Διασπάσεις ομάδων με άπειρα το πλήθος πέρατα

Μάριος Δεληγιάννης

Τριμελής Επιτροπή:

Δημήτριος Βάρσος
Ιωάννης Ντόκας
Μιχαήλ Συκιώτης(Επιβλέπων)

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

15 Ιουλίου 2022

Περιεχόμενα

1 Βασικοί ορισμοί **1**

1.1 Ελεύθερες Ομάδες και Ελεύθερα Γινόμενα 1

1.2 Ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα 6

1.3 HNN Επεκτάσεις 11

2 Γραφήματα Ομάδων **15**

2.1 Γραφήματα 15

2.2 Γράφημα Cayley 17

2.3 Γραφήματα Ομάδων 19

2.4 Θεώρημα Δομής 21

3 Πέρατα **29**

3.1 Στοιχεία Ομολογικής Άλγεβρας 29

3.2 Πέρατα τοπολογικών χώρων 31

3.3 Πέρατα Ομάδων 32

4 Θεώρημα διάσπασης ομάδων με άπειρα πέρατα **44**

Abstract

In the current master thesis we present a proof of the Theorem which says that each finitely generated group with infinitely many ends splits as an amalgam or HNN extension over a finite subgroup. This Theorem was proved by Stallings, initially for torsion free groups in [14] and for the general case in [13]. We follow the proof that was presented by Scott and Wall in [16] which is a combination of the proofs that were introduced by Cohen [1], Dunwoody [4] and Stallings [13].

For completeness, in the first three chapters we introduce the theory that one needs to study the proof of the Theorem which is presented at the fourth chapter.

Περίληψη

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία παρουσιάζουμε το Θεώρημα το οποίο ορίζει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα διασπάται ως αμάλγαμα ή HNN επέκταση υπεράνω μίας πεπερασμένης υποομάδας. Το Θεώρημα αυτό αποδείχτηκε από τον Stallings αρχικά για ομάδες ελευθέρας στρέψης στο [14] και έπειτα στην γενική περίπτωση στο [13]. Εμείς ακολουθούμε την απόδειξη που παρουσιάζεται από τους Scott και Wall στο [16] η οποία είναι ένας συνδυασμός των αποδείξεων που παρουσίασαν οι Cohen [1], Dunwoody [4] και Stallings [13].

Για λόγους πληρότητας στα πρώτα τρία κεφάλαια παρουσιάζεται η θεωρία που θα χρειαστεί να ανατρέξει κάποιος μελετώντας την απόδειξη του Θεωρήματος η οποία παρουσιάζεται στο τέταρτο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 1

Βασικοί ορισμοί

1.1 Ελεύθερες Ομάδες και Ελεύθερα Γινόμενα

Ξεκινάμε δίνοντας τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας και του ελευθέρου γινομένου καθώς και κάποιες βασικές ιδιότητες αυτών.

Ορισμός 1. *(Καθολική Συνθήκη των Ελεύθερων Ομάδων) Αν X είναι ένα σύνολο, F μία ομάδα και $\sigma : X \to F$ μία απεικόνιση, τότε το ζεύγος (F, σ) λέγεται* ***ελεύθερη ομάδα με βάση το X*** *αν, για κάθε ομάδα G και κάθε απεικόνιση $f : X \to G$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : F \to G$ ο οποίος επεκτείνει την f.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & F \\ \downarrow f & \swarrow \varphi & \\ G & & \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση σ είναι αναγκαστικά εμφύτευση. Πράγματι ας θεωρήσουμε $x_1 \neq x_2$ δύο στοιχεία του X με $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$. Επίσης ας θεωρήσουμε ως G μία ομάδα με τουλάχιστον δύο διαφορετικά στοιχεία g_1, g_2 και απεικόνιση $f : X \to G$ με $f(x_1) = g_1 \in G$ και $f(x_2) = g_2 \in G$. Τότε θα έχουμε

$$\varphi\sigma(x_1) = \varphi\sigma(x_2) \iff f(x_1) = f(x_2)$$

Άτοπο αφού τα g_1, g_2 τα θεωρήσαμε διαφορετικά.

Επίσης είναι προφανές ότι η F είναι ελεύθερη με βάση το ImX όπου για την απεικόνιση σ θεωρούμε την κανονική εμφύτευση i. Επομένως μπορούμε πάντα να θεωρούμε την βάση μιας ελεύθερης ομάδας ως υποσύνολο αυτής και άρα να αναφερόμαστε στην ελεύθερη ομάδα F αντί του ζεύγους (F, σ).

Ορισμός 2. *(Καθολική Συνθήκη των Ελεύθερων Γινομένων) Έστω $\{G_i : i \in I\}$ μία οικογένεια ομάδων. Το* ***ελεύθερο γινόμενο*** *των G_i είναι μία ομάδα G και μία οικογένεια ομομορφισμών $j_i : G_i \to G$ τέτοιοι ώστε, για κάθε ομάδα H και κάθε οικογένεια ομομορφισμών $f_i : G_i \to H$, να υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : G \to H$ με $\varphi \circ j_i = f_i$ για κάθε $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[d, "f_i"] & G \arrow[dl, "\varphi"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Την ομάδα G την συμβολίζουμε ως $*_{i\in I}G_i = *_iG_i$.

Προχωράμε τώρα δίνοντας τον ορισμό της λέξης και της ανηγμένης λέξης καθώς σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι υπάρχει μία ένα προς ένα και επί απεικόνιση ανάμεσα σε μία ελεύθερη ομάδα και το σύνολο των ανηγμένων λέξεων που προκύπτουν από την βάση της ελεύθερης ομάδας.

Αν X ένα σύνολο, τότε έστω ένα σύνολο X^{-1}, ξένο ως προς το X, για το οποίο υπάρχει μία ένα προς ένα και επί απεικόνιση $X \to X^{-1}$ με $x \mapsto x^{-1}$. Έστω ακόμα, ένα σύνολο X' ξένο προς το $X \cup X^{-1}$ και το οποίο περιέχει ένα μοναδικό στοιχείο, το οποίο το συμβολίζουμε με 1. Τότε συμβολίζουμε με x^1 το x και με x^0 το 1. Το $X \cup X^{-1} \cup \{1\}$ το ονομάζουμε το **αλφάβητο** που προκύπτει από το X.

Ορισμός 3. *Μία* ***λέξη*** *στο X (ή στο αλφάβητο που προκύπτει από το X) είναι μία ακολουθία $w = (x_1, x_2, \dots)$, όπου $x_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$ για κάθε i, έτσι ώστε να υπάρχει ακέραιος $n \geq 0$ με $x_i = 1$ για κάθε $i > n$.*
Ιδιαίτερα, η σταθερή ακολουθία $(1, 1, \dots)$ ονομάζεται ***κενή λέξη*** *και συμβολίζεται με 1 ή ( ).*

Παρατηρούμε ότι μία λέξη μπορεί να γραφτεί και στην παρακάτω μορφή

$$w = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}$$

όπου τα $x_i \in X$, τα $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ και $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ και παραλείποντας τους όρους που είναι ίσοι με μονάδα μετά από τον ακέραιο n του ορισμού. Τότε θεωρούμε ως **μήκος** μίας λέξης αυτό το n. Το μήκος της κενής λέξης ορίζεται να είναι ίσο με 0.

Ακόμα ως **αντίστροφο** μίας λέξης $w = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}$ θεωρούμε την λέξη $w^{-1} = x_n^{-\varepsilon_n}\dots x_1^{-\varepsilon_1}$ και ονομάζουμε **ανηγμένη** μία λέξη η οποία δεν περιέχει στην έκφρασή της διαδοχικά γράμματα της μορφής xx^{-1}, $x^{-1}x$ ή όρους της μορφής x^0 ή αν είναι η κενή λέξη. Να επισημάνουμε σε αυτό το σημείο ότι αν για μία λέξη $w = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}$ έχουμε $\varepsilon_1 = 0$, τότε στο τέλος της έκφρασης της αντίστροφης λέξης θα συμπεριλάβουμε τον όρο $x_1^{-\varepsilon_1}$. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζουμε ότι μία λέξη έχει ίδιο μήκος με την αντίστροφή της. Τέλος μία **υπολέξη** μίας λέξης $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ είναι είτε η κενή λέξη είτε μία λέξη της μορφής $v = x_i^{\varepsilon_i} \dots x_j^{\varepsilon_j}$ όπου $1 \leq i \leq j \leq n$.

Πριν προχωρήσουμε στο θεώρημα βλέπουμε ότι μπορούμε να ορίσουμε μία πράξη ανάμεσα σε δύο ανηγμένες λέξεις ως εξής:

Έστω $w = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ και $u = y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$ δύο λέξεις. Τότε ορίζουμε $wu = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$ και έπειτα από τις απαραίτητες αναγωγές(δηλ. διαγραφές υπολέξεων της μορφής $xx^{-1}, x^{-1}x, 1$) καταλήγουμε σε μία ανηγμένη λέξη.

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει και κάτι παραπάνω από την απλή αντιστοιχία. Δείχνει επιπλέον ότι για κάθε σύνολο X υπάρχει ελεύθερη ομάδα που έχει σαν βάση της το X.

Θεώρημα 1. *Έστω X ένα σύνολο. Τότε υπάρχει ελεύθερη ομάδα F με βάση το X.*

Απόδειξη. Έστω F το σύνολο όλων των ανηγμένων λέξεων του X. Αρχικά ορίζουμε δύο απεικονίσεις σε κάθε $x \in X$ ως:

$$|x| : F \to F, \ |x^{-1}| : F \to F$$

όπου

$$|x^{\varepsilon}|(x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}) = \begin{cases} x^{\varepsilon} x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} & x^{\varepsilon} \neq x_1^{-\varepsilon_1} \\ x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} & x^{\varepsilon} = x_1^{-\varepsilon_1} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι $|x^{\varepsilon}|$ αποτελούν μεταθέσεις του F και άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την υποομάδα $\mathscr{F}$ της ομάδας μεταθέσεων S_F επί του συνόλου F που παράγεται από το $[X] = \{|x| : x \in X\}$. Η ιδέα είναι να δείξουμε ότι η $\mathscr{F}$ είναι ελεύθερη ομάδα με βάση $[X]$ και μετά μέσω της ένα προς ένα και επί απεικόνισης $\Phi : \mathscr{F} \to F$ η οποία ορίζεται ως $|x_1^{\varepsilon_1}| \circ \cdots \circ |x_n^{\varepsilon_n}| \mapsto x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ να ταυτίσουμε το F με την $\mathscr{F}$.

Θεωρούμε ένα στοιχείο $g \in \mathscr{F}$. Τότε, από την δράση στην κενή λέξη 1, δηλαδή:

$$g(1) = |y_1^{\delta_1}| \circ |y_2^{\delta_2}| \circ \cdots \circ |y_m^{\delta_m}|(1) = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$$

συμπεραίνουμε ότι αυτό μπορεί να γραφτεί μοναδικά ως:

$$g = |x_1^{\varepsilon_1}| \circ \cdots \circ |x_n^{\varepsilon_n}|$$

όπου η έκφραση $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ είναι η ανηγμένη μορφή της $y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$.

Θα δείξουμε ότι η $\mathscr{F}$ είναι ελεύθερη μέσω της καθολικής συνθήκης. Έστω λοιπόν G μία ομάδα και απεικόνιση $f : [X] \to G$. Τότε ορίζοντας απεικόνιση $\varphi : \mathscr{F} \to G$ με

$$\varphi(|x_1^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ |x_n^{\varepsilon_n}|) = f(|x_1^{\varepsilon_1}|) \dots f(|x_n^{\varepsilon_n}|)$$

έχουμε μία επέκταση της f.

Θα δείξουμε τώρα ότι η φ είναι ομομορφισμός.
Έστω $w, u \in [X]$. Τότε υπάρχουν $v, w^{'}$ υπολέξεις της w και $u^{''}$ υπολέξη της u ώστε v^{-1} υπολέξη της u και $w = w^{'} \circ v$,$u = v^{-1} \circ u^{''}$ και η $w^{'} \circ u^{''}$ να είναι ανηγμένη. Τότε έχουμε:

$$\varphi(w) = \varphi(w^{'})\varphi(v)$$
$$\varphi(u) = \varphi(v^{-1})\varphi(u^{''}) = \varphi(v)^{-1}\varphi(u^{''}).$$

Επομένως:

$$\varphi(w)\varphi(u) = \varphi(w^{'})\varphi(v)\varphi(v)^{-1}\varphi(u^{''}) = \varphi(w^{'})\varphi(u^{''}).$$

Από την άλλη μεριά έχουμε:

$$\varphi(w \circ u) = \varphi(w^{'} \circ u^{''}) = \varphi(w^{'})\varphi(u^{''}).$$

Άρα τελικά η φ είναι ομομορφισμός. Η μοναδικότητα αυτού του ομομορφισμού έπεται άμεσα από το γεγονός ότι δύο ομομορφισμοί που παίρνουν ίδιες τιμές σε ένα σύνολο γεννητόρων είναι και ίσοι. Επομένως η $\mathscr{F}$ είναι ελεύθερη με βάση το $[X]$ και άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Θα δείξουμε τώρα το αντίστοιχο αποτέλεσμα για το ελεύθερο γινόμενο. Ότι δηλαδή δοθείσας μίας οικογένειας ομάδων, το ελεύθερο γινόμενο αυτών υπάρχει.

Θεώρημα 2. *Έστω $\{G_i : i \in I\}$ μία οικογένεια ομάδων. Τότε υπάρχει το ελεύθερο γινόμενο $*_i G_i$.*

Απόδειξη. Αρχικά μπορούμε να υποθέσουμε ότι $G_\lambda \backslash \{1_{G_\lambda}\} \cap G_\mu \backslash \{1_{G_\mu}\} = \emptyset$ για $\lambda \neq \mu$, αντικαθιστώντας αν χρειάζεται την G_λ με ένα ισομορφικό αντίγραφο αυτής.

Θεωρούμε τώρα ως S το σύνολο των λέξεων στο αλφάβητο $\cup_{\lambda \in I}(G_\lambda \backslash \{1_{G_\lambda}\}) \cup \{1\}$. Έχουμε δηλαδή στοιχεία της μορφής

$$g = g_1 g_2 \dots g_r$$

όπου $g_i \in G_{\lambda_i} \backslash \{1_{G_{\lambda_i}}\}, \lambda_i \in I$ ή $g_i = 1$ και για την κενή λέξη θεωρούμε $r = 0$. Θεωρούμε με φυσικό τρόπο μέσω απλής παράταξης των στοιχείων το γινόμενο gh όπου ορίζουμε ταυτόχρονα ότι $g1 = g = 1g$. Ως αντίστροφο μίας λέξης $g = g_1 g_2 \dots g_r$ θεωρούμε την $g^{-1} = g_r^{-1} \dots g_1^{-1}$ και ως αντίστροφη της κενής $1^{-1} = 1$.

Θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας $'\sim'$ ανάμεσα σε δύο λέξεις ως εξής: $g \sim h$ αν και μόνο αν την μία μπορούμε να την μετατρέψουμε στην άλλη κάνοντας χρήση μίας ή πεπερασμένου συνδυασμού των παρακάτω ενεργειών που λέγονται στοιχειώδεις αναγωγές:

1. Να εισάγουμε την μονάδα στην έκφραση.

2. Να διαγράψουμε την μονάδα από την έκφραση.

3. Να αντικαταστήσουμε ένα ζεύγος στοιχείων που πρόσκειται το ένα στο άλλο και ανήκουν στην ίδια ομάδα, με το γινόμενό τους.

4. Να αντικαταστήσουμε ένα στοιχείο με δύο άλλα των οποίων το γινόμενο είναι ίσο με το στοιχείο αυτό.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η $' \sim '$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Θεωρούμε λοιπόν ως G το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $[g]$ για κάθε λέξη g. Παρατηρούμε ότι αν $g \sim g^{'}$ και $h \sim h^{'}$ τότε $gh \sim g^{'}h^{'}$ όπως επίσης $g^{-1} \sim (g^{'})^{-1}$.

Ορίζουμε λοιπόν πράξη στο G ως:

$$[g][h] = [gh] \;\; \kappa\alpha\iota \;\; [g^{-1}] = [g]^{-1}$$

και ως μοναδιαίο στοιχείο το $[1]$. Τότε η G είναι προφανώς ομάδα. Επιπλέον ορίζουμε ομομορφισμούς $i_\lambda : G_\lambda \to G$ ως $x \mapsto [x]$.

Θα δείξουμε ότι η G με τους ομομορφισμούς i_λ αποτελούν το ελεύθερο γινόμενο των G_λ. Ας θεωρήσουμε λοιπόν μία ομάδα H και ομομορφισμούς $\varphi_\lambda : G_\lambda \to H$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi : G \to H$

$$\varphi([g]) = \varphi_{\lambda_1}(g_1)\varphi_{\lambda_2}(g_2)\dots\varphi_{\lambda_r}(g_r)$$

όπου $g = g_1 \dots g_r$. Εύκολα δείχνεται, μιας και οι φ_λ είναι ομομορφισμοί, ότι η φ δεν επηρεάζεται από διαφορετικές επιλογές αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυναμίας. Επιπλέον είναι άμεσο ότι η φ ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού των ελευθέρων γινομένων.

Μένει να δείξουμε ότι η φ είναι μοναδική. Έστω λοιπόν $\varphi^{'} : G \to H$ ένας άλλος ομομορφισμός που επεκτείνει τους φ_λ. Τότε θα έχουμε $\varphi^{'} \circ i_\lambda = \varphi \circ i_\lambda$. Με άλλα λόγια οι $\varphi, \varphi^{'}$ ταυτίζονται στις εικόνες Imi_λ. Αυτές όμως οι εικόνες παράγουν την G αφού για $g = g_1 g_2 \dots g_r$ με $g_i \in G_{\lambda_i}$ θα έχουμε

$$[g] = [g_1][g_2]\dots[g_r] = i_1(g_1)\dots i_r(g_r)$$

Επομένως $\varphi = \varphi^{'}$. □

Με παρόμοιο τρόπο όπως στις ελεύθερες ομάδες μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της ανηγμένης λέξης και στα ελεύθερα γινόμενα. Μία **ανηγμένη** λέξη σε ένα ελεύθερο γινόμενο $*_i G_i$ είναι μία λέξη στο αλφάβητο $\cup(G_i \backslash \{1_{G_i}\}) \cup \{1\}$ η οποία είναι είτε η κενή λέξη είτε είναι της μορφής

$$w = g_1 g_2 \cdots g_n$$

όπου διαδοχικά g_i ανήκουν σε διαφορετικές $G_i \backslash \{1\}$.

Ο παρακάτω ορισμός μας δίνει έναν βολικό τρόπο για να περιγράψουμε μία ομάδα δίνοντας μας ουσιαστικά πληροφορία που αφορά το σύνολο των σχέσεων που εμφανίζονται σε μία ομάδα.

Ορισμός 4. *Έστω X σύνολο και $R \subseteq W(X)$, όπου $W(X)$ το σύνολο των λέξεων του X. Μία ομάδα G λέμε ότι έχει* ***σύνολο γεννητόρων*** *X και* ***σύνολο σχέσεων*** *R αν $G \cong F(X)/N$, όπου N η μικρότερη κανονική υποομάδα της $F(X)$ που περιέχει το R. Το ζεύγος $\langle X|R\rangle$ λέγεται* ***παράσταση*** *της G.*

1.2 Ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα

Συνεχίζουμε δίνοντας τον ορισμό του ελευθέρου γινομένου ομάδων με αμάλγαμα. Πρώτα όμως κάνουμε μία μικρή παρένθεση παρουσιάζοντας τον ορισμό του pushout ενός διαγράμματος ομάδων και ενός θεωρήματος που αφορά την μορφή ενός τέτοιου pushout.

Ορισμός 5. *Έστω A, B, C ομάδες και $f : A \to B$ και $g : A \to C$ δύο ομομορφισμοί. Τότε το* ***pushout*** *του ζεύγους $\langle f, g\rangle$ είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα, όπως το ακόλουθο*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ C & \xrightarrow{v} & G \end{array}$$

όπου G ομάδα και u, v ομομορφισμοί ώστε για κάθε άλλο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ C & \xrightarrow{k} & H \end{array}$$

να υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : G \to H$ ώστε $\varphi \circ u = h$ και $\varphi \circ v = k$. Δηλαδή το παρακάτω να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
C \arrow[r, "v"] \arrow[drr, bend right, "k"'] & G \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
& & H
\end{tikzcd}$$

Πολλές φορές αναφερόμαστε σε ένα pushout αναφέροντας μόνο την ομάδα G του μεταθετικού διαγράμματος. Δύο pushout G, H ενός ζεύγους $\langle f, g\rangle$ λέγονται **ισόμορφα** αν οι δύο ομομορφισμοί $\varphi : G \to H$ και $\psi : H \to G$ που προκύπτουν, είναι αντίστροφοι ο ένας του άλλου.

