ΤΕΛΕΙΑ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΒΑΣΕΙΣ

ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ

ΚΑΛΟΜΟΙΡΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

Ιούνιος 2022

Πολλά ευχαριστώ στην
ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ : ΦΑΡΜΑΚΗ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

Και στην
ΤΡΙΜΕΛΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:
ΦΑΡΜΑΚΗ ΒΑΣΙΛΙΚΗ
ΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ
ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΟΥ ΜΑΡΙΑ

Εισαγωγή

Σε αυτή την εργασία μέσα από την μελέτη των *Schauder* βάσεων θα μιλήσουμε για τις τέλεια ομογενείς (*Schauder*) βάσεις. Θα δούμε με ποιους χώρους *Banach* έχουν σχέση, ποια είναι αυτή η σχέση, καθώς και ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα που προκύπτει συνδυάζοντας τη παραπάνω μελέτη με άλλα θεωρήματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Τα πρώτα τρία κεφάλαια είναι εισαγωγικά καθώς πριν πάμε στην τέλεια ομοιογένεια πρέπει να γνωρίσουμε τις *Schauder*-βάσεις και τις *Schauder*-βασικές ακολουθίες. Επιπλέον θα μιλήσουμε για τις μπλοκ-υπακολουθίες και την άνευ-όρων σύγκλιση. Τα δύο τελευταία κεφάλαια αφορούν τις τέλεια ομογενείς βάσεις και μια βασική εφαρμογή στους χώρους l_p (και c_0).

Ο αναγνώστης αναμένεται να είναι ήδη εξοικειωμένος με τα βασικά στοιχεία της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Θα χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες των δυϊκών χώρων, της νόρμας τους και συνήθεις συμβολισμούς όπως το στήριγμα ενός συνόλου A ($\operatorname{supp} A$) και του προσήμου ενός πραγματικού αριθμού α ($\operatorname{sign}(a)$). Ευρύτατα θα χρησιμοποιήσουμε τους χώρους c_0 και l_p καθώς και τα κυριότερα θεωρήματα της θεωρίας. Μεταξύ άλλων και τα : Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος, Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος και Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνεται ο ορισμός της *Schauder* βάσης, καθώς και οι υπόλοιποι βασικότεροι ορισμοί που έπονται από αυτόν, όπως ακολουθία κανονικών προβολών, διορθογώνια συνατρησοειδή, σταθερά βάσης κ.α. Μαζί με αυτά φυσικά θα δούμε και διάφορα λήμματα και προτάσεις που κάνουν την αναζήτηση *Schauder*-βάσεων ευκολότερη στα επόμενα κεφάλαια. Το τελευταίο Θεώρημα του πρώτου κεφαλαίου αποδείχθηκε από τον *Barry Mazur* και μας δίνει ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος *Banach* έχει *Schauder*-βασική ακολουθία.

Το δεύτερο κεφάλαιο ασχολείται με την ισοδυναμία *Schauder*-βασικών ακολουθιών και με μπλοκ-βασικές υπακολουθίες αυτών. Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου έχουμε τους ορισμούς της ισοδυναμίας και της συμφωνίας (*congruent*) *Schauder*-βασικών ακολουθιών και την Αρχή των Μικρών Διαταράξεων (Principle of Small Pertrubations). Ακολουθεί η μελέτη των μπλοκ-υπακολουθιών όπου θα δούμε ότι κάθε μπλοκ

-υπακολουθία *Schauder*-βασικής ακολουθίας είναι και η ίδια *Schauder*-βασική. Κλείνουμε το κεφάλαιο με την Αρχή Επιλογών των *Bessaga- Pelczynski* (Bessaga-Pelczynski Sellection Principle) που αποδεικνύεται με το επιχείρημα ολισθαίνων λόφων (gliding hump argument).

Στο τρίτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την άνευ-όρων (*unconditional*) σύγκλιση σειρών, τις άνευ-όρων βάσεις και άνευ-όρων βασικές ακολουθίες καθώς και τις ασθενώς άνευ-όρων *Cauchy* (*Weakly Unconditionally Cauchy* - *WUC*) σειρές. Τα παραπάνω αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι των τέλεια ομογενών βάσεων οι οποίες είναι άνευ-όρων βάσεις σχεδόν εξ' ορισμού. Αυτό προέρχεται από ένα βασικό λήμμα που αφορά τις άνευ-όρων βάσεις το οποίο θα δούμε. Ακόμη θα μιλήσουμε για τις συνήθεις βάσεις των χώρων l_p και c_0 οι οποίες είναι άνευ-ορων, αλλά θα εξετάσουμε και αν είναι και οι μοναδικές (ως προς ισομορφισμό) άνευ-όρων βάσεις τους.

Στη συνέχεια ακολουθεί το τέταρτο και κυριότερο κεφάλαιο στο οποίο αρχικά δίνεται ο ορισμός μιας τέλεια ομογενής βάσης. ακολουθεί μια σειρά από λήμματα, μερικά καθαρά τεχνικά, προκειμένου να εξασφαλίσουμε τα απαραίτητα 'όπλα' για να αποδείξουμε το θεώρημα που απέδειξέ ο *M.Zippin* το 1966, στο *Israel Journal of Mathematics*. Το θεώρημα αυτό στην ουσία έκλεισε την μελέτη των τέλεια ομογενών βάσεων καθώς δείχνει ότι οι κανονικοποιημένες, τέλεια ομογενείς βάσεις είναι οι βάσεις των χώρων l_p και c_0 και μόνο αυτές.

Τέλος, συνδυάζοντας γνώσεις από τις συμμετρικές βάσεις και την Τεχνική διάσπασης του *Pelczynski* με το παραπάνω αποτέλεσμα οι J.Lindenstrauss και M.Zippin απέδειξαν ένα πολύ ενδιαφέρον θεώρημα. Σύμφωνα με αυτό οι χώροι c_0, l_1 και l_2 είναι οι μοναδικοί χώροι *Banach* που έχουν μοναδική άνευ-όρων βάση.

Περιεχόμενα

1 Schauder Βάσεις

Στα πρώτα κεφάλαια θα δούμε όλα όσα χρειαζόμαστε πριν προχωρήσουμε στη μελέτη του κεντρικου θέματος και στις συνέπειές του. Εδώ θα μιλήσουμε αρχικά μόνο για χώρους με νόρμα ωστόσο τα περισσότερα ισχύουν και για χώρους Banach, όπως θα δούμε. Ας ξεκινήσουμε με τους βασικούς ορισμούς της κλασικής συναρτησιακής ανάλυσης.

Ορισμός 1.1. *Έστω X χώρος με νόρμα. Μια ακολουθία $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ στοιχείων του X καλείται* ***βάση Schauder*** *του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε :*

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \beta_\nu$$

Από τον ορισμό μπορούμε να παρατηρήσουμε άμεσα αρκετά ενδιαφέροντα πράγματα. Κατ᾽ αρχάς η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη λόγο της μοναδικότητας. Επιπλέον ένας χώρος με νόρμα (η ειδικότερα ένας χώρος Banach) που έχει Schauder βάση είναι και διαχωρίσιμος καθώς θα έχει αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο ($D = \{\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i \beta_i : \nu \in \mathbb{N}, \xi_i \in \mathbb{Q}, \forall i\}$). Το αντίστροφο δεν ισχύει. Ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει αντιπαραδείγματα σε χώρους που δεν έχουν την Approximation property. Τέλος:

Παρατήρηση. *Αν $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ Schauder βάση ενός χώρου με νόρμα X, τότε και η $(\lambda_\nu \beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι Schauder βάση του X για κάθε επιλογή ακολουθίας πραγματικών $(\lambda_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$. Γενικότερα μπορούμε να αντικαταστήσουμε οποιοδήποτε στοιχείο β_μ της $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ με το στοιχείο από την $\langle \beta_\mu \rangle$ που μας χρειάζεται.*

Το παραπάνω χρησιμοποιείται πολλές φορές χωρίς να γίνει ιδιαίτερη αναφορά. Το ίδιο ισχύει επίσης και για την σύγκλιση της σειράς του ορισμού αν αφαιρέσουμε πεπερασμένους αρχικούς όρους. Τότε θα είναι $\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} a_\nu \beta_\nu \in X$ η οποία θα συγκλίνει στον Χ αλλά σε διαφορετικό ενδεχομένως όριο.

Για την περαιτέρω μελέτη των *Schauder* βάσεων θα χρειαστούμε τις κανονικές προβολές:

Ορισμός 1.2. *Έστω $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ Schauder βάση ενός χώρου με νόρμα X. Ορίζουμε $\Pi_\nu : X \to \langle(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\nu}\rangle$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με:*

$$\Pi_\nu\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\beta_i\right) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_i$$

Η $(\Pi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ καλείται ***ακολουθία κανονικών προβολών που αντιστοιχεί στην Schauder βάση*** *$(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ (ακπα της $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$).*

Παρατήρηση. *Από τον ορισμό μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής:*
- *Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ η απεικόνιση $\Pi_\nu : X \to X$ είναι γραμμική προβολή επί του $\langle(\beta_i)_{i=1}^{\nu}\rangle$*
- $\forall \nu, \mu \in \mathbb{N}$ *είναι* $\Pi_\nu \circ \Pi_\mu = \Pi_\mu \circ \Pi_\nu = \Pi_{\min(\nu,\mu)}$
- $\forall \nu \in \mathbb{N}, \dim \Pi_\nu[X] = \nu$
- $\forall x \in X, \Pi_\nu(x) \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} x$
- $\forall \nu \in \mathbb{N},\ \beta_\nu \in \Pi_\nu[X] \cap \ker \Pi_{\nu-1}$

Το τελευταίο οφείλεται στο γεγονός ότι αν δούμε το στοιχείο β_ν σαν στοιχείο του X και το γράψουμε στην μορφή $\beta_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\beta_i$, λόγο της μοναδικότητας θα είναι $a_i = 0, \forall i \in \mathbb{N} - \{\nu\}$ και $a_\nu = 1$. Τότε $\Pi_\nu(\beta_\nu) = \beta_\nu$ και $\Pi_{\nu-1}(\beta_\nu) = 0$.

Λήμμα 1.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και $(\Pi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία φραγμένων προβολών από τον X στον εαυτό του, τέτοια ώστε:*
α) $\forall \nu \in \mathbb{N}, \dim \Pi_\nu[X] = \nu$
β) $\forall \nu, \mu \in \mathbb{N}, \Pi_\nu \circ \Pi_\mu = \Pi_\mu \circ \Pi_\nu = \Pi_{\min(\nu,\mu)}$
γ) $\forall x \in X, \Pi_\nu(x) \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} x$

Τότε κάθε επιλογή $\beta_\nu \in \Pi_\nu[X] \cap \ker \Pi_{\nu-1}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν (με $\beta_\nu \neq 0$), αποτελεί Schauder βάση του X για την οποία η ακολουθία $(\Pi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι η ακπα στην $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$.

Απόδειξη. Αρχικά θέτουμε $\Pi_0 : X \to X$ με $\Pi_0(x) = 0, \forall x \in X$. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ απο το (β) έχουμε ότι $\Pi_\nu \circ \Pi_{\nu-1} = \Pi_{\nu-1} \circ \Pi_\nu = \Pi_{\nu-1}$ και άρα είναι $\Pi_{\nu-1}[X] \hookrightarrow \Pi_\nu[X]$ και $\ker \Pi_\nu \hookrightarrow \ker \Pi_{\nu-1}$ (το $\hookrightarrow$ δηλώνει ''είναι υπόχωρος του''), που σημαίνει ότι $\dim(\Pi_{\nu-1}[X] \cap \ker \Pi_{\nu-1}) = 1$. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $\beta_\nu \in \Pi_\nu[X] \cap \ker \Pi_{\nu-1}$ τυχαίο και μη-μηδενικό. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι Schauder βάση του X.

Έστω $x \in X$. Τότε $\forall \nu \in \mathbb{N}$ είναι:

$$\Pi_\nu(x) - \Pi_{\nu-1}(x) \in \Pi_\nu[X] \cap \ker \Pi_{\nu-1} = \langle \beta_\nu \rangle$$

και άρα υπάρχει (μοναδικό) $a_\nu \in \mathbb{R}$ με $\Pi_\nu(x) - \Pi_{\nu-1}(x) = a_\nu\beta_\nu$. Επιπλέον:

$$\Pi_\nu(x) = \Pi_\nu(x) - \Pi_0(x) = \sum_{i=1}^{\nu}(\Pi_i(x) - \Pi_{i-1}(x)) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_i$$

και από το (γ) έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\beta_i = \lim_{\nu\to\infty}\sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_i = \lim_{\nu\to\infty}\Pi_\nu(x) = x$$

Δείξαμε δηλαδή ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ με $x = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\beta_\nu$. Μένει η μοναδικότητα για την οποία αρκεί να αποδείξουμε ότι το 0 έχει μοναδική αναπαράσταση. Προφανώς είναι $\sum_{\nu=1}^{\infty} 0\cdot\beta_\nu = 0$ (δηλαδή $a_\nu = 0, \forall\nu \in \mathbb{N}$). Έστω ακολουθία πραγματικών $(a_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ με $0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\beta_\nu$ και ας σταθεροποιήσουμε ένα $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

I) Η $\Pi_\nu : X \to X$ είναι γραμμική και φραγμένη.
II) $\forall i > \nu, \beta_i \in \ker\Pi_{i-1} \hookrightarrow \ker\Pi_\nu \Rightarrow \Pi_\nu(\beta_i) = 0$.
III) $\forall i \leq \nu, \beta_i \in \Pi_i[X] \hookrightarrow \Pi_\nu[X] \Rightarrow \Pi_\nu(\beta_i) = \beta_i$.
IV) Τα β_i είναι εξ' ορισμού γραμμικά ανεξάρτητα.

