.1.3 και χρησιμοποιώντας την εργοδική ανάλυση προκύπτει ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^{[p_1(n)]} f_1 \cdot \ldots \cdot T^{[p_\ell(n)]} f_\ell = \mathbb{E}(f_1 | \mathcal{I}(T)) \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}(f_\ell | \mathcal{I}(T)) \tag{6.6}$$

όπου η σύγκλιση συμβαίνει στον $L^2(\mu)$, $p_1, \ldots, p_\ell$ είναι ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα, $f_1, \ldots, f_\ell \in L^\infty(\mu)$, $\mathcal{I}(T)$ είναι η σ-άλγεβρα των $T$-αναλλοίωτων συνόλων και $\mathbb{E}(f|\mathcal{I}(T))$ είναι η δεσμευμένη μέση τιμή ως προς τη $\mathcal{I}(T)$.

Πράγματι, αν $\mu = \displaystyle\int \mu_t \, d\lambda(t)$ είναι η εργοδική ανάλυση του $\mu$, αρκεί να δείξουμε ότι αν $\mathbb{E}(f_i|\mathcal{I}(T)) = 0$ για κάποιο $i$ τότε οι μέσοι συγκλίνουν στο 0. Επειδή, $\mathbb{E}(f_i|\mathcal{I}(T)) = 0$, παίρνουμε ότι $\displaystyle\int f_i \, d\mu_t = 0$ για $\lambda$ σχεδόν κάθε $t$. Λόγω της (6.3), έχουμε ότι οι μέσοι συγκλίνουν στο 0 στον $L^2(\mu_t)$ για $\lambda$ σχεδόν κάθε $t$, επομένως το όριο είναι ίσο με το 0 στον $L^2(\mu)$.

Αφού, $\mathbb{E}(f_i|\mathcal{I}(T)) = \displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f_i$, συνδυάζοντας την (6.6) με την (6.5), συμπεραίνουμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in X$, άρα και για ένα πυκνό σύνολο και κάθε $U_1, \ldots, U_\ell$ επιλεγμένα από μια αριθμήσιμη βάση μη κενών ανοικτών συνόλων ότι

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{U_1}(T^{[p_1(n)]}x) \cdot \ldots \cdot \mathbf{1}_{U_\ell}(T^{[p_\ell(n)]}x) > 0. \tag{6.7}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό παίρνουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 6.1.9.** *Έστω* $\ell \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ *ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα και* $(X, T)$ *ένα ελαχιστικό δυναμικό σύστημα. Τότε για ένα residual και* T*-αναλλοίωτο σύνολο από* $x \in X$ *έχουμε*

$$\overline{\left\{\left(T^{[p_1(n)]}x, \ldots, T^{[p_\ell(n)]}x\right) :\ n \in \mathbb{N}\right\}} = X \times \cdots \times X. \tag{6.8}$$

*Απόδειξη.* Από τη σχέση (6.7) παίρνουμε αμέσως ότι το σύνολο των σημείων R που ικανοποιούν την (6.8), είναι πυκνό. Για να δείξουμε ότι είναι $G_\delta$, εξετάζουμε την περίπτωση $\ell = 1$ ( η γενική περίπτωση είναι ανάλογη). Τότε

$$R = \left\{x \in X :\ \text{για κάθε } m, r \in \mathbb{N},\ \text{υπάρχει } n \in \mathbb{N} \text{ με } T^{[p_1(n)]}x \in B(x_m, 1/r)\right\},$$

όπου $\{x_m :\ m \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X και $B(x_m, 1/r)$ συμβολίζει την ανοικτή μπάλα κέντρου $x_m$ με ακτίνα $1/r$. Επειδή όμως

$$R = \bigcap_{m,r\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-[p_1(n)]}B(x_m, 1/r)$$

συμπεραίνουμε ότι το R είναι $G_\delta$. Χρησιμοποιώντας τέλος ένα σύνηθες επιχείρημα σύγκλισης, μπορούμε να δείξουμε ότι το R είναι και T-αναλλοίωτο.

□

**Παρατήρηση 6.1.10.** *Ακόμα και για* $\ell = 1$ *παραδείγματα από ελαχιστικές στροφές σε πεπερασμένες κυκλικές ομάδες δείχνουν ότι αν* $p \in \mathbb{Z}[t]$ *είναι πολυώνυμο διαφορετικό από* $\pm t + d$, *τότε η* (6.8) *μπορεί να μην ισχύει για κάθε* $x \in X$.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Zorn μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι κάθε δυναμικό σύστημα έχει ένα ελαχιστικό υποσύστημα. Έτσι, χρησιμοποιώντας αυτό και το Θεώρημα 6.1.9 συνάγουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

**Πόρισμα 6.1.11.** *Έστω $\ell \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα και $(X, T)$ ένα δυναμικό σύστημα. Τότε για ένα μη κενό και $T$-αναλλοίωτο σύνολο από $x \in X$ έχουμε*

$$\overline{\left\{\left(T^{[p_1(n)]}x, \dots, T^{[p_\ell(n)]}x\right) : \ n \in \mathbb{N}\right\}} = \overline{\{T^n x : \ n \in \mathbb{N}\}} \times \dots \times \overline{\{T^n x : \ n \in \mathbb{N}\}}. \tag{6.9}$$

**Παρατήρηση 6.1.12.** *Όπως και στην προηγούμενη παρατήρηση, παραδείγματα για $\ell = 1$ και $p \in \mathbb{Z}[t]$ με $p(t) \neq \pm t + d$ δείχνουν ότι η (6.9) δεν ισχύει.*

### 6.1β′ Μια εφαρμογή στη συνδυαστική

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.1.3, μπορούμε να πάρουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα επαναφοράς.

**Θεώρημα 6.1.13.** *Έστω $\ell \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα, $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ένα σύστημα και $A_0, A_1, \dots, A_\ell \in \mathcal{B}$ τέτοια*

$$\mu(A_0 \cap T^{k_1} A_1 \cap \dots \cap T^{k_\ell} A_\ell) = \alpha > 0$$

*για κάποια $k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{Z}$. Τότε*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu\left(A_0 \cap T^{-[p_1(n)]} A_1 \cap \dots \cap T^{-[p_\ell(n)]} A_\ell\right) \geqslant \alpha^{\ell+1}.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποδεικνύεται με ένα παρόμοιο επιχείρημα με αυτό του Θεωρήματος 2.4 στο [F4].

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα και την Πρόταση 3.3 από το [F5], που μπορεί να θεωρηθεί μια παραλλαγή της αρχής του Furstenberg για ακολουθίες παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα που είναι αντίστοιχο με αυτό του Θεωρήματος 2.8 από το [F4] για την περίπτωση $d = 1$.

**Θεώρημα 6.1.14.** *Έστω $\ell \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ ισχυρά ανεξάρτητα πολυώνυμα και $E_0, E_1, \dots, E_\ell \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε*

$$\overline{d}(E_0 \cap (E_1 + k_1) \cap \ldots \cap (E_\ell + k_\ell)) = \alpha > 0$$

*για κάποια $k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{Z}$. Τότε*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \overline{d}(E_0 \cap (E_1 - [p_1(n)]) \cap \ldots \cap (E_\ell - [p_\ell(n)])) \geqslant \alpha^{\ell+1}.$$

Πριν παρουσιάσουμε μια περιγραφή της απόδειξης δίνουμε ένα ορισμό και την Πρόταση 3.3 από το [F5].

**Ορισμός 6.1.15 (Ορισμός 5, [F5]).** Θα λέμε ότι οι ακολουθίες $a_1, \dots, a_\ell \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ *προσδέχονται συσχετίσεις πάνω στην ακολουθία διαστημάτων* $([1, N_k])_k$ με $N_k \to \infty$ καθώς $k \to \infty$, αν το όριο

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} b_1(n+m_1) \cdot \ldots \cdot b_s(n+m_s)$$

υπάρχει για κάθε $s \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}$ και όλες τις ακολουθίες $b_1, \dots, b_s \in \{a_1, \dots, a_\ell, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_\ell\}$.

Παρατηρούμε ότι για $a_1, \dots, a_\ell \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, χρησιμοποιώντας ένα διαγώνιο επιχείρημα, για κάθε ακολουθία $(N_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ με $N_k \to \infty$ καθώς $k \to \infty$, μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία $(N'_k)_k$ τέτοια ώστε οι $a_1, \dots, a_\ell$ να προσδέχονται συσχετίσεις πάνω στην ακολουθία των διαστημάτων $([1, N'_k])_k$.

