ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης

ΠΜΣ Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης και της Τεχνολογίας

Διπλωματική Εργασία

Προελληνικά και πρώιμα ελληνικά αριθμητικά συστήματα

Σοφία Χρήστου

ΑΜ: 22/019

Επιβλέπων καθηγητής: Μιχάλης Σιάλαρος

Αθήνα, Ιούλιος 2022

Περίληψη

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη των διαθέσιμων αρχαιολογικών ευρημάτων και της σωζόμενης γραπτής παράδοσης σχετικά με τα προελληνικά και τα πρώιμα ελληνικά αριθμητικά συστήματα. Στο πρώτο κεφάλαιο, εξετάζεται το αιγυπτιακό αριθμητικό σύστημα, με έμφαση στην περίοδο του Μέσου Βασιλείου (~2050 – 1650 π.Χ.). Στο δεύτερο κεφάλαιο, αναλύονται τα πρωτοσφηνοειδή και τα σφηνοειδή αριθμητικά συστήματα που αναπτύχθηκαν στο χώρο της Μεσοποταμίας, κυρίως κατά την Παλαιοβαβυλωνιακή περίοδο (~1900 – 1600 π.Χ.). Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αριθμητικά συστήματα που αποτυπώθηκαν σε Κρητική Ιερογλυφική και Γραμμική Α. Παράλληλα, εξετάζεται η ανάπτυξη του κυπρομινωικού και του χεττιτικού αριθμητικού συστήματος. Τέλος, το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στο αριθμητικό σύστημα της Γραμμικής Β. Η εργασία ολοκληρώνεται με τη συγκριτική ανάλυση των παραπάνω αριθμητικών συστημάτων.

Abstract

The principal aim of this dissertation is to study the available archaeological evidence as well as the extant written sources regarding pre-Hellenic and the early Greek numerical systems. In the first chapter, I examine the Egyptian numerical system, with emphasis given to the Middle Kingdom period (~2050 – 1650 BCE). In the second chapter, I analyse the proto-cuneiform and cuneiform numerical systems developed in Mesopotamia, especially those that were developed during the Old Babylonian period (~1900 – 1600 BCE). In the third chapter, I present the numerical systems recorded in the Cretan Hieroglyphics and Linear A, together with the Cypriot-Minoan and the Hittite systems. Finally, in the fourth chapter, I examine some aspects of the numerical system in Linear B scripture. The thesis concludes with the comparative analysis of the aforementioned numerical systems.

Πίνακας Περιεχομένων

Πίνακας Εικόνων 5

Πίνακες Χρονολογιών 7

Α. Αίγυπτος 7

Β. Μεσοποταμία 7

Γ. Αιγαίο 7

Ευχαριστίες 8

Εισαγωγή: Οι πηγές για τα πρώιμα αριθμητικά συστήματα 9

Κεφάλαιο Πρώτο: Τα μαθηματικά στην αρχαία Αίγυπτο 14

1.1 Οι πηγές 14

1.1.1 Αρχαιολογικά ευρήματα 14

1.1.2 Γραπτή παράδοση 18

1.2 Το αριθμητικό σύστημα 23

1.2.1 Υπολογισμοί 25

Κεφάλαιο Δεύτερο: Τα μαθηματικά στην αρχαία Μεσοποταμία 31

2.1 Απαρχές αριθμητικών συστημάτων 31

2.2 Πρώιμα αριθμητικά συστήματα 33

2.2.1 Πρωτο-σφηνοειδή αριθμητικά συστήματα 33

2.2.2 Σφηνοειδή αριθμητικά συστήματα 38

2.3 Εξηκονταδικό θεσιακό σύστημα 39

2.4 Είδη μαθηματικών κειμένων 42

2.4.1 Πινακίδες-Πίνακες 43

2.4.2 Προβλήματα 51

Κεφάλαιο Τρίτο: Μινωικό αριθμητικό σύστημα 54

3.1 Το αριθμητικό σύστημα της Κρητικής Ιερογλυφικής 55

3.1.1 Κλασματογράμματα 56

3.2 Το αριθμητικό σύστημα στη Γραμμική Α 57

3.2.1 Τα κλάσματα της Γραμμικής Α 60
3.3 Κυπρομινωικό αριθμητικό σύστημα 63
3.4 Χεττιτικό αριθμητικό σύστημα 66
Κεφάλαιο Τέταρτο: Μυκηναϊκό αριθμητικό σύστημα 68
4.1 Το αριθμητικό σύστημα της Γραμμικής Β 68
Κεφάλαιο Πέμπτο: Παρατηρήσεις 75
Βιβλιογραφία 79

Πίνακας Εικόνων[1]

Εικόνα 1. Αριθμητικές αναπαραστάσεις στον τάφο της πριγκίπισσας Nefertiabet.....15
Εικόνα 2. Αριθμητικές αναπαραστάσεις από τον τάφο U-j.......................................16
Εικόνα 3. Αριθμητικές αναπαραστάσεις από το νεκροταφείο στην Naqada..............16
Εικόνα 4. Ο Κεφαλοθραύστης Namer...17
Εικόνα 5. Πρόβλημα 40 του παπύρου Rhind 20
Εικόνα 6. Ταφική αναπαράσταση αρπεδοναπτών από τον τάφο του Djeserkaseneb..23
Εικόνα 7. Σύμβολα αιγυπτιακού αριθμητικού συστήματος 24
Εικόνα 8. Συμβολική αναπαράσταση του αριθμού 12.643 25
Εικόνα 9. Περιεχόμενο πίνακα 2:n 28
Εικόνα 10. Πρόβλημα 51 Πάπυρου Rhind 30
Εικόνα 11. Πήλινες ψηφίδες..32
Εικόνα 12. Εξηκονταδικό σύστημα..33
Εικόνα 13. Διεξηκονταδικό σύστημα 34
Εικόνα 14. Σύστημα GAN2..34
Εικόνα 15. Σύστημα EN 35
Εικόνα 16. Σύστημα ŠE...35
Εικόνα 17. Σύστημα U4...35
Εικόνα 18. Πρωτο-ελαμιτικό σύστημα...36
Εικόνα 19. Πρωτο-σφηνοειδές σουμεριακό σύστημα...36
Εικόνα 20. Περιεχόμενο και επιγραφή bulla Sb 1927...37
Εικόνα 21. Σφηνοειδές σουμεριακό σύστημα 38
Εικόνα 22. Ασσυρο-βαβυλωνιακό σύστημα...39
Εικόνα 23. Συμβολική αναπαράσταση του αριθμού 37 39
Εικόνα 24. Τρόπος καταγραφής αριθμών...41
Εικόνα 25. Ο πολλαπλασιασμός του 25 44

[1] Αντλώ τις εικόνες 1-4 και 7 από Imhausen 2016, 19 και 28· τις εικόνες 8 και 24 από Katz 2013, 6-7· την εικόνα 11 από Sauer 2017, 17· τις εικόνες 12-19, 21-22, 24, 32-33, 35-36, 41 και 43-45 από Chrisomalis 2010, 57, 59, 62, 66, 232-234, 240, 242-243 και 248-249· την εικόνα 20 από Friberg 2019,184· τις εικόνες 5, 9 και 26 και 28 από Χριστιανίδης 2012, 11, 17, 37, 41 και 44· τις εικόνες 6, 10 και 27 από Van Der Waerden 2010, 9, 23 και 61· τις εικόνες 25 και 29-30 από Robson 2008, 88, 111-112· την εικόνα 31 από Høyrup 1990, 38· την εικόνα 34 από Montecchi 2017, 17· τις εικόνες 38-39 από Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 2 και 4· την εικόνα 37 από Bennet 2008, 14· την εικόνα 42 από Hooker 1994, 48· την εικόνα 42 από Palaima 1989, 46 και την εικόνα 46 από Flouda 2015, 89.

Εικόνα 26. Πίνακας τετραγώνων 45
Εικόνα 27. Πινακίδα Plimpton 322 47
Εικόνα 28. Το περιεχόμενο της Plimpton 322 49
Εικόνα 29. Η ερμηνεία της E. Robson για την Plimpton 322 50
Εικόνα 30. Άσκηση μαθητή για την εύρεση της διαγώνιου 50
Εικόνα 31. Αναπαράσταση της γεωμετρική επίλυσης του προβλήματος 53
Εικόνα 32. Αριθμητικό σύστημα Κρητικής Ιερογλυφικής 56
Εικόνα 33. Αναπαράσταση του αριθμού 483 56
Εικόνα 34. Τα κλασματογράμματα της Κρητικής Ιερογλυφικής 57
Εικόνα 35. Αριθμητικό σύστημα Γραμμικής Α 58
Εικόνα 36. Αναπαράσταση του αριθμού 7659 59
Εικόνα 37. Αριθμητικές αναπαραστάσεις στην πινακίδα HT 13 59
Εικόνα 38. Συμβολισμός κλασμάτων στη Γραμμική Α 60
Εικόνα 39. Πινακίδα HT 104 62
Εικόνα 40. Παλαιότερη σωζόμενη κυπριακή πινακίδα 64
Εικόνα 41. Κυπρομινωικό αριθμητικό σύστημα 65
Εικόνα 42. Αριθμητική αναπαράσταση κυπέλλου Έγκωμης 65
Εικόνα 43. Χεττιτικό αριθμητικό σύστημα 66
Εικόνα 44. Αναπαράσταση του αριθμού 3635 67
Εικόνα 45. Αριθμητικό σύστημα Γραμμικής Β 69
Εικόνα 46. Πινακίδα KN Dn 1094: Αναπαράσταση των αριθμών 1.509 και 2.440 ..69

Πίνακες Χρονολογιών[2]

Α. Αίγυπτος

3000 π.Χ.	Παλαιό Βασίλειο
2000 – 1800	Μέσο Βασίλειο
1700	Δυναστεία των Υξώς
1600 – 100	Νέο Βασίλειο

Β. Μεσοποταμία

4000 – 3500 π.Χ.	Πρώιμη Περίοδος Uruk
3500 – 3100	Ύστερη Περίοδος Uruk
3400 – 3100	Περίοδος της Uruk IV
3100-3000	Περίοδος της Uruk III
3000 – 2350	Πρώιμη Δυναστική Περίοδος
2350 – 2200	Ακκαδική Δυναστεία ή Δυναστεία του Sargon
2100 – 2000	Τρίτη Δυναστεία της Ουρ
2000 – 1600	Παλαιο-Βαβυλωνιακή Περίοδος
1400	Μέση Βαβυλωνιακή Αυτοκρατορία, Χεττιτική πόλη Hattusa
900 – 612	Νέο-Ασσυριανή Αυτοκρατορία
620 – 540	Νέο-Βαβυλωνιακή Αυτοκρατορία
540 – 330	Περσική Περίοδος
500	Ύστερη Βαβυλωνιακή Περίοδος
330 – 125	Σελευκιδική ή Ελληνιστική Περίοδος

Γ. Αιγαίο

3650/3500 – 2160/ 2025 π.Χ.	Πρωτομινωική περίοδος
2160/1979 – 1600	Μεσομινωική περίοδος
1600 – 970	Υστερομινωική περίοδος

[2] Αντλώ τον πίνακα 1 από τις Radner και Robson 2011, xxix· τον πίνακα 2 από τον Van der Waerden 2010, 1· και τον πίνακα 3 από την Μαντζουράνη 2002, 17.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επόπτη μου, κ. Μιχάλη Σιάλαρο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης του ΕΚΠΑ. Η υπομονή του, η ενθάρρυνση που μου προσέφερε και η βοήθειά του σε θεωρητικό και πρακτικό επίπεδο ήταν πολύ σημαντικές. Χωρίς την καθοδήγησή του, τα σχόλια και τις παρατηρήσεις του, η εργασία δεν θα είχε ολοκληρωθεί. Τέλος, τον ευχαριστώ πολύ για το χρόνο που μου αφιέρωσε, αλλά και για τις συμβουλές και τις ουσιαστικές συζητήσεις μας, τα τελευταία τέσσερα χρόνια, ήδη από τις προπτυχιακές μου σπουδές.

Επίσης, ευχαριστώ ιδιαιτέρως και τα υπόλοιπα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κ. Γιάννη Χριστιανίδη, Καθηγητή του Τμήματος Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης, ο οποίος δέχθηκε να είναι μέλος της τριμελούς επιτροπής, όπως και την κα. Άννα Τηγάνη για τις παρατηρήσεις της. Τους ευχαριστώ για το χρόνο που μου αφιέρωσαν.

Πολλές ευχαριστίες οφείλω και στον κ. Βασίλη Πετράκη, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Ιστορίας και Αρχαιολογίας του ΕΚΠΑ, για τις παρατηρήσεις του, τις σκέψεις που μοιραστήκαμε και το χρόνο που διέθεσε.

Τέλος, ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στην οικογένειά μου και τους φίλους μου, οι οποίοι, έδειξαν υπομονή και κατανόηση όλο αυτό το διάστημα.

Εισαγωγή: Οι πηγές για τα πρώιμα αριθμητικά συστήματα

Η παρούσα εργασία στοχεύει στο να παρουσιάσει τα πρώιμα αριθμητικά συστήματα, όπως αυτά καταγράφονται σε κείμενα που έχουν διασωθεί από τα τέλη της τέταρτης χιλιετίας έως τα μέσα της δεύτερης χιλιετίας προ Χριστού. Ειδικότερα, αυτή η παρουσίαση θα εστιάσει στον γεωγραφικό χώρο της Αιγύπτου, της Μεσοποταμίας και του Αιγαίου.

Οι σωζόμενες πηγές από την Αίγυπτο είναι περιορισμένες λόγω της υλικής υπόστασης του μέσου γραφής (πάπυρος). Αν και υποθέτουμε ότι υπήρχε πλήθος μαθηματικών κειμένων, ελάχιστοι τέτοιοι πάπυροι είναι διαθέσιμοι και αυτοί, μάλιστα, προέρχονται κυρίως από την περίοδο του Μέσου Βασιλείου. Αυτό οφείλεται στο ότι ο πάπυρος αποτελεί ένα υλικό που δεν είναι ανθεκτικό στις φθορές και το χρόνο. Από τους πρώιμους οικισμούς δεν έχουν διασωθεί ευρήματα, καθώς αυτοί βρίσκονταν κοντά στον Νείλο, ο οποίος προκαλούσε καταστροφές από τις συνεχείς πλημμύρες. Έτσι, τα εύθρυπτα υλικά, όπως ο πάπυρος καταστρέφονταν υπό αυτές τις κλιματικές συνθήκες. Αντιθέτως, οι έρημοι, κοντά στις οποίες, βρίσκονταν οι τάφοι και οι ναοί, παρείχαν τις κατάλληλες γεωγραφικές και κλιματικές συνθήκες για την διατήρησή τους.

Επίσης, οι περισσότερες πηγές από την αρχαία Αίγυπτο προέρχονται είτε από τα νεκροταφεία είτε από τους ναούς και ανήκουν σε ένα θεοκρατικό πλαίσιο, το οποίο επηρεάζει την εικόνα που διαμορφώνουμε για τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά. Οι θεολογικές και μυθολογικές αναπαραστάσεις στους ναούς είχαν σκοπό να περιγράψουν κάποιου είδους τελετουργική διαδικασία. Αντίστοιχα, οι αριθμητικές αναπαραστάσεις στις απεικονίσεις που διακοσμούσαν τους τάφους χρησιμοποιούνταν στο πλαίσιο της αιγυπτιακής νεκρικής παράδοσης, χωρίς να στοχεύουν στην απόδοση της μαθηματικής γνώσης. Συνεπώς, οι μελετητές είναι υποχρεωμένοι να μελετήσουν την επιστήμη μέσα από το θεολογικό και μυθολογικό πρίσμα. Η εξέταση των αιγυπτιακών μαθηματικών μέσω αυτού του πρίσματος δημιουργεί ερωτήματα αναφορικά με εάν αυτά τα δείγματα είναι αντιπροσωπευτικά για την κατανόηση της αιγυπτιακής επιστήμης.[3]

Σε αντίθεση με το αιγυπτιακό μέσο γραφής, οι Μεσοποτάμιοι γραφείς χρησιμοποιούσαν πήλινες πινακίδες και γραφίδες για τη χάραξη των κειμένων. Το μέγεθος και το σχήμα της πινακίδας εξαρτιόταν από την έκταση του κειμένου, ενώ τις περισσότερες φορές το μέγεθος της εκτεινόταν στο μήκος της παλάμης ενός χεριού. Όσον αφορά τη φυσική υπόσταση του μέσου γραφής, ο πηλός είναι ένα ανθεκτικό υλικό, το οποίο ψήνεται. Έτσι, σε αντίθεση με την Αίγυπτο, το πλήθος των σωζόμενων πηγών από το χώρο της Μεσοποταμίας μας επιτρέπει να καθορίσουμε, σε ικανοποιητικό βαθμό, το επίπεδο της μαθηματικής γνώσης. Ωστόσο, το σύνολο των μαθηματικών κειμένων προέρχεται κυρίως από την Παλαιοβαβυλωνιακή περίοδο, καθώς αυτά εμφανίζονται σε πολλά αντίγραφα στις σχολές γραφής.[4] Παρόλο που είναι διαθέσιμο πλήθος πινακίδων, οι ερευνητές αντιμετωπίζουν μεθοδολογικά προβλήματα στη μελέτη των μεσοποτάμιων μαθηματικών. Συχνά, οι πινακίδες δεν διασώζονται ολόκληρες, καθώς υπάρχουν σπασμένα τμήματα τα οποία είτε δεν έχουν διασωθεί είτε αποκόπηκαν μετά την ανασκαφή. Επίσης, οι μεσοποτάμιοι γραφείς ανέπτυξαν ένα θεσιακό σύστημα, χωρίς να χρησιμοποιούν την έννοια του μηδενός. Ένα από το πιο σημαντικά προβλήματα των ερευνητών που ασχολούνται με τα βαβυλωνιακά μαθηματικά είναι η άγνοια της θέσης των αριθμών. Η έλλειψη ενός συμβόλου για την αναγνώριση της τιμής των αριθμών και η απουσία της προφορικής παράδοσης καθιστούν ασαφή την κατανόηση του περιεχομένου μιας πινακίδας. Συνεπώς, αυτά τα χαρακτηριστικά δεν μας επιτρέπουν να έχουμε την επιθυμητή πρόσβαση στα κείμενα.

Αντίστοιχα, στην περιοχή του Αιγαίου, ως προς τα μέσα γραφής, οι γραφείς χρησιμοποιούσαν υλικά όπως ο πηλός, τα οστά, οι λίθοι και τα μέταλλα. Σε αυτά τα υλικά, αποτύπωναν τα κείμενα με τη χρήση των γραφίδων, οι οποίες ήταν οστέινες ή, πιθανότατα, και ξύλινες.[5] Σε αντίθεση με το χώρο της Εγγύς Ανατολής, στο Αιγαίο δεν

[3] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το θρησκευτικό πλαίσιο των αιγυπτιακών μαθηματικών πηγών, βλ. Imhausen 2009, 783-784, Imhausen 2016, 15 και Regulski 2016, 2.

[4] Σε αντίθεση με την Αίγυπτο, οι πήλινες πινακίδες αποδείχθηκαν πολύ πιο ανθεκτικές σε διάφορες κλιματικές συνθήκες, βλ. Imhausen 2009, 784. Ο μεγαλύτερος αριθμός μαθηματικών κειμένων προέρχεται από την Παλαιοβαβυλωνιακή περίοδο. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα υλικά των γραφέων, βλ. Taylor 2011, 7-8.

[5] Για τη Γραμμική Β, έχουν βρεθεί γραφίδες από τη Θήβα και την Τίρυνθα, οι οποίες είναι οστέινες και για αυτό διατηρήθηκαν. Το άκρο των λεπίδων εξέπληξε τους ανασκαφείς των γραφίδων, διότι ανέμεναν να διαθέτουν πιο αιχμηρές άκρες. Ωστόσο, με βάση τα πειράματα που διεξήχθησαν πάνω σε νωπό πηλό με τέτοιου είδους αντικείμενα, φανέρωσαν ότι αυτά πρέπει αν ήταν τα υλικά των γραφέων. Επίσης, είναι

σημειώνεται ο ίδιος αριθμός τεκμηρίων, καθώς στο Αιγαίο, οι πινακίδες δεν ψήνονταν.[6] Οι πινακίδες που έχουν διασωθεί, ψήθηκαν για τυχαίους λόγους. Μάλιστα, φαίνεται πως διατηρούνταν και αρχειοθετούνταν για κάποιο διάστημα και ενδεχομένως μετά να καταστρέφονταν. Ο περιορισμένος αριθμός των διαθέσιμων πηγών παρατηρείται και στο νησί της Κύπρου όπου σώζονται ελάχιστα τεκμήρια.[7] Αυτό αποτελεί ένα σημαντικό μεθοδολογικό πρόβλημα, καθώς από τα ελάχιστα διαθέσιμα ευρήματα είναι δύσκολο να εξαχθούν συμπεράσματα για την ανάπτυξη των μαθηματικών στο Αιγαίο. Επίσης, σημειώνεται και το πρόβλημα της ανάγνωσης των γλωσσών. Η Γραμμική Α, η οποία δεν έχει αποκρυπτογραφηθεί, αποτελεί ένα από τα μυστήρια της αρχαιολογίας. Μερικοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να προσδιορίσουν το γενικότερο περιεχόμενο των κειμένων, βάσει των ομοιοτήτων τους με τη Γραμμική Β. Επίσης, η Κρητική Ιερογλυφική και το κυπρομινωικό συλλαβάριο αποτελούν γραφές, οι οποίες δεν έχουν αποκρυπτογραφηθεί. Αντιθέτως, η Γραμμική Β έχει αποκρυπτογραφηθεί έως ένα σημαντικό βαθμό, αν και συνεχίζουν να υπάρχουν ανοιχτά ζητήματα μετάφρασης.

Σχετικά με την Κρητική Ιερογλυφική και τη Γραμμική Α, οι προσπάθειες των μελετητών φανερώνουν ότι το μεγαλύτερο μέρος των διαθέσιμων κειμένων σχετίζεται, κυρίως, με διοικητικής φύσεως ζητήματα, για την τήρηση λογιστικών αρχείων στα ανακτορικά κέντρα.[8] Αντίστοιχα, η Γραμμική Β φαίνεται ότι χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά για την εξυπηρέτηση των διοικητικών αναγκών στα μυκηναϊκά ανάκτορα. Καθώς μόνο τέτοιου είδους κείμενα έχουν βρεθεί, δεν γνωρίζουμε αν οι γραφείς χρησιμοποίησαν τη γραφή και τα μαθηματικά και σε άλλα πλαίσια. Με αυτές τις συνθήκες, η κατανόηση του επιπέδου των μαθηματικών στο Αιγαίο είναι δύσκολο να προσδιοριστεί με σαφήνεια.

πιθανό να χρησιμοποιούσαν και γραφίδες κατασκευασμένες από ξύλο, οι οποίες όμως δεν διατηρήθηκαν. Μάλιστα, η Κρητική Ιερογλυφική και η Γραμμική Α, σε σχέση με τη Γραμμική Β, εμφανίζονται αποτυπωμένες σε μεγαλύτερη ποικιλία υλικών και αντικειμένων, βλ. Hallager 1996, 29 και Palaima 2011, 11-112.

[6] Και οι τρεις παραπάνω γραφές αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν ευρέως στο χώρο της Κρήτης. Επίσης, η Γραμμική Β χρησιμοποιήθηκε και στην Ηπειρωτική Ελλάδα. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη διάδοση των γραφών, βλ. Hooker 1994, 79-87.

[7] Ειδικότερα, τα κείμενα με το κυπρομινωικό αριθμητικό σύστημα δεν υπερβαίνουν τα δέκα, βλ. Valerio και Davis 2017, 143.

[8] Η Γραμμική Α αποτελεί, σε μεγάλο βαθμό, μια μη αποκρυπτογραφημένη γραφή. Τα κείμενα αφορούν καταλόγους εμπορευμάτων και αρχεία εμπορικών συναλλαγών. Εκτός από αυτά, έχουν αποκρυπτογραφηθεί και θεολογικά κείμενα, βλ. Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 1.

Με βάση τα ανωτέρω, εγείρονται προκλήσεις στη μελέτη αυτών των συστημάτων, λόγω του αριθμού των διαθέσιμων πηγών, της φύσης των μέσων γραφής και του πλαισίου στο οποίο γράφηκαν. Στην Αίγυπτο, οι μαθηματικές πληροφορίες αντλούνται από ένα περιορισμένο αριθμό κειμένων και αρχαιολογικών ευρημάτων, τα οποία εντάσσονται σε ένα θεοκρατικό πλαίσιο. Αντιθέτως, η Μεσοποταμία αποτελεί εξαίρεση, καθώς παρέχει πλήθος διαθέσιμων πήλινων πινακίδων, αν και ένα μέρος αυτών δεν έχει, ακόμη, μελετηθεί. Στο χώρο του Αιγαίου εμφανίζονται παρόμοια μεθοδολογικά προβλήματα. Αρχικά, σημειώνεται περιορισμένος αριθμός τεκμηρίων, ενώ σημαντικό μέρος αυτών δεν έχει μελετηθεί. Επίσης, οι μαθηματικές πληροφορίες αντλούνται αποκλειστικά από διοικητικής φύσεως κείμενα. Ωστόσο, η παραπάνω εικόνα ενδέχεται να διαφοροποιηθεί αν στο μέλλον είναι διαθέσιμα νέα ευρήματα.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας εξετάζεται η ανάπτυξη των αιγυπτιακών μαθηματικών, όπως αυτά παρουσιάζονται από τα διαθέσιμα αρχαιολογικά ευρήματα και τη σωζόμενη γραπτή παράδοση. Σχετικά με τις διαθέσιμες πηγές, παρουσιάζονται, αρχικά, οι πρώιμες αριθμητικές αναπαραστάσεις στους ναούς, τις πυραμίδες και τα νεκροταφεία της Αιγύπτου. Έπειτα, επισημαίνονται οι πάπυροι και το περιεχόμενό τους, μέσω των οποίων οι ερευνητές κατανοούν το επίπεδο των αιγυπτιακών μαθηματικών. Στο ίδιο κεφάλαιο, μελετώνται και αποσπάσματα, τα οποία εκφράζουν τον θαυμασμό των αρχαίων Ελλήνων για τις μαθηματικές ικανότητες των Αιγυπτίων. Σε αυτό το πλαίσιο εξετάζεται το αριθμητικό ιερογλυφικό σύστημα, ενώ παρουσιάζεται ο τρόπος επίλυσης των πράξεων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης, αλλά και των κλασμάτων. Ακόμα, μελετάται ο χαρακτήρας των αιγυπτιακών προβλημάτων, όπως αυτά παρουσιάζονται στους μαθηματικούς παπύρους και ειδικότερα στον πάπυρο Rhind, ο οποίος αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους μαθηματικούς παπύρους. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου γίνεται μια σύντομη αναφορά στα γεωμετρικά προβλήματα των αρχαίων Αιγυπτίων, καθώς η γεωμετρία δεν αποτελεί το αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας.

Το δεύτερο κεφάλαιο μελετά την ανάπτυξη των μαθηματικών στο χώρο της Μεσοποταμίας, μέσω του σημαντικού αριθμού των μαθηματικών πήλινων πινακίδων. Αρχικά, γίνεται αναφορά στις απαρχές των αριθμητικών συστημάτων, μέσω της παρουσίασης των διοικητικών εργαλείων που χρησιμοποιούσαν οι μεσοποτάμιοι πληθυσμοί από την έβδομη έως την τέταρτη χιλιετία π.Χ., οπότε και εμφανίστηκε η γραφή. Σε αυτό το πλαίσιο, μελετώνται τα πρωτο-σφηνοειδή ή αρχαϊκά αριθμητικά συστήματα από την τέταρτη χιλιετία και εξής, τα οποία προέρχονται κυρίως από τις πόλεις Uruk και Susa. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα σφηνοειδή αριθμητικά συστήματα, τα οποία, κατά την ύστερη σουμεριακή περίοδο, αντικατέστησαν τα πρωτο-σφηνοειδή σύμβολα. Τα παραπάνω συστήματα συνέβαλαν στην ανάπτυξη του εξηκονταδικού θεσιακού συστήματος, το οποίο διαμορφώθηκε κατά την Παλαιοβαβυλωνιακή περίοδο. Επίσης, αναλύονται τα δύο είδη μαθηματικών κειμένων, τα προβλήματα και οι πίνακες, τα οποία απαντώνται στις πήλινες πινακίδες από τις σχολές γραφής. Αναφορικά με τους πίνακες, παρουσιάζονται πίνακες πολλαπλασιασμού, τετραγώνων και αντιστρόφων. Επίσης, αναλύονται και οι διαφορετικές ερμηνείες που έχουν προταθεί για το μαθηματικό περιεχόμενο μιας από τις σημαντικότερες πινακίδες του χώρου της Μεσοποταμίας, της Plimpton 322. Σχετικά με την κατηγορία των προβλημάτων, γίνεται αναφορά στις απόψεις την παλαιότερης και νεότερης ιστοριογραφικής παράδοσης για την ερμηνεία των βαβυλωνιακών μαθηματικών.

Στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο, εξετάζονται τα αριθμητικά συστήματα που αναπτύχθηκαν στο χώρο του Αιγαίου, μέσω των διαθέσιμων αρχαιολογικών ευρημάτων. Πιο συγκεκριμένα, στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αριθμητικά συστήματα που αναπτύχθηκαν στο Μινωικό πολιτισμό και αποτυπώθηκαν στην Κρητική Ιερογλυφική και τη Γραμμική Α. Μέσα από την παρουσίαση του συστήματος, των αριθμητικών συμβολισμών και των κλασμάτων γίνεται και μια προσπάθεια σύγκρισης των δύο συστημάτων. Στη συνέχεια του ίδιου κεφαλαίου, εξετάζεται η ανάπτυξη του κυπρομινωικού αριθμητικού συστήματος και οι επιρροές που δέχθηκε από τα παραπάνω συστήματα. Επίσης, γίνεται αναφορά και στο χεττιτικό αριθμητικό σύστημα της λουβικής γραφής, κατά τη δεύτερη χιλιετία π.Χ. Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάται το αριθμητικό σύστημα που αποτυπώθηκε σε Γραμμική Β γραφή και οι ομοιότητες που παρουσιάζει σε σχέση με τα παραπάνω συστήματα του Αιγαίου. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο ακολουθούν τα συμπεράσματα και οι παρατηρήσεις της εργασίας, στα οποία γίνεται μια συγκριτική ανάλυση των αριθμητικών συστημάτων που μελετήθηκαν στην εργασία.