Πρόταση 1. *Αν G, H είναι δύο pushout του ζεύγους $\langle f, g\rangle$, τότε τα G, H είναι ισόμορφα.*

Απόδειξη. Έστω λοιπόν τα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u} \\ C & \xrightarrow{v} & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h} \\ C & \xrightarrow{k} & H \end{array}$$

Αφού και τα δύο είναι pushout υπάρχουν δύο ομομορφισμοί $\varphi : G \to H, \psi : H \to G$ για του οποίους ισχύουν:

$$\varphi \circ v = k,\ \varphi \circ u = h$$

$$\psi \circ h = u,\ \psi \circ k = v$$

αντίστοιχα.

Άμεσα έχουμε:

$$\psi \circ h = u \iff \psi \circ \varphi \circ u = u \iff \psi \circ \varphi = Id_G$$

$$\varphi \circ u = h \iff \varphi \circ \psi \circ h = h \iff \varphi \circ \psi = Id_H$$

Άρα τα δύο pushout είναι ισόμορφα.

$\square$

Θεώρημα 3. *Για το ζεύγος ομομορφισμών $i : A \to B$ και $j : A \to C$ υπάρχει το pushout και είναι ισομορφικό με $(B*C)/N$, όπου N είναι η κανονική υποομάδα του $B*C$ που παράγεται από τα $\{i(a)j(a^{-1}) : a \in A\}$*

Απόδειξη. Ξεκινάμε ορίζοντας $G = (B * C)/N$ και ομομορφισμούς $j^{'} : B \to G$, $i^{'} : C \to G$ όπου $j^{'}(b) = bN$ και $i^{'}(c) = cN$.
Έστω τώρα H ομάδα και $f : B \to H$, $g : C \to H$ ομομορφισμοί τέτοιοι ώστε $g \circ j = f \circ i$. Από την καθολική συνθήκη του ελευθέρου γινομένου υπάρχει ομομορφισμός $\psi : B * C \to H$ που επεκτείνει τους f, g. Έστω $a \in A$. Τότε έχουμε:

$$\psi(i(a)j(a^{-1})) = \psi(i(a))\psi(j(a^{-1})) = f(i(a))g(j(a^{-1})) = 1$$

Άρα $N \leq ker\psi$. Επομένως η ψ επάγει ομομορφισμό $\varphi : (B * C)/N \to G$ με $\varphi \circ j^{'} = f$ και $\varphi \circ i^{'} = g$. Επιπλέον ο φ είναι μοναδικός αφού το $(B * C)/N$ παράγεται από το $B \cup C$.

Τελικά η τριάδα $(G, j^{'}, i^{'})$ είναι το ζητούμενο *pushout*. □

Φτάνουμε τώρα στον ορισμό του ελευθέρου γινομένου δύο ομάδων με αμάλγαμα το οποίο αποτελεί μία γενίκευση του ελευθέρου γινομένου ομάδων. Αποτελεί επίσης και μία από τις κατασκευές που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία.

Ορισμός 6. *Έστω A_1, A_2 ομάδες και έστω $\theta : B_1 \to B_2$ ισομορφισμός μεταξύ δύο υποομάδων B_1, B_2 των A_1, A_2, αντίστοιχα. Το* ***ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα*** *των A_1 και A_2 ως προς ϑ (Συμβ. $A_1 *_\theta A_2$) είναι το pushout του διαγράμματος*

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j\circ\theta"] & A_1 \\ A_2 & \end{tikzcd}$$

όπου οι i, j είναι οι εμφυτεύσεις των υποομάδων στις ομάδες.

Στην βιβλιογραφία πολλές φορές συναντάται ο συμβολισμός $A_1 *_C A_2$ για το αμάλγαμα όπου C είναι ομάδα που είναι ισόμορφη με τις B_1, B_2 καθώς αυτές είναι ισόμορφες και μπορούμε ουσιαστικά να τις ταυτίσουμε.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να περιγράψουμε τα στοιχεία ενός αμαλγάματος $A_1 *_\theta A_2$. Πρώτα όμως δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 7. *Έστω A_1, A_2 ομάδες, $B_1 \leq A_1$, $B_2 \leq A_2$ και $\theta : B_1 \to B_2$ ισομορφισμός. Επιλέγουμε για κάθε αριστερό σύμπλοκο της B_1 στην A_1 από έναν αντιπρόσωπο με μόνο περιορισμό ότι ο αντιπρόσωπος για το B_1 είναι το 1 και έστω T_1 το σύνολο των αντιπροσώπων. Ομοίως για τα σύμπλοκα της B_2 στην A_2 δημιουργούμε το σύνολο T_2 με $1 \in T_2$. Επιπλέον για κάθε $a \in A_i$ συμβολίζουμε τον αντιπρόσωπο του συμπλόκου aB_i με $l(a)$ έτσι ώστε για κάποιο $b \in B_i$ να έχουμε $a = l(a)b$.*

Τότε ένα στοιχείο του $A_1 *_\theta A_2$ της μορφής

$$l(a_1)l(a_2)\dots l(a_n)b$$

όπου $b \in B_1, n \geq 0$, διαδοχικά $l(a_j)$ ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα αντιπροσώπων T_1, T_2 και μάλιστα μόνο το $l(a_1)$ μπορεί να πάρει την τιμή 1, ονομάζεται ***κανονική μορφή****.*

Θεώρημα 4. *Έστω A_1, A_2 ομάδες με $B_1 \leq A_1$, $B_2 \leq A_2$ και $\theta : B_1 \to B_2$ ισομορφισμός. Τότε για κάθε στοιχείο $wN \in A_1 *_\theta A_2$ υπάρχει μοναδική κανονική μορφή $F(w)$ με $wN = F(w)N$, όπου N όπως στο Θεώρημα 3*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3 έχουμε ότι $A_1 *_\theta A_2 = (A_1 * A_2)/N$ όπου $N = \langle\langle b\theta(b^{-1}) : b \in B_1\rangle\rangle$. Κάθε σύμπλοκο της N στο $A_1 * A_2$ έχει αντιπρόσωπο $w = x_1y_1\dots x_ny_n$ όπου $x_i \in A_1$, $y_i \in A_2$, $\forall i$ και μάλιστα $x_i, y_i \neq 1$ για $1 < i < n$.

Έστω $n = 1$. Δηλαδή $w = x_1y_1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

Αν $y_1 = 1$, τότε μπορούμε να βρούμε $b \in B_1$ με $x_1 = l(x_1)b$. Θέτοντας $F(w) = l(x_1)b$ έχουμε το ζητούμενο.

Έστω τώρα $x_1 = 1$. Ομοίως τότε, υπάρχει $b \in B_2$ με $y_1 = l(y_1)b$. Στο $A_1 *_\theta A_2$ όμως μπορούμε να ταυτίσουμε τα $b, \theta(b)$. Επομένως έχουμε

$$w = y_1 = l(y_1)b = l(y_1)\theta^{-1}(b)$$

και άρα θέτοντας $F(w) = l(y_1)\theta^{-1}(b)$ έχουμε το ζητούμενο.

Έστω τέλος $x_1, y_1 \neq 1$. Τότε

$$x_1y_1 = l(x_1)by_1 = l(x_1)\theta(b)y_1.$$

Έχουμε ότι $z_1 = \theta(b)y_1 \in A_2$, και άρα υπάρχει $b_2 \in B_2$ ώστε $z_1 = l(z_1)b_2$. Επομένως θα έχουμε

$$x_1y_1 = l(x_1)l(z_1)\theta^{-1}(b_2)$$

και άρα θέτοντας $F(w) = l(x_1)l(z_1)\theta^{-1}(b_2)$ έχουμε την κανονική μορφή που ζητάμε.

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για οποιοδήποτε n, θα μπορούμε κάθε φορά να εκφράζουμε οποιοδήποτε στοιχείο wN ως $F(w)N$ όπου $F(w)$ κανονική μορφή.

Προχωράμε στην απόδειξη της μοναδικότητας της γραφής αυτής.

Έστω M το σύνολο όλων των κανονικών μορφών. Τότε για κάθε $a \in A_i$ ορίζουμε απεικόνιση $|a| : M \to M$ ως

$$|a|(l(a_1)l(a_2)\dots l(a_n)b) = F(al(a_1)l(a_2)\dots l(a_n)b)$$

Ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα καθώς είτε τα $a, l(a_1)$ ανήκουν σε διαφορετικά A_i είτε όχι, η διαδικασία που ακολουθήσαμε παραπάνω εφαρμόζεται στις εκφράσεις $al(a_1)\dots l(a_n)b$ και $[al(a_1)]l(a_2)\dots l(a_n)b$ αντίστοιχα.

Προφανώς κάθε $|a|$ αποτελεί μετάθεση του M. Η απεικόνιση $h_i : A_i \to S_M$ όπου $a \mapsto |a|$ είναι ομομορφισμός αφού για $a, a' \in A_1 \cup A_2$ έχουμε ότι $|a| \circ |a'| = |aa'|$ και $|a^{-1}| = |a|^{-1}$. Συγκεκριμένα, αν $b \in B_1$ τότε $|b| = |\theta(b)|$.

Έχουμε λοιπόν το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{j_i} & A_1 * A_2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_i} & & \\ S_M & & \end{array}$$

Από την καθολική συνθήκη του ελευθέρου γινομένου υπάρχει ομομορφισμός

$$\varphi : A_1 * A_2 \to S_M$$

με

$$(l(a_1)l(a_2)\dots l(a_n)b) = |l(a_1)| \circ |l(a_2)| \circ \dots \circ |l(a_n)| \circ |b|.$$

Αφού για κάθε $b \in B_1$ ισχύει $|b| = |\theta(b)|$, έχουμε

$$\varphi(b\theta(b^{-1})) = |1| \implies b\theta(b^{-1}) \in Ker\varphi$$

και επομένως $N \leq Ker\varphi$.

Άρα επάγεται ομομορφισμός $\Phi : A_1 *_\theta A_2 = (A_1 * A_2)/N \to S_M$ με

$$\Phi(l(a_1)l(a_2)\dots l(a_n)bN) = \varphi(l(a_1)l(a_2)\dots l(a_n)b) =$$

$$|l(a_1)| \circ |l(a_2)| \circ \dots \circ |l(a_n)| \circ |b|.$$

Τελικά:

$$\Phi(wN)(1) = |l(a_1)| \circ |l(a_2)| \circ \dots \circ |l(a_n)| \circ |b|(1) = l(a_1)l(a_2)\cdots l(a_n)b = F(w)$$

Άρα, αν $G(w)$ είναι μία κανονική μορφή στο wN, θα έχουμε $\Phi(wN)(1) = G(w)$ και επομένως $F(w) = G(w)$. Δηλαδή η γραφή είναι μοναδική. □

Τελειώνουμε αυτή την παράγραφο δίνοντας δύο αποτελέσματα που θα μας χρησιμεύσουν στην επόμενη παράγραφο.

Θεώρημα 5. *Έστω δύο ομάδες A_1, A_2, B_1, B_2 ισομορφικές υποομάδες των A_1 και A_2 αντίστοιχα, και $\theta : B_1 \to B_2$ ένας ισομορφισμός. Τότε:*

1. *Οι ομομορφισμοί $\lambda_i : A_i \to A_1 *_\theta A_2$ του pushout είναι εμφυτεύσεις.*

2. *Αν* $A_i^{'} = \lambda_i(A_i)$, *τότε* $\langle A_1^{'}, A_2^{'}\rangle = A_1 *_\theta A_2$ *και* $A_1^{'} \cap A_2^{'} = \lambda_1(B_1) = \lambda_2(B_2)$.

Απόδειξη. 1. Έστω $a_i \in A_i \backslash \{1\}$. Τότε $F(a_i) \neq 1$ και $\Phi(a_i N) \neq 1$ όπου F, Φ όπως στην προηγούμενη απόδειξη.
Όμως τότε θα έχουμε

$$\Phi(a_i N) = \Phi(\lambda_i(a_i)) \neq 1 \implies \lambda_i(a_i) \neq 1$$

και άρα οι λ_i εμφυτεύσεις.

2. Εφόσον $A_1 *_\theta A_2 = (A_1 * A_2)/N$ έπεται άμεσα ότι $\langle A_1^{'}, A_2^{'}\rangle = A_1 *_\theta A_2$.
Έστω τώρα $u \in A_1^{'} \cap A_2^{'}$. Τότε υπάρχουν $a_i \in A_i$ έτσι ώστε $a_1 N = u = a_2 N$. Γράφοντας τα a_i στην κανονική μορφή τους έχουμε

$$F(a_1) = l(a_1)b, F(a_2) = l(a_2)b^{'}$$

Επομένως αφού η κανονική μορφή είναι μοναδική θα πρέπει $l(a_1) = l(a_2)$ και $b = b^{'}$. Αυτό όμως μπορεί να συμβεί μόνο αν $l(a_1) = 1 = l(a_2)$. Έπεται ότι

$$bN = a_1 N = u = a_2 N = b^{'} N \implies u \in \lambda_1(B_1) = \lambda_2(B_2)$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, αν $b \in B_1$ τότε προφανώς $bN \in A_1^{'} \cap A_2^{'}$. □

Πρόταση 2. *Αν* $f : A \to G$ *και* $g : B \to H$ *ομομορφισμοί, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός* $\varphi : A * B \to G * H$ *τέτοιος ώστε* $\varphi|_A = f$ *και* $\varphi|_B = g$. *Αυτός συμβολίζεται ως* $\varphi = f * g$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις εμφυτεύσεις $i_G : G \to G * H$, $i_H : H \to G * H$ και τις $i_A : A \to A * B$, $i_B : B \to A * B$. Τότε για την ομάδα $G * H$ και τους ομομορφισμούς $i_G \circ f : A \to G * H$ και $i_H \circ g : B \to G * H$, θα υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : A * B \to G * H$ που τους επεκτείνει λόγω της καθολικής ιδιότητας του ελευθέρου γινομένου και επομένως έχουμε το ζητούμενο. □

1.3 HNN Επεκτάσεις

Παρουσιάζουμε τώρα την έννοια της HNN επέκτασης μίας ομάδας η οποία αποτελεί κατά κάποιο τρόπο ένα είδος αμαλγάματος της δοθείσας ομάδας με μία άπειρη κυκλική ομάδα. Συγκεκριμένα:

Ορισμός 8. *Έστω G ομάδα, A, B ισόμορφες υποομάδες αυτής και $\varphi : A \to B$ ισομορφισμός. Θεωρούμε την άπειρη κυκλική ομάδα $\langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$ που παράγεται από ένα στοιχείο t εκτός της G.*

*Η **HNN επέκταση** της G ως προς A, B και φ είναι η ομάδα πηλίκο*

$$G*_A = G*_{A,\varphi} = (G * \langle t \rangle)/N,$$

όπου $N = \langle\langle t^{-1}at\varphi(a)^{-1}, a \in A \rangle\rangle$ είναι η κανονική υποομάδα της $G * \langle t \rangle$ που παράγεται από το $\{t^{-1}at\varphi(a)^{-1}, a \in A\}$.
Δηλαδή $G*_A = \langle G, t | t^{-1}at\varphi(a) | a \in A \rangle$.
*Η ομάδα G λέγεται **βάση** της HNN επέκτασης, το t **σταθερό γράμμα** και οι A,B **προσεταιριζόμενες υποομάδες**.*

Η έννοια της HNN επέκτασης μας δίνει την δυνατότητα να εμφυτεύσουμε την G σε μία μεγαλύτερη ομάδα στην οποία ο ισομορφισμός φ είναι περιορισμός συζυγίας. Δείχνουμε στην συνέχεια ότι πράγματι η G εμφυτεύεται στην $G*_A$.

Θεώρημα 6. *Έστω G ομάδα, A, B ισόμορφες υποομάδες αυτής και $\varphi : A \to B$ ισομορφισμός. Τότε υπάρχει ομάδα H που περιέχει την G και ένα στοιχείο $t \in H$ ώστε*

$$\varphi(a) = t^{-1}at, \forall a \in A.$$

Απόδειξη. Έστω $\langle u \rangle, \langle v \rangle$ ξένες άπειρες κυκλικές ομάδες. Ορίζουμε τις ομάδες

$$K_1 = G * \langle u \rangle \text{ και } K_2 = G * \langle v \rangle$$

Θέτουμε $L_1 = \langle G, uAu^{-1} \rangle \leq K_1$. Τότε $L_1 \cong G * u^{-1}Au$
Ομοίως για $L_2 = \langle G, vBv^{-1} \rangle \leq K_2$, τότε $L_2 \cong G * v^{-1}Bv$.
Από την Πρόταση 2 υπάρχει ένας ισομορφισμός $\theta : L_1 \to L_2$ με $\theta|_G$ να είναι η ταυτοτική και $\theta(u^{-1}au) = v^{-1}\varphi(a)v$.

Ορίζοντας $H = K_1 *_\theta K_2$, από το Θεώρημα 5 η H περιέχει υποομάδα ισομορφική με την L_1. Θέτοντας τώρα $t = uv^{-1}$, για $a \in A$ θα έχουμε:

$$u^{-1}au = v^{-1}\varphi(a)v \implies t^{-1}at = \varphi(a) \ \forall a \in A$$

□

Θεώρημα 7. *Η υποομάδα $\langle G, t \rangle \leq K_1 * K_2$ όπως ορίστηκε στο Θεώρημα 6 είναι HNN επέκταση με βάση G, σταθερό γράμμα t και $\varphi : A \to B$.*

Απόδειξη. Κάνοντας την ίδια κατασκευή του Θεωρήματος 6 θα έχουμε $K_1 = G * \langle u \rangle$, $K_2 = G * \langle v \rangle$, $L_1 = \langle G, u^{-1}Au \rangle$, $L_2 = \langle G, v^{-1}Bv \rangle$ και $\theta : L_1 \to L_2$ ισομορφισμός που στέλνει κάθε $g \in G$ στον εαυτό του και κάθε $u^{-1}au$ στο $v^{-1}\varphi(a)v$.

Από το Θεώρημα 3 είναι άμεσο ότι: Αν $G = \langle X|\Delta\rangle$ τότε $K_1 *_\theta K_2 = \langle X, u, v|\Delta, u^{-1}au = v^{-1}\varphi(a)v,\ \forall a \in A\rangle$.
Αν θεωρήσουμε $t = uv^{-1}$ έχουμε ότι

$$\langle G, t\rangle = \langle X, t|\Delta, t^{-1}at = \varphi(a),\quad \forall a \in A\rangle$$

Δηλαδή η $\langle G, t\rangle$ είναι HNN επέκταση με βάση G και σταθερό γράμμα t. $\square$

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο αναφέροντας ότι με παρόμοιο τρόπο, όπως στα αμαλγάματα, μπορούμε να εκφράσουμε κάθε στοιχείο $g \in G*_A$ ως

$$g = \pi(g_0)\pi(t^{\varepsilon_1})\pi(g_1)\ldots\pi(t^{\varepsilon_n})\pi(g_n)$$

όπου $\pi : G * \langle t\rangle \to G*_A$ η φυσική προβολή και η $(g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$ είναι κανονική μορφή με την ακόλουθη έννοια.

Ορισμός 9. *Μία ακολουθία $(g_0, t^{\varepsilon_1}, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ λέγεται **ανηγμένη** αν είναι η κενή ή αν δεν περιέχει υπολέξεις της μορφής $t^{-1}at$ ή $t\varphi(a)t^{-1}$ ή την μονάδα.*

*Μία **κανονική μορφή** είναι μία ανηγμένη ακολουθία όπως πριν έτσι ώστε:*

1. *g_0 αυθαίρετο στοιχείο της G.*

2. *Αν $\varepsilon_i = -1$, τότε $g_i \in T_A$*

3. *Αν $\varepsilon_i = 1$, τότε $g_i \in T_B$.*

όπου T_A σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της A στην G και T_B σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της $\varphi(A)$ στην G με $1 \in T_A$, $1 \in T_B$ και αν $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$ τότε $a_i \neq 1$.

Ας δείξουμε λοιπόν ότι κάθε στοιχείο μίας HNN επέκτασης γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σε κανονική μορφή. Έστω λοιπόν G μία ομάδα, A, B δύο ισόμορφες υποομάδες αυτής με ισομορφισμό $\varphi : A \to B$, T_A σύνολο αντιπροσώπων της A στην G και T_B σύνολο αντιπροσώπων της B στην G. Για ένα στοιχείο $g \in G*_{A,\varphi}$ με τυχαία έκφραση, ξεκινώντας από το τέλος της έκφρασης και σχηματίζοντας αντιπροσώπους συμπλόκων και κάνοντας αντικατάσταση των εκφράσεων $t^{-1}a$ με $\varphi(a)t^{-1}$ για $a \in A$ και των εκφράσεων tb με $\varphi^{-1}(b)t$ για $b \in B$ καταλήγουμε στην ζητούμενη έκφραση.

