ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΗ ΕΥΘΥΚΡΙΣΙΑ/ΟΡΘΟΛΟΓΙΚΟΤΗΤΑ ΠΕΛΑΤΩΝ

ΜΠΑΡΜΠΑΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2022

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΕ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΤΗ ΜΗΤΕΡΑ ΜΟΥ.

Abstract

The world around us is full of service systems and processes that can be reduced to service systems. Therefore, these systems are important for our lives and their study is, apart from being very interesting, also necessary. Thus, relatively recently in 1967 Naor studied the *strategic behavior* of customers in an M/M/1 queue (i.e., the process of customer arrivals is Poisson, service times are exponential, there is one server in the system, the capacity is infinite and the queuing discipline is FCFS - first-come, first-served) in terms of the decision the customer must make, whether or not to enter the system. This work was also the first in which customers behave strategically but assuming that customers are *fully rational*. The literature developed since then has been based on the exact same assumption that customers are fully rational and able to perfectly estimate their expected waiting time and thus the expected utility of entering the system. However, this assumption is unrealistic in most service systems. Consequently, it was necessary to study service systems where customers are not fully rational. Recently Huang, Allon, and Bassamboo (2013) studied M/M/1 queuing assuming that customers are *boundedly rational*. They distinguished two cases: the observable case where customers can observe the length of the queue and the unobservable case where customers cannot observe the length of the queue before making the decision to enter or not. They investigated the impact of bounded rationality both from the point of view of the firm for maximizing revenue and from the point of view of the 'social planner' for maximizing social welfare for both the above cases. They also examined differences in outcomes while ignoring bounded rationality. This work by Huang, Allon, and Bassamboo (2013) further developed the literature on bounded rationality with the important work of Canbolat (2020) studying the impact of bounded rationality on *clearing systems*. It also adds another more realistic assumption that customers are *non-homogeneous*. In our paper, in Part I we list basic historical facts about strategic behavior in general, and some basic elements of game theory that will be used in Part II. Part II consists of two Chapters where in the first (Chapter 2) we list the results and conclusions of the work of Huang, Allon and Bassamboo (2013) in the second (Chapter 3) we list the results and conclusions of the work of Canbolat (2020). Finally, in the Appendix we list the proofs of Huang, Allon, and Bassamboo (2013) for the Propositions and Conclusions of their paper (Appendix A) and the proofs of Canbolat (2020) for the Propositions and Conclusions of her paper (Appendix B).

Περίληψη

Ο κόσμος γύρω μας είναι γεμάτος από συστήματα εξυπηρέτησης και από διαδικασίες που μπορούν να αναχθούν σε συστήματα εξυπηρέτησης. Επομένως, τα συστήματα αυτά είναι σημαντικά για τη ζωή μας και η μελέτη τους είναι, εκτός από πολύ ενδιαφέρουσα, και αναγκαία. Έτσι, σχετικά πρόσφατα το 1967 μελετήθηκε από τον Naor η *στρατηγική συμπεριφορά* των πελατών στην M/M/1 ουρά (δηλ. η διαδικασία των αφίξεων των πελατών είναι Poisson, οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί, στο συστήμα υπάρχει ένας υπηρέτης, η χωρητικότητα είναι άπειρη και η πειθαρχία ουράς είναι FCFS - ο πελάτης που φτάνει πρώτος αρχίζει να εξυπηρετείται πρώτος) ως προς την απόφαση που πρέπει να πάρει ο πελάτης, να εισέλθει ή όχι στο σύστημα. Αυτή η εργασία ήταν και η πρώτη στην οποία οι πελάτες συμπεριφέρονται στρατηγικά υποθέτοντας όμως ότι οι πελάτες είναι *πλήρως ορθολογικοί*. Η βιβλιογραφία που αναπτύχθηκε έκτοτε, βασίστηκε στην ίδια ακριβώς υπόθεση δηλαδή ότι οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί και ικανοί να εκτιμήσουν τέλεια τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής τους και επομένως την αναμενόμενη ωφέλεια της εισόδου τους στο σύστημα. Όμως, η υπόθεση αυτή δεν είναι ρεαλιστική στα περισσότερα συστήματα εξυπηρέτησης. Επόμενως, ήταν αναγκαία η μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης όπου οι πελάτες δεν είναι πλήρως ορθολογικοί. Πρόσφατα οι Huang, Allon και Bassamboo (2013) μελέτησαν την M/M/1 ουρά υποθέτοντας ότι οι πελάτες είναι *περιορισμένα ορθολογικοί*. Διέκριναν δύο περιπτώσεις: την παρατηρήσιμη περίπτωση όπου οι πελάτες μπορούν να παρατηρήσουν το μήκος της ουράς και τη μη-παρατηρήσιμη περίπτωση όπου οι πελάτες δεν μπορούν να παρατηρήσουν το μήκος της ουράς πριν πάρουν την απόφαση να εισέλθουν ή όχι. Διερεύνησαν τον αντίκτυπο της περιορισμένης ορθολογικότητας τόσο από τη σκοπιά της επιχείρησης για τη μεγιστοποίηση των εσόδων όσο και από τη σκοπιά του 'κοινωνικού σχεδιαστή' για τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας και για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις. Επίσης, εξέτασαν τις διαφορές στα αποτελέσματα παραβλέποντας την περιορισμένη ορθολογικότητα. Χάρη σε αυτή την εργασία των Huang, Allon και Bassamboo (2013) αναπτύχθηκε περεταίρω η βιβλιογραφία για την περιορισμένη ορθολογικότητα με τη σημαντική εργασία της Canbolat (2020) στην οποία μελετά τον αντίκτυπο της περιορισμένης ορθολογικότητας στα *συστήματα εκκαθάρισης*. Επίσης, προσθέτει και άλλη μία πιο ρεαλιστική υπόθεση ότι οι πελάτες είναι *μη-ομογενείς*. Στην εργασία μας, στο Μέρος I παραθέτουμε βασικά ιστορικά δεδομένα για την στρατηγική συμπεριφορά γενικότερα, και κάποια βασικά στοιχεία της θεωρίας παιγνίων που θα χρησιμοποιηθούν στο Μέρος II. Το Μέρος II αποτελείται από δύο Κεφάλαια όπου στο πρώτο (Κεφάλαιο 2) παραθέτουμε τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της εργασίας των Huang, Allon και Bassamboo (2013) στο δεύτερο (Κεφάλαιο 3) παραθέτουμε τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της εργασίας της Canbolat (2020). Τέλος, στο Παράρτημα παραθέτουμε τις αποδείξεις των Huang, Allon και Bassamboo (2013) για τις Προτάσεις και τα Πορίσματα της εργασίας τους (Παράρτημα A) και τις αποδείξεις της Canbolat (2020) για τις Προτάσεις και τα Πορίσματα της εργασίας της (Παράρτημα B).

Περιεχόμενα

Συμβολισμοί

$M/M/1$	σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη όπου οι πελάτες φτάνουν σε αυτό σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ
$M/GI/1$	σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη όπου οι πελάτες φτάνουν σε αυτό σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν μια γενική κατανομή
N	σύνολο παικτών
A_i	σύνολο ενεργειών που είναι διαθέσιμες στον παίκτη i
S_i	σύνολο των στρατηγικών που είναι διαθέσιμες στον παίκτη i
s	προφίλ στρατηγικών
s_i	στρατηγική i παίκτη
$F_i(s)$	συνάρτηση πληρωμής παίκτη i
s_{-i}	προφίλ στρατηγικών που δεν περιέχει τη στρατηγική του παίκτη i
s_i^*	βέλτιστη απάντηση για τον παίκτη i
s^e	προφίλ στρατηγικών ισορροπίας
R	αμοιβή από εξυπηρέτηση
p	τιμή εισόδου στο σύστημα
C	μέσο κόστος παραμονής του πελάτη στο σύστημα ανά χρονική μονάδα
$E(W)$	αναμενόμενος χρόνος παραμονής του πελάτη στο σύστημα
φ	πιθανότητα εισόδου του πελάτη
β	επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας
β_I	επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας για τη μη-παρατηρήσιμη ουρά
φ_n	πιθανότητα εισόδου στο σύστημα όταν σε αυτό υπάρχουν n πελάτες
λ_n	ρυθμός εισόδου στο σύστημα όταν σε αυτό υπάρχουν n πελάτες
P_n	πιθανότητα το σύστημα να περιέχει n πελάτες
φ_I	πιθανότητα εισόδου του πελάτη στη μη-παρατηρήσιμη περίπτωση
$\Pi(p,\beta)$	η συνάρτηση των εσόδων του συστήματος στην παρατηρήσιμη ουρά

$p^*(\beta)$	η συνάρτηση της βέλτιστης τιμής ως προς το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας που μεγιστοποιεί τα έσοδα του συστήματος
$\Delta\Pi(\beta)$	η συνάρτηση της απώλειας εσόδων του συστήματος στην παρατηρήσιμη ουρά
$\Pi^I(p, \beta_I)$	η συνάρτηση των εσόδων του συστήματος στη μη-παρατηρήσιμη ουρά
$\Delta\Pi^I(\beta_I)$	η συνάρτηση απώλειας των εσόδων του συστήματος στη μη-παρατηρήσιμη ουρά
$W(p, \beta)$	η συνάρτηση της κοινωνικής ευημερίας στην παρατηρήσιμη ουρά
$\Delta W(\beta)$	η συνάρτηση απώλειας της κοινωνικής ευημερίας στην παρατηρήσιμη ουρά
$W^I(\varphi(p, \beta))$	η συνάρτηση της κοινωνικής ευημερίας στην μη-παρατηρήσιμη ουρά
φ_w^*	πιθανότητα εισόδου σε ισορροπία που συνεπάγεται τη βέλτιστη κοινωνική ευημερία
$p_w^*(\beta)$	η συνάρτηση της βέλτιστης τιμής ως προς το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας που μεγιστοποιεί τη κοινωνική ευημερία
$\Delta W^I(\beta_I)$	η συνάρτηση απώλειας της κοινωνικής ευημερίας στην παρατηρήσιμη ουρά
γ	βαθμός ορθολογικότητας
u	η αναμενόμενη ωφέλεια ενός εισερχόμενου πελάτη όταν η εξυπηρέτηση είναι δωρεάν
Π_C	η αναμενόμενη συνολική ωφέλεια των πελατών
Π_A	τα έσοδα του συστήματος
Π_S	η κοινωνική ευημερία
q	πιθανότητα εισόδου
p^*	η τιμή που μεγιστοποιεί τα έσοδα του συστήματος
q^*	η πιθανότητα εισόδου υπό την τιμή p^*
Π_C^*	η αναμενόμενη συνολική ωφέλεια των πελατών υπό την τιμή p^*
Π_A^*	τα έσοδα του συστήματος υπό την τιμή p^*
Π_S^*	η κοινωνική ευημερία υπό την τιμή p^*

Μέρος I

Εισαγωγή

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σε αυτό το σημείο παραθέτουμε την ιστορική αναδρομή στα συστήματα εξυπηρέτησης με στρατηγικούς πελάτες και κάποια βασικά αποτελέσματα από τη θεωρία παιγνίων τα οποία είναι χρήσιμα για τη συνέχεια.

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σε συστήματα εξυπηρέτησης ξεκίνησε με την πρωτοποριακή εργασία του Naor (1969) “On the regulation of queue size by leving tolls". Η εργασία αυτή, όπως και σχεδόν όλη η σχετική βιβλιογραφία που αναπτύχθηκε έκτοτε, βασίστηκαν στην υπόθεση ότι οι πελάτες είναι *πλήρως ορθολογικοί* και ικανοί να εκτιμήσουν τέλεια τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής τους και επομένως την αναμενόμενη ωφέλεια της εισόδου τους στο σύστημα. Ο Naor (1969) δείχνει ότι οι πελάτες που ενδιαφέρονται για τον εαυτό τους θα εισέλθουν σε ένα σύστημα με μεγαλύτερη συμφόρηση από αυτό που ορίζει ο ‘κοινωνικός σχεδιαστής’ και προτείνει την «επιβολή διοδίων» (δηλαδή, την τιμολόγηση) ως τρόπο μεγιστοποίησης της κοινωνικής ευημερίας. Στο μοντέλο του Naor, οι πελάτες υποτίθεται ότι είναι σε θέση να υπολογίσουν με μεγάλη ακρίβεια τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής και επομένως την αναμενόμενη ωφέλεια που πρόκειται να αποκτήσουν από τη λήψη της απόφασης για το αν θα εισέλθουν ή θα αποχωρήσουν. Στην πραγματικότητα, δεν είναι όλοι οι πελάτες πλήρως ορθολογικοί. Συγκεκριμένα, ένας πελάτης δεν έχει απαραίτητα τη δυνατότητα να εκτιμήσει τέλεια τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής και την ωφέλεια του, είτε λόγω έλλειψης γνώσεων, είτε έλλειψης απαιτούμενου χρόνου, είτε λόγω κάποιων παραμέτρων του συστήματος. Ο Ariely (2009) ισχυρίζεται ότι η μη-ορθολογικότητα είναι αυτή που κυριαρχεί στη λήψη των ανθρώπινων αποφάσεων. Πράγματι, υπάρχουν άφθονες εμπειρικές ενδείξεις ότι οι άνθρωποι είναι περιορισμένα ορθολογικοί.

Σε αυτή την εργασία, μελετάμε τις επιπτώσεις της περιορισμένης ορθολογικότητας σε συνήθη συστήματα εξυπηρέτησης και σε συστήματα εκκαθάρισης. Η μελέτη μας σχετίζεται με αρκετούς κλάδους της βιβλιογραφίας όπως: *οικονομικά των ουρών*, *περιορισμένη ορθολογικότητα στην οικονομία* και *στρατηγική συμπεριφορά*.

Οικονομικά των Ουρών. Ο Naor (1969) εξέτασε τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών στις ουρές M/M/1 όπου οι πελάτες που έρχονται αποφασίζουν αν θα εισέλθουν ή όχι στο σύστημα αφού παρατηρήσουν τον αριθμό των πελατών στην ουρά, όταν οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί. Οι Edelson και Hildebrand (1975) ερεύνησαν τα σημεία στρατηγικής ισορροπίας στις ουρές M/M/1 όπου οι πελάτες που φτάνουν αποφασίζουν αν θα εισέλθουν ή αν θα αποχωρήσουν χωρίς να παρατηρήσουν τον αριθμό των πελατών στην ουρά, όταν οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί. Η επόμενη βιβλιογραφία επικεντρώθηκε στην επέκταση αυτής της προσέγγισης σε διαφορετικούς τύπους ουρών (π.χ. Kerner (2011), Knudsen (1972), Yechiali (1971, 1972)), στη σύγκριση των ουρών με διαφορετικά επίπεδα πληροφοριών που παρέχονται στους πελάτες (π.χ. Guo και Zipkin (2007), Guo και Zipkin (2008), Guo και Zipkin, (2009), Hassin (1986), Hu, Li, και Wang (2017)) και στον καθορισμό των βέλτιστων στρατηγικών τιμολόγησης (π.χ. Chen και Frank (2004), Economou και Kanta (2008)). Ο Yechiali (1971, 1972) επεκτείνει το μοντέλο του Naor ώστε να επιτρέπει GI/M/1 ουρές. Ο Knudsen (1972) επεκτείνει το μοντέλο του Naor για να επιτρέψει ένα σύστημα εξυπηρέτησης πολλαπλών υπηρετών στο οποίο τα καθαρά οφέλη των πελατών που έρχονται είναι μη-ομογενή. Οι Lippman και Stidham (1977) επεκτείνουν το μοντέλο του Naor στον πεπερασμένο ορίζοντα και τις περιπτώσεις *έκπτωσης*, δείχνοντας ότι, σε αυτό το πλαίσιο, η οικονομική έννοια της *εξωτερικότητας (externality)* έχει μια ακριβή ποσοτική ερμηνεία. Ο Hassin (1986) θεωρεί έναν διαχειριστή μεγιστοποίησης εσόδων, ο οποίος έχει την ευκαιρία να αποκρύψει πληροφορίες σχετικά με το πραγματικό μήκος ουράς, αφήνοντας τους πελάτες να αποφασίσουν εάν θα εισέλθουν στο σύστημα με βάση τη γνωστή κατανομή των χρόνων παραμονής. Οι Hassin and Haviv (2003) και Hassin (2016) παρέχουν μια εκτενή ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με τις ουρές με στρατηγικούς πελάτες (βλέπε και Van Mieghem (2000), Afèche (2004) και Hsu et al. (2009)). Το μεγαλύτερο μέρος αυτής της βιβλιογραφίας υποθέτει ότι οι πελάτες είναι *πλήρως ορθολογικοί.* Με άλλα λόγια, κάθε πελάτης που φθάνει σε αυτά τα συστήματα υποτίθεται ότι υπολογίζει την αναμενόμενη ωφέλειά του και επιλέγει μεταξύ εισόδου και αποχώρησης μεγιστοποιώντας την αναμενόμενη ωφέλειά του χωρίς κανένα σφάλμα. Όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 11 του Hassin (2016), η προσπάθεια να χαλαρώσει η υπόθεση της πλήρους ορθολογικότητας στις ουρές με στρατηγικούς πελάτες και να κατανοηθούν οι επιπτώσεις αυτής της χαλάρωσης στο σχεδιασμό των ουρών έχουν γίνει δημοφιλής μάλλον πρόσφατα.

Περιορισμένη ορθολογικότητα στα οικονομικά. Η παραδοσιακή οικονομική θεωρία υποστηρίζει ότι οι υπεύθυνοι λήψης αποφάσεων είναι *ορθολογικοί.* δηλ. έχουν επαρκείς ικανότητες για να κάνουν τέλεια βελτιστοποίηση στις επιλογές τους. Ο Simon (1955) φαίνεται να είναι ο πρώτος που πρότεινε έναν εναλλακτικό τρόπο μοντελοποίησης της συμπεριφοράς λήψης αποφάσεων: αντί να βελτιστοποιούν τέλεια, οι *agents* αναζητούν τις εναλλακτικές μέχρι να βρουν «ικανοποιητικές» λύσεις. Ο Simon (1957) επινοεί τον όρο *περιορισμένη ορθολογικότητα* για να περιγράψει μια τέτοια ανθρώπινη συμπεριφορά. Η περιορισμένη ορθολογικότητα αναφέρεται σε μια ποικιλία φαινομένων συμπεριφοράς στη βιβλιογραφία.

Για μια περιγραφή των συστηματικών σφαλμάτων που γίνονται από πειραματικά υποκείμενα, βλέπε Arkes και Hammond (1985), Hogarth (1980), Kahneman et al. (1981), Nisbett και Ross (1980), Rubinstein, (1998) και τις έρευνες των Payne et al. (1992) και Pitz and Sachs (1984).

Οι Tversky και Kahneman (1974) δείχνουν ότι οι άνθρωποι βασίζονται σε περιορισμένο αριθμό ευρετικών διαδικασιών που γενικά είναι χρήσιμες αλλά μερικές φορές οδηγούν σε σοβαρά και συστηματικά σφάλματα. Με βάση τα στοιχεία, ο Conlisk (1996) προσφέρει τέσσερις πειστικούς λόγους για την ενσωμάτωση της περιορισμένης ορθολογικότητας στα οικονομικά μοντέλα. Οι Geigerenzer και Selten (2001) υιοθετούν ευρετικές μεθόδους ή εμπειρικούς κανόνες για να μοντελοποιήσουν την περιορισμένη ορθολογικότητα. Οι Thurstone (1927) και Luce (1959) φαίνεται να είναι οι πρώτοι που ανέπτυξαν το πλαίσιο για τους κανόνες στοχαστικής επιλογής, καταγράφοντας ότι οι καλύτερες επιλογές επιλέγονται συχνότερα. Αυτή η προσέγγιση έχει προσελκύσει μεγάλη προσοχή και έχει υιοθετηθεί σε διάφορα περιβάλλοντα. Για παράδειγμα, ακολουθώντας αυτή την προσέγγιση, οι McKelvey και Palfrey (1995) και οι Chen et al. (1997) ανέπτυξαν μια νέα έννοια ισορροπίας, την *quantal-response* ισορροπία στη θεωρία παιγνίων. Αυτή την προσέγγιση υιοθετούν αρκετοί στις μελέτες τους (ειδικά στις προσπάθειες αναλυτικών αποτελεσμάτων), όπως για παράδειγμα, οι Bajari και Hortacsu (2001, 2005) στις δημοπρασίες, οι Cason και Reynolds (2005) στη διαπραγμάτευση, ο Basov (2009) στη monopolistic screening και οι Waksberg et al. (2009) στα φυσικά περιβάλλοντα. Αυτή την προσέγγιση χρησιμοποιούν και οι Huang Allon και Bassamboo (2013) (βλέπε Κεφάλαιο 2), στο πλαίσιο της εκτίμησης του αναμενόμενου χρόνου παραμονής των συστημάτων εξυπηρέτησης. Ακόμα, σχετικά πρόσφατα οι συναρτήσεις *quantal-response* βρήκαν αρκετές εφαρμογές και στη διοίκηση λειτουργιών, όπου ο Su (2008) τις χρησιμοποίησε για να αναπαραστήσει την περιορισμένη ορθολογικότητα στο πλαίσιο ενός εφημεριδοπώλη, οι Liu, Methapatara και Wynter (2010) σε ένα πρόβλημα διαχείρισης εσόδων που προέκυψε στις υπηρεσίες πληροφορικής, οι Shang and Liu (2011) σε έναν ανταγωνισμό χωρητικότητας με βάση το χρόνο, οι Chen, Su, and Zhao (2012) σε πρόβλημα κατανομής χωρητικότητας και οι Mogale et al. (2018) σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού δικτύου.

Λειτουργίες συμπεριφοράς. Οι Gino και Pisano (2008) ερευνούν τη βιβλιογραφία σχετικά με τη μοντελοποίηση της περιορισμένης ορθολογικότητας στα οικονομικά, τα χρηματοοικονομικά και το μάρκετινγκ και υποστηρίζουν ότι οι μελετητές της διοίκησης λειτουργιών θα πρέπει να ενσωματώσουν αποκλίσεις από την υπόθεση της ορθολογικότητας στα μοντέλα και τις θεωρίες τους. Υπάρχει μια αναδυόμενη βιβλιογραφία για τη συμπεριφορική διοίκηση λειτουργιών: οι Lim and Ho (2007) και οι Ho and Zhang (2008) διεξάγουν πειράματα σχετικά με το σχεδιασμό συμβολαίων τιμολόγησης για περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες, ο Davis (2011) διερευνά τα συμβόλαια έλξης σε ελεγχόμενα πειράματα και οι Kremer et al. (2011) αναλύουν τον τρόπο με τον οποίο τα άτομα κάνουν προβλέψεις με βάση δεδομένα χρονοσειρών και διαπιστώνουν ότι η συμπεριφορά πρόβλεψης αποκλίνει συστηματικά από τις κανονιστικές προβλέψεις. Παραπέμπουμε τους αναγνώστες στους Bendoly et al. (2006, 2009) για αυτή τη ροή έρευνας.

Επισημαίνουμε δύο εργασίες που σχετίζονται στενά με την εργασία των Huang, Allon και Bassamboo (2013), η οποία είναι και ένα από τα βασικά κομμάτια της εργασίας μας (Κεφάλαιο 2). Η πρώτη εργασία είναι από τον Su (2008), ο οποίος μελετά τη περιορισμένη ορθολογικότητα σε επιχειρησιακά περιβάλλοντα. Εφαρμόζει το logit πλαίσιο επιλογής στο κλασικό μοντέλο εφημεριδοπώλη και χαρακτηρίζει τις αποφάσεις παραγγελίας που λαμβάνονται από έναν περιορισμένα ορθολογικό υπεύθυνο λήψης αποφάσεων. Εντοπίζει συστηματικές προκαταλήψεις (biases) και διερευνά τον αντίκτυπο αυτών των προκαταλήψεων (biases) σε διάφορα επιχειρησιακά περιβάλλοντα. Οι Huang, Allon και Bassamboo (2013) εφαρμόζουν ένα παρόμοιο πλαίσιο, αλλά ερμηνεύουν την περιορισμένη ορθολογικότητα ως την αδυναμία εκτίμησης του αναμενόμενου χρόνου παραμονής σε ένα περιβάλλον εξυπηρέτησης. Υπάρχουν αρκετές αξιοσημείωτες διαφορές μεταξύ του Su (2008) και των Huang, Allon και Bassamboo (2013): Πρώτον, το μοντέλο του Su (2008) είναι *στατικό*, ενώ το μοντέλο των Huang, Allon και Bassamboo (2013) είναι *δυναμικό*. Δεύτερον, η *εξωτερικότητα* μεταξύ των περιορισμένα ορθολογικών ατόμων που λαμβάνουν αποφάσεις είναι εμφανής στο περιβάλλον των Huang, Allon και Bassamboo (2013), ενώ δεν είναι στου Su (2008). Τέλος, στη μελέτη του Su (2008), υπάρχουν εμπειρικές και πειραματικές μελέτες του μοντέλου του εφημεριδοπώλη που επιτρέπουν στατιστικές δοκιμές, ενώ η μελέτη των Huang, Allon και Bassamboo (2013) είναι θεωρητική και στοχεύει στη λήψη ελεγχόμενων θεωρητικών προβλέψεων που επάγουν μελλοντική εμπειρική και πειραματική εργασία σε συστήματα εξυπηρέτησης. Οι Kremer και Debo (2012) παρουσίασαν πειραματικά ευρήματα σε αυτό το πλαίσιο. Η δεύτερη εργασία είναι των Plambeck και Wang (2010), οι οποίοι μελετούν τις επιπτώσεις της υπερβολικής έκπτωσης στα συστήματα εξυπηρέτησης. Αν και το ερευνητικό περιβάλλον (δηλαδή τα συστήματα εξυπηρέτησης) είναι παρόμοιο, η εστίαση και η προσέγγιση της έρευνας είναι αρκετά διαφορετικές. Στην εργασία των Plambeck και Wang (2010), οι πελάτες δεν έχουν τον αυτοέλεγχο για να υποστούν μια δυσάρεστη εμπειρία που θα ήταν προς το μακροπρόθεσμο συμφέρον τους, που μοντελοποιείται από ψυχολόγους ως ένα υπερβολικό ποσοστό έκπτωσης της ωφέλειας. Το μοντέλο των Huang, Allon και Bassamboo (2013) για περιορισμένη ορθολογικότητα εστιάζει στην ικανότητα του πελάτη να υπολογίσει τον αναμενόμενο χρόνο αναμονής. Μια άλλη ροή έρευνας που σχετίζεται με αυτή είναι η πειραματική μελέτη στην ουρά. Αυτή η βιβλιογραφία δεν υποστηρίζει ότι τα άτομα είναι πλήρως ορθολογικά. Οι Rapoport et al. (2004) μελέτησαν μια κατηγορία προβλημάτων ουράς με ενδογενείς χρόνους άφιξης που έχουν διατυπωθεί ως μη-συνεργατικά παιχνίδια n-ατόμων σε κανονική μορφή. Τα αποτελέσματα από την πειραματική τους μελέτη δεν μπορούν να εξηγηθούν πλήρως από την ορθολογική συμπεριφορά. Βλέπε επίσης Bearden et al. (2005) και Seale et al. (2005) για μελέτες σε αυτή τη κατεύθυνση.

Η εργασία των Huang, Allon και Bassamboo (2013) ήταν η πρώτη που εξέτασε ένα αναλυτικό μοντέλο ουράς με περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες. Σε αυτό το άρθρο, οι συγγραφείς ανέλυσαν τις ουρές M/M/1 με την υπόθεση ότι η εκτίμηση των πελατών για τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής τους στο σύστημα περιλαμβάνει έναν όρο σφάλματος ο οποίος ακολουθεί μια λογιστική κατανομή, που οδηγεί σε μια πιθανότητα εισόδου στη μορφή μιας λογιστικής συνάρτησης quantal-response. Απέδειξαν ότι για την μη-παρατηρήσιμη ουρά M/M/1, όπου οι πελάτες δεν παρατηρούν το μήκος της ουράς πριν αποφασίσουν, ένας διαχειριστής που μεγιστοποιεί τα έσοδα μπορεί να δημιουργήσει μεγαλύτερα έσοδα χρεώνοντας υψηλότερη τιμή όταν οι πελάτες είναι λιγότερο ορθολογικοί, υπό τον όρο ότι ο βαθμός ορθολογικότητας είναι αρκετά μικρός και ένας τέτοιος διαχειριστής μπορεί να υποστεί σημαντική πιθανή απώλεια αγνοώντας την περιορισμένη ορθολογικότητα. Η Canbolat (2020) δείχνει ότι αυτά τα ευρήματα ισχύουν για μη-παρατηρήσιμα συστήματα εκκαθάρισης όπου οι αφίξεις πραγματοποιούνται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson και ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών ολοκληρώσεων εξυπηρέτησης έχει αυθαίρετη κατανομή με πεπερασμένες πρώτες και δεύτερες ροπές. Συνάγει μια εξίσωση της οποίας η μοναδική λύση αντιστοιχεί στην τιμή μεγιστοποίησης των εσόδων και εκμεταλλεύεται τις ιδιότητες αυτής της εξίσωσης για να χαρακτηρίσει πλήρως την τιμή μεγιστοποίησης των εσόδων και την προκύπτουσα πιθανότητα εισόδου, την ωφέλεια των πελατών, τα έσοδα του συστήματος, και την κοινωνική ευημερία ως συναρτήσεις του βαθμού ορθολογικότητας. Αποδεικνύει ότι στα συστήματα εκκαθάρισης, καθώς ο βαθμός ορθολογικότητας αυξάνεται (από το μηδέν στο άπειρο), η τιμή μεγιστοποίησης των εσόδων πρώτα μειώνεται και στη συνέχεια αυξάνεται, η πιθανότητα εισόδου αυξάνεται, η ωφέλεια των πελατών πρώτα αυξάνεται και μετά μειώνεται, τα έσοδα του συστήματος πρώτα μειώνονται και μετά αυξάνονται και η κοινωνική ευημερία αυξάνεται. Αυτή η ανάλυση οδηγεί στον υπολογισμό τριών σταθερών που καθορίζουν τα τοπικά ακρότατα της τιμής, της ωφέλειας των πελάτων και των εσόδων του συστήματος. Το τοπικό ακρότατο κάθε ποσότητας βρίσκεται διαιρώντας την αντίστοιχη σταθερά με την αναμενόμενη ωφέλεια της υπηρεσίας (χωρίς την τιμή). Συνάγει επίσης πεπερασμένα θετικά φράγματα για την πιθανότητα εισόδου και την κοινωνική ευημερία και ένα θετικό κάτω φράγμα στην τιμή, συνεπάγοντας το άνω φράγμα 22% στο μερίδιο της ωφέλειας των πελατών στην κοινωνική ευημερία. Μια άλλη διαφορά από τους Huang et al. (2013) είναι η ανάλυση της ωφέλειας των πελατών ως συνάρτηση του βαθμού ορθολογικότητας, η οποία δείχνει ότι η ωφέλεια των πελατών είναι μονοκόρυφη ως προς τον βαθμό ορθολογικότητας, επομένως υπάρχει ένας μοναδικός πεπερασμένος μη-μηδενικός βαθμός ορθολογικότητας που μεγιστοποιεί την ωφέλεια των πελατών. Η ανάλυση της περιορισμένης ορθολογικότητας στα συστήματα εκκαθάρισης αποδεικνύεται πιο εύκολη σε σύγκριση με τις ουρές, καθώς στα πρώτα, οι αποφάσεις των ατόμων δεν δημιουργούν *εξωτερικές επιπτώσεις* σε άλλα άτομα, και αυτό επιτρέπει τη λήψη πιο συγκεκριμένων αποτελεσμάτων, όπως ο υπολογισμός των τοπικών ακροτάτων. Φυσικά, αυτό το μοντέλο έχει πιο περιορισμένη εφαρμογή από μια ουρά M/M/1. Εκτός από τις μη-παρατηρήσιμες ουρές M/M/1, οι Huang et al. (2013) εξέτασαν επίσης παρατηρήσιμες ουρές M/M/1, όπου οι πελάτες αποφασίζουν αφού παρατηρήσουν το μήκος της ουράς. Για τα συστήματα εκκαθάρισης, εάν οι αφίξεις και οι ολοκληρώσεις εξυπηρέτησης συμβαίνουν σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson, τότε η παρατήρηση του μήκους της ουράς δεν επηρεάζει τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής του πελάτη, διότι σε αυτήν την περίπτωση, ο χρόνος παραμονής κατανέμεται εκθετικά και επομένως είναι χωρίς μνήμη. Ως εκ τούτου, η συγκεκριμένη παρατηρήσιμη περίπτωση ανάγεται σε μη-παρατηρήσιμη. Ωστόσο, για γενικά κατανεμημένους χρόνους μεταξύ ολοκλήρωσης εξυπηρέτησης, ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής του πελάτη στο σύστημα εκκαθάρισης εξαρτάται από το παρατηρούμενο μήκος της ουράς.

Η πρόσφατη βιβλιογραφία που περιλαμβάνει περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες σε ουρές περιλαμβάνει την εργασία των Li, Guo και Lian (2016), οι οποίοι εξέτασαν δύο ανταγωνιστικές ουρές M/M/1 για περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες που λαμβάνουν αποφάσεις σύμφωνα με λογιστικές συναρτήσεις και λύνουν τα προβλήματα χωρητικότητας και τιμολόγησης των υπηρετών (servers) και ανέλυσαν τις επιπτώσεις της περιορισμένης ορθολογικότητας. Οι Li, Guo και Lian (2017) επέκτειναν αυτήν την ανάλυση σε γενικές συναρτήσεις αμοιβής και σε έναν πεπερασμένο αριθμό ουρών M/M/1 και διερεύνησαν τις επιπτώσεις του αυξανόμενου ανταγωνισμού στους ρυθμούς εξυπηρέτησης όταν κάθε υπηρέτης (server) καθορίζει το ρυθμό εξυπηρέτησης για να μεγιστοποιήσει το δικό του αναμενόμενο κέρδος λαμβάνοντας υπόψη την περιορισμένη ορθολογικότητα των πελατών. Οι Li, Guo και Lian (2017) διερεύνησαν τις επιπτώσεις της περιορισμένα ορθολογικής επιλογής των πελατών στην κοινή χωρητικότητα και τις αποφάσεις τιμολόγησης ενός M/M/1 υπηρέτη (server). Μια ανασκόπηση των μοντέλων που ενσωματώνουν την περιορισμένη ορθολογικότητα στη βιβλιογραφία Διοίκησης Λειτουργιών παρέχεται από τους Ren and Huang (2018) και όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το βιβλίο του Hassin (2016) έχει ένα κεφάλαιο για τα μοντέλα ουράς που περιλαμβάνουν περιορισμένη ορθολογική επιλογή.

Προχωρώντας στην ιστορία των συστημάτων εκκαθάρισης, ο Stidham (1974) εισήγαγε τα στοχαστικά συστήματα εκκαθάρισης ως στοχαστικά συστήματα εισόδου-εξόδου όπου η είσοδος είναι μια εξωγενής διαδικασία και η έξοδος αντιστοιχεί στην εκκαθάριση του συστήματος με ακαριαία απομάκρυνση όλων των πελατών από το σύστημα. Αρκετές εφαρμογές στοχαστικών συστημάτων εκκαθάρισης έχουν αναλυθεί από τον Stidham (1977). Συγκεκριμένα, τα συστήματα εκκαθάρισης μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ακριβή ή κατά προσέγγιση μοντέλα συστημάτων εξυπηρέτησης όπου ένας υπηρέτης (server) εξυπηρετεί κατά διαστήματα όλους τους πελάτες στην ουρά. Σε αυτή την περίπτωση, οι αφίξεις πελατών αποτελούν τη διαδικασία εισόδου, ενώ η ομαδική εξυπηρέτηση των υπαρχόντων πελατών είναι η έξοδος. Οι Manou et al. (2014) μοντελοποίησαν έναν σταθμό μεταφοράς ως ένα στοχαστικό σύστημα εκκαθάρισης όπου οι αφίξεις των επιβατών ακολουθούν μια διαδικασία Poisson και ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών επισκέψεων της μεταφορικής μονάδας ακολουθεί κάποια γενική κατανομή. Ανέλυσαν το σύστημα με ορθολογικούς πελάτες που αποφασίζουν να εισέλθουν ή όχι στον σταθμό μεταφοράς κάτω από διαφορετικά επίπεδα παρατηρησιμότητας υποθέτοντας μια σταθερή τιμή εξυπηρέτησης. Οι Manou et al. (2017) εκμεταλλεύτηκαν αυτά τα αποτελέσματα για να λύσουν το πρόβλημα τιμολόγησης του διαχειριστή του συστήματος μεταφορών. Η εργασία της Canbolat (2020) η οποία είναι ένα βασικό κομμάτι της εργασίας μας (βλέπε Κεφάλαιο 3), αναλύει την ίδια στοχαστική διαδικασία, αλλά υποθέτει ότι οι πελάτες είναι περιορισμένα ορθολογικοί και ο διαχειριστής του συστήματος καθορίζει την τιμή εξυπηρέτησης που μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα έσοδα του συστήματος δεδομένου του *βαθμού* ορθολογικότητας των πελατών.

1.2 Θεωρία Παιγνίων

Η έννοια του σημείου στρατηγικής ισορροπίας (ή απλά ισορροπίας) παίζει κεντρικό ρόλο σε όλη τη βιβλιογραφία και το απαραίτητο υπόβαθρο παρουσιάζεται σε αυτήν την ενότητα. Από εδώ και στο εξής «ισορροπία» σημαίνει «ισορροπία Nash».

1.2.1 Στρατηγικές, πληρωμές και ισορροπία

Ένα *μη-συνεργατικό* παιχνίδι ορίζεται ως εξής. Έστω $N = \{1, ..., n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο παικτών και A_i να υποδηλώνει ένα σύνολο ενεργειών που είναι διαθέσιμες στον παίκτη $i \in N$. Μια καθαρή στρατηγική για τον παίκτη i είναι μια ενέργεια από το A_i. Μια μικτή στρατηγική αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση πιθανότητας που ορίζει έναν τυχαιοποιημένο κανόνα για την επιλογή μιας ενέργειας από το A_i. Συμβολίζουμε με S_i το σύνολο των στρατηγικών που είναι διαθέσιμες στον παίκτη i.

Ένα *προφίλ στρατηγικών* $s = (s_1, ..., s_n)$ εκχωρεί μια στρατηγική $s_i \in S_i$ σε κάθε παίκτη $i \in N$. Κάθε παίκτης συνδέεται με μια πραγματική *συνάρτηση πληρωμής* $F_i(s)$. Αυτή η συνάρτηση καθορίζει την αμοιβή που λαμβάνει ο παίκτης i δεδομένου ότι το προφίλ στρατηγικών s υιοθετείται από τους παίκτες. Συμβολίζουμε με s_{-i} ένα προφίλ για το σύνολο παικτών $N \backslash \{i\}$. Η συνάρτηση $F_i(s) = F_i(s_i, s_{-i})$ θεωρείται ότι είναι γραμμική ως προς το s_i. Αυτό σημαίνει ότι αν το s_i είναι μία μίξη με πιθανότητες α και $1 - \alpha$ μεταξύ των στρατηγικών s_i^1 και s_i^2, τότε $F_i(s_i, s_{-i}) = \alpha F_i(s_i^1, s_{-i}) + (1 - \alpha) F_i(s_i^2, s_{-i})$ για οποιαδήποτε s_{-i}.

Η στρατηγική s_i^1 λέμε ότι *κυριαρχεί ασθενώς* της στρατηγικής s_i^2 (για τον παίκτη i), εάν ισχύει s_{-i}, $F_i(s_i^1, s_{-i}) \geq F_i(s_i^2, s_{-i})$ και για τουλάχιστον ένα s_{-i} η ανισότητα είναι γνήσια. Μια στρατηγική s_i λέμε ότι είναι *ασθενώς κυρίαρχη* εάν κυριαρχεί ασθενώς σε όλες τις άλλες στρατηγικές στο S_i. Μια στρατηγική s_i^* λέμε ότι είναι η *καλύτερη απάντηση* για τον παίκτη i έναντι του προφίλ στρατηγικών s_{-i} εάν

$$s_i^* \in argmax_{s_i \in S_i} F_i(s_i, s_{-i}).$$

Ένα προφίλ στρατηγικών s^e είναι ένα προφίλ *ισορροπίας* εάν για κάθε $i \in N$, το s_i^e είναι καλύτερη απάντηση για τον παίκτη i έναντι του s_{-i}^e, δηλαδή αν

$$s_i^e \in argmax_{s_i \in S_i} F_i(s_i, s_{-i}^e), \ i \in N.$$

Σημείωση 1.2.1. *Εάν μια καλύτερη απάντηση s_i^* είναι μία μίξη στρατηγικών, τότε όλες αυτές οι στρατηγικές είναι επίσης καλύτερες απαντήσεις. Αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει όταν η "καλύτερη απάντηση" αντικαθίσταται από το "προφίλ ισορροπίας".*

Θα ασχοληθούμε κυρίως με παιχνίδια με απείρως πολλούς παίκτες (συνήθως πελάτες). Σε αυτήν την περίπτωση, συμβολίζουμε το κοινό σύνολο στρατηγικών και τη συνάρτηση πληρωμής με S και F, αντίστοιχα. Έστω το $F(a, b)$, η αμοιβή για έναν παίκτη που επιλέγει τη στρατηγική a όταν όλοι οι άλλοι επιλέγουν τη στρατηγική b. Ένα συμμετρικό σημείο ισορροπίας είναι μια στρατηγική $s^e \in S$ τέτοια ώστε

$$s^e \in argmax_{s \in S} F(s, s^e).$$

Με άλλα λόγια, το s^e είναι ένα συμμετρικό σημείο ισορροπίας εάν είναι η καλύτερη απάντηση έναντι του εαυτού του.

Δεν υποθέτουμε ότι υπάρχει πάντα σημείο (στρατηγικής) ισορροπίας. Πράγματι, σε πολλά μοντέλα δεν υπάρχει σημείο (στρατηγικής) ισορροπίας.

Συχνά ταξινομούμε τις ουρές ανάλογα με το εάν το μήκος τους μπορεί να παρατηρηθεί ή όχι πριν ο πελάτης λάβει μια απόφαση. Αναφερόμαστε σε αυτές τις περιπτώσεις ως *παρατηρήσιμες ουρές* και *μη-παρατηρήσιμες ουρές*, αντίστοιχα. Σε παρατηρήσιμες ουρές, οι πελάτες αντιμετωπίζουν καταστάσεις που αντιστοιχούν σε καταστάσεις του συστήματος και καλούνται να επιλέξουν μια ενέργεια από ένα δεδομένο σύνολο. Οι ορισμοί των ενεργειών, των στρατηγικών, των πληρωμών και της ισορροπίας μπορούν να επεκταθούν και σε αυτά τα μοντέλα.

Για παράδειγμα, μια κατάσταση μπορεί να αντιστοιχεί στον αριθμό των πελατών στο σύστημα, και το σύνολο ενεργειών μπορεί να περιλαμβάνει τη συμμετοχή ως συνηθισμένος πελάτης, τη συμμετοχή ως πελάτης προτεραιότητας ή τη μη συμμετοχή. Μια καθαρή στρατηγική ορίζει μια ενέργεια σε κάθε κατάσταση. Ένα προφίλ στρατηγικών και μια αρχική κατάσταση επάγουν μια κατανομή πιθανοτήτων στις καταστάσεις. Ο παίκτης i λαμβάνει μια πληρωμή που εξαρτάται από την κατάσταση, την ενέργειά του και τις στρατηγικές που επιλέγονται από τους άλλους παίκτες. Ο παίκτης i ενδιαφέρεται μόνο για την αναμενόμενη πληρωμή του, όπου η αναμενόμενη πληρωμή προκύπτει από τις καταστάσεις και τις ενέργειες που προβλέπονται από τη στρατηγική του πελάτη i σε κάθε κατάσταση.

