ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η εξίσωση Navier - Stokes στις τρεις διαστάσεις

Δήμητρα Βίννη

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης

στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Επιβλέπων καθηγητής : Γεράσιμος Μπαρμπάτης

Οκτώβριος 2022

Ευχαριστίες

Αυτή η εργασία ολοκληρώνει δύο όμορφα και ιδιαίτερα χρόνια στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών στο Μαθηματικό Τμήμα του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Γεράσιμο Μπαρμπάτη για την πολύτιμη βοήθεια , υποστήριξη , τον προσωπικό χρόνο που διέθεσε και την εξαιρετική συνεργασία γενικότερα κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Επίσης χρωστάω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου για την αμέριστη συμπαράσταση και κατανόηση όλα αυτά τα χρόνια , όπως και στους φίλους μου για όλη τη στήριξη.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με την εξίσωση Navier - Stokes στις τρεις διαστάσεις , η οποία είναι μια θεμελιώδης μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση ρευστών με πολλές εφαρμογές στην καθημερινότητά μας και βρίσκεται συνεχώς στο επίκεντρο καθώς αποτελεί ένα ανοιχτό πρόβλημα.
Θα ξεκινήσουμε στο Κεφάλαιο 1 δίνοντας τις απαραίτητες έννοιες που θα χρειαστούμε κυρίως από τη συναρτησιακή ανάλυση όπως τους χώρους Lebesgue, Sobolev και Bochner μαζί με σημαντικά θεωρήματα και αποτελέσματα για αυτούς.
Στη συνέχεια στο Κεφάλαιο 2 θα ασχοληθούμε αναλυτικά με όλα τα εργαλεία που απαιτούνται για την μελέτη της εξίσωσης όπως η διάσπαση Helmholtz - Weyl και ο τελεστής Stokes .
Στο Κεφάλαιο 3 θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην κατασκευή ασθενών λύσεων με δύο διαφορετικούς χώρους συναρτήσεων δοκιμής και θα εξάγουμε σημαντικά αποτελέσματα για αυτές. Επίσης θα αναφερθούμε στην μοναδικότητα των ασθενών λύσεων αλλά στις δύο διαστάσεις .
Θα ολοκληρώσουμε στο Κεφάλαιο 4 , αποδεικνύοντας την ύπαρξη ασθενών λύσεων με το θεώρημα του Hopf χρησιμοποιώντας το λήμμα Aubin- Lions που επίσης θα αποδείξουμε . Καταλήγοντας θα δείξουμε και οτι μια άλλη κατηγορία ασθενών λύσεων (Leray - Hopf) ικανοποιούν την ισχυρή ανίσωση ενέργειας .

Abstract

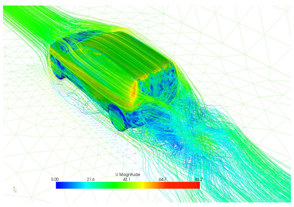
In this master thesis we will study the Navier - Stokes equation in three dimensions , which is a fundamental partial differential equation for fluid dynamics with several applications to real life problems , but it is still an open problem.
In the first Chapter we introduce some initial concepts mostly from functional analysis such as Lebesgue, Sobolev and Bochner spaces .We will also mention some important theorems and properties for these spaces in order to use them in the next chapters.
In Chapter 2 we will discuss important tools for the study of the Navier - Stokes equation such as the Helmholtz - Weyl decomposition and the Stokes operator.
Later , in Chapter 3 we will present the construction of weak solutions in two different spaces of test functions and some properties. Furthermore we will refer to the uniqueness of weak solutions for the two dimensional Navier - Stokes equation.
Finally , in Chapter 4 we will prove the existence of weak solutions in three dimensions (Hopf theorem) , with the Aubin -Lions lemma and we shall prove the strong energy inequality for the Leray -Hopf weak solutions.

Περιεχόμενα

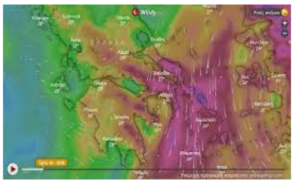
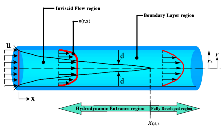
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εξίσωση Navier-Stokes στις τρεις διαστάσεις αποτελεί θεμελιώδες μαθηματικό μοντέλο για την ρευστομηχανική. Η μελέτη της κίνησης των ρευστών είναι μια απαιτητική διαδικασία καθώς έχουν την ικανότητα να ρέουν με πολύπλοκους τρόπους. Ωστόσο τα ρευστά υπάρχουν παντού στην καθημερινότητά μας, από τον αέρα που αναπνέουμε και το νερό που μας είναι απαραίτητο για να επιβιώσουμε μέχρι το αίμα και το κυτόπλασμα στα κύτταρά μας. Δηλαδή καταλαβαίνουμε ότι οι εφαρμογές της εξίσωσης αυτής στην καθημερινή μας ζωή θα είναι πολλαπλές.

Μπορούμε να τη συναντήσουμε σε διάφορα φυσικά φαινόμενα και μηχανολογικού ενδιαφέροντος διαδικασίες. Ξεκινόντας από τα πιο απλά , όπως η μελέτη του νερού ή άλλου υγρού σε ένα σωλήνα φτάνοντας μέχρι την περιγραφή της ροής του αίματος. Επίσης μπορεί να περιγράψει και την ροή του πετρελαίου αλλά και να χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση της ρύπανσης της ατμόσφαιρας μελετώντας τις κινήσεις ρευστών σωματιδίων , όπως και στη σχεδίαση σταθμών ηλεκτροπαραγωγής . Πολύ σημαντική είναι η χρήση της εξίσωσης στα αεροπλάνα για την μελέτη της ροής του αέρα στα φτερά του αεροσκάφους , κάτι το οποίο βοηθά και στην σχεδίασή τους. Ανάλογη μελέτη μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη σχεδίαση των αυτοκινήτων .


Αξίζει επίσης να αναφερθούμε και στην εφαρμογή της σε διάφορα προγνωστικά μοντέλα της μετεωρολογίας όπως και στην μελέτη ωκεάνιων ρευμάτων. Ακόμη μπορούμε να τη συναντήσουμε σε βιντεοπαιχνίδια που χρησιμοποιούν τρισδιάσταση τεχνολογία με σκοπό να αναπαραστήσουν φυσικά φαινόμενα όπως την ροή του καπνού σε μια φωτιά , την κίνηση του νερού δίπλα σε ένα πλοίο που θα δώσει μια πιο ρεαλιστική απεικόνιση των κυμάτων.


Πέρα από το ενδιαφέρον που μας κινεί να τη μελετήσουμε από τις πολλαπλές εφαρμογές στην καθημερινότητά μας , έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον στους μαθηματικούς καθώς αποτελεί ένα ανοιχτό πρόβλημα. Δεν υπάρχει αυστηρή θεωρία για την ολική ύπαρξη μοναδικής λύσης και αν για κάθε λογική αρχική συνθήκη υπάρχει ακριβώς μια λύση ορισμένη για αρκετά μεγάλες τιμές του χρόνου.
Έτσι ένα από τα επτά προβλήματα που έχει ανακοινώσει το Μαθηματικό Ινστιτούτο Clay και προσφέρει 1 εκατομμύριο δολλάρια είναι να αποδειχθεί η ύπαρξη και μοναδικότητα ομαλών λύσεων στις τρεις διαστάσεις ή κατάλληλα αντιπαραδείγματα για αυτή την περίπτωση.

Η εξίσωση Navier-Stokes που πήρε το όνομά της από τους Claude-Louis Navier (1822) και George Gabriel Stokes (1845), διέπει την χρονική εξέλιξη του διανυσματικού πεδίου της ταχύτητας u του ρευστού και την πίεση που ασκεί σε ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ (βαθμωτό μέγεθος) και δίνεται ως

$$\partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0 \tag{1}$$

με συνθήκη (ασυμπίεστο πεδίο)

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{2}$$

Επίσης με την παράμετρο ν έχουμε συμβολίσει το κινηματικό ιξώδες το οποίο και θα θεωρούμε συνήθως ως $\nu = 1$.

Στην πραγματικότητα παρατηρούμε ότι προκύπτει ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων, όπου οι τρεις αφορούν στην χρονική εξέλιξη των τριών συνιστωσών της u και μια συνθήκη, έχοντας τέσσερις αγνώστους διότι υπάρχει και η πίεση. Αφού οι λύσεις της εξίσωσης Navier-Stokes είναι ασυμπίεστες από την (2), σε βασικά θεωρήματα που θα αναλύσουμε παρακάτω θα καταλήξουμε σε μια εξίσωση που η πίεση δεν έχει εμφανές ρόλο και θα την παραλείπουμε, κάτι το οποίο μας βοηθά στην απλούστευση της μελέτης μας καθώς θα επικεντρωθούμε στην ανάλυση της u .

Εξαγωγή της Εξίσωσης

Στο σημείο αυτό αξίζει να δούμε με συντομία πως προκύπτει η εξίσωση Navier-Stokes καθώς και να ερμηνεύσουμε φυσικά τι αποτελέσματα μας δίνει.

Έστω ότι το ρευστό που μελετάμε βρίσκεται σε ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ και έχει σταθερή πυκνότητα ρ .

Γνωρίζουμε ότι κάθε χρονική στιγμή σε οποιοδήποτε χωρίο $U \subset \Omega$ διατηρείται η μάζα , δηλαδή η εισερχόμενη ποσότητα ρευστού στο U είναι ίση με την εξερχόμενη. Συνεπώς από τη διατήρηση της μάζας έχουμε

$$\rho \int_{\partial U} u(x,t) \cdot n(x)\ dS(x) = 0 \tag{3}$$

όπου $n(x)$ είναι το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια ∂U. Από το θεώρημα του Gauss για επαρκώς κανονικό σύνορο του U προκύπτει ότι

$$\rho \int_{U} \nabla \cdot u(x,t)\ dx = 0 \tag{4}$$

Αφού η σχέση αυτή πρέπει να ισχύει για κάθε επαρκώς κανονικό χωρίο $U \subset \Omega$ τότε $\nabla \cdot u = 0$ σε όλο το Ω.

Έστω $V(t)$ ο όγκος του ρευστού που κινείται οπότε $V(0)$ είναι ο αρχικός όγκος. Επίσης για $x_0 \in V(0)$ συμβολίζουμε ως $X(t, x_0)$ τη θέση που θα έχει ένα υλικό σωματίδιο τη χρονική στιγμή t στην τροχιά που θα ακολουθεί , δηλαδή

$$V(t) = \{X(t, x_0) : x_0 \in V(0)\}$$

και τα διάφορα $X(t, x_0)$ είναι τότε λύσεις της

$$\dot{X}(t, x_0) = u(X(t, x_0), t) \quad \text{με} \quad X(0, x_0) = x_0 \tag{5}$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι $F = ma$ και αφού έχουμε επιλέξει σταθερή πυκνότητα θεωρούμε $m = 1$, άρα

$$\ddot{X}(t, x_0) = F(X(t, x_0), t) \tag{6}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας θα πάρουμε

$$\begin{aligned}
\ddot{X}(t, x_0) &= \frac{d}{dt}\dot{X}(t, x_0) \\
&= \partial_t u(X(t, x_0), t) + \sum_j \partial_{x_j}(u(X(t, x_0), t))(\dot{X}(t, x_0))_j \\
&= \partial_t u(X(t, x_0), t) + \sum_j \partial_{x_j}(u(X(t, x_0), t))u_j(X(t, x_0), t) \\
&= \partial_t u(X(t, x_0), t) + (u(X(t, x_0), t) \cdot \nabla)u(X(t, x_0), t)
\end{aligned}$$

Δηλαδή έχουμε μια εξίσωση της μορφής

$$F = \partial_t u + (u \cdot \nabla)u \tag{7}$$

όπου το δεύτερο μέρος της ισότητας αυτής ονομάζεται οριζόντια μεταφορά.

Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις όπως η βαρύτητα, υπάρχουν δύο είδη εσωτερικών δυνάμεων που πρέπει να λάβουμε υπόψιν, η πίεση και η τριβή λόγω ιξώδους.
Γνωρίζουμε για τον Cauchy τανυστή τάσεων σ ότι

$$\rho a_i = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{8}$$

όπου a η επιτάχυνση από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + (\lambda \ \mathrm{div} u - p)\delta_{ij} \tag{9}$$

όπου μ, λ σταθερές και δ_{ij} το δέλτα του Kronecker . Άρα

$$\rho F_i = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{10}$$

και χρησιμοποιώντας την (9) θα πάρουμε

$$\rho F_i = \mu \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + \left(\lambda \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{div} u - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} p \right) \delta_{ij}$$

Δηλαδή από (7) και το γεγονός ότι $\mathrm{div} u = 0$

$$\rho \left(\partial_t u + (u \cdot \nabla) u \right) = \mu \Delta u - \nabla p \tag{11}$$

Κάπως έτσι προκύπτει η εξίσωση Navier - Stokes

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p - \nu \Delta u = 0$$

όπου $\nu = \mu / \rho$ το κινηματικό ιξώδες.

Κεφάλαιο 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Επιλογή πεδίου ορισμού ροών

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στα τρισδιάστατα χωρία Ω που μπορούμε να επιλέξουμε για την ροή ενός ασυμπίεστου Νευτώνιου ρευστού η οποία περιγράφεται από την εξίσωση Navier-Stokes. Οι συνηθέστεροι τύποι χωρίων που προκύπτουν για το πρόβλημα αυτό είναι οι κυλινδρικοί, όπως οι σωλήνες για την ροή ρευστών, οι φλέβες και αρτηρίες για την ροή του αίματος, αλλά και οι άπειρες λωρίδες που μπορεί να ρέει για παράδειγμα ο αέρας στα φτερά του αεροσκάφους.
Στην εργασία αυτή επιλέγουμε να επικεντρωθούμε στους εξής τύπους χωρίων :

- φραγμένο ανοικτό χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ με ομαλό σύνορο
- ο χώρος $\mathbb{R}^3$
- ο τόρος $\mathbb{T}^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ όπου $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$.

Οι δύο τελευταίοι τύποι είναι χωρία χωρίς σύνορο το οποίο αποτελεί πλεονέκτημα καθώς είναι πιο απλή η μελέτη τους. Επίσης για το φραγμένο χωρίο Ω και τον τόρο που επίσης φράσσεται ισχύουν διάφορα θεωρήματα και ανισότητες όπως η Poincaré που θα μας βοηθήσουν στην ανάλυση των ασθενών λύσεων.
Όμως για να είναι σωστά ορισμένο το πρόβλημα θα πρέπει να εισάγουμε κάποιες συνθήκες. Έτσι στην περίπτωση που έχουμε το φραγμένο χωρίο

Ω χρειαζόμαστε μια συνοριακή συνθήκη και απαιτούμε $u|_{\partial\Omega} = 0$.
Για ολόκληρο τον χώρο $\mathbb{R}^3$ η συνθήκη που πρέπει να συμπληρωθεί θα αφορά τη συμπεριφορά στο άπειρο , για παράδειγμα θα απαιτούμε η συνάρτηση $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$.
Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε κυρίως με την περίπτωση του τόρου $\mathbb{T}^3$ ο οποίος δίνει σημαντικά πλεονεκτήματα για την μελέτη της εξίσωσης Navier-Stokes η οποία είναι ένα αρκετά απαιτητικό πρόβλημα. Εδώ για μαθηματική ευκολία θα θεωρήσουμε ως συνθήκη

$$\int_{\mathbb{T}^3} u(x)\ dx = 0.$$

1.2 Συμβολισμοί

- Για $a = (a_1, ..., a_n)$ και $b = (b_1, .., b_n) \in \mathbb{C}^n$ συμβολίζουμε ως

$$a \cdot b = a_1\overline{b}_1 + ... + a_n\overline{b}_n$$

- Πολλές φορές γράφουμε u_{x_i} αντί για $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $u : U \to \mathbb{R}$.

- Συμβολίζουμε ως $Du = \nabla u = (u_{x_1}, ..., u_{x_n})$
- Για διάνυσμα $a = (a_1, ..., a_n)$, όπου a_i μη αρνητικοί ακέραιοι με $|a| = a_1 + ... + a_n$ ισχύει ότι

$$D^a u(x) = \frac{\partial^{|a|} u(x)}{\partial x_1^{a_1} ... \partial x_n^{a_n}} = \partial_{x_1}^{a_1} ... \partial_{x_n}^{a_n} u, \quad \text{όπου } x \in U$$

Ενώ αν θεωρήσουμε διανυσματικά πεδία $u : U \to \mathbb{R}^m$, $u = (u^1, ..., u^m)$ τότε

$$D^a u = (D^a u^1, ..., D^a u^m), \quad \text{για κάθε πολυδείκτη } a$$

- Επίσης αν $m = n$ τότε
$$\mathrm{div} u = \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{n} u^i_{x_i}$$
και
$$\mathrm{curl} u = \nabla \times u$$

- Αν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ είναι $m \times n$ πίνακας τότε
$$A : B = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

- Ακόμη
$$\langle Du, Dv \rangle = \int_{\mathbb{T}^3} Du : Dv \; dx$$

- Θεωρούμε Ω ένα ανοικτό χωρίο του $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το σύνολο U περιέχεται συμπαγώς στο Ω και συμβολίζουμε $U \subset\subset \Omega$ αν
$$\overline{U} \subset \Omega \quad \text{και} \quad \overline{U} \text{ συμπαγές σύνολο.}$$

1.3 Χρήσιμοι χώροι συναρτήσεων

Οι κυριότεροι χώροι συνεχών και διαφορίσιμων συναρτήσεων που θα συναντήσουμε σε κάποιο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι οι εξής :

- $C(U)$ είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο U.

- $C(\overline{U})$ είναι ο χώρος των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων στο $\overline{U}$ με νόρμα
$$||u||_{C(\overline{U})} = \sup_{x \in \overline{U}} |u(x)|$$

- $C^k(U)$ είναι ο χώρος που περιέχει όλες τις k φορές συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις στο U.

- $C^k(\overline{U})$ είναι ο χώρος που περιέχει όλες τις φραγμένες k φορές συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις στο $\overline{U}$ όπου ισχύει ότι $D^a u$ συνεχείς στο $\overline{U}$ για όλα τα $|a| \leq k$. Η αντίστοιχη νόρμα είναι

$$||u||_{C^k(\overline{U})} = \sum_{|a| \leq k} ||\partial^a u||_{C(\overline{U})}$$

- $C^k_c(U) = \left\{\phi : \phi \in C^k(U),\ \text{supp}\ \phi \subset\subset U\right\}$

- $C^\infty_c(U) = \{\phi : \phi \in C^\infty(U),\ \text{supp}\ \phi \subset\subset U\}$.

Επίσης έστω X χώρος Banach , τότε ορίζουμε το χώρο των συνεχών συναρτήσεων από το διάστημα $[0,T]$ στον X ως $C([0,T];X)$ με τη νόρμα

$$||u||_{C([0,T];X)} := \sup_{t \in [0,T]} ||u(t)||_X$$

ο οποίος είναι και αυτός χώρος Banach.

Το θεώρημα που ακολουθεί και αφορά τον χώρο $C([0,T];X)$ είναι πολυ σημαντικό για την απόδειξη του θεωρήματος Aubin - Lions για την ύπαρξη ασθενών λύσεων της εξίσωσης Navier - Stokes με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο Κεφάλαιο 4.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.1. ***(Arzela - Ascoli)***
Ας είναι X χώρος Banach και (u_n) μια ακολουθία συναρτήσεων στον $C([0,T];X)$ τέτοια ώστε :

- *για κάθε $t \in [0,T]$ υπάρχει συμπαγές $K(t) \subset X$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $u_n(t) \in K(t)$*

- *οι συναρτήσεις u_n είναι ισοσυνεχείς , δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ να υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$*

$$|s-t| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|u_n(s)-u_n(t)\|_X \leq \epsilon$$

Τότε υπάρχει υπακολουθία (u_{n_k}) *και συνάρτηση* $u \in C([0,T];X)$ *τέτοια ώστε*

$$u_{n_k} \to u \quad \text{στον } C([0,T];X). \tag{1.1}$$

1.4 Χώροι Lebesgue

Έστω Ω μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Μια τριάδα $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται χώρος μέτρου αν $\mathcal{A}$ αποτελεί μια σ-άλγεβρα στο Ω και $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ είναι μια απεικόνιση τέτοια ώστε για κάθε αριθμήσιμη συλλογή $\{E_n\}$ ξένων ανά δύο στοιχείων του $\mathcal{A}$ να ισχύει

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n).$$

Τα στοιχεία του $\mathcal{A}$ ονομάζονται μετρήσιμα σύνολα. Επίσης μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται μετρήσιμη αν το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι μετρήσιμο για κάθε ανοικτό $U \subset \mathbb{R}$.

Συμβολίζουμε με $L^1(\Omega,\mu)$ ή $L^1(\Omega)$ ή L^1 τον χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων από το Ω στο $\mathbb{R}$ με

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f| \, dx$$

Ακόμη ορίζουμε ως

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \ \text{ μετρήσιμη με } \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

όπου

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty$$

και έχουμε χρησιμοποιήσει το μέτρο Lebesgue και είναι αυτό που θα χρησιμοποιούμε από εδώ και στο εξής για τους χώρους αυτούς.