Κεφάλαιο Πρώτο: Τα μαθηματικά στην αρχαία Αίγυπτο

Στα τέλη της τέταρτης χιλιετίας προ Χριστού, σημειώθηκε στην Αίγυπτο η μετάβαση από τους προδυναστικούς οικισμούς στις πρώτες κοινωνίες. Την ίδια περίοδο, οι ανάγκες της ζωής στους οικισμούς συνέβαλαν στην εφεύρεση της γραφής, η οποία εμφανίστηκε, αρχικά, ως ένα προνόμιο της ελίτ. Σε αυτό το πλαίσιο, αναπτύχθηκαν και τα μαθηματικά, τα οποία λειτούργησαν ως εργαλεία μέτρησης για τον υπολογισμό των ποσοτήτων, τις διοικητικές υποθέσεις, αλλά και την επίλυση πρακτικών προβλημάτων.[9]

1.1 Οι πηγές

Αναφορικά με το πλαίσιο ανάπτυξης των μαθηματικών στην αρχαία Αίγυπτο, οι πληροφορίες αντλούνται μέσω των διαθέσιμων αρχαιολογικών ευρημάτων αλλά και της σωζόμενης γραπτής παράδοσης.[10]

1.1.1 Αρχαιολογικά ευρήματα

Από τις πρώιμες δυναστείες, συναντώνται καταγραφές αριθμών στους ναούς και τα νεκροταφεία της Αιγύπτου. Πιο συγκεκριμένα, πολλές αναπαραστάσεις σε τάφους κρατικών αξιωματούχων απεικονίζουν σκηνές, στις οποίες οι ίδιοι επιθεωρούν τη συγκομιδή.[11] Ακόμα, παρατηρούνται αριθμητικές καταγραφές με τις ποσότητες διαφόρων προϊόντων, ως μέρος της θρησκευτικής αιγυπτιακής παράδοσης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι πρώιμες αριθμητικές αναπαραστάσεις στον τάφο της πριγκίπισσας Nefertiabet. Σύμφωνα με την αιγυπτιακή παράδοση, οι νεκροί χρειάζονταν προμήθειες φαγητών στους τάφους. Στο συγκεκριμένο τάφο, η πριγκίπισσα απεικονίζεται μπροστά από ένα τραπέζι με προσφορές. Εκεί, συναντάται και το σύμβολο για το 100, το οποίο εγγράφεται τρεις φορές, προκειμένου να δηλώσει τις ποσότητες των αγαθών.[12]

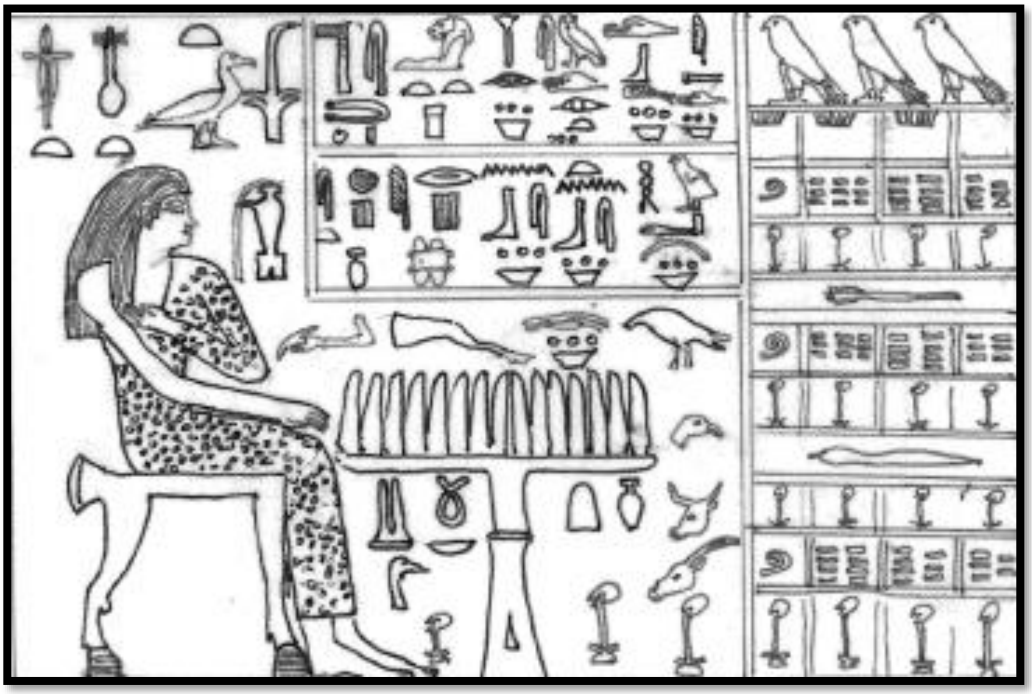
---

[9] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη γραφή ως διοικητικό εργαλείο, βλ. Imhausen 2016, 15-16 και 23 και Imhausen 2020, 102.

[10] Για μια πλήρη καταγραφή των αρχαίων αιγυπτιακών πηγών, βλ. Imhausen 2016, 22-28, 63-80 και 134-142.

[11] Η συγκεκριμένη διαδικασία προϋπέθετε τη γνώση αριθμητικής, προκειμένου να υπολογιστούν οι ποσότητες των αγαθών, βλ. Imhausen 2020, 106.

[12] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη συγκεκριμένη απεικόνιση, βλ. Imhausen 2016, 27.

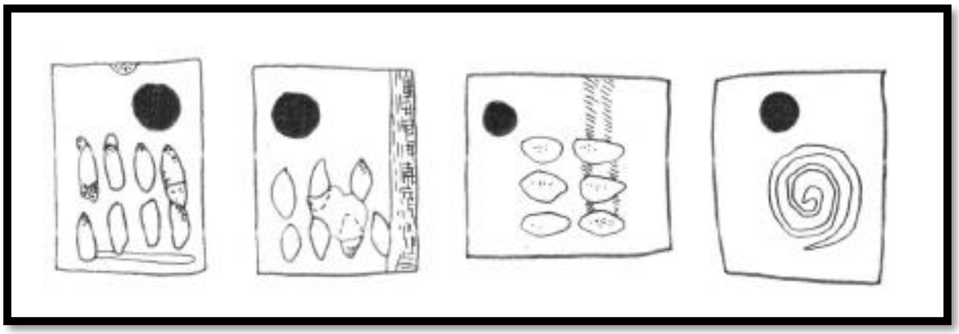


Εικόνα 1. Αριθμητικές αναπαραστάσεις στον τάφο της πριγκίπισσας Nefertiabet

Η παλαιότερη καταγραφή αριθμών εντοπίζεται στον τάφο U-j (~3200 π.Χ.), στην Άβυδο, σε δύο είδη αντικειμένων με επιγραφές.[13] Αυτά αποτελούν τις ετικέτες (labels), στις οποίες καταγράφονταν οι παραδόσεις εμπορευμάτων, και τα κεραμικά αγγεία, τα οποία φέρουν επιγραφές για τις ποσότητες λαδιού και κρασιού.[14] Σε αυτά αποτυπώνονταν είτε εικονογραφικά είτε αφηρημένα στοιχεία, τα οποία ερμηνεύονται από τους αιγυπτιολόγους ως συμβολικές αναπαραστάσεις αριθμών. Ωστόσο, σε αυτές τις επιγραφές δεν συναντώνται τα σύμβολα που είναι γνωστά για το αιγυπτιακό αριθμητικό σύστημα. Στις πρώιμες αναπαραστάσεις του τάφου U-j, χρησιμοποιούνταν μόνο οι κάθετες και οριζόντιες ευθείες, αλλά και το σχοινί (βλ. Εικόνα 3, τελευταία αναπαράσταση). Από τα παραπάνω, μόνο η κάθετη ευθεία και το σχοινί (για τις μονάδες και εκατοντάδες αντίστοιχα) εμφανίζονται στο αιγυπτιακό ιερογλυφικό σύστημα, το οποίο θα εξεταστεί παρακάτω.

[13] Σε αυτόν ανακαλύφθηκαν τα πρώτα δείγματα ιερογλυφικής γραφής στην αρχαία Αίγυπτο Βλ. Imhausen 2016, 23.

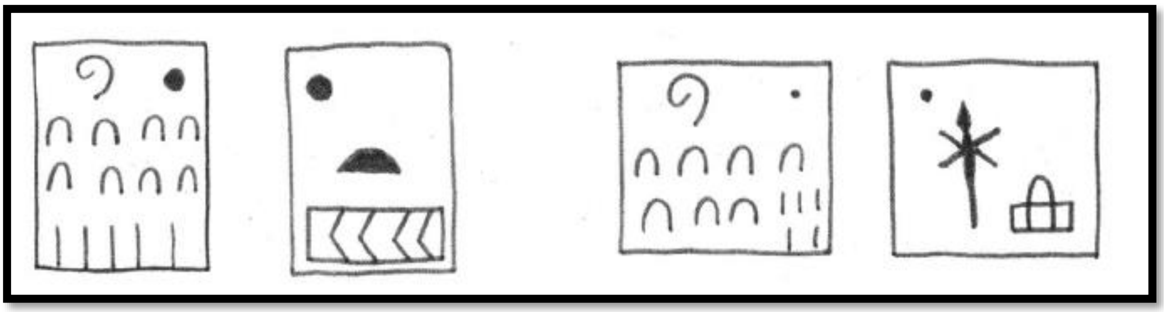
[14] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα παραπάνω αντικείμενα, βλ. Κοπανιάς 2018, 57-58.



Εικόνα 2. Αριθμητικές αναπαραστάσεις από τον τάφο U-j

Σύμφωνα με τον John Baines, την ίδια περίοδο, η ανάπτυξη του αιγυπτιακού δεκαδικού συστήματος βρισκόταν υπό διαμόρφωση. Σε πολλές ετικέτες που έχουν βρεθεί από το συγκεκριμένο τάφο, ο αριθμός των κάθετων ευθειών, συχνά, ξεπερνά τις εννέα. Ωστόσο, στο ύστερο αιγυπτιακό σύστημα, κάθε δεκάδα αντικαθίστανται από το σύμβολο της επόμενης τάξης. Οι αριθμοί μέχρι και το εννέα αναπαρίστανται με κάθετες ευθείες.[15]

Παρόμοιες ετικέτες έχουν ανασκαφεί και από το νεκροταφείο στην πόλη Naqada. Σε αυτές, φαίνεται πως η ανάπτυξη του δεκαδικού συστήματος και η συμβολική αναπαράσταση των αριθμών, σταδιακά, μετασχηματίζονται στη μορφή που είναι γνωστή από ύστερες πηγές.[16]

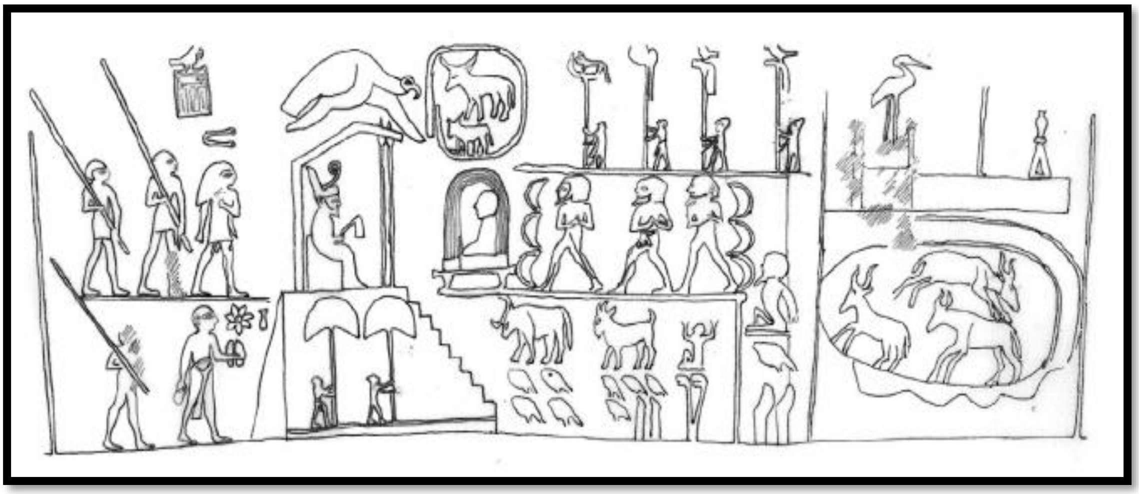


Εικόνα 3. Αριθμητικές αναπαραστάσεις από το νεκροταφείο στην Naqada

[15] Στο συγκεκριμένο τάφο δεν εμφανίζεται συνδυασμός των κάθετων και οριζόντιων ευθειών. Όσον αφορά την οριζόντια ευθεία, δεν είναι βέβαιο αν αποτελεί έναν άλλο τρόπο γραφής των μονάδων. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις υποθέσεις για τη σημασία των οριζόντιων ευθειών, βλ. Imhausen 2016,15-16 και 23.

[16] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το νεκροταφείο στην πόλη Naqada, βλ. Baines 2004, 157 και Imhausen 2016, 24.

Κατά στη διάρκεια των πρώιμων δυναστειών, οι αιγυπτιακοί αριθμοί δεν εμφανίζονταν μόνο σε ταφικά πλαίσια, αλλά χρησιμοποιούνταν και για τελετουργικούς σκοπούς. Αυτό αποτυπώνεται στον κεφαλοθραύστη (~3000 π.Χ., mace head) του βασιλιά Narmer, ο οποίος βρέθηκε στο ναό του θεού Horus και απεικονίζει το βασιλιά να λαμβάνει φόρους τιμής.[17] Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο, στο κατώτερο τμήμα, αναπαρίστανται μεγάλοι αριθμοί, όπως 400.000 ταύροι, 1.422.000 κατσίκες και 1.200 αιχμάλωτοι, οι οποίοι στόχευαν στην ένδειξη της δύναμης του βασιλιά. Από τους παρακάτω αριθμητικούς συμβολισμούς (όπως αποτυπώνονται στην Εικόνα 4) φαίνεται πως το αιγυπτιακό αριθμητικό σύστημα είχε αναπτυχθεί ήδη από την Πρώτη Δυναστεία.[18]



Εικόνα 4. Ο Κεφαλοθραύστης Namer

[17] Στον κεφαλοθραύστη αναπαρίσταται η νίκη του βασιλιά και η ένωση της Άνω και Κάτω Αιγύπτου. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την παλέτα του Namer, βλ. Imhausen 2009, 782, Imhausen 2016, 25-26 και Κοπανιάς 2018, 59-60.

[18] Παρόμοιες σκηνές με τον κεφαλοθραύστη του Narmer, εμφανίζονται και στον κεφαλοθραύστη του βασιλιά Scorpion, αλλά και στην παλέτα του Narmer, όπου εμφανίζεται μια δέσμη από έξι λωτούς. Επίσης, στην ίδια παλέτα εμφανίζεται και το σύμβολο του σχοινιού, βλ. Clagett 1989, 4-6 και Imhausen 2016, 24-25.

1.1.2 Γραπτή παράδοση

Οι πλέον πλούσιες πηγές για τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά είναι οι πάπυροι, οι οποίοι προέρχονται, κυρίως, από την περίοδο του Μέσου Βασιλείου.[19] Ο βασικότερος από αυτούς είναι ο πάπυρος Rhind (~1650 π.Χ.). Επίσης, μαθηματικές πληροφορίες αντλούνται από τον πάπυρο της Μόσχας (~1850 π.Χ.), τον δερμάτινο κύλινδρο (~1650 π.Χ.) και τον πάπυρο Kahun (~1850 π.Χ.). Κείμενα με μαθηματικό περιεχόμενο αποτελούν και ο πάπυρος του Βερολίνου 6619 (~ 1800 π.Χ.), του Reisner (~1800 π.Χ.) και η ξύλινη πινακίδα Akhmim. Ακόμα, έχουν διασωθεί και κείμενα από την περίοδο του Νέου Βασιλείου, όπως ο πάπυρος «Ανάσταση Ι», ο πάπυρος Wilbour και ο πάπυρος Harris I. Επίσης, από την ίδια περίοδο προέρχονται και τα κείμενα Ostracon Senmut 153 και Turin 57170.[20]

Ο πάπυρος Rhind γράφηκε κατά την περίοδο της Δυναστείας των Υξώς (~1800 π.Χ.). Ωστόσο, σύμφωνα με τον αντιγραφέα του, Αχμές (Ah-Mose), το πρωτότυπο κείμενο προέρχεται από την περίοδο του Μέσου Βασιλείου. Ο πάπυρος περιλαμβάνει μια εισαγωγή, πίνακες και 84 πρακτικά προβλήματα με τη μέθοδο επίλυσής τους. Επιπλέον, στην πίσω όψη του παπύρου περιέχεται ένας πίνακας που παραδοσιακά ονομάζεται «πίνακας 2:ν», ενώ στον ίδιο πάπυρο καταγράφονται και υπολογισμοί με κλάσματα (π.χ. πρόβλημα 61 υπολογισμός του 2/3).[21] Σημαντική είναι η εισαγωγή του, καθώς εγείρονται ερωτήματα για τον καθορισμό του επιπέδου των αιγυπτιακών μαθηματικών που σώζονται από τις διαθέσιμες πηγές:

«*Έγκριτος λογισμός. Για να διεισδύεις στα πράγματα, για τη γνώση όλων των πραγμάτων και όλων των μυστικών. Αυτό το βιβλίο αντιγράφηκε το έτος 33, τον τέταρτο μήνα της εποχής των πλημμυρών υπό την αυτού μεγαλειότητα τον Βασιλέα της Άνω και Κάτω Αιγύπτου, 'A-user-Re', πολλά τα χρόνια του, από ένα παλαιότερο αντίγραφο που*

[19] Ωστόσο, δεν είναι απολύτως βέβαιο ότι δεν υπήρχαν μαθηματικά κείμενα και σε προηγούμενες περιόδους. Όμως, όσα κείμενα μαθηματικού χαρακτήρα έχουν ανασκαφεί, χρονολογούνται, κυρίως, σε εκείνη την περίοδο, βλ. Imhausen 2020, 109-110.

[20] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους μαθηματικούς πάπυρους από την περίοδο του Μέσου και Νέου Βασιλείου, βλ. Imhausen 2016, 63-70, 134-142 και 148-156.

[21] Αυτός ο πάπυρος ονομάστηκε έτσι λόγω του Σκωτσέζου δικηγόρου A.H. Rhind. Ο ίδιος, το 1858, αγόρασε τον πάπυρο στο Λούξορ, μετά την ανασκαφή του στα ερείπια της αρχαίας πόλης των Θηβών. Μετά το θάνατό του, ο πάπυρος πωλήθηκε στο Βρετανικό Μουσείο (1865). Επίσης είναι γραμμένος στην ιερατική γραφή, βλ. Van der Waerden 2010, 2 και Χριστιανίδης 2012, 9. Μερικά από τα πιο χαρακτηριστικά προβλήματα αυτού το παπύρου, είναι το πρόβλημα 61b, το οποίο πραγματεύεται τον υπολογισμό του 2/3 και το πρόβλημα 79 για τον υπολογισμό των αντικειμένων σε ένα σπίτι. Για μια σύντομη περιγραφή των επιμέρους μαθηματικών προβλημάτων του πάπυρου Rhind, βλ. Clagett 1999, 117 και Høyrup 2020, 145.

δημιουργήθηκε στα χρόνια του Βασιλέα της Άνω και Κάτω Αιγύπτου, Ne-ma'et-Re. Ο γραφέας A'h-mose (Αχμές) γράφει αυτό το αντίγραφο.».[22]

Σκοπός της εισαγωγής είναι να αναφέρει στον αναγνώστη ότι θα ακολουθήσει η παρουσίαση των μυστικών των αριθμών, σε προβλήματα σχετικά με πρακτικά ζητήματα. Τα προβλήματα, όμως, που καταγράφονται σχετίζονται με τις υποχρεώσεις των υπαλλήλων του κράτους, όπως τους υπολογισμούς των μισθών, τις ποσότητες των σιτηρών για την παραγωγή ψωμιού, κ.α. Σύμφωνα με την εισαγωγή του Αχμές, φαίνεται πως το περιεχόμενο του παπύρου αποτελεί ένα δείγμα των ανώτερων μαθηματικών στο οποίο είχαν φτάσει οι αρχαίοι Αιγύπτιοι. Πιθανότατα, η άποψη που διατυπώνεται στην εισαγωγή αναφέρεται στην περίοδο του αντιγραφέα Αχμές (~1650 π.Χ.). Ωστόσο, δεν είναι σαφές, αν τις επόμενες περιόδους, ο συγκεκριμένος πάπυρος εξακολουθούσε να αποτελεί δείγμα των ανώτερων αιγυπτιακών μαθηματικών.[23]

Η δεύτερη σημαντικότερη πηγή για τα αιγυπτιακά μαθηματικά είναι ο πάπυρος της Μόσχας, στον οποίο περιλαμβάνονται 25 προβλήματα. Ο πάπυρος αντιγράφηκε κατά τη διάρκεια της 13ης Δυναστείας, ενώ το πρωτότυπο κείμενο θεωρείται ότι προέρχεται από την περίοδο του Μέσου Βασιλείου.[24] Αν και τα περισσότερα προβλήματα του παπύρου της Μόσχας σχετίζονται με τη γεωμετρία, συναντώνται πολλά προβλήματα με πρακτικά ζητήματα, όπως τον υπολογισμό των σιτηρών.[25] Επίσης, σημαντική πηγή αποτελεί και ο δερμάτινος κύλινδρος. Σε αυτόν περιέχονται 26 υπολογισμοί κλασμάτων και ορισμένα προβλήματα.[26] Υπολογισμοί με κλάσματα συναντώνται και στον πάπυρο Kahun, ο οποίος χρονολογείται στο δεύτερο μισό της 12ης Δυναστείας.[27] Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα των μαθηματικών από την περίοδο του Νέου Βασιλείου αποτελεί ο πάπυρος «Ανάσταση Ι». Ο πάπυρος χρονολογείται το 1250 π.Χ. και αποτελεί μια φανταστική επιστολή μεταξύ δύο γραφέων. Σε αυτόν αναφέρονται

---

[22] Μεταφράζω από τα αγγλικά την εισαγωγή από Chace 1927, 49.

[23] Φαίνεται να αποτελεί ένα δείγμα των ανώτερων μαθηματικών στο οποίο είχαν φτάσει οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, καθώς δεν έχει νόημα η ύπαρξη μιας εισαγωγής που αναφέρει ότι θα αποκαλύψει τα μυστικά των μαθηματικών, μέσα από την εκμάθηση απλών πράξεων, βλ. Van der Waerden 2010, 2.

[24] Ο πάπυρος της Μόσχας είναι, επίσης, γραμμένος στην ιερατική γραφή. Την περίοδο 1892/3 αγοράστηκε από τον V.S Golenishev, βλ. Χριστιανίδης 2012, 10.

[25] Ωστόσο, αυτός δεν αποτελεί τόσο σημαντική πηγή, για τους ιστορικούς των μαθηματικών, όσο ο πάπυρος Rhind. Αναφορικά με το περιεχόμενο του παπύρου, σύμφωνα με τον Struve, παρατηρείται έλλειψη στη διάταξη των προβλημάτων, σε σχέση με τον πάπυρο Rhind. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο πάπυρος γράφηκε από κάποιον μαθητή, ο οποίος είχε φτάσει σε ένα ανώτερο επίπεδο, βλ. Clagett 1999, 17 και 207-209.

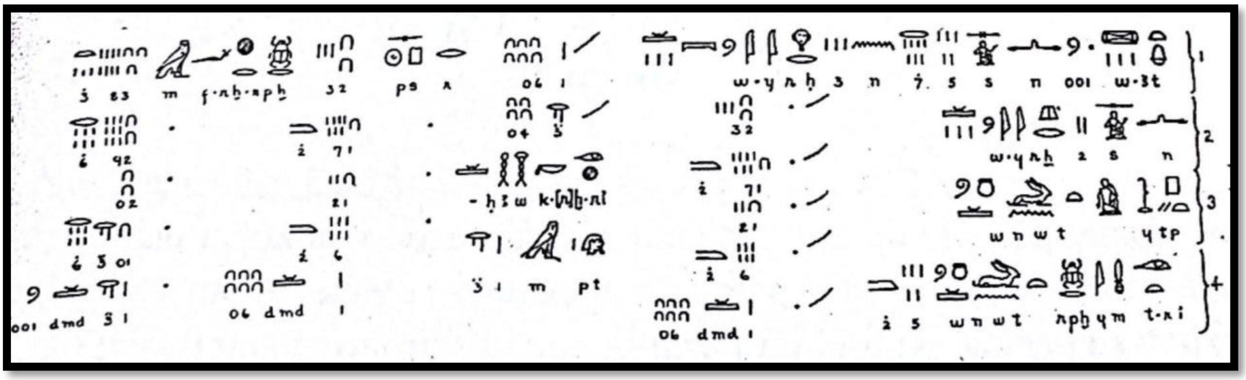
[26] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον δερμάτινο κύλινδρο, βλ. Clagett 1999, 18 και Χριστιανίδης 2012, 10.

[27] Η ανασκαφή αυτού του παπύρου έγινε την περίοδο 1889-90, βλ. Van der Waerden 2010, 3.

καθημερινά πρακτικά προβλήματα, όπως ο υπολογισμός των πλίνθων που απαιτούνται για μια κατασκευή, τα άτομα που χρειάζονται για τη μεταφορά ενός οβελίσκου, κ.α. Σε αντίθεση, όμως, με τους παραπάνω παπύρους, τα πρακτικά προβλήματα του παπύρου «Ανάσταση Ι» δεν παρέχουν στοιχεία για την επίλυσή τους.[28]

Ωστόσο, τα παραπάνω μαθηματικά κείμενα δεν έχουν μόνο πρακτικό χαρακτήρα. Τα χαρακτηριστικά των σωζόμενων κειμένων, του Μέσου Βασιλείου, αποδεικνύουν ότι αναπτύχθηκαν σε ένα πλαίσιο εκπαίδευσης των ασκούμενων γραφέων. Αυτό γίνεται αντιληπτό από το γεγονός ότι οι ποσότητες που αναφέρονται στα προβλήματα δεν συνάδουν με της συνθήκες της καθημερινής ζωής. Αντιθέτως, οι δάσκαλοι εκπαίδευαν τους μελλοντικούς γραφείς σε πιο σύνθετα προβλήματα από αυτά που θα αντιμετώπιζαν.[29]

Ένα παράδειγμα ενός μαθηματικού κειμένου με εκπαιδευτικό χαρακτήρα είναι το πρόβλημα 40 από τον πάπυρο Rhind:



Εικόνα 5. Πρόβλημα 40 του παπύρου Rhind

[28] Αναφέρεται στις γνώσεις τις οποίες έπρεπε να διαθέτει ένας γραφέας. Σε αυτήν την επιστολή, ο ένας γραφέας, ο Χορί, χλευάζει το συνάδελφό του, Αμενεμόπ, για την ανικανότητά του να επιλύσει απλά πρακτικά προβλήματα. Ακόμα, για την κατανόηση των αιγυπτιακών μαθηματικών, αντλούνται πληροφορίες από επιστολές και λογαριασμούς, φανερώνοντας το επίπεδο της μαθηματικής γνώσης. βλ. Robins 1995, 1800, Van der Waerden 2010, 3 και Imhausen 2020, 115.

[29] Μάλιστα, ο πάπυρος Rhind περιλαμβάνει πρακτικά προβλήματα υπολογισμών, τα οποία γίνονται όλο και πιο δύσκολα. Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, οι καθημερινές πρακτικές σχετίζονταν με τον υπολογισμό της ποσότητας των προϊόντων που έπρεπε να διανεμηθούν, κλπ. Σε αυτά τα κείμενα περιλαμβάνονται μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων, οι οποίες είναι πιο σύνθετες, συγκριτικά με τους υπολογισμούς των καθημερινών προβλημάτων. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον εκπαιδευτικό χαρακτήρα των μαθηματικών κειμένων, βλ. Imhausen 2016, 58-60 και Imhausen 2020, 109-110.

«100 ψωμιά για 5 άνδρες, το 1/7 των τριών πρώτων είναι για τους 2 τελευταίους. Ποια είναι η διαφορά στα μερίδια;». Πρόκειται για μια διανομή 100 καρβελιών ψωμιού σε 5 άτομα, το κάθε ένα από τα οποία θα λάβει διαφορετική ποσότητα ψωμιού. Ο γραφέας, σύμφωνα με αυτήν τη μέθοδο, ορίζει αυθαίρετα τη διαφορά στα μερίδια ως 5 1/2. Η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος δίνεται μέσω της μεθόδου της εσφαλμένης παραδοχής, η οποία θα αναλυθεί παρακάτω. Όπως φαίνεται από το κείμενο, ο γραφέας δεν αναφέρει πώς κατέληξε στην παραδοχή ότι τα μερίδια πρέπει να είναι έτσι ώστε το 1/7 των τριών μεγαλύτερων να είναι ίσο με το άθροισμα των δύο μικρότερων μεριδίων. Επίσης, ο γραφέας δεν απαντά στο ερώτημα που διατυπώνεται στην εκφώνηση του προβλήματος. Ο γραφέας προτού καταλήξει στην τιμή 5 1/2, είχε κάνει δοκιμές με άλλες τιμές. Η παράλειψη της αναφοράς των δοκιμών αλλά και της απάντησης στο πρόβλημα, φανερώνουν ότι αυτό χρησιμοποιήθηκε για τη διδασκαλία της μεθόδου της εσφαλμένης παραδοχής.[30]

Αν και τα παραπάνω κείμενα αναπτύχθηκαν σε ένα εκπαιδευτικό πλαίσιο, στην αρχαία Αίγυπτο δεν συναντάται μια αυτόνομη ομάδα μαθηματικών, η οποία να διαχειρίζεται τα μαθηματικά. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, οι πραγματικοί φορείς της μαθηματικής γνώσης ήταν οι ιερείς, οι οποίοι διέθεταν αρκετό ελεύθερο χρόνο ώστε να ασχολούνται με αυτά:

« Γι' αυτό, όταν πια είχαν ικανοποιηθεί όλες οι ανάγκες τέτοιας λογής, επινοήθηκαν οι επιστήμες που δεν απέβλεπαν ούτε σε απόλαυση ούτε στις ανάγκες της ζωής, και αρχικά στους τόπους στους οποίους δόθηκε διαθέσιμος χρόνος. Γι' αυτό οι μαθηματικές τέχνες συγκροτήθηκαν πρώτα στην Αίγυπτο, διότι εκεί αφέθηκε διαθέσιμος χρόνος στους ιερείς.»[31]

Ωστόσο, τα μαθηματικά δεν εντάχθηκαν, αρχικά, στις πρακτικές των ιερέων. Αυτό μαρτυρείται από το ότι τα προβλήματα στα μαθηματικά κείμενα είναι προσανατολισμένα σε πρακτικές εφαρμογές. Με αυτά δεν ασχολούνταν οι ιερείς, αλλά οι επόπτες, οι κρατικοί υπάλληλοι και οι γραφείς, οι οποίοι ήταν επιφορτισμένοι με διοικητικά καθήκοντα. Εκτός από αυτό, οι γραφείς εκπαίδευαν τους υπαλλήλους του παλατιού στις παραπάνω διαδικασίες και δίδασκαν στους ασκούμενους γραφείς τα

---

[30] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το συγκεκριμένο πρόβλημα του παπύρου Rhind, βλ. Χριστιανίδης 2012, 11-14.
[31] Μετάφραση δική μου, βλ. *Μετά τα Φυσικά*, 981b20-25.

μαθηματικά και τη γραφή. Αντιθέτως, οι ιερείς χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά κυρίως στις αστρονομικές παρατηρήσεις και στη συλλογή των φόρων.[32]

Από τον Ηρόδοτο αναφέρεται ότι φορείς της μαθηματικής γνώσης ήταν και οι κρατικοί υπάλληλοι, οι οποίοι επαναπροσδιόριζαν τα σύνορα των χωραφιών κάθε φορά που πλημμύριζε ο Νείλος:

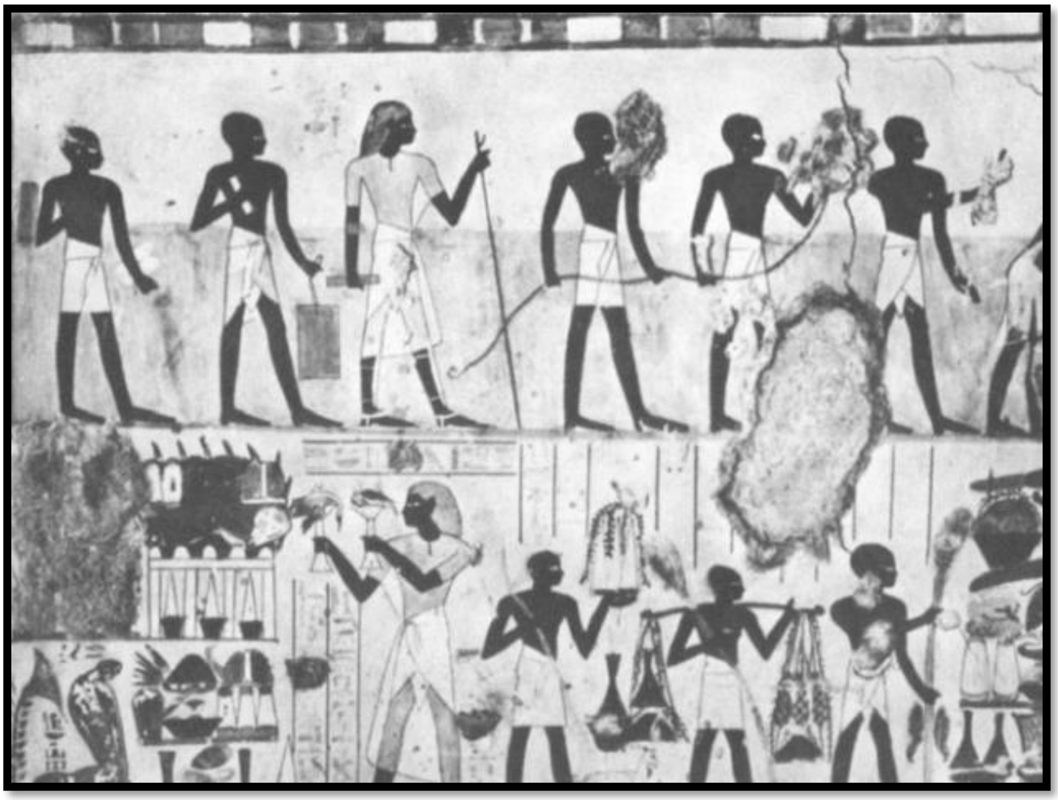
«Οι ιερείς μου είπαν ότι αυτός ο βασιλιάς μοίρασε όλη τη χώρα στους Αιγύπτιους, και έδωσε τον ίδιο κλήρο στον καθένα, ένα τετράγωνο χωράφι, για το οποίο καθόρισε να πληρώνεται ετήσιος φόρος, και από το οποίο δημιούργησε τις προσόδους του. Αν ο ποταμός έπαιρνε ένα μέρος από το χωράφι κανενός, τότε πήγαινε στον βασιλιά, του ανέφερε το γεγονός, και εκείνος έστελνε ανθρώπους να μετρήσουν πόσο μικρότερο έγινε το χωράφι, ώστε από τότε και στο εξής να ελαττωθεί ανάλογα ο χώρος. Από αυτό, νομίζω, προέρχεται η εφεύρεση της γεωμετρίας, που μεταδόθηκε στην Ελλάδα, διότι το ηλιακό ρολόι, τον γνώμονα και τα δώδεκα μέρη της ημέρας, οι Έλληνες τα έμαθαν από τους Βαβυλωνίους.»[33]

Ακόμα, ο Δημόκριτος επισημαίνει:

«*Κανένας δεν με ξεπέρασε στις συνθέσεις γραμμών μετά αποδείξεων, ούτε ακόμα οι αποκαλούμενοι ως αρπεδονάπτες μεταξύ των Αιγυπτίων*».[34]

Πιθανότατα, με τη φράση «συνθέσεις γραμμών μετά αποδείξεων», ο Δημόκριτος αναφέρεται στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Οι αρπεδονάπτες ήταν επιφορτισμένοι με το καθήκον της καταμέτρησης των χωραφιών, με βασικό όργανο μέτρησης το σχοινί, κάθε φορά που πλημμύριζε ο Νείλος, για τις ανάγκες της φορολογίας (βλ. Εικόνα 6). Από το παραπάνω απόσπασμα φαίνεται ότι, ήδη από την εποχή του Δημόκριτου, οι Έλληνες επαινούσαν τις μαθηματικές ικανότητες των Αιγυπτίων.[35] Επομένως, τα μαθηματικά φαίνεται να ασκούνται από αυτές τις κοινότητες.

