

Κινηματική ανακατασκευή της διάσπασης
 $\tilde{g} \tilde{g} \rightarrow q\bar{q} \tilde{\chi}_1^\pm (\tilde{\chi}_1^0 W^\pm(l^\pm \nu)) q\bar{q} \tilde{\chi}_1^\pm (\tilde{\chi}_1^0 W^\pm(q\bar{q}))$ με την μέθοδο
Recursive Jigsaw Reconstruction για την αναζήτηση
Υπερσυμμετρίας σε δεδομένα του πειράματος CMS



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Νικόλαος Πλαστήρας
1110201800149

Πτυχιακή Εργασία

Επιβλέπων:

Κωνσταντίνος Βελλίδης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Τομέας Πυρηνικής και Σωματιδιακής Φυσικής

Αθήνα 2022

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κωνσταντίνο Βελλίδη για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και συμφοιτητές μου για την συμβολή τους στον έλεγχο και τα διαδικαστικά θέματα καθώς και την οικογένεια μου που με στήριξε καθ'όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Το Καθιερωμένο Πρότυπο (Standard Model - SM) αν και επιτυχές σε ένα πολύ μεγάλο βαθμό, αδυνατεί να εξηγήσει κάποια σημαντικά ερωτήματα, με αποτέλεσμα να έχουν προταθεί νέες θεωρίες ώστε να τα απαντήσουν. Μία από αυτές είναι η Υπερσυμμετρία (Supersymmetry - SUSY) η οποία αποτελεί επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου, προβλέποντας για κάθε SM σωματίο έναν υπερσυμμετρικό εταίρο με spin μειωμένο κατά $\hbar/2$. Στα θεωρητικά μοντέλα της Υπερσυμμετρίας στα οποία έχουμε διατήρηση της R-parity, προβλέπεται ότι το ελαφρύτερο υπερσυμμετρικό σωματίδιο (Lightest Supersymmetric Particle - LSP) πρέπει να είναι σταθερό. Αυτό το σωματίδιο, το οποίο ονομάζεται και neutralino-1 ($\tilde{\chi}_1^0$) είναι υποψήφιο για την σύσταση της σκοτεινής ύλης, καθώς πρόκειται για ένα σωματίδιο WIMP (Weakly Interacting Massive Particle). Συνεπώς, η πειραματική επιβεβαίωση ύπαρξης αυτού του σωματιδίου και κατ' επέκταση της SUSY είναι αρκετά σημαντική. Βέβαια, η ανίχνευση των LSPs σε ένα πείραμα όπως το CMS είναι δύσκολη, καθώς αυτά συμπεριφέρονται όπως τα SM νετρίνα, δηλαδή διαφεύγουν του ανιχνευτή, αφήνοντας ως μόνη πληροφορία την ελλείπουσα ενέργεια. Ως αποτέλεσμα, προκύπτουν κινηματικές και συνδυαστικές ασάφειες οι οποίες δεν μας επιτρέπουν να λάβουμε πληροφορίες για όλες τις ιδιότητες των ενδιάμεσων σωματιδίων της διάσπασης. Αυτές τις δυσκολίες τις επιλύουμε χρησιμοποιώντας την μέθοδο Recursive Jigsaw Reconstruction (RJR). Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί έναν συνδυασμό αλγορίθμων-κανόνων, γνωστών ως Jigsaw Rules (JRs), η εφαρμογή των οποίων επιλύει ως έναν βαθμό τις ασάφειες σε κάθε διεργασία. Στην εργασία αυτή, κάνοντας χρήση του λογισμικού πακέτου RestFrames, εφαρμόζουμε την μέθοδο RJR στην αντίδραση $\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow q\bar{q} \tilde{\chi}_1^\pm (\tilde{\chi}_1^0 W (l^\pm \nu)) \quad q\bar{q} \tilde{\chi}_1^\pm (\tilde{\chi}_1^0 W (q\bar{q}))$, με στόχο την ορθή παραγωγή και ανακατασκευή της. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε πέντε σενάρια για τις μάζες των υπερσυμμετρικών σωματιδίων και αναλύουμε πως οι διαφορές του φασικού χώρου επηρεάζουν την ανακατασκευή των υπό διερεύνηση παραμέτρων.

Abstract

The Standard Model (SM), despite being undeniably successful to a great extent, fails to explain some important questions, resulting in many new theories being proposed to answer some of them. One of these is Supersymmetry (SUSY), an extension of the Standard Model, predicting for each SM particle its supersymmetric partner with a spin reduced by $\hbar/2$. In some SUSY models, in which the conservation of a new symmetry, R - parity, is considered, the Lightest Supersymmetric Particle (LSP) must be stable. This particle, which is called neutralino-1 ($\tilde{\chi}_1^0$) is a candidate for the composition of dark matter, as it is a WIMP (Weakly Interacting Massive Particle). Thus, the experimental confirmation of its existence and hence the existence of SUSY particles is of utmost importance. Certainly, the detection of LSPs in an experiment like CMS is difficult because these particles act like SM neutrinos meaning that they will escape the detector, leaving the missing energy as the only information. As a result, kinematic and combinatoric ambiguities arise that do not allow us to obtain information about all the properties of intermediate particles of the decay. We solve these difficulties using the method Recursive Jigsaw Reconstruction (RJR). This method uses a combination of algorithms-rules, known as Jigsaw Rules (JRs), the application of which resolves to some extent the ambiguities in each process. In this thesis, using the RestFrames software package, we apply the RJR method for the reaction $\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow q\bar{q} \tilde{\chi}_1^\pm (\tilde{\chi}_1^0 W (l^\pm \nu)) \quad q\bar{q} \tilde{\chi}_1^\pm (\tilde{\chi}_1^0 W (q\bar{q}))$ with the aim of its correct generation and reconstruction. In particular, we consider five scenarios for the masses of the supersymmetric particles and analyze how phase space differences affect the reconstruction of the investigated parameters.

Περιεχόμενα

1	Καθιερωμένο Πρότυπο και Υπερσυμμετρία	1
1.1	Το Καθιερωμένο Πρότυπο	1
1.1.1	Σωματίδια και Αλληλεπιδράσεις	2
1.1.2	Μαθηματικός Φορμαλισμός	7
1.1.3	Επιτυχίες και Αποτυχίες	8
1.2	Υπερσυμμετρία	11
1.2.1	Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο	11
2	Ο Ανιχνευτής CMS στον LHC	15
2.1	Ο Επιταχυντής LHC	15
2.1.1	Φωτεινότητα του LHC	17
2.1.2	Αναβάθμιση του LHC	19
2.2	Ο Ανιχνευτής CMS	19
2.2.1	Οι Ανιχνευτές Τροχιών	21
2.2.2	Το Ηλεκτρομαγνητικό Καλορίμετρο	23
2.2.3	Το Αδρονικό Καλορίμετρο	24
2.2.4	Το Σωληνοειδές Πηνίο	25
2.2.5	Οι Θάλαμοι Ανιχνευτών Μιονίων	25
2.2.6	Τα Συστήματα Σκανδαλισμού και Συλλογής Δεδομένων	27
3	Η μέθοδος Recursive Jigsaw Reconstruction	29
3.1	Ανάλυση Συμπιεσμένων Τοπολογιών	30
3.2	Το Λογισμικό Πακέτο RestFrames	37
3.3	Παραδείγματα Εφαρμογής της Μεθόδου RJR	37
3.3.1	Κινηματικές Ασάφειες	39
3.3.2	Συνδυαστικές Ασάφειες	67
4	Εφαρμογή της μεθόδου RJR	72
4.1	Επιλογή των Jigsaw Rules	73
4.2	Προγραμματισμός της Εφαρμογής με το Πακέτο RestFrames	75
4.3	Αποτελέσματα και Συμπεράσματα	76
4.3.1	1 ^ο Σενάριο	77
4.3.2	2 ^ο Σενάριο	80
4.3.3	3 ^ο & 4 ^ο Σενάριο	83
4.3.4	5 ^ο Σενάριο	86
4.3.5	Τελικά Συμπεράσματα	88

A	Χρήσιμα Μεγέθη	89
A.1	Μετασχηματισμοί Lorentz	89
A.2	Εγκάρσια Ορμή & Ενέργεια	89
A.3	Ελλείπουσα Εγκάρσια Ορμή & Ενέργεια	90
A.4	Αναλλοίωτη Μάζα	90
A.5	Ωκύτητα - Ψευδοωκύτητα	91
B	Κώδικας	93
	Βιβλιογραφία	104

Κεφάλαιο 1

Καθιερωμένο Πρότυπο και Υπερσυμμετρία

1.1 Το Καθιερωμένο Πρότυπο

Το Καθιερωμένο Πρότυπο (Standard Model) της Σωματιδιακής Φυσικής είναι μία συλλογική κβαντική θεωρία πεδίου που περιγράφει όλα τα γνωστά, θεμελιώδη σωματίδια και τις αλληλεπιδράσεις τους με την ισχυρή πυρηνική δύναμη, την ασθενή πυρηνική δύναμη και την ηλεκτρομαγνητική δύναμη [1–5]. Αποτελεί την καλύτερη, μέχρι στιγμής, περιγραφή των θεμελιωδών συστατικών του σύμπαντος μας, καθώς και των αλληλεπιδράσεων μεταξύ αυτών και είναι ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της σύγχρονης φυσικής.

Το Καθιερωμένο Πρότυπο είναι το αποκορύφωμα ετών σκληρής δουλειάς, πολλών λαμπρών επιστημόνων, με πρωτεργάτη τον Dirac, ο οποίος το 1928 κατάφερε να ενοποιήσει την Κβαντική Μηχανική με την Σχετικότητα στην μελέτη του για το ηλεκτρόνιο [6]. Αυτό ήταν το έναυσμα για μία συνεχή αναζήτηση, συνεχούς κβαντομηχανικής και σχετικιστικής αντιμετώπισης της ηλεκτροδυναμικής, την οποία και πλέον αποκαλούμε Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (Quantum Electrodynamics) ή συνοπτικά QED. Αυτή η αναζήτηση ολοκληρώθηκε την δεκαετία του 1940 με την συμβολή των Dyson, Feynman, Schwinger και Tomonaga [7–10], οι οποίοι εισήγαγαν τον φορμαλισμό της QED και κατ'επέκταση την πρώτη Κβαντική Θεωρία Πεδίου (Quantum Field Theory - QFT). Έπειτα των επιτυχιών της QED, την δεκαετία του 1960, έγιναν προσπάθειες για τον φορμαλισμό μίας αντίστοιχης θεωρίας για την ασθενή πυρηνική δύναμη. Αυτή η προσπάθεια κατέληξε στην ενοποίηση του ηλεκτρομαγνητισμού με την ασθενή αλληλεπίδραση, από τους Glashow, Weinberg, Salam [11–13], σχηματίζοντας έτσι την ηλεκτρασθενή θεωρία [14]. Στην συνέχεια, την δεκαετία του 1970 ενσωματώθηκε και η ισχυρή αλληλεπίδραση μέσω της περιγραφής της από την Κβαντική Χρωμοδυναμική (Quantum Chromodynamics - QCD). Καίρια συμβολή στην ανάπτυξη της QCD είχαν οι Harald Fritzsch και Murray Gell-Mann οι οποίοι και εισήγαγαν ένα νέο φορτίο, το χρώμα [15]. Το τελευταίο κομμάτι του παζλ που ονομάζεται Καθιερωμένο Πρότυπο, συμπληρώθηκε εισάγοντας το πεδίο Higgs το οποίο είναι απαραίτητο για την θεωρία καθώς περιγράφει πως παίρνουν μάζα τα σωματίδια και κυρίως επιλύει το πρόβλημα με το αμετάβλητο βαθμίδα το οποίο και απαιτεί μηδενικές μάζες για τα μποζόνια με spin-1 κάτι το οποίο, όπως θα δούμε και στην συνέχεια, δεν ισχύει για τα W^\pm και Z^0 . Ο μηχανισμός Higgs, προτάθηκε σχεδόν ταυτόχρονα, το 1964 από τρεις ανεξάρτητες ομάδες, από τους Brout και Englert [16], από τον Higgs [17], και από τους Guralnik, Hagen και Kibble [18]. Επιπλέον, ο μηχανισμός Higgs προέβλεψε την ύπαρξη ενός ακόμα σωματιδίου, του μποζονίου Higgs.

1.1.1 Σωματίδια και Αλληλεπιδράσεις

Τα στοιχειώδη σωματάρια χωρίζονται στα φερμιόνια (fermions), σωματάρια με ημισακέραιο spin τα οποία ακολουθούν την στατιστική Fermi-Dirac και στα μποζόνια (bosons), σωματάρια με ακέραιο spin που ακολουθούν την στατιστική Bose-Einstein. Τα φερμιόνια είναι τα σωματάρια που απαρτίζουν όλη την ορατή ύλη του σύμπαντος ενώ τα μποζόνια είναι οι φορείς των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων μεταξύ των σωματιδίων. Τα σωματάρια χωρίζονται σε ομάδες ανάλογα με τις χβαντικές ιδιότητες τους και με την συμπεριφορά τους ως προς τις θεμελιώδεις δυνάμεις, δηλαδή τις αλληλεπιδράσεις.

Τα φερμιόνια χωρίζονται σε δύο είδη σωματιδίων ύλης, στα κουάρκς (quarks) και στα λεπτόνια (leptons). Υπάρχουν 3 γενιές φερμιονίων από τις οποίες κάθε μία περιλαμβάνει από ένα φορτισμένο και ένα ουδέτερο λεπτόνιο καθώς και δύο κουάρκς. Το ηλεκτρόνιο, το νεutrίνο ηλεκτρονίου και τα up και down κουάρκς απαρτίζουν την πρώτη γενιά. Από όσο γνωρίζουμε, αυτά είναι στοιχειώδη, δηλαδή δεν έχουν εσωτερική δομή και αποτελούν τις θεμελιώδεις λίθους του Σύμπαντος χαμηλής ενέργειας. Ωστόσο, όταν μελετώνται οι αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων σε κλίμακες μεγαλύτερης ενέργειας όπως αυτές που συναντώνται στους επιταχυντές, αποκαλύπτεται μεγαλύτερη πολυπλοκότητα. Για κάθε ένα σωματίδιο της πρώτης γενιάς, υπάρχουν ακριβώς δύο αντίγραφα με μόνη διαφορά στις μάζες. Αυτά τα επιπλέον οκτώ σωματάρια απαρτίζουν την δεύτερη και την τρίτη γενιά. Συγκεκριμένα, η δεύτερη γενιά αποτελείται από το μόνιο, το νεutrίνο μιονίου και τα charm και strange κουάρκς ενώ η τρίτη γενιά αποτελείται από το ταυ, το ταυ νεutrίνο και τα top και bottom κουάρκς. Όλα τα στοιχειώδη φερμιόνια έχουν spin-1/2 ενώ οι μάζες τους, με εξαίρεση τα νεutrίνα, αυξάνονται με την γενιά στην οποία ανήκουν. Στον Πίνακα 1.1 παρουσιάζονται τα 12 θεμελιώδη φερμιόνια με τις ιδιότητες τους, ηλεκτρικό φορτίο και μάζα.

Τύπος Σωματιδίου	Γενιά	Σωματίδιο	Φορτίο (e)	Μάζα
Quarks	I	Up (u)	+2/3	$2.2_{-0.4}^{+0.5} \text{ MeV}$
		Down (d)	-1/3	$4.7_{-0.3}^{+0.5} \text{ MeV}$
	II	Charm (c)	+2/3	$1.275_{-0.035}^{+0.025} \text{ GeV}$
		Strange (s)	-1/3	95_{-3}^{+9} MeV
	III	Top (t)	+2/3	$173.0 \pm 0.4 \text{ GeV}$
		Bottom (b)	-1/3	$4.18_{-0.03}^{+0.04} \text{ GeV}$
Leptons	I	Electron-neutrino (ν_e)	0	$< 2 \text{ eV}$
		Electron (e)	-1	$0.511 \pm 3.1 \times 10^{-9} \text{ MeV}$
	II	Muon-neutrino (ν_μ)	0	$< 0.19 \text{ MeV}$
		Muon (μ)	-1	$105.658 \pm 2.4 \times 10^{-6} \text{ MeV}$
	III	Tau-neutrino (ν_τ)	0	$< 18.2 \text{ MeV}$
		Tau (τ)	-1	$1776.86 \pm 0.12 \text{ MeV}$

Πίνακας 1.1: Τα φερμιόνια του Καθιερωμένου Προτύπου και οι ιδιότητές τους [19]

Όπως φαίνεται ήδη από τον πίνακα, τα κουάρκς έχουν σημαντικές διαφορές σε σύγκριση με τα λεπτόνια. Αρχικά, παρόλο που τα κουάρκς είναι στοιχειώδη σωματάρια, αυτά δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμα αλλά τα βρίσκουμε εγκλωβισμένα σε πιο σύνθετες δομές, τα αδρόνια (hadrons). Ο εγκλωβισμός αυτός οφείλεται σε μία μοναδική ιδιότητα που έχουν τα κουάρκς και ο φορέας αλληλεπίδρασης της ισχυρής δύναμης, το χρωματικό φορτίο ή απλά χρώμα (color). Συγκεκριμένα, τα κουάρκς «ενώνονται» με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζουν καταστάσεις οι οποίες είναι χρωματικά απλές. Επειδή οι φορείς της ισχυρής αλλη-

λεπίδρασης (γλουόνια) είναι «χρωματισμένοι», αλληλεπιδρούν άμεσα μεταξύ τους, συνεπώς οποιαδήποτε εναπόθεση ενέργειας σε μία χρωματική απλή με σκοπό να σπάσει στα συστατικά της, παράγει περισσότερα γλουόνια που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και με τα κουάρκ και τα «δένουν» ξανά σε άχρωμες δομές οι οποίες δεν παράγουν άλλα γλουόνια. Οι χρωματικά απλές καταστάσεις δημιουργούνται είτε με τον συνδυασμό τριών κουάρκ διαφορετικού χρώματος, τα οποία και ονομάζουμε Βαρυόνια (Baryons) είτε με τον συνδυασμό ενός κουάρκ και ενός αντικουάρκ, τα οποία και ονομάζουμε Μεσόνια (Mesons). Τα πιο γνωστά παραδείγματα βαρυονίων αποτελούν το πρωτόνιο p (uud), το οποίο είναι το μοναδικό σταθερό βαρυόνιο, και το νετρόνιο n (udd), τα οποία είναι τα, γνωστά σε όλους, συστατικά των ατομικών πυρήνων. Αντίστοιχα, μερικά παραδείγματα μεσονίων αποτελούν τα πιόνια, π^\pm, π^0 και τα καόνια K^\pm, K^0 , τα οποία, όπως και όλα τα άλλα μεσόνια, είναι ασταθή.

Επιπλέον, για την καλύτερη ταξινόμηση και περιγραφή των ιδιοτήτων των σωματιδίων ορίζουμε κάποιους χβαντικούς αριθμούς. Οι χβαντικοί αυτοί αριθμοί διέπονται από κάποιους νόμους διατήρησης και παίρνουν κάποιες ιδιοτιμές. Όσον αφορά τα λεπτόνια, ορίζουμε τον Λεπτονικό αριθμό ο οποίος είναι διαφορετικός για κάθε γενιά (L_e, L_μ, L_τ). Τα λεπτόνια που ανήκουν στην εκάστοτε οικογένεια έχουν λεπτονικό αριθμό $+1$ ενώ αυτά που δεν ανήκουν έχουν 0 :

	e^-	ν_e	μ^-	ν_μ	τ^-	ν_τ
L_e	+1	+1	0	0	0	0
L_μ	0	0	+1	+1	0	0
L_τ	0	0	0	0	+1	+1

Πίνακας 1.2: Λεπτονικός αριθμός

Ο λεπτονικός αριθμός κάθε γενιάς, διατηρείται και δεν γνωρίζουμε γιατί. Όλες οι ιδιότητες του Καθιερωμένου Προτύπου παραμένουν ίδιες ακόμα και αν ο λεπτονικός αριθμός δεν διατηρείται. Μάλιστα, αναμένουμε η διατήρηση του λεπτονικού αριθμού να παραβιάζεται καθώς γενικά υπάρχει μίξη γεύσεων, αλλά ακόμα δεν έχει παρατηρηθεί κάτι τέτοιο.

Αντίστοιχα, για τα κουάρκ ορίζουμε τον Βαρυονικό αριθμό (B). Κατά σύμβαση, κάθε κουάρκ έχει βαρυονικό αριθμό ίσο με $B=1/3$, έτσι ώστε ένα βαρυόνιο, το οποίο αποτελείται από 3 κουάρκ, να έχει $B = 1$. Ο βαρυονικός αριθμός διατηρείται, ενώ δεν υπάρχει κανόνας διατήρησης για τα μεσόνια. Επιπλέον, ορίζουμε ακόμα τέσσερεις χβαντικούς αριθμούς, που σχετίζονται με τις μεγαλύτερες γενιές των κουάρκ: τον χβαντικό αριθμό της Παραξενιάς (Strangeness - S), της Χάρης (Charm - C) καθώς και τον Πυθμενικό (Bottom - \tilde{B}) και τον Κορυφαίο (Top - T) χβαντικό αριθμό, οι οποίοι αποδίδονται στα κουάρκ όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.3.

	u	d	c	s	t	b
B	+1/3	+1/3	+1/3	+1/3	+1/3	+1/3
C	0	0	+1	0	0	0
S	0	0	0	-1	0	0
T	0	0	0	0	+1	0
\tilde{B}	0	0	0	0	0	-1

Πίνακας 1.3: Χβαντικοί αριθμοί των κουάρκ

Όσον αφορά τις αλληλεπιδράσεις, στην χβαντική θεωρία πεδίου, περιγράφονται μέσω ανταλλαγής χβάντων, διαφορετικών για κάθε είδος αλληλεπίδρασης. Αυτά τα χβάντα, τα οποία ονομάζονται και ως φορείς των αλληλεπιδράσεων είναι μποζόνια. Οι φορείς αλληλεπίδρασης του Καθιερωμένου Προτύπου έχουν spin-1 και είναι τα γλουόνια (gluons), το φωτόνιο (γ), τα φορτισμένα μποζόνια W^\pm και το ουδέτερο μποζόνιο Z .

Το γλουόνιο είναι ο φορέας αλληλεπίδρασης της ισχυρής πυρηνικής δύναμης και όπως έχει ήδη αναφερθεί έχει την ιδιαίτερη ιδιότητα του χρώματος. Τα κουάρκ είναι τα μοναδικά φερμιόνια τα οποία έχουν χρωματικό φορτίο και συνεπώς είναι τα μόνα που αλληλεπιδρούν με τα γλουόνια και κατ'επέκταση με την ισχυρή δύναμη. Μάλιστα, λόγω του γεγονότος ότι η ισχυρή αλληλεπίδραση είναι «τυφλή» ως προς το ηλεκτρικό φορτίο των κουάρκ και επειδή η μάζα των up και down κουάρκ είναι πανομοιότυπη, έχουμε μία συμμετρία, όπου σωματία με τον ίδιο αριθμό u και d κουάρκ μπορούμε να τα διαχειριστούμε με τον ίδιο τρόπο. Αυτή την συμμετρία την εκφράζουμε μέσω της εισαγωγής ενός νέου χβαντικού αριθμού που ονομάζεται isospin (I). Έτσι λοιπόν, μπορούμε να γράψουμε τα δύο κουάρκ ως μία δυάδα με $I = 1/2$ και τρίτη συνιστώσα $I_3 = +1/2$ για το u και $I_3 = -1/2$ για το d. Χαρακτηριστικό παράδειγμα σε αυτή την συμμετρία αποτελούν το πρωτόνιο και το νετρόνιο, τα οποία κάτω από την ισχυρή αλληλεπίδραση συμπεριφέρονται το ίδιο, με αποτέλεσμα, σε αυτό το πλαίσιο αναφοράς, να τα ορίζουμε ως ένα σωματίο, το νουκλεόνιο.

Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη διαδίδεται μέσω του φωτονίου και αλληλεπιδρά με τα ηλεκτρικώς φορτισμένα φερμιόνια ενώ η ισχύς της, ενδεικτικά, είναι περίπου 10^{-3} μικρότερη σε σύγκριση με την ισχυρή δύναμη. Προφανώς, στις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις το isospin δεν διατηρείται. Τέλος, η ασθενής πυρηνική δύναμη διαδίδεται μέσω των μποζονίων W και Z και όπως προδίδει και το όνομα της, έχει πολύ μικρότερη ισχύ από την ηλεκτρομαγνητική και ακόμα μικρότερη από την ισχυρή αλληλεπίδραση. Και τα 12 φερμιόνια έχουν το φορτίο της ασθενής αλληλεπίδρασης, το οποίο ονομάζεται ασθενές isospin, και συνεπώς όλα αλληλεπιδρούν ασθενώς. Στον Πίνακα 1.4 παρουσιάζονται οι τρεις θεμελιώδεις δυνάμεις και μερικές από τις ιδιότητες τους.

Αλληλεπίδραση	Σωματίδιο	Φορτίο (e)	Μάζα
Ισχυρή	Gluon (g)	0	0
Ηλεκτρομαγνητική	Photon (γ)	0	$< 10^{-18} eV$
Ασθενής	W boson (W^\pm)	± 1	$80.379 \pm 0.012 GeV$
	Z boson (Z^0)	0	$91.1876 \pm 0.0021 GeV$

Πίνακας 1.4: Οι φορείς αλληλεπίδρασης του Καθιερωμένου Προτύπου και οι ιδιότητες τους [19]

Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι μερικοί νόμοι διατήρησης είναι απόλυτοι ή σχεδόν απόλυτοι ενώ άλλοι διατηρούνται μόνο σε μερικές αλληλεπιδράσεις. Έδη έχει αναφερθεί ότι το isospin είναι συμμετρία μόνο της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Μάλιστα, η ασθενής αλληλεπίδραση παραβιάζει τις περισσότερες συμμετρίες ακόμα και τις θεμελιακές. Συγκεκριμένα, στον Πίνακα 1.5 δίνεται ένας κατάλογος από μερικές ποσότητες οι οποίες διατηρούνται στους διάφορους τύπους αλληλεπιδράσεων.

Διατηρούμενη Ποσότητα	Αλληλεπίδραση		
	Ισχυρή	Ηλεκτρομαγνητική	Ασθενής
Ενέργεια/ορμή	Ναι	Ναι	Ναι
Φορτίο	Ναι	Ναι	Ναι
Βαρυονικός αριθμός	Ναι	Ναι	Ναι
Λεπτονικός αριθμός	Ναι	Ναι	Ναι
Isospin	Ναι	Όχι	Όχι
Strangeness	Ναι	Ναι	Όχι
Charm	Ναι	Ναι	Όχι
Ομοτιμία (P)	Ναι	Ναι	Όχι
Συζυγία φορτίου (C)	Ναι	Ναι	Όχι
CP	Ναι	Ναι	Ναι ¹
CPT	Ναι	Ναι	Ναι

Πίνακας 1.5: Νόμοι διατήρησης [3]

Η ομοτιμία (P), η συζυγία φορτίου (C) και η χρονική αναστροφή (T) που αναφέρονται στον Πίνακα 1.5 πρόκειται για διακριτές χωροχρονικές συμμετρίες οι οποίες αφήνουν αναλλοίωτο τον μετρικό ταχυστή αλλά δεν μπορούν να κατασκευασθούν ως γινόμενο συνεχών στροφών και προωθήσεων όπως συμβαίνει με τις συμμετρίες της ειδικής σχετικότητας, π.χ. μετασχηματισμοί Lorentz (βλ. Παράρτημα A.1). Η ομοτιμία (parity) είναι απλά η χωρική αναστροφή, δηλαδή η μετάβαση από ένα δεξιόστροφο σε ένα αριστερόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, η ομοτιμία θεωρούνταν ότι πρόκειται για μία απόλυτη συμμετρία. Αυτό άλλαξε το 1957 όταν έγινε η ανακάλυψη της παραβίασης της από την Wu και τους συνεργάτες της [20]. Ύστερα, ανακαλύφθηκε και η παραβίαση της συζυγίας φορτίου (charge conjugation) στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις, η οποία είναι η λειτουργία που αντικαθιστά όλα τα σωματίδια με τα αντισωματίδια τους (αναλύεται στην συνέχεια). Όμως, ο συνδυασμός αυτών των δύο συμμετριών φαινόταν αρχικά ως μία απόλυτη συμμετρία, μέχρις ότου να ανακαλυφθεί το αντίθετο, και πάλι για την ασθενή αλληλεπίδραση, μέσω των διασπάσεων των ουδέτερων καονίων, τα οποία και την παραβιάζουν σε ένα πολύ μικρό ποσοστό, της τάξης του 10^{-3} . Τέλος, αν και η CP δεν διατηρείται, υπάρχουν αρκετοί λόγοι να πιστεύουμε ότι όλες οι αλληλεπιδράσεις είναι αμετάβλητες υπό την συνδυασμένη εφαρμογή της συζυγίας φορτίου, της ομοτιμίας και της αναστροφής χρόνου, με οποιαδήποτε σειρά και αν συνδυαστούν. Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται θεώρημα της CPT και μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει σε οποιαδήποτε σχετικιστική κβαντική θεωρία στην οποία τα σήματα δεν μπορούν να μεταδοθούν ταχύτερα από την ταχύτητα του φωτός. Άμεση συνέπεια αυτής της συμμετρίας είναι το γεγονός ότι τα σωματίδια και τα αντίστοιχα αντισωματίδια τους έχουν τις ίδιες μάζες [5].

Η τέταρτη δύναμη που παρατηρείται στην φύση, είναι η βαρύτητα η οποία είναι μακράν η ασθενέστερη σε σύγκριση με τις άλλες δυνάμεις. Η βαρύτητα είναι υπεύθυνη για την αλληλεπίδραση τεράστιων μακροσκοπικών αντικειμένων και θεωρείται ότι διαδίδεται από ένα άμαζο, σωματίδιο με spin-2 το οποίο ονομάζεται γκραβιτόνιο (graviton). Ωστόσο, ακόμα δεν έχει ανιχνευθεί ένα τέτοιο σωματίδιο και συνεπώς δεν έχει επαληθευτεί η ύπαρξη του. Στον πίνακα 1.6 εμφανίζονται, ενδεικτικά, οι σχετικές ισχύες για τις τέσσερις γνωστές δυνάμεις της φύσης, για την περίπτωση της αλληλεπίδρασης δύο στοιχειωδών σωματιδίων

¹Παραβίαση τάξης 10^{-3} στις διασπάσεις βαρέων ουδέτερων μεσονίων K^0 (strange), D^0 (charm), B^0 (bottom)

που βρίσκονται σε απόσταση $1fm$.

Αλληλεπίδραση	Ισχύς	Εμβέλεια [m]
Ισχυρή	1	$\leq 10^{-15}$
Ηλεκτρομαγνητική	10^{-3}	∞
Ασθενής	10^{-8}	10^{-18}
Βαρυτική	10^{-37}	∞

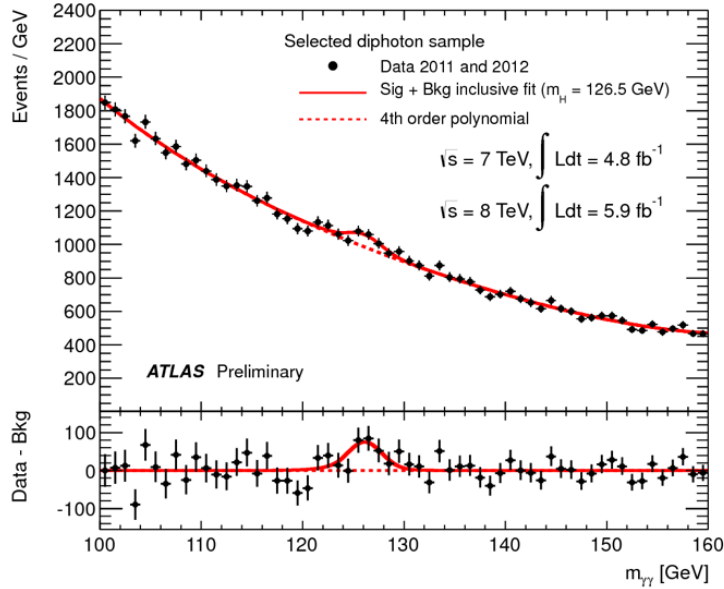
Πίνακας 1.6: Οι σχετικές ισχύες των δυνάμεων της φύσης [1] και οι εμβέλειες τους [3]

Όσον αφορά τις εμβέλειες, γνωρίζουμε ότι εξαρτώνται από την μάζα του ελεύθερου κβάντου που ανταλλάσσεται σύμφωνα με την σχέση $R = \hbar/M_X c$. Είναι εμφανές ότι λόγω της μηδενικής μάζας του φωτονίου, η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση έχει άπειρη εμβέλεια, ενώ αντίστοιχα επειδή η βαρυτική γνωρίζουμε ότι έχει άπειρη εμβέλεια, αναμένουμε το σωματίδιο της να είναι άμαζο. Αντίστοιχα, η πολύ μικρή εμβέλεια της ασθενούς δύναμης οφείλεται στην πολύ μεγάλη μάζα των μποζονίων της. Βέβαια, κάτι τέτοιο δεν ισχύει στην ισχυρή πυρηνική καθώς ενώ τα γλουόνια είναι άμαζα η εμβέλεια της δεν είναι άπειρη. Αυτό οφείλεται στην μορφή του προσεγγιστικού δυναμικού μεταξύ δύο κουάρκ το οποίο και είναι: $V_s = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \lambda r$ όπου ο δεύτερος όρος γίνεται σημαντικός για $r \geq 1fm$, περιορίζοντας έτσι την εμβέλεια. Αυτό το χαρακτηριστικό οδηγεί στο φαινόμενο εγκλωβισμού το οποίο και υπαγορεύει την μη ύπαρξη ελεύθερων κουάρκ.

Όλα τα φερμιόνια και τα μποζόνια έχουν ως γενική ιδιότητα την ύπαρξη των αντισωματίων τους κατά την οποία το εκάστοτε αντισωματίο έχει την ίδια μάζα με το σωματίο του αλλά αντίθετο φορτίο, αντίθετη μαγνητική ροπή και αντίθετους κβαντικούς αριθμούς. Φερμιόνια και αντιφερμιόνια μπορούν να δημιουργηθούν ή να καταστραφούν σε ζεύγη, με χαρακτηριστικό παράδειγμα την δημιουργία ή την εξαύλωση ενός ζεύγους ηλεκτρονίου (e^-) - ποζιτρονίου (e^+). Θεωρητικά οι καταστάσεις ενός σωματίου και του αντισωματίου του, συνδέονται με την διαδικασία συζυγίας σωματίου-αντισωματίου. Αν σε κάθε φερμιόνιο αντιστοιχίσουμε ένα φερμιονικό αριθμό +1 και σε κάθε αντιφερμιόνιο το -1, τότε ο φερμιονικός αριθμός διατηρείται. Επομένως, για κάθε φερμιόνιο, η διαδικασία της συζυγίας σωματίου-αντισωματίου δίνει το αντιφερμιόνιό του με αντίθετα φορτίο, μαγνητική ροπή και φερμιονικό αριθμό, αλλά την ίδια μάζα και spin. Για τα μποζόνια δεν υπάρχει αντίστοιχος νόμος διατήρησης κάποιου αριθμού, οπότε η συζυγία σωματίου-αντισωματίου έχει την ίδια επίδραση με την συζυγία φορτίου [3].

Το Καθιερωμένο Πρότυπο συμπληρώθηκε με την ανακάλυψη του μποζονίου Higgs [21–23]. Στις 4 Ιουλίου 2012, τα πειράματα ATLAS και CMS ανακοίνωσαν την παρατήρηση του μποζονίου Higgs (Εικόνα 1.1), το οποίο βρέθηκε να έχει μάζα ίση με $m_H = 125.09 \pm 0.21 (stat) \pm 0.11 (syst) GeV$.

