Στρατηγική Συμπεριφορά στα Συστήματα Εξυπηρέτησης με Ετερογενείς Πελάτες

Ιωάννης Λιούμης

Διπλωματική Διατριβή για την απόκτηση του μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών στη
Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια
Μάνου Αθανασία, Επίκουρη Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ

Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Ελλάδα
2022

Ευχαριστίες

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος προγράμματος σπουδών ‘‘Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα’’ του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια, κυρία Αθανασία Μάνου, για την πολύτιμη βοήθειά που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της διεξαγωγής της εργασίας, καθώς επίσης και για την εμπιστοσύνη και το ενδιαφέρον που μου έδειξε. Πραγματικά, δεν θα μπορούσα να τα καταφέρω χωρίς τη συνεισφορά της.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές, κύριο Αντώνη Οικονόμου και κύριο Απόστολο Μπουρνέτα, οι οποίοι ανέλαβαν να συντάξουν μαζί με την κυρία Μάνου την τριμελή επιτροπή εξέτασης. Τους ευχαριστώ, λοιπόν, για τον χρόνο που αφιέρωσαν στην εργασία μου, καθώς επισης για τις τρομερές γνώσεις που μου μετέδωσαν καθ΄όλη τη διάρκεια της φοίτησής μου, στα μαθήματα που τους παρακολούθησα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος, καθώς με το εξαιρετικό τους έργο ανεβάζουν το επίπεδο των φοιτητών και του τμήματος συνολικά.

Πρόλογος

Στην καθημερινή μας ζώη είναι αρκετά πιθανό να βρεθούμε μπροστά σε μία ουρά αναμονής. Για παράδειγμα, όταν πάμε στο φούρνο της γειτονιάς μας πολλές φορές περιμένουμε για να εξυπηρετηθούμε ή όταν διασχίζουμε μεγάλους αυτοκινητοδρόμους είναι πολύ συχνό το φαινόμενο στα διόδια να βρίσκουμε μπορστά μας άλλα αυτοκίνητα. Η θεωρία των ουρών αναμονής είναι ένας κλάδος της επιχειρησιακής έρευνας που ασχολείται με την δημιουργία τέτοιων ουρών, τους τρόπους με τους οποίους λειτουργούν και τους λόγους για τους οποίους δυσλειτουργούν.

Σαν αντικείμενο έρευνας άρχισε να αναπτύσεται πριν εκατό περίπου χρόνια από τον Agner Krarup Erlang, γνωστό μαθηματικό και μηχανικό που μελετούσε τα τηλεφωνικά δίκτυα της περιόδου. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι συνεχίζει να εφαρμόζεται ακόμη και σήμερα στην βελτίωση της αποδοτικότητας της τηλεφωνικής εξυπηρέτησης πελατών, καθώς και στον σχεδιασμό διαφόρων εργοστασίων, γραφείων και νοσοκμείων την στελέχωσή τους και τον εφοδιασμό τους με τον πιο αποτελεσματικό τρόπο.

Από την άλλη πλευρά, τα παιχνίδια υπάρχουν ως αναπόσπαστο κομμάτι του ανθρώπινου πολιτισμού για χιλιάδες χρόνια με ένα από το Σένετ να χρονολογείται ότι παιζόταν ακόμη και 5,000 χρόνια πριν. Δεν είναι προκαλεί, λοιπόν, έκπληξη το γεγονός ότι αρκετοί μαθηματικοί ανά τους αιώνες ασχολήθηκαν με την μελέτη παιχνιδιών και την εφαρμογή μαθηματικών θεωριών πάνω σε αυτά. Χαρακτηριστικά, το 17ο αιώνα ο Cardano και ο Pascal έχουν ασχοληθεί με διάφορα παιχνίδια τύχης και τη δομή τους, ο Daniel Bernoulli ασχολήθηκε το 18ο με το ρίσκο και την χρησιμότητα, ενώ αρχές του 20ου αιώνα ο Zermello εφάρμωσε θεωρία συνόλων στο σκάκι αποδεικνύοντας ότι είτε θα υπάρχει ένας νικητής, είτε θα καταλήξουμε σε ισοπαλία. Βέβαια, η θεωρία παιγνίων θεμελιώθηκε δέκα χρόνια αργότερα από τον von Neumann και τότε έγινε φανερή η αξία της τόσο στα μαθηματικά, όσο και στον κλάδο της οικονομίας.

Θα έλεγε κανείς ότι είναι φυσικό επόμενο το ''πάντρεμα'' αυτών των δύο θεωριών και η εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων στην ανθρώπινη συμπεριφορά. Η εν λόγω διπλωματική εργασία κάνει μία εισαγωγή σε βασικές έννοιες της θεωρίας ουρών αναμονής και της θεωρίας παιγνίων και συνδυάζει αυτές τις δύο θεωρίες με σκοπό να προσδιορίσει την στρατηγική συμπεριφορά των πελατών, σε κάποια συστήματα εξυπηρέτησης. Δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη μελέτη της επίδρασης της ετερογένειας των πελατών στη στρατηγική συμπεριφοράς τους, στην κοινωνική οφέλεια και στο όφελος του διαχειριστή.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές έννοιες από την Θεωρία Παιγνίων

Αρχικά θεωρούμε ένα μη συνεργατικό παιχνίδι n παικτών, με σύνολο παικτών $N = \{1, 2, ..., n\}$, όπου για κάθε παίκτη ορίζουμε ως A_i το σύνολο των πλάνων δράσης του. Καθαρή στρατηγική για τον παίκτη i είναι μία κίνηση από το A_i, ενώ μεικτή στρατηγική είναι μία κατανομή πιθανότητας στο A_i.

Ορίζουμε ως S_i το σύνολο των μεικτών στρατηγικών του i, και ως προφίλ στρατηγικών το διάνυσμα $\underline{s}$, όπου $\underline{s} = (s_1, s_2, ..., s_n), s_i \in S_i$. Επίσης, σε κάθε παίκτη i αντιστοιχεί μία συνάρτηση πληρωμής $F_i(\underline{s})$. Ακόμη για το $\underline{s}$ χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό $\underline{s} = (s_i, \underline{s}_{-i})$,όπου το $\underline{s}_{-i}$ περιέχει όλες τις στρατηγικές στο $\underline{s}$ εκτός της s_i.

Η συνάρτηση πληρωμής είναι γραμμική ως προς το s_i, δηλαδή
αν $s_i = \begin{cases} s_{i,1} \text{ με πιθ. } a \\ s_{i,2} \text{ με πιθ. } 1-a \end{cases}$, τότε $F_i(s_i, \underline{s}_{-i}) = aF(s_{i,1}, \underline{s}_{-i}) + (1-a)F(s_{i,2}, \underline{s}_{-i})$.

Σε αυτό το σημείο δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 1.1.1.

- *Μία στρατηγική $s_i^1 \in S_i$* ***κυριαρχεί ασθενώς*** *της $s_i^2 \in S_i$ αν και μόνο αν για κάθε $\underline{s}_{-i}$ ισχύει $F_i(s_i^1, \underline{s}_{-i}) \geq F_i(s_i^2, \underline{s}_{-i})$ και επίσης για ένα $\underline{s}_{-i}$ η ανισότητα είναι γνήσια.*
- *Μία στρατηγική $s_i^1 \in S_i$* ***κυριαρχεί ισχυρά*** *της $s_i^2 \in S_i$ αν και μόνο αν για κάθε $\underline{s}_{-i}$ ισχύει $F_i(s_i^1, \underline{s}_{-i}) > F_i(s_i^2, \underline{s}_{-i})$.*
- *Μία στρατηγική $s_i \in S_i$ είναι* ***ασθενώς κυρίαρχη****, όταν κυριαρχεί ασθενώς έναντι όλων των άλλων στο S_i.*
- *Μία στρατηγική $s_i^* \in S_i$ καλείται* ***βέλτιστη απάντηση*** *έναντι της $\underline{s}_{-i}$, αν και μόνο αν $F_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}) \geq F_i(s_i, \underline{s}_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i$, δηλαδή $s_i^* \in \operatorname{argmax}_{s_i \in S_i} F(s_i, \underline{s}_{-i})$.*
- *Ένα προφίλ στρατηγικών $\underline{s}^e$ καλείται* ***στρατηγικό σημείο ισορροπίας****, αν και μόνο αν για κάθε $i \in N$ η s_i^e είναι βέλτιστη απάντηση έναντι της $\underline{s}^e_{-i}$.*

1.2 Βασικά αποτελέσματα από τη Θεωρία Ουρών Αναμονής

Μια ουρά αναμονής ή ένα σύστημα εξυπηρέτησης είναι ένα μαθηματικό πρότυπο για τη μοντελοποίηση ενός πραγματικού συστήματος εισόδου - εξόδου μονάδων (πελατών) στο οποίο υπεισέρχεται τυχαιότητα. Το αντικείμενο της θεωρίας αυτής είναι η ποσοτική μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης και ο βέλτιστος σχεδιασμός τους, εντάσσεται στο ευρύτερο γνωστικό πεδίο της Επιχειρησιακής Έρευνας και ειδικότερα στο στοχαστικό μέρος της.

Τυπικά παραδείγματα ουρών αναμονής που παρουσιάζονται στις εφαρμογές είναι τα ταμεία των τραπεζών και γενικότερα διαφόρων οργανισμών, τα τηλεφωνικά κέντρα εξυπηρέτησης πελατών, το τηλεφωνικό δίκτυο, το Διαδίκτυο καθώς και τοπικά δίκτυα υπολογιστών, οι γραμμές παραγωγής μιας βιομηχανικής μονάδας, τα συγκοινωνιακά δίκτυα κλπ.

Για να περιγράψουμε ενα σύστημα εξυπηρέτησης οφείλουμε να γνωρίζουμε τα εξής:

1. Τη διαδικασία αφίξεων των πελατών (A)
2. Τους χρόνους εξυπηρέτησης των υπηρετών (B)
3. Το πλήθος των υπηρετών (c)
4. Τη χωριτηκότητα της ουράς (s)
5. Την πειθαρχία της ουράς (d)

Έτσι σύμφωνα με τον Kendall χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό για την περιγραφή ενός συστήματος εξυπηρέτησης

$$A/B/c/s(d).$$

Αξίζει να τονίσουμε ότι στις ουρές αναμονής υπάρχουν συχνά τα φαινόμενα της αποθάρρυνσης, δηλαδή όταν ένας πελάτης φθάνει, αλλά δεν μπαίνει σε αυτό επειδή βλέπει πολλούς πελάτες κατά την άφιξη του, και της υπαναχώρησης, όπου εισέρχεται στο σύστημα μεν, αλλά φεύγει πριν την εξυπηρέτηση του δε.

Συμβολίζουμε με Λ τον δυνητικό ρυθμό αφίξεων και λ τον πραγματικό ρυθμό αφίξεων. Με μ συμβολίζουμε τον ρυθμό εξυπηρέτησης και με $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ τον ρυθμό συνωστισμού.

Ορισμός 1.2.1. *Λέμε ότι μία ουρά αναμονής έχει* ***ισχυρή πειθαρχία****, όταν η επιλογή του επόμενου πελάτη προς εξυπηρέτηση δεν λαμβάνει υπόψη τις υπολοιπόμενες απαιτήσεις εξυπηρέτησης π.χ. FCFS(First Come First Served). Επίσης, λέμε ότι μία ουρά αναμονής έχει* ***διατηρητική πειθαρχία****, όταν ο υπηρέτης δεν είναι ποτέ ανενεργός στην περίπτωση που υπάρχει πελάτης στο σύστημα και κάθε πελάτης του οποίου η εξυπηρέτηση διακόπτεται συνεχίζει αργότερα από το ίδιο σημείο.*

Δύο πολύ σημαντικά αποτελέσματα για τη Θεωρία Ουρών Αναμονής είναι ο Νόμος του Little και η ιδιότητα PASTA.

Θεώρημα 1.2.1 (Νόμος του Little)**.** *Το μέσο πλήθος των πελατών στο σύστημα, το οποίο συμβολίζουμε με $E[Q]$, είναι ίσο με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων λ και του μέσου χρόνου παραμονής στο σύστημα $E[S]$, δηλαδή*

$$E[Q] = \lambda E[S].$$

Θεώρημα 1.2.2 (Ιδιότητα PASTA)**.** *Αν στο σύστημα έχουμε διαδικασία αφίξεων Poisson, τότε οι κατανομές των τυχαίων μεταβλητών που παριστάνουν το πλήθος των πελατών σε τυχαία χρονική στιγμή και το πλήθος πελατών σε στιγμή άφιξης, είναι ίσες.*

1.2.1 Αποτελέσματα στην $M/M/1$ ουρά

Εδώ παρουσιάζουμε τα βασικά αποτελέσματα για την $M/M/1$ ουρά, όπου θέωρουμε ότι οι πελάτες φτάνουν στο σύστημα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού λ, οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν εκθετική κατανομή ρυθμού μ, υπάρχει ένας υπηρέτης και άπειρη χωρητικότητα. Έστω Q ο οριακός αριθμός πελατών στο σύστημα, τότε

$$p_n = P(Q = n) = (1-\rho)\rho^n, n \geq 0.$$

Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα είναι

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} nP(Q = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n(1-\rho) = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Ακόμη αν S είναι ο οριακός χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, τότε με τη βοήθεια του Νόμου του Little (1.2.1), παίρνουμε

$$E[S] = \frac{1}{\lambda}E[Q] = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

Έστω

- I : η περίοδος αργίας του συστήματος, δηλαδή ο χρόνος από την ανάχωρηση πελάτη που αφήνει το σύστημα άδειο μέχρι την άφιξη του επόμενού πελάτη.
- Z : η περίοδος συνεχούς λειτουργίας του συστήματος, δηλαδή ο χρόνος από την άφιξη ενός πελάτη που βρίσκει το σύστημα άδειο μέχρι την αναχώρηση ενός πελάτη που αφήνει το σύστημα άδειο.
- $Y : Y = Z + I$

Η περίοδος αργίας του συστήματος είναι ο υπολειπόμενος χρόνος άφιξης την στιγμή αναχώρησης ενός πελάτη, αλλά επειδή ο χρόνος άφιξης είναι εκθετικός, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής, ισχύει ότι $I \sim Exp(\lambda)$ και συνεπώς $E[I] = \dfrac{1}{\lambda}$. Επίσης, η πιθανότητα κενού συστήματος ισούται με το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι κενό, άρα

$$p_0 = P(Q = 0) = \frac{E[I]}{E[Y]} \Leftrightarrow 1-\rho = \frac{\frac{1}{\lambda}}{E[Y]} \Leftrightarrow E[Y] = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-\rho}.$$

Έτσι

$$E[Y] = E[Z] + E[I] \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}.$$

Ακόμη, ο μέσος χρόνος μετάβασης απο n πελάτες σε $n-1$ είναι

$$\frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

Έτσι, ο μέσος χρόνος μεταξύ άφιξης πελάτη και τέλους περιόδου συνεχούς λειτουργίας είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^n\frac{n+1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n + \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right] = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{1}{1-\rho}\right] = \frac{1}{\mu(1-\rho)^2}.$$

1.3 Παίγνια μεταξύ πελατών στις ουρές

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης όπου οι πελάτες παίρνουν αποφάσεις με σκοπό να μεγιστοποιήσουν την ατομική τους ωφέλεια. Οι αποφάσεις αυτές αφορούν την είσοδο ή μη στο σύστημα και λαμβάνονται συγκρίνοντας το όφελος από την εξυπηρέτηση με το κόστος λόγω αναμονής στο σύστημα. Εφόσον οι αποφάσεις ενός πελάτη επηρεάζουν την ωφέλεια των υπολοίπων πελατών, η κατάσταση αυτή μοντελοποιείται ως παίγνιο των πελατών στο σύστημα εξυπηρέτησης. Σε αυτό το σημείο αξίζει να επισημάνουμε ότι υποθέτουμε πως οι πελάτες είναι όμοιοι και ενδεχομένως άπειροι σε αρκετές περιπτώσεις. Συμβολίζουμε με S το σύνολο των κοινών στρατηγικών και με $F(a,b)$ συμβολίζουμε την συνάρτηση πληρωμής ενός πελάτη που χρησιμοποιεί τη στρατηγική a όταν όλοι οι υπόλοιποι χρησιμοποιούν την b.

Η s^e είναι *συμμετρική στρατηγική ισορροπίας* αν και μόνο αν,

$$F(s^e, s^e) \geq F(s, s^e), \text{ για κάθε } s.$$

Έστω ότι ο χώρος των στρατηγικών είναι ολικά διατεταγμένος και έστω ότι s είναι η στρατηγική που χρησιμοποιούν οι άλλοι, τότε $BR(s)$ είναι το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων έναντι της s. Διακρίνουμε τις βέλτιστες απαντήσεις στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.3.1. *1. Αν $BR(s)$ είναι αύξουσα ως προς s, τότε λέμε ότι έχουμε* ***συμπεριφορά Follow the Crowd (FTC)****.*

2. Αν $BR(s)$ είναι φθίνουσα ως προς s, τότε λέμε ότι έχουμε ***συμπεριφορά Avoid the Crowd (ATC)****.*

Επιπλέον, κάποιες χρήσιμες στρατηγικές που θα βοηθήσουν στην ανάλυση που θα ακολουθήσει είναι οι στρατηγικές κατωφλιού. Θεωρούμε ότι το πλήθος των πελατών μπορεί να είναι και άπειρο και ότι κάθε πελάτης μπορεί πριν εισέλθει να αποφασίσει μεταξύ της εισόδου στο σύστημα και της αποχώρησης από αυτό, A_1 και A_2 αντίστοιχα. Η στρατηγική που ακολουθεί είναι $S = (q_0, q_1, q_2, ...)$, όπου q_i η πιθανότητα να επιλέξει την A_1 όταν βλέπει i πελάτες στο σύστημα.

Ορισμός 1.3.2. *Ορίζουμε, λοιπόν, ως καθαρή στρατηγική κατωφλιού με κατώφλι n την*

$$S = \begin{cases} A_1, \text{ για κατάσταση} \in \{0, ..., n-1\} \\ A_2, \text{ για κατάσταση} \in \{n, n+1, ...\} \end{cases}.$$

Ορίζουμε ως μεικτή στρατηγική κατωφλιού με κατώφλι $x = n + p, \quad p \in [0,1]$ μία μίξη των καθαρών στρατηγικών κατωφλιού με κατώφλι n και $n+1$ με πιθανότητα p και $1-p$ αντίστοιχα, δηλαδή

$$S = \begin{cases} A1, \text{ για κατάσταση} \in \{0, ..., n-1\} \\ A1, \text{ για κατάσταση } n \text{ με πιθ. } p \\ A2, \text{ για κατάσταση } n \text{ με πιθ. } 1-p \\ A2, \text{ για κατάσταση} \in \{n+1, n+2, ...\} \end{cases}$$

1.4 Βασικό Μαρκοβιανό παρατηρήσιμο μοντέλο

Το μοντέλο αυτό εστιάζει στο δίλημμα μεταξύ της εισόδου ή της αποχώρησης ενός πελάτη, ο οποίος παρατηρεί το πληθος των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα πριν αποφασίσει. Θεωρούμε ότι έχουμε διαδικασία αφίξεων Poisson με ρυθμό λ, εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης $\mathrm{Exp}(\mu)$, έναν υπηρέτη, άπειρη χωρητικότητα και πειθαρχία FCFS. Επιπλέον, θεωρούμε ότι κάθε πελάτης λαμβάνει αμοιβή R μέσω της εξυπηρέτησής του, ενώ πληρώνει κόστος C ανά χρονική μονάδα παραμονής του στο σύστημα. Τέλος p θεωρούμε την τιμή που τίθεται από τον διαχειριστή του συστήματος σαν εισιτήριο (προφανώς $p < R$).

Στρατηγικές Ισορροπίας

Θεωρούμε αρχικά ότι κάθε πελάτης θέλει να μεγιστοποιήσει την ατομική του ωφέλεια. Διαπιστώνουμε ότι ένας πελάτης μπορεί να ακολουθεί τη στρατηγική $(q_0, q_1, ..., q_n, ...)$, $q_n \in [0,1], n = 0, 1, ...$, όπου το q_n εκφράζει την πιθανότητα εισόδου όταν βρίσκει n πελάτες στο σύστημα. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\underline{q} = (q_0, q_1, ..., q_n, ...)$ και έχουν ρυθμό αφίξεως $\lambda_n = \lambda q_n$, όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα. Συνεπώς, ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, δεδομένου ότι βρίσκει n πελάτες μπροστά του, δεν εξαρτάται από τη στρατηγική $\underline{q}$ των άλλων πελατών και ισούται με $\dfrac{n+1}{\mu}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε έναν πελάτη και θεωρούμε ότι ακολουθεί την στρατηγική $\underline{q}'$, όταν όλοι οι υπόλοιποι ακολουθούν την $\underline{q}$ και βλέπει n πελάτες στο σύστημα, τότε η ωφέλειά του είναι

$$U(q', q) = (1 - q'_n) \cdot 0 + q'_n(R - p - C\frac{n+1}{\mu})$$

Συνεπώς είναι φανερό ότι η βέλτιστη απάντηση q'_n του επιλέγοντος πελάτη σε οποιαδήποτε στρατηγική του άλλου είναι:

$$q'_n = \begin{cases} \{0\}, \text{ αν } R - p - C\frac{n+1}{\mu} < 0 \\ [0,1]\,, \text{ αν } R - p - C\frac{n+1}{\mu} = 0 \\ \{1\}, \text{ αν } R - p - C\frac{n+1}{\mu} > 0 \end{cases}, \text{ δηλαδή } q'_n = \begin{cases} \{0\}, \text{ αν } n > \frac{(R-p)\mu}{C} - 1 \\ [0,1]\,, \text{ αν } n = \frac{(R-p)\mu}{C} - 1 \\ \{1\}, \text{ αν } n < \frac{(R-p)\mu}{C} - 1 \end{cases}$$

οπότε βλέπουμε ότι η βέλτιστη στρατηγική είναι η στρατηγική κατωφλιού με κατώφλι $\lfloor \frac{\mu(R-p)}{C} \rfloor$, δηλαδή ο πελάτης να μπει στο σύστημα αν το πλήθος των πελατών συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου είναι το πολύ $n_e(p) = \lfloor \frac{\mu(R-p)}{C} \rfloor$. Παρατηρούμε ότι έχουμε την ίδια βέλτιστη απάντηση έναντι οποιασδήποτε στρατηγικής των άλλων, άρα αυτή είναι η κυριαρχούσα στρατηγική και επομενως και η στρατηγική ισορροπίας.

Κοινωνική Βελτιστοποίηση

Εδώ, θεωρούμε ότι υπάρχει ένας κοινωνικός σχεδιαστής ο οποίος επιθυμεί να επιλέξει την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική $\underline{q}_{soc} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$ που μεγιστοποιεί τον κοινωνικό πλούτο ανά χρονική μονάδα, ο οποίος δίνεται από την $S(\underline{q}) = \lambda^\star R - CE[Q]$, όπου $\lambda^\star$ ο πραγματικός αριθμός αφίξεων $\lambda^\star = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n$ (όπου λ_n ο ρυθμός άφιξης του n-οστού πελάτη όπως πριν) και $E[Q]$ το μέσο πλήθος πελατών, δηλαδή $E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} nP(Q=n) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$. Η p_n είναι στάσιμη κατανομή του πλήθους των πελατών

$$p_n = B\rho^n q_0 q_1 \cdots q_{n-1}, \quad n \geq 0, \text{ και } B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n q_0 q_1 \cdots q_{n-1} \right)^{-1}.$$

Εμείς θα επικεντρωθούμε στην ειδικότερη περίπτωση, όπου ο κοινωνικός σχεδιασμός επιβάλει τιμή εξυπηρέτησης p για όλους τους πελάτες, ώστε αυτοί να υιθετήσουν τη στρατηγική κατωφλιού $n = \lfloor \frac{\mu(R-p)}{C} \rfloor$ και το σύστημα έχει συμπεριφορά μίας M/M/1/n ουράς. Είναι φανερό ότι $q_0 = q_1 = ... = q_{n-1} = 1, \quad q_n = q_{n+1} = ... = 0$, οπότε για $\rho \neq 1$ η στάσιμη κατανομή είναι $p_k = \dfrac{(1-\rho)\rho^k}{1-\rho^{n+1}}, 0 \leq k \leq n$, και ο πραγματικός ρυθμός εισόδου είναι

$$\lambda^\star = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda p_k = \lambda(1-p_n) = \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}\lambda.$$

$$\begin{aligned} E[Q] &= \sum_{k=0}^{n} k p_k = \sum_{k=0}^{n} k \frac{(1-\rho)\rho^k}{1-\rho^{n+1}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} k\rho^k = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \frac{\rho-(n+1)\rho^{n+1}+n\rho^{n+2}}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}. \end{aligned}$$

Έτσι ο κοινωνική ωφέλεια, συναρτήσει του κατωφλιού n, γίνεται:

$$S_o(n) = \lambda R \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} - C\left[\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}\right].$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} S_o(n) - S_o(n-1) &= \lambda R \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} - \lambda R \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho^n} + C\frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}} - C\frac{n\rho^n}{1-\rho^n} \\ &= \frac{\lambda R(1-\rho)^2\rho^{n-1}}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)} + \frac{C((n+1)\rho - \rho^{n+1} - n)\rho^n}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)}. \end{aligned}$$

Για $\rho < 1$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} S_o(n) - S_o(n-1) \geq 0 &\Leftrightarrow \\ \lambda R(1-\rho)^2 &\geq Cp(n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho) \Leftrightarrow \\ \frac{R\mu}{C} &\geq \frac{n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho}{(1-\rho)^2}. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{(1-\rho)^2}\left(n(1-\rho)-\rho(1-\rho^n)\right) \\ &= \frac{1}{1-\rho}\left(n - \rho\sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\right) = \frac{1}{1-\rho}\left(n - \sum_{k=1}^{n}\rho^k\right) = \frac{1}{1-\rho}\sum_{k=1}^{n}(1-\rho^k). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι αύξουσα ως προς n και συνεπώς υπάρχει μοναδικο n_{soc} τέτοιο ώστε

$$g(n) \leq \frac{R\mu}{C} \text{ για } n \leq n_{soc}$$

και

$$g(n) > \frac{R\mu}{C} \text{ για } n >_{soc}$$

Δηλαδή

$$S_o(n) - S_o(n-1) \geq 0 \text{ για } n \leq n_{soc}$$
$$\text{και}$$
$$S_o(n) - S_o(n-1) \leq 0 \text{ για } n > n_{soc}.$$

Καταλήξαμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι η $S_o(n)$ είναι μονοκόρυφη με μέγιστο στην n_{soc}. Άρα ο κοινωνικός διαχειριστής βρίσκει το κοινωνικό βέλτιστο κατώφλι n_{soc} ως $n_{soc} = \max\{n : g(n) \leq \frac{R\mu}{C}\}$ και το επάγει θέτοντας p_{soc} τέτοιο ώστε $n_{soc} = \lfloor \frac{\mu(R-p_{soc})}{C} \rfloor$, δήλαδή

$$p_{soc} \in \left(R - \frac{C(n_{soc}+1)}{\mu}, R - \frac{Cn_{soc}}{\mu} \right].$$

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο.

Πρόταση 1.4.1. *Για το κοινωνικά βέλτιστο κατώφλι n_{soc} και το κατώφλι της μέγιστης στρατηγικής με εισιτήριο 0 $n_e(0)$ ισχύει ότι*

$$n_{soc} \leq n_e(0).$$

Απόδειξη. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} g(n) - n &= \frac{1}{1-\rho}\sum_{k=1}^{n}(1-\rho^k) - \frac{1}{1-\rho}n(1-\rho) = \frac{1}{1-\rho}\sum_{k=1}^{n}(1-\rho^k-1+\rho) \\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\sum_{k=1}^{n}(1-\rho^{k-1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Άρα, για $n = n_{soc}$ παίρνουμε $g(n_{soc}) \geq n_{soc}$. □

Συνεπώς,

$$n_{soc} \leq \frac{R\mu}{C} \Rightarrow n_{soc} \leq \lfloor \frac{R\mu}{C} \rfloor = n_e(0).$$

Αυτό μας δείχνει ότι η κοινωνική βελτιστοποίηση απαιτεί να μπουν λιγότεροι πελάτες από αυτούς που εισέρχονται αν τους αφήσουμε ελεύθερους να μπαίνουν υπολογίζοντας μόνο το ατομικό συμφέρον τους.

