Σύγκλιση ακολουθιών: Δυσκολίες και παρανοήσεις από τους μαθητές στο ΝΠΣ της Β' Λυκείου

Γαβρίνας Κωνσταντίνος
Μαθηματικός ΕΚΠΑ

Θεματική Ενότητα: *Προκλήσεις για τη Μαθηματική Εκπαίδευση και τις διεπιστημονικές συνδέσεις της, μετά την παγκόσμια εμπειρία της πανδημίας*

Περίληψη

Με το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών στο Λύκειο, που έχει δημοσιευτεί ήδη, επαναφέρεται στην ύλη των Μαθηματικών της Β' Λυκείου Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, η σύγκλιση των ακολουθιών.

Η συγκεκριμένη ενότητα υπήρχε στο Πρόγραμμα Σπουδών του Λυκείου μέχρι την δεκαετία του '80 αλλά αφαιρέθηκε, καθώς θεωρήθηκε ότι καλύπτεται από την έννοια της σύγκλισης συναρτήσεων.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει ορισμένες καλές τεχνικές εκμάθησης της συγκεκριμένης ενότητας σύμφωνα με την βιβλιογραφία, όπως επίσης και να επισημάνει τις αναμενόμενες δυσκολίες κατά την διδασκαλία μαζί με τις πιθανές παρανοήσεις από τους μαθητές.

Στην αρχή περιγράφεται το ΝΠΣ σε σχέση με τις συγκλίνουσες ακολουθίες μαζί με τις αναμενόμενες δυσκολίες, πιθανά λάθη και παρανοήσεις από τους μαθητές. Έπειτα, περιγράφονται τα Φύλλα Εργασίας για τους μαθητές, με τα ερωτήματα και σχετικά σχόλια.

Abstract

The New Curriculum in Greek High School (Lyceum – 3 grades – ages 15-18), which has already been published, introduces the convergent sequences in the 2nd grade of Lyceum for the students of Mathematics in the Science Orientation.

This topic existed in Mathematic curriculum until the late '80s but was removed later as it was thought to be part of the convergent functions topic.

The purpose of this paper is to present some good students' teaching techniques about convergent sequences, according to the literature, as well as to point out the expected student difficulties in teaching convergent sequences and the possible misunderstandings that may arise.

At the first part of the paper, there is a description of the convergent sequences topic in the New Curriculum, and the possible difficulties and mistakes the students will face. At the second part, Students' Worksheets are being described, along with comments.

1. Θεωρητικό πλαίσιο

1.1. Νέο Πρόγραμμα Σπουδών

Σύμφωνα με το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής: «*Τα Προγράμματα Σπουδών (ΠΣ) είναι απαραίτητο να αντανακλούν όλες τις αλλαγές στα πεδία των επιστημών που ασχολούνται ή φωτίζουν την εκπαίδευση, τις αλλαγές σε κοινωνικό επίπεδο, όπως και τις ιλιγγιώδεις αλλαγές σε τεχνολογικό επίπεδο*».[1]

Για παράδειγμα, στα Μαθηματικά η θεματική ενότητα «Μοτίβο-Συναρτήσεις» παραμένει σταθερή από τα Μαθηματικά της Α' Δημοτικού ως και τα Μαθηματικά του Λυκείου: αρχικά, ο μαθητής αναγνωρίζει απλά αριθμητικά μοτίβα, έπειτα πιο σύνθετα αριθμητικά μοτίβα, κατόπιν αντιμετωπίζει γλωσσικά, συμβολικά και γεωμετρικά μοτίβα, ενώ στο Λύκειο φτάνει στην αναγνώριση και μελέτη πληθυσμιακών μοτίβων, όπως είναι οι δημογραφικές μεταβολές σε διάφορες χώρες ή τα κρούσματα COVID-19.[2]

Από την άλλη, η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία κατηγορεί το ΙΕΠ ότι τα νέα προγράμματα για το μάθημα των μαθηματικών είναι «*... εκτός παιδαγωγικού τόπου και χρόνου...*», αναφέροντας: «*Εάν προσπεράσουμε την ατυχή επινόηση και αναφορά που έγινε κατά την ενημέρωση στην έννοια μοτίβο-συνάρτηση που διασχίζει την εκπαίδευση από την Προσχολική Ηλικία έως και το Λύκειο, θα δούμε τις ακριβοπληρωμένες επεξεργασίες του ΙΕΠ να αγνοούν ή να αποσιωπούν τις συλλογικά καταγεγραμμένες εμπειρίες της εκπαιδευτικής μαθηματικής κοινότητας για συγκεκριμένες δυσχέρειες και*

[1] http://iep.edu.gr/el/nea-programmata-spoudon-arxiki-selida

[2] https://www.minedu.gov.gr/ news/1974-trexouses-metarrythmiseis/50654-nea-programmata-spoudon-sto-sxoleio-neo-periexomeno-psifiaki-diastasi-sto-epikentro-oi-mathites

ασυμβατότητες από την εφαρμογή των εν ισχύ Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών».[3]

Στο γενικότερο αυτό πλαίσιο του ΝΠΣ, εντάσσεται και η ενότητα «Συγκλίνουσες ακολουθίες» στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών της Β' Λυκείου που επανέρχεται μετά από τρεις δεκαετίες απουσίας. Αυτή είναι μέρος στο *Θεματικό Πεδίο: Ανάλυση* και ανήκει στην γενικότερη *Θεματική ενότητα: Σύγκλιση*, όπως φαίνεται και στις σελίδες 42 & 43 του ΝΠΣ:[4]

1.2. Αναμενόμενες δυσκολίες, πιθανά λάθη και παρανοήσεις

Η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση (conceptual and procedural knowledge) είναι γνωστό ότι είναι δύο τύποι γνώσης που χρειάζονται οι μαθητές για να μπορέσουν να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες (Rittle-Johnson & Alibali, 1999).