Το μποζόνιο Higgs είναι διαφορετικό από όλα τα άλλα μποζόνια βαθμίδας του Καθιερωμένου Προτύπου καθώς πρόκειται για ένα ουδέτερο, με spin-0, βαθμωτό σωματίδιο. Το μποζόνιο Higgs, σχετίζεται προφανώς με το πεδίο Higgs, το οποίο, όπως έχει αναφερθεί, έχει ρόλο ζωτικής σημασίας στο Καθιερωμένο Πρότυπο καθώς είναι αυτό που δίνει μάζα στα σωματίδια. Όσο πιο ισχυρά αλληλεπιδρά ένα σωματίδιο με το πεδίο Higgs, τόσο πιο «βαρύ» καταλήγει να είναι. Για παράδειγμα τα φωτόνια, δεν αλληλεπιδρούν καθόλου με το πεδίο και για αυτό δεν έχουν καθόλου μάζα [25].



Σχήμα 1.1: Η ανακάλυψη του μποζονίου Higgs μέσω της διάσπασης του σε δύο φωτόνια [24]

1.1.2 Μαθηματικός Φορμαλισμός

Το Καθιερωμένο Πρότυπο είναι η πιο περιεκτική χβαντική θεωρία πεδίου της Σωματιδιακής Φυσικής, περιλαμβάνοντας ένα συνοπτικό μοντέλο αποτελούμενο από δύο διακριτές θεωρίες: μια θεωρία που περιγράφει την Ηλεκτρασθενή αλληλεπίδραση με ενιαίο τρόπο (χάρη στο πεδίο Higgs) και μία που περιγράφει τη Χρωματική αλληλεπίδραση (QCD). Οι θεωρίες αυτές εφαρμόζονται στη βάση των φερμιονίων του «Περιοδικού Πίνακα» με τις τρεις γενιές (Πίνακας 1.1), ανάλογα με τα φορτία τους: όλα τα φερμιόνια φέρουν ασθενές φορτίο, επομένως «αισθάνονται» την ασθενή αλληλεπίδραση, μόνο τα κουάρκ φέρουν χρώμα, επομένως «αισθάνονται» την ισχυρή αλληλεπίδραση, ενώ ηλεκτρικό φορτίο φέρουν τα «κάτω» λεπτόνια (e, μ, τ) και όλα τα κουάρκ, επομένως «αισθάνονται» την H/M αλληλεπίδραση.

Ειδικότερα, οι δύο αυτές χβαντικές θεωρίες πεδίου σχηματίζουν την ομάδα συμμετρίας του Καθιερωμένου Προτύπου:

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \quad (1.1)$$

Η πρώτη συμμετρία είναι μια συμμετρία βαθμίδας $SU(3)$, η οποία είναι επίσης μια εσωτερική συμμετρία βαθμίδας που σχετίζεται με τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Όπως έχει αναφερθεί, ο χβαντικός αριθμός της συμμετρίας είναι το χρώμα, για αυτό και συμβολίζεται ως $SU(3)_C$. Κάθε κουάρκ αποτελεί ένα γραμμικό συνδυασμό τριών χρωμάτων, σχηματίζοντας έτσι τη θεμελιώδη αναπαράσταση ως προς την $SU(3)_C$:

$$u_R^f = (u_1^f, u_2^f, u_3^f)_R, \quad d_R^f = (d_1^f, d_2^f, d_3^f)_R \quad (1.2)$$

$$Q_L^f = \begin{pmatrix} u^f \\ d^f \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} u_1^f & u_2^f & u_3^f \\ d_1^f & d_2^f & d_3^f \end{pmatrix}_L \quad (1.3)$$

όπου οι δείκτες R, L συμβολίζουν τα δεξιόστροφα και τα αριστερόστροφα σωματίδια αντίστοιχα ενώ ο εκθέτης $f = 1, 2, 3$ συμβολίζει την γενιά των κουάρκ. Τα οκτώ πεδία που

αντιστοιχούν σε αυτή την συμμετρία της QCD είναι τα οκτώ γλουόνια, G_μ^i , $i = 1, 2, \dots, 8$.

Η $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ είναι η συμμετρία βαθμίδας της ηλεκτρασθενούς θεωρίας. Ο δείκτης L υποδηλώνει σύζευξη μόνο με αριστερόστροφα φερμιόνια και ο δείκτης Y δηλώνει την σύζευξη με το ασθενές υπερφορτίο, το οποίο σχετίζεται με το ηλεκτρικό φορτίο μέσω της σχέσης $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$, όπου το I_3 , εδώ, είναι το ασθενές isospin. Η Λαγκρανζιανή της ηλεκτρασθενούς θεωρίας αποτελείται από ένα φορτισμένο και ένα ουδέτερο κομμάτι. Λόγω της αναλλοιώτητάς κάτω από τον μετασχηματισμό βαθμίδας προκύπτουν ένα B_μ και τρία W_μ^i άμαζα, μποζονικά πεδία. Όπως υποδηλώνεται από τον συμβολισμό μας τα φορτισμένα μποζόνια μπορούν να ταυτοποιηθούν με τα μποζόνια W^\pm . Αντιθέτως, για τα αφόρτιστα μποζόνια συνδυάζουμε με τέτοιο τρόπο το W^0 με το B^0 ώστε να πάρουμε το φωτόνιο και το μποζόνιο Z τα οποία είδαμε στην προηγούμενη ενότητα.

$$\gamma = B^0 \cos\theta_W + W^0 \sin\theta_W \quad (1.4)$$

$$Z^0 = -B^0 \sin\theta_W + W^0 \cos\theta_W \quad (1.5)$$

όπου θ_W είναι η ασθενής γωνία μίξης ή αλλιώς γωνία Weinberg [5].

Η συμμετρία βαθμίδας της ηλεκτρασθενούς θεωρίας σπάει αυθόρμητα μέσω του μηχανισμού Higgs, στην υποομάδα του ηλεκτρομαγνητισμού,

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM} \quad (1.6)$$

και έτσι τα ασθενή μποζόνια αποκτούν την μάζα τους.

Τα αριστερόστροφα φερμιονικά πεδία $L_L^f = \begin{pmatrix} \nu_L^f \\ e_L^f \end{pmatrix}$ καθώς και το πεδίο Higgs, μετασχηματίζονται κάτω από την συμμετρία $SU(2)_L$. Επίσης, όλα τα τα φερμιονικά πεδία, εκτός των δεξιόστροφων νετρίνων (ν_R^f), τα οποία δεν έχουν παρατηρηθεί, παίρνουν φορτίο μέσω του υπερφορτίου της $U(1)_Y$.

Συμπληρωματικά, η Λαγκρανζιανή του Καθιερωμένου Προτύπου είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & + i\bar{\psi} \not{D} \psi + h.c. \\ & + \bar{\psi}_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c. \\ & + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi) \end{aligned} \quad (1.7)$$

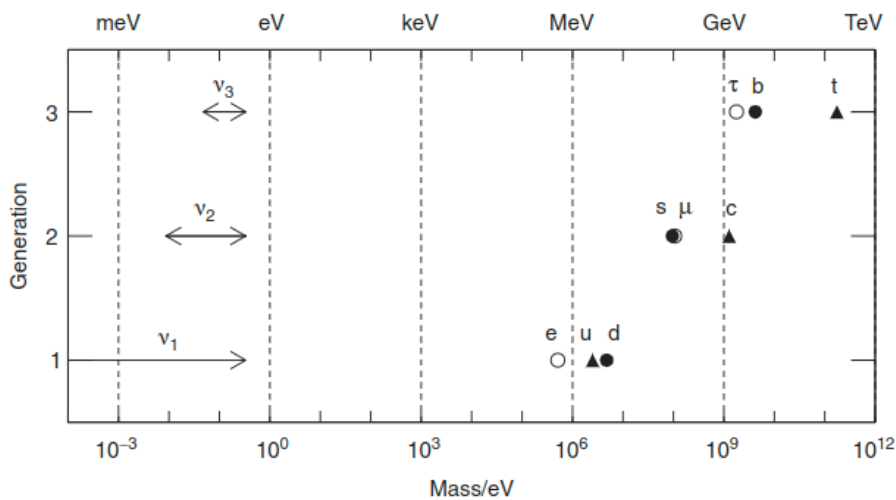
όπου ο πρώτος όρος περιγράφει τις κινητικές ενέργειες των πεδίων βαθμίδας ενώ ο δεύτερος όρος εμπεριέχει τους κινητικούς όρους των φερμιονίων του Καθιερωμένου Προτύπου και τις αλληλεπιδράσεις τους με τα W^\pm, Z και γ . Ο τρίτος όρος περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις Yukawa, δηλαδή είναι ο όρος που περιγράφει την σύζευξη ανάμεσα στο βαθμωτό πεδίο Higgs και στα άμαζα φερμιονικά πεδία. Τέλος, ο τελευταίος όρος μας δίνει τις μάζες των μποζονίων W^\pm, Z, γ και Higgs [26].

1.1.3 Επιτυχίες και Αποτυχίες

Το Καθιερωμένο Πρότυπο έχει καταφέρει να εξηγήσει και να περιγράψει επιτυχώς μία πληθώρα σωματιδίων και διαδικασιών. Μάλιστα, έχει καταφέρει να προβλέψει την ύπαρξη ορισμένων σωματιδίων καθώς και των ιδιοτήτων τους. Ειδικότερα, η ηλεκτρασθενής θεωρία των Glashow, Weinberg και Salam προέβλεψε θεωρητικά την ύπαρξη των μποζονίων W^\pm

και Z το 1967, με την πειραματική ανίχνευση αυτών να γίνεται πρώτη φορά το 1983 στο CERN, στον επιταχυντή πρωτονίου - αντιπρωτονίου, Super Proton Synchrotron (SPS) [27, 28]. Η επόμενη επιτυχής πρόβλεψη ήταν η ύπαρξη του τέταρτου κουάρκ, charm, το οποίο και προβλέφθηκε από τον μηχανισμό GIM (Glashow-Iliopoulos-Maiani) [29]. Η πειραματική επιβεβαίωση αυτού του σωματιδίου ήρθε το 1974 από τα Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) [30] και Brookhaven National Laboratory (BNL) [31] μέσω της ανίχνευσης του μεσονίου J/Ψ το οποίο και περιέχει charm κουάρκ. Η επόμενη γενιά κουάρκ επίσης προβλέφθηκε θεωρητικά, αυτή την φορά από τους Kobayashi και Maskawa, έτσι ώστε να εξηγηθεί η παραβίαση της CP συμμετρίας στην διάσπαση των καονίων [32]. Το πέμπτο κουάρκ, bottom, ανιχνεύθηκε το 1977 στο Fermilab [33] ενώ το έκτο και τελευταίο κουάρκ, top, επιβεβαιώθηκε πειραματικά 18 χρόνια μετά, το 1995 επίσης από το Fermilab μέσω του επιταχυντή του, Tevatron [34, 35]. Βέβαια, η σημαντικότερη επιτυχία του Καθιερωμένου Προτύπου είναι η ανίχνευση του μποζονίου Higgs από το CERN, σχεδόν 50 χρόνια μετά την θεωρητική του πρόβλεψη.

Ωστόσο, το Καθιερωμένο Πρότυπο απέχει ακόμα πολύ από την τέλεια θεωρία. Είναι ένα μοντέλο το οποίο, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, έχει συναρμολογηθεί από άλλες θεωρίες με τέτοιο τρόπο ώστε να αναπαράγει τα πειραματικά δεδομένα. Μάλιστα, περιέχει, πολλές ελεύθερες παραμέτρους, 26 για την ακρίβεια, οι οποίες όμως δεν προκύπτουν από την θεωρία αλλά προσδιορίζονται βάση των πειραματικών παρατηρήσεων. Ακόμα, το Καθιερωμένο Πρότυπο αδυνατεί να εξηγήσει ένα από τα χαρακτηριστικά του, την ύπαρξη των 3 γενιών καθώς και το μοτίβο των μαζών στην εκάστοτε γενιά (βλέπε Σχήμα 1.2). Με εξαίρεση τα νετρίνα, οι μάζες εντός μίας γενιάς είναι παρόμοιες, γεγονός το οποίο είναι απίθανο να συνέβη τυχαία [1].

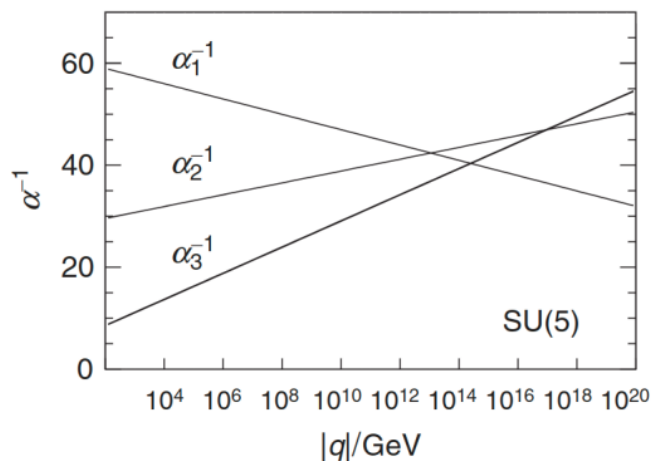


Σχήμα 1.2: Οι μάζες των φερμιονίων ανά γενιά. Οι μάζες των νετρίνων απεικονίζονται ως τα προσεγγιστικά εύρη, υποθέτοντας κανονική ιεραρχία ($m_1 < m_2 < m_3$) και χρησιμοποιώντας τα προσεγγιστικά άνω όρια που προκύπτουν από τις κοσμολογικές σταθερές [1]

Όσον αφορά τις μάζες των νετρίνων, το Καθιερωμένο Πρότυπο, επίσης, αδυνατεί να τις εξηγήσει. Σύμφωνα με αυτό, τα νετρίνα δεν αλληλεπιδρούν με το πεδίο Higgs άρα θα έπρεπε να είναι άμαζα. Αυτό όμως δεν ισχύει, καθώς έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι τα νετρίνα «ταλαντώνονται» [36, 37], γεγονός το οποίο απαιτεί τα νετρίνα να έχουν μάζα.

Παρόμοια με τις μάζες των φερμιονίων, οι σταθερές σύζευξης των τριών αλληλεπιδράσεων έχουν τιμές παρόμοιας τάξης και λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι οι τιμές αυτές μεταβάλ-

λονται ανάλογα με την ενεργειακή κλίμακα, υποθέτουμε ότι σε κάποια ενέργεια, ενδεχομένως να ενοποιούνται σε πλήρη αντιστοιχία με την ένωση της ηλεκτρομαγνητικής με την ασθενή αλληλεπίδραση. Δηλαδή οι σταθερές σύζευξης που σχετίζονται με τις συμμετρίες βαθμίδας $U(1)$, $SU(2)$ και $SU(3)$ θα μπορούσαν να αποτελούν μέρος μία μεγαλύτερης $SU(5)$ συμμετρίας [38]. Αυτή αποτελεί μία θεώρηση από ένα σύνολο που είναι γνωστό ως Μεγάλη Ενοποιημένη Θεωρία (Grand Unified Theory - GUT) ωστόσο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.3, οι σταθερές σύζευξης του Καθιερωμένου Προτύπου να μην συγκλίνουν σε μία ενεργειακή κλίμακα περίπου 10^{15} GeV αλλά όχι ακριβώς στο ίδιο σημείο όπως θα θέλαμε.



Σχήμα 1.3: Η μεταβολή των σταθερών σύζευξης των τριών θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων ως προς την ενέργεια στην συμμετρία $SU(5)$ [1]

Μάλιστα, στις μεγάλες ενοποιημένες θεωρίες έχουμε ακόμα ένα πρόβλημα που σχετίζεται με την μάζα του μποζονίου Higgs και ονομάζεται πρόβλημα ιεραρχίας (hierarchy problem). Συγκεκριμένα, στην κβαντική θεωρία πεδίου, το τετράγωνο της φυσικής μάζας M ενός μποζονίου Higgs, δηλαδή της μάζας που μπορεί να μετρηθεί, μπορεί να εκφράζεται με την μορφή $M^2 = M_0^2 - \Delta M^2$, όπου M_0 είναι η «γυμνή μάζα» (bare mass) ενός υποθετικού μη-αλληλεπιδρώντος μποζονίου Higgs και ΔM^2 είναι μία πρόσθετη συμβολή εξαιτίας διορθώσεων. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο οι συνεισφορές χαμηλότερης τάξης είναι της τάξης $g_W^2 \lambda^2 / 16\pi^2$, όπου λ είναι μία παράμετρος αποκοπής πάνω από την οποία θεωρείται ότι η θεωρία καταρρέει. Στις μεγάλες ενοποιημένες θεωρίες το λ πρέπει να είναι τόσο μεγάλο όσο τουλάχιστον η κλίμακα ενοποίησης ($\sim 10^{15}$). Ως εκ τούτου το ΔM^2 πρέπει να είναι εξαιρετικά μεγάλο και μια αντίστοιχη τεράστια μάζα του Higgs μπορεί να αποφευχθεί μόνο με μια μάλλον τεχνητή «επιλογή» της άγνωστης γυμνής μάζας για να την ακυρώσει εξ ολοκλήρου [5].

Επιπλέον, παρά των μεγάλων και αδιαμφισβήτητων επιτυχιών του, υπάρχουν αρκετές πειραματικές ενδείξεις τις οποίες αποτυγχάνει παταγωδώς να εξηγήσει. Αρχικά, σύμφωνα με το κοσμολογικό μοντέλο ΛCDM , η βαρυονική ύλη που γνωρίζουμε και περιγράφει το Καθιερωμένο Πρότυπο αποτελεί πολύ μικρό ποσοστό, μόλις 5% της συνολικής πυκνότητας ενέργειας-ύλης του Σύμπαντος. Αντιθέτως, περίπου το 27 % αποτελείται από μία άγνωστης μορφής ύλη, την Σκοτεινή Ύλη (Dark Matter). Η ύπαρξη της σκοτεινής ύλης τεκμηριώνεται μόνο μέσω βαρυτικών φαινομένων (χαμπύλη περιστροφής γαλαξιών, βαρυτικοί φακοί, σχηματισμός γαλαξιών κ.ο.κ.) καθώς δεν αλληλεπιδρά ηλεκτρομαγνητικά με αποτέλεσμα να μην απελευθερώνει H/M ακτινοβολία, δηλαδή φως, εξού και η ονομασία της ως «Σκοτεινή». Λόγω της μη άμεσης παρατήρησης της, θα πρέπει να αλληλεπιδρά ελάχιστα έως καθόλου

με την συνήθη βαρυονική ύλη, δηλαδή αν αλληλεπιδρά, θα αλληλεπιδρά μόνο με την ασθενή δύναμη, πέρα φυσικά από την βαρυτική. Ένα από τα κύρια υποψήφια σωματίδια για την σκοτεινή ύλη, είναι ένα νέου είδους σωματίδιο το οποίο ονομάζεται WIMP (Weakly Interacting Massive Particle) και φυσικά, δεν έχει ανακαλυφθεί ακόμα [39].

Άλλο ένα ερώτημα που προκύπτει από την Κοσμολογία και αδυνατεί να εξηγήσει το Καθιερωμένο Πρότυπο είναι η ασυμμετρία ύλης-αντιύλης. Η Μεγάλη Έκρηξη (Big Bang) θα έπρεπε να είχε δημιουργήσει ίσες ποσότητες από την καθεμία, αλλά όλα όσα βλέπουμε είναι σχεδόν εξ'ολοκλήρου από ύλη και συγκριτικά υπάρχει ελάχιστη αντιύλη. Αυτή η ασυμμετρία θα μπορούσε να εξηγηθεί από μία πιθανή παραβίαση της CP συμμετρίας, ωστόσο αυτή που προβλέπεται από το Καθιερωμένο Πρότυπο (βλέπε σελίδα 5), δεν μπορεί να εξηγήσει το μέγεθος αυτής της ασυμμετρίας.

1.2 Υπερσυμμετρία

Στην προηγούμενη ενότητα έγινε σαφές ότι το Καθιερωμένο Πρότυπο, αν και επιτυχές, αδυνατεί να εξηγήσει κάποια σημαντικά ερωτήματα και γενικότερα δεν αποτελεί την «τελική θεωρία». Το γεγονός αυτό μας ωθεί στην αναζήτηση «Νέας Φυσικής», δηλαδή Φυσικής πέρα από το Καθιερωμένο Πρότυπο. Υπάρχουν αρκετές θεωρίες που προσπαθούν να επιλύσουν τα προβλήματα του Καθιερωμένου Προτύπου, όπως είναι το μοντέλο ADD, γνωστό και ως LED (Large Extra Dimensions), τα μοντέλα Kaluza-Klein, η Υπερσυμμετρία και άλλα. Ωστόσο, εμείς θα επικεντρωθούμε στην Υπερσυμμετρία, ένα μοντέλο του οποίου τα ίχνη αναζητούνται στον Μεγάλο Αδρονικό Επιταχυντή (Large Hadron Collider).

Η Υπερσυμμετρία (Supersymmetry) ή απλά SUSY, είναι μία δημοφιλής θεωρία η οποία αποτελεί φυσική επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου. Αναπτύχθηκε την δεκαετία του 1970 [40–42] και αποτελεί γενίκευση των χωροχρονικών συμμετριών. Σύμφωνα με αυτή την θεωρία, κάθε γνωστό στοιχειώδες σωματίδιο έχει έναν υπερσυμμετρικό εταίρο, ο οποίος ονομάζεται υπερεταίρος (superpartner), και έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες, ακόμα και τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς, εκτός από το spin του. Τα φερμιόνια, δηλαδή τα κουάρκ και τα λεπτόνια που έχουν spin-1/2 έχουν υπερεταίρους με spin-0, ενώ τα μποζόνια με spin-1 έχουν υπερεταίρους με spin-1/2. Δηλαδή, αυτή η θεωρία ενσωματώνει μία νέα συμμετρία μεταξύ φερμιονίων και μποζονίων. Για το μποζόνιο Higgs η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη, αφού αν συνδεθεί απλώς ένα υπερσυμμετρικό σωματίδιο με αυτό, τα προβλήματα με το αμετάβλητο της βαθμίδας επανεμφανίζονται και η θεωρία γίνεται ασυνεπής. Η Υπερσυμμετρία απαιτεί επιπρόσθετα μποζόνια Higgs με spin-0 καθώς και τα υπερσυμμετρικά σωματίδια τους με spin-1/2. Τα υπερσυμμετρικά σωματίδια των φερμιονίων τα ονομάζουμε προσθέτοντας το πρόθεμα “s” στο όνομα του εκάστοτε φερμιονίου ενώ για τα υπερσυμμετρικά σωματίδια των μποζονίων, προσθέτουμε αντίστοιχα την κατάληξη “ino”. Υπάρχουν πολλές εκδοχές της Υπερσυμμετρίας, εμείς όμως θα ασχοληθούμε με την απλούστερη εκδοχή της, το Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο (Minimal Supersymmetric Standard Model).

1.2.1 Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο

Το Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο (Minimal Supersymmetric Standard Model) ή αλλιώς MSSM ονομάζεται έτσι γιατί περιέχει τον ελάχιστο αριθμό νέων σωματιδίων που απαιτούνται για μια συνεπή θεωρία. Ειδικότερα, πέρα των υπερεταίρων των φερμιονίων και των φορέων αλληλεπίδρασης του Καθιερωμένου Προτύπου, το MSSM προβλέπει δύο διπλές Higgs. Αυτό συμβαίνει για δύο λόγους. Ο πρώτος, όπως αναφέραμε παραπάνω, είναι

ότι ένα μόνο Higgsino θα οδηγούσε τη θεωρία μας σε ανωμαλία βαθμίδας. Αν εισάγουμε δύο Higgsino η ανωμαλία αίρεται, άρα θα πρέπει να εισάγουμε και δύο βαθμωτά Higgs. Άλλος ένας λόγος για να έχουμε δύο βαθμωτές διπλές Higgs είναι για να έχουμε συζεύξεις Yukawa μεταξύ του Higgs και του up κουάρκ αλλά και του down κουάρκ. Αυτοί είναι οι όροι που ευθύνονται για τις μάζες των κουάρκς. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο τα down quarks συζεύγονται με το πεδίο Higgs (το οποίο έχει $Y = -\frac{1}{2}$) και τα up quarks με το μιγαδικό συζυγές του (το οποίο έχει $Y = \frac{1}{2}$). Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν επιτρέπεται στις υπερσυμμετρικές θεωρίες επομένως χρειάζονται δύο είδη πεδίων Higgs.

Αναπαράστασεις της άλγεβρας της υπερσυμμετρίας αποτελούν τα υπερπεδία που είναι συναρτήσεις των μεταβλητών του υπερχώρου. Τα πεδία ύλης αναπαρίστανται με τα χειραλικά υπερπεδία ενώ τα πεδία βαθμίδας με τα διανυσματικά υπερπεδία. Τα χειραλικά υπερπεδία φιλοξενούν βαθμωτά σωματίδια με spin $s = 0$ και φερμιόνια με spin $s = 1/2$ με ίδιες μάζες ενώ τα διανυσματικά υπερπεδία περιέχουν τα διανυσματικά μποζόνια με spin $s = 1$ και τους εταίρους τους με spin $s = 1/2$ που επίσης έχουν την ίδια μάζα. Στους δύο πίνακες που ακολουθούν (1.7,1.8) παρουσιάζονται τα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου μαζί με τους υπερσυμμετρικούς τους εταίρους, οργανωμένα σύμφωνα με τις ιδιότητες τους κάτω από την ομάδα συμμετρίας του Καθιερωμένου Προτύπου, $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ η οποία αποτελεί ομάδα συμμετρίας και του MSSM.

Ονόματα	Υπερπεδία	Spin 0	Spin 1/2
squarks - quarks (3 Generations)	Q	$(\tilde{u}_L \tilde{d}_L)$	$(u_L d_L)$
	\tilde{u}	\tilde{u}_R^*	u_R^\dagger
	\tilde{d}	\tilde{d}_R^*	d_R^\dagger
sleptons - leptons (3 Generations)	L	$(\tilde{\nu} \tilde{e}_L)$	(νe_L)
	\tilde{e}	\tilde{e}_R^*	e_R^\dagger
Higgs - Higgsinos	H_u	$(H_u^+ H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^+ \tilde{H}_u^0)$
	H_d	$(H_d^0 H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0 \tilde{H}_d^-)$

Πίνακας 1.7: Χειραλικές υπερπολλαπλές στο MSSM

Ονόματα	Spin 1/2	Spin 1
gluinos - gluons	\tilde{g}	g
wino - W boson	$\tilde{W}^\pm \tilde{W}^0$	$W^\pm W^0$
bino - B boson	\tilde{B}^0	B^0

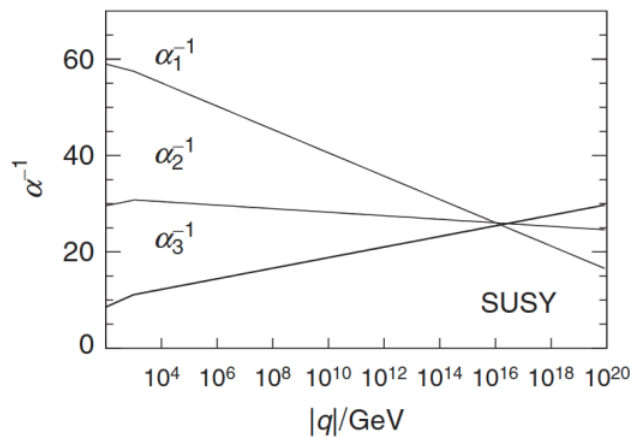
Πίνακας 1.8: Υπερπολλαπλές βαθμίδας στο MSSM

Σε πλήρη αναλογία με το Καθιερωμένο Πρότυπο, ο συνδυασμός των bino \tilde{B}^0 και wino \tilde{W}^0 μας δίνει τα υπερσυμμετρικά σωματίδια zino \tilde{Z}^0 και photino $\tilde{\gamma}$, υπερεταίροι του μποζονίου Z^0 και του φωτονίου γ αντίστοιχα. Εάν συμπεριλάβουμε και την βαρύτητα, τότε το προβλεπόμενο με spin-2 γκραβιτόνιο (graviton) ανήκει σε μία υπερπολλαπλή με τον άμαζο υπερεταίρο του ο οποίος έχει spin 3/2 και ονομάζεται γκραβιτίνο (gravitino).

Εάν η υπερσυμμετρία ήταν μία ακριβής συμμετρία, τότε τα σωματίδια και οι υπερεταίροι του θα είχαν ακριβώς την ίδια μάζα. Αυτό προφανώς δεν ισχύει, καθώς δεν έχει ανιχνευθεί κανένα υπερσυμμετρικό σωματίδιο. Συνεπώς η Υπερσυμμετρία πρόκειται για μία σπασμένη συμμετρία και για αυτό οι μάζες των υπερσωματιδίων διαφέρουν από αυτές των εταίρων τους.

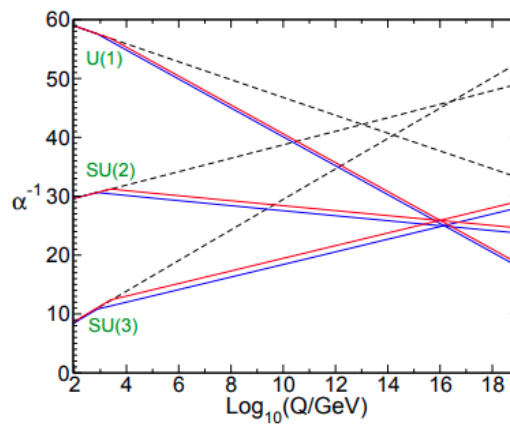
Επιπλέον, ακόμη και τα απλούστερα μοντέλα που ενσωματώνουν σπάσιμο συμμετρίας, περιέχουν μεγάλο αριθμό ελεύθερων παραμέτρων των οποίων οι τιμές είναι άγνωστες. Ωστόσο, στις μεγάλες ενοποιημένες θεωρίες, ένα προσεγγιστικό όριο για το βαθμό του σπασίματος της συμμετρίας δίνεται από το πρόβλημα της ιεραρχίας. Συγκεκριμένα, η σπασμένη υπερσυμμετρία για να παρέχει λύση στο πρόβλημα της ιεραρχίας (σελ. 10), με φυσικό τρόπο, θα πρέπει να είναι «ελαφρώς» σπασμένη. Αυτό σημαίνει ότι τα υπερσυμμετρικά σωματίδια θα έχουν μάζες της τάξης του 1 TeV ή λιγότερο, έτσι ώστε να μην είναι αφύσικα μεγάλες σε σύγκριση με την ηλεκτρασθενή κλίμακα [5, 43, 44].

Επιπλέον, άλλο ένα πρόβλημα που επιλύεται με την εισαγωγή της υπερσυμμετρίας είναι ότι οι σταθερές σύζευξης των τριών θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων, σε αντίθεση με το Καθιερωμένο Πρότυπο, συγκλίνουν σε συγκεκριμένο σημείο, όπου η ενέργεια είναι της τάξης των 10^{16} GeV , γεγονός που συνεπάγεται την ενοποίησή τους σε υψηλές ενέργειες.



Σχήμα 1.4: Η μεταβολή των σταθερών σύζευξης των τριών θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων ως προς την ενέργεια σε μια υπερσυμμετρική επέκταση της συμμετρίας $SU(5)$ [1]

Μάλιστα, λόγω αυτής της αύξησης της ενέργειας στο σημείο ενοποίησης των σταθερών σύζευξης, η διάρκεια ζωής του πρωτονίου αυξάνεται, σε μία τιμή της τάξης $10^{32} - 10^{33}$ έτη, η οποία συμφωνεί με τα παρόντα πειραματικά όρια.



Σχήμα 1.5: Σύγκριση της μεταβολής των σταθερών σύζευξης των τριών θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων μεταξύ του Καθιερωμένου Προτύπου (διακεκομμένες γραμμές) και του MSSM (συμπαγείς γραμμές) ως προς την ενέργεια στην συμμετρία $SU(5)$. [45]

Πέραν των σωματιδίων που αναφέρθηκαν παραπάνω, υπάρχουν μερικά ακόμα υπερσυμμετρικά σωματίδια τα οποία προκύπτουν από συνδυασμό των αρχικών. Ειδικότερα, τα φορτισμένα higgsinos (\tilde{H}_u^+ , \tilde{H}_d^-) και τα φορτισμένα winos \tilde{W}^\pm , συνδυάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζουν δύο ιδιοκαταστάσεις μάζας με φορτίο ± 1 , οι οποίες ονομάζονται charginos και συμβολίζονται ως $\tilde{\chi}_1^\pm, \tilde{\chi}_2^\pm$. Κατά σύμβαση, θεωρούμε ότι $m_{\tilde{\chi}_1^\pm} < m_{\tilde{\chi}_2^\pm}$. Αντίστοιχα, ο συνδυασμός των ουδέτερων higgsinos ($\tilde{H}_u^0, \tilde{H}_d^0$) με τα ουδέτερα bino \tilde{B}^0 και wino \tilde{W}^0 δημιουργεί τέσσερις ουδέτερες ιδιοκαταστάσεις μάζας τις οποίες ονομάζουμε neutralinos και τις συμβολίζουμε με $\tilde{\chi}_i^0$, όπου $i = 1, \dots, 4$. Όπως και με τα charginos, θεωρούμε κατά σύμβαση ότι $m_{\tilde{\chi}_1^0} < m_{\tilde{\chi}_2^0} < m_{\tilde{\chi}_3^0} < m_{\tilde{\chi}_4^0}$, με το ελαφρύτερο neutralino ($\tilde{\chi}_1^0$) να θεωρείται το ελαφρύτερο υπερσυμμετρικό σωματίδιο (lightest supersymmetric particle - LSP) όταν διατηρείται η R-parity [46].

Η R-parity είναι μία νέα διακριτή συμμετρία των σωματιδίων που εισάγεται στο MSSM και ορίζεται ως:

$$R_P = (-1)^{3B+L+2s} \quad (1.8)$$

όπου s είναι το spin, B ο βαρυονικός αριθμός και L ο λεπτονικός αριθμός. Όλα τα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου έχουν R-parity ίση με $+1$ ενώ όλα τα υπερσυμμετρικά σωματίδια έχουν R-parity ίση με -1 . Αυτό σημαίνει ότι, αν η R-parity διατηρείται από το MSSM, τότε τα υπερσυμμετρικά σωματίδια θα δημιουργούνται ή θα καταστρέφονται μόνο σε ζεύγη. Ως εκ τούτου, η διάσπαση ενός υπερσυμμετρικού σωματιδίου πρέπει να αποφέρει τουλάχιστον ένα υπερσυμμετρικό σωματίδιο στην τελική κατάσταση και το ελαφρύτερο υπερσυμμετρικό σωματίδιο, LSP, να είναι σταθερό. Το LSP, όντας ηλεκτρικά ουδέτερο, θα αλληλεπιδρά μόνο ασθενώς με τα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου, πέρα φυσικά από την βαρυτική αλληλεπίδραση. Αυτά τα χαρακτηριστικά σε συνδυασμό με την προβλεπόμενη μεγάλη μάζα του, το καθιστά ως ένα WIMP (σελ. 10) και συνάμα ως υποψήφιο σωματίδιο της Σκοτεινής Ύλης.

Κεφάλαιο 2

Ο Ανιχνευτής CMS στον LHC

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, συζητήσαμε συνοπτικά το Καθιερωμένο Πρότυπο καθώς και κάποια φαινόμενα που αυτό αδυνατεί να εξηγήσει. Για τον λόγο αυτό, εισαγάγαμε μία νέα θεωρία η οποία μας δίνει απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα, την Υπερσυμμετρία. Όμως το γεγονός ότι εξηγεί αυτά τα φαινόμενα δεν αρκεί. Πρέπει πρώτα να επιβεβαιωθεί πειραματικά έτσι ώστε να διαπιστωθεί αν όντως η φύση συμπεριφέρεται με τον τρόπο που προβλέπει η θεωρία. Μάλιστα, τα θεωρητικά μοντέλα αναπτύσσονται με τέτοιο τρόπο ώστε να συμβαδίζουν με τα ήδη υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα, δηλαδή πολλές φορές το πείραμα είναι αυτό που κατευθύνει την θεωρία, όπως είδαμε άλλωστε ότι έγινε και με το Καθιερωμένο Πρότυπο. Συνεπώς, η πειραματική παρατήρηση και επιβεβαίωση παίζει έναν πολύ σημαντικό ρόλο στην θεμελίωση της Φυσικής.

