ΕΚΠΑ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ & ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΔΥΪΣΜΟ SEIBERG-WITTEN

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΤΖΗΣ
ΑΜ: 2020 209

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Γ.ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2022
ΑΘΗΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή την εργασία γίνεται μια εισαγωγική μελέτη στο δυϊσμό Seiberg-Witten παρουσιάζοντας τη λύση στο πρόβλημα καθορισμού της Λαγκρανζιανής των βαθμών ελευθερίας χαμηλών ενεργειών μιας SU(2) θεωρίας Yang-Mills με $\mathcal{N} = 2$ υπερσυμμετρία, όπως αυτή δόθηκε από τους Seiberg και Witten στην [21]. Στο πρώτο μέρος της εργασίας γίνεται εισαγωγή στην καθολική υπερσυμμετρία με έμφαση στο φάσμα των υπερσυμμετρικών θεωριών και την κατασκευή Λαγκρανζιανών οι οποίες είναι αναλλοίωτες σε $\mathcal{N} = 2$ υπερσυμμετρία. Παρουσιάζονται οι αναπαραστάσεις που περιέχουν τα πεδία βαθμίδας και οι αναπαραστάσεις ύλης για $\mathcal{N} = 1, 2$ και μελετούνται οι υπερσυμμετρικές θεωρίες Yang-Mills με χρήση τεχνικών του υπερχώρου. Στη συνέχεια, το δεύτερο μέρος αφορά την ύπαρξη μαγνητικών μονόπολων σε θεωρίες βαθμίδας και τα χαρακτηριστικά τους, καθώς και τη μελέτη των μετασχηματισμών δυϊσμού σε τέτοιες θεωρίες, τονίζοντας ότι αυτοί ανταλλάσσουν τον διαταρακτικό με τον μη-διαταρακτικό τομέα και παρέχουν μια απεικόνιση της θεωρίας από ισχυρή(ασθενή) σύζευξη σε ασθενή(ισχυρή) σύζευξη. Το τελευταίο μέρος της εργασίας λύνει πλήρως το πρόβλημα μελετώντας το χώρο Moduli των κενών στο μοντέλο της SU(2) θεωρίας Yang-Mills με $\mathcal{N} = 2$, αφού αυτή παρουσιάσει ρήξη της συμμετρίας βαθμίδας $SU(2) \to U(1)$ σε κάποια ενεργειακή κλίμακα, κάτω από την οποία η θεωρία είναι αβελιανή και επιζούν μόνο οι χαμηλοενεργειακοί βαθμοί ελευθερίας οι οποίοι εκφράζονται μέσω της Wilsonian δράσης. Αφού παρουσιαστεί η λύση των Seiberg και Witten μέσω ελλειπτικών καμπύλων, παρέχεται και η λύση με χρήση διαφορικών εξισώσεων όπου λαμβάνουμε εκφράσεις για τις ποσότητες μέσω υπεργεωμετρικών συναρτήσεων.

ABSTRACT

This thesis provides an introductory study of Seiberg-Witten duality, presenting the solution to the problem of determining the Lagrangian of the low energy degrees of freedom in an $SU(2)$ Yang-Mills theory with $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry, as it was written by Seiberg and Witten in [21]. The first part gives an introduction to global supersymmetry, focusing mainly in the spectrum of supersymmetric theories and the construction of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric Lagrangians. The gauge and matter representations are presented for $\mathcal{N} = 1, 2$ and supersymmetric Yang-Mills theories are studied using superspace techniques. The second part concerns the existance of magnetic monopoles in gauge theories and their characteristics, as well as a study of duality transformations in such theories, where emphasis is given in the exchange of perturbative and non-perturbative sectors under duality, providing a map of the theory at strong(weak) coupling to weak(strong) coupling. The last part of the thesis solves the problem exactly by studying the Moduli space of vacuua in the model of an $SU(2)$ $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory, which features breaking of the gauge symmetry $SU(2) \to U(1)$ at some energy scale, below which the theory is abelian and the low energy degrees of freedom that survive are described by the Wilsonian action. After the solution through eliptic curves given by Seiberg and Witten is presented, a solution using differential equations is also provided, which gives off expressions of the various quantities through hypergeometric functions.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μέρος I

ΥΠΕΡΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

1 ΥΠΕΡΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

1.1 Η Ομάδα Poincare

Η μελέτη μας θα ξεκινήσει από την ομάδα Poincaré. Αυτή είναι η ομάδα συμμετρίας του χωρόχρονου Minkowski $\mathbb{M}^4$, καθώς διατηρεί το μέτρο των τετρανυσμάτων $x_\mu \in \mathbb{M}^4$ και αποτελείται από τους μετασχηματιστμούς Lorentz και τις χωροχρονικές μεταθέσεις. Πρόκειται για μια δεκαδιάστατη (4 βαθμοί ελευθερίας για τις μεταθέσεις, 3 για τις στροφές και 3 για τις προωθήσεις) μη Αβελιανή ομάδα Lie η οποία περιέχει την πληροφορία ότι οι στροφές δεν μετατίθενται με τις μεταθέσεις μέσω του ορισμού της ώς το ημιευθύ γινόμενο της ομάδας Lorentz με το $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{R}^4 \rtimes SO(1,3) \ni (a_1, \Lambda_1), (a_2, \Lambda_2) : (a_1, \Lambda_1) \cdot (a_2, \Lambda_2) := (a_1 + \Lambda_1 \cdot a_2, \Lambda_1 \Lambda_2) \tag{1}$$

όπου $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ και $\Lambda_1, \Lambda_2 \in SO(1,3)$.

Η ομάδα Lorentz SO(1,3) έχει 3 γεννήτορες J_i για τις στροφές και 3 K_i για τις προωθήσεις, οι οποίοι ικανοποιούν την άλγεβρα:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k \\ [K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k \end{aligned} \tag{2}$$

Ορίζοντας μιγαδικούς γραμμικούς συνδιασμούς των J_i, K_i ώς:

$$J_j^{\pm} := \frac{1}{2}(J_i \pm iK_j) \tag{3}$$

μπορούμε να "ξεμπλέξουμε" την άλγεβρα (2) σε δύο ανεξάρτητες $\mathfrak{su}(2)$ άλγεβρες:

$$\circ\ [J_i, J_j] = [J_i^+ + J_i^-, J_j^+ + J_j^-] = i\epsilon_{ijk}(J_k^+ + J_k^-)$$

$$\Rightarrow [J_i^+, J_j^+] + [J_i^-, J_j^+] + [J_i^+, J_j^-] + [J_i^-, J_j^-] = i\epsilon_{ijk} J_k^+ + i\epsilon_{ijk} J_k^- \tag{4}$$

$$\circ\ [K_i, K_j] = \Big[-i(J_i^+ - J_i^-), -i(J_j^+ - J_j^-)\Big] = -i\epsilon_{ijk}(J_k^+ - J_k^-)$$

$$-[J_i^+, J_j^+] + [J_i^+, J_j^-] + [J_i^-, J_j^+] - [J_i^-, J_j^-] = -i\epsilon_{ijk} J_k^+ - i\epsilon_{ijk} J_k^- \tag{5}$$

Από τις (4) και (5) παίρνουμε:

$$[J_i^+, J_j^-] = 0 \tag{6}$$

και με αυτό,

$$[J_i^+, J_j^+] + [J_i^-, J_j^-] = i\epsilon_{ijk}J_k^+ + i\epsilon_{ijk}J_k^-$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [J_i^+, J_j^+] = i\epsilon_{ijk}J_k^+ \\ [J_i^-, J_j^-] = i\epsilon_{ijk}J_k^- \end{cases} \tag{7}$$

Επομένως, υπάρχει ο ισομορφισμός των αλγεβρών: $\mathfrak{so}(1,3) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ ο οποίος βοηθάει στην κατηγοριοποίηση των μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων της ομάδας Lorentz. Οι χωροχρονικές μεταθέσεις θα έχουν γεννήτορα το $P_\mu = (P_0, P_i)$, ικανοποιώντας:

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0 \\ &[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k \\ &[J_i, P_0] = 0 \\ &[K_i, P_j] = -iP_0 \\ &[K_i, P_0] = -iP_j \end{aligned} \tag{8}$$

Μπορούμε για απλότητα της γραφής να ενσωματώσουμε τους γεννήτορες της ομάδας Lorentz σε ένα αντισυμμετρικό αντικείμενο $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$, ορίζοντας: $M_{0i} = K_i$ και $M_{ij} = \epsilon_{ijk}J_k \Rightarrow J_k = 1/2\epsilon_{ijk}M^{ij}$. Με αυτά, η Lie άλγεβρα της ομάδας Poincaré πλέον γράφεται στις παρακάτω τρείς σχέσεις:

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0 \\ &[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i\left(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\right) \\ &[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -i\left(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu\right) \end{aligned} \tag{9}$$

οι οποίες μπορούν να επιβεβαιωθούν με τη χρήση μιας τετραδιάστατης αναπαράστασης πίνακα για τους M ώς: $(M_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} = i\left(\eta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta - \eta_\nu^\alpha\delta_\mu^\beta\right)$.

Από τις σχέσεις αυτές,μπορούμε να βρούμε τους τελεστές Casimir της ομάδας, τελεστές οι οποίοι μετατίθονται με όλους τους γεννήτορες και επομένως, σύμφωνα με το πρώτο λήμμα του Schur, θα είναι πολλαπλάσιοι της μονάδος σε κάθε μη αναγώγιμη αναπαράσταση. Ο πρώτος είναι ο τελεστής $C_1 = P^2$:

$$\begin{aligned} [P^2, M_{\mu\nu}] &= P_\rho[P^\rho, M_{\mu\nu}] + [P_\rho, M_{\mu\nu}]P^\rho \\ &= iP_\rho\left(\eta_\mu^\rho P_\nu - \eta_\nu^\rho P_\mu\right) - i\left(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu\right)P^\rho = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

και προφανώς, $[P^2, P_\mu] = 0$. Ο δεύτερος τελεστής είναι το τετράγωνο του μέτρου του ψευδοανύσματος Pauli-Lubanski $C_2 = W^2$, το οποίο ορίζεται ως:

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma} \tag{11}$$

Και έχουμε:

$$\circ \ [W^\mu, P_\lambda] = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(P_\nu\left[M_{\rho\sigma}, P_\lambda\right] + \cancelto{0}{[P_\nu, P_\lambda]} M_{\rho\sigma}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu\left(\eta_{\sigma\lambda}P_\rho - \eta_{\rho\lambda}P_\sigma\right) = \frac{i}{2}\left(\epsilon^{\mu\nu\rho}{}_\lambda P_\nu P_\rho - \epsilon^{\mu\nu}{}_\lambda{}^\sigma P_\nu P_\sigma\right) = 0$$

$$\Rightarrow [W^2, P_\mu] = 0 \tag{12}$$

το οποίο μηδενίζεται λόγω της αντισυμμετρικότητας του ϵ.

$$\circ \ \left[W^2, M_{\mu\nu}\right] = -\left[M_{\mu\nu}, W_\lambda\right]W^\lambda - \left[M_{\mu\nu}, W^\lambda\right]W_\lambda$$
$$= iW^\lambda\left(W_\nu\eta_{\mu\lambda} - W_\mu\eta_{\nu\lambda}\right) + iW_\lambda\left(W_\nu\eta^\lambda_\mu - W_\mu\eta^\lambda_\nu\right) = 0 \tag{13}$$

Υπάρχει επίσης και ένας ομομορφισμός από την SO(1,3) στην $SL(2,\mathbb{C})$ ο οποίος δίνεται παίρνοντας το γινόμενο ενός τετρανύσματος $x \in \mathbb{R}^4$ με τη βάση των πινάκων Pauli $\sigma^\mu = (1_{2\times 2}, -\sigma^i)$, κατασκευάζοντας έτσι έναν 2×2 πίνακα με ορίζουσα μονάδα:

$$x_\mu \mapsto \tilde{x} := x_\mu\sigma^\mu = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \ SL(2,\mathbb{C}) \tag{14}$$

Ενώ οι μετασχηματισμοί Lorentz διατηρούν το τετράγωνο του μέτρου ενος τετρανύσματος: $x \mapsto \Lambda x$, $x_\mu x^\mu \mapsto x_\mu x^\mu$, στην $SL(2,\mathbb{C})$, οι μετασχηματισμοί δρούν στους πίνακες ώς:

$$\tilde{x} \mapsto \tilde{x}' = A\tilde{x}A^\dagger \ , \ \ A \in \ SL(2,\mathbb{C}) \tag{15}$$

και διατηρούν την ορίζουσα:

$$\det(\tilde{x}') = \det\left(A\tilde{x}A^\dagger\right) = \det\left(A^\dagger A\tilde{x}\right) = \det(\tilde{x}) \tag{16}$$

μιας και από την (14) βλέπουμε ότι $\det(\tilde{x}) = x_\mu x^\mu$. Η απεικόνιση SO(1,3)$\rightarrow$ $SL(2,\mathbb{C})$ μπορεί να βρεθεί με χρήση της σχέσης πληρότητας των πινάκων Pauli[1]:

$$\Lambda^\nu_\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\bar{\sigma}_\mu A\sigma^\nu A^\dagger\right\} \tag{17}$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία A και $-A$ αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο της SO(1,3) και επομένως η $SL(2,\mathbb{C})$ είναι το διπλό της κάλυμα: SO(1,3) $\cong$ $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$. Στην ομάδα Lorentz η αναλλοίωτη μετρική είναι η μετρική

1 $\mathrm{tr}\{\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$

Minokowski: $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, ενώ στην ομάδα $SL(2, \mathbb{C})$ αυτή δίνεται από τον αντισυμμετρικό τανυστή $\epsilon^{\alpha\beta}$ ($\epsilon^{12} = 1, \epsilon^{21} = -1$):

$$A\epsilon A^\dagger = \epsilon \quad ή \quad \epsilon'^{\alpha\beta} = \epsilon^{\gamma\delta} A^\alpha_\gamma A^\beta_\delta = \epsilon^{\alpha\beta} \det(A) = \epsilon^{\alpha\beta} \tag{18}$$

ο οποίος χρησιμοποιείται για να ανεβάζει και να κατεβάζει τους σπινοριακούς δείκτες: $\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta$, $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$, καθώς και να σχηματίζει γινόμενα σπινόρων μεταξύ τους: $\psi\chi = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\alpha\chi_\beta$, $\bar{\psi}\bar{\chi} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\beta}}$.

Οι σπίνορες Weyl δύο μιγαδικών συνιστοσών $\psi = (\psi_1 \;\; \psi_2)^T$ μετασχηματίζονται κάτω από την $SL(2, \mathbb{C})$ ώς:

$$\psi_\alpha \mapsto \psi'_\alpha = \mathcal{M}^\beta_\alpha \psi_\beta \quad , \alpha, \beta = 1, 2 \tag{19}$$

με τον πίνακα $\mathcal{M} \in SL(2, \mathbb{C})$. Αυτή είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση και οι ψ_α ονομάζονται αριστερόστροφοι σπίνορες Weyl. Ακόμη, ο $\mathcal{M}$ μπορεί να δώσει τη μη ισοδύναμη, μιγαδική συζυγής αναπαράσταση, στην οποία μετασχηματίζονται οι συζυγείς (δεξιόστροφοι) σπίνορες:

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \mapsto \bar{\psi}'_{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}_{\dot{\beta}} \left(\mathcal{M}^*\right)^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \quad , \dot{\alpha}, \dot{\beta} = 1, 2 \tag{20}$$

Υπάρχουν επίσης και οι ανταλλοίωτες αναπαραστάσεις που δίνονται από τους $\mathcal{M}^{-1}$ και $\mathcal{M}^{*-1}$, οι οποίες όμως προκείπτουν από την θεμελιώδη και τη συζυγή της:

$$\epsilon^{\beta\delta} = \epsilon^{\alpha\gamma}\mathcal{M}^\beta_\alpha \mathcal{M}^\delta_\gamma$$

$$\Rightarrow \left(\mathcal{M}^{-1}\right)^\kappa_\beta \epsilon^{\beta\delta} = \epsilon^{\alpha\gamma}\delta^\kappa_\alpha \mathcal{M}^\delta_\gamma = \epsilon^{\kappa\gamma}\mathcal{M}^\delta_\gamma$$

$$\Rightarrow \left(\mathcal{M}^{-1}\right)^\kappa_\rho = \epsilon^{\kappa\gamma}\mathcal{M}^\delta_\gamma \epsilon_{\delta\rho} \tag{21}$$

και αντίστοιχα,

$$\left(\mathcal{M}^{*-1}\right)^{\dot{\kappa}}_{\dot{\rho}} = \epsilon^{\dot{\kappa}\dot{\gamma}}\mathcal{M}^{*\dot{\delta}}_{\dot{\gamma}} \epsilon_{\dot{\delta}\dot{\rho}} \tag{22}$$

δηλαδή οι αντίστροφοι πίνακες βρίσκονται από τον $\mathcal{M}$ και τον συζυγή του μέσω μετασχηματισμών ομοιότητας. Σε αυτές τις αναπαραστάσεις μετασχηματίζονται οι σπίνορες με τους δείκτες πάνω (ανταλλοίωτοι):

$$\psi^\alpha \mapsto \psi'^\alpha = \psi^\beta \left(\mathcal{M}^{-1}\right)^\alpha_\beta \tag{23}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \mapsto \bar{\psi}'^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \left(\mathcal{M}^{*-1}\right)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \tag{24}$$

Χρησιμοποιώντας τις δύο $\mathfrak{su}(2)$ άλγεβρες της ομάδας Lorentz για να χαρακτηρίσουμε τις μη ισοδύναμες αναπαραστάσεις με βάση τα δύο "spins " (i, j), τα ψ_a μετασχηματίζονται στη $(1/2, 0)$ αναπαράσταση ενώ τα $\bar{\psi}^{\dot{a}}$ στη $(0, 1/2)$. Μπορούμε έτσι να εκφράσουμε το γενικό πίνακα της $SL(2, \mathbb{C})$ ώς το στοιχείο της ισόμορφης Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2) \oplus i\mathfrak{su}(2)$ αφού το εκθετοποιήσουμε:

$$\mathcal{M} = \exp\left(a_j \sigma_j + i b_j \sigma_j\right) \tag{25}$$

και

$$\mathcal{M}^* = \exp\left(a_j \sigma_j^* - i b_j \sigma_j^*\right) \tag{26}$$

Όσο για τους σπίνορες Dirac με 4 συνιστώσες, αυτοί μετασχηματίζονται στην αναπαράσταση: $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ (η οποία εμφανώς είναι αναγώγιμη) και έχουν τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \tag{27}$$

Οι πίνακες Dirac τότε κατασκευάζονται από τους πίνακες Pauli ώς:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0_{2\times2} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0_{2\times2} \end{pmatrix} \tag{28}$$

και

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & -1_{2\times2} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι εάν $\psi \equiv \chi$, ο σπίνορας λέγεται Majorana και για τη γνώση του απαιτείται ένας μόνο Weyl σπίνορας.

Ορίζουμε επίσης τους γεννήτορες της ομάδας Lorentz (ικανοποιούν τη δεύτερη σχέση μετάθεσης από τις (9)) από τους πίνακες Dirac:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu} \tag{30}$$

όπου:

$$\gamma^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix} \tag{31}$$

Τέλος, τονίζουμε ότι με βάση τις αναπαραστάσεις $(\frac{1}{2}, 0)$ και $(0, \frac{1}{2})$ των σπινόρων, οι πίνακες Pauli θα έχουν ένα κανονικό $SL(2, \mathbb{C})$ δείκτη και ένα με τελεία (dotted) από τη συζυγή αναπαράσταση:

$$\sigma^\mu \equiv \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \tag{32}$$

και ο $\bar{\sigma}$ κατασκευάζεται ανεβάζοντας και τους δύο δείκτες με τη μετρική, ο οποίος θα έχει ένα dotted και ένα κανονικό δείκτη:

$$\bar{\sigma}^\mu \equiv \left(\bar{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\beta}} \tag{33}$$

Έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε τους γεννήτορες της $SL(2, \mathbb{C})$, όπου αυτοί θα είναι οι πίνακες με Pauli με δύο δείκτες Lorentz, οι οποίοι θα έχουν μόνο κανονικούς ή μόνο dotted δείκτες:

$$
\begin{aligned}
(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\ \beta} &= \frac{i}{4}\left[\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\gamma}}\bar{\sigma}^{\nu\dot{\gamma}\beta} - \sigma^{\nu}_{\alpha\dot{\gamma}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\gamma}\beta}\right] \\
(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} &= \frac{i}{4}\left[\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\gamma}\sigma^{\nu}_{\gamma\dot{\beta}} - \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\gamma}\sigma^{\mu}_{\gamma\dot{\beta}}\right]
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Και έτσι με αυτά, οι αριστερόστροφοι και δεξιόστροφοι σπίνορες μετασχηματίζονται κάτω από την ομάδα Lorentz ώς εξής:

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{\mu\nu}\begin{pmatrix}\psi_{\alpha}\\ 0\end{pmatrix} &= (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\ \gamma}\,\psi_{\gamma} \\
\Sigma^{\mu\nu}\begin{pmatrix}0\\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} &= (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\gamma}}\,\bar{\chi}^{\dot{\gamma}}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

1.2 Η Υπερσυμμετρική Άλγεβρα

Η ιδέα για την επέκταση των συμμετριών μιας σχετικιστικής θεωρίας αλληλεπιδράσεων των στοιχειωδών σωματιδίων ξεκίνησε από το "no-go" θεώρημα των Coleman και Mandula, το οποίο εκ πρώτης όψεως την απαγορεύει:

Θεώρημα των Coleman - Mandula (1967)

Η πιο γενική ομάδα συμμετρίας του πίνακα σκέδασης $\mathcal{S}$ μιας τετραδιάστατης σχετικιστικής κβαντικής θεωρίας πεδίων, υπό κάποιες βάσιμες υποθέσεις, έχει τη μορφή:

$$
\mathcal{G} = \text{Poincaré} \otimes \text{εσωτερικές συμμετρίες}
$$

δηλαδή, οι πιθανές εσωτερικές συμμετρίες της θεωρίας οφείλουν να μετατίθενται με τις χωροχρονικές συμμετρίες.

Οι πρώτοι που βρήκαν τον τρόπο να αποφύγουν το θεώρημα τροποποιώντας ελαφρώς μια εκ των συνθηκών του, αναφορικά κάνοντας χρήση σχέσεων αντιματάθεσης αντί για σχέσεις μετάθεσης μεταξύ των γεννητόρων προκειμένου να μην παραβιαστεί το θεώρημα spin-στατιστικής, ήταν οι Golfand και Likhtman (1971) [8] οι οποίοι θεώρησαν μια μη τετριμένη επέκταση της άλγεβρας $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathcal{G})$ ορίζοντας σπινοριακούς γεννήτορες που ανήκουν στις αναπαραστάσεις $(\frac{1}{2}, 0)$ και $(0, \frac{1}{2})$. Μαζί με το θεώρημα των Haag - Łopuszański - Sohnius (1975) [9] το οποίο γενικεύει το θεώρημα Coleman-Mandula και μάλιστα αποδεικνύει ότι η μόνη μη τετριμένη επέκταση της άλγεβρας $\mathfrak{g}$ είναι αυτή με σπινοριακούς γεννήτορες[2] Q^{I}_{α} στις παραπάνω αναπαραστάσεις (και όχι σε αναπαραστάσεις υψηλότερης διάστασης), η μελέτη της υπερσυμμετρίας ώς μια συμμετρία

2 Ο α είναι δείκτης της $SL(2,\mathbb{C})$ $(\alpha = 1, 2)$ ενώ ο I είναι ένας εσωτερικός δείκτης που αριθμεί τους γεννήτορες: $I = 1, \ldots, \mathcal{N}$.

που εναλλάσει μποζονικούς και φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας αλλάζοντας το spin των εκάστοτε καταστάσεων, άρχισε να ανθίζει.

Η προσθήκη σπινοριακών γεννητόρων, επεκτείνει την άλγεβρα $\mathfrak{g}$ σε μια $\mathbb{Z}_2$ διαβαθμισμένη άλγεβρα: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ η οποία περιέχει άρτια (μποζονικά) και περιττά (φερμιονικά) στοιχεία με σχέσεις μετάθεσης και αντιμετάθεσης μεταξύ τους, αναλόγως τη διαβάθμιση του κάθε στοιχείου:

$$[\mathcal{A}\,,\mathcal{B}\} := \mathcal{A}\mathcal{B} - (-1)^{\eta_\mathcal{A}\eta_\mathcal{B}}\mathcal{B}\mathcal{A} \quad , \quad \mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathfrak{g} \tag{36}$$

όπου $\eta_\mathcal{A} = 0$ εάν το στοιχείο $\mathcal{A}$ είναι μποζονικό και $\eta_\mathcal{A} = 1$ εάν είναι φερμιονικό. Η ταυτότητα Jacobi τότε γίνεται:

$$(-1)^{\eta_\mathcal{A}\eta_\mathcal{C}}\,[\mathcal{A}\,,[\mathcal{B}\,,\mathcal{C}\}\} + (-1)^{\eta_\mathcal{B}\eta_\mathcal{A}}\,[\mathcal{B}\,,[\mathcal{C}\,,\mathcal{A}\}\} + (-1)^{\eta_\mathcal{C}\eta_\mathcal{B}}\,[\mathcal{C}\,,[\mathcal{A}\,,\mathcal{B}\}\} = 0 \tag{37}$$

Χρειάζεται επομένως να βρεθούν οι σχέσεις μετάθεσης/αντιμετάθεσης των νέων γεννητόρων $Q^I_\alpha, \bar{Q}^J_{\dot\beta}$ με τους υπόλοιπους γεννήτορες της άλγεβρας $\mathfrak{g}$: $P_\mu, M_{\mu\nu}$ (Poincaré), B_l (γεννήτορες εσωτερικών συμμετριών[3]) καθώς και οι σχέσεις μεταξύ τους $\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\}$, $\{\bar{Q}^I_{\dot\alpha}, \bar{Q}^J_{\dot\beta}\}$, $\{Q^I_\alpha, \bar{Q}^J_{\dot\beta}\}$. Ας ξεκινήσουμε με τις τελευταίες: Ο αντιμεταθέτης των Q και $\bar{Q}$ θα μετασχηματίζεται σύμφωνα με την αναπράσταση $(1/2,0) \otimes (0,1/2) = (1/2,1/2)$, δηλαδή ώς ένα Lorentz διάνυσμα, και θα έχει επιπλέον και ένα σπινοριακό δείκτη από την κάθε αναπαράσταση (εναν dotted και ένα κανονικό). Με τα αντικείμενα που διαθέτουμε από την ομάδα Poincaré, ο μόνος συνδιασμός που δίνει τα παραπάνω είναι ο εξής:

$$\boxed{\left\{Q^I_\alpha, \bar{Q}^J_{\dot\beta}\right\} = 2\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,P_\mu\delta^{IJ}} \tag{38}$$

όπου διαλέξαμε τον πίνακα των σταθερών αναλογίας να είναι[4] $2\delta^{IJ}$. Ο αντιμεταθέτης των Q μεταξύ τους θα μετασχηματίζεται σύμφωνα με την $(1/2,0) \otimes (1/2,0) = (0,0) \oplus (1,0)$. Αυτή διαθέτει ένα βαθμωτό κομμάτι με spin 0, το οποίο γράφεται σαν γραμμικός συνδιασμός των γεννητόρων της άλγεβρας των εσωτερικών συμμετριών B^l $(l = 1,2,\dots)$ μιας και αυτοί είναι οι μόνοι Lorentz βαθμωτοί τελεστές με spin 0 που έχουμε στην άλγεβρα $\mathfrak{g}$, και ένα κομμάτι με spin 1. Μπορούμε συνεπώς να γράψουμε, χρησιμοποιώντας τους γεννήτορες της ομάδας Poincaré (δεδομένου ότι το αποτέλεσμα οφείλει να είναι αντισυμμετρικό στους δείκτες $(\alpha, I), (\beta, J)$ στον πρώτο όρο και συμμετρικό στο δεύτερο):

$$\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\} = \epsilon_{\alpha\beta}Z^{IJ} + \epsilon_{\beta\gamma}\,(\sigma^{\mu\nu})^\gamma_\alpha\,M_{\mu\nu}Y^{IJ} \tag{39}$$

---

3 Θεωρούμε ότι οι εσωτερικές συμμετρίες αποτελούν μια ημιαπλή άλγεβρα Lie $[B_l, B_m] = i f^n_{lm} B_n$ (f^n_{lm} οι σταθερές δομής), όπως οι γνωστές ομάδες βαθμίδας.

4 Κάτι που έχουμε δικαίωμα να κάνουμε, καθώς οι αντιμεταθέτες των $Q, \bar{Q}$ είναι θετικά ορισμένοι και έτσι η διαγωνοποίηση του πίνακα των εσωτερικών δεικτών I, J στο δεξί μέλος θα δώσει θετικές ιδιοτιμές.

με $Z^{IJ} = -Z^{JI} = a_l^{IJ} B^l$ και $Y^{IJ} = Y^{JI}$ Lorentz βαθμωτούς πίνακες. Όσο για τους μεταθέτες με το P_μ, κρίνοντας από τους δείκτες (ένας σπινοριακός και ένας δείκτης Lorentz) το μόνο δυνατό αποτέλεσμα με τέτοια δομή ($(1/2, 0) \otimes (1/2, 1/2) = (0, 1/2) \oplus (1, 1/2)$ και σύμφωνα με το θεώρημα Haag Lopuszański Sohnius το οποίο αποκλείει το $(1, 1/2)$ κομμάτι της αναπαράστασης), θα είναι κάτι ανάλογο του $\bar{Q}$ μαζί με ένα σ_μ για να εμφανιστεί ο δείκτης Lorentz και να αθροιστεί ο dotted δείκτης:

$$\left[Q^I_\alpha, P_\mu\right] = C^I_J \left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{Q}^{J\dot{\beta}} \tag{40}$$

και:

$$\left[\bar{Q}^{I\dot{\alpha}}, P_\mu\right] = \left(C^I_J\right)^* \left(\bar{\sigma}_\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta} Q^J_\beta \tag{41}$$

όπου οι συντελεστές C^I_J μπορούν να βρεθούν από τη ταυτότητα Jacobi των P, P, Q:

$$\left[P_\mu, \left[P_\nu, Q^I_\alpha\right]\right] + \left[P_\nu, \left[Q^I_\alpha, P_\mu\right]\right] + 0 = 0$$

$$\Rightarrow -C^I_J \left(\sigma_\nu\right)_{\alpha\dot{\beta}} \left[P_\mu, \bar{Q}^{J\dot{\beta}}\right] + C^I_J \left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} \left[P_\nu, \bar{Q}^{J\dot{\beta}}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(CC^*\right)^I_J \left(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu\right)_\alpha^{\ \beta} Q^J_\beta = 0$$

$$\Rightarrow 4 \left(CC^*\right)^I_J \left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \beta} Q^J_\beta = 0 \Rightarrow CC^* = 0$$

για να δείξουμε ότι ο $C^I_J = 0$ δεν αρκεί η παραπάνω συνθήκη, θα πρέπει να είναι και αντισυμμετρικός ώς προς τους δείκτες I, J, προκειμένου να έχουμε $CC^\dagger = 0 \Rightarrow C = 0$. Η ταυτότητα Jacobi για τους Q, Q, P μαζί με τη σχέση (45) δίνουν ακριβώς αυτό:

$$\left\{Q^I_\alpha, \left[Q^J_\beta, P_\mu\right]\right\} + \left\{Q^J_\beta, \left[P_\mu, Q^I_\alpha\right]\right\} - \left[P_\mu, \left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}\right] = 0 \tag{42}$$

$$\Rightarrow C^J_K \left\{Q^I_\alpha, \bar{Q}^K_{\dot{\delta}}\right\} \epsilon^{\dot{\delta}\dot{\gamma}} \left(\sigma_\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}} - C^I_K \left\{Q^J_\beta, \bar{Q}^K_{\dot{\gamma}}\right\} \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}} \left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} - \epsilon_{\alpha\beta} \cancelto{0}{\left[P_\mu, Z^{IJ}\right]}$$
$$- \epsilon_{\beta\gamma} \left(\sigma^{\rho\lambda}\right)_\alpha^{\ \gamma} \left[P_\mu, M_{\rho\lambda} Y^{IJ}\right] = 0$$

$$\Rightarrow C^J_I \epsilon^{\beta\alpha} 2 \left(\sigma_\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}} \left(\sigma_\nu\right)_{\alpha\dot{\delta}} \epsilon^{\dot{\delta}\dot{\gamma}} P^\nu - C^I_J \epsilon^{\beta\alpha} \left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} 2 \left(\sigma_\nu\right)_{\beta\dot{\gamma}} \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}}$$
$$- \epsilon^{\beta\alpha} \epsilon_{\beta\gamma} \left(\sigma^{\rho\lambda}\right)_\alpha^{\ \gamma} \left[P_\mu, M_{\rho\lambda} Y^{IJ}\right] = 0$$

$$\Rightarrow 2P^\nu \operatorname{tr}\left(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu\right) \left(C^J_I + C^I_J\right) + \operatorname{tr} \sigma^{\rho\lambda} \left[P_\mu, M_{\rho\lambda} Y^{IJ}\right] = 0$$

$$\Rightarrow 4P^\mu (C^J_I + C^I_J) = 0 \Rightarrow C^J_I = -C^I_J \tag{43}$$

Όπου έγινε στο δεύτερο βήμα πολλαπλασιάσαμε με $\epsilon^{\beta\alpha}$ και τις δύο πλευρές και έγινε χρήση των σχέσεων: $\operatorname{tr}(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu) = 2\eta_{\mu\nu}$ και $\operatorname{tr} \sigma_{\mu\nu} = 0$. Επομένως, καταλήγουμε:

$$[Q^I_\alpha, P_\mu] = 0 = [\bar{Q}^{I\dot{\alpha}}, P_\mu] \tag{44}$$

Με την πληροφορία ότι οι $Q, \bar{Q}$ μετατίθενται με τα P_μ, η ταυτότητα Jacobi (42) δίνει:

$$\epsilon_{\beta\gamma}\left[P_\mu, M_{\rho\lambda}Y^{IJ}\right]\left(\sigma^{\rho\lambda}\right)_\alpha^{\ \gamma} = 0$$

το οποίο μπορεί να ισχύει μονάχα εάν το Y μηδενίζεται ταυτοτικά. Συνεπώς, ο γενικότερος αντιμεταθέτης των Q μεταξύ τους είναι της μορφής:

$$\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\} = \epsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ} \tag{45}$$

και:

$$\left\{\bar{Q}^I_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^J_{\dot{\beta}}\right\} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(Z^*\right)^{IJ} \tag{46}$$

Επίσης, εφ'όσων ο Q^I_α ανήκει στη $(1/2, 0)$ τότε μετασχηματίζεται ώς σπίνορας κάτω από την $SL(2,\mathbb{C})$ αλλά και κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz ώς τελεστής, τα οποία εκφράζονται ώς:

$$Q'^I_\alpha = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \beta} Q^I_\beta \approx \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \beta} Q^I_\beta \tag{47}$$

$$Q'^I_\alpha = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) Q^I_\alpha \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) \approx Q^I_\alpha - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left[Q^I_\alpha, M^{\mu\nu}\right] \tag{48}$$

οι όροι γραμμικοί ώς πρός την παράμετρο του μετασχηματισμού $\omega_{\mu\nu}$ τότε δίνουν:

$$\left[Q^I_\alpha, M^{\mu\nu}\right] = \left(\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \beta} Q^I_\beta \tag{49}$$

και:

$$\left[\bar{Q}^{I\dot{\alpha}}, M^{\mu\nu}\right] = \left(\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} \bar{Q}^{I\dot{\beta}} \tag{50}$$

Όσο αφορά τις εσωτερικές συμμετρίες, ο μεταθέτης των Q με τους B_l θα είναι ανήκει στη $(1/2, 0)$ αναπαράσταση και έτσι γράφουμε:

$$\left[Q^I_\alpha, B_l\right] = \left(S_l\right)^I_{\ J} Q^J_\alpha \tag{51}$$

και

$$\left[\bar{Q}^I_{\dot{\alpha}}, B_l\right] = -\left(S^*_l\right)^I_{\ J} \bar{Q}^J_{\dot{\alpha}} \tag{52}$$

όπου οι πίνακες $-(S_l)^I_J$ αποτελούν μοναδιακή αναπαράσταση της ομάδας των εσωτερικών συμμετριών[5]. Θα πρέπει σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε ότι υπάρχουν τέτοιοι μετασχηματισμοί (αυτομορφισμοί) που στρέφουν τα υπερφορτία μεταξύ τους μέσω των δεικτών I, J, οι οποίοι διατηρούν την υπερσυμμετρική άλγεβρα (38) αναλλοίωτη. Η μεγαλύτερη δυνατή υποομάδα αυτών των αυτομορφισμών η οποία μετατίθεται με την άλγεβρα Lorentz ονομάζεται ομάδα της $\mathcal{R}$ συμμετρίας. Στην περίπτωση όπου έχουμε $\mathcal{N} = 1$ η μόνη δυνατή τέτοια ομάδα είναι η $U(1)_{\mathcal{R}}$ η οποία μετασχηματίζει τα $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ με μια φάση δίνοντάς τους τα $\mathcal{R}$ φορτία $\mathcal{R}(Q) = -1$ και $\mathcal{R}(\bar{Q}) = +1$ αντίστοιχα, ώστε η (38) να παραμένει αναλλοίωτη:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &\mapsto e^{-i\varphi} Q_\alpha \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &\mapsto e^{i\varphi} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \end{aligned} \tag{53}$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε εκτεταμένη υπερσυμμετρία ($\mathcal{N} > 1$), πλέον η ομάδα $\mathcal{R}$ συμμετρίας επεκτείνεται σε μοναδιακούς μετασχηματισμούς των εσωτερικών δεικτών $U(\mathcal{N})_{\mathcal{R}}$.

Έχοντας στη διάθεσή μας όλες τις σχέσεις των $Q, \bar{Q}$ με τους γεννήτορες της $\mathfrak{g}$ είναι σημαντικό να σχολιάσουμε τους τελεστές Z^{IJ} που εμφανίζονται στη (45). Αυτοί ονομάζονται κεντρικά φορτία και μπορούμε να δείξουμε ότι μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες: Αρχικά έχουμε $\left[P_\mu, Z^{IJ}\right] = 0$ και η ταυτότητα Jacobi για τους M, Q, Q συσταλλμένη με το $\epsilon^{\alpha\beta}$ θα δώσει:

$$\epsilon^{\alpha\beta}\left(\left[M_{\mu\nu}, \left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}\right] + \left\{Q^I_\alpha, \left[Q^J_\beta, M_{\mu\nu}\right]\right\} - \left\{Q^J_\beta, \left[M_{\mu\nu}, Q^I_\alpha\right]\right\}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\left[M_{\mu\nu}, Z^{IJ}\right] - (\sigma_{\mu\nu})_\beta^{\ \gamma}\, \delta^\beta_\gamma Z^{IJ} + (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^{\ \gamma}\, \delta^\alpha_\gamma Z^{JI} = 0$$

$$\Rightarrow \left[M_{\mu\nu}, Z^{IJ}\right] - 2\,\mathrm{tr}\,\sigma_{\mu\nu} Z^{IJ} = 0 \Rightarrow \left[M_{\mu\nu}, Z^{IJ}\right] = 0 \tag{54}$$

Επίσης, με αντίστοιχο τρόπο η Jacobi των $\bar{Q}, Q, Q$ οδηγεί στη σχέση:

$$\boxed{\left[\bar{Q}^I_{\dot{\alpha}}, Z^{IJ}\right] = 0} \tag{55}$$

Όσο για το μεταθέτη του με τα Q, ας θεωρήσουμε ότι είναι μη μηδενικός (και μιας και τα Z^{IJ} είναι βαθμωτά ανήκει στη $(1/2, 0)$):

$$\left[Q^K_\alpha, Z^{IJ}\right] = H^{KIJ}_L Q^L_\alpha \tag{56}$$

τότε, η Jacobi για τους $Q, \bar{Q}$ και Z θα δώσει:

5 Κάτι που φαίνεται από τις ταυτότητες Jacobi των Q, B, B και $Q, \bar{Q}, B$ οι οποίες δίνουν:

$$[-S_l, -S_m] = i f^n_{lm}(-S_n)$$

και $S_l = S_l^\dagger$ αντίστοιχα.

$$0-\left\{\bar{Q}^J_{\dot{\alpha}},\left[Z^{KL},Q^I_{\alpha}\right]\right\}+\left[Z^{KL},\left\{Q^I_{\alpha},\bar{Q}^J_{\dot{\alpha}}\right\}\right]=0$$

$$\Rightarrow -H^{KLI}_R\left\{\bar{Q}^J_{\dot{\alpha}},Q^R_{\alpha}\right\}+2\left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left[Z^{KL},P_\mu\right]=-2H^{KLI}_R P^\mu\left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\delta^{RJ}=0$$

$$\Rightarrow H^{KLI}_J=0$$

και επομένως,

$$\boxed{\Rightarrow \left[Q^K_{\alpha},Z^{IJ}\right]=0} \tag{57}$$

Τέλος, η τελευταία σχέση δηλώνει ότι η αναλλοίωτη υποάλγεβρα που σχηματίζεται από τα Z είναι αβελιανή, καθώς αυτά μετατίθενται μεταξύ τους:

$$\left[Z^{IJ},Z^{KL}\right]=\left[Z^{IJ},\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\left\{Q^K_{\alpha},Q^L_{\beta}\right\}\right]=\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\left(\left[Z^{IJ},Q^K_{\alpha}\right]Q^L_{\beta}+Q^K_{\alpha}\left[Z^{IJ},Q^L_{\beta}\right]\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \left[Z^{IJ},Z^{KL}\right]=0} \tag{58}$$

1.3 Αναπαραστάσεις της Υπερσυμμετρικής Άλγεβρας

Εδώ θα ξεκινήσει η ουσιαστική μελέτη των χαρακτηριστικών μιας υπερσυμμετρικής θεωρίας πεδίου. Όπως έχουμε την αντιστοιχία των φυσικών σωματιδίων με μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της ομάδας Poincaré, έτσι και οι μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρίας θα σχηματίζουν πολλπλέτες ίδιας μάζας (ο P^2 εξακολουθεί να είναι τελεστής Casimir, καθώς μετατίθεται με τα φερμιονικά φορτία $Q,\bar{Q}$) με τις συνιστώσες τους να διαφέρουν στο spin κατά $1/2$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι, μιας και η υπερσυμμετρία ανταλλάσσει φερμιόνια και μποζόνια, οι υπερσυμμετρικές πολλαπλέτες έχουν ίσους φερμιονικούς και μποζονικούς βαθμούς ελευθερίας. Ορίζοντας τον τελεστή N_F ώστε να παίρνει τις τιμές:

$$N_F=\begin{cases}0 & \text{σε μποζονικές καταστάσεις}\\ 1 & \text{σε φερμιονικές καταστάσεις}\end{cases} \tag{59}$$

Έτσι ώστε $(-)^{N_F}|\Psi\rangle=\pm|\Psi\rangle$ για οποιαδήποτε κατάσταση $|\Psi\rangle$. Θεωρούμε στη συνέχεια το παρακάτω ίχνος (πάνω σε κάποια αναπαράσταση R):

$$\mathrm{tr}_R\left\{(-)^{N_F}\left\{Q^I_{\alpha},\bar{Q}^J_{\dot{\alpha}}\right\}\right\}=2P^\mu\left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\mathrm{tr}_R(-)^{N_F} \tag{60}$$

ανοίγοντας τον αντιμεταθέτη και κάνοντας χρήση της κυκλικής ιδιότητας του ίχνους και επίσης ότι $\left\{Q^I_\alpha, (-)^{N_F}\right\} = 0$ παίρνουμε:

$$\mathrm{tr}_R\left\{(-)^{N_F}\left\{Q^I_\alpha, \bar{Q}^J_{\dot{\alpha}}\right\}\right\} = -\,\mathrm{tr}_R\left\{Q^I_\alpha(-)^{N_F}\bar{Q}^J_{\dot{\alpha}}\right\} + \mathrm{tr}_R\left\{Q^I_\alpha(-)^{N_F}\bar{Q}^J_{\dot{\alpha}}\right\} = 0 \tag{61}$$

Και επομένως καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_R(-)^{N_F} = 0 &= \sum_B \langle B|\,(-)^{N_F}\,|B\rangle + \sum_F \langle F|\,(-)^{N_F}\,|F\rangle \\ &= \sum_B \langle B|B\rangle - \sum_F \langle F|F\rangle = n_B - n_F \\ &\Rightarrow n_B = n_F \end{aligned} \tag{62}$$

όπου n_B και n_F ο αριθμός των μποζονικών και τον φερμιονικών καταστάσεων αντίστοιχα. Άλλο ένα χαρακτηριστικό των υπερσυμμετρικών θεωριών είναι ότι η ενέργεια είναι πάντοτε θετική. Αυτό μπορούμε να το δούμε με παρόμοιο τρόπο με το παραπάνω, παίρνοντας μια κατάσταση $|\Psi\rangle$ στο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και σχηματίζοντας την αναμενόμενη τιμή του αντιμεταθέτη των $Q, \bar{Q}$ για τα φορτία της ίδιας υπερσυμμετρίας (κοινός εσωτερικός δείκτης I):

$$\langle\Psi|\left\{Q^I_\alpha, \bar{Q}^I_{\dot{\alpha}}\right\}|\Psi\rangle = 2\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\langle\Psi|\,P_\mu\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\,Q^I_\alpha\bar{Q}^I_{\dot{\alpha}} + \bar{Q}^I_{\dot{\alpha}}Q^I_\alpha\,|\Psi\rangle$$

$$= \langle\Psi|\,Q^I_\alpha\left(Q^I_\alpha\right)^\dagger + \left(Q^I_\alpha\right)^\dagger Q^I_\alpha\,|\Psi\rangle = \|\left(Q^I_\alpha\right)^\dagger|\Psi\rangle\|^2 + \|Q^I_\alpha\,|\Psi\rangle\|^2 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant 2\,\mathrm{tr}\left\{\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\right\}\langle\Psi|\,P_\mu\,|\Psi\rangle = 4\delta^{\mu 0}\langle\Psi|\,P_\mu\,|\Psi\rangle = 4\,\langle\Psi|\,H\,|\Psi\rangle$$

$$\Rightarrow E = \langle\Psi|\,H\,|\Psi\rangle \geqslant 0 \quad , \quad \forall\,|\Psi\rangle \in \mathcal{H} \tag{63}$$

Όπου το παραπάνω φέρει ώς αποτέλεσμα ότι (επιλέγοντας για την κατάσταση $|\Psi\rangle$ το κενό της θεωρίας $|\Omega\rangle$[6]) η ενέργεια του κενού είναι μηδέν. Σε κάθε άλλη περίπτωση, υπάρχει τουλάχιστον ένα υπερσυμμετρικό φορτίο του οποίου η δράση δεν μηδενίζει το κενό και έτσι κανείς μιλάει για αυθόρμητη παραβίαση της υπερσυμμετρίας.

Άμαζες αναπαραστάσεις ($M = 0$): Μπορούμε να επιλέξουμε ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο οι ιδιοτιμές του τελεστή ορμής είναι $P_\mu = E(1,0,0,1)$. Τότε η άλγεβρα (38) παίρνει τη μορφή:

$$\left\{Q^I_\alpha, \bar{Q}^J_{\dot{\alpha}}\right\} = 4E\delta^{IJ}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{\alpha\dot{\alpha}} \tag{64}$$

6 για το οποίο ισχύει: $Q^I_\alpha\,|\Omega\rangle = 0 = \bar{Q}^I_{\dot{\alpha}}\,|\Omega\rangle$

από την οποία βλέπουμε ότι οι τελεστές Q^I_1 και $\bar{Q}^J_{\dot{1}}$ αναπαρίστανται με μηδενικό τρόπο[7], $Q^I_1 = 0 = \bar{Q}^J_{\dot{1}}$ ενώ οι απομείναντες Q^I_2 και $\bar{Q}^J_{\dot{2}}$ ικανοποιούν την άλγεβρα:

$$\left\{Q^I_2, \bar{Q}^J_{\dot{2}}\right\} = 4E\delta^{IJ} \tag{65}$$

η οποία δεν είναι παρά μια άλγεβρα τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, το οποίο φαίνεται καθαρά εάν ορίσουμε τους τελεστές:

$$\begin{aligned} a_I &:= \frac{1}{\sqrt{4E}} Q^I_2 \\ a^\dagger_J &:= \frac{1}{\sqrt{4E}} \bar{Q}^J_{\dot{2}} \end{aligned} \tag{66}$$

τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \left\{a_I, a^\dagger_J\right\} &= \delta_{IJ} \quad , I, J = 1, \dots, \mathcal{N} \\ \{a_I, a_J\} &= 0 = \left\{a^\dagger_I, a^\dagger_J\right\} \end{aligned} \tag{67}$$

Για την κατασκευή των αναπαραστάσεων επιλέγουμε ένα κενό Clifford, μια κατάσταση $|\Omega\rangle$ η οποία μηδενίζεται από τη δράση όλων των a_I και έχει καλά ορισμένη ελικότητα λ_0 από την ομάδα Poincaré[8]. Από το $|\Omega\rangle$ με τη δράση των τελεστών δημιουργίας $a^\dagger_I$ οι οποίοι ανεβάζουν την ελικότητα κατά $1/2$ μιας και ικανοποιούν:

$$\left[a^\dagger_I, J^3\right] = \left[a^\dagger_I, M^{12}\right] = \left(\bar{\sigma}^{12}\right)^{\dot{2}}_{\dot{2}} a^\dagger_I = -\frac{i}{4}\left[\sigma^1, \sigma^2\right]^{\dot{2}}_{\dot{2}} a^\dagger_I = \frac{1}{2}\left(\sigma^3\right)^{\dot{2}}_{\dot{2}} a^\dagger_I$$

$$\Rightarrow \left[a^\dagger_I, J^3\right] = \frac{1}{2} a^\dagger_I \tag{68}$$

και των τελεστών καταστροφής:

$$\left[a_I, J^3\right] = -\frac{1}{2} a_I \tag{69}$$

δημιουργούνται οι καταστάσεις της κάθε αναπαράστασης, με διαφορετική μεταξύ τους ελικότητα:

---

7 μιας και από την (64) φαίνεται ότι ο $\bar{Q}^I_{\dot{1}}$ δημιουργεί καταστάσης μηδενικού μέτρου: $\left\{Q^I_1, \bar{Q}^I_{\dot{1}}\right\} = 0 \Rightarrow \langle\Psi| Q^I_1 \bar{Q}^I_{\dot{1}} |\Psi\rangle = \left\|\bar{Q}^I_{\dot{1}} |\Psi\rangle\right\|^2 = 0, \; \forall I = 1, \dots$

8 Μια τέτοια κατάσταση μπορεί να κατασκευαστεί από οποιαδήποτε ιδιοκατάσταση της ελικότητας σε κάποια αναπαράσταση $|\lambda_0\rangle$ ώς: $|\Omega\rangle := a_{I_1} \dots a_{I_\mathcal{N}} |\lambda_0\rangle$.

$$\begin{aligned}
|\Omega\rangle &\sim |\lambda_0\rangle \\
a^\dagger_{I_1} |\Omega\rangle &\sim \left|\lambda_0 + \frac{1}{2}\right\rangle_{I_1} \\
\frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger_{I_1} a^\dagger_{I_2} |\Omega\rangle &\sim |\lambda_0 + 1\rangle_{I_1 I_2} \\
&\vdots \\
\frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{i=1}^{n} a^\dagger_{I_i} |\Omega\rangle &\sim \left|\lambda_0 + \frac{n}{2}\right\rangle_{I_1 \dots I_n}
\end{aligned} \tag{70}$$

Το πλήθος των καταστάσεων με ελικότητα $\lambda_0 + n/2$ θα είναι $\binom{\mathcal{N}}{n}$, το οποίο σημαίνει ότι το συνολικό πλήθος των καταστάσεων θα δίνεται από:

$$\sum_{n=0}^{\mathcal{N}} \binom{\mathcal{N}}{n} = 2^{\mathcal{N}} \tag{71}$$

εκ των οποίων οι $2^{\mathcal{N}-1}$ είναι φερμιονικές και οι $2^{\mathcal{N}-1}$ μποζονικές. Προκειμένου όμως να έχουμε ιδιοκαταστάσεις της CPT συμμετρίας[9], θα πρέπει να διπλασιάσουμε την κάθε αναπαράσταση παίρνοντας το ευθύ της άθροισμα με την αντίστοιχη αναπαράσταση αντίθετων ελικοτήτων. Ακολουθούν οι βασικές αναπαραστάσεις για $\mathcal{N}$ υπερσυμμετρίες αναλόγως την ελικότητα του κενού Clifford, οι οποίες γράφονται ώς $(\lambda_0, \lambda_0 + 1/2, \lambda_0 + 1, \dots)$. Η ομάδα της $\mathcal{R}$ συμμετρίας είναι η[10] $U(1) \otimes SU(\mathcal{N}) \cong U(\mathcal{N})$ η οποία μιας και μετατίθεται με τον τελεστή ελικότητας, κάνει τις καταστάσεις να βρίσκονται σε μια αναπαράσταση της $\mathcal{R}$ συμμετρίας, το οποίο βοηθά ιδιαιτέρως στην κατηγοριοποίησή τους.

