



ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Διδακτορική Διατριβή

Στρατηγική Συμπεριφορά Πελατών σε Συστήματα
Εξυπηρέτησης

Δημήτριος Λογοθέτης

Αθήνα, 2022

Η ερευνητική εργασία υποστηρίχτηκε από το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ.) στο πλαίσιο της Δράσης «Υποτροφίες ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ. Υποψηφίων Διδακτόρων» (Αριθμός Υποτροφίας: 1158.)



<https://www.elidek.gr>

Στρατηγική Συμπεριφορά Πελατών σε Συστήματα Εξυπηρέτησης

Δημήτριος Λογοθέτης

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή:

Επαμεινώνδας Κυριακίδης,
Καθηγητής,
Τμήμα Στατιστικής, ΟΠΑ

Απόστολος Μπουρνέτας,
Καθηγητής,
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Αντώνιος Οικονόμου (επιβλέπων),
Καθηγητής,
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή:

Επαμεινώνδας Κυριακίδης,
Καθηγητής,
Τμήμα Στατιστικής, ΟΠΑ

Απόστολος Μπουρνέτας,
Καθηγητής,
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Αντώνιος Οικονόμου,
Καθηγητής,
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Οδυσσέας Καναβέτας,
Επίκουρος Καθηγητής,
Mathematisch Instituut, Leiden Universiteit

Κωσταντίνος Καραματσούκης,
Αναπληρωτής Καθηγητής,
Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων

Αθανασία Μάνου,
Επίκουρη Καθηγήτρια,
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Σάμης Τρέβεζας,
Επίκουρος Καθηγητής,
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Στη μνήμη του πατέρα μου, Γεωργίου Λογοθέτη ...

*“I can live with doubt and uncertainty and not knowing.
I think it is much more interesting to live not knowing
than to have answers that might be wrong.”*

— RICHARD P. FEYNMAN

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής θα ήθελα πρωτίστως να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή Αντώνη Οικονόμου. Είχα την τύχη να τον γνωρίσω από τα πρώτα κιόλας χρόνια των προπτυχιακών μου σπουδών στο Τμήμα Μαθηματικών, μέσα από τις διαλέξεις του στα μαθήματα των πιθανοτήτων, των στοχαστικών μοντέλων, της συνδυαστικής και του δυναμικού προγραμματισμού. Κοιτάζοντας πίσω στα χρόνια αυτά, μπορώ πλέον να πω με σιγουριά πως οι διαλέξεις εκείνες αλλά και γενικότερα η επίδραση του τρόπου διδασκαλίας του, με ενέπνευσε ώστε να ξεχωρίσω τον κόσμο της επιχειρησιακής έρευνας, διαμορφώνοντας έτσι, σε πολύ μεγάλο βαθμό, το μονοπάτι που αποφάσισα να διαβώ. Στην πορεία των διδακτορικών μου σπουδών, η καθοδήγηση που μου προσέφερε ως επιβλέπων, αποδείχθηκε πραγματικά πολύτιμη, ενώ η συμβολή του στα ερευνητικά αποτελέσματα αλλά και γενικότερα στην ολοκλήρωση αυτού του έργου, ήταν καθοριστική. Αφιέρωσε τον χρόνο του, μοιράστηκε ανιδιοτελώς τις γνώσεις του, και μου έδειξε αμέριστη κατανόηση και ενθάρρυνση. Σε προσωπικό επίπεδο, αισθάνθηκα πως είχε πραγματική έγνοια όλα αυτά τα χρόνια. Τον ευχαριστώ ξεχωριστά, καθώς αποτέλεσε τον βασικότερο παράγοντα ώστε η πορεία για την εκπόνηση της παρούσας διατριβής, εκτός από πολύτιμη, να μείνει στη μνήμη μου ως μια ευχάριστη εμπειρία.

Ευχαριστώ εξίσου θερμά τον καθηγητή Σάμη Τρέβεζα, τον οποίο είχα την τύχη να γνωρίσω στο μεταπτυχιακό μάθημα Στατιστική στις Στοχαστικές Διαδικασίες, το οποίο ξεχώρισα καθώς σε αυτό είδα για πρώτη φορά πως ο κόσμος της επιχειρησιακής έρευνας μπορεί να συνυπάρξει με τον κόσμο της στατιστικής. Είχα επίσης την τιμή να συνεργαστώ μαζί του στην πορεία των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Τον ευχαριστώ για τις ωφέλιμες συζητήσεις, την άφογη συνεργασία αλλά και τις πολύτιμες γνώσεις που μου προσέφερε.

Επίσης, ευχαριστώ τον καθηγητή Επαμεινώνδα Κυριακίδη που με τίμησε με τη συμμετοχή του ως μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, όπως και τον καθηγητή Απόστολο Μπουρνέτα, τον οποίο ευχαριστώ ιδιαίτερα για τις αναρίθμητες γνώσεις που μου έχει μεταδώσει σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο Τμήμα Μαθηματικών. Ιδιαίτερα επιθυμώ να ευχαριστήσω και την καθηγήτρια Αθανασία Μάνου για την πολύτιμη συνεργασία που είχαμε στα πλαίσια του διδακτορικού αλλά και για την τιμή να συμμετέχει στην επταμελή εξεταστική επιτροπή. Ευχαριστώ, επίσης, τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής, τους καθηγητές Οδυσσέα Καναβέτα και Κωσταντίνο Καραματσούκη που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους.

Ακόμα, επιθυμώ να ευχαριστήσω τα μέλη του Τμήματος Μαθηματικών, και ιδιαίτερα, τα μέλη του Τομέα Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας για την εκπαίδευση που μου προσέφεραν σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, αλλά και για την έμπρακτη στήριξη που μου έδειξαν στην πορεία των μεταπτυχιακών και διδακτορικών μου σπουδών. Ευχαριστώ θερμά επίσης και το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας & Καινοτομίας για την οικονομική στήριξη που μου προσέφερε στη διάρκεια των διδακτορικών μου σπουδών.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τη συνοδοιπόρο μου Παρασκευή, που στάθηκε στο πλάι μου όλα αυτά τα χρόνια των μεταπτυχιακών και διδακτορικών σπουδών μου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστώ τους αδερφικούς μου φίλους, Ανδρέα, Γιάννη και Γιώργο για τη συμπαράστασή τους όλα αυτά τα χρόνια αλλά και την οικογένειά μου για την κατανόηση και τη στήριξή τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.



NATIONAL & KAPODISTRIAN
UNIVERSITY OF ATHENS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
SECTION OF STATISTICS AND OPERATIONS RESEARCH

Customer Strategic Behavior in Service Systems

DIMITRIOS LOGOTHETIS

Abstract

This Thesis deals with service systems under a game-theoretic framework where the customers and the system administrator can exhibit strategic behavior. Under this framework, the service systems are studied through an economic perspective, where the customers and the administrator are considered active entities that make decisions with economic considerations. These decisions are made to maximize their welfare, given the reward-cost structure of the system which from the customers' viewpoint, incorporates their desire for service and their unwillingness to suffer time delays due to congestion. Their decisions are also strategic, in the sense that individuals' beliefs about how others will decide, affect their decisions. Thus, the whole situation can be regarded as a game among the individual entities, where the primary objective is to determine the equilibrium strategy profiles and study its impact on the specific service system. On the other hand, the server administrator is a profit maximizer, who can control the service policy (allowing customers to renege or not), the provision of information (decide which level of information is the most appropriate) and regulate (implicitly) the customer flow through pricing.

In line with this framework, the dissertation consists of four distinct research projects, focusing on different aspects of strategic behavior and analyzing its impact on various service systems. Regarding the type of the strategic decisions, three different scenarios are investigated: the join-or-balk dilemma, the stay-or-renege dilemma, and the routing decisions, when several service options are available. We also study how these decisions are influenced by the provision of real-time information regarding several attributes of the system, as well as the impact of managerial decisions, such as to whether allow customers to renege or not. For these models, we provide a comprehensive game-theoretic and queueing analysis and discuss the equilibrium and socially optimal behavior.

In the first research project, we consider a general model of a transportation station where strategic customers arrive according to a Poisson process, the arriving instants of the transportation facilities form a renewal process and the capacities of successively arriving facilities are finite. Customers decide whether to stay or balk based on their expected waiting costs and the probability of being served, conditioning on the information provided. The information may include the capacity of the next facility, the elapsed time from the previous visit of the facility, and/or the number of customers that are present in the station. We

derive the customer equilibrium strategies and compare the equilibrium throughput and social welfare, under various information structures. We then determine the ideal level of information that should be provided according to the operational and economic parameters of a given system.

Customer strategic behavior regarding the join-or-balk dilemma in queueing systems with server vacations/failures has been studied intensively in the recent literature. The standard assumption in these studies is that the joining customers are not allowed to renege later. In the second research project, we relax this assumption and quantify the value of renegeing for strategic customers who face a queueing system with server vacations/failures. To focus on the renegeing feature, we study the customer strategic behavior in the simplest such system, that is in the M/M/1 queue with a server alternating between on and off periods. We show that the possibility of renegeing has a substantial effect on the equilibrium social welfare and throughput. In particular, as the reward from service varies in a given system, it becomes beneficial to activate or deactivate the option of renegeing to ensure higher welfare. Moreover, we show that the effect of the renegeing option is particularly significant in the case where the original system with non-strategic customers is unstable.

In the third research project, we consider the fluid on-off model of the basic queue with vacations/failures and study renegeing vs. no-renegeing when customers are strategic. We derive the equilibrium customer strategies and the corresponding performance measures of the system, and we use them to study the equilibrium throughput and social welfare. The main finding is that the existence of the renegeing option is very beneficial for overloaded systems, i.e., for such systems balking alone is not sufficient to achieve good outcomes. On the contrary, for underloaded systems, the renegeing option is not particularly valuable.

In the last research project, we study the routing decisions of passengers in a transportation station, where various types of facilities arrive with limited seating availability. The passengers' arrivals occur according to a Poisson process, the arriving instants of the transportation facilities form independent renewal processes and the seating availability at the successive visits of the facilities correspond to independent random variables, identically distributed for each facility. We analyze the strategic passenger behavior and derive the equilibrium strategies. We also discuss the associated social welfare optimization problem.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	Εισαγωγή	1
1.1	Θεωρητικό υπόβαθρο	1
1.2	Μεθοδολογία	8
1.3	Επισκόπηση της διατριβής	14
ΜΕΡΟΣ I		17
2	Η Επίδραση της Πληροφορίας σε ένα Σύστημα Μέσων Μεταφοράς με Στρατηγικούς Πελάτες	19
2.1	Εισαγωγή.	20
2.2	Μοντέλο και συμβολισμός.	26
2.3	Στρατηγική ισορροπίας στα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης	31
2.4	Μελέτη του συστήματος υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών	43
2.5	Η επίδραση της πληροφορίας στη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών	51
2.6	Η επίδραση της κατανομής των ενδιαμέσων χρόνων	53
2.7	Η επίδραση της κατανομής της χωρητικότητας	56
2.8	Το πρόβλημα του κοινωνικού διαχειριστή	57
3	Οι ειδικές περιπτώσεις σταθερών και εκθετικών ενδιαμέσων χρόνων	61
3.1	Εισαγωγή και διάρθρωση	61
3.2	Σταθεροί ενδιαμέσοι χρόνοι	61
3.3	Εκθετικοί ενδιαμέσοι χρόνοι	87
Επίλογος Μέρους I - Συζήτηση και Επεκτάσεις		95
Παράρτημα		97
ΜΕΡΟΣ II		139
4	Η αξία της υπαναχώρησης σε ένα σύστημα αναμονής με εναλλασσόμενες περιόδους λειτουργίας και αργίας	141
4.1	Εισαγωγή	142
4.2	Περιγραφή του μοντέλου και συμβολισμός	146
4.3	Στρατηγική ισορροπίας και στάσιμη κατανομή	146
4.4	Η αξία της υπαναχώρησης: Θεωρητικά και αριθμητικά αποτελέσματα	153
5	Η επίδραση των υπαναχωρήσεων σε ένα εναλλασσόμενο μοντέλο ρευστού με στρατηγικούς πελάτες	169
5.1	Εισαγωγή	170
5.2	Περιγραφή του μοντέλου	171
5.3	Στρατηγική ισορροπίας - περίπτωση FR	173

5.4	Στρατηγική ισορροπίας - περίπτωση FNR	179
5.5	Αριθμητικά πειράματα	181
	Επίλογος Μέρους II - Συζήτηση και Επεκτάσεις	185
	Παράρτημα	187
	ΜΕΡΟΣ III	197
6	Στρατηγικές δρομολόγησης σε ένα δίκτυο μέσω μεταφοράς	199
6.1	Εισαγωγή	200
6.2	Περιγραφή του μοντέλου	202
6.3	Στρατηγική Ισορροπίας	205
6.4	Το πρόβλημα του κοινωνικού διαχειριστή	210
6.5	Ειδική εφαρμογή.	214
6.6	Προβλήματα μεγιστοποίησης κέρδους μονοπωλίου.	215
	Επίλογος Μέρους III - Συζήτηση και Επεκτάσεις	217
	Παράρτημα	221
	Βιβλιογραφία	225

Εισαγωγή

Η παρούσα διατριβή αφορά τη μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης υπό τη θεώρηση ότι οι πελάτες και ο διαχειριστής του συστήματος είναι ενεργές αποφασίζουσες οντότητες, και ως ένα βαθμό ορθολογικές, ώστε να λαμβάνουν αποφάσεις στρατηγικού χαρακτήρα: Οι αποφάσεις τους στοχεύουν στη βελτιστοποίηση της ωφέλειας τους, λαμβάνοντας υπόψη πως και οι άλλες εμπλεκόμενες οντότητες δρουν με τον ίδιο σκοπό. Η κατάσταση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα (μη-συνεργατικό) παίγνιο μεταξύ αυτών των οντοτήτων και κύριος στόχος είναι ο προσδιορισμός των στρατηγικών ισορροπίας. Οι στρατηγικές αυτές, όταν υιοθετηθούν, επάγουν στο σύστημα μια κατάσταση ισορροπίας με βάση την οποία μπορεί να αποτιμηθεί η απόδοση του.

Με βάση την παραπάνω θεώρηση, ο κεντρικός στόχος της μελέτης αφορά την ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε ορισμένα συστήματα εξυπηρέτησης με ιδιαίτερα ευρύ πλαίσιο εφαρμογής. Τα προβλήματα που μελετώνται είναι διαφορετικής υφής και η παρουσίαση τους έχει χωριστεί σε 3 μέρη. Στο πρώτο μέρος εξετάζεται η επίδραση της πληροφορίας στη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σχετικά με το δίλημμα της εισόδου-άμεσης αποχώρησης. Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει προβλήματα στα οποία η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών που εξετάζεται αφορά το δίλημμα παραμονής/υπαναχώρησης, ενώ τέλος, στο τρίτο μέρος εξετάζεται η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών που αφορά τη δρομολόγηση τους σε ένα δίκτυο παράλληλων συστημάτων ολικών εξυπηρετήσεων.

Το παρόν κεφάλαιο συνοψίζει το βασικό υπόβαθρο για την κατανόηση της διατριβής και οργανώνεται ως εξής: Η ενότητα 1.1 αφορά το θεωρητικό πλαίσιο της μελέτης στο οποίο περιγράφονται τα βασικά συστήματα εξυπηρέτησης που μελετώνται στην παρούσα διατριβή, καθώς και το παιγνιοθεωρητικό πλαίσιο που στηρίζεται η μελέτη. Παράλληλα, παρουσιάζονται και οι βασικές ερευνητικές κατευθύνσεις της παρούσας μελέτης καθώς και η γενικότερη βιβλιογραφία. Στην ενότητα 1.2 περιγράφουμε τις βασικές έννοιες καθώς και τις τεχνικές υποθέσεις των προβλημάτων που μελετώνται, ενώ η ενότητα 1.3 ολοκληρώνει το τρέχον κεφάλαιο με μια επισκόπηση των προβλημάτων της διατριβής.

1.1 Θεωρητικό υπόβαθρο

Η μελέτη αυτή εμπίπτει σε μια ιδιαίτερα ενεργή, τις τελευταίες δεκαετίες, ερευνητική περιοχή της Επιχειρησιακής Έρευνας που αντλεί ιδέες και μεθοδολογικές προσεγγίσεις από τη Θεωρία Ουρών, τη Θεωρία Παιγνίων και τον Μαθηματικό Προγραμματισμό. Ειδικότερα, η ανάπτυξη όλων των μαθηματικών προτύπων που μελετάμε αλλά και ορισμένα από τα μεθοδολογικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε, ανήκουν στην ερευνητική περιοχή που καλύπτει η Θεωρία Ουρών. Το παιγνιοθεωρητικό πλαίσιο που έχουμε θεωρήσει στηρίζεται στη Θεωρία Παιγνίων, ενώ πολύ συχνά καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε προβλήματα βελτιστοποίησης που αποτελούν το βασικό αντικείμενο του Μαθηματικού Προγραμματισμού. Ο στόχος της ενότητας είναι να καλύψουμε τις βασικές θε-

ωρητικές έννοιες, να ορίσουμε τις κεντρικές ερευνητικές κατευθύνσεις για το πρωτότυπο μέρος της διατριβής αλλά και να συνδέσουμε τη μελέτη με την υπάρχουσα επιστημονική γνώση.

1.1.1 Συστήματα εξυπηρέτησης

Τα συστήματα εξυπηρέτησης (service systems) αποτελούν το κύριο αντικείμενο μελέτης της Θεωρίας Ουρών (Queueing Theory) και είναι στην ουσία μαθηματικά πρότυπα που αναπαριστούν (στοχαστικά) συστήματα εισόδου-εξόδου οντοτήτων που δέχονται κάποια μορφή επεξεργασίας από υπηρέτες του συστήματος. Συχνά, η Θεωρία αυτή χρησιμοποιείται για τη μελέτη πραγματικών συστημάτων στα οποία φθάνουν πελάτες που αποζητούν κάποια μορφή εξυπηρέτησης (από όπου έχει επικρατήσει και η συγκεκριμένη ονομασία).

Ως σημείο εκκίνησης της Θεωρίας Ουρών τίθεται συνήθως η θεμελιώδης εργασία του Erlang (1909) στην οποία δόθηκε μια περιγραφή για την κατανομή των κλήσεων που φθάνουν σε ένα τηλεφωνικό κέντρο καθώς και του χρόνου αναμονής μέχρι να ελευθερωθεί μια γραμμή. Λόγω της έλλειψης αυστηρής θεμελίωσης της Θεωρίας των Πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασιών, η ανάπτυξη του κλάδου καθυστέρησε. Ωστόσο, τις τελευταίες δεκαετίες, η Θεωρία Ουρών γνώρισε ιδιαίτερα μεγάλη άνθηση, ενώ το πλαίσιο εφαρμογής της είναι εξαιρετικά ευρύ (δείτε για παράδειγμα την [106]). Ειδικότερα, παραδείγματα εφαρμογών συναντάμε στη μελέτη των συστημάτων στον κλάδο της υγείας ([88]), στον κλάδο των μεταφορών ([148]), στην παραγωγή ([51]), στη διαχείριση αποθεμάτων ([111]), σε προβλήματα ροής της κυκλοφορίας ([135]) κ.α.

Ένα σύστημα εξυπηρέτησης μπορεί πλήρως να περιγραφεί μέσω των βασικών χαρακτηριστικών του: (1) Τη (στοχαστική) διαδικασία αφίξεων, (2) τους χρόνους εξυπηρέτησης, (3) το πλήθος ενεργών υπηρέτων, (4) το μέγεθος του χώρου αναμονής, (5) την πειθαρχία εξυπηρέτησης. Για την παρουσίαση των χαρακτηριστικών αυτών έχει επικρατήσει το σύστημα ονοματολογίας που εισήγαγε ο Kendall (1953). Συγκεκριμένα, η ονοματολογία αυτή έχει τη μορφή $A/B/c/k/(\cdot)$, όπου κάθε μια από παραμέτρους αναφέρεται σε κάποια από τα παραπάνω 5 χαρακτηριστικά. Ειδικότερα, το A αναφέρεται στη διαδικασία αφίξεων η οποία είναι συνήθως μια *ανανεωτική διαδικασία* (δείτε π.χ. το [115]) ενώ το B αναφέρεται στον χρόνους εξυπηρέτησης των πελατών, οι οποίοι συχνά θεωρούνται ανεξάρτητοι και ισόνομοι. Τα μικρά γράμματα c και k αναφέρονται στο πλήθος των (παράλληλων) υπηρέτων και τη μέγιστη χωρητικότητα του συστήματος (συμπεριλαμβάνοντας και τους πελάτες που βρίσκονται σε διαδικασία εξυπηρέτησης) αντίστοιχα. Στην περίπτωση που το σύστημα έχει φθάσει στο μέγιστο της χωρητικότητας του, όλες οι νέες αφίξεις απορρίπτονται και θεωρούνται χαμένες. Τέλος, εντός της παρένθεσης στην τελευταία θέση, σημειώνεται η συγκεκριμένη πειθαρχία σύμφωνα με την οποία πραγματοποιούνται οι εξυπηρετήσεις. Οι πιο συνηθισμένη πειθαρχία ουράς είναι η FCFS (First-Come-First-Served) κατά την οποία οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με τη σειρά που φθάνουν στο σύστημα. Όταν ο χώρος αναμονής έχει άπειρη χωρητικότητα ή όταν η πειθαρχία είναι η FCFS έχει θεωρηθεί ως σύμβαση να παραλείπεται η αναφορά των k και (\cdot) στον παραπάνω συμβολισμό. Επίσης, οι αφίξεις των πελατών ή/και οι εξυπηρετήσεις τους, μπορεί να γίνονται κατά ομάδες (σηματοδοτώντας το γεγονός αυτό με κατάλληλο συμβολισμό) σύμφωνα με κάποια πολιτική εξυπηρέτησης που θα πρέπει να διασαφηνίζεται. Παρακάτω περιγράφουμε συνοπτικά τα αρχικά συστήματα (δηλαδή, τα συστήματα χωρίς στρατηγικούς πελάτες) που σχετίζονται με τα προβλήματα που μελετώνται στη διατριβή.

Στα κεφάλαια 2-4 της διατριβής, το αρχικό σύστημα είναι στην ουσία ένα τροποποιημένο $M/GI^C/1$ σύστημα με ολικές εξυπηρετήσεις. Το γράμμα M συμβολίζει τη Μαρκοβιανή (ή αμνήμονη) διαδικασία αφίξεων των πελατών που είναι η διαδικασία Poisson ενώ το γράμμα GI σηματοδοτεί πως οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι από κάποια γενική κατανομή. Ωστόσο, στο υπό-μελέτη σύστημα έχουμε υποθέσει πως η εξυπηρέτηση δεν ξεκινά με την άφιξη κάποιου πελάτη, αλλά πραγματοποιείται ανεξάρτητα από τη διαδικασία αφίξεων, σε χρονικές στιγμές που αποτελούν στιγμές γεγονότων μιας ανανεωτικής διαδικασίας. Η εξυπηρέτηση γίνεται

κατά ομάδες τυχαίου μεγέθους. Το γράμμα C συμβολίζει τη μέγιστη χωρητικότητα της ομάδας που πρόκειται να εξυπηρετηθεί και αναπαρίσταται από μια διακριτή τυχαία μεταβλητή. Παρόλο που εξυπηρετούνται το πολύ C πελάτες κάθε φορά, οι υπόλοιποι πελάτες (αν υπάρχουν) που δεν κατάφεραν να εξυπηρετηθούν, απομακρύνονται από το σύστημα αφήνοντάς το κενό. Τα συστήματα αυτού του τύπου λέγονται συστήματα εκκαθαρίσεων (clearing systems).

Το πρόβλημα που μελετάμε στο κεφάλαιο 5 αφορά ένα σύστημα $M/M/1$ στο οποίο ο υπηρέτης εναλλάσσεται μεταξύ ενεργών περιόδων, στη διάρκεια των οποίων εξυπηρετεί πελάτες και περιόδων που παραμένει ανενεργός οπότε και γίνεται παύση της διαδικασίας εξυπηρέτησης. Το γράμμα M , στη δεύτερη θέση, υποδηλώνει πως οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανομημένοι. Επιπλέον, οι διάρκειες των περιόδων λειτουργίας και διακοπής είναι και αυτές εκθετικά κατανομημένες. Το σύστημα αυτό εντάσσεται στη γενικότερη κατηγορία των συστημάτων με διακοπές του υπηρέτη (Queueing systems with server vacation).

Το Κεφάλαιο 6 αφορά την εκδοχή του συστήματος του κεφαλαίου 5 ως μοντέλο ρευστού (fluid queue). Τέλος, στο Κεφάλαιο 7, το υπό-μελέτη σύστημα είναι ένα δίκτυο συστημάτων ολικών εκκαθαρίσεων σε παράλληλη σύνδεση.

Συστήματα ολικών εξυπηρέτησεων

Στα συστήματα αυτά εισέρχονται και συσσωρεύονται μονάδες τυχαίων ποσοτήτων μέσα σε χρονικά διαστήματα τυχαίου μήκους μέχρι κάποιες προκαθορισμένες συνθήκες να ικανοποιηθούν. Στη συνέχεια συμβαίνει μια 'εκκαθάριση' κατά την οποία κάποιες ή όλες οι μονάδες που έχουν συσσωρευτεί απομακρύνονται ταυτοχρόνως. Τα συστήματα αυτά έχουν μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία. Η ανάλυση τους ξεκίνησε από τον Stidham (1974) στην [125], βρίσκοντας εφαρμογή σε προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων (Inventory problems). Το μοντέλο που θεώρησε, χαρακτηρίζεται από μια αύξουσα στοχαστική διαδικασία εισόδου και μια στιγμιαία εκκαθάριση κατά την οποία το σύστημα αδειάζει πλήρως και κάνει επανεκκίνηση. Οι διαδικασίες που θεωρήθηκαν είναι αναγεννητικές ενώ δόθηκε μια έκφραση για τη στάσιμη κατανομή της ποσότητας που βρίσκεται στο σύστημα. Μάλιστα, η βασική παρατήρηση είναι πως για μια μεγάλη κλάση συστημάτων, η κατανομή αυτή δεν είναι ομοιόμορφη, πράγμα που υποδεικνύει πως η στοχαστική φύση της διαδικασίας εισόδου έχει άμεση επίδραση στη βέλτιστη απόφαση για εκκαθάριση. Αργότερα, ο Whitt (1981) στην [145] έδειξε πως για μια ακόμα μεγαλύτερη κλάση συστημάτων εκκαθαρίσεων (όπου αίρεται η απαίτηση για αύξουσες διαδικασίες εισόδου), η στάσιμη κατανομή είναι πάντα στοχαστικά μικρότερη ή ίση από την ομοιόμορφη κατανομή (με την έννοια της στοχαστικής κυριαρχίας 2ης τάξης).

Στην εργασία [126] που ακολούθησε, το μοντέλο γενικεύθηκε ώστε να επιτρέπει την επαναφορά του συστήματος, μετά την εκκαθάριση, σε κατάσταση διαφορετική από το 0. Με τη χρήση του ανανεωτικού θεωρήματος, προσδιορίστηκε η οριακή κατανομή ενώ δόθηκαν και εκφράσεις για τον υπολογισμό ορισμένων βασικών ποσοτήτων. Οι Serfozo και Stidham (1978) μελέτησαν στην [121] μια εκδοχή των συστημάτων εκκαθαρίσεων που ονόμασαν ήμι-στάσιμες διαδικασίες εκκαθάρισης στις οποίες οι εκκαθαρίσεις συμβαίνουν κατά διαστήματα. Μελετήθηκε η ασυμπτωτική κατανομή της ποσότητας που βρίσκεται στο σύστημα και η οποία αποδείχθηκε πως είναι ομοιόμορφη σε ορισμένες περιπτώσεις.

Στα χρόνια που ακολούθησαν, το πλαίσιο εφαρμογής των συστημάτων εκκαθαρίσεων επεκτάθηκε και σε άλλους κλάδους της Επιχειρησιακής έρευνας:

Ως συστήματα εξυπηρέτησης πελατών. Οι Boxma et al. (2001) στην [17] μελέτησαν ένα σύστημα εκκαθαρίσεων, προσδιορίζοντας τη στάσιμη κατανομή του, ως μοντέλο τύπου $M/G/1$ στο οποίο γεγονότα που καλούνται καταστροφές, συμβαίνουν σε τυχαίες χρονικές στιγμές και προκαλούν στιγμιαία απομάκρυνση ολόκληρου το υπολειπόμενου φορτίου

εξυπηρέτησης. Στα μοντέλα αυτά, οι χρόνοι των εκκαθαρίσεων μπορεί να είναι προγραμματισμένοι ή τυχαίοι ή ακόμα να συμβαίνουν τη στιγμή που το φορτίο υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο επίπεδο. Δείτε επίσης τις εργασίες Krishna και Arivudainambi (2000), [86] Economou και Fakinou (2003) [39], Di Crescenzo et al. (2003) [33].

Ως πληθυσμιακά μοντέλα (Population growth models) με ολικές καταστροφές κατά τις οποίες απαλείφεται πληθυσμός των μονάδων λόγω κάποιου εξωγενούς φυσικού γεγονότος. Δείτε τις εργασίες των Kyriakidis (1994) [87], Hanson και Tuckwell (1997) [61], Economou και Fakinou (2008) [40]. Οι εργασίες αυτές επικεντρώνονται στον υπολογισμό ορισμένων βασικών λειτουργικών ποσοτήτων από βιολογική σκοπιά, όπως η μεταβατική και η στάσιμη κατανομή του πληθυσμού, η πιθανότητα εξάλειψης αλλά και ο μέσος χρόνος μέχρι τη απαλοιφή του πληθυσμού.

Συστήματα με διακοπές

Το κεντρικό χαρακτηριστικό των συστημάτων εξυπηρέτησης με διακοπές του υπηρέτη είναι πως η ροή της εξυπηρέτησης μπορεί να διακοπεί για ένα χρονικό διάστημα και να συνεχιστεί αργότερα. Συστήματα αυτής της κατηγορίας συναντάμε σε πολλούς κλάδους της επιχειρησιακής δραστηριότητας: συστήματα που υπόκεινται σε βλάβες και επιδιορθώσεις, συστήματα με προγραμματισμένες διακοπές, συστήματα με χρόνους εκκίνησης, συστήματα όπου ο υπηρέτης εκτελεί πολλαπλού τύπου εργασίες κ.α.

Για την περιγραφή ενός συστήματος αυτής της κατηγορίας, θα χρειαστεί να ορίσουμε ακόμα ένα βασικό χαρακτηριστικό, την πολιτική διακοπών του υπηρέτη. Η πολιτική αυτή αφορά τον τρόπο που συμβαίνουν οι διακοπές: αν είναι προγραμματισμένες (π.χ. όταν το σύστημα μένει κενό ή όταν η ουρά φθάνει ένα επίπεδο N) ή συμβαίνουν τυχαία, τη διάρκεια της διακοπής: αν είναι τυχαία, ντετερμινιστική ή βασίζεται στην πραγματοποίηση κάποιου γεγονότος (π.χ. να συσσωρευθούν N πελάτες), στην πολιτική εξυπηρέτησης κατά τη διάρκεια της διακοπής: να λειτουργεί ο υπηρέτης με χαμηλότερο ρυθμό, να σταματά η ροή των αφίξεων, να απενεργοποιούνται οι εξυπηρετήσεις αλλά να συνεχίζονται οι αφίξεις κ.α. Το βιβλίο των Tian και Zhang (2006) [132] αφορά αποκλειστικά τα συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπές και περιλαμβάνει τα σημαντικότερα αποτελέσματα από τις μελέτες μέχρι και το 2005.

Μοντέλα ρευστού

Σε ορισμένα συστήματα εξυπηρέτησης, όπως για παράδειγμα σε μια (αξιόπιστη) υπηρεσία μεταφοράς, ο ρυθμός που πραγματοποιούνται οι αφίξεις των πελατών καθώς και οι εξυπηρετήσεις τους, είναι κατά πολύ μεγαλύτερος από τον ρυθμό που το όχημα παρουσιάζει κάποιες σοβαρές βλάβες που το καθιστούν μη-λειτουργικό. Η μαθηματική προτυποποίηση για αυτού του είδους τα συστήματα μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας συστήματα ρευστού (fluid queue). Αυτά είναι στην ουσία συστήματα εξυπηρέτησης με τη έννοια που περιγράφηκε αλλά με τη διαφορά ότι οι οντότητες που αποζητούν επεξεργασία θεωρούνται συνεχείς (αντί για διακριτές), όπως ένα ρευστό. Το ρευστό εισέρχεται και εξέρχεται στον χώρο επεξεργασίας (buffer) με ρυθμούς που εξαρτώνται από το στοχαστικό περιβάλλον της διαδικασίας το οποίο συχνά παριστάνεται ως μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου.

Συστήματα ρευστού χρησιμοποιούνται συχνά για την περιγραφή της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς συστημάτων εξυπηρέτησης σε συνθήκες υψηλού συνωστισμού (heavy traffic). Επίσης, μπορούν να αποτελέσουν προσέγγιση ενός συστήματος με διακριτές μονάδες θεωρώντας ότι οι διαδικασίες που αφορούν την είσοδο και την εξυπηρέτηση των πελατών εξελίσσονται σε έναν πολύ ταχύτερο χρονικό ορίζοντα από ότι οι διαδικασίες που αφορούν τον υπηρέτη (επισκευές, διακοπές, μεταβολή ταχύτητας εξυπηρέτησης κ.α.).

Το πλαίσιο εφαρμογής συστημάτων ρευστού είναι ιδιαίτερα ευρύ με πολλές εφαρμογές στον χώρο των τηλεπικοινωνιών, στα δίκτυα υψηλών ταχυτήτων (high speed networks), σε μοντέλα διάδοσης [122], σε συστήματα μεταφορών [7], σε αυτοματοποιημένα συστήματα βιομηχανικής παραγωγής (automated manufacturing systems) κ.α. Το πρώτο μοντέλο εισήχθη από τον Moran (1954) και αφορούσε τη μελέτη φραγμάτων νερού. Για μια ομαλή εισαγωγή στην περιοχή δείτε τα βιβλία των Gautam ([49]) και Schwartz ([120]) αλλά και την εργασία του Kulkarni ([84]) στην οποία παρέχεται μια εκτενής σύνοψη των πηγών της βιβλιογραφίας.

Δίκτυα παράλληλων συστημάτων εξυπηρέτησης

Στις περιπτώσεις όπου η εξυπηρέτηση ενός πελάτη απαιτείται να περάσει από διάφορα στάδια (χωρίς απαραίτητα κάποια ιεραρχία) ή μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω πολλών εναλλακτικών επιλογών, το κατάλληλο μαθηματικό πρότυπο είναι ένα δίκτυο ουρών (Queueing network). Το τελευταίο αποτελεί μια συλλογή μεμονωμένων συστημάτων εξυπηρέτησης που λειτουργούν συνήθως ανεξάρτητα μεταξύ τους και στα οποία οι πελάτες αφού ολοκληρώσουν την εξυπηρέτηση σε κάποιο από αυτά, είτε εισέρχονται σε κάποιο άλλο, είτε αποχωρούν. Τα δίκτυα στα οποία ο πληθυσμός των πελατών είναι σταθερός και συνεχώς ανατροφοδοτείται μεταξύ των διαφόρων συστημάτων αναφέρονται ως κλειστά ενώ εκείνα στα οποία επιτρέπονται οι εξωτερικές αποχωρήσεις ή/και οι αφίξεις σε ένα ή περισσότερα από τα επιμέρους συστήματα, αναφέρονται ως ανοικτά. Η εισαγωγή της ορολογίας και η αρχική μελέτη των δικτύων έγινε από τον Jackson ([77] και [78]). Εξίσου βασική είναι και η διάκριση σε σειριακά δίκτυα και παράλληλα δίκτυα. Στα πρώτα, η εξυπηρέτηση γίνεται διαδοχικά στα διάφορα συστήματα, ενώ στα παράλληλα, οι πελάτες δρομολογούνται (συνήθως με κάποια κατανομή πιθανότητας) σε κάποιο από τα συστήματα.

1.1.2 Παιγνιοθεωρητικό πλαίσιο

Στην κλασική Θεωρία Ουρών Αναμονής, οι πελάτες θεωρούνται παθητικές οντότητες που δεν λαμβάνουν αποφάσεις. Ωστόσο, σε πολλά πραγματικά παραδείγματα συστημάτων εξυπηρέτησης, οι πελάτες όχι μόνο λαμβάνουν αποφάσεις, αλλά και οι αποφάσεις τους μπορεί να είναι καθοριστικές για τη συνολική απόδοση του συστήματος. Για παράδειγμα, ο συνωστισμός σε ένα σύστημα μπορεί να επηρεάσει είτε θετικά, είτε αρνητικά τους πελάτες που φθάνουν σε αυτό. Ο υψηλός συνωστισμός μπορεί να σηματοδοτεί ότι οι παρεχόμενες υπηρεσίες είναι υψηλής ποιότητας όπως επίσης μπορεί να αποτελεί και ένδειξη χαμηλής απόδοσης στην εξυπηρέτηση. Επίσης, οι πελάτες που ήδη αναμένουν την εξυπηρέτηση τους σε ένα σύστημα, είναι πολύ πιθανό να αποφασίσουν να το εγκαταλείψουν στην περίπτωση που παρουσιαστεί κάποιο γεγονός το οποίο θα προκαλέσει περαιτέρω καθυστέρησης, όπως για παράδειγμα μια βλάβη. Ακόμη, στην περίπτωση που το σύστημα παρέχει πολλαπλούς τρόπους εξυπηρέτησης, όπως για παράδειγμα σε έναν σταθμό με μεταφορικά μέσα διαφορετικών τύπων, ή πολλαπλά στάδια εξυπηρέτησης, οι πελάτες θα πρέπει να έχουν τη δυνατότητα να επιλέξουν τόσο τον τρόπο που θα εξυπηρετηθούν όσο και τη σειρά με την οποία θα περάσουν από τα διάφορα αυτά στάδια.

Τα προβλήματα που μελετώνται στη διατριβή, προϋποθέτουν πως τόσο οι πελάτες όσο και οι άλλες οντότητες που εμπλέκονται με κάποιο τρόπο στο σύστημα, όπως ο διαχειριστής του συστήματος ή οι υπηρέτες, έχουν τη δυνατότητα να λαμβάνουν αποφάσεις, με σκοπό τη μεγιστοποίηση της ωφέλειας τους. Οι στρατηγικές των πελατών μπορεί να είναι διαφόρων τύπων: να αποφασίζουν αν θα εισέλθουν ή όχι, αν θα περιμένουν ή θα εγκαταλείψουν, αν θα προσπαθήσουν ξανά, αν θα αγοράσουν προτεραιότητα, ή ακόμα μπορεί να έχουν την επιλογή να διαλέξουν το είδος της εξυπηρέτησης που επιθυμούν. Από την άλλη, ο διαχειριστής ενός συστήματος που στοχεύει στη βελτιστοποίηση του κέρδους, μπορεί να αποφασίζει σχετικά με την πολιτική εξυπηρέτησης, να ελέγχει τη ροή πελατών μέσω τιμολόγησης, να αποφασίζει σχετικά με την ταχύτητα εξυπηρέτησης κ.α. Η βασική ιδέα που οδήγησε στην ανάπτυξη της συγκεκριμένης ερευνητικής περιοχής

είναι ότι οι οντότητες που προαναφέρθηκαν, παίρνουν τις αποφάσεις ανεξάρτητα η μια από την άλλη (δηλαδή χωρίς συνεργασία ή συντονισμό), αλλά επίσης λαμβάνουν υπόψη τους πως και οι άλλες οντότητες έχουν όμοιους στόχους. Κατά συνέπεια, δημιουργείται ένα (μη συνεργατικό) παίγνιο μεταξύ των διαφόρων οντοτήτων (με την έννοια της σύγκρουσης των συμφερόντων τους) το οποίο μπορεί να μελετηθεί υιοθετώντας έννοιες και μεθοδολογία από την Θεωρία Παιγνίων. Τα προβλήματα που μελετώνται σε αυτό το πλαίσιο αναφέρονται γενικότερα και ως προβλήματα στρατηγικής συμπεριφοράς σε συστήματα εξυπηρέτησης (queueing games).

Στα προβλήματα αυτά, μελετάται ένα σύστημα εξυπηρέτησης υπό την υπόθεση ότι οι πελάτες είναι στρατηγικοί, με την έννοια ότι οι αποφάσεις τους δεν επηρεάζονται μονάχα από τις πολιτικές και τις τιμολογήσεις υπηρεσιών που έχουν τεθεί από τον διαχειριστή, αλλά στηρίζονται και στις πεποιθήσεις τους σχετικά με τις ενέργειες που μπορούν να λάβουν οι υπόλοιπες οντότητες. Επομένως, τα κεντρικά Ερευνητικά Ερωτήματα (E.E.) που αφορούν τη μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης με στρατηγικούς πελάτες είναι (E.E.1) η εύρεση της στρατηγικής ισορροπίας των πελατών και (E.E.2) η ανάλυση της επίδρασης της, στην απόδοση του συστήματος, με βάση κάποιο μέτρο αποτίμησης (π.χ. ρυθμό απόδοσης, κοινωνικό όφελος). Η στρατηγική ισορροπία αποκαλύπτει στην ουσία τον τρόπο που οι πελάτες αντιδρούν στις παραμέτρους του μοντέλου ενώ μπορεί να φανερώσει και πολλά χρήσιμα συμπεράσματα ως προς τη γενικότερη αλληλεπίδραση τους με το σύστημα. Επίσης, από την ανάλυση του τρόπου με τον οποίο οι αποφάσεις των πελατών επηρεάζουν το σύστημα, μπορούν να προκύψουν νέες προσεγγίσεις που θα βοηθήσουν στη βελτίωση του σχεδιασμού και της γενικότερης διαχείρισης του συστήματος.

Γενικότερα, η οικονομική μελέτη ενός συστήματος κάτω από αυτή την παιγνιοθεωρητική προσέγγιση, μας επιτρέπει να εμβαθύνουμε σε ερευνητικά ερωτήματα που θα ήταν αδύνατο να εξερευνηθούν με την προηγούμενη θεώρηση (κατά την οποία οι πελάτες είναι παθητικές οντότητες). Η ερευνητική περιοχή που αναπτύχθηκε με βάση την παραπάνω θεώρηση, εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο της Επιχειρησιακής Έρευνας και τα τελευταία χρόνια έχει συγκεντρώσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον τόσο λόγω της ανάγκης να τεκμηριωθούν αυστηρά πολλές οικονομικές πολιτικές που έχουν αναπτυχθεί σε εμπειρική βάση, όσο και της επιτυχίας εύρεσης νέων πολιτικών, μέσω της θεωρητικής διερεύνησης, που βελτιώνουν τη λειτουργία των υπό εξέταση συστημάτων.

Η μελέτη των συστημάτων εξυπηρέτησης υπό αυτή την παιγνιοθεωρητική οπτική ξεκίνησε με τη μελέτη του M/M/1 συστήματος από τον Naor (1969) [104]. Στην εργασία αυτή, οι πελάτες αποφασίζουν αν θα εισέλθουν ή θα αποχωρήσουν γνωρίζοντας την κατάσταση του συστήματος (αριθμό πελατών). Την εργασία του Naor συμπλήρωσαν οι Edelson και Hildebrand (1975) [47] μελετώντας το αντίστοιχο (μη παρατηρήσιμο) σύστημα, στο οποίο οι πελάτες δεν έχουν πρόσβαση σε αυτή την πληροφορία. Έκτοτε, ο αριθμός εργασιών που εντάσσονται στην περιοχή αυτή, αυξάνεται συνεχώς. Μια εκτενής σύνοψη των αποτελεσμάτων μέχρι το 2003 έγινε στη μονογραφία των Hassin και Haviv (2003) [65], ενώ στο πρόσφατο βιβλίο του Hassin (2016) [63], συνοψίζονται τα σχετικά αποτελέσματα σε πάνω από 600 εργασίες.

Στρατηγική ισορροπίας και βέλτιστη πολιτική

Πρακτικά, το σημείο στρατηγικής ισορροπίας υπαγορεύει ένα σύνολο ενεργειών, όπου αν όλοι οι πελάτες αποφασίσουν να τις υιοθετήσουν, κανείς δεν θα ωφεληθεί με το να αποκλίνει μονομερώς. Πολλές φορές, οι στρατηγικές αυτές δεν είναι βέλτιστες από την οπτική ενός κεντρικού κοινωνικού διαχειριστή που λαμβάνει υπόψη του τις ανάγκες όλης της κοινωνίας. Ειδικότερα, το κεντρικό ζητούμενο στο πρόβλημα του κοινωνικού διαχειριστή είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης πολιτικής, δηλαδή ενός συνόλου ενεργειών, που αν όλες οι οντότητες το υιοθετήσουν, το συνολικό κέρδος που παράγεται από το σύστημα θα είναι το μέγιστο δυνατό. Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων, χρησιμοποιούνται συχνά τεχνικές από τον κλάδο του Μαθηματικού Προγραμματισμού. Το ιδιαίτερο ενδιαφέρον ωστόσο, βρίσκεται στη σύγκριση των βέλτιστων πολιτικών με τη

στρατηγική ισορροπίας των πελατών. Το κυριότερο εύρημα στη μελέτη του Naor (1969) για το παρατηρήσιμο M/M/1 σύστημα, είναι ανισότητα

$$n^{soc} \leq n^e, \quad (1.1)$$

που αφορά τα κατώφλια εισόδου των πελατών κάτω από την κοινωνικά βέλτιστη πολιτική (n^{soc}) και κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας (n^e). Με λόγια, με την ανισότητα αυτή συνάγουμε πως οι πελάτες, λειτουργώντας ατομικιστικά, εισέρχονται στο σύστημα περισσότερο από ότι είναι κοινωνικά βέλτιστο. Μάλιστα, η (1.1), όπως αποδείχθηκε στην πορεία, ισχύει σε πολύ γενικότερο πλαίσιο συστημάτων. Ειδικότερα, στην [68] γίνεται μια συστηματική μελέτη σχετικά με την εν λόγω ανισότητα, που περιλαμβάνει θεωρητικά αποτελέσματα αλλά και πολλά παραδείγματα συστημάτων στα οποία εξετάζεται η ισχύς της. Αν και η (1.1) αφορά το σύστημα M/M/1 για την περίπτωση όπου το πλήθος των παρόντων πελατών είναι με κάποιο τρόπο φανερό (γεγονός στο οποίο οφείλεται ο όρος «παρατηρήσιμο» σύστημα), αντίστοιχης σημασίας είναι και η σύγκριση των πολιτικών εισόδου για συστήματα χωρίς καθόλου (δείτε το [47]) ή με μερική πληροφόρηση (δείτε το [43]). Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, εξετάστηκε η σύγκριση της βέλτιστης πολιτικής με τη στρατηγική ισορροπίας για ορισμένα από τα συστήματα που μελετώνται, και συγκεκριμένα, στα Κεφάλαια 2 και 6.

Όταν οι δύο αυτές πολιτικές εισόδου δεν συμπίπτουν, αποκτά ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον (E.E.3) η διερεύνηση της προέλευσης της απόκλισης τους, (E.E.4) η αποτίμηση της, αλλά και (E.E.5) η εύρεση έμμεσων ρυθμιστικών τεχνικών που θα οδηγήσουν τους πελάτες να υιοθετήσουν μια κοινωνικά βέλτιστη πολιτική.

Γενικά, είναι γνωστό πως η ατομικιστική συμπεριφορά των πελατών, παρόλο που οδηγεί το σύστημα σε μια ευσταθή κατάσταση, η απόδοση του σε αυτή δεν είναι η βέλτιστη δυνατή (δείτε π.χ. [36]). Στα πλαίσια των παιγνίων σε συστήματα εξυπηρέτησης με στρατηγικούς πελάτες, η μειωμένη αυτή απόδοση σε σχέση με τη βέλτιστη πολιτική, συνδέεται συχνά με την ύπαρξη αρνητικών επιδράσεων (negative externalities) από τις ατομικιστικές αποφάσεις που λαμβάνουν οι πελάτες. Για παράδειγμα, σε οποιοδήποτε σύστημα με FCFS πειθαρχία, η απόφαση ενός πελάτη να εισέλθει θα επιβαρύνει τους μελλοντικούς πελάτες με τον χρόνο που θα χρειαστεί η εξυπηρέτησή του. Αυτό το κόστος που επωμίζονται οι υπόλοιποι δεν λαμβάνεται υπόψη στη στρατηγική ισορροπίας σε αντίθεση με τη βέλτιστη πολιτική. Από την άλλη, οι αποφάσεις των πελατών είναι δυνατόν να επάγουν και θετικές επιδράσεις (positive externalities) και επομένως η κατάσταση μπορεί να γίνει ιδιαίτερα πολύπλοκη και έχει νόημα το (E.E.3). Δείτε την εργασία των Bountali και Economou (2017) [13] όπου οι αποφάσεις των πελατών επάγουν ταυτόχρονα θετικές και αρνητικές επιδράσεις).

Για την αποτίμηση της απόκλισης της απόδοσης του συστήματος, μεταξύ της στρατηγικής ισορροπίας και της βέλτιστης πολιτικής, έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία διάφορα μέτρα. Ίσως το πιο ευρέως διαδεδομένο από αυτά είναι η *Τιμή της Αναρχίας* (Price of Anarchy (PoA)), δείτε π.χ. την Koutsoupias και Papadimitriou (1999) [83]). Με το μέτρο αυτό συγκρίνεται ο λόγος μεταξύ της συνολικής ωφέλειας ως προς τη βέλτιστη πολιτική και της συνολικής ωφέλειας υπό τη στρατηγική ισορροπίας. Όταν η τελευταία δεν είναι μοναδική, λαμβάνεται συχνά εκείνη που επάγει τη μεγαλύτερη συνολική ωφέλεια και το αντίστοιχο μέτρο καλείται *Τιμή της Ευστάθειας* (Price of Stability (PoS)).

Σχετικά με το (E.E.5), σε αντίθεση με τη στρατηγική ισορροπίας, η βέλτιστη πολιτική δεν υιοθετείται αυτόματα από τον πληθυσμό των πελατών. Επομένως, κρίνεται αναγκαίο να βρεθούν τρόποι παροχής κινήτρου στους πελάτες να υιοθετήσουν τις βέλτιστες πολιτικές, που να συνάδουν ταυτόχρονα με τους γενικούς κανόνες της ελεύθερης αγοράς. Ορισμένες ρυθμιστικές τεχνικές που έχουν προταθεί αφορούν την τιμολόγηση της των υπηρεσιών, τη θέωση ειδικών πειθαρχιών εισόδου, την παροχή προτεραιοτήτων κ.α. (δείτε π.χ. την εργασία των Haviv και Oz (2016) [70]).

Ωστόσο, ένας πολύ σημαντικός ρυθμιστικός μηχανισμός, που μελετάται συστηματικά τα τελευταία χρόνια, είναι ο έλεγχος της παρεχόμενης πληροφόρησης στους πελάτες.

1.1.3 Η επίδραση της πληροφορίας

Από τη μία, με τη συνεχή ανάπτυξη των δικτύων επικοινωνίας και την εξάπλωση του διαδικτύου, η πρόσβαση των πελατών στην πληροφορία δεν ήταν ποτέ ευκολότερη. Από την άλλη, η τεχνολογική πρόοδος αλλά και η ενσωμάτωση της στα σύγχρονα συστήματα εξυπηρέτησης, προσφέρει μεγάλη ευελιξία στον διαχειριστή να παρέχει στους πελάτες πληροφόρηση σε πραγματικό χρόνο αλλά και να ελέγχει την παροχή και το μέγεθος της. Αν και η θεωρητική διερεύνηση της επίδρασης της πληροφορίας έχει αξία από μόνη της, αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη της ως μηχανισμό παροχής κινήτρου στους στρατηγικούς πελάτες, ώστε να υιοθετήσουν την κοινωνικά βέλτιστη πολιτική.

Η πληροφορία μπορεί να έχει και ουσιαστική επίδραση στη συμπεριφορά των πελατών που σκέπτονται στρατηγικά και επηρεάζει την ψυχολογία τους, ενώ η παροχή της, μπορεί να συνοδεύεται από κάποιο κόστος. Η επίδραση της από τη άλλη, δεν είναι πάντα ξεκάθαρη. Για παράδειγμα, η απόκρυψη της τρέχουσας κατάστασης του υπηρέτη (αν είναι ενεργός ή όχι) θα οδηγήσει σε αύξηση ή σε μείωση της ροής των αφίξεων; Ακόμα, από τη σκοπιά των πελατών που περιμένουν σε μια στάση, είναι προτιμότερο να γνωρίζουν την ακριβή διαθεσιμότητα ελεύθερων θέσεων στο μέσο μεταφοράς που περιμένουν (χρησιμοποιώντας εξειδικευμένα συστήματα καταγραφής) ή αρκεί απλά μια εκτίμηση (όπως π.χ. χρησιμοποιώντας μια εφαρμογή της Google maps); Η απάντηση στο ερώτημα αυτό, αλλά από τη σκοπιά του διαχειριστή είναι η ίδια ή μήπως θα πετύχαινε καλύτερο αποτέλεσμα αν τελικά παρείχε τον χρόνο έλευσης του μέσου μεταφοράς;

Αυτό που παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, είναι πως η επίδραση του μεγέθους της παρεχόμενης πληροφόρησης είναι γενικά ασαφής. Ανάλογα με τα λειτουργικά χαρακτηριστικά του υποκείμενου συστήματος, αλλά και αναλόγως των οικονομικών παραμέτρων που σχετίζονται με αυτό, η περισσότερη πληροφόρηση μπορεί είτε να είναι πλεονεκτική, είτε να αποβεί επιζήμια τόσο για τον διαχειριστή του συστήματος όσο και για τους πελάτες. Η κύρια αιτία που οδηγεί σε αρνητική επίδραση καθώς αυξάνεται η πληροφόρηση (κάτι που είναι αδύνατον να συμβεί από την οπτική γωνία του κοινωνικού διαχειριστή), οφείλεται στις στρατηγικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των πελατών. Οι παραπάνω αποτελούν ορισμένους από τους βασικούς λόγους που ο έλεγχος στην παροχή της πληροφόρησης έχει σημαντικό αντίκτυπο. Μάλιστα, η αντίστοιχη ερευνητική περιοχή, στα πλαίσια των συστημάτων εξυπηρέτησης με στρατηγικούς πελάτες, είναι ιδιαίτερα ενεργή (δείτε π.χ. τις εργασίες [75] [37] [38] και το κεφάλαιο 4 από το βιβλίο [63]).

Στο Μέρος I στην παρούσα διατριβή παρουσιάζουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο μελετάμε διάφορα επίπεδα πληροφόρησης από θεωρητική σκοπιά, ενώ παρουσιάζονται και πολλά θεωρητικά και αριθμητικά ευρήματα στα πλαίσια μιας ειδικής εφαρμογής. Ένας από τους κύριους στόχους (E.E.6), είναι η επί μέρους θεωρητική μελέτη της επίδρασης της πληροφόρησης στη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών, όταν η συνολική διαθέσιμη πληροφόρηση μπορεί να διασπαστεί σε μικρότερα τμήματα πληροφορίας διαφορετικής υφής (Δείτε το Κεφάλαιο 2). Επιπλέον, βασικός στόχος με ιδιαίτερα πρακτική αξία (E.E.7), είναι και η εξακρίβωση του ιδανικού επιπέδου της παρεχόμενης πληροφόρησης σε ορισμένα ειδικά συστήματα εξυπηρέτησης (δείτε το Κεφάλαιο 3).

1.2 Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία για τα κεντρικά ερευνητικά ερωτήματα (E.E.1-E.E.7) που παρουσιάστηκαν, συνδυάζει μεθόδους και αποτελέσματα από τη Θεωρία Ουρών Αναμονής, τη Θεωρία Παιγνίων και τον Μαθηματικό Προγραμματισμό. Αναλυτική επισκόπηση της γενικότερης μεθοδολογίας μπορεί

να βρεθεί στα βιβλία των Hassin και Haviv (2003) [65] και Stidham (2009) [127], ενώ πιο εξειδικευμένες μεθοδολογικές προσεγγίσεις μπορούν να βρεθούν και στις σχετικές εργασίες που αναφέρονται στην εισαγωγή του κάθε κεφαλαίου. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε το βασικό μεθοδολογικό πλαίσιο καθώς και ορισμένες βασικές έννοιες και ορισμούς που θα χρησιμοποιηθούν στο κεντρικό μέρος της διατριβής. Επιπλέον, περιγράφουμε τις κεντρικές υποθέσεις (Υ1-Υ10) στις οποίες στηρίζεται η ανάλυση που πραγματοποιούμε.

1.2.1 Στρατηγικές αποφάσεις

Στα προβλήματα με στρατηγικούς πελάτες, κάθε πελάτης καλείται να λάβει μια συγκεκριμένη ενέργεια όπως για παράδειγμα: αν θα εισέλθει ή όχι στο σύστημα, αν θα αγοράσει προτεραιότητα, το πλάνο εξυπηρέτησης που θα ακολουθήσει, το είδος της εξυπηρέτησης που θα χρησιμοποιήσει, τον χρόνο παραμονής του, τη στιγμή που θα αφιχθεί στο σύστημα κ.α. Προκειμένου να ορίσουμε την έννοια της στρατηγικής των πελατών και του παιγνίου που διαμορφώνεται μεταξύ τους, θα αναφέρουμε αρχικά το βασικό πλαίσιο και την ορολογία από τη Θεωρία Παιγνίων.

Ένα πεπερασμένο παίγνιο καθορίζεται από τα εξής τρία στοιχεία: (1) ένα πεπερασμένο σύνολο παικτών $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$, (2) ένα πεπερασμένο σύνολο ενεργειών (ή ισοδύναμα, *καθαρών στρατηγικών*) \mathcal{A}_i που αντιστοιχεί στον παίκτη i , και (3) μια συλλογή από *συναρτήσεις πληρωμής* $G_i : \prod_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{A}_i \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες εκφράζουν τις πληρωμές τους. Τα στοιχεία του $\prod_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{A}_i$ είναι τα διάνυσματα $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathcal{A}_i$, $i \in \mathcal{N}$, που παριστάνουν τα πλάνα ενεργειών (ισοδύναμα, *καθαρών στρατηγικών*) για όλους τους παίκτες. Δοθέντος ενός \mathbf{a} , η $G_i(\mathbf{a})$, η οποία γράφεται και ως $G_i(a_i, \mathbf{a}_{-i})$, εκφράζει την πληρωμή του παίκτη i , αν παίξει την ενέργεια a_i , και οι υπόλοιποι παίκτες παίζουν τις ενέργειες στο \mathbf{a}_{-i} . Με το τελευταίο, εννοούμε το διάνυσμα που παριστάνει το πλάνο δράσης των υπόλοιπων παικτών, δηλαδή περιλαμβάνει τις ενέργειες όλων των παικτών, εκτός του παίκτη i . Για παράδειγμα, αν ο παίκτης i αλλάξει ενέργεια, από a_i στην a'_i και οι άλλοι παίκτες παραμείνουν στις ενέργειες τους, τότε το \mathbf{a} αλλάζει στο (a'_i, \mathbf{a}_{-i}) .

Εκτός από την καθαρή στρατηγική του παίκτη i , θεωρούμε και τη *μικτή στρατηγική* s_i , που είναι κάθε κατανομή πιθανότητας στο σύνολο των ενεργειών του \mathcal{A}_i . Με την υπόθεση πως το \mathcal{A}_i είναι πεπερασμένο, το \mathcal{S}_i είναι απλά ένα simplex πάνω στο \mathcal{A}_i , (δηλαδή $\mathcal{S}_i = \{s_i = (x_1, \dots, x_{|\mathcal{A}_i|}) : \sum_{j=1}^{|\mathcal{A}_i|} x_j = 1, x_j \in [0, 1], j = 1, 2, \dots, |\mathcal{A}_i|\}$). Το σύνολο των μικτών στρατηγικών του παίκτη i συμβολίζεται με \mathcal{S}_i . Επίσης, ορίζουμε το *στρατηγικό προφίλ* των παικτών ως το διάνυσμα

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n), \quad s_i \in \mathcal{S}_i, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Τέλος, οι βασικές υποθέσεις στο πλαίσιο της Θεωρίας παιγνίων είναι οι ακόλουθες:

- (Υ1) Ο κάθε παίκτης τυχαιοποιεί τις αποφάσεις-ενέργειες του ανεξάρτητα από τους άλλους παίκτες.
- (Υ2) Οι παίκτες λαμβάνουν την ενέργεια τους ταυτόχρονα (στην ουσία αυτό που απαιτείται είναι πως κάθε φορά που κάποιος παίκτης λαμβάνει μια ενέργεια, αυτή δεν φανερώνεται στους υπόλοιπους και ο χρόνος αντίδρασης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του παιγνίου).
- (Υ3) Οι παίκτες χρησιμοποιούν την αναμενόμενη πληρωμή τους (*παίκτες ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο* (risk neutral)).
- (Υ4) Ο κάθε παίκτης επιδιώκει να μεγιστοποιήσει τη δικιά του αναμενόμενη πληρωμή (*ορθολογικοί - ατομιστές παίκτες* (rational players)).

Παρατηρήστε πως με την (Υ3), οι παίκτες δεν λαμβάνουν υπόψη τη συγκεκριμένη κατανομή για την πληρωμή τους, παρά μόνο την αναμενόμενη τιμή. Ως εναλλακτικές στην (Υ3), έχουν μελετηθεί στη βιβλιογραφία οι περιπτώσεις που οι παίκτες είτε επιδιώκουν τον κίνδυνο (Risk seeking)

είτε προσπαθούν να τον αποφύγουν (Risk averse). Σχετικά με την **(Υ4)**, ο όρος «ορθολογική» συμπεριφορά των παικτών έχει γίνει συνώνυμο με τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης πληρωμής από τη θεμελιώδη συνεισφορά των Neumann και Morgenstern (1947) στο [138]. Λόγω της υπόθεσης **(Υ1)** της ανεξαρτησίας των ενεργειών των παικτών από τους μηχανισμούς τυχαιοποίησης, οι πληρωμές των παικτών (ως πλέον τ.μ) $G_i(\alpha)$ θα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επειδή το \mathcal{A}_i είναι πεπερασμένο, το διάνυσμα (a_1, a_2, \dots, a_n) έχει πιθανότητα εμφάνισης $s_1(a_1) \cdot s_2(a_2) \cdot \dots \cdot s_n(a_n)$ και επομένως, η αναμενόμενη πληρωμή του παίκτη i είναι

$$\tilde{G}_i(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i} G_i(\alpha) \prod_{i=1}^n s_i(a_i).$$

Μεταξύ των στρατηγικών s_i^1, s_i^2 του παίκτη i , λέμε πως η στρατηγική s_i^1 κυριαρχεί ασθενώς της s_i^2 , αν για οποιοδήποτε προφίλ στρατηγικών των υπόλοιπων παικτών \mathbf{s}_{-i} , έχουμε ότι $G_i(s_i^1, \mathbf{s}_{-i}) \geq G_i(s_i^2, \mathbf{s}_{-i})$ και η ανισότητα είναι γνήσια για τουλάχιστον ένα προφίλ \mathbf{s}_{-i} . Επίσης, λέμε πως η s_i^1 κυριαρχεί ισχυρά της s_i^2 , αν η ανισότητα είναι γνήσια για κάθε στρατηγικό προφίλ \mathbf{s}_{-i} των υπολοίπων παικτών.

Θεωρούμε τώρα έναν παίκτη i . Δοθέντος ενός στρατηγικού προφίλ των υπολοίπων, έστω \mathbf{s}_{-i} , η στρατηγική s_i^* του παίκτη i , καλείται βέλτιστη απάντηση στην \mathbf{s}_{-i} , αν για κάθε στρατηγική s_i του παίκτη i , ισχύει ότι $G_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}) \geq G_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$. Δηλαδή, η s_i^* μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $f(x) = G_i(x, \mathbf{s}_{-i})$. Το σύνολο όλων των βέλτιστων απαντήσεων απέναντι στην \mathbf{s}_{-i} συμβολίζεται με $\text{BR}(\mathbf{s}_{-i})$.

Μια στρατηγική s_i του παίκτη i καλείται ασθενώς (αντίστοιχα, ισχυρά) κυριαρχούσα, αν κυριαρχεί ασθενώς (αντίστοιχα, ισχυρά) κάθε άλλη στρατηγική s'_i του παίκτη i . Ένα στρατηγικό προφίλ $\mathbf{s}^e = (s_1^e, s_2^e, \dots, s_n^e)$ καλείται στρατηγική ισορροπίας (equilibrium), αν για κάθε παίκτη i , η στρατηγική s_i^e είναι βέλτιστη απάντηση απέναντι στην \mathbf{s}_{-i}^e . Σε όσα ακολουθούν, ο όρος στρατηγική ισορροπίας θα θεωρείται συνώνυμος με τον όρο σημείο στρατηγικής ισορροπίας κατά Nash.

Στα πλαίσια της μελέτης των συστημάτων εξυπηρέτησης με στρατηγικούς πελάτες, το παραπάνω εννοιολογικό πλαίσιο θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο αλλά δεν μπορεί να εφαρμοστεί απ' ευθείας. Προκύπτουν διάφορες δυσκολίες που όμως μπορούν να ξεπεραστούν ορίζοντας ανάλογες έννοιες και επιτρέποντας ορισμένες παραδοχές που θα περιγράψουμε. Η πρώτη δυσκολία αφορά το σύνολο των παικτών (πλέον πελατών), το οποίο θα είναι άπειρο, καθώς οι πιθανοί πελάτες του συστήματος είναι εν γένει άπειροι. Γενικά στη βιβλιογραφία της Θεωρίας Παιγνίων, έχουν μελετηθεί πολλές επεκτάσεις των πεπερασμένων παιγνίων, σε παίγνια με αριθμησιμο το πολύ πλήθος παικτών αλλά και σε παίγνια στα οποία το πλήθος των παικτών είναι υπεραριθμησιμο, όπως για παράδειγμα στο πρόβλημα με το μοντέλο ρευστού που μελετάται στο Κεφάλαιο 5 της διατριβής. Γενικά τα παίγνια αυτά αναφέρονται ως Non-Atomic games (Δείτε π.χ. την [119]). Από την άλλη, χρησιμοποιώντας την ανανεωτική φύση της στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος (όταν αυτό είναι δυνατό), μπορούμε ισοδύναμα να μελετήσουμε το μη-επαναλαμβανόμενο (one-shot) παίγνιο μεταξύ του πεπερασμένου πλήθους πελατών που φθάνουν κατά τη διάρκεια ενός ανανεωτικού κύκλου. Δείτε την πολύ πρόσφατη εργασία [71] στην οποία παρουσιάστηκε αυτή η προσέγγιση. Μάλιστα, εφαρμόζουμε την τεχνική αυτή στα πλαίσια του προβλήματος που μελετάται στο Κεφάλαιο 2.

Επιπλέον επεκτάσεις των πεπερασμένων παιγνίων που έχουν μελετηθεί βιβλιογραφικά, αφορούν τα παίγνια στα οποία το σύνολο ενεργειών του κάθε παίκτη είναι υπεραριθμησιμο (games with continuous strategy sets) όπως για παράδειγμα, όταν οι πελάτες αποφασίζουν τον χρόνο άφιξης τους στο σύστημα (δείτε π.χ. τις [50], [80]), όταν αποφασίζουν σχετικά με τον χρόνο παραμονής τους σε αυτό (δείτε π.χ. το Μέρος II της παρούσας διατριβής) κ.α.

Ακόμα, μια ενέργεια μπορεί να λαμβάνεται ακριβώς μια φορά σε μια συγκεκριμένη χρονική

στιγμή πριν την είσοδο στο σύστημα (όπως π.χ. με το δίλημμα εισόδου-άμεσης αναχώρησης), ή μπορεί να αφήνεται ανοικτή καθ' όλη τη διάρκεια που ο πελάτης βρίσκεται στο σύστημα (όπως π.χ. με το δίλημμα παραμονής-υπαναχώρησης). Επομένως μπορούμε να διακρίνουμε τα προβλήματα τόσο ως προς τον φύση της ενέργειας, σε διακριτού ή συνεχούς τύπου, όσο και ως προς τον τρόπο που αυτή λαμβάνεται, σε μεμονωμένη και αμετάκλητη ή επαναλαμβανόμενη.

Μια ακόμα διαφορά σε σχέση με το πλαίσιο των πεπερασμένων παιγνίων είναι πως οι πελάτες στα προβλήματα που μελετάμε, δεν λαμβάνουν τις αποφάσεις του ταυτοχρόνως καθώς θεωρούμε πως φθάνουν διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλο στο σύστημα. Το πρόβλημα αυτό ωστόσο επιλύεται άμεσα αν αντικαταστήσουμε την $(\Upsilon 2)$ με την $(\Upsilon 2^*)$: Ο χρόνος που οι διαδοχικοί πελάτες λαμβάνουν τις στρατηγικές δεν έχει επίδραση στο αποτέλεσμα του παιγνίου και κάθε νέος πελάτης που φθάνει στο σύστημα δεν γνωρίζει τις στρατηγικές που έπαιξαν οι προηγούμενοι. Σε όσα ακολουθούν στη διατριβή, πέρα από τις υποθέσεις $(\Upsilon 1)$, $(\Upsilon 2^*)$, $(\Upsilon 3)$, $(\Upsilon 4)$ παραπάνω, θα δεχτούμε και τις υποθέσεις $(\Upsilon 5)$ - $(\Upsilon 8)$, που περιγράφουμε παρακάτω, οι οποίες αποτελούν και τις τυπικές υποθέσεις στο πλαίσιο των συστημάτων εξυπηρέτησης με στρατηγικούς πελάτες. Ειδικότερα, οι $(\Upsilon 5)$ - $(\Upsilon 7)$ συνοψίζονται ως εξής:

$(\Upsilon 5)$ Οι πελάτες είναι ομογενείς (homogeneous customers).

$(\Upsilon 6)$ Η αναμενόμενη πληρωμή του κάθε πελάτη είναι γραμμική συνάρτηση της στρατηγικής του.

$(\Upsilon 7)$ Το σύστημα εξυπηρέτησης βρίσκεται σε στασιμότητα.

Λόγω της $(\Upsilon 5)$, οι πελάτες είναι πρακτικά όμοιοι και επομένως θα αντλούν τις στρατηγικές από ένα κοινό σύνολο στρατηγιών, έστω \mathcal{S} , ενώ θα έχουν και κοινή συνάρτηση ωφέλειας (δηλαδή αναμενόμενη συνάρτηση πληρωμής), έστω U . Επομένως, το παίγνιο μεταξύ των πελατών θα είναι *συμμετρικό* και θα καθορίζεται από το \mathcal{S} και από την αναμενόμενη συνάρτηση πληρωμής $U(s, s')$ που αντιπροσωπεύει την ωφέλεια ενός πελάτη που παίζει τη στρατηγική s , όταν οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική s' . Η υπόθεση αυτή πολύ βολική από μαθηματικής σκοπιάς αλλά μπορεί εύκολα να γενικευτεί θεωρώντας ένα πλαίσιο με μη-ομογενείς πελάτες. Ειδικότερα, στη βιβλιογραφία έχουν μελετηθεί πολλά συστήματα στα οποία οι πελάτες χωρίζονται σε διαφορετικές κλάσεις, όπου κάθε κλάση περιέχει ομογενείς πελάτες. Δείτε για παράδειγμα την Van Mieghem [134]. Σύμφωνα με το $(\Upsilon 6)$, αν η στρατηγική s ενός πελάτη είναι μίξη των ενεργειών a_1, \dots, a_r , τότε

$$U(s, s') = \sum_{j=1}^r a_j U(a_j, s').$$

Ο υπολογισμός της συνάρτησης ωφέλειας αποτελεί το βασικό συστατικό για τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών. Ειδικότερα, για τον υπολογισμό της κάνουμε την ακόλουθη τυπική παραδοχή $(\Upsilon 8)$: Αν θεωρήσουμε έναν *επιλεγμένο* πελάτη (tagged customer), που μπορεί να είναι οποιοσδήποτε από τους πελάτες, ο οποίος κατά την άφιξη του στο σύστημα αποφασίζει να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική s , δεδομένου ότι οι υπόλοιποι πελάτες έχουν υιοθετήσει μια στρατηγική s' , τότε, η στρατηγική s του επιλεγμένου πελάτη δεν επηρεάζει την απόδοση του συστήματος. Ειδικότερα, η στοχαστική εξέλιξη του συστήματος καθώς και η απόδοση του, θα καθορίζονται από τη στρατηγική s' των υπόλοιπων πελατών, καθώς η επίδραση του επιλεγμένου πελάτη θεωρείται αμελητέα.

Επισημαίνουμε πως η υπόθεση $(\Upsilon 7)$ γίνεται προς την αποφυγή πολύπλοκων προβλημάτων που σχετίζονται με τη μεταβατική κατανομή του συστήματος εξυπηρέτησης. Ειδικότερα, σύμφωνα με αυτή, το σύστημα έχει λειτουργήσει για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα και οι πελάτες, έχουν υιοθετήσει τη συμμετρική στρατηγική τους από την αρχή της λειτουργίας. Επομένως, τη χρονική στιγμή που ο επιλεγμένος πελάτης πρόκειται να λάβει την απόφασή του, η υποκείμενη στοχαστική

διαδικασία που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος έχει φθάσει τη στάσιμη κατάσταση της, η οποία θα εξαρτάται από την κοινή στρατηγική που ο πληθυσμός των πελατών έχει υιοθετήσει.

Με βάση τα παραπάνω, θεωρούμε τους ανάλογους ορισμούς της βέλτιστης απάντησης και της στρατηγικής ισορροπίας στα πλαίσια της μελέτης της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε συστήματα εξυπηρέτησης

Ορισμός 1.1. (Βέλτιστη Απάντηση)

Θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη και υποθέτουμε πως οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική s' . Μια στρατηγική s^* του επιλεγμένου πελάτη, λέγεται βέλτιστη απάντηση απέναντι στην s' των άλλων πελατών, αν για κάθε στρατηγική s του επιλεγμένου πελάτη έχουμε ότι $U(s^*, s') \geq U(s, s')$.

Δηλαδή, $s^* \in \arg \max_{x \in \mathcal{S}} f(x)$ όπου $f(x) = U(x, s')$. Το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων απέναντι στην s' συμβολίζεται με $BR(s')$.

Ορισμός 1.2. (Στρατηγική Ισορροπίας)

Η στρατηγική s^e λέγεται (συμμετρική) στρατηγική ισορροπίας αν είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της. Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$s^e \in BR(s^e).$$

Ορισμός 1.3. (Κυριαρχούσα Στρατηγική)

Η στρατηγική s^* του επιλεγμένου πελάτη λέγεται κυριαρχούσα στρατηγική αν είναι βέλτιστη απάντηση απέναντι σε οποιαδήποτε στρατηγική s των άλλων πελατών. Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$s^* \in BR(s) \text{ για κάθε } s \in \mathcal{S}.$$

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη στρατηγική ισορροπίας ως το πλάνο δράσης που αν συμφωνηθεί να ακολουθηθεί από τον πληθυσμό των πελατών, κανείς δεν έχει συμφέρον να αποκλίνει μονομερώς από αυτό. Πρακτικά, θα αποτελεί για το σύστημα ένα ευσταθές σημείο το οποίο θα επάγει μια νέα στάσιμη κατανομή. Υπογραμμίζουμε πως η απόδειξη της ύπαρξης στρατηγικών ισορροπίας (σε μικτές στρατηγικές) σε πεπερασμένα παίγνια έγινε από τον Nash ([105]) χρησιμοποιώντας Θεωρήματα σταθερού σημείου. Ωστόσο η ύπαρξη δεν μπορεί να εξασφαλισθεί σε γενικότερο πλαίσιο. Δηλαδή, στο πλαίσιο των συστημάτων εξυπηρέτησης με στρατηγικούς πελάτες, δεν έχει εξασφαλισθεί ούτε η ύπαρξη ούτε η μοναδικότητα μιας τέτοιας στρατηγικής. Επομένως, στην παιγνιοθεωρητική προσέγγιση οποιουδήποτε συστήματος εξυπηρέτησης, η θεωρητική διερεύνηση σχετικά με την ύπαρξη και το πλήθος των στρατηγικών ισορροπίας αποτελεί τον πρωτεύοντα στόχο.

Η έννοια της κυριαρχούσας στρατηγικής, είναι ισχυρότερη από εκείνη της στρατηγικής ισορροπίας (παρατηρήστε πως κάθε κυριαρχούσα στρατηγική είναι ταυτόχρονα και στρατηγική ισορροπίας) και επομένως, κυριαρχούσες στρατηγικές υπάρχουν σχετικά σπάνια (και κυρίως σε προβλήματα που παρέχεται κάποιο είδος πληροφόρησης).

1.2.2 Βέλτιστη Πολιτική

Η στρατηγική ισορροπία θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως μια ατομικά βέλτιστη πολιτική, με την έννοια πως υπαγορεύει για κάθε πελάτη τη βέλτιστη απόφαση που μπορεί να λάβει, δεδομένου ότι ενδιαφέρεται αποκλειστικά για το δικό του συμφέρον. Σε πλήρη αντίθεση με αυτή την προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε το ίδιο πρόβλημα αλλά από την οπτική γωνία του κοινωνικού διαχειριστή (social planner) που στοχεύει στη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας ανά πελάτη, δοθέντος ότι η συμμετρική στρατηγική s έχει υιοθετηθεί από τον πληθυσμό των πελατών. Η ποσότητα αυτή είναι η $U(s, s)$. Επίσης, χρησιμοποιούμε τον όρο πολιτική, καθώς η s καθορίζεται από τον κοινωνικό διαχειριστή και όχι από τους ίδιους τους πελάτες.

Ορισμός 1.4. (Βέλτιστη Πολιτική)

Η πολιτική s^{soc} καλείται βέλτιστη πολιτική αν $U(s^{soc}, s^{soc}) \geq U(s, s)$ για κάθε $s \in \mathcal{S}$.

1.2.3 Στρατηγικές δρομολόγησης σε δίκτυα παράλληλων συστημάτων

Η μελέτη των παιγνίων δρομολόγησης (routing games) σε παράλληλα δίκτυα ξεκίνησε από τον Rosenthal (1973) [113] στο πλαίσιο των προβλημάτων μεταφοράς, θεωρώντας ένα πεπερασμένο σύνολο παικτών που μοιράζονται ένα δίκτυο υπό συνθήκες συνωστισμού. Το βασικό ζητούμενο σε αυτά προβλήματα είναι ο προσδιορισμός της στρατηγικής ισορροπίας και η σύγκριση της με τη βέλτιστη πολιτική. Γενικότερα, όταν το παίγνιο αφορά πεπερασμένο πλήθος παικτών, η έννοια της ισορροπίας στο δίκτυο αποδίδεται ικανοποιητικά από τη στρατηγική ισορροπία κατά Nash. Ωστόσο, όταν το σύνολο των παικτών είναι άπειρο, τότε μπορεί να θεωρηθεί πως οι αποκλίσεις από τη στρατηγική ισορροπίας για ένα πεπερασμένο σύνολο παικτών θα έχουν αμελητέα επίδραση. Η θεώρηση αυτή οδήγησε σε μια νέα έννοια ισορροπίας στα προβλήματα αυτού του είδους, η οποία διατυπώθηκε από τον Wardrop (1952) [144] και αφορούσε τον προσδιορισμό της «ευσταθούς» ροής σε ένα δίκτυο μεταφοράς. Συγκεκριμένα, ο Wardrop πρότεινε την εξής αρχή: *The journey times on all the routes actually used are equal, and less than those which would be experienced by a single vehicle on any unused route.*

1.2.4 Στρατηγικές και πληροφόρηση

Μια στρατηγική των πελατών είναι πρακτικά ένα πλάνο δράσης που υπαγορεύει στους πελάτες πλήρεις οδηγίες σχετικά με τις αποφάσεις που θα λάβουν σε κάθε κατάσταση του συστήματος. Η πληροφόρηση παρέχει στους πελάτες κάποια ένδειξη σχετικά με την κατάσταση που βρίσκεται το σύστημα. Όταν δεν υπάρχει πληροφόρηση, οι στρατηγικές θα εξαρτώνται αποκλειστικά από τις οικονομικές παραμέτρους του συστήματος, με την προϋπόθεση βέβαια πως υπάρχει τρόπος αυτές να είναι γνωστές. Ειδικότερα, θεωρείται ως δεδομένο πως η γνώση αυτών των παραμέτρων απορρέει από επαναληψιμότητα του παιγνίου. Από την άλλη, όταν δίνεται κάποιο είδος πληροφορίας, αυτό θα επηρεάσει το σύνολο ενεργειών των πελατών. Ένα από τα συνηθέστερα επίπεδα πληροφόρησης που μελετώνται στη βιβλιογραφία είναι το «παρατηρήσιμο» επίπεδο, στο οποίο οι πελάτες πληροφορούνται σχετικά με το πλήθος των παρόντων πελατών. Αν η στρατηγική απόφαση αφορά το δίλημμα εισόδου-άμεσης αποχώρησης, τότε, το σύνολο στρατηγικών τους θα επεκταθεί από το $A = \{0, 1\}$ (όπου με 0 συμβολίζουμε την άμεση αποχώρηση και με 1 την είσοδο), στο A' που αποτελείται από όλες τις ακολουθίες φυσικών αριθμών με τιμές στο A , το οποίο αφορά την απόφαση που θα ληφθεί όταν το πλήθος πελατών στο σύστημα είναι n . Ομοίως, αν η πληροφόρηση που παρέχεται αφορά τον χρόνο που ολοκληρώθηκε η προηγούμενη εξυπηρέτηση, τότε το νέο σύνολο ενεργειών θα αποτελείται από όλες τις πραγματικές συναρτήσεις (ορισμένες στο \mathbb{R}_+) με τιμές στο A . Γενικά, οι μικτές στρατηγικές, αλλά και η συνάρτηση ωφέλειας, θα εξαρτώνται από την παρεχόμενη πληροφόρηση. Όταν η τελευταία είναι συνεχούς τύπου, τα προβλήματα που προκύπτουν σχετικά με τον προσδιορισμό της στρατηγικής ισορροπίας μπορεί είναι ιδιαίτερα απαιτητικά.

1.2.5 Δομή κόστους-αμοιβής

Για όλα τα συστήματα εξυπηρέτησης που μελετάμε, έχουμε θεωρήσει μια δομή κόστους-αμοιβής, η οποία είναι συνυφασμένη με τις γενικότερες προτιμήσεις των πελατών: την απροθυμία τους να υποστούν χρονικές καθυστερήσεις και την επιθυμία τους να εξυπηρετηθούν. Ειδικότερα, θα θεωρούμε πως με την είσοδο ενός πελάτη στο σύστημα θα επάγεται ένα κόστος που εξαρτάται από τον χρόνο παραμονής του σε αυτό (και στην ουρά αναμονής αλλά και κατά τη διάρκεια εξυπηρέτησης), καθώς και μια αμοιβή που θα λαμβάνεται αποκλειστικά κατά τη στιγμή της ολοκλήρωσης της εξυπηρέτησης. Στη συντριπτική τους πλειοψηφία, στα προβλήματα που μελετώνται στη σχετική

βιβλιογραφία, η επιλογή της αποχώρησης από το σύστημα είναι διαθέσιμη αποκλειστικά κατά της στιγμή άφιξης των πελατών στο σύστημα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, υποθέτουμε πως οι πελάτες έχουν απεριόριστη υπομονή και θα παραμείνουν στο σύστημα μέχρι να ολοκληρώσουν την εξυπηρέτησή τους. Ωστόσο, στα προβλήματα που παρουσιάζουμε στο Μέρος II, (Κεφάλαια και 4 και 5), οι πελάτες έχουν τη δυνατότητα να αποχωρήσουν από το σύστημα οποιαδήποτε χρονική στιγμή μετά την είσοδό τους σε αυτό. Στην περίπτωση που κάποιος πελάτης αποχωρεί, δεν θα λάβει την αμοιβή εξυπηρέτησης, ούτε μέρος αυτής. Η οικονομική ανάλυση που πραγματοποιούμε στην παρούσα διατριβή βασίζεται στην ακόλουθη δομή κόστους-αμοιβής:

- (Υ9) Το κόστος αναμονής στο σύστημα ανά χρονική μονάδα και ανά πελάτη είναι γραμμικό ως προς χρόνο. Επιπλέον, η αξία της εξυπηρέτησης λαμβάνεται ως αμοιβή μόνο κατά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης.
- (Υ10) Οι πελάτες είναι ομογενείς ως προς την αξία της εξυπηρέτησης και ως προς το κόστος αναμονής ανά χρονική μονάδα (δηλαδή, ο κάθε πελάτης αποτιμά τα ποσά αυτά με τον ίδιο τρόπο όπως και οι υπόλοιποι).

Επισημαίνουμε πως οι αμοιβές των πελατών καθώς και το κόστος αναμονής δεν αντιπροσωπεύουν απαραίτητα χρηματικές μονάδες: για παράδειγμα, η αμοιβή μπορεί απλά να αποτυπώνει την ποιότητα της εξυπηρέτησης, ενώ το κόστος αναμονής, από την άλλη, μπορεί να αντανάκλα το μέγεθος της ταλαιπωρίας ή της δυσφορίας που υφίσταται ένας πελάτης κατά τη διάρκεια της αναμονής του. Με βάση την παραπάνω δομή κόστους-αμοιβής, την περιγραφή της δυναμικής του υπό-εξέταση συστήματος, αλλά και την πλήρη αποσαφήνιση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών, θα είναι εφικτό, χρησιμοποιώντας τεχνικές από την κλασική Θεωρία Ουρών, τις Στοχαστικές Διαδικασίες, αλλά και του Μαθηματικού Προγραμματισμού, να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας και να αποτιμήσουμε την επίδραση τους στο σύστημα και στην κοινωνία γενικότερα.

1.3 Επισκόπηση της διατριβής

Στην παρούσα διατριβή, τα κεφάλαια έχουν ομαδοποιηθεί σε 3 μέρη, ανάλογα με την κατηγορία του υπό-μελέτη προβλήματος στο οποίο αναφέρονται. Στο Μέρος I εξετάζεται η επίδραση της πληροφορίας στη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών που αφορά το δίλημμα εισόδου/άμεσης αποχώρησης σε ένα σύστημα συγκοινωνιών. Στο Μέρος II μελετάμε δύο προβλήματα στα οποία οι αποφάσεις των πελατών αφορούν το δίλημμα παραμονής/υπαναχώρησης σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με υπηρέτη που εναλλάσσεται μεταξύ ενεργών και ανενεργών περιόδων λειτουργίας. Τέλος, στο Μέρος III το πρόβλημα που μελετάμε αφορά τις στρατηγικές δρομολόγησης των πελατών σε ένα δίκτυο από διαφορετικές υπηρεσίες μεταφοράς.

Μέρος I:

Τα Κεφάλαια 2 και 3 αφορούν το The Impact of Information on Transportation Systems with Strategic Customers. Logothetis και Economou (2020) [93],

το οποίο βρίσκεται σε διαδικασία αναθεώρησης. Το κεντρικό πρόβλημα που μελετάται στα κεφάλαια αυτά αφορά την επίδραση 8 διαφορετικών επιπέδων πληροφορίας στις στρατηγικές των πελατών που αποφασίζουν αν θα εισέλθουν ή όχι σε ένα σύστημα ολικών εξυπηρετήσεων με γενικούς χρόνους εξυπηρέτησεων. Ειδικότερα στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η ανάλυση που αφορά το γενικό μοντέλο ενώ στο Κεφάλαιο 3 εστιάζουμε σε ορισμένες κεντρικές εφαρμογές, επεκτείνοντας από τη μία τα θεωρητικά αποτελέσματα, ενώ από την άλλη, παρουσιάζουμε αριθμητικά ευρήματα μέσα από ένα πλαίσιο εφαρμογής από τον κλάδο των συστημάτων μεταφοράς. Ορισμένα από τα επίπεδα πληροφόρησης αφορούν την ηλικία (age) του τρέχοντος χρόνου εξυπηρέτησης

της υποκείμενης ανανεωτικής διαδικασίας. Από όσο γνωρίζουμε, η ανάλυση αυτού του είδους της πληροφορίας, καθώς και η μεθοδολογία που εφαρμόζουμε, πραγματοποιείται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία. Το περιεχόμενο των παραπάνω κεφαλαίων είναι σημαντικά πιο εμπλουτισμένο από ότι στην αντίστοιχη τεχνική αναφορά.

Αρχικά αποτελέσματα αναφορικά με το πρόβλημα αυτό, παρουσιάστηκαν στα

Strategic Customer Behavior in a Transportation System: Effect of Information and Queueing Discipline, QTNA 2019.

What level of information should be provided to strategic customers in a transportation station? A review and new results, Workshop at Koç University 2021.

The impact of information in a transportation station with strategic customers, EURO 2021.

Μέρος II:

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται το **The value of renegeing for strategic customers in queueing systems with server vacations/failures**. Economou, Logothetis και Manou (2022) [44],

το οποίο έχει δημοσιευθεί στο περιοδικό *European Journal of Operational Research*. Στην εργασία αυτή καθορίζονται πλήρως οι στρατηγικές ισορροπίας των πελατών σχετικά με το δίλημμα παραμονής/υπαναχώρησης από ένα σύστημα με διακοπτόμενη ροή εξυπηρέτησης, γίνεται η μελέτη της εξέλιξης του συστήματος και προσδιορίζονται τα μέτρα λειτουργικότητας. Επίσης, εξετάζεται η αποδοτικότητα της πολιτικής κατά την οποία επιτρέπονται οι υπαναχωρήσεις έναντι εκείνης που επιτρέπει τις αναχωρήσεις μόνο πριν την είσοδο στο σύστημα, ενώ εισάγεται για πρώτη φορά το μέτρο της «αξίας της υπαναχώρησης» (*value of renegeing*). Επιπλέον, από όσο γνωρίζουμε, είναι η πρώτη φορά στη βιβλιογραφία που μελετάται ένα σύστημα εξυπηρέτησης με διακοπές υπό το συγκεκριμένο στρατηγικό δίλημμα. Πέρα από ελάχιστες τροποποιήσεις, το περιεχόμενο του κεφαλαίου, παρουσιάζεται όπως στην αντίστοιχη δημοσίευση.

Αρχικά αποτελέσματα αναφορικά με το πρόβλημα αυτό, παρουσιάστηκαν στο

Strategic renegeing in queueing systems with server vacations/failures, EURO 2021.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται το

The Impact of Renegeing on a Fluid On-Off Queue with Strategic Customers. Logothetis, Manou και Economou (2021) [95],

το οποίο έχει γίνει δεκτό για δημοσίευση στο περιοδικό *Annals of Operations Research*. Η εργασία αυτή αποτελεί στην ουσία επέκταση του προβλήματος του Κεφαλαίου 4 για το αντίστοιχο μοντέλο ρευστού (fluid model) του συστήματος εξυπηρέτησης που παρουσιάζεται στο [44]. Πέρα από ελάχιστες τροποποιήσεις, το περιεχόμενο του κεφαλαίου, παρουσιάζεται όπως στην αντίστοιχη (προσεχή) δημοσίευση.

Μέρος III:

Το Κεφάλαιο 6 αφορά το

Routing of Strategic Passengers in a Transportation Station. Logothetis και Economou (2021) [94],

το οποίο έχει δημοσιευθεί στον τόμο *Performance Engineering and Stochastic Modeling* των πρακτικών του διεθνούς συνεδρίου ASMTA, 2021 όπου και παρουσιάστηκε. Στην εργασία αυτή εξετάζεται η στρατηγική δρομολόγησης των πελατών σε ένα δίκτυο με παράλληλα συστήματα ολικών εξυπηρετήσεων με γενικούς χρόνους. Επιπλέον, πραγματοποιείται και σύγκριση με τη βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης ενός κοινωνικού διαχειριστή, ενώ μελετώνται και ορισμένα προβλήματα μεγιστοποίησης κέρδους μονοπωλίου. Το περιεχόμενο του παραπάνω κεφαλαίου είναι σημαντικά πιο εμπλουτισμένο από ότι στην αντίστοιχη δημοσιευμένη εργασία.

Η επί μέρους συνεισφορά και η πρωτοτυπία της διατριβής περιγράφεται αναλυτικά στην εισαγωγή του κάθε κεφαλαίου. Οι τεχνικές αποδείξεις των αποτελεσμάτων καθώς και ορισμένα επιπρόσθετα αποτελέσματα που διευκολύνουν την κατανόηση των αντίστοιχων προβλημάτων, περιλαμβάνονται σε παραρτήματα που έχουν τοποθετηθεί στο τέλος κάθε μέρους. Επισημαίνουμε πως τα συστήματα εξυπηρέτησης που θεωρήθηκαν στα πλαίσια της διατριβής, προορίζονται (δυννητικά) να είναι εφαρμόσιμα σε ένα ευρύ φάσμα πραγματικών προβλημάτων παρόλο που ορισμένα προβλήματα παρουσιάζονται στη διατριβή μέσα από συγκεκριμένο πλαίσιο εφαρμογής. Διαφορετικά πλαίσια εφαρμογών παρουσιάζονται στην εισαγωγή του κάθε κεφαλαίου.

ΜΕΡΟΣ Ι

Η Επίδραση της Πληροφορίας σε ένα Σύστημα Μέσων Μεταφοράς με Στρατηγικούς Πελάτες

Περίληψη: Στις μέρες μας, οι δυνητικοί επιβάτες ενός σταθμού συγκοινωνιών είναι δυνατόν να έχουν πρόσβαση σε πληροφορίες σχετικά τους χρόνους αφίξεων των μεταφορικών μέσων, το επίπεδο του συνωστισμού στον σταθμό αλλά και τη διαθεσιμότητα των θέσεων στα μέσα μεταφοράς. Αυτού του είδους η πληροφόρηση επηρεάζει τη συμπεριφορά των επιβατών που σκέπτονται στρατηγικά και επομένως, θα έχει επίδραση στον ρυθμό απόδοσης και στο κοινωνικό όφελος που επάγει το σύστημα. Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε ένα γενικό μαθηματικό πρότυπο για την αναπαράσταση ενός σταθμού συγκοινωνιών στον οποίο, οι αφίξεις των στρατηγικών πελατών πραγματοποιούνται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, οι στιγμές των επισκέψεων των μεταφορικών μέσων σχηματίζουν μια ανανεωτική διαδικασία και οι διαθεσιμότητες των διαδοχικών μέσων μεταφοράς αναπαρίστανται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Οι πελάτες αποφασίζουν αν θα χρησιμοποιήσουν ή όχι την υπηρεσία μεταφοράς με κριτήριο το αναμενόμενο κόστος παραμονής και την πιθανότητα να εξυπηρετηθούν, δεδομένης της πληροφόρησης που τους παρέχεται στον σταθμό. Η πληροφόρηση αυτή μπορεί να περιλαμβάνει τον χρόνο άφιξης του προηγούμενου μεταφορικού μέσου, το πλήθος των παρόντων πελατών, τη διαθεσιμότητα θέσεων στο επόμενο μεταφορικό μέσο ή οποιονδήποτε συνδυασμό των παραπάνω. Προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας για τα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης, αναλύουμε το σύστημα σε κάθε ένα από αυτά τα επίπεδα και μελετάμε την επίδραση της στρατηγικής στα μέτρα αποτίμησης της απόδοσης του συστήματος (ρυθμό απόδοσης, κοινωνικό όφελος). Στη συνέχεια καθορίζουμε το ιδανικό επίπεδο της παρεχόμενης πληροφόρησης ανάλογα με τις οικονομικές και λειτουργικές παραμέτρους του συστήματος.

2.1 Εισαγωγή.

2.1.1 Περιγραφή του ερευνητικού πλαισίου και συνεισφορά

Στον τομέα των υπηρεσιών μεταφοράς, οι πελάτες συχνά εξυπηρετούνται κατά ομάδες. Για παράδειγμα, στα πλαίσια ενός σταθμού συγκοινωνιών, οι πελάτες περιμένουν να εξυπηρετηθούν από το επόμενο μέσο μεταφοράς, το οποίο κατά την άφιξη του, θα εξυπηρετήσει όλους τους παρόντες πελάτες που περιμένουν στον σταθμό όταν υπάρχουν αρκετές ελεύθερες θέσεις. Ομοίως, στα πλαίσια των τουριστικών υπηρεσιών, όπως στα μουσεία, στις περιηγήσεις σε αξιοθέατα κ.α., οι πελάτες σχηματίζουν μια ουρά περιμένοντας να ξεκινήσουν οι καθοδηγούμενες αυτές περιηγήσεις, που επίσης αντιστοιχούν σε ομαδικές εξυπηρετήσεις. Σε αυτού του είδους τις καταστάσεις, οι πελάτες έρχονται αντιμέτωποι με το δίλημμα της εισόδου ή της άμεσης αποχώρησης. Οι αποφάσεις τους επηρεάζονται από πολλούς παράγοντες, εκ των οποίων οι σημαντικότεροι φαίνεται πως είναι ο χρόνος αναμονής μέχρι την εξυπηρέτηση αλλά και η πιθανότητα να λάβουν την εξυπηρέτηση που προσδοκούν, όπως για παράδειγμα να επαρκεί η διαθεσιμότητα των ελεύθερων θέσεων και να μην επικρατεί υψηλός συνωστισμός.

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε ένα στοχαστικό μοντέλο για τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε αυτού του είδους τα συστήματα. Ακριβέστερα, το μοντέλο αυτό είναι σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι αφίξεις των πελατών πραγματοποιούνται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ενώ οι εξυπηρετήσεις λαμβάνουν χώρα τις στιγμές μιας ανανεωτικής διαδικασίας. Για λόγους πληρότητας, θα χρησιμοποιήσουμε ως πλαίσιο εφαρμογής έναν σταθμό συγκοινωνιών, αν και η ανάλυση και τα ευρήματα που προκύπτουν δύνανται να έχουν πολύ γενικότερη εφαρμογή (π.χ. στα πλαίσια των προαναφερθέντων τουριστικών υπηρεσιών). Προς την κατεύθυνση αυτή, τους πελάτες μπορούμε να τους σκεφτόμαστε ως επιβάτες και τις στιγμές εξυπηρέτησης ως στιγμές διαδοχικών επισκέψεων των μέσων μεταφοράς που ανήκουν σε κάποια υπηρεσία (πχ τραίνα, λεωφορεία, πλοία κ.λπ.).

Οι περισσότεροι σύγχρονοι σταθμοί έχουν τη δυνατότητα να παρέχουν στους πελάτες κάποιο είδος πληροφόρησης σχετικά με τον συνωστισμό αλλά και τη μελλοντική εξέλιξη του συστήματος. Για παράδειγμα, οι στιγμές των αφίξεων, στα πλαίσια μιας υπηρεσίας με προγραμματισμένα δρομολόγια) συνηθίζεται να ανακοινώνονται σε πραγματικό χρόνο στις ιστοσελίδες των υπηρεσιών μεταφοράς, σε φωτεινούς πίνακες εντός του σταθμού αλλά και μέσω εφαρμογών στα κινητά τηλέφωνα. Πρόσφατα, έχει δοθεί και η δυνατότητα να παρέχεται πληροφόρηση σε πραγματικό χρόνο σχετικά με τη διαθεσιμότητα των ελεύθερων θέσεων στο επόμενο δρομολόγιο. Για παράδειγμα, η Google Maps έχει προσθέσει εφαρμογές πρόβλεψης του επιπέδου του συνωστισμού στα μέσα μεταφοράς, καλύπτοντας 10,000 συστήματα συγκοινωνιών σε 100 χώρες (δείτε τις [123] και [131]). Επιπλέον, ορισμένες υπηρεσίες μεταφοράς απαιτούν από τους πελάτες να επικυρώσουν το εισιτήριο τους κατά την είσοδο στο σταθμό ή κατά την έξοδο από ένα μεταφορικό μέσο. Επομένως, έχουν τη δυνατότητα να παρατηρούν συνεχώς το συνωστισμό και αυτή η πληροφορία μπορεί να μεταφερθεί στους πελάτες. Πολλές εργασίες έχουν ξεκινήσει να μελετούν τη σημασία της παροχής των πληροφοριών που είναι σχετικές με προβλέψεις της διαθεσιμότητας θέσεων (crowding information) χρησιμοποιώντας εμπειρικές προσεγγίσεις. Δείτε για παράδειγμα τις [142] και [118]. Στις εργασίες αυτές επισημαίνεται πως οι προβλέψεις για τις διαθεσιμότητες των θέσεων βασίζονται κυρίως σε αξιολογήσεις των ίδιων των πελατών που πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησης και παρέχονται διαδικτυακά, ενώ υπάρχει η δυνατότητα ακριβούς μέτρησης σε πραγματικό χρόνο, η οποία μπορεί να αποκτηθεί χρησιμοποιώντας αυτοματοποιημένα συστήματα καταγραφής επιβατών. Επί του παρόντος, ελάχιστες είναι οι υπηρεσίες μεταφοράς και οι εταιρείες που παρέχουν ακριβείς προβλέψεις σε πραγματικό χρόνο. Ωστόσο, οι συγγραφείς επισημαίνουν πως αν υπήρχε η δυνατότητα παροχής αυτών των ακριβέστερων προβλέψεων, θα προέκυπταν επιπρόσθετα οφέλη στη βελτίωση του επιπέδου εξυπηρέτησης καθώς και στη διατήρηση της τακτικότητας των υ-

πηρεσιών μεταφοράς. Στο κεφάλαιο αυτό σκοπεύουμε να εξετάσουμε την εγκυρότητα ανάλογων ισχυρισμών χρησιμοποιώντας αυστηρά επιχειρήματα εντός του γενικού πλαισίου που καλύπτεται από το συγκεκριμένο μαθηματικό πρότυπο που έχουμε θεωρήσει.

Συνολικά, στο κεφάλαιο αυτό εστιάζουμε στην επίδραση της πληροφορίας σε στρατηγικούς πελάτες και στον αντίκτυπο της συμπεριφοράς τους στην απόδοση του συστήματος, με βάση τα κριτήρια του κοινωνικού οφέλους και του ρυθμού απόδοσης. Υπάρχουν διάφορες σχετικές εργασίες οι οποίες παρουσιάζονται εν συντομία στην ενότητα 2.1.2. Παρακάτω διακρίνουμε τις κεντρικές υποθέσεις για το μοντέλο που έχουμε θεωρήσει:

1. *Λειτουργικά χαρακτηριστικά του συστήματος:* Τα μέσα μεταφοράς που διαχειρίζεται η εταιρεία, επισκέπτονται τον σταθμό στις στιγμές των γεγονότων μιας ανανεωτικής διαδικασίας ενώ οι πελάτες επισκέπτονται τον σταθμό σύμφωνα με μια στοχαστική διαδικασία Poisson. Κατά την έλευση τους στον σταθμό, τα μέσα μεταφοράς έχουν πεπερασμένη χωρητικότητα.
2. *Δεδομένα που είναι γνωστά στους πελάτες:* Κατά την άφιξη του στον σταθμό, κάθε πελάτης γνωρίζει τη χωρητικότητα του επόμενου μέσου με το οποίο σκοπεύει να εξυπηρετηθεί. Επιπλέον, οι παράμετροι καθώς και οι στοχαστικές διαδικασίες υπό τις οποίες λειτουργεί ο σταθμός, αποτελούν κοινή γνώση για όλους τους πελάτες.
3. *Δυναμικά επίπεδα πληροφόρησης:* Ο διαχειριστής του σταθμού έχει τη δυνατότητα να παρέχει πληροφορία στους πελάτες, σχετικά με τη χωρητικότητα στο επόμενο μέσο, τον χρόνο έλευσης του προηγούμενου μέσου καθώς και το πλήθος πελατών που ήδη έχουν επιλέξει να χρησιμοποιήσουν το επόμενο μεταφορικό μέσο.
4. *Ομογένεια και ορθολογισμός των πελατών:* Οι πελάτες είναι ομογενείς σχετικά με την αποτίμηση της αξίας της εξυπηρέτησης αλλά και του κόστους αναμονής ανά χρονική μονάδα. Με βάση την αποτίμηση τους για τη συνολική αξία αλλά και της πληροφορίας που τους παρέχεται από τον διαχειριστή, αποφασίζουν αν θα χρησιμοποιήσουν τη συγκεκριμένη εταιρεία ή όχι. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί και ιδιοτελείς. Ο στόχος κάθε πελάτη είναι η μεγιστοποίηση της μέσης ωφέλειας του.

Η βασική συνεισφορά της παρούσας μελέτης συνοψίζεται ως εξής:

- Όσον αφορά την τεχνική/μεθοδολογική πλευρά της παρούσας μελέτης, δείχνουμε πως η στρατηγική ισορροπίας των πελατών μπορεί να προσδιορισθεί σε όλους τους συνδυασμούς που προκύπτουν από την παροχή ή απόκρυψη των των πληροφοριών C, A και N, συμπληρώνοντας επομένως την ανάλυση σχετικά με το παρατηρήσιμο (N) και μη-παρατηρήσιμο (\emptyset) σύστημα που παρουσιάστηκαν στην εργασία [100].

Τα επίπεδα πληροφόρησης CA, A είναι τα πιο απαιτητικά από πλευράς ανάλυσης και παρουσιάζονται με μεγάλη λεπτομέρεια. Ειδικότερα, εισάγουμε μια μεθοδολογία για τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών όταν η πληροφορία που παρέχεται στους πελάτες είναι η ηλικία του τρέχοντος χρόνου εξυπηρέτησης (ο χρόνος από την έλευση του προηγούμενου μέσου μεταφοράς). Η συνεισφορά είναι διπλή: Από τη μια, με βάση τα όσα γνωρίζουμε, δεν έχει μελετηθεί η επίδραση του συγκεκριμένου επιπέδου πληροφόρησης σε κανένα σύστημα εξυπηρέτησης στην υπάρχουσα βιβλιογραφία. Από την άλλη, λόγω της πολυπλοκότητας που παρουσιάζει ο χώρος στρατηγικών των πελατών στο συγκεκριμένο επίπεδο πληροφόρησης, ο οποίος περιλαμβάνει τις πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται στο $[0, \infty)$ και παίρνουν τιμές στο $[0, 1]$, απαιτείται μια καινοτόμος μέθοδος για την εύρεση των στρατηγικών ισορροπίας. Η μέθοδος που εφαρμόζουμε έχει αποδειχθεί αποτελεσματική για το συγκεκριμένο πρόβλημα και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για τη μελέτη

άλλων συστημάτων με στρατηγικούς πελάτες στα οποία οι στρατηγικές τους, δοθείσης της πληροφόρησης, λαμβάνουν τιμές από υπεραριθμήσιμα σύνολα. Καθώς στη σχετική βιβλιογραφία μελετώνται κατά πλειοψηφία, είτε συστήματα με διακριτού τύπου πληροφόρηση (π.χ., συστήματα στα οποία η πληροφόρηση αφορά τον αριθμό των πελατών που συνωστιζονται) είτε μη-παρατηρήσιμα συστήματα, με την παρούσα εργασία πραγματοποιούμε ένα πρώτο βήμα προς τη μελέτη συστημάτων με πληροφόρηση συνεχούς ή μεικτού τύπου.

- Υπολογίζουμε τα κύρια μέτρα αποτίμησης απόδοσης του συστήματος (ρυθμό απόδοσης και κοινωνικό όφελος) για όλα τα επίπεδα πληροφόρησης και παρουσιάζουμε ενδιαφέροντα θεωρητικά αποτελέσματα σχετικά με τις συγκρίσεις τους. Ειδικότερα, αποδεικνύουμε πως το επίπεδο CA είναι καλύτερο από το C το οποίο με τη σειρά του είναι καλύτερο από το \emptyset (που αντιπροσωπεύει το πλήρως μη-παρατηρήσιμο σύστημα), με βάση το κοινωνικό όφελος που παράγεται από το σύστημα, υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών. Ωστόσο, σύμφωνα με τα αναλυτικά αποτελέσματα αλλά και με αριθμητικά ευρήματα, επιβεβαιώνεται πως στη γενική περίπτωση, είναι αδύνατον να συνάγουμε συμπεράσματα με καθολική ισχύ σχετικά με τη σύγκριση ως προς τον ρυθμό απόδοσης. Επομένως, παρέχοντας ακριβείς προβλέψεις σχετικά με τη διαθεσιμότητα των θέσεων στο επόμενο δρομολόγιο είναι πάντα πλεονεκτικό, ως προς την κοινωνική ωφέλεια αλλά μπορεί να έχει αρνητική επίδραση στον ρυθμό απόδοσης για ένα συγκεκριμένο εύρος των τιμών των παραμέτρων. Χαρακτηρίζουμε το εύρος αυτό και συζητάμε σχετικά με τα οφέλη που μπορούν να αποκομιστούν.
- Αναλύουμε σε μεγαλύτερο βάθος την περίπτωση που οι ενδιαμέσοι χρόνοι είναι σταθεροί και δείχνουμε πως η στρατηγική ισορροπίας μπορεί πάρει μορφές που φαίνονται διαισθητικά ως μη-αναμενόμενες. Για παράδειγμα, στο επίπεδο CA, η στρατηγική εισόδου, ως συνάρτηση της ηλικίας (δηλαδή του χρόνου έλευσης από το προηγούμενο μέσο) μπορεί να είναι τύπου κατωφλίου αλλά μπορεί να πάρει και μια δεύτερη μορφή η οποία υπαγορεύει στους πελάτες να αποχωρήσουν αν ο χρόνος είναι πολύ μικρός, να εισέλθουν με βεβαιότητα για μικρές ή μεγάλες τιμές του χρόνου αυτού και να εισέλθουν με κάποια πιθανότητα που είναι γνήσια μεταξύ του 0 και του 1 για ενδιάμεσες τιμές. Στο επίπεδο CN, αποδεικνύουμε πως η γενική στρατηγική ισορροπίας υπαγορεύει στους πελάτες να εισέλθουν με μια πιθανότητα γνήσια μεταξύ του 0 και του 1 όταν το σύστημα είναι κενό, να εισέλθουν με βεβαιότητα αν το πλήθος των παρόντων πελατών είναι μικρό (αλλά όχι 0), ενώ διαφορετικά να αποχωρήσουν. Στη συνέχεια συζητάμε πως αυτά τα αναλυτικά ευρήματα μπορούν να αιτιολογηθούν και διαισθητικά. Επίσης, μελετάμε τις περιπτώσεις χαμηλού και υψηλού συνωστισμού με μεγαλύτερη λεπτομέρεια.
- Στην περίπτωση που οι χρόνοι των διαδοχικών επισκέψεων των μεταφορικών μέσων είναι εκθετικοί, οι στρατηγικές ισορροπίας παρουσιάζονται σε σχεδόν κλειστή μορφή. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να πραγματοποιήσουμε μια πλήρη αντιπαραβολή των μέτρων λειτουργικότητας κάτω από τα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης και να διαπιστώσουμε τη σχετική επίδραση του κάθε επιπέδου. Τα αποτελέσματα δείχνουν πως οι βέλτιστες τιμές των μέτρων αυτών επιτυγχάνονται σε διαφορετικά επίπεδα πληροφόρησης.
- Στην περίπτωση που οι χρόνοι των διαδοχικών επισκέψεων των μεταφορικών μέσων προέρχονται από κατανομή τύπου IMRL ή DMRL και ειδικότερα στην περίπτωση που οι χρόνοι αυτοί είναι ντετερμινιστικοί, οι στρατηγικές ισορροπίας απλοποιούνται και προσδιορίζονται με ιδιαίτερα χαμηλό υπολογιστικό κόστος. Αυτό, για άλλη μια φορά, μας επιτρέπει να επιλέξουμε το πιο βολικό επίπεδο πληροφόρησης για τη μεγιστοποίηση ενός δεδομένου μέτρου λειτουργικότητας, ανάλογα με τους στόχους που έχει θέσει ο διαχειριστής του συστήματος.
- Ως προς το επιχειρησιακό όφελος που μπορεί να αποκτηθεί από την παρούσα μελέτη, έχουμε

εστιάζει κυρίως στην περίπτωση που οι χρόνοι των διαδοχικών επισκέψεων των μεταφορικών μέσων είναι σταθεροί. Ένα τέτοιο μοντέλο αντιπροσωπεύει με σχετική ακρίβεια ένα σύγχρονο τακτικό σύστημα μεταφοράς. Για την περίπτωση αυτή επεκτείνουμε σημαντικά τα αποτελέσματα των συγκρίσεων των διαφόρων επιπέδων πληροφόρησης. Αποδεικνύουμε πως ο ρυθμός απόδοσης βελτιώνεται με την απόκρυψη πληροφορίας όταν ο ρυθμός αφίξεων είναι σχετικά μικρός, ενώ σε αντίθετη περίπτωση, η παροχή όσο το δυνατόν μεγαλύτερης πληροφορίας αυξάνει τον ρυθμό απόδοσης. Επιπλέον, η παροχή της πληροφόρησης σχετικά με την ηλικία, αποδεικνύεται ασυμπτωτικά βέλτιστη για τη μεγιστοποίηση του ρυθμού απόδοσης σε συνθήκες υψηλού συνωστισμού.

2.1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Η παρούσα μελέτη συνδέεται τόσο μεθοδολογικά όσο και εννοιολογικά με τη γενική βιβλιογραφία που αφορά τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς πελατών σε συστήματα εξυπηρέτησης που αναφέραμε στην εισαγωγή. Ειδικότερα, η μελέτη εστιάζεται στην ανάλυση ενός συστήματος ολικών εκκαθαρίσεων (clearing system) στο οποίο όλοι οι παρόντες πελάτες απομακρύνονται ακαριαία σε στιγμές μιας ανανεωτικής διαδικασίας που αναπαριστά τις επισκέψεις των μέσων μεταφοράς. Δείτε την εισαγωγική ενότητα 1.1.1 για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με συστήματα αυτού του είδους. Επίσης, στο Παράρτημα 3.3.1 παρουσιάζονται αναλυτικά, ορισμένα χρήσιμα αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία που θα διευκολύνουν στην ανάγνωση του κεφαλαίου. Η μελέτη, ωστόσο των συστημάτων αυτών στο παιγνιοθεωρητικό πλαίσιο αποτελεί μία σχετικά πρόσφατη προσπάθεια.

Η πρώτη εργασία προς την κατεύθυνση αυτή είναι η [45] των Economou και Manou (2013), οι οποίοι μελέτησαν ένα Μαρκοβιανό σύστημα εκκαθαρίσεων με αφίξεις πελατών σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, όπου ο υπηρέτης εξυπηρετεί όλους τους παρόντες πελάτες που έχουν συσσωρευθεί στις στιγμές ολοκλήρωσης εκθετικά κατανομημένων κύκλων εξυπηρέτησης. Το σύστημα αυτό εξελίσσεται σε ένα εναλλασσόμενο περιβάλλον που επηρεάζει τους ρυθμούς αφίξεων και εξυπηρέτησεων. Οι συγγραφείς προσδιόρισαν τη στρατηγική ισορροπίας σχετικά με το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης για 4 επίπεδα πληροφόρησης. Τα επίπεδα αυτό καθορίζονται με βάση το αν το τρέχον περιβάλλον και το πλήθος των παρόντων πελατών είναι γνωστό ή αποκρύπτεται.

Οι Manou et al. (2014) στο [100] θεώρησαν το μη-Μαρκοβιανό σύστημα εκκαθαρίσεων που αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας μελέτης και προσδιόρισαν τις στρατηγικές ισορροπίας για δύο επίπεδα πληροφόρησης που αντιστοιχούν σε αυτά που καλούμε επίπεδα N και \emptyset στην τρέχουσα μελέτη. Αποδείχθηκε πως μπορούν να υπάρχουν πολλές στρατηγικές ισορροπίας στο επίπεδο N , σε αντίθεση με το επίπεδο \emptyset όπου η στρατηγική ισορροπίας είναι μοναδική. Επίσης, για τα επίπεδα αυτά μελετήθηκε και η εφαρμογή της εκθετικής κατανομής για τους ενδιαμέσους χρόνους επίσκεψης των μέσων μεταφοράς.

Ακόμα, οι Manou et al. (2017) στο [99] μελέτησαν το ίδιο μοντέλο της [101], με τη διαφορά ότι οι χωρητικότητες των μέσων μεταφοράς είναι άπειρες. Θεωρήθηκαν 3 επίπεδα πληροφόρησης: καθόλου πληροφόρηση, παρατηρήσιμο πλήθος παρόντων πελατών ή πληροφόρηση σχετικά με τον ακριβή χρόνο αναμονής τους. Εστίασαν σε προβλήματα τιμολόγησης του συστήματος και ανέδειξαν την επίδραση της πληροφόρησης στο πλεόνασμα των πελατών καθώς και στο κέρδος του διαχειριστή. Η Canbolat (2020) στην [21] ασχολήθηκε με τη μελέτη του ίδιου μοντέλου της μη-παρατηρήσιμης περίπτωσης και άπειρης χωρητικότητας της [100], θεωρώντας πελάτες περιορισμένης ορθολογικότητας (bounded rationality) σύμφωνα με μια logistic quantal-response συνάρτηση. Αρχικά προσδιόρισε την ωφέλεια των πελατών και το κέρδος του συστήματος για δεδομένη τιμή εισόδου και δεδομένο επίπεδο ορθολογισμού και στη συνέχεια έλυσε το πρόβλημα τιμολόγησης που αντιστοιχεί σε κερδοσκόπο διαχειριστή.

Οι Czerny et al. (2018) στην [30] μελέτησαν ένα παρόμοιο σύστημα μεταφοράς με άπειρη χωρητικότητα θέσεων και με σταθερούς ενδιαμέσους (headaway) χρόνους επίσκεψης και θεώρη-

σαν πελάτες που είναι περισσότερο ευαίσθητοι στις καθυστερήσεις, γεγονός που έχει ως άμεσο αποτέλεσμα να δημιουργείται εξάρτηση των ρυθμών ζήτησης από τους χρόνους αναμονής. Μια βασική συνέπεια της υπόθεσης τους είναι πως δεν υφίσταται παίγνιο μεταξύ των πελατών αφού η απόφαση ενός πελάτη δεν επηρεάζει τις αποφάσεις των υπολοίπων. Θεώρησαν ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους μονοπωλίου και απέδειξαν πως η κοιλότητα/χυρτότητα της συνάρτησης του ρυθμού ζήτησης είναι καθοριστικός παράγοντας για το κατά πόσον η απόκρυψη ή όχι της πληροφορίας για τον ακριβή χρόνο παραμονής είναι πλεονεκτική για το μονοπώλιο.