Άρα η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ αποτελεί Schauder βάση του X καθώς:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(I)}{=} \Pi_\nu(0) = \Pi_\nu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\beta_i\Big) \overset{(I)}{=} \lim_{\nu\to\infty}\sum_{i=1}^{\nu} a_i\Pi_\nu(\beta_i) \overset{(II)}{=} \sum_{i=1}^{\nu} a_i\Pi_\nu(\beta_i) \\ &\overset{(III)}{=} \sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_i \overset{(IV)}{\Rightarrow} a_1 = a_2 = \cdots = a_\nu = 0 \end{aligned}$$

Τέλος έστω $x \in X, (a_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ με $x = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\beta_\nu$. Τότε $\forall\nu \in \mathbb{N}$, είναι $\Pi_\nu(x) - \Pi_{\nu-1}(x) = a_\nu\beta_\nu$ και άρα

$$\Pi_\nu(x) = \sum_{i=1}^{\nu}\Big(\Pi_i(x) - \Pi_{i-1}(x)\Big) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_i$$

Που σημαίνει ότι η $(\Pi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι ακπα στην $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$. □

Το παραπάνω λήμμα είναι αρκετά τεχνικό και λόγο αυτού αργότερα θα δούμε ένα πιο εύχρηστο σε αποδείξεις, το οποίο θα μας δίνει και επιπλέον στοιχεία πέρα από την ύπαρξη Schauder βάσης. Πριν από αυτό όμως θα μελετήσουμε τις κανονικές προβολές σχετικά με το αν είναι ομοιόμορφα φραγμένες σε χώρους με νόρμα ή χώρους Banach.

Λήμμα 1.2. *Έστω X χώρος με νόρμα και $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ Schauder βάση. Υποθέτουμε ακόμη ότι οι κανονικές προβολές $(\Pi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ που αντιστοιχούν στην $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Τότε η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι Schauder βάση για την πλήρωση $\overline{X}$ του X.*

Απόδειξη. Ας είναι $\overline{\Pi}_\nu : \overline{X} \to \overline{X}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ η μοναδική γραμμική και φραγμένη επέκταση της Π_ν. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 1.1

α) Αρκεί να δείξουμε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ότι $\overline{\Pi}_\nu[\overline{X}] = \Pi_\nu[X]$. Έστω λοιπόν ένα $\nu \in \mathbb{N}$. Είναι άμεσο ότι $\overline{\Pi}_\nu[\overline{X}] \subseteq \Pi_\nu[X]$. Για το αντίστροφο έστω $y \in \overline{\Pi}_\nu[\overline{X}]$. Τότε υπάρχει

$\overline{x} \in \overline{X}$ με $\overline{\Pi}_\nu[\overline{x}] = y$ και ακολουθία $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ στοιχείων του X με $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \overline{x}$. Άρα θα έχουμε ότι:

$$\Pi_\nu(x_k) = \overline{\Pi}_\nu(x_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\Pi}_\nu(\overline{x}) = y$$

Όμως η ακολουθία $(\Pi_\nu(x_k))_{k=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία στον $\Pi_\nu[X]$, ο οποίος ως υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης είναι πλήρης και άρα και κλειστός, και άρα $y \in \Pi_\nu[X]$. Οπότε έχουμε ότι $\Pi_\nu[X] \subseteq \overline{\Pi}_\nu[\overline{X}]$ και άρα $\overline{\Pi}_\nu[\overline{X}] = \Pi_\nu[X]$ που μας δίνει ότι $\dim \overline{\Pi}_\nu[\overline{X}] = \nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

β)Έστω τώρα $\nu, \mu \in \mathbb{N}, \overline{x} \in \overline{X}$ και $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία στοιχείων του X με $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \overline{x}$. Τότε είναι:

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_\nu \circ \overline{\Pi}_\mu(\overline{x}) &= \lim_{k\to\infty} \overline{\Pi}_\nu \circ \overline{\Pi}_\mu(x_k) = \lim_{k\to\infty} \Pi_\nu \circ \Pi_\mu(x_k) = \\ &= \begin{cases} = \lim_{k\to\infty} \Pi_\mu \circ \Pi_\nu(x_k) = \overline{\Pi}_\mu \circ \overline{\Pi}\nu(x) & \textit{και} \\ = \lim_{k\to\infty} \Pi_{\min(\nu,\mu)}(x_k) = \overline{\Pi}_{\min(\nu,\mu)}(\overline{x}) \end{cases} \end{aligned}$$

Δηλαδή είναι $\overline{\Pi}_\nu \circ \overline{\Pi}_\mu = \overline{\Pi}_\mu \circ \overline{\Pi}_\nu = \overline{\Pi}_{\min(\nu,\mu)}, \;\; \forall \nu, \mu \in \mathbb{N}$.

γ)Έστω $\overline{x} \in \overline{X}, \epsilon > 0, M = \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \|\Pi_\nu\|$ και $x \in X$ τέτοιο ώστε:

$$\|x - \overline{x}\| < \frac{\epsilon}{3M}$$

Παρατηρήστε ότι αφού οι $(\Pi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι προβολές είναι $\|\Pi_\nu\| \geq 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$, άρα $M = \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \|\Pi_\nu\| = \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \|\overline{\Pi}_\nu\| \geq 1$ και αφού είναι ομοιόμορφα φραγμένες $M < \infty$. Επιπλέον έχουμε ότι $\Pi_\nu(x) \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} x$ που μας δίνει ότι:

$$\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \tau.\omega. \; \forall \nu \geq \nu_0 : \|\Pi_\nu(x) - x\| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Θα χρειαστούμε τέλος ότι $\Pi_\nu(x) = \overline{\Pi}(x)$ και τότε:

$$\begin{array}{llll} \|\overline{x} - \overline{\Pi}(\overline{x})\| & \leq \|\overline{x} - x\| & +\|x - \Pi_n(x)\| & +\|\Pi_\nu(x) - \overline{\Pi}(\overline{x}) \\ & < \epsilon/3 & +\epsilon/3 & +\|\overline{\Pi}_\nu\|\|x - \overline{x}\| \\ & < \epsilon/3 & +\epsilon/3 & +M\dfrac{\epsilon}{3M} \\ & = \epsilon & & \end{array}$$

Άρα από το λήμμα 1.1 μπορούμε να κατασκευάσουμε βάση Schauder του $\overline{X}$. Μάλιστα καθώς $\beta_\nu \in \overline{\Pi}_\nu[\overline{X}] \cap \ker \overline{\Pi}_{\nu-1}$ μπορούμε να επιλέξουμε το στοιχείο $\beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Άρα η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ αποτελεί βάση Schauder του $\overline{X}$. □

Το παρακάτω θεώρημα οφείλεται στον Banach και είναι βασικό για να προχωρήσουμε στους επόμενους ορισμούς. Η απόδειξή του δεν θα γίνει εδώ καθώς ξεφεύγει αρκετά από το θέμα μας αλλά ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην βιβλιογραφία ([4]).

Θεώρημα 1.3 (S.Banach)**.** *Έστω X χώρος Banach με Schauder βάση. Τότε οι κανονικές προβολές που αντιστοιχούν στη βάση είναι ομοιόμορφα φραγμένες.*

Ορισμός 1.3. *Έστω X χώρος Banach με Schauder βάση* $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *και* $(\Pi_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *η ακολουθία κανονικών προβολών που αντιστοιχεί στη βάση. Τότε ορίζουμε ως* ***σταθερά βάσης*** *της* $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *το:*

$$\mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty) = \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \|\Pi_\nu\|$$

Ορισμός 1.4. *Άν* $\mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty) = 1$*, τότε η βάση* $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *καλείται* ***μονότονη****.*

Ορισμός 1.5. *Άν* $\|\beta_\nu\| = 1, \forall\nu \in \mathbb{N}$ *τότε η βάση* $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *καλείται* ***νορμαρισμένη*** *ή* ***κανονικοποιημένη****.*

Ορισμός 1.6. *Έστω X χώρος Banach και* $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *ακολουθία στον X. Η* $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *καλείται* ***Schauder βασική****, αν είναι Schauder βάση του χώρου* $\overline{\langle(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty\rangle}$*.*

Η επόμενη πρόταση είναι πολύ χρήσιμη για τον έλεγχο ακολουθιών ως προς το αν είναι *Schauder* βασικές.

Πρόταση 1.4. *Έστω X χώρος Banach και* $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *ακολουθία στον X. Η* $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *είναι Scauder βασική αν και μόνον αν υπάρχει σταθερά* $K > 0$ *τέτοια ώστε* $\forall\nu, \mu \in \mathbb{N}$ *με* $\nu \le \mu$ *και* $\forall a_1, a_2, ..., a_\mu \in \mathbb{R}$ *να ισχύει ότι:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_i\right\| \le K\left\|\sum_{i=1}^{\mu} a_i\beta_i\right\|$$

Και επιπλέον ισχύει ότι:

$$\mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty) = \inf\left\{K > 0 : \begin{array}{c} \forall\nu, \mu \in \mathbb{N}, \nu \le \mu, \forall a_1, ...a_\mu \in \mathbb{R}, \\ \left\|\sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_i\right\| \le K\left\|\sum_{i=1}^{\mu} a_i\beta_i\right\| \end{array}\right\}$$

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ είναι Schauder βασική. Θέτουμε

$$Z = \langle(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty\rangle \text{ και } Y = \overline{\langle(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty\rangle}$$

.

Τότε η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ αποτελεί Schauder βάση του Y και άρα από το Θεώρημα Banach η ακολουθία κανονικών προβολών της είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Ας είναι λοιπόν:

$$(\Pi_\nu)_{\nu=1}^\infty \;\; \textit{με} \;\; \Pi_\nu : Y \to Y \;\; \textit{και} \;\; K = \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \|\Pi_\nu\|$$

Λόγω της γραμμικότητας και της συνέχειας των προβολών αρκεί να ελέγξουμε την ζητούμενη ιδιότητα για τα στοιχεία του Z. Έστω λοιπόν $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, ..., a_\mu \in \mathbb{R}$. Τότε $x = \sum_{i=1}^{\mu} a_i\beta_i \in Z$ και άρα:

$$\|\Pi_\nu(x)\| \le K\|x\| \Leftrightarrow \left\|\sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_i\right\| \le K\left\|\sum_{i=1}^{\mu} a_i\beta_i\right\|$$

Για το αντίστροφο, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ και για κάθε $z \in Z$ με $z = \sum_{i=1}^{\mu} a_i\beta_i$, ορίζουμε:

$$\Pi_\nu : Z \to Z, \quad \Pi_\nu(z) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_i$$

Τότε προφανώς είναι $\|\Pi_\nu\| \leq K, \forall \nu \in \mathbb{N}$ από την υπόθεση που σημαίνει ότι οι Π_ν είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Επίσης άμεσα από τον ορισμό των Π_ν έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}
&\alpha)\Pi_\nu[Z] = \langle \beta_1, \beta_2, ...\beta_\nu \rangle, \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \dim \Pi_\nu[Z] = \nu \\
&\beta)\forall \nu.\mu \in \mathbb{N}, \ \Pi_\nu \circ \Pi_\mu = \Pi_\mu \circ \Pi_\nu = \Pi_{\min(\nu.\mu)} \\
&\gamma)\forall \nu, \mu \in \mathbb{N} \ \mu\epsilon \ \nu \geq \mu \ \ \Pi_\nu(z) = z \Rightarrow \Pi_\nu(z) \xrightarrow{\nu\to\infty} z \\
&\kappa\alpha\iota \ \ \forall \nu \in \mathbb{N}, \beta_\nu \in \Pi_\nu[Z] \cap \ker \Pi_{\nu-1}
\end{aligned}$$

Άρα από το Λήμμα 1.1 η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ αποτελεί Schauder βάση για τον Z με ακολουθία κανονικών προβολών την $(\Pi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ που ορίσαμε. Όμως οι Π_ν είναι ομοιόμορφα φραγμένες και άρα από το Λήμμα 1.2 η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι Schauder βάση για τον Y και άρα είναι Schauder βασική. Τέλος ας είναι:

$$A = \left\{ K > 0 : \begin{array}{c} \forall \nu, \mu \in \mathbb{N}, \nu \leq \mu, \forall a_1, ...a_\mu \in \mathbb{R}, \\ \left\| \sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{\mu} a_i\beta_i \right\| \end{array} \right\}$$

Προφανώς $\mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}) = \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \|\Pi_\nu\| \leq \inf A$. Έστω ότι $\mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}) < \inf A$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\sup_{\nu\in\mathbb{N}} \|\Pi_\nu\| \leq \inf A - \epsilon$, το οποίο είναι αδύνατο καθώς τότε θα ισχύει:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_i \right\| \leq (\inf A - \epsilon) \left\| \sum_{i=1}^{\mu} a_i\beta_i \right\| \Rightarrow (\inf A - \epsilon) \in A$$

Άτοπο. □

Τα διορθογώνια συναρτησοειδή μιας *Schauder* βασης είναι ένα βασικό εργαλείο στην ανάπτυξη της θεωρίας μας. Θα τα χρησιμοποιήσουμε, όχι μόνο στο αμέσως επόμενο θεώρημα, αλλά και στα επόμενα κεφάλαια και μάλιστα αρκετά εκτεταμένα.

