ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

# Βελτιωμένες $L^p$ ανισότητες Hardy

**Νίκος-Παύλος Κανάκης**

Μεταπτυχιακή Διατριβή

**Επιβλέπων καθηγητής : Γεράσιμος Μπαρμπάτης**

Νοέμβριος 2022

# Περιεχόμενα

# Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω με θέρμη τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Γεράσιμο Μπαρμπάτη για την τιμή που μου έκανε να με αναλάβει για την επίβλεψη και εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας μου. Επίσης θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για τις γνώσεις που μεταλαμπάδευσε μέσα από τις συναντήσεις μας στον υπέρχο κόσμο των μαθηματικών, την υπομονή του αλλά κύριως τον προσωπικό του χρόνο που διέθεσε και την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε απλόχερα. Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Στρατή Ιωάννη καθώς και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Τύρο Κώνσταντίνο για την τιμή και την συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή . Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τους γονείς μου και το ευρύτερο οικογενειακό περιβάλλον που με στήριξαν σε όλη αυτή την προσπάθεια για να ολοκληρώσω το μεταπτυχιακό μου αλλά και την κοπέλα μου Kitti που γνώρισα φέτος η οποία με στήριξε και με ενθάρρυνε για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας. Κλείνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον φίλο μου Διονύση για τις χρήσιμες συμβούλες του και την βοήθεια του όποτε τον χρειάστηκα .

**Αφιερωμένο στα δυο μου ανήψια , Βασίλη και Γιώργο**

# Περίληψη

Στην εργασία αυτή ασχολούμαστε με βελτιωμένες $L^p$ ανισότητες Hardy με βέλτιστες σταθερές. Στο Κεφάλαιο 2 διατυπώνουμε βασικές έννοιες (όπως πχ χώροι Sobolev) και κάποια βασικά θεωρήματα (π.χ Coarea formula) τα οποία θα χρησιμοποιηθούν σαν εργαλεία για τις αποδείξεις μας. Στο Κεφάλαιο 3 αποδεικνύουμε τις κλασικές ανισότητες Hardy στις δύο απλούστερες εκδοχές για την περίπτωση $p = 2$. Η μεν πρώτη περίπτωση αφορά απόσταση από σημείο και η δε δεύτερη απόσταση από το σύνορο. Και στις δύο περιπτώσεις αποδεικνύουμε ότι οι αντίστοιχες σταθερές είναι βέλτιστες. Στο Κεφάλαιο 4 αρχικά διατυπώνουμε και μελετάμε την βασική γεωμετρική υπόθεση για τα $K, \Omega$ η οποία είναι απαραίτητη για τη συνέχεια και δείχνουμε μια ισοδύναμη της σε πιο απλή μορφή. Στην συνέχεια αποδεικνύουμε βελτιωμένες $L^p$ ανισότητες Hardy για γενικό $p > 1$ καθώς και για γενικότερη συνάρτηση απόστασης. Διακρίνουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις, $p \neq k$ και $p = k$ όπου $k$ η συνδιάσταση της επιφάνειας από την οποία λαμβάνουμε την απόσταση. Στην τελευταία ενότητα αποδεικνύουμε τα βέλτιστα των σταθερών που εμφανίζονται στις βελτιωμένες $L^p$ ανισότητες Hardy.

# Abstract

In this thesis we focus on improved to $L^p$ Hardy inequalities with best constants. First of all, in Chapter 2 we state basic concepts such as (Sobolev Spaces) and important Theorems like (Coarea Formula) , which we use them like tools to help in our proofs. In Chapter 3 , we proved The Classical Hardy Inequalities in the simple cases when $p = 2$. The first case is about distance from a point and the other one is distance from the boundary. In both cases we show that the constants are the optimal. In Chapter 4 , firstly we study the main geometric assumption concerning $K, \Omega$ and through a Lemma we give an equivalent formulation. Next, we proved the improved $L^p$ Hardy inequalities for any $p > 1$ and general case for the distance function $d(x)$ . We distinct two cases, one is when $p \neq k$ and the other is when $p = k$, where $k$ is the codimension of the smooth surface $K$, which we consider the distance of $x \in \Omega$. In last section of this chapter, we prove the optimality of the constants which appearing in $L^p$ improved Hardy inequalities.

# 1 Εισαγωγή

Η ακόλουθη εργασία ασχολείται με τις ανισότητες Hardy. Ο Godfrey Harold Hardy γεννήθηκε στις 7 Φεβρουαρίου του 1877 και πέθανε στις 1 Δεκεμβρίου 1947 ήταν ένας Άγγλος μαθηματικός οποίος ασχολήθηκε ενεργά στην Θεωρία Αριθμών και την Μαθηματική Ανάλυση με σπουδαία αποτελέσματα. Ειδικότερα, οι ανισότητες Hardy και οι βελτιωμένες ανισότητες έχουν πολλές εφαρμογές στις Μερικές διαφορικές εξισώσεις και στην μη γραμμική αναλύση. Οι απλούστερες περιπτώσεις των ανισότητων Hardy για $n \geqslant 3$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ είναι οι ακόλουθες:

(α)

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geqslant \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2 dx}$$

Η σταθερά $C = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ είναι η βέλτιστη.

(β) Αν επιπλέον το $\Omega$ είναι κυρτό τότε έχουμε την ανίσωση

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geqslant \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{u^2}{d^2} dx$$

Σε αυτή την περίπτωση η σταθερά $C = \frac{1}{4}$ είναι η βέλτιστη . Η γενική μορφή της ανισότητας Hardy που μας ενδιαφέρει δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geqslant C \int_\Omega \frac{|u|^p}{d^p} dx$$

Στην παραπάνω ανίσωση ισχύει ότι $p > 1$ , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $d(x) = dist(x, K)$ εκφράζει την συνάρτηση απόσταση και το $K$ είναι λεία κλειστή επιφάνεια συνδιάστασης $k$, $1 \leqslant k \leqslant N$ η οποία ισχύει $\forall u \in C_c^\infty(\Omega)$. Σημαντικό ρόλο έχει η γεωμετρία των $\Omega, K$ και μάλιστα $K \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$. Αντικαθιστώνας για $p = 2$ στην γενική μορφή παίρνουμε τις απλούστερες μορφές ανισοτήτων Hardy που αναφέραμε παραπάνω όπου η μεν πρώτη ισχύει για $k = N$ τότε $K = \{0\}$(σημείο) , ενώ η δεύτερη για $k = 1$ τότε $K = \partial\Omega$(σύνορο). Οι αποδείξεις των υπολογισμών των βέλτιστων σταθερών στις απλές αυτές περιπτωσεις είναι γραμμένες εκτενώς στο Κεφάλαιο 3.

# 2 Βασικές έννοιες

Σε αυτή την ενότητα δίνουμε κάποιες βασικούς ορισμούς και διατυπώσεις Θεωρημάτων που θα χρειαστούν παρακάτω στην εργασία.

## 2.1 Χώροι Sobolev

Έστω $\Omega$ ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ορίζουμε

$$L^p_{loc} = \{u : \Omega \to \mathbb{C} : u \text{ μετρήσιμη και } u \in L^p(U), \text{για κάθε } U \subset\subset \Omega\}$$

Ορίζουμε επίσης

$$C_c^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} : u \in C^\infty(\Omega) \text{ και } supp(u) \subset\subset \Omega\}$$

σδσδαδ

**Ορισμός 2.1.1** *(Ασθενής παράγωγος). Λέμε ότι η συνάρτηση $u \in L^1_{loc}$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη αν υπάρχουν συναρτήσεις $g_1, g_2, ...g_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ τέτοιες ώστε*

$$\int_\Omega u(x)\phi_{x_i} dx = -\int_\Omega g_i(x)\phi(x)dx$$

*για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$ και για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Αν η $u$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη τότε οι συναρτήσεις $g_1, g_2, ...g_n$ είναι μοναδικές (σύνολα μέτρου μηδέν). Αυτές τις $g_1, g_2, ...g_n$ τις ονομάζουμε ασθενείς μερικές παραγώγους της $u$ και τις συμβολίζουμε $u_{xi}$.*

**Ορισμός 2.1.2** *{ Χώρος Sobolev} Έστω $\Omega$ ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ , $p \geqslant 1$ . Ορίζουμε*

$$W^{1,p} = \{u \in L^p(\Omega) : u \text{ ασθενώς παραγωγίσιμη και } u_{xi} \in L^p(\Omega)\}$$

Ο $W^{1,p}$ είναι γραμμικός χώρος και ονομάζεται χώρος Sobolev με νόρμα σε αυτόν τον χώρο

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega \Big((|u|^p + |\nabla u|^p)dq\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Ένα βασικό θεώρημα για τον $W^{1,p}$ είναι το ακόλουθο .

**Θεώρημα 2.1.1** *Ο $W^{1,p}$ εφοδιασμένος με την παραπάνω νόρμα είναι χώρος Banach.*

**Ορισμός 2.1.3** *Ο χώρος* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *ορίζεται ως κλειστή θήκη του* $C_c^\infty(\Omega)$ *ως προς την νόρμα* $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Με την βοήθεια του παραπάνω ορισμού έχουμε την ακόλουθη χρήσιμη πρόταση .

**Πρόταση 2.1.1** *Έστω* $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, *είναι η κλειστή θήκη του* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *και* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *ο χώρος Sobolev του* $\mathbb{R}^n$. *Τότε ισχύει*

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

## 2.2 Τύπος συνεμβαδού

**Θεώρημα 2.2.1** *{Τύπος συνεμβαδού-Coarea Formula} Έστω* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *μία Lipschitz συνεχής συνάρτηση και υποθέτωντας οτι για κάθε* $r \in \mathbb{R}$ *έχουμε το επίπεδο* $\{x \in \mathbb{R}^n | u(x) = r\}$ *είναι λείο , (ν-1) διάστασης υπερεπίπεδο στον* $\mathbb{R}^n$. *Έστω ακόμα συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *συνεχής και Lebesque ολοκληρώσιμη.Τότε έχουμε*

$$\int_{R^n} f|Du|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{\{u=r\}} f dS \right) dr$$

# 3 Οι κλασικές ανισότητες Hardy

Σε αυτο το κεφάλαιο αποδεικνύουμε τις κλασικές ανισότητες Hardy. Ειδικότερα, στην ενότητα 3.1 θα διατυπώσουμε και αποδείξουμε την ανισότητα Hardy για την απόσταση από σημείο. Στην ενότητα 3.2 διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την ανισότητα Hardy για την απόσταση από το σύνορο.

## 3.1 Ανισότητα Hardy με απόσταση από σημείο

**Θεώρημα 3.1.1** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 3$. Για κάθε $u \in C_c^\infty(\Omega)$, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα Hardy*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geqslant \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} dx$$

*Η σταθερά $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ είναι η βέλτιστη .*

**Απόδειξη.** Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} dx \geqslant 0 \tag{1}$$

Η απόδειξη θα γίνει σε δύο μέρη . Στο πρώτο μέρος θα υποθέσουμε συναρτήσεις που ορίζονται σε όλο το χωρίο $\Omega$ και μηδενίζονται κοντά στο 0 , δηλάδη επιλέγουμε συνάρτήσεις της μορφής

$$u \in C_c^\infty(\Omega \setminus \{0\}).$$

Ορίζουμε

$$v(x) = u(x)|x|^{\frac{n-2}{2}}$$

η οποία γράφεται αλλιώς

$$u(x) = \frac{v(x)}{|x|^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Υπολογίζουμε στην (1) ξεχωριστά κάθε όρο. Οπότε

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 dx &= \int_\Omega \left|\nabla(v\cdot |x|^{\frac{-(n-2)}{2}})\right|^2 dx \\
&= \int_\Omega (|x|^{\frac{-(n-2)}{2}})^2(\nabla v)^2 dx - \int_\Omega (n-2)\nabla v\cdot xv|x|^{-(n-2)-2}dx \\
&\quad + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega v^2|x|^{-n}dx \\
&= \int_\Omega \frac{(\nabla v)^2}{|x|^{n-2}}dx - \int_\Omega \frac{(n-2)\nabla v\cdot xv}{|x|^n}dx + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{v^2}{|x|^n}dx
\end{aligned}$$

Παρόμοια βήματα έχουμε

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}dx &= -\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{v^2}{|x|^{\frac{2(n-2)}{2}}}\cdot\frac{1}{|x|^2}dx \\
&= -\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{v^2}{|x|^n}dx
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) τους προηγούμενους υπολογισμούς παίρνουμε τελικά την σχέση

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}dx = \int_\Omega \frac{(\nabla v)^2}{|x|^{n-2}} - \int_\Omega \frac{(n-2)\nabla v\cdot xv}{|x|^n}dx$$

Για τον πρώτο όρο στην τελευτάια ισότητα που καταλήξαμε παραπάνω έχουμε ότι

$$\int_\Omega \frac{(\nabla v)^2}{|x|^{n-2}} \geqslant 0$$

Θα αποδείξουμε ότι ο δεύτερος όρος στην τελευταία ισότητα είναι μηδέν. Γνωρίζουμε ότι $v = 0$ πολύ κοντά στο μηδέν και θα εφαρμόσουμε την ταυτότητα του Green. Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ έχει κατεύθυνση προς το εξωτερικό του Ω.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(\frac{1}{2}v^2)\cdot\frac{x}{|x|^n}dx + \int_\Omega \frac{1}{2}v^2 \mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|^{\mathrm{n}}}\right)\mathrm{dx} &= \int_\Omega \frac{1}{2}v^2\frac{x}{|x|^n}\vec{n}dS \\
\int_\Omega \frac{\nabla v\cdot xv}{|x|^n}dx &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} v^2\frac{x}{|x|^n}\vec{n}dS - \frac{1}{2}\int_\Omega v^2\mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|^{\mathrm{n}}}\right)\mathrm{dx}
\end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση το πρώτο δεξί ολοκλήρωμα είναι μηδέν λογώ ότι $v \in C_c^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ . Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι επίσης μηδέν διότι

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|^{\mathrm{n}}}\right) &= \mathrm{div}(\mathrm{x} \cdot |\mathrm{x}|^{-\mathrm{n}}) \\ &= \nabla(|x|^{-n}) \cdot x + |x|^{-n} div x \\ &= -n|x|^{-n-1} \cdot \nabla|x| + |x|^{-n} \cdot n \\ &= -n|x|^{-n-2} \cdot x^2 + n \cdot |x|^{-n} \end{aligned}$$

Τελικά

$$\mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|^{\mathrm{n}}}\right) = -\mathrm{n}|\mathrm{x}|^{-\mathrm{n}} + \mathrm{n}|\mathrm{x}|^{-\mathrm{n}} = 0$$

Επομένως αποδείξαμε την (1) . Στην δεύτερη περίπτωση ορίζουμε συναρτήσεις $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Θεωρούμε συναρτήσεις $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ έτσι ώστε