Τιμολόγηση

Ένα ακόμη πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι η βελτιστοποίηση του κέρδους ενός μονοπωλίου, το οποίο θέλει να επιλέξει την τιμή p_m, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος ανά χρονική μονάδα. Έστω, λοιπόν, ότι το μονοπώλιο θέτει τιμή p, τότε οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ισορροπίας κατωφλιού $n_e(p)$, και έτσι το κέρδος γίνεται

$$\lambda \frac{1-\rho^{n_e(p)}}{1-\rho^{n_e(p)+1}} p.$$

Ψάχνουμε να βρούμε το κατώφλι n_m που βελτιστοποιεί το κέρδος. Έτσι για να επιτευχθεί κατώφλι n θα πρέπει να έρθει τιμή p τέτοια ώστε $\lfloor \frac{R-p}{C}\mu \rfloor = n$ και p να είναι η μέγιστη δυνατή. Άρα

$$p = R - \frac{nC}{\mu}.$$

Έτσι, το κέρδος γίνεται

$$Z_o(n) = \lambda \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}\big(R - \frac{nC}{\mu}\big) = \lambda \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \left(\frac{v_e - n}{v_e}\right), \text{ όπου } v_e = \frac{R\mu}{C}.$$

Εδώ παρατηρούμε ότι $Z_o(n), 0$ για $n > n_e(0)$. Οπότε είναι βέβαιο ότι $n_m \leq n_e(0)$. Έχουμε

$$\frac{Z_o(n)}{Z_o(n-1)} = \frac{(1-\rho^n)^2(v_e-n)}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^{n-1})(v_e-n+1)}.$$

Για $\rho < 1$ έχουμε το εξής:

$$\begin{aligned}
\frac{Z_o(n)}{Z_o(n-1)} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{(1-\rho^n)(v_e-n)}{1-\rho^{n+1}} \geq \frac{(1-\rho^{n-1})(v_e-n+1)}{1-\rho^n} \\
&\Leftrightarrow \frac{(1-\rho^n)^2 - (1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)}(v_e-n) \geq \frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho^n} \\
&\Leftrightarrow \frac{\rho^{n-1}(1-\rho)^2}{1-\rho^{n+1}}(v_e-n) \geq 1-\rho^{n-1} \\
&\Leftrightarrow v_e - n \geq \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{R\mu}{C} \geq n + \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2} = h(n).
\end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι η $h(n)$ είναι αύξουσα ως προς n και οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μοναδικό n_m, τέτοιο ώστε $h(n) \leq \frac{R\mu}{C}$ για $n \leq n_m$ και $h(n) > \frac{R\mu}{C}$ για $n > n_m$. Οπότε η $Z_o(n)$ είναι μονοκόρυφη με μέγιστο στην n_m. Τέλος, αποδεικνύεται ότι $n_m \leq n_{soc} \leq n_e(0)$, το οποίο μας λέει ότι για να βελτιστοποιήσει το κέρδος του ένα μονοπώλιο πρέπει να μπουν ακόμα λιγότεροι πελάτες στο σύστημα σε σχέση με αυτούς που μπαίνουν όταν είναι κοινωνικά βέλτιστο.

1.5 Βασικό Μαρκοβιανό μη παρατηρήσιμο μοντέλο

Σε αυτό το μοντέλο ο πελάτης έχει το δίλημμα της εισόδου ή της αποχώτησης, αυτήν την φορά όμως χωρίς να δει πόσοι πελάτες βρίσκονται στο σύστημα και πρέπει να αποφασίσει χωρίς αυτή την πληροφορία. Έχουμε ακριβώς τις ίδιες υποθέσεις όπως και στο παρατηρήσιμο μοντέλο και όπως και πριν μας ενδιαφέρει να βρούμε στρατηγικές ισορροπίας, να δούμε πότε το σύστημα είναι κοινωνικά βέλτιστο και επίσης πότε μεγιστοποιείται το κέρδος ενός μονοπωλίου.

Στρατηγικές Ισορροπίας

Οι στρατηγικές κάθε πελάτη είναι η είσοδος με πιθανότητα $q, q \in [0,1]$, όπου το $q = 0$ είναι η αποχώρηση και το $q = 1$ η είσοδος. Έστω, λοιπόν, ότι οι πελάτες ακολουθουν τη στρατηγική q. Τότε το σύστημα συμπεριφέρεται ως μία $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λq και έτσι ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα είναι:

$$E[S] = \frac{1}{\mu - \lambda q}$$

Έστω ότι επιλέγουμε έναν πελάτη που ακολουθεί τη στρατηγική q', όταν όλοι οι υπόλοιποι ακολουθούν την q, τότε η ωφέλεια του είναι:

$$U(q', q) = (1 - q') \cdot 0 + q'(R - p - C\frac{1}{\mu - \lambda q})$$

Η συνάρτηση $U(q', q)$ είναι γραμμική ως προς το q', οπότε το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων έναντι της q, $BR(q)$ είναι:

$$BR(q) = \begin{cases} \{0\}, \text{ αν } R - p - C\dfrac{1}{\mu - \lambda q} < 0 \\ [0,1], \text{ αν } R - p - C\dfrac{1}{\mu - \lambda q} = 0 \\ \{1\}, \text{ αν } R - p - C\dfrac{1}{\mu - \lambda q} > 0 \end{cases}$$

ή

$$BR(q) = \begin{cases} \{0\}, \text{ αν } q > \bar{q}_e \\ [0,1], \text{ αν } q = \bar{q}_e \\ \{1\}, \text{ αν } q < \bar{q}_e \end{cases}, \quad \bar{q}_e = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R - p}\right).$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις στρατηγικές ισορροπίας:

- Η $q_e = 0$ είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $0 \in BR(0) \Leftrightarrow R - p \leq \frac{C}{\mu}$
- Η $q_e \in (0, 1)$ είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $q_e \in BR(q_e) \Leftrightarrow q_e = \bar{q}_e \Leftrightarrow q_e = \frac{1}{\lambda}(\mu - \frac{C}{\mu - \lambda})$
- Η $q_e = 1$ ελιναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $1 \in BR(1) \Leftrightarrow 1 \geq \bar{q}_e \Leftrightarrow R - p \geq \frac{C}{\mu - \lambda}$

Συνεπώς η στρατηγική ισορροπίας είναι μοναδική και είναι

$$q_e = \begin{cases} 0 & , R - p \leq \dfrac{C}{\mu} \\ \dfrac{1}{\lambda}\left(\mu - \dfrac{C}{R - p}\right), & R - p \in \left(\dfrac{C}{\mu}, \dfrac{C}{\mu - \lambda}\right) \\ 1 & , R - p \geq \dfrac{C}{\mu - \lambda} \end{cases}.$$

Κοινωνική Βελτιστοποίηση

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι υπάρχει ένας κοινωνικός σχεδιαστής ο οποίος, θέλει να επιλέξει την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική q_{soc}, η οποία μεγιστοποιεί τον πλούτο ανά χρονική μονάδα. Η συνάρτηση του κοινωνικού πλούτου κάτω από μία στρατηγική q είναι:

$$S(q) = \lambda q\left(R - p - \frac{C}{\mu - \lambda q}\right) + \lambda q p = \lambda\left(R - \frac{C}{\mu - \lambda q}\right)q.$$

Έχουμε

$$\frac{d}{dq}S(q) = \lambda\left(R - \frac{C}{\mu - \lambda q}\right) - \lambda^2 q \frac{C}{(\mu - \lambda q)^2} = \lambda\left(R - \frac{C\mu}{(\mu - \lambda q)^2}\right),$$
$$\frac{d^2}{dq^2}S(q) = \frac{-2C\mu\lambda^2}{(\mu - \lambda q)^3}.$$

Παρατηρούμε ότι η $S(q)$ είναι κοίλη, για $q \in \left[0, \min(1, \frac{\mu}{\lambda})\right]$ (δηλαδή $\frac{d^2}{dq^2}S(q) < 0$). Έτσι το μέγιστο βρίσκεται λύνοντας την

$$\frac{d}{dq}S(q_{soc}) = 0 \Leftrightarrow R - \frac{C\mu}{(\mu - \lambda q_{soc})^2} = 0 \Leftrightarrow q_{soc} = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R}}\right)$$

αν $q_{soc} \in [0, 1]$, αλλιώς το μέγιστο είναι το 1.

Συνεπώς, η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι μοναδική και είναι

$$q_{soc} = \begin{cases} 0 & , R \leq \dfrac{C}{\mu} \\ \dfrac{1}{\lambda}\left(\mu - \sqrt{\dfrac{C\mu}{R}}\right) & , \dfrac{C}{\mu} < R < \dfrac{C\mu}{(\mu - \lambda)^2} \\ 1 & , R > \dfrac{C\mu}{(\mu - \lambda)^2} \end{cases}.$$

Παρατήρηση. *Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $p = 0$, τότε $q_e(0) \geq q_{soc}$. Αυτό το αποτέλεσμα σημαίνει ότι αν το συστημα είναι ελεύθερο οι πελάτες το χρησιμοποιούν περισσότερο, κοιτώντας το ατομικό τους συμφέρον, σε σχέση με όταν αυτό είναι κοινωνικά βέλτιστο.*

Τιμολόγηση

Έπειτα ένα μονοπώλιο θέλει να επιλέξει τιμή p_n, ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος του ανά χρονική μονάδα. Έστω, λοιπόν, ότι θέτει μία τιμή p, τότε οι πελάτες υιοθετούν την αντίστοιχη στρατηγική ισορροπίας:

$$q_e = \begin{cases} 0 & , R - p \leq \dfrac{C}{\mu} \\ \dfrac{1}{\lambda}\left(\mu - \dfrac{C}{R - p}\right) & , R - p \in \left(\dfrac{C}{\mu}, \dfrac{C}{\mu - \lambda}\right) \\ 1 & , R - p \geq \dfrac{C}{\mu - \lambda} \end{cases}.$$

Έτσι, το κέρδος γίνεται $\lambda q p = \lambda q(R - \frac{C}{\mu - \lambda q})$, για $q \in [0, 1]$ και βελτιστοποιείται ακριβώς όπως στην κοινωνική βελτιστοποίηση. Εδώ οι αντικειμενικές συναρτήσεις της κοινωνίας και του μονοπώλιο συμπίπτουν, επειδή, λόγω της ομοιογένειας των πελατών, ο διαχειριστής δεν αφήνει θετικό περιθώριο κέρδους στους πελάτες. Οπότε όλος ο κοινωνικός πλούτος πάει στο μονοπώλιο. Η τιμή p_m που μεγιστοποιεί το κέρδος του μονοπωλίου είναι:

$$p_m = R - \frac{C}{\mu - \lambda p_{soc}}$$

Παρατήρηση. *Παρατηρούμε ότι είναι φθίνουσα ως προς λ, και αυτό σημαίνει κατά κάποιον τρόπο ότι η αύξηση στην τιμή λ επάγει μείωση στην τιμή p_m. Αυτό δείχνει κάτι αντιδιαισθητικό, αλλά μπορεί να δικαιολογηθεί αφού η αύξηση στην ζήτηση επάγει μείωση στην ποσότητα του αγαθού, λόγω του μεγαλύτερου χρόνου αναμονής, και άρα μείωση στην τιμή.*

1.6 Περιεχόμενο Διατριβής

Έπειτα από την εισαγωγή στο βασικό Μαρκοβιανό παρατηρήσιμο και μη μοντέλο, θα προχωρήσουμε στην ανάλυση τριών πιο εξειδικευμένων μοντέλων. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε την M/M/1 ουρά με τυχαίες αμοιβές στο πέρας τη εξυπηρέτησης, την M/M/1 ουρά με ομογενείς αφικνούμενους πελάτες, καθώς και την M/M/1 ουρά με ετερογενείς αφικνούμενους πελάτες. Σε αυτά τα συστήματα επιχειρούμε να προσδιορήσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας και την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική, τόσο στο παρατηρήσιμο όσο και στο μη παρατηρήσιμο μοντέλο.

Κεφάλαιο 2

Στρατηγική συμπεριφορά πελατών σε M/M/1 ουρά με τυχαίες αμοιβές

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση θα θεωρήσουμε ότι οι πελάτες προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν την ατομική ωφέλεια και θα βρούμε τις στρατηγικές ισορροπίας. Στην δεύτερη περίπτωση θεωρούμε ότι υπάρχει ένας κοινωνικός σχεδιαστής ο οποίος θέλει να βελτιστοποιήσει συλλογικά το σύστημα και θα βρούμε τις κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές.

Στο πρώτο μέρος της ενότητας, θα μελετήσουμε το μη παρατηρήσιμο M/M/1 σύστημα και στο δεύτερο μέρος το παρατηρήσιμο σύστημα, όταν οι αμοιβές που θα εισπράξουν οι πελάτες που μπαίνουν στο σύστημα ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο $[a, b]$.

Θεωρούμε ότι έχουμε διαδικασία αφίξεων Poisson ρυθμού λ, κάθε πελάτης γνωρίζει την αμοιβή του πριν εισέλθει, οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν εκθετική κατανομή ρυθμού μ. Οι αμοιβές των διαδοχικών πελατών που λαμβάνουν εξυπηρέτηση είναι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες ομοιόμορφα κατανεμημένες τ.μ. $R_1, R_2, \dots$ και το κόστος αναμονής είναι h ανά χρονική μονάδα αναμονής στο σύστημα. Επίσης, οι πελάτες που εισέρχονται στο πληρώνουν εισητήριο p. Το μοντέλο αυτό μελετήθηκε από τον Larsen [2].

2.1 Μη παρατηρήσιμο μοντέλο

Έστω ότι κάτω από κάποια στρατηγική το ποσοστό των πελατών που εισέρχονται είναι q. Οι πελάτες φθάνουν με ρυθμό λ και μπαίνουν με πιθανότητα q, άρα το σύστημα συμπεριφέρεται σαν μία $M/M/1$ ουρά με ρυθμούς αφίξεων λq.

Συμβολίζουμε με $W(q)$ τον χρόνο αναμονής στο σύστημα. Έστω Q^- το μήκος της ουράς πριν από την άφιξή ενός πελάτη που μπαίνει στο σύστημα. Τότε για $t > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(W(q) > t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(W(q) > t \mid Q^- = k) P(Q^- = k) \\ &\overset{PASTA}{=\!=\!=} \sum_{k=0}^{+\infty} P(W(q) > t \mid Q = k) P(Q = k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\xlongequal{P(W(q)>t|Q=0)=0} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_t^{+\infty} \frac{\mu^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\mu x} dx \left(1-\frac{\lambda q}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda q}{\mu}\right)^k \\
&= \int_t^{+\infty} \left(1-\frac{\lambda q}{\mu}\right) e^{-\mu x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda q x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \lambda q dx \\
&= \int_t^{+\infty} \left(1-\frac{\lambda q}{\mu}\right) \lambda q \cdot e^{-\mu x} e^{\lambda q x} dx = \lambda q \int_t^{+\infty} \left(1-\frac{\lambda q}{\mu}\right) e^{-(\mu-\lambda q)x} dx \\
&= \frac{\lambda q}{\mu} \int_t^{+\infty} (\mu-\lambda q) e^{-(\mu-\lambda q)x} dx = \frac{\lambda q}{\mu} e^{-(\mu-\lambda q)t} = \frac{\lambda q}{\mu} e^{-\mu(1-\frac{\lambda q}{\mu})t}, \text{ αν } \lambda q < \mu.
\end{aligned}
$$

Επίσης, για $\lambda q < \mu$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
w(q) = E[W(q)] &= \int_0^{+\infty} P(W(q) > t) dt = \frac{\lambda q}{\mu} \int_0^{+\infty} e^{-(\mu-\lambda q)t} dt \\
&= \frac{\lambda q}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu - \lambda q} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\frac{\lambda q}{\mu}}{1 - \frac{\lambda q}{\mu}},
\end{aligned}
$$

όπου $q \in [0,1] \cap \left[0, \frac{\mu}{\lambda}\right)$, διότι για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει

$$
\rho = \frac{\lambda q}{\mu} < 1 \Rightarrow q < \frac{\mu}{\lambda}.
$$

2.1.1 Στρατηγικές Ισορροπίας και Τιμολόγηση

Έστω πελάτης με αμοιβή $r \in [a, b]$. Αν το ποσοστό των εισερχόμενων πελατών είναι q, τότε η ωφέλεια του είναι $S(r, q) = r - p - h \cdot w(q)$.

Η βέλτιστη απάντηση, εκφρασμένη σαν πιθανότητα εισόδου, στην q είναι

$$
BR_r(q) = \begin{cases} \{0\} & \text{, αν } r - p - hw(q) < 0 \\ [0,1] & \text{, αν } r - p - hw(q) = 0 \\ \{1\} & \text{, αν } r - p - hw(q) > 0. \end{cases}
$$

Βλέπουμε ότι σύμφωνα με τη βέλτιστη απάντηση μπαίνουν αυτοί για τους οποίους ισχύει $r \geq p + hw(q)$, άρα το ποσοστό αυτών που μπαίνουν θα είναι $P(R \geq p + hw(q))$ και για να είναι η $q \in (0,1)$ στρατηγική ισορροπίας θα πρέπει $P(R \geq p + hw(q)) = q$. Επειδή $R \sim Uniform\,[a, b]$, αν θεωρήσουμε το εισιτήριο συνάρτηση του q, $p(q)$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
P\big(R \geq p(q) + hw(q)\big) = q &\Leftrightarrow \frac{b - p(q) - hw(q)}{b - a} = q \\
&\Leftrightarrow p(q) = b - q(b-a) - hw(q).
\end{aligned}
$$

Από την παραπάνω ανάλυση παίρνουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.1. *Στο μη παρατηρήσιμο μοντέλο μία στρατηγική $q \in (0,1)$ είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $p(q) = b - q(b-a) - hw(q)$.*

Η συνάρτηση που μας δίνει το κέρδος του μονοπωλίου κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας είναι

$$
G(q) = \lambda q p(q) = \lambda q\big(b - q(b-a) - hw(q)\big), \quad q \in [0,1] \cap \left[0, \frac{\mu}{\lambda}\right).
$$

Η συνάρτηση που μας δίνει την συνολική κοινωνική ωφέλεια κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας είναι

$$B(q) = \lambda \cdot E\left[\max\{R - p(q) - hw(q), 0\}\right] + q\lambda p(q), \quad q \in [0,1] \cap \left[0, \frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Θέτουμε $c = p(q) + hw(q)$ και παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} E\left[\max\{R - c, 0\}\right] &= \int_a^c 0 \cdot \frac{1}{b-a}dx + \int_c^b (x-c)\frac{1}{b-a}dx = 0 + \frac{(x-c)^2}{2(b-a)} \Big|_c^b \\ &= \frac{(b-c)^2}{2(b-a)}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το c, παίρνουμε

$$E\left[\max\{R - p - hw(q), 0\}\right] = \frac{\Big(b - \big(p(q) + hw(q)\big)\Big)^2}{2(b-a)} = \frac{q^2(b-a)}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} B(q) &= \frac{\lambda q^2(b-a)}{2} + q\lambda\big(b - q(b-a) - hw(q)\big) \\ &= \lambda q\left[\frac{q(b-a)}{2} + b - q(b-a) - hw(q)\right] \\ &= \lambda q\left[b - \frac{q(b-a)}{2} - hw(q)\right] = G(q) + \frac{\lambda q^2(b-a)}{2}. \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι η $B(q)$ εκφράζεται συναρτήσει της $G(q)$. Στην συνέχεια θα βρούμε το μέγιστο της G. Έχουμε

$$G'(q) = 2b - 2\lambda q(b-a) - \lambda hw(q) - \lambda qhw'(q).$$

Παρατηρούμε ότι $G'(0) = 2b > 0$. Επίσης,

$$G''(q) = -2\lambda(b-a) - 2\lambda hw'(q) - \lambda qhw''(q),$$

όπου

$$w'(q) = \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda q}{\mu - \lambda q}\right)\right]' = \frac{1}{\mu}\frac{\lambda(\mu - \lambda q) + \lambda^2 q}{(\mu - \lambda q)^2} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda q)^2} = \frac{\frac{\lambda}{\mu^2}}{(1 - \frac{\lambda q}{\mu})^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $w'(q) > 0, \forall q \in [0,1]$, άρα $w \nearrow$ στο $[0,1] \cap \big[0, \frac{\mu}{\lambda}\big)$ που μελετάμε και

$$w''(q) = \frac{2\lambda^2}{(\mu - \lambda q)^3} = \frac{2\lambda^2}{\mu^3} \cdot \frac{1}{\big(1 - \frac{\lambda q}{\mu}\big)^3} > 0, \quad \forall q \in [0,1] \cap \left[0, \frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Άρα, w κυρτή στο $[0,1] \cap \big[0, \frac{\mu}{\lambda}\big)$.

Διαπιστώνουμε ότι $G''(q) < 0, \forall q \in [0,1] \cap \big[0, \frac{\mu}{\lambda}\big)$, άρα η G' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1] \cap \big[0, \frac{\mu}{\lambda}\big)$ και η G είναι κοίλη στο $[0,1] \cap \big[0, \frac{\mu}{\lambda}\big)$.

Επειδή G' είναι γνησίως φθινούσα στο $[0,1] \cap \left[0, \frac{\mu}{\lambda}\right)$ και $G'(0) > 0$ το μέγιστο θα είναι η μοναδική λύση της $G'(q) = 0$ αν $G'(1) < 0$ ή το $q = 1$ αν $G'(1) \geq 0$.

Αν εργαστούμε ανάλογα για τη $B(q)$ έχουμε ότι

$$B'(q) = G'(q) + \lambda q(b-a) \quad \text{και} \quad B''(q) = G''(q) + \lambda(b-a).$$

Άρα

$$\begin{aligned} B''(q) &= -2\lambda(b-a) - 2\lambda h w'(q) - 2\lambda h q w''(q) + \lambda(b-a) \\ &= -\left[\lambda(b-a) + 2\lambda h w'(q) + \lambda h q w''(q)\right] < 0, \quad \forall q \in [0,1] \cap \left[0, \frac{\mu}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς, η B' είναι επίσης γνησίως φθίνουσα.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν το διάστημα $[a,b]$, της ομοιόμορφης κατανομής που ακολουθούν οι αμοιβές, μεταβάλλεται κάτα μία σταθερά Δ: $0 \leq \Delta \leq \dfrac{b-a}{2}$, δηλαδή τι γίνεται καθώς μεταβάλλεται η διασπορά των αμοιβών.

Για τους σκοπούς της παρακάτω ανάλυσης θεωρούμε τις εξής συναρτήσεις

- $R(q) = q(b - q(b-a))$, η οποία εκφράζει το κοινωνικό κέρδος αν δεν είχαμε καθόλου αναμονή,
- $C(q) = qhw(q)$, η οποία εκφράζει το κοινωνικό κόστος λόγω της αναμονής,
- $MR(q) = R'(q) = b - 2q(b-a)$, η οποία εκφράζει το οριακό κέρδος,
- $MC(q) = C'(q) = hw(q) + qhw'(q)$, η οποία εκφράζει το οριακό κόστος.

Επίσης είναι φανερό ότι η G και η B είναι ανάλογες του λ, άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτουμε $\lambda = 1$, και βλέπουμε ότι $G(q) = R(q) - C(q)$ καθώς επίσης ότι $G'(q) = MR(q) - MC(q)$ και άρα για το μέγιστό της q_0^* ισχύει ότι

$$G'(q_0^*) = 0 \Rightarrow MR(q_0^*) = MC(q_0^*)$$

Αν λοιπόν θέλουμε να δούμε πώς μεταβάλλεται το εισιτήριο και το κέρδος του μονοπωλίου, κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας, αφού $R \sim Uniform(a+\Delta, b-\Delta)$, έχουμε $p_\Delta(q) = b - \Delta - q(b-a-2\Delta) - hw(q)$. Άρα,

$$p_\Delta(q) = p_0(q) + \Delta(2q-1), \quad 0 \leq \Delta \leq \frac{b-a}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι για q σταθερό το $p_\Delta(q)$ είναι μία γραμμική συνάρτηση ως προς Δ, έτσι παίρνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για τις μεταβολές του εισιτηρίου καθώς αυξάνεται το Δ. Όταν $q < \frac{1}{2}$ η συνάρτηση είναι φθίνουσα ως προς Δ, άρα μειώνεται με την αύξηση του, αν $q = \frac{1}{2}$ έχουμε μία ποσότητα ανεξάρτητη του Δ και αν $q > \frac{1}{2}$ παίρνουμε μία αύξουσα ως προς Δ συνάρτηση, έτσι αυξάνεται ταυτόχρονα με το Δ.

Η συνάρτηση κέρδους ενός μονοπωλίου θα είναι

$$G_\Delta(q) = \lambda q p_\Delta(q), \quad 0 \leq \Delta \leq \frac{b-a}{2}.$$

Άρα

$$G_\Delta(q) = \lambda q p_0(q) + \lambda\Delta q(2q-1) = G_0(q) + 2\lambda\Delta q\big(q - \frac{1}{2}\big).$$

Είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned} G_\Delta(q) &< G_0(q) \quad &, \text{για } q \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ G_\Delta(q) &= G_0(q) \quad &, \text{για } q = 0 \text{ ή } q = \frac{1}{2}, \\ G_\Delta(q) &> G_0(q) \quad &, \text{για } q \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{aligned}$$

Ακόμη $G'_\Delta(q) = G'_0(q) + 4\lambda\Delta(q - \frac{1}{4})$.

Θεωρώντας ως q^*_Δ το μέγιστο της G_Δ, και q^*_0 το μέγιστο της G_0 είμαστε σε θέση να κάνουμε μία ανάλυση ευαισθησίας για το Δ. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

Θεώρημα 2.1.2. *(i) Αν $q^*_0 < \frac{1}{4}$, τότε $q^*_\Delta < q^*_0$, και $G_\Delta(q^*_\Delta) < G_0(q^*_0)$.*

(ii) Αν $q^*_0 = \frac{1}{4}$, τότε $q^*_\Delta = \frac{1}{4}$, και $G_\Delta(q^*_\Delta) < G_0(q^*_0)$.

(iii) Αν $\frac{1}{2} \leq q^*_0 < 1$, τότε $q^*_\Delta > q^*_0$, και $G_\Delta(q^*_\Delta) > G_0(q^*_0)$.

(iv) Αν $q^*_0 = 1$, τότε $q^*_\Delta = q^*_0 = 1$, και $G_\Delta(q^*_\Delta) > G_0(q^*_0)$.

(v) Αν $\frac{1}{4} < q^*_0 < \frac{1}{2}$, τότε $q^*_\Delta > q^*_0$, και επίσης αν $q^*_\Delta > \frac{1}{2}$ και

$$\int_{\frac{1}{2}}^{q^*_\Delta} (MR_\Delta(q) - MC(q))dq > \int_{q^*_0}^{\frac{1}{2}} (MC(q) - MR_0(q))dq$$

Τότε $G_\Delta(q^*_\Delta) > G_0(q^*_0)$.

Απόδειξη. Πράγματι,

(i) Αν $q^*_0 < \frac{1}{4}$, έχουμε ότι $G'_\Delta(q^*_0) = 4\lambda\Delta(q^*_0 - \frac{1}{4}) < 0$, επίσης

$$G'_\Delta(0) = \lambda(b - \Delta) \geq \lambda(b - \frac{b-a}{2}) \geq \lambda\frac{b+a}{2} > 0.$$

Άρα, το q^*_Δ θα βρίσκεται στο διάστημα $(0, q^*_0) \Rightarrow q^*_\Delta < q^*_0$.
Επίσης,

$$G_\Delta(q^*_\Delta) = G_0(q^*_\Delta) + 2\lambda\Delta q^*_\Delta(q^*_\Delta - \frac{1}{2}) < G_0(q^*_\Delta).$$

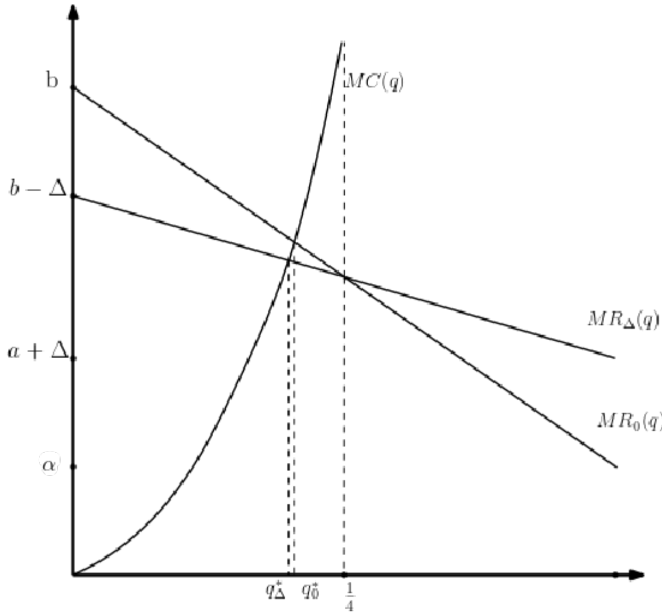
Και καθώς $G_0 \nearrow (q^*_\Delta, q^*_0)$ έχουμε ότι $G_\Delta(q^*_\Delta) < G_0(q^*_\Delta) < G_0(q^*_0)$.
Εναλλακτικά, έχουμε ότι η $MC(q)$ είναι ανεξάρτητη του Δ. Ορίζουμε

$$MR_\Delta(q) = b - \Delta - 2q\,[b - a - 2\Delta] \qquad , 0 \leq \Delta \leq \frac{b-a}{2}.$$

Έχουμε ότι

$$MR_\Delta(q) = MR_0(q) \Rightarrow b - \Delta - 2q(b-a) + 4q\Delta = b - 2q(b-a) \Rightarrow q = \frac{1}{4}.$$

Άρα, οι ευθείες MR_Δ και MR_0 τέμνονται στο $\frac{1}{4}$.