Στην παρούσα εργασία θα αναφερόμαστε συχνά στο χώρο L^2 ο οποίος είναι και χώρος Hilbert, αλλά και στο αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο το οποίο και θα συμβολίζουμε ως :

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \int_{\mathbb{T}^3} u(x)\ \overline{v(x)}\ dx$$

Για την περίπτωση όπου $p = \infty$ ισχύει ότι

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \ \text{ μετρήσιμη με } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$$

με

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess } \sup |u| = \inf \{a \in \mathbb{R} : \mu\left(\{x \in \Omega : |u(x)| \geq a\}\right) = 0\}$$

Ορίζουμε επίσης για $1 \leq p \leq \infty$

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \ \text{ μετρήσιμη και } u \in L^p(U) \ \text{ για κάθε } U \subset\subset \Omega\}$$

Οι χώροι Lebesgue είναι πολύ σημαντικοί για την μελέτη της εξίσωσης Navier - Stokes τόσο οι ίδιοι όσο και η θεωρία που προκύπτει, με ιδιαίτερη έμφαση στις ανισώσεις τις οποίες και θα χρησιμοποιήσουμε σε μεγάλο βαθμό στην εργασία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4.1. ***(Ανίσωση Hölder)***
Ας είναι Ω μετρήσιμο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Αν $u \in L^p(\Omega)$ και $v \in L^q(\Omega)$ όπου

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 \leq p, q \leq \infty$$

τότε $uv \in L^1(\Omega)$ και

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|\, dx \leq ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^q(\Omega)}. \tag{1.2}$$

Επίσης σημαντική είναι και η ανίσωση Young η οποία χρησιμοποιείται στην απόδειξη της Hölder και μας δίνει ότι για

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{με } 1 \leq p, q \leq \infty \qquad \text{ισχύει } \ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Συχνά όμως χρησιμοποιείται και στη μορφή

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q \quad \text{για οποιοδήποτε } \epsilon > 0 \tag{1.3}$$

και a, b θετικοί.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4.2. *Ας είναι* Ω *μετρήσιμο σύνολο στον* $\mathbb{R}^n$. *Αν* $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ *και* $w \in L^r(\Omega)$ *όπου*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leq p, q, r \leq \infty$$

τότε $uvw \in L^1(\Omega)$ *και*

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)w(x)|\, dx \leq ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^q(\Omega)} ||w||_{L^r(\Omega)}. \tag{1.4}$$

Οι δύο πιο συχνές εκδοχές στην εργασία αυτή είναι

$$||uvw||_{L^1} \leq ||u||_{L^6} ||v||_{L^2} ||w||_{L^3}$$

και

$$||uvw||_{L^1} \leq ||u||_{L^4} ||v||_{L^2} ||w||_{L^4}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4.3. ***(Ανίσωση Παρεμβολής για L^p νόρμες)***
Ας είναι $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο σύνολο . Αν $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ και $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ τότε $u \in L^r(\Omega)$ με

$$||u||_{L^r} \leq ||u||_{L^p}^a ||u||_{L^q}^{1-a} \quad \text{όπου} \quad \frac{1}{r} = \frac{a}{p} + \frac{1-a}{q} \tag{1.5}$$

Η πιο συχνή μορφή της ανίσωσης αυτής στην εργασία είναι :

$$||u||_{L^3} \leq ||u||_{L^2}^{1/2} ||u||_{L^6}^{1/2}.$$

1.5 Σειρές και συντελεστές Fourier

Όπως προαναφέραμε θα επικεντρωθούμε κυρίως στην περίπτωση όπου πεδίο ορισμού θα είναι ο τόρος $\mathbb{T}^3$. Για πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται στον $\mathbb{T}^3$ η μελέτη τους γίνεται πιο απλή αν χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία Fourier και τις σειρές Fourier.
Έστω μια συνάρτηση $u \in L^2(\mathbb{T}^3)$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι το σύνολο

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\ e^{ik\cdot x}, \quad k \in \mathbb{Z}^3$$

είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο στον $L^2(\mathbb{T}^3)$. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε τους συντελεστές Fourier ως

$$\hat{u}_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} u(x) e^{-ik\cdot x}\ dx, \quad k \in \mathbb{Z}^3$$

και είναι στοιχεία του $\mathbb{C}^3$. Επίσης ικανοποιούν τη σχέση

$$\hat{u}_k = \overline{\hat{u}_{-k}}, \quad \text{για όλα τα } k \in \mathbb{Z}^3$$

ώστε να εξασφαλιστεί ότι η συνάρτηση u είναι πραγματική.

Αν ισχύει ότι

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} |\hat{u}_k|^2 < \infty$$

και με το δεδομένο ότι το σύνολο $\left\{ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \; e^{ik \cdot x} \right\}$ είναι ορθοκανονικό στον $L^2(\mathbb{T}^3)$ τότε από τη θεωρία Fourier μπορούμε να γράψουμε ότι

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \hat{u}_k e^{ik \cdot x}$$

Για την περίπτωση όπου η συνάρτηση u ανήκει σε κάποιον άλλο L^p χώρο τότε η διαδικασία αυτή είναι πιο δύσκολη καθώς για να αποδειχθεί η σύγκλιση της σειράς απαιούνται πιο σύνθετους υπολογισμούς.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5.1. *Ας είναι* $Q_N = [-N, N]^3 \cap \mathbb{Z}^3$*. Για κάθε* $u \in L^1(\mathbb{T}^3)$ *και κάθε* $N \in \mathbb{N}$ *ορίζουμε*

$$S_N(u) = \sum_{k \in Q_N} \hat{u}_k e^{ik \cdot x}$$

με $\hat{u}_k$ *να είναι οι συντελεστές Fourier όπως τους ορίσαμε πιο πάνω.*
Τότε για κάθε $1 < p < \infty$ *υπάρχει σταθερά* $C_p > 0$ *ανεξάρτητη του* N *τέτοια ώστε*

$$\|S_N(u)\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^p} \quad \forall u \in L^p(\mathbb{T}^3) \tag{1.6}$$

και $S_N \to u$ *στον* $L^p(\mathbb{T}^3)$.

1.6 Χώροι Sobolev

Οι διάφοροι χώροι Sobolev χρησιμοποιούνται συχνά στη Συναρτησιακή Ανάλυση και στη μελέτη μερικών διαφορικών εξισώσεων εξαιτίας των καλών

ιδιοτήτων (π.χ. πληρότητας, συμπάγειας) που διαθέτουν.
Για να ορίσουμε τους χώρους Sobolev θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό των ασθενών μερικών παραγώγων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.1. *Μια συνάρτηση $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ λέμε ότι είναι ασθενώς παραγωγίσιμη αν υπάρχουν συναρτήσεις $g_1, .., g_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ τέτοιες ώστε*

$$\int_\Omega u(x)\phi_{x_i}(x)\ dx = -\int_\Omega g_i(x)\phi(x)\ dx \tag{1.7}$$

για κάθε $1 \leq i \leq n$ και για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη τότε οι συναρτήσεις $g_1, .., g_n$ είναι μοναδικές (μέχρι σύνολα μέτρου μηδέν), ονομάζονται ασθενείς μερικές παράγωγοί της και συμβολίζονται ως u_{x_i}.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.2. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε τον χώρο Sobolev*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : u \ \ \textit{ασθενώς παραγωγίσιμη και}\ u_{x_i} \in L^p(\Omega)\}$$

με αντίστοιχη νόρμα

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p + |\nabla u|^p\ dx \right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Επίσης ορίζουμε το χώρο $W_0^{1,p}(\Omega)$ ως τη κλειστή θήκη του $C_c^\infty(\Omega)$ ως προς τη νόρμα $||\cdot||_{W^{1,p}}$. Για την περίπτωση όπου οι συναρτήσεις ορίζονται στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $1 \leq p < \infty$ και $k \geq 2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.3. *Ορίζουμε τον χώρο*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{k-1,p}(\Omega) \ : \ u_{x_i} \in W^{k-1,p}(\Omega) \right\}$$

με αντίστοιχη νόρμα

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|a| \leq k} \|\partial^a u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ακόμη ορίζουμε το χώρο $W^{k,p}(\Omega)$ ως τη κλειστή θήκη του $C_c^\infty(\Omega)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$.
Αξίζει να προσθέσουμε ότι ο χώρος $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\Omega)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.6.1. *Για λόγους ευκολίας θα συμβολίζουμε*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \quad \textit{και} \quad H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$$

για $k = 1, 2, 3, ...$ *με αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο*

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{|a| \leq k} \langle \partial^a u, \partial^a v \rangle$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *το εσωτερικό γινόμενο στον* L^2 *και αντίστοιχη νόρμα*

$$\|u\|_{H^k} = (u, u)_{H^k} = \left(\sum_{|a| \leq k} \|\partial^a u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ο συμβολισμός H ουσιαστικά προέρχεται από το γεγονός ότι αποτελούν χώρους Hilbert . Επίσης παρατηρούμε ότι $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στις βασικές ανισώσεις που αφορούν τους χώρους Sobolev .

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6.1. ***(Ανισότητα Poincarè)***
Έστω $1 \leq p < \infty$ και Ω φραγμένο χωρίο. Υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq c||\nabla u||_{L^p(\Omega)} \tag{1.8}$$

για όλες τις συναρτήσεις $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, αλλά ισχύει και για όλες τις συναρτήσεις $u \in W^{1,p}(\Omega)$ τέτοιες ώστε $\int_\Omega u\, dx = 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6.2. ***(Εμβάπτιση Sobolev και ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)***
Έστω $\Omega = \mathbb{T}^3$ ή $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και $1 \leq p < n$. Τότε έχουμε την εμβάπτιση

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega), \quad \text{όπου } p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Επίσης θα υπάρχει σταθερά $c > 0$ η οποία θα εξαρτάται από τα p, n τέτοια ώστε

$$||u||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c||\nabla u||_{L^p(\Omega)} \quad , u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.9}$$

1.6.1 Χώροι Sobolev στον $\mathbb{T}^3$ και η ανάλυση Fourier

Όπως αναφέραμε και σε προηγούμενη ενότητα , αν θεωρήσουμε συνάρτηση $u \in L^2(\mathbb{T}^3)$ μπορεί να γραφεί ως

$$u(x) = \sum_k \hat{u}_k e^{ik\cdot x}, \quad \hat{u}_k = \overline{\hat{u}}_{-k} \tag{1.10}$$

με τη σημαντική ιδιότητα ότι

$$u \in L^2(\mathbb{T}^3) \ \text{ αν και μόνο αν } \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} |\hat{u}_k|^2 < \infty.$$

Τότε ισχύει ο τύπος του **Plancherel** :

$$||u||^2 = \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}(x)|^2 \ dx = (2\pi)^3 \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} |\hat{u}_k|^2.$$

Επίσης αν θεωρήσουμε την

$$u^{(N)}(x) = \sum_{|k|\leq N} \hat{u}_k e^{ik\cdot x}$$

τότε

$$\partial_j u_m^{(N)}(x) = \sum_{|k|\leq N} (\hat{u}_k)_m (ik_j) e^{ik\cdot x}.$$

Άρα χρησιμοποιώντας τον τύπο Plancherel

$$||\nabla u^{(N)}||^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = (2\pi)^3 \sum_{|k|\leq N} |k|^2 |\hat{u}_k|^2.$$

Συνεπώς για $N \to \infty$

$$||\nabla u||^2 = (2\pi)^3 \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} |k|^2 |\hat{u}_k|^2.$$

Για τον Sobolev χώρο $H^1(\mathbb{T}^3)$ γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} ||u||^2_{H^1(\mathbb{T}^3)} &= ||u||^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\ &= (2\pi)^3 \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} (1+|k|^2)|\hat{u}_k|^2 \end{aligned}$$

και έτσι προέκυψε μια ισοδύναμη νόρμα η οποία θα μας είναι χρήσιμη σε διάφορους υπολογισμούς στη συνέχεια. Ακόμη μπορύμε να γράψουμε ότι

$$H^1(\mathbb{T}^3) = \{u \in L^2(\mathbb{T}^3) : \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} |k|^2 |\hat{u}_k|^2\} < \infty$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.4. *Για $s \geq 0$ ο χώρος Sobolev $H^s(\mathbb{T}^3)$ περιέχει όλες τις συναρτήσεις u που γράφονται στη μορφή* (1.10) *και για τις οποίες η νόρμα*

$$||u||^2_{H^s} = (2\pi)^3 \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^{2s})\ |\hat{u}_k|^2$$

είναι πεπερασμένη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.5. ***(Ομογενείς Χώροι)***

- *Ο ομογενής χώρος $\dot{L}^2(\mathbb{T}^3)$ περιέχει όλες τις συναρτήσεις $u \in L^2(\mathbb{T}^3)$ που έχουν μηδενικό μέσο όρο δηλαδή*

$$\int_{\mathbb{T}^3} u(x)\, dx = 0 \quad \text{ή χρησιμοποιώντας τη θεωρία Fourier } \hat{u}_0 = 0$$

  Έτσι αν $u \in L^2(\mathbb{T}^3)$ τότε $u \in \dot{L}^2(\mathbb{T}^3)$ αν και μόνο αν $\hat{u}_0 = 0$. Επίσης η ισοδύναμη νόρμα είναι

$$\sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} |\hat{u}_k|^2, \quad \text{όπου } \dot{\mathbb{Z}}^3 = \{k \in \mathbb{Z}^3 : |k| \neq 0\}.$$

- *Ο ομογενής χώρος Sobolev $\dot{H}^s(\mathbb{T}^3)$, για $s > 0$, ορίζεται ως $H^s(\mathbb{T}^3) \cap \dot{L}^2(\mathbb{T}^3)$ με νόρμα*

$$||u||_{\dot{H}^s(\mathbb{T}^3)} = (2\pi)^3 \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} |k|^{2s} |\hat{u}_k|^2.$$

Αξίζει επίσης να σημειώσουμε ότι

$$||u||^2_{\dot{H}^1} = (2\pi)^3 \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} |k|^2 |\hat{u}_k|^2 = ||\nabla u||^2 \tag{1.11}$$

και

$$\begin{aligned} ||u||^2_{\dot{H}^2} &= (2\pi)^3 \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} |k|^4 |\hat{u}_k|^2 \\ &= (2\pi)^3 \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} \left| |k|^2 \hat{u}_k \right|^2 \\ &= ||\Delta u||^2. \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6.3. ***(Εμβάπτιση χώρων Sobolev** H^s **για** $0 \le s < \frac{3}{2}$)*
Έστω $\Omega = \mathbb{T}^3$ *ή* $\mathbb{R}^3$ *και* $0 \le s < \frac{3}{2}$. *Τότε*

$$H^s(\Omega) \subset L^{\frac{6}{3-2s}}(\Omega)$$

και υπάρχει σταθερά $c_s > 0$ *τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{L^{\frac{6}{3-2s}}(\Omega)} \le c_s \|u\|_{H^s(\Omega)} \quad , \text{ για όλες τις } u \in H^s(\Omega). \tag{1.12}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6.4. ***(Ανισότητα περεμβολής Sobolev)***
Έστω $\Omega = \mathbb{T}^3$ *ή* $\mathbb{R}^3$ *και ας υποθέσουμε ότι* $0 \le s_1 \le s \le s_2$, $\theta \in [0,1]$ *όπου*

$$s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2.$$

Αν $u \in \dot{H}^{s_1} \cap \dot{H}^{s_2}$ *τότε*

$$\|u\|_{\dot{H}^s} \le \|u\|^{\theta}_{\dot{H}^{s_1}} \|u\|^{1-\theta}_{\dot{H}^{s_2}} \tag{1.13}$$

1.7 Δυϊκοί χώροι

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7.1. *Έστω* X *χώρος Banach . Ο χώρος όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών στον* X *ονομάζεται δυϊκός χώρος του* X *και συμβολίζεται ως* X^*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7.2. *Ας είναι* $u \in X$ *και* $f \in X^*$.
Συμβολίζουμε ως

$$\langle f, u \rangle_{X^* \times X} = f(u)$$

την δυϊκή σύζευξη των χώρων X^* *και* X . *Ορίζουμε την νόρμα στον* X^* *ως*

$$\|f\|_{X^*} := \sup_{\|u\|_X = 1} |\langle f, u \rangle_{X^* \times X}|$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο χώρος X^* είναι επίσης χώρος Banach .
Ακόμη ο χώρος Banach X ονομάζεται αυτοπαθής αν $(X^*)^* = X$.

Φέρνοντας ως παράδειγμα τον χώρο $L^p(\mathbb{T}^3)$ με $1 \le p < \infty$, ο δυϊκός του είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον χώρο $L^q(\mathbb{T}^3)$ όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αν εξαιρέσουμε την περίπτωση όπου $p = 1$ οι χώροι αυτοί είναι αυτοπαθείς. Για τους χώρους αυτούς ισχύει ακόμη ότι

$$\|u\|_{L^q} = \sup_{\|f\|_{L^p}=1} \int_{\mathbb{T}^3} f(x)u(x)\, dx.$$

Οι δυϊκοί χώροι θα χρησιμοποιηθούν αρκετά στην παρούσα εργασία , κυρίως όμως για την ύπαρξη των ασθενών λύσεων. Εξίσου σημαντικές θα είναι εκεί και οι έννοιες της ασθενούς σύγκλισης σε ένα χώρο Banach και της $*$ - ασθενούς σύγκλισης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7.3. *Έστω X χώρος Banach .*

- *Μια ακολουθία (x_n) στον X λέμε ότι συγκλίνει ασθενώς στο $x \in X$ και γράφουμε ότι $x_n \rightharpoonup x$ στον X αν*

$$\langle f, x_n \rangle_{X^* \times X} \to \langle f, x \rangle_{X^* \times X} \quad \text{για κάθε } f \in X^*$$

- *Μια ακολουθία (f_n) στον X^* λέμε ότι συγκλίνει $*$ - ασθενώς στο $f \in X^*$ όπου γράφουμε ότι $f_n \rightharpoonup f$ στον X^* αν*

$$\langle f_n, x \rangle_{X^* \times X} \to \langle f, x \rangle_{X^* \times X} \quad \text{για } x \in X$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7.1. *Έστω X χώρος Banach , $(x_n), x \in X$ και $(f_n), f \in X^*$.*

- *Ασθενώς συγκλίνουσες και $*$ - ασθενώς συγκλίνουσες ακολουθίες είναι φραγμένες.*

- *Αν* $x_n \xrightarrow{\alpha\sigma\theta\varepsilon\nu\acute{\omega}\varsigma} x$ *τότε*

$$\|x\|_X \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|_X \ . \tag{1.14}$$

- *Αντίστοιχα αν* $f_n \xrightarrow{*\text{ - }\alpha\sigma\theta\varepsilon\nu\acute{\omega}\varsigma} f$ *τότε*

$$\|f\|_{X^*} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_{X^*} \ . \tag{1.15}$$

Αφού ορίσαμε τα δύο αυτά είδη σύγκλισης θα αναφέρουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα και μια συνέπεια αυτού που θα χρειαστούμε στην απόδειξη της ύπαρξης ασθενών λύσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7.2. ***(Θεώρημα Banach - Alaoglu)***
Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach . Τότε οποιαδήποτε φραγμένη ακολουθία στον X^* έχει $*$ - ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.7.1. *Αν ο X αυτοπαθής χώρος Banach τότε οποιαδήποτε φραγμένη ακολουθία στον X έχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία .*

1.8 Χώροι Bochner

Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3 οι λύσεις της εξίσωσης Navier - Stokes είναι στοιχεία χώρων Bochner .

Για την ενότητα αυτή θεωρούμε X διαχωρίσιμο χώρο Banach και αντίστοιχη νόρμα $\|\cdot\|_X$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.1.

- *Μια συνάρτηση $s : [0,T] \to X$ ονομάζεται απλή αν έχει τη μορφή*

$$s(t) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i}(t) u_i \quad (0 \leq t \leq T)$$

όπου κάθε E_i Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $[0, T]$ και $u_i \in X$ για $i = 1, ..., m$.

- *Μια συνάρτηση $f : [0, T] \to X$ ονομάζεται ισχυρά μετρήσιμη αν υπάρχουν απλές συναρτήσεις $s_k : [0, T] \to X$ τέτοιες ώστε*

$$s_k(t) \to f(t) \text{ για σχεδόν όλα τα } t \in [0, T].$$

- *Μια συνάρτηση $f : [0, T] \to X$ ονομάζεται ασθενώς μετρήσιμη αν για κάθε $u \in X^*$ η απεικόνιση*

$$t \to \langle u, f(t) \rangle$$

είναι Lebesgue μετρήσιμη .

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.1. *Για τη περίπτωση όπου X διαχωρίσιμος χώρος Banach , $f : [0, T] \to X$ ισχυρά μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι ασθενώς μετρήσιμη.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.2. *Ας είναι X χώρος Banach.*

- *Για $1 \leq p < \infty$ ο χώρος Bochner $L^p(0, T; X)$ είναι ο χώρος όλων των ισχυρά μετρήσιμων συναρτήσεων για τις οποίες η νόρμα*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(s)\|_X^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

είναι πεπερασμένη.