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & |x| > 2 \end{cases}$$

Έχουμε οτι $|\nabla\phi(x)| \leqslant c$. Κατασκευάζουμε την ακολουθία συναρτήσεων της μορφής

$$\phi_m(x) = \phi(xm).$$

Οπότε

$$\phi_m(x) = \begin{cases} 0, & |xm| < 1 \\ 1, & |xm| > 2 \end{cases}$$

που τελικά γράφεται

$$\phi_m(x) = \begin{cases} 0, & |x| < \frac{1}{m} \\ 1, & |x| > \frac{2}{m} \end{cases}.$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$|\nabla\phi_m(x)| = |\nabla\phi(xm)| = m|\nabla\phi(mx)| \leqslant cm.$$

Χρησιμοποιώντας το πρώτο μέρος της απόδειξης ,δηλαδή αποδείξαμε ότι η ανισότητα Hardy ισχύει για $u(x)$ που έχουν πεδίο ορισμού $C_c^\infty(\Omega \setminus \{0\})$, ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $u_m(x) = u(x)\phi_m(x)$. Οι συναρτήσεις $u_m$ ορίζονται σε όλο το $C_c^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ αφού $u(x)$ ορίζονται σε $C_c^\infty(\Omega \setminus \{0\})$. Για να αποδείξουμε την κλασική ανισότητα Hardy αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx \to \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

και

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u_m^2}{|x|^2} dx \to \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} dx$$

Αρχικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^2 dx &= \int_{|x|<\frac{2}{m}} |\nabla u_m - \nabla u|^2 dx \\ &\leqslant 2\int_{|x|<\frac{2}{m}} |\nabla u_m|^2 dx + 2\int_{|x|<\frac{2}{m}} |\nabla u|^2 dx\end{aligned}$$

Στην παραπάνω ανίσωση το δεύτερο ολοκλήρωμα πάει στο μηδέν. Διότι θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesque. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n = |\nabla u|^2 \cdot \mathbb{1}_{|x|<\frac{2}{n}}$$

Οι συναρτήσεις $f_n$ είναι ολοκληρώσιμες ,

$$f_n \to 0$$

σχεδόν παντού , επιπλέον ισχύει

$$\int_{|x|<\frac{2}{m}} |\nabla u|^2 dx < \infty$$

έτσι ώστε

$$|f_n| \leqslant |\nabla u|^2$$

σχεδόν παντού .Απο το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebessque έχω

$$\int_{|x|<\frac{2}{m}} |\nabla u|^2 dx \to 0.$$

Ακόμη έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{|x|<\frac{2}{m}} |\nabla u_m|^2 dx &= \int_{|x|<\frac{2}{m}} |\nabla(u\phi_m)|^2 dx \\ &= \int_{|x|<\frac{2}{m}} |\phi_m \nabla u + u\nabla\phi_m|^2 dx \\ &\leqslant 2\int_{|x|<\frac{2}{m}} 1\cdot|\nabla u|^2 dx + 2\int_{|x|<\frac{2}{m}} |u|^2|\nabla\phi_m|^2 dx\end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα τείνει στο 0 καθώς $m \to \infty$ εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesque. Για το δεύτερο ολοκλήρωμα θα αποδείξουμε ότι και αυτό πάει στο 0. Έχουμε έστω ένα $M \geqslant 0$ ,τέτοιο ώστε να ισχύει $|u| \leqslant M$ μέσα στο χωρίο $\Omega$ .Τότε

$$\begin{aligned}\int_{|x|<\frac{2}{m}} |u|^2|\nabla\phi_m|^2 dx &\leqslant \int_{|x|<\frac{2}{m}} |M|^2|cm|^2 dx \\ &\leqslant M^2c^2m^2 \int_{|x|<\frac{2}{m}} 1dx \\ &\leqslant M^2m^2c^2V(B(0,\frac{2}{m})) \\ &\leqslant M^2m^2c^2(\frac{2}{m})^nV(B(0,1)) \\ &\leqslant M^2m^2\frac{c}{m^n} \to 0, \text{ καθώς}, m\to\infty\end{aligned}$$

Με παρόμοια βήματα αποδεικνύεται και η

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\int_\Omega \frac{u_m^2}{|x|^2}dx \to \left(\frac{n-2}{n}\right)^2\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}dx.$$

Η απόδειξη είναι πλήρης.

## 3.2 Η ανισότητα Hardy με απόσταση από το σύνορο

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τις ανισότητες Hardy με κύριο ενδιαφέρον όταν παίρνουμε την απόσταση από το σύνορο ενός χωρίου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Έστω $\omega \in S^{n-1}$ . Παρακάτω ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το

$\Omega$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ :

$$\begin{aligned}
\tau_\omega(x) &= inf\{s > 0 : x + s\omega \notin \Omega\} \\
\rho_\omega(x) &= min\{\tau_\omega(x), \tau_{-\omega}(x)\} \\
\beta_\omega(x) &= \frac{1}{2}(\tau_\omega(x) + \tau_{-\omega}(x)) \\
\frac{1}{m^2(x)} &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}} \frac{dS(\omega)}{\rho^2_\omega(x)}
\end{aligned}$$

Επιπλέον ορίζουμε την απόσταση από το σύνορο την ακόλουθη συνάρτηση

$$d(x) = dist(x, \partial\Omega) = \min_{\omega \in S^{n-1}} \tau_\omega(x) = \min_{\omega \in S^{n-1}} \rho_\omega(x)$$

Συμβολίζουμε με $\omega_n$ τον όγκο της μοναδιαίας μπάλας, τότε το εμβαδόν επιφάνειας μοναδιαίας σφαίρας ισούται με

$$\int_{S^{n-1}} dS(\omega) = n \cdot \omega_n$$

Αρχικά αποδεικνύουμε το ακόλουθο Λήμμα .

**Λήμμα 3.2.1** *Για κάθε διάνυσμα* $v \in \mathbb{R}^n$ *ισχύει η ακόλουθη ισότητα*

$$\int_{S^{n-1}} |v \cdot \omega|^2 dS(\omega) = \omega_n |v|^2, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

**Απόδειξη.** Ορίζουμε το ακόλουθο συναρτησοειδές

$$f(v) = \int_{S^{n-1}} |v \cdot \omega|^2 dS(\omega), \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Επιλέγουμε ένα $\overline{v}$ τέτοιο ώστε $|v| = |\overline{v}|$.Τότε υπάρχει $T$ ορθογώνιος πίνακας έτσι ώστε $Tv = \overline{v}$. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $\omega = T\omega'$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
f(\overline{v}) &= \int_{S^{n-1}} |\overline{v} \cdot \omega|^2 dS(\omega) \\
&= \int_{S^{n-1}} |Tv \cdot \omega|^2 dS(\omega) \\
&= \int_{S^{n-1}} |Tv \cdot T\omega'|^2 dS(\omega') \\
&= \int_{S^{n-1}} |v \cdot \omega'|^2 dS(\omega') \\
&= f(v)
\end{aligned}$$

Συνεπώς το $f(v)$ εξαρτάται από το μέτρο του $v$. Ακόμη παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= \int_{S^{n-1}} |\lambda v \cdot \omega|^2 dS(\omega) \\ &= \int_{S^{n-1}} |\lambda|^2 |v \cdot \omega|^2 dS(\omega) \\ &= |\lambda|^2 \int_{S^{n-1}} |v \cdot \omega|^2 dS(\omega) \\ &= |\lambda|^2 f(v) \end{aligned}$$

Ορίζουμε $v^* = (|v|, 0, 0......0)$.Άμεσα έχουμε ότι $|v^*| = |v|$. Οπότε

$$\begin{aligned} f(v) &= f(v^*) \\ &= f(|v|, 0, 0, 0....0) \\ &= f(|v|(1, 0, 0, 0, ...0)) \\ &= |v|^2 f(1, 0, 0, 0...0) \end{aligned}$$

Ορίζουμε $f(1, 0, 0, 0, ..0) = f(e_1)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(f(e_1 + e_2 + ....e_n)) &= \frac{1}{n}(f(e_1) + f(e_2) + ....f(e_n)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{S^{n-1}} |e_k \cdot \omega|^2 dS(\omega) \\ &= \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} |e_k \cdot \omega|^2 dS(\omega) \\ &= \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} |\omega_k|^2 dS(\omega) \\ &= \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} |\omega|^2 dS(\omega) \\ &= \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} 1 dS(\omega) \\ &= \frac{1}{n} \text{ εμβαδόν}(S^{n-1}) \\ &= \frac{1}{n} |S^{n-1}| \\ &= \frac{1}{n} \cdot n\omega_n \\ &= \omega_n \end{aligned}$$

Άρα τελικά έχουμε

$$\int_{S^{n-1}} |v \cdot \omega|^2 dS(\omega) = \omega_n |v|^2$$

Ακόμη αποδεικύνουμε το ακόλουθο Λήμμα .

**Λήμμα 3.2.2** *Έστω* $\rho(t) = \min\{t, 2b - t\}$ . *Τότε*

$$\int_0^{2b} (u'(t))^2 dt \geqslant \frac{1}{4} \int_0^{2b} \frac{u^2(t)}{\rho^2(t)} dt, \quad u \in C_c^\infty((0, 2b))$$

**Απόδειξη.** Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^{2b} (u'(t))^2 dt &\geqslant \int_0^{2b} \{g'(\rho) - (2-1)|g(\rho)|^{\frac{2}{2-1}}\}|u(t)|^2 dt - 2g(b)|u(b)|^2 \\
&\geqslant \int_0^{2b} \{g'(\rho) - |g(\rho)|^2\}|u(t)|^2 dt - 2g(b)|u(b)|^2 \\
&= \int_0^{2b} \{g'(\rho) - g'(\rho) + (\frac{2}{2-1})^{-2}\rho^{-2}\}|u(t)|^2 dt + 2\left(\frac{1}{2}\right) b^{-(2-1)}|u(b)|^2 \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2b} \frac{u^2(t)}{\rho^2(t)} dt + b^{-1}|u(b)|^2 \\
&\geqslant \frac{1}{4} \int_0^{2b} \frac{u^2(t)}{\rho^2(t)} dt
\end{aligned}$$

**Θεώρημα 3.2.1** *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ένα χωρίο .Τότε*

$(a)$ *Ισχύει πάντα* $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geqslant \frac{n}{4} \int_\Omega \frac{u^2(x)}{m^2(x)} dx, \qquad \forall u \in C_c^\infty(\Omega)$

$(b)$ *Αν επιπλέον* $\Omega$ *είναι κυρτό τότε* $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geqslant \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{u^2(x)}{d^2(x)} dx, \qquad \forall u \in C_c^\infty(\Omega)$

**Απόδειξη.** Θα ξεκινήσουμε χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ανίσωση η οποία ισχύει στην μία διάσταση

$$\int_0^{2b} (u'(t))^2 dt \geqslant \frac{1}{4} \int_0^{2b} \frac{u^2(t)}{\rho^2(t)} dt, \forall u \in C_c^\infty((0, 2b)) \tag{3}$$

όπου $\rho(t) = \min\{t, 2b - t\}$.Αρχικά υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^b \left(u'(t) - \frac{u(t)}{2t}\right)^2 dt &= \int_0^b (u'(t))^2 dt - \int_0^b \frac{u(t) \cdot u'(t)}{t} dt + \int_0^b \frac{u^2(t)}{4t^2} dt \\
&= \int_0^b (u'(t))^2 dt - \int_0^b \frac{2u^2(t) - u^2(t)}{4t^2} dt - \frac{u^2(b)}{2b} \\
&= \int_0^b (u'(t))^2 dt - \frac{1}{4} \int_0^b \frac{u^2(t)}{t^2} dt - \frac{u^2(b)}{2b} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Δουλεύοντας ανάλογα στο διάστημα $(b, 2b)$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_b^{2b} \left(u'(t) + \frac{u(t)}{2(2b-t)}\right)^2 dt &= \int_b^{2b} (u'(t))^2 dt + \int_b^{2b} \frac{u'(t)\cdot u(t)}{2b-t} dt + \int_b^{2b} \frac{u^2(t)}{4(2b-t)^2} dt \\
&= \int_b^{2b} (u'(t))^2 dt - \int_b^{2b} \frac{2u^2(t) - u^2(t)}{4(2b-t)^2} - \frac{u^2(b)}{2b} \\
&= \int_b^{2b} (u'(t))^2 dt - \frac{1}{4}\int_b^{2b} \frac{u^2(t)}{(2b-t)^2} dt - \frac{u^2(b)}{2b} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Προσθέτωντας κατα μέρη τις ανισότητες συμπεραίνουμε την ακόλουθη ανισότητα

$$\int_0^{2b} (u'(t))^2 dt \geqslant \frac{1}{4}\int_0^{2b} \frac{u^2(t)}{\rho^2(t)} dt + \frac{u^2(b)}{b}.$$

Για $x \in \Omega$ και $\omega \in S^{n-1}$ ορίζουμε την γραμμή

$$l_\omega(x) = \{x + t\omega : t \in \mathbb{R}\}.$$

Εφαρμόζοντας στην ανισότητα (3) σε για μια συνάτηση $g(t)$ σε ολοκληρώνουμε σε ένα διάστημα $(a, b)$

$$\int_a^b |g'(t)|^2 dt \geqslant \frac{1}{4}\int_a^b \frac{g^2(t)}{\rho^2(t)} dt, \qquad \rho(t) = \min\{t, 2b - t\}$$

Αντικαθιστώντας την $g(t) = u(x + t\omega)$ και ολοκληρώνοντας στο $\Omega$ έχουμε τις ακόλουθες πράξεις

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u'(x + t\omega)|^2 dt &\geqslant \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{u^2(x + t\omega)}{\rho_\omega^2(x + t\omega)} dt \\
\int_\Omega ((\nabla u)(x + t\omega)\cdot\omega)^2 dt &\geqslant \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{u^2(x + t\omega)}{\rho_\omega^2(x + t\omega)} dt
\end{aligned}$$

Θεωρώντας σαν ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και εφαρμόζοντας τα προηγούμενα σε κάθε συνεκτική συνιστώσα $l_\omega(x) \cap \Omega$ έχουμε τελικά

$$\int_{l_\omega(x)\cap\Omega} (\nabla(u(x + t\omega)\cdot\omega))^2 dt \geqslant \frac{1}{4}\int_{l_\omega(x)\cap\Omega} \frac{u^2(x + t\omega)}{\rho_\omega^2(x + t\omega)} dt.$$

Ολοκληρώντας στην κατεύθυνση του $\omega^\perp$ έχουμε

$$\int_\Omega (\nabla u(x)\cdot\omega)^2 dx \geqslant \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{u^2(x)}{\rho_\omega^2(x)} dx$$

Ολοκληρώντας για $\omega \in S^{n-1}$ και κάνοντας εναλλαγή των ολοκληρωμάτων έχουμε

$$\int_{\Omega}\int_{S^{n-1}} (\nabla u(x) \cdot \omega)^2 dS(\omega)dx \geqslant \frac{1}{4}\int_{\Omega}\int_{S^{n-1}} \frac{dS(\omega)}{\rho_{\omega}^2(x)} u^2(x)dx$$