[32] Με πρακτικά προβλήματα που αφορούν υπολογισμούς του εμβαδού ενός χωραφιού, τα μερίδια φαγητού των εργατών, κ.α., δεν ασχολούνταν οι ιερείς, βλ. Χριστιανίδης 2012, 4-5.
[33] βλ. *Ιστορίαι*, 2, 109. 1-12.
[34] βλ. *Στρωματείς*, I 15.
[35] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους αρπεδονάπτες, βλ. Van der Waerden 2010, 1-2 και Χριστιανίδης 2012, 2-3.



Εικόνα 6. Ταφική αναπαράσταση αρπεδοναπτών από τον τάφο του Djeserkaseneb

1.2 Το αριθμητικό σύστημα

Από τους πρώιμους δυναστικούς αιώνες, στην Αίγυπτο εμφανίζονται διαφορετικά σύμβολα για τους αριθμούς 1, 10, 100, 1000 κ.ο.κ., οι οποίοι στη συνέχεια διαμορφώθηκαν σε ένα ενιαίο σύστημα. Το αριθμητικό σύστημα των αρχαίων Αιγυπτίων ήταν δεκαδικό και μη θεσιακό. [36]

[36] Βλ. Imhausen 2016, 19-21.

hieroglyphic sign	Gardiner number	absolute value
𓏺	Z1	1
𓎆	V20	10
𓍢	V1	100
𓆼	M12	1000
𓂭	D50	10.000
𓆐	I8	100.000
𓁨	C11	1.000.000

Εικόνα 7. Σύμβολα αιγυπτιακού αριθμητικού συστήματος

Οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 9 αναπαρίστανται με μια κάθετη ευθεία, ενώ ο αριθμός 10 συμβολίζεται με μια αψίδα. Ακόμα, οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, για να αναπαραστήσουν τον αριθμό 100 χρησιμοποιούσαν το σύμβολο που μοιάζει με σχοινί. Η χρήση του σχοινιού για την αναπαράσταση του 100, πιθανότατα, προέκυψε από το σχοινί μέτρησης. Το τελευταίο το χρησιμοποιούσαν για τη μέτρηση της έκτασης ενός χωραφιού και είχε τυπικό μέτρο εκατό πήχεις.[37]Αντίστοιχα, οι αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν φύλλα λωτού για το συμβολισμό του αριθμού 1000. Αυτό το φυτό είχε ιδιαίτερη σημασία, καθώς χρησιμοποιούταν στις τελετουργικές πρακτικές. Εν συνεχεία, οι Αιγύπτιοι επέλεξαν την εμφάνιση ενός δαχτύλου για την απεικόνιση του αριθμού 10.000. Η επιλογή αυτή, πιθανότατα, οφείλεται στην έννοια της δέσμης των χιλιάδων. Έτσι, με την ιδέα των δέκα δαχτύλων, στο καθένα από τα οποία αντιστοιχεί μία δέσμη χιλιάδων, καθιέρωσαν αυτόν το συμβολισμό για το συγκεκριμένο αριθμό. Για την αναπαράσταση του αριθμού 100.000 χρησιμοποίησαν ένα γυρίνο ή βάτραχο, και τέλος στον αριθμό 1.000.000, μια καθιστή ανθρώπινη φιγούρα. Αυτή η φιγούρα παραπέμπει στον θεό Heh, ο οποίος, θεωρείται, κατά την παράδοση, ότι προσέφερε

[37] Βλ. παραπάνω το απόσπασμα του Δημόκριτου για του αρπεδονάπτες.

εκατομμύρια χρόνια ζωής. Τέλος, όσον αφορά το 0, στους αρχαίους Αιγύπτιους δεν υπήρχε η έννοιά του ως αριθμός.[38]

Παραδείγματος χάριν, για την αναπαράσταση του αριθμού 12.643, οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν τον εξής συμβολισμό:[39]

Εικόνα 8. Συμβολική αναπαράσταση του αριθμού 12.643

1.2.1 Υπολογισμοί

1.2.1.1 Πρόσθεση

Όσον αφορά τους υπολογισμούς, στο αριθμητικό σύστημα των Αιγυπτίων, ίσχυε ο αθροιστικός κανόνας. Η πρόσθεση των αριθμών αποτελούσε μια πράξη, στην οποία αναγόταν ο πολλαπλασιασμός, αλλά και η διαίρεση. Κατά τη διαδικασία της πρόσθεσης, αρκούσε να υπολογιστούν οι μονάδες, οι δεκάδες, οι εκατοντάδες, κ.α., σύμφωνα με τους παραπάνω συμβολισμούς.[40]

1.2.1.2 Πολλαπλασιασμός

Ο πολλαπλασιασμός εκτελείται από συνεχείς διπλασιασμούς, τριπλασιασμούς, δεκαπλασιασμούς ή υποδιπλασιασμούς, τα αποτελέσματα των οποίων προστίθενται στο τέλος.

Έστω ο πολλαπλασιασμός 5×2000 από το πρόβλημα 52 του πάπυρου Rhind:[41]

/1	2000
2	4000

[38] Αυτή η θεϊκή φιγούρα συναντάται σε αγγεία, κοσμήματα και σε τοίχους ναών. Ωστόσο, σύμφωνα με τον Sethe, αυτό το σύμβολο δεν χρησιμοποιήθηκε στη διάρκεια του Μέσου Βασιλείου. Προκειμένου να καταγράφουν μεγάλους αριθμούς, χρησιμοποιούσαν πολλαπλασιασμούς, βλ. Imhausen 2016, 19-21.
[39] Για το παραπάνω παράδειγμα, βλ. Katz 2013, 6.
[40] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την πράξη της πρόσθεσης στους αρχαίους Αιγυπτίους, βλ. Katz 2013, 5-6.
[41] Για το συγκεκριμένο πολλαπλασιασμό στον πάπυρο, βλ. Chase 1927, 93.

/4	8000
	10000

Ύστερα από τους συνεχείς διπλασιασμούς, στην αριστερή στήλη πρέπει να βρεθούν οι αριθμοί που σχηματίζουν ως άθροισμα τον αριθμό 5, οι οποίοι υποδεικνύονται με πλάγια γραμμή. Συνεπώς, το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι το 10000 και προκύπτει από τη δεξιά στήλη. Σύμφωνα με τον Bartel L. Van der Waerden, η παραπάνω μέθοδος αποτελεί τη βάση «ολόκληρης της αιγυπτιακής υπολογιστικής τέχνης».[42]

1.2.1.3 Διαίρεση

Η διαίρεση αποτελούσε μια μορφή πολλαπλασιασμού, διατυπωμένη με αντίστροφο τρόπο. Η διαίρεση κατανοούταν ως «το α να διαιρεθεί σε β κομμάτια», το οποίο αντιστοιχεί στο ερώτημα «πόσα κομμάτια του β χωράνε στο α;».[43] Επίσης, στα αιγυπτιακά μαθηματικά, οι διαιρέσεις διακρίνονται σε τέλειες και ατελείς. Σχετικά με τις τέλειες διαιρέσεις, έστω η διαίρεση 30 διά 2 ½ από το πρόβλημα 76 του πάπυρου Rhind:[44]

1	2 ½
10	25 /
2	5 /
	12

Αρχικά, ακολουθούν συνεχείς διπλασιασμοί, μέχρι στη δεξιά στήλη να συγκεντρωθούν οι αριθμοί που δίνουν άθροισμα 30. Στην αριστερή στήλη, οι αριθμοί που αντιστοιχούν στους αριθμούς 25 και 5, πρέπει να προστεθούν, ώστε να προκύψει το αποτέλεσμα της διαίρεσης, δηλαδή 10+2=12. Συνεπώς, 30/ 2 ½ = 12.

Ωστόσο, αν η διαίρεση ήταν ατελής, οι Αιγύπτιοι κατέφευγαν σε υποδιπλασιασμούς ή σε υποδεκαπλασιασμούς. Σε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιούσαν δύο ακολουθίες κλασμάτων:

Α) 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, …

42 Η διαδικασία των διαδοχικών διπλασιασμών σταματά στο 4, διότι, αν το 4 διπλασιαστεί, ο γραφέας υπερβαίνει τον αριθμό 5. Η ίδια μέθοδος διατηρήθηκε μέχρι τους ελληνιστικούς χρόνους. Για την άποψη του Van der Waerden, βλ. Van der Waerden 2010, 5.
43 Αυτό που ζητείται είναι ο αριθμός ο οποίος, αν πολλαπλασιαστεί με τον έναν αριθμό, θα μας δώσει τον άλλο. βλ. Van der Waerden 2010, 5 και Χριστιανίδης 2012, 15.
44 Για τη διαίρεση στο πρόβλημα 76, βλ. Chace 1927, 110.

B) 2/3, 1/3, 1/6, 1/12, …

Έστω η διαίρεση 19/8, η οποία εμφανίζεται στο πρόβλημα 24 του παπύρου Rhind:[45]

1 8
2 16 /
1/2 4
1/4 2 /
1/8 1 /

Η διαίρεση ξεκινά με διπλασιασμό και ακολουθούν υποδιπλασιασμοί της ακολουθίας του 2, ώστε να προκύψει, στα δεξιά, ο αριθμός 19. Συνεπώς, 19/8=2+1/4+1/8.

Από τα παραδείγματα των διαιρέσεων στα προβλήματα, φαίνεται πως τα μόνα κλάσματα που αντιλαμβάνονταν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήταν τα «μοναδιαία κλάσματα». Ωστόσο, με τον όρο «μοναδιαία κλάσματα» προκύπτει η σύγχυση ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι είχαν την έννοια του κλάσματος m/n και είχαν επιλέξει να χρησιμοποιούν μόνο τα κλάσματα 1/n.[46] Η κυρίαρχη άποψη στη σύγχρονη ιστοριογραφία αναφέρει ότι οι Αιγύπτιοι δεν είχαν την έννοια του σύνθετου κλάσματος και αντιλαμβάνονταν τα κλάσματα ως αντίστροφα των μονάδων. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν κλάσματα, όπως το 1/2, το 1/3, τα 2/3, το 1/4 τα 3/4 , το 1/6 και το 1/8, με τα οποία εννοούσαν την έννοια του «μέρος».[47] Παραδείγματος χάριν, σύμφωνα με τη σύγχρονη ιστοριογραφία, η έννοια του 1/3 κατανοείται από τους αρχαίους Αιγύπτιους ως το ένα μέρος μιας ποσότητας, η οποία έχει διαιρεθεί σε τρία μέρη.[48]

Κλασματικός συμβολισμός	Κλασματική Τιμή
	2/3
	1/2
	1/3
	1/4

Πίνακας 1. Αιγυπτιακός συμβολισμός κλασμάτων[49]

[45] Για τη συγκεκριμένη διαίρεση, βλ. Chace 1927, 67.
[46] Η έννοια «μοναδιαία κλάσματα» είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται αναχρονιστικά από τους ιστορικούς Τα μοναδιαία κλάσματα συναντώνται στον πάπυρο Rhind. Ειδικότερα, από τα 84 προβλήματα του παπύρου, μόνο τα 6 δεν χρησιμοποιούν τα μοναδιαία κλάσματα, βλ. Χριστιανίδης 2012, 15-16 και 20-21.
[47] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα παραπάνω κλάσματα που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, βλ. Χριστιανίδης 2012, 21 και Neugebauer 1990, 11..
[48] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την έννοια του μέρους στα αιγυπτιακά κλάσματα, βλ. Abdulaziz 2008, 8.
[49] Αντλώ τον πίνακα 1 από Imhausen 2016, 53.

Όσον αφορά το διπλασιασμό των μοναδιαίων κλασμάτων, για τα κλάσματα με άρτιο παρονομαστή αρκούσε ο υποδιπλασιασμός του παρονομαστή. Ωστόσο, η διαδικασία του διπλασιασμού με περιττό παρονομαστή, από τον αριθμό 3 έως τον 101, εντοπίζεται στον πίνακα 2:ν του παπύρου Rhind.[50]

$2 \div 3 =$	$\overline{2} + \overline{6}$	$2 \div 53 =$	$\overline{30} + \overline{318} + \overline{795}$
$2 \div 5 =$	$\overline{3} + \overline{15}$	$2 \div 55 =$	$\overline{30} + \overline{330}$
$2 \div 7 =$	$\overline{4} + \overline{28}$	$2 \div 57 =$	$\overline{38} + \overline{114}$
$2 \div 9 =$	$\overline{6} + \overline{18}$	$2 \div 59 =$	$\overline{36} + \overline{236} + \overline{531}$
$2 \div 11 =$	$\overline{6} + \overline{66}$	$2 \div 61 =$	$\overline{40} + \overline{244} + \overline{488} + \overline{610}$
$2 \div 13 =$	$\overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$	$2 \div 63 =$	$\overline{42} + \overline{126}$
$2 \div 15 =$	$\overline{10} + \overline{30}$	$2 \div 65 =$	$\overline{39} + \overline{195}$
$2 \div 17 =$	$\overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$	$2 \div 67 =$	$\overline{40} + \overline{335} + \overline{536}$
$2 \div 19 =$	$\overline{12} + \overline{76} + \overline{114}$	$2 \div 69 =$	$\overline{46} + \overline{138}$
$2 \div 21 =$	$\overline{14} + \overline{42}$	$2 \div 71 =$	$\overline{40} + \overline{568} + \overline{710}$
$2 \div 23 =$	$\overline{12} + \overline{276}$	$2 \div 73 =$	$\overline{60} + \overline{219} + \overline{292} + \overline{365}$
$2 \div 25 =$	$\overline{15} + \overline{75}$	$2 \div 75 =$	$\overline{50} + \overline{150}$
$2 \div 27 =$	$\overline{18} + \overline{54}$	$2 \div 77 =$	$\overline{44} + \overline{308}$
$2 \div 29 =$	$\overline{24} + \overline{58} + \overline{174} + \overline{232}$	$2 \div 79 =$	$\overline{60} + \overline{237} + \overline{316} + \overline{790}$
$2 \div 31 =$	$\overline{20} + \overline{124} + \overline{155}$	$2 \div 81 =$	$\overline{54} + \overline{162}$
$2 \div 33 =$	$\overline{22} + \overline{66}$	$2 \div 83 =$	$\overline{60} + \overline{332} + \overline{415} + \overline{498}$
$2 \div 35 =$	$\overline{30} + \overline{42}$	$2 \div 85 =$	$\overline{51} + \overline{255}$
$2 \div 37 =$	$\overline{24} + \overline{111} + \overline{296}$	$2 \div 87 =$	$\overline{58} + \overline{174}$
$2 \div 39 =$	$\overline{26} + \overline{78}$	$2 \div 89 =$	$\overline{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890}$
$2 \div 41 =$	$\overline{24} + \overline{246} + \overline{328}$	$2 \div 91 =$	$\overline{70} + \overline{130}$
$2 \div 43 =$	$\overline{42} + \overline{86} + \overline{129} + \overline{301}$	$2 \div 93 =$	$\overline{62} + \overline{186}$
$2 \div 45 =$	$\overline{30} + \overline{90}$	$2 \div 95 =$	$\overline{60} + \overline{380} + \overline{570}$
$2 \div 47 =$	$\overline{30} + \overline{141} + \overline{470}$	$2 \div 97 =$	$\overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$
$2 \div 49 =$	$\overline{28} + \overline{196}$	$2 \div 99 =$	$\overline{66} + \overline{198}$
$2 \div 51 =$	$\overline{34} + \overline{102}$	$2 \div 101 =$	$\overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606}$

Εικόνα 9. Περιεχόμενο πίνακα 2:n

1.2.1.4 Μέθοδος εσφαλμένης παραδοχής

Η μέθοδος επίλυσης των προβλημάτων ονομάζεται στη βιβλιογραφία «μέθοδος αχά» ή «μέθοδος εσφαλμένης παραδοχής», διότι δεν είναι γνωστό πώς ονομαζόταν από τους Αιγυπτίους. Ο τεχνικός όρος «αχά» ή «χα», δηλώνει την έννοια της ζητούμενης ποσότητας. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί το πρόβλημα 26 του παπύρου Rhind:

---

[50] Τα αποτελέσματα αυτών των υπολογισμών είναι διατυπωμένα ως αθροίσματα μοναδιαίων κλασμάτων. Για τον υπολογισμό του διπλασιασμού των μοναδιαίων κλασμάτων και τον πίνακα 2:ν, βλ. Van der Waerden 2010, 13-16 και Χριστιανίδης 2012, 16-20.

Μια ποσότητα και το 1/4 αυτής κάνουν μαζί 15.

Η μέθοδος επίλυσης των αρχαίων Αιγυπτίων ξεκινά με την τυχαία υπόθεση ότι η ζητούμενη ποσότητα είναι 4.[51] Ωστόσο, με την προσθήκη του αριθμού 4, η αρχική πρόταση δεν δίνει ως αποτέλεσμα τον αριθμό 15. Αντιθέτως, η αρχική εσφαλμένη υπόθεση δημιούργησε ένα αποτέλεσμα, το οποίο είναι 3 φορές μικρότερο από αυτό που αρχικά είχε τεθεί.[52] Έτσι, έστω ότι η αρχική υπόθεση είναι 4 και ο λόγος του 15/5 είναι 3. Άρα, προκύπτει 4×3=12, το οποίο είναι η σωστή απάντηση.[53]

Από την παραπάνω μέθοδο επίλυσης του προβλήματος, γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος που ακολουθεί μια συγκεκριμένη δομή στα αιγυπτιακά προβλήματα. Η μέθοδος ξεκινά, θέτοντας μια υπόθεση με έναν τυχαίο αριθμό. Έτσι, επειδή η πιθανότητα να βρεθεί η σωστή απάντηση είναι μόνο μια, η μέθοδος ονομάζεται «μέθοδος εσφαλμένης παραδοχής».

Για πολλά χρόνια στην ιστοριογραφία, οι ιστορικοί των μαθηματικών, όπως οι Van der Waerden και ο Moritz Cantor, χαρακτήριζαν αυτήν τη μέθοδο ως άλγεβρα. Η αλγεβρική επίλυση του προβλήματος δίνεται μέσω μιας εξίσωσης α’ βαθμού:

$$\chi + \frac{\chi}{4} = 15$$

$$4\chi + \frac{4\chi}{\chi} = 60$$

$$5\chi = 60$$

$$\chi = \frac{60}{5}$$

$$\chi = 12$$

Για τα προβλήματα 24, 28-29 και 31 του παπύρου Rhind, ο Van der Waerden θεωρούσε αυτά ότι αποτελούν εξισώσεις α’ βαθμού.[54] Ωστόσο, σύμφωνα με τη

[51] Ο αριθμός 4 επιλέγεται, ώστε ο ίδιος να διαιρείται με το λόγο που ζητείται και να μην ακολουθήσουν πολλές πράξεις. Άρα, η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιηθεί, είναι: Αν προστεθεί το 4 και το 1, τότε θα έχουμε 15.

[52] Συνεπώς, για να λυθεί το πρόβλημα, πρέπει η αρχική υπόθεση να πολλαπλασιαστεί με το 3, προκειμένου να μεγαλώσει 3 φορές.

[53] Για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος στον πάπυρο Rhind, βλ. Case 1927, 68.

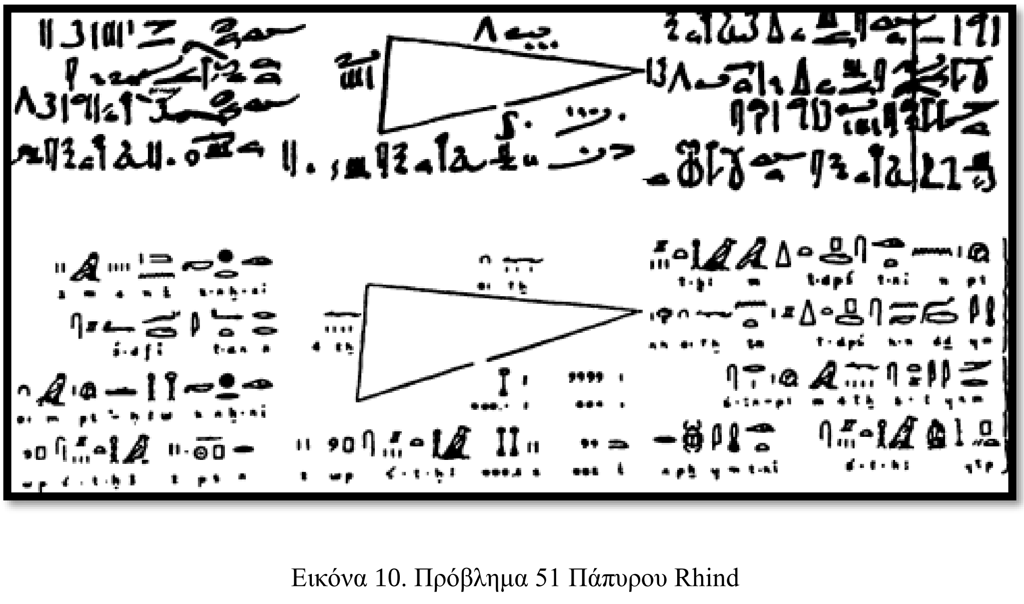
[54] Για την άποψη του Van der Waerden, βλ. Van der Waerden 2010, 19.

σύγχρονη ιστοριογραφία, οι αρχαίοι Αιγύπτιοι δεν γνώριζαν άλγεβρα. Συνεπώς, αποτελεί αναχρονισμό να προβάλλεται η σύγχρονη μέθοδος ως ο τρόπος επίλυσης των αρχαίων αιγυπτιακών προβλημάτων.[55]

1.2.1.5 Γεωμετρία

Εκτός από την αριθμητική, οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ασχολήθηκαν και με την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Τα τελευταία συναντώνται στον Πάπυρο Rhind και τον Πάπυρο της Μόσχας. Στα αιγυπτιακά γεωμετρικά προβλήματα δεν περιλαμβάνονται αποδείξεις και καθολικές έννοιες. Οι Αιγύπτιοι γραφείς διατύπωναν ένα πρόβλημα και έπειτα ακολουθούσε μια αλγοριθμική επίλυση του προβλήματος.

Μερικά από τα προβλήματα που επιλύουν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι σχετίζονται με τον υπολογισμό του εμβαδού ενός κύκλου (πρόβλημα 50 από τον Πάπυρο Rhind), τον υπολογισμό του εμβαδού ενός τριγώνου (πρόβλημα 51 από τον Πάπυρο Rhind, βλ. Εικόνα 10), τον υπολογισμό του όγκου μιας πυραμίδας (πρόβλημα 14 από τον Πάπυρο της Μόσχας), το εμβαδόν της επιφάνειας ενός καλαθιού (πρόβλημα 10 από τον Πάπυρο της Μόσχας), κ.τ.λ.[56] Ωστόσο, στην παρούσα εργασία μελετάται η αναπαράσταση των αριθμών, γι' αυτό δεν θα γίνει μεγαλύτερη αναφορά στη γεωμετρία.



Εικόνα 10. Πρόβλημα 51 Πάπυρου Rhind

[55] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την άποψη της σύγχρονης ιστοριογραφίας για τη μέθοδο της εσφαλμένης παραδοχής, βλ. Imhausen 2016, 71-73.

[56] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα γεωμετρικά προβλήματα, βλ. Van der Waerden 2010, 24-29 και Χριστιανίδης 2012, 21-23.

Κεφάλαιο Δεύτερο: Τα μαθηματικά στην αρχαία Μεσοποταμία

Η Μεσοποταμία αποτελεί έναν γεωγραφικό χώρο, ο οποίος φιλοξένησε πολλές αυτοκρατορίες, κάθε μία από αυτές χαρακτηρίζεται από διαφορετικές γλώσσες. Αυτές οι αυτοκρατορίες ανέπτυξαν μια πλούσια πολιτισμική δραστηριότητα με συστήματα γραφής, ενώ ασχολήθηκαν συστηματικά και με τις επιστήμες, όπως τα μαθηματικά.

2.1 Απαρχές αριθμητικών συστημάτων

Κατά την ύστερη περίοδο της Uruk, η μαζική κατασκευή κεραμικών αγγείων οδήγησε σε εξειδίκευση της παραγωγής, η οποία συνέβαλε στην ανάγκη ανάπτυξης των ανταλλαγών. Προκειμένου να συντελεστεί η διαδικασία της ανταλλαγής των προϊόντων, ήταν απαραίτητο να υπάρχει ένα μέσο που να διασφαλίζει τη νομιμότητα της διαδικασίας. Αρχικά, η νομιμότητα προσφερόταν μέσω της θρησκείας, στο ναό του θεού κάθε πόλης.[57] Στο πλαίσιο της αναδιανομής των προϊόντων, συντελέστηκε στους ναούς η δημιουργία μιας νέας επαγγελματικής τάξης, των διοικητικών υπαλλήλων. Αυτό οδήγησε σε μια πιο σύνθετη οικονομική δομή, στην οποία ήταν αναγκαία η ανάπτυξη λογιστικών μηχανισμών για την καταγραφή και τον έλεγχο των προϊόντων.[58]

Ήδη από την έβδομη χιλιετία προ Χριστού, συναντώνται εμπίεστες σφραγίδες σε αγγεία αποθήκευσης προϊόντων. Αυτές αποτελούσαν ένα εργαλείο διοίκησης, το οποίο λειτουργούσε ως ένα είδος εγγύησης για τις συναλλαγές.[59] Στα μέσα της περιόδου της Uruk, οι εμπίεστες σφραγίδες αντικαταστάθηκαν από τους σφραγιδοκύλινδρους, οι οποίοι έφεραν εικονικές αναπαραστάσεις. Κάθε ένα από αυτά τα αντικείμενα ανήκε σε κάποιον αξιωματούχο και, μέσω της αναπαράστασης, δήλωνε την ταυτότητα του

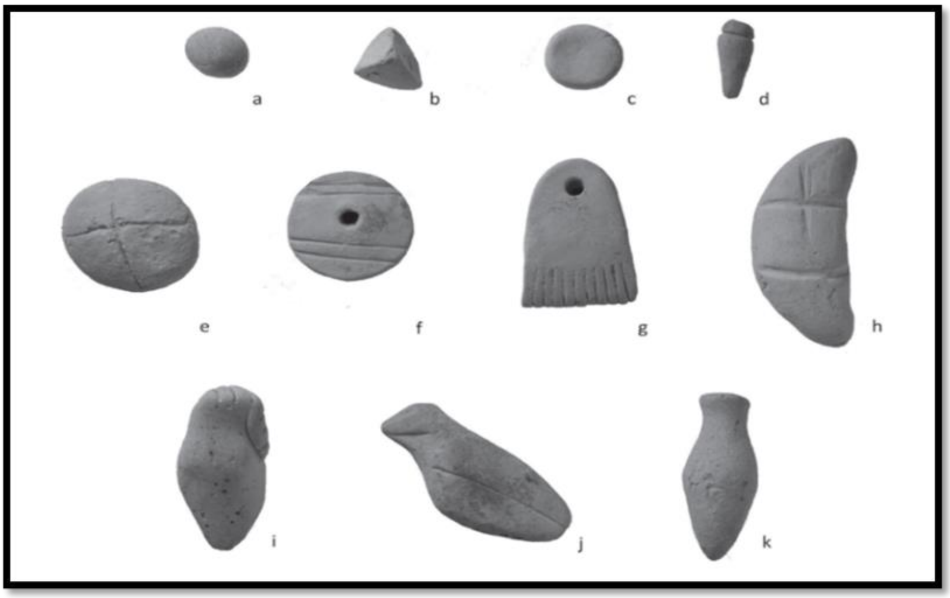
[57] Ο θεός λάμβανε τα αγαθά και επιτελούσε τη διανομή τους. Έτσι, εξασφαλιζόταν η νομιμότητα της διαδικασίας, βλ. Van De Mieroop 2016, 57.

[58] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το πλαίσιο αναδιανομής των προϊόντων, βλ. Van De Mieroop 2016, 55-59.

[59] Σε αυτό το διάστημα, η ανάγκη για ανταλλαγές προϊόντων ήταν έντονη. Η καταμέτρηση και ο έλεγχος της οικονομίας γενικότερα, αποτέλεσαν την πρωταρχική ανάγκη που έπρεπε να καλύψει η γραφή και τα μαθηματικά, βλ. Van De Mieroop 2016, 57.

προσώπου που εμπλεκόταν στη συναλλαγή. Ωστόσο, οι σφραγιδοκύλινδροι δεν δήλωναν την ποσότητα ή το είδος του αντικειμένου της ανταλλαγής.[60]

Στο πλαίσιο της προσπάθειας οργάνωσης και διαχείρισης της διοίκησης, αναπτύχθηκαν και νέες τεχνικές. Από το 3500 π.Χ., στις πόλεις Susa και Uruk, φαίνεται να χρησιμοποιούνται οι bullae. Αυτές αποτελούσαν πήλινα σφαιρικά αντικείμενα, τα οποία έφεραν σφραγίσματα στο εξωτερικό τους μέρος και δήλωναν την ποσότητα των εμπορευμάτων που εμπεριέχονταν σε αυτήν. Στο εσωτερικό τους υπήρχαν πήλινες ψηφίδες (Εικόνα 11), ώστε να διαφυλαχθεί το περιεχόμενό τους. Οι πήλινες ψηφίδες, οι οποίες αποτελούν κοινό εύρημα στη Μέση Ανατολή, είχαν διαφορετικά σχήματα και κάθε μια αντιπροσώπευε μια σταθερή ποσότητα, συμβολίζοντας βασικά αγροτικά προϊόντα, όπως ζώα και σιτηρά.[61] Έτσι, η ύπαρξη των bullae αποσκοπούσε στη δήλωση των μερών της συναλλαγής, καθώς και στην αποτροπή μελλοντικών λαθροχειριών.[62]



Εικόνα 11. Πήλινες ψηφίδες

[60] Οι σφραγιδοκύλινδροι, οι οποίοι ήταν σε χρήση από την ύστερη Περίοδο Uruk, αποτέλεσαν χαρακτηριστικό αντικείμενο σε όλη τη διάρκεια της ιστορίας της Μεσοποταμίας. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους σφραγιδοκύλινδρους, βλ. Van De Mieroop 2016, 60-61.

[61] Αυτά τα κέρματα χρησιμοποιούνταν, από τους ανθρώπους στις προϊστορικές κοινωνίες, ως ένα μέσο αναπαράστασης των προϊόντων που παρήγαγαν. Τα σχήματα των κερμάτων, τα οποία συναντώνται πιο συχνά, είναι οι κώνοι, οι δίσκοι και τα τετράεδρα. Πάνω σε αυτά χαράσσονταν εικονογράμματα, τα οποία δήλωναν το είδος του αγαθού, βλ. Robson 2007, 39 και 34, Høyrup 2020, 59, Χριστιανίδης 2012, 27 και Katz 2013, 9.