- *Αντίστοιχα ο χώρος $L^\infty(0, T; X)$ είναι ο χώρος όλων των ισχυρά μετρήσιμων συναρτήσεων για τις οποίες η νόρμα*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname{ess}\sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X$$

είναι πεπερασμένη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.1. *Αν X αυτοπαθής χώρος Banach και $u \in L^1(0,T;X)$ τότε υπάρχει μοναδική $g \in X$ τέτοια ώστε*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^T \langle f, u(s)\rangle \, ds$$

για οποιαδήποτε $f \in X^*$. Έτσι ορίζεται

$$\int_0^T u(s)\, ds = g.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.3. *Έστω X χώρος Banach . Λέμε ότι η $u \in L^1(0,T;X)$ έχει ασθενή παράγωγο ως προς το χρόνο αν υπάρχει $g \in L^1(0,T;X)$ τέτοια ώστε*

$$\int_0^T u(s)\partial_t\phi(s)\, ds = -\int_0^T g(s)\phi(s)\, ds$$

για κάθε (βαθμωτή) $\phi \in C_c^\infty(0,T)$. Τότε συμβολίζουμε ως $g(s) = \partial_t u(s)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.2. *Ας είναι $u, g \in L^1(0,T;X)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) $\partial_t u = g$ *από τον ορισμό 1.8.3*

(ii) υπάρχει $\xi \in X$ τέτοιο ώστε

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)\, ds \quad \text{για σχεδόν όλα τα } t \in [0,T]$$

(iii) για κάθε $f \in X^*$

$$\frac{d}{dt}\langle f, u\rangle = \langle f, g\rangle,$$

θεωρώντας την παράγωγο ως προς το χρόνο ασθενή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.8.1. *Ο δυϊκός χώρος ενός χώρου Bochner* $L^p(0,T;X)$ *για* $1 \leq p < \infty$ *είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον χώρο* $L^q(0,T;X^*)$ *όπου* q *ο συζυγής του* p *, δηλαδή* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *.*

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε μια πρόταση που θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη την ύπαρξης ασθενών λύσεων που αφορά το Κεφάλαιο 4.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.3. *Έστω* (u_n) *φραγμένη ακολουθία στον* $L^2(0,T;L^2)$ *για κάθε* $T > 0$. *Τότε υπάρχει υπακολουθία της* (u_n) *η οποία είναι ασθενώς συγκλίνουσα στον* $L^2(0,T;L^2)$ *για κάθε* $T > 0$.

Απόδειξη.
Η απόδειξη θα επιτευχθεί κάνοντας χρήση ενός διαγώνιου επιχειρήματος . Ξεκινώντας για $T = 1$ και από το γεγονός ότι (u_n) φραγμένη ακολουθία υπάρχει υπακολουθία της, την οποία ονομάζουμε $(u_{n,1}) \subset (u_n)$ για την οποία ισχύει ότι

$$u_{n,1} \xrightarrow{\text{ασθενώς}} v_1 \quad \text{στον } L(0,1;L^2).$$

Για $T = 2$ αντίστοιχα υπάρχει υπακολουθία της $(u_{n,1})$ την οποία ονομάζουμε $(u_{n,2}) \subset (u_{n,1})$ για την οποία ισχύει ότι

$$u_{n,2} \xrightarrow{\text{ασθενώς}} v_2 \quad \text{στον } L(0,2;L^2).$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά θα πάρουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(u_{n,i}) \subset u_{n,i-1})$ για την οποία ισχύει ότι

$$u_{n,i} \xrightarrow{\text{ασθενώς}} v_i \quad \text{στον } L(0,i;L^2).$$

Ορίζουμε εδώ για ευκολία

$$v_n = u_{n,n}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι (v_n) ασθενώς συγκλίνουσα στον $L(0,T;L^2)$ για κάθε $T > 0$.
Έστω $T > 0$ και $m > T$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι ασθενώς συγκλίνουσα στον $L(0,m;L^2)$. Όμως όπως αναφέραμε και παραπάνω οι όροι της (v_n) για $n > m$ είναι όλοι όροι της $(v_m, j)_j$, δηλαδή

$$(v_n)_n = (u_{n,n})_n \subset (u_{m,n})_n.$$

Συνεπώς πήραμε το ζητούμενο ότι υπάρχει υπακολουθία (v_n) η οποία είναι ασθενώς συγκλίνουσ στον $L(0,T;L^2)$.

□

Κεφάλαιο 2

Η ΔΙΑΣΠΑΣΗ HELMHOLTZ-WEYL

Η διάσπαση Helmholtz - Weyl παίζει σημαντικό ρόλο στις διαφορικές εξισώσεις καθώς και στη διαφορική γεωμετρία. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με την διάσπαση του $\dot{\mathbb{L}}^2$ και $\mathbb{L}^2$ στον τόρο $\mathbb{T}^3$ και στον $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα, όπου έχουμε απουσία συνόρου .
Θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε κατάλληλους υπόχωρους για την διάσπαση ώστε να ικανοποιείται και η προϋπόθεση ότι οι λύσεις των Navier - Stokes είναι ασυμπίεστες ($\mathrm{div} u = 0$).
Συμβολίζουμε με $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^3) := [L^2(\mathbb{T}^3)]^3$ και $\mathbb{H}^s(\mathbb{T}^3) := [H^s(\mathbb{T}^3)]^3$.
Στη συνέχεια θα ορίσουμε τον τελεστή Stokes , του οποίου οι ιδιοσυναρτήσεις θα παίξουν σημαντικό ρόλο στην πορεία και θα αποδείξουμε για την περίπτωση του τόρου $\mathbb{T}^3$ την διάσπαση του $\dot{\mathbb{L}}^q$.

2.1 Η διάσπαση Helmholtz-Weyl στον $\mathbb{T}^3$

Έστω ότι η διανυσματική συνάρτηση u μπορεί να γραφεί σαν πολυώνυμο Fourier , δηλαδή

$$u(x) = \sum_{|k|\leq N} \hat{u}_k e^{ik\cdot x}, \;\; x \in \mathbb{T}^3$$

Τότε

$$\begin{aligned}\mathrm{div}u &= \sum_j \partial_j u_j \\ &= \sum_{j,k} \partial_j((\hat{u}_k)_j e^{ik\cdot x}) \\ &= \sum_{j,k} (\hat{u}_k)_j (ik_j) e^{ik\cdot x} \\ &= i \sum_{|k|\leq N} (k\cdot \hat{u}_k) e^{ik\cdot x} \ .\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\mathrm{div}u = 0 \Longleftrightarrow k\cdot\hat{u}_k = 0 \ , \forall |k| \leq N.$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί δικαιολογούν τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1. *Ορίζουμε τον χώρο $H = H(\mathbb{T}^3)$ ως*

$$H(\mathbb{T}^3) = \left\{ u \in \dot{\mathbb{L}}^2 : u(x) = \sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^3} \hat{u}_k e^{ik\cdot x}, \quad \hat{u}_{-k} = \overline{\hat{u}}_k, \quad k\cdot\hat{u}_k = 0 \ , \forall k \in \dot{\mathbb{Z}}^3 \right\}$$

και τον εφοδιάζουμε με την L^2 νόρμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.2. *Μια συνάρτηση $u \in L^1(\mathbb{T}^3)$ είναι ασθενώς ασυμπίεστη αν*

$$\langle u, \nabla\phi\rangle = 0, \quad \forall \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.1. *Κάθε συνάρτηση $u \in H(\mathbb{T}^3)$ είναι ασθενώς ασυμπίεστη, δηλαδή*

$$\int_{\mathbb{T}^3} u\cdot\nabla\phi \ dx = 0, \quad \forall\phi \in H^1(\mathbb{T}^3).$$

Απόδειξη.
Έστω η διανυσματική συνάρτηση $u(x) \in H(\mathbb{T}^3)$ και θα τη γράψουμε σαν σειρά Fourier, δηλαδή

$$u(x) = \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} \hat{u}_k e^{ikx}.$$

Ορίζουμε σαν $\phi(x) = e^{-im\cdot x},\ m \in \dot{\mathbb{Z}}^3$, τότε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^3} u \cdot \nabla\phi\ dx &= \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} \hat{u}_k e^{ik\cdot x} \cdot ime^{-im\cdot x}\ dx \\ &= \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} i(\hat{u}_k \cdot m) \int_{\mathbb{T}^3} e^{i(k-m)\cdot x} dx\ .\end{aligned}$$

Αν $k = m$ τότε το

$$\int_{\mathbb{T}^3} e^{i(k-m)\cdot x} dx = \int_{\mathbb{T}^3} 1 dx = (2\pi)^3\ .$$

Ενώ αν $k \neq m$ τότε το

$$\int_{\mathbb{T}^3} e^{i(k-m)\cdot x} dx = 0\ ,$$

καθώς γνωρίζουμε ότι $\left\{e^{ik\cdot x}\right\}$ είναι ορθογώνια βάση του $L^2(\mathbb{T}^3)$.
Συνεπώς

$$\int_{\mathbb{T}^3} e^{i(k-m)\cdot x} dx = \delta_{km}(2\pi)^3\ .$$

Άρα

$$\int_{\mathbb{T}^3} u \cdot \nabla\phi\ dx = (2\pi)^3 i\ (\hat{u}_k \cdot k) = 0$$

αφού $u \in H(\mathbb{T}^3)$.
Παίρνοντας τους γραμμικούς συνδιασμούς, το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για $\phi \in \operatorname{span}\left\{e^{ik\cdot x} : k \in \dot{\mathbb{Z}}^3\right\}$.
Όμως ο $\operatorname{span}\left\{e^{ik\cdot x} : k \in \dot{\mathbb{Z}}^3\right\}$ είναι πυκνός στον $H^1(\mathbb{T}^3)$ και έτσι έπεται το συμπέρασμα.

□

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.3. *Ορίζουμε τον χώρο $G = G(\mathbb{T}^3)$ ως*

$$G(\mathbb{T}^3) = \left\{ u \in \dot{\mathbb{L}}^2 : u = \nabla g,\ \text{για κάποια } g \in \dot{H}^1(\mathbb{T}^3) \right\} \ .$$

Από τους ορισμούς των χώρων H και G και την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι είναι ορθογώνιοι , δηλαδή

$$\langle h, \nabla g \rangle = 0, \quad h \in H, \quad \nabla g \in G.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.1. ***(Διάσπαση Helmholtz - Weyl στον $\mathbb{T}^3$)***
Ισχύει ότι

$$\dot{\mathbb{L}}^2(\mathbb{T}^3) = H\mathbb{T}^3) \oplus G(\mathbb{T}^3) \tag{2.1}$$

δηλαδή κάθε συνάρτηση $u \in \dot{\mathbb{L}}^2$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως

$$u = h + \nabla g, \quad h \in H(\mathbb{T}^3), \quad \nabla g \in G(\mathbb{T}^3) \ . \tag{2.2}$$

Επίσης $H \perp G$ στον $\mathbb{L}^2$, δηλαδή

$$\int_{\mathbb{T}^3} h \cdot \nabla g = 0 \ .$$

Απόδειξη.
Έστω $u \in \dot{\mathbb{L}}^2(\mathbb{T}^3)$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$u(x) = \sum_{k \neq 0} \hat{u}_k e^{ik \cdot x} \ .$$

Επίσης μπορούμε να γράψουμε τον συντελεστή $\hat{u}_k$ σαν έναν γραμμικό συνδυασμό του k και διανύσματος w_k που θα είναι κάθετο στο k στον $\mathbb{C}^3$. Δηλαδή

$$\hat{u}_k = a_k k + w_k \ , \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad w_k \cdot k = 0 \ .$$

Είναι προφανές ότι
$$|\hat{u}_k|^2 = |a_k|^2 \cdot |k|^2 + |w_k|^2 \ . \tag{2.3}$$

Άρα

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k\neq 0}(a_k k + w_k)e^{ik\cdot x} \\ &= \sum_{k\neq 0}(a_k k)e^{ik\cdot x} + \sum_{k\neq 0} w_k e^{ik\cdot x} \\ &= \sum_{k\neq 0} -ia_k \nabla e^{ik\cdot x} + \sum_{k\neq 0} w_k e^{ik\cdot x} \\ &= \nabla g + h \ . \end{aligned}$$

όπου
$$g(x) = \sum_{k\neq 0} -ia_k e^{ik\cdot x}, \quad h(x) = \sum_{k\neq 0} w_k e^{ik\cdot x} \ .$$

Θα δείξουμε ότι $h \in H(\mathbb{T}^3)$ και $g \in \dot{H}^1(\mathbb{T}^3)$.
Αφού $w_k \cdot k = 0$ για να δείξουμε ότι $h \in H(\mathbb{T}^3)$ απομένει να δείξουμε ότι $h \in \dot{\mathbb{L}}^2$.
Αυτό ισχύει διότι
$$||h||_{\dot{\mathbb{L}}^2} = \sum_{k\neq 0} |w_k|^2 \leq \sum_{k\neq 0} |\hat{u}_k|^2 < \infty \ .$$

Συνεπώς $h \in H(\mathbb{T}^3)$. Επίσης

$$||g||_{\dot{H}^1} = \sum_{k\neq 0} |a_k|^2 |k|^2 \leq \sum_{k\neq 0} |\hat{u}_k|^2 < \infty \ .$$

Άρα $g \in \dot{H}^1(\mathbb{T}^3)$.
Όπως αναφέραμε πριν το θεώρημα ισχύει ότι $H \perp G$. Για την μοναδικότητα της διάσπασης θα θεωρήσουμε ότι

$$u = h_1 + \nabla g_1 = h_2 + \nabla g_2 \ .$$

Δηλαδή

$$(h_1 - h_2) + (\nabla g_1 - \nabla g_2) = 0 \Rightarrow ||h_1 - h_2 + \nabla g_1 - \nabla g_2||^2 = 0 \ .$$

Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι

$$\|h_1 - h_2\|^2 + \|\nabla g_1 - \nabla g_2\|^2 = 0 \ .$$

Συνεπώς $h_1 = h_2$ και $\nabla g_1 = \nabla g_2$.
Όμως γνωρίζουμε ότι g_1 και g_2 έχουν μηδενική μέση τιμή συνεπώς $g_1 = g_2$.

□

Η διάσπαση Helmholtz - Weyl μας βοηθάει επίσης να ορίσουμε τον τελεστή Leray, ο οποίος είναι σημαντικός για την εξίσώση Navier-Stokes και γενικότερα για τον τομέα της ρευστομηχανικής .

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.4. *Στον $\mathbb{T}^3$ ο τελεστής Leray της $u \in \dot{\mathbb{L}}^2$ ορίζεται ως:*

$$\mathbb{P}u = v \Leftrightarrow u = v + \nabla w$$

όπου $v \in H$ και $\nabla w \in G$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν $u \in \dot{\mathbb{L}}^2$ και γραφτεί σαν σειρά Fourier, δηλαδή $u(x) = \sum_{k \neq 0} \hat{u}_k e^{ik \cdot x}$ τότε ισχύει ότι

$$\mathbb{P}u(x) = \sum_{k \neq 0} (\hat{u}_k - \frac{\hat{u}_k \cdot k}{|k|^2} k) e^{ik \cdot x} \ .$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.2. *Ισχύει ότι*

$$\mathbb{P}\partial_{x_j} u = \partial_{x_j} \mathbb{P}u, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{T}^3) \ . \tag{2.4}$$

Απόδειξη.
Ας είναι $\quad u(x) = \hat{u}_k e^{ik \cdot x} = b e^{ik \cdot x}$.
Ισχύει ότι

$$\partial_{x_j} u = ikb e^{ik \cdot x}.$$

Όπως αναφέραμε και στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος οι συντελεστές Fourier γράφονται ως:

$$b = \hat{u}_k = a_k \cdot k + w_k = \frac{b \cdot k}{|k|^2} k + (b - \frac{b \cdot k}{|k|^2} k)$$

Συνεπώς

$$\mathbb{P}u = w_k e^{ik \cdot x} = (b - \frac{b \cdot k}{|k|^2} k) e^{ik \cdot x} \ ,$$

άρα

$$\partial_{x_j}(\mathbb{P}u) = ik_j(b - \frac{b \cdot k}{|k|^2} k) e^{ik \cdot x} \ .$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\partial_{x_j} u &= \mathbb{P}(ik_j b e^{ik \cdot x}) \\ &= ik_j \mathbb{P}(b e^{ik \cdot x}) \\ &= ik_j(b - \frac{b \cdot k}{|k|^2} k) e^{ik \cdot x} \end{aligned}$$

Δηλαδή έχουμε ότι $\mathbb{P}\partial_{x_j} u = \partial_{x_j}(\mathbb{P}u)$.
Από την γραμμικότητα του τελεστή η σχέση αυτή θα ισχύει και για τους γραμμικούς συνδυασμούς των συναρτήσεων αυτών και παίρνοντας το όριο επιτυγχάνουμε να ισχύει για κάθε $u \in H^1(\mathbb{T}^3)$.

□

2.2 Η διάσπαση Helmholtz-Weyl στον $\mathbb{R}^3$ και σε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Στην προηγούμενη παράγραφο για να φτάσουμε στην διάσπαση για τον $\mathbb{T}^3$ έπρεπε να ορίσουμε πρώτα κατάλληλους χώρους H και G. Την ίδια μέθοδο θα ακολουθήσουμε και εδώ στην περίπτωση του $\mathbb{R}^3$ και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ωστόσο δεν θα επεκταθούμε σε περαιτέρω ανάλυση και αποδείξεις καθώς σε αυτή την εργασία ασχολούμαστε κατά κύριο λόγο για τον $\mathbb{T}^3$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.1. *Για την περίπτωση του $\mathbb{R}^3$ ορίζουμε τους χώρους:*

$$H(\mathbb{R}^3) = \{u : \ u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3), \quad \mathrm{div} u = 0\}$$

και

$$G(\mathbb{R}^3) = \{w : w \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3), \ w = \nabla g, \ \ \textit{για κάποια } g \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\} \ .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.1. *Ισχύει ότι :*

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) = H(\mathbb{R}^3) \oplus G(\mathbb{R}^3) \ .$$

Με αντίστοιχο τρόπο ορίζουμε και τον τελεστή Leray με βάση τη διάσπαση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.2. *Ο τελεστής Leray στον $\mathbb{R}^3$ ορίζεται ως:*

$$\mathbb{P}u = v \Leftrightarrow u = v + \nabla w$$

όπου $v \in H$, $\nabla w \in G$ και $u \in \mathbb{L}^2$.
Δηλαδή στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $\mathbb{P} : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \to H(\mathbb{R}^3)$.

Επίσης για τον $\mathbb{R}^3$ ισχύει και η Πρόταση 2.1.2 για την παράγωγο του τελεστή. Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο θα ορίσουμε κατάλληλους H και G για $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Πριν από αυτό όμως θα πρέπει να ορίσουμε τον χώρο των ασυμπίεστων ομαλών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα στο Ω :

$$C^{\infty}_{c,\sigma}(\Omega) = \left\{\phi \in [C^{\infty}_c]^3, \, \mathrm{div}\phi = 0\right\}$$

όπου η απόκλιση εννοείται με την ασθενή έννοια.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.3. *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό. Ορίζουμε*

$$H(\Omega) = \overline{C^{\infty}_{c,\sigma}} \quad \textit{ως προς τη νόρμα} \quad \mathbb{L}^2$$

και εφοδιάζεται με την $\mathbb{L}^2$ νόρμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.4. *Ας είναι Ω ανοικτό και φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^3$. Τότε*

$$G(\Omega) = \left\{ w \in \mathbb{L}^2(\Omega) \ : w = \nabla g,\ g \in H^1(\Omega) \right\}$$

Συνεπώς η διάσπαση Helmholtz-Weyl του $\mathbb{L}^2$ στην περίπτωση του $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ δίνεται ως

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = H(\Omega) \oplus G(\Omega).$$

2.3 Ο τελεστής Stokes

Ο τελεστής Stokes εκτός από την μελέτη Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, όπου εδώ θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση των ασθενών λύσεων της εξίσωσης Navier - Stokes , συναντάται συχνά και στη θεωρία σφαλμάτων για αριθμητικές προσεγγίσεις λύσεων .