1.2.2 Στρατηγικές Κατωφλίου

Σε αυτή τη παράγραφο περιγράφουμε μια κατηγορία στρατηγικών, γνωστές ως *στρατηγικές κατωφλίου*, η οποία είναι συνηθισμένη στα συστήματα εξυπηρέτησης. Ας υποθέσουμε ότι κατά την άφιξη ο πελάτης πρέπει να επιλέξει μεταξύ δύο ενεργειών, A_1 και A_2, αφού παρατηρήσει μια μη-αρνητική ακέραια μεταβλητή που χαρακτηρίζει την κατάσταση του συστήματος. Για παράδειγμα, η κατάσταση μπορεί να είναι το μήκος της ουράς και οι ενέργειες μπορεί να είναι για να εισέλθει ή να αποχωρήσει.

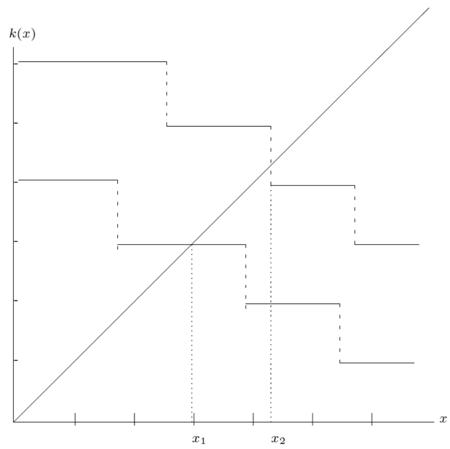
Μια *καθαρή στρατηγική* κατωφλίου με κατώφλι n υπαγορεύει μία από τις ενέργειες, ας πούμε την A_1, για κάθε κατάσταση στο $\{0, 1, ..., n-1\}$ και την άλλη ενέργεια, A_2, διαφορετικά.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι φυσικό να αναζητήσουμε μια καθαρή στρατηγική ισορροπίας κατωφλίου. Ωστόσο, είναι συχνά δυνατό να κατασκευαστούν περιπτώσεις όπου, για παράδειγμα, αν όλοι στον πληθυσμό χρησιμοποιούν το κατώφλι 4, τότε η καλύτερη απάντηση για ένα άτομο είναι το 5 και εάν όλοι στον πληθυσμό υιοθετούν το κατώφλι 5, τότε η καλύτερη απάντηση είναι το 4. Αυτή είναι η περίπτωση της άνω συνάρτησης στο Σχήμα 1.1. Σε τέτοιες περιπτώσεις, μια καθαρή στρατηγική κατωφλίου που ορίζει ένα σημείο ισορροπίας μπορεί να μην υπάρχει. Κατά συνέπεια, ο ορισμός μιας στρατηγικής κατωφλίου επεκτείνεται ως εξής:

Μια στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι $x = n + p$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1)$, ορίζει τη μίξη μεταξύ των δύο καθαρών στρατηγικών κατωφλίου n και $n + 1$, έτσι ώστε η στρατηγική n να λαμβάνει το βάρος $1 - p$ και η στρατηγική $n + 1$ να λαμβάνει το βάρος p. Η συμπεριφορά που προκύπτει είναι ότι όλοι επιλέγουν μια δεδομένη ενέργεια, ας πούμε A_1, όταν η κατάσταση είναι $0 \leq i \leq n - 1$, επιλέγουν τυχαία μεταξύ A_1 και A_2 όταν $i = n$, εκχωρώντας την πιθανότητα p στο A_1 (η ενέργεια που ορίζεται από τη στρατηγική $n + 1$) και την πιθανότητα $1 - p$ στο A_2 (το δράση που ορίζεται από τη στρατηγική n), επιλέγουν A_2 όταν $i > n$. Εάν το x είναι ακέραιος αριθμός ($p = 0$), η στρατηγική είναι *καθαρή*. Διαφορετικά, είναι *μικτή*.

Μας ενδιαφέρουν μοντέλα όπου η καλύτερη απάντηση για ένα άτομο έναντι οποιασδήποτε στρατηγικής x είναι μια καθαρή στρατηγική κατωφλίου: για κάποιο ακέραιο αριθμό $k(x)$, εάν η κατάσταση είναι στο $\{0, ..., k(x) - 1\}$ επιλέγουμε A_1. Διαφορετικά, επιλέγουμε A_2. Η ακόλουθη κατάσταση είναι χαρακτηριστική: το $k(x)$ έχει σημεία ασυνέχειας με βήμα μεγέθους μονάδας που μπορεί να είναι προς τα πάνω ή προς τα κάτω. Σε ένα σημείο ασυνέχειας x, και οι δύο καθαρές στρατηγικές που εμπλέκονται είναι οι καλύτερες απαντήσεις έναντι του x και επομένως οποιαδήποτε μίξη μεταξύ τους (που είναι μια μικτή στρατηγική κατωφλίου) είναι επίσης η καλύτερη απάντηση έναντι του x. Ένα κατώφλι x ορίζεται ως σημείο ισορροπίας εάν είτε $k(x) = x$ (στην περίπτωση αυτή το x είναι ακέραιος αριθμός) είτε το x είναι μεταξύ $k(x-)$ και $k(x+)$[2]. Και στις δύο περιπτώσεις, εάν όλοι οι πελάτες υιοθετήσουν τη στρατηγική κατωφλίου x, τότε αυτή είναι επίσης η καλύτερη απάντηση και κανείς δεν έχει κίνητρο να παρεκκλίνει προς άλλη στρατηγική. Εν ολίγοις, είναι μια στρατηγική ισορροπίας.

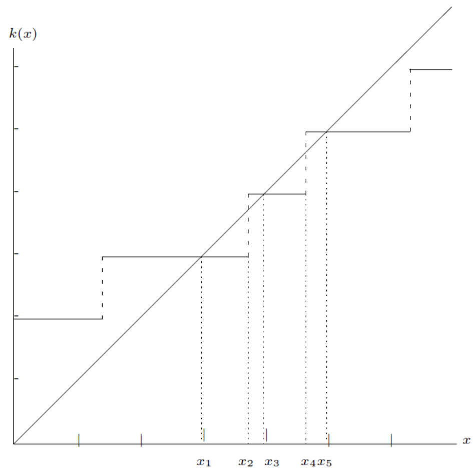
Η συμπεριφορά που αντικατοπτρίζεται από μια μονότονη μη-αύξουσα συνάρτηση $k(x)$ αναφέρεται ως *avoid the crowd* (ATC). Σημαίνει ότι όσο υψηλότερο είναι το κατώφλι που υιοθετούν οι άλλοι, τόσο χαμηλότερο είναι το κατώφλι που δίνει την καλύτερη απάντηση για έναν δεδομένο πελάτη. Ομοίως, η περίπτωση όπου το $k(x)$ είναι μονότονη μη-φθίνουσα συνάρτηση αναφέρεται ως *follow the crowd* (FTC). Σημαίνει ότι όσο υψηλότερο είναι το κατώφλι που υιοθετούν οι άλλοι, τόσο υψηλότερο είναι το κατώφλι που δίνει την καλύτερη απάντηση για έναν δεδομένο πελάτη.



Σχήμα 1.1: Ισορροπία στην περίπτωση ATC.

Υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο περιπτώσεων. Στην περίπτωση ATC υπάρχει το πολύ ένα σταθερό σημείο που μπορεί να αντιστοιχεί σε μια καθαρή στρατηγική ή μια μικτή στρατηγική. Το Σχήμα 1.1 απεικονίζει δύο μη-αύξουσες συναρτήσεις βημάτων. Στη μία, η στρατηγική ισορροπίας που λαμβάνεται στο x_1 είναι καθαρή, στην άλλη, η στρατηγική ισορροπίας που λαμβάνεται στο x_2, είναι μικτή. Η περίπτωση FTC είναι περισσότερο περίπλοκη και μπορεί να έχει πολλαπλά σημεία ισορροπίας. Μπορεί να φανεί από το Σχήμα 1.2 ότι το $k(x)$ μπορεί να έχει πολλά σταθερά σημεία.

Σημείωση 1.2.2. *Τα δεδομένα λέγεται ότι δεν είναι εκφυλισμένα εάν κανένα από τα άλματα του $k(x)$ δεν συμβαίνει σε μια ακέραια τιμή x. Έστω $x_1, x_2, \ldots$ οι τιμές των σταθερών σημείων. Από το Σχήμα 1.2 παρατηρούμε ότι για $k = 1, 2, \ldots, x_{2k+1}$ αντιστοιχεί σε μια καθαρή στρατηγική ισορροπίας ενώ το x_{2k} αντιστοιχεί σε μια μικτή στρατηγική ισορροπίας. Όταν επιτρέπουμε εκφυλισμένα δεδομένα μπορεί να υπάρχουν διαδοχικές καθαρές στρατηγικές ισορροπίας. Αν το σημείο ισορροπίας είναι μοναδικό τότε είναι καθαρή στρατηγική.*



Σχήμα 1.2: Ισορροπία στην περίπτωση FTC.

Μέρος II

Περιορισμένη Ορθολογικότητα

Κεφάλαιο 2

Περιορισμένη Ορθολογικότητα σε Συστήματα Εξυπηρέτησης

Η θεμελιώδης εργασία του Naor (1969), όπως και σχεδόν όλη η σχετική βιβλιογραφία που αναπτύχθηκε έκτοτε, βασίστηκαν στην υπόθεση ότι οι πελάτες είναι *πλήρως ορθολογικοί* και ικανοί να εκτιμήσουν τέλεια τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής τους και επομένως την αναμενόμενη ωφέλεια της εισόδου τους στο σύστημα. Όμως, αυτή δεν είναι μια ρεαλιστική υπόθεση για τα περισσότερα μοντέλα εξυπηρέτησης, αφού οι πελάτες συνήθως δεν είναι σε θέση να υπολογίσουν ή να εκτιμήσουν με μεγάλη ακρίβεια τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής τους και κατ' επέκταση την ωφέλεια της εισόδου τους, είτε λόγω έλλειψης γνώσεων, είτε λόγω έλλειψης χρόνου, είτε λόγω της ιδιαιτερότητας του συστήματος. Επομένως, ήταν επιτακτική ανάγκη η μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης με *περιορισμένα ορθολογικούς* πελάτες. Αυτή η υπόθεση της *περιορισμένης ορθολογικότητας* είναι αρκετά ρεαλιστική και θεωρεί ότι γίνεται κάποιο σφάλμα από τους πελάτες στον υπολογισμό/εκτίμηση του αναμενόμενου χρόνου παραμονής τους και κατ' επέκταση της ωφέλειάς τους. Πρόσφατα, οι Huang, Allon και Bassamboo (2013) μελέτησαν την περιοσμένη ορθολογικότητα των πελατών στην M/M/1 ουρά, όταν οι πελάτες είχαν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν το μήκος της ουράς (*παρατηρήσιμη* περίπτωση) και όταν δεν είχαν αυτή τη δυνατότητα (*μη-παρατηρήσιμη* περίπτωση). Οι Huang, Allon και Bassamboo (2013) υπολόγισαν την τιμή που μεγιστοποιεί τα έδοδα του συστήματος και την τιμή που μεγιστοποιεί τη κοινωνική ευημερία, και για την παρατηρήσιμη περίπτωση αλλά και για τη μη-παρατηρήσιμη περίπτωση. Επίσης, μελέτησαν και τις διαφορές στα βέλτιστα έσοδα αλλά και στη βέλτιστη κοινωνική ευημερία παραβλέποντας την περιορισμένη ορθολογικότητα. Το Κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στην εργασία των Huang, Allon και Bassamboo (2013), και περιέχει τα αποτελέσματα και τα πολύ χρήσιμα συμπεράσματα της εργασίας τους. Ακόμα, οι αποδείξεις των Προτάσεων και των Πορισμάτων των Huang, Allon και Bassamboo (2013) βρίσκονται στο Παράρτημα Α.

2.1 Μοντέλο

Ας θεωρήσουμε έναν πελάτη που πρέπει να αποφασίσει αν θα εισέλθει στο σύστημα ή όχι. Αν εισέλθει, θα αποκτήσει αναμενόμενη ωφέλεια $U_1 \equiv R - p - CE(W)$, όπου $R > 0$ είναι η αμοιβή από την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης, p είναι η τιμή, $E(W)$ είναι ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής και εξυπηρέτησης (δηλαδή ο χρόνος παραμονής στο σύστημα) και $C > 0$ είναι το μέσο κόστος αναμονής και εξυπηρέτησης (δηλαδή το μέσο κόστος παραμονής στο σύστημα) ανά χρονική μονάδα. Αν αποχωρήσει χωρίς εξυπηρέτηση, θα πάρει ωφέλεια $U_2 = 0$. Η υπάρχουσα και συνηθισμένη βιβλιογραφία ουρών τυπικά υποθέτει ότι ο πελάτης είναι *απόλυτα ορθολογικός*: αν $U_1 \geq 0$, θα εισέλθει στο σύστημα, αλλιώς, θα διστάσει και θα αποχωρήσει. Ωστόσο, ο ακριβής υπολογισμός του αναμενόμενου χρόνου αναμονής και εξυπηρέτησης δεν είναι συνήθως εύκολη υπόθεση για τους πελάτες. Ξεφεύγουμε λοιπόν από τη συνηθισμένη βιβλιογραφία ενσωματώνοντας μια πιο ρεαλιστική υπόθεση: οι πελάτες στερούνται την ικανότητα να εκτιμήσουν με ακρίβεια τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής τους. Ως αποτέλεσμα, οι πελάτες δεν μπορούν να εγγυηθούν ότι θα πάρουν σίγουρα τη καλύτερη επιλογή, και μπορεί να κάνουν σφάλματα. Για να μοντελοποιήσουμε την εκτίμηση (με σφάλματα) για αυτόν τον χρόνο παραμονής, εισάγουμε έναν όρο τυχαίου σφάλματος, ϵ, στην εκτίμηση του αναμενόμενου χρόνου παραμονής του πελάτη. Αν $V_1 \equiv R - p - C(E(w) + \epsilon) \geq 0$, τότε θα εισέλθει στο σύστημα και θα αποχωρήσει διαφορετικά. Ως εξωτερικοί παρατηρητές, λαμβάνουμε τη πιθανότητα εισόδου του πελάτη $\varphi \equiv \mathbb{P}(\epsilon \leq U_1/C)$, η οποία θα πρέπει να ερμηνευθεί ως το ποσοστό των πελατών που θα εισέλθουν. Για να μπορέσουμε να παρουσιάσουμε αναλυτικούς υπολογισμούς, υποθέτουμε ότι ο όρος σφάλματος ακολουθεί μια λογιστική κατανομή $F(x) = 1/(1+e^{-x/\theta})$ για κάποιο $\theta > 0$. Η λογιστική κατανομή παρέχει μια καλή προσέγγιση στην κανονική κατανομή αλλά έχει πιο βαριές ουρές (Talluri και van Ryzin 2004, σελ. 305–306). Από τον McFadden (1974) και τους Anderson et al. (1992), προκύπτει έτσι τη πιθανότητα εισόδου του πελάτη:

$$\varphi = \frac{e^{U_1/(C\theta)}}{1 + e^{U_1/(C\theta)}}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο μοντέλο οι πελάτες δεν επιλέγουν να παίξουν με μικτές στρατηγικές. Η εκτίμηση (με σφάλματα) του χρόνου παραμονής είναι αυτή που οδηγεί σε αυτή τη συμπεριφορά, ενώ το φ υποδηλώνει το ποσοστό των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα.

Για να ερμηνεύσουμε την έννοια του θ, αρχικά έχουμε ότι η τυπική απόκλιση του ϵ είναι $\sigma \equiv \sqrt{Var(\epsilon)} = (\pi/\sqrt{3})\theta \approx 1.8\theta$. Ως εκ τούτου, η παράμετρος θ είναι ανάλογη με τη τυπική απόκλιση του όρου σφάλματος ϵ. Έτσι, η παράμετρος θ μετρά το *επίπεδο σφάλματος* της εκτίμησης του αναμενόμενου χρόνου παραμονής του πελάτη. (Βλ. Hey και Orme 1994, σελ. 1301, για παρόμοια προσέγγιση και εξηγήσεις, εναλλακτικά, θα μπορούσε κανείς να κανονικοποιήσει την ωφέλεια χρησιμοποιώντας τη διακύμανση του όρου σφάλματος για να συλλάβει το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας.) Επιπλέον, η τυπική απόκλιση της αναμενόμενης ωφέλειας V_1 του πελάτη είναι $\sigma_{V_1} \equiv C\sigma \approx 1.8C\theta$. Για ευκολία, ορίζουμε το $\beta \equiv C\theta$, το οποίο μετρά το επίπεδο σφάλματος της εκτίμησης της αναμενόμενης ωφέλειας του πελάτη. Αυτό το επίπεδο σφάλματος β αντικατοπτρίζει την περιορισμένη ορθολογικότητα του πελάτη με την έννοια ότι οι πελάτες έχουν περιορισμένη υπολογιστική ικανότητα για τον υπολογισμό της τέλειας εκτίμησης του αναμενόμενου χρόνου αναμονής τους (και ως εκ τούτου, της αναμενόμενης ωφέλειας της εισόδου τους στο σύστημα) στην ουρά. Συνεπώς, ερμηνεύουμε την παράμετρο β ως τον βαθμό στον οποίο οι πελάτες *δεν* είναι σε θέση να εφαρμόσουν τη βέλτιστη απόφαση λόγω της ανικανότητάς τους να εκτιμήσουν τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής.

Αφήνοντας $\beta \to 0$, η συμπεριφορά εισόδου συγκλίνει σε *πλήρη ορθολογικότητα*. Αντίθετα, αφήνωντας $\beta \to \infty$, η είσοδος και η αποχώρηση του πελάτη έχουν ίση πιθανότητα. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε ως β, το *επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας*.

Η ερμηνεία του επιπέδου της περιορισμένης ορθολογικότητας προκύπτει επίσης από τη γνωστή ερμηνεία των συντελεστών των παλινδρομήσεων logit συνάρτησης στην οποία αποτυπώνεται η ιδέα ότι επιλέγονται καλύτερες επιλογές πιο συχνά. Κάποιος μπορεί να ξαναγράψει την πιθανότητα εισόδου ως $\log(\varphi/(1-\varphi)) = (1/\beta)U_1$.

Το αριστερό μέρος είναι ο «λογαριθμικός λόγος συμπληρωματικών πιθανοφανειών» (εν συντομία log-odds) εισόδου στο σύστημα, άρα το β είναι το αντίστροφο της διαφοράς των log-odds για οποιαδήποτε αύξηση μίας μονάδας της αναμενόμενης ωφέλειας της εισόδου στο σύστημα. Για παράδειγμα, όταν $\beta = 0.5$, τότε τα log-odds διπλασιάζονται για οποιαδήποτε αύξηση κατά μία μονάδα της αναμενόμενης ωφέλειας της εισόδου στο σύστημα, όταν $\beta = 2$, τότε τα log-odds μειώνονται κατά το ήμισυ για οποιαδήποτε αύξηση κατά μία μονάδα της αναμενόμενης ωφέλειας της εισόδου στο σύστημα.

Δεδομένου ότι το β είναι η τυπική απόκλιση της ωφέλειας του πελάτη, έχει την ίδια μονάδα με την αμοιβή R. Αναμένουμε το μέγεθός του να εξαρτάται από το γενικό πλαίσιο. Τόσο ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής όσο και το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας εξαρτώνται από τη μοντελοποίηση του συστήματος εξυπηρέτησης: εάν το μήκος της ουράς είναι παρατηρήσιμο στους πελάτες ή όχι. Επομένως, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, την *παρατηρήσιμη* και τη *μη-παρατηρήσιμη ουρά*, και συμβολίζουμε με β και β_I τα επίπεδα περιορισμένης ορθολογικότητας για την παρατηρήσιμη και τη μη-παρατηρήσιμη ουρά αντίστοιχα.

2.1.1 Παρατηρήσιμη Ουρά

Θεωρούμε ένα σύστημα ουράς με έναν υπηρέτη το οποίο είναι παρατηρήσιμο. Οι πελάτες φτάνουν στο σύστημα σύμφωνα με σε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κατά την άφιξη, κάθε πελάτης αποφασίζει αν θα καθίσει στην ουρά ή όχι, μετά από την παρατήρηση του μήκους της ουράς και βάσει της εκτίμησής του για το χρόνο παραμονής. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι, ισόνομοι και εκθετικά κατανεμημένοι με μέση τιμή $1/\mu$. Ο ρυθμός συνωστισμού (utilization) του συστήματος είναι $\rho \equiv \lambda/\mu$, εάν εισέλθουν όλοι οι πελάτες στο σύστημα. Οι πελάτες εξυπηρετούνται με FCFS πειθαρχία ουράς. Κατά την άφιξη, παρατηρώντας n πελάτες στο σύστημα, το ποσοστό των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα είναι

$$\varphi_n \equiv \frac{e^{(R-p-((n+1)C/\mu)/\beta}}{1+e^{(R-p-((n+1)C/\mu)/\beta}}, \tag{2.1}$$

για $n = 0, 1, 2, ...$ Για να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής, κάθε πελάτης χρειάζεται τέλεια πληροφόρηση, όταν εισέλθει στο σύστημα, σχετικά με τον αριθμό των πελατών και τον ρυθμό εξυπηρέτησης και χρειάζεται τη γνωστική ικανότητα για να μετατρέψει αυτές τις πληροφορίες σε μια εκτίμηση του αναμενόμενου χρόνου παραμονής. Έτσι, εάν οι πελάτες στερούνται είτε τις πληροφορίες είτε τη γνωστική ικανότητα, τότε η εκτίμηση του χρόνου παραμονής θα είναι ανακριβής. Επιπλέον, η ακρίβεια του αναμενόμενου χρόνου παραμονής επηρεάζεται αρκετά, γιατί αυτή η υπολογιστική διαδικασία πρέπει να γίνει σε πραγματικό χρόνο. Για ευκολία, θέτουμε $\lambda_n \equiv \lambda\varphi_n$, $n = 0, 1, 2, ...$, να είναι οι ρυθμοί εισόδου στο σύστημα, οι οποίοι εξαρτώνται από τη κατάσταση του συστήματος δηλ. από το πλήθος των πελατών στο σύστημα. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε τον αριθμό των πελατών στο σύστημα ως μια διαδικασία γέννησης-θανάτου με ρυθμό γεννήσεων λ_n και ρυθμό θανάτου μ. Αν και οι πελάτες είναι περιορισμένα ορθολογικοί, καταρχάς δείχνουμε ότι η ευστάθεια του συστήματος είναι εγγυημένη εφόσον το β είναι πεπερασμένο, όπως αναφέρεται στη παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1.1. *Το παρατηρήσιμο σύστημα εξυπηρέτησης με περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες είναι ευσταθές για $\beta < \infty$, και η κατανομή του πλήθους πελατών στο σύστημα είναι:*

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{k-1})/\mu^k},$$

όπου P_0 είναι η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στη κατάσταση 0, και

$$P_n = \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu^n(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{k-1})/\mu^k)},$$

όπου P_n είναι η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στη κατάσταση n, $n \geq 1$.

Η συνάρτηση κατανομής του μήκους της ουράς γίνεται μη-φραγμένη για $\beta > 0$, αλλά το σύστημα είναι πάντα ευσταθές σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.1.

Παρατηρούμε αριθμητικά ότι, τόσο ο ρυθμός συνωστισμού (utilization) (δηλ. $\rho(p, \beta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n/\mu$) όσο και το αναμενόμενο μήκος της ουράς (δηλ. $q(p, \beta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$) έχουν μια περίπλοκη σχέση με το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας β. Συγκεκριμένα, κανένα από αυτά δεν είναι μονότονο ή μονοκόρυφο ως συνάρτηση του επιπέδου περιορισμένης ορθολογικότητας β. Για να κατανοήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό, ορίζουμε πρώτα το $n_s = [((R-p)\mu)/C]$ ως το κατώφλι του μήκους της ουράς που χρησιμοποιείται από πλήρως ορθολογικούς πελάτες που αποφασίζουν να εισέλθουν στο σύστημα ή όχι. Στη συνέχεια χωρίζουμε τις καταστάσεις του συστήματος σε δύο περιοχές που χρησιμοποιούν το κατώφλι n_s: Η Περιοχή 1 περιλαμβάνει τις καταστάσεις όπου ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι μικρότερος από n_s. Η Περιοχή 2 περιλαμβάνει όλες τις άλλες καταστάσεις, δηλαδή εκείνες όπου ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι μεγαλύτερος από n_s. Όταν οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί, τότε θα εισέλθουν με πιθανότητα 1 στην Περιοχή 1 και με πιθανότητα 0 στην Περιοχή 2. Για κάθε αυστηρά θετικό β, η πιθανότητα εισόδου θα είναι μεταξύ 0 και 1. Άρα, η περιορισμένη ορθολογικότητα στην Περιοχή 1 μειώνει το ρυθμό συνωστισμού utilization (και το αναμενόμενο μήκος ουράς) και αυξάνει το ρυθμό συνωστισμού utilization (και το αναμενόμενο μήκος ουράς) στην Περιοχή 2. Καθώς οι πελάτες γίνονται λιγότερο ορθολογικοί, αυτά τα δύο φαινόμενα συμβαίνουν ταυτόχρονα. Τελικά φαίνεται πως δεν είναι σαφές ποιο αποτέλεσμα κυριαρχεί.

2.1.2 Μη-Παρατηρήσιμη Ουρά

Τώρα θα εξετάσουμε τη μη-παρατηρήσιμη ουρά χρησιμοποιώντας την ίδια δομή με το μοντέλο της Παραγράφου 2.1.1. Η μόνη διαφορά είναι ότι το μήκος της ουράς είναι μη-παρατηρήσιμο στους πελάτες. Δυνητικοί πελάτες φτάνουν σε αυτό το σύστημα σύμφωνα με Διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Επειδή οι πελάτες δεν μπορούν να παρατηρούν την κατάσταση του συστήματος, πρέπει να πάρουν μια απόφαση εκ των προτέρων εάν θα εισέλθουν στο σύστημα ή όχι. Η διαφορά από την παρατηρήσιμη ουρά, είναι ότι κάθε πελάτης πρέπει να σχηματίσει τη δική του πεποίθηση για την κατάσταση του συστήματος, η οποία καθορίζεται από τις στρατηγικές των άλλων πελατών. Υποθέτουμε ότι κάθε πελάτης γνωρίζει όλες τις υποκείμενες παραμέτρους του συστήματος όπως το R, το C, το p, και το μ. Επίσης, ξέρει ότι είναι περιορισμένα ορθολογικός, όπως και ότι όλοι οι άλλοι πελάτες είναι επίσης περιορισμένα ορθολογικοί. Με άλλα λόγια, είναι σε θέση να σχηματίσει το σωστή πεποίθηση για την κατάσταση του συστήματος, την οποία θα χρησιμοποιήσει για να εκτιμήσει τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής του.

Για τη διερεύνηση του συστήματος, αρχικά μας ενδιαφέρει το ποσοστό $\varphi(p, \beta_I) \in [0, 1]$ των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας. Και πάλι, οι πελάτες δεν επιλέγουν να παίξουν με μικτές στρατηγικές. Μόνο από τη σκοπιά ενός εξωτερικού παρατηρητή οι αποφάσεις των πελατών είναι τυχαιοποιημένες. Το καθαρό όφελος ενός πελάτη ή η ωφέλεια της εισόδου του στο σύστημα είναι $U_1 = R - p - CE(w) = R - p - C/(\mu - \varphi(p, \beta_I)\lambda)^+$, όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η *διάσπαση* μιας διαδικασίας Poisson με ρυθμό άφιξης λ εξακολουθεί να είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\varphi(p, \beta_I)\lambda$ και $C/(\mu - \varphi(p, \beta_I)\lambda)^+$ είναι το αναμενόμενο κόστος παραμονής του πελάτη. Ο ρυθμός άφιξης $\varphi(p, \beta_I)\lambda$ στην ουρά θα αναφέρεται ως *πραγματική ζήτηση*. Σύμφωνα με το μοντέλο περιορισμένης ορθολογικότητας στην Παράγραφο 2.1, κάθε πελάτης δεν μπορεί να εκτιμήσει τέλεια τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής του και ως εκ τούτου εισέρχεται στο σύστημα με πιθανότητα $\varphi_I \equiv e^{U_1/\beta_I}/(1 + e^{U_1/\beta_I})$. Σε κατάσταση ισορροπίας, η συνέπεια απαιτεί ότι ο πραγματικός ρυθμός άφιξης στο σύστημα συμπίπτει με τη συμπεριφορά του πελάτη: $\varphi(p, \beta_I) = \varphi_I$. Έτσι, ορίζουμε το σημείο ισορροπίας του μη-παρατηρήσιμου συστήματος αναμονής.

Ορισμός 2.1.1 (*Ποσοστό Πελατών που εισέρχονται στο Σύστημα σε Ισορροπία*). *Λέμε ότι το $\varphi(p, \beta_I)$ είναι το ποσοστό των εισερχόμενων πελατών σε ισορροπία αν ικανοποιεί τα παρακάτω:*

$$\varphi(p, \beta_I) = \frac{e^{(R-p-C/(\mu-\varphi(p,\beta_I)\lambda)^+)/\beta_I}}{1 + e^{(R-p-C/(\mu-\varphi(p,\beta_I)\lambda)^+)/\beta_I}}, \tag{2.2}$$

για $\beta_I > 0$, και

$$\varphi(p, 0) = min\{\varphi_0, 1\},$$

όπου φ_0 ικανοποιεί

$$R - p - \frac{C}{\mu - \varphi_0\lambda} = 0, \tag{2.3}$$

για $\beta_I = 0$.

Όταν $\beta_I > 0$, η Εξίσωση (2.2) δίνει ένα πρόβλημα σταθερού σημείου δεδομένου ότι η έκφραση logit στο δεξί μέρος περιέχει το ποσοστό των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα σε ισορροπία. Όταν $\beta_I = 0$, δηλαδή, οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί, τότε ο ορισμός είναι ακριβώς η συνθήκη ισορροπίας του Hassin (1986) (Σχέση (4.1), σελ. 1189). Είναι δυνατό να μην υπάρχει $\varphi_0 \in [0, 1]$ που να ικανοποιεί τη Σχέση (2.3) και τότε ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων είναι λ επειδή ακόμα κι αν όλοι οι πελάτες αποφασίσουν να εισέλθουν, η αναμενόμενη ωφέλεια κάθε πελάτη εξακολουθεί να είναι αυστηρά θετική. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, έχουμε $\varphi(p, 0) = min\{\mu/\lambda - C/(\lambda(R - p)), 1\}$.

Στη συνέχεια, διερευνούμε αν υπάρχει πάντα σημείο ισορροπίας. Η Πρόταση 2.1.2 δείχνει ότι υπάρχει πάντα ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Πρόταση 2.1.2. *Υπάρχει πάντα ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας στη μη-παρατηρήσιμη ουρά για οποιαδήποτε, πεπερασμένη τιμή p και πεπερασμένο επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας $\beta_I > 0$.*

Μας ενδιαφέρει τώρα πώς το (μοναδικό) σημείο ισορροπίας $\varphi(p, \beta_I)$ συμπεριφέρεται ως συνάρτηση της τιμής p και του επιπέδου περιορισμένης ορθολογικότητας β_I. Για ευκολία, θέτουμε $\bar{p} \equiv R - (2C)/(2\mu - \lambda)$ την τιμή υπό την οποία, κάθε πελάτης λαμβάνει ακριβώς μηδενική ωφέλεια έτσι ώστε το σημείο ισορροπίας του ποσοστού των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα να είναι 0.5 ανεξάρτητα από το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας. Η παρακάτω πρόταση χαρακτηρίζει το ποσοστό των εισερχόμενων πελατών στο συστημα σε κατάσταση ισορροπίας.

Πρόταση 2.1.3. *(i) Αν $p < \bar{p}$, τότε το ποσοστό των εισερχόμενων πελατών στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας $\varphi(p, \beta_I)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του β_I.*

(ii) Αν $p > \bar{p}$, τότε το ποσοστό των εισερχόμενων πελατών στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας $\varphi(p, \beta_I)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του β_I.

(iii) Αν $p = \bar{p}$, τότε το ποσοστό των εισερχόμενων πελατών στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας $\varphi(p, \beta_I) = 0.5$ για οποιοδήποτε β_I.

(iv) Για οποιοδήποτε σταθερό β_I, το ποσοστό των εισερχόμενων πελατών στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας $\varphi(p, \beta_I)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του p.

Βλέποντας το διαισθητικά: όταν η τιμή είναι τόσο χαμηλή που κάθε πελάτης λαμβάνει γνήσια θετική ωφέλεια, το ποσοστό εισερχόμενων πελατών στο σύστημα είναι πάνω από το 0.5. Καθώς το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας αυξάνεται, καλύτερες αποφάσεις λαμβάνονται λιγότερο συχνά, και επομένως το ποσοστό εισερχόμενων πελατών στο σύστημα μειώνεται καθώς οι πελάτες είναι περισσότερο περιορισμένα ορθολογικοί. Είναι ενδιαφέρον ότι, αν η τιμή έχει οριστεί έτσι ώστε κάθε πελάτης να λαμβάνει ακριβώς μηδενική ωφέλεια σε κατάσταση ισορροπίας, τότε η αύξηση του επιπέδου της περιορισμένης ορθολογικότητας δεν έχει καμία επίδραση στο ποσοστό εισερχόμενων πελατών στο σύστημα επειδή οι πελάτες εισέρχονται ή αποχωρούν από το σύστημα με ίσες πιθανότητες ανεξάρτητα από το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας.

Επίσης, είναι σαφές ότι το $\varphi(p, \beta_I)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση της τιμής p από τη Σχέση (2.3), δηλαδή η μεγαλύτερη τιμή πάντα έχει ως αποτέλεσμα χαμηλότερη πιθανότητα εισόδου του πελάτη στο σύστημα, ανεξάρτητα από το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας, που είναι ο «νόμος της ζήτησης» σε αυτήν τη δομή εξυπηρέτησης.

Είναι χρήσιμο να σημειωθεί ότι η μη-παρατηρήσιμη ουρά με περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες είναι ουσιαστικά μια $M/M/1$ ουρά με ρυθμό άφιξης $\varphi(p, \beta_I)\lambda$ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Έτσι, ο ρυθμός συνωστισμού (utilization) είναι $\rho_I(p, \beta_I) \equiv \rho\varphi(p, \beta_I)$ και άρα συμπεριφέρεται το ίδιο με την πιθανότητα εισόδου του πελάτη σε συνάρτηση με το p και το β_I (η οποία έχει αναλυθεί στην Πρόταση 2.1.3). Χρησιμοποιώντας παρόμοια λογική, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε το αναμενόμενο μήκος ουράς $q_I(p, \beta_I) \equiv \varphi(p, \beta_I)\lambda/(\mu - \varphi(p, \beta_I)\lambda)$ ως συνάρτηση του p και του β_I.

2.2 Μεγιστοποίηση Εσόδων Συστήματος

Εως τώρα μελετήσαμε ζητήματα ισορροπίας και δυναμικής των συστημάτων. Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε τα έσοδα που προκύπτουν στα συστήματα αυτά, εστιάζοντας στο πρόβλημα της μεγιστοποίησής τους από την οπτική του διαχειριστή της επιχείρησης.

2.2.1 Παρατηρήσιμη Ουρά

Τα έσοδα ως συνάρτηση της τιμής p και του επιπέδου περιορισμένης ορθολογικότητας $\beta > 0$ είναι

$$\Pi(p,\beta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(R-p-(n+1)C/\mu)/\beta}}{1+e^{(R-p-(n+1)C/\mu)/\beta}} \lambda P_n p.$$

Θυμίζουμε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να κανονικοποιήσουμε το κόστος των εξυπηρετούμενων πελατών στο μηδέν. Όταν οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί ($\beta = 0$), ορίζουμε $\Pi(p,0) \equiv \lim_{\beta\to 0} \Pi(p,\beta)$ για κάθε τιμή p.[1] Στο πλαίσιο με τους πλήρως ορθολογικούς πελάτες, ο Naor (1969) έδειξε ότι η επιλογή της τιμής εκείνης που μεγιστοποιεί τα έσοδα ισοδυναμεί με το να επιλέξει κανείς τον φυσικό αριθμό n για τον οποίο η συνάρτηση εσόδων $\Pi_n = \lambda((1-\rho^n)/(1-\rho^{n+1}))(R - Cn/\mu)$ μεγιστοποιείται, και στην περίπτωση αυτή $p(n) = R - Cn/\mu$. Έστω n_r το εν λόγω σημείο μεγίστου και Π_{n_r} τα μέγιστα έσοδα του συστήματος.

Θέλουμε να συγκρίνουμε τα βέλτιστα έσοδα $\Pi(p^*(\beta),\beta)$ όταν η τιμή που τα μεγιστοποιεί $p^*(\beta)$ είναι σταθερή στην περίπτωση που οι πελάτες είναι οριακά (ελάχιστα) μη-ορθολογικοί, με τα βέλτιστα έσοδα $\Pi_{n_r} \equiv \sup_p \lim_{\beta\to 0} \Pi(p,\beta)$ όταν οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί. Για λόγους ευκολίας θέτουμε $p^* \equiv p^*(0) = R - Cn_r/\mu$ να είναι η τιμή που μεγιστοποιεί τα έσοδα υπό την υπόθεση της πλήρους ορθολογικότητας.

Πρόταση 2.2.1. *Ισχύει ότι $p^*(\beta) < p^*$ και $\Pi(p^*(\beta),\beta)) < \Pi_{n_r}$ όταν το $\beta > 0$ είναι αυστηρά θετικό αλλά αρκετά μικρό.*

Η προηγούμενη πρόταση παύει να ισχύει όταν η τιμή του β γίνει αρκετά μεγάλη (όσο οι πελάτες γίνονται πλήρως μη-ορθολογικοί, το βέλτιστο εισόδημα τείνει στο άπειρο). Η εξήγηση πίσω από την πρόταση αυτή είναι η εξής: Ένα αυστηρά θετικό και μικρό β, αναγκάζει την επιχείρηση να χαμηλώσει γνήσια την τιμή p, σε σχέση με την πλήρη ορθολογικότητα, το οποίο με τη σειρά του έχει ως συνέπεια να αποφέρει λιγότερα έσοδα. Κρατώντας όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές, ένα μικρό αλλά θετικό β, μειώνει γνήσια την αποτελεσματική ζήτηση του συστήματος. Έτσι, μια χαμηλότερη τιμή είναι αναγκαία ώστε να αυξηθεί η αποτελεσματική ζήτηση και κατ' επέκταση να αυξηθούν και τα έσοδα.

Αριθμητικές μέθοδοι υποδεικνύουν ότι τα μέγιστα έσοδα δεν είναι απαραίτητα μονότονα ως προς το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας, και ότι η τιμή που μεγιστοποιεί τα έσοδα ως συνάρτηση του επιπέδου περιορισμένης ορθολογικότητας δύναται να αυξηθεί ή να μειωθεί. Η εξήγηση είναι παρόμοια με αυτή του γεγονότος ότι ο ρυθμός συνωστισμού (utilization) δεν είναι απαραίτητη μονότονη συνάρτηση της περιορισμένης ορθολογικότητας, δεδομένης άλλωστε της άμεσης εξάρτησης των εσόδων και του ρυθμού συνωστισμού (utilization): $\Pi(p,\beta) = \rho(p,\beta)\mu p$.

Ο Αντίκτυπος της Παράβλεψης της Περιορισμένης Ορθολογικότητας. Αν επιλέξουμε να αγνοήσουμε την περιορισμένη ορθολογικότητα, ο διαχειριστής της επιχείρησης θα επιλέξει την τιμή $p^*(0) = R - Cn_r/\mu$. Για την εκτίμηση της απώλειας εσόδων ως αποτέλεσμα της περιορισμένης ορθολογικότητας, εκτελέστηκαν διάφορα αριθμητικά πειράματα. Η στάσιμη κατανομή προσεγγίστηκε περιορίζοντας μια ανέλιξη γεννήσεως-θανάτου σε πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων,

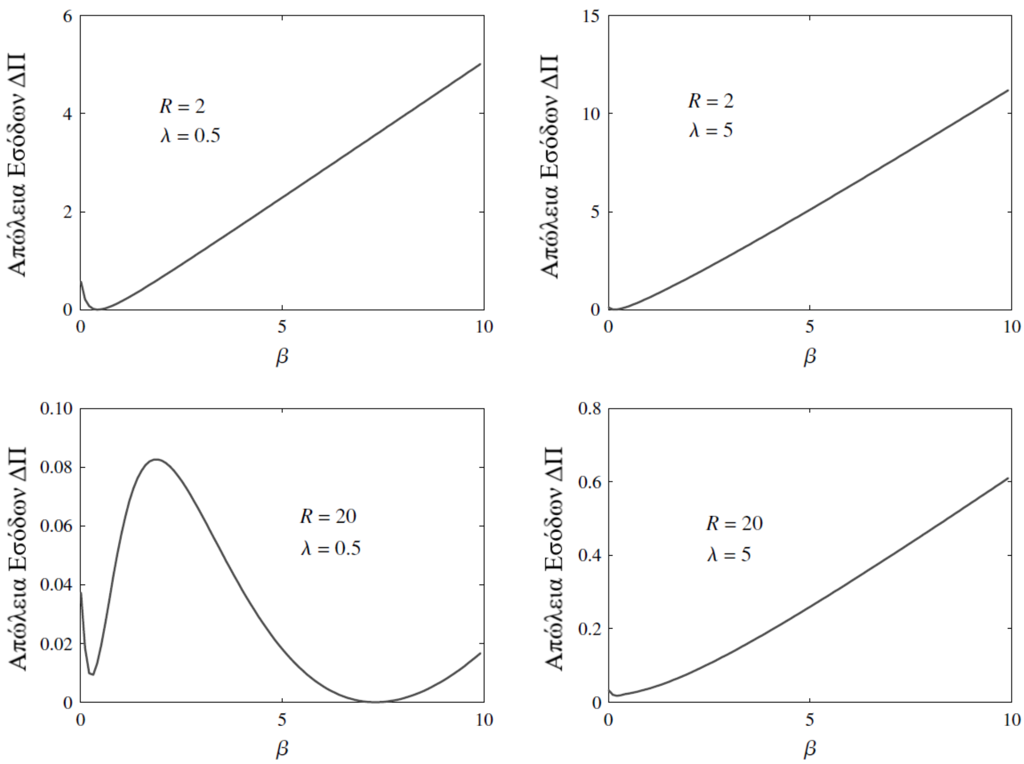
[1] Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι το όριο αυτό υπάρχει.

και σταδιακά αυξάνοντας τον αριθμό των καταστάσεων μέχρις ότου η συνάρτηση των εσόδων να μην εξαρτάται πλέον από το πλήθος τους.

Για την εκτίμηση της επίδρασης του β, του λόγου R/C και του ρυθμού συνωστισμού λ/μ στα έσοδα του συστήματος, κανονικοποιήσαμε με $C = 1$, $\mu = 1$ και αφήσαμε τα R και λ να μεταβάλλονται. Η αριθμητική μελέτη αποσκοπεί και στο να συμπεριλάβει υψηλούς/χαμηλούς ρυθμούς συνωστισμού έναντι υψηλών/χαμηλών απολαβών. Το Σχήμα 2.1 απεικονίζει ένα παράδειγμα όπου $R \in \{2, 20\}$ και $\lambda \in \{0.5, 5\}$.