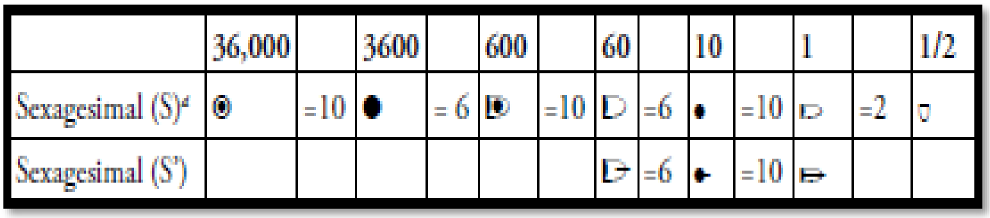
[62] Αν υπήρχε αμφιβολία για το περιεχόμενο των κερμάτων, ο αξιωματούχος έσπαγε τη bulla ώστε να φανεί αν ο αριθμός των πήλινων μαρκών ταίριαζε με την ποσότητα που είχε καταγραφεί στην επιφάνειά τους, βλ. Chrisomalis 2010, 234 και Van De Mieroop 2016, 61.

2.2 Πρώιμα αριθμητικά συστήματα

2.2.1 Πρωτο-σφηνοειδή αριθμητικά συστήματα

Τα αριθμητικά συστήματα στο χώρο της Μεσοποταμίας διακρίνονται, ανάλογα με τη δομή τους, σε αρχαϊκά ή πρωτο-σφηνοειδή και σφηνοειδή.[63] Από την ύστερη τέταρτη και τρίτη χιλιετία, αναπτύχθηκαν τα πρώτα συστήματα για τον υπολογισμό των υγρών και στερεών προϊόντων, τη μέτρηση της γης, αλλά και του χρόνου.[64] Τα πρωτο-σφηνοειδή συστήματα αποτελούνται από καμπυλόγραμμα σύμβολα αριθμών, τα οποία αποτυπώνονταν με μια στρογγυλή γραφίδα.[65] Αυτές οι αριθμητικές αναπαραστάσεις προέρχονται κυρίως από τις πόλεις Uruk και Susa και συνοδεύονται από λογογράμματα, τα οποία δήλωναν το είδος των προϊόντων που καταμετρούνταν (π.χ. ζώα, σιτηρά, υφάσματα, κ.τ.λ.). Ωστόσο, αυτές οι δύο πόλεις ανέπτυξαν διαφορετικά συστήματα γραφής και αρίθμησης. Στην Uruk αναπτύχθηκε η πρωτο-σφηνοειδής γραφή και αργότερα, στα Susa, η πρωτο-ελαμιτική.[66]

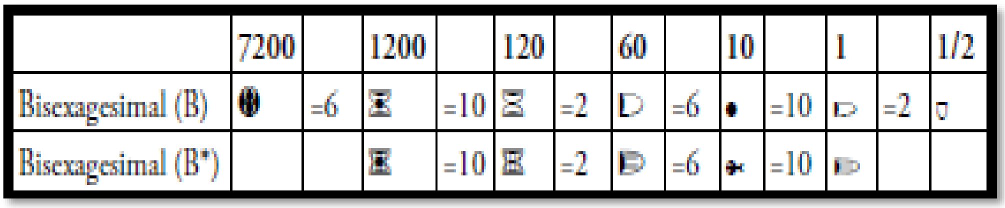
Στην πρωτο-σφηνοειδή γραφή χρησιμοποιήθηκαν επτά διαφορετικά αριθμητικά συστήματα, καθένα από τα οποία διέθετε διαφορετικά σύμβολα και δομή, ανάλογα με το είδος του αντικειμένου που μετρούσαν. Αρχικά, το πρώτο από αυτά ήταν το εξηκονταδικό σύστημα, το οποίο αποτελείται από μονάδες με βάση τους αριθμούς 6 και 10, ενώ χρησιμοποιήθηκε για την καταμέτρηση ζώων, ανθρώπων, εργαλείων, δοχείων, κ.τ.λ.[67]



Εικόνα 12. Εξηκονταδικό σύστημα

[63] Για την ορολογία, βλ. Van De Mieroop 2016, 62.
[64] Την ίδια περίοδο, κυριάρχησε η ανάγκη συγκέντρωσης και διανομής της παραγωγής, βλ. Κοπανιάς 2020, 87. Μέχρι τότε, υπήρχαν ασύνδετες, μεταξύ τους, μονάδες μέτρησης, οι οποίες χρησιμοποιούνταν αυθαίρετα από τους παραγωγούς, βλ. Robson 2008, 1, Χριστιανίδης 2012, 27-28 και Βλ. Høyrup 2020, 59.
[65] Το μεγαλύτερο μέρος των πρωτο-σφηνοειδών πινακίδων αποτελούν λογιστικές καταγραφές, βλ. Chisomallis 2010, 228.
[66] Βλ. Van De Mieroop 2016, 62.
[67] Στα περισσότερα κείμενα που έχουν βρεθεί στην πόλη Uruk, χρησιμοποιείται το εξηκονταδικό σύστημα, αποδεικνύοντας την ευρεία χρήση του, βλ. Chrisomalis 2010, 232.

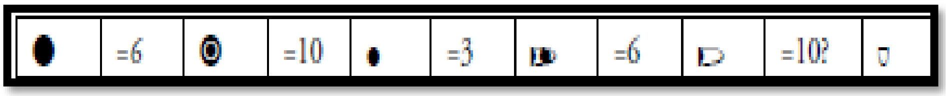
Στις πήλινες πινακίδες από την πόλη Uruk εμφανίζεται και το διεξηκονταδικό σύστημα, το οποίο χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση των διαφόρων ειδών δημητριακών, τυριών και ψαριών. Το διεξηκονταδικό σύστημα διακρίνεται από το προηγούμενο, διότι σε αυτό εμφανίζεται και οι δυάδες εκτός από τις εξηντάδες. Αυτό το σύστημα είναι πανομοιότυπο με το εξηκονταδικό μέχρι τον αριθμό 60. Στη συνέχεια, όμως, εισάγονται διαφορετικά σύμβολα και αριθμοί, όπως οι 120, 1200 και 7200.[68]



	7200		1200		120		60		10		1		1/2
Bisexagesimal (B)		=6		=10		=2		=6		=10		=2	
Bisexagesimal (B*)				=10		=2		=6		=10			

Εικόνα 13. Διεξηκονταδικό σύστημα

Επίσης, οι μεσοποτάμιοι γραφείς χρησιμοποιούσαν και το αριθμητικό σύστημα GAN_2, κυρίως για τον υπολογισμό της έκτασης μιας περιοχής. Μεταξύ αυτού και του εξηκονταδικού συστήματος εμφανίζονται παρόμοια σύμβολα, τα οποία, όμως, εκφράζουν διαφορετικές τιμές. Παραδείγματος χάριν, το σύμβολο που αναπαριστά τον αριθμό 36.000 στο εξηκονταδικό, στο σύστημα GAN_2 δηλώνει τις δεκάδες.[69]



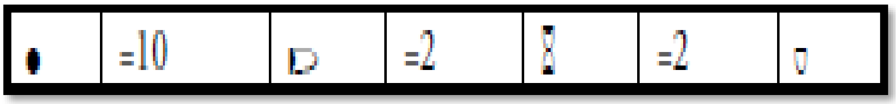
	=6		=10		=3		=6		=10?	

Εικόνα 14. Σύστημα GAN2

Αντίστοιχα, για τον υπολογισμό του βάρους, οι μεσοποτάμιοι πληθυσμοί χρησιμοποιούσαν το σύστημα EN. Στην πόλη Uruk, έχει βρεθεί μόνο ένα κείμενο που

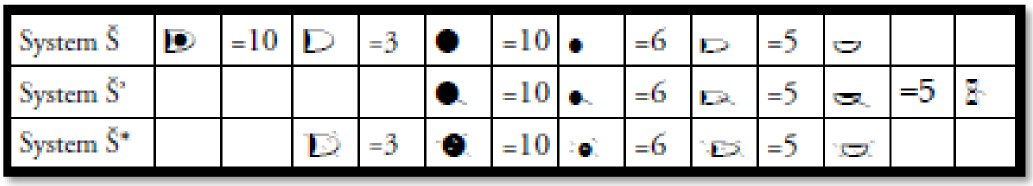
[68] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το διεξηκονταδικό σύστημα, βλ. Chrisomalis 2010, 232 και Van De Mieroop 2016,62.
[69] Η ομοιότητα των συμβόλων σχετίζεται με το γεγονός ότι οι αριθμοί σχηματίζονταν με το κυλινδρικό άκρο μιας στρογγυλής γραφίδας, βλ. Chrisomalis 2010, 233 και Valerio, Ferrara 2020, 8.

περιλαμβάνει το συγκεκριμένο σύστημα, φανερώνοντας ότι χρησιμοποιήθηκε από περιορισμένο αριθμό ανθρώπων.[70]

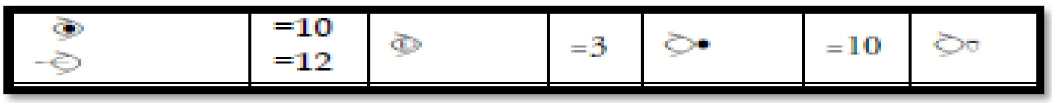


Εικόνα 15. Σύστημα EN

Τα δύο τελευταία πρωτο-σφηνοειδή αριθμητικά συστήματα της πόλης Uruk αποτελούν το ŠE για τις μετρήσεις των σιτηρών και το U_4 για την καταγραφή του χρόνου και των ημερολογιακών μονάδων.[71]



Εικόνα 16. Σύστημα ŠE

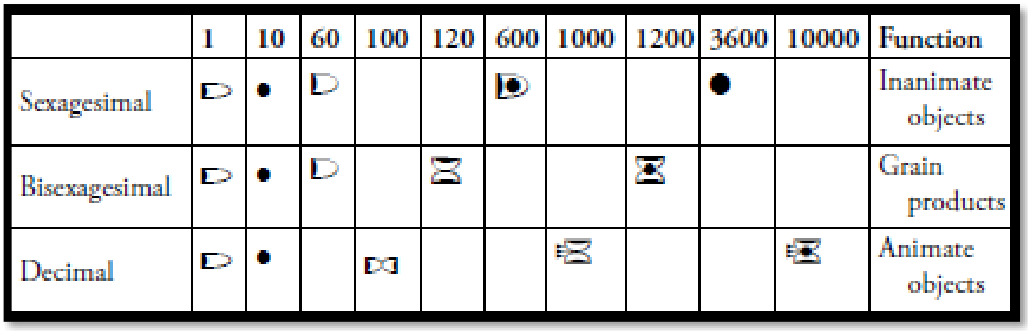


Εικόνα 17. Σύστημα U4

Αντίστοιχα, στην πόλη Susa, αναπτύχθηκε η πρωτο-ελαμιτική γραφή, η οποία, επίσης, διέθετε διαφορετικά αριθμητικά συστήματα για την καταμέτρηση διακριτών αντικειμένων. Οι Μεσοποτάμιοι γραφείς στα Susa χρησιμοποιούσαν το δεκαδικό σύστημα για την καταμέτρηση των ζώων και το εξηκονταδικό για την καταμέτρηση

[70] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το αριθμητικό σύστημα EN, βλ. Chrisomalis 2010, 233.
[71] Για περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με τα αριθμητικά συστήματα ŠE και U_4, βλ. Chrisomalis 2010, 233.

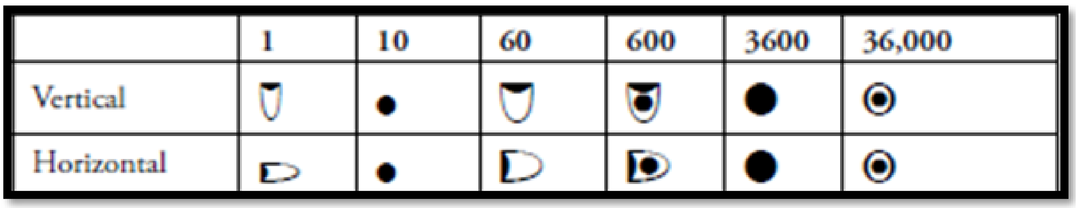
των ανθρώπων, του ψωμιού και των δοχείων. Όπως φαίνεται και από τους αριθμητικούς συμβολισμούς, αυτά τα συστήματα διαμορφώθηκαν βάσει των πρωτο-σφηνοειδών συστημάτων.[72]



	1	10	60	100	120	600	1000	1200	3600	10000	Function
Sexagesimal											Inanimate objects
Bisexagesimal											Grain products
Decimal											Animate objects

Εικόνα 18. Πρωτο-ελαμιτικό σύστημα

Τα χαρακτηριστικά των παραπάνω συστημάτων αφομοιώθηκαν σταδιακά από τους Σουμέριους (όπως φαίνεται στην Εικόνα 19). Μέχρι την τρίτη χιλιετία, στην πόλη Girsu, των Σουμερίων, συνέχιζαν να χρησιμοποιούνται οι πρωτο-σφηνοειδείς αριθμοί, κυρίως, για την καταμέτρηση των ποσοτήτων των σιτηρών. Αντίθετα, για την καταμέτρηση των ζώων χρησιμοποιούσαν τους σφηνοειδείς αριθμούς. Το ίδιο συνέβη και μετά την ακκαδική κατάκτηση, καθώς οι Ακκάδιοι βασιλείς χρησιμοποιούσαν και τα δύο συστήματα.[73]

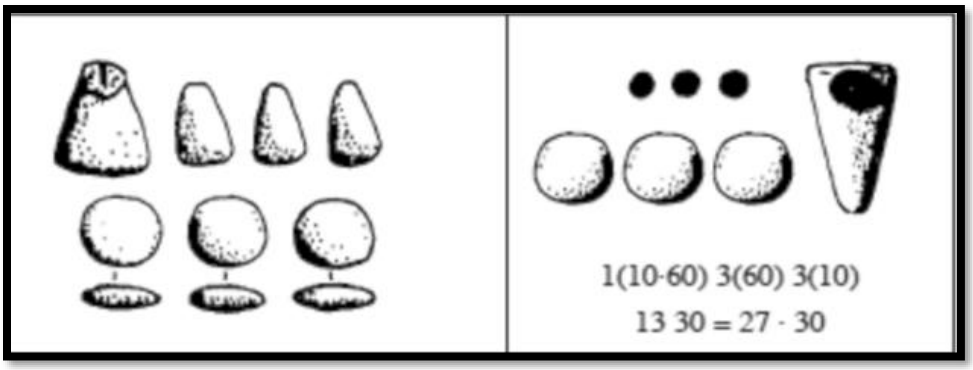


	1	10	60	600	3600	36,000
Vertical						
Horizontal						

Εικόνα 19. Πρωτο-σφηνοειδές σουμεριακό σύστημα

[72] Για το πρωτο-ελαμιτικό σύστημα, βλ. Chrisomalis 2010, 238-239.
[73] Βλ. Chrisomalis 2010, 243-244.

Με βάση τα παραπάνω, η Denise Schmandt-Besserat υποστήριξε ότι εμφανίζονται ομοιότητες μεταξύ των κερμάτων και των πρωτο-σφηνοειδών αριθμών, οι οποίες μαρτυρούν ότι τα πρώτα οδήγησαν στην ανάπτυξη των αριθμητικών συστημάτων.[74] Επίσης, σύμφωνα με τον Joran Friberg, είναι εύλογο να θεωρηθεί ότι τα πήλινα κέρματα από την Uruk και τα Susa αποτελέσαν τους προδρόμους για την ανάπτυξη των πρωτο-σφηνοειδών και του πρωτο-ελαμιτικού συστήματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η bulla Sb 1927 από τα Susa, η οποία εμπεριέχει πήλινα κέρματα, τα σχήματα των οποίων μοιάζουν με τους μετέπειτα συμβολισμούς του πρωτο-ελαμιτικού συστήματος.[75]



Εικόνα 20. Περιεχόμενο και επιγραφή bulla Sb 1927

Ωστόσο, μελετητές, όπως ο Sthephen Lieberman υποστήριξαν ότι δεν υπάρχει κάποια συνέχεια μεταξύ των δύο συστημάτων. Σύμφωνα με τον ίδιο, το μεγαλύτερο μέρος των κερμάτων προερχόταν από την πόλη Susa και όχι από την Uruk, στην οποία αναπτύχθηκαν οι αριθμοί και η γραφή. Επίσης, ο Lieberman υποστήριξε ότι τα δύο συστήματα μέτρησης διαφέρουν και δομικά. Στο σύστημα των πήλινων κερμάτων, προκειμένου, παραδείγματος χάριν, να καταγραφούν 16 πρόβατα, οι γραφείς χρησιμοποιούσαν 16 κέρματα, τα οποία αντιπροσώπευαν τα πρόβατα. Ωστόσο, στα αρχαϊκά αριθμητικά συστήματα, οι καταμετρούμενες ποσότητες αποτυπώνονταν με έναν αριθμό και ένα λογόγραμμα, το οποίο δήλωνε το προϊόν.[76]

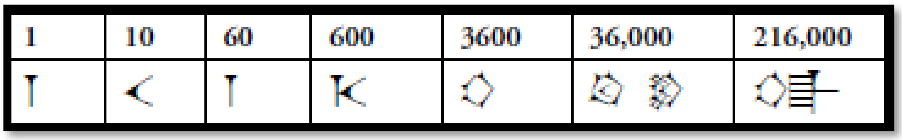
[74] Για την παραπάνω άποψη σχετικά με τα δύο συστήματα, βλ. Schmandt-Besserat 1984, 55 και Schmandt-Besserat 1992, 161-163.

[75] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη bulla Sb 1927, βλ. Friberg 2019,186.

[76] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την άποψη του Lieberman για τα πήλινα κέρματα και τα πρωτο-σφηνοειδή αριθμητικά συστήματα, βλ. Lieberman 1980, 353.

2.2.2 Σφηνοειδή αριθμητικά συστήματα

Η αλλαγή στην αριθμητική σημειογραφία επήλθε σταδιακά, αρχικά, μέσω των Σουμερίων.[77] Στην Ύστερη σουμεριακή περίοδο, τα καμπυλόγραμμα σύμβολα της παλαιότερης γραφής αντικαταστάθηκαν από τα σφηνοειδή και χρησιμοποιήθηκε ένα κοινό εξηκονταδικό σύστημα.[78] Πιθανότατα, αυτή η αλλαγή οφείλεται στο ότι η ύπαρξη πολλών συστημάτων δεν διευκόλυνε τη διαχείριση των αγαθών και τους λογιστικούς μηχανισμούς. Μέχρι την Τρίτη Δυναστεία της Ur, οι πρωτο-σφηνοειδείς σουμεριακοί αριθμοί είχαν εγκαταλειφθεί τελείως και επιβίωσε μόνο το εξηκονταδικό σύστημα.[79]



Εικόνα 21. Σφηνοειδές σουμεριακό σύστημα

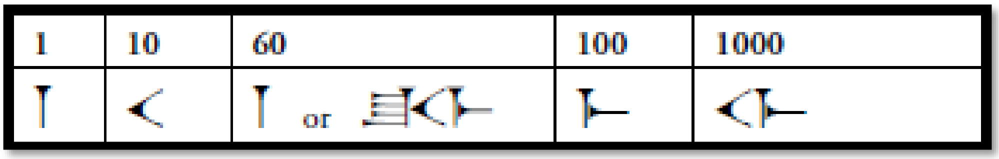
Μετα την επικράτηση των σφηνοειδών σουμεριακών συμβόλων, αναπτύχθηκε το ασσυρο-βαβυλωνιακό σύστημα, το οποίο εντοπίζεται, κυρίως, σε κείμενα εμπορικής και διοικητικής φύσεως στην Ασσυρία και τη Βαβυλώνα. Το ασσυρο-βαβυλωνιακό σύστημα ήταν, κυρίως, δεκαδικό αν και διέθετε σύμβολο για τον αριθμό 60, το οποίο μαρτυρά την καταγωγή του από τους Σουμερίους. Ωστόσο, σε αντίθεση με το σουμεριακό σύστημα, στο ασσυρο-βαβυλωνιακό δεν χρησιμοποιούταν ένα πανομοιότυπο σύμβολο για τους αριθμούς 1 και 60.[80]

[77] Μέχρι τότε, χρησιμοποιούνταν διαφορετικά συστήματα, κάθε ένα από τα οποία είχε διαφορετικά σύμβολα, βλ. Høyrup 2006, 79-82 και Chrisomalis 2010, 238.

[78] Όπως και στους πρωτο-σφηνοειδείς αριθμούς, το 60 αποτελούσε τη μεγαλύτερη μονάδα. Συχνά, το σύμβολο για το 60 είναι μεγαλύτερο από το σύμβολο για το 1, αλλά η διαφορά είναι μικρή, διότι και τα δύο σχηματίζονταν με την ίδια γραφίδα. Το καμπυλόγραμμα σύμβολο για το 10 αντικαταστάθηκε από μια γωνιακή σφήνα, ενώ το σύμβολο για το 3600 σχηματίστηκε από τέσσερις σφήνες τοποθετημένες σε κυκλικό σχήμα, βλ. Chrisomalis 2010, 243-244.

[79] Επίσης, η επιλογής της χρήσης ενός κοινού αριθμητικού συστήματος ενδέχεται να οφείλεται και στη διευκόλυνση της επικοινωνίας μεταξύ όλων των περιοχών της Μεσοποταμίας. Μετά το 2050 π.Χ., δεν συναντώνται οι πρωτο-σφηνοειδείς σουμεριακοί αριθμοί, βλ. Chrisomalis 2010, 238 και 242-243.

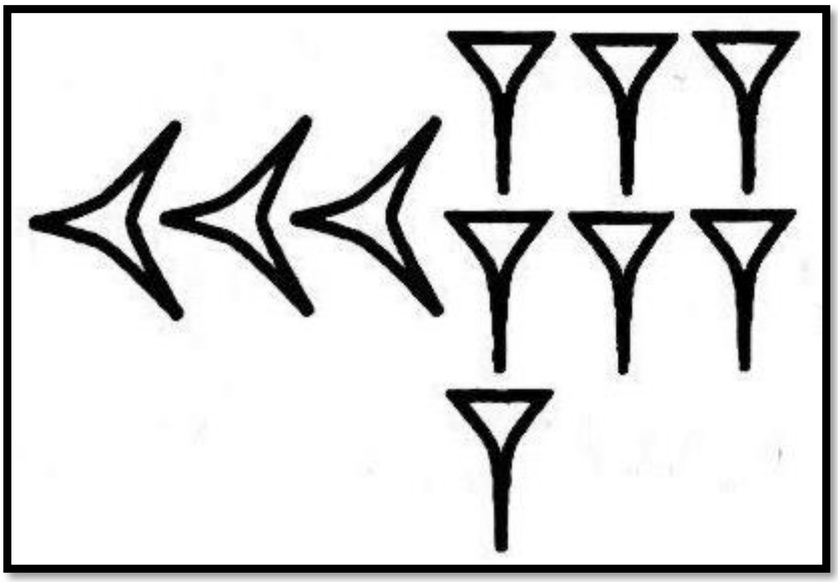
[80] Τη δεύτερη χιλιετία π.Χ, οι Χετταίοι χρησιμοποίησαν ένα αριθμητικό σύστημα, βασισμένο στο ασσυρο-βαβυλωνιακό, χρησιμοποιήθηκε για τις εμπορικές τους συναλλαγές, βλ. Robson 2008, 76 και Chrisomalis 2010, 247-248.



Εικόνα 22. Ασσυρο-βαβυλωνιακό σύστημα

2.3 Εξηκονταδικό θεσιακό σύστημα

Τα παραπάνω συνέβαλαν στη διαμόρφωση του βαβυλωνιακού θεσιακού συστήματος, στα τέλη της τρίτης και τις αρχές της δεύτερης χιλιετίας π.Χ. Όσον αφορά τον αριθμητικό συμβολισμό, στο βαβυλωνιακό σύστημα χρησιμοποιούνταν μόνο δύο σύμβολα. Αναλυτικότερα, η απλή κατακόρυφη σφήνα συμβόλιζε τη μονάδα και η διπλή και οριζόντια σφήνα παρίστανε τη δεκάδα.[81] Παραδείγματος χάριν, προκειμένου ένας Βαβυλώνιος γραφέας να αποτυπώσει στην πήλινη πινακίδα τον αριθμό 37, ακολουθούσε τον εξής συμβολισμό:[82]



Εικόνα 23. Συμβολική αναπαράσταση του αριθμού 37

[81] Και τα δύο σύμβολα σχηματίζονταν από τους γραφείς στις πήλινες πινακίδες, πιέζοντας τις με μια αιχμηρή γραφίδα. Το βαβυλωνιακό αριθμητικό σύστημα αποτελεί το σύστημα, βάσει του οποίου συντάχθηκαν τα περισσότερα διαθέσιμα μαθηματικά κείμενα στο χώρο της Μεσοποταμίας, βλ. Van der Waerden 2010, 31 και Χριστιανίδης 2012, 37.
[82] Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, βλ. Katz 2013, 7.

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτού του συστήματος ήταν η θεσιακότητα, καθώς οι Βαβυλώνιοι γραφείς ήταν αδύνατον να περιγράψουν όλες τις ποσότητες που χρειάζονταν με δύο μόνο σύμβολα. Η αναπαράσταση των αριθμών 1 και 60 γινόταν με τον ίδιο συμβολισμό, βάσει του θεσιακού συστήματος και η απαρίθμηση ξεκινούσε με τα πολλαπλάσια του 60. Έτσι, η τιμή του κάθε συμβόλου εξαρτιόταν από τη θέση του εκάστοτε συμβόλου.

Η μέθοδος που ακολουθείται για την εύρεση ενός αριθμού, είναι η εξής: Αν το σύμβολο βρίσκεται στην κεντρική θέση, διαβάζεται ο αριθμός. Όμως, αν ο αριθμός είναι στην πρώτη θέση αριστερά, αυτός πολλαπλασιάζεται επί 60. Αν ο αριθμός βρίσκεται δύο θέσεις αριστερά, τότε προβαίνουμε στον υπολογισμό 60×60. Αν, όμως, ο αριθμός βρίσκεται στην πρώτη θέση δεξιά, τότε είτε διαιρείται ο αριθμός με το 60 είτε πολλαπλασιάζεται με το 1/60. Έτσι, στους Βαβυλωνίους εμφανίζονται τα εξηκοστά κλάσματα. Παραδείγματος χάριν, το σύμβολο για τον αριθμό 1, δύναται να δηλώνει το 1/60 ή το $10/60^2$. Αντίστοιχα, το σύμβολο για τον αριθμό 10 ενδέχεται να αναπαριστά τα κλάσματα 10/60 και $10/60^2$.[83]

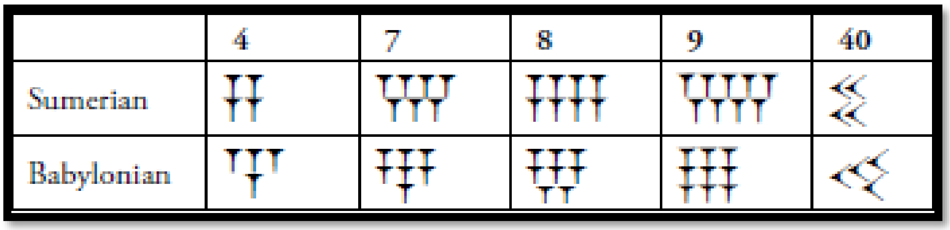
Με τη χρήση του θεσιακού συστήματος, οι μεσοποτάμιοι γραφείς χρησιμοποιούσαν λίγα σύμβολα, χαρακτηριστικό, το οποίο συμβάλλει στην ευκολότερη απομνημόνευση του συστήματος. Επίσης, με αυτόν τον τρόπο, το σύστημα μπορούσε να περιγράψει απείρως μικρούς και μεγάλους αριθμούς. Ωστόσο, στο βαβυλωνιακό σύστημα δεν χρησιμοποιείται η υποδιαστολή, ώστε να διακρίνεται το κλασματικό από το ακέραιο μέρος ενός αριθμού.[84]

Εκτός από τη θεσιακότητα και τους διαφορετικούς συμβολισμούς, μια διαφοροποίηση μεταξύ βαβυλωνιακού και σουμεριακού συστήματος εντοπίζεται στον τρόπο

[83] Τα εξηκονταδικά κλάσματα ήταν βολικά για τους αστρονομικούς υπολογισμούς και, γι' αυτόν τον λόγο, υιοθετήθηκαν από τους Έλληνες αστρονόμους. Στον 2ο αιώνα π.Χ., οι Έλληνες συνδύασαν το ελληνικό αλφαβητικό σύστημα με το βαβυλωνιακό για την αναπαράσταση κλασμάτων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η *Μεγίστη* του Πτολεμαίου, ο οποίος κατέγραφε τους ακέραιους αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα και τις υποδιαιρέσεις σε εξηκονταδικό. Η υπεροχή των εξηκονταδικών κλασμάτων στους υπολογισμούς είναι και η αιτία για τη χρησιμοποίησή τους από τους αστρονόμους. Χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα για τα λεπτά και τα δευτερόλεπτα. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη μέθοδο για την αναγνώριση των αριθμών, βλ. Van der Waerden 2010, 31, 33 και 47 και Chrisomalis 2010, 253.

[84] Αυτή ήταν και η μεγάλη διαφορά του βαβυλωνιακού με τα υπόλοιπα συστήματα. Το σύμβολο του μηδενός, εμφανίζεται μόνο στα κείμενα από τη Σελευκιδική περίοδο. Το πρόβλημα όσων ασχολούνται με τα βαβυλωνιακά μαθηματικά είναι ότι δεν γνωρίζουν τη θέση των αριθμών. Για τους Βαβυλωνίους, αυτό δεν αποτελούσε πρόβλημα, διότι γνώριζαν τη θέση του εκάστοτε συμβόλου, λόγω της προφορικής παράδοσης. Αυτό το μειονέκτημα αντισταθμίζεται, σε έναν βαθμό, από το ευρύτερο πλαίσιο στο οποίο βρίσκεται ο εκάστοτε αριθμός, βλ. Chrisomalis 2010, 250 και Neugebauer 1990, 43.

καταγραφής των αριθμών 4, 7, 8, 9 και 40. Στο σουμεριακό σύστημα, οι αριθμοί καταγράφονταν το πολύ σε δύο σειρές. Ωστόσο, στο βαβυλωνιακό σύστημα, οι συγκεκριμένοι αριθμοί ομαδοποιούνταν σε δύο ή τρεις σειρές.[85]



Εικόνα 24. Τρόπος καταγραφής αριθμών

Αναφορικά με το ερώτημα γιατί επιλέχθηκε το εξηκονταδικό σύστημα, δεν μπορεί να δοθεί βέβαιη απάντηση.[86] Σύμφωνα με τις παλαιότερες θεωρίες, το εξηκονταδικό σύστημα επιλέχθηκε, διότι ο αριθμός 60 διευκόλυνε έχει πολλούς ακέραιους διαιρέτες. Ο Van der Waerden υποστήριξε τη θέση του Otto Neugebauer, σύμφωνα με την οποία το 60 ως «μεγάλη μονάδα», οφείλεται στη μετρολογία:

1 τάλαντο = 60 μναι

1 μνα = 60 σίκλοι

Με βάση τα παραπάνω, όταν μια νομισματική μονάδα είναι εξηκονταπλάσια μιας άλλης, τότε η μεγαλύτερη μονάδα αναπαρίσταται με το συμβολισμό του αριθμού 1. Μάλιστα, ο ασσυριολόγος François Thureau-Dangin θεώρησε ότι η ανάπτυξη αυτού του συστήματος προέκυψε από τη χρήση του 60 ως «μεγάλης μονάδας», η οποία μεταφέρθηκε από τους αριθμούς στις νομισματικές μονάδες.[87]

Μια άλλη υποθετική θεωρία που έχει προταθεί, αναφέρει ότι το εξηκονταδικό σύστημα επινοήθηκε για τον υπολογισμό της ποσότητας των αγαθών που αντιστοιχούσε σε κάθε εργαζόμενο. Κάθε εργαζόμενος έπρεπε να λαμβάνει δύο μερίδες τροφής, ημερησίως,

[85] Για τη δομή του βαβυλωνιακού συστήματος, βλ. Chrisomalis 2010, 249.