Εφαρμόζοντας την σχέση (2) και όπως ορίσαμε το $m^2(x)$ έχουμε τελικα

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\int_{S^{n-1}} (\nabla u(x) \cdot \omega)^2 dS(\omega)dx &\geqslant \int_{\Omega}\int_{S^{n-1}} \frac{dS(\omega)}{\rho_{\omega}^2(x)} u^2(x)dx \\
\int_{\Omega} \omega_n |\nabla u|^2 dx &\geqslant \frac{1}{4}\int_{\Omega} \frac{n\omega_n}{m^2(x)} u^2(x)dx \\
\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &\geqslant \frac{n}{4}\int_{\Omega} \frac{u^2(x)}{m^2(x)} dx.
\end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε την δεύτερη ανίσωση θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 3.2.3** *Αν $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό τότε ισχύει*

$$\frac{n}{m^2(x)} = \frac{1}{\omega_n}\int_{S^{n-1}} \frac{dS(\omega)}{\rho_{\omega}^2(x)} \geqslant \frac{1}{d(x)^2}, x \in \Omega$$

**Απόδειξη.** Έστω $x \in \Omega$.Επιλέγουμε $y \in \partial\Omega$ έτσι ώστε να ισχύει $|y-x| = d(x)$ και ορίζουμε το υπερεπίπεδο στήριξης $P_y = \{y \in \partial\Omega :< y, y-x >= 0\}$. Ακόμη ορίζουμε το θετικό ημισφαίριο $S^+ = \{\omega \in S^{n-1} : \omega \cdot (y-x) > 0\}$ και για κάθε $\omega \in S^+$ ορίζουμε

$$\sigma_{\omega} = \frac{|y-x|^2}{\omega \cdot (y-x)}$$

έτσι ώστε $x + \sigma_{\omega}\omega \in P_y$.Επειδή το $\Omega$ είναι κυρτό έχουμε την σχέση

$$\tau_{\omega}(x) \leqslant \sigma_{\omega}.$$

Έχουμε τότε

$$
\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \frac{1}{\rho_\omega^2(x)} dS(\omega) &= \int_{S^+} \frac{1}{\rho_\omega^2(x)} dS(\omega) + \int_{S^-} \frac{1}{\rho_\omega^2(x)} dS(\omega) \\
&\geqslant \int_{S^+} \frac{1}{\tau_\omega^2(x)} dS(\omega) + \int_{S^-} \frac{1}{\tau_{-\omega}^2(x)} dS(\omega) \\
&\geqslant 2 \int_{S^+} \frac{1}{\tau_\omega^2(x)} dS(\omega) \\
&\geqslant 2 \int_{S^+} \frac{1}{\sigma_\omega^2} dS(\omega) \\
&= 2 \int_{S^+} \frac{(\omega \cdot (y-x))^2}{|y-x|^4} dS(\omega) \\
&= \frac{2}{d(x)^4} \int_{S^+} |(y-x) \cdot \omega|^2 dS(\omega) \\
&= \frac{2}{d(x)^4} \omega_n |y-x|^2 \\
&= \frac{\omega_n}{d(x)^2}.
\end{aligned}
$$

Για το (b) στο προηγούμενο θεώρημα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 dx &\geqslant \frac{n}{4} \int_\Omega \frac{u^2(x)}{m^2(x)} dx \\
&\geqslant \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{n}{m^2(x)} u^2(x) dx \\
&\geqslant \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \frac{dS(\omega)}{\rho_\omega^2(x)} u^2(x) dx \\
&\geqslant \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{1}{d^2(x)} u^2(x) dx \\
&\geqslant \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{u^2(x)}{d^2(x)} dx
\end{aligned}
$$

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο, να αναφέρουμε ότι στις εργασίες [3] και [4] αποδεικνύονται βελτιωμένες εκδοχές των θεωρημάτων 3.1.1 και 3.2.1 (β) όπου στο δεξί μέλος των ανισοτήτων προστίθενται κάποιοι μη αρνητικοί όροι .

# 4 Βελτιωμένες $L^p$ ανισότητες Hardy

Σε αυτή την ενότητα, αρχικά στην 4.1 αναφερόμαστε στην Γεωμετρική υπόθεση των $K, \Omega$ διατυπώνοντας την βασική συνθήκη που υποθέτουμε ότι ισχύει και αποδεικνύουμε μέσω ενός λήμματος μια απλούστερη μορφή. Στις επόμενες δύο παραγράφους, αφενός στην πρώτη δείχνουμε κάποιες ανισότητες Hardy που βελτιώνουν τις ήδη υπάρχουσες ($p > 1$) και αφετέρου γενικεύουν τις ανισότητες αυτές. Στο τελευταίο μέρος αποδεικνύουμε το βέλτιστο των σταθερών για τις βελτιωμένες $L^p$ ανισότητες Hardy.Τα παραπάνω αποτελέσματα να αναφέρουμε ότι αποδείχθηκαν στην εργασία [2].

## 4.1 Η Γεωμετρική υπόθεση στα $K$ και $\Omega$

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε στις απαραίτητες γεωμετρικές υποθέσεις για τα $K$, $\Omega$. Το $\Omega$ το θεωρούμε ένα χωρίο του $\mathbb{R}^N$ και το $K$ μια λεία κλειστή επιφάνεια συνδιάστασης $k = 2, 3, ...N - 1$. Επιπλέον στην περίπτωση $k = N$ το $K$ το θεωρούμε ένα σημείο($\{0\}$). Ενώ στην περίπτωση $k = 1$ θεωρούμε $K = \partial\Omega$. Επιπλέον ορίζουμε την συνάρτηση απόσταση $d(x)$ ως εξής

$$d(x) = dist(x, K) \qquad x \in \Omega$$

Ισχύει για αυτή την συνάρτηση

$$|d(x) - d(y)| \leqslant |x - y|, \quad x, y \in \Omega$$

Δηλαδή η $d(x)$ είναι μια Lipschitz συνεχής με σταθερά 1 χωρίς να είναι απαραίτητα $C^1$ συνάρτηση. Από Θεώρημα Rademacher γνωρίζουμε ότι μια Lipschitz είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού και η παράγωγος της ταυτίζεται με την ασθενή παράγωγο και ισχύει η σχέση $|\nabla d| \leqslant 1$. Η βασική γεωμετρική συνθήκη που υποθέτουμε ότι ισχύει είναι :

$$(\mathrm{C}) \qquad p \neq k \quad \text{και} \quad \Delta_p d^{\frac{p-k}{p-1}} \leqslant 0 \quad \text{στο} \quad \Omega \setminus K$$

όπου $\Delta_p$ είναι ο p-Laplace συντελεστής με τύπο

$$\Delta_p w = \mathrm{div}(|\nabla \mathrm{w}|^{\mathrm{p}-2}\nabla \mathrm{w}). \tag{4}$$

Η παραπάνω συνθήκη (C) περιγράφεται ισοδύναμα σε μια πιο απλή μορφή μέσω του παρακάτω λήμματος.

**Λήμμα 4.1.1** *Η συνθήκη*

$$(C) \qquad p \neq k \quad \text{και} \quad \Delta_p d^{\frac{p-k}{p-1}} \leqslant 0 \quad \text{στο} \quad \Omega \setminus K.$$

*γράφεται ισοδύναμα στην ακόλουθη απλή μορφή*

$$(p-k)(d\Delta d + 1 - k) \leqslant 0 \qquad \text{στο} \quad \Omega \setminus K.$$

**Απόδειξη.** Εφαρμόζουμε τον τύπο (4) για την συνάρτηση $w = d^{\frac{p-k}{p-1}}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
\Delta_p d^{\frac{p-k}{p-1}} &= \mathrm{div}(|\nabla \mathrm{d}^{\frac{p-k}{p-1}}|^{p-2}\nabla \mathrm{d}^{\frac{p-k}{p-1}}) \\
&= \mathrm{div}\Big(\Big|\frac{p-k}{p-1}\Big|^{p-2}|\mathrm{d}^{\frac{-k+1}{p-1}}|^{p-2}|\nabla \mathrm{d}|^{p-2}\frac{p-k}{p-1}\mathrm{d}^{\frac{-k+1}{p-1}}\nabla \mathrm{d}\Big) \\
&= \Big|\frac{p-k}{p-1}\Big|^{p-2}\frac{p-k}{p-1}\mathrm{div}\Big(\mathrm{d}^{\frac{(-k+1)(p-2)}{p-1}}\mathrm{d}^{\frac{-k+1}{p-1}}\nabla \mathrm{d}\Big) \\
&= \frac{p-k}{p-1}\Big|\frac{p-k}{p-1}\Big|^{p-2}\mathrm{div}\Big(\mathrm{d}^{\frac{(-k+1)(p-2+1)}{p-1}}\nabla \mathrm{d}\Big) \\
&= \frac{p-k}{p-1}\Big|\frac{p-k}{p-1}\Big|^{p-2}\mathrm{div}\Big(\mathrm{d}^{-k+1}\nabla \mathrm{d}\Big) \\
&= \frac{p-k}{p-1}\Big|\frac{p-k}{p-1}\Big|^{p-2}\Big(\nabla d^{-k+1}\nabla d + d^{-k+1}\mathrm{div}(\nabla \mathrm{d})\Big) \\
&= \frac{p-k}{p-1}\Big|\frac{p-k}{p-1}\Big|^{p-2}\Big((-k+1)d^{-k+1-1}\nabla d\nabla d + d^{-k+1}\Delta d\Big) \\
&= \frac{p-k}{p-1}\Big|\frac{p-k}{p-1}\Big|^{p-2}d^{-k}(d\Delta d + (1-k)|\nabla d|^2)
\end{aligned}$$

Αφού από υπόθεση $\Delta_p d^{\frac{p-k}{p-1}} \leqslant 0$ δηλαδή

$$\frac{p-k}{p-1}\Big|\frac{p-k}{p-1}\Big|^{p-2}d^{-k}(d\Delta d + (1-k)|\nabla d|^2) \leqslant 0$$

Και εφόσον $|\nabla d| = 1$ , $p > 1$ και $d(x)$ είναι η συνάρτηση απόσταση, η παραπάνω ανισότητα γράφεται τελικά

$$(p-k)(d\Delta d + 1 - k) \leqslant 0.$$

Στην παρακάτω πρόταση αποδεικνύουμε πως ικανοποιείται η παραπάνω απλούστερη συνθήκη στις δύο περιπτώσεις πρώτον για $k = N$ και δεύτερον για $k = 1$.

**Πρόταση 4.1.1** *(i) Αν* $K = \{0\}$, $d(x) = |x|$ *τότε*

$$|x|\Delta|x| + 1 - N = 0$$

*(ιι) Αν $\Omega$ κυρτό, $K = \partial\Omega$ , τότε*

$$\Delta d \leqslant 0$$

**Απόδειξη.** (ι )Έχουμε

$$\begin{aligned}
|x|\Delta(|x|) + 1 - N &= |x|\mathrm{div}(\nabla|\mathrm{x}|) + 1 - \mathrm{N} \\
&= |x|\mathrm{div}(|\mathrm{x}|^{-1}\mathrm{x}) + 1 - \mathrm{N} \\
&= |x|\left(x\nabla(|x|)^{-1} + |x|^{-1}\mathrm{div}\mathrm{x}\right) + 1 - N \\
&= |x|\left(-x|x|^{-2}\nabla|x| + |x|^{-1}\mathrm{div}\mathrm{x}\right) + 1 - N \\
&= |x|\left(-x|x|^{-2}x|x|^{-1} + |x|^{-1}\mathrm{div}\mathrm{x}\right) + 1 - N \\
&= |x|\left(-x^2|x|^{-3} + |x|^{-1}\mathrm{div}\mathrm{x}\right) + 1 - N \\
&= -x^2|x|^{-2} + \mathrm{div}\mathrm{x} + 1 - \mathrm{N} \\
&= -|x|^{2-2} + \mathrm{div}\mathrm{x} + 1 - \mathrm{N} \\
&= -1 + \mathrm{div}\mathrm{x} + 1 - \mathrm{N} \\
&= \mathrm{div}\mathrm{x} - \mathrm{N} \\
&= N - N \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ιι) Γνωρίζουμε οτι αν έχουμε μία συνάρτηση $g(x)$ η οποία είναι $C^2$ και κοίλη τότε υπολογίζοντας τον Εσσιανό πίνακα έχουμε

$$\sum_i g_{x_i x_i} \leqslant 0$$

δηλαδή $\Delta g \leqslant 0$. Αυτή η παρατήρηση θα την χρησιμοποιήσουμε στο ακόλουθο Λήμμα που μας αποδεικνύει το (ιι) της πρότασης .

**Λήμμα 4.1.2** *Κάθε κυρτό χωρίο $\Omega$ είναι ασθενώς κυρτό χωρίο .*

**Απόδειξη.** Δείχνουμε αρχικά ότι η συνάρτηση απόσταση $d(x)$ είναι κοίλη συνάρτηση. Πράγματι , έστω $0 < \lambda < 1$ και x,y δυο σημεία του $\Omega$. Επιλέγουμε ενα τρίτο σημείο z στο $\Omega$ ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δηλαδή

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y.$$

Επιλέγουμε $z_0 \in \partial\Omega$ και ορίζουμε

$$d(z) = |z - z_0|$$

Ορίζουμε ακόμα $T_{z_0}$ το υπερεπίπεδο που περέχει το $z_0$ και είναι ορθογώνια στο διάνυσμα $z - z_0$. Ακόμα ορίζουμε $x_0, y_0$ τις ορθογώνιες προβολές των $x, y$ πάνω στον χώρο $T_{z_0}$. Από την κυρτότητα του $\Omega$ έχουμε

$$\begin{aligned}
d(z) &= |z - z_0| \\
&= |\lambda x + (1-\lambda)y - \lambda x_0 - (1-\lambda)y_0| \\
&= |\lambda(x - x_0) + (1-\lambda)(y - y_0)| \\
&= |\lambda||x - x_0| + |1-\lambda||y - y_0| \\
&= \lambda|x - x_0| + (1-\lambda)|y - y_0| \\
&\geqslant \lambda d(x) + (1-\lambda)d(y)
\end{aligned}$$

Το οποίο αποδεικνύει οτι $d(x)$ είναι κοίλη .