Ορισμός 1.7. *Έστω X χώρος Banach και $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ Schauder βάση με ακολουθία κανονικών προβολών $(\Pi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\beta_\nu^* \in X^*$ τέτοιο ώστε:*

$$\beta_\nu^*(x)\beta_\nu = (\Pi_\nu - \Pi_{\nu-1})(x), \forall x \in X$$

*Τα β_ν^* καλούνται **διορθογώνια συναρτησοειδή** των β_ν.*

Πρόταση 1.5. *Τα διορθογώνια συναρτησοειδή έχουν τις εξής ιδιότητες:*
α) Το β_ν^* είναι καλά ορισμένο $\forall \nu \in \mathbb{N}$
β) $\forall \nu, \mu \in \mathbb{N}, \beta_\nu^*(\beta_\mu) = \delta_{\nu,\mu}$
γ) $\forall x \in X, x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu^*(x)\beta_\nu$
δ) $\forall \nu \in \mathbb{N}, \|\beta_\nu\|\|\beta_\nu^*\| \leq 2\,\mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty})$.

Απόδειξη. α) Είναι $\beta_\nu^*(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in X$. Έστω $x \in X$ και $\beta_\nu^*(x) = \lambda \neq \kappa = \beta_\nu^*(x)$. Τότε:

$$0 = \beta_\nu^*(x)\beta_\nu - \beta_\nu^*(x)\beta_\nu = \lambda\beta_\nu - \kappa\beta_\nu = (\lambda - \kappa)\beta_\nu \Rightarrow \lambda = \kappa$$

.

β) Έστω $\nu, \mu \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$\begin{array}{l} \bullet \nu < \mu \Rightarrow \Pi_\nu(\beta_\mu) = \Pi_{\nu-1}(\beta_\mu) = 0 \Rightarrow \beta_\nu^*(\beta_\mu) = 0 \\ \bullet \nu > \mu \Rightarrow \Pi_\nu(\beta_\mu) = \Pi_{\nu-1}(\beta_\mu) = \beta_\mu \Rightarrow \beta_\nu^*(\beta_\mu) = 0 \\ \bullet \nu = \mu \Rightarrow \Pi_\nu(\beta_\mu) = \beta_\mu, \Pi_{\nu-1}(\beta_\mu) = 0 \Rightarrow \beta_\nu^*(\beta_\mu) = 1 \end{array}$$

γ)Αν $x = \sum_{\imath=1}^{\infty} a_i\beta_i$, τότε $\beta_\nu^*(x)\beta_\nu = \Pi_\nu(x) - \Pi_{\nu-1}(x) = a_\nu\beta_\nu$ και άρα:

$$\forall \nu \in \mathbb{N} \quad \beta_\nu^*(x) = a_\nu \Rightarrow x = \sum_{\imath=1}^{\infty} \beta_\nu^*(x)\beta_\nu$$

δ)Έστω $\nu \in \mathbb{N}, x \in B_X(0,1)$. Τότε:

$$\begin{aligned} |\beta_\nu^*(x)|\|\beta_\nu\| &= \|\beta_\nu^*(x)\beta_\nu\| = \|(\Pi_\nu - \Pi_{\nu-1})(x)\| \leq (\|\Pi_\nu\| + \|\Pi_{\nu-1}\|)\|x\| \leq \\ &\leq 2\,\mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty)\|x\| \end{aligned}$$

Παίρνοντας supremum για $x \in B_X(0,1)$, $\|\beta_\nu\|\|\beta_\nu^*\| \leq 2\,\mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty)$ □

Το τελευταίο μας αποτέλεσμα για αυτό το κεφάλαιο είναι ένα από τα θεωρήματα του B.Mazur, σύμφωνα με το οποίο κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach έχει Schauder βασική ακολουθία και μάλιστα με όσο μικρή σταθερά βάση επιθυμούμε. Πρώτα όμως χρειαζόμαστε ένα λήμμα.

Λήμμα 1.6. *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και Y πεπερασμένης διάστασης υπόχωρός του. Αν $B_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ τότε:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in B_X)(\forall y \in Y \wedge \forall \lambda \in \mathbb{R}) : \|y\| \leq (1+\epsilon)\|y + \lambda x\|$$

Απόδειξη. Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $0 < \epsilon < 1$. Αφού ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης η B_Y είναι συμπαγής και άρα υπάρχουν $\mu \in \mathbb{N}$ και $y_1, y_2, ...y_\mu \in B_Y$ $\epsilon/2-$δίκτυο. Επιλέγουμε $y_i^* \in B_{Y^*}$ με $y_i^*(y_i) = 1, \forall i = 1, 2, ...\mu$ και $x \in \bigcap_{i=1}^{\mu} \ker y_i^*$ με $\|x\| = 1$. Παρατηρείστε ότι αφού $\dim X = \infty$ είναι $\bigcap_{i=1}^{\mu} \ker y_i^* \neq \{0\}$. Έστω τώρα $y \in B_Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $i_0 \in \{1, 2, ..., \mu\}$ με $\|y_{i_0} - y\| < \epsilon/2$ και άρα:

$$\begin{aligned} \|y + \lambda x\| &\geq \|y_{i_0} + \lambda x\| - \|y - y_{i_0}\| \geq y_{i_0}^*(y_{i_0} + \lambda x) - \epsilon/2 = 1 - \epsilon/2 \\ &\geq 1/(1+\epsilon) = \|y\|/(1+\epsilon) \end{aligned}$$

Άρα συνολικά μέχρι τώρα έχουμε ότι $\forall y \in B_Y$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ είναι $\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y + \lambda x\|$. Έστω τώρα $y \in Y$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε από το παραπάνω για τα $y/\|y\| \in B_Y$ και $\lambda/\|y\| \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| \le (1+\epsilon)\left\|\frac{y}{\|y\|} + \frac{\lambda}{\|y\|}x\right\| \Rightarrow \|y\| \le (1+\epsilon)\|y+\lambda x\|$$

□

Θεώρημα 1.7 (B.Mazur)**.** *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει Schauder βασική ακολουθία στον X, $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\mathrm{b_c}((x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}) \le 1+\epsilon$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$ και $(\epsilon_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία θετικών αριθμών για τη οποία ισχύει ότι $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\epsilon_\nu) \le 1+\epsilon$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θα κατασκευάσουμε την ζητούμενη ακολουθία. Έστω λοιπόν $y_1 \in B_X$ τυχάιο και $y_\nu \in B_X$ τέτοιο ώστε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ να ισχύει ότι:

$$(\forall y \in \langle y_1, y_2, ..., y_\nu \rangle) \wedge (\forall \lambda \in \mathbb{R}) : \|y\| \le (1+\epsilon_\nu)\|y+\lambda y_{\nu+1}\|$$

Και τότε για $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ με $\nu \le \mu$ και $a_1, a_2, ..., a_\mu \in \mathbb{R}$, όπου μπορούμε να πάρουμε $\lambda = a_{\nu+1}$ και $y = \sum_{i=1}^{\nu} a_i y_i$, είναι:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{\nu} a_i y_i\right\| &\le (1+\epsilon_\nu)\left\|\sum_{i=1}^{\nu+1} a_i y_i\right\| \\
&\le (1+\epsilon_\nu)(1+\epsilon_{\nu+1})\left\|\sum_{i=1}^{\nu+2} a_i y_i\right\| \\
&\le ... \\
&\le \prod_{i=\nu}^{\mu}(1+\epsilon_i)\left\|\sum_{i=1}^{\mu} a_i y_i\right\| \\
&\le \prod_{i=\nu}^{\infty}(1+\epsilon_i)\left\|\sum_{i=1}^{\mu} a_i y_i\right\| \\
&\le (1+\epsilon)\left\|\sum_{i=1}^{\mu} a_i y_i\right\|
\end{aligned}$$

Οπότε από τη Πρόταση 1.4 έχουμε ότι η ακολουθία $(y_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι Schauder βασική με $\mathrm{b_c}((y_\nu)_{\nu=1}^{\infty}) \le 1+\epsilon$. □

Πόρισμα 1.7.1. *Κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach έχει Schauder Βασική ακολουθία.*

2 Ισοδυναμίες και Μπλοκς

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μιλήσουμε για ισοδυναμίες Schauder-βάσεων και για μπλοκ ακολουθίες. Η μελέτη αυτών θα μας δώσει αρκετά αποτελέσματα εξαιρετικά σημαντικά για την συναρτησιακή ανάλυση γενικότερα, αλλά και ειδικότερα για εμάς καθώς πολλά από αυτά είναι απαραίτητα για να προχωρήσουμε παρακάτω. Το σημαντικότερο από αυτά είναι η γνωστή Αρχή Επιλογών των Bessaga-Pelczynski (Bessaga-Pelczynski Selection Principle).

Ορισμός 2.1. *Έστω X και Y χώροι Banach,$(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ Schauder-βασική ακολουθία στον X και $(y_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ Schauder-βασική ακολουθία στον Y. Οι ακολουθίες $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ και $(y_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ καλούνται* ***ισοδύναμες*** *αν για κάθε ακολουθία πραγματικών $(a_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$, η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ συγκλίνει αν και μόνον αν η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ συγκλίνει. Γράφουμε $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \sim (y_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$.*

Η επόμενη πρόταση συνοψίζει όλα τα ισοδύναμα του παραπάνω ορισμού. Θα μας είναι χρήσιμα για τον έλεγχο ισοδυναμίας απο εδώ και στο εξής.

Πρόταση 2.1. *Έστω X και Y χώροι Banach και $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$,$(y_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ Schauder-βασικές ακολουθίες στους X και Y αντίστοιχα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
A) $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \sim (y_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$
B) Υπάρχει $T : \overline{\langle (x_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \rangle} \to \overline{\langle (y_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \rangle}$ γραμμικός ισομορφισμός, επί, τέτοιος ώστε $T(x_\nu) = y_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$
Γ) $\exists c, C > 0$ τέτοια ώστε $\forall \mu \in \mathbb{N}$ και $\forall a_1, a_2, ..., a_\mu \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$c\left\| \sum_{i=1}^{\mu} a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\mu} a_i y_i \right\| \leq C\left\| \sum_{i=1}^{\mu} a_i x_i \right\|$$

Απόδειξη. A⇒B) Έστω $X' = \overline{\langle (x_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \rangle}, Y' = \overline{\langle (y_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \rangle}, x \in X'$ με $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Ορίζουμε $T : X' \to Y'$ με $T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$. Τότε ο T είναι καλά ορισμένος, 1-1 (αφού οι ακολουθίες $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ και $(y_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι Schauder-βασικές και άρα Schauder-βάσεις τών X' και Y' αντίστοιχα) και εξ' ορισμού είναι και γραμμικός και επί. Για τη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος. Έστω $(z_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \in X'$ και $z \in X', \gamma \in Y'$ με $z_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} z$ και $T(z_\nu) \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$. Αρκεί να δείξουμε ότι $T(z) = \gamma$. Έστω

$(x_\nu^*)_{\nu=1}^\infty, (y_\nu^*)_{\nu=1}^\infty$ οι ακολουθίες διορθογώνιων συναρτησοειδών των $(x_\nu)_{\nu=1}^\infty$ και $(y_\nu)_{\nu=1}^\infty$ αντίστοιχα. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύουν $x_k^*(z_\nu) \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} x_k^*(z)$ και $y_k^*(T(z_\nu)) \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} y_k^*(\gamma)$. Ακόμη $\forall k, \nu \in \mathbb{N}$:

$$y_k^*\Big(T(z_\nu)\Big) = y_k^*\Bigg(T\Bigg(\sum_{i=1}^\infty x_i^*(z_\nu)x_i\Bigg)\Bigg) = y_k^*\Bigg(\sum_{i=1}^\infty x_i^*(z_\nu)y_i\Bigg) = x_k^*(z_\nu)$$

Οπότε:

$$x_k^*(z) = y_k^*(\gamma) \;\; \forall k \in \mathbb{N} \text{ και}$$

$$T(z) = T\Bigg(\sum_{i=1}^\infty x_i^*(z)x_i\Bigg) = \sum_{i=1}^\infty x_i^*(z)y_i = \sum_{i=1}^\infty y_i^*(\gamma)y_i = \gamma$$

Άρα ο T είναι συνεχής (οπότε είναι και $\|T\| < \infty$), 1-1 και επί που σημαίνει ότι από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης ο T^{-1} είναι επίσης συνεχής. Συνολικά ο T είναι ισομορφισμός.