Έχουμε ότι το q_0^* βρίσκεται εκεί που τέμνονται οι MR_0 και MC, ενώ το q_Δ^* βρίσκεται εκεί που τέμνονται οι MR_Δ και MC.
Συνεπώς από το γράφημα φαίνεται ότι $q_\Delta^* < q_0^*$. Επίσης, ορίζουμε ως συνάρτηση του q το ολοκλήρωμα

$$G_\Delta(q) = \int_0^q G'_\Delta(u)du = \int_0^q (MR_\Delta(u) - MC(u))du.$$

Συνεπώς, το $G_\Delta(q_\Delta^*)$ είναι το χωρίο που περικλείεται από την $MC(q)$, την $MR_\Delta(q)$ και τον κάθετο άξονα και το $G_0(q_0^*)$ είναι το χωρίο που περικλύεται από την $MC(q)$, την $MR_0(q)$ και τον κάθετο άξονα. Έτσι είναι εμφανές από το γράφημα ότι

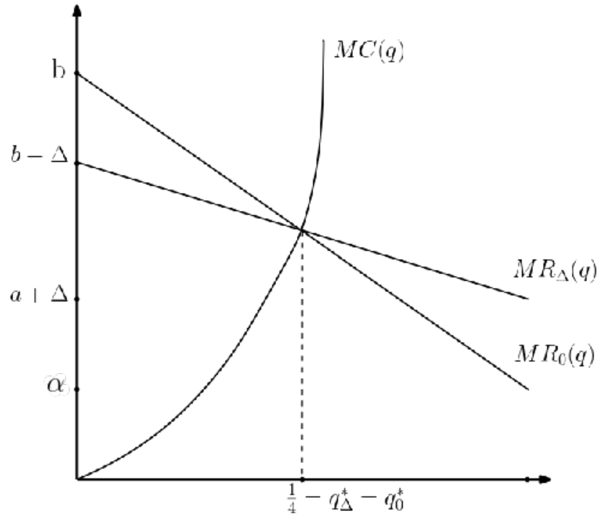
$$G_0(q_0^*) > G_\Delta(q_\Delta^*).$$

(ii) Αν $q_0^* = \frac{1}{4}$, τότε $G'_\Delta(q_0^*) = 0 + 0 = 0$ και άρα $q_\Delta^* = q_0^* = \frac{1}{4}$.
Επίσης

$$G_\Delta(q_\Delta^*) = G_0(q_\Delta^*) - \frac{\lambda\Delta}{8} < G_0(q_0^*).$$

Γραφικά φαίνεται ότι το $q_0^* = q_\Delta^* = \frac{1}{4}$ μιας και σε αυτήν την περίπτωση το q_0^* είναι εκεί που τέμνονται και οι τρεις καμπύλες M,MR_Δ και MR_0.
Επίσης, ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση φαίνεται ότι το χωρίο που περικλείεται από τις MC, MR_0 και τον κάθετο άξονα είναι μεγαλύτερο από εκείνο που περικλείεται από τις MC, MR_Δ και τον κάθετο άξονα.
Άρα

$$G_0(q_0^*) > G_\Delta(q_\Delta^*).$$

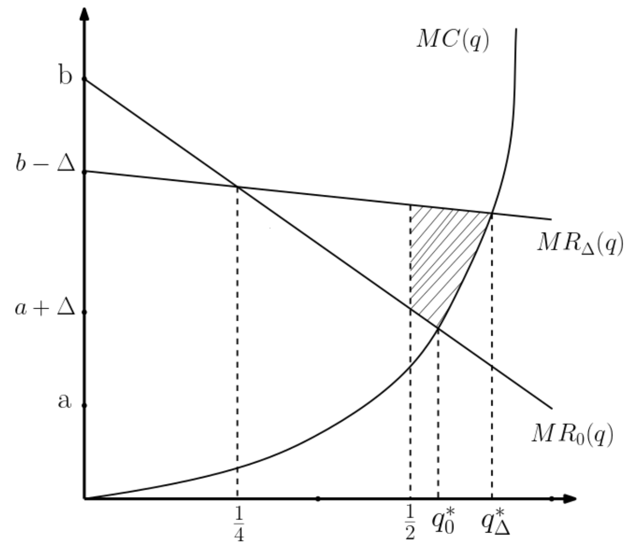


(iii) Αν $q_0^* \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, έχουμε

$$G'_\Delta(q_0^*) = 4\lambda\Delta\left(q_0^* - \frac{1}{4}\right) > 0.$$

Άρα, εφόσον η $G'_\Delta \searrow$, το μέγιστο θα πιάνεται σίγουρα μεταξύ $(q_0^*, 1]$, δηλαδή $q_\Delta^* > q_0^*$.
Επίσης, καθώς $G_\Delta \nearrow (q_0^*, q_\Delta^*]$, έχουμε

$$G_\Delta(q_\Delta^*) > G_\Delta(q_0^*) = G_0(q_0^*) + 2\lambda\Delta q_0^*(q_0^* - \frac{1}{2}) > G_0(q_0^*).$$

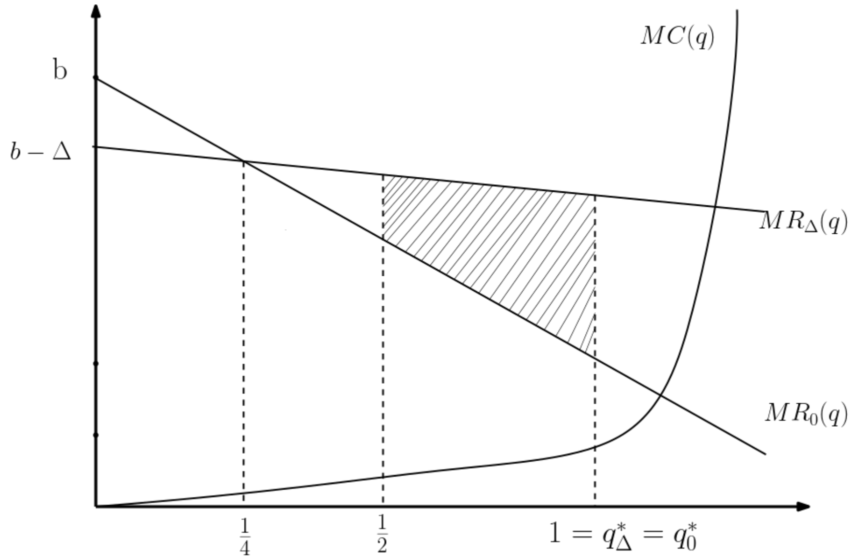


Γραφικά, σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι το τρίγωνο που περικλύεται από τις MR_Δ, MR_0 και τον κάθετο άξονα είναι ίσο με το τρίγωνο ′ που περικλείεται από τις MR_Δ, MR_0 και την ευθεία $x = \frac{1}{2}$.

Συνεπώς, μπορούμε να δουμε ξεκάθρα ότι η γραμμοσκιασμένη περιόχη είναι το κομμάτι που έχει παραπάνω η $G_\Delta(q_\Delta^*)$, σε σχέση με το $G_0(q_0^*)$.

(iv) Αν $q_0^* = 1$, τότε $G_\Delta(q_0^*) = G_\Delta(1) > 0$. Άρα, το μέγιστο πιάνεται στο 1 και επομένως, $q_\Delta^* = q_0^*$ και έτσι

$$G_\Delta(q_\Delta^*) = G_\Delta(q_0^*) + \lambda\Delta > G_\Delta(q_0^*).$$



Ανάλογα με την περίπτωση (iii), το τρίγωνο που περικλείεται από τις MR_Δ, MR_0 και τις $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ είναι ίσα. Σύνεπώς, είναι ξεκάθαρο ότι η γραμμοσκιασμένη περιοχή είναι το τμήμα που υπερτερεί η $G_\Delta(q_\Delta^*)$, της $G_0(q_0^*)$, καθώς σε αυτή την περίπτωση η $G_\Delta(q_\Delta^*)$ είναι το χωρίο που περικλύεται από τις MR_Δ, MC, $x = 0$, $x = 1$, ενώ η $G_0(q_0^*)$ είναι το χωρίο που περικλύεται από τις MR_0, MC, $x = 0$, $x = 1$.

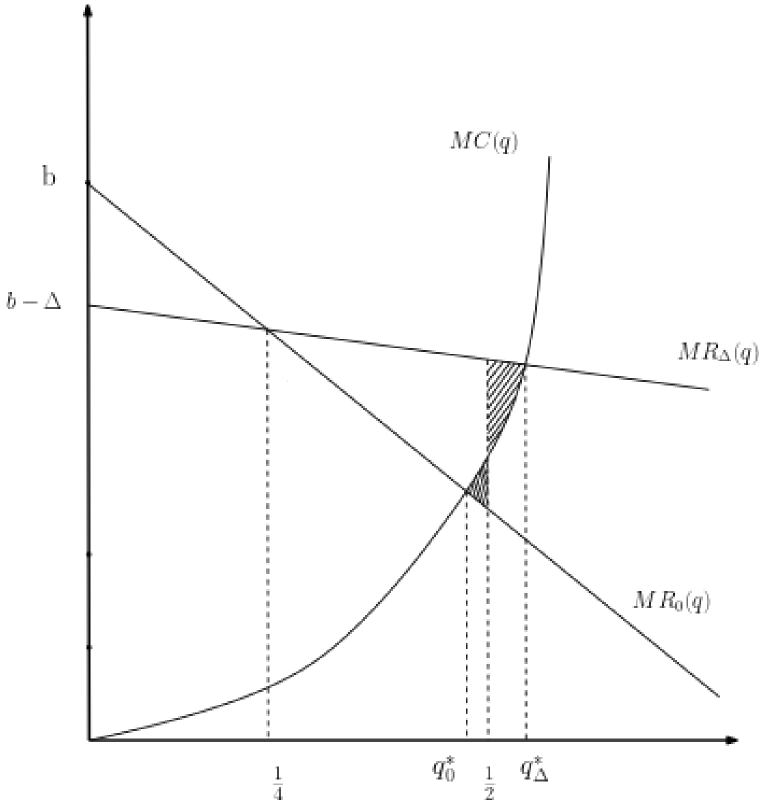
(v) Όταν $\frac{1}{4} < q_0^* < \frac{1}{2}$, δεν μπορούμε να βγάλουμε ξεκάθαρα συμπεράσματα.

Βλέπουμε στο σχήμα ότι στην ειδική περίπτωση $q_\Delta^* > \frac{1}{2}$, λόγω της ισότητας των τριγώνων που περικλύονται από τις MR_Δ, MR_0, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, το χωρίο που περικλύεται από τις MC, MR_0 και $x = \frac{1}{2}$ υπάρχει στην $G_0(q_0^*)$, ενώ δεν υπάρχει στην $G_\Delta(q_\Delta^*)$. Αντίστοιχα, το χωρίο που περικλύεται από τις MC, MR_Δ και $x = \frac{1}{2}$ υπάρχει στην $G_\Delta(q_\Delta^*)$, ενώ δεν υπάρχει στην $G_0(q_0^*)$,
Άρα, για να δούμε ποια υπερτερεί, πρέπει να συγκρίνουμε αυτά τα δύο χωρία. Έχουμε, λοιπόν, ότι $G_\Delta(q_\Delta^*) > G_0(q_0^*)$, αν

$$\int_{\frac{1}{2}}^{q_\Delta^*} \big(MR_\Delta(q) - MC(q)\big)dq > \int_{q_0^*}^{\frac{1}{2}} \big(MC(q) - MR_0(q))\big)dq.$$

□

Έπειτα από την παραπάνω ανάλυση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όσο μικραίνει το διάστημα της ομοιόμορφης κατανομής που ακολουθούν οι αμοιβές, δεν είναι



ξεκάθαρο τι γίνεται με το κέρδος του μονοπωλίου, μπορεί να αυξάνεται ή να μειώνεται ανάλογα με το που ακριβώς βρίσκεται το q_0^*. Συγκεκριμένα,

- Για αρκετά μικρά q_0^*, δηλαδή $q_0^* \leq \frac{1}{4}$, ο διαχειριστής κερδίζει περισσότερο όταν το διάστημα είναι μεγάλο.
- Για αρκετά μεγάλα q_0^*, δηλαδή $q_0^* > \frac{1}{2}$ κερδίζει περισσότρα όταν το διάστημα είναι μικρό.
- Για τις ενδιάμεσες περιπτώσεις $\frac{1}{4} < q_0^* \leq \frac{1}{2}$ χρειάζεται περισσότερη διερεύνηση.

Επίσης, αξίζει να επισημάνουμε ότι για μεγάλα κόστη αναμονής h η $MC(q)$ γίνεται πιο απότομη και μας οδηγεί στις περιπτώσεις (i) και (ii), ενώ για μικρά h οδηγούμαστε στις περιπτώσεις (iii) και (iv).

2.1.2 Βελτιστοποίηση της Κοινωνικής Ωφέλειας

Ορίζουμε

$$D(q) = b - q(b-a), \quad q \in [0,1]\,.$$

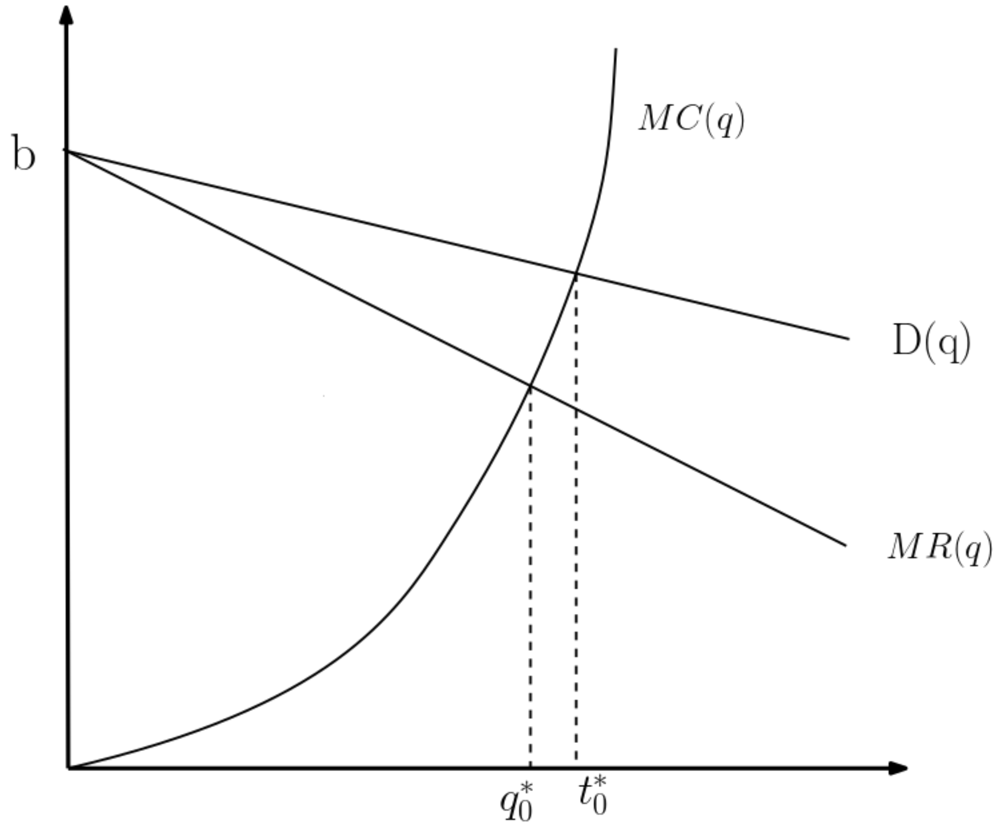
Έχουμε ότι

$$D(q) = b - q(b-a) > b - 2q(b-a) = MR(q).$$

Άρα, $D(q) > MR(q)$ για κάθε $q \in [0,1]$.
Ακόμα

$$\begin{aligned} B'(q) &= G'(q) + \lambda q(b-a) = \lambda\big(MR(q) - MC(q) + q(b-a)\big) \\ &= \lambda\big(b - 2q(b-a) + q(b-a) - MC(q)\big) \\ &= \lambda\big(b - q(b-a) - MC(q)\big) \\ &= \lambda(D(q) - MC(q)). \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε εδώ, ότι το μέγιστο της $B(q)$, όταν αυτό δεν πετυχαίνεται στο άκρο του διαστήματος, είναι εκείνο για το οποίο ισχύει $D(q) = MC(q)$. Έστω t_0^* το μεγίστο της $B(q)$. Ευκόλα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όταν το σύστημα είναι κοινωνικά βέλτιστο το χρησιμοποιούν περισσότεροι, σε σχέση με αυτούς που το χρησιμοποιούν όταν ο διαχειριστής θέτει μία τίμη με σκοπό να μεγιστοποιήσει το κέρδος του, κάτι το οποίο φαίνεται και γραφικά ($t_0^* > q_0^*$).



Εδώ είναι εμφανές ότι το t_0^* το οποίο είναι στο σημείο τομής των $D(q)$ και $MC(q)$ είναι μεγαλύτερο από το q_0^* που είναι στο σημείο τομής των $MR(q)$ και $MC(q)$. Επίσης, η συνολική κοινωνική ωφέλεια, η οποία είναι το χωρίο που περικλύεται από τις $D(q), MC(q)$ και $x = 0$, είναι μεγαλύτερη από το κέρδος του μονοπωλίου, που είναι το χωρίο που περικλύεται από τις $MR(q), MC(q)$ και $x = 0$. Επιπλέον, ορίζουμε

$$B_\Delta(q) = \lambda E\left[\max\{R_\Delta - (p_\Delta(q) + hw(q)), 0\}\right] + \lambda q p_\Delta(q), \quad 0 \le \Delta \le \frac{b-a}{2}$$

και

$$D_\Delta(q) = b - \Delta - q(b - a - 2\Delta).$$

Θέτοντας $c = p_\Delta(q) + hw(q) = b - \Delta - q(b - a - 2\Delta)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
B_\Delta(q) &= \lambda\bigg(\int_{a+\Delta}^{c} \frac{1}{b-a-2\Delta} \cdot 0dx + \int_{c}^{b-\Delta} (x-c)\frac{1}{b-a-2\Delta}dx \bigg) + \lambda q\big(p_0(q) + \Delta(2q-1)\big) \\
&= \lambda \frac{(x-c)^2}{2(b-a-2\Delta)}\bigg|_{x=c}^{b-\Delta} + \lambda q p_0(q) + \lambda q\Delta(2q-1) \\
&= \frac{\lambda(b-\Delta-c)^2}{2(b-a-2\Delta)} + \lambda q p_0(q) + \lambda q\Delta(2q-1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda\big(b-\Delta-b+\Delta+q(b-a-2\Delta)^2}{2(b-a-2\Delta)} + \lambda 1 p_0(q) + \lambda q\Delta(2q-1) \\
&= \frac{\lambda q^2(b-a-2\Delta)}{2} + \lambda q p_0(q) + \lambda q\Delta(2q-1) \\
&= \frac{\lambda q^2(b-a)}{2} + \lambda q p_0(q) - \lambda q\Delta(1-q) \\
&= B_0(q) - \lambda q\Delta(1-q) \\
&\leq B_0(q) \qquad , \text{αφού } q(1-q) \geq 0 \quad \forall q \in [0,1]\,.
\end{aligned}
$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι όσο το στήριγμα της ομοιόμορφης κατανομής που ακολουθούν οι αμοιβές μικραίνει, η κοινωνική ωφέλεια μειώνεται. Κάνοντας μία ανάλυση ευαισθησίας για το Δ οδηγούμαστε στις παρακάτω περιπτώσεις.

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω t^*_Δ το μέγιστο $B_\Delta(q)$*

(i) Αν $t^*_0 < \frac{1}{2}$, τότε $t^*_\Delta < t^*_0$.

(ii) Αν $t^*_0 > \frac{1}{2}$, τότε $t^*_\Delta > t^*_0$.

(iii) Αν $t^*_0 = \frac{1}{2}$, τότε $t^*_\Delta = t^*_0 = \frac{1}{2}$.

(iv) Αν $t^*_0 = 1$, τότε $t^*_\Delta = t^*_0 = 1$.

Απόδειξη. Πράγματι,

(i) Αν $t^*_0 < \frac{1}{2}$, τότε

$$B'_\Delta(t^*_0) = B'_0(t^*_0) - \lambda\Delta(1-2t^*_0) = 0 + 2\lambda\Delta(t^*_0 - \frac{1}{2}) < 0.$$

Επίσης $B'_\Delta(1) = \frac{\lambda(b-a)}{2} > 0$, άρα

$$t^*_\Delta \in (0, t^*_0) \Rightarrow t^*_\Delta < t^*_0.$$

(ii) Αν $t^*_0 > \frac{1}{2}$, τότε

$$B'_\Delta(t^*_0) = 0 + 2\lambda\Delta(t^*_0 - \frac{1}{2}).$$

Όμως, η B'_Δ είναι φθινουσα, αφού

$$B''_\Delta(q) = B''_0(q) + \lambda\Delta = -\left[\lambda(b-a-2\Delta) + 2\lambda h w'(q) + \lambda h q w''(q)\right] < 0, \quad \forall q \in [0,1]\,.$$

Συνεπώς, το μέγιστο θα πιάνεται σίγουρα μετά το t^*_0, άρα $t^*_\Delta > t^*_0$.

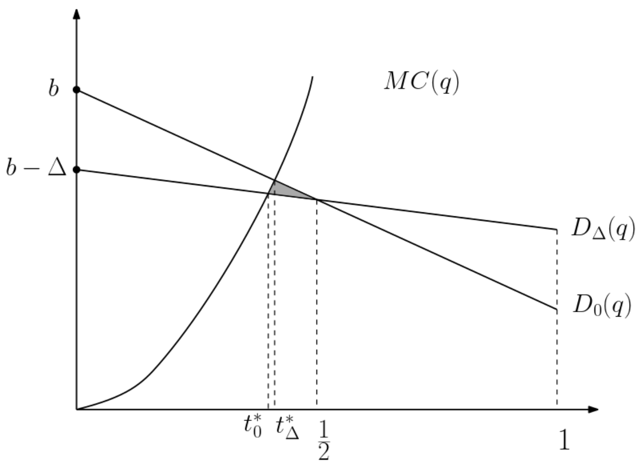
(iii) Αν $t^*_0 = \frac{1}{2}$, τότε

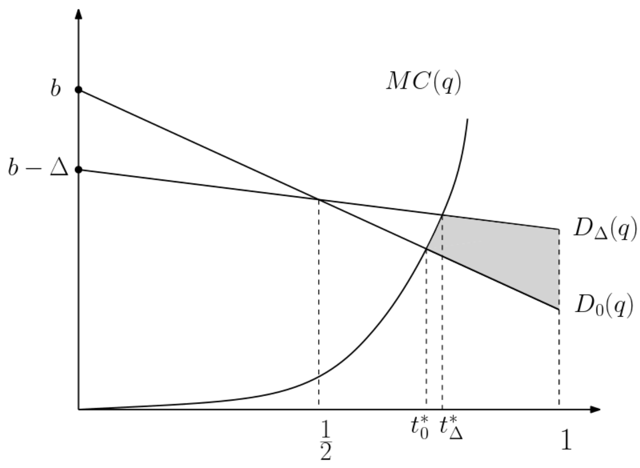
$$B'_\Delta(t^*_0) = 0 \Rightarrow t^*_\Delta = t^*_0 = \frac{1}{2}.$$

(iv) Αν $t^*_0 = 1$, τότε $B'_\Delta(t^*_0) = \lambda\Delta > 0$. Άρα, το μέγιστο πιάνεται για

$$B'_\Delta(1) = \lambda\Delta > 0 \Rightarrow t^*_\Delta = 1 = t^*_0.$$

□





Οι καμπύλες $D_\Delta(q)$ και $D_0(q)$ τέμνονται για $q = \frac{1}{2}$:

$$D_\Delta(q) = D_0(q) \Rightarrow b - \Delta - q(b - a - 2\Delta) = b - q(b - a) \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\lambda = 1$.

Το t_0^* είναι στο σημείο τομής των $MC(q)$ και $D_0(q)$. Το t_Δ^* είναι στο σημείο τομής των $MC(q)$ και $D_\Delta(q)$. Επίσης έχουμε ότι

$$B_\Delta(q) = \int_0^q B'_\Delta(u)du = \int_0^q \big(D_\Delta(u) - MC(u)\big)du.$$

Συνεπώς, το $B_\Delta(t_\Delta^*)$ είναι κάθε φορά το χωρίο που περικλείεται από τα D_Δ, MC και τον κάθετο άξονα. Αντίστοιχα το $B_0(t_0^*)$ είναι το χωρίο που περικλείεται από τις D_0, MC και $x = 0$. Φαίνεται, λοιπόν, καθάρα, στο γράφημα ότι αν $t_0^* < \frac{1}{2}$, τότε $t_\Delta^* < t_0^*$ και επίσης αν $t_0^* > \frac{1}{2}$, τότε $t_\Delta^* > t_0^*$. Επίσης, στην πρώτη περίπτωση βλέπουμε ότι το χωρίο που περικλείεται από τις D_0, MC και $x = 0$ είναι μεγαλύτερο από το χωρίο που περικλείεται από τους D_Δ, MC και $x = 0$. Άρα, $B_0(t_0^*) > B_\Delta(t_\Delta^*)$. Στην δεύτερη περίπτωση βλέπουμε ότι τα τρίγωνα που σχηματίζονται από τις D_0, D_Δ, $x = 1$ και $x = 0$ είναι ίσα. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η γραμμοσκιασμένη περιοχή, που είναι το χωρίο που περικλείεται από τις MC, D_0, D_Δ και $x = 1$, είναι το τμήμα που υπερτερεί η $B_0(t_0^*)$, έναντι της $B_\Delta(t_\Delta^*)$. Άρα, $B_0(t_0^*) > B_\Delta(t_\Delta^*)$.Συμπεραίνουμε, λοιπόν, και γραφικά ότι η κοινωνική ωφέλεια μειώνεται όσο μειώνεται το διάστημα.

2.2 Το παρατηρήσιμο μοντέλο

Σε αυτό το μοντέλο ένας αφικνούμενος πελάτης βλέπει πόσοι πελάτες είναι στο σύστημα. Λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής, οι υπολειπόμενοι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών που βλέπει μπροστά του ένας αφικνούμενος πελάτης ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέσο $\frac{1}{\mu}$, άρα το κόστος ενός πελάτη που βλέπει μπροστά του i πελάτες και εισέρχεται στο σύστημα είναι $\frac{hi}{\mu}$.