Ξεκινώντας από $\mathcal{N} = 1$, η οποία περιέχει τις καταστάσεις $(\lambda_0, \lambda_0 + 1/2)$, παίρνουμε τις εξής πολλαπλέτες:

9 το οποίο συμβαίνει μόνο στην περίπτωση όπου $\lambda_0 = -\mathcal{N}/4$ όπου έχουμε συμμετρική κατανομή των καταστάσεων γύρω από το $\lambda_0 = 0$

10 Η μεγαλύτερη ομάδα αυτομορφισμών της (67) είναι η $SO(2\mathcal{N})$, το οποίο μπορεί να φανεί χωρίζοντας τα $\mathcal{N}$ ζεύγη τελεστών στους $2\mathcal{N}$ τελεστές:

$$q_I := \left(a^I + a^{\dagger\, I}\right)$$

$$q_{\mathcal{N}+I} := i\left(a^{\dagger\, I} - a^I\right)$$

με $I = 1, \dots, \mathcal{N}$. Τότε η άλγεβρα παίρνει τη μορφή μιας $2\mathcal{N}$ διάστατης άλγεβρας Clifford ώς προς την Ευκλείδεια μετρική δ^{IJ}:

$$\{q_a, q_b\} = 2\delta_{ab}$$

με $a, b = 1, \dots, 2\mathcal{N}$, η οποία φέρει την ομάδα αυτομορφισμών $SO(2\mathcal{N})$ που την αφήνει αναλλοίωτη. Παρ'όλα αυτά, η $SO(2\mathcal{N})$ με γεννήτορες $R_{ab} = i/4\,[q_a, q_b]$ δεν μετατίθεται με τον τελεστή ελικότητας της άλγεβρας Lorentz και έτσι δεν μπορεί να αποτελέσει ομάδα εσωτερική συμμετρίας.

∘ Χειραλική πολλαπλέτα ($\lambda_0 = 0$): Περιέχει ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο και ένα σπίνορα Weyl. Η πλήρης CPT αναλλοίωτη πολλαπλέτα δίνεται ώς: $(0, 1/2) \oplus (-1/2, 0)$. Αυτή η πολλαπλέτα περιέχει τα πεδία ύλης της θεωρίας.

∘ Ανυσματική πολλαπλέτα ($\lambda_0 = 1/2$) $\Rightarrow (1/2, 1) \oplus (-1, -1/2)$ Περιέχει ένα Weyl σπίνορα και ένα μποζονικό ανυσματικό πεδίο με χειραλικότητα 1, το οποίο θα παίζει το ρόλο του πεδίου βαθμίδας και έτσι τα πεδία θα βρίσκονται στη συζυγή αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας.

∘ Βαρυτονική πολλαπλέτα ($\lambda_0 = 3/2$) $\Rightarrow (3/2, 2) \oplus (-2, -3/2)$ Περιέχει ένα φερμιόνιο με χειραλικότητα 3/2 και ένα μποζόνιο με χειραλικότητα 2, η οποία είναι και η μέγιστη δυνατή τιμή που υποστιρίζεται από τις επανακανονικοποιήσιμες θεωρίες πεδίου. Ένα τέτοιο μποζόνιο είναι ικανό να περιγράψει το βαρυτόνιο και ο αντισυμμετρικός παρτενέρ του ονομάζεται γκραβιτίνο.

Όπως θα αναλύσουμε και στη συνέχεια, αυξάνοντας τον αριθμό των υπερσυμμετριών αυξάνουμε και τον αριθμό των συνδέσμων (constraints) της θεωρίας και έτσι θεωρίες με μεγαλύτερο $\mathcal{N}$ αποσυντίθονται σε αναπαραστάσεις της $\mathcal{N} = 1$, ονομαζόμενη και ώς μη εκτεταμένη υπερσυμμετρία, η οποία έχει τη γενικότερη δυνατή μορφή. Για την περίπτωση $\mathcal{N} = 2$, με καταστάσεις $(\lambda_0, \lambda_0 + 1/2, \lambda_0 + 1/2, \lambda_0 + 1)$ έχουμε τις εξής πολλαπλέτες:

∘ $\mathcal{N} = 2$ ανυσματική πολλαπλέτα ($\lambda_0 = 0$) $\Rightarrow (0, 1/2, 1/2, 1) \oplus (-1, -1/2, -1/2, 0)$. Το περιεχόμενό της είναι ένα ανυσματικό μποζόνιο, δύο φερμιόνια Weyl και ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο. Μπορεί να αναλυθεί σε $\mathcal{N} = 1$ πολλαπλέτες ώς:

$$\underset{(\mathcal{N}=2)}{\text{ανυσματική}} = \underset{(\mathcal{N}=1)}{\text{χειραλική}} \oplus \underset{(\mathcal{N}=1)}{\text{ανυσματική}} \tag{72}$$

όπου η $\mathcal{N} = 1$ χειραλική πολλαπλέτα πρέπει να έιναι και αυτή αναγκαστικά στη συζυγή αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας.

∘ Hypermultiplet ($\lambda_0 = -1/2$) $\Rightarrow$: $2 \times (-1/2, 0, 0, 1/2)$ Περιέχει δύο σπίνορες Weyl αντίθετης ελικότητας και δύο βαθμωτά πεδία, και επομένως μπορεί να είναι αυτοσυζυγής κάτω από CPT. Ώς πρός τις $\mathcal{N} = 1$ πολλαπλέτες, αυτή γράφεται:

$$\underset{(\mathcal{N}=2)}{\text{hypermultiplet}} = \underset{(\mathcal{N}=1)}{\text{χειραλική}} \oplus \underset{(\mathcal{N}=1)}{\text{χειραλική}} \tag{73}$$

Για $\mathcal{N} = 4$ έχουμε:

$$\left(\lambda_0, \lambda_0 + \frac{1}{2}, \lambda_0 + 1, \lambda_0 + \frac{3}{2}, \lambda_0 + 2\right) \tag{74}$$

$\circ$ $\mathcal{N}=4$ ανυσματική πολλαπλέτα ($\lambda_0=-1$) $\Rightarrow (-1,-1/2,0,1/2,1)$. Περιέχει ένα ανυσματικό μποζόνιο με ελικότητα $+1$, ένα με -1, τέσσερα φερμιόνια Weyl με ελικότητα $1/2$, τέσσερα με $-1/2$ και έξι βαθμωτά πεδία. Αυτή αποτελεί τη μόνη δυνατή πολλαπλέτα $\mathcal{N}=4$ η οποία δεν ξεπερνά το $\lambda=2$ και γράφεται συναρτήσει των $\mathcal{N}=2$ και $\mathcal{N}=1$ πολλαπλέτων:

$$\underset{(\mathcal{N}=4)}{\text{ανυσματική}} = \underset{(\mathcal{N}=2)}{\text{ανυσματική}} \oplus \underset{(\mathcal{N}=2)}{\textbf{hypermultiplet}} \tag{75}$$

$$\underset{(\mathcal{N}=4)}{\text{ανυσματική}} = \underset{(\mathcal{N}=1)}{\text{ανυσματική}} \oplus \left[3\times \underset{(\mathcal{N}=1)}{\text{χειραλική}} \oplus \text{CPT}\right] \tag{76}$$

όπου εννοείται ότι η $\mathcal{N}=2$ **hypermultiplet** και οι χειραλικές $\mathcal{N}=1$ πολλαπλέτες βρίσκονται στη συζυγή αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας.

<u>Έμμαζες αναπαραστάσεις ($M\neq 0$)</u>: Σε αυτή την περίπτωση, όπως και στις αναπαρστάσεις της ομάδας Poincaré, μπορούμε να πάμε στο σύστημα ηρεμίας όπου $P_\mu=(M,0,0,0)$ και έτσι η άλγεβρα των υπερφορτίων παίρνει τη μορφή:

$$\left\{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^J\right\} = 2M\delta^{IJ}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{\alpha\dot{\alpha}} \tag{77}$$

η οποία δίνει $2\mathcal{N}$ ζεύγη τελεστών καταστροφής και δημιουργίας:

$$\left\{a_\alpha^I, a_{\dot{\alpha}}^{\dagger J}\right\} = \delta^{IJ}\delta_{\alpha\dot{\alpha}}\ ,\ \ \alpha,\dot{\alpha}=1,2\ ,\ \ I,J=1,\ldots,\mathcal{N} \tag{78}$$

με:

$$\begin{aligned} a_\alpha^I &:= \frac{Q_\alpha^I}{\sqrt{2M}} \\ a_{\dot{\alpha}}^{\dagger J} &:= \frac{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^J}{\sqrt{2M}} \end{aligned} \tag{79}$$

και $\left\{a_\alpha^I, a_\beta^J\right\} = 0 = \left\{a_{\dot{\alpha}}^{\dagger I}, a_{\dot{\beta}}^{\dagger J}\right\}$. Τότε οι αναπαραστάσεις κατασκευάζονται από το κενό Clifford [11] το οποίο έχει μάζα[12] και spin $|M,s\rangle$, ώς:

11 $a_\alpha^I|\Omega\rangle=0,\ \forall I=1,\ldots,\mathcal{N}, \alpha=1,2$
12 Ικανοποιείται η σχέση: $P^2|\Omega\rangle = M^2|\Omega\rangle$

$$
\begin{aligned}
|\Omega\rangle &\sim |M, s\rangle \\
a^{\dagger\, I_1}_{\dot\alpha} |\Omega\rangle &\sim \left| M, s+\frac{1}{2} \right\rangle^{I_1}_{\dot\alpha_1} \\
a^{\dagger\, I_1}_{\dot\alpha_1} a^{\dagger\, I_2}_{\dot\alpha_2} |\Omega\rangle &\sim |M, s+1\rangle^{I_1 I_2}_{\dot\alpha_1 \dot\alpha_2} \\
&\vdots \\
\frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{i=1}^{n} a^{\dagger\, I_i}_{\dot\alpha_i} |\Omega\rangle &\sim \left| M, s+\frac{n}{2} \right\rangle^{I_1 \dots I_n}_{\dot\alpha_1 \dots \dot\alpha_n}
\end{aligned}
\tag{80}
$$

Οι καταστάσεις με spin $s + n/2$ έχουν πλήθος $\binom{2\mathcal{N}}{n}$ μιας και τα γινόμενα των τελεστών είναι αντισυμμετρικά κάτω από την αλλαγή των δεικτών $(I_i, \dot\alpha_i)$ και έτσι το συνολικό πλήθος των καταστάσεων είναι:

$$
\sum_{n=0}^{2\mathcal{N}} \binom{2\mathcal{N}}{n} = 2^{2\mathcal{N}} \tag{81}
$$

όπου υπ'όψιν ότι εφ'οσων το κενό Clifford έχει spin s, ανήκει στην αναπαράσταση της $SU(2)$ διάστασης $(2s+1)$ και επομένως είναι εκφυλισμένο. Έτσι η πλήρης διάσταση της αναπαράστασης είναι:

$$
2^{2\mathcal{N}}(2s+1) \tag{82}
$$

Προκειμένου να κατηγοριοποιήσουμε τις εμμαζες αναπαραστάσεις, θα χρησιμοποιήσουμε την $\mathcal{R}$ συμμετρία. Η άλγεβρα (78), με την ίδια λογική που χειριστήκαμε την άμαζη περίπτωση, έχει ομάδα αυτομορφισμών που την αφήνει αναλλοίωτη την $SO(4\mathcal{N})$. Αυτό φαίνεται εαν ανακατατάξουμε τους $4\mathcal{N}$ στο πλήθος τελεστές $a^I_\alpha, a^{\dagger\, J}_{\dot\alpha}$ ώς εξής:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^l &:= a^l_1 + \left(a^l_1\right)^\dagger \\
\Gamma^{l+\mathcal{N}} &:= a^l_2 + \left(a^l_2\right)^\dagger \\
\Gamma^{l+2\mathcal{N}} &:= i\left[a^l_1 - \left(a^l_1\right)^\dagger\right] \\
\Gamma^{l+3\mathcal{N}} &:= i\left[a^l_2 - \left(a^l_2\right)^\dagger\right]
\end{aligned}
\tag{83}
$$

οι οποίοι κλείνουν την Ευκλείδεια άλγεβρα Clifford διάστασης $4\mathcal{N}$:

$$
\{\Gamma^r, \Gamma^s\} = 2\delta^{rs} \ \ , \ \ r, s = 1, \dots, 4\mathcal{N} \tag{84}
$$

Όπως εξηγήσαμε όμως, η $SO(4\mathcal{N})$ δεν μετατίθεται με τα spin, και έτσι αναζητούμε την αμέσως "μεγαλύτερη" ομάδα αυτομορφισμών που να έχει τη δυνατότητα να είναι εσωτερική συμμετρία της θεωρίας. Εάν επανορίσουμε τους τελεστές της άλγεβρας (78) ώς:

$$
\begin{aligned}
q^I_\alpha &:= a^I_\alpha \ , \ \ I = 1, \dots, \mathcal{N}, \alpha = 1, 2 \\
q^{I+\mathcal{N}}_\alpha &:= i\left(\sigma^2 (a^\dagger)^I\right)_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\left(a^I_\beta\right)^\dagger
\end{aligned}
\tag{85}
$$

οι οποίοι ικανοποιούν:

$$\begin{pmatrix} q^I_\alpha \\ q^{I+\mathcal{N}}_\alpha \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} \epsilon^{\alpha\beta} q^{I+\mathcal{N}}_\beta \\ -\epsilon^{\alpha\beta} q^I_\beta \end{pmatrix} = \epsilon^{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 0_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} & 1_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} \\ -1_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} & 0_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^I_\beta \\ q^{I+\mathcal{N}}_\beta \end{pmatrix} \tag{86}$$

Τότε αυτοί κλείνουν την άλγεβρα:

$$\{q^m_\alpha, q^n_\beta\} = -\epsilon_{\alpha\beta}\Lambda^{mn} \ , \ \ m, n = 1, \ldots, 2\mathcal{N} \tag{87}$$

όπου Λ^{mn} ο $2\mathcal{N} \times 2\mathcal{N}$ συμπλεκτικός πίνακας που εμφανίστηκε στο δεξί μέλος της (86). Οι μετασχηματισμοί $q^m_\alpha \to U^m_k q^k_\alpha$ που αφήνουν αυτή την άλγεβρα αναλλοίωτη και σέβονται τη συνθήκη (86) θα πρέπει να ικανοποιούν:

$$\begin{aligned} U\Lambda U^T &= \Lambda \\ U^* &= -\Lambda U \Lambda \end{aligned} \tag{88}$$

Τα οποία οδηγούν στο ότι ο U είναι ένας $2\mathcal{N} \times 2\mathcal{N}$ μοναδιακός[13] πίνακας που διατηρεί τη συμπλεκτική μορφή Λ και επομένως η ομάδα συμμετρίας της (87) θα είναι η μοναδιακή συμπλεκτική ομάδα $USp(2\mathcal{N})$, η οποία έχει γεννήτορες $R^{mn} = 1/2\epsilon^{\alpha\beta}\left[q^m_\alpha, q^n_\beta\right]$ που σχηματίζουν singlets της $SU(2)$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ομάδα $\mathcal{R}$ συμμετρίας είναι η $SU(2) \otimes USp(2\mathcal{N})$. Χωρίζοντας τους δείκτες $4\mathcal{N} \to (2, 2\mathcal{N})$ με τον ορισμό (85) στην ουσία αποδομούμε τις σπινοριακές αναπαραστάσεις της $SO(2\mathcal{N})$ (οι οποίες δεν είναι παρά οι δύο μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις διαστάσεων $2^{2\mathcal{N}-1}$ η καθεμία, που παίρνουμε από τους τελεστές $a^I_\alpha, a^{\dagger J}_\alpha$) ώς προς αναπαραστάσεις της $SU(2) \otimes USp(2\mathcal{N}) \subset SO(4\mathcal{N})$.

Αναπαραστάσεις με κεντρικά φορτία ($Z^{IJ} \neq 0$): Σε αυτή την περίπτωση, η οποία προφανώς αφορά την εκτεταμένη ($\mathcal{N} > 1$) υπερσυμμετρία, θα έχουμε επιπλέον τις σχέσεις (45) και (46):

$$\begin{aligned} \left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\} &= \epsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ} \\ \left\{\left(Q^I_\alpha\right)^\dagger, \left(Q^J_\beta\right)^\dagger\right\} &= \epsilon_{\alpha\beta}\left(Z^*\right)^{IJ} \end{aligned} \tag{89}$$

με $Z^{IJ} = -Z^{JI}$. Μπορούμε, εφ'όσων τα Z μετατίθονται με τα πάντα, κάνοντας χρήση της $SU(\mathcal{N})_\mathcal{R}$ συμμετρίας[14] να επιλέξουμε μια βάση στην οποία τα κεντρικά φορτία διαγωνοποιούνται σε 2×2 blocks ώς εξής:

$$\begin{aligned} Z' &= \epsilon \otimes D \ , \ \ \text{για } \mathcal{N} = 2, 4, \ldots \\ Z' &= \begin{pmatrix} \epsilon \otimes D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \ \text{για } \mathcal{N} = 3, 5, \ldots \end{aligned} \tag{90}$$

13 $UU^\dagger = -U\Lambda U^T\Lambda = -\Lambda^2 = 1_{2\mathcal{N}\times 2\mathcal{N}} = U^\dagger U$.

14 $Q^I_\alpha \mapsto U^I_J Q^J_\alpha$ και $Z^{IJ} = U^I_K Z'^{KM}(U^T)^J_M$

όπου ο πίνακας $D = \mathrm{diag}(Z_1, \ldots, Z_{\mathcal{N}/2})$ με $Z_i \in \mathbb{R}$. Σε αυτή τη βάση, εξετάζοντας την περίπτωση άρτιου $\mathcal{N}$, μπορούμε να εκφραστούμε ξεχωριστά στα 2×2 blocks και στον πίνακα του Z'^{KM} χωρίζοντας τους δείκτες ώς:

$$
\begin{aligned}
&K \mapsto (a, k) \;\; M \mapsto (b, m) \\
&a, b = 1, 2 \quad k, m = 1, \ldots, \frac{\mathcal{N}}{2}
\end{aligned}
\tag{91}
$$

και οι σχέσεις αντιμετάθεσης γράφονται τότε (στο σύστημα ηρεμίας):

$$
\begin{aligned}
&\left\{Q^{a,m}_{\alpha}, \left(Q^{b,n}_{\beta}\right)^{\dagger}\right\} = 2M\delta^{mn}\delta^{ab}\delta_{\alpha\beta} \\
&\left\{Q^{a,m}_{\alpha}, Q^{b,n}_{\beta}\right\} = \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{ab}\delta^{mn}Z_n \\
&\left\{(Q^{a,m}_{\alpha})^{\dagger}, \left(Q^{b,m}_{\beta}\right)^{\dagger}\right\} = \epsilon_{\alpha\beta}\delta^{mn}\epsilon^{ab}Z_n
\end{aligned}
\tag{92}
$$

Ορίζουμε στη συνέχεια τους εξής $2\mathcal{N}$ τελεστές:

$$
\begin{aligned}
a^{m}_{\alpha} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[Q^{1,m}_{\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta}\left(Q^{2,m}_{\beta}\right)^{\dagger}\right] \\
b^{m}_{\alpha} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[Q^{1,m}_{\alpha} - \epsilon_{\alpha\beta}\left(Q^{2,m}_{\beta}\right)^{\dagger}\right]
\end{aligned}
\tag{93}
$$

οι οποίοι μαζί με τους ερμητιανούς συζυγείς τους ικανοποιούν:

$$
\begin{aligned}
&\left\{a^{m}_{\alpha}, (a^{n}_{\beta})^{\dagger}\right\} = \delta^{mn}\delta_{\alpha\beta}\,(2M + Z_n) \\
&\left\{b^{m}_{\alpha}, (b^{n}_{\beta})^{\dagger}\right\} = \delta^{mn}\delta_{\alpha\beta}\,(2M - Z_n)
\end{aligned}
\tag{94}
$$

και όλοι οι άλλοι αντιμεταθέτες (των $a, a^{\dagger}$ και $b, b^{\dagger}$ μεταξύ τους) είναι μηδέν. Επειδή ο αντιμεταθέτης ενός τελεστή με τον συζυγή του είναι θετικά ορισμένος, οι τελεστές στο δεξί μέλος των (94) θα πρέπει να είναι θετικοί και έτσι λαμβάνουμε το λεγόμενο BPS [15] φράγμα για τη μάζα:

$$
|Z_n| \leqslant 2M \;\;,\;\; n = 1, \ldots, \frac{\mathcal{N}}{2}
\tag{95}
$$

Παρατηρούμε από αυτή ότι στην περίπτωση όπου κάποιες ιδιοτιμές $\{Z_i\}^{r}_{i=1}$ ικανοποιούν την ισότητα στο παραπάνω φράγμα, τότε οι αντίστοιχοι $2r$ τελεστές (b και $b^{\dagger}$) πρέπει να αναπαρασταθούν με τους μηδενικούς τελεστές. Έτσι η υπερσυμμετρική άλγεβρα περιγράφεται πλέον, όπως αναλύσαμε νωρίτερα, με μια Ευκλείδεια άλγεβρα Clifford διάστασης $4\mathcal{N} - 2r$, με ομάδα αυτομορφισμών την $SO(4\mathcal{N} - 2r)$. Συγκεκριμένα για την περίπτωση $\mathcal{N} = 2$ η οποία αφορά το κύριο κομμάτι της εργασίας, έχουμε μόνο ένα

15 από τους: Bogomolnyi, Prasad, Sommerfeld.

κεντρικό φορτίο το οποίο μπορούμε να γράψουμε ώς[16] $Z_1 \equiv 2\sqrt{2}Z$ και έτσι το φράγμα BPS είναι:

$$M \geqslant \sqrt{2}|Z| \tag{96}$$

όπου οι αναπαραστάσεις που ικανοποιούν την ισότητα ("μικρές" αναπαραστάσεις) δεν περιέχουν $2^{2\mathcal{N}}$ καταστάσεις, αλλά $2^{\mathcal{N}}$ όπως στην άμαζη περίπτωση.

1.4 Ο Φορμαλισμός του Υπερχώρου και Υπερπεδία για $\mathcal{N} = 1$

Προκειμένου να κατασκευάσουμε τοπικές αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρίας σε πεδία και από εκεί τις αναλλοίωτες Λαγκρανζιανές, είναι χρήσιμη η εισαγωγή του υπερχώρου, ο οποίος αποτελεί σημαντικό εργαλείο για τις περιπτώσεις όπου $\mathcal{N} = 1, 2$ οι οποίες θα μας απασχολήσουν. Πρόκειται για την επέκταση του χωρόχρονου Minkowski έτσι ώστε να υπάρχει συναλλοιώτητα κάτω από την ομάδα Super Poincaré, και κατασκευάζεται με τον ίδιο τρόπο. Στις σχετικιστικές κβαντικές θεωρίες πεδίου οι συντεταγμένες x^μ χαρακτηρίζουν ένα σημείο του συμπλόκου (coset) της ομάδας Poincaré ώς προς την ομάδα Lorentz:

$$\mathbb{M}^4 \cong \left(\mathbb{R}^4 \rtimes SO(1,3)\right)/SO(1,3) \tag{97}$$

αυτό περιέχει τις κλάσεις ισοδυναμίας των στοιχείων της ομάδας Poincaré, τα οποία θεωρούνται ισοδύναμα εάν διαφέρουν κατά ένα μετασχηματισμό Lorentz. Επομένως, ο χώρος αυτός χαρακτηρίζεται από τα στοιχεία της μορφής:

$$\{\exp\left(ix^\mu P_\mu\right)\} \leftrightarrow x^\mu \tag{98}$$

δηλαδή από τις συντεταγμένες x^μ, καθώς οι χωροχρονικές μεταθέσεις και οι μετασχηματισμοί Lorentz επάγουν τους σωστούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων:

$$\exp\left(ia^\mu P_\mu\right)\exp\left(ix^\mu P_\mu\right) = \exp\left(i(x^\mu + a^\mu)P_\mu\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu} \tag{99}$$

$$\exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)\exp\left(ix^\mu P_\mu\right) =$$

$$\exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)\exp\left(ix^\mu P_\mu\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)\exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)$$

---

16 για την κανονικοποίηση που ακολουθούν οι Seiberg και Witten στο πρωτότυπο [21]

όπου modulo μετασχηματισμούς Lorentz, το παραπάνω είναι ισοδύναμο με:

$$\exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)\exp\left(ix^{\mu}P_{\mu}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)$$
$$= 1 + ix^{\mu}\exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)P_{\mu}\exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right) + \dots$$
$$= \exp\left\{ix^{\mu}\exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)P_{\mu}\exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)\right\}$$
$$= \exp\left(ix^{\mu}\Lambda_{\mu}^{\nu}P_{\nu}\right)$$

$$\Rightarrow x^{\mu} \mapsto \Lambda_{\nu}^{\mu}x^{\nu} \tag{100}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο μετασχηματισμός Lorentz του τελεστή P_{μ}.

Σε πλήρη αντιστοιχία, μπορούμε να εισάγουμε νέες σπινοριακές συντεταγμένες θ^{α} και $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ οι οποίες είναι Grassmann[17] και μπορούν να φέρουν την υπερσυμμετρική άλγεβρα σε μορφή μιας Lie Άλγεβρας (πολλαπλασιάζοντας τη (38) απο αριστερά με θ^{α} και από δεξιά με $\bar{\theta}^{\dot{\beta}}$):

$$\left[\theta Q, \bar{\theta}\bar{Q}\right] = 2\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}P_{\mu} \tag{101}$$

όπου η συστολλή των $SL(2,\mathbb{C})$ δεικτών εννοείται: $\theta Q \equiv \theta_{\alpha}Q^{\alpha}$, επίσης ισχύει: $[\theta Q, \theta Q] = 0 = \left[\bar{\theta}\bar{Q}, \bar{\theta}\bar{Q}\right]$. Διαβάζοντας αυτή μπορούμε να γράψουμε το γενικό στοιχείο της ομάδας Super Poincaré ώς:

$$G(x,\omega,\theta,\bar{\theta}) = \exp\left(ix^{\mu}P_{\mu} + i\theta Q + i\bar{\theta}\bar{Q}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right) \tag{102}$$

Το οποίο modulo τους μετασχηματισμούς Lorentz, δίνει το στοιχείο του $\mathcal{N} = 1$ υπερχώρου διάστασης $8 = 4$ μποζονικοί βαθμοί ελευθερίας (x^{μ}) + 4 φερμιονικοί $(\theta^{\alpha}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$, με την εξής παραμετροποίηση:

$$\left\{\exp\left(ix^{\mu}P_{\mu} + i\theta Q + i\bar{\theta}\bar{Q}\right)\right\} \leftrightarrow x^{M} \equiv (x^{\mu}, \theta^{\alpha}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \tag{103}$$

Έτσι, οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί υπο μια (σπινοριακή) παράμετρο ξ θα μετασχηματίσουν τις συντεταγμένες του υπερχώρου ώς:

$$\exp\left(i\xi Q + i\bar{\xi}\bar{Q}\right)\exp\left(ix^{\mu}P_{\mu} + i\theta Q + i\bar{\theta}\bar{Q}\right)$$
$$= \exp\left\{ix^{\mu}P_{\mu} + i(\theta+\xi)Q + i(\bar{\theta}+\bar{\xi})\bar{Q} - \frac{1}{2}\left[i\xi Q, i\bar{\theta}\bar{Q}\right] - \frac{1}{2}\left[i\bar{\xi}\bar{Q}, i\theta Q\right]\right\}$$

17 Επομένως ικανοποιούν: $\{\theta^{\alpha}, \theta^{\beta}\} = 0 = \{\theta^{\alpha}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\} = \left\{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\right\} = [x^{\mu}, \theta^{\alpha}] = [x^{\mu}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}]$ καθώς επίσης και: $(\theta^1)^2 = 0 = (\theta^2)^2 = (\bar{\theta}_{\dot{1}})^2 = (\bar{\theta}_{\dot{2}})^2$

$$= \exp\left\{i(x^\mu - i\xi\sigma^\mu\bar\theta + i\theta\sigma^\mu\bar\xi)P_\mu + i(\theta+\xi)Q + i(\bar\theta+\bar\xi)\bar Q\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta^\alpha \mapsto \theta^\alpha + \xi^\alpha \\ \bar\theta_{\dot\alpha} \mapsto \bar\theta_{\dot\alpha} + \bar\xi_{\dot\alpha} \\ x^\mu \mapsto x^\mu - i\xi\sigma^\mu\bar\theta + i\theta\sigma^\mu\bar\xi \end{cases} \tag{104}$$

Δηλαδή, αυτοί επάγουν μεταθέσεις στις σπινοριακές συντεταγμένες, αλλά επίσης και μια μετάθεση στις χωροχρονικές συντεταγμένες x^μ. Μπορούμε με την ίδια λογική να αναπαραστήσουμε την $\mathcal{R}$ συμμετρία στον υπερχώρο, αλλάζοντας ελαφρώς τον ορισμό του για να ληφθεί υπ'όψιν:

$$\mathbb{M}^4 \cong \frac{\mathbb{R}^4 \rtimes SO(1,3)}{SO(1,3)\times U(1)_{\mathcal{R}}} \tag{105}$$

Έτσι, εάν ορίσουμε τον κανονικοποιημένο γεννήτορα της $U(1)_{\mathcal{R}}$ ώς:

$$R := -\frac{\sum_l S_l B_l}{\sum_r S_r S_r} \tag{106}$$

με $[R, Q_\alpha] = -Q_\alpha$, $[R, \bar Q_{\dot\alpha}] = \bar Q_{\dot\beta}$, έχουμε:

$$e^{i\varphi R}\exp\left(ix^\mu P_\mu + i\theta Q + i\bar\theta\bar Q\right) \sim e^{i\varphi R}\exp\left(ix^\mu P_\mu + i\theta Q + i\bar\theta\bar Q\right)e^{-i\varphi R}$$

$$= 1 + ix^\mu P_\mu + ie^{i\varphi R}\left(\theta Q + \bar\theta\bar Q\right)e^{-i\varphi R} + \dots$$

$$= \exp\left(ix^\mu P_\mu + ie^{-i\varphi}\theta Q + ie^{i\varphi}\bar\theta\bar Q\right)$$

$$\Rightarrow \theta \mapsto e^{-i\varphi}\theta, \bar\theta \mapsto e^{i\varphi}\bar\theta \tag{107}$$

εφ'όσων ισχύει:

$$e^{i\varphi R}\theta Q e^{-i\varphi R} \approx (1+i\varphi R)\theta Q(1-i\varphi R) = \theta Q + i\varphi\theta^\alpha[R, Q_\alpha]$$

$$= (1-i\varphi)\theta Q \approx e^{-i\varphi}\theta Q$$

Θα πρέπει επομένως, να βρούμε αναπαραστάσεις των υπερφορτίων $Q, \bar Q$ ώς διαφορικοί τελεστές οι οποίοι θα δρούν πάνω σε συναρτήσεις του υπερχώρου. Μια συνάρτηση των συντεταγμένων του υπερχώρου $F(x, \theta, \bar\theta)$ ονομάζεται υπερπεδίο και μπορούμε να το σκεφτούμε ώς ένα κανονικό πεδίο το οποίο μετασχηματίζεται με τους γνωστούς τρόπους κάτω από την ομάδα Poincaré, ώς τελεστής και ώς άνυσμα του χώρου Hilbert, με τη διαφορά ότι εφ'όσων οι δύο σπινοριακές συντεταγμένες είναι Grassmann, μπορούμε να το αναπτύξουμε στα $\theta, \bar{\theta}$ όπου στο ανάπτυγμα θα υπάρχουν όροι που περιέχουν το πολύ τέσσερα θ: $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} = 4\theta^1\theta^2\bar{\theta}^{\dot{1}}\bar{\theta}^{\dot{2}}$

$$\begin{aligned} F(x,\theta,\bar{\theta}) &= f(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) \\ &+ \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\upsilon_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\rho(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x) \end{aligned} \tag{108}$$

όπου παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες του υπερπεδίου είναι διάφορα βαθμωτά (f, m, n, d), σπινοριακά $(\psi, \bar{\chi}, \bar{\lambda}, \rho)$ και ένα ανυσματικό πεδίο (υ_μ), καθώς επίσης ότι έχουμε 16 μποζονικούς και 16 φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας. Θα ορίσουμε επίσης και τις παραγώγους στις σπινοριακές κατευθύνσεις με τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha\theta^\beta &\equiv \frac{\partial\theta^\beta}{\partial\theta^\alpha} = \delta_\alpha^\beta \ , \quad \partial_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = 0 \\ \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} &\equiv \frac{\partial\bar{\theta}_{\dot{\beta}}}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \ , \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\theta^\beta = 0 \end{aligned} \tag{109}$$

Αφού γνωρίζουμε πώς οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί δρούν στις συντεταγμένες του υπερχώρου, ένα υπερπεδίο θα μετασχηματίζεται ώς:

$$\begin{aligned} &\exp\left(i\xi Q + i\bar{\xi}\bar{Q}\right) F(x^\mu,\theta,\bar{\theta}) \exp\left(-i\xi Q - i\bar{\xi}\bar{Q}\right) \\ &\qquad = F(x^\mu - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \end{aligned} \tag{110}$$

και ώς άνυσμα:

$$\exp\left(i\xi Q + i\bar{\xi}\bar{Q}\right) F(x^\mu,\theta,\bar{\theta}) = F(x^\mu - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \tag{111}$$

τα οποία στην απειροστή μορφή (κρατώντας γραμμικούς όρους ώς προς τις παραμέτρους $\xi, \bar{\xi}$) δίνουν:

$$\begin{aligned} \delta_{\xi,\bar{\xi}} F(x^\mu,\theta,\bar{\theta}) &= F(x^\mu - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) - F(x^\mu,\theta,\bar{\theta}) \\ &= -i\left[F, \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right] = \left(i\xi Q + i\bar{\xi}\bar{Q}\right) F(x^\mu,\theta,\bar{\theta}) \end{aligned} \tag{112}$$

Από αυτή, μπορούμε να διαβάσουμε τις τελεστικές εκφράσεις των Q και $\bar{Q}$ ώς εξής:

$$\delta_\xi F(x^\mu,\theta,\bar{\theta}) = F(x^\mu - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta}) - F(x^\mu,\theta,\bar{\theta})$$

$$= \xi^\alpha \left[\partial_\alpha - i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu\right] F(x^\mu,\theta,\bar{\theta}) = i\xi Q F(x^\mu,\theta,\bar{\theta})$$

$$\boxed{\Rightarrow Q_\alpha = -i\partial_\alpha - \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \qquad (113)}$$

και:

$$\boxed{\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = (Q_\alpha)^\dagger = i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \theta^\beta \left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu} \tag{114}$$

οι οποίοι ικανοποιούν την υπερσυμμετρική άλγεβρα (38). Έχοντας τις εκφράσεις των τελεστών, μπορούμε να βρούμε την υπερσυμμετρική μεταβολή και των συνιστοσών του υπερπεδίου (108):

- $\xi Q F(x^M) = \xi^\alpha \left(-i\partial_\alpha - \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\right) F$

$$\begin{aligned}
=& -i\left(\xi\psi + 2\theta\xi m + \xi\sigma^\mu\bar{\theta}\upsilon_\mu + 2\xi\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}\xi\rho + 2\xi\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\lambda}\right)\\
&- \xi\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu f - \xi\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} - \xi\sigma^\mu\bar{\theta}(\theta\theta)\partial_\mu m\\
&+ (\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\xi)(\partial\cdot\upsilon) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}
\end{aligned} \tag{115}$$

- $\bar{Q}\bar{\xi}F(x^M) = \left(i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\right)\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}F$

$$\begin{aligned}
=& i\left(\bar{\xi}\bar{\xi} + 2\bar{\theta}\bar{\xi}n + \theta\sigma^\mu\bar{\xi}\upsilon_\mu + \theta\theta\bar{\xi}\bar{\lambda} + 2\bar{\theta}\bar{\xi}\theta\rho + 2\theta\theta\bar{\theta}\bar{\xi}d\right)\\
&+ \theta\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu f - \frac{1}{2}(\theta\theta)\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi} + \theta\sigma^\mu\bar{\xi}\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\chi} + \theta\sigma^\mu\bar{\xi}(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu n\\
&+ (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\xi})(\partial\cdot\upsilon) - \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\rho\sigma^\mu\bar{\xi}
\end{aligned} \tag{116}$$

Τα οποία μας δίνουν:

$$\delta_{\xi,\bar{\xi}}F = i\left(\xi Q + \bar{Q}\bar{\xi}\right)F$$

$$\begin{aligned}
=& \xi\psi + 2\theta\xi m + \xi\sigma^\mu\bar{\theta}\upsilon_\mu + 2\xi\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}\xi\rho + \bar{\theta}\bar{\theta}\xi\rho + 2\xi\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d\\
&- i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu f - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\partial_\mu\psi + \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}\\
&- i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\theta\partial_\mu m + i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\xi(\partial\cdot\upsilon) + \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\\
&- \bar{\chi}\bar{\xi} - 2\bar{\theta}\bar{\xi}n - \theta\sigma^\mu\bar{\xi}\upsilon_\mu - \theta\theta\bar{\xi}\bar{\lambda} - 2\bar{\theta}\bar{\xi}\theta\rho\\
&- 2\theta\theta\bar{\theta}\bar{\xi}d + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu f - \frac{i}{2}\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi}\\
&+ i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\chi} + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\xi}(\partial\cdot\upsilon) + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu n - \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\rho\sigma^\mu\bar{\xi}
\end{aligned} \tag{117}$$

από όπου μπορούμε να διαβάσουμε τις μεταβολές των πεδίων ώς: $\delta_{\xi,\bar{\xi}}F = \delta_{\xi,\bar{\xi}}f + \theta\delta_{\xi,\bar{\xi}}\psi + \ldots$:

$$
\begin{aligned}
&\delta_{\xi,\bar{\xi}} f = \xi\psi - \bar{\chi}\bar{\xi} \\
&\delta_{\xi,\bar{\xi}} \psi_\alpha = 2\xi_\alpha m - \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \upsilon_\mu + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu f \\
&\delta_{\xi,\bar{\xi}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = -2\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} n - i\xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu f + \xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\upsilon_\mu \\
&\delta_{\xi,\bar{\xi}} m = -\bar{\xi}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi} \\
&\delta_{\xi,\bar{\xi}} n = \xi\rho + \frac{i}{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} \\
&\delta_{\xi,\bar{\xi}} \upsilon_\mu = \frac{i}{2}\xi\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}\bar{\xi}\partial_\mu\bar{\chi} + \bar{\lambda}\bar{\sigma}_\mu\xi + \bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu\rho \\
&\delta_{\xi,\bar{\xi}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} = -2\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} d + i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}(\partial\cdot\upsilon) - i\xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu m \\
&\delta_{\xi,\bar{\xi}} \rho_\alpha = 2\xi_\alpha d + i\xi_\alpha(\partial\cdot\upsilon) - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu n \\
&\delta_{\xi,\bar{\xi}} d = \frac{i}{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\partial_\rho\sigma^\mu\bar{\xi} = \partial_\mu\left[\frac{i}{2}(\xi\sigma^\mu\bar{\lambda} - \rho\sigma^\mu\bar{\xi})\right]
\end{aligned}
\tag{118}
$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο πεδίο συνιστώσα (d) μετασχηματίζεται σε μια τέλεια χωροχρονική παράγωγο κάτω από την υπερσυμμετρία, κάτι το οποίο θα σχολιάσουμε αργότερα, καθώς βοηθά στη κατασκευή αναλλοίωτων Λαγκρανζιανών. Τέλος, οι γραμμικοί συνδιασμοί, τα γινόμενα[18] και οι χωροχρονικές παράγωγοι των υπερπεδίων είναι και αυτά υπερπεδία, η σπινοριακή παράγωγος $\partial_\alpha F$ δεν απεικονίζει υπερπεδία σε υπερπεδία. Ο λόγος είναι ότι αυτή δεν μετατίθεται με την υπερσυμμετρική μεταβολή: $\left[\partial_\alpha, \delta_{\xi,\bar{\xi}}\right] = \left[\partial_\alpha, i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\right] \neq 0$, επομένως θα πρέπει να ορίσουμε συναλλοίωτες παραγώγους στον υπερχώρο, οι οποίες θα ικανοποιούν:

$$
\left[D_\alpha, \delta_{\xi,\bar{\xi}}\right] = 0 = \left[\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \delta_{\xi,\bar{\xi}}\right] \tag{119}
$$

και έτσι το $D_\alpha F$ (και $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ αντίστοιχα) είναι υπερπεδίο. Αυτές ορίζονται ώς:

$$
\begin{aligned}
D_\alpha &:= \partial_\alpha + i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu \\
\bar{D}_{\dot{\alpha}} &= \left(D_\alpha\right)^\dagger = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\beta\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu
\end{aligned}
\tag{120}
$$

και αντιμετατίθενται με όλα τα υπερφορτία:

$$
\left\{D_\alpha, Q_\beta\right\} = \left\{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 0 = \left\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\right\} = \left\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} \tag{121}
$$

ενώ μεταξύ τους ικανοποιούν τις σχέσεις αντιμετάθεσης:

$$
\begin{aligned}
&\left\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\beta}}\right\} = 2i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu = -2\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu \\
&\left\{D_\alpha, D_\beta\right\} = 0 = \left\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\right\}
\end{aligned}
\tag{122}
$$

18 $\delta_{\xi,\bar{\xi}}(F_1F_2) = -i\left[F_1F_2, \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right] = -iF_1\left[F_2, \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right] - i\left[F_1, \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right]F_2 = F_1\left[i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)F_2\right] + \left[i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)F_1\right]F_2 = i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)(F_1F_2)$, εφ'όσων τα $Q, \bar{Q}$ αναπαρίστανται ώς διαφορικοί τελεστές.

1.4.1 Χειραλικά Υπερπεδία

Το γενικό βαθμωτό υπερπεδίο όπως γράφεται στη (108) παρέχει μια α-ναγώγιμη αναπαράσταση της υπερσυμμετρίας εκτός φλοιού μάζας (off-shell). Προκειμένου να κατασκευάσουμε τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσης που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, θα πρέπει να υποβάλουμε το υπερπεδίο σε κάποιους συναλλοίωτους και αναλλοίωτους κάτω από την υπερσυμμετρία δεσμούς, οι οποίοι θα διώξουν τους επιπλέον βαθμούς ε-λευθερίας. Η πρώτη αναπαράσταση που θα εξετάσουμε είναι το χειραλικό υπερπεδίο Φ, το οποίο υπόκειται στο δεσμό:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \tag{123}$$

και αντιστοίχως ορίζεται το αντι-χειραλικό υπερπεδίο $\bar{\Phi} = \Phi^{\dagger}$:

$$D_{\alpha}\bar{\Phi} = 0 \tag{124}$$

Εξόρισμού της υπερσυναλλοίωτης παραγώγου, εάν το Φ είναι λύση της (123), τότε θα είναι λύση και το $\delta_{\xi,\bar{\xi}}\Phi$. Για να λύσουμε την εξίσωση (123) προκειμένου να βρούμε το ανάπτυγμα του Φ, αλλάζουμε συντεταγμένες ορίζοντας:

$$\begin{aligned} y^{\mu} &:= x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} \\ (y^{\mu})^{\dagger} &= x^{\mu} - i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} \end{aligned} \tag{125}$$

όπου αυτές ικανοποιούν:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}y^{\mu} = \left(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^{\beta}\sigma^{\nu}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\nu}\right)(x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}) = -i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} + i\theta^{\alpha}\sigma^{\nu}_{\alpha\dot{\alpha}}\delta^{\mu}_{\nu}$$

$$\Rightarrow \bar{D}_{\dot{\alpha}}y^{\mu} = 0 \tag{126}$$

και $D_{\alpha}(y^{\mu})^{\dagger} = 0$ αντίστοιχα. Επειδή έχουμε επίσης ότι $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^{\alpha} = 0 = D_{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, οποιοδήποτε υπερπεδίο έχει εξάρτηση $\Phi = \Phi(y,\theta)$ ικανοποιεί αυτόματα τη (123):

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi(y,\theta) &= \left(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\right)\Phi(y,\theta) \\ &= \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}y^{\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial y^{\mu}} + \cancelto{0}{\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\Phi} + i\left(\theta\sigma^{\mu}\right)_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\Phi \\ &= -i\left(\theta\sigma^{\mu}\right)_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\Phi + i\left(\theta\sigma^{\mu}\right)_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\Phi = 0 \end{aligned}$$

και $D_{\alpha}\bar{\Phi}(y^{\dagger},\bar{\theta}) = 0$, όπου χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας αλυσίδας για την $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$, εναλλακτικά θα μπορούσαμε να γράψουμε τις υπερσυναλλοίωτες παραγώγους στις y συντεταγμένες όπου παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} D^{(y)}_{\alpha} &= \partial_{\alpha} + 2i\left(\sigma^{\mu}\bar{\theta}\right)_{\alpha}\partial^{(y)}_{\mu} \\ \bar{D}^{(y)}_{\dot{\alpha}} &= \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \end{aligned} \tag{127}$$

όπου από εδώ και στο εξής, δεν θα διακρίνουμε μεταξύ $\frac{\partial}{\partial y^\mu}$ και $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, μιας και είναι ίδιες. Μπορούμε να αναπτύξουμε το $\Phi(y,\theta)$ ώς προς τις Grassmann συντεταγμένες για να πάρουμε:

$$\Phi(y,\theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \tag{128}$$

το οποίο περιέχει δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία (A, F) και ένα σπίνορα Weyl, δηλαδή έχει 2+2=4 μποζονικούς και 4 φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας. Προκειμένου να πάρουμε το πλήρες ανάπτυγμα στις αρχικές συντεταγμένες $(x, \theta, \bar{\theta})$ θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor μαζί με τη βοήθεια των ταυτότητων Fierz:

- $A(y) = A(x + i\theta\sigma\bar{\theta}) \approx A(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A(x) + \frac{i}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}i\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\mu\partial_\nu A(x)$

$$\Rightarrow A(y) \approx A(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A(x) \tag{129}$$

$$\circ \quad \psi(y) \approx \psi(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\psi(x) \tag{130}$$

$$\circ \quad F(y) \approx F(x) \tag{131}$$

Το οποίο μας δίνει:

$$\begin{aligned}\Phi(y,\theta) = {} & A(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A(x) \\ & + \sqrt{2}i\theta\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\partial_\mu\psi(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Rightarrow \Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = {} & A(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A(x) \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A(x)\end{aligned}} \tag{132}$$

και:

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi^\dagger(x,\theta,\bar{\theta}) = {} & A^*(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A^*(x) \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A^*(x)\end{aligned}} \tag{133}$$

Παρατηρούμε βέβαια, ότι η αναπαράσταση αυτή έχει τους διπλάσιους βαθμούς ελευθερίας από τη χειραλική πολλαπλέτα όπως την περιγράψαμε στο επίπεδο των καταστάσεων. Αυτό συμβαίνει επειδή οι αναπαραστάσεις που παρουσιάσαμε ήταν εντός φλοιού μάζας (on-shell), δηλαδή ικανοποιούνταν οι εξισώσεις κίνησης οι οποίες διώχνουν τους επιπλέον βαθμούς ελευθερίας κάνοντας τις αναπαραστάσεις μη αναγώγιμες. Ο λόγος που στην τοπική αναπαράσταση της υπερσυμμετρίας με πεδία γίνεται χρήση μεγαλύτερων/αναγώγιμων αναπαραστάσεων εκτός φλοιού μάζας (off-shell) είναι προκειμένου να υπάρχει συναλλοιώτητα κάτω από την ομάδα Poincaré. Για να βρούμε τους κανόνες μετασχηματισμού των πεδίων κάτων από την υπερσυμμετρία, επιλέγουμε να γράψουμε τα υπερφορτία στις y συντεταγμένες, τα οποία γράφονται ώς:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha}^{(y)} &= -i\partial_{\alpha} \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^{(y)} &= i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + 2\left(\theta\sigma^{\mu}\right)_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu} \end{aligned} \tag{134}$$

και τότε η μεταβολή του $\Phi(y^M) = \Phi(y, \theta)$ είναι:

$$\begin{aligned} \delta_{\xi,\bar{\xi}}\Phi(y,\theta) &= i\left(\xi Q^{(y)} + \bar{Q}^{(y)}\bar{\xi}\right)\Phi(y,\theta) \\ &= \left(\xi^{\alpha}\partial_{\alpha} + 2i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\right)\left(A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y)\right) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2}\xi\psi + 2\left(\theta\xi\right)F + 2i\left(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}\right)\partial_{\mu}A + 2\sqrt{2}i\left(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}\right)\theta\partial_{\mu}\psi$$

$$\Rightarrow \delta_{\xi,\bar{\xi}}\Phi(y,\theta) = \sqrt{2}\xi\psi + 2\left(\theta\xi\right)F + 2i\left(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}\right)\partial_{\mu}A - \sqrt{2}i(\theta\theta)\partial_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\xi} \tag{135}$$

Επομένως, συγκρίνοντας την παραπάνω με τον ορισμό του χειραλικού υπερπεδίου, καταλήγουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_{\xi,\bar{\xi}}A(x) &= \sqrt{2}\xi\psi(x) \\ \delta_{\xi,\bar{\xi}}\psi_{\alpha}(x) &= \sqrt{2}\xi_{\alpha}F(x) + \sqrt{2}i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}A(x) \\ \delta_{\xi,\bar{\xi}}F(x) &= -\sqrt{2}i\partial_{\mu}\psi(x)\sigma^{\mu}\bar{\xi} = \partial_{\mu}\left(\sqrt{2}i\bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}\psi(x)\right) \end{aligned} \quad (136)}$$

Από τις σχέσεις μετασχηματισμού μπορεί κανείς να δεί ότι το βοηθητικό πεδίο F (το οποίο αποτελεί μη φυσικό βαθμό ελευθερίας) βρίσκεται μόνο για να κλείνει η άλγεβρα και όταν ικανοποιούνται οι εξισώσεις κίνησης (on-shell) αυτό δεν συμμετέχει. Πράγματι, εάν το ψ ικανοποιεί $\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) = 0$, τότε $\delta_{\xi,\bar{\xi}}F = 0$ και επίσης η μεταβολή της μεταβολής του F πρέπει να είναι και αυτή μηδενική για να κλείνει η άλγεβρα, το οποίο οδηγεί:

$$\delta_{\xi_2,\bar{\xi}_2}\delta_{\xi_1,\bar{\xi}_1}F(x) = \partial_{\mu}\left(\sqrt{2}i\bar{\xi}_1\bar{\sigma}^{\mu}\delta_{\xi_2,\bar{\xi}_2}\psi\right)$$

$$= \sqrt{2}i\bar{\xi}_2\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\left(\sqrt{2}\xi_2 F + \sqrt{2}i\sigma^{\nu}\bar{\xi}_2\partial_{\nu}A\right)$$

$$= 2i\left(\bar{\xi}_2\bar{\sigma}^{\mu}\xi_2\right)\partial_{\mu}F - 2\bar{\xi}_1\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\bar{\xi}_2\partial_{\mu}\partial_{\nu}A$$

$$= 2i\left(\bar{\xi}_1\bar{\sigma}^{\mu}\xi_2\right)\partial_{\mu}F + 4\bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\Box A = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_{\mu}F(x) = 0 \\ \Box A(x) = 0 \end{cases} \tag{137}$$

Δηλαδή το βαθμωτό μιγαδικό πεδίο A ικανοποιεί και αυτό την εξίσωση κίνησής του, ενώ το F είναι ένα σταθερό πεδίο το οποίο δεν έχει δυναμική/δεν διαδίδεται. Παρατηρούμε επίσης ότι το F μετασχηματίζεται σε μια τέλεια παράγωγο κάτω από την υπερσυμμετρία και επομένως είναι καλός υποψήφιος για τη κατασκευή υπερσυμμετρικά αναλλοίωτων Λαγκρανζιανών όπως θα δούμε στη συνέχεια. Αυτό συμβαίνει σε κάθε υπερπεδίο, το πεδίο συνιστώσα με την υψηλότερη διάσταση μάζας μετασχηματίζεται αναγκαστικά σε μια παράγωγο κάποιου άλλου πεδίου συνιστώσας για να είναι σωστές οι διαστάσεις. Μπορούμε από την (101) να διαβάσουμε τις διαστάσεις των υπερφορτίων και των σπινοριακών συντεταγμένων γνωρίζοντας ότι $[P_{\mu}] = 1$:

$$\begin{aligned} [Q_{\alpha}] &= \frac{1}{2} = \left[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] \\ [\theta] &= -\frac{1}{2} = \left[\bar{\theta}\right] \end{aligned} \tag{138}$$

Αυτό, εκτός από τα γνωστά $[A] = 1$ και $[\psi] = 3/2$, μας δίνει τη διάσταση του F να είναι $[F] = 2$, το οποίο εφ'όσων $[\partial_{\mu}] = 1$ και $[\delta_{\xi,\bar{\xi}}] = 1$ επιβεβαιώνει τα προηγούμενα.