Η εννοιολογική γνώση είναι η γνώση μαθηματικών γεγονότων και ιδιοτήτων που σχετίζονται με κάποιο τρόπο.

Η διαδικαστική γνώση προσδιορίζεται ως το σύνολο κανόνων και αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Morales, 2014).

Όπως αναφέρει η Elias (2019), η διαδικασία κατασκευής γνώσης δεν ήταν εύκολη για τους μαθητές και οι περισσότερες από τις νέες κατασκευές γνώσης συνέχιζαν να είναι εύθραυστες για αυτούς ακόμα και στο τέλος μιας δραστηριότητας. Ο πιθανός κύριος λόγος για αυτό είναι ότι το μεγαλύτερο μέρος της νέας γνώσης είναι αφηρημένου χαρακτήρα και αυτό το είδος γνώσης είναι κάτι καινούργιο για τους μαθητές.

Πολύ παλιότερα, οι Tall και Schwarzenberger (1978) ισχυρίζονταν ότι τα περισσότερα από τα μαθηματικά στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση αποτελούνται από περίπλοκες έννοιες «μεταφρασμένες» σε μορφή κατάλληλη για διδασκαλία. Αυτή όμως η διαδικασία μετάφρασης δεν είναι

---

[3] https://www.ethnos.gr/greece/article/183188/neaprogrammataspoydonagriakontragiatamathhmatikastasxoleia

[4] https://iep.edu.gr/services/eduguide/iframes/education-guide/view-file?fid=6947c3b732bf63dd327e5d668255f26f8797657c876b4e0242af6f453e4c1636
και
http://www.et.gr/idocs-nph/search/pdfViewerForm.html?args=5C7QrtC22wEzH9d6xfVpRXdtvSoClrL8zT3FrY18BEPNZ8op6Z_wSuJInJ48_97uHrMts-zFzeyCiBSQOpYnTy36MacmUFCx2ppFvBej56Mmc8Qdb8ZfRJqZnsIAdk8Lv_e6czmhEembNmZCMxLMtb-AGgDHtI-Z5VOEhJA4ZNpNdGXxHDkjDgjpwPde9pvT

δίχως κινδύνους. Από την μία, το να «μιλάμε απλοποιημένα» για μια έννοια υψηλού επιπέδου μπορεί να οδηγήσει σε απώλεια ακρίβειας και μπορεί να αυξήσει την εννοιολογική δυσκολία. Από την άλλη, η μη-τυπική γλώσσα που χρησιμοποιείται στην «μετάφραση» των εννοιών μπορεί να δημιουργεί εννοιολογικές παρεξηγήσεις προερχόμενες από καθημερινές ιδέες ή αντιλήψεις.

Οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις των μαθητών που μαθαίνουν μαθηματικά, ειδικά σε τομείς της ανάλυσης, έχουν διερευνηθεί και αναφερθεί από αρκετούς ερευνητές και εκπαιδευτικούς (Martin, 2009, Martínez-Planell Gonzalez, DiCristina & Acevedo, 2012, Monaghan, 2001, Orton, 1983, Tall & Schwarzenberger, 1978).

Κάποιες από τις μελέτες αυτές έχουν δείξει ότι οι μαθητές που παρακολουθούν μαθήματα ανάλυσης έχουν δυσκολία στην εννοιολογική κατανόηση επειδή έχουν μια πολύ επιφανειακή και ανεπαρκή κατανόηση των βασικών εννοιών της μαθηματικής ανάλυσης λόγω της καθιερωμένης διδασκαλίας μάθησης (Steen, 1988, White & Mitchelmore, 1996).

Αυτές οι δυσκολίες προέρχονται κυρίως από την αδυναμία κατανόησης της έννοιας του άπειρου ή από έναν αρκετά περίπλοκο εννοιολογικό ορισμό του ορίου (Tall, 1992, Tall & Vinner, 1981).

Πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν επίσης παρόμοιες δυσκολίες στην κατανόηση της σύγκλισης μιας ακολουθίας, που είναι μια από τις σημαντικές έννοιες της ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, οι ακολουθίες και οι σειρές είναι τα πιο θεμελιώδη θέματα σε κάθε μάθημα ανάλυσης και μπορούν να χρησιμεύσουν ως βάση για τα άλλα θέματα του λογισμού, συμπεριλαμβανομένων των ορίων, της συνέχειας, των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων. Από την άλλη όμως, οι Tall και Schwarzenberger (1978) υποστήριξαν ότι οι ακολουθίες είναι μία από τις σημαντικές «ανωμαλίες» του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών. Πολλοί μαθητές που συναντούν ακολουθίες άπειρων όρων για πρώτη φορά, δεν μπορούν να κατανοήσουν τη μαθηματική τους ουσία, ούτε τις απλές διαδικασίες και λύσεις που σχετίζονται με αυτές, θεωρώντας τες ως ένα από τα δυσκολότερα αντικείμενα στα μαθηματικά (Monaghan, 2001, Nardi, Biza & González-Martín, 2008).

Επιπλέον, το γεγονός ότι μια άπειρη σειρά είναι ένα άπειρο άθροισμα των όρων μιας ακολουθίας ή ότι το όριο μιας άπειρης σειράς είναι ίσο με το όριο μιας ακολουθίας μερικών αθροισμάτων της σειράς έχει οδηγήσει στην ιδέα ότι η έννοια των ακολουθιών είναι πιο ουσιώδης από την έννοια της σειράς. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η έννοια της σειράς να έχει παραμεριστεί αυτόματα στο πρόγραμμα σπουδών και ως εκ τούτου στα σχολικά βιβλία.