Β⇒Γ) Άμεσο για $c = 1/\|T^{-1}\|$ και $C = \|T\|$.

Γ⇒Α) Έστω $(a_\nu)_{\nu=1}^\infty$ ακολουθία πραγματικών. Τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\text{Η } \sum_{\nu=1}^\infty a_\nu x_\nu \text{ συγκλίνει} \Leftrightarrow \text{Η } \sum_{\nu=1}^\infty a_\nu x_\nu \text{ είναι } Cauchy \overset{(\Gamma)}{\Leftrightarrow}$$
$$\text{Η } \sum_{\nu=1}^\infty a_\nu y_\nu \text{ είναι } Cauchy \Leftrightarrow \text{Η } \sum_{\nu=1}^\infty a_\nu y_\nu \text{ συγκλίνει.}$$

□

Ορισμός 2.2. *Αν επιπλέον ισχύει ότι* $c = \dfrac{1}{C}$ $(\Leftrightarrow \|T\| = \|T^{-1}\|)$ *τότε οι ακολουθίες* $(x_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *και* $(y_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *καλούνται* ***ομοιόμορφα ισοδύναμες***.

Ορισμός 2.3. *Έστω X και Y χώροι Banach,*$(x_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *Schauder-βασική ακολουθία στον X και* $(y_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *Schauder-βασική ακολουθία στον Y. Οι ακολουθίες* $(x_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *και* $(y_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *καλούνται* ***σύμφωνες ως προς τους (X, Y)*** *αν υπάρχει επί ισομορφισμός* $T : X \to Y$ *με* $T(x_\nu) = y_\nu, \;\; \forall \nu \in \mathbb{N}$*. Αν* $X = Y$*, τότε καλούνται απλά* ***σύμφωνες***

Πριν ξεκινήσουμε την μελέτη των μπλοκ-ακολουθιών θα αναφέρουμε χωρίς να αποδείξουμε την Αρχή των Μικρών Διαταράξεων (Principle of Small Perturbations)

Θεώρημα 2.2 (Αρχή των Μικρών Διαταράξεων)**.** *Έστω X χώρος Banach,* $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *Schauder-βασική ακολουθία στον X και* $(x_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *ακολουθία στον X τέτοια ώστε:*

$$2\,\mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty) \cdot \sum_{i=1}^\infty \frac{\|x_i - \beta_i\|}{\|\beta_i\|} = \omega < 1$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

Α) Οι $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ και $(x_\nu)_{\nu=1}^\infty$ είναι σύμφωνες,

Β) $\mathrm{b_c}((x_\nu)_{\nu=1}^\infty) \leq \mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty) \cdot \dfrac{1+\omega}{1-\omega}$

Γ) Αν η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ είναι Schauder-βάση τότε και η $(x_\nu)_{\nu=1}^\infty$ είναι Schauder-βάση.

Δ) Αν ο $\overline{\langle(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty\rangle}$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X τότε και ο $\overline{\langle(x_\nu)_{\nu=1}^\infty\rangle}$ είναι τέτοιος.

Ορισμός 2.4. *Μια ακολουθία $(A_\nu)_{\nu=1}^\infty$ μη κενών υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ καλείται **μπλοκ** αν $\forall \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\max(A_\nu) < \min(A_{\nu+1})$.*

Ορισμός 2.5. *Έστω X χώρος Banach και $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ Schauder-βασική ακολουθία στον X. Τότε για κάθε $x \in \overline{\langle(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty\rangle}$ ορίζουμε:*

$$\mathrm{supp}_{(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty}(x) = \{\nu \in \mathbb{N} : \beta_\nu^*(x) \neq 0\}$$

Ορισμός 2.6. *Έστω X χώρος Banach και $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ Schauder-βασική ακολουθία στον X. Μια ακολουθία $(x_\nu)_{\nu=1}^\infty$ στον $\overline{\langle(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty\rangle}$ καλείται **μπλοκ-υπακολουθία** της $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ αν η ακολουθία $(\mathrm{supp}_{(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty}(x_k))_{k=1}^\infty$ είναι μπλοκ. Γράφουμε:*

$$(x_\nu)_{\nu=1}^\infty \trianglelefteq (\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$$

Οι παραπάνω ορισμοί δίνουν αφορμή για δύο βασικές παρατηρήσεις που θα μας βοηθήσουν στην μελέτη των μπλοκ-υπακολουθιών, καθώς μας παρέχουν πρακτικότερους τρόπους να τις χρησιμοποιήσουμε.

Παρατήρηση. *Έστω X χώρος Banach, $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ Schauder-βασική ακολουθία στον X και $(x_\nu)_{\nu=1}^\infty \trianglelefteq (\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$. Τότε ισχύουν τα εξής :*

•$\exists (a_\nu)_{\nu=1}^\infty$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $(p_\nu)_{\nu=1}^\infty$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$$x_\nu = \sum_{i=p_{\nu-1}+1}^{p_\nu} a_i \beta_i$$

•$\exists (a_\nu)_{\nu=1}^\infty$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $(A_\nu)_{\nu=1}^\infty$ μπλοκ, τέτοια ώστε $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$$x_\nu = \sum_{i \in A_\nu} a_i \beta_i$$

Πρόταση 2.3. *Έστω X χώρος Banach, $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ Schauder-βασική ακολουθία στον X και $(x_\nu)_{\nu=1}^\infty \trianglelefteq (\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$. Τότε η $(x_\nu)_{\nu=1}^\infty$ είναι Schauder-βασική με $\mathrm{b_c}((x_\nu)_{\nu=1}^\infty) \leq \mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty)$.*

Απόδειξη. Έστω $(a_\nu)_{\nu=1}^\infty$ ακολουθία πραγματικών και $(A_\nu)_{\nu=1}^\infty$ μπλοκ, με $x_\nu = \sum_{i\in A_\nu} a_i\beta_i$. Τότε $\forall k, \lambda \in \mathbb{N}$ με $k \leq \lambda$ και $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_\lambda \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\left\|\sum_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu x_\nu\right\| = \left\|\sum_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu \sum_{i\in A_\nu} a_i\beta_i\right\| \leq \mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty})\left\|\sum_{\nu=1}^{\lambda}\sum_{i\in A_\nu}\gamma_\nu a_i\beta_i\right\|$$
$$= \mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty})\left\|\sum_{\nu=1}^{\lambda}\gamma_\nu \sum_{i\in A_\nu} a_i\beta_i\right\| = \mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty})\left\|\sum_{\nu=1}^{\lambda}\gamma_\nu x_\nu\right\|$$

Άρα από την πρόταση 1.4 έχουμε το ζητούμενο. □

Το τελευταίο Θεώρημα αυτού του κεφαλαίου είναι η Αρχή Επιλογών των Bessaga-Pelczynski (Bessaga-Pelczynski Selection Principle), την οποία θα χρειαστούμε παρακάτω. Επίσης το επιχείρημα της παρακάτω απόδειξης είναι γνωστό ως επιχείρημα ολισθαίνων λόφων (gliding hump argument).

Θεώρημα 2.4 (Αρχή Επιλογών των *Bessaga-Pelzcynski*)**.** *Έστω X χώρος Banach, $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ Schauder-βάση του X και $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X με :*
• $\inf_{\nu\in\mathbb{N}}\|x_\nu\| > 0$
•$\forall k\in\mathbb{N}\ \beta_k^*(x_\nu) \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Τότε $\forall\epsilon>0$ υπάρχουν υπακολουθίες $(x_{k_\nu})_{\nu=1}^{\infty}$ της $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ και $(y_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \trianglelefteq (\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ που να είναι σύμφωνες και $\mathrm{b_c}((x_{k_\nu})_{\nu=1}^{\infty}) \leq \mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty})+\epsilon$.

Απόδειξη. Έστω $M=\inf_{\nu\in\mathbb{N}}\|x_\nu\|, K=\mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}), \epsilon>0$ και $(\Pi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ η ακολουθία κανονικών προβολών που αντιστοιχεί στην $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$. Θέτουμε ακόμη $\gamma\in\mathbb{R}$ με $0<\gamma<1/4, \nu_1=1$ και $\theta_0=0$. Τότε:
$\to \exists\theta_1\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|x_{\nu_1}-\Pi_{\theta_1}(x_{\nu_1})\| \leq \dfrac{M\gamma}{2K}$ (αφού $\Pi_\mu(x_{\nu_1}) \overset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} x_{\nu_1}$)
$\to \exists\nu_2\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\Pi_{\theta_1}(x_{\nu_2})\| < \dfrac{M\gamma^2}{2K}$ ($\lim\limits_{\nu\to\infty}\|\Pi_\theta(x_\nu)\|=0\ \forall\theta$ υπόθεση)
$\to \exists\theta_2\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|x_{\nu_2}-\Pi_{\theta_2}(x_{\nu_2})\| \leq \dfrac{M\gamma^2}{2K}$ (αφού $\Pi_\mu(x_{\nu_1}) \overset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} x_{\nu_1}$)
$\to$ κ.ο.κ.

Άρα έχουμε ακολουθία $(x_{\nu_k})_{k=1}^{\infty}$ στον X και ακολουθία πραγματικών $(\theta_k)_{k=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\forall k\in\mathbb{N}$:

$$\|\Pi_{\theta_{k-1}}(x_{\nu_k})\| < \frac{M\gamma^k}{2K} \ \ \textit{και}\ \ \|x_{\nu_k}-\Pi_{\theta_k}(x_{\nu_k})\| < \frac{M\gamma^k}{2K}$$

Έστω τώρα $y_k=\Pi_{\theta_k}(x_{\nu_k})-\Pi_{\theta_{k-1}}(x_{\nu_k})\ \forall k\in\mathbb{N}$. Τότε είναι $(y_k)_{k=1}^{\infty} \trianglelefteq (\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ και άρα από τη προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι Schauder-βασική με $\mathrm{b_c}((y_k)_{k=1}^{\infty}) \leq K$. Επιπλέον έχουμε:

$$\|y_k-x_{\nu_k}\| < \frac{M\gamma^k}{K},\ \ \|y_k\| > \|y_k-x_{\nu_k}\| - \|x_{\nu_k}\| \geq (1-\gamma)M \ (\text{αφού } K\geq 1)$$

και άρα:

$$2K\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|y_k - x_{\nu_k}\|}{\|y_k\|} < \frac{2}{1-\gamma}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k \overset{\gamma\leq 1}{=} \frac{2\gamma}{(1-\gamma)^2} \overset{\gamma<\frac{1}{4}}{<} \frac{8}{9} < 1$$

Η Αρχή των Μικρών Διαταράξεων (Θεώρημα 2.2) μας δίνει ότι οι ακολουθίες $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ και $(x_{\nu_k})_{k=1}^{\infty}$ είναι σύμφωνες και $\mathrm{b_c}((x_{\nu_k})_{k=1}^{\infty}) \leq K(\frac{1+\omega}{1-\omega})$ όπου $\omega = \frac{2\gamma}{(1-\gamma)^2}$. Τέλος παρατηρήστε ότι $K(\frac{1+\omega}{1-\omega}) < K + \epsilon$ για κατάλληλη επιλογή γ. □

Πριν κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε έναν ορισμό που θα χρειαστεί αργότερα.

Ορισμός 2.7. *Έστω X χώρος Banach και $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ Schauder-βασική ακολουθία στον X. Μια ακολουθια $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ στον υπόχωρο $\overline{\langle(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}\rangle}$ του X, θα λέμε ότι είναι* ***σταθερού συντελεστή μπλοκ-βασική ακολουθία*** *της $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ αν υπάρχει $(a_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $(p_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $\forall \nu \in \mathbb{N}$*

$$x_\nu = \sum_{i=p_{\nu-1}+1}^{p_\nu} a_i\beta_i$$

και $\forall \nu \in \mathbb{N}$ υπάρχει σταθερά ω_ν τέτοια ώστε:

$$a_i = \omega_\nu \text{ ή } a_i = 0, \quad \forall i \in [p_{\nu-1}+1, p_\nu] \cap \mathbb{N}$$

3 Άνευ-Όρων Σύγκλιση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μιλήσουμε για άνευ-όρων (unconditional) σύγκλιση, άνευ-όρων βάσεις και θα δούμε την έννοια της ασθενώς άνευ-όρων *Cauchy* σειράς (*Weakly Unconditionally Cauchy*)

Ορισμός 3.1. *Έστω X χώρος Banach και $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$ συγκλίνει **άνευ-όρων** αν για κάθε μετάθεση π του $\mathbb{N}$ έχουμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_{\pi(\nu)}$ συγκλίνει.*

Λήμμα 3.1. *Έστω X χώρος Banach και $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

α) Η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$ συγκλίνει άνευ-όρων.