Σημειώνουμε τέλος, ότι μιας και η υπερσυναλλοίωτη παράγωγος $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ (D_{α}) ικανοποιεί τον κανόνα της αλυσίδας (ώς παραγώγιση), τότε εάν διαθέτουμε μια συλλογή από (αντι)χειραλικά υπερπεδία $\{\Phi_i\}$ ($\{\bar{\Phi}_i\}$) το γινόμενό τους είναι επίσης (αντι)χειραλικό υπερπεδίο (αφού σε κάθε όρο θα εμφανιστεί το $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi_j = 0$ και αντίστοιχα για τα αντιχειραλικά). Παρακάτω γίνεται ο υπολογισμός για γινόμενο δύο και τριών υπερπεδίων στις x συντεταγμένες:

- $$\begin{aligned} \Phi_i\Phi_j = {} & A_iA_j + \sqrt{2}\theta\left(\psi_iA_j + \psi_jA_i\right) + \theta\theta\left(F_iA_j + F_jA_i - \psi_i\psi_j\right) \\ & + \theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\left(A_i\partial_{\mu}A_j + A_j\partial_{\mu}A_i\right) \\ & + (\theta\theta)\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\psi^{\alpha}_i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A_j + \psi^{\alpha}_j\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A_i + \partial_{\mu}\psi^{\alpha}_i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}A_j\right. \\ & \left. + \partial_{\mu}\psi^{\alpha}_j\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}A_i\right) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(A_i\Box A_j + A_j\Box A_i\right) \end{aligned} \tag{139}$$

$$
\begin{aligned}
\circ\ \Phi_i\Phi_j\Phi_k = & A_iA_jA_k + \sqrt{2}\theta\left[\psi_iA_jA_k + (j,k,i) + (k,i,j)\right] \\
& + \theta\theta\left[F_iA_jA_k + (j,k,i) + (k,i,j) - \psi_i\psi_jA_k - (j,k,i) - (k,i,j)\right] \\
& + i\theta^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\left[A_iA_j\partial_\mu A_k + (j,k,i) + (k,i,j)\right] \\
& - \theta\theta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{i}{\sqrt{2}}\left[\partial_\mu\psi_i^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}A_jA_k + (j,k,i) + (k,i,j) + \right. \\
& \psi_i^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu A_jA_k + \psi_i^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu A_kA_j + \psi_j^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu A_kA_i + \\
& \left. + \psi_k^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}A_i\partial_\mu A_j + \psi_k^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}A_j\partial_\mu A_i\right] \\
& - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[(A_i\Box A_j)A_k + (j,k,i) + (k,i,j)\right]
\end{aligned} \tag{140}
$$

όπου ο συμβολισμός $+(j,k,i)+(k,i,j)$ σημαίνει ότι επαναλαμβάνεται ο εκάστοτε όρος με κυκλική εναλλαγή των δεικτών i,j,k. οτ

1.4.2 Λαγκρανζιανή Χειραλικών Υπερπεδίων

Υπάρχει άλλος ένας τρόπος που μπορούμε να κατασκευάσουμε νέα υπερπεδία από δοσμένα χειραλικά υπερπεδία ώς εξής:

$$
\begin{aligned}
\circ\ \Phi_i^\dagger\Phi_j = & A_i^*A_j + \sqrt{2}\theta\psi_jA_i^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_iA_j + \theta\theta F_jA_i^* + \bar{\theta}\bar{\theta}F_i^*A_j \\
& \theta^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left[i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\left(A_i^*\partial_\mu A_j - A_j\partial_\mu A_i^*\right) - 2\bar{\psi}_{i\alpha}\psi_{j\alpha}\right] \\
& + \theta\theta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\psi_j^\alpha\partial_\mu A_i^* - \partial_\mu\psi_j^\alpha A_i^*\right) + \sqrt{2}\bar{\psi}_{i\alpha}F_j\right] \\
& + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\partial_\mu\bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}}A_j - \bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}}\partial_\mu A_j\right) + \sqrt{2}\psi_jF_i^*\right] \\
& + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[-\frac{1}{4}\left(A_i^*\Box A_j + A_j\Box A_i^*\right) + F_i^*F_j + \right. \\
& \left. + \frac{i}{2}\left(\partial_\mu\psi_j\sigma^\mu\bar{\psi}_i - \psi_j\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i\right) + \frac{1}{2}\partial_\mu A_i^*\partial^\mu A_j\right]
\end{aligned} \tag{141}
$$

Όπως είναι προφανές, επειδή χρησιμοποιήσαμε και το Φ και το $\Phi^\dagger$, το πεδίο $\Phi^\dagger\Phi$ δεν είναι χειραλικό αλλά πέφτει στην κατηγορία των ανυσματικών υπερπεδίων, μιας και ικανοποιεί $(\Phi^\dagger\Phi)^\dagger = \Phi^\dagger\Phi$, τα οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια και θα αποδείξουμε ότι σε αυτά, ο υψηλότερης διάστασης όρος που μετασχηματίζεται σε τέλεια παράγωγο είναι η συνιστώσα του $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ όρου. Με αυτά λοιπόν, έχουμε αρκετά υλικά για να κατασκευάσουμε μια υπερσυμμετρικά αναλλοίωτη δράση από N χειραλικές πολλαπλέτες $\{\Phi_i\}$. Η γενικότερη επανακανονικοποιήσιμη Λαγκρανζιανή θα πρέπει να έχει διάσταση μάζας $[\mathcal{L}] = 4$ και να ικανοποιεί $\delta_{\xi,\bar{\xi}}\mathcal{L} = \partial_\mu(\dots)^\mu$, επομένως, μπορούμε να γράψουμε κάνοντας χρήση της ολοκλήρωσης στον υπερχώρο για να φιλτράρουμε τις $\theta\theta$ και $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ συνιστώσες του εκάστοτε πεδίου:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= K(\Phi_i, \Phi_i^\dagger)\Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} + \left(W(\Phi_i)|_{\theta\theta} + \text{h.c.}\right) \\
&= \int d^4\theta K(\Phi_i, \Phi_i^\dagger) + \left(\int d^2\theta W(\Phi_i) + \text{h.c.}\right)
\end{aligned} \tag{142}
$$

όπου οι συναρτήσεις $K(\Phi_i, \Phi_i^\dagger)$ και $W(\Phi_i)$ θα έχουν διαστάσεις μάζας[19]:

$$
\begin{aligned}
[K] &\leqslant 2 \\
[W] &\leqslant 3
\end{aligned} \tag{143}
$$

Η K ονομάζεται δυναμικό Kähler και η απλούστερη μορφή που μπορεί να έχει είναι $K(\Phi_i, \Phi_i^\dagger) = K^\dagger(\Phi_i, \Phi_i^\dagger) = \Phi_i^\dagger\Phi_i$, το οποίο θα παράξει τους κινητικούς όρους για τα βαθμωτά και τα φερμιόνια όπως φαίνεται από το ανάπτυγμα αφού χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες[20]:

$$
\begin{aligned}
\circ \quad \Phi_i^\dagger\Phi_i\Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} &= -\frac{1}{4}\left(-2\partial_\mu A_i^*\partial^\mu A_i\right) + F_i^*F_i + \frac{1}{2}\partial_\mu A_i^*\partial^\mu A_i \\
&\quad + \frac{i}{2}\left(\partial_\mu\psi_i\sigma^\mu\bar\psi_i - \psi_i\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi_i\right) + \text{τέλεια παράγωγος}
\end{aligned}
$$

$$
= \partial_\mu A_i^*\partial^\mu A_i + F_i^*F_i - i\psi_i\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi_i + \text{τέλεια παράγωγος} \tag{144}
$$

μαζί με ένα όρο των βοηθητικών πεδίων F_i τα οποία μπορούν να απαλοιφούν αντικαθιστώντας τα με τις εξισώσεις κίνησής τους. Όσο για τη W, αυτή μπορεί να είναι οποιαδήποτε ολόμορφη συνάρτηση των χειραλικών υπερπεδίων (δηλαδή μόνο συνάρτηση του Φ_i και όχι του $\Phi_i^\dagger$) το οποίο την κάνει αυτόματα χειραλικό υπερπεδίο, όπως φαίνεται εάν αναπτύξουμε κατά Taylor γύρω από το βαθμωτό πεδίο συνιστώσα $A_i(y)$:

$$
W(\Phi_i) = W(\Phi_i = A_i) + (\Phi_i - A_i)\left.\frac{\delta W}{\delta\Phi_i}\right|_{\Phi=A} + \frac{1}{2!}(\Phi_i - A_i)(\Phi_j - A_j)\left.\frac{\delta^2 W}{\delta\Phi_i\delta\Phi_j}\right|_{\Phi=A}
$$

$$
= W(A_i) + \left(\sqrt{2}\theta\psi_i + \theta\theta F_i\right)\left.\frac{\delta W}{\delta\Phi_i}\right|_{\Phi=A} + (\theta\psi_i)(\theta\psi_j)\left.\frac{\delta^2 W}{\delta\Phi_i\delta\Phi_j}\right|_{\Phi=A}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow W(\Phi_i) &= W(\Phi_i)|_{\Phi=A} + \sqrt{2}\theta\psi_i\left.\frac{\delta W}{\delta\Phi_i}\right|_{\Phi=A} \\
&\quad + \theta\theta\left[\left.\frac{\delta W}{\delta\Phi_i}\right|_{\Phi=A} F_i - \frac{1}{2}\psi_i\psi_j\left.\frac{\delta^2 W}{\delta\Phi_i\delta\Phi_j}\right|_{\Phi=A}\right]
\end{aligned} \tag{145}
$$

Με αυτά, η Λαγκρανζιανή γράφεται:

19 Μιας και $[d^4\theta] = -2$, $[d^2\theta] = [d^2\bar\theta] = -1$.

20 η άθροιση στους επαναλαμβανόμενους δείκτες εννοείται

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =&\partial_\mu A_i^* \partial^\mu A_i + F_i^* F_i - i\psi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i \\ &+ \left(\frac{\delta W}{\delta \Phi_i}\bigg|_{\Phi=A} F_i - \frac{1}{2}\psi_i\psi_j \, \frac{\delta^2 W}{\delta\Phi_i \delta\Phi_j}\bigg|_{\Phi=A} + \text{h.c.}\right)\end{aligned} \tag{146}$$

Εάν τώρα ολοκληρώσουμε τα βοηθητικά πεδία F_i:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta F_i^*} = \partial^\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial^\mu F_i^*} = 0$$

$$\Rightarrow F_i = -\left(\frac{\delta W}{\delta \Phi_i}\bigg|_A \right)^\dagger \equiv -\frac{\delta W^\dagger}{\delta \Phi_i^\dagger}\bigg|_{A^*} \tag{147}$$

και αντίστοιχα,

$$F_i^* = -\frac{\delta W}{\delta \Phi_i}\bigg|_A \tag{148}$$

και τα αντικαταστήσουμε στη (146) παίρνουμε:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu A_i^* \partial^\mu A_i - i\psi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i - \left(\frac{1}{2}\psi_i\psi_j \, \frac{\delta^2 W}{\delta\Phi_i \delta\Phi_j}\bigg|_A + \text{h.c.}\right) - \sum_i \left| \frac{\delta W}{\delta \Phi_i}\bigg|_A \right|^2 \tag{149}$$

όπου φαίνεται ότι οι δεύτερες παράγωγοι του υπερδυναμικού θα δώσουν τους όρους μάζας των φερμιονίων, ενώ σχηματίζεται ένα θετικά ορισμένο βαθμωτό δυναμικό αλληλεπίδρασης από το τετράγωνο του μέτρου της πρώτης παραγώγου:

$$V(A_i, A_i^*) = \sum_i \left| \frac{\delta W}{\delta \Phi_i}\bigg|_A \right|^2 \geqslant 0 \tag{150}$$

με τα κενά της θεωρίας να χαρακτηρίζονται από τις εξισώσεις:

$$\frac{\delta W}{\delta \Phi_i}\bigg|_A = -F_i^* = 0 \tag{151}$$

Εκ κατασκευής, η (146) είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} &\circ \;\; \delta_{\xi,\bar{\xi}} A_i = \sqrt{2}\xi\psi_i \\ &\circ \;\; \delta_{\xi,\bar{\xi}} \psi_{\alpha,i} = -\sqrt{2}\xi_\alpha \, \frac{\delta W^\dagger}{\delta \Phi_i^\dagger}\bigg|_{A^*} + \sqrt{2} i \left(\sigma^\mu \bar{\xi}\right)_\alpha \partial_\mu A_i \end{aligned} \tag{152}$$

Το Μοντέλο Wess-Zumino

Προκειμένου να δούμε πώς λειτουργεί αυτά, θα εστιάσουμε στο απλούστερο παράδειγμα μιας τέτοιας θεωρίας, στο οποίο θα επιλέξουμε να έχουμε ένα χειραλικό υπερπεδίο και μια συνάρτηση υπερδυναμικού της μορφής:

$$W(\Phi) = \frac{1}{2}m\Phi^2 + \frac{1}{3}g\Phi^3 \tag{153}$$

Από τις (139) και (140) διαβάζουμε:

$$\left.\frac{\delta W}{\delta \Phi}\right|_{\Phi=A} = mA + gA^2 \ , \quad \left.\frac{\delta^2 W}{\delta\Phi\delta\Phi}\right|_{\Phi=A} = m + 2gA \tag{154}$$

το οποίο οδηγεί στο βαθμωτό δυναμικό:

$$V(A, A^*) = m^2|A|^2 + g^2|A|^4 + mgA^2A^* + mg(A^*)^2A \tag{155}$$

και τη Λαγκρανζιανή:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WZ} = &\partial_\mu A^* \partial^\mu A - i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{m}{2}\left(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}\right) - m^2|A|^2 \\ &- g\left(\psi\psi A + \bar{\psi}\bar{\psi}A^*\right) - g^2|A|^4 - mg\left[A^2A^* + (A^*)^2A\right] \end{aligned} \tag{156}$$

Παρατηρούμε εδώ ότι η ιδιαιτερότητα της παραπάνω την οποία επέβαλε η υπερσυμμετρία είναι η εξίσωση των σταθερών σύζευξης της αλληλεπίδρασης Yukawa ($\sim \psi\psi A$) και της αλληλεπίδρασης του βαθμωτού πεδίου μεταξύ του.

1.4.3 Το μη Γραμμικό Σίγμα Μοντέλο

Μέχρι στιγμής ασχοληθήκαμε με Λαγκρανζιανές που δεσμεύονται από τις απαιτήσεις της επανακανονικοποιησιμότητας, όπως σε κάθε κβαντική θεωρία πεδίου η οποία επιθυμούμε να είναι πεπερασμένη σε όλες τις κλίμακες. Παρ'όλα αυτά, είναι καρποφόρο να χαλαρώσουμε αυτές τις απαιτήσεις εάν εξετάσουμε τη θεωρία υπό το πρίσμα μιας ενεργούς περιγραφής, δηλαδή μιας θεωρίας η οποία περιγράφει το σύστημα σε κάποια συγκεκριμένη ενεργειακή κλίμακα, αγνοώντας τη φυσική πέραν αυτής, χωρίς έτσι να περιορίζεται από την επανακανονικοποιησιμότητα. Ξεκινάμε με τη γενική μορφή μιας υπερσυμμετρικής Λαγκρανζιανής χειραλικών υπερπεδίων:

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta K(\Phi^i, \Phi^{j\dagger}) + \int d^2\theta W(\Phi^i) + \int d^2\bar{\theta}\bar{W}(\Phi^{i\dagger})$$

όπου τώρα το δυναμικό Kähler και το υπερδυναμικό δεν υπόκειται στον περιορισμό (143). Για τη μελέτη αυτής της Λαγκρανζιανής θα πρέπει να αναπτύξουμε τις συναρτήσεις των υπερπεδίων γύρω από τις βαθμωτές συνιστώσες τους, όπως κάναμε νωρίτερα για το υπερδυναμικό, με τη διαφορά ότι εδώ το δυναμικό Kähler δεν είναι ολόμορφη αλλά πραγματική συνάρτηση και έτσι θα πρέπε να αναπτύξουμε στα A^i και στα A^{*j}. Εξαιτίας αυτού, για το υπόλοιπο της υποενότητας, θα συμβολίζουμε με barred δείκτες τους δείκτες που φέρουν τα συζυγή πεδία (π.χ. A^i, $A^{*\bar{i}}$). Το ανάπτυγμα του δυναμικού Kähler τότε γράφεται:

$$
\begin{aligned}
K(\Phi^i,\Phi^{\dagger\bar{j}}) = {} & K(A^i,A^{*\bar{j}}) + \left.\frac{\delta K}{\delta\Phi^i}\right|_{A^i}\left(\Phi^i - A^i\right) + \left.\frac{\delta K}{\delta\Phi^{\dagger\bar{i}}}\right|_{A^{*\bar{i}}}\left(\Phi^{\dagger\bar{i}} - A^{*\bar{i}}\right) \\
& + \frac{1}{2}\left.\frac{\delta^2 K}{\delta\Phi^i\delta\Phi^j}\right|_{A^i,A^j}\left(\Phi^i - A^i\right)\left(\Phi^j - A^j\right) \\
& + \frac{1}{2}\left.\frac{\delta^2 K}{\delta\Phi^{\dagger\bar{i}}\delta\Phi^{\dagger\bar{j}}}\right|_{A^{*\bar{i}},A^{*\bar{j}}}\left(\Phi^{\dagger\bar{i}} - A^{*\bar{i}}\right)\left(\Phi^{\dagger\bar{j}} - A^{*\bar{j}}\right) \\
& + \left.\frac{\delta^2 K}{\delta\Phi^i\delta\Phi^{\dagger\bar{j}}}\right|_{A^i,A^{*\bar{j}}}\left(\Phi^i - A^i\right)\left(\Phi^{\dagger\bar{j}} - A^{*\bar{j}}\right) \\
& + \frac{1}{2}\left.\frac{\delta^3 K}{\delta\Phi^i\delta\Phi^j\delta\Phi^{\dagger\bar{k}}}\right|_{A^i,A^j,A^{*\bar{k}}}\left(\Phi^i - A^i\right)\left(\Phi^j - A^j\right)\left(\Phi^{\dagger\bar{k}} - A^{*\bar{k}}\right) \\
& + \frac{1}{2}\left.\frac{\delta^3 K}{\delta\Phi^{\dagger\bar{i}}\delta\Phi^{\dagger\bar{j}}\delta\Phi^k}\right|_{A^{*\bar{i}}A^{*\bar{j}}A^k}\left(\Phi^{\dagger\bar{i}} - A^{*\bar{i}}\right)\left(\Phi^{\dagger\bar{j}} - A^{*\bar{j}}\right)\left(\Phi^k - A^k\right) \\
& + \frac{1}{4}\left.\frac{\delta^4 K}{\delta\Phi^i\delta\Phi^j\delta\Phi^{\dagger\bar{k}}\delta\Phi^{\dagger\bar{l}}}\right|_{A^i,A^j,A^{*\bar{k}},A^{*\bar{l}}}\left(\Phi^i - A^i\right)\left(\Phi^j - A^j\right)\times \\
& \times\left(\Phi^{\dagger\bar{k}} - A^{*\bar{k}}\right)\left(\Phi^{\dagger\bar{l}} - A^{*\bar{l}}\right)
\end{aligned}
\tag{157}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & K|_{A,A^*} + K_i\Delta^i + K_{\bar{i}}\Delta^{\dagger\bar{i}} + \frac{1}{2}K_{ij}\Delta^i\Delta^j + \frac{1}{2}K_{\bar{i}\bar{j}}\Delta^{\dagger\bar{i}}\Delta^{\dagger\bar{j}} \\
& + K_{i\bar{j}}\Delta^i\Delta^{\dagger\bar{j}} + \frac{1}{2}K_{ij\bar{k}}\Delta^i\Delta^j\Delta^{\dagger\bar{k}} \\
& + \frac{1}{2}K_{\bar{i}\bar{j}k}\Delta^{\dagger\bar{i}}\Delta^{\dagger\bar{j}}\Delta^k + \frac{1}{4}K_{ij\bar{k}\bar{l}}\Delta^i\Delta^j\Delta^{\dagger\bar{k}}\Delta^{\dagger\bar{l}}
\end{aligned}
\tag{158}
$$

όπου συμβολίσαμε:

$$
K_{i\bar{j}} := \left.\frac{\delta^2 K}{\delta\Phi^i\delta\Phi^{\dagger\bar{j}}}\right|_{A^i,A^{*\bar{j}}} \quad ,\text{κ.ο.κ.}
\tag{159}
$$

καθώς και:

$$
\begin{aligned}
\Delta^i := \left(\Phi^i - A^i\right) = {} & \sqrt{2}\theta\psi^i + \theta\theta F^i + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A^i \\
& - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi^i\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A^i
\end{aligned}
\tag{160}
$$

Απομένει να υπολογίσουμε τα γινόμενα των διαφορών των υπερπεδίων με τις βαθμωτές συνιστώσες τους, τα οποία δίνουν:

$$
\begin{aligned}
\Delta^i\Delta^j = {} & -(\theta\theta)\left(\psi^i\psi^j\right) + i\sqrt{2}(\theta\psi^i)(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A^j \\
& + i\sqrt{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A^i(\theta\psi^j) - (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu A^i\partial_\nu A^j \\
= {} & -(\theta\theta)(\psi^i\psi^j) - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)(\psi^i\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A^j \\
& - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)(\psi^j\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A^i - \frac{1}{2}(\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu A^i\partial^\mu A^j
\end{aligned}
\tag{161}
$$

όπου μάλιστα μπορούμε να επικεντρωθούμε στους $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ όρους κάθε παράστασης, μιας και αυτοί εμφανίζονται στη Λαγκρανζιανή[21]:

$$\begin{aligned}
\Delta^i\Delta^{\dagger\bar{j}} \supset\; & i(\theta\psi^i)(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^{\bar{j}}) + (\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta})F^iF^{*\bar{j}} \\
& + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A^i(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\nu A^{*\bar{j}} - i(\bar{\theta}\bar{\psi}^{\bar{j}})(\theta\theta)\partial_\mu\psi^i\sigma^\mu\bar{\theta} \\
& = (\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta})\left[-\frac{i}{2}(\psi^i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^{\bar{j}}) + F^iF^{*\bar{j}} + \frac{1}{2}\partial_\mu A^i\partial^\mu A^{*\bar{j}} + \frac{i}{2}(\partial_\mu\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{j}})\right]
\end{aligned} \tag{162}$$

$$\Delta^i\Delta^j\Delta^{\dagger\bar{k}} \supset -(\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta})\left[F^{*\bar{k}}(\psi^i\psi^j) + \frac{i}{2}\left(\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{k}}\partial_\mu\right)A^j + \frac{i}{2}\left(\psi^j\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{k}}\right)\partial_\mu A^i\right] \tag{163}$$

$$\Delta^i\Delta^j\Delta^{\dagger\bar{k}}\Delta^{\dagger\bar{l}} = (\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta})(\bar{\psi}^{\bar{k}}\bar{\psi}^{\bar{l}})(\psi^i\psi^j) \tag{164}$$

Καταλήγουμε επομένως,

$$\begin{aligned}
\int d^4\theta K(\Phi^i,\Phi^{\dagger\bar{j}}) = & -\frac{1}{4}\left(K_i\Box A^i + K_{\bar{i}}\Box A^{*\bar{i}}\right) - \frac{1}{4}\left(K_{ij}\partial_\mu A^i\partial^\mu A^j + K_{\bar{i}\bar{j}}\partial_\mu A^{*\bar{i}}\partial^\mu A^{*\bar{j}}\right) \\
& + K_{i\bar{j}}F^iF^{*\bar{j}} + \frac{1}{2}K_{i\bar{j}}\partial_\mu A^i\partial^\mu A^{*\bar{j}} + \frac{i}{2}K_{i\bar{j}}\left(\partial_\mu\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{j}} - \psi^i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^{\bar{j}}\right) \\
& + \frac{i}{4}K_{ij\bar{k}}\left(\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{k}}\partial_\mu A^{*\bar{j}} + \psi^k\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{j}}\partial_\mu A^{*\bar{i}}\right) \\
& - \frac{1}{2}K_{ij\bar{k}}(\psi^i\psi^j)F^{*\bar{k}} - \frac{i}{4}K_{\bar{i}\bar{j}k}\left(\bar{\psi}^{\bar{i}}\sigma^\mu\psi^k\partial_\mu A^{*\bar{j}} + \psi^k\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{j}}\partial_\mu A^{*\bar{i}}\right) \\
& - \frac{1}{2}K_{\bar{i}\bar{j}k}(\bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{j}})F^k + \frac{1}{4}K_{ij\bar{k}\bar{l}}(\psi^i\psi^j)(\bar{\psi}^{\bar{k}}\bar{\psi}^{\bar{l}})
\end{aligned} \tag{165}$$

Παρατηρώντας από την (158) ότι:

$$\begin{aligned}
\Box K(\Phi^i,\Phi^{\dagger\bar{j}})\Big|_{A^i,A^{*\bar{j}}} = & \; 0 + K_i\Box A^i + K_{\bar{i}}\Box A^{*\bar{i}} + 2K_{i\bar{j}}\partial_\mu A^i\partial^\mu A^{*\bar{j}} \\
& + K_{ij}\partial_\mu A^i\partial^\mu A^j + K_{\bar{i}\bar{j}}\partial_\mu A^{*\bar{i}}\partial^\mu A^{*\bar{j}} + 0
\end{aligned} \tag{166}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow -\frac{1}{4}\left(K_i\Box A^i + K_{\bar{i}}\Box A^{*\bar{i}}\right) = & -\frac{1}{4}\Box K(\Phi^i,\Phi^{\dagger\bar{j}})\Big|_{A^i,A^{*\bar{j}}} + \frac{1}{2}K_{i\bar{j}}\partial_\mu A^i\partial^\mu A^{*\bar{j}} \\
& + \frac{1}{4}\left(K_{ij}\partial_\mu A^i\partial^\mu A^j + K_{\bar{i}\bar{j}}\partial_\mu A^{*\bar{i}}\partial^\mu A^{*\bar{j}}\right)
\end{aligned} \tag{167}$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη πρώτη σειρά της (165) για να πάρουμε:

21 Ο συμβολισμός $\Delta^i\Delta^{\dagger\bar{j}} \supset \ldots$ δηλώνει ότι η παράσταση στα δεξιά εμπεριέχεται ώς όρος στο ανάπτυγμα και εστιάζουμε στους όρους που περιέχουν τέσσερα θ

$$
\begin{aligned}
\int d^4\theta K(\Phi^i, \Phi^{\dagger\bar{j}}) = -\frac{1}{4}\, \Box K(\Phi^i, \Phi^{\dagger\bar{j}})\Big|_{A^i, A^{*\bar{j}}} &+ K_{i\bar{j}}\partial_\mu A^i \partial^\mu A^{*\bar{j}} + K_{i\bar{j}} F^i F^{*\bar{j}} \\
&+ \frac{i}{2} K_{i\bar{j}} \left(\partial_\mu \psi^i \sigma^\mu \bar{\psi}^{\bar{j}} - \psi^i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}^{\bar{j}}\right) \\
&+ \left[\frac{i}{4} K_{ij\bar{k}} \left(\psi^i \sigma^\mu \bar{\psi}^{\bar{k}} \partial_\mu A^j + \psi^j \sigma^\mu \bar{\psi}^{\bar{k}} \partial_\mu A^i\right) - \frac{1}{2} K_{ij\bar{k}} (\psi^i \psi^j) F^{*\bar{k}} + \text{h.c.}\right] \\
&+ \frac{1}{4} K_{ij\bar{k}\bar{l}} (\psi^i \psi^j)(\bar{\psi}^{\bar{k}} \bar{\psi}^{\bar{l}})
\end{aligned}
\tag{168}
$$

όπου ο πρώτος όρος μπορεί να αγνοηθεί ώς μια τέλεια χωροχρονική παράγωγος. Από την παραπάνω έκφραση, διαβάζοντας τον κινητικό όρο των μιγαδικών βαθμωτών πεδίων, το $K_{i\bar{j}} = K_{i\bar{j}}(A^i, A^{*\bar{j}})$ όπως ορίστηκε στην (159) μπορεί να ερμηνευτεί ώς μετρική στο χώρο-στόχο ο οποίος είναι μια μιγαδική πολλαπλότητα με ολόμορφες συντεταγμένες τα βαθμωτά πεδία:

$$
ds^2 = K_{i\bar{j}} dA^i dA^{*\bar{j}} \tag{169}
$$

Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται, το δυναμικό Kähler επάγει τοπικά μια Riemannian ερμητιανή[22] μετρική $g_{i\bar{j}} = K_{i\bar{j}}$. Οι πολλαπλότητες με αυτή την ιδιότητα ονομάζονται Kähler πολλαπλότητες, επομένως ο χώρος-στόχος του υπερσυμμετρικού σίγμα μοντέλου, μόνο για χειραλικά πεδία, αποτελεί παράδειγμα μιας τέτοιας πολλαπλότητας. Σημειώνουμε επίσης ότι τόσο η δράση (λόγω της δομής της (168) η οποία δεν περιέχει κανένα όρο μόνο με ολόμορφες ή αντιολόμορφες συντεταγμένες, έχουμε πάντα συνδιασμό δεικτών και barred δεικτών) όσο και η μετρική παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τους λεγόμενους μετασχηματισμούς Kähler που δρούν στο δυναμικό Kähler ώς:

$$
K(\Phi^i, \Phi^{\dagger\bar{j}}) \mapsto K(\Phi^i, \Phi^{\dagger\bar{j}}) + \Omega(\Phi^i) + \Omega^\dagger(\Phi^{\dagger\bar{j}}) \tag{170}
$$

όπου Ω κάποιο χειραλικό υπερπεδίο. Από εδώ είναι θέμα πράξεων να υπολογίσει κανείς τις συνδέσεις και την καμπυλότητα όπως ακριβώς γίνεται στη Riemannian γεωμετρία:

$$
\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} K^{cd} \left(\partial_a K_{bd} + \partial_b K_{ad} - \partial_d K_{ab}\right) \tag{171}
$$

με a, b, c, d ολόμορφους ή αντιολόμορφους (barred) δείκτες, K^{cd} την αντίστροφη μετρική και επίσης με το συμβολισμό $\partial_a K_{bd} \equiv K_{abd}$ εννοείται η συναρτησιακή παράγωγος του K ώς πρός το χειραλικό πεδίο υπολογισμένη στην αντίστοιχη βαθμωτή συνιστώσα. Οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες τότε είναι (χρησιμοποιώντας τη συμμετρία $K_{i\bar{j}} = K_{\bar{j}i}$ και ότι $K_{ij} = 0 = K_{\bar{i}\bar{j}}$):

22 εφ'όσων αυτό είναι πραγματικό

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{i}_{jk} &= \frac{1}{2}K^{i\bar{m}}\left(K_{jk\bar{m}} + K_{kj\bar{m}}\right) = K^{i\bar{m}}K_{jk\bar{m}} \\
\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} &= \frac{1}{2}K^{\bar{i}m}\left(K_{\bar{j}\bar{k}m} + K_{\bar{k}\bar{j}m}\right) = K^{\bar{i}m}K_{\bar{j}\bar{k}m}
\end{aligned}
\tag{172}
$$

και ο τανυστής καμπυλότητας Riemann:

$$
R^{c}_{abd} = \partial_a \Gamma^{c}_{bd} + \Gamma^{c}_{ak}\Gamma^{k}_{bd} - (a \leftrightarrow b)
\tag{173}
$$

με μη μηδενικές συνιστώσες τις:

$$
\begin{aligned}
R^{a}_{\bar{b}cd} &= \partial_{\bar{b}}\Gamma^{a}_{cd} = K^{a\bar{l}}K_{cd\bar{l}\bar{b}} - K^{a\bar{l}}_{\bar{b}}K_{cd\bar{l}} = K^{a\bar{r}}\left(K_{cd\bar{r}\bar{b}} - K^{\bar{l}}_{\bar{r}\bar{b}}K_{cd\bar{l}}\right) \\
&= K^{a\bar{r}}\left(K_{cd\bar{r}\bar{b}} - K_{cd\bar{l}}K^{\bar{l}n}K_{n\bar{r}\bar{b}}\right) = -R^{a}_{c\bar{b}d}
\end{aligned}
\tag{174}
$$

$$
R^{\bar{a}}_{b\bar{c}\bar{d}} = \partial_b \Gamma^{\bar{a}}_{\bar{c}\bar{d}} = K^{\bar{a}r}\left(K_{\bar{c}\bar{d}rb} - K_{\bar{c}\bar{d}l}K^{l\bar{n}}K_{\bar{n}rb}\right) = -R^{\bar{a}}_{\bar{c}b\bar{d}}
\tag{175}
$$

Σημειώνουμε επίσης και ότι:

$$
R_{ab\bar{c}\bar{d}} = K_{\bar{l}b}R^{\bar{l}}_{a\bar{c}\bar{d}} = K_{ab\bar{c}\bar{d}} - K_{ab\bar{k}}K^{\bar{k}n}K_{n\bar{c}\bar{d}}
\tag{176}
$$

Μπορούμε έχοντας τις συνιστώσες της σύνδεσης να κατασκευάσουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο στην πολλαπλότητα Kähler η οποία δρά ώς:

$$
\begin{aligned}
D_\mu \psi^i &= \partial_\mu \psi^i + \Gamma^{i}_{jk}\partial_\mu A^j \psi^k \\
D_\mu \bar{\psi}^{\bar{i}} &= \partial_\mu \bar{\psi}^{\bar{i}} + \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}\partial_\mu A^{*\bar{j}}\bar{\psi}^{\bar{k}}
\end{aligned}
\tag{177}
$$

και εμφανίζεται στη Λαγκρανζιανή μέσω των πρώτων όρων της τρίτης σειράς της (165):

$$
\begin{aligned}
\circ\ &\frac{i}{2}K_{i\bar{j}}\partial_\mu\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{j}} + \frac{i}{2}K_{ij\bar{k}}\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{k}}\partial_\mu A^i \\
&= \frac{i}{2}K_{i\bar{j}}\left(\partial_\mu\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{j}} + K^{i\bar{n}}K_{ml\bar{n}}\psi^m\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{j}}\partial_\mu A^l\right) \\
&= \frac{i}{2}K_{i\bar{j}}\left(\partial_\mu\psi^i + \Gamma^{i}_{ml}\partial_\mu A^l\psi^m\right)\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{j}} = \frac{i}{2}K_{i\bar{j}}D_\mu\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{j}}
\end{aligned}
$$

και αντιστοίχως,

$$
\circ\ -\frac{i}{2}K_{i\bar{j}}\psi^i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^{\bar{j}} - \frac{i}{2}K_{\bar{i}\bar{j}k}\psi^k\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{i}}\partial_\mu A^{*\bar{j}} = -\frac{i}{2}K_{i\bar{j}}\psi^i\sigma^\mu D_\mu\bar{\psi}^{\bar{j}}
$$

Έτσι η πλήρης Λαγκρανζιανή, προσθέτοντας και τους όρους του υπερδυναμικού, γράφεται:

$$\mathcal{L} = K_{i\bar{j}}\left(\partial_\mu A^i \partial^\mu A^{*\bar{j}} + F^i F^{*\bar{j}} + \frac{i}{2} D_\mu \psi^i \sigma^\mu \bar{\psi}^{\bar{j}} - \frac{i}{2}\psi^i \sigma^\mu D_\mu \bar{\psi}^{\bar{j}}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left(K_{ij\bar{k}}\psi^i\psi^j F^{*\bar{k}} + K_{\bar{i}\bar{j}k}\bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{j}}F^k\right) + \frac{1}{4}K_{ij\bar{k}\bar{l}}\psi^i\psi^j\bar{\psi}^{\bar{k}}\bar{\psi}^{\bar{l}}$$
$$+ \left.\frac{\delta W}{\delta \Phi^i}\right|_{A^i} F^i - \frac{1}{2}\left.\frac{\delta^2 W}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j}\right|_{A^i, A^j} \psi^i\psi^j + \left.\frac{\delta W^\dagger}{\delta \Phi^{\dagger\bar{i}}}\right|_{A^{*\bar{i}}} F^{*\bar{i}} - \frac{1}{2}\left.\frac{\delta^2 W^\dagger}{\delta \Phi^{\dagger\bar{i}} \delta \Phi^{\dagger\bar{j}}}\right|_{A^{*\bar{i}}, A^{*\bar{j}}} \bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{j}} \tag{178}$$

Το επόμενο βήμα είναι να απαλείψουμε τα βοηθητικά πεδία F^i και $F^{*\bar{i}}$:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta F^{*\bar{j}}} = 0 \Rightarrow F^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}\psi^j\psi^k - K^{i\bar{j}} \left.\frac{\delta W^\dagger}{\delta \Phi^{\dagger\bar{j}}}\right|_{A^{*\bar{j}}} \tag{179}$$

και

$$F^{*\bar{j}} = \frac{1}{2}\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{i}\bar{k}}\bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{k}} - K^{\bar{j}i} \left.\frac{\delta W}{\delta \Phi^i}\right|_{A^i} \tag{180}$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $W_i := \delta W/\delta\Phi^i\big|_{A^i}$, $W^\dagger_{\bar{j}} := \delta W^\dagger/\delta\Phi^{\dagger\bar{j}}\big|_{A^{*\bar{j}}}$ για ευκολία, οι όροι που περιέχουν τα βοηθητικά πεδία παίρνουν τη μορφή:

$$\mathcal{L}_{(F)} = K_{i\bar{j}}F^iF^{*\bar{j}} - \frac{1}{2}\left(K_{ij\bar{k}}\psi^i\psi^jF^{*\bar{k}} + K_{\bar{i}\bar{j}k}\bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{j}}F^k\right)$$

$$= \frac{1}{4}K_{i\bar{j}}\Gamma^i_{jk}\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{i}\bar{k}}\psi^j\psi^k\bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{k}} - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}\psi^j\psi^kW_i - \frac{1}{2}\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{i}\bar{k}}\bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{k}}W^\dagger_{\bar{j}} + \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}\psi^j\psi^kW_i$$
$$+ \frac{1}{2}\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{i}\bar{k}}\bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{k}}W^\dagger_{\bar{j}} - K^{i\bar{j}}W_iW^\dagger_{\bar{j}} \tag{181}$$

Ο πρώτος όρος με τα τέσσερα ψ μαζί με τον αντίστοιχο από την (178) θα σχηματίσουν την καμπυλότητα όπως φαίνεται από την (176) και έτσι η τελική μορφή της Λαγκρανζιανής είναι:

$$\mathcal{L} = K_{i\bar{j}}\left(\partial_\mu A^i \partial^\mu A^{*\bar{j}} + F^i F^{*\bar{j}} + \frac{i}{2} D_\mu \psi^i \sigma^\mu \bar{\psi}^{\bar{j}} - \frac{i}{2}\psi^i \sigma^\mu D_\mu \bar{\psi}^{\bar{j}}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left(W_{ij} - \Gamma^m_{ij}W_m\right)\psi^i\psi^j - \frac{1}{2}\left(W^\dagger_{\bar{i}\bar{j}} - \Gamma^{\bar{m}}_{\bar{i}\bar{j}}W^\dagger_{\bar{m}}\right)\bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{j}} - K^{i\bar{j}}W_iW^\dagger_{\bar{j}}$$
$$+ \frac{1}{4}R_{ij\bar{i}\bar{j}}\psi^i\psi^j\bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{j}} \tag{182}$$

1.4.4 Ανυσματικά Υπερπεδία

Προκειμένου να αναπαραστήσουμε τη $\mathcal{N} = 1$ ανυσματική πολλαπλέτα στον υπερχώρο, ορίζουμε το ανυσματικό υπερπεδίο το οποίο υπόκειται στον περιορισμό:

$$V(x^M) = V^\dagger(x^M) \tag{183}$$

δηλαδή είναι πραγματικό. Οι συνιστώσες του γενικού υπερπεδίου (108) τότε ικανοποιούν:

$$\begin{aligned}
&\circ\ f(x) = f^*(x)\\
&\circ\ \psi(x) = \chi(x)\\
&\circ\ n(x) = m^*(x)\\
&\circ\ m(x) = n^*(x)\\
&\circ\ \upsilon_\mu(x) = \upsilon_\mu^*(x)\\
&\circ\ \rho(x) = \lambda(x)\\
&\circ\ d(x) = d^*(x)
\end{aligned} \tag{184}$$

Επομένως έχει 8 μποζονικούς (δύο πραγματικά βαθμωτά f, d, ένα μιγαδικό m και ένα ανυσματικό πεδίο υ_μ) και 8 φερμιονικούς (δύο Weyl σπίνορες ψ, λ) βαθμούς ελευθερίας. Το ανάπτυγμά του στα $\theta, \bar{\theta}$, μπορεί να γραφεί ώς[23]:

$$\begin{aligned}
V(x,\theta,\bar{\theta}) =& C + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{i}{2}\theta\theta\,(M+iN) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\,(M-iN)\\
&+ \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\upsilon_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\left(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi\right)\\
&- i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}\right) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(d - \frac{1}{2}\Box C\right)
\end{aligned} \tag{185}$$

με τα M, N, C, υ_μ, d πραγματικά. Παρ'όλα αυτά, οι βαθμοί ελευθερίας είναι διπλάσιοι από αυτούς που χρειάζεται η ανυσματική πολλαπλέτα εντός φλοιού μάζας και έτσι θα πρέπει να τους μειώσουμε μέσω κάποιου άλλου συνδέσμου. Αυτό μπορεί να γίνει επιλέγοντας μια βαθμίδα η οποία αφαιρεί τους μή φυσικούς βαθμούς ελευθερίας και μας αφήνει με ένα ανυσματικό μποζόνιο, ένα σπίνορα Weyl και ένα βοηθητικό πεδίο. Οι μετασχηματισμοί βαθμίδας μιας θεωρίας βαθμίδας μπορούν να γενικευτούν στο επίπεδο των υπερπεδίων με την εξής παρατήρηση: Οποιοδήποτε χειραλικό υπερπεδίο $\Phi \sim (A, \psi, F)$ μπορεί να σχηματίσει ένα ανυσματικό πεδίο ώς:

$$\begin{aligned}
\Phi + \Phi^\dagger =& A + A^* + i\theta\left(-i\sqrt{2}\psi\right) - i\bar{\theta}\left(i\sqrt{2}\bar{\psi}\right) + \frac{i}{2}\theta\theta\,(-2iF)\\
&- \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\,(2iF^*) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\,[i\partial_\mu(A - A^*)] + i\theta\theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\psi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\right)\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\\
&- i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\right) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[-\frac{1}{2}\Box\,(A + A^*)\right]
\end{aligned} \tag{186}$$

23 Με τις αντικαταστάσεις: $f \to C$, $\psi \to i\chi$, $m \to i/2(M + iN)$, $\upsilon_\mu \to \upsilon_\mu$, $\bar{\lambda} \to i(\bar{\lambda} + i/2\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi$, $d \to 1/2(d - 1/2\Box C)$.

$$\begin{aligned}=&C' + i\theta\chi' - i\bar{\theta}\bar{\chi}' + \frac{i}{2}\theta\theta\left(M' + iN'\right) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\left(M' - iN'\right)\\ &+ \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\upsilon'_{\mu} + i\theta\theta\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}' + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi'\right)\\ &- i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(\lambda' - \frac{i}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}'\right) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(d' - \frac{1}{2}\Box C'\right)\end{aligned} \tag{187}$$

με τις συνιστώσες του νέου ανυσματικού υπερπεδίου να είναι:

- $C' = A + A^* = 2\mathrm{Re}A$
- $\chi' = -i\sqrt{2}\psi$
- $M' = i(F^* - F)$
- $N' = -(F + F^*)$ (188)
- $\upsilon'_{\mu} = i\partial_{\mu}(A - A^*) = \partial_{\mu}\left(-2\mathrm{Im}A\right)$
- $\lambda' = 0 = \bar{\lambda}'$
- $d' = 0$

Επομένως, ένας μετασχηματισμός ανυσματικών υπερπεδίων της μορφής:

$$V(x^M) \mapsto V(x^M) + \Phi(x^M) + \Phi^{\dagger}(x^M) \tag{189}$$

ο οποίος παραμετροποιείται από το χειραλικό υπερπεδίο Φ, δρά στις συνιστώσες του ώς εξής:

- $C \mapsto C + 2\mathrm{Re}A$
- $\chi \mapsto \chi - i\sqrt{2}\psi$
- $M + iN \mapsto M + iN - 2iF$ (190)
- $\upsilon_{\mu} \mapsto \upsilon_{\mu} + \partial_{\mu}\left(-2\ \mathrm{Im}A\right)$
- $\lambda \mapsto \lambda$
- $d \mapsto d$

Η δράση του στο ανυσματικό πεδίο είναι ακριβώς ένας $U(1)$ μετασχηματισμός βαθμίδας $\upsilon_{\mu} \mapsto \upsilon_{\mu} + \partial_{\mu}\Lambda(x)$, ενώ τα πεδία λ και d είναι αναλλοίωτα. Εάν λοιπόν ορίσουμε ώς ισοδύναμα δύο ανυσματικά υπερπεδία που διαφέρουν κατά ένα μετασχηματισμό βαθμίδας (189): $V \sim V' \Leftrightarrow V = V' + \Phi + \Phi^{\dagger}$ για κάποιο χειραλικό Φ, τότε μπορούμε να επιλέξουμε μια βαθμίδα η οποία θα εξαφανίσει τα πεδία χ, C, M, N και θα γίνει εμφανές το μη αναγώγιμο περιεχόμενο της ανυσματικής πολλαπλέτας. Αυτή λέγεται βαθμίδα Wess-Zumino και το υπερπεδίο που παραμετροποιεί το μετασχηματισμό γράφεται:

$$\begin{aligned}\Xi =&\frac{1}{2}\left(-C + if\right) - i\chi\theta - \frac{i}{2}\theta\theta(M + iN) + \frac{i}{2}\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\left(-C\right)\\ &+ \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi - \frac{1}{8}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\left(-C + if\right)\end{aligned} \tag{191}$$

$$\Rightarrow V_{WZ} = V + \Xi + \Xi^\dagger = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\upsilon_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d \quad (192)$$

Σε αυτή τη βαθμίδα είναι επίσης εύκολος ο υπολογισμός δυνάμεων του πεδίου:

$$\begin{aligned} &\circ\ V_{WZ}^2 = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\upsilon_\mu\upsilon_\nu = \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\upsilon^\mu\upsilon_\mu \\ &\circ\ V_{WZ}^n = 0 \ \text{για}\, n \geqslant 3 \end{aligned} \quad (193)$$

Τονίζουμε ότι η επιλογή βαθμίδας σπάει την υπερσυμμετρία, καθώς η μεταβολή του V_{WZ} θα ανακατέψει τις συνιστώσες του και το αποτέλεσμα δεν θα έχει τη παραπάνω μορφή (επομένως δεν θα συνεχίσει να ανήκει στη βαθμίδα WZ). Γίνεται παρ΄όλα αυτά, να υπάρχει ένας συνδιασμός υπερσυμμετρικού μετασχηματισμού και μετασχηματισμού βαθμίδας ο οποίος φέρνει το $\delta_{\xi,\bar{\xi}}V_{WZ}$ πίσω στη βαθμίδα WZ. Αυτό δεν θα μας προκαλέσει προβλήματα, μιας και θα ασχοληθούμε με αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς βαθμίδας ποσότητες, επομένως οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν σε αυτή.

1.4.5 Υπερσυμμετρική εκδοχή Αβελιανής θεωρίας βαθμίδας

Προκειμένου να παράξουμε τους κινητικούς όρους για το μποζόνιο βαθμίδας, αφού παρατηρούμε ότι το V είναι το υπερσυμμετρικό ανάλογο της σύνδεσης/πεδίου βαθμίδας και έτσι μπορεί να οδηγήσει στη περιγραφή της υπερσυμμετρικής εκδοχής μιας $U(1)$ θεωρίας βαθμίδας, χρειαζόμαστε την καμπυλότητα/τανυστή ισχύος του πεδίου βαθμίδας, καθώς αυτός είναι αναλλοίωτος. Ορίζουμε τα παρακάτω χειραλικά πεδία, τα οποία έχουν ώς χαμηλώτερη συνιστώσα τα αναλλοίωτα σε μετασχηματισμούς βαθμίδας πεδία λ_α ($\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$), δίνοντάς τους σπινοριακό χαρακτήρα:

$$\begin{aligned} W_\alpha &:= -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V \\ \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{4}D^2\bar{D}_{\dot{\alpha}}V \end{aligned} \quad (194)$$

Η χειραλικότητα φαίνεται από το γεγονός ότι όταν δρούν τρείς υπερσυναλλοίωτες παράγωγοι σε κάποιο υπερπεδίο, το αποτέλεσμα είναι μηδέν. Αυτό συμβαίνει επειδή οι $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ (D_α) αντιμετατίθενται, το οποίο καθιστά το συνδιασμό $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\beta}}\bar{D}_{\dot{\gamma}}$ πλήρως αντισυμμετρικό, ενώ οι δείκτες $\alpha, \dot{\alpha}$ παίρνουν δύο τιμές και έτσι η τρίτη παράγωγος αναγκαστικά θα πάρει μια ήδη υπάρχουσα τιμή στην έκφραση, μηδενίζοντάς τη. Όσο για τη αναλλοιότητα σε μετασχηματισμούς βαθμίδας, έχουμε:

$$W_\alpha \mapsto W'_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha\left(V + \Phi + \Phi^\dagger\right) = W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}^2\left(D_\alpha\Phi + \cancelto{0}{D_\alpha\Phi^\dagger}\right)$$

$$= W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot\alpha}\left(2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\right)\Phi + \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot\alpha}D_\alpha\cancelto{0}{\bar{D}_{\dot\alpha}\Phi} = W_\alpha - \frac{i}{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\cancelto{0}{\bar{D}^{\dot\alpha}(\partial_\mu\Phi)}$$

$$\Rightarrow W_\alpha \mapsto W_\alpha \tag{195}$$

συνεπώς, το $W_\alpha(\bar{W}_{\dot\alpha})$ είναι αναλλοίωτο. Επίσης, αυτά ικανοποιούν τον επιπλέον σύνδεσμο[24]:

$$\bar{D}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha} = D^\alpha W_\alpha \tag{196}$$

Μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα του W_α στις συνιστώσες του, δουλεύοντας στη βαθμίδα WZ και στις συντεταγμένες y, μιας και έχουμε να κάνουμε με χειραλικά υπερπεδία. Σε αυτές τις συντεταγμένες, το (192) παίρνει τη μορφή[25]:

$$V_{WZ} = \theta\sigma^\mu\bar\theta\upsilon_\mu(y) + i\theta\theta\bar\theta\bar\lambda(y) - i\bar\theta\bar\theta\theta\lambda(y) - \frac{i}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\left(\partial\cdot\upsilon(y)\right) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta d(y) \tag{197}$$

Δρώντας πάνω σε αυτό με τις (127) (όπου $\bar{D}^2(y) = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\partial_{\dot\beta}\bar\partial_{\dot\alpha} = \bar\partial_{\dot\alpha}\bar\partial^{\dot\alpha}$) έχουμε (το όρισμά στις y παραλλείπεται):

$$\begin{aligned}\circ\ D_\alpha V_{WZ} = \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\upsilon_\mu + 2i\theta_\alpha\bar\theta\bar\lambda - i\bar\theta\bar\theta\lambda\alpha + \theta_\alpha\bar\theta\bar\theta\left(d - i\partial\cdot\upsilon\right)\\ + 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\left(\theta\sigma^\nu\bar\theta\right)\partial_\mu\upsilon_\nu + 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}2\theta\theta\bar\theta\partial_\mu\bar\lambda\end{aligned} \tag{198}$$

Με χρήση της σχέσης $\sigma^\mu\bar\sigma^\nu - \eta^{\mu\nu} = 2\sigma^{\mu\nu}$, μπορούμε να συνδιάσουμε τους όρους που περιέχουν παραγώγους του πεδίου βαθμίδας ώς:

$$\begin{aligned}&2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\theta^\beta\sigma^\nu_{\beta\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\mu\upsilon_\nu - \theta_\alpha\bar\theta\bar\theta i\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\upsilon_\nu\\ &= \bar\theta\bar\theta i\left[\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\theta^\beta\sigma^\nu_{\beta\dot\beta} - \theta_\alpha\eta^{\mu\nu}\right]\partial_\mu\upsilon_\nu\\ &= i\bar\theta\bar\theta\left[\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\left(\bar\sigma^\nu\right)^{\dot\alpha\gamma} - \eta^{\mu\nu}\delta^\gamma_\alpha\right]\theta_\gamma\partial_\mu\upsilon_\nu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= i\bar\theta\bar\theta 2\left(\sigma^{\mu\nu}\right)^\gamma_\alpha\theta_\gamma\partial_\mu\upsilon_\nu = i\bar\theta\bar\theta 2\left(\sigma^{\mu\nu}\right)^\gamma_\alpha\theta_\gamma\partial_{[\mu}\upsilon_{\nu]}\\ = i\bar\theta\bar\theta\left(\sigma^{\mu\nu}\theta\right)_\alpha\upsilon_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{199}$$

όπου έγινε επίσης χρήση της αντισυμμετρίας του $\sigma^{\mu\nu}$, το οποίο εμφάνισε τον τανυστή ισχύος του αβελιανού πεδίου βαθμίδας $\upsilon_{\mu\nu} := \partial_\mu\upsilon_\nu - \partial_\nu\upsilon_\mu$.