Στη συνέχεια κανονικοποιούμε την $d(x)$ χρησιμοποιώντας ομαλοποιητές δηλαδή ορίζουμε την ακολουθία ομαλών συναρτήσεων, ώστε για κάθε $\epsilon > 0$

$$d_\epsilon(x) = d * \eta_\epsilon(x) = \int_\Omega d(x-y)\eta_\epsilon(x)dy, \qquad x \in \Omega^{2\epsilon},$$

όπου $supp(\eta_\epsilon) \subset B_\epsilon$ και

$$\Omega^{2\epsilon} := \{x \in \Omega, d(x) > 2\epsilon\}.$$

Τότε $d_\epsilon \in C^\infty(\Omega^{2\epsilon})$.Γνωρίζοντας ότι η συνάρτηση απόσταση $d(x)$ είναι κοίλη, δείχνουμε οτι το $\Omega^{2\epsilon}$ είναι κυρτό . Πράγματι, αν $x, y \in \Omega^{2\epsilon}$ και $\lambda \in (0,1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
d(\lambda x + (1-\lambda)y) &\geqslant \lambda d(x) + (1-\lambda)d(y) \\
&\geqslant \lambda 2\epsilon + (1-\lambda)2\epsilon \\
&= 2\epsilon
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια δείχνουμε ότι η $d_\epsilon$ είναι κοίλη .Πράγματι , για $x, z \in \Omega^{2\epsilon}$ και $\lambda \in (0,1)$

έχουμε

$$\begin{aligned}
d_\epsilon(\lambda x + (1-\lambda)z) &= \int_\Omega d(\lambda x + (1-\lambda)z - y)\eta_\epsilon(y)dy \\
&= \int_\Omega d(\lambda x + (1-\lambda)z - \lambda y - (1-\lambda)y)\eta_\epsilon(y)dy \\
&= \int_\Omega d(\lambda(x-y) + (1-\lambda)(z-y))\eta_\epsilon(y)dy \\
&\geqslant \int_\Omega [\lambda d(x-y) + (1-\lambda)d(z-y)]\eta_\epsilon(y)dy \\
&= \int_\Omega \lambda d(x-y)\eta_\epsilon(y)dy + \int_\Omega (1-\lambda)d(z-y)\eta_\epsilon(y)dy \\
&= \lambda \int_\Omega d(x-y)\eta_\epsilon(y)dy + (1-\lambda)\int_\Omega d(z-y)\eta_\epsilon(y)dy \\
&= \lambda d_\epsilon(x) + (1-\lambda)d_\epsilon(z)
\end{aligned}$$

Άρα η $d_\epsilon(x)$ είναι κοίλη , $C^2$ χρησιμοποιώντας την παρατήρηση πριν την διατύπωση του Λήμματος έχουμε

$$-\Delta d_\epsilon(x) \geqslant 0, \quad x \in \Omega^{2\epsilon}.$$

Έστω $0 \leqslant \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ και επιλέγουμε $\epsilon_0$ τέτοιο ώστε $supp(\phi) \subset \Omega^{2\epsilon_0}$. Τότε για $\epsilon < \epsilon_0$ και κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$\begin{aligned}
-\Delta d_\epsilon(x) &\geqslant 0 \\
-\int_\Omega \Delta d_\epsilon(x)\phi(x)dx &\geqslant 0 \\
\int_\Omega \nabla d_\epsilon(x)\cdot\nabla\phi(x)dx - \int_{\partial\Omega} \nabla d_\epsilon(x)\phi(x)\vec{n}\,dx &\geqslant 0 \\
\int_\Omega \nabla d_\epsilon(x)\cdot\nabla\phi(x)dx &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο $\epsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο του λήμματος . Αφού η $d(x)$ είναι κοίλη στο κυρτό χωρίο $\Omega$ τότε

$$\Delta d \leqslant 0.$$

## 4.2 Η Βελτιωμένη $L^p$ ανισότητα Hardy

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε μια ενναλακτική απόδειξη της βελτιωμένης ανισότητας Hardy. Βασιζόμαστε στην χρησιμοποιήση ενός κατάλληλου διανυσματικού πεδίου κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς. Είναι απαραίτητο για αυτή την προσέγγιση ότι όλοι οι όροι της βελτιωμένης ανισότητας του Hardy να είναι ομογενείς. Αυτό μας δίνει το πλεονέκτημα ότι μας επιτρέπει να υπολογίσουμε σταθερές για τον εναπομείναντα όρο. Αντιθέτως , η παραπάνω διαδικασία δεν δουλεύει για μη ομογενείς ανισότητες. Διατηρούμε τις γεωμετρικές υποθέσεις που περιγράφηκαν στην 4.1. Στο παρακάτω θεώρημα ασχολούμαστε με την περιπτωση $p \neq k$, ένω στο Θεώρημα 4.2.2 ασχολούμαστε με την περίπτωση $p = k$ . Οι αποδείξεις του βέλτιστου των σταθερών παρουσιάζονται στην ενότητα 4.3. Ξεκινάμε διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας το ακόλουθο θεώρημα .

**Θεώρημα 4.2.1** *Υποθέτουμε οτι ικανοποείται η συνθήκη για το $C$. Τότε, υπάρχει ένα $D_0 = D_0(k, p) \geq \sup_\Omega d(x)$ τέτοιο ώστε για κάθε $D \geq D_0$ να έχουμε την ανισότητα*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geq |H|^p \int_\Omega \frac{|u|^p}{d^p} dx + B \int_\Omega \frac{|u|^p}{d^p} X^2(d/D) dx \tag{5}$$

*η οποία ισχύει*

$$B = \frac{p-1}{2p} |H|^{p-2}.$$

*Αν επιπλέον ισχύει $2 \leq p < k$, τότε μπορούμε να πάρουμε για $D_0 = \sup_{x\in\Omega} d(x, K)$.*

**Απόδειξη.** Έστω T είναι ένα διανυσματικό πεδίο στο Ω. Για οποιαδήποτε $u \in C_C^\infty(\Omega \setminus K)$ ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες όπου ο συνοριακός όρος στην παραγοντική ολοκλήρωση στο Ω μηδενίζεται και στην συνέχεια χρησιμοποιούμε την ανισότητα *Hölder* και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{div} T|u|^p dx &= -\int_\Omega (T\cdot\nabla(|u|^p))dx + \int_{\partial\Omega} T\cdot |u|^p \vec{n}\, dx \\
&= -\int_\Omega (p|u|^{p-2}u\nabla u)\cdot T dx \\
&= -p\int_\Omega (T\cdot\nabla u)|u|^{p-2}u dx \\
&\leqslant p\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_\Omega \Big|T|u|^{p-2}u\Big|^{\frac{p}{p-1}} dx\Big)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leqslant p\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |T|^{\frac{p}{p-1}}|u|^{\frac{p(p-1)}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leqslant p\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |T|^{\frac{p}{p-1}}|u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leqslant p\left[\frac{1}{p}\Big[\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p dx|\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^p\right. \\
&\quad \left. + \frac{p-1}{p}\Big[\Big(\int_\Omega |T|^{\frac{p}{p-1}}|u|^p dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big]^{\frac{p}{p-1}}\right] \\
&\leqslant \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right) + (p-1)\left(\int_\Omega |T|^{\frac{p}{p-1}}|u|^p dx\right)
\end{aligned}$$

Επομένως καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geq \int_\Omega (\mathrm{divT} - (\mathrm{p}-1)|\mathrm{T}|^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}-1}})|\mathrm{u}|^{\mathrm{p}}\mathrm{dx}. \tag{6}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5), (6) η βελτιωμένη ανισότητα του Hardy θα αποδειχθεί εφόσον κατορθώσουμε να αποδείξουμε την ακόλουθη καθοριστική ανισότητα:

$$\mathrm{div} T - (p-1)|T|^{\frac{p}{p-1}} \geqslant \frac{|H|^p}{d^p}\left(1 + \frac{p-1}{2pH^2}X^2(d/D)\right), \quad x\in\Omega \tag{7}$$

Για την απόδειξη της (7) επιλέγουμε μια κατάλληλη επιλογή του T.Ορίζουμε

$$T(x) = H|H|^{p-2}\frac{\nabla d(x)}{d^{p-1}(x)}\Big(1 + \frac{p-1}{pH}X(d(x)/D) + aX^2(d(x)/D)\Big),$$

όπου στην θέση του α είναι μια ελεύθερη παράμετρος που η επιλογή της θα γίνει αργότερα. Σε κάθε περίπτωση το α θα είναι τέτοιο ώστε η ποσότητα $1+\frac{p-1}{pH}X(d/D)+aX^2(d(x)/D)$ να είναι θετική στο $\Omega$. Παρατηρήστε ότι το $T(x)$ ιδιάζον (το μέτρο της $T(x)$ απειρίζεται) για $x\in K$ , αλλά εφόσον $u\in C_c^\infty(\Omega\setminus K)$ όλοι οι προηγούμενοι υπολογισμοί είναι σωστοί . Μια απλή μετατροπή μας αποδεικνύει ότι

$$
\begin{aligned}
\mathrm{divT} &= H|H|^{p-2}\mathrm{div}(d^{1-p}\nabla d)\Big(1+\frac{p-1}{pH}X+aX^2(d/D)\Big)\\
&\quad +H|H|^{p-2}\frac{\nabla d}{d^{p-1}}\nabla\Big(1+\frac{p-1}{pH}X+aX^2(d/D)\Big)\\
&= H|H|^{p-2}(\mathrm{div}(d^{-(p-1)}\nabla d+d^{-(p-1)}\mathrm{div}(\nabla d))\Big(1+\frac{p-1}{pH}X+aX^2(d/D)\Big)\\
&\quad +H|H|^{p-2}\frac{\nabla d}{d^{p-1}}\Big(\nabla(1)+\frac{p-1}{pH}\nabla(X)+a\nabla(X^2)\Big)\\
&= H|H|^{p-2}(-(p-1)d^{-p}|\nabla d|^2+d^{-(p-1)}\Delta d)\Big(1+\frac{p-1}{pH}X+aX^2(d/D)\Big)\\
&\quad +H|H|^{p-2}\frac{\nabla d}{d^{p-1}}\Big(\frac{p-1}{pH}X^2(d/D)d^{-1}\nabla d+2aX^3(d/D)d^{-1}\nabla d\Big)\\
&= H|H|^{p-2}\frac{d\Delta d-(p-1)|\nabla d|^2}{d^p}\left(1+\frac{p-1}{pH}X+aX^2(d/D)\right)\\
&\quad +H|H|^{p-2}\frac{|\nabla d|^2}{d^p}\left(\frac{p-1}{pH}X^2(d/D)+2aX^3(d/D)\right)\\
&\geqslant H|H|^{p-2}\frac{k-p}{d^p}\left(1+\frac{p-1}{pH}X(d/D)+aX^2(d/D)\right)\\
&\quad +H|H|^{p-2}\frac{1}{d^p}\left(\frac{p-1}{pH}X^2(d/D)+2aX^3(d/D)\right),
\end{aligned}
$$

όπου στην τελευταία ανίσωση χρησιμοποιήσαμε ότι η $d(x)$ έχει μέτρο $|\nabla d|=1$ και την βασικη γεωμετρική υπόθεση. Επομένως

$$
\begin{aligned}
\mathrm{divT}-(p-1)|T|^{\frac{p}{p-1}} &\geqslant H|H|^{p-2}\frac{k-p}{d^p}\Big(1+\frac{p-1}{pH}X(d/D)+aX^2(d/D)\Big)\\
&\quad +H|H|^{p-2}\frac{1}{d^p}\Big(\frac{p-1}{pH}X^2(d/D)+2aX^3(d/D)\Big)-(p-1)|T|^{\frac{p}{p-1}}\\
&\geqslant H|H|^{p-2}\frac{(k-p)(1+\frac{p-1}{pH}X(d/D)+aX^2(d/D))}{d^p}\\
&\quad +H|H|^{p-2}\frac{(\frac{p-1}{pH}X^2(d/D)+2aX^3(d/D))}{d^p}\\
&\quad -(p-1)\left|(H|H|^{p-2}\frac{\nabla d}{d^{p-1}}\Big(1+\frac{p-1}{pH}X+aX^2\Big)\right|^{\frac{p}{p-1}}\\
&\geqslant H|H|^{p-2}\frac{(k-p)(1+\frac{p-1}{pH}X(d/D)+aX^2(d/D))}{d^p}\\
&\quad +H|H|^{p-2}\frac{(\frac{p-1}{pH}X^2(d/D)+2aX^3(d/D))}{d^p}\\
&\quad -(p-1)(|H|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}(\frac{|\nabla d|}{d^{p-1}})^{\frac{p}{p-1}}(1+\frac{p-1}{pH}X(d/D)+aX^2(d/D))^{\frac{p}{p-1}}\\
&\geqslant H|H|^{p-2}\frac{p(\frac{k-p}{p})(1+\frac{p-1}{pH}X(d/D)+aX^2(d/D))}{d^p}\\
&\quad +H|H|^{p-2}\frac{1}{H}\frac{H(\frac{p-1}{pH}X^2(d/D)+2aX^3(d/D))}{d^p}\\
&\quad -(p-1)|H|^p\frac{(1+\frac{p-1}{pH}X(d/D)+aX^2(d/D))^{\frac{p}{p-1}}}{d^p}.
\end{aligned}
$$

Αν ορίσουμε

$$f(t)=p(1+\frac{p-1}{pH}t+at^2)+\frac{1}{H}(\frac{p-1}{pH}t^2+2at^3)-(p-1)(1+\frac{p-1}{pH}t+at^2)^{\frac{p}{p-1}}$$

την συνάρτηση, εμείς θέλουμε να αποδείξουμε

$$f(X(d/D))\geqslant 1+\frac{p-1}{2pH^2}X^2(d/D),\ \text{στο } \Omega. \tag{8}$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε οτι

$$f(t)\geq 1+\frac{p-1}{2pH^2}t^2, \tag{9}$$

για αρκετά μικρά $t < t_0$ . Από το θεώρημα Taylor έχουμε ότι

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi_t)t^3 \quad 0 \le \xi_t \le t \le t_0 \tag{10}$$

Έχουμε ότι $f(0) = 1$ .Επιπλέον

$$\begin{aligned} f'(t) &= p\Big(\frac{p-1}{pH} + 2at\Big) + \frac{1}{H}\Big(2\frac{p-1}{pH}t + 6at^2\Big) \\ &\quad -(p-1)\frac{p}{p-1}\Big(1 + \frac{p-1}{pH}t + at^2\Big)^{\frac{p}{p-1}-1}\Big(\frac{p-1}{pH} + 2at\Big) \\ &= \frac{p-1}{H} + 2apt + \frac{2(p-1)}{pH^2}t + \frac{6a}{H}t^2 \\ &\quad -p(1 + \frac{p-1}{pH}t + at^2)^{\frac{1}{p-1}}(\frac{p-1}{pH} + 2at), \end{aligned}$$