2.2.1 Στρατηγικές Ισορροπίας

Οι στρατηγικές των πελατών είναι $\underline{r} = (r_0, r_1, r_2, \ldots)$, όπου r_i το κατώφλι τέτοιο ώστε οι πελάτες με αμοιβή $R > r_i$ μπαίνουν. Έστω $q_i = P(R > r_i)$. Έστω ότι είμαστε στην κατάσταση i και ότι οι άλλοι μπαίνουν με $\underline{r}$, τότε η βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη με αμοιβή r είναι

$$BR_r(\underline{r}) = \begin{cases} 0 & \text{, αν } r < p + \frac{hi}{\mu} \\ [0,1] & \text{, αν } r = p + \frac{hi}{\mu} \\ 1 & \text{, αν } r > p + \frac{hi}{\mu}. \end{cases}$$

Συνεπώς, βλέπουμε ότι ένας πελάτης μπαίνει στο σύστημα αν ισχύει

$$r > p + \frac{hi}{\mu}.$$

Άρα, το ποσοστό αυτών που μπαίνουν μέσα είναι

$$P\bigg(R > p + \frac{hi}{\mu}\bigg).$$

Για να είναι λοιπόν η q_i πιθανότητα εισόδου ισορροπίας θα πρέπει

$$q_i = P\bigg(R > p + \frac{hi}{\mu}\bigg).$$

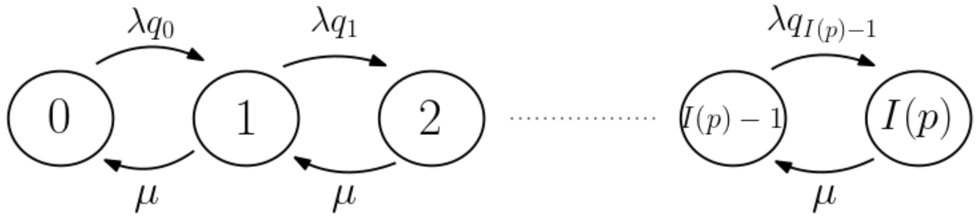
Έτσι, ο πραγματικός ρυθμός άφιξης στο σύστημα, όταν υπάρχουν i πελάτες, θα είναι $\lambda_i = \lambda q_i$. Βλέπουμε ότι τα λ_i φθίνουν ως προς i και $\lambda_i = 0$, αν

$$p + \frac{hi}{\mu} > b \Rightarrow i > (b-p)\frac{\mu}{h}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι το μέγιστο πλήθος πελατών που είναι δυνατόν να βρίσκονται στο σύστημα είναι

$$I(p) = \left\lceil \frac{\mu(b-p)}{h} \right\rceil.$$

Στη συνέχεια θα βρούμε την στάσιμη κατανομή. Έχουμε



Άρα, παίρνουμε τις εξισώσεις ισορροπίας

$$\lambda q_{i-1} p_{i-1} = \mu p_i, \quad i = 1, \ldots, I(p),$$

και άρα

$$p_i = \frac{\lambda}{\mu} q_{i-1} p_{i-1} = \bigg(\frac{\lambda}{\mu}\bigg)^i q_{i-1} q_{i-2} \cdots q_0 p_0.$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης, έχουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{I(p)} p_i = 1 \Rightarrow p_0 + p_0 \sum_{i=1}^{I(p)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i q_{i-1}q_{i-2}\cdots q_0 = 1.$$

Άρα

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{I(p)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i q_{i-1}q_{i-2}\cdots q_0}$$

και η στάσιμη κατανομή είναι

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i q_{i-1}q_{i-2}\cdots q_0}{1+\sum_{i=1}^{I(p)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i q_{i-1}q_{i-2}\cdots q_0} & ,i=1,\ldots,I(p) \\ \dfrac{1}{1+\sum_{i=1}^{I(p)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i q_{i-1}q_{i-2}\cdots q_0} & ,i=0. \end{cases}$$

2.2.2 Κέρδος Μονοπωλίου και Κοινωνική Ωφέλεια

Εάν θέλουμε τώρα να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος ενός μονοπωλίου, οφείλουμε να μεγιστοποιήσουμε την εξής αντικειμενική συνάρτηση

$$G(p) = (1-p_0)\mu p.$$

Αυτό προκύπτει αν εφαρμόσουμε τον Νόμο του Little (1.2.1) στον χώρο εξυπηρέτησης

$$E\left[Q_s\right] = \lambda^* E[X] \Rightarrow 0\cdot p_0 + 1\cdot(1-p_0) = \lambda^*\frac{1}{\mu} \Rightarrow \lambda^* = \mu(1-p_0),$$

όπου λ^* ο ρυθμός άφιξης στο χώρο εξυπηρέτησης. Άρα, $G(p) = \lambda^* p$.

Τώρα για την κοινωνική ωφέλεια έχουμε ότι αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $i \geq 1$ η κοινωνική ωφέλεια είναι

$$\begin{aligned} B_i(p) &= \lambda q_i \left(E\left[R \mid R > p + \frac{hi}{\mu}\right] - \frac{hi}{\mu}\right) = \lambda q_i \left(\frac{E\left[R\cdot 1_{\{R>p+\frac{hi}{\mu}\}}\right]}{P\left(R>p+\frac{hi}{\mu}\right)} - \frac{hi}{\mu}\right) \\ &= \lambda q_i \left(\frac{\int_a^b \frac{x}{b-a} 1_{\{R>p+\frac{hi}{\mu}\}} dx}{1-F(p+\frac{hi}{\mu})} - \frac{hi}{\mu}\right) \\ &= \lambda q_i \left(\frac{\int_{max\{a,p+\frac{hi}{\mu}\}}^b \frac{x}{b-a} dx}{\frac{b-\max\{a,p+\frac{hi}{\mu}\}}{b-a}} - \frac{hi}{\mu}\right) \\ &= \lambda q_i \left[\frac{b+\max\{a,p+\frac{hi}{\mu}\}}{2} - \frac{hi}{\mu}\right]. \end{aligned}$$

Τελικά η συνολική κοινωνική ωφέλεια είναι

$$B(p) = \lambda \sum_{i=0}^{I(p)-1} p_i q_i \left[\frac{b + \max\{a, p + \frac{hi}{\mu}\}}{2} - \frac{hi}{\mu} \right].$$

Η οποία χρησιμοποιώντας τη σχέση $\lambda p_i q_i = \mu p_{i+1}$ γράφεται

$$B(p) = \mu \sum_{i=1}^{I(p)} p_i \left(\frac{b + \max\{a, p + \frac{h(i-1)}{\mu}\}}{2} - \frac{h(i-1)}{\mu} \right).$$

2.2.3 Βελτιστοποίηση $G(p)$ και $B(p)$

Είναι φανερό ότι οι $G(p)$ και $B(p)$ είναι αρκετά περίπλοκες συναρτήσεις και για αυτό θα ασχοληθούμε με την πολύ ειδική περίπτωση, όπου το h είναι τόσο μεγάλο, ώστε να ισχύει $I(p) = 1$ για κάθε p.
Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε ότι $\max\{a, p + \frac{hi}{\mu}\} = p + \frac{hi}{\mu}$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} G(p) = (1 - p_0)\mu p = \left(1 - \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i q_{i-1} \cdots q_0} \right) \mu p = \left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{\lambda}{\mu} q_0} \right) \mu p \\ = \frac{\frac{\lambda}{\mu} P(R > p)}{1 + \frac{\lambda}{\mu} P(R > p)} \mu p \end{aligned}$$

και

$$B(p) = \mu \sum_{i=1}^{1} p_i \left(\frac{b + p + \frac{h(i-1)}{\mu}}{2} - \frac{h(i-1)}{\mu} \right) = \frac{\frac{\lambda}{\mu} P(R > p) \mu \frac{b+p}{2}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} P(R > p)}.$$

Θα βρούμε εκείνα τα p_G^* και p_B^* που μεγιστοποιούν τις $G(p)$ και $B(p)$ αντίστοιχα. Έχουμε

$$\begin{aligned} G'(p) = \left(\frac{\frac{\lambda}{\mu} \frac{b-p}{b-a} \mu p}{1 + \frac{\lambda}{\mu} \frac{b-p}{b-a}} \right)' = \left(\frac{\lambda\mu(b-p)p}{\mu(b-a) + \lambda(b-p)} \right)' \\ = \frac{(\lambda\mu b - 2\lambda\mu p)\left[\mu(b-a) + \lambda(b-p)\right] + \lambda^2\mu(b-p)p}{\left[\mu(b-a) + \lambda(b-p)\right]^2}. \end{aligned}$$

Θέλουμε $G'(p) = 0$, συνεπώς αρκεί

$$\begin{aligned} &\lambda\mu(b-2p)\left[\mu(b-a) + \lambda(b-p)\right] + \lambda^2\mu(b-p)p = 0 \\ \Rightarrow &\lambda\mu\left[\mu(b-2p)(b-a) + \lambda(b-2p)(b-p) + \lambda(b-p)p\right] = 0 \\ \Rightarrow &\lambda p^2 + \left[2\mu(a-b) - 2\lambda b\right] p + (\lambda + \mu)b^2 - ab\mu = 0. \end{aligned}$$

Το παραπάνω είναι τριώνυμο ως προς p, παίρνοντας την διακρίνουσα έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\mu^2(b-a)^2 - 8\lambda\mu(a-b)b + 4\lambda^2\mu^2 - 4\lambda^2 b^2 - 4\lambda\mu b^2 + 4\lambda ab\mu \\ &= 4\mu^2(b-a)^2 - 4\lambda\mu ab + 4\lambda\mu b^2 \\ &= 4\left(\mu^2(b-a)^2 + \lambda\mu b(b-a)\right). \end{aligned}$$

Έτσι, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
p^*_{G_{1,2}} &= \frac{2\lambda b \pm \sqrt{4\left(\mu^2(b-a)^2 + \lambda\mu b(b-a)\right)}}{2\lambda} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\mu}b + (b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 + \frac{\lambda}{\mu}b(b-a)}}{\frac{\lambda}{\mu}}.
\end{aligned}$$

Όμως ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{\mu}(b-a)b > 0 \\
\Leftrightarrow &(b-a)^2 + \frac{\lambda}{\mu}(b-a)b > (b-a)^2 \\
\Rightarrow &\sqrt{(b-a)^2 + \frac{\lambda}{\mu}(b-a)b} > b-a \\
\Leftrightarrow &(b-a) - \sqrt{(b-a)^2 + \frac{\lambda}{\mu}(b-a)b} < 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{\lambda}{\mu}b + (b-a) - \sqrt{(b-a)^2 + \frac{\lambda}{\mu}(b-a)b} < \frac{\lambda}{\mu}b \\
\Leftrightarrow &p^*_{G_2} < b.
\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
&(b-a) + \sqrt{(b-a)^2 + \frac{\lambda}{\mu}(b-a)b} > 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{\lambda}{\mu}b + (b-a) + \sqrt{(b-a)^2 + \frac{\lambda}{\mu}(b-a)b} > \frac{\lambda}{\mu}b \\
\Leftrightarrow &p^*_{G_1} > b.
\end{aligned}$$

Άρα, μελετώντας τη μονοτονία της $G(p)$ στο $[a,b]$ έχουμε

$$p^*_G = \max\left\{\frac{(b-a) + \frac{\lambda}{\mu}b - \sqrt{(b-a)^2 + \frac{\lambda}{\mu}b(b-a)}}{\frac{\lambda}{\mu}}, a\right\}.$$

Αντίστοιχα, για την $B(p)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
B'(p) &= \left(\frac{\frac{\lambda}{\mu}\frac{b-p}{b-a}\mu\frac{b+p}{2}}{1 + \frac{\lambda}{\mu}\frac{b-p}{b-a}}\right)' = \left(\frac{\lambda\mu(b^2-p^2)}{2\left(\mu(b-a) + \lambda(b-p)\right)}\right)' \\
&= \frac{-2\lambda\mu p\left(2\mu(b-a) + 2\lambda(b-p)\right) + 2\lambda^2\mu(b^2-p^2)}{4\left[\mu(b-a) + \lambda(b-p)\right]^2}.
\end{aligned}$$

Θέλουμε $B'(p) = 0$, άρα αρκεί

$$\begin{aligned}
&-4\lambda\mu^2(b-a)p - 4\lambda^2\mu p(b-p) + 2\lambda^2\mu(b^2-p^2) = 0 \\
\Rightarrow &-2\mu(b-a)p - 2\lambda p(b-p) + \lambda(b^2-p^2) = 0 \\
\Rightarrow &-2\mu(b-a)p - 2\lambda pb + 2\lambda p^2 + \lambda b^2 - \lambda p^2 = 0 \\
\Rightarrow &\lambda p^2 - 2\left(\lambda b + \mu(a-b)\right)p + \lambda b^2 = 0.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω είναι τριώνυμο ως προς p. Παίρνουμε, λοιπόν, τη διακρίνουσα:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4\left(\lambda^2 b^2 + \lambda\mu b(b-a) + \mu(b-a)^2\right) - 4\lambda^2 b^2 \\ &= 4\left(\mu^2(b-a)^2 + 2\lambda\mu b(b-a)\right).\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}p^*_{B_{1,2}} &= \frac{2\left(\lambda b + \mu(b-a)\right) \pm 2\sqrt{\mu^2(b-a)^2 + 2\lambda\mu b(b-a)}}{2\lambda} \\ &= \frac{\frac{\lambda}{\mu}b + (b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 + 2\frac{\lambda}{\mu}b(b-a)}}{\frac{\lambda}{\mu}}.\end{aligned}$$

Εύκολα αποδεικνύεται, όπως και πριν, ότι $p^*_{B_1} > b$ και $p^*_{B_2} < b$. Συνεπώς, μελετώντας την μονοτονία της $B(p)$ στο $[a,b]$ παίρνουμε

$$p^*_B = \max\left\{\frac{\frac{\lambda}{\mu}b + (b-a) - \sqrt{(b-a)^2 + 2\frac{\lambda}{\mu}b(b-a)}}{\frac{\lambda}{\mu}}, a\right\}.$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}& 2\frac{\lambda}{\mu}b(b-a) > \frac{\lambda}{\mu}b(b-a) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(b-a)^2 + 2\frac{\lambda}{\mu}b(b-a)} > \sqrt{(b-a)^2 + \frac{\lambda}{\mu}b(b-a)} \\ \Leftrightarrow & \frac{\frac{\lambda}{\mu}b + (b-a) - \sqrt{(b-a)^2 + \frac{\lambda}{\mu}b(b-a)}}{\frac{\lambda}{\mu}} > \frac{\frac{\lambda}{\mu}b + (b-a) - \sqrt{(b-a)^2 + 2\frac{\lambda}{\mu}b(b-a)}}{\frac{\lambda}{\mu}} \\ \Leftrightarrow & p^*_{G_2} > p^*_{B_2}\end{aligned}$$

και άρα

$$p^*_G = \max\{a, p^*_{G_2}\} \geq \max\{a, p^*_{B_2}\} = p^*_B.$$

Οδηγούμαστε, δηλαδή, στο αποτέλεσμα ότι η τιμή εισόδου που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια είναι μικρότερη σε σχέση με την τιμή εισόδου που μεγιστοποιεί το κέρδος του διαχειριστή.

Κεφάλαιο 3

Στρατηγική συμπεριφορά ομογενών πελατών σε M/M/1 ουρά με διακοπές του υπηρέτη

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε το παρατηρήσιμο και το μη παρατηρήσιμο M/M/1 σύστημα, όταν ο υπηρέτης διακόπτει τη λειτουργία του κάθε φορά που το σύστημα αδειάζει και επανέρχεται σε λειτουργία αφού πρώτα συγκεντρωθούν N πελάτες στον χώρο αναμονής. Το μοντέλο αυτό μελετήθηκε από τους Guo P. και Hassin R. σε άρθρο που δημοσίευσαν το 2011. Στην μελέτη τους αυτή στηρίχθηκαν σε προηγούμενα αποτελέσματα του Hassin, αλλά και σε παλαιότερα άρθρα. Μεταξύ των συγγραφέων διακρίνουμε τους Veeraraghavan, Debo, Johari και Kumar, που ασχολήθηκαν με το μήκος της ουράς σε σχέση με την συμφόρηση και την αποδοτικότητα του υπηρέτη, και τη μελέτη ενός δικτύου χρηστών, καθώς και τους Μπουρνέτα, Οικονόμου και Κάντα οι οποίοι ασχολήθηκαν με τη στρατηγική συμπεριφορά πελατών σε σύστημα όπου ο υπηρέτης κάνει διακοπές.
Θεωρούμε ότι έχουμε διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν εκθετική κατανομή ρυθμού μ. Σε κάθε περίπτωση θα βρούμε τις στρατηγικές ισορροπίας και θα εξετάσουμε τις βέλτιστες στρατηγικές ώστε να μεγιστοποιείται η συνολική κοινωνική ωφέλεια.

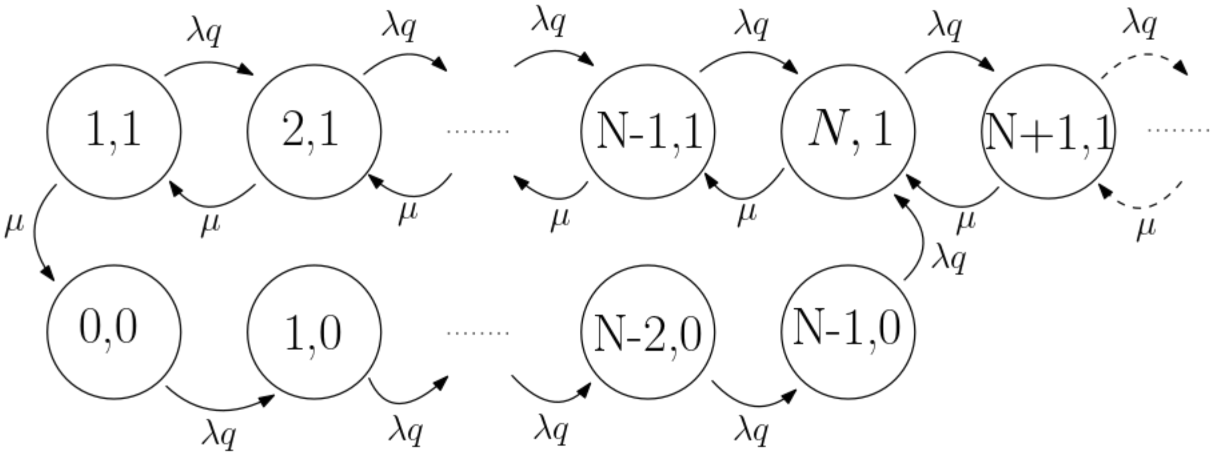
3.1 Μη παρατηρήσιμο μοντέλο

Εδώ οι πελάτες μπαίνουν στο σύστημα με πιθανότητα q, συνεπώς έχουν τις στρατηγικές $q : q \in [0, 1]$. Συμβολίζουμε με $W(q)$ τον συνολικό χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, με $h > 0$ το κόστος ανά χρονική μονάδα παραμονής στο σύστημα και με R την αμοιβή ενός πελάτη από την εξυπηρέτησή του.

Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία $\{(Q(t), I(t)), t \geq 0\}$, όπου
Q(t): το πλήθος των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t.
I(t): η κατάσταση του υπηρέτη τη χρονική στιγμή t,

$$I(t) = \begin{cases} 0, \text{ανενεργός} \\ 1, \text{ενεργός.} \end{cases}$$

Το διάγραμμα του ρυθμού μετάβασης είναι



Βλέπουμε ότι όλοι οι χρόνοι είναι εκθετικοί, συνεπώς η διαδικασία $\{Q(t), I(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Θα βρούμε τη στάσιμη κατανομή της. Θεωρούμε

$$p_{n,i} = \lim_{t\to\infty} P\big(Q(t) = n, I(t) = i\big), \quad n \in \mathbb{N}, i \in \{0,1\} \text{ και } (n,i) \neq (0,1)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις ισορροπίας παίρνουμε ότι

$$\lambda q \cdot p_{0,0} = \mu p_{1,1} \Rightarrow p_{1,1} = \rho p_{0,0}, \text{ όπου } \rho = \frac{\lambda q}{\mu} \text{ ο ρυθμός συνωστισμού.} \tag{A}$$

Για κάθε $n = 1, 2, \ldots, N-1$, έχουμε

$$\lambda q p_{0,0} = \lambda q p_{n,0} \Rightarrow p_{n,0} = p_{0,0}. \tag{B}$$

Επίσης, έχουμε

$$(\lambda q + \mu)p_{1,1} = \mu p_{2,1} \Rightarrow p_{2,1} = (1+\rho)p_{1,1} = \sum_{i=0}^{2-1} \rho^i p_{1,1}.$$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι για κάθε $n = 1, \ldots, N$ έχουμε $p_{n,1} = \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i p_{1,1}$.
Για $n = 1$ ισχύει, αφού

$$p_{1,1} = \sum_{i=0}^{1-1} \rho^i p_{1,1}.$$

Έστω ότι ισχύει για όλα τα $n-1, n-2, \ldots, 1$, θα δείξουμε ότι ισχύει και για n. Για κάθε $n = 2, 3, \ldots, N$, έχουμε

$$(\lambda q + \mu)p_{n-1,1} = \lambda q p_{n-2,1} + \mu p_{n,1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
p_{n,1} &= (1+\rho)p_{n-1,1} - \rho p_{n-2,1} \\
&= \left[(1+\rho)\sum_{i=0}^{n-2}\rho^i - \rho\sum_{i=0}^{n-3}\rho^i\right] p_{1,1} \\
&= \left[\sum_{i=0}^{n-2}\rho^i + \sum_{i=0}^{n-2}\rho^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-3}\rho^{i+1}\right] p_{1,1} \\
&= \left[\sum_{i=0}^{n-2}\rho^i + \rho^{n-1}\right] p_{1,1} \\
&= \sum_{n=0}^{n-1}\rho^i p_{1,1}.
\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $n = 1, \dots, N$, ισχύει ότι

$$p_{n,1} = \sum_{i=0}^{n-1}\rho^i p_{1,1}. \tag{C}$$

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned}
(\lambda q + \mu)p_{N,1} &= \lambda q p_{N-1,1} + \lambda q p_{N-1,0} + \mu p_{N+1,1} \\
\overset{(3.2)}{\Longrightarrow} (1+\rho)p_{N,1} &= \rho(p_{N-1,1} + p_{0,0}) + p_{N+1,1} \\
\overset{(3.3)}{\Longrightarrow} p_{N+1,1} &= \left[(1+\rho)\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i - \rho\left(\sum_{i=0}^{N-2}\rho^i + \frac{1}{\rho}\right)\right] p_{1,1} \\
&= \left[(1+\rho)\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i - \left(\sum_{i=1}^{N-1}\rho^i + 1\right)\right] p_{1,1} \\
&= \left[(1+\rho)\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i - \sum_{i=0}^{N-1}\rho^i\right] p_{1,1} \\
&= \rho\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i p_{1,1} \\
&= \rho^{N+1-N}\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i p_{1,1}.
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι για κάθε $n = N+1, N+2, \dots$ ισχύει ότι

$$p_{n,1} = \rho^{n-N}\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i p_{1,1}.$$

Για $n = N+1$ είδαμε ότι

$$p_{N+1,1} = \rho\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i p_{1,1}.$$

Έστω ότι ισχύει για όλα τα $N+1, \dots, n-2, n-1$, θα δείξουμε ότι ισχύει και για n.

Για κάθε $n = N+2, N+3, \ldots$, έχουμε

$$\begin{aligned}(\lambda q+\mu)p_{n-1,1} &= \lambda q p_{n-2,1} + \mu p_{n,1} \Rightarrow \\ p_{n,1} &= (1+\rho)p_{n-1,1} - \rho p_{n-2,1} \\ &= \left[(1+\rho)\rho^{n-1-N}\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i - \rho\rho^{n-2-N}\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i\right]p_{1,1} \\ &= \left[\rho^{n-1-N}\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i + \rho^{n-N}\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i - \rho^{n-1-N}\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i\right]p_{1,1} \\ &= \rho^{n-N}\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i p_{1,1}.\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $n = N+1, N+2, \ldots$, ισχύει

$$p_{n,1} = \rho^{n-N}\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i p_{1,1}. \tag{D}$$

Επίσης από την εξίσωση κανονικοποίησης έχουμε ότι

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{N-1}p_{i,0} + \sum_{j=1}^{N}p_{j,1} + \sum_{j=N+1}^{+\infty}p_{j,1} = 1 \\ \xRightarrow{(A,B,C,D)} &N p_{0,0} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}\rho^i p_{1,1} + \sum_{j=N+1}^{+\infty}\rho^{j-N}\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i p_{1,1} = 1 \\ \Rightarrow &p_{1,1}\left[\frac{N}{\rho} + \sum_{j=1}^{N}\frac{1-\rho^j}{1-\rho} + \left(\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i\right)\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\rho^j\right)\right] = 1 \\ \Rightarrow &p_{1,1}\left[\frac{N}{\rho} + \frac{N}{1-\rho} - \rho\frac{1-\rho^N}{(1-\rho)^2} + \frac{1-\rho^N}{1-\rho}\frac{\rho}{1-\rho}\right] = 1 \\ \Rightarrow &p_{1,1}\left[N\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right)\right] = 1 \\ \Rightarrow &p_{1,1}\frac{N}{\rho(1-\rho)} = 1 \\ \Rightarrow &p_{1,1} = \frac{\rho(1-\rho)}{N}.\end{aligned}$$

Τελικά, η στάσιμη κατανομή της $\{Q(t), I(t)\}$ έχει ως εξής

$$p_{n,0} = p_{0,0} = \frac{1-\rho}{N}, \quad \text{για } n = 0,\ldots,N-1,$$

$$p_{n,1} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1}\rho^i p_{1,1} = \dfrac{1-\rho^n}{1-\rho}\dfrac{\rho(1-\rho)}{N} = \dfrac{\rho(1-\rho^n)}{N} & \text{, για } n = 1,\ldots,N \\ \rho^{n-N}\sum_{i=0}^{N-1}\rho^i p_{1,1} = \rho^{n-N}\dfrac{1-\rho^N}{1-\rho}\dfrac{(1-\rho)\rho}{N} = \dfrac{\rho^{n+1-N}(1-\rho^N)}{N} & \text{, για } n = N+1, N+2, \ldots \end{cases}$$

Στην συνέχεια θα βρούμε το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα ως εξής

$$
\begin{aligned}
E[Q] &= \sum_{n=1}^{N-1} n p_{n,0} + \sum_{n=1}^{N} n p_{n,1} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} n p_{n,1} \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} n \frac{1-\rho}{N} + \sum_{n=1}^{N} n \frac{(1-\rho^n)\rho}{N} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} n \frac{\rho^{n+1-N}(1-\rho^N)}{N} \\
&= \frac{N(N-1)}{2} \frac{(1-\rho)}{N} + \frac{\rho}{N} \left[\frac{N(N+1)}{2} - \frac{\rho - (N+1)\rho^{N+1} + N\rho^{N+2}}{(1-\rho)^2} \right] \\
&\quad + \frac{(1-\rho^N)\rho^{1-N}}{N} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\rho^n - \sum_{n=1}^{N} n\rho^n \right) \\
&= \frac{(N-1)(1-\rho)}{2} + \frac{\rho(N+1)}{2} - \frac{\rho^2 - (N+1)\rho^{N+2} + N\rho^{N+3}}{N(1-\rho)^2} \\
&\quad + \frac{(1-\rho^N)\rho^{1-N}}{N} \left[\frac{\rho}{(1-\rho)^2} - \frac{\rho - (N+1)\rho^{N+1} + N\rho^{N+2}}{(1-\rho)^2} \right] \\
&= \frac{(N-1)(1-\rho)}{2} + \frac{\rho(N+1)}{2} - \frac{\rho^2 - (N+1)\rho^{N+2} + N\rho^{N+3}}{N(1-\rho)^2} \\
&\quad + \frac{(1-\rho^N)\rho^{1-N}}{N} \left[\frac{(N+1)\rho^{N+1} - N\rho^{N+2}}{(1-\rho)^2} \right] \\
&= \frac{N-1}{2} + \frac{\rho(N+1-N+1)}{2} - \frac{\rho^2 - (N+1)\rho^{N+2} + N\rho^{N+3}}{N(1-\rho)^2} + \frac{(1-\rho^N)[(N+1)\rho^2 - N\rho^3]}{N(1-\rho)^2} \\
&= \frac{N-1}{2} + \rho - \frac{\rho^2}{N(1-\rho)^2} + \frac{(N+1)\rho^{N+2} - N\rho^{N+3}}{N(1-\rho)^2} + \frac{(N+1)\rho^2 - N\rho^3}{N(1-\rho^2)} \\
&\quad - \frac{(N+1)\rho^{N+2} - N\rho^{N+3}}{N(1-\rho)^2} \\
&= \frac{N-1}{2} + \rho + \frac{N\rho^2 - N\rho^3}{N(1-\rho)^2} \\
&= \frac{N-1}{2} + \rho + \frac{N(1-\rho)\rho^2}{N(1-\rho)^2} \\
&= \frac{N-1}{2} + \rho + \frac{\rho^2}{1-\rho} \\
&= \frac{N-1}{2} + \frac{\rho}{1-\rho}.
\end{aligned}
$$

Από τον Νόμο του Little (1.2.1) έχουμε ότι

$$E[W(q)] = \frac{E[Q]}{\lambda q} = \frac{N-1}{2\lambda q} + \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{N-1}{2\lambda q} + \frac{1}{\mu - \lambda q}.$$