Θα δείξουμε τώρα ότι αυτή η έκφραση είναι και μοναδική. Έστω λοιπόν W το σύνολο των κανονικών μορφών της $G*_\varphi$. Θα ορίσουμε μία δράση της $G*_\varphi$ στο W ως εξής:

Έστω $\tau = (g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$ μία κανονική έκφραση και $g \in G$. Τότε:

$$g * \tau = (gg_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$$

$$t * \tau = \begin{cases} (\varphi^{-1}(g_0)g_1, t^{\varepsilon_2}, g_2, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n) & \varepsilon_1 = -1, g_0 \in B \\ (\varphi^{-1}(b), t, \hat{g_0}, t^{\varepsilon_1}, g_1, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου $\hat{g_0}$ ο αντιπρόσωπος του συμπλόκου Bg_0 και $b \in B$ τέτοιο ώστε $g_0 = b\hat{g_0}$.

$$t^{-1} * \tau = \begin{cases} (\varphi(g_0)g_1, t^{\varepsilon_2}, g_2, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n) & \varepsilon_1 = 1, g_0 \in A \\ (\varphi(a), t^{-1}, \overline{g_0}, t^{\varepsilon_1}, g_1 \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου $\overline{g_0}$ ο αντιπρόσωπος του συμπλόκου Ag_0 και $a \in A$ τέτοιο ώστε $g_0 = a\overline{g_0}$.

Εύκολα βλέπει κανείς ότι η $*$ ορίζει δράση της $G * \langle t \rangle$ στο W. Ας θεωρήσουμε τώρα N την μικρότερη κανονική υποομάδα που περιέχει το $\{t^{-1}at\varphi^{-1}(a) | a \in A\}$. Τότε αυτή δρα με τετριμμένο τρόπο στο W και επομένως θα έχουμε $G \cap N = \{1\}$. Επομένως η G εμφυτεύεται στην $G*_{A,\varphi}$. Επιπλέον αφού η N περιέχεται στον πυρήνα της δράσης της G στο W, η $G*_{A,\varphi}$ θα δρα και αυτή στο W.

Θεωρώντας λοιπόν δύο διαφορετικές κανονικές μορφές οι οποίες αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο και αφήνοντας τες να δράσουν στο (1) έχουμε το ζητούμενο. Η προηγούμενη ανάλυση παρέχει έναν εναλλακτικό τρόπο απόδειξης ότι η G εμφυτεύεται στην $G*_{A,\varphi}$

Κεφάλαιο 2

Γραφήματα Ομάδων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν τα γραφήματα και τα γραφήματα ομάδων. Ταυτόχρονα μέσω αυτών των εννοιών παρουσιάζεται ένας ακόμα τρόπος που μπορούν να ειδωθούν τα αμαλγάματα και οι HNN επεκτάσεις. Τέλος αποδεικνύουμε το θεώρημα που αφορά την δομή ομάδων που δρουν χωρίς αντιστροφές σε δέντρα.

2.1 Γραφήματα

Ορισμός 10. *Ένα **γράφημα** Γ αποτελείται από δύο σύνολα* $X = V(\Gamma)$, $Y = E(\Gamma)$ *τα οποία καλούνται **σύνολο κορυφών**, **σύνολο ακμών** αντίστοιχα και δύο απεικονίσεις*

$$Y \to X \times X, \quad y \mapsto (\iota(y), \tau(y))$$

$$Y \to Y, \quad y \mapsto \bar{y}$$

για τις οποίες ισχύει: για κάθε $y \in Y$ *έχουμε* $\bar{\bar{y}} = y$, $\bar{y} \neq y$ *και* $\iota(y) = \tau(\bar{y})$.

Ένα στοιχείο $x \in X$ *λέγεται **κορυφή** ενώ ένα στοιχείο* $y \in Y$ *καλείται **ακμή** και η* $\bar{y}$ ***αντίστροφη ακμή**.*

Η κορυφή $\iota(y) = \tau(\bar{y})$ *λέγεται **αρχή** της* y *και η* $\tau(y) = \iota(\bar{y})$ ***τέλος** της* y *και μαζί αυτές οι δύο κορυφές λέγονται **άκρα** της* y.

Ένα υποσύνολο Y_+ *του* Y *έτσι ώστε* $Y = Y_+ \sqcup \bar{Y}_+$ *καλείται **προσανατολισμός** του Γ.*

Ορισμός 11. *Έστω Γ ένα γράφημα. Ένα **μονοπάτι*** p *στο Γ ορίζεται να είναι μία πεπερασμένη ακολουθία*

$$(x_0, y_1, x_1, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_n, x_n)$$

όπου $n \geq 0$, $x_i \in X$ *για κάθε* $i \in \{0, \ldots, n\}$ *και τα* y_i *είναι ακμές του* Γ *με* $\iota(y_i) = x_{i-1}$, $\tau(y_i) = x_i$ *για κάθε* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Πολλές φορές συμβολίζεται πιο απλά με* $p = y_1 y_2 \ldots y_n$ *παραλείποντας τις ενδιάμεσες κορυφές.*

Ο αριθμός n *λέγεται* ***μήκος*** *του μονοπατιού και το* ***αντίστροφο μονοπάτι*** p^{-1} *ορίζεται ως* $(x_n, \bar{y}_n, \ldots, x_1, \bar{y}_1, x_0)$. *Ορίζουμε την* ***αρχή*** $\iota(p) = x_0$ *και το* ***τέλος*** $\tau(p) = x_n$ *του* p.

Αν $y_{i+1} \neq \bar{y}_i$ *για κάθε* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *τότε το* p *καλείται* ***ανηγμένο***.

Ένα μονοπάτι p *λέγεται* ***κύκλωμα*** *με αρχή και τέλος μία κορυφή* $x_0 \in X$ *αν* $\iota(p) = \tau(p) = x_0$.

Ορισμός 12. *Ένα γράφημα* Γ *καλείται* ***συνεκτικό*** *αν κάθε δύο κορυφές του* Γ *αποτελούν άκρα τουλάχιστον ενός μονοπατιού.*

Συγκεκριμένα, αν $x, x^{'} \in X$ *υπάρχει ένα μονοπάτι ώστε*

$$\iota(p) = x, \ \tau(p) = x^{'}.$$

Ορισμός 13. *Έστω* Γ *ένα γράφημα και* X, Y *τα σύνολα των κορυφών και ακμών, αντίστοιχα. Έστω* $P \in X$ *μία κορυφή και έστω* Y_P *το σύνολο των ακμών* y *για τις οποίες ισχύει* $\tau(y) = P$. *Η πληθικότητα* n *του συνόλου* Y_P *λέγεται* ***δείκτης*** *της* P.
Αν $n = 0$, *τότε η* P *καλείται* ***μεμονωμένη κορυφή***.
Αν $n \leq 1$, *τότε η* P *καλείται* ***τερματική κορυφή***.
Τέλος με $\Gamma - P$ *συμβολίζουμε το υπογράφημα του* Γ *με σύνολο κορυφών* $X \backslash \{P\}$ *και σύνολο ακμών* $Y \backslash (Y_P \cup \bar{Y}_P)$.

Συνεχίζουμε με μερικούς ορισμούς και αποτελέσματα που αφορούν δέντρα.

Ορισμός 14. *Ένα γράφημα καλείται* ***δέντρο*** *αν είναι συνεκτικό και δεν περιέχει κυκλώματα, δηλαδή κλειστά ανηγμένα μονοπάτια θετικού μήκους.*

Πρόταση 3. *Έστω* P *μία μη-μεμονωμένη τερματική κορυφή ενός γραφήματος* Γ. *Τότε:*

1. *Το* Γ *είναι συνεκτικό αν και μόνο αν* $\Gamma - P$ *είναι συνεκτικό.*

2. *Κάθε ανηγμένο κύκλωμα του* Γ *περιέχεται στο* $\Gamma - P$.

3. *Το* Γ *είναι δέντρο αν και μόνο αν* $\Gamma - P$ *είναι δέντρο.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε ότι ο δείκτης του P είναι 1 και επομένως είναι άκρο μόνο μίας ακμής. Το 1) έπεται άμεσα.

Για το 2) παρατηρούμε ότι αν μία κορυφή ανήκει σε ένα κύκλωμα, τότε εξ ορισμού θα έχει δείκτη μεγαλύτερο ή ίσο με 2. Επομένως η P δεν επηρεάζει τα κυκλώματα και άρα το 2) ισχύει τετριμμένα.

Το 3) προκύπτει άμεσα από τα 1) και 2). □

Ορισμός 15. *Έστω* Γ *ένα γράφημα. Ένα γράφημα* Γ' *καλείται* ***υπογράφημα*** *του* Γ *αν* $V(\Gamma') \subseteq V(\Gamma)$, $E(\Gamma') \subseteq E(\Gamma)$ *και αν* $e \in E(\Gamma')$ *τότε* $\iota(e), \tau(e) \in V(\Gamma')$.

Παρακάτω θέλουμε να ορίσουμε την έννοια ενός μεγιστικού δέντρου ενός γραφήματος Γ. Κάνουμε πρώτα την εξής παρατήρηση. Θεωρούμε $\mathscr{T}$ το σύνολο όλων των υπογραφημάτων του Γ τα οποία είναι δέντρα και εφοδιάζουμε αυτό το σύνολο με την σχέση εγκλεισμού. Τότε, αν

$$\cdots \subseteq T_{i-1} \subseteq T_i \subseteq T_{i+1} \subseteq \ldots$$

είναι μία αλυσίδα του συνόλου $\mathscr{T}$, η ένωση $\bigcup_i T_i$ θα είναι ένα άνω φράγμα της αλυσίδας αυτής. Θα δείξουμε ότι η ένωση αυτή είναι δέντρο. Θεωρούμε λοιπόν, $p = y_1 \ldots y_n$ ένα κλειστό ανηγμένο μονοπάτι το οποίο περιέχεται στην ένωση $\bigcup_i T_i$. Τότε κάθε ακμή y_k περιέχεται σε κάποιο δέντρο T_{i_k} και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$p \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} T_{i_k} \subseteq T_{i_{max\{k\}}}$$

Αφού το $T_{i_{max\{k\}}}$ είναι δέντρο, οδηγηθήκαμε σε άτοπο και επομένως η ένωση $\bigcup_i T_i$ είναι δέντρο. Τελικά, από το λήμμα του Zorn έχουμε ότι το σύνολο $\mathscr{T}$ έχει μεγιστικό στοιχείο. Έχουμε λοιπόν τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 16. *Έστω Γ ένα μη-κενό γράφημα. Ένα μεγιστικό στοιχείο του συνόλου* $\mathscr{T}$*, όπως παραπάνω, λέγεται* ***μεγιστικό δέντρο του Γ***.

Πρόταση 4. *Έστω Τ ένα μεγιστικό δέντρο ενός συνεκτικού γραφήματος Γ. Τότε το Τ περιέχει όλες τις κορυφές του Γ.*

Απόδειξη. Έστω ότι $V(T) \neq V(\Gamma)$. Τότε θα υπάρχει μία ακμή y με το ένα άκρο στο T και το άλλο, έστω P εκτός του T. Τότε όμως από την Πρόταση 3 (3) το γράφημα που προκύπτει ως $T \cup \{y, P\}$ θα είναι δέντρο. Αυτό όμως μας οδηγεί σε άτοπο αφού $T \subseteq T \cup \{y, P\}$ ενώ το T είναι μεγιστικό. Επομένως έχουμε το ζητούμενο. □

2.2 Γράφημα Cayley

Στην συνέχεια κάνουμε μία αναφορά στο γράφημα Cayley μίας ομάδας, καθώς θα μας χρησιμεύσει στα επόμενα κεφάλαια.

Ορισμός 17. *Έστω* G *μία ομάδα και* $S \subseteq G$*. Το γράφημα* $\Gamma = \Gamma(G, S)$ *το οποίο έχει για σύνολο κορυφών τα στοιχεία της* G *και για σύνολο ακμών (μαζί με τις αντιστροφές τους) το* $G \times S$ *έτσι ώστε* $\iota(g, s) = g$ *και* $\tau(g, s) = gs$ *λέγεται* ***γράφημα Cayley*** *της* G *ως προς το υποσύνολο* S.

Πρόταση 5. *Έστω G μία ομάδα, $S \subseteq G$ και $\Gamma = \Gamma(G, S)$ το γράφημα Cayley της G ως προς S. Τότε ισχύουν:*

1. *Το Γ δεν περιέχει θηλειές $\iff 1 \notin S$.*

2. *Το Γ δεν περιέχει θηλειές ή κυκλώματα μήκους 2 $\iff S \cap S^{-1} = \emptyset$.*

3. *Το Γ είναι συνεκτικό $\iff$ Το S παράγει της G.*

4. *Το Γ είναι δέντρο $\iff$ Η G είναι ελεύθερη με βάση το S.*

Απόδειξη.

1. Αν είχαμε $1 \in S$ τότε σε κάθε κορυφή g θα είχαμε και από μία θηλιά με αρχή και τέλος αυτήν την κορυφή. Επομένως το (1) είναι άμεσο.

2. Αν είχαμε $S \cap S^{-1} \neq \emptyset$ τότε θα υπήρχε ένα στοιχείο αυτής της τομής, έστω s για το οποίο θα ίσχυε $s = s_1$ για κάποιο $s_1 \in S$ και $s = s_2^{-1}$ για κάποιο $s_2 \in S$. Τότε όμως θα είχαμε ένα κύκλωμα μήκους 2 και με κορυφές τις g, gs_1. Άρα και το (2) είναι άμεσο.

3. Έστω αρχικά ότι το Γ είναι συνεκτικό. Τότε για κάθε $g \in G$ υπάρχουν $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ και $s_1, \ldots, s_n \in S$ ώστε $g = s_1^{\varepsilon_1} \ldots s_n^{\varepsilon_n}$ και το μονοπάτι $p = s_1^{\varepsilon_1} \ldots s_n^{\varepsilon_n}$ συνδέει την κορυφή g με το 1. Άρα $G = \langle S \rangle$.

   Έστω τώρα ότι $G = \langle S \rangle$ και έστω $g, g^{'} \in G$ τυχαίες κορυφές. Τότε υπάρχουν $s_1, s_2, \ldots, s_m$ ώστε

   $$g^{-1}g^{'} = s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \ldots s_m^{\varepsilon_m}$$

   και επομένως $g^{'} = gs_1^{\varepsilon_1} \ldots s_m^{\varepsilon_m}$ και αφού οι κορυφές ήταν τυχαίες έχουμε το ζητούμενο.

4. Έστω αρχικά ότι η G είναι ελεύθερη με βάση το S. Τότε κάθε στοιχείο $g \in G$ μπορεί να γραφτεί μοναδικά σε ανηγμένη μορφή

   $$g = s_1^{\varepsilon_1} \ldots s_n^{\varepsilon_n}$$

   όπου $s_i \in S$ και $e_i = \pm 1$.

   Είναι προφανές ότι το g είναι γειτονικό με μοναδικό στοιχείο $g^{'} \in G$ με

   $$g^{'} = s_1^{\varepsilon_1} \ldots s_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}.$$

   Με επαγωγικό τρόπο βλέπουμε ότι κάθε φορά υπάρχει μοναδικό γειτονικό στοιχείο μήκους μικρότερου κατά 1 και επομένως το Γ θα είναι δέντρο.

Έστω τώρα ότι το Γ είναι δέντρο. Από τις παραπάνω ισοδυναμίες έχουμε ότι το S παράγει την G και ότι $S \cap S^{-1} = \emptyset$. Θεωρούμε ένα στοιχείο $g \in F(S)$ ώστε η εικόνα του στην G να είναι ίση με την μονάδα και το μήκος $l(g) = n$ να είναι ελάχιστο. Δηλαδή το g έχει ανηγμένη μορφή στην $F(S)$

$$g = s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n}.$$

Αφού $S \cap S^{-1} = \emptyset$, έχουμε $n \geq 3$. Θέτουμε ως P_i τις εικόνες των στοιχείων $s_1^{\varepsilon_1} \dots s_i^{\varepsilon_i}$ στην G όπου $0 \leq i \leq n$. Αφού το μήκος $l(g)$ είναι ελάχιστο οι P_i είναι διαφορετικές ανά δύο, διαδοχικές και $P_n = 1 = P_0$. Επιπλέον, αφού $n \geq 3$ οι γεωμετρικές ακμές με άκρα $\{P_i, P_{i+1}\}$ για $0 \leq i \leq n-1$ και η $\{P_n, P_0\}$ είναι όλες διαφορετικές ανά δύο.

Παρατηρούμε ότι οι $P_0, \dots, P_{n-1}$ είναι κορυφές ενός κυκλώματος μήκους n στο Γ. Άτοπο αφού το Γ υποθέσαμε ότι είναι δέντρο.

$\square$

2.3 Γραφήματα Ομάδων

Συνεχίζουμε παρουσιάζοντας τα γραφήματα ομάδων και την θεμελιώδη ομάδα ενός γραφήματος ομάδων, τα οποία θα μας προσφέρουν έναν γενικότερο τρόπο θεώρησης των αμαλγαμάτων και των HNN επεκτάσεων αλλά και ένα θεώρημα που περιγράφει την δομή μίας ομάδας που δρα σε ένα δέντρο.

Ορισμός 18. *Ένα **γράφημα ομάδων** (G, Γ) αποτελείται από ένα γράφημα Γ όπου αντιστοιχούμε κάθε κορυφή $P \in V(\Gamma)$ σε μία ομάδα G_P και κάθε ακμή $e \in E(\Gamma)$ σε μία ομάδα G_e, με $G_e = G_{\bar{e}}$, και από έναν μονομορφισμό $f_e : G_e \to G_{\tau(e)}$.*

Ορισμός 19. *Έστω Γ ένα συνεκτικό, μη-κενό γράφημα και έστω (G, Γ) ένα γράφημα ομάδων. Τότε ορίζουμε ως **F(G,Γ)** την ομάδα που παράγεται από τις ομάδες G_P, $P \in V(\Gamma)$ και τα στοιχεία $y \in E(\Gamma)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\bar{y} = y^{-1} \ \ \textit{και} \ \ y f_y(a) y^{-1} = f_{\bar{y}}(a) \ \ \textit{αν} \ \ y \in E(\Gamma), \ a \in G_y$$

Παίρνοντας το ελεύθερο γινόμενο των ομάδων G_P (καθώς το P διατρέχει το σύνολο κορυφών) με την ελεύθερη ομάδα που παράγεται από τις ακμές $y \in E(\Gamma)$ και έπειτα παίρνοντας το πηλίκο αυτού του ελευθέρου γινομένου προς την κανονική υποομάδα $\langle\langle y\bar{y}, y f_y(a) y^{-1} (f_{\bar{y}}(a))^{-1} | y \in E(\Gamma), a \in G_y \rangle\rangle$, παρατηρούμε ότι αυτό το πηλίκο είναι ισόμορφο με την ομάδα $F(G, \Gamma)$. Επομένως, αποδεικνύεται ότι οι απεικονίσεις $G_P \to F(G, \Gamma)$ είναι εμφυτεύσεις και άρα τα στοιχεία $r_i \in G_{P_i}$ μπορούμε να τα ταυτίσουμε με τις εικόνες τους στην $F(G, \Gamma)$.

Ορισμός 20. *Έστω ένα γράφημα ομάδων (G, Γ), p ένα μονοπάτι στο Γ με αρχή $\iota(p) = P_0$ και αντίστοιχες ακμές $y_1, y_2, \ldots, y_n$, όπου $n =$ μήκος του p. Θέτουμε επίσης $P_i = \iota(y_{i+1}) = \tau(y_i)$. Μία* ***λέξη τύπου*** *p στην $F(G, \Gamma)$ είναι ένα ζεύγος (p, μ) όπου $\mu = (r_0, \ldots, r_n)$ είναι μία ακολουθία στοιχείων $r_i \in G_{P_i}$.*

Το στοιχείο

$$|p, \mu| = r_0 y_1 r_1 y_2 \ldots y_n r_n \;\; \tau\eta\varsigma \;\; F(G, \Gamma)$$

λέγεται το ***σχετιζόμενο*** *με την λέξη (p, μ).*

Δίνουμε τώρα δύο ορισμούς για την θεμελιώδη ομάδα ενός γραφήματος ομάδων. Ο ένας είναι ως προς μία κορυφή ενώ ο άλλος ως προς ένα μεγιστικό δέντρο.