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.1. *Ορίζουμε το χώρο V στον $\mathbb{T}^3$ ως:*

$$V(\mathbb{T}^3) = H(\mathbb{T}^3) \cap \mathbb{H}^1(\mathbb{T}^3).$$

Ο V εφοδιάζεται με τη νόρμα του $\mathbb{H}^1$. Ισοδύναμα ισχύει ότι:

$$V(\mathbb{T}^3) = \left\{ u = \sum \hat{u}_k e^{ik\cdot x} : \hat{u}_0 = 0, \quad \sum_{k\neq 0} |k|^2 |\hat{u}_k|^2 < \infty, k \cdot \hat{u}_k = 0, \quad \forall k \neq 0 \right\}$$

με νόρμα

$$||u||_{V(\mathbb{T}^3)} = \left(\sum |k|^2 |\hat{u}_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Συνεπώς ο V είναι ο χώρος των ασυμπίεστων πεδίων στον $\mathbb{H}^1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.2. *Ο τελεστής Stokes ορίζεται ως:*

$$Au = -\mathbb{P}\Delta u, \quad u \in D(A)$$

όπου

$$D(A) = V(\mathbb{T}^3) \cap \mathbb{H}^2(\mathbb{T}^3) = H(\mathbb{T}^3) \cap \mathbb{H}^2(\mathbb{T}^3) \ .$$

Από την Πρόταση 2.1.2 για την περίπτωση του $\mathbb{T}^3$ και $\mathbb{R}^3$ (μη φραγμένα) προκύπτει ότι

$$-\mathbb{P}\Delta u = -\Delta\mathbb{P}u = -\Delta u, \quad u \in D(A) \ .$$

Για φραγμένα χωρία αυτό δεν ισχύει καθώς δεν ισχύει η Πρόταση 2.1.2 για τον τελεστή Leray.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.3.1. *Αν $u \in D(A)$ τότε $Au \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T}^3)$. Επίσης γράφοντας σε σειρά Fourier την u έχουμε:*

$$u(x) = \sum_{k\neq 0} \hat{u}_k e^{ik\cdot x} \Rightarrow u_{x_j} = \sum_{k\neq 0} ik_j \hat{u}_k e^{ik\cdot x}$$

Άρα

$$u_{x_j x_j} = \sum_{k\neq 0} (ik_j)^2 \hat{u}_k e^{ik\cdot x} \ ,$$

δηλαδή

$$Au = -\Delta u = -\sum_{j=1}^{3} u_{x_j x_j} = \sum_{k\neq 0} |k|^2 \hat{u}_k e^{ik\cdot x} \ .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.1. *Ισχύει ότι στον $\mathbb{T}^3$*

$$||u||_{\mathbb{H}^{m+2}} \leq c||Au||_{\mathbb{H}^m}, \ \forall u \in V, \ Au \in \mathbb{H}^m, \ m \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη.
Γνωρίζουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\|Au\|_{\dot{\mathbb{H}}^m}^2 &= \|\sum_{k\neq 0} |k|^2 \hat{u}_k e^{ik\cdot x}\|_{\dot{\mathbb{H}}^m}^2 \\
&= (2\pi)^3 \sum_{k\neq 0} |k|^{2m}|k|^4|\hat{u}_k|^2 \\
&= \sum_{k\neq 0} |k|^{2m+4}|\hat{u}_k|^2 \\
&= \|u\|_{\dot{\mathbb{H}}^{m+2}} \ .
\end{aligned}
$$

Αυτό όμως συμβαίνει για τον ομογενή χώρο $\dot{\mathbb{H}}^m$.
Επίσης $u \in D(A)$ και στον $\mathbb{T}^3$ ισχύει ότι $\int_{\mathbb{T}^3} u = 0$, άρα η νόρμα $\|\cdot\|_{\dot{\mathbb{H}}^m}$ είναι ισοδύναμη με την νόρμα $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^m}$. Συνεπώς έπεται το ζητούμενο.

□

Οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Stokes παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη των εξισώσεων Navier- Stokes αλλά απαιτούν δύσκολους υπολογισμούς ώστε να βρεθούν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.2. *Υπάρχει μια ακολουθία $\mathbb{C}^\infty$ διανυσματικών πεδίων $a_n : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε :*

1. *Το $\{a_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $H(\mathbb{T}^3)$.*
2. *Το $\{a_n\}$ είναι ορθογώνια βάση του $V(\mathbb{T}^3)$.*
3. *Κάθε a_n είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή Stokes , όπου $a_n \in D(A) \cap \mathbb{C}^\infty$, $Aa_j = \lambda_j a_j$, με $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$, και $\lambda_j \to \infty$.*

Απόδειξη.
Ισχυρισμός : Υπάρχουν διανύσματα $m_k \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ και $k \in \dot{\mathbb{Z}}^3$ ώστε τα $k,\ m_k$ και m_{-k} να είναι ανά δύο κάθετα .

Απόδειξη ισχυρισμού :
Θεωρούμε μια διαμέριση του $\dot{\mathbb{Z}}^3$ σε δύο σύνολα A και B ώστε για κάθε k τα $\pm k$ να ανήκει το ένα στο A και το άλλο στο B.
Για κάθε $k \in A$ επιλέγουμε $m_k,\ m'_k \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ τέτοια ώστε

$$m_k \perp k, \quad m'_k \perp k, \quad m_k \perp m'_k \ .$$

Για $k \in B$, ορίζουμε $m_k = m'_{-k}$. Τότε τα $\{m_k\}$ έχουν τις ζητούμενες ιδιότητες.

Κανονικοποιούμε τα m_k ώστε

$$\|m_k \cos(kx)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \|m_k \sin(kx)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} = 1$$

με $|m_k| = \sqrt{2} \cdot (2\pi)^{-\frac{3}{2}}$.
Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{N} = \left\{m_k \cos(kx)\ , k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}\right\} \cup \left\{m_k \sin(kx)\ , k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}\right\}$$

έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.
Πρέπει $\mathcal{N} \subseteq H(\mathbb{T}^3)$. Πράγματι

$$\int_{\mathbb{T}^3} m_k \cos(kx) dx = 0, \ \int_{\mathbb{T}^3} m_k \sin(kx) dx = 0\ .$$

Ακόμη

$$\operatorname{div}(m_k \cos(kx)) = -k \cdot m_k \sin(kx) = 0$$

επειδή εξ ορισμού $k \cdot m_k = 0$.
Όμοια

$$\operatorname{div}(m_k \sin(kx)) = 0\ .$$

Δηλαδή δείξαμε ότι το $\mathcal{N}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο στον H και επειδή $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{C}^\infty$ θα πάρουμε ότι

$$\mathcal{N} \subseteq (H(\mathbb{T}^3) \cap V(\mathbb{T}^3)).$$

Επίσης οι $m_k \cos(kx)$ και $m_k \sin(kx)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις με ιδιοτιμή $|k|^2$.
Ας είναι $u \in H$, τότε :

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{k\neq 0} \hat{u}_k e^{ik\cdot x} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} \hat{u}_k e^{ik\cdot x} + \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} \hat{u}_{-k} e^{i(-k)\cdot x} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} \hat{u}_k(\cos(kx) + i\sin(kx)) + \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} \hat{u}_{-k}(\cos(-kx) + i\sin(-kx)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}(\hat{u}_k + \hat{u}_{-k})\cos(kx) + \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} i(\hat{u}_k - \hat{u}_{-k})\sin(kx) \ .
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι $\hat{u}_k + \hat{u}_{-k} \in \mathbb{R}^3$, $i(\hat{u}_k - \hat{u}_{-k}) \in \mathbb{R}^3$ και είναι κάθετα στο k.
Άρα για $a_k, b_k, c_k, d_k, A_k, B_k \in \mathbb{R}^3$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\neq 0}(a_k m_k + b_k m_{-k})\cos(kx) + \sum_{k\neq 0}(c_k m_k + d_k m_{-k})\sin(kx) \\
&= \sum_{k\neq 0}(a_k m_k + b_{-k} m_k)\cos(kx) + \sum_{k\neq 0}(c_k m_k - d_{-k} m_k)\sin(kx) \\
&= \sum_{k\neq 0} A_k m_k \cos(kx) + \sum_{k\neq 0} B_k m_k \sin(kx) \ .
\end{aligned}
$$

Έτσι αποδείξαμε ότι $\overline{\mathrm{spanN}} = H(\mathbb{T}^3)$ ως προς την $\mathbb{L}^2$ νόρμα.
Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $\overline{\mathrm{spanN}} = V(\mathbb{T}^3)$ ως προς την H^1 νόρμα , δηλαδή αν επιπλέον $u \in H^1$ τότε η παραπάνω σειρά να συγκλίνει στον $H^1(\mathbb{T}^3)$.
Έχουμε ότι

$$|a_k m_k + b_k m_{-k}| = |\hat{u}_k + \hat{u}_{-k}|$$

δηλαδή

$$|A_k|^2 + |B_k|^2 \leq c|\hat{u}_k|^2 \ .$$

Αφού $|k|^2$ η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στις ιδιοσυναρτήσεις αυτές τότε

$$\sum_k |k|^2(A_k^2 + B_k^2) \leq c\sum_k |k|^2|\hat{u}_k|^2 < +\infty$$

Αν θεωρήσουμε S_N την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς τότε

$$\|u - S_N\|_{H^1(\mathbb{T}^3)} \leq C \sum_{|k|>N} |k|^2 (A_k^2 + B_k^2) \to 0, \quad \text{για } N \to \infty \ .$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.3.2. *Αν ισχύει ότι $Aa_k = \lambda_k a_k \in V$ τότε*

$$A(Aa_k) = A(\lambda_k a_k) = \lambda_k^2 a_k$$

Δηλαδή τα a_k είναι και ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή A^2 αλλά η αντίστοιχη ιδιοτιμή είναι το λ_k^2.

2.4 Η διάσπαση Helmholtz-Weyl στον $\mathbb{L}^q$

Σε αυτή την ενότητα θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε την διάσπαση Helmholtz-Weyl που αναλύσαμε για τον $\mathbb{L}^2$. Θα ασχοληθούμε δηλαδή με τη διάσπαση του $\mathbb{L}^q$, όμως δεν θα μελετηθεί αναλυτικά και θα δωθούν οι βασικές ιδέες για αυτή.

Για την περίπτωση του $\mathbb{T}^3$ θα γίνει διάσπαση του ομογενή $\dot{\mathbb{L}}^q$ ο οποίος ορίζεται ως

$$\dot{\mathbb{L}}^q(\mathbb{T}^3) = \left\{ u \in \mathbb{L}^q(\mathbb{T}^3) : \quad \int_{\mathbb{T}^3} u = 0 \right\}$$

στους εξής χώρους :

$$H_q(\mathbb{T}^3) = \left\{ u \in \mathbb{L}^q(\mathbb{T}^3) : \quad \mathrm{div} u = 0 \right\}$$

και

$$G_q(\mathbb{T}^3) = \left\{ \nabla g \ : g \in W^{1,q}(\mathbb{T}^3), \quad \int_{\mathbb{T}^3} g = 0 \right\} \ .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.1. *Για $q \in (1, \infty)$ ισχύει ότι :*

$$\mathbb{L}^q(\mathbb{T}^3) = H_q(\mathbb{T}^3) \oplus G_q(\mathbb{T}^3)$$

δηλαδή κάθε $u \in \mathbb{L}^q$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

$$u = h + \nabla g, \quad \textit{όπου } h \in H_q \ \textit{ και } \nabla g \in G_q \ .$$

Απόδειξη.
Αρχικά θα αποδείξουμε την μοναδικότητα της ανάλυσης με εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι

$$u = h_1 + \nabla g_1$$

και

$$u = h_2 + \nabla g_2,$$

με $\quad h_1, h_2 \in H_q, \quad \nabla g_1, \nabla g_2 \in G_q$.
Συνεπώς

$$h_1 - h_2 = \nabla g_2 - \nabla g_1 \ .$$

Είναι προφανές ότι $\quad h_1 - h_2 \in H_q \quad$ και $\quad \nabla g_2 - \nabla g_1 \in G_q$.
Απομένει να δείξουμε ότι $\quad h_1 - h_2 = 0$ και $\quad \nabla g_2 - \nabla g_1 = 0$.
Αυτό συμβαίνει καθώς

$$H_q \cap G_q = \{0\} \ .$$

Για να το αποδείξουμε όμως θεωρούμε $w \in H_q \cap G_q$ και θα πρέπει να καταλήξουμε ότι $w = 0$.
Αφού $w \in H_q$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει (w_n) ακολουθία διανυσματικών πεδίων στο $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{div} w_n = 0$ και $w_n \to w$ στον $\mathbb{L}^q(\mathbb{T}^3)$.

Επίσης $w \in G_q$. Δηλαδή υπάρχει $g \in W^{1,q}(\mathbb{T}^3)$ τέτοια ώστε $w = \nabla g$ ασθενώς, δηλαδή για κάθε C^1 διανυσματικό πεδίο T να ισχύει ότι :

$$\int_{\mathbb{T}^3} w \cdot T dx = - \int_{\mathbb{T}^3} g \cdot \mathrm{div} T dx \tag{2.5}$$

Για $\phi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ έχουμε ότι:

$$0 = \int_{\mathbb{T}^3} \mathrm{div} w_n \cdot \phi \; dx = - \int_{\mathbb{T}^3} w_n \cdot \nabla \phi \; dx \; .$$

Παίρνοντας $n \to \infty$

$$\int_{\mathbb{T}^3} w \cdot \nabla \phi \; dx = 0 \; .$$

Από την (2.5) έπεται ότι :

$$0 = \int_{\mathbb{T}^3} w \cdot \nabla \phi \; dx = - \int_{\mathbb{T}^3} g \cdot \Delta \phi \; dx \Rightarrow \int_{\mathbb{T}^3} g \cdot \Delta \phi \; dx = 0 \; .$$

Στο σημείο αυτό ορίζουμε $A = \{\Delta \phi : \phi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^3)\}$ το οποίο είναι πυκνό σύνολο αφού περιέχει τις ιδιοσυναρτήσεις $e^{ik \cdot x}, k \in \mathbb{Z}^3$.
Παρατηρούμε ότι $g \in A^\perp$ και A πυκνό , συνεπώς $g = 0$, άρα $w = 0$. Έτσι δείξαμε ότι

$$H_q \cap G_q = \{0\} \; .$$

Επιστρέφοντας στην απόδειξη του θεωρήματος έπεται ότι $h_1 = h_2$ και $\nabla g_2 = \nabla g_1$. Όμως οι g_1, g_2 έχουν μηδενικό μέσο όρο , δηλαδή

$$\int_{\mathbb{T}^3} g_1 = 0, \; \int_{\mathbb{T}^3} g_2 = \quad \text{άρα } g_1 = g_2 \quad \text{(Μοναδικότητα).}$$

Για την ύπαρξη των συναρτήσεων h, ∇g θα ακολουθήσουμε την ίδια μέθοδο με την περίπτωση του $\mathbb{L}^2$, δηλαδή θα σπάσουμε την u σε δύο σειρές ώστε να προκύψει ένα άθροισμα ενός ασυμπίεστου μέρους και ενός μέρους με ανάδελτα. Έτσι θα έχει την μορφή :

$$\sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^3} \hat{u}_k e^{ik\cdot x} = \sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^3} \left(\hat{u}_k - \frac{\hat{u}_k \cdot k}{|k|^2} k\right) e^{ik\cdot x} + \nabla\left(\sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^3} \left(\frac{\hat{u}_k \cdot k}{|k|^2}\right) e^{ik\cdot x}\right) .$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι τα στοιχεία στο δεξί μέρος της ισότητας είναι καλά ορισμένα στοιχεία του $\mathbb{L}^q$.

Αυτό θα το πετύχουμε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.5.1 , δηλαδή έχουμε ότι

$$S_N = h_N + \nabla g_N$$

όπου

$$S_N(u) = \sum_{k\in Q_N} \hat{u}_k e^{ik\cdot x}, \quad Q_N = [-N, N]^3 \cap \mathbb{Z}^3, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Αφού h_N και ∇g_N είναι πεπερασμένα αθροίσματα Fourier τότε $h_N \in H_q$ και $\nabla g_N \in G_q \quad \forall q > 1$.

Επειδή είναι δύσκολη η διάσπαση άπειρων αθροισμάτων Fourier θα δείξουμε οτι οι νόρμες h_N και ∇g_N είναι φραγμένες στον $\mathbb{L}^q$.

Παίρνοντας την απόκλιση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} \mathrm{div} S_N &= \Delta g_N \Rightarrow \\ g_N &= -(-\Delta)^{-1} \mathrm{div} S_N(u) \ . \end{aligned}$$

Στον $\mathbb{T}^3$ ισχύει ότι

$$(-\Delta)^{-1} \mathrm{div} S_N(u) = \mathrm{div}(-\Delta)^{-1} S_N(u) \ .$$

Άρα

$$\begin{aligned} \partial_i g_N &= -\partial_i (-\Delta)^{-1} \mathrm{div} S_N(u) \\ &= -\partial_i \mathrm{div}(-\Delta)^{-1} S_N(u) \ . \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Calderon -Zygmund και τις ιδιότητες των λύσεων των ελλειπτικών εξισώσεων θα πάρουμε ότι :

$$||\nabla g_N||_{L^q} \leq c||S_N(u)||_{L^q} \ .$$

Ενώ από το Θεώρημα 1.5.1

$$||\nabla g_N||_{L^q} \leq c||u||_{L^q} \ .$$

Επίσης

$$\begin{aligned} ||h_N||_{L^q} &= ||S_N(u) - \nabla g_N||_{L^q} \\ &\leq ||S_N(u)||_{L^q} ||\nabla g_N||_{L^q} \\ &\leq ||S_N(u)||_{L^q} c||S_N(u)||_{L^q} \\ &\leq (1+c)||S_N(u)||_{L^q} \\ &\leq C||u||_{L^q} \ . \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$h_N \to h \quad \text{στον} \quad \mathbb{L}^q \text{ και } \quad g_N \to g \quad \text{στον} \quad W^{1,q}$$

αφού g_N έχει μηδενικό μέσο όρο.
Άρα

$$S_N = h_N + \nabla g_N, \quad S_N \to u \quad \text{στον} \quad \mathbb{L}^q$$

και αφήνοντας $N \to \infty$ θα πάρουμε $u = h + \nabla g$. □

Κεφάλαιο 3

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΣΘΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ NAVIER-STOKES

3.1 Ασθενείς λύσεις

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε μια με ειδική κατηγορία συναρτήσεων δοκιμής οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε οποιοδήποτε χωρίο που ασχολούμαστε σε αυτή την εργασία. Εισάγουμε τον χώρο των συναρτήσεων αυτών με σκοπό να εξαλείψουμε τον όρο της πίεσης ώστε να διευκολυνθούμε στην μελέτη των ασθενών λύσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.1. *Ορίζουμε τον χώρο των συναρτήσεων δοκιμής*

$$D_\sigma = \left\{\phi \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{T}^3 \times [0,\infty)), \quad \mathrm{div}\phi(t) = 0, \forall t \in [0,\infty)\right\} .$$

Έστω u ομαλή και ασυμπίεστη λύση της εξίσωσης Navier- Stokes :

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \Delta u \ .$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με την $\phi \in D_\sigma$ θα πάρουμε

$$\partial_t u \cdot \phi + (u \cdot \nabla)u \cdot \phi + \nabla p \cdot \phi = \Delta u \cdot \phi \ .$$

Ολοκληρώνοντας στον τόρο

$$\int_{\mathbb{T}^3} \partial_t u \cdot \phi \ dx + \int_{\mathbb{T}^3} (u \cdot \nabla) u \cdot \phi \ dx + \int_{\mathbb{T}^3} \nabla p \cdot \phi \ dx = \int_{\mathbb{T}^3} \Delta u \cdot \phi \ dx \ .$$

Δηλαδή

$$\langle \partial_t u, \phi \rangle + \langle (u \cdot \nabla) u, \phi \rangle + \langle \nabla p, \phi \rangle - \langle \Delta u, \phi \rangle = 0$$

Όμως $\langle \nabla p, \phi \rangle = 0$ γιατί

$$\int_{\mathbb{T}^3} \nabla p \cdot \phi \ dx = - \int_{\mathbb{T}^3} p \mathrm{div} \phi \ dx = 0 \ .$$

Επίσης $-\langle \Delta u, \phi \rangle = \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle$.
Άρα

$$\langle \partial_t u, \phi \rangle + \langle (u \cdot \nabla) u, \phi \rangle + \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle = 0 \ .$$

Ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο στο διάστημα $[0, s]$ έχουμε

$$\int_0^s \langle \partial_t u, \phi \rangle \ dt + \int_0^s \langle (u \cdot \nabla) u, \phi \rangle \ dt + \int_0^s \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \ dt = 0 \ .$$

Από την ολοκλήρωση κατά μέλη :

$$\int_0^s \langle \partial_t u, \phi \rangle \ dt = \langle u(s), \phi(s) \rangle - \langle u(0), \phi(0) \rangle - \int_0^s \langle u, \partial_t \phi \rangle \ dt \ .$$

Συνεπώς

$$- \int_0^s \langle u, \partial_t \phi \rangle \ dt + \int_0^s \langle (u \cdot \nabla) u, \phi \rangle \ dt + \int_0^s \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \ dt = \langle u(0), \phi(0) \rangle - \langle u(s), \phi(s) \rangle$$

για $\phi \in D_\sigma$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.1. *Ας είναι $u \in V$ και $v, w \in H^1$. Τότε ισχύει ότι :*

$$\langle (u\cdot\nabla)v, w\rangle = -\langle (u\cdot\nabla)w, v\rangle$$

Ακόμη έπεται ότι

$$\langle (u\cdot\nabla)v, v\rangle = 0$$

Απόδειξη.
Αρχικά θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $u, v, w \in C^1(\mathbb{T}^3)$.
Έτσι

$$\begin{aligned}
\langle (u\cdot\nabla)v, w\rangle &= \int_{\mathbb{T}^3} u_j(\partial_j v_i)w_i \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{T}^3} v_i \partial_j (u_j w_i) \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{T}^3} (\partial_j u_j) v_i w_i \, dx - \int_{\mathbb{T}^3} (\partial_j w_i) v_i u_j \, dx \\
&= -\langle (u\cdot\nabla)w, v\rangle.
\end{aligned}$$