Σε μια μελέτη των Alcock και Simpson (2009), αφού έγινε ο ορισμός της σύγκλισης του αθροίσματος άπειρων όρων μίας ακολουθίας στην αίθουσα διδασκαλίας, οι μαθητές κλήθηκαν να τον εξηγήσουν με δικές τους προτάσεις. Εκεί φάνηκε ότι οι μαθητές διέφεραν στις εξηγήσεις τους κατά τον ορισμό της σύγκλισης του αθροίσματος και ότι οι περισσότεροι από αυτούς δεν μπορούσαν να επιτύχουν επαρκές επίπεδο κατανόησης σχετικά με τον ορισμό. Ομοίως, σε άλλες μελέτες, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να κατανοήσουν τι σημαίνει η σύγκλιση του αθροίσματος και έδειξαν ανεπαρκή κατανόηση της εύρεσης εάν μια σειρά ήταν συγκλίνουσα ή όχι (Martínez-Planell, Gonzalez, DiCristina & Acevedo, 2012).

Επιπλέον, φάνηκε ότι ορισμένοι μαθητές δυσκολεύονται με την έννοια του άπειρου καθώς και πως αποδέχονται το γεγονός ότι ένα κριτήριο σύγκλισης μπορεί να είναι ασαφές (Champney, 2013, Sierpińska, 1987) και να μην βγάζει αποτέλεσμα.

Ένα παράδειγμα που δίνεται από τους Tall και Schwarzenberger (1978) είναι ο ορισμός μιας ακολουθίας s_n πραγματικών αριθμοί που τείνουν σε ένα όριο s: «*δεδομένου οποιουδήποτε θετικού πραγματικού αριθμού ε >0, υπάρχει N (το οποίο μπορεί να εξαρτάται από το ε) έτσι ώστε* $|s_n - s| < \varepsilon$ *για όλα τα n>N*». Μια άτυπη μετάφραση μπορεί να είναι «Μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα s_n όσο πιο κοντά στο s θέλουμε, κάνοντας το n αρκετά μεγάλο». Η απώλεια όμως στην σαφήνεια είναι σημαντική: δεν έχουμε διευκρινίσει πόσο κοντά στο s θέλουμε, πόσο μεγάλο είναι το n, ούτε την σχέση των δύο τους.

Και ακόμα, τι σημαίνει η φράση «*όσο πιο κοντά στο s θέλουμε*»; Τι θα συμβεί εάν εμείς δεν θέλουμε; Μπορούμε να πλησιάσουμε απείρως κοντά;
Άλλη έννοια της συνήθους ομιλίας που έχει αυτή η πρόταση είναι ότι το *κοντά* σημαίνει *πλησίον* αλλά όχι *συμπίπτον*. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει την υπόνοια ότι η ακολουθία s_n μπορεί να είναι κοντά, αλλά αποκλείεται να είναι ίση με το s.

Η Sierpińska (1990) εξέτασε τις πρωτογενείς διαισθήσεις σχετικά με τα όρια σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που δεν έχουν ακόμη μάθει τον επίσημο ορισμό τους. Πήρε μια ακολουθία άπειρων όρων, τα επιστημολογικά εμπόδια που προκύπτουν από αυτήν και τις ενέργειες που εμπλέκονται για την υπέρβασή τους.

Μερικά από αυτά τα εμπόδια για την κατανόηση των ορίων αφορούν στην κατανόηση των ακολουθιών άπειρων όρων και του απείρου. Για παράδειγμα, η αντίληψη μιας ακολουθίας ως κανόνα για την παραγωγή αριθμών ή ως ένας «πολύ μακρύς» κατάλογος αριθμών είναι αντιλήψεις που μπορεί να λειτουργούν ως εμπόδια στην κατανόηση της σύγκλισης σε όριο.

Κάποιες αντιλήψεις για το άπειρο, όπως η πεποίθηση πως ό,τι είναι άπειρο είναι και απεριόριστο, έχουν αναγνωριστεί από την Sierpińska ως επιπλέον εμπόδια για την κατανόηση των ορίων.

Η Przenioslo (2005) χρησιμοποίησε ένα διδακτικό εργαλείο που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να συνειδητοποιήσουν πτυχές της τυπικής έννοιας του ορίου μιας ακολουθίας. Πιστεύει ότι ένας από τους λόγους των λανθασμένων αντιλήψεων των μαθητών για την έννοια του ορίου μιας ακολουθίας είναι η χρήση στην διδασκαλία, ενός περιορισμένου φάσματος «τυποποιημένων» παραδειγμάτων που αποτυγχάνουν να αναδείξουν τις λεπτομέρειες του επίσημου ορισμού.

Πρότεινε ένα ειδικά σχεδιασμένο σύνολο ακολουθιών, που επιλέχθηκαν ώστε να περιλαμβάνουν τις διάφορες δυνατότητες που σχετίζονται με την σύγκλιση στον αριθμό 1 (βλ. § 2.2). Μια σκέψη κατά την δημιουργία αυτού του συνόλου των ακολουθιών ήταν να αντιμετωπιστούν άμεσα ορισμένες από τις βασικές δυσκολίες που συνδέονται με την κατανόηση της έννοιας του ορίου μιας ακολουθίας (για παράδειγμα, η διαισθητική πεποίθηση ότι οι όροι της δεν επιτρέπεται να φτάσουν στο όριο).