β) $(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall A \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο με $\min A > \nu_0)$: $\displaystyle\left\| \sum_{\nu \in A} x_\nu \right\| < \epsilon$.

γ) Για κάθε $(\nu_k)_{k=1}^{\infty}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} x_{\nu_k}$ συγκλίνει.

δ) Για κάθε $(\epsilon_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία στοιχείων του $\{-1, 1\}$ η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \epsilon_\nu x_\nu$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\alpha \Leftrightarrow \beta, \beta \Leftrightarrow \gamma$ και $\gamma \Leftrightarrow \delta$.

$\alpha \Rightarrow \beta$) Έστω ότι ισχύει το (α) και όχι το (β). Τότε:

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \nu_0 \in \mathbb{N})(\exists A \subseteq \mathbb{N} \text{ με } |A| < \infty, \min A > \nu_0) : \left\| \sum_{i \in A} x_i \right\| \geq \epsilon$$

Άρα μπορούμε να φτιάξουμε μπλοκς $(A_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\forall \nu \in \mathbb{N}$: $\left\| \sum_{i \in A_\nu} x_i \right\| \geq \epsilon$ (θέτουμε $\nu_0 = 1 \to$ βρίσκουμε το $A_1 \to$ θέτουμε $\nu_2 = \max A_1 \to$ κ.ο.κ). Ορίζουμε τώρα μετάθεση π του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\forall \nu \in \mathbb{N}$ να είναι:

•$\pi(\{\max A_\nu + 1, ..., \max A_\nu + |A_{\nu+1}|\}) = A_{\nu+1}$ και

•$\pi(\{max A_\nu + 1, ..., \max A_\nu + \max A_{\nu+1}\}) = \{\max A_\nu + 1, ..., \max A_\nu + \max A_{\nu+1}\}$

Τότε η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} x_{\pi(\nu)}$ δεν συγκλίνει που είναι άτοπο από το (α).

$\beta \Rightarrow \alpha$) Έστω π μετάθεση του $\mathbb{N}$, $\sigma_k = \sum_{\nu=1}^{k} x_{\pi(\nu)}, \forall k \in \mathbb{N}$ και $\epsilon > 0$. Τότε από το (β) υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε πεπερασμένο $A \subseteq \mathbb{N}$ με $\min A > \nu_0$ να ισχύει $\|\sum_{i\in A} x_i\| < \epsilon$ και υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\pi([k_0]) \supseteq [\nu_0]$ ($[k] := \{1, 2, ..., k\}$). Άρα $\forall k > k_0$, $\pi([k]) \supseteq [\nu_0]$ συνεπώς $\forall \lambda > k > k_0$ είναι $\pi([\lambda]) \supseteq \pi([k]) \supseteq [\nu_0]$ και $\min(\pi([\lambda])\setminus\pi([k])) > \nu_0$. Τότε:

$$\begin{aligned}\epsilon > \left\| \sum_{i\in\pi([\lambda])\setminus\pi([k])} x_i \right\| &= \left\| \sum_{i\in\pi([\lambda])} x_i - \sum_{i\in\pi([k])} x_i \right\| = \\ &= \left\| \sum_{\nu=1}^{\lambda} x_{\pi(\nu)} - \sum_{\nu=1}^{k} x_{\pi(\nu)} \right\| = \|\sigma_\lambda - \sigma_k\|\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνουσα.

$\beta \Rightarrow \gamma$) Θέτουμε $\sigma_\lambda = \sum_{k=1}^{\lambda} x_{\nu_k}, \forall \lambda \in \mathbb{N}$ και έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\mu \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο με $\min A > \mu$ να είναι $\|\sum_{i\in A} x_i\| < \epsilon$, όμως αφού $\forall \lambda_1 > \lambda_2 > \mu$ είναι $\mu < \nu_{\lambda_1+1} < ... < \nu_{\lambda_2}$ θα είναι:

$$\|\sigma_{\lambda_2} - \sigma_{\lambda_1}\| = \left\| \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda_2} x_{\nu_j} \right\| < \epsilon$$

Άρα η ακολουθία $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνουσα.

$\gamma \Rightarrow \beta$) Αν δεν ισχύει το (β) τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ και $(A_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ μπλοκ με $\|\sum_{i\in a_\nu} x_i\| \geq \epsilon$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε τότε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $(\nu_k)_{k=1}^{\infty}$ με $\{\nu_k : k \in \mathbb{N}\} = \cup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$. Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\nu_k}$ δεν συγκλίνει πράγμα που αντιτίθεται στην υπόθεση (γ).

$\gamma \Rightarrow \delta$) Έστω $(\epsilon_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία στο $\{-1, 1\}$ και $P = \{\nu \in \mathbb{N} : \epsilon_\nu = 1\}, N = \{\nu \in \mathbb{N} : \epsilon_\nu = -1\}$. Ας υποθέσουμε πως τα P και N είναι άπειρα. Θέτουμε γνησίως αύξουσες ακολουθίες $(\nu_k)_{k=1}^{\infty}, (\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ με $\{\nu_k : k \in \mathbb{N}\} = P$ και $\{\mu_k : k \in \mathbb{N}\} = N$. Τότε από υπόθεση οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\nu_k}$ και $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\mu_k}$ συγκλίνουν. Άρα και η $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\nu_k} - \sum_{k=1}^{\infty} x_{\mu_k}$ θα συγκλίνει. Αν ένα από τα P ή N είναι πεπερασμένα τότε η σύγκλιση θα εξαρτάται μόνο από αυτό που είναι άπειρο και άρα προφανώς θα συγκλίνει.

$\delta \Rightarrow \gamma$)Έστω $(\nu_k)_{k=1}^{\infty}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών και $P = \{\nu_k : k \in \mathbb{N}\}$. Θέτουμε $(\epsilon_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία στο $\{-1, 1\}$ με $\epsilon_\nu = 1$ αν $\nu \in P$ και $\epsilon_\nu = -1$ αν $\nu \notin P$. Τότε από υπόθεση οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \epsilon_\nu x_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$ συγκλίνουν και άρα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\nu_k} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} \epsilon_\nu x_\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu\Big)$. □

Αν μια σειρά ικανοποιεί την συνθήκη (β) του παραπάνω λήμματος λέμε αλλιώς ότι είναι άνευ-όρων Cauchy (unconditionnaly Cauchy), ενώ το (γ) μας δίνει άμεσα ότι

Πόρισμα 3.1.1. *Έστω X χώρος Banach, $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X και $x \in X$ με $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu = x$ άνευ-όρων. Τότε για κάθε άπειρο υποσύνολο των φυσικών $A \subset \mathbb{N}$ η σειρά $\sum_{\nu\in A} x_\nu$ συγκλίνει άνευ-όρων.*

,ενώ το $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_{\pi(\nu)} = x$ εάν $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu = x$ άνευ-όρων, παρόλο που φαντάζει προφανές χρειάζεται ξεχωριστή απόδειξη. Η απόδειξη αυτή δεν είναι δύσκολη καθώς το (β) του λήμματος μας βοηθάει αρκετά.

Πρόταση 3.2. *Έστω X χώρος Banach, $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X και $x \in X$ με $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu = x$ άνευ-όρων. Τότε για κάθε μετάθεση π του $\mathbb{N}$ είναι $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_{\pi(\nu)} = x$.*

Απόδειξη. Έστω π μετάθεση του $\mathbb{N}$ και $\epsilon > 0$. Τότε αφού $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu = x$ ισχύει:

$$(\exists k_1 \in \mathbb{N})(\forall k > k_1) : \left\| x - \sum_{\nu=1}^{k} x_\nu \right\| < \epsilon/2$$

και από το (β) του παραπάνω λήμματος:

$$(\exists k_2 \in \mathbb{N})(\forall A \subset \mathbb{N} \text{ πεπερασμένο με } \min A > k_2) : \left\| \textstyle\sum_{i\in A} x_i \right\| < \epsilon/2$$

Για $k_3 = \max\{k_1, k_2\}$, αφού η π είναι μετάθεση υπάρχει $k_4 \in \mathbb{N}$ με $\pi([k_4]) \supseteq [k_3]$ και τότε για κάθε $k > k_4$ είναι $\pi([k]) \supseteq \pi([k_4]) \supseteq [k_3]$. Άρα:

$$\left\| x - \sum_{\nu=1}^{k} x_{\pi(\nu)} \right\| = \left\| x - \sum_{i\in\pi([k])} x_i \right\| = \left\| x - \sum_{i=1}^{k_3} + \sum_{i\in\pi([k])\setminus[k_3]} x_i \right\| \leq$$

$$\leq \left\| x - \sum_{i=1}^{k_3} x_i \right\| + \left\| \sum_{i\in\pi([k])\setminus[k_3]} x_i \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

και άρα $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_{\pi(\nu)} = x$. □

Ορισμός 3.2. *Έστω X χώρος Banach και $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X. Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$ καλείτε **ασθενώς άνευ-όρων Cauchy** (weakly unconditionaly Cauchy - WUC) αν για κάθε $x^* \in X^*$ η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} |x^*(x_\nu)|$ συγκλίνει.*

Παρατήρηση. *Μια σειρά είναι WUC αν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της είναι ασθενώς Cauchy. Επίσης αφού τα $x^* \in X^*$ είναι γραμμικά και συνεχή μια σειρά που είναι άνευ-όρων συγκλίνουσα είναι και WUC.*

Λήμμα 3.3. *Έστω X χώρος Banach και $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

α) Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$ είναι WUC

β) $(\exists \omega > 0)(\forall \nu \in \mathbb{N})$ και $(\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\nu \in \mathbb{R})$:

$$\left\| \sum_{\imath=1}^{\nu} \lambda_i x_i \right\| \leq \omega \max_{i\in[\nu]} |\lambda_i|$$

γ) $(\exists\omega' > 0)(\forall A \subseteq \mathbb{N}$ *πεπερασμένο) και* $(\forall(\epsilon_i)_{i\in A}$ *ακολουθία στο* $\{-1,1\})$*:*

$$\left\|\sum_{i\in A}\epsilon_i x_i\right\| \leq \omega'$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma \Rightarrow \alpha$.

$\alpha \Rightarrow \beta$) Αρχικά παρατηρείστε ότι $\max_{i\in[\nu]}|\lambda_i| = \|(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\nu)\|_\infty$ και πως αρκεί να το δείξουμε για $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\nu \in [-1,1](\Leftrightarrow \|(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\nu)\|_\infty \leq 1)$. Ας είναι $\Lambda = \{\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i x_i : \nu\in\mathbb{N}, \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\nu \in [-1,1]\}$. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι το Λ είναι φραγμένο. Έστω $x^* \in X^*$. Τότε για κάθε $y = \sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i x_i \in \Lambda$ είναι:

$$|x^*(y)| \leq \sum_{i=1}^{\nu}|\lambda_i||x^*(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{\nu}|x^*(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|x^*(x_i)| \overset{(\alpha)}{<} \infty$$

Άρα από Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος το Λ είναι φραγμένο.

$\beta \Rightarrow \gamma$) Άμεσο.

$\gamma \Rightarrow \alpha$) Έστω $x^* \in X^*$ και $\sigma_k = \sum_{i=1}^{k}|x^*(x_i)|, \ \forall k \in \mathbb{N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Για $k\in\mathbb{N}$ είναι:

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k}|x^*(x_i)| = \sum_{i=1}^{k}\mathrm{sign}(x^*(x_i))x^*(x_i) = x^*\Big(\sum_{i=1}^{k}\mathrm{sign}(x^*(x_i))x_i\Big) \leq$$
$$\leq \|x^*\|\cdot\left\|\sum_{i=1}^{k}\mathrm{sign}(x^*(x_i))x_i\right\| \leq \|x^*\|\cdot\omega'$$

□

Πρόταση 3.4. *Έστω X χώρος Banach και* $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ *ακολουθία στον X. Η σειρά* $\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu$ *είναι WUC αν και μόνον αν υπάρχει γραμμικός και φραγμένος τελεστής* $T: c_0 \to X$ *με* $T(e_\nu) = x_\nu, \ \forall\nu\in\mathbb{N}$ *όπου* $(e_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ *η συνήθης βάση του* c_0.

Απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu$ είναι WUC. Ορίζουμε τότε $T': c_{00} \to \langle(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}\rangle$ με $T'(e_\nu) = x_\nu, \ \forall\nu\in\mathbb{N}$. Ο T' είναι προφανώς γραμμικός και φραγμένος και αφού ο c_{00} είναι πυκνός στον c_0 ο T' επεκτείνεται σε γραμμικό και φραγμένο $T: c_0 \to \overline{\langle(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}\rangle}$ με $T(e_\nu) = x_\nu, \ \forall\nu\in\mathbb{N}$. Το αντίστροφο είναι προφανές αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για τη συνήθη βάση του c_0, $(e_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ισχύει ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}e_\nu$ είναι WUC (παρόλο που δεν ειναι ασθενώς συγκλίνουσα και άρα ούτε άνευ-όρων συγκλίνουσα). □

Παρατήρηση. *Ο παραπάνω T είναι σαφώς 1-1. Αν η ακολουθία* $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ *είναι Schauder βάση του X τότε θα είναι* $\overline{\langle(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}\rangle} = X$ *και άρα ο T θα είναι και επί. Τότε από την πρόταση 2.1 θα έχουμε ότι η* $(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ *θα είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του* c_0.

Ορισμός 3.3. *Έστω X χώρος Banach και* $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ *Schauder-βάση του X. Η* $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ *καλείται* ***άνευ-όρων βάση*** *του X αν* $\forall x\in X$ *η σειρά* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu^*(x)\beta_\nu$ *συγκλίνει άνευ-όρων.*

Ορισμός 3.4. *Έστω X χώρος Banach και $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ ακολουθία στον X. Η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ καλείται* ***<u>άνευ-όρων βασική</u>*** *αν είναι άνευ-όρων βάση του χώρου που παράγει.*

Στα επόμενα κεφάλαια θα μας απασχολήσουν οι άνευ-όρων βάσεις των χώρων c_0 και $l_p,\ 1 \leq p < \infty$. Προτού προχωρήσουμε θα δανειστούμε δυο αποτελέσματα από τη θεωρία των απόλυτα αθροιστικών τελεστών, η οποία αναπτύσσεται εκτεταμένα στο όγδοο κεφάλαιο του [1]. Η θεωρία αυτή σε συνδυασμό με το κύριο αποτέλεσμά μας, θα μας δώσει ένα όμορφο συμπέρασμα για τους χώρους c_0, l_1 και l_2.

Πρόταση 3.5. *Οι χώροι c_0, l_1 και l_2 έχουν μοναδική (ως προς ισομορφισμό) κανονικοποιημένη άνευ-όρων βάση, η οποία είναι η συνήθης βάση τους.*

Πρόταση 3.6. *Οι χώροι $l_p,\ 1 < p < \infty, p \neq 2$ έχουν τουλάχιστον 2 μη-ισόμορφες κανονικοποιημένες άνευ-όρων βάσεις.*

4 Τέλεια Ομοιογένεια

Ορισμός 4.1. *Μια βάση $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ ενός χώρου Banach X καλείται* **τέλεια ομογενής** *αν κάθε κανονικοποιημένη, σταθερού συντελεστή μπλοκ βασική ακολουθία της είναι ισοδύναμη με την $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$.*

Παρατήρηση. *Μια τέλεια ομογενής βάση είναι υποχρεωτικά άνευ-όρων καθώς για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_\nu = \pm 1$ θα είναι ισοδύναμη με την $(\epsilon_\nu \beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ (θυμηθείτε το λήμμα 3.1).*

Λήμμα 4.1. *Έστω $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ μια κανονικοποιημένη τέλεια ομογενής βάση ενός χώρου Banach X. Τότε η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ είναι ομοιόμορφα ισοδύναμη με κάθε κανονικοποιημένη μπλοκ βασική ακολουθία της σταθερού συντελεστή.*

Παρατήρηση. *Ισοδύναμα υπάρχει σταθερά $M \leq 1$ τέτοια ώστε για οποιεσδήποτε κανονικοποιημένες σταθερού συντελεστή μπλοκ βασικές υπακολουθίες $(\theta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ και $(\phi_\nu)_{\nu=1}^\infty$ της $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ να ισχύει*

$$\frac{1}{M}\left\|\sum_{k=1}^{\nu} a_k\theta_k\right\| \leq \left\|\sum_{k=1}^{\nu} a_k\phi_k\right\| \leq M\left\|\sum_{k=1}^{\nu} a_k\theta_k\right\|$$

για οποιαδήποτε επιλογή ακολουθίας $(a_i)_{i=1}^\nu$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι μπορούμε να παραλείψουμε πεπερασμένους αρχικούς όρους. Δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα για την βασική ακολουθία $(\beta_\nu)_{\nu=\nu_0+1}^\infty$ για κάκποιο $\nu_0 \in \mathbb{N}$. Έστω τώρα ότι η ανισότητα δεν ισχύει και έστω $(a_i)_{i=1}^\infty$ τυχαία ακολουθία. Μπορούμε τότε να κατασκευάσουμε δύο μπλοκ βασικές υπακολουθίες σταθερού συντελεστή $(\theta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ και $(\phi_\nu)_{\nu=1}^\infty$ της $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ και αύξουσα ακολουθία ακεραίων $(k_\nu)_{\nu=0}^\infty$ με $k_0 = 0$ τέτοιες ώστε:

$$\left\|\sum_{i=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu} a_i\theta_i\right\| < \frac{1}{2^\nu}$$

και

$$\left\| \sum_{i=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu} a_i \phi_i \right\| > \frac{1}{2^\nu}$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεη με την υπόθεση της τέλειας ομοιογένειας της βάσης $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$.
□

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε μερικά απαραίτητα λήμματα πριν προχωρήσουμε. Στην πρωτότυπη απόδειξη του *M.Zippin* το 1966 ([2]) όλα αυτά τα λήμματα ήταν όλα μαζί σε μια ενιαία απόδειξη μαζί με το κυρίως Θεώρημα αυτού του κεφαλαίου .Πριν προχωρήσουμε χρειαζόμαστε το εξής:

Έστω $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ κανονικοποιημένη βάση ενός χώρου Banach X. Θέτουμε

$$\lambda(\nu) = \left\| \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i \right\|$$

Τότε άμεσα παρατηρούμε ότι αν $K = \mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty})$ τότε είναι

$$\tfrac{1}{K} \leq \lambda(\nu) \leq \nu, \nu \in \mathbb{N}$$

και μάλιστα αν K=1 τότε η ακολουθία $\lambda(\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ δεν είναι φθίνουσα.

Λήμμα 4.2. *Έστω $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ κανονικοποιημένη, άνευ-όρων βάση ενός χώρου Banach X. Αν $\sup_\nu \lambda(\nu) < \infty$ τότε η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με την συνήθης βάση του c_0.*

Απόδειξη. Για κάθε ν και κάθε ακολουθία προσήμων $(\epsilon_i)_{i=1}^{\nu}$ έχουμε

$$\left\| \textstyle\sum_{i=1}^{\nu} \epsilon_i \beta_i \right\| \leq M$$

οπού το M εξαρτάτε από το $\sup_\nu \lambda(\nu)$ και την σταθερά βάσης της $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$. Άρα από το λήμμα 1.1 η σειρά $\sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i$ είναι WUC σειρά και άρα η $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\beta_i$ συγκλίνει για κάθε $(a_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \in c_0$.Άρα η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0 □

Λήμμα 4.3. *Έστω $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ κανονικοποιημένη τέλεια ομογενής βάση ενός χώρου Banach X. Τότε, εάν M η σταθερά του λήμματος 4.1, για κάθε μ και ν στο $\mathbb{N}$ είναι:*

$$\frac{1}{M^3} \leq \lambda(\nu\mu) \leq M^3 \lambda(\nu)\lambda(\mu)$$

Απόδειξη. Έστω $\nu, \mu \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$$\gamma_j = \sum_{i=(j-1)\nu+1}^{j\cdot\nu} \beta_i, \quad j = 1, ..., \mu$$

Αυτά είναι μ σε πλήθος μπλοκς μήκους ν της βάσης $(\beta_i)_{i=1}^{\infty}$. Έστω τώρα $\sigma_j = \|\gamma_j\|$ για $j = 1, ...\mu$. Τότε από υπόθεση έχουμε:

$$\frac{1}{M}\lambda(\nu) \leq \sigma_j \leq M\lambda(\nu), j = 1, ...\mu$$

και άρα

$$\frac{1}{M^2\lambda(\nu)}\left\|\sum_{j=1}^{\mu}\gamma_j\right\| \leq \left\|\sum_{j=1}^{\mu}\frac{\gamma_j}{\sigma_j}\right\| \leq \frac{M^2}{\lambda(\nu)}\left\|\sum_{j=1}^{\mu}\gamma_j\right\|$$

Από μια ακόμη εφαρμογή του λήμματος 4.1 παίρνουμε το:

$$\frac{1}{M}\lambda(\mu) \leq \left\|\sum_{j=1}^{\mu}\frac{\gamma_j}{\sigma_j}\right\| \leq M\lambda(\mu)$$

Άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε καθώς έχουμε:

$$\frac{\lambda(\mu\nu)}{M^3\lambda(\nu)} \leq \lambda(\mu) \leq \frac{M^3\lambda(\mu\nu)}{\lambda(\nu)} \iff \frac{1}{M^3} \leq \lambda(\mu\nu) \leq M^3\lambda(\mu)\lambda(\nu)$$

$\Big($Παρατηρήστε ότι : $\|\sum_{i=1}^{\mu}\gamma_j\| = \lambda(\mu\nu)\Big)$ □

Λήμμα 4.4. *Έστω $(a_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε:*

1)

$$a_{\mu+\nu} \leq a_\mu + a_\nu, \mu, \nu \in \mathbb{N}$$

Τότε το $\lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{\nu}$ υπάρχει (πιθανόν ίσο με $-\infty$) και

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{\nu} = \inf_{\nu\in\mathbb{N}}\frac{a_\nu}{\nu}$$

2)

$$|a_{\mu+\nu} - a_\mu - a_\nu| \leq 1$$

για κάθε μ,$\nu \in \mathbb{N}$. τότε υπάρχει σταθερά ω τέτοια ώστε:

$$|a_\nu - \omega\nu| \leq 1, \nu = 1, 2, ...$$

Απόδειξη. 1) Έστω $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε, κάθε $\mu \in \mathbb{N}$ γράφετε ως $\mu = \lambda\nu + \rho$ για κάποια $\lambda \geq 0$ και $0 \leq \rho < \nu$. Άπό υπόθεση έχουμε ότι:

$$a_\mu = a_{\lambda\nu+\rho} \leq a_{\lambda\nu} + a_\rho \leq \lambda a_\nu + a_\rho$$

Άρα:

$$\frac{a_\mu}{\mu} = \frac{a_{\lambda\nu+\rho}}{\lambda\nu+\rho} \leq \frac{\lambda}{\lambda\nu+\rho}a_\nu + \frac{a_\rho}{\lambda\nu+\rho} \leq \frac{a_\nu}{\nu} + \frac{\max_{0\leq\rho<\nu}a_\rho}{\mu}$$

Συνεπάγεται:

$$\limsup_{\mu\to\infty}\frac{a_\mu}{\mu}\leq\inf_\nu\frac{a_\nu}{\nu}$$

2) Έστω $\gamma_\nu = a_\nu + 1$ και $\delta_\nu = a_\nu - 1$. Τότε οι ακολουθίες $(\gamma_\nu)_{\nu=1}^\infty$ και $(-\delta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του (1) και άρα τα $\lim_{\nu\to\infty}\frac{\gamma_\nu}{\nu} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{\delta_\nu}{\nu}$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένα. Άρα από το πρώτο μέρος έχουμε ότι αν ϵ η τιμή των ορίων θα είναι:

$$\frac{\delta_\nu}{\nu}\leq\epsilon\leq\frac{\gamma_\nu}{\nu}$$

από όπου έχουμε άμεσα το συμπέρασμα. □

Λήμμα 4.5. *Έστω $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ κανονικοποιημένη τέλεια ομογενής βάση ενός χώρου Banach X. Τότε, είτε η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ είναι ισοδύναμη με την συνήθη βάση του c_0, είτε υπάρχει σταθερά Ω και αριθμός p με $1\leq p<\infty$ τέτοια ώστε:*

$$\frac{1}{\Omega}|A|^{\frac{1}{p}}\leq\left\|\sum_{\nu\in A}\beta_\nu\right\|\leq\Omega|A|^{\frac{1}{p}},$$

για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο A του $\mathbb{N}$.