**Πρόταση 6.1.16 (Πρόταση 3.3 [F5]).** *Έστω $a_0, a_1, \dots, a_\ell \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, ακολουθίες οι οποίες προσδέχονται συσχετίσεις πάνω στην ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{N} := ([1, N_k])_k$ με $N_k \to \infty$ καθώς $k \to \infty$. Τότε υπάρχει ένα σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ και συναρτήσεις $F_0, F_1, \dots, F_\ell \in L^\infty(\mu)$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} b_0(n) b_1(n+m_1) \cdot \ldots \cdot b_s(n+m_s) = \int \tilde{F}_0 \cdot T^{m_1}\tilde{F}_1 \cdots T^{m_s}\tilde{F}_s \, d\mu$$

*για κάθε $s \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}$, όπου για $j = 0, \dots, s$ η ακολουθία $b_j$ είναι ίση με $a_i$ ή με $\bar{a}_i$ για κάποιο $i \in \{0 \dots, s\}$ και η συνάρτηση $\tilde{F}_j$ να είναι αντίστοιχα ίση με την $F_i$ ή με την $\tilde{F}_i$.*

*Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.14.* Ξεκινάμε βρίσκοντας μια ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{N} := ([1, N_k])_k$ πάνω στην οποία η άνω πυκνότητα της τομής που έχουμε στην υπόθεση επιτυγχάνεται και συμβολίζουμε με $d_{\mathbf{N}}$ την αντίστοιχη πυκνότητα. Περνώντας σε μια υπακολουθία, αν χρειαστεί, την οποία θα συμβολίζουμε και πάλι με $([1, N_k])_k$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $\mathbf{1}_{E_0}, \ldots, \mathbf{1}_{E_\ell}$ προσδέχονται συσχετίσεις πάνω στην ακολουθία $([1, N_k])_k$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.1.16, υπάρχει ένα σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ και σύνολα $A_0, \ldots, A_\ell \in \mathcal{B}$ τέτοια ώστε

$$d_{\mathbf{N}}(E_0 \cap (E_1 - m_1) \cap \ldots \cap (E_\ell - m_\ell)) = \mu(A_0 \cap T^{m_1} A_1 \cap \ldots \cap T^{m_\ell} A_\ell)$$

για κάθε $m_1, \ldots, m_\ell \in \mathbb{Z}$. Το αποτέλεσμα τότε έπεται από το Θεώρημα 6.1.13. □

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εφαρμοστεί σε συνδετικά σύνολα $E_0, E_1, \ldots, E_\ell \subseteq \mathbb{N}$ με σταθερά $\alpha = \left(\prod_{i=0}^{\ell} r_i\right)^{-1}$, όπου $r_i$ είναι η σταθερά συνδετικότητας του $E_i$, για $0 \leqslant i \leqslant \ell$. Έτσι παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

**Πόρισμα 6.1.17.** *Έστω $\ell \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ ισχυρά ανεξάρτητα πολυώνυμα και $E_0, E_1, \ldots, E_\ell \subseteq \mathbb{N}$ συνδετικά σύνολα. Τότε υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε*

$$m \in E_0,\ m + [p_1(n)] \in E_1,\ \ldots,\ m + [p_\ell(n)] \in E_\ell.$$

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο αποτέλεσμα, για ένα συνδετικό σύνολο $E \subseteq \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ πραγματικά ισχυρά ανεξάρτητα πολυώνυμα και $c_0, c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{N}$, θέτοντας $E_i = c_i E$, όπου $cE := \{cn : \ n \in E\}$, για $0 \leqslant i \leqslant \ell$, μπορούμε να βρούμε $x_0, x_1, \ldots, x_\ell \in E$ και $n \in \mathbb{N}$, που να επιλύουν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} c_1 x_1 - c_0 x_0 &= [p_1(n)] \\ c_2 x_2 - c_0 x_0 &= [p_2(n)] \\ &\vdots \\ c_\ell x_\ell - c_0 x_0 &= [p_\ell(n)]. \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο θέλουμε να τονίσουμε το γεγονός ότι παρόμοια αποτελέσματα δεν ισχύουν εν γένει ακόμα και για $\ell = 1$, δηλαδή για μια πολυωνυμική ακολουθία όπως επίσης και αν το σύνολο $E$ υποτεθεί μόνο κατά τμήματα συνδετικό. Για παράδειγμα αν $p \in \mathbb{Z}[t]$ είναι ένα πολυώνυμο διαφορετικό από $\pm t + d$ και $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, τότε η εξίσωση $kx - y = p(n)$ δεν έχει λύση με $x, y$ να ανήκουν σε κάποιο σύνολο $E$ που είναι αριθμητική πρόοδος.

## 6.2 Σύγκλιση πάνω σε πρώτους

Το γεγονός ότι το όριο των εργοδικών μέσων πάνω σε ακέραια μέρη από ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα υπάρχει και είναι το αναμενόμενο μας εξασφαλίζει, σε συνδυασμό με κάποια αποτελέσματα από τα [F2], [FHK], [FHK1] και [K1], τη σύγκλιση αντίστοιχων εργοδικών μέσων πάνω όμως σε πρώτους.

### 6.2α′ Μία ακολουθία

Το επόμενο αποτέλεσμα μας πληροφορεί ότι το όριο των εργοδικών μέσων με ακέραια μέρη πραγματικών πολυωνύμων μιας ακολουθίας είναι ίσο με το όριο των "μέσων Furstenberg". Ένα αποτέλεσμα το οποίο προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.2 του [F2].

**Θεώρημα 6.2.1** ([F2]). *Έστω* $p \in \mathbb{R}[t]$ *διαφορετικό από* $cq + d$, *για κάθε* $c, d \in \mathbb{R}$ *και* $q \in \mathbb{Q}[t]$. *Τότε για κάθε* $\ell \in \mathbb{N}$, *κάθε σύστημα* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *και κάθε* $f_1, \ldots, f_\ell \in L^\infty(\mu)$, *έχουμε*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \prod_{i=1}^{\ell} T^{i[p(n)]} f_i = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \prod_{i=1}^{\ell} T^{in} f_i, \qquad (6.10)$$

*όπου η σύγκλιση συμβαίνει στον* $L^2(\mu)$.

Το Θεώρημα αυτό μαζί με την αρχή του Furstenberg και το Θεώρημα πολλαπλής επαναφοράς του Furstenberg, συνεπάγονται το ακόλουθο τύπου Szemerédi αποτέλεσμα:

**Θεώρημα 6.2.2** ([F2]). *Έστω* $p \in \mathbb{R}[t]$ *διαφορετικό από* $cq + d$, *για κάθε* $c, d \in \mathbb{R}$ *και* $q \in \mathbb{Q}[t]$. *Τότε για κάθε* $\ell \in \mathbb{N}$, *κάθε σύνολο* $E \subseteq \mathbb{N}$ *με* $\bar{d}(E) > 0$ *περιέχει αριθμητική πρόοδο της μορφής*

$$\{m, m + [p(n)], m + 2[p(n)], \dots, m + \ell[p(n)]\}$$

*για κάποιους* $m \in \mathbb{Z}$ *και* $n \in \mathbb{N}$ *με* $[p(n)] \neq 0$.

Στη συνέχεια δίνουμε τις αντίστοιχες εκδοχές των δύο προηγούμενων αποτελεσμάτων πάνω σε πρώτους.

**Θεώρημα 6.2.3.** *Έστω* $q \in \mathbb{R}[t]$ *διαφορετικό από* $c\tilde{q} + d$ *για κάθε* $c, d \in \mathbb{R}$ *και* $\tilde{q} \in \mathbb{Q}[t]$. *Τότε για κάθε* $\ell \in \mathbb{N}$, *κάθε σύστημα* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *και κάθε* $f_1, \dots, f_\ell \in L^\infty(\mu)$, *έχουμε ότι*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi(N)} \sum_{p \in \mathbb{P} \cap [1,N]} \prod_{i=1}^{\ell} T^{i[q(p)]} f_i = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \prod_{i=1}^{\ell} T^{in} f_i,$$

*με τη σύγκλιση στον* $L^2(\mu)$, *όπου* $\pi(N) = |\mathbb{P} \cap [1, N]|$ *συμβολίζει το πλήθος των πρώτων αριθμών μέχρι το* $N$.

**Θεώρημα 6.2.4.** *Έστω* $q \in \mathbb{R}[t]$ *διαφορετικό από* $c\tilde{q} + d$, *για κάθε* $c, d \in \mathbb{R}$ *και* $\tilde{q} \in \mathbb{Q}[t]$. *Τότε για κάθε* $\ell \in \mathbb{N}$, *κάθε σύνολο* $E \subseteq \mathbb{N}$ *με* $\bar{d}(E) > 0$ *περιέχει αριθμητική πρόοδο της μορφής*

$$\{m, m + [q(p)], m + 2[q(p)], \dots, m + \ell[q(p)]\}$$

*για κάποιους* $m \in \mathbb{Z}$ *και* $p \in \mathbb{P}$ *με* $[q(p)] \neq 0$.

### 6.2β′ Πολλές ακολουθίες

Επίσης παίρνουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα αλλά και τις εφαρμογές του Θεωρήματος 6.1.3 πάνω σε πρώτους:

**Θεώρημα 6.2.5.** *Έστω* $\ell \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ *ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα,* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *ένα εργοδικό σύστημα και* $f_1, \dots, f_\ell \in L^\infty(\mu)$. *Τότε*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi(N)} \sum_{p\in\mathbb{P}\cap[1,N]} T^{[p_1(p)]} f_1 \cdot \ldots \cdot T^{[p_\ell(p)]} f_\ell = \int f_1 \, d\mu \cdot \ldots \cdot \int f_\ell \, d\mu, \tag{6.11}$$

*με τη σύγκλιση να συμβαίνει στον* $L^2(\mu)$.

Το Θεώρημα 6.2.5 έχει τις ακόλουθες συνέπειες, ανάλογες με αυτές που έχει το Θεώρημα 6.1.3.