Σε μία άλλη προσέγγιση, η Przenioslo θεώρησε ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στην μάθηση των μαθηματικών και έτσι αφιέρωσε πολύ χώρο και χρόνο για δραστηριότητες γραφικής παράστασης ακολουθιών. Αυτές οι δραστηριότητες αναμένεται να βοηθήσουν τους μαθητές να παρατηρήσουν ότι ορισμένες ακολουθίες, από έναν συγκεκριμένο δείκτη και μετά, αρχίζουν να συμπεριφέρονται με έναν συγκεκριμένο τρόπο, ενώ κάτι τέτοιο δεν ισχύει για άλλες. Επιπλέον, κατά την σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων των ακολουθιών, υπάρχει η σκέψη/ελπίδα ότι οι μαθητές θα παρατηρήσουν την μη συνάφεια ενός πεπερασμένου αριθμού αρχικών όρων σε σχέση με τους υπόλοιπους.

Σύμφωνα με την εμπειρία της Przenioslo, η διδακτική προσέγγιση είναι μία εργασία που γίνεται σε μικρές ομάδες και ακολουθείται από συζήτηση με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού. Αυτή αποδείχθηκε μια αποτελεσματική μέθοδος διαμόρφωσης της κατανόησης των μαθητών για την τυπική έννοια της σύγκλισης. Το προτεινόμενο από την Przenioslo διδακτικό εργαλείο φαίνεται πως δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν αντιλήψεις που είναι όλο και πιο κοντά στην έννοια του ορίου μιας ακολουθίας.

Ένα άλλο λάθος που θα προκύψει είναι το γεγονός ότι συγχέεται η σύγκλιση σειράς με την σύγκλιση ακολουθιών. Όπως έχει αναφερθεί σε μελέτες (Earls, 2017, Tall & Schwarzenberger, 1978), αυτό το σφάλμα μπορεί να οφείλεται στην έλλειψη ικανότητας των μαθητών να αναγνωρίσουν την λεπτή διαφορά μεταξύ της σύγκλισης των όρων μίας ακολουθίας α_ν και της σύγκλισης της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων των όρων της ακολουθίας α_ν .
Άλλο σφάλμα που αντιμετωπίστηκε ήταν ότι ορισμένοι μαθητές υπέθεσαν ότι μία σειρά δεν έδινε συμπέρασμα ως προς την σύγκλιση (ή την απόκλιση), όταν το κριτήριο που εφαρμόστηκε για την εξέταση σύγκλισης ή μη της σειράς, δεν έδινε αποτέλεσμα. Με άλλα λόγια, οι μαθητές εστίασαν στα αποτελέσματα των κριτηρίων σύγκλισης, αλλά δεν συνειδητοποίησαν ότι η σειρά, ως όριο άπειρης ακολουθίας μερικών αθροισμάτων θα πρέπει να είναι είτε συγκλίνουσα είτε αποκλίνουσα! Δηλαδή, ότι μια σειρά συγκλίνει εάν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει (δηλαδή το όριό της υπάρχει και είναι πεπερασμένο), ή μια σειρά αποκλίνει εάν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της αποκλίνει (δηλαδή το όριό της δεν υπάρχει ή είναι το $\pm\infty$).

Επιπλέον, όπως αναφέρεται από τον Martin (2009), ορισμένοι από τους μαθητές θεώρησαν τον έλεγχο του νιοστού όρου της ακολουθίας ως επαρκή προϋπόθεση για τη σύγκλιση μιας σειράς. Ωστόσο, ο έλεγχος του νιοστού όρου είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να συγκλίνει μια σειρά (π.χ. αν η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει τότε $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0$). Με άλλα λόγια, ο έλεγχος του νιοστού όρου χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της απόκλισης μιας σειράς (δηλαδή, αν $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu \neq 0$, τότε η σειρά αποκλίνει)! Έτσι, ορισμένοι μαθητές αποτυγχάνουν να κατανοήσουν ότι η απαραίτητη συνθήκη σύγκλισης μιας σειράς χρησιμοποιείται για να αποδειχθεί ότι μια σειρά αποκλίνει!

Ακόμη, η πρόταση ότι εάν μια σειρά συγκλίνει, το όριο του γενικού όρου μιας σειράς είναι μηδέν ερμηνεύεται από κάποιους μαθητές λανθασμένα ότι εάν το όριο του γενικού όρου μιας σειράς τείνει στο μηδέν, τότε η σειρά είναι συγκλίνουσα. Αυτή η παρερμηνεία οδήγησε ορισμένους μαθητές αυτής της μελέτης στη σκέψη ότι η σειρά ήταν συγκλίνουσα όταν βρήκαν το όριο του γενικού όρου της σειράς να είναι μηδέν (ενώ στην πραγματικότητα, για παράδειγμα, η $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ αποκλίνει[5] ενώ η $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\sqrt{\nu}}$ συγκλίνει[6]).

Αυτό το είδος λάθους μπορεί να εξηγηθεί από την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης ως αποτέλεσμα της αδυναμίας των μαθητών να συνειδητοποιήσουν την (λεπτή) διαφορά μεταξύ της λογικής συνθήκης $p \Rightarrow q$ και της αντιθετοαντίστροφής της $q' \Rightarrow p'$.
Εμπόδια στην εκμάθηση άπειρων σειρών μπορούν επίσης να παρατηρηθούν εξετάζοντας την ιστορία των μαθηματικών. Ο Bagni (2000, 2005) το έκανε αυτό λαμβάνοντας υπόψη την γνώμη μαθητών για την σειρά του Guido Grandi, $1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$ (διαδοχικά +1 και –1). Ο Grandi (1671-1742) παρατήρησε ότι μπορούσε να πάρει είτε το 1 ή είτε το 0 ως τιμή αθροίσματος για την σειρά αυτή.