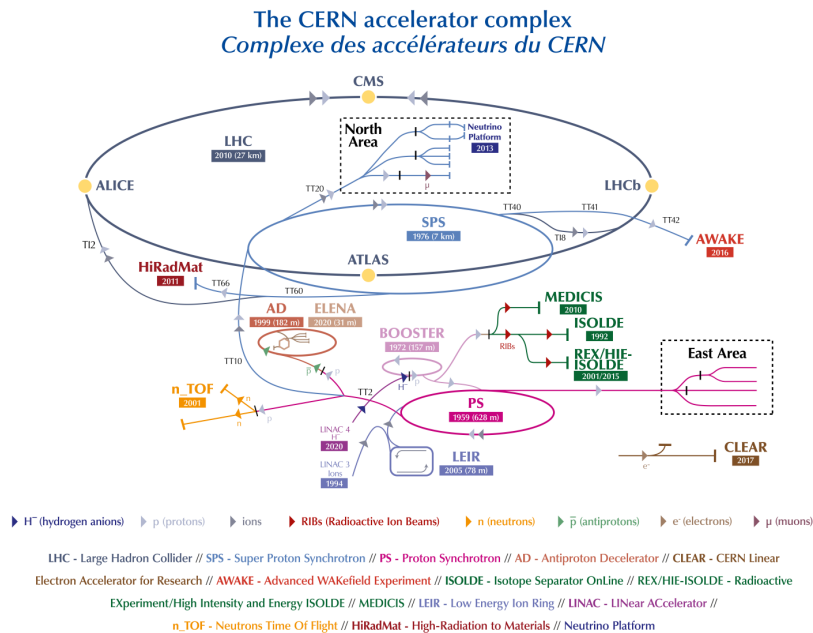
Βέβαια, στην Σωματιδιακή Φυσική η πειραματική επιβεβαίωση είναι δύσκολη. Η μελέτη των φαινομένων του μικροκόσμου απαιτεί τεράστιες ενεργειακές κλίμακες, για αυτό, άλλωστε ονομάζεται και ως Φυσική Υψηλών Ενεργειών. Επομένως, το πειραματικό κομμάτι της Σωματιδιακής Φυσικής βασίζεται κυρίως σε επιταχυντές σωματιδίων και τους αντίστοιχους ανιχνευτές, με σκοπό να δώσει σε σωματίδια υψηλές ενέργειες που θα επάγουν διασπάσεις και αντιδράσεις μεταξύ τους και στη συνέχεια να ανιχνεύσει τα προϊόντα που θα επιβεβαιώσουν τις υπάρχουσες θεωρίες ή μπορεί και να δώσουν στοιχεία για Νέα Φυσική. Ένας τέτοιος επιταχυντής, που επιτυγχάνει τεράστιες ενέργειες, αποτελεί ο Μεγάλος Ανδρονικός Επιταχυντής (Large Hadron Collider - LHC), ενώ ένας από τους ανιχνευτές του, που μας ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία και θα αναλύσουμε στην συνέχεια, είναι αυτός του πειράματος CMS.

2.1 Ο Επιταχυντής LHC

Ο Μεγάλος Ανδρονικός Επιταχυντής (LHC) είναι ο μεγαλύτερος και ισχυρότερος επιταχυντής που έχει φτιαχτεί και βρίσκεται στο CERN (Ευρωπαϊκό Συμβούλιο Πυρηνικής Έρευνας) κοντά στην Γενεύη της Ελβετίας [47, 48]. Έχει περίμετρο 26.7 χιλιομέτρων και είναι κατασκευασμένος στην ίδια σήραγγα που προηγουμένως στέγαζε τον επιταχυντή LEP (Large Electron Positron Collider). Βρίσκεται σε βάθος μεταξύ 45 και 170 μέτρων κάτω από την επιφάνεια του εδάφους ενώ έχει μία ελαφριά κλίση, 1.23%, προς την λίμνη της Γενεύης. Ο LHC έχει σχεδιαστεί ώστε να συγκρούει δυο υψηλοενεργειακές δέσμες πρωτονίων με μέγιστη ενέργεια στο κέντρο μάζας τα 14 TeV ¹, αλλά μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για σύγκρουση δεσμών βαρέων ιόντων διαφόρων ατομικών αριθμών, με ενέργειες μέχρι και τα

¹Η μέγιστη ενέργεια λειτουργίας του LHC μέχρι στιγμής είναι $\sqrt{s} = 13.6$ TeV [49]

5 TeV ανά νουκλεόνιο. Για να επιτευχθούν αυτές οι ενέργειες, οι δύο δέσμες κινούνται αντίθετα σε δύο παράλληλους δακτυλίους, επιταχύνονται σε ταχύτητα συγκρίσιμη με αυτή του φωτός και συγκρούονται στα τέσσερα σημεία αλληλεπίδρασης. Για την καμπύλωση της τροχιάς των πρωτονίων και την εστίαση τους πριν την σύγκρουση υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί μαγνήτες. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται 1232 διπολικοί μαγνήτες μήκους 15 μέτρων οι οποίοι «στρίβουν» την δέσμη και 392 τετραπολικοί μαγνήτες μήκους 5-7 μέτρων οι οποίοι εστιάζουν τις δέσμες. Υπάρχουν επίσης μαγνήτες ανώτερης τάξης (εξαπολικοί, οκταπολικοί) οι οποίοι διορθώνουν και συμπιέζουν την δέσμη λίγο πριν την αλληλεπίδραση για να αυξηθούν οι πιθανότητες σύγκρουσης. Όλοι οι μαγνήτες είναι υπεραγώγιμοι, δηλαδή παρουσιάζουν σχεδόν μηδενική ηλεκτρική αντίσταση έτσι ώστε να μπορούν να δεχθούν μεγάλες εντάσεις ρεύματος και κατά συνέπεια να δημιουργούν πάνω από 8 T μαγνητικό πεδίο. Για να επιτευχθεί όμως η υπεραγωγιμότητα των μαγνητών απαιτείται η ψύξη αυτών σε πάρα πολύ μικρές θερμοκρασίες, -271.3°C , το οποίο είναι εφικτό μόνο με την χρήση υπερρευστού ηλίου.



Σχήμα 2.1: Το δίκτυο επιταχυντών του CERN [50]

Όσον αφορά την επιτάχυνση των δεσμών, αυτή στην πραγματικότητα γίνεται σταδιακά, σε πέντε διαφορετικούς επιταχυντές όπου ο τελευταίος είναι ο LHC. Ειδικότερα, η διαδικασία ξεκινά από τον πρώτο, γραμμικό, επιταχυντή Linear Accelerator 4 (Linac4)², μήκους 86 μέτρων, ο οποίος επιταχύνει αρνητικά φορτισμένα ιόντα υδρογόνου, H^- , σε ενέργειες 160 MeV και τα προετοιμάζει για την είσοδο τους στον επόμενο επιταχυντή, τον Proton Synchrotron Booster (PSB). Τα ιόντα απογυμνώνονται από τα δύο ηλεκτρόνια τους κατά την έγχυση από το Linac4 στον PSB, αφήνοντας μόνο πρωτόνια. Έπειτα, τα πρωτόνια επιταχύνονται από τον PSB στα 2 GeV και συνεχίζουν στον επιταχυντή Proton Synchrotron (PS) ο οποίος ωθεί την ενέργεια της δέσμης μέχρι και τα 26 GeV. Στη συνέχεια, τα πρωτόνια στέλνονται στο Super Proton Synchrotron (SPS), όπου επιταχύνονται έως και 450 GeV. Εν τέλει, τα πρωτόνια χωρίζονται σε δύο δέσμες και μεταφέρονται στους σωλήνες του LHC. Η

²Πριν αντικατασταθεί από τον Linac4 το 2020, ο πρώτος επιταχυντής ήταν ο Linac2 ο οποίος επιτάχυνε τα πρωτόνια μέχρι και τα 50 MeV [51]

πρώτη δέσμη, κινείται σύμφωνα με την φορά του ρολογιού ενώ η άλλη δέσμη κινείται αντίθετα. Η διαδικασία διαρκεί 4 λεπτά και 20 δευτερόλεπτα για να γεμίσει κάθε δακτύλιος του LHC και 20 λεπτά ώστε τα πρωτόνια να φτάσουν στην μέγιστη ενέργεια τους, 6.8 TeV. Η κάθε δέσμη πρωτονίων αποτελείται από 2808 «βαγόνια» (bunches) κάθε ένα από το οποίο έχει μήκος περίπου 0.3 μέτρα και περιέχει αρχικά $1.15 \cdot 10^{11}$ πρωτόνια. Η απόσταση μεταξύ των δεσμίδων είναι περίπου 7.8 μέτρα, ενώ οι αντίθετα κινούμενες δέσμες συγκρούονται κάθε 25 ns με αποτέλεσμα να γίνονται τελικά περίπου 1 δισεκατομμύριο συγκρούσεις το δευτερόλεπτο [52].

Αυτές οι συγκρούσεις γίνονται όπως αναφέραμε σε τέσσερα σημεία και σε καθένα από αυτά βρίσκεται ένας ανιχνευτής. Οι τέσσερις αυτοί ανιχνευτές είναι οι CMS, ATLAS, ALICE και LHCb, καθένας από τους οποίους έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά καθώς και διαφορετικό σκοπό λειτουργίας. Συγκεκριμένα, το πείραμα LHCb ειδικεύεται στη διερεύνηση των μικρών διαφορών μεταξύ ύλης και αντιύλης μελετώντας το b quark ενώ το ALICE είναι ένας ανιχνευτής αφιερωμένος στη φυσική βαρέων ιόντων. Το ALICE επίσης μελετά τη φυσική της ύλης που αλληλεπιδρά έντονα σε ακραίες ενεργειακές πυκνότητες, όπου σχηματίζεται μια φάση ύλης που ονομάζεται πλάσμα κουάρκ-γλουονίων (quark-gluon plasma). Οι άλλοι δύο, ATLAS και CMS, βρίσκονται αντιδιαμετρικά πάνω στον δακτύλιο του LHC και είναι γενικού σκοπού δηλαδή μελετούν τόσο το Καθιερωμένο Πρότυπο (μποζόνιο Higgs) όσο και Νέα Φυσική, πέρα από το Καθιερωμένο Πρότυπο (Υπερσυμμετρία, LED κτλ).

2.1.1 Φωτεινότητα του LHC

Ο στιγμιαίος ρυθμός αλληλεπιδράσεων για μια δεδομένη ενεργό διατομή αλληλεπίδρασης πρωτονίου - πρωτονίου δίνεται από την σχέση

$$\frac{dN}{dt} = \mathcal{L}\sigma \quad (2.1)$$

όπου \mathcal{L} είναι ένα χαρακτηριστικό μέγεθος των επιταχυντών, η φωτεινότητα (luminosity). Η φωτεινότητα ενός επιταχυντή εξαρτάται μόνο από παραμέτρους της δέσμης και μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathcal{L} = \frac{N_b^2 n_b f \gamma}{4\pi \epsilon_n \beta^*} F \quad (2.2)$$

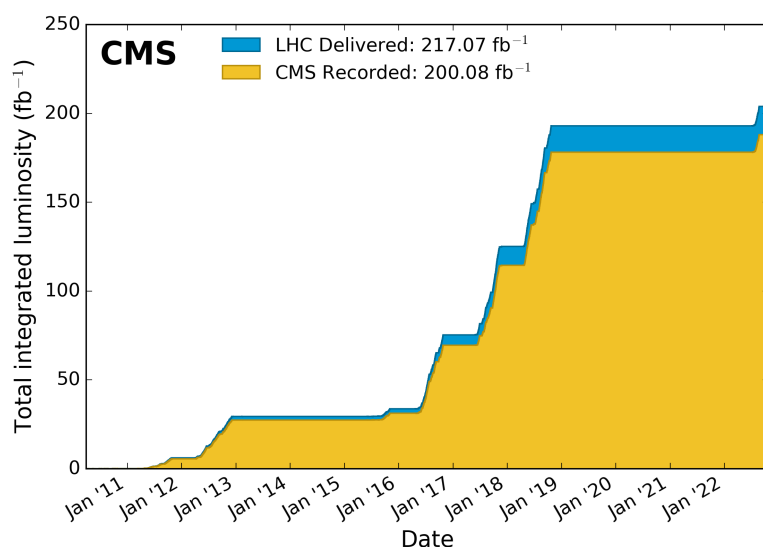
όπου

- N_b είναι ο αριθμός σωματιδίων ανά «βαγόνι» (bunch) ($1.15 \cdot 10^{11}$)
- n_b είναι ο αριθμός των «βαγονιών» ανά δέσμη (2808)
- f είναι η συχνότητα περιστροφής (11.2 kHz)
- γ είναι ο σχετικιστικός παράγοντας
- β^* είναι η συνάρτηση πλάτους. Ποσοτικοποιεί πόσο στενή είναι η δέσμη. Όσο μικρότερη η τιμή για το β^* τόσο στενότερη και η δέσμη (0.55 m)
- ϵ_n είναι η εγκάρσια κανονικοποιημένη εκπομπή της δέσμης. Δέσμη χαμηλής εκπομπής είναι μια δέσμη όπου τα σωματίδια περιορίζονται σε μικρή απόσταση και έχουν σχεδόν την ίδια ορμή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μεγαλύτερη πιθανότητα για σωματίδια να αλληλεπιδρούν και άρα σε υψηλότερη φωτεινότητα. Έχει μονάδες μήκους και είναι μετρημένο στο εγκάρσιο προς τη δέσμη επίπεδο (3.75 μm).

- F είναι ο παράγοντας διόρθωσης για την γωνία διασταύρωσης των δύο δεσμών (0.85)

Με βάση τις ονομαστικές τιμές που υπάρχουν στις παρενθέσεις, καταλήγουμε σε μία ονομαστική τιμή για την φωτεινότητα του LHC: $\mathcal{L} \sim 10^{34} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ [47].

Το ολοκληρωμένο της φωτεινότητας ως προς τον χρόνο, ονομάζεται ολοκληρωμένη φωτεινότητα (integrated luminosity)³ και είναι ένα μέτρο του μεγέθους των δεδομένων που συλλέγονται. Η ολοκληρωμένη φωτεινότητα είναι μία σημαντική παράμετρος που σχετίζεται άμεσα με τον αριθμό των παρατηρούμενων γεγονότων και ποσοτικοποιεί την επίδοση του επιταχυντή. Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζεται η ολοκληρωμένη φωτεινότητα όπως δημιουργήθηκε από τον LHC και συλλέχθηκε από το πείραμα CMS, κατά την διάρκεια και των τριών “Runs” λήψης δεδομένων, για συγκρούσεις pp στα 13 TeV.



Σχήμα 2.2: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα της ολοκληρωμένης φωτεινότητας ως προς τον χρόνο [53]

Το Run 1 λήψης δεδομένων διήρκησε από το 2010 έως το 2012. Κατά τον πρώτο χρόνο αυτού, ο LHC λειτούργησε με ενέργεια κέντρου μάζας στα $\sqrt{s} = 7 \text{ TeV}$ και το πείραμα CMS σύλλεξε ολοκληρωμένη φωτεινότητα ίση με $\sim 5.59 \text{ fb}^{-1}$. Για το δεύτερο χρόνο του Run 1 η ενέργεια κέντρου μάζας αυξήθηκε κατά 1 TeV και η ολοκληρωμένη φωτεινότητα ήταν $\sim 21.79 \text{ fb}^{-1}$. Μεταξύ 2013 και 2015 έγινε το πρώτο κλείσιμο του επιταχυντή, επονομαζόμενο ως Long Shutdown (LS), κατά το οποίο έγινε επιδιόρθωση και αναβάθμιση των ανιχνευτών. Η επόμενη περίοδος λήψης δεδομένων έγινε μεταξύ 2015 και 2018, η οποία ονομάζεται ως Run 2. Κατά την διάρκεια αυτού του Run, ο LHC λειτούργησε στα 13 TeV ενώ η ολοκληρωμένη φωτεινότητα αυξήθηκε στα $\sim 150.76 \text{ fb}^{-1}$. Η επόμενη περίοδος, LS2, ήταν η δεύτερη περίοδος συντήρησης και αναβάθμισης, η οποία και διήρκησε από το 2018 μέχρι και το 2022. Αυτή τη στιγμή το LHC βρίσκεται στην τρίτη περίοδο λήψης δεδομένων, Run 3, η οποία ξεκίνησε στις 5 Ιουλίου 2022 και έχει προγραμματιστεί να σταματήσει το 2024. Το Run 3 αύξησε και πάλι την ενέργεια κέντρου μάζας στα 13.6 TeV ενώ η μετρούμενη φωτεινότητα θα ξεπεράσει τα 200 fb^{-1} . Μετά το Run 3, είναι προγραμματισμένο το κλείσιμο του επιταχυντή μέχρι το 2027, στην οποία περίοδο (LS3) θα εφαρμοστούν σημαντικές αναβαθμίσεις με σκοπό την προετοιμασία για το High Luminosity - LHC (HL-LHC).

³H συνήθης μονάδα μέτρησης για την ολοκληρωμένη φωτεινότητα είναι το inverse femtobarn ($1/\text{fb} = 10^{-39} \text{ cm}^{-2}$)

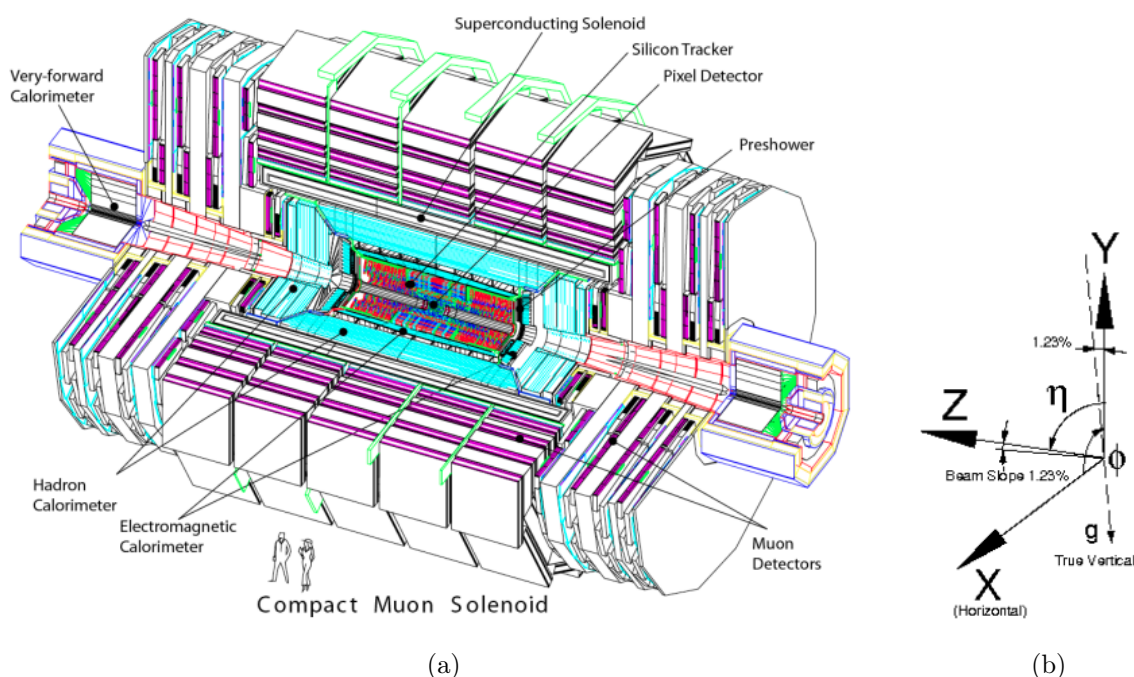
2.1.2 Αναβάθμιση του LHC

Η αναβάθμιση του LHC και η πλήρης εκμετάλλευση των δυνατοτήτων του είναι μείζονος σημασίας για την ανακάλυψη Νέας Φυσικής και για τη, σε βάθος, μελέτη των παρατηρούμενων φαινομένων. Προκειμένου να αυξηθεί η δυνατότητα ανακαλύψεων, ο LHC θα υποβληθεί σε σημαντική αναβάθμιση τα επόμενα χρόνια ώστε να αυξηθεί ο ρυθμός συγκρούσεων. Ο στόχος του προγράμματος HL-LHC είναι να αυξήσει την φωτεινότητα κατά έναν παράγοντα 5 σε σύγκριση με την φωτεινότητα που είχε αρχικά σχεδιαστεί ο LHC, φτάνοντας την $\mathcal{L} \sim 5 - 10 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Επίσης, ο αριθμός των γεγονότων ανά “bunch-crossing” θα αυξηθεί σε περίπου 200. Με αυτήν την απόδοση, η συνολική ολοκληρωμένη φωτεινότητα αναμένεται να αυξηθεί κατά 10 φορές, έως και 3000 fb^{-1} μετά από 10 χρόνια λειτουργίας ξεκινώντας από το 2027-28 [54].

Οι αναβαθμίσεις του HL-LHC απαιτούν 10 χρόνια μελέτης, δοκιμών και βελτιστοποιήσεων. Ο στόχος είναι να εγκατασταθεί ο κύριος εξοπλισμός του HL-LHC και να τεθεί σε λειτουργία κατά τη διάρκεια του LS3. Η αναβαθμισμένη διαμόρφωση θα βασίζεται σε τεχνολογία αιχμής, όπως οι υπεραγωγιμοί μαγνήτες 12 T , πολύ συμπαγείς και εξαιρετικά ακριβείς κοιλότητες υπεραγωγίσιμης δέσμης ελέγχου φάσης και νέες τεχνολογίες για ευθυγράμμιση δέσμης.

2.2 Ο Ανιχνευτής CMS

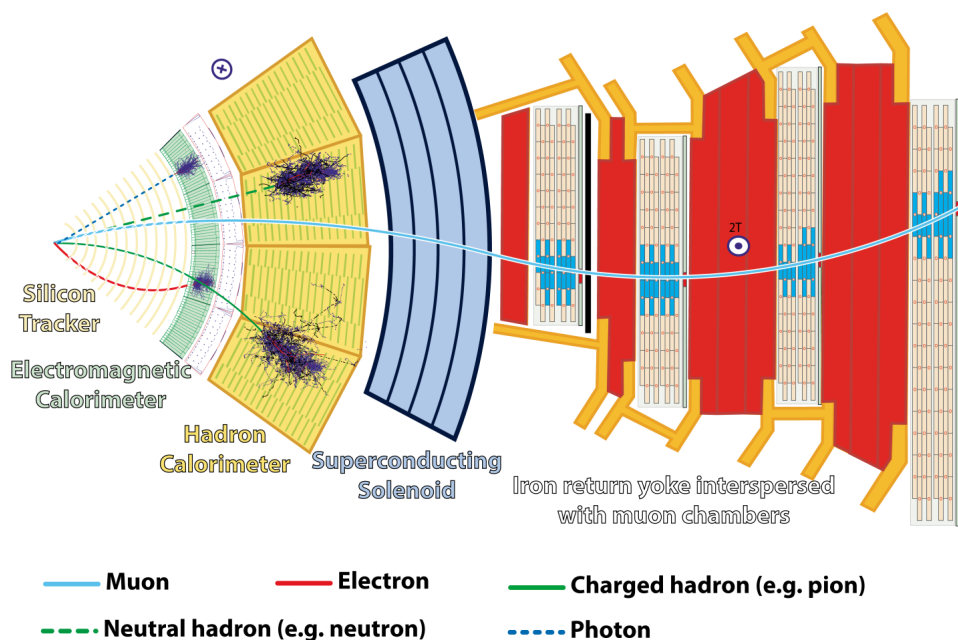
Ο ανιχνευτής Compact Muon Solenoid (CMS), όπως έχει ήδη αναφερθεί είναι ένας γενικού σκοπού ανιχνευτής ο οποίος έχει σχεδιαστεί για να παρατηρήσει οποιαδήποτε νέα φυσικά φαινόμενα μπορεί να αποκαλύψει ο LHC. Ο CMS λειτουργεί ως μια γιγάντια κάμερα υψηλής ταχύτητας, λαμβάνοντας τρισδιάστατες «φωτογραφίες» συγκρούσεων σωματιδίων από όλες τις κατευθύνσεις έως και 40 εκατομμύρια φορές κάθε δευτερόλεπτο.



Σχήμα 2.3: (a) Σχηματική άποψη του ανιχνευτή CMS [55]. (b) Το δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων του CMS [56]

Αν και τα περισσότερα από τα σωματίδια που παράγονται στις συγκρούσεις είναι ασταθή, διασπώνται γρήγορα σε σταθερά σωματίδια που μπορούν να ανιχνευθούν από τον CMS. Εντοπίζοντας, σχεδόν, όλα τα σταθερά σωματίδια που παράγονται σε κάθε σύγκρουση, μετρώντας τις ορμές και τις ενέργειές τους και στη συνέχεια συνδυάζοντας τις πληροφορίες όλων αυτών των σωματιδίων, σαν ένα παζλ, ο ανιχνευτής μπορεί να ανακατασκευάσει μια «εικόνα» της σύγκρουσης για περαιτέρω ανάλυση.

Ο ανιχνευτής CMS έχει μήκος 28.7 μέτρων, διάμετρο 15 μέτρων και ζυγίζει 14000 τόνους. Όπως προδίδει και το όνομα του, πρόκειται για έναν αρκετά συμπαγή (compact) ανιχνευτή για τις δυνατότητες του, γεγονός το οποίο οφείλεται στον τρόπο που έχει κατασκευαστεί γύρω από ένα μεγάλο σωληνοειδές (solenoid) πηνίο. Συγκεκριμένα, η δομή του ανιχνευτή μοιάζει με αυτήν ενός κυλινδρικού κρεμμυδιού, δηλαδή αποτελείται από πολλά ομόκεντρα στρώματα καθένα από τα οποία είναι σχεδιασμένο για διαφορετικό σκοπό.



Σχήμα 2.4: Εγκάρσια διατομή του CMS όπου διακρίνονται τα διαφορετικά στρώματα του ανιχνευτή. [57]

Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.4, ο ανιχνευτής, στο καμπύλο τμήμα του, το οποίο ονομάζεται και βαρέλι (barrel) αποτελείται από πέντε κύρια μέρη. Αυτά είναι, κατά σειρά από μέσα προς τα έξω, τα εξής:

- Ο ανιχνευτής τροχιών πυριτίου (silicon tracker)
- Το ηλεκτρομαγνητικό καλορίμετρο (electromagnetic calorimeter)
- Το αδρονικό καλορίμετρο (hadron calorimeter)
- Ο υπεραγωγίμος σωληνοειδής μαγνήτης (superconducting solenoid)
- Οι θάλαμοι ανιχνευτών μιονίων και οι σιδερένιοι ζυγοί (muon chambers and iron return yokes)

Πέρα από το βαρέλι, ο ανιχνευτής περιλαμβάνει και δύο καπάκια (endcaps) τα οποία κλείνουν τον ανιχνευτή από τις δύο πλευρές. Έχουν ακριβώς την ίδια διάταξη υποανιχνευτών με το

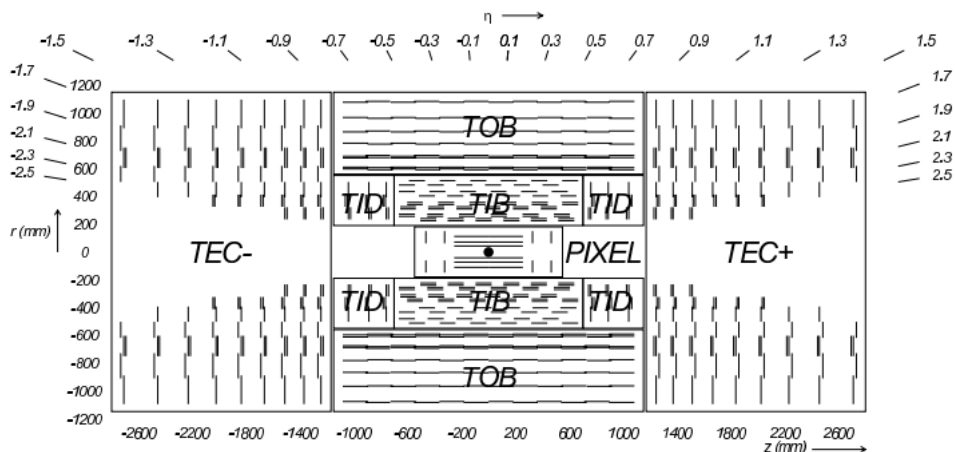
βαρέλι, με εξαίρεση φυσικά του μαγνήτη.

Όσον αφορά το σύστημα συντεταγμένων του ανιχνευτή, έχει επιλεχθεί ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το ονομαστικό σημείο σύγκρουσης. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.3b, ο άξονας y είναι κάθετος στην δέσμη και δείχνει προς τα πάνω, ο άξονας x δείχνει ακτινικά προς τα μέσα, στο κέντρο του δακτυλίου του LHC και φυσικά ο άξονας z είναι παράλληλος με την δέσμη. Δεδομένου ότι το επίπεδο του δακτυλίου LHC έχει ελαφρά κλίση 1, 23% σε σχέση με τον ορίζοντα εκ κατασκευής, το σύστημα συντεταγμένων του CMS είναι γερμένο ανάλογα. Η αζιμουθιακή γωνία ϕ , ορίζεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ με αρχή τον άξονα x , στο επίπεδο $x-y$ με $\phi > 0$ επάνω από το επίπεδο του δακτυλίου του LHC και η πολική γωνία θ , υπολογίζεται από τον άξονα z . Έτσι η ψευδοωκότητα η (βλ. Παράρτημα A.5) ορίζεται ως $\eta = -\ln \tan(\frac{\theta}{2})$. Η ψευδοωκότητα είναι ένα πολύ σημαντικό μέγεθος για πειράματα φυσικής με επιταχυντές καθώς αυτό είναι το μέγεθος που χρησιμοποιείται για να μας υποδείξει την πολική γωνία. Ο CMS έχει σχεδόν πλήρη κάλυψη της στερεάς γωνίας. Η κεντρική περιοχή, δηλαδή το βαρέλι, καλύπτει μέχρι και $|\eta| < 1.48$ ενώ μαζί με τα δύο καπάκια, καλύπτει μέχρι $|\eta| < 3$. Μάλιστα, στις πολύ μπροστινές περιοχές του αδρονικού καλοριμέτρου η κάλυψη της ψευδοωκότητας επεκτείνεται μέχρι και $\eta = 5$.

2.2.1 Οι Ανιχνευτές Τροχιών

Κινούμενοι ακτινικά, από το σημείο σύγκρουσης των δεσμών προς τα έξω, ο πρώτος ανιχνευτής που συναντάμε είναι το εσωτερικό σύστημα ανίχνευσης τροχιών (inner tracking system) [58]. Ο σκοπός του είναι να παρέχει ακριβή και αποτελεσματική μέτρηση των τροχιών φορτισμένων σωματιδίων μέσω του ιονισμού που παράγουν στην πορεία τους. Υπολογίζεται ότι, δεδομένης της φωτεινότητας του LHC, κάθε 25 ps υπάρχουν κατά μέσο όρο 1000 σωματίδια προερχόμενα από περισσότερες από 20 επικαλυπτόμενες αλληλεπιδράσεις πρωτονίου – πρωτονίου, τα οποία διασχίζουν αυτόν τον ανιχνευτή. Είναι επομένως σαφές ότι απαιτείται ένας ανιχνευτής υψηλής ακρίβειας και ταχύτητας απόκρισης. Οι παραπάνω απαιτήσεις σε συνδυασμό με την απαίτηση για αντοχή στην ακτινοβολία και όσο το δυνατόν λιγότερη αλληλεπίδραση με τα παραγόμενα σωματίδια, οδήγησε στην επιλογή του πυριτίου για την κατασκευή του ανιχνευτικού συστήματος.

Πιο συγκεκριμένα, ο ανιχνευτής τροχιών αποτελείται από δύο συστήματα που βασίζονται σε αισθητήρες φτιαγμένους από πυρίτιο. Το πρώτο σύστημα χρησιμοποιεί pixel πυριτίου και ονομάζεται pixel detector ενώ το δεύτερο χρησιμοποιεί μικροταινίες (microstrips) πυριτίου και ονομάζεται silicon strip tracker. Ο pixel detector περιβάλλει την δέσμη και περιέχει 66 εκατομμύρια κανάλια ανίχνευσης. Αυτός με την σειρά του, περιβάλλεται από τον silicon strip tracker ο οποίος περιλαμβάνει τέσσερα κύρια υποσυστήματα: tracker outer barrel (TOB), tracker inner barrel (TIB), tracker inner disks (TID) και tracker endcaps (TEC). Συνολικά ο ανιχνευτής έχει μήκος 5.5 μέτρων και διάμετρο 2.4 μέτρων με συνολική ενεργή επιφάνεια 198 τετραγωνικών μέτρων ενώ όσον αφορά την ψευδοωκότητα, καλύπτει την περιοχή με $|\eta| < 2.5$. Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο διέλθει μέσα από την ανιχνευτική διάταξη εναποθέτει αρκετή ενέργεια για την απελευθέρωση ηλεκτρονίων από τα άτομα πυριτίου, δημιουργώντας έτσι ζεύγη ηλεκτρονίων – οπών. Χρησιμοποιώντας ηλεκτρικό ρεύμα, συλλέγονται αυτά τα ηλεκτρικά φορτία και δημιουργείται ένα ηλεκτρικό σήμα. Με κατάλληλη διαχείριση αυτών των ηλεκτρικών σημάτων που δημιουργούνται στα διαφορετικά στρώματα του ανιχνευτή, γίνεται η ανακατασκευή της τροχιάς του σωματιδίου. Στο Σχήμα 2.5 παρουσιάζονται σχηματικά η δομή του συστήματος ανίχνευσης τροχιών.



Σχήμα 2.5: Σχηματική αναπαράσταση της διατομής μέσα στον tracker του CMS. Κάθε γραμμή παριστάνει μία μονάδα ανιχνευτή [59]

Silicon Pixel Detector

Ο pixel detector αρχικά αποτελούταν από τρία στρώματα στο βαρέλι σε ακτίνες 4.4, 7.3 και 10.2 εκατοστά καθώς και από δύο στρώσεις στα καπάκια σε απόσταση ± 34.5 και ± 46.5 εκατοστά αντίστοιχα. Μετά το τέλος της περιόδου λήψης δεδομένων του 2016, ο pixel detector αντικαταστάθηκε με μια αναβαθμισμένη έκδοση που ονομάζεται CMS Phase-1 pixel detector [60, 61]. Αυτός αποτελείται από τέσσερα στρώματα, αντί για τρία, στο βαρέλι, σε ακτίνες 2.9, 6.8, 10.9 και 16 εκατοστά. Στα καπάκια, αποτελείται από τρεις δίσκους, αντί για δύο, με pixel modules σε απόσταση ± 29.1 , ± 39.6 και ± 51.5 εκατοστά από το κέντρο του ανιχνευτή. Επίσης, σε αυτή την ανιχνευτική διάταξη υπάρχουν 1856 συστήματα αισθητήρων, καθένα από τα οποία περιέχει έναν αισθητήρα με 160×416 pixels συνδεδεμένα με δεκαέξι τσιπ ανάγνωσης.