Παρατηρούμε ότι (α) η απώλεια εσόδων μπορεί να είναι όντως σημαντική (πχ. μεγαλύτερη του 200%), και επίσης δύναται να γίνει αυθαίρετα μεγάλη όσο το β μεγαλώνει, (β) η απώλεια εσόδων δεν είναι απαραίτητα μονότονη ως προς το β.

Για το τελευταίο, θυμίζουμε ότι ούτε ο ρυθμός συνωστισμού, ούτε το αναμενόμενο μήκος ουράς είναι απαραίτητα μονότονα, και επομένως η ερμηνεία που δώσαμε στην Παράγραφο 2.1.1 εφαρμόζεται και εδώ καθώς αυτά τα δύο είναι τα βασικά μέτρα από τα οποία εξαρτώνται τα έσοδα.



Σχήμα 2.1: Απώλεια εσόδων στην παρατηρήσιμη ουρά παραβλέποντας την περιορισμένη ορθολογικότητα ($C = 1$, $\mu = 1$, Απώλεια εσόδων $\Delta\Pi(\beta) \equiv (\Pi(p^*(\beta), \beta) - \Pi(p^*(0), \beta))/\Pi(p^*(0), \beta)$).

2.2.2 Μη-Παρατηρήσιμη Ουρά

Υποθέτουμε ότι ο στόχος της επιχείρησης είναι να επιλέξει τιμή p τέτοια ώστε να μεγιστοποιήσει τα αναμενόμενα έσοδά της $\Pi^I(p,\beta_I) \equiv p\varphi(p,\beta_I)\lambda$, όπου $\varphi(p,\beta_I)\lambda$ είναι ο αποτελεσματικός ρυθμός ζήτησης προς το σύστημα.

Ξεκινάμε μελετώντας τη συμπεριφορά των εσόδων $\Pi^I(p,\beta_I)$ σαν συνάρτηση της τιμής p και του επιπέδου περιορισμένης ορθολογικότητας β_I. Τονίζουμε ότι το $\Pi^I(p,\beta_I)$ αποτελεί γραμμικό μετασχηματισμό του $\varphi(p,\beta_I)$, και επομένως η Πρόταση 2.1.3 περιγράφει το πώς συμπεριφέρονται τα έσοδα $\Pi^I(p,\beta_I)$ ως συνάρτηση του β_I, για οποιαδήποτε δεδομένη τιμή p.

Εν συνεχεία εξετάζουμε τη συμπεριφορά των εσόδων $\Pi^I(p,\beta_I)$ σαν συνάρτηση της τιμής p για κάθε σταθερό επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας β_I. Θέτουμε ως $\beta_0 \equiv R/2 - 2C\mu/(2\mu-\lambda)^2$ να είναι το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας για το οποίο η βέλτιστη τιμή ισούται με $p^*(\beta_0) = \bar{p}$. Επομένως, στο επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας β_0, κάθε πελάτης εισπράττει μηδενική αναμενόμενη ωφέλεια όταν εισέρχεται στο σύστημα υπό την τιμή p που μεγιστοποιεί τα έσοδα.

Πρόταση 2.2.2. *(i) Για οποιοδήποτε επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας β_I, τα έσοδα $\Pi^I(p,\beta_I)$ είναι μονοκόρυφη συνάρτηση της τιμής p, και άρα υπάρχει μοναδική τιμή $p^*(\beta_I)$ η οποία μεγιστοποιεί τα έσοδα $\Pi^I(p,\beta_I)$.*

(ii) Η βέλτιστη τιμή $p^*(\beta_I)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του επιπέδου περιορισμένης ορθολογικότητας β_I, όταν $\beta_I \in [\max\{\beta_0, 0\}, \infty)$.

Από αυτή την πρόταση, προκύπτει ότι η τιμή μεγιστοποίησης των εσόδων $p^*(\beta_I)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του β_I, όταν $\beta_I \in [0,\infty)$, εάν το R είναι αρκετά μικρό. Όταν η βέλτιστη τιμή επάγει κάθε πελάτης να λαμβάνει αυστηρά αρνητική αναμενόμενη ωφέλεια σε ισορροπία, ένα υψηλότερο β_I θα ωθούσε την επιχείρηση να αυξήσει την τιμή. Ο λόγος είναι ότι το υψηλότερο β_I οδηγεί σε υψηλότερη πιθανότητα εισόδου για μια σταθερή τιμή, σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.3(ii). Ως εκ τούτου, όταν η βέλτιστη τιμή είναι αρκετά υψηλή (έτσι ώστε κάθε πελάτης να λαμβάνει αυστηρά αρνητική αναμενόμενη ωφέλεια σε ισορροπία), τότε η αύξηση του β_I οδηγεί σε ακόμη υψηλότερες βέλτιστες τιμές. Ωστόσο, όταν η βέλτιστη τιμή είναι χαμηλή έτσι ώστε κάθε πελάτης να λαμβάνει αυστηρά θετική ωφέλεια, τότε η αύξηση του β_I μπορεί να οδηγήσει σε χαμηλότερες βέλτιστες τιμές, όπου ο συμβιβασμός της επιχείρησης αφορά το όφελος των υψηλότερων τιμών έναντι της απώλειας λόγω χαμηλότερης αποτελεσματικής ζήτησης. Η Πρόταση 2.2.2 παραπάνω χαρακτηρίζει εν μέρει ποια από αυτές τις επιδράσεις κυριαρχεί.

Τώρα είμαστε σε θέση να εξετάσουμε την επίδραση του επιπέδου της περιορισμένης ορθολογικότητας στα βέλτιστα έσοδα $\Pi^I(p^*(\beta_I),\beta_I)$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Περιβάλλουσας, λαμβάνουμε το ακόλουθο άμεσο Πόρισμα 2.2.1 της Πρότασης 2.1.3.

Πόρισμα 2.2.1. *(i) Αν $p^*(\beta_0) > \bar{p}$, τότε $d\Pi^I(p^*(\beta_I),\beta_I)/d\beta_I\big|_{\beta_I=\beta_0} > 0$.*

(ii) Αν $p^*(\beta_0) < \bar{p}$, τότε $d\Pi^I(p^*(\beta_I),\beta_I)/d\beta_I\big|_{\beta_I=\beta_0} < 0$.

(iii) Αν $p^*(\beta_0) = \bar{p}$, τότε $d\Pi^I(p^*(\beta_I),\beta_I)/d\beta_I\big|_{\beta_I=\beta_0} = 0$.

Από την Πρόταση 2.2.2 και το Πόρισμα 2.2.1, ξέρουμε ότι τα βέλτιστα έσοδα $\Pi^I(p^*(\beta_I),\beta_I)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του επιπέδου περιορισμένης ορθολογικότητας β_I, όταν β_I είναι αρκετά μεγάλο. Επομένως, η επιχείρηση μπορεί να εκμεταλευτεί το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας προς όφελός της ώστε να μεγιστοποιήσει τα έσοδά της.

Τέλος, μας ενδιαφέρει και πώς ο ρυθμός άφιξης των πελατών επηρεάζει τα έσοδα (το οποίο είναι χρήσιμο για τη συνέχεια). Επίσης έχουμε από τον Hassin (1986) για πελάτες που είναι πλήρως ορθολογικοί, ότι υπάρχει κάποιο λ_0, ώστε όταν $\lambda > \lambda_0$, η συνάρτηση των εσόδων είναι ανεξάρτητη από το ρυθμό άφιξης λ. Είναι ενδιαφέρον ότι στη περίπτωσή μας με τους περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες, έχουμε ότι ένας υψηλότερος ρυθμός άφιξης λ οδηγεί πάντα σε αυστηρά υψηλότερα έσοδα.

Πρόταση 2.2.3. *Για οποιαδήποτε σταθερή τιμή p και επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας $\beta_I > 0$, η πιθανότητα εισόδου σε κατάσταση ισορροπίας είναι γνησίως φθίνουσα και τα έσοδα είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του ρυθμού άφιξης λ.*

Το αποτέλεσμα ότι, υψηλότεροι ρυθμοί άφιξης οδηγούν σε χαμηλότερη πιθανότητα εισόδου σε κατάσταση ισορροπίας, δεν προκαλεί έκπληξη γιατί περισσότερη συμφόρηση αναγκάζει κάθε πελάτη να χαμηλώσει τη δική του πιθανότητα εισόδου. Ωστόσο, το αποτέλεσμα ότι περισσότερες αφίξεις οδηγούν πάντα σε περισσότερα έσοδα μπορεί να προκαλεί έκπληξη. Η οριακή αύξηση των εσόδων πρέπει να είναι ανάλογη με την οριακή μείωση της πιθανότητας εισόδου, δεδομένης της συνθήκης ισορροπίας (2.2). Ως εκ τούτου, η αποτελεσματική ζήτηση $\varphi(p, \beta_I)\lambda$ αυξάνεται ως συνάρτηση του λ. Η Πρόταση 2.2.3 υπονοεί ότι για οποιαδήποτε τιμή p, όχι απαραίτητα τη βέλτιστη τιμή, υψηλότεροι ρυθμοί άφιξης οδηγούν σε υψηλότερα έσοδα. Συγκεκριμένα, υψηλότεροι ρυθμοί άφιξης οδηγούν σε υψηλότερα βέλτιστα έσοδα. Ένα τέτοιο εύρημα έρχεται σε πλήρη αντίθεση με τη περίπτωση πλήρους ορθολογικότητας, του Hassin (1986).

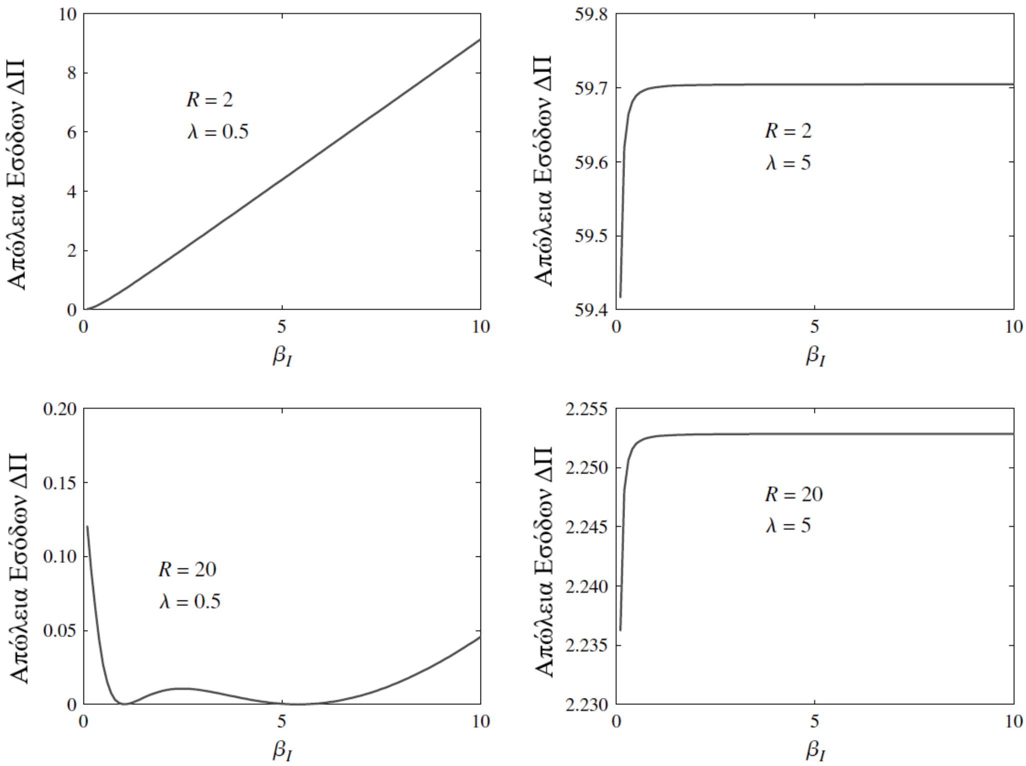
Ο Αντίκτυπος της Παράβλεψης της Περιορισμένης Ορθολογικότητας. Τελικά, μας ενδιαφέρει το αποτέλεσμα της παράβλεψης της περιορισμένης ορθολογικότητας ενώ οι πελάτες είναι στην πραγματικότητα περιορισμένα ορθολογικοί. Αν επιλέξουμε να αγνοήσουμε την περιορισμένη ορθολογικότητα, ο διαχειριστής της επιχείρησης θα χρεώσει ορθολογικά την τιμή $p^*(0)$, η οποία είναι γενικά διαφορετική από την τιμή $p^*(\beta_I)$ η οποία μεγιστοποιεί τα έσοδα. Επομένως,

$$\Pi^I(p^*(0), \beta_I) \equiv p^*(0)\varphi(p^*(0), \beta_I)\lambda \leq \Pi^I(p^*(\beta_I), \beta_I).$$

Ενδιαφερόμαστε για την απώλεια εσόδων

$$\Delta\Pi^I(\beta_I) \equiv (\Pi^I(p^*(\beta_I), \beta_I) - \Pi^I(p^*(0), \beta_I))/\Pi^I(p^*(0), \beta_I)$$

ως αποτέλεσμα αυτής της παράβλεψης της περιορισμένης ορθολογικότητας. Ως παράδειγμα, χρησιμοποιούμε τις ίδιες παραμέτρους όπως πριν. Το Σχήμα 2.2 δείχνει ότι η απώλεια εσόδων μπορεί να είναι μη τετριμμένη (π.χ. 200%). Γενικά, η απώλεια εσόδων δεν είναι απαραίτητα μονότονη ως συνάρτηση του επιπέδου περιορισμένης ορθολογικότητας β_I. Παρόμοια με τη παρατηρήσιμη ουρά, αυτή η παρατήρηση θα μπορούσε να οφείλεται στο γεγονός ότι η τιμή μεγιστοποίησης των εσόδων δεν είναι απαραίτητα μονότονη συνάρτηση του β_I (Πρόταση 2.2.2). Ως εκ τούτου, όταν το β_I αυξάνεται, η τιμή μεγιστοποίησης εσόδων $p^*(\beta_I)$ και η $p^*(0)$ μπορεί να έρθουν πιο κοντά μεταξύ τους, κάτι που θα είχε ως αποτέλεσμα μικρότερη απώλεια εσόδων' τη περίπτωση που $R = 20$, $\lambda = 0.5$ και $\beta_I = 5$ απεικονίζει αυτό το σημείο στο Σχήμα 2.2. Ωστόσο, επειδή το β_I είναι μεγαλύτερο από ένα συγκεκριμένο κατώφλι, η απώλεια είναι σημαντική. Στην πραγματικότητα, $\lim_{\beta_I \to \infty} \Delta\Pi^I(\beta_I) = \infty$, δηλ.η απώλεια εσόδων μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλη όσο το β_I είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι $\lim_{\beta_I \to \infty} p^*(\beta_I) = \infty$ (δείτε την συνθήκη πρώτης τάξης στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.2 στο Παράρτημα Α) και $\lim_{\beta_I \to \infty} \varphi(p, \beta_I) = 0.5$.



Σχήμα 2.2: Απώλεια εσόδων στη μη-παρατηρήσιμη ουρά παραβλέποντας την περιορισμένη ορθολογικότητα ($C = 1$, $\mu = 1$, Απώλεια εσόδων $\Delta\Pi^I(\beta_I) \equiv (\Pi^I(p^*(\beta_I), \beta_I) - \Pi^I(p^*(0), \beta_I))/\Pi^I(p^*(0), \beta_I)$).

2.3 Μεγιστοποίηση Κοινωνικής Ευημερίας

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα από τη σκοπιά ενός 'κοινωνικού σχεδιαστή' ο οποίος ενδιαφέρεται να μεγιστοποιήσει τη 'κοινωνική ευημερία'. Θα ερευνήσουμε τον αντίκτυπο της περιορισμένης ορθολογικότητας στην 'κοινωνική ευημερία', όταν η τιμή είναι δεδομένη αλλά και όταν ο σχεδιαστής χρεώνει την τιμή που μεγιστοποιεί την 'κοινωνική ευημερία'.

2.3.1 Παρατηρήσιμη Ουρά

Σε πολλές εφαρμογές, η τιμή καθορίζεται ή επηρεάζεται από άλλα ζητήματα όπως οι συνθήκες της αγοράς, ο ανταγωνισμός, ή κάτι άλλο. Υπάρχουν εφαρμογές όπου η βελτιστοποίηση πάνω στην τιμή ή ακόμα και η χρέωση μιας τιμής μπορεί να μην είναι εφικτά (για παράδειγμα, τέλη διοδίων σε δημόσιους δρόμους, διανομή τροφίμων σε φυσικές καταστροφές κ.τ.λ.). Αρχικά μελετάμε πόσο η περιορισμένη ορθολογικότητα επηρεάζει την κοινωνική ευημερία για μια δεδομένη τιμή. Παρατηρούμε ότι η σταθερή τιμή p εμφανίζεται πάντα ως $R-p$ στη Σχέση (2.1). Για ευκολία σύγκρισης με τα αποτελέσματα στη κλασική εργασία του Naor (1969) και για ευκολία στις πράξεις, υποθέτουμε ότι $p=0$. Ωστόσο, τα αποτελέσματα γενικεύονται και στην περίπτωση όπου η τιμή είναι μη μηδενική. Μπορούμε να εξάγουμε τη συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας ως εξής:

$$W(\beta) \equiv W(p,\beta)|_{p=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n R - \sum_{n=0}^{\infty} n P_n C. \tag{2.4}$$

Ο πρώτος όρος στη Σχέση (2.4) είναι η (μακροπρόθεσμη) μέση αμοιβή και ο δεύτερος όρος είναι το μέσο κόστος παραμονής. Σημειώστε ότι εάν οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί, δηλ. $\beta=0$, τότε $P_n = 1$ για $n = 0,1,\ldots,[R\mu/C]-1$ και $P_n = 0$ για $n > [R\mu/C]-1$, οπότε το μοντέλο μας ανάγεται στο μοντέλο του Naor (1969). Για να συγκρίνουμε την κοινωνική ευημερία $W(\beta)$ με την $W(0)$, πρώτα ονομάζουμε $n_s = [R\mu/C]$ το κατώφλι που χρησιμοποιείται από πλήρως ορθολογικούς πελάτες που αποφασίζουν να καθίσουν στην ουρά ή όχι και n_0 το ισοδύναμο κατώφλι από τη σκοπιά του κοινωνικού σχεδιαστή. Ο Naor (1969) δείχνει ότι $n_s \geq n_0$ δηλαδή, οι πελάτες που ενδιαφέρονται για το συμφέρον τους συνήθως κάνουν το σύστημα πιο συμφορημένο από το κοινωνικά βέλτιστο επίπεδο.

Διαισθητικά, η περιορισμένη ορθολογικότητα μπορεί να δημιουργήσει δύο επιπτώσεις στην κοινωνική ευημερία: θετική επίπτωση (δηλ. βελτίωση της ευημερίας) και αρνητική (δηλαδή, μείωση της ευημερίας). Για να καταλάβουμε πώς αυτές οι δύο επιπτώσεις μπαίνουν στο παιχνίδι, χωρίζουμε τις καταστάσεις του συστήματος σε τρεις περιοχές χρησιμοποιώντας τα δύο κατώφλια n_s και n_0: Η Περιοχή 1 περιλαμβάνει τις καταστάσεις όταν ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι μικρότερος από n_0. Η Περιοχή 2 περιλαμβάνει τις καταστάσεις όταν ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι μεγαλύτερος από n_0 αλλά μικρότερος από n_s και η Περιοχή 3 περιλαμβάνει όλες τις άλλες καταστάσεις (δηλ όταν ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι μεγαλύτερος από n_s). Όταν οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί, οι πελάτες θα εισέλθουν με πιθανότητα 1 στις Περιοχές 1 και 2 και 0 στην Περιοχή 3. Υπενθυμίζουμε ότι για τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας, οι πελάτες πρέπει να εισέλθουν με πιθανότητα 1 στην Περιοχή 1 και 0 στις Περιοχές 2 και 3. Ωστόσο, για κάθε αυστηρά θετικό επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας, η πιθανότητα εισόδου είναι μεταξύ 0 και 1. Ως εκ τούτου, η κοινωνική ευημερία θα μειωθεί στις Περιοχές 1 και 3, αλλά θα αυξηθεί στην Περιοχή 2 σε σύγκριση με τη περίπτωση πλήρους ορθολογικότητας. Καθώς οι πελάτες γίνονται περισσότερο μη-ορθολογικοί, αυτά τα αποτελέσματα λαμβάνουν χώρα ταυτόχρονα, και φαίνεται εκ των προτέρων ασαφές ποιο αποτέλεσμα θα είχε κυριαρχήσει. Αν και η Σχέση (2.4) παρουσιάζει έναν πλήρη χαρακτηρισμό της κοινωνικής ευημερίας ως προς το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας β, η εξάρτηση είναι αρκετά πολύπλοκη. Έτσι, ξεκινάμε αναλύοντας την κοινωνική ευημερία $W(\beta)$ στη γειτονιά του μηδέν. Ενδιαφερόμαστε για τη σχέση μεταξύ $W(\beta)$ και

$W(0)$ όταν το β είναι αρκετά μικρό. Αποδεικνύεται ότι είμαστε σε θέση να χαρακτηρίσουμε πλήρως τις συνθήκες στις οποίες το ένα αποτέλεσμα κυριαρχεί έναντι του άλλου. Έχουμε τις εξής απλές ανισότητες που δείχνουν ότι η κοινωνική ευημερία αυξάνεται ή μειώνεται όσο οι πελάτες γίνονται ελαφρώς περιορισμένα ορθολογικοί.

Πρόταση 2.3.1. *Αν οποιαδήποτε από τις παρακάτω συνθήκες ικανοποιείται,*

(1) $n_s < R\mu/C - 1/2$,

(2) $n_s = n_0$,

(3) $n_s = R\mu/C - 1/2$ *και* $\rho > 1$,

τότε $W(\beta) < W(0)$ *όταν* $\beta > 0$ *είναι αρκετά μικρό. Διαφορετικά,* $W(\beta) > W(0)$ *όταν* $\beta > 0$ *είναι αρκετά μικρό.*

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.1, εάν κάποια από τις παρακάτω συνθήκες ικανοποιείται,

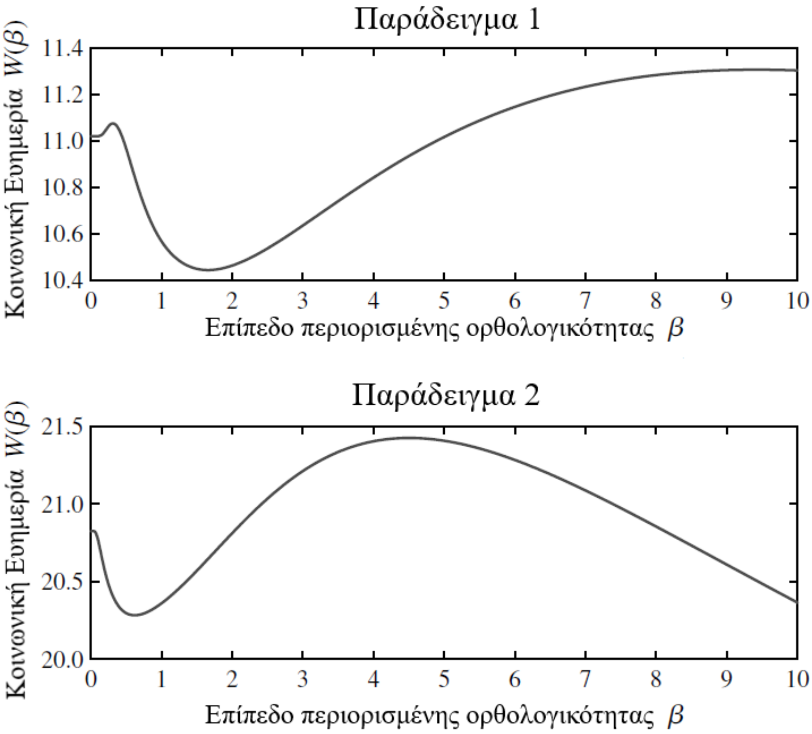
(a) $n_s > n_0$, και $n_s > R\mu/C - 1/2$, και

(b) $n_s > n_0, n_s = R\mu/C - 1/2$ και $\rho \leq 1$,

τότε ένα γνήσια θετικό και μικρό β βελτιώνει γνήσια την κοινωνική ευημερία. Η εύρεση μιας απλής, επαρκούς και αναγκαίας συνθήκης για $n_s > n_0$ είναι δύσκολη. Ωστόσο, το Λήμμα EC.5 στο παράρτημα των Huang et al. (2012) δείχνει ότι οποιαδήποτε από τις παρακάτω δύο συνθήκες είναι επαρκής για $n_s > n_0$: (1) $\rho > 1$ και $n_s > 1$ και (2) $\sqrt{2} - 1 < \rho < 1$ και $n_s > 2$. Με άλλα λόγια, σε σύγκριση με πλήρως ορθολογικούς πελάτες, οι περιορισμένα ορθολογικοί πελάτες κάνουν σφάλματα, είτε εισέρχοντας σε ένα πιο συμφορημένο σύστημα είτε αποχωρώντας όταν η συμφόρηση είναι χαμηλή. Αν και το πρώτο είναι επιζήμιο για την κοινωνική ευημερία, το τελευταίο μπορεί να είναι ευεργετικό. Η κοινωνική ευημερία μπορεί έτσι να βελτιωθεί ανάλογα με το ποια από αυτές τις επιδράσεις κυριαρχεί. Στην Πρόταση 2.3.1, παρέχουμε έναν απλό χαρακτηρισμό αυτής της διχοτόμησης. Αυτό το αποτέλεσμα φαίνεται να είναι εντυπωσιακό: αν και η περιορισμένη ορθολογικότητα συνδέεται συνήθως με μη-βέλτιστες αποφάσεις, μπορεί να αποφέρει καλύτερα αποτελέσματα για την κοινωνία συνολικά. Αυτό οφείλεται στις εξωτερικότητες που επάγουν οι περιορισμένα ορθολογικοί πελάτες στο σύστημα.

Όπως συζητήσαμε πριν, ο χαρακτηρισμός της κοινωνικής ευημερίας ως συνάρτησης του επιπέδου της περιορισμένης ορθολογικότητας είναι δύσκολος λόγω των περίπλοκων 'επιδράσεων' της εισόδου πελατών που προέρχονται από τις τρεις περιοχές ταυτόχρονα όσο οι πελάτες γίνονται περισσότερο μη-ορθολογικοί. Για να κατανοήσουμε την κοινωνική ευημερία ως συνάρτηση του επιπέδου περιορισμένης ορθολογικότητας, πραγματοποιούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα. Για να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση της κοινωνικής ευημερίας δεν είναι απαραίτητα μονοκόρυφη σε ένα εύλογο εύρος της περιορισμένης ορθολογικότητας, χρησιμοποιούμε σκόπιμα διαφορετικά σύνολα παραμέτρων. Στο πρώτο παράδειγμα, οι παράμετροι είναι $R = 14.93, C = 7, \mu = 3$ και $\lambda = 5$, έτσι ώστε $n_s = 6 > R\mu/C - 1/2 = 5.8986$.

Όπως φαίνεται στο γράφημα στο επάνω πλαίσιο του Σχήματος 2.3, η κοινωνική ευημερία αυξάνεται γνήσια αρχικά όπως προβλέπεται από την Πρόταση 2.3.1' όμως μειώνεται και μετά αυξάνεται και πάλι όταν οι πελάτες γίνονται περισσότερο μη-ορθολογικοί. Στο δεύτερο παράδειγμα, οι παράμετροι είναι $R = 16, C = 7, \mu = 3$ και $\lambda = 2.6$, έτσι ώστε $v_s = 6.8571$ και $n_s = 6 < R\mu/C - 1/2 = 6.3571$. Όπως απεικονίζεται στο γράφημα στο κάτω πλαίσιο του Σχήματος 2.3, η κοινωνική ευημερία αρχικά μειώνεται όπως προβλέπεται από την Πρόταση 2.3.1' όμως, αυξάνεται όσο το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας γίνεται μεγαλύτερο και μειώνεται και πάλι όσο το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας αυξάνει περαιτέρω. Έτσι, παρόλο που η κοινωνική ευημερία συμπεριφέρεται καλά για ένα αυστηρά θετικό και μικρό β, δεν διατηρεί ιδιότητες όπως κυρτότητα/κοιλότητα ή ακόμα και μονοκόρυφη. Αυτό το αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με τη μη-παρατηρήσιμη ουρά όπου η κοινωνική ευημερία είναι μονοκόρυφη ως προς το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας.



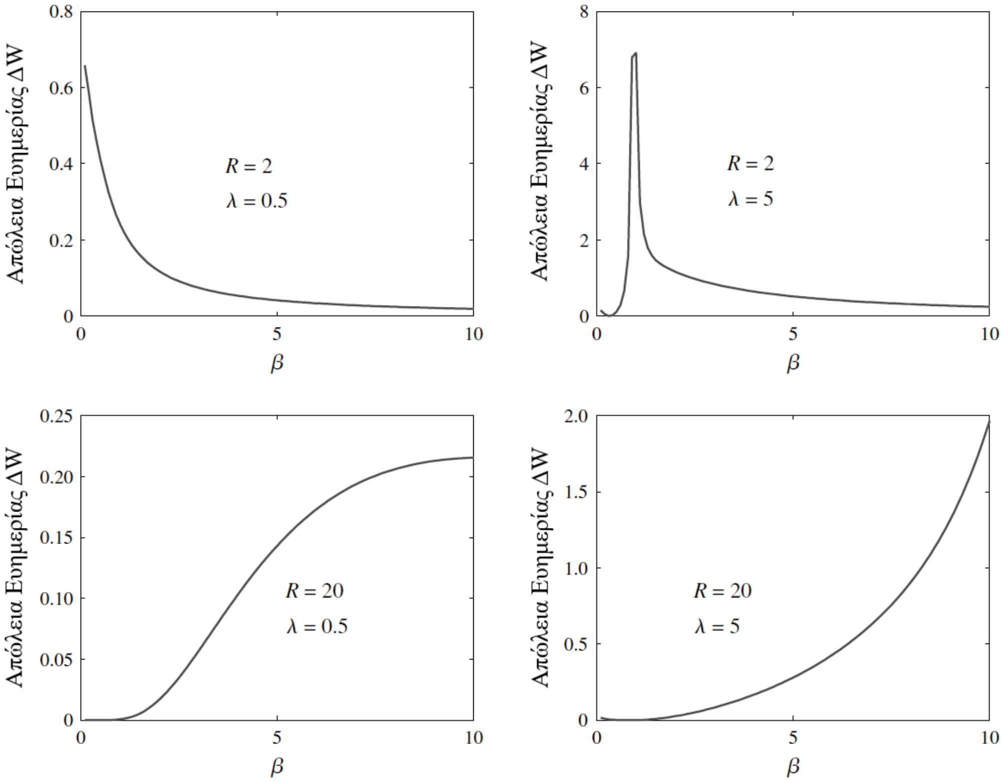
Σχήμα 2.3: Καθολική συμπεριφορά της κοινωνικής ευημερίας: Παράδειγμα 1 ($R = 14.93$, $C = 7$, $\mu = 3$, $\lambda = 5$, $n_s = 6 > (R\mu)/C - 1/2 = 5.8986$) και Παράδειγμα 2 ($R = 16$, $C = 7$, $\mu = 3$, $\lambda = 2.6$, $v_s = 6.8571$, $n_s = 6 < (R\mu)/C - 1/2 = 6.3571$).

Έχουμε αναλύσει τον αντίκτυπο της περιορισμένης ορθολογικότητας στην κοινωνική ευημερία για μία δεδομένη τιμή. Ωστόσο, ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' μπορεί να είναι σε θέση να χρεώσει αυθαίρετα μια τιμή για τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας. Τώρα ερευνούμε την επίπτωση της περιορισμένης ορθολογικότητας στην κοινωνική ευημερία εάν ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' μπορεί να ρυθμίσει το σύστημα με τη βέλτιστη τιμή. Μας ενδιαφέρει αν η περιορισμένη ορθολογικότητα αυξάνει την κοινωνική ευημερία ή τη μειώνει. Ορίζουμε τη συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας $W(p, \beta)$ όταν ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' χρεώνει την τιμή p και το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας των πελατών είναι β. Προφανώς, η κοινωνική ευημερία $W(p, \beta)$ μπορεί να εκφραστεί με παρόμοιο τρόπο όπως στη Σχέση (2.4). Ο Naor (1969) δείχνει ότι με την επιβολή διοδίων ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' μπορεί να επιτύχει το κοινωνικό βέλτιστο όταν οι πελάτες είναι απολύτως ορθολογικοί. Συγκεκριμένα, εάν ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' χρεώνει οποιαδήποτε τιμή $p^* \in (R - C(n_0 + 1)/\mu, R - Cn_0/\mu]$, τότε η μέγιστη κοινωνική ευημερία $W^*(0) \equiv \sup_p W(p, 0)$ μπορεί να επιτευχθεί. Μελετάμε αν η βέλτιστη κοινωνική ευημερία $W^*(0)$ μπορεί να επιτευχθεί προσθέτοντας περιορισμένη ορθολογικότητα στους πελάτες. Δείχνουμε ότι όταν έχουμε περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες, η βέλτιστη κοινωνική ευημερία $W^*(0)$ δεν μπορεί ποτέ να επιτευχθεί, όπως αναφέρεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.3.2. *Για οποιαδήποτε τιμή $p \in \mathbb{R}$ που χρεώνεται στους πελάτες, η κοινωνική ευημερία $W(p, \beta)$ είναι γνήσια μικρότερη από τη βέλτιστη κοινωνική ευημερία (της υπόθεσης πλήρους ορθολογικότητας) όταν β είναι γνήσια θετικό, δηλ. $W(p, \beta) < W^*(0)$ για $\beta > 0$.*

Αυτή η πρόταση δείχνει ότι στην περίπτωση της περιορισμένης ορθολογικότητας η κοινωνική ευημερία είναι πάντα μικρότερη από την αντίστοιχη βέλτιστη της υπόθεσης της πλήρους ορθολογικότητας. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με (α) την εργασία του Naor (1969), όπου η επιβολή διοδίων επιτυγχάνει τη κοινωνικά βέλτιστη ευημερία, (β) το αποτέλεσμα στην Πρόταση 2.3.1 ότι ένα αυστηρά θετικό και μικρό β μπορεί να αυξήσει την κοινωνική ευημερία όταν χρεώνεται μια αυθαίρετη τιμή (όταν ο διαχειριστής της επιχείρησης χρεώνει τη βέλτιστη τιμή, τότε προκύπτει μόνο η περίπτωση (2) της Πρότασης 2.3.1) και (γ) το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.3.4 της παρατηρήσιμης ουράς όπου εκεί μπορεί να μην υπάρχει καμία απώλεια ευημερίας λόγω περιορισμένης ορθολογικότητας. Αυτό προκύπτει από τα εξής: όταν οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί, ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' μπορεί πάντα να ρυθμίσει το σύστημα χρεώνοντας μια τιμή για να επιτύχει τη κοινωνική βελτιστοποίηση $W^*(0)$. Ωστόσο, κάθε περιορισμένα ορθολογικός πελάτης τυχαιοποιεί, με μη εκφυλισμένες πιθανότητες, να εισέλθει ή να αποχωρήσει από το σύστημα. Σε αυτή την περίπτωση, ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' χάνει τον ακριβή έλεγχο των αποφάσεων εισόδου των πελατών, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα η περιορισμένη ορθολογικότητα να μειώνει την αποτελεσματικότητα της ρύθμισης των τιμών. Φυσικά, εάν η επιχείρηση μπορεί να εφαρμόσει τιμή η οποία εξαρτάται από τη κατάσταση του συστήματος, τότε ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' μπορεί να επιτύχει τη βέλτιστη κοινωνική ευημερία $W^*(0)$, ακόμη και με την παρουσία περιορισμένης ορθολογικότητας. Από τις αριθμητικές μας μελέτες, διαπιστώνουμε ότι μπορεί να είναι πολλές οι τιμές που μεγιστοποιούν την κοινωνική ευημερία για δεδομένο επιπέδο περιορισμένης ορθολογικότητας. Δεύτερον, η βέλτιστη κοινωνική ευημερία δεν είναι απαραίτητα μονότονη ως συνάρτηση του επιπέδου της περιορισμένης ορθολογικότητας. Η εξήγηση της μη-μονότονης συμπεριφοράς είναι παρόμοια με αυτήν για την γενική μη-μονότονη συμπεριφορά της συνάρτησης κοινωνικής ευημερίας ως προς β: η περιορισμένη ορθολογικότητα έχει θετική και αρνητική επίδραση στην ευημερία ταυτόχρονα.

Ο Αντίκτυπος της Παράβλεψης της Περιορισμένης Ορθολογικότητας. Χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η περιορισμένη ορθολογικότητα των πελατών, ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' θα επιλέξει μια τιμή στο διάστημα $(R - C(n_0+1)/\mu, R - Cn_0/\mu]$. Μας ενδιαφέρει η απώλεια ευημερίας που προκύπτει από τη περιορισμένη ορθολογικότητα. Χρησιμοποιώντας το ίδιο παράδειγμα όπως στην περίπτωση της μεγιστοποίησης εσόδων, το Σχήμα 2.4 δείχνει την απώλεια ευημερίας όταν η επιχείρηση χρεώσει την τιμή $R - Cn_0/\mu$. Και πάλι, παρατηρούμε μη-τετριμμένα την απώλεια ευημερίας (πάνω από 60% για παράδειγμα). Η διαίσθηση για τη μη-μονότονη συμπεριφορά είναι παρόμοια με την εξήγηση που δώσαμε για την καθολική μη-μονότονη συμπεριφορά της συνάρτησης κοινωνικής ευημερίας όταν $p = 0$: καθώς αυξάνεται το β, η θετική και η αρνητική επίδραση στην ευημερία συμβαίνει ταυτόχρονα.



Σχήμα 2.4: Απώλεια ευημερίας στην παρατηρήσιμη ουρά παραβλέποντας την περιορισμένη ορθολογικότητα ($C = 1$, $\mu = 1$, Απώλεια ευημερίας $\Delta W(\beta) \equiv (W(max\{0, p^*_W(\beta)\}, \beta) - W(p^*(0), \beta))/W(p^*(0), \beta)$).

2.3.2 Μη-Παρατηρήσιμη Ουρά

Για οποιαδήποτε τιμή p και επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας β, η συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας συμβολίζεται ως

$$W^I(\varphi(p,\beta_I)) \equiv \varphi(p,\beta_I)\lambda R - \frac{\varphi(p,\beta_I)\lambda}{\mu - \varphi(p,\beta_I)\lambda}C. \tag{2.5}$$

Για ευκολία, μπορούμε να παραλείψουμε στον συμβολισμό την εξάρτηση από το $\varphi(p,\beta_I)$ και να γράψουμε $W^I(p,\beta_I)$. Ο πρώτος όρος της Σχέσης (2.5) είναι το μέσο όφελος που οι πελάτες λαμβάνουν από το σύστημα, και ο δεύτερος όρος είναι το μέσο κόστος παραμονής που επιβαρύνει τους πελάτες. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή p επηρεάζει την κοινωνική ευημερία μόνο έμμεσα μέσω της πιθανότητας εισόδου σε ισορροπία $\varphi(p,\beta_I)$. Πρώτα, παρατηρούμε ότι η κοινωνική ευημερία $W^I(\varphi(p,\beta_I))$ είναι γνήσια κοίλη συνάρτηση του $\varphi(p,\beta_I)$ (Λήμμα EC.2 στο παράρτημα των Huang et al. 2012). Συνδυάζοντας αυτό το γεγονός με τον χαρακτηρισμό της πιθανότητας εισόδου σε ισορροπία $\varphi(p,\beta_I)$, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε πώς η κοινωνική ευημερία συμπεριφέρεται ως συνάρτηση του επιπέδου της περιορισμένης ορθολογικότητας στην Πρόταση 2.3.3.

Από την Πρόταση 2.2.2, μπορεί κανείς να συνάγει ότι $p^*(0) = R(1-\sqrt{C/(\mu R)})$. Σημειώστε ότι όταν οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί, η τιμή μεγιστοποίησης της ευημερίας και η τιμή μεγιστοποίησης των εσόδων συμπίπτει.

Πρόταση 2.3.3. *(i) Αν $p=\bar{p}$, τότε η κοινωνική ευημερία $W^I(\varphi(p,\beta_I))$ είναι σταθερή για $\beta_I \geq 0$.*

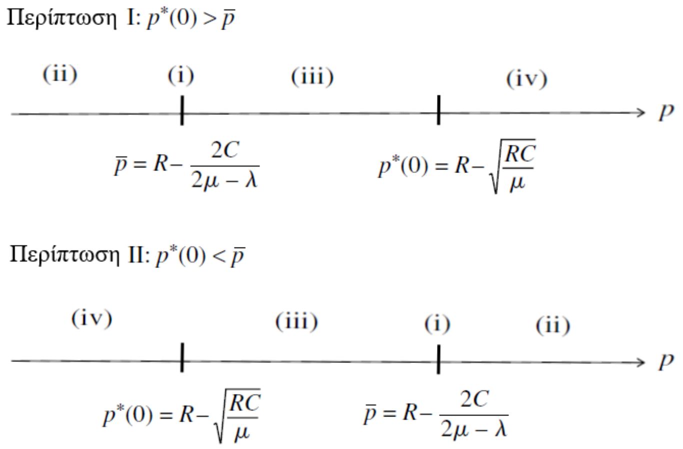
(ii) Αν $[p^*(0)-\bar{p}][p-\bar{p}] \leq 0$ και $p \neq \bar{p}$, τότε η κοινωνική ευημερία $W^I(\varphi(p,\beta_I))$ είναι γνησίως αύξουσα για $\beta_I \geq 0$.

(iii) Αν $p \in (\min\{p^*(0),\bar{p}\},\max\{p^*(0),\bar{p}\}) \cup \{p^*(0)\}$, και $p^*(0) \neq \bar{p}$, τότε η κοινωνική ευημερία $W^I(\varphi(p,\beta_I))$ είναι γνησίως φθίνουσα για $\beta_I \geq 0$.