Σύμφωνα με αυτόν: $1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$ του οποίου το άθροισμα πρέπει να είναι 0 και $1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots$ του οποίου το άθροισμα θα έπρεπε να είναι 1.
Ο Grandi έθεσε επίσης x=1 στην έκφραση $1-\mathrm{x}+\mathrm{x}^2-\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^4+\cdots=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-\mathrm{x})^{\nu}=\frac{1}{1+\mathrm{x}}$ για να πάρει ότι 1–1+1–1+1–1... = $\frac{1}{2}$ (παρόλο που σήμερα ξέρουμε ότι αυτό δεν επιτρέπεται/ισχύει).

Οι μαθηματικοί του 17ου και 18ου αιώνα, θεωρώντας μια σειρά ως ένα άπειρο άθροισμα, επέτρεπαν στους εαυτούς τους να συσχετίσουν (αθροίσουν) όρους με διαφορετικούς τρόπους, ενώ ο σύγχρονος ορισμός του αθροίσματος μιας σειράς συσχετίζει τους όρους μόνον ως $\left(\left(\left((\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3\right)+\alpha_4\right)+\alpha_5\right)+\alpha_6+\cdots$

Η διαισθητική κατανόηση των άπειρων σειρών ως άπειρων αθροισμάτων αποτελεί εμπόδιο για την τυπική κατανόησή τους. Για ορισμένους μαθητές, η φύση μιας άπειρης διαδικασίας είναι τέτοια που μπορεί να μην ολοκληρωθεί σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα και έτσι η άθροιση μιας σειράς είναι βέβαιο ότι θα παραμείνει χωρίς σαφές τελικό αποτέλεσμα (Sierpińska, 1987).

Αυτό μπορεί να φανεί σε μαθητές που δεν έχουν λάβει (ή συλλάβει) την τυπική εκπαίδευση, όπως αναφέρουν οι Fishbein, Tirosh και Melamed

5 https://www.wolframalpha.com/input?i=sum%28+1%2Fsqrt%28n%29%29
6 https://www.wolframalpha.com/input?i=sum%28+%28-1%29%5En%2Fsqrt%28n%29%29

(1981), όπου η δυνατότητα μέτρησης της «διαισθητικής αποδοχής» διερευνάται λαμβάνοντας υπόψη δύο διαστάσεις: το επίπεδο της αυτοπεποίθησης/βεβαιότητας και τον βαθμό της προφάνειας.

Προς απόδειξη τούτου, οι Fischbein και λοιποί συμπεριέλαβαν τα ακόλουθα δύο προβλήματα σε ένα ερωτηματολόγιο:

1) Δίνεται τμήμα $AB = 1m$. Ας υποθέσουμε ότι προστίθεται σε αυτό ένα άλλο τμήμα $BC = \frac{1}{2}m$. Ας συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο, προσθέτοντας τμήματα $CD = \frac{1}{4}m$, $DE = \frac{1}{8}m$ κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία προσθήκης τμημάτων, όπως περιεγράφηκε παραπάνω, θα τελειώσει; (συμπεριλαμβανόταν ένα σχέδιο).
2) Ας εξετάσουμε ξανά (την προηγούμενη) ερώτηση. Ποιο θα είναι το άθροισμα των τμημάτων $AB + BC + CD + DE + \cdots$;

Το ερωτηματολόγιο διανεμήθηκε σε περισσότερους από 100 μαθητές και τα αποτελέσματα δείχνουν ότι:

- Οι περισσότεροι δέχονται το άπειρο της διαδικασίας που περιγράφεται στο ερώτημα (1) με υψηλό βαθμό διαισθητικής αποδοχής.
- Πολύ λίγοι μαθητές απάντησαν ότι το αποτέλεσμα του αθροίσματος στην ερώτηση (2) είναι το 2 και αυτοί που το έκαναν είχαν πολύ χαμηλό επίπεδο διαισθητικής αποδοχής.
- Η πλειοψηφία των μαθητών έδωσε μια απάντηση διαφορετική από το 2 στην ερώτηση (2), αλλά θεώρησαν ότι η απάντησή τους είχε σχετικά υψηλό επίπεδο διαισθητικής αποδοχής. Μεταξύ των απαντήσεων που δόθηκαν ήταν ότι το άθροισμα είναι ίσο με το άπειρο και ότι το άθροισμα «μόνο πλησιάζει» το 2.

Τελικά οι Fischbein και λοιποί καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι ακόμη και μετά την τυπική εκμάθηση, οι μαθητές συνήθως συνεχίζουν να αντιλαμβάνονται τις σειρές ως μια απείρως ατελείωτη διαδικασία.

2. Φύλλα εργασίας

Τι ζητούμε από τους μαθητές / Τι αναμένεται να απαντήσουν / Πιθανά λάθη και παρανοήσεις

2.1.Φύλλο εργασίας Α’

Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

- Ερώτημα 1

Σκεφτείτε τρεις (δικές σας) συγκλίνουσες ακολουθίες.

Γράψτε τους τέσσερις πρώτους όρους και τον γενικό (νιοστό) όρο για κάθε μία, χρησιμοποιώντας τον σωστό τρόπο γραφής.
Bella, Ericka (2019). Introduction of infinite series in high school level calculus. John Carroll University Masters Essays. 122 (p. 99).