Silicon Strip Detector

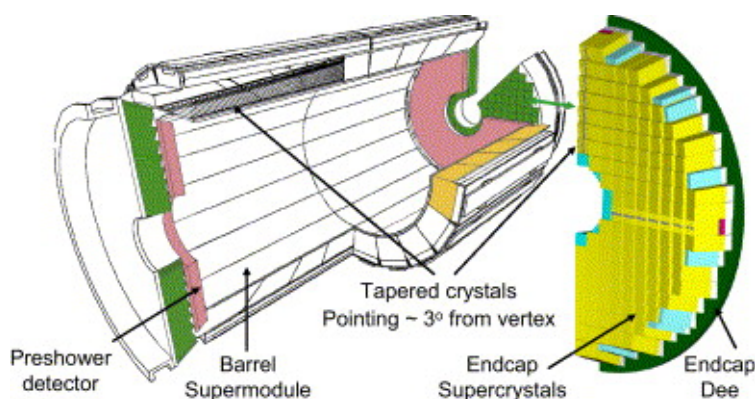
Ο silicon strip detector αποτελείται από 15148 ανιχνευτικά συστήματα μονής όψης και περιλαμβάνει 9.3 εκατομμύρια κανάλια ανίχνευσης, χωρισμένα σε πολλά υποσυστήματα όπως φαίνεται από το Σχήμα 2.5. Συνολικά, ο silicon strip detector αποτελείται από δέκα στρώματα μικροταινιών πυριτίου στο βαρέλι ($|\eta| < 1.5$) καθώς και από τρεις μικρούς εσωτερικούς δίσκους ενώ στα καπάκια ($1.5 < |\eta| < 2.5$) αποτελείται από εννιά εξωτερικούς δίσκους. Ειδικότερα, το πρώτο κομμάτι αυτού του ανιχνευτή όπου καλύπτει ακτινική απόσταση $20 < r < 55 \text{ cm}$ είναι το TIB σε συνδυασμό με το TID. Το TIB αποτελείται από 4 στρώματα μικροταινιών που καλύπτουν μέχρι και $|z| < 65 \text{ cm}$, ενώ το TID περιλαμβάνει 3 μικρούς δίσκους καλύπτοντας την περιοχή $65 < |z| < 120 \text{ cm}$. Κάθε μικροταινία έχει πάχος 320 μm και είναι τοποθετημένα παράλληλα με την δέσμη στο TIB και κάθετα στο TID. Το επόμενο υποσύστημα που περιβάλλει τα TIB/TID είναι το TOB, το οποίο βρίσκεται σε ακτίνα από 55 έως 116 εκατοστά και καλύπτει έως $|z| < 118 \text{ cm}$. Αποτελείται από έξι στρώματα τοποθετημένα παράλληλα της δέσμης και εξοπλισμένα με μικροταινίες πάχους 500 μm . Το τελευταίο κομμάτι είναι το TEC το οποίο αποτελείται από 9 δίσκους και καλύπτει την περιοχή $124 < |z| < 282 \text{ cm}$ και $22.5 < |\eta| < 116 \text{ cm}$. Περιέχει μικροταινίες πάχους 320 – 500 μm , τοποθετημένες κάθετα στον z άξονα.

Ενόψει της επερχόμενης αναβάθμισης του LHC σε HL-LHC, ο ανιχνευτής τροχιών θα αντικατασταθεί από τον επονομαζόμενο CMS Phase-2 ανιχνευτή ώστε να αντιμετωπιστεί

η μεγαλύτερη φωτεινότητα [62, 63]. Η δομή αυτού του ανιχνευτή θα χωρίζεται και πάλι σε δύο μέρη ενώ θα αποτελείται από πολύ μικρά pixel, περίπου 6 φορές μικρότερα από την τρέχουσα διαμόρφωση, επιτρέποντας καλύτερη ανάλυση (resolution) και μεγαλύτερη ανοχή ακτινοβολίας.

2.2.2 Το Ηλεκτρομαγνητικό Καλορίμετρο

Το επόμενο ανιχνευτικό σύστημα είναι το ηλεκτρομαγνητικό καλορίμετρο ή εν συντομία ECAL [55, 59, 64]. Σκοπός αυτής της διάταξης είναι η απορρόφηση και ο υπολογισμός της ενέργειας των ηλεκτρονίων, ποζιτρονίων και φωτονίων που παράγονται κατά την διάρκεια των συγκρούσεων. Καθώς τα φωτόνια και τα ηλεκτρόνια διέρχονται από το ECAL, προκαλούν ηλεκτρομαγνητικούς καταιονισμούς (showers), εναποθέτοντας σε αυτό την ενέργειά τους. Με την σειρά του το ECAL εκλύει αυτή την ενέργεια υπό την μορφή φωτός το οποίο ανιχνεύεται από φωτοανιχνευτές, δημιουργώντας έτσι το ηλεκτρικό σήμα το οποίο στέλνεται για περαιτέρω ανάλυση.



Σχήμα 2.6: Η δομή του ηλεκτρομαγνητικού καλορίμετρου [64]

Το ηλεκτρομαγνητικό καλορίμετρο αποτελείται από 75848 κρυστάλλους σπινθηρισμού PbWO_4 . Η επιλογή αυτού του υλικού οφείλεται στις ιδιότητες του. Χαρακτηρίζεται από υψηλή ανθεκτικότητα στην ακτινοβολία και μεγάλη πυκνότητα (8.28 g/cm^3) καθιστώντας το ιδανικό για την δημιουργία ενός συμπαγούς καλοριμέτρου. Επίσης, αυτό το υλικό έχει γρήγορη απόκριση, εκπέμποντας το 80 % του φωτός μέσα σε 25 ps όπου και είναι η ονομαστική τιμή για τον χρόνο μεταξύ δύο συγκρούσεων δεσμών στον LHC. Στο πίσω μέρος των κρυστάλλων, όπως αναφέραμε, βρίσκονται οι φωτοανιχνευτές οι οποίοι δημιουργούν το ηλεκτρικό σήμα. Δεδομένου ότι το ECAL βρίσκεται εσωτερικά του σωληνοειδούς μαγνήτη, οι φωτοανιχνευτές πρέπει να μπορούν να λειτουργούν σε ισχυρό μαγνητικό πεδίο. Έτσι, στην περιοχή του βαρελιού, χρησιμοποιούνται φωτοδιόδοι χιονοστιβάδας κατασκευασμένοι από πυρίτιο (silicon avalanche photodiodes) ή APDs ενώ στα καπάκια, χρησιμοποιούνται φωτοτρίοδοι κενού (vacuum phototriodes) ή VPT. Ο αριθμός των φωτονίων σπινθηρισμού που θα εκπέμπονται από τους κρυστάλλους καθώς και η λειτουργία των APD εξαρτώνται από την θερμοκρασία. Επομένως, απαιτείται ένα πολύ καλό σύστημα ψύξης ώστε να διατηρείται η θερμοκρασία του συστήματος σταθερή.

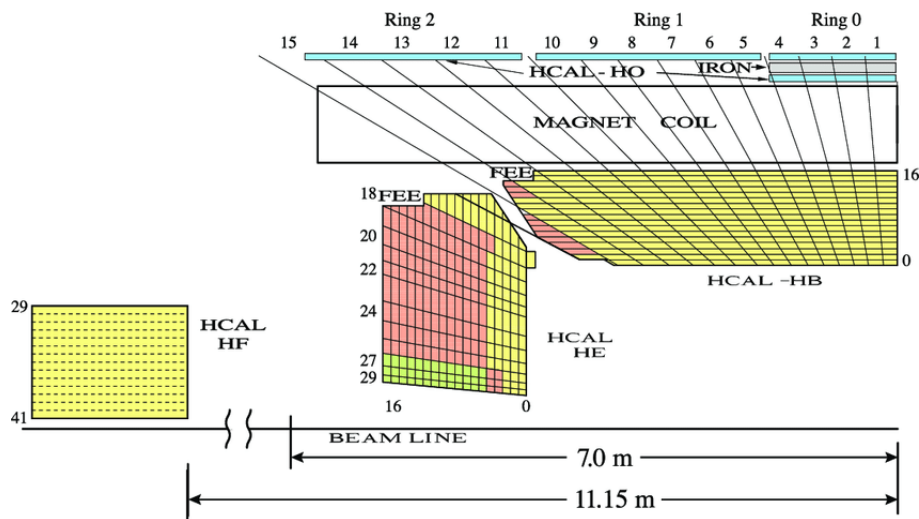
Στο Σχήμα 2.6 παρουσιάζεται η δομή του ECAL. Αποτελείται από την περιοχή του βαρελιού (EB) και από την περιοχή στα καπάκια (EE). Το EB βρίσκεται σε ακτινική απόσταση μεταξύ 129 και 175 εκατοστών, καλύπτει έως $|\eta| < 1.479$ και περιέχει 61200 κρυστάλλους μήκους 23 εκατοστών. Τα EE βρίσκονται σε απόσταση 314 εκατοστών από το ονομαστικό σημείο σύγκρουσης, καλύπτοντας ένα διάστημα $1.479 < |\eta| < 3.0$ και περιέχουν 7324

κρυστάλλους μήκους 22 εκατοστών, το καθένα. Μπροστά από αυτούς τους κρυστάλλους, υπάρχει ο preshower ανιχνευτής, που καλύπτει την περιοχή $1.653 < |\eta| < 2.6$. Έχει συνολικό πλάτος 20 εκατοστών και συνίσταται από δύο πλάκες μολύβδου και δύο πυριτίου, τοποθετημένες εναλλάξ. Χρησιμοποιείται για τη διάκριση μεταξύ φωτονίων και των ουδέτερων πιονίων π^0 . Αυτά τα βραχύβια σωματρία παράγονται με πολύ υψηλό ρυθμό κατά τις συγκρούσεις πρωτονίων και διασπώνται, κυρίως, σε δύο φωτόνια μικρότερης ενέργειας τα οποία βρίσκονται κοντά χωρικά. Για αυτό, οι ανιχνευτικές λωρίδες του preshower ανιχνευτή έχουν πλάτος μόλις 2 χιλιοστών, προσφέροντας έτσι υψηλότερη ανάλυση και μεγαλύτερη ακρίβεια από τα υπόλοιπα συστήματα του καλοριμέτρου, καθιστώντας δυνατή την διάκριση των δύο φωτονίων που προέρχονται από την διάσπαση των ουδέτερων πιονίων.

2.2.3 Το Αδρονικό Καλορίμετρο

Έξω από το ηλεκτρομαγνητικό καλορίμετρο βρίσκεται το αδρονικό καλορίμετρο (HCAL). Εδώ μετράται η ενέργεια όλων των αδρονίων (καονίων, πιονίων κτλ) και των jets⁴. Επιπλέον, από το HCAL υπολογίζεται και η εγκάρσια ελλείπουσα ενέργεια (Missing Energy Transverse - MET) (βλ. Παράρτημα A.3) η οποία φανερώνει έμμεσα πληροφορίες για τα ουδέτερα σωματρία που διαφεύγουν του ανιχνευτή, όπως τα νετρίνα.

Για να μετρηθεί η ενέργεια όλων αυτών των σωματιδίων, το αδρονικό καλορίμετρο χρησιμοποιεί στρώματα απορροφητή και πλακίδια σπινθηριστών, τοποθετημένα εναλλάξ (ονομάζονται ως «παθητικό» και «ενεργό» υλικό αντίστοιχα). Έτσι τα σωματρία αναγκάζονται να αλληλεπιδράσουν δημιουργώντας πληθώρα δευτερογενών σωματιδίων. Τέλος το αδρονικό καλορίμετρο εκτός από τη μέτρηση της ενέργειας προσφέρει πληροφορίες για τη θέση και το χρόνο ανίχνευσης των σωματιδίων.



Σχήμα 2.7: Τομή του αδρονικού καλορίμετρου [65]

Το HCAL αποτελείται από τέσσερα τμήματα: το βαρέλι (HB και HO), τα καπάκια (HE) και το εμπρόσθιο τμήμα (HF), τοποθετημένα στην διάταξη που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.7. Καλύπτει γωνίες που φτάνουν έως και $|\eta| < 5.2$ ενώ εκτείνεται σε αποστάσεις που ξεπερνούν τα δέκα μέτρα από το σημείο της σύγκρουσης των δεσμών. Ο σχεδιασμός του HCAL επηρεάστηκε σημαντικά από την επιλογή των μαγνητικών παραμέτρων, αφού η ανιχνευτική

⁴Τα jets είναι ροές σωματιδίων μέσα σε νοητούς κώνους που προέρχονται από την αδρονοποίηση σωματιδίων που φέρουν φορτίο χρώματος

διάταξη, με εξαίρεση του τμήματος HO, βρίσκεται εντός του σωληνοειδούς μαγνήτη. Έτσι για το υλικό του απορροφητή επιλέχθηκε ο ορείχαλκος καθώς έχει σχετικά μικρό μήκος αλληλεπίδρασης και είναι μη μαγνητικό, ενώ ως ενεργό υλικό χρησιμοποιήθηκαν πλαστικά πλακίδια σπινθηριστών.

Στην κεντρική περιοχή των HE, κοντά στον σωλήνα της δέσμης, υπάρχει πολύ μεγάλη ροή σωματιδίων. Μάλιστα, με την αναβάθμιση στον HL-LHC οι συνθήκες θα είναι ακόμα πιο δύσκολες για την απόδοση του ανιχνευτή. Επομένως, για να αντιμετωπιστούν αυτές οι δυσκολίες, κατά την διάρκεια του LS3, το υπάρχον καλορίμετρο των HE, θα αντικατασταθεί από ένα νέο καλορίμετρο το οποίο θα καταγράφει και τις ηλεκτρομαγνητικές και τις αδρονικές συνεισφορές ταυτόχρονα, με εξαιρετική ακρίβεια. Το νέο αυτό καλορίμετρο ονομάζεται High Granularity Calorimeter (HGCAL) και θα δίνει τις απαραίτητες πληροφορίες για την ενέργεια των σωματιδίων στην περιοχή όπου βρίσκονται τα καπάκια ($1.5 < |\eta| < 3$) [66, 67].

2.2.4 Το Σωληνοειδές Πηνίο

Αμέσως μετά το αδρονικό καλορίμετρο συναντάμε το υπεραγωγίμο σωληνοειδές πηνίο [68–72]. Ο σκοπός αυτού του πανίσχυρου μαγνήτη είναι η καμπύλωση των τροχιών των ηλεκτρικά φορτισμένων σωματιδίων που παράγονται κατά την σύγκρουση καθώς αυτά απομακρύνονται από το σημείο σύγκρουσης. Μάλιστα, η κάμψη των τροχιών των σωματιδίων εξυπηρετεί δύο σκοπούς. Πρώτον, βοηθάει στην ταυτοποίηση του φορτίου ενός σωματιδίου. Τα φορτία ανάλογα με το πρόσημο τους (θετικό ή αρνητικό) καμπυλώνονται προς αντίθετες κατευθύνσεις στο ίδιο μαγνητικό πεδίο. Δεύτερον, μας επιτρέπει τον υπολογισμό της ορμής του φορτισμένου σωματιδίου καθώς η τροχιά των σωματιδίων με υψηλή ορμή καμπυλώνεται λιγότερο από την τροχιά εκείνων με μικρότερη ορμή.

Αναφορικά με το μαγνήτη, πρόκειται για το μεγαλύτερο σωληνοειδή υπεραγωγίμο μαγνήτη στον κόσμο. Αυτός αποτελείται από έναν κύλινδρο μήκους 12.9 μέτρων, με εσωτερική ακτίνα 5.9 μέτρων και εξωτερική 6.5 μέτρων, ο οποίος είναι τυλιγμένος με σύρμα 2168 φορές [73]. Το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει το σύρμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $3.8 T$ ⁵ (ομογενές στο εσωτερικό του σωληνοειδούς), περίπου 100000 φορές μεγαλύτερο από αυτό της Γης, ενώ η συνολική αποθηκευμένη ενέργεια του πεδίου φτάνει τα $2.3 GJ$, ενέργεια ισοδύναμη με περίπου μισό τόνο TNT. Για τη δημιουργία μαγνητικού πεδίου τόσο μεγάλης έντασης, απαιτείται ηλεκτρικό ρεύμα έντασης 18.164 kA ενώ για να μην αναπτυχθούν τεράστιες θερμοκρασίες λόγω αυτής της έντασης ρεύματος το σύρμα πρέπει να είναι υπεραγωγίμο. Για να επιτευχθεί η υπεραγωγιμότητα του σύρματος, πρέπει αυτό να ψυχθεί στους $-269^\circ C$.

Αξίζει να σημειωθεί πως ο σωληνοειδής μαγνήτης περικλείεται από δωδεκάπλευρους σιδερένιους ζυγούς (iron yokes) 14 μέτρων σε διάμετρο, οι οποίοι κλείνουν τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου που εξέρχονται από τα καπάκια (έτσι το μαγνητικό πεδίο στον ανιχνευτή μιονίων έχει αντίθετη φορά από αυτήν που έχει στους ανιχνευτές πυριτίου και στα καλορίμετρα). Ο μαγνήτης μαζί με τους ζυγούς ζυγίζουν συνολικά 12500 τόνους καθιστώντας το, το βαρύτερο υποσύστημα σε όλην διάταξη του ανιχνευτή.

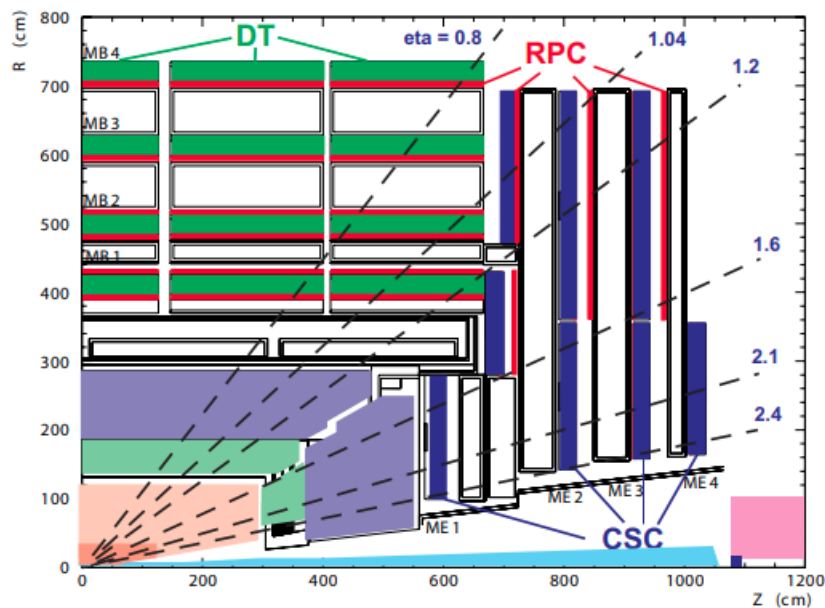
2.2.5 Οι Θάλαμοι Ανιχνευτών Μιονίων

Όπως υποδηλώνει το όνομα, “Compact Muon Solenoid”, η ανίχνευση των μιονίων είναι ένα σημαντικό κομμάτι του ανιχνευτή. Τα μίονια, όπως αναφέραμε και στην ενότητα 1.1.1, είναι σωματίδια όπως τα ηλεκτρόνια, αλλά 200 φορές βαρύτερα. Λόγω αυτής, της τόσο

⁵ Αρχικά το σωληνοειδές προοριζόταν να παράγει μαγνητικό πεδίο $4 T$ όμως προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η μακροβιότητα του, το πεδίο λειτουργίας μειώθηκε στα $3.8 T$ [74]

μεγάλης μάζας, δεν ακτινοβολούν έντονα με αποτέλεσμα να μπορούν να διαπεράσουν τα καλοριμέτρα χωρίς να αλληλεπιδράσουν. Για αυτό, απαιτείται η ύπαρξη ενός ακόμα στρώματος ανιχνευτών, αποκλειστικά για τα μόνια, οι θάλαμοι μιονίων [75]. Οι θάλαμοι αυτοί χωρίζονται σε τέσσερα στρώματα και βρίσκονται ενδιάμεσα των σιδερένιων ζυγών του μαγνήτη όπως αναφέραμε στην προηγούμενη υποενότητα 2.2.4. Μάλιστα, αυτοί οι σιδερένιοι ζυγοί χρησιμεύουν επίσης και ως απορροφητές των αδρονίων για καλύτερη ταυτοποίηση των μιονίων.

Στο Σχήμα 2.8 παρουσιάζεται η διάταξη του ανιχνευτικού συστήματος των μιονίων. Η κεντρική περιοχή του βαρελιού, καλύπτει έως και $|\eta| \leq 1.04$ ενώ οι δίσκοι στα καπάκια που κλείνουν το βαρέλι και από τις δύο μεριές επεκτείνουν την κάλυψη, $1.04 \leq |\eta| \leq 2.4$. Συνολικά, το ανιχνευτικό σύστημα αποτελείται από 1400 θάλαμους τριών διαφορετικών τύπων. Η επιλογή των διαφορετικών τύπων ανιχνευτών βασίστηκε στην μεγάλη επιφάνεια των 25000 τετραγωνικών μέτρων που χρειάζεται να καλυφθεί καθώς και από τα διαφορετικά περιβάλλοντα ακτινοβολίας. Ειδικότερα, υπάρχουν 250 θάλαμοι σωλήνων ολίσθησης (Drift Tube Chambers - DTCs), 540 θάλαμοι καθοδικών λωρίδων (Cathode Strip Chambers - CSCs) και 610 θάλαμοι πλακών αντίστασης (Resistive Plate Chambers - RPCs). Στο τμήμα του βαρελιού, όπου ο ρυθμός των μιονίων είναι χαμηλός, εντοπίζονται οι DTCs ενώ στα καπάκια όπου ο ρυθμός των μιονίων είναι υψηλός και το μαγνητικό πεδίο είναι μη ομογενές, βρίσκονται οι CSCs αφού έχουν γρηγορότερο χρόνο απόκρισης, λεπτότερη κατάτμηση και μεγαλύτερη αντίσταση στην ακτινοβολία. Οι RPCs χρησιμοποιούνται και στα δύο μέρη και χαρακτηρίζονται από πολύ γρήγορη χρονική απόκριση αλλά χειρότερη ανάλυση στον εντοπισμό της θέσης από τα άλλα δύο είδη θαλάμων.



Σχήμα 2.8: Σχεδιάγραμμα της διάταξης του ανιχνευτικού συστήματος των μιονίων [55]

Οι DTCs έχουν διαστάσεις $2 \times 2.5 \text{ m}$ και αποτελούνται από δώδεκα στρώματα αλουμινίου, διατεταγμένα σε τρία γκρουπ των τεσσάρων, περιέχοντας 60 σωλήνες ολίσθησης (Drift Tubes – DTs) το καθένα. Η μεσαία τετράδα στρωμάτων μετράει την παράλληλη, ως προς τη δέσμη, συντεταγμένη της θέσης του κάθε μιονίου, ενώ οι άλλες δύο μετρούν την κάθετη συντεταγμένη. Κάθε σωλήνας ολίσθησης περιέχει ένα τεντωμένο σύρμα μέσα σε έναν όγκο αερίου. Όταν ένα μόνιο διέλθει μέσα από αυτόν τον όγκο, ιονίζει τα άτομα του

αερίου και τα ηλεκτρόνια που απελευθερώνονται καταλήγουν στο θετικά φορτισμένο σύρμα. Καταγράφοντας σε ποιο σημείο κατά μήκος του σύρματος «χτύπησαν» τα ηλεκτρόνια και υπολογίζοντας την αρχική απόσταση του μιονίου από το σύρμα, λαμβάνουμε δύο συντεταγμένες της θέσης του.

Οι CSCs αποτελούνται από συστοιχίες θετικά φορτισμένων καλωδίων (άνοδος), διασταυρωμένες με αρνητικά φορτισμένες ταινίες χαλκού (κάθοδος), εντός ενός όγκου αερίου. Όταν τα μίονια περνούν μέσα από αυτούς τους θαλάμους, ionίζουν και πάλι τα άτομα του αερίου και τα ηλεκτρόνια που απελευθερώνονται συρρέουν στα καλώδια της ανόδου με αποτέλεσμα να δημιουργείται μια «χιονοστιβάδα» ηλεκτρονίων. Τα θετικά ιόντα απομακρύνονται από το σύρμα και κατευθύνονται προς την κάθοδο, όπου προκαλούν επίσης έναν ηλεκτρικό παλμό στις λωρίδες χαλκού, σε ορθή γωνία ως προς την κατεύθυνση του σύρματος. Επειδή τα σύρματα και οι ταινίες διασταυρώνονται κάθετα, λαμβάνουμε και πάλι, πληροφορία για δύο συντεταγμένες (η και φ) της θέσης των διερχόμενων μιονίων.

Οι RPCs αποτελούνται από δύο παράλληλες πλάκες, μία φορτισμένη θετικά (άνοδος) και μία αρνητικά (κάθοδος), οι οποίες είναι και οι δύο κατασκευασμένες από πλαστικό υλικό πολύ υψηλής αντίστασης και χωρίζονται από έναν όγκο αερίου. Ο τρόπος λειτουργίας τους είναι όμοιος με αυτόν των άλλων δύο ειδών ανιχνευτών.

Κατά την αναβάθμιση του LHC σε HL-LHC ο ρυθμός των σωματιδίων, και ειδικότερα στην μπροστινή περιοχή του ανιχνευτή, θα αυξηθεί σημαντικά. Για αυτό, η ταυτοποίηση των μιονίων θα γίνει δυσκολότερη. Έτσι, κατά την αναβάθμιση, σε αυτές τις περιοχές θα προστεθούν νέοι ανιχνευτές. Επίσης θα αναβαθμιστούν τα ηλεκτρονικά των υπαρχόντων ανιχνευτών έτσι ώστε να βελτιωθεί η ανοχή στην ακτινοβολία αλλά και η απόκριση στους μεγαλύτερους ρυθμούς σωματιδίων.

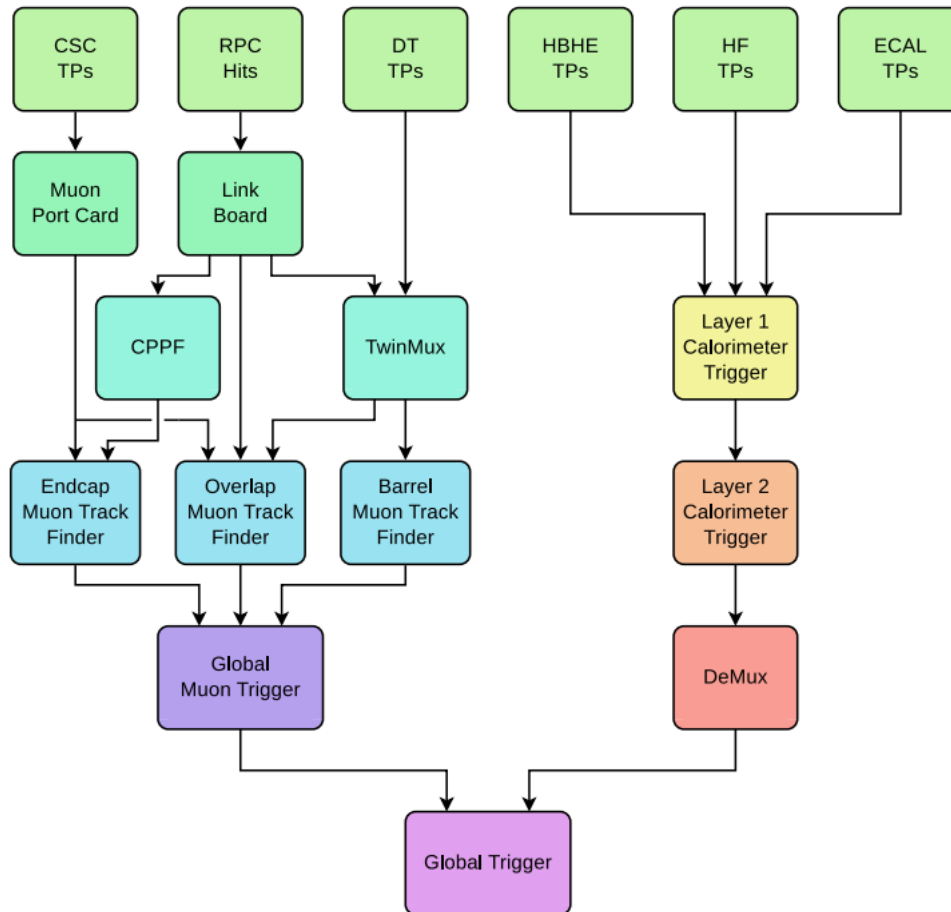
2.2.6 Τα Συστήματα Σκανδαλισμού και Συλλογής Δεδομένων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι αντίθετα κινούμενες δέσμες των πρωτονίων διασταυρώνονται κάθε 25 ps που αντιστοιχεί σε μία συχνότητα διέλευσης 40 MHz. Αυτή η συχνότητα συνεπάγεται περίπου ένα δισεκατομμύριο συγκρούσεις κάθε δευτερόλεπτο. Είναι προφανές ότι είναι αδύνατη η αποθήκευση και η επεξεργασία ενός τόσο μεγάλου όγκου δεδομένων. Για αυτό, απαιτείται μία δραστική μείωση της τάξης $\mathcal{O}(10^5)$. Αυτή είναι ακριβώς η δουλειά του συστήματος σκανδαλισμού (trigger system). Συγκεκριμένα, το σύστημα σκανδαλισμού αποφασίζει εάν ένα γεγονός θα κρατηθεί ή θα απορριφθεί, βασιζόμενο σε συγκεκριμένες πληροφορίες του ανιχνευτή. Η απαιτούμενη μείωση επιτυγχάνεται χωρίζοντας την διαδικασία σε δύο επίπεδα. Το πρώτο επίπεδο που ονομάζεται σκανδαλιστής πρώτου επιπέδου (Level - 1 Trigger) ή εν συντομία L1T, αποτελείται από ειδικά σχεδιασμένα, σε μεγάλο βαθμό προγραμματιζόμενα ηλεκτρονικά συστήματα τα οποία μειώνουν τον ρυθμό των συμβάντων που γίνονται δεκτά για περαιτέρω επεξεργασία, σε λιγότερο από 100 kHz. Το δεύτερο επίπεδο ονομάζεται σκανδαλιστής υψηλού επιπέδου (High Level Trigger) ή HLT και είναι ένα σύστημα λογισμικού που υλοποιείται μέσω μίας υπολογιστικής «φάρμας» που περιέχει 30 χιλιάδες επεξεργαστές και έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να μειώσει τον ρυθμό των αποδεκτών συμβάντων σε περίπου 1 kHz ώστε να γίνει η μαζική αποθήκευσή τους.

Ειδικότερα, ο L1T χρησιμοποιεί ανεπεξέργαστα δεδομένα από τα καλορίμετρα και τον ανιχνευτή μιονίων καθώς και κάποια συσχέτιση των πληροφοριών μεταξύ αυτών των συστημάτων και αποθηκεύει τα δεδομένα υψηλής ανάλυσης σε προσωρινές μνήμες (pipelined memories). Η απόφαση απόρριψης ή μη, των δεδομένων γίνεται από τον Global Trigger και βασίζεται στην παρουσία αντικειμένων όπως τα φωτόνια, ηλεκτρόνια, μίονια και jets τα οποία έχουν ενέργεια ή ορμή μεγαλύτερη από ένα συγκεκριμένο κατώφλι. Επίσης, χρησιμοποιούν-

τα και τα συνολικά αθροίσματα της εγκάρσιας ενέργειας (βλ. Παράρτημα A.2) καθώς και της εγκάρσιας ελλείπουσας ενέργειας. Στην συνέχεια, ο HLT που έχει πρόσβαση στα δεδομένα που έχουν αποθηκευτεί στις pipelined memories, εκτελεί πιο σύνθετους αλγορίθμους έτσι ώστε να κρατήσει μόνο εκείνα τα γεγονότα που έχουν το μεγαλύτερο φυσικό ενδιαφέρον.

Παρόλο που ο ρυθμός γεγονότων μειώνεται σημαντικά από το σύστημα σκανδαλισμού, τα δεδομένα από όλα τα διαφορετικά πειράματα του LHC είναι περίπου 700 MB/s που αντιστοιχεί σε ένα συνολικό αριθμό δεδομένων περίπου $15 \cdot 10^6$ GB τον χρόνο. Αυτός ο όγκος δεδομένων, δημιουργεί τεράστιες απαιτήσεις σε υπολογιστικούς πόρους και στην χωρητικότητα αποθήκευσης, οι οποίες δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν εύκολα από μεμονωμένα ινστιτούτα. Για αυτό έχει δημιουργηθεί ένα παγκόσμιο υπολογιστικό πλέγμα του LHC το οποίο παρέχει μία ιεραρχική δομή με το “Tier-0” να βρίσκεται στο CERN και αρκετά “Tier-1” και “Tier-2” να είναι διανεμημένα σε όλο τον κόσμο. Το υπολογιστικό μοντέλο του CMS βασίζεται σε αυτούς τους, παγκοσμίως κατανομημένους, υπολογιστικούς πόρους και πόρους αποθήκευσης.



Σχήμα 2.9: Η δομή του συστήματος σκανδαλισμού L1T του CMS [76]

Κεφάλαιο 3

Η μέθοδος Recursive Jigsaw Reconstruction

Επεκτάσεις του Καθιερωμένου Προτύπου όπως η Υπερσυμμετρία, που είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο, εισάγουν πολλά νέα σωματίδια, συμπεριλαμβανομένου και υποψηφίων για Σκοτεινή Ύλη. Εάν η R-parity διατηρείται, τότε τα υπερσυμμετρικά σωματίδια θα παράγονται στους επιταχυντές σε ζεύγη και το ελαφρύτερο από αυτά, ανίκανο να διασπαστεί σε SM σωματίδια, θα είναι σταθερό και θα έχει μία πολύ μικρή πιθανότητα να αλληλεπιδράσει με τον ανιχνευτή.

Το ζητούμενο στην παρατήρηση της παραγωγής και της διάσπασης νέων σωματιδίων σε πειράματα Φυσικής Υψηλών Ενεργειών αλλά και στην λεπτομερή μελέτη των ήδη υπαρχόντων για την εξαγωγή αποκλίσεων από τις προβλέψεις του Καθιερωμένου Προτύπου, είναι η δυνατότητα υπολογισμού της παρουσίας αυτών των σωματιδίων μέσα από την ταυτοποίηση και μέτρηση των προϊόντων τους στους ανιχνευτές. Εάν τα τετρανύσματα όλων των τελικών καταστάσεων μετρώνται με ακρίβεια, μπορούν να συνδυαστούν για να εκτιμήσουν τις ιδιότητες οποιονδήποτε ενδιάμεσων σωματιδίων που εμφανίζονται σε αυτά τα γεγονότα. Δυστυχώς, υπάρχουν διάφορες επιπλοκές στην μελέτη πολλών διαδικασιών ενδιαφέροντος. Εάν στις συγκρούσεις παράγονται νετρίνα ή σωματίδια σκοτεινής ύλης, αυτά θα διαφύγουν του ανιχνευτή, παίρνοντας μαζί τους σημαντικές πληροφορίες, όχι μόνο για τις ιδιότητές τους, αλλά και για τα ενδιάμεσα σωματίδια που εμφανίστηκαν στην παραγωγή τους. Παρομοίως, πολλά από τα ανακατασκευασμένα σωματίδια τελικής κατάστασης που εμφανίζονται στους ανιχνευτές μπορεί να είναι δυσδιάκριτα, με απώλεια πληροφοριών σχετικά με το πώς θα έπρεπε να συνδυαστούν σωστά ώστε να σχηματίσουν τους συντονισμούς από όπου προήλθαν.

Αυτές οι δυσκολίες είναι παραδείγματα κινηματικών και συνδυαστικών ασαφειών που εμφανίζονται στην ανάλυση των αλληλεπιδράσεων σωματιδίων. Μία μέθοδος που μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση τέτοιων αγνώστων σε οποιαδήποτε τοπολογία διάσπασης που μας ενδιαφέρει, ανεξάρτητα από τον αριθμό τους, είναι η μέθοδος *Recursive Jigsaw Reconstruction* (RJR) [77–79]. Η προσέγγιση RJR αναλύει τα γεγονότα παραγοντοποιώντας τυχόν αγνώστους σύμφωνα με τα διαφορετικά ενδιάμεσα σωματίδια που αναμένονται να εμφανιστούν σε ένα γεγονός και εφαρμόζοντας τους επονομαζόμενους *Jigsaw Rules* (JR's). Οι JR's είναι κανόνες-αλγόριθμοι οι οποίοι χρησιμοποιώντας ορισμένους περιορισμούς και υποθέσεις επιλύουν τις κινηματικές και συνδυαστικές ασάφειες που εμφανίζονται στις διασπάσεις. Έτσι, κάθε γεγονός αναλύεται επαναλαμβανόμενα, κινούμενοι από το σύστημα του εργαστηρίου όπου μετρώνται τα τετρανύσματα των σωματιδίων στο πλαίσιο καθενός ενδιάμεσου σωματιδίου.