Με αυτό, έχουμε:

---

24 $\bar{D}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha} = -\frac{1}{4}D^2\bar{D}^2V = -\frac{1}{4}\bar{D}^2D^2V = -\frac{1}{4}D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha V = D^\alpha\left(-\frac{1}{4}\bar{D}^2D_\alpha V\right) = D^\alpha W_\alpha$

25 $\upsilon_\mu(y) \approx \upsilon_\mu(x) + i\theta\sigma^\nu\bar\theta\partial_\mu\upsilon_\nu(y) \Rightarrow \upsilon_\mu(x) \approx \upsilon_\mu(y) - i\theta\sigma^\nu\bar\theta\partial_\mu\upsilon_\nu(y)$. Επομένως, $\theta\sigma^\mu\bar\theta\upsilon_\mu(x) = \theta\sigma^\mu\bar\theta\upsilon_\mu(y) - \frac{i}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\left(\partial\cdot\upsilon\right)$.

$$
\begin{aligned}
D_\alpha V_{WZ} = &\left(\sigma^\mu \bar{\theta}\right)_\alpha \upsilon_\mu + 2i\theta_\alpha \bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\lambda_\alpha + \theta_\alpha \bar{\theta}\bar{\theta} d \\
&+ i\left(\sigma^{\mu\nu}\theta\right)_\alpha \bar{\theta}\bar{\theta}\upsilon_{\mu\nu} + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}\right)_\alpha
\end{aligned}
\tag{200}
$$

Παρατηρώντας επίσης ότι με τον τρόπο που έχουμε ορίσει τη Grassmann ολοκλήρωση, ισχύει ότι:

$$
-\frac{1}{4}\bar{D}^{(y)2} = -\frac{1}{4}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\beta}} \equiv \int d^2\bar{\theta} \tag{201}
$$

και έτσι, καταλήγουμε:

$$
\boxed{W_\alpha = -i\lambda_\alpha + \theta_\alpha d + i\left(\sigma^{\mu\nu}\theta\right)_\alpha \upsilon_{\mu\nu} + \theta\theta\left(\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}\right)_\alpha} \tag{202}
$$

και αντίστοιχα,

$$
\boxed{\bar{W}_{\dot{\alpha}} = i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d - i\left(\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)_{\dot{\alpha}} \upsilon_{\mu\nu} + \bar{\theta}\bar{\theta}\left(\partial_\mu \lambda \bar{\sigma}^\mu\right)_{\dot{\alpha}}} \tag{203}
$$

όπου τα ορίσματα των πεδίων είναι στις συντεταγμένες $y(y^\dagger)$. Από το W_α μπορούμε να κατασκευάσουμε την αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της υπερσυμμετρίας Λαγκρανζιανή για τους κινητικούς όρους ώς:

$$
\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{4}\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} = \frac{1}{4} W^\alpha W_\alpha \Big|_{\theta\theta} + \frac{1}{4}\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}\Big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} \tag{204}
$$

όπως φαίνεται εάν την αναπτύξουμε:

- $$
\begin{aligned}
W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} = \epsilon^{\alpha\beta} &\left[-i\lambda_\alpha + \theta_\alpha d + i\left(\sigma^{\mu\nu}\theta\right)_\alpha \upsilon_{\mu\nu} + \theta\theta\left(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\right)_\alpha\right] \times \\
&\left[-i\lambda_\beta + \theta_\beta d + i\left(\sigma^{\mu\nu}\theta\right)_\beta \upsilon_{\mu\nu} + \theta\theta\left(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\right)_\beta\right]\Big|_{\theta\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= &\Big[(\theta\theta)d^2 + id\left(\theta\sigma^{\rho\sigma}\theta\right)\upsilon_{\rho\sigma} + i\left(\theta\sigma^{\mu\nu}\theta\right)\upsilon_{\mu\nu} \\
&-\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\theta^\gamma\sigma^{\rho\sigma}_{\beta\delta}\theta^\delta\upsilon_{\mu\nu}\upsilon_{\rho\sigma} - 2i\left(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\right)(\theta\theta)\Big]\Big|_{\theta\theta}
\end{aligned}
\tag{205}
$$

$$
\begin{aligned}
= &\Big[(\theta\theta)d^2 + id\left(\theta\sigma^{\rho\sigma}\theta\right)\upsilon_{\rho\sigma} + i\left(\theta\sigma^{\mu\nu}\theta\right)\upsilon_{\mu\nu} \\
&+\frac{1}{2}(\theta\theta)\,\mathrm{tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma})\upsilon_{\mu\nu}\upsilon_{\rho\sigma} - 2i\left(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\right)(\theta\theta)\Big]\Big|_{\theta\theta}
\end{aligned}
\tag{206}
$$

και με χρήση των:

- $$
i\theta\sigma^{\mu\nu}\theta\upsilon_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}(\theta\theta)\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\upsilon_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}(\theta\theta)\,\mathrm{tr}\left(\sigma^{\mu\nu}\right)\upsilon_{\mu\nu} = 0 \tag{207}
$$

$$\circ \quad \mathrm{tr}\left(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\right) - \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{208}$$

καταλήγουμε:

$$\Rightarrow \int d^2\theta W^{\alpha} W_{\alpha} = -\frac{1}{2}\upsilon_{\mu\nu}\upsilon^{\mu\nu} - 2i\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} + d^2 + \frac{i}{2}\upsilon_{\mu\nu}\tilde{\upsilon}^{\mu\nu} \tag{209}$$

όπου ο δυϊκός τανυστής του υ ορίζεται ώς: $\tilde{\upsilon}^{\mu\nu} := 1/2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\upsilon_{\rho\sigma}$. Επομένως,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{4}\int d^2\theta W^{\alpha} W_{\alpha} + \mathrm{h.c.} = -\frac{1}{4}\upsilon_{\mu\nu}\upsilon^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} + \frac{1}{2}d^2 \tag{210}$$

δηλαδή, παίρνουμε τη Λαγκρανζιανή ενός $U(1)$ πεδίου βαθμίδας, ένα άμαζο φεμιόνιο (gaugino) και το μη δυναμικό βοηθητικό πεδίο d για να κλέινει η άλγεβρα.

Για τις αβελιανές θεωρίες βαθμίδας, η υπερσυμμετρία επιτρέπει τη προσθήκη ενός ακόμα όρου ο οποίος ονομάζεται όρος Fayet - Iliopoulos και γράφεται μέσω του βοηθητικού πεδίου ώς:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{FI}} = \xi \int d^4\theta V = \xi V|_{\theta\theta\theta\theta} = \frac{\xi}{2} d \tag{211}$$

όπου ξ είναι μια σταθερή παράμετρος. Ο όρος FI είναι απευθείας αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας (μιας και το d είναι αναλλοίωτο) καθώς και υπερσυμμετρίας, ώς τη $\theta\theta\theta\theta$ συνιστώσα ενός ανυσματικού υπερπεδίου. Η προσθήκη αυτή δίνει ένα γραμμικό όρο στο d ο οποίος μετά την αντικατάσταση του από τις εξισώσεις κίνησης μπορεί να δώσει μάζα στο βαθμωτό πεδίο μιας χειραλικής πολλαπλέτας συζευγμένης με τη $U(1)$ θεωρία. Τέλος, παραθέτουμε τις υπερσυμμετρικές μεταβολές των πεδίων της ανυσματικής πολλαπλέτας, σε αντιστοιχία με τις (136):

$$\begin{aligned}
\delta_{\xi,\bar{\xi}}\upsilon_{\mu}(x) &= -i\bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}\lambda + i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu}\xi \\
\delta_{\xi,\bar{\xi}}\lambda_{\alpha}(x) &= \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu}\bar{\xi})_{\alpha}\upsilon_{\mu\nu} + i\xi_{\alpha} d \\
\delta_{\xi,\bar{\xi}} d(x) &= \bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda + \partial_{\mu}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu}\xi = \partial_{\mu}\left(\bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}\lambda + \bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu}\xi\right)
\end{aligned} \tag{212}$$

όπου πάλι, η μεταβολή της συνιστώσας με την μεγαλύτερη διάσταση ($d(x)$) μεταβάλεται κάτω από την υπερσυμμετρία ώς μια ολική παράγωγος.

1.4.6 Προσθήκη Αναλλοίωτων Αλληλεπιδράσεων

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε πώς μπορεί κανείς να γράψει τη σύζευξη πεδίων ύλης που ανήκουν σε μια χειραλική πολλαπλέτα Φ με το πεδίο βαθμίδας από την ανυσματική πολλαπλέτα V. Στη μη υπερσυμμετρική περίπτωση, κανείς ξεκινά με την καθολική $U(1)$ συμμετρία της Λαγκρανζιανής, κάτω από την οποία ένα πεδίο ύλης μετασχηματίζεται ώς: $\phi \mapsto e^{iq\lambda}\phi$ με $U(1)$ φορτίο q. Αυτή μπορεί να εκφραστεί στην υπερσυμμετρία μετασχηματίζοντας το χειραλικό υπερπεδίο με τον ίδιο τρόπο, δρώντας σε κάθε συνιστώσα του:

$$\Phi \mapsto \exp\left(iq\Lambda\right)\Phi \tag{213}$$

όπου μάλιστα θεωρήσαμε χωρίς καμία βλάβη τη παράμετρο του μετασχηματισμού ώς ένα σταθερό υπερπεδίο Λ με τετριμένο τρόπο. Παρ'όλα αυτά, όταν δωθεί στη παράμετρο του μετασχηματισμού μια τοπική εξάρτηση ($\lambda = \lambda(x)$), η παραπάνω δεν απεικονίζει απαραίτητα το Φ σε κάποιο χειραλικό υπερπεδίο. Αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα, εάν ορίσουμε το Λ να είναι και αυτό ένα χειραλικό υπερπεδίο, καθώς αναπτύσσοντας το εκθετικό, τα γινόμενα χειραλικών υπερπεδίων είναι και αυτά χειραλικά. Επομένως, κάτω από $U(1)$ μετασχηματισμούς βαθμίδας το (αντι)χειραλικό υπερπεδίο μετασχηματίζεται ώς:

$$\begin{aligned}\Phi(x^M) &\mapsto \exp\left(iq\Lambda(x^M)\right)\Phi(x^M)\\ \Phi^\dagger(x^M) &\mapsto \exp\left(-iq\Lambda^\dagger(x^M)\right)\Phi^\dagger(x^M)\end{aligned} \tag{214}$$

όπου $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0 = D_\alpha\Lambda^\dagger$. Από αυτό τον κανόνα μετασχηματισμού παρατηρούμε ότι θα πρέπει να τροποποιηθεί το δυναμικό Kähler, καθώς η απλή μορφή που δώσαμε δεν είναι αναλλοίωτη:

- $$\Phi^\dagger\Phi \mapsto \Phi^\dagger\exp\left(-iq\Lambda^\dagger\right)\exp\left(iq\Lambda\right)\Phi = \Phi^\dagger\Phi\exp\left(iq(\Lambda-\Lambda^\dagger)\right) \tag{215}$$

Όπως ακριβώς συμβαίνει και σε μια μη υπερσυμμετρική θεωρία, ο κινητικός όρος του πεδίου παύει να είναι αναλλοίωτος όταν η παράμετρος γίνει τοπική και πρέπει να οριστεί μια $U(1)$ σύνδεση για να σχηματιστεί η συναλλοίωτη παράγωγος, έτσι και εδώ θα πρέπει να εισαχθεί μια συνάρτηση η οποία φέρει το γινόμενο σε μια αναλλοίωτη μορφή. Εφ'όσων το υπερσυμμετρικό ανάλογο της σύνδεσης είναι το ανυσματικό υπερπεδίο, παρατηρούμε ότι εάν επαναορίσουμε το μετασχηματισμό βαθμίδας σε αυτό ώς[26]:

$$V(x^M) \mapsto V(x^M) - \frac{i}{2}\left(\Lambda(x^M) - \Lambda^\dagger(x^M)\right) \tag{216}$$

το παρακάτω αντικείμενο μετασχηματίζεται συναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας:

- $$\begin{aligned}\Phi^\dagger\exp\left(2qV\right) \mapsto &\Phi^\dagger\exp\left(-iq\Lambda^\dagger\right)\exp\left(2qV\right)\exp\left(-iq\Lambda\right)\exp\left(iq\Lambda^\dagger\right)\\ &= \left[\Phi^\dagger\exp\left(2qV\right)\right]\exp\left(-iq\Lambda\right)\end{aligned} \tag{217}$$

26 Από την (189) ορίζοντας $\Phi \equiv -i/2\Lambda$

το οποίο καθιστά τον παρακάτω κινητικό όρο αναλλοίωτο:

$$K(\Phi^\dagger \exp(2qV), \Phi; q) = \Phi^\dagger \exp(2qV)\,\Phi \tag{218}$$

Για να βρούμε το ανάπτυγμα αυτού του όρου, μπορούμε να πάμε στη βαθμίδα WZ, στην οποία έχουμε:

$$\begin{aligned}\exp(2qV_{WZ}) &= 1 + 2qV_{WZ} + 2q^2V_{WZ}^2\\ &= 1 + 2q\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\upsilon_\mu + 2iq\left(\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda\right) + q\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(d + +q\upsilon_\mu\upsilon^\mu)\end{aligned} \tag{219}$$

και:

$$\begin{aligned}\circ\ \Phi^\dagger \exp(2qV_{WZ}) = {}& A^* + 2qA^*\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\upsilon_\mu + 2iqA^*\left(\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda\right)\\ &+ qA^*(\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta})d + q^2A^*(\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta})\upsilon_\mu\upsilon^\mu + \sqrt{2}2q(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\upsilon_\mu\bar{\theta}\bar{\psi}\\ &+ \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}2iq\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}F^* - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A^*\\ &+ 2qi(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\upsilon_\mu\partial_\nu A^* + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\theta}\bar{\theta}) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \Phi^\dagger \exp(2qV_{WZ})\,\Phi\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = {}& -\left(\frac{1}{4}A^*\Box A + A\Box A^*\right) + qiA^*\upsilon_\mu\partial^\mu A + iq\sqrt{2}A^*\lambda\psi\\ &+ q|A|^2d + q^2|A|^2\upsilon_\mu\upsilon^\mu + \frac{i}{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi} + q\upsilon_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi}\\ &- \sqrt{2}qiA\bar{\psi}\bar{\lambda} + |F|^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu A^*\partial^\mu A + qi\upsilon_\mu(\partial^\mu A^*)A\\ &- \frac{i}{2}\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\partial_\mu A^*\partial^\mu A + |F|^2 + i\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi} + q\upsilon_\mu\left(\psi\sigma^\mu\bar{\psi} - iA\partial^\mu A^* + iA^*\partial^\mu A\right)\\ &+ \sqrt{2}qi\left(A^*\lambda\psi - A\bar{\lambda}\bar{\psi}\right) + q|A|^2\left(d + q\upsilon_\mu\upsilon^\mu\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Rightarrow\ \Phi^\dagger \exp(2qV)\,\Phi\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = {}& (\nabla_\mu A)^*(\nabla^\mu A) + |F|^2 + i\nabla_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi}\\ &+ \sqrt{2}iq\left(A^*\lambda\psi - A\bar{\lambda}\bar{\psi}\right) + q|A|^2d\end{aligned}} \tag{220}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τους γραμμικούς όρους του πεδίου βαθμίδας που εμφανίζονται στη παρένθεση, μαζί με τον όρο $q|A|^2d$, για να συμπληρώσουμε τις $U(1)$ συναλλοίωτες παραγώγους: $\nabla_\mu A := \partial_\mu A - iq\upsilon_\mu A$. Συνεπώς, η Λαγκρανζιανή για την $U(1)$ θεωρία βαθμίδας με τη προσθήκη ύλης είναι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {}& \left(\int d^2\theta\frac{1}{4}W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.}\right) + \int d^4\theta\left[\Phi^\dagger \exp(2qV)\,\Phi + \xi V\right]\\ &+ \left(\int d^2\theta W(\Phi) + \text{h.c.}\right)\end{aligned} \tag{221}$$

Το κομμάτι της Λαγκρανζιανής που περιέχει τα βοηθητικά πεδία F και d γράφεται:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(F)} &= |F|^2 \\ \mathcal{L}_{(d)} &= q|A|^2 d + \frac{1}{2}d^2 + \frac{\xi}{2}d \end{aligned} \tag{222}$$

όσο για το πρώτο, είδαμε ότι αφού λυθούν οι εξισώσεις κίνησης, θα δώσει το βαθμωτό δυναμικό (150). Για το πεδίο d, οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{(d)}}{\delta d} = 0 \Rightarrow d = -\left(\frac{\xi}{2} + q|A|^2\right) \tag{223}$$

Εάν αντικαταστήσουμε αυτό στη $\mathcal{L}_{(d)}$ θα πάρουμε το εξής:

$$\mathcal{L}_{(d)} = -\frac{1}{8}\left(\xi + 2q|A|^2\right)^2 =: -V_{(d)}(A;\xi,q) \tag{224}$$

και έτσι το πλήρες βαθμωτό δυναμικό δίνεται από:

$$V(A,A^*;\xi,q) = V_{(F)} + V_{(d)} = \left|\left.\frac{\delta W}{\delta \Phi}\right|_A\right|^2 + \frac{1}{8}\left(\xi + 2q|A|^2\right)^2 \geqslant 0 \tag{225}$$

1.4.7 Μη Αβελιανή Γενίκευση

Για μη αβελιανές ομάδες βαθμίδας, το ανυσματικό υπερπεδίο θα παίρνει τιμές στη Lie άλγεβρα της ομάδας βαθμίδας $\mathcal{G}$, το οποίο μεταφέρεται στα πεδία συνιστώσες του:

$$V = V^a t^a \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \lambda^a t^a \\ \upsilon_\mu = \upsilon_\mu^a t^a \ , \quad a = 1,2,\ldots,\dim(\mathcal{G}) \\ d = d^a t^a \\ \vdots \end{cases} \tag{226}$$

όπου οι γεννήτορες της ομάδας ικανοποιούν:

$$\left[t^a, t^b\right] = i f^{abc} t^c \tag{227}$$

και κανονικοποίηση:

$$\mathrm{tr}\left(t^a t^b\right) = \delta^{ab} \tag{228}$$

Ξεκινάμε γενικεύοντας το μετασχηματισμό βαθμίδας στη μη γραμμική μορφή:

$$\exp(2gV) \mapsto \exp\left(ig\Lambda^\dagger\right)\exp(2gV)\exp(-ig\Lambda) \tag{229}$$

όπου πλέον το χειραλικό πεδίο που παραμετροποιεί το μετασχηματισμό παίρνει και αυτό τιμές στη Lie άλγεβρα: $\Lambda = \Lambda^a t^a$. Με χρήση της σχέσης

Baker-Cambel-Haussdorff βλέπουμε ότι αυτός αναπαράγει τον (189) αλλά περέχει και τους επιπλέον μη γραμμικούς όρους λόγω της μη αβελιανής ομάδας:

- $$\exp(2gV) \mapsto \exp\left(2gV'\right) = \exp\left(ig\Lambda^\dagger\right)\exp(2gV)\exp(-ig\Lambda)$$

$$= \exp\left(ig\Lambda^\dagger\right)\exp\left(2gV - ig\Lambda + \frac{1}{2}\left[2gV, -ig\Lambda\right] + \dots\right)$$

$$= \exp\left(2gV - ig(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \frac{1}{2}\left[2gV, -ig\Lambda\right] + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left[ig\Lambda^\dagger, 2gV - ig\Lambda + \frac{1}{2}\left[2gV, -ig\Lambda\right]\right] + \dots\right)$$

$$\Rightarrow 2gV' = 2gV - ig\left(\Lambda - \Lambda^\dagger\right) - ig^2\left[V, \Lambda + \Lambda^\dagger\right] + \dots$$

ή

$$V' = V - \frac{i}{2}\left(\Lambda - \Lambda^\dagger\right) - \frac{i}{2}g\left[V, \Lambda + \Lambda^\dagger\right] + \dots \tag{230}$$

θα πρέπει επίσης να τροποποιήσουμε το σπινοριακό χειραλικό υπερπεδίο προκειμένου να περιέχει τους μη γραμμικούς όρους. Αυτό μπορεί να γίνει ώς εξής:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\frac{1}{8g}\bar{D}^2\left(e^{-2gV}D_\alpha e^{2gV}\right) \\ \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{8g}D^2\left(e^{2gV}\bar{D}_{\dot{\alpha}}e^{-2gV}\right) \end{aligned} \tag{231}$$

με βάση την παρατήρηση ότι το αντικείμενο $e^{-2gV}D_\alpha e^{2gV}$ αποτελεί συναλλοίωτη παράγωγο για το μετασχηματισμό[27] (229):

- $$\left(e^{-2gV}D_\alpha e^{2gV}\right)\Phi \mapsto \left(e^{-2gV'}D_\alpha e^{2gV'}\right)\Phi'$$

$$= \left(e^{ig\Lambda}e^{-2gV}e^{-ig\Lambda^\dagger}D_\alpha e^{ig\Lambda^\dagger}e^{2gV}e^{-ig\Lambda}\right)e^{ig\Lambda}\Phi = e^{ig\Lambda}\left(e^{-2gV}D_\alpha e^{2gV}\right)\Phi \tag{232}$$

Και έτσι, το W_α μετασχηματίζεται με συναλλοίωτο τρόπο[28] κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$\begin{aligned} W_\alpha \mapsto &-\frac{1}{8g}\bar{D}^2\left[e^{ig\Lambda}e^{-2gV}e^{-ig\Lambda^\dagger}D_\alpha\left(e^{ig\Lambda^\dagger}e^{2gV}e^{-ig\Lambda}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{8g}e^{ig\Lambda}\bar{D}^2\left[e^{-2gV}D_\alpha\left(e^{2gV}e^{-ig\Lambda}\right)\right] \end{aligned}$$

27 Τα χειραλικά υπερπεδία μετασχηματίζονται ώς $\Phi \mapsto \exp\left(ig\Lambda^a t^a\right)\Phi$.
28 Όπως συμβαίνει με τις καμπυλότητες σε μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας: $F \mapsto UFU^{-1}$, $U \in \mathcal{G}$, σε αντίθεση με την αβελιανή περίπτωση όπου το F είναι αναλλοίωτο.

$$= -\frac{1}{8g} e^{ig\Lambda} \bar{D}^2 \left(e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV} \right) e^{-ig\Lambda} - \frac{1}{4} e^{ig\Lambda} \bar{D}^2 D_\alpha e^{-ig\Lambda}$$

$$= e^{ig\Lambda} W_\alpha e^{-ig\Lambda} - \frac{1}{8g} e^{ig\Lambda} \bar{D}_{\dot{\alpha}} \left(\left\{ \bar{D}^{\dot{\alpha}}, D_\alpha \right\} - D_\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} \right) e^{-ig\Lambda}$$

$$= e^{ig\Lambda} W_\alpha e^{-ig\Lambda} - \frac{i}{2} e^{ig\Lambda} \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \cancelto{0}{\bar{D}^{\dot{\alpha}} e^{-ig\Lambda}} + \frac{1}{8g} e^{ig\Lambda} \bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \cancelto{0}{\bar{D}^{\dot{\alpha}} e^{-ig\Lambda}}$$

$$\Rightarrow W_\alpha \mapsto e^{ig\Lambda} W_\alpha e^{-ig\Lambda} \tag{233}$$

και αντίστοιχα,

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} \mapsto e^{ig\Lambda^\dagger} \bar{W}_{\dot{\alpha}} e^{-ig\Lambda^\dagger} \tag{234}$$

Θα υπολογίσουμε το W_α στη βαθμίδα WZ όπως και στην αβελιανή περίπτωση, όπου έχουμε:

$$\circ \;\; e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV} = \left(1 - 2gV + 2g^2V^2\right) D_\alpha \left(1 + 2gV + 2g^2V^2\right)$$

$$= 2gD_\alpha V + 2g^2 V D_\alpha V + 2g^2 \left(D_\alpha V\right) V - 4g^2 V D_\alpha V + \cancelto{0}{\mathcal{O}(VVV)}$$

$$= 2gD_\alpha V + 2g^2 \left[D_\alpha V, V\right] = 2g \left(D_\alpha V + g \left[D_\alpha V, V\right]\right)$$

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 D_\alpha V - \frac{g}{4} \bar{D}^2 \left[D_\alpha V, V\right] \tag{235}$$

το οποίο περιέχει ώς πρώτο όρο το αβελιανό W_α και ο επιπλέον μη γραμμικός όρος είναι μη μηδενικός λόγω της μη μεταθετικότητας των πεδίων. Αυτός ο όρος θα δώσει στην καμπυλότητα το μη γραμμικό της κομμάτι όπως φαίνεται από τον υπολογισμό του:

$$\circ \;\; [V, D_\alpha V] = \left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right) \left(\sigma^\nu\bar{\theta}\right)_\alpha [\upsilon_\mu, \upsilon_\nu] + \left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right) 2i\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} [\upsilon_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}]$$
$$+ i\theta\theta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \left(\sigma^\mu\bar{\theta}\right)_\alpha [\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}, \upsilon_\mu]$$

$$= \left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right) \left(\sigma^{\nu\mu}\theta\right)_\alpha [\upsilon_\mu, \upsilon_\nu] - \frac{i}{2} (\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}) \epsilon^{\gamma\beta} \epsilon_{\beta\alpha} \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \sigma^\mu_{\gamma\dot{\gamma}} [\upsilon_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}]$$
$$+ \frac{i}{2} (\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}) \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \sigma^\mu_{\alpha\dot{\gamma}} [\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}, \upsilon_\mu]$$

$$\Rightarrow [D_\alpha V, V] = \left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right) \left(\sigma^{\mu\nu}\theta\right)_\alpha [\upsilon_\mu, \upsilon_\nu] - i(\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}) \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \left[\upsilon_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\right] \tag{236}$$

όπου κάναμε χρήση του υπολογισμού (199) και των σπινοριακών ταυτοτήτων. Συνεπώς έχουμε, καθώς όλα τα πεδία και οι παράγωγοι εκφράζονται στις συντεταγμένες y:

$$-\frac{g}{4}\bar{D}^2\left[D_\alpha V, V\right] = g\int d^2\bar{\theta}\left[D_\alpha V, V\right] = g\left(\sigma^{\mu\nu}\theta\right)_\alpha\left[\upsilon_\mu, \upsilon_\nu\right] - ig(\theta\theta)\sigma^\mu\left[\upsilon_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\right]$$

και έτσι,

$$\begin{aligned} W_\alpha =& -i\lambda_\alpha + \theta_\alpha d + i\left(\sigma^{\mu\nu}\theta\right)_\alpha\left(\partial_\mu\upsilon_\nu - \partial_\nu\upsilon_\mu - ig\left[\upsilon_\mu, \upsilon_\nu\right]\right) \\ &+ (\theta\theta)\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} - ig\left[\upsilon_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\right]\right) \end{aligned} \tag{237}$$

$$\boxed{\Rightarrow W_\alpha = -i\lambda_\alpha + \theta_\alpha d + i\left(\sigma^{\mu\nu}\theta\right)_\alpha F_{\mu\nu} + (\theta\theta)\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\nabla_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \quad (238)}$$

όπου πλέον $F_{\mu\nu}$ είναι ο μη αβελίανός τανυστής ισχύος:

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu\upsilon_\nu - \partial_\nu\upsilon_\mu - ig\left[\upsilon_\mu, \upsilon_\nu\right] \tag{239}$$

ή σε συνιστώσες της ομάδας βαθμίδας:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu\upsilon^a_\nu - \partial_\nu\upsilon^a_\mu + gf^{abc}\upsilon^b_\mu\upsilon^c_\nu \tag{240}$$

και η συναλλοίωτη παράγωγος βαθμίδας δρά στον σπίνορα $\bar{\lambda}$ ώς:

$$\nabla_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} = \partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} - ig\left[\upsilon_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\right] \tag{241}$$

ή

$$\nabla_\mu\bar{\lambda}^{a\dot{\alpha}} = \partial_\mu\bar{\lambda}^{a\dot{\alpha}} + f^{abc}\upsilon^b\bar{\lambda}^{c\dot{\alpha}} \tag{242}$$

Τότε, θα ισχύει:

$$\operatorname{tr}\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2i\operatorname{tr}\lambda\sigma^\mu\nabla_\mu\bar{\lambda} + \operatorname{tr}d^2 + \frac{i}{2}\operatorname{tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{243}$$

σε αναλογία με αυτά που βρήκαμε στην αβελιανή περίπτωση, μόνο που εδώ χρειάζεται να πάρουμε το ίχνος της έκφρασης ώς πρός τους δείκτες της ομάδας βαθμίδας για να είναι η παραπάνω παράσταση αναλλοίωτη. Σημειώνουμε ότι ο όρος σύζευξης του τανυστή F με τον δυικό του, ο οποίος εκφράζει στιγμιονικές λύσεις (instanton solutions), δεν εμφανίστηκε στη Λαγκρανζιανή της θεωρίας λόγω του καθαρά φανταστικού συντελεστή του. Έχουμε τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε μια πραγματική δράση η οποία κρατά αυτό τον όρο, κάτι που επιθυμούμε εάν θέλουμε να μελετήσουμε τη δυικότητα, γράφοντας μια σταθερά ζεύξης με μη μηδενικό φανταστικό μέρος την οποία ορίζουμε ώς εξής:

$$\tau := \frac{\theta_{YM}}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2} \tag{244}$$

με θ_{YM} τη γωνιακή παράμετρο του $F\tilde{F}$ όρου. Πράγματι ο παρακάτω συνδιασμός μας δίνει την επιθυμητή Λαγκρανζιανή:

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\,\tau\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha = \frac{\tau}{2i}\int d^2\theta\,\mathrm{tr}\,W^\alpha W_\alpha - \frac{\tau^*}{2i}\int d^2\bar\theta\,\mathrm{tr}\,\bar W_{\dot\alpha}\bar W^{\dot\alpha}$$

$$\begin{aligned}
=&\frac{\theta_{YM}}{8\pi}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}\tilde F^{\mu\nu} - \frac{\pi}{g^2}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{4\pi i}{g^2}\,\mathrm{tr}\,\lambda\sigma^\mu\nabla_\mu\bar\lambda + \frac{2\pi}{g^2}\,\mathrm{tr}\,d^2\\
&+\frac{\theta_{YM}}{8\pi}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}\tilde F^{\mu\nu} - \frac{\pi}{g^2}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{4\pi i}{g^2}\,\mathrm{tr}\,\lambda\sigma^\mu\nabla_\mu\bar\lambda + \frac{2\pi}{g^2}\,\mathrm{tr}\,d^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{\theta_{YM}}{4\pi}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}\tilde F^{\mu\nu} - \frac{2\pi}{g^2}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{8\pi i}{g^2}\,\mathrm{tr}\,\lambda\sigma^\mu\nabla_\mu\bar\lambda + \frac{4\pi}{g^2}\,\mathrm{tr}\,d^2$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{32\pi}\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\,\tau\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha = \frac{1}{4g^2}\,\mathrm{tr}\Bigg(&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu\nabla_\mu\bar\lambda\\
&+\frac{1}{2}d^2 + \frac{\theta_{YM}g^2}{32\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde F^{\mu\nu}\Bigg)
\end{aligned} \tag{245}$$

όπου μπορούμε να ανακτήσουμε τη συνήθη κανονικοποίηση με μια κλιμάκωση της ανυσματικής πολλαπλέτας ώς[29] $V \to 2gV$, μετά την οποία καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{gauge}} &= \frac{1}{32\pi}\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\,\tau\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha\\
&= \mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu\nabla_\mu\bar\lambda + \frac{1}{2}d^2\right) + \frac{\theta_{YM}g^2}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}\tilde F^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{246}$$

Η προσθήκη ύλης γίνεται με τον ίδιο τρόπο που περιγράψαμε και στην αβελιανή περίπτωση, με τη διαφορά ότι το δυναμικό Kähler θα δίνεται από το ανάπτυγμα (220) όπου τώρα η συναλλοίωτη παράγωγος θα είναι: $\nabla_\mu A = \partial_\mu A - igv^a_\mu t^a A$. Επομένως, μια $\mathcal{N}=1$ υπερσυμμετρική θεωρία Yang-Mills παίρνει τη γενικότερη επανακανονικοποιήσιμη μορφή (εντός φλοιού μάζας, με τα βοηθητικά πεδία ολοκληρωμένα):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\mathcal{N}=1)} =& \frac{1}{32\pi}\mathrm{Im}\left(\mathrm{tr}\,\tau\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha\right) + \int d^4\theta \Phi^\dagger e^{2gV}\Phi\\
&+\left(\int d^2\theta W(\Phi) + \text{h.c.}\right)
\end{aligned} \tag{247}$$

29 Ενώ επιλέξαμε όταν προσθέσαμε την ύλη στα προηγούμενα να γράψουμε το δυναμικό Kähler ώς $\Phi^\dagger e^{2gV}\Phi$, θα μπορούσαμε να είχαμε υπολογίσει απλώς το $\Phi^\dagger e^V\Phi$ και μετά να κάνουμε την ίδια κλιμάκωση.

$$
\begin{aligned}
=&\operatorname{tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-i\lambda\sigma^{\mu}\nabla_{\mu}\bar{\lambda}\right)+\frac{\theta_{YM}g^{2}}{32\pi^{2}}\operatorname{tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\operatorname{tr}d^{2}+gA^{*}t^{a}Ad^{a}\\
&+(\nabla_{\mu}A)^{*}(\nabla^{\mu}A)+i\nabla_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\psi}+|F|^{2}+\sqrt{2}ig\left(A^{*}t^{a}\psi\lambda^{a}-At^{a}\bar{\psi}\bar{\lambda}^{a}\right)\\
&-\frac{1}{2}\psi\psi\left.\frac{\delta^{2}W}{\delta\Phi\delta\Phi}\right|_{A}-\frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi}\left.\frac{\delta^{2}\bar{W}}{\delta\Phi^{\dagger}\delta\Phi^{\dagger}}\right|_{A^{*}}-\left.\frac{\delta W}{\delta\Phi}\right|_{A}F-\left.\frac{\delta\bar{W}}{\delta\Phi^{\dagger}}\right|_{A^{*}}F^{*}\\
=&\operatorname{tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-i\lambda\sigma^{\mu}\nabla_{\mu}\bar{\lambda}\right)+\frac{\theta_{YM}g^{2}}{32\pi^{2}}\operatorname{tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\\
&+(\nabla_{\mu}A)^{*}(\nabla^{\mu}A)+i\nabla_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\psi}+\sqrt{2}ig\left(A^{*}t^{a}\psi\lambda^{a}-At^{a}\bar{\psi}\bar{\lambda}^{a}\right)\\
&-\frac{1}{2}\psi\psi\left.\frac{\delta^{2}W}{\delta\Phi\delta\Phi}\right|_{A}-\frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi}\left.\frac{\delta^{2}\bar{W}}{\delta\Phi^{\dagger}\delta\Phi^{\dagger}}\right|_{A^{*}}+\left|\left.\frac{\delta W}{\delta\Phi}\right|_{A}\right|^{2}-\frac{g^{2}}{2}\left(A^{*}t^{a}A\right)^{2}
\end{aligned}
$$

1.4.8 Το μη Γραμμικό Σίγμα Μοντέλο με Πεδία Βαθμίδας

Σε αντιστοιχία με τη κατασκευή της γενικότερης Λαγκρανζιανής χειραλικών υπερπεδίων, όπου όπως είδαμε στην ενότητα 1.4.3 αυτή επάγει μια πολλαπλότητα Kähler με συντεταγμένες τα βαθμωτά πεδία, μπορούμε να κάνουμε το ίδιο για τη Λαγκρανζιανή της ανυσματικής πολλαπλέτας. Αυτό μπορεί να γίνει με τρόπο που σέβεται την ομάδα βαθμίδας γράφοντας:

$$
\mathcal{L}_{\text{gauge}}=\frac{1}{16g^{2}}\int d^{2}\theta f_{ab}(\Phi_{i})W^{\alpha a}W_{\alpha}^{b}+\text{h.c.} \tag{248}
$$

η οποία αναπαράγει τη (246) με την επιλογή:

$$
f_{ab}(\Phi_{i})=g^{2}\frac{\tau}{4\pi i}\operatorname{tr}t^{a}t^{b} \tag{249}
$$

Η f εξαρτάται ολόμορφα από τα χειραλικά υπερπεδία Φ_i και ονομάζεται κινητική συνάρτηση βαθμίδας με $f_{ab}=f_{ba}$ (μετασχηματίζεται ώς το συμμετρικό γινόμενο δύο συζυγών αναπαραστάσεων). Το ανάπτυγμα της $f_{ab}(\Phi_i)$ γύρω από τη βαθμωτή συνιστώσα του υπερπεδίου θα έχει την ίδια μορφή με το ανάπτυγμα (145) του υπερδυναμικού, μιας και είναι και οι δύο ολόμορφες συναρτήσεις:

$$
\begin{aligned}
f_{ab}(\Phi_{i})\approx{}& f_{ab}(A_{i})+\sqrt{2}\theta\psi_{i}\left.\frac{\delta f_{ab}}{\delta\Phi_{i}}\right|_{\Phi_{i}=A_{i}}\\
&+(\theta\theta)\left[\left.\frac{\delta f_{ab}}{\delta\Phi_{i}}\right|_{\Phi_{i}=A_{i}}F_{i}-\frac{1}{2}\psi_{i}\psi_{j}\left.\frac{\delta^{2}f_{ab}}{\delta\Phi_{i}\delta\Phi_{j}}\right|_{A_{i},A_{j}}\right]
\end{aligned} \tag{250}
$$

Τότε η παραπάνω Λαγκρανζιανή αναπτύσσεται στις συνιστώσες:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{gauge}}=\frac{1}{16g^{2}}\int d^{2}\theta&\left[f_{ab}\left(W^{a\alpha}W_{\alpha}^{b}\right)_{\theta\theta}+\sqrt{2}\theta\psi_{i}f_{ab,i}\left(W^{a\alpha}W_{\alpha}^{b}\right)_{\theta}\right.\\
&\left.+(\theta\theta)\left(f_{ab,i}F_{i}-\frac{1}{2}\psi_{i}\psi_{j}f_{ab,ij}\right)\left(-\lambda^{a}\lambda^{b}\right)\right]+\text{h.c.}
\end{aligned} \tag{251}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Re}\, f_{ab}\left(-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu} - i\lambda^a\sigma^\mu\nabla_\mu\bar{\lambda}^b + \frac{1}{2}d^a d^b\right) - \frac{1}{4}\,\mathrm{Im}\, f_{ab}F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu} \\
&+ \frac{1}{4}f_{ab,i}\left(\sqrt{2}i\psi_i\lambda^a d^b - \sqrt{2}\psi_i\lambda^a\sigma^{\mu\nu}F^b_{\mu\nu} + \lambda^a\lambda^b F_i\right) + \text{h.c.} \\
&+ \frac{1}{8}f_{ab,ij}\lambda^a\lambda^b\psi_i\psi_j + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{252}
$$

με $f_{ab} \equiv f_{ab}(A_i)$ και για συντομογραφία $f_{ab,i} \equiv \delta/\delta\Phi_i|_{A_i}\, f_{ab}$. Θα πρέπει επίσης να τροποποιηθεί η Λαγκρανζιανή με το άναπτυγμα του δυναμικού Kähler (178) έτσι ώστε να περιέχει τις συζεύξεις των πεδίων των χειραλικών πολλαπλέτων Φ_i με τα πεδία βαθμίδας, το οποίο γίνεται κάνοντας τους συνδιασμούς των Φ_i συναλλοίωτους ώς προς την ομάδα βαθμίδας: $K(\Phi^i, \Phi^{\dagger\bar{j}}) \to K(\Phi^i, \Phi^{\dagger\bar{j}}\exp(2qV))$. Αυτό παράγει τις συζεύξεις Yukawa που εμφανίζονται στη (247), όμως με τη μετρική Kähler να συστέλλει τους δείκτες $i, \bar{j}$. Επίσης οι συναλλοίωτες Kähler παράγωγοι που δρούν στα φερμιόνια των Φ_i στη (178) θα περιέχουν επιπλέον και το κομμάτι της συναλλοίωτης παραγώγου βαθμίδας:

$$
D_\mu\psi^i \to \nabla_\mu\psi_i = \partial_\mu\psi_i - v^a_\mu\,(t^a)_{ij}\,\psi^j + \Gamma^k_{ij}\nabla_\mu A^j\psi_k \tag{253}
$$

και οι κανονικές παράγωγοι των βαθμωτών A^i προοθούνται σε συναλλοίωτες παραγώγους βαθμίδας:

$$
\nabla_\mu A^i = \partial_\mu A^i - v^a_\mu\,(t^a)_{ij}\,A^j \tag{254}
$$

Ακολουθώντας τα παραπάνω, κανείς καταλήγει:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{matter}} = K_{i\bar{j}}&\left[(\nabla_\mu A)^i(\nabla^\mu A)^{*\bar{j}} + F^iF^{*\bar{j}} + \frac{i}{2}\nabla_\mu\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^{\bar{j}} - \frac{i}{2}\psi^i\sigma^\mu\nabla_\mu\bar{\psi}^{\bar{j}}\right] \\
&- \frac{1}{2}\left(K_{ij\bar{k}}\psi^i\psi^jF^{*\bar{k}} + K_{\bar{i}\bar{j}k}\bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{j}}F^k\right) + \frac{1}{4}K_{ij\bar{k}\bar{l}}\psi^i\psi^j\bar{\psi}^{\bar{k}}\bar{\psi}^{\bar{l}} \\
&+ W_iF^i + \bar{W}_{\bar{i}}F^{*\bar{i}} - \frac{1}{2}\left(W_{ij}\psi^i\psi^j + \bar{W}_{\bar{i}\bar{j}}\bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{j}}\right) \\
&+ \sqrt{2}igK_{i\bar{j}}\left(A^{*\bar{j}}t^a\psi^i\lambda^a - A^it^a\bar{\psi}^{\bar{j}}\lambda^a\right) + gK_{\bar{i}}A^{*\bar{i}}t^ad^a
\end{aligned} \tag{255}
$$

1.5 $\mathcal{N} = 2$ Υπερσυμμετρικές θεωρίες Yang − Mills

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι η $\mathcal{N} = 1$ υπερσυμμετρία αποτελεί τη γενικότερη περίπτωση υπερσυμμετρίας και αυξάνοντας το βαθμό των υπερσυμμετρικών γεννητόρων, αυξάνουμε τους συνδέσμους που θα πρέπει να υπακούει η $\mathcal{N} = 1$ θεωρία. Για αρχή, το περιεχόμενο της $\mathcal{N} = 2$ ανυσματικής πολλαπλέτας (εντός φλοιού μάζας) όπως το περιγράψαμε στη (72) αποσυντίθεται σε μια $\mathcal{N} = 1$ ανυσματική και σε μια $\mathcal{N} = 1$ χειραλική πολλαπλέτα, το περιεχόμενο των οποίων ήδη περιέχεται στη (247). Το ότι τα πεδία της κάθε $\mathcal{N} = 1$ πολλαπλέτας πλέον βρίσκονται σε μια κοινή $\mathcal{N} = 2$ πολλαπλέτα, αναγκάζει το χειραλικό υπερπεδίο να πάρει και αυτό τιμές στην ίδια αναπαράσταση της Lie άλγεβρας της ομάδας βαθμίδας με το ανυσματικό πεδίο βαθμίδας που ανήκει στο ανυσματικό υπερπεδίο. Επομένως, όλα τα πεδία συνιστώσες θα βρίσκονται στην συζυγή αναπαράσταση της $\mathcal{G}$: $V = V^a t^a \Rightarrow v_\mu = v_\mu^a t^a, \lambda = \lambda^a t^a, d = d^a t^a$ και $\Phi = \Phi^a t^a \Rightarrow A = A^a t^a, \psi = \psi^a t^a, F = F^a t^a$, $a = 1, \ldots, \dim(\mathcal{G})$ με $(t^a)_{ij} = -if^a_{ij}$. Θα πρέπει επίσης να υπάρχει η ομάδα $SU(2)_\mathcal{R}$ η οποία θα δρά στην $\mathcal{N} = 2$ πολλαπλέτα περιστρέφοντας τα φερμιόνια και δρώντας στα υπόλοιπα πεδία ώς singlets. Αυτή είναι η ουσιαστική συνθήκη για να έχουμε μια $\mathcal{N} = 2$ υπερσυμμετρική Λαγκραναζιανή, η οποία αυτόματα αποκλύει την προσθήκη ενός $\mathcal{N} = 1$ υπερδυναμικού μιας και αυτό συζεύγνειται μονάχα με το φερμιόνιο της $\mathcal{N} = 1$ χειραλικής πολλαπλέτας (ψ) και όχι με αυτό της ανυσματικής (λ). Με αυτές τις παρατηρήσεις, καθώς και το ότι οι αλληλεπιδράσεις τύπου Yukawa μπορούν να γραφούν στη συζυγή αναπαράσταση ώς[30]:

$$\circ \quad \sqrt{2}igA^\dagger\lambda\psi = \sqrt{2}igA^{b\dagger}\lambda^a(t^a)_{bc}\psi^c = \sqrt{2}igA^{b\dagger}\lambda^a\psi^c\left(-if^a_{bc}\right)$$
$$= \sqrt{2}igA^{b\dagger}\lambda^a\psi^c if^{bac} = \sqrt{2}igA^{b\dagger}\lambda^a\psi^c \operatorname{tr} t^b\left[t^a, t^c\right] = \sqrt{2}ig \operatorname{tr} A^\dagger\left\{\lambda, \psi\right\} \tag{256}$$

$$\circ \quad -\sqrt{2}igA\bar{\lambda}\bar{\psi} = \sqrt{2}igA^b\bar{\lambda}^a\bar{\psi}^c if^{abc} = -\sqrt{2}igA^a\bar{\lambda}^b\bar{\psi}^c \operatorname{tr} t^b[t^a, t^c]$$
$$= -\sqrt{2}ig \operatorname{tr} A\left\{\bar{\lambda}, \bar{\psi}\right\} \tag{257}$$

$$\circ \quad gA^\dagger dA = gA^{b\dagger}d^aA^c\left(-if^{abc}\right) = -gA^{b\dagger}d^aA^c \operatorname{tr} t^a[t^b, t^c] = g \operatorname{tr} d\left[A, A^\dagger\right] \tag{258}$$

καταλήγουμε στην γενικότερη επανακανονικοποιήσιμη $\mathcal{N} = 2$ Λαγκρανζιανή:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(\mathcal{N}=2)} &= \frac{1}{32\pi}\operatorname{Im}\operatorname{tr}\int d^2\theta\tau W^\alpha W_\alpha + \operatorname{tr}\int d^4\theta\Phi^\dagger e^{2gV}\Phi \\ &= \operatorname{tr}\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu\nabla_\mu\bar{\lambda} - i\psi\sigma_\mu\nabla^\mu\bar{\psi} + (\nabla_\mu A)^\dagger(\nabla^\mu A)\right. \\ &\quad + \frac{\theta_{YM}g^2}{32\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \sqrt{2}ig\left(A^\dagger\left\{\lambda, \psi\right\} - A\left\{\bar{\lambda}, \bar{\psi}\right\}\right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}d^2 + gd[A, A^\dagger] + F^\dagger F\right]\end{aligned} \tag{259}$$

30 Με χρήση της εξής σχέσης:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \Rightarrow \operatorname{tr} t^b[t^a, t^b] = if^{abc}\delta^{bc} \Rightarrow \operatorname{tr} t^a[t^b, t^c] = if^{abc}$$

όπου μάλιστα, η $SU(2)_{\mathcal{R}}$ συμμετρία μπορεί να γίνει πιο εμφανής εάν ορίσουμε τη διπλέτα των φερμιονίων ώς: $\lambda^I := (\lambda, \psi)$. Τότε οι αντιμεταθέτες τους που βρίσκονται στη Λαγκρανζιανή αυτόματα σχηματίζουν $SU(2)$ αναλλοίωτα:

- $$\{\lambda, \psi\} = \lambda^a \psi^b [t^a, t^b] = \lambda^{1a}\lambda^{2b}[t^a, t^b] = \frac{1}{2}\left(\lambda^{1a}\lambda^{2b} - \lambda^{2a}\lambda^{1b}\right)[t^a, t^b]$$
$$= \frac{1}{2}\epsilon_{IJ}\lambda^{Ia}\lambda^{Jb}[t^a, t^b] = \frac{1}{2}\epsilon_{IJ}\left\{\lambda^I, \lambda^J\right\} \tag{260}$$

$$\mathcal{L}^{(\mathcal{N}=2)} = \mathrm{tr}\Big[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda^I\sigma^\mu\nabla_\mu\bar{\lambda}^I + (\nabla_\mu A)^\dagger(\nabla^\mu A) + \frac{\theta_{YM}g^2}{32\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$
$$+\frac{i}{\sqrt{2}}g\epsilon_{IJ}\left(A^\dagger\left\{\lambda^I, \lambda^J\right\} - A\left\{\bar{\lambda}^I, \bar{\lambda}^J\right\}\right) + \frac{1}{2}d^2 + gd[A, A^\dagger] + F^\dagger F\Big] \tag{261}$$

Απαλλοίφοντας τα βοηθητικά πεδία F^a και d^a μέσω των εξισώσεων κίνησής τους, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} F^a &= 0 = F^{a\dagger} \\ d^a &= -g\left([A, A^\dagger]\right)^a \end{aligned} \tag{262}$$

τα οποία σχηματίζουν το εξής βαθμωτό δυναμικό μέσω των αντίστοιχων όρων:

$$V(A, A^\dagger) = \frac{g^2}{2}\,\mathrm{tr}\left([A, A^\dagger]\right)^2 \tag{263}$$

Καταλήγουμε επομένως στη συνεπτυγμένη μορφή:

$$\mathcal{L}^{(\mathcal{N}=2)} = \frac{1}{32\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\int d^2\theta\tau W^\alpha W_\alpha + \mathrm{tr}\int d^4\theta\Phi^\dagger e^{2gV}\Phi$$
$$= \mathrm{tr}\Big[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda^I\sigma^\mu\nabla_\mu\bar{\lambda}^I + (\nabla_\mu A)^\dagger(\nabla^\mu A) + \frac{\theta_{YM}g^2}{32\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$
$$+\frac{i}{\sqrt{2}}g\epsilon_{IJ}\left(A^\dagger\left\{\lambda^I, \lambda^J\right\} - A\left\{\bar{\lambda}^I, \bar{\lambda}^J\right\}\right) - \frac{g^2}{2}\left(\left[A, A^\dagger\right]\right)^2\Big] \tag{264}$$

1.5.1 $\mathcal{N} = 2$ Υπερχώρος

Μπορεί κανείς σε πλήρη αντιστοιχία με την $\mathcal{N} = 1$ περίπτωση, να εισάγει ακόμα τέσσερεις Grassmann συντεταγμένες $\{\tilde{\theta}^\alpha, \bar{\tilde{\theta}}_{\dot{\alpha}}\}_{\alpha=1,2}$ κατασκευάζοντας τον $\mathcal{N} = 2$ υπερχώρο. Τα σημεία σε αυτόν εκφράζονται από τις συντεταγμένες $x^M = (x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \tilde{\theta}^\alpha, \bar{\tilde{\theta}}_{\dot{\alpha}})$ και τα $\mathcal{N} = 2$ υπερπεδία θα είναι συναρτήσεις των σημείων: $F = F(x^M)$. Για να περιέχει ένα τέτοιο υπερπεδίο τον ίδιο αριθμό συνιστοσών με την $\mathcal{N} = 2$ (ανυσματική) πολλαπλέτα θα πρέπει να του υποβάλουμε τους απαραίτητους δεσμούς. Συγκεκριμένα θα πρέπει το υπερπεδίο, το οποίο μετασχηματίζεται ώς μια singlet κάτω από την ομάδα $SU(2)_{\mathcal{R}}$, να είναι χειραλικό και για τις δύο συντεταγμένες (θ και $\tilde{\theta}$):

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Psi = 0 = \bar{\tilde{D}}_{\dot{\alpha}}\Psi \tag{265}$$

όπου $\bar{\tilde{D}}_{\dot{\alpha}} = \partial/\partial\bar{\tilde{\theta}}_{\dot{\alpha}} + i\left(\tilde{\theta}\sigma^{\mu}\right)_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}$ στις x συντεταγμένες, καθώς επίσης και τη συνθήκη:

$$D^{\alpha}_{I}D_{\alpha J}\Psi = \bar{D}_{\dot{\alpha}I}\bar{D}^{\dot{\alpha}}_{J}\Psi \tag{266}$$

όπου $D_I = (D, \tilde{D})$, σε αντιστοιχία με τη $\mathcal{N} = 1$ συνθήκη (196). Κανείς συνήθως αναπτύσσει το Ψ στις συνιστώσες $\tilde{\theta}$ ώς:

$$\Psi(\tilde{y}, \theta) = \Psi^{(1)}(\tilde{y}, \theta) + \sqrt{2}i\tilde{\theta}^{\alpha}\Psi^{(2)}_{\alpha}(\tilde{y}, \theta) + \left(\tilde{\theta}\tilde{\theta}\right)\Psi^{(3)}(\tilde{y}, \theta) \tag{267}$$

όπου ορίζουμε τη νέα συντεταγμένη $\tilde{y}^{\mu} := y^{\mu} + i\tilde{\theta}\sigma^{\mu}\bar{\tilde{\theta}}$. Η ιδέα είναι να εκφράσουμε το $\mathcal{N} = 2$ υπερπεδίο μέσω των $\mathcal{N} = 1$ χειραλικών (Φ) και ανυσματικών (V ή W_{α}) υπερπεδίων. Στο παραπάνω ανάπτυγμα αναγνωρίζουμε τη βαθμωτή και τη σπινοριακή συνιστώσα να είναι ακριβώς αυτά:

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(\tilde{y}, \theta) &= \Phi(\tilde{y}, \theta) \\ \Psi^{(2)}_{\alpha}(\tilde{y}, \theta) &= W_{\alpha}(\tilde{y}, \theta) \end{aligned} \tag{268}$$

τα οποία συμφωνούν με τους δεσμούς και τη διαστατική ανάλυση. Όσο για την τελευταία συνιστώσα $\Psi^{(3)}$, αυτή μπορεί να γραφεί στη συναλλοίωτη (κατά βαθμίδα) μορφή ώς:

$$\Psi^{(3)}(\tilde{y}, \theta) = 4\int d^2\bar{\theta}\Phi^{\dagger}(\tilde{y} - i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta})\exp\left(2gV(\tilde{y} - i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta})\right) \tag{269}$$

έτσι ώστε όταν πολλαπλασιαστεί με το Φ και ολοκληρώσουμε στον υπόλοιπο $\mathcal{N} = 1$ υπερχώρο, να πάρουμε τον όρο ζεύξης του χειραλικού με το ανυσματικό πεδίο (το ολοκλήρωμα στα $\bar{\theta}$ γίνεται με σταθερό $\tilde{y}$). Για να μπορέσουμε να γράψουμε τη Λαγκρανζιανή σε αυτό το φορμαλισμό θα χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική κανονικοποίηση για τον όρο των πεδίων βαθμίδας της ανυσματικής πολλαπλέτας, η οποία αντιστοιχεί στην κλιμάκωση $V \to 2V$ στο σπινοριακό υπερπεδίο W_{α} (δηλαδή χωρίς τη σταθερά ζεύξης g). Αυτό θα φέρει τη $\mathcal{L}^{(\mathcal{N}=1)}$ στη παρακάτω μορφή, όπου όλοι οι όροι εκτός του τοπολογικού θ_{YM} όρου έχουν συντελεστή το g^{-2} ($\mathcal{L}^{(\mathcal{N}=1)} \to g^2\mathcal{L}^{(\mathcal{N}=1)}$):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\mathcal{N}=1)}_{\text{gauge}} &= \frac{1}{32\pi}\operatorname{Im}\operatorname{tr}\int d^2\theta\tau W^{\alpha}W_{\alpha} \\
= \frac{1}{g^2}\operatorname{tr}&\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^{\mu}\nabla_{\mu}\bar{\lambda} + (\nabla_{\mu}A)^{\dagger}(\nabla^{\mu}A)\right] + \frac{\theta_{YM}}{32\pi^2}\operatorname{tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{270}
$$

Για να έχουμε $\mathcal{N}=2$ υπερσυμμετρία θα πρέπει να διορθώσουμε και τον συντελεστή του $\mathcal{N}=1$ όρου ύλης (στη συζυγή αναπαράσταση) έτσι ώστε τα φερμιόνια να σχηματίζουν μια $SU(2)_{\mathcal{R}}$ διπλέτα, το οποίο γίνεται με την κλιμάκωση $\Phi \to g^{-1}\Phi$:

$$
\mathcal{L}^{(\mathcal{N}=2)} = \frac{1}{32\pi}\operatorname{Im}\operatorname{tr}\int d^2\theta\tau W^{\alpha}W_{\alpha} + \frac{1}{g^2}\operatorname{tr}\int d^4\theta\Phi^{\dagger}e^{2gV}\Phi \tag{271}
$$

$$
= \frac{1}{32\pi}\operatorname{Im}\operatorname{tr}\tau\left[\int d^2\theta W^{\alpha}W_{\alpha} + 8\int d^4\theta\Phi^{\dagger}e^{2gV}\Phi\right] \tag{272}
$$

Εάν τώρα αφήσουμε το $\mathcal{N}=2$ χειραλικό υπερπεδίο να πάρει τιμές στη Lie άλγεβρα της ομάδας βαθμίδας:

$$
\Psi \to \Psi^{a}t^{a},\ a = 1, \dots, \dim(\mathcal{G}) \tag{273}
$$

βλέπουμε ότι:

- $$\int d^2\tilde{\theta}\Psi^2 = W^{\alpha}W_{\alpha} + 2G\Phi = W^{\alpha}W_{\alpha} + 8\int d^2\bar{\theta}\Phi^{\dagger}e^{2gV}\Phi \tag{274}$$

και επομένως η Λαγκρανζιανή γράφεται συναρτήσει του Ψ ώς:

$$
\boxed{\mathcal{L}^{(\mathcal{N}=2)} = \frac{1}{32\pi}\operatorname{Im}\operatorname{tr}\tau\int d^2\theta d^2\tilde{\theta}\Psi^2} \tag{275}
$$

όπου τονίζουμε ότι η εξάρτηση της Λαγκρανζιανής από το $\mathcal{N}=2$ υπερπεδίο είναι ολόμορφη, δηλαδή εξαρτάται μόνο από το Ψ και όχι το $\Psi^{\dagger}$.