Εδώ φαίνεται εάν οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια των ακολουθιών. Παρόλο το γεγονός ότι οι μαθητές έχουν προηγούμενη γνώση αυτού του όρου, χρειάζονται μια ανανέωση/ανάσυρση από την μνήμη τους. Αν και οι ακολουθίες αναφέρονται στα Μαθηματικά Β’ Λυκείου Γενικής Παιδείας (ΝΠΣ σελ. 24), το επίκεντρο εκεί είναι μόνο οι αριθμητικές και οι γεωμετρικές πρόοδοι[7].

Σε αυτή την δραστηριότητα, οι μαθητές καλούνται να γράψουν τρεις συγκλίνουσες -και όχι τυχαίες- ακολουθίες. Τους ζητείται να αναφέρουν κάποιους πρώτους όρους, να βρουν μια έκφραση για τον νιοστό όρο.
Σε αυτή την δραστηριότητα ελπίζω ότι οι μαθητές θα προσπεράσουν την τετριμμένη $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ και θα προχωρήσουν π.χ. σε ακολουθίες με εναλλασσόμενους θετικούς και αρνητικούς όρους.

- Ερώτημα 2

Γράψτε μία (δική σας) γεωμετρική πρόοδο όπου οι άπειροι όροι της να αθροίζουν στο 6.
Bella, Ericka (2019). Introduction of infinite series in high school level calculus. John Carroll University Masters Essays. 122 (p. 123).

Εδώ έχουμε την συνέχεια του προηγούμενου προβλήματος. Οι μαθητές έχουν μάθει για τις γεωμετρικές προόδους, ωστόσο το ΝΠΣ έχει εστιάσει μέχρι τώρα σε «πεπερασμένες» γεωμετρικές προόδους (δηλ. στους πρώτους όρους, στον α_ν, ή στο άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων. Τώρα όμως επεκτείνεται στο άθροισμα των άπειρων όρων σε μία γεωμετρική πρόοδο.
Οι μαθητές πρέπει να σκεφτούν τι είναι γεωμετρική πρόοδος. Στην συνέχεια, θα πρέπει να βρουν τον λόγο της προόδου και να τον χρησιμοποιήσουν για να κρίνουν εάν αυτή συγκλίνει. Εάν η σειρά συγκλίνει, το άθροισμα μπορεί να υπολογιστεί.

- Ερώτημα 3

Διαβάστε το παρακάτω ανέκδοτο και εξηγείστε γιατί ο μπάρμαν έδωσε δύο μπίρες:
Ένα άπειρο πλήθος μαθηματικών μπαίνει σε ένα μπαρ με άπειρη χωρητικότητα πελατών. Ο πρώτος μαθηματικός ζητάει από τον μπάρμαν μια μπίρα. Πριν προλάβει να αντιδράσει ο μπάρμαν, ο δεύτερος

[7] Στο ΝΠΣ της Α’ Γυμνασίου (σελ. 14) περιγράφεται (χωρίς να κατονομάζεται) η έννοια της αριθμητικής προόδου μέσα από έργα αναπαράστασης κανονικοτήτων.

μαθηματικός ζητά και αυτός μία μπίρα, αλλά στην μισή ποσότητα από αυτήν που ζήτησε ο πρώτος. Ο τρίτος ζητά την μισή από αυτήν που θα πιεί ο δεύτερος κ.ο.κ.
Ο μπάρμαν κοιτά την απείρως μεγάλη ομάδα μαθηματικών και τους δίνει δύο μπίρες.
Στην συνέχεια λέει στους συγκεντρωμένους μαθηματικούς: «Εδώ είναι δύο μπίρες. Τώρα μοιραστείτε τις!»
Jones, Keith (2011). The topic of sequences and series in the curriculum and textbooks for schools in England: A way to link number, algebra and geometry. Paper presented at the 2011 International Conference on School Mathematics Textbooks, East China Normal University, Shanghai, China (p. 1).

Εδώ έχουμε ένα κλασικό πρόβλημα μαθηματικοποίησης. Παρόλο που δεν υπάρχει στον πραγματικό κόσμο η έννοια των άπειρων μαθηματικών μέσα σε ένα μπαρ (οι μαθηματικοί στο σχολείο, μαθηματικοί στην Ελλάδα, οι μαθηματικοί σε ολόκληρο τον κόσμο είναι πεπερασμένος αριθμός), οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε ένα πρόβλημα που περιέχει την ιδέα του άπειρου πλήθους και τις άπειρης χωρητικότητας. Κάποιοι μαθητές που δεν θα κατανοήσουν ακριβώς το ζητούμενο του προβλήματος θα επικεντρώσουν την προσοχή τους στις τελευταίες λέξεις του κειμένου δηλαδή στο πώς θα μοιραστεί η μπίρα στους μαθηματικούς ενώ το πρόβλημα είναι να δικαιολογήσουν γιατί η ποσότητα είναι δύο μπίρες.
Όπως έχει αναφερθεί και στην § 1.2 (**Αναμενόμενες δυσκολίες, πιθανά λάθη και παρανοήσεις**), το αξιοσημείωτο για τους μαθητές, στο παραπάνω παράδειγμα, είναι το γεγονός ότι ενώ το πλήθος των όρων του αθροίσματος είναι άπειρο, το αποτέλεσμα είναι πεπερασμένο.

Με άλλα λόγια, όταν μια ακολουθία αριθμών είναι άπειρη, ο όρος «άπειρη» χρησιμοποιείται για να τονίσει το γεγονός ότι η ακολουθία απαρτίζεται από ένα άπειρο πλήθος όρων και όχι ότι συγκλίνει στο άπειρο.