(iv) Αν $[p^*(0)-\bar{p}][p-p^*(0)] > 0$, τότε η κοινωνική ευημερία $W^I(\varphi(p,\beta_I))$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\beta_w(p)]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\beta_w(p),\infty)$, όπου

$$\beta_w(p) = \frac{R-p-\sqrt{RC/\mu}}{\ln(\mu-\sqrt{C\mu/R})/(\lambda-\mu+\sqrt{C\mu/R})}.$$

Η πρόταση αυτή χαρακτηρίζει πλήρως την κοινωνική ευημερία ως συνάρτηση του επιπέδου της περιορισμένης ορθολογικότητας. Το Σχήμα 2.5 απεικονίζει τα διαφορετικά σενάρια της Πρότασης 2.3.3 ως προς το σχετικό μέγεθος των $p^*(0)$ και $\bar{p}$. Συγκρίνοντας το μέγεθος των $p^*(0)$ και $\bar{p}$, θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Για κάθε περίπτωση, απεικονίζουμε το εύρος της τιμής p που εμπίπτει στα σενάρια (i)–(iv) στην Πρόταση 2.3.3. (Η περίπτωση που το $p^*(0) = \bar{p}$ είναι απλή και ως εκ τούτου δεν απεικονίζεται στο σχήμα.) Για το πρώτο σενάριο, η πιθανότητα εισόδου όταν η τιμή είναι $p=\bar{p}$, είναι ακριβώς 0.5, και είναι ανεξάρτητη από το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας. Ετσι η κοινωνική ευημερία στο σενάριο (i) δεν επηρεάζεται από το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας. Για το δεύτερο σενάριο, το 0.5 βρίσκεται μεταξύ της πιθανότητας εισόδου που επάγεται από την τιμή μεγιστοποίησης της ευημερίας όταν οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί και της πιθανότητας εισόδου που επάγεται από την τιμή p όταν το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας των πελατών είναι β_I. Σε αυτή την περίπτωση, αυξάνοντας το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας η απόσταση μεταξύ των παραπάνω πιθανοτήτων μειώνεται επειδή η πιθανότητα εισόδου σε ισορροπία πλησιάζει το 0.5 όσο το β_I αυξάνεται, με βάση την Πρόταση 2.1.3, στα σενάρια (ii) και (iii). Έτσι, η κοινωνική ευημερία αυξάνεται γνησίως καθώς οι πελάτες είναι περισσότερο μη-ορθολογικοί. Για το τρίτο σενάριο, η πιθανότητα εισόδου που επάγεται από την τιμή μεγιστοποίησης της ευημερίας όταν οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί είναι είτε πολύ υψηλή είτε πολύ χαμηλή σε σύγκριση με την πιθανότητα εισόδου που επάγεται από την τιμή p όταν το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας των πελατών είναι β_I, έτσι ώστε αυξάνοντας το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας η απόσταση μεταξύ των παραπάνω πιθανοτήτων γίνεται μεγαλύτερη. Επομένως, η κοινωνική ευημερία είναι γνησίως φθίνουσα ως προς το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας β_I. Για το τελευταίο σενάριο, η πιθανότητα εισόδου που επάγεται από την τιμή μεγιστοποίησης της ευημερίας όταν οι πελάτες είναι πλήρως ορθολογικοί μπορεί να επιτευχθεί (στο εσωτερικό). Ως εκ τούτου, όσο το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας αυξάνεται από το μηδέν, η κοινωνική ευημερία είναι «πιο κοντά» στη βέλτιστη κοινωνική ευημερία. Στην προκειμένη περίπτωση η συνάρτηση της κοινωνικής ευημερίας είναι μονοκόρυφη ως προς το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας, και η συνθήκη πρώτης τάξης δίνει το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας $\beta_w(p)$. Η Πρόταση 2.3.3 υπονοεί ότι η συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας είναι μονοκόρυφη ως προς το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας, όπως αναφέρεται στο Πόρισμα 2.3.1.



Σχήμα 2.5: Απεικόνιση των διάφορων σεναρίων της Πρότασης 2.3.3.

Πόρισμα 2.3.1. *Η κοινωνική ευημερία $W^I(\varphi(p, \beta_I))$ είναι μονοκόρυφη ως προς το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας β_I για οποιαδήποτε τιμή p.*

Έχουμε δει ότι ο αντίκτυπος της περιορισμένης ορθολογικότητας στην κοινωνική ευημερία εξαρτάται από το μέγεθος της σταθερής τιμής που χρεώνεται και ότι η συνάρτηση ευημερίας είναι μονοκόρυφη ως προς το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας. Η επόμενη ερώτηση που μας ενδιαφέρει είναι: ποια είναι η τιμή μεγιστοποίησης της ευημερίας και πώς η ευημερία συμπεριφέρεται κάτω από μια τέτοια τιμή; Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η κοινωνική ευημερία $W^I(\varphi(p, \beta_I))$ είναι μονοκόρυφη ως συνάρτηση της τιμής p για οποιοδήποτε επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας β_I (βλ. Λήμμα EC.4 στο παράρτημα των Huang et al. (2012) για μια πιο αυστηρή αιτιολόγηση). Η εύρεση της τιμής μεγιστοποίησης της ευημερίας καταλήγει στην εύρεση της βέλτιστης πιθανότητας εισόδου φ_w^*. Για να εξαγάγουμε την τιμή μεγιστοποίησης της ευημερίας, χρησιμοποιούμε τη συνθήκη πρώτης τάξης

$$\frac{\partial W^I(\varphi(p, \beta_I))}{\partial \varphi(p, \beta_I)} = 0$$

και βρίσκουμε

$$\varphi_w^* = \frac{\mu - \sqrt{C\mu/R}}{\lambda},$$

που είναι η βέλτιστη πιθανότητα εισόδου σε ισορροπία που συνεπάγεται τη βέλτιστη κοινωνική ευημερία. Ας υποθέσουμε ότι αυτό το σημείο ισορροπίας μπορεί να επιτευχθεί στο εσωτερικό. Τότε απαιτείται ότι $R \in (C/\mu, \infty)$ εάν $\mu < \lambda$ και $R \in (C/\mu, C\mu/(\mu-\lambda)^2)$ εάν $\mu > \lambda$. Για περιπτώσεις που το το σημείο ισορροπίας είναι στο σύνορο, το πρόβλημα γίνεται τετριμμένο: αν $R \leq C/\mu$, τότε είναι κοινωνικά βέλτιστο να κρατήσει όλους τους πελάτες έξω από το σύστημα, ενώ αν $R \geq C\mu/(\mu-\lambda)^2$ όταν $\mu > \lambda$, τότε είναι κοινωνικά βέλτιστο να αφήσει όλους τους πελάτες να μπουν στο σύστημα. Είμαστε πλέον έτοιμοι να δώσουμε την τιμή μεγιστοποίησης της ευημερίας που μεγιστοποιεί την κοινωνική ευημερία. Για να δώσουμε το αποτέλεσμα, αντικαθιστούμε πρώτα τη πιθανότητα εισόδου φ_w^* στη συνθήκη ισορροπίας, δηλ. στη Σχέση (2.1), και μετά λαμβάνουμε τη βέλτιστη τιμή, χωρίς περιορισμούς, από

$$p_w^*(\beta_I) = R - \sqrt{CR/\mu} - \beta_I \ln \frac{\mu - \sqrt{C\mu/R}}{\lambda - (\mu - \sqrt{C\mu/R})} = p^*(0) - \beta_I \ln \frac{\varphi_w^*}{1-\varphi_w^*},$$

που μπορεί να είναι αρνητική. Η τιμή μεγιστοποίησης της ευημερίας είναι επομένως $\max\{0, p_w^*(\beta_I)\}$. Η Πρόταση 2.3.4 χαρακτηρίζει αυτή την τιμή μεγιστοποίησης της ευημερίας και την αντίστοιχη κοινωνική ευημερία.

Πρόταση 2.3.4. *(i) Αν $R > 4C\mu/(2\mu-\lambda)^2$ όταν $\beta_I < \beta_w(0)$, όπου $\beta_w(0) = (R - \sqrt{RC/\mu})/\ln[(\mu - \sqrt{C\mu/R})/(\lambda - (\mu - \sqrt{C\mu/R}))]$, η τιμή $p = p_w^*(\beta_I)$ είναι η μοναδική τιμή που μεγιστοποιεί τη κοινωνική ευημερία, $p_w^*(\beta_I)$ γνησίως φθίνουσα ως προς β_I, και η βέλτιστη κοινωνική ευημερία είναι $W^I(p_w^*, \beta_I) = \mu R + C - 2\sqrt{\mu RC}$. Όταν $\beta_I \geq \beta_w(0)$, η τιμή $p = 0$ είναι η μοναδική τιμή που αποδίδει τη μέγιστη κοινωνική ευημερία $W^I(0, \beta_I)$.*

(ii) Αν $R \leq 4C\mu/(2\mu-\lambda)^2$, η τιμή $p = p_w^*(\beta_I)$ είναι η μοναδική τιμή που μεγιστοποιεί τη κοινωνική ευημερία, $p_w^*(\beta_I)$ γνησίως αύξουσα ως προς β_I, και η βέλτιστη κοινωνική ευημερία είναι $W^I(p_w^*, \beta_I) = \mu R + C - 2\sqrt{\mu RC}$.

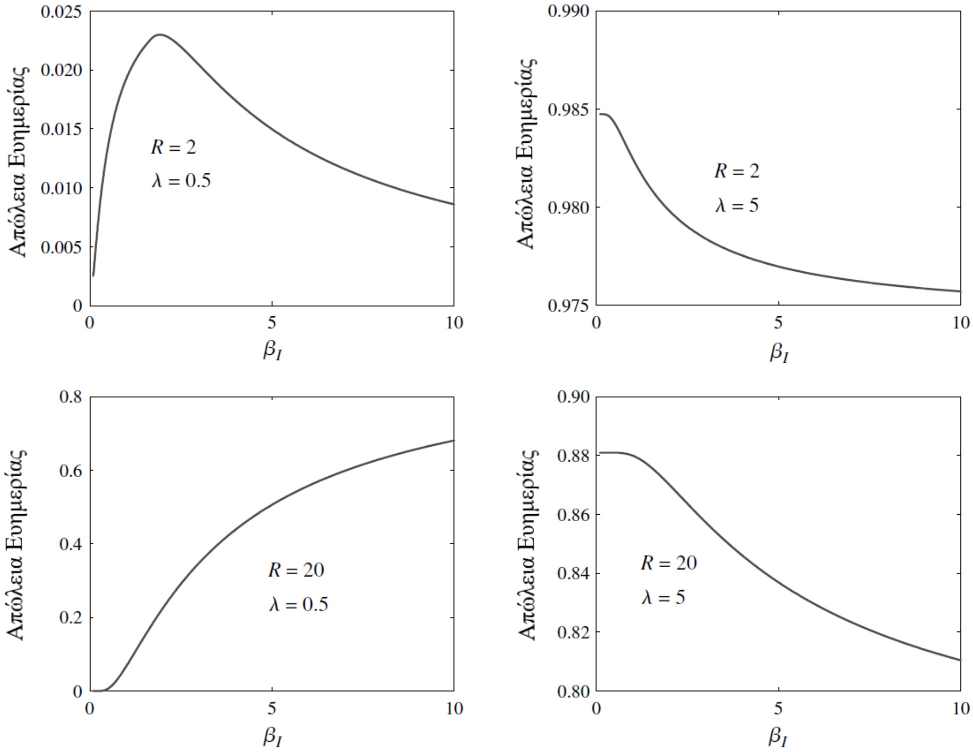
Θα συζητήσουμε τις συνέπειες της Πρότασης 2.3.4. Εάν $\varphi_w^* = (\mu - \sqrt{C\mu/R})/\lambda > 1/2$, τότε $\ln[(\mu - \sqrt{C\mu/R})/(\lambda - (\mu - \sqrt{C\mu/R}))] > 0$, που σημαίνει ότι η τιμή $p_w^*(\beta_I)$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας β_I. Αυτό το σενάριο αντιστοιχεί στη Περίπτωση ΙΙ που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.5, όπου η πιθανότητα εισόδου σε ισορροπία είναι φθίνουσα ως προς β_I. Ειδικότερα, όταν οι πελάτες είναι ελαφρώς περιορισμένα ορθολογικοί, η βέλτιστη τιμή μειώνεται αυστηρά. Η διαίσθηση είναι ότι η πιθανότητα εισόδου σε ισορροπία μειώνεται όσο το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας αυξάνεται. Για να πετύχουμε την επιθυμητή βέλτιστη πιθανότητα εισόδου φ_w^*, ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' πρέπει να μειώσει την τιμή καθώς το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας αυξάνεται. Ομοίως, αν $\varphi_w^* = (\mu - \sqrt{C\mu/R})/\lambda < 1/2$, τότε $\ln[(\mu - \sqrt{C\mu/R})/(\lambda - (\mu - \sqrt{C\mu/R}))] < 0$, που σημαίνει ότι η τιμή $p_w^*(\beta_I)$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας β_I. Αυτό το σενάριο αντιστοιχεί στη Περίπτωση Ι που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.5, όπου η πιθανότητα εισόσου είναι αύξουσα ως προς β_I. Η βασική ιδέα σε αυτήν την πρόταση είναι ότι η 'πρώτη καλύτερη' κοινωνική ευημερία (η οποία είναι ανεξάρτητη από το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας και του ρυθμού άφιξης) μπορεί να επιτευχθεί όταν είτε (i) η βέλτιστη πιθανότητα εισόδου για τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας είναι αυστηρά πάνω από το 0.5 και το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας δεν είναι πάρα πολύ υψηλό ή (ii) η βέλτιστη πιθανότητα εισόδου για τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας είναι κάτω από το 0.5. Η διαίσθηση για αυτή τη βασική ιδέα είναι η εξής: σε αυτό το πλαίσιο, ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' μπορεί πάντα να διορθώσει την περιορισμένη ορθολογικότητα από την πλευρά των πελατών· δηλ. ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' εξακολουθεί να πετυχαίνει την ίδια βέλτιστη κοινωνική ευημερία με τη χρέωση κατάλληλων τιμών.

Ωστόσο, όταν η βέλτιστη πιθανότητα εισόδου για τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας είναι αυστηρά πάνω από το 0.5 και το το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας είναι αρκετά υψηλό, η 'πρώτη καλύτερη' κοινωνική ευημερία δεν μπορεί να επιτευχθεί. Με άλλα λόγια, όταν η επιθυμητή πιθανότητα εισόδου είναι υψηλή, ώστε να το επιτύχει αυτό, οι πελάτες πρέπει να εισέλθουν με αυτή την πιθανότητα σε ισορροπία. Ωστόσο, η πιθανότητα εισόδου των πελατών θα ήταν πολύ χαμηλότερη, αν είναι επίσης περιορισμένα ορθολογικοί, και πολύ χαμηλή, ακόμα κι αν η επιχείρηση δεν χρεώνει καμία τιμή. Σε αυτή την περίπτωση, υψηλότερη περιορισμένη ορθολογικότητα οδηγεί σε περισσότερες απώλειες κοινωνικής ευημερίας. Αυτό το αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με (i) την περίπτωση της μεγιστοποίησης των εσόδων και (ii) το αποτέλεσμα στην Πρόταση 2.3.2 της παρατηρήσιμης ουράς.

Ο Αντίκτυπος της Παράβλεψης της Περιορισμένης Ορθολογικότητας. Χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η περιορισμένη ορθολογικότητα των πελατών, ο 'κοινωνικός σχεδιαστής' θα χρεώσει ορθολογικά την τιμή $p^*(0)$, η οποία είναι γενικά διαφορετική από την τιμή μεγιστοποίησης της ευημερίας $\max\{0, p_w^*(\beta_I)\}$. Αντίστοιχα, μας ενδιαφέρει η απώλεια ευημερίας

$$\Delta W^I(\beta_I) \equiv (W^I(\max\{0, p_w^*(\beta_I)\}, \beta_I) - W^I(p^*(0), \beta_I))/W^I(p^*(0), \beta_I).$$

Για το ίδιο παράδειγμα όπως στη περίπτωση της μεγιστοποίησης εσόδων, το Σχήμα 2.6 δείχνει ότι η απώλεια ευημερίας μπορεί να είναι σημαντική (πάνω από 80% για παράδειγμα) και δεν είναι απαραίτητα μονότονη ως προς το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας. Η μη-μονότονη συμπεριφορά και η διαισθητική της εξήγηση πηγάζει από την Πρόταση 2.3.3, όπου για μια σταθερή τιμή, η κοινωνική ευημερία μπορεί μην είναι μονότονη ως προς β_I.



Σχήμα 2.6: Απώλεια ευημερίας στη μη-παρατηρήσιμη ουρά παραβλέποντας την περιορισμένη ορθολογικότητα ($C = 1$, $\mu = 1$).

2.4 Συμπεράσματα

Το παράδειγμα της ποσοτικής επιλογής στη βιβλιογραφία της συμπεριφορικής οικονομικής υποστηρίζει ότι οι άνθρωποι είναι περισσότερο πιθανό να επιλέξουν καλύτερες επιλογές από χειρότερες, αλλά δεν κατορθώνουν απαραίτητα να επιλέξουν την καλύτερη επιλογή. Σε αυτό το Κεφάλαιο, υιοθετήθηκε αυτό το πλαίσιο για να μοντελοποιήσουμε την περιορισμένη ορθολογικότητα σε συστήματα εξυπηρέτησης με την έννοια ότι οι πελάτες δεν έχουν την ικανότητα να εκτιμήσουν τέλεια τους αναμενόμενους χρόνους παραμονής. Ερευνήσαμε την επίδραση της περιορισμένης ορθολογικότητας στα έσοδα μιας επιχείρησης (που μεγιστοποιεί το κέρδος της), στη κοινωνική ευημερία και στη τιμολόγηση τόσο για μη-παρατηρήσιμες όσο και για παρατηρήσιμες ουρές. Από τη σκοπιά της επιχείρησης, υψηλότερο β_I μπορεί να οδηγήσει σε χαμηλότερες βέλτιστες τιμές, αλλά οδηγεί σε υψηλότερες βέλτιστες τιμές και υψηλότερα έσοδα όταν το β_I είναι αρκετά μεγάλο. Με τη βέλτιστη τιμή, ένα αυστηρά θετικό και αρκετά μικρό β έχει ως αποτέλεσμα απώλειες εσόδων. Από την πλευρά του ‘κοινωνικού σχεδιαστή’, μπορεί να υπάρχουν αυστηρά θετικές απώλειες κοινωνικής ευημερίας όταν το β_I είναι αρκετά μεγάλο. Για παρατηρήσιμες ουρές με σταθερή τιμή, αποδεικνύουμε ότι ένα γνήσια θετικό και αρκετά μικρό β μπορεί να οδηγήσει σε γνήσια βελτίωση της κοινωνικής ευημερίας, και παρέχουμε μια απλή ανισότητα υπό την οποία συμβαίνει αυτή η βελτίωση. Με τις βέλτιστες τιμές, ωστόσο, η περιορισμένη ορθολογικότητα μειώνει την κοινωνική ευημερία. Δείχνουμε ότι η παράβλεψη της περιορισμένης ορθολογικότητας μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική απώλεια εσόδων και κοινωνικής ευημερίας.

2.4.1 Σχεδιασμός Πειραμάτων

Για να συλλάβουμε την περιορισμένη ορθολογικότητα από την πλευρά των πελατών, στο μοντέλο οι πελάτες δεν έχουν ακριβή εκτιμήση του αναμενόμενου χρόνου παραμονής. Η τυπική απόκλιση της εκτίμησης του αναμενόμενου χρόνου παραμονής είναι ένας δείκτης για το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας. Το πρώτο βήμα, θα είναι η εκτίμηση του επιπέδου της περιορισμένης ορθολογικότητας β για την παρατηρήσιμη και τη μη-παρατηρήσιμη ουρά σε προσεκτικά ελεγχόμενα πειράματα. Αυτό θα μπορούσε να γίνει με την ανάθεση των παραμέτρων του πειράματος στα υποκείμενα και στη συνέχεια με τη παρατήρηση του ποσοστού εισόδου τους. Η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας θα έδινε την εκτίμηση για το β και μπορούμε να ελέγξουμε αν διαφέρει στατιστικά σημαντικά από το μηδέν. Οι McKelvey and Palfrey (1995) στην πραγματικότητα ακολουθούν αυτήν την προσέγγιση στο πλαίσιο ενός διπινακοπαιχνιδιού και οι Bajari και Hortacsu (2005) στο πλαίσιο δημοπρασίας. Οι Kremer and Debo (2012) το έχουν ήδη κάνει από πειραματικές μελέτες σε συστήματα εξυπηρέτησης και βρέθηκε ότι το μοντέλο της περιορισμένης ορθολογικότητας ταιριάζει πολύ καλά στα δεδομένα.

Υπάρχουν πολλές ενδιαφέρουσες εικασίες για τη συμπεριφορά των πελατών που θα μπορούσαν να δοκιμαστούν ή να διερευνηθούν μαζί σύμφωνα με τους Kremer και Debo (2012). Έχει ενδιαφέρον η εκτίμηση του β για διάφορες παραλλαγές ουράς. Για παράδειγμα, οι Larson (1987) και Maister (1985) έχουν μελετήσει τον αντίκτυπο του περιβάλλοντος της ουράς στην αντίληψη του χρόνου παραμονής του πελάτη. Συγκεκριμένα, αυτοί εικάζουν ότι εξαλείφοντας τον κενό χρόνο αλλάζει σημα-ντικά η αντίληψη των πελατών για τη διάρκεια του χρόνου παραμονής και οι αιτιολογημένες αναμονές αντιμετωπίζονται από τους πελάτες με μικρότερη δυσαρέσκεια από τις ανεξήγητες αναμονές. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες μπορεί να έχουν διαφορετικά επίπεδα περιορισμένης ορθολογικότητας για αυτά τα διαφορετικά περιβάλλοντα ουράς. Μερικές εικασίες που αξίζει να διερευνηθούν είναι οι εξής: Είναι οι άνθρωποι επιρρεπείς σε λάθος εκτιμήσεις (και ως εκ τούτου σε περιορισμένη ορθολογικότητα) ανάλογα με τη δομή της ουράς, για παράδειγμα, με μια μεγάλη ουρά έναντι πολλών σύντομων ουρών; Είναι πιο μορφωμένοι (ή πιο γνώστες) άνθρωποι λιγότερο περιορισμένα ορθολογικοί; Η απάντηση σε αυτές τις ερωτήσεις όχι μόνο εμβαθύνει την κατανόησή μας για τη συμπεριφορά των πελατών αλλά επίσης βοηθά τους διαχειριστές να διαχειρίζονται καλύτερα τα συστήματα εξυπηρέτησης.

Είναι ενδιαφέρον αλλά και δύσκολο να ποσοτικοποιηθεί εμπειρικά η ζημία που υφίσταται η επιχείρηση όταν αγνοεί την περιορισμένη ορθολογικότητα. Αν και ο ρυθμός άφιξης λ, ο ρυθμός εξυπηρέτησης μ και η τιμή p είναι εύκολο να εκτιμηθούν, η αμοιβή R, το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας β και το κόστος C είναι λίγο πιο δύσκολο να προσδιοριστούν, δεδομένου της πιθανής ανομοιογένειας και της αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτών των παραμέτρων. Αυτές οι δυσκολίες μπορούν να ξεπεραστούν χρησιμοποιώντας κατάλληλη ανάλυση ή άλλες μεθόδους εκτίμησης. Αφού εκτιμηθούν αυτές οι παράμετροι, μπορεί να υπολογιστεί η ζημία που υφίσταται η επιχείρηση. Τέλος, να θυμίσουμε ότι έχουμε αποδείξει ότι η περιορισμένη ορθολογικότητα μπορεί να βελτιώσει την κοινωνική ευημερία. Αναζητώντας εμπειρικές αποδείξεις ότι σε συστήματα όπου υπάρχει περιορισμένη ορθολογικότητα βελτιώνεται πράγματι η κοινωνική ευημερία θα ήταν ιδιαίτερα πολύτιμες.

2.4.2 Διαχειριστική Διορατικότητα

Υπάρχουν πολλές συνέπειες για το πώς πρέπει να γίνει διαχείριση στα συστήματα εξυπηρέτησης. Πρώτον, η μελέτη δείχνει τη σημασία να ληφθεί υπόψη η περιορισμένη ορθολογικότητα στην τιμολόγηση της υπηρεσίας. Συγκεκριμένα, καθώς το β αυξάνεται πάνω από ένα συγκεκριμένο κατώφλι, η απώλεια στα έσοδα και στην κοινωνική ευημερία αν δεν ληφθεί υπόψη η περιορισμένη ορθολογικότητα είναι μεγάλη. Δεύτερον, υπάρχουν περιστάσεις όπου ο διαχειριστής του συστήματος μπορεί να μειώσει την ασάφεια (ή τη δυσκολία) που σχετίζεται με τη διαδικασία εκτίμησης του χρόνου παραμονής και δυνητικά να μειώσει τη διακύμανση στην εκτίμηση. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι επειδή οι πελάτες έχουν ατομικά συμφέροντα, όταν πρόκειται για τη μεγιστοποίηση της ευημερίας (π.χ. δημόσια συστήματα όπως το Τμήμα Αυτοκινήτων και κυκλοφορία σε οδικό δίκτυο), μειώνοντας το β προς το μηδέν μπορεί να μην είναι το σωστό βήμα επειδή η περιορισμένη ορθολογικότητα μπορεί πράγματι να βελτιώσει την κοινωνική ευημερία. Ωστόσο, όταν ο διαχειριστής του συστήματος εξυπηρέτησης μπορεί να βελτιστοποιήσει την τιμή καθώς και να μειώσει σημαντικά το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας, τότε η απόδοση του συστήματος (και από πλευράς των εσόδων και της κοινωνικής ευημερίας) μπορεί να βελτιωθεί θεαματικά.

Κεφάλαιο 3

Περιορισμένη Ορθολογικότητα σε Συστήματα Εκκαθάρισης

Ο Stidham (1974) εισήγαγε τα στοχαστικά συστήματα εκκαθάρισης ως στοχαστικά συστήματα εισόδου-εξόδου όπου η είσοδος είναι μια διαδικασία αφίξεων και η έξοδος αντιστοιχεί στην εκκαθάριση του συστήματος με ακαριαία αφαίρεση όλων των στοιχείων που είναι παρόντα στο σύστημα. Αρκετές εφαρμογές στοχαστικών συστημάτων εκκαθάρισης έχουν αναλυθεί από τον Stidham (1977). Συγκεκριμένα, τα συστήματα εκκαθάρισης μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ακριβή ή κατά προσέγγιση μοντέλα συστημάτων εξυπηρέτησης όπου ένας υπηρέτης (server) εξυπηρετεί κατά διαστήματα όλους τους πελάτες στην ουρά. Σε αυτή την περίπτωση, οι αφίξεις πελατών αποτελούν τη διαδικασία εισόδου, ενώ η ομαδική εξυπηρέτηση των υπαρχόντων πελατών είναι η έξοδος. Οι Manou et al. (2014) μοντελοποίησαν έναν σταθμό μεταφοράς ως ένα στοχαστικό σύστημα εκκαθάρισης όπου οι αφίξεις των επιβατών ακολουθούν μια διαδικασία Poisson και ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών επισκέψεων ενός μεταφορικού μέσου ακολουθεί κάποια γενική κατανομή. Ανέλυσαν το σύστημα με ορθολογικούς πελάτες που αποφασίζουν να εισέλθουν ή όχι στον σταθμό μεταφοράς κάτω από διαφορετικά επίπεδα παρατηρησιμότητας υποθέτοντας μια σταθερή τιμή εξυπηρέτησης. Οι Manou et al. (2017) εκμεταλλεύτηκαν αυτά τα αποτελέσματα για να λύσουν το πρόβλημα τιμολόγησης του διαχειριστή του συστήματος μεταφορών. Αυτό το Κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην εργασία της Canbolat (2020), στην οποία αναλύει την ίδια στοχαστική διαδικασία, αλλά υποθέτει ότι οι πελάτες είναι περιορισμένα ορθολογικοί και ο διαχειριστής του συστήματος καθορίζει την τιμή εξυπηρέτησης που μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα έσοδα του συστήματος δεδομένου του *βαθμού* ορθολογικότητας γ ($= 1/\beta$, όπου β είναι το *επίπεδο* περιορισμένης ορθολογικότητας που είδαμε στο Κεφάλαιο 2) των πελατών. Σε αυτό το Κεφάλαιο περιέχονται τα αποτελέσματα και τα σημαντικότερα συμπεράσματα της εργασίας της Canbolat (2020). Οι αποδείξεις των Προτάσεων και των Πορισμάτων της Canbolat (2020) βρίσκονται στο Παράρτημα Β.

3.1 Μοντέλο και quantal-response equilibrium

Το μοντέλο αποτελείται από ένα στοχαστικό σύστημα εκκαθάρισης όπου οι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$. Όταν ο υπηρέτης (server) είναι διαθέσιμος, εξυπηρετεί όλους τους πελάτες που βρίσκονται στο σύστημα ταυτόχρονα και ακαριαία. Ο χρόνος X μεταξύ *δύο διαδοχικών ολοκληρώσεων εξυπηρέτησης* ακολουθεί μια αυθαίρετη κατανομή με πεπερασμένη αναμενόμενη τιμή $E[X] > 0$ και δεύτερη ροπή $E[X^2]$. Στη συνέχεια, αυτοί οι χρόνοι αναφέρονται ως *χρόνοι εξυπηρέτησης*. Ωστόσο, δεν πρέπει να συγχέονται με τον χρόνο από το ξεκίνημα μέχρι την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης. Η εξυπηρέτηση θεωρείται ότι είναι στιγμιαία. Η απόφαση των πελατών που φθάνουν εάν θα εισέλθουν στο σύστημα ή όχι εξαρτάται από την αναμενόμενη ωφέλεια κάθε ενέργειας και το επίπεδο ορθολογικότητάς τους. Η ωφέλεια ενός πελάτη ο οποίος δεν εισέρχεται στο σύστημα είναι μηδενική. Ένας πελάτης που εισέρχεται στο σύστημα πρέπει να πληρώσει την τιμή $p \geq 0$, επιβαρύνεται με κόστος παραμονής $C > 0$ ανά μονάδα χρόνου που παραμένει στο σύστημα και κερδίζει μια αμοιβή $R > 0$ όταν η εξυπηρέτηση έχει ολοκληρωθεί. Οι πελάτες που εισέρχονται δεν επιτρέπεται να φύγουν δίχως να εξυπηρετηθούν. Ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής ενός εισερχόμενου πελάτη είναι $E[X^2]/(2E[X])$ από την ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages) (βλ. Ross, 2014b για τη διατύπωση του σχετικού αποτελέσματος και την απόδειξη). Η αναμενόμενη ωφέλεια ενός εισερχόμενου πελάτη όταν η εξυπηρέτηση είναι δωρεάν ορίζεται ως

$$u = R - \frac{CE[X^2]}{2E[X]},$$

και αναφέρεται ως *ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης*. Η εξυπηρέτηση επάγει μια θετική ωφέλεια όταν είναι δωρεάν, π.χ. $u > 0$ (Στην παράγραφο 3.5 εξετάζεται η επέκταση των αποτελεσμάτων στην περίπτωση με $u \leq 0$). Σύμφωνα με αυτήν την υπόθεση, ένας απόλυτα ορθολογικός πελάτης, ο οποίος επιλέγει την ενέργεια με τη μέγιστη αναμενόμενη ωφέλεια χωρίς σφάλματα, εντάσσεται στο σύστημα με πιθανότητα 1 εάν η εξυπηρέτηση είναι δωρεάν. Η αναμενόμενη ωφέλεια εισόδου στο σύστημα όταν η τιμή εξυπηρέτησης είναι p ισούται με $u - p$. Αναπαριστούμε την περιορισμένα ορθολογική επιλογή των πελατών μέσω συναρτήσεων logistic quantal-response. Οι McKelvey και Palfrey (1995) όρισαν την λογιστική (ή logit) ισορροπία quantal-response κάτω από την παράμετρο $\gamma > 0$ ως προφίλ στρατηγικών π έτσι ώστε ο παίκτης i να επιλέγει την ενέργεια $j \in A_i$ με πιθανότητα

$$\pi_{ij} = \frac{e^{\gamma \bar{u}_{ij}(\pi)}}{\sum_{k \in A_i} e^{\gamma \bar{u}_{ik}(\pi)}},$$

όπου $\bar{u}_{ij}(\pi)$ είναι η αναμενόμενη αμοιβή του παίκτη i όταν επιλέγει την ενέργεια j και άλλοι παίκτες επιλέγουν τις ενέργειές τους σύμφωνα με την π. Σε γενικά παιχνίδια κανονικής μορφής, η αναμενόμενη αμοιβή ενός παίκτη $\bar{u}_{ij}(\pi)$ εξαρτάται από τις στρατηγικές άλλων παικτών. Ωστόσο, στα συστήματα εκκαθάρισης, η αναμενόμενη ωφέλεια που έχει ένας εισερχόμενος πελάτης δεν επηρεάζεται από τις αποφάσεις άλλων πελατών, γι' αυτό το λόγο, οι συναρτήσεις quantal-response έχουν απλή μορφή. Συγκεκριμένα, ένας πελάτης που φτάνει με βαθμό ορθολογικότητας $0 < \gamma < \infty$ εισέρχεται στο σύστημα με πιθανότητα

$$q = \frac{e^{\gamma(u-p)}}{1 + e^{\gamma(u-p)}} = \frac{1}{1 + e^{-\gamma(u-p)}}, \tag{3.1}$$

και αποχωρεί διαφορετικά.

Υπάρχουν αρκετές ερμηνείες αυτής της πιθανότητας εισόδου. Συγκεκριμένα, μπορεί να αντιπροσωπεύει το σφάλμα που έκανε ο πελάτης στην εκτίμηση της αναμενόμενης ωφέλειάς του ή μια τυχαιοποίηση μεταξύ των διαθέσιμων ενεργειών. Για να το κατανοήσουμε αυτό, ας υποθέσουμε ότι ένας πελάτης που φτάνει υπολογίζει την αξία της εξυπηρέτησης ως $R - \epsilon$, όπου το ϵ είναι μια τυχαία λογιστική μεταβλητή με μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση γ^{-1}. Ακολουθώντας τον συμβολισμό του Ross (2014a), η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας λογιστικής τυχαίας μεταβλητής με μέσο όρο μ και τυπική απόκλιση σ ισούται με $(1+e^{-(x-\mu)/\sigma})^{-1}$, άρα η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του σφάλματος ϵ προκύπτει ως $F(x) = (1 + e^{-\gamma x})^{-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, δεδομένης της τιμής p, ένας πελάτης εισέρχεται στο σύστημα με πιθανότητα

$$P(u - \epsilon \geq p) = F(u - p) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma(u-p)}},$$

που ισούται με τη Σχέση (3.1). Ομοίως, εάν ο πελάτης κάνει σφάλμα στην εκτίμηση του αναμενόμενου χρόνου παραμονής και όχι της αξίας της εξυπηρέτησης, υποθέτοντας ένα τυχαίο σφάλμα ϵ που έχει λογιστική κατανομή με μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση $(C\gamma)^{-1}$ έχουμε

$$P(u - C\epsilon \geq p) = F\left(\frac{u-p}{C}\right) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma(u-p)}},$$

που ισούται πάλι με τη Σχέση (3.1). Αυτή είναι πράγματι η ερμηνεία που δίνουν οι Huang et al. (2013) την οποία υιοθέτησαν στην ανάλυσή τους για τις ουρές M/M/1 με περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2. Μια τρίτη ερμηνεία της συνάρτησης quantal-response (3.1) προκύπτει από τη μοντελοποίηση της επιλογής του πελάτη με πιθανολογικό τρόπο που εγγυάται ότι η εναλλακτική με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη ωφέλεια επιλέγεται συχνότερα. Αυτή η τελευταία ερμηνεία υιοθετήθηκε από τον Su (2008) στην εργασία που αναλύει τις επιπτώσεις της περιορισμένης ορθολογικότητας στο πρόβλημα του εφημεριδοπώλη. Η εξήγηση του γιατί το γ αντιπροσωπεύει τον βαθμό ορθολογικότητας βασίζεται στη διαπίστωση ότι μια αύξηση στο γ οδηγεί την πιθανότητα εισόδου q πιο κοντά στο 1 εάν η αναμενόμενη ωφέλεια $u - p$ της εισόδου είναι θετική και στο 0 αν το $u - p$ είναι αρνητικό. Και στις δύο περιπτώσεις, όταν το γ αυξάνεται, η επιλογή του πελάτη εκχωρεί μεγαλύτερη πιθανότητα στην εναλλακτική που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφέλεια και όταν το γ μειώνεται, η επιλογή του πελάτη προσεγγίζει την ομοιόμορφη κατανομή σε σχέση με τις διαθέσιμες ενέργειες, οπότε εκχωρεί ίση πιθανότητα για είσοδο και αποχώρηση. Έτσι, μια αύξηση στο γ ερμηνεύεται ως οι πελάτες να γίνονται πιο ορθολογικοί και μια μείωση ως οι πελάτες να γίνονται λιγότερο ορθολογικοί. Επίσης, οι πελάτες με βαθμό ορθολογικότητας $\gamma = 0$ και $\gamma = \infty$ αναφέρονται ως *μη-ορθολογικοί* και *πλήρως ορθολογικοί*, αντίστοιχα. Δεδομένης της πιθανότητας εισόδου q στη Σχέση (3.1) και της σταθερής τιμής p εξυπηρέτησης, η *ωφέλεια των πελατών* Π_C ορίζεται ως η αναμενόμενη συνολική ωφέλεια των πελατών ανά μονάδα χρόνου

$$\Pi_C = \lambda q(u - p) = \frac{\lambda(u - p)}{1 + e^{-\gamma(u-p)}}, \tag{3.2}$$

τα *έσοδα του συστήματος* Π_A ως τα αναμενόμενα έσοδα που εισπράττει ο διαχειριστής του συστήματος εξυπηρέτησης ανά μονάδα χρόνου

$$\Pi_A = \lambda qp = \frac{\lambda p}{1 + e^{-\gamma(u-p)}}, \tag{3.3}$$

και η *κοινωνική ευημερία* Π_S ως το άθροισμα της ωφέλειας των πελατών και των εσόδων του συστήματος

$$\Pi_S = \lambda qu = \frac{\lambda u}{1 + e^{-\gamma(u-p)}}. \tag{3.4}$$

Η ακόλουθη πρόταση δηλώνει πώς οι αλλαγές στον βαθμό ορθολογικότητας επηρεάζουν αυτές τις ποσότητες όταν η τιμή της εξυπηρέτησης είναι σταθερή.

Πρόταση 3.1.1. *Δεδομένης της ωφέλειας δωρεάν εξυπηρέτησης $u > 0$ και της τιμής $p \geq 0$,*

(i) Εάν η αναμενόμενη ωφέλεια εισόδου είναι θετική (δηλαδή, $p < u$), τότε η πιθανότητα εισόδου, η ωφέλεια των πελατών, τα έσοδα του συστήματος και η κοινωνική ευημερία αυξάνονται καθώς οι πελάτες γίνονται πιο ορθολογικοί (δηλαδή, καθώς αυξάνεται το γ).

(ii) Εάν η αναμενόμενη ωφέλεια εισόδου είναι μηδέν (δηλαδή, $p = u$), τότε οι πελάτες εισέρχονται ή αποχωρούν με ίση πιθανότητα ανεξάρτητα από το βαθμό ορθολογικότητας $\gamma > 0$ των πελατών. Σε αυτήν την περίπτωση, η ωφέλεια των πελατών ισούται με μηδέν, τα έσοδα του συστήματος και η κοινωνική ευημερία είναι ίσα και παραμένουν αμετάβλητα καθώς οι πελάτες γίνονται πιο ορθολογικοί (δηλαδή, καθώς αυξάνεται το γ).

(iii) Εάν η αναμενόμενη ωφέλεια εισόδου είναι αρνητική (δηλαδή, $p > u$), τότε η πιθανότητα εισόδου, τα έσοδα του συστήματος και η κοινωνική ευημερία μειώνονται και η ωφέλεια πελατών αυξάνεται καθώς οι πελάτες γίνονται πιο ορθολογικοί (δηλαδή, καθώς αυξάνεται το γ).

Η Πρόταση 3.1.1 δηλώνει ότι όταν η αναμενόμενη ωφέλεια εισόδου είναι μη μηδενική, η ωφέλεια του πελάτη βελτιώνεται καθώς οι πελάτες γίνονται πιο ορθολογικοί. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, καθώς η αύξηση του βαθμού ορθολογικότητας ωθεί την επιλογή του πελάτη πιο κοντά στην ενέργεια που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφέλεια. Συγκεκριμένα, εάν η αναμενόμενη ωφέλεια εισόδου είναι θετική, τότε οι πελάτες είναι πιο πιθανό να εισέλθουν και εάν είναι αρνητική, τότε είναι λιγότερο πιθανό να εισέλθουν. Στην πρώτη περίπτωση, ο διαχειριστής εισπράττει την τιμή της εξυπηρέτησης από ένα μεγαλύτερο ποσοστό πελατών, ενώ στη δεύτερη, την εισπράττει από ένα μικρότερο ποσοστό. Επομένως, τα έσοδα του συστήματος αυξάνονται (μειώνονται) όταν οι πελάτες γίνονται πιο ορθολογικοί εάν η αναμενόμενη ωφέλεια εισόδου είναι θετική (αρνητική). Σε όλες τις περιπτώσεις, η κατεύθυνση της μεταβολής στην κοινωνική ευημερία συμπίπτει με την κατεύθυνση της μεταβολής στα έσοδα του συστήματος. Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι εφόσον όλοι οι πελάτες στο σύστημα εκκαθάρισης εξυπηρετούνται ταυτόχρονα όταν ο υπηρέτης είναι διαθέσιμος, δεν υπάρχουν θετικές ή αρνητικές εξωτερικές επιδράσεις μεταξύ των πελατών σε αντίθεση με τα περισσότερα μοντέλα συστημάτων εξυπηρέτησης με στρατηγικούς πελάτες. Ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής ενός πελάτη δεν εξαρτάται από τις αποφάσεις άλλων πελατών. Κατά συνέπεια, μια αλλαγή στον ρυθμό άφιξης λ δεν επηρεάζει την πιθανότητα εισόδου, επηρεάζει μόνο την κλίμακα της ωφέλειας του πελάτη, των εσόδων του συστήματος και της κοινωνικής ευημερίας.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τις αλλαγές στην πιθανότητα εισόδου, την ωφέλεια του πελάτη, τα έσοδα του συστήματος και την κοινωνική ευημερία όσον αφορά την αμοιβή εξυπηρέτησης, το κόστος παραμονής, την πρώτη και τη δεύτερη ροπή του χρόνου εξυπηρέτησης και την τιμή.

Πρόταση 3.1.2. *Δεδομένου του βαθμού ορθολογικότητας $0 < \gamma < \infty$ και με την προϋπόθεση ότι η ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης u παραμένει θετική,*

(i) Η πιθανότητα εισόδου και η κοινωνική ευημερία αυξάνονται ως προς R και $E[X]$, μειώνονται ως προς C, $E[X^2]$ και p. Και τα δύο συγκλίνουν στο μηδέν καθώς το p τείνει στο άπειρο.

(ii) Η ωφέλεια των πελατών πρώτα μειώνεται, μετά αυξάνεται ως προς R και $E[X]$ και πρώτα αυξάνεται και μετά μειώνεται ως προς C, $E[X^2]$ και p. Συγκλίνει στο μηδέν καθώς το p τείνει στο άπειρο.

(iii) Τα έσοδα συστήματος αυξάνονται ως προς R και $E[X]$, μειώνονται ως προς C και $E[X^2]$ και πρώτα αυξάνονται και μετά μειώνονται ως προς p. Συγκλίνουν στο μηδέν καθώς το p τείνει στο άπειρο.

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.2, η πιθανότητα εισόδου, η ωφέλεια των πελατών, τα έσοδα του συστήματος και η κοινωνική ευημερία αυξάνονται, όταν αυξάνεται η ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης u. Από την άλλη, η αύξηση της τιμής της εξυπηρέτησης μπορεί να αυξήσει ή να μειώσει τα έσοδα του συστήματος, παρόλο που πάντα μειώνει την ωφέλεια των πελατών και την κοινωνική ευημερία. Οι πελάτες πλήττονται από την αύξηση της τιμής με δύο τρόπους: μειώνονται τόσο η πιθανότητα εισόδου όσο και η αναμενόμενη ωφέλειά τους από την είσοδό τους. Η αύξηση της τιμής επηρεάζει θετικά τα έσοδα του συστήματος επειδή αυξάνεται το ποσό που εισπράττεται από κάθε πελάτη που εισέρχεται, αλλά το επηρεάζει και αρνητικά επειδή μειώνεται η πιθανότητα εισόδου των πελατών. Το συνολικό αποτέλεσμα προσδιορίζεται στη συνέχεια συνεκτιμώντας και τα δύο. Τέλος, η επίδραση της αύξησης της τιμής στην κοινωνική ευημερία καθορίζεται αποκλειστικά από την επίδρασή της στην πιθανότητα εισόδου, αφού η ίδια η τιμή αντιστοιχεί σε μεταφορά ωφέλειας μεταξύ πελατών και του διαχειριστή του συστήματος εξυπηρέτησης.