Η μελέτη μας διαφέρει σημαντικά από τις προαναφερθείσες μελέτες. Σχετικά με τα λειτουργικά χαρακτηριστικά του συστήματος που έχουμε θεωρήσει, επισημαίνουμε ότι η διαθεσιμότητα των θέσεων είναι περιορισμένη (και όχι άπειρη). Ως αποτέλεσμα, οι πελάτες αναζητούν μια ισορροπία μεταξύ του αναμενόμενου χρόνου παραμονής τους και της πιθανότητας να λάβουν εξυπηρέτηση από το επόμενο μέσο μεταφοράς. Επομένως, το πρόβλημα που εστιάζουμε είναι διαφορετικό από εκείνα που μελετώνται στις [45], [99], [21] και [30] στις οποίες η χωρητικότητα ήταν άπειρη και το ερευνητικό ενδιαφέρον αφορούσε διαφορετικές πτυχές της πληροφόρησης και της φύσης των πελατών (π.χ. ετερογενείς πελάτες, περιορισμένος ορθολογισμός κ.λπ.). Σχετικά με την κοινή γνώση των πελατών και τα πιθανά είδη της πληροφορίας, υπογραμμίζουμε πως στη μελέτη μας οι πελάτες πληροφορούνται σχετικά με την ηλικία του τρέχοντος χρόνου εξυπηρέτησης (τον χρόνο έλευσης από το προηγούμενο μέσο μεταφοράς). Από όσα γνωρίζουμε, αυτή είναι η πρώτη μελέτη στη γενικότερη βιβλιογραφία των συστημάτων εξυπηρέτησης με στρατηγικούς πελάτες, στην οποία μελετάται η επίδραση της ηλικίας του τρέχοντος χρόνου εξυπηρέτησης στη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών και πραγματοποιείται σύγκριση με άλλα επίπεδα πληροφόρησης. Αυτή η οπτική γωνία διαφοροποιεί τη μελέτη μας από τις προϋπάρχουσες μελέτες στα πλαίσια των συστημάτων μεταφοράς με στρατηγικούς πελάτες και ειδικότερα, από το μοντέλο αναφοράς στην [100].

Μια βασική κατηγορία ερευνητικών εργασιών που σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με το πρόβλημα που εστιάζουμε, είναι αυτές που συνδέονται βιβλιογραφικά με τη μελέτη της επίδρασης της πληροφορίας σε συστήματα εξυπηρέτησης με στρατηγικούς πελάτες. Το νήμα αυτό της βιβλιογραφίας ξεκίνησε από τις πρωτοποριακές εργασίες των Hassin (1986) και Chen και Frank (2004) στις [62] και [24] που μελέτησαν τη σύγκριση μεταξύ παρατηρήσιμων και μη-παρατηρήσιμων εκδοχών του M/M/1 συστήματος με στρατηγικούς πελάτες, σχετικά με το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης. Αυτή την ερευνητική κατεύθυνση ακολούθησαν πολλοί συγγραφείς στη συνέχεια. Οι Economou και Kanta (2008) στην [43] καθώς και οι Guo και Zipkin (2009) στην [59], θεώρησαν επίπεδα μερικής πληροφόρησης για το M/M/1 σύστημα, όπου ο χώρος καταστάσεων της διαδικασίας του μήκους ουράς διαμερίζεται σε υποσύνολα και οι πελάτες δεν πληροφορούνται σχετικά με το μήκος της ουράς, αλλά με το υποσύνολο στο οποίο ανήκει. Όταν τα σύνολα αυτά είναι μονοσύνολα, το μοντέλο αυτό ανάγεται στην παρατηρήσιμη M/M/1, ενώ αν υπάρχει μόνο ένα σύνολο, τότε συμπίπτει με τη μη-παρατηρήσιμη περίπτωση.

Οι Hu et al. (2018) στην [73], μελέτησαν την ετερογενώς παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά, όπου ο πληθυσμός των πελατών διαιρείται σε δύο ομάδες ως προς το ποιο λαμβάνουν πληροφόρηση και ποιο όχι. Έτσι, το παρατηρήσιμο επίπεδο αντιστοιχεί στην ακραία περίπτωση που το ποσοστό των πληροφορούμενων πελατών είναι 1, ενώ το μη-παρατηρήσιμο επίπεδο αντιστοιχεί στην περίπτωση που το ποσοστό αυτό είναι 0. Οι Burnetas et al. (2017) στην [19] θεώρησαν το M/M/1 σύστημα με πληροφόρηση που παρέχεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα και όπου οι πελάτες αποφασίζουν αν θα εισέλθουν ή θα αποχωρήσουν χωρίς να γνωρίζουν το μήκος της ουράς αλλά στη συνέχεια πληροφορούνται για την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος και έχουν τη δυνατότητα να υπαναχωρήσουν (δηλαδή να αποχωρήσουν ενώ έχουν εισέλθει και χωρίς να λάβουν εξυπηρέτηση). Ένα ακόμη πρόβλημα με αυτού του είδους παρεχόμενης πληροφόρησης ανά διαστήματα είναι το λεγόμενο ‘armchair decision problem’ που μελετήθηκε στην [67] από τους Hassin και Roet Green (2020). Στο μοντέλο αυτό οι πελάτες παρατηρούν το μήκος της ουράς πριν φθάσουν

στο σύστημα, χρησιμοποιώντας διαδικτυακή εφαρμογή και στη συνέχεια αποφασίζουν αν θα ξεκινήσουν την πορεία για το σύστημα εξυπηρέτησης ή όχι. Όταν θα φθάσουν στο σύστημα, ωστόσο, θα πληροφορηθούν για την τρέχουσα κατάσταση του και θα λάβουν μια δεύτερη απόφαση σχετικά με το αν θα εισέλθουν ή θα αποχωρήσουν. Το μοντέλο αυτό συμπίπτει με το παρατηρήσιμο ή το μη-παρατηρήσιμο M/M/1 σύστημα, στην περίπτωση που η καθυστέρηση της πληροφόρησης τείνει στο 0 ή στο ∞ , αντίστοιχα.

Μερικές ακόμα βασικές εργασίες σχετικές με την επίδραση της πληροφορίας για στρατηγικούς πελάτες σε συστήματα εξυπηρέτησης είναι αυτές των Guo και Zipkin (2007) στην [58] και των Hassin και Roet-Green (2017) στην [66]. Η πρώτη αφορά τη μελέτη της αλληλεπίδρασης των πελατών που είναι ετερογενείς ως προς το κόστος παραμονής και ως προς τη δομή της πληροφόρησης. Στη δεύτερη, μελετάται η περίπτωση που η απόκτηση πληροφορίας επιφέρει κάποιο επιπρόσθετο κόστος και επομένως οι πελάτες θα αποφασίσουν αρχικά αν επιθυμούν να πληρώσουν το αντίτιμο για να λάβουν την πληροφόρηση αυτή και στη συνέχεια θα λάβουν μια δεύτερη απόφαση σχετικά με το αν θα εισέλθουν ή όχι στο σύστημα. Επίπεδα πληροφόρησης έχουν χρησιμοποιηθεί και σε διάφορες άλλες εργασίες, με την ιδιότητα να αποστέλλουν κάποιο σήμα στους πελάτες και γενικότερα έχει αποδειχθεί ότι επηρεάζουν τις αποφάσεις τους με διάφορους απροσδόκητους τρόπους. Ορισμένες πολύ βασικές εργασίες προς την κατεύθυνση αυτή είναι οι [4], [6], [29], [31], [136], [137], [76], [139], [140], και [153]. Οι συγγραφείς στις εργασίες αυτές ερευνούν διάφορες διαστάσεις κατά τις οποίες η πληροφόρηση μπορεί να επηρεάσει τους πελάτες. Για παράδειγμα, η πληροφορία μπορεί να αποτελεί κάποιο σήμα για την ποιότητα της εξυπηρέτησης, και μελετάται ο ρόλος της στη μεγιστοποίηση του κέρδους μονοπωλίου και στο κοινωνικό όφελος, η σχέση της με τις πεποιθήσεις των πελατών κ.α. Για μια λεπτομερέστερη περιγραφή και σχόλια πάνω στην επίδραση της πληροφορίας στα πλαίσια των συστημάτων εξυπηρέτησης με στρατηγικούς πελάτες, δείτε το Κεφάλαιο 3 στο [63] και τις πρόσφατες εργασίες των [37], [38] και [75].

Η παρούσα μελέτη συνδέεται επίσης και με τα συστήματα ομαδικών εξυπηρέτησεων. Το νήμα της βιβλιογραφίας που αφορά τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών στα συστήματα αυτά ξεκίνησε πολύ πρόσφατα από τους Bountali και Economou στα πλαίσια των M/M/1 συστημάτων με ομαδικές εξυπηρέτησεις, δείτε π.χ. τις [13], [14] και [15]. Τέλος, η τρέχουσα μελέτη συνδέεται βιβλιογραφικά και με μελέτες διαφορετικών στρατηγικών αποφάσεων σε μεταφορικά μέσα, όπως η επιλογή των στιγμών αφίξεων από τους πελάτες σε ένα σύστημα, δείτε π.χ. τις [50] και [80].

2.1.3 Διάρθρωση

Η μελέτη για το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει χωριστεί σε 3 κεφάλαια. Στο τρέχον κεφάλαιο, και συγκεκριμένα στην ενότητα 2.2, περιγράφουμε αναλυτικά το μοντέλο, τις υποθέσεις του, καθώς και το πλαίσιο πληροφόρησης. Ο προσδιορισμός των στρατηγικών ισορροπίας για όλα τα επίπεδα πληροφόρησης πραγματοποιείται στην ενότητα 2.3. Η ενότητα 2.4 περιλαμβάνει τη μελέτη του συστήματος υπό τη στρατηγική ισορροπίας καθώς και τον υπολογισμό των μέτρων αποτίμησης της απόδοσης του συστήματος. Θεωρητικά αποτελέσματα σχετικά με την επίδραση της πληροφορίας παρουσιάζονται στην ενότητα 2.5. Στις επόμενες δύο ενότητες εξετάζονται ορισμένες ειδικές περιπτώσεις. Στην ενότητα 2.6 περιγράφουμε ορισμένες βασικές περιπτώσεις για την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ενώ στην ενότητα 2.7.1 εστιάζουμε στην ειδική περίπτωση που η χωρητικότητα είναι άπειρη. Τέλος, στην ενότητα 2.8 αναφέρουμε ορισμένα βασικά αποτελέσματα για το πρόβλημα του κοινωνικού διαχειριστή για ορισμένα επίπεδα πληροφόρησης.

Στο Κεφάλαιο 3 εστιάζουμε σε ορισμένες βασικές εφαρμογές εμβαθύνοντας τα θεωρητικά αποτελέσματα και παρουσιάζοντας αριθμητικά πειράματα. Η ενότητα 3.2 αφορά την ειδική περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι επίσκεψης είναι σταθεροί ενώ η ενότητα 3.3 περιλαμβάνει τις απλουστεύσεις για την εκθετική κατανομή.

2.2 Μοντέλο και συμβολισμός.

Το βασικό πλαίσιο εφαρμογής θα αφορά έναν κεντρικό σταθμό από τον οποίο διέρχονται διαφορετικού τύπου μέσα μεταφοράς (όπως τρένα, λεωφορεία, τραμ, κ.λπ.) για την εξυπηρέτηση των πελατών. Η διαδικασία αφίξεων, $N(t)$, των πελατών που επιθυμούν να εξυπηρετηθούν είναι *Poisson* με ρυθμό λ ενώ τα μεταφορικά μέσα φθάνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία $M(t)$, ανεξάρτητη από τη διαδικασία αφίξεων των πελατών. Ένας τυπικός ενδιάμεσος χρόνος της διαδικασίας $M(t)$ θα συμβολίζεται με X . Η κατανομή της X θα συμβολίζεται με $F(t)$ ενώ η συνάρτηση πυκνότητας της (στην περίπτωση που είναι απόλυτα συνεχής) θα συμβολίζεται με $f(t)$. Ακόμη, με $\tilde{F}(s)$, θα συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes της X , με \bar{x} τη μέση τιμή της, ενώ με $\bar{x}_{(2)}$ τη δεύτερη ροπή της. Τα μεταφορικά μέσα έχουν μέγιστη χωρητικότητα $m \leq \infty$ ενώ το πλήθος ελεύθερων θέσεων, δηλαδή οι διαθέσιμες χωρητικότητες στις στιγμές διαδοχικών επισκέψεων στον σταθμό θα παριστάνονται από μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες διακριτές τ.μ. $C_i \in \{1, 2, \dots, m\}$, με συνάρτηση μάζας πιθανότητας $h(j)$, συνάρτηση κατανομής H και μέση τιμή \bar{h} .

Σε κάθε επίσκεψη ενός μέσου μεταφοράς στον σταθμό που έχει χωρητικότητα j , θα εξυπηρετούνται το πολύ j πελάτες. Με άλλα λόγια, το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται κάθε φορά που ένα μέσο μεταφοράς επισκέπτεται τον σταθμό, ισούται με τον μεγαλύτερο μεταξύ της τρέχουσας χωρητικότητας και του τρέχοντος πλήθους των πελατών που έχουν συσσωρευθεί. Επισημαίνουμε, επιπλέον, ότι οι πελάτες εξυπηρετούνται με βάση την πειθαρχία FCFS.

Οι πελάτες που φθάνουν στον σταθμό είναι στρατηγικοί, με την έννοια ότι αποφασίζουν σχετικά με τον αν θα χρησιμοποιήσουν τον σταθμό ή αν θα αποχωρήσουν άμεσα, επιλέγοντας για παράδειγμα, κάποιον εναλλακτικό τρόπο για να εξυπηρετηθούν. Η αξία της εξυπηρέτησης για κάθε πελάτη που καταφέρνει να επιβιβαστεί είναι r ενώ το κόστος παραμονής (το οποίο υποθέτουμε ότι είναι γραμμικό ως προς τον χρόνο και ίδιο για όλους τους πελάτες) θα είναι c ανά χρονική μονάδα.

Σε όσα ακολουθούν θα υποθέτουμε πως οι πελάτες που δεν βρίσκουν θέση, δεν θα περιμένουν το επόμενο δρομολόγιο αλλά θα χρησιμοποιήσουν κάποια εναλλακτική επιλογή. Έτσι, σε κάθε περίπτωση, ο σταθμός θα μένει κενός μετά την αναχώρηση του μεταφορικού μέσου.

Η υπόθεση αυτή είναι κεντρική για τη μελέτη του μοντέλου από μαθηματικής πλευράς καθώς μας επιτρέπει να θεωρήσουμε το σύστημα ως μια ανανεωτική διαδικασία με στιγμές ανανέωσης εκείνες στις οποίες αναχωρεί ένα μεταφορικό μέσο από τον σταθμό, αφήνοντας τον κενό. Συνεπώς, σε κάθε έναν από τους ανανεωτικούς κύκλους που σχηματίζονται, το σύστημα κάνει επανεκκίνηση και επομένως, η ανάλυση της στοχαστικής του εξέλιξης μπορεί να περιοριστεί σε έναν κύκλο ανανέωσης. Πέρα όμως από τη μαθηματική σκοπιά, η υπόθεση αυτή είναι και ρεαλιστική. Για παράδειγμα, καθώς οι πελάτες είναι στρατηγικοί, μπορούμε να θεωρήσουμε την ακόλουθη συνθήκη εκκαθάρισης:

$$\frac{r}{c} < \bar{x}. \quad (2.1)$$

Πράγματι, με την υπόθεση αυτή, οι πελάτες που δεν θα καταφέρουν να εξυπηρετηθούν θα αποχωρήσουν άμεσα από τον σταθμό χωρίς να περιμένουν το επόμενο μέσο μεταφοράς. Ωστόσο, στην ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών που θα παρουσιάσουμε, δεν θα στηριχθούμε στην υπόθεση (2.1), καθώς η θεωρία που αναπτύσσουμε και τα αποτελέσματά της, αφορούν ένα πολύ γενικότερο πλαίσιο εφαρμογής από εκείνο που έχουμε θεωρήσει στο κεφάλαιο αυτό. Η υπόθεση (2.1) θα υιοθετηθεί ωστόσο στην ειδική εφαρμογή των σταθερών ενδιάμεσων χρόνων, που παρουσιάζουμε στο Κεφάλαιο 4, καθώς η εφαρμογή αυτή συνδέεται άμεσα με την περίπτωση προγραμματισμένων δρομολογίων από μια υπηρεσία μεταφοράς.

Πριν τη λήψη της απόφασης αυτή, η οποία είναι αμετάκλητη, οι πελάτες θα έχουν λάβει σχετική πληροφόρηση (πχ μέσω κάποιας εφαρμογής ή ανακοίνωσης σε πάνελ) που θα αφορά το μέσο με

το οποίο σκοπεύουν να εξυπηρετηθούν. Πέρα από τη βασική πληροφόρησή που θα είναι πάντα διαθέσιμη και αφορά τις οικονομικές παραμέτρους του μοντέλου καθώς και τις σχετικές στοχαστικές διαδικασίες, θα έχουν ενδεχομένως και μια επιπρόσθετη πληροφόρηση.

Το είδος της επιπρόσθετης πληροφόρησης είναι στον έλεγχο του διαχειριστή του σταθμού ο οποίος υποθέτουμε ότι μεταφέρει την πληροφορία στους πελάτες με απόλυτη ακρίβεια. Η πληροφορία αυτή, έστω I , μπορεί να αφορά διαφορετικά στοχαστικά μέρη του συστήματος. Θα θεωρήσουμε τρεις τύπους πληροφόρησης που διαφέρουν μεταξύ τους τόσο από το συγκεκριμένο είδος της πληροφορίας (συνεχές ή διακριτό) όσο και από τη δυναμική με την οποία επηρεάζει τις στρατηγικές των πελατών. Ειδικότερα, θα συμβολίσουμε με C τον επίπεδο πληροφόρησης, που θα αφορά τον αριθμό ελεύθερων θέσεων στο επόμενο μεταφορικό μέσο, με A το επίπεδο στο οποίο οι πελάτες ενημερώνονται σχετικά με τον χρόνο που μεσολάβησε από το προηγούμενο μεταφορικό μέσο, ο οποίος θα αναφέρεται ως η ηλικία. Τέλος, θα συμβολίσουμε με N το επίπεδο πληροφόρησης που θα αφορά το πλήθος των πελατών που ήδη έχουν εισέλθει στον σταθμό.

Τα τρία επίπεδα αυτά μπορούν να συνδυαστούν μεταξύ τους με οποιοδήποτε τρόπο, δίνοντας έτσι επιπλέον 4 επίπεδα πληροφόρησης. Θα θεωρήσουμε ακόμα το επίπεδο στο οποίο δεν δίνεται καμία πληροφόρηση στους πελάτες (μη παρατηρήσιμο σύστημα) το οποίο θα συμβολίζουμε με \emptyset . Συνολικά λοιπόν, προκύπτουν τα ακόλουθα 8 επίπεδα πληροφόρησης:

1. $I = CAN$ (Γνωστή χωρητικότητα, ηλικία και πλήθος πελατών). Με την άφιξη του στον σταθμό, κάθε πελάτης ενημερώνεται σχετικά με το πλήθος διαθέσιμων θέσεων στο επόμενο μεταφορικό μέσο C , την ηλικία, A , της στοχαστικής διαδικασίας $\{M(t)\}$ (δηλαδή τον χρόνο από την έλευση του προηγούμενου μεταφορικού μέσου) καθώς και το πλήθος των πελατών N , που ήδη έχουν εισέλθει στο σταθμό και περιμένουν να εξυπηρετηθούν.
2. $I = CA$ (Γνωστή χωρητικότητα και ηλικία). Με την άφιξη του στον σταθμό, κάθε πελάτης ενημερώνεται σχετικά με το πλήθος διαθέσιμων θέσεων στο επόμενο μεταφορικό μέσο, C , και την ηλικία, A , της στοχαστικής διαδικασίας $\{M(t)\}$.
3. $I = CN$ (Γνωστή χωρητικότητα και πλήθος πελατών). Με την άφιξη του στον σταθμό, κάθε πελάτης ενημερώνεται σχετικά με το πλήθος διαθέσιμων θέσεων στο επόμενο μεταφορικό μέσο, C , και το πλήθος των πελατών, N , που ήδη έχουν εισέλθει στο σταθμό και περιμένουν να εξυπηρετηθούν.
4. $I = AN$ (Γνωστή ηλικία και πλήθος πελατών). Με την άφιξη του στον σταθμό, κάθε πελάτης ενημερώνεται σχετικά με την ηλικία, A , της στοχαστικής διαδικασίας $\{M(t)\}$, και το πλήθος των πελατών, N , που ήδη έχουν εισέλθει στο σταθμό και περιμένουν να εξυπηρετηθούν.
5. $I = A$ (Γνωστή ηλικία). Με την άφιξη του στον σταθμό, κάθε πελάτης ενημερώνεται σχετικά με την ηλικία, A , της στοχαστικής διαδικασίας $\{M(t)\}$.
6. $I = N$ (Γνωστό πλήθος πελατών). Με την άφιξη του στον σταθμό, κάθε πελάτης ενημερώνεται σχετικά με το πλήθος των πελατών, N , που ήδη έχουν εισέλθει στο σταθμό και περιμένουν να εξυπηρετηθούν.
7. $I = C$ (Γνωστή χωρητικότητα). Με την άφιξη του στον σταθμό, κάθε πελάτης ενημερώνεται σχετικά με το πλήθος διαθέσιμων θέσεων στο επόμενο μεταφορικό μέσο C .
8. $I = \emptyset$ (Μη παρατηρήσιμο σύστημα). Στο επίπεδο αυτό, δεν παρέχεται καμία πληροφόρηση στους πελάτες.

Θα συμβολίζουμε με \mathcal{I} το σύνολο όλων των επιπέδων πληροφόρησης, δηλαδή, $\mathcal{I} = \{CAN, CA, CN, C, AN, A, N, \emptyset\}$. Επισημαίνουμε πως η ανάλυση του μη παρατηρήσιμου μοντέλου αλλά και η

ανάλυση του επιπέδου N , έχει υλοποιηθεί στην [100]. Ωστόσο, στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν και νέα αποτελέσματα σχετικά με τα επίπεδα αυτά. Επισημάνουμε πως ο συμβολισμός για τα επίπεδα αυτά έχει τροποποιηθεί ελάχιστα ώστε να ενοποιηθεί με τον γενικότερο συμβολισμό που εισάγουμε για όλα τα επίπεδα πληροφόρησης.

Όπως αναφέρθηκε, τα επίπεδα πληροφόρησης διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους τόσο από το συγκεκριμένο είδος της παρεχόμενης πληροφορίας όσο και από τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζονται οι στρατηγικές των πελατών από την πληροφορία αυτή. Συγκεκριμένα, ως προς το είδος της πληροφορίας, παρατηρούμε πως στο επίπεδο A (καθώς και όλα τα επίπεδα που περιέχουν το A), η πληροφόρηση είναι συνεχούς τύπου ενώ σε όλα τα άλλα, η πληροφόρηση είναι διακριτή. Λόγω της πολυπλοκότητας που παρουσιάζουν τα μοντέλα με συνεχούς είδους πληροφόρησης, καθώς οι στρατηγικές των πελατών είναι πραγματικές συναρτήσεις, έχουν μελετηθεί ελάχιστα στη βιβλιογραφία. Από την άλλη, υπάρχουν αναρίθμητα μοντέλα με διακριτού τύπου πληροφόρησης.

Στον χρόνο που μεσολαβεί από την επίσκεψη ενός μεταφορικού μέσου μέχρι τη διέλευση του επόμενου (δηλαδή κατά τη διάρκεια ενός ανανεωτικού κύκλου), μπορούμε να θεωρήσουμε πως πραγματοποιείται ένα παίγνιο μεταξύ των πελατών που θα φθάσουν στον σταθμό στο χρονικό αυτό διάστημα. Ειδικότερα, τα διαφορετικά παίγνια που πραγματοποιούνται σε διαφορετικούς κύκλους ανανέωσης θα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους καθώς κάθε πελάτης αλληλεπιδρά στρατηγικά μόνο με όσους πελάτες έχουν φθάσει στον ίδιο ενδιάμεσο χρόνο της $\{M(t)\}$. Πράγματι, η πιθανότητα ένας επιλεγμένος πελάτης να εξυπηρετηθεί από το επόμενο μέσο μεταφοράς, επηρεάζεται αποκλειστικά από τις αποφάσεις των πελατών που φθάνουν στο σύστημα μεταξύ της στιγμής έλευσης του προηγούμενου μέσου και της στιγμής άφιξης του επιλεγμένου πελάτη. Επιπλέον, η απόφαση του επιλεγμένου πελάτη σχετικά με το αν θα χρησιμοποιήσει το επόμενο μέσο ή όχι, θα επηρεάσει μόνο εκείνους τους πελάτες που θα έρθουν μετά από αυτόν και πριν την επίσκεψη του επόμενου μέσου.

2.2.1 Στρατηγικό πλαίσιο

Σε όσα ακολουθούν, θα συμβολίζουμε με \mathbf{q} τη (μικτή) στρατηγική των πελατών. Ωστόσο, η μορφή των στρατηγικών αυτών θα εξαρτάται κάθε φορά από το συγκεκριμένο τύπο της πληροφορίας που είναι διαθέσιμο στους πελάτες. Επομένως, για το επίπεδο πληροφόρησης $I \in \mathcal{I}$, θα συμβολίζουμε τη στρατηγική ισορροπίας με $\mathbf{q}^{I-(e)}$. Τέλος, θα χρησιμοποιούμε τον δείκτη \mathbf{q}_f στις στοχαστικές διαδικασίες του αρχικού συστήματος, υποδηλώνοντας ότι ο πληθυσμός των πελατών έχει υιοθετήσει τη στρατηγική ισορροπίας. Για παράδειγμα, η διαδικασία $\{N_{\mathbf{q}_f}(t)\}$ θα αντιπροσωπεύει τον αριθμό των πελατών που έχουν εισέλθει στο σύστημα στο $[0, t]$ όταν ακολουθείται η στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}^{I-(e)}$ για το επίπεδο πληροφόρησης $I \in \mathcal{I}$.

Ιδιαίτερη σημασία έχει και ο τρόπος που το κάθε είδος πληροφόρησης επηρεάζει τις στρατηγικές των πελατών. Η πληροφόρηση που παρέχεται στο επίπεδο C είναι σταθερή, με την έννοια πως όλοι οι πελάτες που φθάνουν στον ίδιο ανανεωτικό κύκλο θα λάβουν την ίδια πληροφόρηση σχετικά με τη χωρητικότητα του επόμενου μέσου και όπως προαναφέρθηκε, θεωρώντας διαφορετικούς ανανεωτικούς κύκλους, η μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών μπορεί να χωριστεί σε ανεξάρτητα παίγνια. Σε καθένα από αυτά, οι στρατηγικές των πελατών θα εξαρτώνται από την τ.μ. C αποκλειστικά από τη συγκεκριμένη σταθερή τιμή που λαμβάνει σε αυτά.

Από την άλλη, η πληροφόρηση σχετικά με το πλήθος των πελατών N ή/και την ηλικία A μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια ενός ανανεωτικού κύκλου. Ειδικότερα, κάθε πελάτης κατά την άφιξη του, θα λάβει διαφορετική πληροφορία σχετικά με το πόσοι πελάτες, n , βρίσκονται ήδη στον σταθμό ή/και σχετικά με το πόσος χρόνος a έχει περάσει από την έλευση του προηγούμενου μέσου.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να διακρίνουμε δύο κεντρικές περιπτώσεις σχετικά με το αν στην παρεχόμενη πληροφόρηση περιέχεται το C ή όχι. Δηλαδή, μπορούμε να διαχωρίσουμε

τα επίπεδα πληροφόρησης στις εξής επιμέρους κατηγορίες: (1) Στα επίπεδα CAN, CA, CN, C και (2) στα επίπεδα AN, A, N, \emptyset . Η διάκριση αυτή είναι βολική καθώς μας επιτρέπει να απλουστεύσουμε σημαντικά την ανάλυση για τα επίπεδα της κατηγορίας (1), εστιάζοντας μόνο σε ένα από τα επιμέρους ανεξάρτητα υπό-παίγνια που σχηματίζονται ανάλογα με την τιμή του C . Ειδικότερα, επειδή οι στρατηγικές των πελατών στα επιμέρους υπό-παίγνια, δεν επηρεάζονται από την κατανομή, $h(j)$, της τ.μ. C αλλά μόνο από την τιμή της, μπορούμε να γράψουμε τη γενική στρατηγική στη μορφή $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots)$ και να εστιάσουμε μόνο στην ανάλυση για τη συνιστώσα \mathbf{q}_j , η οποία θα αντιστοιχεί στη στρατηγική των πελατών αν είχαμε $C = j$ (μ.π. 1). Επομένως, για το επίπεδο $i \in \{\text{CAN}, \text{CA}, \text{CN}, \text{C}\}$ θα αρκεί να μελετήσουμε το j -παίγνιο των πελατών και να προσδιορίσουμε τη στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{i-(e)}$ που θα αντιστοιχεί σε αυτό. Θα έχουμε προσδιορίσει έτσι τη γενική στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}^{i-(e)} = (\mathbf{q}_1^{i-(e)}, \mathbf{q}_2^{i-(e)}, \dots)$.

2.2.2 Αναμενόμενη ωφέλεια των πελατών

Η βασική ποσότητα στην οποία στηρίζεται η ανάλυση και απαιτείται να υπολογίσουμε σε κάθε ένα από τα επίπεδα πληροφόρησης, είναι το αναμενόμενο μέσο όφελος ενός επιλεγμένου πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα, δεδομένης της διαθέσιμης πληροφορίας i και θεωρώντας ότι όλοι οι άλλοι πελάτες χρησιμοποιούν μια συγκεκριμένη στρατηγική \mathbf{q} . Την ποσότητα αυτή, για το δεδομένο σενάριο πληροφορίας I , θα τη συμβολίζουμε με $G^I(i|\mathbf{q})$. Για τον υπολογισμό της ορίζουμε τα εξής:

- $P^I(i|\mathbf{q})$: η δεσμευμένη πιθανότητα ο επιλεγμένος πελάτης να εξυπηρετηθεί από το επόμενο μέσο, δεδομένου ότι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική \mathbf{q} και η διαθέσιμη πληροφορία είναι η i (η οποία μπορεί να είναι η ηλικία ή/και το πλήθος των πελατών ή/και η διαθέσιμη χωρητικότητα του επόμενου μέσου).
- $E^I(i|\mathbf{q})$: η δεσμευμένη μέση τιμή του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης για τον επιλεγμένο πελάτη, δεδομένου της στρατηγικής των υπολοίπων, \mathbf{q} , και της διαθέσιμης πληροφορίας, i .

Ειδικότερα για την ποσότητα $E^I(i|\mathbf{q})$, παρατηρούμε αρχικά πως δεν εξαρτάται από τη στρατηγική των πελατών και άρα μπορούμε να γράψουμε ότι $E^I(i|\mathbf{q}) = E^I(i)$. Επιπλέον, η πληροφορία σχετικά με τη χωρητικότητα του επόμενου μέσου δεν επηρεάζει αυτή τη δεσμευμένη μέση τιμή. Επομένως, το αναμενόμενο όφελος για τον επιλεγμένο πελάτη μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή:

$$G^I(i|\mathbf{q}) = rP^I(i|\mathbf{q}) - cE^I(i). \quad (2.2)$$

Ο επιλεγμένος πελάτης θα καταφέρει να εξυπηρετηθεί αν η χωρητικότητα του επόμενου μέσου του επιτρέπει να επιβιβαστεί μαζί με τους πελάτες που έχουν φθάσει πριν από αυτόν στον ίδιο ανανεωτικό κύκλο. Με άλλα λόγια, αν η χωρητικότητα είναι j , τότε θα εξυπηρετηθεί αν και μόνο αν έχουν φθάσει στον ίδιο κύκλο το πολύ $j - 1$ άλλοι πελάτες. Ο αριθμός αυτός αντιστοιχεί στο πλήθος των γεγονότων που συμβαίνουν σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα στην εκλέπτυνση μιας διαδικασίας αφίξεων Poisson που αντιστοιχεί στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι υπόλοιποι πελάτες. Σε γενικές γραμμές, θα δούμε πως ο αριθμός αυτός κατανέμεται σύμφωνα με μια κατανομή Poisson της οποίας η παράμετρος εξαρτάται από την επιπρόσθετη πληροφόρηση που λαμβάνει ο επιλεγμένος πελάτης αλλά και από τη στρατηγική των υπολοίπων. Επομένως, όταν $C = j$, η πιθανότητα $P^I(i|\mathbf{q}, C = j)$ παριστάνει την πιθανότητα μια τυχαία μεταβλητή με την κατανομή Poisson παραμέτρου s να είναι μικρότερη από j , δηλαδή, την πιθανότητα:

$$p_j(s) = \sum_{i=0}^{j-1} e^{-s} \frac{s^i}{i!} = \frac{1}{(j-1)!} \int_s^\infty u^{j-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(j, s)}{(j-1)!}, \quad (2.3)$$

με κατάλληλα επιλεγμένη παράμετρο s (όπου η $\Gamma(j, s)$ είναι η άνω μη-πλήρης συνάρτηση gamma (upper incomplete gamma function)). Σημειώνουμε ότι $p_j(0) = 1$ και $\lim_{s \rightarrow \infty} p_j(s) = 0$ για $j \geq 1$. Επιπλέον, η $p_j(s)$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς s και γνησίως αύξουσα ως προς j .

Για τα επίπεδα πληροφόρησης για τα οποία η πληροφορία σχετικά με το C είναι κρυμμένη, θα χρειαστεί να δεσμεύσουμε ως προς την τιμή της τ.μ. C . Τότε, σε αντιστοιχία με την ποσότητα στην (2.3), θα έχουμε την

$$p(s) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)p_j(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-1} e^{-s} \frac{s^i}{i!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h(j)}{(j-1)!} \int_s^{\infty} u^{j-1} e^{-u} du = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h(j)\Gamma(j, s)}{(j-1)!}, \quad (2.4)$$

με $p(0) = 1$ και $\lim_{s \rightarrow \infty} p(s) = 0$ και όπου η $p(s)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Χρησιμοποιώντας τις $p_j(s)$ και $p(s)$, θα ορίσουμε ακόμα δύο συναρτήσεις οι οποίες θα βοηθήσουν στην ανάλυση ορισμένων επιπέδων πληροφόρησης. Συγκεκριμένα, ορίζουμε τις

$$P_j(s) = \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\infty} p_j(sa)(1 - F(a))da, \quad (2.5)$$

και

$$P(s) = \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\infty} p(sa)(1 - F(a))da = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)P_j(s). \quad (2.6)$$

Έπεται άμεσα ότι συναρτήσεις αυτές είναι γνησίως φθίνουσες ως προς s και γνησίως αύξουσες ως προς j , με $P_j(0) = P(0) = 1$ και $\lim_{s \rightarrow \infty} P_j(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} P(s) = 0$.

2.2.3 Μέτρα αποτίμησης απόδοσης του συστήματος

Ως μέτρα αποτίμησης απόδοσης για το υπό μελέτη σύστημα θα θεωρούμε τον ρυθμό εισόδου, (effective arrival rate (EAR)), που εκφράζει τον μέσο αριθμό πελατών που εισέρχονται στο σύστημα ανά χρονική μονάδα, τον ρυθμό απόδοσης, (throughput (TH)), που εκφράζει τον μέσο αριθμό πελατών που εξυπηρετούνται ανά χρονική μονάδα, και το κοινωνικό όφελος, (social welfare (SW)) που εκφράζει το συνολικό όφελος που παράγεται από το σύστημα ανά χρονική μονάδα. Σε όσα ακολουθούν, θα χρησιμοποιήσουμε αντίστοιχο συμβολισμό με παραπάνω όταν θα αναφερόμαστε στις ποσότητες αυτές, για δεδομένο επίπεδο πληροφόρησης I .

Ωστόσο, στην ανάλυση για τα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης στις ενότητες 2.3.1, 2.3.3, 2.3.5 και 2.3.6, θα παραλείπουμε το σύμβολο σχετικά με το I (το οποίο θα εννοείται ότι είναι CAN , CA , CN και C , αντίστοιχα) στις ποσότητες $G_j^I(i|\mathbf{q}_j)$, $P_j^I(i|\mathbf{q}_j)$, $E^I(i|\mathbf{q}_j)$ καθώς και σε όλες τις άλλες σχετικές συναρτήσεις ώστε να απλουστευθεί ο συμβολισμός και να διευκολυνθεί η ανάγνωση.

Σε όλα τα επίπεδα πληροφόρησης στα οποία είναι γνωστή η χωρητικότητα του επόμενου μέσου (δηλαδή στα CAN , CA , CN , C), όπως έχουμε αναφέρει, οι στρατηγικές των πελατών, \mathbf{q}_j , δεν εξαρτώνται από την κατανομή $h(j)$ της διαθέσιμης χωρητικότητας του επόμενου μέσου και ως εκ τούτου, στα ανεξάρτητα παίγνια που έχουμε για τις διάφορες τιμές του j , θα μπορούμε να υπολογίσουμε τα δεσμευμένα μέτρα αποτίμησης απόδοσης, δεδομένου ότι $C = j$. Τα μέτρα αυτά

θα τα συμβολίσουμε με EAR_j^I, TH_j^I, SW_j^I αντίστοιχα και επομένως θα ισχύει ότι

$$EAR^I = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)EAR_j^I \quad (2.7)$$

$$TH^I = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)TH_j^I \quad (2.8)$$

$$SW^I = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)SW_j^I. \quad (2.9)$$

2.3 Στρατηγική ισορροπίας στα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης

Στην τρέχουσα ενότητα θα μελετήσουμε ξεχωριστά τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών στα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης, προσδιορίζοντας τις στρατηγικές ισορροπίας σε καθένα από αυτά. Αρχικά επισημαίνουμε πως στα επίπεδα πληροφόρησης που περιέχουν το C , δηλαδή στα επίπεδα CAN, CA, CN, C, επειδή όπως αναφέραμε, η πληροφόρηση σχετικά με C δεν επηρεάζει τις στρατηγικές των πελατών, αυτές θα είναι της μορφής $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots)$, όπου το \mathbf{q}_j αντιστοιχεί στη στρατηγική των πελατών που παρατηρούν $C = j$. Επομένως, για τα επίπεδα αυτά θα αρκεί να μελετήσουμε το j -παίγνιο των πελατών και να προσδιορίσουμε τη στρατηγική \mathbf{q}_j . Επιπλέον, θα απλοποιήσουμε τον συμβολισμό χρησιμοποιώντας τον δείκτη j στις ποσότητες ενδιαφέροντος. Για παράδειγμα, η αναμενόμενη ωφέλεια στο j -παίγνιο θα συμβολίζεται με G_j .

2.3.1 Επίπεδο CAN: Όταν η χωρητικότητα, η ηλικία και το πλήθος πελατών είναι γνωστά.

Ξεκινάμε με το πιο λεπτομερές επίπεδο πληροφόρησης στο οποίο η διαθέσιμη πληροφορία για τους πελάτες που φθάνουν στον σταθμό θα αφορά τη χωρητικότητα $C = j$, την ηλικία A καθώς και το πλήθος των πελατών που ήδη έχουν επιλέξει να εισέλθουν, N . Μια στρατηγική εισόδου (μικτή στρατηγική) θα είναι το διάνυσμα $\mathbf{q}_j = (q_j(a, n) : a \in [0, \infty), n \in \{0, 1, 2, \dots\})$. Η $q_j(a, n)$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα εισόδου για έναν πελάτη που φθάνοντας στον σταθμό πληροφορείται ότι το προηγούμενο μέσο αναχώρησε πριν από a χρονικές μονάδες, ότι υπάρχουν n πελάτες που ήδη έχουν επιλέξει να εισέλθουν καθώς και πως η διαθέσιμη χωρητικότητα (το πλήθος ελεύθερων θέσεων) στο επόμενο μεταφορικό μέσο είναι j .

Επομένως θεωρούμε μόνο τους πελάτες που εμπλέκονται στο j -παίγνιο και θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη όπου κατά την άφιξη του λαμβάνει την πληροφορία πως η έλευση του προηγούμενου μέσου έγινε πριν από a χρονικές μονάδες και πως το πλήθος των παρόντων πελατών είναι n . Η εξίσωση (2.2) παίρνει τη μορφή:

$$G_j(a, n | \mathbf{q}_j) = rP_j(a, n | \mathbf{q}_j) - cE(a, n). \quad (2.10)$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα να εξυπηρετηθεί ο επιλεγμένος πελάτης είναι:

$$P_j(a, n | \mathbf{q}_j) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \leq j - 1, \\ 0 & \text{αν } n \geq j. \end{cases} \quad (2.11)$$

Ο δεσμευμένος μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης κατά τη στιγμή της άφιξης του επιλεγμένου πελάτη που λαμβάνει την πληροφόρηση ότι $A = a$ και $N = n$ δεν εξαρτάται από το n . Πράγματι, είναι φανερό ότι δοθείσης της ηλικίας A , ο υπολειπόμενος χρόνος R και το πλήθος

πελατών που έχουν συγκεντρωθεί σε χρόνο A είναι δεσμευμένα ανεξάρτητα. Επομένως, ο δεσμευμένος μέσος υπολειπόμενος χρόνος θα ταυτίζεται τελικά με τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(a) = E[X - a | X > a]$.

Στο παράρτημα παρουσιάζονται περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη συνάρτηση $m(a)$. Σε όσα ακολουθούν, θα υποθέτουμε πως το στήριγμα της X είναι το $(0, +\infty)$. Διαφορετικά, θα χρειαστεί να κάνουμε τις ανάλογες τροποποιήσεις.

Παίρνουμε επομένως

$$E(a, n) = m(a) = \int_a^{\infty} \frac{1 - F(u)}{1 - F(a)} du. \quad (2.12)$$

Έτσι, η αναμενόμενη ωφέλεια για τον επιλεγμένο πελάτη είναι

$$G_j(a, n | \mathbf{q}_j) = \begin{cases} r - cm(a) & \text{αν } n \leq j - 1, \\ -cm(a) & \text{αν } n \geq j. \end{cases} \quad (2.13)$$

Το γεγονός ότι η αναμενόμενη ωφέλεια $G_j(a, n | \mathbf{q}_j)$ για τον επιλεγμένο πελάτη δεν εξαρτάται από τις στρατηγικές \mathbf{q}_j , των υπολοίπων, κάνει την ανάλυση πολύ απλή και έπεται άμεσα η ύπαρξη κυριαρχούσας στρατηγικής. Για να εξασφαλίσουμε τη μοναδικότητα, υποθέτουμε ότι στην περίπτωση που οι πελάτες είναι αδιάφοροι μεταξύ του να εισέλθουν ή όχι, αποφασίζουν πάντα να εισέλθουν.

Θεώρημα 2.1. (Κυριαρχούσα στρατηγική για το επίπεδο CAN) Στο επίπεδο πληροφόρησης CAN υπάρχει μοναδική κυριαρχούσα στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{(e)} = (q_j^{(e)}(a, n) : a \in [0, \infty), n \in \{0, 1, 2, \dots\})$. Η μορφή της είναι η ακόλουθη

$$q_j^{(e)}(a, n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \leq j - 1 \text{ και } m(a) \leq \frac{r}{c}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Η κυριαρχούσα στρατηγική έχει πιο απλή μορφή στις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\inf_{a \in [0, \infty)} m(a) > \frac{r}{c}$. Τότε η κυριαρχούσα στρατηγική είναι η στρατηγική καθολικής αποχώρησης ($q_j^{(e)}(a, n) = 0$, για κάθε $a \in [0, \infty)$ και $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$).

Περίπτωση 2: $\sup_{a \in [0, \infty)} m(a) \leq \frac{r}{c}$. Τότε, η κυριαρχούσα στρατηγική είναι

$$q_j^{(e)}(a, n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \leq j - 1, \\ 0 & \text{αν } n \geq j. \end{cases} \quad (2.15)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.3.

2.3.2 Επίπεδο AN: Όταν η ηλικία και το πλήθος πελατών είναι γνωστά.

Στην υπό-ενότητα αυτή μελετάμε την περίπτωση που η διαθέσιμη πληροφορία για τους πελάτες αφορά την ηλικία, (A) και το πλήθος των πελατών που περιμένουν ήδη στο σταθμό, (N). Τότε, οι στρατηγικές των πελατών θα εκφράζονται μέσω της συνάρτησης $\mathbf{q} = (q(a, n) : a \in [0, \infty), n \in \{0, 1, 2, \dots\})$, όπου το $q(a, n)$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα εισόδου για έναν πελάτη που φθάνει στον σταθμό, δεδομένου ότι τη στιγμή της άφιξης του, η έλευση του προηγούμενου μέσου μεταφοράς πραγματοποιήθηκε πριν από a χρονικές μονάδες και πως υπάρχουν στον σταθμό ακριβώς n πελάτες που περιμένουν για το επόμενο μέσο.

Η σχέση (2.2), για έναν επιλεγμένο πελάτη που φθάνει στον σταθμό θα πάρει τη μορφή

$$G(a, n|\mathbf{q}) = rP(a, n|\mathbf{q}) - cE(a, n). \quad (2.16)$$

Παρατηρούμε πως για το επίπεδο αυτό, η πιθανότητα επιβίβασης για τον επιλεγμένο πελάτη θα είναι ανεξάρτητη από τη στρατηγική των υπολοίπων. Αυτό συμβαίνει διότι η κατανομή της διαθέσιμης χωρητικότητας, $h(j)$ δεν εξαρτάται από την \mathbf{q} . Δεσμεύοντας στις τιμές της τ.μ. C παίρνουμε ότι

$$P(a, n|\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j(a, n|\mathbf{q})h(j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{n \leq j-1\}}h(j) = \bar{H}(n). \quad (2.17)$$

Ο δεσμευμένος μέσος υπολειπόμενος χρόνος είναι επίσης ανεξάρτητος από την τ.μ. C και θα είναι ίσος με τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(a) = E[X - a | X > a]$. Τελικά, το αναμενόμενο όφελος για τον επιλεγμένο πελάτη, δοθέντος ότι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική \mathbf{q} είναι

$$G(a, n|\mathbf{q}) = r\bar{H}(n) - cm(a), \quad (2.18)$$

και δεν εξαρτάται από τη στρατηγική \mathbf{q} των άλλων πελατών. Επομένως, υπάρχει μοναδική κυριαρχούσα στρατηγική, η οποία δίνεται στο Θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 2.2. (Κυριαρχούσα στρατηγική για το επίπεδο AN) Στο επίπεδο πληροφόρησης AN, υπάρχει μοναδική κυριαρχούσα στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}^{(e)} = (q^{(e)}(a, n) : a \in [0, \infty), n \in \{0, 1, 2, \dots\})$. Αυτή προσδιορίζεται ως εξής:

$$q^{(e)}(a, n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \frac{m(a)}{\bar{H}(n)} \leq \frac{r}{c}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Απόδειξη. Από την (2.18), θα έχουμε ότι $G(a, n) \geq 0$ αν και μόνο αν $r\bar{H}(n) - cm(a) \geq 0$, από το οποίο έπεται η (2.19).

Αφού η $\bar{H}(n)$ είναι φθίνουσα ως προς n , η κυριαρχούσα στρατηγική είναι φθίνουσα ως προς n για κάθε a . Ειδικότερα, για κάθε a είναι $q^{(e)}(a, n) = \mathbb{1}_{\{n \leq n^*(a)\}}$, όπου $n^*(a) = \max\{n : \frac{m(a)}{\bar{H}(n)} \leq \frac{r}{c}\}$. Επιπλέον, παρατηρούμε πως όταν $C = j$ (μ.π.1), τότε παίρνουμε $\bar{H}(n) = \mathbb{1}_{\{0 \leq n \leq j-1\}}$ και άρα

$$q^{(e)}(a, n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \leq j-1 \text{ και } m(a) \leq \frac{r}{c}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} = q_j^{(e)-CAN}(a, n).$$

Έτσι, το επίπεδο πληροφόρησης CAN μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του επιπέδου AN, όταν $C = j$. Τέλος, στην περίπτωση που η τ.μ. C έχει πεπερασμένο στήριγμα, έστω m_h , τότε $\bar{H}(m_h) = 0$ και αφού $m(a) > 0$ για κάθε $a \geq 0$, παίρνουμε ότι $q^{(e)}(a, n) = 0$ για κάθε $n \geq m_h$.

2.3.3 Επίπεδο CA: Όταν η χωρητικότητα και η ηλικία είναι γνωστά.

Στην ενότητα αυτή θεωρούμε πως οι πελάτες πληροφορούνται κατά την άφιξη τους στον σταθμό, σχετικά με τη χωρητικότητα j του επόμενου μέσου μεταφοράς αλλά και για τον χρόνο a που πέρασε από το προηγούμενο μέσο. Καθώς τα μέσα έχουν την ίδια χωρητικότητα j , μια μικτή στρατηγική είναι μια συνάρτηση $\mathbf{q}_j = (q_j(a) : a \in [0, \infty))$ όπου για $a \geq 0$, η $q_j(a) \in [0, 1]$ εκφράζει την πιθανότητα εισόδου για έναν πελάτη που φθάνει μια τυχαία χρονική στιγμή στον σταθμό, αν κατά τη στιγμή άφιξής του, πληροφορηθεί πως ο χρόνος που μεσολάβησε από το προηγούμενο μεταφορικό μέσο είναι a χρονικές μονάδες και το πλήθος ελεύθερων θέσεων στο επόμενο είναι j .

Το κεντρικό αποτέλεσμα στην ενότητα αυτή είναι πως παρά την πολυπλοκότητα του προβλήματος, το ΣΣΙ έχει εξαιρετικά απλή δομή. Συγκεκριμένα, υπάρχει μοναδικό ΣΣΙ το οποίο είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση με την παρακάτω δομή:

$$q^{(e)}(a) = \begin{cases} 1, & \text{αν } a \in J \\ \gamma(a), & \text{αν } a \in P \\ 0, & \text{αν } a \in B \end{cases}$$

όπου $J \cup P \cup B = \mathbb{R}_{>0}$ και η $\gamma(a)$ είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από τις παραμέτρους του προβλήματος.

Ας υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός των πελατών ακολουθεί τη στρατηγική \mathbf{q}_j . Επειδή η διαδικασία αφίξεων των πελατών είναι *Poisson* με ρυθμό λ αλλά και επειδή κάθε άφιξη που πραγματοποιείται t χρονικές μονάδες μετά την τελευταία έλευση μέσου εισέρχεται με πιθανότητα $q_j(t)$, η διαδικασία που θα δίνει το πλήθος πελατών που εισέρχονται ακριβώς μετά την άφιξη του τελευταίου μέσου μεταφοράς θα είναι μη-ομογενής διαδικασία *Poisson* με ρυθμό $\lambda q_j(t)$. Προκειμένου να αποφευχθούν ορισμένες παθολογικές καταστάσεις, υποθέτουμε ότι οι πελάτες επιλέγουν μεταξύ στρατηγικών που ικανοποιούν κάποιες ελάχιστες συνθήκες ομαλότητας:

Υπόθεση 2.1. (Αποδεκτές στρατηγικές για το επίπεδο πληροφόρησης CA) Η συνάρτηση $\mathbf{q}_j = (q_j(a) : a \in [0, \infty))$, είναι αποδεκτή στρατηγική για το επίπεδο πληροφόρησης CA αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες ομαλότητας:

- (i) Είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση του a .
- (ii) Στα σημεία ασυνέχειας, είναι δεξιά συνεχής συνάρτηση του a

Η συνθήκη (i) εξασφαλίζει ότι το ολοκλήρωμα

$$\lambda(a|\mathbf{q}_j) = \int_0^a \lambda q_j(u) du = \lambda Q_j(a) \text{ με } Q_j(a) = \int_0^a q_j(u) du, \quad a \geq 0,$$

είναι καλά ορισμένο και επομένως το πλήθος των πελατών που φθάνουν σε διάστημα a χρονικών μονάδων από την άφιξη του προηγούμενου μεταφορικού μέσου, ακολουθεί κατανομή *Poisson* με παράμετρο $\lambda Q_j(a|\mathbf{q}_j)$. Η συνθήκη (ii) δεν είναι καθόλου περιοριστική διότι αν ο πληθυσμός των πελατών αλλάξει τη στρατηγική σε ένα σημείο ασυνέχειας ώστε να γίνει δεξιά συνεχής, η αναμενόμενη ωφέλεια για έναν επιλεγμένο πελάτη θα παραμείνει ανεπηρέαστη. Πράγματι, η τιμή του ολοκληρώματος στην $Q_j(a|\mathbf{q}_j)$ δεν θα αλλάξει από μια μεταβολή στη ολοκληρωτέα συνάρτηση σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου.

Θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη που φθάνει μια τυχαία χρονική στιγμή και ενημερώνεται ότι το τελευταίο μέσο πέρασε πριν από a χρονικές μονάδες και η χωρητικότητα στο επόμενο μέσο

είναι j . Επιπλέον, θεωρούμε πως ο πληθυσμός των πελατών έχει υιοθετήσει τη στρατηγική $\mathbf{q}_j = (q_j(a) : a \in [0, \infty))$. Τότε, χρησιμοποιώντας την (2.2), η αναμενόμενη ωφέλεια αν αποφασίσει να μπει θα είναι

$$G_j(a|\mathbf{q}_j) = rP_j(a|\mathbf{q}_j) - cE(a). \quad (2.20)$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα επιβίβασης για τον επιλεγμένο πελάτη είναι

$$P_j(a|\mathbf{q}_j) = p_j(\lambda(a|\mathbf{q}_j)), \quad (2.21)$$

με την $p_j(s)$ να δίνεται από την (2.3). Τέλος, ο δεσμευμένος μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης κατά τη στιγμή άφιξης του επιλεγμένου πελάτη που βρίσκει την ηλικία της $\{M(t)\}$ να είναι $A = a$, θα είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m(a) = E[X - a | X > a]$. Όμοια με την (2.12), θα είναι

$$E(a) = m(a) = \int_a^\infty \frac{1 - F(u)}{1 - F(a)} du. \quad (2.22)$$

Επομένως, η αναμενόμενη ωφέλεια για τον επιλεγμένο πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει δεδομένου ότι η χωρητικότητα είναι j και ότι οι υπόλοιποι πελάτες έχουν υιοθετήσει τη στρατηγική \mathbf{q}_j είναι

$$G_j(a|\mathbf{q}_j) = rp_j(\lambda(a|\mathbf{q}_j)) - cm(a). \quad (2.23)$$

Μελετώντας το πρόσημο της G_j ως συνάρτηση του a , μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μορφή της βέλτιστης απάντησης σε μια στρατηγική των άλλων, \mathbf{q}_j . Η μορφή της βέλτιστης απάντησης είναι απλή: Θεωρώντας μια διαμέριση του $\mathbb{R}_{>0}$ σε διαδοχικά διαστήματα, η βέλτιστη απάντηση θα είναι σταθερή, λαμβάνοντας τιμή 0 ή 1 στα «περιττά» διαστήματα ενώ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στα «ζυγά» διαστήματα. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.3. (Βέλτιστη απάντηση για το επίπεδο πληροφόρησης CA) Στο επίπεδο πληροφόρησης CA υποθέτουμε πως ο πληθυσμός των πελατών ακολουθεί μια αποδεκτή στρατηγική \mathbf{q}_j και θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη. Ορίζουμε τους αριθμούς

$$t_j^{(1)} = \inf\{a > 0 : G_j(a|\mathbf{q}_j) = 0\}, \quad (2.24)$$

$$s_j^{(n)} = \inf\{a > t_j^{(n)} : G_j(a|\mathbf{q}_j) \neq 0\}, \quad n \geq 1, \quad (2.25)$$

$$t_j^{(n)} = \inf\{a > s_j^{(n-1)} : G_j(a|\mathbf{q}_j) = 0\}, \quad n \geq 1, \quad (2.26)$$

(τα οποία εξαρτώνται από τη στρατηγική \mathbf{q}_j) και θεωρούμε τη διαμέριση του $\mathbb{R}_{>0}$:

$$\mathbb{R}_{>0} = [0, t_j^{(1)}] \cup [t_j^{(1)}, s_j^{(1)}] \cup (s_j^{(1)}, t_j^{(2)}) \cup [t_j^{(2)}, s_j^{(2)}] \cup (s_j^{(2)}, t_j^{(3)}) \cup \dots, \quad (2.27)$$

(παρατηρούμε ότι $0 \leq t_j^{(1)} \leq s_j^{(1)} < t_j^{(2)} \leq s_j^{(2)} < t_j^{(3)} \leq s_j^{(3)} < \dots$ και $G_j(a|\mathbf{q}_j) = 0$ αν και μόνο αν $a \in [t_j^{(n)}, s_j^{(n)}]$ για κάποιο n). Τότε, μια στρατηγική $\tilde{q}_j(\cdot)$ είναι βέλτιστη απάντηση στην $q(\cdot)$, αν και μόνο αν είναι σταθερή (με τιμές 0 ή 1) σε καθένα από τα διαστήματα $[0, t_j^{(1)})$ και $[s_j^{(n)}, t_j^{(n+1)})$, $n \geq 1$, σύμφωνα με τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\tilde{q}_j(a) = 0, \quad \text{αν } a \in [0, t_j^{(1)}) \text{ και } G_j(t_j^{(1)}/2|\mathbf{q}_j) < 0, \quad (2.28)$$

$$\tilde{q}_j(a) = 1, \quad \text{αν } a \in [0, t_j^{(1)}) \text{ και } G_j(t_j^{(1)}/2|\mathbf{q}_j) > 0, \quad (2.29)$$

$$\tilde{q}_j(a) = 0, \quad \text{αν } a \in [s_j^{(n)}, t_j^{(n+1)}) \text{ για κάποιο } n \geq 1 \text{ και } G_j((s_j^{(n)} + t_j^{(n+1)})/2|\mathbf{q}_j) < 0, \quad (2.30)$$

$$\tilde{q}_j(a) = 1, \quad \text{αν } a \in [s_j^{(n)}, t_j^{(n+1)}) \text{ για κάποιο } n \geq 1 \text{ και } G_j((s_j^{(n)} + t_j^{(n+1)})/2|\mathbf{q}_j) > 0. \quad (2.31)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.3.

Μία στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{(e)}$ είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της και επομένως έχει την ίδια δομή με τη βέλτιστη απάντηση όπως αυτή περιγράφεται από το παραπάνω θεώρημα 2.3, δηλαδή, καθορίζεται από τους αριθμούς $0 \leq t_j^{(e,1)} \leq s_j^{(e,1)} < t_j^{(e,2)} \leq s_j^{(e,2)} < t_j^{(e,3)} \leq s_j^{(e,3)} < \dots$ που διαμερίζουν το πεδίο ορισμού \mathbb{R}_+ του a σε διαδοχικά διαστήματα. Τότε, η $\mathbf{q}_j^{(e)}$ εναλλάσσεται μεταξύ των διαστημάτων στα οποία είναι σταθερή και ίση με 0 ή 1 και των διαστημάτων στα οποία λαμβάνει τιμές στο $(0, 1)$. Ωστόσο, σε αντίθεση με τη βέλτιστη απάντηση η οποία στα «ζυγά» διαστήματα μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, η στρατηγική ισορροπίας, στα διαστήματα αυτά θα έχει συγκεκριμένη μορφή.

Συνοπτικά, για να προσδιορίσουμε με ακρίβεια τη στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{(e)}$, χρειάζεται να υπολογίσουμε τα σημεία $t_j^{(e,n)}$ και $s_j^{(e,n)}$, τις τιμές $d_j^{(e,n)} \in \{0, 1\}$ στα διαστήματα $[s_j^{(e,n-1)}, t_j^{(e,n)})$ όπου παραμένει σταθερή, αλλά και τις τιμές $\gamma_j^{(e)}(a)$ στα διαστήματα $[t_j^{(e,n)}, s_j^{(e,n)})$. Αυτό μπορεί να γίνει αναδρομικά. Πιο συγκεκριμένα, θα προσδιορίσουμε την $\gamma_j^{(e)}(a)$ και για κάθε $n \geq 1$, θα υπολογίσουμε διαδοχικά τα

$$d_j^{(e,n)} \rightarrow t_j^{(e,n)} \rightarrow s_j^{(e,n)}.$$

Το επόμενο θεώρημα περιγράφει με λεπτομέρεια αυτήν την αλγοριθμική διαδικασία. Η γενική μορφή του Θεωρήματος που παρουσιάζουμε περιλαμβάνει την περίπτωση που $r \geq cE[X]$.

Θεώρημα 2.4. (Στρατηγική ισορροπίας για το επίπεδο πληροφόρησης CA) Στο επίπεδο πληροφόρησης 2, υπάρχει μοναδική αποδεκτή στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{(e)} = (q_j^{(e)}(a) : a \geq 0)$. Αυτή καθορίζεται από μια ακολουθία αριθμών

$$0 \leq t_j^{(e,1)} \leq s_j^{(e,1)} < t_j^{(e,2)} \leq s_j^{(e,2)} < t_j^{(e,3)} \leq s_j^{(e,3)} < \dots, \quad (2.32)$$

μια ακολουθία $(d_j^{(e,n)})_{n \geq 1}$ στο $\{0, 1\}$ και μια συνάρτηση $\gamma_j^{(e)}(t)$. Συγκεκριμένα,

$$q_j^{(e)}(a) = \begin{cases} d_j^{(e,1)} & \text{αν } a \in [0, t_j^{(e,1)}), \\ d_j^{(e,n)} & \text{αν } a \in [s_j^{(e,n-1)}, t_j^{(e,n)}), n \geq 2, \\ \gamma_j^{(e)}(a) & \text{αν } a \in [t_j^{(e,n)}, s_j^{(e,n)}), n \geq 1. \end{cases} \quad (2.33)$$

Η συνάρτηση $\gamma_j^{(e)}(a)$ δίνεται από την

$$\gamma_j^{(e)}(a) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\frac{c}{r} m'(a)}{p_j' \left(p_j^{-1} \left(\frac{c}{r} m(a) \right) \right)}. \quad (2.34)$$

Οι ποσότητες $d_j^{(n)}, t_j^{(n)}$ και $s_j^{(n)}$ υπολογίζονται αναδρομικά ως εξής: Για $n = 1$ θέτουμε

$$d_j^{(e,1)} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \frac{r}{c} \geq \bar{x}, \\ 0 & \text{αν } \frac{r}{c} \leq \bar{x}, \end{cases} \quad (2.35)$$

$$t_j^{(e,1)} = \begin{cases} \inf \{ a \geq 0 : m(a) = \frac{r}{c} p_j(\lambda a) \} & \text{αν } d_j^{(e,1)} = 1, \\ \inf \{ a \geq 0 : m(a) = \frac{r}{c} \} & \text{αν } d_j^{(e,1)} = 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

$$s_j^{(e,1)} = \inf \left\{ a > t_j^{(e,1)} : \gamma_j^{(e)}(a) < 0 \text{ ή } > 1 \right\}, \quad (2.37)$$

και για $n \geq 2$ ορίζουμε

$$d_j^{(e,n)} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \liminf_{a \downarrow s_j^{(e,n-1)}} \gamma_j^{(e)}(a) \geq 1 \\ 0 & \text{αν } \limsup_{a \downarrow s_j^{(e,n-1)}} \gamma_j^{(e)}(a) \leq 0, \end{cases} \quad (2.38)$$

$$t_j^{(e,n)} = \begin{cases} \inf\{a > s_j^{(e,n-1)} : m(a) = \frac{r}{c} p_j(\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)}))\} & \text{αν } d_j^{(e,1)} = 1, \\ \inf\{a > s_j^{(e,n-1)} : m(a) = \frac{r}{c} p_j(\lambda(s_j^{(e,n-1)}|\mathbf{q}_j^{(e)}))\} & \text{αν } d_j^{(e,1)} = 0, \end{cases} \quad (2.39)$$

όπου $p_j(\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)})) = p_j(\lambda(a - s_j^{(e,n-1)})) + \lambda(s_j^{(e,n-1)}|\mathbf{q}_j^{(e)})$,

$$s_j^{(e,n)} = \inf\{a > t_j^{(e,n)} : \gamma_j^{(e)}(a) < 0 \text{ or } > 1\}. \quad (2.40)$$

Αν κάποιο $t_j^{(e,n)}$ ή $s_j^{(e,n)}$ είναι ∞ , υιοθετούμε τη σύμβαση ότι όλες οι επακόλουθες ποσότητες στην ακολουθία (2.32) είναι επίσης ∞ .

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.3.

Επομένως, η διαδικασία για την εύρεση του μοναδικού ΣΣΙ μπορεί συνοπτικά να παρουσιαστεί ως εξής: Η στρατηγική είναι αρχικά σταθερή και ίση με 1 ή 0 αναλόγως αν το $\frac{r}{c}$ ξεπερνά το \bar{x} . Αν $\frac{r}{c} > \bar{x}$, τότε βρίσκουμε τη μικρότερη ρίζα της $m(a) = \frac{r}{c} p_j(\lambda a)$, ενώ αν $\frac{r}{c} < \bar{x}$ αναζητάμε τη μικρότερη ρίζα της $m(a) = \frac{r}{c}$. Σε κάθε περίπτωση, η ρίζα θα είναι το πρώτο σημείο στο οποίο η στρατηγική παύει να είναι σταθερή. Στη συνέχεια, οι τιμές της στρατηγικής ισορροπίας θα δίνονται από την $\gamma_j^{(e)}(a)$, η μορφή της οποίας παρουσιάζεται στην (2.34). Όταν η συνάρτηση αυτή πέσει κάτω από 0 ή ξεπεράσει το 1, οι τιμές της δεν είναι πλέον αποδεκτές ως πιθανότητες και επομένως, στο σημείο αυτό η στρατηγική γίνεται και πάλι σταθερή και ίση με 0 ή 1 αντίστοιχα. Ακολουθώντας το ίδιο σχήμα, λύνουμε μια εξίσωση για βρούμε το επόμενο σημείο στο οποίο η στρατηγική ισορροπίας παύει να είναι σταθερή (δες (2.39)). Στη συνέχεια, στο επόμενο διάστημα η στρατηγική θα δίνεται και πάλι από τη συνάρτηση $\gamma_j^{(e)}(a)$ έως ότου ξεπεράσει το 1 ή το 0 κ.ο.κ.

Το Θεώρημα 2.4 παρέχει έναν γενικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό της στρατηγικής ισορροπίας κάτω από οποιοδήποτε σενάριο. Οι στρατηγικές ισορροπίας, όπως είναι φανερό από τον αλγόριθμο, μπορεί να έχουν πολύπλοκη μορφή. Ωστόσο, παρατηρούμε πως από τους ορισμούς των $\gamma_j^{(e)}(a)$, $t_j^{(e,n)}$ και $s_j^{(e,n)}$, η πολυπλοκότητα των στρατηγικών ισορροπίας εξαρτάται από τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο $m(a)$. Αν η συνάρτηση αυτή έχει απλή δομή, όπως για παράδειγμα, όταν είναι μονότονη, μονοκόρυφη ή σταθερή, τότε η στρατηγική ισορροπίας αποκτά απλή μορφή και ο αλγόριθμος τερματίζεται έπειτα από ελάχιστα βήματα καθώς οι ποσότητες $t_j^{(e,n)}$ ή $s_j^{(e,n)}$ γίνονται άπειρες για πολύ μικρά n (συνήθως για $n \leq 2$). Αυτή είναι η κατάσταση στις εφαρμογές των εννοτήτων 3.3 και 3.2 όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι εκθετικά κατανομημένοι ή σταθεροί. Παρακάτω χαρακτηρίζουμε τις περιπτώσεις όπου η στρατηγική ισορροπίας παίρνει απλή, μη-τυχαιοποιημένη μορφή.

Πόρισμα 2.1. (Συναρτήσεις ισορροπίας απλής μορφής για το επίπεδο CA) Στο επίπεδο CA, η στρατηγική ισορροπίας είναι

1. η στρατηγική καθολικής αποχώρησης ($q_j^{(e)}(a) = 0$, για $a \in [0, \infty)$), αν και μόνο αν

$$\inf_{a \in [0, \infty)} m(a) \geq \frac{r}{c}, \quad (2.41)$$

2. η στρατηγική καθολικής εισόδου ($q_j^{(e)}(a) = 1$, για $a \in [0, \infty)$), αν και μόνο αν

$$\sup_{a \in [0, \infty)} \frac{m(a)}{p_j(\lambda a)} \leq \frac{r}{c}, \quad (2.42)$$

3. η στρατηγική t -κατωφλίου ($q_j^{(e)}(a) = 1$, για $a \in [0, t)$, και $q_j^{(e)}(a) = 0$, για $a \in [t, \infty)$), αν και μόνο αν

$$\sup_{a \in [0, t)} \frac{m(a)}{p_j(\lambda a)} \leq \frac{r}{c} \leq \frac{1}{p_j(\lambda t)} \inf_{a \in [t, \infty)} m(a), \quad (2.43)$$

4. η στρατηγική t -ανάποδου-κατωφλίου ($q_j^{(e)}(a) = 0$, για $a \in [0, t)$, και $q_j^{(e)}(a) = 1$, για $a \in [t, \infty)$), αν και μόνο αν

$$\sup_{a \in [t, \infty)} \frac{m(a)}{p_j(\lambda(a-t))} \leq \frac{r}{c} \leq \inf_{a \in [0, t)} m(a), \quad (2.44)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.3.

Ο έλεγχος των συνθηκών (2.41) και (2.42) μπορεί να γίνει απ' ευθείας. Πράγματι, αρκεί να υπολογιστούν τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων $m(a)$ και $\frac{m(a)}{p_j(\lambda a)}$ στο $[0, \infty)$. Από την άλλη, ο έλεγχος για την εγκυρότητα των συνθηκών (2.43) και (2.44) μπορεί να μην είναι τόσο άμεσος και μπορεί να πραγματοποιηθεί αναλυτικά μόνο στην περίπτωση που η συμπεριφορά των $m(a)$ και $\frac{m(a)}{p_j(\lambda a)}$ ως προς τη μονοτονία είναι σχετικά απλή. Πράγματι, στην περίπτωση που ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος είναι μονότονος, δηλαδή είναι τύπου *IMRL* ή *DMRL*, έχουμε σημαντικές απλουστεύσεις για τη στρατηγική ισορροπίας στο Θεώρημα 2.4 τις οποίες εξετάζουμε στην ενότητα 2.6.

Για τις εφαρμογές με εκθετικά κατανομημένους ενδιάμεσους χρόνους και σταθερούς χρόνους που παρουσιάζονται στις ενότητες 3.3 και 3.2, οι στρατηγικές ισορροπίας προσδιορίζονται πλήρως.

2.3.4 Επίπεδο A: Όταν η ηλικία είναι γνωστή.

Το επίπεδο αυτό είναι εντελώς ανάλογο με το CA στο οποίο υπάρχει η επιπρόσθετη πληροφόρηση σχετικά με τη χωρητικότητα στο επόμενο μέσο. Μια στρατηγική εισόδου, για το επίπεδο αυτό, θα περιγράφεται από τη συνάρτηση $\mathbf{q} = (q(a) : a \in [0, \infty))$, η οποία είναι αποδεκτή αν είναι κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση του a και δεξιά συνεχής στα σημεία ασυνέχειας. Η στρατηγική ισορροπίας υπολογίζεται με τον τρόπο που περιγράφεται στο Θεώρημα 2.4 με τη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση p αντί της p_j και γενικά παραλείπουμε τον δείκτη j από όλες τις ποσότητες.

2.3.5 Επίπεδο CN: Όταν η χωρητικότητα και το πλήθος πελατών είναι γνωστά.

Στην εργασία των Manou, Economou και Karaesmen [100] έχει μελετηθεί η περίπτωση που το πλήθος πελατών είναι γνωστό στους πελάτες που φθάνουν στο σύστημα. Η διαφορά με την περίπτωση που μελετάμε εδώ είναι ότι στο επίπεδο πληροφόρησης *CN* γνωστοποιείται επιπλέον στους πελάτες η πληροφορία σχετικά με τη χωρητικότητα του επόμενου μεταφορικού μέσου. Ωστόσο, τα αποτελέσματα στο [100] μπορούν εφαρμοσθούν και στην υπό μελέτη περίπτωση, αρκεί να τα προσαρμόσουμε στην ειδική περίπτωση που η χωρητικότητα είναι σταθερή και ίση με j . Παρακάτω, αναφέρουμε συνοπτικά τα αποτελέσματα αυτά έχοντας προσαρμόσει κατάλληλα τον συμβολισμό.

Στην περίπτωση CN , μια στρατηγική εισόδου είναι μια συνάρτηση $\mathbf{q}_j = (q_j(n) : n \in \{0, 1, 2, \dots, j\})$, όπου το $q_j(n)$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα εισόδου για έναν πελάτη που βρίσκεται άλλους n πελάτες παρόντες κατά τη στιγμή της άφιξής του. Όταν όλοι οι πελάτες έχουν υιοθετήσει την παραπάνω στρατηγική, ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $\tilde{F}_{n|\mathbf{q}_j}(s)$ του δεσμευμένου χρόνου αναμονής μέχρι την έλευση του επόμενου μέσου δεδομένου του πλήθους των παρόντων πελατών n , υπολογίζεται αναδρομικά (είναι οι ποσότητες $\tilde{F}_{n,\mathbf{q}}(s)$ στην Πρόταση 3.2 στο [100]). Οι αντίστοιχες δεσμευμένες μέσες τιμές των χρόνων αυτών, υπολογίζονται επίσης αναδρομικά (είναι οι ποσότητες $E[R_{n,\mathbf{q}_n}]$ του Πορίσματος 3.1 στο [100]) και αυτές είναι ακριβώς οι ποσότητες $E(n|\mathbf{q}_j)$ που χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό της $G_j(n|\mathbf{q}_j)$ στην περίπτωση CN . Συμβολίζουμε επίσης με $E_{(2)}(n|\mathbf{q}_j)$ τις δεσμευμένες μέσες τιμές των τετραγώνων των χρόνων αναμονής μέχρι την επόμενη επίσκεψη δεδομένου ότι το πλήθος πελατών είναι n (είναι οι $E[R_{n,\mathbf{q}_n}^2]$ του Πορίσματος 3.1 στο [100]). Μια σημαντική παρατήρηση είναι πως για οποιαδήποτε n , η $\tilde{F}_{n|\mathbf{q}_j}(s)$ και ειδικότερα οι $E(n|\mathbf{q}_j)$ και $E_{(2)}(n|\mathbf{q}_j)$ εξαρτώνται μόνο από το $\mathbf{q}_j(n) = (q_j(0), q_j(1), \dots, q_j(n))$, και όχι από τα $q_j(n+1), q_j(n+2), \dots$. Πράγματι, το γεγονός αυτό μας επιτρέπει τον αναδρομικό υπολογισμό των παραπάνω ποσοτήτων. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε την $\tilde{F}_{n|\mathbf{q}_j}(s)$ ως $\tilde{F}_{n|\mathbf{q}_j(n)}(s)$ και όμοια την $E(n|\mathbf{q}_j)$ ως $E(n|\mathbf{q}_j(n))$, και την $E_{(2)}(n|\mathbf{q}_j)$ ως $E_{(2)}(n|\mathbf{q}_j(n))$. Το αναμενόμενο όφελος στην περίπτωση CN γίνεται

$$G_j(n|\mathbf{q}_j) = rP_j(n|\mathbf{q}_j) - cE(n|\mathbf{q}_j) = \begin{cases} r - cE(n|\mathbf{q}_j) & \text{αν } n \leq j-1, \\ -cE(n|\mathbf{q}_j) & \text{αν } n \geq j. \end{cases} \quad (2.45)$$

Οι στρατηγικές ισορροπίας $q_j^{(e)}(n)$ υπολογίζονται επίσης αναδρομικά για $n = 0, 1, 2, \dots, j-1$. Παρατηρούμε ότι για $n \geq j$ θα έχουμε απαραίτητα ότι $q_j^{(e)}(n) = 0$, χρησιμοποιώντας τον κάτω κλάδο στην (2.45). Στο Θεώρημα 2.5 (το οποίο αποτελεί την προσαρμογή του Θεωρήματος 4.1 στο [100] για δεδομένη χωρητικότητα j) προσδιορίζονται όλες οι στρατηγικές ισορροπίας $q_j^{(e)}(0)$. Στη συνέχεια, στο Θεώρημα 2.6 (το οποίο αποτελεί την προσαρμογή του Θεωρήματος 4.2 στο [100] για δεδομένη χωρητικότητα j) προσδιορίζονται όλες οι στρατηγικές ισορροπίας $q_j^{(e)}(n)$, μέσω των ήδη υπολογισμένων ποσοτήτων $\mathbf{q}_j^{(e)}(n-1) = (q_j^{(e)}(0), q_j^{(e)}(1), \dots, q_j^{(e)}(n-1))$, για $n = 1, 2, \dots, j-1$.

Θεώρημα 2.5. (Πιθανότητες εισόδου κατά τη στρατηγική ισορροπίας για $n = 0$ στο επίπεδο πληροφόρησης CN) Στο επίπεδο πληροφόρησης CN , η πιθανότητα εισόδου $q_j^{(e)}(0)$, κατά τη στρατηγική ισορροπίας όταν το σύστημα είναι κενό υπάρχει πάντα. Συγκεκριμένα, έχουμε τις ακόλουθες πλήρεις (αλλά όχι απαραίτητως αλληλοαποκλειόμενες) περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}$. Τότε, $q_j^{(e)}(0) = 0$.

Περίπτωση 2: $\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} < \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{1-\bar{F}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda}$. Τότε, η εξίσωση

$$\frac{\bar{x}}{1-\bar{F}(\lambda x)} - \frac{1}{\lambda x} = \frac{r}{c}$$

έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, 1)$. Κάθε τέτοια λύση είναι αποδεκτή τιμή για την πιθανότητα εισόδου κατά τη στρατηγική ισορροπίας, $q_j^{(e)}(0)$.

Περίπτωση 3: $\frac{r}{c} \geq \frac{\bar{x}}{1-\bar{F}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda}$. Τότε $q_j^{(e)}(0) = 1$.

Θεώρημα 2.6. (Πιθανότητες εισόδου κατά τη στρατηγική ισορροπίας για $1 \leq n \leq j-1$ στο επίπεδο πληροφόρησης CN) Στο επίπεδο πληροφόρησης CN , υποθέτουμε αρχικά πως το διάνυσμα των πιθανοτήτων εισόδου κατά τη στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{(e)}(n-1) =$

$(q_j^{(e)}(0), q_j^{(e)}(1), \dots, q_j^{(e)}(n-1))$ έχει προσδιοριστεί για κάποιο n με $1 \leq n \leq j-1$. Τότε, η πιθανότητα εισόδου κατά τη στρατηγική ισορροπίας όταν υπάρχουν n παρόντες πελάτες στο σύστημα υπάρχει πάντα. Συγκεκριμένα, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\frac{r}{c} \leq \frac{E_{(2)}(n-1|q_j^{(e)}(n-1))}{2E(n-1|q_j^{(e)}(n-1))}$. Τότε $q_j^{(e)}(n) = 0$.

Περίπτωση 2: $\frac{E_{(2)}(n-1|q_j^{(e)}(n-1))}{2E(n-1|q_j^{(e)}(n-1))} < \frac{r}{c} < \frac{E(n-1|q_j^{(e)}(n-1))}{1-\tilde{F}_{n-1|q_j^{(e)}(n-1)}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda}$. Τότε, η εξίσωση

$$\frac{E(n-1|q_j^{(e)}(n-1))}{1-\tilde{F}_{n-1|q_j^{(e)}(n-1)}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{r}{c}$$

έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, 1)$. Κάθε τέτοια λύση είναι αποδεκτή τιμή για την πιθανότητα εισόδου κατά τη στρατηγική ισορροπίας $q_j^{(e)}(n)$.

Περίπτωση 3: $\frac{r}{c} \geq \frac{E(n-1|q_j^{(e)}(n-1))}{1-\tilde{F}_{n-1|q_j^{(e)}(n-1)}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda}$. Τότε $q_j^{(e)}(n) = 1$.

Στην περίπτωση CN , η στρατηγική ισορροπίας δεν είναι απαραίτητα μοναδική. Ωστόσο, όταν η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων είναι αυστηρώς $DMRL$ τότε υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας (δείτε το Πρόβλημα 7.1 στο [100]).

2.3.6 Επίπεδο C: Όταν η χωρητικότητα είναι γνωστή

Στην ενότητα αυτή εστιάζουμε στην περίπτωση που οι πελάτες δεν έχουν επιπρόσθετη πληροφόρηση εκτός από την τιμή j της χωρητικότητας του επόμενου μέσου μεταφοράς. Στην περίπτωση αυτή, η στρατηγική των πελατών θα είναι το διάνυσμα $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots)$, όπου το q_j θα αντιπροσωπεύει την πιθανότητα εισόδου όταν υπάρχουν ακριβώς j ελεύθερες θέσεις στο επόμενο μέσο μεταφοράς. Με βάση τη συζήτηση στην εισαγωγή του κεφαλαίου, αρκεί να επικεντρωθούμε στο j -υπό-παίγνιο των πελατών προσδιορίζοντας μονάχα την q_j . Υποθέτουμε επομένως ότι ο πληθυσμός των πελατών έχει υιοθετήσει στο j -υπό-παίγνιο, τη στρατηγική εισόδου q_j και θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει. Λόγω της ιδιότητας PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages) (δείτε Wolff [147]), η κατανομή της ηλικίας της ανανεωτικής διαδικασίας $\{M(t)\}$ κατά τη στιγμή άφιξης του επιλεγμένου πελάτη ταυτίζεται με τη στάσιμη κατανομή της ηλικίας της ανανεωτικής διαδικασίας μια τυχαία χρονική στιγμή και επομένως δίνεται από την (2.59). Οι πραγματικές αφίξεις των πελατών στον σταθμό συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού λq_j , και άρα, το πλήθος των πελατών που έχουν πραγματοποιήσει την άφιξη τους πριν την άφιξη του επιλεγμένου πελάτη, έχει την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda q_j a$, δοθείσης της ηλικίας της ανανεωτικής διαδικασίας $\{M(t)\}$, δηλαδή δοθέντος ότι $A = a$. Επομένως, η δεσμευμένη πιθανότητα όπως ο επιλεγμένος πελάτης να εξυπηρετηθεί, δεδομένου ότι το επόμενο μεταφορικό μέσο έχει χωρητικότητα j και όταν οι υπόλοιποι έχουν υιοθετήσει τη στρατηγική q_j είναι με $P_j(\lambda q_j)$, όπου η $P_j(s)$ έχει οριστεί στην (2.5). Δηλαδή,

$$P_j(\lambda q_j) = \int_0^\infty p_j(\lambda q_j a) dF_A(a) = \frac{1}{\bar{x}} \int_0^\infty p_j(\lambda q_j a) (1 - F(a)) da, \quad (2.46)$$

Ο υπολογισμός των P_j μπορεί να γίνει αναδρομικά ως εξής:

Πρόταση 2.1. (Υπολογισμός των P_j) Οι συναρτήσεις $P_j(s)$ στην (2.46) υπολογίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$P_1(s) = \frac{1 - \tilde{F}(s)}{s\bar{x}}, s > 0,$$

$$P_j(s) = P_{j-1}(s) + \frac{1}{s\bar{x}}(1 - E[p_j(sX)]), s > 0, j > 1.$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.3.

Ακόμη, λόγω της ιδιότητας PASTA, ο δεσμευμένος μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης, $E(B)$, κατά τη στιγμή άφιξης του επιλεγμένου πελάτη, ταυτίζεται με τον δεσμευμένο μέσο υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης σε τυχαία χρονική στιγμή και άρα θα έχουμε ότι

$$E(B) = \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} \quad (2.47)$$

(δείτε π.χ., Kulkarni [85] Θεώρημα 8.22). Τελικά, στην περίπτωση αυτή, το μέσο όφελος ενός επιλεγμένου πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει, δοθέντος ότι το επόμενο μεταφορικό μέσο έχει χωρητικότητα j και πως οι υπόλοιποι πελάτες έχουν υιοθετήσει τη στρατηγική q_j είναι

$$G_j(q_j) = rP_j(\lambda q_j) - cE(B) = \frac{1}{\bar{x}} \left(r \int_0^\infty p_j(\lambda q_j a)(1 - F(a)) da - c \frac{\bar{x}(2)}{2} \right). \quad (2.48)$$

Μελετώντας το πρόσημο της παραπάνω συνάρτησης, μπορούμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη απάντηση του επιλεγμένου πελάτη έναντι της στρατηγικής q_j που έχουν υιοθετήσει οι υπόλοιποι πελάτες. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας για οποιαδήποτε τιμή των παραμέτρων του συστήματος.

Θεώρημα 2.7. (Στρατηγικές ισορροπίας για το επίπεδο C) Στο επίπεδο πληροφόρησης C , υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας $q_j^{(e)}$. Για τον προσδιορισμό της έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}$. Τότε, η στρατηγική καθολικής αποχώρησης ($q_j^{(e)} = 0$) είναι η κυριαρχούσα στρατηγική.

Περίπτωση 2: $\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} < \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} (P_j(\lambda))^{-1}$. Τότε, η εξίσωση $G_j(q_j) = 0$ έχει μοναδική λύση q_j^* στο $(0, 1)$ και η λύση αυτή θα είναι η στρατηγική ισορροπίας: $q_j^{(e)} = q_j^*$.

Περίπτωση 3: $\frac{r}{c} \geq \frac{\lambda \bar{x}(2)}{2(1 - \tilde{F}(\lambda))}$. Τότε, η στρατηγική καθολικής εισόδου ($q_j^{(e)} = 1$), είναι η κυριαρχούσα στρατηγική.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.3.

2.3.7 Επίπεδο χωρίς πληροφόρηση \emptyset .

Το επίπεδο χωρίς πληροφόρηση, \emptyset , έχει μελετηθεί στο [100] όπου καλείται ως η μη-παρατηρήσιμη περίπτωση (unobservable case). Επομένως σχετικά με τον υπολογισμό της μέσης ωφέλειας των πελατών και τον προσδιορισμό της στρατηγικής ισορροπίας θα κάνουμε μόνο μια σύντομη αναφορά των αποτελεσμάτων χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό που έχουμε υιοθετήσει στην παρούσα διατριβή.

Η πιθανότητα επιβίβασης στην περίπτωση που υιοθετηθεί η στρατηγική q από τον πληθυσμό των πελατών θα ίση με $P(\lambda q)$, όπου η $P_j(s)$ έχει ορισθεί στην (2.6). Δηλαδή, έχει τη μορφή

$$P(\lambda q) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \int_0^{\infty} p_j(\lambda qa) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da. \quad (2.49)$$

Επομένως, το αναμενόμενο όφελος ($G(\cdot|\mathbf{q}) = G(q)$) ενός επιλεγμένου πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει, δοθέντος ότι οι υπόλοιποι πελάτες έχουν υιοθετήσει τη στρατηγική q είναι

$$G(q) = rP(\lambda q) - cE(B) \quad (2.50)$$

$$= \frac{1}{\bar{x}} \left(r \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \int_0^{\infty} p_j(\lambda qa) (1-F(a)) da - c \frac{\bar{x}(2)}{2} \right). \quad (2.51)$$

Μελετώντας το πρόσημο της παραπάνω συνάρτησης, μπορούμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη απάντηση του επιλεγμένου πελάτη έναντι της στρατηγικής q που έχουν υιοθετήσει οι υπόλοιποι πελάτες. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας για οποιαδήποτε τιμή των παραμέτρων του συστήματος.

Θεώρημα 2.8. (Στρατηγικές ισορροπίας για το επίπεδο \emptyset) Στο επίπεδο πληροφόρησης \emptyset , υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας $q^{(e)}$. Για τον προσδιορισμό της έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}$. Τότε, η στρατηγική καθολικής αποχώρησης ($q^{(e)} = 0$) είναι η κυριαρχούσα στρατηγική.

Περίπτωση 2: $\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} < \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} (P(\lambda))^{-1}$. Τότε, η εξίσωση $G(q) = 0$ έχει μοναδική λύση q^* στο $(0, 1)$ και η λύση αυτή θα είναι η στρατηγική ισορροπίας: $q^{(e)} = q^*$.

Περίπτωση 3: $\frac{r}{c} \geq \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} (P(\lambda))^{-1}$. Τότε, η στρατηγική καθολικής εισόδου ($q^{(e)} = 1$), είναι η κυριαρχούσα στρατηγική.

Απόδειξη. Δείτε το Θεώρημα 5.1 στο [100].

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε έναν τρόπο με τον οποίο μπορούμε να διακρίνουμε ευκολότερα τη σχέση αυτού του επιπέδου με το επίπεδο C. Προς την κατεύθυνση αυτή, ορίζουμε τις παρακάτω ποσότητες:

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} (P_j(\lambda))^{-1}, \quad j \geq 1, \\ u_h &= \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} (P(\lambda))^{-1}, \\ u_\infty &= \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

Τότε, για τις στρατηγικές ισορροπίας στα επίπεδα C και \emptyset) έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.2. (Σύνδεση των στρατηγικών ισορροπίας στα επίπεδα C και \emptyset) Έστω $\mathbf{q}^{(e)} = (q_1^{(e)}, q_2^{(e)}, \dots)$ η στρατηγική ισορροπίας για το επίπεδο C και $q^{(e)}$ η στρατηγική ισορροπίας για το επίπεδο \emptyset . Τότε, υπάρχει κάποιος δείκτης j^* , ώστε να έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\frac{r}{c} \leq u_\infty$. Τότε, $q_i^{(e)} = 0$ για κάθε $i \geq 1$ και $q^{(e)} = 0$.

Περίπτωση 2: $u_j \leq \frac{r}{c} < u_{j-1}$, για κάποιο $j > j^*$. Τότε, $q_i^{(e)} \in (0, 1)$ για κάθε $i \leq j^* - 1$ ενώ $q_i^{(e)} = 1$ διαφορετικά. Επίσης, είναι $q^{(e)} \in (0, 1)$.

Περίπτωση 3: $u_{j^*} \leq \frac{r}{c} < u_h$, για κάποιο $j > j^*$. Τότε, $q_i^{(e)} \in (0, 1)$ για κάθε $i \leq j^* - 1$ ενώ $q_i^{(e)} = 1$ διαφορετικά. Επίσης, είναι $q^{(e)} \in (0, 1)$.

Περίπτωση 4: $u_h \leq \frac{r}{c} < u_{j^*-1}$, για κάποιο $j > j^*$. Τότε, $q_i^{(e)} \in (0, 1)$ για κάθε $i \leq j^* - 1$ ενώ $q_i^{(e)} = 1$ διαφορετικά. Επίσης, είναι $q^{(e)} = 1$.

Περίπτωση 5: $u_j \leq \frac{r}{c} < u_{j-1}$, για κάποιο $j > 1$ με $j < j^*$. Τότε, $q_i^{(e)} \in (0, 1)$ για κάθε $i \leq j - 1$ ενώ $q_i^{(e)} = 1$ διαφορετικά. Επίσης, είναι $q^{(e)} = 1$.

Περίπτωση 6: $u_1 \leq \frac{r}{c}$. Τότε, $q_i^{(e)} = 1$ για κάθε $i \geq 1$ και $q^{(e)} = 1$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.3

2.4 Μελέτη του συστήματος υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών

2.4.1 Γενικό πλαίσιο και συμβολισμός

Στο Παράρτημα 3.3.1 παρουσιάζονται ορισμένα γνωστά αλλά βασικά αποτελέσματα που αφορούν τη μελέτη του αρχικού συστήματος (χωρίς στρατηγικούς πελάτες). Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη στοχαστική εξέλιξη του συστήματος όταν οι πελάτες υιοθετήσουν τη στρατηγική ισορροπίας. Η βασική ποσότητα που θα χρειαστεί να προσδιορίσουμε σε καθένα από τα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης, είναι η στάσιμη κατανομή του $\pi^{I-(e)}(n)$, της διαδικασίας $\{Y_{\mathbf{q}_t^*}\}$ που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των πελατών στη στάση μια τυχαία χρονική στιγμή υπό τη στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}^{I-(e)}$. Σε ορισμένα επίπεδα πληροφόρησης, η κατανομή αυτή δεν μπορεί να δοθεί σε κλειστή μορφή, ωστόσο, μπορούμε να έχουμε μια έκφραση μέσω της δεσμευμένης στάσιμης κατανομής $\pi^{I-(e)}(n|a)$. Η τελευταία είναι η κατανομή της διαδικασίας $\{N_{\mathbf{q}_t^e(a)}\}$ που δίνει τον αριθμό των πελατών στη στάση δοθέντος ότι ο χρόνος της επίσκεψης του προηγούμενου μεταφορικού μέσου ήταν πριν a χρονικές μονάδες.

Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο λήμμα. Ο συμβολισμός στον εκθέτη του επιπέδου πληροφόρησης στην κατανομή θα παραλειφθεί ώστε να διευκολυνθεί η ανάγνωση των αποτελεσμάτων.

Λήμμα 2.1. Για τη στάσιμη κατανομή $\pi(n)$ του συστήματος υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών $\mathbf{q}^{I-(e)}$, για κάθε επίπεδο πληροφόρησης $I \in \mathcal{I}$, ισχύει ότι

$$\pi(n) = \int_0^\infty \pi(n|a) dF_A(a), \quad (2.53)$$

όπου $\pi(n|a) = \mathbb{P}(N_{\mathbf{q}_t^e(a)} = n)$.

Απόδειξη. Δείτε το Λήμμα 3.3 στο Παράρτημα 3.3.1.

Επίσης, ειδικά για τα επίπεδα πληροφόρησης που περιλαμβάνεται η πληροφορία σχετικά με το C , λόγω της ανεξαρτησίας της τελευταίας από τις υπόλοιπες διαδικασίες, έχουμε ότι

$$\pi(n) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)\pi(n|j) \text{ και } \pi(n|a) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)\pi(n|j, a), \quad (2.54)$$

όπου η ποσότητα $\pi(n|j)$ είναι η κατανομή της διαδικασίας $\{N_{\mathbf{q}_I^e}(a)|C = j\}$, και αντιπροσωπεύει την πιθανότητα, σε αυθαίρετη χρονική στιγμή, να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα δοθέντος ότι η χωρητικότητα του επόμενου μέσου μεταφοράς είναι j . Η ποσότητα $\pi(n|j, a)$ έχει την ίδια ερμηνεία, δοθέντος επιπλέον ότι η τελευταία έλευση του μέσου μεταφοράς ήταν πριν από a χρονικές μονάδες. Σε όσα ακολουθούν, θα γράφουμε $\pi_j(n)$ αντί για $\pi(n|j)$. Στις υπό-ενότητες που ακολουθούν θα προσδιορίσουμε τη στάσιμη κατανομή που αντιστοιχεί σε κάθε επίπεδο πληροφόρησης καθώς και τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης του συστήματος. Θα δούμε ότι οι στοχαστικές διαδικασίες $\{N_{\mathbf{q}_I^e}(a)|I = i\}$ που αντιστοιχούν στα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης είναι γενικά διαδικασίες γεννήσεων και ειδικότερα,

- στα επίπεδα CAN και AN είναι μη-ομογενείς διαδικασίες γεννήσεων,
- στα επίπεδα CN και N είναι ομογενείς διαδικασίες γεννήσεων,
- στα επίπεδα CA και A είναι μη-ομογενείς διαδικασίες Poisson,
- στα επίπεδα C και \emptyset , είναι ομογενείς διαδικασίες Poisson.

2.4.2 Επίπεδα AN και CAN

Στα επίπεδα αυτά, ένας επιλεγμένος πελάτης θα παρατηρήσει κατά την άφιξη του σύστημα, ακριβώς n άλλους πελάτες που περιμένουν για την εξυπηρέτησή τους και πως η έλευση του προηγούμενου μεταφορικού μέσου έγινε πριν από a χρονικές μονάδες. Επιπλέον, ανάλογα με το αν η πληροφορία σχετικά με τη χωρητικότητα είναι διαθέσιμη (επίπεδο CAN) ή όχι (επίπεδο AN), θα παρατηρήσει και το πλήθος ελεύθερων θέσεων, j , στο επόμενο μεταφορικό μέσο. Οι στρατηγικές ισορροπίας $q_j^{(e)}(a, n)$ και $q^{(e)}(a, n)$ για τα επίπεδα CAN και AN έχουν υπολογιστεί στις (2.14) και (2.19), αντίστοιχα, της προηγούμενης ενότητας.

Για το επίπεδο AN παρατηρούμε ότι για $a \geq 0$, για $k \in \mathbb{N}$ και για $h > 0$ αρκετά μικρό, οι πιθανότητες $\mathbb{P}(N_{\mathbf{q}_I^e}(a+h) = n+k | N_{\mathbf{q}_I^e}(a) = n) = p_{n, n+k}(a, a+h)$, έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$p_{n, n+k}(a, a+h) = \begin{cases} 1 - h\lambda q(a, n) + o(h) & \text{αν } k = 0, \\ h\lambda q(a, n) + o(h) & \text{αν } k = 1, \\ o(h) & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (2.55)$$

όπου $o(\cdot)$ τέτοια ώστε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Επομένως, η διαδικασία $\{N_{\mathbf{q}_I^e}|A = a\}$ είναι μια μη-ομογενής διαδικασία γεννήσεων με ρυθμούς $\lambda_n(a) = \lambda q(a, n)$.

Η διαδικασία αυτή έχει μελετηθεί αναλυτικά στην ενότητα 7.1 του [82]. Επομένως, για το επίπεδο αυτό, παίρνουμε ότι η κατανομή $\pi(n|a)$, της $N_{\mathbf{q}_I^e}(a)$, υπολογίζεται και από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \pi'(0|a) &= -\lambda_n(a)\pi(0|a) \\ \pi'(n|a) &= -\lambda_n(a)\pi(n|a) + \lambda_{n-1}(a)\pi(n-1|a), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Με την Πρόταση που ακολουθεί παρουσιάζουμε ένα αναδρομικό σχήμα υπολογισμού των πιθανοτήτων $\pi(n|a) = \mathbb{P}(N_{\mathbf{q}_I^e}(a) = n)$.

Πρόταση 2.3. (Υπολογισμός των $\pi(n|a)$) Για το επίπεδο πληροφόρησης AN, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας $q^{(e)}(a, n)$, που δίνεται στην (2.19), τότε οι πιθανότητες $\pi(n|a)$ υπολογίζονται μέσω του ακόλουθου αναδρομικού σχήματος:

$$\begin{aligned} \pi(0|a) &= e^{-\Lambda_0(a)}, \\ \pi(n|a) &= e^{-\Lambda_n(a)} \int_0^a \lambda_{n-1}(t_{n-1}) e^{-\Lambda_{(n-1, n)}(t_{n-1})} \int_0^{t_{n-1}} \lambda_{n-2}(t_{n-2}) e^{-\Lambda_{(n-2, n-1)}(t_{n-2})} \int_0^{t_{n-2}} \dots \\ &\quad \dots \int_0^{t_1} \lambda_0(t_0) e^{-\Lambda_{(0, 1)}(t_0)} dt_0 \dots dt_{n-2} dt_{n-1}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.56)$$

όπου $\Lambda_{(k-1, k)}(t) = \int_0^t \lambda_{(k-1, k)}(u) du$ και $\lambda_{(k-1, k)}(u) = \lambda \mathbb{1}_{\{\frac{r\bar{H}(k)}{c} < m(u) \leq \frac{r\bar{H}(k-1)}{c}\}}$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.4.

Ομοίως, στο επίπεδο CAN, η διαδικασία $\{N_{q_j^e}(a) | C = j\}$ θα είναι μια μη-ομογενής διαδικασία γεννήσεων με ρυθμούς $\lambda_{n, j}(a) = \lambda q_j(a, n)$. Ωστόσο, λόγω της (2.14), οι πιθανότητες $\pi_j(n|a)$ μπορούν να έχουν κλειστή μορφή η οποία δίνεται στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 2.4. (Υπολογισμός της $\pi_j(n|a)$) Για το επίπεδο πληροφόρησης CAN, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας $q_j^{(e)}(a, n)$, που δίνεται στην (2.14), τότε οι πιθανότητες $\pi_j(n|a)$ έχουν τη μορφή

$$\pi_j(n|a) = \begin{cases} e^{-\Lambda(a)} \frac{(\Lambda(a))^n}{n!} & \text{για } n = 0, 1, 2, \dots, j-1, \\ 1 - \sum_{k=0}^{j-1} e^{-\Lambda(a)} \frac{(\Lambda(a))^k}{k!} & \text{για } n = j, \end{cases} \quad (2.57)$$

με

$$\Lambda(a) = \int_0^a \lambda(u) du = \lambda \int_0^a \mathbb{1}_{\{m(u) \leq \frac{r}{c}\}} du.$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.4.

Με άλλα λόγια, κάτω από την κυριαρχούσα στρατηγική, οι πελάτες εισέρχονται σύμφωνα με μια μη-ομογενή διαδικασία Poisson της οποίας ο στιγμιαίος ρυθμός τη στιγμή u είναι

$$\lambda(u) = \begin{cases} \lambda & \text{αν } m(u) \leq \frac{r}{c}, \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

μέχρι να συσσωρευτούν j πελάτες και στη συνέχεια οι αφίξεις σταματούν.

Η στάσιμη κατανομή, $\pi(n)$ για το επίπεδο AN θα δίνεται μέσω της (2.53) ενώ για το επίπεδο CAN θα είναι

$$\pi(n) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \int_0^{\infty} \pi_j(n|a) dF_A(a), \quad (2.58)$$

όπου οι πιθανότητες $\pi_j(n|a)$ δίνονται στην (2.57).

Επομένως, για τα επίπεδα πληροφόρησης CAN και AN, η διαδικασία $N_{q_j^e}(a)$ (αντίστοιχα η $N_{q^e}(a)$) που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα χρησιμοποιώντας τη στρατηγική ισορροπίας τους και είναι παρόντες τη χρονική στιγμή a (δηλαδή a χρονικές μονάδες μετά την έλευση του προηγούμενου μεταφορικού μέσου) είναι μια μη ομογενής διαδικασία γέννησης με ρυθμούς $\lambda_j(a, n) = \lambda q_j^{(e)}(a, n)$ (αντίστοιχα με ρυθμούς $\lambda_n(a) = \lambda q^{(e)}(a, n)$).

Δεσμεύοντας στην ηλικία της ανανεωτικής διαδικασίας $\{M(t)\}$ των επισκέψεων των μέσων, και λαμβάνοντας υπόψη τη στάσιμη κατανομή της η οποία είναι

$$F_A(a) = \frac{\int_0^a (1 - F(u)) du}{\bar{x}} \quad (2.59)$$

(π.χ., Kulkarni [85] Θεώρημα 8.20), μπορούμε να υπολογίσουμε τα κύρια μέτρα αποτίμησης απόδοσης του συστήματος (ρυθμό εισόδου, ρυθμό απόδοσης και κοινωνικό όφελος) όταν οι πελάτες ακολουθούν την κυριαρχούσα στρατηγική. Ειδικότερα για το επίπεδο CAN, παρατηρήστε πως κάθε πελάτης που αποφασίζει να εισέλθει στον σταθμό θα εξυπηρετηθεί με απόλυτη βεβαιότητα. Αυτό συμβαίνει διότι πριν αποφασίσει αν θα εισέλθει ή όχι στο σύστημα, γνωρίζει τόσο τη διαθέσιμη χωρητικότητα του επόμενου μέσου, όσο και το πλήθος των παρόντων πελατών. Επομένως, ο ρυθμός εισόδου και ο ρυθμός απόδοσης θα ταυτίζονται. Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης στην περίπτωση του επιπέδου πληροφόρησης CN, δίνονται από στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 2.5. (Μέτρα αποτίμησης απόδοσης για το επίπεδο CAN) Για το επίπεδο πληροφόρησης CAN, ο ρυθμός εισόδου $EAR^{CAN-(e)}$, ο ρυθμός απόδοσης $TH^{CAN-(e)}$ και το κοινωνικό όφελος $SW^{CAN-(e)}$ για το σύστημα, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας \mathbf{q} , έχουν τις ακόλουθες εκφράσεις

$$\begin{aligned} EAR^{CAN-(e)} &= TH^{CAN-(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda q_j^{(e)}(a, n) \pi_j(n|a) dF_A(a) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \int_0^{\infty} \lambda q_j^{(e)}(a, n) p_j(\lambda(a)) dF_A(a), \end{aligned} \quad (2.60)$$

όπου η $p_j(s)$ δίνεται στην (2.3).

$$SW^{CAN-(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \int_0^{\infty} \lambda (r - cm(a))_+ p_j(\lambda(a)) dF_A(a), \quad (2.61)$$

όπου $(r - cm(a))_+ = \max(0, r - cm(a))$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.4.

Για το επίπεδο AN τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης υπολογίζονται από τους τύπους που δίνονται στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 2.6. (Μέτρα αποτίμησης απόδοσης για το επίπεδο AN) Για το επίπεδο πληροφόρησης AN, ο ρυθμός εισόδου $EAR^{AN-(e)}$, ο ρυθμός απόδοσης $TH^{AN-(e)}$ και το κοινωνικό όφελος $SW^{AN-(e)}$ για το σύστημα, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας \mathbf{q} , έχουν τις ακόλουθες εκφράσεις

$$EAR^{AN-(e)} = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda q^{(e)}(a, n) \pi(n|a) dF_A(a), \quad (2.62)$$

$$TH^{AN-(e)} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda(a, n) \pi(n|a) dF_A(a) \bar{H}(n), \quad (2.63)$$

$$SW^{AN-(e)} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda(a, n) \pi(n|a) (r \bar{H}(n) - cm(a)) dF_A(a), \quad (2.64)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.4.

2.4.3 Επίπεδα N και CN

Η ανάλυση του επιπέδου N έχει γίνει στο [100] και τα αποτελέσματα μπορούν εύκολα να τροποποιηθούν ώστε να συμπεριλαμβάνουν και το επίπεδο CN ως ειδική περίπτωση. Ειδικότερα, στην Πρόταση 3.3 παρουσιάζεται ένα αναδρομικό σχήμα για τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής του συστήματος με τη χρήση μετασχηματισμών Laplace-Stieltjes. Για τον προσδιορισμό του σχήματος αυτού μελετήθηκε η από κοινού κατανομή της Μαρκοβιανής διαδικασίας $\{(Y_{\mathbf{q}_f^e}(t), R_{\mathbf{q}_f^e}(t)), t \geq 0\}$, όπου η $R_{\mathbf{q}_f^e}(t)$ αφορά τον υπολειπόμενο χρόνο, υπό τη στρατηγική ισορροπίας, μέχρι την έλευση του επόμενου μεταφορικού μέσου. Σε όσα ακολουθούν, θα αναφέρουμε ένα εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της στάσιμης κατανομής που δεν απαιτεί τον υπολογισμό των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace-Stieltjes και από τον οποίο μπορούμε, για ορισμένες ειδικές εφαρμογές, να έχουμε κλειστή μορφή για τη στάσιμη κατανομή.

Εστιάζουμε αρχικά στον υπολογισμό των πιθανοτήτων $\pi(n|a)$, του επιπέδων N , που θα χρειαστούν και για τον προσδιορισμό των μέτρων λειτουργικότητας. Παρατηρούμε πως η στοχαστική διαδικασία που αντιστοιχεί στην κατανομή αυτή, θα είναι (ομογενής) διαδικασία γεννήσεων με ρυθμούς $\lambda_n = \lambda q^{(e)}(n)$, όπου η $q^{(e)}(n)$ δίνεται στις (2.5) και (2.6) και αντιστοιχεί στην πιθανότητα εισόδου ενός πελάτη, όταν κατά την άφιξη του παρατηρεί n παρόντες πελάτες στο σύστημα. Επομένως, (δείτε για παράδειγμα την Πρόταση 6.4 στο [114]), οι πιθανότητες $\pi(n|a)$ θα ικανοποιούν το ακόλουθο αναδρομικό σύστημα:

$$\pi(0|a) = e^{-\lambda q^{(e)}(0)a} \quad (2.65)$$

$$\pi(n|a) = e^{-\lambda q^{(e)}(n)a} \int_0^a \lambda q^{(e)}(n-1) e^{\lambda q^{(e)}(n)s} \pi(n-1|s) ds, \quad n \geq 1 \quad (2.66)$$

Για το επίπεδο CN , έχουμε ξανά διαδικασία γεννήσεων με ρυθμούς $\lambda_n = \lambda q_j^{(e)}(n)$. Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή, για κάθε $n \geq j$, οι μεταβάσεις σταματάνε και επομένως ο ρυθμός λ_n είναι μηδενικός. Επομένως, η κατανομή $\pi_j(n|a)$ της $N_{q_j^e}(a)$, για $0 \leq n \leq j-1$ θα δίνεται επίσης από την (2.65) με τη διαφορά ότι έχουμε το $q_j^{(e)}(n)$ αντί του $q^{(e)}(n)$. Για $n = j$, από την εξίσωση κανονικοποίησης παίρνουμε ότι $\pi_j(j|a) = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} \pi_j(k|a)$. Συγκεκριμένα, θα έχουμε το σύστημα

$$\pi_j(0|a) = e^{-\lambda q_j^{(e)}(0)a} \quad (2.67)$$

$$\pi_j(n|a) = e^{-\lambda q_j^{(e)}(n)a} \int_0^a \lambda q_j^{(e)}(n-1) e^{\lambda q_j^{(e)}(n)s} \pi_j(n-1|s) ds, \quad 1 \leq n \leq j-1 \quad (2.68)$$

$$\pi_j(j|a) = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} \pi_j(k|a) \quad (2.69)$$

Η στάσιμη κατανομή, $\pi(n)$, για τα δύο επίπεδα μπορεί να προσδιορισθεί από τις (2.53) και (2.54). Έχει υπολογιστεί (δείτε για παράδειγμα στο [114] την Πρόταση 6.1.) πως στην περίπτωση που όλα τα λ_n είναι διαφορετικά, τότε υπάρχει αναλυτική λύση του παραπάνω συστήματος η οποία είναι

$$\pi(n|a) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_k a} \prod_{r \neq k, r=0}^n \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k} - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda_k a} \prod_{r \neq k, r=0}^{n-1} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k}$$

Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης για τα επίπεδα αυτά μπορούν να προσδιοριστούν με τους τύπους που παρουσιάζονται στις Προτάσεις που ακολουθούν. Ξεκινάμε με το επίπεδο N .

Πρόταση 2.7. (Μέτρα αποτίμησης απόδοσης για το επίπεδο N) Για το επίπεδο πληροφόρησης N , ο ρυθμός εισόδου $EAR^{N-(e)}$, ο ρυθμός απόδοσης $TH^{N-(e)}$ και το κοινωνικό

όφελος $SW^{N-(e)}$ για το σύστημα, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας \mathbf{q} , έχουν τις ακόλουθες εκφράσεις

$$EAR^{N-(e)} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) q^{(e)}(n), \quad (2.70)$$

$$TH^{N-(e)} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} q^{(e)}(n) \pi(n) \bar{H}(n), \quad (2.71)$$

$$SW^{N-(e)} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) (\lambda q^{(e)}(n) r \bar{H}(n) - cn). \quad (2.72)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.4.

Στο επίπεδο CN, όπως και στην περίπτωση του επιπέδου πληροφόρησης CAN, κάθε πελάτης που αποφασίζει να εισέλθει στον σταθμό θα εξυπηρετηθεί καθώς γνωρίζει τόσο τη διαθέσιμη χωρητικότητα του επόμενου μέσου, όσο και το πλήθος των παρόντων πελατών. Επομένως, ο ρυθμός εισόδου και ο ρυθμός απόδοσης ταυτίζονται. Στην πρόταση που ακολουθεί έχουμε κλειστές εκφράσεις για τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης στο επίπεδο CN.

Πρόταση 2.8. (Μέτρα αποτίμησης απόδοσης για το επίπεδο CN) Για το επίπεδο πληροφόρησης CN, ο ρυθμός εισόδου $EAR^{CN-(e)}$, ο ρυθμός απόδοσης $TH^{CN-(e)}$ και το κοινωνικό όφελος $SW^{CN-(e)}$ για το σύστημα, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας \mathbf{q} , έχουν τις ακόλουθες εκφράσεις

$$EAR^{CN-(e)} = TH^{CN-(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \lambda \sum_{n=0}^j q_j(n) \pi_j(n), \quad (2.73)$$

$$SW^{CN-(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \lambda \sum_{n=0}^j q_j(n) \pi_j(n) (r - cE(n|\mathbf{q}_j^{(e)})). \quad (2.74)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.4.

2.4.4 Επίπεδα CA και A

Στα επίπεδα πληροφόρησης αυτά, οι πελάτες κατά την άφιξη τους παρατηρούν την ηλικία a , δηλαδή τον χρόνο που μεσολάβησε από την έλευση του προηγούμενου μεταφορικού μέσου μέχρι τη στιγμή άφιξης του πελάτη καθώς και τη χωρητικότητα j του επόμενου μέσου, αν πρόκειται για το επίπεδο CA. Αφού για το επίπεδο A, η γενική διαδικασία αφίξεων των πελατών στο σύστημα είναι Poisson με ρυθμό λ , και αφού κάθε πελάτης που έφθασε μια χρονική στιγμή στην οποία είχε περάσει χρόνος a από την προηγούμενη έλευση μέσου, θα εισέλθει με πιθανότητα $q^{(e)}(a)$, έπεται πως η διαδικασία εισόδου, $\{N_{q^e}(a)\}$, υπό τη στρατηγική ισορροπίας, είναι μια μη ομογενής διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda(a) = \lambda q^{(e)}(a)$. Για το επίπεδο CA, η διαδικασία εισόδου υπό τη στρατηγική ισορροπίας, $\{N_{q_j^e}(a)\}$, για έναν ανανεωτικό κύκλο όπου $C = j$, θα είναι και πάλι μη ομογενής διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda_j(a) = \lambda q_j^{(e)}(a)$ όπου η $q_j^{(e)}(a)$ δίνεται στο Θεώρημα (2.4)

Σχετικά με τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης στο επίπεδο CA, αυτά μπορούν να υπολογιστούν δεσμεύοντας στην ηλικία της ανανεωτικής διαδικασίας των επισκέψεων των μέσων μεταφοράς. Λαμβάνοντας υπόψη την κατανομή αυτή η οποία δίνεται στην (2.59), θα έχουμε την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 2.9. (Μέτρα αποτίμησης απόδοσης για το επίπεδο CA) Για το επίπεδο πληροφόρησης CA, ο ρυθμός εισόδου $EAR^{CA-(e)}$, ο ρυθμός απόδοσης $TH^{CA-(e)}$ και το κοινωνικό όφελος $SW^{CA-(e)}$ για το σύστημα, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας \mathbf{q} , έχουν τις ακόλουθες εκφράσεις

$$EAR^{CA-(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)\lambda \int_0^{\infty} q_j^{(e)}(a) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da, \quad (2.75)$$

$$TH^{CA-(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)\lambda \int_0^{\infty} q_j^{(e)}(a) p_j(\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)})) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da, \quad (2.76)$$

$$SW^{CA-(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)\lambda \int_0^{\infty} q_j^{(e)}(a) (rp_j(\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)})) - cm(a)) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da. \quad (2.77)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.4.

Για το επίπεδο A, τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης μπορούν να υπολογιστούν με εντελώς όμοιο τρόπο όπως στην (2.9).

Πρόταση 2.10. (Μέτρα αποτίμησης απόδοσης για το επίπεδο A) Για το επίπεδο πληροφόρησης A, ο ρυθμός εισόδου $EAR^{A-(e)}$, ο ρυθμός απόδοσης $TH^{A-(e)}$ και το κοινωνικό όφελος $SW^{A-(e)}$ για το σύστημα, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας \mathbf{q} , έχουν τις ακόλουθες εκφράσεις

$$EAR^{A-(e)} = \lambda \int_0^{\infty} q^{(e)}(a) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da \quad (2.78)$$

$$TH^{A-(e)} = \lambda \int_0^{\infty} q^{(e)}(a) p(\lambda(a|\mathbf{q}^{(e)})) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da, \quad (2.79)$$

$$SW^{A-(e)} = \lambda \int_0^{\infty} q^{(e)}(a) (rp(\lambda(a|\mathbf{q}^{(e)})) - cm(a)) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da. \quad (2.80)$$

Απόδειξη. Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2.9.

2.4.5 Επίπεδα C και \emptyset

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει πληροφόρηση αλλά και στην περίπτωση που η πληροφόρηση αφορά μόνο τη χωρητικότητα j του επόμενου μεταφορικού μέσου, μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας τις στάσιμες κατανομές στα επίπεδα αυτά. Πράγματι, στο επίπεδο \emptyset οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και εισέρχονται με πιθανότητα $q^{(e)}$, η οποία δίνεται από την (2.8). Επομένως, η $\pi(n)$, η οποία δίνει την πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα, μια τυχαία χρονική στιγμή, αντιστοιχεί επίσης σε διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda q^{(e)}$. Με όμοια επιχειρήματα θα έχουμε πως και για το επίπεδο C, η $p_j(n)$ αντιστοιχεί επίσης σε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda q_j^{(e)}$ όπου τα $q_j^{(e)}$ δίνονται στην (2.7). Επομένως, λόγω της (2.54), η στάσιμη κατανομή για το επίπεδο C θα είναι μίξη κατανομών Poisson. Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης για τα επίπεδα αυτά μπορούν άμεσα να υπολογιστούν.

Πρόταση 2.11. (Μέτρα αποτίμησης απόδοσης για τα επίπεδα C και \emptyset) Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης (ρυθμός εισόδου, ρυθμός απόδοσης και κοινωνικό όφελος) για το σύστημα όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας \mathbf{q} δίνονται στις ακόλουθες περιπτώσεις:

Επ. C: Ο ρυθμός εισόδου ($EAR^{C-(e)}$), ο ρυθμός απόδοσης ($TH^{C-(e)}$) και το κοινωνικό όφελος ($SW^{C-(e)}$) είναι

$$EAR^{C-(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda h(j) q_j^{(e)}, \quad (2.81)$$

$$TH^{C-(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda h(j) q_j^{(e)} P_j(q_j^{(e)}), \quad (2.82)$$

$$SW^{C-(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda h(j) q_j^{(e)} G_j(q_j^{(e)}). \quad (2.83)$$

όπου $P_j(q) = \int_0^{\infty} p_j(\lambda qa) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da$ και $G_j(q) = rP_j(q) - c \frac{x(2)}{2\bar{x}}$.

Επ. \emptyset : Ο ρυθμός εισόδου ($EAR^{\emptyset-(e)}$), ο ρυθμός απόδοσης ($TH^{\emptyset-(e)}$) και το κοινωνικό όφελος ($SW^{\emptyset-(e)}$) είναι

$$EAR^{\emptyset-(e)} = \lambda q^{(e)}, \quad (2.84)$$

$$TH^{\emptyset-(e)} = \lambda q^{(e)} P(q^{(e)}), \quad (2.85)$$

$$SW^{\emptyset-(e)} = \lambda q^{(e)} G(q^{(e)}), \quad (2.86)$$

όπου $P(q) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) \int_0^{\infty} p_j(\lambda qa) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da$ και $G(q) = rP(q) - c \frac{x(2)}{2\bar{x}}$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.4.