Όμως για $u \in V$ και $v, w \in H^1$ θα χρησιμοποιήσουμε την πυκνότητα για να το πετύχουμε αφού η τριγραμμική μορφή

$$b(u, v, w) = \langle (u\cdot\nabla)v, w\rangle$$

είναι συνεχής στο $H^1 \times H^1 \times H^1$.
Για το δεύτερο μέρος της πρότασης , δηλαδή για να αποδείξουμε ότι

$$\langle (u\cdot\nabla)v, v\rangle = 0$$

παρατηρούμε ότι

$$\langle (u\cdot\nabla)v, v\rangle = -\langle (u\cdot\nabla)v, v\rangle \ .$$

Άρα

$$2\langle (u\cdot\nabla)v, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle (u\cdot\nabla)v, v\rangle = 0 \ .$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.2. ***Εκτίμηση ενέργειας***
Έστω u ομαλή λύση της εξίσωσης Navier-Stokes ορισμένη για $t \in [0, T],\ T \in (0, \infty)$. *Τότε*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = 0$$

Απόδειξη.
Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^3$ με την u και ολοκληρώνοντας πάνω στον $\mathbb{T}^3$:

$$\int_{\mathbb{T}^3} \partial_t u \cdot u \ dx + \int_{\mathbb{T}^3} (u \cdot \nabla) u \cdot u \ dx + \int_{\mathbb{T}^3} \nabla p \cdot u \ dx = \int_{\mathbb{T}^3} \Delta u \cdot u \ dx \ .$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^3} \partial_t u \cdot u \ dx &= \int_{\mathbb{T}^3} \sum_i u_i \partial_t u_i \ dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \sum_i \partial_t |u_i|^2 \ dx \\
&= \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{T}^3} |u|^2 \ dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \ .
\end{aligned}$$

Για τον μη γραμμικό όρο έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^3} (u \cdot \nabla) u \cdot u \ dx &= \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{i,j} \bar{u}_i u_j \partial_j u_i \ dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\mathbb{T}^3} u_j \partial_j |u_i|^2 \ dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\mathbb{T}^3} u_j \partial_j |u|^2 \ dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \mathrm{div} u \ |u|^2 \ dx = 0
\end{aligned}$$

(διαφορετικά θα μπορούσαμε να το δείξουμε χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.1.1). Επίσης

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^3} \nabla p \cdot u \; dx &= \int_{\mathbb{T}^3} \sum_i \partial_i p \; u_i \; dx \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{T}^3} u_i \partial_i p \; dx \\ &= -\int_{\mathbb{T}^3} \sum_i \partial_i u_i \; p \; dx \\ &= -\int_{\mathbb{T}^3} (\mathrm{div} u) p \; dx = 0 \; .\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση κατά μέρη θα πάρουμε ότι

$$\int_{\mathbb{T}^3} \Delta u \cdot u \; dx = -\int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u|^2 \; dx = -\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \; .$$

Συνεπώς παίρνουμε το ζητούμενο

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = 0 \; .$$

□

Αν ολοκληρώσουμε ως προς το χρόνο t τότε

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^3} |u(x,t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u(x,s)|^2 dx ds = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^3} |u_0(x)|^2 dx \; , \quad 0 \le t \le T \; .$$

Δηλαδή

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} ds = \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \tag{3.1}$$

για $t \in [0, T]$.

Συνεπώς είναι φυσικό να απαιτήσουμε για τον ορισμό των ασθενών λύσεων οι ποσότητες

$$\operatorname{ess\,sup} \|u(t)\| \quad \text{και} \quad \int_0^T \|\nabla u(s)\|^2 ds$$

να είναι πεπερασμένες , άρα θα ασχοληθούμε με την τομή των χώρων

$$L^\infty(0,T;H) \quad \text{και} \quad L^2(0,T;V).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.2. *Η u είναι ασθενής λύση της εξίσωσης Navier-Stokes ικανοποιώντας την αρχική συνθήκη $u_0 \in H$ αν*

- $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$
- *u ικανοποιεί*

$$-\int_0^s \langle u, \partial_t \phi\rangle dt + \int_0^s \langle (u\cdot\nabla)u, \phi\rangle dt + \int_0^s \langle \nabla u, \nabla\phi\rangle dt = \langle u_0, \phi(0)\rangle - \langle u(s), \phi(s)\rangle \tag{3.2}$$

για κάθε $\phi \in D_\sigma$ και για σχεδόν όλα τα $s > 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.3. *Αν ισχύει ότι $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ τότε*

$$(u\cdot\nabla)u \in L^{\frac{4}{3}}(0,T,L^{\frac{6}{5}})$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^{\frac{6}{5}}} &\le \left(\int_{\mathbb{T}^3} |(u\cdot\nabla)u|^{\frac{6}{5}}\ dx\right)^{\frac{5}{6}} \\
&\le \left(\int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u|^{\frac{6}{5}} \cdot |u|^{\frac{6}{5}}\ dx\right)^{\frac{5}{6}} \\
&\le \left(\int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{T}^3} |u|^3\ dx\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{(Hölder)} \\
&= \|\nabla u\|_{L^2}\ \|u\|_{L^3} \\
&\le \|\nabla u\|_{L^2}\ \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\ \|u\|_{L^6}^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Ανίσωση Παρεμβολής 1.4.3)} \\
&\le \|\nabla u\|_{L^2}\ \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\ c\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Ανίσωση Sobolev (1.9))} \\
&\le c\|u\|_{H^1}^{\frac{3}{2}}\ \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\ .
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\int_0^T \|(u\cdot\nabla)u\|_{L^{\frac{6}{5}}}^{\frac{4}{3}}dx \le c\int_0^T \|u\|_{H^1}^2\ \|u\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}dx < \infty$$

αφού υποθέσαμε ότι $u \in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$.

$\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.4. *Αν ισχύει ότι $u \in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;H)$ τότε*

$$u \in L^r(0,T;L^s(\mathbb{T}^3))$$

όπου

$$\frac{2}{r}+\frac{3}{s}=\frac{3}{2} \quad , \quad 2\le s\le 6\ .$$

Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα παρεμβολής (Θεώρημα 1.4.3) θα πάρουμε

$$\|u\|_{L^s} \le \|u\|_{L^2}^{(6-s)/2s}\|u\|_{L^6}{}^{(3s-6)/2s}, \quad a=\frac{6-s}{2s}\ .$$

Υψώνοντας τα δύο μέλη της ανίσωσης στο r

$$\|u\|_{L^s}^r \le \|u\|_{L^2}^{(6-s)r/2s}\|u\|_{L^6}{}^{(3s-6)r/2s}\ .$$

Άρα

$$\int_0^T \|u\|_{L^s}^r dt \le \int_0^T \|u\|_{L^2}^{(6-s)r/2s}\|u\|_{L^6}^{(3s-6)r/2s}dt\ .$$

Όμως $u \in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$ και η L^2 νορμα ως προς x φράσσεται εκτός του ολοκληρώματος ως προς t συνεπώς για να είναι φραγμένο το δεξί ολοκλήρωμα πρέπει

$$\frac{(3s-6)r}{2s}=2$$

καθώς $u \in L^2(0,T;L^6)$.

Συνεπώς
$$\frac{2}{r}+\frac{3}{s}=\frac{3}{2}$$

και το ζητούμενο έπεται.

$\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.1.1.
Η πρόταση αυτή μας δείχνει πόσο μακριά είμαστε από τις κλασικές λύσεις καθώς έχει αποδειχθεί ότι αν u ασθενής λύση ικανοποιώντας την εξίσωση ενέργειας ανήκει στο $L^r(0,T;L^s(\mathbb{T}^3))$ με
$$\frac{2}{r}+\frac{3}{s}=1$$
τότε η u ομαλή λύση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.5. *Αν η u είναι ασθενής λύση της εξίσωσης Navier -Stokes τότε*
$$\int_{t_1}^{t_2}\langle\nabla u,\nabla\phi\rangle+\int_{t_1}^{t_2}\langle u\cdot\nabla u,\phi\rangle=\langle u(t_1),\phi\rangle-\langle u(t_2),\phi\rangle \tag{3.3}$$
για κάθε $\phi\in C^{\infty}_{c,\sigma}(\mathbb{T}^3)$ και για σχεδόν όλα τα $t_2\geq t_1,\quad t_1\geq 0$ συμπεριλαμβάνοντας το $t_1=0$.

Απόδειξη.
Έστω $\phi\in C^{\infty}_{c,\sigma}(\mathbb{T}^3)$ και επιλέγουμε
$$a\in C^{\infty}_{c}[0,\infty),\quad \text{με } a(t)=1,\ \forall t\in[t_1,t_2]\ .$$

Ορίζουμε
$$\tilde{\phi}(t,x)=a(t)\phi(x)\quad \text{η οποία ανήκει στο } D_\sigma\ .$$

Παίρνοντας τη διαφορά των δύο εξισώσεων της (3.2) για $s=t_1$ και $s=t_2$ με $\phi=\tilde{\phi}$ προκύπτει η (3.3).

$\square$

Το αντίστροφο της πρότασης αυτής αποδεικνύεται οτι ισχύει. Δηλαδή αν

$$u \in L^{\infty}(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;H^1)$$

και ικανοποιεί την (3.3) τότε είναι ασθενής λύση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.1. *Οι ασθενείς λύσεις της εξίσωσης Navier -Stokes είναι L^2 ασθενώς συνεχείς ως προς το χρόνο , δηλαδή*

$$\lim_{t\to t_0}\langle u(t), v\rangle = \langle u(t_0), v\rangle \quad \forall v \in \dot{L}^2(\mathbb{T}^3)\ .$$

Συνεπώς $u(t) \to u_0$ ασθενώς στον $\dot{L}^2$ καθώς $t \to 0^+$

Απόδειξη.
Αφού $v \in \dot{L}^2(\mathbb{T}^3)$ θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Helmholtz - Weyl 2.1.1 , δηλαδή

$$v = h + \nabla g, \quad h \in H, \quad \nabla g \in G\ .$$

Επίσης

$$\langle u(t), \nabla g\rangle = 0$$

καθώς $u(t) \in H$ και οι χώροι H, G είναι ορθογώνιοι.
Άρα

$$\langle u(t), v\rangle = \langle u(t), h\rangle + \langle u(t), \nabla g\rangle = \langle u(t), h\rangle\ .$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{t\to t_0}\langle u(t), h\rangle = \langle u(t_0), h\rangle, \quad \forall h \in H\ .$$

Αφού ο $C^{\infty}_{c,\sigma}$ είναι πυκνός στον H , θεωρούμε την $h \in C^{\infty}_{c,\sigma}(\mathbb{T}^3)$.

Από την Πρόταση 3.1.5 :

$$
\begin{aligned}
|\langle u(t) - u(t_0), h\rangle| &= |\langle u(t), h\rangle - \langle u(t_0), h\rangle| \\
&= \left| \int_t^{t_0} \langle \nabla u(t), \nabla h\rangle + \int_t^{t_0} \langle (u \cdot \nabla)u, h\rangle \right| \\
&\leq \left| \int_t^{t_0} \langle \nabla u(t), \nabla h\rangle \right| + \left| \int_t^{t_0} \langle (u \cdot \nabla)u, h\rangle \right| \to 0
\end{aligned}
$$

για $t \to t_0$, έχοντας εξασφαλίσει την ολοκληρωσιμότητα των συναρτήσεων από την ολοκληρωσιμότητα της u σε συνδυασμό με την Πρόταση 3.1.3.

□

3.2 Ασθενείς λύσεις με διαφορετικό χώρο συναρτήσεων δοκιμής

Στην προηγούμενη παράγραφο ορίσαμε τις ασθενείς λύσεις, ωστόσο φαίνεται οτι έχουν αρκετούς περιορισμούς. Συνεπώς θα προσπαθήσουμε να κάνουμε λιγότερο απαιτητική αυτή τη διαδικασία αλλάζοντας για αρχή το χώρο συναρτήσεων δοκιμής , όπου στον τόρο $\mathbb{T}^3$ και στον $\mathbb{R}^3$ φαίνεται πιο απλό να χρησιμοποιήσουμε τον $\tilde{D}_\sigma$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.1. *Ο χώρος συναρτήσεων δοκιμής $\tilde{D}_\sigma$ ορίζεται ως :*

$$
\left\{ \phi : \quad \phi = \sum_{k=1}^{N} a_k(t) b_k(x) \quad , a_k \in C_c^1([0, \infty)), \quad b_k \in \mathcal{N}, N \in \mathbb{N} \right\}
$$

όπου $\mathcal{N}$ βάση του H που αποτελείται από ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Stokes.

Από τον ορισμό είναι προφανές το βασικό πλεονέκτημα του $\tilde{D}_\sigma$, δηλαδή οι συναρτήσεις που ανήκουν σε αυτόν έχουν διαφορετική εξάρτηση από τον χρόνο και το χώρο και ότι είναι άμεσα συνδεδεμένες με τον τελεστή Stokes εξαιτίας των ιδιοσυναρτήσεών του. Ωστόσο παρατηρούμε ότι σε σχέση με τον D_σ εδώ έχουμε χάσει κάποιες τάξεις διαφορισιμότητας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.1. *Αν* $u \in L^{\infty}(0,T;H(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(0,T;V(\mathbb{T}^3)) \quad \forall T > 0$ *τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

1. *u ικανοποιεί την* (3.2) , $\quad \forall \phi \in D_{\sigma}(\mathbb{T}^3)$
2. *u ικανοποιεί την* (3.2) , $\quad \forall \phi \in \tilde{D}_{\sigma}(\mathbb{T}^3)$

Απόδειξη.

(1) ⇒ (2)
Έστω ότι η u ικανοποιεί την (3.2) για κάθε σταθερό $s > 0$ και για κάθε $\phi \in D_{\sigma}(\mathbb{T}^3)$.
Θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει η ίδια εξίσωση και για κάθε $\phi \in \tilde{D}_{\sigma}(\mathbb{T}^3)$ η οποία θα δίνεται ως

$$\phi(x,t) = a(t)b(x)$$

με $a \in C_c^1([0,\infty)), \quad b \in \mathcal{N}$.
Αφού $a \in C_c^1([0,\infty))$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία ομαλών συναρτήσεων (a_n) με συμπαγή φορέα στο $[0, s+1)$ τέτοια ώστε

$$a_n \to a \quad \text{στο } C^1([0,s]) \ .$$

Τέτοιες συναρτήσεις από τον $C^{\infty}_{c,\sigma}$ είναι πυκνές στον V , δηλαδή μπορούμε να βρούμε $\phi_n \in C^{\infty}_{c,\sigma}$ τέτοια ώστε

$$\phi_n \to b \quad \text{στον} \quad H^1(\mathbb{T}^3) \ .$$

Ορίζουμε ακολουθία ψ_n με

$$\psi_n(x,t) = a_n(t)\phi_n(x), \quad \text{για κάθε } n$$

η οποία ανήκει στο D_{σ} .
Δηλαδή από την υπόθεση έχουμε ότι $u \in L^{\infty}(0,T;H(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(0,T;V(\mathbb{T}^3))$ και ισχύει η 1. άρα ικανοποιείται η (3.2) για $\phi = \psi_n$.
Επομένως

$$-\int_0^s \langle u, \partial_t \phi \rangle \, dt + \int_0^s \langle (u \cdot \nabla) u, \phi \rangle \, dt + \int_0^s \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \, dt = \langle u_0, \phi(0) \rangle - \langle u(s), \phi(s) \rangle \, .$$

Θα δείξουμε ότι

$$\psi_n \to \phi \qquad \text{στο} \quad C([0,s];V) \, .$$

Γνωρίζουμε ότι

$$||f(x,t)||_{C([0,s];V)} = \max_{t \in [0,s]} ||f(t)||_V = \max_{t \in [0,s]} ||\nabla_x f(x,t)||_{L^2} \, .$$

Συνεπώς

$$||\psi_n - \phi||_{C([0,s];V)} = \max_{t \in [0,s]} ||\nabla_x (\psi_n - \phi)||_{L^2} \, .$$

Για $t \in [0,s]$ έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} ||\nabla_x \psi_n(t) - \nabla_x \phi(t)||_{L^2} &= ||a_n(t) \nabla \phi_n(t) - a(t) \nabla b||_{L^2} \\ &\leq ||(a_n(t) - a(t)) \nabla \phi_n||_{L^2} + ||a(t)(\nabla \phi_n - \nabla b)||_{L^2} \\ &\leq |a_n(t) - a(t)| ||\nabla \phi_n||_{L^2} + |a(t)| ||\nabla \phi_n - \nabla b||_{L^2} \, . \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} ||\psi_n - \phi||_{C([0,s];V)} &= \max_t ||\nabla_x \psi_n(t) - \nabla_x \phi(t)||_{L^2} \\ &\leq \max_t (|a_n(t) - a(t)| ||\nabla \phi_n||_{L^2}) + \max_t (|a(t)| ||\nabla \phi_n - \nabla b||_{L^2}) \, . \end{aligned}$$

Ισχύει ότι

$$\max_t (|a_n(t) - a(t)|) \leq ||a_n(t) - a(t)||_{C^1} \to 0 \, .$$

Επίσης

$$\|\nabla\phi_n - \nabla b\|_{L^2} \to 0 \quad \text{από υπόθεση} \ .$$

Οι ποσότητες $\|\nabla\phi_n\|_{L^2}$ και $|a(t)|$ είναι φραγμένες , δηλαδή

$$\|\psi_n - \phi\|_{C([0,s];V)} \to 0 \quad (\text{μηδενική επί φραγμένη}) \ .$$

Έτσι δείξαμε ότι

$$\psi_n \to \phi \quad \text{στο} \quad C([0,s];V) \quad \text{καθώς } n \to \infty \ .$$

Ακόμη θα δείξουμε ότι

$$\partial_t\psi_n \to \partial_t\phi \quad \text{στον} \quad L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3)) \quad \text{καθώς } n \to \infty \ .$$

Παίρνοντας

$$\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} = \int_0^s \int_{\mathbb{T}^3} |f(x,t)|^2 \ dxdt$$

τότε ισχύει

$$\begin{aligned}
\|\partial_t\psi_n - \partial_t\phi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} &= \|a_n'(t)\phi_n(x) - a'(t)b(x)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} \\
&= \|a_n'(t)\phi_n(x) - a'(t)\phi_n(x) + a'(t)\phi_n(x) - a'(t)b(x)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} \\
&= \|\phi_n(x)(a_n'(t) - a'(t)) + a'(t)(\phi_n(x) - b(x))\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} \\
&\leq 2\|\phi_n(x)(a_n'(t) - a'(t))\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} + 2\|a'(t)(\phi_n(x) - b(x))\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} \\
&= 2\|\phi_n(x)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|a_n'(t) - a'(t)\|_{L^2(0,s)} + 2\|a'(t)\|_{L^2(0,s)}\|\phi_n(x) - b(x)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \ .
\end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$\|\phi_n(x) - b(x)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \to 0 \quad (\text{από υπόθεση})$$

και
$$\|a_n'(t) - a'(t)\|_{L^2(0,s)} \to 0 \ .$$

Άρα
$$\|\partial_t \psi_n - \partial_t \phi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} \to 0 \quad \text{όσο } n \to \infty \ .$$

Επιστρέφοντας τώρα στη βασική απόδειξη της πρότασης με βάση αυτά που αποδείξαμε παραπάνω έχουμε ότι
$$\int_0^s \langle u, \partial_t \psi_n \rangle \ dt \to \int_0^s \langle u, \partial_t \phi \rangle \ dt \ ,$$

$$\int_0^s \langle \nabla u, \nabla \psi_n \rangle \ dt \to \int_0^s \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \ dt \ ,$$

$$\langle u(0), \psi_n(0) \rangle \to \langle u(0), \phi(0) \rangle$$

και
$$\langle u(s), \psi_n(s) \rangle \to \langle u(s), \phi(s) \rangle \ .$$

Για τον μη γραμμικό όρο θα χρησιμοποιήσουμε την εμβάπτιση Sobolev Θεώρημα 1.6.3 δηλαδή $H \subset L^6$ και τότε θα ισχύει ότι $\psi_n \to \phi$ στο $C([0,s]; L^6)$ σε συνδυασμό με την Πρόταση 3.1.3 :
$$\left| \int_0^s \langle (u \cdot \nabla) u, (\psi_n - \phi) \rangle \ dt \right| \leq \|(u \cdot \nabla) u\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,s;L^{\frac{6}{5}})} \|\psi_n - \phi\|_{L^4(0,s;L^6)} \to 0 \ .$$

Συνεπώς
$$\int_0^s \langle (u \cdot \nabla) u, \psi_n \rangle \ dt \to \int_0^s \langle (u \cdot \nabla) u, \phi \rangle \ dt \ .$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Έστω $\phi \in D_\sigma$. Τότε η

$$\phi(t) \in H^k \cap V \quad \forall k,\ t > 0$$

και μπορούμε να την εκφράσουμε με βάση τις ιδιοσυναρτήσεις Stokes ως

$$\phi(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) b_k(x) \ .$$

Ορίζουμε ακολουθία

$$\psi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) b_k(x)$$

η οποία ανήκει $\tilde{D}_\sigma$ και

$$\psi_n \to \phi \quad \text{στο } C([0,s],V) \ .$$

Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,s]} \|\phi(t) - \psi_n(t)\|_V^2 &= \sup_{t\in[0,s]} \| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(t) b_k(x)\|_V^2 \\
&\leq \sup_{t\in[0,s]} \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k c_k^2(t), \quad (\text{γιατί } \|b_k(x)\|_V^2 = \lambda_k) \\
&\leq \sup_{t\in[0,s]} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 c_k^2(t)}{\lambda_n} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} \sup_{t\in[0,s]} \|A\phi_n(t)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} \sup_{t\in[0,s]} \|\phi(t)\|_{H^2}^2 \to 0 \quad \text{όσο } n \to \infty
\end{aligned}$$

καθώς $\sup_t \|\phi(t)\|_{H^2}^2$ ανεξάρτητο του n.