**Θεώρημα 6.2.6.** *Έστω* $\ell \in \mathbb{N}$ *και* $p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ *ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα. Τότε για κάθε σύστημα* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *και* $A \in \mathcal{B}$ *έχουμε*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi(N)} \sum_{p\in\mathbb{P}\cap[1,N]} \mu\Big(A \cap T^{-[p_1(p)]} A \cap \ldots \cap T^{-[p_\ell(p)]} A\Big) \geqslant (\mu(A))^{\ell+1}.$$

**Θεώρημα 6.2.7.** *Έστω* $\ell \in \mathbb{N}$ *και* $p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ *ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα. Τότε για κάθε σύνολο* $E \subseteq \mathbb{N}$ *έχουμε*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{\pi(N)} \sum_{p\in\mathbb{P}\cap[1,N]} \bar{d}(E \cap (E - [p_1(p)]) \cap \ldots \cap (E - [p_\ell(p)])) \geqslant (\bar{d}(E))^{\ell+1}.$$

**Θεώρημα 6.2.8.** *Έστω* $\ell \in \mathbb{N}$ *και* $p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ *ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα. Τότε κάθε σύνολο* $E \subseteq \mathbb{N}$ *με* $\bar{d}(E) > 0$ *περιέχει αριθμητικό σχηματισμό της μορφής*

$$\{m, m + [p_1(p)], m + [p_2(p)], \dots, m + [p_\ell(p)]\}$$

*για κάποιους* $m \in \mathbb{Z}$ *και* $p \in \mathbb{P}$ *με* $[p_i(p)] \neq 0$, *κάθε* $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

## 6.3 Επαναφορά πάνω σε μετατοπισμένους πρώτους

Σε αυτή την ενότητα παραθέτουμε κάποια αποτελέσματα επαναφοράς πάνω σε μετατοπισμένους πρώτους για τις πολυωνυμικές οικογένειες που μας αφορούν. Πιο συγκεκριμένα παίρνουμε τα ακόλουθα:

**Θεώρημα 6.3.1.** *Έστω* $\ell \in \mathbb{N}$ *και* $p \in \mathbb{R}[t]$ *διαφορετικό από* $cq + d$, *για κάθε* $c, d \in \mathbb{R}$ *και* $q \in \mathbb{Q}[t]$. *Τότε, για κάθε σύστημα* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *και* $A \in \mathcal{B}$ *με* $\mu(A) > 0$, *το σύνολο των ακέραιων* $n$ *ώστε*

$$\mu\left(A \cap T^{-[p(n)]}A \cap T^{-2[p(n)]}A \cap \ldots \cap T^{-\ell[p(n)]}A\right) > 0$$

*έχει μη κενή τομή με το* $\mathbb{P} - 1$ *και το* $\mathbb{P} + 1$.

**Θεώρημα 6.3.2.** *Έστω* $\ell \in \mathbb{N}$ *και* $p_1, \ldots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ *ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα. Τότε, για κάθε σύστημα* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *και* $A \in \mathcal{B}$ *με* $\mu(A) > 0$, *το σύνολο των ακέραιων* $n$ *ώστε*

$$\mu\left(A \cap T^{-[p_1(n)]}A \cap \ldots \cap T^{-[p_\ell(n)]}A\right) > 0$$

*έχει μη κενή τομή με το* $\mathbb{P} - 1$ *και το* $\mathbb{P} + 1$.

Μέσω της αρχής του Furstenberg το προηγούμενο αποτέλεσμα δίνει το ακόλουθο:

**Θεώρημα 6.3.3.** *Έστω* $\ell \in \mathbb{N}$ *και* $p \in \mathbb{R}[t]$ *διαφορετικό από* $cq + d$, *για κάθε* $c, d \in \mathbb{R}$ *και* $q \in \mathbb{Q}[t]$ *και έστω σύνολο* $E \subseteq \mathbb{N}$ *με* $\bar{d}(E) > 0$. *Τότε το σύνολο των ακέραιων* $n$ *ώστε*

$$\bar{d}(E \cap (E - [p(n)]) \cap (E - 2[p(n)]) \cap \ldots \cap (E - \ell[p(n)])) > 0$$

*έχει μη κενή τομή με το* $\mathbb{P} - 1$ *και το* $\mathbb{P} + 1$.

**Θεώρημα 6.3.4.** *Έστω* $\ell \in \mathbb{N}$ *και* $p_1, \ldots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ *ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα και σύνολο* $E \subseteq \mathbb{N}$ *με* $\bar{d}(E) > 0$. *Τότε, το σύνολο των ακέραιων* $n$ *ώστε*

$$\bar{d}(E \cap (E - [p_1(n)]) \cap \ldots \cap (E - [p_\ell(n)])) > 0$$

*έχει μη κενή τομή με το* $\mathbb{P} - 1$ *και το* $\mathbb{P} + 1$.

Όπως θα φανεί στις αποδείξεις οι τομές που έχουμε στα Θεωρήματα 6.3.1 και 6.3.2 έχουν θετικό μέτρο για ένα σύνολο ακεραίων που έχει θετική σχετική πυκνότητα στους μετατοπισμένους πρώτους $\mathbb{P} - 1$ και $\mathbb{P} + 1$. Επίσης το ίδιο ισχύει και για τα συμπεράσματα των Θεωρημάτων 6.3.3 και 6.3.4 αντίστοιχα.

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο θα θέλαμε να σημειώσουμε, ότι τα αποτελέσματα που έχουμε σ' αυτό το κεφάλαιο για ένα μετασχηματισμό $T$, πιστεύουμε ότι μπορούν να επαναδιατυπωθούν και για πολλούς μετασχηματισμούς αλλά η μέθοδος που χρησιμοποιούμε δε μας επιτρέπει να αποδείξουμε αυτό το πιο γενικό πλαίσιο.

# Κεφάλαιο 7

## Αποδείξεις των αποτελεσμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Για την απόδειξη του κεντρικού μας αποτελέσματος που είναι το Θεώρημα 6.1.3 ακολουθούμε την προσέγγιση που υπάρχει στα [F1] και [F2] από τον Φραντζικινάκη και χρησιμοποιούμε κάποια αποτελέσματα του Leibman [L] και των Host και Kra [HK]. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.2.4 (Λήμμα 4.7 στο [F2]), που λέει ότι ο nilfactor είναι ο χαρακτηριστικός παράγων για την οικογένεια των πολυωνύμων που δουλεύουμε και το θεώρημα δομής των Host και Kra (Θεώρημα 5.2.3), αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα 6.1.3 για την περίπτωση που το σύστημα είναι nilsystem. Για να το πετύχουμε αυτό ολοκληρώνουμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.1.1, ένα αποτέλεσμα ομοιόμορφης κατανομής σε nilmanifolds που αποδείχθηκε πρώτα από τον Φραντζικινάκη στο [F1] για την περίπτωση λογαριθμο-εκθετικών Hardy συναρτήσεων. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.1 χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 5.1.9, ένα κεντρικό αποτέλεσμα ομοιόμορφης κατανομής για πολυωνυμικές ακολουθίες σε συνεκτικές και απλά συνεκτικές ομάδες Lie, που οφείλεται στον Leibman [L].

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.2.1 από το [F2], ένα αποτέλεσμα σύγκλισης πολλαπλών εργοδικών μέσων από μια πολυωνυμική ακολουθία και το Θεώρημα 6.1.3 μαζί με κάποια αποτελέσματα από το [K1], αποδεικνύουμε τα Θεωρήματα 6.2.3 και 6.2.5 αντίστοιχα μαζί με τις συνέπειές τους.

Τέλος, αποδεικνύουμε τα Θεωρήματα 6.3.1 and 6.3.2, που είναι τα αποτελέματα επαναφοράς σε μετατοπισμένους πρώτους $\mathbb{P}-1$ και $\mathbb{P}+1$, μαζί με τις συνέπειές τους που είναι το περιεχόμενο των Θεωρημάτων 6.3.3 και 6.3.4 χρησιμοποιώντας την αρχή του Furstenberg.

## 7.1 Αποτελέσματα ομοιόμορφης κατανομής

Σε αυτή την ενότητα δείχνουμε κάποια αποτελέσματα ομοιόμορφης κατανομής σε nilmanifolds που χρειάζονται για να μπορέσουμε να αποδείξουμε τα αποτελέσματα σύγκλισης και επαναφοράς που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για να το πετύχουμε αυτό ακολουθούμε την κύρια στρατηγική που υπάρχει στο [F1] Κεφάλαια 4 και 5.

Πρώτα, δίνουμε ένα αποτέλεσμα ομοιόμορφης κατανομής σχετικά με τροχιές (nil-orbits) ακολουθιών ισχυρά ανεξάρτητων πολυωνύμων που αποδείχθηκε πρώτα για Hardy συναρτήσεις [F1, Θεώρημα 1.3].

**Θεώρημα 7.1.1.** *Έστω $\ell \in \mathbb{N}$ και $p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα.*

(i) *Αν $X_i = G_i/\Gamma_i$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, είναι nilmanifolds όπου $G_i$ είναι συνεκτικές και απλά συνεκτικές ομάδες Lie, τότε για κάθε $b_i \in G_i$ και $x_i \in X_i$ η ακολουθία*

$$\left(b_1^{p_1(n)}x_1, \dots, b_\ell^{p_\ell(n)}x_\ell\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

*είναι ομοιόμορφη κατανεμημένη στο nilmanifold*

$$\overline{(b_1^s x_1)}_{s\in\mathbb{R}} \times \cdots \times \overline{(b_\ell^s x_\ell)}_{s\in\mathbb{R}}.$$

(ii) *Αν $X_i = G_i/\Gamma_i$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, είναι nilmanifolds, τότε για κάθε $b_i \in G_i$ και $x_i \in X_i$ η ακολουθία*

$$\left(b_1^{[p_1(n)]}x_1, \dots, b_\ell^{[p_\ell(n)]}x_\ell\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

*είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο nilmanifold*

$$\overline{(b_1^n x_1)}_{n\in\mathbb{N}} \times \cdots \times \overline{(b_\ell^n x_\ell)}_{n\in\mathbb{N}}.$$

**Παρατήρηση 7.1.2.** *Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 7.1.1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι* $X_1 = \ldots = X_\ell = X$.

*Πράγματι, στη γενική περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε το nilmanifold* $\tilde{X} = X_1 \times \cdots \times X_\ell$. *Τότε* $\tilde{X} = \tilde{G}/\tilde{\Gamma}$, *όπου* $\tilde{G} = G_1 \times \cdots \times G_\ell$ *είναι συνεκτική και απλά συνεκτική και* $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_\ell$ *είναι μια διακριτή συ-συμπαγής υποομάδα της* $\tilde{G}$. *Κάθε* $b_i$ *μπορεί να θεωρηθεί σαν στοιχείο της* $\tilde{G}$ *και κάθε* $x_i$ *σαν στοιχείο της* $\tilde{X}$.