[86] Σχετικά με αυτό το ερώτημα έχουν διατυπωθεί πολλές και διαφορετικές υποθετικές θεωρίες, βλ.Powell 1995, 1948.

[87] Σύμφωνα με τον Thureau-Dangin η αφετηρία των εξηκονταδικών κλασμάτων πρέπει να αναζητηθεί στη μετρολογία και τις νομισματικές μονάδες. Εκεί, η σχέση μιας μεγαλύτερης με μια μικρότερη μονάδα είναι αντιστρεπτή. Πιο συγκεκριμένα, η μία είναι εξήντα φορές μεγαλύτερη της άλλης και η δεύτερη είναι το 1/60 της πρώτης, Βλ. Van der Waerden 2010, 34-35.

και 60 μερίδες σε μηνιαία βάση. Συνεπώς, κάθε μερίδα αποτελούσε το 1/60 του μηνιαίου μισθού.[88] Επίσης, έχει διατυπωθεί η άποψη ότι το συγκεκριμένο σύστημα υιοθετήθηκε, διότι τα εξηκονταδικά κλάσματα διευκόλυναν τους αστρονομικούς υπολογισμούς. Ωστόσο, η επινόηση του εξηκονταδικού δεν σχετίζεται με την αστρονομία, καθώς το βαβυλωνιακό ημερολόγιο αποτελούταν από 360 ημέρες και από σεληνιακούς μήνες με 28 ή 29 ημέρες εναλλάξ.[89]

Εντούτοις, η επικρατούσα θεωρία αναφέρει ότι το εξηκονταδικό σύστημα φαίνεται να αποτελεί προϊόν συγκερασμού των προηγούμενων συστημάτων και να προκύπτει από τις εναλλαγές των αυτοκρατοριών. Από τους Σουμέριους και έπειτα παρατηρείται μια συνεχής κατάλυση και επανένωση των πολιτισμών, μέχρι να φτάσουν σε μια ενιαία αυτοκρατορική δομή, κατά την Παλαιοβαβυλωνιακή περίοδο.[90]

2.4 Είδη μαθηματικών κειμένων

Η εφεύρεση της γραφής και η καθιέρωση ενός αριθμητικού συστήματος συντελέστηκαν, αρχικά, για να εξυπηρετήσουν τις γραφειοκρατικές ανάγκες. Μετά το τέλος της τρίτης χιλιετίας π.Χ., η γραφή απέκτησε έναν χρηστικό χαρακτήρα και έτσι η εγγραμματοσύνη εξήλθε από τον αυστηρά θεσμικό της χαρακτήρα και μεταφέρθηκε σε ένα πιο ευρύ κοινωνικό πλαίσιο. Επίσης, και τα μαθηματικά απέκτησαν ένα εκπαιδευτικό χαρακτήρα και χρησιμοποιούνταν σε μεγαλύτερης έκτασης κείμενα.[91] Το μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών κειμένων προέρχεται από την Παλαιοβαβυλωνιακή περίοδο (~1900 – 1600 π.Χ.) και οφείλεται στο εκπαιδευτικό

---

[88] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτήν τη θεωρία, βλ. Hudson και Mieroop 2002, 23 και Κοπανιάς 2020, 88.

[89] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη σύνδεση του εξηκονταδικού συστήματος και της αστρονομίας, βλ. Burton 2010, 25-26 και Van der Waerden 2010, 47.

[90] Σε αυτό το διάστημα, όλες οι περιοχές και οι πολιτισμοί είχαν υιοθετήσει διαφορετικές νομισματικές μονάδες. Οι Βαβυλώνιοι παρέλαβαν το εξηκονταδικό σύστημα από τους πολιτισμούς πριν τους Σουμέριους. Τα παλαιότερα σουμεριακά σφηνοειδή κείμενα χρονολογούνται στην περίοδο της Πρώτης Δυναστείας της Ur, δηλαδή περίπου το 3000 π.Χ, βλ. Burton 2010, 25-26 και Van der Waerden 2010, 30-31.

[91] Περίπου από το 2600 π.Χ., η γραφή αποτελούσε ένα εργαλείο θεσμικής εξουσίας. Αυτό, ωστόσο, δεν σήμαινε πως δεν χρησιμοποιούταν για μη θεσμικούς ή ιδιωτικούς σκοπούς. Από την Παλαιοβαβυλωνιακή περίοδο, είναι διαθέσιμα πολλά σημαντικά κείμενα από τα παλάτια και τις ιδιωτικές κατοικίες. Τόσο τα παλάτια όσο και οι ναοί συνέχισαν να επιβλέπουν τα εισοδήματα και τις περιουσιακές υποθέσεις, όχι, όμως, στο βαθμό των αρχών της 3ης χιλιετίας. Στις κατοικίες τους, οι πιο εύπορες οικογένειες διέθεταν κείμενα, σχετικά με κληρονομικά ζητήματα, βλ. Robson 2008, 86. Μια περίοδος, στην οποία θα μπορούσε να υποστηριχθεί, πως η γραφή αποκτά, και πάλι, ένα πιο θεσμικό χαρακτήρα, αποτελεί η Νέο-Ασσυριακή περίοδος, βλ. Veldhuis 2011, 75.

πλαίσιο της περιόδου.[92] Στο μεσοποτάμιο χώρο, η κοινωνική ομάδα που διαχειριζόταν τα μαθηματικά ήταν οι γραφείς και οι ιερείς, οι οποίοι εκπαίδευαν τους ασκούμενους γραφείς στις σχολές γραφής είτε στους ναούς είτε στις ιδιωτικές κατοικίες και τα παλάτια.[93]

Τα μεσοποτάμια κείμενα που έχουν διασωθεί και προέρχονται από τις σχολές γραφής, δύναται να ταξινομηθούν σε τρεις γενικές κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τα κείμενα, τα οποία έχουν κάποιο νομικό, διοικητικό ή εμπορικό χαρακτήρα. Στη δεύτερη κατηγορία κειμένων ανήκουν οι πίνακες των πράξεων, ενώ στην τρίτη, τα πρακτικά προβλήματα με τις λύσεις τους, τα οποία είχαν διδακτικό χαρακτήρα.

2.4.1 Πινακίδες-Πίνακες

Στα αρχεία από την πόλη Nippur έχει ανασκαφεί σημαντικός αριθμών κειμένων με μαθηματικούς πίνακες, τα οποία προέρχονται από τις σχολές γραφής.[94] Μάλιστα, πολλές πινακίδες φέρουν λεξιλογικές ασκήσεις στη μια όψη και πίνακες πολλαπλασιασμού στην άλλη, διότι οι μαθητές εξασκούνταν τόσο στη γραφή όσο και στα μαθηματικά.[95] Από τις σχολές γραφής, το μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών κειμένων αποτελούν οι πίνακες πολλαπλασιασμού, καθώς αντιγράφονταν από τους

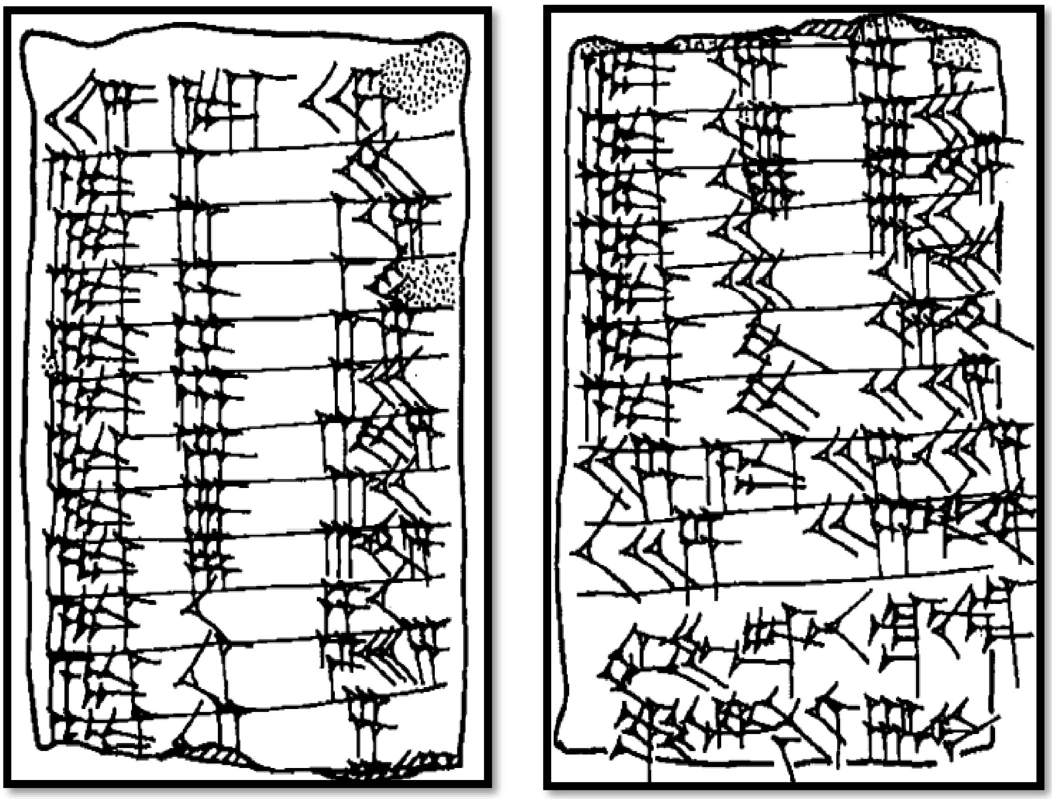
[92] Ωστόσο, σημαντικός αριθμός μαθηματικών κειμένων προέρχεται και από τη Σελευκιδική περίοδο. Η μόνη διαφορά μεταξύ αυτών των δύο περιόδων εντοπίζεται στο ότι στα κείμενα της δεύτερης εμφανίζεται η χρήση του μηδενικού συμβόλου, βλ. Neugebauer 1990, 63 και Χριστιανίδης 2012, 28 και 31. Πληροφορίες για τις χρονολογίες γραφής των μαθηματικών πινακίδων αντλούνται από τους κολοφώνες που φέρουν οι πινακίδες. Από τους κολοφώνες, αντλούνται πληροφορίες, όχι μόνο για τη θεματική μια συγκεκριμένης πινακίδας, αλλά και στοιχεία για την ίδια την πινακίδα, όπως η προέλευσή της, ο γραφέας της, κ.τ.λ., βλ. Robson 2008, 94.

[93] Στο πλαίσιο της εκπαίδευσής τους, οι ασκούμενοι, ανάμεσα στις υπόλοιπες γνώσεις που αποκτούσαν, ασχολούνταν και με βασικούς υπολογισμούς και πρακτικά προβλήματα της καθημερινότητας. Η σχολική εκπαίδευσή των γραφέων στόχευε, κυρίως, στην εκμάθηση της γραφής. Μέσα από αυτήν την εκπαίδευση, οι ασκούμενοι γραφείς μετατρέπονταν σε θεματοφύλακες της σουμεριακής κληρονομιάς, βλ.Veldhuis 2011, 82-83 και 85. Τα κείμενα που συντάχθηκαν σε ένα εκπαιδευτικό πλαίσιο, στις σχολές γραφής, διακρίνονται από τα διοικητικά κείμενα, διότι τα πρώτα δεν φέρουν κάποιο όνομα υπαλλήλου, βλ. Robson 2007, 44 και Høyrup 2020, 59. Από τα μέσα της τρίτης χιλιετίας και έπειτα, η έννοια του γραφέα συναντάται στις πηγές. Εκτός από τους γραφείς, μερικοί από εκείνους που διέθεταν μια μορφή εγγραμματοσύνης ήταν οι πρακτικά θέματα. Τα κείμενα που συντάχθηκαν σε ένα εκπαιδευτικό πλαίσιο, στις σχολές γραφής, διακρίνονται από τα διοικητικά κείμενα, διότι τα πρώτα δεν φέρουν κάποιο όνομα υπαλλήλου, βλ. Robson 2011, 559.

[94] Αυτό γίνεται αντιληπτό από τα πολλά αντίγραφα που έχουν βρεθεί, με διαφορετικό γραφικό χαρακτήρα το καθένα, βλ. Neugebauer 1990, 64-65.

[95] Την ίδια περίοδο, σημειώνεται μια τάση δημιουργίας μαθηματικών πινάκων, με έμφαση στις αλγοριθμικές διαδικασίες. Γενικότερα, υποστηρίζεται ότι οι μαθηματικοί πίνακες αναπτύχθηκαν την ίδια περίοδο με τα οικονομικής φύσεως κείμενα, βλ. Neugebauer 1990, 65.

μαθητές στο πλαίσιο της εκπαίδευσής τους. Παραδείγματος χάριν, ο πολλαπλασιασμός του 25:[96]



Εικόνα 25. Ο πολλαπλασιασμός του 25

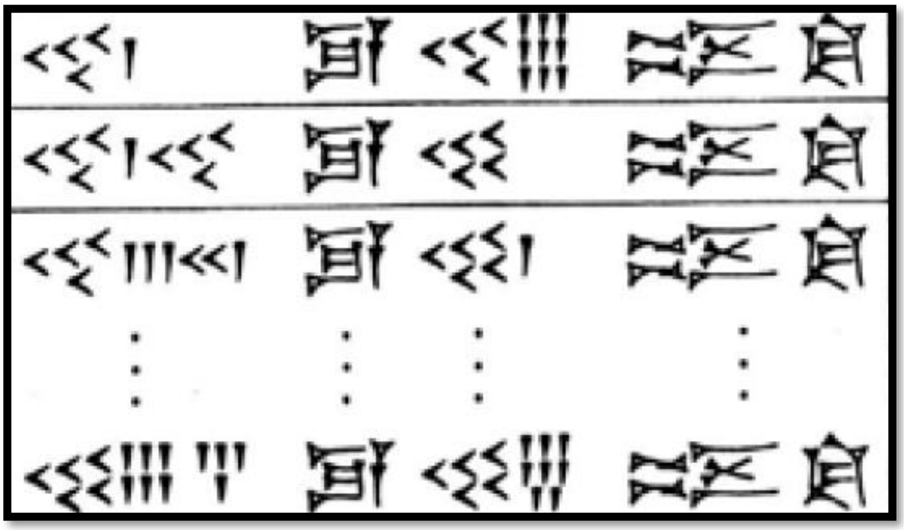
Μεταγραφή:

1	25	12	5
2	50	13	5 25
3	1 15	14	5 50
4	1 40	15	6 15
5	2 05	16	6 40
6	2 30	17	7 05
7	2 55	18	7 30
8	3 20	19	7 55
9	3 45	20	8 20
10	4 10	30	12 30
11	4 35	40	16 40
		50	20 50

[96] Βλ. Robson 2008, 87-88.

Στον πίνακα πολλαπλασιασμού ενός τυχαίου αριθμού α, παρατηρείται ότι περιέχονται πολλαπλασιασμοί με τους αριθμούς από το 1 έως το 20, το 30, το 40 και το 50. Οι πολλαπλασιασμοί των υπόλοιπων αριθμών βρίσκονταν με την πρόσθεση δύο αριθμών από τον πίνακα. Αυτό, σύμφωνα με τον Neugebauer, αποτελούσε ένα τέχνασμα για την εξοικονόμηση χώρου, διότι, από μια τέτοια πινακίδα, μπορούσαν να υπολογιστούν και τα 59 γινόμενα.[97]

Εκτός από τους πίνακες πολλαπλασιασμού, συχνά, συναντώνται και πίνακες τετραγώνων. Οι τελευταίοι λειτουργούσαν ως εργαλεία, για να διευκολύνουν τις πράξεις με μεγαλύτερους αριθμούς που διαχειρίζονταν οι γραφείς στα παλάτια και τους ναούς.[98]



Εικόνα 26. Πίνακας τετραγώνων

[97] Για παράδειγμα, για τον πολλαπλασιασμό 9×23, ο Βαβυλώνιος γραφέας προσέθετε το αποτέλεσμα του 9×20 με το αποτέλεσμα του 9×3, δηλαδή 3 00+27= 3 27, βλ. Neugebauer 1990, 65 και Χριστιανίδης 2012, 40.

[98] Ο ασσυριολόγος Rawlinson αντιλήφθηκε ότι οι αριθμοί της πρώτης στήλης αποτελούσαν τα τετράγωνα των αριθμών της τρίτης στήλης. Πιθανότατα και η λέξη στη δεύτερη στήλη να δηλώνει κάτι σαν το «είναι» ή το «ισούται» και οι λέξεις στην τέταρτη στήλη να αντιστοιχούν στη φράση «στο τετράγωνο». Άρα, πρόκειται για έναν πίνακα τετραγώνων, ο οποίος τετραγωνίζει όλους τους αριθμούς, βλ. Χριστιανίδης 2012, 38.

Η παραπάνω πινακίδα δύναται να διαβαστεί ως εξής:

$40 \cdot 60 + 1 = 2401$ είναι 49 στο τετράγωνο

$41 \cdot 60 + 1 = 2500$ είναι 50 στο τετράγωνο

$43 \cdot 60 + 1 = 2601$ είναι 51 στο τετράγωνο

……………………………………………………

$56 \cdot 60 + 4 = 3364$ είναι 58 στο τετράγωνο

$58 \cdot 60 + 1 = 3481$ είναι 59 στο τετράγωνο

$1 \cdot 60^2 = 3600$ είναι 60 στο τετράγωνο

Επίσης, οι Βαβυλώνιοι γραφείς χρησιμοποιούσαν και πίνακες αντιστρόφων, καθώς δεν εκτελούσαν διαιρέσεις. Σύμφωνα με την παρακάτω πινακίδα, σε κάθε ζεύγος, ο πρώτος αριθμός είναι αντίστροφος του δεύτερου και αντιστρόφως:[99]

2	30	16	3 45	45	1 20
3	20	18	3 20	48	1 15
4	15	20	3	50	1 12
5	12	24	2 30	54	1 06 40
6	10	25	2 24	1	1
8	7 30	27	2 13 20	1 04	56 15
9	6 40	30	2	1 12	50
10	6	32	1 52 30	1 15	48
12	5	36	1 40	1 20	45
15	4	40	1 30	1 21	44 26 40.

[99] Προκειμένου, για παράδειγμα, ο Βαβυλώνιος γραφέας να εκτελέσει τη διαίρεση 3:8, έβρισκε το αντίστροφο του 8 από τον πίνακα των αντιστρόφων, δηλαδή το 7 30. Έπειτα, υπολόγιζε το γινόμενο του 3 με το 7 30 με τη βοήθεια των πινάκων πολλαπλασιασμού. Παρατηρώντας τον πίνακα, γίνεται φανερό ότι δεν υπάρχουν αντίστροφα για τους αριθμούς 7, 11, 13, 14, κ.τ.λ. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αν, παραδείγματος χάριν, διαιρεθεί το 1 με το 7, προκύπτει ως αποτέλεσμα το εξηκονταδικό κλάσμα, το οποίο επαναλαμβάνεται επ' άπειρον. Αρκετοί εκτενείς πίνακες αντιστρόφων, από την εποχή των Σελευκιδών, είχαν αναπτυχθεί με σκοπό να χρησιμοποιηθούν για αστρονομικούς σκοπούς. Οι παλαιότεροι πίνακες αντιστρόφων δεν είναι τόσο μακροσκελείς όσο της περιόδου των Σελευκιδών. Αυτοί οι πίνακες περιλάμβαναν τους αντιστρόφους των ακεραίων από το 0 έως το 81. Οι αντίστροφοι αυτών των αριθμών μπορούσαν να αποτυπωθούν ως πεπερασμένα εξηκονταδικά κλάσματα, βλ. Neugebauer 1990, 67 και Van der Waerden 2010, 36.

Οι συνδυασμένοι πίνακες πολλαπλασιασμού και αντιστρόφων χρησιμοποιούνταν για τους πολλαπλασιασμούς, αλλά και για την παράσταση κλασμάτων ως εξηκονταδικά. Οι πίνακες πολλαπλασιασμού περιέχουν τα πολλαπλάσια όλων των αριθμών, είτε έχουν δύο ή τρία ψηφία είτε όχι. Οι ίδιοι πίνακες, εκτός από τους συνήθεις πολλαπλασιασμούς, χρησίμευαν για πολλαπλασιασμούς της μορφής $a \times b^{-1}$.[100]

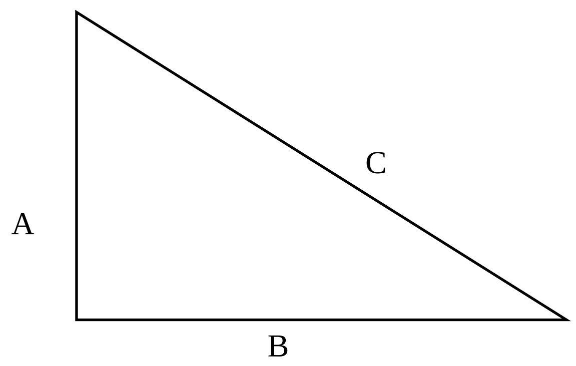
Ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς πίνακες της Παλαιοβαβυλωνιακής περιόδου είναι η πινακίδα Plimpton 322, η οποία χρονολογείται περίπου το 1700 π.Χ. Η πινακίδα δεν σώζεται ολόκληρη, καθώς το αριστερό της μέρος έχει αποκοπεί. Αρχικά, η πινακίδα θεωρήθηκε ότι αποτελούσε ένα κείμενο εμπορικής φύσεως. Όμως, στη συνέχεια, αποτέλεσε μια πολύ σημαντική πηγή για την ιστορία των μαθηματικών. Το μαθηματικό περιεχόμενο της πινακίδας ανακαλύφθηκε το 1945 από το έργο των Otto Neugebauer και Francois Thrureau-Dangin.[101]

Εικόνα 27. Πινακίδα Plimpton 322

[100] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους πίνακες πολλαπλασιασμού, βλ. Van der Waerden 2010, 37-38.

[101] Η ονομασία της οφείλεται στην καταχώρησή της με τον αριθμό 322 στη συλλογή του G. A. Plimpton, στο Πανεπιστήμιο Columbia της Νέας Υόρκης, βλ. Χριστιανίδης 2012, 43.

Η πινακίδα αποτελείται από τέσσερις στήλες και δεκαπέντε σειρές και κάθε μία από τις στήλες φέρει μια επικεφαλίδα (βλ. Εικόνα 28). Σύμφωνα με τον Neugebauer, οι αριθμοί στη δεύτερη και τρίτη στήλη έχουν ως τίτλους λέξεις, οι οποίες δύναται να μεταφραστούν ως «επιλύων αριθμός του πλάτους» και «επιλύων αριθμός της διαγωνίου». Αντίστοιχα, στην επικεφαλίδα της πρώτης στήλης συναντάται η έννοια «διαγώνιος», χωρίς, ωστόσο, να είναι σαφής η σημασία των υπόλοιπων λέξεων.[102] Οι αριθμοί που είναι γραμμένοι με πλάγιους χαρακτήρες αποτελούν λάθη του Βαβυλώνιου γραφέα, τα οποία έχουν αποκατασταθεί από τους μελετητές.[103] Με βάση το μαθηματικό περιεχόμενο της πινακίδας, υποστηρίζεται ότι στις δύο κεντρικές στήλες δίνονται οι τιμές της μικρότερης κάθετης πλευράς (B) και της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου (C), για δεκαπέντε πυθαγόρειες τριάδες, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $A^2 + B^2 = C^2$. Αντίστοιχα, οι τιμές της πρώτης στήλης ικανοποιούν τους λόγους $(C/A)^2$. Αναφορικά με την τελευταία στήλη, αυτή δεν παρουσιάζει μαθηματικό ενδιαφέρον, καθώς περιλαμβάνει τους αριθμούς από το 1 έως το 15 σε αύξουσα σειρά. Ο Neugebauer παρατήρησε ότι αν οι αριθμοί στην πρώτη και δεύτερη στήλη υψωθούν στο τετράγωνο, τότε ο αριθμός που θα προκύψει θα είναι ο αριθμός της τρίτης στήλης στο τετράγωνο. Ο ίδιος απέδειξε ότι οι αριθμοί που περιέχονται στην πινακίδα μπορούσαν να κατασκευαστούν με τη χρήση των πυθαγόρειων τριάδων. Έτσι, κατέληξε στο χαρακτηρισμό της πινακίδας ως «το αρχαιότερο σωζόμενο τεκμήριο της αρχαίας αριθμοθεωρίας».[104]



[102] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη μετάφραση που προτείνει ο Neugebauer, βλ. Neugebauer 1990, 71.
[103] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα λάθη στην Plimpton 322, βλ. Χριστιανίδης 2012, 44.
[104] Ο Neugebauer παρατήρησε ότι αν οι αριθμοί στην πρώτη και δεύτερη στήλη υψωθούν στο τετράγωνο, τότε ο αριθμός που θα προκύψει θα είναι ο αριθμός της τρίτης στήλης στο τετράγωνο, βλ. Χριστιανίδης 2012, 43.

$\overline{C}^2 = 1 + \overline{B}^2$	*B*	*C*	*n*
[1 59 00] 15	1 59	2 49	1
[1 56 56] 58 14 *50 06* 15	56 07	*1 20 25*	2
[1 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
[1] 5[3 1]0 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4
[1] 48 54 01 40	1 05	1 37	5
[1] 47 06 41 40	5 19	8 01	6
[1] 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7
[1] 41 33 *45 14* 03 45	13 19	20 49	8
[1] 38 33 36 36	*8 01*	12 49	9
[1] 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10
[1] 33 45	*3*	*5*	11
[1] 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12
[1] 27 00 03 45	*2 41*	4 49	13
[1] 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14
[1] 23 13 46 4[0]	*28*	53	15

Εικόνα 28. Το περιεχόμενο της Plimpton 322

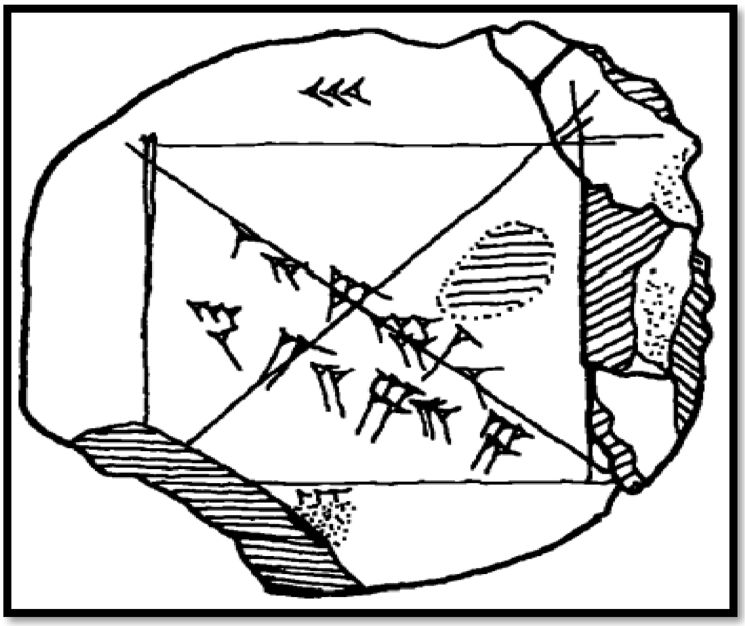
Ωστόσο, αυτή η άποψη δεν έγινε αποδεκτή από όλους τους ιστορικούς των μαθηματικών. Η Eleanor Robson υποστήριξε ότι οι Βαβυλώνιοι γραφείς δεν γνώριζαν τις πυθαγόρειες τριάδες. Σύμφωνα με την ίδια, η τελευταία στήλη της πινακίδας περιέχει τους αύξοντες αριθμούς από το 1 έως το 15, χωρίς αυτοί να αποτελούν πυθαγόρειες τριάδες. Επίσης, η Robson εντόπισε στην πινακίδα, έννοιες, όπως «τετράγωνο» και «διαγώνιος», οι οποίες εμφανίζονται και σε κείμενα εκπαιδευτικής φύσεως. Η ίδια επεσήμανε ότι η δεύτερη και η τρίτη στήλη αναφέρονται στην έννοια του πλάτους και της διαγώνιου, αντίστοιχα. Με βάση αυτές τις έννοιες, θεώρησε ότι η πινακίδα αποτελούσε μια μορφή άσκησης στις σχολές γραφής για τον υπολογισμό του μήκους συγκεκριμένων σχημάτων. Σύμφωνα με την ίδια, ο στόχος της πινακίδας ήταν να βοηθήσει τον μαθητή, αλλά και το δάσκαλο να διατυπώνει προβλήματα σχετικά με ορθογώνια τρίγωνα.[105]

---

[105] Η ίδια παρομοίασε τα χαρακτηριστικά στοιχεία της Plimpton 322 με μια σχολική πινακίδα. Σύμφωνα με τη Robson, ο γραφέας της συγκεκριμένης πινακίδας δεν είχε σκοπό να διδάξει στους μαθητές τις πυθαγόρειες τριάδες, αν και η πινακίδα τις περιέχει. Οι δάσκαλοι χρησιμοποιούσαν τις αριθμητικές τιμές που περιέχει η πινακίδα, προκειμένου να παράσχουν προβλήματα, τα οποία να είναι επιλύσιμα. Για

The Tākiltum-*square of the Diagonal* [*From Which 1 is*] *Torn Out, so that the Short Side Comes Up*	*Square-side of the Width*	*Square-side of the Diagonal*	*Its Name*
[1 59] 00 15	1 59	2 49	1st
[1 56 56] 58 14 56 (*sic*, for 50 06) 15	56 07	3 12 01 (*sic*, for 1 20 25)	2nd
[1 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3rd
[1] 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4th
[1] 48 54 01 40	1 05	1 37	5th
[1] 47 06 41 40	5 19	8 01	6th
[1] 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7th
[1] 41 33 45 14 3 45	13 19	20 49	8th
[1] 38 33 36 36	9 (*sic*, for 8) 01	12 49	9th
[1] 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10th
[1] 33 45	45	1 15	11th
[1] 29 21 54 2 15	27 59	48 49	12th
[1] 27 00 03 45	7 12 01 (*sic*, for 2 41)	4 49	13th
[1] 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	14th
[1] 23 13 46 40	28	53 (*sic*, for 1 46)	15th

Εικόνα 29. Η ερμηνεία της E. Robson για την Plimpton 322



Εικόνα 30. Άσκηση μαθητή για την εύρεση της διαγώνιου

περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την άποψη της Robson, βλ. Robson 2001, 168-201, Robson 2002, 105-116 και Robson 2008, 110.

2.4.2 Προβλήματα

Η δεύτερη κατηγορία μαθηματικών κειμένων είναι τα προβλήματα, τα οποία ακολουθούσαν έναν αλγοριθμικό τρόπο επίλυσης. Αυτά ήταν λεκτικά κείμενα, τα οποία σχετίζονται με αλγεβρικά ή γεωμετρικά προβλήματα. Κάθε τέτοια πήλινη πινακίδα περιείχε από ένα μέχρι εκατοντάδες προβλήματα, τα οποία μπορούσαν να ανήκουν στην ίδια ή σε διαφορετική θεματική. Μερικές από αυτές τις θεματικές ήταν τα προβλήματα με πέτρες, με κανάλια και με σπόρους.[106] Σε αυτές τις πινακίδες, εμφανίζεται είτε μόνο η απάντηση του εκάστοτε προβλήματος είτε η μέθοδος επίλυσής του. Ένα αλγεβρικό παράδειγμα αποτελεί το πρόβλημα της πινακίδας BM 34568, του Βρετανικού Μουσείου:[107]

Μήκος και πλάτος μαζί κάνουν 14, η επιφάνεια είναι 48.	$x + y = 14, xy = 48$
Τα μεγέθη δεν είναι γνωστά.	$x =; y =;$
14 φορές το 14, 3 16.	$14 \cdot 14 = 196$
48 φορές το 4, 3 12.	$48 \cdot 4 = 192$
Αφαίρεσε το 3 12 από το 3 16, απομένει 4.	$196 - 192 = 4$
Πόσες φορές πόσο κάνει 4; 2 φορές το 2, κάνει 4.	$\zeta^2 = 4$, $\zeta =$;, $2 \cdot 2 = 4$
Αφαίρεσε το 2 από το 14, το υπόλοιπο είναι 12.	$14 - 2 = 12$
12 φορές το 0 30, 6. 6 είναι το πλάτος.	$\frac{1}{2}\, 12 = 6$, $y = 6$
Στο 2 πρόσθεσε 6, γίνεται 8. 8 είναι το μήκος.	$2 + 4 = 8$, $x = 8$.

Αν το παραπάνω πρόβλημα διατυπωθεί στην αλγεβρική γλώσσα, ισοδυναμεί με: $x + y = 14,\ xy = 48$.