Βέβαια, υπάρχουν και άλλες στρατηγικές ανακατασκευής γεγονότων πέρα της μεθόδου RJR. Αυτό που ξεχωρίζει στην τεχνική RJR σε σύγκριση με τις άλλες, είναι η γενική της εφαρμοσιμότητα που επιτυγχάνεται μέσω της πλήρης βιβλιοθήκης JR's η οποία περιλαμβάνει αλγορίθμους για την επίλυση οποιουδήποτε συνδυασμού αγνώστων που μπορεί να συναντήσει κανείς. Αυτοί οι κανόνες JR's θα αναλυθούν με λεπτομέρεια στην ενότητα 3.3.

Να σημειωθεί ότι για την παρούσα εργασία, ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται για τα τετρανύσματα είναι οι «έντονοι» (bold) χαρακτήρες, \mathbf{p} ενώ για τα διανύσματα χρησιμοποιείται το σύννηθες βελάχι, \vec{p} . Επίσης, κατά σύμβαση επιλέγουμε το μικρό γράμμα m για να περιγράψουμε τις «πραγματικές» μάζες, δηλαδή αυτές που εισάγουμε στο επίπεδο παραγωγής ενώ με το κεφαλαίο γράμμα M περιγράφουμε τις «ανακατασκευασμένες» μάζες, δηλαδή τις εκτιμήσεις των μαζών.

3.1 Ανάλυση Συμπιεσμένων Τοπολογιών

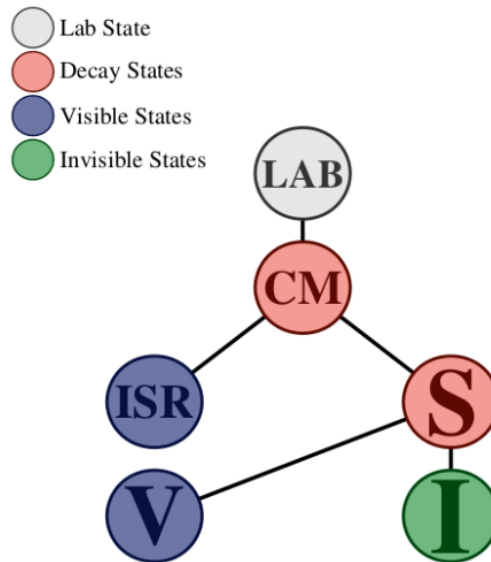
Στο μοντέλο MSSM, το ελαφρύτερο υπερσυμμετρικό σωματίδιο, LSP, είναι σταθερό και είναι υποψήφιο για την σύσταση της σκοτεινής ύλης. Εάν παράγονται στους επιταχυντές, τα LSPs θα διαφεύγουν του ανιχνευτή χωρίς να αλληλεπιδράσουν. Η παρουσία τους μπορεί να συμπεραθεί μέσω μέτρησης της ελλείπουσας ορμής και συγκεκριμένα στο επίπεδο εγχάρσιο της δέσμης. Στην πράξη, η εξαγωγή πληροφοριών σχετικά με τις ιδιότητες του LSP ή την πολλαπλότητα των ασθενώς αλληλεπιδρώντων σωματιδίων σε κάθε γεγονός, αποτελεί πρόκληση για τις τεχνικές ανακατασκευής. Αυτή η δυσκολία επιδεινώνεται σε καταστάσεις όπου υπάρχει μικρή διαφορά μάζας μεταξύ των μητρικών και θυγατρικών υπερσωματιδίων. Αυτά τα σενάρια χαρακτηρίζονται ως *συμπιεσμένα* (compressed). Σε τέτοιες περιπτώσεις, η επίδραση των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται για τον διαχωρισμό του σήματος από το σύνολο των γνωστών αλληλεπιδράσεων (SM background), όπως είναι η εγχάρσια ελλείπουσα ορμή (βλ. Παράρτημα A.3) διακυβεύεται, καθώς η πλειονότητα της ενέργειας από την διάσπαση των υπερσυμμετρικών σωματιδίων διαφεύγει υπό την μορφή της μάζας των LSPs. Ωστόσο, η δυσκολία αυτή μετριάζεται σε περιπτώσεις όπου το σύστημα των μητρικών υπερσυμμετρικών σωματιδίων αναχρούεται από μία ή περισσότερες δέσμες γλουονίων (strong initial state radiation jets - ISR jets). Αυτά τα jets είναι ανάλογα της ακτινοβολίας πέδησης (Bremsstrahlung radiation), για αυτό πολλές φορές αναφέρονται και ως Beamstrahlung, με τη διαφορά ότι υπεύθυνη είναι η ισχυρή αλληλεπίδραση κι όχι η ηλεκτρομαγνητική. Αποτέλεσμα αυτών των ISR jets είναι η αύξηση της \vec{E}_T , καθώς πλέον δεν εξαρτάται μόνο από τα τελικά SM σωματίδια, αλλά και από τα ISR jets. Στο όριο όπου τα LSPs δεν λαμβάνουν καθόλου ορμή από τις διασπάσεις των μητρικών τους σωματιδίων, η \vec{E}_T προέρχεται μόνο από την ανάκρουση του ISR jet οπότε και καταλήγουμε στην παρακάτω προσέγγιση:

$$\vec{E}_T \sim -\vec{p}_T^{ISR} \cdot \frac{m_{\tilde{\chi}}}{m_{\tilde{p}}} \quad (3.1)$$

όπου \vec{p}_T^{ISR} είναι η συνολική εγχάρσια ορμή του συστήματος των ISR, $m_{\tilde{\chi}}$ είναι η μάζα των θυγατρικών υπερσωματιδίων και $m_{\tilde{p}}$ η μάζα των μητρικών. Πρόσφατες μελέτες σχετικά με την αναζήτηση σημάτων από συμπιεσμένες SUSY τοπολογίες προτείνουν την εκμετάλλευση αυτού του χαρακτηριστικού. Ειδικότερα, προτείνεται η απομόνωση εκείνων των γεγονότων, στα οποία η ελλείπουσα εγχάρσια ορμή είναι κατά προσέγγιση ίση και αντίθετη με την εγχάρσια ορμή των ISR jets, μιας και είναι πιθανή ένδειξη της ύπαρξης μίας συμπιεσμένης υπερσυμμετρικής διάσπασης ($\frac{m_{\tilde{\chi}}}{m_{\tilde{p}}} \sim 1$). Όμως, αυτή η προσέγγιση περιορίζεται στο υποσύνολο των γεγονότων όπου η ορμή του ISR μεταφέρεται κυρίως από έναν μόνο jet. Για λιγότερο περι-

ορισμένες επιλογές γεγονότων, η εκτίμηση του $|\vec{E}_T|/|\vec{p}_T^{ISR}|$ γίνεται προοδευτικά χειρότερη και αντίστοιχα λιγότερο ευαίσθητη στην κινηματική συσχέτιση μεταξύ των ακτινοβολούμενων jets και της ελλείπουσας ορμής.

Μία άλλη προσέγγιση στην αναζήτηση συμπιεσμένων σημάτων μέσω ISR jet, η οποία γενικεύεται και σε περιπτώσεις όπου η ορμή μοιράζεται δημοκρατικά μεταξύ πολλών ακτινοβολούμενων jet αλλά και προσπαθεί να ανακατασκευάσει ακριβέστερα την ποσότητα $|\vec{E}_T|/|\vec{p}_T^{ISR}|$, είναι μέσω της μεθόδου RJR. Χρησιμοποιώντας την τεχνική RJR, ένα διάγραμμα διάσπασης (decay tree) επιβάλλεται στην ανάλυση του γεγονότος, επιλεγμένο έτσι ώστε να αποδίδει τα κινηματικά χαρακτηριστικά της υπό μελέτης τοπολογίας. Το διάγραμμα διάσπασης καθορίζει τόσο τα συστήματα των ανακατασκευασμένων αντικειμένων όσο και τα πλαίσια αναφοράς που αντιστοιχούν σε κάθε ένα ενδιαμέσο συνδυασμό τους. Η ανάλυση κάθε γεγονότος συνεχίζεται με την ανάθεση των ανακατασκευασμένων αντικειμένων στις κατάλληλες θέσεις στο διάγραμμα διάσπασης, προσδιορίζοντας τις ταχύτητες που συσχετίζονται καθένα πλαίσιο αναφοράς και υπολογίζοντας τις παρατηρήσιμες κινηματικές ποσότητες τους που προκύπτουν. Το γενικό, απλοποιημένο διάγραμμα διάσπασης για συμπιεσμένα σενάρια παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1



Σχήμα 3.1: Ένα απλοποιημένο διάγραμμα διάσπασης για την ανάλυση συμπιεσμένων τοπολογιών σε γεγονότα με σύστημα ISR [77]

Σε αυτό το διάγραμμα διάσπασης, κάθε τελικό σωματίδιο το οποίο ανιχνεύεται, δηλαδή ανακατασκευάζεται πλήρως, αντιστοιχίζεται στο σύστημα των ορατών (visible) σωματιδίων “V” ενώ αυτά που ταυτοποιούνται ως ακτινοβολούμενες δέσμες συνιστούν το σύστημα “ISR”. Η ελλείπουσα ενέργεια που ανακατασκευάζεται σε κάθε γεγονός ερμηνεύεται ως το σύστημα “I”, δηλαδή ως τα άορατα (invisible) σωματίδια. Η ένωση των ορατών σωματιδίων με τα άορατα συνιστά το σύστημα όλων των μητρικών υπερσωματιδίων “S” ενώ η ένωση αυτού του συστήματος με το ISR αποτελεί το σύστημα κέντρου μάζας ολόκληρης της αλληλεπίδρασης “CM”. Εφόσον ολοκληρωθεί ορθά η ανακατασκευή του γεγονότος και προσδιοριστούν οι τετραορμές όλων των σωματιδίων της διάσπασης, στο πλαίσιο αναζήτησης Υπερσυμμετρίας σε συμπιεσμένες τοπολογίες, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε μια διαφορετική

προσέγγιση της $|\vec{\mathcal{E}}_T|/|\vec{p}_T^{ISR}|$, την ποσότητα R_{ISR} :

$$R_{ISR} \equiv \frac{|\vec{p}_{I,T}^{CM} \cdot \hat{p}_{ISR,T}^{CM}|}{|\vec{p}_{ISR,T}^{CM}|} \quad (3.2)$$

όπου οι κάτω δείκτες υποδηλώνουν το σύστημα σωματιδίων και οι επάνω δείκτες το πλαίσιο αναφοράς στο οποίο είναι υπολογισμένη η ορμή. Η συμπεριφορά αυτής της ποσότητας μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητή μέσα από προσεκτική εξέταση της προσεγγιστικής μορφής της που περιγράφεται από την εξίσωση (3.1). Στο όριο που οι μάζες των μητρικών και των θυγατρικών υπερσωματιδίων τείνουν να γίνουν ίσες, ισχύει η παρακάτω προσέγγιση:

$$R_{ISR} \sim \frac{|\vec{p}_{I,T}^{CM} \cdot \hat{p}_{ISR,T}^{CM}|}{|\vec{p}_{ISR,T}^{CM}|} \sim \frac{m_{\tilde{\chi}}}{m_{\tilde{P}}} + \frac{p_{\tilde{\chi}}^{\tilde{P}}}{2m_{\tilde{P}}} \frac{\sqrt{(p_T^{ISR})^2 + m_{\tilde{P}\tilde{P}}^2}}{p_T^{ISR}} (\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}})(\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}} \quad (3.3)$$

Συγκεκριμένα, η προσέγγιση αυτή προκύπτει έχοντας θεωρήσει το απλό σενάριο όπου παράγονται ένα ζεύγος σωματιδίων \tilde{P}_a και \tilde{P}_b , καθένα με μάζα $m_{\tilde{P}}$. Κάθε ένα \tilde{P} , υφίσταται μία διάσπαση σε ένα σύστημα ανιχνεύσιμων SM σωματιδίων, V και σε ένα ουδέτερο, ασθενώς αλληλεπιδρών σωματίδιο $\tilde{\chi}$ με μάζα $m_{\tilde{\chi}}$. Για απλότητα θεωρούμε ότι τα συστήματα V που προέρχονται από την εκάστοτε διάσπαση των \tilde{P} , έχουν την ίδια μάζα, m_V . Υποθέτουμε επίσης, ότι το σύστημα $\tilde{P}\tilde{P}$ παίρνει εγκάρσια ορμή στο σύστημα του εργαστηρίου από ένα σύστημα ακτινοβολούμενων δεσμών (ISR) με ορμή \vec{p}_T^{ISR} έτσι ώστε η ορμή του $\tilde{P}\tilde{P}$ να μπορεί να γραφεί ως $\vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P},T}^{lab} = -\vec{p}_T^{ISR}$. Μας ενδιαφέρει τι επίδραση θα έχει η ανάκρουση των ISR, στην ποσότητα $\vec{\mathcal{E}}_T$ η οποία υποθέτουμε ότι είναι ίση με το άθροισμα των εγκάρσιων ορμών των ασθενώς αλληλεπιδρώντων σωματιδίων $\tilde{\chi}_a$ και $\tilde{\chi}_b$, δηλαδή $\vec{\mathcal{E}}_T \equiv \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi},T}^{lab}$. Επομένως, στο σύστημα του εργαστηρίου έχουμε:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} \\ \vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{VV}^{lab} \\ \vec{p}_{VV}^{lab} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{lab} \\ \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{lab} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Γνωρίζουμε ότι $\vec{\mathcal{E}}_T = \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi},T}^{lab}$, έτσι λοιπόν χρειάζεται να εκφράσουμε την ορμή του συστήματος $\tilde{\chi}\tilde{\chi}$ στο σύστημα ηρεμίας του εκάστοτε \tilde{P}_i .

Αρχικά, κάνουμε προώθηση από το σύστημα του εργαστηρίου στο σύστημα κέντρου ορμής $\tilde{P}\tilde{P}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \Lambda \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{p} = \Lambda^{-1} \mathbf{p}' \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} \\ \vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} & \gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} (\vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab})^T \\ \gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} \vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} & I + \frac{\gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} - 1}{\beta_{\tilde{P}\tilde{P}}^2} \vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} (\vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{\tilde{P}\tilde{P}}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \begin{pmatrix} E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} \\ \vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} m_{\tilde{P}\tilde{P}}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} m_{\tilde{P}\tilde{P}}^{\tilde{P}\tilde{P}} \vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} &= E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} \vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} \Rightarrow \vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} = \frac{\vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}}{E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Οπότε γράφοντας την ταχύτητα ως:

$$\vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} = \beta_{\tilde{P}\tilde{P}} \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} \quad (3.6)$$

έχουμε ότι το μέτρο της είναι:

$$\beta_{\tilde{P}\tilde{P}} = |\vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}| = \frac{|\vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}|}{E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}} \quad (3.7)$$

Προφανώς, ο παράγοντας Lorentz θα είναι:

$$\gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\tilde{P}\tilde{P}}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}|^2}{(E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab})^2}}} = \frac{E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}}{\sqrt{(E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab})^2 - |\vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}|^2}} = \frac{E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}}{m_{\tilde{P}\tilde{P}}} \quad (3.8)$$

Μάλιστα, ισχύει ότι

$$\gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} \beta_{\tilde{P}\tilde{P}} = \frac{E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}}{m_{\tilde{P}\tilde{P}}} \frac{|\vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}|}{E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}} = \frac{|\vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}|}{m_{\tilde{P}\tilde{P}}} \quad (3.9)$$

Αντίστοιχα, η προώθηση του τετρανύσματος του συστήματος $\tilde{\chi}\tilde{\chi}$ στο σύστημα κέντρου ορμής $\tilde{P}\tilde{P}$ θα είναι:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{lab} \\ \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{lab} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} & \gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} (\vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab})^T \\ \gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} \vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} & I + \frac{\gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} - 1}{\beta_{\tilde{P}\tilde{P}}^2} \vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} (\vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} E_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{lab} \\ \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{lab} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} E_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}} + \gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} \vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} \cdot \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} E_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}} \vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab} + \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}} + (\gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} - 1) (\hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} \cdot \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}}) \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Δηλαδή, η προβολή της ορμής του συστήματος $\tilde{\chi}\tilde{\chi}$ στην διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}$ είναι:

$$\vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{lab} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} = \gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} E_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}} \beta_{\tilde{P}\tilde{P}} + \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} + (\gamma_{\tilde{P}\tilde{P}} - 1) (\hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} \cdot \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}}) \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} \quad (3.11)$$

Φυσικά, στο σύστημα κέντρου ορμής του $\tilde{P}\tilde{P}$ θα ισχύει

$$\begin{pmatrix} m_{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{p}_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{p}_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

δηλαδή

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b \Leftrightarrow \mathbf{p}_b = \mathbf{p}' - \mathbf{p}_a \quad (3.13)$$

Υψώνοντας την στο τετράγωνο, προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_b^2 = \mathbf{p}'^2 + \mathbf{p}_a^2 - 2\mathbf{p}'\mathbf{p}_a &\Leftrightarrow m_{\tilde{P}_b}^2 = m_{\tilde{P}\tilde{P}}^2 + m_{\tilde{P}_a}^2 - 2m_{\tilde{P}\tilde{P}} E_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} \Rightarrow \\ E_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} &= \frac{m_{\tilde{P}\tilde{P}}^2 + m_{\tilde{P}_a}^2 - m_{\tilde{P}_b}^2}{2m_{\tilde{P}\tilde{P}}} \quad \text{και} \quad E_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}} = \frac{m_{\tilde{P}\tilde{P}}^2 + m_{\tilde{P}_b}^2 - m_{\tilde{P}_a}^2}{2m_{\tilde{P}\tilde{P}}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Όμως οι μάζες είναι ίσες, δηλαδή ισχύει ότι $m_{\tilde{P}_a} = m_{\tilde{P}_b} = m_{\tilde{P}}$, οπότε οι εξισώσεις γίνονται:

$$\boxed{E_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} = E_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}} = \frac{m_{\tilde{P}\tilde{P}}}{2}} \quad (3.15)$$

Αντίστοιχα, με βάση την γνωστή εξίσωση $E^2 = p^2 + m^2$, μπορούμε να εκφράσουμε τα μέτρα των ορμών:

$$\boxed{p_{\tilde{P}}^{\tilde{P}\tilde{P}} = \sqrt{\frac{m_{\tilde{P}\tilde{P}}^2}{4} - m_{\tilde{P}}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{m_{\tilde{P}\tilde{P}}^2 - 4m_{\tilde{P}}^2}} \quad (3.16)$$

όπου $p_{\tilde{P}}^{\tilde{P}\tilde{P}} = p_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} = p_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}}$ αφού όπως φαίνεται από την (3.12) ισχύει ότι $\vec{p}_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} = -\vec{p}_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}}$

Θέλουμε τώρα να πάμε στο σύστημα ηρεμίας καθενός σωματιδίου \tilde{P}_i

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m_{\tilde{P}} \\ \vec{0} \end{pmatrix} &= \Lambda \begin{pmatrix} E_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{p}_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} E_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{p}_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{P}} & \gamma_{\tilde{P}}(\vec{\beta}_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}})^T \\ \gamma_{\tilde{P}}\vec{\beta}_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}} & I + \frac{\gamma_{\tilde{P}}-1}{(\beta_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}})^2}\vec{\beta}_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}}(\vec{\beta}_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{\tilde{P}} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} E_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{p}_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{P}}m_{\tilde{P}} \\ \gamma_{\tilde{P}}m_{\tilde{P}}\vec{\beta}_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\beta}_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}} = \frac{\vec{p}_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}}}{E_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Προφανώς, θα ισχύει ότι $\vec{\beta}_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} = -\vec{\beta}_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}}$ οπότε ορίζουμε $\beta_{\tilde{P}} = |\vec{\beta}_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}}| = |\vec{\beta}_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}}| = \frac{p_{\tilde{P}}^{\tilde{P}\tilde{P}}}{E_{\tilde{P}_i}^{\tilde{P}\tilde{P}}}$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις (3.15), (3.16) προκύπτει ότι

$$\boxed{\beta_{\tilde{P}} = \frac{\sqrt{m_{\tilde{P}\tilde{P}}^2 - 4m_{\tilde{P}}^2}}{m_{\tilde{P}\tilde{P}}}} \quad (3.18)$$

Αντίστοιχα, ο παράγοντας Lorentz θα είναι

$$\boxed{\gamma_{\tilde{P}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\tilde{P}}^2}} = \frac{m_{\tilde{P}\tilde{P}}}{2m_{\tilde{P}}}} \quad (3.19)$$

Φυσικά για τα neutralinos ισχύει

$$\begin{pmatrix} E_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{p}_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{p}_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Οπότε μπορούμε να κάνουμε προώθηση καθενός στο αντίστοιχο σύστημα ηρεμίας \tilde{P}_i

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{p}_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{P}} & \gamma_{\tilde{P}}(\vec{\beta}_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}})^T \\ \gamma_{\tilde{P}}\vec{\beta}_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} & I + \frac{\gamma_{\tilde{P}}-1}{(\beta_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}})^2}\vec{\beta}_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}}(\vec{\beta}_{\tilde{P}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} \\ \vec{p}_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{P}}E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} + \gamma_{\tilde{P}}\beta_{\tilde{P}}(\vec{p}_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}) \\ \gamma_{\tilde{P}}E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a}\beta_{\tilde{P}}\hat{\beta}_{\tilde{P}} + \vec{p}_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} + (\gamma_{\tilde{P}}-1)(\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \vec{p}_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a})\hat{\beta}_{\tilde{P}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ \vec{p}_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{P}} & \gamma_{\tilde{P}}(\vec{\beta}_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}})^T \\ \gamma_{\tilde{P}}\vec{\beta}_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}} & I + \frac{\gamma_{\tilde{P}}-1}{(\beta_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}})^2}\vec{\beta}_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}}(\vec{\beta}_{\tilde{P}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b} \\ \vec{p}_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{P}}E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b} - \gamma_{\tilde{P}}\beta_{\tilde{P}}(\vec{p}_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}) \\ -\gamma_{\tilde{P}}E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b}\beta_{\tilde{P}}\hat{\beta}_{\tilde{P}} + \vec{p}_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b} + (\gamma_{\tilde{P}}-1)(\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \vec{p}_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b})\hat{\beta}_{\tilde{P}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στην (3.20) έχουμε:

$$\begin{aligned} \cdot E_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}} &= E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} + E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}} = \gamma_{\tilde{P}}(E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} + E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b}) + \gamma_{\tilde{P}}\beta_{\tilde{P}}[(\vec{p}_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}) - (\vec{p}_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}})] \\ &= \gamma_{\tilde{P}}(E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} + E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b}) + \gamma_{\tilde{P}}\beta_{\tilde{P}}[(p_{\tilde{\chi}}(\hat{n}_a \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}) - p_{\tilde{\chi}}(\hat{n}_b \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}})] \\ &= \gamma_{\tilde{P}}(E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} + E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b}) + \gamma_{\tilde{P}}\beta_{\tilde{P}}p_{\tilde{\chi}}[(\hat{n}_a - \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}] \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \cdot \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{\tilde{P}\tilde{P}} &= \vec{p}_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}\tilde{P}} + \vec{p}_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}\tilde{P}} \\ &= \gamma_{\tilde{P}}(E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} - E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b})\beta_{\tilde{P}}\hat{\beta}_{\tilde{P}} + \vec{p}_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} + \vec{p}_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b} + (\gamma_{\tilde{P}}-1)[(\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \vec{p}_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a})\hat{\beta}_{\tilde{P}} + (\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \vec{p}_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b})\hat{\beta}_{\tilde{P}}] \\ &= \gamma_{\tilde{P}}(E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} - E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b})\beta_{\tilde{P}}\hat{\beta}_{\tilde{P}} + p_{\tilde{\chi}}(\hat{n}_a + \hat{n}_b) + (\gamma_{\tilde{P}}-1)p_{\tilde{\chi}}[(\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \hat{n}_a)\hat{\beta}_{\tilde{P}} + (\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \hat{n}_b)\hat{\beta}_{\tilde{P}}] \\ &= \gamma_{\tilde{P}}(E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} - E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b})\beta_{\tilde{P}}\hat{\beta}_{\tilde{P}} + p_{\tilde{\chi}}(\hat{n}_a + \hat{n}_b) + (\gamma_{\tilde{P}}-1)p_{\tilde{\chi}}[(\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot (\hat{n}_a + \hat{n}_b))\hat{\beta}_{\tilde{P}}] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Οπότε η (3.11) γίνεται

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{lab} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} &= \gamma_{\tilde{P}}\beta_{\tilde{P}}\gamma_{\tilde{P}}(E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} + E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b}) + \gamma_{\tilde{P}}\beta_{\tilde{P}}\gamma_{\tilde{P}}\beta_{\tilde{P}}p_{\tilde{\chi}}[(\hat{n}_a - \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}] \\ &\quad + \gamma_{\tilde{P}}\gamma_{\tilde{P}}(E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} - E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b})\beta_{\tilde{P}}(\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}) + \gamma_{\tilde{P}}\beta_{\tilde{P}}p_{\tilde{\chi}}(\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} \\ &\quad + \gamma_{\tilde{P}}(\gamma_{\tilde{P}}-1)p_{\tilde{\chi}}[\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot (\hat{n}_a + \hat{n}_b)](\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Θεωρώντας ότι $E_{\tilde{\chi}_a}^{\tilde{P}_a} = E_{\tilde{\chi}_b}^{\tilde{P}_b} = E_{\tilde{\chi}}^{\tilde{P}} = m_{\tilde{\chi}}$ καθώς και αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.8),

(3.9), (3.19) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{lab} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} &= \frac{|\vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}|}{m_{\tilde{P}\tilde{P}}} \frac{m_{\tilde{P}\tilde{P}}}{2m_{\tilde{\chi}}} + \frac{|\vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}|}{m_{\tilde{P}\tilde{P}}} \frac{m_{\tilde{P}\tilde{P}}}{2m_{\tilde{P}}} \beta_{\tilde{P}} p_{\tilde{\chi}} [(\hat{n}_a - \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}] + 0 \\
&\quad + \frac{E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}}{m_{\tilde{P}\tilde{P}}} p_{\tilde{\chi}} \left\{ (\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} + (\gamma_{\tilde{P}} - 1)(\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}})[(\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}] \right\} \\
\vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}}^{lab} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} &= |\vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}| \frac{m_{\tilde{\chi}}}{m_{\tilde{P}}} + |\vec{p}_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}| \frac{p_{\tilde{\chi}}}{2m_{\tilde{P}}} [(\hat{n}_a - \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}] \beta_{\tilde{P}} \\
&\quad + \frac{E_{\tilde{P}\tilde{P}}^{lab}}{m_{\tilde{P}\tilde{P}}} p_{\tilde{\chi}} \left\{ (\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} + (\gamma_{\tilde{P}} - 1)(\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}})[(\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}] \right\} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Οπότε, επειδή $\vec{E}_T = \vec{p}_{\tilde{\chi}\tilde{\chi},T}^{lab}$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_T \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} &= p_T^{ISR} \frac{m_{\tilde{\chi}}}{m_{\tilde{P}}} + p_T^{ISR} \frac{p_{\tilde{\chi}}}{2m_{\tilde{P}}} [(\hat{n}_a - \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}] \beta_{\tilde{P}} \\
&\quad + \frac{E_{\tilde{P}\tilde{P},T}^{lab}}{m_{\tilde{P}\tilde{P}}} p_{\tilde{\chi}} \left\{ (\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} + (\gamma_{\tilde{P}} - 1)(\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}})[(\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}] \right\} \\
\frac{\vec{E}_T \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}}{p_T^{ISR}} &= \frac{m_{\tilde{\chi}}}{m_{\tilde{P}}} + \frac{p_{\tilde{\chi}}}{2m_{\tilde{P}}} [(\hat{n}_a - \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}] \beta_{\tilde{P}} \\
&\quad + \frac{p_{\tilde{\chi}}}{2m_{\tilde{P}}} \frac{2m_{\tilde{P}}}{m_{\tilde{P}\tilde{P}}} \frac{E_{\tilde{P}\tilde{P},T}^{lab}}{p_T^{ISR}} \left\{ (\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} + (\gamma_{\tilde{P}} - 1)(\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}})[(\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}] \right\} \\
\frac{\vec{E}_T \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}}{p_T^{ISR}} &= \frac{m_{\tilde{\chi}}}{m_{\tilde{P}}} + \frac{p_{\tilde{\chi}}}{2m_{\tilde{P}}} \left\{ \beta_{\tilde{P}} [(\hat{n}_a - \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}] + \frac{\sqrt{(p_T^{ISR})^2 + m_{\tilde{P}\tilde{P}}^2}}{p_T^{ISR}} \left[\frac{1}{\gamma_{\tilde{P}}} (\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(1 - \frac{1}{\gamma_{\tilde{P}}}\right) (\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}) ((\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}) \right] \right\} \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Μεταξύ των όρων της εξίσωσης (3.27) που είναι ανάλογοι του $p_{\tilde{\chi}}/2m_{\tilde{P}}$, μόνο ο παράγοντας $\sqrt{(p_T^{ISR})^2 + m_{\tilde{P}\tilde{P}}^2}/p_T^{ISR}$ είναι σημαντικός και γίνεται μεγάλος όταν η p_T^{ISR} είναι μικρή σε σύγκριση με την $m_{\tilde{P}\tilde{P}}$. Οι συνεισφορές από τους όρους με παράγοντες $\beta_{\tilde{P}}$ ή $1/\gamma_{\tilde{P}}$, είναι εν γένει μικρές, οπότε μπορούμε προσεγγιστικά, να τους παραλείψουμε. Οπότε, τελικά καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\boxed{\frac{\vec{E}_T \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}}{p_T^{ISR}} \sim \frac{m_{\tilde{\chi}}}{m_{\tilde{P}}} + \frac{p_{\tilde{\chi}}}{2m_{\tilde{P}}} \frac{\sqrt{(p_T^{ISR})^2 + m_{\tilde{P}\tilde{P}}^2}}{p_T^{ISR}} (\hat{\beta}_{\tilde{P}} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}\tilde{P}}) (\hat{n}_a + \hat{n}_b) \cdot \hat{\beta}_{\tilde{P}}} \quad (3.28)$$

Επομένως σύμφωνα με την 3.28, αναμένουμε ότι η ποσότητα R_{ISR} που ορίσαμε να εμφανίζει μία κορυφή κοντά στην τιμή του λόγου μαζών $m_{\tilde{\chi}}/m_{\tilde{P}}$. Επίσης, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση ενός ή περισσότερων ισχυρών ISR jets, δηλαδή όταν $p_T^{ISR} \gg m_{\tilde{P}\tilde{P}}$, τότε $\sqrt{(p_T^{ISR})^2 + m_{\tilde{P}\tilde{P}}^2}/p_T^{ISR} \rightarrow 1$ οπότε η διακριτική ικανότητα της κατανομής αναμένεται να

είναι της τάξης του $p_{\bar{X}}/2m_{\bar{P}}$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, όσο πιο συμπιεσμένη γίνεται η αντίδραση (δηλαδή όσο μειώνεται ο λόγος $p_{\bar{X}}^{\bar{P}}/2m_{\bar{P}}$), τόσο να βελτιώνεται το resolution της R_{ISR} και έτσι να καθίσταται ευκολότερη η διάκρισή της από το υπόβαθρο των γνωστών SM αλληλεπιδράσεων.

3.2 Το Λογισμικό Πακέτο RestFrames

Τα γεγονότα Monte Carlo των αλληλεπιδράσεων που θα περιγραφούν στη συνέχεια ώστε να παρουσιαστεί η μέθοδος RJR, παρήχθησαν και αναλύθηκαν με τη χρήση του λογισμικού πακέτου RestFrames [80] μέσω του cluster LXPLUS του CERN. Το πακέτο RestFrames παρέχει στο χρήστη τη δυνατότητα δημιουργίας του αντίστοιχου διαγράμματος διάσπασης και την επιλογή των κατάλληλων Jigsaw Rules για την επίλυση των διάφορων ασαφειών που προκύπτουν. Επιπλέον, το πακέτο RestFrames αυτόματα μας ενημερώνει σχετικά με την ορθότητα του διαγράμματος διάσπασης που κατασκευάσαμε, ελέγχει αν είναι επαρκής ο αριθμός και σωστό το είδος των Jigsaw Rules που επιλέξαμε, καθώς και η σειρά με την οποία εφαρμόζονται. Κάθε σωματίδιο του διαγράμματος διάσπασης αποτελεί ένα RestFrames αντικείμενο, για το οποίο, μετά την ολοκλήρωση της ανάλυσης του event, μπορούμε να λάβουμε πληροφορίες για τις ιδιότητές του (μάζα, γωνία διάσπασης, ορμή), υπολογισμένες σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς επιθυμούμε.

Ειδικεύοντας στα πιο τεχνικά σημεία του RestFrames, αυτό παρέχει μια γεννήτρια γεγονότων βασισμένη στην κινηματική ισοτροπικών διασπάσεων και η οποία χρησιμοποιεί τη μέθοδο MCMC (Markov chain Monte Carlo) για την παραγωγή των γεγονότων, ενώ οι τιμές των πλατών διάσπασης των διάφορων συντονισμών έχουν ληφθεί από το Particle Data Group. Όσον αφορά συνέπειες από πιθανές αδρονοποιήσεις ή από ατελή ανιχνευτική ανάλυση, δε λαμβάνονται υπόψη, καθώς επηρεάζουν ελάχιστα τις κατανομές των κινηματικών ποσοτήτων (αυτές επηρεάζονται κυρίως από τις κινηματικές ασάφειες). Όλα τα παραδείγματα αλληλεπιδράσεων προσομοιώνονται θεωρώντας μία αρχική κατάσταση $q\bar{q}$ με ενέργεια κέντρου μάζας 13 TeV στον LHC, χρησιμοποιώντας αριθμητικές παραμετροποιήσεις των συναρτήσεων κατανομής των παρτονίων.

3.3 Παραδείγματα Εφαρμογής της Μεθόδου RJR

Η προσέγγιση RJR συνιστά τόσο μια μεθοδολογία για την ανάλυση των αλληλεπιδράσεων ανακατασκευασμένων σωματιδίων, όσο και μια συλλογή τεχνικών για την επίλυση συνδυαστικών και κινηματικών ασαφειών, γεγονός προς γεγονός, για ένα δεδομένο δείγμα. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, χρησιμοποιώντας την μέθοδο RJR, ουσιαστικά επιβάλλουμε ένα διάγραμμα διάσπασης σε κάθε γεγονός που αναλύουμε. Βέβαια, κάθε διάγραμμα διάσπασης δεν αναπαριστά απλά το πώς διασπώνται οι ενδιάμεσες καταστάσεις σωματιδίων, αλλά συγχρόνως εισάγει έμμεσα μια κινηματική βάση για την ανάλυση του γεγονότος: το σύνολο όλων των μαζών και των γωνιών διάσπασης των σωματιδίων του, αρκεί για να περιγραφεί πλήρως το γεγονός. Αυτές τις μάζες και τις γωνίες διάσπασης μπορούμε να τις φανταζόμαστε ως συναρτήσεις των συνδυαστικών ασαφειών και των άγνωστων κινηματικών ποσοτήτων. Έτσι, το πώς θα επιλέξουμε να αναλύσουμε το κάθε γεγονός ισοδυναμεί με το πώς ακριβώς θα διαχειριστούμε τους βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος, το πλήθος των οποίων πρέπει να μειωθεί και να γίνει ίσο με το πλήθος των κινηματικών μετρήσεων.