Η μονοτονία της πιθανότητας εισόδου ως προς το βαθμό ορθολογικότητας και της τιμής που αναφέρεται για συστήματα εκκαθάρισης στις Προτάσεις 3.1.1 και 3.1.2(i) λήφθηκε από τους Huang et al. (2013) για ουρές M/M/1 από την Πρόταση 2.1.3 του Κεφαλαίου 2. Επίσης, η συμπεριφορά των εσόδων του συστήματος για σταθερό βαθμό ορθολογικότητας και αυξανόμενη τιμή στα συστήματα εκκαθάρισης, που περιγράφεται στην Πρόταση 3.1.2(iii) είναι ίδια με τη συμπεριφορά των εσόδων του συστήματος σε ουρές M/M/1, που χαρακτηρίζονται στην Πρόταση 2.2.2(i) του Κεφαλαίου 2.

3.2 Τιμολόγηση

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε τη βέλτιστη τιμή που ορίζεται από τον διαχειριστή του συστήματος, ο οποίος γνωρίζει τον βαθμό ορθολογικότητας των πελατών και του οποίου ο στόχος είναι να μεγιστοποιήσει τα αναμενόμενα έσοδα του συστήματος εξυπηρέτησης. Η αύξηση της τιμής της εξυπηρέτησης βελτιώνει τα έσοδα από κάθε πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα, αλλά μειώνει το ποσοστό των πελατών που εισέρχονται τελικά στο σύστημα, εκτός εάν οι πελάτες είναι μη-ορθολογικοί (δηλαδή, $\gamma = 0$). Ο συνδυασμός αυτών των δύο επιδράσεων παράγει μια συνάρτηση εσόδων που δεν είναι μονότονη ως προς την τιμή. Ωστόσο, αυτή η συνάρτηση αποδεικνύεται ότι είναι μονοκόρυφη, έτσι η βέλτιστη τιμή θα είναι μοναδική. Όπως αναφέρεται στην Πρόταση 3.1.2(iii), τα έσοδα του συστήματος πρώτα αυξάνονται και μετά μειώνονται ως προς την τιμή $p \geq 0$. Επιπλέον, η παράγωγος των εσόδων του συστήματος ως προς p (υπολογισμένη στην απόδειξη της Πρότασης 3.1.2 στο Παράρτημα B) είναι συνεχής ως προς p, επομένως τα μέγιστα έσοδα επιτυγχάνονται στο σημείο όπου η παράγωγος ισούται με μηδέν. Η επόμενη πρόταση παρέχει την εξίσωση που καθορίζει μοναδικά τη βέλτιστη τιμή μαζί με τη πιθανότητα εισόδου που προκύπτει, την ωφέλεια των πελατών, τα έσοδα του συστήματος και την κοινωνική ευημερία.

Πρόταση 3.2.1. *Δεδομένης της ωφέλειας δωρεάν εξυπηρέτησης $u > 0$ και του βαθμού ορθολογικότητας $0 < \gamma < \infty$, υπάρχει μια μοναδική βέλτιστη τιμή p^* που μεγιστοποιεί τα έσοδα του συστήματος. Η τιμή p^* είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης*

$$p + \frac{1}{\gamma}\ln(\gamma p - 1) = u \tag{3.5}$$

στο διάστημα $(\gamma - 1, \infty)$. Δεδομένης της τιμής p^*, το ποσοστό των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα είναι

$$q^* = 1 - \frac{1}{\gamma p^*}, \tag{3.6}$$

και η ωφέλεια των πελατών, τα έσοδα του συστήματος και η κοινωνική ευημερία είναι

$$\Pi_C^* = \lambda\left(1 - \frac{1}{\gamma p^*}\right)(u - p^*), \tag{3.7}$$

$$\Pi_A^* = \lambda\left(1 - \frac{1}{\gamma p^*}\right)p^*, \tag{3.8}$$

$$\Pi_S^* = \lambda\left(1 - \frac{1}{\gamma p^*}\right)u, \tag{3.9}$$

αντίστοιχα.

Το Πόρισμα 3.2.1 συγκρίνει τη βέλτιστη τιμή p^* που δίνεται από τη Σχέση (3.5) με την ωφέλεια δωρεάν υπηρεσίας u χρησιμοποιώντας την εξίσωση βελτιστοποίησης (3.5).

Πόρισμα 3.2.1. *Δεδομένης της ωφέλειας δωρεάν εξυπηρέτησης $u > 0$ και του βαθμού ορθολογικότητας $0 < \gamma < \infty$, ο διαχειριστής υπερτιμολογεί (δηλαδή, $p^* > u$) εάν $\gamma u < 2$, υποτιμολογεί (δηλαδή, $p^* < u$) εάν $\gamma u > 2$, και τιμολογεί δίκαια (δηλαδή, $p^* = u$) εάν $\gamma u = 2$*

Το Πόρισμα 3.2.1 υποδηλώνει ότι η ωφέλεια των πελατών (3.7) είναι αρνητική εάν $\gamma u < 2$, μηδέν εάν $\gamma u = 2$ και θετική εάν $\gamma u > 2$. Αντίστοιχα, όταν ο βαθμός ορθολογικότητας είναι αρκετά μικρός, ένα θετικό ποσοστό πελατών εισέρχεται στο σύστημα, παρόλο που ο διαχειριστής ορίζει μια μεγάλη τιμή, η οποία αποφέρει μια αρνητική αναμενόμενη ωφέλεια εισόδου. Ωστόσο, όταν ο βαθμός ορθολογικότητας είναι αρκετά μεγάλος, ο διαχειριστής πρέπει να χρεώσει μια τιμή χαμηλότερη από την ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης για να εξασφαλίσει ένα αρκετά υψηλό ποσοστό εισόδου και να μεγιστοποιήσει τα αναμενόμενα έσοδά του. Σε αντίθεση με την ωφέλεια των πελατών, η οποία μπορεί να είναι αρνητική όταν ο βαθμός ορθολογικότητας ή/και η ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης είναι μικρή, τα έσοδα του συστήματος (3.8) και η κοινωνική ευημερία (3.9) είναι πάντα θετικά.

Το Πόρισμα 3.2.2 καθορίζει τις επιπτώσεις των μεταβολών της αμοιβής της εξυπηρέτησης, του κόστους παραμονής, των πρώτων και δεύτερων ροπών του χρόνου εξυπηρέτησης πάνω στη βέλτιστη τιμή, στην πιθανότητα εισόδου, στην ωφέλεια των πελατών, στα έσοδα του συστήματος και στην κοινωνική ευημερία.

Πόρισμα 3.2.2. *Δεδομένου του βαθμού ορθολογικότητας $0 < \gamma < \infty$ και με την προϋπόθεση ότι η ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης u παραμένει θετική, η βέλτιστη τιμή, η πιθανότητα εισόδου και η ωφέλεια των πελατών, τα έσοδα του συστήματος και η κοινωνική ευημερία αυξάνονται ως προς R και $E[X]$ και μειώνονται ως προς C και $E[X^2]$.*

Σύμφωνα με το Πόρισμα 3.2.2, τόσο οι πελάτες όσο και ο διαχειριστής επωφελούνται από την αύξηση της ωφέλειας δωρεάν εξυπηρέτησης, η οποία συμβαίνει εάν αυξηθεί η αμοιβή ή ο αναμενόμενος χρόνος εξυπηρέτησης ή εάν το κόστος παραμονής ή η δεύτερη ροπή του χρόνου εξυπηρέτησης μειωθούν. Πιο συγκεκριμένα, μια βελτίωση σε οποιαδήποτε από αυτές τις παραμέτρους οδηγεί σε αύξηση της βέλτιστης τιμής, της αναμενόμενης ωφέλειας εισόδου και του ρυθμού εισόδου. Με την πρώτη ματιά, η ταυτόχρονη αύξηση της τιμής και του ρυθμού εισόδου μπορεί να φαίνεται αντιφατική, καθώς έρχεται σε αντίθεση με την κοινή οικονομική υπόθεση ότι η ζήτηση μειώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή. Πράγματι, η Πρόταση 3.1.2(i) καθορίζει ότι ο ρυθμός εισόδου μειώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή όταν η τιμή ορίζεται ανεξάρτητα από το ποσοστό εισόδου. Ωστόσο, όταν ο διαχειριστής καθορίζει την τιμή λαμβάνοντας υπόψη την ανταπόκριση των πελατών στην τιμή, είναι σαφές από τη Σχέση (3.6) ότι η επίδραση μιας αύξησης τιμής κυριαρχείται από την επίδραση του υποκείμενου λόγου της αύξησης της τιμής, π.χ. αύξηση της αμοιβής εξυπηρέτησης ή μείωση του αναμενόμενου χρόνου παραμονής. Αντίστοιχα, ο διαχειριστής αυξάνει την τιμή με ρυθμό μικρότερο από την αύξηση της ωφέλειας δωρεάν εξυπηρέτησης, και η διαφορά μεταξύ αυτών των δύο, δηλαδή η αναμενόμενη ωφέλεια εισόδου αυξάνεται, γεγονός που με τη σειρά του οδηγεί σε υψηλότερο ρυθμό εισόδου. Η κυρίαρχη επίδραση της αύξησης της ωφέλειας δωρεάν εξυπηρέτησης σε σύγκριση με την επίδρασή της στη βέλτιστη τιμή βοηθά επίσης να εξηγηθεί γιατί αυξάνεται η ωφέλεια των πελατών.

Ένα άλλο αποτέλεσμα από το Πόρισμα 3.2.2 είναι ότι οι προτιμήσεις των περιορισμένα ορθολογικών πελατών σε σχέση με τις τέσσερις παραμέτρους του συστήματος συμπίπτουν με τις προτιμήσεις των απόλυτα ορθολογικών πελατών, οι οποίες διερευνήθηκαν από τους Manou et al. (2017). Για παράδειγμα, ανεξάρτητα από το αν είναι απόλυτα ή περιορισμένα ορθολογικοί, οι πελάτες απολαμβάνουν πάντα υψηλότερη ωφέλεια από έναν χρόνο εξυπηρέτησης με μικρότερη διακύμανση σε σύγκριση με έναν με μεγαλύτερη διακύμανση, υπό τον όρο ότι και οι δύο έχουν τον ίδιο μέσο.

3.3 Επιδράσεις του Βαθμού Ορθολογικότητας

Αυτή η παράγραφος διερευνά τις επιδράσεις του βαθμού ορθολογικότητας στη βέλτιστη τιμή, στην πιθανότητα εισόδου και στις σχετικές τιμές της ωφέλειας των πελατών, των εσόδων του συστήματος και της κοινωνικής ευημερίας, υποθέτοντας ότι ο διαχειριστής ορίζει μια τιμή γνωρίζοντας το βαθμό ορθολογικότητας των πελατών.

Πρόταση 3.3.1. *Δεδομένης της ωφέλειας δωρεάν εξυπηρέτησης $u > 0$ και υποθέτοντας ότι ο διαχειριστής γνωρίζει τον βαθμό ορθολογικότητας των πελατών και ορίζει την τιμή της εξυπηρέτησης ανάλογα ώστε να μεγιστοποιήσει τα έσοδα του συστήματος,*

(i) Η βέλτιστη τιμή πρώτα μειώνεται και μετά αυξάνεται ως προς $0 < \gamma < \infty$. Συγκλίνει στο άπειρο καθώς οι πελάτες γίνονται λιγότερο ορθολογικοί και στο u καθώς γίνονται πιο ορθολογικοί. Η ελάχιστη βέλτιστη τιμή είναι $p^* = 0.78u$ και επιτυγχάνεται όταν $\gamma u = 5.87$.

(ii) Η πιθανότητα εισόδου αυξάνεται ως προς $0 < \gamma < \infty$. Συγκλίνει στο 0.22 καθώς οι πελάτες γίνονται λιγότερο ορθολογικοί και στο 1 καθώς γίνονται πιο ορθολογικοί.

(iii) Η ωφέλεια των πελατών πρώτα αυξάνεται και μετά μειώνεται ως προς $0 < \gamma < \infty$. Συγκλίνει στο $-\infty$ καθώς οι πελάτες γίνονται λιγότερο ορθολογικοί και στο μηδέν καθώς γίνονται πιο ορθολογικοί. Η μέγιστη ωφέλεια των πελατών προκύπτει όταν $\gamma u = 7.6$.

(iv) Τα έσοδα του συστήματος πρώτα μειώνονται και μετά αυξάνονται ως προς $0 < \gamma < \infty$. Συγκλίνουν στο ∞ καθώς οι πελάτες γίνονται λιγότερο ορθολογικοί, και στο λu καθώς γίνονται πιο ορθολογικοί. Τα ελάχιστα έσοδα του συστήματος λαμβάνονται όταν $\gamma u = 2$.

(v) Η κοινωνική ευημερία αυξάνεται ως προς $0 < \gamma < \infty$. Συγκλίνει στο $0.22\lambda u$ καθώς οι πελάτες γίνονται λιγότερο ορθολογικοί και σε λu καθώς γίνονται πιο ορθολογικοί.

Παρατήρηση. Οι αριθμοί στην Πρόταση 3.3.1 στρογγυλοποιούνται σε δύο δεκαδικά ψηφία. Επίσης, η Πρόταση 3.3.1 ενώ περιγράφει τη μονοτονία των συναρτήσεων της βέλτιστης τιμής, της πιθανότητας εισόδου, της ωφέλειας των πελατών, των εσόδων του συστήματος και της κοινωνικής ευημερίας, προσδιορίζει τα τοπικά ακρότατα για κάθε μη μονότονη έκφραση. Τα τοπικά ακρότατα και τα όρια που εμφανίζονται στην Πρόταση 3.3.1 λαμβάνονται ως εξής:

- Το τοπικό ακρότατο $\gamma = 5.87/u$, όπου η βέλτιστη τιμή ως συνάρτηση του βαθμού ορθολογικότητας αλλάζει μονοτονία (από φθίνουσα σε αύξουσα) προέρχεται από την επίλυση των παρακάτω δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$x + \ln(x-1) = y,$$

$$x^2 - xy + y = 0.$$

  Η πρώτη εξίσωση αντιστοιχεί στην εξίσωση βελτιστοποίησης (3.5) πολλαπλασιαζόμενη επί γ αφού θέσουμε $x = \gamma p^*$ και $y = \gamma u$. Η δεύτερη είναι η εξίσωση που προκύπτει από την εξίσωση της πρώτης παραγώγου της βέλτιστης τιμής ως προς τον βαθμό ορθολογικότητας στο μηδέν (για να ληφθεί η ελάχιστη βέλτιστη τιμή). Αυτές οι δύο εξισώσεις έχουν μια μοναδική λύση έτσι ώστε $x > 1$ και $y \geq 0$. Αυτή η λύση είναι $x = 4.59$ και $y = 5.87$, επομένως η βέλτιστη τιμή ελαχιστοποιείται όταν $\gamma p^* = 4.59, \gamma u = 5.87$ και $p^*/u = 0.78$.

- Ο υπολογισμός της οριακής πιθανότητας εισόδου καθώς οι πελάτες γίνονται λιγότερο ορθολογικοί βασίζεται στη λήψη του ορίου του γp^* καθώς το γ συγκλίνει στο μηδέν στην εξίσωση βελτιστοποίησης (3.5) πολλαπλασιαζόμενη επί γ. Θέτοντας $\tilde{z}$ ως το όριο του γp^* καθώς το γ τείνει στο μηδέν έχουμε

$$\tilde{z} + \ln(\tilde{z} - 1) = 0,$$

που έχει τη μοναδική λύση $\tilde{z} = 1,28$, υπονοώντας ότι το όριο της πιθανότητας εισόδου (3.6) είναι $1 - 1/\tilde{z} = 0,22$.

- Το τοπικό ακρότατο $\gamma = 7.6/u$ της ωφέλειας των πελατών προέρχεται από την επίλυση των ακόλουθων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

  $$x + \ln(x - 1) = y,$$

  $$y^2 - x^2 y + x^3 = 0.$$

  Όσον αφορά την ελάχιστη βέλτιστη τιμή, η πρώτη εξίσωση είναι η εξίσωση βελτιστοποίησης (3.5) πολλαπλασιαζόμενη επί γ αφού θέσουμε $x = \gamma p^*$ και $y = \gamma u$. Η δεύτερη προέρχεται από την εξίσωση της πρώτης παραγώγου της ωφέλειας των πελατών ως προς τον βαθμό ορθολογικότητας στο μηδέν (προκειμένου να ληφθεί η μέγιστη ωφέλεια των πελατών). Η μοναδική λύση, έτσι ώστε $x > 1$ και $y \geq 0$, είναι $x = 5.996$ και $y = 7.6$, επομένως η ωφέλεια των πελατών μεγιστοποιείται όταν $\gamma u = 7.6$.

- Το τοπικό ακρότατο $\gamma = 2/u$ των εσόδων του συστήματος προκύπτει από το γεγονός ότι το πρόσημο της παραγώγου των εσόδων του συστήματος ως προς τον βαθμό ορθολογικότητας είναι το ίδιο με το πρόσημο του $u - p^*$. Από το Πόρισμα 3.2.1, το $u - p^*$ αλλάζει πρόσημο από αρνητικό σε θετικό όταν $\gamma u = 2$.

- Το όριο της κοινωνικής ευημερίας καθώς οι πελάτες γίνονται λιγότερο ορθολογικοί προκύπτει από το όριο της πιθανότητας εισόδου που εξηγήθηκε παραπάνω.

Ο Πίνακας 1 συνοψίζει τα αποτελέσματα που αναφέρονται στην Πρόταση 3.3.1.

Πίνακας 1

Κατεύθυνση της μεταβολής όταν ο βαθμός ορθολογικότητας γ αυξάνεται

Διάστημα του γu	(0, 2.00)	[2.00,5.86)	[5.87,7.60)	[7.61, ∞)
Τιμή p^*	↓	↓	↑	↑
Πιθανότητα Εισόδου q^*	↑	↑	↑	↑
Ωφέλεια Πελάτη Π_C^*	↑	↑	↑	↓
Έσοδα Συστήματος Π_A^*	↓	↑	↑	↑
Κοινωνική Ευημερία Π_S^*	↑	↑	↑	↑

Στην ακραία περίπτωση όπου οι πελάτες είναι μη-ορθολογικοί, δηλ. $\gamma = 0$, ο διαχειριστής μπορεί να δημιουργήσει αυθαίρετα μεγάλα έσοδα ορίζοντας την τιμή αυθαίρετα υψηλή, αφού οι πελάτες θα εισέλθουν στο σύστημα με πιθανότητα 0.5 ανεξάρτητα από την τιμή της εξυπηρέτησης. Η Πρόταση 3.3.1(i) δηλώνει ότι μια αύξηση του βαθμού ορθολογικότητας οδηγεί σε μείωση της βέλτιστης τιμής μέχρι ένα ορισμένο όριο-κατώφλι ($5.87/u$). Σε αυτό το διάστημα, ο διαχειριστής έχει ένα κίνητρο να μειώσει την τιμή για να εγγυηθεί υψηλότερο ποσοστό εισόδου, καθώς η μείωση της τιμής οδηγεί στην αύξηση της ζήτησης. Η Σχέση (3.6) μεταξύ της βέλτιστης τιμής και της πιθανότητας εισόδου υποδηλώνει ότι σε αυτή την περίπτωση το αποτέλεσμα της αύξησης του γ κυριαρχεί στο αποτέλεσμα της αύξησης της τιμής. Μόλις ο βαθμός ορθολογικότητας υπερβεί το όριο των $5.87/u$, ο διαχειριστής είναι καλύτερο να ορίσει μεγαλύτερη τιμή. Σε αυτή την περίπτωση, η αύξηση του βαθμού ορθολογικότητας σε συνδυασμό με την αύξηση της τιμής οδηγεί σε αύξηση του ποσοστού των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα. Από αυτό το σημείο και μετά, η βέλτιστη τιμή αυξάνεται και προσεγγίζει την ωφέλεια δωρεάν υπηρεσίας (η οποία είναι η βέλτιστη τιμή για απόλυτα ορθολογικούς πελάτες) καθώς οι πελάτες γίνονται πιο ορθολογικοί. Αυτή η συμπεριφορά ορίζει το χαμηλότερο όριο $0.78u$ στη βέλτιστη τιμή. Ο διαχειριστής χρεώνει πάντα περισσότερο από το 78% της ωφέλειας δωρεάν υπηρεσίας. Ως εκ τούτου, η περιορισμένη ορθολογικότητα των πελατών μπορεί να διογκώσει σημαντικά την τιμή της εξυπηρέτησης, αλλά δεν μπορεί να τη μειώσει περισσότερο από το 22% της τιμής με απόλυτα ορθολογικούς πελάτες.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση σχετικά με το τοπικό ακρότατο των εσόδων του συστήματος είναι ότι είναι αντιστρόφως ανάλογο με την ωφέλεια δωρεάν υπηρεσίας, επομένως όσο πιο πολύτιμη είναι η προσφερόμενη εξυπηρέτηση, τόσο πιο γρήγορα αρχίζει να αυξάνεται η βέλτιστη τιμή καθώς αυξάνεται ο βαθμός ορθολογικότητας.

Συγκρίνοντας την επίδραση των μεταβολών του βαθμού ορθολογικότητας στους πελάτες και στον διαχειριστή, η Πρόταση 3.3.1 (iii) και (iv) υποδηλώνει ότι οι πελάτες και ο διαχειριστής έχουν διαφορετικές προτιμήσεις ως προς το βαθμό ορθολογικότητας. Συγκεκριμένα, υπάρχει ένας πεπερασμένος μη μηδενικός βαθμός ορθολογικότητας που μεγιστοποιεί την ωφέλεια των πελατών, ενώ ο διαχειριστής προτιμά τους μη-ορθολογικούς πελάτες. Ο διαχειριστής μπορεί να χρεώσει μια αυθαίρετα μεγάλη τιμή, υπό τον όρο ότι οι πελάτες έχουν αρκετά μικρό βαθμό ορθολογικότητας, και ως αποτέλεσμα δημιουργούν αυθαίρετα μεγάλα έσοδα. Από την άλλη πλευρά, ούτε ο βαθμός ορθολογικότητας που μεγιστοποιεί την ωφέλεια των πελατών ούτε αυτός που μεγιστοποιεί τα έσοδα του συστήματος είναι κοινωνικά καλύτερος. Η κοινωνική ευημερία μεγιστοποιείται όταν οι πελάτες είναι απόλυτα ορθολογικοί.

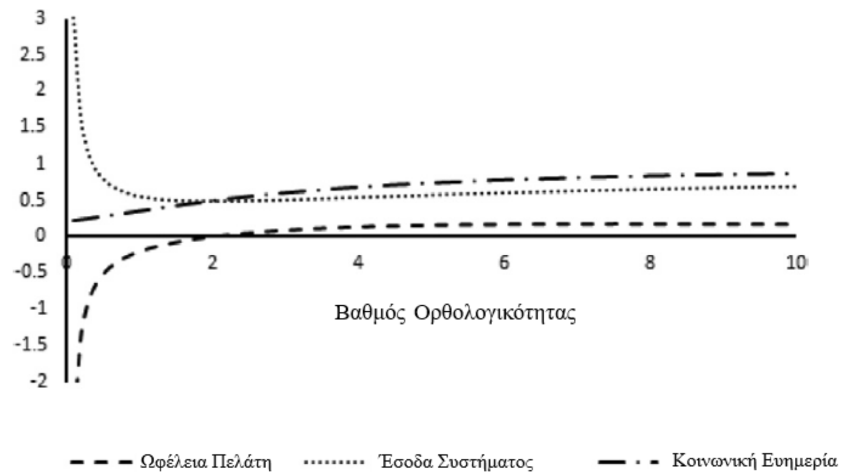
Σύμφωνα με τη Πρόταση 3.3.1(iii), ο ιδανικός βαθμός ορθολογικότητας από τη σκοπιά των πελατών είναι $\gamma^* = 7.6/u$, ο οποίος μειώνεται καθώς το R ή το $E[X]$ αυξηθούν, ή αν το C ή το $E[X^2]$ μειωθούν. Ο βαθμός ορθολογικότητας σχετίζεται με τον τρόπο με τον οποίο τα άτομα παίρνουν αποφάσεις και όχι να είναι ο ίδιος μεταβλητή απόφασης. Ωστόσο, εάν οι πελάτες συμφωνούσαν σε έναν βαθμό ορθολογικότητας ή εάν μια κεντρική αρχή καθόριζε τον βαθμό ορθολογικότητας προκειμένου να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφέλεια των πελατών, τότε ο βέλτιστος βαθμός ορθολογικότητας θα μειωνόταν ως προς την ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης. Με άλλα λόγια, όταν η εξεταζόμενη εξυπηρέτηση είναι υψηλής ποιότητας (π.χ. εάν σχετίζεται με μεγάλη αμοιβή και προσφέρει ευνοϊκά στατιστικά στοιχεία χρόνου παραμονής), τότε ο βέλτιστος βαθμός ορθολογικότητας είναι χαμηλότερος, επομένως οι πελάτες είναι καλύτερα να συμπεριφέρονται λιγότερο ορθολογικά. Ωστόσο, ο παραπάνω ισχυρισμός ισχύει μόνο εάν όλοι οι πελάτες συμφωνούν να λάβουν τις αποφάσεις τους σύμφωνα με αυτόν τον βέλτιστο βαθμό ορθολογικότητας αφού ο διαχειριστής ορίσει την τιμή. Με την Πρόταση 3.1.1, όταν ορίζεται η τιμή, ένας πελάτης απολαμβάνει πάντα μια υψηλότερη αναμενόμενη ωφέλεια γίνοντας πιο ορθολογικός. Επομένως, εάν ένας πελάτης φτάσει στο σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο η τιμή ορίζεται υποθέτοντας περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες, η ωφέλεια του πελάτη που φτάνει θα μεγιστοποιηθεί όταν ο πελάτης ενεργεί με έναν απόλυτα ορθολογικό τρόπο.

Μια άλλη συνέπεια της Πρότασης 3.3.1 είναι ότι το κόστος της παράβλεψης της περιορισμένης ορθολογικότητας και της υπόθεσης απόλυτα ορθολογικών πελατών είναι ελάχιστο όταν οι πελάτες είναι επαρκώς ορθολογικοί, ή ισοδύναμα ο βαθμός ορθολογικότητάς τους είναι αρκετά μεγάλος. Αυτό το κόστος μεγαλώνει αυθαίρετα για μικρούς βαθμούς ορθολογικότητας. Από την άλλη πλευρά, ένας διαχειριστής που εσφαλμένα υποθέτει περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες μπορεί να χάσει ένα πρόσθετο κέρδος το πολύ λu, κάτι που συμβαίνει όταν χρεώνει τιμή μεγαλύτερη από u. Έτσι, στη χειρότερη περίπτωση, η παράβλεψη της περιορισμένης ορθολογικότητας προκαλεί μεγαλύτερη πιθανή απώλεια για τον διαχειριστή από το να υποθέσει κανείς εσφαλμένα περιορισμένη ορθολογικότητα.

Το Πόρισμα 3.3.1 παρέχει ένα καθολικό άνω φράγμα στο μερίδιο της ωφέλειας των πελατών (και επομένως ένα καθολικό κάτω φράγμα στο μερίδιο των εσόδων του συστήματος) στην κοινωνική ευημερία. Αυτό το φράγμα προκύπτει από το κάτω φράγμα που η Πρόταση 3.3.1(i) καθόρισε στη βέλτιστη τιμή και είναι αυστηρό καθώς επιτυγχάνεται όταν $\gamma u = 5.87$.

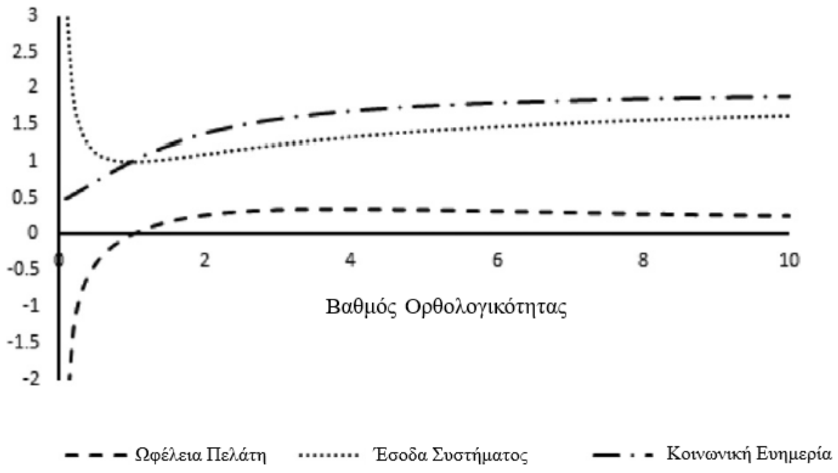
Πόρισμα 3.3.1. *Δεδομένης της ωφέλειας δωρεάν εξυπηρέτησης $u > 0$ και υποθέτοντας ότι ο διαχειριστής γνωρίζει τον βαθμό ορθολογικότητας των πελατών και ορίζει την τιμή ανάλογα για να μεγιστοποιήσει τα έσοδα του συστήματος, ο διαχειριστής λαμβάνει πάντα περισσότερο από το 78% της κοινωνικής ευημερίας και για τους πελάτες απομένει λιγότερο από το 22% της κοινωνικής ευημερίας.*

Στη συνέχεια, επεξηγούμε αυτά τα αποτελέσματα με ένα παράδειγμα, το οποίο υποθέτει $\lambda = 1$ χωρίς βλάβη της γενικότητας (καθώς μια αλλαγή στο λ αλλάζει μόνο την κλίμακα των ωφελειών που προκύπτουν: οι βέλτιστες τιμές, οι ρυθμοί εισόδου, τα τοπικά ακρότατα των εσόδων του συστήματος και η ωφέλεια των πελατών παραμένουν ανέπαφα όταν το λ ποικίλλει). Το πρόβλημα τιμολόγησης στο σύστημα εκκαθάρισης με περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες επιλύεται για $u \in \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$ και $\gamma \in [0.1, 10]$ χρησιμοποιώντας το MATLAB για επίλυση της εξίσωσης βελτιστοποίησης (3.5) και για να λάβουμε τα σχήματα.



Σχήμα 3.1: Ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης $u = 1$.

Τα Σχήματα 3.1-3.4 παρουσιάζουν τη συμπεριφορά της ωφέλειας των πελατών, των εσόδων του συστήματος (ή του διαχειριστή) και της κοινωνικής ευημερίας ως συναρτήσεις του βαθμού ορθολογικότητας, υποθέτοντας ότι ο διαχειριστής καθορίζει την τιμή λαμβάνοντας υπόψη την περιορισμένα ορθολογική απόκριση των πελατών. Όπως ορίζεται από την Πρόταση 3.3.1, η ωφέλεια των πελατών πρώτα αυξάνεται και μετά μειώνεται, τα έσοδα του συστήματος (ή του διαχειριστή) πρώτα μειώνονται και μετά αυξάνονται και η κοινωνική ευημερία αυξάνεται ως προς το βαθμό ορθολογικότητας. Στα Σχήματα 3.1, 3.2, 3.3 και 3.4, τα τοπικά ακρότατα $7.6/u$ όπου η αύξηση του γ αρχίζει να μειώνει την ωφέλεια των πελατών είναι $7.6, 3.8, 1.9$, και 0.76, αντίστοιχα, και τα τοπικά ακρότατα $2/u$ όπου η αύξηση του γ αρχίζει να αυξάνει τα έσοδα του συστήματος είναι $2, 1, 0.5$ και 0.2, αντίστοιχα.

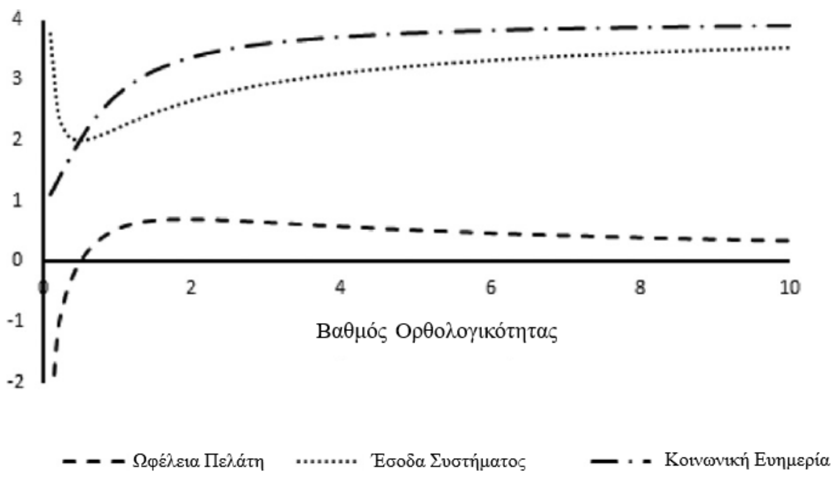


Σχήμα 3.2: Ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης $u = 2$.

Αυτά τα σχήματα δείχνουν επίσης τα όρια, καθώς οι πελάτες τείνουν να είναι μη-ορθολογικοί και απόλυτα ορθολογικοί. Καθώς το γ αυξάνεται, η ωφέλεια των πελατών συγκλίνει στο μηδέν, ενώ τα έσοδα του συστήματος και η κοινωνική ευημερία συγκλίνουν στο $\lambda u = u$. Από την άλλη πλευρά, καθώς το γ πηγαίνει στο μηδέν, η ωφέλεια των πελατών μειώνεται απότομα ενώ τα έσοδα του συστήματος αυξάνονται απότομα. Με την Πρόταση 3.3.1, η ωφέλεια των πελατών συγκλίνει στο $-\infty$ ενώ τα έσοδα του συστήματος συγκλίνουν στο $+\infty$ και η κοινωνική ευημερία, που ισούται με το άθροισμά τους, συγκλίνει στο $0.22\lambda u = 0.22u$. Η σύγκλιση της κοινωνικής ευημερίας γίνεται σαφέστερη εστιάζοντας γύρω από το σημείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.5. Τα Σχήματα 3.6 και 3.7 δείχνουν τις μεταβολές στη βέλτιστη τιμή και τη πιθανότητα εισόδου των πελατών όταν μεταβάλλεται το γ. Όπως αναφέρθηκε στην Πρόταση 3.3.1, η βέλτιστη τιμή μειώνεται ως προς γ μέχρι το σημείο $\gamma u = 5.87$, συγκλίνει στο άπειρο καθώς το γ πηγαίνει στο μηδέν και στο u καθώς το γ πηγαίνει στο άπειρο, και είναι πάντα μεγαλύτερη από $0.78u$. Οι μεταβολές στη βέλτιστη τιμή καθώς μεταβάλλεται το u παρουσιάζονται στο Πόρισμα 3.2.2. Οι μεταβολές στη πιθανότητα εισόδου των πελατών παρουσιάζονται στην Πρόταση 3.3.1 και στο Πόρισμα 3.2.2. Συγκεκριμένα, για $\gamma > 5.87/u$, τόσο η βέλτιστη τιμή όσο και η πιθανότητα εισόδου αυξάνονται ως συνάρτηση του βαθμού ορθολογικότητας, ως συνέπεια της Σχέσης (3.6).

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο διερευνώντας τις επιπτώσεις της Πρότασης 3.3.1 στις αποκλίσεις μεταξύ των τιμών μεγιστοποίησης των εσόδων και μεγιστοποίησης της κοινωνικής ευημερίας σε ισορροπία.

Σύγκριση με τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας. Στη Σχέση (3.5) ο καθορισμός της βέλτιστης τιμής p^* βασίζεται στην υπόθεση ότι ο διαχειριστής του συστήματος στοχεύει στη μεγιστοποίηση των εσόδων του συστήματος, κάτι που μπορεί να είναι μια λογική υπόθεση όταν το υπό εξέταση σύστημα εξυπηρέτησης ανήκει σε ιδιώτες. Ωστόσο, όταν το πρόβλημα αφορά ένα δημόσιο σύστημα εξυπηρέτησης, ο στόχος του διαχειριστή μπορεί να είναι η μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας. Αυτό είναι ένα απλούστερο πρόβλημα σε σύγκριση με τη μεγιστοποίηση των εσόδων, καθώς η μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας συνοψίζεται στη μεγιστοποίηση της πιθανότητας εισόδου, η οποία είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της τιμής (όπως ορίζεται στην Πρόταση 3.1.2). Συνεπώς, η τιμή μεγιστοποίησης της κοινωνικής ευημερίας ισούται με μηδέν, επομένως το σύστημα δεν παράγει έσοδα, αλλά η πιθανότητα εισόδου και η ωφέλεια των πελατών (που ισούται με



Σχήμα 3.3: Ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης $u = 4$.

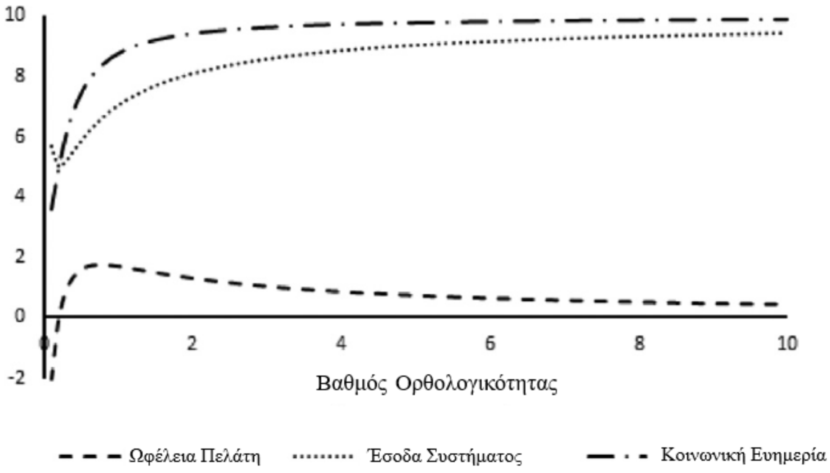
την κοινωνική ευημερία) επιτυγχάνουν τις μέγιστες τιμές τους, $(1 + e^{-\gamma u})^{-1}$ και $\lambda(1 + e^{-\gamma u})^{-1}u$, αντίστοιχα. Η διαφορά μεταξύ των τιμών μεγιστοποίησης εσόδων και μεγιστοποίησης της κοινωνικής ευημερίας φράσεται από κάτω από το $1/\gamma$ για οποιαδήποτε $u > 0$ (από την Πρόταση 3.2.1) και από το $0.78u$ για οποιαδήποτε $\gamma > 0$ (από την Πρόταση 3.3.1). Η τιμή της αναρχίας ορίζεται ως ο λόγος της κοινωνικής ευημερίας υπό την τιμή μεγιστοποίησης των εσόδων p^* και της μέγιστης κοινωνικής ευημερίας και ισούται με

$$\frac{1 + e^{-\gamma u}}{1 + e^{-\gamma(u-p^*)}}.$$

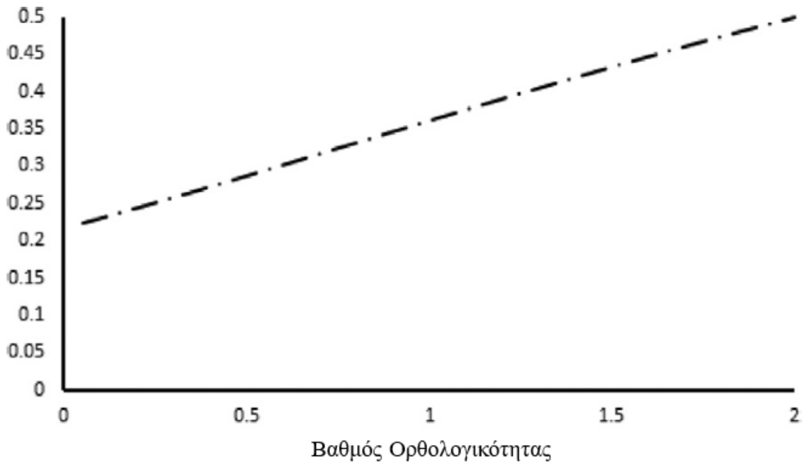
Η ακόλουθη πρόταση περιγράφει πώς μεταβάλλεται η τιμή της αναρχίας ως συνάρτηση του βαθμού ορθολογικότητας.

Πρόταση 3.3.2. *Δεδομένης της ωφέλειας δωρεάν εξυπηρέτησης $u > 0$, η τιμή της αναρχίας αυξάνεται ως προς γ, συγκλίνει στο 0.44 καθώς οι πελάτες γίνονται λιγότερο ορθολογικοί και στο 1 καθώς οι πελάτες γίνονται πιο ορθολογικοί.*

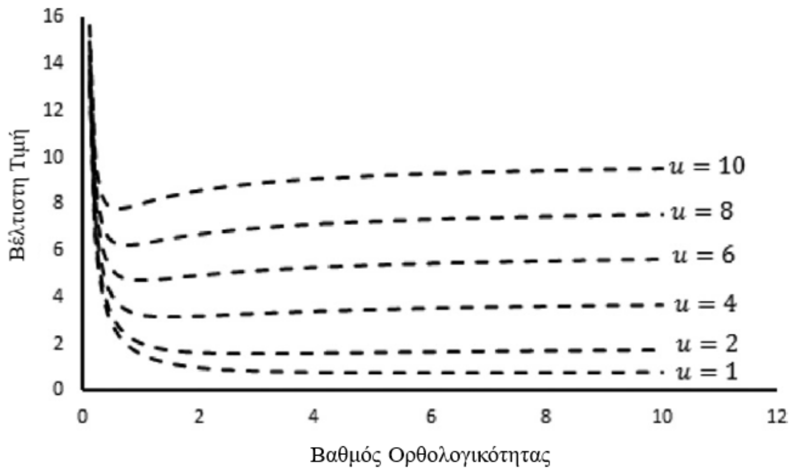
Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.2, η κοινωνική ευημερία στην τιμή μεγιστοποίησης των εσόδων p^* είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση με το 44% της μέγιστης κοινωνικής ευημερίας και προσεγγίζει τη μέγιστη κοινωνική ευημερία καθώς οι πελάτες γίνονται πιο ορθολογικοί.



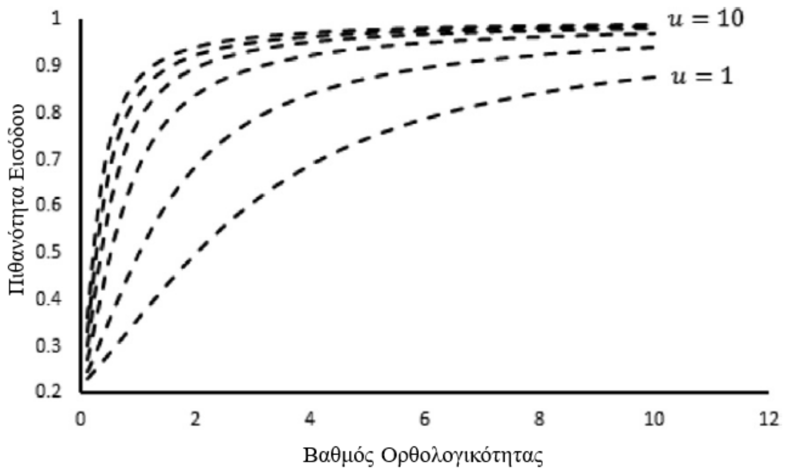
Σχήμα 3.4: Ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης $u = 10$.



Σχήμα 3.5: Κοινωνική ευημερία έναντι βαθμού ορθολογικότητας για $u = 1$.



Σχήμα 3.6: Τιμή έναντι βαθμού ορθολογικότητας.



Σχήμα 3.7: Πιθανότητα εισόδου έναντι βαθμού ορθολογικότητας.