1.5.2 Προσθήκη Ύλης στη $\mathcal{N}=2$ Θεωρία

Η παραπάνω περιγραφή καλύπτει τον τομέα βαθμίδας της θεωρίας, όπου όλα τα πεδία συνιστώσες του Ψ βρίσκονται στη συζυγή αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας, μιας και ανήκουν στην ίδια πολλαπλέτα με το μποζόνιο βαθμίδας. Εάν θέλουμε να προσθέσουμε πεδία ύλης, λχ στη θεμελιώδη αναπαράσταση, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το άλλο είδος πολλαπλέτας της $\mathcal{N}=2$ θεωρίας, μια hypermultiplet. Όπως περιγράψαμε στο πρώτο μέρος της εργασίας, αυτή αποτελείται στη $\mathcal{N}=1$ γλώσσα από δύο χειραλικά υπερπεδία $Q \sim (q, \psi_q, F_q)$ και $\tilde{Q}^{\dagger} \sim (\tilde{q}^{\dagger}, \psi^{\dagger}_{\tilde{q}}, F^{\dagger}_{\tilde{q}})$ στην ίδια αναπαράσταση, όπου το on shell περιεχόμενο είναι δύο φερμιόνια αντίθετης χειραλικότητας (εξού και η χρήση του $\tilde{Q}^\dagger$) και δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία τα οποία θα μετασχηματίζονται ώς διπλέτα κάτω από την $SU(2)_{\mathcal{R}}$, μιας και ξεκινάμε από το κενό Clifford με ελικότητα $\lambda_0 = -1/2$. Ο τρόπος που μπορεί να γραφεί μια τέτοια Λαγκρανζιανή για έμμαζες hypermultiplets μάζας m στη $\mathcal{N} = 1$ γλώσσα είναι ο εξής:

$$\mathcal{L}_{\text{matter}}^{\mathcal{N}=2} = \int d^4\theta \left(Q^\dagger e^{-2V} Q + \tilde{Q} e^{2V} \tilde{Q}^\dagger\right) + \left[\int d^2\theta \left(\sqrt{2}\tilde{Q}\Phi Q + m\tilde{Q}Q\right) + \text{h.c.}\right] \tag{276}$$

όπου οι πρώτοι δύο όροι είναι κινητικοί όροι για τα χειραλικά υπερπεδία σε σύζευξη με το ανυσματικό υπερπεδίο V. Αυτή η σύζευξη συσχετίζεται μέσω της $\mathcal{N} = 2$ υπερσυμμετρίας με τον όρο $\tilde{Q}\Phi Q$ και τέλος, ο όρος $m\tilde{Q}Q$ δίνει μάζα στη Hypermultiplet.

1.5.3 Ενεργός Περιγραφή μιας $\mathcal{N} = 2$ Θεωρίας $\text{Yang} - \text{Mills}$

Μπορούμε όπως και στη $\mathcal{N} = 1$ περίπτωση να γράψουμε την ενεργό θεωρία χαμηλών ενεργειών για κάποιο γενικό συναρτησοειδές $\mathcal{F}$ μέσω της γενικευμένης Λαγκρανζιανής:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{16\pi} \operatorname{Im} \operatorname{tr} \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \mathcal{F}(\Psi) \tag{277}$$

Το $\mathcal{F}(\Psi)$ ονομάζεται $\mathcal{N} = 2$ prepotential και εξαρτάται ολόμορφα από το Ψ. Η επανακανονικοποιησιμότητα απαιτεί τετραγωνική εξάρτηση από το Ψ όπως καταλήξαμε στη (275) ορίζοντας:

$$\mathcal{F}_{\text{cl}}(\Psi) := \frac{1}{2}\tau\Psi^2 \tag{278}$$

το οποίο αντιστοιχεί στη μικροσκοπική $\mathcal{N} = 2$ $\mathcal{G}$ θεωρία Yang-Mills. Μπορούμε να αναπτύξουμε το prepotential ώς πρός το $\mathcal{N} = 1$ χειραλικό υπερπεδίο (βαθμωτή συνιστώσα του Ψ):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Psi) = \mathcal{F}(\Psi = \Phi) + \sqrt{2} i \tilde{\theta}^\alpha W_\alpha^a \mathcal{F}_a(\Psi = \Phi) \\ + (\tilde{\theta}\tilde{\theta}) W^{a\alpha} W_\alpha^b \mathcal{F}_{ab}(\Psi = \Phi) + (\tilde{\theta}\tilde{\theta}) G^a \mathcal{F}_a(\Psi = \Phi)\end{aligned} \tag{279}$$

όπου $\mathcal{F}_\alpha(\Phi) := \delta\mathcal{F}(\Psi)/\delta\Phi^a|_{\Psi=\Phi}$ και $\mathcal{F}_{ab}(\Phi) = \delta^2\mathcal{F}(\Psi)/\delta\Phi^a\delta\Phi^b|_{\Psi=\Phi}$ αντίστοιχα . Εισχωρώντας αυτό στην (280) και ολοκληρώνοντας στον υπερχώρο, η Λαγκρανζιανή έρχεται τη στη $\mathcal{N} = 1$ μορφή:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2}\int d^2\theta \mathcal{F}_{ab}(\Phi) W^{a\alpha} W_\alpha^b + \int d^4\theta \left(\Phi^\dagger e^{2gV}\right)^a \mathcal{F}_a(\Phi)\right] \tag{280}$$

από την οποία μπορούμε να διαβάσουμε το δυναμικό Kähler:

$$K = \operatorname{Im}\left[\left(\Phi^\dagger e^{2gV}\right)^a \mathcal{F}_a(\Phi)\right] \tag{281}$$

το οποίο επάγει τη μετρική του σίγμα μοντέλου στο χώρο των πεδίων:

$$g_{ab} = \frac{\delta^2 K}{\delta\Phi^a \delta\Phi^{\dagger b}} = \mathrm{Im}\,\mathcal{F}_{ab}(\Phi) \tag{282}$$

Το ότι η μετρική μπορεί να γραφεί ώς τη δεύτερη παράγωγο μιας ολόμορφης συνάρτησης κάνει το χώρο που παραμετροποιείται από τα βαθμωτά πεδία μια ειδική πολλαπλότητα Kähler (special Kähler manifold). Αυτό που κανείς θα πρέπει να κρατήσει, το οποίο είναι και ο στόχος του κυρίου θέματος της εργασίας, είναι ότι η $\mathcal{N} = 2$ θεωρία καθορίζεται πλήρως από το ολόμορφο συναρτησοειδές $\mathcal{F}(\Psi)$.

1.6 Κβαντικά Χαρακτηριστικά Υπερσυμμετρικών Θεωριών - Θεωρήματα μη Επανακανονικοποιησιμότητας

Θα κλείσουμε τη μελέτη της υπερσυμμετρίας αναφέροντας, χωρίς πολλές λεπτομέριες, ίσως το κυριότερο χαρακτηριστικό των υπερσυμμετρικών θεωριών: Τη συμπεριφορά τους κάτω από κβαντικές διορθώσεις. Θα επικεντρωθούμε στη $\mathcal{N} = 1$ περίπτωση, μιας και είναι η γενικότερη, επομένως τα προσεχή θεωρήματα ισχύουν για $\mathcal{N} > 1$. Είδαμε ότι η πιο γενική $\mathcal{N} = 1$ Λαγκρανζιανή χαρακτηρίζεται απόλυτα από τα εξής μεγέθη:

- Δυναμικό Kähler $K(\Phi, \Phi^\dagger)$
- Υπερδυναμικό $W(\Phi)$
- Κινητική συνάρτηση βαθμίδας $f(\Phi)$
- Παράμετρος Fayet-Iliopoulos ξ

(283)

Η σύγχρονη απόδειξη των θεωρημάτων από τον Seiberg το ΄93 [15] ήταν να χρησιμοποιήσει τις συμμετρίες και την πολύ ισχυρή ιδιότητα της ολομορφίας που απαιτεί η υπερσυμμετρία, έτσι ώστε να περιορίσει τη μορφή των μεγεθών κάτω από κβαντικές διορθώσεις. Συγκεκριμένα, έκανε χρήση της ενεργούς Wilsonian δράσης η οποία περιγράφει τη θεωρία σε χαμηλές ενέργειες: Κανείς ξεκινά από τη "μικροσκοπική" θεωρία σε κάποια ενεργειακή κλίμακα μ και αποκτά την ενεργό θεωρία σε μικρότερη κλίμακα $\mu_0 < \mu$ ολοκληρώνοντας τους βαρείς βαθμούς ελευθερίας με ενέργεια μεγαλύτερη της μ_0:

$$\exp\left(iS_W[\mu_0]\right) = \int_{|p|>\mu_0} [\mathcal{D}(\text{πεδία})] \exp\left(iS_{\text{micro}}\right) \tag{284}$$

Αφήνοντας τις σταθερές σύζευξης (και τη μάζα) να γίνουν υπερπεδία (τα οποία όταν επιστρέψουν σε σταθερές στα κατάλληλα όρια, εκφράζουν την αρχική θεωρία) και υποθέτοντας ότι οι κβαντικές διορθώσεις δεν παραβιάζουν την υπερσυμμετρία, το υπερδυναμικό σε κάθε κλίμακα θα εξαρτάται ολόμορφα από αυτές και έτσι μαζί με τη χρήση της $\mathcal{R}$ συμμετρίας[31], καταλήγει ότι αυτό δεν παίρνει καμία διόρθωση στη θεωρία διαταραχών, ενώ το

31 Και της λεγόμενης συμμετρίας Peccei Quinn.

δυναμικό Kähler όντας πραγματικό, δεν προστατεύεται από την ολομορφία και έτσι διορθώνεται σε όλες τις τάξεις στη θεωρία διαταραχών. Επίσης, κάτι το οποίο ισχύει και για το $\mathcal{N} = 2$ prepotential $\mathcal{F}(\Psi)$, η κινητική συνάρτηση βαθμίδας διορθώνεται μόνο στο επίπεδο ενός βρόχου, με όλες τις υπόλοιπες διορθώσεις να μη συνεισφέρουν. Τέλος, σημειώνουμε ότι η παράμετρος Fayet-Iliopoulos δεν διορθώνεται, παραμόνο στη παρουσία βαρυτικών ανωμαλιών.

Μέρος II

ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΜΟΝΟΠΟΛΑ ΚΑΙ ΔΥΪΣΜΟΣ

2 ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΜΟΝΟΠΟΛΑ ΚΑΙ ΔΥΪΣΜΟΣ

2.1 Το Μονόπολο Dirac

Ας φανταστούμε προς στιγμή ότι σε κάποιο σημείο του $\mathbb{R}^3$ υπάρχει μια σημειακή πηγή μαγνητικού πεδίου:

$$\vec{B}_{mon} = \frac{g}{4\pi r^2}\hat{r} \tag{285}$$

δηλαδή ένα μαγνητικό μονόπολο μαγνητικού φορτίου g. Τότε, για αυτό προφανώς ισχύει η σχέση $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_{mon} = g\delta^{(3)}(\vec{r}) \neq 0$, η οποία έρχεται σε αντίθεση με μια εκ των τεσσάρων εξισώσεων του Maxwell, ότι το μαγνητικό πεδίο οφείλει να είναι σωληνοειδές (να έχει μηδενική απόκλιση). Απόρροια αυτού είναι ότι είναι αδύνατο να βρεθεί ανυσματικό δυναμικό $\vec{A}_{mon}$ τέτοιο ώστε να μπορούμε να γράψουμε $\vec{B}_{mon} = \vec{\nabla}\times\vec{A}_{mon}$ παντού στο χώρο. Ο Dirac [3] βρήκε ένα τρόπο να παρακάμψει αυτό το πρόβλημα φαντάζοντας ένα πολύ λεπτό σωληνοειδές (τη λεγόμενη "χορδή Dirac") το οποίο εκτείνεται από την αρχή των αξόνων σε όλο τον αρνητικό z άξονα και περιέχει μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_{sol} = g\Theta(-z)\delta^{(2)}(\vec{r})\hat{z}$. Τότε το μαγνητικό πεδίο του συστήματος μονοπόλου-σωληνοειδούς θα ικανοποιεί:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{B}_{mon}+\vec{B}_{sol}\right) = g\delta^{(3)}(\vec{r}) - g\delta^{(2)}(\vec{r})\frac{d\Theta(z)}{dz} = 0 \tag{286}$$

και επομένως, υπάρχει δυνατότητα εύρεσης ενός μη ιδιάζοντος (non-singular) δυναμικού για το σύστημα: $\exists\vec{A} = \vec{A}_{mon}+\vec{A}_{sol}$, όπου τα $\vec{A}_{mon}$ και $\vec{A}_{sol}$ περιέχουν singularities, οι οποίες αναιρούν η μια την άλλη στο σχηματισμό του $\vec{A}$. Ενώ αυτές οι singularities δεν μπορούν να παρατηρηθούν, είναι γνωστό από το φαινόμενο Bohm-Aharonov ότι ένα κβαντικό σωμάτιο φορτίου q που κινείται σε τροχιά $\mathcal{P}$ που περικυκλώνει τη χορδή Dirac, μπορεί να αλλάξει φάση στη κυματοσυνάρτησή του λόγω του υπάρχοντος δυναμικού ώς:

$$\Delta\varphi = q\oint_{\mathcal{P}} d\vec{r}\cdot\vec{A}_{sol} = q\int_{\sigma} d\vec{S}\cdot\vec{B}_{sol} = qg\int_{\sigma} dS\Theta(-z)\delta^{(2)}(\vec{r}) = qg \tag{287}$$

όπου $\mathcal{P} = \partial\sigma$. Τότε η απαίτηση της κυματοσυνάρτησης να είναι μονότιμη, ή ισοδύναμα η χορδή να μην είναι παρατηρήσιμη (μιας και το πλάτος μετάβασης θα είναι ανάλογο του $\exp(iS) = \exp(\cdots + i\Delta\varphi) = \exp(\cdots + iqg)$), οδηγεί στη συνθήκη κβάντωσης Dirac:

$$\boxed{qg = 2\pi n\ ,\ n\in\mathbb{Z}} \tag{288}$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει επίσης ότι το ελάχιστο δυνατό μαγνητικό φορτίο είναι το $g_{\min} = 2\pi/e$ όπου e το φορτίο του ηλεκτρονίου.
Μπορούμε να δούμε ένα παράδειγμα κατασκευής τέτοιων δυναμικών που δείχνει πώς αυτά μπορούν να οριστούν εάν περιορίσουμε τον $\mathbb{R}^3$ σε ένα μη απλώς συνεκτικό υποσύνολό του, όπου στο κομμάτι που λείπει (δηλαδή στη χορδή Dirac) τα δυναμικά δεν θα είναι singular. Ορίζουμε στον $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$:

$$\begin{aligned}\vec{A}_{+}(\vec{r}) &= \frac{g}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\phi} \;\;, \quad \text{για } \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,-z)|z \geqslant 0\} \\ \vec{A}_{-}(\vec{r}) &= -\frac{g}{4\pi r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\phi} \;\;, \quad \text{για } \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)|z \geqslant 0\}\end{aligned} \tag{289}$$

Αυτά, πράγματι ικανοποιούν, το καθένα στο αντίστοιχο πεδίο ορισμού του:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A}_{\pm} &= \frac{\hat{r}}{r\sin\theta}\left[\pm\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{g}{4\pi r}\frac{1\mp\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right] \mp \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{rg}{4\pi r}\frac{1\mp\cos\theta}{\sin\theta}\right)\hat{\theta} \\ &= \pm\frac{\hat{r}}{\sin\theta}\frac{g}{4\pi r^2}(\pm\sin\theta) = \frac{g}{4\pi r^2}\hat{r} = \vec{B}_{\text{mon}}(\vec{r})\end{aligned} \tag{290}$$

Η σφαιρική συμμετρία του μαγνητικού πεδίου του μονοπόλου, οδηγεί στην ερμηνεία του $\vec{A}_{+}$ ώς το δυναμικό στο βόρειο ημισφαίριο μιας σφαίρας που περικλύει το μονόπολο και του $\vec{A}_{-}$ ώς το δυναμικό στο νότιο ημισφαίριο. Από την παραπάνω φαίνεται ότι τα δύο δυναμικά είναι ισοδύναμα, δίνουν το ίδιο πεδίο, και επομένως θα υπάρχει συνάρτηση χ ορισμένη στο κοινό πεδίο ορισμού τους $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\}$ τέτοια ώστε: $\vec{A}_{+} - \vec{A}_{-} = \vec{\nabla}\chi$. Έτσι, στον ισημερινό $(\theta = \pi/2)$ βρίσκουμε[1]:

$$\vec{A}_{+} - \vec{A}_{-} = 2\frac{g\hat{\phi}}{4\pi r} = \frac{g}{2\pi}\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \chi = \frac{g\phi}{2\pi} \tag{291}$$

Αυτός δεν είναι παρά ένας $U(1)$ μετασχηματισμός βαθμίδας:

$$\vec{A}_{+} = \vec{A}_{-} - \frac{i}{q}U^{-1}(\phi)\vec{\nabla}U(\phi) \tag{292}$$

με $U = \exp\left(iq\frac{g}{2\pi}\phi\right)$, ο οποίος παρέχει τη συνάρτηση μετάβασης για την περιγραφή από το ένα ημισφαίριο στο άλλο. Κανείς μπορεί να σκεφτεί ότι ισοδύναμα μετασχηματίζει τη χορδή Dirac από τον αρνητικό ημιάξονα z στον θετικό, δηλώνοντας ότι αυτή ορίζεται έως μετασχηματισμούς βαθμίδας και επομένως δεν παρατηρείται φυσικά. Η παραπάνω περιγραφή χαρακτηρίζει μαθηματικά το μονόπολο Dirac ώς σύνδεση σε μια μη τετριμμένη $U(1)$ κύρια νηματική δέσμη (non trivial principal fiber bundle) πάνω στην S^2 [27].

1 Μιας και ισχύει: $\vec{\nabla}\phi\Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{\hat{\phi}}{r}$

2.2 Σύστημα Ηλεκτρικού Φορτίου - Μαγνητικού Μονόπολου και Δυόνια

Θεωρούμε ένα σωμάτιο ηλεκτρικού φορτίου q το οποίο βρίσκεται στο μαγνητικό πεδίο ενός μονόπολου που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Η παρουσία του μονόπολου αλλάζει τη διατηρούμενη στροφορμή του συστήματος (συμβολίζοντας τη γραμμική στροφορμή ώς $\vec{L} = m\vec{r} \times d\vec{r}/dt$), το οποίο φαίνεται από τη δράση της δύναμης Lorentz:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{r} \times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r} \times \left(q\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}_{mon}\right) \\ &= \frac{qg}{4\pi r^3}\vec{r} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{qg}{4\pi r}\vec{r}\right) \end{aligned} \tag{293}$$

συνεπώς, η συνολική διατηρούμενη στροφορμή είναι η:

$$\vec{J} = \vec{L} - \frac{qg}{4\pi}\hat{r} \tag{294}$$

όπου το επιπλέον κομμάτι είναι ακριβώς η συνεισφορά από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$\vec{L}_{EM} = \int d^3r'\vec{r}' \times \left(\vec{E} \times \vec{B}_{mon}\right) = \int d^3r' \left[\left(\vec{r}' \cdot \vec{B}_{mon}\right)\vec{E} - \left(\vec{r}' \cdot \vec{E}\right)\vec{B}_{mon}\right]$$

$$= \frac{g}{4\pi}\int d^3r' \left[\frac{1}{r'}\vec{E} - \left(\vec{r}' \cdot \vec{E}\right)\frac{\vec{r}'}{r'^3}\right] = \frac{g}{4\pi}\int d^3r' \left(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}'\right)\hat{r}'$$

όπου με ολοκλήρωση κατα μέλη, δεδομένου ότι η συνοριακή συνεισφορά στο άπειρο από το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενική και με χρήση της εξίσωσης Maxwell $\vec{\nabla}' \cdot \vec{E} = q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$, καταλήγουμε:

$$\Rightarrow \vec{L}_{EM} = -\frac{g}{4\pi}\int d^3r'(\vec{\nabla}' \cdot \vec{E})\hat{r}' = -\frac{qg}{4\pi}\hat{r} \tag{295}$$

Παρατηρούμε ότι εάν απαιτήσουμε την ανεξάρτητη κβάντωση της στροφορμής του πεδίου σε ημιακαίρεες μονάδες, καταλήγουμε πάλι στη σχέση κβάντωσης του Dirac:

$$\left\|\vec{L}_{EM}\right\| = \frac{n}{2} \Rightarrow qg = 2\pi n \ , \ n \in \mathbb{Z} \tag{296}$$

Αυτή η ημικλασική μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περίπτωση των δυονίων, σωματιδίων που έχουν ηλεκτρικό και μαγνητικό φορτίο. Θεωρούμε δύο δυόνια με φορτία (q_1, g_1) και (q_2, g_2), όπου το ένα ηρεμεί στην αρχή των αξόνων και το άλλο βρίσκεται σε κάποιο σημείο του χώρου $\vec{r}$. Τότε τα ηλεκτρικά και τα μαγνητικά πεδία γράφονται: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ και $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ και η πεδιακή στροφορμή του συστήματος είναι:

$$\vec{L}_{EM} = \int d^3r'\vec{r}' \times \left[\left(\frac{q_1\vec{r}'}{4\pi r'^3} + \vec{E}_2\right) \times \left(\frac{g_1\vec{r}'}{4\pi r'^3} + \vec{B}_2\right)\right]$$

$$= \int d^3r' \left[\frac{q_1}{4\pi r'^3}\left(\vec{r}'\cdot\vec{B}_2\right)\vec{r}' - \frac{q_1}{4\pi r'}\vec{B}_2 + \frac{g_1}{4\pi r'}\vec{E}_2 - \frac{g_1}{4\pi r'^3}\left(\vec{r}'\cdot\vec{E}_2\right)\vec{r}'\right]$$

$$= \frac{g_1}{4\pi}\int d^3r'\left[\frac{1}{r'}\vec{E}_2 - \left(\vec{r}'\cdot\vec{E}_2\right)\frac{\vec{r}'}{r'^3}\right] - \frac{q_1}{4\pi}\int d^3r'\left[\frac{1}{r'}\vec{B}_2 - \left(\vec{r}'\cdot\vec{B}_2\right)\frac{\vec{r}'}{r'^3}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{EM} = \frac{q_1 g_2 - q_2 g_1}{4\pi}\hat{r} \tag{297}$$

Και η κβάντωση αυτής δίνει τη λεγόμενη συνθήκη κβάντωσης Zwanzinger-Schwinger [28] για τα δυόνια:

$$\boxed{q_1 g_2 - q_2 g_1 = 2n\pi \ , \ \ n \in \mathbb{Z}} \tag{298}$$

Από αυτή τη σχέση απορρέει ότι για δύο δυόνια τα οποία έχουν το ελάχιστο μαγνητικό φορτίο $2\pi/e$, η διαφορά των ηλεκτρικών τους φορτίων είναι αναγκαστικά πολλαπλάσιο του φορτίου του ηλεκτρονίου:

$$q_1 - q_2 = ne \tag{299}$$

χωρίς να έχουμε πληροφορία για τις τιμές που μπορούν να πάρουν τα q_1, q_2 ξεχωριστά.

2.3 Το Μοντέλο Georgi-Glashow

Μέχρι στιγμής εξετάσασμε την περίπτωση ενός σημειακού αβελιανού μονόπολου Dirac, παρ'όλα αυτά είναι πιο ενδιαφέρον το πώς τα μονόπολα εμφανίζονται σε μεγαλύτερες μη Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας ώς στατικές λύσεις πεπερασμένης ενέργειας, όταν αυτές παραβιάζονται αυθόρμητα μέσω του μηχανισμού Higgs σε μια αβελιανή θεωρία. Ακόμα, οι λύσεις αυτές όπως περιγράφηκαν από τους G. t'Hooft και A.M. Polyakov, σε αντίθεση με το μονόπολο Dirac, είναι πεπερασμένες παντού. Η θεωρία που θα μελετήσουμε είναι το μοντέλο Georgi-Glashow, ή πιο σωστά ο μποζονικός τομέας του, το οποίο αποτελείται από ένα SO(3) πεδίο βαθμίδας $W_\mu = W^a_\mu t^a$ και ένα πεδίο Higgs ϕ^a το οποίο μετασχηματίζεται ώς άνυσμα στη συζυγή αναπαράσταση. Σε αυτή έχουμε για τους γεννήτορες $(t^a)_{bc} = -i\epsilon^a_{bc}$ και $[t^a, t^b] = -\epsilon^{abc}t^c$. Η Λαγκρανζιανή αποτελείται από τους κινητικούς όρους για το πεδίο βαθμίδας, το πεδίο Higgs και ένα δυναμικό Higgs:

$$\mathcal{L}_{GG} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}D^\mu\phi^a D_\mu\phi^a - V(\phi) \tag{300}$$

όπου:

$$\begin{aligned} G^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - e\epsilon^{abc}W^b_\mu W^c_\nu \\ D_\mu\phi^a &= \partial_\mu\phi^a - e\epsilon^{abc}W^b_\mu\phi^c \\ V(\phi) &= \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - a^2\right)^2 \end{aligned} \tag{301}$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για τα πεδία είναι:

$$\begin{aligned} D_\nu G^{a\mu\nu} &= -e\epsilon^{abc}\phi^b D^\mu \phi^c \\ D_\mu D^\mu \phi^a &= -\lambda\phi^a\left(\phi^2 - a^2\right) \end{aligned} \tag{302}$$

όπου ο τανυστής ισχύος ικανοποιεί ακόμα μια εξίσωση, την ταυτότητα Bianchi:

$$D_\nu \tilde{G}^{a\mu\nu} = 0 \tag{303}$$

όπου $\tilde{G}$ ο δυϊκός τανυστής του G. Συμβολίζοντας τα αντίστοιχα SO(3) "ηλεκτρικά" και "μαγνητικά" πεδία ώς $E^{ai} := -G^{a0i}$ και $B^{ai} := -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}G^{ajk}$, μπορούμε να γράψουμε την πυκνότητα ενέργειας της θεωρίας από τη 00 συνιστώσα του (διορθωμένου) συμμετρικού τανυστή ενέργειας ορμής:

$$\theta_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{GG}}{\delta g^{\mu\nu}} = -G^{a\mu\beta}G^{a\nu}_{\beta} + D^\mu\phi^a D^\nu\phi^a - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}_{GG} \tag{304}$$

$$\Rightarrow \theta_{00} = \frac{1}{2}\left(E^{ai}E^{ai} + B^{ai}B^{ai} + D_i\phi^a D^i\phi^a\right) + V(\phi) \geqslant 0 \tag{305}$$

Βλέπουμε ότι η παραπάνω ελαχιστοποιείται όταν:

$$\begin{aligned} G^{a\mu\nu} &= 0 \\ D_\mu\phi^a &= 0 \\ V(\phi) &= 0 \end{aligned} \tag{306}$$

Ορίζουμε τώρα το κενό Higgs $\mathcal{M}_H$ ώς το χώρο των πεδίων Higgs που ελαχιστοποιούν την πυκνότητα ενέργειας. Αυτές θα είναι συναλλοίωτα σταθερές λύσεις με $\phi^2_{vac} = a^2$ και επομένως η τοπολογία του κενού Higgs είναι αυτή της 2-σφαίρας με ακτίνα a: $\mathcal{M}_H \cong S^2$. Για να πάρουμε το διαταρακτικό φάσμα του μοντέλου, πρέπει να επιλέξουμε ένα σημείο στο $\mathcal{M}_H$ (ένα κενό), για παράδειγμα το $\phi^a_{vac} = a\delta^{a3}$. Η επιλογή αυτή όμως παραβιάζει την πλήρη συμμετρία βαθμίδας από την SO(3) στην υπομάδα της που διατηρεί τα ϕ^a_{vac} αναλλοίωτα η οποία ισοδυναμεί με τη μικρή ομάδα (little group) των στροφών γύρω από τον άξονα του ϕ^a_{vac}, δηλαδή η SO(2) ≅ U(1). Αυτό σημαίνει ότι από τους τρείς γεννήτορες της θεωρίας μόνο ένας (μη παραβιασμένος) γεννήτορας της U(1) υποομάδας διατηρεί αναλλοίωτο το κενό, ο οποίος δίνεται από την προβολή των SO(3) γεννητόρων στη κατεύθυνση του πεδίου, στη προκειμένη περίπτωση: $t^a\phi^a_{vac}/a = t^3$. Επομένως καταλήγουμε ότι μετά την παραβίαση της συμμετρίας στο κενό Higgs, η θεωρία γίνεται μια U(1) θεωρία βαθμίδας η οποία δεν είναι παρά η θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού ορίζοντας το γεννήτορα να είναι ανάλογος του τελεστή ηλεκτρικού φορτίου, όπως φαίνεται με τον τρόπο που η U(1) συναλλοίωτη παράγωγος εμφανίζεται στη συναλλοίωτη παράγωγο της SO(3) (302):

$$Q = \frac{e}{a}\phi^a_{vac}t^a = et^3 \tag{307}$$

Τονίζουμε ότι αυτή η σχέση ισχύει για κάθε επιλογή αναπαράστασης (ενώ στο κείμενο γίνεται χρήση της συζυγούς) το οποίο μπορεί να ορίσει το ελάχιστο δυνατό φορτίο να είναι το $e/2$, αναλόγως με τις ιδιοτιμές που μπορεί να πάρουν οι γεννήτορες. Αναγνωρίζουμε έτσι και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο βαθμίδας ώς:

$$A_\mu := \frac{1}{a}\phi^a_{vac}W^a_\mu = W^3_\mu \tag{308}$$

Θεωρώντας τώρα μια μικρή διαταραχή $\phi^a = a\delta^{a3} + \xi^a$ (με $\mathcal{O}(\xi^2) \approx 0$), ο κινητικός όρος του βαθμωτού πεδίου θα παράξει τον όρο μάζας για τα δύο μποζόνια βαθμίδας που αντιστοιχούν στους παραβιασμένους γεννήτορες και τον κινητικό όρο για το πεδίο Higgs:

- $(D_\mu\phi)(D^\mu\phi) \approx (\partial_\mu\xi^a)(\partial^\mu\xi^a) + 2e^2a^2\left(\delta^{br} - \delta^{b3}\delta^{r3}\right)W^b_\mu W^{r\mu}$

$$= (\partial_\mu\xi^a)(\partial^\mu\xi^a) + 2e^2a^2\left[W^1_\mu W^{1\mu} + W^2_\mu W^{2\mu}\right] \tag{309}$$

$$= (\partial_\mu\xi^a)(\partial^\mu\xi^a) + m^2_W W^+_\mu W^{-\mu} \tag{310}$$

όπου θέσαμε $m_W = ea$ και $W^\pm_\mu := W^1_\mu \pm iW^2_\mu$. Όσο για τα ηλεκτρικά φορτία των $W^\pm$, θα δίνονται μέσω της δράσης του τελεστή (307). Επίσης, το δυναμικό θα παράξει τον όρο μάζας για το πεδίο Higgs:

- $$V(\phi) \approx \frac{1}{2}\left(2\lambda a^2\right)\left(\xi^3\right)^2 = \frac{1}{2}m^2_H\left(\xi^3\right)^2 \tag{311}$$

με $m_H = \sqrt{2\lambda}a$. Επομένως, το φάσμα αποτελείται από ένα άμαζο $U(1)$ μποζόνιο βαθμίδας $A_\mu \equiv W^3_\mu$, δύο έμμαζα μποζόνια βαθμίδας $W^\pm_\mu$ μάζας m_W με αντίθετα ηλεκτρικά φορτία $q = \pm e$ και ένα έμμαζο βαθμωτό πεδίο Higgs $H \equiv \xi^3$ μάζας m_H.

2.4 Η Τοπολογική Ερμηνία του Μαγνητικού Φορτίου

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα, οι λύσεις που θα αναζητήσουμε οι οποίες αντιστοιχούν σε μονόπολα θα είναι λύσεις πεπερασμένης ενέργειας των εξισώσεων κίνησης των πεδίων και έτσι θα είναι απαραίτητο, προκειμένου να μην απειρίζεται το ολοκλήρωμα της ενέργειας, στο χωρικό άπειρο $r \to \infty$ το βαθμωτό πεδίο να παίρνει τιμές στο κενό Higgs:

$$\phi^a_\infty(\hat{r}) := \lim_{\beta\to\infty}\phi^a(\beta\hat{r}) \in \mathcal{M}_H \tag{312}$$

Έτσι, το πεδίο Higgs παρέχει μια απεικόνιση από το χώρο για $r \to \infty$, ο οποίος παραμετροποιείται από τις κατευθύνσεις $\hat{r}$ και επομένως αποτελεί μια σφαίρα $\mathbb{S}^2_\infty$, στο κενό Higgs το οποίο έχει επίσης την τοπολογία μιας σφαίρας. Τέτοιες (συνεχείς) απεικονίσεις $\phi^a_\infty : \mathbb{S}^2_\infty \to \mathbb{S}^2$ ταξινομούνται από τη δεύτερη ομάδα ομοτοπίας της σφαίρας $\pi_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$. Αυτή βοηθάει στην περιγραφή του χώρου των λύσεων ώς την ξένη ένωση διαφορετικών τομέων, όπου ο καθένας χαρακτηρίζεται από έναν ακέραιο, ο οποίος λέγεται βαθμός Brouwer ή τοπολογικός αριθμός της απεικόνισης και περιγράφει τον αριθμό των φορών που αυτή τυλίγει τη σφαίρα $\mathbb{S}^2_\infty$ στη σφαίρα του κενού Higgs. Όπως θα δείξουμε, ο αριθμός αυτός συνδέεται με το μαγνητικό φορτίο της λύσης και η σημαντική παρατήρηση είναι ότι μια λύση πεπερασμένης ενέργειας με μη μηδενικό τοπολογικό αριθμό θα είναι ευσταθής, δηλαδή θα διατηρίσει τον αριθμό της σε αυθαίρετους μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτο το κενό Higgs και δεν είναι δυνατό να μετασχηματιστεί σε λύση με διαφορετικό τοπολογικό αριθμό. Ας εξετάσουμε πώς αυτό συνβαίνει, μελετώντας το μοντέλο Georgi-Glashow "από μακριά". Στο χωρικό άπειρο, το κενό Higgs απαιτεί να ικανοποιούνται:

$$\begin{aligned} \phi^a_{vac}\phi^a_{vac} &= a^2 \\ \partial_\mu \phi^a_{vac} &= e\epsilon^{abc} W^b_\mu \phi^c_{vac} \end{aligned} \tag{313}$$

Από τη δεύτερη σχέση κανείς μπορεί να γράψει μια λύση για το W^a_μ το οποίο καθορίζεται πλήρως όσον αφορά την κάθετη στη κατεύθυνση του πεδίου Higgs[2] συνιστώσα του:

$$W^a_\mu = \frac{1}{ea^2}\epsilon^{abc}\phi^b_{vac}\partial_\mu\phi^c_{vac} + \frac{1}{a}\phi^a_{vac}A_\mu \tag{314}$$

όπου το A_μ είναι απροσδιόριστο, μιας και η παραπάνω ικανοποιεί την (313) για οποιαδήποτε επιλογή του:

$$\circ \;\; e\epsilon^{abc}W^b_\mu\phi^c_{vac} = \frac{1}{a^2}\left(\delta^{af}\delta^{dc} - \delta^{ad}\delta^{fc}\right)\phi^c_{vac}\phi^d_{vac}\partial_\mu\phi^f_{vac} + \frac{e}{a^2}\cancelto{0}{\epsilon^{abc}\phi^b_{vac}\phi^c_{vac}}A_\mu$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\left(\partial_\mu\phi^a_{vac}\right)\phi^c_{vac}\phi^c_{vac} - \left(\partial_\mu\phi^c_{vac}\phi^c_{vac}\right)\phi^a_{vac}\right] = \partial_\mu\phi^a_{vac}$$

όπου στη τελευταία έγινε χρήση του ότι το ϕ^a_{vac} ώς άνυσμα είναι κάθετο στην παράγωγό του, εφ'όσων έχει σταθερό μέτρο από την (313). Όπως είδαμε και στα προηγούμενα, μπορούμε στο άπειρο όπου έχουμε τα πεδία στο κενό Higgs, να υπολογίσουμε τα μεγέθη της μη παραβιασμένης U(1) θεωρίας βαθμίδας ώς προβολές των μεγεθών της πλήρους SO(3) θεωρίας στην κατεύθυνση του πεδίου Higgs. Έτσι, βρίσκουμε για τον τανυστή ισχύος[3]:

$$F_{\mu\nu} = \hat{\phi}^a_{vac}G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{e}{a}\epsilon^{abc}\phi^a_{vac}W^b_\mu W^c_\nu$$

2 Η άλγεβρα της ομάδας βαθμίδας SO(3) είναι ισόμορφη με την άλγεβρα του $\mathbb{R}^3$ και επομένως θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε τους εσωτερικούς δείκτες βαθμίδας με χωρικούς δείκτες επιτρέποντας το συμβολισμό: $\phi^a_{vac} \to \vec{\phi}_{vac}$

3 συμβολίζουμε το μοναδιαίο πεδίο Higgs ώς: $\hat{\phi}^a_{vac} := \frac{\phi^a_{vac}}{a}$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{e}{a}\left[\frac{1}{ea^2}\epsilon^{abc}\epsilon^{bdf}\epsilon^{crs}\phi^d_{vac}\partial_\mu\phi^f_{vac}\phi^r_{vac}\partial_\nu\phi^s_{vac}\right.\\
&+\frac{1}{ea^3}\epsilon^{abc}\epsilon^{bdf}\phi^a_{vac}\phi^d_{vac}\partial_\mu\phi^f_{vac}\phi^c_{vac}A_\nu + \frac{1}{ea^3}\epsilon^{abc}\epsilon^{crs}\phi^a_{vac}\phi^b_{Vac}A_\mu\\
&\left.+\cancelto{0}{\frac{1}{a^2}\epsilon^{abc}\phi^a_{vac}\phi^b_{vac}\phi^c_{vac}A_\mu A_\nu}\right]
\end{aligned}
$$

$$
= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{ea^5}\epsilon^{frs}\partial_\mu\phi^f_{vac}\partial_\nu\phi^r_{vac}\phi^s_{vac}\left(-a^2\right) + 0
$$

όπου τα μηδενικά προέρχονται από όρους που είτε περιέχουν το γινόμενο του πεδίου με την παράγωγό του, είτε περιέχουν συμμετρικό συνδυασμό δεικτών από τα πεδία με το αντισυμμετρικό σύμβολο μπροστά. Συνεπώς καταλήγουμε στην εξής έκφραση:

$$
\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{e}\epsilon^{abc}\hat{\phi}^a_{vac}\partial_\mu\hat{\phi}^b_{vac}\partial_\nu\hat{\phi}^c_{vac}} \tag{315}
$$

όπου βλέπουμε ότι αυτές είναι οι συνιστώσες του τανυστή ισχύος του ηλεκτρομαγνητισμού με έναν επιπλέον όρο εξαρτώμενο μόνο από το βαθμωτό πεδίο στο κενό Higgs. Από τις εξισώσεις κίνησης στο κενό Higgs και τη (313) φαίνεται ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Maxwell όπως αναμένουμε για τον τανυστή ισχύος, όμως με μια μαγνητική πηγή:

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0\\
&\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2e}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{abc}\partial^\mu\hat{\phi}^a_{vac}\partial^\rho\hat{\phi}^b_{vac}\partial^\sigma\hat{\phi}^c_{vac} =: k_\nu
\end{aligned} \tag{316}
$$

όπου k_μ το μαγνητικό, ή τοπολογικό, ρεύμα το οποίο μάλιστα διατηρείται από τον ορισμό του: $\partial_\mu k^\mu = 0$. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το μαγνητικό φορτίο που διαπερνά μια σφαίρα $\Sigma \cong S^2$ η οποία βρίσκεται αρκετά μακριά έτσι ώστε πάνω σε αυτή τα πεδία να βρίσκονται στο κενό Higgs, από τον ορισμό του μαγνητικού πεδίου ώς $B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}$:

$$
g_\Sigma = \int_\Sigma dS^i B^i = -\frac{1}{2e}\int_\Sigma dS^i\epsilon^{ijk}\epsilon^{abc}\hat{\phi}^a_{vac}\partial_j\hat{\phi}^b_{vac}\partial_k\hat{\phi}^c_{vac} \tag{317}
$$

παραμετροποιώντας τη Σ με συντεταγμένες $\{\xi_\alpha = \xi_\alpha(x^i)\}_{\alpha=1,2}$, έχουμε $\partial_j\hat{\phi}^a_{vac} = \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\hat{\phi}^a_{vac}}{\partial\xi_\alpha}$, $dS^i = 1/2\epsilon^{irs}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial x^r}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial x^s}{\partial\xi_\beta}d^2\xi$:

$$
= -\frac{1}{4e}\int_\Sigma d^2\xi\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{abc}\left(\delta^{jr}\delta^{ks} - \delta^{js}\delta^{kr}\right)\hat{\phi}^a_{vac}\frac{\partial\xi_\gamma}{\partial x^j}\frac{\partial\hat{\phi}^b_{vac}}{\partial\xi_\gamma}\frac{\partial\xi_\delta}{\partial x^k}\frac{\partial\hat{\phi}^c_{vac}}{\partial\xi_\delta}\frac{\partial x^r}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial x^s}{\partial\xi_\beta}
$$

$$
= -\frac{1}{2e}\int_\Sigma d^2\xi\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{abc}\hat{\phi}^a_{vac}\frac{\partial\hat{\phi}^b_{vac}}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial\hat{\phi}^c_{vac}}{\partial\xi_\beta} = -\frac{1}{e}\int_\Sigma \epsilon^{abc}\hat{\phi}^a_{vac}d\hat{\phi}^b_{vac}\wedge d\hat{\phi}^c_{vac}
$$

$$= -\frac{1}{e}\int_{\Sigma} \hat{\phi}^{*}_{vac}\left(\mathrm{vol}(\mathcal{M}_H)\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow g_{\Sigma} = -\frac{4\pi}{e} n \ , n \in \mathbb{Z} \qquad (318)}$$

όπου στην παραπάνω παρατηρήσαμε ότι η υπο ολοκλήρωση ποσότητα δεν είναι παρά το pullback της μορφής όγκου στη σφαίρα του κενού Higgs (την οποία συμβολίζουμε $\mathrm{vol}(\mathcal{M}_H) = \mathrm{vol}(S^2) = \epsilon^{ijk}x^i dx^j \wedge dx^k$) κάτω από την απεικόνιση $\hat{\phi}_{vac}$, ή ισοδύναμα από την (317) η Jacobian της απεικόνισης, το οποίο θα δώσει τον όγκο της μοναδιαίας σφαίρας (4π) επί τον τοπολογικό αριθμό που συγκροτεί την πληροφορία του πόσες φορές η ϕ^a_{vac} καλύπτει την σφαίρα του κενού Higgs όσο οι χωρικές συντεταγμένες καλύπτουν μια φορά τη χωρική σφαίρα S_∞. Αυτή είναι η συνθήκη κβάντωσης Dirac που βρήκαμε στην αρχή του κεφαλαίου, όμως για ελάχιστο μαγνητικό φορτίο το οποίο είναι διπλάσιο από $2\pi/e$, το οποίο συμβαίνει διότι όπως εξηγήσαμε το ελάχιστο δυνατό ηλεκτρικό φορτίο εδώ είναι το $e/2$. Συνεπώς το μαγνητικό φορτίο στο εσωτερικό μιας επιφάνειας Σ αρκετά μακριά στο χώρο, εξαρτάται μόνο από τη κλάση ομοτοπίας που βρίσκεται η ϕ^a_{vac}, το οποίο σημαίνει ότι έως ομοτοπίες δύο διαμορφώσεις του πεδίου Higgs θα αντιστοιχούν στο ίδιο μαγνητικό φορτίο. Αυτό είναι ιδιαιτέρως σημαντική παρατήρηση καθώς τέτοιες ομοτοπίες αποτελούν η χρονική εξέλιξη του πεδίου $\phi^a_{vac}(\vec{x}, t_1) \mapsto \phi^a_{vac}(\vec{x}, t_2)$, οι μετασχηματισμοί βαθμίδας $\phi^a_{vac} \mapsto U^{ab}\phi^b_{vac}$ καθώς και οι συνεχείς μετασχηματισμοί της επιφάνειας Σ εντός του κενού Higgs. Γενικά, οποιαδήποτε αλλαγή του πεδίου $\phi^a_{vac} \mapsto \phi^a_{vac} + \delta\phi^a_{vac}$ που σέβεται τις συνθήκες του κενού Higgs:

$$\begin{aligned} D_\mu \delta\phi^a_{vac} &= 0 \\ \delta\phi^a_{vac}\phi^a_{vac} &= 0 \end{aligned} \tag{319}$$

αφήνει το μαγνητικό φορτίο αναλλοίωτο. Αυτό φαίνεται και από τη (317) με τη χρήση των αντισυμμετρικών συμβόλων και των παραπάνω, αγνοώντας όρους που είναι τέλειες παράγωγοι:

- $\delta\left(\epsilon^{abc}\epsilon^{ijk}\phi^a_{vac}\partial_j\phi^b_{vac}\partial_k\phi^c_{vac}\right)$

$$= \epsilon^{abc}\epsilon^{ijk}\left(\delta\phi^a_{vac}\partial_j\phi^b_{vac}\partial_k\phi^c_{vac} + \phi^a_{vac}\partial_j\delta\phi^b_{vac}\partial_k\phi^c_{vac} + \phi^a_{vac}\partial_j\phi^b_{vac}\partial_k\delta\phi^c_{vac}\right)$$

$$= 3\epsilon^{abc}\epsilon^{ijk}\delta\phi^a_{vac}\partial_j\phi^b_{vac}\partial_k\phi^c_{vac} = 0 \tag{320}$$

όπου η έκφραση μηδενίζεται καθώς όπως έχουμε αναφέρει, η παράγωγος του πεδίου Higgs στο κενό Higgs είναι κάθετη σε αυτό και επομένως το εξωτερικό γινόμενο $(R_{ij})^a := \epsilon^{abc}\partial_j\phi^b_{vac}\partial_k\phi^c_{vac}$ θα είναι παράλληλο στο ϕ^a_{vac}, το οποίο εσωτερικά πολλαπλασιασμένο με την μεταβολή του πεδίου θα δώσει μηδέν.