Ακόμη,

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2ap + \frac{2(p-1)}{pH^2} + 2\frac{6a}{H}t \\ &\quad -\frac{p}{p-1}\Big(1 + \frac{p-1}{pH}t + at^2\Big)^{\frac{1}{p-1}-1}\Big(\frac{p-1}{pH} + 2at\Big) \\ &\quad -p\Big(1 + \frac{p-1}{pH}t + at^2\Big)^{\frac{1}{p-1}}(2a) \\ &= 2ap + \frac{2(p-1)}{pH^2} + \frac{12a}{H}t - 2ap(1 + \frac{p-1}{pH}t + at^2)^{\frac{1}{p-1}} \\ &\quad -\frac{p}{p-1}(1 + \frac{p-1}{pH}t + at^2)^{\frac{2-p}{p-1}}(\frac{p-1}{pH} + 2at)^2, \end{aligned} \tag{11}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} f'''(t) &= \frac{12a}{H} - \frac{2ap}{p-1}\Big(1 + \frac{p-1}{pH}t + at^2\Big)^{\frac{1}{p-1}-1}(\frac{p-1}{pH} + 2at) \\ &\quad -\frac{p}{(p-1)}\frac{(2-p)}{(p-1)}\Big(1 + \frac{p-1}{pH}t + at^2\Big)^{\frac{2-p}{p-1}-1}(\frac{p-1}{pH} + 2at)^3 \\ &\quad -\frac{2p}{p-1}(2a)\Big(1 + \frac{p-1}{pH}t + at^2\Big)^{\frac{2-p}{p-1}}\Big(\frac{p-1}{pH} + 2at\Big) \\ &= \frac{12a}{H} - \frac{6ap}{p-1}\Big(1 + \frac{p-1}{pH}t + at^2\Big)^{\frac{2-p}{p-1}}(\frac{p-1}{pH} + 2at) \\ &\quad -\frac{p(2-p)}{(p-1)^2}(1 + \frac{p-1}{pH}t + at^2)^{\frac{3-2p}{p-1}}(\frac{p-1}{pH} + 2at)^3 \end{aligned}$$

Συγκεκριμένα έχουμε με αντικατάσταση στην πρώτη παράγωγο λαμβάνουμε :

$$f'(0) = \frac{p-1}{H} - p \cdot \frac{p-1}{pH} = \frac{p-1}{H} - \frac{p-1}{H} = 0$$

Ομοίως για την δεύτερη παράγωγο έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} f''(0) &= 2ap + \frac{2(p-1)}{pH^2} - 2ap \cdot 1 - \frac{p}{p-1} \cdot 1 \cdot (\frac{p-1}{pH})^2 \\ &= \frac{2(p-1)-(p-1)}{pH^2} \\ &= \frac{p-1}{pH^2} \end{aligned}$$

Με παρόμοιο συλλογισμό με τα προηγούμενα έχουμε τα εξής

$$\begin{aligned} f'''(0) &= \frac{12a}{H} - \frac{6ap}{p-1} \cdot (\frac{p-1}{pH}) - \frac{p(2-p)}{(p-1)^2}\Big(\frac{p-1}{pH}\Big)^3 \\ &= \frac{12a}{H} - \frac{6a}{H} - \frac{(2-p)(p-1)}{p^2H^3} \\ &= \frac{6a}{H} - \frac{(2-p)(p-1)}{p^2H^3}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την (10) στην (9) και χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους υπολογισμούς έχουμε

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi_t)t^3 &\geqslant 1 + \frac{p-1}{2pH^2}t^2 \\ 1 + 0t + \frac{p-1}{2pH^2}t^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi_t)t^3 &\geqslant 1 + \frac{p-1}{2pH^2}t^2 \\ \frac{1}{6}f'''(\xi_t)t^3 &\geqslant 0 \\ f'''(\xi_t) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Αρκεί επομένως $f'''(t) > 0$ κοντά στο $t = 0$. Δηλαδή

$$\exists\, t_0 > 0 \text{ έτσι ώστε } \quad f'''(t) \geqslant 0, \quad \forall t \in (0, t_0)$$

Θα επιλέξουμε $a$ τέτοιο ώστε $f'''(0) > 0$ οπότε θα έχουμε οτι $f'''(t) > 0$ κοντά στο 0. Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις :

(α) $1 < p < 2 \leq k$. Σε αυτή την περίπτωση $H > 0$. Επιλέγουμε $a$ έτσι ώστε $f'''(0) > 0$ , δηλάδη το $a$ επιλέγεται να είναι $a > \frac{(2-p)(p-1)}{6p^2H^2} > 0$. Ως εκ τούτου η $f''$ να είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα της μορφής $(0, t_0)$. Συνεπώς, για $t \in (0, t_0)$ έχουμε ότι

$$f''(\xi_t) \geq f''(0), \text{ όπου } \quad f''(0) = \frac{p-1}{pH^2}$$

Με αντικατάσταση από την σχέση (10) προκύπει ότι

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(\xi_t)t^2 \\ &= 1 + 0 \cdot t + \frac{1}{2}f''(\xi_t)t^2 \\ &\geq 1 + \frac{1}{2}\frac{p-1}{pH^2}t^2 \\ &= 1 + \frac{p-1}{2pH^2}t^2, t \in [0, t_0] \end{aligned}$$

Άρα αποδείχτηκε η (9) σε αυτή την περίπτωση .

(β) $2 \leq p < k$ . Και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $H > 0$ .Επιλέγουμε $a = 0$. Τότε παίρνουμε ότι

$$f'''(0) = -\frac{(2-p)(p-1)}{p^2H^3} > 0 \quad \text{διότι } (2-p) < 0, \ (p-1) > 0 \ p^2H^3 > 0.$$

Επιπλέον, κάνουμε κάποιους υπολογισμούς

$$\begin{aligned} f'''(t) &= -\frac{p(2-p)}{(p-1)^2} \cdot \frac{(p-1)^3}{p^3H^3} \cdot (1 + \frac{p-1}{pH}t)^{\frac{3-2p}{p-1}} \\ f'''(t) &= \frac{(p-2)(p-1)}{p^2H^3}(1 + \frac{p-1}{pH}t)^{\frac{3-2p}{p-1}} > 0, \qquad \forall t > 0 \end{aligned}$$

Επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο επιχείρημα στην περίπτωση (α), θέτωντας $t_0 = +\infty$ θα έχουμε ότι ισχύει η (9) .

(γ) $k = 1 < p < 2$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $H < 0$. Η επιλογή του $a$ γίνεται με τρόπο να ισχύει $f'''(0) > 0$ δηλαδή το $a$ επιλέγεται

$$0 < a < \frac{(2-p)(p-1)}{6p^2H^2}.$$

Επαναλάμβάνοντας την προηγούμενη διαδικασία λαμβάνουμε την σχέση (9) .

(δ) $p \geq 2, p > k$. Και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $H < 0$. Επιλέγουμε τώρα $a < \dfrac{(2-p)(p-1)}{6p^2H^2} < 0$ ώστε να ισχύει ότι $f'''(0) > 0$. Συνεχίζουμε όπως παραπάνω και λαμβάνουμε την σχέση (9).

Είναι ξεκάθαρο οτι σε κάθε περίπτωση μπορούμε να επιλέξουμε ένα $t_0$ (αρκετά μικρό) ώστε αφενός να έχουμε

$$1 + \frac{p-1}{pH} X + aX^2 > 0, \qquad \text{για } 0 < t < t_0$$

και αφετέρου να ισχύει

$$f'''(t) > 0, \qquad \text{για } 0 < t < t_0.$$

Ορίζοντας τότε $D_0 > 0$ από τη σχέση

$$t_0 = X(\frac{\sup d}{D_0})$$

όπου θεωρούμε την συνάρτηση

$$X(s) = -\frac{1}{\log(s)}, \; s \in (0,1).$$

Αφού $X(d/D) = -\frac{1}{\log(d/D)}$, η συνθήκη $X \leq t_0$ είναι ισοδύναμη με

$$D \geqslant D_0 := \exp \frac{1}{t_0} \sup_{x \in \Omega} d(x).$$

Έστω $D > D_0$ .Τότε για κάθε $x \in \Omega$ θα ισχύει

$$X(\frac{d(x)}{D}) \leqslant X(\frac{\sup d}{D_0}) = t_0.$$

και άρα παίρνουμε την (8). Η απόδειξη του θεωρήματος είναι τώρα πια πλήρης.

Σημείωση. Η υπόθεση $\sup_{x \in \Omega} d(x) < +\infty$ είναι απαραίτητη προκειμένου να αποκτήσουμε την βελτιωμένη ανισότητα Hardy . Για την βασική ανισότητα Hardy αρκεί να επιλέξουμε το διανυσματικό πεδίο

$$T(x) = H|H|^{p-2} \frac{\nabla d(x)}{d^{p-1}(x)},$$

όπου στην περίπτωση αυτή το σύνορο του $d(x)$ δεν μας χρειάζεται . Ξεκάθαρα η συνηθισμένη ανισότητα του Hardy δεν ισχύει στην περίπτωση $p = k$.Το επόμενο αποτέλεσμα δίνουμε μια παραλλαγή της ανισότητας Hardy σε αυτή την περίπτωση. Η ανάλογη συνθήκη (C) γίνεται

$$\text{(C')} \quad p = k, \quad d\Delta d + 1 - k \geq 0.$$

Στο θέωρημα 4.3.3, θα αποδείξουμε την εκτίμηση (12) πιο αύστηρα. Συνεχίζουμε με την διατύπωση και απόδειξη του ακόλουθου Θεωρήματος.

**Θεώρημα 4.2.2** *Έστω $p = k$ και υποθέτουμε οτι $d(\cdot)$ είναι φραγμένη μέσα στο $\Omega$. Αν $(C')$ ισχύει , τότε για κάθε $D \geq \sup_\Omega d(x)$ έχουμε*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geqslant \Big(\frac{p-1}{p}\Big)^p \int_\Omega \frac{|u|^p}{d^p} X^p(d/D)dx, \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega \setminus K) \tag{12}$$

**Απόδειξη.** *Επιλέγουμε το διανυσματικό πεδίο*

$$T(x) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \frac{X^{p-1}(d(x)/D)}{d^{p-1}(x)} \nabla d(x), \qquad x \in \Omega$$

*και χρησιμοποιούμε την σχέση* (7).*Έχουμε*

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathrm{T} &= \mathrm{div}\Big[\Big(\frac{p-1}{p}\Big)^{p-1} \frac{\nabla d(x)}{d^{p-1}(x)} X^{p-1}(d(x)/D)\Big] \\
&= (\frac{p-1}{p})^{p-1}\Big[\mathrm{div}(d^{1-p}\nabla d)X^{p-1} + d^{1-p}\nabla d \nabla(X^{p-1}(d/D))\Big] \\
&= (\frac{p-1}{p})^{p-1} \frac{d\Delta d - (p-1)|\nabla d|^2}{d^p}(X^{p-1}(d(x)/D)) \\
&\quad +(\frac{p-1}{p})^{p-1} \frac{|\nabla d|^2}{d^p}((p-1)X^p(d/D)) \\
&= (\frac{p-1}{p})^{p-1} \frac{d\Delta d - (p-1)\cdot 1}{d^p}(X^{p-1}(d(x)/D)) \\
&\quad +(\frac{p-1}{p})^{p-1} \frac{1}{d^p}((p-1)X^p(d(x)/D)) \\
&= (\frac{p-1}{p})^{(p-1)} d^{-p} X^{p-1}(d/D)(d\Delta d - (p-1)) \\
&\quad +(\frac{p-1}{p})^{p-1} d^{-p} X^{p-1}(d/D)((p-1)X(d/D)) \\
&= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} d^{-p} X^{p-1}(d/D)\Big((p-1)X(d/D) - p + 1 + d\Delta d\Big) \\
&\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} (p-1) d^{-p} X^p(d/D)
\end{aligned}$$

*Επομένως*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{divT} - (p-1)|T|^{\frac{p}{p-1}} &\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}(p-1)d^{-p}X^p(d/D) \\
&\quad -(p-1)\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p}\frac{1}{d^p}X^p(d/D) \\
&= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\left[1-\frac{p-1}{p}\right](p-1)d^{-p}X^p(d/D) \\
&\geqslant \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p}d^{-p}X^p(d/D)
\end{aligned}
$$

*Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα και αντικαθιστώντας στην* (6) *θα μας δώσει τελικά την* (12).

## 4.3 Απόδειξη του βέλτιστου των σταθερών

Σε αυτό το εδάφιο αποδεικνύουμε την βελτιστοποιήση των σταθερών που εμφανίζονται στις βελτιωμένες ανισότητες Hardy που αναπτύχθηκαν στην ενότητα 4. Για να επιτευχθεί αυτό , θα εξάγουμε βέλτιστα φράγματα για όλες τις σταθερές που εμφανίζονται στις βελτιωμένες ανισότητες Hardy που ασχοληθήκαμε σε αυτή την εργασία. Ειδικότερα, έχοντας ορίσει ότι $H = \frac{k-p}{p}$ έχουμε το ακόλουθο θεώρημα

**Θεώρημα 4.3.1** *Έστω ένα χωρίο $\Omega$ στον $R^N$.*
*(ι) Αν $2 \leq k \leq N-1$ , τότε υποθέτουμε ότι το $K$ είναι μια λεία επιφάνεια συνδιάστασης $k$ και ότι $K \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$.*
*(ιι) Αν $k = N$, τότε παίρνουμε $K = \{0\} \subset \Omega$ .*
*(ιιι) Αν $k = 1$ , τότε επιλέγουμε $K = \partial\Omega$ .*
*Υποθέτουμε οτι για κάποιες σταθερές $A > 0, B \geq 0, \gamma > 0$ και $D \geq \sup_\Omega d(x)$, η ακόλουθη ανισότητα ισχύει για όλα τα $u \in C_C^\infty(\Omega \setminus K)$ :*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geq A \int_\Omega \frac{|u|^p}{d^p} dx + B \int_\Omega \frac{|u|^p}{d^p} X^\gamma(d/D) dx \tag{13}$$

*Τότε :*

$$\begin{aligned} &(i) && A \leq |H|^p \\ &(ii) && Εαν\ A = |H|^p,\ B > 0,\ τότε\ \gamma \geq 2 \\ &(iii) && Αν\ A = |H|^p\ ,\ \gamma = 2,\ τότε\ B \leq \frac{p-1}{2p}|H|^{p-2} \end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε το θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε μια ακολουθία για την βελτιωμένη ανισότητα Hardy . Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in K \cap \Omega$ , αν $k \neq 1$, ενώ $0 \in \partial\Omega$ αν $k = 1$. Οτι θα πούμε παρακάτω θα είναι σε τοπικό ,σε μια συγκεκριμένη μπάλα κέντρού 0 και ακτίνας $\delta$ , για οσοδήποτε μικρό $\delta$ ,δηλάδη ορίζουμε $B_\delta(0)$ Στα ακόλουθα εισάγουμε την ακόλουθη συνάρτηση

$$w_\epsilon(x) = d^{-H+\epsilon}(x) X^{-\theta}(d(x)/D), 1/p < \theta < 2/p. \tag{14}$$

Για να είναι τοπική , επιλέγουμε μια κατάλληλη μη αρνητική συνάρτηση $\phi \in C_c^2(B_\delta)$ έτσι ώστε $\phi(x) = 1$ για $x \in B_{\delta/2}$. Συνδυάζοντας έχουμε οτι

$$U_\epsilon(x) = \phi(x) w_\epsilon(x), \qquad suppU_\epsilon \subset B_\delta \tag{15}$$

Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε δουλεύει για $k = 1, 2, ..N$.Στην περίπτωση του $k = N$ (απόσταση από σημείο),οι υπολογισμοί γίνονται απλοί. Ενώ στην περίπτωση , $k = 1$ (απόσταση από το σύνορο)θα αντικαταστησουμε το $B_\delta$ με

$B_\delta \cap \Omega$. Στην τελευταία περίπτωση θα χρειαστούν κάποιες μικρές αλλαγές, όμως τα επιχειρήματα που θα χρησιμοποιηθούν θα είναι τα ίδια. Στο υπόλοιπο εδάφιο ορίζουμε $C, c(p)$ θετικές σταθερές, διαφορετικές σε κάθε περίπτωση οποίες θα εξαρτώνται από το $\delta, p, k$ αλλά θα είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του $\epsilon$. Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση με την βοήθεια κάποιων λημμάτων τα οποία περιέχουν όλους αυτούς τους υπολογισμούς που θα χρειαστούν για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Για $\beta \in R$ και $\epsilon > 0$ ορίζουμε την πόσοτητα

$$J_\beta(\epsilon) = \int_\Omega \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-\beta}(d/D)dx \tag{16}$$

Για το επόμενο Λήμμα χρησιμοποιούμε το Θεωρημα2.2 (Τύπος συνεμβαδού) και την πρόταση που ακολουθούν.