Επίσης θα δείξουμε ότι

$$\partial_t \psi_n \to \partial_t \phi \quad \text{στο } L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3)).$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
\|\partial_t\psi_n - \partial_t\phi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} &= \int_0^s \|\partial_t\psi_n - \partial_t\phi\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ dt \\
&= \int_0^s \|\partial_t(\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(t)b_k(x))\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ dt \\
&= \int_0^s \|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k'(t)b_k(x)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^s \sum_{k=n+1}^{\infty} \|c_k'(t)b_k(x)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ dt \\
&= \int_0^s \sum_{k=n+1}^{\infty} \|c_k'(t)\|^2\|b_k(t)\|^2\ dt \\
&= \int_0^s \sum_{k=n+1}^{\infty} \|c_k'(t)\|^2\ dt \quad (\text{γιατί } \|b_k(t)\| = 1) \\
&\to 0 \quad \text{καθώς } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Συνεπώς τώρα ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στο (1) $\Rightarrow$ (2) μετά τις συγκλίσεις για τα αντίστοιχα τότε ψ_n και ϕ θα προκύψει το ζητούμενο.

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.2. *Ας είναι u ασθενής λύση Navier-Stokes, $a \in H^1(0,T)$, $b \in \mathcal{N}$. Τότε η 3.2 ισχύει για*

$$\phi(x,t) = a(t)b(x), \quad \textit{για σχεδόν όλα τα} \quad s \in [0,T].$$

Απόδειξη.
Θέτουμε συνάρτηση g ως

$$g = \frac{da}{dt} \in L^2(0,T)\ .$$

Άρα

$$a(t) = \int_0^t g(s)ds + c_0.$$

Ας είναι

$$a_\epsilon(t) = \int_0^t g_\epsilon(s)ds + c_0$$

όπου g_ϵ ομαλοποιητής , δηλαδή

$$g_\epsilon = g \in [0,T] \quad \text{και } g_\epsilon = 0 \text{ εκτός } [0,T].$$

Ορίζουμε

$$\phi_\epsilon(t,x) = a_\epsilon(t)b(x)$$

και ισχύει ότι $\phi_\epsilon \in \tilde{D}_\sigma$.
Επίσης

$$\frac{da_\epsilon}{dt} - \frac{da}{dt} = g_\epsilon - g \to 0, \quad \text{στον } L^2(0,T) \ .$$

Όμως έχουμε και ότι

$$\sup_{t\in[0,T]} |a_\epsilon(t) - a(t)| = \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t g_\epsilon - g \ ds \right| \leq \int_0^T |g_\epsilon - g| \ ds \to 0 \ .$$

Έπεται ότι

$$\phi_\epsilon \to \phi \text{ στον } C([0,T];H^1) \ .$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο με την απόδειξη της Πρότασης 3.2.1 (1) ⇒ (2) και θα προκύψει το ζητούμενο. □

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε την ισοδύναμη μορφή των ασθενών λύσεων της εξίσωσης Navier -Stokes για τον νέο χώρο συναρτήσεων δοκιμής που ορίσαμε.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.3. *Αν u ασθενής λύση της εξίσωσης Navier -Stokes με αρχική συνθήκη u_0 τότε*

$$-\int_0^\infty \langle u, \partial_t\phi\rangle + \int_0^\infty \langle\nabla u, \nabla\phi\rangle + \int_0^\infty \langle(u\cdot\nabla)u, \phi\rangle = \langle u_0, \phi(0)\rangle \tag{3.4}$$

για κάθε $\phi \in \tilde{D}_\sigma(\mathbb{T}^3)$.

Απόδειξη.
Έστω $\phi \in \tilde{D}_\sigma(\mathbb{T}^3)$.
Από την Πρόταση 3.2.1 έχουμε ότι η (3.2) ισχύει για την ϕ για σχεδόν όλα τα $s > 0$.
Επίσης για s αρκετά μεγάλα ισχύει ότι $\phi(s) = 0$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω εξίσωση.

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.4. *Ας είναι* $u \in L^\infty(0, T; H(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(0, T; V(\mathbb{T}^3))$, $\forall T > 0$ *και να ικανοποιεί την*

$$- \int_0^\infty \langle u, \partial_t \phi \rangle + \int_0^\infty \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle + \int_0^\infty \langle (u \cdot \nabla) u, \phi \rangle = \langle u_0, \phi(0) \rangle \tag{3.5}$$

για κάθε $\phi \in \tilde{D}_\sigma(\mathbb{T}^3)$. *Τότε η* u *είναι ασθενής λύση της εξίσωσης Navier - Stokes με αρχική συνθήκη* u_0.

Απόδειξη.
Αρχικά θα δείξουμε ότι η (3.2) ισχύει για σχεδόν όλα τα $s > 0$ και για κάθε $\phi \in \tilde{D}_\sigma$.
Έστω ότι $s > 0$ και $\phi \in \tilde{D}_\sigma$ η οποία δίνεται ως

$$\phi(x, t) = a(t) b_k(x)$$

όπου $b_k \in \mathcal{N}$,να είναι δηλαδή μια από τις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Stokes όπως τις ορίσαμε στο Θεώρημα 2.3.2.
Είναι προφανές ότι αν η (3.2) ικανοποιείται για κάθε ϕ που έχει την παραπάνω μορφή τότε ισχύει για κάθε $\phi \in \tilde{D}_\sigma$.
Ορίζουμε μια κατά τμήματα C^1 συνάρτηση για $h > 0$:

$$a_h(t) = \begin{cases} a(t) & , \ t \in [0, s] \\ a(s)\left(1 - \frac{t-s}{h}\right) & , \ t \in (s, s+h) \\ 0 & , t \geq s + h \end{cases}$$

και αντίστοιχα ορίζουμε

$$\phi_n(x, t) = a_{\frac{1}{n}}(t) b_k(x) \ .$$

Από την Πρόταση 3.2.2 μπορούμε να αντλήσουμε ότι η (3.2) ικανοποιείται και αφήνοντας το $s \to \infty$ παίρνουμε την (3.4) αντικαθιστώντας τη ϕ με ϕ_n. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\int_s^{\infty} \langle \nabla u, \nabla \phi_n \rangle \, dt\right| &= \left|\int_s^{s+\frac{1}{n}} \langle \nabla u, \nabla \phi_n \rangle \, dt\right| \\ &\leq \left(\int_s^{s+\frac{1}{n}} |\nabla u|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^{s+\frac{1}{n}} |\nabla \phi_n|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} .\end{aligned}$$

Από τον ορισμό της ϕ παρατηρούμε ότι $\phi_n = \phi$ στο $[0, s]$, συνεπώς

$$\int_0^{\infty} \langle \nabla u, \nabla \phi_n \rangle \, dt \to \int_0^{s} \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \, dt \, .$$

Επίσης θα δείξουμε ότι

$$\int_0^{\infty} \langle (u \cdot \nabla) u, \phi_n \rangle \, dt \to \int_0^{s} \langle (u \cdot \nabla) u, \nabla \phi \rangle \, dt \, .$$

Η σύγκλιση που περιέχει την παράγωγο ως προς το χρόνο που μας έχει απομείνει είναι και η πιο απαιτητική. Προκύπτει

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \langle u(t), \partial_t \phi_n(t) \rangle \, dt &= \int_0^{s} \langle u(t), \partial_t \phi(t) \rangle \, dt + \int_s^{s+\frac{1}{n}} \langle u(t), \partial_t \phi_n(t) \rangle \, dt + 0 \\ &= \int_0^{s} \langle u(t), \partial_t \phi(t) \rangle \, dt - \frac{a(s)}{1/n} \int_s^{s+\frac{1}{n}} \langle u(t), b_k \rangle \, dt \, .\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα διαφορισιμότητας του Lebesgue ώστε να πετύχουμε τη σύγκλιση που θέλουμε.
Το λήμμα αναφέρει ότι:
Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο και $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ μετρήσιμη συνάρτηση στον $L^1_{loc}(\Omega)$, δηλαδή

$$\int_K |f| < \infty, \quad \forall \text{ συμπαγές } K \subset \Omega.$$

Τότε για οποιαδήποτε οικογένεια από μπάλες B_r με $\cap_{r\geq 0} B_r = \{x\}$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(y)dy = f(x)$$

για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$.
Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int_0^s \langle u(t), \partial_t\phi(t)\rangle \; dt - \frac{a(s)}{1/n} \int_s^{s+\frac{1}{n}} \langle u(t), b_k\rangle \; dt \to \int_0^s \langle u(t), \partial_t\phi(t)\rangle \; dt - a(s)\langle u(s), b_k\rangle \\ = \int_0^s \langle u(t), \partial_t\phi(t)\rangle \; dt - \langle u(s), \phi(s)\rangle \; .\end{aligned}$$

Από την εξίσωση (3.5) σε συνδυασμό με τις παραπάνω συγκλίσεις και αφού οι $\langle u(t), b_k\rangle$ είναι αριθμήσιμες θα πάρουμε ότι

$$-\int_0^s \langle u(t), \partial_t\phi(t)\rangle \; dt + \int_0^s \langle (u\cdot\nabla)u, \nabla\phi\rangle \; dt + \int_0^s \langle \nabla u, \nabla\phi\rangle \; dt = \langle u_0, \phi(0)\rangle - \langle u(s), \phi(s)\rangle$$

για σχεδόν όλα τα s και $\phi \in \tilde{D}_\sigma$. Άρα από την Πρόταση 3.2.1 έπεται ότι η u είναι ασθενής λύση της εξίσωσης Navier - Stokes.

□

Οι προηγούμενες προτάσεις θα μας βοηθήσουν στη συνέχεια να δείξουμε την ύπαρξη των ασθενών λύσεων για τις τρεις διαστάσεις. Πριν από αυτό όμως είναι χρήσιμο να μελετήσουμε τι συμβαίνει στις δύο διαστάσεις και να δείξουμε την μοναδικότητα των ασθενών λύσεων στη δισδιάστατη περίπτωση.

3.3 Μοναδικότητα ασθενών λύσεων στις δυο διαστάσεις

Στην περίπτωση των δύο διαστάσεων που βρισκόμαστε είναι πιο απλοί οι υπολογισμοί καθώς στην εμβάπτιση Sobolev έχουμε πιο διαχειρίσιμους όρους και αποδεικνύεται ότι

$$\partial_t u \in L^2(0,T;V^*)\ .$$

Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ασθενείς λύσεις σαν συναρτήσεις δοκιμής και να προκύψει η μοναδικότητα που αναζητούμε με πιο εύκολο τρόπο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.1. *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ομαλό, φραγμένο χωρίο και ας είναι u, v δύο ασθενείς λύσεις που αντιστοιχούν σε ίδια αρχική συνθήκη $u_0 \in H(\Omega)$. Τότε*

$$u(t) = v(t), \quad \forall t > 0\ .$$

Απόδειξη.
Θεωρούμε $w = u - v$ και αντικαθιστούμε $\phi = w$ σαν μια συνάρτηση δοκιμής στην ασθενή μορφή της εξίσωσης (3.2) :

$$-\int_0^s \langle u, \partial_t w\rangle \ + \int_0^s \langle (u\cdot\nabla)u, w\rangle \ + \ \int_0^s \langle \nabla u, \nabla w\rangle = \langle u_0, w(0)\rangle - \langle u(s), w(s)\rangle\ .$$

Είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις μέσα στα ολοκληρώματα της εξίσωσης είναι ολοκληρώσιμες και στη δισδιάστατη περίπτωση , άρα και οι συναρτήσεις $\langle u(s), w(s)\rangle$ και $\langle v(s), w(s)\rangle$ πρέπει να είναι απόλυτα συνεχείς , συνεπώς και διαφορίσιμες για σχεδόν όλα τα $s > 0$.
Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση ως προς τον χρόνο θα πάρουμε

$$-\langle u, \partial_t w\rangle + \ \langle (u\cdot\nabla)u, w\rangle \ + \langle \nabla u, \nabla w\rangle = -\frac{d}{dt}\langle u, w\rangle\ .$$

Αντίστοιχα για την ασθενή λύση v ισχύει

$$-\langle v, \partial_t w\rangle + \ \langle (v\cdot\nabla)v, w\rangle \ + \langle \nabla v, \nabla w\rangle = -\frac{d}{dt}\langle v, w\rangle\ .$$

Παίρνοντας τη διαφορά των δύο εξισώσεων

$$
\begin{aligned}
-\langle u, \partial_t w\rangle + \langle v, \partial_t w\rangle + \langle (u\cdot\nabla)u, w\rangle - \langle (v\cdot\nabla)v, w\rangle + \langle \nabla u, \nabla w\rangle - \\
- \langle \nabla v, \nabla w\rangle = -\frac{d}{dt}\langle u, w\rangle + \frac{d}{dt}\langle v, w\rangle \ .
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
-\langle u - v, \partial_t w\rangle + \langle (u\cdot\nabla)u - (v\cdot\nabla)v, w\rangle + \langle \nabla u - \nabla v, \nabla w\rangle = -\frac{d}{dt}\langle u - v, w\rangle \ .
$$

Έτσι

$$
-\langle w, \partial_t w\rangle + \langle (u\cdot\nabla)u - (v\cdot\nabla)v, w\rangle + \langle \nabla w, \nabla w\rangle = -\frac{d}{dt}\langle w, w\rangle \ .
$$

Επομένως

$$
-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 + \langle (u\cdot\nabla)u - (v\cdot\nabla)v, w\rangle + \|\nabla w\|^2 = -\frac{d}{dt}\|w\|^2 \ .
$$

Δηλαδή

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 + \|\nabla w\|^2 &\leq |\langle (u\cdot\nabla)u - (v\cdot\nabla)v, w\rangle| \\
&= |\langle (u\cdot\nabla)u, w\rangle - \langle ((u-w)\cdot\nabla)(u-w), w\rangle| \\
&= |\langle (u\cdot\nabla)w, w\rangle + \langle (w\cdot\nabla)u, w\rangle - \langle (w\cdot\nabla)w, w\rangle| \ .
\end{aligned}
$$

Από την Πρόταση 3.1.1 θα πάρουμε ότι

$$
\langle (u\cdot\nabla)w, w\rangle = 0, \quad \text{και} \quad \langle (w\cdot\nabla)w, w\rangle = 0 \ .
$$

Άρα

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 + \|\nabla w\|^2 \leq |\langle (w\cdot\nabla)u, w\rangle| \ .
$$

Αφού $w \in H_0^1(\Omega)$ θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Ladyzhenskaya

$$||w||_{L^4} \leq c||w||^{\frac{1}{2}}||\nabla w||^{\frac{1}{2}} \ .$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w||^2 + ||\nabla w||^2 &\leq ||w||^2_{L^4}||\nabla u|| \\ &\leq c||w||||\nabla w||||\nabla u|| \\ &\leq c||\nabla u||^2||w||^2 + \frac{1}{2}||\nabla w||^2\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την γνωστή ανισότητα (1.3)
$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon}b^2 \quad$ για $\epsilon = \frac{1}{2c}$.
Επίσης προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w||^2 + \frac{1}{2}||\nabla w||^2 \leq c||u||^2||w||^2 \ .$$

Άρα

$$\frac{d}{dt}||w||^2 \leq C||\nabla u||^2||w||^2 \ .$$

Κάνοντας χρήση του λήμματος Gronwall που αναφέρει ότι :
Έστω $f : [0, T] \to [0, \infty)$ απόλυτα συνεχής συνάρτηση με

$$f'(t) \leq \phi(t)f(t) + \psi(t)$$

με ϕ, ψ μη αρνητικές και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε

$$f(t) \leq \quad \exp\left(\int_0^t \phi(s)\ ds\right)\left[f(0) + \int_0^t \psi(s)\ ds\right], \quad \forall t > 0 \ .$$

Άρα για $\psi = 0$ για την περίπτωσή μας θα πάρουμε:

$$||w(t)||^2 \leq ||w(0)||^2 \exp\left(c\int_0^t ||\nabla u(s)||^2\ ds\right) \ .$$

Γνωρίζουμε ότι $u \in L^2(0,T;V)$ και $w(0) = 0$ από υπόθεση . Αρα έπεται ότι

$$w(t) = 0 \quad \text{για} \quad t > 0.$$

$\square$

Ιστορική σημείωση

Αυτός που ασχολήθηκε πρώτος με την έννοια των ασθενών λύσεων για την εξίσωση Navier-Stokes ήταν ο Jean Leray (1934) . Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι για τον ορισμό των λύσεων αυτών χρησιμοποίησε θεωρία κατανομών, η οποία θεμελιώθηκε αυστηρά το 1950 από τον Schwartz .
Έπειτα αρκετοί ασχολήθηκαν με την μελέτη των ασθενών λύσεων εισάγοντας διαφορετικές μορφές για τον ορισμό τους.
Για παράδειγμα ο ορισμός που εισάγαμε στο κεφάλαιο αυτό ανήκει στην προσέγγιση του Heywood (1988). Ωστόσο υπάρχουν και αρκετά πρόσφατες μελέτες όπως του Galdi (2000) και Lemarie - Rieusset (2002) , όπου ο τελευταίος είναι ένας από τους ερευνητές που συμπεριέλαβε την πίεση στον ορισμό των ασθενών λύσεων.

Κεφάλαιο 4

ΥΠΑΡΞΗ ΑΣΘΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

4.1 Η μέθοδος Galerkin

Η μέθοδος Galerkin θα μας επιτρέψει να κατασκευάσουμε μια ασθενή λύση ως όριο μιας ακολουθίας προσεγγιστικών λύσεων u_n όπου για κάθε $t > 0$ αυτές θα ανήκουν στον πεπερασμένης διάστασης χώρο P_nH ο οποίος ορίζεται ως

$$P_nH = \text{span}(b_1, b_2, ..., b_n), \quad b_i \in \mathcal{N}$$

όπου $\mathcal{N}$ είναι η βάση των ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή Stokes όπως την ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.
Θεωρούμε τον προβολικό τελεστή $P_n : L^2 \to H$ με τύπο

$$P_nu = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i \rangle b_i, \quad b_i \in \mathcal{N}$$

με το L^2 εσωτερικό γινόμενο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1. *Η $n-$ τάξης Galerkin εξίσωση που αντιστοιχεί στην εξίσωση Navier-Stokes δίνεται ως :*

$$\partial_t u_n + Au_n + P_n[(u_n \cdot \nabla)u_n] = 0, \quad u_n(0) = P_nu_0 \tag{4.1}$$

όπου A ο τελεστής Stokes και u_0 η αρχική συνθήκη από την εξίσωση Navier-Stokes. Ονομάζουμε τα u_n προσεγγίσεις Galerkin .

Όπως αναφέραμε στην ενότητα 2.3 για τον τελεστή Stokes στην περίπτωση του $\mathbb{T}^3$ που ασχολούμαστε εδώ ισχύει $Au = -\Delta u$ συνεπώς η $n-$ τάξης Galerkin εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως

$$\partial_t u_n - \Delta u_n + P_n[(u_n \cdot \nabla)u_n] = 0 \ .$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για ακόμη μια φορά έχουμε παραμερίσει τον όρο της πίεσης από τον ορισμό και πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν έχουμε αποδείξει ακόμη την ύπαρξη των u_n.
Αφού όμως η εξίσωση Galerkin είναι πεπερασμένης διάστασης αναμένουμε ότι θα υπάρχουν λύσεις έστω και για μικρό χρονικό διάστημα. Σε επόμενη ενότητα θα δείξουμε ότι υπάρχουν ολικά ως προς χρόνο.