3.4 Μη-Ομογενείς Πελάτες

Μέχρι στιγμής, σε αυτό το Κεφάλαιαο υποθέσαμε ότι όλοι οι πελάτες είναι εξίσου περιορισμένα ορθολογικοί, δηλαδή, όλοι λαμβάνουν αποφάσεις σύμφωνα με τον ίδιο βαθμό ορθολογικότητας. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, τα άτομα μπορεί να επιδεικνύουν διαφορετικούς βαθμούς ορθολογικότητας στις προτιμήσεις τους. Αυτή η παράγραφος διερευνά την επέκταση των αποτελεσμάτων (που λαμβάνονται στις προηγούμενες Παραγράφους αυτού του Κεφαλαίου) για την περίπτωση με πανομοιότυπους πελάτες, στην περίπτωση με πελάτες που είναι μη-ομογενείς ως προς τον βαθμό ορθολογικότητάς τους. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτει ότι οι βαθμοί ορθολογικότητας των πελατών είναι ανεξάρτητοι αντλούμενοι από ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(\bar{\gamma} - \Delta, \bar{\gamma} + \Delta)$, όπου $0 < \Delta \leq \bar{\gamma}$.

Υποθέτοντας ότι ένας πελάτης με βαθμό ορθολογικότητας γ εισέρχεται στο σύστημα με πιθανότητα

$$q(\gamma) = \frac{e^{\gamma(u-p)}}{1 + e^{\gamma(u-p)}} = \frac{1}{1 + e^{-\gamma(u-p)}}, \tag{3.10}$$

σύμφωνα με τη Σχέση (3.1), για $p \neq u$, η αναμενόμενη πιθανότητα εισόδου για ομοιόμορφα κατανεμημένο βαθμό ορθολογικότητας Γ υπολογίζεται ως

$$\bar{q} = E[q(\Gamma)] = \int_{\bar{\gamma}-\Delta}^{\bar{\gamma}+\Delta} \left(\frac{e^{\gamma(u-p)}}{1 + e^{\gamma(u-p)}}\right)\left(\frac{1}{2\Delta}\right) d\gamma = \frac{1}{2\Delta(u-p)} \ln\left(\frac{1 + e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}}{1 + e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}\right). \tag{3.11}$$

Έτσι η ωφέλεια των πελατών Π_C, τα έσοδα του συστήματος Π_A και η κοινωνική ευημερία Π_S για σταθερή τιμή $p \neq u$ γίνονται

$$\Pi_C = \lambda \bar{q}(u-p) = \frac{\lambda}{2\Delta} \ln\left(\frac{1 + e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}}{1 + e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}\right), \tag{3.12}$$

$$\Pi_A = \lambda \bar{q} p = \frac{\lambda p}{2\Delta(u-p)} \ln\left(\frac{1 + e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}}{1 + e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}\right), \tag{3.13}$$

$$\Pi_S = \lambda \bar{q} u = \frac{\lambda u}{2\Delta(u-p)} \ln\left(\frac{1+e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}}{1+e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}\right). \tag{3.14}$$

αντίστοιχα.

Για $p = u, q(\Gamma) = 0.5$, η αναμενόμενη πιθανότητα εισόδου είναι $\bar{q} = 0,5$, και $\Pi_C = 0, \Pi_A = \Pi_S = 0.5\lambda u$. Καθώς το $u - p$ τείνει στο μηδέν, στη Σχέση (3.11) έχουμε απροσδιόριστη μορφή 0/0 γι' αυτό κάνουμε μια εφαρμογή του κανόνα του L'Hôpital η οποία διασφαλίζει ότι το $\bar{q}$ (Σχέση (3.11)) συγκλίνει στο 0.5, άρα το Π_A (Σχέση (3.13)) και το Π_S (Σχέση (3.14)) συγκλίνουν στο $0,5\lambda u$, επομένως αυτές είναι συνεχείς συναρτήσεις των u και p. Επίσης, καθώς το Δ προσεγγίζει το μηδέν, τα $\bar{q}, \Pi_C, \Pi_A$ και Π_S (Σχέσεις (3.11)–(3.14)) συγκλίνουν στα αντίστοιχά τους (Σχέσεις (3.1)–(3.4)) με $\gamma = \bar{\gamma}$ στην ομογενή περίπτωση.

Οι επιπτώσεις των μεταβολών του μέσου βαθμού ορθολογικότητας και της παραμέτρου Δ στην αναμενόμενη πιθανότητα εισόσου, στην ωφέλεια των πελατών, στα έσοδα του συστήματος και στην κοινωνική ευημερία περιγράφονται από την παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 3.4.1. *Δεδομένης της ωφέλειας δωρεάν υπηρεσίας $u > 0$ και της τιμής $p \geq 0$,*

(i) Εάν η αναμενόμενη ωφέλεια της εισόδου είναι θετική (δηλαδή, $p < u$), τότε η αναμενόμενη πιθανότητα εισόδου, η ωφέλεια των πελατών, τα έσοδα του συστήματος και η κοινωνική ευημερία αυξάνονται καθώς αυξάνεται ο μέσος βαθμός ορθολογικότητας $\bar{\gamma}$ ή η παράμετρος Δ μειώνεται.

(ii) Εάν η αναμενόμενη ωφέλεια της εισόδου είναι μηδέν (δηλαδή, $p = u$), τότε οι πελάτες εισέρχονται ή αποχωρούν με ίση πιθανότητα ανεξάρτητα από τον βαθμό ορθολογικότητας $\gamma > 0$ των πελατών. Σε αυτήν την περίπτωση, η ωφέλεια των πελατών ισούται με μηδέν, τα έσοδα του συστήματος και η κοινωνική ευημερία είναι ίσα και ανεξάρτητα από τον μέσο βαθμό ορθολογικότητας $\bar{\gamma}$ και την παράμετρο Δ.

(iii) Εάν η αναμενόμενη ωφέλεια της εισόδου είναι αρνητική (δηλαδή, $p > u$), τότε η αναμενόμενη πιθανότητα εισόδου, τα έσοδα του συστήματος και η κοινωνική ευημερία μειώνονται και η ωφέλεια των πελατών αυξάνεται καθώς αυξάνεται ο μέσος βαθμός ορθολογικότητας $\bar{\gamma}$ ή η παράμετρος Δ μειώνεται.

Αντίστοιχα, οι μεταβολές στην αναμενόμενη πιθανότητα εισόδου, στην ωφέλεια των πελατών, στα έσοδα του συστήματος και στην κοινωνική ευημερία σε σχέση με τον μέσο βαθμό ορθολογικότητας είναι ίδιες με εκείνες σε σχέση με τον βαθμό ορθολογικότητας σε έναν ομογενή πληθυσμό πελατών. Από την άλλη πλευρά, η παράμετρος Δ είναι συγκεκριμένη για την μη-ομογενή περίπτωση και αντιπροσωπεύει πόσο μη-ομογενής είναι ο πληθυσμός από την σκοπιά της περιορισμένης ορθολογικότητας. Η Πρόταση 3.4.1 υποδηλώνει ότι η αύξηση του μέσου βαθμού ορθολογικότητας και η αύξηση της μη-ομογένειας έχουν τα αντίθετα αποτελέσματα στην αναμενόμενη πιθανότητα εισόδου, στην ωφέλεια των πελατών, στα έσοδα του συστήματος και στην κοινωνική ευημερία. Όταν η αναμενόμενη ωφέλεια της εισόδου είναι θετική, η αναμενόμενη πιθανότητα εισόδου μειώνεται καθώς αυξάνεται η μη-ομογένεια και ως αποτέλεσμα, τόσο οι πελάτες όσο και ο διαχειριστής εισπράττουν χαμηλότερη αναμενόμενη ωφέλεια. Όταν η αναμενόμενη ωφέλεια της εισόδου είναι αρνητική, η αναμενόμενη πιθανότητα εισόδου αυξάνεται καθώς αυξάνεται η μη-ομογένεια και ως αποτέλεσμα, οι πελάτες εισπράττουν χαμηλότερη αναμενόμενη ωφέλεια ενώ ο διαχειριστής δημιουργεί μεγαλύτερα αναμενόμενα έσοδα. Η Πρόταση 3.4.2 επεκτείνει την Πρόταση 3.1.2 στην μη-ομογενή περίπτωση.

Πρόταση 3.4.2. *Δεδομένου ότι ο βαθμός ορθολογικότητας κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $(\bar{\gamma} - \Delta, \bar{\gamma} + \Delta)$ με $0 < \Delta \leq \bar{\gamma}$ και με την προϋπόθεση ότι η ωφέλεια δωρεάν υπηρεσίας u παραμένει θετική,*

(i) *Η αναμενόμενη πιθανότητα εισόδου και η κοινωνική ευημερία αυξάνονται ως προς R και $E[X]$, και μειώνονται ως προς $C, E[X^2]$ και p. Και τα δύο συγκλίνουν στο μηδέν καθώς το p πηγαίνει στο άπειρο.*

(ii) *Η ωφέλεια των πελατών πρώτα μειώνεται και μετά αυξάνεται ως προς R και $E[X]$, και πρώτα αυξάνεται και μετά μειώνεται ως προς $C, E[X^2]$ και p. Συγκλίνει στο μηδέν καθώς το p πηγαίνει στο άπειρο.*

(iii) *Τα έσοδα του συστήματος αυξάνονται ως προς R και $E[X]$, και μειώνονται ως προς C και $E[X^2]$. Αυξάνονται επίσης ως προς $0 \leq p \leq 0.78u$, μειώνονται ως προς p αρκετά μεγάλο και συγκλίνουν στο μηδέν καθώς το p πηγαίνει στο άπειρο.*

Οι παραπάνω ιδιότητες μονοτονίας που αναφέρονται στην Πρόταση 3.4.2 ισχύουν για πιο γενικές κατανομές του βαθμού ορθολογικότητας και απορρέουν εύκολα από την Πρόταση 3.1.2, καθώς διατηρούνται παίρνοντας μέση τιμή. Η μόνη και κρίσιμη διαφορά από την Πρόταση 3.1.2 είναι ότι αποτυγχάνει να αποδείξει ότι τα έσοδα του συστήματος είναι μονοκόρυφη συνάρτηση της τιμής. Ενώ τα αριθμητικά πειράματα υπαινίσονται μια μονοκόρυφη συνάρτηση εσόδων, τα αναλυτικά αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου περιορίστηκαν σε ειδικές περιπτώσεις, όπως αυτές όπου $\Delta = \bar{\gamma}$ ή $(\bar{\gamma}-\Delta)u \geq 2$. Συνεχίζουμε με τις επεκτάσεις των αποτελεσμάτων της Παραγράφου 3.1.

Παρόλο που δεν εγγυάται τη μοναδικότητα της βέλτιστης τιμής για τη γενική περίπτωση, η Πρόταση 3.4.2(iii) μαζί με τη συνέχεια του (3.13) διασφαλίζει την ύπαρξη μιας βέλτιστης τιμής. Επιπλέον, αυτή η τιμή θα πρέπει να είναι στο διάστημα $[0.78u, \min(u, p^*(\bar{\gamma}-\Delta))]$, όπου $p^*(\bar{\gamma}-\Delta))$ είναι η βέλτιστη τιμή για την περίπτωση όπου όλοι οι πελάτες έχουν βαθμό ορθολογικότητας $\bar{\gamma}-\Delta$. Η απόδειξη της Πρότασης 3.4.2 στο Παράρτημα B δείχνει γιατί πρέπει να συμβαίνει αυτό. Επιπλέον, η παράγωγος του (3.13) ως προς p που υπολογισμένη στη βέλτιστη τιμή πρέπει να ισούται με μηδέν. Η εξίσωση βελτιστοποίησης γίνεται

$$\frac{u}{(u-p)^2}\ln\left(\frac{1+e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}}{1+e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}\right) = \frac{p}{u-p}\left[\frac{(\bar{\gamma}+\Delta)e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}}{1+e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}} - \frac{(\bar{\gamma}-\Delta)e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}{1+e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}\right]. \quad (3.15)$$

Για αυτή τη βέλτιστη τιμή p^*, η αναμενόμενη πιθανότητα εισόδου είναι

$$\bar{q}^* = \frac{p^*}{2\Delta u}\left[\frac{(\bar{\gamma}+\Delta)e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}}{1+e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}} - \frac{(\bar{\gamma}-\Delta)e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}{1+e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}\right], \quad (3.16)$$

και η ωφέλεια των πελατών, τα έσοδα του συστήματος και η κοινωνική ευημερία είναι

$$\Pi_C^* = \frac{\lambda p^*(u-p^*)}{2\Delta u}\left[\frac{(\bar{\gamma}+\Delta)e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}}{1+e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}} - \frac{(\bar{\gamma}-\Delta)e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}{1+e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}\right], \quad (3.17)$$

$$\Pi_A^* = \frac{\lambda (p^*)^2}{2\Delta u}\left[\frac{(\bar{\gamma}+\Delta)e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}}{1+e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}} - \frac{(\bar{\gamma}-\Delta)e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}{1+e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}\right], \quad (3.18)$$

$$\Pi_S^* = \frac{\lambda p^*}{2\Delta}\left[\frac{(\bar{\gamma}+\Delta)e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}}{1+e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(u-p)}} - \frac{(\bar{\gamma}-\Delta)e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}{1+e^{(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}\right], \quad (3.19)$$

αντίστοιχα.

Ολοκληρώνουμε αυτή τη Παράγραφο με δύο Πορίσματα που λαμβάνονται εύκολα χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των Παραγράφων 3.2 και 3.3. Το Πόρισμα 3.4.1 περιγράφει εν μέρει τη σχέση μεταξύ της βέλτιστης τιμής και της ωφέλειας δωρεάν υπηρεσίας, ενώ το Πόρισμα 3.4.2 παρέχει το άνω φράγμα στο μερίδιο της ωφέλειας των πελατών (και άρα το κάτω φράγμα στο μερίδιο των εσόδων του συστήματος) το οποίο συμφωνεί με το αντίστοιχο του Πορίσματος 3.3.1.

Πόρισμα 3.4.1. *Δεδομένου ότι ο βαθμός ορθολογικότητας κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα* $(\bar{\gamma}-\Delta, \bar{\gamma}+\Delta)$ *με* $0<\Delta \leq \bar{\gamma}$ *και η ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης είναι* $u>0$*, ο διαχειριστής υπερτιμολογεί (δηλαδή,* $p^{*}>u$*) εάν* $\bar{\gamma} u<2$ *και υποτιμολογεί (δηλαδή,* $p^{*}<u$*) εάν* $(\bar{\gamma}-\Delta) u>2$.

Πόρισμα 3.4.2. *Δεδομένου ότι ο βαθμός ορθολογικότητας κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα* $(\bar{\gamma}-\Delta, \bar{\gamma}+\Delta)$ *με* $0<\Delta \leq \bar{\gamma}$ *και η ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης είναι* $u>0$*, εάν ο διαχειριστής γνωρίζει τον βαθμό ορθολογικότητας των πελατών και ορίζει την τιμή ανάλογα για να μεγιστοποιήσει τα έσοδα του συστήματος, ο διαχειριστής λαμβάνει πάντα περισσότερο από το 78% της κοινωνικής ευημερίας και οι πελάτες μένουν με λιγότερο από το 22% της κοινωνικής ευημερίας.*

3.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το Κεφάλαιο εξετάστηκε ένα σύστημα εκκαθάρισης που επισκέπτονται περιορισμένα ορθολογικοί πελάτες. Διερευνήθηκαν οι επιπτώσεις της περιορισμένης ορθολογικότητας και έγινε σύγκριση της ωφέλειας των πελατών, των εσόδων του διαχειριστή του συστήματος και της κοινωνικής ευημερίας στην απολύτως ορθολογική περίπτωση με εκείνα στη μη-ορθολογική περίπτωση. Για το σκοπό αυτό, η περιορισμένη ορθολογικότητα εισάγεται στο σύστημα εκκαθάρισης χρησιμοποιώντας συναρτήσεις quantal-response, διάφορες ποσότητες ενδιαφέροντος αναλύονται πρώτα με την υπόθεση της σταθερής τιμής και στη συνέχεια με την υπόθεση ότι η τιμή εξυπηρέτησης καθορίζεται από έναν διαχειριστή με στόχο τη μεγιστοποίηση των αναμενόμενων εσόδων. Η απουσία εξωτερικοτήτων (externalities) μεταξύ των πελατών επέτρεψε έναν απλό χαρακτηρισμό και έναν αποτελεσματικό υπολογισμό της βέλτιστης τιμής εξυπηρέτησης, της πιθανότητας εισόδου και των ωφελειών. Η ανάλυση ευαισθησίας αυτών των ποσοτήτων σε σχέση με τον βαθμό ορθολογικότητας των πελατών έδωσε ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Η βέλτιστη τιμή, η ωφέλεια των πελατών και τα έσοδα του συστήματος αποδείχθηκαν όλα μη μονότονα ως προς τον βαθμό ορθολογικότητας, ενώ η πιθανότητα εισόδου και η κοινωνική ευημερία φάνηκε να αυξάνονται καθώς οι πελάτες γίνονται πιο ορθολογικοί. Για τη βέλτιστη τιμή, την ωφέλεια των πελατών και τα έσοδα του συστήματος, εντοπίστηκαν τα τοπικά ακρότατα όπου άλλαξε η κατεύθυνση της μεταβολής (δηλ. η μονοτονία) ως προς τον βαθμό ορθολογικότητας. Αυτά τα τοπικά ακρότατα, με τη σειρά τους, οδήγησαν σε ένα αυστηρά κάτω φράγμα στην τιμή, στα έσοδα του συστήματος και σε ένα αυστηρά άνω φράγμα για την ωφέλεια των πελατών. Το τελευταίο είναι πράγματι η μέγιστη ωφέλεια που μπορούν να δημιουργήσουν οι περιορισμένα ορθολογικοί πελάτες. Αυτή η τιμή του βαθμού ορθολογικότητας που μεγιστοποιεί την ωφέλεια των πελατών μειώνεται ως προς την αναμενόμενη ωφέλεια της δωρεάν εξυπηρέτησης. Συνεπώς, όσο υψηλότερη είναι η αναμενόμενη ωφέλεια δωρεάν εξυπηρέτησης, τόσο λιγότερο ορθολογικοί θα προτιμούσαν να είναι οι πελάτες. Από την άλλη πλευρά, ανεξάρτητα από τις παραμέτρους του συστήματος, ο διαχειριστής προτιμά ένα σύστημα με μη-ορθολογικούς πελάτες, το οποίο του επιτρέπει να χρεώνει αυθαίρετα μεγάλη τιμή, ενώ η κοινωνική ευημερία μεγιστοποιείται όταν οι πελάτες είναι απόλυτα ορθολογικοί. Το κατώτερο όριο της τιμής συνεπάγεται ένα άλλο ενδιαφέρον αποτέλεσμα: η τιμή της εξυπηρέτησης είναι πάντα μεγαλύτερη από το 78% της ωφέλειας δωρεάν εξυπηρέτησης, πράγμα που σημαίνει ότι τα έσοδα του συστήματος αποτελούν τουλάχιστον το 78% της κοινωνικής ευημερίας. Συνεπώς, τα πλησιέστερα ποσοστά της ωφέλειας των πελατών και των εσόδων του συστήματος επί της κοινωνικής ευημερίας είναι περίπου 22–78%. Το γεγονός ότι τα έσοδα του συστήματος μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλα καθώς οι πελάτες γίνονται όλο και λιγότερο μη-ορθολογικοί υπονοεί ότι η παράβλεψη της περιορισμένης ορθολογικότητας μπορεί να είναι πολύ δαπανηρή. Από την άλλη πλευρά, η εσφαλμένη υπόθεση της περιορισμένης ορθολογικότητας έχει κάποιο κόστος. Πιο συγκεκριμένα, ένας διαχειριστής που πιστεύει ότι οι πελάτες είναι περιορισμένα ορθολογικοί μπορεί να χρεώσει μια πολύ υψηλή τιμή, η οποία θα έκανε τους πελάτες που στην πραγματικότητα είναι απόλυτα ορθολογικοί να αποχωρήσουν και έτσι να μηδενιστούν τα έσοδα του συστήματος.

Σε όλο το Κεφάλαιο, υποθέσαμε ότι το υπό εξέταση σύστημα παρέχει την εξυπηρέτηση με θετική ωφέλεια με την έννοια ότι η αμοιβή της εξυπηρέτησης υπερβαίνει το αναμενόμενο κόστος παραμονής για εξυπηρέτηση (δηλαδή, $u > 0$). Πολλά από τα αποτελέσματα συνεχίζουν να ισχύουν για συστήματα εξυπηρέτησης με $u \leq 0$, οι διαφορές προκύπτουν κυρίως σε σχέση με τη συμπεριφορά της ωφέλειας των πελατών και της κοινωνικής ευημερίας. Ξεκινώντας με την Πρόταση 3.1.1, για μη-αρνητικές τιμές, τα αποτελέσματα της μονοτονίας ισχύουν με την εξαίρεση ότι όταν $p > u$, η κοινωνική ευημερία αυξάνεται καθώς οι πελάτες γίνονται πιο ορθολογικοί. Οι μεταβολές στην πιθανότητα εισόδου και στα έσοδα του συστήματος σε σχέση με τα $u \leq 0$ και $p \geq 0$ είναι όπως στην Πρόταση 3.1.1, αλλά η κοινωνική ευημερία είναι μη μονότονη ως προς $u < 0$ και αυξάνεται ως προς $p \geq 0$, και η ωφέλεια των πελατών μειώνεται ως προς $u < 0$ και αυξάνεται ως προς

$p \geq 0$. Η αρνητικότητα του u δεν επηρεάζει την ισχύ της Πρότασης 3.2.1, επιπλέον συνεπάγεται το ανώτερο φράγμα $2/\gamma$ στη βέλτιστη τιμή. Το Πόρισμα 3.2.1 επεκτείνεται τετριμμένα επειδή $u \leq 0$ και η βέλτιστη τιμή είναι μεγαλύτερη από $1/\gamma > 0$. Όπως στο Πόρισμα 3.2.1, η βέλτιστη τιμή, η πιθανότητα εισόδου και τα προκύπτοντα έσοδα του συστήματος αυξάνονται ως προς $u \leq 0$, αλλά η ωφέλεια των πελατών μειώνεται και η κοινωνική ευημερία είναι μη μονότονη ως προς $u < 0$. Η αρνητική ωφέλεια εξυπηρέτησης οδηγεί επίσης σε γνήσια μονοτονία όλων των ποσοτήτων ενδιαφέροντος ως προς τον βαθμό περιορισμένης ορθολογικότητας. Πιο συγκεκριμένα, για $u < 0$, η βέλτιστη τιμή, η πιθανότητα εισόδου και τα έσοδα του συστήματος μειώνονται ως προς τον βαθμό ορθολογικότητας, ενώ η ωφέλεια των πελάτων και η κοινωνική ευημερία αυξάνονται ως προς αυτόν. Τα όρια που προβλέπονται στην Πρόταση 3.3.1 καθώς οι πελάτες γίνονται λιγότερο ορθολογικοί συνεχίζουν να ισχύουν. Ωστόσο, καθώς οι πελάτες γίνονται πιο ορθολογικοί, η βέλτιστη τιμή, η πιθανότητα εισόδου, η ωφέλεια των πελατών, τα έσοδα του συστήματος και η κοινωνική ευημερία συγκλίνουν στο μηδέν. Σχετικά με τα μερίδια του διαχειριστή και των πελατών στην κοινωνική ευημερία, όταν $u < 0$, η ωφέλεια των πελατών και η κοινωνική ευημερία είναι και οι δύο αρνητικές ενώ τα έσοδα του συστήματος είναι θετικά, επομένως ο μόνος νικητής είναι ο διαχειριστής του συστήματος και οι πελάτες υφίστανται ζημιά μεγαλύτερη από τα έσοδα του συστήματος. Τέλος, η μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας σε αυτή την περίπτωση ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της πιθανότητας εισόδου, επομένως απαιτεί τον καθορισμό μιας άπειρης τιμής.

Επίσης, αρχίσαμε να διερευνούμε την ισορροπία για έναν πληθυσμό πελατών που είναι μη-ομογενείς ως προς τον βαθμό ορθολογικότητας. Μπορέσαμε να επεκτείνουμε μερικά από τα αποτελέσματα στην περίπτωση όπου ο βαθμός ορθολογικότητας έχει ομοιόμορφη κατανομή. Ωστόσο, επιπλοκές προκύπτουν ακόμη και με τη σχετικά απλή ομοιόμορφη κατανομή, η οποία επιτρέπει τη γραφή της αναμενόμενης πιθανότητας εισόδου σε κλειστή μορφή.

Πρόσθετες πιθανές κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα περιλαμβάνουν τη χαλάρωση των περιοριστικών υποθέσεων του μοντέλου. Πρώτα απ' όλα, το σύστημα εξυπηρέτησης που εξετάζεται σε αυτό το Κεφάλαιο είναι ένα απλό μοντέλο, παρόλο που μπορεί να μοντελοποιήσει ή να προσεγγίσει ορισμένα συστήματα εξυπηρέτησης όπως ορισμένα συστήματα μεταφοράς. Η απόρριψη της υπόθεσης ότι όλοι οι πελάτες στο σύστημα εξυπηρετούνται όταν ο διακομιστής είναι διαθέσιμος και υποθέτοντας ότι έχει πεπερασμένη χωρητικότητα και έτσι θα εξυπηρετεί μόνο ένα ποσοστό των πελατών μπορεί να κάνει το μοντέλο πιο ρεαλιστικό. Θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε πώς τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλάιου επεκτείνονται στο μοντέλο με πεπερασμένη χωρητικότητα συστήματος. Μια άλλη παραλλαγή του προβλήματος που λύθηκε σε αυτό το Κεφάλαιο είναι αυτή στην οποία οι πελάτες λαμβάνουν μια απόφαση αφού παρατηρήσουν τον αριθμό των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα.

Η ειδική περίπτωση αυτής της παρατηρήσιμης έκδοσης όπου οι χρόνοι εξυπήρετησης κατανέμονται εκθετικά είναι ισοδύναμη με την μη-παρατηρήσιμη έκδοση, καθώς με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης, το να γνωρίζεις πόσα άτομα βρίσκονται στο σύστημα δεν παρέχει καμία πρόσθετη πληροφορία για τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι την επόμενη ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης. Επομένως, για να διαφέρει η παρατηρήσιμη έκδοση από το μοντέλο αυτού του Κεφαλαίου, οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών υπηρεσιών πρέπει να είναι μη εκθετικοί. Μια άλλη ενδιαφέρουσα κατεύθυνση προς εξερεύνηση περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της περιορισμένης ορθολογικότητας του διαχειριστή. Το πρόβλημα τιμολόγησης που επιλύθηκε σε αυτό το Κεφάλαιο υποθέτει ότι ο διαχειριστής ορίζει την τιμή μεγιστοποιώντας τα έσοδα του συστήματος. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, ο ίδιος ο διαχειριστής μπορεί να επιδείξει περιορισμένη ορθολογικότητα όπως και οι πελάτες και να ορίσει μια τιμή που δεν είναι η βέλτιστη.

Παράρτημα Α

Αποδείξεις Κεφαλαίου 2: Περιορισμένη Ορθολογικότητα σε Συστήματα Εξυπηρέτησης. Huang, Allon and Bassamboo

Παρακάτω δίνονται οι αποδείξεις των Huang, Allon, Bassamboo (2013).

A.1 Αποδείξεις

Απόδειξη της Πρότασης 2.1.1. Έστω $\lambda_n \equiv \lambda\varphi_n, \mu_n \equiv \mu$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον αριθμό των πελατών στο σύστημα ως μια διαδικασία γέννησης-θανάτου με ρυθμό γεννήσεων λ_n και ρυθμό θανάτου μ_n.

Έχουμε τις εξισώσεις ισορροπίας: $\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1, (\lambda_n + \mu)P_n = \mu P_{n+1} + \lambda_{n-1}P_{n-1}, n \geq 1$. Λύνοντας τις εξισώσεις, έχουμε τις οριακές πιθανότητες:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu^k}},$$

$$P_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_n\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu^k}\right)}, n \geq 1.$$

Επαρκής και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη οριακών πιθανοτήτων είναι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu^k} < \infty.$$

Έστω $a_k = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu^k}$, χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου, έχουμε $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\lambda_k}{\mu} = \rho\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$. Η σειρά συγκλίνει, συνεπώς η συνθήκη ικανοποιείται πάντα για $\beta \in (0, \infty)$. $\square$

Απόδειξη της Πρότασης 2.1.2. Έστω $g(\varphi(p, \beta_I)) \equiv \frac{e^{\frac{R-p-\frac{C}{\mu-\varphi(p,\beta_I)\lambda}}{\beta_I}}}{1+e^{\frac{R-p-\frac{C}{\mu-\varphi(p,\beta_I)\lambda}}{\beta_I}}} - \varphi(p, \beta_I)$, τότε $g(0) > 0$ και $g(d) = -d < 0$,, όπου $d \equiv \min\{1, \frac{1}{\rho}ac\}$.

Η $g(\varphi(p,\beta_I))$ είναι συνεχής στο $\varphi(p,\beta_I)$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\varphi^*(p,\beta_I) \in (0,d)$, τέτοιο ώστε $g(\varphi^*(p,\beta_I)) = 0$. Επιπλέον, η $g(\varphi(p,\beta_I))$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς $\varphi(p,\beta_I)$. Οπότε η λύση είναι μοναδική. □

Απόδειξη της Πρότασης 2.1.3. (i) Για να αποδείξουμε αυτό το κομμάτι, χρειαζόμαστε το Λήμμα EC.1 στο Παράρτημα B των Huang et al. (2012), που δηλώνει ότι η πιθανότητα εισόδου σε ισορροπία μειώνεται μονότονα ως προς το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας όταν η πιθανότητα εισόδου είναι πάνω από 1/2. Ο λόγος που χρειαζόμαστε το Λήμμα EC.1 είναι ο ακόλουθος: Το γεγονός ότι $\varphi(p,\beta_I) > \frac{1}{2}$ είναι ισοδύναμο με $R - p - \frac{C}{\mu - \varphi(p,\beta_I)\lambda} > 0$, το οποίο είναι ισοδύναμο με $R - p - \frac{C}{\mu - \frac{1}{2}\lambda} > 0$, δηλαδή, $p < \bar{p}$.

Τα μέρη (ii) και (iii) μπορούν να αποδειχθούν αναλόγως.

(iv) Για σταθερό β_I, συμβολίζουμε $F(p,\varphi(p)) \equiv \frac{e^{\frac{R-p-\frac{C}{\mu-\varphi(p)\lambda}}{\beta_I}}}{1+e^{\frac{R-p-\frac{C}{\mu-\varphi(p)\lambda}}{\beta_I}}} - \varphi(p)$, οπότε η Σχέση 2.2 είναι ισοδύναμη με $F(p,\varphi(p)) = 0$. Για ευκολία, συμβολίζουμε $f \equiv f(p,\varphi(p)) = \frac{R-p-\frac{C}{\mu-\varphi(p)\lambda}}{\beta_I}$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης παίρνουμε πρώτη παράγωγο στην εξίσωση $F(p,\varphi(p)) = 0$. Έχουμε

$$\frac{e^f}{\beta_I(1+e^f)^2} + \frac{e^f\lambda C\varphi'(p)}{\beta_I(1+e^f)^2(\mu-\varphi(p)\lambda)^2} + \varphi'(p) = 0.$$

Απλοποιώντας την εξίσωση λαμβάνουμε

$$\varphi'(p) = -\frac{e^f(\mu-\varphi(p)\lambda)^2}{\beta_I(1+e^f)^2(\mu-\varphi(p)\lambda)^2 + e^f\lambda C} < 0.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη της Πρότασης 2.2.1. Πρώτα δείχνουμε ότι $p^*(\beta) = p^*(0) - \epsilon_\beta$ για κάποιο $\epsilon_\beta > 0$ όταν το β είναι αυστηρά θετικό αλλά επαρκώς μικρό. Εξαντλούμε όλες τις περιπτώσεις για να αποδείξουμε το αποτέλεσμα. Πρώτον, δείχνουμε ότι το $p^*(\beta)$ δεν μπορεί να είναι ίσο με το $p^*(0)$ όταν το β είναι αυστηρά θετικό αλλά αρκετά μικρό. Από το Λήμμα EC.13 στο Huang et al. (2012), $\Pi(p^*(0),\beta) < \Pi_{n_r}$, και $\Pi(p^*(0),0) = \lim_{\beta\to 0}\Pi(p^*(0),\beta) < \Pi_{n_r}$, για $\beta \in (0,\bar{\beta})$ για κάποιο $\bar{\beta} > 0$. Επομένως, έχουμε $\Pi(p^*(0),\beta)$ στη γειτονιά του $\Pi(p^*(0),0)$ όταν το β είναι μικρό από τη συνέχεια. Τώρα αν χρεώσουμε την τιμή $p = p^* - \epsilon = R - \frac{Cn_r}{\mu} - \epsilon$ για κάποιο μικρό $\epsilon > 0$, τότε υπό πλήρη ορθολογικότητα, ο πελάτης που βλέπει $n_r - 1$ πελάτες μπροστά του θα μπει στην ουρά με την ωφέλεια ϵ. Με το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας β, η πιθανότητα εισόδου του θα ήταν $\varphi_{n_r-1} = \frac{e^{\frac{\epsilon}{\beta}}}{1+e^{\frac{epsilon}{\beta}}} < 1$ αλλά μπορεί να είναι αρκετά κοντά στο 1, πράγμα που συνεπάγεται λιγότερη συμφόρηση και συνεπώς χαμηλότερα έσοδα. Έχουμε $\Pi(p^*-\epsilon,\beta) < \Pi(p^*-\epsilon,0) < \Pi_{n_r}$, για $\beta \in (0,\bar{\beta}_\epsilon)$ για κάποια $\bar{\beta}_\epsilon > \bar{\beta} > 0$. Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι $\lim_{\beta\to 0}\Pi(p^*-\epsilon,\beta) = \Pi(p^*-\epsilon,0)$ και $\lim_{\epsilon\to 0}\Pi(p^*-\epsilon,0) = \Pi_{n_r}$. Επομένως, το $\Pi(p^*-\epsilon,\beta)$ μπορεί να πάει αυθαίρετα κοντά στο Π_{n_r} όταν το β είναι μικρό και το ϵ είναι επίσης μικρό. Επομένως, έχουμε $\Pi(p^*(0),\beta) < \Pi(p^*-\epsilon,\beta)$ όταν το β είναι μικρό και το ϵ είναι επίσης μικρό. Αυτό δείχνει ότι το $p^*(0)$ δεν μπορεί να είναι η βέλτιστη τιμή όταν οι πελάτες είναι ελαφρώς περιορισμένα ορθολογικοί.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι οποιαδήποτε τιμή έχει τη μορφή $p = p^* + \epsilon = R - \frac{Cn_r}{\mu} + \epsilon$ για κάποιο σταθερό μικρό $\epsilon > 0$ δεν μπορεί να είναι η βέλτιστη τιμή. Υπό πλήρη ορθολογικότητα, ο πελάτης που παρατηρεί $n_r - 1$ πελάτες μπροστά του δεν θα εισέλθει στο σύστημα, και τα έσοδα θα είναι αυστηρά υψηλότερα εάν η τιμή $p_1 = R - \frac{C(n_r+1)}{\mu}$ εφαρμοστεί, καθώς αυτή η τροποποίηση θα εξακολουθεί να προκαλεί τον ίδιο αριθμό πελατών να συμμετάσχουν και τα έσοδα ανά πελάτη θα είναι αυστηρά υψηλότερα. Έχουμε $\Pi(p^* + \epsilon, 0) < \Pi_{n_r+1} \le \Pi_{n_r}$. Επιπλέον, έχουμε $\Pi(p^* + \epsilon, \beta) < \Pi_{n_r+1}$ για $\beta \in (0, \bar{\beta}_{\epsilon_1})$ για κάποιο $\bar{\beta}_{\epsilon_1} > 0$. Επομένως, $\Pi(p^* + \epsilon, \beta) < \Pi(p^* - \epsilon, \beta)$ όταν το β είναι μικρό και το ϵ_1 είναι επίσης μικρό. Άλλες τιμές "μακριά από" το $p^*(0)$ σαφώς δεν μπορούν να είναι η βέλτιστη τιμή όταν το β είναι μικρό. Επομένως, $p^*(\beta) = p^*(0) - \epsilon_\beta$ για κάποιο $\epsilon_\beta > 0$ όταν το β είναι μικρό.

Τέλος, πρέπει να επαληθεύσουμε την ύπαρξη της βέλτιστης τιμής $p^*(\beta)$. Για οποιοδήποτε $\beta > 0$, γνωρίζουμε ότι το $\Pi(p, \beta)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[p^*(0) - \frac{C}{\mu}, p^*(0)]$. Επομένως, υπάρχει κάποιο $p^*(\beta) \in [p^*(0) - \frac{C}{\mu}, p^*(0)]$ για μεγιστοποίηση του $\Pi(p, \beta)$. Δείξαμε ότι η βέλτιστη τιμή κάτω από ελαφρώς περιορισμένη ορθολογικότητα είναι αυστηρά χαμηλότερη από τη βέλτιστη τιμή υπό πλήρη ορθολογικότητα. Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος της πρότασης σημειώνοντας τα εξής: $\Pi(p^*(\beta), \beta) = \Pi(p^* - \epsilon_\beta, \beta) < \Pi(p^* - \epsilon_\beta, 0) < \Pi_{n_r}$, για $\beta \in (0, \bar{\beta}_{\epsilon_\beta})$ για μερικά $\bar{\beta}_{\epsilon_\beta} > 0$. $\square$

Απόδειξη της Πρότασης 2.2.2. (i) Θυμόμαστε ότι $\Pi^I(p, \beta_I) = p\varphi(p, \beta_I)\lambda$, όπου η $\varphi(p, \beta_I)$ είναι η μοναδική λύση της Εξίσωσης 2.1.2. Για οποιοδήποτε σταθερό β_I , για συντομία γράφουμε $\Pi^I(p)$ και $\varphi(p)$. Παίρνοντας την πρώτη παράγωγο, έχουμε $\Pi^{I'}(p) = \lambda[\varphi(p) + p\varphi'(p)]$, όπου το $'$ υποδηλώνει την παράγωγο. Δείξαμε ότι $\varphi'(p) < 0$. Έστω $R_h'(p) = 0$, έχουμε $p = -\frac{\varphi(p)}{\varphi(p)} > 0$. Τώρα διερευνούμε αν οι αναγκαίες συνθήκες (μηδενισμού της παραγώγου) πρώτης τάξης έχουν πολλαπλές λύσεις. Αντικαθιστώντας το $\varphi'(p)$, έχουμε

$$p = \frac{\lambda C\varphi(p)}{(\mu - \varphi(p)\lambda)^2} + \frac{\beta_I}{1 - \varphi(p)}.$$

Μας ενδιαφέρει αν αυτή η εξίσωση έχει μοναδική λύση. Για διευκόλυνση της παρουσίασης, συμβολίζουμε $g(p) \equiv \frac{\lambda C\varphi(p)}{(\mu-\varphi(p)\lambda)^2} + \frac{\beta_I}{1-\varphi(p)} - p$, οπότε το ερώτημα είναι αν το $g(p) = 0$ έχει μια μοναδική λύση. Αποδεικνύουμε ότι το $g(p)$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς p. Πράγματι, είναι σαφές ότι ο πρώτος όρος στο δεξί μέρος $\frac{\lambda C\varphi(p)}{(\mu-\varphi(p)\lambda)^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς p, όπως και ο δεύτερος και ο τρίτος όρος. Ως εκ τούτου, το $g(p)$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς p. Σημειώστε ότι $g(0) > 0$ και $g(\infty) = -\infty$, ώστε να υπάρχει ένα μοναδικό p^* τέτοιο ώστε $g(p^*) = 0$. Τέλος, μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι η συνθήκη δεύτερης τάξης ικανοποιείται.

(ii) Γνωρίζουμε ότι το $p^*(\beta_I)$ λύνει την ακόλουθη εξίσωση

$$p^*(\beta_I) = \frac{\lambda C\varphi(p^*(\beta_I), \beta_I)}{(\mu - \varphi(p^*(\beta_I), \beta_I)\lambda)^2} + \frac{\beta_I}{1 - \varphi(p^*(\beta_I), \beta_I)}.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης και αφού απλοποιήσουμε, έχουμε

$$p^{*'}(\beta_I) = \frac{A\frac{\partial\varphi(p,\beta_I)}{\partial\beta_I} + (\mu - \varphi(p, \beta_I)\lambda)^3(1 - \varphi(p, \beta_I))}{(\mu - \varphi(p, \beta_I)\lambda)^3(1 - \varphi(p, \beta_I))^2 - A\frac{\partial\varphi(p,\beta_I)}{\partial p}}.$$

Σημειώστε ότι $A > 0$ και $\frac{\partial\varphi(p,\beta_I)}{\partial p} < 0$, και γνωρίζουμε ότι ο παρονομαστής είναι αυστηρά θετικός. Ως εκ τούτου, το $p^{*'}(\beta_I)$ έχει το ίδιο πρόσημο με τον αριθμητή. Αν $\frac{\partial\varphi(p,\beta_I)}{\partial\beta_I} \ge 0$, δηλ. $p^*(\beta_I) \ge \bar{p}$ (από την Πρόταση 2.1.3) , μετά $p^{*'}(\beta_I) > 0$. Διαφορετικά, ο αριθμητής μπορεί να είναι αρνητικός ανάλογα με τις παραμέτρους. Επομένως, $p^{*'}(\beta_I) > 0$ αν $p^*(\beta_I) \ge \bar{p}$. Διαφορετικά, το $p^{*'}(\beta_I)$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $A\frac{\partial\varphi(p,\beta_I)}{\partial\beta_I} + (\mu - \varphi(p, \beta_I)\lambda)^3(1 - \varphi(p, \beta_I))$, όπου $A \equiv \lambda C(\mu + \lambda\varphi(p, \beta_I))(1 - \varphi(p, \beta_I))^2 + \beta_I(\mu - \varphi(p, \beta_I)\lambda)^3$.