Απόδειξη. Από το λήμμα 4.3 για $\mu=2^k$ και $\nu=2^\xi$ παίρνουμε την εξίσωση:

$$\frac{1}{M^3}\lambda(2^k)\lambda(2^\xi)\leq\lambda(2^{k+\xi})\leq M^3\lambda(2^k)\lambda(2^\xi)$$

Για $k=0,1,2,...$ ας είναι $\theta(k)=\log_2\lambda(2^k)$. Τότε το παραπάνω δίνει:

$$|\theta(\xi)+\theta(k)-\theta(\xi+k)|\leq 3\log_2 M$$

Από το (2) του λήμματος 4.4 υπάρχει σταθερά ω τέτοια ώστε:

$$|\theta(\xi)-\omega\xi|\leq 3\log_2 M$$

Επιπλέον, αν $K=\mathrm{b_c}((\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty)$, είναι $\dfrac{1}{K}\leq\lambda(2^k)\leq 2^k$ για κάθε $k=1,2,...$, όπως είχαμε παρατηρήσει πριν από το λήμμα 4.2 που σημαίνει ότι $\log_2\dfrac{1}{K}\leq\theta(k)\leq k$, και άρα $0\leq\omega\leq 1$

Αν ω=0 έχουμε $\lambda(2^\xi)\leq M^3$ για κάθε $\xi\in\mathbb{N}$ και άρα η $(\lambda(\nu))_{\nu=1}^\infty$ είναι φραγμένη πράγμα που σημαίνει ότι η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ είναι ισοδύναμη με την συνήθη βάση του c_0 λόγο του λήμματος 4.2.

Αλλιώς, αν $0<\omega\leq 1$, υπάρχει $p\in[1,\infty)$ τέτοιο ώστε $\omega=\frac{1}{p}$. Τότε η παραπάνω ανίσωση γίνεται:

$$\frac{1}{M^3}2^{\frac{\xi}{p}}\leq\lambda(2^\xi)\leq M^3 2^{\frac{\xi}{p}},\xi\in\mathbb{N}$$

και αφού για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $2^{\xi-1} \leq \nu \leq 2^{\xi}$ ισχύει:

$$\frac{1}{M}\lambda(2^{\xi-1}) \leq \lambda(\nu) \leq M\lambda(2^{\xi})$$

συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{1}{M^4}\nu^{\frac{1}{p}} \leq \lambda(\nu) \leq M^4\nu^{\frac{1}{p}}$$

Τέλος, αν $A \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο, έχουμε:

$$\frac{1}{M}\lambda(|A|) \leq \left\| \sum_{\nu \in A} \beta_\nu \right\| \leq M\lambda(|A|)$$

το οποίο μας δίνει το συμπέρασμα για $\Omega = M^5$. □

Είμαστε πλέον έτοιμοι να δούμε το θεώρημα του M.Zippin. Πριν όμως από αυτό θα δείξουμε ότι οι συνήθεις βάσεις των l_p και c_0 είναι τέλεια ομογενείς.

Πρόταση 4.6. *Έστω $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ η συνήθης βάση του l_p, $1 \leq p < \infty$ (ή του c_0) και $(\phi_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \trianglelefteq (\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ κανονικοποιημένη. Τότε $(\phi_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \sim (\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$. (μάλιστα με $c = C = 1$).*

Απόδειξη. Ας είναι $A_k = \mathrm{supp}_{(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}}((\phi_\nu)_{\nu=1}^{\infty})$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ με $\phi_k = \sum_{i \in A_k} a_i\beta_i$.

Τότε για τους χώρους l_p είναι $\|\phi_k\|^p = \sum_{i \in A_k} |a_i|^p = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ από υπόθεση και για $\mu \in \mathbb{N}, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k\phi_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k \sum_{i \in A_k} a_i\beta_i \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{i \in A_k} \lambda_k a_i\beta_i \right\| = \left(\sum_{k=1}^{\mu} \sum_{i \in A_k} |\lambda_k|^p |a_i|^p \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\mu} |\lambda_k|^p \cdot \sum_{i \in A_k} |a_i|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\mu} |\lambda_k|^p \right)^{1/p} = \left\| \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k\beta_k \right\|$$

Για τον c_0 είναι $\|\phi_k\| = 1 \Leftrightarrow \sup_{i \in A_k} |a_i| = 1 \Leftrightarrow \max_{i \in A_k} |a_i| = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Άρα $\forall k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $i_k \in A_k$ τέτοιο ώστε $|a_{i_k}| = 1$. Τότε για $\mu \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k\phi_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{i \in A_k} \lambda_k a_i\beta_i \right\| = \sup_{k \in [\mu]} |\lambda_k| \cdot \sup_{i \in A_k} |a_i| = \sup_{k \in [\mu]} |\lambda_k| = \left\| \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k\beta_k \right\|$$

Άρα από τη πρόταση 2.1 έχουμε ότι $(\phi_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \sim (\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$. □

Η παραπάνω απόδειξη μπορεί να συνεχιστεί και να καταλήξουμε ότι ο υπόχωρος $\overline{\langle(\phi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}\rangle}$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X με προβολή νόρμας 1. Αυτό που χρειαζόμαστε εμείς όμως είναι το:

Πόρισμα 4.6.1. *Οι συνήθεις βάσεις των l_p, $1 \leq p < \infty$ και c_0 είναι τέλεια ομογενείς.*

Θεώρημα 4.7 (M.Zippin). *Έστω X χώρος Banach με κανονικοποιημένη τέλεια ομογενή βάση $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$. Τότε η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη είτε με την συνήθη βάση του c_0 ή με τη συνήθη βάση του l_p για κάποιο $p \in [1, \infty)$.*

Απόδειξη. Όπως και παραπάνω ας είναι $\lambda(\nu) = \| \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k \|$. Αν η ακολουθία $(\lambda(\nu))_{\nu=1}^{\infty}$ είναι άνω φραγμένη τότε από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0. Αν όχι τότε πάλι από το προηγούμενο λήμμα παίρνουμε ένα $p \in [1, \infty)$ και μια σταθερά Ω τέτοια ώστε για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο A του $\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\Omega}|A|^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \sum_{\nu \in A} \beta_\nu \right\| \leq \Omega |A|^{\frac{1}{p}}$$

Έστω τώρα $(a_i)_{i=1}^{\nu}$ πεπερασμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_{i=1}^{\nu} a_i^p = 1$. Παρατηρήστε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|a_i|^p \in \mathbb{Q}$ για κάθε $i = 1, 2, ...\nu$ καθώς στο τέλος η πυκνότητα θα μας δώσει το αποτέλεσμα για όλο το $\mathbb{R}$. Άρα κάθε a_i^p γράφετε ως $a_i^p = \mu_i/\mu$ όπου $\mu_i \in \mathbb{N}$ και το μ είναι κοινός παρονομαστής για όλα τα a_i. Θα είναι ακόμη $\sum_{i=1}^{\nu} \mu_i = \mu$.

Ας πάρουμε λοιπόν $(N_i)_{i=1}^{\nu}$ ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με $N_1 = [1, \mu_1]$, $N_2 = [\mu_1 + 1, \mu_2]$... κ.ο.κ. Τα $N_1, ...N_\nu$ είναι ξένα ανά δύο 'διαστήματα' του $\mathbb{N}$ με $|N_i| = \mu_i$ για κάθε $i = 1, 2, ...\nu$. Ορίζουμε τότε $\omega_i = \| \sum_{k \in N_i} \beta_k \|$ και

$$\theta_i = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k \in N_i} \beta_k$$

Η $(\theta_i)_{i=1}^{\nu}$ είναι κανονικοποιημένη, σταθερού συντελεστή μπλοκ βασική ακολουθία της $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ η οποία είναι τέλεια ομογενής και άρα από το λήμμα 4.1 έχουμε:

$$\frac{1}{M}\lambda(\mu_i) \leq \omega_i \leq M\lambda(\mu_i)$$

για κάθε $i = 1, 2, ...\nu$ και τότε από το λήμμα 4.5 παίρνουμε:

$$\frac{1}{\Omega}\frac{1}{M}\mu_i^{\frac{1}{p}} \leq \omega_i \leq \Omega M \mu_i^{\frac{1}{p}}$$

Άρα συνολικά:

$$\frac{1}{\Omega M^2 \mu^{\frac{1}{p}}} \left\| \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j \in N_i} \beta_j \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\nu} a_i \theta_i \right\| \leq \frac{\Omega M^2}{\mu^{\frac{1}{p}}} \left\| \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j \in N_i} \beta_j \right\|$$

που ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{\lambda(\mu)}{\Omega M^2 \mu^{\frac{1}{p}}} \leq \left\| \sum_{i=1}^{\nu} a_i \theta_i \right\| \leq \frac{\Omega M^2 \lambda(\mu)}{\mu^{\frac{1}{p}}}$$

και άρα

$$\frac{1}{\Omega^2 M^2} \leq \left\| \sum_{i=1}^{\nu} a_i \theta_i \right\| \leq \Omega^2 M^2$$

Από την τέλεια ομοιογένεια και πάλι, έχουμε ότι:

$$\frac{1}{\Omega^2 M^3} \leq \left\| \sum_{i=1}^{\nu} a_i \beta_i \right\| \leq \Omega^2 M^3$$

Το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Το θεώρημα του M.Zippin έχει αρκετές σημαντικές συνέπειες ειδικά για τους χώρους c_0, l_1 και l_2. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε μια από τις βασικότερες εφαρμογές του παραπάνω θεωρήματος.

5 Στις Βάσεις των c_0, l_p

Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι οι χώροι c_0, l_1 και l_2 έχουν την ιδιότητα ότι οι συνήθεις, κανονικοποιημένες και άνευ-όρων, βάσεις τους είναι μοναδικές ως προς ισομορφισμό. Αντίθετα οι χώροι $l_p, p \neq 1, 2$ έχουν τουλάχιστον δύο μη ισοδύναμες κανονικοποιημένες ανευ-όρων βασεις. Εδώ θα δούμε ότι οι τρεις παραπάνω χώροι είναι οι μόνοι με την ιδιότητα αυτή. Πρώτα όμως θα χρειαστούμε ένα αποτέλεσμα από τη μελέτη των συμμετρικών βάσεων.

Ορισμός 5.1. *Έστω $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ άνευ-όρων βάση ενός χώρου Banach X. Η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ καλείται* ***συμμετρική*** *αν είναι ισοδύναμη με την $(\beta_{\pi(\nu)})_{\nu=1}^{\infty}$ για κάθε μετάθεση π του $\mathbb{N}$*

Είναι σαφές ότι μια συμμετρική βάση είναι και άνευ-όρων. Με το επόμενο λήμμα θα καταλάβουμε καλύτερα τις συμμετρικές βάσεις.

Λήμμα 5.1. *Έστω $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ συμμετρική βάση ενός χώρου Banach X. Τότε υπάρχει σταθερά M τέτοια ώστε:*

$$\frac{1}{M}\left\|\sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_{\lambda_i}\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_{k_i}\right\| \leq M\left\|\sum_{i=1}^{\nu} a_i\beta_{\lambda_i}\right\|$$

για κάθε ακολουθία $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και για οποιαδήποτε ξένα υποσύνολα των φυσικών αριθμών $\{\lambda_1, ..., \lambda_\nu\}$ και $\{k_1, ..., k_\nu\}$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι μπορούμε να "διώξουμε" ένα πεπερασμένο αρχικό μέρος της $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$, δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε το λήμμα για την $(\beta_\nu)_{\nu\geq\nu_0}$, για κάποιο $\nu_0 \in \mathbb{N}$. Έστω ένα $\nu \in \mathbb{N}$ και πως το λήμμα δεν ισχύει. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(p_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$ με $p_0 = 0$, φυσικούς αριθμούς $\mu_\nu \leq p_\nu - p_{\nu-1}$, ακολουθία πραγματικών $(a_{\nu,i})_{\nu=1, i=1}^{\infty, \mu_\nu}$ και σύνολα $\{\lambda_{\nu,1}, ..., \lambda_{\nu,\mu_\nu}\}$ και $\{k_{\nu,1}, ..., k_{\nu,\mu_\nu}\}$, τέτοια ώστε για κάθε $\nu = 1, 2, ...$ να έχουμε:

$$p_{\nu-1}+1 \le \lambda_{\nu,i} \le p_\nu,\ 1 \le i \le \mu_\nu,$$

$$p_{\nu-1}+1 \le k_{\nu,i} \le p_\nu,\ 1 \le i \le \mu_\nu,$$

$$\Big\|\sum_{i=1}^{\mu_\nu} a_{\nu,i}\beta_{\lambda_{\nu,i}}\Big\| < 2^{-\nu} \text{ και}$$

$$\Big\|\sum_{i=1}^{\mu_\nu} a_{\nu,i}\beta_{k_{\nu,i}}\Big\| > 2^{\nu}.$$

Άρα μπορούμε να φτιάξουμε μετάθεση π του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\pi[p_{\nu-1}+1, p_\nu] = [p_{\nu-1}+1, p_\nu]$ και $\pi(\lambda_{\nu,i}) = k_{\nu,i}$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι οι $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ και $(\beta_{\pi(\nu)})_{\nu=1}^\infty$ είναι ισοδύναμες. □