2.5 Η επίδραση της πληροφορίας στη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών

2.5.1 Η επίδραση της πληροφορίας στις στρατηγικές των πελατών

Αρχικά θα μελετήσουμε την επίδραση της πληροφορίας εστιάζοντας στις διαφορές που παρουσιάζουν μεταξύ τους οι στρατηγικές ισορροπίες για τα 8 επίπεδα πληροφόρησης που μελετήθηκαν στις προηγούμενες ενότητες. Είναι αναμενόμενο πως το μέγεθος της διαθέσιμης χωρητικότητας, θα επηρεάζει άμεσα τις στρατηγικές ισορροπίες των πελατών όταν η πληροφορία αυτή είναι διαθέσιμη. Ειδικότερα, η αύξηση του μεγέθους της διαθέσιμης χωρητικότητας ευνοεί την είσοδο των πελατών στον σταθμό. Με άλλα λόγια, σε ορισμένα επίπεδα που περιλαμβάνουν το C , η στρατηγική ισορροπία είναι αύξουσα ως προς j .

Πρόταση 2.12. (Μονοτονία της στρατηγικής ισορροπίας) Έστω πως το $\mathbf{q}^{i-(e)}$ είναι η στρατηγική ισορροπία για το επίπεδο πληροφόρησης $i \in \{C, CAN, CN\}$. Τότε, ισχύει ότι: $q_j^{i-(e)} \leq q_{j+1}^{i-(e)}$ για κάθε $j \geq 1$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.5.

Σχετικά με τις καθарές στρατηγικές καθολικής αποχώρησης και καθολικής εισόδου, από την ανάλυση των στρατηγικών ισορροπίας που πραγματοποιήθηκε στις προηγούμενες ενότητες, έχουμε άμεσα τον ακόλουθο χαρακτηρισμό.

Πόρισμα 2.2. (Καθαρές στρατηγικές) Έστω $\mathbf{q}^{i-(e)}$ η στρατηγική ισορροπία για το επίπεδο $i \in \{CAN, CA, CN, AN, C, A, N, \emptyset\}$.

(i) Η στρατηγική καθολικής αποχώρησης είναι στρατηγική ισορροπία για το επίπεδο $i \in \{CN, N, C, \emptyset\}$ αν και μόνο αν $\frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}$ ενώ για το επίπεδο $i \in \{A, CA, CAN, AN\}$, αν και μόνο αν $\frac{r}{c} \leq \inf_{a \geq 0} m(a)$.

(ii) Η στρατηγική καθολικής εισόδου δεν είναι ποτέ στρατηγική ισορροπία για τα επίπεδα $\{CAN, AN, CN, N, \}$. Ειδικότερα, η στρατηγική καθολικής εισόδου είναι στρατηγική ισορροπία

- για το επίπεδο \emptyset αν και μόνο αν $u_h \leq \frac{r}{c}$,
- για το επίπεδο C αν και μόνο αν $u_1 \leq \frac{r}{c}$,
- για τα επίπεδα A αν και μόνο αν $\sup_{a \geq 0} z_h(a) \leq \frac{r}{c}$.
- για τα επίπεδα CA αν και μόνο αν $\sup_{a \geq 0} z_1(a) \leq \frac{r}{c}$.

Σύμφωνα με το (i), η συνθήκη $\frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}$ είναι ικανή και αναγκαία ώστε η στρατηγική καθολικής αποχώρησης να είναι στρατηγική ισορροπία για κάποιο από τα επίπεδα $i \in \{CN, N, C, \emptyset\}$. Ωστόσο, με τη συνθήκη αυτή μπορεί να έχουμε ότι $\mathbf{q}^{i-(e)} \neq \mathbf{0}$ για $i \in \{A, CA, CAN, AN\}$.

Με άλλα λόγια, όταν δίνεται στους πελάτες πληροφορία σχετικά με τον χρόνο έλευσης του προηγούμενου μέσου, η στρατηγική ισορροπία τους είναι δυνατόν να τους υπαγορεύει να εισέρχονται ακόμα και σε σενάρια που κάτι τέτοιο θα ήταν αδύνατον χωρίς αυτήν την πληροφόρηση. Από την άλλη, έχουμε το εξής:

Πόρισμα 2.3. Έστω $\mathbf{q}^{i-(e)} = (\mathbf{q}_j^{i-(e)}, j \geq 1)$ η στρατηγική ισορροπία για το επίπεδο $i \in \{CAN, CA, CN, AN, C, A, N, \emptyset\}$. Αν $\mathbf{q}^{i^*-(e)} = \mathbf{0}$ για κάποιο $i^* \in \{A, CA, CAN, AN\}$, τότε $\mathbf{q}^{i-(e)} = \mathbf{0}$ για κάθε $i \in \{CAN, CA, CN, AN, C, A, N, \emptyset\}$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.5.

Επίσης, σύμφωνα με το (ii), η στρατηγική καθολικής εισόδου δεν είναι ποτέ στρατηγική ισορροπίας για τα επίπεδα $\{CAN, AN, CN, N, \}$. Για τα επίπεδα που περιλαμβάνουν το N και το C , αυτό είναι προφανές καθώς θα έχουμε απαραίτητα ότι $q_j^{(e)} = 0$ για $j \geq n$. Για το επίπεδο AN , από τον ορισμό της στρατηγικής ισορροπίας στην (2.19), θα πρέπει να έχουμε ότι $\frac{r}{c}\bar{H}(n) \geq m(a)$ για κάθε n και κάθε a , ενώ για το επίπεδο N θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη $\frac{r}{c}\bar{H}(n) \geq E[n|1]$. Παρατηρήστε ότι ανεξάρτητα από το αν το στήριγμα της C είναι πεπερασμένο ή άπειρο, θα είναι $\inf_{\{n \geq 0\}} \frac{r}{c}\bar{H}(n) = 0$ και αφού $m(a) > 0, E[n|1] > 0$, οι παραπάνω συνθήκες είναι αδύνατον να ικανοποιούνται.

Τέλος, για τα επίπεδα C και CA έχουμε το εξής

Πόρισμα 2.4. Για το επίπεδο πληροφόρησης $i \in \{CA, C\}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν για κάποιο j^* ισχύει ότι $q_{j^*}^{i-(e)} = 1$, τότε $q_j^{i-(e)} = 1$ για κάθε $j \geq j^*$.

(ii) Αν για κάποιο j^* ισχύει ότι $q_{j^*}^{i-(e)} = 0$, τότε $q_j^{i-(e)} = 0$ για κάθε j .

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.5.

2.5.2 Η επίδραση της πληροφορίας στο σύστημα

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση (2.2) μπορούμε να έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα σχετικά με τη σύγκριση των επιπέδων CA, C και \emptyset . Ειδικότερα, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.9. (Σύγκριση επιπέδων CA, C και \emptyset ως προς το SW .) Για τα επίπεδα πληροφόρησης CA, C και \emptyset ισχύει ότι

$$SW^{CA-(e)} \geq SW^{C-(e)} \geq SW^{\emptyset-(e)}. \quad (2.87)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.5.

Επομένως, χρησιμοποιώντας ως κριτήριο το κοινωνικό όφελος για το σύστημα, συμπεραίνουμε πως σε σχέση με πλήρως μη-παρατηρήσιμο σύστημα, είναι προτιμότερο να δοθεί η πληροφορία σχετικά με τη διαθέσιμη χωρητικότητα του επόμενου μέσου. Επίσης, θα υπάρχει περιθώριο για βελτίωση αν δοθεί και η πληροφορία σχετικά με τον χρόνο έλευσης του προηγούμενου μεταφορικού μέσου.

2.6 Η επίδραση της κατανομής των ενδιαμέσων χρόνων

Όπως είναι φανερό από τις μορφές των συναρτήσεων που εκφράζουν την ωφέλεια των πελατών για τα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης, η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων επηρεάζει άμεσα όλα τα επίπεδα πληροφόρησης εκτός των C και \emptyset . Ειδικότερα για τα επίπεδα AN , CAN , A , CA είναι φανερό πως η επιρροή οφείλεται στη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(a)$. Επομένως, αν η συνάρτηση $m(a)$ είναι αύξουσα (το οποίο πρακτικά σημαίνει πως όσο αυξάνει ο χρόνος από την άφιξη του προηγούμενου μέσου, τόσο αυξάνει ο μέσος χρόνος άφιξης του επόμενου μέσου), η αναμενόμενη ωφέλεια στα επίπεδα AN , CAN , A , CA θα είναι φθίνουσα συνάρτηση του a (ειδικά για τα επίπεδα A , CA , οι συναρτήσεις $p(a)$, $p_j(s)$ είναι φθίνουσες ως προς s). Στην περίπτωση αυτή αναμένεται πως η στρατηγική ισορροπίας θα είναι τύπου κατωφλίου: Θα υπάρχει μια χρονική στιγμή (κατώφλι) a^* όπου κάθε πελάτης θα εισέρχεται αν η στιγμή άφιξής του είναι πριν το a^* ενώ διαφορετικά θα αποχωρεί. Για τα επίπεδα N , CN , έχειδειχθεί στην εργασία των Manou, Economou και Karaesmen [100] (δείτε τα σχόλια στην απόδειξη του Λήμματος 7.2) ότι η συνάρτηση $E(n|q_j)$ θα είναι αύξουσα ως προς το n (δηλαδή όσο πιο συνωστισμένο είναι το σύστημα κατά τη στιγμή άφιξης ενός πελάτη, τόσο μεγαλύτερος θα είναι ο χρόνος μέχρι την επόμενη επίσκεψη του μέσου, κατά την εκτίμηση του). Επομένως, η αναμενόμενη ωφέλεια για τον επιλεγμένο πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει θα είναι φθίνουσα συνάρτηση του n . Έπεται ότι η στρατηγική ισορροπίας θα είναι επίσης τύπου κατωφλίου.

Από την άλλη, όταν η $m(a)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση (δηλαδή όσο αυξάνει χρόνος απο την άφιξη του προηγούμενου μέσου, ο μέσος χρόνος άφιξης του επόμενου μέσου θα μειώνεται), θα ισχύουν ανάλογα αποτελέσματα. Ωστόσο, ειδικότερα για το επίπεδο CA , η κατάσταση δεν είναι ξεκάθαρη. Για έναν πελάτη που φθάνει στον σταθμό, όσο μεγαλύτερο a παρατηρεί, τόσο θα αυξάνει η πιθανότητα να μην βρει θέση, από τη μια, ενώ από την άλλη ο μέσος χρόνος αναμονής του θα μειώνεται.

Η περίπτωση που η $m(a) = E[B|A = a]$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) έχει μελετηθεί στη βιβλιογραφία ως $IMRL$:increasing mean residual life ($DMRL$:decreasing mean residual life). Μερικά γνωστά παραδείγματα κατανομών με την ιδιότητα $IMRL$ είναι οι κατανομές $Gamma$ με παραμέτρους (a, μ) όπου $a \in (0, 1)$, οι μίξεις εκθετικών κατανομών αλλά και η κατανομή Pareto για την οποία $F(a) = 1 - (c/c+a)^d$ με $d > 1$, $c > 0$. Στην περίπτωση αυτή είναι $m(a) = (c+a)/(d-1)$ η οποία είναι αύξουσα. Στο συγκεκριμένο πλαίσιο, η υπόθεση πως οι πελάτες αντιλαμβάνονται τον χρόνο αναμονής τους με τη χρήση κατανομής με την ιδιότητα $IMRL$ φαίνεται εκ πρώτης όψεως αντίθετη στη διαίσθηση καθώς υποδηλώνει πως όσο περισσότερος χρόνος έχει περάσει από το προηγούμενο μέσο, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η καθυστέρηση για το επόμενο.

Από την άλλη η ιδιότητα $DMRL$ φαίνεται περισσότερο φυσιολογική για το πλαίσιο του υπό μελέτη προβλήματος. Γνωστές κατανομές με την ιδιότητα αυτή είναι η ομοιόμορφη, οι κατανομές $Gamma$ με παραμέτρους (a, μ) όπου $a > 1$ αλλά και η ντετερμινιστική περίπτωση, για την οποία, αν $X = \bar{x}$ (μ.π.1), τότε $m(a) = \bar{x} - a$.

Τέλος, η εκθετική κατανομή, για την οποία το παρόν και το μέλλον είναι ανεξάρτητα, έχει ταυτόχρονα και τις δύο ιδιότητες και όπως είναι γνωστό στη βιβλιογραφία, είναι και η μοναδική συνεχής κατανομή με την ιδιότητα αυτή. Για τις κατανομές με την ιδιότητα $IMRL$ αναφέρθηκε πως η στρατηγική ισορροπίας είναι τύπου κατωφλίου. Αυτό γίνεται σαφές με τα επόμενα Πορίσματα.

Πόρισμα 2.5. (Στρατηγικές ισορροπίας για το επίπεδο CAN όταν η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων είναι τύπου $IMRL$ ή $DMRL$.)

Για το επίπεδο CAN , όταν η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων έχει αύξουσα συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ($IMRL$, δηλαδή η $m(a)$ είναι αύξουσα), η στρατηγική ισορροπίας είναι η

$$q_j^{(e)}(a, n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \leq j - 1 \text{ και } a \leq m^{-1}(\frac{r}{c}), \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (2.88)$$

Για το επίπεδο *CAN*, όταν η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων έχει φθίνουσα συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου (*DMRL*, δηλαδή η $m(a)$ είναι φθίνουσα), η στρατηγική ισορροπίας είναι η

$$q_j^{(e)}(a, n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \leq j - 1 \text{ και } a \geq m^{-1}(\frac{r}{c}), \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (2.89)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.6.

Επομένως, για το επίπεδο *CAN* στην *IMRL* περίπτωση, η στρατηγική ισορροπίας είναι μια στρατηγική τύπου κατωφλίου ως προς το a , για κάθε $n < j$ ενώ στην *DMRL* περίπτωση, η στρατηγική είναι τύπου ανάποδου κατωφλίου ως προς a για κάθε $n < j$. Στρατηγική κατωφλίου έχουμε και για το επίπεδο *CA* στην *IMRL* περίπτωση. Ωστόσο, η κατάσταση είναι πιο πολύπλοκη όταν η κατανομή ενδιαμέσων χρόνων είναι τύπου *DMRL*. Συγκεκριμένα, έχουμε τα παρακάτω.

Πόρισμα 2.6. (Στρατηγικές ισορροπίας για το επίπεδο *CA* όταν η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων είναι τύπου *IMRL*.) Για το επίπεδο *CA* με κατανομή ενδιαμέσων χρόνων τύπου *IMRL*, έχουμε δύο περιπτώσεις σχετικά με τη στρατηγική ισορροπίας:

Περίπτωση 1: $\frac{r}{c} \leq \bar{x}$. Τότε, είναι η στρατηγική καθολικής αποχώρησης.

Περίπτωση 2: $\frac{r}{c} > \bar{x}$. Τότε, είναι η στρατηγική t^* -κατωφλίου, όπου το t^* είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $m(a) = \frac{r}{c} p_j(\lambda a)$ ως προς a .

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.6.

Πόρισμα 2.7. (Στρατηγικές ισορροπίας για το επίπεδο *CA* όταν η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων είναι τύπου *DMRL*.) Για το επίπεδο *CA* με κατανομή ενδιαμέσων χρόνων τύπου *DMRL*, η στρατηγική ισορροπίας δίνεται από την (2.33), με $d_j^{(e,n)} = 1$, για $n \geq 2$ και

$$s_j^{(e,n)} = \inf \left\{ a > t_j^{(e,n)} : \gamma_j^{(e)}(a) > 1 \right\}. \quad (2.90)$$

Οι υπόλοιπες ποσότητες υπολογίζονται όπως υποδεικνύει το Θεώρημα 2.4. Επιπλέον απλουστεύσεις έχουμε στις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\lim_{a \rightarrow \infty} m(a) \geq \frac{r}{c}$. Τότε, η στρατηγική ισορροπίας είναι η στρατηγική καθολικής αποχώρησης.

Περίπτωση 2: $\frac{r}{c} < \bar{x}$ και $\inf_{a \in [0, \infty)} \gamma_j^{(e)}(a) \geq 1$. Τότε, η στρατηγική ισορροπίας είναι η στρατηγική t^* -ανάποδου κατωφλίου με κατώφλι t^* , τη μοναδική λύση της εξίσωσης $m(a) = \frac{r}{c}$ στο $(0, \infty)$ ως προς a .

Περίπτωση 3: $\frac{r}{c} \geq \bar{x}$ και $\inf_{a \in [0, \infty)} \gamma_j^{(e)}(a) \geq 1$. Τότε, η στρατηγική ισορροπίας είναι η στρατηγική καθολικής εισόδου.

Περίπτωση 4: $\frac{r}{c} < \bar{x}$ και $\sup_{a \in [0, \infty)} \gamma_j^{(e)}(a) \leq 1$. Τότε, η στρατηγική ισορροπίας είναι η

$$q_j^{(e)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{αν } a \in [0, t^*), \\ \gamma_j^{(e)}(a) & \text{αν } a \in [t^*, \infty), \end{cases} \quad (2.91)$$

όπου το t^* είναι η μικρότερη λύση της $m(a) = \frac{r}{c}$ στο $(0, \infty)$ ως προς a .

Περίπτωση 5: $\frac{r}{c} \geq \bar{x}$ και $\sup_{a \in [0, \infty)} \gamma_j^{(e)}(a) \leq 1$. Τότε, η στρατηγική ισορροπίας είναι η

$$q_j^{(e)}(a) = \begin{cases} 1 & \text{αν } a \in [0, t^*), \\ \gamma_j^{(e)}(a) & \text{αν } a \in [t^*, \infty), \end{cases} \quad (2.92)$$

όπου το t^* είναι η μικρότερη λύση της $m(a) = \frac{r}{c} p_j(\lambda a)$ στο $(0, \infty)$ ως προς a .

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.6.

Για το επίπεδο πληροφόρησης CN, (δείτε το σχετικό Πρόσλημα 7.1 στο [100]) έχουμε ότι υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 2.5 και 2.6.

Συγκεκριμένα, η στρατηγική ισορροπίας θα είναι είτε η στρατηγική καθολικής αποχώρησης (αν $\frac{r}{c} < \frac{1}{\mu}$) είτε θα έχει τη μορφή $(q_j^{(e)}(0), q_j^{(e)}(1), q_j^{(e)}(2), \dots, q_j^{(e)}(j-1), q_j^{(e)}(j), q_j^{(e)}(j+1), \dots) = (q, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ με $q \in (0, 1]$ (αν $\frac{r}{c} \geq \frac{1}{\mu}$).

Πρόσλημα 2.8. (Στρατηγικές ισορροπίας για το επίπεδο CN όταν η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων είναι τύπου IMRL ή DMRL.)

Για το επίπεδο CN, όταν η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων έχει αύξουσα συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου (IMRL, δηλαδή η $m(a)$ είναι αύξουσα), η στρατηγική ισορροπίας είναι η

$$\mathbf{q}_j^{(e)} = \begin{cases} (0, 0, \dots) & \text{αν } \frac{r}{c} < \frac{1}{\mu}, \\ (q, 0, 0, \dots) & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (2.93)$$

με $q \in (0, 1]$, το οποίο προσδιορίζεται στο Θεώρημα 2.5.

Για το επίπεδο CN, όταν η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων έχει φθίνουσα συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου (DMRL), η στρατηγική ισορροπίας είναι η

$$\mathbf{q}_j^{(e)} = \begin{cases} (0, 0, \dots) & \text{αν } \frac{r}{c} < \frac{1}{\mu}, \\ (q, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (2.94)$$

με $q \in (0, 1]$, το οποίο προσδιορίζεται στο Θεώρημα 2.5.

Μπορούμε να δικαιολογήσουμε αυστηρά το τελευταίο χρησιμοποιώντας την (2.45) αλλά και το γεγονός ότι η $E(n|\mathbf{q}_j)$ είναι μονότονη (δείτε το επιχείρημα στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1 στο [100]). Επίσης, μπορούμε να το δικαιολογήσουμε και διαισθητικά ως εξής: Για την DMRL περίπτωση, αν ένας πελάτης που κατά την άφιξη του παρατηρήσει άδειο σταθμό (δηλαδή 0 άλλους πελάτες στο σύστημα) και αποφασίσει να εισέλθει με θετική πιθανότητα, βρίσκοντας την κατάσταση αυτή προς όφελος του, τότε και κάθε άλλος πελάτης που θα παρατηρήσει περισσότερους από 0 θα συνάγει ότι η κατάσταση είναι προς όφελος του και θα εισέλθει, δεδομένου ότι η χωρητικότητα στο επόμενο μέσο επαρκεί. Πράγματι, η παρουσία περισσότερων πελατών αποτελεί ένδειξη ότι ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης θα είναι μικρότερος σε σχέση με τον υπολειπόμενο χρόνο για τους πελάτες που βρίσκουν κενό το σύστημα. Επομένως, όπως και στα υπόλοιπα επίπεδα πληροφόρησης, η στρατηγική ισορροπίας μπορεί να καθοριστεί σε σχεδόν κλειστή μορφή για το επίπεδο CN (αρκεί να υπολογιστεί το $q_j^{(e)}(0)$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.5). Με όμοια επιχειρήματα καταλήγουμε και στο συμπέρασμα του παραπάνω Προσλήματος στην IMRL περίπτωση.

2.7 Η επίδραση της κατανομής της χωρητικότητας

2.7.1 Άπειρη χωρητικότητα

Στην ενότητα αυτή μελετάμε μια τροποποιημένη έκδοση του αρχικού μοντέλου στην οποία τα μέσα μεταφοράς έχουν άπειρη χωρητικότητα. Επομένως, κάθε πελάτης που φθάνει στο σύστημα, αν αποφασίσει να εισέλθει, τότε είναι βέβαιο πως θα εξυπηρετηθεί από το επόμενο μέσο μεταφοράς. Για το μοντέλο αυτό, τα επίπεδα πληροφόρησης απλοποιούνται στα \emptyset, AN, A, N , και η ανάλυση γίνεται σαφώς πιο εύκολη. Η αναμενόμενη ωφέλεια για έναν πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει, δοθείσης της πληροφορίας i και της στρατηγικής των άλλων πελατών, \mathbf{q} , δίνεται από την

$$G^I(i|\mathbf{q}) = r - cE^I(i|\mathbf{q}). \quad (2.95)$$

Παρατηρήστε ότι η στρατηγική συμπεριφορά των άλλων πελατών θα επηρεάσει την αναμενόμενη ωφέλεια για τον επιλεγμένο πελάτη μόνο μέσω του δεσμευμένου χρόνου $E^I(i|\mathbf{q})$. Επιπλέον, από όσα προηγήθηκαν στις προηγούμενες ενότητες, το μοναδικό επίπεδο πληροφόρησης στο οποίο η στρατηγική των άλλων πελατών επηρεάζει το $E^I(i|\mathbf{q})$ είναι το επίπεδο $I = N$. Σε όλα τα άλλα επίπεδα, οι στρατηγικές ισορροπίας είναι κυριαρχούσες. Ειδικότερα, θα έχουμε ότι

Επίπεδο \emptyset : Η αναμενόμενη ωφέλεια είναι $G(q) = r - c\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}$ και η στρατηγική ισορροπία είναι $q^{(e)} = \mathbb{1}_{\{\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} \leq \frac{r}{c}\}}$.

Επίπεδο N : Η αναμενόμενη ωφέλεια είναι $G(n|\mathbf{q}) = r - cE(n|\mathbf{q}_j)$ και οι πιθανότητες $q^{(e)}(n)$ υπολογίζονται αναδρομικά για $n = 0, 1, 2, \dots$ χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 4.1 και 4.2 στο [100] κάνοντας τις κατάλληλες τροποποιήσεις.

Επίπεδο A : Η αναμενόμενη ωφέλεια είναι $G(a|\mathbf{q}) = r - cm(a)$ και η στρατηγική ισορροπία είναι $q^{(e)}(a) = \mathbb{1}_{\{m(a) \leq \frac{r}{c}\}}$.

Επίπεδο AN : Η αναμενόμενη ωφέλεια είναι $G(a, n|\mathbf{q}) = r - cm(a)$ και η στρατηγική ισορροπία είναι $q^{(e)}(a, n) = \mathbb{1}_{\{m(a) \leq \frac{r}{c}\}}$, η οποία δεν εξαρτάται από το n και συμπίπτει με τη στρατηγική ισορροπία στο επίπεδο A .

Ακόμα και όταν η χωρητικότητα είναι άπειρη, η στρατηγική ισορροπία δεν είναι απαραίτητα μοναδική. Προκειμένου να έχουμε μοναδική στρατηγική ισορροπία θα χρειαστεί να εξασφαλίσουμε τη μονοτονία της $E(n|\mathbf{q}_j)$ όπως για παράδειγμα, στις περιπτώσεις IMRL, DMRL ενδιάμεσων χρόνων.

Αφού τα επίπεδα A και AN συμπίπτουν, μένουν τρεις περιπτώσεις να εξετάσουμε. Επιπλέον, επειδή όλοι οι πελάτες που εισέρχονται θα εξυπηρετηθούν, ο ρυθμός εισόδου, (EAR), υπό τη στρατηγική ισορροπία, συμπίπτει με τον ρυθμό απόδοσης (TH). Επομένως, θα εξετάσουμε την επίδραση της πληροφορίας στο σύστημα για τις παραπάνω τρεις περιπτώσεις χρησιμοποιώντας τον ρυθμό απόδοσης και το κοινωνικό όφελος, (SW).

Πρόταση 2.13. (Σύγκριση επιπέδων \emptyset και A)

- 1: Όταν $\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} \leq \frac{r}{c}$ έχουμε ότι $TH^{\emptyset-(e)} \geq TH^{A-(e)}$ (δηλαδή, η πολιτική απόκρυψης της πληροφορίας είναι πλεονεκτική ως προς τον ρυθμό απόδοσης). Όταν $\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} > \frac{r}{c}$ τότε έχουμε $TH^{A-(e)} \geq TH^{\emptyset-(e)}$ (δηλαδή, στην περίπτωση αυτή είναι καλύτερο να παρέχεται η πληροφορία).
- 2: $SW^{A-(e)} \geq SW^{\emptyset-(e)}$ (δηλαδή, ως προς το κοινωνικό όφελος, είναι πάντα πλεονεκτικό να παρέχεται η πληροφόρηση).

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.7.

2.8 Το πρόβλημα του κοινωνικού διαχειριστή

Επισημαίνουμε πως για το μοντέλο που θεωρήσαμε, εστίασαμε αποκλειστικά στην ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών χωρίς να εξετάσουμε την οπτική γωνία ενός κοινωνικού διαχειριστή που στοχεύει στην εύρεση μιας πολιτικής εισόδου των πελατών ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό κέρδος για το σύστημα. Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε τα προβλήματα σχετικά με την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής για ορισμένα από τα επίπεδα πληροφόρησης. Συγκεκριμένα, η υπό-ενότητα 2.8.1 αφορά τα επίπεδα πληροφόρησης \emptyset και C ενώ στην υπό-ενότητα 2.8.1 περιγράφουμε το πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα της εύρεσης βέλτιστης πολιτικής στα επίπεδα CA και A , στα οποία οι πολιτικές αντιπροσωπεύονται από πραγματικές συναρτήσεις.

2.8.1 Βέλτιστη πολιτική στα επίπεδα \emptyset και C

Θεωρώντας το μοντέλο που μελετήθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, του οποίου οι υποθέσεις περιγράφηκαν στην ενότητα 2.2, θα εστίασουμε στο τρέχον κεφάλαιο, στη μελέτη του προβλήματος βελτιστοποίησης από την πλευρά ενός κεντρικού διαχειριστή, που στοχεύει στη μεγιστοποίηση της ωφέλειας όλων των οντοτήτων που εμπλέκονται στο σύστημα. Επομένως, δεδομένου του εκάστοτε επιπέδου πληροφόρησης $I \in \mathcal{I}$, ο κεντρικός στόχος είναι η εύρεση μιας πολιτικής εισόδου \mathbf{q}_I για την οποία μεγιστοποιείται το κοινωνικό όφελος για το σύστημα, το οποίο θα συμβολίσουμε με S^I .

Παρατηρήστε πως σε όλα τα επίπεδα I στα οποία περιλαμβάνεται το C ως μέρος της πληροφόρησης, η μεγιστοποίηση μπορεί να γίνει ανά συνιστώσα. Πράγματι, όταν $I \in \{CAN, CA, CN, C\}$, το κοινωνικό όφελος γράφεται ως

$$S^I = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)S_j^I, \quad (2.96)$$

Ξεκινώντας από το επίπεδο \emptyset , που αποτελεί το απλούστερο επίπεδο πληροφόρησης, το πρόβλημα ανάγεται στο ακόλουθο πρόβλημα μ.γ.π.

$$\begin{aligned} & \underset{q}{\text{maximize}} && S^C(q) = \lambda q G^C(q). \\ & \text{υπό} && q \in [0, 1] \end{aligned} \quad (2.97)$$

όπου η $G^C(q)$ δίνεται από την (2.51). Στη γενική περίπτωση, το παραπάνω πρόβλημα ενδέχεται να μην έχει μοναδική λύση, ενώ η εύρεση των λύσεων σε αναλυτική μορφή, αποδεικνύεται ιδιαίτερα απαιτητική. Ωστόσο, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, μπορεί ναδειχθεί η ύπαρξη μοναδικής λύσης. Συγκεκριμένα, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.14. (Ικανή συνθήκη για την ύπαρξη και μοναδικότητα της βέλτιστης πολιτικής στο επίπεδο \emptyset) Έστω ότι η συνάρτηση $qP_j(\lambda q)$, όπου η P_j δίνεται στην (2.5) είναι γνησίως κοίλη. Τότε, για το επίπεδο πληροφόρησης \emptyset , υπάρχει μοναδική βέλτιστη πολιτική q^{soc} .

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.8.

Η συνθήκη της παραπάνω πρότασης ικανοποιείται για μεγάλο εύρος εφαρμογών σχετικά με την κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων. Επιπλέον είναι εύκολο να ελεγχθεί για σταθερούς ενδιαμέσους χρόνους, για χρόνους εκθετικά κατανομημένους, για μίξεις εκθετικών, για την οικογένεια Gamma κατανομών, κ.α. Συγκρίνοντας τη βέλτιστη πολιτική εισόδου με τη στρατηγική ισορροπίας, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.15. (Σύγκριση της στρατηγικής ισορροπίας με τη βέλτιστη πολιτική στο επίπεδο \emptyset) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $qP_j(\lambda q)$, όπου η P_j δίνεται στην (2.5) είναι γνησίως κοίλη. Τότε, για το επίπεδο πληροφόρησης \emptyset ισχύει ότι $q^{soc} = 0 \Leftrightarrow q^{(e)} = 0$ και $q^{soc} \leq q^{(e)}$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.8.

Επομένως, για το \emptyset επίπεδο πληροφόρησης, ο ρυθμός εισόδου υπό τη βέλτιστη πολιτική θα είναι μικρότερος από ότι με τη στρατηγική ισορροπίας. Με άλλα λόγια, δεδομένου ότι δεν υπάρχει πληροφόρηση, οι πελάτες χρησιμοποιούν τον σταθμό περισσότερο από ό,τι είναι κοινωνικά βέλτιστο. Γενικά, οι πελάτες αγνοούν τις αρνητικές επιπτώσεις που επιφέρουν στους άλλους πελάτες που αναμένεται να εισέλθουν. Συγκεκριμένα, η απόφαση ενός πελάτη να εισέλθει, θα μειώσει την πιθανότητα εξυπηρέτησης των επόμενων πελατών που θα αποφασίσουν να εισέλθουν.

Η ανάλυση για το επίπεδο C είναι εντελώς ανάλογη με την ανάλυση του επιπέδου \emptyset καθώς η εύρεση της βέλτιστης πολιτικής $\mathbf{q}_C = (q_1^{soc}, q_2^{soc}, \dots)$ ανάγεται σε ανεξάρτητα προβλήματα μ.γ.π. παρόμοια με το (2.97). Η ίδια συνθήκη (δηλ. η $qP_j(\lambda q)$ να είναι γνησίως κοίλη) θα μας εξασφαλίσει τη μοναδικότητα της βέλτιστης πολιτικής καθώς και ότι $q_j^{soc} \leq q_j^{(e)}$ για κάθε $j \geq 1$.

2.8.2 Περιγραφή του Προβλήματος του διαχειριστή στα επίπεδα CA και A

Περιγράφουμε τώρα το πρόβλημα βελτιστοποίησης για το επίπεδο πληροφόρησης A. Η περιγραφή αυτή που θα παρουσιάσουμε εφαρμόζεται με ελάχιστες τροποποιήσεις και στο επίπεδο CA. Αρχικά, οι πολιτικές εισόδου για το επίπεδο αυτό παριστάνονται με τις συναρτήσεις $q : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$. Σε όσα ακολουθούν, θεωρούμε τη συνάρτηση $Q(a) = \lambda \int_0^a q(t) dt$ που εκφράζει το μέσο πλήθος των πελατών στον σταθμό στο $[0, a]$. Ακόμη, θα υποθέτουμε πως η τ.μ. A που αντιστοιχεί στην κατανομή ισορροπίας της ηλικίας της διαδικασίας $\{M(t)\}$ είναι απόλυτα συνεχής με πυκνότητα $f_A(a) = \frac{1-F_X(a)}{E[X]}$. Όταν όλοι οι πελάτες ακολουθούν την πολιτική αυτή, η στιγμιαία ωφέλεια τη στιγμή $A = a$ είναι $\lambda q(a)G(a)$, όπου η $G(a) = rp(Q(a)) - cm(a)$ και η $p(s)$ δίνεται από την (2.4). Τότε, η ωφέλεια για το σύστημα εκφράζεται ως

$$S^A(\mathbf{q}) = \int_0^\infty L(a, Q(a), q(a)) da, \quad (2.98)$$

όπου $L(a, Q(a), q(a)) = q(a)G_j(a)f_A(a)$.

Ορίζουμε το σύνολο

$$Adm = \{Q(\cdot) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, Q \text{ είναι τμηματικά συνεχής και διαφορίσιμη} \\ \text{ώστε } Q(0) = 0 \text{ και } Q'(a) \in [0, 1] \text{ σ.π. για } a \geq 0\},$$

και καλούμε αποδεκτή πολιτική κάθε συνάρτηση $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $q(a) = Q'(a)$ σ.π., με $Q(\cdot) \in Adm$. Επίσης, θα καλούμε την Q ως σχετική τροχιά της q .

Επομένως το πρόβλημα βελτιστοποίησης ανάγεται στο:

$$\text{maximize } S^A(\mathbf{q}), \quad (2.99)$$

σε όλα τα ζεύγη $(Q(\cdot), q(\cdot))$, υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} Q'(a) &= \lambda q(a), & \text{α.ε. } a \in [0, \infty) \\ Q(0) &= 0 \\ q(a) &\in [0, 1] & \text{α.ε. } a \in [0, \infty) \end{aligned} \quad (\Sigma 0)$$

Το παραπάνω πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης είναι ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου άπειρου ορίζοντα. Η τελική κατάσταση είναι ελεύθερη και το συναρτησοειδές ($S^{CA}(\mathbf{q})$) που επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε ορίζεται ως γενικευμένο ολοκλήρωμα της στιγμιαίας ωφέλειας στον χρονικό ορίζοντα $[0, +\infty)$. Η πολιτική $q(\cdot)$ απαιτούμε να είναι στο $[0, 1]$ καθώς εκφράζει την πιθανότητα εισόδου για έναν επιλεγμένο πελάτη που φθάνει στο σύστημα a χρονικές μονάδες από την έλευση του προηγούμενου μέσου μεταφοράς.

Ο δρόμος προς την πλήρη επίλυση του παραπάνω προβλήματος εμπεριέχει αρκετές δυσκολίες. Μία βασική δυσκολία είναι πως το γενικευμένο ολοκλήρωμα στην (2.99) μπορεί να μη συγκλίνει καθώς μπορεί να έχουμε ότι $m(a) \rightarrow +\infty$ καθώς $a \rightarrow +\infty$). Σε αυτές τις περιπτώσεις, καθώς δεν είναι σαφές τι εννοούμε ως βελτιστότητα της πολιτικής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ορισμένες βασικές έννοιες βελτιστότητας που αναφέρονται στις [23], [52], [124]) και αφορούν το συναρτησοειδές για το αντίστοιχο πρόβλημα του πεπερασμένου ορίζοντα T :

$$S_T^A(q(\cdot)) = \int_0^T L(a, Q(a), q(a)) da. \quad (2.100)$$

Ακόμα, η απόδειξη της ύπαρξης και της μοναδικότητας της βέλτιστης πολιτικής (αναλόγως και του κριτηρίου βελτιστότητας που επιλέγουμε) αποτελεί επίσης ένα πολύ απαιτητικό πρόβλημα. Για τον προσδιορισμό της βέλτιστης πολιτικής μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποια κατάλληλη εκδοχή της αρχής μεγίστου του Pontryagin (δείτε π.χ. [109]) για προβλήματα άπειρου ορίζοντα (δείτε π.χ. [102]).

Οι ειδικές περιπτώσεις σταθερών και εκθετικών εν- διαμέσων χρόνων

3.1 Εισαγωγή και διάρθρωση

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε την επίδραση των επιπέδων πληροφόρησης, χρησιμοποιώντας τα θεωρητικά αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, σε δύο κεντρικές εφαρμογές: Την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι των διαδοχικών επισκέψεων των μέσων μεταφοράς είναι σταθεροί, και την περίπτωση που οι χρόνοι αυτοί είναι εκθετικά κατανομημένοι. Ειδικότερα, στην ενότητα 3.2 παρουσιάζεται η εφαρμογή με σταθερούς χρόνους επίσκεψης που αναπαριστά με σχετική ακρίβεια ένα σύγχρονο και καλά σχεδιασμένο σύστημα μεταφοράς με προγραμματισμένα δρομολόγια. Στην υπο-ενότητα 3.2.1 παρουσιάζονται τα θεωρητικά αποτελέσματα σχετικά με τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών, τη μελέτη του συστήματος και τον υπολογισμό των μέτρων αποτίμησης απόδοσης του συστήματος. Τέλος, στην υπο-ενότητα 3.2.2 μελετάμε την επίδραση της πληροφορίας στα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης και παρουσιάζουμε θεωρητικά αποτελέσματα αλλά και τα αριθμητικά ευρήματα από ποικίλα αριθμητικά πειράματα που διεξάγουμε. Από την άλλη, στην ενότητα 3.3 μελετάμε την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι των διαδοχικών επισκέψεων των μέσων μεταφοράς είναι εκθετικά κατανομημένοι. Παρουσιάζεται η ανάλυση του συστήματος (στρατηγικές ισορροπίας, στάσιμη κατανομή, μέτρα αποτίμησης της απόδοσης) όπως διαμορφώνεται στα πλαίσια αυτής της εφαρμογής.

3.2 Σταθεροί ενδιάμεσοι χρόνοι

Η περίπτωση των σταθερών ενδιαμέσων χρόνων για τα μέσα μεταφοράς είναι ίσως η σημαντικότερη από πλευράς εφαρμογών, καθώς αντιστοιχεί σε προγραμματισμένα δρομολόγια ακριβείας, δεδομένου ότι η υπηρεσία μεταφοράς είναι αξιόπιστη. Αποτελεί ένα εξίσου σημαντικό πρότυπο από μαθηματική σκοπιά καθώς η πληροφόρηση σχετικά με την ηλικία της ανανεωτικής διαδικασίας $\{M(t)\}$ για τις επισκέψεις των μέσων μεταφοράς, καθορίζει με απόλυτη ακρίβεια τον χρόνο της επόμενης επίσκεψης και επομένως ισοδυναμεί με το επίπεδο πληροφόρησης στο οποίο δίνεται ο υπολειπόμενος χρόνος (residual time) της $\{M(t)\}$. Σε τεχνικό επίπεδο, οι σταθεροί ενδιάμεσοι χρόνοι αντιστοιχούν σε γραμμική συνάρτηση υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(a) = \frac{1}{\mu} - a = \bar{x} - a$, όπου η παράμετρος μ παριστάνει τη συχνότητα με την οποία πραγματοποιούνται τα δρομολόγια. Επομένως, η ανάλυση προχωρά σε μεγαλύτερο βάθος ενώ ενισχύονται και διάφορα αποτελέσματα. Σε όσα ακολουθούν, θα περιορίσουμε την ανάλυση στα επίπεδα πληροφόρησης CAN, CA, CN, C και \emptyset . Για τα υπόλοιπα επίπεδα πληροφόρησης AN, A και N, οι απλοποιήσεις από τη γενική περίπτωση είναι σχετικά περιορισμένες, οπότε δεν διευκολύνεται η σύγκριση των ρυθμού απόδοσης και του κοινωνικού οφέλους στα επίπεδα αυτά.

3.2.1 Στρατηγικές ισοροπίας και μελέτη του συστήματος

Για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε μια πιο συμπαγή μορφή, θα χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις

$$\phi_j(x) = \frac{\int_0^x p_j(u) du}{x}, \quad x \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

$$\phi(x) = \frac{\int_0^x p(u) du}{x} = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \phi_j(x), \quad x \geq 0. \quad (3.2)$$

Οι συναρτήσεις αυτές εμφανίζονται στις απλοποιημένες μορφές των μέτρων απόδοσης του συστήματος για την ειδική περίπτωση που εξετάζουμε. Σε όσα ακολουθούν στην ενότητα αυτή, θα υιοθετήσουμε την υπόθεση εκκαθάρισης (2.1) που διατυπώσαμε στην εισαγωγή. Ξεκινάμε την ανάλυση με το επίπεδο CAN.

Επίπεδο CAN

Θεώρημα 3.1. (Χαρακτηριστικά του συστήματος στο επίπεδο CAN για σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους) Στο επίπεδο πληροφόρησης CAN με ενδιάμεσους χρόνους που είναι σταθεροί και ίσοι με \bar{x} (δηλαδή με συχνότητα επίσκεψης $\frac{1}{\bar{x}}$), το σύστημα έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

I Η μοναδική κυριαρχούσα στρατηγική $\mathbf{q}_j^{(e)} = (q_j^{(e)}(a, n) : a \in [0, \infty), n \in \{0, 1, 2, \dots\})$, είναι:

$$q_j^{(e)}(a, n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \leq j-1 \text{ και } a \in [\bar{x} - \frac{r}{c}, \bar{x}], \\ 0 & \text{αν } a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c}] \end{cases} \quad (3.3)$$

II Η δεσμευμένη στάσιμη κατανομή του συστήματος είναι

$$\pi_j(n|a) = \begin{cases} e^{-\Lambda(a)} \frac{(\Lambda(a))^n}{n!} & \text{για } n = 0, 1, 2, \dots, j-1, \\ 1 - \sum_{k=0}^{j-1} e^{-\Lambda(a)} \frac{(\Lambda(a))^k}{k!} & \text{για } n = j, \end{cases} \quad (3.4)$$

με

$$\Lambda(a) = \int_0^a \lambda(u) du$$

όπου

$$\lambda(a) = \begin{cases} \lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c}) & \text{αν } a \in [\bar{x} - \frac{r}{c}, \bar{x}], \\ \lambda a & \text{αν } a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c}] \end{cases} \quad (3.5)$$

Δηλαδή, είναι μια μη-ομογενής διαδικασία Poisson μέχρι να συσσωρευθούν j πελάτες.

III Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης έχουν τις μορφές:

$$EAR_j^{CAN-(e)} = TH_j^{CAN-(e)} = \frac{1}{\bar{x}} \frac{\lambda r}{c} \phi_j\left(\frac{\lambda r}{c}\right), \quad (3.6)$$

$$SW_j^{CAN-(e)} = \frac{1}{\bar{x}} r \tilde{\phi}_j\left(\frac{\lambda r}{c}\right), \quad (3.7)$$

όπου $\tilde{\phi}_j(s) = \frac{\int_0^x u p_j(u) du}{x}$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Επίπεδο CA

Για το επίπεδο πληροφόρησης CA θα εξετάσουμε χωριστά τις περιπτώσεις όπου $j = 1$ και $j \geq 2$. Ο βασικός λόγος για τη διάκριση αυτή είναι ότι η συνάρτηση $\gamma_j^{(e)}(a)$, που δίνεται στην (2.34) παρουσιάζει διαφορετική συμπεριφορά στις δύο αυτές περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, η $\gamma_j^{(e)}(a)$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $j = 1$, ενώ διαφορετικά, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο (όντας φθίνουσα αρχικά και στη συνέχεια αύξουσα). Ξεκινάμε με την πλήρη περιγραφή του συστήματος για την περίπτωση που $j = 1$.

Θεώρημα 3.2. (Χαρακτηριστικά του συστήματος στο επίπεδο CA για σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους όταν $j = 1$) Στο επίπεδο πληροφόρησης CA με ενδιάμεσους χρόνους που είναι σταθεροί και ίσοι με \bar{x} (δηλαδή με συχνότητα επίσκεψης $\frac{1}{\bar{x}}$), και με $j = 1$, το σύστημα έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

I Υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{(e)} = (q_j^{(e)}(a) : a \in [0, \infty))$, η οποία έχει την ακόλουθη μορφή:

Περίπτωση 1: $\frac{r\lambda}{c} \leq 1$. Τότε, είναι η στρατηγική ανάποδου

$$q_1^{(e)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{αν } a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c}), \\ 1 & \text{αν } a \in [\bar{x} - \frac{r}{c}, \bar{x}]. \end{cases} \quad (3.8)$$

Περίπτωση 2: $\frac{r\lambda}{c} > 1$. Τότε, είναι η στρατηγική

$$q_1^{(e)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{αν } a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c}), \\ \frac{1}{\lambda(\bar{x}-a)} & \text{αν } a \in [\bar{x} - \frac{r}{c}, \bar{x} - \frac{1}{\lambda}), \\ 1 & \text{αν } a \in [\bar{x} - \frac{1}{\lambda}, \bar{x}]. \end{cases} \quad (3.9)$$

II Η δεσμευμένη στάσιμη κατανομή του συστήματος, $\pi_j(n|a)$, θα είναι μη-ομογενής διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda q_j^{(e)}(a)$, και όπου η συνάρτηση $\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) = \lambda \int_0^a q_j^{(e)}(u) du$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Περίπτωση 1: $\frac{r\lambda}{c} \leq 1$. Τότε είναι

$$\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c}), \\ \lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c}) & \text{αν } a \in [\bar{x} - \frac{r}{c}, \bar{x}]. \end{cases} \quad (3.10)$$

Περίπτωση 2: $\frac{r\lambda}{c} > 1$. Τότε είναι

$$\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c}), \\ \ln(\frac{r}{c(\bar{x}-a)}) & \text{αν } a \in [\bar{x} - \frac{r}{c}, \bar{x} - \frac{1}{\lambda}), \\ \ln(\frac{r\lambda}{c}) + \lambda(a - \bar{x} + \frac{1}{\lambda}) & \text{αν } a \in [\bar{x} - \frac{1}{\lambda}, \bar{x}]. \end{cases} \quad (3.11)$$

III Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης έχουν τις μορφές:

$$EAR_1^{CA-(e)} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{x}} \frac{r\lambda}{c} & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \leq 1, \\ \frac{1}{\bar{x}} (\ln(\frac{r\lambda}{c}) + 1) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \geq 1. \end{cases} \quad (3.12)$$

$$TH_1^{CA-(e)} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{x}} \frac{r\lambda}{c} f_1(\frac{r\lambda}{c}) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \leq 1, \\ \frac{1}{\bar{x}} (\ln(\frac{r\lambda}{c}) + 1) f_1(\ln(\frac{r\lambda}{c}) + 1) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \geq 1. \end{cases} \quad (3.13)$$

$$SW_1^{CA-(e)} = \begin{cases} r(TH_1^{CA-(e)} - \frac{EAR_1^{CA-(e)}}{2}) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \leq 1, \\ \frac{c}{\lambda\bar{x}} (\phi(1) - \frac{1}{2}) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \geq 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Θεωρούμε στη συνέχεια την περίπτωση που $j \geq 2$. Αρχικά, με το παρακάτω Λήμμα εξετάζεται η μονοτονία της $\gamma_j^{(e)}(a)$ που δίνεται από την (2.34).

Λήμμα 3.1. (Μονοτονία της $\gamma_j^{(e)}(a)$ για σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους και $j \geq 2$) Έστω $j \geq 2$ (ακέραιος) και

$$a^* = \bar{x} - \frac{r}{c} p_j(j-1) \in (\bar{x} - \frac{r}{c}, \bar{x}). \quad (3.15)$$

Τότε, η $\gamma_j^{(e)}(a)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\bar{x} - \frac{r}{c}, a^*)$ και γνησίως αύξουσα στο $(a^*, \frac{1}{\mu})$, με ολικό ελάχιστο στο a^* . Επιπροσθέτως, έχουμε ότι

$$\lim_{a \rightarrow (\bar{x} - \frac{r}{c})^+} \gamma_j^{(e)}(a) = \lim_{b \rightarrow \bar{x}^-} \gamma_j^{(e)}(a) = \infty \quad \text{και} \quad \gamma_j^{(e)}(a^*) = \frac{c(j-1)!(j-1)^{1-j} e^{j-1}}{\lambda r}. \quad (3.16)$$

Επιπλέον, είναι

$$\gamma_j^{(e)}(a^*) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{r}{c} \leq \frac{(j-1)!(j-1)^{1-j} e^{j-1}}{\lambda}. \quad (3.17)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Ορίζουμε την ακολουθία (v_j) ως εξής

$$v_j = \begin{cases} 1 & \text{αν } j = 1, \\ (j-1)!(j-1)^{1-j} e^{j-1} & \text{αν } j \geq 2. \end{cases} \quad (3.18)$$

Επομένως, η εξίσωση (3.17) γράφεται ισοδύναμα ως $\frac{r\lambda}{c} \leq v_j$ όπου $v_j = (j-1)!(j-1)^{1-j} e^{j-1}$ για $j \geq 2$. Παρατηρούμε ότι η (v_j) είναι αύξουσα ακολουθία καθώς $\frac{v_{j+1}}{v_j} = \frac{e}{(1+\frac{1}{j})^j} > 1$, $j \geq 1$.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling είναι $u_j \sim \sqrt{2\pi(j-1)}$ και άρα $v_j \rightarrow \infty$ καθώς $j \rightarrow \infty$.

Αν λοιπόν έχουμε ότι $\gamma_j^{(e)}(a^*) < 1$, από την (3.16), έπεται άμεσα ότι η εξίσωση

$$\gamma_j^{(e)}(a) = 1, \quad (3.19)$$

θα έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις οποίες θα συμβολίζουμε με a_1^* και a_2^* . Στην περίπτωση αυτή, έχει νόημα να αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{r}{c} p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})) + a - \bar{x} = 0 \quad (3.20)$$

στο (a_1^*, a_2^*) . Θα συμβολίσουμε με t^* τη μικρότερη λύση της παραπάνω εξίσωσης, αν αυτή έχει πράγματι κάποια λύση ενώ σε διαφορετική περίπτωση θα θέσουμε, για τις ανάγκες του θεωρήματος που ακολουθεί, $t^* = a_2^*$. Προφανώς οι λύσεις a_1^*, a_2^*, t^* θα εξαρτώνται από το j . Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη στρατηγική ισορροπίας για το επίπεδο πληροφόρησης CA όταν $j \geq 2$.

Θεώρημα 3.3. (Χαρακτηριστικά του συστήματος στο επίπεδο CA για σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους όταν $j \geq 2$) Στο επίπεδο πληροφόρησης CA με ενδιάμεσους χρόνους που είναι σταθεροί και ίσοι με \bar{x} (δηλαδή με συχνότητα επίσκεψης $\frac{1}{\bar{x}}$), και όταν $j \geq 2$, το σύστημα έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

I Υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{(e)} = (q_j^{(e)}(a) : a \geq 0)$, η οποία έχει την ακόλουθη μορφή:

Περίπτωση 1: $\frac{r\lambda}{c} \leq v_j$. Τότε, είναι η στρατηγική ανάποδου κατοφλίου

$$q_j^{(e)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{αν } a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c}), \\ 1 & \text{αν } a \in [\bar{x} - \frac{r}{c}, \bar{x}]. \end{cases} \quad (3.21)$$

Περίπτωση 2: $\frac{r\lambda}{c} > v_j$. Αν η εξίσωση (3.20) δεν έχει λύσεις στο (a_1^*, a_2^*) , τότε είναι η στρατηγική ανάποδου κατοφλίου (3.21). Διαφορετικά, είναι η στρατηγική

$$q_j^{(e)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{αν } a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c}), \\ 1 & \text{αν } a \in [\bar{x} - \frac{r}{c}, t^*), \\ \gamma_j^{(e)}(a) & \text{αν } a \in [t^*, a_2^*), \\ 1 & \text{αν } a \in [a_2^*, \bar{x}], \end{cases} \quad (3.22)$$

II Η δεσμευμένη στάσιμη κατανομή του συστήματος, $\pi_j(n|a)$, θα είναι μη-ομογενής διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda q_j^{(e)}(a)$, και όπου η συνάρτηση $\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = \lambda \int_0^a q_j^{(e)}(u) du$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Περίπτωση 1: $\frac{r\lambda}{c} \leq v_j$. Τότε είναι

$$\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c}), \\ \lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c}) & \text{αν } a \in [\bar{x} - \frac{r}{c}, \bar{x}]. \end{cases} \quad (3.23)$$

Περίπτωση 2: $\frac{r\lambda}{c} > v_j$. Αν η εξίσωση (3.20) δεν έχει λύσεις στο (a_1^*, a_2^*) , τότε ο ρυθμός $\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)})$ δίνεται από την (3.23), διαφορετικά, είναι

$$\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c}), \\ \lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c}) & \text{αν } a \in [\bar{x} - \frac{r}{c}, t^*), \\ p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a)) & \text{αν } a \in [t^*, a_2^*), \\ p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)) + \lambda(a - a_2^*) & \text{αν } a \in [a_2^*, \bar{x}], \end{cases} \quad (3.24)$$

III Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης έχουν τις μορφές:

$$EAR_j^{CA-(e)} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{x}} \frac{r\lambda}{c} & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \leq v_j, \\ \frac{1}{\bar{x}} w_j(\lambda) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \geq v_j, \end{cases} \quad (3.25)$$

$$TH_j^{CA-(e)} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{x}} \frac{r\lambda}{c} \phi_j(\frac{r\lambda}{c}) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \leq v_j, \\ \frac{1}{\bar{x}} w_j(\lambda) \phi_j(w_j(\lambda)) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \geq v_j, \end{cases} \quad (3.26)$$

$$SW_j^{CA-(e)} = \begin{cases} r(TH_j^{CA-(e)} - \frac{EAR_j^{CA-(e)}}{2}) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \leq v_j, \\ sw(\lambda) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \geq v_j, \end{cases} \quad (3.27)$$

όπου τα a_1^*, a_2^* είναι οι δύο λύσεις της εξίσωσης (3.19), το t^* να είναι η μικρότερη λύση στο (a_1^*, a_2^*) της εξίσωσης (3.20) αν αυτή έχει λύσεις, διαφορετικά $t^* = a_2^*$ και όπου $v_j = (j-1)!(j-1)^{1-j} e^{j-1}$ και $\gamma_j^{(e)}(a) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{da} (p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a)))$.

Επίσης, $w_j(s) = p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)) + s(\bar{x} - a_2^*)$ αν η εξίσωση (3.20) έχει κάποια λύση ενώ διαφορετικά είναι

$$w_j(s) = \frac{r\lambda}{c}$$

και

$$\begin{aligned} sw(\lambda) &= \frac{r}{\bar{x}} [w_j(\lambda)\phi_j(w_j(\lambda)) - \lambda(t^* - \bar{x} + \frac{r}{c})\phi_j(\lambda(t^* - \bar{x} + \frac{r}{c})) \\ &\quad - p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*))\phi_j(p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)))] \\ &\quad - \frac{\lambda c}{2\bar{x}} [(t^* - \bar{x} + \frac{r}{c})(\bar{x} - t^* + \frac{r}{c}) + (\bar{x} - a_2^*)^2]. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Παρατηρήστε ότι οι τύποι για τα EAR_j , TH_j και SW_j στο Θεώρημα (3.2), μπορούν να έχουν την ίδια μορφή με εκείνη στο Θεώρημα (3.3). Πράγματι, αν $j = 1$ τότε $p_1(u) = e^{-u}$ και άρα $p_1^{-1}(u) = -\ln u$. Επίσης, η εξίσωση $\gamma_j(a) = 1$ όταν $j = 1$, γίνεται

$$\frac{1}{\lambda(\bar{x} - a)} = 1,$$

και από όπου παίρνουμε ότι $a_2^* = \bar{x} - \frac{1}{\lambda}$. Επιπλέον, είναι $t^* = \bar{x} - \frac{r}{c}$. Επομένως, όταν $j = 1$, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} w_1(\lambda) &= p_1^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)) + \lambda(\bar{x} - a_2^*) = -\ln(\frac{c}{r\lambda} + 1) \\ &= \ln(\frac{r\lambda}{c} + 1). \end{aligned}$$

Επίσης, αντικαθιστώντας τα t^* , a_2^* στην $sw(\lambda)$ παίρνουμε τον δεύτερο κλάδο στην (3.14). Θέτοντας επομένως $v(1) = 1$, έχουμε το ακόλουθο πόρισμα

Πόρισμα 3.1. Μέτρα αποτίμησης απόδοσης για το επίπεδο CA Στο επίπεδο πληροφόρησης CA με ενδιάμεσους χρόνους που είναι σταθεροί και ίσοι με $\frac{1}{\mu} \equiv \bar{x}$ (δηλαδή με συχνότητα επίσκεψης μ), ο ρυθμός εισόδου και ο ρυθμός απόδοσης του συστήματος υπό τη στρατηγική ισορροπίας δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις

$$EAR_j^{CA-(e)} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{x}} \frac{r\lambda}{c} & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \leq v_j, \\ \frac{1}{\bar{x}} w_j(\lambda) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \geq v_j, \end{cases} \quad (3.28)$$

$$TH_j^{CA-(e)} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{x}} \frac{r\lambda}{c} \phi_j(\frac{r\lambda}{c}) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \leq v_j, \\ \frac{1}{\bar{x}} w_j(\lambda) \phi_j(w_j(\lambda)) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \geq v_j, \end{cases} \quad (3.29)$$

$$(3.30)$$

όπου $w_j(s) = p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)) + s(\bar{x} - a_2^*)$ αν η εξίσωση (3.20) έχει κάποια λύση ενώ διαφορετικά είναι $w_j(s) = \frac{r\lambda}{c}$.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η (v_j) είναι γνησίως αύξουσα, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$EAR^{CA-(e)} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{x}} \frac{r\lambda}{c} & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \leq v_1, \\ \frac{1}{\bar{x}} (\sum_{i=1}^{j-1} h(i)w_i + \frac{r\lambda}{c} \bar{H}(j-1)) & \text{αν } v_{j-1} \leq \frac{r\lambda}{c} < v_j, \end{cases} \quad (3.31)$$

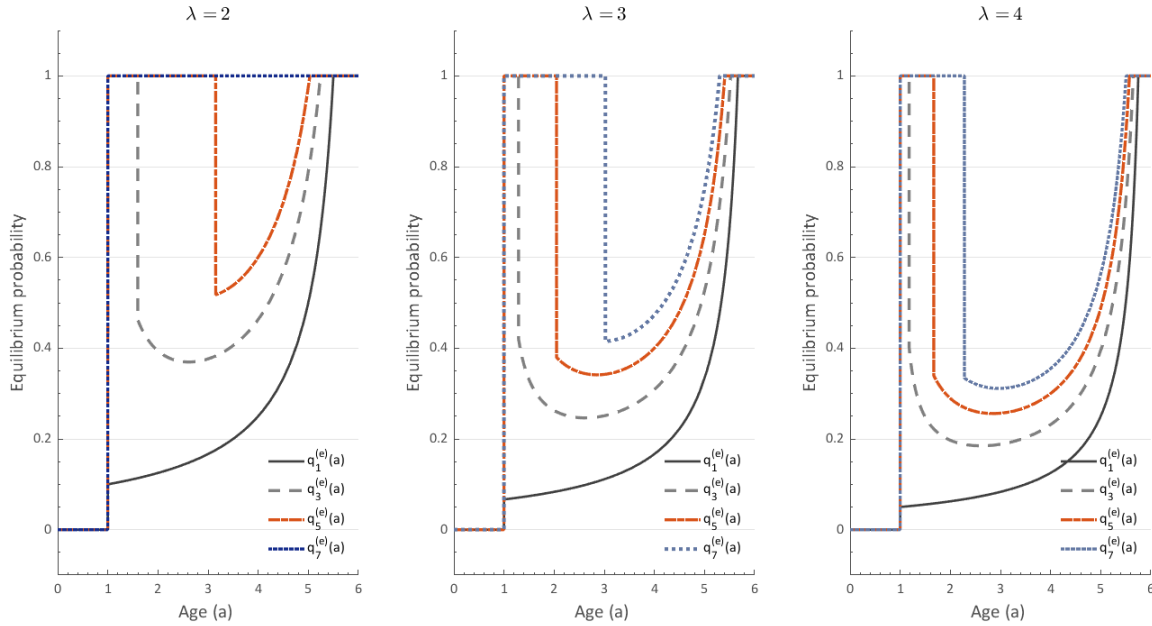
$$TH^{CA-(e)} = \begin{cases} \frac{r\lambda}{c\bar{x}} \phi(\frac{r\lambda}{c}) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \leq v_1, \\ \frac{1}{\bar{x}} (\sum_{i=1}^{j-1} h(i)w_i f_i(w_i) + \sum_{i=j}^{\infty} h(i) \frac{r\lambda}{c} f_i(\frac{r\lambda}{c})) & \text{αν } v_{j-1} \leq \frac{r\lambda}{c} < v_j, \end{cases} \quad (3.32)$$

$$(3.33)$$

Λήμμα 3.2. Σύγκριση μεταξύ των περιπτώσεων $\frac{r\lambda}{c} \leq v_j$ και $\frac{r\lambda}{c} > v_j$ για το επίπεδο CA Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης είναι μεγαλύτερα στην περίπτωση που $\frac{r\lambda}{c} \leq v_j$, για κάθε $j \geq 1$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Στο Γράφημα (3.1) παρουσιάζουμε τη μορφή της στρατηγικής ισορροπίας σε ένα αριθμητικό πείραμα για το οποίο οι τιμές των παραμέτρων (r, c, \bar{x}) είναι ίσες με $(5, 1, 6)$. Έχοντας διακρίνει τρία σενάρια για τον ρυθμό αφίξεων, στο κάθε ένα από αυτά απεικονίζονται οι συναρτήσεις $q_j^{(e)}(a)$ για $j = 1, 3, 5, 7$.



Σχήμα 3.1: Στρατηγική ισορροπίας για $\lambda \in \{2, 3, 4\}$ και $j \in \{1, 3, 5, 7\}$ για την περίπτωση σταθερών ενδιάμεσων χρόνων.

Επίπεδο CN

Για το επίπεδο πληροφόρησης CN, λόγω της ιδιότητας DMRL (δείτε το σχετικό Πρόσχημα 7.1 στο [100]) θα έχουμε ότι υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπία την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 2.5 και 2.6. Γενικά για το επίπεδο αυτό, συνοψίζουμε τα αποτελέσματα στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 3.4. (Χαρακτηριστικά του συστήματος στο επίπεδο CN για σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους) Στο επίπεδο πληροφόρησης CN με ενδιάμεσους χρόνους που είναι σταθεροί και ίσοι με \bar{x} (δηλαδή με συχνότητα επίσκεψης $\frac{1}{\bar{x}}$), το σύστημα έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

I Υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{(e)} = (q_j^{(e)}(n) : n \in \{0, 1, 2, \dots\})$, η οποία έχει την ακόλουθη μορφή: Για $n \geq j$ είναι πάντα $q_j^{(e)}(n) = 0$ ενώ για $n \leq j - 1$ θα είναι

$$q_j^{(e)}(\cdot) = \begin{cases} (0, 0, 0, \dots, 0) & \text{αν } \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2}, \\ (q^*, 1, 1, \dots, 1) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{2} < \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{1 - e^{-\lambda \bar{x}}} - \frac{1}{\lambda}. \\ (1, 1, 1, \dots, 1) & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (3.34)$$

όπου q^* η μοναδική λύση της εξίσωσης $\frac{\bar{x}}{1-e^{-\lambda q^*}} - \frac{1}{\lambda q^*} = \frac{r}{c}$ στο $(0, 1)$.

II Η στάσιμη κατανομή του συστήματος θα είναι το διάνυσμα $(1, 0, 0, \dots)$ αν $\frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2}$ ενώ αν $\frac{\bar{x}}{2} < \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{1-e^{-\lambda \bar{x}}} - \frac{1}{\lambda}$ θα είναι η

$$\pi_j(0) = \frac{1 - e^{-\lambda \bar{x} q^*}}{\lambda \bar{x} q^*} \quad (3.35)$$

$$\pi_j(n) = \frac{1}{\bar{x}} q^* \left(\frac{1}{1 - q^*} \right)^n \int_0^{\bar{x}} e^{-\lambda u q^*} [1 - p_n(\lambda u(1 - q^*))] du, \quad 1 \leq n \leq j - 1 \quad (3.36)$$

$$\pi_j(j) = 1 - \sum_{n=0}^{j-1} \pi_j(n), \quad (3.37)$$

διαφορετικά, αν $\frac{r}{c} \geq \frac{\bar{x}}{1-e^{-\lambda \bar{x}}} - \frac{1}{\lambda}$, θα είναι

$$\pi_j(n) = \frac{1}{\lambda \bar{x}} F_{(n+1, \lambda)}(\bar{x}), \quad 1 \leq n \leq j - 1, \quad (3.38)$$

$$\pi_j(j) = 1 - \phi_j(\lambda \bar{x}) \quad (3.39)$$

όπου η $F_{(n+1, \lambda)}$ είναι η συνάρτηση κατανομής της Erlang με παραμέτρους $n + 1$ και λ .

III Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης στην περίπτωση που $\frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2}$ είναι όλα ίσα με 0. Σε διαφορετική περίπτωση, έχουμε τις ακόλουθες μορφές:

$$EAR^{CN-(e)} = TH^{CN-(e)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \lambda \sum_{n=0}^j q_j(n) \pi_j(n) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{2} < \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{1-e^{-\lambda \bar{x}}} - \frac{1}{\lambda}. \\ \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \lambda \phi_j(\lambda \bar{x}) & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (3.40)$$

$$SW^{CN-(e)} = r TH^{CN-(e)} - c \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \sum_{n=0}^j n \pi_j(n). \quad (3.41)$$

IV Επιπλέον, αν $\frac{r}{c} > \frac{\bar{x}}{2}$ έχουμε ότι

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} TH^{CN-(e)}(\lambda) = \bar{x} g \frac{1}{\frac{r}{c} + \frac{1}{s^*}}, \quad (3.42)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} SW^{CAN-(e)}(\lambda) = 0, \quad (3.43)$$

όπου s^* η μοναδική λύση της εξίσωσης $\frac{\bar{x}}{1-e^{-s \bar{x}}} - \frac{1}{s} = \frac{r}{c}$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Παρατήρηση 3.1. Για το επίπεδο CN, στην περίπτωση συνωστισμένου συστήματος ($\lambda \rightarrow \infty$) με $\frac{r}{c} > \bar{x}$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$(i) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} q_j^{(e)}(0) = 0,$$

$$(ii) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \pi_j(0) = p^*, \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \pi_j(n) = 0, \quad 1 \leq n \leq j - 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \pi_j(j) = 1 - p^*,$$

$$(iii) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} E[n|q_j] = \frac{r}{c}.$$

Επίπεδο C

Για το επίπεδο C, το Θεώρημα 2.7 θα πάρει την ακόλουθη μορφή:

Θεώρημα 3.5. (Στρατηγική ισορροπίας στο επίπεδο C για σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους) Για το επίπεδο πληροφόρησης C με ενδιάμεσους χρόνους που είναι σταθεροί και ίσοι με \bar{x} (δηλαδή με συχνότητα επίσκεψης $\frac{1}{\bar{x}}$), υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας $q_j^{(e)}$. Έστω

$$\alpha(x) = \frac{j}{x}(1 - p_j(x)) + p_{j-1}(x). \quad (3.44)$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2}$. Τότε η στρατηγική καθολικής αποχώρησης ($q_j^{(e)} = 0$) είναι η κυριαρχούσα στρατηγική.

Περίπτωση 2: $\frac{\bar{x}}{2} < \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{2\alpha(\frac{\bar{x}\lambda}{\mu})}$. Τότε, η $q_j^{(e)} = \frac{x_j^*}{\lambda\bar{x}}$ είναι η μοναδική στρατηγική ισορροπίας, με το x_j^* να είναι η μικρότερη λύση της $\alpha(x) = \frac{c\bar{x}}{2r}$, στο $(0, \bar{x}\lambda)$.

Περίπτωση 3: $\frac{r}{c} \geq \frac{\bar{x}}{2\alpha(\lambda\bar{x})}$. Τότε η στρατηγική καθολικής εισόδου ($q_j^{(e)} = 1$) είναι η κυριαρχούσα στρατηγική.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Χρησιμοποιώντας τους αριθμούς u_j στη (2.52) έχουμε μια λεπτομερέστερη περιγραφή του συστήματος. Ειδικότερα, έχουμε συνθήκες για τον προσδιορισμό του διανύσματος $\mathbf{q}^{(e)}$ (και όχι απλά της συνιστώσας $q_j^{(e)}$ καθώς και εκφράσεις για τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση των σταθερών ενδιάμεσων χρόνων, ίσων με \bar{x} , θα έχουμε ότι

$$u_j = \frac{\bar{x}}{2\phi_j(\lambda\bar{x})},$$

όπου $\phi_j(x) = \frac{\int_0^x p_j(u)du}{x}$.

Θεώρημα 3.6. (Χαρακτηριστικά του συστήματος στο επίπεδο C για σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους) Στο επίπεδο πληροφόρησης C με ενδιάμεσους χρόνους που είναι σταθεροί και ίσοι με \bar{x} (δηλαδή με συχνότητα επίσκεψης $\frac{1}{\bar{x}}$), το σύστημα έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

I Υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}^{(e)} = (q_1^{(e)}, q_2^{(e)}, \dots)$, η οποία έχει την ακόλουθη μορφή:

$$q^{(e)}(\cdot) = \begin{cases} (0, 0, 0, \dots) & \text{αν } \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2}, \\ (q_1^*, q_2^*, \dots, q_{j-1}^*, 1, \dots) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{2\phi_j(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2\phi_{j-1}(\lambda\bar{x})} \\ (1, 1, 1, \dots) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{2\phi_1(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c} \end{cases} \quad (3.45)$$

όπου $q_i^* = \frac{1}{\lambda\bar{x}} f_i^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r})$.

II Η στάσιμη κατανομή του συστήματος, $\pi_j(n)$ έχει την κατανομή Poisson με ρυθμό $\lambda q_j^{(e)}$.

III Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης έχουν τις μορφές: Αν $\frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2}$ τότε $EAR^{C-(e)} = TH^{C-(e)} = SW^{C-(e)} = 0$. Διαφορετικά, έχουμε τις ακόλουθες μορφές:

$$EAR^{C-(e)} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } \frac{\bar{x}}{2f_1(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c} \\ \sum_{i=1}^{j-1} h(i) \frac{1}{\bar{x}} f_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) + \lambda \bar{H}(j-1) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{2\phi_j(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2f_{j-1}(\lambda\bar{x})} \end{cases} \quad (3.46)$$

$$TH^{C-(e)} = \begin{cases} \lambda\phi(\lambda\bar{x}) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{2f_1(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c} \\ \sum_{i=1}^{j-1} h(i) \frac{c}{2r} f_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) + \sum_{i=j}^{\infty} h(i) \lambda f_i(\lambda\bar{x}) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{2\phi_j(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2f_{j-1}(\lambda\bar{x})} \end{cases} \quad (3.47)$$

$$SW^{C-(e)} = \begin{cases} \lambda(r\phi(\lambda\bar{x}) - c\frac{\bar{x}}{2}) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{2f_1(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c} \\ \lambda r \sum_{i=j}^{\infty} h(i) f_i(\lambda\bar{x}) - c\frac{\bar{x}}{2} \bar{H}(j-1) & \text{αν, } \frac{\bar{x}}{2\phi_j(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2f_{j-1}(\lambda\bar{x})} \end{cases} \quad (3.48)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Επίπεδο \emptyset

Θεώρημα 3.7. (Χαρακτηριστικά του συστήματος στο επίπεδο \emptyset για σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους) Στο επίπεδο πληροφόρησης \emptyset με ενδιάμεσους χρόνους που είναι σταθεροί και ίσοι με \bar{x} (δηλαδή με συχνότητα επίσκεψης $\frac{1}{\bar{x}}$), το σύστημα έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

I Υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}^{(e)} = q^{(e)} \in [0, 1]$, η οποία έχει την ακόλουθη μορφή:

$$q^{(e)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2}, \\ \frac{1}{\lambda\bar{x}} f^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{2} < \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{2\phi(\lambda\bar{x})}, \\ 1 & \text{αν } \frac{r}{c} \geq \frac{\bar{x}}{2\phi(\lambda\bar{x})} \end{cases} \quad (3.49)$$

όπου $\phi_j(x) = \frac{\int_0^x p_j(u) du}{x}$ και $\phi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \phi_j(x)$.

II Η στάσιμη κατανομή του συστήματος, $\pi(n)$ έχει την κατανομή Poisson με ρυθμό $\lambda q^{(e)}$.

III Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης έχουν τις μορφές: Αν $\frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2}$ τότε $EAR^{\emptyset-(e)} = TH^{\emptyset-(e)} = SW^{\emptyset-(e)} = 0$. Διαφορετικά, έχουμε τις ακόλουθες μορφές:

$$EAR^{\emptyset-(e)} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\bar{x}} f^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right), \\ \frac{1}{\bar{x}} f^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) & \text{αν } \lambda \geq \frac{1}{\bar{x}} f^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right). \end{cases} \quad (3.50)$$

$$TH^{\emptyset-(e)} = \begin{cases} \lambda\phi(\lambda\bar{x}) & \text{αν } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\bar{x}} f^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right), \\ \frac{c}{2r} f^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) & \text{αν } \lambda \geq \frac{1}{\bar{x}} f^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right). \end{cases} \quad (3.51)$$

$$SW^{\emptyset-(e)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\bar{x}} f^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right), \\ \lambda(r\phi(\lambda\bar{x}) - c\frac{\bar{x}}{2}) & \text{αν } \lambda \geq \frac{1}{\bar{x}} f^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right). \end{cases} \quad (3.52)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

3.2.2 Η επίδραση της πληροφορίας στην περίπτωση σταθερών ενδιάμεσων χρόνων

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την επίδραση της πληροφορίας στο σύστημα, για την ειδική περίπτωση των σταθερών ενδιάμεσων χρόνων, χρησιμοποιώντας τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης (ρυθμό εισόδου, ρυθμό απόδοσης και κοινωνικό όφελος) υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών, τα οποία παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Προκειμένου να αποφύγουμε τις συγκρίσεις όλων των δυνατών ζευγαριών που μπορούν να προκύψουν συνδυάζοντας τα 8 επίπεδα πληροφόρησης, επιλέγουμε να μελετήσουμε τα ακόλουθα ζεύγη: το \emptyset με το C, το C με το CA και τέλος, το CA με το CAN. Με άλλα λόγια, ξεκινώντας από το «χαμηλότερο» επίπεδο, θα αυξάνουμε σταδιακά την πληροφόρηση, προσθέτοντας αρχικά το C, στη συνέχεια το A και τέλος το N, μέχρι να φθάσουμε το «υψηλότερο» επίπεδο πληροφόρησης. Η συγκεκριμένη αυτή σειρά με την οποία αυξάνεται η συνολική πληροφόρηση δεν έχει επιλεγεί αυθαίρετα. Παρατηρήστε πως τα κομμάτια πληροφορίας C, A και N βρίσκονται σε μια «αύξουσα» σειρά ως προς την ισχύ της εξάρτησης τους από το σύστημα, καθώς αυτό εξελίσσεται χρονικά. Πράγματι, διανύοντας έναν ανανεωτικό κύκλο, το C είναι σταθερό, το A αυξάνει με ντετερμινιστικό τρόπο (και μάλιστα γραμμικά) ενώ το N αυξάνεται στοχαστικά, αναλόγως με τον ρυθμό αφίξεων των πελατών αλλά και από τις στρατηγικές τους αποφάσεις.

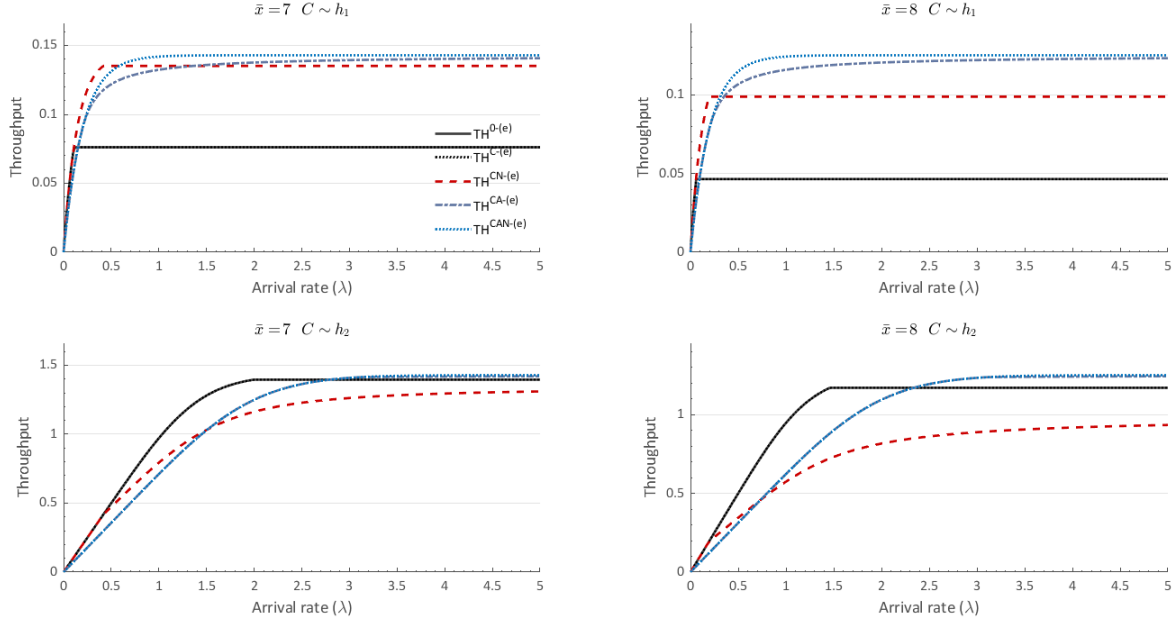
Θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας θεωρητικά αποτελέσματα σχετικά με τον ρυθμό απόδοσης στα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης, όπου, σε αντίθεση με το κοινωνικό όφελος, δεν έχουμε παρουσιάσει κάποιο αποτέλεσμα ανάλογο του Θεωρήματος 2.9 το οποίο να ισχύει σε γενικότερο πλαίσιο. Ειδικότερα, θα εξετάσουμε τον ρυθμό απόδοσης ως συνάρτηση του ρυθμού αφίξεων, λ , των πελατών αλλά και την απόδοση του συστήματος σε υψηλό συνωστισμό (δηλαδή, καθώς $\lambda \rightarrow \infty$). Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε επιπλέον θεωρητικά αποτελέσματα για το κοινωνικό όφελος, τα οποία ισχύουν για την ειδική αυτή περίπτωση των σταθερών ενδιάμεσων χρόνων. Θα κλείσουμε την ενότητα παρουσιάζοντας αποτελέσματα από ορισμένα αριθμητικά πειράματα σχετικά με τον ρυθμό αφίξεων υπό τη στρατηγική ισορροπίας.

Η επίδραση στον ρυθμό απόδοσης

Θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας μέσω των παρακάτω δύο αριθμητικών πειραμάτων, την τυπική συμπεριφορά του ρυθμού απόδοσης υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών, ως συνάρτηση του ρυθμού αφίξεων λ κρατώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε θέσει $(r, c) = (5, 1)$ ενώ έχουμε επιλέξει δύο τιμές για τους ενδιάμεσους χρόνους, $\bar{x} \in \{7, 8\}$. Στο πρώτο από αυτά, που αντιστοιχεί στο Σχήμα 3.2, δεν υπάρχει η επιρροή από την κατανομή χωρητικότητας καθώς έχουμε επιλέξει $C = 1$ και $C = 10$ (μ.π.1). Στην περίπτωση αυτή, τα επίπεδα \emptyset και C συμπίπτουν. Από την άλλη, στο Σχήμα 3.3, έχουμε επιλέξει δύο ομοιόμορφες κατανομές χωρητικότητας στο $\{1, \dots, 5\}$ και $\{1, \dots, 10\}$ αντίστοιχα.

Όπως διαπιστώνουμε από το Σχήμα 3.2, τα γραφήματα των διαφόρων συναρτήσεων τέμνονται τουλάχιστον μια φορά και επομένως δεν υπάρχει κάποιο επίπεδο πληροφόρησης που να κερδίζει τα υπόλοιπα ως προς τον ρυθμό απόδοσης. Επιπλέον, ακόμα και για μεγάλο λ , η συμπεριφορά του ρυθμού απόδοσης για τα επίπεδα CN και \emptyset φαίνεται πως παρουσιάζει διαφορά σε σχέση με τα άλλα επίπεδα. Ειδικότερα, στα υπό-γραφήματα 1 και 2, με την h_1 , το επίπεδο CN υπερέρχει του \emptyset ενώ στα υπό-γραφήματα 3 και 4, με την h_2 , φαίνεται να συμβαίνει το αντίθετο. Ακόμη, παρατηρούμε πως σε όλες τις περιπτώσεις, τα επίπεδα CAN, CA σχεδόν συμπίπτουν (τουλάχιστον για μεγάλο λ) ενώ το CAN υπερτερεί οριακά για ενδιάμεσες τιμές του λ . Τέλος, σημειώνουμε πως για όλα τα επίπεδα, ο ρυθμός απόδοσης φαίνεται να λαμβάνει γενικά υψηλότερες τιμές όταν έχουμε την h_2 και όταν ο ενδιάμεσος χρόνος είναι πιο κοντά στο $\frac{r}{c}$.

Η κατάσταση για τα 4 αυτά επίπεδα δεν φαίνεται να παρουσιάζει ιδιαίτερες αλλαγές όταν έχουμε επιπλέον την επίδραση από την κατανομή της χωρητικότητας στην ειδική περίπτωση που η τελευταία είναι ομοιόμορφη (Σχήμα 3.3), δηλαδή, σε ένα σενάριο στο οποίο επικρατεί πλήρης



Σχήμα 3.2: Ρυθμός απόδοσης ως προς λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{7, 8\}$ και $h_1(1) = 1$, $h_2(10) = 1$: Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.

άγνοια σχετικά με το πλήθος των ελεύθερων θέσεων στο επόμενο μεταφορικό μέσο. Ειδικότερα, φαίνεται πως και στο πείραμα αυτό έχουμε ότι το επίπεδο CAN είναι πάντα καλύτερο από το CA. Επιπλέον, στο σχήμα αυτό, παρουσιάζεται η επίδραση στο επίπεδο C, καθώς αυτό πλέον δεν συμπίπτει με το \emptyset . Ειδικότερα, συγκρίνοντας τα επίπεδα αυτά, παρατηρούμε πως υπάρχουν κρίσιμες τιμές $\lambda_1 < \lambda_2$ ώστε να ισχύει το εξής: τα δύο επίπεδα συμπίπτουν για $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, το επίπεδο \emptyset είναι καλύτερο για $\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_2$ και τελικά, για $\lambda \geq \lambda_2$, κερδίζει το επίπεδο C. Τέλος, σχετικά με τα επίπεδα CA και C, παρατηρούμε πως σε όλες τις περιπτώσεις του σχήματος 3.3, υπάρχει κάποιο κατώφλι λ^* ώστε πριν ο ρυθμός αφίξεων φθάσει την τιμή αυτή, είναι καλύτερο το επίπεδο C, ενώ, από τη στιγμή που το διαβεί, θα υπερτερεί το επίπεδο CA.

Η καθολική ισχύς κάποιων από τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορεί να αποδειχθεί για την ειδική αυτή περίπτωση. Συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα που αφορά τη σύγκριση των επιπέδων C και \emptyset .

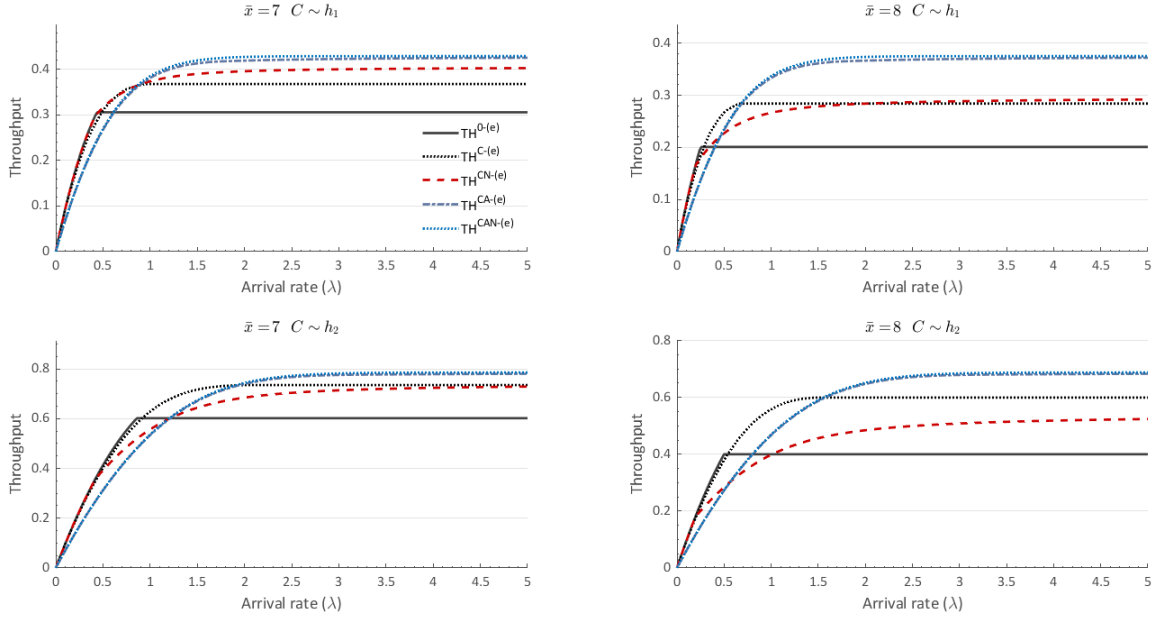
Θεώρημα 3.8. *Σύγκριση ως προς τον ρυθμό απόδοσης για τα επίπεδα C και \emptyset) Έστω $TH^{C-(e)}(\lambda)$ και $TH^{\emptyset-(e)}(\lambda)$ ο ρυθμός απόδοσης ως συνάρτηση του λ για τα επίπεδα C και \emptyset , υπό τη στρατηγική ισοροπίας των πελατών $\mathbf{q}^{(e)}$. Τότε, για την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι επίσκεψης των μεταφορικών μέσων είναι σταθεροί, υπάρχουν σταθερές $\lambda_1 = \frac{1}{2} f_1^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r})$ και $\lambda_2 > \frac{1}{2} f_1^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r})$ τέτοιες ώστε*

$$TH^{C-(e)}(\lambda) = TH^{\emptyset-(e)}(\lambda) = \lambda\phi(\lambda\bar{x}), \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_1, \quad (3.53)$$

$$TH^{C-(e)}(\lambda) \leq TH^{\emptyset-(e)}(\lambda), \quad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, \quad (3.54)$$

$$TH^{C-(e)}(\lambda) \geq TH^{\emptyset-(e)}(\lambda), \quad \lambda \geq \lambda_2. \quad (3.55)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.



Σχήμα 3.3: Ρυθμός απόδοσης ως προς λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{7, 8\}$ και $h_1 \sim U(\{1, 5\})$, $h_2 \sim U(\{1, 10\})$: Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.

Επομένως, για μικρό ρυθμό αφίξεων, όλοι οι πελάτες εισέρχονται (είτε με την πληροφορία σχετικά με C , είτε στο επίπεδο χωρίς πληροφόρηση) και επομένως ο ρυθμός απόδοσης συμπίπτει στα δύο αυτά επίπεδα. Για ενδιάμεσες τιμές του λ , η απόκρυψη της πληροφορίας σχετικά με τη χωρητικότητα αυξάνει τον ρυθμό απόδοσης ενώ αν ο συνωστισμός αυξηθεί αρκετά, θα είναι προτιμότερο να δίνεται στους πελάτες η πληροφορία σχετικά με το C . Με άλλα λόγια, η βέλτιστη πολιτική ως προς τον ρυθμό απόδοσης θα είναι να αποκρύπτεται η πληροφόρηση για τη χωρητικότητα όσο ο ρυθμός αφίξεων είναι εντός ενός συγκεκριμένου εύρους τιμών $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$.

Για τη σύγκριση των επιπέδων CA και C , η διαπίστωση που κάναμε μπορεί επίσης να αποδειχθεί:

Θεώρημα 3.9. *Σύγκριση ως προς τον ρυθμό απόδοσης για τα επίπεδα CA και C* Έστω $TH^{CA-(e)}(\lambda)$ και $TH^{C-(e)}(\lambda)$ ο ρυθμός απόδοσης ως συνάρτηση του λ για τα επίπεδα CA και C , υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών $\mathbf{q}^{(e)}$. Τότε, για την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι επίσκεψης των μεταφορικών μέσων είναι σταθεροί, ισχύει ότι

$$TH^{CA-(e)}(\lambda) = \frac{\lambda r}{c\bar{x}} f(\lambda\bar{x}), \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{c}{r}, \quad (3.56)$$

$$TH^{C-(e)}(\lambda) = \lambda\phi(\lambda\bar{x}), \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\bar{x}} f_1^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right), \quad (3.57)$$

και επομένως

$$TH^{CA-(e)}(\lambda) \leq TH^{C-(e)}(\lambda), \quad 0 \leq \lambda \leq \min\left(\frac{1}{\bar{x}} f_1^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right), \frac{c}{r}\right). \quad (3.58)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Με το παραπάνω αποτέλεσμα εξασφαλίζουμε πως για σχετικά χαμηλό ρυθμό αφίξεων, λ , το επίπεδο C υπερτερεί του επιπέδου CA ως προς τον ρυθμό απόδοσης του συστήματος. Μάλιστα, η απόκρυψη της πληροφορίας σχετικά με το A για χαμηλό λ , έχει ως αποτέλεσμα να αυξηθεί ο ρυθμός απόδοσης πολλαπλασιαστικά, κατά έναν παράγοντα $\frac{c\bar{x}}{r}$ (> 1 , λόγω της υπόθεσης (2.1)).

Επίσης, μια παρατήρηση που κάναμε και στα δύο παραπάνω σχήματα, ήταν πως το επίπεδο CAN είναι πάντα καλύτερο από επίπεδο CA. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.10. Σύγκριση ως προς τον ρυθμό απόδοσης για τα επίπεδα CAN και CA) Έστω $TH^{CAN-(e)}(\lambda)$ και $TH^{CA-(e)}(\lambda)$ ο ρυθμός απόδοσης ως συνάρτηση του λ για τα επίπεδα CAN και CA, υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών $\mathbf{q}^{(e)}$. Τότε, για την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι επίσκεψης των μεταφορικών μέσων είναι σταθεροί, ισχύει ότι

$$TH^{CAN-(e)}(\lambda) \geq TH^{CA-(e)}(\lambda), \quad \lambda \geq 0. \quad (3.59)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα (3.3.2)

Επομένως, όταν είναι ήδη διαθέσιμη η πληροφορία σχετικά με τη χωρητικότητα και τον χρόνο έλευσης του προηγούμενου μεταφορικού μέσου, η επιπλέον διάθεση της πληροφορίας σχετικά με το πλήθος των πελατών θα έχει πάντα θετική επίδραση στον ρυθμό απόδοσης του συστήματος.

Τέλος, σχετικά με τη συμπεριφορά που έχει ο ρυθμός απόδοσης του συστήματος για τα διάφορα επίπεδα, ως συνάρτηση, παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση είναι αύξουσα και κοίλη και μάλιστα παρατηρούμε πως έχει και πεπερασμένο όριο καθώς $\lambda \rightarrow \infty$. Η οριακή αυτή περίπτωση αντιπροσωπεύει μια κατάσταση όπου το σύστημα είναι υψηλά συνωστισμένο και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Στην υπό-ενότητα που ακολουθεί, εστιάζουμε τη μελέτη σε συστήματα με υψηλό συνωστισμό.

Ασυμπτωτικά αποτελέσματα για τον ρυθμό απόδοσης

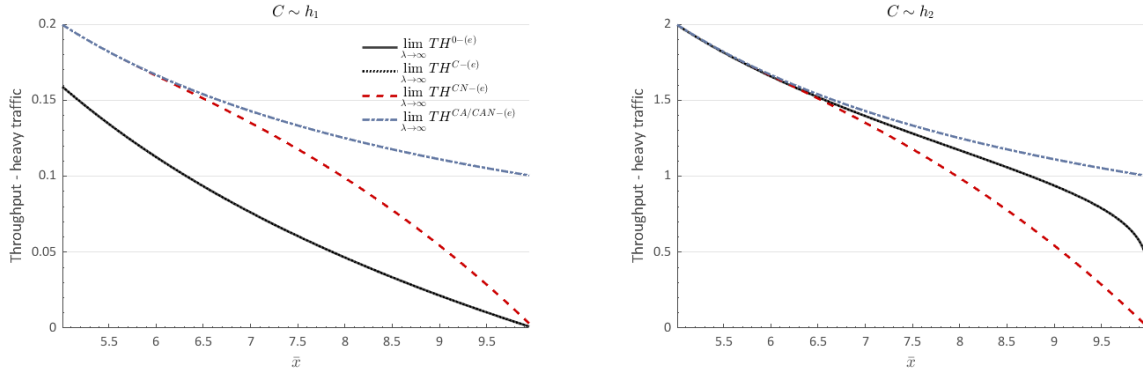
Σε όσα ακολουθούν, θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό

$$TH_{\infty}^{i-(e)} \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \infty} TH^{i-(e)}(\lambda), \quad i \in \mathcal{I}. \quad (3.60)$$

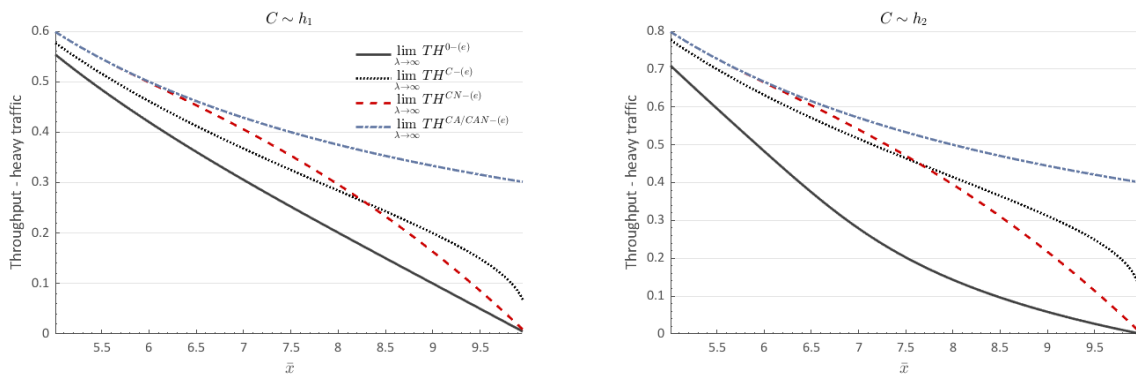
Τα παραπάνω όρια εκφράζουν την απόδοση του συστήματος όταν ο ρυθμός αφίξεων είναι πολύ μεγάλος (τείνει στο άπειρο). Με άλλα λόγια, αντιπροσωπεύουν ένα υψηλά συνωστισμένο σύστημα. Στα Σχήματα 3.4 και 3.5 που ακολουθούν, παρουσιάζουμε το γράφημα του ρυθμού απόδοσης, κάτω από αυτές τις συνθήκες, ως συνάρτηση του ενδιάμεσου χρόνου επίσκεψης των μέσων μεταφοράς. Σε αντιστοιχία με τα προηγούμενα αριθμητικά πειράματα, στο πρώτο σχήμα είναι $C_1 = 1, C_2 = 10$ (μ.π. 1), ώστε να μην υπάρχει επίδραση από την κατανομή χωρητικότητας, ενώ στο δεύτερο έχουμε επιλέξει τις $C_1 \sim U(\{1, \dots, 5\})$ και $C_2 \sim U(\{1, \dots, 10\})$. Επομένως, στο πρώτο σχήμα, τα επίπεδα C και \emptyset θα συμπίπτουν.

Αρχικά διαπιστώνουμε πως και στα δύο σχήματα, για όλα τα επίπεδα, ο ρυθμός απόδοσης σε υψηλό συνωστισμό, είναι φθίνουσα συνάρτηση του \bar{x} η οποία τείνει στο 0, για τα επίπεδα C, CN και \emptyset , καθώς $\bar{x} \rightarrow \frac{r}{c}$. Από την άλλη, τα επίπεδα CAN, CA φαίνεται πως συμπίπτουν και μάλιστα έχουν πάντα το ίδιο όριο, το οποίο είναι θετικό, καθώς $\bar{x} \rightarrow \frac{r}{c}$. Ως προς τη σύγκριση τους τώρα, φαίνεται πως σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε ότι $CAN=CA \geq C > \emptyset$, ενώ το γράφημα στο επίπεδο CN έχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής με τα άλλα επίπεδα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαφορά ανάμεσα στα επίπεδα CN και \emptyset , όπως και ανάμεσα στα C και \emptyset , μεγιστοποιείται για ενδιάμεσες τιμές του \bar{x} .

Πολλές από τις παραπάνω διαπιστώσεις μπορούν να αποδειχθούν αναλυτικά. Προς αυτή την κατεύθυνση έχουμε το ακόλουθο θεώρημα, στο οποίο παρουσιάζονται και αναλυτικές εκφράσεις.



Σχήμα 3.4: Ρυθμός απόδοσης με υψηλό συνωστισμό ως συνάρτηση του \bar{x} για $\frac{r}{c} = 5$ και $h_1(1) = 1$, $h_2(10) = 1$: Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.



Σχήμα 3.5: Ρυθμός απόδοσης με υψηλό συνωστισμό ως συνάρτηση του \bar{x} για $\frac{r}{c} = 5$ και $h_1 \sim U(\{1, 5\})$, $h_2 \sim U(\{1, 10\})$: Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.

Θεώρημα 3.11. Σύγκριση των επιπέδων πληροφόρησης ως προς τον ρυθμό απόδοσης για υψηλά συνωστισμένο σύστημα Για ένα υψηλά συνωστισμένο σύστημα ($\lambda \rightarrow \infty$), στην περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι επίσκεψης των μεταφορικών μέσων είναι σταθεροί, ο ρυθμός απόδοσης έχει πεπερασμένο όριο σε όλα τα επίπεδα πληροφόρησης. Συγκεκριμένα έχουμε ότι

$$TH_{\infty}^{CAN-(e)} = TH_{\infty}^{CA-(e)} = \frac{\bar{h}}{\bar{x}} \quad (3.61)$$

$$TH_{\infty}^{CN-(e)} = \frac{\bar{h}}{\frac{r}{c} + \frac{1}{s^*}} = \frac{\bar{h}}{\bar{x}} (1 - e^{-s^* \bar{x}}), \quad (3.62)$$

$$TH_{\infty}^{C-(e)} = \frac{c}{2r} f^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right), \quad (3.63)$$

$$TH_{\infty}^{\emptyset-(e)} = \frac{c}{2r} \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \phi_j^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right), \quad (3.64)$$

όπου οι (3.62)-(3.64) ισχύουν για $\frac{r}{c} > \frac{\bar{x}}{2}$ ενώ διαφορετικά είναι $TH_{\infty}^{CN-(e)} = TH_{\infty}^{C-(e)} = TH_{\infty}^{\emptyset-(e)} = 0$ και όπου s^* η μοναδική λύση της εξίσωσης $\frac{\bar{x}}{1 - e^{-s\bar{x}}} - \frac{1}{s} = \frac{r}{c}$. Επιπλέον, ισχύει

ότι

$$TH_{\infty}^{CA-(e)} \geq TH_{\infty}^{C-(e)}, \quad (3.65)$$

$$TH_{\infty}^{CA-(e)} \geq TH_{\infty}^{CN-(e)}, \quad (3.66)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Ειδικότερα, η οριακή τιμή του ρυθμού απόδοσης στο επίπεδο CA, καθώς $\lambda \rightarrow \infty$, λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή τιμή. Πράγματι, αν το μέσο μεταφοράς αποχωρεί γεμάτο κάθε φορά από τον σταθμό, τότε ο ρυθμός απόδοσης θα ισούται με $\frac{\bar{h}}{\bar{x}}$ από το Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Αμοιβές. Επομένως, προκειμένου να μεγιστοποιηθεί ο ρυθμός απόδοσης στην περίπτωση που το σύστημα είναι συνωστισμένο, είναι πολύ σημαντικό να δίνεται στους πελάτες η πληροφόρηση σχετικά με τον χρόνο έλευσης του προηγούμενου μεταφορικού μέσου.

Η επίδραση στο κοινωνικό όφελος.

Στην υπό-ενότητα αυτή εξετάζεται η επίδραση την πληροφορίας στο κοινωνικό όφελος που παράγεται όταν οι πελάτες ακολουθούν τις στρατηγικές ισορροπίας τους. Τα αποτελέσματα αφορούν την ειδική εφαρμογή στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι επίσκεψης των μεταφορικών μέσων είναι σταθεροί. Στη γενική περίπτωση ενδιάμεσων χρόνων, έχουμε δείξει στο Θεώρημα 2.9 ότι ισχύει

$$SW^{CA-(e)} \geq SW^{C-(e)} \geq SW^{\theta-(e)}. \quad (3.67)$$

Ωστόσο, στην ειδική περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι των μέσων μεταφοράς είναι σταθεροί, συμπληρώνουμε την παραπάνω σχέση με το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.12. (Σύγκριση ως προς το κοινωνικό όφελος για τα επίπεδα CAN και CA για σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους) Στην περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι σταθεροί, για $\lambda \leq \lambda^*$, ισχύει ότι

$$SW^{CAN-(e)} \geq SW^{CA-(e)}. \quad (3.68)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Επιπλέον, για τη σύγκριση των επιπέδων CN και C, μπορεί να αποδειχθεί και το ακόλουθο αποτέλεσμα

Θεώρημα 3.13. (Σύγκριση ως προς το κοινωνικό όφελος για τα επίπεδα CN και C για σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους) Έστω $SW^{CN-(e)}(\lambda)$ και $SW^{C-(e)}(\lambda)$, το κοινωνικό όφελος ως συνάρτηση του λ για τα επίπεδα CN και C, υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών $\mathbf{q}^{(e)}$. Τότε, για την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι επίσκεψης των μεταφορικών μέσων είναι σταθεροί, ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Για $C = 1$ (μ.π.1) είναι $SW^{CN-(e)}(\lambda) \geq SW^{C-(e)}(\lambda)$ για κάθε $\lambda > 0$.

(ii) Διαφορετικά, υπάρχουν σταθερές $\lambda_1 < \lambda_2$ ώστε

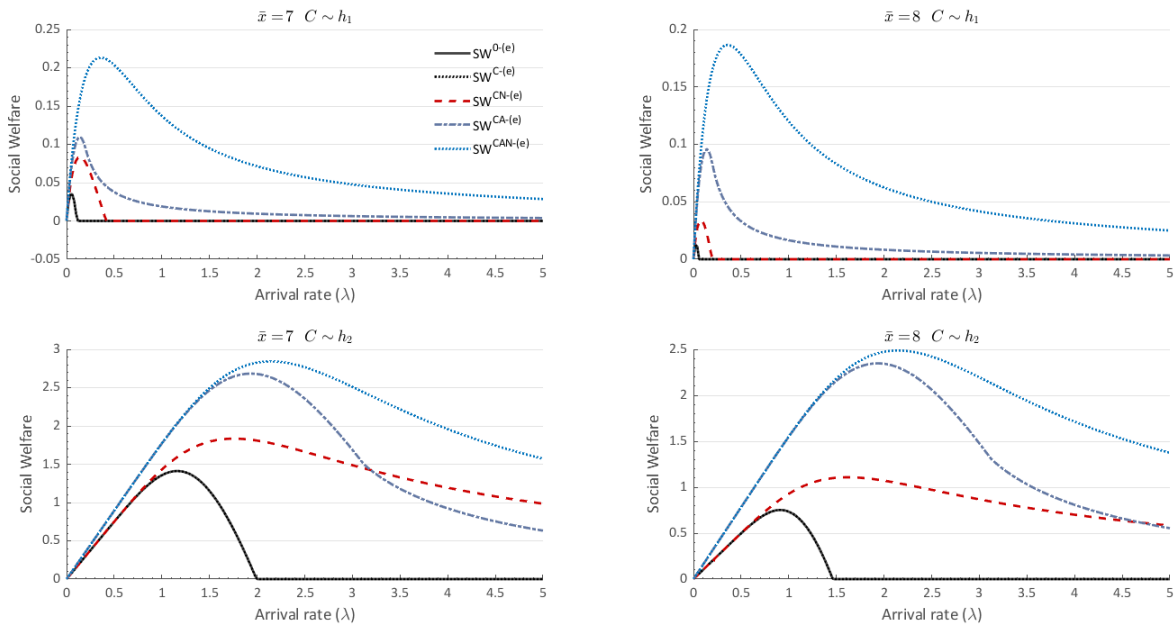
$$\begin{aligned} SW^{CN-(e)}(\lambda) &\geq SW^{C-(e)}(\lambda), \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_1, \\ SW^{CN-(e)}(\lambda) &\geq SW^{C-(e)}(\lambda), \quad \lambda \geq \lambda_2. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Για τη σύγκριση του επιπέδου CN με τα υπόλοιπα επίπεδα, όπως θα διαπιστώσουμε και από τα σχήματα που ακολουθούν, δεν υπάρχει σαφής διάταξη με το επίπεδο CA, καθώς τα γραφήματα των αντίστοιχων συναρτήσεων κοινωνικού οφέλους παρουσιάζουν σημεία τομής. Ωστόσο, όπως θα μπορέσουμε να επαληθεύσουμε στα σχήματα που ακολουθούν, εκτός από την (3.67), φαίνεται πως έχουμε και την

$$SW^{CAN-(e)} \geq SW^{CN-(e)} \geq SW^{C-(e)}. \quad (3.69)$$

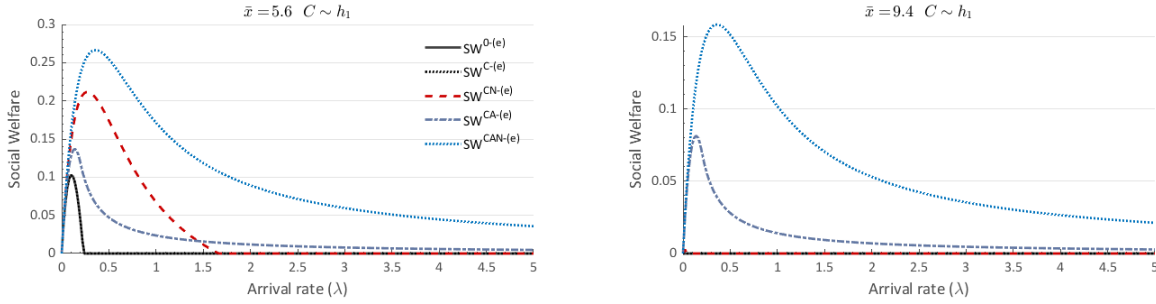
Στο Σχήμα 3.6 παρουσιάζουμε το κοινωνικό όφελος για τα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης, ως συνάρτηση του ρυθμού αφίξεων, λ , στα αντίστοιχα αριθμητικά πειράματα που παρουσιάσαμε για τον ρυθμό απόδοσης.



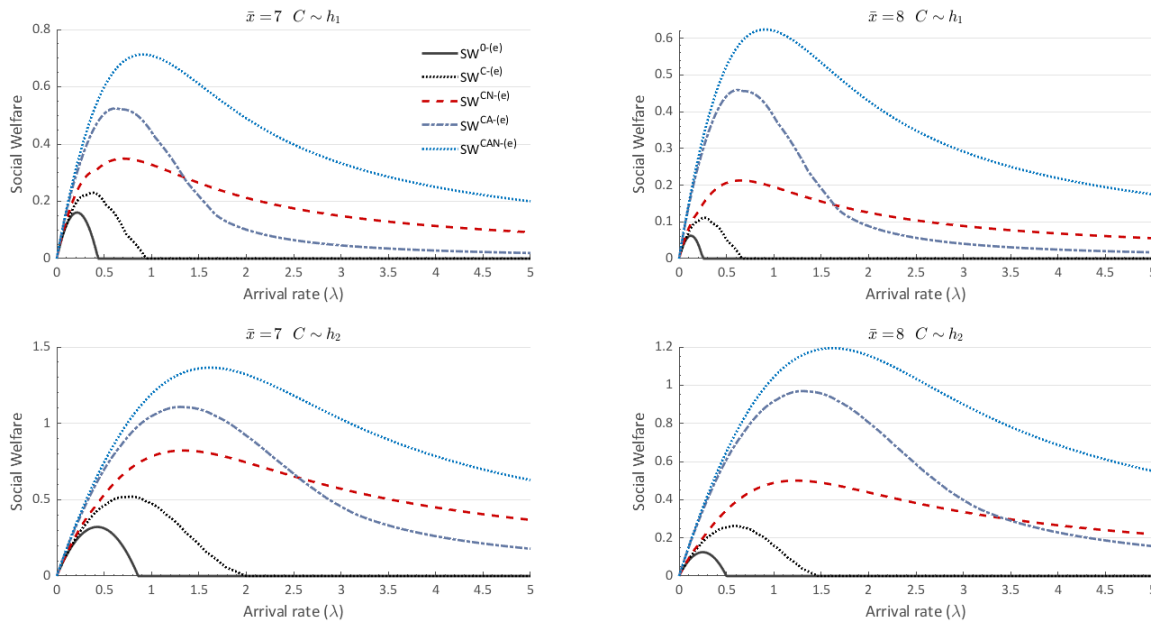
Σχήμα 3.6: Κοινωνικό όφελος ως προς λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{7, 8\}$ και $h_1(1) = 1$, $h_2(10) = 1$: Η περίπτωση με σταθερούς ενδιαμέσους χρόνους.

Αρχικά παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση το κοινωνικό όφελος είναι κοίλη συνάρτηση η οποία τείνει στο 0 καθώς $\lambda \rightarrow \infty$ και επομένως παρουσιάζει μοναδικό ολικό μέγιστο. Επιπλέον, όπως είναι αναμενόμενο, το κοινωνικό όφελος λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές για όλα τα επίπεδα πληροφόρησης όταν αυξάνεται ο βαθμός βεβαιότητας ως προς την εξυπηρέτηση και όταν μειώνεται ο μέσος ενδιαμέσος χρόνος. Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως το επίπεδο CA φαίνεται να υπερέχει πλήρως από το επίπεδο CN στις περιπτώσεις όπου $C = 1$. Ωστόσο, η διάταξη αυτή δεν αληθεύει για μικρότερες τιμές του \bar{x} όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7. Με άλλα λόγια, ακόμα και για την περίπτωση που $C = 1$ (μ.π.1) η διάκριση μεταξύ των επιπέδων CA και CN δεν είναι ξεκάθαρη.

Προχωράμε τώρα στο Σχήμα 3.8 στο οποίο μπορούμε να παρατηρήσουμε τις διαφορές όταν η χωρητικότητα είναι ομοιόμορφα κατανομημένη είτε μέχρι 5 διαθέσιμες θέσεις, είτε μέχρι 10.



Σχήμα 3.7: Κοινωνικό όφελος ως προς λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{5.6, 9.4\}$ και $h_1(1) = 1$: Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.



Σχήμα 3.8: Κοινωνικό όφελος ως προς λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{7, 8\}$ και $h_1 \sim U(\{1, 5\})$, $h_2 \sim U(\{1, 10\})$: Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.

Σημειώνουμε αρχικά πως πλέον εμφανίζεται και το γράφημα για το κοινωνικό όφελος του επιπέδου C το οποίο, όπως έχουμε αναφέρει, θα συμπίπτει με το \emptyset επίπεδο όταν η τ.μ. C λαμβάνει σταθερές τιμές. Επίσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8, ο ενδιάμεσος χρόνος φαίνεται να έχει την εξής επίδραση: (1) Το κοινωνικό όφελος για όλα τα επίπεδα φαίνεται πως λαμβάνει μικρότερες τιμές για όσο ελαττώνεται ο ενδιάμεσος χρόνος. (2) Τα επίπεδα CAN, CA φαίνεται πως επηρεάζονται με ανάλογο τρόπο όπως και τα επίπεδα C, \emptyset . Μάλιστα, το χάσμα μεταξύ των δύο ζευγών φαίνεται να αυξάνεται όσο μεγαλώνει ο ενδιάμεσος χρόνος. Με άλλα λόγια, η συμβολή της πληροφόρησης σχετικά με το A φαίνεται πως είναι εντονότερη όσο μεγαλώνει ο ενδιάμεσος χρόνος.

Τέλος σημειώνουμε πως σε όλα τα παραπάνω πειράματα, μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε τα αποτελέσματα των Θεωρημάτων 3.12 και 3.13. Επιπλέον, οι διαπιστώσεις που κάναμε στα προηγούμενα σχήματα σχετικά με τη συμπεριφορά των συναρτήσεων επιβεβαιώνονται εξίσου. Μάλιστα, φαίνεται πως υπάρχει και ορισμένη διάταξη ως προς το σημείο που παρουσιάζει ολικό μέγιστο η συνάρτηση της κοινωνικής ωφέλειας για κάθε επίπεδο πληροφόρησης (εκτός του CN

επιπέδου). Ειδικότερα, φαίνεται πως

$$\lambda_{max}^{CAN} \geq \lambda_{max}^{CA} \geq \lambda_{max}^C \geq \lambda_{max}^{\emptyset}, \quad (3.70)$$

όπου $\lambda_{max}^{(i)} = \arg \max_{\{\lambda > 0\}} SW^{i-(e)}(\lambda)$.

Θεώρημα 3.14. (Οριακή συμπεριφορά της συνάρτησης $SW^{i-(e)}(\lambda)$) Για τις συναρτήσεις $SW^{i-(e)}(\lambda)$, $i \in \text{ισχύει ότι } SW_{\infty}^{i-(e)} = 0$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.9.

Η επίδραση στον ρυθμό εισόδου

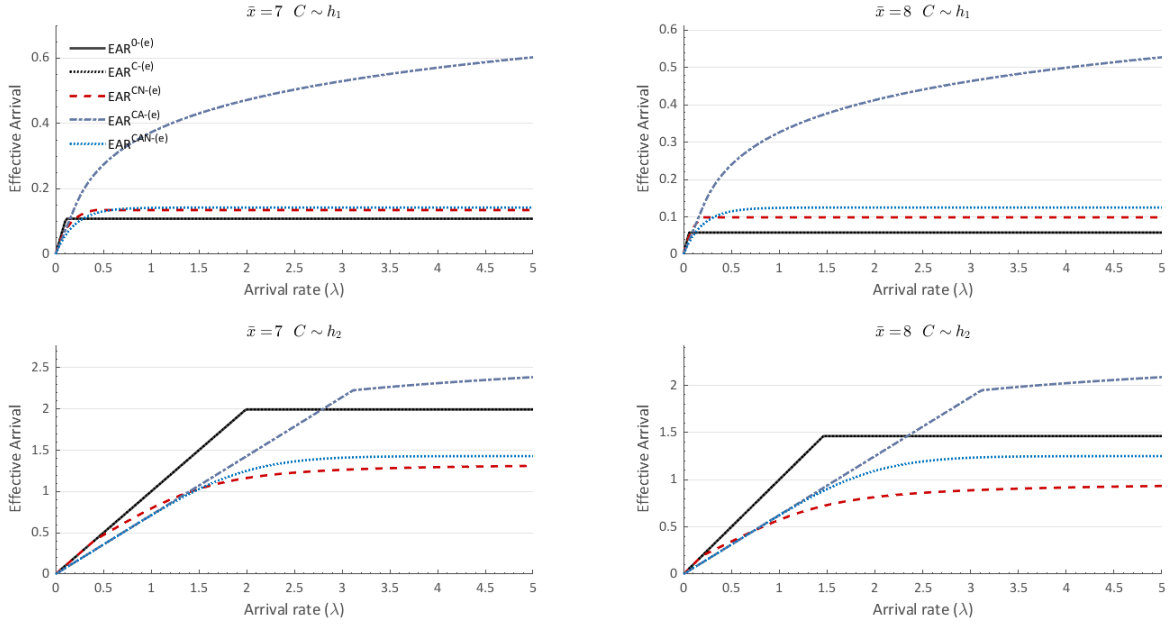
Θα εστιάσουμε τώρα στον πραγματικό ρυθμό εισόδου στο σύστημα όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας τους για την ειδική περίπτωση όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι επισκέψεων των μεταφορικών μέσων είναι σταθεροί. Γενικά, ο ρυθμός εισόδου ορίζεται ως ο μακροπρόθεσμος ρυθμός πελατών που εισέρχονται στο σύστημα ανά χρονική μονάδα και επομένως, θα είναι άνω φραγμένος από το λ . Αν και αυτό το μέτρο λειτουργικότητας, από την οπτική πλευρά του διαχειριστή του συστήματος, έχει μικρότερη σημασία σε σχέση με τα άλλα μέτρα (ρυθμό απόδοσης και κοινωνικό όφελος), μας βοηθάει να κατανοήσουμε περισσότερο τις προτιμήσεις των πελατών για το σύστημα, όταν αυτοί -όπως έχουμε υποθέσει- στοχεύουν αποκλειστικά στη μεγιστοποίηση της ατομικής τους ωφέλειας, λαμβάνοντας υπόψη τις στρατηγικές των άλλων.