Ορισμός 21.

1. *Έστω P_0 μία κορυφή του γραφήματος Γ ενός γραφήματος ομάδων (G, Γ). Αποδεικνύεται ότι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία της μορφής $|c, \mu|$, όπου το c είναι κλειστό μονοπάτι με αρχή και τέλος το P_0 είναι υποομάδα της $F(G, \Gamma)$. Αυτή την υποομάδα την ονομάζουμε* ***Θεμελιώδη Ομάδα*** *$\pi_1(G, \Gamma, P_0)$ του (G, Γ) ως προς P_0.*

2. *Έστω T ένα μεγιστικό δέντρο του Γ. Η* ***Θεμελιώδης Ομάδα*** *$\pi_1(G, \Gamma, T)$ του (G, Γ) ως προς T είναι το πηλίκο της $F(G, \Gamma)$ ως προς την κανονική υποομάδα που παράγεται από τα $y \in E(T)$. Αναλυτικότερα, αν g_y είναι η εικόνα του y στην $\pi_1(G, \Gamma, T)$, τότε η θεμελιώδης ομάδα παράγεται από τις ομάδες G_P, $P \in V(\Gamma)$ και τα στοιχεία g_y, $y \in E(\Gamma)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$g_y f_y(a) g_y^{-1} = f_{\bar{y}}(a), \;\; g_{\bar{y}} = g_y^{-1}, \;\alpha\nu\; y \in E(\Gamma), \; a \in G_y$$

και

$$g_y = 1 \;\; \alpha\nu \;\; y \in E(T).$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι ως προς ισομορφισμό. Για μία απόδειξη αυτού του ισχυρισμού παραπέμπουμε στο [12].

Παράδειγμα 1. *Θεωρούμε ένα γράφημα ομάδων (G, Γ), όπου το Γ αποτελείται από μία μόνο ακμή y και τα άκρα της $P = \iota(y)$, $Q = \tau(y)$ με $P \neq Q$. Αν πάρουμε για μεγιστικό δέντρο αυτού το ίδιο το γράφημα, θα έχουμε ότι $\pi_1(G, \Gamma, \Gamma) = G_P *_{G_y} G_Q$. Αυτό είναι άμεσο αφού η θεμελιώδης ομάδα παράγεται από τις G_P, G_Q και τα στοιχεία g_y που ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις. Αυτό όμως σημαίνει ότι θα ικανοποιείται μόνο η σχέση*

$$f_y(a) = f_{\bar{y}}(a) \;\; \alpha\nu \;\; y \in E(\Gamma), \; a \in G_y$$

και επομένως θα έχουμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} G_y & \xrightarrow{f_{\bar{y}}} & G_P \\ \downarrow{\scriptstyle f_y} & & \\ G_Q & & \end{array}$$

Από το κεφάλαιο 1 γνωρίζουμε ότι η ομάδα που ικανοποιεί αυτές τις σχέσεις είναι το pushout του διαγράμματος και επομένως το αμάλγαμα $G_P *_{G_y} G_Q$.

Παράδειγμα 2. *Αν τώρα θεωρήσουμε ένα γράφημα ομάδων (G, Γ), όπου το γράφημα Γ έχει μία κορυφή P και μία ακμή y τότε θα έχουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(G, \Gamma, P)$ ως προς P θα παράγεται από την G_P και ένα στοιχείο g_y που θα ικανοποιεί την σχέση*

$$g_y f_y(a) y^{-1} = f_{\bar{y}}(a), \ \ \forall a \in G_y$$

Αυτή όμως η ομάδα είναι εξ ορισμού η HNN επέκταση $G_P *_{G_y}$.

2.4 Θεώρημα Δομής

Προχωράμε τώρα στο θεώρημα δομής μίας ομάδας που δρα σε ένα δέντρο. Πρώτα όμως παραθέτουμε κάποιους ορισμούς και προτάσεις που θα χρειαστούν στην απόδειξη του θεωρήματος.

Ορισμός 22. *Έστω Γ ένα γράφημα και G μία ομάδα που δρα στο Γ. Λέμε ότι η G* ***δρα χωρίς αντιστροφές*** *αν δεν υπάρχουν $g \in G$ και $y \in E(\Gamma)$ ώστε $gy = \bar{y}$.*

Αν η G δρα χωρίς αντιστροφές τότε μπορεί να οριστεί το γράφημα πηλίκο $G \backslash X$ με σύνολο κορυφών το $G \backslash V(\Gamma)$, δηλαδή το σύνολο των τροχιών των κορυφών της δράσης της G και σύνολο ακμών τις τροχιές ακμών $G \backslash E(\Gamma)$ με απεικονίσεις

$$\iota([y]_G) = [\iota(y)]_G$$
$$\tau([y]_G) = [\tau(y)]_G$$
$$\overline{[y]}_G = [\overline{y}]_G$$

όπου $[\ .\ ]_G$ είναι G-τροχιά.

Πρόταση 6. *Έστω Γ ένα συνεκτικό γράφημα στο οποίο δρα μία ομάδα G χωρίς αντιστροφές. Τότε κάθε υποδέντρο T' του $G \backslash X$ ανυψώνεται σε ένα υποδέντρο του X, δηλαδή υπάρχει υποδέντρο T του X όπου ο περιορισμός της φυσικής προβολής*

$$\pi : X \to G \backslash X, \ \ x \mapsto [x]_G$$

στο T είναι 1-1 και επί με $\pi(T) = T'$.

Απόδειξη. Έστω $\mathscr{T}$ το σύνολο όλων των υποδέντρων του X τα οποία απεικονίζονται μέσω της π εντός του T'. Αυτό το σύνολο το εφοδιάζουμε με την σχέση εγκλεισμού και επομένως από το λήμμα του $Zorn$ θα υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο σε αυτό, έστω T_0. Ας είναι T_0' η εικόνα του στο T'.

Θα δείξουμε ότι αυτό το T_0 είναι το ζητούμενο δέντρο.
Έστω λοιπόν $T_0' \neq T'$. Τότε θα υπάρχει $y' \in E(T')$ όπου $\iota(y') \in V(T_0')$ και $\tau(y') \notin V(T_0')$ και έστω y μία ανύψωση αυτής της ακμής. Αφού το y' παραμένει σταθερό όσο το y διατρέχει την τροχιά μέσω της δράσης της G μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\iota(y) \in V(T_0)$. Δημιουργούμε ένα καινούριο δέντρο T_1 μέσω του T_0 προσθέτοντας την κορυφή $\tau(y)$ και τις ακμές $y, \bar{y}$.

Από την Πρόταση 3 (3) το T_1 θα είναι δέντρο που εμφυτεύεται στο T' και μάλιστα γνήσια μεγαλύτερο του T_0. Άτοπο, αφού το T_0 είναι μεγιστικό και επομένως έχουμε το ζητούμενο. □

Η προηγούμενη πρόταση μας δίνει την ευκαιρία να ορίσουμε το εξής.

Ορισμός 23. *Ονομάζουμε* ***δέντρο αντιπροσώπων*** *του $XmodG$ ένα δέντρο T του X το οποίο είναι η ανύψωση ενός μεγιστικού δέντρου του $G\backslash X$.*

Λέμε ότι μία απεικόνιση γραφημάτων $f : \tilde{X} \to X$ είναι **τοπική εμφύτευση** αν για κάθε $x \in V(\tilde{X})$ ο περιορισμός της f στο σύνολο των ακμών που έχουν ως αρχή το x είναι 1-1.

Λήμμα 1. *Έστω $f : \tilde{X} \to X$ μία τοπική εμφύτευση, όπου το $\tilde{X}$ είναι ένα συνεκτικό γράφημα και το X δέντρο. Τότε η f είναι εμφύτευση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $p = y_1 \dots y_n$ ένα ανηγμένο μονοπάτι στο $\tilde{X}$ τέτοιο ώστε $y_i \neq \overline{y}_j$ για όλα τα $i, j \in \{1, \dots, n\}$ και το οποίο δεν περιέχει κυκλώματα. Τότε, αφού το X είναι δέντρο, αρκεί να δείξουμε ότι για την εικόνα του p μέσω της f, ισχύει $f(y_i) \neq f(\tilde{y}_j)$ για όλα τα i, j. Αυτό προκύπτει άμεσα αφού η f είναι τοπική εμφύτευση. □

Θεωρούμε προτιμότερο να παρουσιάσουμε πρώτα, το είδος της μορφής που έχει μία ομάδα που δρα σε ένα δέντρο όταν το $G\backslash X$ έχει την μορφή ενός γραφήματος με δύο κορυφές και μία ακμή που τις ενώνει καθώς έτσι πιστεύουμε ότι θα γίνει καλύτερη κατανόηση του θεωρήματος δομής.

Θεώρημα 8. *Έστω G μία ομάδα που δρα σε ένα γράφημα X και έστω T ένα υπογράφημα του X το οποίο αποτελείται από δύο κορυφές P, Q και μία ακμή y(με την αντίστροφή της $\overline{y}$) που τις ενώνει και το οποίο είναι ισόμορφο με το $G\backslash X$. Έστω $G_P, G_Q, G_y = G_{\bar{y}}$ οι αντίστοιχες σταθεροποιούσες. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *Το X είναι δέντρο*

2. *Ο ομομορφισμός* $G_P *_{G_y} G_Q \to G$ *που επάγεται από τις εμφυτεύσεις* $G_P \to G$ *και* $G_Q \to G$ *είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Αρχικά αποδεικνύουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό.

$$\text{Το } X \text{ είναι συνεκτικό} \iff \text{Η } G \text{ παράγεται από την ένωση } G_P \cup G_Q.$$

Έστω $X^{'}$ η συνεκτική συνιστώσα του X που περιέχει το T, $G^{'} = \{g \in G | gX^{'} = X^{'}\}$ και $G^{''}$ η υποομάδα της G που παράγεται από την $G_P \cup G_Q$. Αν θεωρήσουμε ένα $h \in G_P \cup G_Q$ τότε προφανώς τα hT και T θα έχουνε μία κορυφή κοινή. Τότε όμως το hT θα περιέχεται και αυτό στην $X^{'}$ αφού είναι συνεκτική συνιστώσα και επομένως $hX^{'} = X^{'}$, δηλαδή $G^{''} \subseteq G^{'}$.

Αντίστροφα τώρα, το X μπορούμε να το διαμερίσουμε στα $G^{''}T$ και $(G - G^{''})T$ τα οποία έχουν κενή τομή. Επομένως αφού η $X^{'}$ είναι συνεκτική συνιστώσα θα πρέπει να περιέχεται στο $G^{''}T$. Έπεται ότι αν ένα στοιχείο σταθεροποιεί την $X^{'}$ θα πρέπει να ανήκει στην $G^{''}$, επομένως θα έχουμε $G^{'} = G^{''}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι X συνεκτικό αν και μόνο αν $X = X^{'}$, δηλαδή αν και μόνο αν $G = G^{'} = G^{''}$.

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας ακόμα έναν ισχυρισμό.

$$\text{Το } X \text{ δεν περιέχει κυκλώματα} \iff \text{Η } G_P *_{G_y} G_Q \to G \text{ είναι εμφύτευση}$$

Έστω λοιπόν ένα μονοπάτι $c = (w_0, w_1, \dots, w_n)$, $n \geq 1$, με $w_i \in E(X)$ έτσι ώστε $\iota(c) = \tau(c)$. Εφόσον υπάρχει μία τροχιά 'γεωμετρικών' ακμών, κάθε ακμή w_i μπορούμε να την γράψουμε στην μορφή $w_i = h_i y_i$ όπου $h_i \in G$ και $y_i = y$ ή $\bar{y}$. Τότε, αφού το $G \backslash X$ είναι δέντρο, θα ισχύει $\bar{y}_i = y_{i-1}$ για κάποιο i.

Θεωρούμε $P_i = \iota(y_i) = \tau(y_{i-1})$. Τότε βλέπουμε ότι

$$h_i P_i = h_i \iota(y_i) = \iota(h_i y_i) = \tau(h_{i-1} y_{i-1}) = h_{i-1} \tau(y_{i-1}) = h_{i-1} P_i$$

και επομένως για $g_i \in G_{P_i}$ ισχύει $h_i = h_{i-1} g_i$.

Επιπλέον έχουμε $g_i \notin G_y$ αφού $\overline{h_i y_i} \neq h_{i-1} y_{i-1}$.

Με παρόμοιο τρόπο θα έχουμε ότι

$$h_0 P_0 = h_n P_0 = h_0 g_1 \dots g_n P_0$$

αφού $\iota(c) = \tau(c)$. Επομένως θα έχουμε ότι $g_1 \dots g_n \in G_{P_0}$.

Συμπεραίνουμε ότι το X περιέχει κυκλώματα αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία κορυφών $P_0, P_1 \dots, P_n$ του T με $\{P_{i-1}, P_i\} = \{P, Q\}$ για κάθε i και ακολουθία στοιχείων g_i $G_{P_i} \backslash G_y$ τέτοια ώστε $g_0 \dots g_n = 1$. Από την κανονική μορφή των στοιχείων ενός αμαλγάματος αυτό συνεπάγεται ότι η απεικόνιση $G_P *_{G_y} G_Q \to G$ δεν είναι εμφύτευση. Η ισοδυναμία του θεωρήματος είναι πλέον άμεση. □

Μία γενίκευση του ισχυρισμού

$$X \text{ συνεκτικό} \implies \text{Η } G \text{ παράγεται από το } G_P \cup G_Q$$

δίνεται στο παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 2. *Έστω G μία ομάδα που δρα σε ένα συνεκτικό γράφημα X και έστω T ένα δέντρο αντιπροσώπων του $XmodG$. Έστω τώρα Y ένα υπογράφημα του X τέτοιο ώστε $T \subseteq Y$ ώστε κάθε ακμή του Y να έχει ένα άκρο της στο T και να ισχύει $GY = X$. Για κάθε $y \in E(Y)$ με $\iota(y) \in V(T)$, επιλέγουμε ένα $g_y \in G$ τέτοιο ώστε $g_y\tau(y) \in V(T)$.*

Τότε για την ομάδα H που παράγεται από τα g_y και της σταθεροποιούσες ομάδες G_P των $P \in V(T)$ ισχύει $H = G$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$V(X) = GV(T) = HV(T) \sqcup (G - H)V(T).$$

Η ένωση είναι προφανώς ξένη αφού σε διαφορετική περίπτωση μιας και το T είναι δέντρο αντιπροσώπων $XmodG$ θα είχαμε:

$$hv_1 = gv_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow g^{-1}h \in G_{v_1} \subseteq H \Rightarrow g \in H$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$HV(T) = V(X).$$

Ο εγκλεισμός $HV(T) \subseteq V(X)$ είναι προφανής, επομένως μένει να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό.

Επιλέγουμε λοιπόν μία ακμή $e \in Y$ με αρχή στο T. Τότε θα έχουμε

$$g_e\tau(e) \in V(T) \Rightarrow \tau(e) \in g_e^{-1}V(T) \subseteq HV(T).$$

Άρα $V(Y) \subseteq HV(T)$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $HV(Y) = V(X)$, αφού τότε θα έχουμε $HV(Y) \subseteq HHV(T) = HV(T) \Rightarrow V(X) \subseteq HV(T)$.

Λόγω συνεκτικότητας του X αρκεί να δείξουμε ότι για μία ακμή e με αρχή $\iota(e) \in HV(Y)$ θα έχουμε ότι $e \in HE(Y)$. Έχουμε λοιπόν

$$\iota(e) \in HV(Y) \subseteq HHV(T) = HV(T).$$

Άρα $\iota(e) = hv_0$ όπου $h \in H$, $v_0 \in V(T)$ και άρα $\iota(h^{-1}e) = v_0 \in V(T)$. Από την υπόθεση όμως έχουμε ότι $GY = X$ και άρα $h^{-1}e = gy$ για $y \in E(Y)$ με ένα άκρο στο T. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν $\iota(y) \in V(T)$, τότε

$$g^{-1}h^{-1}\iota(e) \in V(T) \Rightarrow g^{-1}v_0 = v_0 \Rightarrow g \in G_{v_0} \subseteq H \Rightarrow e = hgy \in HY$$

2) Αν $\tau(y) \in V(T)$, τότε $\iota(y^{-1}) = \tau(y) \in V(T)$ και

$$g_{y^{-1}}\tau(y^{-1}) \in V(T) \Rightarrow g_{y^{-1}}g^{-1}v_0 = v_0 \Rightarrow$$

$$g_{y^{-1}}g^{-1} \in G_{v_0} \subseteq H \Rightarrow g \in H \Rightarrow e \in HY$$

και επομένως έχουμε το ζητούμενο. □

Πριν παρουσιάσουμε το κύριο θεώρημα, θα κατασκευάσουμε, δοθέντος ενός γραφήματος ομάδων, ένα καινούριο γράφημα μαζί με μία δράση της θεμελιώδους ομάδας του αρχικού επί του καινούριου, τα οποία θα βοηθήσουν στην απόδειξη του θεωρήματος. Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι ορίζεται η έννοια του **μορφισμού** μεταξύ δύο γραφημάτων X, Y ως ένα ζεύγος απεικονίσεων

$$\varphi : V(X) \to V(Y), \ \ \psi : E(X) \to E(Y)$$

για τις οποίες αν $e \in E(X)$ με $\iota(e), \tau(e) \in V(X)$ τότε $\psi(e) \in E(Y)$ και $\iota(\psi(e)), \tau(\psi(e)) \in V(Y)$ και μάλιστα $\iota(\psi(e)) = \varphi(\iota(e))$ και $\tau(\psi(e)) = \varphi(\tau(e))$.

Έστω λοιπόν (G, Y) ένα γράφημα ομάδων όπου το Y είναι συνεκτικό και μη-κενό. Έστω επίσης ένα μεγιστικό δέντρο T του (G, Y) και A ένας προσανατολισμός του Y. Θεωρούμε με $e : E(Y) \to \{0, 1\}$ την χαρακτηριστική συνάρτηση του συμπληρώματος του υποσυνόλου A και συμβολίζουμε με $|y|$ την ακμή του ζεύγους $\{y, \bar{y}\}$ που ανήκει στο A.

Θα κατασκευάσουμε ένα γράφημα $\tilde{X} = \tilde{X}(G, Y, T)$, μία δράση της θεμελιώδους ομάδας $\pi = \pi_1(G, Y, T)$ στο $\tilde{X}$, έναν μορφισμό $p : \tilde{X} \to Y$ ο οποίος θα επάγει ισομορφισμό $\pi\backslash\tilde{X} \cong Y$ και τέλος έναν δεξιό αντίστροφο του p, $Y \to \tilde{X}$ ο οποίος θα στέλνει τις κορυφές $P \in V(Y)$ στις $\tilde{P} \in V(\tilde{X})$ και τις ακμές $y \in E(Y)$ στις $\tilde{y} \in E(\tilde{X})$.

Επίσης για κάθε $P \in V(Y)$ θέλουμε για $\pi_{\tilde{P}} = G_P$, και για κάθε $y \in E(Y)$ $\pi_{\tilde{y}} = f_{|\overline{y}|}(G_{|\overline{y}|})$ όπου $\pi_{\tilde{P}}, \pi_{\tilde{y}}$ οι σταθεροποιούσες ομάδες των $\tilde{P}, \tilde{y}$, αντίστοιχα, της δράσης της π στο $\tilde{X}$ που θα κατασκευαστεί. Θέτουμε

$$V(\tilde{X}) = \coprod_{P \in V(Y)} \pi/\pi_{\tilde{P}}, \quad E(\tilde{X}) = \coprod_{y \in E(Y)} \pi/\pi_{\tilde{y}}$$

Για κάθε $P \in V(Y)$ θεωρούμε την $\tilde{P}$ ως την εικόνα του 1 στην ομάδα πηλίκο $\pi/\pi_{\tilde{P}}$ και αντίστοιχα για κάθε ακμή $y \in E(Y)$ την $\tilde{y}$ ως την εικόνα του 1 στην $\pi/\pi_{\tilde{y}}$.

Θα ορίσουμε την δράση της θεμελιώδους ομάδας στο γράφημα $\tilde{X}$. Η φυσική δράση της π στα σύμπλοκα $\pi/\pi_{\tilde{P}}$ και $\pi/\pi_{\tilde{y}}$ με πολλαπλασιασμό από αριστερά, ορίζει δράση της θεμελιώδους ομάδας π στο γράφημα $\tilde{X}$, αρκεί να ορίσουμε για $g \in \pi$ και $y \in E(Y)$:

$$\overline{g\tilde{y}} = g\bar{\tilde{y}}$$

$$\iota(g\tilde{y}) = gg_y^{-e(y)}\widetilde{\iota(y)}$$

$$\tau(g\tilde{y}) = gg_y^{1-e(y)}\widetilde{\tau(y)}$$

όπου g_y η εικόνα της y στην π.