Ισοδύναμα, το πρόβλημα περιγράφει την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης: $t^2 - 14t + 48 = 0$. Πράγματι, στις πράξεις που περιλαμβάνονται στον παρακάτω τύπο, περιγράφονται οι πράξεις που αναφέρονται στο πρόβλημα της πινακίδας BM 34568.

[106] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις παραπάνω κατηγορίες προβλημάτων, βλ. Robson 2008, 198, 247 και 382. Για την επίλυση προβλημάτων με πέτρες, βλ. Melville 2002, 1-12.
[107] Βλ. Χριστιανίδης 2012, 49.

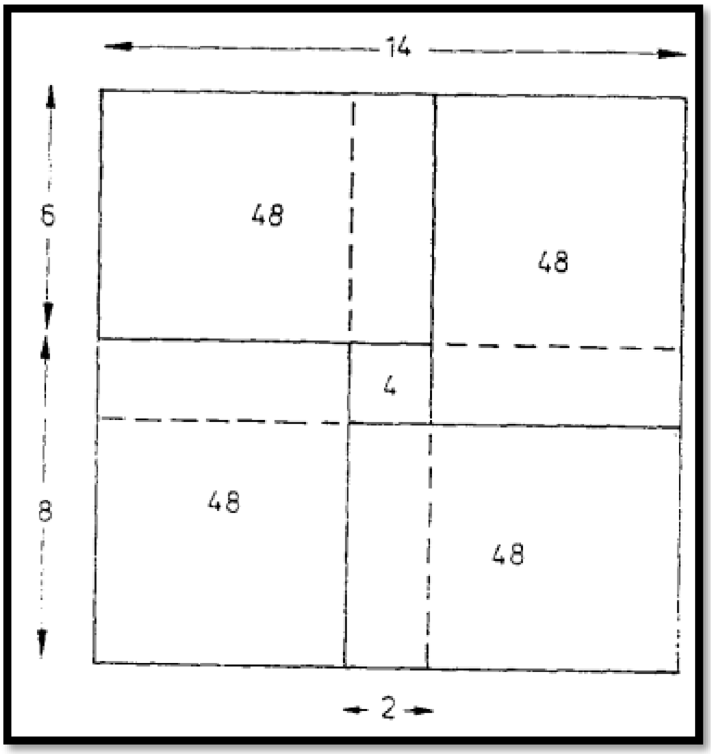
$$t = \frac{14 - \sqrt{14^2 - 4 \cdot 48}}{2}$$

Βάσει της ταυτότητας $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$. Έτσι, προκύπτει: 14^2 = 3 : 16 = 196, 4 · 48 = 3 : 12 = 192, 14^2 – 4 · 48 = 3 : 16 – 3 : 12 = 4, $\sqrt{14^2 - 4 \cdot 48}$ = $\sqrt{4}$ = 2. Άρα $x - y = 2$. Έχοντας $x + y = 14$ και $x - y = 2$, προκύπτει $2y = 14 - 2 = 12$. Συνεπώς, $y = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$. Και επειδή έχουμε $x - y = 2$, άρα $x = y + 2 = 6 + 2 = 8$.

Σύμφωνα με την παλαιότερη ιστοριογραφική παράδοση, μελετητές, όπως οι Neugebauer και M. H. Schuster επεσήμαναν ότι τέτοιου είδους προβλήματα λύνονταν με τη βοήθεια της άλγεβρας. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούσαν ότι ανήκαν στις εξισώσεις δευτέρου βαθμού και για αυτό το λόγο τα χαρακτήρισαν ως «βαβυλωνιακή άλγεβρα».[108] Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια, ιστορικοί των μαθηματικών, όπως ο Jens Høyrup, υποστηρίζουν ότι οι Βαβυλώνιοι επέλυαν σύνθετα προβλήματα, αλλά δεν γνώριζαν αλγεβρικές έννοιες. Ο Høyrup επεσήμανε πως οι βαβυλωνιακοί αλγόριθμοι δεν εξηγούνται μέσω σύγχρονων εννοιών, όπως «εξίσωση» και «άγνωστος». Αντίθετα, ο ίδιος θεώρησε ότι η επίλυση σε αυτά τα προβλήματα δίνεται μέσω στοιχειωδών γεωμετρικών πράξεων. Στο παραπάνω πρόβλημα, ο Høyrup θεώρησε ότι οι όροι του προβλήματος «μήκος» και «πλάτος» δηλώνουν γεωμετρικά αντικείμενα και δεν αντιστοιχούν σε μεταβλητές x και y, όπως υποστήριζε ο Neugebauer. Ο Høyrup πρότεινε ότι η επίλυση του προβλήματος γίνεται μέσω βασικών γεωμετρικών πράξεων, χωρίς την προσφυγή στις αλγεβρικές έννοιες. Η γεωμετρική επίλυση του προβλήματος που πρότεινε ο Høyrup δίνεται μέσω του παρακάτω σχήματος:[109]

[108] Ειδικότερα, ο ίδιος παρομοίαζε την επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων με τις εξισώσεις β' βαθμού. Θεωρούσαν ότι η άλγεβρα ξεκίνησε από την Παλαιοβαβυλωνιακή περίοδο, και όχι τον 16ο αιώνα με τον Viete ή τον 3ο αιώνα με τον Διόφαντο. Για την άποψη των ιστορικών και την αναφορά στη «βαβυλωνιακή άλγεβρα», βλ. Robson 2008, 89 και Χριστιανίδης 2012, 49 και 51.

[109] Ως προς την επίλυση του προβλήματος, υποστήριξε ότι ένα τετράγωνο με πλευρά 14 διαιρείται σε τέσσερα ορθογώνια με επιφάνεια 48 τετραγωνικές μονάδες το καθένα και σε ένα μικρότερο τετράγωνο στο κέντρο. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη γεωμετρική επίλυση του J. Høyrup, βλ. Høyrup 1990, 34 και 38.



Εικόνα 31. Αναπαράσταση της γεωμετρική επίλυσης του προβλήματος

Σύμφωνα με την παραπάνω επίλυση, ένα τετράγωνο χωρίζεται σε τέσσερα ορθογώνια και σε ένα μικρό τετράγωνο στο κέντρο. Κάθε ένα από τα τέσσερα ορθογώνια έχουν επιφάνεια 48 τ.μ. Το μικρό τετράγωνο έχει επιφάνεια $14^2 - 4 \cdot 48 = 4$ και πλευρά $\sqrt{14^2 - 4 \times 48} = 2$. Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται πως η πλευρά του αρχικού τετραγώνου γράφεται $y + x = y + [\,(x+y)+y] = y + (2+y) = 2y + 2 = 14$. Συνεπώς, $y = (14-2) \cdot \frac{1}{2} = 6$.[110]

[110] Για την παραπάνω ερμηνεία, βλ. Høyrup 1990, 27-69 και Χριστιανίδης 2012, 51-52.

Κεφάλαιο Τρίτο: Μινωικό αριθμητικό σύστημα

Από την Εποχή του Χαλκού στο Αιγαίο, το μεγαλύτερο μέρος των διαθέσιμων πηγών προέρχεται από αρχαιολογικά ευρήματα.[111] Ήδη από τα τέλη της τρίτης χιλιετίας π.Χ., δηλαδή κατά την Πρωτομινωική ΙΙΙ-Μεσομινωική ΙΑ περίοδο, εμφανίζεται η Γραφή των Αρχανών, η οποία απαντάται μόνο σε σφραγίδες.[112] Στον Μινωικό πολιτισμό, στις αρχές της δεύτερης χιλιετίας, αναπτύχθηκαν η Κρητική Ιερογλυφική (~1900 – 1650 π.Χ.) και η Γραμμική Α (~1700 – 1450 π.Χ.), αν και δεν είναι σαφής η χρονική τους αλληλουχία.[113] Στο τέλος της Παλαιοανακτορικής περιόδου, η Κρητική Ιερογλυφική χρησιμοποιείται στην Κνωσό, τα Μάλια, στο ανάκτορο του Πετρά, αλλά και στη Σύμη Βιάννου. Αντίστοιχα, η Γραμμική Α χρησιμοποιείται στην Αγία Τριάδα, τη Φαιστό και την Κάτω Ζάκρο, ενώ σταδιακά επεκτείνεται και έξω από το χώρο της Κρήτης.[114]

Στη Γραμμική Α, εντοπίζονται τρεις κατηγορίες συμβόλων, τα οποία χρησιμοποιούνται στις επιγραφές των πήλινων αντικειμένων. Αρχικά, εμφανίζονται οι ομάδες σημείων (sign-groups), τα οποία δηλώνουν στοιχεία, όπως ονόματα προσώπων και περιοχών. Αυτά τα σημεία είναι φωνογραφικής φύσεως και, πιθανότατα, αποτελούν συλλαβογράμματα. Επίσης, οι Μινωίτες γραφείς χρησιμοποιούσαν τα ιδεογράμματα ή λογογράμματα, τα οποία λειτουργούσαν ως ολόκληρες λέξεις και αντιπροσώπευαν αγαθά.[115] Στα διοικητικά αρχεία, τα ιδεογράμματα συνοδεύονται από αριθμούς και

[111] Για περισσότερες πληροφορίες για τα είδη των αντικειμένων που φέρουν επιγραφές σε Γραμμική Α, βλ. Bennet 2008, 178.

[112] Η Γραφή των Αχαρνών αποτελεί το πιο πρώιμο σύστημα των μινωικών γραφών. Αυτή η γραφή είναι γνωστή, κυρίως, από μια ταφική σφραγίδα που βρέθηκε στο Φουρνί Αχαρνών. Εκεί, η γραφή αποτυπώνεται μέσω της χρήσης γραφικών συμβόλων, τα οποία αναπαριστούν αντικείμενα και αγαθά. Η σχέση της με τις άλλες γραφές υφίσταται, αλλά οι λεπτομέρειες δεν έχουν ξεκαθαριστεί. Επίσης, στην ίδια δεν έχουν βρεθεί σαφή αριθμητικά σύμβολα ή κλασματογράμματα, βλ. Flouda 2015, 68.

[113] Σύμφωνα με την ιστοριογραφική παράδοση, η Κρητική Ιερογλυφική προηγείται χρονικά της Γραμμικής Α. Η Κρητική Ιερογλυφική εγκαταλείφθηκε στο τέλος του πρώτου μισού της δεύτερης χιλιετίας, πριν την εξαφάνιση της Γραμμικής Α, βλ. Chrisomalis 2010, 58 και Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 1. Επίσης, η Schoep υποστηρίζει ότι, πιθανότατα, οι δύο γραφές να προέρχονται από μια κοινή προγονική γραφή, αφού και οι δύο χρησιμοποιούν μια σειρά από κοινά συλλαβικά σημεία και ιδεογράμματα. Ωστόσο, η παραπάνω άποψη δεν είναι ευρέως αποδεκτή. Σχετικά με την Κρητική Ιερογλυφική, ο Evans την ονόμασε έτσι συμβατικά λόγω μιας αρχικής εντύπωσης σχετικά με την ομοιότητά της με την αιγυπτιακή γραφή. Σύμφωνα με τον Evans, η Κρητική Ιερογλυφική γραφή προήλθε και διαμορφώθηκε από τα αιγυπτιακά ιερογλυφικά. Ωστόσο, με βάση τα σημερινά διαθέσιμα στοιχεία, δεν τεκμηριώνεται μια τέτοια άποψη, βλ. Schoep 2002, 266 και Karnava 2015, 141.

[114] Η Γραμμική Α επεκτάθηκε στο Αιγαίο, τα νησιά των Κυκλάδων και την Ανατολία, βλ. Karnava 2007, 200 και Ferrara 2015, 27.

[115] Τα ιδεογράμματα είναι σημεία δηλωτικά αγαθών. Σε κάποιες περιπτώσεις θα μπορούσαν να είναι ακροφωνικής προέλευσης, αλλά δεν έχουμε ενδείξεις ότι αποτελούσαν πραγματικά ιδεογράμματα, δηλαδή σύμβολα λέξεων. Η αμιγώς λογογραφική λειτουργία δεν αποκλείεται εντελώς στη Γραμμική Α

κλασματικά σύμβολα, προκειμένου να δηλωθεί το καταμετρούμενο στοιχείο, κάτι το οποίο παρατηρείται στις αιγαιακές γραφές.[116] Τέλος, εμφανίζονται αριθμητικά και κλασματικά σύμβολα.[117] Ωστόσο, οι ακριβείς τιμές των τελευταίων αποτέλεσαν θέμα συζητήσεων για περισσότερο από έναν αιώνα στην ιστοριογραφία, καθώς σημειώνονται δυσκολίες στην αποκρυπτογράφησή τους, λόγω του περιορισμένου αριθμού καλοδιατηρημένων πινακίδων.[118]

3.1 Το αριθμητικό σύστημα της Κρητικής Ιερογλυφικής

Η Κρητική Ιερογλυφική αποτυπώνεται, συνήθως, σε σφραγίδες, αλλά και σε πήλινες πινακίδες, σφραγίσματα, υφαντικά βάρη και πήλινα αγγεία.[119] Το αριθμητικό σύστημα αυτής της γραφής χρησιμοποιήθηκε, κυρίως, σε διοικητικό πλαίσιο για την καταγραφή των προϊόντων, μέσω της χρήσης τεσσάρων συμβόλων.[120] Για το συμβολισμό των μονάδων, οι Μινωίτες γραφείς χρησιμοποιούσαν μια καμπύλη. Αντίστοιχα, οι δεκάδες αποτυπώνονταν μέσω των κουκίδων. Οι εκατοντάδες αναπαρίστανται με τη χρήση διαγώνιων ευθειών, αλλά συχνά και με κύκλους, ενώ οι χιλιάδες μέσω ενός συμβόλου σε σχήμα ρόμβου.[121]

και στην Κρητική Ιερογλυφική, αλλά είναι ενδεικτικό ότι δεν απαντούν στη θέση λέξεων σε οργανωμένες προτάσεις. Ο Petrakis χρησιμοποιεί τον όρο «σηματογράμματα», βλ. Petrakis 2017b, 148-151. Στο εξής θα χρησιμοποιείται ο όρος «ιδεογράμματα».

[116] Αν ένα ιδεόγραμμα ακολουθείται από κάποιο κλάσμα, τότε αυτό αναφέρεται σε μια ποσότητα ενός στοιχείου που έχει μετρηθεί. Όμως, αν ένα ιδεόγραμμα δεν ακολουθείται από κάποιο κλάσμα, τότε αναφέρεται σε ένα πράγμα, το οποίο, απλά, έχει καταμετρηθεί, χωρίς να έχει υπολογιστεί το ακριβές μέτρο του, βλ. Bennett 1950, 205 και παρακάτω στην παρούσα εργασία.

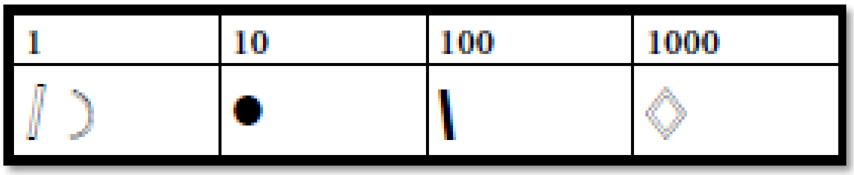
[117] Ειδικότερα, μέσω των ιδεογραμμάτων φανερώνεται και το περιεχόμενο των κειμένων. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις τρεις κατηγορίες συμβόλων, βλ. Bennett 1950, 205 και Βλ. Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 1.

[118] Σχεδόν όλες αυτές οι πινακίδες εμφανίζουν προβλήματα τόσο στους υπολογισμούς, όσο και στη διαδικασία της ερμηνείας τους. Τα μαθηματικά κείμενα με κλάσματα που θα εξεταστούν παρακάτω προέρχονται, κυρίως, από την Υστερομινωική περίοδο. Το μεγαλύτερο μέρος αυτών προέρχεται από τα Χανιά, την Κνωσό, την Αγία Τριάδα και τη Ζάκρο. Οι παραπάνω κατηγορίες συμβόλων εντοπίζονται και στη Γραμμική Β, η οποία θα εξεταστεί στο επόμενο κεφάλαιο, βλ. Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 1-2. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα ιδεογράμματα, βλ. Olivier 1986, 379.

[119] Συχνά, εμφανίζονται οι τετράπλευρες ράβδοι, σε κάθε μεγάλη επιφάνεια των οποίων εγγράφονται κείμενα, βλ. Εικόνα 36. Για τα υλικά αντικείμενα στα οποία αποτυπώνεται η Κρητική Ιερογλυφική, βλ. Finlayson 2013, 134 και Perna 2014, 254.

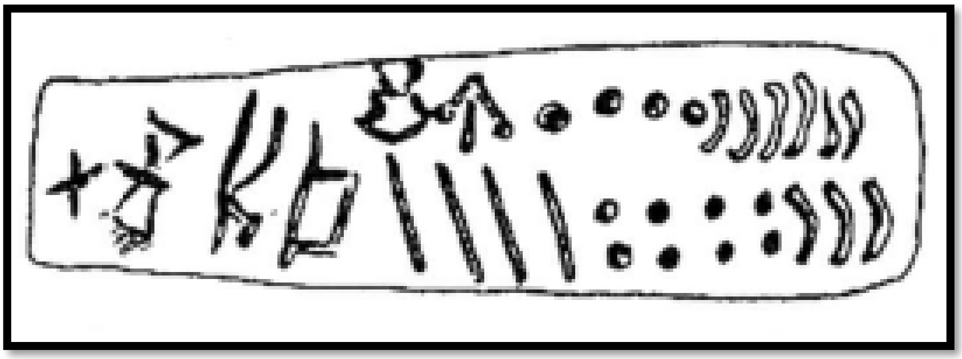
[120] Επίσης, χρησιμοποιήθηκε και σε τελετουργικό πλαίσιο, βλ. Karnava 2001, 45 και Civitillo 2021, 182.

[121] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον αριθμητικό συμβολισμό στην Κρητική Ιερογλυφική, βλ. Chrisomalis 2010, 57.



Εικόνα 32. Αριθμητικό σύστημα Κρητικής Ιερογλυφικής

Το συγκεκριμένο αριθμητικό σύστημα ήταν δεκαδικό και ίσχυε ο αθροιστικός κανόνας. Το σύστημα γράφεται από τα αριστερά προς τα δεξιά, αν και έχουν βρεθεί δείγματα γραφής και από τα δεξιά προς τα αριστερά. Αν και τα σύμβολα, συνήθως, ομαδοποιούνται σε δύο σειρές με έως πέντε σύμβολα η κάθε μία, συχνά, η οργάνωση των αριθμών στις πινακίδες γινόταν και πιο αυθαίρετα.[122]



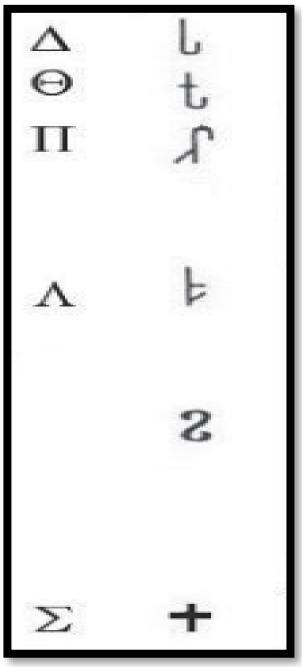
Εικόνα 33. Αναπαράσταση του αριθμού 483

3.1.1 Κλασματογράμματα

Στην Κρητική Ιερογλυφική, οι αριθμοί εντοπίζονται μετά από τα ιδεογράμματα, τα οποία δηλώνουν το προϊόν που καταμετρείται. Σε έναν μικρό αριθμό επιγραφών, αυτοί οι ακέραιοι αριθμοί ακολουθούνται από σύμβολα, τα οποία, στην Κρητική Ιερογλυφική, ονομάζονται κλασματογράμματα (Εικόνα 34). Τα τελευταία αποτελούν σύμβολα, τα οποία αντιστοιχούν σε κλασματικές τιμές. Ωστόσο, ο περιορισμένος αριθμός αυτών των αριθμητικών τιμών στα κείμενα, καθιστά δύσκολο να εξακριβωθεί

[122] Η ποικιλία στη φορά ανάγνωσης χαρακτηρίζει την ίδια τη γραφή, βλ. Chrisomalis 2010, 59-61.

αν αυτά δηλώνουν κλασματικές τιμές ή τις μονάδες μέτρησης των προϊόντων.[123] Κατά τη μεταγραφή τους από τους Jean-Pierre Olivier και Louis Godart, σε αυτά τα σύμβολα δόθηκαν συμβατικά ελληνικά κεφαλαία γράμματα Γ-Δ, Θ, Λ, Ξ, Π, Σ, κόππα (Ϙ) και σαμπί (ϡ). [124]



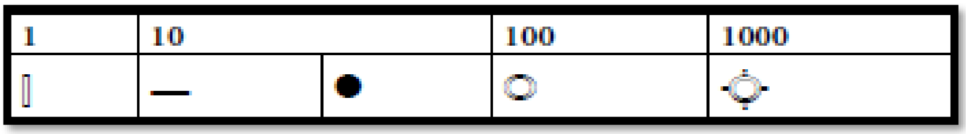
Εικόνα 34. Τα κλασματογράμματα της Κρητικής Ιερογλυφικής

3.2 Το αριθμητικό σύστημα στη Γραμμική Α

Η Γραμμική Α συναντάται σε πήλινες πινακίδες, κεραμικά αγγεία, δοχεία αποθήκευσης προϊόντων και σφραγίδες.[125] Στις επιγραφές αυτών των αντικειμένων καταγράφονταν οι ποσότητες γεωργικών αγαθών, υφασμάτων, αγγείων και ζώων, με σκοπό τη συλλογή και διανομή τους.[126] Όσον αφορά το αριθμητικό σύστημα, αυτό περιλάμβανε σύμβολα, τα οποία αναπαριστούσαν ακέραιους αριθμούς και ένα εκτεταμένο σύστημα κλασματικών αριθμών.[127] Το αριθμητικό σύστημα ήταν δεκαδικό

[123] Τα κλασματογράμματα σημειώνονται μετά τα ιδεογράμματα και τους αριθμούς βλ. Karnava 2001, 45-46. Οι επιγραφές που περιέχουν κλασματογράμματα προέρχονται, κυρίως, από την Κνωσό, βλ. Petrakis 2017a, 82.
[124] Αυτά δόθηκαν από τους Olivier και Godart, βλ. Olivier και Godart 1996, 17.
[125] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα υλικά και αντικείμενα στα οποία αποτυπώνεται η Γραμμική Α, βλ. Younger και Rehak 2010, 175 και Perna 2014, 256.
[126] Βλ. Flouda 2015, 75.
[127] Βλ. Chrisomalis 2010, 57.

και αποτυπωνόταν με τη χρήση τεσσάρων συμβόλων. Οι γραφείς αναπαρίσταναν τις μονάδες με τη χρήση κάθετων ευθειών. Αντίστοιχα, οι δεκάδες δηλώνονταν με οριζόντιες ευθείες ή κουκίδες. Το σύμβολο της τελείας για τον αριθμό 10 εμφανίζεται μόνο στα πρώιμα κείμενα της Γραμμικής Α. Αυτό, πιθανότατα, οφείλεται στην επίδραση από το σύστημα της Κρητικής Ιερογλυφικής, στο οποίο ο αριθμός 10 δηλωνόταν με τον ίδιο συμβολισμό.[128] Επίσης, οι εκατοντάδες αποτυπώνονταν με κύκλους, ενώ οι χιλιάδες με κύκλους, οι οποίοι περιβάλλονταν από τέσσερις ευθείες. Εκτός από τα αριθμητικά σύμβολα, στις επιγραφές συναντώνται και σύμβολα, όπως τα × ή + . Σύμφωνα με μια πρώτη εκτίμηση από τον Arthur Evans, αυτά αντιστοιχούσαν στον αριθμό 0. Ωστόσο, αργότερα, αποδείχθηκε ότι αυτά τα σύμβολα εξυπηρετούσαν κάποιο λογιστικό ή διοικητικό σκοπό, καθώς δεν υπήρχε στη Γραμμική Α η έννοια του μηδενός, όπως και σε κανέναν άλλο πολιτισμό της εποχής.[129]



Εικόνα 35. Αριθμητικό σύστημα Γραμμικής Α

Επίσης, στο συγκεκριμένο αριθμητικό σύστημα ίσχυε ο αθροιστικός κανόνας. Παραδείγματος χάριν, αν ένας γραφέας επιθυμούσε να καταγράψει τον αριθμό 7659, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσει επτά σύμβολα χιλιάδων, έξι σύμβολα εκατοντάδων, πέντε δεκάδων και εννέα μονάδες.[130]

---

[128] Ωστόσο, δεν είναι σαφής η επίδραση. Ενδέχεται η εν λόγω απόδοση της δεκάδας να αποτελεί κοινό στοιχείο των πρώιμων γραφών του Αιγαίου και να μην προέρχεται από την επίδραση μιας παράδοσης σε άλλη.

[129] Με αυτόν τον τρόπο, πιθανότατα, δηλωνόταν κάποια συναλλαγή που είχε ολοκληρωθεί, βλ. Bennett 1950, 205, Chrisomalis 2010, 56-57 και Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 1.

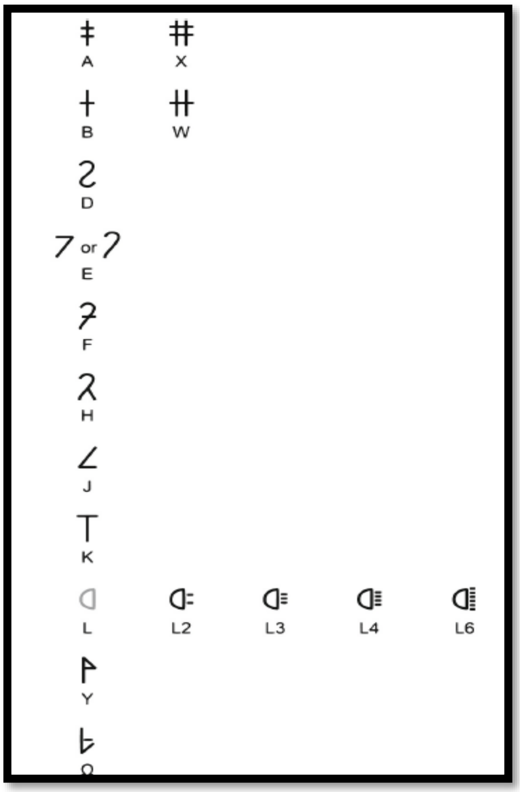
[130] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το συγκεκριμένο αριθμητικό σύστημα, βλ. Chrisomalis 2010, 57.

Εικόνα 36. Αναπαράσταση του αριθμού 7659

Εικόνα 37. Αριθμητικές αναπαραστάσεις στην πινακίδα HT 13

3.2.1 Τα κλάσματα της Γραμμικής Α

Σύμφωνα με τις ερμηνείες του Emmett L. Bennett και ύστερων μελετητών, οι Μινωίτες γραφείς χρησιμοποιούσαν έναν ειδικό συμβολισμό για την αναπαράστασή των κλασμάτων.[131] Ειδικότερα, έχουν ανασκαφεί δεκαεπτά σύμβολα, τα οποία μεταγράφονται από τους μελετητές με τη χρήση κεφαλαίων λατινικών χαρακτήρων, όπως A, B, D, E, F, H, J, K, L, L2, L3, L4, L6, W, X, Y και Ω.



Εικόνα 38. Συμβολισμός κλασμάτων στη Γραμμική Α

[131] Μάλιστα, φαίνεται πως δέκα αριθμητικά συστήματα από τους αρχαίους χρόνους, και ειδικότερα από την περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου και της Ινδίας, χρησιμοποιούσαν την ίδια πρακτική, βλ. Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 4.

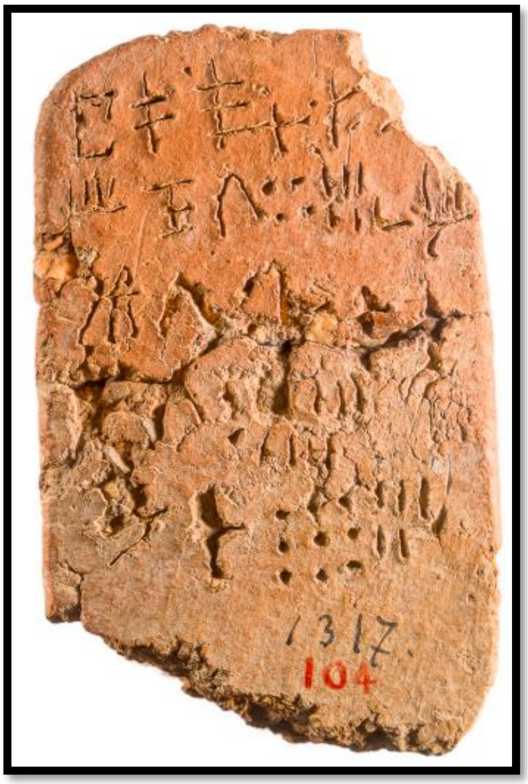
Σύμβολα Κλασμάτων	Κλασματικές Τιμές
J	1/2
E	1/4
D	1/6
B	1/5
K	1/10
L2	1/20
F	1/8
H	1/16 (;)
A	1/24 (;)
L3	1/30
L4	1/40
L6	1/60

Πίνακας 2. Συμβατική μεταγραφή των κλασματικών συμβόλων[132]

Σύμφωνα με την ερμηνεία του Bennett, τα σύμβολα των κλασμάτων της Γραμμικής Α αντιστοιχούσαν σε κλάσματα με αριθμητή τον αριθμό 1, όπως τα αιγυπτιακά κλάσματα.[133] Αυτά σημειώνονταν μετά τους αριθμούς και τα ιδεογράμματα, τα οποία δήλωναν έμμεσα τη μονάδα μέτρησης του αγαθού που καταμετρούταν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η πινακίδα HT 104 (Εικόνα 39), η οποία αποτελεί μια λίστα καταγεγραμμένων εμπορευμάτων. Σε αυτήν αποτυπώνεται ο αριθμός 45, ο οποίος ακολουθείται από το σύμβολο κλάσματος που μεταγράφεται ως J. Στη συνέχεια της πινακίδας, καταγράφεται ξανά το ίδιο κλάσμα μετά τον αριθμό 20. Στο κατώτερο τμήμα της πινακίδας αναγράφεται ο αριθμός 95, μετά το μινωικό συμβολισμό για τη δήλωση του αθροίσματος.[134]Ύστερα από τη μελέτη της συχνότητας των συμβόλων στις επιγραφές, παρατήρησε ότι τα κλάσματα με μικρότερους παρονομαστές εμφανίζονται συχνότερα στις επιγραφές. Σύμφωνα με τον Bennett, στα

[132] Οι κλασματικές τιμές του πίνακα 2, προέρχονται από Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 9.
[133] Δηλαδή κλασματικές μονάδες, βλ. Ενότητα 1.2.1, 25-26.
[134] Για τη Γραμμική Α δεν έχουν βρεθεί διαφορετικά, από τα παραπάνω, σύμβολα, τα οποία να εκφράζουν τις μονάδες μέτρησης. Μόνο μια μονάδα μέτρησης είναι γνωστή, η οποία αντιστοιχεί στο AB 1118*, με το οποίο δηλώνεται το βάρος. Επίσης, καθώς έχει βρεθεί μόνο αυτή η μονάδα μέτρησης, παραμένει ασαφές αν για τη μέτρηση στερεών και υγρών προϊόντων χρησιμοποίησαν τις ίδιες μονάδες μέτρησης, βλ. Bennett 1950, 205 και Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 2 και 4.

διοικητικής φύσεως κείμενα, τα κλάσματα καταγράφονται είτε μόνα τους, είτε σε συνδυασμό με άλλα κλάσματα. Επίσης, ο ίδιος κατέληξε πως το 1/2, το οποίο αντιστοιχεί στο μεταγραφόμενο ως J, αποτελούσε το πιο συχνό σύμβολο στις επιγραφές, καθώς ο αριθμός 2 έχει πολλούς ακέραιους διαιρέτες.[135]



Εικόνα 39. Πινακίδα HT 104

Σύμφωνα με την έρευνά του, το δεύτερο πιο συχνό σύμβολο ήταν το E, το οποίο αντιστοιχούσε στο 1/4 και το F, το οποίο δήλωνε την τιμή 1/8.[136] Ωστόσο, στις επιγραφές εμφανίζονται και κλάσματα, τα οποία δεν φέρουν κάποιον από τους παραπάνω συμβολισμούς. Τέτοιου είδους κλάσματα αναπαρίστανται μέσω του αθροίσματος δύο ή περισσότερων κλασματικών συμβόλων, αφού και αυτά φαίνεται να ακολουθούν τον αθροιστικό κανόνα. Παραδείγματος χάριν, το 3/4 αποτυπώνεται μέσω

[135] Παραδείγματος χάριν, το 1/2 ισούται με το 2 × 1/4, αλλά και με το 3 × 1/6, κ.α. Έτσι, το 1/2 αποτελεί πολλαπλάσιο των άλλων κλασμάτων, βλ. Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 5.