Για να απλοποιήσουμε περαιτέρω το αποτέλεσμα ως προς τις παράγουσες, ως προς το β_I, θέλουμε να μάθουμε αν η τιμή $\bar{p}$ (η οποία οδηγεί σε πιθανότητα εισόδου ισορροπίας 0.5 ανεξάρτητα από το επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας) μπορεί να είναι βέλτιστη. Υποθέτοντας ότι είναι βέλτιστη, τότε αντικαθιστώντας στη συνθήκη που ικανοποιεί η βέλτιστη τιμή, έχουμε,

$$R - \frac{2C}{2\mu - \lambda} = \frac{2\lambda C}{(2\mu - \lambda)^2} + 2\beta_I.$$

Απλοποιώντας έχουμε

$$\beta_0 = \frac{1}{2}R - \frac{2\mu C}{(2\mu - \lambda)^2}.$$

Εάν είναι θετικό, δηλ. $R \geq \frac{4\mu C}{(2\mu - \lambda)^2}$, γνωρίζουμε $\frac{dp^*(\beta_0)}{d\beta} > 0$, αφού $\frac{\partial \varphi(\bar{p}, \beta_0)}{\partial \beta_I} = 0$. Στη συνέχεια, είναι σαφές ότι για οποιοδήποτε $\beta_I > \beta_0$, έχουμε $\frac{dp^*(\beta_I)}{d\beta_I} > 0$. Από την άλλη πλευρά, αν $R < \frac{4\mu C}{(2\mu - \lambda)^2}$ έτσι ώστε $\beta_0 < 0$, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το $p^*(0) = R(1 - \sqrt{\frac{C}{\mu R}})$. Αν $p^*(0) \geq \bar{p}$, που ισοδυναμεί με $R \leq \frac{4\mu C}{(2\mu - \lambda)^2}$, έχουμε $\frac{dp^*(0)}{d\beta_I} > 0$. Αυτό στη συνέχεια συνεπάγεται ότι $\frac{dp^*(\beta_I)}{d\beta_I} > 0$ για κάθε $\beta_I \in [0, \infty)$. □

Απόδειξη της Πρότασης 2.2.1. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Περιβάλλουσας, έχουμε

$$\frac{d\Pi^I(p^*(\beta_I), \beta_I)}{d\beta_I} = p^*(\beta_I)\lambda \frac{\partial \varphi(p^*(\beta_I), \beta_I)}{\partial \beta_I}.$$

Τότε όλα τα αποτελέσματα (i), (ii) και (iii) ακολουθούν απευθείας από την Πρόταση 2.1.3 (i)-(iii). □

Απόδειξη της Πρότασης 2.2.3. Εξ ορισμού, $\Pi^{I'}(\lambda) = p[\varphi'(\lambda)\lambda + \varphi(\lambda)]$. Για να προσδιορίσουμε το πρόσημό του, θέλουμε πρώτα να προσδιορίσουμε το πρόσημο του $\varphi'(\lambda)$. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρόποι για να γίνει αυτό. Πρώτα, παρατηρήστε τη συνθήκη ισορροπίας, 2.2. Ας υποθέσουμε ότι το $\varphi(\lambda)$ είναι αύξουσα ως προς λ, τότε το αριστερό μέρος είναι φθίνουσα ενώ το δεξί μέρος είναι αύξουσα, άτοπο. Επομένως, $\varphi^{*'}(\lambda) < 0$. Ο άλλος τρόπος είναι να υπολογίσουμε αυτήν την παράγωγο χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης. Για ευκολία, συμβολίζουμε $f \equiv f(\lambda) = \frac{R - p - \frac{C}{\mu - \varphi(\lambda)\lambda}}{\beta_I}$, και $F(\lambda, \varphi(\lambda)) \equiv \frac{e^f}{1+e^f} - \varphi(\lambda)$. Η συνθήκη ισορροπίας είναι $F(\lambda, \varphi(\lambda)) = 0$. Παίρνοντας πρώτη παράγωγο και απλοποιώντας, έχουμε

$$\frac{Ce^f}{\beta_I(1 + e^f)^2} \frac{\varphi'(\lambda)\lambda + \varphi(\lambda)}{(\mu - \varphi(\lambda)\lambda)^2} + \varphi'(\lambda) = 0,$$

που σαφώς συνεπάγεται

$$\frac{d\varphi^*(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\Pi^I(\lambda)}{d\lambda} < 0,$$

και

$$\frac{d\varphi^*(\lambda)}{d\lambda} < 0. \square$$

Απόδειξη της Πρότασης 2.3.1. Για να δείξουμε αυτήν την πρόταση, μελετάμε τη συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας $W(\beta)$ καθώς το β είναι αυστηρά μεγαλύτερο αλλά και αυθαίρετα κοντά στο 0 και τη συγκρίνουμε με την $W(0)$. Ξεκινάμε από την περίπτωση που τυχαιοποιούνται μόνο οι πελάτες στις δύο οριακές καταστάσεις στη θετική και στην αρνητική πλευρά. Έστω $\sigma(\beta)$ η πιθανότητα εισόδου για τον πελάτη που βλέπει n_s- πελάτες στην ουρά μπροστά του και $\delta(\beta)$ η πιθανότητα εισόδου για τον πελάτη που παρατηρεί n_s πελάτες στην ουρά. Παραλείπουμε το β για απλότητα. Έστω $u_0 \equiv U_{n_s-1}$ και $u_1 \equiv U_{n_s}$ οι αναμενόμενες ωφέλειες εισόδου αντίστοιχα.

Αν $n_s > \frac{R\mu}{C} - \frac{1}{2}$, έχουμε $u_0 \geq 0, u_1 \leq 0, u_0 + u_1 \leq 0$. Με το Λήμμα EC.10, το οποίο παρέχει συνθήκες υπό τις οποίες λιγότερη συμφόρηση συνεπάγεται μεγαλύτερη ευημερία για οποιονδήποτε αριθμό πελατών που εισέρχονται χρησιμοποιώντας πιθανότητες logit, πρέπει να δείξουμε

$$(1-\sigma)\rho^{n_s} + \sigma(1-\delta)\rho^{n_s+1} + \cdots + \sigma\delta\rho^{n_s+2} < \rho n_s + 1, \tag{A.1}$$

όταν το β είναι μικρό. Πρέπει να δείξουμε

$$M(\beta) \equiv \sigma(\delta\rho + 1) = \frac{e^{\frac{u_0}{\beta}}}{1+e^{\frac{u_0}{\beta}}}(\rho\frac{e^{\frac{u_1}{\beta}}}{1+e^{\frac{u_1}{\beta}}} + 1) < 1.$$

Θέλουμε να μάθουμε το πρόσημο του $M'(\beta)$ όταν το β είναι μικρό. Μετά από πράξεις, έχουμε

$$\frac{M'(\beta)(1+e^{\frac{u_0}{\beta}})^2(1+e^{\frac{u_1}{\beta}})^2\beta^2}{e^{\frac{u_0}{\beta}}} = -\rho u_1 e^{\frac{u_0+u_1}{\beta}} - (\rho+1)u_0 e^{\frac{2u_1}{\beta}} - [(\rho+2)u_0 + \rho u_1]e^{\frac{u_1}{\beta}} - u_0 < 0,$$

όταν $\beta \in (0, \beta_1^*)$, όπου $M'(\beta_1^*) = 0$.

Παρατηρώντας αυτήν την ανισότητα, μπορούμε να δούμε ότι, αν $u_0 + u_1 > 0, u_0 > 0, u_1 < 0$, δηλ., $n_s < \frac{R\mu}{C} - \frac{1}{2}$, μετά $\lim_{\beta\to 0} M'(\beta) > 0$. Ως εκ τούτου, η κοινωνική ευημερία θα μειωθεί σε αυτή την περίπτωση. Εάν $u_0 + u_1 = 0, u_0 > 0, u_1 < 0$, δηλ., $n_s = \frac{R\mu}{C} - \frac{1}{2}$, τότε $\lim_{\beta\to 0} M'(\beta) > 0$. Εάν $u_0 = 0, u_1 < 0$, τότε το $M'(\beta)$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $-2\rho u_1 e^{\frac{u_1}{\beta}}$ όταν το β είναι κοντά στο 0, δηλαδή, $\lim_{\beta\to 0} M'(\beta) > 0$.

Στη συνέχεια, ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου οι πελάτες στις δύο οριακές καταστάσεις στη θετική πλευρά και δύο οριακές καταστάσεις στην αρνητική πλευρά εισέρχονται με κάποιες θετικές πιθανότητες. Έστω $\sigma_1(\beta), \sigma(\beta), \delta(\beta), \delta_1(\beta)$ οι πιθανότητες εισόδου για τους πελάτες που παρατηρούν $n_s - 2, n_s - 1, n_s, n_s + 1$ πελάτες αντίστοιχα. Θα παραλείψουμε επίσης την εξάρτησή τους από το β για συντομία στη συνέχεια. Θέλουμε να δείξουμε

$$(1-\sigma_1)\rho^{n_s-1} + \sigma_1(1-\sigma)\rho^{n_s} + \sigma_1\sigma(1-\delta)\rho^{n_s+1} + \sigma_1\sigma\delta(1-\delta_1)\rho^{n_s+2} + \sigma_1\sigma\delta\delta_1\rho^{n_s+3} < \rho^{n_s+1}, \tag{A.2}$$

όταν το β είναι μικρό.

Ένας προφανής τρόπος για να δείξουμε αυτή την ανισότητα είναι να χρησιμοποιήσουμε την παρόμοια τεχνική, τη παραγώγιση, όπως για την περίπτωση όπου δύο πελάτες εισέρχονται με μη-εκφυλισμένες πιθανότητες. Αλλά αποδεικνύεται ότι είναι ανυπόφορο. Αυτή είναι η τεχνική που ακολουθούμε: Γνωρίζουμε ήδη όταν $\beta \in (0, \beta_1^*)$, ότι ισχύει η Ανισότητα (A.1). Στη συνέχεια, είναι επιτυχία να δείξουμε ότι

$$(1-\sigma_1) + \sigma_1\rho^2 - \sigma_1\sigma\delta\delta_1\rho^3 + \sigma_1\sigma\delta\delta_1\rho^4 < \rho^2$$

που ισοδυναμεί με

$$\frac{\sigma_1\sigma\delta\delta_1}{1-\sigma_1} < \frac{\rho^2 - 1}{\rho^3(\rho-1)}.$$

Αυτή η ανισότητα μπορεί σαφώς να ικανοποιηθεί για $\beta \in (0, \beta_2^*)$, όπου το β_2^* κάνει την άνω ανισότητα ίση. Επομένως, όταν $\beta \in (0, \min\{\beta_1^*, \beta_2^*\})$, η Ανισότητα (A.2) ικανοποιείται. Πριν γενικεύσουμε το αποτέλεσμά μας, ας εξετάσουμε επίσης την περίπτωση όπου οι πελάτες στις τρεις οριακές καταστάσεις στη θετική πλευρά και στις τρεις οριακές καταστάσεις στην αρνητική πλευρά εισέρχονται με μη-εκφυλισμένες πιθανότητες. Έστω $\sigma_2(\beta), \sigma_1(\beta), \sigma(\beta), \delta(\beta), \delta_1(\beta), \delta_2(\beta)$ είναι οι πιθανότητες εισόδου για όσους βλέπουν $n_s-3, n_s-2, \ldots, n_s+2$ πελάτες αντίστοιχα. Πρέπει να δείξουμε

$$\begin{aligned}&(1-\sigma_2)\rho^{n_s-2}+\sigma_2(1-\sigma_1)\rho^{n_s-1}+\sigma_2\sigma_1\sigma(1-\sigma)\rho^{n_s}+\sigma_2\sigma_1\sigma(1-\delta)\rho^{n_s+1}+\\&\sigma_2\sigma_1\sigma\delta(1-\delta_1)\rho^{n_s+2}+\sigma_2\sigma_1\sigma\delta\delta_1(1-\delta_2)\rho^{n_s+3}+\sigma_2\sigma_1\sigma\delta\delta_1\delta_2\rho^{n_s+4}<\rho^{n_s+1},\end{aligned} \tag{A.3}$$

όταν το β είναι μικρό. Γνωρίζουμε ότι όταν $\beta \in (0, \min\{\beta_1^*, \beta_2^*\})$, ικανοποιείται η Ανισότητα (A.2). Ως εκ τούτου, είναι επιτυχία να εμφανιστεί

$$1-\sigma_2+\sigma_2\rho^3+\sigma_2\sigma_1\sigma\delta\delta_1\delta_2\rho^5+\sigma_2\sigma_1\sigma\delta\delta_1\delta_2\rho^6<\rho^3,$$

που ισοδυναμεί με

$$\frac{\sigma_2\sigma_1\sigma 2}{1_\delta-\sigma_2}<\frac{\rho^3-1}{\rho^5(\rho-1)}.$$

Αυτή η ανισότητα μπορεί να ικανοποιηθεί για $\beta \in (0, \beta_3^*)$, όπου το β_3^* κάνει την παραπάνω ανισότητα να είναι ισότητα. Επομένως, όταν $\beta \in (0, \min\{\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*\})$, ικανοποιείται η Ανισότητα (A.3). Σαφώς, μπορούμε να συνεχίσουμε έτσι μέχρι να εισέλθει στο σύστημα ο πρώτος αφικνούμενος πελάτης με θετική πιθανότητα, δηλαδή, πελάτες $2n_s$ να εισέλθουν με θετικές πιθανότητες. Για την περίπτωση που τυχόν πελάτες $2n+2$ εισέλθουν με θετικές πιθανότητες, $n \le n_s-1$, έχουμε την ανισότητα που πρέπει να ικανοποιείται

$$\frac{\sigma_n\ldots\sigma_2\sigma_1\sigma\delta\delta_1\delta_2\ldots\delta_n}{1-\sigma_n}<\frac{\rho^{n+1}-1}{\rho^{2n+1}(\rho-1)}. \tag{A.4}$$

Αυτή η ανισότητα μπορεί να ικανοποιηθεί για $\beta \in (0, \beta_n^*)$, όπου το β_n^* κάνει την παραπάνω ανισότητα να είναι ισότητα. Επομένως, όταν $\beta \in (0, \min\{\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*, \ldots, \beta_n^*\})$, είμαστε εντάξει.

Τώρα, πρέπει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις, όταν οι πελάτες στις οριακές καταστάσεις $2n$ εισέρχονται με κάποιες θετικές πιθανότητες, όπου $n > n_s$. Για παράδειγμα, για $n = n_s+1$, πρέπει να δείξουμε

$$\begin{aligned}&(1-\sigma_{n_s-1})\rho+\sigma_{n_s-1}(1-\sigma_{n_s-2})\rho^2+\sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\sigma(1-\sigma_{n_s-3})\rho^3+\ldots\\&+\sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\ldots\sigma\delta\delta_1\ldots(1-\delta_{n_s-1})\rho^{2n_s}+\sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\ldots\sigma\delta\delta_1\ldots\delta_{n_s-1}(1-\delta_{n_s})\rho^{2n_s+1}\\&+\sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\ldots\sigma\delta\delta_1\ldots\delta_{n_s-1}\delta_{n_s}\rho^{2n_s+2}<\rho^{n_s+1}\end{aligned} \tag{A.5}$$

όταν το β είναι μικρό. Έστω $x(\beta) \in (\sigma_1, 1)$ έτσι ώστε $x(\beta) = y+(1-y)\sigma_1$, όπου $y \in (0,1)$, τότε είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η Ανισότητα (A.3) μπορεί να τροποποιηθεί σε

$$\begin{aligned}&(1-\sigma_2)\rho^{n_s-2}+\sigma_2(1-\sigma_1)\rho^{n_s-1}+\sigma_2\sigma_1\sigma(1-\sigma)\rho^{n_s}+\sigma_2\sigma_1\sigma(1-\delta)\rho^{n_s+1}+\\&\sigma_2\sigma_1\sigma\delta(1-\delta_1)\rho^{n_s+2}+\sigma_2\sigma_1\sigma\delta\delta_1(1-\delta_2)\rho^{n_s+3}+\sigma_2\sigma_1\sigma\delta\delta_1\delta_2\rho^{n_s+4}<x(\beta)\rho^{n_s+1}\end{aligned} \tag{A.6}$$

όταν $\beta \in (0, \beta_1)$ για μερικά $\beta_1 > 0$. Γενικά, η Ανισότητα (A.4) μπορεί να τροποποιηθεί σε

$$\frac{\sigma_n\ldots\sigma_2\sigma_1\sigma\delta\delta_1\delta_2\ldots\delta_n}{1-\sigma_n}<\frac{y\rho^{n+1}-1}{\rho^{2n+1}(\rho-1)}. \tag{A.7}$$

Στη συνέχεια, αρκεί να δείξουμε

$$\delta_{n_s}\rho^{2n_s+1}(\rho-1)<(1-y)\rho^{n_s+1}, \tag{A.8}$$

που ισοδυναμεί με

$$\delta_{n_s}<\frac{1-y}{\rho_s^n(\rho-1)}, \tag{A.9}$$

που μπορεί σαφώς να ικανοποιηθεί για $\beta \in (0, \beta_y)$ για κάποιο $\beta_y > 0$.

Όταν ο αριθμός των οριακών καταστάσεων στις οποίες οι πελάτες τυχαιοποιούν πηγαίνει στο άπειρο (από την Πρόταση 2.1.1, το σύστημα είναι πάντα ευσταθές), τότε πρέπει να δείξουμε ότι η ακόλουθη αθροιστική σειρά είναι μικρότερη από ρ^{n_s+1}:

$$\begin{aligned}
&(1-\sigma_{n_s-1})\rho + \sigma_{n_s-1}(1-\sigma_{n_s-2})\rho^2 + \sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\sigma(1-\sigma_{n_s-3})\rho^3 + \dots \\
&+ \sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\dots\sigma\delta\delta_1\dots(1-\delta_{n_s-1})\rho^{2n_s} + [\sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\dots\sigma\delta\delta_1\dots\delta_{n_s-1}(1-\delta_{n_s})\rho^{2n_s+1} \\
&+ \sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\dots\sigma\delta\delta_1\dots\delta_{n_s-1}\delta_{n_s}(1-\delta_{n_s+1})\rho^{2n_s+2} \\
&+ \sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\dots\sigma\delta\delta_1\dots\delta_{n_s}\delta_{n_s+1}(1-\delta_{n_s+2})\rho^{2n_s+3} + \dots] < \rho^{n_s+1}.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι το μέρος στις [.] μπορεί να γίνει μικρότερο από $(1-y)(1-\sigma_1)\rho^{n_s+1}$ ως $\beta \in (0, \varepsilon^*)$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\dots\sigma\delta\delta_1\dots\delta_{n_s-1}(1-\delta_{n_s})\rho^{2n_s+1} + \sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\dots\sigma\delta\delta_1\dots\delta_{n_s-1}\delta_{n_s}(1-\delta_{n_s+1})\rho^{2n_s+2} \\
&+ \sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\dots\sigma\delta\delta_1\dots\delta_{n_s}\delta_{n_s+1}(1-\delta_{n_s+2})\rho^{2n_s+3} + \dots \\
&= \rho^{2n_s+1}\sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\dots\sigma\delta\delta_1\dots\delta_{n_s-1}\left[(1-\delta_{n_s}) + \delta_{n_s}(1-\delta_{n_s+1})\rho + \delta_{n_s}\delta_{n_s+1}(1-\delta_{n_s+2})\rho^2 + \dots\right] \\
&\le \rho^{2n_s+1}\sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\dots\sigma\delta\delta_1\dots\delta_{n_s-1}\left[1 + \delta_{n_s}\rho + \delta_{n_s}^2\rho^2 + \dots\right] \\
&= \rho^{2n_s+1}\sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\dots\sigma\delta\delta_1\dots\delta_{n_s-1}\frac{1}{1-\delta_{n_s}\rho} < (1-y)(1-\sigma_1)\rho^{n_s+1}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Η τελευταία ανισότητα προέρχεται από

$$\frac{\sigma_{n_s-1}\sigma_{n_s-2}\dots\sigma\delta\delta_1\dots\delta_{n_s-1}}{(1-\delta_{n_s}\rho)(1-\sigma_1)} < \frac{\delta\delta_1\dots\delta_{n_s-1}}{(1-\delta_{n_s}\rho)(1-\sigma_1)} < \frac{1-y}{\rho^{n_s}} \tag{A.12}$$

που μπορεί εύκολα να ικανοποιηθεί καθώς το β είναι μικρό.

Η περίπτωση όταν $n_s < \frac{R\mu}{C} - \frac{1}{2}$ ή $n_s = \frac{R\mu}{C} - \frac{1}{2}$ μπορεί να αποδειχθεί με παρόμοια επιχειρήματα χρησιμοποιώντας το Λήμμα EC.8 που διατυπώνει τα ανάλογα αποτελέσματα για την περίπτωση που μόνο οι πελάτες στις δύο οριακές καταστάσεις εισέρχονται με logit πιθανότητες, το Λήμμα EC.10 και το Λήμμα EC.11 στην εργασία των Huang et al. (2012) που δίνουν συνθήκες υπό τις οποίες περισσότερη συμφόρηση συνεπάγεται λιγότερα περιθώρια ευημερίας για οποιονδήποτε αριθμό πελατών που συμμετέχουν χρησιμοποιώντας πιθανότητες logit. Οι αποδείξεις παραλείπονται για συντομία. Ως εκ τούτου, ολοκληρώσαμε την απόδειξη. □

Απόδειξη της Πρότασης 2.3.2. Δεδομένου του Λήμματος EC.12 στο Παράρτημα B των Huang et al. (2012) που δείχνει ότι για οποιαδήποτε τιμή που χρεώνεται στο διάστημα $\left(R - \frac{C(n_0+1)}{\mu}, R - \frac{C(n_0)}{\mu}\right]$, το συμπέρασμα ισχύει, χρειάζεται μόνο να δείξουμε ότι όταν το p είναι εκτός του διαστήματος $\left(R - \frac{C(n_0+1)}{\mu}, R - \frac{C(n_0)}{\mu}\right]$, το συμπέρασμα συνεχίζει να ισχύει.

Χρησιμοποιούμε το ίδιο επιχείρημα με το Λήμμα EC.12 των Huang et al. (2012). Γνωρίζουμε ότι το W_{n_0} είναι η βέλτιστη κοινωνική ευημερία από τον Yechiali (1971). Ωστόσο, δεν μπορούμε να αποκλείσουμε την περίπτωση $W(p, \beta) = W_{n_0}$ για κάποιο p από τα αποτελέσματα του Yechiali (1971). Για να αποκλείσουμε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιούμε τους Haviv και Puterman (1998), οι οποίοι δείχνουν ότι οι μόνες μέσες βέλτιστες στάσιμες πολιτικές είναι τύπου κατωφλίου, ότι υπάρχουν το πολύ δύο και, εάν υπάρχουν δύο, εμφανίζονται διαδοχικά. Αυτό συνεπάγεται ότι το μόνο κέρδος βέλτιστων τυχαιοποιημένων στάσιμων πολιτικών θα πρέπει να τυχαιοποιείται στις δυο καταστάσεις-κατώφλια, εάν υπάρχουν. Το επιχείρημα είναι απλό: για να είναι βέλτιστη οποιαδήποτε τυχαιοποιημένη πολιτική, οι ντετερμινιστικές πολιτικές που έχουν αυστηρά θετικές πιθανότητες θα πρέπει να αποφέρουν την ίδια μέση αμοιβή. Στο πλαίσιό μας με τυχαιοποίηση χρησιμοποιώντας πιθανότητες logit, το αποτέλεσμά τους υποδηλώνει ότι το W_{n_0} είναι αυστηρά μεγαλύτερο από οποιοδήποτε $W(p, \beta)$ όταν $\beta > 0$, καθώς οι logit πιθανότητες εισόδου είναι στο διάστημα $(0, 1)$. □

Απόδειξη της Πρότασης 2.3.3. (i) Σύμφωνα με το Λήμμα EC.3 που δίνει συνθήκες υπό τις οποίες η κοινωνική ευημερία αυξάνεται ή μειώνεται ως προς το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας στο Παράρτημα B των Huang et al. (2012): αν $\frac{\mu-\sqrt{\frac{C\mu}{R}}}{\lambda} = \frac{1}{2}$ και $p = \bar{p}$, τότε το $W^I(\beta_I)$ είναι σταθερό για $\beta_I \geq 0$. Η απλοποίηση των συνθηκών οδηγεί στο αποτέλεσμα (i).

(ii) Σύμφωνα με το Λήμμα EC.3 στο Παράρτημα B των Huang et al. (2012): Αν

$$\left(\frac{\mu-\sqrt{\frac{C\mu}{R}}}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)\left(p - R + \frac{2C}{2\mu-\lambda}\right) > 0,$$

τότε το $W^I(\beta_I)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση για όλα τα $\beta_I \geq 0$. Ο συνδυασμός και η απλοποίηση αυτών των καταστάσεων με όρους $p^*(0)$ και $\bar{p}$ δίνει τα αποτελέσματα.

(iii) Σύμφωνα με το Λήμμα EC.3 στο Παράρτημα B των Huang et al. (2012): Εάν $\frac{\mu-\sqrt{\frac{C\mu}{R}}}{\lambda} > \frac{1}{2}$ και $p \in \left[R - \sqrt{\frac{CR}{\mu}}, R - \frac{2C}{2\mu-\lambda}\right)$ ή $\frac{\mu-\ sqrt\frac{C\mu}{R}}{\lambda} < \frac{1}{2}$ και $p \in \left(R - \frac{2C}{2\mu-\lambda}, R - \sqrt{\frac{CR}{\mu}}\right]$, τότε το $W^I(\beta_I)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση για όλα τα $\beta_I \geq 0$. Ο συνδυασμός αυτών των περιπτώσεων μαζί δίνει το αποτέλεσμα στο (iii).

(iv) Σύμφωνα με το Λήμμα EC.3 στο Παράρτημα B των Huang et al. (2012): Εάν $\frac{\mu-\sqrt{\frac{C\mu}{R}}}{\lambda} > \frac{1}{2}$ και $p < \min\left\{R - \frac{2C}{2\mu-\lambda}, R - \sqrt{\frac{CR}{\mu}}\right\}$ ή $\frac{mu-\sqrt{\frac{C\mu}{R}}}{\lambda} < \frac{1}{2}$ και $p > \max\left\{R - \frac{2C}{2\mu-\lambda}, R - \sqrt{\frac{CR}{\mu}}\right\}$, τότε το $W_I(\beta_I)$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[0, \beta_w)$ και γνησίως φθίνουσα στο (β_w, ∞). Και πάλι, ο συνδυασμός και η απλοποίηση αυτών των καταστάσεων με όρους $p^*(0)$ και $\bar{p}$ δίνει τα αποτελέσματα. □

Απόδειξη της Πρότασης 2.3.4. (i) Το Λήμμα EC.4 στο Παράρτημα B των Huang et al. (2012) δείχνει ότι η συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας είναι μονοκόρυφη ως προς την τιμή, γεγονός που μας επιτρέπει να επικαλεστούμε τη συνθήκη πρώτης τάξης για να βρούμε τη βέλτιστη τιμή. Για οποιοδήποτε σταθερό $\lambda > 0$ και επίπεδο περιορισμένης ορθολογικότητας $\beta_I > 0$, για την επίτευξη κοινωνικής βελτιστοποίησης, η πιθανότητα εισόδου ισορροπίας $\varphi(p, \beta_I) = \frac{\mu-\sqrt{\ frac C\mu R}}{\lambda_I}$, αντικαθιστώντας το στη συνθήκη ισορροπίας (Σχέση 2.2), έχουμε

$$\frac{e^{\frac{R-p-\sqrt{\frac{CR}{\mu}}}{\beta_I}}}{1+e^{\frac{R-p-\sqrt{\frac{CR}{\mu}}}{\beta_I}}} = \frac{\mu-\sqrt{\frac{C\mu}{R}}}{\lambda}.$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση, έχουμε τη μοναδική λύση

$$p_w^*(\beta_I) = R - \sqrt{\frac{CR}{\mu}} - \beta_I \log\frac{\mu-\sqrt{\frac{C\mu}{R}}}{\lambda-\mu+\sqrt{\frac{C\mu}{R}}}.$$

Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τη βέλτιστη κοινωνική ευημερία στη βέλτιστη τιμή $p_w^*(\beta)$ εάν είναι θετική (η οποία ικανοποιείται όταν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις που αναφέρονται στο (i) για R και β_I). Διαφορετικά, πρέπει να αφήσουμε την τιμή να είναι μηδενική για να μεγιστοποιήσουμε την κοινωνική ευημερία. Το (ii) ακολουθεί παρόμοια. □

A.2 Καθολική Ευστάθεια Ισορροπίας για την Παρατηρήσιμη Ουρά

Σε αυτήν την ενότητα, χαλαρώνουμε την υπόθεση στην Παράγραφο 2.1.2 ότι κάθε πελάτης γνωρίζει τον ρυθμό άφιξης και τον ρυθμό εξυπηρέτησης. Θα δείξουμε, κάτω από ορισμένες ρυθμίσεις, πώς ο Ορισμός 2.1.1 μπορεί να προκύψει από τη συμπεριφορά των πελατών με προσαρμοστικό τρόπο. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε ένα μοντέλο στο οποίο οι πελάτες δεν γνωρίζουν τον ρυθμό άφιξης και τον ρυθμό εξυπηρέτησης, και κάνουν τις ενέργειές τους με βάση την προηγούμενη εμπειρία τους.

Θα καταχωρίσουμε τη χρονική περίοδο ως εξής: $t \in T \equiv \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Στην περίοδο 0, κάθε πελάτης δεν έχει πληροφορίες σχετικά με το σύστημα εξυπηρέτησης (π.χ. όσον αφορά τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής, τον ρυθμό άφιξης και τον ρυθμό εξυπηρέτησης) και εισέρχεται στο σύστημα με πιθανότητα 0.5 (ή οποιαδήποτε αυθαίρετη πιθανότητα). Για κάθε περίοδο $t \in T$, υποθέτουμε ότι η περίοδος είναι αρκετά μεγάλη ώστε το σύστημα να φτάσει στη σταθερή του κατάσταση. Υποθέτουμε επίσης ότι, μέσα σε κάθε περίοδο, χρησιμοποιώντας την ίδια στρατηγική, κάθε πελάτης αλληλεπιδρά με την εταιρεία επανειλημμένα. Έστω $\mathbb{E}W_t$ που υποδηλώνει τον πραγματικό αναμενόμενο χρόνο παραμονής στην περίοδο t. Επομένως, $\mathbb{E}W_t = \frac{1}{(\mu - \lambda\varphi_t)^+}$, όπου φ_t είναι το ποσοστό των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα. Ωστόσο, κάθε πελάτης είναι περιορισμένα ορθολογικός με την έννοια ότι δεν έχει την τέλεια ικανότητα να υπολογίσει το $\mathbb{E}W_t$. Κάθε πελάτης λαμβάνει έτσι την αναμενόμενη εκτίμηση του χρόνου παραμονής $\widehat{\mathbb{E}W_t} \equiv \mathbb{E}W_t + \varepsilon_t$, όπου ε_t θεωρείται ότι ακολουθεί την λογιστική κατανομή με παράμετρο θ όπως ορίζεται στην Παράγραφο 2.1 του Κεφαλαίου 2. Σε κάθε περίοδο $t = 1, 2, \dots$, κάθε πελάτης αποφασίζει αν θα εισέλθει στο σύστημα ή όχι με βάση τη θορυβώδη εκτίμηση του αναμενόμενου χρόνου παραμονής $\mathbb{E}W_{t-1}$ στη περίοδο $t - 1$. Ακολουθώντας το ίδιο επιχείρημα στην Παράγραφο 2.1, το ποσοστό των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα είναι

$$\varphi_t = \frac{e^{\frac{R-p-C\mathbb{E}W_{t-1}}{\beta_I}}}{1 + e^{\frac{R-p-C\mathbb{E}W_{t-1}}{\beta_I}}}$$

που μπορεί να ερμηνευθεί ως η πιθανότητα εισόδου για κάθε πελάτη στην περίοδο $t = 1, 2, \dots$.

Στην παρακάτω πρόταση, θα αποδείξουμε ότι, υπό ορισμένες συνθήκες, η συμπεριφορά του πελάτη θα συγκλίνει στο μοναδικό σημείο ισορροπίας στον Ορισμό 2.1.1. Για να διατυπώσουμε αυτήν την πρόταση, αντικαθιστούμε τον πραγματικό αναμενόμενο χρόνο παραμονής $\mathbb{E}W_{t-1} = \frac{1}{(\mu - \lambda\varphi_t)^+}$ και ορίζουμε την απεικόνιση $\widehat{\psi}$ από το $[0, 1]$ στο $[0, 1]$ έτσι ώστε $\varphi_t = \widehat{\psi}(\varphi_{t-1})$. Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στην αναδρομική εξίσωση:

$$\varphi_t = \widehat{\psi}(\varphi_{t-1}) = \frac{e^{\frac{R-p-\frac{C}{(\mu-\lambda\varphi_{t-1})^+}}{\beta_I}}}{1 + e^{\frac{R-p-\frac{C}{(\mu-\lambda\varphi_{t-1})^+}}{\beta_I}}}.$$

Πρόταση A.2.1 (Πρόταση EC.1). *Ας υποθέσουμε ότι $\mu > \lambda\widehat{\psi}(0)$. Εάν $\beta_I \geq \beta_C \equiv \frac{\lambda C}{(\mu-\lambda)^2}$, η συμπεριφορά του πελάτη από την προσαρμοστική γνώση συγκλίνει στο μοναδικό σημείο ισορροπίας στον Ορισμό 2.1.1.*

Απόδειξη. Εάν $\beta_I = \infty$, τότε το ποσοστό των πελατών που φτάνουν στο σύστημα είναι 0.5, ανεξάρτητα από την γνώση τους για το σύστημα. Συγκλίνει τετριμμένα στο σημείο ισορροπίας 0.5 του Ορισμού 2.1.1. Στη συνέχεια, εστιάζουμε στην περίπτωση που $\beta_I < \infty$.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις που πρέπει να εξεταστούν.

Περίπτωση 1: Υποθέτουμε ότι στην περίοδο 0, $\mu \leq \lambda\varphi_0$ έτσι ώστε το σύστημα να είναι ασταθές. Ένας πελάτης δεν θα φτάσει στο σύστημα κατά την περίοδο 1, καθώς ο εκτιμώμενος αναμενόμενος χρόνος παραμονής είναι άπειρος όταν το β_I είναι πεπερασμένο. Στην περίοδο 2, κάθε πελάτης συχνάζει/αλληλεπιδρά με την εταιρεία με εξαιρετικά μικρή συχνότητα για να μάθει τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής, έτσι ώστε κάθε πελάτης να φτάνει στο σύστημα με πιθανότητα $\varphi_2 = \widehat{\psi}(0)$. Εάν $\mu - \lambda\widehat{\psi}(0) > 0$, τότε το σύστημα είναι ευσταθές στην περίοδο 2. Στην περίοδο 3, κάθε πελάτης φτάνει στο σύστημα με πιθανότητα $\varphi_3 = \widehat{\psi}(\varphi_2) = \widehat{\psi}(\widehat{\psi}(0)) < \widehat{\psi}(0)$ αφού το $\widehat{\psi}(.)$ μειώνεται γνήσια από τον ορισμό του $\widehat{\psi}(.)$. Ως εκ τούτου, έχουμε $\mu - \lambda\varphi_t > 0$ για $t = 2, 3, 4, \ldots$, που υποδηλώνει ότι μπορούμε να εστιάσουμε στην απεικόνιση ψ :

$$\varphi_t = \psi(\varphi_{t-1}) = \frac{e^{\frac{R-p-\frac{C}{\mu-\lambda\varphi_{t-1}}}{\beta_I}}}{1+e^{\frac{R-p-\frac{C}{\mu-\lambda\varphi_{t-1}}}{\beta_I}}}.$$

για $t = 2, 3, 4, \ldots$. Στο Λήμμα EC.1 παρακάτω, αποδεικνύουμε ότι το ψ είναι απεικόνιση συστολής για $\beta_I \geq \beta_C$. Επομένως, έστω $t \to \infty$, τότε θα εμφανιστεί το μοναδικό σημείο ισορροπίας $\lim_{t\to\infty} \varphi_t = \widehat{\varphi}$ στον Ορισμό 2.1.1.

Περίπτωση 2: Υποθέτουμε στην περίοδο $t_0 = 1, 2, \ldots, \mu \leq \lambda\varphi_{t_0}$ έτσι ώστε το σύστημα να είναι ασταθές, τότε μπορεί κανείς να επαναπροσδιορίσει τη χρονική περίοδο έτσι ώστε $t_0 = 0$ και να εφαρμόσει το ίδιο επιχείρημα όπως παραπάνω. □

Λήμμα Α.2.1 (Λήμμα EC.1). *Η συνάρτηση*

$$\varphi_t = \psi(\varphi_{t-1}) = \frac{e^{\frac{R-p-\frac{C}{\mu-\lambda\varphi_{t-1}}}{\beta_I}}}{1+e^{\frac{R-p-\frac{C}{\mu-\lambda\varphi_{t-1}}}{\beta_I}}}$$

είναι μια απεικόνιση συστολής για $\beta_I \geq \beta_C$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $u_1(\varphi_t) = R - p - \frac{C}{\mu-\lambda\varphi_t}$. Τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι $u_1'(\varphi_t) = \frac{\lambda C}{(\mu-\lambda\varphi_t)^2} < \frac{\lambda C}{(\mu-\lambda)^2}$ από $\varphi_t < 1$. Σημειώνουμε ότι το ψ είναι συνεχώς διαφορήσιμο και

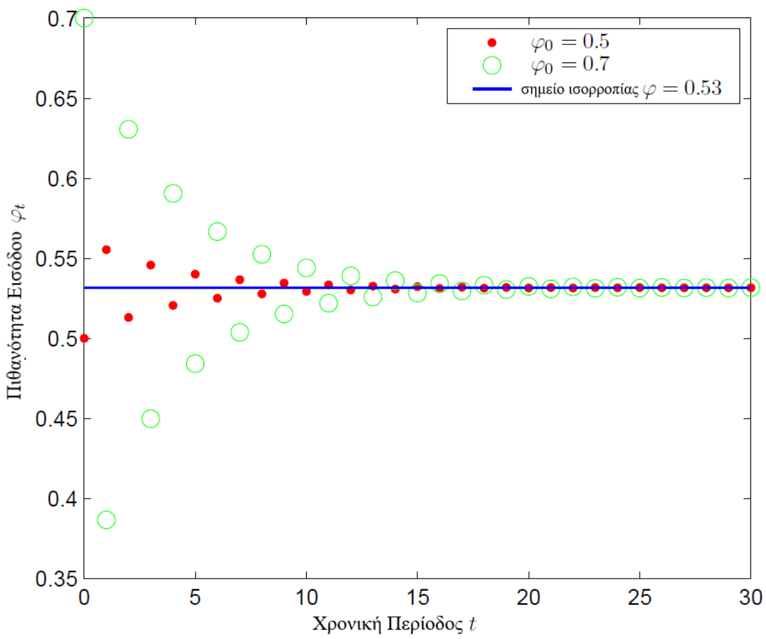
$$\psi'(\varphi_t) = \frac{e^{\frac{u_1(\varphi_t)}{\beta_I}} u_1'(\varphi_t)}{\beta_I\left(1+e^{\frac{u_1(\varphi_t)}{\beta_I}}\right)^2} < \frac{\lambda C}{\beta_I(\mu-\lambda)^2}.$$

Ως εκ τούτου, για $\beta_I \geq \beta_C = \frac{\lambda C}{(\mu-\lambda)^2}$, έχουμε

$$\psi'(\varphi_t) < 1.$$

Επομένως, υπάρχει $\theta\, \sigma\varepsilon[0, 1)$ έτσι ώστε, για οποιαδήποτε $x, y \in [0, 1], x < y$, έχουμε $|\psi(x) - \psi(y)| = |\psi'(\xi)(x-y)| \leq \theta|x-y|$, όπου $\xi \in [x, y]$. Επομένως, το ψ είναι μια απεικόνιση συστολής για $\beta_I \geq \beta_C$. □

Για να δείξουμε τη σύγκλιση, δίνεται ένα αριθμητικό παράδειγμα στο Σχήμα Α.1. Χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες παραμέτρους: $C = 1, \mu = 1, \lambda = 0.5, R = 2, p = 0.6, \beta = 0.3$. Αυτές οι παράμετροι χρησιμοποιούνται επίσης στο Σχήμα 2.1, της Παραγράφου 2.2. Σε αυτό το σχήμα, η οριζόντια γραμμή υποδηλώνει το σημείο ισορροπίας στον Ορισμό 2.1.1 που είναι 0.53 σε αυτήν την



Σχήμα Α.1: Σύγκλιση στο Σημείο Ισορροπίας ($C = 1, \mu = 1, \lambda = 0.5, R = 2, p = 0.6, \beta = 0.3$).

περίπτωση. Οι τελείες απεικονίζουν τη διαδρομή σύγκλισης ως συνάρτηση της χρονικής περιόδου t από την αρχική πιθανότητα εισόδου $\varphi_0 = 0.5$, ενώ οι κύκλοι για ένα διαφορετικό σημείο εκκίνησης $\varphi_0 = 0.7$. Μπορούμε να δούμε ότι η συμπεριφορά του πελάτη συγκλίνει γρήγορα στο σημείο ισορροπίας για $\beta = 0.3$. Σημειώστε ότι $\beta_C = 2$ για αυτό το αριθμητικό παράδειγμα. Μπορεί κανείς να δώσει απλές επαρκείς συνθήκες για $\mu > \lambda\widehat{\psi}(0)$. Για παράδειγμα, αν $\mu \geq \lambda$, τότε ανεξάρτητα από την τιμή p, ισχύει η συνθήκη $\mu > \lambda\widehat{\psi}(0)$.

A.3 Συμπληρωματική Επεξήγηση για την Πρόταση 2.3.1

Σύμφωνα με τη Σχέση (2.1), ως $\beta \to 0$, οι πελάτες που έχουν αυστηρά θετική αναμενόμενη ωφέλεια εισόδου θα ενταχθούν στην ουρά με πιθανότητα η οποία να συγκλίνει στο 1 και όσοι έχουν αυστηρά αρνητική αναμενόμενη ωφέλεια θα ενταχθούν στην ουρά με πιθανότητα σύγκλισης στο 0. Για χάρη ενός πειράματος σκέψης, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ενιαία κατάσταση στην οποία οι πελάτες εισέρχονται με μη-εκφυλισμένες πιθανότητες. Εάν συνέβαινε αυτό, η "οριακή κατάσταση" πρέπει να είναι είτε στη "θετική πλευρά", δηλαδή, η κατάσταση όπου ο πελάτης παρατηρεί $n_s - 1$ πελάτες στο σύστημα, είτε στην "αρνητική πλευρά", δηλαδή, η κατάσταση όπου ο πελάτης παρατηρεί n_s πελάτες στο σύστημα. Ωστόσο, στο πραγματικό σύστημα με περιορισμένα ορθολογικούς πελάτες, εφόσον $\beta > 0$, υπάρχουν πολλές καταστάσεις στις οποίες οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα με μη-εκφυλισμένες πιθανότητες. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το επίπεδο της περιορισμένης ορθολογικότητας είναι κοντά στο μηδέν, είναι διαισθητικά σαφές ότι είναι το *κοινό αποτέλεσμα* της συμπεριφοράς του πελάτη στην οριακή κατάσταση στη θετική πλευρά και η συμπεριφορά του πελάτη στην αρνητική πλευρά που καθορίζει την κατεύθυνση της μεταβολής της κοινωνικής ευημερίας. Η επίδραση της συμπεριφοράς των πελατών στην οριακή κατάσταση στη θετική πλευρά βελτιώνει την κοινωνική ευημερία, ενώ η επίδραση της συμπεριφοράς των πελατών στην οριακή κατάσταση στην αρνητική πλευρά είναι επιζήμια για την κοινωνική ευημερία. Πρέπει να χαρακτηρίσουμε ποιο αποτέλεσμα κυριαρχεί στο άλλο, δηλαδή να ξεμπερδέψουμε το κοινό αποτέλεσμα.

Το σενάριο όταν $n_s = n_0$, δηλαδή, πελάτες με ατομικά συμφέροντα φέρνουν το σύστημα στην κοινωνική βέλτιστη κατάσταση, είναι σπάνιο. Ωστόσο, σε αυτό το πλαίσιο, ένα αυστηρά θετικό και μικρό β προκαλεί κάθε πελάτη να εισέλθει στο σύστημα με μη-εκφυλιστικές πιθανότητες που μπορούν μόνο να μειώσουν την κοινωνική ευημερία. Αντίθετα, όταν $n_s \neq n_0$, είναι η σχετική θέση των n_s και $\frac{R\mu}{C} - \frac{1}{2}$ που καθορίζει το αποτέλεσμα. Εάν $n_s > \frac{R\mu}{C} - \frac{1}{2}$, τότε κυριαρχεί η επίδραση της συμπεριφοράς του πελάτη στη θετική πλευρά της οριακής κατάστασης. Ως εκ τούτου, η κοινωνική ευημερία βελτιώνεται. Εάν $n_s < \frac{R\mu}{C} - \frac{1}{2}$, θα ίσχυε το αντίθετο αποτέλεσμα και άρα θα μειωνόταν η κοινωνική ευημερία.