Το παραπάνω λήμμα μας δείχνει πρώτον ότι μια συμμετρική βάση $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ ενός χώρου Banach X είναι ισοδύναμη με κάθε άπειρη υπακολουθία της. Το αντίστροφο δεν ισχύει καθώς η βάση $\sigma_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} e_i$ του c_0 (όπου $(e_i)_{i=1}^\infty$ η συνήθης βάση) είναι όντως ισοδύναμη με όλες τις υπακολουθίες της αλλά δεν είναι συμμετρική καθώς δεν είναι άνευ-όρων. Δεύτερον, συνδυάζοντας την πρόταση 2.1 και το λήμμα 3.1 με τα παραπάνω προκύπτει ότι θα υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε για κάθε $x = \sum_{\nu=1}^\infty a_\nu\beta_\nu \in X$, για κάθε ακολουθία προσήμων $(\epsilon_\nu)_{\nu=1}^\infty$ και για κάθε μετάθεση π του $\mathbb{N}$ να ισχύει:

$$\Big\|\sum_{\nu=1}^\infty \epsilon_\nu a_\nu \beta_{\pi(\nu)}\Big\| \le K\Big\|\sum_{\nu=1}^\infty a_\nu\beta_\nu\Big\|$$

Ορισμός 5.2. *Η παραπάνω σταθερά K καλείται* ***σταθερά συμμετρίας*** *της βάσης $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$. Αλλιώς λέμε ότι η βάση $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ είναι* ***K-συμμετρική****.*

Θεώρημα 5.2. *Έστω X χώρος Banach με κανονικοποιημένη, 1-συμμετρική βάση $(\beta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ και $(\phi_\nu)_{\nu=1}^\infty$ κανονικοποιημένη, σταθερού συντελεστή μπλοκ βασική υπακολουθία της. Τότε ο υπόχωρος $[\phi_\nu]_{\nu=1}^\infty$ είναι συμπληρωματικός στον X και μάλιστα με προβολή νόρμας 1.*

Απόδειξη. Έστω $\phi_k = \omega_k \sum_{i\in A_k}\beta_i$ για κάθε $k = 1, 2, \dots$,όπου $(A_k)_{k=1}^\infty$ ακολουθία, ξένων ανά δύο, υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι, λόγω της 1-συμμετρικότητας της βάσης, δεν είναι απαραίτητο τα μπλοκς της $(A_k)_{k=1}^\infty$ να είναι σε αύξουσα σειρά. Για κάθε (σταθερό) $\nu \in \mathbb{N}$, ας είναι Π_ν το σύνολο όλων των μεταθέσεων π του $\mathbb{N}$ για τις οποίες για κάθε $1 \le k \le \nu$, η π περιορισμένη στο A_k, δρα ως κυκλική μετάθεση για τα στοιχεία των $(A_k)_{k=1}^\nu$ (άρα $\pi(A_k) = A_k$), ενώ διατηρεί σταθερά όλα τα υπόλοιπα ($\pi(i) = i$ για κάθε $i \notin \bigcup_{k=1}^\nu A_k$). Κάθε τέτοια μετάθεση δίνει ένα τελεστή στον X που ορίζεται ως:

$$T_{\nu,\pi}(x) = T_{\nu,\pi}\Big(\sum_{i=1}^\infty a_i\beta_i\Big) = \sum_{i=1}^\infty a_i\beta_{\pi(i)}$$

για τον οποίο ισχύει $\|T_{\nu,\pi}(x)\| = \|x\|$, αφού η βάση είναι 1-συμμετρική.

Ας ορίσουμε τώρα, έναν ακόμα τελεστή στον X υπολογίζοντας τον μέσο όρο όλων των πιθανών επιλογών μεταθέσεων $\pi \in \Pi_\nu$. Για $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \beta_i$ θα είναι:

$$T_\nu(x) = \frac{1}{|\Pi_\nu|} \sum_{\pi \in \Pi_\nu} T_{\nu.\pi}(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \Big(\frac{1}{|A_k|} \sum_{i \in A_k} a_i \Big) \sum_{i \in A_k} \beta_i + \sum_{i \notin \bigcup_{k=1}^{\nu} A_k} a_i \beta_i$$

και

$$\|T_\nu(x)\| = \left\| \frac{1}{|\Pi_\nu|} \sum_{\pi \in \Pi_\nu} T_{\nu,\pi}(x) \right\| \leq \frac{1}{|\Pi_\nu|} \sum_{\pi \in \Pi_\nu} \|T_{\nu,\pi}(x)\| = \|x\|$$

Άρα για κάθε $\nu \in \mathbb{N}, x \in X$ η

$$P_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \Big(\frac{1}{|A_k|} \sum_{i \in A_k} a_i \Big) \sum_{i \in A_k} \beta_i$$

είναι προβολή νόρμας 1 από τον X στον $[\phi_k]_{k=1}^{\nu}$, οπότε η

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{|A_k|} \sum_{i \in A_k} a_i \Big) \sum_{i \in A_k} \beta_i = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{|A_k|} \sum_{i \in A_k} a_i \Big) \omega^{-1} \phi_k$$

είναι καλά ορισμένη προβολή, νόρμας 1, από τον X στον $[\phi_\nu]_{\nu=1}^{\infty}$. □

Στη συνέχεια θα δούμε ένα πολύ βασικό θεώρημα (την Τεχνική Διάσπασης του *Pelzcynski*), που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του κυρίως θέματος του κεφαλαίου.

Ορισμός 5.3. *Έστω X,Y χώροι Banach και* $Z = c_0$ *ή* $l_p, 1 \leq p < \infty$. *Ορίζουμε τότε το* ***ευθύ άθροισμα των X και Y ως προς τον Z*** *τον χώρο* $X \bigoplus_Z Y = (X \times Y, \|\cdot\|_{\oplus Z})$ *και με νόρμα την:*

$$\|(x,y)\|_{\oplus Z} = \|(\|x\|_X, \|y\|_Y)\|_Z$$

Ορισμός 5.4. *Έστω X χώρος Banach και* $Z = c_0$ *ή* $l_p, 1 \leq p < \infty$. *Ορίζουμε τότε το* ***άπειρο ευθύ άθροισμα του X ως προς τον Z*** *τον χώρο* $Z(X) = \bigoplus_{\nu=1}^{\infty} X$ *που αποτελείται από όλες τις ακολουθίες* $x = (x(\nu))_{\nu=1}^{\infty}$ *στοιχείων του X με* $(\|x(\nu)\|)_{\nu=1}^{\infty} \in Z$ *και νόρμα την:*

$$\|x\| = \|(x(\nu)\|)_{\nu=1}^{\infty}\|_Z$$

Πρόταση 5.3. *Ιδιότητες:*
α) Οι χώροι $Z(X)$ *είναι χώροι Banach*
β) $Z(Z) \sim Z$
γ) $X \sim Y \Rightarrow Z(X) \sim Z(Y)$
δ) $Z(X) \sim X \bigoplus_Z Z(X) \sim X \oplus Z(X)$
ϵ) $Z(X \bigoplus Y) \sim Z(X) \bigoplus Z(Y)$

Θεώρημα 5.4 (Τεχνική διάσπασης του *Pelzcynski*). *Έστω X, Y χώροι Banach που και οι δύο είναι ισόμορφοι με συμπληρωματικό υπόχωρο του άλλου. Έστω ακόμη ότι είτε $X \sim X \bigoplus X$ και $Y \sim Y \bigoplus Y$, είτε $X \sim Z(X)$ ($Z = c_0$ ή $l_p, 1 \leq p < \infty$). Τότε $X \sim Y$.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση μπορούμε να βρούμε δυο χώρους *Banach* X_1, Y_1, τέτοιους ώστε:

$$X = Y \bigoplus Y_1 \text{ και } Y = X \bigoplus X_1$$

• Αν $X \sim X \bigoplus X$ και $Y \sim Y \bigoplus Y$ είναι:

$$\begin{aligned} X &\sim Y \bigoplus Y_1 \sim Y \bigoplus Y \bigoplus Y_1 \sim Y \bigoplus X \\ Y &\sim X \bigoplus X_1 \sim X \bigoplus X \bigoplus X_1 \sim X \bigoplus Y \sim Y \bigoplus X \end{aligned}$$

• Αν $X \sim Z(X)$ τότε:

$$\begin{aligned} X &\sim Z(X) \sim Z(Y \bigoplus Y_1) \sim Z(Y) \bigoplus Z(Y_1) \sim Y \bigoplus Z(Y) \bigoplus Z(Y_1) \sim \\ &\sim Y \bigoplus Z(Y \bigoplus Y_1) \sim Y \bigoplus Z(X) \sim Y \bigoplus X \sim X \bigoplus Y \\ X &\sim Z(X) \sim X \bigoplus Z(X) \sim X \bigoplus X \Rightarrow \\ &\Rightarrow Y \sim X \bigoplus X_1 \sim X \bigoplus X \bigoplus X_1 \sim X \bigoplus Y \end{aligned}$$

Άρα και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ότι $X \sim Y$. □

Το παρακάτω θεώρημα οφείλεται στους J.Lindenstrauss και M.Zippin οι οποίοι το 1969, πολύ σύντομα μετά από το Θεώρημα του *M.Zippin*, ολοκλήρωσαν την κατηγοριοποίηση των χώρων *Banach* με μοναδική άνευ-όρων βάση.

Θεώρημα 5.5. *Ένας χώρος Banach X έχει μοναδική ανευ-όρων βάση (ως προς ισομορφισμό), αν και μόνον αν ο X είναι ισόμορφος με έναν από τούς χώρους c_o, l_1, ή l_2.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X έχει μοναδική, κανονικοποιημένη, ανευ-όρων βάση, $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$. Αυτή θα είναι ισοδύναμη με την $(\beta_{\pi(\nu)})_{\nu=1}^{\infty}$ για κάθε μετάθεση π του $\mathbb{N}$ και άρα συμμετρική. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι 1-συμμετρική.

Έστω τώρα $(\phi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ κανονικοποιημένη, σταθερού συντελεστή, μπλοκ βασική υπακολουθία της $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$, τέτοια ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να υπάρχουν άπειρα μπλοκς μήκους κ. Δηλαδή,

$$|\{\phi_\nu : |\operatorname{supp} \phi_\nu| = k\}| = \infty, \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Ας είναι Y η κλειστή γραμμική θήκη της $(\phi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$. Τότε ο Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X λόγο του θεωρήματος 5.2. Επιπλέον ο X είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του Y γιατί αν πάρουμε την υπακολουθία $(\theta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ της$(\phi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ για την οποία $|\operatorname{supp}\theta_\nu| = 1$, ο $[\theta_\nu]_{\nu=1}^{\infty}$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον X και συμπληρωματικός στον Y, αφού η $(\phi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι ανευ-όρων.

Τώρα ας χωρίσουμε το $\mathbb{N}$ σε δύο υποσύνολα N_1, N_2 τέτοια ώστε:

$$|\{\nu \in N_1 : |\operatorname{supp}\phi_\nu| = k\}| = |\{\nu \in N_2 : |\operatorname{supp}\phi_\nu| = k\}| = \infty$$

Τότε θα είναι

$$[\phi_\nu]_{\nu=1}^{\infty} \sim [\phi_\nu]_{\nu\in N_1} \oplus [\phi_\nu]_{\nu\in N_2} \sim [\phi_\nu]_{\nu=1}^{\infty} \oplus [\phi_\nu]_{\nu=1}^{\infty}$$

και άρα $Y \sim Y \oplus Y$. Ακόμη $X \sim X \oplus X$ λόγο της συμμετρικότητας της $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$. Άρα από την τεχνική διάσπασης του *Pelczynski* (Θεώρημα 5.4) έχουμε ότι $X \sim Y$.

Καθώς η $(\phi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι ανευ-όρων βάση του Y, θα είναι ισόμορφη με την $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ από την αρχική υπόθεση. Όμως τότε η $(\phi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ αφού είναι συμμετρική είναι και ισοδύναμη με όλες τις υπακολουθίες της. Άρα η $(\beta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ είναι τέλεια ομογενής βάση και άρα ισοδύναμη με την συνήθη βάση ενός εκ τών $c_0, l_p, p \in [1, \infty)$ από το Θεώρημα 4.7

Όμως σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι οι χώροι $l_p, p \in (1,2) \cup (2,\infty)$ έχουν άνευ-όρων βάση μη-ισοδύναμη με τη συνήθη βάση τους (πρόταση 3.6). Άρα ο X δεν μπορεί παρά να είναι ένας από τους c_0, l_1 ή l_2. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Fernando Albiac, Nigel J. Kalton - Graduate Texts in Mathematics 233 - Topics in Banach Space Theory

[2] M. Zippin - Israel Journal of Mathematics vol. 4, iss. 4 - On perfectly homogeneous bases in Banach spaces

[3] William B. Johnson, Joran Lindenstrauss - Handbook of the geometry of Banach spaces ch. 1 - Basic concepts in the geometry of Banach spaces

[4] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos, V. Zizler - Banach Space Theory - The basis for linear and nonlinear analysis

[5] F. Albiac, C. Leranoz - Research article - On perfectly homogeneous bases in Quasi-Banach spaces