Καθώς στο μέτρο αυτό συμπεριλαμβάνονται και οι πελάτες που αποφάσισαν να εισέλθουν χωρίς όμως να λάβουν εξυπηρέτηση, αναμένεται να υπάρχει σημαντική διαφορά με τον ρυθμό απόδοσης. Ωστόσο, σημειώνουμε πως στα επίπεδα πληροφόρησης CAN, CN, στα οποία οι πελάτες έχουν γνώση τόσο για τη χωρητικότητα στο επόμενο μέσο μεταφοράς όσο και για το πλήθος των πελατών που έχουν ήδη εισέλθει στο σύστημα (και άρα είναι σε θέση να εξακριβώσουν αν θα εξυπηρετηθούν), ο ρυθμός εισόδου, (EAR), θα ταυτίζεται με τον ρυθμό απόδοσης (TH). Γενικά βέβαια, ο ρυθμός εισόδου αποτελεί άνω φράγμα του ρυθμού απόδοσης.

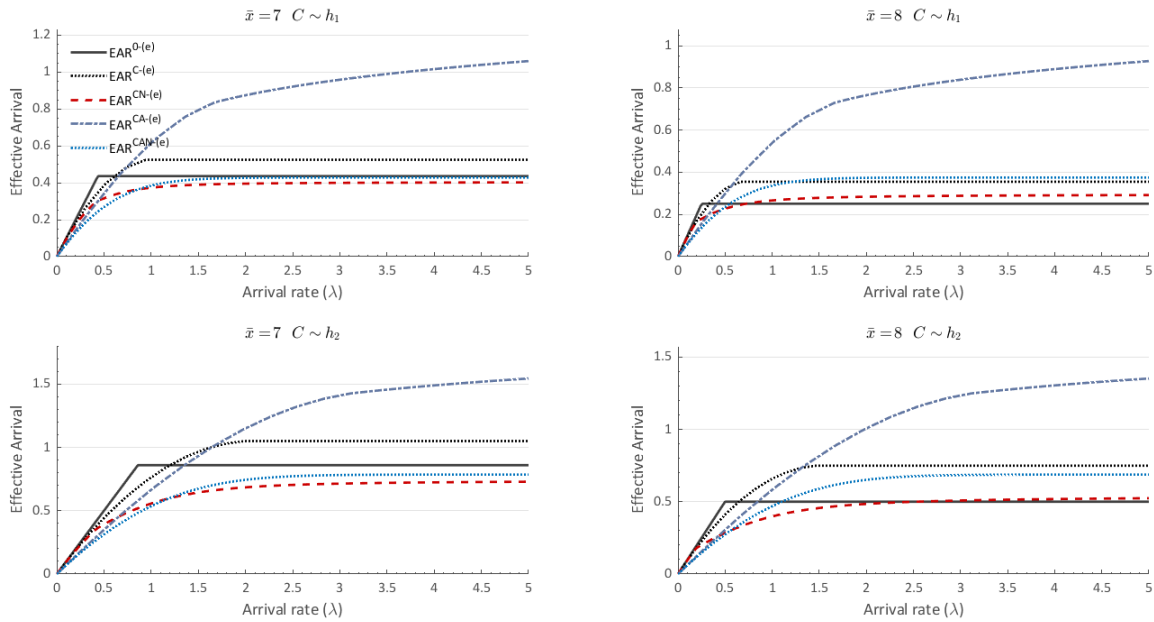
Αρχικά παρουσιάζουμε τα γραφήματα του ρυθμού εισόδου, ως συνάρτηση του λ στα αντίστοιχα αριθμητικά πειράματα που παρουσιάσαμε και για τα υπόλοιπα μέτρα αποτίμησης απόδοσης.

Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 3.9, παρουσιάζουμε την τυπική συμπεριφορά του ρυθμού εισόδου όταν δεν υπάρχει επίδραση από την κατανομή χωρητικότητας διακρίνοντας ωστόσο δύο περιπτώσεις ως προς το πλήθος ελεύθερων θέσεων στο επόμενο μέσο (χαμηλό: $C = 1$, υψηλό: $C = 10$) αλλά και θεωρώντας τις δύο περιπτώσεις για τον ενδιάμεσο χρόνο ($\bar{x} \in \{7, 8\}$) που χρησιμοποιήσαμε και στα προηγούμενα πειράματα. Κρατώντας τις συνθήκες αυτές σταθερές, στο Σχήμα 3.10 χρησιμοποιούμε την ομοιόμορφη κατανομή για την εκτίμηση της χωρητικότητας.

Από την ανάλυση του επιπέδου \emptyset , που έγινε στην ενότητα 3.2.1, προκύπτει πως για μικρά λ , όλοι πελάτες θα εισέρχονται και τότε, ο ρυθμός εισόδου υπό τη στρατηγική ισορροπίας θα ταυτίζεται με τον ρυθμό αφίξεων των πελατών στο σύστημα. Με άλλα λόγια, θα υπάρχει κάποια κρίσιμη τιμή του λ , έστω λ^* ώστε για $\lambda \in [0, \lambda^*)$ να είναι $EAR^{\emptyset-(e)}(\lambda) = \lambda$. Επίσης, η σύγκριση μεταξύ των επιπέδων C και \emptyset είναι ξεκάθαρη και ένα αποτέλεσμα ανάλογο του Θεωρήματος 3.8 μπορεί εύκολα να αποδειχθεί. Ακόμη, είναι άμεσα αντιληπτό από τα δύο σχήματα πως το επίπεδο CAN δίνει τις μεγαλύτερες τιμές του μέτρου απόδοσης, όσο αυξάνει ο ρυθμός αφίξεων. Από την άλλη, η σύγκριση για τα υπόλοιπα επίπεδα είναι αρκετά πιο πολύπλοκη. Για παράδειγμα, είναι φανερό πως στο Σχήμα 3.10, όταν $\bar{x} = 7$, τα επίπεδα CN, CA, έχουν ένα σημείο τομής αλλά σχεδόν συμπίπτουν ενώ όταν $\bar{x} = 8$, το επίπεδο CA αποκτά σημαντική διαφορά όσο αυξάνεται ο ρυθμός αφίξεων.



Σχήμα 3.9: Ρυθμός εισόδου ως προς λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{7, 8\}$ και $h_1(1) = 1$, $h_2(10) = 1$: Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.



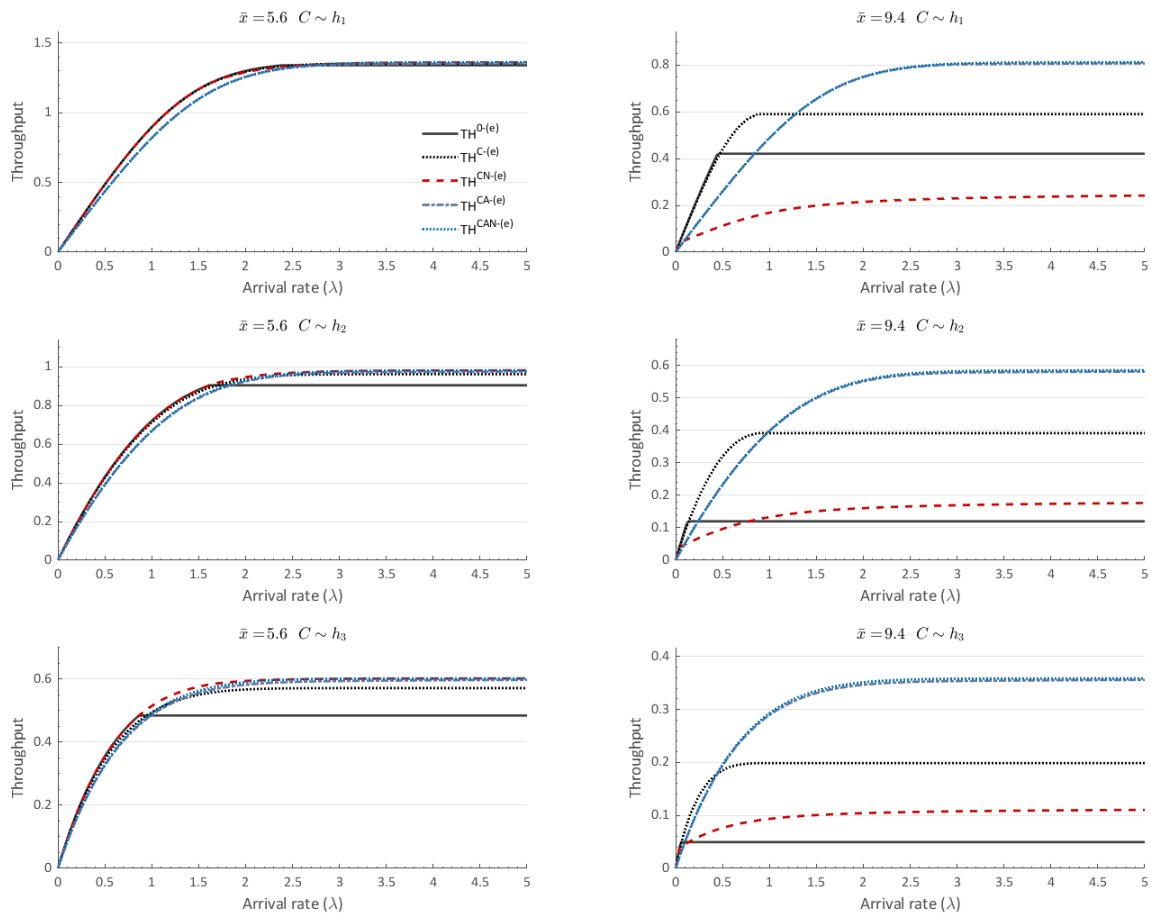
Σχήμα 3.10: Ρυθμός εισόδου ως προς λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{7, 8\}$ και $h_1 \sim U(\{1, 5\})$, $h_2 \sim U(\{1, 10\})$: Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.

Επίδραση της κατανομής χωρητικότητας

Συνεχίζουμε τη μελέτη για τα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης, εστιάζοντας ωστόσο τώρα, στην επίδραση της κατανομής της χωρητικότητας (C). Η αφορμή για τον σχεδιασμό του πρώτου

πειράματος που ακολουθεί, ήταν η εφαρμογή της Google maps με ονομασία transit crowdness predictions με την οποία μπορούμε να έχουμε προβλέψεις, σχετικά με το πόσο συνωστισμένο είναι το επόμενο μέσο μεταφοράς. Έτσι, στα σχήματα 3.11 και 3.12, για τον ρυθμό απόδοσης και το κοινωνικό όφελος, έχουμε επιλέξει τις κατανομές h_1^* και h_3^* που αντιπροσωπεύουν καταστάσεις κατά τις οποίες κυριαρχεί η πεποίθηση πως το επόμενο μεταφορικό μέσο θα είναι είτε σχετικά προσβάσιμο (accessible), ή αρκετά συνωστισμένο (crowded). Συγκεκριμένα, είναι $h_1^*(1 : 10) = (0.01, 0.02, 0.03, 0.05, 0.07, 0.1, 0.12, 0.15, 0.2, 0.25)$ και $h_3^*(1 : 10) = (0.25, 0.2, 0.15, 0.12, 0.1, 0.07, 0.05, 0.03, 0.02, 0.01)$. Επίσης, αντιπαραβάλλουμε στα ίδια σχήματα, την (ομοιόμορφη) κατανομή $h_2^*(j) = \frac{1}{10}$, $j \in \{1, \dots, 10\}$ προκειμένου να συμπεριλάβουμε και την περίπτωση που δεν κυριαρχεί κάποια πεποίθηση ως προς το μέγεθος της χωρητικότητας.

Οι παράμετροι r, c είναι σταθερές και ίσες με 5 και 1 αντιστοίχως, όπως στα προηγούμενα πειράματα ενώ έχουμε διακρίνει επίσης δύο περιπτώσεις σχετικά με τον ενδιάμεσο χρόνο. Οι περιπτώσεις αυτές αφορούν οριακές καταστάσεις και συγκεκριμένα, τις περιπτώσεις όπου ο ενδιάμεσος χρόνος είναι είτε κοντά στο $\frac{r}{c} = 5$, είτε κοντά στο $2 \cdot \frac{r}{c} = 10$. Υπενθυμίζουμε ότι αν $\bar{x} > \frac{2r}{c}$, τότε, λόγω των (3.34), (3.45) και (3.49), οι στρατηγικές ισορροπίας υπαγορεύουν να μην εισέλθει κανείς στα επίπεδα CN, C και \emptyset , ενώ η περίπτωση που $\bar{x} < \frac{r}{c}$ δεν εξετάζεται λόγω της υπόθεσης (2.1).



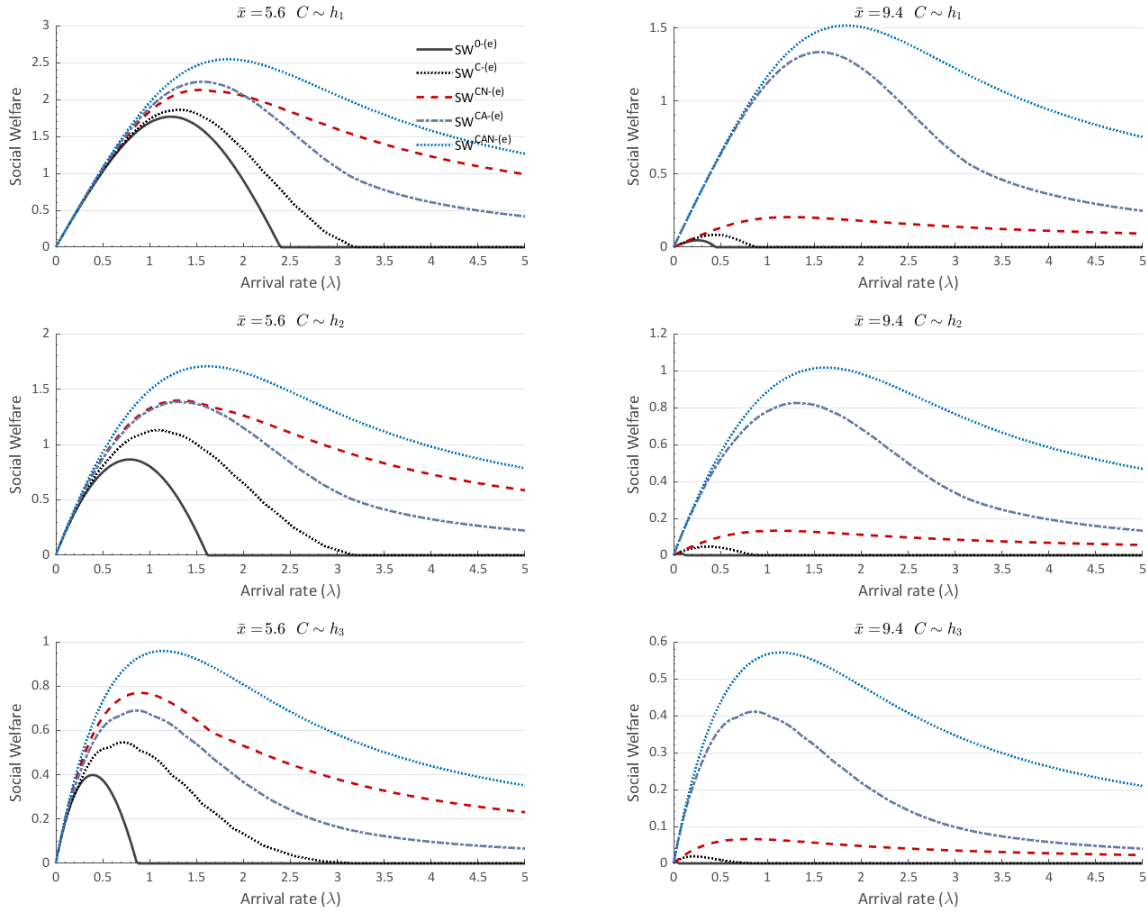
Σχήμα 3.11: Ρυθμός απόδοσης ως προς λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{5.5, 9.4\}$ και τις h_1^*, h_2^*, h_3^* : Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.

Αρχικά παρατηρούμε πως όταν οι επισκέψεις γίνονται συχνά ($\bar{x} = 5.6$), τα επίπεδα πληροφόρησης, με εξαίρεση το \emptyset , δεν φαίνεται να έχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ τους, ενώ ούτε η επίδραση της κατανομής φαίνεται να είναι ιδιαίτερη. Ωστόσο, ο ρυθμός απόδοσης που αντιστοιχεί στο επίπεδο χωρίς πληροφόρηση, φαίνεται πως επηρεάζεται σημαντικά (σε σχέση με τα άλλα επίπεδα) από την πιθανότητα εξυπηρέτησης. Από την άλλη, όταν αυξηθεί ο χρόνος επίσκεψης, έχουμε μια πολύ διαφορετική κατάσταση κατά την οποία παρατηρούνται σημαντικές διαφοροποιήσεις στα επίπεδα πληροφόρησης αλλά και η επίδραση της κατανομής της χωρητικότητας γίνεται πιο ξεκάθαρη. Ειδικότερα, για χαμηλό ρυθμό αφίξεων, όλα τα επίπεδα αποδίδουν το ίδιο ενώ όσο αυξάνεται ο ρυθμός αφίξεων, φαίνεται να υπερισχύουν τα επίπεδα CAN, CA, τα οποία σχεδόν συμπίπτουν μεταξύ τους (βέβαια το CAN είναι πάντα καλύτερο, όπως έχει αποδειχθεί στο Θεώρημα 3.12). Ιδιαίτερη συμπεριφορά σε αυτή την περίπτωση παρουσιάζει και το επίπεδο CN καθώς μπορεί να καταλήξει, μόλις από ενδιάμεσες τιμές του ρυθμού αφίξεων, ως το λιγότερο αποδοτικό επίπεδο (δείτε το υπό-γράφημα με την h_1^* (accessible) και με $\bar{x} = 9.4$). Ανεξάρτητα ωστόσο από την κατανομή χωρητικότητας, το CN επίπεδο, όταν $\bar{x} = 9.4$, φαίνεται πως αποδίδει λιγότερο από το C (ακόμα και από πολύ μικρές τιμές του λ) σε αντίθεση με την περίπτωση που $\bar{x} = 5.6$. Τέλος, παρατηρούμε πως η τιμή του ρυθμού απόδοσης επηρεάζεται σημαντικά από την κατανομή χωρητικότητας. Συγκεκριμένα, όσο μεγαλύτερη η πιθανότητα εξυπηρέτησης, τόσο μεγαλύτερη και η τιμή του ρυθμού απόδοσης σε όλα τα επίπεδα και ανεξάρτητα από το ενδιάμεσο χρόνο επίσκεψης. Συνεχίζουμε με το Σχήμα 3.12 στο οποίο παριστάνονται το κοινωνικό όφελος ως συνάρτηση του λ για τα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης.

Αρχικά, στο παραπάνω σχήμα, μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε τις ανισότητες στις (3.67) και (3.69). Παρατηρήστε επίσης την επίδραση της κατανομής χωρητικότητας και των ενδιάμεσων χρόνων: Αν και το κοινωνικό όφελος, όπως είναι αναμενόμενο, παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές για όλα τα επίπεδα στην περίπτωση σχετικά προσβάσιμων μέσων (h_1^*), η επίδραση των μεγάλων ενδιάμεσων χρόνων φαίνεται να είναι πολύ πιο δραστική στα επίπεδα που δεν περιλαμβάνουν το A. Ακόμα, παρατηρήστε πως το επίπεδο CN μπορεί να υπερέχει πλήρως του επιπέδου CA σε ορισμένα σενάρια (υπό-γραφήματα που αντιστοιχούν σε δρομολόγια υψηλής συχνότητας και μη σχετικά προσβάσιμων μέσων ($\bar{x} = 5.6, C \sim h_3^*$) και ($\bar{x} = 5.6, C \sim h_2^*$)) ενώ σε άλλα φαίνεται πως συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο (υπό-γραφήματα που αντιστοιχούν σε δρομολόγια χαμηλής συχνότητας ($\bar{x} = 9.4, C \sim h_1^*$), ($\bar{x} = 9.4, C \sim h_2^*$) και ($\bar{x} = 9.4, C \sim h_3^*$)).

Στα επόμενα παραδείγματα εξετάζουμε την περίπτωση που στην κατανομή των διαθέσιμων θέσεων αυξάνεται η διασπορά ενώ η μέση τιμή διατηρείται σταθερή. Συγκεκριμένα έχουμε επιλέξει την κατανομή $\tilde{h}_1(1 : 7) = (0.01, 0.09, 0.15, 0.5, 0.15, 0.09, 0.01)$ στην οποία η μάζα πιθανότητας συγκεντρώνεται γύρω από το 4, την $\tilde{h}_2(1 : 7) = (0.4, 0.06, 0.03, 0.02, 0.03, 0.06, 0.4)$ στην οποία η μάζα συγκεντρώνεται γύρω από τα άκρα και την ακραία περίπτωση $\tilde{h}_3(1 : 7) = (0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5)$. Η τελευταία αντιστοιχεί σε καταστάσεις όπου το επόμενο μέσο είτε θα είναι σχετικά ελεύθερο είτε θα είναι σημαντικά συνωστισμένο. Η μέση τιμή και στις τρεις περιπτώσεις είναι $\bar{h} = 4$ ενώ η διασπορά είναι $Var(C_1) = 1.2, Var(C_2) = 7.4, Var(C_3) = 9$, αντίστοιχα στις $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$. Σχετικά με τη συχνότητα των δρομολογίων, έχουμε θεωρήσει τις δύο σχετικά ακραίες περιπτώσεις, $\bar{x} \in \{5.6, 9.4\}$, που είχαμε και στα προηγούμενα παραδείγματα.

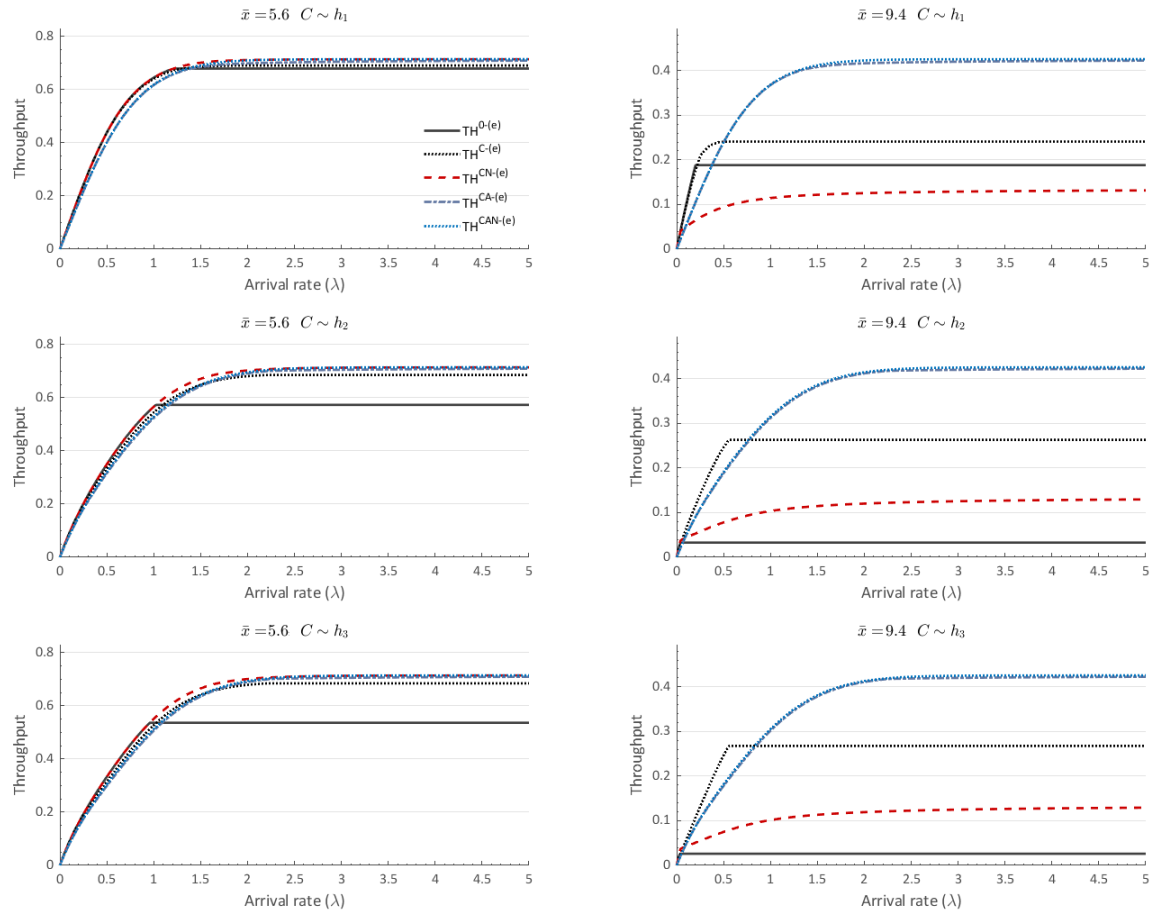
Στο Σχήμα 3.13 παριστάνεται ο ρυθμός απόδοσης (ως συνάρτηση του λ) για το σενάριο αυτό, ενώ στο Σχήμα 3.14 απεικονίζονται τα γραφήματα που αφορούν το κοινωνικό όφελος. Αυτό που παρατηρούμε και από τα δύο σχήματα είναι πως το επίπεδο πληροφόρησης \emptyset επηρεάζεται αρνητικά από τη μεταβλητότητα. Μάλιστα η επίδραση είναι πιο έντονη σε χαμηλές συχνότητες δρομολογίων ($\bar{x} = 9.4$). Το επίπεδο CN φαίνεται πως είναι σχετικά ευσταθές στις μεταβολές της διασποράς ενώ τα επίπεδα CA, CAN, C, ως προς το κοινωνικό όφελος, φαίνεται πως επηρεάζονται θετικά. Από τη άλλη, ως προς τον ρυθμό απόδοσης, στα επίπεδα CA, CAN, C παρατηρούμε μια σχετική ευστάθεια.



Σχήμα 3.12: Κοινωνικό όφελος ως προς λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{5.6, 9.4\}$ και τις h_1^* , h_2^* , h_3^* : Η περίπτωση με σταθερούς ενδιαμέσους χρόνους.

Εστιάζουμε τώρα στον ρυθμό εισόδου των πελατών, υπό τη στρατηγική ισορροπίας, για τα ίδια σενάρια που παρουσιάστηκαν για τον ρυθμό απόδοσης και το κοινωνικό όφελος. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 3.15 έχουμε θεωρήσει τις δύο σχετικά ακραίες περιπτώσεις ως προς τη συχνότητα των δρομολογίων (πολύ συχνά δρομολόγια ($\bar{x} = 5.6$) και δρομολόγια χαμηλής συχνότητας ($\bar{x} = 9.4$)) και τις h_1^* , h_2^* , h_3^* ως κατανομές για τη διαθεσιμότητα των θέσεων που περιγράψαμε παραπάνω. Στο Σχήμα 3.16 αντιπαραβάλλουμε τις κατανομές \tilde{h}_1 , \tilde{h}_2 , \tilde{h}_3 για τις ίδιες περιπτώσεις που αφορούν του ενδιαμέσους χρόνους ($\bar{x} \in \{5.4, 9.6\}$) όπως στο Σχήμα 3.15.

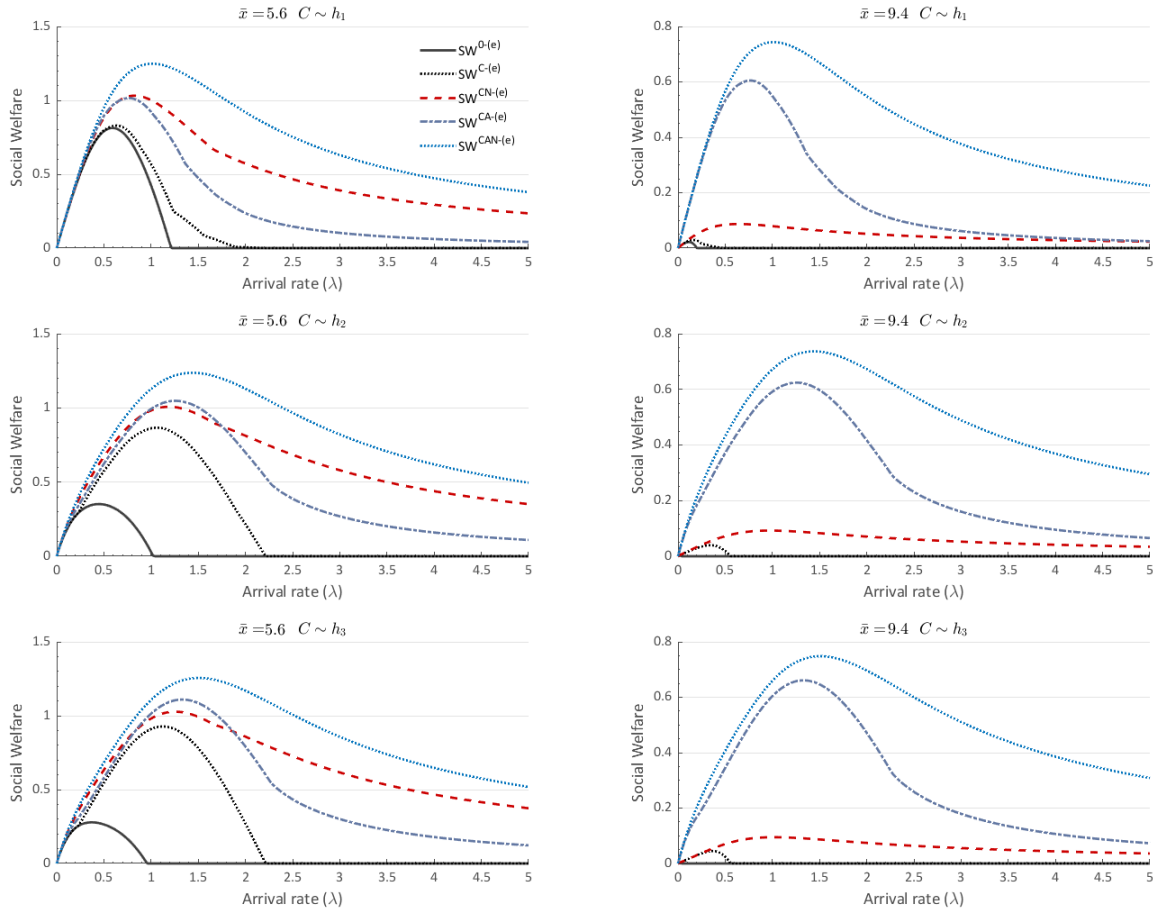
Αν και για μικρές τιμές του λ η κατάσταση δεν είναι ξεκάθαρη, όταν το λ πάρει σχετικά μεγάλες τιμές (π.χ. για $\lambda > 4.5$), οι συναρτήσεις $EAR^{i-(e)}(\lambda)$ φαίνεται πως σταθεροποιούνται και μάλιστα η διάταξη για ορισμένα επίπεδα πληροφόρησης φαίνεται να διατηρείται στα δύο σχήματα. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι για $\lambda > 4.5$ είναι $EAR^{CA-(e)}(\lambda) > EAR^{C-(e)}(\lambda) > EAR^{\emptyset-(e)}(\lambda)$.



Σχήμα 3.13: Ρυθμός απόδοσης ως προς λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{5.6, 9.4\}$ και τις $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$: Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.

Ακόμη, για δρομολόγηση υψηλής συχνότητας ($\bar{x} = 5.6$) φαίνεται πως τα επίπεδα CAN και CN ταυτίζονται ακόμα και για μικρό λ , ενώ οι ρυθμοί αρίξεων λαμβάνουν τις μικρότερες τιμές, σε σχέση με τα άλλα 3 επίπεδα. Μία εξήγηση είναι πως σε αυτά τα επίπεδα η πληροφόρηση αφορά το πλήθος των παρόντων πελατών και επομένως, οι πελάτες μπορούν να εξακριβώσουν άμεσα αν θα εξυπηρετηθούν ή όχι. Συνεπώς, αναμένεται να εισέρχονται με χαμηλότερη συχνότητα από ότι στα άλλα επίπεδα όπου θα χρειαστεί να εκτιμήσουν την πιθανότητα εξυπηρέτησης.

Ένα ακόμη κοινό χαρακτηριστικό στα δύο σχήματα είναι πως για δρομολόγηση υψηλής συχνότητας ($\bar{x} = 5.6$), το επίπεδο \emptyset , όπου δεν παρέχεται κάποια πληροφόρηση, φαίνεται να υπερέχει σε σχέση με όλα τα άλλα επίπεδα για μικρές τιμές του λ .



Σχήμα 3.14: Κοινωνικό όφελος ως προς λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{5.6, 9.4\}$ και τις $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$: Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, αναφέρουμε ορισμένα από τα κυριότερα ευρήματα:

1. Ως προς το κοινωνικό όφελος, παρατηρούμε πως υπάρχει σαφής διάταξη των επιπέδων πληροφόρησης σε όλα τα παραδείγματα που παρουσιάσαμε. Συγκεκριμένα είναι

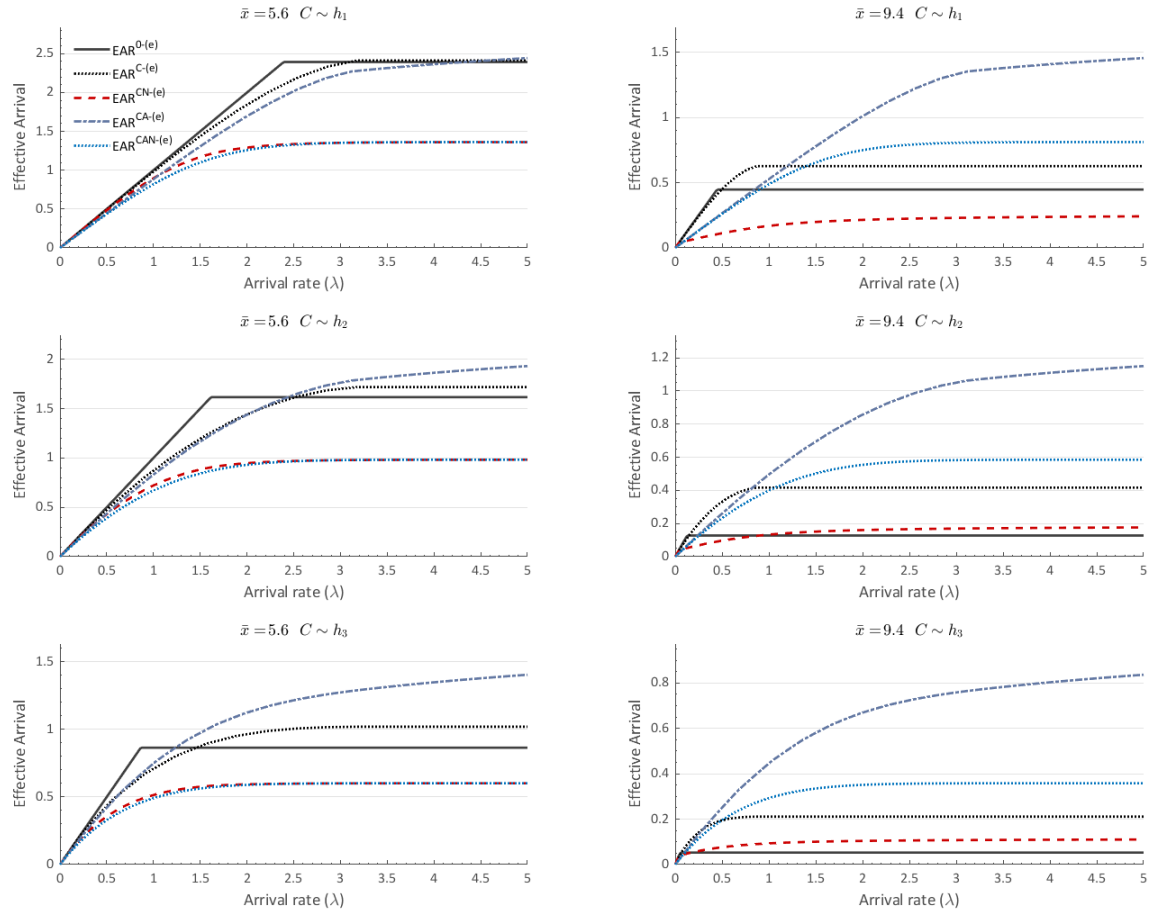
$$SW^{CAN-(e)} \geq SW^{CA-(e)} \geq SW^{C-(e)} \geq SW^{\emptyset-(e)},$$

και

$$SW^{CAN-(e)} \geq SW^{CN-(e)} \geq SW^{C-(e)}.$$

Από την άλλη, η σύγκριση των επιπέδων CN, CA δεν είναι ξεκάθαρη. Τα γραφήματα των συναρτήσεων κοινωνικού οφέλους στα επίπεδα αυτά μπορεί να παρουσιάζουν σημείο τομής (π.χ. δείτε το Σχήμα 3.8), ή μπορεί κάποιο από τα δύο να υπερέχει πλήρως του άλλου (π.χ. δείτε το Σχήμα 3.12).

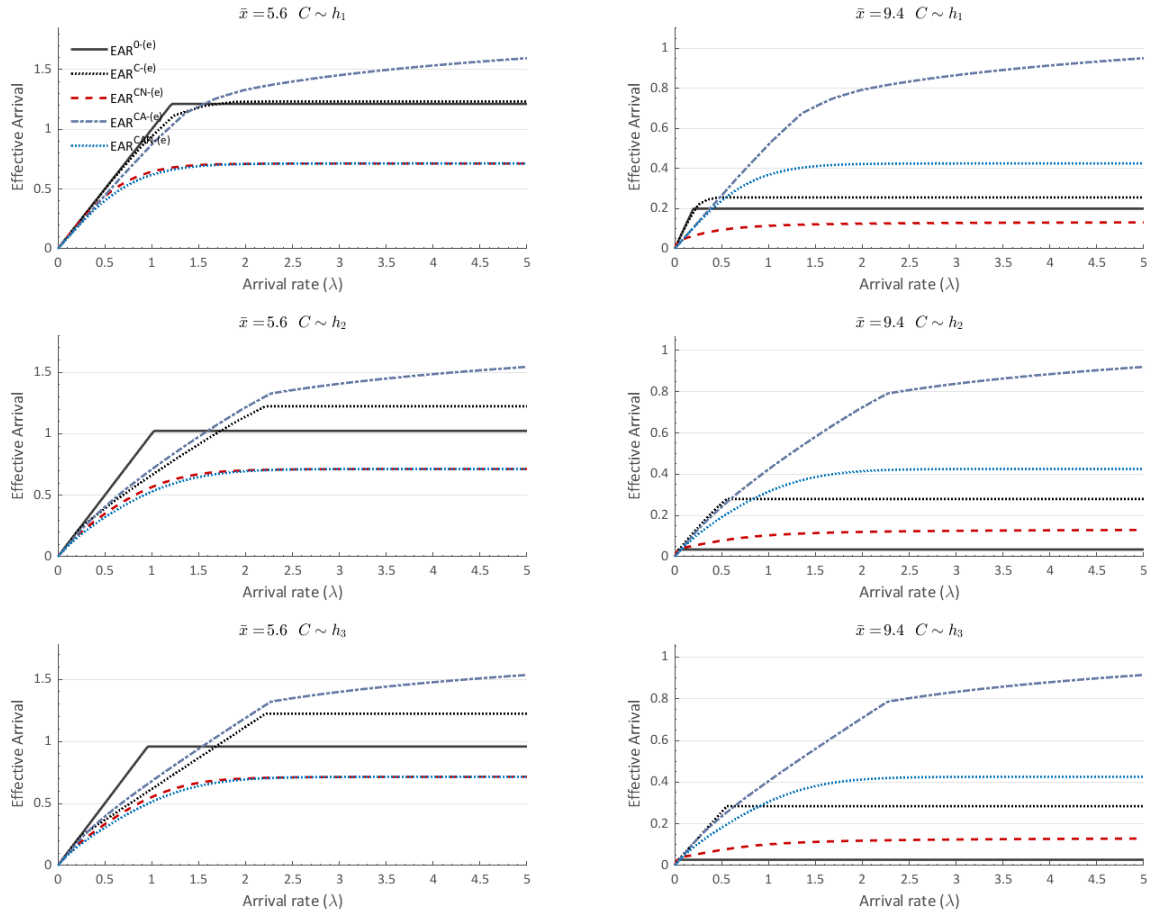
2. Η σύγκριση των επιπέδων πληροφόρησης ως προς τον ρυθμό απόδοσης δεν είναι ξεκάθαρη. Για μεγάλες τιμές του λ , τα επίπεδα CAN, CA φαίνεται να ξεχωρίζουν των υπολοίπων ενώ για μικρές τιμές, ξεχωρίζουν τα C και \emptyset .



Σχήμα 3.15: Ρυθμός εισόδου ως συνάρτηση του λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{5.6, 9.4\}$ και h_1^*, h_2^*, h_3^* : Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.

3. Οι πελάτες φαίνεται πως προτιμούν το επίπεδο CA για μεγάλες τιμές του λ ενώ για μεσαίες έως μικρές τιμές προτιμούν το επίπεδο \emptyset . Τα επίπεδα αυτά ωστόσο δεν αποτελούν τη βέλτιστη επιλογή ως προς το κοινωνικό όφελος που παράγεται από το σύστημα. Η βέλτιστη επιλογή θα ήταν το επίπεδο CAN που όμως σε πολλές περιπτώσεις (δείτε π.χ. τα σχήματα 3.15 και 3.16, στα υπό-γραφήματα όπου $\bar{x} = 5.6$) αποτελεί την επιλογή με τα μεγαλύτερα ποσοστά αποχωρήσεων.

Το βασικό συμπέρασμα της μελέτης, είναι πως τα θεωρητικά ευρήματα που προκύπτουν από την ανάλυση του μοντέλου αλλά και από τα αριθμητικά πειράματα που παρουσιάσαμε, μπορούν να βοηθήσουν τον διαχειριστή του συστήματος να σχεδιάσει το μηχανισμό παροχής της πληροφόρησης σε συμφωνία με τους επιδιωκόμενους στόχους που έχει θέσει. Κανένα επίπεδο πληροφόρησης δεν είναι τέλειο, με την έννοια ότι το βέλτιστο επίπεδο πληροφόρησης εξαρτάται τόσο από το εκάστοτε μέτρο απόδοσης που τίθεται σε προτεραιότητα, όσο και από τις τιμές των παραμέτρων.



Σχήμα 3.16: Ρυθμός εισόδου ως συνάρτηση του λ για $\frac{r}{c} = 5$, $\bar{x} \in \{5.6, 9.4\}$ και $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$: Η περίπτωση με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους.

3.3 Εκθετικοί ενδιάμεσοι χρόνοι

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε τις στρατηγικές ισορροπίας για όλα τα επίπεδα πληροφόρησης στην ειδική περίπτωση όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι των μέσων μεταφοράς έχουν την εκθετική κατανομή. Η εφαρμογή αυτή έχει ιδιαίτερη σημασία για πολλούς λόγους. Πρώτα από όλα, αποτελεί ένα βασικό υπόδειγμα Μαρκοβιανής περίπτωσης και για αυτόν τον λόγο αποτελεί συστηματικά το πρώτο βήμα στη μελέτη των περισσότερων προβλημάτων σχετικά με την ποσοτικοποίηση των στρατηγικών ισορροπίας των πελατών στα συστήματα εξυπηρέτησης. Επιπλέον, αποτελεί την απλούστερη δυνατή περίπτωση, καθώς, η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής οδηγεί σε αναλυτικά αποτελέσματα σε όλα τα επίπεδα πληροφόρησης που έχουμε θεωρήσει.

Λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής, η πληροφορία σχετικά με την ηλικία A δεν βοηθάει στο να εκτιμηθεί ο υπολειπόμενος χρόνος μέχρι την επίσκεψη του επόμενου μέσου μεταφοράς. Πράγματι, σε οποιαδήποτε ανανεωτική διαδικασία όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι έχουν κατανομή με την αμνήμονη ιδιότητα (εκθετική ή γεωμετρική), η ηλικία και ο υπολειπόμενος χρόνος είναι στοχαστικά ανεξάρτητα. Ειδικότερα, η εκθετική και η γεωμετρική είναι οι μοναδικές κατανομές για τις οποίες ισχύει αυτό (δείτε π.χ. στο Havin 2013 το Θεώρημα 2.1). Αναμένεται

επομένως, τόσο στα επίπεδα πληροφόρησης CAN και CN, όσο και στα επίπεδα AN και N, οι στρατηγικές ισορροπίας να ταυτίζονται.

Επιπλέον, σημειώνουμε πως η συγκεκριμένη αυτή περίπτωση έχει μελετηθεί και στο [100] για τα επίπεδα N και \emptyset . Τέλος, για να έχει νόημα η μελέτη της ειδικής αυτής περίπτωσης, θα χρειαστεί να παραβλέψουμε την κεντρική υπόθεση πως $r < c\bar{x}$. Ο λόγος, όπως θα δούμε και παρακάτω, είναι πως σε αυτή την περίπτωση οι στρατηγικές ισορροπίας σε όλα τα επίπεδα υπαγορεύουν στους πελάτες να μην εισέρχονται ποτέ στο σύστημα. Σε όσα ακολουθούν, θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}}$, ενώ με $\tilde{G}_C(z)$ έχουμε συμβολίσει την πιθανογεννήτρια της τ.μ C .

3.3.1 Στρατηγικές ισορροπίας και μελέτη του συστήματος

Επίπεδα CAN και CN

Θεώρημα 3.15. (Χαρακτηριστικά του συστήματος στα επίπεδα CAN και CN για εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους) Στα επίπεδα πληροφόρησης CAN και CN με εκθετικά καταμεμημένους ενδιάμεσους χρόνους, με μέσο χρόνο \bar{x} (δηλαδή με συχνότητα επίσκεψης $\frac{1}{\bar{x}}$), το σύστημα έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

I Υπάρχει μοναδική κυριαρχούσα στρατηγική σύμφωνα με τις παρακάτω περιπτώσεις

Περίπτωση 1: $\frac{r}{c} \leq \bar{x}$. Τότε είναι η στρατηγική καθολικής αποχώρησης.

Περίπτωση 2: $\frac{r}{c} \geq \bar{x}$. Τότε η στρατηγική είναι αυτή που υπαγορεύει σε κάθε πελάτη να εισέλθει αν και μόνο αν υπάρχουν λιγότεροι από j πελάτες κατά την άφιξη του.

II Η στάσιμη κατανομή του συστήματος που δίνει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα είναι η

$$\pi_j(n) = \begin{cases} (1 - \rho)\rho^n & n = 0, 1, 2, \dots, j - 1, \\ \rho^n & n = j. \end{cases} \quad (3.71)$$

III Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης έχουν τις ακόλουθες μορφές: Αν $\frac{r}{c} \leq \bar{x}$ τότε θα έχουμε ότι $EAR^{CN-(e)} = TH^{CN-(e)} = SW^{CN-(e)} = 0$. Διαφορετικά, θα είναι:

$$EAR^{CN-(e)} = TH^{CN-(e)} = \lambda \left(1 - \tilde{G}_C(\rho)\right) \quad (3.72)$$

$$SW^{CN-(e)} = \lambda (r - c\bar{x}) \left(1 - \tilde{G}_C(\rho)\right) \quad (3.73)$$

Οι τύποι αυτοί ισχύουν και στην περίπτωση του επιπέδου CAN.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.10.

Παρατηρήστε ότι παίρνοντας $\lambda \rightarrow \infty$ στην (3.72) και στην (3.73) θα έχουμε ότι για $\frac{r}{c} > \bar{x}$, τα όρια υπάρχουν και είναι ίσα με

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} EAR^{CN-(e)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} TH^{CN-(e)} = \frac{\bar{h}}{\bar{x}}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} SW^{CN-(e)} = \left(\frac{r}{\bar{x}} - c\right)\bar{h}. \quad (3.74)$$

Πράγματι, επειδή $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \rho(\lambda) = 1$, με χρήση του Del' Hospital παίρνουμε ότι $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} EAR_j^{CN-(e)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} TH_j^{CN-(e)} = \frac{j}{\bar{x}}$ και επομένως, τα όρια στην (3.74) προκύπτουν άμεσα.

Επίπεδα AN-N

Όπως και με τα επίπεδα CAN και CN, για την ειδική περίπτωση με εκθετικά κατανομημένους ενδιάμεσους χρόνους, προκύπτει ότι τα επίπεδα AN και N συμπίπτουν. Το επίπεδο N έχει μελετηθεί στο [100] και συγκεκριμένα στο Θεώρημα 6.1. Σύμφωνα με αυτό, υπάρχει μοναδική κυριαρχούσα στρατηγική η οποία δίνεται διακρίνοντας τις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\frac{r}{c} \leq \bar{x}$. Τότε είναι η στρατηγική καθολικής αποχώρησης.

Περίπτωση 2: $\frac{r}{c} \geq \bar{x}$. Τότε η στρατηγική είναι αυτή που υπογορεύει σε κάθε πελάτη να εισέλθει αν και μόνο αν υπάρχουν λιγότεροι από n^* πελάτες κατά την άφιξη του,

όπου $n^* = \max\{n \geq 0 : \bar{H}(n) \geq \frac{c\bar{x}}{r}\}$.

Η δεσμευμένη στάσιμη κατανομή που δίνει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα όταν $A = a$, δηλαδή όταν το προηγούμενο μεταφορικό μέσο επισκέφτηκε τον σταθμό πριν από a χρονικές μονάδες, μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.3.

Πρόταση 3.1. (Στάσιμη κατανομή για το πλήθος των πελατών που έχουν συσσωρευθεί ως τη στιγμή a για το επίπεδο AN με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους) Στο επίπεδο πληροφόρησης AN, η στάσιμη κατανομή $\pi(n|a)$ δίνεται από την

$$\pi(n|a) = \begin{cases} e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^n}{n!} & \text{για } n \leq n^*, \\ 1 - \sum_{n=0}^{n^*} e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^n}{n!} & \text{για } n = n^* + 1, \end{cases} \quad (3.75)$$

όπου $n^* = \max\{n \geq 0 : \bar{H}(n) \geq \frac{c\bar{x}}{r}\}$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.10.

Χρησιμοποιώντας την (2.53), παίρνουμε άμεσα ότι η στάσιμη κατανομή για το πλήθος των πελατών στο σύστημα θα δίνεται από την

$$\pi(n) = \begin{cases} \rho^n (1 - \rho) & \text{για } n \leq n^*, \\ \rho^{n^*+1} & \text{για } n = n^* + 1, \end{cases} \quad (3.76)$$

όπου $n^* = \max\{n \geq 0 : \bar{H}(n) \geq \frac{c\bar{x}}{r}\}$.

Επίπεδο CA και A

Για τα επίπεδα CA και A, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πρόσιμα 2.5 καθώς η εκθετική κατανομή έχει σταθερό μέσο υπολειπόμενο χρόνο ($m(a) = \bar{x}$) και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ως τύπου IMRL. Στο θεώρημα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τα χαρακτηριστικά του συστήματος για την περίπτωση του επιπέδου CA.

Θεώρημα 3.16. (Χαρακτηριστικά του συστήματος στο επίπεδο CA για εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους) Στο επίπεδο πληροφόρησης CA με εκθετικά κατανομημένους ενδιάμεσους χρόνους, με μέσο χρόνο \bar{x} (δηλαδή με συχνότητα επίσκεψης $\frac{1}{\bar{x}}$), το σύστημα έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

I Υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Περίπτωση 1: $\frac{r}{c} \leq \bar{x}$. Τότε, η στρατηγική ισορροπίας είναι η στρατηγική καθολικής αποχώρησης.

Περίπτωση 2: $\frac{r}{c} > \bar{x}$. Τότε, η στρατηγική ισορροπίας είναι τύπου t_j^* -κατώφλιου, με κατώφλι

$$t_j^* = \frac{1}{\lambda} p_j^{-1} \left(\frac{c\bar{x}}{r} \right). \quad (3.77)$$

II Η δεσμευμένη στάσιμη κατανομή του συστήματος $\pi_j(n|a)$, για το πλήθος των πελατών στο σύστημα όταν $A = a$ και $C = j$, θα είναι ομογενής διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda_j(a|\mathbf{q}) = \lambda \min\{a, \frac{1}{\lambda} p_j^{-1} \left(\frac{c\bar{x}}{r} \right)\}$.

III Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης έχουν τις ακόλουθες μορφές: Αν $\frac{r}{c} \leq \bar{x}$ τότε θα έχουμε ότι $EAR^{CN-(e)} = TH^{CN-(e)} = SW^{CN-(e)} = 0$. Διαφορετικά, θα είναι:

$$EAR_j^{CA-(e)} = \lambda(1 - e^{-\frac{t_j^*}{\bar{x}}}) \quad (3.78)$$

$$TH_j^{CA-(e)} = \frac{1}{\bar{x}} \sum_{n=0}^{j-1} \rho^{n+1} F_E(t_j^*) \quad (3.79)$$

$$SW_j^{CA-(e)} = rTH_j^{CA-(e)} - c\bar{x}EAR_j^{CA-(e)} \quad (3.80)$$

όπου το t_j^* δίνεται στην (3.82) και η $F_E(t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής μιας Erlang με παραμέτρους $n + 1$ και $\lambda + \frac{1}{\bar{x}}$.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.10.

Παίρνοντας $\lambda \rightarrow \infty$ στις (3.78), (3.79) και (3.80) θα έχουμε ότι για $\frac{r}{c} > \bar{x}$, τα όρια υπάρχουν και είναι ίσα με

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} EAR_j^{CA-(e)} &= \frac{1}{\bar{x}} p_j^{-1} \left(\frac{c\bar{x}}{r} \right), & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} TH_j^{CA-(e)} &= \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{p_j^{-1} \left(\frac{c\bar{x}}{r} \right)} p_j(u) du, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} SW_j^{CA-(e)} &= \frac{r}{\bar{x}} \int_0^{p_j^{-1} \left(\frac{c\bar{x}}{r} \right)} p_j(u) du - c p_j^{-1} \left(\frac{c\bar{x}}{r} \right). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Σημειώνουμε πως για το επίπεδο A τα αποτελέσματα είναι παρόμοια. Συγκεκριμένα θα έχουμε ακριβώς τις ίδιες συνθήκες για τις Περιπτώσεις 1 και 2 με τη διαφορά ότι το κατώφλι στην (3.77) θα είναι

$$t^* = \frac{1}{\lambda} p^{-1} \left(\frac{c\bar{x}}{r} \right). \quad (3.82)$$

Επίπεδο C και \emptyset

Στην περίπτωση των εκθετικών ενδιάμεσων χρόνων, η πιθανότητα επιβίβασης τόσο στο επίπεδο C όσο και στο \emptyset επίπεδο δίνεται μέσω απλούστερων εκφράσεων. Ειδικότερα για το επίπεδο C είναι

$$\begin{aligned} P_j(s) &= \int_0^\infty p_j(sa) \frac{1 - F(a)}{\bar{x}} da = \frac{\frac{1}{\bar{x}}}{(j-1)!} \int_0^\infty \int_{sa}^\infty u^{j-1} e^{-u} du e^{-\frac{a}{\bar{x}}} da \\ &= 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{s\bar{x}}} \right)^j. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Για το επίπεδο \emptyset , η πιθανότητα επιβίβασης δίνεται από την

$$P(\lambda) = 1 - \tilde{G}_C(\rho), \quad (3.84)$$

όπου με $\tilde{G}_C(z)$ έχουμε συμβολίσει την πιθανογεννήτρια της τ.μ C .

Επιπλέον, η αντίστροφη της τελευταίας έχει κλειστή μορφή και συγκεκριμένα είναι

$$P_j^{-1}(s) = \frac{\sqrt[j]{1-s}}{\bar{x}(1-\sqrt[j]{1-s})}. \quad (3.85)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω, παρουσιάζουμε στο θεώρημα που ακολουθεί τα χαρακτηριστικά του συστήματος για το επίπεδο C .

Θεώρημα 3.17. (Χαρακτηριστικά του συστήματος στο επίπεδο C για εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους) Στο επίπεδο πληροφόρησης C με εκθετικά κατανομημένους ενδιάμεσους χρόνους, με μέσο χρόνο \bar{x} (δηλαδή με συχνότητα επίσκεψης $\frac{1}{\bar{x}}$), το σύστημα έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

I Υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}^{(e)} = (q_1^{(e)}, q_2^{(e)}, \dots)$, η οποία έχει την ακόλουθη μορφή:

$$q^{(e)}(\cdot) = \begin{cases} (0, 0, 0, \dots) & \text{αν } \frac{r}{c} \leq \bar{x}, \\ (q_1^*, q_2^*, \dots, q_{j-1}^*, 1, \dots) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{1-\rho^j} < \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{1-\rho^{j-1}} \\ (1, 1, 1, \dots) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{1-\rho} \leq \frac{r}{c} \end{cases} \quad (3.86)$$

$$\text{όπου } q_i^* = \frac{1}{\lambda} P_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{r}\right) = \frac{\sqrt[i]{1-\frac{c\bar{x}}{r}}}{\lambda\bar{x}(1-\sqrt[i]{1-\frac{c\bar{x}}{r}})}.$$

II Η στάσιμη κατανομή του συστήματος, $\pi_j(n)$ θα έχει την κατανομή Poisson με ρυθμό $\lambda q_j^{(e)}$.

III Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης έχουν τις μορφές: Αν $\frac{r}{c} \leq \bar{x}$ τότε θα έχουμε ότι $EAR^{C-(e)} = TH^{C-(e)} = SW^{C-(e)} = 0$. Διαφορετικά, θα είναι:

$$EAR^{C-(e)} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } \frac{\bar{x}}{1-\rho} \leq \frac{r}{c}, \\ \sum_{i=1}^{j-1} h(i) P_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{r}\right) + \lambda \bar{H}(j-1) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{1-\rho^j} < \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{1-\rho^{j-1}}, \end{cases} \quad (3.87)$$

$$TH^{C-(e)} = \begin{cases} \lambda P(\lambda) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{1-\rho} \leq \frac{r}{c}, \\ \sum_{i=1}^{j-1} h(i) \frac{c\bar{x}}{r} P_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{r}\right) + \sum_{i=j}^{\infty} h(i) \lambda P_i(\lambda) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{1-\rho^j} < \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{1-\rho^{j-1}}, \end{cases} \quad (3.88)$$

$$SW^{C-(e)} = \begin{cases} \lambda(rP(\lambda) - c\bar{x}) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{1-\rho} \leq \frac{r}{c}, \\ \lambda \left(r \sum_{i=j}^{\infty} h(i) P_i(\lambda) - c\bar{x} \bar{H}(j-1) \right) & \text{αν } \frac{\bar{x}}{1-\rho^j} < \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{1-\rho^{j-1}}, \end{cases} \quad (3.89)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.10.

Θεωρώντας τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης ως συναρτήσεις του ρυθμού αρίξεων, λ , οι συνθήκες στους παραπάνω κλάδους θα γράφονται αντίστοιχα: $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\bar{x}} \frac{r-c\bar{x}}{c\bar{x}}$ και $P_{j-1}^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{r}\right) \leq \lambda < P_j^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{r}\right)$.

Εστιάζοντας στο j -παίγνιο των πελατών, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που $\frac{r}{c} > \bar{x}$, τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης EAR_j , TH_j και SW_j σταθεροποιούνται για μεγάλες τιμές του λ . Ειδικότερα, για τον ρυθμό απόδοσης έχουμε ότι

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} TH_j^{C-(e)} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}} \right)^j \right) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\frac{j}{\bar{x}}}{\left(1 + \frac{1}{\bar{x}\lambda} \right)^{j+1}} = \frac{j}{\bar{x}}.$$

Επίσης, για $\lambda \leq P_j^{-1}(\frac{c\bar{x}}{r})$, θα είναι

$$\frac{d}{d\lambda} TH_j^{C-(e)}(\lambda) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}} \right)^j \frac{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}(j+1)}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}},$$

και

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} TH_j^{C-(e)}(\lambda) = - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}} \right)^{j-1} \frac{\frac{1}{\bar{x}^2} j(j+1)}{\left(\lambda + \frac{1}{\bar{x}} \right)^2} < 0.$$

Ακόμη, παρατηρούμε ότι

$$1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}} \right)^j \frac{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}(j+1)}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}} = \sum_{k=2}^{j+1} \binom{j+1}{k} \lambda^{j+1-k} \frac{1}{\bar{x}^k} > 0. \quad (3.90)$$

Άρα, η $TH_j^{C-(e)}(\lambda)$ είναι γνησίως αύξουσα, κοίλη και έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = \frac{j}{\bar{x}}$. Για το κοινωνικό όφελος, αν $\lambda \leq P_j^{-1}(\frac{c\bar{x}}{r})$, τότε

$$\frac{d}{d\lambda} SW_j^{C-(e)}(\lambda) = r \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}} \right)^j \frac{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}(j+1)}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}} \right) - c\bar{x},$$

και

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} SW_j^{C-(e)}(\lambda) = -r \left(\frac{\lambda}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}} \right)^{j-1} \frac{j(j+1)}{\bar{x}^2 \left(\lambda + \frac{1}{\bar{x}} \right)^2} < 0.$$

Επιπλέον, για την εξίσωση

$$1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}} \right)^j \frac{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}(j+1)}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}} = \frac{c\bar{x}}{r},$$

βλέπουμε άμεσα (χρησιμοποιώντας την (3.90)) ότι έχει μοναδική λύση έστω λ^{sw} , και λόγω της κοιλότητας της $SW_j^{C-(e)}(\lambda)$, η λύση αυτή είναι σημείο μεγίστου. Άρα, η $SW_j^{C-(e)}(\lambda)$ έχει ολικό μέγιστο στο σημείο λ^{sw} .

Η στρατηγική ισορροπίας και η στάσιμη κατανομή στο επίπεδο \emptyset έχουν υπολογιστεί στο [100]. Συγκεκριμένα, είναι

$$q^{(e)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } \frac{r}{c} \leq \bar{x}, \\ \frac{\tilde{G}^{-1}(1 - \frac{c\bar{x}}{r})}{\lambda\bar{x}(1 - \tilde{G}^{-1}(1 - \frac{c\bar{x}}{r}))} & \text{αν } \bar{x} < \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{1 - \tilde{G}(\rho)}, \\ 1 & \text{αν } \frac{r}{c} \geq \frac{\bar{x}}{1 - \tilde{G}(\rho)}. \end{cases} \quad (3.91)$$

Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης υπολογίζονται μέσω της πρότασης που ακολουθεί.

Πρόταση 3.2. (Μέτρα αποτίμησης απόδοσης στο επίπεδο \emptyset για εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους) Στο επίπεδο πληροφόρησης \emptyset με εκθετικά καταταξιμωμένους ενδιάμεσους χρόνους, με μέσο χρόνο \bar{x} (δηλαδή με συχνότητα επίσκεψης $\frac{1}{\bar{x}}$), τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$EAR^{\emptyset-(e)} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } \frac{r}{c} \geq \frac{\bar{x}}{P(\lambda)}, \\ P^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{r}\right) & \text{αν } \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{P(\lambda)}. \end{cases} \quad (3.92)$$

$$TH^{\emptyset-(e)} = \begin{cases} \lambda P(\lambda) & \text{αν } \frac{r}{c} \geq \frac{\bar{x}}{P(\lambda)}, \\ \frac{c\bar{x}}{r} P^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{r}\right) & \text{αν } \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{P(\lambda)}. \end{cases} \quad (3.93)$$

$$SW^{\emptyset-(e)} = \begin{cases} \lambda (rP(\lambda) - c\bar{x}) & \text{αν } \frac{r}{c} \geq \frac{\bar{x}}{P(\lambda)}, \\ 0 & \text{αν } \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{P(\lambda)}, \end{cases} \quad (3.94)$$

όπου η $P(\lambda)$ δίνεται στην (3.84).

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα 3.3.10.

Επίλογος Μέρους I - Συζήτηση και Επεκτάσεις

Στη μελέτη που παρουσιάσαμε είχαμε ως βασικό στόχο να εξετάσουμε τον ρόλο της πληροφορίας στη στρατηγική συμπεριφορά πελατών σε συστήματα με ολικές εξυπηρετήσεις. Παρουσιάσαμε τα θεωρητικά αποτελέσματα μέσα στο πλαίσιο εφαρμογής ενός σταθμού συγκοινωνιών στον οποίο τα μέσα μεταφοράς πραγματοποιούν διαδοχικές επισκέψεις σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία. Ένα πρωτότυπο χαρακτηριστικό της παρούσας μελέτης που προσθέτει ένα ενδιαφέρον μεθοδολογικό στοιχείο είναι η θεώρηση της συνεχούς είδους πληροφορίας (δηλαδή, της πληροφόρησης σχετικά με τον χρόνο έλευσης του προηγούμενου μέσου μεταφοράς), που εν δυνάμει παρέχεται στους πελάτες. Πιστεύουμε πως γενικότερα για τα συστήματα εξυπηρέτησης, η παροχή της ηλίκιας του τρέχοντος χρόνου εξυπηρέτησης είναι ιδιαίτερα ουσιαστική για τους πελάτες και έχει άμεσο και έντονο αποτύπωμα στη στρατηγική τους συμπεριφορά. Η διερεύνηση επομένως περισσότερων συστημάτων εξυπηρέτησης, ακόμα και των πιο απλών (όπως για παράδειγμα η M/M/1) προς την κατεύθυνση αυτή κρίνουμε πως έχει ιδιαίτερη συμβολή.

Εστιάζοντας στο συγκεκριμένο πλαίσιο εφαρμογής του σταθμού συγκοινωνιών, επισημαίνουμε πως οι πελάτες αποζητούν να πετύχουν μια σχετικά υψηλή πιθανότητα εξυπηρέτησης αποφεύγοντας παράλληλα υψηλούς χρόνους αναμονής. Προκειμένου να λάβουν τις αποφάσεις τους αποδοτικά, τα ακόλουθα 3 είδη πληροφόρησης φαίνεται πως έχουν ιδιαίτερη σημασία: η διαθεσιμότητα των ελεύθερων θέσεων στο επόμενο μέσο μεταφοράς, το πλήθος των παρόντων πελατών και ο χρόνος έλευσης του προηγούμενου μέσου μεταφοράς. Στη μελέτη που παρουσιάσαμε θεωρήσαμε όλους του δυνατούς συνδυασμούς πληροφορίας από τα παραπάνω είδη καθώς και την περίπτωση χωρίς πληροφόρηση, απαριθμώντας συνολικά 8 διαφορετικά επίπεδα πληροφόρησης. Το κύριο μήνυμα της μελέτης είναι πως η παροχή περισσότερης πληροφορίας είναι πάντα θετική για το κοινωνικό όφελος αλλά μπορεί να επιδράσει αρνητικά στον ρυθμό απόδοσης. Επιπλέον, τα οφέλη ή και οι απώλειες μπορεί να είναι λιγοστά ή πολλαπλά ανάλογα με τις τιμές των υποκειμένων παραμέτρων του συστήματος. Με τη μελέτη αυτή προτείνεται μια πορεία για την αποτίμηση αυτών των ωφελειών και απωλειών. Ακόμη, τονίζουμε πως τα προβλήματα τιμολόγησης που στοχεύουν στη μεγιστοποίηση του κέρδους μονοπωλίου αξίζουν να διερευνηθούν. Καθώς το κέρδος από μια τέτοια εταιρεία μεταφοράς σχετίζεται άμεσα με τον ρυθμό απόδοσης, τα αποτελέσματα μιας τέτοιας ανάλυσης μπορεί να φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα.

Ένα ακόμη κρίσιμο ζήτημα είναι η διεξοδική διερεύνηση μεταξύ των επιπέδων πληροφόρησης CN και CA. Όταν οι πελάτες γνωρίζουν τη διαθεσιμότητα των ελεύθερων θέσεων, η επιπλέον πρόσβαση στην πληροφορία για το πλήθος των παρόντων πελατών δίνει μια βέβαιη απάντηση ως προς το αν θα συμβεί εξυπηρέτηση ωστόσο όμως, αποτελεί μια ανεπαρκή σχετικά ένδειξη για τον χρόνο αναμονής. Από την άλλη, αν η επιπρόσθετη πληροφορία αφορά τον χρόνο έλευσης, τότε, μπορεί να έχουμε μια καλύτερη εκτίμηση για τον χρόνο παραμονής αλλά ως προς το λήψη της εξυπηρέτησης δίνει μονάχα μια πιθανότητα. Η μελέτη που παρουσιάσαμε δεν δίνει μια ξεκάθαρη απάντηση ως προς το ποιο από τα δύο αυτά επίπεδα είναι πιο σημαντικό ή πιο επιθυμητό. Όπως είδαμε στα αριθμητικά πειράματα, τα επίπεδα αυτά μπορεί να ξεπερνούν το ένα το άλλο αναλόγως του μέτρου απόδοσης και των τιμών των παραμέτρων.

Φυσικά η μελέτη αυτή μπορεί να συμπληρωθεί περαιτέρω, ερευνώντας διαφορετικές ενδια-

φέρουσες διαστάσεις. Μια σημαντική πτυχή που δεν λήφθηκε υπόψη στην παρούσα μελέτη είναι η ετερογένεια των πελατών. Υπάρχουν οι πελάτες που επιλέγουν να φθάνουν στον σταθμό την τελευταία στιγμή, δίνοντας ελάχιστη σημασία στο συνωστισμό που θα συναντήσουν αλλά και εκείνοι που θα διαλέξουν να φθάσουν νωρίτερα προσδοκώντας την εξασφάλιση της εξυπηρέτησης τους. Ακόμη, υπάρχουν και άλλα σημαντικά είδη πληροφορίας που δεν λήφθηκαν υπόψη στην τρέχουσα μελέτη. Ένα παράδειγμα, είναι ο υπολειπόμενος χρόνος μέχρι την έλευση του επόμενου μέσου (που ισοδυναμεί με την ηλικία του τρέχοντος χρόνου εξυπηρέτησης μόνο στην περίπτωση που ο τελευταίος είναι σταθερός).

Παράρτημα

Αρχικό σύστημα (χωρίς στρατηγικούς πελάτες) και συμβολισμός

Για λόγους πληρότητας, θα παρουσιάσουμε στο παράρτημα αυτό ορισμένα από τα βασικότερα αποτελέσματα που αφορούν το αρχικό σύστημα εκκαθάρισης (χωρίς στρατηγικούς πελάτες). Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

- $\{N(t)\}$: απαριθμητρία διαδικασία για το πλήθος των αφίξεων στο σύστημα στο διάστημα $[0, t]$. Η διαδικασία αυτή έχουμε υποθέσει ότι είναι Poisson με ρυθμό λ .
- $\{M(t)\}$: απαριθμητρία διαδικασία για το πλήθος των εκκαθαρίσεων (επισκέψεις μέσω μεταφοράς) στο διάστημα $[0, t]$. Έχουμε υποθέσει πως η διαδικασία αυτή είναι (απλή) ανανεωτική διαδικασία με ενδιαμέσους χρόνους $X \sim F_X$ και έστω $S_n = X_1 + \dots + X_n$ οι χρόνοι γεγονότων στην $\{M(t)\}$.
- C_i : ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων διακριτών τ.μ. που παριστάνουν τη διαθέσιμη χωρητικότητα σε κάθε ανανεωτικό κύκλο, με συνάρτηση κατανομής $H(j)$, $j \in \{0, 1, \dots\}$, για κάθε $i = 1, 2, \dots$.
- $\{Y(t)\}$: στοχαστική διαδικασία που καταγράφει το πλήθος των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα τη στιγμή t . Για κάθε $t > 0$, είναι $Y(t) = N(t) - N(S_{M(t)})$ και $Y(0) = 0$.

Αρχικά επισημαίνουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Y(t)\}$ είναι αναγεννητική με αναγεννητικές στιγμές, τις στιγμές γεγονότων S_1, S_2, \dots της $\{M(t)\}$.

Η μελέτη του συστήματος σε μια αυθαίρετη χρονική στιγμή, μπορεί μελετηθεί χρησιμοποιώντας

- την Y^* , που αντιστοιχεί στην στάσιμη έκδοση της $\{Y(t)\}$, με κατανομή $\pi(n)$,
- την οριακή τ.μ. Y_∞ της $\{Y(t)\}$ με κατανομή $p(n)$, δηλαδή

$$p(n) = \mathbb{P}(Y_\infty = n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y(t) = n),$$

- και την οριακή μέση δειγματική τ.μ. \tilde{Y} της $\{Y(t)\}$ με κατανομή $\tilde{\pi}(n)$, δηλαδή

$$\tilde{\pi}(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{Y(u)=n\}} du \right]}{t},$$

η οποία εκφράζει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η $\{Y(t)\}$ περνάει στην κατάσταση n .

Για το υπό μελέτη σύστημα, η τελευταία μπορεί να εκφραστεί μέσω της $\{N(t)\}$. Ειδικότερα, έχουμε ότι

Λήμμα 3.3. Ισχύει ότι

$$\tilde{\pi}(n) = \int_0^\infty \mathbb{P}(N(a) = n) dF_A(a), \quad (3.95)$$

όπου F_A η οριακή συνάρτηση κατανομή της ηλικίας $A(t)$ (δηλαδή $F_A(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A(t) \leq x) = \int_0^x \frac{1 - F(s)}{E[X]} ds$).

Εφαρμόζοντας το Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Αμοιβές και θέτοντας $C(t) = \int_0^t \mathbb{1}_{\{Y(u)=n\}} du$, παίρνουμε ότι $\tilde{\pi}(n) = \frac{E[\int_0^{X_1} \mathbb{1}_{\{Y(u)=n\}} du]}{E[X_1]}$.

Παρατηρούμε ότι στο $[0, X_1]$ είναι $u \leq S_1 = X_1$ και άρα $M(u) = 0$. Αφού $S_{M(u)} = S_0 \equiv 0$, θα είναι $Y(u) = n \Leftrightarrow N(u) - N(S_{M(u)}) = n \Leftrightarrow N(u) = n$ και επομένως προκύπτει άμεσα ότι

$$\tilde{\pi}(n) = \frac{E[\int_0^{X_1} \mathbb{1}_{\{N(u)=n\}} du]}{E[X_1]}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^{X_1} \mathbb{1}_{\{N(u)=n\}} du\right] &= E\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{u \leq X_1\}} \mathbb{1}_{\{N(u)=n\}} du\right] \\ &= E\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{N(u)=n, X_1 \geq u\}} du\right] \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N(u) = n, X_1 \geq u) du, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε εφαρμόσει το Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης, καθώς $\mathbb{1}_{\{N(u)=n, X_1 \geq u\}} \leq 1$ (μ.π.1). Τέλος, αφού οι $\{N(t)\}$ και X_1 είναι ανεξάρτητες, θα έχουμε ότι

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(N(a) = n, X_1 > a) da = \int_0^\infty \mathbb{P}(N(a) = n)(1 - F_{X_1}(a)) da$$

Το ζητούμενο έπεται άμεσα αφού $\frac{1 - F_{X_1}(a)}{E[X_1]} = f_A(a)$. □

Αν και γενικά οι παραπάνω κατανομές διαφέρουν, για το σύστημα εκκαθαρίσεων που μελετάμε και με προϋπόθεση πως η κατανομή της X_1 είναι απεριοδική (non-arithmetic) (δηλαδή δεν υπάρχει κάποιο $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ώστε η τ.μ. $Z = \frac{1}{a} X_1$ να παίρνει αποκλειστικά ακέραιες τιμές), προκύπτει πως οι κατανομές αυτές συμπίπτουν, δηλαδή

$$\pi(n) = p(n) = \tilde{\pi}(n), \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

Πράγματι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα στο [125] και να έχουμε την ακόλουθη πρόταση (για την απόδειξη δείτε το [125]):

Πρόταση 3.3. (i) Όταν $E[X_1] < \infty$, τότε η στάσιμη κατανομή, $\pi(n)$, της $\{Y(t)\}$ υπάρχει και δίνεται από την

$$\pi(n) = \int_0^\infty \mathbb{P}(N(x) = n) dF_A(x), \quad (3.96)$$

όπου F_A η οριακή συνάρτηση κατανομή της ηλικίας $A(t)$ (δηλαδή $F_A(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A(t) \leq x) = \int_0^x \frac{1 - F(s)}{E[X]} ds$).

(ii) Αν η X_1 είναι απεριοδική, τότε η οριακή κατανομή συμπίπτει με τη στάσιμη, δηλαδή, για κάθε n είναι

$$p(n) = \pi(n). \quad (3.97)$$

Συζήτηση για την κεντρική υπόθεση και εναλλακτική περιγραφή

3.3.2 Μοντελοποίηση ως μη-επαναλαμβανόμενο παίγνιο (one-shot game)

Στην υπό-ενότητα αυτή θα δώσουμε μια εναλλακτική περιγραφή του μοντέλου κατά την οποία, η υπόθεση πως οι πελάτες εγκαταλείπουν τον σταθμό, αν δεν καταφέρουν να εξυπηρετηθούν, χωρίς να περιμένουν το επόμενο μεταφορικό μέσο, μπορεί να δικαιολογηθεί. Ειδικότερα, οι υποθέσεις του μοντέλου θα είναι οι εξής:

- Τη στιγμή 0 ξεκινάνε οι αφίξεις των πελατών σε έναν σταθμό σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού λ . Κάθε πελάτης, κατά την άφιξη του, αποφασίζει αν θα εισέλθει ή όχι στον σταθμό.
- Θεωρούμε ένα μεταφορικό μέσο το οποίο θα περάσει από τον σταθμό σε τυχαίο χρόνο, έστω $X > 0$ με συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f .
- Η χωρητικότητα του μέσου μεταφοράς που θα επισκεφτεί τον σταθμό είναι τυχαία, έστω $C \in \{1, 2, \dots\}$ με συνάρτηση μάζας πιθανότητας $h(j)$.

Με τις παραπάνω υποθέσεις, θα έχουμε μια βασική αλλαγή στην ανάλυση των επιπέδων πληροφόρησης: Πλέον, δεν θα ισχύει η ιδιότητα PASTA, ενώ στους υπολογισμούς του ενδιαμέσου χρόνου, X , και του πλήθους των παρόντων πελατών, N , από την οπτική γωνία ενός επιλεγμένου πελάτη που φθάνει στο σύστημα μια τυχαία χρονική στιγμή πριν την επίσκεψη του μέσου μεταφοράς, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι μεροληπτικές (size-biased) τ.μ., έστω \tilde{X} και \tilde{N} αντίστοιχα. Η πυκνότητα της \tilde{X} είναι

$$f_{\tilde{X}}(x) = \frac{xf(x)}{E[X]}. \quad (3.98)$$

Πράγματι, κάθε πελάτης που φθάνει στο σύστημα, είναι πιθανότερο να πέσει σε περιπτώσεις μεγάλων ενδιαμέσων χρόνων για το μεταφορικό μέσο και επομένως η «σωστή» πυκνότητα, $f_{\tilde{X}}(x)$, θα είναι ανάλογη, όχι μόνο της αρχικής πυκνότητας $f(x)$ αλλά και της τιμής x . Δηλαδή, $f_{\tilde{X}}(x) \propto xf(x)$. Καθώς απαιτούμε από την τελευταία να είναι πυκνότητα κάποιας τυχαίας μεταβλητής, υπολογίζουμε πως $c = \frac{1}{E[X]}$ (Δείτε για παράδειγμα στο [8] για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις μεροληπτικές κατανομές).

Εστιάζουμε τώρα στον υπολογισμό της πιθανότητας να υπάρχουν ακριβώς n πελάτες παρόντες κατά τη στιγμή άφιξης του επιλεγμένου πελάτη. Έστω p_n , η κατανομή που δίνει το πλήθος των αφίξεων κατά τη διάρκεια ενός ενδιαμέσου χρόνου X . Έπεται άμεσα πως είναι $p_n = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} dF_X(x)$. Θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη. Τότε, με ανάλογο συλλογισμό όπως στην περίπτωση της \tilde{X} , η πιθανότητα να βρεθεί σε έναν ενδιαμέσο χρόνο κατά τη διάρκεια του οποίου έχουν συσσωρευθεί ακριβώς n πελάτες, θα δίνεται από την

$$\tilde{p}_n = \frac{np_n}{E[N]}. \quad (3.99)$$

Παρά τις διαφορές αυτές, θα δείξουμε παρακάτω πως τα μοντέλα που προκύπτουν από αυτή την εναλλακτική περιγραφή είναι εντελώς ισοδύναμα με εκείνα που αντιστοιχούν στην αρχική περιγραφή. Μια εξήγηση που θα μπορούσε να δοθεί είναι πως με τη θεώρηση του «επιλεγμένου πελάτη», είναι σαν να θεωρούμε ότι το ίδιο (one-shot game) παίζεται πολλές φορές, πράγμα που συνδέει τις ποσότητες με το ανανεωτικό πλαίσιο, παρόλο που το παίγνιο υλοποιείται μονάχα μια φορά.

Θεωρούμε αρχικά το επίπεδο πληροφόρησης \emptyset , όπου οι πελάτες δεν έχουν πρόσβαση σε κάποια πληροφόρηση για τα χαρακτηριστικά του συστήματος. Επομένως, οι στρατηγικές των πελατών

είναι της μορφής $\mathbf{q} = q \in [0, 1]$. Η αναμενόμενη ωφέλεια για έναν τυχόντα πελάτη που κατά την άφιξη του, αποφασίζει να εισέλθει δεδομένου ότι οι υπόλοιποι πελάτες χρησιμοποιούν τη στρατηγική \mathbf{q} , δίνεται στην 2.2. Αρχικά θα υπολογίσουμε την πιθανότητα εξυπηρέτησης για τον πελάτη αυτόν. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.

(1ος τρόπος:) Καθώς η διαδικασία εισόδου, $\{N_q(t)\}$, των πελατών στο σύστημα είναι Poisson με ρυθμό λq , η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα ακριβώς πριν την στιγμή άφιξης του, έστω T , θα δίνεται από την

$$p_n = \mathbb{P}(N_q(T) = n) = \int_0^\infty e^{-\lambda q t} \frac{(\lambda q t)^n}{n!} dF_T(t)$$

Ωστόσο, τη στιγμή που ο επιλεγμένος πελάτης θα φθάσει στο σταθμό, ο ενδιαμέσος χρόνος που θα παρατηρήσει, θα αντιστοιχεί στη μεροληπτική τ.μ. (size-biased) της X , έστω \tilde{X} , η οποία έχει κατανομή που δίνεται στην (3.98). Δεσμεύοντας στην τιμή της $\tilde{X} = x$, η στιγμή άφιξης του επιλεγμένου πελάτη θα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, x]$ και άρα $f_{T|\tilde{X}=x}(t) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq x\}}$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_q(T) = n) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(N_q(t) = n | \tilde{X} = x) f_{T|\tilde{X}=x}(t) dt dF_{\tilde{X}}(x) \\ &= \int_0^\infty \int_0^x \mathbb{P}(N_q(t) = n | \tilde{X} = x) \frac{1}{x} dt \frac{x}{E[X]} dF(x) \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N_q(t) = n) \frac{1}{E[X]} \int_t^\infty dF(x) dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N_q(t) = n) \frac{1 - F(t)}{E[X]} dt. \end{aligned}$$

Ο επιλεγμένος πελάτης θα καταφέρει να εξυπηρετηθεί αν οι πελάτες που φθάσανε πριν από αυτόν είναι το πολύ $C - 1$. Επομένως, η πιθανότητα επιβίβασης, P , για τον επιλεγμένο πελάτη θα είναι

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=1}^\infty h(j) \mathbb{P}(N_q(T) < j) \\ &= \sum_{j=1}^\infty h(j) \sum_{n=0}^{j-1} \int_0^\infty \mathbb{P}(N_q(t) = n) \frac{1 - F(t)}{E[X]} dt \\ &= \sum_{j=1}^\infty h(j) \int_0^\infty p_j(\lambda t q) \frac{1 - F(t)}{E[X]} dt. \end{aligned}$$

(2ος τρόπος:) Δεσμεύουμε αρχικά στην τιμή $C = j$ για τη χωρητικότητα του επόμενου μέσου. Ο επιλεγμένος πελάτης θα εξυπηρετηθεί αν φθάσει το πολύ j -οστός κατά τη διάρκεια ενός ενδιαμέσου χρόνου. Έστω ότι βρεθεί σε έναν ενδιαμέσο χρόνο με n πελάτες (το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα \tilde{p}_n). Τότε, η θέση του θα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των n πελατών. Επομένως, η πιθανότητα να εξυπηρετηθεί θα είναι

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=1}^\infty h(j) \sum_{n=0}^\infty \tilde{p}_n \sum_{i=1}^{\min(j,n)} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{j=1}^\infty h(j) \frac{1}{\lambda q E[X]} \sum_{n=1}^\infty p_n \min(j, n) \end{aligned}$$

Εκτελώντας τις πράξεις, προκύπτει ότι η τελευταία είναι ίση με

$$\sum_{j=1}^{\infty} h(j) \int_0^{\infty} p_j(\lambda t q) \frac{1-F(t)}{E[X]} dt.$$

Δηλαδή, η πιθανότητα επιβίβασης συμπίπτει με τη αντίστοιχη ποσότητα $P(q)$ της σχέσης (2.49). Τέλος, ο δεσμευμένος μέσος υπολειπόμενος χρόνος θα είναι

$$E[\tilde{X}] = \frac{\bar{x}^{(2)}}{2\bar{x}},$$

και άρα ο τύπος για την αναμενόμενη ωφέλεια θα συμπίπτει με εκείνον στην (2.51). Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορεί ναδειχθεί ότι και ο τύπος για την αναμενόμενη ωφέλεια για το επίπεδο C θα συμπίπτει με εκείνον στην (2.48). Για το επίπεδο πληροφόρησης A, όπου οι στρατηγικές των πελατών είναι της μορφής $\mathbf{q}_j = (q_j(a) : a \in [0, \infty))$, προκύπτει άμεσα πως η πιθανότητα επιβίβασης θα έχει την ίδια μορφή όπως στην (2.21). Από την άλλη, ο δεσμευμένος μέσος υπολειπόμενος χρόνος στο επίπεδο A, για έναν τυχόντα πελάτη που κατά τη στιγμή της άφιξής του πληροφορήθηκε πως το προηγούμενο μέσο μεταφοράς πέρασε πριν από a χρονικές μονάδες, θα είναι

$$E(a|\mathbf{q}) = E[\tilde{X} - a|A = a] = \int_0^{\infty} (x - a) df_{\tilde{X}|A=a}(x) dx.$$

Είναι όμως

$$\begin{aligned} f_{\tilde{X}|A=a}(x) &= \frac{f_{\tilde{X},A}(x, a)}{f_A(a)} = \frac{f_{A|\tilde{X}=x}(a) f_{\tilde{X}}(x)}{f_A(a)} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \mathbb{1}_{\{0 \leq a \leq x\}} \frac{x f(x)}{E[X]}}{\frac{1-F(a)}{E[X]}} = \frac{f(x)}{1-F(a)} \mathbb{1}_{\{0 \leq a \leq x\}}, \end{aligned}$$

και άρα $E(a|\mathbf{q}_j) = \int_a^{\infty} (x - a) \frac{f(x)}{1-F(a)} dx = m(a)$. Τελικά, η αναμενόμενη ωφέλεια ενός πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει, στο επίπεδο A, θα συμπίπτει με την αναμενόμενη ωφέλεια στην (2.23).

Αντίστοιχες αποδείξεις μπορούμε να έχουμε και για τα υπόλοιπα επίπεδα πληροφόρησης. Επομένως, με τη θεώρηση της εναλλακτικής αυτής περιγραφής του μοντέλου ως ‘one-shot game’ μπορεί να δικαιολογηθεί η μελέτη του προβλήματος σε περιπτώσεις όπου η κεντρική υπόθεση (2.1) παραβιάζεται.

Τεχνικές αποδείξεις για το Κεφάλαιο 2:

3.3.3 Στρατηγικές ισορροπίας στα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης

Λήμμα 3.4. Έστω $\{M(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιαμέσους χρόνους $X \sim F$. Έστω επίσης οι στοχαστικές διαδικασίες $\{R(t), t \geq 0\}$ και $\{A(t), t \geq 0\}$ που αντιστοιχούν στον υπολειπόμενο χρόνο και στην ηλικία της $M(t)$ και R, A οι αντίστοιχες οριακές τ.μ. Τότε για $t > 0$ είναι

$$(R(t)|A(t) = a) \stackrel{d}{=} (R|A = a)$$

ενώ

$$f_{R|A=a}(r) = \frac{f_X(r + a)}{1 - F(a)}$$

και

$$E[R|A = a] = E[(X - a) | X > a] = \int_a^\infty \frac{1 - F_x(t)}{1 - F_x(a)} dt \equiv m(a).$$

Απόδειξη. Έστω $t, a, r > 0$. Τότε

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(R(t) \leq r | A(t) = a) \\ &= \mathbb{P}(S_{M(t)+1} \leq t + r | S_{M(t)} = t - a) \\ &= \mathbb{P}(X_{M(t)+1} + S_{M(t)} \leq t + r | S_{M(t)} = t - a) \\ &= \mathbb{P}(X_{M(t)+1} \leq r + a | S_{M(t)} = t - a) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} \leq r + a | M(t) = n, S_n = t - a) \mathbb{P}(M(t) = n | S_n = t - a). \end{aligned}$$

Όμως $\{M(t) = n, S_n = t - a\} \Leftrightarrow \{0 \leq a < X_{n+1}\}$ και άρα,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R(t) \leq r | A(t) = a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} \leq r + a | X_{n+1} > a) \mathbb{P}(M(t) = n | S_n = t - a) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq r + a | X_1 > a) = \frac{F(r + a) - F(a)}{1 - F(a)}. \end{aligned}$$

Η τελευταία δεν εξαρτάται από το t και παραγωγίζοντας την ως προς r προκύπτει η παραπάνω πυκνότητα. Η μέση τιμή υπολογίζεται άμεσα και έχει την παραπάνω μορφή. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 Από την (2.13), έχουμε ότι $G_j(a, n | \mathbf{q}_j) \geq 0$ αν και μόνο αν $n \leq j - 1$ και $r - cm(a) \geq 0$, το οποίο δίνει την (2.14).

Για την περίπτωση 1, από τη συνθήκη $\inf_{a \in [0, \infty)} m(a) > \frac{r}{c}$, έπεται ότι η ανισότητα $r - cm(a) \geq 0$ δεν ισχύει ποτέ και άρα παίρνουμε την στρατηγική καθολικής αποχώρησης ως κυριαρχούσα. Όμοια, για την περίπτωση 2, από τη συνθήκη $\sup_{a \in [0, \infty)} m(a) \leq \frac{r}{c}$, έπεται πως η $r - cm(a) \geq 0$ ισχύει πάντα και έτσι, η κυριαρχούσα στρατηγική θα δίνεται από την (2.15). \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3 Η συνάρτηση $G_j(a | \mathbf{q}_j)$ είναι συνεχής για $a \in [0, \infty)$ το οποίο είναι φανερό από τον ορισμό των $p_j(s)$, $\lambda_j(a | \mathbf{q}_j)$ και $m(a)$ ως ολοκληρώματα (δείτε π.χ. στο [117] το Θεώρημα 6.20). Επομένως το σύνολο

$$G_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{a \geq 0 : G_j(a | \mathbf{q}_j) \neq 0\}$$

είναι ανοικτό υποσύνολο του $[0, \infty)$, και επομένως γράφεται ως $[0, \infty) \cap A$ για κάποιο ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$. Από την άλλη, κάθε ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R} μπορεί να γραφτεί ως αριθμήσιμη ένωση ξένων διαστημάτων (δείτε π.χ στο [22] το Θεώρημα 1.10) και επομένως συμπεραίνουμε ότι το $G_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ μπορεί να διαμεριστεί όπως παρακάτω:

$$G_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = [0, t_j^{(1)}) \cup (s_j^{(1)}, t_j^{(2)}) \cup (s_j^{(2)}, t_j^{(3)}) \cup \dots$$

όπου οι αριθμοί $t_j^{(n)}$, $s_j^{(n)}$, $n \geq 1$ δίνονται από τις (2.24)-(2.26). Συμπληρώνοντας τα κενά μεταξύ των διαστημάτων της παραπάνω διαμέρισης της $G_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, παίρνουμε τη διαμέριση του \mathbb{R}_+

στην (2.27). Επιπλέον, έχουμε ότι η $G_j(a|\mathbf{q}_j)$ διατηρεί το πρόσημο της στα διαστήματα τύπου $(s_j^{(n)}, t_j^{(n+1)})$, $n \geq 0$ και είναι 0 στα διαστήματα του τύπου $[t_j^{(n)}, s_j^{(n)}]$, $n \geq 1$.

Επίσης, σε κάθε διάστημα όπου η $G_j(a|\mathbf{q}_j)$ διατηρεί το πρόσημο +, η βέλτιστη απάντηση του επιλεγμένου πελάτη είναι 1 (είσοδος). Όμοια, σε κάθε διάστημα όπου η $G_j(a|\mathbf{q}_j)$ διατηρεί το πρόσημο -, η βέλτιστη απάντηση είναι 0 (αποχώρηση). Για τον προσδιορισμό του προσήμου στα διαστήματα $[0, t_j^{(1)})$, χρειάζεται να ελέγξουμε το πρόσημο στο μέσο του διαστήματος $t_j^{(1)}/2$ και παίρνουμε τις (2.28)-(2.29). Όμοια, για τον προσδιορισμό του προσήμου στο $(s_j^{(n)}, t_j^{(n+1)})$, για κάποιο $n \geq 1$, μπορούμε να εξετάσουμε το πρόσημο στο μέσο του διαστήματος $(s_j^{(n)} + t_j^{(n+1)})/2$ και παίρνουμε τις (2.30)-(2.31). Τέλος, στα διαστήματα που η $G_j(a|\mathbf{q}_j)$ ισούται με 0, η βέλτιστη απάντηση του επιλεγμένου πελάτη, του υπαγορεύει να εισέλθει με οποιαδήποτε πιθανότητα σε οποιοδήποτε χρονικό σημείο.

Επομένως, όσον αφορά την βέλτιστη απάντηση $\tilde{\mathbf{q}}_j = (\tilde{q}_j(a) : a \geq 0)$ του επιλεγμένου πελάτη έναντι οποιαδήποτε στρατηγικής των άλλων \mathbf{q}_j , έχουμε ότι η $\tilde{q}_j(a)$ παραμένει σταθερή και ίση με 0 ή 1 σε κάθε διάστημα $[0, t_j^{(1)})$ και $(s_j^{(n)}, t_j^{(n+1)})$, $n \geq 0$. Επιπλέον, για να εξασφαλίσουμε τη δεξιά συνέχεια της $\tilde{\mathbf{q}}_j$, θα πρέπει να έχουμε ότι $\tilde{q}_j(s_j^{(n)}) = 1$ ή 0, ανάλογα με το αν $G_j(a|\mathbf{q}_j) > 0$ ή < 0 για $a \in (s_j^{(n)}, t_j^{(n+1)})$. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4 Έστω ότι ο πληθυσμός των πελατών έχει υιοθετήσει την αποδεκτή στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{(e)} = (q_j^{(e)}(a) : a \geq 0)$. Θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει. Η αναμενόμενη ωφέλεια του θα είναι $G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)})$. Ορίζουμε τη διαμέριση του \mathbb{R}_+ όπως στην (2.27) του Θεωρήματος 2.3. Καθώς η $q_j^{(e)}$ είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3 θα έχουμε ότι $G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = 0$, για $a \in [t_j^{(e,n)}, s_j^{(e,n)}]$, $n \geq 1$. Η εξίσωση $G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = 0$ γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = 0 &\Leftrightarrow rp_j(\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)})) - cm(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = \int_0^a \lambda q_j^{(e)}(u) du = p_j^{-1} \left(\frac{c}{r} m(a) \right). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω ως προς το a και διαιρώντας με λ θα πάρουμε

$$q_j^{(e)}(a) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\frac{c}{r} m'(a)}{p_j^{-1} \left(\frac{c}{r} m(a) \right)},$$

και επομένως έχουμε την (2.34).

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τα άκρα των διαστημάτων της διαμέρισης (2.27) του Θεωρήματος 2.3 και τις τιμές της $q_j^{(e)}(a)$ στα διαστήματα $[0, t_j^{(1)})$ και $[s_j^{(n)}, t_j^{(n+1)})$, $n \geq 1$.

Αν $\frac{r}{c} > \bar{x}$, τότε $G_j(0|\mathbf{q}_j^{(e)}) = r - c\bar{x} > 0$. Από την συνέχεια της $G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)})$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.3, συμπεραίνουμε ότι $q_j^{(e)} = 1$, για $a \in [0, t_j^{(e,1)})$, όπου $t_j^{(e,1)} = \inf\{a > 0 : G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = 0\}$. Ωστόσο, για $a \in [0, t_j^{(e,1)})$, είναι $G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = rp_j(\lambda a) - cm(a)$, και άρα το $q_j^{(e)}(a)$ δίνεται από τον πρώτο κλάδο της (2.33) με τα $d_j^{(e,1)}$ και $t_j^{(e,1)}$ να δίνονται από τους άνω κλάδους των (2.35) και (2.36), αντίστοιχα.

Αν $\frac{r}{c} < \bar{x}$ τότε $G_j(0|\mathbf{q}_j^{(e)}) < 0$ και με το Θεώρημα 2.3 έχουμε ότι $q_j^{(e)} = 0$, για $a \in [0, t_j^{(e,1)})$, όπου $t_j^{(e,1)} = \inf\{a > 0 : G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = 0\}$. Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) =$

$r - cm(a)$, και συνάγουμε ότι η $q_j^{(e)}(a)$ θα δίνεται από τον άνω κλάδο της (2.33) με τα $d_j^{(e,1)}$ και $t_j^{(e,1)}$ να δίνονται από τους κάτω κλάδους των (2.35) και (2.36), αντίστοιχα.

Η περίπτωση $\frac{r}{c} = \bar{x}$ είναι η οριακή περίπτωση που $G_j(0|\mathbf{q}_j^{(e)}) = 0$, και έτσι $t_j^{(e,1)} = 0$. Το πεδίο ορισμού $[0, t_j^{(e,1)})$ που είναι ο άνω κλάδος της (2.33), είναι το κενό σύνολο και έτσι το $d_j^{(e,1)}$ μπορεί να ορισθεί με αυθαίρετο τρόπο 1 ή 0. Δηλαδή, ακόμα και σε αυτή την περίπτωση οι (2.35) και (2.36) ισχύουν.

Η ποσότητα $\gamma_j^{(e)}(a)$ που δίνεται από την (2.34) θα είναι αποδεκτή ως πιθανότητα εισόδου αν βρίσκεται στο $[0, 1]$. Επομένως, το $s_j^{(e,1)}$ μπορούμε να το δούμε ως το πρώτο χρονικό σημείο μετά το $t_j^{(e,1)}$ στο οποίο η λύση γίνεται μη αποδεκτή, από το οποίο παίρνουμε την (2.37). Επομένως, η $q_j^{(e)}(a)$ θα δίνεται από την (2.33) για $a \in [0, s_j^{(e,1)}]$, με την $\gamma_j^{(e)}(a)$, τα $d_j^{(e,1)}$, $t_j^{(e,1)}$ και $s_j^{(e,1)}$ να δίνονται από τις (2.34), (2.35), (2.36) και (2.37), αντίστοιχα.

Συνεχίζουμε με επαγωγή. Έστω ότι το $q_j^{(e)}(a)$ έχει προσδιοριστεί για $a \in [0, s_j^{(e,n-1)}]$ για κάποιον $n \geq 2$. Θα το προσδιορίσουμε στο διάστημα $(s_j^{(e,n-1)}, s_j^{(e,n)}]$, χρησιμοποιώντας την (2.33) και προσδιορίζοντας τα $d_j^{(e,n)}$, $t_j^{(e,n)}$, $\gamma_j^{(e,n)}(t)$ και $s_j^{(e,n)}$.

Το σημείο $s_j^{(e,n-1)}$ έχει προσδιοριστεί ως το πρώτο σημείο έπειτα από το $t_j^{(e,n-1)}$ όπου η $q_j^{(e)}(a)$ γίνεται μικρότερη από 0 ή μεγαλύτερη από 1. Αν είναι κάτω από 0 τότε η $q_j^{(e)}(a)$ θα είναι 0 στο διάστημα $[s_j^{(e,n-1)}, t_j^{(e,n)})$ και έτσι παίρνουμε τον κάτω κλάδο της (2.38). Διαφορετικά, αν έχει ξεπεράσει το 1 και το $q_j^{(e)}(a)$ είναι ίσο με 1 στο διάστημα $[s_j^{(e,n-1)}, t_j^{(e,n)})$, τότε σε αυτήν την περίπτωση έχουμε τον κάτω κλάδο της (2.38). Επομένως έχουμε προσδιορίσει το $d_j^{(e,n)}$.

Το σημείο $t_j^{(e,n)}$ χαρακτηρίζεται από την (2.26) ως το πρώτο σημείο a έπειτα από το $s_j^{(e,n-1)}$, για το οποίο $G_j(a|\mathbf{q}_j) = 0$. Στην περίπτωση που $d_j^{(e,n)} = 1$, θα έχουμε ότι $q_j^{(e)}(a) = 1$, για $a \in [s_j^{(e,n-1)}, t_j^{(e,n)})$, και άρα, για ένα τέτοιο a θα έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) &= \int_0^a \lambda q_j^{(e)}(u) du = \int_0^{s_j^{(e,n-1)}} \lambda q_j^{(e)}(u) du + \int_{s_j^{(e,n-1)}}^a \lambda q_j^{(e)}(u) du \\ &= \lambda(s_j^{(e,n-1)}|\mathbf{q}_j^{(e)}) + \lambda(a - s_j^{(e,n-1)}). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Επομένως, η (2.23) θα έχει τη μορφή

$$G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = rp_j(\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)})) - cm(a), \quad (3.101)$$

και η εξίσωση $G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = 0$ δίνει τον άνω κλάδο στην (2.39). Όμοια, στην περίπτωση που $d_j^{(e,n)} = 0$, θα έχουμε ότι $q_j^{(e)}(a) = 0$, για $a \in [s_j^{(e,n-1)}, t_j^{(e,n)})$, έτσι, για ένα τέτοιο a έχουμε $\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = \lambda(s_j^{(e,n-1)}|\mathbf{q}_j^{(e)})$. Τότε η εξίσωση $G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = 0$ θα δώσει τον κάτω κλάδο στην (2.39).

Για $a \in [t_j^{(e,n)}, s_j^{(e,n)}]$, θα έχουμε ότι το $q_j^{(e)}(a)$ δίνεται από την $\gamma_j^{(e)}(a)$ στην (2.34). Η ποσότητα αυτή είναι αποδεκτή ως πιθανότητα εισόδου αν βρίσκεται στο $[0, 1]$. Έτσι, το $s_j^{(e,n)}$ μπορούμε να το δούμε ως την πρώτη χρονική στιγμή έπειτα από την $t_j^{(e,n)}$ στην οποία η λύση γίνεται μη αποδεκτή και έτσι παίρνουμε την (2.40). Τελικά, η $q_j^{(e)}(a)$ θα δίνεται από την (2.33) για $a \in [0, s_j^{(e,n)}]$ και η επαγωγή έχει ολοκληρωθεί. \square

Απόδειξη του Πορίσματος 2.1 Για το 1, παρατηρούμε ότι η στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{(e)}$ είναι η στρατηγική καθολικής αποχώρησης αν και μόνο αν $G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) \leq 0$, για $a \in [0, \infty)$. Όμως, κάτω από αυτή τη στρατηγική έχουμε ότι $\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = 0$, για $a \in [0, \infty)$, επομένως η συνθήκη γράφεται ως $rp_j(0) - cm(a) \leq 0$, για $a \in [0, \infty)$ το οποίο ισοδυναμεί με την (2.41).

Όμοια, για το 2 παρατηρούμε ότι η στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{(e)}$ είναι η στρατηγική καθολικής εισόδου αν και μόνο αν $G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) \geq 0$, για $a \in [0, \infty)$. Εδώ όμως $\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = \lambda a$, για $a \in [0, \infty)$, και άρα η συνθήκη γράφεται ως $rp_j(\lambda a) - cm(a) \geq 0$, για $a \in [0, \infty)$ από την οποία καταλήγουμε άμεσα στην (2.42).

Για την απόδειξη του 3 έχουμε ότι η στρατηγική ισορροπίας $\mathbf{q}_j^{(e)}$ είναι η στρατηγική t -κατωφλίου, αν και μόνο αν $G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) \geq 0$, για $a \in [0, t)$ και $G_j(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) \leq 0$, για $a \in [t, \infty)$. Κάτω από τη στρατηγική αυτή έχουμε ότι $\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)}) = \lambda \min(a, t)$ και επομένως αυτές οι συνθήκες απαιτούν να ισχύει $\frac{r}{c} \geq \frac{m(a)}{p_j(\lambda a)}$ για $a \in [0, t)$ και $\frac{r}{c} \leq \frac{m(a)}{p_j(\lambda t)}$ για $a \in [t, \infty)$. Το τελευταίο γράφεται σε μια πιο συμπαγή μορφή, συγκεκριμένα στην (2.43). Η απόδειξη για το 4 είναι παρόμοια και παραλείπεται. \square

Απόδειξη της Πρότασης 2.1 Για $j = 1$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P_1(s) &= \frac{1}{\bar{x}} \left(\int_0^\infty e^{-sa} (1 - F(a)) da \right) = \frac{1}{\lambda \bar{x}} \left(1 - (-e^{-sa} F(a)) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-sa} dF(a) \right) \\ &= \frac{1 - \tilde{F}(s)}{s \bar{x}}. \end{aligned}$$

Για $j = 2$ είναι

$$P_2(s) = \frac{1}{\bar{x}} \left(\int_0^\infty (e^{-sa} + e^{-sa} sa) (1 - F(a)) da \right) = P_1(s) + \frac{1}{\bar{x}} \left(\int_0^\infty e^{-sa} sa (1 - F(a)) da \right).$$

Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sa} sa (1 - F(a)) da &= \frac{1}{s} - \left[-\frac{e^{-sa}(sa + 1)}{s} F(a) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-sa}(sa + 1)}{s} dF(a) \right] \\ &= \frac{1}{s} - \left[\frac{\tilde{F}(s)}{s} - \tilde{F}'(s) \right]. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$P_2(s) = P_1(s) + \frac{1}{s \bar{x}} [1 - (\tilde{F}(s) - s \tilde{F}'(s))].$$

Με όμοιο τρόπο υπολογίζουμε και ότι

$$\begin{aligned} P_3(s) &= P_2(s) + \frac{1}{s \bar{x}} \left[1 - (\tilde{F}(s) - s \tilde{F}'(s) + \frac{s^2 \tilde{F}''(s)}{2!}) \right] \\ P_4(s) &= P_3(s) + \frac{1}{s \bar{x}} \left[1 - (\tilde{F}(s) - s \tilde{F}'(s) + \frac{s^2 \tilde{F}''(s)}{2!} - \frac{s^3 \tilde{F}^{(3)}(s)}{3!}) \right], \end{aligned}$$

και γενικά, για κάθε $j > 1$,

$$P_j(s) = P_{j-1}(s) + \frac{1}{s \bar{x}} \left[1 - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(-s)^i \tilde{F}^{(i)}(s)}{i!} \right]$$

Επειδή όμως $\tilde{F}^{(i)}(s) = (-1)^i E[X^i e^{-sX}]$, η τελευταία γράφεται

$$\begin{aligned} P_j(s) &= P_{j-1}(s) + \frac{1}{s\bar{x}} \left[1 - E \left[\sum_{i=0}^{j-1} \frac{(sX)^i e^{-sX}}{i!} \right] \right] \\ &= P_{j-1}(s) + \frac{1}{s\bar{x}} (1 - E[p_j(sX)]). \end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.7 Η συνάρτηση $G_j(q_j)$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς το q_j , το οποίο είναι φανερό από την (2.48) αλλά και λόγω της μονοτονίας της $p_j(s)$ ως προς s . Επομένως, αν $G_j(0) \leq 0$, θα είναι $G_j(q_j) \leq 0$ για $q_j \in [0, 1]$, και άρα η $q_j = 0$ είναι κυριαρχούσα στρατηγική. Όμοια, αν $G_j(1) \geq 0$, τότε $G_j(q_j) \geq 0$ για $q_j \in [0, 1]$, και άρα η $q_j = 1$ είναι κυριαρχούσα στρατηγική. Όταν $G_j(0) > 0 > G_j(1)$ έχουμε ότι η εξίσωση $G_j(q_j) = 0$ έχει μοναδική λύση q_j^* στο $(0, 1)$, η οποία θα είναι η μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Λαμβάνοντας υπόψη τη μορφή της $G_j(q_j)$ στην (2.48), θα έχουμε ότι $G_j(0) = r - c \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}$ και $G_j(1) = r \int_0^\infty p_j(\lambda a) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da - c \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}$, οπότε λύνοντας ως προς $\frac{r}{c}$ παίρνουμε τις διάφορες περιπτώσεις που εμφανίζονται στο Θεώρημα. □

Απόδειξη της Πρότασης 2.2 Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $P(\lambda)$ είναι κυρτός συνδυασμός των συναρτήσεων $P_j(\lambda)$, οπότε θα υπάρχει κάποιος δείκτης $j_0 = j_0(\lambda, h(j), F)$ τέτοιος ώστε

$$P_{j_0-1}(\lambda) < P(\lambda) \leq P_{j_0}(\lambda), \quad (3.102)$$

και άρα

$$\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} (P_{j_0-1}(\lambda))^{-1} > \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} (P(\lambda))^{-1} \geq \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} (P_{j_0}(\lambda))^{-1}, \quad (3.103)$$

Θεωρώντας, επομένως, τους αριθμούς u_j, u_g, u_∞ (2.52) θα έχουμε τη διάταξη

$$u_\infty < \dots < u_{j_0+1} < u_{j_0} \leq u_g < u_{j_0-1} < \dots < u_1.$$

Προφανώς, αν το στήριγμα της g είναι πεπερασμένο, έστω m , τότε θα είναι

$$u_\infty < u_m < \dots < u_{j_0+1} < u_{j_0} \leq u_g < u_{j_0-1} < \dots < u_1.$$

Τότε, ξαναγράφοντας τις συνθήκες του Θεωρήματος 2.8 θα έχουμε πως

$$\begin{aligned} q^{(e)} &= 0 \text{ αν } \frac{r}{c} \leq u_\infty \\ q^{(e)} &\in (0, 1) \text{ αν } u_\infty < \frac{r}{c} < u_g \\ q^{(e)} &= 1 \text{ αν } u_g \leq \frac{r}{c} \end{aligned}$$

Επίσης, για το διάνυσμα $\mathbf{q}_j^{(e)} = (q_1^{(e)}, q_2^{(e)}, \dots)$, από το Θεώρημα 2.7 παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} q_j^{(e)} &= 0 \text{ για κάθε } j \geq 1 \text{ αν } \frac{r}{c} \leq u_\infty \\ q_i^{(e)} &\in (0, 1) \text{ για } i = 1, 2, \dots, j-1 \text{ και } q_i^{(e)} = 1 \text{ για } i \geq j \text{ αν } u_j \leq \frac{r}{c} \leq u_{j-1} \\ q_j^{(e)} &= 1 \text{ για κάθε } j \geq 1 \text{ αν } u_1 \leq \frac{r}{c} \end{aligned}$$

Επομένως, οι περιπτώσεις για τα u_j προκύπτουν άμεσα. □

3.3.4 Μελέτη του συστήματος

Ο υπολογισμός των μέτρων απόδοσης στα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Αμοιβές. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι

Πρόταση 3.4. Μέτρα αποτίμησης απόδοσης

Δοθείσης της πληροφορίας I , ο ρυθμός εισόδου, ο ρυθμός απόδοσης και το κοινωνικό όφελος, υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών, υπολογίζονται αντίστοιχα από τους τύπους

(i)

$$EAR^{I-(e)} = \frac{E[N_{q_I^e}(X)]}{E[X]} \quad (3.104)$$

(ii)

$$TH^{I-(e)} = \frac{E[\min\{N_{q_I^e}(X), C\}]}{E[X]} \quad (3.105)$$

(iii)

$$SW^{I-(e)} = \frac{E[r \min\{N_{q_I^e}(X), C\} - c \sum_{k=1}^{N_{q_I^e}(X)} B_k]}{E[X]}, \quad (3.106)$$

όπου με B_k συμβολίζουμε τον χρόνο παραμονής του k -οστού πελάτη.

Απόδειξη. Σε όλες τις περιπτώσεις εφαρμόζουμε το Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Αμοιβές στη διαδικασία $\{M(t)\}$. Ειδικότερα, για την (i), ορίζουμε ως αμοιβή για τον k -οστό ανανεωτικό κύκλο την $R_k = N_{q_I^e}(X_k)$, δηλαδή το πλήθος των πελατών που εισέρχονται στον k -οστό κύκλο, υπό τη στρατηγική ισορροπίας τους. Επομένως, η αμοιβή που θα έχει συσσωρευθεί ως τη στιγμή t θα είναι $R(t) = \sum_{k=1}^{M(t)} R_k$. Επειδή η (R_i, X_i) είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., το Θεώρημα είναι εφαρμόσιμο και παίρνουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E[N_{q_I^e}(X)]}{E[X]} \quad (\mu.π. I). \quad (3.107)$$

καθώς και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[N_{q_I^e}(X_1)]}{E[X]}. \quad (3.108)$$

Η απόδειξη για τις (ii) και (iii) είναι παρόμοια. □

Θα χρησιμοποιήσουμε και το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 3.5. Για όλα τα επίπεδα που περιέχουν το C , ισχύει ότι

$$\frac{E[\min\{N_{q_I^e}(X_1), C\}]}{E[X_1]} = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \sum_{n=0}^{j-1} \int_0^{\infty} f_{T_{n+1}^{q_I^e}}(s) dF_A(s), \quad (3.109)$$

όπου τα $T_k^{q_I^e}$ είναι οι στιγμές γεγονότων στην $\{N_{q_I^e}(x)\}$ και η $f_{T_{n+1}^{q_I^e}}(s)$ είναι η πυκνότητα για τον χρόνο του $(n+1)$ -οστού γεγονότος.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 E[\min\{N_{q_I^e}(X_1), C_1\}] &= \int_0^\infty \sum_{j=0}^\infty h(j) E[\min\{N_{q_I^e}(x), j\} | X_1 = x, C_1 = j] dF_{X_1}(x) \\
 &= \int_0^\infty \sum_{j=0}^\infty h(j) \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(N_{q_I^e}(x) > n | X_1 = x, C_1 = j) \mathbb{1}_{\{j > n\}} dF_{X_1}(x) \\
 &= \sum_{j=0}^\infty h(j) \sum_{n=0}^{j-1} \int_0^\infty \mathbb{P}(N_{q_I^e}(x) > n | X_1 = x, C_1 = j) dF_{X_1}(x) \\
 &= \sum_{j=0}^\infty h(j) \sum_{n=0}^{j-1} \int_0^\infty \mathbb{P}(T_{n+1}^{q_I^e} < x | X_1 = x, C_1 = j) dF_{X_1}(x).
 \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \mathbb{P}(T_{n+1}^{q_I^e} < x | X_1 = x, C_1 = j) dF_{X_1}(x) &= \int_0^\infty \int_0^x f_{T_{n+1}^{q_I^e}}(s) ds dF_{X_1}(x) \\
 &= \int_0^\infty f_{T_{n+1}^{q_I^e}}(s) \int_x^\infty dF_{X_1}(x) ds = \int_0^\infty f_{T_{n+1}^{q_I^e}}(s) (1 - F(s)) ds,
 \end{aligned}$$

και $\frac{1-F(x)}{E[X_1]} = f_A(x)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε την (3.5). \square

Απόδειξη της Πρότασης 2.3 Έστω $\{N_{q^e}(a)\}$ η απαριθμητήρια διαδικασία για τους πελάτες που εισέρχονται στο $[0, a]$ και έστω S_1, S_2, \dots οι χρόνοι γεγονότων της διαδικασίας αυτής. Αφού $\pi(n|a) = \mathbb{P}(N_{q^e}(a) = n)$, θα έχουμε ότι

$$\pi(0|a) = 1 - F_{S_1}(a) \text{ και } \pi(n|a) = F_{S_n}(a) - F_{S_{n+1}}(a), \quad n \geq 1 \quad (3.110)$$

και επομένως αρκεί να προσδιορίσουμε την κατανομή του S_n . Προς την κατεύθυνση αυτή, θα δείξουμε ότι

$$F_{S_{n+1}|S_n}(s_{n+1}|s_n) = (1 - e^{-(\Lambda_n(s_{n+1}) - \Lambda_n(s_n))}) \mathbb{1}_{\{0 \leq s_n \leq s_{n+1}\}}. \quad (3.111)$$

Πράγματι, ισχύει ότι

$$\bar{F}_{S_{n+1}|S_n}(s_{n+1}|s_n) = \mathbb{P}(S_{n+1} > s_{n+1} | S_n = s_n) = \mathbb{P}(\text{καμία άφιξη στο } (s_n, s_{n+1}] | S_n = s_n).$$

Για να υπολογίσουμε την τελευταία πιθανότητα, παρατηρούμε πως η πρώτη άφιξη στο $(s_n, s_{n+1}]$ θα βλέπει ακριβώς n άλλους παρόντες πελάτες στο σύστημα. Επομένως, η διαδικασία για την πρώτη άφιξη πελάτη στο $(s_n, s_{n+1}]$ θα είναι μια μη-ομογενής διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda_n(s) = \lambda q^{(e)}(s, n)$ που θα συμβολίσουμε με $\{N_n(t)\}$. Τότε, θα είναι

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\text{καμία άφιξη στο } (s_n, s_{n+1}] | S_n = s_n) &= \mathbb{P}(N_n(s_{n+1}) - N_n(s_n) = 0 | S_n = s_n) \\
 &= e^{-(\Lambda_n(s_{n+1}) - \Lambda_n(s_n))} \mathbb{1}_{\{0 \leq s_n \leq s_{n+1}\}}
 \end{aligned}$$

και έτσι έχουμε την (3.111).