[136] Ο Bennett θεώρησε ότι το μεταγραφόμενο ως J κλάσμα εμφανίζεται αριστερά ή πάνω από το E, διότι το τελευταίο είναι μικρότερο του J. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα παραπάνω συμπεράσματα του Bennett, βλ. Bennett 1950, 2-6-217 και Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 2.

της χρήσης των συμβόλων J και E, τα οποία αθροίζονται, δηλαδή JE = 1/2 + 1/4 = 3/4. Επίσης, μια τιμή δεν δύναται να αντιπροσωπεύεται και από ένα σύμβολο και από έναν συνδυασμό συμβόλων. Ωστόσο, η αντίστροφη διαδικασία είναι δυνατόν να συμβεί. Ήταν δυνατόν περισσότεροι από έναν συνδυασμό σημείων να δηλώνουν την ίδια τιμή. Ακόμα, κλάσματα, τα οποία ισούνταν με τη μονάδα ή ήταν μεγαλύτερα αυτής, αποδίδονταν με τη χρήση ακέραιων αριθμών.[137] Τέλος, τα σύμβολα L (L2, L3, L4, L6), σύμφωνα με τις ερμηνείες μελετητών, όπως ο Bennett, πιθανότατα αυτά δηλώνουν την έννοια του μέρους, δηλαδή 1/20, 1/30, 1/40, 1/60.[138]

3.3 Κυπρομινωικό αριθμητικό σύστημα

Η απόδοση του όρου «κυπρομινωική γραφή» οφείλεται στον Evans, ο οποίος πρώτος παρατήρησε ομοιότητες μεταξύ του συστήματος της Γραμμικής Α και της Κυπριακής γραφής της δεύτερης χιλιετίας. Η κυπρομινωική γραφή χρησιμοποιήθηκε περίπου το 1500-1050 π.Χ. στο νησί της Κύπρου, προκειμένου να εξυπηρετήσει διοικητικές ανάγκες. Την ίδια περίοδο, η Κύπρος είχε αναδειχθεί σε σημαντική εμπορική δύναμη στην Ανατολική Μεσόγειο, μέσω των εμπορικών λιμανιών που τη συνέδεαν με την Αίγυπτο και το Αιγαίο.[139]

Σε αυτό το σύστημα διοίκησης, αναπτύχθηκε η κυπρομινωική γραφή, η οποία συναντάται σε πήλινες πινακίδες και κυλίνδρους, σε δοχεία, σφραγίδες και μεταλλικά αντικείμενα.[140] Σύμφωνα με τους περισσότερους μελετητές, αυτή η γραφή εμφανίζει πολλές ομοιότητες με τη Γραμμική Α, υποστηρίζοντας την προέλευσή της από την τελευταία. Αυτό παρατηρείται και από την παλαιότερη σωζόμενη πινακίδα (βλ. Εικόνα 40) σε κυπρομινωική γραφή, η οποία χρονολογείται τη δεύτερη χιλιετία π.Χ., και παρουσιάζει κοινά στοιχεία με τις αντίστοιχες πινακίδες της Γραμμικής Α.[141]

Στην περίοδο ακμής της Γραμμικής Α, η γραφή εξήλθε από την Κρήτη και διαδόθηκε στα νησιά του Αιγαίου. Σύμφωνα με τον Philip Betancourt, κατά την Ύστερη

[137] Τα παραπάνω λήφθηκαν ως προϋποθέσεις για την ερμηνεία των κλασματικών τιμών της Γραμμικής Α, βλ. Bennett 1980, 18 και Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 3-4.
[138] Βλ. Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 3-4.
[139] Αυτές οι εμπορικές επαφές αναπτύχθηκαν μέσω των ορυχείων χαλκού που διέθετε. Καθ' όλη τη διάρκεια της δεύτερης χιλιετίας π.Χ., η Κύπρος αποτελούσε σημαντική πηγή χαλκού, βλ. Papadimitriou 2013, 92.
[140] Βλ. Zeman-Wiśniewska 2020, 16.
[141] Βλ. Hooker 1994, 48 και Chrisomalis 2010, 65-66.

Ανακτορική περίοδο, μέσω της εξάπλωσης του μινωικού εμπορίου, η Γραμμική Α διαδόθηκε και στο χώρο της Κύπρου.[142] Ωστόσο, δεν είναι σαφής η διαδικασία, αλλά και ο λόγος αυτού του δανεισμού. Επίσης, την ίδια περίοδο, η Κύπρος είχε αναπτύξει σχέσεις και με την Εγγύς Ανατολή.[143] Επομένως, θα ήταν εύλογο να επηρεαστούν από τα ανατολικά πρότυπα και όχι απαραίτητα από την αιγαιακή γραφή.[144]

Εικόνα 40. Παλαιότερη σωζόμενη κυπριακή πινακίδα

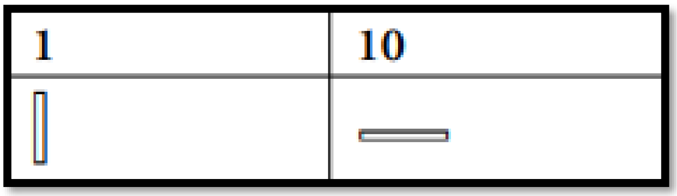
Όσον αφορά το κυπρομινωικό αριθμητικό σύστημα, αυτό ήταν δεκαδικό και ίσχυε ο αθροιστικός κανόνας. Τα δύο σύμβολα, για τις μονάδες και τις δεκάδες αντίστοιχα, τα οποία έχουν επιβεβαιωθεί, είναι όμοια με της Γραμμικής Α. Ως προς το συμβολισμό,

[142] Σύμφωνα με τον Betancourt, κατά την περίοδο της Εποχής του Χαλκού, η Κύπρος λειτούργησε ως ενδιάμεσος σταθμός μεταξύ Αιγαίου και Ανατολής. Πιθανότατα, την περίοδο της Μέσης Εποχής του Χαλκού, να συντελέστηκε η διάδοση της γραφής στην Κύπρο, μέσω του εμπορίου, καθώς τότε αυξήθηκε και ο αριθμός των κυπριακών αντικειμένων στην Κρήτη, βλ. Betancourt 2010, 215. Εκτός από την Κύπρο, η διάδοση της μινωικής γραφής, πιθανότατα, συντελέστηκε στα νησιά των Κυκλάδων και στην ηπειρωτική Ελλάδα. Τα δείγματα γραφής από την Κύπρο φανερώνουν τη διάδοση της Γραμμικής Α σε αυτόν το γεωγραφικό χώρο. Ο Evans, έπειτα από τη μελέτη των επιγραφών σε πήλινες σφαίρες, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η γραφή της Κύπρου και τα γραμμικά συστήματα της Κρήτης εμφάνιζαν πολλές ομοιότητες μεταξύ τους, βλ. Hooker 1994, 47.

[143] Το ζήτημα αυτό παραμένει ανοιχτό. Είναι σημαντικό να τονισθεί ότι η σχέση της πινακίδας της Έγκωμης (Εικόνα 42) -που συχνά ονομάζεται και «Κυπρομινωική 0» ή «Αρχαϊκή» Κυπρομινωική κ.λ.π.- με τις άλλες Κυπρομινωικές επιγραφές είναι ασαφής. Επίσης, οι εμπορικές σχέσεις μεταξύ Ανατολής και Κύπρου φανερώνονται σε χεττιτικά και αιγυπτιακά κείμενα, βλ. Palaima 2005, 35 και Κασσιανίδου 2005, 40.

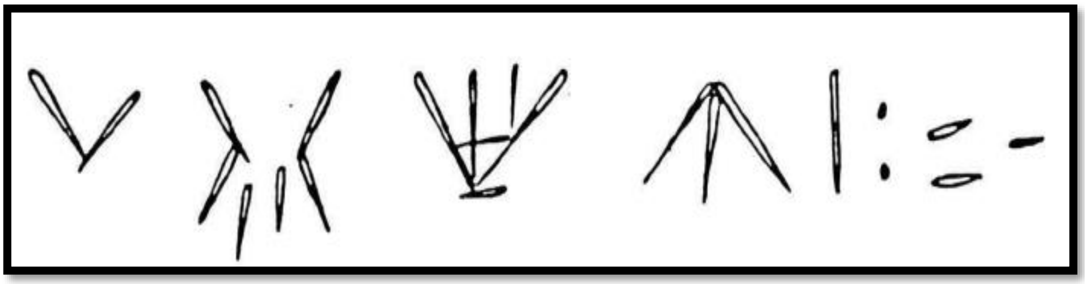
[144] Η διάδοση της Γραμμικής Α στην Κύπρο είναι η εικόνα που εικάζει η βιβλιογραφία. Ωστόσο, φαίνεται ότι, το ερώτημα του γιατί δεν στράφηκαν προς την Ανατολή, στην οποία υπήρχε μεγαλύτερη ποικιλία συστημάτων, απασχολεί ιδιαίτερα τους μελετητές. Σύμφωνα με τον Palaima, πιθανότατα, η Γραμμική Α επιλέχθηκε, διότι αποτελούσε ένα πιο απλό σύστημα από α αντίστοιχα της Εγγύς Ανατολής, βλ. Palaima 1989, 40-41, Kanta 1998, 37 και Palaima 2005, 35.

χρησιμοποιούσαν μια κάθετη ευθεία για την αναπαράσταση των μονάδων, όπως στα περισσότερα συστήματα, και μια οριζόντια ευθεία για τις δεκάδες.[145]



Εικόνα 41. Κυπρομινωικό αριθμητικό σύστημα

Επίσης, έχει προταθεί η άποψη ότι οι δεκάδες αποτυπώνονται μέσω των κουκίδων, όπως παρατηρείται στα πρώιμα κείμενα της Γραμμικής Α. Σύμφωνα με την Emilia Masson, στο ασημένιο κύπελλο από την Έγκωμη της Κύπρου (Εικόνα 42), οι κουκίδες αντιστοιχούν στον αριθμό 10.[146] Ωστόσο, σύμφωνα με τον Palaima, φαίνεται πως οι κουκίδες χρησιμοποιήθηκαν τουλάχιστον σε αυτήν την περίπτωση για την καταγραφή του αριθμού 100, ενώ οι δεκάδες αποτυπώθηκαν με τις οριζόντιες ευθείες. Όπως υποστηρίζει, αυτό, πιθανότατα, οφείλεται σε μια επιγραφική πρακτική που υιοθετήθηκε για την αποφυγή σύγχυσης.[147]



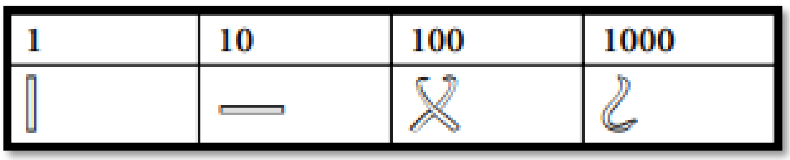
Εικόνα 42. Αριθμητική αναπαράσταση κυπέλλου Έγκωμης

[145] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το κυπρομινωικό αριθμητικό σύστημα, βλ. Chrisomalis 2010, 65-66.
[146] Στη Γραμμική Α οι κουκίδες αντιστοιχούν αποκλειστικά στις δεκάδες. Φαίνεται προβληματικός ο προσδιορισμός του συγκεκριμένου αριθμητικού συμβόλου στην κυπρομινωική γραφή, καθώς τα αριθμητικά τεκμήρια είναι περιορισμένα, βλ. Palaima 1989, 48.
[147] Ωστόσο, η έρευνα βρίσκεται βρίσκεται ακόμη σε μεταβατικό στάδιο για ορισμένα από τα ζητήματα αυτά, ιδιαίτερα σε ό,τι αφορά την αναγνώριση αριθμητικών τιμών σε επιγραφές πάνω σε αγγεία. Για την άποψη του Palaima, βλ. Palaima 1989, 49.

3.4 Χεττιτικό αριθμητικό σύστημα

Στο Χεττιτικό βασίλειο[148], κατά τη διάρκεια της δεύτερης χιλιετίας π.Χ., χρησιμοποιούταν μια σειρά από διαφορετικές γλώσσες και γραφές. Εκτός από τη σφηνοειδή γραφή, χρησιμοποιήθηκε και η λουβική (~1500 – 1200 π.Χ.), η οποία ήταν ιερογλυφική γραφή και εμφανίζεται, κυρίως, σε μνημειακές επιγραφές.[149] Στο πλαίσιο αυτής της γραφής, οι Χετταίοι, μεταξύ των ιδεογραμμάτων, χρησιμοποιούσαν και ένα σύνολο αριθμητικών συμβόλων. Οι αριθμοί εντοπίζονται σε πέτρινες επιγραφές και lead tablets. Μεταξύ αυτών, οι πιο σημαντικές είναι οι Kululu lead strips (~τέλη 8ου αιώνα π.Χ.), στις οποίες καταγράφονται απογραφές εκτάσεων χρησιμοποιώντας αριθμητικούς συμβολισμούς.[150]

Το σύστημα της λουβικής γραφής ήταν δεκαδικό, ενώ ίσχυε ο αθροιστικός κανόνας. Ως προς το συμβολισμό, οι γραφείς χρησιμοποιούσαν μια οριζόντια γραμμή για την αναπαράσταση των μονάδων και μια κάθετη για τις δεκάδες. Ωστόσο, για τις εκατοντάδες και τις χιλιάδες χρησιμοποιούσαν ιερογλυφικούς χαρακτήρες.[151]



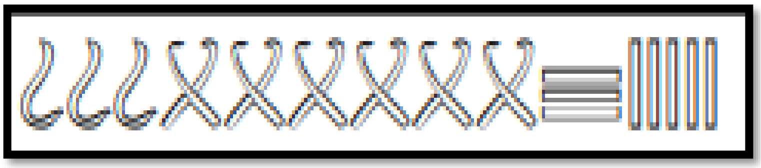
Εικόνα 43. Χεττιτικό αριθμητικό σύστημα

[148] Στην παρούσα εργασία θα γίνει αναφορά και στο χεττιτικό αριθμητικό σύστημα για λόγους πληρότητας, χωρίς ιδιαίτερη ανάλυση. Κατά την Ύστερη Εποχή του Χαλκού, το χεττιτικό βασίλειο αποτέλεσε ένα από τα σημαντικότερα κράτη της Ανατολής, βλ. Κοπανιάς 2021, 15.

[149] Η λουβική χρησιμοποιήθηκε για κάποιο χρονικό διάστημα παράλληλα με τη σφηνοειδή γραφή. Αυτή η γραφή συνέχισε να χρησιμοποιείται και μετά την πτώση της Χεττιτικής αυτοκρατορίας, βλ. Chrisomalis 2010, 63.

[150] Ωστόσο, λόγω του περιορισμένου αριθμού διαθέσιμων παραδειγμάτων, δεν μπορεί να συναχθεί ολοκληρωμένη άποψη για τη λειτουργία και τη χρήση του συστήματος, βλ. Chrisomalis 2010, 64.

[151] Η Γραμμική Α είχε σχεδόν εξαφανιστεί εκείνη την περίοδο. Οι γραφές του Αιγαίου, αλλά και η λουβική χρησιμοποιούσαν έναν συνδυασμό συλλαβογραμμάτων και λογογραμμάτων. βλ. Chrisomalis 2010, 63-64. Σύμφωνα με τον D. Hawkins, ο εικονογραφικός-ιερογλυφικός χαρακτήρας είναι κοινός σε όλες τις παραπάνω γραφές, βλ. Hawkins 1986, 373-375.



Εικόνα 44. Αναπαράσταση του αριθμού 3635

Κεφάλαιο Τέταρτο: Μυκηναϊκό αριθμητικό σύστημα

Με την εμφάνιση της Γραμμικής Β, η Κρητική ιερογλυφική και η Γραμμική Α σταδιακά έπαψαν να χρησιμοποιούνται. Οι διαθέσιμες πηγές μας επιτρέπουν να διαβάσουμε την Γραμμική Β ως ένα διοικητικό εργαλείο, στενά συνδεδεμένη με τις δραστηριότητες των ανακτόρων. Το μεγαλύτερο μέρος των διαθέσιμων πήλινων πινακίδων σε Γραμμική Β[152] προέρχεται, κυρίως, από το παλάτι της Κνωσού, στην κεντρική Κρήτη, και την Πύλο στη Μεσσηνία, αλλά και από άλλα κέντρα, όπως τις Μυκήνες και την Τίρυνθα. Οι ανασκαφές στις παραπάνω περιοχές προσέφεραν μια σειρά από διοικητικά τεκμήρια σε Γραμμική Β, τα οποία παρέχουν πληροφορίες για τις οικονομικές δραστηριότητες των Μυκηναϊκών ανακτόρων. Επίσης, εκτός από τις πήλινες πινακίδες, πληροφορίες σχετικές με συγκεκριμένους τομείς των ανακτορικών συναλλαγών καταγράφονται σε ενεπίγραφα αγγεία, σφραγίσματα και ετικέτες.[153]

4.1 Το αριθμητικό σύστημα της Γραμμικής Β

Σύμφωνα με τις ερμηνείες μελετητών, όπως ο Bennett, η γραφή του αριθμητικού συστήματος σε Γραμμική Β προέκυψε από την επαφή με το Μινωικό πολιτισμό. Ωστόσο, είναι αμφίβολο αν το μετρικό σύστημα είχε μινωική προέλευση. Οι Μυκηναίοι γραφείς δανείστηκαν και τροποποίησαν την αριθμητική σήμανση της Γραμμικής Α και προέβησαν στην ανάπτυξη του δικού τους. Αυτά τα δύο συστήματα εμφανίζουν πολλές ομοιότητες. Το αριθμητικό σύστημα σε Γραμμική Β ήταν δεκαδικό και αποτελούταν από πέντε σύμβολα. Η διαφορά των συστημάτων έγκειται στην εμφάνιση ενός συμβόλου για τον αριθμό 10.000. Όσον αφορά το σημείο των 10.000 φαίνεται να ισχύει η πολλαπλασιαστική σχέση ανάμεσα στο σημείο της χιλιάδας και στο σημείο της δεκάδας, τα οποία συνθέτουν το σημείο των 10000. Επίσης, στο ίδιο

[152] Οι ομοιότητες στη μορφή των δύο αιγαιακών συστημάτων αποδεικνύουν ότι, πιθανότατα, το μυκηναικό σύστημα προήλθε και προσαρμόστηκε από το αντίστοιχο σύστημα της Γραμμικής Α. Σύμφωνα με μελετητές, όπως ο Bennett, η Γραμμική Α και η Γραμμική Β, εμφανίζουν κοινούς χαρακτήρες, αλλά δεν ταυτίζονται, καθώς καθεμιά διαθέτει στοιχεία που δεν απαντώνται στην άλλη. Μεταξύ των δύο γραφών σημειώνεται η εμφάνιση μερικών κοινών ιδεογραμμάτων. Μερικά από αυτά που διατηρήθηκαν από τη Γραμμική Α σχετίζονται με τα ζώα και τα δημητριακά. Από τις γραφές που αναπτύχθηκαν στο χώρο της Κρήτης, η Γραμμική Β αποτελεί τη γραφή για την οποία υπάρχουν οι περισσότερες πληροφορίες, καθώς έχει αποκρυπτογραφηθεί, βλ. Bennett 1950, 204.

[153] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις καταγραφές της Γραμμικής Β, βλ. Palaima 2002, 270, Bennet 2008, 182 και Palmer 2008, 27.

σύστημα ίσχυε ο αθροιστικός κανόνας, ενώ επικράτησε η γραφή τους από τα αριστερά προς τα δεξιά.[154]

Εικόνα 45. Αριθμητικό σύστημα Γραμμικής Β

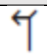
Εικόνα 46. Πινακίδα KN Dn 1094: Αναπαράσταση των αριθμών 1.509 και 2.440

Σε αντίθεση με το σύστημα της Γραμμικής Α, για το σύστημα της Γραμμικής Β δεν έχουν ανακαλυφθεί τα σύμβολα για τα κλάσματα.[155] Ωστόσο, φαίνεται πως υπάρχει μια ιστορική συνέχεια των μινωικών κλασμάτων, αφού μερικοί από τους κλασματικούς συμβολισμούς της Γραμμικής Α, χρησιμοποιήθηκαν από τους Μυκηναίους γραφείς για τη δήλωση των μονάδων μέτρησης στις εμπορικές επιγραφές. Εντούτοις, οι γραφείς του Μυκηναϊκού πολιτισμού κατέγραφαν με διαφορετικό τρόπο τις ποσότητες των εμπορευμάτων. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούσαν ειδικά σύνολα συμβόλων, τα οποία ονομάζονται «μετρογράμματα», καθένα από τα οποία αντιστοιχούσε σε μονάδες

[154] Συνεπώς, δεν φαίνεται να υπάρχει κάτι καινοτόμο στο σημείο των 10.000. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το συμβολισμό και τη γραφή, βλ. Bennett 1963, 113. Τα υπόλοιπα αριθμητικά σύμβολα της Γραμμικής Β είναι παρόμοια με τα αντίστοιχα σύμβολα της Γραμμικής Α, βλ. Chrisomalis 2010, 61 και Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 1.

[155] Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπήρχαν κλάσματα. Τα τελευταία δεν έχουν βρεθεί, καθώς υπάρχουν και ανοιχτά θέματα μετάφρασης. Για την ερμηνεία του Bennett, βλ. Bennett 1963, 113.

μέτρησης.[156] Εκτός από τα παραπάνω σύμβολα, και τα ιδεογράμματα λειτουργούσαν ως μετρογράμματα για τη δήλωση των μονάδων μέτρησης. Από τις καταγραφές φαίνεται ότι οι Μυκηναίοι χρησιμοποιούσαν τρία διαφορετικά σύνολα μετρογραμμάτων για τα στερεά και υγρά προϊόντα (Πίνακας 3). Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποίησαν κάποια κοινά σύμβολα για τον υπολογισμό των ξηρών και υγρών προϊόντων, αν και τα ίδια αντιστοιχούσαν σε διαφορετικές τιμές ανάλογα με το είδος του αγαθού.

Μονάδες Στερεών				**Μονάδες Υγρών**				
		***112**	***111**	***110**		***113**	***111**	***110**
Μετρόγραμμα								
Κλάσμα μεγαλύτερης μονάδας		1/10[206]	1/6	1/4		1/3	1/6	1/4
Κλάσμα μέγιστης μονάδας	1	1/10	1/60	1/240	1	1/3	1/18	1/72
Μεταγραφή (συμβατική)		T	V	Z		S	V	Z

Πίνακας 3. Μετρογράμματα χωρητικότητας υγρών και στερεών[157]

Για τον τρόπο κατανόησης του μετρικού συστήματος των Μυκηναίων έχουν προταθεί δύο υποθέσεις. Αρχικά, σύμφωνα με την άποψη της Mabel Lang, η μέτρηση εκκινούσε από τον υπολογισμό της χωρητικότητας των αγγείων του ανακτόρου. Ωστόσο, σύμφωνα με τον John Chadwick, η κατανόηση του τρόπου υπολογισμού των προϊόντων γίνεται μέσω της μελέτης των πινακίδων, στις οποίες καταγράφονται οι ποσότητες των αγαθών. Πιο συγκεκριμένα, ο Chadwick, για να υποστηρίξει την παραπάνω άποψη, στηρίχθηκε στην πινακίδα Fr 1184. Σε αυτήν περιλαμβάνονται δεκαοχτώ μονάδες του λαδιού, οι οποίες, όπως υποθέτει, εισήχθησαν σε ψευδόστομους

[156] Βλ. Del Freo, Nosch, Rougemont 2010, 340.
[157] Αντλώ τα στοιχεία του Πίνακα 3 από Melena 2014, 157.

αμφορείς αποθήκευσης. Σύμφωνα με τον Chadwick, η χωρητικότητα των αμφορέων υπολογίζεται στα 13, 6 λίτρα. Η ακριβής τιμή, ωστόσο, δεν είναι γνωστή..[158]

Επίσης, οι Μυκηναίοι είχαν αντίληψη της διαφοράς του όγκου από το βάρος και αποτύπωναν αυτή τη διαφορά με διαφορετικά μετρογράμματα (Πίνακας 4). Αναφορικά με τα μετρογράμματα του βάρους, το σύμβολο, το οποίο συμβατικά αντιστοιχεί στο L, αντιστοιχεί σε μια ζυγαριά και, πιθανότατα, δηλώνει την κύρια μονάδα μέτρησης για τον υπολογισμό του βάρους, το τάλαντο. Το τελευταίο αποτελούσε μονάδα μέτρησης του βάρους τόσο στο χώρο της Μεσοποταμίας, όσο και στο χώρο της Μεσογείου. Στο μεταγενέστερο αρχαιοελληνικό σύστημα, το τάλαντο υποδιαιρείται σε 60 μναΐ (mina) ή σε 600 δραχμές ή σε 3600 οβολούς. Με βάση τα παραπάνω, φαίνεται ότι οι υποδιαιρέσεις των μονάδων μέτρησης βασίζονταν σε μια εξηκονταδική αναπαράσταση. Συνεπώς, το σύμβολο Μ αντιστοιχεί στη διπλή μνᾶ και ίσως από αυτό να δικαιολογείται και η διπλή εμφάνιση του συμβόλου. Αντίστοιχα, το σύμβολο Q, πιθανότατα, αντιστοιχούσε στο μυκηναϊκό hirpa, το οποίο είναι παρόμοιο με το shekel που χρησιμοποιούσαν στην Ανατολή. Ωστόσο, παραμένει ένα ανοιχτό ερώτημα ο προσδιορισμός των τιμών των μυκηναϊκών συστημάτων μέτρησης, καθώς φαίνεται να υπάρχουν διαφορετικά είδη ταλάντων στους σύγχρονους πολιτισμούς, αλλά και να αλλάζουν οι αξίες τους. Αυτό παρατηρείται και στον ελληνικό χώρο της πρώτης χιλιετίας.[159]

---

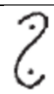
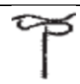
[158] Με βάση τα παραπάνω, ο Chadwick έφατσε σε μια μικρή μονάδα περίπου 9,6 λίτρα για τις μονάδες του λαδιού. Θεωρώντας τη μονάδα του λαδιού ως τη μονάδα των μικρότερων, κατάφερε να βρει και τις υπόλοιπες. Αυτή η άποψη του Chadwick έχει επικρατήσει, βλ. Melena 2014, 156-158.

[159] Στον ελληνικό χώρο, κατά την πρώτη χιλιετία, το τάλαντο αντιστοιχούσε σε 37,44 κιλά στο Αιγινήτικο σύστημα και 26,196 κιλά στο Ευβοϊκό σύστημα, βλ. Melena 2014, 154.

	*118	*117	*116	*115	*114
Μετρόγραμμα					
Κλάσμα μεγαλύτερης μονάδας		1/30	1/4	1/12	1/2
Κλάσμα μέγιστης μονάδας	1	1/30	1/120	1/1440	1/2880
Μεταγραφή (συμβατική)	L	M	N	P	Q
	30kg	1kg	250g	20g	10g
	τάλαντο	Διπλή μίνα	Μισή μίνα (= 30 shekel)	δίλιτρο (2 shekel)	λίτρα (Shekel)

Πίνακας 4. Μετρογράμματα βάρους[160]

Επίσης, οι Μυκηναίοι χρησιμοποιούσαν και ένα σύνολο μετρογραμμάτων για να δηλώσουν πολύ μικρές ποσότητες αγαθών. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί το σαφρράνι, το οποίο συναντάται σε πολύ μικρές ποσότητες στις πινακίδες της Γραμμικής Β (Πίνακας 5).[161]

Μετρόγραμμα						
Μεταγραφή (συμβατική)	N	RO	P	Q	QI	
	1	¼	1/2	1/24	1/72	
		1	1/13	1/6	1/18	
			1	1/2	1/6	
				1	1/3	
					1	
	250g	60g 6 shekel	20g	10g 1 shekel	3,5g	

Πίνακας 5. Μετρογράμματα μικρών ποσοτήτων[162]

[160] Αντλώ τα στοιχεία του Πίνακα 4 από Melena 2014, 154.
[161] Στη Γραμμική Β χρησιμοποιούνται μονάδες μέτρησης του βάρους, όπως τα 118/L και 117/M, τα οποία χρησιμοποιούνταν για τον υπολογισμό του βάρους των προϊόντων. Τα μετρογράμματα αντιστοιχούσαν σε μια απόλυτη μονάδα. Οι Μυκηναίοι χρησιμοποιούσαν τα μινωικά σύμβολα κλασμάτων για τον υπολογισμό του μέτρου των στερεών και υγρών προϊόντων, βλ. Bennet 2008, 16, Melena 2014, 6 Montecchi 2016, 11 και Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 10.
[162] Αντλώ τα στοιχεία του Πίνακα 5 από Melena 2014, 155.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, μερικά από τα κλασματικά σύμβολα της Γραμμικής Α συναντώνται στα διοικητικά κείμενα της Γραμμικής Β για να την απόδοση μονάδων μέτρησης. Μερικά από τα πιο κοινά σύμβολα συγκεντρώνονται στον παρακάτω πίνακα. Παραδείγματος χάριν, σχετικά με τον πρώτο συμβολισμό του Πίνακα 6, οι γραφείς της Γραμμικής Β χρησιμοποιούσαν το συμβολισμό του κλάσματος 1/3 της Γραμμικής Α, για τη δήλωση της ποσότητας του μαλλιού.[163]

Γραμμική Α			Γραμμική Β		
Κλάσμα	Σύμβολο	Τιμή	Μετρόγραμμα	Σύμβολο	Τιμή
DD		1/3	*117/M		1/3 LANA
X=AA (?)		1/12	*116/N		1/12 LANA
K		1/10	*112/T		1/10 της μεγαλύτερης υγρής ποσότητας
L (n)		1/20–1/60	*111/V		1/60 της μεγαλύτερης υγρής ποσότητας

Πίνακας 6. Σύγκριση των συμβόλων της Γραμμικής Α και της Γραμμικής Β[164]

Είναι σημαντικό να τονισθεί ότι η γραφή, το αριθμητικό και μετρικό σύστημα αποτέλεσαν διοικητικά εργαλεία, τα οποία συνδέθηκαν με το θεσμικό πλαίσιο του ανακτόρου και εξαρτήθηκαν από αυτό. Το τέλος των μυκηναϊκών ανακτόρων σήμαινε, ταυτόχρονα, και την κατάργηση της γραφογνωσίας στο Αιγαίο, μέχρι την επινόηση του φωνητικού αλφαβήτου. Πλέον, η ελίτ δεν είχε κανένα ενδιαφέρον να αναβιώσει τη γραφή, καθώς δεν της χρειαζόταν. Μέχρι την επινόηση του αλφαβήτου, χρησιμοποιούσαν την εικονογραφία, αντί της γραφής, η οποία κάλυπτε τις ανάγκες της ελίτ. Μάλιστα, φαίνεται ότι κάθε αιγαιακή γραφή λειτουργούσε πάντοτε παράλληλα με μια προφορική παράδοση και μια εικονογραφική γλώσσα, χωρίς να χρησιμοποιεί τη γραφή ως υποβοήθημα. Συνεπώς, δεν υπήρχε δυσκολία στο να την αντικαταστήσει.[165]

[163] Πιθανότατα, αυτός ο μετασχηματισμός οφείλεται σε ένα νέο σύστημα υπολογισμού ποσοτήτων, το οποίο θεμελιώθηκε στην πρώτη περίοδο χρήσης της Γραμμικής Β. Έτσι, τα υπάρχοντα σύμβολα της Γραμμικής Α τροποποιήθηκαν, προκειμένου να ταιριάζουν με το νέο σύστημα μέτρησης, βλ. Bennett 1950, 219 και 221.
[164] Αντλώ τα στοιχεία του Πίνακα 6 από Corazza, Ferrara, Montecchi, Tamburini, Valerio 2020, 9.
[165] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την εικονογραφία, βλ. Tsangaraki 2020, 319-340.

Αν και από τα διαθέσιμα στοιχεία μαρτυράται η παύση της γραφής στο Αιγαίο, δεν είναι, ακόμη, γνωστό αν αυτή η πτώση οδήγησε και στην εγκατάλειψη του αριθμητικού συστήματος. Αυτό αποτελεί ένα ανοιχτό ερώτημα, το οποίο απαιτεί περισσότερη διερεύνηση.