Για την επίλυση των συνδυαστικών ασαφειών κατά την ανακατασκευή ενός γεγονότος, συνήθως επιλέγεται μία συγκεκριμένη μετρική η οποία πρέπει να ελαχιστοποιηθεί, λαμβάνον-

τας υπόψη όλες τις πιθανές συνδυαστικές αναθέσεις (π.χ. ενδιάμεσες μάζες, μετρικές της απόστασης ΔR , κτλ). Αναφορικά με την επίλυση των κινηματικών ασαφειών, υπάρχει μεγάλη βιβλιογραφία με τεχνικές. Όλες τους έχουν ως στόχο να μετριάσουν την εξάρτηση των κινηματικών ποσοτήτων που μας ενδιαφέρουν από τις ορμές και τις μάζες των μη ανιχνεύσιμων σωματιδίων, οι οποίες μας είναι άγνωστες. Ορισμένες από αυτές τις τεχνικές προτείνουν την επιβολή περιορισμών στις μάζες κάποιων σωματιδίων και επίλυση του συστήματος των σχετικών εξισώσεων για όλες τις άγνωστες κινηματικές ποσότητες. Ωστόσο, συνήθως προκύπτουν πολυώνυμα υψηλού βαθμού και ορισμένες φορές καμία από τις ρίζες τους δεν είναι εγγυημένα πραγματική. Επιπλέον, σε περιπτώσεις αναζήτησης νέων σωματιδίων μπορεί να μην είναι εύκολο να «μαντέψουμε» τις μάζες στις οποίες θα θέσουμε περιορισμούς.

Αυτό που μας κινητοποιεί να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο RJR είναι ότι σε κάθε γεγονός δεν είναι απαραίτητα μόνο μία η ποσότητα που μας ενδιαφέρει αλλά πιθανόν πολλές φυσικές ποσότητες που επιθυμούμε να προσδιορίσουμε οι οποίες συνήθως εξαρτώνται από πολλούς ίδιους βαθμούς ελευθερίας. Αυτό σημαίνει ότι για να εξασφαλίσουμε τα αποτελέσματά μας να είναι όσο το δυνατόν ασυσχέτιστα μεταξύ τους, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στο πώς θα παραμετροποιήσουμε τους διάφορους αγνώστους. Στην προσέγγιση RJR, αυτό επιτυγχάνεται εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο οι βαθμοί ελευθερίας επηρεάζουν τον προσδιορισμό των ταχυτήτων που συσχετίζουν τα διαφορετικά πλαίσια αναφοράς με αυτά που αντιστοιχούν στα πλαίσια ηρεμίας των ενδιάμεσων καταστάσεων σε μία δεδομένη διάσπαση. Έτσι, εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι οι μετρημένες ποσότητες σε κάθε event αντιστοιχούν σε ένα γνωστό σύστημα αναφοράς, αυτό του εργαστηρίου και από όλες τις άγνωστες ποσότητες προσδιορίζουμε μόνο αυτές που είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό της ταχύτητας που το συνδέει με το επόμενο σύστημα αναφοράς και αυτό επαναλαμβάνεται αναδρομικά ως το τέλος του διαγράμματος διάσπασης. Αυτή η διαδικασία έχει ως αποτέλεσμα οι Jigsaw Rules να είναι και εναλλάξιμοι, καθώς μπορούμε να επιλέξουμε διαφορετικούς JR's για την επίλυση των ίδιων ασαφειών, γεγονός το οποίο οδηγεί προφανώς σε διαφορετική συμπεριφορά των κινηματικών ποσοτήτων που υπολογίζουμε.

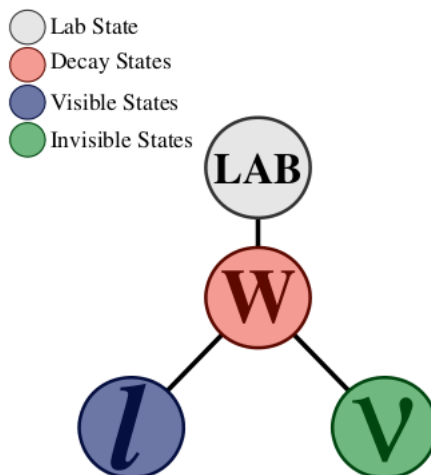
Ο αλγόριθμος που εφαρμόζεται για την ανάλυση ενός γεγονότος, καθορίζεται από τα JR's που επιλέγονται. Καθένας βασίζεται μόνο σε ένα μέρος του γεγονότος προς διερεύνηση, σε ένα μόνο πλαίσιο αναφοράς, με τουλάχιστον έναν JR για κάθε τύπο τοπολογίας της διάσπασης και ένα σύνολο αγνώστων που μπορούν να αντιμετωπιστούν. Η αναδρομική εφαρμογή των JR διασφαλίζει ότι τα παρατηρούμενα μεγέθη που αντιστοιχούν σε διαφορετικά πλαίσια αναφοράς (μάζες και γωνίες διάσπασης) είναι όσο το δυνατόν ασυσχέτιστα από αυτά που σχετίζονται με τα πλαίσια που προηγούνται και ακολουθούν στο διάγραμμα της διάσπασης.

Η μέθοδος RJR, επομένως, είναι απλώς μια βιβλιοθήκη των JR's που, όπως τα κομμάτια του παζλ, μπορούν να συναρμολογηθούν για να αναλύσουν γεγονότα σύμφωνα με ένα επιλεγμένο διάγραμμα διάσπασης. Κάθε JR επιλύει αγνώστους χρησιμοποιώντας διαφορετικούς περιορισμούς και υποθέσεις, με έναν προσαρμόσιμο συνδυασμό διαθέσιμο για τη μελέτη οποιασδήποτε διαδικασίας ενδιαφέροντος. Συνεπώς, για την εφαρμογή της μεθοδολογίας RJR, απαιτείται η γνώση των κανόνων JR's οι οποίοι είναι αυτοί που θα επιλύσουν τις κινηματικές και συνδυαστικές ασάφειες, μίας διάσπασης που μας ενδιαφέρει. Για αυτό και στην συνέχεια, θα αναλύσουμε ξεχωριστά τους κανόνες που σχετίζονται με τις κινηματικές ασάφειες από αυτούς που σχετίζονται με τις συνδυαστικές ασάφειες.

3.3.1 Κινηματικές Ασάφειες

A. $W \rightarrow l\nu$

Σαν πρώτο και πιο απλοϊκό παράδειγμα, με μόνο ένα αόρατο σωματίο στα τελικά προϊόντα, θεωρούμε την περίπτωση παραγωγής ενός μποζονίου W σε έναν επιταχυντή αδρονίων, το οποίο διασπάται σε ένα λεπτόνιο και σε ένα νετρίνο



Σχήμα 3.2: Το διάγραμμα διάσπασης της αντίδρασης $W \rightarrow l\nu$

Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε την τετραορμή του λεπτονίου, \mathbf{p}_l^{lab} , ενώ το νετρίνο διαφεύγει από τον ανιχνευτή. Ερμηνεύουμε την μέτρηση της ελλείπουσας ορμής ως την ορμή του νετρίνου, $\vec{E}_T = \vec{p}_{\nu,T}^{lab}$. Για να υπολογίσουμε τις ποσότητες που μας ενδιαφέρουν, χρειαζόμαστε επίσης της ορμή του νετρίνου στην διεύθυνση κατά μήκος της δέσμης, $p_{\nu,z}^{lab}$ καθώς και την μάζα του, m_ν . Για να προσδιορίσουμε αυτές τις άγνωστες ποσότητες, θεωρούμε ότι είναι συστατικά της ταχύτητας που συσχετίζει το σύστημα του εργαστηρίου με το σύστημα ηρεμίας του W , $\vec{\beta}_W^{lab}$. Προσδιορίζοντας αυτό το διάνυσμα, είναι ισοδύναμο με επιλογή τιμών για την $p_{\nu,z}^{lab}$ και την m_ν και είναι αρκετό για τον υπολογισμό μίας προσέγγισης για οποιαδήποτε φυσική ποσότητα μας ενδιαφέρει σχετικά με την διάσπαση.

Για να επιλέξουμε τις άγνωστες ποσότητες της $\vec{\beta}_W^{lab}$, την αποσυνθέτουμε σε δύο συνιστώσες, στην κατά μήκος προώθηση του συστήματος αναφοράς, lab, z , $\beta_{W,z}^{lab}$ όπου $p_{W,z}^{lab} = 0$ και στην εγκάρσια ταχύτητα, η οποία συσχετίζει αυτό το ενδιαμέσο σύστημα με το σύστημα ηρεμίας του W , $\vec{\beta}_{W,T}^{lab,z}$.

Επομένως, στο σύστημα του εργαστηρίου, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} E_W^{lab} \\ \vec{p}_W^{lab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_l^{lab} \\ \vec{p}_l^{lab} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_\nu^{lab} \\ \vec{p}_\nu^{lab} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Για να πάμε στο σύστημα lab, z κάνουμε προώθηση Lorentz στην \hat{z} κατεύθυνση:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_W^{lab,z} \\ \vec{p}_W^{lab,z} \end{pmatrix} &= \Lambda_{W,z}^{lab} \begin{pmatrix} E_W^{lab} \\ \vec{p}_W^{lab} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} E_W^{lab} \\ \vec{p}_W^{lab} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma_1\beta_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_W^{lab,z} \\ p_{W,x}^{lab,z} \\ p_{W,y}^{lab,z} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} E_W^{lab} \\ p_{W,x}^{lab} \\ p_{W,y}^{lab} \\ p_{W,z}^{lab} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_1 E_W^{lab,z} \\ p_{W,x}^{lab,z} \\ p_{W,y}^{lab,z} \\ \gamma_1\beta_1 E_W^{lab,z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

όπου $\beta_1 = \beta_{W,z}^{lab}$ και $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$. Αντίστοιχα, η τετραορμή του λεπτονίου σε αυτό το σύστημα αναφοράς θα είναι:

$$\begin{pmatrix} E_l^{lab,z} \\ p_{l,x}^{lab,z} \\ p_{l,y}^{lab,z} \\ p_{l,z}^{lab,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & -\gamma_1\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_l^{lab} \\ p_{l,x}^{lab} \\ p_{l,y}^{lab} \\ p_{l,z}^{lab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 E_l^{lab} - \gamma_1\beta_1 p_{l,z}^{lab} \\ p_{l,x}^{lab} \\ p_{l,y}^{lab} \\ -\gamma_1\beta_1 E_l^{lab} + \gamma_1 p_{l,z}^{lab} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Δηλαδή, η ενέργεια του λεπτονίου στο lab, z είναι:

$$E_l^{lab,z} = \gamma_1 E_l^{lab} - \gamma_1\beta_1 p_{l,z}^{lab} = \frac{E_l^{lab}}{\sqrt{1-\beta_1^2}} - \frac{p_{l,z}^{lab}}{\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - 1}} \quad (3.32)$$

Για τον υπολογισμό της β_1 , αντί να βρούμε την πιο ακριβή προσέγγιση, επιλέγουμε μία τιμή η οποία εξασφαλίζει ότι οποιεσδήποτε ποσότητες υπολογίσουμε, είναι ανεξάρτητες της πραγματικής της τιμής. Αυτό επιτυγχάνεται, αν το β_1 να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_l^{lab,z}(\beta_1)}{\partial \beta_1} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{E_l^{lab}}{\sqrt{1-\beta_1^2}} - \frac{p_{l,z}^{lab}}{\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - 1}} \right) = 0 \Rightarrow \\ E_l^{lab} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(1-\beta_1^2)^{3/2}} (-2\beta_1) \right] - p_{l,z}^{lab} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(\frac{1}{\beta_1^2} - 1)^{3/2}} (-2\beta_1^{-3}) \right] &= 0 \Rightarrow \\ \frac{E_l^{lab} \beta_1}{(1-\beta_1^2)^{3/2}} - \frac{p_{l,z}^{lab} \beta_1^{-3}}{(1-\beta_1^2)^{3/2}} (\beta_1^2)^{3/2} &= 0 \Rightarrow E_l^{lab} \beta_1 = p_{l,z}^{lab} \end{aligned}$$

Δηλαδή, θέλουμε να ισχύει:

$$\beta_{W,z}^{lab} = \frac{p_{l,z}^{lab}}{E_l^{lab}} \quad (3.33)$$

Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση ο παράγοντας Lorentz γίνεται

$$\gamma_1 = \frac{E_l^{lab}}{\sqrt{(E_l^{lab})^2 - (p_{l,z}^{lab})^2}} \quad (3.34)$$

Έχοντας προσδιορίσει την ταχύτητα, μπορούμε να βρούμε την έκφραση για την ορμή του λεπτονίου στον άξονα \hat{z} στο καινούργιο σύστημα αναφοράς:

$$p_{l,z}^{lab,z} = -\gamma_1 \beta_1 E_l^{lab} + \gamma_1 p_{l,z}^{lab} = \gamma_1 \left(p_{l,z}^{lab} - \frac{p_{l,z}^{lab}}{E_l^{lab}} E_l^{lab} \right) = 0 \quad (3.35)$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} E_W^{lab,z} \\ p_{W,x}^{lab,z} \\ p_{W,y}^{lab,z} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_l^{lab,z} \\ p_{l,x}^{lab,z} \\ p_{l,y}^{lab,z} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_\nu^{lab,z} \\ p_{\nu,x}^{lab,z} \\ p_{\nu,y}^{lab,z} \\ p_{\nu,z}^{lab,z} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Είναι εμφανές ότι θα ισχύει $p_{\nu,z}^{lab,z} = p_{l,z}^{lab,z} = p_{W,z}^{lab,z} = 0$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ισοδύναμο με το να θέσουμε την ωκότητα του νετρίνου ίση με αυτή του λεπτονίου. Συγκεκριμένα, η ωκότητα ενός σωματιδίου δίνεται από:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) = \ln \sqrt{\frac{E + p_z}{E - p_z}} \quad (3.37)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $E^2 = p_T^2 + p_z^2 + m^2$ μπορούμε να γράψουμε την ωκότητα ως εξής:

$$y = \ln \sqrt{\frac{(E + p_z)(E + p_z)}{(E - p_z)(E + p_z)}} = \ln \frac{E + p_z}{\sqrt{E^2 - p_z^2}} = \ln \frac{E + p_z}{\sqrt{m^2 + p_z^2 + p_T^2 - p_z^2}} \quad (3.38)$$

Δηλαδή μία ισοδύναμη έκφραση της ωκότητας είναι η ακόλουθη:

$$y = \ln \frac{E + p_z}{\sqrt{m^2 + p_T^2}} \quad (3.39)$$

Έτσι, θέτοντας την ωκότητα του νετρίνου ίση με αυτή του λεπτονίου έχουμε:

$$y_l = y_\nu \iff \ln \frac{E_l + p_{l,z}}{\sqrt{m_l^2 + p_{l,T}^2}} = \ln \frac{E_\nu + p_{\nu,z}}{\sqrt{m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2}} \iff \frac{E_l + p_{l,z}}{\sqrt{m_l^2 + p_{l,T}^2}} = \frac{E_\nu + p_{\nu,z}}{\sqrt{m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2}}$$

$$E_\nu + p_{\nu,z} = (E_l + p_{l,z}) \sqrt{\frac{m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2}{m_l^2 + p_{l,T}^2}} \iff E_\nu + p_{\nu,z} = E_l \sqrt{\frac{m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2}{m_l^2 + p_{l,T}^2}} + p_{l,z} \sqrt{\frac{m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2}{m_l^2 + p_{l,T}^2}}$$

Από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να συμπεράνουμε το εξής:

$$p_{\nu,z} = p_{l,z} \sqrt{\frac{m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2}{m_l^2 + p_{l,T}^2}} \text{ αν και μόνο αν } E_\nu = E_l \sqrt{\frac{m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2}{m_l^2 + p_{l,T}^2}} \quad (3.40)$$

Μάλιστα, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι το παραπάνω αληθεύει πάντοτε καθώς:

$$E_\nu^2 = E_l^2 \frac{m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2}{m_l^2 + p_{l,T}^2} \iff m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2 + p_{\nu,z}^2 = (m_l^2 + p_{l,T}^2 + p_{l,z}^2) \frac{m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2}{m_l^2 + p_{l,T}^2}$$

$$\iff m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2 = (m_l^2 + p_{l,T}^2) \frac{m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2}{m_l^2 + p_{l,T}^2} \iff m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2 = m_\nu^2 + p_{\nu,T}^2 \quad (3.41)$$

Ο αλγοριθμικός προσδιορισμός της ποσότητας $\beta_{W,z}^{lab}$ είναι ένα παράδειγμα ενός JR όπου η εικασία για μία άγνωστη ποσότητα είναι βασισμένη στην τετραορμή των ορατών σωματιδίων, υπολογισμένη σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς:

Jigsaw Rule V.1 (invisible rapidity): Εάν η ορμή ενός αόρατου σωματιδίου, \mathbf{I} , σε ένα σύστημα αναφοράς \mathbf{F} , είναι άγνωστη κατά μήκος ενός άξονα \hat{n}_{\parallel} , τότε μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η ωχύτητα του \mathbf{I} κατά μήκος του \hat{n}_{\parallel} να είναι ίση με αυτής του συστήματος ορατών σωματιδίων \mathbf{V} σύμφωνα με

$$p_{I,\parallel}^{\mathbf{F}} = p_{V,\parallel}^{\mathbf{F}} \sqrt{\frac{m_I^2 + (p_{I,\perp}^{\mathbf{F}})^2}{m_V^2 + (p_{V,\perp}^{\mathbf{F}})^2}} \quad (3.42)$$

όπου με \perp συμβολίζουμε το επίπεδο που είναι κάθετο στο \hat{n}_{\parallel} . Αυτή η επιλογή είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση της $M_{\mathbf{V}\mathbf{I}}$ ως προς το $p_{I,\parallel}^{\mathbf{F}}$.

Η εφαρμογή του JR V.1 εξασφαλίζει ότι όλες οι παρατηρήσιμες ποσότητες που εξαρτώνται από την $\beta_{W,z}^{lab}$ είναι ανεξάρτητες της πραγματικής του τιμής (ή εναλλακτικά, ότι είναι αναλλοίωτες κάτω από διαμήκεις προωθήσεις στο σύστημα του εργαστηρίου).

Θέλουμε τώρα, την υπόλοιπη ταχύτητα $\vec{\beta}_{W,T}^{lab,z}$ η οποία εξαρτάται από την m_{ν} . Θα μπορούσαμε να επιχειρήσουμε τον προσδιορισμό αυτού του αγνώστου, χρησιμοποιώντας παρόμοια προσέγγιση με προηγουμένως, για παράδειγμα να επιλέξουμε το $\beta_{W,T}^{lab,z}$ να ελαχιστοποιεί την M_W . Όμως, ακολουθώντας αυτήν την προσέγγιση, μπορεί να καταλήξουμε σε αφύσικες τιμές για την M_{ν} , με ταχυονικό νετρίνο.

Έτσι, επιλέγουμε, σε αυτήν την περίπτωση, να θέσουμε $M_{\nu} = 0$, καθώς η μάζα του νετρίνου είναι αμελητέα μπροστά στην κλίμακα του γεγονότος αλλά και γιατί είναι η μικρότερη δυνατή, αναλλοίωτη κατά Lorentz, επιλογή η οποία εξασφαλίζει μία εφικτή ερμηνεία του γεγονότος.

Τελικά, έχουμε:

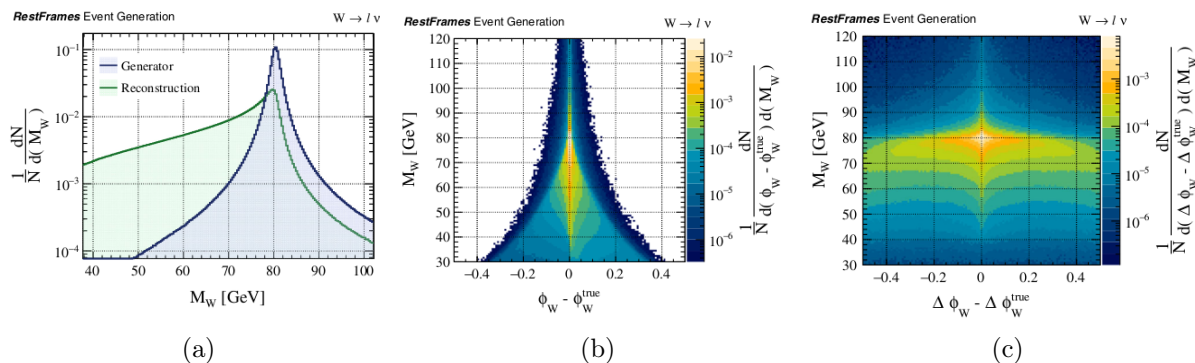
$$\begin{aligned} \mathbf{p}_W^{lab} &= \mathbf{p}_l^{lab} + \mathbf{p}_{\nu}^{lab} \Rightarrow (\mathbf{p}_W^{lab})^2 = (\mathbf{p}_l^{lab})^2 + (\mathbf{p}_{\nu}^{lab})^2 + 2\mathbf{p}_l^{lab} \cdot \mathbf{p}_{\nu}^{lab} \Rightarrow \\ M_W^2 &= m_l^2 + M_{\nu}^2 + 2(E_l^{lab} E_{\nu}^{lab} - \vec{p}_l^{lab} \cdot \vec{p}_{\nu}^{lab}) \xrightarrow{M_{\nu}=0} \\ M_W^2 &= m_l^2 + 2(E_l^{lab} p_{\nu}^{lab} - \vec{p}_l^{lab} \cdot \vec{p}_{\nu}^{lab}) \Rightarrow \\ &\boxed{M_W^2 = m_l^2 + 2\left(p_{\nu}^{lab} \sqrt{m_l^2 + (p_l^{lab})^2} - \vec{p}_l^{lab} \cdot \vec{p}_{\nu}^{lab}\right)} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Επαναορίζοντας τις μάζες να είναι οι εγχάρσιες μάζες (βλ. Παράρτημα A.4), καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$M_W^2 = m_l^2 + 2\left(p_{\nu,T}^{lab} \sqrt{m_l^2 + (p_{l,T}^{lab})^2} - \vec{p}_{l,T}^{lab} \cdot \vec{p}_{\nu,T}^{lab}\right) \quad (3.44)$$

Η κατανομή της μάζας M_W παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.3a, όπου παρατηρούμε ότι $M_W \leq m_W$, λόγω της εγγενούς ελαχιστοποίησης στην επιλογή της $p_{\nu,z}^{lab}$. Πέρα, από την μάζα, μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε εκτιμήσεις για άλλες ποσότητες ενδιαφέροντος του γεγονότος. Κατανομές της αζιμουθιακής συνιστώσας της γωνίας διάσπασης του W , ϕ_W , και $\Delta\phi_W$ φαίνονται στα Σχήματα 3.3b και 3.3c όπου οι διαφορές μεταξύ των ανακατασκευασμένων και των πραγματικών ποσοτήτων για αυτές τις ποσότητες, εξετάζονται ως συνάρτηση της μάζας M_W .

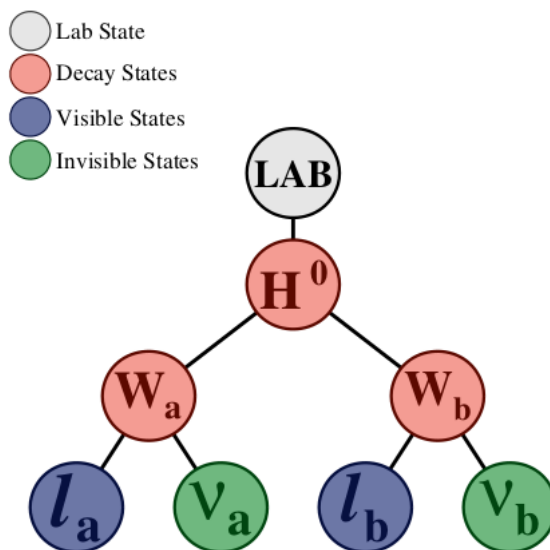
Παρατηρούμε ότι και τα δύο, ϕ_W και $\Delta\phi_W$, ανακατασκευάζονται με εξαιρετική ακρίβεια και μεγάλη ανεξαρτησία από την μάζα M_W , παρά της αγνοούμενης πληροφορίας που σχετίζεται με το νετρίνο.



Σχήμα 3.3: (a) Κατανομή της M_W , κανονικοποιημένη, για προσομοιωμένα γεγονότα $W \rightarrow l\nu$ σε επίπεδο παραγωγής αλλά και μετά την ανακατασκευή. (b) Κατανομή της αζιμουθιακής συνιστώσας της γωνίας διάσπασης του W , ϕ_W . (c) Κατανομή του $\Delta\phi_W$.

B. $H^0 \rightarrow W^+(l\nu)W^-(l\nu)$

Το επόμενο παράδειγμα το οποίο θα μελετήσουμε είναι η αντίδραση $H^0 \rightarrow W^+(l\nu)W^-(l\nu)$, η οποία, όπως είναι εμφανές, έχει δύο αόρατα σωματίδια στις τελικές καταστάσεις. Σε αυτή την περίπτωση, το μέγεθος της πληροφορίας που χάνεται αυξάνεται καθώς τώρα πρέπει να εκτιμήσουμε και το πως μοιράζεται η ορμή μεταξύ αυτών των δύο σωματιδίων έτσι ώστε να ανακατασκευάσουμε ορθά την διάσπαση.



Σχήμα 3.4: Το διάγραμμα διάσπασης της αντίδρασης $H^0 \rightarrow W^+(l\nu)W^-(l\nu)$

Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε τις τετραορμές των λεπτονίων $\mathbf{p}_{l_a}^{lab}, \mathbf{p}_{l_b}^{lab}$, ενώ όπως και πριν, τα νετρίνα διαφεύγουν. Ερμηνεύουμε αυτή την ελλείπουσα ορμή ως την ορμή του συστήματος των νετρίνων, $\vec{E}_T = \vec{p}_{\nu_a, T}^{lab} + \vec{p}_{\nu_b, T}^{lab} = \vec{p}_{\mathbf{I}, T}^{lab}$ όπου $\mathbf{I} = \{\nu_a, \nu_b\}$. Τώρα, σε αντίθεση με πριν που είχαμε μόνο δύο «χαμένες» πληροφορίες, έχουμε μόνο δύο συνθήκες για 8 βαθμούς ελευθερίας που σχετίζονται με τα τετρανύσματα των νετρίνων.

Η συνολική, κατά μήκος της δέσμης, ορμή του συστήματος των νετρίνων μπορεί να

επιλεγεί χρησιμοποιώντας τον JR V.1:

$$p_{\mathbf{I},z}^{lab} = p_{\mathbf{V},z}^{lab} \sqrt{\frac{m_{\mathbf{I}}^2 + |\vec{p}_{\mathbf{I},T}^{lab}|^2}{m_{\mathbf{V}}^2 + |\vec{p}_{\mathbf{V},T}^{lab}|^2}} \quad (3.45)$$

όπου $\mathbf{V} = \{l_a, l_b\}$

Έτσι μας μένει να προσδιορίσουμε την μάζα του συστήματος και πως αυτή χωρίζεται μεταξύ των δύο νετρίνων καθώς και πως μοιράζεται η συνολική ορμή που υπολογίσαμε. Θέλουμε τα JR's που θα χρησιμοποιήσουμε να καταλήξουν σε παρατηρήσιμα μεγέθη τα οποία είναι όσο το δυνατόν ανεξάρτητα των μεγεθών που μπορούμε ήδη να υπολογίσουμε και σχετίζονται με την ορμή του H^0 στο σύστημα του εργαστηρίου. Αυτό επιτυγχάνεται βασίζοντας τον προσδιορισμό των αγνώστων των νετρίνων, στα τετρανύσματα των λεπτονίων τα οποία είναι υπολογισμένα στο σύστημα ηρεμίας του H^0 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m_H \\ \vec{0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{W_a}^H \\ \vec{p}_{W_a}^H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{W_b}^H \\ \vec{p}_{W_b}^H \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} m_H \\ \vec{0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{l_a}^H \\ \vec{p}_{l_a}^H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\nu_a}^H \\ \vec{p}_{\nu_a}^H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{l_b}^H \\ \vec{p}_{l_b}^H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\nu_b}^H \\ \vec{p}_{\nu_b}^H \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} m_H \\ \vec{0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{\mathbf{V}}^H \\ \vec{p}_{\mathbf{V}}^H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\mathbf{I}}^H \\ \vec{p}_{\mathbf{I}}^H \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Δουλεύοντας σε αυτό το σύστημα αναφοράς, η ορμή του συστήματος \mathbf{I} πρέπει να είναι ίση και αντίθετη με την ορμή του συστήματος \mathbf{V} όπως φαίνεται άλλωστε από την (3.46). Όμοια, η ορμή των μποζονίων W πρέπει επίσης να είναι ίση και αντίθετη. Με μόνο αυτές τις συνθήκες, υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί τρόποι επιλογής των επιμέρους ορμών των νετρίνων. Η RJR προσέγγιση είναι να θεωρήσει κανείς ότι αυτοί οι άγνωστοι είναι συστατικά των ταχυτήτων που συσχετίζουν τα δύο συστήματα ηρεμίας των W με αυτό του μποζονίου H^0 , $\vec{\beta}_{W_a}^H$ και $\vec{\beta}_{W_b}^H$. Ιδανικά, θα θέλαμε τα μεγέθη που θα προκύψουν να είναι ανεξάρτητα από τις πραγματικές τιμές αυτών των ταχυτήτων, κατά τρόπο παρόμοιο με αυτό που κάναμε για τον JR V.1. Για να το επιτύχουμε αυτό, εισάγουμε μία επιπλέον συνθήκη, ότι τα δύο μποζόνια W έχουν την ίδια μάζα. Αν και αυτή η υπόθεση μπορεί να μην είναι παράλογη στην συγκεκριμένη περίπτωση (εκτός αν $m_H < 2M_W$ όπου το ένα W θα είναι, πιθανόν, εκτός φλοιού μάζας), αυτή η επιλογή παρακινείται κυρίως από το γεγονός ότι επιτρέπει τις ταχύτητες των δύο W να γραφούν απλά σε ένα διάλυμα,

$$\vec{\beta}_{W_a}^H = -\vec{\beta}_{W_b}^H = \vec{\beta}_c \quad (3.47)$$

Έτσι, κάνοντας προώθηση στα επιμέρους συστήματα ηρεμίας των W , έχουμε:

$$\begin{pmatrix} E_{W_a}^H \\ \vec{p}_{W_a}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{W_a}^H & \gamma_{W_a}^H (\vec{\beta}_{W_a}^H)^T \\ \gamma_{W_a}^H \vec{\beta}_{W_a}^H & I + \frac{\gamma_{W_a}^H - 1}{(\beta_{W_a}^H)^2} \vec{\beta}_{W_a}^H (\vec{\beta}_{W_a}^H)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{W_a} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{W_a}^H m_{W_a} \\ \gamma_{W_a}^H m_{W_a} \vec{\beta}_{W_a}^H \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

$$\begin{pmatrix} E_{W_b}^H \\ \vec{p}_{W_b}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{W_b}^H & \gamma_{W_b}^H (\vec{\beta}_{W_b}^H)^T \\ \gamma_{W_b}^H \vec{\beta}_{W_b}^H & I + \frac{\gamma_{W_b}^H - 1}{(\beta_{W_b}^H)^2} \vec{\beta}_{W_b}^H (\vec{\beta}_{W_b}^H)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{W_b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{W_b}^H m_{W_b} \\ \gamma_{W_b}^H m_{W_b} \vec{\beta}_{W_b}^H \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

όπου εάν $m_{W_a} = m_{W_b} = M_W$ και επειδή $|\vec{p}_{W_a}^H| = |\vec{p}_{W_b}^H|$ θα έχουμε $E_{W_a}^H = E_{W_b}^H$ και συνεπώς $|\vec{\beta}_{W_a}^H| = \frac{|\vec{p}_{W_a}^H|}{E_{W_a}^H} = \frac{|\vec{p}_{W_b}^H|}{E_{W_b}^H} = |\vec{\beta}_{W_b}^H| = \beta_c$ όπως ακριβώς θέλαμε. Φυσικά, $\gamma_{W_a}^H = \gamma_{W_b}^H = \gamma_c$

Προφανώς, θα ισχύει:

$$\begin{pmatrix} E_{W_a}^H \\ \vec{p}_{W_a}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{l_a}^H \\ \vec{p}_{l_a}^H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\nu_a}^H \\ \vec{p}_{\nu_a}^H \end{pmatrix} \xrightarrow{W_a \text{ rest frame}} \begin{pmatrix} M_W \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{l_a}^{W_a} \\ \vec{p}_{l_a}^{W_a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\nu_a}^{W_a} \\ \vec{p}_{\nu_a}^{W_a} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Συνεπώς το τετράνυσμα του λεπτονίου θα είναι:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{l_a}^{W_a} \\ \vec{p}_{l_a}^{W_a} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_c & -\gamma_c \vec{\beta}_c^T \\ -\gamma_c \vec{\beta}_c & I + \frac{\gamma_c - 1}{\beta_c^2} \vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta}_c^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{l_a}^H \\ \vec{p}_{l_a}^H \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_c E_{l_a}^H - \gamma_c \vec{\beta}_c \cdot \vec{p}_{l_a}^H \\ -\gamma_c E_{l_a}^H \vec{\beta}_c + \vec{p}_{l_a}^H + (\gamma_c - 1)(\hat{\beta}_c \cdot \vec{p}_{l_a}^H) \hat{\beta}_c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Αντίστοιχα για το μποζόνιο W_b και κατ'έπекταση το λεπτόνιο l_b , έχουμε:

$$\begin{pmatrix} E_{W_b}^H \\ \vec{p}_{W_b}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{l_b}^H \\ \vec{p}_{l_b}^H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\nu_b}^H \\ \vec{p}_{\nu_b}^H \end{pmatrix} \xrightarrow{W_b \text{ rest frame}} \begin{pmatrix} M_W \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{l_b}^{W_b} \\ \vec{p}_{l_b}^{W_b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\nu_b}^{W_b} \\ \vec{p}_{\nu_b}^{W_b} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{l_b}^{W_b} \\ \vec{p}_{l_b}^{W_b} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_c & \gamma_c \vec{\beta}_c^T \\ \gamma_c \vec{\beta}_c & I + \frac{\gamma_c - 1}{\beta_c^2} \vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta}_c^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{l_b}^H \\ \vec{p}_{l_b}^H \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_c E_{l_b}^H + \gamma_c \vec{\beta}_c \cdot \vec{p}_{l_b}^H \\ \gamma_c E_{l_b}^H \vec{\beta}_c + \vec{p}_{l_b}^H + (\gamma_c - 1)(\hat{\beta}_c \cdot \vec{p}_{l_b}^H) \hat{\beta}_c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Για να εξασφαλίσουμε ότι η κοινή εκτίμηση μάζας M_W , ότι είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας $\vec{\beta}_c$, την ελαχιστοποιούμε ως προς την άγνωστη ποσότητα. Αγνοώντας τις μάζες των λεπτονίων και των νετρίνων, η M_W είναι

$$M_W = E_{l_i}^{W_i} + E_{\nu_i}^{W_i} \xrightarrow{\substack{m_\nu=0 \\ m_l=0}} M_W = |\vec{p}_{l_i}^{W_i}| + |\vec{p}_{\nu_i}^{W_i}| \xrightarrow{|\vec{p}_{l_i}^{W_i}|=|\vec{p}_{\nu_i}^{W_i}|} M_W = 2|\vec{p}_{l_i}^{W_i}| = 2E_{l_i}^{W_i}$$

Δηλαδή, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$M_W = E_{l_a}^{W_a} + E_{l_b}^{W_b} \quad (3.54)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τις ενέργειες των λεπτονίων:

$$M_W = \gamma_c E_{l_a}^H - \gamma_c \vec{\beta}_c \cdot \vec{p}_{l_a}^H + \gamma_c E_{l_b}^H - \gamma_c \vec{\beta}_c \cdot \vec{p}_{l_b}^H = \gamma_c [E_{l_a}^H + E_{l_b}^H - \vec{\beta}_c \cdot (\vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H)]$$

Δηλαδή, η εξάρτηση της M_W από την $\vec{\beta}_c$ είναι:

$$M_W = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_c^2}} \left[E_{l_a}^H + E_{l_b}^H - \vec{\beta}_c \cdot (\vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H) \right] \quad (3.55)$$