Θέτουμε

$$w(q) = E[W(q)].$$

3.1.1 Στρατηγικές Ισορροπίας

Η ωφέλεια ενός πελάτη, όταν οι άλλοι πελάτες μπαίνουν μέσα στο σύστημα με στρατηγική q και αυτός με q', είναι

$$U(q',q) = (1-q')\cdot 0 + q'\Big(R - hE[W(q)]\Big) = q'(R - hw(q)).$$

Η βέλτιστη απάντηση στην στρατηγική q των άλλων πελατών είναι

$$BR(q) = \begin{cases} \{0\} & \text{, αν } R - hw(q) < 0 \\ [0,1] & \text{, αν } R - hw(q) = 0 \\ \{1\} & \text{, αν } R - hw(q) > 0. \end{cases}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} R - hw(q) &= R - h\left(\frac{N-1}{2\lambda q} + \frac{1}{\mu - \lambda q}\right) \\ &= \frac{R(\mu-\lambda q)\cdot 2\lambda q - h(N-1)(\mu-\lambda q) - 2h\lambda q}{2\lambda q(\mu - \lambda q)} \\ &= \frac{-2(\lambda q)^2 R + 2\lambda q\mu R - h(N-1)\mu + h(N-1)\lambda q - 2\lambda q h}{2\lambda q(\mu-\lambda q)} \\ &= \frac{-\Big[2R(\lambda q)^2 + (2h - (N-1)h - 2R\mu)\lambda q + h(N-1)\mu\Big]}{2\dfrac{\lambda q}{\mu}\left(1 - \dfrac{\lambda q}{\mu}\right)\mu^2} \\ &= \frac{-\Big[2R(\lambda q)^2 - [(N-3)h + 2R\mu]\lambda q + h(N-1)\mu\Big]}{2\rho(1-\rho)\mu^2}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο του κλάσματος εξαρτάται μόνο από τον αριθμητή, οποίος είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς λq και θα βρούμε τις ρίζες του. Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα

$$\begin{aligned} \Delta &= (N-3)^2h^2 + 4(N-3)hR\mu + 4R^2\mu^2 - 8Rh(N-1)\mu \\ &= (N-3)^2h^2 + 4NhR\mu - 12hR\mu + 4R^2\mu^2 - 8RhN\mu + 8Rh\mu \\ &= (N-3)^2h^2 - 4NhR\mu - 4hR\mu + 4R^2\mu^2 \\ &= (N-3)^2h^2 - 4(N+1)hR\mu + 4R^2\mu^2 \\ &= (N-3)^2h^2 - 4[(N+1)hR\mu - R^2\mu^2] \end{aligned}$$

και οι ρίζες είναι

$$\begin{aligned} (\lambda q)_{1,2} &= \frac{(N-3)h + 2R\mu \pm \sqrt{(N-3)^2h^2 - 4[(N+1hR\mu - R^2\mu^2)]}}{4R} \\ &= \frac{\dfrac{(N-3)h}{2} + R\mu \pm \sqrt{R^2\mu^2 + \dfrac{(N-3)^2h^2}{4} - (N+1)hR\mu}}{2R}. \end{aligned}$$

Άρα, έχουμε

$$q_1 = \frac{R\mu + \dfrac{(N-3)h}{2} - \sqrt{R^2\mu^2 + \dfrac{(N-3)^2h^2}{4} - (N+1)hR\mu}}{2R\lambda}$$

και

$$q_2 = \frac{R\mu + \frac{(N-3)h}{2} + \sqrt{R^2\mu^2 + \frac{(N-3)^2h^2}{4} - (N+1)hR\mu}}{2R\lambda}.$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$w(q) = \frac{1}{\mu - \lambda q} + \frac{N-1}{2\lambda q}$$

$$w'(q) = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda q)^2} - \frac{N-1}{2\lambda q^2}$$

$$w''(q) = \frac{2\lambda^2}{(\mu - \lambda q)^3} + \frac{N-1}{\lambda q^3}.$$

Βλέπουμε ότι η $w''(q) > 0$ για κάθε $q \in [0,1] \cap \left[0, \frac{\mu}{\lambda}\right)$.
Άρα, η $w(q)$ είναι κυρτή στο $[0,1] \cap \left[0, \frac{\mu}{\lambda}\right)$ και ελαχιστοποιείται στο q^* όπου

$$\begin{aligned}
w'(q^*) = 0 &\Rightarrow 2\lambda^2(q^*)^2 = (N-1)(\mu - \lambda q^*)^2 \\
&\Rightarrow \lambda q^* = \sqrt{\frac{N-1}{2}}(\mu - \lambda q^*) \\
&\Rightarrow \lambda q^*(1 + \sqrt{\frac{N-1}{2}}) = \sqrt{\frac{N-1}{2}}\mu \\
&\Rightarrow q^* = \frac{\sqrt{\frac{N-1}{2}}}{1 + \sqrt{\frac{N-1}{2}}}\frac{\mu}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Η ελάχιστη τιμή της $w(q)$ είναι

$$\begin{aligned}
w(q^*) &= \frac{1}{\mu - \mu\frac{\sqrt{\frac{N-1}{2}}}{1 + \sqrt{\frac{N-1}{2}}}} + \frac{1 + \sqrt{\frac{N-1}{2}}}{\sqrt{\frac{N-1}{2}}}\frac{\lambda}{\mu}\frac{N-1}{2\lambda} \\
&= \frac{1}{\mu}\frac{1}{\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{N-1}{2}}}} + \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{N-1}{2}}}\right)\frac{N-1}{2} \\
&= \frac{1}{\mu}\left[1 + \sqrt{\frac{N-1}{2}} + \left(\sqrt{\frac{N-1}{2}}\right)^2 + \sqrt{\frac{N-1}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{\mu}\left[\sqrt{\frac{N-1}{2}} + 1\right]^2 \\
&= \left(1 + \sqrt{\frac{N-1}{2}}\right)^2\frac{1}{\mu}.
\end{aligned}$$

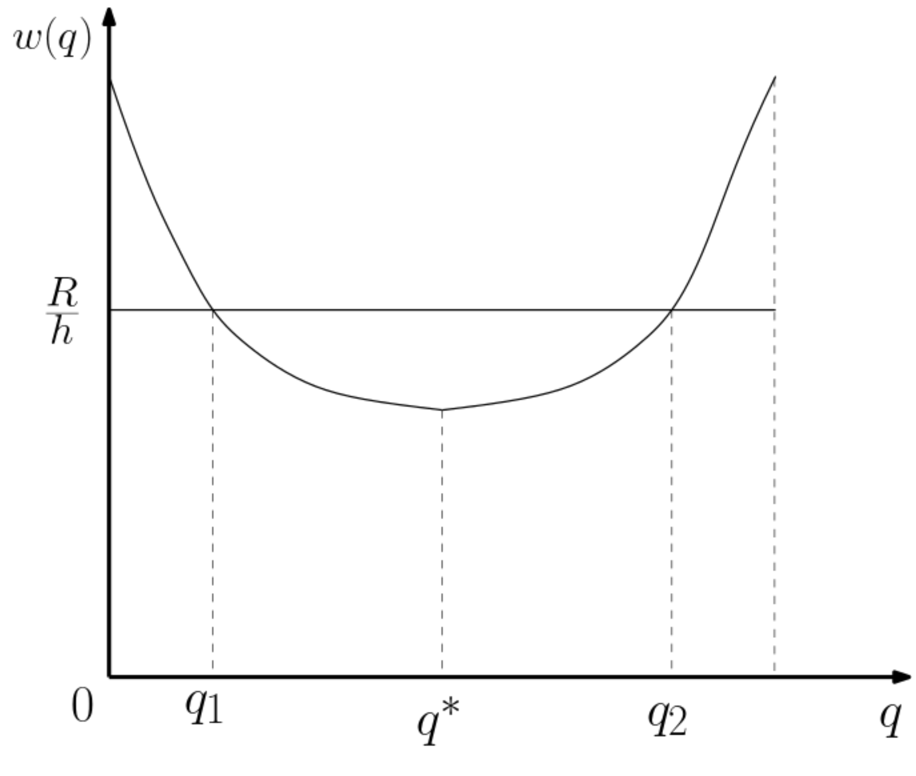
Έτσι, γράφουμε ισοδύναμα την βέλτιστη απάντηση ως εξής

$$BR(q) = \begin{cases} \{0\}, & \frac{R}{h} < w(q) \\ [0,1], & \frac{R}{h} = w(q) \\ \{1\}, & \frac{R}{h} > w(q) \end{cases} .$$

Για να βρούμε τις στρατηγικές ισορροπίας διακρίνουμε 3 περιπτώσεις.

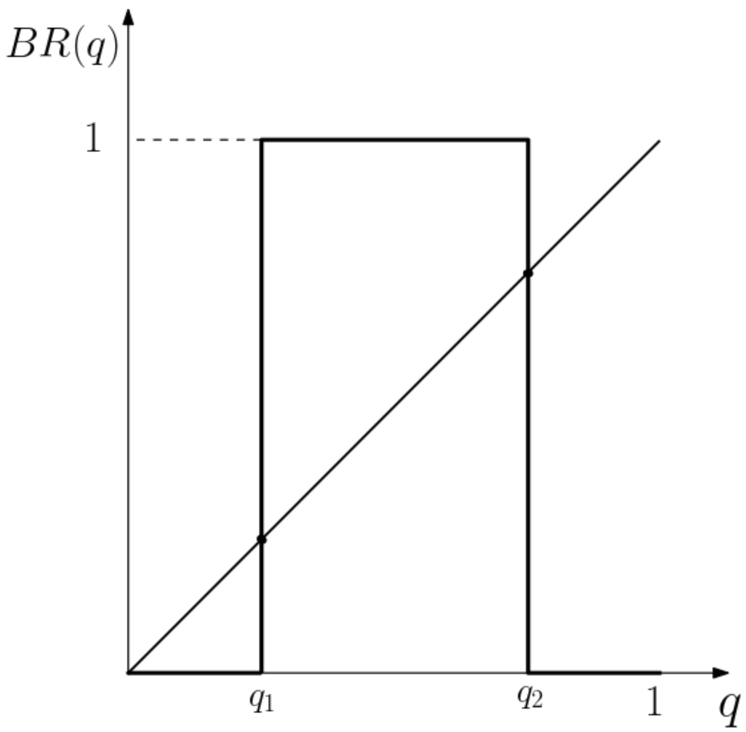
<u>Περίπτωση 1:</u>
Αν $w(q^*) < \frac{R}{h}$, τότε θα έχουμε ότι

$$w(q_1) = w(q_2) = \frac{R}{h}.$$



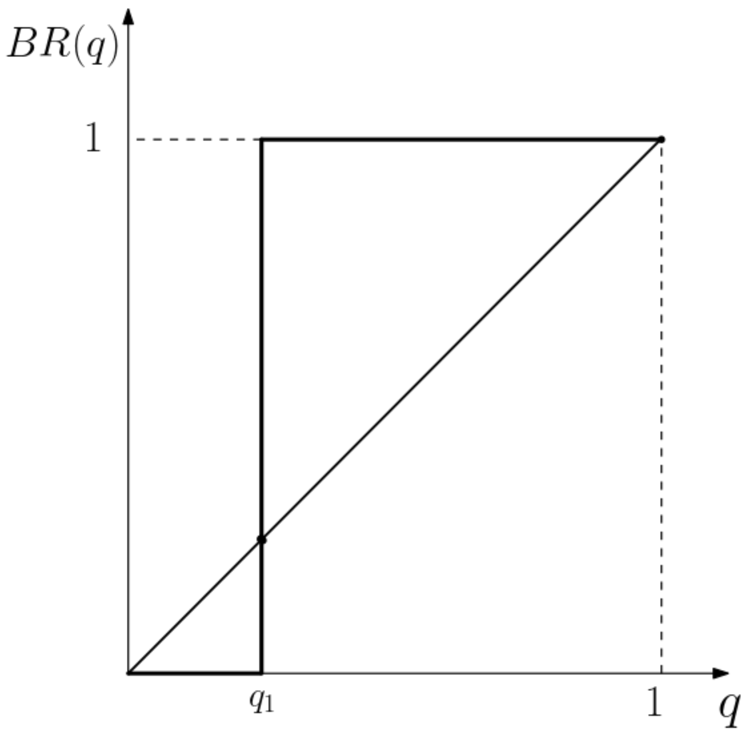
Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τρεις υποπεριπτώσεις

1. Αν $q_1, q_2 < 1$, τότε



Τα σημεία στρατηγικής ισορροπίας είναι εκείνα για τα οποία $q \in BR(q)$. Σε αυτή την υποπερίπτωση είναι $\{0, q_1, q_2\}$.

2. Αν $q_1 \leq 1, q_2 \geq 1$, τότε τα σημεία στρατηγικής ισορροπίας είναι τα $\{0, q_1, 1\}$. Προφανώς, αν $q_1 = 1$, τότε τα σημεία στρατηγικής ισορροπίας είναι τα $\{0, 1\}$

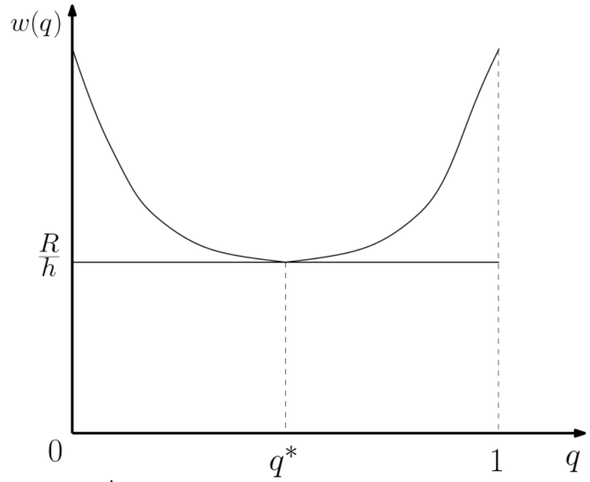


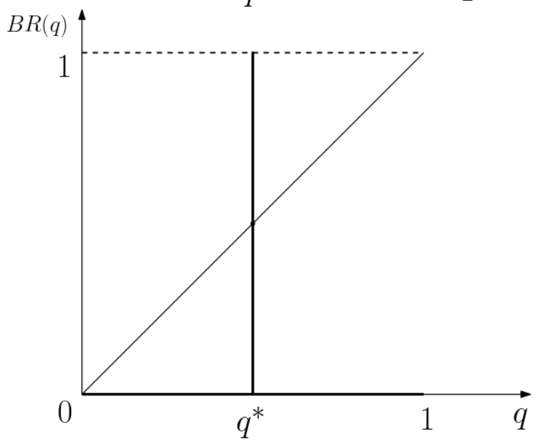
3. Αν $q_1 > 1$, τότε το μοναδικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας είναι το μονοσύνολο $\{0\}$.

<u>Περίπτωση 2:</u>

Αν $w(q^*) = \frac{R}{h}$, τότε έχουμε δύο υποπεριπτώσεις

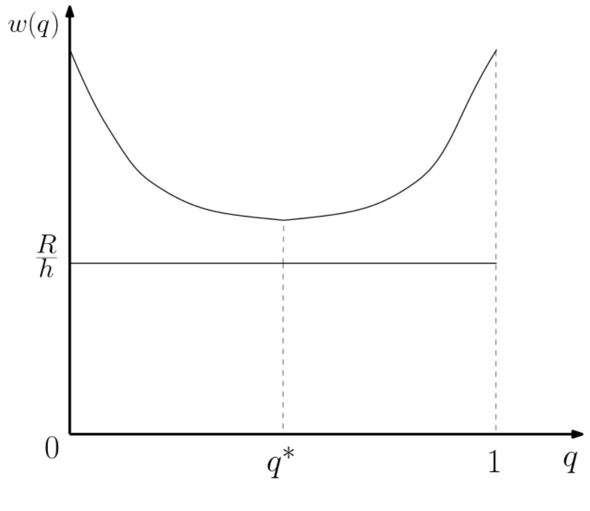
1. Αν $q^* \leq 1$, τότε έχουμε ότι τα σημεία στρατηγικής ισορροπίας είναι τα $\{0, q^*\}$, όπως φαίνεται στα παρακάτω γραφήματα.

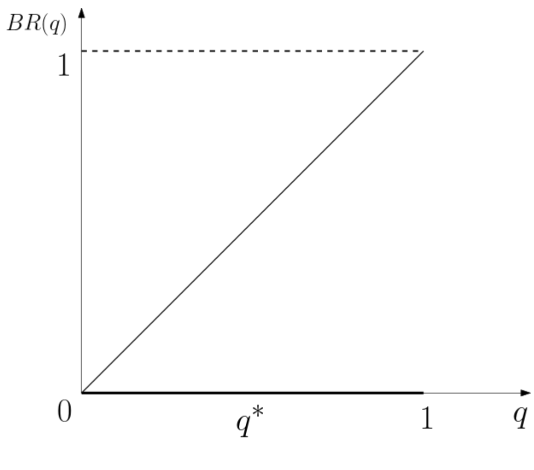




2. Αν $q^* > 1$, τότε έχουμε μοναδικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας $\{0\}$.

Περίπτωση 3:
Αν $w(q^*) > \frac{R}{h}$, τότε έχουμε





Σε αυτή την περίπτωση το μοναδικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας είναι το $\{0\}$.

3.1.2 Βελτιστοποίηση της Κοινωνικής Ωφέλειας

Στη συνέχεια θα βρούμε ποια στρατηγική μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε την ενδιαφέρουσα περίπτωση που $\mu \geq \frac{h}{R}$.
Η συνάρτηση της κοινωνικής ωφέλειας είναι

$$SW(q) = \lambda q\Big(R - hE[W(q)]\Big) = \lambda q\big(R - hw(q)\big).$$

Αν αντικαταστήσουμε την $w(q)$ και παραγωγίσουμε έχουμε τα εξής

$$SW(q) = \lambda q\left(R - h\left(\frac{1}{\mu - \lambda q} + \frac{N-1}{2\lambda q}\right)\right) = \lambda q R - h\frac{\lambda q}{\mu - \lambda q} - h\frac{N-1}{2}.$$

$$SW'(q) = \lambda R - h\frac{\lambda\mu - \lambda^2 q + \lambda^2 q}{(\mu - \lambda q)^2} = \lambda\left(R - h\frac{\mu}{(\mu - \lambda q)^2}\right).$$

$$SW''(q) = \frac{-2\lambda^2\mu h}{(\mu - \lambda q)^3} < 0 \qquad , \forall q \in [0,1] \cap [0, frac\mu\lambda)\,.$$

Άρα, η $SW(q)$ είναι κοίλη και μεγιστοποιείται στο $\overline{q}$, το οποίο υπολογίζουμε ως εξής

$$\begin{aligned} SW'(\overline{q}) = 0 \Rightarrow R - h\frac{\mu}{(\mu - \lambda\overline{q})^2} &= 0 \\ \Rightarrow (\mu - \lambda\overline{q})^2 &= \frac{\mu h}{R} \\ \Rightarrow \mu - \lambda\overline{q} &= \pm\sqrt{\frac{\mu h}{R}}. \end{aligned}$$

Όμως $\mu - \lambda\overline{q} > 0$, άρα παίρνουμε

$$\overline{q} = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \sqrt{\frac{\mu h}{R}}\right).$$

Προφανώς, ισχύει ότι $\overline{q} < \frac{\mu}{\lambda}$ και ακόμη $\overline{q} \geq 0$, καθώς

$$\overline{q} \geq 0 \Leftrightarrow \mu - \sqrt{\frac{\mu h}{R}} \geq 0 \Leftrightarrow \mu^2 \geq \frac{\mu h}{R} \Leftrightarrow \mu \geq \frac{h}{R},$$

δηλαδή έχουμε $\overline{q} \in [0,1] \cap [0, \frac{\mu}{\lambda})$. Η μέγιστη ωφέλεια είναι $SW(\overline{q})$, όπου

$$\begin{aligned} SW(\overline{q}) &= \left(\mu - \sqrt{\frac{\mu h}{R}}\right)R - h\frac{\mu - \sqrt{\frac{\mu h}{R}}}{\mu - \mu + \sqrt{\frac{\mu h}{R}}} - h\frac{N-1}{2} \\ &= \mu R - \sqrt{\mu h R} + h\left(1 - \sqrt{\frac{R\mu}{h}}\right) - h\frac{N-1}{2} \\ &= h\left(\frac{\mu R}{h} - 2\sqrt{\frac{R\mu}{h}} - \frac{N-3}{2}\right). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, παρόλο που η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική δεν εξαρτάται από το N, η βέλτιστη κοινωνική ωφέλεια εξαρτάται, και μάλιστα είναι φθίνουσα ως προς το N.

3.2 Παρατηρήσιμο μοντέλο

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε το σύστημα στην περίπτωση που οι πελάτες έχουν γνώση του μήκους της ουράς πριν αποφασίσουν αν θα εισέλθουν ή όχι στο σύστημα. Θα υιοθετήσουμε τον συμβολισμό που είχαμε και στο μη παρατηρήσιμο σύστημα. Έτσι, συμβολίζουμε με W_i το συνολικό χρόνο παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη που μπαίνει στο σύστημα και έχει μπροστά του $i-1$ πελάτες, $h>0$ το κόστος παραμονής και R την αμοιβή από την εξυπηρετηση. Ακόμη, έχουμε τη στοχαστική διαδικασία $\{(Q(t), I(t)), t \geq 0\}$, όπου
$Q(t)$: το πλήθος των πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t.
$I(t)$: η κατάσταση του υπηρέτη τη χρονική στιγμή t,

$$I(t) = \begin{cases} 0, \text{ανενεργός} \\ 1, \text{ενεργός.} \end{cases}$$

Στη συγκεκριμένη μελέτη θεωρούμε πως οι πελάτες που είναι αδιάφοροι για το αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή όχι θα εισέρχονται. Αξίζει να τονίσουμε, ότι η στρατηγική να μην εισέλθει στο σύστημα ένας πελάτης είναι πάντα στρατηγική ισορροπίας, αφού η βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη όταν όλοι οι άλλοι ακολουθούν τη στρατηγική να μην μπαίνουν είναι να μην μπει ούτε και αυτός, διότι αν μπει ο χρόνος ενεργοποίησης του υπηρέτη είναι άπειρος και συνεπώς δεν θα εξυπηρετηθεί ποτέ.
Θα προσπαθήσουμε να βρούμε στρατηγικές ισορροπίας για τις οποίες ο υπηρέτης ενεργοποιείται.

3.2.1 Στρατηγικές Ισορροπίας

Για να ενεργοποιηθεί ο υπηρέτης θα πρέπει η ωφέλεια ενός πελάτη που βλέπει το σύστημα σε κατάσταση $(i, 0)$ και μπαίνει να είναι μη-αρνητική, $0 \leq i \leq N-1$. Έτσι, κάθε πελάτης που θα βλέπει $(i-1)$-πελάτες μπροστά του με $1 \leq i \leq N$ και τον υπηρέτη ανενεργό θα εισέρχεται στο σύστημα με αποτέλεσμα ο υπηρέτης να ενεργοποιείται σε πεπερασμένο χρόνο με πιθανότητα 1.
Αν θεωρήσουμε X_i τον χρόνο εξυπηρέτησης του $i-$οστού πελάτη και Y_i τον ενδιάμεσο χρόνο άφιξης του $i-$οστού πελάτη στο σύστημα, τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

1. Όταν $\lambda > \mu$, τότε ανάμεσα στους πελάτες που βρίσκουν τον υπηρέτη ανενεργό ο μεγαλύτερος μέσος χρόνος παραμονής είναι του πελάτη που βλέπει $N-1$ πελάτες μπροστά του. Αυτός θα έχει μέσο χρόνο παραμονής

$$E[W_N] = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \frac{N}{\mu},$$

   αφού

$$X_i \sim \text{Exp}(\mu) \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i \sim \text{Erlang}(N, \mu).$$

   Συνεπώς, θα πρέπει

$$R - hE[W_N] \geq 0 \Rightarrow \frac{R\mu}{h} \geq N.$$

2. Όταν $\lambda < \mu$, τότε ανάμεσα στους πελάτες που βρίσκουν τον υπηρέτη ανενεργό ο μεγαλύτερος μέσος χρόνος παραμονής είναι του πελάτη που εισέρχεται σε ένα

άδειο σύστημα, αφού θα περιμένει $N-1$ χρόνους αφίξεων και τον δικό του χρόνο εξυπηρέτησης. Άρα, σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$E[W_1] = E\left[\sum_{i=1}^{N-1} Y_i + X_1\right] = \frac{N-1}{\lambda q} + \frac{1}{\mu},$$

αφού

$$Y_i \sim \text{Exp}(\lambda q) \Rightarrow \sum_{i=1}^{N-1} Y_i \sim \text{Erlang}(N-1, \lambda q).$$

Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση, θα πρέπει

$$R - hE[W_N] \geq 0 \Rightarrow \frac{R\mu}{h} \geq \frac{(N-1)\mu}{\lambda q} + 1.$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι υπάρχει στρατηγική ισορροπίας με ενεργό υπηρέτη αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα δύο

(i) $\lambda \geq \mu$ και $\dfrac{R\mu}{h} \geq N$,

(ii) $\lambda \leq \mu$ και $\dfrac{R\mu}{h} \geq \dfrac{(N-1)\mu}{\lambda q} + 1$.

Στη συνέχεια, υποθέτοντας ότι ικανοποιείται μία από τις παραπάνω συνθήκες έχουμε ότι όλοι εκείνοι που βρίσκουν τον υπηρέτη ενεργό και βλέπουν από 0 μέχρι $N-1$ πελάτες μπροστά τους μπαίνουν, αφού έχουν σίγουρα καλύτερο χρόνο αναμονής απο αυτούς που βρίσκουν τον υπηρέτη ανενεργό και από 0 έως $N-1$ πελάτες μπροστά τους. Άρα, η στρατηγική ισορροπίας θα είναι $n_e \geq N$ και θα είναι τύπου κατωφλιού. Κάθε πελάτης, λοιπόν, που βρίσκει τον υπηρέτη ενεργό και i πελάτες μπροστά του μπαίνει στο σύστημα αν

$$R - h\frac{i+1}{\mu} \geq 0 \Rightarrow i \leq \frac{R\mu}{h} - 1.$$

Συνεπώς, $n_e = \lfloor \frac{R\mu}{h} \rfloor$, όπου αυτό είναι $n_e \geq N$. Έτσι, η στρατηγική ισορροπίας με ενεργό υπηρέτη όταν ικανοποιείται μία από τις δύο βασικές συνθήκες είναι η

$$n_e = \lfloor \frac{R\mu}{h} \rfloor \geq N.$$

Κεφάλαιο 4

Στρατηγική συμπεριφορά ετερογενών πελατών σε M/M/1 ουρά με διακοπές του υπηρέτη

Στην προηγούμενη ενότητα, θεωρήσαμε σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη ο οποίος κάνει διακοπές. Πιο συγκεκριμένα, ο υπηρέτης ξεκινάει να δουλεύει όταν μαζευτούν N πελάτες στο χώρο αναμονής και όταν ξεκινήσει να δουλεύει δεν σταματάει καθόλου, παρά μόνο όταν το σύστημα αδειάσει και τότε ξανακάνει διακοπές. Επίσης, θεωρήσαμε ότι οι πελάτες είναι ομογενείς και μελετήσαμε το παρατηρήσιμο και μη παρατηρήσιμο σύστημα. Στο μη παρατηρήσιμο είδαμε ότι υπάρχουν το πολύ τρία σημεία στρατηγικής ισορροπίας, ενώ στο παρατηρήσιμο υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας και είναι τύπου κατωφλιού.
Σε αυτή την ενότητα θα επεκτείνουμε την ανάλυση της προηγούμενης ενότητας σε συστήματα με ετερογενείς πελάτες. Θα μελετήσουμε το παρατηρήσιμο και μη παρατηρήσιμο σύστημα και θα θεωρήσουμε δύο επιπλέον περιπτώσεις σχετικά με την ετερογένεια των πελατών. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε δύο τύπους πελατών και στη δεύτερη θα έχουμε πελάτες συνεχώς κατανεμημένους. Συνολικά, θα έχουμε 4 περιπτώσεις και στην κάθε μία θα βρούμε τις στρατηγικές ισορροπίας, καθώς και την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική. Στο τέλος, θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μας με αυτά της προηγούμενης ενότητας. Το μοντέλο αυτό μελετήθηκε από τους Guo και Hassin και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο άρθρο τους 'Strategic behavior and social optimization in Markovian vacation queues: The case of heterogeneous customers' που δημοσιεύθηκε το 2012. Το συγκεκριμένο άρθρο περιέχει μεθόδους και συμπεράσματα αρκετά διαφορετικά από αυτά του προηγούμενου των ίδιων συγγραφέων στο οποίο αναφερθήκαμε στο Κεφάλαιο 3. Αποτελεί, ωστόσο, συμπλήρωμα στην μελέτη των τελευταίων ετών πάνω στρατηγική συμπεριφορά πελατών σε ουρές αναμονής με διακοπές του υπηρέτη, όπως φαίνεται στα άρθρα των Veeraraghavan, Debo, Johari και Kumar, αλλά και των Μπουρνέτα, Οικονόμου και Κάντα.
Υποθέτουμε, αρχικά, ότι οι ετερογενείς πελάτες φτάνουν στο σύστημα με μία διαδικασία Poisson συνολικού ρυθμού λ. Υπάρχει ένας υπηρέτης και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι και ακολουθούν εκθετική κατανομή ρυθμού μ. Ο υπηρέτης ακολουθεί μία N-πολιτική διακοπών. Θεωρούμε ότι ο ρυθμός συνωστισμού $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Επίσης, υποθέτουμε ότι η ωφέλεια ενός πελάτη είναι η αμοιβή που θα λάβει από την εξυπηρέτησή του αφαιρώντας επιπλέον και το κόστος παραμονής του στο σύστημα. Το κόστος παραμονής του κάθε πελάτη εξαρτάται από το χρόνο παραμονής του στο σύστημα.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό

W: η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τον συνολικό χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα,

h: το κόστος ενός πελάτη ανά χρονική μονάδα παραμονής στο σύστημα,

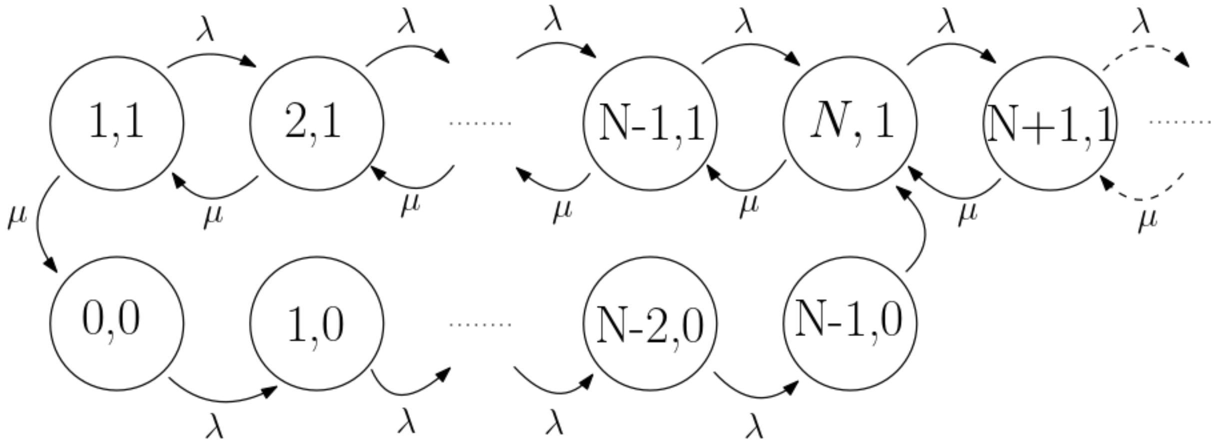
H: συνάρτηση κατανομής του κόστους παραμονής στον πληθυσμό των δυνητικών πελατών,

R: αμοιβή ενός πελάτη από την εξυπηρέτηση, $R \geq 0$.