Για να προσδιορίσουμε τώρα την κατανομή του S_n θα δείξουμε αρχικά ότι

$$F_{S_1}(s_1) = 1 - e^{-\Lambda_0(s_1)} \quad (3.112)$$

$$F_{S_n}(s_n) = F_{S_{n-1}}(s_n) - e^{-\Lambda_{n-1}(s_n)} \int_0^{s_n} e^{\Lambda_{n-1}(s)} dF_{S_{n-1}}(s), \quad n \geq 2. \quad (3.113)$$

Για $n = 1$,

$$\begin{aligned}\bar{F}_{S_1}(s_1) &= \mathbb{P}(S_1 > s_1) = \mathbb{P}(\text{καμία άφιξη στο } (0, s_1] \mid 0 \text{ παρόντες πελάτες}) \\ &= \mathbb{P}(N_0(s_1) = 0) = e^{-\Lambda_0(s_1)}.\end{aligned}$$

Για $n \geq 2$ τώρα, παρατηρούμε ότι $F_{S_n}(s_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{S_n|S_{n-1}}(s_n|s) dF_{S_{n-1}}(s)$ και άρα, χρησιμοποιώντας την (3.111), παίρνουμε πως

$$\begin{aligned}F_{S_n}(s_n) &= \int_0^{s_n} (1 - e^{-(\Lambda_{n-1}(s_n) - \Lambda_{n-1}(s))}) dF_{S_{n-1}}(s) \\ &= F_{S_{n-1}}(s_n) - e^{-\Lambda_{n-1}(s_n)} \int_0^{s_n} e^{\Lambda_{n-1}(s)} dF_{S_{n-1}}(s).\end{aligned}$$

Από την τελευταία, παραγωγίζοντας ως προς s_n , παίρνουμε

$$\begin{aligned}f_{S_n}(s_n) &= f_{S_{n-1}}(s_n) + \lambda_{n-1}(s_n) e^{-\Lambda_{n-1}(s_n)} \int_0^{s_n} e^{\Lambda_{n-1}(s)} dF_{S_{n-1}}(s) \\ &\quad - e^{-\Lambda_{n-1}(s_n)} e^{\Lambda_{n-1}(s_n)} f_{S_{n-1}}(s_n) \\ &= \lambda_{n-1}(s_n) e^{-\Lambda_{n-1}(s_n)} \int_0^{s_n} e^{\Lambda_{n-1}(s)} dF_{S_{n-1}}(s).\end{aligned}\tag{3.114}$$

Στην (3.110) βάζουμε την (3.112) και παίρνουμε πως για $n \geq 2$

$$\pi(n|a) = e^{-\Lambda_n(a)} \int_0^a e^{\Lambda_n(s_n)} dF_{S_n}(s_n), \quad n \geq 1.$$

Επομένως, για $n = 2$, χρησιμοποιώντας την (3.114), θα έχουμε

$$\begin{aligned}\pi(2|a) &= e^{-\Lambda_2(a)} \int_0^a e^{\Lambda_2(s_2)} \lambda_1(s_2) e^{-\Lambda_1(s_2)} \int_0^{s_2} e^{\Lambda_1(s_1)} dF_{S_1}(s_1) ds_2 \\ &= e^{-\Lambda_2(a)} \int_0^a \lambda_1(s_2) e^{-(\Lambda_1(s_2) - \Lambda_2(s_2))} \int_0^{s_2} \lambda_0(s_1) e^{-(\Lambda_0(s_1) - \Lambda_1(s_1))} ds_1 ds_2.\end{aligned}$$

Θέτουμε $\Lambda_{(n-1,n)}(t) := \Lambda_{n-1}(t) - \Lambda_n(t) = \int_0^t (\lambda_{n-1}(u) - \lambda_n(u)) du$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda_{n-1}(u) - \lambda_n(u) = \lambda \mathbb{1}_{\{\frac{r\bar{H}(n)}{c} < m(u) \leq \frac{r\bar{H}(n-1)}{c}\}}.\tag{3.115}$$

Τέλος, το αποτέλεσμα (2.56) έπεται άμεσα αν αντικαθιστούμε συνεχώς την (3.114). \square

Απόδειξη της Πρότασης 2.4 Αρχικά παρατηρούμε πως σε κάθε αναγεννητικό κύκλο, στο επίπεδο πληροφόρησης CAN , η τιμή της τυχαίας μεταβλητής C είναι σταθερή και ίση με j . Αφού όμως

$$q_j^{(e)}(a, n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \leq j - 1 \text{ και } m(a) \leq \frac{r}{c}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases},$$

έπεται πως για $0 \leq n \leq j - 1$, οι ρυθμοί γίνονται $\lambda_n(a) = \lambda q_j(a, n) = \lambda \mathbb{1}_{\{m(u) \leq \frac{r}{c}\}}$, δηλαδή είναι ανεξάρτητοι του n . Επομένως, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων θα πάρει την εξής γνώριμη μορφή

$$\begin{aligned}\pi'(0|a) &= -\lambda(a)\pi(0|a), \\ \pi'(n|a) &= -\lambda(a)\pi(n|a) + \lambda(a)\pi(n-1|a), \quad 1 \leq n \leq j-1.\end{aligned}$$

Έπεται πως η λύση για $n \leq j - 1$ αντιστοιχεί στις πιθανότητες μιας μη ομογενούς διαδικασίας Poisson με ρυθμό $\lambda(a)$. Για $n = j$ χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης. \square

Απόδειξη της Πρότασης 2.5 Επειδή κάθε πελάτης που εισέρχεται, υπό τη στρατηγική ισορροπίας, θα εξυπηρετηθεί με βεβαιότητα, θα έχουμε ότι $EAR^{CAN-(e)} = TH^{CAN-(e)}$. Θα δείξουμε αρχικά ότι για $C = j$ είναι

$$EAR^{CAN-(e)}(j) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \lambda q_j^{(e)}(a, n) \pi_j(n|a) dF_A(a).$$

Από την Πρόταση 3.4 έχουμε ότι $EAR^{CAN-(e)} = \frac{E[N_{q_I^e}(X_1)]}{E[X_1]}$ και επομένως θα υπολογίσουμε το $E[N_{q_I^e}(X_1)]$. Δεσμεύοντας ως προς τον ενδιαμέσο χρόνο X_1 θα έχουμε

$$\begin{aligned} E[N_{q_I^e}(X_1)] &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(N_{q_I^e}(x) > n | X_1 = x) dF_{X_1}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{j-1} \int_0^\infty \mathbb{P}(N_{q_I^e}(x) > n | X_1 = x) dF_{X_1}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{j-1} \int_0^\infty \mathbb{P}(T_{n+1}^{q_i^e} < x) dF_{X_1}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{j-1} \int_0^\infty f_{T_{n+1}^{q_i^e}}(x) (1 - F(x)) dx, \end{aligned}$$

όπου με $T_{n+1}^{q_i^e}$ έχουμε συμβολίσει τον χρόνο του $(n+1)$ -οστού γεγονότος στη διαδικασία $N_{q_I^e}$. Επομένως, χρησιμοποιώντας ότι $\frac{1-F(x)}{E[X_1]} = f_A(x)$, παίρνουμε τελικά ότι

$$EAR^{CAN-(e)}(j) = \frac{E[N_{q_I^e}(X_1)]}{E[X_1]} = \sum_{n=0}^{j-1} \int_0^\infty f_{T_{n+1}^{q_i^e}}(a) dF_A(a)$$

Όμως έχουμε ότι $f_{T_{n+1}^{q_i^e}}(a) = \lambda_j(a, n) \pi_j(n|a) = \lambda q_j^{(e)}(a, n) \pi_j(n|a)$ (δείτε για παράδειγμα την απόδειξη της Πρότασης 2.3 και ειδικότερα την (3.114)), και άρα καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση. Τελικά, αποδεσμεύοντας παίρνουμε

$$EAR^{CAN-(e)} = \sum_{j=1}^\infty h(j) \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \lambda q_j^{(e)}(a, n) \pi_j(n|a) dF_A(a).$$

Επειδή όμως για $n \leq j-1$ είναι $\pi_j(n|a) = \sum_{n=0}^{j-1} e^{-\lambda(a)} \frac{(\lambda(a))^n}{n!} = p_j(\lambda(a))$, όπου η $p_j(s)$ δίνεται στην (2.3), θα έχουμε και την ακόλουθη έκφραση:

$$EAR^{CAN-(e)} = \sum_{j=1}^\infty h(j) \int_0^\infty \lambda q_j^{(e)}(a, n) p_j(\lambda(a)) dF_A(a).$$

Για το κοινωνικό όφελος θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 SW^{CAN-(e)} &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda q_j^{(e)}(a, n) G_j(a, n) \pi_j(n|a) dF_A(a) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \sum_{n=0}^{j-1} \int_0^{\infty} \lambda \mathbb{1}_{\{m(a) \leq \frac{r}{c}\}}(r - cm(a)) \pi_j(n|a) dF_A(a) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \int_0^{\infty} \lambda (r - cm(a))_+ \sum_{n=0}^{j-1} e^{-\lambda(a)} \frac{(\lambda(a))^n}{n!} dF_A(a) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \int_0^{\infty} \lambda (r - cm(a))_+ p_j(\lambda(a)) dF_A(a).
 \end{aligned}$$

□

Απόδειξη της Πρότασης 2.6 Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2.5. □

Απόδειξη της Πρότασης 2.7 Θεωρούμε το σύστημα στις στιγμές αφίξεων των πελατών. Θεωρούμε έναν πελάτη που καταλαμβάνει τη θέση $n + 1$, δηλαδή που παρατηρεί ακριβώς n άλλους πελάτες στο σύστημα τη στιγμή της άφιξης του. Ο ρυθμός άφιξης των πελατών στη $n + 1$ θέση είναι $\lambda q^{(e)}(n) \pi(n)$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα PASTA, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 &\frac{\text{αφίξεις στη θέση } n \text{ που εισέρχονται}}{\text{chr. μονάδα}} \\
 &= \frac{\text{συνολικές αφίξεις}}{\text{chr. μονάδα}} \times \frac{\text{αφίξεις στη θέση } n \text{ που εισέρχονται}}{\text{αφίξεις στη θέση } n} \times \frac{\text{αφίξεις στη θέση } n}{\text{συνολικές αφίξεις}} \\
 &= \lambda q^{(e)}(n) \pi(n)
 \end{aligned}$$

Επομένως, ο ρυθμός εισόδου είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda q^{(e)}(n) \pi(n).$$

Ο ρυθμός άφιξης των πελατών στη θέση $n + 1$ είναι $\lambda q^{(e)}(n) \pi(n)$. Αφού ο επιλεγμένος πελάτης που παρατηρεί n άλλους πελάτες στο σύστημα κατά τη στιγμή της άφιξης του θα λάβει εξυπηρέτηση αν και μόνο αν η χωρητικότητα στο επόμενο μέσο είναι τουλάχιστον $n + 1$, η πιθανότητα εξυπηρέτησης είναι $\mathbb{P}(C > n) = \bar{H}(n)$. Επομένως, ο ρυθμός απόδοσης θα είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda q^{(e)}(n) \pi(n) \bar{H}(n).$$

Το κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα ισούται με το άθροισμα του αναμενόμενου οφέλους ενός επιλεγμένου πελάτη σε κάθε κατάσταση του συστήματος. Ένας επιλεγμένος πελάτης που καταλαμβάνει τη θέση $n + 1$, θα λάβει αμοιβή r μονάδων αν εξυπηρετηθεί, δηλαδή με πιθανότητα $\mathbb{P}(C > n) = \bar{H}(n)$. Επιπλέον, θα συσσωρεύει κόστος c ανά χρονική μονάδα μέχρι τη εξυπηρέτησή του. Έστω $Y_{q_i}^{(n)}$ το πλήθος πελατών στη θέση n μια τυχαία χρονική στιγμή, δεδομένου ότι οι

πελάτες ακολουθούν την στρατηγική $\mathbf{q}^{(e)}$. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Little στην n -οστή θέση, ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής για τον πελάτη της θέσης $n + 1$, δίνεται από την

$$E[S_{q_I^e}^{(n)}] = \lambda q^{(e)}(n) \pi(n) E[Y_{q_I^e}^{(n)}].$$

Επομένως, το αναμενόμενο όφελος για τον επιλεγμένο πελάτη στη θέση $n + 1$ είναι

$$r\bar{H}(n) - c \frac{E[Y_{q_I^e}^{(n)}]}{\lambda q^{(e)}(n) \pi(n)},$$

και επομένως, το κοινωνικό όφελος είναι

$$\begin{aligned} SW^{N-(e)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda q^{(e)}(n) \pi(n) \left(r\bar{H}(n) - c \frac{E[Y_{q_I^e}^{(n)}]}{\lambda q^{(e)}(n) \pi(n)} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda q^{(e)}(n) \pi(n) r\bar{H}(n) - c \sum_{n=0}^{\infty} E[Y_{q_I^e}^{(n)}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda q^{(e)}(n) \pi(n) r\bar{H}(n) - c E[Y_{q_I^e}]. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει καθώς η θέση n καταλαμβάνεται αν και μόνο αν υπάρχουν τουλάχιστον n πελάτες στο σύστημα και άρα $\sum_{n=0}^{\infty} E[Y_{q_I^e}^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \pi(n) = E[Y_{q_I^e}]$. \square

Απόδειξη της Πρότασης 2.8 Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη της Πρότασης 2.7 \square

Απόδειξη της Πρότασης 2.9 Ο ρυθμός εισόδου υπολογίζεται από την Πρόταση 3.4. Λόγω της μη-ομογενούς διαδικασίας Poisson θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E[N_{\mathbf{q}_I^e}(X)] &= \int_0^{\infty} E[N_{\mathbf{q}_I^e}(x) | X = x] dF_X(x) = \int_0^{\infty} \lambda(x | \mathbf{q}_j^{(e)}) dF(x) = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^x \lambda q_j^{(e)}(u) du dF(x) = \lambda \int_0^{\infty} q_j^{(e)}(u) \int_u^{\infty} dF(x) du = \\ &= \lambda \int_0^{\infty} q_j^{(e)}(u) (1 - F(u)) du, \end{aligned}$$

από όπου παίρνουμε άμεσα την (2.75).

Ο ρυθμός απόδοσης μπορεί να υπολογιστεί από την Πρόταση 3.4. Σύμφωνα με την τελευταία, είναι $TH^{CA-(e)} = \frac{E[\min\{N_{\mathbf{q}_I^e}(X), C\}]}{E[X]}$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.5 παίρνουμε ότι

$$\frac{E[\min\{N_{\mathbf{q}_I^e}(X_1), C_1\}]}{E[X_1]} = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \sum_{n=0}^{j-1} \int_0^{\infty} f_{T_{n+1}^{q_I^e}}(s) dF_A(s), \quad (3.116)$$

όπου τα $(T_k^{q_I^e})$ είναι οι στιγμές γεγονότων στην $N_{\mathbf{q}_I^e}(x)$ και η $f_{T_{n+1}^{q_I^e}}(s)$ είναι η πυκνότητα για τον χρόνο του $(n + 1)$ -οστού γεγονότος. Αφού όμως η διαδικασία αφίξεων των πελατών είναι μη ομογενής Poisson, η κατανομή του $(T_k^{q_I^e})$ είναι

$$\mathbb{P}(T_k^{q_I^e} < x) = \int_0^x \lambda q_j^{(e)}(u) \frac{(\lambda(u | \mathbf{q}_j^{(e)}))^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(u | \mathbf{q}_j^{(e)})} du.$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία και αντικαθιστώντας στην (3.116) προκύπτει άμεσα η ζητούμενη έκφραση.

Με ανάλογους υπολογισμούς δείχνουμε πως το κοινωνικό όφελος παίρνει τη μορφή

$$SW^{CA-(e)} = \lambda \int_0^\infty q_j^{(e)}(a)(rp_j(\lambda(a|\mathbf{q}_j^{(e)})) - cm(a))\frac{1-F(a)}{\bar{x}}da. \quad (3.117)$$

□

Απόδειξη της Πρότασης 2.11 Αρχικά, για το επίπεδο C : η (2.81) είναι άμεση καθώς η $N_{q_j^e}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda q_j^{(e)}$. Για το ρυθμό απόδοσης χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.5. Θα πάρουμε ότι

$$TH^{C-(e)} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{m=j\}} \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^\infty \lambda q_j^{(e)} \frac{(\lambda q_j^{(e)} s)^n}{n!} e^{-\lambda q_j^{(e)} s} dF_A(s) = \int_0^\infty \lambda q_j^{(e)} p_j(\lambda q_j^{(e)} s) dF_A(s).$$

Για το κοινωνικό όφελος, έχουμε ότι εξ'ορισμού δίνεται από την $SW^{C-(e)} = \lambda q_j^{(e)} \times G_j(q_j^{(e)})$.

Θα υπολογίσουμε τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης για το επίπεδο \emptyset . Ο ρυθμός εισόδου δίνεται από την (2.84), λόγω του ότι η $\{N_{q^e}\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda q^{(e)}$. Ο ρυθμός απόδοσης, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.4 είναι

$$TH^{\emptyset-(e)} = \frac{E[\min\{N_{q_0^e}(X_1), C_1\}]}{E[X_1]} = \frac{E[\min\{N_{q_0^e}(X_1), C_1\}]}{E[N_{q_0^e}(X_1)]} \frac{E[N_{q_0^e}(X_1)]}{E[X_1]}.$$

Αφού

$$\frac{E[\min\{N_{q_0^e}(X_1), C_1\}]}{E[X_1]} = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) \int_0^\infty p_j(\lambda q^{(e)} a) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da = P(q^{(e)}),$$

παίρνουμε την (2.85). Για το κοινωνικό όφελος παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k=1}^{N_{q_0^e}(X_1)} B_k\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbb{1}_{\{N_{q_0^e}(X_1) \geq k\}} B_k] = \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbb{1}_{\{N_{q_0^e}(X_1) \geq k\}}] E[B_k] \\ &= E[B_1] E[N_{q_0^e}(X_1)], \end{aligned}$$

αφού οι $\mathbb{1}_{\{N_{q_0^e}(X_1) \geq k\}}$ και B_k είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.4 παίρνουμε ότι

$$SW^{\emptyset-(e)} = rTH^{\emptyset-(e)} - cEAR^{\emptyset-(e)}E[B] = \lambda q^{(e)}(rP(q^{(e)}) - c\frac{\bar{x}^{(2)}}{2\bar{x}}). \quad (3.118)$$

□

3.3.5 Η επίδραση της πληροφορίας

Απόδειξη της Πρότασης 2.12 Για το επίπεδο C : Έστω (προς άτοπο) ότι $q_j > q_{j+1}$. Αν $q_j \in (0, 1]$, τότε θα είναι και $q_{j+1} \in [0, 1)$ και από τον ορισμό της στρατηγικής ισορροπίας και επειδή η $P_j(s)$ είναι γν. αύξουσα ως προς j και γν. φθίνουσα ως προς s , θα είναι $0 \leq G_j(q_j) = rP_j(q_j) - cE[B] < rP_{j+1}(q_j) - cE[B] < rP_{j+1}(q_{j+1}) - cE[B] = G_{j+1}(q_{j+1}) \leq 0$ το οποίο είναι άτοπο.

Για το επίπεδο CN : Είναι $q_j(n) = (q_j(0), q_j(1), \dots, q_j(j-1), 0, 0, \dots)$ και $q_{j+1}(n) = (q_{j+1}(0), q_{j+1}(1), \dots, q_{j+1}(j-1), q_{j+1}(j), 0, \dots)$. Είναι όμως $q_j(k) = q_{j+1}(k)$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, j-1$ διότι οι αριθμοί αυτοί αποτελούν ρίζες των ίδιων εξισώσεων, και $q_{j+1}(j) \in [0, 1]$. Επομένως, $q_j(n) \leq q_{j+1}(n)$ για κάθε n .

Για το επίπεδο CAN : Είναι προφανές ότι για κάθε n και κάθε a είναι $q_j(a, n) \leq q_{j+1}(a, n)$, από την (2.14). \square

Απόδειξη του Πορίσματος 2.3 Αν $\frac{r}{c} \leq \inf_{a \geq 0} m(a)$, τότε θα είναι $\frac{r}{c} \leq m(a)$ για κάθε $a > 0$. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε ότι $\frac{r}{c} \leq \int_0^\infty m(a) dF_A(a) \Rightarrow \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}$. \square

Απόδειξη του Πορίσματος 2.4 Για το επίπεδο πληροφόρησης $i \in \{CA, C\}$, λόγω του ότι η $p_j(s)$ είναι αύξουσα ως προς j για κάθε s , η $G_j^I(i|\mathbf{q}_j)$ θα είναι αύξουσα ως προς j για οποιαδήποτε στρατηγική \mathbf{q}_j . Αν για κάποιο j^* ισχύει ότι $\mathbf{q}_{j^*}^{(e,i)} = 1$, τότε, θα έχουμε πως $G_{j^*}^I(i|\mathbf{q}_{j^*}^{(e,i)}) \geq 0$ στο πεδίο ορισμού της. Έπεται άμεσα ότι για κάθε $j \geq j^*$ θα είναι $G_j^I(i|\mathbf{q}_j) \geq G_{j^*}^I(i|\mathbf{q}_{j^*}^{(e,i)}) \geq 0$ στο πεδίο ορισμού της και επομένως το $\mathbf{q}_j^{(e,i)} = 1$ είναι ΣΣΙ για κάθε $j \geq j^*$ και έχουμε το (i).

Για το (ii) έχουμε ότι, αν για κάποιο j είναι $\mathbf{q}_j^{(e,i)} = 0$, τότε θα ισχύει είτε $\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} \geq \frac{r}{c}$ (αν $i = C$), είτε $\inf_{a \geq 0} m(a) \geq \frac{r}{c}$ (αν $i = CA$). Από το Πρόρισμα 2.2, έχουμε το ζητούμενο. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.9 Αρχικά θα δείξουμε ότι $SW^{C-(e)} \geq SW^{\emptyset-(e)}$. Σχετικά με τις στρατηγικές ισορροπίας στα επίπεδα C και \emptyset , συγκρίνοντας τη σχετική θέση της τιμής $\frac{r}{c}$ ως προς τους αριθμούς u , μπορούμε να έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\frac{r}{c} \leq u_\infty$.

Τότε, $q^{(e)} = 0$

και $q_j^{(e)} = 0$ για κάθε $j \geq 1$.

Έπεται ότι $SW^{C-(e)} = SW^{\emptyset-(e)} = 0$.

Περίπτωση 2: $u_j \leq \frac{r}{c} < u_{j-1}$ για κάποιο $j > j_0$.

Τότε, $q^{(e)} = 0$

και $q_i^{(e)} \in (0, 1)$ για $i = 1, 2, \dots, j-1$

και $q_i^{(e)} = 1$ για $i \geq j$.

Έπεται ότι $SW^{C-(e)} = \lambda \sum_{i=j}^\infty G_i(1) > 0 = SW^{\emptyset-(e)}$.

Περίπτωση 3: $u_{j_0} \leq \frac{r}{c} < u_g$.

Τότε, $q^{(e)} \in (0, 1)$

και $q_i^{(e)} \in (0, 1)$ για $i = 1, 2, \dots, j_0 - 1$

και $q_i^{(e)} = 1$ για $i \geq j_0$.

Έπεται ότι $SW^{C-(e)} = \lambda \sum_{i=j_0}^\infty G_i(1) > 0 = SW^{\emptyset-(e)}$, διότι $G_i(1) > 0$ για $i \geq j_0$.

Περίπτωση 4: $u_j \leq \frac{r}{c} < u_{j_0-1}$.

Τότε, $q^{(e)} = 1$

και $q_i^{(e)} \in (0, 1)$ για $i = 1, 2, \dots, j_0 - 1$

και $q_i^{(e)} = 1$ για $i \geq j_0$.

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} SW^{C-(e)} - SW^{\emptyset-(e)} &= \sum_{i=j_0}^{\infty} g(i)\lambda G_i(1) - \lambda G(1) \\ &= \sum_{i=j_0}^{\infty} g(i)\lambda G_i(1) - \sum_{i=1}^{\infty} g(i)\lambda G_i(1) \\ &= \sum_{i=1}^{j_0-1} g(i)\lambda G_i(1). \end{aligned}$$

Όμως, για $i \leq j_0 - 1$ είναι $G_i(1) \leq 0$ και άρα παίρνουμε ότι $SW^{C-(e)} \geq SW^{\emptyset-(e)}$

Περίπτωση 5: $u_j \leq \frac{r}{c} < u_{j-1}$ για κάποιο $2 \leq j < j_0$.

Τότε, $q^{(e)} = 1$

και $q_i^{(e)} \in (0, 1)$ για $i = 1, 2, \dots, j - 1$

και $q_i^{(e)} = 1$ για $i \geq j$.

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} SW^{C-(e)} - SW^{\emptyset-(e)} &= \sum_{i=j}^{\infty} g(i)\lambda G_i(1) - \lambda G(1) \\ &= \sum_{i=j_0}^{\infty} g(i)\lambda G_i(1) - \sum_{i=1}^{\infty} g(i)\lambda G_i(1) \\ &= \sum_{i=1}^{j_0-1} g(i)\lambda G_i(1). \end{aligned}$$

Όμως, για $i \leq j - 1$ είναι $G_i(1) \leq 0$ και άρα παίρνουμε ότι $SW^{C-(e)} \geq SW^{\emptyset-(e)}$

Περίπτωση 6: $u_1 \leq \frac{r}{c}$ Τότε, $q^{(e)} = 1$

και $q_j^{(e)} = 1$ για κάθε $j \geq 1$.

Έπεται ότι $SW^{\emptyset-(e)} = SW^{C-(e)}$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση έχουμε πως $SW^{C-(e)} \geq SW^{\emptyset-(e)}$ ενώ η ανίσωση είναι γνήσια στις περιπτώσεις 2,3,4,5.

θα δείξουμε ότι $SW^{CA-(e)} \geq SW^{C-(e)}$. Έχουμε ότι

$$SW^{CA-(e)} = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \int_0^{\infty} q_j^{(e)}(a) G_j(a | \mathbf{q}_j^{(e)}) \frac{1 - F(a)}{\bar{x}} da$$

και

$$SW^{C-(e)} = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} g(j) q_j^{(e)} G_j(q_j^{(e)}).$$

Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι

$$\int_0^\infty q_j^{(e)}(a) G_j(a | \mathbf{q}_j^{(e)}) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da \geq q_j^{(e)} G_j(q_j^{(e)}) \text{ για κάθε } j \geq 1.$$

Επειδή $G_j(a | \mathbf{q}_j^{(e)}) \leq 0$ όταν $q_j^{(e)}(a) < 1$, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty q_j^{(e)}(a) G_j(a | \mathbf{q}_j^{(e)}) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da &\geq \int_0^\infty G_j(a | \mathbf{q}_j^{(e)}) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da \\ &= \int_0^\infty r p_j(\lambda(a | \mathbf{q}_j^{(e)})) - c m(a) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da \\ &= r \int_0^\infty p_j(\lambda(a | \mathbf{q}_j^{(e)})) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da - c \int_0^\infty m(a) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da \\ &= r \int_0^\infty p_j(\lambda(a | \mathbf{q}_j^{(e)})) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da - c \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty m(a) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da &= \int_0^\infty E[R|A=a] dF_A(a) \\ &= E[E[R|A]] = E[R] = \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}. \end{aligned}$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\lambda(a | \mathbf{q}_j^{(e)}) = \int_0^a \lambda q_j^{(e)}(u) du \leq \lambda a,$$

και αφού η $p_j(s)$ είναι φθίνουσα ως προς s , θα έχουμε τελικά πως $p_j(\lambda(a | \mathbf{q}_j^{(e)})) \geq p_j(\lambda a)$ και άρα

$$r \int_0^\infty p_j(\lambda(a | \mathbf{q}_j^{(e)})) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da - c \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} \geq r \int_0^\infty p_j(\lambda a) \frac{1-F(a)}{\bar{x}} da - c \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} = G_j(1).$$

Επιπλέον, αφού $q_j^{(e)}(a) G_j(a | \mathbf{q}_j^{(e)}) \geq 0$ θα έχουμε τελικά πως

$$SW^{CA-(e)} \geq \max\{G_j(1), 0\} \geq q_j^{(e)} G_j(q_j^{(e)}).$$

□

3.3.6 Η επίδραση της κατανομής των ενδιαμέσων χρόνων

Απόδειξη του Πορίσματος 2.5 Όταν η $m(a)$ είναι μονότονη, η ανισότητα $r - cm(a) \geq 0$ μπορεί να λυθεί αναλυτικά ως προς a και τότε παίρνουμε ότι η κυριαρχούσα στρατηγική δίνεται από την (2.88) και την (2.89), για τις περιπτώσεις 3 και 4 αντίστοιχα. □

Απόδειξη του Πορίσματος 2.6 Στην περίπτωση 1, έχουμε ότι $\inf_{a \in [0, \infty)} m(a) = m(0) = \bar{x} \geq \frac{r}{c}$, λόγω της μονοτονίας της $m(a)$. Επομένως, από το 1 του Πορίσματος 2.1, το αποτέλεσμα είναι άμεσο.

Στην περίπτωση 2, έχουμε ότι $\frac{r}{c} > \bar{x} = m(0)$, και άρα $\frac{r}{c} > \frac{m(0)}{p_j(\lambda 0)}$. Παρατηρούμε επίσης ότι η συνάρτηση $\frac{m(a)}{p_j(\lambda a)}$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς a , καθώς η $m(a)$ είναι αύξουσα και η $p_j(\lambda a)$

είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{m(a)}{p_j(\lambda a)} = \infty$ (καθώς $m(a) \geq m(0) = \bar{x} > 0$ και $\lim_{a \rightarrow \infty} p_j(\lambda a) = 0$). Τελικά, υπάρχει μοναδική λύση t^* της εξίσωσης $\frac{m(a)}{p_j(\lambda a)} = \frac{r}{c}$ στο $(0, \infty)$. Λόγω της μονοτονίας της $\frac{m(a)}{p_j(\lambda a)}$ και του ορισμού του t^* , έχουμε

$$\sup_{a \in [0, t^*]} \frac{m(a)}{p_j(\lambda a)} = \frac{m(t^*)}{p_j(\lambda t^*)} = \frac{r}{c}, \quad (3.119)$$

και λόγω της μονοτονίας της $m(a)$ και του ορισμού του t^* , έχουμε επίσης

$$\frac{1}{p_j(\lambda t^*)} \inf_{a \in [t^*, \infty)} m(a) = \frac{m(t^*)}{p_j(\lambda t^*)} = \frac{r}{c}. \quad (3.120)$$

Συνδυάζοντας τις (3.119) και (3.120), διαπιστώνουμε ότι η (2.43) πράγματι ισχύει, και άρα η στρατηγική ισορροπίας είναι τύπου t^* -κατωφλίου. \square

Απόδειξη του Πορίσματος 2.7 Όταν η κατανομή ενδιαμέσων χρόνων είναι τύπου DMRL, έχουμε ότι η παράγωγος $m'(a)$ είναι αρνητική και άρα η $\gamma_j^{(e)}(a)$ που δίνεται από την (2.34) είναι απαραίτητα μη αρνητική (καθώς $p_j'(s) < 0$). Επομένως, μόνο ο άνω κλάδος της (2.38) εμφανίζεται και άρα θα έχουμε ότι $d_j^{(e,n)} = 1$ για $n \geq 2$. Επιπλέον, οι τύποι $s_j^{(e,n)}$ που δίνονται από τις (2.37) και (2.40) απλοποιούνται στην (2.90).

Για την περίπτωση 1, από το γεγονός ότι $\lim_{a \rightarrow \infty} m(a) \geq \frac{r}{c}$ αλλά και από τη μονοτονία της $m(a)$, έπεται ότι η (2.41) ισχύει και άρα η στρατηγική ισορροπίας είναι η στρατηγική καθολικής αποχώρησης.

Για τις περιπτώσεις 2 και 3, η συνθήκη $\inf_{a \in [0, \infty)} \gamma_j^{(e)}(a) \geq 1$ μας δείχνει ότι ο κάτω κλάδος της (2.33) δεν μπορεί να ισχύει, δηλαδή, η στρατηγική ισορροπίας δεν τυχαιοποιεί. Έχουμε ήδη δείξει ότι στην περίπτωση DMRL έχουμε ότι $d_j^{(e,n)} = 1$, για $n \geq 2$. Επομένως, η στρατηγική ισορροπίας γίνεται είτε η στρατηγική καθολικής εισόδου, όταν $d_j^{(e,1)} = 1$ (για $\frac{r}{c} \geq \bar{x}$) είτε μια στρατηγική τύπου t^* -ανάποδου κατωφλίου (για $\frac{r}{c} < \bar{x}$). Στην τελευταία περίπτωση, ο κρίσιμος αριθμός t^* , που αντιστοιχεί στον αριθμό $t^{(e,1)}$ του Θεωρήματος 2.4, χαρακτηρίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $m(a) = \frac{r}{c}$ στο $(0, \infty)$ (χρησιμοποιώντας τον κάτω κλάδο της (2.36)).

Για τις περιπτώσεις 4 και 5, η συνθήκη $\sup_{a \in [0, \infty)} \gamma_j^{(e)}(a) \leq 1$ μας δείχνει ότι $s_j^{(e,1)} = \infty$, και άρα ο τύπος (2.33) για τη στρατηγική ισορροπίας απλοποιείται στον

$$q_j^{(e)}(a) = \begin{cases} d_j^{(e,1)} & \text{αν } a \in [0, t^*), \\ \gamma_j^{(e)}(a) & \text{αν } a \in [t^*, \infty). \end{cases} \quad (3.121)$$

Όταν $\frac{r}{c} < \bar{x}$, έχουμε ότι $d_j^{(e,1)} = 0$ και το t^* χαρακτηρίζεται ως η μικρότερη λύση της $m(a) = \frac{r}{c}$ στο $(0, \infty)$ και έχουμε τελειώσει με την περίπτωση 4. Όταν $\frac{r}{c} \geq \bar{x}$, καταλήγουμε με όμοιο τρόπο στην περίπτωση 5. \square

3.3.7 Η επίδραση της κατανομής της χωρητικότητας

Απόδειξη της Πρότασης 2.13 Όταν $\frac{x(2)}{2\bar{x}} > \frac{r}{c}$, η στρατηγική ισορροπίας για το επίπεδο \emptyset είναι η στρατηγική ‘no one enter’ και επομένως $TH^{\emptyset-(e)} = 0 \leq TH^{A-(e)}$ και $SW^{\emptyset-(e)} = 0 \leq SW^{A-(e)}$.

Από την άλλη, αν $\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} \leq \frac{r}{c}$, τότε η στρατηγική ισορροπίας στο επίπεδο \emptyset είναι η στρατηγική καθολικής εισόδου και επομένως, $TH^{\emptyset-(e)} = \lambda$ και $SW^{\emptyset-(e)} = \lambda(r - c\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}})$. Για το επίπεδο A θα έχουμε ότι,

$$TH^{A-(e)} = \int_0^\infty 1_{\{m(a) \leq \frac{r}{c}\}} dF_A(a) = \lambda \mathbb{P}(A \in A^{(\frac{r}{c})}) \leq \lambda,$$

όπου $A^{(\frac{r}{c})} = \{a : m(a) \leq \frac{r}{c}\}$. Επίσης, έχουμε πως

$$SW^{A-(e)} = \lambda \int_0^\infty 1_{\{m(a) \leq \frac{r}{c}\}} (r - cm(a)) dF_A(a) = \lambda \int_{A^{(\frac{r}{c})}} (r - cm(a)) dF_A(a).$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty m(a) dF_A(a) &= \int_0^\infty \int_a^\infty \frac{1-F(x)}{1-F(a)} dx dF_A(a) = \int_0^\infty \int_0^x \frac{1-F(x)}{1-F(a)} dF_A(a) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1-F(x)}{E[X]} dF_A(a) \int_0^x dx = \int_0^\infty x \frac{1-F(x)}{E[X]} dF_A(a) \\ &= E[R] = \frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} SW^{\emptyset-(e)} &= \lambda \int_0^\infty (r - cm(a)) dF_A(a) = \\ &= \lambda \int_{A^{(\frac{r}{c})}} (r - cm(a)) dF_A(a) + \lambda \int_{(A^{(\frac{r}{c})})'} (r - cm(a)) dF_A(a) \leq \\ &\leq \lambda \int_{A^{(\frac{r}{c})}} (r - cm(a)) dF_A(a) = SW^{A-(e)}, \end{aligned}$$

καθώς στο $(A^{(\frac{r}{c})})'$ ισχύει $m(a) \geq \frac{r}{c}$ και άρα

$$\int_{(A^{(\frac{r}{c})})'} (r - cm(a)) dF_A(a) \leq 0.$$

□

3.3.8 Το πρόβλημα του κοινωνικού διαχειριστή

Απόδειξη της Πρότασης 2.14 Παραγωγίζοντας δύο φορές την $S(q)$, στην (2.97) θα δώσει

$$S''(q) = 2\lambda G(q) + \lambda q G'''(q) \text{ και η τελευταία ισούται με } \lambda r \sum_{j=1}^{\infty} h(j) (2\lambda P'_j(\lambda q) + \lambda^2 q P''_j(\lambda q)).$$

Επομένως, $S''(q) < 0 \Leftrightarrow (qP(\lambda q))'' < 0$. Εξασφαλίσαμε λοιπόν ότι όταν η $qP_j(\lambda q)$ είναι γνησίως κοίλη, θα είναι και η $S(q)$. Με το τελευταίο εξασφαλίσαμε τη μοναδικότητα ενός σημείου μεγίστου. Η ύπαρξη ενός τουλάχιστον σημείου μεγίστου στο $[0, 1]$ εξασφαλίζεται από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής. □

Απόδειξη της Πρότασης 2.15 Επειδή $S'(0) = \lambda G(0) = \lambda(r - cE[B])$, προκύπτει άμεσα πως $q^{soc} = 0 \Leftrightarrow r - c\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}} \leq 0$. Όμως, από το Θεώρημα 2.8, η τελευταία είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε $q^{(e)} = 0$. Επίσης, παρατηρήστε πως επειδή η $G_j(q)$ είναι γνησίως φθίνουσα θα έχουμε ότι $S'(q) = \lambda G_j(q) + \lambda q G'_j(q) \leq \lambda G_j(q)$, με την ανισότητα να είναι γνήσια εκτός αν $q = 0$. Επομένως, αν έχουμε ότι $q^e \in (0, 1) : G_j(q^e) = 0$, τότε η εξίσωση $S'(q) = 0$ θα έχει λύση στο $(0, 1)$ και η λύση αυτή θα είναι μικρότερη ή ίση από το $q^{(e)}$. □

Κεφάλαιο 3: Τεχνικές αποδείξεις

3.3.9 Ειδική περίπτωση-Σταθεροί ενδιάμεσοι χρόνοι

Στρατηγικές ισορροπίας

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 Η μορφή της κυριαρχούσας στρατηγικής είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1, και ειδικότερα, της εξίσωσης (2.14), λαμβάνοντας υπόψη ότι $m(a) = \bar{x} - a$ και λόγω της υπόθεσης ότι $\frac{r}{c} \leq \bar{x}$. Επίσης, έχουμε ότι

$$\lambda(a) = \int_0^a \lambda q_j^{(e)}(u, n) du = \begin{cases} 0 & \text{αν } a < \bar{x} - \frac{r}{c}, \\ \lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c}) & \text{αν } \bar{x} - \frac{r}{c} \leq a \leq \bar{x}. \end{cases}$$

Επομένως, στο $\{C = j\}$, ο ρυθμός απόδοσης (και ο ρυθμός εισόδου), από την (2.60) αλλά και το κοινωνικό όφελος, από την (2.61) θα πάρουν τις μορφές

$$\begin{aligned} TH_j^{CAN-(e)} &= \frac{\lambda}{\bar{x}} \int_{\bar{x} - \frac{r}{c}}^{\bar{x}} p_j(\lambda(a)) da = \frac{\lambda}{\bar{x}} \int_{\bar{x} - \frac{r}{c}}^{\bar{x}} p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})) da \\ &= \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\frac{\lambda r}{c}} p_j(u) du = \frac{1}{\bar{x}} \frac{\lambda r}{c} \frac{\int_0^{\frac{\lambda r}{c}} p_j(u) du}{\frac{\lambda r}{c}}, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} SW_j^{CAN-(e)} &= \frac{\lambda}{\bar{x}} \int_{\bar{x} - \frac{r}{c}}^{\bar{x}} (r - c(\bar{x} - a)) p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})) da \\ &= \frac{1}{\bar{x}} \frac{c}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda r}{c}} u p_j(u) du \\ &= \frac{r}{\bar{x}} \frac{\int_0^{\frac{\lambda r}{c}} u p_j(u) du}{\frac{\lambda r}{c}}, \end{aligned}$$

όπου και στα δύο ολοκληρώματα έχουμε κάνει αλλαγή μεταβλητών με $u = \lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})$. Παρατηρήστε ότι τότε $r - c(\bar{x} - a) = \frac{cu}{\lambda}$.

Επομένως, θεωρώντας τις συναρτήσεις $\phi_j(x) = \frac{\int_0^x p_j(u) du}{x}$ και $\tilde{\phi}_j(x) = \frac{\int_0^x u p_j(u) du}{x}$ παίρνουμε απευθείας τις σχέσεις (3.6) και (3.7), αποδεσμεύοντας ως προς την τ.μ. C . \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 Για $j = 1$, έχουμε ότι $p_1(s) = e^{-s}$, και άρα $p_1^{-1}(u) = -\ln(u)$. Επομένως, η $\gamma_j^{(e)}(a)$ στην (2.34) παίρνει τη μορφή

$$\gamma_1^{(e)}(a) = \frac{1}{\lambda(\bar{x} - a)}.$$

Η παραπάνω έχει θετική παράγωγο: $\gamma_1^{(e)'}(a) = \frac{1}{\lambda(\bar{x} - a)^2} > 0$ και άρα η $\gamma_1^{(e)}(a)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \bar{x})$. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι

$$\gamma_1^{(e)}(0) = \frac{1}{\lambda \bar{x}} > 0, \quad \gamma_1^{(e)}(\bar{x} - \frac{r}{c}) = \frac{c}{\lambda r}, \quad \gamma_1^{(e)}(\bar{x} - \frac{1}{\lambda}) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{a \rightarrow \bar{x}^-} \gamma_1^{(e)}(a) = \infty. \quad (3.122)$$

Επειδή η $\gamma_1^{(e)}(a)$ είναι θετική για όλα τα $a \in [0, \bar{x})$, θα είναι $d_j^{(e,n)} = 1$, για $n \geq 2$ (καθώς τα $d_j^{(e,n)}$ δεν θα δίνονται από τον κάτω κλάδο της (2.38)). Επιπλέον, για $a > s_1^{(e,1)}$ όπου το $s_1^{(e,1)}$ δίνεται

στην (2.37), θα έχουμε αναγκαστικά ότι $q_1^{(e)}(a) = 1$. Πράγματι, λόγω της μονοτονίας της $\gamma_1^{(e)}(a)$ που είναι γνήσια, έπεται ότι $\gamma_1^{(e)}(a) > \gamma_1^{(e)}(s_1^{(e,1)}) = 1$, για $a > s_1^{(e,1)}$, το οποίο σημαίνει ότι δεν είναι πιθανότητα και άρα το $q_1^{(e)}(a)$ δεν μπορεί να είναι ίσο με $\gamma_1^{(e)}(a)$. Ωστόσο, η τιμή 0 δεν είναι αποδεκτή εξίσου ως πιθανή τιμή της $q_1^{(e)}(a)$ για αυτό το a , καθώς είναι $d_j^{(e,n)} = 1$, για $n \geq 2$. Τελικά, καταλήγουμε ότι ο γενικός τύπος (2.33) για την πιθανότητα $q_1^{(e)}(a)$ απλοποιείται στον

$$q_1^{(e)}(a) = \begin{cases} d_1^{(e,1)} & \text{αν } a \in [0, t_1^{(e,1)}), \\ \gamma_j^{(e)}(a) & \text{αν } a \in [t_1^{(e,1)}, s_1^{(e,1)}), \\ 1 & \text{αν } a \in [s_1^{(e,1)}, \bar{x}]. \end{cases} \quad (3.123)$$

Επομένως, για να προσδιορίσουμε πλήρως τη στρατηγική ισορροπίας, αρκεί να προσδιοριστούν τα $d_1^{(e,1)}$, $t_1^{(e,1)}$ και $s_1^{(e,1)}$ σε όλο το εύρος των τιμών των παραμέτρων τους.

Από την υπόθεση πως $\frac{r}{c} < \bar{x}$ (η οποία αντιστοιχεί στις περιπτώσεις 1 και 2 του άνω Θεωρήματος), έχουμε ότι $d_1^{(e,1)} = 0$ από την (2.35). Τότε, η εξίσωση (2.36) με την οποία ορίζεται το $t_1^{(e,1)}$ είναι $\bar{x} - a = \frac{r}{c}$ από όπου παίρνουμε ότι $t_1^{(e,1)} = \bar{x} - \frac{r}{c}$. Διακρίνουμε επιπλέον δύο υποπερίπτώσεις σχετικά με το αν $\gamma_1^{(e)}(\bar{x} - \frac{r}{c}) = \frac{c}{\lambda r}$ είναι μεγαλύτερη ή ίσο της μονάδας ή όχι. Στην πρώτη υποπερίπτωση, ο μεσαίος κλάδος της (3.123) εξαφανίζεται και έχουμε ότι η στρατηγική ισορροπίας δίνεται από την (3.8) (περίπτωση 1). Στην τελευταία υποπερίπτωση, ο μεσαίος κλάδος υπάρχει και έχουμε ότι η στρατηγική ισορροπίας είναι (3.9) (Περίπτωση 2).

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τον ρυθμό $\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)})$ και τα μέτρα απόδοσης του συστήματος.

Στην περίπτωση 1: $\frac{r\lambda}{c} < 1$, όπου $q_1^{(e)}(a) = \mathbb{1}_{\{\bar{x} - \frac{r}{c} \leq a \leq \bar{x}\}}$, θα είναι

$$\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) = \lambda \int_0^a q_1^{(e)}(u) du = \begin{cases} 0 & \text{αν } a < \bar{x} - \frac{r}{c}, \\ \lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c}) & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

το οποίο δίνει την (3.10). Επομένως, ο ρυθμός αφίξεων υπό τη στρατηγική ισορροπίας θα είναι $EAR_1^{(e)} = \frac{1}{\bar{x}} \lambda(\bar{x}|\mathbf{q}_1^{(e)}) = \frac{1}{\bar{x}} \frac{r\lambda}{c}$. Για τον ρυθμό απόδοσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} TH_1^{(e)} &= \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} \lambda q_1^{(e)}(a) p_1(\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)})) da = \frac{1}{\bar{x}} \int_{\bar{x} - \frac{r}{c}}^{\bar{x}} \lambda p_1(\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)})) da \\ &= \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\frac{r\lambda}{c}} p_1(u) du = \frac{1}{\bar{x}} \frac{r\lambda}{c} f_1\left(\frac{r\lambda}{c}\right). \end{aligned}$$

Ακόμη, για το κοινωνικό όφελος υπολογίζουμε ότι

$$SW_1 = \frac{1}{\bar{x}} \left(r(1 - e^{-\frac{\lambda r}{c}}) - \frac{r^2 \lambda}{2c} \right) = \frac{r^2 \lambda}{x\bar{x}} \left(f_1\left(\frac{\lambda r}{c}\right) - \frac{1}{2} \right) = r \left(TH_1 - \frac{EAR_1}{2} \right).$$

Στην περίπτωση 2: $\frac{r\lambda}{c} \geq 1$, όπου το $q_1^{(e)}(a)$ δίνεται από την (3.123), θα έχουμε ότι για $a < \bar{x} - \frac{r}{c}$ θα είναι $\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) = 0$ ενώ για $a \in [\bar{x} - \frac{r}{c}, \bar{x} - \frac{1}{\lambda}]$, θα είναι

$$\begin{aligned} \lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) &= \lambda \int_{\bar{x} - \frac{r}{c}}^a \frac{1}{\lambda} \frac{d}{du} \left(p_1^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - u)\right) \right) du \\ &= p_1^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a)\right) - p_1^{-1}(1) = p_1^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a)\right). \end{aligned}$$

Επειδή όμως $p_1^{-1}(u) = -\ln u$ παίρνουμε τελικά πως $\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) = \ln\left(\frac{r}{c(\bar{x} - a)}\right)$.

Για $a \in [\bar{x} - \frac{1}{\lambda}, \bar{x}]$, θα είναι

$$\begin{aligned}\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) &= \lambda(\bar{x} - \frac{1}{\lambda}|\mathbf{q}_1^{(e)}) + \lambda(a - \bar{x} + \frac{1}{\lambda}) \\ &= \ln(\frac{r\lambda}{c}) + \lambda(a - \bar{x} + \frac{1}{\lambda}).\end{aligned}$$

Επομένως, θα είναι $EAR_j^{(e)} = \frac{1}{\bar{x}}\lambda(\bar{x}|\mathbf{q}_1^{(e)}) = \frac{1}{\bar{x}}(\ln(\frac{r\lambda}{c}) + 1)$. Ο ρυθμός απόδοσης είναι

$$\begin{aligned}TH_1^{(e)} &= \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} \lambda q_1^{(e)}(a) p_1(\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)})) da \\ &= \frac{1}{\bar{x}} \left[\int_{\bar{x}-\frac{r}{c}}^{\bar{x}-\frac{1}{\lambda}} \lambda \gamma_1(a) p_1(p_1^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x}-a))) da + \int_{\bar{x}-\frac{1}{\lambda}}^{\bar{x}} \lambda p_1(\ln(\frac{r\lambda}{c}) + \lambda(a - \bar{x} + \frac{1}{\lambda})) da \right].\end{aligned}\tag{3.124}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $\gamma_1(a) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{da}(p_1^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x}-a)))$, το πρώτο ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\begin{aligned}\int_{\bar{x}-\frac{r}{c}}^{\bar{x}-\frac{1}{\lambda}} \lambda \gamma_1(a) p_1(p_1^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x}-a))) da &= \int_{\bar{x}-\frac{r}{c}}^{\bar{x}-\frac{1}{\lambda}} \frac{d}{da}(p_1^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x}-a))) \frac{c}{r}(\bar{x}-a) da \\ &= \int_{\bar{x}-\frac{r}{c}}^{\bar{x}-\frac{1}{\lambda}} \frac{c}{r}(\bar{x}-a) d(p_1^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x}-a))).\end{aligned}$$

Θέτοντας $u = p_1^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x}-a))$ παίρνουμε ότι $\frac{c}{r}(\bar{x}-a) = p_1(u)$ ενώ τα κάτω και πάνω άκρα ολοκλήρωσης θα γίνουν $p_1^{-1}(1) = 0$ και $p_1^{-1}(\frac{c}{r\lambda})$. Το παραπάνω ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$\int_0^{p_1^{-1}(\frac{c}{r\lambda})} p_1(u) du = p_1^{-1}(\frac{c}{r\lambda}) f_1(p_1^{-1}(\frac{c}{r\lambda})) = \ln \frac{r\lambda}{c} f_1(\ln \frac{r\lambda}{c}).$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα στην (3.124), θέτοντας $u = \ln(\frac{r\lambda}{c}) + \lambda(a - \bar{x} + \frac{1}{\lambda})$ παίρνουμε ότι $du = \lambda da$ και άρα

$$\begin{aligned}\int_{\bar{x}-\frac{1}{\lambda}}^{\bar{x}} \lambda p_1(\ln(\frac{r\lambda}{c}) + \lambda(a - \bar{x} + \frac{1}{\lambda})) da &= \int_{\ln \frac{r\lambda}{c}}^{\ln \frac{r\lambda}{c} + 1} p_1(u) du \\ &= (\ln \frac{r\lambda}{c} + 1) f_1(\ln \frac{r\lambda}{c} + 1) - \ln \frac{r\lambda}{c} f_1(\ln \frac{r\lambda}{c}).\end{aligned}$$

Προκύπτει επομένως ο τύπος στην (3.13).

Τέλος, είναι

$$SW_1 = \frac{c}{\lambda \bar{x}}(1 - e^{-1}) - \frac{c}{2\lambda \bar{x}} = \frac{c}{\lambda \bar{x}}(f_1(1) - \frac{1}{2}).$$

□

Απόδειξη του Λήμματος 3.1 Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\gamma_j^{(e)}(a)$ στην (2.34) γράφεται και ως

$$\gamma_j^{(e)}(a) = f(g(a)),\tag{3.125}$$

όπου

$$f(x) = \frac{c(j-1)!}{\lambda r} x^{1-j} e^x\tag{3.126}$$

και

$$g(a) = p_j^{-1} \left(\frac{c}{r} (\bar{x} - a) \right).$$

Επομένως,

$$g'(a) = (p_j^{-1})' \left(\frac{c}{r} (\bar{x} - a) \right) \cdot \left(-\frac{c}{r} \right) = -\frac{c}{rp_j'(p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a)))} > 0, \quad a \in (\bar{x} - \frac{r}{c}, \bar{x}).$$

καθώς $p_j'(s) = -\frac{1}{(j-1)!} s^{j-1} e^{-s} < 0$, για $s \in (0, \infty)$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{c(j-1)!}{\lambda r} x^{-j} e^x (1-j+x), \\ f''(x) &= \frac{c(j-1)!}{\lambda r} x^{-j-1} e^x (x^2 + 2(1-j)x + j(j-1)). \end{aligned} \quad (3.127)$$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα της $x^2 + 2(1-j)x + j(j-1)$ είναι ίση με $4(1-j)$ και άρα αρνητική για $j \geq 2$. Επομένως $x^2 + 2(1-j)x + j(j-1) > 0$, για κάθε x . Καταλήγουμε ότι η $f(x)$ είναι (γνησίως) κυρτή στο $(0, \infty)$ και ότι η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \infty)$. Επιπλέον, εύκολα επαληθεύουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty, \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty.$$

Η μοναδική ρίζα της $f'(x)$ στο $(0, \infty)$ είναι στο σημείο $j-1$. Λόγω της μονοτονίας της $f'(x)$ είναι $f'(x) < 0$ για $x \in (0, j-1)$, $f'(j-1) = 0$ και $f'(j-1) > 0$ για $x \in (j-1, \infty)$. Θέτουμε, a^* τη μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(a) = j-1$, η οποία δίνεται στην (3.15). Λόγω της μονοτονίας της $g(a)$ είναι $g(a) < j-1$ για $a < a^*$, $g(a^*) = j-1$ και $g(a) > j-1$ για $a > a^*$. Τελικά, θα είναι

$$\gamma_j^{(e)'}(a) = f'(g(a))g'(a) \begin{cases} < 0 & \text{αν } a < a^* \\ = 0 & \text{αν } a = a^* \\ > 0 & \text{αν } a > a^*. \end{cases}$$

Επομένως, η $\gamma_j^{(e)}(a)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\bar{x} - \frac{r}{c}, a^*)$ και γνησίως αύξουσα στο (a^*, \bar{x}) με ολικό ελάχιστο στο a^* .

Επιπλέον είναι

$$\lim_{a \rightarrow (\frac{1}{\mu} - \frac{r}{c})^+} \gamma_j^{(e)}(a) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \text{ανδ} \quad \lim_{a \rightarrow \frac{1}{\mu}^-} \gamma_j^{(e)}(a) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty,$$

και $\gamma_j^{(e)}(a^*) = f(j-1)$ από όπου παίρνουμε την (3.16). □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3 Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.4. Από την (2.35), έχουμε ότι

$$d_j^{(e,1)} = 0. \quad (3.128)$$

Λόγω της ιδιότητας DMRL της κατανομής ενδιαμέσων χρόνων, από το Πρόσχημα 2.7 θα έχουμε ότι $d_j^{(e,n)} = 1$, για $n \geq 2$ και το $s_j^{(e,n)}$ δίνεται από την (2.90). Επιπλέον, παρατηρούμε ότι αν $\frac{r}{c} \leq \bar{x}$, τότε θα είναι $q_j^{(e)}(a) = 0$ για $a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c})$. Πράγματι, για $a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c})$ ο επιλεγμένος πελάτης, κατά την άφιξη του, θα συμπεράνει ότι ο υπολειπόμενος χρόνος για την έλευση του επόμενου μέσου θα υπερβαίνει το $\frac{r}{c}$ και άρα θα έχει αρνητική αναμενόμενη ωφέλεια αν εισέλθει. Για τις διάφορες περιπτώσεις του Θεωρήματος, έχουμε ότι:

Στην περίπτωση 1, το $\gamma_j^{(e)}(a)$ υπερβαίνει το 1 για όλα τα a , και άρα η στρατηγική ισορροπίας δεν τυχαίοποιεί και θα είναι απαραίτητα $t_j^{(e,n)} = s_j^{(e,n)}$ για κάθε n . Επιπλέον, είναι $t_j^{(e,n)} = \bar{x} - \frac{r}{c}$ (ως

η μοναδική λύση της $m(a) = \bar{x} - a = \frac{r}{c}$). Τελικά, η στρατηγική ισορροπίας είναι η στρατηγική ανάποδου κατωφλίου.

Για την περίπτωση 2, έχουμε ότι $d_j^{(e,1)} = 0$, $d_j^{(e,n)} = 1$, $n \geq 2$, $t_j^{(e,1)} = \bar{x} - \frac{r}{c}$ (όπως και στην περίπτωση 1) και $s_j^{(e,1)} = t_j^{(e,1)}$ (επειδή $\lim_{a \rightarrow (\bar{x} - \frac{r}{c})^+} \gamma_j^{(e)}(a) = \infty$ - δείτε το Λήμμα 3.1). Το $t_j^{(e,2)}$ είναι η μικρότερη λύση της $\bar{x} - a = \frac{r}{c} p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c}))$ στο $[0, \bar{x}]$, στην περίπτωση που πράγματι η εξίσωση αυτή έχει λύση. Διαφορετικά, είναι είναι $t_j^{(e,2)} = \bar{x}$. Στην τελευταία περίπτωση, παίρνουμε τη στρατηγική ανάποδου κατωφλίου. Υποθέτουμε πως η εξίσωση $\bar{x} - a = \frac{r}{c} p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c}))$ έχει κάποια λύση στο $[0, \bar{x}]$ και έστω $t_j^{(e,2)}$ η μικρότερη από αυτές. Σχετικά με το $s_j^{(e,2)}$, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις: Αν $t_j^{(e,2)} \in (a_1^*, a_2^*)$ (με τα $a_1^* < a_2^*$ να είναι οι δύο λύσεις της $\gamma_j^{(e)}(a) = 1$) τότε $s_j^{(e,2)} = a_2^*$. Άρα, $\gamma_j^{(e)}(a) > 1$ για κάθε $a > s_j^{(e,2)}$ και η στρατηγική ισορροπίας παίρνει τη μορφή

$$q_j^{(e)}(a) = \begin{cases} 1 & \text{αν } a \in [0, t_j^{(e,2)}), \\ \gamma_j^{(e)}(a) & \text{αν } a \in [t_j^{(e,2)}, a_2^*), \\ 1 & \text{αν } a \in [a_2^*, \bar{x}], \end{cases} \quad (3.129)$$

Αν $t_j^{(e,2)} \geq a_2^*$, τότε $s_j^{(e,2)} = t_j^{(e,2)}$ και $\gamma_j^{(e)}(a) > 1$ για $a > s_j^{(e,2)}$. Άρα, η στρατηγική ισορροπίας είναι η στρατηγική ανάποδου κατωφλίου. Αν $t_j^{(e,2)} \leq a_1^*$, τότε $s_j^{(e,2)} = t_j^{(e,2)}$ και το $t_j^{(e,3)}$ θα είναι η λύση της $\bar{x} - a = \frac{r}{c} p_j(\lambda a)$ η οποία θα είναι μεγαλύτερη από $t_j^{(e,2)}$. Τότε, θα επαναλάβουμε τη διαδικασία μέχρι είτε να βρεθεί μια λύση της $\bar{x} - a = \frac{r}{c} p_j(\lambda a)$ στο (a_1^*, a_2^*) είτε να φθάσουμε στο $[a_2^*, \bar{x}]$. Στην πρώτη, θα έχουμε ότι η στρατηγική ισορροπίας θα δίνεται από την (3.22), ενώ στην τελευταία, η στρατηγική ισορροπίας θα είναι η στρατηγική ανάποδου κατωφλίου.

Επομένως, είτε στην Περίπτωση 1, είτε στην Περίπτωση 2, όταν η εξίσωση $\frac{r}{c} p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})) + a - \bar{x} = 0$ δεν έχει λύσεις στο (a_1^*, a_2^*) , η στρατηγική ισορροπίας είναι η $q_1^{(e)}(a) = \mathbb{1}_{\{\bar{x} - \frac{r}{c} \leq a \leq \bar{x}\}}$ και οι τύποι για τον ρυθμό εισόδου, τον ρυθμό απόδοσης και το κοινωνικό όφελος έπονται άμεσα (δείτε την Περίπτωση 1 στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2, όταν $j = 1$). Υποθέτουμε επομένως ότι η $q_j^{(e)}(a)$ θα δίνεται από την (3.22).

Για $a \in [0, \bar{x} - \frac{r}{c})$ θα είναι $\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) = 0$ ενώ για $a \in [\bar{x} - \frac{r}{c}, t^*)$ θα είναι $\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) = \lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})$. Για $a \in [t^*, a_2^*)$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) &= \int_0^a \lambda q_j^{(e)}(u) du = \lambda(t^* - \bar{x} + \frac{r}{c}) + \lambda \int_{t^*}^a \gamma_j(u) du \\ &= \lambda(t^* - \bar{x} + \frac{r}{c}) + \int_{t^*}^a \frac{d}{du} p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - u)) du \\ &= \lambda(t^* - \bar{x} + \frac{r}{c}) + p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a)) - p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - t^*)) \end{aligned}$$

Ωστόσο, από τον ορισμό του t^* ως τη μικρότερη λύση της $\frac{r}{c} p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})) + a - \bar{x} = 0$, παίρνουμε ότι $p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - t^*)) = \lambda(t^* - \bar{x} + \frac{r}{c})$ και άρα θα έχουμε τελικά ότι $\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) = p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a))$.

Για $a \in [a_2^*, \bar{x}]$, έπεται άμεσα ότι $\lambda(a|\mathbf{q}_1^{(e)}) = p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)) + \lambda(a - a_2^*)$. Θέτοντας $w_j(s) = p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)) + s(\bar{x} - a_2^*)$, έπεται άμεσα ότι $EAR_j = \frac{1}{\bar{x}} \lambda(\bar{x}|\mathbf{q}_1^{(e)}) = \frac{1}{\bar{x}} w_j(\lambda)$.

Ο ρυθμός απόδοσης γράφεται ως

$$\begin{aligned}
 TH_j^{(e)} &= \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} \lambda q_j^{(e)}(a) p_1(\lambda(a | \mathbf{q}_j^{(e)})) da \\
 &= \frac{1}{\bar{x}} \left[\int_{\bar{x}-\frac{r}{c}}^{t^*} \lambda p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})) da + \int_{t^*}^{a_2^*} \lambda \gamma_j(a) p_j(p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a))) da \right. \\
 &\quad \left. + \int_{a_2^*}^{\bar{x}} \lambda p_j(p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)) + \lambda(a - a_2^*)) da \right]. \tag{3.130}
 \end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θέτοντας $u = \lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})$, παίρνουμε ότι είναι ίσο με

$$p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - t^*)\right) \phi_j\left(p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - t^*)\right)\right).$$

Για το δεύτερο, χρησιμοποιώντας ότι $\gamma_j(a) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{da} (p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a)))$ και θέτοντας $u = p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a))$ παίρνουμε ότι είναι ίσο με

$$p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)\right) \phi_j\left(p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)\right)\right) - p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - t^*)\right) \phi_j\left(p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - t^*)\right)\right).$$

Για το τρίτο ολοκλήρωμα στην (3.130), θέτοντας $u = p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)) + \lambda(a - a_2^*)$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 &\int_{a_2^*}^{\bar{x}} \lambda p_j(p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)) + \lambda(a - a_2^*)) da = \int_{p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*))}^{p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)) + \lambda(\bar{x} - a_2^*)} p_j(u) du \\
 &= p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*) + \lambda(\bar{x} - a_2^*)\right) \phi_j\left(p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*) + \lambda(\bar{x} - a_2^*)\right)\right) \\
 &\quad - p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)\right) \phi_j\left(p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)\right)\right).
 \end{aligned}$$

Τελικά, αθροίζοντας τα παραπάνω 3 ολοκληρώματα παίρνουμε ότι

$$TH_j^{(e)} = \frac{1}{\bar{x}} p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*) + \lambda(\bar{x} - a_2^*)\right) \phi_j\left(p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*) + \lambda(\bar{x} - a_2^*)\right)\right).$$

Με τους αντίστοιχους υπολογισμούς των διαφόρων ολοκληρωμάτων που προκύπτουν από τον τύπο του $SW_j^{(e)}$ καταλήγουμε στην έκφραση που δίνεται στην (3.27). \square

Απόδειξη του Λήμματος 3.2 Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \lambda(a_2^* | q_j^{(e)}) &= \int_0^{a_2^*} q_j^{(e)}(a) da = \int_{\bar{x}-\frac{r}{c}}^{a_2^*} q_j^{(e)}(a) da \\
 &\leq \int_{\bar{x}-\frac{r}{c}}^{a_2^*} 1 da = \lambda(a_2^* - \bar{x} + \frac{r}{c}).
 \end{aligned}$$

Επομένως, λόγω της μονοτονίας της $p_j(s)$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
 & p_j(\lambda(a_2^* - \bar{x} + \frac{r}{c})) \leq p_j(\lambda(a_2^* | q_j^{(e)})) \\
 \Rightarrow & r p_j(\lambda(a_2^* - \bar{x} + \frac{r}{c})) - c(\bar{x} - a_2^*) \leq G_j(a_2^* | q_j^{(e)}) = 0 \\
 \Rightarrow & r p_j(\lambda(a_2^* - \bar{x} + \frac{r}{c})) \leq c(\bar{x} - a_2^*) \\
 \Rightarrow & \lambda(a_2^* - \bar{x} + \frac{r}{c}) \geq p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)) \\
 \Rightarrow & \frac{\lambda r}{c} \geq p_j^{-1}(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)) + \lambda(\bar{x} - a_2^*) \\
 \Rightarrow & \frac{\lambda r}{c} \geq w_j(\lambda).
 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{\bar{x}}$ και τα δύο μέλη στην παραπάνω, προκύπτει ο ρυθμός εισόδου για τις δύο περιπτώσεις $\frac{r\lambda}{c} \leq v_j$ και $\frac{r\lambda}{c} > v_j$ αντίστοιχα.

Επειδή η συνάρτηση $s\phi_j(s)$ είναι γν. αύξουσα ως προς s , θα έχουμε τελικά ότι

$$\frac{\lambda r}{c} \phi_j(\frac{\lambda r}{c}) \geq w_j(\lambda) \phi_j(w_j(\lambda))$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{\bar{x}}$ και τα δύο μέλη στην παραπάνω, προκύπτει στο αριστερό μέλος ο ρυθμός απόδοσης όταν $\frac{r\lambda}{c} \leq v_j$ ενώ στο δεξί, ο ρυθμός απόδοσης όταν $\frac{r\lambda}{c} > v_j$.

Η αντίστοιχη σχέση για το κοινωνικό όφελος προκύπτει άμεσα. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.4 Για τη μορφή της στρατηγικής ισορροπίας των πελατών: Αρχικά, αν $n \geq j$ είναι $G_j(n | \mathbf{q}_j) = -cE[n | \mathbf{q}_j] < 0$ και άρα $q_j(n)^{(e)} = 0$. Επιπλέον, αν έχουμε $q_j(0)^{(e)} = 0$, το οποίο συμβαίνει αν $\frac{\bar{x}}{2} \geq \frac{r}{c}$, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1 των Μανου, Εconoμoυ, Καραεσμαν στο [100], τότε θα είναι και $q_j^{(e)}(0) = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Υποθέτουμε ότι $\frac{\bar{x}}{2} < \frac{r}{c}$ ώστε $q_j(0)^{(e)} \in (0, 1]$.

Παρατηρούμε πως αν $0 \leq n \leq j-1$, τότε $G_j(n | \mathbf{q}_j) = r - cE[n | \mathbf{q}_j]$. Ωστόσο, λόγω της ιδιότητας DMLR των ενδιάμεσων χρόνων, από το Θεώρημα 7.1 των Μανου, Εconoμoυ, Καραεσμαν στο [100]), η συνάρτηση $E[n | \mathbf{q}_j]$ θα είναι γνησίως φθίνουσα ως προς n . Επομένως, θα έχουμε ότι

$$G_j(n | \mathbf{q}_j) = r - cE[n | \mathbf{q}_j] < r - cE[n+1 | \mathbf{q}_j] = G_j(n+1 | \mathbf{q}_j) \quad (3.131)$$

και άρα η στρατηγική ισορροπίας θα είναι της μορφής $(q^*, 1, 1, \dots, 1)$ όπου $q^* \in (0, 1]$. Εφαρμόζοντας και πάλι το Θεώρημα 4.1 στο [100] και παρατηρώντας πως ο μετασχηματισμός L - S στην περίπτωση σταθερών χρόνων, ίσων με \bar{x} , είναι $\bar{F}(s) = e^{-s\bar{x}}$, θα έχουμε τις άλλες 2 περιπτώσεις στην (3.34).

Για τη στάσιμη κατανομή, διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με τη μορφή του διανύσματος $\mathbf{q}_j^{(e)}$. Αρχικά, αν $q_j^{(e)}(n) = 0$ για κάθε $n \geq 0$, έπεται άμεσα ότι $\pi_j(0) = 1$. Αν είναι $q_j^{(e)}(n) = 1$ για $0 \leq n \leq j-1$, τότε, από την (2.67) θα έχουμε ότι

$$\pi_j(0 | a) = e^{-\lambda a} \quad (3.132)$$

$$\pi_j(n | a) = e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda e^{\lambda s} \pi(n-1 | s) ds, \quad 1 \leq n \leq j-1 \quad (3.133)$$

$$\pi_j(j | a) = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} \pi_j(k | a). \quad (3.134)$$

Είναι

$$\begin{aligned}\pi_j(1|a) &= e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda e^{\lambda s} \pi(0|s) ds = e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda e^{\lambda s} e^{-\lambda s} ds \\ &= e^{-\lambda a} \lambda a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_j(2|a) &= e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda e^{\lambda s} \pi(1|s) ds = e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda e^{\lambda s} \lambda s e^{-\lambda s} ds \\ &= e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^2}{2},\end{aligned}$$

και γενικά, για $3 \leq n \leq j-1$, είναι

$$\pi_j(n|a) = e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^n}{n!}.$$

Δηλαδή, για $0 \leq n \leq j-1$ έχουμε ότι η $\pi_j(n|a)$ αντιστοιχεί σε κατανομή Poisson με ρυθμό λa . Επομένως, χρησιμοποιώντας ότι αν $X = \bar{x} \Rightarrow A \sim U(0, \bar{x})$, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\pi_j(n) &= \int_0^\infty \pi_j(n|a) dF_A(a) = \int_0^{\bar{x}} \pi_j(n|a) \frac{1}{\bar{x}} da \\ &= \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^n}{n!} da = \frac{1}{\lambda \bar{x}} F_{(n+1, \lambda)}(\bar{x}),\end{aligned}$$

όπου η $F_{(n+1, \lambda)}$ είναι η συνάρτηση κατανομής της Erlang με παραμέτρους $n+1$ και λ . Επίσης, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{j-1} \pi_j(n) &= \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} \sum_{n=0}^{j-1} e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^n}{n!} da = \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} p_n(\lambda a) da \\ &= \frac{1}{\lambda \bar{x}} \int_0^{\lambda \bar{x}} p_n(u) da = \phi_j(\lambda \bar{x}),\end{aligned}$$

και άρα $\pi_j(j) = 1 - \phi_j(\lambda \bar{x})$. Ακόμη, θα είναι

$$\begin{aligned}TH^{CN-(e)} &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \lambda \sum_{n=0}^j q_j^{(e)}(n) \pi_j(n) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \lambda \sum_{n=0}^{j-1} \pi_j(n) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \lambda \phi_j(\lambda \bar{x}).\end{aligned}$$

Επίσης, επειδή $\sum_{n=0}^j \pi_j(n) E[n|\mathbf{q}_j] = \sum_{n=0}^j \pi_j(n) E[R|N_{q_i^e} = n] = E[R] = \frac{\bar{x}}{2}$, παίρνουμε και ότι

$$SW^{CN-(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \lambda (r \phi_j(\lambda \bar{x}) - c(\frac{\bar{x}}{2} - \pi_j(j) E[j|\mathbf{q}_j])).$$

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση που $\bar{x} \geq \frac{r}{c} \geq \frac{\bar{x}}{1-e^{-\lambda\bar{x}}} - \frac{1}{\lambda}$. Στην περίπτωση αυτή είναι $q_j^{(e)}(0) = q^*$ και επομένως, από την (2.67) θα έχουμε ότι

$$\pi_j(0|a) = e^{-\lambda a q^*} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} \pi_j(1|a) &= e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda q^* e^{\lambda s} \pi(0|s) ds = \lambda q^* e^{-\lambda a} \int_0^a e^{\lambda s} e^{-\lambda a q^*} ds \\ &= \frac{q^*}{1-q^*} [e^{-\lambda a} (e^{\lambda a - \lambda a q^*} - 1)] = \frac{q^*}{1-q^*} (\pi(0|a) - e^{-\lambda a}). \end{aligned} \quad (3.136)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \pi_j(2|a) &= e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda e^{\lambda s} \pi(1|s) ds = \frac{1}{1-q^*} (e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda q^* e^{\lambda s} \pi(0|s) ds - q^* e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda e^{\lambda s} e^{-\lambda s} ds) \\ &= \frac{1}{1-q^*} (\pi_j(1|a) - q^* e^{-\lambda a} \lambda a). \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} \pi_j(3|a) &= e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda e^{\lambda s} \pi(2|s) ds = \frac{1}{1-q^*} (e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda e^{\lambda s} \pi(1|s) ds - q^* e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda e^{\lambda s} e^{\lambda s} \lambda s ds) \\ &= \frac{1}{1-q^*} (\pi_j(2|a) - q^* e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^2}{2}). \end{aligned} \quad (3.138)$$

Επομένως, για $4 \leq n \leq j-1$ θα είναι

$$\begin{aligned} \pi_j(n|a) &= \frac{1}{1-q^*} (\pi_j(n-1|a) - q^* e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^{n-1}}{(n-1)!}) \\ &= \frac{1}{1-q^*} (\pi_j(n-1|a) - \frac{1}{1-q^*} q^* p(n-1)). \end{aligned} \quad (3.139)$$

Από την τελευταία, λύνοντας αναδρομικά, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \pi_j(n|a) &= \left(\frac{1}{1-q^*}\right)^{n-1} \pi_j(1|a) - \left(\frac{1}{1-q^*}\right)^{n-1} q^* p(1) \\ &\quad - \left(\frac{1}{1-q^*}\right)^{n-2} q^* p(2) - \dots - \left(\frac{1}{1-q^*}\right) q^* p(n-1) \\ &= q^* \left(\frac{1}{1-q^*}\right)^n \pi_j(0|a) - q^* \left(\frac{1}{1-q^*}\right)^n p(0) \\ &\quad - \left(\frac{1}{1-q^*}\right)^{n-2} q^* p(2) - \dots - \left(\frac{1}{1-q^*}\right) q^* p(n-1) \\ &= q^* \left(\frac{1}{1-q^*}\right)^n (\pi_j(0|a) - \sum_{i=0}^{n-1} p(i) (1-q^*)^i) \\ &= q^* \left(\frac{1}{1-q^*}\right)^n (e^{-\lambda a q^*} - \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a (1-q^*))^i}{i!}) \\ &= q^* \left(\frac{1}{1-q^*}\right)^n (e^{-\lambda a q^*} - e^{-\lambda a} e^{\lambda a (1-q^*)} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda a (1-q^*)} \frac{(\lambda a (1-q^*))^i}{i!}) \\ &= q^* \left(\frac{1}{1-q^*}\right)^n e^{-\lambda a q^*} (1 - p_{n-1}(\lambda a (1-q^*))), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την $\pi_j(n) = \int_0^\infty \pi_j(n|a) dF_A(a)$, έπεται άμεσα η (3.35).

Για την (3.41) έχουμε ότι

$$SW_j = \sum_{n=0}^j \lambda q_j^{(e)}(n) \pi_j(n) G_j(0|\mathbf{q}_j) = r \sum_{n=0}^j \lambda q_j^{(e)}(n) \pi_j(n) - c \sum_{n=0}^j \lambda q_j^{(e)}(n) \pi_j(n) E[n|\mathbf{q}_j].$$

Η πρώτη έκφραση στο δεξιό μέλος της παραπάνω είναι το TH_j . Για τη δεύτερη, χρησιμοποιώντας

τον νόμο του Little έχουμε πως $\lambda q_j^{(e)}(n) \pi_j(n) E[n|\mathbf{q}_j] = \sum_{i=n+1}^j \pi_j(i)$ και άρα

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^j \lambda q_j^{(e)}(n) \pi_j(n) E[n|\mathbf{q}_j] &= \sum_{n=0}^j \sum_{i=n+1}^j \pi_j(i) \\ &= \sum_{n=0}^j \mathbb{P}(N_{q_i^e} \geq n+1) = E[N_{q_i^e}] \\ &= \sum_{n=0}^j n \pi_j(n). \end{aligned}$$

Επομένως, $SW_j = rTH_j - c \sum_{n=0}^j n \pi_j(n)$ και χρησιμοποιώντας ότι $SW = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) SW_j$ παίρνουμε την (3.41). □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5 Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.7. Θα έχουμε ότι $\bar{x} = \frac{1}{\mu}$, $\bar{x}_{(2)} = \frac{1}{\mu^2}$. Επίσης, θα πάρουμε μετά από πράξεις ότι

$$\int_0^{\infty} p_j(\lambda a) (1 - F(a)) da = \int_0^{\frac{1}{\mu}} p_j(\lambda a) da = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\lambda^i}{i!} \int_0^{\frac{1}{\mu}} a^i e^{-\lambda a} da = \frac{1}{\mu} \alpha\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Επιπλέον, η εξίσωση $G_j(q_j) = 0$ γράφεται και ως

$$r \left[\frac{j}{\lambda q_j} \left(1 - p_j\left(\frac{\lambda q_j}{\mu}\right) + \frac{1}{\mu} p_{j-1}\left(\frac{\lambda q_j}{\mu}\right) \right) \right] - c \frac{1}{2\mu^2} = 0,$$

ή ισοδύναμα, $\alpha\left(\frac{\lambda q_j}{\mu}\right) = \frac{c}{2r\mu}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.6 I: Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} P_j(s) &= \int_0^{\infty} p_j(sx) \frac{1 - F(x)}{\bar{x}} dx = \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} p_j(sx) dx \\ &= \frac{1}{s\bar{x}} \int_0^{s\bar{x}} p_j(x) dx = \phi_j(s\bar{x}). \end{aligned}$$

Για κάθε j , θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.7 και παίρνουμε ότι

$$q_j^{(e)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } \frac{r}{c} \leq \frac{\bar{x}}{2}, \\ q_j^* & \text{αν } \frac{\bar{x}}{2} < \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{2f_j(\lambda\bar{x})} \\ 1 & \text{αν } \frac{\bar{x}}{2f_j(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c} \end{cases} \quad (3.140)$$

όπου το q_j^* είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $rP_j(\lambda q_j^*) = c\frac{\bar{x}}{2}$. Δηλαδή, $r\phi_j(\lambda\bar{x}q_j^*) = c\frac{\bar{x}}{2}$ και άρα $q_j^* = \frac{1}{\lambda\bar{x}}\phi_j^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right)$.

Ο πρώτος κλάδος της (3.45) προκύπτει άμεσα. Για τους άλλους κλάδους, επειδή η συνάρτηση $\phi_j(s)$ είναι γν. αύξουσα ως προς j θα έχουμε ότι: Αν $q_i^{(e)} = 1$ για κάποιο i , τότε $\frac{\bar{x}}{2f_i(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c}$ και άρα $\frac{\bar{x}}{2f_{i+1}(\lambda\bar{x})} < \frac{\bar{x}}{2f_i(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c}$. Δηλαδή τότε θα είναι και $q_{i+1}^{(e)} = 1$. Επομένως, ο δεύτερος κλάδος προκύπτει άμεσα. Επίσης, αν $\frac{\bar{x}}{2f_1(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c}$ θα είναι $q_i^{(e)} = 1$ για κάθε $i \geq 1$ και έτσι έχουμε τον τρίτο κλάδο.

II: Για τη στάσιμη κατανομή δείτε την ενότητα 2.4.5.

III: Για τον ρυθμό εισόδου και τον ρυθμό απόδοσης έχουμε ότι: Αν $\frac{\bar{x}}{2f_1(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c}$, τότε $EAR_j^{C-(e)} = \lambda$ και $TH_j^{C-(e)} = \lambda P_j(\lambda) = \lambda\phi_j(\lambda\bar{x})$ για κάθε $j \geq 1$. Άρα, θα είναι $EAR^{C-(e)} = \lambda$ και $TH^{C-(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)TH_j^{\emptyset-(e)} = \lambda\phi(\lambda\bar{x})$.

Εστω ότι $\frac{\bar{x}}{2f_{i+1}(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{2f_i(\lambda\bar{x})}$ για κάποιο $i \geq 1$. Δηλαδή, $q_j^{(e)} = q_j^*$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, i$ και $q_j^{(e)} = 1$ για $j \geq i+1$. Τότε, για $j = 1, 2, \dots, i$ θα είναι $EAR_j^{C-(e)} = \lambda q_j^* = \frac{1}{\bar{x}}\phi_j^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right)$ και

$$\begin{aligned} TH_j^{C-(e)} &= \lambda q_j^* P_j(\lambda q_j^*) = \lambda \frac{1}{\lambda\bar{x}} \phi_j^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) \frac{c\bar{x}}{2r} \\ &= \frac{c}{2r} \phi_j^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right), \end{aligned}$$

ενώ για $j \geq i+1$ θα είναι $EAR_j^{C-(e)} = \lambda$ και $TH_j^{C-(e)} = \lambda\phi_j(\lambda\bar{x})$. Επομένως,

$$\begin{aligned} EAR^{C-(e)} &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j)EAR_j^{\emptyset-(e)} \\ &= \frac{1}{\bar{x}} \sum_{j=1}^i h(j)\phi_j^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) + \lambda \sum_{j=i+1}^{\infty} h(j) \\ &= \frac{1}{\bar{x}} \sum_{j=1}^i h(j)\phi_j^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) + \lambda\bar{H}(i) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} TH^{C-(e)} &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j)TH_j^{\emptyset-(e)} \\ &= \frac{c}{2r} \sum_{j=1}^i h(j)\phi_j^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) + \lambda \sum_{j=i+1}^{\infty} h(j)\phi_j(\lambda\bar{x}). \end{aligned}$$

Για το κοινωνικό όφελος έχουμε ότι, αν $q_j^{(e)} < 1$ θα είναι $SW_j^{C-(e)} = 0$ ενώ διαφορετικά είναι

$SW_j^{C-(e)} = \lambda(r\phi_j(\lambda\bar{x}) - c\frac{\bar{x}}{2})$. Επομένως, αν για κάποιο $i \geq 1$ έχουμε ότι $\frac{\bar{x}}{2f_i(\lambda\bar{x})} \leq \frac{r}{c}$, τότε

$$\begin{aligned} SW^{C-(e)} &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j)SW_j^{\theta-(e)} = \sum_{j=i}^{\infty} h(j)SW_j^{\theta-(e)} \\ &= \lambda \sum_{j=i}^{\infty} h(j)(r\phi_j(\lambda\bar{x}) - c\frac{\bar{x}}{2}) \\ &= \lambda r \sum_{j=i}^{\infty} h(j)\phi_j(\lambda\bar{x}) - c\frac{\bar{x}}{2}\bar{H}(i). \end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.7 I: Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.8. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j)P_j(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)\phi_j(\lambda\bar{x}) \\ &= \phi(\lambda\bar{x}). \end{aligned}$$

Επομένως, θα είναι $\frac{\bar{x}(2)}{2\bar{x}}(P(\lambda))^{-1} = \frac{\bar{x}}{2\phi(\lambda\bar{x})}$. Επίσης, αν $\frac{\bar{x}}{2} < \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{2\phi(\lambda\bar{x})}$, θα έχουμε ότι $q^{(e)} \in (0, 1)$ και τότε, από την εξίσωση $rP(\lambda q^{(e)}) = \frac{c\bar{x}}{2}$, παίρνουμε ότι $\phi(\lambda\bar{x}q^{(e)}) = \frac{c\bar{x}}{2}$ και άρα $q^{(e)} = \frac{1}{\lambda\bar{x}}f^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r})$.

II: Για τη στάσιμη κατανομή δείτε την ενότητα 2.4.5.

III: Η μορφή του ρυθμού εισόδου έπεται άμεσα. Για τον ρυθμό απόδοσης έχουμε ότι: Αν $\frac{\bar{x}}{2} < \frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{2\phi(\lambda\bar{x})}$, τότε

$$\begin{aligned} TH^{\theta-(e)} &= \lambda q^{(e)}P(\lambda q^{(e)}) = \lambda \frac{1}{\lambda\bar{x}}f^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r})\phi(\lambda\bar{x}q^{(e)}) \\ &= \frac{1}{\bar{x}}f^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r})\frac{c\bar{x}}{2r} = \frac{c}{2r}f^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r}). \end{aligned}$$

Αν $\frac{r}{c} \geq \frac{\bar{x}}{2\phi(\lambda\bar{x})} \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{\bar{x}}f^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r})$, τότε

$$TH^{\theta-(e)} = \lambda P(\lambda) = \lambda\phi(\lambda\bar{x}).$$

Τέλος, για το κοινωνικό όφελος έχουμε ότι $SW^{\theta-(e)} = 0$ αν $q^{(e)} < 1$ δηλαδή, αν και μόνο αν $\lambda \leq \frac{1}{\bar{x}}f^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r})$, ενώ διαφορετικά θα είναι

$$SW^{\theta-(e)} = \lambda(rP(\lambda) - c\frac{\bar{x}}{2}) = \lambda(\phi(\lambda\bar{x}) - c\frac{\bar{x}}{2}).$$

□

Η επίδραση της πληροφορίας

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.8 Από τις (3.47) και (3.51), χρησιμοποιώντας ότι $u_j = \frac{\bar{x}}{2\phi_j(\lambda\bar{x})}$ και $u_h = \frac{\bar{x}}{2\phi(\lambda\bar{x})}$, θα έχουμε ότι

$$TH^{C-(e)} = \begin{cases} \lambda\phi(\lambda\bar{x}) & \text{αν } u_1 \leq \frac{r}{c} \\ \sum_{i=1}^{j-1} h(i)\frac{c}{2r}f_i^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r}) + \sum_{i=j}^{\infty} h(i)\lambda f_i(\lambda\bar{x}) & \text{αν } u_j \leq \frac{r}{c} \leq u_{j-1} \end{cases} \quad (3.141)$$

και

$$TH^{\emptyset-(e)} = \begin{cases} \lambda\phi(\lambda\bar{x}) & \text{αν } \frac{r}{c} > u_h, \\ \frac{c}{2r}f^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) & \text{αν } \frac{r}{c} \leq u_h. \end{cases} \quad (3.142)$$

ενώ αν $u_\infty \geq \frac{r}{c}$, τότε $TH^{C-(e)} = TH^{\emptyset-(e)} = 0$.

Λόγω τη μονοτονίας των ϕ_j , θα έχουμε ότι η ακολουθία (u_j) είναι φθίνουσα. Επιπλέον, επειδή η $\phi(s)$ είναι κυρτός συνδυασμός των $\phi_j(s)$, θα έχουμε ότι $u_h \in [u_\infty, u_1]$. Επομένως, όταν $u_1 \leq \frac{r}{c} \Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{\bar{x}}f_1^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right)$, θα είναι $TH^{C-(e)} = TH^{\emptyset-(e)} = \lambda\phi(\lambda\bar{x})$.

Αν $u_h \leq \frac{r}{c} < u_1 \Leftrightarrow \lambda \in \left[\frac{1}{\bar{x}}f_1^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right), \frac{1}{\bar{x}}f^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right)\right]$ θα είναι

$$TH^{\emptyset-(e)} - TH^{C-(e)} = \sum_{i=1}^{j-1} h(i) \left(\lambda f_i(\lambda\bar{x}) - \frac{c}{2r} f_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) \right),$$

για κάποιο $j : u_j \leq \frac{r}{c} < u_{j-1}$ και με $u_h \leq u_j$. Επομένως,

$$\begin{aligned} TH^{\emptyset-(e)} > TH^{C-(e)} &\Leftrightarrow \lambda f_i(\lambda\bar{x}) > \frac{c}{2r} f_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) \\ &\Leftrightarrow \lambda\bar{x} f_i(\lambda\bar{x}) > \frac{c\bar{x}}{2r} f_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right). \end{aligned}$$

Γράφοντας το $\frac{c\bar{x}}{2r}$ ως $f_i(f_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right))$ και χρησιμοποιώντας ότι η συνάρτηση $\psi(s) = s f_i(s)$ είναι γνησίως αύξουσα, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lambda\bar{x} f_i(\lambda\bar{x}) > f_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) f_i(f_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right)) &\Leftrightarrow \psi(\lambda\bar{x}) > \psi(f_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right)) \\ &\Leftrightarrow \lambda\bar{x} > f_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{r}{c} < u_i. \end{aligned}$$

Η τελευταία όμως ισχύει γιατί $i \leq j-1$ και άρα $u_i > u_{j-1} > \frac{r}{c}$.

Αν $\frac{r}{c} < u_h$ τότε το $TH^{\emptyset-(e)}$ παραμένει σταθερό ενώ το $TH^{C-(e)}$ αυξάνει (ως προς λ). Επομένως θα υπάρχει κάποιο κρίσιμο σημείο λ_2 , ώστε για $\lambda > \lambda_2$ να έχουμε ότι $TH^{\emptyset-(e)} < TH^{C-(e)}$. Διαφορετικά, θέτουμε $\lambda_2 = \infty$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.9 Από τις (3.32) και (3.47) είναι για $u_1 \leq \frac{r}{c} \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{\bar{x}}f_1^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right)$ και $v_1 \geq \frac{r\lambda}{c} \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{c}{r}$,

$TH^{C-(e)} = \lambda\phi(\lambda\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}}\lambda\bar{x}\phi(\lambda\bar{x})$ και $TH^{CA-(e)} = \frac{1}{\bar{x}}\frac{\lambda r}{c}\phi\left(\frac{\lambda r}{c}\right)$. Επειδή η συνάρτηση $\psi(s) = s\phi(s)$ είναι γνησίως αύξουσα, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} TH^{C-(e)} - TH^{CA-(e)} > 0 &\Leftrightarrow \lambda\bar{x}\phi(\lambda\bar{x}) > \frac{\lambda r}{c}\phi\left(\frac{\lambda r}{c}\right) \\ &\Leftrightarrow \psi(\lambda\bar{x}) > \psi\left(\frac{\lambda r}{c}\right) \\ &\Leftrightarrow \bar{x} > \frac{r}{c}, \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει και άρα $TH^{C-(e)} > TH^{CA-(e)}$ για $\lambda \leq \min\left\{\frac{1}{\bar{x}}f_1^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{2r}\right), \frac{c}{r}\right\}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.10 Από τις (3.6) και (3.32) έχουμε ότι

$$TH^{CAN-(e)} - TH^{CA-(e)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda r}{c} \phi\left(\frac{\lambda r}{c}\right) > w_j \phi(w_j).$$

Η τελευταία όμως ανίσωση έχειδειχθεί στην απόδειξη του Λήμματος 3.2. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.11 Για το $TH_{\infty}^{CAN-(e)}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} TH^{CAN-(e)}(\lambda) &= \frac{1}{\bar{x}} \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\lambda r}{c}} p_j(u) du \\ &= \frac{1}{\bar{x}} \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \int_0^{\infty} p_j(u) du = \frac{1}{\bar{x}} \sum_{j=1}^{\infty} j h(j) \\ &= \frac{\bar{h}}{\bar{x}}, \end{aligned}$$

διότι

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} p_j(u) du &= \int_0^{\infty} \int_u^{\infty} \frac{s^{j-1} e^{-s}}{(j-1)!} ds du \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^s du \frac{s^{j-1} e^{-s}}{(j-1)!} ds \\ &= \int_0^{\infty} \frac{s^j e^{-s}}{(j-1)!} ds = j. \end{aligned}$$

Για το $TH_{\infty}^{CA-(e)}$: Από το Πρόσλημα 3.1, έχουμε ότι

$$TH_j^{CA-(e)} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{x}} \frac{r\lambda}{c} \phi_j\left(\frac{r\lambda}{c}\right) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \leq v_j, \\ \frac{1}{\bar{x}} w_j(\lambda) \phi_j(w_j(\lambda)) & \text{αν } \frac{r\lambda}{c} \geq v_j, \end{cases} \quad (3.143)$$

$$(3.144)$$

όπου $w_j(s) = p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)\right) + s(\bar{x} - a_2^*)$ αν η εξίσωση (3.20) έχει κάποια λύση ενώ διαφορετικά είναι $w_j(s) = \frac{r\lambda}{c}$ και όπου η (v_j) έχει ορισθεί στην (3.18)

Θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_j(\lambda) &\geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \min\left\{\frac{r\lambda}{c}, p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)\right) + \lambda(\bar{x} - a_2^*)\right\} \\ &\geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(p_j^{-1}\left(\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*)\right) + \lambda(\bar{x} - a_2^*)\right) \geq \infty, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ανισότητα έπεται από την απόδειξη του Λήμματος 3.2 ενώ για την τρίτη είναι $\frac{c}{r}(\bar{x} - a_2^*) \rightarrow 0$, καθώς $\lambda \rightarrow \infty$, και $p_j^{-1}(0) = \infty$.

Επομένως, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} TH_j^{CA-(e)} &= \frac{1}{\bar{x}} w_j(\lambda) \phi_j(w_j(\lambda)) \\ &= \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{w_j(\lambda)} p_j(u) du \\ &\rightarrow \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\infty} p_j(u) du = \frac{j}{\bar{x}}, \end{aligned}$$

καθώς $\lambda \rightarrow \infty$, και όπου η τελευταία ισότητα δείχθηκε στην απόδειξη για το $TH_{\infty}^{CAN-(e)}$, ακριβώς παραπάνω. Τελικά, παίρνουμε άμεσα ότι $TH_{\infty}^{CA-(e)} = TH_{\infty}^{CAN-(e)} = \frac{\bar{h}}{\bar{x}}$.

Για το $TH_{\infty}^{CN-(e)}$: Αρχικά παρατηρούμε πως καθώς $\lambda \rightarrow \infty$ έχουμε ότι $\frac{\bar{x}}{1-e^{-\lambda\bar{x}}} - \frac{1}{\lambda} \rightarrow \bar{x}$. Επομένως, όσο αυξάνεται το λ θα είμαστε στην περίπτωση που $q_j^{(e)}(0) = q^* = q^*(\lambda)$. Επιπλέον, είναι $q^*(\lambda) \rightarrow 0$ καθώς $\lambda \rightarrow \infty$.

Θεωρούμε την $\phi(s) \equiv \frac{\bar{x}}{1-e^{-s\bar{x}}} - \frac{1}{s} - \frac{r}{c} = 0$. Η τελευταία έχει πάντα μοναδική λύση έστω s^* . Πράγματι, με τη χρήση παραγώγου, μπορεί να δείχθει ότι είναι γν. αύξουσα με $\lim_{s \rightarrow -\infty} \phi(s) = -\frac{r}{c}$ και $\lim_{s \rightarrow +\infty} \phi(s) = \bar{x} - \frac{r}{c}$. Επιπλέον, η λύση αυτή είναι στο $(0, +\infty)$ λόγω της συνθήκης $\frac{\bar{x}}{2} < \frac{r}{c}$. Χρησιμοποιώντας τώρα την $\phi(s^*) = 0$, παίρνουμε ότι

$$\frac{1 - e^{-s^*\bar{x}}}{\bar{x}} = \frac{1}{\frac{r}{c} + \frac{1}{s^*}} \equiv l^*.$$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda q^*(\lambda) \pi_j(0) = l^*$ καθώς και ότι $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \pi_j(n) = l^*$ για $1 \leq n \leq j-1$.

Από την (3.35) παίρνουμε ότι

$$\lambda q^*(\lambda) \pi_j(0) = \frac{1 - e^{-\lambda q^*(\lambda) \bar{x}}}{\bar{x}} = l^*,$$

και άρα $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda q^*(\lambda) \pi_j(0) = l^*$.

Από τις (3.137-3.137), αποδεσμεύοντας θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \pi_j(1) &= \frac{q^*}{1 - q^*} (\pi_j(0) - \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} p(0, a) da) \\ \pi_j(n) &= \frac{1}{1 - q^*} (\pi_j(n-1) - \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} p(n-1, a) da), \quad 2 \leq n \leq j-1, \end{aligned}$$

όπου $p(n, a) = e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^{n-1}}{(n-1)!}$. Επειδή $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda p(n, a) = 0$ και $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} q^*(\lambda) = 0$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \lambda \pi_j(1) &= \frac{1}{1 - q^*} (\lambda q^* \pi_j(0) - \frac{\lambda q^*}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} p(0, a) da) \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} l^*, \\ \lambda \pi_j(2) &= \frac{1}{1 - q^*} (\lambda \pi_j(1) - \frac{\lambda}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} p(1, a) da) \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} l^*, \end{aligned}$$

και άρα αναδρομικά θα έχουμε ότι $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \pi_j(n) = l^*$. Θα έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} TH^{CN-(e)}(\lambda) &= \lambda \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \sum_{n=0}^j q_j^{(e)}(n) \pi_j(n) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} h(j) (\lambda q^* \pi_j(0) + \lambda \pi_j(1) + \dots + \lambda \pi_j(j-1)) \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} h(j) j l^* = \bar{h} l^* = \frac{\bar{h}}{\bar{x}} (1 - e^{-s^*\bar{x}}). \end{aligned}$$

Τέλος, οι μορφές των $TH_\infty^{C-(e)}$, $TH_\infty^{\emptyset-(e)}$ προκύπτουν άμεσα από τις (3.47) και (3.51). \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.12 Από την απόδειξη της (3.7) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} SW_j^{CAN-(e)} &= \frac{\lambda}{\bar{x}} \int_{\bar{x}-\frac{r}{c}}^{\bar{x}} (r - c(\bar{x} - a)) p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})) da \\ &= \frac{r}{\bar{x}} \frac{\int_0^{\frac{\lambda r}{c}} u p_j(u) du}{\frac{\lambda r}{c}}. \end{aligned}$$

Επίσης, επειδή $SW_j^{CA-(e)} = 0$ όταν $q_j^{CA-(e)}(a) < 1$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$SW_j^{CA-(e)} = \frac{\lambda}{\bar{x}} \int_{\bar{x}-\frac{r}{c}}^{\bar{x}} (r p_j(\lambda(a|\mathbf{q}_j)) - c(\bar{x} - a)) da$$

Επομένως

$$\begin{aligned} SW_j^{CAN-(e)} - SW_j^{CA-(e)} &= \frac{\lambda}{\bar{x}} \left(r \int_{\bar{x}-\frac{r}{c}}^{\bar{x}} (p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})) - p_j(\lambda(a|\mathbf{q}_j))) da \right) \\ &\quad + \frac{\lambda}{\bar{x}} \left(c \int_{\bar{x}-\frac{r}{c}}^{\bar{x}} (\bar{x} - a)(1 - p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c}))) da \right). \end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος, θέτοντας $u = \lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})$ γράφεται και ως

$$\frac{c}{\bar{x}} \int_0^{\frac{r\lambda}{c}} \left(\frac{r}{c} - \frac{u}{\lambda} \right) (1 - p_j(u)) du,$$

και αφού $\frac{u}{\lambda} < \frac{1}{\lambda} \frac{r\lambda}{c} = \frac{r}{c}$, θα είναι πάντα θετικός.

Ακόμη, επειδή $\lambda(a|\mathbf{q}_j) \leq \lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c})$, από τη μονοτονία της $p_j(s)$ (καθώς είναι γν. φθίνουσα ως προς s , παίρνουμε ότι $p_j(\lambda(a|\mathbf{q}_j)) \geq p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c}))$ και άρα προκύπτει πως ο πρώτος όρος είναι μη αρνητικός. Επομένως, στη γενική περίπτωση, το πρόσημο της παραπάνω δεν μπορεί να προσδιοριστεί.

Ωστόσο, από τις (3.5) και (3.24) παρατηρούμε ότι για $\frac{r\lambda}{c} \leq v_1 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{c}{r}$, είναι $\lambda(a) = \lambda(a|\mathbf{q}_j) = p_j(\lambda(a - \bar{x} + \frac{r}{c}))$ και επομένως ο πρώτος όρος χάνεται και θα έχουμε $SW_j^{CAN-(e)} > SW_j^{CA-(e)}$. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.13 Από τις (3.41) και (3.48) έχουμε ότι

$$SW^{CN-(e)} = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \sum_{n=0}^j q_j^{CN-(e)}(n) \pi_j(n) (r - cE[n|\mathbf{q}_j])$$

και

$$SW^{C-(e)} = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} h(j) q_j^{C-(e)} (r P_j(\lambda q_j^{C-(e)}) - c \frac{\bar{x}}{2}).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
 SW_j^{CN-(e)} - SW_j^{C-(e)} &= \lambda \left[\sum_{n=0}^j q_j^{CN-(e)}(n) \pi_j(n) (r - cE[n|\mathbf{q}_j]) \right. \\
 &\quad \left. - q_j^{C-(e)} (rP_j(\lambda q_j^{C-(e)}) - c\frac{\bar{x}}{2}) \right] \\
 &= \lambda r \left(\sum_{n=0}^j q_j^{CN-(e)}(n) \pi_j(n) - q_j^{C-(e)} P_j(\lambda q_j^{C-(e)}) \right) \\
 &\quad + \lambda c \left(q_j^{C-(e)} \frac{\bar{x}}{2} - \sum_{n=0}^j q_j^{CN-(e)}(n) \pi_j(n) cE[n|\mathbf{q}_j] \right).
 \end{aligned}$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι $q_j^{C-(e)} = 1 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{\bar{x}} \phi_j^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r})$ ενώ $q_j^{CN-(e)}(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{1-e^{-\lambda\bar{x}}} - \frac{1}{\lambda} \leq \frac{r}{c} \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{\bar{x}} f_1^{-1}(\frac{c}{\lambda r+c})$.

Μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει κάποιο j^* ώστε για $\lambda < \lambda_1 \equiv \max\{\lambda : \lambda < \frac{1}{\bar{x}} f_1^{-1}(\frac{c}{\lambda r+c})\}$ να έχουμε $q_j^{C-(e)} = 1$ για κάθε $j \geq j^*$ ενώ $q_j^{C-(e)} < 1$ για $j < j^*$. Επομένως, για $j < j^*$ θα είναι $SW_j^{CN-(e)} - SW_j^{C-(e)} = SW_j^{CN-(e)} > 0$ ενώ για $j \geq j^*$, χρησιμοποιώντας την (3.38), το πρώτο μέλος στην τελευταία θα γίνει

$$\lambda r \left(\sum_{n=0}^{j-1} \pi_j(n) - P_j(\lambda) \right) = r(\phi_j(\lambda\bar{x}) - \phi_j(\lambda\bar{x})) = 0,$$

ενώ το δεύτερο μέλος είναι πάντα θετικό αφού

$$\sum_{n=0}^j q_j^{CN-(e)}(n) \pi_j(n) cE[n|\mathbf{q}_j] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \pi_j(n) cE[n|\mathbf{q}_j] = \frac{\bar{x}}{2}.$$

Δηλαδή, $SW_j^{CN-(e)} > SW_j^{C-(e)}$ για κάθε $j \geq 1$ και άρα $SW^{CN-(e)} > SW^{C-(e)}$ για $\lambda < \lambda_1$. Αν δεν υπήρχε j^* με την παραπάνω ιδιότητα, θα είχαμε ότι για $\lambda < \frac{1}{\bar{x}} f_1^{-1}(\frac{c}{\lambda r+c})$, θα είναι $\lambda \geq \frac{1}{\bar{x}} \phi_j^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r})$ για κάθε j , το οποίο είναι άτοπο.

Από την άλλη, θα υπάρχει κάποιο λ_2 , ώστε για $\lambda > \lambda_2$ να είναι $q_j^{C-(e)} < 1$ για κάθε j και επομένως θα είναι $SW^{CN-(e)} \geq SW^{C-(e)} = 0$. Όταν η χωρητικότητα είναι πεπερασμένη, έστω $C \leq m$, τότε το λ_2 προσδιορίζεται από την $\lambda \geq \frac{1}{\bar{x}} f_m^{-1}(\frac{c\bar{x}}{2r})$. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.14 Για το $SW_{\infty}^{CAN-(e)}$ μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι $\int_0^{\infty} up_j(u)du = \frac{1}{2}j(j+1)$. Επομένως, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} SW^{CAN-(e)}(\lambda) &= \frac{r}{\bar{x}} \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \frac{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\lambda r}{c}} up_j(u)du}{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda r}{c}} \\
 &= \frac{r}{\bar{x}} \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \frac{\frac{1}{2}j(j+1)}{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda r}{c}} = 0
 \end{aligned}$$

Τέλος, για το κοινωνικό όφελος καθώς $\lambda \rightarrow \infty$, αφού τότε είναι $\pi_j(n) = 0$ για $1 \leq n \leq j-1$, θα έχουμε ότι $SW_j = \lambda q^*(\lambda) \pi_j(0) G_j(0|\mathbf{q}_j) = 0$ αφού $q^*(\lambda) \in (0, 1) \Rightarrow G_j(0|\mathbf{q}_j) = 0$. \square

3.3.10 Ειδική περίπτωση-Εκθετικοί ενδιάμεσοι χρόνοι

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.15 Η μορφή της στρατηγικής ισορροπίας είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1, και ειδικότερα, της εξίσωσης (2.14), λαμβάνοντας υπόψη ότι $m(a) = \bar{x}$.

Για την στάσιμη κατανομή έχουμε ότι στο επίπεδο πληροφόρησης CN , για $\frac{r}{c} \geq \bar{x}$, το πλήθος των πελατών στο σύστημα κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας σχηματίζει μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με ρυθμούς μετάβασης

$$q_{n,m} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } n = 0, 1, 2, \dots, j-1 \text{ και } m = n+1, \\ \frac{1}{\bar{x}} & \text{αν } n = 1, 2, \dots, j \text{ και } m = 0, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας που προκύπτουν, προκύπτει άμεσα η (3.71)

$$\pi_j(n) = \begin{cases} (1-\rho)\rho^n & n = 0, 1, 2, \dots, j-1, \\ \rho^n & n = j. \end{cases} \quad (3.145)$$

Για $\frac{r}{c} > \bar{x}$ θα είναι $EAR_j^{CN-(e)} = TH_j^{CN-(e)} = \lambda \sum_{n=0}^{j-1} \pi_j(n) = \lambda(1-\rho^j)$. Επομένως, αφού $\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j h(j) = \tilde{G}(\rho)$, οι (3.72) και (3.73) έπονται άμεσα. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 Εφαρμόζουμε την Πρόταση (2.3). Είναι $m(u) = \bar{x}$ και επομένως $q^{(e)}(a, n) = \mathbb{1}_{\{\bar{H}(n) \geq \frac{\bar{x}c}{r}\}}$. Θέτουμε $n^* = \max\{n \geq 0 : \bar{H}(n) \geq \frac{\bar{x}c}{r}\}$ και λόγω της μονοτονίας της \bar{H} θα έχουμε ότι $q^{(e)}(a, n) = \mathbb{1}_{\{n \leq n^*\}}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \lambda_n(u) &= \lambda \mathbb{1}_{\{n \leq n^*\}}, \\ \Lambda_n(t) &= \lambda t \mathbb{1}_{\{n \leq n^*\}} \text{ και} \\ \Lambda_{(n-1, n)}(t) &= \lambda t \mathbb{1}_{\{n-1 = n^*\}}. \end{aligned}$$

Επομένως, για $n \leq n^*$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \pi(n|a) &= e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda \int_0^{t_{n-1}} \lambda \int_0^{t_{n-2}} \dots \int_0^{t_1} \lambda dt_0 \dots dt_{n-2} dt_{n-1} \\ &= e^{-\lambda a} \int_0^a \lambda \int_0^{t_{n-1}} \lambda \frac{(\lambda t_{n-2})^{n-2}}{(n-2)!} dt_{n-2} dt_{n-1} \\ &= e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Για $n = n^* + 1$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \pi(n|a) &= \int_0^a \lambda e^{-\lambda t_{n-1}} \int_0^{t_{n-1}} \lambda \int_0^{t_{n-2}} \dots \int_0^{t_1} \lambda dt_0 \dots dt_{n-2} dt_{n-1} \\ &= \int_0^a \lambda^n \frac{(t_{n-1})^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda t_{n-1}} dt_{n-1}. \end{aligned}$$

Στην τελευταία έκφραση μπορούμε να αναγνωρίσουμε την κατανομή της Erlang(n, λ), και επομένως παίρνουμε τον δεύτερο κλάδο στην (3.75). Τέλος, για $n > n^* + 1$, θα είναι $\pi(n|a) = 0$ καθώς τουλάχιστον ένα από τα $\lambda_n(u)$ θα είναι 0. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.16 Η περίπτωση 1 είναι άμεση λόγω του Πορίσματος 2.5. Για την περίπτωση 2, παρατηρούμε ότι η εξίσωση $m(a) = \frac{r}{c} p_j(\lambda a)$ είναι άμεσα επιλύσιμη καθώς $m(a) = \bar{x}$ και η λύση της δίνεται από την (3.82).

Η κατανομή $\pi_j(n|a)$ καθώς και τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης προκύπτουν άμεσα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.17 Θεωρώντας το j -παίγνιο των πελατών, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.7. Από την (3.83) έχουμε ότι $P_j(\lambda) = 1 - \rho^j$, όπου $\rho = \frac{\lambda}{\lambda + \frac{1}{\bar{x}}}$. Επιπλέον, η εξίσωση $G_j(q_j) = 0$ παίρνει τη μορφή

$$r\bar{x} \left(1 - \left(\frac{\lambda q_j}{\lambda q_j + \frac{1}{\bar{x}}} \right)^j \right) - c \frac{1}{\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)^2} = 0,$$

η οποία είναι άμεσα επιλύσιμη ως προς q_j , και μας δίνει τη λύση $q_j = \frac{1}{\lambda} P_i^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{r}\right)$. Η τελευταία, λόγω της (3.84), γράφεται και ως $q_j = \frac{\sqrt[j]{1 - \frac{c\bar{x}}{r}}}{\lambda\bar{x}\left(1 - \sqrt[j]{1 - \frac{c\bar{x}}{r}}\right)}$.

Η στάσιμη κατανομή και τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης προκύπτουν άμεσα. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.2 Τα μέτρα αποτίμησης απόδοσης προκύπτουν άμεσα από το Θεώρημα 2.11 σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $q^{(e)} = \frac{1}{\lambda} P^{-1}\left(\frac{c\bar{x}}{r}\right)$ για $\frac{r}{c} < \frac{\bar{x}}{P(\lambda)}$. □

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Η αξία της υπαναχώρησης σε ένα σύστημα αναμονής με εναλλασσόμενες περιόδους λειτουργίας και αργίας

Περίληψη: Η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σχετικά με το δίλημμα εισόδου/άμεσης αποχώρησης σε συστήματα εξυπηρέτησης με δυνατότητα διακοπής/βλάβης της ροής εξυπηρέτησης, έχει μελετηθεί διεξοδικά στην πρόσφατη βιβλιογραφία. Η τυπική υπόθεση στις μελέτες αυτές είναι πως οι πελάτες που εισέρχονται στο σύστημα δεν έχουν τη δυνατότητα υπαναχώρησης. Στην παρούσα μελέτη χαλαρώνουμε την υπόθεση αυτή και προσδιορίζουμε την αξία της υπαναχώρησης σε ένα σύστημα με στρατηγικούς πελάτες το οποίο υπόκειται σε βλάβες/διακοπές του υπηρέτη. Προκειμένου να εστιάσουμε στο χαρακτηριστικό της υπαναχώρησης, θα μελετήσουμε τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών στο απλούστερο δυνατό σύστημα αυτού του τύπου, δηλαδή σε ένα M/M/1 σύστημα στο οποίο ο υπηρέτης εναλλάσσεται μεταξύ περιόδων λειτουργίας και διακοπής. Δείχνουμε πως η δυνατότητα υπαναχώρησης έχει ουσιαστική επίδραση στο κοινωνικό όφελος αλλά και στον ρυθμό απόδοσης του συστήματος, υπό τη στρατηγική ισορροπίας. Ειδικότερα, καθώς μεταβάλλεται η αξία της εξυπηρέτησης, η ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση της δυνατότητας υπαναχώρησης, μπορεί να εξασφαλίσει υψηλότερο όφελος. Επιπλέον, δείχνουμε πως η επίδραση που έχει η δυνατότητα υπαναχώρησης είναι ιδιαίτερα σημαντική στην περίπτωση όπου το αρχικό σύστημα, χωρίς στρατηγικούς πελάτες, δεν είναι ευσταθές.

4.1 Εισαγωγή

4.1.1 Περιγραφή του ερευνητικού πλαισίου και συνεισφορά

Τα τελευταία 15 χρόνια έχουν υπάρξει πολλά ερευνητικά άρθρα που εστιάζουν στη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε συστήματα όπου η ροή της εξυπηρέτησης δύναται να διακοπεί. Η διακοπή αυτή μπορεί να είναι ελεγχόμενη και προγραμματισμένη αλλά μπορεί και είναι εξαναγκασμένη, όπως για παράδειγμα, στην περίπτωση ενδεχόμενης βλάβης. Το κεφάλαιο 10 του βιβλίου του Hassin, [63], αφορά αποκλειστικά τη μελέτη αυτού του τύπου συστημάτων, στα οποία οι πελάτες λαμβάνουν στρατηγικές αποφάσεις, και παρουσιάζονται αποτελέσματα από τουλάχιστον 50 άρθρα. Το δίλημμα εισόδου/άμεσης αποχώρησης στα συστήματα αυτά, έχει ήδη μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς. Ωστόσο, στα άρθρα αυτά, τίθεται ως βασική υπόθεση ο αποκλεισμός της δυνατότητας υπαναχώρησης (reneging) των πελατών, δηλαδή της αποχώρησης από το σύστημα ενός πελάτη που ήδη έχει εισέλθει σε αυτό. Ο περιορισμός αυτός φαίνεται πως οφείλεται στην πολύπλοκη φύση της συμπεριφοράς αυτής, που έχει ως αποτέλεσμα να καθίσταται αδύνατη η μοντελοποίηση αρκετών προβλημάτων. Πράγματι, η μελέτη των στρατηγικών υπαναχωρήσεων παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερες δυσκολίες σε σχέση με τη μελέτη άλλων στρατηγικών αποφάσεων, όπως για παράδειγμα, το δίλημμα εισόδου/άμεσης αποχώρησης. Η απόφαση της εισόδου ή της άμεσης αποχώρησης από το σύστημα, λαμβάνεται αποκλειστικά τη στιγμή της άφιξης ενός πελάτη. Επιπλέον, για τον πελάτη αυτόν, η επίδραση των στρατηγικών αποφάσεων των υπολοίπων, που ήδη έχουν εισέλθει, στη δικιά του ωφέλεια, είναι εύκολο να μελετηθεί καθώς έχουν ήδη λάβει τις αντίστοιχες αποφάσεις τους κατά την άφιξη τους. Αντίθετα, η απόφαση σχετικά με την παραμονή ή αναχώρηση από το σύστημα δύναται να ληφθεί καθ' όλη τη διάρκεια της περιόδου αναμονής στο σύστημα (ή τουλάχιστον μπορεί να επαναληφθεί), από τη στιγμή της εισόδου μέχρι την αποχώρηση του πελάτη. Μάλιστα, η απόφαση εγκατάλειψης του συστήματος από τους παρόντες πελάτες μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την απόφαση της παραμονής στο σύστημα άλλων νέο-εισερχομένων πελατών αλλά και την απόφαση της εισόδου κατά τις στιγμές των αφίξεων των πελατών.

Από την άλλη, έχει αναγνωρισθεί πως οι υπαναχωρήσεις αποτελούν συχνό φαινόμενο σε πολλά πραγματικά προβλήματα και επομένως υπάρχει ουσιαστική ανάγκη για τη μελέτη τους. Ειδικότερα, όταν η πιθανότητα βλάβης του υπηρέτη δεν είναι αμελητέα και μπορεί να προκαλέσει ανεπιθύμητες καθυστερήσεις, το να δοθεί η δυνατότητα υπαναχώρησης στους πελάτες μπορεί να θεωρηθεί λογικό. Για παράδειγμα, σε περιπτώσεις όπου η αναγκαιότητα της εξυπηρέτησης δεν είναι επιτακτική (όπως κατά την αναμονή στην ουρά ενός θεματικού πάρκου για ένα συγκεκριμένο τρενάκι, στην ουρά ενός συγκεκριμένου καταστήματος σε ένα εμπορικό κέντρο, κατά την αναμονή σε μια στάση λεωφορείου κ.λπ.) και συμβεί κάποιο περιστατικό που θα έχει ως αποτέλεσμα να υπάρξουν μεγαλύτερες καθυστερήσεις (όπως μια βλάβη, μια αναγκαιότητα του υπηρέτη να εκτελέσει μια 'δευτερεύουσα' ή κατεπείγουσα εργασία, κ.λπ.) οι πελάτες ενδέχεται να εγκαταλείψουν το σύστημα και να χρησιμοποιήσουν κάποιον άλλον διαθέσιμο τρόπο εξυπηρέτησης. Για περισσότερα σχετικά με την ψυχολογία των πελατών που μπορεί να οδηγήσει στη λήψη αποφάσεων σχετικών με υπαναχωρήσεις, δείτε το πρόσφατο άρθρο των Furnham, Treglown και Horne [48] αλλά και τις σχετικές αναφορές που εμπεριέχονται σε αυτό.

Σύμφωνα με τον Hassin [63], η δυνατότητα υπαναχώρησης θεωρείται ως ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό για τη ρεαλιστική αναπαράσταση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπτόμενη ροή εξυπηρέτησης. Πιο συγκεκριμένα, παραθέτουμε το ακόλουθο απόσπασμα από τον πρόλογο του κεφαλαίου 10: 'Vacations':

“Reneging: Observable and almost-unobservable models assume customers know the state of the server. Assuming this information is also available after joining, a rational customer who joined when the server was active may wish to renege should a breakdown occur. The

models with breakdowns we discuss assume customers cannot renege when breakdowns occur. Allowing for renegeing would make the model more realistic.”