Από τη παραπάνω μελέτη είδαμε ότι είναι δυνατή η εμφάνιση μη μηδενικού μαγνητικού φορτίου στο μοντέλο Georgi-Glashow το οποίο εξαρτάται μόνο από τη ασυμπτωτική μορφή του βαθμωτού πεδίου Higgs στο χωρικό άπειρο (επιπλέον όρος στη (315)) και πιο συγκεκριμένα από τη κλάση ομοτοπίας του/τον τοπολογικό του αριθμό. Δύο λύσεις με διαφορετικούς τοπολογικούς αριθμούς δεν είναι δυνατό να μετασχηματιστούν με συνεχή τρόπο η μία στην άλλη, καθώς αυτό θα οδηγούσε σε απειρισμό του ολοκληρώματος της ενέργειας (305). Για παράδειγμα, η πρώτη επιλογή που κάναμε για το κενό η οποία είναι σταθερή (δεν έχει εξάρτηση από τις συντεταγμένες) $\phi^a_{vac} \equiv \phi^a_\infty = a\delta^{a3}$ έχει τοπολογικό αριθμό $n = 0$, καθώς στέλνει όλα τα σημεία $\hat{r} \in S_\infty$ στο ίδιο σημείο $(0, 0, a) \in \mathcal{M}_H$ και έτσι δεν οδηγεί σε μονόπολα. Η ιδέα επομένως θα είναι να κατασκευάσουμε μια μη τετριμμένη λύση πεπερασμένης ενέργειας η οποία δίνει στο χωρικό άπειρο διαμόρφωση του πεδίου Higgs με μη μηδενικό τοπολογικό αριθμό. Αυτό κατάφεραν οι G.t'Hooft και A.M.Polyakov το 1974 [10, 19] οι οποίοι πρότειναν την εξής, λεγόμενη από τον τελευταίο ώς "διαμόρφωση σκαντζόχειρου", ασυμπτωτική συμπεριφορά:

$$\phi^a \sim a\frac{x^a}{r} = a\hat{r}^a \;\; , \;\; \text{για } r \to \infty \tag{321}$$

Αυτή, χρησιμοποιώντας τη δεύτερη συνθήκη του κενού Higgs (για $\mu = i = 1, 2, 3$), δίνει την εξής συμπεριφορά για το πεδίο βαθμίδας στο άπειρο:

$$\begin{aligned} D_i\phi^a = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{r}\epsilon^{rc}_i\epsilon^{ras}\frac{x^c x_s}{r^2} = e\epsilon^{abc}W^b_i\frac{x^c}{r} \\ &\Rightarrow x^c\epsilon^{abc}\left[eW^b_i + \epsilon^{bs}_i\frac{x_s}{r^2}\right] = 0 \\ &\Rightarrow W^a_i \sim -\frac{1}{e}\epsilon^a_{ij}\frac{x^j}{r^2} \;\; , \text{για } r \to \infty \end{aligned} \tag{322}$$

Το οποίο δίνει ασυμπτωτικά το μαγνητικό πεδίο μονόπολου με μαγνητικό φορτίο $g = -4\pi/e$:

$$F_{ij} = \hat{\phi}^a G^a_{ij} \sim \epsilon^a_{ij}\frac{r^a}{er^3} \Rightarrow B_i \sim -\frac{1}{e}\frac{r_i}{r^3} \;\; , \;\; \text{για } r \to \infty \tag{323}$$

Η απεικόνιση που ορίζει αυτή η διαμόρφωση του πεδίου Higgs στο κενό Higgs είναι ανάλογη της ταυτοτικής και έτσι έχει τοπολογικό αριθμό $n = 1$ (υπάρχει $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ των σημείων της χωρικής σφαίρας S^2_∞ και της σφαίρας $\mathcal{M}_H$, επομένως η τελευταία καλύπτεται μία φορά από την πρώτη). Συγκεκριμένα η ansatz που προτείναν[4] για τα πεδία ήταν η εξής:

$$
\begin{aligned}
\phi^a &= \frac{x^a}{er^2} H(aer) \\
W_i^a &= -\epsilon_{ij}^a \frac{x^j}{er^2} [1 - K(aer)] \\
W_0^a &= 0
\end{aligned}
\tag{324}
$$

όπου οι $H(\xi)$ και $K(\xi)$ (με $\xi := aer$ αδιάστατη μεταβλητή) ακτινικές συναρτήσεις που δίνουν το "σχήμα" του πεδίου στο χώρο, οι οποίες για να διατηρήσουμε τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες θα πρέπει να ικανοποιούν:

$$
\begin{aligned}
H &\to \xi \ \text{ για } \xi \to \infty \\
K &\to 0 \ \text{ για } \ \xi \to \infty
\end{aligned}
\tag{325}
$$

Για να βρούμε αυτές τις συναρτήσεις, θα απαιτήσουμε η λύση (324) να ακροτατοποιεί την ενέργεια. Αυτή γράφεται:

$$
\begin{aligned}
E &= E[H, K] = \int d^3\theta_{00} \\
&= \frac{4\pi a}{e} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \left[\xi^2 \left(\frac{dK}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\xi \frac{dH}{d\xi} - H \right)^2 + \frac{1}{2} \left(K^2 - 1 \right)^2 + K^2 H^2 + \frac{\lambda}{4e^2} \left(H^2 - \xi^2 \right)^2 \right]
\end{aligned}
\tag{326}
$$

όπου για να είναι πεπερασμένη απαιτούμε επίσης τις συνοριακές συνθήκες:

$$
\begin{aligned}
H &\to 0 \ \text{ για } \xi \to 0 \\
K &\to 1 \ \text{ για } \ \xi \to 0
\end{aligned}
\tag{327}
$$

και η μεταβολή της ώς πρός H και K θα δώσει:

- $$\frac{\delta E}{\delta H} = 0 \Rightarrow \xi^2 \frac{d^2 H}{d\xi^2} = \frac{\lambda}{e^2} H \left(\xi^2 - H^2 \right) + 2HK^2 \tag{328}$$

- $$\frac{\delta E}{\delta K} = 0 \Rightarrow \xi^2 \frac{d^2 K}{d\xi^2} = K(1 - K^2) + KH^2 \tag{329}$$

Το σύστημα αυτών των διαφορικών εξισώσεων αποδεικνύεται ότι επιδέχεται λύση πεπερασμένης ενέργειας για τις συνοριακές συνθήκες που

---

4 όπου παρατηρούμε ότι η λύση αυτή ταυτοποιεί τους χωρικούς δείκτες $(i, j, \dots)$ και τους δείκτες του χώρου της ομάδας βαθμίδας $(a, b, \dots)$. Το ότι το πεδίο Higgs στο άπειρο δείχνει στην ακτινική κατεύθυνση $\hat{r}$ επίσης σπάει τη χωρική SO(3) συμμετρία Lorentz της ομάδας Poincaré, όπως και τη πλήρη SO(3) συμμετρία βαθμίδας. Επομένως, η λύση αυτή δεν έχει SO(3) $\otimes$ SO(3) αναλλοιώτητα, αλλά είναι αναλλοίωτη από τη διαγώνια SO(3) υποομάδα η οποία στρέφει και τους δύο δείκτες με τον ίδιο τρόπο με γεννήτορες: $L^i + t^i = -i\epsilon^{ijk} x^j \partial^k + t^i$.

έχουμε δώσει [24]. Βλέπουμε ότι για $\xi \to \infty$ οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}\frac{d^2h}{d\xi^2} &= \frac{2\lambda}{e}h \\ \frac{d^2K}{d\xi^2} &= K\end{aligned} \tag{330}$$

όπου ορίσαμε[5] $h := H - \xi$. Αυτές τότε λύνονται κατευθείαν, δίνοντας:

$$\begin{aligned}h &\sim \exp\left(-\sqrt{\frac{2\lambda}{e}}\xi\right) = \exp\left(-\sqrt{2\lambda}ar\right) = \exp\left(-m_H r\right) \\ K &\sim \exp\left(-\xi\right) = \exp\left(-are\right) = \exp\left(-m_W r\right)\end{aligned} \tag{331}$$

Επομένως η διάσταση του πυρήνα του μονοπόλου, της περιοχής δηλαδή όπου έχουμε την πλήρη SU(2) θεωρία, είναι της τάξης του μεγαλύτερου μήκους κύματος Compton από το Higgs και το W: $R_{\text{core}} \sim 1/m_{H(W)}$.

2.6 Δυόνια Julia-Zee

Με παρόμοιο τρόπο με τα παραπάνω μπορεί κανείς να κατασκευάσει λύσεις οι οποίες φέρουν εκτός από μαγνητικό και ηλεκτρικό φορτίο, δηλαδή περιγράφουν δυόνια. Αυτό, όπως προτείναν οι B.Julia και A.Zee, γίνεται δίνοντας στη χρονική συνιστώσα των πεδίων βαθμίδας μη μηδενική τιμή, ενώ τα υπόλοιπα πεδία μένουν ώς έχουν στην ansatz (324):

$$\boxed{\begin{aligned}\phi^a &= \frac{x^a}{er^2}H(\xi) \\ W_i^a &= -\epsilon^a_{ij}\frac{x^j}{er^2}\left[1 - K(\xi)\right] \\ W_0^a &= \frac{x^a}{er^2}J(\xi)\end{aligned} \qquad (332)}$$

με τη συνάρτηση $J(\xi)$ να συμπεριφέρεται ώς: $J \to 0$ για $r \to 0$ και $J \to Cr$ για $r \to \infty$, όπου C μια σταθερά που συνδέεται με το ηλεκτρικό φορτίο [11].

2.7 Το Φράγμα Bogomol'nyi και Καταστάσεις BPS

Όσον αφορά τη μάζα του μονόπολου, στο σύστημα κέντρου μάζας, δίνεται από την εξίσωση (326). Αυτή, όπως και η μάζα κάθε στατικής λύσης, μπορεί να γραφεί ώς:

5 Όσο $\xi \to \infty$ είναι: $\frac{d^2H}{d\xi^2} = \lambda/e\xi^2 H(H-\xi)(H+\xi) \Rightarrow \frac{d^2h}{d\xi^2} = \lambda/e\xi^2 h(h+\xi)(h+2\xi) \to 2\lambda/eh$

$$
\begin{aligned}
M_{\text{mon}} &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\frac{1}{2}B_i^a B^{ai} + \frac{1}{2}D_i\phi^a D^i\phi^a + V(\phi)\right] \geqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(B_i^a B^{ai} + D_i\phi^a D^i\phi^a\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(B_i^a B^{ai} + D_i\phi^a D^i\phi^a + 2B_i^a D^i\phi^a - 2B_i^a D^i\phi^a\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(B_i^a - D_i\phi^a\right)^2 + \int_{\mathbb{R}^3} d^3x B_i^a D^i\phi^a \geqslant \int_{\mathbb{R}^3} d^3x D_i\left(B^{ai}\phi^a\right)
\end{aligned} \tag{333}
$$

όπου έγινε χρήση της ταυτότητας Bianchi $D_\nu \tilde{G}^{a\mu\nu} = 0 \Rightarrow D_i B^{ai} = 0$. Η παραπάνω έκφραση ανάγεται στη μαγνητική ροή της $U(1)$ θεωρίας και επομένως καταλήγουμε:

$$
M_{\text{mon}} \geqslant \int_{S^2_\infty} dS_i B^{ai}\phi^a = a\int_{S^2_\infty} dS_i B^i \tag{334}
$$

$$
\boxed{\Rightarrow M_{\text{mon}} \geqslant a|g|} \tag{335}
$$

Αυτό είναι το φράγμα Bogomol'nyi για τη μάζα του μονόπολου. Για το μονόπολο t'Hooft Polyakov ($n = 1$) έχουμε:

$$
M_{\text{mon}} \geqslant a\frac{4\pi}{e} = \frac{4\pi}{e^2}m_W = \frac{1}{\alpha}m_W = 137 m_W \tag{336}
$$

όπου $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$ η σταθερά λεπτής υφής. Επομένως η μάζα του μονόπολου προβλέπεται να είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα που παίρνουν τα μποζόνια βαθμίδας της πλήρους $SU(2)$ θεωρίας μετά την παραβίαση της συμμετρίας βαθμίδας. Αυτό καθιστά πολύ δύσκολη την πειραματική ανίχνευσή τους μιας και η παραγωγή ενός σωματίου τέτοιας μάζας απαιτεί υψηλές ενέργειες οι οποίες δεν συμβαδίζουν με την τωρινή τεχνολογία. Στην περίπτωση των δυονίων, με την ίδια λογική παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
M_{\text{dyon}} &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\frac{1}{2}\left(E_i^a E^{ai} + B_i^a B^{ai} + D_i\phi^a D^i\phi^a + D_0\phi^a D^0\phi^a\right) + V(\phi)\right] \\
&\geqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(E_i^a E^{ai} + B_i^a B^{ai} + D_i\phi^a D^i\phi^a\right)
\end{aligned} \tag{337}
$$

Εάν τώρα εισάγουμε μια αυθαίρετη γωνία δ γράφοντας τον κινητικό όρο του βαθμωτού πεδίου ώς: $D_i\phi^a D^i\phi^a = D_i\phi^a D^i\phi^a(\sin^2\delta + \cos^2\delta)$ και συμπληρώσουμε τα τετράγωνα, καταλήγουμε[6]:

6 όπου έγινε χρήση των εξισώσεων κίνησης για την εμφάνιση του ηλεκτρικού φορτίου:

$$
\int_{\mathbb{R}^3} d^3x D_i\phi^a E^{ai} = a\int_{S^2_\infty} dS_i E^i = aq
$$

$$
\begin{aligned}
M_{\text{dyon}} \geqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[(E_i^a - D_i\phi^a \sin\delta)^2 + (B_i^a - D_i\phi^a\cos\delta)^2 \right] \\
+ \sin\delta \int_{\mathbb{R}^3} d^3x D_i\phi^a E^{ai} + \cos\delta \int_{\mathbb{R}^3} d^3x D_i\phi^a B^{ai}
\end{aligned} \tag{338}
$$

$$
\Rightarrow M_{\text{dyon}} \geqslant aq\sin\delta + ag\cos\delta \tag{339}
$$

το οποίο μεγιστοποιείται για[7] $\tan\delta = q/g$ και έτσι βρίσκουμε:

$$
\boxed{\Rightarrow M_{\text{dyon}} \geqslant a\sqrt{g^2+q^2}} \tag{340}
$$

Σημειώνουμε επίσης ότι η εξίσωση της μάζας/ενέργειας για μηδενικό δυναμικό γίνεται ελάχιστη εάν τα μη αβελιανά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία ικανοποιούν:

$$
\begin{aligned}
E_i^a &= D_i\phi^a \sin\delta \\
B_i^a &= D_i\phi^a \cos\delta
\end{aligned} \tag{341}
$$

οι οποίες λέγονται εξισώσεις BPS, μιας και αυτές περιγράφουν λύσεις που ικανοποιούν την αυστηρή ισότητα στην (340). Έτσι η ανισότητα (335) για το μονόπολο t'Hooft Polyakov, όπου $\sin\delta = 1$ και $\cos\delta = 0$, εκφυλίζεται σε ισότητα (για μηδενικό δυναμικό) εάν ισχύει[8]:

$$
B_i^a = D_i\phi^a \tag{342}
$$

Για να πετύχουμε τον μηδενισμό του δυναμικού θα πρέπει να πάρουμε το $\lambda \to 0$ όμως διατηρώντας τη συνθήκη διαμόρφωσης του πεδίου Higgs στο άπειρο $\phi^a\phi^a = a^2$ ώς συνοριακή συνθήκη. Αυτό είναι το όριο BPS. Εισχωρώντας στην εξίσωση Bogomol'nyi την ansatz για το μονόπολο (324) παίρνουμε δύο συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού για τις ακτινικές συναρτήσεις H, K:

$$
\begin{aligned}
\xi\frac{dK}{d\xi} &= -HK \\
\xi\frac{dH}{d\xi} &= H + 1 - K^2
\end{aligned} \tag{343}
$$

οι οποίες μπορούν να λυθούν [20] αναλυτικά:

$$
\begin{aligned}
K(\xi) &= \frac{\xi}{\sin\xi} \\
H(\xi) &= \xi\coth\xi - 1
\end{aligned} \tag{344}
$$

7 $\partial/\partial\delta|_{\delta^*}(aq\sin\delta + ag\cos\delta) = 0 \Rightarrow \delta^* = \operatorname{atan} q/g$. Γίνεται χρήση των: $\sin\operatorname{atan} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ και $\cos\operatorname{atan} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

8 Τονίζουμε ότι αυτή η εξίσωση μαζί με την εξίσωση Bianchi η οποία δίνει $D_i B_i^a = 0$, οδηγεί στην εξίσωση κίνησης του πεδίου Higgs για $\lambda = 0$

Επίσης το πεδίο Higgs έχει μια επιπλέον συνιστώσα που πέφτει ώς $\sim r^{-1}$ στο άπειρο:

$$\phi^a \sim a\hat{r}^a - \frac{\hat{r}^a}{er} \ , \text{για } r \to \infty \tag{345}$$

η οποία εμφανίζεται στο BPS όριο επειδή για $\lambda = 0$ το πεδίο Higgs γίνεται άμαζο. Μια τέτοια συμπεριφορά τύπου Coulomb στο άπειρο αλλάζει σημαντικά τη δυναμική αλληλεπίδρασης των BPS μονόπολων από τα υπόλοιπα (λύσεις με αυστηρή ανισότητα στο φράγμα Bogomol'nyi) [6]. Οι λύσεις BPS σχηματίζουν τις καταστάσεις BPS, όπου όπως θα δούμε με την προσθήκη της υπερσυμμετρίας πρόκειται για ευσταθείς καταστάσεις στο κβαντικό φάσμα της θεωρίας, οι οποίες ανήκουν στο μη διαταρακτικό τομέα του μοντέλου Georgi-Glashow, καθώς αυτές έχουν μεγάλες μάζες στο όριο της ασθενούς σύζευξης (μιας και $M \propto e^{-1}$ όπως φαίνεται από το ολοκλήρωμα της ενέργειας (326)).

2.8 Φαινόμενο Witten και ο θ Όρος

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια την επίδραση που έχει ένας θ-όρος (σύζευξη του τανυστή ισχύος με το δυϊκό του) στη Λαγκρανζιανή του μοντέλου μας, ο οποίος παράγεται αυτόματα εάν συμπεριλάβουμε την υπερσυμμετρία όπως είδαμε στο πρώτο μέρος της εργασίας. Αρχικά ένας τέτοιος όρος παραβιάζει τη συμμετρία CP, καθώς είναι ανάλογος του γινομένου $\vec{E} \cdot \vec{B} \xmapsto{CP} -\vec{E} \cdot \vec{B}$. Είδαμε ήδη από τη σχέση Zwanzinger-Schwinger ότι για δύο δυόνια με ίδιο μαγνητικό φορτίο, τα ηλεκτρικά τους φορτία διαφέρουν κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του ελάχιστου ηλεκτρικού φορτίου, αλλά το καθένα τους παραμένει αυθαίρετο. Εάν όμως η θεωρία είναι είναι συμμετρική κάτω από CP, τότε αυτή η αυθαιρεσία αίρεται, καθώς για κάθε δυόνιο με (q, g_0) (όπου $g_0 = 2\pi/e$ το ελάχιστο μαγνητικό φορτίο για το μονόπολο Dirac) έχουμε το CP συζυγές του $(-q, g_0)$, τα οποία δίνουν μέσω της συνθήκης κβάντωσης:

$$2q = \frac{2\pi}{g_0} n = ne \ , n \in \mathbb{Z} \tag{346}$$

το οποίο ικανοποιείται εάν ισχύει ένα από τα δύο παρακάτω ενδεχόμενα:

$$\begin{aligned} q &= ne \ , n \in \mathbb{Z} \\ q &= \left(n + \frac{1}{2}\right) e \ , n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{347}$$

Θα μελετήσουμε τι επίδραση έχει στο ηλεκτρικό φορτίο η προσθήκη ενός τέτοιου όρου στη Λαγκρανζιανή Georgi-Glashow, όπου η CP παραβίαση παραμετροποιείται από τη γωνία θ:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} + \frac{\theta e^2}{32\pi^2} G^a_{\mu\nu} \tilde{G}^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(D_\mu \phi^a\right) \left(D^\mu \phi^a\right) - \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - a^2\right)^2 \tag{348}$$

Θεωρούμε τώρα το γεννήτορα N των μετασχηματισμών βαθμίδας γύρω από τον άξονα που ορίζει την κατεύθυνση του βαθμωτού πεδίου $\hat{\phi}^a = \phi^a/a$. Από το θεώρημα της Nöether αυτός δίνεται από το ρεύμα ως εξής:

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 W^a_\mu} \delta W^a_\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \phi^a} \delta \phi^a \right) \tag{349}$$

Τέτοιοι απειροστοί μετασχηματισμοί $U = \exp\left(iN\hat{\phi}^a t^a\right) \approx 1 + iN\frac{\phi^a}{a}t^a$ στρέφουν τα πεδία βαθμίδας ως:

$$W^a_\mu t^a \mapsto UW^a_\mu t^a U^{-1} + \frac{i}{e} U\partial_\mu U^{-1} = W^a_\mu t^a + \frac{1}{e}\left(1 + i\hat{\phi}^a t^a\right)\partial_\mu \hat{\phi}^b t^b$$

$$\Rightarrow \delta W^a_\mu = \frac{1}{ea} D_\mu \phi^a \tag{350}$$

και για τα βαθμωτά πεδία: $\delta\phi^a = 0$. Συνεπώς οι δύο πρώτοι όροι θα συνεισφέρουν στον τελεστή και με τη χρήση των:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \partial_0 W^a_i}\left(G^b_{\mu\nu} G^{b\mu\nu}\right) &= 4G^{a0i} = -4E^{ai} \\ \frac{\delta}{\delta \partial_0 W^a_i}\left(G^b_{\mu\nu} \tilde{G}^{b\mu\nu}\right) &= 2\epsilon^{ijk} G^a_{jk} = -4B^{ai} \end{aligned} \tag{351}$$

καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{ea}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x D_i \phi^a E^{ai} - \frac{\theta e}{8\pi^2 a}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x D_i \phi^a B^{ai} \\ &= \frac{1}{e} Q_{\mathrm{ele}} - \frac{\theta e}{8\pi^2} Q_{\mathrm{mag}} \end{aligned} \tag{352}$$

όπου ορίσαμε τους τελεστές συνολικού ηλεκτρικού και μαγνητικού φορτίου με ιδιοτιμές τα q και g:

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{ele}} &= \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x D_i\left(E^{ai}\phi^a\right) \\ Q_{\mathrm{mag}} &= \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x D_i\left(B^{ai}\phi^a\right) \end{aligned} \tag{353}$$

Θα πρέπει επίσης ο μετασχηματισμός βαθμίδας να είναι μονότιμος και μια στροφή κατά 2π γύρω από τον άξονα $\hat{\phi}^a$ να δίνει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό:

$$\exp(2\pi i N) = 1 \tag{354}$$

επομένως ο N παίρνει ακέραιες ιδιοτιμές n_e, το οποίο οδηγεί στο ότι:

$$Q_{\mathrm{ele}} = en_e + \frac{\theta e^2}{8\pi^2} Q_{\mathrm{mag}} \ , \ n_e \in \mathbb{Z} \tag{355}$$

ή εάν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση κβάντωσης, γράφοντας το μαγνητικό φορτίο στη μορφή $Q_{mag} = 4\pi/en_m$,

$$\boxed{Q_{ele} = e\left(n_e + \frac{\theta}{2\pi}n_m\right) \quad, n_e, n_m \in \mathbb{Z} \qquad (356)}$$

Αυτό είναι το φαινόμενο που ανακάλυψε ο Witten [25]: Για μη μηδενική θ γωνία το μονόπολο αποκτά αναγκαστικά ένα επαγόμενο ηλεκτρικό φορτίο το οποίο δίνεται από την (356). Για το μονόπολο t'Hooft Polyakov με $n_e = 1$ και $eg = -4\pi$, έχουμε:

$$q = e\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) \tag{357}$$

Βλέπουμε ότι η αλλαγή $\theta \mapsto \theta + 2\pi$ αλλάζει το ηλεκτρικό φορτίο κατά -1 μονάδα (ή κατά $-n_m$ μονάδες για την γενική περίπτωση). Τα παραπάνω μας επιτρέπουν να περιγράψουμε τις δυονικές καταστάσεις ώς σημεία σε ένα μιγαδικό πλέγμα με συντεταγμένες τους ηλεκτρικούς και μαγνητικούς τους κβαντικούς αριθμούς $(n_e, n_m) \in \mathbb{Z}^2$ ώς:

$$\circ \quad q + ig = e\left(n_e + \frac{\theta}{2\pi}n_m\right) + i\frac{4\pi n_m}{e} = e\left(n_e + n_m\tau\right) \tag{358}$$

όπου θεωρούμε ώς άνυσμα βάσης το $e(1, \tau)$ με:

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + i\frac{4\pi}{e^2} \tag{359}$$

όπως ορίστηκε αντίστοιχα στο προηγούμενο κεφάλαιο, όπου πλέον συμβολίζουμε $\theta_{YM} \equiv \theta$ και η σταθερά ζεύξης είναι $g \equiv e$, μιας και πλέον το σύμβολο g χαρακτηρίζει το μαγνητικό φορτίο. Το πλεονέκτημα στη χρήση της μιγαδικής σταθεράς ζεύξης είναι ότι παρουσία ενός θ όρου ενσωματώνει τις δύο (θ, e) από τις τέσσερεις παραμέτρους της Λαγκρανζιανής (οι υπόλοιπες είναι οι παράμετροι του δυναμικού λ, α) σε ένα αντικείμενο, στο οποίο όπως θα δούμε μπορεί να δράσει κάποια ομάδα μετασχηματισμών συσχετίζοντας διαφορετικές περιγραφές της θεωρίας (σε διαφορετικές ζεύξεις) μεταξύ τους. Μπορούμε μάλιστα να φέρουμε τη Λαγκρανζιανή συναρτήσει της τ όπως και στις υπερσυμμετρικές θεωρίες Yang-Mills, ορίζοντας:

$$\mathcal{G}^a_{\mu\nu} := G^a_{\mu\nu} - i\tilde{G}^a_{\mu\nu} \tag{360}$$

και κάνοντας ανακλιμάκωση των πεδίων βαθμίδας ώς $W^a_\mu \mapsto eW^a_\mu$. Τότε ο τομέας βαθμίδας της θεωρίας (δύο πρώτοι όροι) παίρνει τη μορφή:

$$\mathcal{L}_{GG} = -\frac{1}{32\pi}\,\mathrm{Im}\left(\tau\mathcal{G}^a_{\mu\nu}\mathcal{G}^{a\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(D_\mu\phi^a\right)\left(D^\mu\phi^a\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - a^2\right)^2 \tag{361}$$

$$= -\frac{1}{4e^2} G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2} G^a_{\mu\nu} \tilde{G}^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(D_\mu \phi^a\right) \left(D^\mu \phi^a\right) - \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - a^2\right)^2 \tag{362}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι με αυτά, η μάζα μιας κατάστασης BPS με φορτίο (q, g) είναι ανάλογη του μήκους του ανύσματος στο πλέγμα καταστάσεων:

$$M_{BPS} = a \left| q + ig \right| = a \sqrt{q^2 + g^2} \tag{363}$$

2.9 Η Εικασία Montonen-Olive και η Ομάδα Δυϊσμού

Η έννοια του δυϊσμού είναι γνωστή από τον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό. Συγκεκριμένα, κανείς παρατηρεί ότι απουσία πηγών, οι εξισώσεις Maxwell[9]:

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \tag{364}$$

είναι αναλλοίωτες κάτω από το $\mathbb{Z}_2$ μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} F &\mapsto \tilde{F} \\ \tilde{F} &\mapsto -F \end{aligned} \tag{365}$$

ο οποίος ανταλλάσει τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Εάν τώρα επιτρέψουμε την ύπαρξη ηλεκτρικών και μαγνητικών πηγών:

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= -j^\mu \\ \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} &= -k^\mu \end{aligned} \tag{366}$$

όπου συμβολίζουμε τα ηλεκτρικά και μαγνητικά ρεύματα ώς $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ και $k^\mu = (\sigma, \vec{k})$ με συνιστώσες τις αντίστοιχες πυκνότητες, μπορούμε να διατηρήσουμε την παραπάνω αναλλοιώτητα αν ταυτόχρονα μετασχηματίσουμε τις πηγές ώς:

$$\begin{aligned} F \mapsto \tilde{F}\ &,\ j \mapsto k \\ \tilde{F} \mapsto -F\ &,\ k \mapsto -j \end{aligned} \tag{367}$$

Ο παραπάνω ονομάζεται μετασχηματισμός δυϊσμού ο οποίος ανταλλάσσει τους ηλεκτρικούς και μαγνητικούς βαθμούς ελευθερίας της θεωρίας, διατηρώντας τις εξισώσεις αναλλοίωτες. Επομένως, παρουσία μαγνητικών πηγών, το ποιό πεδίο ορίζουμε ώς "ηλεκτρικό" και ποιό ώς "μαγνητικό" αποτελεί σύμβαση. Η πρόταση που έγινε από τους C.Montonen και D.Olive [14] ήταν ότι το μοντέλο Georgi-Glashow με $\theta = 0$ και στο όριο BPS, έχει

9 όπου εδώ με F συμβολίζουμε τον τανυστή ισχύος του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού

μια ακριβή $\mathbb{Z}_2$ συμμετρία δυϊσμού στο φάσμα του (διαταρακτικό και μη). Σε αυτές τις συνθήκες, συνοψίζουμε το φάσμα στον παρακάτω πίνακα:

Φάσμα του μοντέλου GG για $\theta = 0$ στο όριο BPS			
Σωματίδιο	Μάζα	Φορτίο (q, g)	Σπίν/Ελικότητα
Φωτόνιο (A_μ)	0	(0,0)	± 1
Higgs (ϕ)	0	(0,0)	0
Μποζόνιο W $(W^\pm_\mu)$	ae	$(\pm e, 0)$	1
Μονόπολο BPS $(M_\pm)$	ag	$(0, \pm g)$	0

όπου όλες οι καταστάσεις ικανοποιούν το φράγμα Bogomol'nyi. Ο δυϊσμός ανταλλάσσει τα ηλεκτρικά και τα μαγνητικά φορτία $(q, g) \mapsto (g, -q)$ το οποίο αποτελεί συμμετρία του φάσματος εάν ταυτόχρονα ανταλλάξουμε τα μποζόνια W και τα μονόπολα. Η σταθερά σύζευξης αλλάζει επομένως ώς:

$$e \mapsto g = -\frac{4\pi}{e} \tag{368}$$

ή διαφορετικά γράφοντας $\tau(\theta = 0) = i4\pi/e^2$:

$$S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau} \tag{369}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός ονομάζεται S-δυϊσμός (S-duality) και προσφέρει μια σύνδεση μεταξύ της περιγραφής της θεωρίας σε ασθενή και σε ισχυρή σύζευξη, η οποία αλλάζει τον διαταρακτικό και τον τοπολογικό τομέα της θεωρίας μεταξύ τους. Η ιδέα είναι ότι στην "ηλεκτρική" $U(1)_E$ θεωρία βαθμίδας που έχουμε μετά την παραβίαση της πλήρους SO(3) ομάδας, για ισχυρή σύζευξη ($e \gg 1$) τα μποζόνια W γίνονται βαριά και τα BPS μονόπολα ελαφριά[10] και μπορούμε μέσω του S-δυϊσμού, να την απεικονίσουμε σε μια δυϊκή "μαγνητική" $U(1)_M$ θεωρία, στην οποία τα ελαφριά μονόπολα εμφανίζονται ώς θεμελιώδη διαταρακτικές διακυμάνσεις στο φάσμα και τα βαριά $W^\pm$ αποτελούν τοπολογικές λύσεις. Εκτός από αυτό το μετασχηματισμό, έχουμε επίσης και αναλλοιώτητα της θεωρίας κάτω από $\theta \mapsto \theta + 2\pi$ μιας και ένας τέτοιος μετασχηματισμός:

$$T : \tau \mapsto \tau + 1 \tag{370}$$

αλλάζει τη συνολική δράση κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π:

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \mathcal{L}_{GG} &= -\frac{1}{32\pi} \int d^4x \, \mathrm{Im} \, \mathcal{G}^a_{\mu\nu} \mathcal{G}^{a\mu\nu} = \frac{1}{32\pi} \int d^4x 2 G^a_{\mu\nu} \tilde{G}^{a\mu\nu} \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{32\pi^2} \int d^4x G^a_{\mu\nu} \tilde{G}^{a\mu\nu} \right] = 2\pi n \; , \; n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{371}$$

10 Η τιμή που παίρνει το πεδίο Higgs ορίζει την ενεργειακή κλίμακα της θεωρίας και έτσι για ισχυρή σύζευξη έχουμε $g \sim 1/e \ll 1 \Rightarrow m_{mon} = a|g| \ll a$ και $m_W = a|e| \gg a$

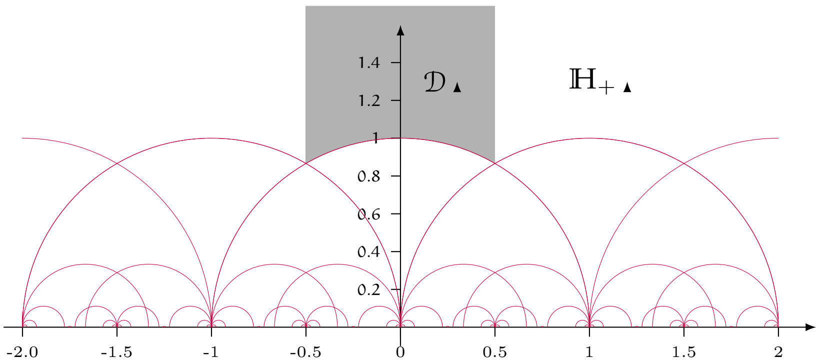
και όπως δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο αλλάζει το ηλεκτρικό φορτίο κατά n_m μονάδες. Ο S από την άλλη ανταλλάσει τους ηλεκτρικούς και μαγνητικούς κβαντικούς αριθμούς μεταξύ τους:

$$\circ\ q(\theta = 0) = en_e \mapsto -\frac{4\pi}{e} n_e$$
$$\circ\ g = -\frac{4\pi}{e} n_m \mapsto en_m$$

Οι δύο μετασχηματισμοί S, T αποτελούν γεννήτορες[11] της ομάδας $SL(2, \mathbb{Z})$ η οποία δρά στη σταθερά σύζευξης ώς:

$$\tau \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \tau' \ , a, b, c, d \in \mathbb{Z} \ , ad - bc = 1 \tag{372}$$

Τονίζουμε ότι η τ ζεί στο άνω μισό του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z > 0\}$, μιας και $e^2 > 0$, το οποίο μπορεί κανείς να δεί ότι διατηρείται από τη δράση της $SL(2, \mathbb{Z})$ υπολογίζοντας το $\operatorname{Im} \tau'$. Σημειώνουμε παρ'όλα αυτά ότι η δράση της δεν είναι πιστή, καθώς η εικόνα του μετασχηματισμού δεν αλλάζει εάν αλλάξουν πρόσημο όλα τα στοιχεία του πίνακα ταυτόχρονα: $(a, b, c, d) \mapsto (-a, -b, -c, -d)$[12]. Υπάρχει επίσης ένα θεμελιώδες χωρίο $\mathcal{D}$ στο τ επίπεδο, δύο διαφορετικά σημεία του οποίου δεν μπορούν να συνδεθούν με ένα $SL(2, \mathbb{Z})$ μετασχηματισμό και η τροχιά του $\mathcal{D}$ μπορεί να γεμίσει όλο το $\mathbb{H}_+$:



Σχήμα 1: $SL(2, \mathbb{Z})$ τροχιές στο τ επίπεδο και θεμελιώδες χωρίο.

με:

$$\mathcal{D} = \{\tau \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} \tau > 0, |\tau| \geqslant 1, |\operatorname{Re} \tau| < 1\} \tag{373}$$

Όσο για τη μάζα μιας BPS κατάστασης, μπορεί να πάρει μια $SL(2, \mathbb{Z})$ αναλλοίωτη μορφή συναρτήσει της τ γράφοντάς την ώς:

11 Ικανοποιώντας: $S^2 = 1_{2\times 2}$ και $(ST)^3 = 1_{2\times 2}$

12 Εάν ταυτήσουμε κάθε πίνακα $M \in SL(2, \mathbb{Z})$ με τον αντίθετό του, καταλήγουμε στην ομάδα $PSL(2, \mathbb{Z}) := SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$, της οποίας η δράση είναι πιστή

$$M_{BPS}^2 = 4\pi a^2 n^T A(\tau) n := 4\pi a^2 (n_m, n_e) \frac{1}{\operatorname{Im}\tau} \begin{pmatrix} |\tau|^2 & \operatorname{Re}\tau \\ \operatorname{Re}\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_m \\ n_e \end{pmatrix} \tag{374}$$

Μάλιστα, η παραπάνω ορίζει μια μετρική μέσω του θετικά ορισμένου πίνακα A (με $\det A(\tau) = 1$) ώς:

$$n \mapsto \|n\|_M^2 := 4\pi a^2 n^T A(\tau) n \tag{375}$$

όπου κανείς μπορεί να δείξει ότι ικανοποιείται η τριγωνική ανισότητα: Εάν έχουμε τρία ανύσματα φορτίων n_i με $n_1 + n_2 = n_3$, τότε ισχύει:

$$\|n_1\|_M + \|n_2\|_M \leqslant \|n_3\|_M \tag{376}$$

Εάν δεχθούμε ότι για κάθε τιμή της σταθεράς τ υπάρχει μια ηλεκτρικά φορτισμένη κατάσταση $(n_m, n_e)^T = (0, 1)^T$, τότε η $SL(2, \mathbb{Z})$ τροχιά του δίνει το φάσμα των πιθανών δυονικών καταστάσεων:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \tag{377}$$

όπου από τη σχέση της ορίζουσας, οι ακέραιοι b και d δεσμεύονται να είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί (relatively prime numbers), δηλαδή να έχουν ώς κοινό παράγοντα μεταξύ τους μόνο τη μονάδα. Αυτή είναι και η συνθήκη η οποία εξαναγκάζει την παραπάνω σχέση σε αυστηρή ανισότητα, δηλώνοντας ότι το n_3 περιγράφει μια νέα ευσταθή κατάσταση και δεν αποτελεί κάποια σύνθεση των καταστάσεων n_1, n_2.

Επομένως, η εικασία των Montonen και Olive δηλώνει ότι οι απλοί $\mathbb{Z}_2$ μετασχηματισμοί δυϊσμού προωθούνται στην ομάδα $SL(2, \mathbb{Z})$ όταν υπάρχει θ όρος. Εάν λοιπόν η θεωρία είναι $SL(2, \mathbb{Z})$ αναλλοίωτη, για κάθε σημείο στο τ επίπεδο έχουμε μια περιγραφή της θεωρίας για συγκεκριμένη σταθερά σύζευξης e και θ, ενώ δύο τιμές που συνδέονται με ένα $SL(2, \mathbb{Z})$ μετασχηματισμό είναι ισοδύναμες, όπου κανείς μετασχηματίζει κατάλληλα και τα ανύσματα φορτίου με τον ίδιο μετασχηματισμό. Για μια κβαντική θεωρία με μη μηδενική βήτα συνάρτηση, η $SL(2, \mathbb{Z})$ αναλλοιώτητα αναγκάζει τις μη ισοδύναμες τροχιές της ομάδας επανακανονικοποίησης να βρίσκονται όλες στο θεμελιώδες χωρίο $\mathcal{D}$. Παρ'όλα αυτά, δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι οι κβαντικές διορθώσεις θα σεβαστούν μια τέτοια συμμετρία. Όπως έχουμε δεί στο προηγούμενο μέρος της εργασίας, οι υπερσυμμετρικές θεωρίες περιέχουν αυτόματα τον θ-όρο και παρέχουν προστασία από τις κβαντικές διορθώσεις (εφ'οσων η ίδια η υπερσυμμετρία δεν παραβιάζεται), καθιστώντας τες έτσι κατάλληλες ώς υποψήφιες θεωρίες με την ομάδα δυϊσμού ώς συμμετρία. Οι μελέτες που έγιναν [7, 18, 22] εστίασαν στις περιπτώσεις όπου $\mathcal{N} = 2, 4$, καθώς για μια θεωρία χωρίς βαρύτητα ($|\text{spin}| \leqslant 1$) φτάνουμε μέχρι 16 υπερσυμμετρίες. Η τελευταία περίπτωση, η οποία μάλιστα έχει αναλλοίωτο σε αλλαγές κλίμακας (scale invariance) και επομένως μηδενική βήτα συνάρτηση, εικάζεται ότι δέχεται ώς ακριβής συμμετρία της την ομάδα δυϊσμού υπό την εξής έννοια: Εάν ξεκινήσουμε από μια $\mathcal{N} = 4$ θεωρία Yang-Mills σε 4 διαστάσεις με ομάδα βαθμίδας $\mathcal{G}$ και σταθερά σύζευξης g, τότε μπορούμε να βρούμε μια ισοδύναμη θεωρία με ομάδα $\tilde{\mathcal{G}}$ και σταθερά g^{-1}. Τα σωματίδια βαθμίδας της πρώτης θεωρίας εκφράζονται ώς μαγνητικά μονόπολα στη δεύτερη και αντιστρόφως[13], επιτρέποντας έτσι να κάνουμε υπολογισμούς σε ισχυρή σύζευξη της αρχικής θεωρίας δουλεύοντας διαταρακτικά στη δυϊκή θεωρία. Στη παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την περίπτωση μιας $\mathcal{N} = 2$ θεωρίας Yang-Mills και συγκεκριμένα με την ενεργό περιγραφή της σε χαμηλές ενέργειες (ή μεγάλες αποστάσεις), η οποία όπως θα δείξουμε δέχεται ώς ακριβής συμμετρία της την ομάδα δυϊσμού και αυτή μαζί με τα χαρακτηριστικά που προσφέρει η υπερσυμμετρία, μπορεί να την λύσει πλήρως.

13 Μια $\mathcal{N} = 4$ θεωρία έχει επίσης το πλεονέκτημα ότι περιέχει τα σωματίδια βαθμίδας και τα μονόπολα σε ισόμορφες πολλαπλέτες, σε αντίθεση με τη $\mathcal{N} = 2$ η οποία όπως θα εξετάσουμε περιέχει τα πρώτα σε ανυσματικές πολλαπλέτες και τα δεύτερα σε hypermultiplets.

Μέρος III

ΘΕΩΡΙΑ Seiberg-Witten

3 ΘΕΩΡΙΑ Seiberg-Witten

3.1 Μονόπολα στις $\mathcal{N}=2$ Υπερσυμμετρικές Θεωρίες Yang–Mills

Σε αυτή την ενότητα θα συζητηθεί η ύπαρξη λύσεων μονοπόλων σε θεωρίες βαθμίδας με $\mathcal{N}=2$ υπερσυμμετρία. Σε αντίθεση με το μποζονικό μοντέλο Georgi-Glashow που μελετήθηκε στο δεύτερο μέρος, η $\mathcal{N}=2$ Λαγκρανζιανή (264) εκτός από το ότι περιέχει και φερμιόνια συζευγμένα με τα υπόλοιπα πεδία, έχει μιγαδικό βαθμωτό πεδίο Higgs και έτσι υπάρχουν δύο πραγματικά βαθμωτά πεδία, παρ'όλα αυτά η λογική είναι παρόμοια με αυτή της ενότητας 2.5. Θα θεωρήσουμε από εδώ και μέχρι το τέλος της εργασίας, μια $\mathcal{N}=2$ υπερσυμμετρική θεωρία Yang-Mills με ομάδα βαθμίδας $\mathcal{G}=SU(2)$ όπου τα $\mathcal{N}=1$ υπερπεδία της να έχουν τις εξής συνιστώσες:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \Phi^a t^a \sim (\phi, \psi, F) = (\phi^a t^a, \psi^a t^a, F^a t^a) \\
V &= V^a t^a \sim (A_\mu, \lambda, d) = (A^a_\mu t^a, \lambda^a t^a, d^a t^a)
\end{aligned} \tag{378}$$

με τους γεννήτορες t^a να είναι στη συζυγή αναπαράσταση, με $\mathrm{tr}\, t^a t^b = \delta^{ab}$. Αυτή είναι η μικροσκοπική θεωρία, το περιεχόμενο της οποίας είναι το ίδιο με τη (264) με την κανονικοποίηση g^{-2}:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{32\pi} \mathrm{Im}\, \mathrm{tr} \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \tau \Psi^2 \\
&= \frac{1}{g^2} \mathrm{tr} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda^I \sigma^\mu \nabla_\mu \bar{\lambda}^I + (\nabla_\mu \phi)^\dagger (\nabla^\mu \phi) + \frac{\theta_{YM} g^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \right. \\
&\left. + \frac{i}{\sqrt{2}} g \epsilon_{IJ} \left(\phi^\dagger \left\{ \lambda^I, \lambda^J \right\} - \phi \left\{ \bar{\lambda}^I, \bar{\lambda}^J \right\} \right) - \frac{1}{2} \left(\left[\phi, \phi^\dagger \right] \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{379}$$

όπου $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - ig(t^a)_{bc} A^b_\mu A^c_\nu$ και $\nabla_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a - ig(t^a)_{bc} A^a_\mu \phi^c$. Γράφοντας το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο ώς:

$$\phi^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi^a_1 + i\phi^a_2) \tag{380}$$

και φέρνοντας τους δύο σπίνορες Weyl ψ και λ σε ένα σπίνορα Dirac τεσσάρων συνιστοσών:

$$\chi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ -i\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{381}$$

μπορούμε να γράψουμε με τη χρήση των πινάκων γάμμα στην αναπαράσταση Weyl (28) (29) τους παρακάτω όρους ώς:

$$\circ \quad \frac{1}{g^2}\operatorname{tr}(\nabla_\mu \phi)^\dagger(\nabla^\mu \phi) = \frac{1}{2g^2}\operatorname{tr}(\nabla_\mu \phi_1)(\nabla^\mu \phi_1) + \frac{1}{2g^2}\operatorname{tr}(\nabla_\mu \phi_2)(\nabla^\mu \phi_2) \tag{382}$$

$$\circ \quad -\frac{1}{2g^2}\operatorname{tr}\left(\left[\phi,\phi^\dagger\right]\right)^2 = \frac{1}{2g^2}\operatorname{tr}\left([\phi_1,\phi_2]\right)^2 \tag{383}$$

$$\circ \quad \frac{1}{g^2}\operatorname{tr}\left(-i\lambda\sigma^\mu\nabla_\mu\bar{\lambda} - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\nabla_\mu\psi\right) = -\frac{i}{g^2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} i\lambda_\alpha & \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\sigma^\mu\nabla_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \\ \bar{\sigma}^\mu\nabla_\mu\psi_\alpha\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{i}{g^2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} i\lambda_\alpha & \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0_{2\times 2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla_\mu\psi^\alpha \\ -i\nabla_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} = -\frac{1}{g^2}\operatorname{tr} i\bar{\chi}\gamma^\mu\nabla_\mu\chi \tag{384}$$

$$\circ \quad \frac{\sqrt{2}}{g}\operatorname{tr}\left[\phi^\dagger\left(i\lambda^\alpha\right)\psi_\alpha + \phi\left(-i\lambda^{\bar{\dot{\alpha}}}\right)\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\right] = \frac{\sqrt{2}}{g}\operatorname{tr}\left(\phi^\dagger\bar{\chi}\frac{1+\gamma^5}{2}\chi + \phi\bar{\chi}\frac{1-\gamma^5}{2}\chi\right) \tag{385}$$

$$= \frac{1}{g}\operatorname{tr}\phi_1\bar{\chi}\chi - \frac{i}{g}\operatorname{tr}\phi_2\bar{\chi}\gamma^5\chi \tag{386}$$

Και η Λαγκρανζιανή έρχεται στη μορφή:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \frac{1}{g^2}\operatorname{tr}\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta g^2}{32\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\nabla_\mu\phi_n)(\nabla^\mu\phi_n)\right. \\ &\left. + \frac{g^2}{2}\left([\phi_1,\phi_2]\right)^2 - i\bar{\chi}\gamma^\mu\nabla_\mu\chi + g\phi_1\bar{\chi}\chi - ig\phi_2\bar{\chi}\gamma^5\chi\right]\end{aligned} \tag{387}$$

όπου η άθροιση στα $n \in \{1,2\}$ εννοείται. Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω Λαγκρανζιανή εμπεριέχει τα περισσότερα φαινόμενα που θα συναντήσει κανείς σε ένα σύγχρονο βιβλίο θεωρίας πεδίου: Από τη συμμετοχή μη αβελιανών πεδίων βαθμίδας σε σύζευξη με πεδία ύλης και συζεύξεις Yukawa, την απόκτηση μάζας μέσω του μηχανισμού Higgs, την επανακανονικοποίηση του μοντέλου και το φαινόμενο της ασυμπτωτικής ελευθερίας, μέχρι το μη διαταρακτικό τομέα του (μονόπολα και στιγμιόνια) και τα μη τετριμμένα χαρακτηριστικά που επιβάλει η υπερσυμμετρία (ολομορφία, κεντρικά φορτία, ανωμαλία της καθολικής $\mathcal{R}$ συμμετρίας 3.3) καθώς και το δυϊσμό μεταξύ διαταρακτικού και μη διαταρακτικού τομέα.

Η μάζα μιας στατικής λύσης όσον αφορά τα μποζονικά πεδία θα είναι:

$$M = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left\{E_i^a E^{ai} + B_i^a B^{ai} + \nabla_i\phi_n^a\nabla^i\phi_n^a + g^2\left(\left[\phi_1^a,\phi_2^b\right]\right)^2\right\} \tag{388}$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \Big\{ &(E_i^a - \nabla_i\phi_1^a \sin\delta - \nabla_i\phi_2^a\cos\delta)^2 \\
&+ (B_i^a - \nabla_i\phi_1^a \cos\delta + \nabla_i\phi_2^a \sin\delta)^2 \\
&2E_i^a (\nabla_i\phi_1^a \sin\delta + \nabla_i\phi_2^a\cos\delta) \\
&+2B_i^a (\nabla_i\phi_1^a \cos\delta - \nabla_i\phi_2^a \sin\delta) + g^2\left([\phi_1^a,\phi_2^b]\right)^2 \Big\}
\end{aligned} \tag{389}
$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \Big\{ &\left(E_i^a - \nabla_i\tilde{\phi}_1^a\right)^2 + \left(B_i^a - \nabla_i\tilde{\phi}^a\right)^2 \\
&+2E_i^a\nabla_i\tilde{\phi}_1^a + 2B_i^a\nabla_i\tilde{\phi}_2^a + g^2\left([\phi_1^a,\phi_2^b]\right)^2 \Big\}
\end{aligned} \tag{390}
$$

όπου έγινε εισαγωγή μιας γωνίας δ όπως στη (338) και ορίσαμε τους εξής συνδιασμούς των πεδίων:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1^a &:= \phi_1^a \sin\delta + \phi_2^a\cos\delta \\
\tilde{\phi}_2^a &:= \phi_1^a \cos\delta - \phi_2^a\sin\delta
\end{aligned} \tag{391}
$$

Από αυτή βλέπουμε ότι η ελαχιστοποίηση της μάζας για μηδενικό δυναμικό επιτυγχάνεται εάν ισχύει:

$$
\begin{aligned}
E_i^a &= \nabla_i\tilde{\phi}_1^a \\
B_i^a &= \nabla_i\tilde{\phi}_2^a
\end{aligned} \tag{392}
$$

Αυτές δεν είναι παρά η υπερσυμμετρική γενίκευση των εξισώσεων BPS (341). Τότε η λύση ενός στατικού BPS μονόπολου σε αντιστοιχία με το μοντέλο GG, μπορεί να γραφεί ώς:

$$
\begin{aligned}
\phi_1^a &= \frac{x^a}{er^2}H(\xi)\cos\delta \\
\phi_2^a &= -\frac{x^a}{er^2}H(\xi)\sin\delta \\
A_i^a &= -\epsilon_{aij}\frac{x^j}{er^2}\left(1-K(\xi)\right) \\
A_0^a &= 0
\end{aligned} \tag{393}
$$

με τις συναρτήσεις $H(\xi)$ και $K(\xi)$ να δίνονται από τις (344). Μπορούμε επίσης να ορίσουμε τα ηλεκτρικά και μαγνητικά φορτία που παίρνουμε από τα διαφορετικά βαθμωτά πεδία τα οποία θα δίνονται από τους αντίστοιχους συνοριακούς όρους:

$$
\begin{aligned}
q_n &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\partial_i\left(E_i^a\phi_n^a\right)\ ,\ n=1,2 \\
g_n &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\partial_i\left(B_i^a\phi_n^a\right)\ ,\ n=1,2
\end{aligned} \tag{394}
$$

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα της εκτεταμένης υπερσυμμετρίας είναι ότι αυτή, μέσω της ύπαρξης κεντρικού φορτίου, δίνει αυτόματα το φράγμα BPS (340) για τις καταστάσεις, από την άλγεβρα της. Πράγματι, οι D.Olive και E.Witten το '78 [26] υπολόγισαν το κεντρικό φορτίο απευθείας από τις σχέσεις αντιμετάθεσης των υπερφορτίων Q^I_α, βρίσκοντας τις εκφράσεις τους από τα αντίστοιχα υπερρεύματα που προκύπτουν από τη μεταβολή της Λαγκρανζιανής, καταλήγοντας:

$$\begin{aligned}
\left\{Q^1_\alpha, Q^2_\beta\right\} &= \frac{2\sqrt{2}}{g^2}\epsilon_{\alpha\beta}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\partial_i\left[\left(iF^{a0i}+\tilde{F}^{a0i}\right)\phi^{a\dagger}\right] \\
\left\{\bar{Q}^1_{\dot\alpha}, \bar{Q}^2_{\dot\beta}\right\} &= \frac{2\sqrt{2}}{g^2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\partial_i\left[\left(-iF^{a0i}+\tilde{F}^{a0i}\right)\phi^{a}\right]
\end{aligned} \tag{395}$$

όπου εάν γίνει η αντικατάσταση του μιγαδικού ϕ με τα πραγματικά ϕ_1, ϕ_2, φαίνεται ότι τα φορτία (394) εμφανίζονται ώς τα πραγματικά και φανταστικά μέρη του Z. Η παραπάνω άλγεβρα[1] μαζί με τους ορισμούς του συνολικού ηλεκτρικού και μαγνητικού φορτίου και την προσθήκη του φαινομένου Witten (356), προκειμένου να ληφθεί υπ'όψιν η συνεισφορά του θ όρου, οδηγεί[2]:

$$\boxed{Z = \frac{a}{g}\left(Q_{ele} + iQ_{mag}\right) = a\left(n_e + \tau_{cl}n_m\right)} \tag{396}$$

το οποίο δίνει κατευθείαν:

$$M \geqslant \sqrt{2}|Z| = \frac{\sqrt{2}}{g}|a|\sqrt{Q^2_{ele} + Q^2_{mag}} = \sqrt{2}\left|a(n_e + \tau_{cl}n_m)\right| \tag{397}$$

δηλαδή το φράγμα Bogomolnyi' για τη μάζα. Το πλεονέκτημα εδώ είναι ότι καταλήξαμε στη σχέση καθαρά μέσω της εκτεταμένης υπερσυμμετρίας η οποία επειδή δεν παραβιάζεται από τις κβαντικές διορθώσεις, εγγυάται την ύπαρξη των καταστάσεων BPS στο φάσμα της κβαντικής θεωρίας.