Θεωρούμε την εξίσωση Galerkin όπως την ορίσαμε πιο πάνω και παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με $\phi \in \tilde{D}_\sigma$ με τύπο

$$\phi(x,t) = a(t)b_k(x), \quad k \in [1,n], \quad a \in C_c^1[0,\infty)$$

έχουμε

$$\partial_t u_n \cdot \phi - \Delta u_n \cdot \phi + P_n[(u_n \cdot \nabla)u_n] \cdot \phi = 0 \ .$$

Ολοκληρώνοντας ως προς το χώρο

$$\int_{\mathbb{T}^3} \partial_t u_n \cdot \phi \ dx - \int_{\mathbb{T}^3} \Delta u_n \cdot \phi \ dx + \int_{\mathbb{T}^3} P_n[(u_n \cdot \nabla)u_n] \cdot \phi \ dx = 0 \ .$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη

$$\int_{\mathbb{T}^3} \partial_t u_n \cdot \phi \ dx + \int_{\mathbb{T}^3} \nabla u_n \cdot \nabla \phi \ dx + \int_{\mathbb{T}^3} P_n[(u_n \cdot \nabla)u_n] \cdot \phi \ dx = 0 \ .$$

Δηλαδή

$$\langle \partial_t u_n, \phi \rangle + \langle \nabla u_n, \nabla \phi \rangle + \langle (u_n \cdot \nabla)u_n, \phi \rangle = 0 \ .$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε ως προς το χρόνο

$$\int_0^\infty \langle \partial_t u_n, \phi\rangle \, dt + \int_0^\infty \langle \nabla u_n, \nabla\phi\rangle \, dt + \int_0^\infty \langle (u_n \cdot \nabla) u_n, \phi\rangle \, dt = 0 \ .$$

Από τη ολοκλήρωση κατά μέρη προκύπτει

$$- \int_0^\infty \langle u_n, \partial_t \phi\rangle \, dt + \int_0^\infty \langle \nabla u_n, \nabla\phi\rangle \, dt + \int_0^\infty \langle (u_n \cdot \nabla) u_n, \phi\rangle \, dt = \langle u_0, \phi(0)\rangle \ . \quad (4.2)$$

Από αυτά συμπεραίνουμε ότι u_n ικανοποιεί την (3.4) μορφή για ασθενείς λύσεις, όμως για ένα υποσύνολο του $\tilde{D}_\sigma$ που θα ανήκουν και στο P_nH κάθε φορά. Για να αποφύγουμε τον περιορισμό αυτό για τις συναρτήσεις δοκιμής αρκεί να πάρουμε το όριο στην (4.2) για $n \to \infty$.
Για οποιοδήποτε $T > 0$ από την εκτίμηση ενέργειας αναμένουμε ότι οι προσεγγίσεις Galerkin ικανοποιούν ένα ομοιόμορφο φράγμα , δηλαδή

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\|^2 + \int_0^T \|\nabla u_n(s)\|^2 \, ds \leq C \qquad (4.3)$$

το οποίο θα αποδείξουμε στην ενότητα 4.3.
Από αυτό εξασφαλίζουμε την ασθενή σύγκλιση υπακολουθίας της (u_n) , την οποία ονομάζουμε πάλι u_n , σε κάποια $u \in L^2(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$:

$$u_n \to u, \quad \nabla u_n \to \nabla u \quad \text{ασθενώς στον } L^2(0,T;L^2) \ .$$

Έτσι καταφέραμε να περάσουμε το όριο στους δύο πρώτους όρους της (4.2) , όμως δεν ισχύει το ίδιο και για τον μη γραμμικό όρο , όπου δεν είναι ξεκάθαρο ότι

$$(u_n \cdot \nabla) u_n \to (u \cdot \nabla) u \ .$$

Για να το εξασφαλίσουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$$u_n \to u \quad \text{ισχυρά στον } L^2(0,T;H) \quad \text{και} \quad \nabla u_n \to \nabla u \quad \text{ασθενώς} \ .$$

Για την απόδειξη της ισχυρής σύγκλισης βασιζόμαστε στο θεώρημα της επόμενης ενότητας το οποίο και θα αποδείξουμε.

4.2 Το λήμμα Aubin-Lions

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την αναφορά και την απόδειξη ενός θεωρήματος συμπάγειας που είναι γνωστό στη μελέτη μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων εξέλιξης , διότι μας επιτρέπει να διαχειριστούμε πιο εύκολα τους μη γραμμικούς όρους όταν ακολουθούμε προσεγγιστικές μεθόδους όπως με την μέθοδο Galerkin πιο πριν ή σε κάποιο ασυμπτωτικό όριο. Στο σημείο αυτό όμως να τονίσουμε ότι η (u_n) στο θεώρημα είναι μια τυχαία ακολουθία και δεν έχει σχέση με τις προσεγγίσεις Galerkin .
Το θεώρημα αυτό αποδείχθηκε την δεκατία του 1960 από τους Aubin και Lions, όπου την ίδια περίοδο σε παρόμοιο συμπέρασμα κατάληξε και ο Dubinskii για διανυσματικές συναρτήσεις. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι και ο Simon επέκτεινε το συμπέρασμα των πρώτων για μη ανακλαστικούς χώρους Banach.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.1. ***Λήμμα Aubin-Lions (απλή εκδοχή)***
Έστω $T \in (0,\infty)$ και ας είναι $p,q>1$. Αν η ακολουθία (u_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στον $L^q(0,T;V)$ και οι μερικές παράγωγοι είναι ομοιόμορφα φραγμένες στον $L^p(0,T;V^*)$,δηλαδή ισχύει ότι

$$||u_n||_{L^q(0,T;V)} + ||\partial_t u_n||_{L^p(0,T;V^*)} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

τότε υπάρχει υπακολουθία (u_{n_j}) και u στον $L^q(0,T;H(\mathbb{T}^3))$ ώστε

$$u_{n_j} \to u \text{ ισχυρά στον } L^q(0,T;H(\mathbb{T}^3)) \ .$$

Απόδειξη.
Θεωρούμε $k \in \mathbb{N}$ και την απεικόνιση $t \to \langle u_n(t), b_k \rangle_{L^2}$ όπου b_k ιδιοσυνάρτηση του τελεστή Stokes που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_k όπως έχουμε ορίσει σε προηγούμενο κεφάλαιο.
Η απεικόνιση αυτή είναι ασθενώς διαφορίσιμη με ασθενή παράγωγο την $\langle \partial_t u_n, b_k \rangle_{L^2}$ σχεδόν παντού στο $[0,T]$ και είναι καλά ορισμένη στον L^p .

Συνεπώς σύμφωνα με την Πρόταση 1.8.2 η $\langle u_n(s), b_k\rangle_{L^2}$ είναι απόλυτα συνεχής και ισχύει ότι :

$$\langle u_n(s), b_k\rangle = \langle u_n(s^*), b_k\rangle + \int_{s^*}^{s} \langle \partial_t u_n, b_k\rangle \ dt$$

για $s,\ s^* \in [0, T]$.

Λόγω της συνέχειας που αναφέραμε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για ολοκληρώματα από το οποίο παίρνουμε σαν αποτέλεσμα ότι υπάρχει $s^* \in [0, T]$ τέτοιο ώστε

$$\langle u_n(s^*), b_k\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \langle u_n, b_k\rangle \ dt \ .$$

Μπορούμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα $\langle u_n(s), b_k\rangle$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[0,T]} |\langle u_n(s), b_k\rangle| &\le |\langle u_n(s^*), b_k\rangle| + \left|\int_{s^*}^{s} \langle \partial_t u_n, b_k\rangle \ dt\right| \\
&\le \frac{1}{T}\int_0^T \|u_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|b_k\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \ dt + \int_0^T \|\partial_t u_n\|_{V^*}\|b_k\|_V \ dt \ .
\end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της ανίσωσης Hölder σε συνδιασμό με το γεγονός ότι $\|b_k\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} = 1$ και $\|b_k\|_V = \sqrt{\lambda_k}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&\le \frac{1}{T}\left(\int_0^T \|u_n\|_H^q \ dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{q}}} \ dt\right)^{1-\frac{1}{q}} + \sqrt{\lambda_k}\left(\int_0^T \|\partial_t u_n\|_{V^*}^p \ dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}} \ dt\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{T} \ \|u_n\|_{L^q(0,T;H)} \ T^{1-\frac{1}{q}} + \sqrt{\lambda_k} \ \|\partial_t u_n\|_{L^p(0,T;V^*)} \ T^{1-\frac{1}{p}} \\
&\le c_1 + \sqrt{\lambda_k} \ c_2 \ .
\end{aligned}$$

Ορίζοντας

$$P_k u_n = \sum_{j=1}^{k} \langle u_n, b_j\rangle b_j$$

τότε $P_k u_n \in C([0,T];H)$ και ισχύει ότι

$$\sup_{s\in[0,T]} \|P_k u_n(s)\|_H \leq \sum_{j=1}^{k} c_1 + \sqrt{\lambda_j}\, c_2 \leq k(c_1 + \sqrt{\lambda_k}\, c_2) \tag{4.4}$$

καθώς η ακολουθία των ιδιοτιμών (λ_j) είναι αύξουσα.

Ισχυρισμός 1 : Για κάθε k η ακολουθία $(P_k u_n)$ έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στον $C([0,T];P_k H)$.

Ας είναι $k \in \mathbb{N}$. Αφού $P_k H$ είναι πεπερασμένης διάστασης αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής.
Από την (4.4) έπεται ότι η ακολουθία είναι ομοιόμορφα φραγμένη και πρέπει μόνο να ελέγξουμε αν είναι ισοσυνεχής.
Αφού ο χώρος $P_k H$ είναι πεπερασμένης διάστασης οι νόρμες $\|\cdot\|_H$ και $\|\cdot\|_{V^*}$ είναι ισοδύναμες στον $P_k H$. Έτσι

$$\begin{aligned}
\|P_k u_n(t_2) - P_k u_n(t_1)\|_H &= \|\int_{t_1}^{t_2} \partial_t P_k u_n(s)\, ds\|_H \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t P_k u_n(s)\|_H\, ds \\
&\leq c_k \int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t P_k u_n(s)\|_{V^*}\, ds \\
&\leq c_k \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t P_k u_n(s)\|_{V^*}^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{t_1}^{t_2} ds\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leq \tilde{c}_k |t_2 - t_1|^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της ανισότητας Hölder και ότι η $\|\partial_t P_k u_n\|_{L^p(t_1,t_2;V^*)}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Arzela- Ascoli 1.3.1 ώστε να αποδειχθεί ο πιο πάνω ισχυρισμός.

Ισχυρισμός 2 : Η (u_n) έχει υπακολουθία Cauchy στον $L^q(0,T;H)$.

Για την ύπαρξη μιας τέτοιας υπακολουθίας χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 1.8.3 όπου επιλέγουμε μια , και για λόγους ευκολίας την ονομάζουμε και

αυτή (u_n), τέτοια ώστε για κάθε k η $P_k u_n$ συγκλίνουσα στον $L^q(0,T;H)$.
Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι είναι Cauchy στον $L^q(0,T;H)$, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ να υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$\int_0^T \|u_n(s) - u_m(s)\|_H^q \, ds < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N. \tag{4.5}$$

Θεωρούμε $\epsilon > 0$. Για σταθερό $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^T \|P_k u_n(s) - u_n(s)\|_H^q \, ds < \delta, \quad \forall n \geq k. \tag{4.6}$$

Αυτό συμβαίνει καθώς γνωρίζουμε ότι $\|u_n\|_{L^q(0,T;V)} \leq C$ και

$$\langle \nabla b_j, \nabla b_k \rangle = \langle -\Delta b_j, b_k \rangle = \lambda_j \langle b_j, b_k \rangle = \lambda_j \delta_{jk}$$

άρα

$$\begin{aligned} C &\geq \int_0^T \|\nabla u_n(s)\|_{L^2}^q \, ds \\ &= \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\langle u_n(s), b_j \rangle|^2 \right)^{\frac{q}{2}} ds \\ &\geq \int_0^T \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_j |\langle u_n(s), b_j \rangle|^2 \right)^{\frac{q}{2}} ds. \end{aligned}$$

Όμως η ακολουθία των ιδιοτιμών (λ_j) είναι αύξουσα , συνεπώς

$$\begin{aligned} C &\geq \lambda_{k+1}^{\frac{q}{2}} \int_0^T \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} |\langle u_n(s), b_j \rangle|^2 \right)^{\frac{q}{2}} ds \\ &\geq \lambda_{k+1}^{\frac{q}{2}} \int_0^T \|P_k u_n(s) - u_n(s)\|_{L^2}^q \, ds. \end{aligned}$$

Αφού $\lambda_k \to \infty$ όσο το $k \to \infty$ επιλέγοντας αρκετά μεγάλο k τέτοιο ώστε $C\lambda_{k+1}^{-\frac{q}{2}} < \delta$ αποδεικνύεται η σχέση (4.6) που ζητούσαμε.
Επίσης η ακολουθία $(P_k u_n)$ για το k που επιλέξαμε παραπάνω είναι Cauchy

στον $L^q(0,T;H)$, δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^T \|P_k u_n(s) - P_k u_m(s)\|^q \, ds < \delta$$

για όλα τα $n, m > n_0$.
Από την τριγωνική ανισότητα θα πάρουμε

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|_{L^q(0,T;H)} &= \|u_n - P_k u_n + P_k u_n - P_k u_m + P_k u_m - u_m\|_{L^q(0,T;H)} \\
&\leq \|u_n - P_k u_n\|_{L^q(0,T;H)} + \|P_k u_n - P_k u_m\|_{L^q(0,T;H)} + \|P_k u_m - u_m\|_{L^q(0,T;H)} \\
&< 3\delta^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $\delta = \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^q$ παίρνουμε την (4.5) .
Συνεπάγεται ότι u_n είναι Cauchy στον $L^q(0,T;H)$ και πρέπει να συγκλίνει ισχυρά σε κάποια $v \in L^q(0,T;H)$.

□

4.3 Ύπαρξη ασθενών λύσεων στον $\mathbb{T}^3$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3.1. *(Hopf)*
Για κάθε $u_0 \in H(\mathbb{T}^3)$ υπάρχει τουλάχιστον μια ολική ως προς το χρόνο α-σθενής λύση u της εξίσωσης Navier- Stokes η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη u_0.

Απόδειξη.
Βήμα 1 : Οι λύσεις της εξίσωσης Galerkin υπάρχουν τουλάχιστον τοπικά ως προς το χρόνο.
Θεωρούμε την $n-$ τάξης Galerkin εξίσωση

$$\partial_t u_n - \Delta u_n + P_n[(u_n \cdot \nabla)u_n] = 0 \tag{4.7}$$

$$u_n(0) = P_n u_0 \tag{4.8}$$

και αναζητούμε λύση u_n της μορφής

$$u_n(x,t) = \sum_{j=1}^{n} c_j^n(t) b_j(x), \quad b_j \in \mathcal{N}$$

όπου $\left\{c_j^n\right\}$ είναι βαθμωτές συναρτήσεις του χρόνου και $\left\{b_j\right\}$ ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Stokes όπως τις έχουμε ορίσει.
Για να εξακριβώσουμε ποια είναι η λύση u_n αρκεί να βρούμε τις συναρτήσεις c_j^n. Έτσι αν στην εξίσωση Galerkin πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο με την b_k και ολοκληρώσουμε στον τόρο $\mathbb{T}^3$, τότε

$$\int_{\mathbb{T}^3} \partial_t u_n \cdot b_k(x)\ dx - \int_{\mathbb{T}^3} \Delta u_n \cdot b_k(x)\ dx + \int_{\mathbb{T}^3} P_n[(u_n \cdot \nabla) u_n] \cdot b_k(x)\ dx = 0.$$

Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση u_n τη μορφή που δώσαμε πιο πάνω σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $Ab_j = -\Delta b_j = \lambda_j b_j$ θα πάρουμε ότι

$$\int_{\mathbb{T}^3} (\sum_{j=1}^{n} \partial_t (c_j^n) b_j) \cdot b_k(x)\ dx + \int_{\mathbb{T}^3} (\sum_{j=1}^{n} c_j^n(t) \lambda_j b_j) \cdot b_k(x)\ dx$$
$$+ \int_{\mathbb{T}^3} P_n \left[(\sum_j c_j^n(t) b_j \cdot \nabla) \sum_i c_i^n(t) b_i \right] \cdot b_k(x)\ dx = 0.$$

Συνεπώς

$$\sum_j \partial_t (c_j^n) \langle b_j, b_k \rangle_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \sum_j \lambda_j c_j^n(t) \langle b_j, b_k \rangle_{L^2(\mathbb{T}^3)}$$
$$+ \sum_{i,j} c_i^n c_j^n \langle P_n (b_j \cdot \nabla) b_i, b_k \rangle_{L^2(\mathbb{T}^3)} = 0\ .$$

Ορίζουμε για ευκολία

$$B_{ijk} = \langle (b_j \cdot \nabla) b_i, b_k \rangle\ .$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\langle P_n v, b_k \rangle = \langle v, b_k \rangle, \quad \forall v \in L^2,$$

συνεπώς

$$\sum_j \partial_t(c_j^n)\langle b_j, b_k\rangle_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \sum_j \lambda_j c_j^n(t)\langle b_j, b_k\rangle_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \sum_{i,j} c_i^n c_j^n B_{ijk} = 0.$$

Από την ορθοκανονικότητα των $\{b_k\}$ στον L^2 οδηγούμαστε σε ένα σύστημα n διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}c_k^n(t) = -\lambda_k c_k^n(t) - \sum_{i,j} B_{ijk}c_i^n(t)c_j^n(t) \\ c_k^n(0) = \langle u_0, b_k\rangle,\ \ k = 1,2,..,n \end{cases} .$$

Η αρχική συνθήκη στο σύστημα προκύπτει από

$$\begin{aligned} u_n(0) = P_n u_0 &= P_n \sum_{k=1}^{\infty}\langle u_0, b_k\rangle b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\langle u_0, b_k\rangle b_k \quad . \end{aligned}$$

Από τη θεωρία των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων το σύστημα έχει μοναδική λύση $c(t) = [c_1^n(t), ..., c_n^n(t)]$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[0, T_n)$ όπου $0 < T_n \le \infty$.

Βήμα 2 : Θα δείξουμε ότι $T_n = +\infty\ \forall n$ μέσω της εκτίμησης ενέργειας.

Γνωρίζουμε ήδη την ύπαρξη της u_n σε κάποιο διάστημα της μορφής $[0, T_n)$.
Ας είναι $s \in (0, T_n)$. Θα πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης Galerkin με τη $u_n(s)$ και στη συνέχεια θα ολοκληρώσουμε ως προς x ώστε να προκύψει η L^2 νόρμα. Έτσι

$$\int_{\mathbb{T}^3} \partial_t u_n(s)\cdot u_n(s)\ dx - \int_{\mathbb{T}^3} \Delta u_n(s)\cdot u_n(s)\ dx + \int_{\mathbb{T}^3} P_n(u_n\cdot\nabla)u_n(s)\cdot u_n(s)\ dx = 0\ .$$

Δηλαδή

$$\langle \partial_t u_n(s), u_n(s)\rangle - \langle \Delta u_n(s), u_n(s)\rangle + \langle P_n(u_n\cdot\nabla)u_n(s), u_n(s)\rangle = 0\ .$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\langle \partial_t u_n(s), u_n(s)\rangle &= \int_{\mathbb{T}^3} \partial_t u_n(s)\cdot u_n(s)\ dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^3} \partial_t |u_n|^2\ dx\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(s)\|^2\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}-\langle \Delta u_n(s), u_n(s)\rangle &= \int_{\mathbb{T}^3} \nabla u_n\cdot \nabla u_n\ dx\\ &= \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u_n|^2\ dx\\ &= \|\nabla u_n(s)\|^2.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.1.1 θα πάρουμε

$$\begin{aligned}\langle P_n(u_n\cdot\nabla)u_n(s), u_n(s)\rangle &= \langle (u_n\cdot\nabla)u_n(s), P_n u_n(s)\rangle\\ &= \langle (u_n\cdot\nabla)u_n(s), u_n(s)\rangle\\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Προκύπτει ότι για $s\in(0,T_n)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|\nabla u_n(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = 0 \tag{4.9}$$

δηλαδή η νόρμα των u_n δεν αυξάνεται στο χρόνο.
Αφού

$$u_n(x,t) = \sum_{j=1}^{n} c_j^n(t) b_j(x)$$

και $\{b_j\}$ ορθοκανονική βάση στον L^2 τότε

$$\|u_n(t)\|^2_{L^2} = \sum_j |c_j^n(t)|^2\ .$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (4.9) ως προς το χρόνο έχουμε

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_n(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ ds + \int_0^t \|\nabla u_n(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ ds = 0,$$

δηλαδή

$$\frac{1}{2}\|u_n(t)\|^2_{L^2} + \int_0^t \|\nabla u_n(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ ds = \frac{1}{2}\|u_n(0)\|^2_{L^2} \le \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2}.$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{2}\sup\|u_n(t)\|^2_{L^2} \le \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2}$$

και

$$\int_0^\infty \|\nabla u_n(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ ds \le \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2}.$$

Με άλλα λόγια αποδείξαμε ότι u_n ομοιόμορφα φραγμένη στον $L^\infty(0,\infty;H(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(0,\infty;V(\mathbb{T}^3))$.
Σε συνδυασμό με το ότι $\|u_n\|^2_{L^2}$ φραγμένη ως προς το χρόνο έχουμε και ότι $\{c_j^n(s)\}$ ομοιόμορφα φραγμένο ως προς s, δηλαδή δεν απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο και φτάνουμε στο ζητούμενο ότι $T_n = \infty$.

Βήμα 3 : Φράσουμε $\partial_t u_n$ σε κατάλληλη νόρμα ώστε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα Aubin - Lions (Θεώρημα 4.2.1). Ο χώρος αυτός είναι ο $L^{\frac{4}{3}}(0,T;V^*)$ γιατί γνωρίζουμε ότι για τις ασθενείς λύσεις οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι ως προς το χρόνο ανήκουν στο χώρο $L^{\frac{4}{3}}(0,T;V^*)$.