Κεφάλαιο Πέμπτο: Παρατηρήσεις

Κατά τη διάρκεια των δύο χιλιετιών του Μινωικού πολιτισμού, και ειδικότερα κατά την περίοδο της Μέσης Εποχής του Χαλκού, οι εμπορικές επαφές της Κρήτης επεκτάθηκαν πέρα από τις περιφερειακές ανταλλαγές προϊόντων. Πιο συγκεκριμένα, τη δεύτερη χιλιετία π.Χ., είχε αναπτυχθεί μια σημαντική εμπορική αλληλεπίδραση μεταξύ της Αιγύπτου και του Αιγαίου.[166]

Σύμφωνα με τους παλαιότερους μελετητές, όπως ο Evans, υποστήριξαν ότι οι πολιτισμοί του Αιγαίου χρησιμοποίησαν το αιγυπτιακό ιερογλυφικό σύστημα ως πρότυπο για την ανάπτυξη του δικού τους συστήματος.[167] Σύμφωνα με τον George Sarton, το αριθμητικό σύστημα της Γραμμικής Α, πιθανότατα, δανείστηκε στοιχεία από το αιγυπτιακό. Όπως υποστήριξε, τα δύο συστήματα είναι παρόμοια δομημένα, καθώς και τα δύο είναι δεκαδικά και ακολουθούν έναν αθροιστικό κανόνα.[168] Επίσης, οι ομοιότητες μεταξύ των δύο συστημάτων είναι εμφανέστερες στις αναπαραστάσεις και τη δομή των κλασμάτων. Μελετητές, όπως ο Hans Stoltenberg και ο Dirk Struik παραλλήλισαν τα κλάσματα της Γραμμικής Α με τα αντίστοιχα μοναδιαία αιγυπτιακά κλάσματα.[169] Ακόμα, σύμφωνα με τον Peter Schrijver, ο συμβολισμός των κλασμάτων, τα οποία μεταγράφονται ως L (L1, L2, L3, L4 και L6) είναι παρόμοιος με εκείνον των αιγυπτιακών κλασμάτων του Μέσου Βασιλείου, καθώς δηλώνουν την έννοια του μέρους, δηλαδή 1/20, 1/30, 1/40, 1/60, η οποία, πιθανότατα, δανείστηκε από το αιγυπτιακό σύστημα.[170]

Από την άλλη μεριά, έχει προταθεί και η σύνδεση των μινωικών συστημάτων με την Ανατολή. Ο Sir John Myres συνέκρινε τις λογιστικές καταγραφές από την Αγία Τριάδα της Κρήτης με τα πρωτο-σφηνοειδή συστήματα των Σουμερίων από την πόλη Uruk. Ο ίδιος θεώρησε ότι το παραπάνω σύστημα της Μεσοποταμίας έφτασε στη Μεσόγειο μέσω ενδιάμεσων σταδίων που, πιθανότατα, δεν είναι γνωστά.[171] Αντιθέτως, σύμφωνα

---

[166] Οι επαφές με την Αίγυπτο δύναται να εντοπισθούν σε γραπτά αρχεία, καλλιτεχνικές αναπαραστάσεις, κ.τ.λ. Ωστόσο, στο πλαίσιο των εμπορικών σχέσεων, εντοπίζονται και μινωικά αγγεία στο χώρο της Εγγύς Ανατολής, και ειδικότερα στην πόλη Mari, τα οποία μαρτυρούν εμπορικές σχέσεις προς αυτήν την κατεύθυνση, βλ. Betancourt 2010, 214, 219 και 222.

[167] Όπως και με τις άλλες αιγαιακές γραφές, έχει προταθεί μια αιγυπτιακή προέλευση για το σύστημα, βλ. Hooker 1994, 41-42.

[168] Βλ. Sarton 1936, 378.

[169] Για την παραπάνω άποψη, βλ. Billigmeier 1973, 61 και Struik 1982, 56.

[170] Ο συμβολισμός του συγκεκριμένου κλάσματος τα αιγυπτιακά κλάσματα, βλ. Schrijver 2014, 17.

[171] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη θέση του Sir John Myres, βλ. Brice 1963, 27

με τον William Brice, τα κείμενα από την περιοχή της Αγίας Τριάδας εμφανίζουν ομοιότητες με το πρωτο-ελαμιτικό σύστημα που χρησιμοποιήθηκε στην πόλη Susa της Μεσοποταμίας. Όπως υποστηρίζει, σε αντίθεση με το πρωτο-σφηνοειδές σουμεριακό σύστημα, το οποίο ήταν εξηκονταδικό, το πρωτο-ελαμιτικό αριθμητικό σύστημα ήταν δεκαδικό, όπως το σύστημα της Γραμμικής Α.[172]

Ωστόσο, σύμφωνα με νεότερους μελετητές, όπως οι Miguel Valerio, Silvia Ferrara και Stephen Chrisomalis, δεν υπάρχει μια πραγματική ομοιότητα μεταξύ των αιγαιακών και των ανατολικών αριθμητικών συστημάτων. Σε αντίθεση με τα αριθμητικά σύμβολα της Γραμμικής Α, οι αιγυπτιακοί αριθμοί είναι εικονογραφικοί. Όπως οι ίδιοι υποστηρίζουν, τα κοινά σημεία των δύο αριθμητικών συστημάτων έγκεινται μόνο στη χρήση των κατακόρυφων ευθειών για τις μονάδες, το οποίο, όμως, αποτελεί κοινό στοιχείο σχεδόν σε όλα τα συστήματα της Ανατολικής Μεσογείου.[173]

Επίσης, μελετητές, όπως οι Chrisomalis και David Hawkins, υποστήριξαν ότι το μυκηναϊκό αριθμητικό σύστημα συνέβαλε στην ανάπτυξη ορισμένων αριθμητικών συστημάτων στην Ανατολή.[174] Όσον αφορά τη γραφή, οι πρώτες πινακίδες που ανασκάφηκαν στη λουβική γλώσσα χρονολογούνται περίπου το 1500 π.Χ., όταν βρισκόταν σε χρήση η Γραμμική Β. Τη δεύτερη χιλιετία, παρατηρείται μια διαπολιτισμική επαφή μεταξύ του Αιγαίου και της Ανατολής. Μάλιστα, στα χεττιτικά κείμενα, από την περιοχή Bogazkoy, αναφέρεται ο όρος “Ahhiyawa”. Σύμφωνα με αυτά τα κείμενα και τα αρχαιολογικά ευρήματα, ο όρος “Ahhiyawa” συνδέεται με το μυκηναϊκό βασίλειο και το εθνώνυμο «Αχαιοί».[175] Επίσης, έχει προταθεί και η άποψη ότι το λουβικό σύστημα προέκυψε από τη διάδοση του αιγυπτιακού ιερογλυφικού αριθμητικού συστήματος, λόγω του ιερογλυφικού συμβολισμού. Πράγματι, την ίδια

[172] Όπως εξετάστηκε και στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας, το πρωτο-ελαμιτικό αριθμητικό σύστημα ήταν και δεκαδικό για την καταμέτρηση των ζώων. Για τη σύγκριση του πρωτο-ελαμιτικού αριθμητικού συστήματος και του συστήματος της Γραμμικής Α, βλ. Brice 1963, 29. Ωστόσο, αυτή είναι μια άποψη που δεν ενστερνίζεται ο Chrisomalis, βλ. Chrisomalis 2010, 57,

[173] Αν και δεν παρατηρεί πραγματικές ομοιότητες, ο Chrisomalis ισχυρίζεται ότι το μόνο εύλογο προγονικό σύστημα για τους αριθμούς της Γραμμικής Α αποτελεί η Αίγυπτος. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την παραπάνω άποψη, βλ. Chrisomalis 2010, 57 και Valerio, Ferrara 2020, 14.

[174] Βλ. Hawkins 1986, 373-374 και Chrisomalis 2010, 63.

[175] Από τα τέλη του 20ου αιώνα, οι μελετητές έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η Ahhiyawa βρισκόταν κάπου στο Αιγαίο και όχι στην Ανατολία. Ωστόσο, η ακριβής τοποθεσία είναι άγνωστη και παραμένει ένα ανοιχτό ερώτημα, βλ. Κοπανιάς 2022, 15-16 και 49. Τα κείμενα της Γραμμικής Β παρουσιάζουν το μυκηναϊκά ανάκτορα απομονωμένα από τα μεγάλα κέντρα και τις σημαντικές δυνάμεις της Ανατολής. Ωστόσο, σε κείμενα από την Εγγύς Ανατολή, το μυκηναϊκό αιγαίο παρουσιάζεται διαφορετικά. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτά τα κείμενα, βλ. Kopanias 2015, 211.

περίοδο, το βασίλειο των Χετταίων είχε αναπτύξει εμπορικές επαφές με την Αίγυπτο.[176]

Κατά την άποψή μου δεν δικαιολογούνται πραγματικές επιδράσεις μεταξύ της Αιγύπτου και του Αιγαίου σχετικά με το αριθμητικό σύστημα, καθώς δεν εμφανίζονται στοιχεία που να επιβεβαιώνουν τη διάδοση της γραφής από την Αίγυπτο. Επίσης, τα αιγαιακά αριθμητικά συστήματα δεν παρουσιάζουν εμφανείς ομοιότητες με το αντίστοιχο σύστημα της Αιγύπτου. Ωστόσο, παρά τις διαφορές ως προς τους αριθμητικούς συμβολισμούς, τα δύο συστήματα είναι παρόμοια δομημένα. Πιθανότατα, οι εμπορικές επαφές με την Αίγυπτο να συνέβαλαν στην υιοθέτηση ενός δεκαδικού συστήματος στο Αιγαίο. Επίσης, φαίνεται ότι και οι Μινωίτες χρησιμοποιούσαν μοναδιαία κλάσματα, εκφράζοντας την έννοια του μέρους, όπως στο αιγυπτιακό σύστημα. Εντούτοις, η υιοθέτηση του δεκαδικού συστήματος, αλλά και η έννοια των κλασμάτων ενδέχεται να μην προέκυψαν από αυτήν την επαφή. Είναι πιθανό δύο δεκαδικά συστήματα να αναπτύχθηκαν, χωρίς να υπήρχε επίδραση μεταξύ των δύο πολιτισμών. Όπως αναφέρει και ο Αριστοτέλης στο παρακάτω απόσπασμα, το δεκαδικό σύστημα αποτελεί το πιο αυτονόητο σύστημα λόγω των δέκα δαχτύλων:

«*Γιατί όλοι οι άνθρωποι είτε είναι βάρβαροι είτε Έλληνες, μετράνε μέχρι το δέκα και όχι μέχρι κάποιον άλλο αριθμό, όπως το δύο, το τέσσερα ή το πέντε, έτσι ώστε να επαναλαμβάνουν ένα από αυτά, και να λένε, για παράδειγμα, «μία πεντάδα», «δύο πεντάδες», όπως λένε «μία δεκάδα» [δηλ. έντεκα], «δύο δεκάδες» [δηλ. δώδεκα]; Ή γιατί, πάλι, δεν σταματούν σε κάποιο αριθμό πέρα από το δέκα και μετά επαναλαμβάνουν από αυτό το σημείο; Κάθε αριθμός αποτελείται από τον προηγούμενο [ο οποίος λαμβάνεται ως βάση] συν δύο ή τρεις, κ.τ.λ., οι οποίοι δίνουν έναν διαφορετικό αριθμό. Ωστόσο, το δέκα έχει οριστεί ως βάση και οι άνθρωποι μετρούν μέχρι αυτό. Η τύχη δεν μπορεί να εξηγήσει το γεγονός ότι, προφανώς, όλοι το κάνουν πάντα: αυτό που συμβαίνει πάντα και σε όλες τις περιπτώσεις δεν είναι αποτέλεσμα τύχης αλλά είναι στη φύση των πραγμάτων. Μήπως είναι επειδή το δέκα είναι ένας τέλειος αριθμός, βλέποντας ότι περιλαμβάνει όλα τα είδη αριθμού, τον άρτιο και τον περιττό, το τετράγωνο και τον κύβο, το γραμμικό και τον επίπεδο, τον πρώτο και το σύνθετο; Ή μήπως επειδή το δέκα είναι η αρχή του αριθμού, αφού το δέκα παράγεται προσθέτοντας ένα, δύο, τρία και τέσσερα; Ή μήπως επειδή τα κινούμενα σώματα [στον ουρανό] είναι εννέα στον αριθμό; Ή επειδή*

[176] Συνεπώς, παραμένει ασαφής η ακριβής προέλευση του χεττιτικού αριθμητικού συστήματος. Για περισσότερες πληροφορίες, βλ. Chrisomalis 2010, 64.

μέσα σε δέκα [σύνθετες] αναλογίες συμπληρώνονται τέσσερις κυβικοί αριθμοί, από τους οποίους οι Πυθαγόρειοι θεωρούν ότι το σύμπαν είναι κατασκευασμένο; Ή μήπως επειδή όλοι οι άνθρωποι είχαν δέκα δάχτυλα, έτσι ώστε να έχουν, όπως λέμε, μετρητές για τον κατάλληλο αριθμό, χρησιμοποίησαν αυτόν τον αριθμό για να μετρήσουν και άλλα πράγματα; Μια ορισμένη φυλή μόνο μεταξύ των Θρακών μετράει μέχρι τέσσερις, γιατί όπως και στα παιδιά, η μνήμη τους δεν μπορεί να δεχτεί περισσότερα και ποτέ δεν χρησιμοποιούν κανένα μεγάλο αριθμό.».[177]

Επίσης, η συχνή χρήση της κάθετης γραμμής για τη μονάδα θα μπορούσε να έχει εικονιστική αρχή. Πιο συγκεκριμένα, θα μπορούσε να είναι συμβατική απεικόνιση του δακτύλου ως υποβοηθήματος για τη μέτρηση. Ακόμα, ο συσχετισμός που προτείνεται μεταξύ του αριθμητικού συστήματος της Γραμμικής Α και του πρωτο-ελαμιτικού φαίνεται να μην είναι σαφής. Εκτός από το γεωγραφικό χάσμα, το πρωτο-ελαμιτικό σύστημα αναπτύχθηκε την τέταρτη χιλιετία π.Χ., ενώ η Γραμμική Α ανάγεται στη δεύτερη χιλιετία π.Χ.

Τέλος, θα μπορούσε να υποστηριχθεί και η άποψη ότι στο Αιγαίο εμφανίζεται ένα ενιαίο αιγαιακό αριθμητικό σύστημα σημειογραφίας, το οποίο εξελίσσεται στο χρόνο. Αυτή η εικασία προκύπτει από το γεγονός ότι τα παραπάνω συστήματα φαίνεται να μοιράζονται κοινά αριθμητικά σημεία στις διοικητικές καταγραφές. Συνεπώς, επειδή φαίνεται να υπάρχουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παραπάνω λαών που μελετήθηκαν, είναι βέβαιο ότι λείπουν τμήματα ιστορικής γνώσης που θα έδειχναν ενδιάμεσα στάδια. Έτσι, το ζήτημα της επίδρασης και διάδοσης των συστημάτων παραμένει ένα ανοιχτό ερώτημα και απαιτεί περισσότερη διερεύνηση.

[177] Μετάφραση δική μου, βλ. *Προβλήματα* 23, 910b23- 911a4.

Βιβλιογραφία

Abdulaziz, A. A. 2008. On the Egyptian Method of Decomposing 2/n into Unit Fractions. *Historia Mathematica* 35 (1), 1–18.

Baines, J. 2004. The earliest Egyptian writing: development, context, purpose. Στο *The First Writing. Script Invention as History and Process,* επιμ. S. D. Houston. Cambridge: Cambridge University Press, 150–189.

Bekker, I. 1960. *Aristotelis Opera, Volume 2*. Berlin: Reimer.

Bennett, E.L., 1950. Fractional quantities in minoan bookkeeping. *American Journal of Archaeology* 54 (3), 204–222.

Bennett, E.L., 1980. Linear A fractional retraction. *Kadmos* 19, 12–23

Bennet, J. 2008. Now You See It; Now You Don't! The Disappearance of the Linear A Script on Crete. Στο *The Disappearance of Writing Systems: Perspectives on Literacy and Communication*, επιμ. J. Baines, J. Bennet και S. Houston. United Kingdom: Equinox Publishing, 1-29.

Bennet, J. 2008. The Aegean Bronze Age. Στο *The Cambridge Economic History of the Greco-Roman World, part II,* επιμ. W. Scheidel, I. Morris και R. P. Saller. Cambridge: Cambridge University Press, 175-210.

Betancourt, P. 2010. Minoan Trade. Στο *The Cambridge companion to the Aegean Bronze Age,* επιμ. C. W. Shelmerdine. Cambridge: Cambridge University Press, 209-229.

Billigmeier, J. C. 1973. Linear A Fractions: A New Approach. *American Journal of Archaeology* 77 (1), 61-65.

Black, J. 2004. Lost Libraries of Ancient Mesopotamia. Στο *Lost Libraries*: *The Destruction of Greek Book Collections since Antiquity*, επιμ. J. Raven. United Kingdom: Palgrave Macmillan, 41-57.

Brice, W. C. 1963. A comparison of the account tablets of Susa in the proto-Elamite script with those of Hagia Triada in Linear A. *Kadmos* 2, 27–38.

Burton, D. 2010. *The History of Mathematics: An Introduction, Edition 7*. United States: McGraw-Hill Higher Education.

Cache, A. B. 1927. *The Rhind Mathematical Papyrus, Vol. 1*. U.S.A: Mathematical Association of America.

Chrisomalis, S. 2010. *Numerical Notation. A Comparative History*. Cambridge: Cambridge University Press.

Civitillo, M. 2021. Discussing writing in Cretan Hieroglyphic script from an anthropological perspective. *Polygraphia* 4, 179-210.

Clagett, M. 1989. *Ancient Egyptian Science: A Source Book, Vol. 1: Knowledge and Order*. Philadelphia: American Philosophical Society.

Clagett, M. 1999. *Ancient Egyptian Science: A Source Book, Vol. 3: Ancient Egyptian Mathematics*. Philadelphia: American Philosophical Society.

Corazza, M., Ferrara, S., Montecchi, B., Tamburini, F., Valério, M. 2020. The mathematical values of fraction signs in the Linear A script: A computational, statistical and typological approach. *Journal of Archaeological Science* 17, 1-14.

Ferrara, F. 2015. The Beginnings of Writing on Crete: Theory and Context. *BSA* 110, 27-49.

Del Freo, M., Nosch, M. L., Rougemont, F. 2010. The Terminology of Textiles in the Linear B Tablets, including Some Considerations on Linear A Logograms and Abbreviations. Στο Textile Terminologies in the Ancient Near East and Mediterranean from the Third to the First Millennia BC, επιμ. C. Michel και M. L. Nosch. United Kingdom: Oxbow Books, 338-373.

Finlayson, S. 2013. Form Follows Function: Writing and its supports in the Aegean Bronze Age. Στο *Writing as Material Practice: Substance, surface and medium*, επιμ. Piquette, K. και Whitehouse, R. D. London: Ubiquity Press, 123-142.

Flouda, G. 2015. The Invention of Writing and Sealing. Στο *The Minoan World, Journey to the Origins of Europe*, επιμ. St. Mandalaki και G. Rethemiotakis. Heraklion: Heraklion Archaeological Museum, 63-94.

Friberg, J. 2019. Three thousand years of sexagesimal numbers in Mesopotamian mathematical texts. *Archive for History of Exact Sciences* 73, 183-216.

Hallager, E. 1996. *The Minoan Roundel and Other Sealed Documents in the Neopalatial Linear A Administration. Volume 1*. Liege: Aegaeum 14.

Hawkins, D. 1986. Writing in Anatolia: Imported and Indigenous Systems. *World Archaeology* 17 (3), 363-376.

Hooker, J. T. 1994. *Εισαγωγή στη Γραμμική Β*. Αθήνα: Εκδόσεις Μ.Ι.Ε.Τ.

Høyrup, J. 1990. Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought I. *Altorientalische Forschungen* 17 (1), 27-69.

Høyrup, J. 2006. Artificial language in ancient Mesopotamia – a dubious and a less dubious case. *Journal of Indian Philosophy* 34, 57–88.

Høyrup, J. 2020. Mesopotamian Mathematics. Στο *The Cambridge History of Science: Volume 1, Ancient Science*, επιμ. A. Jones και L. Taub. Cambridge: Cambridge University Press, 58- 72.

Høyrup, J. 2020. Egyptian Mathematics. Στο *The Cambridge History of Science: Volume 1*, *Ancient Science*, επιμ. A. Jones και L. Taub. Cambridge: Cambridge University Press, 144-160.

Hudson, M. 2002. Reconstructing the Origins of Interest-Bearing Debt and the Logic of Clean Slates. Στο *Debt and economic renewal in the ancient Near East*, *Vol. 3*, επιμ. M. Hudson και M. Van De Mieroop. USA: CDL Press, 7-59.

Imhausen, A. 2009. Traditions and Myths in the Historiography of Egyptian Mathematics. Στο *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, επιμ. E. Robson και J. Stedall, 781–800. Oxford: Oxford University Press.

Imhausen, A. 2016. *Mathematics in Ancient Egypt: A Contextual History*. United Kingdom: Princeton University Press.

Imhausen, A. 2020. The Cultural Context of (Mathematical) Experts in Ancient Egypt. Στο *The Cambridge History of Science: Volume 1, Ancient Science*, επιμ. A. Jones και L. Taub. Cambridge: Cambridge University Press, 101-119

Kanta, A. 1998. Introduction: 16th–11th c. BC", 30–66. Στο *Eastern Mediterranean: Cyprus-Dodecanese-Crete, 16th-6th c. BC*, επιμ. N. Stampolidis, A. Karetsou και A. Kanta. Heraklion: University of Crete και A.G. Leventis Foundation, 30-66.

Karnava, A. 2001. Fractions and measurement units in the Cretan Hieroglyphic script. Στο *Manufacture and Measurement: Counting, Measuring and Recording. Craft Items in Early Aegean Societies (Meletimata 33)*, επιμ. A. Michailidou. Αθήνα: Κέντρο Ελληνικής και Ρωμαϊκής Αρχαιότητος, 44-51.

Karnava, A. 2007. Tradition and Innovation: The Scripts in the Old Palatial Period. *BICS* 50, 199-200.

Karnava, A. 2015. In the land of Lilliput: Writing in the Bronze Age Aegean. *World Archaeology* 47 (1), 137-157.

Katz, V. 2013. *Ιστορία των Μαθηματικών*, μτφρ. Κ. Χατζηκυριάκου. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Kopanias, K. 2015. From the Mythical Atreus to the Ruler Attarissiya. Aegean Kingship in the Late Bronze Age through the Prism of Near Eastern Texts. Στο *Ein Minoer im Exil: Festschrift für Wolf-Dietrich Niemeier*, επιμ. I. Kaiser, Ou. Kouka, και D. Panagiotopoulos. Bonn: Habelt, 211-222.

Legrand, Ph. 1932. *Hérodote. Histoires, 9 vols*. Paris: Les Belles Lettres.

Lieberman, S. J. 1980. Of clay pebbles, hollow clay balls, and writing: a Sumerian view. *American Journal of Archaeology* 84, 339–358.

Melena, J. L. 2014. Mycenaean writing. Στο *A Companion to Linear B, Mycenaean Greek Texts and their World, vol. 3*, επιμ. Y. Duhoux και A. M. Davies. Leuven: Peeters, 1-187.

Melville, D. J. 2002. Weighing Stones in Ancient Mesopotamia. *Historia Mathematica* 29, 1-12.

Montecchi, B. 2017. The Conceptualization of Measuring and Counting in the Bronze Age Aegean. *AIIN* 63, 9-34.

Neugebauer, O. 1990. *Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα*, μτφρ. Χ. Ζερμπίνη και Ι. Αρζόγλου. Αθήνα: ΜΙΕΤ.

Olivier J. P. 1986. Cretan Writing in the Second Millennium BC. *World Archaeology: Early Writing Systems* 17 (3), 377-389.

Olivier, J.-P., and L. Godart. 1996. Corpus Hieroglyphicarum Inscriptionum Cretae (avec la collaboration de J.-CL. POURSAT), Étude Crétoises 31. CHIC 1996. Paris: De Boccard.

Palaima, T. G. 1989. Ideograms and Supplementals and Regional Interaction among Aegean and Cypriote Scripts. *Minos* 24, 29–54.

Palaima, T. G. 2005. *The triple Invention of Writing in Cyprus and Written Sources for Cypriote History*. Nicosia: Leventis Municipal Museum of Nicosia.

Palaima, T. G. 2011. Scribes, scribal hands and palaeography. Στο *A Companion to Linear B Mycenaean Greek Texts and their World, Vol. 2*, επιμ. Y. Duhoux και A. M. Davies. Leuven: Peeters Publishers, 33-136.

Palmer, R. 2008. How to begin? An introduction to Linear B conventions and resources. Στο *A Companion to Linear B Mycenaean Greek Texts and their World, Vol. 1*, επιμ. Y. Duhoux και A. M. Davies. Leuven: Peeters Publishers, 25-68.

Papadimitrou, N. 2013. Regional or 'International' Networks? A Comparative Examination of Aegean and Cypriot Imported Pottery in the Eastern Mediterranean. Στο *Recent Research and Perspectives on the Late Bronze Age Eastern Mediterranean*, επιμ. A. Papadopoulos. *TalantaVol. XLIV*, 92-136.

Perna, M. 2014. The Birth of Administration and Writing in Minoan Crete: Some Thoughts on Hieroglyphics and Linear A. Στο *KE-RA-ME-JA: Studies Presented to Cynthia W. Shelmerdine [Prehistory Monographs 46]*, επιμ. D. Nakassis, J. Gulizio, και S. A. James. Philadelphia: INSTAP Academic Press, 251-259.

Petrakis, P. 2017a. Reconstructing the matrix of the 'Mycenaean' literate administrations. Στο *Understanding Relations Between Scripts: The Aegean Writing Systems*, επιμ. P.M. Steele. Oxford: Oxbow Books, 69-92.

Petrakis, P. 2017b. Figures of speech? Observations on the non-phonographic component in the Linear B writing system. Στο Aegean Scripts. Proceedings of the 14th International Colloquium on Mycenaean Studies, Copenhagen, 2-5 September 2015, volume 1, επιμ. H. Landenius Enegren και M.-L. Nosch. Roma: Istituto di Studi sul Mediterraneo Antico, 373-389.

Powell, M. A. 1995. Metrology and Mathematics in Ancient Mesopotamia. Στο *Civilization of the Ancient Neat East*, επιμ. J. M. Sasson. New York: Charles Scribner's Sons, 1941-1957.

Radner, K και Robson, E. 2011. *The Oxford Handbook of Cuneiform Culture*. Oxford: Oxford University Press.

Regulski, I. 2016. *The Origins and Early Development of Writing in Egypt*. Oxford: Oxford Handbooks Online.

Robins, G. 1995. Mathematics, Astronomy and Calendars in Pharaonic Egypt. Στο *Civilization of the Ancient Neat East*, επιμ. J. M. Sasson. New York: Charles Scribner's Sons, 1799-1813.

Robson, E. 2007. Literacy, Numeracy, and the State in Early Mesopotamia. Στο *Literacy and the State in the Ancient Mediterranean*, επιμ. K. Lomas, R. D Whitehouse και J. B. Wilkins. London: Accordia Research Institute, 37-50.

Robson, E. 2008. *Mathematics in ancient Iraq: A Social History*. United Kingdom: Princeton University Press.

Robson, E. 2011. The Production and Dissemination of Scholarly Knowledge. Στο *The Oxford Handbook of Cuneiform Culture*, επιμ. K. Radner και E. Robson. Oxford: Oxford University Press, 557-576.

Roeland, P και Decorte, J. E. 2018. The Origins of Bronze Age Aegean Writing: Linear A, Cretan Hieroglyphic and a New Proposed Pathway of Script Formation. Στο *Paths into Script Formation in the Ancient Mediterranean (Studi Micenei ed Egeo-Anatolici, Nuova Serie. Supplemento, 1)*, επιμ. S. Ferrara και M. Valerio. Rome: Edizioni Quasar, 13-49.

Ross, W. D. 1924. *Aristotle's Metaphysics, 2 vols*. Oxford: Clarendon Press.

Sarton, G. 1936. Minoan mathematics. *Isis* 24, 375–381.

Sauer, K. 2017. From Counting to Writing: The Innovative Potential of Bookkeeping in Uruk Period Mesopotamia. Στο *Appropriating Innovations: Entangled Knowledge in Eurasia, 5000–1500 BCE,* επιμ. Stockhammer, P. και Maran, J. United Kingdom: Oxbow Books, 12-28.

Schmandt-Besserat, Denise. 1984. Before numerals. *Visible Language* 18 (1), 48‐60.

Schmandt-Besserat, Denise. 1992. *Before Writing.* Austin: University of Texas Press.

Schoep, I. 2002. The Origins of Writing and Administration on Crete. *Oxford Journal of Archaeology* 18 (3), 265-276.

Schrijver, P. 2014. Fractions and food rations in Linear A. *Kadmos* 53, 1-44.

Struik, D. J. 1982. Minoan and Mycenaean numerals. *Historia Mathematica* 9, 54-58.

Taylor, J. 2011. Tablets as Artefacts, Scribes and Artisans. Στο *The Oxford Handbook of Cuneiform Culture*, επιμ. K. Radner και E. Robson. Oxford: Oxford University Press, 5-31.

Tsangaraki, E. 2020. Seal Iconography to the North of the Mycenaean World: LH III Seals from Mt Olympus, Pieria. Στο *Current Approaches and New Perspectives in Aegean Iconography*, επιμ. F. Blakolmer. Louvain: Presses universitaires de Louvain, 319-145.

Valério, M. Και Davis, B. 2017. Cypro-Minoan in marking systems of the Eastern and Central Mediterranean: New methods of investigating old questions. Στο *Non-scribal Communication Media in the Bronze Age Aegean and Surrounding Areas*, επιμ. Jasink, A. M., Weingarten, J. και Ferrara, S. Firenze : Firenze University Press, 131-152.

Valério, M. και Ferrara, S. 2020. Numeracy at the dawn of writing: Mesopotamia and beyond. *Historia Mathematica*, 1-19.

Van De Mieroop, M. 2016. *Ιστορία της Αρχαίας Εγγύς Ανατολής* (περ. 3000-323 π.Χ.), μτφρ. Κ. Κοπανιάς. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Van Der Waerden, B. 2010. *Αφύπνιση της Επιστήμης*, μτφρ. Γ. Χριστιανίδης. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Veldhuis, N. 2011. Levels of Literacy. Στο *The Oxford Handbook of Cuneiform Culture*, επιμ. K. Radner και E. Robson. Oxford: Oxford University Press, 68-89.

Younger, J. G. και Rehak, P. 2010. Minoan Culture: Religion, Burial Customs, and Administration. Στο *The Cambridge companion to the Aegean Bronze Age*, επιμ. C. W. Shelmerdine. Cambridge: Cambridge University Press, 165-185.

Zeman-Wiśniewska, K. 2020. Re-evaluation of Contacts between Cyprus and Crete from the Bronze Age to the Early Iron Age. *ELECTRUM* 27, 11-32.

Κασσιανίδου, Β. 2005, Η παραγωγή και η εξαγωγή κυπριακού χαλκού κατά την Ύστερη Χαλκοκρατία, *Αρχαιολογία και Τέχνες* 94, 39-44.

Κοπανιάς, Κ. 2018. *Εισαγωγή στην Ιστορία και Αρχαιολογία της Εγγύς Ανατολής*. Αθήνα: Εκδόσεις Κάλλιπος.

Κοπανιάς, Κ. 2020. Συστήματα οικονομικής διαχείρισης στη Μεσοποταμία (4η - 2η χιλιετία π.Χ.). Στο *Τιμητικός Τόμος για τον καθηγητή Γεώργιο Στυλ. Κορρέ, τόμος 1 (Studies in Honor of Prof. Georgios St. Korres, Vol. 1),* επιμ. Π. Καλογεράκου, Α. Χασιακού, Μ. Κοσμόπουλος, Γ. Λώλος, Χ. Μαραμπέα, Ε. Πέππα-Παπαϊωάννου και Λ. Πλάτων. Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα, 85-92.

Κοπανιάς, Κ. 2021. *Ahhiyawa: Το Μυκηναϊκό Αιγαίο μέσα από τα Χεττιτικά κείμενα*. Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Μαντζουράνη, Ε. 2002. *Προιστορική Κρήτη. Τοπογραφία και Αρχιτεκτονική: Από τη νεολιθική εποχή έως και τους νεοανακτορικούς χρόνους*. Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Χριστιανίδης, Γ. 2012. *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.