**Πρόταση 4.3.1** *Έστω $K$ κλειστή επιφάνεια με συνδιάσταση $k$ και $\Omega$ χωρίο του $\mathbb{R}^n$. Αν $d(x) = dist(x, K)$ με $x \in \Omega$ τότε ισχύει*

$$d\nabla d + 1 - k = O(d), \qquad d(x) \to 0$$

**Λήμμα 4.3.1** *Για μικρά $\epsilon > 0$ έχουμε :*

$$\begin{array}{rll} (i) & ce^{-1-\beta} \le J_\beta(\epsilon) \le C\epsilon^{-1-\beta}, & \beta > -1 \\ (ii) & J_\beta(\epsilon) = \dfrac{p\epsilon}{\beta+1} J_{\beta+1}(\epsilon) + O(1), & \beta > -1 \\ (iii) & J_\beta(\epsilon) = O(1), & \beta < -1 \end{array}$$

**Απόδειξη.** Αφού $|\nabla d| = 1$, έχουμε

$$J_\beta(\epsilon) = \int_0^\delta \int_{d=r} \phi^p r^{-k+\epsilon p} X^{-\beta}(r/D) dS\, dr.$$

Χρησιμοποιώντας το δεδομένο ότι $0 \leqslant \phi \leqslant 1$ καθώς και το ότι

$$\int_{\{\delta=r\}\cap B_\delta} dS < cr^{k-1}$$

παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} J_\beta(\epsilon) &= \int_0^\delta X^{-\beta}(r/D)dr \int_{\{\delta=r\}\cap B_\delta} \phi^p r^{-k+\epsilon p} dS \\ &\leqslant c\int_0^\delta 1\cdot r^{-k+\epsilon p+k-1} X^{-\beta}(r/D)dr \\ &\leqslant c\int_0^\delta r^{-1+\epsilon p} X^{-\beta}(r/D)dr \\ &\leqslant c\int_0^\delta r^{-1} X^{-\beta}(\frac{r}{D})dr \\ &= c\frac{1}{-\beta-1}\int_0^\delta \frac{d}{dr}\left[X^{-\beta-1}(\frac{r}{D})\right]dr \\ &= \frac{c}{-\beta-1}\left[X^{-\beta-1}(\frac{\delta}{D}) - X^{-\beta-1}(0)\right] \\ &= \frac{c}{-\beta-1}X^{-\beta-1}(\frac{\delta}{D}) \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα το $X^{-\beta-1}(0)$ , με $X(s) = -\frac{1}{logs}$ είναι μηδέν διότι

$$\lim_{s\to 0} X(0) = 0$$

Στις παραπάνω πράξεις χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη σχέση για ολοκληρώματα

$$\int_{s_1}^{s_2} r^{-1} X^{\beta+1}(r)dr = \frac{1}{\beta}\left[X^\beta(s_2) - X^\beta(s_1)\right]$$

Δείξαμε δηλαδή $|J_\beta(\epsilon)| \leqslant C, \quad$ όπου $C = \frac{c}{-\beta-1}X^{-\beta-1}(\frac{\delta}{D})$ Άρα έχουμε ότι

$$J_\beta(\epsilon) = O_\epsilon(1)$$

και δείξαμε το $(iii)$ του λήμματος. Για να αποδείξουμε το $(i)$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $r = Ds^{1/\epsilon}$ και έχουμε

$$
\begin{aligned}
J_\beta(\epsilon) &\leqslant c\int_0^\delta r^{-1+ep}X^{-\beta}(r/D)dr \\
&\leqslant c\int_0^{(\delta/D)^\epsilon}(Ds^{1/\epsilon})^{-1+\epsilon p}X^{-\beta}(s^{1/\epsilon})\frac{1}{\epsilon}s^{\frac{1}{\epsilon}-1}Dds \\
&\leqslant c\cdot D^{\epsilon p}\int_0^{(\delta/D)^\epsilon}s^{-\frac{1}{\epsilon}}s^pX^{-\beta}(s^{1/\epsilon})\frac{1}{\epsilon}s^{\frac{1}{\epsilon}-1}ds \\
&\leqslant c\cdot D^{\epsilon p}\frac{1}{\epsilon}\int_0^{(\delta/D)^\epsilon}s^{p-1}X^{-\beta}(s^{1/\epsilon})ds \\
&\leqslant c\cdot D^{\epsilon p}\frac{1}{\epsilon}\int_0^{(\delta/D)^\epsilon}s^{p-1}\epsilon^{-\beta}X(s)^{-\beta}ds \\
&\leqslant \epsilon^{-1-\beta}D^{\epsilon p}\int_0^{(\delta/D)^\epsilon}s^{p-1}X^{-\beta}(s)ds
\end{aligned}
$$

Για μικρό $0<\epsilon<1$

$$D^{\epsilon p}\int_0^{(\delta/D)^\epsilon}s^{p-1}X^{-\beta}(s)ds \leqslant C$$

παίρνουμε το άνω φράγμα της ανισότητας ($i$). Για το κάτω άκρο της ανίσωσης χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\phi = 1$ για $d \leqslant \delta/2$ και έχουμε

$$
\begin{aligned}
J_\beta(\epsilon) &= \int_\Omega \phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{-\beta}(d/D)dx \\
&\geqslant \int_{\{d\leqslant\frac{\delta}{2}\}} d^{-k+\epsilon p}X^{-\beta}(d/D)dx \\
&\geqslant \int_0^{\delta/2}\int_{\{d=r\}} r^{-k+\epsilon p}X^{-\beta}(r/D)dS\,ds \\
&\geqslant \int_0^{(\delta/2D)^\epsilon}(Ds^{1/\epsilon})^{-k+\epsilon p}X^{-\beta}(s^{1/\epsilon})\frac{1}{\epsilon}s^{\frac{1}{\epsilon}-1}Dds \\
&\geqslant D^{1-k+\epsilon p}\epsilon^{-1}\int_0^{(\delta/2D)^\epsilon}s^{p-1}\cdot s^{\frac{-1-k}{\epsilon}}(\epsilon X(s))^{-\beta}ds \\
&\geqslant D^{1-k+\epsilon p}\epsilon^{-1-\beta}\int_0^{(\delta/2D)^\epsilon}s^{p-1-\frac{(k+1)}{\epsilon}}X^{-\beta}(s)ds
\end{aligned}
$$

Για μικρό $0<\epsilon<1$

$$D^{1-k+\epsilon p}\int_0^{(\delta/2D)^\epsilon}s^{p-1-\frac{(k+1)}{\epsilon}}X^{-\beta}(s)ds \geqslant c$$

και παίρνουμε το κάτω φράγμα της ανισότητας ($i$).

Παρατηρούμε ότι

$$\nabla X^{-\beta-1}(d/D) = -(\beta+1)X^{-\beta}(d/D)\cdot\frac{1}{d}\nabla d$$

και άρα

$$\nabla d\cdot\nabla X^{-\beta-1}(d/D) = -(\beta+1)\frac{1}{d}X^{-\beta}(d/D)$$

Για να αποδείξουμε το $(ii)$ χρησιμοποιώντας τους παραπάνω υπολογισμούς

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \phi^p d^{1-k+\epsilon p}\nabla d\cdot\nabla X^{-\beta-1}(d/D)dx &= \\ (\beta+1)\int_\Omega \phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{-\beta}(d/D)dx &= (\beta+1)J_\beta(\epsilon) \end{aligned}$$

Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε ότι δεν εμφανίζονται συνοριακοί όροι.

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \phi^p d^{1-k+\epsilon p}\nabla d\cdot\nabla X^{-\beta-1}(d/D)dx &= \int_\Omega \mathrm{div}(\phi^{\mathrm{p}}\mathrm{d}^{1-\mathrm{k}+\epsilon\mathrm{p}}\nabla \mathrm{d})\mathrm{X}^{-\beta-1}(\mathrm{d}/\mathrm{D})\mathrm{dx} \\ &- \int_{\partial\Omega}\phi^p d^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)\nabla d\cdot\vec{n}\,ds \end{aligned}$$

Ειδικότερα , αν $k=1$ τότε ο όρος $d^{1-k+\epsilon p}=d^{\epsilon p}$ μας εξασφαλίζει οτι το ολοκλήρωμα εξαφανίζεται στο $K$ αφού $K=\partial\Omega$. Αν $2\leqslant k\leqslant N$ τότε προσεγγίζουμε το $\Omega$ από το $\Omega_\eta=\{x\in\Omega : d(x)>\eta\}$ , για μικρό $\eta>0$. Ο συνοριακός όρος γράφεται

$$-\int_{\{d=\eta\}}\phi^p d^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)\nabla d\cdot\overrightarrow{n}dS$$

όπου το ολοκλήρωμα τείνει στο μηδέν και αυτό διότι

$$\begin{aligned} |A_\eta| &= \left|-\int_{\{d=\eta\}}\phi^p d^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)\nabla d\cdot\overrightarrow{n}\right|dS \\ &\leqslant \int_{\{d=\eta\}}|d^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)||\nabla d\cdot\overrightarrow{n}|dS \\ &\leqslant \int_{\{d=\eta\}}|d^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)|dS \\ &= \eta^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(\eta/D)\int_{\{d=\eta\}}|1|dS \\ &= \eta^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(\eta/D)|\{d=\eta\}| \\ &\leqslant \eta^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(\eta/D)c\cdot\eta^{k-1} \\ &= c\cdot\eta^{\epsilon p}X^{-\beta-1}(\eta/D) \end{aligned}$$

Καθώς $\eta \to 0$ η τελευταία ισότητα πάει στο μηδέν και συνεπώς το $A_\eta$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$
\begin{aligned}
(\beta+1)J_\beta(\epsilon) &= \int_\Omega \mathrm{div}(\phi^{\mathrm{p}}\mathrm{d}^{1-k+\epsilon p}\nabla \mathrm{d})\mathrm{X}^{-\beta-1}(\mathrm{d}/\mathrm{D})\mathrm{dx} \\
&= p\int_\Omega \phi^{p-1}d^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)\nabla\phi\cdot\nabla d\,dx \\
&+ (1-k+\epsilon p)\int_\Omega \phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)\nabla d\cdot\nabla d\,dx \\
&\quad + \int_\Omega \phi^p d^{1-k+\epsilon p}\nabla(\nabla d)X^{-\beta-1}(d/D)dx \\
&= p\int_\Omega \phi^{p-1}d^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)\nabla\phi\cdot\nabla d\,dx \\
&\quad +(1-k+\epsilon p)\int_\Omega \phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)dx \\
&\quad + \int_\Omega \phi^p d^{1-k+\epsilon p}\Delta d X^{-\beta-1}(d/D)dx
\end{aligned} \tag{17}
$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι τάξης γίνεται $O(1)$ επειδή

$$
\begin{aligned}
&\left|p\int_\Omega \phi^{p-1}d^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)\nabla\phi\cdot\nabla d\,dx\right| \\
\leqslant\ & p\int_\Omega d^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)|\nabla\phi|\cdot|\nabla d|dx \\
\leqslant\ & Kp\int_\Omega d^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)dx
\end{aligned}
$$

Για μικρά $d$ ισχύει

$$
\frac{d}{X(d/D)} \leqslant c
$$
$$
\text{ισοδύναμα } d \leqslant cX(d/D)
$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$
p\int_\Omega d^{1-k+\epsilon p}X^{-\beta-1}(d/D)dx \leqslant pc\int_\Omega d^{-k+\epsilon p}X^{-\beta}(d/D)dx = J_\beta(\epsilon) = O(1)
$$

Για τα άλλα δύο ολοκληρώματα παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} & \epsilon p \int_\Omega \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-\beta-1}(d/D) dx \\ & + \int_\Omega \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-\beta-1}(d/D)(d\Delta d + 1 - k) dx \\ = \quad & \epsilon p J_{\beta+1}(\epsilon) + \int_\Omega \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-\beta-1}(d/D)(d\Delta d + 1 - k) dx \end{aligned}$$

Άρα τα δύο τελευταία ολοκληρώματα της (17) αθροίζουν σε

$$\epsilon p J_{\beta+1}(\epsilon) + \int_\Omega \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-\beta-1}(d/D)(d\Delta d + 1 - k) dx \tag{18}$$

Αλλά άμεση συνέπεια της παραπάνω Πρότασης έχουμε

$$d\Delta d + 1 - k = O(d), \quad \text{καθώς} \quad d(x) \to 0 \tag{19}$$

Αντικαθιστώντας το τελευταίο συμπέρασμα στην (18) το ολοκλήρωμα γίνεται της μορφής

$$C \int_\Omega \phi^p d^{1-k+\epsilon p} X^{-\beta-1}(d/D) dx$$

και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη συλλογιστική πορεία δείχνουμε οτι είναι της μορφής $O(1)$ .Τελικά

$$(\beta+1) J_\beta(\epsilon) = \epsilon p J_{\beta+1}(\epsilon) + O_\epsilon(1) = \frac{p\epsilon}{(\beta+1)} J_{\beta+1}(\epsilon) + O_\epsilon(1)$$

Στην συνέχεια εκτιμούμε την ακόλουθη ποσότητα

$$I\ [U_\epsilon] = \int_\Omega |\nabla U_\epsilon|^p dx - |H|^p \int_\Omega \frac{|U_\epsilon|^p}{d^p} dx.$$

Έχουμε το ακόλουθο λήμμα .