Ας είναι $\phi \in V$. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο στον L^2 της εξίσωσης Galerkin με την ϕ :

$$\langle \partial_t u_n, \phi\rangle_{L^2} + \langle P_n(u_n\cdot\nabla)u_n, \phi\rangle_{L^2} - \langle \Delta u_n, \phi\rangle_{L^2} = 0.$$

Άρα

$$\langle \partial_t u_n, \phi \rangle_{L^2} = \langle \Delta u_n, \phi \rangle_{L^2} - \langle (u_n \cdot \nabla) u_n, P_n \phi \rangle_{L^2}.$$

Για να βρεθεί το ζητούμενο φράγμα για $\partial_t u_n$ αρκεί να εκτιμήσουμε τη νόρμα στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης.
Ξεκινώντας έχουμε

$$|\langle \Delta u_n, \phi \rangle| = |\langle \nabla u_n, \nabla \phi \rangle| \leq \|\nabla u_n\|_{L^2} \|\phi\|_V \ .$$

Επίσης κάνοντας χρήση της ανίσωσης Hölder (1.2) για τους χώρους L^3, L^2, L^6 και της ανίσωσης παρεμβολής :

$$\begin{aligned} |\langle (u_n \cdot \nabla) u_n, P_n \phi \rangle| &\leq \|u_n\|_{L^3} \|\nabla u_n\|_{L^2} \|P_n \phi\|_{L^6} \\ &\leq c \|u_n\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_{L^6}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_n\|_{L^2} \|P_n \phi\|_{L^6} \ . \end{aligned}$$

Από την εμβάπτιση Sobolev (Θεώρημα 1.6.3)

$$\|w\|_{L^6} \leq c \|w\|_{\dot{H}^1} = c \|w\|_V = c \|\nabla w\|_{L^2}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} |\langle (u_n \cdot \nabla) u_n, P_n \phi \rangle| &\leq c \|u_n\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_{L^6}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_n\|_{L^2} \|P_n \phi\|_{L^6} \\ &\leq c \|u_n\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_{L^6}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_n\|_{L^2} \|P_n \phi\|_V \\ &\leq c \|u_n\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_n\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_n\|_{L^2} \|P_n \phi\|_V \\ &= c \|u_n\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_n\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|\phi\|_V \end{aligned}$$

διότι $P_n \phi = \phi$ για $\phi \in V$.
Δηλαδή

$$\|\partial_t u_n\|_{V^*} \leq \|\nabla u_n\|_{L^2} + c \|u_n\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_n\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \ .$$

Έτσι για $T \in (0, \infty)$ παίρνουμε

$$\int_0^T \|\partial_t u_n\|_{V^*}^{\frac{4}{3}}\ ds \le c \int_0^T \|\nabla u_n(s)\|_{L^2}^{\frac{4}{3}}\ ds + c \int_0^T \|u_n\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \|\nabla u_n(s)\|_{L^2}^2\ ds\ .$$

Από την ανίσωση Hölder (1.2) για τον πρώτο όρο έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\nabla u_n(s)\|_{L^2}^{\frac{4}{3}}\ ds &\le \left(\int_0^T 1^3\ ds\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^T \|\nabla u_n(s)\|_{L^2}^{\frac{4}{3}\frac{3}{2}}\ ds\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= T^{\frac{1}{3}} \left[\left(\int_0^T \|\nabla u_n(s)\|_{L^2}^2\ ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{4}{3}} \\
&= T^{\frac{1}{3}} \|u_n(s)\|_{L^2(0,T;V)}^{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}$$

Για τον δεύτερο όρο ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u_n\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \|\nabla u_n(s)\|_{L^2}^2\ ds &\le \|u_n\|_{L^\infty(0,T;H)}^{\frac{2}{3}} \int_0^T \|\nabla u_n(s)\|_{L^2}^2\ ds \\
&= \|u_n\|_{L^\infty(0,T;H)}^{\frac{2}{3}} \|u_n(s)\|_{L^2(0,T;V)}^2\ .
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\partial_t u_n\|_{V^*}^{\frac{4}{3}}\ ds &\le cT^{\frac{1}{3}} \|u_n(s)\|_{L^2(0,T;V)}^{\frac{4}{3}} + c\|u_n\|_{L^\infty(0,T;H)}^{\frac{2}{3}} \|u_n(s)\|_{L^2(0,T;V)}^2 \\
&\le cT^{\frac{1}{3}} \|u_0\|^{\frac{4}{3}} + c\|u_0\|^{\frac{8}{3}} \text{ (από το βήμα 2).}
\end{aligned}$$

Δηλαδή βρήκαμε σταθερά C η οποία όμως εξαρτάται από το $T \in (0, \infty)$ για την οποία ισχύει

$$\|\partial_t u_n\| \le C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Βήμα 4 : Εξάγουμε μια συγκλίνουσα υπακολουθία της οποίας το όριο είναι ασθενής λύση της εξίσωσης Navier -Stokes .

Από το βήμα 2 της απόδειξης έχουμε ότι u_n φραγμένη στον $L^\infty(0,\infty;H)$ συνεπώς χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.7.2 σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.8.3 για τον χώρο $L^\infty(0,T;H(\mathbb{T}^3))$ γνωρίζοντας ότι έχουμε εφοδιάσει τον H με την L^2 νόρμα από τον ορισμό του, υπάρχει υπακολουθία $\{u_{n_j}\}_j$ τέτοια ώστε

$$u_{n_j} \xrightarrow{* \text{ - ασθενώς}} u \quad \text{στον } L^\infty(0,T;H(\mathbb{T}^3)) \tag{4.10}$$

Επίσης κάνοντας χρήση των ίδιων θεωρημάτων και αφού $L^2(0,T;L^2)$ είναι χώρος Hilbert ,που μας δίνει ότι $*$ - ασθενής σύγκλιση και η ασθενής σύγκλιση είναι ισοδύναμες θα υπάρχει υπακολουθία $\{u_{n_{j,l}}\}_l$ τέτοια ώστε

$$\nabla u_{n_{j,l}} \xrightarrow{\text{ασθενώς}} v$$

και θα δείξουμε ότι στην πραγματικότητα

$$\nabla u_{n_{j,l}} \xrightarrow{\text{ασθενώς}} \nabla u \quad \text{στον } L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3)) \ . \tag{4.11}$$

Αυτό συμβαίνει καθώς αν θεωρήσουμε την i - συνιστώσα της συνάρτησης v θα έχουμε

$$\int_{\mathbb{T}^3} (\partial_i u_n)\phi \ dx = -\int_{\mathbb{T}^3} u_n \partial_i \phi \ dx$$

για συνάρτηση δοκιμής $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^3)$.
Παίρνοντας το όριο στα δύο μέλη έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{T}^3} v_i \phi \ dx = -\int_{\mathbb{T}^3} u \partial_i \phi \ dx$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο ότι $v = \nabla u$.
Επίσης από το Θεώρημα Aubin - Lions 4.2.1 θεωρώντας από το προηγούμενο βήμα ότι $\partial_t u_n$ φραγμένη στον $L^{\frac{4}{3}}(0,T;V^*)$ και u_n φραγμένη στον $L^2(0,T;V)$ έπεται ότι

$$u_n \to u \quad \text{ισχυρά στον } L^2(0,T;H(\mathbb{T}^3)) \ . \tag{4.12}$$

Απομένει να δείξουμε ότι το όριο της υπακολουθίας είναι ασθενής λύση της εξίσωσης Navier - Stokes , δηλαδή να ικανοποιείται η (3.2). Από τις Προτάσεις 3.2.1 και 3.2.4 αρκεί να δείξουμε ότι για συνάρτηση δοκιμής που ανήκει στον $\tilde{D}_\sigma$ της μορφής $\phi(x,t) = a(t)b(x)$ ότι ισχύει η (3.5) , δηλαδή

$$-\int_0^\infty \langle u, \partial_t \phi \rangle + \int_0^\infty \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle + \int_0^\infty \langle (u \cdot \nabla) u, \phi \rangle = \langle u_0, \phi(0) \rangle.$$

Γνωρίζουμε ότι οι προσεγγίσεις Galerkin ικανοποιούν την (4.2) , δηλαδή

$$-\int_0^\infty \langle u_n, \partial_t \phi \rangle \, dt + \int_0^\infty \langle \nabla u_n, \nabla \phi \rangle \, dt + \int_0^\infty \langle (u_n \cdot \nabla) u_n, \phi \rangle \, dt = \langle u_0, \phi(0) \rangle.$$

Αν αφήσουμε $n \to \infty$ και χρησιμοποιήσουμε τις συγκλίσεις (4.11) , (4.12) που βρήκαμε πριν θα πάρουμε

$$-\int_0 \langle u_n, \partial_t \phi \rangle \, dt \to -\int_0 \langle u, \partial_t \phi \rangle \, dt$$

και

$$\int_0 \langle \nabla u_n, \nabla \phi \rangle \, dt \to \int_0 \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \, dt.$$

Συνεπώς απομένει να δείξουμε τη σύγκλιση για τον μη γραμμικό όρο. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(u_n \cdot \nabla) u_n - (u \cdot \nabla) u &= (u_n \cdot \nabla) u_n - (u \cdot \nabla) u_n + (u \cdot \nabla) u_n - (u \cdot \nabla) u \\ &= ((u_n - u) \cdot \nabla) u_n + (u \cdot \nabla)(u_n - u)\ .\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_0 \langle (u_n \cdot \nabla) u_n - (u \cdot \nabla) u, \phi \rangle \, dt \to 0$$

ή ισοδύναμα

$$\int_0 \langle ((u_n - u) \cdot \nabla) u_n, \phi \rangle \, dt \to 0 \text{ και } \int_0^T \langle (u \cdot \nabla)(u_n - u), \phi \rangle \, dt \to 0.$$

Από την (4.3) και την ισχυρή σύγκλιση (4.12) μπορούμε να εξάγουμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \langle((u_n - u)\cdot\nabla)u_n, \phi\rangle \, dt\right| &\le c_\phi \int_0^T \|u_n - u\|_{L^2}\|\nabla u_n\|_{L^2} \\ &\le c_\phi \|u_n - u\|_{L^2(0,T;L^2)}\|\nabla u_n\|_{L^2(0,T;L^2)} \\ &\to 0\end{aligned}$$

καθώς η νόρμα $\|\nabla u_n\|_{L^2(0,T;L^2)}$ είναι φραγμένη και $\|u_n - u\|_{L^2(0,T;L^2)} \to 0$ καθώς $n \to \infty$ από (4.12).
Για το ολοκλήρωμα

$$\int_0^T \langle(u\cdot\nabla)(u_n - u), \phi\rangle \, dt$$

αφού

$$\int_0^T \langle\partial_j(u_n - u)_i, u_j\phi_i\rangle \, dt \to 0$$

για όλα τα $1 \le i, j \le 3$ με $u_j\phi_i \in L^2$ και $n \to \infty$ έχοντας κάνει χρήση της (4.11) τότε

$$\int_0^T \langle(u\cdot\nabla)(u_n - u), \phi\rangle \, dt \to 0 \ .$$

Από την Πρόταση 3.2.4 ικανοποιεί την (3.5) για όλες τις συναρτήσεις δοκιμής $\phi \in D_\sigma$.
Επίσης λόγω της σύγκλισης (4.10) και (4.11) από την οποία έπεται ότι u_n ασθενώς συγκλίνουσα στον $L^2(0, T; V(\mathbb{T}^3))$ συμπεραίνουμε ότι
$u \in L^2(0, T; V(\mathbb{T}^3)) \cap L^\infty(0, T; H(\mathbb{T}^3))$.
Συνεπώς η u είναι μια ολική ως προς το χρόνο ασθενής λύση.

□

4.4 Ισχυρή ανίσωση ενέργειας και ασθενείς λύσεις Leray-Hopf

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε μια άλλη κατηγορία ασθενών λύσεων της εξίσωσης , για τις οποίες θα αποδείξουμε ότι ικανοποιούν μια επιπλέον ανίσωση η οποία δεν έχει αποδειχθεί ακόμη αν ισχύει για τις γενικές ασθενείς λύσεις , δηλαδή αυτές που ορίσαμε στην ενότητα 3.1 .

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.4.1. *Η u ονομάζεται ασθενής λύση Leray- Hopf της εξίσωσης Navier- Stokes αν είναι ασθενής λύση η οποία ικανοποιεί την ισχυρή ανίσωση ενέργειας*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \int_s^t \|\nabla u\|^2 \le \frac{1}{2}\|u(s)\|^2, \quad \forall t > s \tag{4.13}$$

για $s = 0$ *και για σχεδόν όλα τα* $s \in (0, \infty)$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την ισχυρή ανίσωση ενέργειας η οποία είναι προϋπόθεση για τις ασθενείς λύσεις Leray-Hopf που ορίσαμε παραπάνω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.4.1. *Η ασθενής λύση u της εξίσωσης Navier-Stokes όπως την κατασκευάσαμε στο Θεώρημα 4.3.1 ικανοποιεί την ισχυρή ανίσωση ενέργειας*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \int_s^t \|\nabla u\|^2 \le \frac{1}{2}\|u(s)\|^2, \quad \forall t > s$$

για σχεδόν όλα τα $s \in [0, \infty)$ *συμπεριλαμβανομένου του* $s = 0$ *, δηλαδή είναι μια ασθενής λύση Leray- Hopf .*

Στην πραγματικότητα ικανοποιείται η ανισότητα ενέργειας

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u\|^2 \le \frac{1}{2}\|u(0)\|^2, \quad \forall t > 0 \tag{4.14}$$

Απόδειξη.

Από το βήμα 4 της απόδειξης του Θεωρήματος 4.3.1 δείξαμε ότι ισχύει η (4.12) και αν θεωρήσουμε διάστημα $[0, T]$ με $T > 0$, θα έχουμε ότι

$$u_n \to u \quad \text{ισχυρά στον} \quad L^2(0, T; H(\mathbb{T}^3)) \ ,$$

δηλαδή θα ισχύει

$$\int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \, dt \to 0 \ , \tag{4.15}$$

αφού όπως αναφέραμε στην ενότητα 2.1 έχουμε εφοδιάσει τον H με τη νόρμα L^2.
Ορίζουμε

$$F_n(t) = \|u_n(t) - u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \ .$$

Τότε έχουμε

$$F_n \to 0 \quad \text{στον } L^1(0,T) \ . \tag{4.16}$$

Από τη θεωρία μέτρου αφού ισχύει η (4.16) τότε η $F_n(t)$ θα έχει υπακολουθία η οποία θα συγκλίνει στο 0 για σχεδόν όλα τα $t \in [0,T]$.
Δηλαδή αν για ευκολία ονομάσουμε την υπακολουθία ξανά F_n τότε

$$F_n(t) = \|u_n(t) - u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \to 0 \quad \text{για σχεδόν όλα τα } t \in [0,T] \ ,$$

συνεπώς

$$\|u_n(t) - u(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \to 0 \quad \text{για σχεδόν όλα τα } t \in [0,T].$$

Καταλήγοντας

$$u_n(t) \to u(t) \quad \text{ισχυρά στον } L^2(\mathbb{T}^3) \ ,$$

δηλαδή έπεται ότι για σχεδόν όλα τα $s, t \in [0,\infty)$ ισχύουν

$$u_n(s) \to u(s) \quad \text{και} \quad u_n(t) \to u(t) \quad \text{ισχυρά στον } L^2(\mathbb{T}^3). \tag{4.17}$$

Επίσης

$$\|u_n(s)\|^2 \to \|u(s)\|^2 \quad \text{και} \ \|u_n(t)\|^2 \to \|u(t)\|^2$$

και για την αρχική συνθήκη, αφού $u_n(0) = P_n(0)$ θα έχουμε

$$\|u_n(0)\|^2 \to \|u(0)\|^2.$$

Από την εξίσωση (3.1)

$$\frac{1}{2}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_s^t \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} dx = \frac{1}{2}\|u_n(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}$$

και εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη $\liminf$ για $n \to \infty$ έχουμε

$$\frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \|u_n(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \liminf_{n\to\infty} \int_s^t \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ dx = \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \|u_n(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \quad (4.18)$$

Γνωρίζουμε επίσης από την (4.11) ότι $\nabla u_n \xrightarrow{\text{ασθενώς}} \nabla u$ στον $L^2(s, t; L^2(\mathbb{T}^3))$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.7.1 θα πάρουμε ότι

$$\int_s^t \|\nabla u\|^2_{L^2}\ dx \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|^2_{L^2}\ . \quad (4.19)$$

Συνεπώς από την (4.18) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_s^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ dx \leq \frac{1}{2}\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}$$

για σχεδόν όλα τα s και σχεδόν όλα τα $t > s$.
Απομένει να δείξουμε ότι η ανίσωση αυτή ισχύει για σχεδόν όλα τα s και όλα τα $t > s$.
Σταθεροποιούμε ένα $s > 0$ για το οποίο ισχύει

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_s^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ dx \leq \frac{1}{2}\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}$$

για σχεδόν όλα τα $t > s$. Επιλέγοντας οποιοδήποτε $t > s$, υπάρχει ακολουθία $t_1 \to t$ όπου

$$\frac{1}{2}\|u(t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_s^{t_1} \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ dx \leq \frac{1}{2}\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ .$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\int_s^{t_1} \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ dx \to \int_s^{t} \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ dx\ .$$

Ακόμη από το Θεώρημα 3.1.1 η u είναι L^2 ασθενώς συνεχείς ως προς το χρόνο, άρα

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \liminf_{t_1 \to t} \|u(t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ .$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_s^{t} \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ dx &\leq \liminf_{t_1 \to t}\left(\frac{1}{2}\|u(t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_s^{t_1} \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ dx\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\ .\end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.4.1. *Για τις ασθενείς λύσεις όπως τις κατασκευάσαμε στο Θεώρημα 4.3.1 ισχύει ότι*

$$u(t) \to u(0) \quad \textit{ισχυρά}\ \ L^2(\mathbb{T}^3)\ \ \textit{όσο}\ \ t \to 0^+ \tag{4.20}$$

Απόδειξη.
Από το προηγούμενο θεώρημα παρατηρούμε ότι ισχύει η ανίσωση ενέργειας (4.14)

$$\|u(t)\|^2 + 2\int_s^t \|\nabla u\|^2 \ \leq \|u(0)\|^2\ ,$$

συνεπώς ισχύει και ότι

$$\limsup_{t \to 0^+} \|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2\ .$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $u(t) \xrightarrow{\text{ασθενώς}} u(0)$ για $t \to 0^+$, άρα από το Θεώρημα 1.7.1 προκύπτει ότι

$$\|u(0)\|_{L^2} \leq \liminf_{n \to 0^+} \|u(t)\|_{L^2} \ .$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$u(t) \xrightarrow{\text{ασθενώς}} u(0) \quad \text{και } \|u(t)\|_{L^2} \to \|u(0)\|_{L^2} \qquad \text{όσο } t \to 0^+ \ .$$

Από τη συναρτησιακή ανάλυση γνωρίζουμε ακόμη ότι αν H είναι ένας χώρος Hilbert και $(x_n) \in H$ τότε $x_n \xrightarrow{\text{ισχυρά}} x$ αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{\text{ασθενώς}} x$ και $\|x_n\| \to \|x\|$.
Έτσι έπεται ότι $u(t) \xrightarrow{\text{ισχυρά}} u(0)$ στον $L^2(\mathbb{T}^3)$ όσο $t \to 0^+$.

$\square$

Βιβλιογραφία

[1] James C. Robinson , José L. Rodrigo , Witold Sadowski , *The Three Dimensional Navier - Stokes Equations* , Cambridge University Press, 2016

[2] Lawrence C. Evans , *Partial Differential Equations* , Second Edition , American Mathematical Society, 2010

[3] Haim Brezis , *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* , Springer , 2010

[4] Emil Wiedermann , *Lecture Notes : Navier - Stokes Equations*, Universität Ulm , 2018-2019

[5] Γεράσιμος Μπαρμπάτης, *Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης*, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ , 2020

[6] Lawrence C. Evans , Ronald F. Gariepy , *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992

[7] C. Foias , O. Manley , R. Rosa , R. Temam , *Navier - Stokes Equations and Turbulence* ,Cambridge University Press , 2004

[8] Walter Rudin , *Real and Complex Analysis* , Third Edition , McGraw - Hill International Editions , 1987

[9] David G. Logan , *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά* , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2019

[10] Loukas Grafakos , *Classical Fourier Analysis* ,Third Edition, Springer, 2014

[11] James C. Robinson , *The Navier–Stokes regularity problem* , Philosophical Transactions of the Royal Society A , 2020

[12] William P. Ziemer , *Weakly Differentiable Fumctions , Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variations* , Springer - Verlag New York Inc., 1989

[13] N.L. Carothers, *Real Analysis*, Cambridge University Press, 2000

[14] Santosh Pathak , L^∞- *Estimates of the Solution of the Navier- Stokes Equations for Periodic Initial Data* , University of New Mexico UNM Digital Repository, 2019

[15] Wojciech S. Ozański, Benjamin C. Pooley ,*Leray's fundamental work on the Navier–Stokes equations: a modern review of "Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace"* ,2017