Η αμοιβή R είναι ίδια για όλους τους πελάτες, ενώ αυτό που διαφέρει από πελάτη σε πελάτη είναι το κόστος παραμονής h. Όπως προαναφέρθηκε θα χρησιμοποιήσουμε και διακριτή και συνεχή κατανομή για το h. Στην διακριτή περίπτωση θα θεωρήσουμε δύο τύπους πελατών.

4.1 Μη παρατηρήσιμο μονέλο

Σε αυτό το σύστημα υποθετούμε ότι οι πελάτες δε μπορούν να δουν το μήκος της ουράς πριν εισέλθουν και έτσι μπαίνουν με συνολικό ρυθμό λ. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, αν συμβολίσουμε με $Q(t)$ το πλήθος όλων των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα τη χρονική στιγμή t και με $I(t)$ την κατάσταση του υπηρέτη τη χρονική στιγμή t, η $\{Q(t), I(t)\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με διάγραμμα ρυθμών



Είδαμε, επίσης, στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα είναι

$$E[W(\lambda)] = \frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{N-1}{2\lambda},$$

όπου $\frac{1}{\mu - \lambda}$ είναι ο μέσος συνολικός χρόνος παραμονής στην $M/M/1$ ουρά και $\frac{N-1}{2\lambda}$ είναι ο επιπλέον χρόνος που οφείλεται στις διακοπές που κάνει ο υπηρέτης.

Μελετώντας την μονοτονία της $w(\lambda) = E[W(\lambda)]$ έχουμε τα εξής

$$w'(\lambda) = \left(\frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{N-1}{2\lambda}\right)' = \frac{1}{(\mu - \lambda)^2} - \frac{N-1}{2\lambda^2},$$

$$w''(\lambda) = \frac{2}{(\mu-\lambda)^3} + \frac{N-1}{\lambda^3}.$$

Έχουμε ότι $w''(\lambda) > 0$ για κάθε $\lambda \in (0, \mu)$, άρα η $w(\lambda)$ είναι κυρτή και πιάνει το ελάχιστό της στο $\tilde{\lambda}$, όπου

$$\begin{aligned}
w'(\tilde{\lambda}) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{(\mu-\tilde{\lambda})^2} - \frac{N-1}{2\tilde{\lambda}^2} = 0 \\
&\Rightarrow (\mu-\tilde{\lambda})^2\frac{N-1}{2} = \tilde{\lambda}^2 \\
&\Rightarrow (\mu-\tilde{\lambda})\sqrt{\frac{N-1}{2}} = \tilde{\lambda} \\
&\Rightarrow \mu\sqrt{\frac{N-1}{2}} = \tilde{\lambda}(1+\sqrt{\frac{N-1}{2}}) \\
&\Rightarrow \tilde{\lambda} = \frac{\mu\sqrt{\frac{N-1}{2}}}{1+\sqrt{\frac{N-1}{2}}}.
\end{aligned}$$

4.1.1 Δύο είδη πελατών

Τώρα, υποθέτουμε ότι έχουμε δύο είδη πελατών με διαφορετικά κόστη ανά μονάδα παραμονής στο σύστημα h_1 και h_2 με $h_1 < h_2$. Επίσης, έχουν διαφορετικούς ρυθμούς άφιξης Λ_1, Λ_2. Η στρατηγική σε αυτή την περίπτωση δίνεται από ένα ζεύγος (q_1, q_2), όπου q_i είναι η πιθανότητα εισόδου πελάτη τύπου $i, i = 1, 2$ στο συστημα.

Παρατήρηση. *Παρατηρούμε ότι, αφού $h_2 > h_1$, εάν $q_2 > 0$, τότε $q_1 = 1$. Με άλλα λόγια, εάν υπάρχουν κάποιοι πελάτες τύπου 2 οι οποίοι μπαίνουν με κόστος h_2, τότε οι πελάτες τύπου 1 μπαίνουν όλοι, αφού $h_1 < h_2$.*

Ο μέσος συνολικός χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα εξαρτάται μόνο από τον συνολικό ρυθμό άφιξης, ο οποίος εξαρτάται από τους ρυθμούς αφίξεων και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι δύο τύποι πελατών. Συμβολίζουμε με λ τον συνολικό ρυθμό άφιξης, όπου

$$\lambda = \Lambda_1 q_1 + \Lambda_2 q_2$$

και επίσης συμβολίζουμε με $w(\lambda)$ τον μέσο συνολικό χρόνο παραμονής συναρτήσει του συνολικού ρυθμού αφίξεων, δηλαδή

$$w(\lambda) = E[W(\lambda)]$$

καθώς και με $\tilde{\lambda}$ την τιμή που τον ελαχιστοποιεί. Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι

$$R - h_2 E[W(\tilde{\lambda})] > 0$$

ώστε να είναι δυνατόν οι πελάτες τύπου 2 να εισέλθουν στο σύστημα.

Στρατηγικές Ισορροπίας

Στη συνέχεια θα βρούμε τις στρατηγικές ισορροπίας για αυτό το σύστημα. Θα εξετάσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

i) $q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ \lambda = 0$

ii) $q_1 \in (0,1),\ q_2 = 0,\ \lambda = \Lambda_1 q_1$

iii) $q_1 = 1,\ q_2 = 0,\ \lambda = \Lambda_1$

iv) $q_1 = 1,\ q_2 \in (0,1),\ \lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 q_2$

v) $q_1 = 1,\ q_2 = 1,\ \lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$.

i) Για να είναι το $\lambda = 0$ σημείο στρατηγικής ισορροπίας θα πρέπει, για $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} R - h_i E[W(\lambda)] \leq 0 &\Rightarrow R - h_i w(\Lambda_1 \cdot 0 + \Lambda_2 \cdot 0) \leq 0 \\ &\Rightarrow w(0) \geq \frac{R}{h_i}. \end{aligned}$$

Άρα, πρέπει $w(0) \geq \frac{R}{h_1}$. Όμως, έχουμε ότι

$$w(\lambda) = \frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{N-1}{2\lambda}$$

και συνεπώς

$$\lim_{\lambda \to 0^+} w(\lambda) = +\infty.$$

Άρα, $w(0) \geq \dfrac{R}{h_1}$ και έτσι το $\lambda = 0$ είναι πάντα σημείο στρατηγικής ισορροπίας. Αυτό είναι κάτι το οποίο είναι διαισθητικά λογικό, αφού κανείς δεν μπαίνει στο σύστημα, άρα ο χρόνος παραμονής είναι άπειρος. Έτσι, ένας αφικνούμενος πελάτης, είτε είναι τύπου 1, είτε είναι τύπου 2 επιλέγει να μη μπει στο σύστημα.

ii) Για να είναι το $\lambda = \Lambda_1 q_1$, όπου $q_1 \in (0,1)$ σημείο στρατηγικής ισορροπίας θα πρέπει

$$\begin{aligned} &(R - h_1 E[W(\lambda)] = 0 \quad \text{και} \quad R - h_2 E[W(\lambda)] \leq 0) \\ &\Rightarrow (R - h_1 w(\lambda) = 0 \quad \text{και} \quad R - h_2 w(\lambda) \leq 0) \\ &\Rightarrow \left(w(\lambda) = \frac{R}{h_1} \quad \text{και} \quad w(\lambda) \leq \frac{R}{h_2} \right) \\ &\Rightarrow w(\lambda) = \frac{R}{h_1}. \end{aligned}$$

Άρα, κάθε $\lambda \in (0, \Lambda_1)$ με $w(\lambda) = \dfrac{R}{h_1}$ είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας.

iii) Για να είναι το $\lambda = \Lambda_1$, δηλαδή τα $q_1 = 1$ και $q_2 = 0$ σημείο στρατηγικής ισορροπίας θα πρέπει

$$\begin{aligned} &(R - h_1 E[W(\lambda)] \geq 0 \quad \text{και} \quad R - h_2 E[W(\lambda)] \leq 0) \\ &\Rightarrow \frac{R}{h_2} \leq w(\lambda) \leq \frac{R}{h_1}, \quad \text{όπου } \lambda = \Lambda_1. \end{aligned}$$

Άρα, το $\lambda = \Lambda_1$ είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας εάν

$$\frac{R}{h_2} \leq w(\Lambda_1) \leq \frac{R}{h_1}.$$

iv) Για να είναι το $\lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 q_2$, δηλαδή τα $q_1 = 1$ και $q_2 \in (0, 1)$, σημείο στρατηγικής ισορροπίας, θα πρέπει

$$\begin{aligned}(R - h_1 E[W(\lambda)] \geq 0 \qquad &\text{και} \qquad R - h_2 E[W(\lambda)] = 0) \\ \Rightarrow \left(w(\lambda) \geq \frac{R}{h_1} \qquad &\text{και} \qquad w(\lambda) = \frac{R}{h_2} \right).\end{aligned}$$

Σε αυτή την περίπτωση, κάθε $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_1 + \Lambda_2)$, τέτοιο ώστε

$$w(\lambda) = \frac{R}{h_2},$$

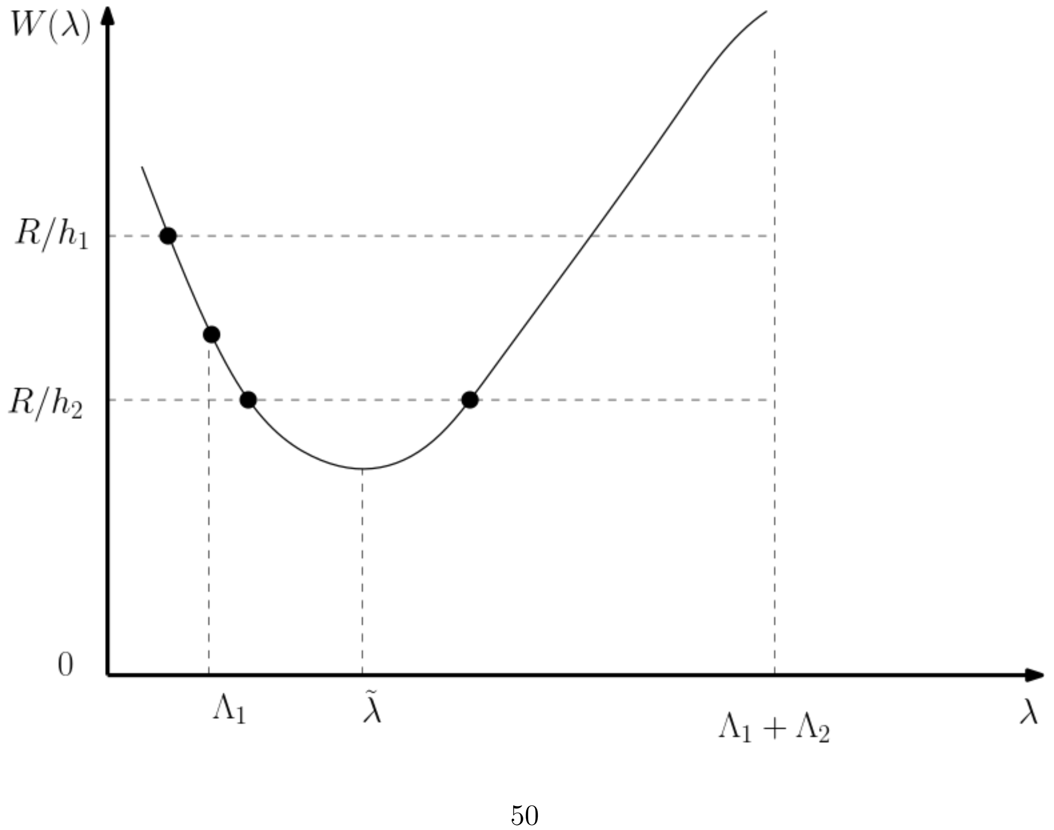
είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας.

v) Για να είναι το $\lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ σημείο στρατηγικής ισορροπίας θα πρέπει

$$\begin{aligned}(R - h_1 E[W(\lambda)] \geq 0 \qquad &\text{και} \qquad R - h_2 E[W(\lambda)] \geq 0) \\ \Rightarrow \left(w(\lambda) \leq \frac{R}{h_1} \qquad &\text{και} \qquad w(\lambda) \leq \frac{R}{h_2} \right) \\ \Rightarrow w(\lambda) \leq \frac{R}{h_2}.&\end{aligned}$$

Όμως, όσο το λ πλησιάζει στο $\Lambda_1 + \Lambda_2$ το $w(\lambda)$ γίνεται αρκετά μεγάλο και πολύ μεγαλύτερο από $\frac{R}{h_2}$, άρα το $\lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ δεν είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας.

Η παραπάνω ανάλυση σε συνδυασμό με την μονοτονία της $w(\lambda)$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μπορούμε να έχουμε το πολύ 5 σημεία στρατηγικής ισορροπίας.
Εδώ παραθέτουμε ένα παράδειγμα με $\tilde{\lambda} < \Lambda_1 + \Lambda_2$ και $w(\tilde{\lambda}) < \frac{R}{h_2}$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν ακριβώς πέντε σημεία στρατηγικής ισορροπίας (τα σκιασμένα και το $\lambda = 0$). Αν όμως $\tilde{\lambda} > \Lambda_1 + \Lambda_2$ ή $w(\tilde{\lambda}) > \frac{R}{h_2}$ ή $w(\tilde{\lambda}) > \frac{R}{h_1}$ καταλαβαίνουμε πως κάποια από τα σημεία στρατηγικής ισορροπίας που αναφέραμε πιο πάνω δεν υπάρχουν.



Βελτιστοποίηση της Κοινωνικής Ωφέλειας

Στη συνέχεια, θα προχωρήσουμε στην κοινωνική βελτιστοποίηση αυτού του συστήματος. Η συνάρτηση κοινωνικής ωφέλειας SW αποτελείται από δύο κλάδους ανάλογα σε ποιο διάστημα ανήκει το λ.
Έχουμε ότι

$$SW(\lambda) = \begin{cases} SW_1(\lambda), & \lambda \in [0, \Lambda_1] \\ SW_2(\lambda), & \lambda \in [\Lambda_1, \mu) \end{cases},$$

όπου

$$SW_1(\lambda) = \lambda[R - h_1 w(\lambda)]$$

και

$$SW_2(\lambda) = \lambda R - [\Lambda_1 h_1 + (\lambda - \Lambda_1)h_2]w(\lambda).$$

Η SW_1 και η SW_2 είναι γνησίως αύξουσες στο υποσύνολο του $[0, \tilde{\lambda}]$ που είναι θετικές, και η SW είναι γνήσια κοίλη στο $[\tilde{\lambda}, \mu)$. Πράγματι, έχουμε

$$SW_1'(\lambda) = (\lambda R - \lambda h_1 w(\lambda))' = R - h_1 w(\lambda) - \lambda h_1 w'(\lambda) = R - h_1[w(\lambda) + \lambda w'(\lambda)]$$

και

$$\begin{aligned}
SW_1''(\lambda) &= -h_1[w'(\lambda) + w'(\lambda) + \lambda w''(\lambda)] \\
&= -h_1[2w'(\lambda) + \lambda w''(\lambda)] \\
&= -h_1 \left[2 \left(\frac{1}{(\mu-\lambda)^2} - \frac{N-1}{2\lambda^2} \right) + \lambda \left(\frac{2}{(\mu-\lambda)^3} + \frac{N-1}{\lambda^3} \right) \right] \\
&= -h_1 \left[\frac{2}{(\mu-\lambda)^2} - \frac{2(N-1)}{2\lambda^2} + \frac{2\lambda}{(\mu-\lambda)^3} + \frac{N-1}{\lambda^2} \right] \\
&= -h_1 \left[\frac{2(\mu-\lambda) + 2\lambda}{(\mu-\lambda)^3} \right] \\
&= -h_1 \frac{2\mu}{(\mu-\lambda)^3} < 0 \qquad \forall \lambda \in [0, \mu).
\end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
SW_2(\lambda) &= \lambda R - [\Lambda_1 h_1 + (\lambda - \Lambda_1)h_2]w(\lambda) \\
&= \lambda R - \Lambda_1 h_1 w(\lambda) - \lambda h_2 w(\lambda) + \Lambda_1 h_2 w(\lambda) \\
&= \lambda R - \lambda h_1 w(\lambda) + \lambda h_1 w(\lambda) - \lambda h_2 w(\lambda) - \Lambda_1 h_1 w(\lambda) + \Lambda_1 h_2 w(\lambda) \\
&= SW_1(\lambda) + \lambda w(\lambda)(h_1 - h_2) - \Lambda_1 w(\lambda)(h_1 - h_2) \\
&= SW_1(\lambda) - (\lambda - \Lambda_1)(h_2 - h_1)w(\lambda).
\end{aligned}$$

Έχουμε, λοιπόν, ότι $\lambda > \Lambda_1$ και $h_2 > h_1$, άρα $SW_1(\lambda) < SW_2(\lambda)$. Επίσης,

$$SW_2''(\lambda) = SW_1''(\lambda) - (h_2 - h_1)[(\lambda - \Lambda_1)w''(\lambda) + 2w'(\lambda)].$$

Τότε, έχουμε

$$w''(\lambda) = \frac{2}{(\mu-\lambda)^2} + \frac{N-1}{\lambda^3} > 0 \qquad \forall \lambda \in [\tilde{\lambda}, \mu)$$

και άρα $w'(\lambda)$ γνησίως αύξουσα με $w'(\lambda) > w'(\tilde{\lambda}) = 0$ για κάθε $\lambda \in [\tilde{\lambda}, \mu)$, τα οποία μας δίνουν

$$SW_2''(\lambda) < 0 \quad \forall \lambda \in [\tilde{\lambda}, \mu).$$

Δηλαδή, SW_2 είναι γνησίως κοίλη.
Τελικά, η SW είναι γνησίως κοίλη. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $w'(\lambda) < 0$ για κάθε $\lambda \in [0, \tilde{\lambda}]$ και συνεπώς η $w(\lambda)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \tilde{\lambda}]$. Ωστόσο, για κάποιες πολύ μικρές τιμές του λ, η $w(\lambda)$ γίνεται πολύ μεγάλη και ενδέχεται να έχουμε ότι

$$R - h_1 w(\lambda) < 0.$$

Μπορούμε με ασφάλεια να αγνοήσουμε αυτές τις πολύ μικρές τιμές και να υποθέσουμε ότι

$$R - h_1 w(\lambda) \geq 0.$$

Έτσι, θα έχουμε ότι

$$SW_1'(\lambda) = R - h_1 w(\lambda) - \lambda h_1 w'(\lambda) > 0$$

και άρα η SW_1 είναι γνησίως αύξουσα στην περιοχή του $[0, \tilde{\lambda}]$, όπου αυτή είναι μη αρνητική.

Για την SW_2 έχουμε

$$\begin{aligned}
SW_2'(\lambda) =& SW_1'(\lambda) - (h_2 - h_1)w(\lambda) - (\lambda - \Lambda_1)(h_2 - h_1)w'(\lambda) \\
=& R - h_1 w(\lambda) - \lambda h_1 w'(\lambda) - h_2 w(\lambda) + h_1 w(\lambda) - \lambda h_2 w'(\lambda) + \lambda h_1 w'(\lambda) \\
&+ \Lambda_1 h_2 w'(\lambda) - \Lambda_1 h_1 w'(\lambda) \\
=& R - h_2 w(\lambda) - [(\lambda - \Lambda_1)h_2 + h_1 \Lambda_1]w'(\lambda).
\end{aligned}$$

Όμοια με πριν μπορούμε να αγνοήσουμε κάποιες πολύ μικρές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει

$$R - h_2 w(\lambda) < 0$$

και να υποθέσουμε ότι

$$R - h_2 w(\lambda) \geq 0.$$

Έτσι, θα έχουμε ότι $SW_2'(\lambda) > 0$ και άρα η SW_2 είναι γνησίως αύξουσα στην περιοχή του $[0, \tilde{\lambda}]$, όπου αυτή είναι αρνητική και έχουμε δείξει το ζητούμενο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η SW είναι μονοκόρυφη και συνεπώς η βέλτιστη στρατηγική $\overline{\lambda}$ είναι μοναδική. Μάλιστα,

$$\overline{\lambda} \geq \tilde{\lambda}.$$

Σημείωση. *Αυτό το συμπέρασμα είναι διαισθητικά αναμενόμενο, καθώς όσο αυξάνεται ο ρυθμός αφίξεων μειώνεται ο συνολικός χρόνος παραμονής στο σύστημα στο* $[0, \tilde{\lambda}]$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ακόμη ένα σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.1.1. *Θεωρούμε δύο συστήματα με τον ίδιο συνολικό ρυθμό άφιξης, αλλά διαφορετική κατανομή στα* h_1 *και* h_2. *Υποθέτουμε ότι*

$$\Lambda_1^1 + \Lambda_2^1 = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 \qquad \text{και} \qquad \Lambda_1^1 < \Lambda_1^2,$$

όπου οι υπερδείκτες, δηλώνουν τα δύο συστήματα 1 και 2 αντίστοιχα. Δηλαδή, στο σύστημα 1 έχουμε λιγότερους πελάτες με χαμηλό κόστος και περισσότερους με υψηλό. Τότε οδηγούμαστε τελικά στο συμπέρασμα ότι

$$\overline{\lambda^1} < \overline{\lambda^2}.$$

Απόδειξη. Πράγματι, θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\overline{\lambda^1} \in [0, \Lambda_1^1]$.
Για $\lambda \in [0, \Lambda_1^1]$ αυτό το διάστημα έχουμε ότι $SW^1(\lambda) = SW^2(\lambda) = SW_1(\lambda)$ και άρα

$$\frac{dSW^2(\overline{\lambda^1})}{d\lambda} = 0.$$

Άρα, $\overline{\lambda^1}$, βέλτιστη λύση στο σύστημα 2. Συνεπώς, $\overline{\lambda^2} = \overline{\lambda^1}$, αφού είναι μονοκόρυφη.

Περίπτωση 2: $\overline{\lambda^1} \in (\Lambda_1^1, \Lambda_1^2]$.
Για $\lambda \in (\Lambda_1^1, \Lambda_1^2]$ ισχύει ότι

$$SW^2(\lambda) = SW_1(\lambda) \qquad \text{και} \qquad SW^1(\lambda) = SW_1(\lambda) - (\lambda - \Lambda_2^1)(h_2 - h_1)w(\lambda).$$

Αφού το $\overline{\lambda^1}$ είναι βέλτιστη λύση, σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη, έχουμε ότι $\overline{\lambda^1} > \tilde{\lambda}$. Έτσι, εφόσον $w(\lambda)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\tilde{\lambda}, +\infty)$ θα είναι και στο $[\overline{\lambda^1}, +\infty) \subseteq [\tilde{\lambda}, +\infty)$, όπως επίσης και η $(\lambda - \Lambda_1^1)(h_2 - h_1)w(\lambda)$.
Συνεπώς, η $(\lambda - \Lambda_1^1)(h_2 - h_1)w(\lambda)$ θα έχει θετική παράγωγο στο $\overline{\lambda^1}$. Έτσι, αφού η $\overline{\lambda^1}$ είναι βέλτιστη :

$$\frac{SW^1(\overline{\lambda^1})}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{dSW_1(\overline{\lambda^1})}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}[(\lambda_1 - \Lambda_1^1)(h_2 - h_1)w(\lambda)]|_{\lambda = \overline{\lambda^1}} > 0.$$

Και άρα

$$\frac{SW^2(\overline{\lambda^1})}{d\lambda} > 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\overline{\lambda^2} \geq \overline{\lambda^1}$.

Περίπτωση 3: $\overline{\lambda^1} \in (\Lambda_1^2, \Lambda_1^1 + \Lambda_2^2]$.
Για $\lambda \in (\Lambda_1^2, \Lambda_1^1 + \Lambda_2^2]$ έχουμε

$$\begin{aligned} SW^2(\lambda) &= SW_1(\lambda) - (\lambda - \Lambda_1^2)(h_2 - h_1)w(\lambda) \\ SW^1(\lambda) &= SW_1(\lambda) - (\lambda - \Lambda_1^1)(h_2 - h_1)w(\lambda). \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$SW^2(\lambda) = SW^1(\lambda) + (\Lambda_1^2 - \Lambda_1^1)(h_2 - h_1)w(\lambda) \Rightarrow \frac{dSW^2(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dSW^1(\lambda)}{d\lambda} + (\Lambda_1^2 - \Lambda_1^1)(h_2 - h_1)w'(\lambda).$$

Έτσι παίρνουμε ότι

$$\frac{dSW^2(\overline{\lambda^1})}{d\lambda} = 0 + (\Lambda_1^2 - \Lambda_1^1)(h_2 - h_1)w'(\overline{\lambda^1}) > 0,$$

αφού $\overline{\lambda^1} > \tilde{\lambda}$ και η $w(\lambda)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\tilde{\lambda}, +\infty)$. Άρα, και σε αυτή την περίπτωση $\overline{\lambda^2} \geq \overline{\lambda^1}$. Οπότε, συμπεραίνουμε ότι όσο αυξάνεται το ποσοστό των πελατών τύπου ένα, δηλαδή των πελατών με χαμηλό κόστος, ο κοινωνικά βέλτιστος ρυθμός άφιξης αυξάνεται.

□

4.1.2 Συνεχής Κατανομή για παράμετρο του κόστους

Εδώ, θα υποθέσουμε ότι η παράμετρος του κόστους ανά χρονική μονάδα παραμονής των πελατών ακολουθεί συνεχή κατανομή.