Η πρώτη έκφραση έχει νόημα αφού $\pi_y = \pi_{\bar{\tilde{y}}}$. Για την δεύτερη πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $h \in \pi_{\tilde{y}}$ ισχύει:

$$hg_y^{-e(y)}\widetilde{\iota(y)} = g_y^{-e(y)}\widetilde{\iota(y)}$$

δηλαδή

$$g_y^{e(y)}hg_y^{-e(y)}\widetilde{\iota(y)} = \widetilde{\iota(y)}$$

άρα

$$g_y^{e(y)}\pi_{\tilde{y}}g_y^{-e(y)} \subseteq \pi_{\widetilde{\iota(y)}} = G_{\iota(y)}.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $y \in A$, τότε $e(y) = 0$ επομένως θα έχουμε ότι $|y| = y$ και άρα $\pi_{\tilde{y}} = f_{\bar{y}}(G_{\bar{y}}) \leq G_{\iota(y)}$ και άρα $\iota(g\tilde{y}) = gg_y^{-e(y)}\widetilde{\iota(y)}$.

Αν $y \notin A$, τότε $e(y) = 1$ και άρα $\pi_{\tilde{y}} = f_y(G_y)$ και από την σχέση

$$g_y f_y(a) g_y^{-1} = f_{\bar{y}}(a)$$

έχουμε

$$g_y\pi_{\tilde{y}}g_y^{-1} = f_{\bar{y}}(G_{\bar{y}}) \leq G_{\iota(y)}$$

οπότε πάλι έχουμε την δεύτερη σχέση.

Για την τρίτη σχέση πρέπει να δείξουμε αντίστοιχα

$$g_y^{e(y)-1}\pi_{\tilde{y}}g_y^{1-e(y)} \subseteq \pi_{\widetilde{\tau(y)}} = G_{\tau(y)}$$

Με όμοιο τρόπο όπως προηγουμένως θα έχουμε το ζητούμενο.

Παραθέτουμε τώρα ένα θεώρημα του οποίου η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [12].

Θεώρημα 9. *Έστω (G, Y) ένα συνεκτικό, μη-κενό γράφημα ομάδων, T ένα μεγιστικό δέντρο του Y και A ένας προσανατολισμός του γραφήματος Y. Τότε το γράφημα $\tilde{X} = \tilde{X}(G, Y, T)$ που κατασκευάσαμε προηγουμένως είναι δέντρο.*

Προχωράμε τώρα στο Θεώρημα Δομής.

Θεώρημα 10. *(Θεώρημα Δομής) Έστω G μία ομάδα η οποία δρα χωρίς αντιστροφές σε ένα συνεκτικό και μη-κενό γράφημα X. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *Το X είναι δέντρο.*
2. *Η G είναι ισόμορφη με την θεμελιώδη ομάδα $\pi_1(G, Y, T)$ ενός γραφήματος ομάδων (G, Y), όπου $Y = G\backslash X$ και T μεγιστικό δέντρο του $G\backslash X$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα χωριστεί σε τρία βήματα. Στο πρώτο θα κατασκευάσουμε το ζητούμενο γράφημα ομάδων (G, Y) και έναν ομομορφισμό

$$\varphi : \pi_1(G, Y, T) \to G.$$

Στο δεύτερο θα κατασκευάσουμε μία απεικόνιση $\psi : \tilde{X}(G, Y, T) \to X$ και θα δείξουμε την ισοδυναμία

$$X \text{ δέντρο} \iff \psi \text{ ισομορφισμός}.$$

Στο τρίτο βήμα θα δείξουμε την ισοδυναμία

$$\psi \text{ ισομορφισμός} \iff \varphi \text{ ισομορφισμός}.$$

Βήμα 1) Έστω $Y = G\backslash X$ και T ένα μεγιστικό δέντρο αυτού. Από την Πρόταση 6 υπάρχει μία ανύψωση του T, έστω $j : T \to X$ και έστω A ένας προσανατολισμός του Y.

Θα επεκτείνουμε την j σε όλο το $E(Y)$ έτσι ώστε $j\bar{y} = \bar{jy}$. Έστω $y \in A\backslash E(T)$. Τότε ορίζουμε το jy έτσι ώστε $\iota(jy) \in V(jT)$ και έτσι θα έχουμε $\iota(jy) = j\iota(y)$. Αφού τα $\tau(jy)$ και $j\tau(y)$ προβάλλονται στο ίδιο $\tau(y)$ στο $V(Y)$, επιλέγουμε $\gamma_y \in G$ με τέτοιο τρόπο ώστε $\tau(jy) = \gamma_y j\tau(y)$. Επεκτείνουμε την απεικόνιση $y \mapsto \gamma_y$ σε όλο το $E(Y)$ έτσι ώστε

$$\gamma_{\bar{y}} = \gamma_y^{-1}$$

$$\gamma_y = 1 \text{ αν } y \in E(T).$$

Επομένως για κάθε $y \in E(Y)$ έχουμε

$$\iota(jy) = \gamma_y^{-e(y)} j\iota(y)$$

$$\tau(jy) = \gamma_j^{1-e(y)} \tau(y).$$

Ορίζουμε λοιπόν το γράφημα ομάδων (G, Y) μέσω των σχέσεων

$$G_P = G_{jP} \text{ για } P \in V(Y)$$

$$G_y = G_{jy} \text{ για } y \in E(Y)$$
$$f_y : G_y \to G_{\tau(y)}, \text{ όπου } a \mapsto f_y(a) = \gamma_y^{e(y)-1} a \gamma_y^{1-e(y)}$$

Ορίζουμε τώρα τον ομομορφισμό $\varphi : \pi_1(G, Y, T) \to G$ μέσω των ενθέσεων $G_P \to G$ και έτσι ώστε $\varphi(g_y) = \gamma_y$ όπου g_y είναι η εικόνα του $y \in E(Y)$ στην π.

Ορίζουμε τώρα και την $\psi : \tilde{X}(G, Y, T) \to X$ έτσι ώστε

$$\psi(g\tilde{P}) = \varphi(g)jP \text{ και } \psi(g\tilde{y}) = \varphi(g)jy.$$

Βήμα 2) Θα δείξουμε τώρα την ισοδυναμία

$$\text{Το } X \text{ είναι δέντρο } \iff \text{ O } \psi \text{ είναι ισομορφισμός}$$

Αρχικά προφανώς ο ψ είναι μορφισμός γραφημάτων. Έστω W το μικρότερο υπογράφημα του X ώστε να περιέχει τα jy για κάθε $y \in E(Y)$. Τότε κάθε ακμή του W έχει ένα άκρο στο jT και έχουμε ότι $GW = X$. Επιπλέον το $W \subseteq \psi(\tilde{X})$ και ο φ επάγει ισομορφισμούς ανάμεσα στις σταθεροποιούσες των αντίστοιχων κορυφών και ακμών στα $\tilde{X}$ και X.

Από το Λήμμα 2 θα έχουμε ότι η φ και επομένως και η ψ είναι επί. Επίσης αφού η φ επάγει ισομορφισμούς ανάμεσα στους σταθεροποιητές, σημαίνει ότι η ψ είναι τοπική εμφύτευση. Άρα αν το X είναι δέντρο, η ψ θα είναι και εμφύτευση, επομένως θα είναι ισομορφισμός.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι η ψ είναι ισομορφισμός. Τότε από το Θεώρημα 9 το $\tilde{X}$ είναι δέντρο και επομένως και το X θα είναι δέντρο.

Βήμα 3) Τώρα θα δείξουμε την ισοδυναμία

$$\text{O } \psi \text{ ισομορφισμός } \iff \text{ O } \varphi \text{ ισομορφισμός}$$

Έστω αρχικά ότι ψ ισομορφισμός και έστω $N = ker\varphi$ και $P \in V(Y)$. Τότε έχουμε $N \cap G_{\tilde{P}} = \{1\}$ μιας και ο φ επάγει ισομορφισμούς ανάμεσα στις $G_{\tilde{P}}$ και G_{jP}.

Αν $n \in N \backslash \{1\}$ τότε οι δύο κορυφές $\tilde{P}$ και $n\tilde{P}$ του $\tilde{X}$ είναι διαφορετικές και έχουν εικόνα jP στο X. Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς ο ψ είναι ισομορφισμός. Άρα $N = \{1\}$ και τελικά ο φ ισομορφισμός.

Για την αντίθετη κατεύθυνση είναι προφανές ότι αν ο φ είναι ισομορφισμός τότε και ο ψ θα είναι ισομορφισμός λόγω του τρόπου ορισμού του.

□

Το Θεώρημα Δομής μας δίνει την δυνατότητα να αντλήσουμε πληροφορία για μία ομάδα η οποία δρα χωρίς αντιστροφές σε ένα δέντρο. Αποτελεί ένα από τα βασικά αποτελέσματα της Θεωρίας Bass-Serre. Στην παρούσα εργασία μας ενδιαφέρει η μορφή μου έχει μία ομάδα η οποία δρα σε ένα δέντρο χωρίς αντιστροφές και όπου το γράφημα πηλίκο που προκύπτει έχει την μορφή που ορίζεται στο Θεώρημα 8.

Κεφάλαιο 3

Πέρατα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε τους τελευταίους ορισμούς και αποτελέσματα που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος που αφορά σε διασπάσεις ομάδων με άπειρο το πλήθος πέρατα. Ξεκινάμε δίνοντας μερικούς βασικούς ορισμούς από την θεωρία της ομολογικής άλγεβρας καθώς έτσι θα γίνει καλύτερα κατανοητή η σύνδεση του τοπολογικού ορισμού των περάτων και του ομαδοθεωρητικού ορισμού αυτών.

3.1 Στοιχεία Ομολογικής Άλγεβρας

Ορισμός 24. *Ένα* ***αλυσωτό σύμπλεγμα*** *C από R-πρότυπα αποτελείται από μία οικογένεια $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ R-προτύπων και από απεικονίσεις μεταξύ αυτών $d_n : C_n \to C_{n-1}$ τέτοιες ώστε $d_{n-1} \circ d_n = 0$.*

Ο πυρήνας των d_n καλείται ***πρότυπο*** *των n-κύκλων της C και συμβολίζεται με $Z_n = Z_n(C)$. Η εικόνα των d_{n+1} ονομάζεται* ***πρότυπο*** *των n-συνόρων της C και συμβολίζεται με $B_n = B_n(C)$.*

Αφού ισχύει $d \circ d = 0$ έχουμε

$$0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Το n-οστό ***πρότυπο ομολογίας*** *του C ορίζουμε να είναι το πηλίκο $H_n(C) = Z_n/B_n$ του C_n.*

Αν στα παραπάνω θεωρήσουμε ως $C^n = C_{-n}$ οδηγούμαστε στους αντίστοιχους ορισμούς του συναλυσωτού συμπλέγματος. Αναλυτικά:

Ορισμός 25. *Ένα* ***συναλυσωτό σύμπλεγμα*** *C R-προτύπων αποτελείται από μία οικογένεια $\{C^n\}$ R-προτύπων και απεικονίσεις $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$ μεταξύ αυτών έτσι ώστε $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.*

Το $Z^n(C) = ker(\delta^n)$ είναι το πρότυπο των n συνκύκλων και το $B^n(C) = im(\delta^{n-1})$ είναι το πρότυπο των n συνσυνόρων. Το n-οστό πρότυπο συνομολογίας του C ορίζεται ως $H^n(C) = Z^n/B^n$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε αντί για R-πρότυπο να έχουμε μία αβελιανή ομάδα καθώς αυτές μπορούν να ειδωθούν και ως $\mathbb{Z}$-πρότυπα.

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας θα χρησιμοποιούμε την simplicial ομολογία και την συνομολογία που προκύπτει μέσω αυτής. Για τον λόγο αυτό παρακάτω κάνουμε μία σύντομη αναφορά σε έννοιες της ομολογίας αυτής.

Ορίζουμε ως n-simplex το μικρότερο κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ που περιέχει $n+1$ σημεία $v_0, \ldots, v_n$ τα οποία δεν περιέχονται στο ίδιο υπερεπίπεδο διάστασης μικρότερης του n, όπου ως υπερεπίπεδο εννοούμε το σύνολο λύσεων ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Ισοδύναμα τα διανύσματα $v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι τα σημεία $v_0, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συγκεκριμένα έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 26. *Ένα **n-simplex** e^n είναι ένα σύνολο της μορφής*

$$\big\{ \sum_{i=0}^{n} t_i v_i | \sum_{i} t_i = 1 \ \text{και} \ t_i \geq 0 \ \text{για κάθε} \ i \big\}$$

*όπου τα $v_0, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα σημεία του $\mathbb{R}^m$. Τα σημεία αυτά λέγονται **κορυφές** του n-simplex και αυτό θα το συμβολίζουμε ως $e^n = [v_0, \ldots, v_n]$.*

Ένα υποσύνολο των σημείων $v_0, \ldots, v_n$ λέγεται **όψη** του n-simplex e^n.

Ορισμός 27. *Ένα **simplicial** σύμπλεγμα K είναι ένα σύνολο από n-simplexes τα οποία περιέχονται σε ένα ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^m$ και ισχύουν τα εξής:*

1. *Αν σ^n είναι simplex του K και τ^p μία όψη αυτού τότε και το τ^p ανήκει στο K.*

2. *Αν σ^n και τ^p είναι simplexes στο K τότε η τομή $\sigma^n \cap \tau^p$ είναι είτε κενή είτε αποτελεί κοινή όψη των σ^n, τ^p.*

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση f_i η οποία απεικονίζει ένα n-simplex $e^n = [v_o, \ldots, v_n]$ στην όψη $[v_o \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n]$ όπου ο συμβολισμός $\hat{v_i}$ σημαίνει ότι αυτό το στοιχείο παραλείπεται από την έκφραση. Επομένως, για ένα σύμπλεγμα X, για αβελιανές ομάδες C_n μπορούμε να θεωρήσουμε τις ελεύθερες αβελιανές με βάση τα n-simplexes e^n_a του X. Τότε τα στοιχεία c κάθε ομάδας C_n είναι οι n-αλυσίδες της μορφής $\sum_a n_a e_a^n$ όπου τα $n_a \in \mathbb{Z}$. Τότε ως απεικονίσεις $d_n : C_n \to C_{n-1}$ θεωρούμε τις

$$d_n(c) = \sum_i (-1)^i f_i(c)$$

Για να περάσουμε τώρα στην συνομολογία ενός συμπλέγματος X θα επιλέξουμε πρώτα μία αβελιανή ομάδα G (στην παρούσα εργασία αυτή η ομάδα θα είναι η $\mathbb{Z}_2$) και έπειτα θα ορίσουμε $C^n(X;G) = Hom(C_n(X), G)$. Τέλος για τις αντίστοιχες απεικονίσεις $d^n : C^n \to C^{n+1}$ θα θεωρούμε τις εξής: για $c \in C_n$ και για ομομορφισμό $f \in Hom(C_n, G)$ θα έχουμε

$$(d^n f)(c) = f(d_{n+1}(c))$$

3.2 Πέρατα τοπολογικών χώρων

Χρησιμοποιούμε την απλουστευμένη εκδοχή του ορισμού των περάτων του Freudenthal την οποία χρησιμοποιούν οι Scott και Wall στο [16]. Επιπλέον για κάθε συναλυσωτό σύμπλεγμα με σταθερές από μία ομάδα G θα θεωρούμε ότι $C^n(X) = C^n(X;G) = Hom(C_n(X), \mathbb{Z}_2)$.

Ορισμός 28. *Έστω X ένα τοπικά πεπερασμένο simplicial σύμπλεγμα (δηλ. κάθε κορυφή αυτού ανήκει σε πεπερασμένο το πλήθος simplices). Για κάθε πεπερασμένο υποσύμπλεγμα K συμβολίζουμε με $n(K)$ τον αριθμό των άπειρων συνιστωσών του $X \backslash K$. Τότε ορίζουμε ως τον* ***αριθμό των περάτων*** *του X το $e(X) = sup\{n(K)\}$ ως προς κάθε πεπερασμένο υποσύμπλεγμα K.*

Παρατηρούμε το εξής. Αρχικά αν θεωρήσουμε το συναλυσωτό σύμπλεγμα $C^*(X)$ τότε αυτό περιέχει ένα υποσύμπλεγμα $C_f^*(X)$ με στοιχεία τις συναλυσίδες με πεπερασμένο φορέα. Συμβολίζουμε με

$$C_e^*(X) = C^*(X)/C_f^*(X)$$

και με $H_e^*(X), H_f^*(X)$ τις ομάδες συνομολογίας των $C_e^*(X), C_f^*(X)$ αντίστοιχα. Τότε η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \to C_f^*(X) \to C^*(X) \to C_e^*(X) \to 0$$

επάγει την μακρά ακριβή ακολουθία ομάδων συνομολογίας

$$\dots \to C_f^n(X) \to C^n(X) \to C_e^n(X) \to C_f^{n+1}(X) \to \dots$$

Με βάση αυτή την παρατήρηση μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο

Πρόταση 7. *Για ένα τοπικά πεπερασμένο simplicial σύμπλεγμα X το $e(X)$ είναι ίσο με την διάσταση του $H_e^0(X)$ πάνω από το $\mathbb{Z}_2$.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε από την ακολουθία

$$0 \stackrel{\delta^{-1}}{\to} C_e^0 \stackrel{\delta^0}{\to} C_e^1 \stackrel{\delta^1}{\to} \dots$$

ότι $Im(\delta^{-1}) = 0$ και $Ker(\delta^0)$ είναι το σύνολο όλων των πεπερασμένων 0-συναλυσίδων με πεπερασμένο συνσύνορο. Επομένως θα έχουμε

$$H_e^0(X) = Ker(\delta^0)/Im(\delta^{-1}) = Ker(\delta^0)$$

Όμως το σύνολο των 0-συναλυσίδων με πεπερασμένο συνσύνορο μπορεί να γραφτεί ως $(\delta^0)^{-1}(C_f^1(X))$. Άρα θα έχουμε

$$H_e^0(X) = (\delta^0)^{-1}(C_f^1(X))/C_f^0(X)$$

Επίσης αφού μας ενδιαφέρει η H_e^0 μπορούμε να θεωρήσουμε τον 1-σκελετό του X καθώς τα κελιά διάστασης μεγαλύτερης του 1 δεν επηρεάζουν την H_e^0.

Έστω τώρα, οι 0-συναλυσίδες $c_1, \dots, c_n$ οι οποίες ορίζουν γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία στην $H_e^0(X)$. Αφού τα δc_i είναι πεπερασμένα, μπορούμε να επιλέξουμε ένα πεπερασμένο υποπλέγμα K του X το οποίο να περιέχει τους φορείς των δc_i. Όμως τότε για κάθε ακμή e που δεν ανήκει στο K, κάθε c_i παίρνει την ίδια τιμή στα δύο άκρα της ακμής αυτής. Επομένως για κάθε συνεκτική συνιστώσα A του $X \backslash K$ τα c_i παίρνουν σταθερή τιμή $c_i(A)$ στις κορυφές του A.

Εάν υποθέσουμε ότι υπάρχουν $r < n$ το πλήθος τέτοιες συνεκτικές συνιστώσες A, τότε η σχέση $\sum \lambda_i c_i(A) = 0$ θα ισχύει για κάθε τέτοιο A. Αυτό όμως σημαίνει ότι το στοιχείο $\sum \lambda_i c_i$ θα είναι μία πεπερασμένη συναλυσίδα το οποίο είναι άτοπο. Άρα $n \leq dim_{\mathbb{Z}_2} H_e^0(X)$ το οποίο σημαίνει $n \leq e(X)$.

Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι για $e(X) \geq n$ επιλέγουμε ένα K υποπλέγμα πεπερασμένο έτσι ώστε $n(K) \geq n$ και έστω $A_1, \dots, A_n$ άπειρες συνιστώσες του $X \backslash K$. Για κάθε i θεωρούμε την συναλυσίδα c_i η οποία παίρνει την τιμή 1 στις κορυφές του A_i και 0 στις υπόλοιπες κορυφές του X. Αν $\delta c_i(e) = 1$ όπου η e ακμή με μόνο το ένα άκρο στο A_i (επομένως το άλλο είναι στο K). Αυτές όμως οι ακμές είναι πεπερασμένες το πλήθος. Άρα κάθε δc_i είναι πεπερασμένο και εκ κατασκευής οι c_i είναι ανεξάρτητες modulo πεπερασμένες συναλυσίδες. Τελικά $dim_{\mathbb{Z}_2} H_e^0(X) \geq n$. □

3.3 Πέρατα Ομάδων

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια του χώρου των περάτων μίας ομάδας θεωρώντας αρχικά την άλγεβρα Boole που σχηματίζεται από τα υποσύνολα της ομάδας.