Η περίπτωση που $n_s = \frac{R\mu}{C} - \frac{1}{2}$ είναι πιο λεπτή, καθώς και τα δύο αποτελέσματα ισχύουν ταυτόχρονα. Αποδεικνύεται ότι όταν $\rho > 1$, το επίπεδο συμφόρησης είναι τόσο υψηλό που κυριαρχεί η αρνητική επίδραση και επιτυγχάνουμε αυστηρά χαμηλότερη κοινωνική ευημερία. Όταν $\rho \leq 1$, το επίπεδο συμφόρησης είναι αρκετά χαμηλό ώστε να επιτρέψει τη θετική επίδραση να κυριαρχήσει, και επιτυγχάνουμε αυστηρά υψηλότερη κοινωνική ευημερία.

Παράρτημα B

Αποδείξεις Κεφαλαίου 3: Περιορισμένη Ορθολογικότητα σε Συστήματα Εκκαθάρισης. Canbolat

Παρακάτω δίνονται οι αποδείξεις της Canbolat (2020).

B.1 Αποδείξεις

Απόδειξη της Πρότασης 3.1.1. Καθώς αυξάνεται το $\gamma > 0$, το $e^{-\gamma x}$ μειώνεται αν $x > 0$, επομένως η πιθανότητα εισόδου q που δίνεται από τη Σχέση (3.1) αυξάνεται καθώς το γ αυξάνεται εάν $u > p$. Στη συνέχεια, η ωφέλεια των πελατών $\Pi_C = \lambda q(u-p)$, τα έσοδα του συστήματος $\Pi_A = \lambda qp$ και η κοινωνική ευημερία $\Pi_S = \lambda qu$ αυξάνονται. Αν $u = p$, τότε $q = 0,5, \Pi_C = 0$ και $\Pi_A = \Pi_S = 0,5\lambda u$ ανεξάρτητα από το γ. Τέλος, το $e^{-\gamma x}$ αυξάνεται καθώς το $\gamma > 0$ αυξάνεται εάν $x < 0$, επομένως το q Σχέση (3.1) μειώνεται καθώς το γ αυξάνεται εάν $u < p$. Στη συνέχεια, η ωφέλεια των πελατών $\Pi_C = \lambda q(u-p)$ αυξάνεται, ενώ τα έσοδα του συστήματος $\Pi_A = \lambda qp$ και η κοινωνική ευημερία $\Pi_S = \lambda qu$ μειώνονται, αφού $p > u > 0$. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.1.2. Η πιθανότητα εισόδου (3.1) αυξάνεται αν $u - p$ αυξηθεί, άρα αυξάνεται ως προς R και $E[X]$ και μειώνεται ως προς $C, E[X^2]$, και p. Καθώς το p πηγαίνει στο άπειρο, το q Σχέση (3.1) πηγαίνει στο μηδέν. Αυτές οι αλλαγές επηρεάζουν το $\Pi_S = \lambda qu$ με τον ίδιο τρόπο.

Για να προσδιορίσουμε την επίδραση στο $\Pi_C = \lambda q(u-p)$, έστω $y = u - p$ και

$$\Pi_C(y) = \frac{\lambda y}{1 + e^{-\gamma y}}.$$

Η διαφοροποίηση του $\Pi_C(y)$ σε σχέση με το y δίνει

$$\frac{d\Pi_C(y)}{dy} = \frac{\lambda(1 + e^{-\gamma y} + \gamma y e^{-\gamma y})}{(1 + e^{-\gamma y})^2}.$$

Η συνάρτηση $(1 + e^{-\gamma y} + \gamma y e^{-\gamma y})$ είναι συνεχής ως προς y, θετική για $y \geq 0$, αυξάνεται ως προς $y < 0$ και πηγαίνει στο $-\infty$ καθώς το y πηγαίνει στο $-\infty$. Επομένως, το $\Pi_C(y)$ πρώτα μειώνεται και στη συνέχεια αυξάνεται ως προς y. Εφόσον το $y = u - p$ αυξάνεται ως προς u και μειώνεται ως προς p, προκύπτει η πρώτη πρόταση στο (ii) της Πρότασης 3.1.2. Καθώς το p πηγαίνει στο άπειρο, το y πηγαίνει στο $-\infty$ και το $\Pi_C(y)$ πηγαίνει στο μηδέν σύμφωνα με τον Κανόνα του L'Hôpital.

Για να δείξουμε το (iii), σημειώνουμε ότι το $\Pi_A = \lambda q p$ ακολουθεί τις μεταβολές του q όταν το p είναι σταθερό, επομένως αυξάνεται ως προς R και $E[X]$ και μειώνεται ως προς C και $E[X^2]$. Συμβολίζοντας

$$\Pi_A(p) = \frac{\lambda p}{1 + e^{-\gamma(u-p)}},$$

και παραγωγίζοντας το ως προς το p έχουμε

$$\frac{d\Pi_A(p)}{dp} = \frac{\lambda\left[1 + e^{-\gamma u} e^{\gamma p}(1 - \gamma p)\right]}{\left[1 + e^{-\gamma(u-p)}\right]^2}. \tag{B.1}$$

Η έκφραση $e^{\gamma p}(1 - \gamma p)$ είναι συνεχής και φθίνουσα ως προς $p \geq 0$, θετική για $p = 0$, και τείνει στο $-\infty$ καθώς το p πηγαίνει στο $+\infty$. Έπειτα προκύπτει ότι το $\Pi_A(p)$ πρώτα αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται ως προς $p \geq 0$. Επίσης, καθώς το p πηγαίνει στο $+\infty$, το $\Pi_A(p)$ πηγαίνει στο 0 σύμφωνα με τον Κανόνα του L'Hôpital. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.2.1. Από την Πρόταση 3.1.2(iii), τα έσοδα του συστήματος πρώτα αυξάνονται και στη συνέχεια μειώνονται ως προς $p \geq 0$ και η παράγωγός τους Σχέση (B.1) είναι συνεχής, επομένως μεγιστοποιείται όταν η Σχέση (B.1) είναι μηδέν ή ισοδύναμα,

$$1 + e^{-\gamma u} e^{\gamma p}(1 - \gamma p) = 0, \tag{B.2}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί όπως στη Σχέση (3.5). Το αριστερό μέρος της Σχέσης (B.2) είναι θετικό για $\gamma p \leq 1$, μειώνεται ως προς $p \geq 0$ και συγκλίνει στο $-\infty$ καθώς το p τείνει στο ∞ , άρα υπάρχει λύση στο (3.5) και πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $\gamma p > 1$. Επιπλέον, αυτή η λύση πρέπει να είναι μοναδική επειδή το αριστερό μέρος της Σχέσης (B.1) είναι γνησίως φθίνουσα (ή ισοδύναμα η το αριστερό μέρος της Σχέσης (3.5) είναι γνησίως αύξουσα) ως προς p. Από την (B.1), $e^{-\gamma(u-p^*)} = (\gamma p^* - 1)^{-1}$, άρα η αντίστοιχη πιθανότητα εισόδου (3.1) γίνεται (3.6). Αντικαθιστώντας τα $p = p^*$ και (3.6) στα (3.2)-(3.4) έχουμε τα (3.7) –(3.9). □

Απόδειξη του Πορίσματος 3.2.1. Για $\gamma u \leq 1$, το αποτέλεσμα είναι άμεσο, αφού $\gamma p^* > 1$ από την Πρόταση 3.2.1. Για $\gamma u > 1$, θέτοντας $p = u$ στο αριστερό μέρος της Σχέσης (3.5) έχουμε

$$u + \frac{1}{\gamma}\ln(\gamma u - 1),$$

που είναι μικρότερο από u αν $\gamma u < 2$, ισούται με u αν $\gamma u = 2$ και είναι μεγαλύτερο από u αν $\gamma u > 2$. Εφόσον το αριστερό μέρος της Σχέσης (3.5) αυξάνεται ως προς $p, p^* > u$ στην πρώτη περίπτωση, $p^* = u$ στη δεύτερη περίπτωση και στη $p^* < u$ στην τρίτη περίπτωση. □

Απόδειξη του Πορίσματος 3.2.2. Συμβολίζοντας με $p^*(u)$ τη βέλτιστη τιμή για δεδομένο u και παραγωγίζοντας και τα δύο μέρη της (3.5) ως προς u έχουμε

$$\frac{dp^*(u)}{du} = 1 - \frac{1}{\gamma p^*(u)} > 0,$$

όπου η ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα $\gamma p^*(u) > 1$ που εμφανίζεται στην Πρόταση 3.2.1. Ως εκ τούτου, η βέλτιστη τιμή $p^*(u)$ αυξάνεται καθώς αυξάνεται το u. Κατά συνέπεια, τα (3.6), (3.8) και (3.9) αυξάνονται όλα. Για να δείξουμε την επίδραση στην ωφέλεια των πελατών, συμβολίζουμε

$$\Pi_C^*(u) = \lambda\left(1 - \frac{1}{\gamma p^*(u)}\right)\left[u - p^*(u)\right],$$

και παραγωγίζουμε ως προς το u. Αντικαθιστώντας την παράγωγο του $p^*(u)$ που υπολογίστηκε παραπάνω έχουμε

$$\frac{d\Pi_C^*(u)}{du} = \frac{\lambda u}{\gamma[p^*(u)]^2}\left(1 - \frac{1}{\gamma p^*(u)}\right) > 0,$$

οπότε το $\Pi_C^*(u)$ αυξάνεται επίσης ως προς u. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.3.1. (i) Έστω $p^*(\gamma)$ η βέλτιστη τιμή για τον βαθμό ορθολογικότητας γ. Αντικαθιστώντας το p με $p^*(\gamma)$ στην (3.5), πολλαπλασιάζοντάς το με γ και παραγωγίζοντας ως προς το γ έχουμε

$$\frac{dp^*(\gamma)}{d\gamma} = \frac{\gamma p^*(\gamma)[u - p^*(\gamma)] - u}{\gamma^2 p^*(\gamma)}. \tag{B.3}$$

Το πρόσημο του (B.3) καθορίζεται από το πρόσημο του αριθμητή, του οποίου η παράγωγος ως προς γ είναι

$$up^*(\gamma) + \gamma u\frac{dp^*(\gamma)}{d\gamma} - 2\gamma p^*(\gamma)\frac{dp^*(\gamma)}{d\gamma} - [p^*(\gamma)]^2 = [u - p^*(\gamma)]^2 + \frac{u}{\gamma}\left[2 - \frac{u}{p^*(\gamma)}\right]. \tag{B.4}$$

Από το Πόρισμα 3.2.1, αν $\gamma u \leq 2$, τότε $p^*(\gamma) \geq u$. Αν $\gamma u \geq 2$, τότε $p^*(\gamma) \leq u$ από το Πόρισμα 3.2.1, και από την (3.5),

$$\gamma p^*(\gamma) = e^{\gamma[u - p^*(\gamma)]} + 1 \geq 2 + \gamma u - \gamma p^*(\gamma),$$

όπου η ανισότητα προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης. Η αναδιάταξη αυτής της ανισότητας δίνει $p^*(\gamma) > u/2$. Έτσι, το $p^*(\gamma) > u/2$ ισχύει πάντα, επομένως η διαφορά σε αγκύλες στο δεξί μέρος της (B.4) είναι πάντα θετική και ο αριθμητής της (B.3) είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του γ. Επιπλέον, η (B.3) ισούται με μηδέν αν και μόνο αν ο αριθμητής του είναι μηδέν ή ισοδύναμα,

$$[\gamma p^*(\gamma)]^2 - (\gamma u)[\gamma p^*(\gamma)] + \gamma u = 0.$$

Θέτοντας $x = \gamma p^*(\gamma)$ και $y = \gamma u$ σε αυτήν την εξίσωση και πολλαπλασιάζοντας την (3.5) με γ έχουμε

$$x^2 - xy + y = 0, \tag{B.5}$$

$$x + \ln(x-1) = y. \tag{B.6}$$

Αντικαθιστώντας την (B.6) στην (B.5) έχουμε

$$\ln(x-1) - \frac{x}{x-1} = 0,$$

που έχει τη μοναδική λύση $x = 4.59$ στο διάστημα $(1, \infty)$ (καθώς το αριστερό μέρος αυξάνεται όταν $x > 1$), άρα $y = 5.87$. Ως εκ τούτου, δεδομένου του u, το $p^*(\gamma)$ μειώνεται όταν $\gamma < 5,87/u$ και αυξάνεται όταν $\gamma \geq 5,87/u$. Η βέλτιστη τιμή ελαχιστοποιείται όταν $\gamma u = 5.87$, στην οποία περίπτωση $\gamma p^* = 4.59$ και άρα $p^*(\gamma)/u = 0.78$.

Για να δείξουμε την οριακή συμπεριφορά, υπενθυμίζουμε ότι όταν $\gamma u \geq 2$ (το οποίο ισχύει για αρκετά μεγάλο γ), $u/2 < p^*(\gamma) \leq u$ όπως αποδείχθηκε παραπάνω, άρα

$$\frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma u}{2} - 1\right) < \frac{1}{\gamma}\ln\left(\gamma p^*(\gamma) - 1\right) \leq \frac{1}{\gamma}\ln\left(\gamma u - 1\right).$$

Παίρνοντας όριο και στα δύο μέρη όταν το γ τείνει στο ∞ (χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L'Hôpital) διασφαλίζεται ότι το $\gamma^{-1}\ln(\gamma p^*(\gamma) - 1)$ συγκλίνει στο 0. Στη συνέχεια από την (3.5), το $p^*(\gamma)$ συγκλίνει στο u. Όταν το γ συγκλίνει στο 0, αφού το $\gamma p^*(\gamma) > 1$, το $p^*(\gamma)$ συγκλίνει στο ∞.

(ii) Έστω $z(\gamma) = \gamma p^*(\gamma)$. Πολλαπλασιάζοντας την (3.5) με γ και αντικαθιστώντας το γp με $z(\gamma)$ έχουμε

$$z(\gamma) + \ln(z(\gamma) - 1) = \gamma u. \tag{B.7}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέρη ως προς γ και μεταφέροντας τον λογάριθμο στο δεξί μέρος, προκύπτει ότι

$$\frac{dz(\gamma)}{d\gamma} = \frac{u[z(\gamma) - 1]}{z(\gamma)} > 0, \tag{B.8}$$

αφού $\gamma p^*(\gamma) > 1$. Επομένως, το $z(\gamma) = \gamma p^*(\gamma)$ αυξάνεται ως προς γ, πράγμα που σημαίνει ότι το (3.6) αυξάνεται ως προς γ. Επιπλέον, όπως φαίνεται στο (i), $u/2 < p^*(\gamma) \leq u$ για $\gamma u \geq 2$, άρα το $\gamma p^*(\gamma)$ συγκλίνει στο άπειρο καθώς το γ συγκλίνει στο άπειρο. Συνεπώς, το (3.6) συγκλίνει στο 1 καθώς το γ συγκλίνει στο άπειρο. Για να βρούμε το όριο καθώς το γ πηγαίνει στο μηδέν, έστω $\tilde{z}$ το όριο του $z(\gamma)$ καθώς το γ πηγαίνει στο μηδέν. Αυτό το όριο υπάρχει αφού το $z(\gamma)$ αυξάνεται και φράσσεται από πάνω από το 1. Παίρνοντας όριο στη Σχέση (B.7) προκύπτει ότι

$$\tilde{z} + \ln(\tilde{z} - 1) = 0,$$

που έχει τη μοναδική λύση $\tilde{z} = 1.28$ (καθώς το αριστερό μέρος αυξάνεται όταν $\tilde{z} > 1$), οπότε το (3.6) συγκλίνει στο $1 - 1/\tilde{z} = 0.22$ όταν $\gamma \to 0$.

(iii) Παίρνοντας την παράγωγο στο (3.7) ως προς το γ και χρησιμοποιώντας την (B.3) έχουμε

$$\frac{d\Pi_C^*(\gamma)}{d\gamma} = \frac{\lambda[\gamma p^*(\gamma) - 1]\left\{u^2 - \gamma[p^*(\gamma)]^2 u + \gamma[p^*(\gamma)]^3\right\}}{[\gamma p^*(\gamma)]^3},$$

που έχει το ίδιο πρόσημο με το $u^2 - \gamma[p^*(\gamma)]^2 u + \gamma[p^*(\gamma)]^3$. Αυτή η έκφραση είναι θετική εάν $p^*(\gamma) \geq u$, ή ισοδύναμα $\gamma u \leq 2$ από το Πόρισμα 3.2.1. Για $\gamma u > 2$, παραγωγίζοντάς το ως προς γ, αντικαθιστώντας στην (B.3) και πολλαπλασιάζοντας με γ έπεται ότι

$$-2\gamma p^*(\gamma)[p^*(\gamma) - u]^2 - u[3p^*(\gamma) - 2u] < 0,$$

όπου η ανισότητα προκύπτει από το $p^*(\gamma) \geq 0,78u$ που φαίνεται στο (i). Η μέγιστη ωφέλεια των πελατών προκύπτει όταν η παράγωγος του (3.6) ισούται με μηδέν, ή ισοδύναμα,

$$(\gamma u)^2 - [\gamma p^*(\gamma)]^2(\gamma u) + [\gamma p^*(\gamma)]^3 = 0.$$

Όπως και στην απόδειξη του (i), θέτουμε $x = \gamma^*(\gamma)$ και $y = \gamma u$ σε αυτήν την εξίσωση και στην (3.5) πολλαπλασιασμένο επί γ για να λάβουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$y^2 - x^2 y + x^3 = 0, \tag{B.9}$$

$$x + \ln(x - 1) = y. \tag{B.10}$$

Αντικαθιστώντας την (B.10) στην (B.9) έχουμε

$$[x + \ln(x - 1)]^2 - x^2 \ln(x - 1) = 0,$$

που έχει τη μοναδική λύση $x = 5.996$ στο διάστημα $(1, \infty)$ (αφού το αριστερό μέρος είναι θετικό για $x \leq 2$, και πρώτα αυξάνεται και μετά μειώνεται ως προς $x > 2$), οπότε $y = 7.60$. Ως εκ τούτου, δεδομένου του u, το $\Pi_C^*(\gamma)$ αυξάνεται όταν $\gamma < 7,60/u$ και μειώνεται όταν $\gamma \geq 7,60/u$. Η ωφέλεια των πελατών μεγιστοποιείται όταν $\gamma u = 7.60$, στην οποία περίπτωση $\gamma p^* = 5.996$. Καθώς το γ συγκλίνει στο άπειρο, η πιθανότητα εισόδου συγκλίνει στο 1 από το (ii) και η τιμή συγκλίνει στο u από το (i), άρα το (3.7) συγκλίνει στο μηδέν. Καθώς το γ συγκλίνει στο μηδέν, η πιθανότητα εισόδου συγκλίνει στο 0.22 από το (ii) και η τιμή συγκλίνει στο ∞ από το (i), άρα το (3.8) συγκλίνει στο $-\infty$.

(iv) Παραγωγίζοντας το (3.8) ως προς γ και χρησιμοποιώντας την (B.3) έπεται ότι

$$\frac{d\Pi_A^*(\gamma)}{d\gamma} = \frac{\lambda[\gamma p^*(\gamma) - 1][u - p^*(\gamma)]}{\gamma^2 p^*(\gamma)},$$

του οποίου το πρόσημο είναι ίδιο με το πρόσημο του $u-p^*(\gamma)$, το οποίο είναι αρνητικό για $\gamma < 2/u$ και θετικό για $\gamma > 2/u$ από το Πόρισμα 3.2.1, οπότε το Π_A^* μειώνεται όταν $\gamma < 2/u$ και αυξάνεται όταν $\gamma > 2/u$. Καθώς το γ συγκλίνει στο άπειρο, η πιθανότητα εισόδου συγκλίνει στο 1 από το (ii) και η τιμή συγκλίνει στο u από το (i), άρα το (3.8) συγκλίνει στο λu. Καθώς $\gamma \to 0$, η πιθανότητα εισόδου συγκλίνει στο 0.22 από το (ii) και η τιμή συγκλίνει στο ∞ από το (i), άρα το (3.8) συγκλίνει στο ∞.

(v) Τα αποτελέσματα για το (3.9) προκύπτουν άμεσα από το (ii). □

Απόδειξη του Πορίσματος 3.3.1. Από την Πρόταση 3.3.1, η τιμή είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση από $0.78u$, επομένως τα έσοδα του συστήματος ικανοποιούν

$$\Pi_A^* = \lambda q^* p^* \geq 0.78\lambda q^* u = 0.78\Pi_S^*,$$

και η ωφέλεια των πελατών $\Pi_C^* = \Pi_S^* - \Pi_A^*$ είναι τότε μικρότερη από $1 - 0.78 = 0.22$ του Π_S^*. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.3.2. Έστω $z(\gamma) = \gamma p^*(\gamma)$ και χρησιμοποιώντας την (B.7), μπορούμε να εκφράσουμε την τιμή της αναρχίας ως

$$1 + \frac{e^{-z(\gamma)} - 1}{z(\gamma)}.$$

Η παραγώγιση αυτής της έκφρασης ως προς γ δίνει

$$\frac{e^{-z(\gamma)}}{[z(\gamma)]^2}\left[\frac{dz(\gamma)}{d\gamma}\right]\left[e^{z(\gamma)} - 1 - z(\gamma)\right] > 0,$$

όπου η ανισότητα προκύπτει από την (B.8) και από την $e^x > 1 + x$ για $x > 0$ ($z(\gamma) = \gamma p^*(\gamma) > 1$). Ως εκ τούτου, η τιμή της αναρχίας αυξάνεται ως προς γ. Καθώς το γ συγκλίνει στο μηδέν, το $1 + e^{-\gamma u}$ συγκλίνει στο 2 ενώ η πιθανότητα εισόδου $(1 + e^{-\gamma[u-p^*(\gamma)]})^{-1}$ συγκλίνει στο 0.22 από την Πρόταση 3.3.1, επομένως η τιμή της αναρχίας συγκλίνει στο 0.44. Από την άλλη πλευρά, καθώς το γ συγκλίνει στο ∞ , και οι δύο εκφράσεις $1 + e^{-\gamma u}$ και $(1 + e^{-\gamma[u-p^*(\gamma)]})^{-1}$ συγκλίνουν στο 1 (από την Πρόταση 3.3.1), επομένως η τιμή της αναρχίας συγκλίνει στο 1. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.4.1. Για $u > p$, γράφοντας την αναμενόμενη πιθανότητα εισόδου (3.11) ως

$$\bar{q} = \frac{1}{2\Delta(u-p)} \ln\left(1 + \frac{e^{2\Delta(u-p)} - 1}{1 + e^{-(\bar{\gamma}-\Delta)(u-p)}}\right)$$

φαίνεται ότι το $\bar{q}$ αυξάνεται καθώς το $\bar{\gamma}$ αυξάνεται, υπονοώντας ότι τα Π_A και Π_S αυξάνονται ως προς $\bar{\gamma}$. Η ωφέλεια των πελατών Π_C αυξάνεται ως προς $\bar{\gamma}$ επειδή τα $u > p$ και $\bar{q}$ αυξάνονται ως προς $\bar{\gamma}$.

Για $p = u, \bar{q} = 0.5, \Pi_C = 0$, και $\Pi_A = \Pi_S = 0.5\lambda u$ για όλα τα $\bar{\gamma}$ και Δ.

Η μονοτονία (ως ιδιότητα) όταν $p > u$ προκύπτει γράφοντας το (3.11) ως

$$\bar{q} = \frac{1}{2\Delta(p-u)} \ln\left(1 + \frac{e^{2\Delta(p-u)} - 1}{1 + e^{(\bar{\gamma}+\Delta)(p-u)}}\right)$$

που μειώνεται ως προς $\bar{\gamma}$, άρα τα Π_A και Π_S μειώνονται ως προς $\bar{\gamma}$. Από την άλλη πλευρά, αφού $p > u$, το Π_C αυξάνεται ως προς $\bar{\gamma}$.

Για σταθερό $\bar{\gamma}$, μια αύξηση στο Δ αντιστοιχεί σε μια αύξηση της τυχαίας μεταβλητής Γ που αντιπροσωπεύει τον βαθμό ορθολογικότητας κάτω από κυρτή διάταξη (βλ. Shaked και Shanthikumar, 2007 για τον ορισμό και ιδιότητες κυρτής διάταξης). Με άλλα λόγια, αν $\Delta' > \Delta$, η τυχαία μεταβλητή Γ' που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $(\bar{\gamma} - \Delta', \bar{\gamma} + \Delta')$ είναι μεγαλύτερη από μια τυχαία μεταβλητή Γ που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $(\bar{\gamma} - \Delta, \bar{\gamma} + \Delta)$ υπό κυρτή διάταξη, που σημαίνει ότι ισχύει η ανισότητα $E[f(\Gamma')] \geq E[f(\Gamma)]$ για οποιαδήποτε κυρτή συνάρτηση f. Για $u > p$, το (3.10) είναι κοίλη ως προς γ, οπότε το $\bar{q}$ μειώνεται καθώς αυξάνεται το Δ. Κατά συνέπεια, τα Π_C (καθώς επίσης $u > p$), Π_A και Π_S όλα μειώνονται. Για $p > u$, το (3.10) είναι μια κυρτή συνάρτηση, επομένως η $\bar{q}$ αυξάνεται καθώς αυξάνεται το Δ, υπονοώντας ότι τα Π_A και Π_S αυξάνονται ενώ το Π_C μειώνεται επειδή $p > u$. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.4.2. Τα αποτελέσματα της μονοτονίας προκύπτουν άμεσα από την Πρόταση 3.1.2, καθώς αυτά διατηρούνται παίρνοντας μέση τιμή. Είναι επίσης τετριμμένο να ελέγξουμε τη σύγκλιση καθώς το p συγκλίνει στο ∞.

Για να δείξουμε τη μεταβολή στο Π_C καθώς αυξάνεται το $u - p$, θέτουμε $y = u - p$ και

$$\Pi_C(y) = \frac{\lambda}{2\Delta} \ln\left(\frac{e^{(\bar{\gamma}+\Delta)y} + 1}{e^{(\bar{\gamma}-\Delta)y} + 1}\right).$$

Παραγωγίζοντας το $\Pi_C(y)$ ως προς y έχουμε

$$\frac{d\Pi_C(y)}{dy} = \frac{\lambda e^{\bar{\gamma}y}}{2\Delta\left(e^{(\bar{\gamma}+\Delta)y} + 1\right)\left(e^{(\bar{\gamma}-\Delta)y} + 1\right)} \left[(\bar{\gamma} + \Delta)e^{\Delta y} - (\bar{\gamma} - \Delta)e^{-\Delta y} + 2\Delta e^{\bar{\gamma}y}\right].$$

Η έκφραση στις αγκύλες είναι συνεχής, αυξάνεται ως προς y, ισούται με $4\Delta > 0$ για $y = 0$ και συγκλίνει στο $-\infty$ καθώς το y τείνει στο $-\infty$. Επομένως, το $\Pi_C(y)$ πρέπει πρώτα να μειώνεται και στη συνέχεια να αυξάνεται ως προς y.

Για να δείξουμε τις ιδιότητες του Π_A ως προς p, το γράφουμε πρώτα ως

$$\Pi_A(p) = E[\Pi_A(p, \Gamma)],$$

όπου $\Pi_A(p, \gamma) = \lambda p(1 + e^{-\gamma(u-p)})$. Από την Πρόταση 3.3.1(i), για κάθε γ, η τιμή $p^*(\gamma)$ που μεγιστοποιεί το $\Pi_A(p, \gamma)$ είναι μεγαλύτερη από $0.78u$, επομένως κάθε $\Pi_A(p, \gamma)$ και κατά συνέπεια το $\Pi_A(p)$ αυξάνεται όταν $0 \leq p \leq 0.78u$. Αν $(\bar{\gamma} - \Delta)u \geq 2$, τότε $p^*(\gamma) < u$ για όλα τα $\gamma \in (\bar{\gamma} - \Delta, \bar{\gamma} + \Delta)$, και κάθε $\Pi_A(p, \gamma)$ μειώνεται όταν $p \geq u$, άρα το $\Pi_A(p)$ μειώνεται όταν $p \geq u$. Αν $(\bar{\gamma} - \Delta)u \leq 2$, τότε η Πρόταση 3.3.1(i) συνεπάγεται ότι το $p^*(\gamma)$ μεγιστοποιείται για $\gamma = \bar{\gamma} - \Delta$, άρα κάθε $\Pi_A(p, \gamma)$ μειώνεται όταν $p \geq p^*(\bar{\gamma} - \Delta)$, άρα $\Pi_A(p)$ μειώνεται όταν $p \geq p^*(\bar{\gamma} - \Delta)$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης 3.4.2. □

Απόδειξη του Πορίσματος 3.4.1. Για $\Pi_A(p, \gamma) = \lambda p(1 + e^{-\gamma(u-p)})$,

$$\frac{\partial \Pi_A(p, \gamma)}{\partial p} = \frac{\lambda\left[1 + e^{-\gamma(u-p)}(1 - \gamma p)\right]}{\left[1 + e^{-\gamma(u-p)}\right]^2}.$$

Συγκεκριμένα,

$$\left.\frac{\partial \Pi_A(p,\gamma)}{\partial p}\right|_{p=u} = \frac{\lambda(2-\gamma u)}{4},$$

έτσι

$$\left.\frac{d\Pi_A(u)}{dp}\right|_{p=u} = \int_{\bar{\gamma}-\Delta}^{\bar{\gamma}+\Delta} \Pi_A(u,\gamma)d\gamma = \frac{2-\bar{\gamma}u}{4}.$$

Αν $\bar{\gamma}u < 2$, τότε το $\Pi_A(p)$ αυξάνεται για $p = u$ και $p^* > u$. Αν $(\bar{\gamma} - \Delta)u > 2$, τότε το $\Pi_A(p,\gamma)$ μειώνεται για $p \geq u$ και άρα $p^* < u$. □

Απόδειξη του Πορίσματος 3.4.1. Από την Πρόταση 3.3.1(i), η τιμή που μεγιστοποιεί το $\Pi_A(p,\gamma)$ $= \lambda p(1+e^{-\gamma(u-p)})$ είναι μεγαλύτερη από $0.78u$ για κάθε $\gamma \in (\bar{\gamma}-\Delta, \bar{\gamma}+\Delta)$, το οποίο συνεπάγεται ότι κάθε $\Pi_A(p,\gamma)$ αυξάνεται όταν $p \leq 0.78u$, άρα $\Pi_A(p) = E[\Pi_A(p,\Gamma)]$ αυξάνεται όταν $p \leq 0.78u$. Έτσι η βέλτιστη τιμή ικανοποιεί την ίδια ανισότητα και κατά συνέπεια $\Pi_A^*/\Pi_S^* = p/u \geq 0.78$. □

Βιβλιογραφία

[1] Afèche P. (2004) *Incentive-compatible revenue management in queueing systems: Optimal strategic delay and other delay tactics.* Working paper, University of Toronto, Toronto.

[2] Anderson S.P., de Palma A., Thisse J.-F. (1992) *Discrete Choice Theory of Product Differentiation* (MIT Press, Cambridge, MA).

[3] Arkes H.R., Hammond K.R., eds. (1985) *Judgment and Decision Making: An Interdisciplinary Reader* (Cambridge University Press, Cambridge, UK).

[4] Ariely D. (2009) *The end of rational economics.* Harvard Bus. Rev. 87(7/8):78–84.

[5] Ariely D. (2010) *The upside of irrationality: The unexpected benefits of defying logic at work and at home.* Harper.

[6] Bajari P., Hortacsu A. (2001) *Auction models when bidders make small mistakes: Consequences for theory and estimation.* Working paper, Stanford University, Stanford, CA.

[7] Bajari P., Hortacsu A. (2005) *Are structural estimates of auction models reasonable? Evidence from experimental data.* J. Political Econom. 113(4):703–741.

[8] Basov S. (2009) *Monopolistic screening with boundedly rational consumers.* Econom. Record 85(S1):S29–S34.

[9] Bearden J.N., Rapoport A., Seale D.A. (2005) *Entry times in queues with endogenous arrivals: Dynamics of play on the individual and aggregate levels.* Rapoport A, Zwick R, eds. Experimental Business Research, Vol. II (Springer, Berlin), 201–221.

[10] Bendoly E., Donohue K., Schultz K. (2006) *Behavioral operations management: Assessing recent findings and revisiting old assumptions.* J. Oper. Management 24(6):737–752.

[11] Bendoly E., Croson R., Goncalves P., Schultz K. (2009) *Bodies of knowledge for research in behavioral operations.* Production Oper. Management 19(4):434–452.

[12] Canbolat P. (2020) *Bounded rationality in clearing service systems.* European Journal of Operational Research 282 (2020): 614–626

[13] Cason T.N., Reynolds S.S. (2005) *Bounded rationality in laboratory bargaining with asymmetric information.* Econom. Theory 25(3):553–574.

[14] Chen H.C., Friedman J.W., Thisse J.F. (1997) *Boundedly rational Nash equilibrium: A probabilistic choice approach.* Games Econom. Behav. 18(1):32–54.

[15] Chen H., Frank M. (2004) *Monopoly pricing when customers queue.* IIE Transactions, 36 (6), 569–581.

[16] Chen Y., Su X., Zhao X. (2012) *Modeling bounded rationality in capacity allocation games with the quantal response equilibrium.* Management Science, 58 (10), 1952–1962.

[17] Conlisk J. (1996) *Why bounded rationality?* J. Econom. Literature 34(2):669–700.

[18] Davis A.M. (2011) *An experimental investigation of pull contracts.* Working paper, Pennsylvania State University, University Park.

[19] Economou A., Kanta S. (2008) *Equilibrium balking strategies in the observable single-server queue with breakdowns and repairs.* Operations Research Letters, 36 (6), 696–699.

[20] Economou A., Manou A. (2013) *Equilibrium balking strategies for a clearing queueing system in alternating environment.* Annals of Operations Research, 208(1), 489-514.

[21] Edelson N.M., Hildebrand D.K. (1975) *Congestion tolls for poisson queuing processes.* Econometrica, 43 (1), 81–92.

[22] Geigerenzer G., Selten R. (2001) *Bounded Rationality: The Adaptive Toolbox* (MIT Press, Cambridge, MA).

[23] Gino F., Pisano G. (2008) *Toward a theory of behavioral operations.* Manufacturing Service Oper. Management 10(4):676–691.

[24] Goeree J.K., Holt C.A., Palfrey T.R. (2002) *Quantal response equilibrium and overbidding in private-value auctions.* J. Econom. Theory 104(1):247–272.

[25] Goeree J.K., Holt C.A., Palfrey T.R. (2018) *Stochastic game theory for social science: A primer on quantal response equilibrium.* http://www.its.caltech.edu/∼trp/QRE%20Primer.pdf/. Accessed 21 October 2019.

[26] Guo P., Zipkin P. (2007) *Analysis and comparison of queues with different levels of delay information.* Management Science, 53 (6), 962–970.

[27] Guo P., Zipkin P. (2008) *The effects of information on a queue with balking and phase-type service times.* Naval Research Logistics, 55 (5), 406–411.

[28] Guo P., Zipkin P. (2009) *The effects of the availability of waiting-time information on a balking queue.* European Journal of Operational Research, 198 (1), 199–209.

[29] Hassin R. (1986) *Consumer information in markets with random products quality: The case of queues and balking.* Econometrica, 54 (5), 1185–1195.

[30] Hassin R. (2016) *Rational queueing.* CRC Press.

[31] Hassin R., and Haviv M. (2003) *To queue or not to queue: equilibrium behavior in queueing systems.* Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

[32] Hey J., Orme C. (1994) *Investigating generalizations of expected utility theory using experimental data.* Econometrica 62(6): 1291–1326.

[33] Ho T.-H., Zhang J. (2008) *Designing pricing contracts for boundedly rational customers: Does the framing of the fixed fee matter?* Management Sci. 54(4):686–700.

[34] Hogarth R. (1980) *Judgment and Choice: Psychology of Decision* (John Wiley and Sons, New York).

[35] Hsu V.N., Xu S.H., Jukic B. (2009) *Optimal scheduling and incentive compatible pricing for a service system with quality of service guarantees.* Manufacturing Service Oper. Management 11(3):375–396.

[36] Hu M., Li Y., Wang J. (2017) *Efficient ignorance: Information heterogeneity in a queue.* Management Science, 64 (6), 2650–2671.

[37] Huang T., Allon G., Bassamboo A. (2012) *Technical report to "Bounded rationality in service systems."* http://www.kellogg.northwestern.edu/research/operations/workingpapers.htm.

[38] Huang T., Allon G., Bassamboo A. (2013) *Bounded rationality in service systems.* Manufacturing and Service Operations Management, 15 (2), 263–279.

[39] Kahneman D., Slovic P., Tversky A., eds. (1981) *Judgment Under Uncertainty: Heuristic and Biases* (Cambridge University Press, Cambridge, UK).

[40] Kerner Y. (2011) *Equilibrium joining probabilities for an M/G/1 queue.* Games and Economic Behavior, 71 (2), 521–526.

[41] Knudsen N.C. (1972) *Individual and social optimization in a multi-server queue with a general cost-benefit structure.* Econometrica, 40 (3), 515–528.

[42] Kremer M., Debo L. (2012) *Herding in a queue: A laboratory experiment.* Chicago Booth Research Paper 12-28, Chicago Booth School of Business, Chicago.

[43] Kremer M., Moritz B., Siemsen E. (2011) *Demand forecasting behavior: System neglect and change detection.* Management Sci. 57(10):1827–1843.

[44] Larson R.C. (1987) *Perspectives on queues: Social justice and the psychology of queueing.* Oper. Res. 35(6):895–905.

[45] Li X., Guo P., Lian Z. (2016) *Quality speed competition in customer intensive services with boundedly rational customers.* Production and Operations Management, 25 (11), 1885–1901.

[46] Li X., Guo P., Lian Z. (2017) *Price and capacity decisions of service systems with boundedly rational customers.* Naval Research Logistics, 64 (6), 437–452.

[47] Li X., Li Q., Guo P., Lian Z. (2017) *On the uniqueness and stability of equilibrium in quality-speed competition with boundedly-rational customers: The case with general reward function and multiple servers.* International Journal of Production Economics, 193 , 726–736.

[48] Lim N., Ho T.-H. (2007) *Designing price contracts for boundedly rational customers: Does the number of blocks matter?* Marketing Sci. 26(3):312–326.

[49] Lippman S.A., Stidham S. Jr. (1977) *Individual versus social optimization in exponential congestion systems.* Oper. Res. 25(2): 233–247.

[50] Liu T., Methapatara C., Wynter L. (2010) *Revenue management model for on-demand IT services.* European Journal of Operational Research, 207 (1), 401–408.

[51] Loomes G., Moffatt P., Sudgen R. (2002) *A microeconometric test of alternative stochastic theories of risky choice.* J. Risk Uncertainty 24(2):103–130.

[52] Luce R.D. (1959) *Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis* (John Wiley and Sons, New York).

[53] Maister D. (1985) *The psychology of waiting lines.* Czepiel J.A., Solomon M.R., Suprenant C., eds. *The Service Encounter, Chap. 8* (Lexington Books, New York), 113–126.

[54] Mallard G. (2011) *Modelling cognitively bounded rationality: An evaluative taxonomy.* J. Econom. Surveys 26(4):674–704.

[55] Manou A., Canbolat P.G., Karaesmen F. (2017) *Pricing in a transportation station with strategic customers.* Production and Operations Management, 26 (9), 1632–1645.

[56] Manou A., Economou A ., Karaesmen F. (2014) *Strategic customers in a transportation station: When is it optimal to wait?* Operations Research, 62 (4), 910–925.

[57] Mattsson L.-G., Weibull J.W. (2002) *Probabilistic choice and procedurally bounded rationality.* Games Econom. Behav. 41(1):61–78.

[58] McFadden D. (1974) *Conditional logit analysis of qualitative choice behavior.* Zarembka P., ed. *Frontiers in Econometrics* (Academic Press, New York), 105–142.

[59] McKelvey R. D., Palfrey T. R. (1995) *Quantal response equilibrium for normal form games.* Games and Economic Behavior, 10 (1), 6–38.

[60] Mogale D., Lahoti G., Jha S., Shukla M., Kamath N., Tiwari M. (2018) *Dual market facility network design under bounded rationality.* Algorithms, 11 (54), 1–18.

[61] Naor P. (1969) *The regulation of queue size by levying tolls.* Econometrica: Journal of the Econometric Society, 37 (1), 15–24.

[62] Nisbett R., Ross L. (1980) *Human Inference: Strategies and Shortcomings in the Social Judgment* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ).

[63] Payne J.W., Bettman J.R., Johnson E.J. (1992) *Behavioral decision research: A constructive processing perspective.* Annual Rev. Psych. 43:87–131.

[64] Pitz G., Sachs N.J. (1984) *Judgment and decision: Theory and application.* Annual Rev. Psych. 35:139–162.

[65] Plambeck E.L., Wang Q. (2010) *Implications of hyperbolic discounting for optimal pri-cing and information management in service systems.* Working paper, Stanford University, Stanford, CA.

[66] Rapoport A., Stein W.E., Parco J.E., Seale D.A. (2004) *Equilibrium play in single-server queues with endogenously determined arrival times.* J. Econom. Behav. Organ. 55(1):67–91.

[67] Ren H., Huang T. (2018) *Modeling customer bounded rationality in operations management: A review and research opportunities.* Computers and Operations Research, 91, 48–58.

[68] Ross S. M. (2014a) *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists.* Academic Press.

[69] Ross S. M. (2014b) *Introduction to Probability Models.* Academic Press.

[70] Rubinstein A. (1998) *Modeling Bounded Rationality.* MIT Press.

[71] Seale D.A., Parco J.E., Stein W.E., Rapoport A. (2005) *Joining a queue or staying out: Effects of information structure and service time on arrival and staying out decisions.* Experiment. Econom. 8(2):117–144.

[72] Shaked M., Shanthikumar J.G. (2007) *Stochastic orders.* Springer Science and Business Media.

[73] Shang W., Liu L. (2011) *Promised delivery time and capacity games in time-based competition.* Management Science, 57 (3), 599–610.

[74] Simon H.A. (1955) *A behavioral model of rational choice.* The Quarterly Journal of Economics, 69 (1), 99–118.

[75] Simon H.A. (1957) *Models of Man* (John Wiley and Sons, New York).

[76] Simon H.A. (1997) *Models of bounded rationality: empirically grounded economic reason*: 3. MIT Press.

[77] Stahl D., Wilson P. (1995) *On players' models of other players: Theory and experimental evidence.* Games Econom. Behav. 10(1): 218–254.

[78] Stidham S. (1974) *Stochastic clearing systems.* Stochastic Processes and their Applications, 2 (1), 85–113.

[79] Stidham S. (1977) *Cost models for stochastic clearing systems.* Operations Research, 25 (1), 100–127.

[80] Su X. (2008) *Bounded rationality in newsvendor models.* Manufacturing and Service Operations Management, 10 (4), 566–589.

[81] Talluri K.T., van Ryzin G.J. (2004) *The Theory and Practice of Revenue Management* (Springer-Verlag/Kluwer Academic Publishers, New York).

[82] Thurstone L.L. (1927) *A law of comparative judgment.* Psych. Rev. 34(4):273–286.

[83] Tversky A., Kahneman D. (1974) *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* Science 185(4157):1124–1131.

[84] Van Mieghem J.A. (2000) *Price and service discrimination in queuing systems: Incentive compatibility of Gcμ scheduling.* Management Sci. 46(9):1249–1267.

[85] Waksberg A., Smith A., Burd M. (2009) *Can irrational behaviour maximise fitness?* Behav. Ecol. Sociobiol. 63(3):461–471.

[86] Yechiali U. (1971) *On optimal balking rules and toll charges in the GI/M/1 queuing process.* Operations Research, 19 (2), 349–370.

[87] Yechiali U. (1972) *Customers' optimal joining rules for the GI/M/S queue.* Management Science, 18 (7), 434–443.

Ευρετήριο