**Παρατήρηση 7.1.3.** *Έστω* $X = G/\Gamma$ *ένα nilmanifold. Αφού για κάθε* $b \in G$ *η τροχιά* $(b^n\Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο* $X_b = \overline{\{b^n\Gamma :\ n \in \mathbb{N}\}}$, *χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι* $b^n g = g(g^{-1}bg)^n$ *έχουμε ότι η* $(b^n g\Gamma)_n$ *είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στην* $g \cdot X_{g^{-1}bg}$. *Στην περίπτωση που η* $G$ *είναι συνεκτική και απλά συνεκτική μια παρόμοια σχέση ισχύει αν το* $n \in \mathbb{N}$ *αντικατασταθεί με* $s \in \mathbb{R}$ *και το nilmanifold* $X_b$ *με* $Y_b = \overline{\{b^s\Gamma :\ s \in \mathbb{R}\}}$. *Εξαιτίας αυτού, το οποίο λέγεται τύπος αλλαγής του στοιχείου βάσης, μπορούμε να αλλάξουμε το στοιχείο βάσης και μας δίνεται η δυνατότητα να υποθέσουμε ότι* $x = \Gamma$ *στο προηγούμενο Θεώρημα.*

Το ακόλουθο λήμμα δείχνει ότι το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 7.1.1 έπεται από το πρώτο μέρος.

**Λήμμα 7.1.4 (Λήμμα 5.1, [F1]).** *Έστω* $\ell \in \mathbb{N}$ *και* $(a_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_\ell(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι για κάθε nilmanifold* $X = G/\Gamma$, *όπου η* $G$ *είναι συνεκτική και απλά συνεκτική ομάδα Lie και για κάθε* $b_1, \ldots, b_\ell \in G$, *η ακολουθία*

$$\left(b_1^{a_1(n)}\Gamma, \ldots, b_\ell^{a_\ell(n)}\Gamma\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

*είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο nilmanifold*

$$\overline{(b_1^s\Gamma)_{s\in\mathbb{R}}} \times \cdots \times \overline{(b_\ell^s\Gamma)_{s\in\mathbb{R}}}.$$

*Τότε για κάθε nilmanifold* $X = G/\Gamma$, *κάθε* $b_1, \ldots, b_\ell \in G$ *και* $x_1, \ldots, x_\ell \in X$ *η ακολουθία*

$$\left(b_1^{[a_1(n)]}x_1, \ldots, b_\ell^{[a_\ell(n)]}x_\ell\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

*είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο nilmanifold*

$$\overline{(b_1^n x_1)_{n\in\mathbb{N}}} \times \cdots \times \overline{(b_\ell^n x_\ell)_{n\in\mathbb{N}}}.$$

Στη συνέχεια δίνουμε ένα αποτέλεσμα που χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε το πρώτο μέρος του Θεωρήματος 7.1.1.

**Πρόταση 7.1.5.** *Έστω* $\ell \in \mathbb{N}$ *και* $p_1, \ldots, p_\ell \in \mathbb{R}[t]$ *ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα και* $X = G/\Gamma$ *ένα nilmanifold όπου* $G$ *είναι συνεκτική και απλά συνεκτική ομάδα Lie. Αν* $b_1, \ldots, b_\ell$ *είναι στοιχεία της* $G$ *που δρουν εργοδικά στην* $X$*, τότε η ακολουθία*

$$\left(b_1^{p_1(n)}\Gamma, \ldots, b_\ell^{p_\ell(n)}\Gamma\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

*είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο* $X^\ell$*.*

*Απόδειξη.* Πρώτα παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\left(b_1^{p_1(n)}, \ldots, b_\ell^{p_\ell(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πολυωνυμική ακολουθία στην $G^\ell$. Πράγματι, αν $p(t) = a_d t^d + \ldots + a_1 t + a_0$, τότε το $b^{p(n)}$ μπορεί να γραφεί ως $(b^{a_d})^{n^d} \cdots (b^{a_1})^n b^{a_0}$. Αφού $X^\ell = G^\ell/\Gamma^\ell$ με την $G^\ell$ να είναι συνεκτική και απλά συνεκτική ομάδα Lie, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.1.9. Έτσι, για να αποδείξουμε ότι $\left(b_1^{p_1(n)}\Gamma, \ldots, b_\ell^{p_\ell(n)}\Gamma\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στην $G^\ell$, αρκεί να δείξουμε ότι η $\left(\pi(b_1^{p_1(n)}\Gamma), \ldots, \pi(b_\ell^{p_\ell(n)}\Gamma)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στην $Z^\ell$, όπου $Z = G/([G,G]\Gamma)$ και $\pi : X \to Z$ είναι η φυσική προβολή.

Αφού η $G$ είναι συνεκτική και απλά συνεκτική, η $Z$ είναι ισομορφική με κάποιον τόρο πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{T}^s$ και κάθε nilrotation στην $Z$ είναι ισομορφικό με μια στροφή στον $\mathbb{T}^s$. Επομένως, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \ell$ έχουμε $\pi(b_i\Gamma) = (\beta_{i,1}\mathbb{Z}, \dots, \beta_{i,s}\mathbb{Z})$, όπου $\beta_{i,j} \in \mathbb{R}$ και $(\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,s})$ είναι η προβολή του $b_i$ στον $\mathbb{T}^s$ (σημειώνουμε ότι ο $s$ είναι φραγμένος από τη διάσταση του $X$).

Επειδή κάθε $b_i$ δρα εργοδικά στον $X$, έχουμε ότι για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \ell$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\{1, \beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,s}\}$ είναι ανεξάρτητο στους ρητούς. Επίσης, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $1 \leqslant i \leqslant \ell$ έχουμε ότι

$$\pi(b_i^t\Gamma) = (t\beta'_{i,1}\mathbb{Z}, \dots, t\beta'_{i,s}\mathbb{Z}),$$

για κάποιο $\beta'_{i,j} \in \mathbb{R}$ με $\beta'_{i,j}\mathbb{Z} = \beta_{i,j}\mathbb{Z}$, και έτσι

$$\pi\Big(b_i^{p_i(n)}\Gamma\Big) = (p_i(n)\beta'_{i,1}\mathbb{Z}, \dots, p_i(n)\beta'_{i,s}\mathbb{Z}).$$

Παρατηρούμε επίσης ότι το σύνολο $\{1, \beta'_{i,1}, \dots, \beta'_{i,s}\}$ είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο στους ρητούς για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

Ο στόχος μας τώρα είναι να αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$$((p_1(n)\beta'_{1,1}\mathbb{Z}, \dots, p_1(n)\beta'_{1,s}\mathbb{Z}, \dots, p_\ell(n)\beta'_{\ell,1}\mathbb{Z}, \dots, p_\ell(n)\beta'_{\ell,s}\mathbb{Z}))_{n\in\mathbb{N}}$$

είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στον $\mathbb{T}^{\ell s}$. Για να το πετύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε το κριτήριο του Weyl, Θεώρημα 5.1.7.

Έστω $\mathbf{h} = (h_{1,1}, \dots, h_{1,s}, \dots, h_{\ell,1}, \dots, h_{\ell,s}) \in \mathbb{Z}^{\ell s}\setminus\{(0, \dots, 0)\}$. Λόγω της ανεξαρτησίας στους ρητούς, κάποιο από τα αθροίσματα $\sum_{j=1}^{s} h_{i,j}\beta'_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, δεν είναι ίσο με 0, επομένως επειδή η οικογένεια πολυωνύμων $\{p_1, \dots, p_\ell\}$ είναι ισχυρά ανεξάρτητη έχουμε ότι το πολυώνυμο $\sum_{i=1}^{\ell}\Big(\sum_{j=1}^{s} h_{i,j}\beta'_{i,j}\Big)p_i(n)$ έχει τουλάχιστον ένα μη σταθερό άρρητο όρο. Έτσι

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e\left(\mathbf{h}\cdot(p_1(n)\beta'_{1,1}, \dots, p_1(n)\beta'_{1,s}, \dots, p_\ell(n)\beta'_{\ell,1}, \dots, p_\ell(n)\beta'_{\ell,s})\right) =$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e\Big(\sum_{i=1}^{\ell}\Big(\sum_{j=1}^{s} h_{i,j}\beta'_{i,j}\Big)p_i(n)\Big) = 0.$$

Συνεπώς από το κριτήριο ομοιόμορφης κατανομής του Weyl έπεται το ζητούμενο. □

Το τελευταίο συστατικό για να αποδείξουμε το πρώτο μέρος του Θεωρήματος 7.1.1 είναι το ακόλουθο λήμμα:

**Λήμμα 7.1.6 (Λήμμα 5.2, [F1]).** *Έστω* $X = G/\Gamma$ *ένα nilmanifold όπου* $G$ *είναι συνεκτική και απλά συνεκτική. Τότε για κάθε* $b_1, \ldots, b_\ell \in G$ *υπάρχει* $s_0 \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε το στοιχείο* $b_i^{s_0}$ *να δρα εργοδικά στο nilmanifold* $\overline{(b_i^s\Gamma)}_{s\in\mathbb{R}}$ *για κάθε* $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα 7.1.1.

*Απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.1.* Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.1.4 βλέπουμε ότι το (ii) του Θεωρήματος 7.1.1 έπεται από το (i). Για να δείξουμε το (i) θεωρούμε $b_1, \ldots, b_\ell \in G$. Από το Λήμμα 7.1.6 υπάρχει ένα μη μηδενικό $s_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \ell$ το στοιχείο $b_i^{s_0}$ να δρα εργοδικά στο nilmanifold $\overline{(b_i^s\Gamma)}_{s\in\mathbb{R}}$. Λόγω της Πρότασης 7.1.5 για το στοιχείο $b_i^{s_0}$ και τα πολυώνυμα $p_i(s)/s_0$, τα οποία παραμένουν ισχυρά ανεξάρτητα, διαπιστώνουμε ότι η ακολουθία $\left(b_1^{p_1(n)}\Gamma, \ldots, b_\ell^{p_\ell(n)}\Gamma\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στην $\overline{(b_1^s\Gamma)}_{s\in\mathbb{R}} \times \cdots \times \overline{(b_\ell^s\Gamma)}_{s\in\mathbb{R}}$ και έπεται το ζητούμενο. □

## 7.2 Αποτελέσματα σύγκλισης και επαναφοράς

Στην ενότητα αυτή δίνουμε την απόδειξη, του Θεωρήματος 6.1.3, το οποίο είναι το βασικό αποτέλεσμα, του τρίτου μέρους της διατριβής και αφορά τη σύγκλιση των εργοδικών μέσων από ακέραια μέρη ισχυρών ανεξάρτητων πολυωνύμων στο γινόμενο των ολοκληρωμάτων. Χρησιμοποιώντας αυτό δείχνουμε και το αποτέλεσμα επαναφοράς που είναι το περιεχόμενο του Θεωρήματος 6.1.5.

Πρώτα δίνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.3. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε από το [F2] το γεγονός ότι ο nilfactor $\mathcal{Z}$ ενός συστήματος είναι χαρακτηριστικός παράγων για την οικογένεια $\{p_1, \ldots, p_\ell\}$, που αποτελείται από ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα. Στην πραγματικότητα στο [F2] το έδειξαν για τις καλές (nice) οικογένειες πολυωνύμων, μια έννοια πιο γενική από την ισχυρή ανεξαρτησία που χρησιμοποιούμε εδώ.

**Ορισμός 7.2.1.** Έστω $\ell \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{P}_N = \{p_{1,N}, \dots, p_{\ell,N}\}$ μια οικογένεια πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, για $N \in \mathbb{N}$. Θα λέμε ότι η συλλογή $(P_N)_{N\in\mathbb{N}}$ είναι *καλή (nice)*, αν για κάθε $N \in \mathbb{N}$ τα πολυώνυμα $p_{i,N}$ και $p_{i,N} - p_{j,N}$, $i \neq j$, είναι μη σταθερά και οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων τους είναι ανεξάρτητοι από το N.

**Ορισμός 7.2.2.** Μια ακολουθία ακολουθία $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{Z}$ θα λέγεται *Følner* στο $\mathbb{Z}$ αν για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(\Phi_n + m) \cap \Phi_n|}{|\Phi_n|} = 1.$$

Το ακόλουθο λήμμα μας λέει ότι για μια συλλογή από οικογένειες πολυωνύμων που είναι καλές, ο nilfactor είναι χαρακτηριστικός παράγων. Μια διαφορετική απόδειξη αυτού του γεγονότος υπάρχει επίσης και στο [L1].

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε μια παραλλαγή του λήμματος van der Corput που βρίσκεται [F1].

**Λήμμα 7.2.3 (van der Corput).** *Έστω $(v_{N,n})_{N,n\in\mathbb{N}}$ μια φραγμένη ακολουθία στοιχείων σε ένα χώρο Hilbert και $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία Følner στο $\mathbb{Z}$. Για κάθε $h \in \mathbb{N}$ θέτουμε*

$$b_h = \limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{|\Phi_N|} \sum_{n\in\Phi_N} < v_{N,n+h}, v_{N,n} > \right|.$$

*Τότε*

$$\limsup_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{|\Phi_N|} \sum_{n\in\Phi_N} v_{N,n} \right\|^2 \leqslant 4 \limsup_{H\to\infty} \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} b_h.$$

**Λήμμα 7.2.4** (Λήμμα 4.7, [F2]). *Έστω* $(\{p_{1,N},\dots,p_{\ell,N}\})_{N\in\mathbb{N}}$ *μια συλλογή από πολυωνυμικές οικογένειες που είναι καλές,* $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ *ένα σύστημα και υποθέτουμε ότι κάποια από τις συναρτήσεις* $f_1,\dots,f_\ell \in L^\infty(\mu)$ *είναι ορθογώνια στον nilfactor* $\mathcal{Z}$*. Τότε για κάθε ακολουθία Følner* $(\Phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *στο* $\mathbb{Z}$ *και κάθε φραγμένη ακολουθία* $(c_{N,n})_{N,n\in\mathbb{N}}$ *πραγματικών αριθμών έχουμε*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{|\Phi_N|}\sum_{n\in\Phi_N} c_{N,n}T^{[p_{1,N}(n)]}f_1\cdot\ldots\cdot T^{[p_{\ell,N}(n)]}f_\ell=0, \tag{7.1}$$

*όπου η σύγκλιση συμβαίνει στον* $L^2(\mu)$.

**Παρατήρηση 7.2.5.** *Για* $\ell\in\mathbb{N}$*, θεωρούμε μια οικογένεια* $\{p_1,\dots,p_\ell\}$ *από ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα. Επειδή η οικογένεια αυτή είναι καλή και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 7.2.4. Έτσι ισχύει η* (7.1)*, οπότε συμπεραίνουμε ότι ο nilfactor* $\mathcal{Z}$ *είναι ο χαρακτηριστικός παράγων για την οικογένεια αυτή.*

Για χάρη πληρότητας και αφού το Λήμμα είναι καίριας σημασίας για τη δουλειά μας, θα παρουσιάσουμε τις περισσότερες λεπτομέρειες της απόδειξης για την ειδική περίπτωση όπου $p_{i,N}=p_i$, $c_{N,n}=1$, και $\Phi_N=\{1,\dots,N\}$ για $N\in\mathbb{N}$, που είναι μια ακολουθία Følner στο $\mathbb{N}$. Στην περίπτωση που οι ακολουθίες πολυωνύμων είναι σταθερές παρατηρούμε ότι η έννοια των καλών πολυωνύμων ταυτίζεται με την έννοια των "ουσιωδώς διακεκριμένων"πολυωνύμων που ορίζονται στο [B].

*Απόδειξη της ειδικής περίπτωση του Λήμματος 7.2.4.* Για την απόδειξη ακολουθούμε τα επιχειρήματα από το Λήμμα 4.7 στο [F2]. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $f_1$ είναι ορθογώνια στον $\mathcal{Z}$, $\|f_i\|_\infty\leqslant 1$ για κάθε $1\leqslant i\leqslant \ell$ και ότι το $p_1$ είναι πολυώνυμο μέγιστου βαθμού στο $\mathcal{P}=\{p_1,\dots,p_\ell\}$. Κάτω από αυτές τις υποθέσεις αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\|f_0\|_\infty,\|f_2\|_\infty,\dots,\|f_\ell\|_\infty\leqslant 1}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\int f_0\cdot\prod_{i=1}^{\ell}T^{[p_i(n)]}f_i\,d\mu\right|=0. \tag{7.2}$$

Για κάθε οικογένεια από πεπερασμένο το πλήθος από πολυώνυμα, αντιστοιχίζουμε ένα διάνυσμα $(d, w_d, \ldots, w_1)$, όπου $d$ είναι ο μεγαλύτερος βαθμός των πολυωνύμων και $w_i$ είναι ο αριθμός των διαφορετικών συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων των πολυωνύμων βαθμού $i$ στην οικογένεια. Θα αποκαλούμε το διάνυσμα αυτό *τύπο* για την οικογένεια. Εφοδιάζουμε το σύνολο των τύπων με τη λεξικογραφική διάταξη, δηλαδή $(d, w_d, \ldots, w_1) > (d', w'_d, \ldots, w'_1)$ αν και μόνο αν την πρώτη φορά που διαφέρουν τα δύο διανύσματα η συντεταγμένη του πρώτου διανύσματος είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη συντεταγμένη του δεύτερου διανύσματος. Θα αποδείξουμε την (7.2) χρησιμοποιώντας επαγωγή στον τύπο της οικογένειας των πολυωνύμων $\{p_1, \ldots, p_\ell\}$.

Η περίπτωση για $d = \deg p_1 = 1$ μπορεί να αντιμετωπιστεί όπως στο [F2], Πρόταση 5.3 ή χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 4.11 και 4.13 από το [F4]).

Έστω $d = \deg p_1 \geqslant 2$ και υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για καλές οικογένειες πολυωνύμων τύπου μικρότερου από $(d, w_d, \ldots, w_1)$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, συνάγουμε την (7.2) αν δείξουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\|f_0\|_\infty, \|f_2\|_\infty, \ldots, \|f_\ell\|_\infty \leqslant 1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \int f_0 \cdot T^{[p_1(n)]} f_1 \cdot \ldots \cdot T^{[p_\ell(n)]} f_\ell \, d\mu \right|^2 = 0.$$

Έτσι, αν $\tilde{T} = T \times T$, $\tilde{f} = f \otimes \bar{f}$ και $\tilde{\mu} = \mu \times \mu$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\|\tilde{f}_2\|_\infty, \ldots, \|\tilde{f}_\ell\|_\infty \leqslant 1} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \tilde{T}^{[p_1(n)]} \tilde{f}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{T}^{[p_\ell(n)]} \tilde{f}_\ell \right\|_{L^2(\tilde{\mu})} = 0. \tag{7.3}$$

Χρησιμοποιώντας μια παραλλαγή του κλασικού λήμματος του van der Corput (βλέπε [Λήμμα 4.6, [F2]]), θέτοντας $b(n_1, \ldots, n_\ell) = \tilde{T}^{n_1} \tilde{f}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{T}^{n_\ell} \tilde{f}_\ell$, παίρνουμε την (7.3) αν δείξουμε ότι για αρκετά μεγάλο $h$ το supremum πάνω στα $\|\tilde{f}_2\|_\infty, \ldots, \|\tilde{f}_\ell\|_\infty \leqslant 1$ του

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \int b([p_1(n+h)], \ldots, [p_\ell(n+h)]) \overline{b([p_1(n)], \ldots, [p_\ell(n)])} \, d\tilde{\mu} \right|$$

συγκλίνει στο 0 καθώς το $N \to \infty$.