Έστω λοιπόν G μία ομάδα. Θεωρούμε ως PG το δυναμοσύνολο της G και το εφοδιάζουμε με την πράξη της συμμετρικής διαφοράς συνόλων $A+B=A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$ και με τον πολλαπλασιασμό $AB=A\cap B$. Τότε αυτό είναι μία άλγεβρα Boole όπου $1=G$, $0=\emptyset$ και $A^*=G-A=1+A$ το συμπλήρωμα του A. Θεωρούμε τώρα την εξής πράξη: $\nabla : G\times PG\to PG$ όπου για $g\in G$ και $A\in PG$

$$\nabla_g(A)=A+Ag$$

Το παραπάνω έχει νόημα αφού η G δρα στο PG από δεξιά με αυτομορφισμούς.

Θεωρούμε επιπλέον το υποσύνολο FG του PG το οποίο αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα της G. Αυτό τότε είναι ιδεώδες της PG κλειστό ως προς την δράση της G και ως προς την πράξη ∇. Αν για δύο σύνολα A και B έχουμε ότι $A+B\in FG$ τότε αυτά θα τα λέμε **σχεδόν ίσα** και θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $A\overset{a}{=}B$. Να επισημάνουμε ότι η σχεδόν ισότητα μπορεί να οριστεί και μέσω του σχεδόν εγκλεισμού. Δηλαδή για δύο σύνολα B, C θα ισχύει $B\overset{a}{\subset}C$ αν το $B\backslash C\in FG$ και κατ΄ επέκταση $B\overset{a}{=}C$ αν και μόνο αν $B\overset{a}{\subseteq}C$ και $C\overset{a}{\subseteq}B$. Παρατηρούμε ότι η σχεδόν ισότητα μεταφράζεται ως ισότητα στο πηλίκο PG/FG.

Συμβολίζουμε τώρα με QG το εξής σύνολο:

$$QG=\{A\subseteq G\mid \forall g\in G,\ \nabla_g(A)\in FG\}$$

Τα στοιχεία του συνόλου αυτού τα ονομάζουμε **σχεδόν αναλλοίωτα**. Είναι άμεσο ότι το σύνολο αυτό είναι υποάλγεβρα της PG η οποία περιέχει το FG και είναι κλειστή με την δράση της G.

Τέλος θεωρούμε το πηλίκο $E(G)=QG/FG$. Τότε αυτό είναι άλγεβρα Boole και επιπλέον ότι ως ομάδα είναι η υποομάδα της PG/FG των συνόλων που μένουν αναλλοίωτα από την δράση της G.

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Stone για άλγεβρες Boole έχουμε ότι ο χώρος των μεγιστικών ιδεωδών E της $E(G)$ είναι 0-διάστατος συμπαγής χώρος Hausdorff και ότι η $E(G)$ είναι ισομορφική με την δυϊκή άλγεβρα του χώρου Stone αυτής. Ο χώρος E καλείται **χώρος των περάτων** της G και ο **αριθμός των περάτων** της G είναι

$$e(G)=dim_{\mathbb{Z}_2}(QG/FG)$$

όπου το πηλίκο QG/FG το θεωρούμε ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{Z}_2$.

Ο παραπάνω ορισμός για πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες θα μπορούσε να αντικατασταθεί από έναν αρκετά πιο διαισθητικό και ο οποίος προκύπτει πολύ πιο φυσικά εφαρμόζοντας την ίδια ιδέα που εφαρμόζεται και στα συμπλέγματα. Επιλέγοντας λοιπόν ένα σύνολο γεννητόρων S της G και θεωρώντας το αντίστοιχο γράφημα Cayley $\Gamma(G,S)$ μπορούμε να ορίσουμε ως τον αριθμό των περάτων της G τον αριθμό των περάτων του $\Gamma(G,S)$. Σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να εξασφαλιστεί ότι το $e(\Gamma)$ δεν εξαρτάται από το σύνολο γεννητόρων. Για μία απόδειξη η οποία δεν κάνει χρήση του γενικού ορισμού που δώσαμε παραπάνω παραπέμπουμε στο [9]. Αντ΄ αυτού δείχνουμε το παρακάτω.

Πρόταση 8. *Για μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G με σύνολο γεννητόρων S και γράφημα Cayley $\Gamma_S = \Gamma(G,S)$ ισχύει*

$$e(G) = e(\Gamma_S)$$

Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη κάνουμε μία μικρή παρατήρηση ως προς την έκφραση του QG. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι αν S είναι ένα σύνολο γεννητόρων της G τότε το QG μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$QG = \{A \in PG | \forall s \in S,\ \nabla_s(A) \in FG\}$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι το $C^0(\Gamma_S)$ αντιστοιχεί στο PG και το $C^0_f(\Gamma_S)$ στο FG αντιστοιχίζοντας κάθε συναλυσίδα $c \in C^0(\Gamma_S)$ με το υποσύνολο της G που αποτελείται από τα στοιχεία τα οποία δεν μηδενίζουν την συναλυσίδα αυτή.

Έστω λοιπόν ότι στην τυχαία συναλυσίδα $c \in C^0(\Gamma_S)$ αντιστοιχεί το υποσύνολο $A \subseteq G$. Τότε το συνσύνορο $\delta^0 c$ αυτής παίρνει σε μία ακμή (g,s) την τιμή 0 αν τα g, gs ανήκουν και τα δύο είτε στο A είτε στο A^* αφού από τον τρόπο ορισμού του συνσυνόρου έχουμε

$$(\delta^0 c)(g,s) = 0 \iff c(d_1(g,s)) = 0 \iff c(gs - g) = 0 \iff c(gs) = c(g)$$

Επομένως η $\delta^0 c$ έχει φορέα το σύνολο των ακμών $\{(g,s)|g \in G, s \in S\}$ όπου τα g, gs δεν ανήκουν ταυτόχρονα είτε στο A είτε στο A^*, δηλαδή $g \in A + s^{-1}A = \nabla_{s^{-1}}(A)$. Άρα έχουμε ότι:

$$supp(\delta^0 c) = \{(g,s)|g \in \nabla_{s^{-1}}(A), s \in S\}$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι $A \in QG \iff \delta^0 c$ είναι πεπερασμένη. Επομένως το πηλίκο QG/FG αντιστοιχεί στο πηλίκο των 0-συναλυσίδων με πεπερασμένο συνσύνορο ως προς τις πεπερασμένες 0-συναλυσίδες, το οποίο είναι ακριβώς η $H^0_e(X)$ στην Πρόταση 7 και επομένως έχουμε το ζητούμενο. □

Άμεσο πόρισμα του παραπάνω είναι ότι $e(\mathbb{Z}) = 2$ μιας και το $\{1\}$ παράγει την $\mathbb{Z}$ και το γράφημα Cayley αυτής έχει δύο πέρατα.

Προχωράμε τώρα στις αποδείξεις μερικών προτάσεων που θα δώσουν μία πληρέστερη κατανόηση της θεωρίας αλλά και που θα χρησιμεύσουν στην απόδειξη του θεωρήματος που αφορά στις διασπάσεις ομάδων με άπειρα το πλήθος πέρατα που παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Πρόταση 9. *Έστω N μία πεπερασμένη κανονική υποομάδα μίας ομάδας G. Τότε $e(G) = e(G/N)$.*

Απόδειξη. Έστω $\pi : G \to G/N$ η κανονική προβολή. Τότε για κάθε $A \subseteq G$ θεωρώντας το $\pi(A) \subseteq G/N$ επάγεται μία απεικόνιση $\pi_t : PG \to P(G/N)$. Με όμοιο τρόπο για κάθε $B \subseteq G/N$ θεωρώντας το $\pi^{-1}(B) \subseteq G$ επάγεται μία απεικόνιση $\pi^{-1} : P(G/N) \to PG$. Τότε για $B = H/N \subseteq G/N$ θα έχουμε

$$\pi_t\pi^{-1}(B) = \pi_t(\pi^{-1}(H/N)) = \pi^{-1}(H/N)/N = HN/N = H/N = B$$

Αντίστοιχα για $A \subseteq G$ θα έχουμε

$$\pi^{-1}\pi_t(A) = \pi^{-1}(A/N) = AN$$

Παρατηρούμε ότι ένα υποσύνολο $B \subseteq G/N$ είναι σχεδόν αναλλοίωτο αν και μόνο αν και το υποσύνολο $\pi^{-1}(B)$ είναι σχεδόν αναλλοίωτο. Πράγματι, για $B = H/N \in P(G/N)$ θα έχουμε

$$B + NBg = H/N + NH/Ng = H/N + H/Ng$$

ενώ από την άλλη

$$\pi^{-1}(B)+\pi^{-1}(B)g = \pi^{-1}(H/N)+\pi^{-1}(H/N)g = HN+HNg = (H+Hg)\cap N$$

Άρα προφανώς αν η μία έκφραση είναι πεπερασμένη θα είναι και η άλλη.

Επιπλέον αν το $A \subseteq G$ είναι σχεδόν αναλλοίωτο τότε είναι σχεδόν ίσο με το AN, δηλαδή το $\pi_t(A)$ είναι σχεδόν αναλλοίωτο. Επομένως οι π_t, π^{-1} απεικονίζουν τα πεπερασμένα σε πεπερασμένα και τα σχεδόν αναλλοίωτα σε σχεδόν αναλλοίωτα. Τέλος είναι προφανές ότι η μία είναι αντίστροφη της άλλης και άρα τα πηλίκα QG/FG και $Q(G/N)/F(G/N)$ είναι ισόμορφα. Άρα και ο αριθμός των περάτων τους θα είναι ίδιος. □

Πρόταση 10. *Αν μία υποομάδα H μίας ομάδας G είναι πεπερασμένου δείκτη, τότε $e(G) = e(H)$.*

Απόδειξη. Έστω ένα υποσύνολο $E \subseteq G$ σχεδόν αναλλοίωτο στην G. Τότε προφανώς θα είναι σχεδόν αναλλοίωτο και το $E \cap H$ στην H αφού θα έχουμε

$$(E \cup H) + (E \cap H)h = EH + (EH)h = (E + Eh)H = (E + Eh) \cap H$$

το οποίο είναι προφανώς πεπερασμένο. Η παραπάνω έκφραση έχει νόημα αφού ορίσαμε ως πράξη πολλαπλασιασμού στην άλγεβρα Boole την τομή συνόλων και από τα αξιώματα της άλγεβρας αυτή θα είναι και επιμεριστική ως προς την πράξη της πρόσθεσης.

Επομένως επάγεται ομομορφισμός $\varphi : QG/FG \to QH/FH$ όπου $\varphi(E) = E \cap H$.

Θα δείξουμε τώρα ότι αυτός ο φ είναι ισομορφισμός. Για αυτό αρκεί να δείξουμε πρώτον ότι κάθε σχεδόν αναλλοίωτο υποσύνολο της H είναι της μορφής $E \cap H$ για κάποιο σχεδόν αναλλοίωτο υποσύνολο E της G, και δεύτερον ότι για δύο σχεδόν αναλλοίωτα υποσύνολα E, E_1 της G με $E \cap H \stackrel{a}{=} E_1 \cap H$ θα πρέπει να ισχύει $E \stackrel{a}{=} E_1$. Προς τούτο επιλέγουμε ένα σύνολο αντιπροσώπων $T = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ της H στην G όπου $b_1 = e$.

Έστω C ένα σχεδόν αναλλοίωτο υποσύνολο της H και έστω $E = \cup C b_i$. Για κάθε $g \in G$ υπάρχουν $h_1, \ldots, h_r \in H$ ώστε $b_i g = h_i b_i$. Επομένως έχουμε

$$Eg = \bigcup C h_i b_i$$

Αφού $Ch_i \stackrel{a}{=} C$ και το T πεπερασμένο θα έχουμε

$$Eg \stackrel{a}{=} \bigcup C b_i = E$$

Επομένως το E είναι σχεδόν αναλλοίωτο υποσύνολο της G με $E \cap H = C$. Με άλλα λόγια ο φ είναι επιμορφισμός.

Έστω τώρα δύο σχεδόν αναλλοίωτα υποσύνολα E, E_1 της G με $E \cap H \stackrel{a}{=} E_1 \cap H$. Αφού το T είναι πεπερασμένο έχουμε

$$E = \cup(E \cap H b_i) \stackrel{a}{=} \cup(E b_i \cap H b_i) = \cup(E \cap H) b_i \stackrel{a}{=} \cup(E_1 \cap H) b_i =$$

$$= \cup(E_1 b_i \cap H b_i) \stackrel{a}{=} \cup(E_1 \cap H b_i) = E_1$$

Δηλαδή ο φ μονομορφισμός και άρα ισομορφισμός. □

Προχωράμε τώρα σε δύο λήμματα τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε έπειτα για να αποδείξουμε ένα κεντρικό θεώρημα.

Λήμμα 3. *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και έστω $A_0, A_1 \in QG$. Τότε σχεδόν για κάθε $g \in A_0$ θα ισχύει είτε $gA_1 \subseteq A_0$ είτε $gA_1^* \subseteq A_0$.*

Με το σχεδόν για κάθε στοιχείο g εννοούμε ότι η εκάστοτε συνθήκη δεν θα ισχύει για πεπερασμένο το πλήθος στοιχεία g.

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων S της G και θεωρούμε την δράση της στο γράφημα Cayley $\Gamma(G,S)$ αυτής. Από την απόδειξη της Πρότασης 8 γνωρίζουμε ότι κάθε υποσύνολο $A \subseteq G$ αντιστοιχεί σε μία 0-συναλυσίδα c και μάλιστα ότι αν το A είναι σχεδόν αναλλοίωτο τότε η δc είναι πεπερασμένη. Επομένως αν το A_i αντιστοιχεί στην 0-συναλυσίδα c_i τότε μπορούμε να επιλέξουμε συνεκτικό πεπερασμένο υπογράφημα C_i του $\Gamma(G,S)$ το οποίο θα περιέχει το δc_i μιας και αυτό θα είναι πεπερασμένο.

Για κάθε κορυφή $v \in V(C_1)$ το gv θα ανήκει στο A_0 σχεδόν για κάθε $g \in A_0$ αφού το C_1 είναι πεπερασμένο. Τότε άμεσα θα έχουμε ότι $gC_1 \cap C_0 = \emptyset$ σχεδόν για κάθε $g \in G$ και επομένως σχεδόν για κάθε $g \in A_0$ θα έχουμε $gC_1 \cap C_0 = \emptyset$ και $gv \in A_0$ για κάθε κορυφή $v \in V(C_1)$.

Για κάθε σύνολο A κορυφών του $\Gamma(G,S)$ θα συμβολίζουμε με $\overline{A}$ το μεγιστικό υπογράφημα του $\Gamma(G,S)$ που θα έχει ως σύνολο κορυφών το $V(\overline{A}) = A$.

Τότε κάθε συνιστώσα E είτε του $\overline{A_1}$ είτε του $\overline{A_1^*}$ θα περιέχει μία κορυφή του C_1 και επομένως αφού $gv \in A_0$ σχεδόν για κάθε $g \in A_0$, το gE θα τέμνει το A_0. Αν το $gE \subseteq A_0$ τότε τετριμμένα θα έχουμε ότι $gA_1 \subseteq A_0$ είτε $gA_1^* \subseteq A_0$.

Αν τώρα το gE τέμνει και το A_0^* τότε θα τέμνει και το C_0. Όμως ξέρουμε ότι $gC_1 \cap C_0 = \emptyset$ σχεδόν για κάθε $g \in A_0$ και είναι και συνεκτικά τα C_0, C_1. Επομένως το C_0 θα ανήκει σε μία μόνο συνιστώσα του gE. Τότε θα έχουμε

$$A_0^* \cap gA_1 \neq \emptyset \text{ και } A_0^* \cap gA_1^* = \emptyset$$

ή

$$A_0^* \cap gA_1 = \emptyset \text{ και } A_0^* \cap gA_1 \neq \emptyset$$

Επομένως στην πρώτη περίπτωση έχουμε $gA_1^* \subseteq A_0$ ενώ στην δεύτερη έχουμε $gA_1 \subseteq A_0$. □

Άμεσα έχουμε και το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 1. *Αν $A_0, A_1 \in QG$ τότε σχεδόν για κάθε $g \in G$ ισχύει ένα από τα παρακάτω:*

$$gA_1 \subseteq A_0,\ gA_1^* \subseteq A_0,\ gA_1 \subseteq A_0^*,\ gA_1^* \subseteq A_0^*$$

Θεώρημα 11. *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα, $A \in QG$ ένα άπειρο σύνολο τέτοιο ώστε το A^* και το $H = \{h \in G | hA \overset{a}{=} A\}$ να είναι άπειρα. Τότε η G περιέχει άπειρη κυκλική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη.*

Απόδειξη. Εναλλάσοντας τα A, A^* αν χρειαστεί μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το $H \cap A$ είναι άπειρο και ότι το $1 \in A$. Από το Λήμμα 3 θα έχουμε ότι σχεδόν για κάθε $g \in A$ θα ισχύει είτε $gA \subseteq A \backslash \{1\}$ είτε $gA^* \subseteq A \backslash \{1\}$. Επομένως θα υπάρχει ένα $h \in H \cap A$ για το οποίο θα ισχύει $hA \subseteq A \backslash \{1\}$. Θα δείξουμε ότι αυτό το h παράγει την επιθυμητή υποομάδα.

Αν θεωρήσουμε λοιπόν ένα $n > 0$ τότε θα έχουμε

$$h^n A = h \dots hA \subset hA \subset A$$

Επομένως αφού το n είναι τυχαίο, το $h^n \neq 1$ για κάθε n και άρα έχει άπειρη τάξη.

Για να δείξουμε ότι η υποομάδα που παράγει το στοιχείο h έχει πεπερασμένο δείκτη παρατηρούμε τα εξής:

Για κάθε $n > 0$ έχουμε

$$1 \in A \implies h^n \in h^n A \subset A \implies h^n \in A$$

Αντίστοιχα αν για κάθε $n > 0$ το $h^{-n} \in A$

$$h^{-n} \in A \implies 1 \in h^n A$$

όπου όμως γνωρίζουμε από παραπάνω ότι $h^n A \subseteq A \backslash \{1\}$ και επομένως θα πρέπει $h^{-n} \in A^*$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η τομή $\cap\{h^n A | n > 0\}$ είναι κενή. Έστω λοιπόν ένα $d \in \cap\{h^n A | n > 0\}$. Τότε $h^{-n} \in Ad^{-1}$ με $n > 0$. Καθώς όμως το h έχει άπειρη τάξη οδηγούμαστε σε άτοπο καθώς το $Ad^{-1} + A$ είναι πεπερασμένο.

Έχουμε λοιπόν ότι το

$$A = \cup\{h^n A - h^{n+1} A | n \geq 0\} = \cup\{h^n (A - hA) | n \geq 0\}$$

περιέχεται σε ένωση πεπερασμένου το πλήθος συμπλόκων της $\langle h \rangle$ στην G. Με το ίδιο επιχείρημα, αντικαθιστώντας το h με το h^{-1} έχουμε ότι το ίδιο ισχύει και για το A^*. Επομένως η άπειρη κυκλική υποομάδα $\langle h \rangle$ είναι πεπερασμένου δείκτη στην G. □

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο αναφέροντας δύο αποτελέσματα τα οποία θα περιορίσουν κατά πολύ τις περιπτώσεις που θα πρέπει να ελεγχθούν στην απόδειξη του κεντρικού Θεωρήματος που αναλύουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Πόρισμα 2. *Για πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G ισχύει $e(G) = 0, 1, 2$ ή ∞.*

Απόδειξη. Έστω ότι $e(G) \neq 0, 1, \infty$. Τότε προφανώς η G είναι άπειρη μιας και $e(G) \neq 0$. Επίσης, αφού $e(G) \neq \infty$ θα έχουμε ότι η QG/FG είναι πεπερασμένη. Τέλος αφού $e(G) \neq 1$ και αφήνοντας την G να δράσει πάνω στην QG/FG, μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο A με $H = \{h \in G | hA \stackrel{a}{=} A\}$ άπειρη. Άρα από το Θεώρημα 11, υπάρχει άπειρη κυκλική υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη. Από την Πρόταση 10 θα πρέπει $e(G) = e(\mathbb{Z})$ όπου γνωρίζουμε ότι $e(\mathbb{Z}) = 2$. □

Από την παραπάνω απόδειξη έχουμε άμεσα το επόμενο Πόρισμα.