Στο κεφάλαιο αυτό θα χαλαρώσουμε αυτή την αρκετά τεχνική υπόθεση αποκλεισμού των υπαναχωρήσεων για τη μελέτη συστημάτων με ενδεχόμενη διακοπή της εξυπηρέτησης και με στρατηγικούς πελάτες. Συγκεκριμένα, εστιάζουμε στον προσδιορισμό της αξίας που μπορεί να έχει η δυνατότητα της υπαναχώρησης τόσο για το σύστημα όσο και για τους πελάτες. Για να κρατήσουμε το πλαίσιο απλό, έχουμε θεωρήσει ένα Μαρκοβιανό μοντέλο με έναν υπηρέτη ο οποίος εναλλάσσεται μεταξύ περιόδων λειτουργίας και διακοπής σύμφωνα με μια μια διδιάστατη Μαρκοβιανή αλυσίδα. Η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σχετικά με το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης, για το μοντέλο αυτό, με τη διαφορά όμως ότι η δυνατότητα υπαναχώρησης έχει αποκλεισθεί, έχει ήδη μελετηθεί εκτενώς, ενώ η αρχή έγινε από τους Economou και Kanta [42]. Η μελέτη τους αφορά την περίπτωση που το πλήθος των παρόντων πελατών στο σύστημα είναι γνωστό και διαθέσιμο, ως πληροφορία, για τους νέο-αφιχθέντες πελάτες. Στη συνέχεια, θεωρήθηκαν πολλές γενικεύσεις του συγκεκριμένου μοντέλου από πολλούς συγγραφείς οι οποίες μάλιστα ερευνούσαν διαφορετικά σενάρια πληροφορίας. Πριν παρουσιάσουμε τη σχετική βιβλιογραφία, συνοψίζουμε στα παρακάτω σημεία τη βασική συνεισφορά της μελέτης του συγκεκριμένου προβλήματος.

1. *Χαρακτηρισμός και υπολογισμός των στρατηγικών ισορροπίας.* Προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας και δείχνουμε πως είναι τύπου διπλού κατωφλίου ανάλογα με την κατάσταση του υπηρέτη (ενεργός ή μη-ενεργός). Επιπλέον, μελετάμε την οριακή κατανομή του συστήματος όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας στις περιπτώσεις με επιτρεπόμενες υπαναχωρήσεις (R) και μη-επιτρεπόμενες υπαναχωρήσεις (NR). Χρησιμοποιώντας την κατανομή αυτή, υπολογίζουμε τον ρυθμό απόδοσης (throughput) καθώς και το κοινωνικό όφελος (social welfare) (ανά χρονική μονάδα) του συστήματος, υπό τη στρατηγική ισορροπίας, στις περιπτώσεις R και NR.
2. *Εισαγωγή της αξίας της υπαναχώρησης Value of Reneging (VoR) ως ένα μέτρο σχετικά με τη συνεισφορά που μπορεί να έχει η εισαγωγή της επιλογής της υπαναχώρησης.* Για τη σύγκριση του ρυθμού απόδοσης αλλά και της κοινωνικής ωφέλειας υπό τη στρατηγική ισορροπίας μεταξύ των περιπτώσεων R και NR, για συστήματα με ίδιες παραμέτρους, ορίζουμε:

- την αξία της υπαναχώρησης ως προς τον ρυθμό απόδοσης ως

$$VoR_{TH} = \frac{\text{Ρυθμός απόδοσης ισορ. με υπαναχωρήσεις}}{\text{Ρυθμός απόδοσης ισορ. χωρίς υπαναχωρήσεις}}$$

- την αξία της υπαναχώρησης ως προς την κοινωνική ωφέλεια ως

$$VoR_{SW} = \frac{\text{Κοινωνική ωφέλεια σε ισορ. με υπαναχωρήσεις}}{\text{Κοινωνική ωφέλεια σε ισορ. χωρίς υπαναχωρήσεις}}$$

3. *Μελέτη της επίδρασης της δυνατότητας υπαναχώρησης ως προς τις παραμέτρους του συστήματος.* Διεξάγουμε ένα μεγάλο πλήθος αριθμητικών πειραμάτων εφαρμόζοντας τα θεωρητικά αποτελέσματα της ανάλυσης που πραγματοποιήσαμε. Ειδικότερα, εξερευνούμε κατά πόσο υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο εύρος για τις παραμέτρους του συστήματος για το οποίο η υπαναχώρηση είναι πλεονεκτική. Τα πειράματα αποκαλύπτουν πολλά ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Συνοψίζουμε τα λιγότερο αναμενόμενα εξ' αυτών:

- Στην περίπτωση R, το κατώφλι ισορροπίας για τους πελάτες που βρίσκουν τον υπηρέτη ενεργό δεν αυξάνει απαραίτητα με την αξία εξυπηρέτησης. Με άλλα λόγια, μια αύξηση

στην αξία εξυπηρέτησης μπορεί, ενδεχομένως, να αποθαρρύνει τους πελάτες από το να εισέλθουν στο σύστημα, παρόλο που το πλήθος των πελατών είναι παρατηρήσιμο.

- Σχετικά με τις συναρτήσεις κοινωνικής ωφέλειας των πελατών, υπό τη στρατηγική ισορροπίας, για τις δύο περιπτώσεις R και NR, δείχνουμε πως καθώς αυξάνεται η αξία εξυπηρέτησης (και ενώ οι άλλες παράμετροι παραμένουν σταθερές), τα αντίστοιχα γραφήματα παρουσιάζουν πολλαπλά σημεία τομής. Αυτό σημαίνει πως με την αύξηση της αξίας εξυπηρέτησης, υπάρχουν ορισμένα διαστήματα, του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων κοινωνικής ωφέλειας στα οποία οι υπαναχωρήσεις κρίνονται ωφέλιμες για την κοινωνία, αλλά και διαστήματα στα οποία κρίνονται επιζήμιες.
- Όταν το αρχικό σύστημα με μη-στρατηγικούς πελάτες είναι ευσταθές, η τιμή VoR_{SW} συγκλίνει στο 1 καθώς η αξία εξυπηρέτησης συγκλίνει στο άπειρο. Αυτό σημαίνει πως το να επιτρέψουμε υπαναχωρήσεις για τους πελάτες δεν θα έχει κάποια σημαντική επίδραση στην κοινωνική ωφέλεια του συστήματος. Ωστόσο, όταν το σύστημα δεν είναι ευσταθές, η τιμή VoR_{SW} παρουσιάζει μια περιοδική συμπεριφορά, με κύμανση που άλλοτε ξεπερνά και άλλοτε υστερεί της μονάδας.
- Γενικά, καθώς ο ρυθμός αφίξεων τείνει στο άπειρο, το VoR_{SW} έχει πεπερασμένο όριο. Ωστόσο η οριακή αυτή τιμή μπορεί να είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της μονάδας, ανάλογα με τις άλλες παραμέτρους του συστήματος. Επομένως, για υψηλό ρυθμό αφίξεων, υπάρχουν ορισμένες τιμές των παραμέτρων για τις οποίες το να επιτραπούν οι υπαναχωρήσεις είναι ωφέλιμο αλλά και άλλες τιμές για τις οποίες το να επιτραπούν οι υπαναχωρήσεις είναι επιζήμιο.
- Συγκρίνοντας το αρχικό σύστημα, με μη-στρατηγικούς πελάτες, με εκείνο στο οποίο αναφέρονται οι περιπτώσεις R και NR, παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο συνωστισμός στο σύστημα, η παρουσία των στρατηγικών πελατών έχει σημαντική επίδραση στην κοινωνική ωφέλεια. Η επίδραση αυτή γίνεται πιο έντονη σε συστήματα με χαμηλή αξία εξυπηρέτησης.

Τα αριθμητικά αυτά ευρήματα εξηγούνται μέσω αυστηρών επιχειρημάτων και διαισθητικών προσεγγίσεων που ρίχνουν επιπλέον φως στη σημαντικότητα των επιτρεπόμενων υπαναχωρήσεων.

4.1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Τα πρώτα άρθρα που μελέτησαν συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπόμενη ροή εξυπηρέτησης υπό μια οικονομική προσέγγιση, εμφανίστηκαν στη δεκαετία των 90 από τους Dellaert [32] και Cheng [26], [27]. Ωστόσο, το πλαίσιο εφαρμογής ήταν αρκετά περιορισμένο: Στο [32], η συμπεριφορά της εισόδου των πελατών είναι εξωγενής, ενώ στα [26] και [27] η μελέτη αφορά αποκλειστικά μη-παρατηρήσιμα συστήματα.

Η παιγνιοθεωρητική προσέγγιση για τα συστήματα αυτού του τύπου, σχετικά με το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης εισήχθη για πρώτη φορά από τους Burnetas και Economou [18] και αφορούσε ένα M/M/1 σύστημα με πολλαπλές διακοπές και με ένα ευρύ πλαίσιο πληροφόρησης. Συγκεκριμένα, οι συγγραφείς χαρακτήρισαν τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών σε τέσσερα διαφορετικά επίπεδα πληροφόρησης που αφορούν τη διαθεσιμότητα ή όχι της πληροφορίας σχετικά με το πλήθος παρόντων αλλά και τη διαθεσιμότητα ή όχι της πληροφορίας σχετικά με την κατάσταση του υπηρέτη (ενεργός-ανεργός). Στη συνέχεια, ακολούθησαν πολλές επεκτάσεις της εργασίας αυτής από συγγραφείς που θεώρησαν επίσης ένα Μαρκοβιανό πλαίσιο για τη μοντελοποίηση της λειτουργίας του υπηρέτη και ιδίως, αναφέρουμε τις [74], [96], [92], [154], [129], [149], και [128]. Η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών για το αντίστοιχο μοντέλο σε μη-Μαρκοβιανό

πλαίσιο, με γενική κατανομή τόσο για τον χρόνο εξυπηρέτησης όσο και για τις περιόδους διακοπών έγινε από τους Economou, Gómez-Corral και Kanta στο [41].

Οι Guo και Hassin [54] ξεκίνησαν ένα παράλληλο νήμα της βιβλιογραφίας με εξίσου σημαντικά ευρήματα που αφορούν τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών στο άλλο θεμελιώδες μοντέλο με την N -πολιτική ενεργοποίησης για το $M/M/1$ σύστημα. Η διερεύνηση συνεχίστηκε στις εργασίες [133], [130], [25], [55], [57] και [56].

Σχετικά με τις εξαναγκασμένες διακοπές, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν και ως περιστατικά βλάβης του υπηρέτη, το πρώτο μοντέλο που μελετήθηκε ακολουθώντας την παιγνιοθεωρητική προσέγγιση, ήταν το $M/M/1$ σύστημα με εναλλασσόμενες περιόδους λειτουργίας-διακοπής των Economou και Kanta [42]. Η εργασία αφορούσε τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε ένα παρατηρήσιμο και ένα σχεδόν παρατηρήσιμο πλαίσιο πληροφόρησης, όπου οι πελάτες λαμβάνουν τις αποφάσεις τους σχετικά με την είσοδο ή αποχώρηση από το σύστημα γνωρίζοντας τον αριθμό των παρόντων πελατών σε αυτό. Τη συγκεκριμένη εργασία ακολούθησαν πολλές παραλλαγές και επεκτάσεις που αφορούσαν κυρίως διαφορετικά πλαίσια πληροφόρησης ή που περιείχαν επιπρόσθετα χαρακτηριστικά. Αναφέρουμε ορισμένες από αυτές: [89], [150] (μοντέλα διακριτού χρόνου), [35], [90], [79] (μη-παρατηρήσιμα μοντέλα), [34] (ένα μοντέλο όπου η εξυπηρέτηση συνεχίζει κατά τη διάρκεια των διακοπών), [141] (ένα μοντέλο με περιόδους διακοπής 2 φάσεων), [45] (ένα μοντέλο εκκαθάρισης), και [46] (ένα μοντέλο ρευστού fluid model). Ωστόσο, σε όλες αυτές τις εργασίες, η μελέτη αφορά τη στρατηγική συμπεριφορά, έχοντας ως κεντρική υπόθεση πως η δυνατότητα υπαναχώρησης έχει αποκλειστεί.

Γενικά, η μελέτη μοντέλων υπό παιγνιοθεωρητική προσέγγιση που εξετάζουν στρατηγικές αποφάσεις υπαναχώρησης είναι σημαντικά περιορισμένη. Οι Hassin και Havin [65] (παράγραφοι 5.1, 5.2) και ο Hassin [63] (παράγραφοι 2.1.4, 4.2.1 και 11.4) συνοψίζουν τα πιο σημαντικά αποτελέσματα που αφορούν τέτοιες μελέτες. Η εργασία του Haight [60] είναι από τις πρώτες που εξετάζουν ορθολογικές αποφάσεις σχετικές με υπαναχωρήσεις. Άλλες σημαντικές εργασίες είναι αυτές των Mendelson και Yechiali [103], Assaf και Haviv [9], Hassin και Haviv [64], Haviv και Ritov [72], Mandelbaum και Shimkin [98] και των Burnetas, Economou και Vasiliadis [19]. Ωστόσο, από όσο γνωρίζουμε, δεν υπάρχει εργασία σχετική με τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς σχετικά με υπαναχωρήσεις σε συστήματα εξυπηρέτησης διακοπτόμενης ροής εξυπηρέτησης, παρόλο που φαίνεται λογικό πως οι πελάτες δύνανται να υπαναχωρούν σε τέτοια συστήματα όταν υπάρχει διακοπή.

4.1.3 Διάρθρωση του κεφαλαίου

Αρχικά, στην ενότητα 4.2 περιγράφουμε αναλυτικά τις υποθέσεις του μοντέλου και τη δομή κόστους-αμοιβών για το σύστημα. Συνεχίζουμε, στην ενότητα 4.3, με τον προσδιορισμό των στρατηγικών ισορροπίας και τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής του συστήματος για τις δύο εκδοχές (R και NR), όταν υιοθετηθούν οι αντίστοιχες στρατηγικές ισορροπίας. Στην ενότητα 4.4 εστιάζουμε στην αξία της υπαναχώρησης συγκρίνοντας τον ρυθμό απόδοσης και το κοινωνικό όφελος, υπό τη στρατηγική ισορροπίας, στα δύο αυτά παρόμοια συστήματα που διαφέρουν μόνο ως προς το αν επιτρέπεται η δυνατότητα υπαναχωρήσεων ή έχει αποκλειστεί. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται επίσης και επιπρόσθετα αναλυτικά αποτελέσματα, διάφορα αριθμητικά ευρήματα αλλά και χρήσιμες διευκρινήσεις. Τέλος, στην ενότητα 5.5.2 συζητάμε ορισμένες ουσιαστικές κατευθύνσεις που θα μπορούσαν να διερευνηθούν μελλοντικά. Στο παράρτημα περιλαμβάνονται οι τεχνικές αποδείξεις των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

4.2 Περιγραφή του μοντέλου και συμβολισμός

Θεωρούμε ένα M/M/1 σύστημα στο οποίο ο υπηρέτης εναλλάσσεται μεταξύ ενεργών και μη-ενεργών περιόδων λειτουργίας. Ειδικότερα, οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού λ και υπάρχει ένας υπηρέτης που εξυπηρετεί σε χρόνο εκθετικά κατανομημένο με ρυθμό μ . Ο χώρος αναμονής είναι απεριόριστος και η πειθαρχία εξυπηρέτησης είναι τύπου FCFS. Υποθέτουμε πως ο υπηρέτης εναλλάσσεται μεταξύ ενεργών και μη ενεργών περιόδων λειτουργίας που είναι επίσης εκθετικά κατανομημένες με ρυθμούς ζ και θ αντίστοιχα. Κατά τη διάρκεια μιας ενεργής περιόδου, ο υπηρέτης εξυπηρετεί κανονικά τους πελάτες, ενώ όταν βρεθεί στην περίοδο που είναι μη ενεργός, η ροή εξυπηρέτησης διακόπτεται αλλά οι αφίξεις συνεχίζονται. Θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Εστιάζουμε στο πρόβλημα της απόφασης των πελατών σχετικά με αν θα εισέλθουν και παραμείνουν στο σύστημα χωρίς να υπαναχωρήσουν στη συνέχεια. Κάθε πελάτης λαμβάνει μια μέση αμοιβή της τάξεως των R μονάδων αποκλειστικά με την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του, ενώ παράλληλα επωμίζεται κόστος παραμονής με ρυθμό C ανά χρονική μονάδα, όσο παραμένει στο σύστημα (είτε στο χώρο αναμονής είτε στο χώρο εξυπηρέτησης). Το κόστος αυτό δεν μπορεί να επιστραφεί σε κάποιον πελάτη αν τελικά επιλέξει να υπαναχωρήσει (δηλαδή να αποχωρήσει χωρίς να έχει προλάβει να ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του). Οι πελάτες αντιμετωπίζουν αρχικά το δίλημμα εισόδου ή άμεσης αποχώρησης από το σύστημα. Σχετικά με τη δυνατότητα υπαναχωρήσεων θεωρούμε τα εξής δύο μοντέλα: το μοντέλο με μη-επιτρεπόμενες υπαναχωρήσεις (περίπτωση NR) στο οποίο κανείς πελάτης που έχει επιλέξει αρχικά να εισέλθει στο σύστημα δεν μπορεί να αποχωρήσει από αυτό χωρίς να έχει ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του, και το μοντέλο με επιτρεπόμενες υπαναχωρήσεις R. Στο τελευταίο, οι πελάτες που έχουν εισέλθει έχουν τη δυνατότητα να επιλέξουν να αποχωρήσουν οποιαδήποτε στιγμή από το σύστημα ακόμα και κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησης, αν αυτό υπαγορεύει η στρατηγική τους.

Σχετικά με την πληροφόρηση που είναι διαθέσιμη στους πελάτες, υποθέτουμε πως το σύστημα είναι διαρκώς πλήρως παρατηρήσιμο. Ειδικότερα, οι πελάτες ενημερώνονται κατά τη στιγμή άφιξης τους σχετικά με πλήθος παρόντων πελατών στο σύστημα αλλά και σχετικά με την τρέχουσα κατάσταση του υπηρέτη (ενεργός ή ανενεργός) και αποφασίζουν, τόσο στην R όσο και στην NR περίπτωση, αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή θα αποχωρήσουν. Επιπλέον, αποκλειστικά για την R περίπτωση, οι πελάτες που έχουν αποφασίσει να εισέλθουν και βρίσκονται ήδη στο σύστημα, έχουν τη δυνατότητα να παρατηρούν διαρκώς την κατάσταση του συστήματος (πλήθος παρόντων πελατών και κατάσταση υπηρέτη) και μπορούν να αποφασίσουν αν θα παραμείνουν σε αυτό ή θα αποχωρήσουν άμεσα χωρίς να εξυπηρετηθούν.

Η κατάσταση του συστήματος μια τυχαία χρονική στιγμή t περιγράφεται από το διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών $(N(t), I(t))$, όπου η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ αφορά το πλήθος παρόντων πελατών στο σύστημα ενώ η $I(t)$ καταγράφει την κατάσταση του υπηρέτη ($I(t) = 1 \rightarrow$ ενεργός, $I(t) = 0 \rightarrow$ ανενεργός).

4.3 Στρατηγική ισορροπίας και στάσιμη κατανομή

Στην ενότητα αυτή εστιάζουμε στην εύρεση της στρατηγικής ισορροπίας και στη συνέχεια στον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής του συστήματος όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας. Επιπλέον, υπολογίζουμε τον ρυθμό απόδοσης (throughput) και την κοινωνική ωφέλεια (social welfare) υπό τη στρατηγική ισορροπίας.

4.3.1 Στρατηγική ισορροπίας - περίπτωση R

Θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη που φθάνει στο σύστημα στην περίπτωση R. Αρχικά ο πελάτης αυτός θα αποφασίσει αν θα εισέλθει στο σύστημα ή θα αποχωρήσει άμεσα από αυτό. Στη συνέχεια και στην περίπτωση που αποφάσισε να εισέλθει, θα αντιμετωπίζει διαρκώς το δίλημμα σχετικά με το αν θα μείνει ή θα αποχωρήσει από το σύστημα. Ωστόσο, από τις υποθέσεις περί εκθετικών κατανομών (Μαρκοβιανή φύση του συστήματος) και της συνεχούς αλλά και τέλει παρατηρησιμότητας, έπεται πως ο πελάτης αυτός θα έχει κίνητρο να υπαναχωρήσει μόνο τις στιγμές που υπάρχει μεταβολή στην κατάσταση του συστήματος. Επιπλέον, λόγω της FCFS πειθαρχίας, ο πελάτης δεν έχει λόγο να υπαναχωρήσει σε στιγμές αφίξεων άλλων πελατών. Τέλος, παρατηρούμε πως οι πελάτες δεν έχουν κίνητρο να υπαναχωρήσουν σε στιγμές που ολοκληρώνεται κάποια εξυπηρέτηση, αλλά ούτε σε στιγμές που η κατάσταση του υπηρέτη αλλάζει από 0 (ανεργός) σε 1 (ενεργός). Επομένως, οι μοναδικές στιγμές που μια υπαναχώρηση μπορεί να αποβεί συμφέρουσα είναι εκείνες που ο υπηρέτης αλλάζει κατάσταση από 1 (ενεργός) σε 0 (ανεργός). Στις στιγμές αυτές, ο επιλεγμένος πελάτης θα αποφασίσει αν θα παραμείνει στο σύστημα ή θα αποχωρήσει όπως ένας νεοαφικθείς πελάτης αποφασίζει αν θα εισέλθει ή θα αποχωρήσει. Συνεπώς, η στρατηγική ισορροπίας των πελατών θα ανήκει στην κλάση των στρατηγικών τύπου κατωφλίου. Δηλαδή, καθορίζεται από ένα ζεύγος κατωφλιών $(n_{e,0}^R, n_{e,1}^R)$ τα οποία υπαγορεύουν την εξής συμπεριφορά: Ένας πελάτης που μόλις έφθασε στο σύστημα θα εισέλθει σε αυτό αν το μήκος της ουράς είναι το πολύ ίσο με $n_{e,i}^R$, όταν η κατάσταση του υπηρέτη είναι i . Επιπλέον, ένας πελάτης που βρίσκεται ήδη στο σύστημα, θα παραμείνει σε αυτό όταν υπηρέτης μεταβεί στην ανεργή περίοδο, αν το πλήθος πελατών που προηγούνται για εξυπηρέτηση είναι το πολύ $n_{e,0}^R$, διαφορετικά επιλέγει να αποχωρήσει.

Για τον υπολογισμό του ζεύγους κατωφλιών $(n_{e,0}^R, n_{e,1}^R)$, θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την αναμενόμενη ωφέλεια της απόφασης εισαγωγής/παραμονής ενός πελάτη που θα πάρει τη θέση (ή ήδη βρίσκεται στη θέση) n , ενώ η κατάσταση του υπηρέτη είναι i . Συμβολίζουμε την αναμενόμενη ωφέλεια με $S_{(n,i)}^R$. Τότε θα είναι $n_{e,i}^R = \max\{n \geq 0 : S_{(n,i)}^R \geq 0\}$.

Θεώρημα 4.1. (Στρατηγική ισορροπίας - περίπτωση R) Στην πλήρως παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά με εναλλασσόμενες ενεργές και μη-ενεργές περιόδους λειτουργίας, στην περίπτωση R, η στρατηγική ισορροπίας δίνεται από το ζεύγος των κατωφλιών $(n_{e,0}^R, n_{e,1}^R)$, όπου

$$n_{e,0}^R = \lfloor x_{e,0}^R \rfloor, \quad \mu \in x_{e,0}^R = \frac{R\mu\theta}{C(\zeta + \theta)} - \frac{\mu}{\zeta + \theta}, \quad (4.1)$$

$$n_{e,1}^R = \lfloor x_{e,1}^R \rfloor, \quad \mu \in x_{e,1}^R = x_{e,0}^R + \frac{\log \frac{\frac{C}{\zeta}}{R - Cn_{e,0}^R \frac{\theta + \zeta}{\mu\theta} + \frac{C}{\zeta}}}{\log \frac{\mu}{\mu + \zeta}}. \quad (4.2)$$

Επιπλέον, η αναμενόμενη ωφέλεια από την είσοδο/παραμονή ενός πελάτη που τοποθετείται στη θέση (ή ήδη βρίσκεται στη θέση) n , όταν ο υπηρέτης είναι στην κατάσταση i , δίνεται από την

$$S_{(n,i)}^R = \begin{cases} R - C \left((1-i)\frac{1}{\theta} + n \left(1 + \frac{\zeta}{\theta}\right) \frac{1}{\mu} \right) & \text{αν } n \leq n_{e,0}^R \text{ και } i = 0, 1, \\ \left(R - \frac{Cn_{e,0}^R(\theta + \zeta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\zeta} \right) \left(\frac{\mu}{\mu + \zeta} \right)^{n - n_{e,0}^R} - \frac{C}{\zeta} & \text{αν } n_{e,0}^R < n \leq n_{e,1}^R \text{ και } i = 1. \end{cases}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν τυχόντα πελάτη που τοποθετείται στη θέση (ή που ήδη βρίσκεται στη θέση) n , όταν ο υπηρέτης είναι στην κατάσταση i . Η αναμενόμενη ωφέλεια αν εισέλθει (παραμείνει) στο σύστημα είναι

$$S_{(n,i)}^R = RP_{(n,i)}^R - CT_{(n,i)}^R, \quad (4.3)$$

όπου η $P_{(n,i)}^R$ είναι η πιθανότητα ο πελάτης αυτός να εξυπηρετηθεί τελικά και ο $T_{(n,i)}^R$ είναι ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο σύστημα.

Για $n \leq n_{e,0}^R$, ο πελάτης δεν θα υπαναχωρήσει και επομένως

$$P_{(n,i)}^R = 1, \quad n \leq n_{e,0}^R, \quad (4.4)$$

$$T_{(n,i)}^R = (1-i)\frac{1}{\theta} + n\left(1 + \frac{\zeta}{\theta}\right)\frac{1}{\mu}, \quad n \leq n_{e,0}^R. \quad (4.5)$$

Εισάγοντας την (4.4) και την (4.5) στην (4.3), παίρνουμε ότι

$$S_{(n,i)}^R = R - C \left[(1-i)\frac{1}{\theta} + n\left(1 + \frac{\zeta}{\theta}\right)\frac{1}{\mu} \right], \quad n \leq n_{e,0}^R.$$

Τότε,

$$S_{(n,0)}^R \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{R\mu\theta}{C(\zeta + \theta)} - \frac{\mu}{\zeta + \theta},$$

και έχουμε την (4.1).

Για $n > n_{e,0}^R$, η $P_{(n,1)}^R$ είναι η πιθανότητα να συμβούν τουλάχιστον $n - n_{e,0}^R$ ολοκληρωμένες εξυπηρετήσεις πριν τη μετάβαση του υπηρέτη σε ανενεργή περίοδο έτσι ώστε κατά τη στιγμή της μετάβασης σε ανενεργή κατάσταση, ο επιλεγμένος πελάτης να βρεθεί το πολύ στη θέση $n_{e,0}^R$ και επομένως να παραμείνει στο σύστημα. Έτσι έχουμε ότι

$$P_{(n,1)}^R = \left(\frac{\mu}{\mu + \zeta}\right)^{n-n_{e,0}^R}, \quad n > n_{e,0}^R. \quad (4.6)$$

Επιπλέον, για $n > n_{e,0}^R$, έχουμε το επαναληπτικό σχήμα

$$T_{(n+1,1)}^R = \frac{1}{\mu + \zeta} + \frac{\mu}{\mu + \zeta} T_{(n,1)}^R + \frac{\zeta}{\mu + \zeta} 0, \quad n > n_{e,0}^R, \quad (4.7)$$

καθώς ένα πελάτης που τοποθετείται στη θέση (ή ήδη βρίσκεται στη θέση) $n + 1$ με τον υπηρέτη στην κατάσταση 1 θα παραμείνει στο σύστημα μέχρι να ολοκληρωθεί μια εξυπηρέτηση ή μέχρι να πραγματοποιηθεί μεταβολή στην κατάσταση του υπηρέτη, οτιδήποτε από τα δύο γίνει πρώτα. Τότε, αν προηγηθεί η ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης, ο πελάτης θα μεταφερθεί στη θέση n και ο αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος αναμονής θα είναι $T_{(n,1)}^R$. Διαφορετικά, αν προηγηθεί μεταβολή στην κατάσταση του υπηρέτη, ο πελάτης θα αποχωρήσει. Επιλύοντας το παραπάνω σχήμα παίρνουμε

$$\begin{aligned} T_{(n,1)}^R &= \sum_{k=1}^{n-n_{e,0}^R} \frac{\mu^{k-1}}{(\mu + \zeta)^k} + \left(\frac{\mu}{\mu + \zeta}\right)^{n-n_{e,0}^R} T_{(n_{e,0}^R,1)}^R \stackrel{(4.5)}{\Rightarrow} \\ T_{(n,1)}^R &= \frac{1}{\mu + \zeta} \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \zeta}\right)^{n-n_{e,0}^R}}{1 - \frac{\mu}{\mu + \zeta}} + \left(\frac{\mu}{\mu + \zeta}\right)^{n-n_{e,0}^R} n_{e,0}^R \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{\zeta}{\theta}\right) \Rightarrow \\ T_{(n,1)}^R &= \frac{1}{\zeta} + \left(\frac{n_{e,0}^R(\theta + \zeta)}{\mu\theta} - \frac{1}{\zeta}\right) \left(\frac{\mu}{\mu + \zeta}\right)^{n-n_{e,0}^R}, \quad n > n_{e,0}^R. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Τότε, εισάγοντας την (4.6) και την (4.8) στην (4.3), παίρνουμε την

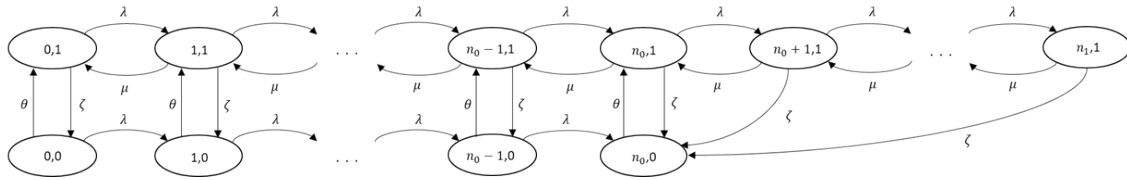
$$S_{(n,1)}^R = \left(R - \frac{C n_{e,0}^R (\theta + \zeta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\zeta}\right) \left(\frac{\mu}{\mu + \zeta}\right)^{n-n_{e,0}^R} - \frac{C}{\zeta}, \quad n > n_{e,0}^R. \quad (4.9)$$

Παρατηρούμε ότι $S_{(n_{e,0},0)}^R \geq 0$, και άρα $R - \frac{Cn_{e,0}^R(\theta+\zeta)}{\mu\theta} \geq 0$ οπότε ο συντελεστής του $\left(\frac{\mu}{\mu+\zeta}\right)^{n-n_{e,0}^R}$ στην (4.9) είναι γνήσια θετικός. Τότε,

$$S_{(n,1)}^R \geq 0 \Leftrightarrow n \leq x_{e,0}^R + \frac{\log \frac{\frac{C}{\zeta}}{R - \frac{Cn_{e,0}^R(\theta+\zeta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\zeta}}}{\log \frac{\mu}{\mu+\zeta}}, \quad (4.10)$$

και παίρνουμε την (4.2).

Για τον υπολογισμό του ρυθμού απόδοσης και της κοινωνικής ωφέλειας όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας, εστιάζουμε στη μελέτη της αντίστοιχης διαδικασίας της κατάστασης του συστήματος $\{(N(t), I(t))\}$. Αυτή είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων το σύνολο $\mathcal{S}^R = \{(n, i) : i = 0, 1 \text{ και } 0 \leq n \leq n_{e,i}^R\}$. Για απλούστευση, σε όσα ακολουθούν θα τροποποιήσουμε τον συμβολισμό και θα αναφερόμαστε στα κατώφλια $n_{e,0}^R$ και $n_{e,1}^R$ γράφοντας απλά n_0 και n_1 αντιστοίχως. Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της διαδικασίας $\{(N(t), I(t))\}$ απεικονίζεται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης - περίπτωση R.

Εστω $(p_{(n,i)}^R : (n, i) \in \mathcal{S}^R)$ η στάσιμη κατανομή του συστήματος. Από το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης, είναι φανερό πως η διαδικασία $\{(N(t), I(t))\}$ παρουσιάζει διαφορετική δυναμική στις καταστάσεις όπου οι πελάτες είναι λιγότεροι από n_0 από ότι στις καταστάσεις που υπάρχουν τουλάχιστον n_0 πελάτες. Επομένως, είναι βολικό να μελετηθούν οι στάσιμες πιθανότητες μετάβασης για το αντίστοιχο υποσύνολο του χώρου καταστάσεων. Προς την κατεύθυνση αυτή, εισάγουμε τις μερικές γεννήτριες συναρτήσεις

$$P_i^R(z) = \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{(n,i)}^R z^n, \quad |z| \leq 1, \quad i = 0, 1. \quad (4.11)$$

Τότε, με το θεώρημα που ακολουθεί, παρέχουμε κλειστές εκφράσεις για αυτές τις γεννήτριες συναρτήσεις και τις υπόλοιπες στάσιμες πιθανότητες $p_{(n,i)}^R$, για $n \geq n_0$.

Θεώρημα 4.2. (Στάσιμη κατανομή - περίπτωση R) Έστω

$$\rho_{a\pm} = \frac{\lambda + \mu + \theta + \zeta \pm \sqrt{(\lambda + \mu + \theta + \zeta)^2 - 4\mu(\lambda + \theta)}}{2\lambda}, \quad (4.12)$$

$$\rho_{b\pm} = \frac{\lambda + \mu + \zeta \pm \sqrt{(\lambda + \mu + \zeta)^2 - 4\mu\lambda}}{2\mu}, \quad (4.13)$$

$$c_+ = \frac{\lambda\rho_{b-}^{n_1-1}[\lambda - (\mu + \zeta)\rho_{b-}]}{\mu \left\{ \rho_{b+}^{n_0}\rho_{b-}^{n_1-1}[\lambda - (\mu + \zeta)\rho_{b-}] + \rho_{b-}^{n_0}\rho_{b+}^{n_1-1}[(\mu + \zeta)\rho_{b+} - \lambda] \right\}}, \quad (4.14)$$

$$c_- = \frac{\lambda\rho_{b+}^{n_1-1}[(\mu + \zeta)\rho_{b+} - \lambda]}{\mu \left\{ \rho_{b+}^{n_0}\rho_{b-}^{n_1-1}[\lambda - (\mu + \zeta)\rho_{b-}] + \rho_{b-}^{n_0}\rho_{b+}^{n_1-1}[(\mu + \zeta)\rho_{b+} - \lambda] \right\}}, \quad (4.15)$$

$$d = c_+ \frac{\rho_{b+}^{n_0} - \rho_{b+}^{n_1+1}}{1 - \rho_{b+}} + c_- \frac{\rho_{b-}^{n_0} - \rho_{b-}^{n_1+1}}{1 - \rho_{b-}}. \quad (4.16)$$

Ορίζουμε τις ποσότητες

$$x_{(n_0-1,0)} = \frac{\zeta\mu}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{\mu(\theta + \lambda)} \right)^{n_0} \frac{\rho_{a-}^{n_0} - \rho_{a+}^{n_0}}{\rho_{a-} - \rho_{a+}}, \quad (4.17)$$

$$x_{(n_0-1,1)} = \frac{[(\lambda\rho_{a-} - \mu - \zeta)\rho_{a-}^{n_0} - (\lambda\rho_{a+} - \mu - \zeta)\rho_{a+}^{n_0}]\mu\lambda^{2n_0}}{\lambda^2(\rho_{a-} - \rho_{a+})(\mu(\theta + \lambda))^{n_0}}, \quad (4.18)$$

$$x_{(n_0,1)} = \rho x_{(n_0-1,0)} + \rho x_{(n_0-1,1)}. \quad (4.19)$$

Στην πλήρως παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά με εναλλασσόμενες ενεργές και μη-ενεργές περιόδους λειτουργίας, στην περίπτωση R , όταν υιοθετείται η στρατηγική κατωφλίου (n_0, n_1) , η στάσιμη κατανομή δίνεται ως εξής:

$$p_{(0,1)}^R = \frac{\zeta}{\theta + \zeta} \left(\frac{\zeta\mu + \lambda(\lambda - \mu - \zeta)x_{(n_0-1,0)} - \zeta\lambda x_{(n_0-1,1)}}{\lambda^2(1 - \rho_{a+})(1 - \rho_{a-})} + \frac{\lambda}{\theta}x_{(n_0-1,0)} + \frac{\zeta}{\theta}dx_{(n_0-1,1)} + \frac{\zeta}{\theta}dx_{(n_0-1,0)} \right)^{-1}, \quad (4.20)$$

$$P_0^R(z) = \frac{\zeta\mu + \lambda(\lambda z - \mu - \zeta)x_{(n_0-1,0)}z^{n_0} - \zeta\lambda x_{(n_0-1,1)}z^{n_0}}{\lambda^2(z - \rho_{a+})(z - \rho_{a-})} p_{(0,1)}^R, \quad (4.21)$$

$$P_1^R(z) = \frac{\lambda z}{\mu - \lambda z} P_0^R(z) + \frac{\mu(1 - x_{(n_0,1)}z^{n_0})}{\mu - \lambda z} p_{(0,1)}^R, \quad (4.22)$$

$$p_{(n_0,0)}^R = \left(\frac{\lambda}{\theta}x_{(n_0-1,0)} + \frac{\zeta}{\theta}dx_{(n_0-1,1)} + \frac{\zeta}{\theta}dx_{(n_0-1,0)} \right) p_{(0,1)}^R, \quad (4.23)$$

$$p_{(n,1)}^R = (c_+\rho_{b+}^n + c_-\rho_{b-}^n)(x_{(n_0-1,1)} + x_{(n_0-1,0)})p_{(0,1)}^R, \quad n_0 \leq n \leq n_1. \quad (4.24)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 5.5.2.

Χρησιμοποιώντας τη στάσιμη κατανομή του μοντέλου θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια το ρυθμό απόδοσης και την κοινωνική ωφέλεια, υπό ισορροπία. Ο ρυθμός απόδοσης δίνεται ως το μακροπρόθεσμο μέσο πλήθος ολοκληρωμένων εξυπηρετήσεων στη μονάδα του χρόνου και άρα είναι ίσο με

$$TH_e^R = \mu \sum_{n=1}^{n_1} p_{(n,1)}^R = \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} - \mu p_{(0,1)}^R.$$

Συμβολίζοντας με N_e^R το στάσιμο αριθμό πελατών στο σύστημα κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας, το κοινωνικό όφελος ανα χρονική μονάδα θα είναι ίσο με

$$\begin{aligned} SW_e^R &= RTH_e^R - CE[N_e^R] \\ &= \frac{R\mu\theta}{\theta + \zeta} - R\mu p_{(0,1)}^R - CP_0^{R'}(1) - CP_1^{R'}(1) - Cn_0 p_{(n_0,0)}^R - C \sum_{n=n_0}^{n_1} np_{(n,1)}^R. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Στην περίπτωση που έχουμε εξαιρετικά υψηλούς ρυθμούς αφίξεων, θα έχουμε πως η διαδικασία $\{(N(t), I(t))\}$ καταρρέει σε μια διδιάστατη Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το σύνολο $\{(n_0, 0), (n_1, 1)\}$ και στάσιμη κατανομή $(\frac{\zeta}{\theta+\zeta}, \frac{\theta}{\theta+\zeta})$. Επομένως,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} TH_e^R = \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} SW_e^R = \frac{R\mu\theta}{\theta + \zeta} - C \frac{\zeta n_0 + \theta n_1}{\theta + \zeta}. \quad (4.26)$$

4.3.2 Στρατηγική ισορροπίας - περίπτωση NR

Ακολουθώντας όμοιο συλλογισμό όπως στην περίπτωση R, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η στρατηγική ισορροπίας στην περίπτωση NR θα είναι επίσης τύπου κατωφλίου με δύο κατώφλια, που αντιστοιχούν στις δύο δυνατές καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί ο υπηρέτης κατά τη στιγμή άφιξης ενός πελάτη (δείτε την εργασία [42] των Economou και Kanta (2008). Η στρατηγική ισορροπίας υπαγορεύει σε έναν πελάτη να εισέλθει στο σύστημα αν το πλήθος παρόντων πελατών κατά τη στιγμή άφιξης του είναι το πολύ $n_{e,i}^{NR}$, δεδομένου ότι ο υπηρέτης είναι στην κατάσταση i . Προσαρμόζοντας τα αποτελέσματα του [42] (και ειδικότερα το Θεώρημα 3.1) στον συμβολισμό μας, θα έχουμε ότι το ζεύγος των κατωφλίων θα είναι $(n_{e,0}^{NR}, n_{e,1}^{NR})$, όπου

$$n_{e,0}^{NR} = n_{e,0}^R, \quad (4.27)$$

$$n_{e,1}^{NR} = \lfloor x_{e,1}^{NR} \rfloor, \quad \text{με } x_{e,1}^{NR} = \frac{R\mu\theta}{C(\zeta + \theta)}. \quad (4.28)$$

Επιπλέον, το αναμενόμενο όφελος από την είσοδο ενός πελάτη που παρατηρεί n πελάτες και η κατάσταση του υπηρέτη είναι i δίνεται από την

$$S_{(n,i)}^{NR} = R - C \left((1-i) \frac{1}{\theta} + n \left(1 + \frac{\zeta}{\theta} \right) \frac{1}{\mu} \right) \text{ αν } n \leq n_{e,1}^{NR} \text{ και } i = 0, 1.$$

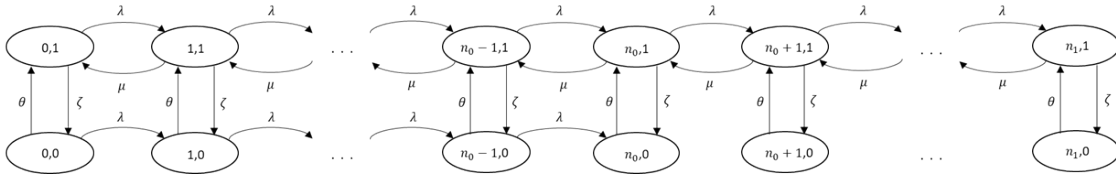
Καθώς η στρατηγική κατωφλίου για τους πελάτες που βρίσκουν τον υπηρέτη σε ανενεργή περίοδο είναι ίδια για τις περιπτώσεις NR και R, σε όσα ακολουθούν, θα συμβολίζουμε την κοινή αυτή τιμή με $n_{e,0}$. Επιπλέον, για απλούστευση θα συμβολίζουμε το $x_{e,0}^R$ ως $x_{e,0}$.

Η στοχαστική διαδικασία της κατάστασης του συστήματος $\{(N(t), I(t))\}$ στην περίπτωση αυτή, είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων το σύνολο $\mathcal{S}^{NR} = \{(n, i) : i = 0, 1 \text{ και } 0 \leq n \leq n_{e,1}^{NR}\}$. Ξανά για λόγους απλούστευσης, θα συμβολίζουμε εντός της υποπαραγράφου, τα κατώφλια $n_{e,0}^{NR}$ και $n_{e,1}^{NR}$, ως n_0 και n_1 , αντιστοίχως. Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της διαδικασίας $\{(N(t), I(t))\}$ απεικονίζεται στο Σχήμα 4.2.

Για τον υπολογισμό του ρυθμού απόδοσης και της κοινωνικής ωφέλειας θα εστιάσουμε στη στάσιμη κατανομή που αντιστοιχεί στο σύστημα αυτό, $(p_{(n,i)}^{NR} : (n, i) \in \mathcal{S}^{NR})$. Όμοια με την περίπτωση R, εισάγουμε τις μερικές γεννήτριες συναρτήσεις

$$P_i^{NR}(z) = \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{(n,i)}^{NR} z^n, \quad |z| \leq 1, \quad i = 0, 1. \quad (4.29)$$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα συνοψίζει το υπολογιστικό σχήμα για τη στάσιμη κατανομή $(p_{(n,i)}^{NR} : (n, i) \in \mathcal{S}^{NR})$.



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης - περίπτωση NR.

Θεώρημα 4.3. (Στάσιμη κατανομή - περίπτωση NR) Θεωρούμε τα $\rho_{a\pm}$ που δίνονται από την (4.12) και τα $x_{(n_0-1,0)}$, $x_{(n_0-1,1)}$ και $x_{(n_0,1)}$ που δίνονται από τις (4.17), (4.18) και (4.19) αντίστοιχα.

Στην πλήρως παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά με εναλλασσόμενες ενεργές και μη-ενεργές περιόδους λειτουργίας, στην περίπτωση NR, όταν υιοθετείται η στρατηγική κατωφλίου (n_0, n_1) , η στάσιμη κατανομή δίνεται ως εξής:

$$P_{(0,1)}^{NR} = \frac{\zeta}{\theta + \zeta} \left(\frac{\zeta\mu + \lambda(\lambda - \mu - \zeta)x_{(n_0-1,0)} - \zeta\lambda x_{(n_0-1,1)}}{\lambda^2(1 - \rho_{a+})(1 - \rho_{a-})} + \frac{\lambda}{\theta} x_{(n_0-1,0)} + \frac{\zeta(1 - \rho^{n_1-n_0+1})}{\theta(1 - \rho)} x_{(n_0,1)} \right)^{-1}, \quad (4.30)$$

$$P_0^{NR}(z) = \frac{\zeta\mu + \lambda(\lambda z - \mu - \zeta)x_{(n_0-1,0)}z^{n_0} - \zeta\lambda x_{(n_0-1,1)}z^{n_0}}{\lambda^2(z - \rho_{a+})(z - \rho_{a-})} P_{(0,1)}^{NR}, \quad (4.31)$$

$$P_1^{NR}(z) = \frac{\lambda z}{\mu - \lambda z} P_0^{NR}(z) + \frac{\mu(1 - x_{(n_0,1)}z^{n_0})}{\mu - \lambda z} P_{(0,1)}^{NR}, \quad (4.32)$$

$$P_{(n_0,0)}^{NR} = \left(\frac{\lambda}{\theta} x_{(n_0-1,0)} + \frac{\zeta}{\theta} x_{(n_0,1)} \right) P_{(0,1)}^{NR}, \quad (4.33)$$

$$P_{(n,0)}^{NR} = \frac{\zeta}{\theta} \rho^{n-n_0} x_{(n_0,1)} P_{(0,1)}^{NR}, \quad n_0 + 1 \leq n \leq n_1, \quad (4.34)$$

$$P_{(n,1)}^{NR} = \rho^{n-n_0} x_{(n_0,1)} P_{(0,1)}^{NR}, \quad n_0 \leq n \leq n_1. \quad (4.35)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 5.5.2.

Ο ρυθμός απόδοσης δίνεται από την

$$TH_e^{NR} = \mu \sum_{n=1}^{n_1} P_{(n,1)}^{NR} = \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} - \mu P_{(0,1)}^{NR}. \quad (4.36)$$

Αν με N_e^{NR} τον στάσιμο αριθμό πελατών στο σύστημα κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας, το κοινωνικό όφελος ανα χρονική μονάδα θα είναι ίσο με

$$\begin{aligned} SW_e^{NR} &= RTH_e^{NR} - CE[N_e^{NR}] \\ &= \frac{R\mu\theta}{\theta + \zeta} - R\mu P_{(0,1)}^{NR} - CP_0^{NR}(1) - CP_1^{NR}(1) - C \sum_{n=n_0}^{n_1} n(P_{(n,0)}^{NR} + P_{(n,1)}^{NR}). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Όταν $\lambda \rightarrow \infty$, η διαδικασία $\{(N(t), I(t))\}$ καταρρέει σε μια διδιάστατη Μαρκοβιανή διαδικασία με χώρο καταστάσεων το σύνολο $\{(n_1, 0), (n_1, 1)\}$. Τότε,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} TH_e^{NR} = \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} SW_e^{NR} = \frac{R\mu\theta}{\theta + \zeta} - Cn_1 = C \left(\frac{R\mu\theta}{C(\theta + \zeta)} - \left\lfloor \frac{R\mu\theta}{C(\theta + \zeta)} \right\rfloor \right). \quad (4.38)$$

4.4 Η αξία της υπαναχώρησης: Θεωρητικά και αριθμητικά αποτελέσματα

Τα θεωρητικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα δείχνουν πως υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των περιπτώσεων R και NR αφενός επειδή οδηγούν σε πολύ διαφορετικά κατώφλια εισόδου για τους πελάτες που βρίσκουν τον υπηρέτη ενεργό και αφετέρου, καθώς οδηγούν σε διαφορετικές Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου που περιγράφουν την εξέλιξη του συστήματος.

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα αυτά για να μελετήσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια την επίδραση που μπορεί να έχει η δυνατότητα υπαναχώρησης. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε τα ευρήματα από μια πληθώρα αριθμητικών πειραμάτων που ρίχνουν επιπλέον φως στην ενδεχόμενη αξία της δυνατότητας υπαναχώρησης και θα εμπλουτίσουμε την θεωρητική ανάλυση με επιπλέον αποτελέσματα.

4.4.1 Η ανισότητα των κατωφλιών

Μοιάζει διαισθητικά αναμενόμενο πως τα κατώφλια εισόδου σε ένα σύστημα στο οποίο επιτρέπονται οι υπαναχωρήσεις, θα είναι μεγαλύτερα από ό,τι σε ένα που οι υπαναχωρήσεις έχουν αποκλειστεί. Κάτι τέτοιο μπορεί να αποδειχθεί και αυστηρά. Πράγματι, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 4.4. (Η ανισότητα των κατωφλιών) Υπό τη στρατηγική ισορροπίας, τα κατώφλια έχουν την ακόλουθη διάταξη:

$$n_{e,0} \leq n_{e,1}^{NR} \leq n_{e,1}^R. \quad (4.39)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 5.5.2.

4.4.2 Η τιμή της υπαναχώρησης

Στην υπό-ενότητα αυτή θεωρούμε τα διάφορα μέτρα αποτίμησης της απόδοσης του μοντέλου ως συναρτήσεις της αξίας εξυπηρέτησης, R. Προφανώς, όταν η αξία εξυπηρέτησης αυξάνει, τα κατώφλια εισόδου $n_{e,0}(R)$, $n_{e,1}^{NR}(R)$ και $n_{e,1}^R(R)$ υφίστανται κάποια μεταβολή. Επιπλέον, είναι φανερό πως η αλλαγή αυτή θα έχει περιοδικό μοτίβο στην NR περίπτωση λόγω των στοιχειωδών ιδιοτήτων του ακεραίου μέρους ως συνάρτηση. Ωστόσο, εκείνο που είναι λιγότερο εμφανές είναι πως το περιοδικό αυτό μοτίβο υπάρχει και στην R περίπτωση.

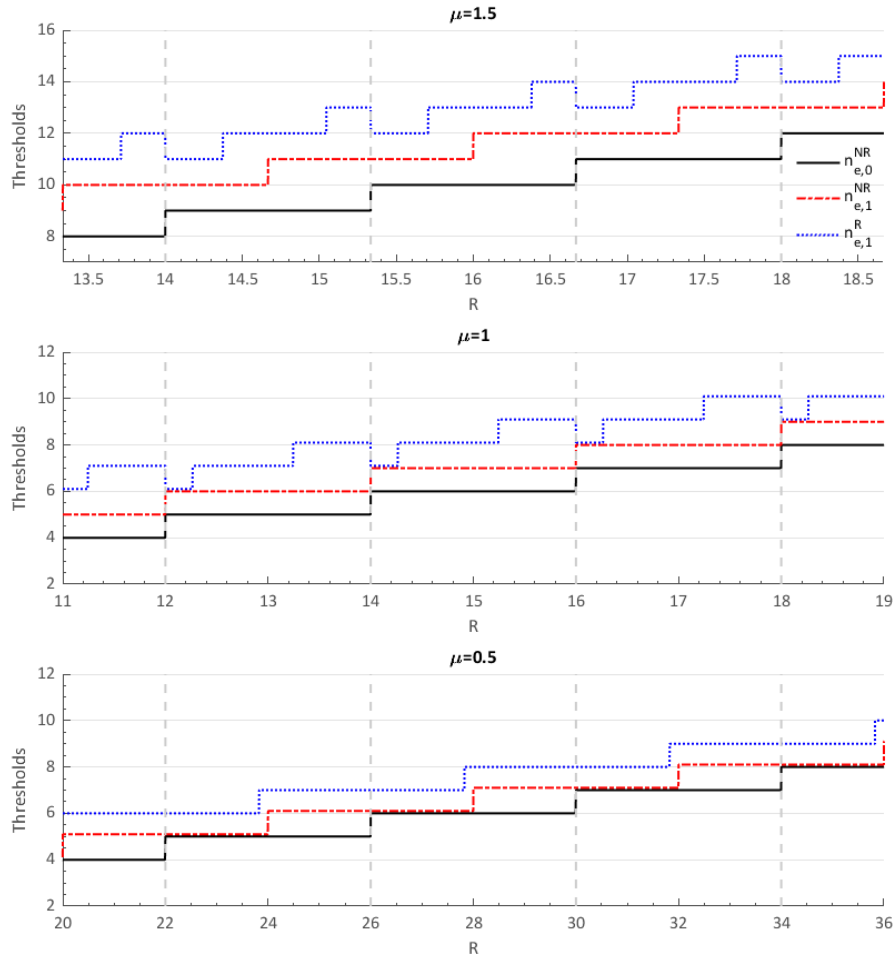
Αρχικά, έχουμε θεωρήσει τρία αριθμητικά σενάρια του μοντέλου στα οποία έχουμε θέσει τις τιμές των παραμέτρων ίσες με $(\lambda, \zeta, \theta, C) = (0.1, 0.5, 0.5, 1)$ και $\mu \in \{0.5, 1, 1.5\}$. Υπό τη στρατηγική ισορροπίας, τα κατώφλια εισόδου ως συναρτήσεις του R απεικονίζονται στο Σχήμα 4.3 όπου οι διακεκομμένες κάθετες γραμμές είναι τα όρια των περιοδικών κύκλων. Το περιοδικό μοτίβο είναι φανερό.

Ο περιοδικός χαρακτήρας δεν είναι τυχαίος αλλά μπορεί να δικαιολογηθεί θεωρητικά. Προς την κατεύθυνση αυτή, για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο n , εστιάζουμε στο εύρος των τιμών του R που επάγουν την τιμή του n για το χαμηλότερο κατώφλι $n_{e,0}$. Λύνοντας την εξίσωση $n_{e,0}(R) = n$ (που είναι ισοδύναμη με την $x_{e,0}(R) = \frac{R\mu\theta}{C(\zeta+\theta)} - \frac{\mu}{\zeta+\theta} \in [n, n+1)$) ως προς το R, θα έχουμε ότι

$$n_{e,0}(R) = n \Leftrightarrow R \in [R_n, R_{n+1}), \quad (4.40)$$

όπου

$$R_n = \frac{C}{\theta} + \frac{C(\zeta + \theta)}{\mu\theta}n. \quad (4.41)$$



Σχήμα 4.3: Τα κατώφλια εισόδου ως συναρτήσεις του R για διάφορες τιμές του μ .

Επομένως, ολόκληρο το εύρος των τιμών του R μπορεί να διαμεριστεί σε διαστήματα της μορφής $[R_n, R_{n+1})$ όπου το κατώφλι $n_{e,0}(R)$ παραμένει σταθερό εντός κάθε διαστήματος $[R_n, R_{n+1})$. Κάθε τέτοιο διάστημα αποτελεί έναν περιοδικό κύκλο για τη συμπεριφορά των κατωφλιών εισόδου, υπό τη στρατηγική ισορροπίας, με επιδράσεις στον ρυθμό απόδοσης και στην κοινωνική ωφέλεια. Θα αναφερόμαστε στο διάστημα $[R_n, R_{n+1})$ ως το n -οστό R -κύκλο. Για ένα δεδομένο $R \in [R_n, R_{n+1})$ θα αναφερόμαστε στο

$$x = R - R_n \in \left[0, \frac{C(\zeta + \theta)}{\mu\theta} \right). \quad (4.42)$$

ως τη θέση του R εντός του R -κύκλου. Παρατηρούμε πως όλοι οι R -κύκλοι έχουν το ίδιο μήκος $\frac{C(\zeta + \theta)}{\mu\theta}$.

Θεώρημα 4.5. (Περιοδική συμπεριφορά της στρατηγικής κατωφλιού ως προς την αξία εξυπηρέτησης) Θεωρούμε ένα $R \in [R_n, R_{n+1})$ θέτουμε $x = R - R_n$ την θέση

του εντός του R -κύκλου. Τότε,

$$n_{e,0}(R) = n, \quad x \in \left[0, \frac{C(\zeta + \theta)}{\mu\theta}\right), \quad (4.43)$$

$$n_{e,1}^{NR}(R) = \begin{cases} n+k & \text{αν } x \in [0, \alpha), \\ n+k+1 & \text{αν } x \in \left[\alpha, \frac{C(\zeta+\theta)}{\mu\theta}\right), \end{cases} \quad (4.44)$$

$$n_{e,1}^R(R) = \begin{cases} n+l & \text{αν } x \in [0, \alpha_1), \\ n+l+1 & \text{αν } x \in [\alpha_1, \alpha_2), \\ n+l+2 & \text{αν } x \in \left[\alpha_2, \frac{C(\zeta+\theta)}{\mu\theta}\right), \end{cases} \quad (4.45)$$

με

$$k = \left\lfloor \frac{\mu}{\zeta + \theta} \right\rfloor, \quad (4.46)$$

$$l = \left\lfloor \frac{\log \frac{\theta}{\theta+\zeta}}{\log \frac{\mu}{\mu+\zeta}} \right\rfloor, \quad (4.47)$$

$$\alpha = \frac{C}{\theta} \left(\frac{\left\lfloor \frac{\mu}{\zeta+\theta} \right\rfloor + 1}{\frac{\mu}{\zeta+\theta}} - 1 \right), \quad (4.48)$$

$$\alpha_1 = f^{-1}(l+1), \quad (4.49)$$

$$\alpha_2 = f^{-1}(l+2), \quad (4.50)$$

όπου

$$f(x) = \frac{\mu\theta}{C(\zeta + \theta)}x + \frac{\log \frac{C/\zeta}{x+C/\theta+C/\zeta}}{\log \frac{\mu}{\mu+\zeta}}. \quad (4.51)$$

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας το R με $R_n + x = \frac{C}{\theta} + \frac{C(\zeta+\theta)}{\mu\theta}n + x$ στις (4.1), (4.28) και (4.2), παίρουμε ότι

$$x_{e,0}(R) = n + \frac{\mu\theta}{C(\zeta + \theta)}x, \quad (4.52)$$

$$x_{e,1}^{NR}(R) = n + \frac{\mu}{\zeta + \theta} + \frac{\mu\theta}{C(\zeta + \theta)}x, \quad (4.53)$$

$$x_{e,1}^R(R) = n + \frac{\mu\theta}{C(\zeta + \theta)}x + \frac{\log \frac{C/\zeta}{x+C/\theta+C/\zeta}}{\log \frac{\mu}{\mu+\zeta}}. \quad (4.54)$$

Επομένως, οι συναρτήσεις $x_{e,0}(R) - n_{e,0}(R)$, $x_{e,1}^{NR}(R) - n_{e,0}(R)$ και $x_{e,1}^R(R) - n_{e,0}(R)$ είναι περιοδικές συναρτήσεις του R . Οι σχέσεις (4.43) και (4.44) έπονται άμεσα από τις στοιχειώδεις ιδιότητες που έχει το ακέραιο μέρος ως συνάρτηση.

Η συμπεριφορά του κατωφλίου $n_{e,1}^R(R)$ είναι αρκετά πιο περίπλοκη. Αρχικά παρατηρούμε πως η συνάρτηση $f(x)$, που δίνεται από την (4.51), είναι αύξουσα ως προς x (το οποίο μπορεί να δείχθει άμεσα από το πρόσημο της πρώτης παραγώγου). Επομένως, χρησιμοποιώντας την (4.54), θα έχουμε ότι το $x_{e,1}^R(R) = n + f(x)$ αυξάνει ως προς R , για $R \in [R_n, R_{n+1})$ και συνεπώς το $n_{e,1}^R(R) = \lfloor x_{e,1}^R(R) \rfloor$ αυξάνει ως προς R στον κύκλο $[R_n, R_{n+1})$. Επιπλέον, το πλήθος των τιμών που λαμβάνει είναι το πλήθος ακεραίων στο διάστημα

$$\left[f(0), f\left(\frac{C(\zeta + \theta)}{\mu\theta}\right) \right) = \left[\frac{\log \frac{1/\zeta}{1/\theta+1/\zeta}}{\log \frac{\mu}{\mu+\zeta}}, 1 + \frac{\log \frac{1/\zeta}{(\zeta+\theta)/(\mu\theta)+1/\theta+1/\zeta}}{\log \frac{\mu}{\mu+\zeta}} \right).$$

Παρατηρούμε πως το διάστημα αυτό έχει μήκος

$$1 + \frac{\log \frac{1/\zeta}{(\zeta+\theta)/(\mu\theta)+1/\theta+1/\zeta}}{\log \frac{\mu}{\mu+\zeta}} - \frac{\log \frac{1/\zeta}{1/\theta+1/\zeta}}{\log \frac{\mu}{\mu+\zeta}} = 2. \quad (4.55)$$

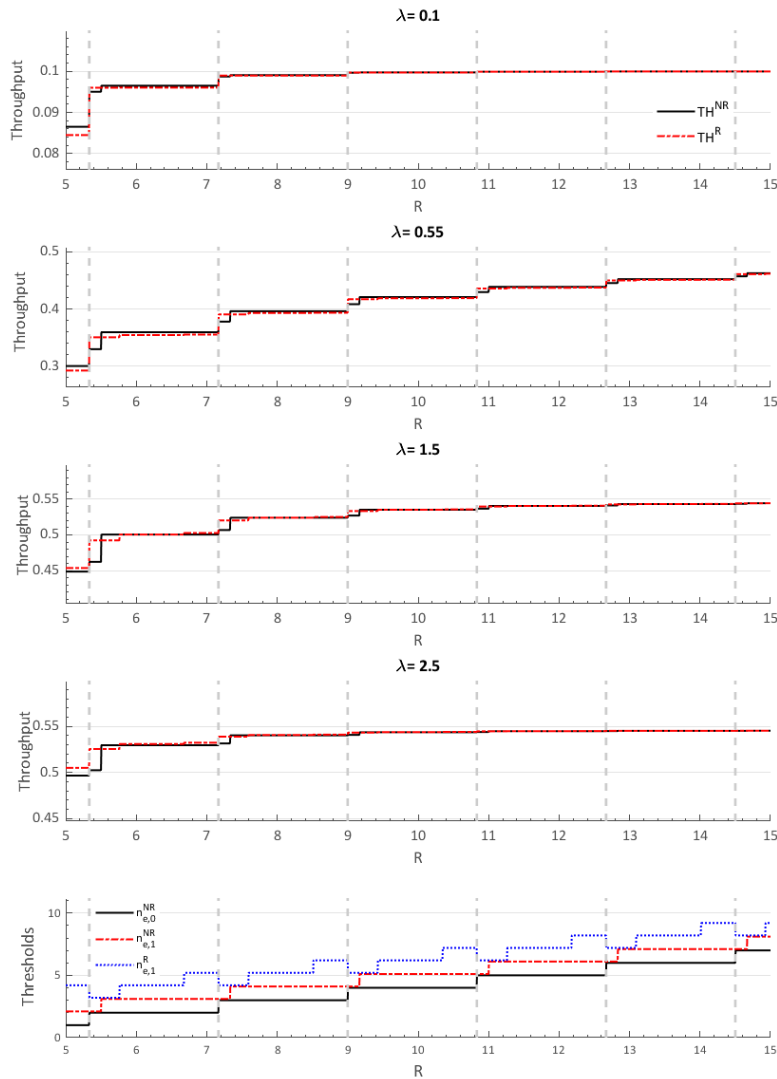
Συνεπώς, το διάστημα θα περιλαμβάνει δύο ακεραίους. Έτσι, καταλήγουμε πως το κατώφλι $n_{e,1}^R(R)$ παίρνει τρεις τιμές $n+l$, $n+l+1$, $n+l+2$ όταν $R \in [R_n, R_{n+1})$, και οι τιμές αυτές αλλάζουν όταν $x_{e,1}^R(R) = n+l+1$ και $x_{e,1}^R(R) = n+l+2$. Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές ως προς x παίρνουμε τα σημεία αλλαγών α_1 και α_2 που δίνονται στην (4.49) και στην (4.50) αντίστοιχα. Επιπλέον, το $n_{e,1}^R(R)$ δίνεται στην (4.45). \square

Το Θεώρημα 4.5 δείχνει πως καθώς το R αυξάνει, το μοτίβο των τριών κατωφλιών είναι ίδιο σε κάθε R -κύκλο $[R_n, R_{n+1})$, με τη μόνη διαφορά να είναι πως η τιμή τους αυξάνεται κατά 1, καθώς γίνεται η μετάβαση από έναν R -κύκλο, προς τον επόμενο. Επιπλέον, η τυπική συμπεριφορά που έχουν τα κατώφλια $n_{e,0}(R)$, $n_{e,1}^{NR}(R)$ και $n_{e,1}^R(R)$ σε έναν R -κύκλο, είναι να λαμβάνουν τιμές 1, 2 και 3 αντίστοιχα. Ωστόσο, όταν ο αριθμός $\frac{\mu}{\mu+\theta}$ είναι ακέραιος, το κατώφλι $n_{e,1}^{NR}(R)$ λαμβάνει ακριβώς μια τιμή καθώς $\alpha = 0$. Όμοια, όταν ο αριθμός $\frac{\log(\theta/(\theta+\zeta))}{\log(\mu/(\mu+\zeta))}$ είναι ακέραιος (ισοδύναμα ο αριθμός $f(0)$ είναι ακέραιος), έχουμε πως το κατώφλι $n_{e,1}^R(R)$ λαμβάνει 2 τιμές σε έναν R -κύκλο. Παρατηρήστε πως στο Σχήμα 4.3 που παρουσιάζεται η συμπεριφορά των κατωφλιών, το πρώτο γράφημα αφορά την τυπική συμπεριφορά όταν οι αριθμοί $\frac{\mu}{\mu+\theta}$ και $\frac{\log(\theta/(\theta+\zeta))}{\log(\mu/(\mu+\zeta))}$ δεν είναι ακέραιοι και αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου το κατώφλι $n_{e,1}^{NR}$ λαμβάνει μόνο 1 τιμή (δηλαδή όταν ο αριθμός $\frac{\mu}{\mu+\theta}$ είναι ακέραιος) ενώ το τελευταίο γράφημα αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου το κατώφλι $n_{e,1}^R$ παίρνει μόνο 2 τιμές (δηλαδή όταν μονάχα ο αριθμός $\frac{\log(\theta/(\theta+\zeta))}{\log(\mu/(\mu+\zeta))}$ είναι ακέραιος). Η περίπτωση όπου και οι δύο αυτές κρίσιμες τιμές είναι ακέραιοι δεν συμβαίνει.

Παρατηρήστε πως στην τυπική περίπτωση παρουσιάζεται ένα μη αναμενόμενο γεγονός: Παρόλο που το κατώφλι $n_{e,1}^{NR}(R)$ αυξάνει κατά τμήματα σε κάθε διάστημα $[R_n, R_{n+1})$, δεν είναι αύξουσα συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα, στο τέλος ενός R -κύκλου $[R_n, R_{n+1})$ η τιμή του κατωφλίου πραγματοποιεί άλμα από το $n+l+2$ στο $n+l+1$, και άρα μειώνεται κατά 1 μονάδα. Επομένως, όταν το R βρίσκεται ακριβώς κάτω από το R_{n+1} για κάποιο n , μια αύξηση στην αξία της εξυπηρέτησης θα έχει ως αποτέλεσμα να είναι οι πελάτες λιγότερο πρόθυμοι να εισέλθουν/παραμείνουν στο σύστημα.

Το περιοδικό αυτό μοτίβο που παρουσιάζουν τα κατώφλια επάγει ανάλογη συμπεριφορά και στην εξέλιξη που έχουν τα μέτρα λειτουργικότητας (ρυθμός απόδοσης και κοινωνικό όφελος) καθώς το R αυξάνει.

Στο Σχήμα 4.4, έχουμε θεωρήσει ένα αριθμητικό πείραμα με τιμές παραμέτρων $(\mu, \zeta, \theta, C) = (1, 0.5, 0.6, 1)$ και $\lambda \in \{0.1, 0.55, 1.5, 2.5\}$, στο οποίο παρουσιάζεται η εξέλιξη των μέτρων λειτουργικότητας (ρυθμός απόδοσης και κοινωνικό όφελος) υπό τη στρατηγική ισορροπίας ως προς την αξία εξυπηρέτησης R , για $R \in [5, 15]$.



Σχήμα 4.4: Ρυθμός απόδοσης υπό τη στρατηγική ισορροπίας ως συνάρτηση του R για διάφορες τιμές του λ .

Για να είναι πιο εμφανής η αντιστοιχία με τα κατώφλια, έχουμε συμπεριλάβει στο τελευταίο γράφημα του σχήματος την εξέλιξη που έχουν τα κατώφλια στο πείραμα αυτό. Επίσης, με διακεκομμένες κάθετες γραμμές έχουμε απεικονίσει τα όρια των διαδοχικών R -κύκλων.

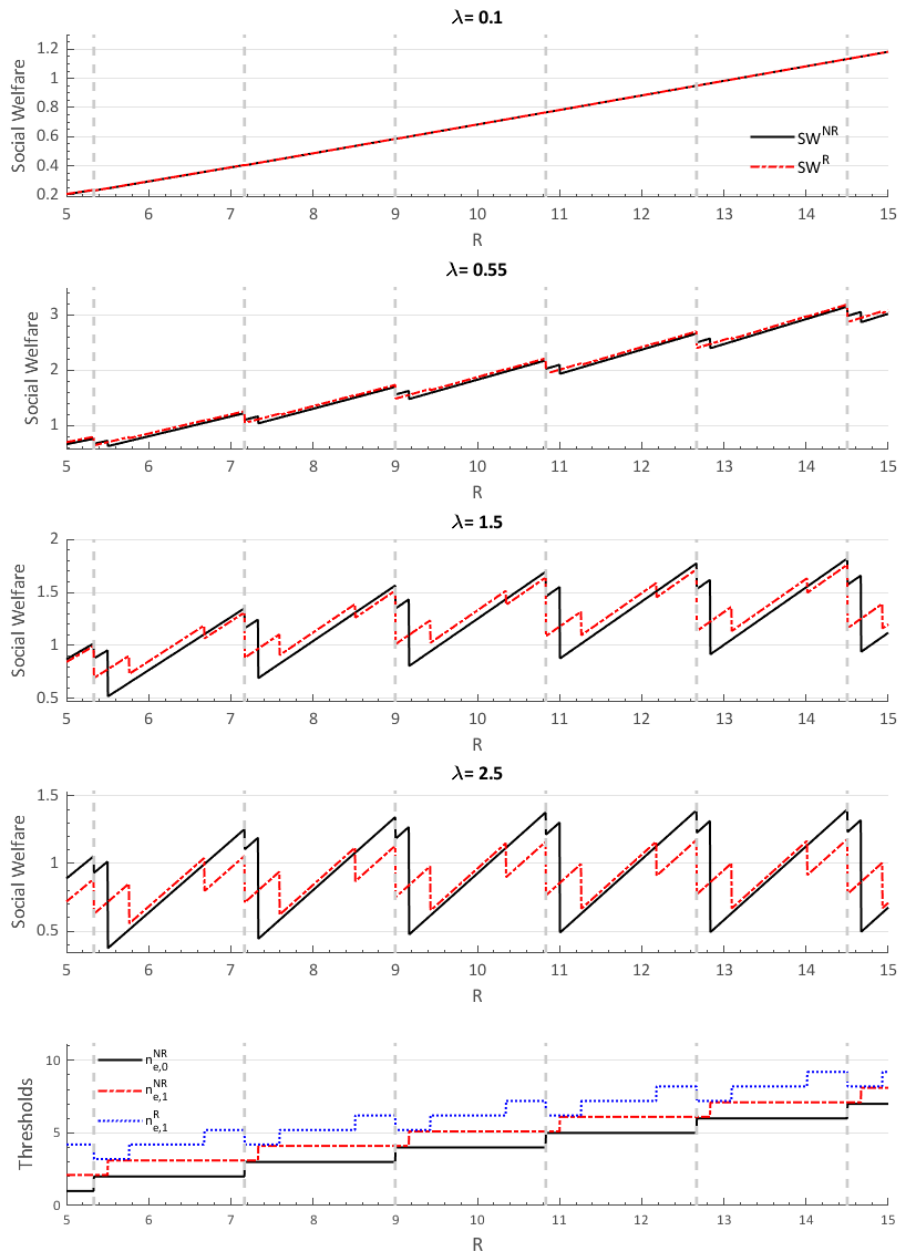
Αρχικά παρατηρούμε πως οι συναρτήσεις των ρυθμών απόδοσης τόσο στην περίπτωση R όσο και στην NR είναι κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις οι οποίες αλλάζουν τιμές όταν υπάρχει μεταβολή στην τιμή κάποιου κατωφλιού. Καθώς $R \rightarrow \infty$, και οι δύο αυτές συναρτήσεις συγκλίνουν σε κάποια οριακή τιμή. Αυτή η οριακή τιμή εξαρτάται από την ευστάθεια του αρχικού συστήματος (δηλαδή από το αντίστοιχο σύστημα χωρίς στρατηγικούς πελάτες και αρά δίχως τη δυνατότητα αποχώρησης ή υπαναχώρησης) του οποίου το διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων δίνεται στο Σχήμα 4.6. Παρατηρήστε πως το αρχικό αυτό σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν $\lambda < \frac{\mu\theta}{\theta+\zeta}$. Πράγματι, η δυνητική ικανότητα εξυπηρέτησης του υπηρέτη είναι ίση με τον ρυθμό που ο υπηρέτης εξυπηρετεί (μ) επί το ποσοστό του χρόνου που είναι ενεργός ($\frac{\theta}{\theta+\zeta}$). Επομένως, το σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν ο ρυθμός αφίξεων είναι γνήσια μικρότερος από τη δυνητική ικανότητα εξυπηρέτησης

του υπηρέτη. Έχουμε ότι

$$\lim_{R \rightarrow \infty} TH_e^{NR}(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} TH_e^R(R) = \min \left(\lambda, \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} \right). \quad (4.56)$$

Πριν φθάσουν την κοινή τους αυτή οριακή τιμή, τα γραφήματα των δύο αυτών συναρτήσεων των ρυθμών απόδοσης για τις περιπτώσεις R και NR ενδέχεται να συναντιούνται αρκετές φορές. Επομένως, θα υπάρχουν διαστήματα του R στα οποία η δυνατότητα υπαναχώρησης θα είναι πλεονεκτική και διαστήματα που θα συμβαίνει το αντίθετο. Ωστόσο, οι διαφορές μεταξύ των δύο αυτών περιπτώσεων είναι γενικά μικρές.

Στο Σχήμα 4.5 έχουμε θεωρήσει το ίδιο αριθμητικό σενάριο με εκείνο του Σχήματος 4.4 ($(\mu, \zeta, \theta, C) = (1, 0.5, 0.6, 1)$, $\lambda \in \{0.1, 0.55, 1.5, 2.5\}$ και $R \in [5, 15]$), στο οποίο όμως παρουσιάζουμε τις συναρτήσεις κοινωνικού οφέλους υπό τη στρατηγική ισορροπίας.



Σχήμα 4.5: Κοινωνικό όφελος ως συνάρτηση του R για διάφορες τιμές του λ .

Παρατηρούμε πως σε όλα τα σενάρια (δηλαδή για τις διάφορες τιμές του λ) και σε κάθε εκδοχή του μοντέλου (R και NR), το κοινωνικό όφελος υπό τη στρατηγική ισορροπίας είναι κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση με αλματικές ασυνέχειες που αντιστοιχούν σε στιγμές που μεταβάλλεται η τιμή των κατωφλιών καθώς το R αυξάνει. Πράγματι από τους τύπους των συναρτήσεων $SW_e^R = RTH_e^R - CE[N_e^R]$ και $SW_e^{NR} = RTH_e^{NR} - CE[N_e^{NR}]$ για το κοινωνικό όφελος (δείτε τις (4.25) και (4.37)) μπορούμε να διακρίνουμε μια άμεση και μια έμμεση επίδραση που έχει η αύξηση του R στο κοινωνικό όφελος. Η άμεση επίδραση αφορά τον πολλαπλασιασμό του ρυθμού εξυπηρέτησης με το R . Η έμμεση επίδραση αφορά τη μεταβολή της τιμής του ρυθμού εξυπηρέτησης και του αναμενόμενου πλήθους πελατών στο σύστημα η οποία συμβαίνει όταν υπάρχει αλλαγή στην τιμή των κατωφλιών καθώς το R αυξάνει. Ωστόσο, όπως αναφέραμε παραπάνω, η έμμεση επίδραση αυτή εξασθενεί σχετικά γρήγορα καθώς ο ρυθμός απόδοσης πλησιάζει στην οριακή του τιμή, η

οποία δίνεται από την (4.56) ακόμα και για μεσαίες τιμές του R .

Ο κρίσιμότερος παράγοντας για τη συμπεριφορά του κοινωνικού οφέλους ως συνάρτηση του R είναι η ευσταθία του αρχικού συστήματος. Σε όσα ακολουθούν θα εξετάσουμε τις δύο περιπτώσεις (ευσταθές και μη-ευσταθές) που μπορεί να έχουμε για το αρχικό σύστημα.

Υποθέτουμε πρώτα πως το αρχικό σύστημα (του οποίου το διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων δίνεται στο Σχήμα 4.6) είναι ευσταθές. Τότε, καθώς $R \rightarrow \infty$, το σύστημα με στρατηγικούς πελάτες θα έχει την ίδια συμπεριφορά με εκείνη που έχει το αρχικό σύστημα καθώς σχεδόν όλοι οι πελάτες εισέρχονται καθώς αυξάνει το R . Στην περίπτωση αυτή, έπειτα από μια μεταβατική περίοδο, το κοινωνικό όφελος υπό τη στρατηγική ισορροπίας θα συμπεριφέρεται κατα προσέγγιση σαν μια γραμμική συνάρτηση του R , δηλαδή,

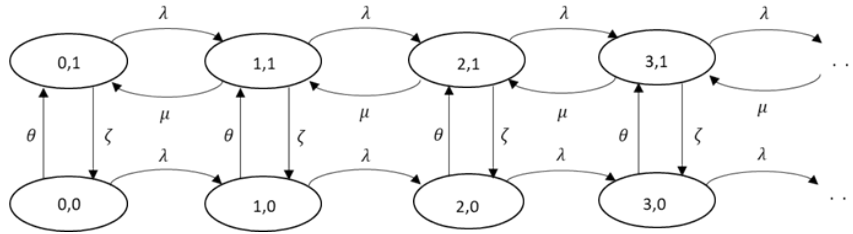
$$SW_e^{NR}(R) \simeq SW_e^R(R) \simeq \lambda R - CE[N^{un}], \text{ καθώς } R \rightarrow \infty,$$

όπου η σταθερά $E[N^{un}]$ είναι το αναμενόμενο πλήθος πελατών στο αρχικό σύστημα που δίνεται από την

$$E[N^{un}] = \frac{\lambda(\mu + \theta + \zeta - \lambda)}{\mu\theta - \lambda(\theta + \zeta)} - \frac{\lambda}{\theta + \zeta}. \quad (4.57)$$

Για μια ολοκληρωμένη μελέτη για το αρχικό σύστημα αλλά και για μια εναλλακτική μορφή του $E[N^{un}]$, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Adan and van der Wal [1], υπό-ενότητα 6.2. Πιο αυστηρά, θα έχουμε ότι

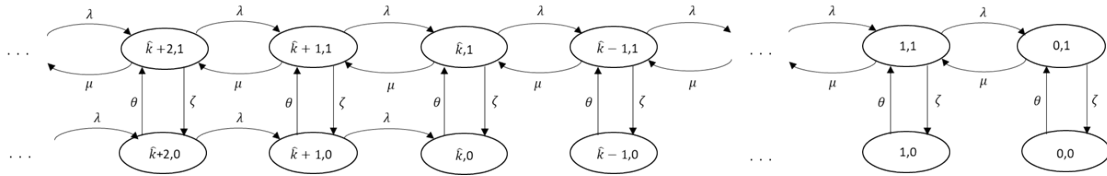
$$\lim_{R \rightarrow \infty} (SW_e^{NR}(R) - (\lambda R - CE[N^{un}])) = \lim_{R \rightarrow \infty} (SW_e^R(R) - (\lambda R - CE[N^{un}])) = 0. \quad (4.58)$$



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων - Αρχικό σύστημα.

Με άλλα λόγια, οι συναρτήσεις για το κοινωνικό όφελος στις δύο περιπτώσεις θα έχουν κοινή πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $\lambda R - E[N^{un}]$. Αυτού του τύπου η συμπεριφορά παρουσιάζεται στο πρώτο γράφημα του Σχήματος 4.5, που αντιστοιχεί στην τιμή του $\lambda = 0.1$ η οποία είναι μικρότερη από τη δυναμική ικανότητα εξυπηρέτησης του υπηρέτη $\frac{\mu\theta}{\theta+\zeta} = 0.5455$. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.57) υπολογίζουμε ότι $E[N^{un}] = 0.4219$. Στο γράφημα μπορούμε να παρατηρήσουμε πως οι συναρτήσεις $SW_e^R(R)$ και $SW_e^{NR}(R)$ σχεδόν ταυτίζονται και έχουν κοινή πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $0.1R - 0.4219$.

Ολοκληρώνοντας την ανάλυση για το κοινωνικό όφελος, υποθέτουμε τώρα πως το αρχικό σύστημα δεν είναι ευσταθές. Τότε, ο ρυθμός απόδοσης πλησιάζει την οριακή τιμή $\frac{\mu\theta}{\theta+\zeta}$, καθώς $R \rightarrow \infty$. Από την άλλη, το αναμενόμενο πλήθος πελατών στο σύστημα θα μεταβληθεί και θα κινηθεί προς τα δεξιά καθώς τα κατώφλια αλλάζουν τιμές. Για να γίνει περισσότερο κατανοητό το φαινόμενο αυτό, θα θεωρήσουμε την περίπτωση NR και θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε έναν κύκλο $[R_n, R_{n+1})$, για μεγάλες τιμές του n . Τότε, στο πρώτο μέρος του κύκλου $[R_n, R_n + \alpha)$, θα έχουμε ότι $(n_{e,0}, n_{e,1}^{NR}) = (n, n + k)$. Στην περίπτωση αυτή, το αναμενόμενο πλήθος πελατών στο σύστημα θα είναι κατά προσέγγιση ίσος με $n_{e,1}^{NR} - E[N^{rev-NR}(k)]$, όπου με $N^{rev-NR}(k)$ έχουμε συμβολίσει το πλήθος πελατών σε μια «αντίστροφη» Μαρκοβιανή αλυσίδα με διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων που δίνεται στο Σχήμα 4.7 για $\hat{k} = k$.



Σχήμα 4.7: Διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων αντίστροφης διαδικασίας - περίπτωση NR.

Η αντίστροφη αυτή Μαρκοβιανή αλυσίδα αντιστοιχεί στην απόκλιση που παρουσιάζει ο αριθμός των πελατών στο σύστημα από το δεξιό φράγμα $n_{e,1}^{NR}$ λόγω των τυχαίων διακυμάνσεων και είναι ευσταθής όταν $\lambda > \mu \frac{\theta}{\theta + \zeta}$. Όμοια, στο δεύτερο μέρος του κύκλου $[R_n + \alpha, R_{n+1})$, θα έχουμε ότι $(n_{e,0}, n_{e,1}^{NR}) = (n, n+k+1)$ και ο αριθμός των πελατών στο σύστημα θα είναι κατά προσέγγιση ίσος με $n_{e,1}^{NR} - E[N^{rev-NR}(k+1)]$, όπου με $N^{rev-NR}(k+1)$ συμβολίζουμε το πλήθος πελατών στην «αντίστροφη» Μαρκοβιανή αλυσίδα με διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων που έχει δοθεί στο Σχήμα 4.7 για την οποία όμως είναι $\hat{k} = k+1$. Επομένως, για μεγάλο n και με $R = R_n + x \in [R_n, R_{n+1})$, θα έχουμε

$$SW_e^{NR}(R) \simeq \begin{cases} R \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} - C(n_{e,1}^{NR} - E[N^{rev-NR}(k)]) & \text{αν } R \in [R_n, R_n + \alpha), \\ R \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} - C(n_{e,1}^{NR} - E[N^{rev-NR}(k+1)]) & \text{αν } R \in [R_n + \alpha, R_{n+1}). \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο για το $n_{e,1}^{NR}$ που δίνεται στην (4.28), μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την εξίσωση αυτή ως εξής:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} SW_e^{NR}(R_n + x) = \begin{cases} C \left(\frac{\mu}{\theta + \zeta} - k + E[N^{rev-NR}(k)] \right) + \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} x & \text{αν } x \in [0, \alpha), \\ C \left(\frac{\mu}{\theta + \zeta} - k - 1 + E[N^{rev-NR}(k+1)] \right) + \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} x & \text{αν } x \in [\alpha, \frac{C(\zeta + \theta)}{\mu\theta}). \end{cases} \quad (4.59)$$

Με αυτό έχουμε εξηγήσει την ιδιάζουσα συμπεριφορά που έχει το κοινωνικό όφελος $SW_e^{NR}(R)$ υπό τη στρατηγική ισορροπίας και το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.5, για $\lambda \in \{0.55, 1.5, 2.5\}$. Στην περίπτωση αυτή, η δυνητική ικανότητα εξυπηρέτησης του υπηρέτη είναι ίση με $\frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} = 0.5455$, και επομένως οι τιμές 0.55, 1.5 και 2.5 για το λ αντιστοιχούν σε ένα μη ευσταθές αρχικό σύστημα. Για $\lambda = 0.55$ η συνθήκη ευστάθειας μπορεί να μην ισχύει, όμως η τιμή του λ είναι ελάχιστα μεγαλύτερη από τη δυνητική χωρητικότητα του υπηρέτη. Επομένως, η ιδιάζουσα αυτή συμπεριφορά είναι αρκετά ήπια ενώ η μεταβατική συμπεριφορά κατά την οποία το κοινωνικό όφελος αυξάνει ως προς το R έχει μεγαλύτερη διάρκεια. Τελικά όμως, η συνάρτηση για το κοινωνικό όφελος θα παρουσιάζει περιοδική μορφή (αυτό θα συμβεί για τιμές του R αρκετά μεγαλύτερες από το 15, και επομένως δεν παρουσιάζεται στο γράφημα). Για μεγαλύτερες τιμές του λ , δηλαδή για $\lambda = 1.5$ ή 2.5, η μεταβατική περίοδος είναι σύντομη και επομένως οι συναρτήσεις εμφανίζουν νωρίτερα την περιοδική τους συμπεριφορά. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $\lambda = 2.5$ η οποία αντιστοιχεί στο τελευταίο γράφημα για το κοινωνικό όφελος του Σχήματος 4.5. Για το σενάριο αυτό, έχουμε ότι $k = \lfloor \frac{\mu}{\zeta + \theta} \rfloor = 0$, $E[N^{rev-NR}(k)] = 0.3247$, $E[N^{rev-NR}(k+1)] = 0.4943$ και $\alpha = 0.1667$. Τότε, η εξίσωση (4.59) θα έχει μορφή

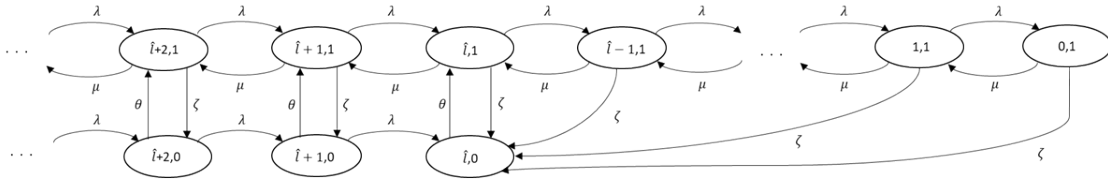
$$\lim_{n \rightarrow \infty} SW_e^{NR}(1.6667 + 1.8333n + x) = \begin{cases} 1.2338 + 0.5455x & \text{αν } x \in [0, 0.1667), \\ 0.4034 + 0.5455x & \text{αν } x \in [0.1667, 1.8333), \end{cases}$$

και παρατηρούμε πως το δεξί μέλος συμφωνεί με το γράφημα ακόμα και από τον τρίτο R -κύκλο. μια παρόμοια κατάσταση έχουμε να εμφανίζεται και στην περίπτωση R. Ακολουθώντας την

ίδια συλλογιστική πορεία, θα έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} SW_e^R(R_n + x) = \begin{cases} C \left(\frac{\mu}{\theta + \zeta} - l + E[N^{rev-R}(l)] \right) + \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta}x & \text{αν } x \in [0, \alpha_1), \\ C \left(\frac{\mu}{\theta + \zeta} - l - 1 + E[N^{rev-R}(l+1)] \right) + \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta}x & \text{αν } x \in [\alpha_1, \alpha_2), \\ C \left(\frac{\mu}{\theta + \zeta} - l - 2 + E[N^{rev-R}(l+2)] \right) + \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta}x & \text{αν } x \in [\alpha_2, \frac{C(\zeta + \theta)}{\mu\theta}), \end{cases} \quad (4.60)$$

όπου με $N^{rev-R}(\hat{l})$ έχουμε συμβολίσει στον αριθμό πελατών σε μια αντίστροφη Μαρκοβιανή αλυσίδα με διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων που δίνεται στο Σχήμα 4.8. Μπορούμε πάλι να διαπιστώσουμε πως η σύγκλιση επιτυγχάνεται μόλις από τον τρίτο R -κύκλο στην περίπτωση που αντιστοιχεί στην τιμή $\lambda = 2.5$ του Σχήματος 4.5.



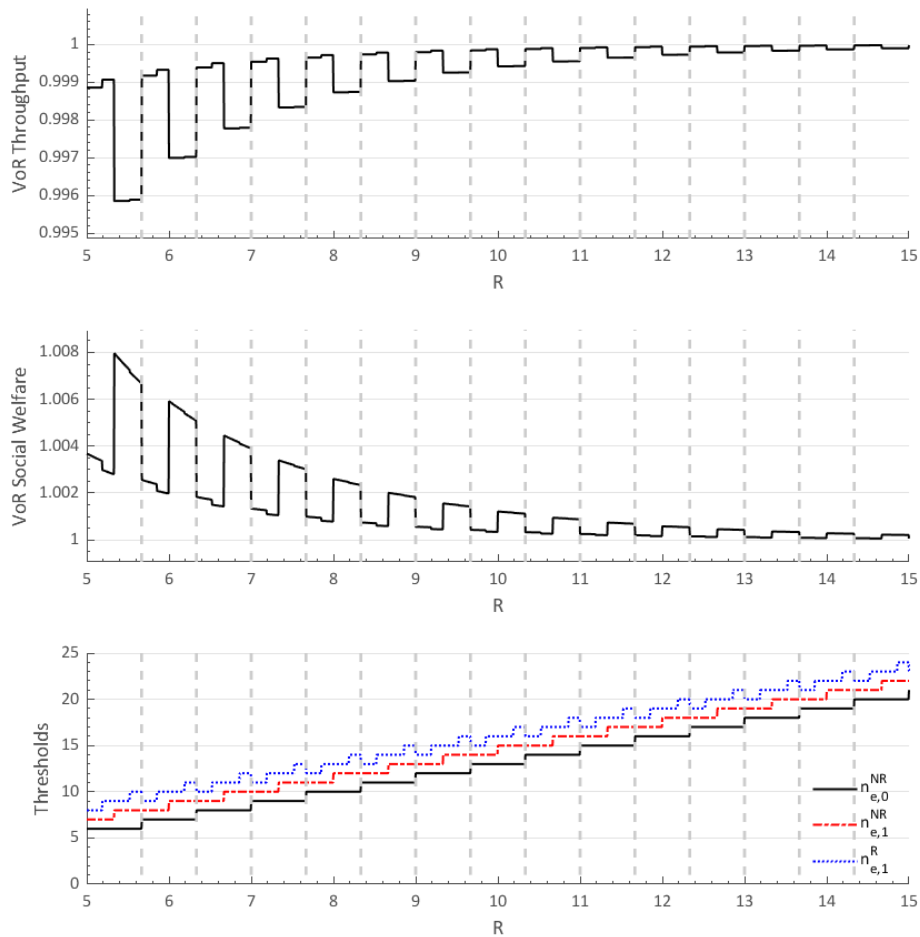
Σχήμα 4.8: Διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων αντίστροφης διαδικασίας - περίπτωση R.

Για να παρατηρήσουμε πιο ξεκάθαρα την επίδραση που έχει η δυνατότητα των υπαναχωρήσεων στα μέτρα λειτουργικότητας του συστήματος (ρυθμό απόδοσης και κοινωνικό όφελος) υπό τη στρατηγική ισορροπίας έχουμε εισάγει την «Αξία της Υπαναχώρησης» (value of reneging) ως προς τον ρυθμό απόδοσης και ως προς το κοινωνικό όφελος που δίνεται από τις σχέσεις

$$VoR_{TH} = \frac{TH_e^R}{TH_e^{NR}} \text{ και } VoR_{SW} = \frac{SW_e^R}{SW_e^{NR}}, \quad (4.61)$$

αντιστοίχως.

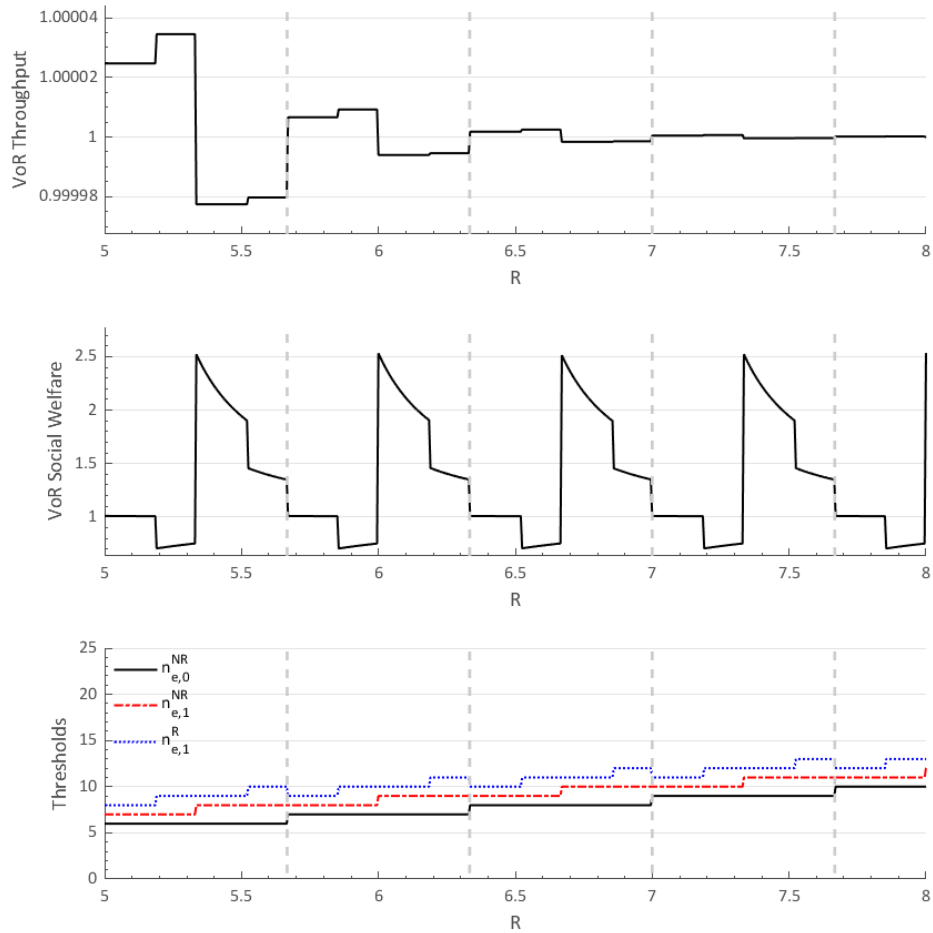
Στο Σχήμα 4.9, παρουσιάζουμε τις VoR_{TH} και VoR_{SW} ως συναρτήσεις του R , για ένα αριθμητικό σενάριο στο οποίο έχουμε θέσει τις τιμές των παραμέτρων να είναι $(\lambda, \mu, \zeta, \theta, C) = (1, 3, 1, 1, 1)$ και οι οποίες αντιστοιχούν σε ένα ευσταθές αρχικό σύστημα.



Σχήμα 4.9: Αξία της υπαναχώρησης ως συνάρτηση του R - Ευσταθές αρχικό σύστημα.

Παρατηρούμε ότι τόσο το VoR_{TH} όσο και το VoR_{SW} συγκλίνουν με μη-μονότονο τρόπο στο 1. Επιπλέον, το VoR_{TH} είναι πάντα μικρότερο από το 1, ενώ το VoR_{SW} είναι πάντα μεγαλύτερο από 1. Ωστόσο, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από τα γραφήματα, η τιμή υπαναχώρησης είναι πολύ κοντά στο 1 τόσο για τον ρυθμό εξυπηρέτησης όσο και για το κοινωνικό όφελος. Αυτή η συμπεριφορά είναι τυπική, με την έννοια ότι παρουσιάζεται σε όλα τα αριθμητικά σενάρια που αντιστοιχούν σε ευσταθή συστήματα.

Στο Σχήμα 4.10, περιλαμβάνονται τα γραφήματα για τα VoR_{TH} και VoR_{SW} ως συναρτήσεις του R για ένα αριθμητικό σενάριο που αντιστοιχεί σε μη-ευσταθές σύστημα (οι συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων στο παράδειγμα αυτό είναι $(\lambda, \mu, \zeta, \theta, C) = (10, 3, 1, 1, 1)$).



Σχήμα 4.10: Αξία της υπαναχώρησης ως συνάρτηση του R - Μη-ευσταθές αρχικό σύστημα.

Παρατηρούμε ότι το VoR_{TH} συγκλίνει στο 1, όμως λαμβάνει τιμές αρκετά μεγαλύτερες αλλά και αρκετά μικρότερες από το 1, καθώς το R μεταβάλλεται. Από την άλλη, το VoR_{SW} ταλαντεύεται κοντά στο 1, έχοντας μια περιοδική συμπεριφορά, με τιμές μεταξύ των 0.7048 και 2.5314. Γενικά, το παράδειγμα αυτό αποτελεί την τυπική περίπτωση για μη-ευσταθή συστήματα.

Μπορούμε να αναλύσουμε τη συμπεριφορά αυτή σε μεγαλύτερο βάθος, μελετώντας το τι συμβαίνει καθώς $\lambda \rightarrow \infty$. Τότε, χρησιμοποιώντας τις (4.26) και (4.38), έχουμε ότι

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} SW_e^{NR}(R_n + x) = \begin{cases} C \left(\frac{\mu}{\theta + \zeta} - k \right) + \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} x & \text{αν } x \in [0, \alpha), \\ C \left(\frac{\mu}{\theta + \zeta} - k - 1 \right) + \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} x & \text{αν } x \in [\alpha, \frac{C(\zeta + \theta)}{\mu\theta}), \end{cases} \quad (4.62)$$

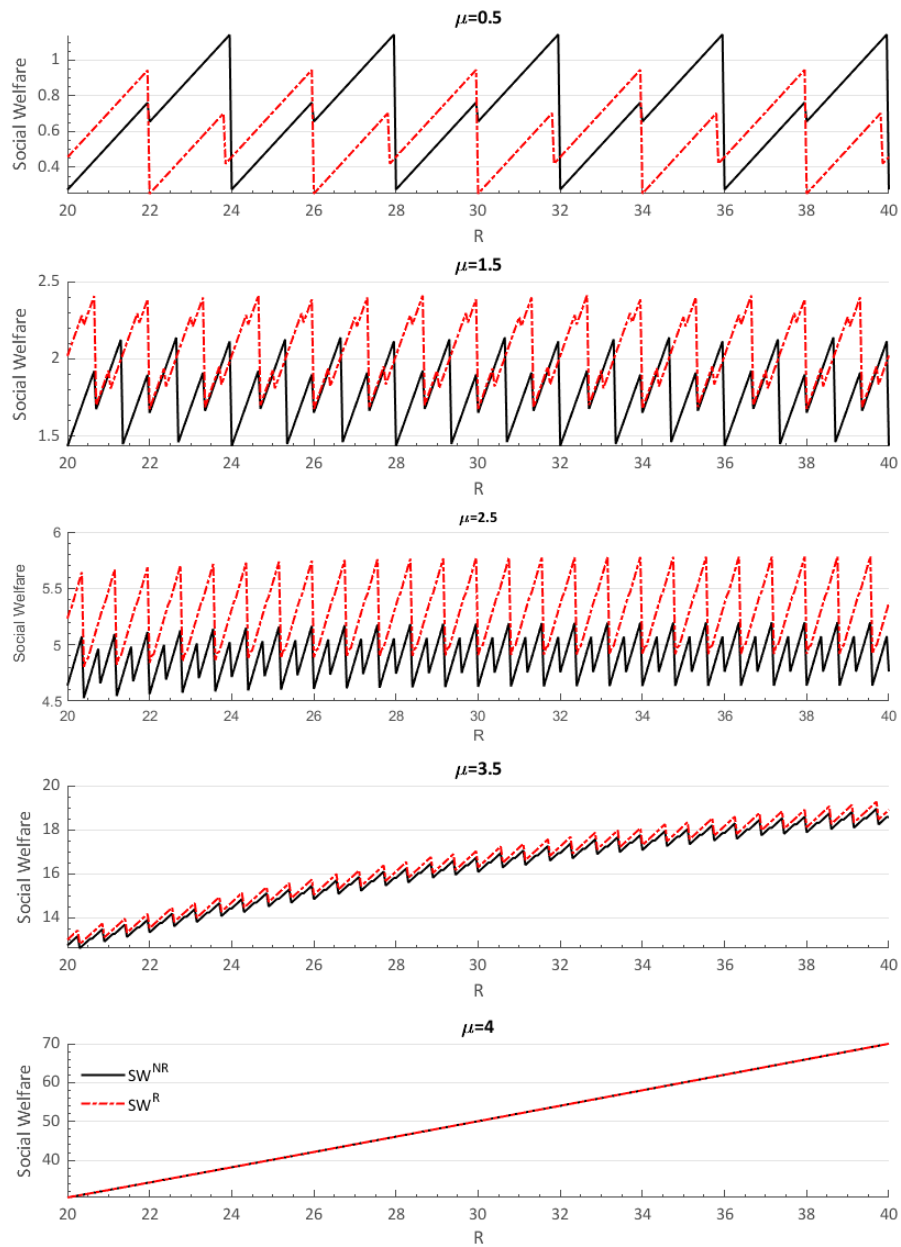
και

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} SW_e^R(R_n + x) = \begin{cases} C \left(\frac{\mu}{\theta + \zeta} - l \right) + \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} x & \text{αν } x \in [0, \alpha_1), \\ C \left(\frac{\mu}{\theta + \zeta} - l - 1 \right) + \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} x & \text{αν } x \in [\alpha_1, \alpha_2), \\ C \left(\frac{\mu}{\theta + \zeta} - l - 2 \right) + \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} x & \text{αν } x \in [\alpha_2, \frac{C(\zeta + \theta)}{\mu\theta}). \end{cases} \quad (4.63)$$

Επομένως, στην περίπτωση αυτή μπορούμε να βρούμε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του VoR_{SW} σε κάθε έναν από τους R -κύκλους, και για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων. Αν και θα επεκταθούμε παρακάτω, στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε πως κάτω από ορισμένες τιμές των παραμέτρων, η τιμή υπαναχώρησης για το κοινωνικό όφελος μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλη. Πράγματι, όταν ο αριθμός $\frac{\mu}{\zeta + \theta}$ είναι ακέραιος, έχουμε ότι $k = \frac{\mu}{\zeta + \theta}$, και άρα $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} SW_e^R(R_n) = 0$. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η τιμή της υπαναχώρησης μπορεί να γίνει άπειρη, όταν $R = R_n$, για κάποιο n .

Μέχρι και το σημείο αυτό, έχουμε παρουσιάσει αριθμητικά πειράματα σχετικά με τη συμπεριφορά του ρυθμού απόδοσης και του κοινωνικού οφέλους ως συναρτήσεις του R , και έχουμε αντιπαραβάλει τα γραφήματα των συναρτήσεων που αντιστοιχούν στα δύο αυτά μέτρα λειτουργικότητας για διάφορες τιμές του λ , κρατώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές. Καθώς τα κατώφλια ισορροπίας δεν εξαρτώνται από το λ , οι αντίστοιχοι R -κύκλοι θα είναι ίδιοι για τις αντίστοιχες τιμές του λ και τα αντίστοιχα υπό-γραφήματα θα είναι απευθείας συγκρίσιμα.

Κλείνουμε την ενότητα αυτή παρουσιάζοντας ένα αριθμητικό πείραμα στο οποίο οι παράμετροι $(\lambda, \zeta, \theta, C) = (2, 0.5, 0.5, 1)$ παραμένουν σταθερές και σχεδιάζουμε το κοινωνικό όφελος υπό τη στρατηγική ισορροπίας ως συνάρτηση του R , για διάφορες τιμές του ρυθμού εξυπηρέτησης $\mu \in \{0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4\}$. Τα αντίστοιχα γραφήματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.11. Καθώς το μ αυξάνει, το μήκος του R -κύκλου φθίνει και η ιδιαίτερη συμπεριφορά που θυμίζει πριόνι, την οποία παρατηρούμε για χαμηλές τιμές του μ (οι οποίες αντιστοιχούν σε μη ευσταθή συστήματα) εξαφανίζεται για μεγάλες τιμές του μ (που αντιστοιχούν σε ευσταθή συστήματα). Ωστόσο, παρατηρούμε ότι η περιοδική συμπεριφορά μπορεί να είναι πολύ διαφορετική. Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου $\mu = 0.5$, η μέγιστη τιμή για το κοινωνικό όφελος επιτυγχάνεται για το μοντέλο χωρίς τη δυνατότητα υπαναχωρήσεων ενώ για $\mu = 1.5$ και $\mu = 2.5$ το μοντέλο με τη δυνατότητα υπαναχωρήσεων είναι εκείνο που υπερτερεί για τις περισσότερες ($\mu = 1.5$) ή για όλες ($\mu = 2.5$) τιμές του R .



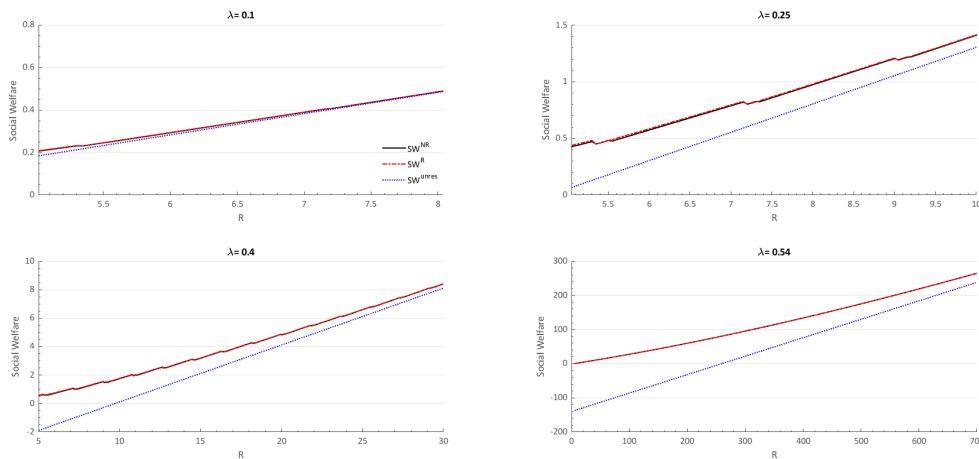
Σχήμα 4.11: Κοινωνικό όφελος ως συνάρτηση του R για διάφορες τιμές του μ .

4.4.3 Σύγκριση με το αρχικό σύστημα

Στην υπό-ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε τα μοντέλα R και NR με το αρχικό σύστημα (στο οποίο οι πελάτες δεν είναι στρατηγικοί, δηλαδή πάντα εισέρχονται στο σύστημα χωρίς τις δυνατότητες άμεσης αποχώρησης ή υπαναχώρησης), καθώς η αξία εξυπηρέτησης μεταβάλλεται.

Αρχικά, μια τέτοια σύγκριση έχει νόημα μόνο όταν το αρχικό σύστημα είναι ευσταθές, δηλαδή όταν ισχύει πως $\rho \equiv \frac{\lambda(\theta+\zeta)}{\mu\theta} < 1$. Ωστόσο, παύει να ισχύει η αναγκαιότητα της για τα μοντέλα R και NR. Επιπλέον, αρκεί μόνο να εξετάσουμε το κοινωνικό όφελος καθώς ο ρυθμός απόδοσης στο αρχικό σύστημα θα είναι σταθερός και ίσος με λ , αφού όλοι οι πελάτες εισέρχονται, και άρα θα είναι πάντα μικρότερος ή ίσος με τον ρυθμό εξυπηρέτησης που προκύπτει στα μοντέλα R και NR όπου οι πελάτες είναι στρατηγικοί. Τέλος, παρατηρούμε ότι όταν το σύστημα είναι ευσταθές, το κοινωνικό όφελος για το αρχικό σύστημα είναι $SW_e^{un}(R) = \lambda R - CE[N^{un}]$, όπου το $E[N^{un}]$ δίνεται στην (4.57). Αυτή είναι μια γραμμική συνάρτηση ως προς R , με θετική κλίση και η οποία μπορεί να γίνει αρνητική για μικρές τιμές του R .

Έχοντας διεξάγει ένα μεγάλο πλήθος πειραμάτων, μπορούμε να πούμε πως το αριθμητικό πείραμα που θα παρουσιάσουμε αποτελεί αντιπροσωπευτικό παράδειγμα για τη γενικότερη περίπτωση. Ειδικότερα, στο πείραμα αυτό έχουμε θέσει τις τιμές των παραμέτρων να είναι ίσες με $(\mu, \zeta, \theta, C) = (1, 0.5, 0.6, 1)$ και έχουμε θεωρήσει 4 περιπτώσεις για τον ρυθμό αφίξεων: $\lambda \in \{0.1, 0.25, 0.4, 0.54\}$. Τα γραφήματα που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις αυτές παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.12. Παρατηρούμε πως όταν αυξάνεται ο συνωστισμός (δηλαδή αυξάνεται η τιμή του λ), το κοινωνικό όφελος στο αρχικό σύστημα είναι αρκετά μικρότερο από ότι στο σύστημα με στρατηγικούς πελάτες. Αυτό ωστόσο είναι αναμενόμενο διότι, καθώς το λ αυξάνει, (η συνθήκη ευστάθειας για κάθε περίπτωση είναι $\rho \in \{0.1833, 0.4583, 0.7333, 0.99\}$) ο αναμενόμενος αριθμός των πελατών στο αρχικό σύστημα αυξάνει απεριόριστα. Από την άλλη, ο αναμενόμενος αριθμός των πελατών στα άλλα μοντέλα είναι πάντα μικρότερος από το αντίστοιχο κατώφλι.



Σχήμα 4.12: Κοινωνικό όφελος ως συνάρτηση του R για διάφορες τιμές του λ .

Από την (4.58), αναμένουμε πως οι συναρτήσεις κοινωνικού οφέλους $SW_e^R(R)$ και $SW_e^{NR}(R)$ θα πλησιάζουν την πλάγια ασύμπτωτη $SW_e^{un}(R)$ για μεγάλες τιμές του R . Αυτό είναι φανερό σε όλα τα γραφήματα. Ωστόσο, η σύγκλιση είναι σημαντικά πιο αργή για μεγάλες τιμές του λ . Επίσης παρατηρήστε πως όταν ο ρυθμός αφίξεων ξεπεράσει ένα συγκεκριμένο κατώφλι, το κοινωνικό όφελος για το αρχικό σύστημα γίνεται αρνητικό για μικρές τιμές του ρυθμού μιας εξυπηρέτησης (μ).

Εν κατακλείδι, σημειώνουμε πως όταν οι πελάτες είναι στρατηγικοί, το κοινωνικό όφελος είναι

μεγαλύτερο σε κάθε περίπτωση.

Η επίδραση των υπαναχωρήσεων σε ένα εναλλασσόμενο μοντέλο ρευστού με στρατηγικούς πελάτες

Περίληψη: Στην πρόσφατη σχετική βιβλιογραφία συναντάμε πολλές εργασίες που επικεντρώνονται στη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε συστήματα με περιόδους λειτουργίας και διακοπής (systems with on-off periods). Τα μοντέλα αυτά είναι κατάλληλα για την αναπαράσταση πραγματικών συστημάτων που υπόκεινται σε βλάβες και επιδιορθώσεις ή γενικότερα, συστημάτων με διακοπές. Στις εργασίες αυτές, οι πελάτες θεωρούνται ως διακριτές μονάδες ενώ ο αποκλεισμός της δυνατότητας υπαναχώρησης των πελατών υιοθετείται ως βασική υπόθεση. Παρεκκλίνοντας από το πλαίσιο αυτό, στο τρέχον κεφάλαιο μελετάμε την επίδραση των υπαναχωρήσεων σε ένα μοντέλο ρευστού που βασίζεται σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με υπηρέτη που εναλλάσσεται μεταξύ περιόδων λειτουργίας και διακοπής. Για το μοντέλο αυτό, προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών και μελετάμε την εξέλιξη του συστήματος όταν οι στρατηγικές αυτές υιοθετηθούν, ως πολιτικές εισόδου, από τον πληθυσμό των πελατών. Χρησιμοποιώντας τη στάσιμη κατανομή του συστήματος, προσδιορίζουμε τον ρυθμό απόδοσης και το κοινωνικό όφελος που παράγεται από το σύστημα, υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών. Με βάση τα κριτήρια αυτά, η δυνατότητα της υπαναχώρησης αποδεικνύεται ιδιαίτερα πλεονεκτική για συστήματα σε κατάσταση υψηλού συνωστισμού. Αυτό σημαίνει πως αν οι αποχωρήσεις επιτρέπονται αποκλειστικά κατά την είσοδο, τότε το σύστημα δεν αποδίδει σε ικανοποιητικό βαθμό. Αντιθέτως, σε συστήματα όπου ο συνωστισμός είναι χαμηλός, το κέρδος από τη δυνατότητα υπαναχώρησης είναι αμελητέο.

5.1 Εισαγωγή

5.1.1 Περιγραφή του ερευνητικού πλαισίου και συνεισφορά

Στην ενότητα αυτή επεκτείνουμε το πλαίσιο μελέτης του προβλήματος που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο εστιάζοντας στο αντίστοιχο μοντέλο ρευστού (fluid model). Ειδικότερα, εξετάζουμε την επίδραση της δυνατότητας υπαναχώρησης θεωρώντας, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, δύο εκδοχές του ίδιου μοντέλου όπου στη μια επιτρέπονται οι υπαναχωρήσεις των πελατών (FR) ενώ στην άλλη, η δυνατότητα αυτή έχει αποκλεισθεί (FNR). Το τελευταίο σημαίνει πως οι πελάτες δεν μπορούν να εγκαταλείψουν το σύστημα αφού έχουν αρχικά αποφασίσει να εισέλθουν σε αυτό. Η σύγκριση αφορά τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών και το αντίστοιχο κοινωνικό όφελος για το σύστημα όταν όλοι οι πελάτες ακολουθούν τις στρατηγικές ισορροπίας. Τα αποτελέσματα δείχνουν πως σχετικά με το κοινωνικό όφελος υπό τη στρατηγική ισορροπίας, η δυνατότητα υπαναχώρησης είναι πλεονεκτική όταν το σύστημα είναι σημαντικά συνωστισμένο, ενώ έχει αμελητέα επίδραση σε συνθήκες χαμηλού συνωστισμού. Από την άλλη, ο ρυθμός απόδοσης είναι ίδιος για τις δύο αυτές εκδοχές (FR και FNR).

Στα παρακάτω σημεία, συνοψίζεται η συνεισφορά του τρέχοντος κεφαλαίου:

1. Προσδιορίζεται η στρατηγική ισορροπίας των πελατών, η οποία είναι τύπου (διπλού) κατωφλίου με ένα κατώφλι για κάθε μια από τις δύο καταστάσεις του υπηρέτη (ενεργός) ή ανενεργός.
2. Προσδιορίζονται οι στάσιμες συναρτήσεις κατανομής για το σύστημα υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών για τις δύο εκδοχές FR και FNR του μοντέλου (επιτρεπόμενες ή όχι υπαναχωρήσεις).
3. Πραγματοποιείται η σύγκριση των δύο εκδοχών (FR και FNR) του μοντέλου με κριτήριο τον ρυθμό απόδοσης και το κοινωνικό όφελος υπό τη στρατηγική ισορροπίας.
4. Μελετάμε την επίδραση των παραμέτρων του συστήματος στα μέτρα λειτουργικότητας για τις δύο εκδοχές του μοντέλου (FR και FNR).

5.1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Βιβλιογραφικά, η εργασία αυτή εμπίπτει στην ερευνητική περιοχή που αφορά τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών, σχετικά με το δίλημμα παραμονής-υπαναχώρησης (stay-renege) σε συστήματα με διακοπές, αλλά και με την περιοχή που περιλαμβάνει τη μελέτη μοντέλων ρευστού που αντιστοιχούν σε συστήματα εξυπηρέτησης. Στο προηγούμενο κεφάλαιο, και συγκεκριμένα στην ενότητα 4.1.2, έχουμε καλύψει τη σύνδεση με την πρώτη ερευνητική περιοχή. Από την άλλη, αν και η προσέγγιση συστημάτων διακριτού χρόνου ως μοντέλα ρευστού στη Θεωρία Ουρών έχει εξερευνηθεί διεξοδικά από πολλούς συγγραφείς (δείτε την ενότητα 1.1.1), η μελέτη τους κάτω από την παιγνιοθεωρητική προσέγγιση αποτελεί μια σχετικά πρόσφατη προσπάθεια.

Προς την κατεύθυνση αυτή, μια από τις πρώτες εργασίες που μελετούν ένα μοντέλο ρευστού από μια οικονομική προσέγγιση, είναι αυτή των Stidham, Rajagopal και Kulkarni στο [110]. Συγκεκριμένα, οι συγγραφείς μελέτησαν ένα μοντέλο ρευστού με μια δομή κόστους-αμοιβών για τους πελάτες και προσδιόρισαν τον βέλτιστο ρυθμό εισόδου του ρευστού. Επιπλέον, βασικές εργασίες που εστιάζουν στη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε μοντέλα ρευστού, είναι αυτές των Maglaras, των Jain, Juneja και Shimkin, των Juneja και Shimkin και του Havin στα [97], [80], [81] και [69] αντίστοιχα. Οι εργασίες αυτές ωστόσο, δεν αφορούν συστήματα με υπηρέτη που υπόκειται σε βλάβες/διακοπές. Επίσης, μια βασική εργασία είναι αυτή των Economou και Manou στο [46], στην οποία μελετήθηκε ένα M/M/1 μοντέλο ρευστού με

εναλλασσόμενο ρυθμό εξυπηρέτησης (χαμηλό και υψηλό) και προσδιορίστηκαν οι στρατηγικές ισορροπίας καθώς και η βέλτιστη πολιτική κάτω από δύο σενάρια πληροφόρησης για τους πελάτες. Αν και το σύστημα αυτό δεν βρίσκεται στην ίδια κατηγορία με εκείνο που μελετάμε στο τρέχον κεφάλαιο, η FNR εκδοχή που μελετάμε, θα μπορούσε να θεωρηθεί ως οριακή περίπτωση του μοντέλου της τελευταίας εργασίας, όταν ο χαμηλός ρυθμός εξυπηρέτησης τείνει στο 0.