Απαλείφουμε τον μετασχηματισμό $\tilde{T}^{[p(n)]}$, όπου $p = p_{i_0}$ για κάποιο $1 \leqslant i_0 \leqslant \ell$. Το $p$ επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε αρκετά μεγάλο $h$ η πολυωνυμική υποοικογένεια $\mathcal{P}(p, h)$, η οποία προκύπτει από την $\{p_1(n + h) - p(n), \ldots, p_\ell(n + h) - p(n), p_1(n) - p(n), \ldots, p_\ell(n) - p(n)\}$ αφαιρώντας τον μικρότερο αριθμό πολυωνύμων έτσι ώστε στο τέλος να αποτελείται από μη σταθερά, ουσιωδώς διακεκριμένα πολυώνυμα, να έχει τύπο μικρότερο από την $\{p_1(n), \ldots, p_\ell(n)\}$ (βλέπε [Λήμμα 4.5, [F2]]). Γράφουμε $[p_i(n+h)] - [p(n)] = [p_i(n+h) - p(n)] + e_{1,i}(h, n)$ και $[p_i(n)] - [p(n)] = [p_i(n) - p(n)] + e_{2,i}(h, n)$, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \ell$, όπου $e_{j,i}(h, n)$ είναι σφάλματα με τιμές στο $\{0, 1\}$. Για κάθε σταθερό $h$ διαμερίζουμε τους ακέραιους σε πεπερασμένο το πλήθος από σύνολα, που εξαρτώνται μόνο από το $\ell$, όπου όλα τα σφάλματα είναι σταθερά. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\|\tilde{f}_2\|_\infty, \ldots, \|\tilde{f}_\ell\|_\infty \leqslant 1} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left| \int b([p_1(n+h) - p(n)], \ldots, [p_\ell(n+h) - p(n)]) \cdot \overline{b([p_1(n) - p(n)], \ldots, [p_\ell(n) - p(n)])}\, d\tilde{\mu} \right| = 0. \tag{7.4}$$

Αν τυγχάνει κάποιο πολυώνυμο $p_i$ να έχει βαθμό 1, άρα $i \neq 1$, γράφουμε $p_i(n + h) = p_i(n) + c(h)$, όπου $c(h) = p_i(h) - p_i(0) \in \mathbb{R}$. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε

$$\tilde{T}^{[p_i(n+h)-p(n)]}\tilde{f}_i \cdot \overline{\tilde{T}^{[p_i(n)-p(n)]}\tilde{f}_i} = \tilde{T}^{[p_i(n)-p(n)]}\big(\tilde{T}^{c(h)+e(h,n)}\tilde{f}_i \cdot \overline{\tilde{f}_i}\big),$$

για κάποιο $e(h, n) \in \{0, 1\}$. Αφού τα σφάλματα παίρνουν πεπερασμένες το πλήθος τιμές, για να δείξουμε την (7.4) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $e(h, n) = 0$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι για μεγάλο, $h$ θα έχουμε ότι το supremum πάνω στα $\|\tilde{f}_0\|_\infty, \|\tilde{f}_2\|_\infty, \ldots, \|\tilde{f}_r\|_\infty \leqslant 1$ του

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left| \int \tilde{f}_0 \cdot \tilde{T}^{[p_1(n+h)-p(n)]}\tilde{f}_1 \cdot \prod_{i=2}^{r} \tilde{T}^{[\tilde{p}_{h,i}(n)]}\tilde{f}_i\, d\tilde{\mu} \right| \tag{7.5}$$

συγκλίνει στο 0 καθώς $N \to \infty$, για κάποιο $r \in \mathbb{N}$, όπου όλα τα πολυώνυμα $\tilde{p}_{h,i}$ ανήκουν στην οικογένεια $\mathcal{P}(p, h)$. Για αρκετά μεγάλο $h$, αυτή η οικογένεια αποτελείται από ουσιωδώς διακεκριμένα πολυώνυμα με τύπο μικρότερο από αυτόν του $\mathcal{P}$. Καθώς όμως $p_1(n+h) - p(n)$ είναι το πολυώνυμο μέγιστου βαθμού στην $\mathcal{P}(p,h)$ και αφού η $f_1$ είναι ορθογώνια στον $\mathcal{Z}(T)$, θα έχουμε και ότι η $\tilde{f}_1$ θα είναι ορθογώνια στον $\mathcal{Z}(\tilde{T})$ και το αποτέλεσμα έπεται από την επαγωγική υπόθεση. □

Πλέον έχουμε όλα τα συστατικά για να αποδείξουμε το Θεώρημα 6.1.3.

*Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.3.* Ξεκινάμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.2.4, όπου συμπεραίνουμε ότι ο nilfactor $\mathcal{Z}$ είναι χαρακτηριστικός παράγων για τους αντίστοιχους πολλαπλούς εργοδικούς μέσους. Από το Θεώρημα 5.2.3 μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το σύστημά μας είναι ένα αντίστροφο όριο από nilsystems. Χρησιμοποιώντας ένα συνηθισμένο προσεγγιστικό επιχείρημα, μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι το σύστημά μας είναι ένα nilsystem.

Έστω λοιπόν $(X = G/\Gamma, \mathcal{G}/\Gamma, m_X, T_b)$ ένα nilsystem, όπου το $b \in G$ είναι εργοδικό και $F_1, \ldots, F_\ell \in L^\infty(m_X)$. Ο στόχος μας τώρα είναι να δείξουμε ότι αν η οικογένεια $\{p_1, \ldots, p_\ell\}$ αποτελείται από ισχυρά ανεξάρτητα πραγματικά πολυώνυμα τότε

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} F_1(b^{[p_1(n)]}x) \cdot \ldots \cdot F_\ell(b^{[p_\ell(n)]}x) = \int F_1 \, dm_X \cdot \ldots \cdot \int F_\ell \, dm_X \quad (7.6)$$

με τη σύγκλιση να συμβαίνει στον $L^2(m_X)$. Λόγω πυκνότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $F_1, \ldots, F_\ell$ είναι συνεχείς. Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 7.1.1 για το nilmanifold $X^\ell$, το nilrotation $\tilde{b} = (b, \ldots, b) \in G^\ell$, το σημείο $\tilde{x} = (x, \ldots, x) \in X^\ell$, και τη συνεχή συνάρτηση $\tilde{F}(x_1, \ldots, x_\ell) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_\ell(x_\ell)$, για να πάρουμε

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \tilde{F}(b^{[p_1(n)]}x, \ldots, b^{[p_\ell(n)]}x) = \int \tilde{F} \, dm_{X^\ell}.$$

αυτό δίνει το επιθυμητό όριο στην (7.6), ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

*Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.5.* Έστω $\mu = \int \mu_t \, d\mu$ η εργοδική ανάλυση του μ. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 6.1.3 για τα εργοδικά συστήματα $(X, \mathcal{B}, \mu_t, T)$, $f_i = \mathbf{1}_A$, για $i = 1, \ldots, \ell$ και πολλαπλασιάζοντας με την $\mathbf{1}_A$ έχουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu\Big(A\cap T^{-[p_1(n)]}A\cap\ldots\cap T^{-[p_\ell(n)]}A\Big)\geqslant\int\mu_t(a)^{\ell+1}\,d\lambda(t).$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder παίρνουμε ότι

$$\int\mu_t(a)^{\ell+1}\,d\lambda(t)\geqslant\left(\int\mu_t(a)\,d\mu\right)^{\ell+1}=(\mu(A))^{\ell+1}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

## 7.3 Σύγκλιση πάνω σε πρώτους

Πρώτα παρουσιάζουμε τους ορισμούς και τις κεντρικές ιδέες για να αποδείξουμε τα Θεωρήματα 6.2.3 και 6.2.5.

Ξεκινάμε με τον ορισμό της συνάρτησης von Mangoldt, $\Lambda:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, όπου

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log(p) & \text{αν } n=p^k \text{ για κάποιον } p\in\mathbb{P} \text{ και κάποιον } k\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{αλλιώς}\end{cases}.$$

Όπως στο [FHK1] και στο [K1] είναι πιο φυσικό για εμάς να δουλέψουμε αντί αυτού με τη συνάρτηση $\Lambda':\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, όπου $\Lambda'(n)=\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n)\cdot\Lambda(n)=\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n)\cdot\log(n)$.

Η συνάρτηση $\Lambda'$, σύμφωνα με το ακόλουθο λήμμα, θα μας επιτρέψει να συσχετίσουμε μέσους πάνω σε πρώτους με σταθμισμένους μέσους στους ακεραίους.

**Λήμμα 7.3.1** ([FHK]). *Αν* $a:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ *είναι φραγμένη ακολουθία, τότε*

$$\lim_{N\to\infty}\left|\frac{1}{\pi(N)}\sum_{p\in\mathbb{P}\cap[1,N]}a(p)-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Lambda'(n)\cdot a(n)\right|=0.$$

Για $w>2$, θέτουμε

$$W=\prod_{p\in\mathbb{P}\cap[1,w-1]}p$$

να είναι το γινόμενο των πρώτων που είναι φραγμένοι από το $w$. Για $r \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$\Lambda'_{w,r}(n) = \frac{\phi(W)}{W} \cdot \Lambda'(Wn + r),$$

να είναι η *τροποποιημένη συνάρτηση von Mangoldt*, όπου $\phi$ είναι η συνάρτηση του Euler.