Πόρισμα 3. *Αν για μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G ισχύει $e(G) \neq 0, 1, \infty$, τότε υπάρχει άπειρη κυκλική υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη.*

Θεώρημα 12. *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *$e(G) = 2$,*

2. *Η G περιέχει άπειρη κυκλική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη,*

3. *Η G περιέχει πεπερασμένη κανονική υποομάδα F με*

$$G/F \cong \mathbb{Z} \text{ ή } G/F \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2,$$

4. *$G = F*_F$, όπου F πεπερασμένη ή $G = A *_F B$ όπου F πεπερασμένη και $[A : F] = [B : F] = 2$.*

Απόδειξη. 1) $\implies$ 2) Από το Πόρισμα 3 έχουμε άμεσα ότι υπάρχει άπειρη κυκλική υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη.

2) $\implies$ 1) Έστω $H \leq G$ με $H \cong \mathbb{Z}$ και $[G : H] < \infty$ τότε από την Πρόταση 10 έχουμε $e(G) = e(H) = 2$.

3) $\implies$ 4) Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι $G/F \simeq \mathbb{Z}$. Θεωρούμε ακόμα την κανονική προβολή $\varphi : G \to G/F$. Αφήνοντας την $\mathbb{Z}$ να δράσει ελεύθερα σε ένα δέντρο με άπειρες κορυφές οι οποίες είναι άκρα ακριβώς δύο ακμών αποκτούμε μία δράση της G πάνω στο T μέσω της φ με $g * t = \varphi(g)t$. Τότε θα έχουμε

$$t_1 = g * t_2 \iff t_1 = \varphi(g)t_2$$

αφού ο φ είναι επιμορφισμός.
Επιπλέον

$$g * t = t \iff \varphi(g)t = t \iff \varphi(g) = 1 \iff g \in ker\varphi = F$$

Άμεσα έχουμε ότι $G\backslash T \simeq G/F\backslash T$ και από τα παραπάνω το $G\backslash T$ θα αποτελείται από μία κορυφή και μία ακμή με αρχή και τέλος την μοναδική κορυφή. Με άλλα λόγια $G \simeq F*_F$.

Με όμοιο τρόπο αν $G/F \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ και αφήνοντας την $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ να δράσει σε ένα δέντρο με δύο κορυφές και μία ακμή θα έχουμε ότι $G \simeq A *_F B$ όπου $A = \varphi^{-1}(\mathbb{Z}_2)$ και $B = \varphi^{-1}(\mathbb{Z}_2)$.

4) $\implies$ 3) Αν $G = F*_F$, όπου F πεπερασμένη, τότε οι αντίστοιχοι μονομορφισμοί είναι ισομορφισμοί και έτσι $F \trianglelefteq G$ με $G/F \cong \mathbb{Z}$.

Αν $G = A *_F B$ με F πεπερασμένη και $[A : F] = [B : F] = 2$, τότε η F είναι κανονική στις A και B. Επομένως είναι κανονική στην G και άρα

$$G/F \cong (A/F) * (B/F) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2.$$

3) $\implies$ 1) Αν F πεπερασμένη κανονική υποομάδα της G με $G/F \cong \mathbb{Z}$, τότε από την Πρόταση 9 έχουμε ότι $e(G) = e(G/F) = e(\mathbb{Z}) = 2$.

Έστω τώρα $G/F \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Αφού $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle a, b | a^2, b^2 \rangle$, τότε η άπειρη κυκλική $\langle ab \rangle$ είναι υποομάδα αυτής δείκτη 2. Άρα από την Πρόταση 10 και την Πρόταση 9 έχουμε

$$e(G) = e(G/F) = e(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) = e(\mathbb{Z}) = 2.$$

1) $\implies$ 3) Στην απόδειξη αυτής της συνεπαγωγής χρησιμοποιούμε τον δεύτερο ορισμό του πέρατος ο οποίος κάνει χρήση του γραφήματος Cayley. Αν θεωρήσουμε λοιπόν το γράφημα $\Gamma = \Gamma_S(G)$ ως προς ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων S, τότε αφού $e(G) = 2$ θα υπάρχει ένα πεπερασμένο υπογράφημα C τέτοιο ώστε το $\Gamma - C$ να αποτελείται από δύο ακριβώς συνεκτικές και μη φραγμένες συνιστώσες. Έστω $E, E^{'}$ οι συνιστώσες αυτές.

Θα δείξουμε αρχικά ότι για τυχαίο $g \in G$ ή το $E + gE$ είναι πεπερασμένο ή το $(E + gE)^*$ είναι πεπερασμένο. Αφήνοντας το στοιχείο g να δράσει στο σύνολο των δύο περάτων παρατηρούμε ότι είτε θα τα μεταθέτει μεταξύ τους είτε θα τα αφήνει αναλλοίωτα.

Στην περίπτωση λοιπόν όπου το g τα αφήνει αναλλοίωτα έχουμε άμεσα ότι $E + gE$ φραγμένο.

Στην περίπτωση που το g μεταθέτει τα πέρατα θα έχουμε αντίστοιχα ότι το $E + gE^{'}$ είναι φραγμένο και κατ΄ επέκταση το $E + gE^* = E + (gE^{'} + gC)$ είναι φραγμένο. Ομοίως το $E^{'} + gE$ είναι φραγμένο και άρα και το $E^* + gE$. Επιπλέον το $E^{'} \cap gE^{'}$ θα είναι φραγμένο και άρα το

$$E^* \cap gE^* = (E^{'} \cup G) \cap (gE^{'} \cup gC)$$

είναι φραγμένο. Άρα τελικά θα έχουμε ότι το

$$(E + gE)^* = (E \cap gE^*) \cup (E^* \cap gE^*) \cup (E^* \cap gE)$$

είναι φραγμένο.

Προχωράμε τώρα αποδεικνύοντας ότι το σύνολο

$$H = \{g \in G | E + gE \text{ πεπερασμένο}\}$$

είναι υποομάδα της G δείκτη το πολύ 2. Για να δείξουμε ότι είναι το H κλειστό ως προς τα αντίστροφα στοιχεία αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$|E + h^{-1}E| = |hE + E|$$

Τότε αν το $E+hE$ είναι πεπερασμένο θα είναι και το $E+h^{-1}E$ πεπερασμένο. Θα δείξουμε τώρα ότι είναι κλειστό ως προς τα γινόμενα. Έστω λοιπόν $g, h \in H$. Τότε έχουμε:

$$E + ghE = (E + gE) + (gE + ghE) = (E + gE) + g(E + hE)$$

και επομένως άμεσα έχουμε ότι $gh \in H$ και άρα το H είναι υποομάδα της G.

Θεωρούμε τώρα $g, h \in G \backslash H$ και $H \neq G$. Τότε:

$$E + gh^{-1}E = (E + gE) + (gE + gh^{-1}E) = (E + gE)^* + g(E + h^{-1}E)^*$$

Από τον προηγούμενο ισχυρισμό έχουμε ότι τα $(E + gE)^*$ και $(E + h^{-1}E)^*$ είναι πεπερασμένα και άρα και το $E + gh^{-1}E$ και άρα $[G : H] \leq 2$.

Σε αυτό το σημείο κάνουμε την εξής παρατήρηση. Αν θεωρήσουμε ένα $g \in H$ τέτοιο ώστε $gC \cap C = \emptyset$ τότε θα έχουμε είτε $gC \subset E$ είτε $gC \subset E^*$ και κατ΄ επέκταση

1. $E \cap gE^* = \emptyset$ και $E^* \cap gE \neq \emptyset$ είτε
2. $E \cap gE^* \neq \emptyset$ και $E^* \cap gE = \emptyset$

Θα δείξουμε τώρα τον εξής ισχυρισμό:

Ισχυρισμός: Υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : H \to \mathbb{Z}$ με πεπερασμένο πυρήνα.

Έστω $g \in H$. Τότε έχουμε ότι $E + gE$ είναι πεπερασμένο και άρα και τα $E \cap gE^*$, $E^* \cap gE$ είναι πεπερασμένα. Ορίζουμε τότε μία απεικόνιση $\varphi : H \to \mathbb{Z}$ ως εξής:

$$\varphi(g) = |E \cap gE^*| - |E^* \cap gE|$$

Παρατηρούμε ότι:

$$E \cap gE^* = (E \cap gE^* \cap ghE^*) \cup (E \cap gE^* \cap ghE)$$

$$E^* \cap gE = (E^* \cap gE \cap ghE^*) \cup (E^* \cap gE \cap ghE)$$

για κάθε $h \in H$.

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω ενώσεις είναι ξένες. Τότε η φ μπορεί να γραφτεί ως:

$$\varphi(g) = |E \cap gE^* \cap ghE^*| + |E \cap gE^* \cap ghE| - |E^* \cap gE \cap ghE^*| - |E^* \cap gE \cap ghE|$$

Έστω $h \in H$. Τότε έχουμε:

$$\varphi(h) = |E \cap hE^*| - |E^* \cap hE| = |gE \cap ghE^*| - |gE^* \cap ghE|$$

για κάθε $g \in H$ και άρα θα έχουμε:

$$\varphi(h) = |E \cap gE \cap ghE^*| + |E^* \cap gE \cap ghE^*| - |E \cap gE^* \cap ghE| - |E^* \cap gE^* \cap ghE|$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\varphi(g)+\varphi(h) &= |E\cap gE^*\cap ghE^*| + |E\cap gE\cap ghE^*| \\ &\quad - |E^*\cap gE\cap ghE| - |E^*\cap gE^*\cap ghE| \\ &= |E\cap ghE^*| - |E^*\cap ghE| \\ &= \varphi(gh)\end{aligned} \tag{3.1}$$

Δηλαδή η φ είναι ομομορφισμός. Αφού το C είναι πεπερασμένο υπογράφημα του Γ θα υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία g τέτοια ώστε $C\cap gC\neq\emptyset$. Αν λοιπόν $C\cap gC=\emptyset$, από την παρατήρηση πριν τον ορισμό του φ θα πρέπει $\varphi(g)\neq 0$ και επομένως ο πυρήνας K τους φ είναι πεπερασμένος. Από την άλλη, εφόσον η $\mathbb{Z}$ δεν περιέχει στοιχεία πεπερασμένης τάξης εκτός από το τετριμμένο, κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης της H θα περιέχεται στον πυρήνα του φ. Δηλαδή ο πυρήνας του φ αποτελείται από τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης της H και συνεπώς είναι χαρακτηριστική υποομάδα της H.

Επίσης, η H είναι άπειρη ως πεπερασμένου δείκτη στην G και άρα $\{1\}\neq Im\varphi\leq\mathbb{Z}$. Επομένως $Im\varphi\cong\mathbb{Z}$ και άρα μπορούμε να θεωρούμε ότι ο φ είναι επιμορφισμός.

Αν $G=H$, τότε $G/K=H/K\cong\mathbb{Z}$ και άρα η συνεπαγωγή αποδείχτηκε.

Έστω ότι $[G:H]=2$. Τότε η H είναι κανονική υποομάδα της G και αφού η K είναι χαρακτηριστική στην H, έχουμε ότι η K είναι κανονική υποομάδα της G. Σχηματίζεται λοιπόν η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$1\to H/K\to G/K\to\mathbb{Z}_2\to 1.$$

Αν η G/K είναι αβελιανή, τότε αφού κάθε πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή είναι ευθύ γινόμενο κυκλικών και η $H/K\cong\mathbb{Z}$ έχει τετριμμένη τομή με τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης της G/K, συμπεραίνουμε ότι

$$G/K\cong H/K\times\mathbb{Z}_2 \text{ ή } G/K\cong\mathbb{Z} \text{ με } H/K=2\mathbb{Z}$$

Στην περίπτωση όπου $G/K\cong\mathbb{Z}$ έχουμε τελειώσει.

Στην περίπτωση όπου $G/K\cong H/K\times\mathbb{Z}_2$ έχουμε επιμορφισμούς

$$G\xrightarrow{\varepsilon} G/K\xrightarrow{\theta} H/K\cong\mathbb{Z}$$

με $Ker\theta\cong\mathbb{Z}_2$ και $Ker\varepsilon=K$. Αφού οι πυρήνες των ε,ϑ είναι πεπερασμένοι, ο πυρήνας της σύνθεσης είναι πεπερασμένος και $G/Ker(\theta\circ\varepsilon)\cong\mathbb{Z}$.

Υποθέτουμε λοιπόν για την συνέχεια ότι η G/K δεν είναι αβελιανή. Έστω $x\in(G/K)/(H/K)$ ένα μη τετριμμένο στοιχείο και έστω $H/K=\langle y\rangle$. Τότε η G/K παράγεται από τα x και y. Αφού η G/K είναι μη αβελιανή έχουμε $x^{-1}yx\neq y$. Αφού όμως το y είναι άπειρης τάξης, πρέπει $x^{-1}yx=y^{-1}$.

Αφού $[G/K : H/K] = 2$ έχουμε ότι $x^2 \in H/K$ και επομένως $x^2 = y^k$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε ότι

$$x^{-1}y^k x = x^{-2}$$

και άρα $x^2 = y^{-k}$. Όμως το y έχει άπειρη τάξη και επομένως πρέπει $k = 0$, δηλαδή $x^2 = 1$ στην G/K.

Έχουμε λοιπόν ότι $G/K = \langle x\rangle\langle y\rangle$, $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \{1\}$ και $\langle y\rangle \trianglelefteq G/K$. Αυτό σημαίνει ότι η G/K είναι το ημιευθύ γινόμενο

$$G/K \cong \langle y\rangle \rtimes \langle x\rangle \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2.$$

Το ημιευθύ γινόμενο $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ έχει παράσταση

$$\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2 = \langle x, y | x^2, x^{-1}yxy\rangle = \langle x, xy | x^2, (xy)^2\rangle = \langle x, a | x^2, a^2\rangle = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2.$$

Άρα τελικά $G/K \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

$\square$

Κεφάλαιο 4

Θεώρημα διάσπασης ομάδων με άπειρα πέρατα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε το θεώρημα που αφορά την μορφή των ομάδων με περισσότερα από δύο πέρατα.

Ορισμός 29. *Μία ομάδα G λέμε ότι* ***διασπάται υπεράνω μίας υποομάδας*** *C αν $G = A *_C B$ ή $G = A*_C$ όπου $A \neq C \neq B$.*

Θεώρημα 13. *(Stallings) Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. Τότε $e(G) \geq 2$ αν και μόνο αν η G διασπάται υπεράνω μίας πεπερασμένης υποομάδας.*

Προχωρούμε στην απόδειξη του πρώτου μισού του Θεωρήματος. Θα δείξουμε δηλαδή αρχικά ότι αν η ομάδα G διασπάται υπεράνω μίας πεπερασμένης υποομάδας τότε $e(G) \geq 2$.

Απόδειξη. Έστω αρχικά ότι $G = A *_C B$ με C πεπερασμένη. Επιλέγοντας σύνολα αντιπροσώπων T_A, T_B της C ως προς τις A, B αντίστοιχα, εκφράζουμε κάθε στοιχείο $g \in G$ στην κανονική του μορφή ως

$$g = a_1 b_1 \dots a_n b_n c$$

όπου $a_i \in T_A, b_i \in T_B, c \in C$.

Η ιδέα είναι να βρούμε ένα σχεδόν αναλλοίωτο υποσύνολο E της G ώστε το E και το E^* να είναι άπειρα (υπενθυμίζουμε ότι το E^* είναι το συμπλήρωμα του E). Τότε άμεσα θα έχουμε $dim_{\mathbb{Z}_2}(QG/FG) \geq 2$.

Επιλέγουμε λοιπόν ως E το σύνολο των στοιχείων για τα οποία το a_1 της κανονικής τους μορφής είναι μη-τετριμμένο. Τα E και E^* είναι προφανώς άπειρα.

Για $b \in B$ προφανώς θα έχουμε $Eb = E$. Για $a \in A$ θα έχουμε $Ea \overset{a}{\subset} E$ αφού για ένα στοιχείο $a_1 b_1 \dots a_n b_n ca$ το ζεύγος ca θα παίρνει πεπερασμένο το πλήθος διαφορετικές τιμές μιας και η C είναι πεπερασμένη. Επομένως το Ea θα διαφέρει από το E για πεπερασμένο το πλήθος στοιχεία. Επιπλέον θα ισχύει και $Ea^{-1} \overset{a}{\subset} E$. Άρα τελικά θα έχουμε $E \overset{a}{=} Ea$.

Καθώς οι A, B παράγουν την G θα έχουμε ότι

$$Eg \overset{a}{=} E \text{ για κάθε } g \in G$$

Με αντίστοιχο τρόπο εργαζόμαστε και στην περίπτωση όπου $G = A*_C$. Αναλυτικά:
Επιλέγοντας σύνολα αντιπροσώπων T_1, T_2 της C στην A εκφράζουμε τα στοιχεία της G στην κανονική τους μορφή ως

$$a_1 t^{\varepsilon_1} a_2 t^{\varepsilon_2} \dots a_n t^{\varepsilon_n} a_{n+1}$$

όπου $a_{n+1} \in A$, $a_i \in T_1$ για $\varepsilon_i = 1$ και $a_i \in T_2$ για $\varepsilon_i = -1$ και $a_i \neq 1$ για $\varepsilon_{i-1} \neq \varepsilon_i$.

Θεωρούμε λοιπόν ως E το σύνολο των στοιχείων της G για τα οποία το a_1 της κανονικής μορφής είναι τετριμμένο και $\varepsilon_1 = 1$. Για $a \in A$ έχουμε προφανώς $Ea = E$. Ταυτόχρονα ισχύει $Et \subset E$ και $Et^{-1} \overset{a}{\subset} E$ για παρόμοιο λόγο με παραπάνω.

Τελικά ισχύει $Eg \overset{a}{=} E$ για κάθε $g \in G$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση βρήκαμε τα ζητούμενα δύο άπειρα και σχεδόν αναλλοίωτα υποσύνολα και άρα $e(G) \geq 2$. □

Πριν προχωρήσουμε στο δεύτερο μισό της απόδειξης του Θεωρήματος παρουσιάζουμε κάποιες επιπλέον έννοιες που αφορούν σε γραφήματα και δέντρα.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα ανηγμένο μονοπάτι ακμών σε ένα γράφημα Γ είναι μία ακολουθία ακμών $e_1, \dots, e_n$ έτσι ώστε $\tau(e_i) = \iota(e_{i+1})$ και $e_i \neq \overline{e}_{i+1}$ για $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Στο σύνολο των ακμών ενός δέντρου T μπορούμε να ορίσουμε μία σχέση μερικής διάταξης ως εξής:

$$e \leqslant f \iff \text{υπάρχει μονοπάτι ακμών } e_1, \dots, e_n \text{ ώστε } e_1 = e \text{ και } e_n = f$$

Η $'\leqslant'$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Αν $e \leqslant f$ τότε $\overline{f} \leqslant \overline{e}$
2. Αν $e \leqslant f$ τότε υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος ακμές g ώστε $e \leqslant g \leqslant f$

3. Για κάθε ζεύγος ακμών e, f ισχύει τουλάχιστον μία από τις σχέσεις $e \leqslant f$, $e \leqslant \overline{f}$, $\overline{e} \leqslant f$, $\overline{e} \leqslant \overline{f}$

4. Για ακμές e, f δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα $e \leqslant f$ και $e \leqslant \overline{f}$

5. Για ακμές e, f δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα $e \leqslant f$ και $\overline{e} \leqslant f$

Παρατηρούμε ότι η ιδιότητα (5) θα μπορούσε να παραλειφθεί καθώς προκύπτει άμεσα από τις (1) και (4), την παραθέτουμε όμως για λόγους πληρότητας.

Θα δείξουμε τώρα ότι δοθέντος ενός μερικά διατεταγμένου συνόλου για το οποίο ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δέντρο T. Συγκεκριμένα:

Θεώρημα 14. *Έστω $(E, \leqslant)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο με μία απεικόνιση*

$$E \to E,\ e \mapsto \overline{e}$$

όπου $e \neq \overline{e}$ και για το οποίο ισχύουν οι ιδιότητες (1)-(5) όπως παραπάνω. Τότε υπάρχει δέντρο T με $E = E(T)$ του οποίου η σχέση μερικής διάταξης που ορίζεται από τα μονοπάτια ακμών αυτού συμπίπτει με την σχέση μερικής διάταξης του συνόλου E.

Απόδειξη. Αρχικά ορίζουμε για $e, f \in E$, $e < f \iff e \leqslant f$ και $e \neq f$. Επιπλέον ορίζουμε δύο ακμές ως διαδοχικές, τις οποίες τις συμβολίζουμε με $e \ll f$ αν και μόνο αν $e < f$ και αν υπάρχει $g \in E$ με $e \leqslant g \leqslant f$ τότε ή $e = g$ ή $g = f$. Θεωρούμε σχέση $\sim$ στο E ως εξής:

$$e \sim f \iff e = f \text{ ή } e \ll \overline{f}$$

Θα δείξουμε αρχικά ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Προφανώς είναι ανακλαστική.