**Λήμμα 4.3.2** *Για* $\epsilon \to 0$

$$(i) \qquad I[U_\epsilon] \leqslant \frac{\theta(p-1)}{2} |H|^{p-2} J_{p\theta-2}(\epsilon) + O(1) \tag{20}$$

$$(ii) \qquad \int_{B_\delta} |\nabla U_\epsilon|^p dx \leqslant |H|^p J_{p\theta}(\epsilon) + O(\epsilon^{1-p\theta}) \tag{21}$$

**Απόδειξη.** Έχουμε ότι $\nabla U_\epsilon = \nabla(\phi \cdot w_\epsilon) = \phi \nabla w_\epsilon + \nabla \phi\ w_\epsilon$ και χρησιμοποιούμε την βασική ανισότητα έχουμε ότι

$$|a+b|^p \leqslant |a|^p + c_p(|a|^{p-1}|b| + |b|^p), \quad a, b \in R^N, \quad p > 1 \tag{22}$$

Άρα λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla U_\epsilon|^p dx &= \int_{B_\delta} |\phi\nabla w_\epsilon + w_\epsilon \nabla\phi|^p dx \\
&\leqslant \int_{B_\delta} |\phi|^p |\nabla w_\epsilon|^p dx + \ c_p \int_{B_\delta} |\phi\nabla w_\epsilon|^{p-1} |\nabla\phi w_\epsilon| dx \\
&\quad + c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi w_\epsilon|^p dx \\
&\leqslant \int_{B_\delta} \phi^p \Big|\nabla(d^{-H+\epsilon} X^{-\theta})\Big|^p dx + c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi||\phi|^{p-1} |\nabla w_\epsilon|^{p-1} |w_\epsilon| dx \\
&\quad + c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi|^p |w_\epsilon|^p dx \\
&\leqslant \int_{B_\delta} \phi^p \Big| X^{-\theta} \nabla(d^{-\frac{k-p}{p}+\epsilon}) + d^{-\frac{k-p}{p}+\epsilon} \nabla(X^{-\theta})\Big|^p dx \\
&\quad + c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi||\phi|^{p-1} |\nabla w_\epsilon|^{p-1} |w_\epsilon| dx + c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi|^p |w_\epsilon|^p dx \\
&\leqslant \int_{B_\delta} \phi^p \Big|(-\frac{k-p}{p} + \epsilon) d^{\frac{-k+\epsilon p}{p}} X^{-\theta} \nabla d + d^{\frac{-k+\epsilon p}{p}} (-\theta) X^{-\theta+1} \nabla d\Big|^p dx \\
&\quad + c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi||\phi|^{p-1} |\nabla w_\epsilon||w_\epsilon| dx + c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi|^p |w_\epsilon|^p dx \\
&\leqslant \int_{B_\delta} \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-p\theta} \Big|(-\frac{k-p}{p} + \epsilon) - \theta X\Big|^p dx \\
&\quad + c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi||\phi|^{p-1} |\nabla w_\epsilon|^{p-1} |w_\epsilon| dx + c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi|^p |w_\epsilon|^p dx \\
&\leqslant \int_{B_\delta} \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-p\theta} (d/D) |H - \epsilon + \theta X(d/D)|^p dx \\
&\quad + c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi||\phi|^{p-1} |\nabla w_\epsilon||w_\epsilon| dx + c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi|^p |w_\epsilon|^p dx \\
&\leqslant \int_{B_\delta} \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-p\theta} (d/D) |H - (\epsilon - \theta X(d/D))|^p dx \\
&\quad + c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi||\phi|^{p-1} |w_\epsilon|^{p-1} |w_\epsilon| dx + \ c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi|^p |w_\epsilon|^p dx \\
&=: I_A + I_2 + I_3
\end{aligned}
$$

όπου $I_A, I_2, I_3$ αντιστοιχούν με την σειρά στα παραπάνω ολοκληρώματα. Ισχυριζόμαστε ότι

$$I_2, I_3 = O(1) \quad \text{καθώς} \quad \epsilon \to 0 \tag{23}$$

Δίνουμε μια απόδειξη για το $I_2$. Χρησιμοποιώντας το πως ορίστηκε το $w_\epsilon$ και την ιδιότητα ότι η $\phi$ είναι μια καλή συνάρτηση έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
I_2 &= c_p \int_{B_\delta} |\nabla\phi||\phi|^{p-1}|\nabla w_\epsilon|^{p-1}|w_\epsilon| dx \\
&\leqslant c_p \cdot A \int_{B_\delta} \left|\nabla(d^{-H+\epsilon}X^{-\theta}(d/D))\right|^{p-1}\left|d^{-H+\epsilon}X^{-\theta}(d/D)\right| dx \\
&\leqslant c \int_{B_\delta} \left|X^{-\theta}\nabla(d^{-\frac{k-p}{p}+\epsilon}) + d^{-\frac{k-p}{p}+\epsilon}\nabla(X^{-\theta})\right|^{p-1}\left|d^{-\frac{k-p}{p}+\epsilon}X^{-\theta}\right| dx \\
&\leqslant c \int_{B_\delta} \left(d^{\frac{-k+\epsilon p}{p}}X^{-\theta}\right)^{p-1}\left|(-\frac{k-p}{p}+\epsilon) - \theta X\right|^{p-1} d^{\frac{-k+\epsilon p+p}{p}}X^{-\theta} dx \\
&\leqslant c \int_{B_\delta} d\left(d^{\frac{-k+\epsilon p}{p}}\right)^{p-1+1}\left(X^{-\theta}\right)^{p-1+1}|-H+\epsilon-\theta X|^{p-1} dx \\
&\leqslant c \int_{B_\delta} d^{1-k+\epsilon p}X^{-p\theta}(d/D)|H-(\epsilon-\theta X(d/D))|^{p-1} dx
\end{aligned}$$

Επειδή η ποσότητα μέσα στο απόλυτο $(\epsilon - \theta X(d/D))$ είναι μικρό σε σχέση με το $H$ έχουμε τελικά

$$I_2 \leqslant c \int_{B_\delta} d^{1-k+\epsilon p}X^{-p\theta}(d/D) dx$$

και παρατηρούμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα έχει πεπερασμένο όριο καθώς $\epsilon \to 0$ διότι

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqslant c \int_{B_\delta} d^{1-k+\epsilon p}X^{-p\theta}(d/D) dx \\
&\leqslant c \int_{B_\delta} d^{-k+\epsilon p}X^{-p\theta+1}(d/D) dx \\
&= J_{-1+p\theta}(\epsilon)
\end{aligned}$$

Το $I_3$ έχει παρόμοιο συλλογισμό . Από τις παραπάνω σχέσεις και την (23) και το πως ορίστηκε το $J_\beta$ έχουμε

$$\begin{aligned}
I[U_\epsilon] &= \int_{B_\delta} |\nabla U_\epsilon|^p dx - |H|^p \int_{B_\delta} \frac{|U_\epsilon|^p}{d^p} dx \\
&\leqslant I_A + I_2 + I_3 - |H|^p \int_\Omega |\phi w_\epsilon|^p d^{-p} dx \\
&= I_A + O(1) - |H|^p \int_\Omega \phi^p d^{-p} d^{-pH+\epsilon p} X^{-p\theta} \\
&= I_A + O(1) - |H|^p \int_\Omega \phi^p d^{-p-k+p+\epsilon p} X^{-p\theta} \\
&= I_A - |H|^p J_{p\theta} + O(1) \\
&= I_1 + O(1)
\end{aligned} \tag{24}$$

όπου
$$I_1 = \int_{B_\delta} \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-p\theta}(d/D)(|H-(\epsilon-\theta X(d/D))|^p - |H|^p).$$
Θα εκτιμήσουμε την ποσότητα $I_1$ .Αφού $\eta := (\epsilon - \theta X(d/D))$ είναι μικρό σε σχέση με το $H$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor έχουμε ότι
$$|H-\eta|^p - |H|^p \leqslant -p|H|^{p-2}H\eta + \frac{1}{2}p(p-1)|H|^{p-2}\eta^2 + C|\eta|^3$$
Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα μπορούμε να φράξουμε το $I_1$ από
$$I_1 \leqslant I_{11} + I_{12} + I_{13}, \tag{25}$$
όπου
$$\begin{aligned}
I_{11} &= -p|H|^{p-2}H\int_{B_\delta} \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-p\theta}(d/D)(\epsilon-\theta X(d/D))dx \\
I_{12} &= \frac{1}{2}p(p-1)|H|^{p-2}\int_{B_\delta} \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-p\theta}(d/D)(\epsilon-\theta X(d/D))^2 dx \\
I_{13} &= C\int_{B_\delta} \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-p\theta}(d/D)|\epsilon-\theta X(d/D)|^3 dx
\end{aligned}$$
Θα αποδείξουμε ότι
$$I_{11}, I_{13} = O(1),\ \epsilon \to 0 \tag{26}$$
Μάλιστα από το προηγούμενο λήμμα (για $\beta = -1 + p\theta$) έχουμε ότι
$$\begin{aligned}
J_{-1+p\theta}(\epsilon) &= \frac{p\epsilon}{p\theta}J_{p\theta}(\epsilon) + O(1) \\
&= \frac{\epsilon}{\theta}J_{p\theta}(\epsilon) + O(1) \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{\theta}C\epsilon^{-1-p\theta} + O(1) \\
&\leqslant \frac{C\epsilon^{-p\theta}}{\theta} + O(1)
\end{aligned}$$
για μικρά $\epsilon > 0$. Τότε το $I_{11}$ γράφεται
$$\begin{aligned}
I_{11} &= -p|H|^{p-2}H\epsilon\int_{B_\delta} \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{-p\theta}(d/D)dx + p|H|^{p-2}H\theta\int_{B_\delta} \phi^p d^{-k+\epsilon p} X^{1-p\theta}(d/D)dx \\
&= -p|H|^{p-2}H\epsilon J_{p\theta}(\epsilon) + p|H|^{p-2}H\theta J_{-1+p\theta}(\epsilon) \\
&\leqslant -p|H|^{p-2}HC\epsilon^{-p\theta} + p|H|^{p-2}HC\epsilon^{-p\theta} + O(1) \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

Με αντίστοιχους συλλογισμούς βρίσκουμε ότι

$$
\begin{aligned}
I_{13} &= C\int_{B_\delta}\phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{-p\theta}|\epsilon-\theta X|^3dx\\
&= C\int_{B_\delta}\phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{-p\theta}|\epsilon^3-3\epsilon^2\theta X+3\epsilon\theta^2X^2-\theta^3X^3|dx\\
&\leqslant C\epsilon^3\int_{B_\delta}\phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{-p\theta}dx+3\epsilon^2\theta C\int_{B_\delta}\phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{1-p\theta}dx\\
&\quad +3\epsilon\theta^2C\int_{B_\delta}\phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{2-p\theta}dx+C\theta^3\int_{B_\delta}\phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{3-p\theta}dx\\
&\leqslant C\epsilon^3J_{p\theta}+C\theta^3J_{p\theta-3}
\end{aligned}
$$

Τελικά

$$I_{13}\leqslant c\epsilon^3J_{p\theta}+cJ_{p\theta-3}$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα 4.3.1 το $(i)$,$(iii)$ , $1<p\theta<2$ και $0<\epsilon<1$

$$
\begin{aligned}
I_{13} &\leqslant c\epsilon^3K\epsilon^{-1-p\theta}+CO(1)\\
&= cK\epsilon^{2-p\theta}+CO(1)
\end{aligned}
$$

έχουμε ότι $I_{13}=O(1)$. Για να υπολογίσουμε τον όρο $I_{12}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
I_{12} &= \frac{1}{2}p(p-1)|H|^{p-2}\epsilon^2\int_{B_\delta}\phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{-p\theta}dx\\
&\quad -p(p-1)\epsilon\theta|H|^{p-2}\int_{B_\delta}\phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{1-p\theta}dx\\
&\quad +\frac{1}{2}p(p-1)|H|^{p-2}\theta^2\int_{B_\delta}\phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{2-p\theta}dx\\
&= \frac{1}{2}p(p-1)|H|^{p-2}\epsilon^2J_{p\theta}(\epsilon)\\
&\quad -p(p-1)\epsilon\theta|H|^{p-2}J_{p\theta-1}(\epsilon)\\
&\quad +\frac{1}{2}p(p-1)|H|^{p-2}\theta^2J_{p\theta-2}(\epsilon)\\
&= p(p-1)|H|^{p-2}\left[\frac{\epsilon^2}{2}J_{p\theta}(\epsilon)-\epsilon\theta J_{p\theta-1}(\epsilon)+\frac{\theta^2}{2}J_{p\theta-2}(\epsilon)\right]
\end{aligned}
$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας το λήμμα 4.3.1 $(ii)$ δύο φορές ($\beta=-1+p\theta$ την πρώτη φορά και μετά $\beta = -2 + p\theta > -1$ την δεύτερη) έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} J_{-1+p\theta}(\epsilon) &= \frac{-1+p\theta}{p\epsilon} J_{-2+p\theta}(\epsilon) \\ J_{p\theta}(\epsilon) &= \frac{\theta}{\epsilon} J_{-1+p\theta}(\epsilon) \\ &= \frac{\theta}{\epsilon}\left(\frac{-1+p\theta}{p\epsilon}\right) J_{-2+p\theta}(\epsilon) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις δυο προηγούμενες σχέσεις στην τελευταια ισοτητα στον υπολογισμό για το $I_{12}$ έχουμε

$$\begin{aligned} I_{12} &= p(p-1)|H|^{p-2}\left[\frac{\theta(-1+p\theta)}{2p} - \frac{\theta(-1+p\theta)}{p} + \frac{\theta^2}{2}\right] J_{-2+p\theta}(\epsilon) + O(1) \\ &= p(p-1)|H|^{p-2}\left[\frac{-\theta + p\theta^2 + 2\theta - 2p\theta^2 + p\theta^2}{2p}\right] J_{-2+p\theta}(\epsilon) + O(1) \end{aligned}$$

όπου τελικά οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση

$$I_{12} = \frac{\theta(p-1)}{2}|H|^{p-2}\int_{B_\delta} \phi^p d^{-k+\epsilon p} X(d/D)^{2-p\theta} dx + O_\epsilon(1), \qquad \epsilon \to 0. \tag{27}$$

Από τις σχέσεις (24),(25),(26) και (27) οδηγούμαστε στην (20). Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει ως εξής :

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta} |\nabla U_\epsilon|^p dx &= I[U_\epsilon] + |H|^p \int_{B_\delta} \frac{|U_\epsilon|^p}{d^p} dx \\ &\leqslant \frac{\theta(p-1)}{2}|H|^{p-2} J_{p\theta-2}(\epsilon) + |H|^p J_{p\theta}(\epsilon) + O(1) \\ &\leqslant \frac{\theta(p-1)}{2}|H|^{p-2} C\epsilon^{-1-(p\theta-2)} + |H|^p J_{p\theta}(\epsilon) + O(1) \\ &\leqslant C\frac{\theta(p-1)}{2}|H|^{p-2}\epsilon^{1-p\theta} + |H|^p J_{p\theta}(\epsilon) + O(1) \\ &\leqslant |H|^p J_{p\theta}(\epsilon) + O(\epsilon^{1-p\theta}) \end{aligned}$$

Προχωράμε στην απόδειξη του Θεωρήματος .