3.2 Ο Χώρος Moduli των Κενών

Η $\mathcal{N} = 2$ Λαγκρανζιανή (379), όπως είδαμε στη κατασκευή της μετά την απαλλοιφή των βοηθητικών πεδίων F^a και d^a, περιέχει το εξής βαθμωτό δυναμικό:

$$V(\phi) = \frac{1}{2g^2}\,\mathrm{tr}\left(\left[\phi, \phi^\dagger\right]\right)^2 \tag{398}$$

Στο κενό, αυτό θα πρέπει να μηδενίζεται, όπως και στην περίπτωση του δυναμικού Higgs στη (301), το οποίο συμβαίνει εάν το βαθμωτό πεδίο παίρνει τιμές στην υποάλγεβρα Cartan της $\mathfrak{su}(2)$:

1 όπου υπενθυμίζουμε ότι με την κανονικοποίηση που έχουμε παίρνει τη μορφή: $\{Q^1_\alpha, Q^2_\beta\} = 2\sqrt{2}\epsilon_{\alpha\beta}Z$ καθώς και οι τελεστές (353) θα έχουν ένα επιπλέον παράγοντα $1/g$.

2 όπου συμβολίζουμε τ_{cl} τη κλασική σταθερά σύζευξης (359)

$$\phi = \frac{1}{2} a \sigma^3 \,, \ a \in \mathbb{C} \tag{399}$$

όπου διαφορετικές τιμές της μιγαδικής παραμέτρου a αντιστοιχούν σε διαφορετικά κενά της θεωρίας. Κύριο αντικείμενο μελέτης στη θεωρία Seiberg-Witten, αλλά και γενικότερα στη θεωρητική φυσική, αποτελεί ο χώρος των κενών τα οποία είναι μη ισοδύναμα κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Αυτός ονομάζεται χώρος moduli και η γνώση της γεωμετρίας του συνδέεται άμεσα με τη δυναμική της θεωρίας. Ειδικότερα, όταν έχουμε να κάνουμε με μια υπερσυμμετρική θεωρία η οποία ελέγχει τις κβαντικές διορθώσεις, μιας και σε μια γενική κβαντική θεωρία πεδίου τα κβαντικά φαινόμενα πιθανότατα θα "καταστρέψουν" τα περισσότερα κλασικά κενά, η γεωμετρία του κβαντικού χώρου moduli είναι πιο προσεγγίσιμη. Ορίζουμε λοιπόν τον κλασικό χώρο moduli ώς εξής:

$$\mathcal{M}_{\text{cl}} := \left\{ \phi \in \mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C} | [\phi, \phi^\dagger] = 0 \right\} / \{\text{μετασχηματιμοί βαθμίδας}\} \tag{400}$$

Μιας και υπάρχουν οι $\mathbb{Z}_2 \subset SU(2)$ μετασχηματισμοί βαθμίδας (υποομάδα Weyl της $SU(2)$)που αλλάζουν το πρόσημο της παραμέτρου $a \mapsto -a$, τα δύο κενά είναι ισοδύναμα κατά βαθμίδα και έτσι ο $\mathcal{M}_{\text{cl}}$ είναι μια μονοδιάστατη μιγαδική πολλαπλότητα ισόμορφη με το άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο $\mathbb{H}_+$. Η συντεταγμένη που έχει αναλλοίωτο κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς και έτσι πετυχαίνει την παραμετροποίηση των μη ισοδύναμων κενών είναι η εξής[3]:

$$u = \operatorname{tr} \phi^2 = \frac{1}{2} a^2 \in \mathbb{C} \tag{401}$$

και επομένως σκεφτόμαστε τον χώρο Moduli ώς το μιγαδικό u επίπεδο. Ένα γενικό σημείο του χώρου moduli με $a \neq 0 \Rightarrow u \neq 0$ παραβιάζει τη συμμετρία βαθμίδας $SU(2) \to U(1)$ μέσω του μηχανισμού Higgs, διατηρώντας την $\mathcal{N} = 2$ υπερσυμμετρία. Έτσι, όπως και στο μοντέλο GG, ο κινητικός όρος του ϕ θα δώσει στα μποζόνια $W^{\pm}_\mu := 1/\sqrt{2}(A^1_\mu \pm i A^2_\mu)$ μάζα $m_W = \sqrt{2} a$ (μιας και η κανονικοποίηση με g^{-2} διώχνει τη σταθερά ζεύξης από τη μάζα) και λόγω της υπερσυμμετρίας οι $a = 1, 2$ συνιστώσες των φερμιονίων ψ και λ παίρνουν και αυτές την ίδια μάζα από τη ζεύξη τους με το βαθμωτό πεδίο. Τα πεδία που παραμένουν άμαζα είναι τα $(A^3_\mu, \lambda^3, \psi^3, \xi^3) \equiv (A_\mu, \lambda, \psi, \phi)$, όπου ξ η διαταραχή του πεδίου Higgs γύρω από το κενό: $\phi^a = \xi^a(x) + \frac{1}{2} a \delta^{a3}$, τα οποία σχηματίζουν μια $\mathcal{N} = 2$ ανυσματική πολλαπλέτα. Το σημείο $a = 0$ επομένως αντιστοιχεί στη πλήρη απαραβίαστη $SU(2)$ $\mathcal{N} = 2$ θεωρία Yang-Mills, όπου όλα τα σωμάτια είναι άμαζα. Αυτό αποτελεί μια singularity του κλασικού χώρου $\mathcal{M}_{\text{cl}}$ καθώς στο σημείο αυτό δεν υπάρχει κλίμακα να τον παραμετροποιήσει. Η φυσική ερμηνεία του είναι ότι στο $a = 0$ εμφανίζονται νέα άμαζα σωμάτια στο φάσμα και έτσι το κενό αποκτά ευρύτερη συμμετρία. Αυτή

3 Για τη περίπτωση μιας γενικής ομάδας βαθμίδας $\mathcal{G} \to \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [1]

είναι η περίπτωση για τον $\mathcal{M}_{cl}$, όμως τα κβαντικά φαινόμενα μπορούν να αλλάξουν εντελώς τη μορφή του και έτσι θα μελετήσουμε στη συνέχεια τον κβαντικό χώρο moduli $\mathcal{M}_q$, του οποίου η παράμετρος θα δίνεται από τη μέση αναμενώμενη τιμή των αντίστοιχων κλασικών μεγεθών:

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle &= \frac{1}{2} a \sigma^3 \\ u &= \langle \mathrm{tr}\, \phi^2 \rangle \end{aligned} \tag{402}$$

όπου τονίζουμε ότι η δεύτερη ισότητα στην (401) ισχύει μόνο ημικλασικά και οι κβαντικές διακυμάνσεις μπορούν να την αλλάξουν έτσι ώστε $u \neq 1/2a^2$. Η $\mathcal{N} = 2$ υπερσυμμετρία αναγκάζει τη Λαγκρανζιανή που προκύπτει από την ενεργό Wilsonian δράση να είναι της μορφής (280), όμως εφ'όσων περιγράφει τα άμαζα πεδία σε χαμηλές ενέργειες θα περέχει μόνο την παραπάνω ανυσματική πολλαπλέτα και έτσι καταλήγουμε σε μια αβελιανή (μόνο $a = 3 = b$ και $\exp(2gV) = 1$) ενεργό θεωρία:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{16\pi} \mathrm{Im} \left[\int d^2\theta \mathcal{F}''(\Phi) W^\alpha W_\alpha + \int d^4\theta \Phi^\dagger \mathcal{F}'(\Phi) \right] \tag{403}$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{4\pi} \mathrm{Im}\, \mathcal{F}''(\phi) \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \left(F^{\mu\nu} - i\tilde{F}^{\mu\nu} \right) + |\partial_\mu \phi|^2 - i\lambda\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} - i\psi\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} \right] \\ + \ldots \end{aligned} \tag{404}$$

όπου $\mathcal{F}'(\Phi) = \delta\mathcal{F}(\Phi)/\delta\Phi|_{\Phi=\phi}$ κ.ο.κ. με το prepotential να λαμβάνει διαταρακτικές και μη διαταρακτικές κβαντικές διορθώσεις. Από το παραπάνω ανάπτυγμα των κινητικών όρων, μπορούμε να διαβάσουμε τη μετρική του μη γραμμικού σίγμα μοντέλου στο χώρο των πεδίων ώς:

$$g_{\phi\phi^\dagger} \sim \mathrm{Im}\, \mathcal{F}''(\phi) \tag{405}$$

Αυτή η μετρική, εάν το βαθμωτό πεδίο πάρει την αναμενώμενη τιμή του στο κενό, επάγει τη μετρική στο χώρο moduli μιας και η a τον παραμετροποιεί. Επομένως καταλήγουμε ότι η μετρική στον $\mathcal{M}_q$ είναι:

$$\boxed{ds^2 = \mathrm{Im}\, \mathcal{F}''(a) da d\bar{a} = \mathrm{Im}\, \tau(a) da d\bar{a}} \tag{406}$$

όπου $\bar{a}$ ο μιγαδικός συζυγής του a και ορίσαμε σε αντιστοιχία με την κλασική περίπτωση, την ενεργό σταθερά σύζευξης $\tau(a) := \mathcal{F}''(a)$, η οποία εξαρτάται από την κλίμακα a. Το ότι η $\mathcal{F}$ είναι ολόμορφη στο όρισμά της, λόγω της υπερσυμμετρίας, σημαίνει ότι η συνάρτηση $\mathrm{Im}\, \mathcal{F}''(a)$ είναι αρμονική και επομένως δεν μπορεί να έχει ελάχιστο (διαφορετικά θα ήταν σταθερή παντού) και έτσι η συνθήκη θετικότητας της μετρικής $\mathrm{Im}\, \tau(a) > 0$ δεν ισχύει σε όλο τον $\mathcal{M}_q$. Αυτό δείχνει ότι το prepotential είναι πλειονότιμη συνάρτηση του a (δεν ορίζεται καθολικά) και για την κάλυψη όλου του χώρου moduli θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές συντεταγμένες που τον περιγράφουν τοπικά: Δεν αρκούν μόνο οι $a, \bar{a}$. Στην περιοχή όπου οι $a, \bar{a}$ είναι συντεταγμένες του $\mathcal{M}_q$, η Λαγκρανζιανή (403) περιγράφεται από τα υπερπεδία Φ, W_α όπως έχουμε δεί. Η ιδέα είναι να βρεθούν συντεταγμένες $a_D, \bar{a}_D$ που θα περιγράφουν την/τις περιοχή/ές όπου τα $a, \bar{a}$ αποτυγχάνουν, οι οποίες θα προκύπτουν από κάποια δυϊκά υπερπεδία $\Phi_D, W_{D\alpha}$ όπως ακριβώς προκύπτει η a από το Φ.

3.3 Η Παραβίαση της $\mathcal{R}$ Συμμετρίας στη Κβαντική Θεωρία

Προτού μελετήσουμε το δυϊσμό σε αυτή τη θεωρία, θα αναφέρουμε τι συμβαίνει με την καθολική $\mathcal{R}$ συμμετρία στον κβαντικό χώρο moduli. Όπως έχουμε δεί στην ενότητα της υπερσυμμετρίας, στη $\mathcal{N} = 2$ θεωρία έχουμε μια καθολική $U(2)_\mathcal{R} \cong SU(2)_\mathcal{R} \otimes U(1)_\mathcal{R}$ συμμετρία, από την οποία στον $\mathcal{N} = 1$ φορμαλισμό της Λαγκρανζιανής (379) όπου $\Psi = V \oplus \Phi$, γίνεται εμφανής μόνο η $U(1)$ υποομάδα της $SU(2)_\mathcal{R}$ την οποία θα συμβολίζουμε ώς $U(1)_\mathcal{J}$. Επομένως έχουμε δύο $U(1)$ οι οποίες δρούν στα $\mathcal{N} = 1$ υπερπεδία του Ψ ώς [1]:

$$
\begin{aligned}
\Phi &\xmapsto{U(1)_\mathcal{R}} e^{2i\varphi}\Phi(e^{-i\varphi}\theta) \\
V &\xmapsto{U(1)_\mathcal{R}} V(e^{-i\varphi}\theta) \\
\Phi &\xmapsto{U(1)_\mathcal{J}} \Phi(e^{-i\varphi}\theta) \\
V &\xmapsto{U(1)_\mathcal{J}} V(e^{-i\varphi}\theta)
\end{aligned} \tag{407}
$$

Εάν τώρα γίνει και προσθήκη ύλης σε hypermultiplets, σύμφωνα με την 1.5.2 θα έχουμε ένα $\mathcal{N} = 1$ υπερδυναμικό της μορφής $\sqrt{2}\tilde{Q}\Phi Q$, το οποίο για να έχει $U(1)_\mathcal{R}$ φορτίο 2 (αφού συνοδεύεται από το ολοκλήρωμα στα $d^2\theta$) οδηγεί στους εξής μετασχηματισμούς των χειραλικών υπερπεδίων της hypermultiplet:

$$
\begin{aligned}
Q &\xmapsto{U(1)_\mathcal{R}} Q(e^{-i\varphi}\theta) \\
\tilde{Q} &\xmapsto{U(1)_\mathcal{R}} \tilde{Q}(e^{-i\varphi}\theta) \\
Q &\xmapsto{U(1)_\mathcal{J}} e^{i\varphi}Q(e^{-i\varphi}\theta) \\
\tilde{Q} &\xmapsto{U(1)_\mathcal{J}} e^{i\varphi}\tilde{Q}(e^{-i\varphi}\theta)
\end{aligned} \tag{408}
$$

μιας και το Φ δεν έχει φορτίο κάτω από την $U(1)_\mathcal{J}$. Στη κλασική θεωρία επομένως, έχουμε κάτω από τη $U(1)_\mathcal{R}$:

$$\Psi \xmapsto{U(1)_\mathcal{R}} e^{2i\varphi}\Psi \tag{409}$$

και εάν τη γενικεύσουμε σε ενεργό θεωρία μέσω του prepotential, αυτή μένει αναλλοίωτη εάν:

$$\mathcal{F} \mapsto e^{4i\varphi}\mathcal{F} \tag{410}$$

Ενώνοντας τους σπίνορες ψ της Φ και $\bar{\lambda}$ της V σε ένα σπίνορα Dirac $\psi_D = (\lambda \quad \bar{\psi})^T$, γίνεται εμφανές ότι η $U(1)_\mathcal{R}$ δρά σε αυτόν ώς μια χειραλική $U(1)$ συμμετρία:

$$\psi_D \mapsto e^{i\varphi\gamma^5}\psi_D \tag{411}$$

μιας και $\bar{\psi} \mapsto e^{-i\varphi}\bar{\psi}, \lambda \mapsto e^{i\varphi}\lambda$. Το ίδιο ισχύει και για τους σπίνορες των Q και $\tilde{Q}$. Επομένως, όταν περάσουμε στη κβαντική θεωρία η $U(1)_\mathcal{R}$ θα παραβιαστεί από τη χειραλική ανωμαλία, εμποδίζοντας τη διατήρηση του αντίστοιχου ρεύματος (περιοριζόμαστε στην ομάδα βαθμίδας $SU(2)$):

$$\partial_\mu j^\mu_\mathcal{R} = -\frac{1}{4\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{412}$$

Έτσι, ένας $U(1)_\mathcal{R}$ μετασχηματισμός κατα γωνία φ, θα παράξει τον εξής όρο στη δράση:

$$\delta\int d^4x\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{\varphi}{4\pi^2}\int d^4xF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -(8\varphi)\frac{1}{32\pi^2}\int d^4xF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{413}$$

και εφ'όσων το παραπάνω ολοκλήρωμα δίνει έναν ακέραιο, όπως είδαμε και στη (371), η συμμετρία $U(1)_\mathcal{R}$ παραβιάζεται στη διακριτή $\mathbb{Z}_8$ καθώς η γωνία φ μπορεί να πάρει τιμές $\varphi_n = \pi n/4$ με $n = 1, \ldots 8$: $e^{i\varphi_n} = e^{2\pi i(n/8)}$. Αυτό συμφωνεί με το θεώρημα δεικτών των Atiyah και Singer [2], το οποίο εκφράζει τη μη αναλλοιώτητα του μέτρου συναρτησιακής ολοκλήρωσης σε χειραλικές στροφές των φερμιονίων, μετρώντας τους φερμιονικούς μηδενικούς τρόπους (μηδενικές ιδιοτιμές του τελεστή Dirac)[4]. Το ότι η Λαγκρανζιανή χαμηλών ενεργειών αλλάζει κατά αυτό τον τρόπο κάτω από ένα $U(1)_\mathcal{R}$ μετασχηματισμό, οδηγεί στην εύρεση της διόρθωσης ενός βρόχου στο prepotential (τη μόνη διαταρακτική κβαντική διόρθωση):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eff}} &= \frac{1}{16\pi}\operatorname{Im}\mathcal{F}''(\Phi)\left(-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + iF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right) + \ldots \\
&\xmapsto{U(1)_\mathcal{R}} \frac{1}{16\pi}\operatorname{Im}\mathcal{F}''(e^{2i\varphi}\Phi)\left(-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + iF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right) + \ldots \\
&= \frac{1}{16\pi}\operatorname{Im}\mathcal{F}''(\Phi)\left(-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + iF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right) - \frac{\varphi}{4\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \ldots
\end{aligned} \tag{414}$$

Το οποίο οδηγεί:

$$\mathcal{F}''(e^{2i\varphi}\Phi) = \mathcal{F}''(\Phi) - \frac{4\varphi}{\pi} \tag{415}$$

Αναπτύσσοντας για μικρές γωνίες και ολοκληρώνοντας παίρνουμε τη διόρθωση:

4 Για τον υπολογισμό μέσω του θεωρήματος, [1].

$$\mathcal{F}''(e^{2i\varphi}\Phi) \approx \mathcal{F}''(\Phi + 2i\varphi\Phi) \approx \mathcal{F}''(\Phi) + 2i\varphi\Phi\mathcal{F}'''(\Phi) = \mathcal{F}''(\Phi) - \frac{4\varphi}{\pi} \tag{416}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}'''(\Phi) = \frac{2i}{\pi\Phi} \tag{417}$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathcal{F}_{1-\text{loop}}(\Phi) = \frac{i}{2\pi}\Phi^2 \ln\frac{\Phi^2}{\Lambda^2}} \tag{418}$$

όπου Λ μια κλίμακα που παρήθχη δυναμικά από την ολοκλήρωση στη διόρθωση ενός βρόχου, για ενέργειες κάτω από την οποία το φάσμα που παρουσιάζεται (ενεργός περιγραφή χαμηλών ενεργειών) μπορεί να διαφέρει σημαντικά από το φάσμα της μικροσκοπικής θεωρίας σε αναλογία με την Λ_{QCD} της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής: Το φάσμα της θεωρίας χαμηλών ενεργειών αποτελείται από αδρόνια και μεσόνια, σε αντίθεση με τη θεωρία σε υψηλές ενέργειες, η οποία περιγράφει quarks και γκλουόνια. Συνεπώς, το ακριβές διαταρακτικό αποτέλεσμα θα δίνεται από τη διόρθωση ενός βρόχου και το κλασικό κομμάτι (278):

$$\mathcal{F}_{\text{pert}}(\Phi) = \frac{1}{2}\Phi^2\left(\tau + \frac{i}{\pi}\ln\frac{\Phi^2}{\Lambda^2}\right) \tag{419}$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι το $\mathcal{F}$ θα λαμβάνει και μη διαταρακτικές διορθώσεις από τα στιγμιόνια οι οποίες έχουν τη μορφή:

$$\mathcal{F}_{\text{inst}}(\Phi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{\Lambda}{\Phi}\right)^{4k} \Phi^2 \tag{420}$$

Αυτοί οι όροι μελετήθηκαν από τον Seiberg ο οποίος υπολόγισε τον συντελεστή $c_1 \neq 0$. Σκοπός της θεωρίας Seiberg-Witten είναι η εύρεση του πλήρους prepotential $\mathcal{F}_{\text{pert}} + \mathcal{F}_{\text{inst}}$ μέσω της μελέτης του χώρου moduli, το οποίο συμφωνεί με τους υπολογισμούς των c_k που ήρθαν αργότερα στη βιβλιογραφία μέσω άλλων τεχνικών [12, 16, 17].

3.4 Ο Δυϊσμός ώς Ακριβής Συμμετρία της Ενεργού Θεωρίας Χαμηλών Ενεργειών

Ξεκινάμε ορίζοντας το μετασχηματισμό δυϊσμού στο prepotential μέσω της σχέσης:

$$\mathcal{F}_D(\Phi_D) := \mathcal{F}(\Phi) - \Phi\Phi_D \tag{421}$$

το οποίο δεν είναι παρά ένας μετασχηματισμός Legendre. Παραγωγίζοντας την παραπάνω ώς πρός Φ και Φ_D παίρνουμε[5]:

5 όπου ο συμβολισμός της παραγώγου αντιστοιχεί στο όρισμα της κάθε συνάρτησης: $\mathcal{F}_D'(\Phi_D) = d\mathcal{F}_D(\Phi_D)/d\Phi_D$ κ.ο.κ.

$$\begin{aligned} \Phi_D &= \mathcal{F}'(\Phi) \\ \Phi &= -\mathcal{F}'_D(\Phi_D) \end{aligned} \tag{422}$$

κανείς μπορεί να δείξει ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί, μιας και θυμίζουν τους κανονικούς μετασχηματισμούς της μηχανικής οι οποίοι διατηρούν το μέτρο του χώρου των φάσεων[6] και έχουν μοναδιαία Ιακωβιανή. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι οι μετασχηματισμοί δυϊσμού είναι ακριβής συμμετρία της Λαγκρανζιανής (403). Ξεκινώντας με τον κινητικό όρο της χειραλικής πολλαπλέτας Φ, αυτός θα μετασχηματίζεται σε:

$$\circ \;\; \mathrm{Im}\int d^4\theta \Phi_D^\dagger \mathcal{F}'_D(\Phi_D) = \frac{1}{2i}\int d^4\theta \left[\Phi_D^\dagger \mathcal{F}'_D(\Phi_D) - \left(\mathcal{F}'_D(\Phi_D)\right)^\dagger \Phi_D\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\int d^4\theta \left[-\left(\mathcal{F}'(\Phi)\right)^\dagger \Phi - \left(-\Phi^\dagger\right)\mathcal{F}'(\Phi)\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\int d^4\theta \left[\Phi^\dagger \mathcal{F}'(\Phi) - \Phi\left(\mathcal{F}'(\Phi)\right)^\dagger\right] = \mathrm{Im}\int d^4\theta \Phi^\dagger \mathcal{F}'(\Phi) \tag{423}$$

Όσο για τον κινητικό όρο της ανυσματικής πολλαπλέτας V, θα πρέπει να κατασκευάσουμε το δυϊκό υπερπεδίο $W_{D\alpha}$, το οποίο οφείλει να γράφεται ώς (194) προκειμένου να περιέχει τον δυϊκό τανυστή ισχύος με τη σωστή μορφή $F_{D\mu\nu} = \partial_\mu A_{D\nu} - \partial_\nu A_{D\mu}$. Λόγω αυτού δεν μπορούμε να έχουμε μια τοπική σχέση των $W_\alpha, W_{D\alpha}$ όπως οι (422). Ο σύνδεσμος (196) που εγγυάται τη μορφή του W_α μπορεί να γραφεί με απλό τρόπο στον υπερχώρο ώς:

$$D_\alpha W^\alpha = \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{2i}\left(D_\alpha W^\alpha - \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\alpha}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\, D_\alpha W^\alpha = 0 \tag{424}$$

Ο τρόπος που θα τον επιβάλουμε είναι μέσω του συναρτησιακού ολοκληρώματος της θεωρίας. Πιο συγκεκριμένα, το συναρτησιακό ολοκλήρωμα για αυτό το κομμάτι της δράσης θα έχει τη μορφή (έως σταθερές κανονικοποίησης):

$$\mathcal{Z} \propto \int [\mathcal{D}V] \exp\left(\frac{i}{16\pi}\mathrm{Im}\int d^4x \int d^2\theta \mathcal{F}''(\Phi) W_\alpha W^\alpha\right) \tag{425}$$

όπου γίνεται ολοκλήρωση στα υπερπεδία V. Κανείς μπορεί αντί αυτού, να ολοκληρώσει στα W_α, με την εισαγωγή του νέου υπερπεδίου V_D, το

6 εάν ταυτίσουμε τις συντεταγμένες με τα Φ και τις συζυγείς ορμές με τα $\mathcal{F}'(\Phi)$

οποίο στην ουσία αποτελεί ένα πολλαπλασιαστή Lagrange για τη σχέση (424):

$$\mathcal{Z} \propto \int [\mathcal{D}W]\,[\mathcal{D}V_D] \exp\left[\frac{i}{16\pi}\,\mathrm{Im}\int d^4x \left(\int d^2\theta \mathcal{F}''(\Phi) W^\alpha W_\alpha + \frac{i}{8\pi}\int d^4\theta V_D D_\alpha W^\alpha\right)\right] \tag{426}$$

Ο νέος όρος τότε, με μια κατά παράγοντες ολοκλήρωση και τη χρήση της σχέσης του υπερχώρου $\int d^2\bar{\theta} = -1/4\bar{D}^2$, γράφεται:

$$\circ\ \frac{i}{8\pi}\int d^4x \int d^4\theta V_D D_\alpha W^\alpha = -\frac{i}{8\pi}\int d^4x \int d^4\theta \left(D_\alpha V_D\right) W^\alpha$$

$$= \frac{i}{32\pi}\int d^4x \int d^2\theta \bar{D}^2 \left(D_\alpha V_D\right) W^\alpha = -\frac{i}{8\pi}\int d^4x \int d^2\theta W_{D\alpha} W^\alpha \tag{427}$$

όπου ορίσαμε:

$$\left(W_D\right)_\alpha \equiv W_{D\alpha} = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V_D \tag{428}$$

το οποίο είναι στην επιθυμητή μορφή. Με αυτά, το συναρτησιακό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\mathcal{Z} \propto \int [\mathcal{D}W]\,[\mathcal{D}V_D] \exp\left[\frac{i}{16\pi}\,\mathrm{Im}\int d^4x \int d^2\theta \left(\mathcal{F}''(\Phi) W_\alpha W^\alpha - 2W_{D\alpha} W^\alpha\right)\right] \tag{429}$$

όπου πλέον μπορούμε να συμπληρώσουμε το τετράγωνο στα W και να κάνουμε την ολοκλήρωση[7] καταλήγουμε:

$$\mathcal{Z} \propto \int [\mathcal{D}V_D] \exp\left[\frac{i}{16\pi}\,\mathrm{Im}\int d^4x \int d^2\theta \left(-\frac{1}{\mathcal{F}''(\Phi)}\right) W_{D\alpha} W_D^\alpha\right] \tag{430}$$

Σε σύγκριση με τη (425) βλέπουμε ότι η δυϊκή θεωρία θα έχει την ίδια μορφή με την ενεργό $\mathcal{N}=2$ αβελιανή Λαγκρανζιανή (403):

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{16\pi}\,\mathrm{Im}\left[\int d^2\theta \mathcal{F}_D''(\Phi_D) W_{D\alpha} W_D^\alpha + \int d^4\theta \Phi_D^\dagger \mathcal{F}_D'(\Phi_D)\right] \tag{431}$$

όμως τώρα η σταθερά σύζευξης είναι:

$$\tau_D(a_D) = \mathcal{F}_D''(a_D) = -\frac{1}{\mathcal{F}''(\Phi)} = -\frac{1}{\tau(a)} \tag{432}$$

7 Είναι:

$$\mathcal{F}''(\Phi) W^2 - 2W_D W = \mathcal{F}''(\Phi)\left(W - \frac{1}{\mathcal{F}''(\Phi)} W_D\right)^2 - \frac{1}{\mathcal{F}''(\Phi)} W_D^2$$

Το πρώτο μέρος με μια μετάθεση στη μεταβλητή ολοκλήρωσης W, είναι απλώς ένα Γκαουσιανό ολοκλήρωμα και επομένως μπορεί να απορροφηθεί στην κανονικοποίηση του $\mathcal{Z}$.

το οποίο είναι ακριβώς ο S δυϊσμός (369). Με τη χρήση της (422) μπορούμε να γράψουμε τη Λαγκρανζιανή στη μεικτή μορφή (συναρτήσει του Φ και του Φ_D):

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{16\pi}\,\text{Im}\int d^2\theta \frac{d\Phi_D}{d\Phi} W_\alpha W^\alpha + \frac{i}{32\pi}\int d^4\theta \left(\Phi_D^\dagger \Phi - \Phi_D \Phi^\dagger\right) \tag{433}$$

Εάν επομένως θεωρήσουμε τη διπλέτα: $(\Phi_D \quad \Phi)^T$ οι μετασχηματισμοί δυϊσμού δρούν στα χειραλικά υπερπεδία ώς:

$$\begin{pmatrix} \Phi_D \\ \Phi \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} \Phi_D \\ \Phi \end{pmatrix} \ , \ M \in SL(2,\mathbb{Z}) \tag{434}$$

Οι αναπαραστάσεις των γεννητόρων είναι επομένως:

$$\begin{aligned} S\begin{pmatrix} \Phi_D \\ \Phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_D \\ \Phi \end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix} \Phi_D \\ \Phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_D \\ \Phi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{435}$$

και η δράση είναι επίσης αναλλοίωτη και κάτω από τον[8] T μετασχηματισμό, παρομοίως με την (371):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} \mapsto & \frac{1}{16\pi}\,\text{Im}\int d^2\theta \frac{d}{d\Phi}\left(\Phi_D + \Phi\right) W_\alpha W^\alpha \\ & + \frac{i}{32\pi}\int d^4\theta \left(\Phi_D^\dagger \Phi + \Phi^\dagger \Phi - \Phi^\dagger \Phi_D - \Phi^\dagger \Phi\right) \end{aligned} \tag{436}$$

$$\Rightarrow \delta\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{16\pi}\,\text{Im}\int d^2\theta W_\alpha W^\alpha = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{437}$$

$$\Rightarrow \delta S = -\frac{1}{16\pi}\int d^4x F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -2\pi n \ , \ n \in \mathbb{Z} \tag{438}$$

Συνεπώς, η (433) έχει αναλλοίωτο κάτω από την ομάδα δυϊσμού $SL(2,\mathbb{Z})$. Έτσι η μετρική στον $\mathcal{M}_q$ μπορεί και αυτή να πάρει την αναλλοίωτη μορφή, όπου οι συντεταγμένες a και a_D συμμετέχουν το ίδιο, με τη χρήση της $\tau(a) = \frac{da_D}{da}$:

$$ds^2 = \text{Im}\,\frac{da_D}{da}\, da d\bar{a} = \text{Im}\, da_D d\bar{a} \tag{439}$$

8 Το αναλλοίωτο ισχύει ακόμα για τον

$$T^b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $b \in \mathbb{R}$.

Έχουμε ήδη ερμηνεύσει τον χώρο moduli ώς μια μονοδιάστατη μιγαδική πολλαπλότητα (έχοντας πιθανές singularities) η οποία περιγράφεται από την ολόμορφη συντεταγμένη u. Εάν ερμηνεύσουμε τις (a_D, a) ώς συντεταγμένες σε ένα χώρο $\mathcal{X} \cong \mathbb{C}^2$, τότε αυτές ώς συναρτήσεις της u θα ορίζουν την απεικόνιση:

$$\begin{aligned} f : &\mathcal{M}_q \to \mathcal{X} \\ &u \mapsto (a_D(u), a(u)) \end{aligned} \tag{440}$$

Αυτή δεν είναι παρά η κατασκευή μιας $SL(2,\mathbb{Z})$ δέσμης $\mathcal{M}_q \otimes \mathcal{X}$ η οποία έχει ώς τομές (sections) τις $f(u) = (a_D(u), a(u))$. Εφοδιάζοντας τον $\mathcal{X}$ με τη συμπλεκτική 2-μορφή $\omega = \operatorname{Im} da_D \wedge d\bar{a}$, βλέπουμε ότι το pullback της κάτω από την απεικόνηση f δίνει τη μετρική συναρτήσει των $u, \bar{u}$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= f^*(\omega) = \operatorname{Im} da_D(u) d\bar{a}(\bar{u}) = \operatorname{Im} \frac{da_D}{du}\frac{d\bar{a}}{d\bar{u}} du d\bar{u} \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{da_D}{du}\frac{d\bar{a}}{d\bar{u}} - \frac{d\bar{a}_D}{d\bar{u}}\frac{da}{du}\right) du d\bar{u} = -\frac{i}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{da^\alpha}{du}\frac{d\bar{a}^\beta}{d\bar{u}} du d\bar{u} \end{aligned} \tag{441}$$

όπου ορίσαμε την $SL(2,\mathbb{Z})$ διπλέτα $a^\alpha = (a_D, a)$ με τους δείκτες $\alpha, \beta = 1, 2$. Σημειώνουμε τέλος ότι επειδή η ω δεν είναι απαραίτητα θετική εξόρισμού, η παραπάνω μετρική δεν είναι θετική για οποιαδήποτε επιλογή τιμών των $(a_D(u), a(u))$. Ένα από τα πλεονεκτήματα της λύσης που παρουσίασαν οι Seiberg και Witten μέσω ελλειπτικών καμπύλων, ήταν ότι αυτή εκ κατασκευής εγγυάται τη θετικότητα της μετρικής όπως θα δούμε στις επόμενες ενότητες.

3.5 Οι Μάζες των BPS Καταστάσεων στον $\mathcal{M}_q$

Για την ενεργό Λαγκρανζιανή (433) η μορφή του κεντρικού φορτίου (395) μπορεί να γραφεί σε αναλλοίωτη μορφή συναρτήσει των a και a_D. Οι καταστάσεις των ηλεκτρικών και μαγνητικών μονόπολων τα οποία εκφράζονται από τις $\mathcal{N} = 2$ hypermultiplets, πρίν αποκτήσουν μάζα μέσω του μηχανισμού Higgs βρίσκονταν σε $\mathcal{N} = 2$ άμαζες αναπαραστάσεις διάστασης $2^{\mathcal{N}} = 4$. Η διάσταση του χώρου της αναπαράστασης διατηρείται μόνο εάν αυτές βρεθούν σε "μικρές" ($M = \sqrt{2}|Z|$) έμμαζες αναπαραστάσεις της $\mathcal{N} = 2$, επίσης διάστασης 4 σε αντίθεση με τις "μεγάλες" ($M > \sqrt{2}|Z|$) όπου έχουν διάσταση $2^{2\mathcal{N}} = 16$ όπως αναφέραμε στην ενότητα 1.3, καθώς δεν είναι δυνατόν ο μηχανισμός Higgs να παράξει τους 12 επιπλέον βαθμούς ελευθερίας. Εάν επομένως θεωρήσουμε μια καθαρά ηλεκτρικά φορτισμένη hypermultiplet $M \oplus \tilde{M}^\dagger$ (όπου $M, \tilde{M}$ $\mathcal{N} = 1$ χειραλικά υπερπεδία) φορτίου $n_e \in \mathbb{Z}$, αυτή συζεύγνειται με τη χειραλική συνιστώσα της $\mathcal{N} = 2$ ανυσματικής πολλαπλέτας στη $\mathcal{N} = 1$ γραφή ώς: $\sqrt{2} n_e \tilde{M}\Phi M$. Η κατάσταση αποκτά μάζα για $a = \langle\phi\rangle \neq 0$ και έτσι διαβάζοντας τον όρο σύζευξης $\sqrt{2} a n_e \tilde{M} M$ και σύμφωνα με τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$Z = n_e a \tag{442}$$

Με την ίδια λογική, μια καθαρά μαγνητικά φορτισμένη κατάσταση φορτίου $n_m \in \mathbb{Z}$ που θα συζεύγνειται με το δυϊκό πεδίο Φ_D, όπου $a_D = \langle \phi_D \rangle$, θα δώσει:

$$Z = n_m a_D \tag{443}$$

Τα οποία για μια γενική δυονική κατάσταση με ηλεκτρικούς και μαγνητικούς κβαντικούς αριθμούς $(n_e, n_m) \in \mathbb{Z}^2$ οδηγεί:

$$Z = n_e a + n_m a_D = (n_m \quad n_e) \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \tag{444}$$

και το φράγμα BPS για τη μάζα:

$$M \geqslant \sqrt{2}|n_e a + n_m a_D| \tag{445}$$

Οι σχέσεις αυτές έχουν αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της ομάδας δυϊσμού:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \\ (n_m \quad n_e) \mapsto (n_m \quad n_e) M^{-1} \ , \ M \in SL(2, \mathbb{Z}) \end{gathered} \tag{446}$$

και ισχύουν στη πλήρη κβαντική θεωρία. Κανείς μπορεί να σκεφτεί ότι σε κάθε σημείο του $\mathcal{M}_q$ υπάρχει το πλέγμα $\Lambda(u)$ των φορτίων με μια βάση που καθορίζει τους ακεραίους (n_m, n_e) ώς συντεταγμένες, το οποίο εξαρτάται ολόμορφα από το u και έτσι αλλάζει στις διάφορες περιοχές του $\mathcal{M}_q$ σύμφωνα με τη συμπεριφορά της ολόμορφης τομής $(a_D, a)^T$ (και επομένως του $\mathcal{F}$). Εφ΄όσων η μάζα μιας BPS κατάστασης εξαρτάται και αυτή από το σημείο u (καθώς έχουμε δεί δίνεται από το $|Z| =$ το μέτρο του ανύσματος στο πλέγμα Λ) τότε είναι πιθανό σε κάποια σημεία του $\mathcal{M}_q$ αυτή να μηδενιστεί. Τα σημεία αυτά αντιστοιχούν σε singularities του $\mathcal{M}_q$ καθώς εκεί υπάρχει η προσθήκη νέων άμαζων καταστάσεων στο φάσμα, οι οποίες δεν είχαν ληφθεί υπ΄όψιν όταν ξεκινήσαμε να γράψουμε την ενεργό Λαγκρανζιανή από τη Wilsonian δράση, για την οποία ολοκληρώθηκαν όλοι οι έμμαζοι βαθμοί ελευθερίας στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα και επομένως η περιγραφή μας σε αυτά τα σημεία καταρρέει. Ισοδύναμα, σε αυτά τα σημεία το πλέγμα $\Lambda(u)$ εκφυλίζεται/γίνεται μονοδιάστατο. Στη συνέχεια ακολουθεί η αναζήτηση αυτών των σημείων του χώρου moduli τα οποία θα οδηγήσουν στην ακριβή έυρεση του prepotential, λύνοντας πλήρως τη θεωρία χαμηλών ενεργειών.

Θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά των συναρτήσεων $a_D(u)$ και $a(u)$ στον $\mathcal{M}_q$ όταν η συντεταγμένη u ακολουθεί μια κλειστή διαδρομή. Αυτές είναι πλειονότιμες συναρτήσεις και εάν η διαδρομή περικλύει κάποια singularity, τότε καθώς το u ολοκληρώνει μια περιφορά, οι $a_D(u)$ και $a(u)$ δεν θα επιστρέψουν στην ιδια τιμή αλλά σε κάποιο γραμμικό συνδιασμό τους, μέσω της δράσης κάποιας υποομάδας της $SL(2,\mathbb{Z})$. Οι μετασχηματισμοί αυτοί ονομάζονται μονοδρομίες.

3.6.1 Η Singularity Ασθενούς Σύζευξης στο $u = \infty$

Θα ξεκινήσουμε από την περιοχή του $\mathcal{M}_q$ για μεγάλες τιμές της παραμέτρου u, όπου όπως είναι γνωστό από τη μιγαδική ανάλυση, το σημείο $u = \infty$ μπορεί να συμπεριληφθεί στο u-επίπεδο μέσω της σφαίρας Riemann: $\mathcal{M}_q \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Η περιοχή αυτή αντιστοιχεί σε μεγάλες τιμές της κλίμακας $|a|$ και επομένως έχουμε να κάνουμε με την περιοχή υψηλών ενεργειών στη μικροσκοπική δράση. Η τελευταία είναι γνωστό ότι έχει ασυμπτωτική ελευθερία, όσο $a \to \infty$ η σταθερά σύζευξης τείνει στο μηδέν, με την εξής συνάρτηση βήτα:

$$\beta = \frac{dg(\mu)}{d\ln\mu} = -\frac{g^3(\mu)}{4\pi^2} \tag{447}$$

όπου μ η κλίμακα επανακανονικοποίησης, την οποία ταυτίζουμε με το a (τη μόνη κλίμακα της θεωρίας), και $g(\mu)$ η τρέχουσα σταθερά σύζευξης (running coupling constant). Δηλαδή όσο $\mu \to \infty$ θα έχουμε την ενεργό σταθερά $g(\mu) \to 0$. Επομένως σε αυτό το όριο ισχύει η ημικλασική σχέση $u \approx 1/2a^2$ και το prepotential προσεγγίζεται από τη διόρθωση ενός βρόχου. Τότε από το $\mathcal{F}$ μπορούμε να βρούμε τη μορφή του a_D σε αυτή την περιοχή:

$$a_D = \frac{\partial\mathcal{F}(a)}{\partial a} = \frac{i}{\pi}a\left(2\ln\frac{a}{\Lambda}+1\right) = \frac{i}{\pi}\sqrt{2u}\left(\ln\frac{2u}{\Lambda^2}+1\right) \tag{448}$$

Μια κλειστή καμπύλη στον $\mathcal{M}_q$ γύρω από το $u = \infty$ (το οποίο σκεφτόμαστε ώς βόρειο πόλο στην $\mathcal{S}^2$) περιγράφεται ώς:

$$u \mapsto e^{2\pi i}u \tag{449}$$

το οποίο από τη σχέση του u και του a δίνει:

$$a \mapsto e^{i\pi}a = -a \tag{450}$$

Είναι προφανές ότι οι πλειονότιμες συναρτήσεις, όπως ο παραπάνω λογάριθμος που προέρχεται από τη διόρθωση ενός βρόχου, θα αλλάξουν τιμή καθώς το u επιστρέφει στο αρχικό του σημείο ώς: $\ln a/\Lambda \mapsto i\pi + \ln a/\Lambda$ και επομένως:

$$a_D \mapsto -\frac{2i}{\pi} a \ln \frac{a}{\Lambda} + 2a - \frac{i}{\pi} a = -a_D + 2a \tag{451}$$

Άρα οι $a_D(u)$ και $a(u)$ μετασχηματίζονται ώς:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \mapsto M_\infty \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{\pi}\sqrt{2u}\,(\ln \frac{2u}{\Lambda^2} + 1) + 2\sqrt{2u} \\ -\sqrt{2u} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{452}$$

όπου M_∞ ο πίνακας της μονοδρομίας γύρω από το $u = \infty$, ο οποίος μπορεί να γραφεί μέσω των γεννητόρων T και S ώς $M_\infty = S^2 T^{-2}$. Από την αναλλοιώτητα του φράγματος BPS για τη μάζα (446) οι κβαντικοί αριθμοί των φορτίων θα μετασχηματιστούν ώς:

$$\begin{pmatrix} n_m & n_e \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} n_m & n_e \end{pmatrix} M_\infty^{-1} = \begin{pmatrix} -n_m & -2n_m - n_e \end{pmatrix} \tag{453}$$

Από την αλλαγή του ηλεκτρικού φορτίου βλέπουμε ότι η μη τετριμμένη μονοδρομία γύρω από το $u = \infty$ αλλάζει την ενεργό σταθερά σύζευξης ώς $\tau(a) \mapsto \tau(a) - 2$ σύμφωνα με το φαινόμενο Witten. Πράγματι, έχουμε:

$$\tau(a) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^2} = \frac{da_D}{da} = \frac{i}{\pi}\left(\ln \frac{a^2}{\Lambda^2} + 3\right) \mapsto \tau(a) - 2 \tag{454}$$

όπου σημειώνουμε ότι ενώ η τ είναι πλειονότιμη λόγω του λογαρίθμου, η μετρική του χώρου $\mathcal{M}_q$ στην περιοχή του $u = \infty$ είναι μονότιμη και θετικά ορισμένη:

$$\operatorname{Im} \tau(a) = \frac{1}{\pi}\left(\ln \frac{|a|^2}{\Lambda^2} + 3\right) \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{|a|^2}{\Lambda^2} \ , a \to \infty \tag{455}$$

3.6.2 Singularities Ισχυρής Σύζευξης σε Πεπερασμένα u

Η ύπαρξη του singular σημείου $u = \infty$ υπoννοεί την ύπαρξη ενός ακόμα τέτοιου σημείου από το οποίο ξεκινά η κλαδική τομή (branch cut) που καταλήγει στο $u = \infty$. Οι singularities θα μετασχηματίζονται μεταξύ τους από την εναπομείνουσα $\mathbb{Z}_2$ καθολική συμμετρία ώς $u \mapsto -u$ και επομένως θα βρίσκονται σε ζεύγη. Μιάς και τα σημεία $u = \infty$ και $u = 0$ ικανοποιούν την παραπάνω συμμετρία, κανείς θα περίμενε ότι υπάρχει singularity στο σημείο όπου $a = 0$ όπως στην κλασική περίπτωση όπου τα μποζόνια βαθμίδας γίνονται άμαζα, όμως όπως τονίστηκε από τους Seiberg και Witten [21][9] κάτι τέτοιο δεν ισχύει: Στο κβαντικό χώρο moduli τα μποζόνια

9 με το επιχείρημα ότι εάν σε κάποιο σημείο γίνεται προσθήκη ενός άμαζου μποζονίου βαθμίδας (spin 1) στο φάσμα, τότε θα είχαμε αναλλοίωτο κάτω από υπερσύμμορφους

βαθμίδας παραμένουν έμμαζα σε όλη την έκτασή του, δηλαδή η θεωρία είναι αβελιανή σε όλο τον $\mathcal{M}_q$ και το σημείο $u = 0$ δεν αποτελεί singularity, μιας και σε αυτή την περιοχή της ισχυρής σύζευξης $u \neq 1/2a^2$ οπότε το $a = 0$ δεν οδηγεί στο $u = 0$. Είναι επίσης αδύνατο να υπάρχει μόνο άλλη μια singularity, καθώς τότε αυτή θα είχε την ίδια μονοδρομία με τη $u = \infty$: $M_0 = M_\infty$ (εάν φανταστούμε το u επίπεδο ώς τη σφαίρα Riemann , οι διαδρομές που περικλύουν τις singularities διαμορφώνονται η μια στην άλλη) και έτσι η συντεταγμένη a^2 είναι αναλλοίωτη κάτω από τις μονοδρομίες: Η ομάδα που παράγουν είναι αβελιανή. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση $u = 1/2a^2$ θα ισχύει σε όλο τον χώρο και θα αποτελεί καλή συντεταγμένη παντού, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη θετικότητα της μετρικής όπως έχουμε εξηγήσει. Επομένως για να παραχθεί μια μη αβελιανή ομάδα μονοδρομιών, ο ελάχιστος αριθμός από singularities θα είναι 3: Μια στο $u = \infty$ και άλλες δύο στα σημεία $u = u_0$ και $u = -u_0$ για κάποια πεπερασμένη μη μηδενική τιμή u_0 την οποία μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να την πάρουμε $u_0 = 1$. Τότε μια κλειστή διαδρομή που περικλύει το σημείο $u = \infty$ μπορεί να διαμορφωθεί με συνεχή τρόπο σε δύο κλειστές διαδρομές οι οποίες θα περικλύουν τα $u = \pm 1$ αντίστοιχα:

$$M_1 M_{-1} = M_\infty \tag{456}$$

Μιας και αποκλείσαμε το ενδεχόμενο οι singularities να προέρχονται από κάποιο μποζονίου βαθμίδας που γίνεται άμαζο, οι μόνες έμμαζες καταστάσεις με spin 1/2 οι οποίες είναι υποψήφιες για να γίνουν άμαζες στα σημεία $u = \pm 1$, είναι τα μονόπολα και τα δυόνια. Αυτό θα συμβαίνει εάν $a_D(u_0) = 0$ με $a \neq 0$ για το μονόπολο και εάν $n_m a_D(u_0) + n_e a(u_0) = 0$ με $n_m, n_e \neq 0$ για το δυόνιο. Ας θεωρήσουμε ότι στη singularity $u = u_0$ έχουμε $a_D(u = 1) = 0$ και όπως έχουμε περιγράψει, το μονόπολο ($n_m = 1, n_e = 0$) συζύγνειται με το Φ_D. Η δυϊκή θεωρία στη περιοχή κοντά στο $u = 1$ είναι απλώς μια $\mathcal{N} = 2$ υπερσυμμετρική εκδοχή της QED με δείκτες $''D''$, υπενθυμίζοντας ότι έχουμε να κάνουμε με τα δυϊκά πεδία. Η συνάρτηση βήτα αυτής της θεωρίας θα είναι επομένως:

$$\beta_D = \frac{dg_D(\mu)}{d\ln\mu} = \frac{g_D^3(\mu)}{8\pi^2} \tag{457}$$

όπου σε αντίθεση με την ημικλασική περίπτωση κοντά στο $u = \infty$, δεν έχουμε ασυμπτωτική ελευθερία. Στην περιοχή κοντά στο $u = 1$ έχουμε $\mu \sim a_D \cong 0$ και μιας και η θεωρία είναι αβελιανή $\theta_D = 0$, έτσι η μιγαδική σταθερά σύζευξης γράφεται:

$$\tau_D(a_D) = \frac{4\pi i}{g_D^2(a_D)} \tag{458}$$

Από αυτές, έχουμε:

$$a_D \frac{d\tau_D(a_D)}{da_D} = -\frac{i}{\pi} \tag{459}$$

μετασχηματισμούς (superconformal transformations) στο όριο του υπέρυθρου, το οποίο δεν είναι συνεπές με τη θεωρία.

$$\Rightarrow \tau_D(a_D) = -\frac{i}{\pi}\ln\frac{a_D}{\Lambda} \quad , \text{για } u \approx 1 \tag{460}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω, μέσω της $\tau_D = -da/da_D$, παίρνουμε:

$$a \approx a_0 + \frac{i}{\pi} a_D \ln\frac{a_D}{\Lambda} \tag{461}$$

με a_0 μη μηδενική σταθερά που θα προσδιοριστεί στη συνέχεια. Επίσης, η a_D θα πρέπει τοπικά να είναι καλή συντεταγμένη και έτσι μπορούμε στη γειτονιά του $u = 1$ να την αναπτύξουμε ώς:

$$a_D \approx c_0\,(u-1) \tag{462}$$

όπου c_0 ακόμα μια σταθερά προς υπολογισμό. Τώρα εάν κάνουμε μια κλειστή διαδρομή γύρω από το σημείο $u = 1$, το οποίο αντιστοιχεί σε $u-1 \mapsto e^{2\pi i}(u-1)$, οι συντεταγμένες αλλάζουν ώς:

$$\begin{aligned} a_D(u) &\mapsto e^{2\pi i} a_D(u) = a_D(u) \\ a(u) &\mapsto a_0 + \frac{i}{\pi}\left(\ln\frac{a_D}{\Lambda} + 2i\pi\right) = a(u) - 2a_D(u) \end{aligned} \tag{463}$$

και έτσι έχουμε τη μονοδρομία της δεύτερης singularity, στο $u = 1$:

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \mapsto_{M_1} \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_0(u-1) \\ a_0 + \frac{i}{\pi} c_0(u-1)\ln\frac{c_0(u-1)}{\Lambda} - 2c_0(u-1) \end{pmatrix} \end{aligned}} \tag{464}$$

όπου ο πίνακας της μονοδρομίας γράφεται και ώς $M_1 = ST^2S^{-1}$. Αυτή η μονοδρομία αλλάζει τη δυϊκή σταθερά σύζευξης ώς: $\tau_D \mapsto \tau_D + 2$, εξαιτίας του λογαρίθμου στη (460), ή εναλλακτικά την τ κατά:

$$\tau(u) \mapsto -\frac{1}{-\frac{1}{\tau(u)} + 2} = \frac{\tau(u)}{1 - 2\tau(u)} \tag{465}$$

Σημειώνουμε ότι αυτές οι μονοδρομίες (στα $u = \pm 1$) οι οποίες σε αντίθεση με την ημικλασική περιοχή $u = \infty$ οφείλονται σε σωμάτια που γίνονται άμαζα, θα πρέπει να αφήνουν αναλλοίωτο το άνυσμα φορτίου της αντίστοιχης κατάστασης. Έτσι, για τη singularity $u = 1$ το μονόπολο $(n_m \quad n_e) = (1 \quad 0)$ θα πρέπει να είναι αριστερό ιδιοάνυσμα του πίνακα M_1 με ιδιοτιμή μονάδα. Πράγματι,

$$(1 \quad 0)M_1 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 0) \tag{466}$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε την τελευταία μονοδρομία γύρω από τη singularity $u = -1$ με τη χρήση της σχέσης που τις συνδέει (456):

$$M_{-1} = M_1^{-1} M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{467}$$

η οποία γράφεται και ώς: $M_{-1} = ST^{-2}ST^{-2}$. Επομένως έχουμε:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \mapsto M_{-1} \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix}} \tag{468}$$

Ο πίνακας M_{-1} έχει αριστερό ιδιοάνυσμα με ιδιοτιμή ίση με τη μονάδα το εξής:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{469}$$

και επομένως η singularity στο $u = -1$ πράγματι προέρχεται από ένα δυόνιο με κβαντικούς αριθμούς $(n_m, n_e) = (1, -1)$ το οποίο γίνεται άμαζο σε αυτό το σημείο, καθώς:

$$Z = a_D - a = 0 \tag{470}$$

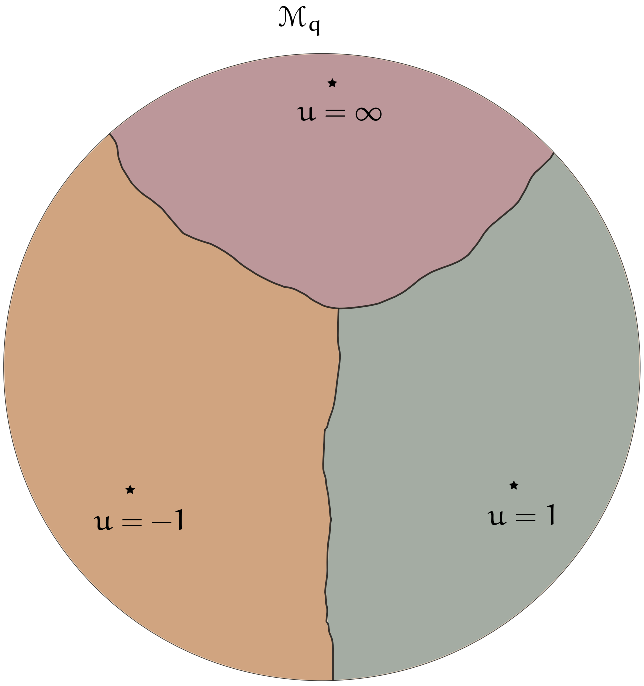
Για να βρούμε τη συμπεριφορά της τομής $(a_D \quad a)^T$ κοντά στο $u = -1$ θα χρησιμοποιήσουμε τη $\mathbb{Z}_2$ συμμετρία του χώρου ώς εξής: Έστω σημείο u το οποίο βρίσκεται σε πολύ μεγάλες τιμές του θετικού πραγματικού ημιάξονα. Τότε αυτό πέφτει στην περιοχή των μεγάλων $u \to \infty$ και έτσι οι συντεταγμένες εκεί θα έχουν τη μορφή (452) από την ασυμπτωτική ελευθερία. Τώρα κάνουμε ένα $\mathbb{Z}_2$ μετασχηματισμό σε αυτές για να πάρουμε το σημείο $-u$ στις μεγάλες τιμές του αρνητικού πραγματικού ημιάξονα:

$$\begin{aligned} &u \mapsto e^{i\pi} u = -u \\ &a \mapsto \sqrt{2ue^{i\pi}} = ia =: \tilde{a} \\ &a_D \mapsto -\frac{1}{\pi}\sqrt{2u}\left(\ln\frac{2u}{\Lambda} + 1\right) - i\sqrt{2u} = i(a_D - a) =: \tilde{a}_D \end{aligned} \tag{471}$$

Έτσι, στις μετασχηματισμένες συντεταγμένες $(\tilde{a}_D \quad \tilde{a})^T$ η singularity θα προέρχεται από το μηδενισμό της $\tilde{a}_D$. Με τα ίδια επιχειρήματα με παραπάνω λοιπόν, κοντά στο $u = -1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_D \approx \tilde{c}_0(u+1) \\ &\tilde{a} \approx \tilde{a}_0 + \frac{i}{\pi}\tilde{a}_D \ln\frac{\tilde{a}_D}{\Lambda} \quad , \text{για } u \approx -1 \end{aligned} \tag{472}$$

Έτσι, σε αυτές τις συντεταγμένες μια κλειστή διαδρομή γύρω από το $u = -1$ θα οδηγήσει ακριβώς στην ίδια συμπεριφορά με την περίπτωση



Σχήμα 2: Οι τρείς περιοχές που καλύπτουν τον $\mathcal{M}_q$

της $u = 1$: $\tilde{a}_D \mapsto \tilde{a}_D$, $\tilde{a} \mapsto \tilde{a} - 2\tilde{a}_D$, το οποίο θα δώσει την M_{-1} εάν επιστρέψουμε στις συντεταγμένες $(a_D \quad a)^T$ μέσω της (471).