Θα δείξουμε τώρα ότι είναι συμμετρική. Έστω λοιπόν $e \sim f$. Τότε $e = f$ ή $e \ll \overline{f}$.

Αν $e = f$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.

Αν $e \ll \overline{f}$ τότε $e < \overline{f}$ και αν $e \leqslant g \leqslant f$ τότε $e = g$ ή $g = \overline{f}$. Αφού $e < \overline{f}$ έχουμε ότι $e \leqslant \overline{f}$ και $e \neq \overline{f}$. Από την ιδιότητα (1) θα έχουμε $f \leqslant \overline{e}$ και $f \neq \overline{e}$. Έστω τώρα ότι υπάρχει $g \in E$ ώστε $f \leqslant g \leqslant \overline{e}$. Τότε, πάλι από την ιδιότητα (1) έχουμε $e \leqslant \overline{g} \leqslant \overline{f}$. Όμως τότε ισχύει $e = \overline{g}$ ή $\overline{g} = \overline{f}$. Δηλαδή $g = \overline{e}$ ή $g = f$. Τελικά $f \sim e$ και άρα η $\sim$ είναι συμμετρική.

Θα δείξουμε τώρα ότι είναι μεταβατική. Έστω $e \sim f$ και $f \sim h$. Εάν $e = f$ ή $f = h$ τότε προφανώς $e \sim h$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $e \ll \overline{f}$, $f \ll \overline{h}$, και $e \neq h$.

Αν $\overline{e} < h$ τότε $\overline{h} < e < \overline{f}$ και επομένως $f < h$ το οποίο όμως έρχεται σε αντίθεση με την ιδιότητα (5). Αν τώρα $e < h$ τότε $e < h < \overline{f}$ το οποίο πάλι είναι άτοπο αφού $e \ll \overline{f}$. Ομοίως αν $\overline{e} < \overline{h}$ θα ισχύει $f < \overline{e} < \overline{h}$ το οποίο είναι επίσης άτοπο αφού $f \ll \overline{h}$. Τελικά έχουμε ότι $e < \overline{h}$.

Έστω τώρα ότι υπάρχει $g \in E$ ώστε $e \leqslant g \leqslant \overline{h}$. Αν $\overline{f} \leqslant \overline{g}$ τότε αφού $e \ll f$ θα ισχύει $e \leqslant \overline{g}$ το οποίο όμως είναι άτοπο αφού $e \leqslant g$. Εάν τώρα $\overline{f} \leqslant g$ και αφού $g \leqslant \overline{h}$ θα έχουμε $\overline{f} \leqslant \overline{h}$ το οποίο είναι και αυτό άτοπο αφού $f \ll \overline{h}$. Τελικά οι μόνες επιλογές είναι $f < g$ ή $f < \overline{g}$.

Αν $f < g$ τότε από την σχέση $f < g \leqslant \overline{h}$ και από την $f \ll \overline{h}$ θα έχουμε $g = \overline{h}$. Ομοίως αν $f < \overline{g}$ από την σχέση $e \leqslant g < \overline{f}$ και την $e \ll \overline{f}$ θα έχουμε $g = e$. Άρα τελικά η $\sim$ είναι μεταβατική και επομένως είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορίζουμε λοιπόν γράφημα T με $E(T) = E$ και $V(T) = E/\sim$ γιατί κάθε κορυφή καθορίζεται από τις ακμές των οποίων είναι άκρο. Θεωρώντας ως $\iota(e) = \tau(\overline{e})$ θα έχουμε ότι $\tau(e) = \iota(f)$ αν και μόνο αν $e \ll f$ ή $e = \overline{f}$, όπου με $\tau(e)$ συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του $e \in E$.

Από την ιδιότητα (2) έχουμε ότι $e \leqslant f$ αν και μόνο αν υπάρχει μονοπάτι ακμών που ενώνει τα e, f. Από την ιδιότητα (3) συνεπάγεται ότι το T είναι συνεκτικό και αφού η '$\leqslant$' είναι σχέση μερικής διάταξης δεν θα υπάρχουν κυκλώματα, αφού αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κύκλωμα τότε για e, f δύο ακμές αυτού του κυκλώματος θα είχαμε $e \leq f$ και $f \leq e$ το οποίο όμως σημαίνει $e = f$. Άρα τελικά το T είναι δέντρο. □

Μπορούμε τώρα να παρουσιάσουμε την ιδέα που θα εφαρμοστεί ώστε να αποδειχτεί το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος. Αρχικά παρατηρούμε ότι λόγω του Θεωρήματος 12 και του Πορίσματος 2, αρκεί να εξετάσουμε μόνο την περίπτωση όπου $e(G) = \infty$.

Θέλουμε δηλαδή να δείξουμε ότι αν G είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα με $e(G) = \infty$ τότε αυτή διασπάται υπεράνω μίας πεπερασμένης υποομάδας. Για να δειχθεί αυτό αρκεί να βρούμε ένα δέντρο στο οποίο η G δρα με τέτοιο τρόπο ώστε η σταθεροποιούσα οποιασδήποτε ακμής να είναι πεπερασμένη και το γράφημα πηλίκο $G\backslash T$ να έχει μοναδική ακμή. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο, που εφαρμόσαμε για την κατασκευή ενός δέντρου μέσω ενός μερικά διατεταγμένα συνόλου, θα κατασκευάσουμε το ζητούμενο δέντρο διατάσσοντας μερικά ένα σύνολο σχεδόν αναλλοίωτων υποσυνόλων της G με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζονται οι ιδιότητες (1)-(5) παραπάνω.

Προς τούτο ας θεωρήσουμε ένα σχεδόν αναλλοίωτο σύνολο B και ας θεωρήσουμε ως $[B]$ το σύνολο όλων των σχεδόν αναλλοίωτων συνόλων τα οποία είναι σχεδόν ίσα με το B. Δηλαδή $[B] = \{D \in QG | B \overset{a}{=} D\}$. Τότε θεωρούμε την εξής σχέση:

$$[B] \leq [C] \iff B \overset{a}{\subset} C$$

όπου με $B \overset{a}{\subset} C$ εννοούμε ότι το $B \backslash C$ είναι πεπερασμένο.

Επιλέγουμε λοιπόν ένα σχεδόν αναλλοίωτο υποσύνολο A της G ώστε τα A, A^* να είναι άπειρα και ορίζουμε ως E το σύνολο των $[gA], [gA^*]$ για κάθε $g \in G$. Διατάσσουμε μερικώς το E με την $\leq$. Το πρόβλημά μας πλέον ανάγεται στο να βρούμε κατάλληλο σύνολο A ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες (1)-(5). Παρατηρούμε ότι οι ιδιότητες (1) και (4) ικανοποιούνται για οποιαδήποτε επιλογή του συνόλου A και επομένως ικανοποιείται και η (5). Τα παρακάτω Λήμματα θα μας εξασφαλίσουν την ύπαρξη αλλά και την μορφή του συνόλου αυτού ώστε να ικανοποιούνται και οι ιδιότητες 2) και 3).

Το πρώτο Λήμμα εξασφαλίζει ότι και η ιδιότητα (2) ικανοποιείται για οποιαδήποτε επιλογή του συνόλου A.

Λήμμα 4. *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα με $e(G) = \infty$ και έστω B, C, D άπειρα σχεδόν αναλλοίωτα υποσύνολα της G ώστε και τα συμπληρώματά τους να είναι άπειρα. Τότε το σύνολο $\{g \in G | B \overset{a}{\subset} gC \overset{a}{\subset} D\}$ είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $B \subset D$ αφού σε περίπτωση όπου το B δεν περιέχεται σχεδόν στο D το συμπέρασμα είναι άμεσο. Επομένως προσθέτοντας ένα στοιχείο του D^* στο B μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B \overset{a}{\subset} D$ με $B \not\subset D$. Αντί να δείξουμε απευθείας ότι το $\{g \in G | B \overset{a}{\subset} gC \overset{a}{\subset} D\}$ είναι πεπερασμένο θα δείξουμε ότι τα σύνολα $\{g \in G | gC \overset{a}{\subset} D, gC \not\subset D\}$ και $\{g \in G | B \overset{a}{\subset} gC, B \not\subset gC\}$ είναι πεπερασμένα.

Από το Πόρισμα 1 θα έχουμε ότι σχεδόν για κάθε $g \in G$ θα ισχύει τουλάχιστον μία από τις σχέσεις

$$gC \subset D,\ gC \subset D^*,\ gC^* \subset D,\ gC^* \subset D^*$$

Αφού έχουμε ότι $gC \overset{a}{\subset} D$ και $gC \not\subset D$ αναγκαστικά θα ισχύει μόνο η $gC^* \subset D^*$. Επομένως από τις $gC \overset{a}{\subset} D$ και $gC^* \subset D^*$ θα έχουμε άμεσα ότι σχεδόν για κάθε $g \in G$, $gC \overset{a}{=} D$. Από το Θεώρημα 11 θα πρέπει το $\{g \in G | gC \overset{a}{=} C\}$ να είναι πεπερασμένο αφού σε διαφορετική περίπτωση η G θα έχει άπειρη κυκλική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη και επομένως θα έχει $e(G) = 2$ το οποίο είναι όμως άτοπο από την υπόθεσή μας. Άρα τελικά έχουμε ότι το $\{g \in G | gC \overset{a}{\subset} D, gC \not\subset D\}$ είναι πεπερασμένο.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι το $\{g \in G | B \overset{a}{\subset} gC, B \not\subset gC\}$ είναι πεπερασμένο και επομένως το λήμμα αποδείχτηκε. □

Τα επόμενα δύο λήμματα θα μας δώσουν την μορφή που πρέπει να έχει το σύνολο A ώστε να ικανοποιείται και η ιδιότητα (3). Πρώτα όμως δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 30. *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και έστω $\Gamma(G, S)$ το γράφημα Cayley αυτής ως προς το πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων S. Για ένα σχεδόν αναλλοίωτο υποσύνολο A της G ορίζουμε ως δA το σύνολο των ακμών του Γ των οποίων μόνο η μία κορυφή ανήκει στο A. Θεωρούμε τότε ως $|\delta A|$ τον πληθικό αριθμό αυτού του συνόλου. Ακόμα θεωρούμε ως k την μικρότερη τιμή που παίρνει το $|\delta A|$ όταν το A διατρέχει το σύνολο των άπειρων σχεδόν αναλλοίωτων υποσυνόλων της G με A^* επίσης άπειρο. Ένα υποσύνολο A της G το ονομάζουμε* **λεπτό** *αν $|\delta A| = k$.*

Λήμμα 5. *Έστω $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ μία φθίνουσα ακολουθία λεπτών υποσυνόλων μιας πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας G. Αν το $B = \bigcap_{n\geq 1} A_n$ είναι μη-κενό τότε η ακολουθία σταθεροποιείται.*

Απόδειξη. Έστω e μία ακμή του δB. Τότε η μία κορυφή της e ανήκει σε κάθε σύνολο A_n ενώ η άλλη δεν ανήκει στα A_n για n μεγαλύτερο από κάποιο N και πέρα. Με άλλα λόγια το e είναι ακμή των δA_n για $n > N$. Αν υποθέσουμε τώρα ότι $|\delta B| > k$, όπου $|\delta A_n| = k$ τότε, εφόσον κάθε ακμή του δB ανήκει και στα δA_n για n αρκούντως μεγάλα, θα έπρεπε να έχουμε και $|\delta A_n| > k$. Αυτό όμως είναι άτοπο από την υπόθεσή μας και άρα $|\delta B| \leq k$ και $\delta B \subset \delta A_n$ για n αρκούντως μεγάλα. Έπεται άμεσα μιας και το δB είναι πεπερασμένο ότι το B είναι σχεδόν αναλλοίωτο στην G. Από εδώ και πέρα όταν θα αναφερόμαστε σε A_n θα εννοούμε για $n > N$.

Παρατηρούμε ότι

$$A_n = (A_n + B) + B \text{ και } \delta A_n = \delta(A_n + B) + \delta B$$

Άμεσα έχουμε ότι $\delta(A_n + B) \cap \delta B = \emptyset$ αφού σε διαφορετική περίπτωση, μίας ακμής $e \in \delta(A_n + B) \cap \delta B$ η μία κορυφή θα ανήκει στο B ενώ η άλλη στο $A_n \backslash B$. Το οποίο όμως είναι άτοπο αφού $\delta B \subset \delta A_n$.

Επιπλέον, αφού το A_n είναι άπειρο, θα πρέπει και ένα από τα B και $A_n + B$ να είναι άπειρο. Θέτουμε αυτό που είναι άπειρο ως W. Βλέπουμε άμεσα ότι το W και το W^* είναι άπειρα και μάλιστα σχεδόν αναλλοίωτα. Επιπροσθέτως αφού $\delta A_n = \delta(A_n + B) + \delta B$ θα πρέπει $|\delta W| \leq k$. Αφού το k είναι το ελάχιστο συνεπάγεται ότι $|\delta W| = k$ και επομένως το W είναι λεπτό. Άρα, αφού $\delta(A_n + B) \cap \delta B = \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ θα πρέπει $W = B$ και $A_n + B = \emptyset$. Δηλαδή $A_n = B$ για $n > N$. □

Από το παραπάνω λήμμα παρατηρούμε το εξής. Αν θεωρήσουμε ένα στοιχείο $g \in G$ και ένα λεπτό σύνολο A τότε το g θα ανήκει είτε στο A είτε στο A^* το οποίο θα είναι επίσης λεπτό. Επομένως το σύνολο όλων των λεπτών συνόλων που περιέχουν το g θα έχει ελαχιστικό στοιχείο ως προς την σχέση του υποσυνόλου.

Λήμμα 6. *Έστω $g \in G$ και A ένα ελαχιστικό, λεπτό σύνολο με $g \in A$. Τότε για κάθε λεπτό σύνολο A_1 θα ισχύει τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω*

$$A \overset{a}{\subset} A_1,\ A \overset{a}{\subset} A_1^*,\ A^* \overset{a}{\subset} A_1,\ A^* \overset{a}{\subset} A_1^*$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα

$$W_1 = A \cap A_1^*,\ W_2 = A \cap A_1,\ W_3 = A^* \cap A_1^*,\ W_4 = A^* \cap A_1$$

αντίστοιχα είναι πεπερασμένο. Προφανώς ισχύει $\delta W_i \subset \delta A \cup \delta A_1$. Ακόμα, αφού τα W_i είναι ξένα ανά δύο, οποιαδήποτε ακμή που ανήκει στην ένωση $\delta A \cup \delta A_1$ θα τέμνει ακριβώς δύο από τα W_i. Επομένως έχουμε

$$|\delta W_1| + |\delta W_2| + |\delta W_3| + |\delta W_4| = 2|\delta A \cup \delta A_1| \leq 4k$$

όπου $|\delta A| = |\delta A_1| = k$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα W_i είναι άπειρα. Τότε και τα W_i^* είναι άπειρα και επομένως από την ελαχιστικότητα του k θα πρέπει $|\delta W_i| \geq k$ για κάθε i. Άρα από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι για όλα τα W_i πρέπει $|\delta W_i| = k$.

Έπεται ότι τα W_i είναι λεπτά και κάποιο από αυτά (έστω το W_1) περιέχει το στοιχείο g. Άρα από την ελαχιστικότητα του A θα έχουμε ότι $A \cap A_1^* = A$ και επομένως $A \cap A_1 = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο. Με όμοιο τρόπο για $i = 2, 3, 4$ καταλήγουμε σε άτοπο και επομένως κάποιο από τα W_i είναι πεπερασμένο. □

Έπειτα από την παραπάνω προετοιμασία είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 13. Θα δείξουμε δηλαδή το παρακάτω.

Θεώρημα 15. *Αν για μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G ισχύει $e(G) = \infty$ τότε αυτή διασπάται υπεράνω μίας πεπερασμένης ομάδας.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα λεπτό σύνολο A όπως παραπάνω και κατασκευάζουμε το ζητούμενο δέντρο T το οποίο το διατάσσουμε μερικώς με την σχέση της σχεδόν έγκλεισης. Τότε από το Θεώρημα 11 το $\{g \in G | gA \overset{a}{=} A\}$ είναι πεπερασμένο αφού σε διαφορετική περίπτωση η G θα περιείχε άπειρη κυκλική πεπερασμένου δείκτη και από την Προταση 10 θα είχαμε $e(G) = 2$. Επομένως η σταθεροποιούσα της ακμής $[A]$ είναι πεπερασμένη.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η G δρα χωρίς αντιστροφές καθώς σε διαφορετική περίπτωση παίρνοντας την βαρυκεντρική υποδιαίρεση του T θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα και η G θα δρα χωρίς αντιστροφές. Τότε η G θα εκφράζεται ως $A *_C B$ ή ως $A *_C$ όπου η C είναι πεπερασμένη.

Το μόνο που μένει να εξασφαλίσουμε είναι ότι $A \neq G$, δηλαδή την περίπτωση όπου η G δεν σταθεροποιεί κορυφή του T.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι αυτό δεν συμβαίνει και ότι η $v \in V(T)$ είναι η κορυφή που σταθεροποιείται από την δράση της G. Τότε κάθε ακμή του T θα την έχει ως κορυφή και θεωρούμε δύο ακμές έστω $e, f \in E(T)$ οι οποίες θα είναι της μορφής $[gA]$ ή $[gA^*]$ για κάποιο $g \in G$.

Αν $e < f$ τότε συνεπάγεται και $e \ll f$. Από το Λήμμα 3 έχουμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in A$ θα ισχύει $xA \subset A$ ή $xA^* \subset A$. Αφού το $\{g \in G | gA \overset{a}{=} A\}$ εξασφαλίσαμε ότι είναι πεπερασμένο τότε θα υπάρχει ένα στοιχείο $x \in A$ ώστε $xA \overset{a}{\neq} A$ ή A^*. Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ένα $y \in A^*$ ώστε $yA^* \overset{a}{\neq} A$ ή A^* και να ισχύει $yA^* \subset A^*$ ή $yA \subset A^*$.

Έστω ότι $xA \subset A$. Τότε έχουμε άμεσα

$$x^2A \subset xA \subset A \text{ άρα } [x^2A] \leq [xA] \leq [A]$$

και επομένως $xA \overset{a}{=} A$ ή $x^2A \overset{a}{=} xA$ όπου και οι δύο περιπτώσεις μας οδηγούν σε άτοπο.

Με όμοιο τρόπο οδηγούμαστε σε άτοπο και στις περιπτώσεις όπου $xA^* \subset A$, $yA \subset A^*$ και $yA^* \subset A^*$.

Επομένως το Θεώρημα αποδείχτηκε. □

Βιβλιογραφία

[1] Cohen, D. E. *Groups of cohomological dimension one*, vol. 245. Springer, 2006.

[2] Dicks, W., and Dunwoody, M. J. *Groups acting on graphs*, vol. 17. Cambridge University Press, 1989.

[3] Dirks, M. The stone representation theorem for boolean algebras.

[4] Dunwoody, M. J. Accessibility and groups of cohomological dimension one. *Proceedings of the London Mathematical Society 3*, 2 (1979), 193–215.

[5] Geoghegan, R. *Topological methods in group theory*, vol. 243. Springer Science & Business Media, 2007.

[6] Hatcher, A. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, 2005.

[7] Mac Lane, S. *Categories for the working mathematician*, vol. 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[8] Maunder, C. R. F. *Algebraic topology.* Courier Corporation, 1996.

[9] Meier, J. Groups, graphs and trees, volume 73 of london mathematical society student texts, 2008.

[10] Robinson, D. J. *A Course in the Theory of Groups*, vol. 80. Springer Science & Business Media, 2012.

[11] Rotman, J. J. *An introduction to the theory of groups*, vol. 148. Springer Science & Business Media, 2012.

[12] Serre, J.-P. *Trees.* Springer Science & Business Media, 2002.

[13] Stallings, J. *Group theory and three-dimensional manifolds.* Yale University Press, 1972.

[14] Stallings, J. R. On torsion-free groups with infinitely many ends. *Annals of Mathematics* (1968), 312–334.

[15] Stone, M. H. The theory of representation for boolean algebras. *Transactions of the American Mathematical Society 40*, 1 (1936), 37–111.

[16] Wall, C. T. C. *Homological group theory*, vol. 36. Cambridge University Press, 1979.

[17] Weibel, C. A. *An introduction to homological algebra.* No. 38. Cambridge university press, 1995.