Επιλέγουμε το $\vec{\beta}_c$ να ικανοποιεί την:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_W}{\partial \vec{\beta}_c} &= \frac{\partial (E_{l_a}^{W_a} + E_{l_b}^{W_b})}{\partial \vec{\beta}_c} = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial \vec{\beta}_c} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_c^2}} \left[E_{l_a}^H + E_{l_b}^H - \vec{\beta}_c \cdot (\vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H) \right] \right\} &= 0 \Rightarrow \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \beta_c^2)^{3/2}} (-2 \vec{\beta}_c) \left[E_{l_a}^H + E_{l_b}^H - \vec{\beta}_c \cdot (\vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H) \right] &+ \frac{1}{(1 - \beta_c^2)^{1/2}} [-(\vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H)] = 0 \\ \frac{\vec{\beta}_c}{(1 - \beta_c^2)^{3/2}} \left[E_{l_a}^H + E_{l_b}^H - \vec{\beta}_c \cdot (\vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H) \right] &= \frac{1}{(1 - \beta_c^2)^{1/2}} (\vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H) \Rightarrow \\ \vec{\beta}_c (E_{l_a}^H + E_{l_b}^H) - |\vec{\beta}_c|^2 (\vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H) &= \vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H - |\vec{\beta}_c|^2 (\vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H) \Rightarrow \\ \vec{\beta}_c &= \frac{\vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H}{E_{l_a}^H + E_{l_b}^H} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της ταχύτητας στην εξίσωση για την ενέργεια του λεπτονίου (βλ. (3.51)) έχουμε:

$$\begin{aligned} E_{l_a}^{W_a} &= \gamma_c E_{l_a}^H - \gamma_c \vec{\beta}_c \cdot \vec{p}_{l_a}^H = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_c^2}} \left(E_{l_a}^H - \frac{\vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H}{E_{l_a}^H + E_{l_b}^H} \cdot \vec{p}_{l_a}^H \right) \\ &= \frac{E_{l_a}^H + E_{l_b}^H}{\sqrt{(E_{l_a}^H + E_{l_b}^H)^2 - (\vec{p}_{l_a}^H - \vec{p}_{l_b}^H)^2}} \left(\frac{(E_{l_a}^H)^2 + E_{l_a}^H E_{l_b}^H + \vec{p}_{l_a}^H \cdot \vec{p}_{l_b}^H - (\vec{p}_{l_a}^H)^2}{E_{l_a}^H + E_{l_b}^H} \right) \\ &= \frac{(E_{l_a}^H)^2 - (\vec{p}_{l_a}^H)^2 + E_{l_a}^H E_{l_b}^H + \vec{p}_{l_a}^H \cdot \vec{p}_{l_b}^H - (\vec{p}_{l_a}^H)^2}{\sqrt{(E_{l_a}^H)^2 + (E_{l_b}^H)^2 + 2E_{l_a}^H E_{l_b}^H - (\vec{p}_{l_a}^H)^2 - (\vec{p}_{l_b}^H)^2 + 2\vec{p}_{l_a}^H \cdot \vec{p}_{l_b}^H}} \\ &= \frac{m_{l_a}^2 + E_{l_a}^H E_{l_b}^H + \vec{p}_{l_a}^H \cdot \vec{p}_{l_b}^H}{\sqrt{m_{l_a}^2 + m_{l_b}^2 + 2(E_{l_a}^H E_{l_b}^H + \vec{p}_{l_a}^H \cdot \vec{p}_{l_b}^H)}} \end{aligned}$$

Ορίζουμε την ποσότητα $M_c^2(\mathbf{p}_{l_a}^H, \mathbf{p}_{l_b}^H) = 2(E_{l_a}^H E_{l_b}^H + \vec{p}_{l_a}^H \cdot \vec{p}_{l_b}^H)$ οπότε:

$$E_{l_a}^{W_a} = \frac{m_{l_a}^2 + \frac{1}{2} M_c^2(\mathbf{p}_{l_a}^H, \mathbf{p}_{l_b}^H)}{\sqrt{m_{l_a}^2 + m_{l_b}^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{l_a}^H, \mathbf{p}_{l_b}^H)}} \quad (3.57)$$

Αντίστοιχα, για το λεπτόνιο l_b προκύπτει:

$$E_{l_b}^{W_b} = \frac{m_{l_b}^2 + \frac{1}{2}M_c^2(\mathbf{p}_{l_a}^H, \mathbf{p}_{l_b}^H)}{\sqrt{m_{l_a}^2 + m_{l_b}^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{l_a}^H, \mathbf{p}_{l_b}^H)}} \quad (3.58)$$

Δηλαδή

$$E_{l_i}^{W_i} = \frac{m_{l_i}^2 + \frac{1}{2}M_c^2(\mathbf{p}_{l_a}^H, \mathbf{p}_{l_b}^H)}{\sqrt{m_{l_a}^2 + m_{l_b}^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{l_a}^H, \mathbf{p}_{l_b}^H)}} \quad (3.59)$$

Έχοντας προσδιορίσει το $\vec{\beta}_c$, μας μένει μόνο ένας απροσδιόριστος βαθμός ελευθερίας ο οποίος σχετίζεται με τις επί μέρους μάζες των νετρίνων και του συστήματος νετρίνων. Εκφράζοντας αυτό τον βαθμό ελευθερίας ως c , έχουμε:

$$\vec{p}_{\nu_a}^H = (c-1)\vec{p}_{l_a}^H - c\vec{p}_{l_b}^H \quad (3.60)$$

$$\vec{p}_{\nu_b}^H = (c-1)\vec{p}_{l_b}^H - c\vec{p}_{l_a}^H \quad (3.61)$$

$$E_{\nu_a}^H = (c-1)E_{l_a}^H + cE_{l_b}^H \quad (3.62)$$

$$E_{\nu_b}^H = (c-1)E_{l_b}^H + cE_{l_a}^H \quad (3.63)$$

Οπότε οι μάζες των νετρίνων θα είναι:

$$\begin{aligned} \bullet M_{\nu_a}^2 &= (\mathbf{p}_{\nu_a}^H)^2 = (E_{\nu_a}^H)^2 - (\vec{p}_{\nu_a}^H)^2 = (E_{\nu_a}^H + \vec{p}_{\nu_a}^H)(E_{\nu_a}^H - \vec{p}_{\nu_a}^H) \\ &= [(c-1)(E_{l_a}^H + \vec{p}_{l_a}^H) + c(E_{l_b}^H - \vec{p}_{l_b}^H)] [(c-1)(E_{l_a}^H - \vec{p}_{l_a}^H) + c(E_{l_b}^H + \vec{p}_{l_b}^H)] \\ &= (c-1)^2 [(E_{l_a}^H)^2 - (\vec{p}_{l_a}^H)^2] + c^2 [(E_{l_b}^H)^2 - (\vec{p}_{l_b}^H)^2] \\ &\quad + c(c-1) [(E_{l_a}^H + \vec{p}_{l_a}^H) + (E_{l_b}^H - \vec{p}_{l_b}^H)(E_{l_a}^H - \vec{p}_{l_a}^H)] \\ &= (c-1)^2 m_{l_a}^2 + c^2 m_{l_b}^2 + c(c-1) [2E_{l_a}^H E_{l_b}^H + 2\vec{p}_{l_a}^H \vec{p}_{l_b}^H + E_{l_a}^H \vec{p}_{l_b}^H + \vec{p}_{l_a}^H E_{l_b}^H \\ &\quad - \vec{p}_{l_b}^H E_{l_a}^H - E_{l_a}^H \vec{p}_{l_a}^H] \\ &= (c-1)^2 m_{l_a}^2 + c^2 m_{l_b}^2 + 2c(c-1)(E_{l_a}^H E_{l_b}^H + \vec{p}_{l_a}^H \vec{p}_{l_b}^H) \\ &= (c-1)^2 m_{l_a}^2 + c^2 m_{l_b}^2 + c(c-1)M_c^2(\mathbf{p}_{l_a}^H, \mathbf{p}_{l_b}^H) \end{aligned}$$

$$\bullet M_{\nu_b}^2 = (\mathbf{p}_{\nu_b}^H)^2 = (E_{\nu_b}^H)^2 - (\vec{p}_{\nu_b}^H)^2 = (E_{\nu_b}^H + \vec{p}_{\nu_b}^H)(E_{\nu_b}^H - \vec{p}_{\nu_b}^H)$$

⋮

$$= (c-1)^2 m_{l_a}^2 + c^2 m_{l_b}^2 + c(c-1)M_c^2(\mathbf{p}_{l_a}^H, \mathbf{p}_{l_b}^H)$$

και η συνολική μάζα του συστήματος των νετρίνων θα είναι:

$$\begin{aligned}
\cdot M_I^2 &= (\mathbf{p}_I^H)^2 = (E_I^H)^2 - (\vec{p}_I^H)^2 = (E_{\nu_a}^H + E_{\nu_b}^H)^2 - (\vec{p}_{\nu_a}^H + \vec{p}_{\nu_b}^H)^2 \\
&= (E_{\nu_a}^H + E_{\nu_b}^H + \vec{p}_{\nu_a}^H + \vec{p}_{\nu_b}^H)(E_{\nu_a}^H + E_{\nu_b}^H - \vec{p}_{\nu_a}^H - \vec{p}_{\nu_b}^H) \\
&= [(c-1)(E_{l_a}^H + E_{l_b}^H) + c(E_{l_a}^H + E_{l_b}^H) + c(c-1)(\vec{p}_{l_a}^H + \vec{p}_{l_b}^H) - c(\vec{p}_{l_a}^H + \vec{p}_{l_b}^H)] \\
&\quad [(c-1)(E_{l_a}^H + E_{l_b}^H) + c(E_{l_a}^H + E_{l_b}^H) - (c-1)(\vec{p}_{l_a}^H + \vec{p}_{l_b}^H) + c(\vec{p}_{l_a}^H + \vec{p}_{l_b}^H)] \\
&= [(E_{l_a}^H + E_{l_b}^H)(2c-1) + (\vec{p}_{l_a}^H + \vec{p}_{l_b}^H)(c-1-c)] [(E_{l_a}^H + E_{l_b}^H)(2c-1) \\
&\quad + (\vec{p}_{l_a}^H + \vec{p}_{l_b}^H)(c-c+1)] \\
&= [(2c-1)(E_{l_a}^H + E_{l_b}^H) - (\vec{p}_{l_a}^H + \vec{p}_{l_b}^H)] [(2c-1)(E_{l_a}^H + E_{l_b}^H) + (\vec{p}_{l_a}^H + \vec{p}_{l_b}^H)] \\
&= (2c-1)^2 (E_{l_a}^H + E_{l_b}^H)^2 - (\vec{p}_{l_a}^H + \vec{p}_{l_b}^H)^2 \\
&= (2c-1)^2 (E_V^H)^2 - (\vec{p}_V^H)^2
\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, οι μάζες για τα νετρίνα είναι:

$$\begin{aligned}
M_{\nu_a}^2 &= (c-1)^2 m_{l_a}^2 + c^2 m_{l_b}^2 + c(c-1) M_c^2(\mathbf{p}_{l_a}^H, \mathbf{p}_{l_b}^H) \\
M_{\nu_b}^2 &= (c-1)^2 m_{l_b}^2 + c^2 m_{l_a}^2 + c(c-1) M_c^2(\mathbf{p}_{l_a}^H, \mathbf{p}_{l_b}^H) \\
M_I^2 &= (2c-1)^2 (E_V^H)^2 - (\vec{p}_V^H)^2
\end{aligned} \tag{3.64}$$

όπου διαφορετικές τιμές του c φαίνεται να αυξάνουν και να μειώνουν καθεμία από τις μάζες που σχετίζονται με τα νετρίνα με συνέπεια. Αγνοώντας τις επιμέρους μάζες των λεπτονίων, επιλογή του $c = 1$, θέτει τις μάζες των νετρίνων ίσες με το μηδέν και υπονοεί ότι $M_I = m_V$. Από την (3.64), παρατηρούμε ότι για μικρότερη επιλογή του c (ή αλλιώς μικρότερη επιλογή του M_I) μπορεί να οδηγήσει σε ταχυονικά νετρίνα. Αυτό σημαίνει ότι ενώ επιλογή του M_I μεγαλύτερο από το m_V μπορεί να είναι συνεπές με την παραπάνω περιγραφή, μικρότερες επιλογές δεν είναι επαρκώς μεγάλες για να χρησιμοποιηθούν σε αυτή την προσέγγιση. Καθώς ο υπολογισμός της ταχύτητας που συσχετίζει το σύστημα του εργαστηρίου με το σύστημα ηρεμίας του H , εξαρτάται από το M_I , στην προσέγγιση RJR αυτή η επιλογή πρέπει να γίνει απευθυνόμενη μόνο στα τετρανύσματα των ορατών σωματιδίων στο σύστημα του εργαστηρίου. Ευτυχώς, η ελάχιστη απαιτούμενη τιμή που εξασφαλίζει τις τελικές προσεγγίσεις των νετρίνων να είναι φυσικά βιώσιμες, m_V είναι μία αναλλοίωτη κατά Lorentz συνάρτηση αυτών των τετρανυσμάτων, που σημαίνει ότι μπορούμε να κάνουμε αυτή την ανάθεση, γνωρίζοντας μόνο την μεθοδολογία ανάλυσης του γεγονότος στο σύστημα ηρεμίας του H αλλά χωρίς απαραίτητα να έχουμε αρκετές πληροφορίες να εκτιμήσουμε οποιοδήποτε τετράνυσμα. Αυτή η επιλογή αντιστοιχεί σε έναν κανόνα JR:

Jigsaw Rule VI.1 (invisible mass): Εάν η μάζα ενός άορατου σωματιδίου I είναι άγνωστη τότε μπορεί να επιλεγεί να είναι η μικρότερη, αναλλοίωτη κατά Lorentz συνάρτηση των ορατών τετρανυσμάτων που είναι επαρκώς μεγάλη να ικανοποιεί οποιοδήποτε άλλον JR που αντιστοιχεί σε διαχωρισμό του συστήματος I σε άλλα άορατα σωματίδια.

Παρόμοια, η παραπάνω μεθοδολογία επιλογής του $\vec{\beta}_c$ μπορεί να γενικευθεί σε άλλον JR: *Jigsaw Rule VI.2 (contraboost invariant)*: Εάν οι εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας που προσδιορίζουν το πως ένα άορατο σύστημα $I = \{I_a, I_b\}$ χωρίζεται σε δύο σωματίδια είναι άγνωστοι, τότε μπορούν να προσδιορισθούν επιλέγοντας ένα αντίστοιχο ζεύγος ορατών σωματιδίων, $V = \{V_a, V_b\}$ και εφαρμόζοντας τον περιορισμό $M_{V_a I_a} = M_{V_b I_b}$. Έχει υποθεθεί ότι τα τετρανύσματα των ορατών σωματιδίων είναι γνωστά στο σύστημα κέντρου μάζας $F = \{V, I\}$ όπως και το τετράνυσμα του συστήματος I , \mathbf{p}_I^F . Τα τετρανύσματα των άορατων

σωματιδίων μπορούν να επιλεγούν στο F να είναι:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{I_a}^F &= (c-1)\vec{p}_{V_a}^F - c\vec{p}_{V_b}^F \\ \vec{p}_{I_b}^F &= (c-1)\vec{p}_{V_b}^F - c\vec{p}_{V_a}^F \\ E_{I_a}^F &= (c-1)E_{V_a}^F + cE_{V_b}^F \\ E_{I_b}^F &= (c-1)E_{V_b}^F + cE_{V_a}^F\end{aligned}$$

όπου:

$$c = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{(E_V^F)^2 - m_V^2 + M_I^2}}{E_V^F} \right]$$

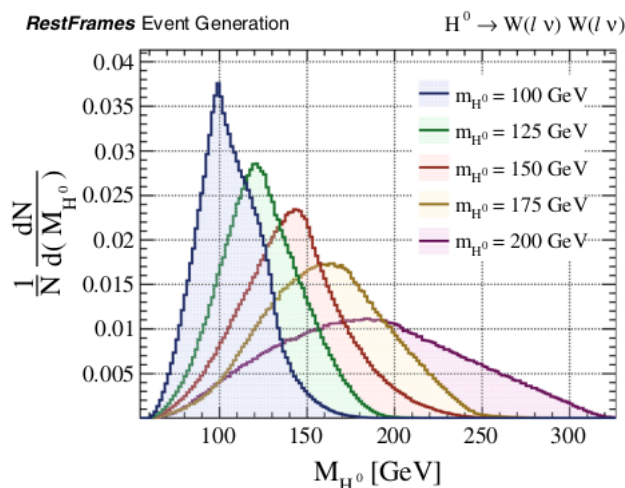
Εάν τα ορατά σωματίδια V_a, V_b είναι άμαζα, τότε η ελάχιστη τιμή του M_I που απαιτείται για να εξασφαλίσει ότι τα επιμέρους άορατα σωματίδια δεν θα είναι ταχυονικά, είναι m_V .

Έχοντας ορίσει τους JR's, μπορούμε να συνοψίσουμε την RJR προσέγγιση ανάλυσης της αντίδρασης $H^0 \rightarrow W^+(l\nu)W^-(l\nu)$:

1. Εφαρμόζουμε τον JR VI.1, επιλέγοντας $M_I = m_V$
2. Εφαρμόζουμε τον JR V.1, επιλέγοντας την $p_{I,z}^{l\bar{b}}$ χρησιμοποιώντας τα λεπτόνια V
3. Εφαρμόζουμε τον JR VI.2, προσδιορίζοντας τα τετρανύσματα των νετρίνων, χρησιμοποιώντας την συνθήκη $M_{W_a} = M_{W_b}$

Μετά την εφαρμογή αυτών των JR's, οι τιμές για όλες τις άγνωστες ποσότητες έχουν προσδιορισθεί και οποιαδήποτε κινηματική ποσότητα που μας ενδιαφέρει, μπορεί να υπολογιστεί.

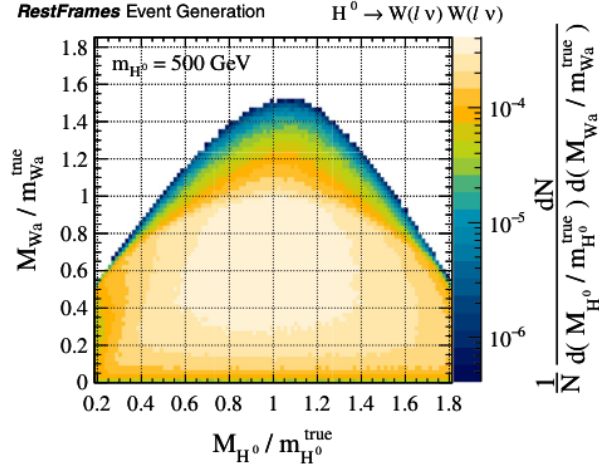
Μία φυσική ποσότητα ενδιαφέροντος είναι η μάζα του βαριού ουδέτερου Higgs, η οποία φαίνεται στο Σχήμα 3.5 για διαφορετικές τιμές του m_H . Το resolution για την εκτίμηση της μάζας M_H , είναι περίπου ίδιο για $m_H > 2m_W$, με την κορυφή κάθε κατανομής να αντιστοιχεί στην πραγματική με μόνο μία μικρή υποεκτίμηση λόγω της έμμεσης ελαχιστοποίησης από τον JR V.1.



Σχήμα 3.5: Κατανομή της μάζας M_H για προσομοιωμένα γεγονότα της αντίδρασης $H^0 \rightarrow W^+(l\nu)W^-(l\nu)$ για διαφορετικές τιμές της m_H

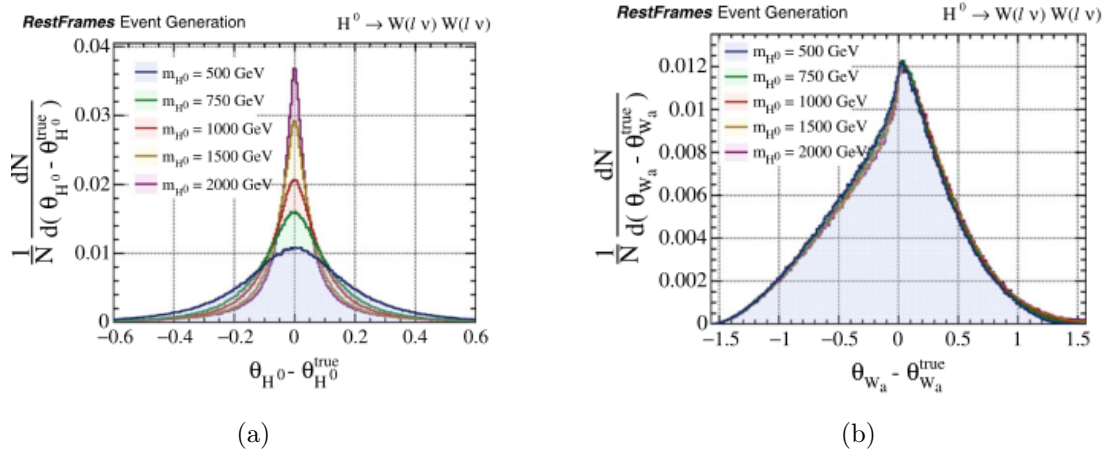
Όπως και στην M_H , έτσι και για την εκτίμηση της μάζας του W , M_W , παρατηρούμε μία κινηματική γωνία όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.6. Το σχήμα της κατανομής της M_W είναι

σε μεγάλο βαθμό ανεξάρτητο της τιμής της m_H και το “event-by-event” εκτιμάται επίσης σε μεγάλο βαθμό ανεξάρτητα της M_H , με το resolution του M_H να σχετίζεται με το πόσο κοντά είναι η M_W στο κινηματικό όριο. Αυτή η απουσία συσχετισμών είναι αποτέλεσμα των JR’s που εφαρμόσαμε. Ο JR VI.2 εξασφαλίζει ότι η M_W είναι ευρέως ανεπηρέαστη από την ταχύτητα του W μποζονίου στο σύστημα παραγωγής του, το οποίο είναι, χονδρικά, ανάλογο με την μάζα του H .



Σχήμα 3.6: Κατανομή της μάζας M_W ως συνάρτηση της M_H για προσομοιωμένα γεγονότα της αντίδρασης $H^0 \rightarrow W^+(l\nu)W^-(l\nu)$ για $m_H = 500\text{GeV}$

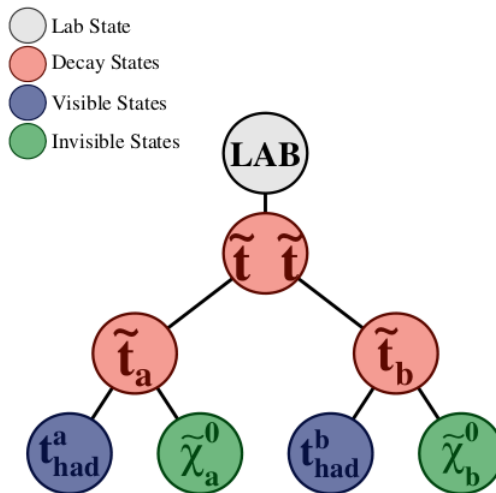
Πέρα από τις μάζες, μπορούν να εκτιμηθούν και άλλα μεγέθη, όπως οι γωνίες διάσπασης των H και W οι οποίες παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.7. Το resolution της θ_H αυξάνεται καθώς αυξάνεται η μάζα m_H , αφού είναι ευκολότερο να επιλύσουμε τον άξονα διάσπασης του Higgs καθώς το p_W^H/M_W μεγαλώνει, ενώ το resolution της θ_W δεν εξαρτάται από την μάζα του Higgs. Η χειρότερη ακρίβεια της θ_W είναι αναμενόμενη: με τις συνθήκες από την εφαρμογή των JR’s οι εκτιμήσεις των γωνιών διάσπασης των δύο W τίθενται ίσες και αντίθετες ($\cos\theta_{W_a} = -\cos\theta_{W_b}$), έτσι ώστε η εκτίμηση να αντιστοιχεί και στις δύο γωνίες. Παρόλα αυτά, η εκτίμηση είναι ακόμα ευαίσθητη σε αυτές τις γωνίες καθώς αυτές περιλαμβάνουν τις πληροφορίες σχετικά με την συσχέτιση των spin τους.



Σχήμα 3.7: Κατανομές (a) της γωνίας διάσπασης του Higgs, θ_H και (b) της γωνίας διάσπασης του W , θ_W υπολογισμένα μέσω της μεθόδου RJR για προσομοιωμένα γεγονότα της αντίδρασης $H^0 \rightarrow W^+(l\nu)W^-(l\nu)$ για διαφορετικές τιμές της m_H

C. $\tilde{t}\tilde{t} \rightarrow (t\tilde{\chi}_1^0)(t\tilde{\chi}_1^0)$

Η τοπολογία αυτής της διάσπασης είναι σχεδόν ίδια με αυτήν της $H^0 \rightarrow W^+(l\nu)W^-(l\nu)$, για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια διαδικασία. Η μόνη διαφορά που θα επηρεάσει το αποτέλεσμα είναι οι μάζες των top κουάρκς και των neutralinos, οι οποίες τώρα είναι μη αμελητέες σε σχέση με την κλίμακα της διαδικασίας και για αυτό δεν μπορούμε να τις αγνοήσουμε.



Σχήμα 3.8: Το διάγραμμα διάσπασης της αντίδρασης $\tilde{t}\tilde{t} \rightarrow (t\tilde{\chi}_1^0)(t\tilde{\chi}_1^0)$

Ακολουθώντας την ίδια προσέγγιση με το προηγούμενο παράδειγμα, θέτουμε $M_{\tilde{t}_a} = M_{\tilde{t}_b}$ και χρησιμοποιούμε τα τετρανύσματα των ορατών σωματιδίων, υπολογισμένα στο πλαίσιο ηρεμίας του συστήματος των δύο stop, ώστε να εκτιμήσουμε την ορμή και την ενέργεια των δύο neutralinos.

Έτσι λοιπόν, σε πλήρη αντιστοιχία με την (3.56) προκύπτει ότι:

$$\vec{\beta}_{\tilde{t}_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} = -\vec{\beta}_{\tilde{t}_b}^{\tilde{t}\tilde{t}} = \frac{\vec{p}_{\tilde{t}_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{\tilde{t}_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}}{E_{\tilde{t}_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{\tilde{t}_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}} \quad (3.65)$$

Αυτή η επιλογή περιορίζει τις εκτιμήσεις για τις μάζες των neutralinos:

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\chi}_a}^2 &= (c-1)^2 m_{t_a}^2 + c^2 m_{t_b}^2 + c(c-1) M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) \\ M_{\tilde{\chi}_b}^2 &= (c-1)^2 m_{t_b}^2 + c^2 m_{t_a}^2 + c(c-1) M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) \\ M_{\mathbf{I}}^2 &= (2c-1)^2 (E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (\vec{p}_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 \end{aligned} \quad (3.66)$$

όπου $\mathbf{I} = \{\tilde{\chi}_a, \tilde{\chi}_b\}$ και $\mathbf{V} = \{t_a, t_b\}$. Ενώ στο προηγούμενο παράδειγμα ήταν κατάλληλη η απλή επιλογή $c = 1$ δηλαδή $M_{\mathbf{I}} = m_{\mathbf{V}}$, τώρα αυτή η συνθήκη θα οδηγήσει σε κάθε ένα neutralino να παίρνει μη μηδενικές μάζα με $M_{\tilde{\chi}_{a/b}} = m_{t_{b/a}}$. Εάν, αντ'αυτού, ως έλλειψη καλύτερης επιλογής, προσπαθήσουμε να περιορίσουμε τον τελευταίο βαθμό ελευθερίας με

την απαίτηση $M_{\tilde{\chi}_a} = M_{\tilde{\chi}_b} = 0$ τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\chi}_a}^2 = M_{\tilde{\chi}_b}^2 &= (c-1)^2 m_t^2 + c^2 m_t^2 + c(c-1) M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) = 0 \Rightarrow \\ &[c^2 + (c-1)^2] m_t^2 + c(c-1) M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) = 0 \Rightarrow \\ &(2c^2 - 2c + 1) m_t^2 + c(c-1) M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) = 0 \Rightarrow \\ &c(c-1)(2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})) + m_t^2 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{c(c-1) = \frac{-m_t^2}{2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})}} \quad (3.67)$$

όπου για ευκολία έχουμε θεωρήσει ότι $m_{t_a} = m_{t_b} = m_t$

Οπότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{I}}^2 &= (2c-1)^2 (E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - |\vec{p}_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 = (4c^2 - 4c + 1)(E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - |\vec{p}_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 \\ &= 4c(c-1)(E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 + (E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - |\vec{p}_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 = 4c(c-1)(E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 + m_{\mathbf{V}}^2 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Αντικαθιστώντας την (3.67) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{I}}^2 &= \frac{-4m_t^2}{2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})} (E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 + m_{\mathbf{V}}^2 \\ &= \frac{-4m_t^2 (E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 + m_{\mathbf{V}}^2 [2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})]}{2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Ας υπολογίσουμε τις ποσότητες που εμφανίζονται σε αυτήν την εξίσωση ξεχωριστά καθώς θα μας χρειαστούν και στην συνέχεια:

$$\begin{aligned} \cdot 2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) &= m_t^2 + m_t^2 + 2(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}} + \vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) \\ &= (E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 + (E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (\vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 + 2(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) + 2(\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) \\ &= (E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 + 2(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) + (E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - [(\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - 2(\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) + (\vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2] \\ &= (E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot m_{\mathbf{V}}^2 [2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})] - 4m_t^2 (E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 &= \\ &= [(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2] [(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2] - 4m_t^2 (E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 \\ &= (E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^4 - (E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 \\ &\quad + (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - 4m_t^2 (E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 \\ &= (E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 [(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2] \\ &\quad + (|\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 + |\vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 - 2\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) (|\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 + |\vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 + 2\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) - 4m_t^2 (E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} + E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 (2m_t^2 + 2E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}} - |\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2) + |\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^4 + |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^4 - 2|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 \\
&\quad + 4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - 4(\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 - 4m_t^2 (E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} + E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2] \\
&= (E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} + E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 (2m_t^2 + 2E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}} - |\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - 4m_t^2) + (|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2)^2 \\
&\quad + 4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2] \\
&= (E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} + E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 [-2m_t^2 + 2E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}} - (E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}})^2 + (E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 - |\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - (E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 + (E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 \\
&\quad - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2] + (|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2)^2 + 4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2] \\
&= (E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} + E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 [-((E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}})^2 - 2E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}} + (E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2)] + (|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2)^2 \\
&\quad + 4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2] \\
&= -(E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} + E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 (E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} - E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 + (|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2)^2 + 4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2] \\
&= -[(E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}})^4 - 2(E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}})^3 E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}} + (E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}})^2 (E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 + 2(E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}})^3 E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}} - 4(E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}})^2 (E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 + 2(E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^3 E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \\
&\quad + (E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 (E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}})^2 - 2(E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^3 E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} + (E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^4] + (|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2)^2 \\
&\quad + 4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2] \\
&= -[(E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}})^4 - 2(E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}})^2 (E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 + (E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^4] + (|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2)^2 \\
&\quad + 4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2] \\
&= (|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2)^2 - [(E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}})^2 - (E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2]^2 + 4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2] \\
&= (|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2)^2 - (|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 + m_t^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - m_t^2)^2 + 4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 \\
&\quad - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2] \\
&= (|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2)^2 - (|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2)^2 + 4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2] \\
&= 4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2]
\end{aligned}$$

Δηλαδή τελικά, έχουμε ότι

$$\boxed{2m_t^2 + Mc^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}) = (E_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} + E_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2} \quad (3.70)$$

$$\boxed{m_{\mathbf{V}}^2 [2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})] - 4m_t^2 (E_{\mathbf{V}}^{\vec{t}\vec{t}})^2 = 4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2]} \quad (3.71)$$

Επιστρέφοντας στην (3.69) και χρησιμοποιώντας την (3.71) προκύπτει:

$$M_{\mathbf{I}}^2|_{M_{\vec{x}=0}} = \frac{4[|\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}}|^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})^2]}{2m_t^2 + Mc^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\vec{t}\vec{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\vec{t}\vec{t}})} \quad (3.72)$$

Όμως, αυτή η έκφραση δεν είναι εφικτή επιλογή για την $M_{\mathbf{I}}$ καθώς δεν είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz, συνάρτηση των τετρανοσμάτων των ορατών σωματιδίων, με αποτέλεσμα να παραβιάζει μία από τις απαιτήσεις του κανόνα JR VI.1 τον οποίο και πρέπει να εφαρμόσουμε ώστε να υπολογίσουμε την ταχύτητα που συσχετίζει το σύστημα του εργαστηρίου με το σύστημα ηρεμίας των δύο stop, $\vec{\beta}_{\vec{t}\vec{t}}^{lab}$.

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, επιλέγουμε την $M_{\mathbf{I}}$ να είναι η μικρότερη δυνατή, αναλλοίωτη κατά Lorentz έκφραση η οποία όμως είναι αυστηρά μεγαλύτερη ή ίση με την (3.72),

$$M_{\mathbf{I}}^2 = m_{\mathbf{V}}^2 - 4m_t^2 \geq M_{\mathbf{I}}^2|_{M_{\vec{x}=0}} \quad (3.73)$$

Το ότι αυτή η ποσότητα είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz σημαίνει ότι μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας μόνο τα τετρανύσματα των ορατών σωματιδίων, μετρημένα στο σύστημα του εργαστηρίου και ότι δεν απαιτεί γνώση κανενός προσεγγιστικού πλαισίου αναφοράς αυτής της διάσπασης. Βέβαια, αυτή η επιλογή, επηρεάζει και τις εκτιμήσεις για τις μάζες των neutralinos, $M_{\tilde{\chi}_a}$ και $M_{\tilde{\chi}_b}$, οι οποίες, παρόλο που προηγουμένως προσπαθήσαμε να τις περιορίσουμε στο μηδέν, τώρα παίρνουν μη μηδενικές τιμές :

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{I}}^2 &= m_{\mathbf{V}}^2 - 4m_t^2 \stackrel{(3.66)}{=} (2c-1)^2 (E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - |\vec{p}_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 \iff \\ m_{\mathbf{V}}^2 - 4m_t^2 &= 4c(c-1)(E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 + (E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - |\vec{p}_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 \iff \\ c(c-1) &= \frac{-m_t^2}{(E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Επειδή έχουμε ορίσει $m_{t_a} = m_{t_b} = m_t$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\chi}_a}^2 &= M_{\tilde{\chi}_b}^2 = c(c-1)[2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})] + m_t^2 \stackrel{(3.70)}{\stackrel{(3.74)}}{\Rightarrow} \\ M_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 &= \frac{-m_t^2}{(E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} [(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2] + m_t^2 \Rightarrow \\ M_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 &= \frac{m_t^2}{(E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} [(E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 + (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2] \Rightarrow \\ M_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 &= m_t^2 \frac{(\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2}{(E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} \Rightarrow M_{\tilde{\chi}_{a/b}} = m_t \frac{|\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}|}{E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Ένα μέρος της έξτρα μάζας που θέσαμε στην M_I στην (3.73) ώστε να την κάνουμε αναλλοίωτη κατά Lorentz, έχει απορροφηθεί από την $M_{\tilde{\chi}_{a/b}}$. Η έκφραση δεν περιέχει νέα πληροφορία, με την έννοια ότι είναι συνδυασμός του M_t και της εκτίμησης του $\vec{\beta}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}$ από την (3.65) και ότι δεν είναι ευαίσθητη στις πραγματικές τιμές των $m_{\tilde{\chi}_{a/b}}$. Επίσης, οι εκτιμήσεις για τις ενέργειες των top στα επιμέρους συστήματα παραγωγής τους $E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}$ και $E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}$ δεν εξαρτώνται από την επιλογή της M_I με

$$E_{t_{a/b}}^{\tilde{t}\tilde{t}} = \frac{\sqrt{2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})}}{2} \quad (3.76)$$

Θυμώμενοι ότι $E_{t_{a/b}}^{\tilde{t}\tilde{t}} = (m_{t_{a/b}}^2 - m_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 + m_{t_{a/b}}^2)/2m_{t_{a/b}}$, βλέπουμε ότι όχι μόνο υπάρχει συσχέτιση με την διαφορά των μαζών μεταξύ των stops και neutralinos αλλά και ότι οι εκτιμήσεις για αυτή την ποσότητα $E_{t_{a/b}}^{\tilde{t}\tilde{t}}$, μπορούν να εξαχθούν μέσω contraboost invariance, ανεξάρτητα από τις επιλογές μας για τις μεμονωμένες μάζες των neutralino. Στην πράξη, επιτρέποντας τις εκτιμήσεις $M_{\tilde{\chi}_{a/b}}$ να αποκτούν μάζα στην προσέγγιση του γεγονότος είναι ένας τρόπος για να λάβουμε υπόψη την απουσία εναλλαγής μεταξύ boosts ($\vec{\beta}_{\tilde{t}\tilde{t}}^{lab}$) και contra-boosts ($\vec{\beta}_{t_{a/b}}^{\tilde{t}\tilde{t}}$) που περιγράφουν την διαδρομή των ορατών top από το σύστημα παραγωγής τους στο σύστημα του εργαστηρίου. Αν και δεν παρέχουμε καμία πληροφορία για τις πραγματικές μάζες των άορατων σωματιδίων, αυτή η προσέγγιση ελαχιστοποιεί την επίδραση που έχει αυτή η έλλειψη γνώσης πάνω στην ικανότητα μας να εξάγουμε άλλες πληροφορίες από το γεγονός όπως ο διαχωρισμός της μάζας των sparticles. Επίσης, επιτρέπει τα JR's που εφαρμόζονται για την ανάλυση του γεγονότος, να παραγοντοποιούνται και να εναλλάσσονται

αποσυνδέοντας περαιτέρω τα παρατηρούμενα μεγέθη που μετρώνται σε καθένα προσεγγιστικό πλαίσιο αναφοράς.