2.2. Φύλλο εργασίας Β’

Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

- Ερώτημα 1

Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων και τους δίνεται το παρακάτω θέμα. Θα πρέπει στην υπόλοιπη διδακτική ώρα να το μελετήσουν και στην επόμενη ώρα να συζητήσουν συγκρίνοντας τις απαντήσεις που έδωσαν για αυτό. Για την μελέτη προτείνεται να γίνει και μία πρόχειρη γραφική παράσταση για κάθε μία ακολουθία ώστε να λειτουργήσει βοηθητικά στις σκέψεις τους.

Ποια κοινή ιδιότητα έχουν οι ακολουθίες α_ν (1 έως 11) που **δεν έχει** η β_ν;

1. $\alpha_\nu = \begin{cases} 2 \ \text{για}\ \nu = 1.000.000 \\ 1+\frac{1}{\nu} \ \text{για}\ \nu \neq 1.000.000 \end{cases}$
2. $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{2} \ \text{για}\ 1.000.000 \leq \nu < 10.000.000 \\ 1-\frac{1}{\nu} \ \text{για όλα τα υπόλοιπα}\ \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$
3. $\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{\nu}$
4. $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & \text{για}\ \nu < 1.048.576 \\ 1+\frac{1}{\nu} & \text{για}\ \nu \geq 1.048.576 \end{cases}$
5. $\alpha_\nu = 1$
6. $\alpha_\nu = \begin{cases} 1-\frac{1}{\nu} & \text{για}\ \nu < 125 \\ 1 & \text{για}\ \nu \geq 125 \end{cases}$
7. $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & \text{για}\ \nu < 10.000 \\ 1 & \text{για}\ \nu \geq 10.000 \end{cases}$
8. $\alpha_\nu = \begin{cases} -3 & \text{για}\ 200.000 \leq \nu \leq 500.000 \\ 1-\frac{1}{\nu} & \text{για όλα τα υπόλοιπα}\ \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$
9. $\alpha_\nu = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu$
10. $\alpha_\nu = \begin{cases} 1 & \text{όταν το}\ \nu\ \text{είναι πολλαπλάσιο του}\ 10 \\ 1+\frac{1}{\nu} & \text{για όλα τα υπόλοιπα}\ \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$
11. $\alpha_\nu = \begin{cases} \alpha & \text{για}\ \nu < 10 \\ 1-\frac{1}{\nu} & \text{για}\ \nu \geq 10 \end{cases}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, τυχαίος αριθμός

$$\beta_\nu = \begin{cases} 2 & \text{όταν το}\ \nu\ \text{είναι πολλαπλάσιο του}\ 10 \\ 1+\dfrac{1}{\nu} & \text{για όλα τα υπόλοιπα}\ \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Przenioslo, Malgorzata. (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. Educational Studies in Mathematics, (pp. 76-77).

Το παραπάνω αποτελεί μία σύνοψη όλων των ιδιοτήτων και εννοιών γύρω από τις συγκλίνουσες ακολουθίες με ενσωματωμένα διάφορα χαρακτηριστικά στα οποία συμβαίνουν παρανοήσεις από τους μαθητές, αποτελώντας ένα σκόπιμα επιλεγμένο σύνολο παραδειγμάτων/ προβλημάτων/ ερωτήσεων για την διδασκαλία και την εκμάθηση της τυπικής έννοιας του ορίου μιας ακολουθίας.

Όλα αυτά οργανώνονται υπό την μορφή συζητήσεων στην τάξη, με την καθοδήγηση του δασκάλου καθώς όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, ένας από τους λόγους αφελών ή εσφαλμένων αντιλήψεων των μαθητών για την έννοια του ορίου μιας ακολουθίας είναι η χρήση στην διδασκαλία, μόνο ενός πολύ περιορισμένου εύρους «τυποποιημένων» παραδειγμάτων που δεν μπορούν να επισημάνουν λεπτομέρειες του επίσημου ορισμού.

Η επιλογή των συγκεκριμένων ακολουθιών στο πρόβλημα στοχεύει στην αποφυγή αυτού του διδακτικού λάθους. Οι έντεκα ακολουθίες α_ν επιλέχθηκαν έτσι ώστε να περιλαμβάνουν διάφορες περιπτώσεις σύγκλισης στον αριθμό 1. Η χρήση όχι μόνο συνηθισμένων τύπων (ακολουθίες 3, 5 και 9) αλλά και πολλαπλών τύπων (με κλάδους) ήταν ένας τρόπος για να επιτευχθεί η επιθυμητή ποικιλία.

Ένας άλλος τρόπος για την αύξηση της ποικιλίας ήταν η επιλογή των ακολουθιών έτσι ώστε να αντιμετωπιστούν άμεσα ορισμένες από τις βασικές δυσκολίες που σχετίζονται με την κατανόηση της έννοιας του ορίου μιας ακολουθίας που έχουν αναφερθεί (βλ. § 1.2). Για παράδειγμα, οι ακολουθίες 5, 6, 7, 8 και 10 σχεδιάστηκαν για να βοηθήσουν να ξεπεραστεί η διαισθητική πεποίθηση ότι οι όροι μιας ακολουθίας δεν επιτρέπεται να φτάνουν στο όριό της.

Τρίτος τρόπος είναι πως μία από αυτές (ακολουθία 9) δεν είναι μονότονη, κάτι που στοχεύει στην πεποίθηση των μαθητών ότι η ύπαρξη μονοτονίας (ολικής ή από ένα ορισμένο δείκτη και μετά) είναι απαραίτητη για να υπάρχει το όριο.

Επιπλέον, υπάρχει η προσδοκία ότι, κατά τη σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων, οι μαθητές θα παρατηρούσαν τη μη συνάφεια της συμπεριφοράς ενός πεπερασμένου αριθμού αρχικών όρων, σε σχέση με την «κοινή ιδιότητα» που αναζητούν.