Στρατηγικές Ισορροπίας

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο ρυθμός άφιξης $\lambda_e = 0$ είναι πάντα σημείο στρατηγικής ισορροπίας, μιας και, όταν όλοι δεν μπαίνουν, ο χρονος παραμονής στο σύστημα είναι άπειρος οπότε δεν συμφέρει η είσοδος σε αυτό. Επίσης, κάποιες φορές μπορεί και ο $\lambda_e = \Lambda$ να είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας, όπου Λ ο ρυθμός άφιξης των πελατών στο σύστημα.
Όταν αναζητούμε σημεία στρατηγικής ισορροπίας $\lambda_e \in (0, \Lambda)$, επειδή η συνάρτηση ωφέλειας είναι φθίνουσα ως προς h, υπάρχει ένας οριακός πελάτης με παράμετρο κόστους h_e, ο οποίος είναι αδιάφορος ως προς το κέρδος για το αν θα εισέλθει ή όχι, δηλαδή η αναμενόμενη ωφέλεια του είναι 0. Από υπόθεση έχουμε ότι $\Lambda < \mu$. Οι πελάτες που μπαίνουν είναι προφανώς αυτοί για τους οποίους $h \leq h_e$. Συνεπώς, το ποσοστό των πελατών που μπαίνουν σε σχέση με τους αφικνούμενους είναι $H(h_e)$ και η στοχαστική διαδικασία σύμφωνα με την οποία εισέρχονται οι πελάτες στο σύστημα είναι Poisson ρυθμού $\lambda(h_e) = \Lambda H(h_e)$. Θα πρέπει, λοιπόν, να λύσουμε την εξίσωση

$$R - h_e w(\lambda(h_e)) = 0,$$

ώστε να προσδιορίσουμε το κατώφλι ισορροπίας h_e.
Γνωρίζουμε ότι η $w(\lambda)$ είναι κυρτή, γνησίως φθίνουσα στο $[0, \tilde{\lambda}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\tilde{\lambda}, \Lambda]$. Συμπεραίνουμε ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης δεν είναι κατ'ανάγκη μοναδική και έτσι δεν μπορούμε να βρούμε ακριβώς τα σημεία στρατηγικής ισορροπίας ούτε να προσδιορίσουμε τον αριθμό τους. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό θα περιοριστούμε στην πολύ ειδική περίπτωση, όπου η παράμερος των πελατών ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$.

Τότε, έχουμε ότι $H(h) = \frac{h-0}{1-0} = h$, συνεπώς $H(h_e) = h_e$ και

$$w(\lambda(h_e)) = w(\Lambda H(h_e)) = w(\Lambda h_e) = \frac{1}{\mu - h_e\Lambda} + \frac{N-1}{2h_e\Lambda}.$$

Έτσι, για να είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας το $\lambda_e \in (0, \Lambda)$ θα πρέπει το h_e να ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} R - h_e w(\lambda(h_e)) = 0 &\Rightarrow R - \left(\frac{h_e}{\mu - h_e\Lambda} + \frac{N-1}{2\Lambda}\right) = 0 \\ &\Rightarrow R = \frac{h_e}{\mu - h_e\Lambda} + \frac{N-1}{2\Lambda}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(h_e) = \frac{h_e}{\mu - h_e\Lambda} + \frac{N-1}{2\Lambda}$$

και έχουμε

$$g'(h_e) = \frac{\mu - \Lambda h_e + \Lambda h_e}{(\mu - \Lambda h_e)^2} = \frac{\mu}{(\mu - \Lambda h_e)^2} > 0 \quad \forall h_e \in [0, 1].$$

Άρα, είναι γνησίως αύξουσα ως προς h_e και παίρνει τιμές στο $[\frac{N-1}{2\Lambda}, \frac{1}{\mu-\Lambda} + \frac{N-1}{2\Lambda}]$. Έτσι, μόνο όταν $R > \frac{N-1}{2\Lambda}$ υπάρχει μοναδική θετική λύση της $R - g(h_e) = 0$. Η παραπάνω συνθήκη εκφράζει ότι, όταν όλοι οι άλλοι μπαίνουν στο σύστημα και ο υπηρέτης είναι ανενεργός, τότε συμφέρει να μπει κανείς στο σύστημα.

Συνοπτικά έχουμε

- Το $\lambda_e = h_e = 0$ είναι πάντα σημείο στρατηγικής ισορροπίας.
- Αν $R \leq \frac{N-1}{2\Lambda}$, τότε το $\lambda_e = h_e = 0$ είναι το μοναδικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας.
- Αν $\frac{N-1}{2\Lambda} < R < \frac{1}{\mu-\Lambda} + \frac{N-1}{2\Lambda}$, υπάρχει μοναδικό θετικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας $\lambda_e = h_e$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} R = \frac{h_e}{\mu - h_e\Lambda} + \frac{N-1}{2\Lambda} &\Rightarrow R(\mu - h_e\Lambda)2\Lambda = 2\Lambda h_e + (N-1)(\mu - h_e\Lambda) \\ &\Rightarrow 2\Lambda R\mu - 2R\Lambda^2 h_e = 2\Lambda h_e + (N-1)\mu - (N-1)h_e\Lambda \\ &\Rightarrow h_e(2R\Lambda^2 - (N-3)\Lambda) = (2\Lambda R - (N-1))\mu \\ &\Rightarrow h_e = \frac{\mu}{\Lambda}\frac{2\Lambda R - (N-1)}{2\Lambda R - (N-3)}. \end{aligned}$$

- Αν $R > \dfrac{1}{\mu - \Lambda} + \dfrac{N-1}{2\Lambda}$, τότε το $\lambda_e = h_e = 1$ είναι το σημείο της στρατηγικής ισορροπίας.

Βελτιστοποίηση της Κοινωνικής Ωφέλειας

Στην συνέχεια θα προχωρήσουμε στο πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιασμού. Εδώ, θεωρώντας πάλι ότι η παράμετρος είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0,1]$, θέλουμε το $\lambda^* = \Lambda h^*$, όπου το h^* μεγιστοποιεί την συνάρτηση ωφέλειας, $SW(h)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} SW(h) &= \Lambda \int_0^h [R - xw(\lambda(h))]dH(x) \\ &= \Lambda \int_0^h [R - xw(\Lambda h)]dx \\ &= \Lambda \int_0^h \left[R - x\left(\frac{1}{\mu - \Lambda h} + \frac{N-1}{2\Lambda h}\right)\right] dx \\ &= \Lambda \left[Rh - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{\mu - \Lambda h} + \frac{N-1}{2\Lambda h}\right)\right] \\ &= \Lambda Rh - \frac{\Lambda h^2}{2(\mu - \Lambda h)} - \frac{\Lambda h(N-1)}{4\Lambda} \\ &= \Lambda\left(R - \frac{N-1}{4\Lambda}\right)h - \frac{\Lambda h^2}{2(\mu - \Lambda h)}. \end{aligned}$$

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την $SW(h)$, συνεπώς υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} SW'(h) &= \Lambda\left(R - \frac{N-1}{4\Lambda}\right) - \frac{\Lambda}{2}\left[\frac{2h(\mu-\Lambda h)+\Lambda h^2}{(\mu-\Lambda h)^2}\right] \\ &= \Lambda\left(R - \frac{N-1}{4\Lambda}\right) - \frac{\Lambda}{2}\left(\frac{2h\mu-\Lambda h^2}{(\mu-\Lambda h)^2}\right) \\ &= \frac{\Lambda}{2}\left[2R - \frac{N-1}{2\Lambda} - \frac{h(2\mu-\Lambda h)}{(\mu-\Lambda h)^2}\right], \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} SW''(h) &= \left[\frac{\Lambda}{2}\left(2R - \frac{N-1}{2\Lambda} - \frac{2\mu h - h^2\Lambda}{(\mu-h\Lambda)^2}\right)\right]' \\ &= -\frac{\Lambda}{2}\frac{(2\mu-2\Lambda h)(\mu-\Lambda h)^2 + 2(\mu-\Lambda h)(2\mu-\Lambda h)h\Lambda}{(\mu-h\Lambda)^4} \\ &= \frac{-\Lambda[(\mu-h\Lambda)^3 + (\mu-h\Lambda)(2\Lambda\mu h - \Lambda^2h^2)]}{(\mu-\Lambda h)^4} \\ &= \frac{-\Lambda}{(\mu-h\Lambda)^3}((\mu-h\Lambda)^2 + 2\mu h\Lambda - \Lambda^2h^2) \\ &= \frac{-\Lambda}{(\mu-h\Lambda)^3}[\mu^2 - 2\Lambda h\mu + \Lambda^2h^2 + 2\Lambda h\mu - \Lambda^2h^2] \\ &= \frac{-\Lambda\mu^2}{(\mu-h\Lambda)^3} < 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η $SW(h)$ είναι κοίλη. Για να βρούμε το σημείο μεγίστου λύνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} SW'(h) = 0 \Rightarrow 2R - \frac{N-1}{2\Lambda} &= \frac{h(2\mu-\Lambda h)}{(\mu-\Lambda h)^2} \\ \Rightarrow \left(\mu^2 - 2\Lambda\mu h + \Lambda^2h^2\right)\left(2R - \frac{N-1}{2\Lambda}\right) &= 2\mu h - \Lambda h^2 \\ \Rightarrow h^2\left[\Lambda^2\left(2R - \frac{N-1}{2\Lambda}\right) + \Lambda\right] - \left(2\Lambda\mu\left(2R - \frac{N-1}{2\Lambda}\right) + 2\mu\right)h & \\ + \mu^2\left(2R - \frac{N-1}{2\Lambda}\right) &= 0 \\ \Rightarrow h^2\left(2R\Lambda^2 - \frac{N-3}{2}\Lambda\right) - [4R\Lambda\mu - (N-3)\mu]h + \mu^2\left(2R - \frac{N-1}{2\Lambda}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι καταλήγουμε σε εξίσωση 2ου βαθμού ως προς h, συνεπώς θα υπολογίσουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου Δ

$$\begin{aligned} \Delta =& [4R\Lambda\mu - (N-3)\mu]^2 - 4\left(2R\Lambda^2 - \frac{N-3}{2}\Lambda\right)\left(2R - \frac{N-1}{2\Lambda}\right)\mu^2 \\ =& 16R^2\Lambda^2\mu^2 - 8R\Lambda\mu^2(N-3) + (N-3)^2\mu^2 - 4\left(2R\Lambda^2 - \frac{N-3}{2}\Lambda\right)\left(2R - \frac{N-1}{2\Lambda}\right)\mu^2 \\ =& 16R^2\Lambda^2\mu^2 - 8R\Lambda\mu^2(N-3) + (N-3)^2\mu^2 \\ & - 4\left(4R^2\Lambda^2\mu^2 - R\Lambda(N-1)\mu^2 - R\Lambda(N-3)\mu^2 + \frac{(N-3)(N-1)}{4}\mu^2\right) \\ =& 16R^2\Lambda^2\mu^2 - 8R\Lambda\mu^2(N-3) + (N-3)^2\mu^2 - 16R^2\Lambda^2\mu^2 + 4R\Lambda(N-1)\mu^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+4R\Lambda(N-3)\mu^2-(N-3)(N-1)\mu^2\\
=&(N-3)^2\mu^2+4R\Lambda(N-1)\mu^2-4R\Lambda(N-3)\mu^2-(N-1)(N-3)\mu^2\\
=&(N-3)\mu^2((N-3)-4R\Lambda)+(N-1)\mu^2(4R\Lambda-(N-3))\\
=&[(N-3)-4R\Lambda]\mu^2(N-3-N+1)\\
=&2\mu^2(4R\Lambda-(N-3)).
\end{aligned}
$$

Άρα, οι λύσεις είναι

$$
\begin{aligned}
h_{1,2}&=\frac{4R\Lambda\mu-(N-3)\mu\pm\mu\sqrt{2(4R\Lambda-N+3)}}{2\left(2R\Lambda^2-\frac{N-3}{2}\Lambda\right)}\\
&=\frac{2\mu\left(2R\Lambda-\frac{N-3}{2}\right)\pm2\mu\sqrt{2R\Lambda-\frac{N-3}{2}}}{2\Lambda(2R\Lambda-\frac{N-3}{2})}\\
&=\frac{\mu}{\Lambda}\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2R\Lambda-\frac{N-3}{2}}}\right).
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι η λύση

$$
h_2=\frac{\mu}{\Lambda}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2R\Lambda-\frac{N-3}{2}}}\right)
$$

είναι μεγαλύτερη του 1 και άρα την απορρίπτουμε, αφού υποθέσαμε $\mu>\Lambda$. Για την h_1 ισχύει ότι $h_1<1$, όμως θέλουμε επίσης $h_1>0$. Η συνθήκη, λοιπόν, για να έχουμε μοναδική λύση στο [0,1] είναι

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu}{\Lambda}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2R\Lambda-\frac{N-3}{2}}}\right)>0&\Rightarrow\sqrt{2R\Lambda-\frac{N-3}{2}}>1\\
&\Rightarrow 2R\Lambda-\frac{N-3}{2}>1\\
&\Rightarrow 2R\Lambda>\frac{N-1}{2}\\
&\Rightarrow R>\frac{N-1}{4\Lambda}.
\end{aligned}
$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι αν $R>\dfrac{N-1}{4\Lambda}$, τότε έχουμε μοναδικό $h^*\in(0,1)$ με

$$
h^*=\frac{\mu}{\Lambda}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2R\Lambda-\frac{N-3}{2}}}\right),
$$

τέτοιο ώστε να μεγιστοποιεί την $SW(h)$ και αν $R\leq\frac{N-1}{4\Lambda}$, τότε παίρνουμε $h^*=0$. Επίσης, παρατηρούμε ότι η συνθήκη ύπαρξης θετικού κοινωνικά βέλτιστου σημείου $\left(R>\frac{N-1}{4\Lambda}\right)$ είναι ασθενέστερη από την συνθήκη ύπαρξης θετικού σημείου στρατηγικής ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι κάτω από την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική οι πελάτες είναι δυνατόν να εισέρχονται στο σύστημα ακόμη και αν η ατομική τους ωφέλεια είναι αρνητική.

Στη συνέχεια, συγκρίνουμε το σημείο στρατηγικής ισορροπίας με το κοινωνικά βέλτιστο.
Πράγματι, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

- Αν $R \leq \frac{N-1}{4\Lambda}$, τότε έχουμε ότι $h_e = h^* = 0$.
- Αν $\frac{N-1}{4\Lambda} < R \leq \frac{N-1}{2\Lambda}$, τότε έχουμε ότι $h_e = 0$ και $h^* \in (0,1)$.
- Αν $R \geq \frac{1}{\mu-\Lambda} + \frac{N-1}{2\Lambda}$, τότε έχουμε ότι $h_e = 1$ και $h^* \in (0,1)$.
- Τέλος, αν $\frac{N-1}{2\Lambda} < R < \frac{1}{\mu-\Lambda} + \frac{N-1}{2\Lambda}$ έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
h^* > h_e &\Leftrightarrow \frac{\mu}{\Lambda}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2R\Lambda - \frac{N-3}{2}}}\right) > \frac{\mu}{\Lambda}\frac{2R\Lambda - (N-1)}{2R\Lambda - (N-3)} \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2R\Lambda - \frac{N-3}{2}}} > \frac{R\Lambda - \frac{N-1}{2}}{R\Lambda - \frac{N-3}{2}} \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2R\Lambda - \frac{N-3}{2}}} > \frac{R\Lambda - 1 - \frac{N-3}{2}}{R\Lambda - \frac{N-3}{2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{R\Lambda - \frac{N-3}{2}} > \frac{1}{\sqrt{2R\Lambda - \frac{N-3}{2}}} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{R\Lambda + 1 - \frac{N-1}{2}} > \frac{1}{\sqrt{2R\Lambda - \frac{N-3}{2}}} \\
&\Leftrightarrow 2R\Lambda + 1 - \frac{N-1}{2} > (R\Lambda+1)^2 - 2(R\Lambda+1)\frac{N-1}{2} + \frac{(N-1)^2}{4} \\
&\Leftrightarrow 2R\Lambda + 1 - \frac{N-1}{2} > (R\Lambda)^2 + 2R\Lambda + 1 - R\Lambda(N-1) - (N-1) + \frac{(N-1)^2}{4} \\
&\Leftrightarrow (R\Lambda)^2 - (N-1)R\Lambda + \left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \frac{N-1}{2} < 0 \\
&\Leftrightarrow (R\Lambda)^2 - (N-1)R\Lambda + \left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{N-3}{2}\right) < 0 \\
&\Leftrightarrow (R\Lambda)^2 - (N-1)R\Lambda + \frac{(N-1)(N-3)}{4} < 0.
\end{aligned}
$$

Καταλήγουμε σε ανίσωση 2ου βαθμού ως προς $R\Lambda$ και θα τη λύσουμε παίρνοντας τη διακρίνουσα του τριωνύμου

$$
\begin{aligned}
\Delta &= (N-1)^2 - 4\frac{(N-1)(N-3)}{4} = (N-1)^2 - (N-1)(N-3) \\
&= (N-1)[(N-1)-(N-3)] = 2(N-1).
\end{aligned}
$$

Άρα, οι ρίζες του τριωνύμου είναι

$$
(R\Lambda)_{1,2} = \frac{N-1 \pm \sqrt{2(N-1)}}{2} = \frac{N-1}{2} \pm \sqrt{\frac{N-1}{2}}.
$$

Έτσι, η λύση της ανίσωσης $(R\Lambda)^2 - (N-1)R\Lambda + \frac{(N-1)(N-3)}{4} < 0$ είναι

$$\frac{N-1}{2} - \sqrt{\frac{N-1}{2}} < \Lambda R < \frac{N-1}{2} + \sqrt{\frac{N-1}{2}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{N-1}{2} - \sqrt{\frac{N-1}{2}}\right) < R < \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{N-1}{2} + \sqrt{\frac{N-1}{2}}\right),$$

όπου η αριστερή ανισότητα ισχύει αν $h_e > 0$, καθώς πρέπει

$$R > \frac{N-1}{2\Lambda} \Rightarrow R > \frac{N-1}{2\Lambda} - \frac{1}{\Lambda}\sqrt{\frac{N-1}{2}}$$

καθώς $\frac{1}{\Lambda}\sqrt{\frac{N-1}{2}} > 0$.
Επίσης, έχουμε ότι

$$R \leq \frac{1}{\Lambda}\left(\sqrt{\frac{N-1}{2}} + \frac{N-1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\mu-\Lambda} + \frac{N-1}{2\Lambda} \leq \frac{1}{\Lambda}\left(\sqrt{\frac{N-1}{2}} + \frac{N-1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\mu-\Lambda} \leq \frac{1}{\Lambda}\sqrt{\frac{N-1}{2}}$$
$$\Rightarrow \frac{\Lambda}{\mu-\Lambda} \leq \sqrt{\frac{N-1}{2}},$$

και άρα $h_e \leq h^*$, όταν $h_e < 1$.

Από τα παραπάνω απορρέει το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 4.1.1. *Αν* $\dfrac{\Lambda}{\mu-\Lambda} \leq \sqrt{\dfrac{N-1}{2}}$*, τότε* $h_e \leq h^*$*. Διαφορετικά* $h_e \leq h^*$ *αν και μόνο αν*

$$R \leq \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{N-1}{2} + \sqrt{\frac{N-1}{2}}\right)$$

4.2 Παρατηρήσιμο Μοντέλο

Σε αυτό το σύστημα υποθέτουμε ότι οι πελάτες γνωρίζουν το μήκος της ουράς, καθώς και την κατάσταση του υπηρέτη, πριν πάρουν την απόφασή τους για το αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή αν θα αποχωρήσουν. Όπως και στο μη παρατηρήσιμο μοντέλο, έτσι κι εδώ η στρατηγική όπου δεν μπαίνει κανείς ποτέ είναι σημείο ισορροπίας, αφού η βέλτιστη απάντηση για έναν πελάτη όταν οι υπόλοιποι δεν μπαίνουν, είναι να μην μπει ούτε και αυτός μιας και ο χρόνος αναμονής είναι άπειρος. Σε αυτή την περίπτωση, ο υπηρέτης δεν θα ενεργοποιηθεί ποτέ. Εμείς θα εστιάσουμε στο να βρούμε σημεία στρατηγικής ισορροπίας στα οποία ο υπηρέτης να ενεργοποιείται για ένα τουλάχιστον χρονικό διάστημα. Όπως και στο μη-παρατηρήσιμο μοντέλο θα μελετήσουμε δύο συστήματα όπου οι πελάτες είναι ετερογενείς ως προς την παράμετρο του κόστους ανά χρονική μονάδα.

4.2.1 Δύο Τύποι Πελατών

Εδώ, υποθέτουμε ότι έχουμε δύο είδη πελατών με διαφορετικά κόστη ανά μονάδα παραμονής στο σύστημα h_1 και h_2, με $h_1 < h_2$. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι ρυθμοί άφιξης των πελατών τύπου 1 και 2 είναι Λ_1 και Λ_2 αντίστοιχα.

Στρατηγικές Ισορροπίας

Οι στρατηγικές ισορροπίας θα είναι τύπου κατωφλιού και θα τις συμβολίζουμε με n_e. Επίσης, θα συμβολίζουμε με $W_{(i,j)}$ τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη που φτάνει όταν αυτό βρίσκεται στην κατάσταση (i,j), όπου $i = 0,1,\ldots,N,N+1,\ldots$ και $j = 0,1$.
Όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός και οι πελάτες μπορούν να δουν το μήκος της ουράς, τότε χρησιμοποιούν μία στρατηγική κατωφλίου σύμφωνα με την οποία μπαίνουν μόνο όταν ο αριθμός των πελατών που βλέπουν μπροστά τους δεν υπερβαίνει το $\dfrac{R\mu}{h_1}$ και $\dfrac{R\mu}{h_2}$, για τους πελάτες τύπου 1 και 2 αντίστοιχα. Αρχικά, υποθέτουμε ότι οι πελάτες τύπου 1 εισέρχονται πάντα στο σύστημα όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός και θα καταλήξουμε στα παρακάτω.

Θεώρημα 4.2.1. *Στο παρατηρήσιμο μοντέλο με δύο τύπους πελατών ισχύουν οι τα παρακάτω σχετικά με τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών τύπου 2.*

1. *Έστω ότι $\Lambda_1 > \mu$ και* $n_e^a = \left\lfloor \dfrac{\frac{R}{h_2} - \dfrac{N}{\Lambda_1}}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\Lambda_1}} \right\rfloor$.
   - *Αν $n_e^a \leq 0$, τότε οι πελάτες τύπου 2 δεν μπαίνουν ποτέ όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός.*
   - *Αν $n_e^a > N$, τότε οι πελάτες τύπου 2 μπαίνουν πάντα όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός.*
   - *Αν $n_e^a \in \{1,2,\ldots,N\}$, τότε οι πελάτες τύπου 2 μπαίνουν στις καταστάσεις $\{(0,0),(1,0),\ldots,(n_e^a-1,0)\}$ και δεν μπαίνουν σε όλες τις υπόλοιπες, όπου ο υπηρέτης είναι ανενεργός.*

2. *Έστω ότι $\Lambda_1 + \Lambda_2 < \mu$ και* $n_e^b = \left\lceil \dfrac{\frac{R}{h_2} - \dfrac{N}{\Lambda_1+\Lambda_2}}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2}} \right\rceil - 1$.
   - *Αν $n_e^b < 0$, τότε οι πελάτες τύπου 2 μπαίνουν πάντα όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός.*
   - *Αν $n_e^b > N$, τότε οι πελάτες τύπου 2 δεν μπαίνουν ποτέ όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός.*
   - *Αν $n_e^b \in \{1,2,\ldots,N\}$, τότε οι πελάτες τύπου 2 δεν μπαίνουν στις καταστάσεις $\{(0,0),(1,0),\ldots,(n_e^b-1,0)\}$ και μπαίνουν σε όλες τις υπόλοιπες, όπου ο υπηρέτης είναι ανενεργός.*

3. *Έστω ότι $\Lambda_1 \leq \mu \leq \Lambda_1 + \Lambda_2$.*
   - *Αν $\dfrac{N}{\mu} \leq \dfrac{R}{h_1}$, τότε οι πελάτες τύπου 2 μπαίνουν πάντα όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός.*
   - *Αν $\dfrac{N}{\mu} > \dfrac{R}{h_1}$, τότε οι πελάτες τύπου 2 δεν μπαίνουν ποτέ όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός.*

Απόδειξη. 1. Για να είναι το n_e^a κατώφλι πρέπει η συνολική ωφέλεια για τις καταστάσεις $\{(0,0),(1,0),\ldots,(n_e^a,0)\}$ να είναι θετική και για τις άλλες καταστάσεις αρνητική. Έχουμε ότι

$$\Lambda_1 > \mu \Rightarrow \frac{1}{\Lambda_1} < \frac{1}{\mu} \Rightarrow \frac{1}{\Lambda_1} - \frac{1}{\mu} < 0 \Rightarrow \frac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2} - \frac{1}{\mu} < 0.$$

Αν οι πελάτες τύπου 2 μπαίνουν στην κατάσταση $(m,0)$, τότε έχουμε ότι ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη που εισέρχεται στην κατάσταση $(m-1,0)$

$$W_{(m-1,0)} = W_{(m,0)} + \frac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2} - \frac{1}{\mu} < W_{(m,0)}.$$

Βλέπουμε ότι όσο ο υπηρέτης είναι ανενεργός, ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής αυξάνεται όσο αυξάνεται το μήκος της ουράς και έτσι οι πελάτες τύπου 2 χρησιμοποιούν μία στρατηγική τύπου κατωφλιού, σύμφωνα με την οποία μπαίνουν μόνο όταν το μήκος της ουράς είναι χαμηλότερο από το κατώφλι n_e^a. Έτσι, μπαίνουν στις καταστάσεις $\{(0,0),(1,0),\ldots,(n_e^a-1,0)\}$ και δεν μπαίνουν στις $\{(n_e^a,0),(n_e^a+1),\ldots,(N-1,0)\}$. Ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής για έναν πελάτη που μπαίνει στην κατάσταση $(n_e^a-1,0)$ είναι

$$\frac{N-n_e^a}{\Lambda_1} + \frac{n_e^a}{\mu}.$$

Εφόσον ο πελάτης είναι τύπου 2 θέλει να μπει όταν βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(n_e^a-1,0)$, θα ισχύει

$$\frac{N-n_e^a}{\Lambda_1} + \frac{n_e^a}{\mu} \leq \frac{R}{h_2}.$$

Στην κατάσταση $(n_e^a,0)$ ο πελάτης τύπου 2 δεν μπαίνει και έτσι ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής ικανοποιεί την

$$\frac{N-n_e^a-1}{\Lambda_1} + \frac{n_e^a+1}{\mu} > \frac{R}{h_2}.$$

Από τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε ότι

$$n_e^a \leq \frac{\frac{R}{h_2} - \frac{N}{\Lambda_1}}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\Lambda_1}} \qquad \text{και} \qquad n_e^a > \frac{\frac{R}{h_2} - \frac{N}{\Lambda_1}}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\Lambda_1}} - 1.$$

Συνεπώς,

$$n_e^a = \left\lfloor \frac{\frac{R}{h_2} - \frac{N}{\Lambda_1}}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\Lambda_1}} \right\rfloor.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι αν

$$\frac{R}{h_2} < \frac{N-1}{\Lambda_1} + \frac{1}{\mu},$$

που σημαίνει ότι $n_e^a \leq 0$, τότε δε συμφέρει έναν πελάτη τύπου 2 να μπει σε μία κατάσταση που ο υπηρέτης είναι ανενεργός, ενώ αν

$$\frac{R}{h_2} \geq \frac{N}{\mu},$$

που σημαίνει ότι $n_e^a > N$, τότε ένας πελάτης τύπου 2 ωφελείται αν μπει σε όλες τις καταστάσεις με ανενεργό υπηρέτη ακόμη και στην $(N-1,0)$.