**Ορισμός 7.3.2.** Έστω $\ell \in \mathbb{N}$,. Θα αποκαλούμε τη διάταξη $(X, \mathcal{B}, \mu, T_1, \ldots, T_\ell)$ *σύστημα*, όπου $T_1, \ldots, T_\ell \colon X \to X$ είναι αντιστρέψιμοι μετασχηματισμοί που διατηρούν το μέτρο και αντιμετατίθενται, δηλαδή ικανοποιούν $T_i T_j = T_j T_i$ για κάθε $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$, στον χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Η παρακάτω πρόταση, η απόδειξη της οποίας βασίζεται σε ένα σημαντικό αποτέλεσμα των Green και Tao [GT] πάνω στην αντίστροφη εικασία για τις νόρμες του Gowers, θα μας παράσχει με ένα καίριας σημασίας ενδιάμεσο βήμα για να αποδείξουμε τα Θεωρήματα 6.2.3 και 6.2.5, όπως επίσης και τα Θεωρήματα 6.3.1 και 6.3.2. Στην πραγματικότητα θα χρησιμοποιήσουμε μια αρκετά ασθενέστερη εκδοχή της για όλα αυτά τα αποτελέσματα.

**Πρόταση 7.3.3 (Πρόταση 3.2, [K1]).** *Έστω* $\ell, m \in \mathbb{N}$, $(X, \mathcal{B}, \mu, T_1, \ldots, T_m)$ *ένα σύστημα,* $p_{i,j} \in \mathbb{R}[t]$ *πραγματικά πολυώνυμα,* $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant \ell$ *και* $f_1, \ldots, f_\ell \in L^\infty(\mu)$. *Τότε*

$$\max_{1 \leqslant r \leqslant W,\ (r,W)=1} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\Lambda'_{w,r}(n) - 1) \cdot \prod_{i=1}^{\ell} (\prod_{j=1}^{m} T_j^{[p_{j,i}(Wn+r)]}) f_i \right\|_{L^2(\mu)}$$

*συγκλίνει στο* 0 *καθώς* $N \to \infty$ *και άρα* $w \to \infty$.

*Απόδειξη Θεωρήματος 6.2.3.* Καταρχάς παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.3.1 αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία

$$A(N) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \Lambda'(n) \cdot T^{[q(n)]} f_1 \cdot T^{2[q(n)]} f_2 \cdot \ldots \cdot T^{\ell[q(n)]} f_\ell$$

συγκλίνει στον $L^2(\mu)$ στο ίδιο όριο με την ακολουθία

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{n}f_1 \cdot T^{2n}f_2 \cdot \ldots \cdot T^{\ell n}f_\ell$$

καθώς $N \to \infty$. Για ένα $w \in \mathbb{N}$, το οποίο μας δίνει ένα αντίστοιχο $W$ και $r \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$B_{w,r}(N) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{[q(Wn+r)]}f_1 \cdot T^{2[q(Wn+r)]}f_2 \cdot \ldots \cdot T^{\ell[q(Wn+r)]}f_\ell.$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.3 για $m = \ell$, $T_i = T$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$ και

$$p_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \leqslant \ell - j, \\ q & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

για αρκούντως μεγάλο $N$ και κάποιο $w_0$ έχουμε

$$\left\| A(W_0 N) - \frac{1}{\phi(W_0)} \sum_{1\leqslant r\leqslant W_0,\ (r,W_0)=1} B_{w_0,r}(N) \right\|_{L^2(\mu)} < \varepsilon.$$

Παράλληλα, παρατηρούμε ότι για κάθε $W, r \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $q(Wt + r) \notin c\mathbb{Q}[t] + d$ για $c, d \in \mathbb{R}$, γιατί διαφορετικά το $q$ θα είχε την ίδια ιδιότητα, που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας.

Από το Θεώρημα 6.2.1, έχουμε ότι για κάθε $r \in \{1, \ldots W_0\}$ η ακολουθία $(B_{w_0,r}(N))_{N\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο ίδιο όριο με την

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{n}f_1 \cdot T^{2n}f_2 \cdot \ldots \cdot T^{\ell n}f_\ell,$$

και αφού

$$\lim_{N\to\infty} \|A(W_0 N + r) - A(W_0 N)\|_{L^2(\mu)} = 0$$

για κάθε $r \in \{1, \ldots W_0\}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

*Απόδειξη Θεωρήματος 6.2.5.* Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του προηγούμενου Θεωρήματος. Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε

$$A(N) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \Lambda'(n) \cdot T^{[p_1(n)]}f_1 \cdot \ldots \cdot T^{[p_\ell(n)]}f_\ell$$

και για $w, r \in \mathbb{N}$,

$$B_{w,r}(N) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{[p_1(Wn+r)]}f_1 \cdot \ldots \cdot T^{[p_\ell(Wn+r)]}f_\ell.$$

Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 7.3.3 για $m = \ell$, $T_i = T$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, $p_{i,j} = \delta_{i,j}p_i$ όπου $\delta_{i,j}$ είναι το δέλτα του Kronecker και παρατηρούμε, ότι η οικογένεια $\{\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_\ell\}$, όπου $\tilde{p}_i(t) = p_i(Wt + r)$, είναι ισχυρά ανεξάρτητη για κάθε $W, r \in \mathbb{N}$. Πράγματι, αν για κάποιους $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathbb{R}^\ell \setminus \{\vec{0}\}$, $d \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Q}[t]$ και $W, r \in \mathbb{N}$ είχαμε ότι $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i p_i(Wt + r) = q(t) + d$, τότε $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i p_i(t) = \tilde{q}(t) + d$, όπου $\tilde{q}(t) = q((t-r)/W) \in \mathbb{Q}[t]$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση της ισχυρής ανεξαρτησίας των πολυωνύμων. Το αποτέλεσμα τώρα έπεται με παρόμοιο τρόπο με την απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος αφού από το Θεώρημα 6.1.3, έχουμε ότι η ακολουθία $(B_{w_0,r}(N))_{N\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $L^2(\mu)$, στο

$$\int f_1 \, d\mu \cdot \ldots \cdot \int f_\ell \, d\mu$$

για κάθε $r \in [1, W_0]$. □

### 7.3α′ Επαναφορά πάνω σε μετατοπισμένους πρώτους

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε τα Θεωρήματα 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3 και 6.3.4. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.1 χρησιμοποιούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα από το [BHMP], (Θεώρημα 2.1).

**Θεώρημα 7.3.4.** *Έστω $\ell \in \mathbb{N}$ και $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ένα σύστημα. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ υπάρχει μια σταθερά $c \equiv c_{\ell,\mu(A)} > 0$ τέτοια ώστε*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu\left(A \cap T^{-n}A \cap T^{-2n}A \cap \ldots \cap T^{-\ell n}A\right) \geqslant c. \tag{7.7}$$

Στην πραγματικότητα, το όριο στη (7.7) υπάρχει όπως έχει δειχθεί στο [HK].

*Απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.1.* Από την Πρόταση 7.3.3 για $m = \ell$, $T_i = T$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, $r = 1$ και

$$p_{i,j}(n) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } i \leqslant \ell - j \\ p(n-1) & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και συνδυάζοντας το Θεώρημα 7.3.4 με το Θεώρημα 6.2.1 συμπεραίνουμε ότι για αρκετά μεγάλο $\omega \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \Lambda'_{\omega,1}(n) \cdot \mu\left(A \cap \bigcap_{i=1}^{\ell} T^{-i[p(Wn)]}A\right) > 0,$$

από το οποίο παίρνουμε την απαιτούμενη μη κενή τομή με το $\mathbb{P} - 1$. □

*Απόδειξη Θεωρήματος 6.3.2.* Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του Θεωρήματος 6.3.1. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 6.2.1 αντί του Θεωρήματος 7.3.4 και την Πρόταση 7.3.3 για $m = \ell$, $T_i = T$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, $r = 1$ and $p_{i,j}(n) = \delta_{i,j}p_i(n-1)$ για να πάρουμε για αρκετά μεγάλο $\omega \in \mathbb{N}$, ότι

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \Lambda'_{\omega,1}(n) \cdot \mu\left(A \cap T^{-[p_1(Wn)]}A \cap \ldots \cap T^{-[p_\ell(Wn)]}A\right) > 0,$$

από το οποίο έχουμε το ζητούμενο. □

*Απόδειξη Θεωρημάτων 6.3.3 και 6.3.4.* Τα δύο Θεωρήματα έπονται άμεσα χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 6.3.1 και 6.3.2 αντίστοιχα μαζί με την Αρχή του Furstenberg. □

Σύμφωνα με το Λήμμα 7.3.1, έχουμε ότι τα συμπεράσματα των Θεωρημάτων 6.3.1, 6.3.2, όπως και των Θεωρημάτων 6.3.3 και 6.3.4, ικανοποιούνται για ένα σύνολο ακεραίων $n$ με θετική σχετική πυκνότητα στους μετατοπισμένους πρώτους $\mathbb{P} - 1$. Τα ανάλογα αποτελέσματα επιτυγχάνονται με ένα παρόμοιο επιχείρημα για το σύνολο $\mathbb{P} + 1$ επίσης.

Στην ειδική περίπτωση όπου $p_i(0) = 1/2$, για κάθε $i \in \{1, \ldots \ell\}$, τα αποτελέσματα των Θεωρημάτων 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3 και 6.3.4 έπονται από το Θεώρημα 1.2 στο [K1].