Για τον σκοπό αυτό, υπάρχουν διάφορες παραλλαγές μιας τέτοιας αρχικής συμπεριφοράς: ένας ή (πεπερασμένα) περισσότεροι όροι συμπεριφέρονται διαφορετικά από τους υπόλοιπους (ακολουθίες 1, 2, 8). οι αρχικοί όροι είτε πλησιάζουν όλο και περισσότερο στο όριο, αλλά ο τύπος αλλάζει σε ένα ορισμένο σημείο (ακολουθία 6), απομακρύνονται από το όριο (ακολουθίες 4, 7) ή καθένας από αυτούς μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν αυθαίρετο πραγματικό αριθμό (η ακολουθία 11 είναι μια «άπειρη οικογένεια» ακολουθιών).

Επιπλέον σε μερικές ακολουθίες η συμπεριφορά αλλάζει -επίτηδες- μετά από ένα μεγάλο πλήθος αρχικών όρων, για να αντικρουστεί η διαδεδομένη πεποίθηση των μαθητών ότι «πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων» σημαίνει «μικρό πλήθος αρχικών όρων».

Αυτές οι ακολουθίες αναμένεται επίσης να προκαλέσουν μια συζήτηση για την έννοια του άπειρου ως πολύ μεγάλου αριθμού, που πιθανώς πιστεύουν ορισμένοι μαθητές (και όχι μόνο!).

Σημειώνεται ότι η διατύπωση του προβλήματος δεν περιέχει έτοιμες γραφικές παραστάσεις των ακολουθιών. Στο προτεινόμενο φύλλο εργασίας, οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν δικές τους γραφικές παραστάσεις.

Τελικά αυτή η δραστηριότητα αναμένεται να τους βοηθήσει να παρατηρήσουν ότι, για τις ακολουθίες α_ν ξεκινώντας από έναν συγκεκριμένο δείκτη, όλοι οι επόμενοι όροι αρχίζουν να συμπεριφέρονται με συγκεκριμένο τρόπο, κάτι που δεν συμβαίνει για την ακολουθία β_ν .

Τέλος, υπάρχει περίπτωση οι σύνθετοι τύποι (με κλάδους) και η αλλαγή της συμπεριφοράς των όρων σε ορισμένα σημεία να ωθήσουν ορισμένους μαθητές ώστε να βρουν «μερικά όρια» σε υποακολουθίες ή σε αρχικούς όρους ακολουθιών, καθώς και να σκεφτούν για την ύπαρξη ορίου όχι μόνο στο άπειρο αλλά και σε κάποιο συγκεκριμένο φυσικό αριθμό. Ως εκ τούτου, το πρόβλημα προσφέρει στον εκπαιδευτικό ευκαιρίες να συζητήσει και να βοηθήσει τους μαθητές να ξεπεράσουν και αυτές τις παρανοήσεις σε σχέση με την τυπική έννοια του ορίου.

3. Βιβλιογραφικές αναφορές

- Alcock, L., Simpson, A. (2009). Ideas from mathematics education: An introduction for mathematicians. MSOR Network.
- Bagni, G. T. (2000). Difficulties with series in history and in the classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History *in mathematics education: the ICMI study* (82-86), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bagni, G. T. (2005). Infinite series from history to mathematics education. International Journal for Mathematics Teaching and Learning
- Bella, E. (2019). Introduction of infinite series in high school level calculus. John Carroll University Masters Essays. 122.
- Champney, D. D. (2013). *Explaining infinite series-An exploration of students' images* (Unpublished doctoral dissertation). University of California, Berkeley.
- Earls, D. J. (2017). *Students' misconceptions of sequences and series in second semester calculus* (Unpublished doctoral dissertation). University New Hampshire.
- Elias, D. (2019). The Convergence Concept in High School Constructing Knowledge about Convergence and Limits, Thesis

submitted for the MA degree of Humanities, Program in Education of Secondary School Mathematics, Tel Aviv University, The Jaime and Joan Constantiner, School of Education.

- Fishbein, E., Tirosh, D., Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 491-512.
- Jones, K. (2011). The topic of sequences and series in the curriculum and textbooks for schools in England: A way to link number, algebra and geometry. Paper presented at the 2011 International Conference on School Mathematics Textbooks, East China Normal University, Shanghai, China.
- Martin, J. (2009). *Expert conceptualizations of the convergence of Taylor series: Yesterday, today, and* tomorrow (Unpublished doctoral dissertation). University of Oklahoma.
- Martínez-Planell, R., Gonzalez, A., DiCristina, G., Acevedo, V. (2012). Students' conception of infinite series. *Educational Studies in* Mathematics*, 81*, 235-249.
- Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2 & 3), 239-257.
- Morales, Z. A. (2014). Analysis of Students' Misconceptions and Error Patterns in Mathematics: The Case of Fractions, *Fraction Error Pattern*.
- Nardi, E., Biza, I., González-Martín, A. (2008). Introducing the concept of infinite sum: Preliminary analyses of curriculum content. In Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 28(3), 84-89.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics,* 14(1), 1-18.
- Przenioslo, M. (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educ Stud Math* 60, 71-93.
- Rittle-Johnson, B. Alibali, M. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of Educational Psychology*. 91. 175-189.
- Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371-397.
- Sierpińska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics* 10(3), 24-36. FlM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada.

- Steen, L. (Ed.) (1988). *Calculus for a new century*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. *Plenary presentation in Working Group 3*, ICME (pp. 13-28). Quebec, Canada.
- Tall, D., Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics* Teaching, 82, 44-49.
- Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12(2), 151-169.
- White, P., Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 79-95.