2. Για να είναι το n_e^b κατώφλι της μορφής που περιγράφει το θεώρημα, πρέπει η συνολική οφέλεια για τις καταστάσεις $\{(0,0),(1,0),\ldots,(n_e^b,0)\}$ να είναι αρνητική και για τις άλλες καταστάσεις θετική. Έχουμε ότι

$$\Lambda_1+\Lambda_2<\mu \Rightarrow \frac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2} > \frac{1}{\mu} \Rightarrow \frac{1}{\Lambda_1} > \frac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2} > \frac{1}{\mu}.$$

Έτσι, όταν οι πελάτες τύπου 2 μπαίνουν στην $(m,0)$ έχουμε ότι

$$W_{(m-1,0)} = W_{(m,0)} + \frac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2} - \frac{1}{\mu} > W_{(m,0)},$$

ενώ όταν δεν μπαίνουν έχουμε

$$W_{(m-1,0)} = W_{(m,0)} + \frac{1}{\Lambda_1} - \frac{1}{\mu} > W_{(m,0)}.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής φθίνει όσο αυξάνεται το μήκος της ουράς και, έτσι, οι πελάτες τύπου 2 χρησιμοποιούν στρατηγική κατωφλιού σύμφωνα με την οποία μπαίνουν στο σύστημα μόνο όταν το μήκος της ουράς υπερβαίνει το κατώφλι n_e^b. Έτσι μπαίνουν στις $\{(n_e^b,0),(n_e^b+1,0),\ldots,(N-1,0)\}$ και δεν μπαίνουν στις $\{(0,0),(1,0),\ldots,(n_e^b-1,0)\}$. Ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής για έναν πελάτη τύπου 2 που δεν βλέπει το σύστημα στην κατάσταση $(n_e^b-1,0)$ είναι

$$\frac{N-n_e^b}{\Lambda_1+\Lambda_2} + \frac{n_e^b}{\mu}.$$

Εφόσον ο πελάτης τύπου 2 δε θέλει να μπει όταν το σύστημα είναι σε κατάσταση $(n_e^b-1,0)$ ισχύει

$$\frac{N-n_e^b}{\Lambda_1+\Lambda_2} + \frac{n_e^b}{\mu} > \frac{R}{h_2}.$$

Επίσης, στην κατάσταση $(n_e^b,0)$ ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής ικανοποιεί την

$$\frac{N-n_e^b-1}{\Lambda_1+\Lambda_2} + \frac{n_e^b+1}{\mu} \leq \frac{R}{h_2}.$$

Από τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε

$$n_e^b < \frac{\frac{R}{h_2} - \frac{N}{\Lambda_1+\Lambda_2}}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2}} \quad \text{και} \quad n_e^b \geq \frac{\frac{R}{h_2} - \frac{N}{\Lambda_1+\Lambda_2}}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2}} - 1.$$

Συνεπώς

$$n_e^b = \left\lceil \frac{\frac{R}{h_2} - \frac{N}{\Lambda_1+\Lambda_2}}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2}} \right\rceil.$$

Επίσης, όταν $\frac{N}{\mu} > \frac{R}{h_2}$, δηλαδή όταν $n_e^b > N$ τότε δεν συμφέρει τους πελάτες τύπου 2 να μπουν σε καμία κατάσταση που ο υπηρέτης είναι ανενεργός, ενώ όταν $\frac{N-1}{\Lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\mu} \leq \frac{R}{h_2}$, δηλαδή όταν $n_e^b \leq 0$ τους συμφέρει να μπουν σε όλες, ακόμη και στην $(0,0)$.

3. Έχουμε ότι

$$\Lambda_1 \leq \mu \leq \Lambda_1 + \Lambda_2 \Rightarrow \frac{1}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \leq \frac{1}{\mu} \leq \frac{1}{\Lambda_1}.$$

Έτσι, όταν οι πελάτες τύπου 2 μπαίνουν στην $(m,0)$ έχουμε ότι

$$W_{(m-1,0)} = W_{(m,0)} + \frac{1}{\Lambda_1 + \Lambda_2} - \frac{1}{\mu} < W_{(m,0)}$$

και έτσι πρέπει να μπουν και στην $(m-1,0)$.
Όταν οι πελάτες τύπου 2 δεν μπαίνουν στην $(m,0)$, τότε

$$W_{(m-1,0)} = W_{(m,0)} + \frac{1}{\Lambda_1} - \frac{1}{\mu} > W_{(m,0)}$$

και έτσι δεν πρέπει να μπουν ούτε στην $(m-1,0)$.
Έτσι συμπεραίνουμε ότι αρκεί να ξέρουμε τη στρατηγική ισορροπίας των πελατών τύπου 2 στην κατάσταση $N-1$.

□

Στη συνέχεια θέλουμε να προσδιορίσουμε τις συνθήκες, σύμφωνα με τις οποίες υπάρχει στρατηγική ισορροπίας, με ενεργό υπηρέτη. Έτσι παρουσιάζουμε το παρακάτω .

Θεώρημα 4.2.2. *Στο παρατηρήσιμο μοντέλο με δύο τύπους πελατών ισχύουν τα παρακάτω σχετικά με τις στρατηγικές ισορροπίας με ενεργό υπηρέτη*

1. *Έστω ότι $\Lambda_1 > \mu$. Υπάρχει στρατηγική ισορροπίας με ενεργό υπηρέτη αν και μόνο αν*

$$\frac{N}{\mu} < \frac{R}{h_1}$$

2. *Έστω ότι $\Lambda_1 + \Lambda_2 < \mu$. Υπάρχει στρατηγική ισορροπίας με ενεργό υπηρέτη αν και μόνο αν*

$$\frac{1}{\mu} + \frac{n_e^b - 1}{\Lambda_1} + \frac{N - n_e^b}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \leq \frac{R}{h_1}$$

3. *Έστω ότι $\Lambda_1 \leq \mu \leq \Lambda_1 + \Lambda_2$*

- *Αν $\dfrac{N}{\mu} < \dfrac{R}{h_2}$ υπάρχει στρατηγική ισορροπίας με ενεργό υπηρέτη αν και μόνο αν*

$$\frac{N}{\mu} \leq \frac{R}{h_1}$$

- *Αν $\dfrac{N}{\mu} > \dfrac{R}{h_2}$ υπάρχει στρατηγική ισορροπίας με ενεργό υπηρέτη αν και μόνο αν*

$$\frac{1}{\mu} + \frac{N-1}{\Lambda_1} \leq \frac{R}{h_1}$$

Απόδειξη. Για να υπάρχει στρατηγική ισορροπίας με ενεργό υπηρέτη είναι απαραίτητη προϋπόθεση οι πελάτες τύπου 1 να μπαίνουν σε όλες τις καταστάσεις με τον υπηρέτη ανενεργό. Από αυτές τις καταστάσεις, στην περίπτωση (1) η κατάσταση $(N-1,0)$ είναι αυτή με τον μεγαλύτερο χρόνο παραμονής στο σύστημα, ενώ στην περίπτωση (2) η $(0,0)$ είναι αυτή με τον μεγαλύτερο χρόνο παραμονής. Αυτοί οι χρόνοι δεν θα πρέπει να υπερβαίνουν το $\frac{R}{h_1}$.
Έτσι, παίρνοντας την περίπτωση (2) και, σύμφωνα με το Θεώρημα (4.2.1), έχουμε ότι ο χρόνος παραμονής φθίνει όσο αυξάνεται το μήκος της ουράς και έτσι ο μεγαλύτερος χρόνος παραμονής είναι στην κατάσταση $(0,0)$, συνεπώς

- αν $n_e^b \in \{1,2,\ldots,N\}$ η συνθήκη είναι
$$\frac{1}{\mu}+\frac{n_e^b-1}{\Lambda_1}+\frac{N-n_e^b}{\Lambda_1+\Lambda_2}\leq\frac{R}{h_1}.$$
- αν $n_e^b \leq 0$, τότε οι πελάτες τύπου 2 μπαίνουν σε όλες τις καταστάσεις με ανενεργό υπηρέτη και η συνθήκη γίνεται
$$\frac{1}{\mu}+\frac{N-1}{\Lambda_1+\Lambda_2}\leq\frac{R}{h_1}.$$
- αν $n_e^b \geq N$, τότε οι πελάτες τύπου 2 δεν μπαίνουν ποτέ όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός και η συνθήκη γίνεται
$$\frac{1}{\mu}+\frac{N-1}{\Lambda_1}\leq\frac{R}{h_1}.$$

Ανάλογα παίρνουμε και την περίπτωση (1).
Στην περίπτωση (3), όπως δείξαμε και στο Θεώρημα (4.2.1) αν $\frac{N}{\mu}\leq\frac{R}{h_1}$, τότε οι πελάτες τύπου 2 μπαίνουν αν μπαίνουν οι πελάτες τύπου 1, διαφορετικά δεν μπαίνουν ποτέ. Όταν οι πελάτες τύπου 2 μπαίνουν και ισχύει ότι $\mu\leq\Lambda_1+\Lambda_2$, ο μεγαλύτερος χρόνος παραμονής είναι στην κατάσταση $(N-1,0)$ και η συνθήκη για να έχουμε ενεργό υπηρέτη είναι
$$\frac{N}{\mu}\leq\frac{R}{h_1}.$$
Όταν, οι πελάτες τύπου 2 δεν μπαίνουν ποτέ και ισχύει $\Lambda_1\leq\mu$, ο μεγαλύτερος χρόνος παραμονής είναι στην κατάσταση $(0,0)$ και η συνθήκη για να έχουμε ενεργό υπηρέτη είναι
$$\frac{1}{\mu}+\frac{N-1}{\Lambda_1}\leq\frac{R}{h_1}.$$
□

Βελτιστοποίηση της Κοινωνικής Ωφέλειας

Στην συνέχεια, θα προχωρήσουμε στο πρόβλημα εύρεσης κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών. Κάτω από την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική ο ρυθμός άφιξης σε κάθε κατάσταση θα είναι 0 ή Λ_1 ή $\Lambda_1+\Lambda_2$. Μελετώντας το διάγραμμα του ρυθμού μετάβασης του συστήματος, παρατηρούμε ότι στις καταστάσεις $\{(0,0),(1,0),\ldots,(N-1,0)\}$ η μοναδική δυνατή μετάβαση είναι από την κατάσταση $(m,0)$ στην $(m+1,0)$. Έτσι,

αν ανταλλάξουμε τους ρυθμούς άφιξης μόνο για αυτές τις δύο καταστάσεις, και κρατήσουμε τους ίδιους για όλες τις υπόλοιπες καταστάσεις, τότε η κοινωνική ωφέλεια θα αλλάξει μόνο για τους πελάτες που μπαίνουν σε αυτές τις δύο καταστάσεις.
Κάνοντας, λοιπόν, χρήση αυτής της ιδιότητας παίρνουμε κάποια αποτελέσματα που αφορούν την μονοτονία του κοινωνικά βέλτιστου ρυθμού άφιξης. Συγκεκριμένα έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2.1. *Αν* $\dfrac{\Lambda_1}{\mu} < \dfrac{h_2}{h_2 - h_1}$, *τότε οι κοινωνικά βέλτιστοι ρυθμοί άφιξης αυξάνουν στο σύνολο των καταστάσεων* $\{(0,0),(1,0)\ldots,(N-1,0)\}$.
Αν $\dfrac{\Lambda_1}{\mu} > \dfrac{h_2}{h_2 - h_1}$, *τότε οι κοινωνικά βέλτιστοι ρυθμοί άφιξης μειώνονται στο σύνολο των καταστάσεων* $\{(0,0),(1,0)\ldots,(N-1,0)\}$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\dfrac{\Lambda_1}{\mu} < \dfrac{h_2}{h_2 - h_1}$.
Υποθέτουμε ότι οι ρυθμοί άφιξης φθίνουν στις καταστστάσεις $\{(0,0),(1,0),\ldots,(N-1,0)\}$. Έτσι, ο ρυθμός στην κατάσταση $(m,0)$ είναι $\Lambda_1+\Lambda_2$, ενώ στην $(m+1,0)$ είναι Λ_1. Στη συνέχεια, ανταλλάσσουμε τη συμπεριφορά των πελατών στις δύο καταστάσεις, χωρίς αυτή η ανταλλαγή να επηρεάζει τις υπόλοιπες καταστάσεις. Ορίζουμε ως P_s την πιθανότητα να εισέλθει ένας πελάτης στο σύστημα στην κατάσταση s. Έτσι, έχουμε

$$P_{(m,0)} = \frac{\dfrac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2}}{\dfrac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2}+\dfrac{1}{\Lambda_1}} \qquad P_{(m+1,0)} = \frac{\dfrac{1}{\Lambda_1}}{\dfrac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2}+\dfrac{1}{\Lambda_1}}.$$

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τις παραπάνω πιθανότητες ως το ποσοστό του χρόνου που περνάει η Μαρκοβιανή αλυσίδα σε κάθε κατάσταση. Στη συνέχεια, θεωρούμε $C_{(m,0)}$ και $C_{(m+1,0)}$ τα μέσα κόστη παραμονής για τις καταστάσεις $(m,0)$ και $(m+1,0)$ αντίστοιχα. Υπολογίζουμε το συνολικό κόστος C για τις δύο καταστάσεις

$$C = P_{(m,0)}(\Lambda_1+\Lambda_2)C_{(m,0)} + P_{(m+1,0)}\Lambda_1 C_{(m+1,0)} = \frac{1}{\frac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2}+\frac{1}{\Lambda_1}}(C_{(m,0)}+C_{(m+1,0)}).$$

Βλέπουμε ότι το συνολικό κόστος εξαρτάται μόνο από την ποσότητα $C_{(m,0)}+C_{(m+1,0)}$, έτσι θέτουμε

$$C_{(m,0)}+C_{(m+1,0)} = \begin{cases} C^{(1)}, & \text{πριν από την ανταλλαγή των ρυθμών} \\ C^{(2)}, & \text{μετά από την ανταλλαγή των ρυθμών.} \end{cases}$$

Επίσης, συμβολίζουμε με W τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής για έναν πελάτη που εισέρχεται στην κατάσταση $(m+1,0)$. Έτσι, έχουμε πριν την ανταλλαγή

$$C^{(1)} = \left(\frac{\Lambda_1 h_1}{\Lambda_1+\Lambda_2}+\frac{\Lambda_2 h_2}{\Lambda_1+\Lambda_2}\right)\left(W+\frac{1}{\Lambda_1}-\frac{1}{\mu}\right)+h_1 W,$$

ενώ μετά από την ανταλλάγή

$$C^{(2)} = h_1\left(W+\frac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2}-\frac{1}{\mu}\right)+\left(\frac{\Lambda_1 h_1}{\Lambda_1+\Lambda_2}+\frac{\Lambda_2 h_2}{\Lambda_1+\Lambda_2}\right)W.$$

Τελικά, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
C^{(1)} - C^{(2)} = & \left(\frac{\Lambda_1 h_1}{\Lambda_1+\Lambda_2} + \frac{\Lambda_2 h_2}{\Lambda_1+\Lambda_2}\right) W + \left(\frac{\Lambda_1 h_1}{\Lambda_1+\Lambda_2} + \frac{\Lambda_2 h_2}{\Lambda_1+\Lambda_2}\right)\left(\frac{1}{\Lambda_1} - \frac{1}{\mu}\right) \\
& + h_1 W - h_1 W - h_1\left(\frac{1}{\Lambda_1+\Lambda_2} - \frac{1}{\mu}\right) - \left(\frac{\Lambda_1 h_1}{\Lambda_1+\Lambda_2} + \frac{\Lambda_2 h_2}{\Lambda_1+\Lambda_2}\right) W \\
= & \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1+\Lambda_2}\frac{h_2}{\Lambda_1} - \frac{1}{\mu}\frac{\Lambda_1 h_1}{\Lambda_1+\Lambda_2} - \frac{1}{\mu}\frac{\Lambda_2 h_2}{\Lambda_1+\Lambda_2} + \frac{h_1}{\mu} \\
= & \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1+\Lambda_2}\frac{h_2}{\Lambda_1} - \frac{h_2}{\mu}\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1+\Lambda_2} + \frac{h_1}{\mu}\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1+\Lambda_2} \\
= & \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1+\Lambda_2}\left(\frac{h_2}{\Lambda_1} - \frac{h_2-h_1}{\mu}\right) > 0,
\end{aligned}$$

αφού

$$\frac{\Lambda_1}{\mu} < \frac{h_2}{h_2-h_1} \Rightarrow \frac{\mu}{\Lambda_1} > \frac{h_2-h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{h_2}{\Lambda_1} - \frac{h_2-h_1}{\mu} > 0.$$

Έτσι, δείξαμε ότι $C^{(1)} > C^{(2)}$, κάτι το οποίο μας δείχνει ότι μετά την ανταλλαγή οι κοινωνικά βέλτιστοι ρυθμοί άφιξης θα αυξηθούν.

□

Η παραπάνω πρόταση μας δείχνει ότι όταν ο ρυθμός άφιξης των πελατών τύπου 1 είναι αρκετά μικρός ή όταν το h_2 είναι πολύ μεγάλο, ένας πελάτης τύπου 2 θα μπει στο σύστημα μόνο όταν η ουρά είναι μεγάλη, δηλαδή όταν πλησιάζει στην ενεργοποίηση του υπηρέτη.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (4.2.1) και την Πρόταση (4.2.1) που δείξαμε καταλήγουμε στο εξής πόρισμα.

Πόρισμα 4.2.1. *Αν οι ρυθμοί άφιξης των πελατών αυξάνουν πάνω από το σύνολο καταστάσεων* $\{(0,0),(1,0),\ldots,(N-1,0)\}$, *τότε και οι κοινωνικά βέλτιστοι ρυθμοί αυξάνουν επίσης.*

Απόδειξη. Πράγματι, σύμφωνα με το Θεώρημα (4.2.1) αυτής της ενότητας αν οι ρυθμοί άφιξης αυξάνουν στο σύνολο καταστάσεων $\{(0,0),(1,0),\ldots,(N-1,0)\}$, τότε ισχύει ότι
$\Lambda_1 < \mu$. Άρα, έχουμε

$$\Lambda_1 < \mu \Rightarrow \frac{\Lambda_1}{\mu} \leq 1 < \frac{h_2}{h_2-h_1}$$

και αφού $\dfrac{\Lambda_1}{\mu} < \dfrac{h_2}{h_2-h_1}$, σύμφωνα με την Πρόταση (4.2.1) ισχύει ότι οι κοινωνικά βέλτιστοι ρυθμοί άφιξης είναι αύξουσα ακολουθία στο σύνολο καταστάσεων $\{(0,0),(1,0),\ldots,(N-1,0)\}$. □

4.2.2 Συνεχής Κατανομή για την Παράμετρο του Κόστους

Σε αυτό το σύστημα, οι πελάτες έχουν παράμετρο κόστους ανά χρονική μονάδα h, η οποία ακολουθεί συνεχή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής H. Ένας πελάτης εισέρχεται στο σύστημα σε μία κατάσταση s, γνωρίζοντας ότι ο μέσος χρόνος

παραμονής του θα είναι W_s, αν και μόνο αν η παράμετρος h δεν υπερβαίνει το κατώφλι $h_s = \frac{R}{W_s}$.
Για λόγους απλοποίησης, θα υποθέσουμε ότι ο ρυθμός άφιξης στο σύστημα Λ, είναι τόσο μεγάλος ώστε να μην υπάρχει στρατηγική ισορροπίας ή κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική στην οποία όλοι οι πελάτες να μπαίνουν πάντα.

Στρατηγικές Ισορροπίας

Στις καταστάσεις που ο υπηρέτης είναι ανενεργός και υπάρχουν m πελάτες στο σύστημα, οι πελάτες γνωρίζουν ότι ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής τους επηρεάζεται από τις μελλοντικές αφίξεις πελατών και έτσι η στρατηγική τους εξαρτάται από τις στρατηγικές των μελλοντικών πελατών. Αρχικά, θα θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση $(N-1,0)$, παρατηρούμε ότι η στρατηγική ενός αφικνούμενου πελάτη δεν επηρεάζεται από τις μελλοντικές αφίξεις, μιας και αν αυτός εισέλθει στο σύστημα, το σύστημα θα μεταβεί στην κατάσταση $(N,1)$ και ο υπηρέτης θα ξεκινήσει κατευθείαν να εξυπηρετεί. Έτσι, ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής του στο σύστημα θα είναι

$$W_{(N-1,0)} = \frac{N}{\mu}$$

και το κατώφλι

$$h_{(N-1,0)} = \frac{R}{W_{(N-1,0)}} = \frac{R\mu}{N}.$$

Συνεπώς, ο ρυθμός εισόδου θα είναι

$$\lambda_{(N-1,0)} = \Lambda H\left(\frac{R\mu}{N}\right).$$

Τώρα, αν θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση $(N-2,0)$, ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής ενός εισερχόμενου πελάτη αποτελείται από τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι το σύστημα να μεταβεί στην $(N,1)$ κατάσταση, δηλαδή $\dfrac{1}{\lambda_{(N-1,0)}}$ και τον αναμενόμενο χρόνο εξυπηρέτησης όλων των πελατών μπροστά του και φυσικά του εαυτού του, αφού ενεργοποιηθεί ο υπηρέτης, δηλαδή $\dfrac{N-1}{\mu}$. Έτσι, έχουμε ότι ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής είναι

$$W_{(N-2,0)} = \frac{1}{\lambda_{(N-1,0)}} + \frac{N-1}{\mu} = W_{(N-1,0)} + \frac{1}{\lambda_{(N-1,0)}} - \frac{1}{\mu},$$

το κατώφλι είναι

$$h_{(N-2,0)} = \frac{R}{W_{(N-2,0)}},$$

και ο ρυθμός εισόδου στο σύστημα είναι

$$\lambda_{(N-2,0)} = \Lambda H\left(\frac{R}{W_{(N-2,0)}}\right).$$

Βλέπουμε ότι σε αυτό το σημείο δουλέψαμε αναδρομικά. Μπορούμε να υπολογίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας ως εξής

$$W_{(N-1,0)} = \frac{N}{\mu}$$
$$W_{(m-1,0)} = W_{(m,0)} + \frac{1}{\lambda_{(m,0)}} - \frac{1}{\mu},$$

όπου $\lambda_{(m,0)} = \Lambda H\left(\frac{R}{W_{(m,0)}}\right)$ για κάθε κατάσταση $\{(m,0) : m = 1,2,\ldots,N-1\}$.
Καταλήγουμε, τελικά, στην ακόλουθη πρόταση, η οποία μας δείχνει ότι η μονοτονία $h_{(m,0)}$ και του $\lambda_{(m,0)}$ εξαρτάται μόνο από την σχέση των ποσοτήτων $\frac{\Lambda}{\mu}$ και $H\left(\frac{R\mu}{N}\right)$.

Πρόταση 4.2.2. *Εάν* $\frac{\Lambda}{\mu}H\left(\frac{R\mu}{N}\right) > 1$, *τότε* $h_{(m-1,0)} > h_{(m,0)}$.
Εάν $\frac{\Lambda}{\mu}H\left(\frac{R\mu}{N}\right) = 1$, *τότε* $h_{(m-1,0)} = h_{(m,0)}$.
Εάν $\frac{\Lambda}{\mu}H\left(\frac{R\mu}{N}\right) < 1$, *τότε* $h_{(m-1,0)} < h_{(m,0)}$.

Απόδειξη. Έστω ότι

$$\frac{\Lambda}{\mu}H\left(\frac{R\mu}{N}\right) > 1 \Rightarrow \Lambda H\left(\frac{R\mu}{N}\right) > \mu \Rightarrow \lambda_{(N-1,0)} > \mu.$$

Σύμφωνα με την αναδρομική σχέση που ισχύει για μία κατάσταση $\{(m,0) : m = 1,2,\ldots,N-1\}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} W_{(m-1,0)} = W_{(m,0)} + \frac{1}{\lambda_{(m,0)}} - \frac{1}{\mu} \Rightarrow \frac{R}{h_{(m-1,0)}} &= W_{(m,0)} + \frac{1}{\lambda_{(m,0)}} - \frac{1}{\mu} \\ \Rightarrow R &= h_{(m-1,0)}\left(W_{(m,0)} + \frac{1}{\lambda_{(m,0)}} - \frac{1}{\mu}\right) \\ \Rightarrow h_{(m,0)}W_{(m,0)} &= h_{(m-1,0)}\left(W_{(m,0)} + \frac{1}{\lambda_{(m,0)}} - \frac{1}{\mu}\right). \end{aligned}$$

Έυκολα, λοιπόν, φαίνεται ότι αν $\lambda_{(N-1,0)} > \mu$ και για $m = N-1$ έχουμε ότι

$$h_{(N-1,0)}W_{(N-1,0)} = h_{(N-2,0)}\left(W_{(N-1,0)} + \frac{1}{\lambda_{(N-1,0)}} - \frac{1}{\mu}\right) \Rightarrow h_{(N-2,0)} > h_{(N-1,0)}$$

και άρα

$$\lambda_{(N-2,0)} > \lambda_{(N-1,0)} > \mu.$$

Συνεχίζοντας αναδρομικά έχουμε ότι

$$\lambda_{(m-1,0)} > \lambda_{(m,0)} \qquad \text{και} \qquad h_{(m-1,0)} > h_{(m,0)},$$

για κάθε $m = 1,2,\ldots,N-1$.
Ανάλογα αποδεικνύονται και οι άλλες δύο περιπτώσεις όταν

$$\frac{\Lambda}{\mu}H\left(\frac{R\mu}{N}\right) = 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{\Lambda}{\mu}H\left(\frac{R\mu}{N}\right) < 1.$$

□

Παρατήρηση. *Όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός, ο συνολικός χρόνος παραμονής του δεν επηρεάζεται από τις επόμενες αφίξεις. Έστω ότι ένας πελάτης βλέπει στο σύστημα $m-1$ πελάτες και τον υπηρέτη ενεργό, τότε ο συνολικός χρόνος παραμονής του στο σύστημα θα είναι*

$$W_{(m-1,1)} = \frac{m}{\mu}.$$

Συνεπώς, το κατώφλι στην κατάσταση $(m-1,1)$ θα είναι

$$h_{(m-1,1)} = \frac{R}{W_{m-1,1}} = \frac{R\mu}{m} > \frac{R\mu}{m+1} = h_{(m,1)}.$$

Συμπεραίνουμε ότι όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός, η ακολουθία των κατωφλίων $h_{(m,1)}$ είναι πάντα φθίνουσα.

Σχεδιασμός της Κοινωνικής Ωφέλειας

Τώρα, θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή, ο οποίος στοχεύει να βρει τη βέλτιστη πολιτική σε κάθε κατάσταση του συστήματος, ώστε να μεγιστοποιείται η κοινωνική ωφέλεια. Αρχικά, θα δείξουμε μία πρόταση σχετικά με τη μονοτονία των κοινωνικά βέλτιστων κατωφλιών σε κάθε κατάσταση και κατά συνέπεια των ρυθμών άφιξης κάτω από την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική.
Στη συνέχεια, ορίζουμε $U_m(\lambda)$ ως τη μέση ωφέλεια που προέρχεται από πελάτες που εισέρχονται με ρυθμό λ στην κατάσταση m, όπου $m \in \{(0,0),(1,0),\ldots,$ $(N-1,0),(1,1),\ldots,(N,1),(N+1,1),\ldots)\}$.
Το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή είναι να βρει τα κατάλληλα $\Lambda_m : m \in \{(0,0),(1,0),$ $\ldots,(N-1,0),(1,1),\ldots,(N,1),(N+1,1),\ldots)\}$, ώστε να μεγιστοποιείται η συνάρτηση κοινωνικής ωφέλειας SW, όπου

$$SW = \Lambda \left(\sum_{i=1}^{+\infty} U_{(i,1)}(\lambda_{(i,1)}) + \sum_{j=0}^{N-1} U_{(j,0)}(\lambda_{(j,0)}) \right).$$

Το πρόβλημα αυτό συνήθως λύνεται με αριθμητικές μεθόδους.
Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι $h \sim \mathrm{Uniform}[0,1]$, τότε το κατώφλι για την παράμετρο κόστους h είναι $h = \dfrac{\lambda}{\Lambda}$ και η $U_m(\lambda)$ εκφράζεται ως εξής

$$U_m(\lambda) = \int_0^{\frac{\lambda}{\Lambda}} (R - xW_m)\,dx = R\frac{\lambda}{\Lambda} - \frac{\lambda^2}{2\Lambda^2}W_m,$$

όπου W_m είναι ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο σύστημα μπαίνοντας στην κατάσταση m.

Βιβλιογραφία

[1] Refael Hassin and Moshe Haviv, *To queue or not to queue: Equilibrium behavior in queueing systems*, Vol. 59, Springer Science & Business Media, 2003.

[2] Christian Larsen, *Investigating sensitivity and the impact of information on pricing decisions in an $M/M/1/\infty$ queueing model*, International journal of production economics **56** (1998), 365–377.

[3] Pengfei Guo and Refael Hassin, *Strategic behavior and social optimization in Markovian vacation queues*, Operations research **59** (2011), no. 4, 986–997.

[4] Pengfei Guo and Refael Hassin, *Strategic behavior and social optimization in Markovian vacation queues: The case of heterogeneous customers*, European Journal of Operational Research **222** (2012), no. 2, 278–286.