# Βιβλιογραφία

[AGH] L. Auslander, L. Green, F. Hahn. *Flows on homogeneous spaces. With the assistance of L. Markus and W. Massey, and an appendix by L. Grrenberg, Annals of Mathematics Studies,* **53**, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1963)

[B0] V. Bergelson. *Ergodic Ramsey theory*. Logic and combinatorics (Arcata, Calif., 1985), 63–87, Contemp. Math., 65, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[B] V. Bergelson. *Weakly mixing PET*, Ergodic Theory Dynam. Systems **7** (1987), no. 3, 337–349.

[BBH] V. Bergelson, A. Blass, N. Hindman, *Partition theorems for spaces of variable words*, Proc. London. Math. Soc. **68** (1994), 449-476.

[BK] V. Bergelson, I. Håland-Knutson. *Weakly mixing implies mixing of higher orders along tempered functions*. Ergodic Theory Dynam. Systems **29** (2009), no. 5, 1375–1416.

[BHMP] V. Bergelson, B. Host, R. McCutcheon, F.Parreau. *Aspects of uniformity in recurrence*. Collog. Math. **84/85** (2000), no. 2, 549–576.

[BL] V. Bergelson, A. Leibman. *Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemerédi's Theorems*. J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 725–753.

[BHK] V. Bergelson, B. Host, B. Kra, with an appendix by I. Ruzsa. *Multiple recurrence and nilsequences*, Inventiones Math. 160 (2005), 261–303.

[Bi] M. V. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. math. Soc. Colloq. Publ. vol.9 (1927).

[C] T. J. Carlson, *Some unifying principles in Ramsey theory*, Discrete Math. **68** (1988), 117-169.

[CN] W. W. Comfort, S. Negrepontis, *The theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[CFH] Q. Chu, N. Frantzikinakis, B. Host. *Ergodic averages of commuting transformations with distinct degree polynomial iterates*. Proc. of the London Math. Society. (3), **102** (2011), 801–842.

[CG] L. Corwin, F. P. Greenleaf. *Representations of nilpotent Lie groups and their applications Part 1: Basic theory and examples*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **18** (1990).

[DK] P. Dodos, V. Kanellopoulos, *Ramsey Theory for Product Spaces*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 212, American Mathematical Society, 2016.

[EW] M. Einsiedler, T. Ward. *Ergodic theory with a view towards number theory*. Graduate Texts in Mathematics, 259. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

[E] E. Ellentuck, *A new proof that analytic sets are Ramsey*, J. Symb. Logic **39** (1974), 163-164.

[F] I. Farah, *Semiselective coideals*, Mathematica **45** (1998), 79-103.

[Fa] V. Farmaki, *Ramsey theory for Words over an infinite alphabet*, arXiv:0904.1948 v1 [math.CO] (2009).

[FKKM1] V. Farmaki, D. Karageorgos, A. Koutsogiannis, A. Mitropoulos, *Abstract topological Ramsey theory for nets*, Topology and its Applications **201** (2016), 314-329.

[FKKM2] V. Farmaki, D. Karageorgos, A. Koutsogiannis, A. Mitropoulos, *Topological dynamics on nets*, Topology and its Applications **201** (2016), 414-431.

[FaK] V. Farmaki, A. Koutsogiannis, *Topological dynamics indexed by words*, Topology and its Applications **159** (2012), 1678-1690.

[FaK1] V. Farmaki, A. Koutsogiannis, *Extended Ramsey theory for words representing rationals*, Fundamenta Mathematicae **223** (2013), 1-27.

[FaN] V. Farmaki, S. Negrepontis, *Block Compinatorics*, Trans. Amer. Soc. **358** (2006), 2759-2779.

[FaN1] V. Farmaki, S. Negrepontis, *Schreier sets in Ramsey theory*, Trans. Amer. Soc. **358** (2008), 849-880.

[F1] N. Frantzikinakis. *Equidistribution of sparse sequences on nilmanifolds*. Journal d'Analyse Mathematique, **109** (2009), 353–395.

[F2] N. Frantzikinakis. *Multiple recurrence and convergence for Hardy field sequences of polynomial growth*. Journal d'Analyse Mathematique **112** (2010), 79–135.

[F3] N. Frantzikinakis. *Some open problems on multiple ergodic averages*. Bulletin of the Hellenic Mathematical Society **60** (2016), 41–90.

[F4] N. Frantzikinakis. *A multidimensional Szemeredi theorem for Hardy sequences of polynomial growth*. Tran. of the A. M. S. **367** (2015), no. 8, 5653–5692.

[F5] N. Frantzikinakis. *An averaged Chowla and Elliott conjecture along independent polynomials*. International Mathematics Research Notices, **2018**, no. 12 (2018), 3721–3743.

[FHK] N. Frantzikinakis, B. Host, B. Kra. *Multiple recurrence and convergence for sequences related to the prime numbers*. J. Reine Angew. Math. **611** (2007), 131–144.

[FHK1] N. Frantzikinakis, B. Host, B. Kra. *The polynomial multidimensional Szemerédi theorem along shifted primes*. Israel J. Math. **194** (2013), no. 1, 331–348.

[FK] N. Frantzikinakis, B. Kra. *Polynomial averages converge to the product of integrals*. Israel. J. Math. **148** (2005), 267–276.

[Fu] H. Furstenberg. *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*. J. Analyse Math. 31 (1977), 204-–256.

[Fu1] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial number theory*, Princeton Univ. Press, (1981).

[FK1] H. Furstenberg, Y. Katznelson, *Idempotents in compact semigroups and Ramsey theory*, Israel J. Math. **68** (1989), 257-270.

[FKO] H. Furstenberg, Y. Katznelson, D. Ornstein. *The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem*. Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 527–552.

[FuW] H. Furstenberg, B. Weiss, *Topological dynamics and combinatorial number theory*, J. d' Analyse Math. **34**, (1978), 61-85.

[GP] F. Galvin, K. Prikry, *Borel sets and Ramsey's theorem*, J. Symbolic Logic **38** (1973), 193-198.

[G] E. Glasner, *Divisible properties and the Stone-Cech compactification*, Can. J. Math. **32** (1980), 993-1007.

[GT] B. Green, T. Tao, *Linear equations in primes*. Ann. of Math. (2) **171** (2010), 1753–1850.

[HK] B. Host, B. Kra. *Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds*. Annals of Math. **161** (2005), no. 1, 397–488.

[HK1] B. Host, B. Kra. *Nilpotent Structures in Ergodic Theory*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 236. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018

[HJ] A. W. Hales, R. I. Jewett, *Regularity and Positional Games*, Trans. Amer. Math. Soc. A **106** (1963), 222-229.

[H] N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of* $\mathbb{N}$, J. Combinatorial Theory, Ser. A **17** (1974), 1-11.

[KK] D. Karageorgos, A. Koutsogiannis. *Integer part independent polynomial averages and applications along primes*. Studia Mathematica **249** (2019), 233–257.

[K] A. Koutsogiannis. *Integer part polynomial correlation sequences*. Ergodic Theory Dynam. Systems **38** (2018), no. 4, 1525–1542.

[K1] A. Koutsogiannis. *Closest integer polynomial multiple recurrence along shifted primes*. Ergodic Theory Dynam. Systems **38** (2018), no. 2, 666–685.

[KN] L. Kuipers, H. Niederreiter. *Uniform Distribution of Sequences* (1974), by John Wiley & Sons, Inc.

[L] A. Leibman. *Pointwise Convergence of ergodic averages for polynomial sequences of translations on a nilmanifold*. Ergodic Theory Dynam. Systems **25** (2005), no. 1, 201–213.

[L1] A. Leibman. *Convergence of multiple ergodic averages along polynomials of several variables*. Isr. J. Math. **146** (2005), 303–316.

[Le] E. Lesigne. *Sur une nil-variété , les parties minimales associées à une translation sont uniquement ergodiques*. Ergodic Theory Dynam. Systems **11** (1991), no 2, 379-391.

[Lo] A. Louveau, *Sur un article de S.Sirota.*, Bull. Sci. Math. (2) **96** (1972), 3-7.

[Lo1] A. Louveau, *Une démonstration topologique de théoremes de Silver et Mathias*, Bull. Sci. Math. (2) **98** (2) (1974), 97-102.

[M] A. R Mathias, *Happy families*, Annals of Mathematical Logic **12** (1977), 59-111.

[Mi] K. Milliken, *Ramsey's theorem with sums of unions*, J. Combinatorial Theory, Ser. A **18** (1975), 276-290.

[NW] C. St. J. A. Nash-Williams, *On well quasiordering transfinite sequences*, Proc. Camb. Phil. Soc. **61** (1965), 33-39.

[P] W. Parry. *Ergodic Properties of affine transformations and flows on nilmanifolds*. Amer. J. Math. **91** (1969), 757-771.

[R] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math Soc. **30** (2) (1929), 264-286.

[ST] N. Samet, B. Tsaban, *Superfilters, Ramsey theory, and Van Der Waerden's theorem*, Topology and its Applications **156** (2009), 2659-2669.

[S] J. Silver, *Analytic sets are Ramsey*. J. Symbolic Logic, **35** (1970), 60-64.

[Ta] A. Taylor, *A canonical partition relation for finite subsets of* $\omega$, J. Combinatorial Theory, Ser. A **21** (1976), 137-146. MR0424571 (54:12530).

[T] S. Todorcevic, *Introduction to Ramsey spaces*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2010.

[vdW] B. L. Van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw Archief voor Wiskunde **15** (1927), 212-216.

[W] H. Weyl. *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins*. Math. Ann., **77** (1916), 313–352.