Η προσέγγιση ενός συστήματος εξυπηρέτησης M/M/1 στο οποίο ο υπηρέτης εναλλάσσεται μεταξύ ενεργών και ανενεργών περιόδων λειτουργίας με ρυθμό εξυπηρέτησης που εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος, ως μοντέλο ρευστού, έγινε από τους Boxma et al. στο [16] όπου και προσδιορίστηκε η στάσιμη κατανομή του αντίστοιχου μοντέλου ρευστού.

Παρόμοια συστήματα μελετήθηκαν και υπό την παιγνιοθεωρητική προσέγγιση. Οι συγγραφείς στο [143] προσδιόρισαν τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών για ένα μοντέλο ρευστού με ενεργές διακοπές και μια εκθετική δομή κόστους-αμοιβών. Ακόμη, στο [91] μελετάται ένα μοντέλο ρευστού με ενεργές διακοπές και με δύο τύπους στρατηγικών πελατών που αποφασίζουν αν θα εισέλθουν ή όχι, ενώ θεωρούνται δύο επίπεδα πληροφόρησης, ανάλογα με το αν οι πελάτες γνωρίζουν τον τύπο τους ή όχι.

Σε όλες τις παραπάνω εργασίες, η μελέτη επικεντρώνεται στις στρατηγικές εισόδου, όταν η δυνατότητα υπαναχώρησης έχει αποκλεισθεί. Ο κύριος στόχος της τρέχουσας μελέτης είναι λοιπόν να ερευνηθεί η δυνατότητα αυτή. Επομένως, στις ενότητες που ακολουθούν μελετάμε τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σχετικά με την απόφαση για παραμονή ή υπαναχώρηση από το σύστημα, στο πλαίσιο των μοντέλων ρευστού που αντιστοιχούν σε συστήματα εξυπηρέτησης με εναλλασσόμενες περιόδους λειτουργίας και αργίας.

Το πρώτο μοντέλο ρευστού με εξαναγκασμένες διακοπές στο οποίο η μελέτη αφορούσε την ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών, ήταν το M/M/1 σύστημα, των Economou και Kanta στο [42].

5.1.3 Διάρθρωση του κεφαλαίου

Η περιγραφή του υπό-μελέτη συστήματος εξυπηρέτησης γίνεται στην ενότητα 5.2 όπου παρουσιάζεται και η προσέγγιση του ως μοντέλο ρευστού. Οι ενότητες 5.3 και 5.4, αποτελούν τον κύριο κορμό της ανάλυσης, παρουσιάζοντας τα θεωρητικά αποτελέσματα που αφορούν τις στρατηγικές ισορροπίας στις δύο εκδοχές (FR και FNR) που έχουμε θεωρήσει. Ακολουθεί η ενότητα 5.5 όπου εξετάζεται η επίδραση της δυνατότητας υπαναχώρησης μέσα από κατάλληλα αριθμητικά πειράματα αλλά και από ερμηνείες των αναλυτικών αποτελεσμάτων. Στο παράρτημα περιλαμβάνονται οι τεχνικές αποδείξεις των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

5.2 Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρούμε το σύστημα M/M/1 που μελετήθηκε στην προηγούμενη ενότητα, δηλαδή το σύστημα στο οποίο ο υπηρέτης εναλλάσσεται μεταξύ ενεργών και ανενεργών περιόδων λειτουργίας, εκθετικά κατανομημένης διάρκειας με παραμέτρους ζ και θ αντίστοιχα. Οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού λ , ενώ υπάρχει ένας υπηρέτης που εξυπηρετεί σε χρόνο εκθετικά κατανομημένης διάρκειας και παραμέτρου μ . Υπενθυμίζουμε ότι ο χώρος αναμονής είναι απεριόριστος και η πειθαρχία εξυπηρέτησης είναι τύπου FCFS. Κατά τη διάρκεια μιας ενεργής περιόδου, ο υπηρέτης εξυπηρετεί κανονικά τους πελάτες ενώ όταν βρεθεί σε ανενεργή περίοδο, η ροή εξυπηρέτησης διακόπτεται αλλά οι αρίξεις συνεχίζονται. Σε όσα ακολουθούν θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Η κατάσταση του συστήματος μια τυχαία χρονική στιγμή t περιγράφεται από το διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών $(N(t), I(t))$, όπου η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ παριστάνει τον αριθμό πελατών στο σύστημα και η $I(t)$ καταγράφει την κατάσταση του υπηρέτη ($I(t) = 1 \rightarrow$ ενεργός, $I(t) = 0 \rightarrow$ ανενεργός). Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης δίνεται στο Σχήμα 4.6.

Η δομή κόστους/αμοιβής που θεωρούμε για το σύστημα αυτό, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, αποτελείται από την αμοιβή R που λαμβάνει ο πελάτης κατά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του, ενώ υπάρχει κόστος παραμονής C , ανά χρονική μονάδα, το οποίο συσσωρεύεται για όσο χρόνο παραμένει ο πελάτης στο σύστημα (συμπεριλαμβανομένου του χρόνου που βρίσκεται στην εξυπηρέτηση).

Θεωρούμε δύο εκδοχές του μοντέλου σχετικά με το αν δίνεται η δυνατότητα υπαναχώρησης στους πελάτες (R περίπτωση) ή αν επιτρέπεται μόνο η άμεση αποχώρηση κατά την άφιξη στο σύστημα (NR περίπτωση). Ειδικότερα στην NR περίπτωση, οι πελάτες αποφασίζουν κατά την άφιξη τους στο σύστημα αν θα εισέλθουν σε αυτό ή θα αποχωρήσουν. Αν κάποιος πελάτης αποφασίσει να εισέλθει στο σύστημα τότε θα παραμείνει μέχρι την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του. Στην R περίπτωση, εκτός από το αρχικό δίλημμα, ένας πελάτης που αποφάσισε να εισέλθει μπορεί οποιαδήποτε στιγμή να επιλέξει να υπαναχωρήσει από το σύστημα χωρίς να έχει ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του. Υποθέτουμε πως και στα δύο συστήματα οι πελάτες έχουν διαρκώς γνώση της κατάστασης του συστήματος. Ειδικότερα, η κατάσταση του υπηρέτη (ενεργός/ανεργός) καθώς και το συνολικό πλήθος πελατών στο σύστημα είναι συνεχώς παρατηρήσιμα από τους πελάτες καθ' όλη τη διάρκεια που βρίσκονται στο σύστημα. Επομένως, για την R περίπτωση, οι πελάτες που βρίσκονται ήδη στο σύστημα έχουν ένα διαρκές δίλημμα αν θα παραμείνουν ή θα αποχωρήσουν από το σύστημα.

Στην τρέχουσα ενότητα εστιάζουμε στο αντίστοιχο οριακό μοντέλο ρευστού. Ειδικότερα, το μοντέλο αυτό αντιστοιχεί σε μια «οριακή» ουρά καθώς τόσο ο ρυθμός αφίξεων, λ , όσο και ο ρυθμός εξυπηρέτησης, μ , τείνουν στο άπειρο, ενώ ο λόγος τους παραμένει σταθερός. Με άλλα λόγια, έχουμε θεωρήσει την ακολουθία στοχαστικών διαδικασιών $\{(N^{(m)}(t), I^{(m)}(t))\}$ με ρυθμούς αφίξεων $\lambda^{(m)} = \lambda m$, και εξυπηρέτησεων με ρυθμούς $\mu^{(m)} = \mu m$, σταθερούς ρυθμούς $\zeta^{(m)} = \zeta$, $\theta^{(m)} = \theta$ (δηλαδή οι διαδικασίες $\{I^{(m)}(t)\}$ είναι όλες ίδιες) και εξετάζουμε τη συμπεριφορά της στοχαστικής διαδικασίας $\{(X(t), I(t))\}$ όπου $I(t) = I^{(m)}(t)$, $t \geq 0$, και

$$X(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{N^{(m)}(t)}{m}, \quad t \geq 0$$

(για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την κατασκευή οριακών μοντέλων ρευστού και την ερμηνεία τους, δείτε το βιβλίο του Gautam (2012) [49]).

Διαισθητικά, η εκδοχή αυτή του μοντέλου, αντιστοιχεί σε ένα σύστημα στο οποίο επεξεργάζεται κάποιο ρευστό από έναν υπηρέτη που εναλλάσσεται μεταξύ ενεργών και ανεργών περιόδων με διάρκειες εκθετικά κατανομημένες με ρυθμούς ζ και θ αντίστοιχα. Ο ρυθμός εισόδου του ρευστού στο σύστημα είναι λ , ενώ ο ρυθμός επεξεργασίας του (ισοδύναμα ο ρυθμός εξαγωγής του) είναι μ κατά τη διάρκεια ενεργής περιόδου και 0 διαφορετικά.

Επομένως, οι πελάτες στο μοντέλο αυτό μπορούν να θεωρηθούν ως απειροστές μονάδες κάποιου ρευστού. Τέτοια μοντέλα αποτελούν μια ικανοποιητική προσέγγιση για το κανονικό Μαρκοβιανό μοντέλο με διακριτές μονάδες, όταν οι διαδικασίες που αφορούν την είσοδο και την εξυπηρέτηση των πελατών εξελίσσονται σε μια πολύ ταχύτερη κλίμακα από τις διαδικασίες που αφορούν την ενεργοποίηση και απενεργοποίηση του υπηρέτη (δείτε την ενότητα 1.1.1 στην εισαγωγή). Από μαθηματικής πλευράς, η εκδοχή αυτή μας επιτρέπει να πραγματοποιήσουμε ανάλυση σε μεγαλύτερο βάθος, κυρίως λόγω της ντετερμινιστικής της φύσης σχετικά με τις διαδικασίες που αφορούν τους πελάτες αλλά και ειδικότερα λόγω της μορφής του χώρου καταστάσεων (που είναι συνεχούς τύπου) της διαδικασίας του μήκους ουράς που απλοποιεί πολλούς υπολογισμούς. Πράγματι, κυρίως σε σχέση με την κανονική Μαρκοβιανή εκδοχή που μελετήθηκε στην προηγούμενη ενότητα, το μοντέλο ρευστού μπορούμε να το χειριστούμε με μεγαλύτερη ευκολία. Όπως αναφέρθηκε, για τη μελέτη του μοντέλου ρευστού, έχουμε διακρίνει δύο περιπτώσεις, σχετικά με το αν δίνεται η δυνατότητα υπαναχώρησης στους πελάτες ή αν επιτρέπονται μόνο άμεσες αποχωρήσεις κατά την άφιξη στο σύστημα. Οι περιπτώσεις αυτές θα αναφέρονται ως FR και FNR αντίστοιχα.

5.3 Στρατηγική ισορροπίας - περίπτωση FR

Αρχικά θα μελετήσουμε το μοντέλο FR και θα προσδιορίσουμε τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών αλλά και τα μέτρα λειτουργικότητας για το σύστημα, όταν όλοι πελάτες υιοθετούν τη στρατηγική ισορροπίας. Προσδιορίζοντας την αναμενόμενη ωφέλεια ενός επιλεγμένου πελάτη που φθάνει στο σύστημα, μπορούμε να συνάγουμε με τον ίδιο συλλογισμό, που αναλύσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, πως η στρατηγική ισορροπίας θα ανήκει στη κλάση των στρατηγικών τύπου κατωφλίου. Με άλλα λόγια, η στρατηγική ισορροπίας θα είναι ένα ζεύγος από κατώφλια (x_0^{FR}, x_1^{FR}) που έχουν την ακόλουθη ερμηνεία: Αν κατά την άφιξη του, ο επιλεγμένος πελάτης βρει τον υπηρέτη στην κατάσταση i , θα εισέλθει στο σύστημα αν το επίπεδο του ρευστού που έχει μπροστά του είναι λιγότερο από x_i^{FR} , ενώ αν είναι μεγαλύτερο θα αποχωρήσει αμέσως. Αν το επίπεδο είναι ακριβώς ίσο με x_i^{FR} , τότε θα εισέλθει με κάποια πιθανότητα. Επιπλέον, ένας πελάτης που έχει ήδη εισέλθει στο σύστημα, θα υπαναχωρήσει μόνο κατά τη στιγμή που ο υπηρέτης αλλάζει κατάσταση από ενεργός σε ανενεργό και το επίπεδο του ρευστού είναι πάνω από x_0^{FR} .

Ακόμη, επισημαίνουμε ότι μπορούμε να φθάσουμε στο παραπάνω συμπέρασμα ακολουθώντας και διαφορετική προσέγγιση: Παρατηρήστε πως η αναμενόμενη ωφέλεια ενός πελάτη που παρατηρεί το σύστημα σε μία συγκεκριμένη κατάσταση, εξαρτάται αποκλειστικά από την τρέχουσα αυτή κατάσταση του συστήματος αλλά και από τη συμπεριφορά μόνο των παρόντων πελατών, που μάλιστα, σχετίζεται με την υπαναχώρηση (και όχι την είσοδο τους). Με άλλα λόγια, δεν εξαρτάται ούτε από τις παρελθοντικές ενέργειες των προηγούμενων πελατών, αλλά και ούτε από τις μελλοντικές ενέργειες εκείνων που θα ακολουθήσουν. Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με εκείνα του Yechiali (1971, 1972) στα [151] και [152], μπορούμε να δείξουμε ότι οι μόνες υποψήφιες στρατηγικές στρατηγικές ισορροπίας θα είναι τύπου κατωφλίου.

Επομένως, για τη συνέχεια, θα υποθέσουμε ότι οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική τύπου κατωφλίου (x_0^{FR}, x_1^{FR}) . Μάλιστα, μπορούμε επιπλέον να θεωρήσουμε ότι $x_0^{FR} < x_1^{FR}$, καθώς μια στρατηγική κατωφλίου (x_0^{FR}, x_1^{FR}) με $x_0^{FR} \geq x_1^{FR}$ δεν μπορεί να είναι στρατηγική ισορροπίας. Πράγματι, σε ένα τέτοιο σενάριο, ένα πελάτης που κατά την άφιξη του θα παρατηρήσει το σύστημα στην κατάσταση $(x, 0)$ με $x_1^{FR} < x \leq x_0^{FR}$, θα επιλέξει να εισέλθει (όπως του υπαγορεύει αυτή η στρατηγική), θα περιμένει μέχρι την ενεργοποίηση του υπηρέτη και μόλις αυτή λάβει χώρα, θα υπαναχωρήσει (καθώς το ρευστό που έχει μπροστά του θα παραμένει στο ίδιο επίπεδο $x > x_1^{FR}$). Με άλλα λόγια, ακολουθώντας μία τέτοια στρατηγική, ο πελάτης αυτός θα έχει επωμιστεί μόνο το κόστος παραμονής (καθώς θα περιμένει για κάποιο χρόνο μέχρι την ενεργοποίηση, συσσωρεύοντας κόστος παραμονής και θα αναχωρήσει χωρίς να λάβει εξυπηρέτηση).

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την αναμενόμενη ωφέλεια ενός επιλεγμένου πελάτη που φθάνει στο σύστημα, ακολουθεί τη στρατηγική αυτή, παρατηρεί το σύστημα στην κατάσταση (x, i) και επιλέγει να εισέλθει. Θα συμβολίσουμε τη συνάρτηση αυτή με $S_{(x,i)}^{FR}(x_0^{FR}, x_1^{FR})$. Παρατηρήστε πως η συνάρτηση αυτή θα αντιστοιχεί επίσης και στην υπολειπόμενη ωφέλεια ενός πελάτη που ήδη βρίσκεται στο σύστημα όταν ο υπηρέτης είναι στην κατάσταση i , το επίπεδο του ρευστού που έχει μπροστά του είναι x , και αποφασίζει να παραμείνει. Η αναμενόμενη ωφέλεια δίνεται από το Θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 5.1. (Αναμενόμενη ωφέλεια - περίπτωση FR) Στο πλήρως παρατηρήσιμο μοντέλο ρευστού με εναλλασσόμενες ενεργές και ανενεργές περιόδους και στην περίπτωση με επιτρεπόμενες υπαναχωρήσεις, όταν όλοι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική, (x_0^{FR}, x_1^{FR}) με $x_0^{FR} < x_1^{FR}$, το αναμενόμενο όφελος για έναν πελάτη που επιλέγει να εισέλθει/παραμείνει και κατά την άφιξη του βρίσκει το επίπεδο του ρευστού να είναι x και τον υπηρέτη στην κατάσταση i δίνεται από την

$$S_{(x,i)}^{FR}(x_0^{FR}, x_1^{FR}) = \begin{cases} R - C \left((1-i)\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\mu} (1 + \frac{\xi}{\theta}) \right) & \text{αν } x \leq x_0^{FR} \text{ και } i = 0, 1, \\ \left(R - \frac{Cx_0^{FR}(\theta + \zeta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\zeta} \right) e^{-\frac{\zeta(x-x_0^{FR})}{\mu}} - \frac{C}{\zeta} & \text{αν } x_0^{FR} < x \leq x_1^{FR} \text{ και } i = 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα (5.5.2)

Το Θεώρημα που ακολουθεί θα μας δώσει τη στρατηγική ισορροπίας για την FR περίπτωση.

Θεώρημα 5.2. (Στρατηγική ισορροπίας - περίπτωση FR) Στο πλήρως παρατηρήσιμο μοντέλο ρευστού με εναλλασσόμενες ενεργές και ανενεργές περιόδους και στην περίπτωση με επιτρεπόμενες υπαναχωρήσεις, η στρατηγική ισορροπίας είναι το ζεύγος κατωφλίων

$$(x_{e,0}^{FR}, x_{e,1}^{FR}) = \left(\frac{R\mu\theta}{C(\zeta + \theta)} - \frac{\mu}{\zeta + \theta}, \frac{R\mu\theta}{C(\zeta + \theta)} - \frac{\mu}{\zeta + \theta} + \frac{\mu}{\zeta} \log \left(1 + \frac{\zeta}{\theta} \right) \right). \quad (5.2)$$

Απόδειξη. Η στρατηγική τύπου κατωφλίου, $(x_{e,0}^{FR}, x_{e,1}^{FR})$ θα είναι και στρατηγική ισορροπίας, αν και μόνο αν είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της. Επομένως, θεωρώντας αρχικά τις καταστάσεις στις οποίες ο υπηρέτης είναι ενεργός, θα πρέπει να έχουμε ότι

$$S_{(x,0)}^{FR}(x_{e,0}^{FR}, x_{e,1}^{FR}) > 0, \quad 0 \leq x < x_{e,0}^{FR}, \quad (5.3)$$

$$S_{(x_{e,0}^{FR},0)}^{FR}(x_{e,0}^{FR}, x_{e,1}^{FR}) = 0. \quad (5.4)$$

Από τον άνω κλάδο της (5.1), μπορούμε να δούμε ότι η $S_{(x,0)}^{FR}(x_{e,0}^{FR}, x_{e,1}^{FR})$ είναι φθίνουσα ως προς $x \in [0, x_{e,0}^{FR}]$. Επομένως, από τη συνθήκη (5.4) θα έπεται η συνθήκη (5.3). Λύνοντας την (5.4) για $x_{e,0}^{FR}$, παίρνουμε το πρώτο κατώφλι για τη στρατηγική ισορροπίας

$$x_{e,0}^{FR} = \frac{R\mu\theta}{C(\zeta + \theta)} - \frac{\mu}{\zeta + \theta}.$$

Επιπλέον, έχουμε ότι $R = \frac{C(\zeta + \theta)x_{e,0}^{FR}}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}$ και αντικαθιστώντας το στην (5.1) παίρνουμε ότι

$$S_{(x,i)}^{FR}(x_{e,0}^{FR}, x_{e,1}^{FR}) = \begin{cases} \left(\frac{C}{\theta} + \frac{C}{\zeta} \right) \frac{\zeta(x_{e,0}^{FR} - x)}{\mu} + i \frac{C}{\theta} & \text{αν } x \leq x_{e,0}^{FR} \text{ και } i = 0, 1, \\ \left(\frac{C}{\theta} + \frac{C}{\zeta} \right) \exp \left(-\frac{\zeta(x - x_{e,0}^{FR})}{\mu} \right) - \frac{C}{\zeta} & \text{αν } x_{e,0}^{FR} \leq x \leq x_{e,1}^{FR} \text{ και } i = 1. \end{cases}$$

Επομένως, η αναμενόμενη ωφέλεια κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας θα είναι εξίσου φθίνουσα ως προς το επίπεδο του ρευστού x , όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός.

Θεωρούμε τώρα τις καταστάσεις στις οποίες ο υπηρέτης είναι ενεργός. Για να είναι η στρατηγική $(x_{e,0}^{FR}, x_{e,1}^{FR})$, στρατηγική ισορροπίας, θα πρέπει να έχουμε ότι

$$S_{(x,1)}^{FR}(x_{e,0}^{FR}, x_{e,1}^{FR}) > 0, \quad 0 \leq x < x_{e,1}^{FR}, \quad (5.5)$$

$$S_{(x_{e,1}^{FR},1)}^{FR}(x_{e,0}^{FR}, x_{e,1}^{FR}) = 0. \quad (5.6)$$

Ομοίως, λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S_{(x,1)}^{FR}(x_{e,0}^{FR}, x_{e,1}^{FR})$, από τη συνθήκη (5.6) έπεται η συνθήκη (5.5). Λύνοντας την (5.6) ως προς $x_{e,1}^{FR}$, παίρνουμε το δεύτερο κατώφλι για τη στρατηγική ισορροπίας:

$$x_{e,1}^{FR} = \frac{R\mu\theta}{C(\zeta + \theta)} - \frac{\mu}{\zeta + \theta} + \frac{\mu}{\zeta} \log \left(1 + \frac{\zeta}{\theta} \right).$$

□

Θα προχωρήσουμε τώρα στον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής για τη στοχαστική διαδικασία $\{(X(t), I(t))\}$, όταν όλοι οι πελάτες υιοθετούν τη στρατηγική ισορροπίας, δηλαδή, θα υπολογίσουμε τις συναρτήσεις

$$F_i(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[X(t) \leq x, I(t) = i], \quad x \geq 0, \quad i \in \{0, 1\}. \quad (5.7)$$

Σε όσα ακολουθούν, θα απλοποιήσουμε τον συμβολισμό σχετικά με τη στρατηγική ισορροπίας και θα συμβολίζουμε τα $x_{e,0}^{FR}$ και $x_{e,1}^{FR}$ με x_0 και x_1 , αντίστοιχα. Επιπλέον, θέτουμε

$$\alpha_0 = \frac{\theta}{\lambda}, \quad \alpha_1 = \frac{\zeta}{\lambda - \mu} \quad \text{και} \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1. \quad (5.8)$$

Θεώρημα 5.3. (Στάσιμη κατανομή - περίπτωση FR) Στο πλήρως παρατηρήσιμο μοντέλο ρευστού με εναλλασσόμενες ενεργές και ανενεργές περιόδους και στην περίπτωση με επιτρεπόμενες υπαναχωρήσεις, όταν οι πελάτες εισέρχονται σύμφωνα τη στρατηγική ισορροπίας, η στάσιμη κατανομή για το επίπεδο του ρευστού έχει την ακόλουθη μορφή:

Περίπτωση 1: $\lambda > \mu$.

Το επίπεδο του ρευστού μεταβάλλεται στο $[x_0, x_1]$. Συγκεκριμένα,

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq x < x_0, \\ \frac{\zeta}{\theta + \zeta} & \text{αν } x \geq x_0 \end{cases} \quad (5.9)$$

και

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq x < x_0, \\ \frac{\theta}{\theta + \zeta} (1 - e^{-\alpha_1(x-x_0)}) & \text{αν } x_0 \leq x < x_1, \\ \frac{\theta}{\theta + \zeta} & \text{αν } x \geq x_1. \end{cases} \quad (5.10)$$

Παρατηρήστε ότι η $F_0(x)$ έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο x_0 και η $F_1(x)$ είναι μικτή, με συνεχή συνάρτηση πυκνότητας στο $[x_0, x_1]$ και μια μάζα πιθανότητας στο x_1 . Το αναμενόμενο επίπεδο του ρευστού δίνεται από την

$$E[X] = x_0 + \frac{\theta}{\theta + \zeta} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha_1(x_1-x_0)}}{\alpha_1}. \quad (5.11)$$

Περίπτωση 2: $\lambda = \mu$.

Έπειτα από μια αρχική μεταβατική φάση, το επίπεδο του ρευστού θα σταθεροποιηθεί στο x_0 .

Περίπτωση 3: $\lambda < \mu$.

Το επίπεδο του ρευστού μεταβάλλεται στο $[0, x_0]$. Συγκεκριμένα,

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{\zeta}{\theta + \zeta} \cdot \frac{\alpha_0(1 - e^{-\alpha x})}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\alpha x_0}} & \text{αν } 0 \leq x < x_0, \\ \frac{\zeta}{\theta + \zeta} & \text{αν } x \geq x_0 \end{cases} \quad (5.12)$$

και

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{\theta + \zeta} \cdot \frac{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\alpha x}}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\alpha x_0}} & \text{αν } 0 \leq x < x_0, \\ \frac{\theta}{\theta + \zeta} & \text{αν } x \geq x_0. \end{cases} \quad (5.13)$$

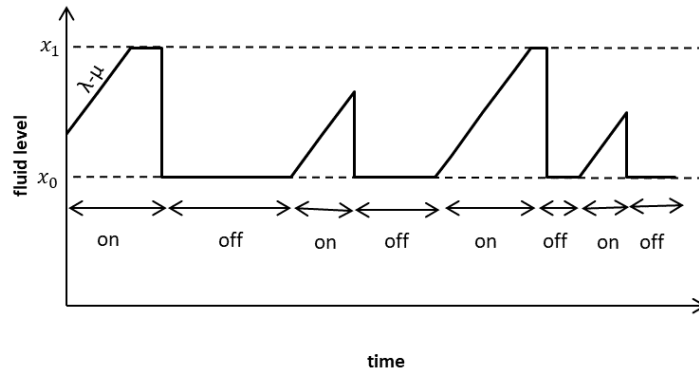
Παρατηρήστε ότι τόσο η $F_0(x)$ όσο και η $F_1(x)$ είναι μικτές, με συνεχείς συναρτήσεις πυκνότητας στο $[0, x_0]$ και με μάζες πιθανότητας στα x_0 και 0 , αντίστοιχα. Το αναμενόμενο επίπεδο του ρευστού δίνεται από την

$$E[X] = \frac{\alpha_1 e^{-\alpha x_0}}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\alpha x_0}} \cdot x_0 - \frac{\mu}{\theta + \zeta} \cdot \frac{\alpha_0 \alpha_1 (1 - e^{-\alpha x_0})}{(\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\alpha x_0}) \alpha}. \quad (5.14)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ξεχωριστά τις 3 περιπτώσεις που αφορούν τη σχετική θέση των λ και μ .
Περίπτωση 1: $\lambda > \mu$.

Ας υποθέσουμε ότι το επίπεδο του ρευστού είναι αρχικά σε κάποια στάθμη $x < x_0$. Όσο παραμένει κάτω από τη στάθμη x_0 , όλοι οι πελάτες επιλέγουν να εισέλθουν και επομένως το επίπεδο του ρευστού θα αυξάνεται γραμμικά με ρυθμό $\lambda - \mu$, αν ο υπηρέτης είναι ενεργός ή με ρυθμό λ αν ο υπηρέτης είναι ανενεργός. Επομένως, αργά ή γρήγορα θα φθάσει τη στάθμη x_0 . Όταν το επίπεδο φθάσει στη στάθμη x_0 , θα παραμείνει εκεί όσο ο υπηρέτης είναι ανενεργός ενώ θα αυξηθεί με ρυθμό $\lambda - \mu$, αν ο υπηρέτης είναι ενεργός, μέχρι να φθάσει το επίπεδο x_1 στο οποίο και θα παραμείνει μέχρι την επόμενη εναλλαγή της κατάστασης του υπηρέτη από ενεργός σε ανενεργός. Τη στιγμή αυτή της εναλλαγής, οι πελάτες που έχουν επίπεδο ρευστού πάνω από το x_0 θα υπαναχωρήσουν όλοι ταυτόχρονα και έτσι, το επίπεδο του ρευστού θα έχει μια κατακόρυφη πτώση στο επίπεδο x_0 όπου και θα παραμείνει μέχρι την επόμενη εναλλαγή της κατάστασης του υπηρέτη από ανενεργός σε ενεργός κ.ο.κ.

Αν αρχικά το επίπεδο του ρευστού είναι $x \geq x_0$, τότε θα πέσει απότομα στο επίπεδο x_0 , την πρώτη στιγμή που θα υπάρξει αλλαγή στην κατάσταση του υπηρέτη από ενεργός σε ανενεργός και στη συνέχεια η δυναμική θα είναι όπως έχει περιγραφεί παραπάνω. Επομένως, το επίπεδο του ρευστού μεταβάλλεται στο $[x_0, x_1]$. Στο Σχήμα 5.1 παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται στο $[x_0, x_1]$, για την περίπτωση αυτή.



Σχήμα 5.1: Τυπικό μονοπάτι για το επίπεδο του ρευστού όταν $\lambda > \mu$.

Ένας κύκλος λειτουργίας αποτελείται από δύο φάσεις με εκθετικά κατανομημένες διάρκειες με ρυθμούς θ και ζ , που αντιστοιχούν στις ενεργές και ανενεργές περιόδους του υπηρέτη. Κατά τη διάρκεια μιας ανενεργής περιόδου, το επίπεδο του ρευστού παραμένει στη στάθμη x_0 , ενώ κατά τη διάρκεια μιας ενεργής περιόδου, θα αυξάνει γραμμικά με ρυθμό $\lambda - \mu$ μέχρι να φθάσει στη στάθμη x_1 όπου παραμένει μέχρι την ολοκλήρωση του κύκλου ταλάντωσης. Επομένως, το $F_0(x)$, για $x \geq x_0$ θα είναι απλά το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου στο οποίο ο υπηρέτης είναι ανενεργός το οποίο είναι ίσο με $\frac{\zeta}{\theta + \zeta}$ και έτσι παίρνουμε την (5.9). Όμοια, το $F_1(x)$ θα είναι το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου στο οποίο ο υπηρέτης είναι ενεργός και το επίπεδο του ρευστού ξεπερνά το x . αφού αρχικά το επίπεδο του ρευστού είναι x_0 και κατά τη διάρκεια της ενεργής περιόδου αυξάνεται γραμμικά με ρυθμό $\lambda - \mu$, τότε, θα παραμείνει κάτω από x , για $x \in [x_0, x_1)$, για όσο χρόνο συμβαίνει πως η διάρκεια της ενεργής περιόδου δεν ξεπερνά τις $\frac{x - x_0}{\lambda - \mu}$ χρονικές μονάδες. Επομένως, χρησιμοποιώντας το Ανανεωτικό Θεώρημα με Αμοιβές, μπορούμε να εστιάσουμε σε έναν κύκλο λειτουργίας και θα έχουμε ότι

$$F_1(x) = \frac{E \left[\min \left(\frac{x - x_0}{\lambda - \mu}, U \right) \right]}{\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\zeta}}, \quad x \in [x_0, x_1),$$

όπου το U τη διάρκεια μιας ενεργούς περιόδου του υπηρέτη. Έπειτα από υπολογισμούς, παίρνουμε την (5.10). Η αναμενόμενη τιμή του επιπέδου του ρευστού μπορεί επομένως να υπολογιστεί άμεσα, χρησιμοποιώντας την $E[X] = \int_0^\infty (1 - F_0(x) - F_1(x))dx$, από την οποία παίρνουμε την (5.11).

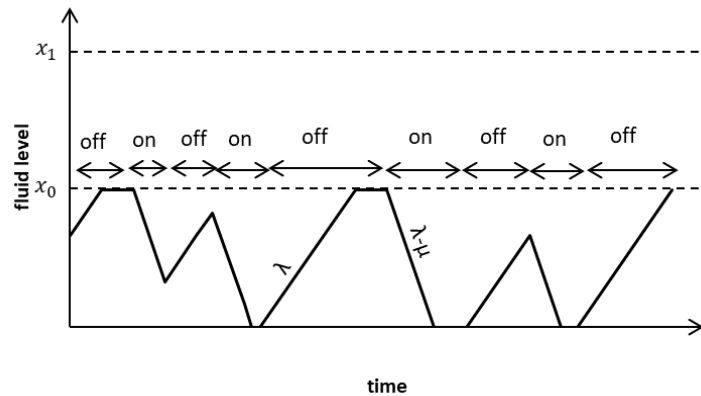
Περίπτωση 2: $\lambda = \mu$.

Ας υποθέσουμε ότι το επίπεδο του ρευστού είναι αρχικά σε κάποια στάθμη $x < x_0$. Τότε, θα αυξάνει γραμμικά με ρυθμό λ οποτεδήποτε ο υπηρέτης είναι ανενεργός, και θα παραμένει στα στάθμη αυτή οποτεδήποτε ο υπηρέτης είναι ενεργός, μέχρι να φθάσει στο επίπεδο x_0 στο οποίο και θα σταθεροποιηθεί, μένοντας εκεί για πάντα. Αν αρχικά το επίπεδο του ρευστού είναι $x \geq x_0$, τότε παραμένει σταθερό (αν $x < x_1$) ή φθίνει με ρυθμό μ (αν $x \geq x_1$) μέχρι τη στιγμή της πρώτης αλλαγής της κατάστασης του υπηρέτη από ενεργό σε ανενεργό. Τη στιγμή αυτή, το επίπεδο του ρευστού θα υποχωρήσει κατακόρυφα στη στάθμη x_0 στην οποία και θα σταθεροποιηθεί.

Περίπτωση 3: $\lambda < \mu$.

Ας υποθέσουμε ότι το επίπεδο του ρευστού είναι αρχικά σε κάποια στάθμη $x < x_0$. Τότε, θα αυξάνει γραμμικά με ρυθμό λ οποτεδήποτε ο υπηρέτης είναι ανενεργός, μέχρι να φθάσει τη στάθμη x_0 , ή θα φθίνει γραμμικά με ρυθμό $|\lambda - \mu|$ οποτεδήποτε ο υπηρέτης είναι ενεργός, μέχρι το επίπεδο να φθάσει στο 0. Επομένως το ρευστό μεταβάλλεται στο $[0, x_0]$.

Αν αρχικά το επίπεδο του ρευστού είναι $x \geq x_0$, τότε θα φθίνει με ρυθμό $|\lambda - \mu|$ (αν $x < x_1$) ή θα φθίνει με ρυθμό μ (αν $x \geq x_1$) μέχρι τη στιγμή της πρώτης αλλαγής της κατάστασης του υπηρέτη από ενεργό σε ανενεργό. Τη στιγμή αυτή, το επίπεδο του ρευστού θα υποχωρήσει κατακόρυφα στη στάθμη x_0 και στη συνέχεια οι δυναμικές περιγράφονται παραπάνω. Επομένως, το ρευστό θα μεταβάλλεται στο $[0, x_0]$. Στο Σχήμα 5.2 παρουσιάζεται ο τρόπος της μεταβολής αυτής στο $[0, x_0]$ για την περίπτωση αυτή.



Σχήμα 5.2: Τυπικό μονοπάτι για το επίπεδο του ρευστού όταν $\lambda < \mu$.

Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία που συνηθίζεται να χρησιμοποιείται στην ανάλυση μοντέλων ρευστού (δείτε για παράδειγμα *Kulkarni (1997) [84]*, *Gautam (2012) Section 9.2 [49]*, *Economou and Manou (2016) [46]*), έχουμε πως οι συναρτήσεις $F_0(x)$ και $F_1(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0, x_0)$ και ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα ΣΔΕ

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu) \frac{dF_1(x)}{dx} &= -\zeta F_1(x) + \theta F_0(x), \\ \lambda \frac{dF_0(x)}{dx} &= \zeta F_1(x) - \theta F_0(x), \end{aligned}$$

με οριακές συνθήκες

$$F_0(0) = 0, \quad F_1(x_0) = \frac{\theta}{\zeta + \theta}.$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό με την τυπική θεωρία που αφορά γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές, (δείτε για παράδειγμα Braun (1983)), έχουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση η οποία δίνεται από τις (5.12) και (5.13), όπου τα α_0 , α_1 και α δίνονται στην (5.8). Το αναμενόμενο επίπεδο του ρευστού μπορεί να υπολογιστεί άμεσα χρησιμοποιώντας την $E[X] = \int_0^\infty (1 - F_0(x) - F_1(x))dx$ η οποία μας δίνει την (5.14). \square

Είμαστε σε θέση τώρα, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, να υπολογίσουμε τον ρυθμό απόδοσης καθώς και το κοινωνικό όφελος για το σύστημα, ως συναρτήσεις, τις οποίες θα συμβολίζουμε με TH_e^{FR} και SW_e^{FR} , αντιστοίχως.

Πόρισμα 5.1. (Ρυθμός απόδοσης και κοινωνικό όφελος - περίπτωση FR) Στο πλήρως παρατηρήσιμο μοντέλο ρευστού με εναλλασσόμενες ενεργές και ανενεργές περιόδους και στην περίπτωση με επιτρεπόμενες υπαναχωρήσεις, όταν οι πελάτες χρησιμοποιούν τη στρατηγική ισορροπίας, ο ρυθμός απόδοσης και το κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα παίρνουν τις ακόλουθες μορφές:

Περίπτωση 1: $\lambda > \mu$.

$$TH_e^{FR} = \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta}, \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} SW_e^{FR} &= \frac{R\mu\theta}{\theta + \zeta} - C \left(x_0 + \frac{\theta}{\theta + \zeta} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha_1(x_1 - x_0)}}{\alpha_1} \right) \\ &= \frac{C\mu}{\theta} \left(1 - \frac{\theta}{\zeta} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\theta}{\theta + \zeta}\right)^{\mu/(\lambda - \mu)}}{\mu/(\lambda - \mu)} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Περίπτωση 2: $\lambda = \mu$.

$$TH_e^{FR} = \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta}, \quad (5.17)$$

$$SW_e^{FR} = \frac{C\mu}{\theta + \zeta}. \quad (5.18)$$

Περίπτωση 3: $\lambda < \mu$.

$$TH_e^{FR} = \frac{\lambda\theta}{\theta + \zeta} \cdot \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\alpha x_0}} - \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta} \cdot \frac{\alpha_1(1 - e^{-\alpha x_0})}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\alpha x_0}}, \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} SW_e^{FR} &= \frac{R\lambda\theta}{\theta + \zeta} \cdot \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\alpha x_0}} - \frac{C\alpha_1 x_0}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\alpha x_0}} \\ &\quad - \frac{C\mu\alpha_1^2(1 - e^{-\alpha x_0})}{(\theta + \zeta)(\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\alpha x_0})\alpha}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$SW_e^{FR} = RTH_e^{FR} - CE[X]. \quad (5.21)$$

Θεωρούμε 3 περιπτώσεις που αφορούν τη σχετική θέση των λ και μ .

Περίπτωση 1: $\lambda > \mu$.

Στην περίπτωση αυτή το σύστημα δεν γίνεται ποτέ κενό και ο υπηρέτης, όσο είναι ενεργός, εξυπηρετεί τους πελάτες με ρυθμό μ . Επομένως, ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι ίσος με μ επί

το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που παραμένει ενεργός, το οποίο μας δίνει την (5.15). Σχετικά με το κοινωνικό όφελος, εισάγοντας τις (5.15) και (5.11) στην (5.21), παίρνουμε την (5.16).

Περίπτωση 2: $\lambda = \mu$.

Όπως με την περίπτωση 1, το σύστημα δεν γίνεται ποτέ κενό και επομένως παίρνουμε τον ίδιο ρυθμό εξυπηρέτησης όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, που δόθηκε από την (5.17). Επιπλέον, από την (5.21), έχουμε ότι $SW_e^{FR} = RTH_e^{FR} - Cx_0$ και αντικαθιστώντας το x_0 από την (5.2), παίρνουμε την (5.18).

Περίπτωση 3: $\lambda < \mu$.

Εδώ ο υπηρέτης εξυπηρετεί τους πελάτες με ρυθμό μ όσο είναι ενεργός και όσο το επίπεδο του ρευστού είναι μεγαλύτερο από 0, ενώ τους εξυπηρετεί με ρυθμό λ όταν το επίπεδο του ρευστού είναι 0. Επομένως,

$$TH_e^{FR} = (1 - F_1(0))\mu + F_1(0)\lambda,$$

όπου $F_1(0) = \frac{\theta}{\theta + \zeta} \cdot \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\alpha x_0}}$ (χρησιμοποιώντας την (5.13)). Έπειτα από απλοποιήσεις καταλήγουμε στην (5.19). Για τον υπολογισμό του SW_e^{FR} , χρησιμοποιούμε ξανά την (5.21) και αντικαθιστούμε το TH_e^{FR} από την (5.19) και το $E[X]$ από την (5.14). \square

5.4 Στρατηγική ισορροπίας - περίπτωση FNR

Θα εξετάσουμε το σύστημα στο οποίο δεν επιτρέπονται υπαναχωρήσεις πελατών. Επομένως, ένας πελάτης που αποφάσισε αρχικά να εισέλθει στο σύστημα, θα παραμείνει σε αυτό μέχρι την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του. Όπως και στην FNR περίπτωση, θα αναζητήσουμε τη στρατηγική ισορροπίας εντός του συνόλου όλων των δυνατών στρατηγικών τύπου κατώφλιου, δηλαδή ανάμεσα από τις στρατηγικές που καθορίζονται από ένα ζεύγος από κατώφλια (x_0^{FNR}, x_1^{FNR}) . Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή, κάτω από τη στρατηγική (x_0^{FNR}, x_1^{FNR}) ένας πελάτης που κατά την άφιξη του θα βρει τον υπηρέτη στην κατάσταση i , θα εισέλθει, αν βρει το επίπεδο του ρευστού να είναι χαμηλότερο από x_i^{FNR} , ενώ διαφορετικά θα αποχωρήσει άμεσα, αν το επίπεδο του ρευστού που θα συναντήσει έχει ξεπεράσει το κατώφλι x_i^{FNR} . Αν το επίπεδο του ρευστού που θα συναντήσει είναι ακριβώς ίσο με x_i^{FNR} , τότε θα εισέλθει με κάποια πιθανότητα. Από τη στιγμή που επιλέξει να εισέλθει κάποιος πελάτης, δεν θα έχει στη συνέχεια τη δυνατότητα υπαναχώρησης.

Αρχικά, όπως και στην FR περίπτωση, θα υποθέσουμε ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική (x_0^{FNR}, x_1^{FNR}) και θα προσδιορίσουμε την αναμενόμενη ωφέλεια ενός επιλεγμένου πελάτη που κατά την άφιξη του θα βρει το σύστημα στην κατάσταση (x, i) και θα επιλέξει να εισέλθει. Αυτό θα μας επιτρέψει στη συνέχεια να προσδιορίσουμε τη στρατηγική ισορροπίας. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα Θεωρήματα 5.4 και 5.5.

Θεώρημα 5.4. (Αναμενόμενη ωφέλεια - περίπτωση FNR) Στο πλήρως παρατηρήσιμο μοντέλο ρευστού με εναλλασσόμενες ενεργές και ανενεργές περιόδους και στην περίπτωση που δεν επιτρέπονται υπαναχωρήσεις, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας (x_0^{FNR}, x_1^{FNR}) , το αναμενόμενο όφελος για έναν πελάτη που επιλέγει να εισέλθει και κατά την άφιξη του βρίσκει το επίπεδο του ρευστού στο x και τον υπηρέτη στην κατάσταση i δίνεται από την

$$S_{(x,i)}^{FNR}(x_0^{FNR}, x_1^{FNR}) = R - C \left((1-i) \frac{1}{\theta} + \frac{x}{\mu} \left(1 + \frac{\zeta}{\theta} \right) \right), \quad x \leq \max(x_0^{FNR}, x_1^{FNR}), i = 0, 1. \quad (5.22)$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πως όλοι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική (x_0^{FNR}, x_1^{FNR}) . Τότε, ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα, θα το βρει μια από τις καταστάσεις που ανήκουν στο σύνολο $S^{FNR} = \{(x, i), x \in [0, \max(x_0^{FNR}, x_1^{FNR})], i = 0, 1\}$. Θα υπολογίσουμε το αναμενόμενο

κέρδος ενός συγκεκριμένου πελάτη που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(x, i) \in S^{FNR}$ και αποφασίζει να εισέλθει, έστω $S_{(x,i)}^{FNR}(x_0^{FNR}, x_1^{FNR})$. Καθώς οι πελάτες δεν έχουν τη δυνατότητα υπαναχώρησης, ο υπολογισμός του $S_{(x,i)}^{FNR}(x_0^{FNR}, x_1^{FNR})$ γίνεται όπως στην περίπτωση του υπολογισμού του (5.78). Επομένως παίρνουμε την (5.22). \square

Προχωράμε τώρα στον υπολογισμό των στρατηγικών ισορροπίας.

Θεώρημα 5.5. (Στρατηγική ισορροπίας - περίπτωση FNR) Στο πλήρως παρατηρήσιμο μοντέλο ρευστού με εναλλασσόμενες ενεργές και ανενεργές περιόδους και στην περίπτωση που δεν επιτρέπονται υπαναχωρήσεις, η στρατηγική ισορροπίας είναι το ζεύγος καταωφλίων

$$(x_{e,0}^{FNR}, x_{e,1}^{FNR}) = \left(\frac{R\mu\theta}{C(\zeta + \theta)} - \frac{\mu}{\zeta + \theta}, \frac{R\mu\theta}{C(\zeta + \theta)} \right). \quad (5.23)$$

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα (5.5.2)

Σχετικά με τη στάσιμη κατανομή για το μοντέλο, θεωρούμε ξανά τις συναρτήσεις $F_i(x)$, $i = 0, 1$, τις οποίες ορίσαμε στην (5.7). Σε όσα ακολουθούν, θα συμβολίζουμε τη στρατηγική ισορροπίας με (x_0, x_1) .

Θεώρημα 5.6. (Στάσιμη κατανομή - περίπτωση FNR) Στο πλήρως παρατηρήσιμο μοντέλο ρευστού με εναλλασσόμενες ενεργές και ανενεργές περιόδους και στην περίπτωση που δεν επιτρέπονται υπαναχωρήσεις, όταν οι πελάτες εισέρχονται σύμφωνα με τη στρατηγική ισορροπίας, η στάσιμη κατανομή για το επίπεδο του ρευστού έχει την ακόλουθη μορφή:

Περίπτωση 1: $\lambda > \mu$.

Έπειτα από μια αρχική μεταβατική φάση, το επίπεδο του ρευστού σταθεροποιείται στο x_1 .

Περίπτωση 2: $\lambda = \mu$.

Έστω x_s η αρχική κατάσταση του ρευστού. Έπειτα από μια αρχική μεταβατική φάση, το επίπεδο του ρευστού θα σταθεροποιηθεί στο x_* το οποίο εξαρτάται από το x_s ως εξής:

$$x_* = \begin{cases} x_0 & \text{αν } x_s \in [0, x_0], \\ x_s & \text{αν } x_s \in (x_0, x_1), \\ x_1 & \text{αν } x_s \in [x_1, \infty). \end{cases}$$

Περίπτωση 3: $\lambda < \mu$.

Το επίπεδο του ρευστού μεταβάλλεται στο $[0, x_0]$. Οι συναρτήσεις κατανομής $F_0(x)$ και $F_1(x)$ δίνονται στις (5.12) και (5.13) αντίστοιχα. Επιπλέον, το αναμενόμενο επίπεδο του ρευστού δίνεται στην (5.14).

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα (5.5.2)

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα για πάρουμε τις εκφράσεις για τον ρυθμό απόδοσης αλλά και για το κοινωνικό όφελος υπό τη στρατηγική ισορροπίας ως συναρτήσεις, τις οποίες θα συμβολίσουμε με TH_e^{FNR} και SW_e^{FNR} , αντιστοίχως.

Πόρισμα 5.2. (Ρυθμός απόδοσης και κοινωνικό όφελος - περίπτωση FNR) Στο πλήρως παρατηρήσιμο μοντέλο ρευστού με εναλλασσόμενες ενεργές και ανενεργές περιόδους και στην περίπτωση που δεν επιτρέπονται υπαναχωρήσεις, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας, ο ρυθμός απόδοσης και το κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα διαμορφώνονται ως εξής:

Περίπτωση 1: $\lambda > \mu$.

$$TH_e^{FNR} = \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta}, \quad SW_e^{FNR} = 0. \quad (5.24)$$

Περίπτωση 2: $\lambda = \mu$.

$$TH_e^{FNR} = \frac{\mu\theta}{\theta + \zeta}, \quad SW_e^{FNR} = \begin{cases} \frac{C\mu}{\theta + \zeta} & \text{αν } x_s \in [0, x_0], \\ \frac{C\mu}{\theta + \zeta} - C(x_s - x_0) & \text{αν } x_s \in (x_0, x_1), \\ 0 & \text{αν } x_s \in [x_1, \infty), \end{cases} \quad (5.25)$$

όπου το x_s αντιπροσωπεύει την αρχική κατάσταση.

Περίπτωση 3: $\lambda < \mu$.

$$TH_e^{FNR} = TH_e^{FR}, \quad SW_e^{FNR} = TH_e^{FR}. \quad (5.26)$$

με τα TH_e^{FR} και SW_e^{FR} να δίνονται από τις (5.19) και (5.20), αντίστοιχα.

Απόδειξη. Δείτε το Παράρτημα (5.5.2)

5.5 Αριθμητικά πειράματα

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια την επίδραση που έχει η δυνατότητα υπαναχώρησης, χρησιμοποιώντας τα αναλυτικά αποτελέσματα που παρουσιάσαμε αλλά και ορισμένα κατάλληλα αριθμητικά πειράματα. Τα κυριότερα ευρήματα συνοψίζονται ως εξής:

1. $x_{e,0}^{FR} = x_{e,0}^{FNR} < x_{e,1}^{FNR} < x_{e,1}^{FR}$. Η πρώτη ανισότητα είναι προφανής λόγω των (5.2) και (5.23). Για τη δεύτερη, παρατηρούμε πως για $x > 1$ ισχύει ότι $x_{1,e}^{FNR} < x_{1,e}^{FR} \Leftrightarrow x \log x > x - 1$. Δηλαδή, οι πελάτες είναι πιθανότερο να εισέλθουν στο σύστημα όταν τους δίνεται η δυνατότητα υπαναχώρησης, κάτι το οποίο ήταν διαισθητικά αναμενόμενο.
2. Όταν $\lambda < \mu$, δηλαδή, όταν ο ρυθμός αφίξεων είναι χαμηλότερος από ρυθμό που πραγματοποιούνται οι εξυπηρετήσεις, η εξέλιξη του συστήματος είναι ίδια στις περιπτώσεις FR και FNR. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το επίπεδο του ρευστού δεν ξεπερνά ποτέ το κατώφλι $x_{0,e}^{FR} = x_{0,e}^{FNR}$ και επομένως, ακόμα και στην FR περίπτωση, οι πελάτες δεν υπαναχωρούν ποτέ. Επομένως, στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $TH_e^{FR} = TH_e^{FNR}$ και $SW_e^{FR} = SW_e^{FNR}$.
3. Όταν $\lambda \geq \mu$, έχουμε ότι $TH_e^{FR} = TH_e^{FNR}$. Επομένως, παρόλο που κάποιοι πελάτες μπορεί να υπαναχωρήσουν στο FR μοντέλο, το ποσοστό των πελατών που θα ολοκληρώσουν την εξυπηρέτησή τους είναι το ίδιο για τα δύο μοντέλα.
4. Επιπλέον στην περίπτωση όπου $\lambda \geq \mu$, έχουμε ότι $SW_e^{FR} \geq SW_e^{FNR} = 0$. Δηλαδή, παρόλο που το ίδιο ποσοστό πελατών ολοκληρώνει την εξυπηρέτησή του στα δύο μοντέλα, πάντα το κοινωνικό όφελος είναι μεγαλύτερο στο σύστημα στο οποίο επιτρέπονται οι υπαναχωρήσεις. Επομένως, με βάση το κριτήριο του κοινωνικού οφέλους, το FR μοντέλο είναι προτιμότερο.
5. Επίσης παρατηρούμε πως γενικά ο ρυθμός απόδοσης, TH_e , είναι πάντα ανεξάρτητος από τις οικονομικές παραμέτρους του μοντέλου ενώ το κοινωνικό όφελος, SW_e , όταν $\lambda \geq \mu$, είναι γραμμική συνάρτηση ως προς το C και δεν εξαρτάται από το R .

5.5.1 Επίδραση της ταχύτητας εναλλαγής κατάστασης του υπηρέτη

Στην τρέχουσα υπό-ενότητα μελετάμε την επίδραση της ταχύτητας εναλλαγής κατάστασης (ενεργός/ανενεργός) του υπηρέτη όταν το ποσοστό του χρόνου που ο υπηρέτης είναι ενεργός (αντίστοιχα ανενεργός) παραμένει σταθερό. Προς την κατεύθυνση αυτή θέτουμε $\delta = \frac{1}{\theta}$ και $\gamma = \frac{\theta}{\theta + \zeta}$, κρατάμε το γ σταθερό και αφήνουμε το δ να μεταβάλλεται. Θα εξετάσουμε την επίδραση του δ στη στρατηγική ισορροπίας αλλά και στα μέτρα λειτουργικότητας (ρυθμό απόδοσης και κοινωνικό όφελος υπό τη στρατηγική ισορροπίας).

Αρχικά, γράφοντας τα κατώφλια ως συναρτήσεις των γ και δ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} x_{e,0}^{FR}(\delta) = x_{e,1}^{FR}(\delta) &= \mu\gamma\left(\frac{R}{C} - \delta\right), \\ x_{e,1}^{FR}(\delta) &= \mu\gamma\left[\frac{R}{C} + \delta\left(\frac{\log(\frac{1}{\gamma})}{1-\gamma} - 1\right)\right], \\ x_{e,1}^{FNR}(\delta) &= \mu\gamma\frac{R}{C}. \end{aligned}$$

Έτσι, προκύπτει πως το $x_{e,0}^{FR}$ φθίνει γραμμικά ως προς δ και γίνεται ίσο με 0 όταν $\delta \geq \frac{R}{C}$. Από την άλλη, το $x_{e,1}^{FR}$ αυξάνει ως προς το δ . Τέλος, το $x_{e,1}^{FNR}$ είναι ανεξάρτητο του δ . Επομένως, καθώς η ταχύτητα εναλλαγής φθίνει (δηλ. το $\delta = \frac{1}{\theta}$ αυξάνει), στην FR περίπτωση, οι πελάτες έχουν την τάση να εισέρχονται ολοένα και περισσότερο όσο βρίσκουν τον υπηρέτη ενεργό αλλά αποθαρρύνονται όταν είναι ανενεργός. Επίσης, το κατώφλι υπαναχώρησης $x_{e,0}^{FR}$, φθίνει. Στην FNR περίπτωση, το κατώφλι $x_{e,1}^{FNR}$ είναι ανεξάρτητο του δ και επομένως μια μείωση της ταχύτητας εναλλαγής θα επηρεάσει την πολιτική εισόδου για τους πελάτες όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός. Ωστόσο, οι πελάτες αποθαρρύνονται να εισέλθουν όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός καθώς θα αναμένουν να παραμείνουν στην ανενεργή κατάσταση για μεγαλύτερη χρονική διάρκεια.

Σχετικά με την επίδραση που έχει η ταχύτητα εναλλαγής κατάστασης του υπηρέτη στο ρυθμό εξυπηρέτησης και στο κοινωνικό όφελος, έχουμε ότι, για $\lambda > \mu$,

$$\begin{aligned} TH_e^{FNR}(\delta) &= TH_e^{FR}(\delta) = \mu\gamma, \\ SW_e^{FNR}(\delta) &= 0, \\ SW_e^{FR}(\delta) &= \delta\left[C\mu\left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{1-\gamma^b}{b}\right)\right], \end{aligned}$$

όπου $b = \frac{\mu}{\lambda - \mu}$. Έτσι, όταν $\lambda > \mu$, η ταχύτητα εναλλαγής δεν επηρεάζει τον ρυθμό εξυπηρέτησης (και στις δύο περιπτώσεις FR και FNR) αλλά και το κοινωνικό όφελος στην FNR περίπτωση. Ωστόσο, καθώς η ταχύτητα εναλλαγής φθίνει, το κοινωνικό όφελος αυξάνει γραμμικά στην FR περίπτωση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως οι πελάτες που βρίσκουν ενεργό υπηρέτη και επιλέγουν να εισέλθουν θα εισπράξουν την αμοιβή εξυπηρέτησης στην επόμενη ενεργή περίοδο με μεγαλύτερη πιθανότητα.

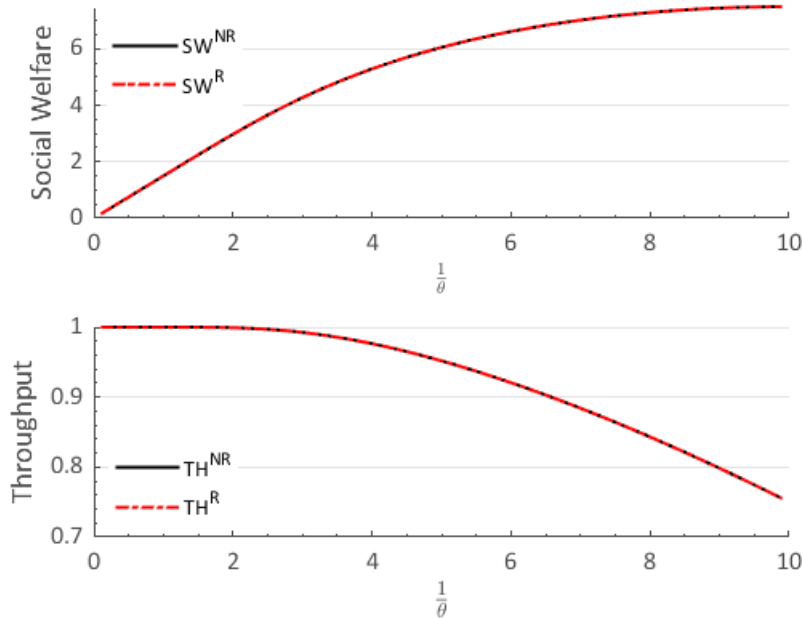
Όταν $\lambda = \mu$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} TH_e^{FNR}(\delta) &= TH_e^{FR}(\delta) = \mu\gamma, \\ SW_e^{FNR}(\delta) &= \begin{cases} \mu\gamma C\delta & \text{αν } x_s \in [0, x_0], \\ \mu\gamma R - Cx_s & \text{αν } x_s \in (x_0, x_1), \\ 0 & \text{αν } x_s \in [x_1, \infty), \end{cases} \\ SW_e^{FR}(\delta) &= \mu\gamma C\delta. \end{aligned}$$

Προκύπτει επομένως πως ο ρυθμός εξυπηρέτησης μένει ανεπηρέαστος από την ταχύτητα εναλλαγής του υπηρέτη, ενώ το κοινωνικό όφελος αυξάνει γραμμικά καθώς η ταχύτητα εναλλαγής φθίνει

τόσο στην FR περίπτωση αλλά όσο και στην FNR για $x_s \in [0, x_0]$. Ωστόσο, στην τελευταία περίπτωση, για $x_s > x_0$, το κοινωνικό όφελος είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας εναλλαγής.

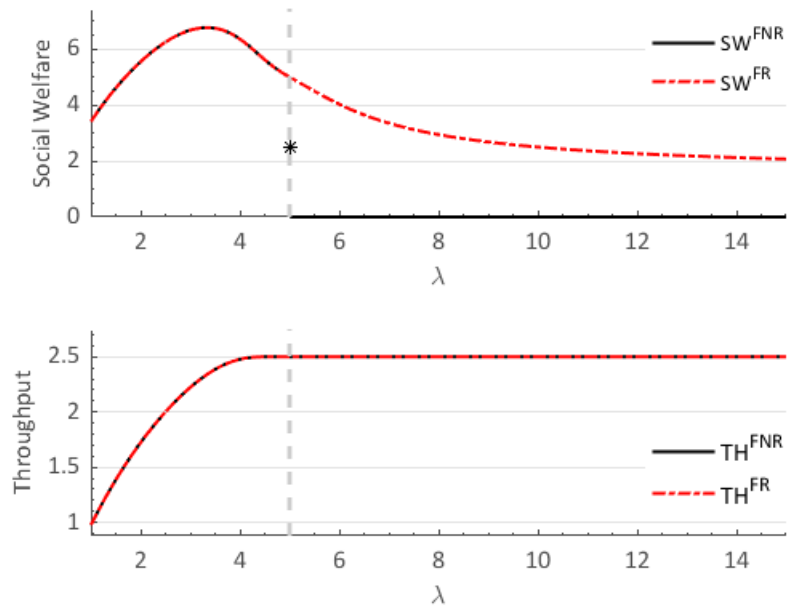
Η επίδραση της ταχύτητας εναλλαγής κατάστασης του υπηρέτη στο ρυθμό εξυπηρέτησης και στο κοινωνικό όφελος υπό τη στρατηγική ισορροπίας, όταν $\lambda < \mu$ έχει εξερευνηθεί και μέσω ενός αριθμητικού πειράματος στο οποίο θέσαμε τις τιμές των παραμέτρων να είναι $(\mu, \zeta, \theta, R, C) = (5, 0.5, 0.5, 5, 1)$ και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.3. Παρατηρούμε πως το κοινωνικό όφελος είναι αύξουσα και κοίλη συνάρτηση ενώ ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι φθίνουσα και κοίλη. Επομένως, καθώς η ταχύτητα εναλλαγής φθίνει (δηλ. το δ αυξάνει), το ποσοστό των πελατών που ολοκληρώνουν την εξυπηρέτησή τους φθίνει αλλά το κοινωνικό όφελος αυξάνει.



Σχήμα 5.3: Ρυθμός απόδοσης και κοινωνικό όφελος ως συναρτήσεις του $\delta = \frac{1}{\theta}$ για $(\lambda, \mu, R, C) = (1.5, 2, 10, 1)$.

5.5.2 Επίδραση του ρυθμού αφίξεων των πελατών

Στην υπό-ενότητα αυτή θα εξερευνησουμε την επίδραση που έχει ο ρυθμός αφίξεων των πελατών στο ρυθμό απόδοσης και στο κοινωνικό όφελος που παράγεται από το σύστημα όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας. Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις FR και FNR μέσω ενός αριθμητικού πειράματος στο οποίο έχουμε θέσει τις τιμές των παραμέτρων σύμφωνα με το ακόλουθο διάνυσμα: $(\mu, \zeta, \theta, R, C) = (5, 0.5, 0.5, 5, 1)$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε τα αποτελέσματα στο Σχήμα 5.4. Ειδικότερα, σε πλήρη συνέπεια με τα θεωρητικά αποτελέσματα, ο ρυθμός απόδοσης υπό τη στρατηγική ισορροπίας είναι ίδιος στις δύο περιπτώσεις FR και FNR. Επιπλέον, το κοινωνικό όφελος είναι επίσης το ίδιο στα μοντέλα FR και FNR όταν $\lambda < \mu$ ενώ είναι ίσο με 0 στο FNR για $\lambda > \mu$ και δεν είναι συνεχής συνάρτηση ως προς λ στην FR περίπτωση. Καθώς το λ αυξάνει, το κοινωνικό όφελος αρχικά αυξάνει και στη συνέχεια φθίνει.



Σχήμα 5.4: Ρυθμός απόδοσης και κοινωνικό όφελος ως συναρτήσεις του λ για $(\mu, \zeta, \theta, R, C) = (5, 0.5, 0.5, 5, 1)$.

Επίλογος Μέρους II - Συζήτηση και Επεκτάσεις

Το πρόβλημα που μελετήθηκε στο μέρος αυτό ξεκίνησε με αφορμή μια πρόταση διερεύνησης που παρουσιάζεται στο κλασικό βιβλίο του Hassin [63] και αφορούσε τη μελέτη ενός συστήματος εξυπηρέτησης με ενεργό/ανενεργό υπηρέτη και δυνατότητα υπαναχώρησης για τους πελάτες. Στα συστήματα αυτά, ένας ορθολογικός πελάτης που έχει μόλις αποφασίσει να εισέλθει όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός θα έχει κίνητρο να υπαναχωρήσει μόνο σε στιγμές που ο υπηρέτης απενεργοποιείται. Δείξαμε πως η δυνατότητα υπαναχώρησης επηρεάζει σημαντικά τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών και μπορεί να έχει και σημαντική επίδραση στο κοινωνικό όφελος που παράγεται από το σύστημα.

Ο κρίσιμότερος παράγοντας για τον καθορισμό της αξίας της δυνατότητας υπαναχώρησης είναι η ευστάθεια του αρχικού συστήματος. Συνδυάζοντας τα αναλυτικά αποτελέσματα με ένα πλήθος αριθμητικών πειραμάτων συμπεραίνουμε πως όταν το αρχικό σύστημα είναι ευσταθές η δυνατότητα υπαναχώρησης αυξάνει το κοινωνικό όφελος. Πιο συγκεκριμένα, όταν η αξία εξυπηρέτησης αυξάνει, η τιμή υπαναχώρησης ($V\alpha R$) συγκλίνει στο 1. Από την άλλη, όταν το αρχικό σύστημα δεν είναι ευσταθές, η τιμή υπαναχώρησης ταλαντεύεται γύρω από 1, καθώς η αξία εξυπηρέτησης μεταβάλλεται. Ειδικότερα, η αξία υπαναχώρησης σχετικά με το κοινωνικό όφελος πιάνει αρκετά μικρότερες και αρκετά μεγαλύτερες τιμές από το 1, ανάλογα με τον ρυθμό εξυπηρέτησης.

Επομένως, το βασικό μήνυμα είναι πως για τα μη-ευσταθή συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπτόμενη ροή εξυπηρέτησης, η δυνατότητα υπαναχώρησης για τους πελάτες μπορεί να έχει μια σημαντικά θετική ή σημαντικά αρνητική επίδραση για την κοινωνική ωφέλεια του συστήματος. Με άλλα λόγια, ως στρατηγική απόφαση, η δυνατότητα άμεσης αποχώρησης μπορεί να μην είναι αρκετά αποτελεσματική ως προς τη βελτίωση της απόδοσης τέτοιων συστημάτων και ο διαχειριστής θα πρέπει να αναλογιστεί το πότε θα δώσει ή όχι τη δυνατότητα υπαναχώρησης στους πελάτες.

Η έρευνα σχετικά με την επίδραση που μπορεί να έχει η δυνατότητα υπαναχώρησης σε συστήματα με στρατηγικούς πελάτες θα πρέπει να συνεχιστεί ώστε να αποκτήσουμε καλύτερη κατανόηση για τα συστήματα αυτά. μια ενδιαφέρουσα προοπτική ενδεχόμενης μελλοντικής έρευνας θα ήταν η μελέτη της αξίας υπαναχώρησης για διάφορα επίπεδα πληροφόρησης (για παράδειγμα, τα διάφορα επίπεδα πληροφόρησης που περιγράφονται στο Economou [37]).

Μια ακόμα ενδιαφέρουσα ερευνητική επέκταση θα μπορούσε να αφορά την πολιτική τιμολόγησης για συστήματα με δυνατότητα υπαναχώρησης από την οπτική γωνία ενός διαχειριστή που αποσκοπεί στη μεγιστοποίηση του κέρδους μονοπωλίου ή ενός κοινωνικού σχεδιαστή.

Παράρτημα

Τεχνικές αποδείξεις για το Κεφάλαιο 4:

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2 Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$(\lambda + \zeta)p_{(0,1)}^R = \theta p_{(0,0)}^R + \mu p_{(1,1)}^R, \quad (5.27)$$

$$(\lambda + \mu + \zeta)p_{(n,1)}^R = \lambda p_{(n-1,1)}^R + \theta p_{(n,0)}^R + \mu p_{(n+1,1)}^R, \quad 1 \leq n \leq n_0 - 1, \quad (5.28)$$

$$\mu p_{(n_0,1)}^R + \zeta \sum_{n=n_0}^{n_1} p_{(n,1)}^R = \lambda p_{(n_0-1,1)}^R + \theta p_{(n_0,0)}^R, \quad (5.29)$$

$$(\lambda + \theta)p_{(0,0)}^R = \zeta p_{(0,1)}^R, \quad (5.30)$$

$$(\lambda + \theta)p_{(n,0)}^R = \lambda p_{(n-1,0)}^R + \zeta p_{(n,1)}^R, \quad 1 \leq n \leq n_0 - 1, \quad (5.31)$$

$$\theta p_{(n_0,0)}^R = \lambda p_{(n_0-1,0)}^R + \zeta \sum_{n=n_0}^{n_1} p_{(n,1)}^R, \quad (5.32)$$

όπου η (5.29) είναι η γενικευμένη εξίσωση ισορροπίας για σύνολα $\{(n,1) : n_0 \leq n \leq n_1\}$. Επιπλέον

$$(\lambda + \mu + \zeta)p_{(n,1)}^R = \lambda p_{(n-1,1)}^R + \mu p_{(n+1,1)}^R, \quad n_0 + 1 \leq n \leq n_1 - 1, \quad (5.33)$$

$$(\mu + \zeta)p_{(n_1,1)}^R = \lambda p_{(n_1-1,1)}^R. \quad (5.34)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5.28) με z^n , και προσθέτοντας το αποτέλεσμα για όλα τα $n \in \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$, και τέλος, προσθέτοντας την εξίσωση (5.27), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu + \zeta) \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{(n,1)}^R z^n - \mu p_{(0,1)}^R &= \lambda \sum_{n=1}^{n_0-1} p_{(n-1,1)}^R z^n + \theta \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{(n,0)}^R z^n + \\ &\quad \mu \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{(n+1,1)}^R z^n, \end{aligned}$$

η οποία έπειτα από πράξεις θα γίνει

$$\begin{aligned} [(\lambda + \mu + \zeta)z - \lambda z^2 - \mu]P_1^R(z) - \theta z P_0^R(z) &= -\lambda z^{n_0+1} p_{(n_0-1,1)}^R + \mu p_{(0,1)}^R z - \mu p_{(0,1)}^R \\ &\quad + \mu p_{(n_0,1)}^R z^{n_0}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Με όμοιο τρόπο, πολλαπλασιάζοντας την (5.31) με z^n , προσθέτοντας το αποτέλεσμα για όλα τα $n \in \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$, και στη συνέχεια προσθέτοντας την (5.30), παίρνουμε ότι

$$-\zeta P_1^R(z) + (\lambda + \theta - \lambda z)P_0^R(z) = -\lambda z^{n_0} p_{(n_0-1,0)}^R. \quad (5.36)$$

Τα συστήματα των (5.35) και (5.36) μπορούν να γραφούν ως

$$\begin{bmatrix} \lambda + \theta - \lambda z & -\zeta \\ -\theta z & (\lambda + \mu + \zeta)z - \lambda z^2 - \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0^R(z) \\ P_1^R(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0^R(z) \\ N_1^R(z) \end{bmatrix},$$

όπου

$$\begin{aligned} N_0^R(z) &= -\lambda z^{n_0} p_{(n_0-1,0)}^R, \\ N_1^R(z) &= -\lambda z^{n_0+1} p_{(n_0-1,1)}^R + \mu p_{(0,1)}^R z - \mu p_{(0,1)}^R + \mu p_{(n_0,1)}^R z^{n_0}. \end{aligned}$$

Λύνουμε τα συστήματα αυτά χρησιμοποιώντας τον κανόνα Cramer και παίρνουμε

$$P_0^R(z) = \frac{[(\lambda + \mu + \zeta)z - \lambda z^2 - \mu] N_0^R(z) + \zeta N_1^R(z)}{\lambda^2(z-1)(z-\rho_{a+})(z-\rho_{a-})}, \quad (5.37)$$

$$P_1^R(z) = \frac{(\lambda + \theta - \lambda z)N_1^R(z) + \theta z N_0^R(z)}{\lambda^2(z-1)(z-\rho_{a+})(z-\rho_{a-})}, \quad (5.38)$$

όπου τα ρ_{a+}, ρ_{a-} δίνονται στην (4.12). Ο αριθμητής στην $P_0^R(z)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} & -[(\lambda + \mu + \zeta)z - \lambda z^2 - \mu]\lambda z^{n_0} p_{(n_0-1,0)}^R - \zeta \lambda z^{n_0+1} p_{(n_0-1,1)}^R + \zeta \mu z p_{(0,1)}^R - \zeta \mu p_{(0,1)}^R \\ & + \zeta \mu z^{n_0} p_{(n_0,1)}^R = \\ & -\zeta \mu (1-z) p_{(0,1)}^R - [(\lambda + \mu + \zeta)z - \lambda z^2 - \mu]\lambda z^{n_0} p_{(n_0-1,0)}^R - \zeta \lambda z^{n_0+1} p_{(n_0-1,1)}^R \\ & + \zeta \mu z^{n_0} p_{(n_0,1)}^R. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Επειδή οι ποσότητες: 1, ρ_{a+} , και ρ_{a-} είναι και ρίζες του παρονομαστή στην $P_0^R(z)$ της σχέσης (5.37), ο οποίος είναι πολυώνυμο (και άρα πεπερασμένο σε όλο το μιγαδικό επίπεδο), θα πρέπει επίσης να αποτελούν ρίζες του αριθμητή στην $P_0^R(z)$ που δίνεται στη σχέση (5.39). Επομένως, θέτοντας $z = 1$ στη (5.39) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} & -\zeta \lambda p_{(n_0-1,0)}^R - \zeta \lambda p_{(n_0-1,1)}^R + \zeta \mu p_{(n_0,1)}^R = 0 \Rightarrow \\ & p_{(n_0,1)}^R = \frac{\lambda}{\mu} (p_{(n_0-1,0)}^R + p_{(n_0-1,1)}^R). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Έτσι η (5.39) χρησιμοποιώντας την (5.40) γράφεται ως

$$\zeta \mu (z-1) p_{(0,1)}^R + (\lambda z - \mu - \zeta)(z-1) \lambda z^{n_0} p_{(n_0-1,0)}^R - \zeta \lambda z^{n_0} (z-1) p_{(n_0-1,1)}^R. \quad (5.41)$$

Αντικαθιστώντας το (5.41) στον αριθμητή της (5.37) και στη συνέχεια, απλοποιώντας, θα έχουμε ότι

$$P_0^R(z) = \frac{\zeta \mu p_{(0,1)}^R + (\lambda z - \mu - \zeta) \lambda z^{n_0} p_{(n_0-1,0)}^R - \zeta \lambda z^{n_0} p_{(n_0-1,1)}^R}{\lambda^2(z-\rho_{a+})(z-\rho_{a-})}. \quad (5.42)$$

Έτσι, το $P_0^R(z)$ εκφράζεται και με όρους των $p_{(0,1)}^R$, $p_{(n_0-1,0)}^R$ και $p_{(n_0-1,1)}^R$. Για να έχουμε τις $p_{(n_0-1,0)}^R$ και $p_{(n_0-1,1)}^R$ ως συναρτήσεις της $p_{(0,1)}^R$, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο αριθμητής της (5.42) έχει ρίζες τις ρ_{a+} και ρ_{a-} . Θα καταλήξουμε στα ακόλουθα συστήματα.

$$\begin{aligned} & -\lambda(\lambda \rho_{a+} - \mu - \zeta) \rho_{a+}^{n_0} p_{(n_0-1,0)}^R + \lambda \zeta \rho_{a+}^{n_0} p_{(n_0-1,1)}^R = \zeta \mu p_{(0,1)}^R, \\ & -\lambda(\lambda \rho_{a-} - \mu - \zeta) \rho_{a-}^{n_0} p_{(n_0-1,0)}^R + \lambda \zeta \rho_{a-}^{n_0} p_{(n_0-1,1)}^R = \zeta \mu p_{(0,1)}^R. \end{aligned}$$

Λύνοντας τα παραπάνω έχουμε

$$p_{(n_0-1,0)}^R = \frac{\zeta\mu}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{\mu(\theta+\lambda)} \right)^{n_0} \frac{\rho_{a-}^{n_0} - \rho_{a+}^{n_0}}{\rho_{a-} - \rho_{a+}} p_{(0,1)}^R, \quad (5.43)$$

$$p_{(n_0-1,1)}^R = \frac{\zeta\mu}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{\mu(\theta+\lambda)} \right)^{n_0} \frac{\left(\frac{\lambda}{\zeta} \rho_{a-} - \frac{\mu}{\zeta} - 1 \right) \rho_{a-}^{n_0} - \left(\frac{\lambda}{\zeta} \rho_{a+} - \frac{\mu}{\zeta} - 1 \right) \rho_{a+}^{n_0}}{\rho_{a-} - \rho_{a+}} p_{(0,1)}^R. \quad (5.44)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις (5.42), (5.43) και (5.44), το $P_0^R(z)$ γράφεται τελικά με όρους της $p_{(0,1)}^R$. Πράγματι, θέτουμε

$$x_{(n,i)} = \frac{p_{(n,i)}^R}{p_{(0,1)}^R}, \quad (n,i) \in \mathcal{S}^R. \quad (5.45)$$

Τότε, η (5.42) θα δώσει την (4.21), με τα $x_{(n_0-1,0)}$, $x_{(n_0-1,1)}$ να δίνονται στις (4.17), (4.18), αντιστοίχως.

Για να εκφράσουμε τις πιθανότητες $p_{(n,1)}^R$, για $n = n_0, n_0 + 1, \dots, n_1$, ως προς την $p_{(0,1)}^R$, χρησιμοποιούμε την (5.33). Η εξίσωση (5.33) είναι μια ομογενής εξίσωση διαφοράς γραμμική δεύτερης τάξης. Αυτή έχει χαρακτηριστική εξίσωση την

$$\mu x^2 - (\lambda + \mu + \zeta)x + \lambda = 0.$$

Οι λύσεις της παραπάνω είναι $\rho_{b\pm}$ που δίνονται στην (4.13). Επομένως, η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (5.33) θα είναι

$$p_{(n,1)}^R = c_{b+} \rho_{b+}^n + c_{b-} \rho_{b-}^n, \quad n_0 \leq n \leq n_1. \quad (5.46)$$

Για να καθορίσουμε τις σταθερές c_{b-} και c_{b+} , αντικαθιστούμε την (5.46) στις (5.40) και (5.34). Ειδικότερα παίρνουμε

$$\mu(c_{b+} \rho_{b+}^{n_0} + c_{b-} \rho_{b-}^{n_0}) p_{(0,1)}^R = \lambda p_{(n_0-1,1)}^R + \lambda p_{(n_0-1,0)}^R \quad (5.47)$$

$$(\mu + \zeta)(c_{b+} \rho_{b+}^{n_1} + c_{b-} \rho_{b-}^{n_1}) p_{(0,1)}^R = \lambda(c_{b+} \rho_{b+}^{n_1-1} + c_{b-} \rho_{b-}^{n_1-1}) p_{(0,1)}^R \quad (5.48)$$

Η εξίσωση (5.48) θα δώσει

$$c_{b+} = c_{b-} \frac{\rho_{b-}^{n_1-1} [\lambda - (\mu + \zeta) \rho_{b-}]}{\rho_{b+}^{n_1-1} [(\mu + \zeta) \rho_{b+} - \lambda]}. \quad (5.49)$$

Αντικαθιστώντας το (5.49) στην (5.47) και χρησιμοποιώντας την (5.45), θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu c_{b-} \rho_{b+}^{n_0} \frac{\rho_{b-}^{n_1-1} [\lambda - (\mu + \zeta) \rho_{b-}]}{\rho_{b+}^{n_1-1} [(\mu + \zeta) \rho_{b+} - \lambda]} + \mu c_{b-} \rho_{b-}^{n_0} &= \lambda x_{(n_0-1,1)} + \lambda x_{(n_0-1,0)} \Rightarrow \\ c_{b-} &= c_- (x_{(n_0-1,1)} + x_{(n_0-1,0)}), \end{aligned} \quad (5.50)$$

όπου το c_- δίνεται στην (4.15).

Τέλος, εισάγοντας την (5.50) στην (5.49), παίρνουμε

$$c_{b+} = c_+ (x_{(n_0-1,1)} + x_{(n_0-1,0)}), \quad (5.51)$$

όπου το c_+ δίνεται στην (4.14). Τότε, η εξίσωση (5.46), χρησιμοποιώντας τις (5.50) και (5.51), θα δώσει την (4.24), όπου τα c_- , c_+ , ρ_{b+} , και ρ_{b-} δίνονται στις (4.15), (4.14) και (4.13). Επίσης,

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{n_1} p_{(n,1)}^R &= \left[c_+ \rho_{b_+}^{n_0} \frac{1 - \rho_{b_+}^{n_1 - n_0 + 1}}{1 - \rho_{b_+}} + c_- \rho_{b_-}^{n_0} \frac{1 - \rho_{b_-}^{n_1 - n_0 + 1}}{1 - \rho_{b_-}} \right] (x_{(n_0-1,1)} + x_{(n_0-1,0)}) p_{(0,1)}^R \Rightarrow \\ \sum_{n=n_0}^{n_1} p_{(n,1)}^R &= d(x_{(n_0-1,1)} + x_{(n_0-1,0)}) p_{(0,1)}^R, \end{aligned} \quad (5.52)$$

όπου το d δίνεται στην (4.16). Λύνοντας την (5.32) ως προς $p_{(n_0,0)}^R$ χρησιμοποιώντας τις (5.45) και (5.52) παίρνουμε την (4.23).

Για να πάρουμε την $p_{(0,1)}^R$ χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{n=0}^{n_0} p_{(n,0)}^R + \sum_{n=0}^{n_1} p_{(n,1)}^R = 1. \quad (5.53)$$

Επίσης, από τις γενικευμένες εξισώσεις ισορροπίας για το σύνολο $\{(n,1) : 0 \leq n \leq n_1\}$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \theta \sum_{n=0}^{n_0} p_{(n,0)}^R &= \zeta \sum_{n=0}^{n_1} p_{(n,1)}^R \stackrel{(5.53)}{\Rightarrow} \\ \sum_{n=0}^{n_0} p_{(n,0)}^R &= \frac{\zeta}{\zeta + \theta} \Rightarrow \\ P_0^R(1) + p_{(n_0,0)}^R &= \frac{\zeta}{\zeta + \theta}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις (4.21), (4.23), και λύνοντας ως προς $p_{(0,1)}^R$ θα έχουμε την (4.20).

Τέλος, εξισώνοντας τις εντός και εκτός ροές για το $A = \{(t,i) : i = 0, 1 \text{ και } t \leq n\}$ θα έχουμε πως

$$\lambda p_{(n,1)}^R + \lambda p_{(n,0)}^R = \mu p_{(n+1,1)}^R, \quad n = 0, 1, \dots, n_0 - 1. \quad (5.54)$$

Πολλαπλασιάζοντας με z^n και προσθέτοντας για όλα τα $n = 0, 1, \dots, n_0 - 1$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lambda P_1^R(z) + \lambda P_0^R(z) &= \frac{\mu}{z} \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{(n+1,1)}^R z^{n+1} \Rightarrow \\ \lambda z P_1^R(z) + \lambda z P_0^R(z) &= \mu \sum_{n=1}^{n_0} p_{(n,1)}^R z^n \Rightarrow \\ \lambda z P_1^R(z) + \lambda z P_0^R(z) &= \mu (P_1^R(z) - p_{(0,1)}^R + p_{(n_0,1)}^R z^{n_0}). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Λύνοντας ως προς $P_1^R(z)$ παίρνουμε την (4.22), στην οποία το $x_{(n_0,1)}$ δίνεται από την (4.19). \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3 Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$(\lambda + \zeta) p_{(0,1)}^{NR} = \theta p_{(0,0)}^{NR} + \mu p_{(1,1)}^{NR}, \quad (5.56)$$

$$(\lambda + \mu + \zeta) p_{(n,1)}^{NR} = \lambda p_{(n-1,1)}^{NR} + \theta p_{(n,0)}^{NR} + \mu p_{(n+1,1)}^{NR}, \quad 1 \leq n \leq n_0 - 1, \quad (5.57)$$

$$(\mu + \zeta) p_{(n_0,1)}^{NR} = \lambda p_{(n_0-1,1)}^{NR} + \theta p_{(n_0,0)}^{NR}, \quad (5.58)$$

$$\mu p_{(n,1)}^{NR} = \lambda p_{(n-1,1)}^{NR}, \quad n_0 + 1 \leq n \leq n_1, \quad (5.59)$$

$$(\lambda + \theta) p_{(0,0)}^{NR} = \zeta p_{(0,1)}^{NR}, \quad (5.60)$$

$$(\lambda + \theta) p_{(n,0)}^{NR} = \lambda p_{(n-1,0)}^{NR} + \zeta p_{(n,1)}^{NR}, \quad 1 \leq n \leq n_0 - 1, \quad (5.61)$$

$$\theta p_{(n_0,0)}^{NR} = \lambda p_{(n_0-1,0)}^{NR} + \zeta p_{(n_0,1)}^{NR}, \quad (5.62)$$

$$\theta p_{(n,0)}^{NR} = \zeta p_{(n,1)}^{NR}, \quad n_0 + 1 \leq n \leq n_1. \quad (5.63)$$

Από τις (5.59) και (5.63), παίρνουμε ότι

$$p_{(n,1)}^{NR} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-n_0} p_{(n_0,1)}^{NR}, \quad n_0 + 1 \leq n \leq n_1, \quad (5.64)$$

$$p_{(n,0)}^{NR} = \frac{\zeta}{\theta} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-n_0} p_{(n_0,1)}^{NR}, \quad n_0 + 1 \leq n \leq n_1. \quad (5.65)$$

Αφού οι εξισώσεις (5.56), (5.57), (5.60) και (5.61) είναι ακριβώς ίδιες με εκείνες ((5.27), (5.28), (5.30) και (5.31)) που έχουμε για την περίπτωση R , τα αρχικά βήματα της ανάλυσης στην περίπτωση NR θα είναι τα ίδια και επομένως παίρνουμε ότι η $P_0^{NR}(z)$ θα δίνεται από την (4.31), όπου

$$x_{(n,i)} = \frac{p_{(n,i)}^{NR}}{p_{(0,1)}^{NR}}, \quad (n, i) \in \mathcal{S}^{NR}, \quad (5.66)$$

και τα $x_{(n_0-1,0)}$, $x_{(n_0-1,1)}$, ρ_{a+} και ρ_{a-} δίνονται από τις (4.17), (4.18) και (4.12) αντίστοιχα. Επίσης, η (5.40) ισχύει για την περίπτωση NR και άρα

$$x_{(n_0,1)} = \rho x_{(n_0-1,0)} + \rho x_{(n_0-1,1)}. \quad (5.67)$$

Για τις $p_{(0,1)}^{NR}$ θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση κανονικοποίησης:

$$\sum_{n=0}^{n_1} p_{(n,0)}^{NR} + \sum_{n=0}^{n_1} p_{(n,1)}^{NR} = 1. \quad (5.68)$$

Επίσης, οι γενικευμένες εξισώσεις ισορροπίας για το σύνολο $\{(n, 0) : 0 \leq n \leq n_1\}$ θα δώσουν ότι

$$\begin{aligned} \theta \sum_{n=0}^{n_1} p_{(n,0)}^{NR} &= \zeta \sum_{n=0}^{n_1} p_{(n,1)}^{NR} \stackrel{(5.68)}{\Rightarrow} \\ \sum_{n=0}^{n_1} p_{(n,0)}^{NR} &= \frac{\zeta}{\zeta + \theta} \Rightarrow \\ P_0^{NR}(1) + \sum_{n=n_0}^{n_1} p_{(n,0)}^{NR} &= \frac{\zeta}{\zeta + \theta} \stackrel{(5.62)(5.65)}{\Rightarrow} \\ P_0^{NR}(1) + \frac{\lambda}{\theta} p_{(n_0-1,0)}^{NR} + \sum_{n=n_0}^{n_1} \frac{\zeta}{\theta} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-n_0} p_{(n_0,1)}^{NR} &= \frac{\zeta}{\theta + \zeta}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.31), (5.66), (5.67), και λύνοντας ως προς $p_{(0,1)}^{NR}$ παίρνουμε την (4.30).

Αφού έχουμε υπολογίσει την $p_{(0,1)}^{NR}$, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μερική γεννήτρια συνάρτηση $P_1^{NR}(z)$ χρησιμοποιώντας τα ίδια βήματα που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση R . Τότε παίρνουμε την (4.32). Τέλος, από την (5.62), (5.64) και (5.65), παίρνουμε αντιστοίχως τις (4.33), (4.34) και (4.35). \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.4 Η αριστερή ανισότητα στην (4.39) είναι προφανής και επομένως εστιάζουμε στη δεύτερη. Αρκεί να δείξουμε ότι $x_{e,1}^{NR} \leq x_{e,1}^R$. Παρατηρούμε ότι

$$x_{e,1}^{NR} \leq x_{e,1}^R \Leftrightarrow \frac{\mu}{\zeta + \theta} \leq \frac{\log \frac{C/\zeta}{R - n_{e,0}^R \frac{C(\theta + \zeta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\zeta}}}{\log \frac{\mu}{\mu + \zeta}}. \quad (5.69)$$

Από την $n_{e,0}^R = \lfloor x_{e,0}^R \rfloor$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 x_{e,0}^R - 1 < n_{e,0}^R \leq x_{e,0}^R &\Leftrightarrow R - \frac{C(\theta + \zeta)}{\mu\theta} x_{e,0}^R \leq R - \frac{C(\theta + \zeta)}{\mu\theta} n_{e,0}^R < R - \frac{C(\theta + \zeta)}{\mu\theta} (x_{e,0}^R - 1) \\
 &\Leftrightarrow \frac{C}{\theta} \leq R - \frac{C(\theta + \zeta)}{\mu\theta} n_{e,0}^R < \frac{C(\theta + \zeta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta} \\
 &\Leftrightarrow \frac{C(\theta + \zeta)}{\theta\zeta} \leq R - \frac{C(\theta + \zeta)}{\mu\theta} n_{e,0}^R + \frac{C}{\zeta} < \frac{C(\theta + \zeta)(\mu + \zeta)}{\mu\theta\zeta} \\
 &\Leftrightarrow \frac{C}{\zeta} \frac{\mu\theta\zeta}{C(\theta + \zeta)(\mu + \zeta)} < \frac{\frac{C}{\zeta}}{R - \frac{C(\theta + \zeta)}{\mu\theta} n_{e,0}^R + \frac{C}{\zeta}} \leq \frac{C}{\zeta} \frac{\theta\zeta}{C(\theta + \zeta)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\log \frac{\theta}{\theta + \zeta}}{\log \frac{\mu}{\mu + \zeta}} \leq \frac{\log \frac{C/\zeta}{R - n_{e,0}^R \frac{C(\theta + \zeta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\zeta}}}{\log \frac{\mu}{\mu + \zeta}} < \frac{\log \frac{\mu\theta}{(\theta + \zeta)(\mu + \zeta)}}{\log \frac{\mu}{\mu + \zeta}}. \tag{5.70}
 \end{aligned}$$

Για το δεξί μέλος στην (5.69), αρκεί να δείξουμε ότι το $\frac{\mu}{\mu + \zeta}$ είναι μικρότερο από το πιο αριστερό μέλος στην (5.70). Πράγματι, έχουμε αρχικά ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu}{\mu + \zeta} < \frac{\log \frac{\theta}{\theta + \zeta}}{\log \frac{\mu}{\mu + \zeta}} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\mu}} \right)^\mu > \left(\frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\theta}} \right)^{\zeta + \theta} \\
 &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{\zeta}{\mu} \right)^\mu < \left(1 + \frac{\zeta}{\theta} \right)^{\zeta + \theta}.
 \end{aligned}$$

Επειδή όμως $\left(1 + \frac{\zeta}{\mu} \right)^\mu \uparrow e^\zeta$, καθώς $\mu \rightarrow \infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$e^\zeta < \left(1 + \frac{\zeta}{\theta} \right)^{\zeta + \theta}, \tag{5.71}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$\frac{\zeta/\theta}{\zeta/\theta + 1} < \log(1 + \zeta/\theta). \tag{5.72}$$

Η τελευταία ισχύει καθώς η ανίσωση $\frac{x}{x+1} < \log(1+x)$ ισχύει για $x > 0$. Καταλήγουμε επομένως στην (5.69). \square

Τεχνικές αποδείξεις για το Κεφάλαιο 5:

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1 Υποθέτουμε πως οι πελάτες έχουν υιοθετήσει τη στρατηγική, τύπου κατωφλίου, (x_0^{FR}, x_1^{FR}) , με $x_0^{FR} < x_1^{FR}$. Θα απλοποιήσουμε ωστόσο τον συμβολισμό. Δηλαδή, το $S_{(x,i)}^{FR}(x_0^{FR}, x_1^{FR})$ θα γίνει $S_{(x,i)}^{FR}$. Παρατηρήστε πως όταν οι πελάτες ακολουθούν την (x_0^{FR}, x_1^{FR}) , με $x_0^{FR} < x_1^{FR}$, ένας επιλεγμένος πελάτης που φθάνει στο σύστημα μπορεί να βρει μια από τις καταστάσεις που περιλαμβάνονται στο σύνολο $S^{FR} = \{(x, 0), x \leq x_0^{FR}\} \cup \{(x, 1), x \leq x_1^{FR}\}$. Η αναμενόμενη ωφέλεια τότε, για τον πελάτη αυτόν, αν επιλέξει να εισέλθει, δεδομένου ότι βρήκε το επίπεδο του ρευστού να είναι x και τον υπηρέτη στην κατάσταση i , θα είναι

$$S_{(x,i)}^{FR} = RP_{(x,i)}^{FR} - CT_{(x,i)}^{FR}, \quad (x, i) \in S^{FR}, \tag{5.73}$$

όπου $P_{(x,i)}^{FR}$ είναι η πιθανότητα όπως ο πελάτης αυτός θα εξυπηρετηθεί τελικά, ενώ με $T_{(x,i)}^{FR}$ έχουμε συμβολίσει τον χρόνο παραμονής του στο σύστημα.

Περίπτωση 1: $x \leq x_0^{FR}$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $P_{(x,i)}^{FR} = 1$, καθώς, ένας πελάτης που αποφάσισε αρχικά να εισέλθει, δεν θα υπαναχωρήσει στη συνέχεια. Υποθέτουμε αρχικά ότι $i = 0$. Τότε, ο πελάτης αυτός θα περιμένει μέχρι να ολοκληρωθεί ο υπολειπόμενος χρόνος ανενεργούς περιόδου του υπηρέτη, ο οποίος είναι εκθετικά κατανομημένος με ρυθμό θ , και στη συνέχεια θα έχει επίπεδο ρευστού x μπροστά του και ο υπηρέτης θα βρίσκεται στην κατάσταση 1. Επομένως,

$$T_{(x,0)}^{FR} = \frac{1}{\theta} + T_{(x,1)}^{FR}. \quad (5.74)$$

Θεωρούμε τώρα έναν επιλεγμένο πελάτη που κατά την άφιξη του βρίσκει επίπεδο ρευστού x και τον υπηρέτη στην κατάσταση $i = 1$. Έστω T_1 ο χρόνος παραμονής του στο σύστημα και έστω U ο υπολειπόμενος χρόνος της ενεργής περιόδου του υπηρέτη. Έχουμε πως ο U ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό ζ . Δεσμεύοντας στο ότι $U = u$ και λαμβάνοντας υπόψη πως το επίπεδο ρευστού φθίνει με ρυθμό μ , έχουμε ότι

$$T_{(x,1)}^{FR} = \int_0^\infty E[T_1|U = u] dF_U(u), \quad (5.75)$$

με

$$E[T_1|U = u] = \begin{cases} u + T_{(x-\mu u,0)}^{FR} & \text{αν } 0 \leq u < \frac{x}{\mu}, \\ \frac{x}{\mu} & \text{αν } u \geq \frac{x}{\mu}. \end{cases} \quad (5.76)$$

Στην παραπάνω, ο άνω κλάδος αντιστοιχεί στην περίπτωση που η στιγμή της αλλαγής της κατάστασης του υπηρέτη συμβαίνει πριν την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του πελάτη (ο πελάτης μένει στο σύστημα για u χρονικές μονάδες και στη συνέχεια ο υπηρέτης γίνεται ανενεργός και το επίπεδο του ρευστού μπροστά από τον πελάτη είναι $x - \mu u$). Ο κάτω κλάδος αντιστοιχεί στην περίπτωση που η στιγμή της αλλαγής της κατάστασης του υπηρέτη συμβαίνει έπειτα από την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του πελάτη (ο πελάτης παραμένει στο σύστημα για $\frac{x}{\mu}$ χρονικές μονάδες μέχρι να εξυπηρετηθεί).

Από τις (5.74), (5.75), και (5.76), παίρνουμε ότι

$$T_{(x,1)}^{FR} = \int_0^{\frac{x}{\mu}} \left(u + \frac{1}{\theta} + T_{(x-\mu u,1)}^{FR} \right) dF_U(u) + \int_{\frac{x}{\mu}}^\infty \frac{x}{\mu} dF_U(u),$$

η οποία απλοποιείται στην

$$T_{(x,1)}^{FR} = \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\theta} \right) \left(1 - e^{-\frac{\zeta x}{\mu}} \right) + \frac{\zeta}{\mu} e^{-\frac{\zeta x}{\mu}} \int_0^x T_{(t,1)}^{FR} e^{\frac{\zeta t}{\mu}} dt$$

έπειτα από πράξεις. Πολλαπλασιάζοντας με $e^{\frac{\zeta x}{\mu}}$ και παραγωγίζοντας ως προς x , έχουμε ότι $\frac{d}{dx} T_{(x,1)}^{FR} = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{\zeta}{\theta} \right)$. Λαμβάνοντας υπόψη τις (5.74) και (5.73), έχουμε ότι

$$T_{(x,i)}^{FR} = (1-i) \frac{1}{\theta} + \frac{x}{\mu} \left(1 + \frac{\zeta}{\theta} \right), \quad x \leq x_0^{FR}, \quad (5.77)$$

$$S_{(x,i)}^{FR} = R - C \left((1-i) \frac{1}{\theta} + \frac{x}{\mu} \left(1 + \frac{\zeta}{\theta} \right) \right), \quad x \leq x_0^{FR}. \quad (5.78)$$

Περίπτωση 2: $x > x_0^{FR}$. Αρχικά θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου ο επιλεγμένος πελάτης που φθίνει στο σύστημα, θα παρατηρήσει πως το ρευστό είναι στο επίπεδο x και πως ο υπηρέτης

είναι στην κατάσταση $i = 1$. Αν το επίπεδο του ρευστού που έχει μπροστά του ένας πελάτης κατά την επόμενη στιγμή αλλαγής του υπηρέτη σε ανενεργή κατάσταση δεν πέσει κάτω από x_0^{FR} , τότε ο πελάτης, δεν θα υπαναχωρήσει από το σύστημα μέχρι να εξυπηρετηθεί. Δεδομένου πως το επίπεδο του ρευστού μειώνεται με ρυθμό μ όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός, έχουμε ότι ισοδύναμα, ο πελάτης δεν θα υπαναχωρήσει αν ο χρόνος μέχρι να συμβεί η αλλαγή στην κατάσταση του υπηρέτη από ενεργό σε ανενεργό είναι το λιγότερο $\frac{x-x_0^{FR}}{\mu}$ χρονικές μονάδες από τη στιγμή της άφιξης του. Συμβολίζοντας με U τον υπολειπόμενο χρόνο ενεργούς περιόδου για τον υπηρέτη, έχουμε ότι

$$P_{(x,1)}^{FR} = \Pr[U \geq \frac{x-x_0^{FR}}{\mu}] = e^{-\frac{\zeta(x-x_0^{FR})}{\mu}}, \quad x > x_0^{FR}. \quad (5.79)$$

Συμβολίζοντας με T_2 τον χρόνο παραμονής για τον πελάτη αυτόν, θα είναι

$$T_{(x,1)}^{FR} = \int_0^\infty E[T_2|U = u]dF_U(u), \quad (5.80)$$

με

$$E[T_2|U = u] = \begin{cases} u & \text{αν } 0 \leq u < \frac{x-x_0^{FR}}{\mu}, \\ u + T_{(x-\mu u,0)}^{FR} & \text{αν } \frac{x-x_0^{FR}}{\mu} \leq u < \frac{x}{\mu}, \\ \frac{x}{\mu} & \text{αν } u \geq \frac{x}{\mu}, \end{cases} \quad (5.81)$$

Στην παραπάνω, ο άνω κλάδος αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία η στιγμή της αλλαγής της κατάστασης του υπηρέτη συμβεί όταν το επίπεδο του ρευστού που έχει μπροστά του ο επιλεγμένος πελάτης παραμένει πάνω από x_0^{FR} και συνεπώς, ο πελάτης θα υπαναχωρήσει τη στιγμή αυτής της αλλαγής (ο πελάτης μένει στο σύστημα για u χρονικές μονάδες και στη συνέχεια υπαναχωρεί χωρίς να λάβει αμοιβή). Ο μεσαίος κλάδος αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία η στιγμή της αλλαγής της κατάστασης του υπηρέτη συμβεί ενώ το επίπεδο του ρευστού που έχει μπροστά του ο επιλεγμένος πελάτης είναι το πολύ x_0^{FR} , αλλά θετικό. Τότε ο πελάτης δεν θα υπαναχωρήσει (ο πελάτης θα παραμείνει στο σύστημα για u χρονικές μονάδες και στη συνέχεια ο υπηρέτης θα γίνει ανενεργός και το επίπεδο του ρευστού που έχει μπροστά του είναι $x - \mu u$). Ο τελευταίος κλάδος αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία η στιγμή της αλλαγής της κατάστασης του υπηρέτη συμβεί έπειτα από την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του πελάτη (ο πελάτης θα παραμείνει στο σύστημα για $\frac{x}{\mu}$ μέχρι που θα εξυπηρετηθεί).

Χρησιμοποιώντας τις (5.80), (5.81), και (5.74), παίρνουμε την

$$T_{(x,1)}^{FR} = \int_0^{\frac{x-x_0^{FR}}{\mu}} u dF_U(u) + \int_{\frac{x-x_0^{FR}}{\mu}}^{\frac{x}{\mu}} \left(u + \frac{1}{\theta} + T_{(x-\mu u,1)}^{FR} \right) dF_U(u) + \int_{\frac{x}{\mu}}^\infty \frac{x}{\mu} dF_U(u).$$

Παρατηρήστε πως το $T_{(x-\mu u,1)}^{FR}$ στο δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης δίνεται από την (5.77), και επομένως, αφού κάνουμε την αντικατάσταση και υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα, θα καταλήξουμε στην

$$T_{(x,1)}^{FR} = \frac{1}{\zeta} + \left(\frac{x_0^{FR}(\theta + \zeta)}{\mu\theta} - \frac{1}{\zeta} \right) e^{-\frac{\zeta(x-x_0^{FR})}{\mu}}, \quad x > x_0^{FR}. \quad (5.82)$$

Από την τελευταία, χρησιμοποιώντας τις (5.73), (5.79), και (5.82), παίρνουμε την

$$S_{(x,1)}^{FR} = \left(R - \frac{C x_0^{FR}(\theta + \zeta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\zeta} \right) e^{-\frac{\zeta(x-x_0^{FR})}{\mu}} - \frac{C}{\zeta}, \quad x > x_0^{FR}.$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.5 Τα κατώφλια $(x_{e,0}^{FNR}, x_{e,1}^{FNR})$ αποτελούν στρατηγική ισορροπίας αν, ως στρατηγική εισόδου, είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της. Επειδή το αναμενόμενο όφελος $S_{(x,i)}^{FNR}(x_{e,0}^{FNR}, x_{e,1}^{FNR})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς x , για $i = 0, 1$, αρκεί να ικανοποιούνται οι εξισώσεις

$$S_{(x_{e,i}^{FNR}, i)}^{FNR}(x_{e,0}^{FNR}, x_{e,1}^{FNR}) = 0, \quad i = 0, 1.$$

Λύνοντας τις παραπάνω ως προς $x_{e,0}^{FNR}$ και $x_{e,1}^{FNR}$, παίρνουμε άμεσα ότι η στρατηγική ισορροπίας δίνεται από το ζεύγος των κατωφλιών (5.23). \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.6 Θεωρούμε ξανά τις τρεις περιπτώσεις σχετικά τις τιμές των παραμέτρων λ και μ .

Περίπτωση 1: $\lambda > \mu$.

Αν το επίπεδο του ρευστού ξεκινήσει από μια κατάσταση $x \geq x_1$, τότε φθίνει με ρυθμό μ ενώ ο υπηρέτης είναι ενεργός μέχρι να φθάσει στο επίπεδο x_1 . Αν ωστόσο ξεκινήσει από ένα αρχικό επίπεδο $x < x_1$, τότε θα αυξάνει με ρυθμό λ οποτεδήποτε ο υπηρέτης βρίσκεται σε ανενεργή κατάσταση και το επίπεδο του ρευστού βρίσκεται κάτω από από x_0 . Επιπλέον, θα παραμείνει στο ίδιο επίπεδο οποτεδήποτε ο υπηρέτης είναι ανενεργός και το επίπεδο του ρευστού έχει ξεπεράσει το x_0 , ενώ θα αυξάνει με ρυθμό $\lambda - \mu$ οποτεδήποτε ο υπηρέτης είναι ενεργός, μέχρι να φθάσει το επίπεδο x_1 . Αφού έχει φθάσει το επίπεδο x_1 , το ρευστό θα παραμείνει για πάντα στο επίπεδο αυτό.

Περίπτωση 2: $\lambda = \mu$.

Αν το επίπεδο του ρευστού ξεκινήσει από μια κατάσταση $x_s \in [0, x_0]$, τότε αυξάνει με ρυθμό λ όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός και παραμένει σταθερό στο επίπεδο αυτό όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός, μέχρι να φθάσει το επίπεδο x_0 στο οποίο και θα παραμείνει. Αν από την άλλη, αν το αρχικό επίπεδο είναι $x_s \in (x_0, x_1]$, τότε το ρευστό θα παραμείνει στο επίπεδο αυτό. Τέλος, αν ξεκινήσει από ένα επίπεδο που είναι μεγαλύτερο από x_1 , τότε θα φθίνει με ρυθμό μ , όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός ενώ θα παραμείνει σταθερό όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός, μέχρι να φθάσει τελικά το επίπεδο x_1 στο οποίο και θα σταθεροποιηθεί.

Περίπτωση 3: $\lambda < \mu$.

Αυτή η περίπτωση είναι όμοια με την περίπτωση 3 του Θεωρήματος 5.3 και η απόδειξη ακολουθεί την ίδια συλλογιστική πορεία. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2 Στις περιπτώσεις 1 και 2, το σύστημα δεν γίνεται ποτέ κενό. Επομένως, ο ρυθμός απόδοσης είναι το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου κατά το οποίο ο υπηρέτης είναι ενεργός, επί τον ρυθμό εξυπηρέτησης μ που πραγματοποιείται μια εξυπηρέτηση. Για την περίπτωση 3, η απόδειξη είναι όμοια με εκείνη της περίπτωσης 3 του Πορίσματος 5.1. Σχετικά με το κοινωνικό όφελος, χρησιμοποιούμε ότι $SW_e^{FNR} = RTH_e^{FNR} - CE[X]$ και αντικαθιστούμε την αναμενόμενη τιμή $E[X]$ με την κατάλληλη μορφή, η οποία δίνεται στο 5.6. \square

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

Στρατηγικές δρομολόγησης σε ένα δίκτυο μέσων μεταφοράς

Περίληψη: Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τη στρατηγική συμπεριφορά των επιβατών σχετικά με τη δρομολόγηση τους στις διάφορες υπηρεσίες μεταφοράς που επισκέπτονται έναν κεντρικό σταθμό. Οι υπηρεσίες διαφέρουν ως προς τη χωρητικότητα, ως προς τους χρόνους που επισκέπτονται τον σταθμό αλλά και ως προς την ποιότητα των υπηρεσιών που παρέχουν στους πελάτες. Οι αφίξεις των πελατών πραγματοποιούνται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ενώ για τα διαφορετικού τύπου μεταφορικά μέσα, οι στιγμές επίσκεψης περιγράφονται μέσω ανεξάρτητων ανανεωτικών διαδικασιών. Η διαθέσιμη χωρητικότητα τη στιγμή επίσκεψης στον σταθμό περιγράφεται από ανεξάρτητες και ισόνομες μεταβλητές. Για το πρόβλημα αυτό, προσδιορίζουμε τη στρατηγική ισορροπίας κατά την οποία οι επιβάτες θα επιλέξουν οι ίδιοι τον τρόπο που θα δρομολογηθούν στα διάφορα μεταφορικά μέσα αλλά και τη βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης, κατά την οποία ο κεντρικός διαχειριστής θα δρομολογήσει τους πελάτες στις διάφορες υπηρεσίες μεταφοράς με τρόπο τέτοιο ώστε να μεγιστοποιηθεί το κοινωνικό όφελος. Αποδεικνύεται ότι οι δύο αυτές πολιτικές δρομολόγησης διαφέρουν μεταξύ τους και επίσης παρουσιάζονται αποτελέσματα που αφορούν τη σύγκρισή τους. Επιπλέον, εξετάζουμε και ορισμένα προβλήματα μεγιστοποίησης κέρδους για τον διαχειριστή του συστήματος.

6.1 Εισαγωγή

6.1.1 Περιγραφή του ερευνητικού πλαισίου και συνεισφορά

Στο τρέχον κεφάλαιο έχουμε υιοθετήσει ως πλαίσιο εφαρμογής έναν κεντρικό σταθμό τον οποίο επισκέπτονται διαφορετικού τύπου μεταφορικά μέσα (για παράδειγμα, λεωφορεία, τρέινα, τραμ κ.λ.π.) τα οποία θα υποθέτουμε ότι ανήκουν σε διάφορες ανεξάρτητες υπηρεσίες μεταφοράς. Για ευκολία, θα υποθέσουμε ότι σε κάθε υπηρεσία μεταφοράς θα αντιστοιχούν μεταφορικά μέσα του ίδιου τύπου τα οποία πραγματοποιούν επισκέψεις στον σταθμό για την εξυπηρέτηση των παρευρισκόμενων πελατών. Οι πελάτες καλούνται να αποφασίσουν κατά την άφιξη τους στον σταθμό, την υπηρεσία μεταφοράς που θα χρησιμοποιήσουν για την εξυπηρέτησή τους, σύμφωνα με τη γνωστή αρχή του Wardrop (δείτε το [144]). Ανάλογα με τις αποφάσεις τους, οι πελάτες θα αρχίσουν να συσσωρεύονται στην αντίστοιχη πλατφόρμα επιβίβασης όπου θα περιμένουν το επόμενο μέσο μεταφοράς της υπηρεσίας που επιλέξαν. Υποθέτουμε ότι κατά τη στιγμή της απόφασής τους, οι πελάτες δεν έχουν κάποια επιπρόσθετη πληροφόρηση εκτός από τη γνώση των λειτουργικών και οικονομικών παραμέτρων του μοντέλου.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου που έχουμε θεωρήσει, είναι η περιορισμένη χωρητικότητα των μέσων μεταφοράς κατά τις στιγμές που επισκέπτονται τον σταθμό. Επομένως, υπάρχει θετική πιθανότητα για κάθε πελάτη να μην καταφέρει να επιβιβαστεί στο μέσο μεταφοράς από την υπηρεσία που επέλεξε. Σε αυτή την περίπτωση θα υποθέτουμε ότι θα επιλέξει να εξυπηρετηθεί από κάποια εναλλακτική υπηρεσία (εξωτερική υπηρεσία) μεταφοράς που είναι πάντα διαθέσιμη.

Το μοντέλο, αλλά και το γενικότερο πλαίσιο εφαρμογής που έχουμε θεωρήσει στο κεφάλαιο αυτό, αποτελεί κατά κάποιον γενίκευση εκείνου που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2. Ωστόσο, τα προβλήματα αυτά διαφέρουν σημαντικά. Μια διαφορά είναι πως στο μοντέλο που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 2, τα μέσα μεταφοράς θεωρήθηκαν πως είναι του ίδιου τύπου, τα οποία επισκέπτονταν τον σταθμό σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία. Στο μοντέλο που μελετάμε στο τρέχον κεφάλαιο, έχουμε θεωρήσει μέσα μεταφοράς διαφορετικού τύπου τα οποία επισκέπτονται τον σταθμό σύμφωνα με ανεξάρτητες ανανεωτικές διαδικασίες. Την κεντρική ωστόσο διαφοροποίηση, αποτελεί το στρατηγικό πρόβλημα που μελετάμε στο κεφάλαιο αυτό. Ενώ στο κεφάλαιο 2 μελετήσαμε τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών ως προς το δίλημμα εισόδου-άμεσης αποχώρησης, στο τρέχον κεφάλαιο εστιάζουμε στη στρατηγική συμπεριφορά σχετικά με τη δρομολόγηση των πελατών στις διάφορες υπηρεσίες μεταφοράς. Στην περίπτωση που έχουμε ακριβώς μία υπηρεσία μεταφοράς, το πρόβλημα ανάγεται σε εκείνο του κεφαλαίου 2 και πιο συγκεκριμένα, σε εκείνο που αντιστοιχεί στο \emptyset επίπεδο πληροφόρησης.

Εκτός από τη μελέτη τη στρατηγικής συμπεριφοράς, εξετάζουμε και το πρόβλημα εύρεσης βέλτιστης πολιτικής δρομολόγησης ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό κοινωνικό όφελος όλων των οντοτήτων που εμπλέκονται, αλλά και η σύγκριση της πολιτικής αυτής με εκείνο που προκύπτει όταν οι πελάτες αποφασίζουν ατομικά. Αποδεικνύεται ότι οι πολιτικές αυτές δεν συμπίπτουν, ενώ οι πελάτες τείνουν να επιλέγουν να χρησιμοποιούν τις υπηρεσίες μεταφοράς περισσότερο από ό,τι θα ήταν επιθυμητό, με κριτήριο την κοινωνική ωφέλεια.

6.1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Στην παρούσα μελέτη επιδιώκουμε να αναλύσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών που αφορούν τη δρομολόγηση τους σε ένα δίκτυο που αποτελείται από παράλληλα συστήματα εκκαθαρίσεων. Έχουμε υποθέσει ότι σε κάθε κόμβο, όλοι οι παρόντες πελάτες απομακρύνονται ταυτόχρονα και σε στιγμές που σχηματίζουν μια ανανεωτική ακολουθία η οποία αντιπροσωπεύει τις επισκέψεις των μέσων μεταφοράς που διαχειρίζεται μια υπηρεσία. Το μοντέλο αυτό συνδέεται ερευνητικά με το μέρος της βιβλιογραφίας που περιλαμβάνει τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς πελατών σε στοχαστικά συστήματα εκκαθαρίσεων αλλά επεκτείνεται και προς την κατεύθυνση

που σχετίζεται με τη στρατηγική συμπεριφορά σε στοχαστικά δίκτυα ουρών.

Η βιβλιογραφία σχετικά με τα στοχαστικά συστήματα εκκαθαρίσεων γενικά, έχει ξεκινήσει από τον Stidham [125] και πλέον είναι ιδιαίτερα εκτεταμένη. Ωστόσο, η μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών στα συστήματα αυτά αποτελεί μια σχετικά πρόσφατη προσπάθεια. Ορισμένες βασικές εργασίες είναι αυτές των Economou και Manou [45], Manou, Economou και Karaesmen [100], Manou, Canbolat και Karaesmen [99], Czerny, Guo και Hassin [30] και Canbolat [21]. Ωστόσο, όλες αυτές οι μελέτες εστιάζουν στο δίλημμα της εισόδου-άμεσης αποχώρησης των πελατών και όχι στη στρατηγική δρομολόγησης που αποτελεί το αντικείμενο της τρέχουσας μελέτης.

Από την άλλη, αν εξαιρέσουμε την υπόθεση της άμεσης απομάκρυνσης των πελατών που δεν κατάφεραν να επιβιβαστούν, το μοντέλο που προκύπτει θα είναι ένα σύστημα εξυπηρέτησης ομαδικών εξυπηρετήσεων πεπερασμένου μεγέθους. Η ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε αυτά τα συστήματα ξεκίνησε πρόσφατα στο πλαίσιο της M/M/1 ουράς με ομαδικές εξυπηρετήσεις, δείτε για παράδειγμα τις εργασίες των Bountali και Economou, στα [13], [14] και [15].

Πολύ σχετική με την τρέχουσα μελέτη είναι η θεμελιώδης εργασία των Bell και Stidham [12], που αφορά τη στρατηγική δρομολόγησης των πελατών σε ένα δίκτυο που αποτελείται από παράλληλα M/G/1 συστήματα με κοινό συντελεστή μεταβλητότητας για τους χρόνους εξυπηρέτησης. Στην εργασία αυτή, οι συγγραφείς προσδιορίζουν τη στρατηγική ισορροπίας αλλά και την κοινωνικά βέλτιστη πολιτική και παρέχουν κλειστούς τύπους για την περίπτωση που οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανομημένοι. Καταλήγουν στο συμπέρασμα πως όταν οι πελάτες δρουν ατομικά και δίχως έλεγχο, τείνουν να υπερβάλλουν ως προς τη χρήση των χαμηλού κόστους/υψηλής ταχύτητας υπηρετών προκαλώντας μεγαλύτερα κόσθη σε σύγκριση με τη βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης. Γενικότερα, η στρατηγική ισορροπίας και η βέλτιστη πολιτική είναι γνωστό πως δεν συμπίπτουν, τόσο στο πλαίσιο των στοχαστικών δρομολογήσεων όσο και των εξαρτημένων από τις καταστάσεις δρομολογήσεων (δείτε π.χ. Whitt [146], και Cohen και Kelly [28]). Άλλες σχετικές εργασίες που αφορούν στρατηγικούς πελάτες σε δίκτυα παράλληλων συστημάτων είναι και αυτές στα [2], [3], [5], [10], [20], [53], [107], [112], [116]. Ωστόσο, σε όλες τις παραπάνω εργασίες, οι μελέτες της στρατηγικής συμπεριφοράς σχετικά με τη δρομολόγηση των πελατών αφορούν συστήματα όπου η εξυπηρέτηση είναι ανά πελάτη, σε αντίθεση με τη μελέτη που παρουσιάζουμε στο κεφάλαιο αυτό η οποία αφορά δρομολογήσεις σε παράλληλο δίκτυο με συστήματα εκκαθαρίσεων.