**Απόδειξη.** Προκύπτει άμεσα ότι από το λήμμα ($i$) οτι για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$

$$R_\gamma[U_\epsilon] := \int_\Omega \frac{|U_\epsilon|^p}{d^p} X^\gamma(d/D) dx = J_{p\theta-\gamma}(\epsilon) \tag{28}$$

(ι) Από την ανισότητα (13) η οποία ισχύει για κάθε $u \in W_0^p(\Omega \setminus K)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
A\int_{B_\delta} \frac{|U_\epsilon|^p}{d^p}dx &\leqslant \int_{B_\delta} |\nabla U_\epsilon|^p dx \\
A &\leqslant \frac{\int_{B_\delta} |\nabla U_\epsilon|^p dx}{R_0[U_\epsilon]} \\
&\leqslant \frac{\int_{B_\delta} |\nabla U_\epsilon|^p dx}{J_{p\theta}(\epsilon)} \\
&\leqslant \frac{|H|^p J_{p\theta}(\epsilon) + O(\epsilon^{1-p\theta})}{J_{p\theta}(\epsilon)} \\
&\leqslant \frac{|H|^p J_{p\theta}(\epsilon) + C\epsilon^{1-p\theta}}{J_{p\theta}(\epsilon)} \\
&\leqslant \frac{|H|^p (1+O(\epsilon)) J_{p\theta}(\epsilon) + O(1)}{J_{p\theta}(\epsilon)}
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\epsilon \to 0$, έχουμε για το $J_{p\theta}(\epsilon)$ από το Λημμα 4.3.1 $(i)$ ότι ισχύει $p\theta > 1 > -1$

$$c\epsilon^{-1-p\theta} \leqslant J_{p\theta}(\epsilon) \leqslant C\epsilon^{-1-p\theta}$$

Από κριτήριο παρεμβολής στην παραπάνω ανίσωση λαμβάνουμε τελικά

$$J_{p\theta}(\epsilon) \to \infty$$

.Οπότε

$$A \leqslant |H|^p(1+O(\epsilon)) + \frac{O(1)}{J_{p\theta}(\epsilon)}$$

οπότε $A \leqslant |H|^p$.

(ιι) Ας υποθέσουμε ότι $A = |H|^p$. Υποθέτωντας ότι $\gamma < 2$ θα οδηγούμαστε σε άτοπο. Δεδομένου ότι $p\theta - \gamma > -1$, κάνοντας κάποιους υπολογισμούς στην (13) έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla U_\epsilon|^p dx &\geqslant |H|^p \int_\Omega \frac{|U_\epsilon|^p}{d^p}dx + B\int_\Omega \frac{|U_\epsilon|^p}{d^p} X^\gamma(d/D)dx \\
\int_\Omega |\nabla U_\epsilon|^p dx - |H|^p \int_\Omega \frac{|U_\epsilon|^p}{d^p}dx &\geqslant B\int_\Omega \frac{|U_\epsilon|^p}{d^p} X^\gamma(d/D)dx \\
I[U_\epsilon] &\geqslant B\cdot R_\gamma[U_\epsilon]
\end{aligned}$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
0 < B &\leqslant \frac{I[U_\epsilon]}{R_\gamma[U_\epsilon]} \\
&\leqslant \frac{\frac{\theta(p-1)}{2}|H|^{p-2}J_{p\theta-2}(\epsilon) + O(1)}{J_{p\theta-\gamma}(\epsilon)} \\
&\leqslant \frac{\frac{\theta(p-1)}{2}|H|^{p-2}C\epsilon^{-1-(p\theta-2)}}{c\epsilon^{-1-(p\theta-\gamma)}} \\
&\leqslant \frac{c'\epsilon^{-p\theta+1}}{c\epsilon^{-1-p\theta+\gamma}} \\
&\leqslant \frac{c'}{c}\epsilon^{-p\theta+1+1+p\theta-\gamma} \\
&= d\epsilon^{2-\gamma} \to 0, \qquad \epsilon \to 0
\end{aligned}
$$

Καταλήξαμε δηλαδή ότι

$$0 < B \leqslant 0, \quad \text{δηλαδή} \quad B = 0$$

Άτοπο λόγω των υποθέσεων του Θεωρήματος. Άρα $\gamma \geqslant 2$.

(ιιι) Αν $A = |H|^p$ και $\gamma = 2$ τότε με παρόμοια βήματα οπως στο $(ii)$ καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$I[U_\epsilon] \geqslant B \cdot R_2[U_\epsilon]$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
B &\leqslant \frac{I[U_\epsilon]}{R_2[U_\epsilon]} \\
&\leqslant \frac{\frac{1}{2}\theta(p-1)|H|^{p-2}J_{p\theta-2}(\epsilon) + O(1)}{J_{p\theta-2}(\epsilon)}
\end{aligned}
$$

Από την υπόθεση ότι $\theta > \dfrac{1}{p}$ οδηγούμαστε στο ότι $p\theta - 2 > -1$ και άρα από λήμμα 4.3.1 $(i)$ και από κριτήριο παρεμβολής καταλήγουμε $J_{p\theta-2} \to \infty$ καθώς $\epsilon \to 0$ . Επομένως

$$B \leqslant \frac{1}{2}\theta(p-1)|H|^{p-2} + \frac{O(1)}{J_{p\theta-2}}(\epsilon)$$

Οπότε

$$B \leqslant \frac{\theta(p-1)}{2}|H|^{p-2}$$

αφήνοντας το $\theta \to \dfrac{1}{p}$ έχω το ζητούμενο.

**Θεώρημα 4.3.2** *Υποθέτουμε οτι το $\Omega$ είναι χωρίο στο $\mathbb{R}^N$.*
*$(i)$ Αν $2 \leqslant k \leqslant N-1$, τότε υποθέτουμε οτι το $K$ είναι μια λεία επιφάνεια συνδι-*

*άστασης* $k$ *και ότι* $K \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$.
$(ii)$ *Αν* $k = N$ *επιλέγουμε* $K = \{0\} \subset \Omega$.
*Υποθέτωντας για* $p = k$ *και για κάποιες σταθερές* $B \geqslant 0$ *και* $\gamma > 0$ *η ακόλουθη ανισότητα ισχύει για κάθε* $u \in C_c^\infty(\Omega \setminus K)$ *:*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geqslant B \int_\Omega \frac{|u|^p}{d^p} X^\gamma(d/D) dx \tag{29}$$

*Τότε έχουμε :*

$$\begin{array}{ll} (i) & Αν\ B > 0, \gamma \geqslant p \\ (ii) & Αν\ \gamma = p, B \leqslant \Big(\dfrac{p-1}{p}\Big)^p. \end{array}$$

**Απόδειξη.** Στην ακόλουθη απόδειξη θα ακόλουθήσουμε παρόμοια συλλογιστική σκέψη με το Θεώρημα 4.3.1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το $0 \in K \cap \Omega$, αν $2 \leqslant k \leqslant N$, και $0 \in \partial\Omega = K$ αν $k = 1$. Όπως και στο προηγούμενο θεώρημα επιλέγουμε την $\phi$ να είναι μια μη αρνητική συνάρτηση , $\phi \in C_c^2(B_\delta)$ ορισμένη στον ένα κλάδο στην $B_\delta = |x| < \delta$ και ομοίως στον άλλο κλάδο $B_{\delta/2} = |x| < \delta/2$. Για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $\theta > (p-1)/p$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$w_\epsilon = d^\epsilon X^{-\theta}(d/D)$$

και

$$U_\epsilon = \phi w_\epsilon.$$

Χρησιμοποιώντας την βασική ανισότητα (22), έχουμε

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla U_\epsilon|^p dx &= \int_\Omega |\nabla(\phi \cdot w_\epsilon)|^p dx \\ &= \int_\Omega |\phi \nabla w_\epsilon + w_\epsilon \nabla \phi|^p dx \\ &\leqslant \int_{B_\delta} \phi^p |\nabla w_\epsilon|^p dx + c_p \int_{B_\delta} \phi^{p-1} |\nabla w_\epsilon|^{p-1} |w_\epsilon| |\nabla \phi| dx \\ &\quad + c_p \int_{B_\delta} w_\epsilon^p |\nabla \phi|^p dx \\ &=: I_A + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

όπου θέτουμε $I_A, I_2, I_3$ με την σειρά που είναι γραμμένα τα παραπάνω ολοκληρώματα. Όπως ακριβώς και στο προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι

$$I_2, I_3 = O_\epsilon(1), \quad \epsilon \to 0.$$

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα για να εκφράσουμε τους συντελεστές $c_i^p$ λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}
|\nabla w_\epsilon|^p &= |\nabla(d^\epsilon X^{-\theta})|^p \\
&= |X^{-\theta}\nabla(d^\epsilon) + d^\epsilon\nabla(X^{-\theta})|^p \\
&= |X^{-\theta}\epsilon d^{\epsilon-1}\nabla d + d^\epsilon(-\theta)X^{-\theta+1}d^{-1}\nabla d|^p \\
&= |d^{\epsilon-1}X^{-\theta}\nabla d(\epsilon-\theta X)|^p \\
&= d^{-p+p\epsilon}X^{-p\theta}|\nabla d|^p|\epsilon-\theta X|^p \\
&= d^{-k+\epsilon p}X^{-p\theta}(d/D)|\epsilon-\theta X(d/D)|^p \\
&\leqslant d^{-k+\epsilon p}X(d/D)(\epsilon+\theta X(d/D))^p \\
&= d^{-k+\epsilon p}X^{-p\theta}(d/D)\sum_{i=0}^{p} c_i^p\epsilon^{p-i}\theta^i X^i(d/D)
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
I_A &= \int_{B_\delta}\phi^p|\nabla w_\epsilon|^p dx| \\
&\leqslant \int_{B_\delta}\phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{-p\theta}(d/D)\sum_{i=0}^{p} c_i^p\epsilon^{p-i}\theta^i X^i(d/D)dx \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{p} c_i^p\epsilon^{p-i}\theta^i\int_{B_\delta}\phi^p d^{-k+\epsilon p}X^{i-p\theta}(d/D)dx \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{p} c_i^p\epsilon^{p-i}\theta^i J_{p\theta-i}(\epsilon)
\end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις

$$J_\beta(\epsilon) = \int_\Omega \phi^p d^{-p+\epsilon p}X^{-\beta}(d/D)$$

όπως ακριβώς ορίστηκαν (16). Τώρα από το προηγούμενο λήμμα 4.3.1 (*ii*) και με παρόμοιο επιχείρημα έχουμε

$$\epsilon^{p-i}J_{p\theta-i} = (\theta-\frac{i}{p})(\theta-\frac{i+1}{p}).....(\theta-\frac{p-1}{p})J_{p\theta-p}+O(1), \quad i=0,....p-1$$

Αλλά

$$\begin{aligned}
\theta &> \frac{p-1}{p} \\
p\theta &> p-1 \\
\text{δηλαδή}\quad 0 &> p-1-p\theta
\end{aligned}$$

εφαρμόζοντας στο Λήμμα 4.3.1 το $(i)$ για $\beta = p\theta - p > -1$ και χρησιμοποιώντας το κριτήριο παρεμβολής οτι ο όρος

$$J_{p\theta-p}(\epsilon) \to +\infty, \text{ καθώς } \epsilon \to 0$$

Αντικαθιστώντας στην (29) για $\gamma = p$ και παίρνοντας όριο για $\epsilon \to 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
B\int_\Omega \frac{|U_\epsilon|^p}{d^p}X^p(d/D) &\leqslant \int_\Omega |\nabla U_\epsilon|^p dx \\
B &\leqslant \frac{\int_\Omega |\nabla U_\epsilon|^p dx}{\int_\Omega \frac{|U_\epsilon|^p}{d^p}X^p(d/D)dx} \\
B &\leqslant \lim_{\epsilon\to 0} sup \frac{\int_\Omega |\nabla U_\epsilon|^p dx}{\int_\Omega \frac{|U_\epsilon|^p}{d^p}X^p(d/D)dx} \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\to 0} sup \frac{\int_\Omega |\nabla U_\epsilon|^p dx}{R_p[U_\epsilon]} \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\to 0} sup \frac{I_A + I_2 + I_3}{R_p[U_\epsilon]} \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\to 0} sup \frac{\sum_{i=0}^{p} c_i^p \epsilon^{p-i}\theta^i J_{p\theta-i}(\epsilon) + O(1)}{J_{p\theta-p}(\epsilon)} \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\to 0} sup \frac{\theta^p c_p^p \epsilon^{p-p} J_{p\theta-p}(\epsilon) + \sum_{i=0}^{p-1} c_i^p \epsilon^{p-i}\theta^i J_{p\theta-i}(\epsilon) + O(1)}{J_{p\theta-p}(\epsilon)} \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\to 0} sup \frac{\theta^p J_{p\theta-p}(\epsilon) + \sum_{i=0}^{p-1} c_i^p \theta^p(\theta - \frac{i}{p})...(\theta - \frac{p-1}{p})J_{p\theta-p}(\epsilon) + O(1))}{J_{p\theta-p}(\epsilon)} \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\to 0} sup \frac{\left(\theta^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i^p \theta^i(\theta - \frac{i}{p})...(\theta - \frac{p-1}{p})\right) J_{p\theta-p}(\epsilon) + O(1)}{J_{p\theta-p}(\epsilon)} \\
&= \theta^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i^p \theta^i(\theta - \frac{i}{p})....(\theta - \frac{p-1}{p}) + \frac{O(1)}{J_{p\theta-p}(\epsilon)} \\
&= \theta^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i^p \theta^i(\theta - \frac{i}{p})...(\theta - \frac{p-1}{p})
\end{aligned}$$

Καθώς το $\theta \to (p-1)/p$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω ανισότητα έχουμε τελικά

$$B \leqslant (\frac{p-1}{p})^p$$

και αποδείξαμε το ζητούμενο .

# Αναφορές


[1] Ambrosio L., Soner H.M., Level set approach to mean curvature flow in arbitrary codimension, *J. Differential Geom.* 43, no. 4, 693–737 (1996)

[2] Barbatis G., Filippas S., Tertikas A., A unified approach to improved $L^p$ Hardy inequalities with best constants, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(6), 2169–2196 (2004)

[3] Brezis H. and Marcus M. Hardy's inequalities revisited. *Ann. Scuola Norm. Pisa*, (25), 217-237, (1997)

[4] Brezis H., Vázquez J.L., Blow-up solutions of some nonlinear elliptic equations, *Rev. Mat. Complut.*, 10(2), 443-469, (1997)

[5] Evans L. Partial Differential Equations . Second edition. Textbooks in Mathematics. 713, (2010)

[6] Evans L., Gariepy, R.F. Measure theory and fine properties of functions. Revised edition. Textbooks in Mathematics. CRC Press, 2015. xiv+299 pp.