Επίσης, για τη σταθερά σύζευξης έχουμε $\tilde{\tau}(\tilde{a}_D) \mapsto \tilde{\tau}(\tilde{a}_D) + 2$, το οποίο οδηγεί:

$$\tau(u) \mapsto \frac{2 - \tau(u)}{3 - 2\tau(u)} \tag{473}$$

Καταλήγουμε επομένως, ότι ο κβαντικός χώρος moduli της θεωρίας καλύπτεται από τρείς περιοχές, σε καθεμια από τις οποίες βρίσκεται μια singularity (Σχήμα 2). Σε καθεμία από αυτές τις περιοχές μπορούμε μέσω του δυϊσμού να βρούμε μια κατάλληλη περιγραφή της θεωρίας, στην οποία η σύζευξη είναι ασθενής, επιτρέποντας διαταρακτικούς υπολογισμούς.

3.7 Η Λύση των Seiberg και Witten Μέσω Ελλειπτικών Καμπύλων

Η ακριβής λύση της $\mathcal{N} = 2$ SU(2) θεωρίας Yang-Mills χαμηλών ενεργειών, η οποία δίνεται από το prepotential, ανάγεται όπως είδαμε στο πρόβλημα της εύρεσης των πλειονότιμων συναρτήσεων $a_D(u)$ και $a(u)$, ερμηνευμένες ώς τομές της $SL(2,\mathbb{Z})$ δέσμης $\mathcal{M}_q \otimes \mathcal{X}$, γνωρίζοντας τις μονοδρομίες του $\mathcal{M}_q$. Αυτό είναι γνωστό ώς το πρόβλημα Riemann-Hilbert στη μιγαδική ανάλυση και η λύση του θα είναι μοναδική[10].

Ξεκινάμε με την εξής παρατήρηση: Οι πίνακες μονοδρομίας που εμφανίζονται λόγω καταστάσεων που γίνονται άμαζες $M_{\pm 1}$ γεννάνε την υποομάδα των πινάκων της $SL(2,\mathbb{Z})$ οι οποίοι είναι ισοδύναμοι με τον μοναδιαίο πίνακα modulo 2:

$$\Gamma(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \middle| a = d = \pm 1 (mod 2), b = c = 0 (mod 2) \right\} \tag{474}$$

Αυτή είναι η ομάδα μονοδρομίας της δέσμης, η οποία αποτελεί την ομάδα συμμετρίας της κβαντικής θεωρίας.Έτσι κανείς μπορεί να περιγράψει το κβαντικό χώρο moduli ώς το χώρο πηλίκο του άνω μιγαδικού επιπέδου με την παραπάνω:

$$\mathcal{M}_q \cong \mathbb{H}_+/\Gamma(2) \tag{475}$$

όπου αυτός ο χώρος έχει τρία "τσακισμένα" σημεία τα οποία αντιστοιχούν στις τρείς singularities. Με αυτή την παρατήρηση, οι Seiberg και Witten σκέφτηκαν ότι ο παραπάνω χώρος μπορεί να προκείψει ώς ο χώρος που παραμετροποιεί μια οικογένεια ελλειπτικών καμπύλων $\{E_u\}$ ο οποίος, όχι κατά σύμπτωση, λέγεται επίσης χώρος moduli της οικογένειας $\{E_u\}$. Επομένως προτείναν ότι σε κάθε σημείο u υπάρχει μια επιφάνεια η οποία περιγράφεται ώς ο χώρος της μεταβλητής x στη παρακάτω αλγεβρική σχέση:

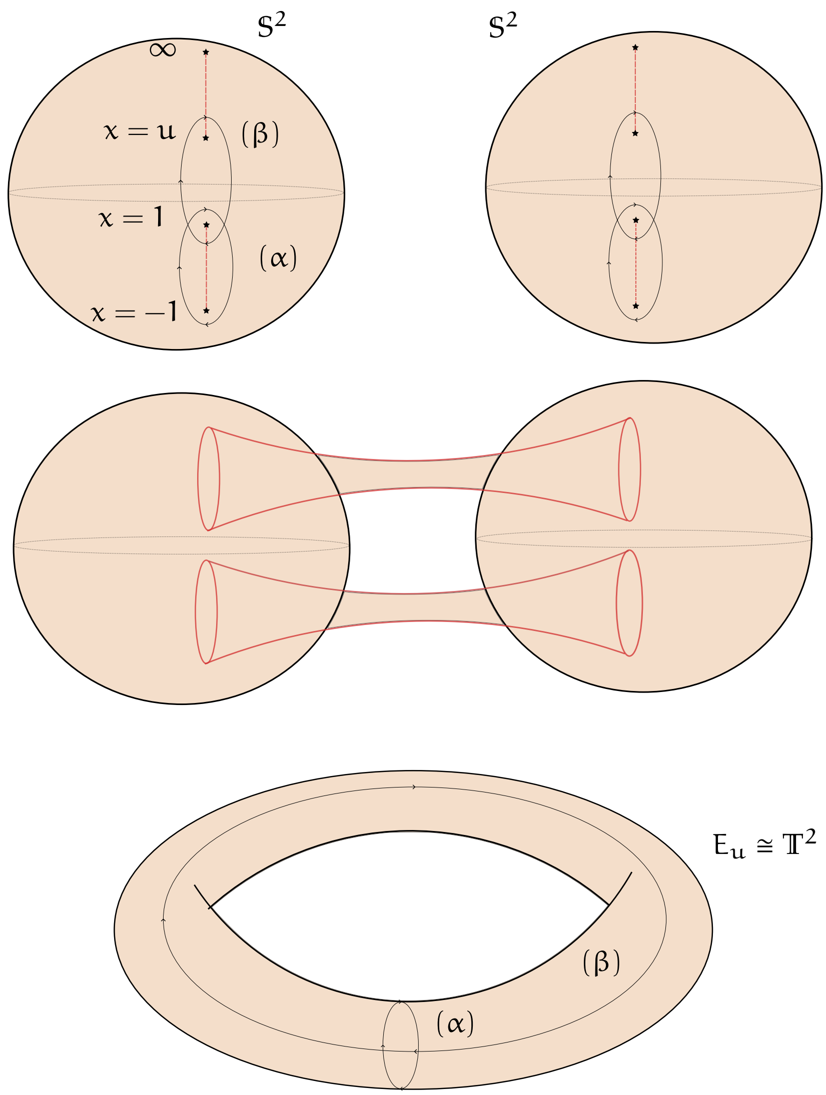
$$E_u : \quad y^2 = (x-1)(x+1)(x-u) \ , \ x, y \in \mathbb{C} \tag{476}$$

με την απαίτηση η $y(x;u)$ να είναι μονότιμη. Αρχικά, η σχέση έχει μια διακριτή $\mathbb{Z}_4$ συμμετρία η οποία δρά ώς:

$$\begin{aligned} x &\mapsto -x \\ u &\mapsto -u \\ y &\mapsto \pm i y \end{aligned} \tag{477}$$

και η δράση περιορισμένη στο u, δίνει τη $\mathbb{Z}_2$ συμμετρία που έχουμε στον $\mathcal{M}_q$. Η επιφάνεια που περιγράφει η (476) αποτελείται από δύο αντίγραφα του $x-$επιπέδου με κλαδικά σημεία στα x όπου μηδενίζεται η y και επίσης στο $x = \infty$, το οποίο θα συμπεριλάβουμε, κάνοντας κάθε αντίγραφο του $x-$επιπέδου μια σφαίρα Riemann. Τα σημεία αυτά συνδέονται με κλαδικές τομές ανα δύο: Παίρνουμε τη μια να εννώνει το $x = -1$ με το $x = 1$ και την άλλη το $x = u$ με το $x = \infty$. Εάν τώρα τα δύο αντίγραφα ενώσουν τις κλαδικές τομές τους, όπως φαίνεται στο σχήμα 3, προκύπτει μια επιφάνεια Riemann γένους ένα, δηλαδή ένας τόρος $E_u \cong \mathbb{T}^2$, πάνω στον οποίο το x παίρνει τιμές έτσι ώστε η y να ορίζεται μονότιμα.

10 έως πολλαπλασιασμό με κάποια συνάρτηση



Σχήμα 3: Κατασκευή της επιφάνειας Riemann E_u

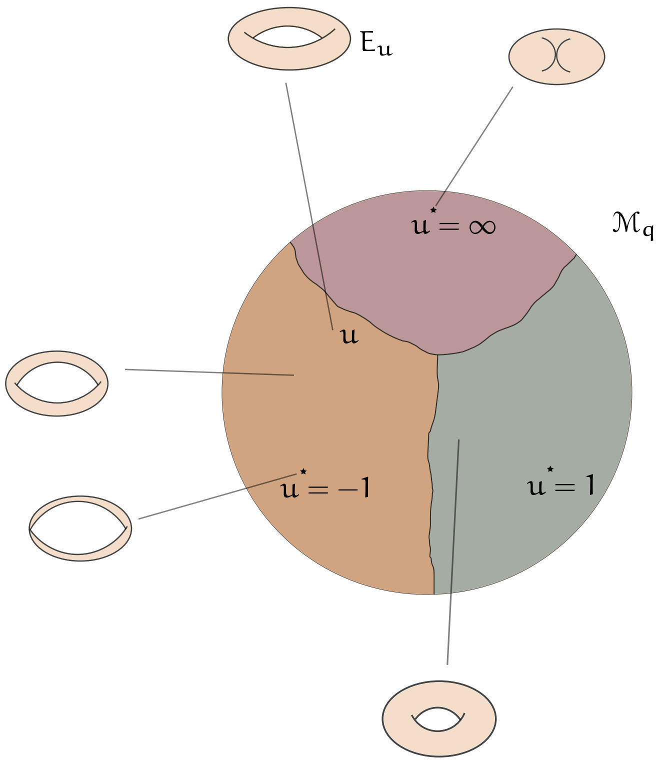
Ο τόρος έχει δύο μη τετριμμένους[11] κύκλους ($\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) τους οποίους μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να πάρουμε από τον $x-$χώρο ώς εξής: Ο ένας κύκλος (α) θα περικλύει τα σημεία $x = 1$ και $x = -1$ και την κλαδική τομή μεταξύ τους, ενώ ο άλλος (β) θα περικλύει τα $x = 1$ και $x = u$ όπως φαίνεται στο σχήμα, διασχίζοντας τις κλαδικές τους τομές. Έτσι, όταν το u πάρει μια από τις τιμές $u = +1, u = -1, u = \infty$ δύο κλαδικά σημεία θα ταυτιστούν και ένας από τους κύκλους της E_u (ή κάποιος γραμμικός συνδιασμός τους) θα μηδενιστεί. Η ιδέα από εδώ είναι η εξής: Θεωρούμε τη δέσμη $\mathcal{M}_q \otimes H_1(E_u, \mathbb{C})$ με νήμα τη πρώτη ομάδα ομολογίας της E_u $H_1(E_u, \mathbb{C})$ (first homology group) η οποία αποτελεί

11 με την έννοια ότι δεν μπορούν να συρρικνωθούν σε ένα σημείο

διδιάστατο διανυσματικό χώρο, μιας και δύο μη τετριμμένοι κύκλοι είναι βάση της. Εάν κάνουμε την ταυτοποίηση:

$$\mathcal{X} \equiv H_1(E_u, \mathbb{C}) \tag{478}$$

σύμφωνα με τα προηγούμενα, τότε οι $(a_D(u) \quad a(u))^T$ μπορούν να εισαχθούν ώς τομές της $H_1(E_u, \mathbb{C})$ με τη δομή της $SL(2, \mathbb{Z})$, καθώς αυτή δρά στους κύκλους (οι οποίοι αλλάζουν με τις τιμές του u) κάθε φορά που το u ολοκληρώνει μια κλειστή διαδρομή γύρω από κάποια singularity (και έτσι αυτοί στο x χώρο "μπλέκονται" μεταξύ τους), επάγοντας τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς στα $(a_D \quad a)$.



Σχήμα 4: Συμπεριφορά των E_u καθώς το u παίρνει τιμές στον $\mathcal{M}_q$

Μπορούμε να εκφράσουμε τα στοιχεία της ομάδας ομολογίας με τις μεταβλητές x, y εάν σε κάθε στοιχείο $\gamma \in H_1(E_u, \mathbb{C})$ αντιστοιχίσουμε ένα στοιχείο της πρώτης ομάδας συνομολογίας (first cohomology group) $H^1(E_u, \mathbb{C})$, ολοκληρώνοντας το πάνω στην καμπύλη γ:

$$\gamma \mapsto \oint_\gamma \lambda \; , \;\; \lambda \in H^1(E_u, \mathbb{C}) \tag{479}$$

όπου η λ είναι μια μερομορφική 1-μορφή πάνω στην E_u με μηδενικό υπόλοιπο, έτσι ώστε εάν η καμπύλη γ παραμορφωθεί με συνεχή τρόπο διασχίζοντας ένα πόλο της λ, η αντιστοιχία (479) να παραμείνει ώς έχει.

Μπορούμε να επιλέξουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες 1-μορφές[12] που αποτελούν βάση της $H^1(E_u, \mathbb{C})$ ως:

$$\lambda_1 = \frac{dx}{y} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{xdx}{y} \tag{480}$$

Μια ισοδύναμη κατασκευή του τόρου είναι ο χώρος πηλίκο $\mathbb{C}/\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ του μιγαδικού επιπέδου με κάποιο μιγαδικό πλέγμα $\Lambda(\omega_1, \omega_2) := \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \,|\, n_i \in \mathbb{Z}, \omega_i \in \mathbb{C}$ με $\omega_1/\omega_2 \neq \mathbb{R}$ και $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0\}$. Τα αρχικά ανύσματα βάσης ω_i λέγονται περίοδοι του τόρου και κανείς χρησιμοποιεί το λόγο τους $\tau = \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}_+$ ως τη μοναδική παράμετρο που τον χαρακτηρίζει. Εάν γράψουμε τις περιόδους του τόρου ως:

$$\omega_i = \oint_{\gamma_i} \lambda_1 \ , \ i = 1, 2 \tag{481}$$

όπου $\{\gamma_i\}_{i=1,2}$ μια κανονικοποιημένη στη μονάδα βάση της $H_1(E_u, \mathbb{C})$ $(\gamma_1 \circ \gamma_2 = 1)$, τότε η παράμετρος του τόρου είναι:

$$\tau_u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\oint_{\gamma_1} \lambda_1}{\oint_{\gamma_2} \lambda_1} \tag{482}$$

και αυτή η κατασκευή εγγυάται ότι $\mathrm{Im}\,\tau_u > 0$. Σημειώνουμε επίσης ότι μια αλλαγή της βάσης ομολογίας των γ_i κάνει την τ_u να μετασχηματίζεται κάτω από τη δράση της $SL(2, \mathbb{Z})$ (372): Εάν

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\gamma_1 + b\gamma_2 \\ c\gamma_1 + d\gamma_2 \end{pmatrix} \tag{483}$$

με $ad - bc = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, τότε έχουμε:

$$\tau_u \mapsto \frac{\oint_{a\gamma_1 + b\gamma_2} \lambda_1}{\oint_{c\gamma_1 + d\gamma_2} \lambda_1} = \frac{a\oint_{\gamma_1} \lambda_1 + b\oint_{\gamma_2} \lambda_1}{c\oint_{\gamma_1} \lambda_1 + d\oint_{\gamma_2} \lambda_1} \tag{484}$$

$$= \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2} = \frac{a\tau_u + b}{c\tau_u + d} \tag{485}$$

Συνεπώς, μπορούμε με φυσικό τρόπο να ταυτίσουμε την παράμετρο του τόρου E_u με τη μιγαδική σταθερά σύζευξης:

$$\tau(u) = \frac{da_D}{da} = \frac{\frac{da_D}{du}}{\frac{da}{du}} \tag{486}$$

εάν για κάποια 1-μορφή $\lambda_{SW} = f_1(u)\lambda_1 + f_2(u)\lambda_2 \in H^1(E_u, \mathbb{C})$ κάνουμε την ταυτοποίηση:

$$\begin{aligned} \frac{da_D}{du} &= \oint_{\gamma_1} \frac{d\lambda_{SW}}{du} \\ \frac{da}{du} &= \oint_{\gamma_2} \frac{d\lambda_{SW}}{du} \end{aligned} \tag{487}$$

12 μάλιστα η λ_1 αποτελεί το μοναδικό (έως πολλαπλασιασμό με κάποια συνάρτηση) ολόμορφο διαφορικό που ορίζεται στην E_u.

όπου για να ισχύει η συνθήκη $\mathrm{Im}\,\tau(u) > 0$ θα πρέπει[13] η παράγωγός της να εξαρτάται μόνο από το ολόμορφο διαφορικό λ_1, μιας και τότε:

$$\frac{d\lambda_{SW}}{du} = f(u)\lambda_1 \Rightarrow \frac{da_D}{du} = f(u)\omega_1 \ , \ \frac{da}{du} = f(u)\omega_2 \tag{488}$$

Η επιλογή της συνάρτησης[14] $f(u)$ γίνεται με βάση την ασυμπτωτική συμπεριφορά της τομής γύρω από τις singularities και η μοναδική επιλογή που τις αναπαράγει είναι η εξής:

$$f(u) = -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} \tag{489}$$

Καταλήγουμε επομένως,

$$\frac{d\lambda_{SW}}{du} = -\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\frac{dx}{y} = -\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x+1)(x-u)}} \tag{490}$$

$$\Rightarrow \lambda_{SW} = -\frac{\sqrt{2}dx}{4\pi\sqrt{x^2-1}}\int\frac{du}{\sqrt{x-u}} \tag{491}$$

$$\boxed{\Rightarrow \lambda_{SW} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\frac{x-u}{y}dx = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}(\lambda_2 - u\lambda_1)} \tag{492}$$

Μέσω αυτού λοιπόν, βρίσκουμε[15] τις εκφράσεις για τα a_D, a:

$$\boxed{\begin{aligned} a_D(u) &= \oint_{\gamma_1}\lambda_{SW} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_1^u\frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}} \\ a(u) &= \oint_{\gamma_2}\lambda_{SW} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^1\frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}} \tag{493}$$

Αρχικά βλέπουμε ότι η λύση είναι πράγματι singular στα σημεία $u \in \{\pm 1, \infty\}$ και μπορούμε να ελέγξουμε αν όντως αναπαράγει τη συμπεριφορά των a_D και a γύρω από τις singularities. Για την ημικλασική περιοχή γύρω από το $u = \infty$ έχουμε:

$$a(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^1 dx\frac{\sqrt{u-x}}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\sqrt{2u}}{\pi}\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{2u} \tag{494}$$

Και όσο για την a_D, με την αλλαγή μεταβλητής $u = x\xi$, αυτή γράφεται:

---

13 Το επιχείρημα λειτουργεί και αντίστροφα: Εάν έχουμε $\mathrm{Im}\,\tau(u) > 0$ παντού στο χώρο, τότε $\tau(u) = \tau_u$ και το $d\lambda_{SW}/du$ εξαρτάται μόνο από το λ_1.

14 για την οποία οι Seiberg και Witten τονισαν ότι οφείλει να είναι σταθερή, διαφορετικά θα δημιουργούσε πόλους ή μηδενικά. Εάν θεωρήσουμε ότι είναι σταθερή, η μορφή του a στην ημικλασική περιοχή ($a = \sqrt{2u}$) θα δώσει την τιμή $-\sqrt{2}/4\pi$.

15 όπου το κάθε ολοκλήρωμα έχει ένα παράγοντα 2, καθώς οι συνεισφορές που παίρνουμε καθώς η καμπύλη πηγαίνει πχ από το -1 στο 1 και από το 1 στο -1 είναι ίδιες

$$a_D(u) = \frac{\sqrt{2u}}{\pi}\int_{1/u}^{1} d\xi \frac{\sqrt{\xi-1}}{\sqrt{\xi^2-\frac{1}{u}}} \tag{495}$$

το οποίο αποκλίνει λογαριθμικά όσο $u \to \infty$ για μικρές τιμές της μεταβλητής:

$$a_D(u) \approx \frac{\sqrt{2u}}{\pi}\int_{1/u}^{1} \frac{i d\xi}{\xi} = \frac{i}{\pi}\sqrt{2u}\ln u \tag{496}$$

Επομένως η λύση συμφωνεί με τη συμπεριφορά κοντά στο $u = \infty$. Όσο για το όριο της ισχυρής σύζευξης $u \to 1$, η a_D από την (495) γράφεται:

$$\begin{aligned} a_D(u) =& \frac{\sqrt{2u}}{\pi}\int_{1/u}^{1} d\xi \frac{\sqrt{\xi-1}}{\sqrt{\left(\xi-\frac{1}{u}\right)\left(\xi+\frac{1}{u}\right)}} \\ \approx& \frac{\sqrt{u}}{\pi}\int_{1/u}^{1} d\xi \frac{\sqrt{\xi-1}}{\sqrt{\xi-\frac{1}{u}}} \end{aligned} \tag{497}$$

όπου το παραπάνω ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \int d\xi \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi-\frac{1}{u}}} =& \frac{1}{1-\xi}\sqrt{1-\frac{1}{u}}\sqrt{\frac{\xi-1}{1-\frac{1}{u}}}\left[\sqrt{1-\frac{1}{u}}(1-\xi)\sqrt{\frac{\xi-\frac{1}{u}}{1-\frac{1}{u}}}\right. \\ &\left. +\left(1-\frac{1}{u}\right)\sqrt{\xi-1}\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{\xi-1}}{\sqrt{1-\frac{1}{u}}}\right)\right] \end{aligned} \tag{498}$$

Αυτή υπολογισμένη στο $\xi = 1$ δίνει μηδέν και για $\xi = 1/u$ παίρνουμε[16] $-i\pi/2(1-1/u)$ και έτσι καταλήγουμε:

$$a_D(u) = \frac{i}{2}\left(1-\frac{1}{u}\right) \approx \frac{i}{2}(u-1) \tag{499}$$

η οποία μας δίνει τη σταθερά $c_0 = i/2$ στη (462). Υπολογίζοντας την τιμή της a στο $u = 1$ βρίσκουμε και την a_0:

$$a(u=1) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{\pi} = a_0 \tag{500}$$

όσο για τον επόμενο (γραμμικό) όρο στο ανάπτυγμα της a κοντά στο $u = 1$, μπορούμε να πάρουμε το όριο $u \to 1$ στην παράγωγό της, από την (490):

$$\frac{da}{du} = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x-u)}} \tag{501}$$

16 με χρήση της $\sinh^{-1}(i) = \ln\left(i+\sqrt{i^2+1}\right) = \ln i = i\frac{\pi}{2}$.

Σε αυτό το όριο, το ολοκλήρωμα αποκτά λογαριθμική απόκλιση ($(x-1)$ στον παρονομαστή) για τιμές του x κοντά στο $x = 1$, από τις οποίες παίρνουμε την κύρια συνεισφορά:

$$\frac{da}{du} \approx -\frac{1}{2\pi} \lim_{x \to 1} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-u)}} \tag{502}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \lim_{x \to 1} \ln\left(2x - (u+1) + 2\sqrt{x^2 - (u+1)x + u}\right) = -\frac{1}{2\pi} \ln(1-u) \tag{503}$$

Εάν η παραπάνω ολοκληρωθεί με χρήση της σταθεράς $a_0 = 4/\pi$ ώς σταθερά ολοκλήρωσης, παίρνουμε τη συμπεριφορά (461):

$$a \approx \frac{4}{\pi} - \frac{1}{2\pi}(u-1)\ln(u-1)$$

Συνεπώς, βλέπουμε ότι η λύση (493) που προήλθε από την ελλειπτική καμπύλη (476) δίνει τη σωστή συμπεριφορά των $(a_D \quad a)^T$ στις περιοχές κοντά στις singularities και έτσι μια κλειστή διαδρομή του u γύρω από αυτές ($u \mapsto e^{2\pi i}u$, $(u-1) \mapsto e^{2\pi i}(u-1)$) παράγει τις μονοδρομίες (452) (464) που βρήκαμε προηγουμένως. Από αυτές στη συνέχεια βρίσκεται και η τρίτη μονοδρομία μέσω της σχέσης (456). Από εδώ, κανείς μπορεί πλέον να υπολογίσει το prepotential σε καθεμιά από τις τρείς περιοχές του χώρου moduli ολοκληρώνοντας τη σχέση $d\mathcal{F}(a)/da = a_D(a)$, αφού πρώτα βρεί την εξάρτηση του $u = u(a)$ και την εισχωρήσει στη δυική συντεταγμένη: $a_D(a) = a_D(u(a))$, καθορίζοντας πλήρως τη θεωρία χαμηλών ενεργειών.

3.8 Λύση Μέσω Υπεργεωμετρικών Συναρτήσεων

Θα περιγράψουμε μια διαφορετική λύση στο πρόβλημα μέσω μιγαδικών διαφορικών εξισώσεων με περιοδικές συνθήκες καθώς αυτές παράγουν επίσης λύσεις με μονοδρομίες. Ας θεωρήσουμε τη μιγαδική εξίσωση Schrödinger με δυναμικό μια μερομορφική συνάρτηση με πόλους στα σημεία $\{z_j\}_{j=1}^{p}$ και στο $z = \infty \equiv z_{p+1}$:

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + V(z)\right]\psi(z) = 0 \tag{504}$$

Εάν απαιτήσουμε το δυναμικό να είναι μονότιμη συνάρτηση του z, τότε κάθε φορά που αυτό περικυκλώνει ένα πόλο ώς:

$$z \mapsto z + e^{2\pi i}(z - z_j) \tag{505}$$

η παραπάνω εξίσωση οφείλει να παραμήνει αναλλοίωτη. Αυτή η αναλυτική συνέχιση γύρω από τους πόλους δίνει στις λύσεις της (504) μια ιδιότητα που θυμίζει περιοδικές συνθήκες. Εάν θεωρήσουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $\psi_1(z), \psi_2(z)$, τότε αυτές θα μετασχηματίζονται σε ένα γραμμικό συνδιασμό τους όταν περικυκλώνεται ένας πόλος:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(z + e^{2\pi i}(z - z_j)) \\ \psi_2(z + e^{2\pi i}(z - z_j)) \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \end{pmatrix} \;, \; j = 1, \dots p+1 \tag{506}$$

όπου M_j κάποιοι 2×2 πίνακες για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$M_{p+1} = M_\infty = \prod_{j=1}^{p} M_j \tag{507}$$

ομοίως με την (456). Οι μη τετριμμένοι πίνακες μονοδρομίας προκύπτουν όταν οι πόλοι z_j είναι έως δεύτερης τάξης. Μπορούμε λοιπόν να διαλέξουμε το δυναμικό με την παρακάτω μορφή:

$$V(z) = -\frac{1}{4}\left[\frac{1-\rho_1^2}{(z+1)^2} + \frac{1-\rho_2^2}{(z-1)^2} + \frac{1-\rho_1^2-\rho_2^2+\rho_3^2}{(z+1)(z-1)}\right] \tag{508}$$

όπου $\rho_i \geqslant 0$ και απορρίψαμε τους πόλους πρώτης τάξης στα σημεία $z = \pm 1$ καθώς αυτοί αντιστοιχούν σε πόλο τρίτης τάξης του σημείου $z = \infty$. Επομένως το παραπάνω δυναμικό έχει πόλους δεύτερης τάξης στα $z \in \{\pm 1, \infty\}$ και τα υπόλοιπά του γύρω από κάθε πόλο είναι:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-1} V(z) &= -\frac{1}{4}(1-\rho_1^2) \\ \operatorname{Res}_{z=1} V(z) &= -\frac{1}{4}(1-\rho_2^2) \\ \operatorname{Res}_{z=\infty} V(z) &= -\frac{1}{4}(1-\rho_3^2) \end{aligned} \tag{509}$$

Η εξίσωση (504) με το δυναμικό (508) μπορεί να μετατραπεί στην υπεργεωμετρική εξίσωση εάν θέσουμε:

$$\psi_i(z) = (z+1)^{\frac{1-\rho_1}{2}}(z-1)^{\frac{1-\rho_2}{2}} f_i\left(\frac{z+1}{2}\right) \tag{510}$$

όπου οι f_i είναι λύσεις της:

$$\left[z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + (c - (a+b-1)z)\frac{d}{dz} - ab\right] f(z) = 0 \tag{511}$$

με τις εξής αντικαταστάσεις:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(1-\rho_1-\rho_2+\rho_3) \\ b &= \frac{1}{2}(1-\rho_1-\rho_2-\rho_3) \\ c &= 1-\rho_1 \end{aligned} \tag{512}$$

Οι λύσεις που επιδέχεται η (511) γράφονται μέσω της υπεργεωμετρικής συνάρτησης, η οποία αναπαρίσταται σε δυναμοσειρά (με ακτίνα σύγκλισης το δίσκο $|z| < 1$) και σε ολοκλήρωμα ώς[17]:

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)} \frac{z^s}{s!} \tag{513}$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} \tag{514}$$

όπου $\Gamma(z)$ η Γάμμα συνάρτηση του Euler. Συγκεκριμένα, με βάση κάποιες ταυτότητες που ικανοποιεί η F στα ορίσματά της, υπάρχουν 24 ειδικές λύσεις (particular solutions) της (511) από τις οποίες μπορούμε να επιλέξουμε τις παρακάτω δύο, καθώς αυτές έχουν την επιθυμητή συμπεριφορά στις περιοχές κοντά στα σημεία $x = \infty$ και $x = 1$:

$$\begin{aligned} f_\infty(z) &= (-z)^{-a} F\left(a, a+1-c, a+1-b; \frac{1}{z}\right) \\ f_1(z) &= (1-z)^{c-a-b} F(c-b, c-a, c+1-a-b; 1-z) \end{aligned} \tag{515}$$

Για να βρούμε τις τιμές των ρ_i (και επομένως των a, b, c), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων (όπως τη γνωρίζουμε από τη λύση των Seiberg και Witten) κοντά στις singularities η οποία ελέγχει και τη συμπεριφορά του δυναμικού, μιας και από την (504) μπορούμε να γράψουμε:

$$V(z) = \frac{\psi_i''(z)}{\psi_i(z)} \tag{516}$$

Έτσι, για $z \to \infty$ θέλουμε να επιβάλουμε τις ασυμπτωτικές συνθήκες $\sim \sqrt{z}$ και $\sim \sqrt{z} \ln z$ στις λύσεις, οι οποίες θα οδηγήσουν[18]:

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{d^2 \sqrt{z}}{dz^2} = -\frac{1}{4z^2} \tag{517}$$

Το δυναμικό (508) για $z \to \infty$ είναι:

$$V(z) \sim -\frac{1}{4} \frac{1-\rho_3^2}{z^2} \tag{518}$$

το οποίο δηλώνει ότι $\rho_3 = 0$. Με την ίδια λογική, για $z \to 1$ οι λύσεις συμπεριφέρονται ώς $\sim z-1$, $\sim (z-1)\ln(z-1)$, το δυναμικό έχει τη μορφή:

$$V(z) \sim -\frac{1}{4} \left[\frac{1-\rho_2^2}{(z-1)^2} + \frac{1-\rho_1^2-\rho_2^1}{2(z-1)} \right] \tag{519}$$

17 Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε βιβλία ανάλυσης που καλύπτουν τις ειδικές συναρτήσεις (όπως λ.χ. στο [23], κεφάλαιο XIV §14.3) για περισσότερες λεπτομέριες.
18 Το ίδιο ακριβώς δίνει και η δεύτερη λύση, $(\sqrt{z}\ln z)'' / \sqrt{z}\ln z = -1/4z^2$.

και έτσι βλέπουμε ότι ο πρώτος όρος θα πρέπει να μηδενιστεί, δίνοντας $\rho_2 = 1$. Οι λύσεις για $z \to -1$ θα έχουν ίδια συμπεριφορά και έτσι παίρνουμε επίσης $\rho_1 = 1$. Συνεπώς $a = -1/2 = b$, $c = 0$, το δυναμικό είναι:

$$V(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)(z-1)} \tag{520}$$

και οι δύο λύσεις της εξίσωσης (504):

$$\begin{aligned}
\psi_1(z) &= f_\infty\left(\frac{z+1}{2}\right) = i\sqrt{\frac{z+1}{2}}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{2}{z+1}\right)\\
\psi_2(z) &= f_1\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{1-z}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2;\frac{1-z}{2}\right)
\end{aligned} \tag{521}$$

Θα δείξουμε ότι οι συντεταγμένες a και a_D μπορούν να γραφούν από τις λύσεις ψ_i με τους παρακάτω αριθμητικούς συντελεστές:

$$\begin{aligned}
a_D(u) &= i\psi_2(u) = \frac{i}{2}(1-u)F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2;\frac{1-u}{2}\right)\\
a(u) &= -2i\psi_1(u) = \sqrt{2(u+1)}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{2}{u+1}\right)
\end{aligned} \tag{522}$$

Ξεκινώντας από την $a(u)$, κάνουμε χρήση της (514):

$$a(u) = \sqrt{2(u+1)}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 dt\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\left(1-\frac{2t}{u+1}\right)^{1/2} \tag{523}$$

και με την αλλαγή μεταβλητής $x := 2t-1$,

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{u+1}\int_{-1}^1 \frac{dx}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(x+1)(1-\frac{1}{2}(x+1))}}\sqrt{1-\frac{2}{u+1}\frac{1}{2}(x+1)} \tag{524}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{u+1}\int_{-1}^1 dx\sqrt{\frac{\frac{u-x}{u+1}}{(x+1)(1-x)}} \tag{525}$$

$$\Rightarrow a(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^1 dx\sqrt{\frac{x-u}{x^2-1}} \tag{526}$$

Όσο για την $a_D(u)$, αυτή γράφεται:

$$a_D(u) = \frac{i}{\pi}(1-u)\int_0^1 dt\sqrt{\frac{1-t}{t}}\left(1-t\frac{1-u}{2}\right)^{-1/2} \tag{527}$$

και αλλάζοντας μεταβλητή ώς $x := (u-1)t+1$ παίρνει τη μορφή:

$$= \frac{i}{\pi}(1-u)\int_1^u \frac{dx}{u-1}\sqrt{\frac{u-x}{x-1}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{2}i}{\pi}\int_1^u dx\sqrt{\frac{u-x}{(x-1)(1+x)}} \tag{528}$$

$$\Rightarrow a_D(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_1^u dx\sqrt{\frac{x-u}{x^2-1}} \tag{529}$$

Επομένως, οι δύο λύσεις συμφωνούν όπου και για τις δύο έγινε χρήση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των τομών $(a_D \quad a)^T$, η οποία είναι ενσωματωμένη στις μονοδρομίες. Τέλος, κανείς μπορεί είτε με χρήση κάποιου υπολογιστικού προγράμματος είτε με λίγη άλγεβρα (και τη βοήθεια ταυτοτήτων της υπεργεωμετρικής συνάρτησης) να γράψει τις λύσεις ώς πρός τα ελλειπτικά ολοκληρώματα, όπου αυτά ορίζονται ώς:

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right) \\ E(k) &= \frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right) \end{aligned} \tag{530}$$

Θέτοντας $k^2 = 2/(u+1)$ και $k'^2 = 1-k^2$ έτσι ώστε $(ik'/k)^2 = (1-u)/2$ (το οποίο είναι το όρισμα της a_D) αυτές παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} a(u) &= \frac{4}{\pi k}E(k) \\ a_D(u) &= \frac{4i}{\pi k^2}K\left(i\frac{k'}{k}\right) + \frac{4}{\pi i}E\left(i\frac{k'}{k}\right) \end{aligned} \tag{531}$$

Η οποία, μέσω παραγωγίσεων ώς πρός u, επιτρέπει την άμεση έκφραση της τ και επομένως της μετρικής στο χώρο **moduli** ώς προς τη μεταβλητή u:

$$\boxed{\tau(u) = \frac{da_D/du}{da/du} = i\frac{K(k')}{K(k)} = iK\left(\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\right)K^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{u+1}}\right)} \tag{532}$$

4 ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Τα φαινόμενα ισχυρής σύζευξης αποτελούν καίριο κομμάτι στην κατανόηση των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων μέσω κβαντικών πεδίων, δεν είναι όμως συχνές οι φορές στις οποίες μπορούμε να λάβουμε πληροφορίες για αυτά καθώς το ανάπτυγμα της θεωρίας διαταραχών καταρρέει λόγω της μεγάλης τιμής της σταθεράς σύζευξης. Τέτοια φαινόμενα συναντώνται στη Κβαντική Χρωμοδυναμική η οποία, σε αντίθεση με τη Κβαντική Ηλεκτροδυναμική, παρουσιάζει ισχυρή σύζευξη σε χαμηλές ενέργειες όπου τα quarks εγκλωβίζονται (confinement) προς σχηματισμό μεσονίων, αποτελώντας ένα από τα μεγαλύτερα πεδία έρευνας ακόμη και σήμερα. Λιγότερο συχνές είναι οι φορές όπου κανείς μπορεί να λύσει πλήρως ένα τέτοιο μη διαταρακτικό πρόβλημα στις θεωρίες Yang-Mills, κάτι το οποίο κατάφεραν οι Seiberg και Witten για τη περιγραφή των βαθμών ελευθερίας χαμηλών ενεργειών μιας $SU(2)$ θεωρίας βαθμίδας με $\mathcal{N} = 2$ υπερσυμμετρία. Η λύση που έδωσαν συνδιάζει την εκτεταμένη υπερσυμμετρία με τη χρήση μετασχηματισμών δυϊσμού, τα οποία είναι αρκετά ισχυρά ώστε να καθορίσουν πλήρως τη θεωρία σε χαμηλές ενέργειες, όπου το φάσμα αλλάζει, προσδιορίζοντας πλήρως το prepotential. Ενώ το μοντέλο που περιγράψαμε φέρει αρκετά χαρακτηριστικά παρόμοια με την QCD, μάλιστα το κίνητρο της κοινότητας ήταν η μελέτη αυτή να οδηγήσει στην καλύτερη κατανόησή της, ο δυϊσμός Seiberg-Witten δεν κατάφερε να προχωρήσει σημαντικά τη μελέτη της QCD. Κατάφερε παρ'όλα αυτά να αναδείξει τη δύναμη των μετασχηματισμών δυϊσμού, ένα τρόπο μελέτης που μοιάζει να επεκτείνει την ήδη υπάρχουσα έννοια της συμμετρίας στη θεωρητική φυσική, συνδέοντας διαφορετικές θεωρίες μεταξύ τους. Τέτοιοι μετασχηματισμοί αποτελούν ισχυρά εργαλεία στο χειρισμό των περισσότερων σύγχρονων θεωριών: Από τους δυϊσμούς S, T, U και τη mirror symmetry στις θεωρίες υπερχορδών, μέχρι την πιο πρόσφατη και επαναστατική ιδέα της αντιστοιχίας AdS/CFT, η οποία έχει δείξει τη δυνατότητα υπολογισμών ακόμη και σε μη υπερσυμμετρικές θεωρίες [4, 5, 13]. Τέλος, θα πρέπει να γίνει αναφορά και για το πλούσιο μαθηματικό περιεχόμενο της λύσης που παρουσίασαν οι Seiberg και Witten, καθώς αυτή συνεισέφερε σε μεγάλο βαθμό στη θεωρία των τετραδιάστατων πολλαπλοτήτων, μέσω των αναλλοίωτων Seiberg-Witten.

[1] Luis Alvarez-Gaumé and S. F. Hassan. "Introduction to S-Duality in N = 2 Supersymmetric Gauge Theories (A Pedagogical Review of the Work of Seiberg and Witten)". In: *Fortschritte der Physik/Progress of Physics* 45.3-4 (1997), pp. 159–236. DOI: 10.1002/prop.2190450302. URL: https://doi.org/10.1002%2Fprop.2190450302.

[2] M. F. Atiyah and I. M. Singer. "The index of elliptic operators on compact manifolds". In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 69.3 (1963), pp. 422 –433. DOI: bams/1183525276. URL: https://doi.org/.

[3] Paul Adrien Maurice Dirac. "Quantised Singularities in the Electromagnetic Field". In: *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 133 (1931), pp. 60–72.

[4] S.A. Frolov, R. Roiban, and A.A. Tseytlin. "Gauge-string duality for (non)supersymmetric deformations of super-Yang–Mills theory". In: *Nuclear Physics B* 731.1-2 (2005), pp. 1–44. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2005.10.004. URL: https://doi.org/10.1016%2Fj.nuclphysb.2005.10.004.

[5] Sergey Frolov. "Lax pair for strings in Lunin-Maldacena background". In: *Journal of High Energy Physics* 2005.05 (2005), pp. 069–069. DOI: 10.1088/1126-6708/2005/05/069. URL: https://doi.org/10.1088%2F1126-6708%2F2005%2F05%2F069.

[6] G.W. Gibbons and N.S. Manton. "Classical and quantum dynamics of BPS monopoles". In: *Nuclear Physics B* 274.1 (1986), pp. 183–224. ISSN: 0550-3213. DOI: https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90624-3. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321386906243.

[7] P. Goddard, J. Nuyts, and D. Olive. "Gauge theories and magnetic charge". In: *Nuclear Physics B* 125.1 (1977), pp. 1–28. ISSN: 0550-3213. DOI: https://doi.org/10.1016/0550-3213(77)90221-8. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321377902218.

[8] Yu. A. Golfand and E. P. Likhtman. "Extension of the algebra of the Poincare group generators and violation of p invariance." In: *Jetp Letters* 13 (1971), pp. 323–326.

[9] Rudolf Haag, Jan T. Łopuszański, and Martin Sohnius. "All possible generators of supersymmetries of the S-matrix". In: *Nuclear Physics B* 88.2 (1975), pp. 257–274. ISSN: 0550-3213. DOI: https://doi.org/10.1016/0550-3213(75)90279-5. URL:

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321375902795.

[10] G.'t Hooft. "Magnetic monopoles in unified gauge theories". In: *Nuclear Physics B* 79.2 (1974), pp. 276–284. ISSN: 0550-3213. DOI: https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90486-6. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374904866.

[11] B. Julia and A. Zee. "Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory". In: *Phys. Rev. D* 11 (8 1975), pp. 2227–2232. DOI: 10.1103/PhysRevD.11.2227. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.11.2227.

[12] Andrei Losev, Nikita Nekrasov, and Samson Shatashvili. *Testing Seiberg-Witten Solution*. 1998. DOI: 10.48550/ARXIV.HEP-TH/9801061. URL: https://arxiv.org/abs/hep-th/9801061.

[13] Oleg Lunin and Juan Maldacena. "Deforming field theories with U(1) × U(1) global symmetry and their gravity duals". In: *Journal of High Energy Physics* 2005.05 (2005), pp. 033–033. DOI: 10.1088/1126-6708/2005/05/033. URL: https://doi.org/10.1088%2F1126-6708%2F2005%2F05%2F033.

[14] Claus Montonen and David Ian Olive. "Magnetic monopoles as gauge particles". In: *Physics Letters B* 72 (1977), pp. 117–120.

[15] N.Seiberg. "Naturalness versus supersymmetric non-renormalization theorems". In: *Physics Letters B* 318.3 (1993), pp. 469–475. DOI: 10.1016/0370-2693(93)91541-t. URL: https://doi.org/10.1016%2F0370-2693%2893%2991541-t.

[16] Nikita A. Nekrasov. "Seiberg-Witten Prepotential From Instanton Counting". In: (2002). DOI: 10.48550/ARXIV.HEP-TH/0206161. URL: https://arxiv.org/abs/hep-th/0206161.

[17] Nikita Nekrasov and Sergey Shadchin. "ABCD of Instantons". In: *Communications in Mathematical Physics* 252.1-3 (2004), pp. 359–391. DOI: 10.1007/s00220-004-1189-1. URL: https://doi.org/10.1007%2Fs00220-004-1189-1.

[18] Hugh Osborn. "Topological charges for N = 4 supersymmetric gauge theories and monopoles of spin 1". In: *Physics Letters B* 83.3 (1979), pp. 321–326. ISSN: 0370-2693. DOI: https://doi.org/10.1016/0370-2693(79)91118-3. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269379911183.

[19] A. M. Polyakov. "Particle spectrum in quantum field theory". In: *ZhETF Pisma Redaktsiiu* 20 (Sept. 1974), p. 430.

[20] M. K. Prasad and Charles M. Sommerfield. "Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon". In: *Physical Review Letters* 35.12 (Sept. 1975). ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.35.760. URL: https://www.osti.gov/biblio/4147734.

[21] N. Seiberg and E. Witten. "Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory". In: *Nuclear Physics B* 426.1 (1994), pp. 19–52. DOI: 10.1016/0550-3213(94)90124-4. URL: https://doi.org/10.1016%2F0550-3213%2894%2990124-4.

[22] Cumrun Vafa and Edward Witten. "A strong coupling test of S-duality". In: *Nuclear Physics B* 431.1 (1994), pp. 3–77. ISSN: 0550-3213. DOI: https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90097-3. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321394900973.

[23] E.T. Whittaker and G.N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. A Course of Modern Analysis: An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions, with an Account of the Principal Transcendental Functions. Cambridge University Press, 1996. ISBN: 9780521588072. URL: https://books.google.gr/books?id=ULVdGZmi9VcC.

[24] E. Wieczorek. "Jaffe, A. / Taubes, C., Vortices and Monopoles, Structure of Static Gauge Theories, Progress in Physics 2, Boston-Basel-Stuttgart, Birkhäuser Verlag 1980, 287 S., DM 30,-. ISBN 3-7643-3025-2". In: *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik* 62.6 (Jan. 1982), pp. 279–279. DOI: 10.1002/zamm.19820620624.

[25] E. Witten. "Dyons of charge $e\vartheta/2\pi$". In: *Physics Letters B* 86.3 (1979), pp. 283–287. ISSN: 0370-2693. DOI: https://doi.org/10.1016/0370-2693(79)90838-4. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269379908384.

[26] E. Witten and D. Olive. "Supersymmetry algebras that include topological charges". In: *Physics Letters B* 78.1 (1978), pp. 97–101. ISSN: 0370-2693. DOI: https://doi.org/10.1016/0370-2693(78)90357-X. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026937890357X.

[27] Tai Tsun Wu and Chen Ning Yang. "Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields". In: *Phys. Rev. D* 12 (12 1975), pp. 3845–3857. DOI: 10.1103/PhysRevD.12.3845. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.12.3845.

[28] Daniel Zwanziger. "Exactly Soluble Nonrelativistic Model of Particles with Both Electric and Magnetic Charges". In: *Phys. Rev.* 176 (5 1968), pp. 1480–1488. DOI: 10.1103/PhysRev.176.1480. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.176.1480.

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΤΖΗΣ: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΔΥΪΣΜΟ SEIBERG-WITTEN
© Ιούλιος 2022