6.1.3 Διάρθρωση του κεφαλαίου

Στην ενότητα 6.2, γίνεται η εισαγωγή του μοντέλου και η περιγραφή των βασικών ποσοτήτων που θα χρειαστούν στη συνέχεια. Η κεντρική ανάλυση σχετικά με τη στρατηγική ισορροπίας, τη βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης καθώς και η σύγκριση τους, παρουσιάζεται στις ενότητες 6.3 και 6.4. Στην ενότητα 6.5 γίνεται ο υπολογισμός των στρατηγικών ισορροπίας και της βέλτιστης πολιτικής στα πλαίσια μιας ειδικής εφαρμογής ενώ στην ενότητα 6.6 εξετάζουμε ορισμένα προβλήματα τιμολόγησης. Τέλος, στην ενότητα 6.6.1 γίνεται συζήτηση σχετικά με τα αποτελέσματα ενώ περιγράφονται και ορισμένες κατευθύνσεις που αφορούν τη συνέχεια της έρευνας. Το παράρτημα περιλαμβάνει τις τεχνικές αποδείξεις σχετικά με τα αποτελέσματα του τρέχοντος κεφαλαίου.

6.2 Περιγραφή του μοντέλου

6.2.1 Μαθηματική περιγραφή και συμβολισμός

Θεωρούμε έναν σταθμό διέλευσης μεταφορικών μέσων διαφόρων τύπων (π.χ. τραίνα, μετρό, τραμ, λεωφορεία κ.τ.λ.), τον οποίο μοντελοποιούμε ως ένα δίκτυο n παράλληλων συστημάτων εκκαθάρισεων (clearing systems), που λειτουργούν ανεξάρτητα. Το σύστημα i θα αντιστοιχεί σε κάποια υπηρεσία μεταφοράς της οποίας τα μεταφορικά μέσα (τα οποία υποθέτουμε ότι είναι όμοια μεταξύ τους) επισκέπτονται τον σταθμό σύμφωνα με την ανανεωτική διαδικασία $\{M_i(t)\}$. Θα συμβολίσουμε τους ενδιάμεσους χρόνους που αντιστοιχούν στη διαδικασία i με X_i , τη συνάρτηση κατανομής με $F_{X_i}(t)$, τη μέση τιμή και τη δεύτερη ροπή με \bar{x}_i και $\bar{x}_{i(2)}$ αντίστοιχα, και τέλος, τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (στην περίπτωση που έχουμε απολύτως συνεχή τ.μ.) με $f_{X_i}(t)$. Κάθε υπηρεσία μεταφοράς διαθέτει τη δική της πλατφόρμα/αποβάθρα αναμονής (απεριόριστου χώρου), αλλά και τη δική της μέγιστη διαθέσιμη χωρητικότητα (στα μέσα μεταφοράς που διαχειρίζεται), έστω m_i . Υποθέτουμε ότι η πραγματική χωρητικότητα, δηλαδή το πλήθος ελεύθερων θέσεων σε κάθε επίσκεψη ενός μέσου μεταφοράς από την υπηρεσία i , είναι τυχαίο και αποκαλύπτεται στους πελάτες κατά τη στιγμή της επίσκεψης του μέσου μεταφοράς στο σταθμό. Θα συμβολίζουμε με C_i την τ.μ. που αντιπροσωπεύει τη χωρητικότητα ενός μέσου της υπηρεσίας i , κατά τη στιγμή της επίσκεψης στο σταθμό, ενώ τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας με $(h_i(j) : j \in \{1, 2, \dots, m_i\})$ όπου τα m_i επιτρέπεται να είναι και ίσα με $+\infty$.

Οι πελάτες φθάνουν στο σταθμό σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και είναι στρατηγικοί, με την έννοια ότι επιλέγουν ποια από τις διαθέσιμες υπηρεσίες μεταφοράς θα χρησιμοποιήσουν. Ένας πελάτης που επιλέγει την υπηρεσία i , θα μεταφερθεί κατευθείαν στην αντίστοιχη πλατφόρμα/αποβάθρα και θα περιμένει το επόμενο μεταφορικό μέσο της υπηρεσίας i μαζί με τους υπόλοιπους πελάτες που έλαβαν την ίδια στρατηγική απόφαση. Υποθέτουμε πως η αξία της εξυπηρέτησης είναι r_i , η οποία θα εισπραχθεί από τον πελάτη αυτόν, μονάχα στην περίπτωση κατά την οποία η χωρητικότητα στο μέσο μεταφοράς επαρκεί για να επιβιβαστεί σε αυτό. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το κόστος αναμονής μιας χρονικής μονάδας είναι c . Ο πελάτης έχει επίσης την επιλογή να χρησιμοποιήσει κάποια εναλλακτική υπηρεσία (π.χ. ταξί) και έτσι να μην χρησιμοποιήσει κάποια από τις διαθέσιμες υπηρεσίες μεταφοράς του σταθμού. Η στρατηγική επιλογή αυτή θα αντιστοιχεί σε μηδενικό κόστος αναμονής και σε μια μειωμένη αξία εξυπηρέτησης η οποία θα συμβολίζεται με v . Σε όσα ακολουθούν, θα θέσουμε την τιμή αυτή να είναι ίση με μηδέν για απλότητα. Υποθέτουμε πως όλοι οι πελάτες συμφωνούν ως προς την αξία του μέσου μεταφοράς και του κόστους αναμονής (ομογενείς πελάτες). Στην περίπτωση αυτή, οι διαφορετικές αξίες για τις υπηρεσίες μεταφοράς μπορούν να αντιπροσωπεύουν ποιοτικά αλλά και αντικειμενικά κριτήρια. Γενικά, θα θεωρούμε πως όλοι πελάτες μπορούν να εξυπηρετηθούν από οποιαδήποτε υπηρεσία διαθέτει ο σταθμός.

Κάθε φορά που ένα μέσο μεταφοράς της υπηρεσίας i επισκέπτεται τον σταθμό, έχοντας χωρητικότητα C_i , θα εξυπηρετήσει το πολύ C_i πελάτες. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι πελάτες που δεν κατάφεραν να επιβιβαστούν στο μέσο αυτό, δεν θα περιμένουν στο επόμενο μέσο μεταφοράς, αλλά θα υποχωρήσουν άμεσα από τον σταθμό. Επομένως, ο αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται από την υπηρεσία μεταφοράς i ισούται με το ελάχιστο μεταξύ της χωρητικότητας και του πλήθους των παρόντων πελατών στην πλατφόρμα κατά τη στιγμή της επίσκεψης. Έπειτα από κάθε επίσκεψη, η πλατφόρμα μένει κενή.

Τέλος, υποθέτουμε ότι η πειθαρχία επιβίβασης σε όλες τις υπηρεσίες μεταφοράς είναι τύπου First-Come-First-Served (FCFS). Ωστόσο, στη συνέχεια θα δούμε ότι ισχύουν τα ίδια αποτελέσματα αν η πειθαρχία είναι και τύπου Last-Come-First-Served (LCFS) ή τύπου Random-Order (RO).

6.2.2 Δομή Πληροφόρησης και Στρατηγικές

Θέτουμε $A_k = \{0, 1, \dots, n\}$ το σύνολο αποφάσεων/ενεργειών του πελάτη k , με το 0 να αντιπροσωπεύει την εναλλακτική υπηρεσία (ισοδύναμα, όταν $v = 0$, την επιλογή της άμεσης αποχώρησης) και με $i > 0$ την επιλογή της i υπηρεσίας μεταφοράς. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες έχουν πλήρη γνώση των λειτουργικών και οικονομικών παραμέτρων του μοντέλου καθώς και των στοχαστικών διαδικασιών που διέπουν το σύστημα. Ωστόσο, δεν έχουν κάποια πληροφόρηση σχετικά με την πραγματική κατάσταση του συστήματος. Με άλλα λόγια, το μοντέλο είναι μη-παρατηρήσιμο. Η κατάσταση αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα συμμετρικό παίγνιο μεταξύ των πελατών, και επομένως, το σύνολο A_k θα είναι κοινό για όλους τους πελάτες.

Κάθε ενέργεια από το παραπάνω σύνολο θα είναι μια καθαρή στρατηγική του παίκτη k ενώ μικτή στρατηγική ενός πελάτη θα είναι το διάνυσμα $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \dots, \dots, q_n)$, όπου $q_i \in [0, 1]$, $i \geq 1$ η πιθανότητα επιλογής της υπηρεσίας μεταφοράς i και q_0 , η πιθανότητα επιλογής της εναλλακτικής υπηρεσίας. Οι πιθανότητες αυτές αθροίζονται στη μονάδα, δηλαδή $\sum_{i=0}^n q_i = 1$.

Αν όλοι υιοθετήσουν τη στρατηγική \mathbf{q} , τότε (λόγω της απουσίας συντονισμού), οι διαδικασίες αφίξεων των πελατών στις διάφορες πλατφόρμες θα είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson, $\{N_i(t)\}$ με ρυθμούς $\lambda_i = q_i \lambda$, αντίστοιχα. Ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων στο σύστημα θα είναι $\sum_{i=0}^n \lambda_i$. Δηλαδή, η ροή πελατών λ , θα μοιραστεί μεταξύ των n το πλήθος υπηρεσιών μεταφοράς και της εναλλακτικής υπηρεσίας. Ενδεχομένως στην ισορροπία κάποια μεταφορικά μέσα (μπορεί και όλα) δεν θα επιλέγονται καθόλου από τους πελάτες.

6.2.3 Συνάρτηση ωφέλειας των πελατών

Η βασική ποσότητα για τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών είναι η μέση ωφέλεια ενός επιλεγμένου πελάτη, που αποφασίζει να περιμένει για μια συγκεκριμένη υπηρεσία μεταφοράς i , δοθέντος ότι ο πληθυσμός των πελατών ακολουθεί μια στρατηγική \mathbf{q} . Η ποσότητα αυτή θα εξαρτάται από τη στρατηγική \mathbf{q} μόνο μέσω της συνιστώσας q_i καθώς οι πελάτες που επιλέγουν διαφορετική υπηρεσία θα μεταφερθούν σε διαφορετική πλατφόρμα και θα περιμένουν διαφορετικό μέσο μεταφοράς. Επομένως, θα συμβολίσουμε την ποσότητα αυτή με $G_i(q_i)$. Για σταθερό i , η τελευταία αντιστοιχεί στη συνάρτηση ωφέλειας για το επίπεδο χωρίς πληροφόρηση που μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 2 και λόγω του συμμετρικού παιγνίου, θα είναι ίδια για όλους του πελάτες. Υπενθυμίζουμε ότι ο υπολογισμός της, βασίζεται στις εξής δύο ποσότητες:

- Την $P_i(q_i)$ που αντιπροσωπεύει την δεσμευμένη πιθανότητα ο επιλεγμένος πελάτης, να καταφέρει να επιβιβαστεί στο επόμενο μέσο μεταφοράς της υπηρεσίας i , δεδομένου ότι η πιθανότητα επιλογής της υπηρεσίας αυτής από τον γενικό πληθυσμό των πελατών είναι q_i ,
- και την E_i που αντιπροσωπεύει τον δεσμευμένο αναμενόμενο χρόνο αναμονής μέχρι την επίσκεψη του επόμενου μέσου από την υπηρεσία μεταφοράς i , δεδομένου ότι η πιθανότητα επιλογής της υπηρεσίας αυτής από τον γενικό πληθυσμό των πελατών είναι q_i .

Η αναλυτική έκφραση για την $G_i(q_i)$ δίνεται μέσω της ακόλουθης πρότασης.

Πρόταση 6.1. (Αναμενόμενη Ωφέλεια) Η αναμενόμενη ωφέλεια ενός επιλεγμένου πελάτη που επιλέγει την υπηρεσία μεταφοράς i , δεδομένου ότι η πιθανότητα επιλογής της υπηρεσίας αυτής από τον γενικό πληθυσμό των πελατών είναι q_i , είναι ίση με

$$G_i(q_i) = r_i \sum_{j=1}^{m_i} h_i(j) \int_0^\infty p_j(\lambda q_i a) \frac{1 - F_{X_i}(a)}{\bar{x}_i} da - c \frac{\bar{x}_i(2)}{2\bar{x}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.1)$$

όπου η $p_j(s)$ έχει ορισθεί στην (2.3), ενώ $G_0(q_0) = v$.

Απόδειξη. Δείτε το Θεώρημα 2.7.

Παρατηρήστε ότι η έκφραση (6.1) για την αναμενόμενη ωφέλεια, θα εξακολουθεί να είναι η ίδια και για άλλες πειθαρχίες επιβίβασης που δεν επηρεάζουν τον αριθμό των πελατών που εξυπηρετούνται, όπως για παράδειγμα στις περιπτώσεις των LCFS και RO. Μπορούμε να σκεφτούμε το αποτέλεσμα αυτό με επιχειρήματα από την ανανεωτική θεωρία: Χρησιμοποιώντας το Ανανεωτικό Θεώρημα με Αμοιβές, θα έχουμε ότι το μακροπρόθεσμο ποσοστό των πελατών που εξυπηρετούνται από την υπηρεσία μεταφοράς i , είναι ίσο με τον αναμενόμενο αριθμό πελατών που εξυπηρετούνται κατά τη διάρκεια ενός ανανεωτικού κύκλου προς τον αναμενόμενο αριθμό πελατών που φθάνουν στον σταθμό κατά τη διάρκεια ενός ανανεωτικού κύκλου. Είναι δηλαδή ίσο με

$$\frac{E[\min(N_i(X_i), C_i)]}{E[N_i(X_i)]},$$

όπου $N_i(X_i)$ είναι το πλήθος των Poisson αφίξεων με ρυθμό λq_i κατά τη διάρκεια ενός ενδιάμεσου χρόνου X_i . Η ποσότητα αυτή είναι ανεξάρτητη από το αν η πειθαρχία επιβίβασης είναι FCFS, LCFS ή RO.

Πόρισμα 6.1. (Μονοτονία της G_i) Οι συναρτήσεις G_i για $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ είναι γνησίως φθίνουσες ως προς το q_i .

Απόδειξη. Αυτό είναι άμεσο καθώς οι συναρτήσεις $p_j(s)$ για $j \geq 1$, είναι γνησίως φθίνουσες ως προς s . \square

Η βασικότερη ποσότητα της ανάλυσης είναι η πιθανότητα επιβίβασης στα μέσα μεταφοράς των διαφόρων υπηρεσιών. Επιλέγοντας δύο υπηρεσίες i, j με ίδια χαρακτηριστικά, μελετάμε παρακάτω πώς μπορεί να επηρεαστεί η πιθανότητα αυτή από την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων, X , και από την κατανομή των ελεύθερων θέσεων, C .

Πρόταση 6.2. (Αναμενόμενη Ωφέλεια) Ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Αν $C_i \leq_{st} C_j$ τότε $P_i(q) \leq P_j(q)$ για κάθε $q \in [0, 1]$.

(ii) Αν $A_i \leq_{st} A_j$ τότε $P_i(q) \geq P_j(q)$ για κάθε $q \in [0, 1]$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 6.6.1.

Το (i) είναι διαισθητικά αναμενόμενο, καθώς αν αυξηθεί η πιθανότητα να φθάνουν μεταφορικά μέσα με μεγαλύτερη χωρητικότητα, θα αυξηθεί και η πιθανότητα εύρεσης ελεύθερης θέσης σε αυτά, αφού δεν υποθέτουμε κάποια αλλαγή στη ροή των πελατών ή στη ροή των μεταφορικών μέσων. Το (ii) μπορεί να αιτιολογηθεί διαισθητικά ως εξής: Θεωρούμε έναν πελάτη που φθάνει τυχαία στη στάση. Η πιθανότητα εύρεσης θέσης εξαρτάται από το πλήθος πελατών που θα βρίσκονται στη στάση κατά τη στιγμή άφιξης. Συγκεκριμένα, εξαρτάται από το πλήθος των πελατών που συγκεντρώθηκαν στον χρόνο που μεσολάβησε από το προηγούμενο μεταφορικό μέσο μέχρι τη στιγμή άφιξης του πελάτη. Επειδή ο χρόνος (ηλικία) που μεσολάβησε από το προηγούμενο μεταφορικό μέσο είναι X_e , θα αναμέναμε να βρίσκονται ολοένα και περισσότεροι πελάτες στη στάση όταν ο χρόνος αυτός αυξάνει. Επομένως, η πιθανότητα εύρεσης ελεύθερης θέσης θα μειώνεται όσο το X_e παίρνει μεγαλύτερες τιμές με αυξημένη πιθανότητα, αφού δεν υποθέτουμε κάποια αλλαγή στις χωρητικότητες ή στη ροή των πελατών.

6.3 Στρατηγική Ισορροπίας

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τη στρατηγική ισορροπία των πελατών. Θα ξεκινήσουμε δείχνοντας με ποιον τρόπο μπορούν να εφαρμοστούν οι συνθήκες ισορροπίας κατά Wardrop στο συγκεκριμένο πλαίσιο του υπό μελέτη μοντέλου. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη καθαρών στρατηγικών ισορροπίας. Επιπλέον, αναφέρουμε μια ικανή συνθήκη ώστε η εναλλακτική υπηρεσία (ισοδύναμα η αποχώρηση) να μην επιλέγεται από κανέναν. Επίσης μελετάμε το σύνολο των υπηρεσιών μεταφοράς που θα χρησιμοποιηθούν από τους πελάτες, υπό τη στρατηγική ισορροπία. Τέλος, θα παρουσιάσουμε ορισμένα βασικά αποτελέσματα σχετικά με την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της στρατηγικής ισορροπίας. Η στρατηγική ισορροπία θα δίνει μηδενική ή θετική πιθανότητα επιλογής της εναλλακτικής υπηρεσίας (ή της επιλογής της αποχώρησης) ανάλογα με την τιμή μιας κρίσιμης ποσότητας που θα συμβολίσουμε με \tilde{l} . Αφού εισάγουμε την ποσότητα αυτή, θα δείξουμε με ποιόν τρόπο μπορεί να γίνει ο υπολογισμός της στρατηγικής ισορροπίας στις δύο αυτές περιπτώσεις.

6.3.1 Χαρακτηρισμός της στρατηγικής ισορροπίας

Μια στρατηγική ισορροπία, \mathbf{q}^e , ορίζεται ως η στρατηγική κατά την οποία, κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς από τη στρατηγική του. Με άλλα λόγια, ένα διάνυσμα $\mathbf{q}^e = (q_0^e, q_1^e, \dots, q_n^e)$ αποτελεί στρατηγική ισορροπία αν και μόνο αν υπάρχει ένα σύνολο $\emptyset \neq K^e \subset \{0, 1, \dots, n\}$, τέτοιο ώστε οι ακόλουθες συνθήκες να ικανοποιούνται:

$$\Sigma 1: \text{(i) } q_i^e > 0, \text{ για } i \in K^e, \text{ (ii) } \text{όλες οι } G_i(q_i^e), i \in K^e \text{ είναι ίσες, και (iii) } \sum_{i \in K^e} q_i^e = 1.$$

$$\Sigma 2: \text{(i) } q_k^e = 0, \text{ για } k \notin K^e, \text{ και (ii) } G_i(q_i^e) \geq G_k(0) \text{ για } i \in K^e \text{ και } k \notin K^e.$$

6.3.2 Ανενεργές υπηρεσίες μεταφοράς

Ορισμένες από τις υπηρεσίες μεταφοράς μπορεί να μην επιλεγθούν καθόλου από τους πελάτες λόγω των οικονομικών παραμέτρων που αντιστοιχούν σε αυτές. Στη συνέχεια, θα δούμε με ποιον τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε ποιες υπηρεσίες μεταφοράς θα είναι αυτές. Επειδή οι συναρτήσεις G_1, G_2, \dots, G_n είναι συνεχείς και γνησίως φθίνουσες, τα σύνολα τιμών τους, $G_i([0, 1])$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, θα είναι τα σύνολα $[G_j(1), G_j(0)]$. Θέτουμε

$$[a_i, b_i] = [G_i(1), G_i(0)], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Επίσης θέτουμε $b_0 = a_0 = v$.

Επομένως, τα $a_i = G_i(1)$ και $b_i = G_i(0) = r_i - c \frac{\bar{x}_i(2)}{2\bar{x}_i}$, για $i \geq 1$, θα αντιπροσωπεύουν την αναμενόμενη ωφέλεια όταν επιλεγθεί η υπηρεσία μεταφοράς i , κάτω από τις χειρότερες και καλύτερες δυνατές συνθήκες αντίστοιχα. Επίσης, υποθέτουμε την ακόλουθη διάταξη για τις υπηρεσίες μεταφοράς:

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n. \quad (6.2)$$

Τότε, η υπηρεσία μεταφοράς 1 θα θεωρείται ως η πιο ελκυστική κάτω από ιδανικές συνθήκες (δηλαδή όταν η πιθανότητα επιβίβασης είναι 1, για τον τυχόντα πελάτη). Επιπλέον, αυτό θα σημαίνει ότι η υπηρεσία μεταφοράς 1, θα είναι και η μοναδική επιλογή που θα μπορούσε να αποτελέσει καθαρή στρατηγική ισορροπία των πελατών. Πράγματι, αφού κάθε καθαρή στρατηγική ισορροπία υπαγορεύει στους πελάτες να επιλέξουν αποκλειστικά την υπηρεσία $i \neq 1$, τότε, από τη $\Sigma 2$ θα έχουμε ότι $a_i = G_i(1) \geq G_1(0) = b_1$. Ωστόσο, $b_1 \geq b_i > a_i$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Θέτουμε επίσης

$$i^* = \arg \max_{i=1, \dots, n} a_i \quad \text{ανδ} \quad i^{ef} = \max\{i \in \{1, \dots, n\} : b_i \geq a_i^*\}. \quad (6.3)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ποσότητες μπορούμε εύκολα να καθορίσουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη καθαρών στρατηγικών ισορροπίας. Ειδικότερα, έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 6.3. (Καθαρές στρατηγικές ισορροπίας) Η στρατηγική ισορροπίας είναι

(i) $\mathbf{q}^e = (1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ αν και μόνο αν $b_1 \leq v = 0$.

(ii) $\mathbf{q}^e = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ αν και μόνο αν $i^{ef} = 1$ και $a_1 > 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 6.6.1.

Λόγω της Πρότασης 6.3, θα υποθέτουμε στο εξής ότι

$$b_1 > v = 0.$$

Τότε έπεται πως $q_0^e < 1$, και επομένως, έχουμε αποκλείσει την περίπτωση κατά την οποία όλοι οι πελάτες επιλέγουν την εναλλακτική υπηρεσία (ή αποχωρούν). Στην πρόταση που ακολουθεί, καθορίζουμε μια ικανή συνθήκη ώστε κανείς πελάτης να μην επιλέγει την εναλλακτική υπηρεσία.

Πρόταση 6.4. (Συνθήκη-μη-αποχώρησης) Έστω q^e η στρατηγική ισορροπίας. Αν $a_{i^*} \geq v = 0$ τότε $q_0^e = 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 6.6.1.

Πρόταση 6.5. (Ανενεργές υπηρεσίες μεταφοράς) Έστω $K^{ef} = \{0, 1, \dots, i^{ef}\}$. Τότε, θα έχουμε ότι $K^e \subset K^{ef}$. Ειδικότερα, αν το διάνυσμα \mathbf{q}^e είναι στρατηγική ισορροπίας, τότε $\mathbf{q}^e = (q_0^e, q_1^e, \dots, q_{i^{ef}}^e, 0, \dots, 0)$, με $q_i^e \in [0, 1)$ για κάθε $i \in K^{ef}$. Ωστόσο, αν για κάποιο $\tilde{i} \in \{2, \dots, n\}$ έχουμε ότι $q_{\tilde{i}}^e = 0$, τότε $q_i^e = 0$ για κάθε $i = \tilde{i} + 1, \dots, n$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 6.6.1.

Οι υπηρεσίες μεταφοράς που περιλαμβάνονται στο σύνολο $K^{ef} \setminus K^e$ θα είναι ανενεργές με την έννοια ότι δεν θα χρησιμοποιηθούν από τους πελάτες υπό τη στρατηγική ισορροπίας (ισοδύναμα, για τις υπηρεσίες αυτές θα ισχύει ότι $q_i^e = 0$). Γενικότερα, η υπηρεσία μεταφοράς i θα χρησιμοποιηθεί αν και μόνο αν $q_i^e > 0$.

6.3.3 Προσδιορισμός της στρατηγικής ισορροπίας

Για τον προσδιορισμό της στρατηγικής ισορροπίας των πελατών, θα χρειαστούμε αρχικά να εισάγουμε ορισμένες βασικές ποσότητες που θα χρειαστούν για τον υπολογισμό της.

Λόγω της γνήσιας μονοτονίας των $G_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, είναι σαφές ότι κάθε εξίσωση $G_i(x) = b_j$, για $1 \leq i \leq j \leq i^{ef}$, θα έχει μοναδική ρίζα, την οποία συμβολίζουμε με $q_{b_{ij}}$. Σε όσα ακολουθούν, ορίζουμε τις ποσότητες

$$Q(k) = \sum_{i=1}^k q_{b_{ik}}, \quad k = 1, \dots, i^{ef}$$

και θέτουμε

$$i^e = \max\{k \in \{1, \dots, i^{ef}\} : Q(k) < 1\}. \quad (6.4)$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{k \in \{1, \dots, i^{ef}\} : Q(k) < 1\}$ είναι μη κενό, λόγω της $i^{ef} \geq 1$ καθώς και της $Q(1) = q_{b_{11}} = 0 < 1$, και έτσι το i^e είναι καλά ορισμένο. Μια σημαντική συνάρτηση, για τον τον υπολογισμό της στρατηγικής ισορροπίας, είναι η συνάρτηση

$$H(x) = \sum_{i=1}^{i^e} G_i^{-1}(x) - 1. \quad (6.5)$$

Το ακόλουθο Λήμμα αποτελεί ένα βασικό βήμα προς τον προσδιορισμό της στρατηγικής ισορροπίας.

Λήμμα 6.1. Έστω i^{ef} το οποίο δίνεται από την (6.3). Ορίζουμε το \tilde{l} ως

$$\tilde{l} = \begin{cases} H^{-1}(0) \in [b_{i^e+1}, b_{i^e}] & \text{αν } i^e < i^{ef} \\ H^{-1}(0) \in [a_{i^*}, b_{i^e}] & \text{αν } i^e = i^{ef} \end{cases} \quad (6.6)$$

Τότε, υπάρχει ένα διάνυσμα $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_{i^e})$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- (i) $\tilde{q}_i \in (0, 1]$, $i = 1, \dots, i^e$
- (ii) $\sum_{i=1}^{i^e} \tilde{q}_i = 1$
- (iii) $G_i(\tilde{q}_i) = \tilde{l}$, για $i = 1, \dots, i^e$.
- (iv) $G_i(\tilde{q}_i) = \tilde{l} \geq G_j(0)$, για $i = 1, \dots, i^e$ και για κάθε $j = i^e + 1, \dots, n$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 6.6.1.

Το Λήμμα 6.1 μας δίνει ουσιαστικά τη στρατηγική ισορροπία που ικανοποιεί τις συνθήκες Σ1 και Σ2 στην περίπτωση όπου $\tilde{l} \geq 0$. Σε διαφορετική περίπτωση, θα χρειαστεί να κάνουμε μια απλή τροποποίηση, καθώς κάποιοι πελάτες είναι δυνατόν να επιλέξουν την εναλλακτική υπηρεσία μεταφοράς υπό τη στρατηγική ισορροπία. Στην περίπτωση αυτή, προκύπτει πως η θέση του $v = 0$ στη διάταξη των b_i σχετίζεται άμεσα με τον αριθμό των υπηρεσιών μεταφοράς που είναι περιττές. Ειδικότερα, θεωρούμε την ακόλουθη διαμέριση του (\tilde{l}, b_1) :

$$(\tilde{l}, b_1) = (\tilde{l}, b_{i^e}) \cup [b_{i^e}, b_{i^e-1}] \cup \dots \cup [b_2, b_1] = A_{i^e} \cup A_{i^e-1} \cup \dots \cup A_1. \quad (6.7)$$

Ορίζουμε k^e ως τον δείκτη i του συνόλου A_i από την παραπάνω διαμέριση, στο οποίο βρίσκεται το v . Με άλλα λόγια,

$$k^e = \max\{i : b_i > v\}. \quad (6.8)$$

Στο θεώρημα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι δύο περιπτώσεις ($\tilde{l} \geq 0$ και $\tilde{l} < 0$) για τη στρατηγική ισορροπία των πελατών. Αποτελεί το βασικό αποτέλεσμα σχετικά με την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της στρατηγικής ισορροπίας.

Θεώρημα 6.1. (Υπαρξη και μοναδικότητα της στρατηγικής ισορροπίας)

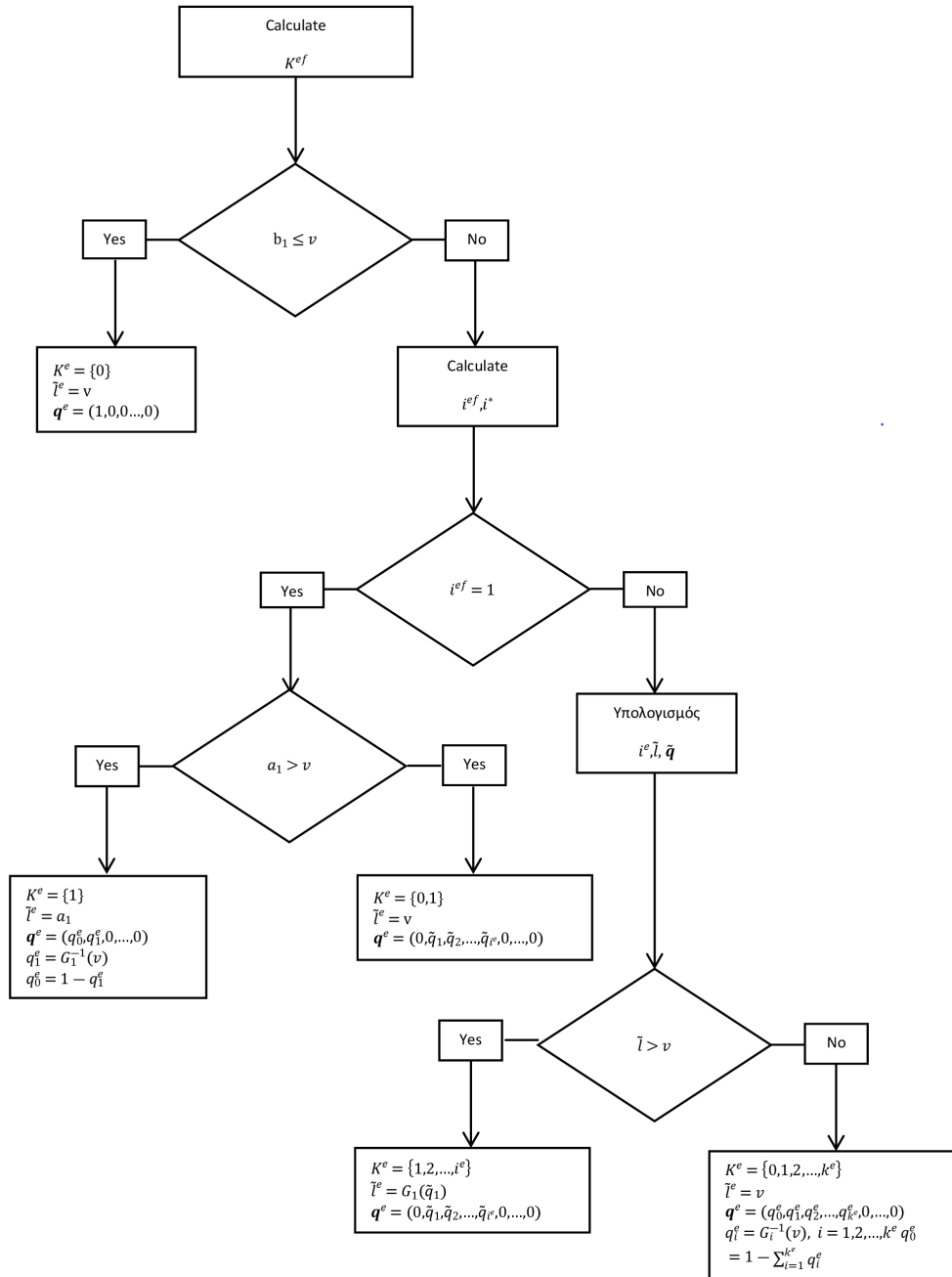
Υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπία. Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Αν $\tilde{l} \geq 0 = v$, τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπία είναι το διάνυσμα $\mathbf{q}^e = (0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{i^e}, 0, \dots, 0)$, με τα \tilde{q}_i να δίνονται από το Λήμμα 6.1.
2. Αν $\tilde{l} < 0 = v$ τότε η στρατηγική $\mathbf{q}^e = (q_0^e, q_1^e, \dots, q_{k^e}^e, 0, \dots, 0)$, με $q_i^e = G_i^{-1}(0)$, $i = 1, 2, \dots, k^e$ και $q_0^e = 1 - (q_1^e + \dots + q_{k^e}^e)$, είναι η μοναδική στρατηγική ισορροπία.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 6.6.1.

Θα συμβολίζουμε με \tilde{l}^e τη μέση ωφέλεια των πελατών, υπό τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών, για τις υπηρεσίες i που τελικά θα χρησιμοποιηθούν. Δηλαδή, $\tilde{l}^e = \max\{G_i(q_i^e), v\}$, για $i \in K^e$.

Στο σχήμα 6.1 παρουσιάζεται μέσω ενός διαγράμματος ροής η αλγοριθμική διαδικασία για την επίλυση του γενικού προβλήματος με $v \geq 0$. Στο 1ο βήμα, αφού οι υπηρεσίες έχουν διαταχθεί σε φθίνουσα σειρά ως προς τα b_i , γίνεται ο προσδιορισμός των ενεργών υπηρεσιών, δηλαδή του συνόλου K^{ef} . Στη συνέχεια, στο 2ο βήμα, γίνεται ο προσδιορισμός της στρατηγικής ισορροπίας, της μέσης ωφέλειας αλλά και του συνόλου των ενεργών υπηρεσιών κάτω από τη στρατηγική ισορροπία. Συγκεκριμένα, στον πρώτο κόμβο ελέγχεται μέσω της $b_1 \leq v$, αν ο σταθμός θα είναι πλήρως ανενεργός ή όχι. Αν υπάρχουν ενεργές υπηρεσίες υπό τη στρατηγική ισορροπία, το επόμενο βήμα θα είναι να προσδιοριστούν οι υπηρεσίες αυτές. Αρχικά, με τη συνθήκη $i^{ef} = 1$ εξετάζεται αν θα υπάρξει παραπάνω από μια ενεργή υπηρεσία μεταφοράς. Στην περίπτωση που ικανοποιείται η συνθήκη αυτή, εξετάζεται αν ολόκληρη η ροή των πελατών συγκεντρωθεί στην υπηρεσία μεταφοράς που έχει το μεγαλύτερο b_i ή θα υπάρξουν πελάτες που τελικά θα χρησιμοποιήσουν εναλλακτικές υπηρεσίες. Από την άλλη, αν $i^{ef} > 1$, τότε το επόμενο και τελευταίο βήμα είναι να προσδιοριστούν οι ενεργές υπηρεσίες μεταφοράς, υπό τη στρατηγική ισορροπία, καθώς και να διαπιστωθεί αν θα υπάρξουν πελάτες που θα χρησιμοποιήσουν εναλλακτικές υπηρεσίες ή όχι.



Σχήμα 6.1: Διάγραμμα ροής

6.4 Το πρόβλημα του κοινωνικού διαχειριστή

6.4.1 Προσδιορισμός της κοινωνικά βέλτιστης πολιτικής δρομολόγησης

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα του κοινωνικού διαχειριστή ο οποίος θα πρέπει να επιβάλει ένα σχέδιο δρομολόγησης για τους πελάτες στους διάφορους σταθμούς ώστε να μεγιστοποιείται το κοινωνικό όφελος. Με άλλα λόγια, το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $\mathbf{q}^{soc} = (q_0^{soc}, q_1^{soc}, \dots, q_n^{soc})$, για τη δρομολόγηση των πελατών στις διάφορες υπηρεσίες μεταφοράς και με το οποίο να μεγιστοποιείται το κοινωνικό όφελος:

$$S(\mathbf{q}) = \lambda \sum_{i=1}^n q_i G_i(q_i). \quad (6.9)$$

Η συνάρτηση $S(q)$ είναι διαφορίσιμη με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial S(q_i)}{\partial q_i} = \lambda \left(G_i(q_i) + q_i \frac{\partial G_i(q_i)}{\partial q_i} \right) = \lambda F_i(q_i).$$

Η συνάρτηση $F_i(q_i)$ αντιπροσωπεύει το οριακό μέσο κέρδος ανά πελάτη, δηλαδή το κέρδος ενός πελάτη που επιλέγει την υπηρεσία μεταφοράς i , αν η πιθανότητα οι άλλοι πελάτες να κάνουν την ίδια επιλογή, αυξηθεί ελάχιστα. Το πρόβλημα του κοινωνικού διαχειριστή είναι η εύρεση του διανύσματος q^{soc} που αποτελεί λύση του παρακάτω προβλήματος μη-γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} & \underset{q}{\text{maximize}} && S(q) \\ & \text{υπό} && \sum_{i=0}^n q_i = 1 \\ & && q_i \in [0, 1] \end{aligned}$$

Το σύνολο $F = \{(q_1, \dots, q_N) : \sum_{k=1}^N q_k \leq 1\}$ είναι κυρτό. Επομένως, όταν οι συναρτήσεις $U_k(x) = xG_k(x)$ είναι γνησίως κοίλες, το παραπάνω πρόβλημα μ.γ.π έχει μοναδική λύση. Εφαρμόζοντας τις συνθήκες Karush–Kuhn–Tucker (KKT) (δείτε για παράδειγμα το [108]), καταλήγουμε πως ένα διάνυσμα $\mathbf{q}^{soc} = (q_0^{soc}, q_1^{soc}, \dots, q_n^{soc})$ θα αποτελεί σημείο KKT (και άρα θα είναι υποψήφια ως βέλτιστη πολιτική) αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο σύνολο $\emptyset \neq K^{soc} \subset \{0, 1, \dots, n\}$, τέτοιο ώστε, οι ακόλουθες δύο συνθήκες ικανοποιούνται:

ΒΠ1: (i) $q_i^{soc} > 0$, για $i \in K^{soc}$, (ii) όλες οι $F_i(q_i^{soc})$, $i \in K^{soc}$ είναι ίσες, και (iii) $\sum_{i \in K^{soc}} q_i^{soc} = 1$.

ΒΠ2: (i) $q_k^{soc} = 0$, για $k \notin K^{soc}$, και (ii) $F_i(q_i^{soc}) \geq F_k(0)$ για $i \in K^{soc}$ και $k \notin K^{soc}$.

Είναι επομένως φανερό πως το πρόβλημα μεγιστοποίησης είναι εντελώς ανάλογο με το πρόβλημα της εύρεσης της στρατηγικής ισορροπίας στην προηγούμενη ενότητα. Συγκεκριμένα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια ανάλυση που εφαρμόσαμε, με τη διαφορά πως, στη θέση των συναρτήσεων $G_i(x)$ έχουμε τις συναρτήσεις $F_i(x)$ και όλες οι σχετικές ποσότητες (a_i , b_i , κ.τ.λ) θα πρέπει να υπολογιστούν με ανάλογο τρόπο. Ειδικότερα, θα έχουμε:

$$\tilde{b}_i = F_i(0) = G_i(0) = b_i$$

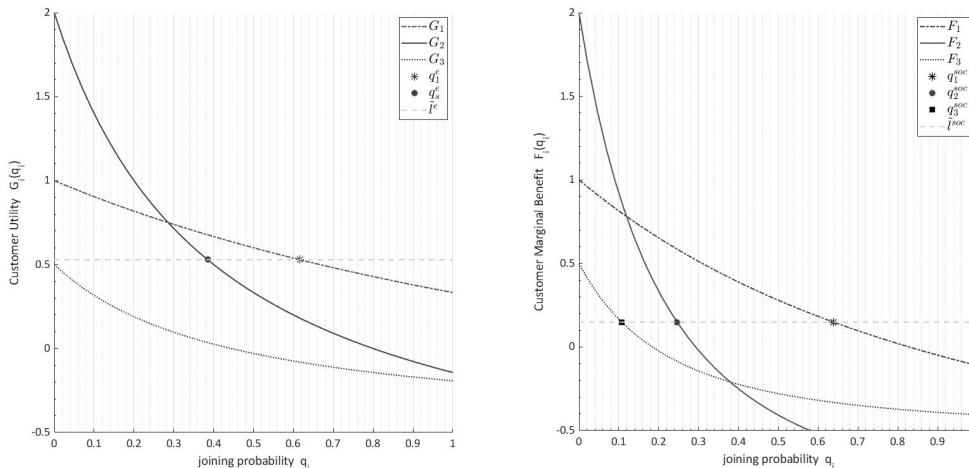
και

$$\tilde{a}_i = F_i(1) = G_i(1) + \frac{\partial G_i(q_i)}{\partial q_i} \Big|_{q_i=1} < a_i,$$

διότι η G_i είναι γν. φθίνουσα συνάρτηση. Ωστόσο, υπάρχει μια κρίσιμη διαφορά: Οι συναρτήσεις $F_i(x)$ μπορεί να μην είναι μονότονες. Σε μια τέτοια περίπτωση δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την προηγούμενη ανάλυση. Ειδικότερα, μπορεί να υπάρχουν πολλαπλά σημεία KKT και επιπλέον, η δομή του διανύσματος που αποδείχθηκε στην προηγούμενη ενότητα, δεν θα ευσταθεί.

Αν οι συναρτήσεις $F_i(x)$ είναι γνησίως φθίνουσες, τότε μπορούμε να προχωρήσουμε στην ανάλυση ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια βήματα με την ανάλυση που προηγήθηκε. Έτσι θα έχουμε το ανάλογο του Θεωρήματος 6.1. Μια ικανή συνθήκη με την οποία εξασφαλίζουμε πως οι συναρτήσεις $F_i(x)$ είναι γνησίως φθίνουσες στο $[0, 1]$ είναι να υποθέσουμε πως οι συναρτήσεις $P_i(x)$ είναι γνησίως κοίλες. Στην περίπτωση αυτή θα μπορούμε να καθορίσουμε τη μοναδική βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης ακολουθώντας τα ίδια βήματα με εκείνα που κάναμε για τη μοναδική στρατηγική ισορροπίας.

Σε όσα ακολουθούν, θα συμβολίζουμε τις σχετικές ποσότητες με soe αντί για e που είχαμε σε εκείνες που αντιστοιχούσαν στην ισορροπία. Στο αριθμητικό παράδειγμα του Σχήματος 6.2 παρουσιάζεται η στρατηγική ισορροπίας αλλά και η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης. Η ιδέα του αλγόριθμου για τον υπολογισμό της στρατηγικής ισορροπίας (και της βέλτιστης πολιτικής) είναι ξεκάθαρη στο σχήμα αυτό: Όταν δεν υπάρχει περίπτωση αποχώρησης κάποιου πελάτη, απεικονίζουμε όλες στις συναρτήσεις μέσης ωφέλειας για τις διάφορες υπηρεσίες μεταφοράς και κατόπιν χαράζουμε μια οριζόντια γραμμή. Τα σημεία τομής της οριζόντιας ευθείας με τις συναρτήσεις μέσης ωφέλειας δίνουν μια υποψήφια στρατηγική ισορροπίας. Το κατάλληλο ύψος για την οριζόντια ευθεία θα είναι εκείνο για το οποίο οι πιθανότητες θα αθροίζονται στη μονάδα και μπορεί να βρεθεί με μια απλή μέθοδο διχοτόμησης λόγω της μονοτονίας των $G_i(q_i)$.



Σχήμα 6.2: Στρατηγική ισορροπίας και βέλτιστη πολιτική στην περίπτωση τριών υπηρεσιών μεταφοράς με εκθετικούς $Exp(\mu_i)$ ενδιαμέσους χρόνους και γεωμετρική $Geo(\xi_i)$ χωρητικότητα για τα μέσα μεταφοράς της υπηρεσίας i . Στο παράδειγμα αυτό, οι οικονομικές παράμετροι είναι $\mu = (2, 2, 4)$, $\xi = (0.1, 0.5, 0.9)$, $r = (2, 3, 1)$, $c = 2$, $\lambda = 10$, $v = 0$.

6.4.2 Σύγκριση της στρατηγικής ισορροπίας με την κοινωνικά βέλτιστη πολιτική

Στην υπό-ενότητα αυτή θα αντιπαραβάλουμε τη στρατηγική ισορροπίας q^e , με την κοινωνικά βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης q^{soc} , με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις $F_i(x)$ είναι γνησίως φθίνουσες. Φυσικά, η κρίσιμη παράμετρος για τη σύγκριση των δύο πολιτικών δρομολόγησης είναι

η διαφορά των $G_i(x)$ και $F_i(x)$. Η πρόταση που ακολουθεί παρουσιάζει διάφορα αποτελέσματα σχετικά με τη σύγκριση αυτή.

Πρόταση 6.6. (Σύγκριση της στρατηγικής ισορροπίας με την βέλτιστη πολιτική) Υποθέτουμε πως οι συναρτήσεις $F_i(x)$ είναι όλες γνησίως φθίνουσες. Τότε,

$$(i) \tilde{l}^e \geq \tilde{l}^{soc}.$$

$$(ii) \text{ Αν } \tilde{l}^e \geq v \text{ τότε } q_0^e = 0. \text{ Αν } \tilde{l}^{soc} \geq v, \text{ τότε } q_0^e = q_0^{soc} = 0.$$

$$(iii) \text{ Αν } v \geq \tilde{l}^e, \text{ τότε } k^e = k^{soc} \text{ και } q_i^e > q_i^{soc} \text{ } i = 1, \dots, k^e.$$

$$(iv) q_0^{soc} \geq q_0^e.$$

$$(v) \text{ Αν } \tilde{l}^e > v \text{ τότε } i^{soc} \geq i^e.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 6.6.1.

Γενικά, τα παραπάνω αποτελέσματα μας δείχνουν πως η στρατηγική ισορροπίας και η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης δεν ταυτίζονται απαραίτητα. Επιπλέον, σύμφωνα με το (i), η ατομική ωφέλεια είναι πάντα μεγαλύτερη από το οριακό κέρδος κάτω από τη βέλτιστη πολιτική. Επίσης, όταν το τελευταίο είναι μεγαλύτερο από την αξία της εναλλακτικής υπηρεσίας, τότε, σύμφωνα με το (ii), όλες οι υπηρεσίες μεταφοράς χρησιμοποιούνται ανεξαρτήτως οποιουδήποτε άλλου σεναρίου. Ακόμη, σύμφωνα με το (iv), οι πελάτες χρησιμοποιούν τις υπηρεσίες μεταφοράς, αντί της εναλλακτικής υπηρεσίας, περισσότερο από ότι είναι κοινωνικά επιθυμητό.

Επίσης, σύμφωνα με το (iii), αν η τιμή της εναλλακτικής υπηρεσίας είναι μεγαλύτερη ή ίση με την ατομική ωφέλεια (κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας), το πλήθος των υπηρεσιών μεταφοράς που θα χρησιμοποιηθούν είτε από μέσω της βέλτιστης πολιτικής είτε μέσω της στρατηγικής ισορροπίας, θα είναι το ίδιο. Ωστόσο, για κάθε υπηρεσία μεταφοράς, ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας θα είναι γνήσια μεγαλύτερος από τον ρυθμό αφίξεων υπό τη βέλτιστη πολιτική. Σε αντίθεση, το (v) μας δείχνει πως στην περίπτωση όπου η αξία της εναλλακτικής υπηρεσίας είναι μικρότερη από την ατομική ωφέλεια (κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας), το πλήθος των ενεργών υπηρεσιών μεταφοράς κάτω από τη βέλτιστη πολιτική, θα είναι το πολύ ίσο με το πλήθος ενεργών υπηρεσιών κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας. Επομένως, σχετικά με το πλήθος ενεργών υπηρεσιών μεταφοράς κάτω από τις δύο επιλογές δρομολόγησης, θα έχουμε γενικά πως $K^e \subset K^{soc}$.

Τέλος, παρατηρούμε πως αν $k^{soc} > k^e$ τότε δεν θα έχουμε απαραίτητα ότι $q_i^e > q_i^s$ για $i \in K^e \cap K^{soc}$. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε έναν σταθμό με 4 υπηρεσίες μεταφοράς, με $X_i \sim Exp(\mu_i)$ και $C_i \sim Geo(\xi_i)$ και με $r = (2.1, 2.1, 2.1, 2.1)$, $\mu = (2, 3, 4, 10)$, $\xi = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$, $v = 0$, θα έχουμε ότι $K^e = \{3, 4\}$ και $K^s = \{2, 3, 4\}$ με $q_3^e = 0.0564 < 0.1047 = q_3^{soc}$ και με $q_4^e = 0.9498 > 0.8496 = q_4^{soc}$.

Η αποτελεσματικότητα της στρατηγικής ισορροπίας σε σχέση με την κοινωνικά βέλτιστη πολιτική μπορεί να ποσοτικοποιηθεί χρησιμοποιώντας την τιμή της Αναρχίας (δείτε για παράδειγμα τα [83] και ([116])), η οποία ορίζεται ως ο λόγος της κοινωνικής ωφέλειας κάτω από την κοινωνικά βέλτιστη πολιτική με την κοινωνική ωφέλεια κάτω από το ΣΣΙ.

$$POA = \frac{S(q^{soc})}{S(q^e)} = \frac{\sum_{k=1}^{N^{soc}} q_k^{soc} G_k(q_k^{soc}) + q_0^{soc} v}{\sum_{k=1}^{N^e} q_k^e G_k(q_k^e) + q_0^e v}, \quad (6.10)$$

όπου $N^e \equiv \min\{i^e, k^e\}$ και $N^{soc} \equiv \min\{i^{soc}, k^{soc}\}$ οι ποσότητες που αντιστοιχούν στο πλήθος των διαφορετικών μεταφορικών μέσων κάτω από το ΣΣΙ και την ΚΒΠ αντίστοιχα.

Παρατηρήσεις

(i) Επειδή $S(q^{soc}) = \max S(q)$, έπεται ότι $POA \geq 1$.

(ii) Όταν $l^{soc} \geq v$ έπεται ότι $q_0^e = q_0^{soc} = 0$ και $N^e = i^e, N^{soc} = i^{soc}$. Τότε,

$$POA = \frac{\sum_{k=1}^{i^{soc}} q_k^{soc} G_k(q_k^{soc})}{l^e}. \quad (6.11)$$

(iii) Όταν $l^e \geq v > l^{soc}$ έπεται ότι $q_0^e = 0, q_0^{soc} > 0$ και $N^e = i^e, N^{soc} = k^{soc}$. Τότε,

$$POA = \frac{\sum_{k=1}^{k^{soc}} q_k^{soc} G_k(q_k^{soc}) + v q_0^{soc}}{l^e}, \quad (6.12)$$

(iv) Όταν $v > l^e$ έπεται ότι $q_{out}^e > 0, q_{out}^{soc} > 0$ και $N^e = k^*, N^{soc} = k^*$. Τότε,

$$POA = \frac{\sum_{k=1}^{k^{soc}} q_k^{soc} G_k(q_k^{soc}) + v q_0^{soc}}{v}. \quad (6.13)$$

Γενικά, όταν η POA είναι κοντά στο 1, σημαίνει πως η ατομικιστική πολιτική (ΣΣΙ) των πελατών είναι κατά προσέγγιση κοινωνικά βέλτιστη και επομένως οι επιπτώσεις της ιδιοτελούς συμπεριφοράς είναι ανεπαίσθητες. Αντιθέτως, υψηλές τιμές της POA υποδεικνύουν, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, ότι η απουσία κάποιας οντότητας που ασκεί την εξουσία οδηγεί σε σημαντική υποβάθμιση της απόδοσης του συστήματος.

6.5 Ειδική εφαρμογή.

Στην ενότητα αυτή θα εφαρμόσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα για την ειδική περίπτωση όπου οι ενδιαμέσοι χρόνοι για όλες τις υπηρεσίες μεταφοράς είναι εκθετικά κατανομημένοι με ίδια παράμετρο ενώ οι διαθέσιμες χωρητικότητες έχουν τη γεωμετρική κατανομή. Ειδικότερα, για τον ενδιαμέσο χρόνο της $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ υπηρεσίας θα είναι $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$ και $C_i \sim \text{Geo}(\xi_i)$. Υποθέτουμε ότι οι υπηρεσίες είναι διατεταγμένες έτσι ώστε $b_1 > b_2 > \dots > b_n$ καθώς και ότι $b_1 > v$. Τότε, σχετικά με τις στρατηγικές δρομολόγησης έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 6.7. (Στρατηγική δρομολόγησης για την περίπτωση εκθετικών ενδιαμέσων χρόνων και γεωμετρικά κατανομημένων διαθέσιμων χωρητικοτήτων)

Ορίζουμε τους αριθμούς $u_i = \sum_{j=1}^i \xi_j^{-1} \left(\frac{r_j}{r_i} - 1 \right)$ για $i = 1, \dots, n$. Τότε, αν $u_{i^*} \leq \frac{\lambda}{\mu} < u_{i^*+1}$, για κάποιο $i^* \in \{1, 2, \dots, n\}$, θα έχουμε ότι:

$$\tilde{q}_i = \frac{1}{\lambda \xi_i} \left(\frac{r_i (\lambda + \mu \sum_{i=1}^{i^*} \xi_i^{-1})}{\sum_{i=1}^{i^*} r_i \xi_i^{-1}} - \mu \right)$$

και

$$\tilde{l} = \frac{\mu \sum_{i=1}^{i^*} r_i \xi_i^{-1}}{\lambda + \mu \sum_{i=1}^{i^*} \xi_i^{-1}} - \frac{c}{\mu},$$

ενώ $\tilde{q}_i = 0$ για $i \in \{i^* + 1, \dots, n\}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Περίπτωση 1: Αν $\frac{\lambda}{\mu} < \frac{\sum_{i=1}^{i^*} r_i \xi_i^{-1}}{\frac{c}{\mu} + v} - \sum_{i=1}^{i^*} \xi_i^{-1}$, τότε

$$\mathbf{q}^e = (0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_{i^*}, 0, \dots, 0).$$

Περίπτωση 2: Αν $\frac{\lambda}{\mu} \geq \frac{\sum_{i=1}^{i^*} r_i \xi_i^{-1}}{\frac{c}{\mu} + v} - \sum_{i=1}^{i^*} \xi_i^{-1}$, τότε

$$\mathbf{q}^e = (0, q_1^*, q_2^*, \dots, q_{i^*}^*, 0, \dots, 0),$$

όπου $q_i^* = G_i^{-1}(v)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 6.6.1.

Αντίστοιχα, για την βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης, κάτω από τις υποθέσεις της ειδικής αυτής εφαρμογής, έχουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα.

Πρόταση 6.8. (Βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης για την περίπτωση εκθετικών ενδιαμέσων χρόνων και γεωμετρικά κατανομημένων διαθέσιμων χωρητικοτήτων)

Ορίζουμε τους αριθμούς $y_i = \sum_{j=1}^k \xi_j^{-1} \left(\sqrt{\frac{r_j}{r_k}} - 1 \right)$ για $i = 1, \dots, n$. Τότε, αν $y_{i^*} \leq \frac{\lambda}{\mu} < y_{i^*+1}$, για κάποιο $i^* \in \{1, 2, \dots, n\}$, θα έχουμε ότι:

$$\tilde{q}_i = \frac{1}{\lambda \xi_i} \left(\frac{\sqrt{r_i} (\lambda + \mu \sum_{i=1}^{i^*} \xi_i^{-1})}{\sum_{i=1}^{i^*} \sqrt{r_i} \xi_i^{-1}} - \mu \right)$$

και

$$\tilde{l} = \frac{\mu \sum_{i=1}^{i^*} \sqrt{r_i} \xi_i^{-1}}{\lambda + \mu \sum_{i=1}^{i^*} \xi_i^{-1}} - \frac{c}{\mu},$$

ενώ $\tilde{q}_i = 0$ για $i \in \{i^* + 1, \dots, n\}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Περίπτωση 1: Αν $\frac{\lambda}{\mu} < \frac{\sum_{i=1}^{i^*} \sqrt{r_i} \xi_i^{-1}}{\frac{c}{\mu} + v} - \sum_{i=1}^{i^*} \xi_i^{-1}$, τότε

$$\mathbf{q}^{soc} = (0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_{i^*}, 0, \dots, 0).$$

Περίπτωση 2: Αν $\frac{\lambda}{\mu} \geq \frac{\sum_{i=1}^{i^*} \sqrt{r_i} \xi_i^{-1}}{\frac{c}{\mu} + v} - \sum_{i=1}^{i^*} \xi_i^{-1}$, τότε

$$\mathbf{q}^{soc} = (0, q_1^*, q_2^*, \dots, q_{k^e}^*, 0, \dots, 0),$$

όπου $q_i^* = F_i^{-1}(v)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 6.6.1.

Παρατηρήστε ότι η διάταξη των \tilde{q}_i , στις παραπάνω δύο προτάσεις εξαρτάται αποκλειστικά από τα ξ_i . Πράγματι, είναι

$$\tilde{q}_i = \frac{d_i}{\xi_i},$$

όπου, $d_i = \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{r_i}{l + \frac{c}{\mu}} - 1 \right)$. Τα (d_i) έχουν φθίνουσα διάταξη καθώς έχουμε υποθέσει ότι τα (b_i) είναι σε φθίνουσα διάταξη και άρα θα είναι και τα (r_i) . Ωστόσο, δεν έχουμε υποθέσει κάποια διάταξη για τα (ξ_j) . Για παράδειγμα, αν οι τυχαίες μεταβλητές $C^{(i)}$ έχουν φθίνουσα διάταξη (σύμφωνα με τη στοχαστική διάταξη 1ης τάξης) τότε τα (\tilde{q}_i) θα έχουν φθίνουσα διάταξη επίσης.

6.6 Προβλήματα μεγιστοποίησης κέρδους μονοπωλίου.

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε ορισμένα προβλήματα τιμολόγησης για τις υπηρεσίες μεταφοράς του σταθμού. Ειδικότερα, υποθέτουμε πως ο διαχειριστής του συστήματος έχει τη δυνατότητα να αποφασίσει για τις τιμές των εισιτηρίων στις διάφορες υπηρεσίες μεταφοράς, στοχεύοντας στην βελτιστοποίηση του κέρδους συνολικά για όλες τις ενεργές υπηρεσίες. Δεδομένου ότι οι πελάτες είναι στρατηγικοί, θα προκύψει ένα παίγνιο δύο σταδίων μεταξύ των πελατών και του διαχειριστή του συστήματος. Στο πρώτο στάδιο, ο διαχειριστής επιλέγει τις τιμές εισιτηρίων για τις διάφορες υπηρεσίες μεταφοράς, ενώ στο δεύτερο στάδιο, οι πελάτες, παρατηρώντας τις τιμές αυτές, αποφασίζουν τη στρατηγική δρομολόγησης τους. Επομένως, η στρατηγική ισορροπία θα αποτελείται από ένα διάνυσμα τιμών $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, και μια στρατηγική των πελατών, $\mathbf{q}(\mathbf{p})$ έτσι ώστε:

(I) Για οποιαδήποτε τιμή \mathbf{p} , η στρατηγική των πελατών $\mathbf{q}(\mathbf{p})$ θα είναι η στρατηγική ισορροπία (δηλαδή θα ικανοποιεί τις συνθήκες $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$).

(II) Το διάνυσμα τιμών \mathbf{p} , μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος $\lambda \sum_{i=1}^n p_i q_i(p_i)$, δεδομένου ότι το διάνυσμα $\mathbf{q}(\mathbf{p}) = (q_1(p_1), q_2(p_2), \dots, q_n(p_n))$ είναι η στρατηγική ισορροπία των πελατών.

Λόγω της τιμολόγησης, η συνάρτηση ωφέλειας των πελατών θα δίνεται από την $\Pi(q_i) = G_i(q_i) - r_i$ ενώ η στρατηγική ισορροπία καθώς και η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης θα τροποποιηθούν κατάλληλα και θα εξαρτώνται πλέον από το διάνυσμα \mathbf{p} . Παρατηρήστε ότι η i συνιστώσα στα διανύσματα αυτά, θα εξαρτάται από το \mathbf{p} μόνο μέσω του p_i . Το αποτέλεσμα του παραπάνω παιγνίου δύο σταδίων δίνεται στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 6.9. (Στρατηγική ισορροπία για το παίγνιο μεταξύ πελατών και διαχειριστή) Στο παίγνιο δύο σταδίων μεταξύ των πελατών και του διαχειριστή του συστήματος, η στρατηγική ισορροπία είναι το διάνυσμα $(\mathbf{p}^e, \mathbf{q}^e(\mathbf{p}))$, όπου $p_i^e = G_i(q_i^{soc}) - v$ και το $q_i^e(p_i)$ δίνεται στο Θεώρημα 6.1.

Απόδειξη. Για δεδομένο q_i , η τιμή του p_i δεν μπορεί να υπερβαίνει την ποσότητα $G_i(q_i) - v$ καθώς τότε ο πελάτης δεν θα επιλέξει το μέσο i . Μάλιστα, ο διαχειριστής δεν έχει συμφέρον να δώσει μικρότερη τιμή από $G_i(q_i) - v$, δηλαδή να αφήσει πλεόνασμα στους πελάτες, καθώς σε αυτή την περίπτωση μπορεί να αυξήσει την τιμή του εισιτηρίου για το i μεταφορικό μέσο χωρίς να μειώνονται οι πελάτες που το επιλέγουν. Επομένως έχουμε το ισοδύναμο πρόβλημα:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{q}}{\text{maximize}} && \lambda \sum_{i=1}^n q_i (G_i(q_i) - v). \\ & \text{υπό} && \sum_{i=1}^n q_i \leq 1 \\ & && q_1 \in (0, 1], \quad q_i \in [0, 1) \end{aligned}$$

Επειδή $\lambda \sum_{i=1}^n q_i (G_i(q_i) - v) = S(\mathbf{q}) - \lambda v$, έχουμε άμεσα ότι η λύση του παραπάνω προβλήματος είναι το διάνυσμα \mathbf{q}^{soc} . Επομένως $p_i^e = G_i(q_i^{soc}) - v$.

6.6.1 Πρόβλημα με περιορισμούς σχετικά με την επιλογή σταθμών.

Στο προηγούμενο πρόβλημα τιμολόγησης υποθέσαμε πως ο διαχειριστής του συστήματος έχει τη δυνατότητα να αποφασίζει για τις τιμές των εισιτηρίων στις διάφορες υπηρεσίες θεωρώντας δεδομένο πως οι υπηρεσίες αυτές είναι όλες διαθέσιμες στους πελάτες. Σε όσα ακολουθούν, θα υποθέσουμε πως ο διαχειριστής του σταθμού έχει τη δυνατότητα να επιλέξει εκ των προτέρων ποιες υπηρεσίες μεταφοράς θα είναι διαθέσιμες για τους πελάτες. Θα προκύψει επομένως ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης του συνολικού κέρδους του σταθμού στο οποίο το ζητούμενο θα είναι η εύρεση του βέλτιστου συνδυασμού μεταξύ των n υπηρεσιών μεταφοράς. Το πρόβλημα αυτό μπορούμε να το γράψουμε και στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{q}}{\text{maximize}} && \lambda \sum_{i=1}^n q_i G_i(q_i). \\ & \text{υπό} && |\{i : q_i \neq 0\}| = M \\ & && \sum_{i=1}^n q_i \leq 1 \\ & && q_1 \in (0, 1], \quad q_i \in [0, 1) \end{aligned} \tag{SP}$$

Προβλήματα της παραπάνω μορφής κατηγοριοποιούνται ως Sparsity Constrained Nonlinear Optimization και μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία που έχει αναπτυχθεί (δείτε π.χ. την εργασία των Beck και Eldar (2013) [11]).

Επίλογος Μέρους III - Συζήτηση και Επεκτάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήθηκε η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σχετικά με τη δρομολόγηση τους σε έναν σταθμό τον οποίο επισκέπτονται τα μεταφορικά μέσα από διάφορες υπηρεσίες μεταφοράς, σύμφωνα με ανεξάρτητες ανανεωτικές διαδικασίες. Ο κύριος στόχος ήταν ο προσδιορισμός της στρατηγικής ισορροπίας των πελατών, της κοινωνικά βέλτιστης πολιτικής δρομολόγησης από την πλευρά ενός κοινωνικού διαχειριστή, καθώς και η σύγκριση μεταξύ τους. Το βασικό μήνυμα που προκύπτει από την ανάλυση που προηγήθηκε είναι πως οι πελάτες, δρώντας με ατομικά κριτήρια, υπερβάλλουν ως προς τη χρήση του σταθμού έναντι εναλλακτικής υπηρεσίας αλλά χρησιμοποιούν λιγότερες υπηρεσίες μεταφοράς από ότι θα ήταν κοινωνικά επιθυμητό. Ένας τρόπος αντιμετώπισης της κατάστασης αυτής θα ήταν επιβληθεί μια ορισμένη τιμή εισόδου στις διάφορες υπηρεσίες μεταφοράς. Τότε, οι πελάτες θα υιοθετήσουν την κοινωνικά βέλτιστη πολιτική ως στρατηγική ισορροπίας.

Φυσικά, η μελέτη αυτή μπορεί να εμπλουτιστεί με επιπλέον ερευνητικά ζητήματα. Για παράδειγμα, σε ορισμένα πραγματικά σενάρια, υπάρχουν πελάτες οι οποίοι παραμένουν «πιστοί» ως προς κάποιες συγκεκριμένες υπηρεσίες μεταφοράς. Αυτούς τους πελάτες θα μπορούσαμε να τους χαρακτηρίσουμε ως μη στρατηγικούς πελάτες που δεν αλλάζουν τις προτιμήσεις τους κάτω από οποιοδήποτε σενάριο. Ένας τρόπος να ενσωματώσουμε τέτοιες περιπτώσεις στο μοντέλο θα ήταν να θεωρήσουμε επιπρόσθετες διαδικασίες Poisson για τη μοντελοποίηση των αφίξεων των πελατών στο σταθμό. Το σταθερό διάνυσμα $\lambda_R = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ μπορεί να αντιπροσωπεύει τους ρυθμούς αφίξεων αυτών των «πιστών» πελατών ενώ οι αφίξεις των στρατηγικών πελατών θα γίνονται μέσω μιας άλλης ανεξάρτητης διαδικασίας Poisson με ρυθμό λ και θα μπορούν να επιλέξουν οποιαδήποτε υπηρεσία μεταφοράς.

Ορισμένες από τις υποθέσεις του μοντέλου είναι σημαντικά δεσμευτικές. Ωστόσο, όπως και σε όλα τα μαθηματικά μοντέλα, συχνά κάνουμε απλοποιήσεις αναζητώντας τη βέλτιστη ισορροπία μεταξύ μαθηματικής επιλυσιμότητας και πιστότητας. Καθώς αυτή η μελέτη αποτελεί την πρώτη προσπάθεια σχετικά με τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε έναν σταθμό μεταφοράς, από τη σκοπιά της Θεωρίας των Ουρών, υιοθετήσαμε σχετικά απλές υποθέσεις. Σε όσα ακολουθούν, γίνεται συζήτηση για αυτές τις υποθέσεις και τις ενδεχόμενες επεκτάσεις ή γενικεύσεις που μπορούμε να έχουμε:

- Σύστημα εκκαθάρισης.

Έχουμε υποθέσει πως οι πελάτες που δεν θα καταφέρουν να επιβιβαστούν, δε θα περιμένουν το επόμενο μεταφορικό μέσο αλλά θα πρέπει να αποχωρήσουν άμεσα αδειάζοντας την πλατφόρμα. Η υπόθεση αυτή είναι ορθή, κατά προσέγγιση, σε πολλές περιπτώσεις σταθμών μεταφοράς. Φυσικά υπάρχουν παθολογικές καταστάσεις που, αν και αδύνατον να συμβούν σε ένα πραγματικό σενάριο, είναι ικανές να παραβιάσουν την υπόθεση αυτή όπως για παράδειγμα όταν ο αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος σε μια αυθαίρετα επιλεγμένη ανανεωτική περίοδο είναι μεγαλύτερος από την αναμενόμενη διάρκεια της ίδιας της περιόδου (λόγω μεγάλης τιμής του συντελεστή μεταβλητότητας (coefficient of variation) των ενδιάμεσων χρόνων). Συγκεκριμένα, η υπόθεση είναι ρεαλιστική στην περίπτωση που οι αναμενόμενοι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι αρκετά μεγάλοι και έχουν μικρή διακύμανση όπως για

παράδειγμα στην περίπτωση απομακρυσμένων σταθμών στους οποίους πραγματοποιούνται ελάχιστα προγραμματισμένα δρομολόγια την ημέρα. Αν αποκλείσουμε την υπόθεση αυτή, τότε η ανάλυση γίνεται εξαιρετικά απαιτητική λόγω του ότι η πιθανότητα ένας πελάτης να εξυπηρετηθεί από την υπηρεσία i θα εξαρτάται πλέον και από τους πελάτες που έχουν φθάσει σε κάποια από τις προηγούμενες ανανεωτικές περιόδους χωρίς να έχουν καταφέρει να επιβιβαστούν, και όχι μόνο από εκείνους που φθάσανε στην τρέχουσα περίοδο. Επιπλέον, για να μοντελοποιηθεί η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να διευρύνουμε τον χώρο των στρατηγικών ώστε να καλύπτει την περίπτωση όπου κάποιοι πελάτες επιλέγουν να εγκαταλείψουν σε κάποια από τις στιγμές επίσκεψης των μέσων μεταφοράς από τις διάφορες υπηρεσίες μεταφοράς.

- Μη παρατηρήσιμο σύστημα.

Η υπόθεση πως το σύστημα είναι μη-παρατηρήσιμο, είναι από τη μια πολύ περιοριστική αλλά από την άλλη αποτελεί μια πολύ συχνή υπόθεση στη βιβλιογραφία των παιγνίων στις ουρές, τουλάχιστον σε ένα πρώτο στάδιο ανάλυσης. Για το λόγο αυτό υιοθετήσαμε την υπόθεση αυτή στην παρούσα μελέτη. Ωστόσο, η θεώρηση περισσότερων επιπέδων πληροφορίας στο μοντέλο αυτό φαίνεται να οδηγεί σε πολύ απαιτητικά προβλήματα. Οι σύγχρονοι σταθμοί μεταφορικών μέσων έχουν τη δυνατότητα να παρέχουν στους πελάτες επιπλέον πληροφόρηση σχετικά με τον χρόνο άφιξης των μέσων μεταφοράς αλλά και του συνωστισμού εντός του σταθμού αλλά και εντός του ίδιου του μεταφορικού μέσου. Αυτή η πληροφορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να εκτιμηθεί η πιθανότητα επιβίβασης στο επόμενο μεταφορικό μέσο ή/και ο μέσος χρόνος αναμονής στον σταθμό. Αν μάλιστα επιτρέψουμε στους πελάτες που έχουν ήδη αποφασίσει ως προς την υπηρεσία μεταφοράς, να επιλέξουν αν θα αποχωρήσουν τελικά κάποια στιγμή, τότε είναι λογικό να υποθέσουμε πως οι πελάτες είτε θα περιμένουν μέχρι να εξυπηρετηθούν (πιθανώς περιμένοντας πολλά μέσα μεταφοράς), ή θα χρειαστεί να πάρουν μια δεύτερη απόφαση (μένουν ή εγκαταλείπουν), κατά τη στιγμή της άφιξης τους στην πλατφόρμα της υπηρεσίας που έχουν επιλέξει και παρατηρώντας τον αριθμό των παρόντων πελατών.

- Ομοιογένεια των πελατών.

μια πτυχή που δεν λήφθηκε υπόψη στην παρούσα μελέτη ήταν η ετερογένεια των πελατών. Υπάρχουν εκείνοι οι πελάτες που επιλέγουν να φθάνουν την τελευταία στιγμή ώστε να μην επιβαρυνθούν από το χρόνο αναμονής και εκείνοι οι πελάτες που θέλουν να διασφαλίσουν με τη μέγιστη βεβαιότητα πως θα υπάρχει θέση στο μέσο μεταφοράς για εκείνους. Επιπλέον, υπάρχουν οι πελάτες που επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν κάποιο συγκεκριμένο είδος μεταφορικού μέσου σε σύγκριση με άλλα. Επομένως, η επέκταση του μοντέλου με ετερογενείς πελάτες ως προς τα r_i και c φαίνεται ενδιαφέρουσα. Ένα τρόπος που θα μπορούσαμε να πραγματοποιήσουμε μια μελέτη στην κατεύθυνση αυτή ώστε να παραμένει μαθηματικά διαχειρίσιμη είναι η εξής: Μπορούμε να θεωρήσουμε πεπερασμένες κλάσεις πελατών όπου κάθε μια θα έχει το δικό της διάνυσμα με τις αξίες r_i που αντιστοιχούν στους πελάτες με διαφορετικές προτιμήσεις σχετικά με τις διάφορες υπηρεσίες μεταφοράς. Το μοναδιαίο κόστος αναμονής θα μπορούσε να ακολουθεί κάποια συνεχή κατανομή, όπως συνηθίζεται σε αντίστοιχες μελέτες στην βιβλιογραφία.

- Πλήρης γνώση των λειτουργικών και των οικονομικών παραμέτρων του μοντέλου.

Στη μελέτη αυτή υποθέσαμε πως οι πελάτες γνωρίζουν ακριβώς τις λειτουργικές και τις οικονομικές παραμέτρους του μοντέλου και επομένως μπορούν να συνάγουν με ακρίβεια την ωφέλεια των άλλων πελατών. Αυτή είναι μια τυπική υπόθεση στη βιβλιογραφία των παιγνίων στις Ουρές, που δικαιολογείται από το γεγονός πως ένα μεγάλο μέρος του πληθυσμού των

πελατών επαναχρησιμοποιεί το σύστημα εξυπηρέτησης επί άοριστον και επομένως αποκτά εύστοχες εκτιμήσεις των διαφόρων παραμέτρων. Ωστόσο, ορισμένες πρόσφατες εργασίες έχουν εισάγει διαδικασίες μάθησης στην περιοχή αυτή και πολλές από τις ιδέες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να χαλαρώσουμε την υπόθεση αυτή στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης.

Παράρτημα

Τεχνικές αποδείξεις για το Κεφάλαιο 6:

Απόδειξη της Πρότασης 6.2 (i) Έστω $q \in (0, 1]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \mathbb{P}(N_{q_i}(A_i) < x)$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και επομένως, αφού $C_i \leq_{st} C_j$, θα είναι και $g(C_i) \leq_{st} g(C_j)$. Άρα $E[g(C_i)] \leq E[g(C_j)]$ και έχουμε τελειώσει, αφού η πιθανότητα επιβίβασης εκφράζεται και ως $P_i(q) = \mathbb{P}(N_{q_i}(A_i) < C_i)$.

(ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \mathbb{P}(N_{q_i}(x) < C_i)$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως, αν $A_i \leq_{st} A_j$, παίρνουμε ότι $g(C_i) \geq_{st} g(C_j)$ και το ζητούμενο έπεται άμεσα. \square

Απόδειξη της Πρότασης 6.3 (i) Αν $q_0^e = 1$, τότε $K^e = \{0\}$ και απο τη $\Sigma 2(ii)$ έχουμε άμεσα ότι $G_i(0) \leq G_0(0) = v = 0$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ από το οποίο έπεται ότι $b_1 \leq v = 0$. Από την άλλη, αν $b_1 \leq v = 0$, τότε οι συνθήκες $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$ ικανοποιούνται από το $K^e = \{0\}$.

(ii) Αν $i^{ef} = 1$, τότε απαραίτητα θα έχουμε ότι $i^* = 1$. Πράγματι, αν $i^* \geq 2$, τότε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του i^{ef} και τη διάταξη των b_i , παίρνουμε ότι $b_1 > b_{i^*} > a_{i^*} > b_{i^{ef}} = b_1$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, $G_1(1) = a_1 > b_i > G_i(q)$ για κάθε $q \in (0, 1]$ και $i \geq 2$. Επίσης, αφού $a_1 > 0$, έπεται ότι $G_1(1) > 0 = v = G_0(0)$ και επομένως η στρατηγική $\mathbf{q}^e = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ είναι στρατηγική ισορροπίας. Για το αντίστροφο, έστω $\mathbf{q}^e = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$. Τότε, $q_1^e = 1$ και $q_i^e = 0$ για $i \neq 1$ και επίσης $G_1(1) > G_i(q)$ για κάθε $i \neq 1$ και $q \in [0, 1]$. Καταλήγουμε ότι $a_1 = G_1(1) > G_0(0) = v = 0$ και $a_1 > G_i(0) = b_i \Rightarrow a_1 > b_i \Rightarrow i^{ef} = 1$. \square

Απόδειξη της Πρότασης 6.4 Υποθέτουμε ότι $q_0^e > 0$, δηλαδή, $0 \in K^e$. Στην περίπτωση αυτή $i^* \in K^e$, και από τη $\Sigma 1$ θα έχουμε ότι $q_{i^*}^e > 0$, $G_{i^*}(q_{i^*}^e) = G_0(q_0^e)$ καθώς και ότι $q_{i^*}^e + q_0^e \leq 1$ από το οποίο έπεται πως $q_{i^*}^e < 1$. Ωστόσο, το ότι $a_{i^*} \geq v = 0$ δείχνει ότι $G_{i^*}(q_{i^*}^e) > G_{i^*}(1) = a_{i^*} \geq 0 = v = G_0(q_0^e)$. Στην περίπτωση που $i^* \notin K^e$, η $\Sigma 2$ θα δώσει ότι $v = G_0(q_0^e) \geq G_{i^*}(0) = b_{i^*} > a_{i^*}$ το οποίο είναι αντίθετο με την υπόθεση. Επομένως $q_0^e = 0$. \square

Απόδειξη της Πρότασης 6.5 Έστω \mathbf{q}^e η στρατηγική ισορροπίας. Υποθέτουμε ότι $q_{\tilde{i}}^e = 0$ για κάποιο $\tilde{i} \in \{2, \dots, n\}$. Οι συναρτήσεις G_i είναι γνησίως φθίνουσες και επομένως, από την (6.2), θα έχουμε ότι $b_{\tilde{i}} \geq b_i > a_i$ για κάθε $i = \tilde{i} + 1, \dots, n$. Στην περίπτωση αυτή

$$G_{\tilde{i}}(0) = b_{\tilde{i}} \geq b_i > G_i(q), \text{ για κάθε } q \in (0, 1] \text{ και για κάθε } i = \tilde{i} + 1, \dots, n.$$

Είναι επομένως σαφές από τις $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$ ότι $q_i^e = 0$ για κάθε $i = \tilde{i} + 1, \dots, n$. Μένει μόνο να δείξουμε ότι $q_{i^{ef}+1} = 0$. Προς την κατεύθυνση αυτή, θα δείξουμε αρχικά πως για τις ποσότητες i^* και i^{ef} , ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $i^{ef} \geq i^*$ και
2. $G_{i^*}(q) \neq G_{i^{ef+1}}(q)$ για κάθε $q \in [0, 1]$.

Για το 1, έστω ότι $i^{ef} < i^*$ ή $i^* \geq i^{ef} + 1$. Τότε θα είναι $b_{i^*} \leq b_{i^{ef+1}}$ λόγω της (6.2). Από την άλλη, από τον ορισμό του i^{ef} θα έχουμε ότι $b_{i^{ef+1}} < a_{i^*}$ και άρα, συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε ότι $b_{i^*} < a_{i^*}$. Αυτό όμως είναι λόγω της μονοτονίας της G .

Για το 2, έστω $q \in [0, 1]$. Από τον ορισμό του i^{ef} έχουμε ότι $b_{i^{ef+1}} < a_{i^*}$ και άρα

$$G_{i^*}(q) \geq G_{i^*}(1) = a_{i^*} > b_{i^{ef+1}} = G_{i^{ef+1}}(0) \geq G_{i^{ef+1}}(q).$$

Επομένως, αν $i^* \in K^e$, τότε χρησιμοποιώντας το 2, παρατηρούμε ότι η συνθήκη $\Sigma 2(ii)$ δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι $i^{ef} + 1 \notin K^e$ και άρα $q_{i^{ef+1}} = 0$. Αν $i^* \notin K^e$, τότε $q_{i^*} = 0$ και επειδή είναι $i^* \leq i^{ef} < i^{ef} + 1$, θα έχουμε ξανά ότι $q_{i^{ef+1}} = 0$. \square

Απόδειξη του Λήμματος 6.1 Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις σχετικά με το αν $i^e < i^{ef}$ ή $i^e = i^{ef}$.

Περίπτωση 1 ($i^e < i^{ef}$). Έχουμε ότι $Q(i^e) < 1$ και $Q(i^e + 1) \geq 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)$ που ορίζεται από την (6.5) στο $[b_{i^e+1}, b_{i^e}]$. Παρατηρούμε ότι $b_{i^e+1} \neq b_{i^e}$. Πράγματι, σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε ότι $G_i(q_{b_{i^e}}) = b_{i^e} = b_{i^e+1} = G_i(q_{b_{i^e+1}}) \Rightarrow q_{b_{i^e}} = q_{b_{i^e+1}}$ για κάθε $i \leq i^e$, από το οποίο θα έπεται πως $1 > Q(i^e) = Q(i^e + 1)$. Το τελευταίο είναι άτοπο καθώς αντιβαίνει στον ορισμό του i^e . Επομένως, η $H(x)$ καλά ορισμένη, συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση ως άθροισμα συνεχών και φθινουσών συναρτήσεων. Επιπλέον,

$$H(b_{i^e+1}) = \sum_{i=1}^{i^e} G_i^{-1}(b_{i^e+1}) - 1 = \sum_{i=1}^{i^e} q_{b_{i^e+1}} - 1 = Q(i^e + 1) - 1 \geq 0 \quad \text{ανδ}$$

$$H(b_{i^e}) = Q(i^e) - 1 < 0.$$

Επομένως η $H(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[b_{i^e+1}, b_{i^e})$ την οποία θα συμβολίσουμε με \tilde{l} . Θέτοντας $\tilde{q}_i = G_i^{-1}(\tilde{l})$ για $i = 1, \dots, i^e$, τα οποία είναι μονοσήμαντα ορισμένα διότι οι $G_i^{-1}(x)$ είναι εξίσου φθίνουσες συναρτήσεις, θα έχουμε ότι η συνθήκη (i) του Λήμματος ισχύει, δηλαδή, $\tilde{q}_i \in (0, 1]$, $i = 1, \dots, i^e$. Πράγματι,

$$\tilde{l} \in [b_{i^e+1}, b_{i^e}) \Rightarrow \tilde{q}_i = G_i^{-1}(\tilde{l}) \in G_i^{-1}([b_{i^e+1}, b_{i^e})) = (q_{b_{i^e}}, q_{b_{i^e+1}}],$$

και $q_{b_{i^e}} \geq 0$, $q_{b_{i^e+1}} \leq 1$ είναι οι λύσεις στο $[0, 1]$ των εξισώσεων $G_i(x) = b_{i^e}$ και $G_i(x) = b_{i^e+1}$ αντίστοιχα.

Παρατηρώντας ότι $H(\tilde{l}) = 0$, επαληθεύονται άμεσα οι συνθήκες (ii) και (iii) του Λήμματος.

Για να αποδείξουμε το (iv), αρκεί να δείξουμε ότι $G_i(\tilde{q}_i) \geq G_{i^e+1}(0) = b_{i^e+1}$. Αυτό όμως είναι άμεσο καθώς $G_i(\tilde{q}_i) = \tilde{l} \geq b_{i^e+1}$ για κάθε $i = 1, \dots, i^e$.

Περίπτωση 2 ($i^e = i^{ef}$). Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $Q(i^e) = Q(i^{ef}) < 1$. Θεωρούμε πάλι τη συνάρτηση $H(x)$ η οποία δίνεται από την (6.5) στο $[a_{i^*}, b_{i^{ef}}]$. Έχουμε ότι $a_{i^*} \neq b_{i^{ef}}$. Σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε ότι $Q(i^e) \geq q_{b_{i^*i^{ef}}} = 1$, διότι το $q_{b_{i^*i^{ef}}}$ είναι η λύση της εξίσωσης $G_{i^*}(x) = b_{i^{ef}} = a_{i^*}$ και άρα $x = 1$. Θέτουμε a_{ii^*} τη μοναδική λύση της εξίσωσης $G_i(x) = a_{i^*}$.

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} H(a_{i^*}) &= \sum_{i=1}^{i^{ef}} G_i^{-1}(a_{i^*}) - 1 = \sum_{i=1}^{i^{ef}} q_{a_{i^*i^*}} - 1 = q_{a_{1i^*}} + \dots + q_{a_{i^*i^*}} + \dots + q_{a_{i^{ef}i^*}} - 1 \\ &= q_{a_{1i^*}} + \dots + q_{a_{i^{ef}i^*}} \geq 0 \quad \text{επειδή } q_{a_{i^*i^*}} = 1 \quad \text{και } i^{ef} \geq i^* \\ H(b_{i^{ef}}) &= \sum_{i=1}^{i^{ef}} G_i^{-1}(b_{i^{ef}}) - 1 = \sum_{i=1}^{i^{ef}} q_{b_{i^{ef}i^{ef}}} - 1 = Q(i^{ef}) - 1 < 0. \end{aligned}$$

Όμοια με την περίπτωση 1, η συνάρτηση $H(x)$ έχει μοναδική ρίζα $\tilde{l} \in [a_{i^*}, b_{i^{ef}}]$. Θέτουμε $\tilde{q}_i = G_i^{-1}(\tilde{l})$ για $i = 1, \dots, i^{ef}$. Τότε, μπορούμε να ελέγξουμε πως οι συνθήκες (i)-(iv) του Λήμματος ικανοποιούνται, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την περίπτωση 1. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1 Περίπτωση 1 ($\tilde{l} \geq 0$): Έστω $i^{ef} \in \{1, \dots, n\}$ και $i^e \in \{1, \dots, i^{ef}\}$, τα οποία δίνονται από τις (6.3) και (6.4) αντίστοιχα. Επίσης, έστω $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_{i^e}$ και \tilde{l} όπως στο Λήμμα 6.1. Αν $\tilde{l} \geq 0 = v$, τότε έχουμε ότι $G_0(0) = v \leq G_i(\tilde{q}_i)$ για κάθε $i \in \{1, \dots, i^e\}$. Συνδυάζοντας το παραπάνω με το αποτέλεσμα του Λήμματος 6.1, είναι σαφές ότι $K^e = \{1, 2, \dots, i^e\}$ καθώς και ότι το $q^e = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{i^e}, 0, \dots, 0)$ είναι στρατηγική ισορροπίας. Η μοναδικότητα της στρατηγικής ισορροπίας εξασφαλίζεται από τη μονοτονία των συναρτήσεων $G_i^{-1}(x)$.

Περίπτωση 2 ($\tilde{l} < 0$): Θεωρούμε την περίπτωση όπου $\tilde{l} < 0 = v$. Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε υποθέσει πως $b_1 > 0 = v$. Έτσι, λόγω της $\tilde{l} \in [b_{i^e+1}, b_{i^e}]$, η τιμή $v = 0$ θα βρίσκεται στη διαμέριση (\tilde{l}, b_1) σε κάποιο από τα διαστήματα $(\tilde{l}, b_{i^e}), [b_{i^e}, b_{i^e-1}), \dots, [b_2, b_1)$ (παρατηρήστε ότι κάποια από αυτά μπορεί να είναι κενά λόγω της ισότητας κάποιων από τα b_i). Από τον ορισμό του k^e , έχουμε ότι $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{k^e} > v$. Επιπλέον, $v > a_{i^*}$, και άρα είναι σαφές πως $v \in \cap_{i=1}^{k^e} (a_i, b_i)$. Από τον ορισμό των q_i^e για $i = 1, \dots, k^e$, θα έχουμε ότι $0 = v = G_1(q_1^e) = \dots = G_{k^e}(q_{k^e}^e)$. Θα δείξουμε ότι $K^e = \{0, 1, 2, \dots, k^e\}$, δηλαδή, το διάνυσμα $q^e = (q_0^e, q_1^e, \dots, q_{k^e}^e, 0, \dots, 0)$ ικανοποιεί τις συνθήκες $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$.

Πράγματι, για $i = 1, \dots, k^e$, έχουμε ότι $b_i > v > \tilde{l} \Rightarrow G_i(0) > G_i(q_i^e) > G_i(\tilde{q}_i)$. Επιπλέον, $0 < q_i^e < \tilde{q}_i$ και $\sum_{i=1}^{k^e} q_i^e < \sum_{i=1}^{i^e} \tilde{q}_i = 1 \Rightarrow q_0^e \in (0, 1)$. Τα $G_i(q_i^e)$ είναι όλα ίσα εξ' ορισμού και $\sum_{i \in K^e} q_i^e = 1$. Τέλος, για κάθε $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \setminus K^e$ έχουμε ότι $q_j^e = 0$ και $G_i(q_i^e) \geq G_j(0)$ για κάθε $i \in K^e$. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.6 Οι συναρτήσεις F_i, F_i^{-1} είναι φθίνουσες και $G_i(q) \geq F_i(q)$ για κάθε $q \in [0, 1]$. Έπεται επομένως ότι $G_i^{-1}(q) \geq F_i^{-1}(q)$ για κάθε $q \in [0, 1]$. Έτσι θα είναι, $H^{soc}(x) \leq H^e(x)$. Από το γεγονός ότι τα \tilde{l}^e και \tilde{l}^{soc} αποτελούν τις μοναδικές λύσεις των εξισώσεων $H^e(x) = 0$ και $H^{soc}(x) = 0$ αντίστοιχα, έπεται ότι $\tilde{l}^e \geq \tilde{l}^{soc}$. Επομένως, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $G_i(q) \geq F_i(q)$, $H^{soc}(x) \leq H^e(x)$ και $\tilde{l}^e \geq \tilde{l}^{soc}$, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε την ορθότητα των (i)-(iv) από την κατασκευή των πιθανοτήτων q_i^e και q_i^{soc} στο Θεώρημα 6.1 - Περίπτωση 1 και του αντίστοιχου Θεωρήματος για την βέλτιστη πολιτική.

Για το (v), θα θέσουμε αρχικά τα $q_{b_{ij}}^G$ και τα $q_{b_{ij}}^F$ ως τις λύσεις των εξισώσεων $G_i(q) = b_j$ και $F_i(q) = b_j$ αντίστοιχα. Θέτουμε επίσης $Q^G(k) = \sum_{i=1}^k q_{b_{ik}}^G$ και $Q^F(k) = \sum_{i=1}^k q_{b_{ik}}^F$. Δεδομένου της $G_i(q) \geq F_i(q)$ για κάθε $q \in [0, 1]$, θα ισχύει ότι $q_{b_{ij}}^G \geq q_{b_{ij}}^F$ για κάθε j . Έπεται ότι $Q^G(k) \geq Q^F(k)$ για κάθε k και παίρνουμε ότι $i^{soc} \geq i^e$. \square

Απόδειξη της Πρότασης 6.7 Όταν $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$ και $C_i \sim \text{Geo}(\xi_i)$, υπολογίζεται εύκολα ότι $G_i(q_i) = r_i \frac{\mu}{\mu + \xi_i \lambda q_i} - \frac{c}{\mu}$. Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα 6.1. Από την $G_i(q_i) = \tilde{l}$ παίρνουμε ότι:

$$q_i \equiv q_i(\tilde{l}) = \max\left\{0, \frac{1}{\lambda \xi_i} \left(\frac{r_i \mu}{\tilde{l} + \frac{c}{\mu}} - \mu \right)\right\},$$

και άρα $q_i(l) > 0 \Leftrightarrow l < r_i - \frac{c}{\mu} = b_i$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι $b_1 > b_2 > \dots > b_N$, έπεται ότι αν $b_i > l$ τότε $b_1, \dots, b_{i-1} > l$.

Εστω $S = \{i : q_i(\tilde{l}) > 0\}$. Τότε το \tilde{l} μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας ότι $\sum_{i \in S} q_i(\tilde{l}) = 1$. Συγκεκριμένα, υπολογίζεται ότι

$$\tilde{l} = \frac{\mu \sum_{i \in S} r_i \xi_i^{-1}}{\lambda + \mu \sum_{i \in S} \xi_i^{-1}} - \frac{c}{\mu}.$$

Για τον υπολογισμό των q_i^e θέτουμε $i^* = \max S$. Τότε, αν $i^* = i$:

$$\begin{aligned} r_{i+1} < l^e + \frac{c}{\mu} \leq r_i &\Leftrightarrow r_{i+1} < \frac{\mu \sum_{j=1}^i r_j \xi_j^{-1}}{\lambda + \mu \sum_{j=1}^i \xi_j^{-1}} \leq r_i \\ \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^i r_j \xi_j^{-1} - \sum_{j=1}^i \xi_j^{-1} &\leq \frac{\lambda}{\mu} < \frac{1}{r_{i+1}} \sum_{j=1}^i r_j \xi_j^{-1} - \sum_{j=1}^i \xi_j^{-1} \\ \sum_{j=1}^i \xi_j^{-1} \left(\frac{r_j}{r_i} - 1 \right) &\leq \frac{\lambda}{\mu} < \sum_{j=1}^i \xi_j^{-1} \left(\frac{r_j}{r_{i+1}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Θέτουμε επομένως $u_i = \sum_{j=1}^i \xi_j^{-1} \left(\frac{r_j}{r_i} - 1 \right)$ και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα με την εφαρμογή του Θεωρήματος 6.1. \square

Απόδειξη της Πρότασης 6.8 Ακολουθούμε τα ίδια ακριβώς βήματα όπως στην περίπτωση του ΣΣΙ, αλλά χρησιμοποιώντας την F αντί για την G , η οποία είναι:

$$F_i(q_i) = r_i \frac{\mu^2}{(\mu + \xi_i \lambda q_i)^2} - \frac{c}{\mu}, \quad i = 1, \dots, n.$$

\square

Βιβλιογραφία

- [1] Adan, I. and van der Wal, J. (1998). Difference and differential equations in stochastic operations research. *Online Notes*, URL: <http://www.win.tue.nl/~iadan>.
- [2] Afimeimounga, H., Solomon, W., and Ziedins, I. (2005). The downs-thomson paradox: existence, uniqueness and stability of user equilibria. *Queueing Systems*, 49(3):321–334.
- [3] Afimeimounga, H., Solomon, W., and Ziedins, I. (2010). User equilibria for a parallel queueing system with state dependent routing. *Queueing Systems*, 66(2):169–193.
- [4] Allon, G., Bassamboo, A., and Gurvich, I. (2011). “we will be right with you”: Managing customer expectations with vague promises and cheap talk. *Operations research*, 59(6):1382–1394.
- [5] Altman, E., Ayesta, U., and Prabhu, B. J. (2011). Load balancing in processor sharing systems. *Telecommunication Systems*, 47(1):35–48.
- [6] Armony, M. and Maglaras, C. (2004). Contact centers with a call-back option and real-time delay information. *Operations research*, 52(4):527–545.
- [7] Arnott, R., De Palma, A., and Lindsey, R. (1993). A structural model of peak-period congestion: A traffic bottleneck with elastic demand. *The American Economic Review*, pages 161–179.
- [8] Arratia, R., Goldstein, L., and Kochman, F. (2019). Size bias for one and all. *Probability Surveys*, 16:1–61.
- [9] Assaf, D. and Haviv, M. (1990). Reneging from processor sharing systems and random queues. *Mathematics of Operations Research*, 15(1):129–138.
- [10] Ayesta, U., Brun, O., and Prabhu, B. J. (2011). Price of anarchy in non-cooperative load balancing games. *Performance Evaluation*, 68(12):1312–1332.
- [11] Beck, A. and Eldar, Y. C. (2013). Sparsity constrained nonlinear optimization: Optimality conditions and algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, 23(3):1480–1509.
- [12] Bell, C. E. and Stidham Jr, S. (1983). Individual versus social optimization in the allocation of customers to alternative servers. *Management Science*, 29(7):831–839.
- [13] Bountali, O. and Economou, A. (2017). Equilibrium joining strategies in batch service queueing systems. *European Journal of Operational Research*, 260(3):1142–1151.
- [14] Bountali, O. and Economou, A. (2019a). Equilibrium threshold joining strategies in partially observable batch service queueing systems. *Annals of Operations Research*, 277(2):231–253.

- [15] Bountali, O. and Economou, A. (2019b). Strategic customer behavior in a two-stage batch processing system. *Queueing Systems*, 93(1):3–29.
- [16] Boxma, O., Kaspi, H., Kella, O., and Perry, D. (2005). On/off storage systems with state-dependent input, output, and switching rates. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 19(1):1–14.
- [17] Boxma, O. J., Perry, D., and Stadjé, W. (2001). Clearing models for m/g/1 queues. *Queueing Systems*, 38(3):287–306.
- [18] Burnetas, A. and Economou, A. (2007). Equilibrium customer strategies in a single server markovian queue with setup times. *Queueing Systems*, 56(3):213–228.
- [19] Burnetas, A., Economou, A., and Vasiliadis, G. (2017). Strategic customer behavior in a queueing system with delayed observations. *Queueing Systems*, 86(3):389–418.
- [20] Calvert, B. (1997). The downs-thomson effect in a markov process. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 11(3):327–340.
- [21] Canbolat, P. G. (2020). Bounded rationality in clearing service systems. *European Journal of Operational Research*, 282(2):614–626.
- [22] Capiński, M. and Kopp, P. E. (2004). *Measure, integral and probability*, volume 14. Springer.
- [23] Carlson, D. A., Haurie, A. B., and Leizarowitz, A. (2012). *Infinite horizon optimal control: deterministic and stochastic systems*. Springer Science & Business Media.
- [24] Chen, H. and Frank, M. (2004). Monopoly pricing when customers queue. *IIE Transactions*, 36(6):569–581.
- [25] Chen, P., Zhou, W., and Zhou, Y. (2015). Equilibrium customer strategies in the queue with threshold policy and setup times. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.
- [26] Cheng, H. K. (1997). Optimal internal pricing and backup capacity of computer systems subject to breakdowns. *Decision support systems*, 19(2):93–108.
- [27] Cheng, H. K. (1999). Pricing and capacity decisions of clustered twin-computer systems subject to breakdowns. *Decision support systems*, 25(1):19–37.
- [28] Cohen, J. E. and Kelly, F. P. (1990). A paradox of congestion in a queueing network. *Journal of Applied Probability*, 27(3):730–734.
- [29] Cui, S. and Veeraraghavan, S. (2016). Blind queues: The impact of consumer beliefs on revenues and congestion. *Management Science*, 62(12):3656–3672.
- [30] Czerny, A. I., Guo, P., and Hassin, R. (2018). Hide or advertise: The carrier’s choice of waiting time information strategies. *Available at SSRN 3282276*.
- [31] Debo, L. and Veeraraghavan, S. (2014). Equilibrium in queues under unknown service times and service value. *Operations Research*, 62(1):38–57.
- [32] Dellaert, N. P. (1991). Due-date setting and production control. *International Journal of Production Economics*, 23(1-3):59–67.

- [33] Di Crescenzo, A., Giorno, V., Nobile, A. G., and Ricciardi, L. M. (2003). On the m/m/1 queue with catastrophes and its continuous approximation. *Queueing Systems*, 43(4):329–347.
- [34] Do, C. T., Hong, C. S., et al. (2012a). Pricing control for hybrid overlay/underlay spectrum access in cognitive radio networks. In *2012 14th Asia-Pacific Network Operations and Management Symposium (APNOMS)*, pages 1–6. IEEE.
- [35] Do, C. T., Tran, N. H., Van Nguyen, M., Hong, C. S., and Lee, S. (2012b). Social optimization strategy in unobserved queueing systems in cognitive radio networks. *IEEE Communications Letters*, 16(12):1944–1947.
- [36] Dubey, P. (1982). Nash equilibria of market games: Finiteness and inefficiency. In *Non-cooperative Approaches to the Theory of Perfect Competition*, pages 249–262. Elsevier.
- [37] Economou, A. (2021). The impact of information structure on strategic behavior in queueing systems. In *(2021) Queueing Theory 2, Advanced Trends*. Wiley/ISTE New York.
- [38] Economou, A. (2022). How much information should be given to the strategic customers of a queueing system? *Queueing Systems*, pages 1–3.
- [39] Economou, A. and Fakinos, D. (2003). A continuous-time markov chain under the influence of a regulating point process and applications in stochastic models with catastrophes. *European Journal of Operational Research*, 149(3):625–640.
- [40] Economou, A. and Fakinos, D. (2008). Alternative approaches for the transient analysis of markov chains with catastrophes. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 2(2):183–197.
- [41] Economou, A., Gómez-Corral, A., and Kanta, S. (2011). Optimal balking strategies in single-server queues with general service and vacation times. *Performance Evaluation*, 68(10):967–982.
- [42] Economou, A. and Kanta, S. (2008a). Equilibrium balking strategies in the observable single-server queue with breakdowns and repairs. *Operations Research Letters*, 36(6):696–699.
- [43] Economou, A. and Kanta, S. (2008b). Optimal balking strategies and pricing for the single server markovian queue with compartmented waiting space. *Queueing Systems*, 59(3):237–269.
- [44] Economou, A., Logothetis, D., and Manou, A. (2022). The value of renegeing for strategic customers in queueing systems with server vacations/failures. *European Journal of Operational Research*.
- [45] Economou, A. and Manou, A. (2013). Equilibrium balking strategies for a clearing queueing system in alternating environment. *Annals of Operations Research*, 208(1):489–514.
- [46] Economou, A. and Manou, A. (2016). Strategic behavior in an observable fluid queue with an alternating service process. *European Journal of Operational Research*, 254(1):148–160.
- [47] Edelson, N. M. and Hilderbrand, D. K. (1975). Congestion tolls for poisson queueing processes. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 81–92.
- [48] Furnham, A., Treglown, L., and Horne, G. (2020). The psychology of queueing. *Psychology*, 11(3):480–498.

- [49] Gautam, N. (2012). Analysis of queues. *CRC Press, LLC, Boca Raton, Florida, United States*, 10:2222496.
- [50] Glazer, A. and Hassin, R. (1987). Equilibrium arrivals in queues with bulk service at scheduled times. *Transportation Science*, 21(4):273–278.
- [51] Govil, M. K. and Fu, M. C. (1999). Queueing theory in manufacturing: A survey. *Journal of manufacturing systems*, 18(3):214–240.
- [52] Grass, D., Caulkins, J. P., Feichtinger, G., Tragler, G., Behrens, D. A., et al. (2008). Optimal control of nonlinear processes. *Berlino: Springer*.
- [53] Grossman Jr, T. A. and Brandeau, M. L. (2002). Optimal pricing for service facilities with self-optimizing customers. *European Journal of Operational Research*, 141(1):39–57.
- [54] Guo, P. and Hassin, R. (2011). Strategic behavior and social optimization in markovian vacation queues. *Operations research*, 59(4):986–997.
- [55] Guo, P. and Hassin, R. (2012). Strategic behavior and social optimization in markovian vacation queues: The case of heterogeneous customers. *European Journal of Operational Research*, 222(2):278–286.
- [56] Guo, P. and Li, Q. (2013). Strategic behavior and social optimization in partially-observable markovian vacation queues. *Operations Research Letters*, 41(3):277–284.
- [57] Guo, P. and Zhang, Z. G. (2013). Strategic queueing behavior and its impact on system performance in service systems with the congestion-based staffing policy. *Manufacturing & Service Operations Management*, 15(1):118–131.
- [58] Guo, P. and Zipkin, P. (2007). Analysis and comparison of queues with different levels of delay information. *Management Science*, 53(6):962–970.
- [59] Guo, P. and Zipkin, P. (2009). The effects of the availability of waiting-time information on a balking queue. *European Journal of Operational Research*, 198(1):199–209.
- [60] Haight, F. A. (1959). Queueing with reneging. *Metrika*, 2(1):186–197.
- [61] Hanson, F. B. and Tuckwell, H. C. (1997). Population growth with randomly distributed jumps. *Journal of Mathematical Biology*, 36(2):169–187.
- [62] Hassin, R. (1986). Consumer information in markets with random product quality: The case of queues and balking. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1185–1195.
- [63] Hassin, R. (2016). *Rational queueing*. CRC press.
- [64] Hassin, R. and Haviv, M. (1995). Equilibrium strategies for queues with impatient customers. *Operations Research Letters*, 17(1):41–45.
- [65] Hassin, R. and Haviv, M. (2003). *To queue or not to queue: Equilibrium behavior in queueing systems*, volume 59. Springer Science & Business Media.
- [66] Hassin, R. and Roet-Green, R. (2017). The impact of inspection cost on equilibrium, revenue, and social welfare in a single-server queue. *Operations Research*, 65(3):804–820.

- [67] Hassin, R. and Roet-Green, R. (2020). On queue-length information when customers travel to a queue. *Manufacturing & Service Operations Management*, 23(4):989–1004.
- [68] Hassin, R. and Snitkovsky, R. I. (2020). Social and monopoly optimization in observable queues. *Operations Research*, 68(4):1178–1198.
- [69] Haviv, M. (2013). When to arrive at a queue with tardiness costs? *Performance evaluation*, 70(6):387–399.
- [70] Haviv, M. and Oz, B. (2016). Regulating an observable m/m/1 queue. *Operations Research Letters*, 44(2):196–198.
- [71] Haviv, M. and Oz, B. (2021). A busy period approach to some queueing games. *Queueing Systems*, 97(3):261–277.
- [72] Haviv, M. and Ritov, Y. (2001). Homogeneous customers renege from invisible queues at random times under deteriorating waiting conditions. *Queueing systems*, 38(4):495–508.
- [73] Hu, M., Li, Y., and Wang, J. (2018). Efficient ignorance: Information heterogeneity in a queue. *Management Science*, 64(6):2650–2671.
- [74] Huang, P., Wang, J., and Fu, L. (2012). Equilibrium balking strategies in the single-server queues with erlangian service and setup times. *LISS*.
- [75] Ibrahim, R. (2018). Sharing delay information in service systems: a literature survey. *Queueing Systems*, 89(1):49–79.
- [76] Ibrahim, R., Armony, M., and Bassamboo, A. (2017). Does the past predict the future? the case of delay announcements in service systems. *Management Science*, 63(6):1762–1780.
- [77] Jackson, J. R. (1957). Networks of waiting lines. *Operations research*, 5(4):518–521.
- [78] Jackson, J. R. (1963). Jobshop-like queueing systems. *Management science*, 10(1):131–142.
- [79] Jagannathan, K., Menache, I., Modiano, E., and Zussman, G. (2012). Non-cooperative spectrum access—the dedicated vs. free spectrum choice. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 30(11):2251–2261.
- [80] Jain, R., Juneja, S., and Shimkin, N. (2011). The concert queueing game: to wait or to be late. *Discrete Event Dynamic Systems*, 21(1):103–138.
- [81] Juneja, S. and Shimkin, N. (2013). The concert queueing game: strategic arrivals with waiting and tardiness costs. *Queueing Systems*, 74(4):369–402.
- [82] Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (2013). *Loss models: Further topics*. John Wiley & Sons.
- [83] Koutsoupias, E. and Papadimitriou, C. (1999). Worst-case equilibria. In *Annual symposium on theoretical aspects of computer science*, pages 404–413. Springer.
- [84] Kulkarni, V. G. (1997). Fluid models for single buffer systems. *Frontiers in queueing: Models and applications in science and engineering*, 321:338.
- [85] Kulkarni, V. G. (2016). *Modeling and analysis of stochastic systems*. Chapman and Hall/CRC.

- [86] Kumar, B. K. and Arivudainambi, D. (2000). Transient solution of an m/m/1 queue with catastrophes. *Computers & Mathematics with applications*, 40(10-11):1233–1240.
- [87] Kyriakidis, E. (1994). Stationary probabilities for a simple immigration-birth-death process under the influence of total catastrophes. *Statistics & Probability Letters*, 20(3):239–240.
- [88] Lakshmi, C. and Iyer, S. A. (2013). Application of queueing theory in health care: A literature review. *Operations research for health care*, 2(1-2):25–39.
- [89] Li, H. and Han, Z. (2011). Socially optimal queueing control in cognitive radio networks subject to service interruptions: To queue or not to queue? *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 10(5):1656–1666.
- [90] Li, X., Wang, J., and Zhang, F. (2014). New results on equilibrium balking strategies in the single-server queue with breakdowns and repairs. *Applied Mathematics and Computation*, 241:380–388.
- [91] Liu, J., Xu, X., Wang, S., and Yue, D. (2021). Equilibrium analysis of the fluid model with two types of parallel customers and breakdowns. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 50(24):5792–5805.
- [92] Liu, Z., Ma, Y., and Zhang, Z. G. (2015). Equilibrium mixed strategies in a discrete-time markovian queue under multiple and single vacation policies. *Quality Technology & Quantitative Management*, 12(3):369–382.
- [93] Logothetis, D. and Economou, A. (2020). The impact of information on transportation systems with strategic customers. *Preprint*.
- [94] Logothetis, D. and Economou, A. (2021). Routing of strategic passengers in a transportation station. In *Performance Engineering and Stochastic Modeling*, pages 308–324. Springer.
- [95] Logothetis, D., Manou, A., and Economou, A. (2022). The impact of reneging on a fluid on-off queue with strategic customers. *Annals of Operations Research*.
- [96] Ma, Y., Liu, W.-q., and Li, J.-h. (2013). Equilibrium balking behavior in the geo/geo/1 queueing system with multiple vacations. *Applied Mathematical Modelling*, 37(6):3861–3878.
- [97] Maglaras, C. (2006). Revenue management for a multiclass single-server queue via a fluid model analysis. *Operations Research*, 54(5):914–932.
- [98] Mandelbaum, A. and Shimkin, N. (2000). A model for rational abandonments from invisible queues. *Queueing Systems*, 36(1):141–173.
- [99] Manou, A., Canbolat, P. G., and Karaesmen, F. (2017). Pricing in a transportation station with strategic customers. *Production and Operations Management*, 26(9):1632–1645.
- [100] Manou, A., Economou, A., and Karaesmen, F. (2014a). Strategic customers in a transportation station: when is it optimal to wait? *Operations Research*, 62(4):910–925.
- [101] Manou, A., Economou, A., and Karaesmen, F. (2014b). Strategic customers in a transportation station: when is it optimal to wait? *Operations Research*, 62(4):910–925.

- [102] Mateus, J. P., Rebelo, P., Rosa, S., Silva, C. M., and Torres, D. F. (2017). Optimal control of non-autonomous seirs models with vaccination and treatment. *arXiv preprint arXiv:1706.06843*.
- [103] Mendelson, H. and Yechiali, U. (1981). Controlling the gi/m/1 queue by conditional acceptance of customers. *European Journal of Operational Research*, 7(1):77–85.
- [104] Naor, P. (1969). The regulation of queue size by levying tolls. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, pages 15–24.
- [105] Nash Jr, J. F. (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the national academy of sciences*, 36(1):48–49.
- [106] Newell, C. (2013). *Applications of queueing theory*, volume 4. Springer Science & Business Media.
- [107] Orda, A., Rom, R., and Shimkin, N. (1993). Competitive routing in multiuser communication networks. *IEEE/ACM Transactions on networking*, 1(5):510–521.
- [108] Peressini, A. L., Sullivan, F. E., and Uhl Jr, J. J. (1988). *The mathematics of nonlinear programming*. Springer-Verlag.
- [109] Pontryagin, L. S. (1987). *Mathematical theory of optimal processes*. CRC press.
- [110] Rajagopal, S., Kulkarni, V. G., and Stidham, S. (1995). Optimal flow control of a stochastic fluid-flow system. *IEEE journal on selected areas in communications*, 13(7):1219–1228.
- [111] Rashid, R., Hoseini, S. F., Gholamian, M., and Feizabadi, M. (2015). Application of queuing theory in production-inventory optimization. *Journal of Industrial Engineering International*, 11(4):485–494.
- [112] Richman, O. and Shimkin, N. (2007). Topological uniqueness of the nash equilibrium for selfish routing with atomic users. *Mathematics of Operations Research*, 32(1):215–232.
- [113] Rosenthal, R. W. (1973). The network equilibrium problem in integers. *Networks*, 3(1):53–59.
- [114] Ross, S. M. (2014). *Introduction to probability models*. Academic press.
- [115] Ross, S. M., Kelly, J. J., Sullivan, R. J., Perry, W. J., Mercer, D., Davis, R. M., Washburn, T. D., Sager, E. V., Boyce, J. B., and Bristow, V. L. (1996). *Stochastic processes*, volume 2. Wiley New York.
- [116] Roughgarden, T. and Tardos, É. (2002). How bad is selfish routing? *Journal of the ACM (JACM)*, 49(2):236–259.
- [117] Rudin, W. et al. (1976). *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York.
- [118] Sánchez-Martínez, G. E., Paget-Seekins, L., Southwick, C. W., and Attanucci, J. P. (2018). Bus load inference and crowding performance evaluation through disaggregate analysis of fare transaction, vehicle location, and passenger count data. *Transportation Research Record*, 2672(8):464–474.

- [119] Schmeidler, D. (1973). Equilibrium points of nonatomic games. *Journal of statistical Physics*, 7(4):295–300.
- [120] Schwartz, M. (1996). *Broadband integrated networks*. Prentice-Hall, Inc.
- [121] Serfozo, R. and Stidham, S. (1978). Semi-stationary clearing processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 6(2):165–178.
- [122] Stanford, D. A., Latouche, G., Woolford, D. G., Boychuk, D., and Hunchak, A. (2005). Erlangized fluid queues with application to uncontrolled fire perimeter. *Stochastic models*, 21(2-3):631–642.
- [123] Starr, D. (2021). Avoid crowded public transportation with google maps’ new features. here is how.
- [124] Stern, L. (1984). Criteria of optimality in the infinite-time optimal control problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 44(3):497–508.
- [125] Stidham Jr, S. (1974). Stochastic clearing systems. *Stochastic Processes and their Applications*, 2(1):85–113.
- [126] Stidham Jr, S. (1977). Cost models for stochastic clearing systems. *Operations Research*, 25(1):100–127.
- [127] Stidham Jr, S. (2009). *Optimal design of queueing systems*. Chapman and Hall/CRC.
- [128] Sun, W., Guo, P., and Tian, N. (2010). Equilibrium threshold strategies in observable queueing systems with setup/closedown times. *Central European Journal of Operations Research*, 18(3):241–268.
- [129] Sun, W. and Li, S. (2014). Equilibrium and optimal behavior of customers in markovian queues with multiple working vacations. *Top*, 22(2):694–715.
- [130] Sun, W., Li, S., and Cheng-Guo, E. (2016). Equilibrium and optimal balking strategies of customers in markovian queues with multiple vacations and n-policy. *Applied Mathematical Modelling*, 40(1):284–301.
- [131] Tholemé, E. (2021). Navigate new normals with google maps.
- [132] Tian, N. and Zhang, Z. G. (2006). *Vacation queueing models: theory and applications*, volume 93. Springer Science & Business Media.
- [133] Tian, R., Yue, D., and Yue, W. (2015). Optimal balking strategies in an m/g/1 queueing system with a removable server under n-policy. *Journal of Industrial & Management Optimization*, 11(3):715.
- [134] Van Mieghem, J. A. (2000). Price and service discrimination in queueing systems: Incentive compatibility of $gc \mu$ scheduling. *Management Science*, 46(9):1249–1267.
- [135] Van Woensel, T. and Vandaele, N. (2007). Modeling traffic flows with queueing models: a review. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 24(04):435–461.
- [136] Veeraraghavan, S. and Debo, L. (2009). Joining longer queues: Information externalities in queue choice. *Manufacturing & Service Operations Management*, 11(4):543–562.

- [137] Veeraraghavan, S. K. and Debo, L. G. (2011). Herding in queues with waiting costs: Rationality and regret. *Manufacturing & Service Operations Management*, 13(3):329–346.
- [138] Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (2007). Theory of games and economic behavior. In *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press.
- [139] Wang, J., Cui, S., and Wang, Z. (2019). Equilibrium strategies in m/m/1 priority queues with balking. *Production and Operations Management*, 28(1):43–62.
- [140] Wang, J. and Hu, M. (2020). Efficient inaccuracy: User-generated information sharing in a queue. *Management Science*, 66(10):4648–4666.
- [141] Wang, J. and Zhang, F. (2011). Equilibrium analysis of the observable queues with balking and delayed repairs. *Applied Mathematics and Computation*, 218(6):2716–2729.
- [142] Wang, P., Chen, X., Zheng, Y., Cheng, L., Wang, Y., and Lei, D. (2021). Providing real-time bus crowding information for passengers: A novel policy to promote high-frequency transit performance. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 148:316–329.
- [143] Wang, S. and Xu, X. (2021). Equilibrium strategies of the fluid queue with working vacation. *Operational Research*, 21(2):1211–1228.
- [144] Wardrop, J. G. (1952). Road paper. some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the institution of civil engineers*, 1(3):325–362.
- [145] Whitt, W. (1981). The stationary distribution of a stochastic clearing process. *Operations Research*, 29(2):294–308.
- [146] Whitt, W. (1986). Deciding which queue to join: Some counterexamples. *Operations research*, 34(1):55–62.
- [147] Wolff, R. W. (1982). Poisson arrivals see time averages. *Operations research*, 30(2):223–231.
- [148] Xu, X.-y., Liu, J., Li, H.-y., and Hu, J.-Q. (2014). Analysis of subway station capacity with the use of queueing theory. *Transportation research part C: emerging technologies*, 38:28–43.
- [149] Yang, B., Hou, Z., and Wu, J. (2018). Analysis of the equilibrium strategies in the geo geo 1 queue with multiple working vacations. *Quality Technology & Quantitative Management*, 15(6):663–685.
- [150] Yang, T., Wang, J., and Zhang, F. (2014). Equilibrium balking strategies in the geo/geo/1 queues with server breakdowns and repairs. *Quality Technology & Quantitative Management*, 11(3):231–243.
- [151] Yechiali, U. (1971). On optimal balking rules and toll charges in the gi/m/1 queuing process. *Operations Research*, 19(2):349–370.
- [152] Yechiali, U. (1972). Customers’ optimal joining rules for the gi/m/s queue. *Management Science*, 18(7):434–443.
- [153] Yu, Q., Allon, G., Bassamboo, A., and Iravani, S. (2018). Managing customer expectations and priorities in service systems. *Management Science*, 64(8):3942–3970.
- [154] Zhang, F., Wang, J., and Liu, B. (2013). Equilibrium balking strategies in markovian queues with working vacations. *Applied Mathematical Modelling*, 37(16-17):8264–8282.