Λαμβάνοντας υπόψη την τελευταία θεώρηση, φανταζόμαστε μια περίπτωση όπου κάποιος μπορεί να θέλει να διασφαλίσει ότι οι εκτιμήσεις για τις $M_{\tilde{\chi}_{a/b}}$ και αντίστοιχες ποσότητες στην ανακατασκευασμένη «ματιά» του κάθε γεγονότος, είναι μεγαλύτερες ή ίσες μίας μη τετριμμένης τιμής μ : $M_{\tilde{\chi}_{a/b}} \geq \mu$. Αυτή η ανάγκη μπορεί να προκύψει εάν υπάρχει πρότερη γνώση, έξω από τις ποσότητες που μετράμε στο γεγονός, όσον αφορά αυτές τις μάζες ή εάν κάποιος θέλει να εξετάσει την εξάρτηση των παρατηρούμενων μεγεθών σε διαφορετικές δοκιμαστικές τιμές M_{min} . Επιτρέποντας μία ελάχιστη μάζα επιτρέπει επίσης στον JR (contrast-invariant) να περιλαμβάνει και μελλοντικά JR's για τα αόρατα σωματίδια τα οποία μπορεί να εμφανίζονται αργότερα στο διάγραμμα διάσπασης, όπου τα $\tilde{\chi}_a$ και $\tilde{\chi}_b$ μπορεί να χωρίζονται περαιτέρω σε περισσότερα αόρατα σωματίδια.

Επιστρέφοντας στην 3.66, απαιτώντας $M_{\tilde{\chi}_{a/b}} = \mu$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\chi}_a}^2 &= M_{\tilde{\chi}_b}^2 = (c-1)^2 m_t^2 + c^2 m_t^2 + c(c-1) M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) = \mu^2 \Rightarrow \\ &[c^2 + (c-1)^2] m_t^2 + c(c-1) M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) = \mu^2 \Rightarrow \\ &(2c^2 - 2c + 1) m_t^2 + c(c-1) M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}) = \mu^2 \Rightarrow \\ &c(c-1)(2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})) + m_t^2 = \mu^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{c(c-1) = \frac{\mu^2 - m_t^2}{2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})}} \quad (3.77)$$

Οπότε σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι:

$$M_{\mathbf{I}}^2|_{M_{\tilde{\chi}}=\mu} = 4c(c-1)(E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 + m_{\mathbf{V}}^2 = \frac{4(\mu^2 - m_t^2)}{2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})} + m_{\mathbf{V}}^2 \quad (3.78)$$

Όπως και στην περίπτωση για την έκφραση $M_{\mathbf{I}}^2|_{M_{\tilde{\chi}}=0}$ έτσι και τώρα αυτή η ποσότητα $M_{\mathbf{I}}^2|_{M_{\tilde{\chi}}=\mu}$ δεν είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz. Για αυτό επιλέγουμε και πάλι η $M_{\mathbf{I}}$ να είναι η μικρότερη δυνατή ποσότητα που είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz αλλά συνάμα να είναι μεγαλύτερη ή ίση της $M_{\mathbf{I}}^2|_{M_{\tilde{\chi}}=\mu}$,

$$M_{\mathbf{I}}^2 = \begin{cases} m_{\mathbf{V}}^2 + 4(\mu^2 - m_t^2) & \mu \leq m_t \\ \frac{\mu^2}{m_t^2} m_{\mathbf{V}}^2 & \mu > m_t \end{cases} \quad (3.79)$$

Βέβαια, η επιλογή αυτή όμως για την $M_{\mathbf{I}}$ επηρεάζει τις εκτιμήσεις των μαζών $M_{\tilde{\chi}_{a/b}}$

• Έστω ότι $\mu \leq m_t$:

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{I}}^2 &= m_{\mathbf{V}}^2 + 4(\mu^2 - m_t^2) \stackrel{(3.66)}{=} (2c-1)^2 (E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - |\vec{p}_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 \Rightarrow \\ &c(c-1) = \frac{\mu^2 - m_t^2}{(E_{\mathbf{V}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
M_{\tilde{\chi}_a}^2 &= M_{\tilde{\chi}_b}^2 = c(c-1)[2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})] + m_t^2 \xrightarrow{(3.70)} \\
&\xrightarrow{(3.80)} \\
M_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 &= \frac{\mu^2 - m_t^2}{(E_{\tilde{\mathbf{V}}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} \left[(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 \right] + m_t^2 \Rightarrow \\
M_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 &= \frac{1}{(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} \left[(\mu^2 - m_t^2)(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - (\mu^2 - m_t^2)(\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 + m_t^2(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 \right] \\
M_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 &= \frac{1}{(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} \left[\mu^2(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 + (m_t^2 - \mu^2)(\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 \right] \Rightarrow \\
&\boxed{M_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 = \mu^2 + (m_t^2 - \mu^2) \frac{(\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2}{(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2}} \quad (3.81)
\end{aligned}$$

• Έστω ότι $\mu > m_t$:

$$\begin{aligned}
M_{\mathbf{I}}^2 &= \frac{\mu^2}{m_t^2} m_{\tilde{\mathbf{V}}}^2 \stackrel{(3.66)}{=} (2c-1)^2 (E_{\tilde{\mathbf{V}}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2 - |\vec{p}_{\tilde{\mathbf{V}}}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 \Rightarrow \\
c(c-1) &= \frac{m_{\tilde{\mathbf{V}}}^2}{4(E_{\tilde{\mathbf{V}}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} \left(\frac{\mu^2 - m_t^2}{m_t^2} \right) \quad (3.82)
\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
M_{\tilde{\chi}_a}^2 &= M_{\tilde{\chi}_b}^2 = c(c-1)[2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})] + m_t^2 \xrightarrow{(3.82)} \\
M_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 &= \frac{m_{\tilde{\mathbf{V}}}^2}{4(E_{\tilde{\mathbf{V}}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} \left(\frac{\mu^2 - m_t^2}{m_t^2} \right) [2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})] + m_t^2 \Rightarrow \\
M_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 &= \frac{1}{4(E_{\tilde{\mathbf{V}}}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} \left(\frac{\mu^2 - m_t^2}{m_t^2} \right) \left[m_{\tilde{\mathbf{V}}}^2 (2m_t^2 + M_c^2(\mathbf{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}, \mathbf{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})) - 4m_t^2 \right] + \mu^2 \xrightarrow{(3.71)} \\
M_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 &= \mu^2 + \left(\frac{\mu^2 - m_t^2}{m_t^2} \right) \frac{|\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 |\vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2 - (\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} \cdot \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2}{(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} \Rightarrow \\
&\boxed{M_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 = \mu^2 + \left(\frac{\mu^2 - m_t^2}{m_t^2} \right) \frac{|\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} \times \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2}{(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2}} \quad (3.83)
\end{aligned}$$

Δηλαδή, συνολικά και για τις δύο περιπτώσεις οι εκφράσεις για τις μάζες των neutralinos είναι:

$$M_{\tilde{\chi}_{a/b}}^2 = \begin{cases} \mu^2 + (m_t^2 - \mu^2) \frac{|\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} - \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2}{(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} & \mu \leq m_t \\ \mu^2 + \frac{\mu^2 - m_t^2}{m_t^2} \frac{|\vec{p}_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} \times \vec{p}_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}}|^2}{(E_{t_a}^{\tilde{t}\tilde{t}} + E_{t_b}^{\tilde{t}\tilde{t}})^2} & \mu > m_t \end{cases} \quad (3.84)$$

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των εκφράσεων για τις μάζες στις εξισώσεις (3.79), (3.84) είναι ότι αποκλίνουν για $m_t \rightarrow 0$ όταν $\mu > 0$. Όταν ένα από τα δύο ορατά σωματίδια που χρησιμοποιούνται στον contraboost invariant JR, είναι άμαζα, τότε δεν υπάρχει πεπερασμένη έκφραση αναλλοίωτη κατά Lorentz για την μάζα του συνολικού αόρατου συστήματος η οποία

εξασφαλίζει τις μάζες του καθενός neutralino να παραμένουν μεγαλύτερες από οποιαδήποτε μη μηδενική τιμή. Σε αυτές τις περιπτώσεις, διαφορετικά JR's μπορούν να χρησιμοποιηθούν όπως περιγράφονται σε ακόλουθα παραδείγματα.

Επιστρέφοντας στην γενική περίπτωση όπου $m_{t_a} \neq m_{t_b}$, μπορούμε να γενικεύσουμε τον JR VI.2 σε περιπτώσεις με μη τετριμμένες μάζες ορατών και άορατων σωματιδίων:

Jigsaw Rule VI.3 (contraboost invariant): Εάν οι εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας που προσδιορίζουν το πως ένα άορατο σύστημα $I = \{I_a, I_b\}$ χωρίζεται σε δύο σωματίδια είναι άγνωστοι, τότε μπορούν να προσδιορισθούν επιλέγοντας ένα αντίστοιχο ζεύγος ορατών σωματιδίων, $V = \{V_a, V_b\}$ και εφαρμόζοντας τον περιορισμό $M_{V_a I_a} = M_{V_b I_b}$. Έχει υποθεθεί ότι τα τετρανύσματα των ορατών σωματιδίων είναι γνωστά στο σύστημα κέντρου μάζας $F = \{V, I\}$ όπως και το τετρανύσμα του συστήματος I , \mathbf{p}_I^F . Τα τετρανύσματα των άορατων σωματιδίων μπορούν να επιλεγούν στο F να είναι:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{I_a}^F &= (c-1)\vec{p}_{V_a}^F - c\vec{p}_{V_b}^F \\ \vec{p}_{I_b}^F &= (c-1)\vec{p}_{V_b}^F - c\vec{p}_{V_a}^F \\ E_{I_a}^F &= (c-1)E_{V_a}^F + cE_{V_b}^F \\ E_{I_b}^F &= (c-1)E_{V_b}^F + cE_{V_a}^F\end{aligned}$$

όπου:

$$c = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{(E_V^F)^2 - m_V^2 + M_I^2}}{E_V^F} \right]$$

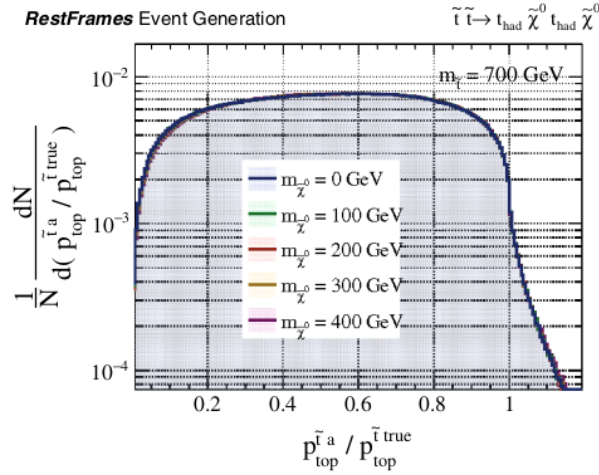
Υποθέτοντας ότι $m_{V_a} \geq m_{V_b}$, προκειμένου οι επιμέρους μάζες των άορατων σωματιδίων να είναι εγγυημένα μεγαλύτερες από κάποια γνωστή τιμή, $M_{I_{a/b}} \geq \mu \geq 0$, η εκτίμηση της μάζας M_I πρέπει να επιλεγεί ώστε να είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο:

$$M_I^2 \geq \begin{cases} m_V^2 + 4(\mu^2 - m_t^2) & \mu \leq m_{V_b} \\ \frac{\mu^2}{m_t^2} m_V^2 & \mu > m_{V_b} \end{cases}$$

Η προσέγγιση RJR για την ανάλυση της αντίδρασης $t\bar{t} \rightarrow (t\tilde{\chi}_1^0)(t\tilde{\chi}_1^0)$ σε έναν αδρονικό επιταχυντή μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

1. Εφαρμόζουμε τον JR VI.1 επιλέγοντας την M_I ως την μικρότερη δυνατή ποσότητα συμβατή με τον JR VI.3 και μη ταχυονικά neutralinos
2. Εφαρμόζουμε τον JR V.1, επιλέγοντας $p_{I,z}^{lab}$ χρησιμοποιώντας τα top ως το V
3. Εφαρμόζουμε τον JR VI.3, προσδιορίζοντας τα τετρανύσματα των neutralinos, χρησιμοποιώντας την συνθήκη $M_{t_a} = M_{t_b}$

Έχοντας εφαρμόσει αυτούς τους κανόνες, προσδιορίζονται όλες οι άγνωστες ποσότητες που σχετίζονται με τα neutralinos. Για να δούμε την φαινομενολογία των αποτελεσμάτων αυτής της προσέγγισης που προκύπτουν, μελετάμε την αντίδραση $t\bar{t} \rightarrow (t\tilde{\chi}_1^0)(t\tilde{\chi}_1^0)$ σε προσομοιωμένα γεγονότα για διαφορετικές τιμές της $m_{\tilde{\chi}_1^0}$. Η κατανομή της ανακατασκευασμένης ορμής του top στο σύστημα παραγωγής του $p_{t_a}^{\tilde{t}_a}$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.9. Η εκτίμηση για την $p_{t_a}^{\tilde{t}_a}$ δεν παρουσιάζει καμία ορατή εξάρτηση από το $m_{\tilde{\chi}_1^0}$. Ενώ οι εκτιμήσεις μάζας για κάθε neutralino μπορεί να παίρνουν μη μηδενικές τιμές, αυτό έχει αμελητέα επίδραση στον προσδιορισμό των ταχυτήτων που συσχετίζουν τα ανακατασκευασμένα πλαίσια αναφοράς.

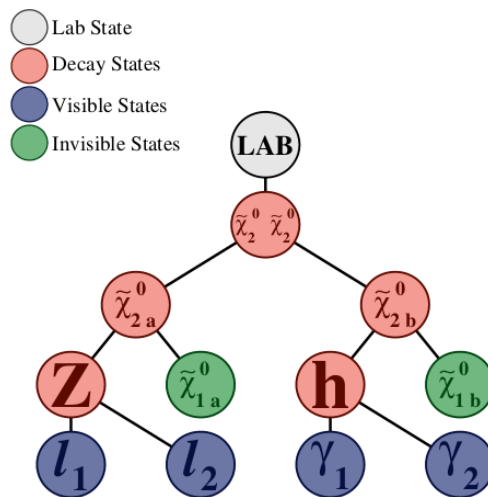


Σχήμα 3.9: Κατανομή της ανακατασκευασμένης ορμής του top στο προσεγγιστικό σύστημα παραγωγής του σε προσομοιωμένα γεγονότα της αντίδρασης $t\bar{t} \rightarrow (t\tilde{\chi}_1^0)(t\bar{t}\tilde{\chi}_1^0)$ με μεταβλητές επιλογές για την $m_{\tilde{\chi}^0}$

Όπως ίσχυε και στην περίπτωση της εκτίμησης της μάζας του W στο προηγούμενο παράδειγμα, η $p_{t_a}^{\tilde{t}}$ (η οποία ουσιαστικά είναι μία εκτίμηση της διαφοράς μάζας των stop/neutralino) μπορεί να εκτιμηθεί ανεξάρτητα της $M_{t\tilde{t}}$. Επίσης, μπορούν να υπολογιστούν οι γωνίες διάσπασης των ενδιάμεσων σωματιδίων. Μάλιστα, η γωνία διάσπασης του συστήματος distop μπορεί να υπολογιστεί με εξαιρετική ακρίβεια.

D. $\tilde{\chi}_2^0\tilde{\chi}_2^0 \rightarrow Z(l)\tilde{\chi}_1^0 h(\gamma\gamma)\tilde{\chi}_1^0$

Ολοκληρώνουμε την ανάλυση μας για τοπολογίες με δύο ορατά και δύο αόρατα σωματίδια ως τελικές καταστάσεις, θεωρώντας το παράδειγμα παραγωγής δύο neutralino-2 $\tilde{\chi}_2^0$ σε έναν αδρονικό επιταχυντή τα οποία διασπώνται στα ελαφρύτερα neutralino-1 και σε ένα Z και ένα Higgs.



Σχήμα 3.10: Το διάγραμμα διάσπασης της αντίδρασης $\tilde{\chi}_2^0\tilde{\chi}_2^0 \rightarrow Z(l)\tilde{\chi}_1^0 h(\gamma\gamma)\tilde{\chi}_1^0$

Η ομοιότητα της τοπολογίας αυτής της διάσπασης με τα προηγούμενα παραδείγματα είναι εμφανής. Το γεγονός ότι τα δύο ορατά σωματίδια, το Higgs και το Z , διασπώνται περαιτέρω

σε ένα ζευγάρι μετρούμενων σωματιδίων είναι αδιάφορο όσον αφορά την «στρατηγική» που θα ακολουθήσουμε για την επιλογή της «χαμένης» πληροφορίας. Η σημαντική διαφορά σε σχέση με τα προηγούμενα παραδείγματα είναι ότι τώρα οι ορατές καταστάσεις, έχουν μη αμελητέα διαφορά μάζας μεταξύ τους, δημιουργώντας έτσι μία ασυμμετρία στο πρόβλημα. Εφαρμόζοντας τον κανόνα JR VI.3 σε αυτή την περίπτωση, έχουμε:

$$M_{\tilde{\chi}_{1a}}^2 = (c-1)^2 m_Z^2 + c^2 m_h^2 + c(c-1) M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) \quad (3.85)$$

$$M_{\tilde{\chi}_{1b}}^2 = (c-1)^2 m_h^2 + c^2 m_Z^2 + c(c-1) M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) \quad (3.86)$$

όπου $cm = \{\mathbf{V}, \mathbf{I}\}$ το σύστημα κέντρου μάζας της αλληλεπίδρασης για την οποία έχουμε θεωρήσει ότι $m_h \geq m_Z$.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις:

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\chi}_{1a}}^2 - M_{\tilde{\chi}_{1b}}^2 &= (c-1)^2(m_Z^2 - m_h^2) + c^2(m_h^2 - m_Z^2) \Rightarrow \\ M_{\tilde{\chi}_{1a}}^2 &= M_{\tilde{\chi}_{1b}}^2 + (m_h^2 - m_Z^2)[c^2 - (c-1)^2] \Rightarrow \\ M_{\tilde{\chi}_{1a}}^2 &= M_{\tilde{\chi}_{1b}}^2 + (m_h^2 - m_Z^2)(2c-1) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$c = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2 - m_{\mathbf{V}}^2 + M_{\mathbf{I}}^2}}{E_{\mathbf{V}}^{cm}} \right] \quad \text{και} \quad M_{\mathbf{I}}^2 = \begin{cases} m_{\mathbf{V}}^2 + 4(\mu^2 - m_Z^2) & \mu \leq m_Z \\ \frac{\mu^2}{m_Z^2} m_{\mathbf{V}}^2 & \mu > m_Z \end{cases} \quad (3.88)$$

Παίρνοντας το σενάριο όπου $\mu = 0$ προκύπτει ότι:

$$M_{\mathbf{I}}^2 = m_{\mathbf{V}}^2 - 4m_Z^2 \iff M_{\mathbf{I}}^2 - m_{\mathbf{V}}^2 = -4m_Z^2 \longrightarrow c = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} \right] \quad (3.89)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.87) την έκφραση για το c , προκύπτει:

$$\boxed{M_{\tilde{\chi}_{1a}}^2 = M_{\tilde{\chi}_{1b}}^2 + (m_h^2 - m_Z^2) \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}}} \quad (3.90)$$

Αντίστοιχα για το $M_{\tilde{\chi}_{1b}}$ παίρνοντας και πάλι $\mu = 0$ έχουμε:

$$M_{\mathbf{I}}^2 = m_{\mathbf{V}}^2 - 4m_Z^2 = (2c-1)^2 (E_{\mathbf{V}}^{cm})^2 - (\vec{p}_{\mathbf{V}}^{cm})^2 \iff c(c-1) = -\frac{m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
M_{\tilde{\chi}_{1b}}^2 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} - 1 \right)^2 m_h^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} \right)^2 m_Z^2 \\
&\quad - \frac{m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2} M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) \\
&= \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} - \frac{1}{2} \right)^2 m_h^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} \right)^2 m_Z^2 \\
&\quad - \frac{m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2} M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) \\
&= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2} + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} \right) m_h^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2} + 1 \right. \\
&\quad \left. + 2\sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} \right) m_Z^2 - \frac{m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2} M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) \\
&= -\frac{m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2} m_h^2 + \frac{1}{2} m_h^2 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} - \frac{m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2} m_Z^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} \\
&\quad - \frac{m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2} M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) \\
&= -\frac{m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2} (m_h^2 + m_Z^2 + M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm})) + \frac{1}{2} (m_h^2 + m_Z^2) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} (m_h^2 - m_Z^2)
\end{aligned}$$

Προσθαφαιρούμε τον όρο $\frac{1}{2}(m_h^2 - m_Z^2)$

$$\begin{aligned}
M_{\tilde{\chi}_{1b}}^2 &= -\frac{m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2} (m_h^2 + m_Z^2 + M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm})) + \frac{1}{2} (m_h^2 + m_Z^2) - \frac{1}{2} (m_h^2 - m_Z^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} (m_h^2 - m_Z^2) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} (m_h^2 - m_Z^2) \\
&= -\frac{m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2} (m_h^2 + m_Z^2 + M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm})) + m_Z^2 + \frac{1}{2} (m_h^2 - m_Z^2) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} \right] \\
&= \frac{m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2} \left[-m_h^2 - m_Z^2 - M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) + (E_{\mathbf{V}}^{cm})^2 \right] + \frac{1}{2} (m_h^2 - m_Z^2) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\mathbf{V}}^{cm})^2}} \right]
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\cdot (E_{\mathbf{V}}^{cm})^2 - m_h^2 - m_Z^2 - M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) &= (E_Z^{cm} + E_h^{cm})^2 - m_h^2 - m_Z^2 - 2E_Z^{cm} E_h^{cm} - 2\vec{p}_Z^{cm} \cdot \vec{p}_h^{cm} \\
&= (E_Z^{cm})^2 + (E_h^{cm})^2 + 2E_Z^{cm} E_h^{cm} - m_h^2 - m_Z^2 - 2E_Z^{cm} E_h^{cm} - 2\vec{p}_Z^{cm} \cdot \vec{p}_h^{cm} \\
&= (E_Z^{cm})^2 + (E_h^{cm})^2 - [(E_h^{cm})^2 - (\vec{p}_h^{cm})^2] - [(E_Z^{cm})^2 - (\vec{p}_Z^{cm})^2] - 2\vec{p}_Z^{cm} \cdot \vec{p}_h^{cm} \\
&\quad |\vec{p}_h^{cm}|^2 + |\vec{p}_Z^{cm}|^2 - 2\vec{p}_Z^{cm} \cdot \vec{p}_h^{cm} = |\vec{p}_Z^{cm} - \vec{p}_h^{cm}|^2
\end{aligned}$$

Επομένως

$$M_{\tilde{\chi}_{1b}}^2 = m_Z^2 \frac{|\vec{p}_Z^{cm} - \vec{p}_h^{cm}|^2}{(E_h^{cm} + E_Z^{cm})^2} + \frac{1}{2}(m_h^2 - m_Z^2) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4m_Z^2}{(E_{\sqrt{V}}^{cm})^2}} \right] \quad (3.91)$$

Συγκρίνοντας αυτές τις εξισώσεις (3.90),(3.91) με την (3.84) του προηγούμενου παραδείγματος, η έκφραση για την $M_{\tilde{\chi}_{1b}}$ έχει έναν επιπλέον όρο ανάλογο του παράγοντα $m_h^2 - m_Z^2$ υπονοώντας ότι οι διαφορές μαζών των ορατών σωματιδίων απορροφώνται από τις μάζες των άορατων σωματιδίων. Πιο ανησυχητικό είναι ότι η $M_{\tilde{\chi}_{1a}}$ είναι συστηματικά μεγαλύτερη της $M_{\tilde{\chi}_{1b}}$:

$$M_{\tilde{\chi}_{1a}}^2 - M_{\tilde{\chi}_{1b}}^2 \geq (m_h - m_Z)^{3/2}(m_h + 3m_Z)^{1/2} \quad (3.92)$$

Η συνθήκη $M_{\tilde{\chi}_{2a}} = M_{\tilde{\chi}_{2b}}$ που προέρχεται από τον JR είναι η αιτία για την μεγάλη συστηματική διαφορά μεταξύ των μαζών $M_{\tilde{\chi}_{1a/b}}$, ένα κινηματικό χαρακτηριστικό το οποίο δεν είναι παρόν στην διαδικασία που θέλουμε να εξετάσουμε. Στην προκείμενη περίπτωση, τα δύο ελαφρύτερα neutralinos έχουν ίδια μάζα, συνεπώς αυτό το neutralino που σχετίζεται με το Z θα πρέπει να λαμβάνει περισσότερη ορμή από την διάσπαση του γονέα παρά να αυξάνει την μάζα του. Γενικά σε έλλειψη καλύτερης επιλογής, μία πρακτική εφαρμογή θα επιθυμούσε οι δύο μάζες $M_{\tilde{\chi}_{1a/b}}$, να παίρνουν τιμές όσο το δυνατόν πιο κοντά στο μηδέν. Για να επιτευχθεί αυτό αναθεωρούμε το πως κατασκευάζεται ο contraboost invariant JR που εφαρμόσαμε.

Με την υπόθεση ότι $M_{\tilde{\chi}_{2a}} = M_{\tilde{\chi}_{2b}}$, μπορούμε και πάλι να συσχετίσουμε τις ταχύτητες αυτών των σωματιδίων με το κοινό τους πλαίσιο κέντρου μάζας, μέσω ενός contraboost και επιλέγουμε την τιμή του να περιορίζει την ορμή των άορατων neutralinos.

Αντί να θέσουμε το $\vec{\beta}_c$ σύμφωνα με μία ελαχιστοποίηση, όπως κάναμε προηγουμένως, θεωρούμε μία ad hoc γενίκευση η οποία διατηρεί την αναλλοιώτητα.

$$\vec{\beta}_c = \vec{\beta}_{\tilde{\chi}_{2a}^{cm}} = -\vec{\beta}_{\tilde{\chi}_{2b}^{cm}} = \frac{c_a \vec{p}_Z^{cm} - c_b \vec{p}_h^{cm}}{c_a E_Z^{cm} + c_b E_h^{cm}} \quad (3.93)$$

Επομένως, με βάση αυτή την επιλογή, οι ανακατασκευασμένες ενέργειες των ορατών σωματιδίων στο εκάστοτε πλαίσιο παραγωγής τους, είναι:

$$E_Z^{\tilde{\chi}_{2a}} = \frac{c_a m_Z^2 + \frac{c_b}{2} M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm})}{\sqrt{c_a^2 m_Z^2 + c_b^2 m_h^2 + M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm})}} \quad (3.94)$$

$$E_h^{\tilde{\chi}_{2b}} = \frac{c_b m_h^2 + \frac{c_a}{2} M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm})}{\sqrt{c_a^2 m_Z^2 + c_b^2 m_h^2 + M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm})}} \quad (3.95)$$

σε αντιστοιχία με την (3.59).

Εφόσον οι ποσότητες c_a, c_b είναι αναλλοιώτες, όπως όλες οι άλλες ποσότητες που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις, τότε οι ενέργειες $E_Z^{\tilde{\chi}_{2a}}, E_h^{\tilde{\chi}_{2b}}$ θα παρουσιάζουν επίσης αυτή την ιδιότητα. Επομένως, θέλουμε τα c_a, c_b να είναι αναλλοιώτα. Για να γίνει αυτό, πρέπει αυτές οι ποσότητες να κατασκευάζονται από παράγοντες όπως m_Z^2, m_h^2 και $M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm})$ τα οποία είναι αναλλοιώτα. Θέλουμε να αξιοποιήσουμε αυτόν τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας και να τα επιλέξουμε έτσι ώστε να περιορίσουμε την διαφορά των μαζών.

Ορίζοντας $c_a = \frac{1}{2}(1 + \hat{k}k_a), c_b = \frac{1}{2}(1 + \hat{k}k_b)$ η διαφορά των μαζών, χρησιμοποιώντας το

πιο γενικό contraboost, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} M_{\tilde{\chi}_{1a}}^2 &= (c_a - 1)^2 m_Z^2 + c_b^2 m_h^2 + c_b(c_a - 1) M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) \\ M_{\tilde{\chi}_{1b}}^2 &= (c_b - 1)^2 m_h^2 + c_a^2 m_Z^2 + c_a(c_b - 1) M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) \end{aligned} \right\} \text{Αφαιρούμε κατά μέλη}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{\tilde{\chi}_1}^2 &= m_Z^2[(c_a - 1)^2 - c_a^2] + m_h^2[c_b^2 - (c_b - 1)^2] + M_c^2(c_b c_a - c_b - c_a c_b + c_a) \\ &= m_Z^2(1 - 2c_a) + m_h^2(2c_b - 1) - M_c^2(c_b - c_a) \\ &= m_Z^2(1 - 1 - \hat{k}k_a) + m_h^2(1 + \hat{k}k_b - 1) - \frac{M_c^2}{2}(1 + \hat{k}k_b - 1 - \hat{k}k_a) \\ &= k_b m_h^2 \hat{k} - k_a m_Z^2 \hat{k} + \frac{M_c^2}{2}(k_a - k_b) \hat{k} \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\boxed{\Delta M_{\tilde{\chi}_1}^2 = \hat{k} \left[\frac{M_c^2}{2}(k_a - k_b) - (k_a m_Z^2 - k_b m_h^2) \right]} \quad (3.96)$$

Χρησιμοποιούμε την επιλογή των παραγόντων k_a, k_b ώστε να ελαχιστοποιήσουμε την $\Delta M_{\tilde{\chi}_1}^2$:

$$\text{Ορίζοντας} \quad \begin{cases} k_a = m_Z^2 - m_h^2 + M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) - 2m_Z m_h \\ k_b = m_h^2 - m_Z^2 + M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) - 2m_Z m_h \end{cases} \quad \text{προκύπτει:}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{\tilde{\chi}_1}^2 &= \hat{k} \left\{ \frac{M_c^2}{2}(2m_Z^2 - 2m_h^2) - [m_Z^2(m_Z^2 - m_h^2 + M_c^2 - 2m_Z m_h) - m_h^2(m_h^2 - m_Z^2 + M_c^2 - 2m_Z m_h)] \right\} \\ &= \hat{k} \left\{ M_c^2(m_Z^2 - m_h^2) - [M_c^2(m_Z^2 - m_h^2) + m_Z^4 - m_h^4 - 2m_Z^3 m_h + 2m_Z m_h^3] \right\} \\ &= \hat{k}(m_Z^4 - m_h^4 - 2m_Z^3 m_h + 2m_Z m_h^3) \\ &= \hat{k}(m_h + m_Z)(m_h - m_Z)^3 \end{aligned} \quad (3.97)$$

Ο παράγοντας \hat{k} κανονικοποιεί τα k_a, k_b έτσι ώστε αυτά να είναι αδιάστατα και με το $\lim_{M_c^2 \rightarrow \infty} \hat{k}^{-1} = M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm})$, η διαφορά των μαζών των άορατων σωματιδίων θα προσεγγίσει το μηδέν όταν το σπάσιμο της μάζας μεταξύ του γονέα $\tilde{\chi}_2^0$ και του άορατου $\tilde{\chi}_1^0$ είναι μεγάλο, σε σύγκριση με τις μάζες των μποζονίων Higgs και Z.

Για να δούμε αν η τελική επιλογή μας για το \hat{k} έχει την αναμενόμενη ασυμπτωτική συμπερι-

φορά επιλέγουμε την τιμή του θέτοντας $M_{\hat{\chi}_{1b}} = 0$ και επιλύοντας ως προς \hat{k} :

$$\begin{aligned}
0 &= M_{\hat{\chi}_{1b}}^2 = (c_b - 1)^2 m_h^2 + c_a^2 m_Z^2 + c_a(c_b - 1)M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) \iff \\
0 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\hat{k}k_b\right)^2 m_h^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\hat{k}k_a\right)^2 m_Z^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\hat{k}k_a\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\hat{k}k_b\right)M_c^2 \iff \\
0 &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\hat{k}k_b + \frac{1}{4}k_b^2\hat{k}^2\right)m_h^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\hat{k}k_a + \frac{1}{4}k_a^2\hat{k}^2\right)m_Z^2 \\
&\quad + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\hat{k}k_b - \hat{k}k_a) + \frac{1}{4}k_a k_b \hat{k}^2\right]M_c^2 \iff \\
0 &= \hat{k}^2(k_b^2 m_h^2 + k_a^2 m_Z^2 + k_a k_b M_c^2) + \frac{\hat{k}}{2}(k_a m_Z^2 - k_b m_h^2) + \frac{1}{2}(k_b - k_a)M_c^2 + \frac{1}{4}(m_h^2 + m_Z^2 - M_c^2)
\end{aligned}$$

Οι λύσεις του τριωνύμου είναι:

$$\hat{k} = \frac{k_b m_h^2 - k_a m_Z^2 + \frac{1}{2}(k_a - k_b)M_c^2 \pm 2\sqrt{\Delta}}{k_b^2 m_h^2 + k_a^2 m_Z^2 + k_a k_b M_c^2} \quad (3.98)$$

όπου

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{4} \left[k_a m_Z^2 - k_b m_h^2 + \frac{1}{2}(k_b - k_a)M_c^2 \right]^2 - 4 \frac{1}{4} (m_h^2 + m_Z^2 - M_c^2) \frac{1}{4} (k_b^2 m_h^2 + k_a^2 m_Z^2 + k_a k_b M_c^2) \\
&= \frac{1}{4} \left[k_a^2 m_Z^4 + k_b^2 m_h^4 - 2k_a k_b m_h^2 m_Z^2 + \frac{1}{4}(k_b - k_a)^2 M_c^4 + (k_b - k_a)M_c^2 (k_a m_Z^2 - k_b m_h^2) \right. \\
&\quad \left. - \left(k_b^2 m_h^4 + k_b^2 m_h^2 m_Z^2 - k_b^2 m_h^2 M_c^2 + k_a^2 m_h^2 m_Z^2 + k_a^2 m_Z^4 - k_a^2 m_Z^2 M_c^2 + k_a k_b M_c^2 m_h^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + k_a k_b M_c^2 m_Z^2 - k_a k_b M_c^4 \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left\{ M_c^4 \left[\frac{1}{4}(k_a - k_b)^2 + k_a k_b \right] + M_c^2 \left[(k_b - k_a)(k_a m_Z^2 - k_b m_h^2) + k_a^2 m_Z^2 + k_b^2 m_h^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - k_a k_b m_h^2 - k_a k_b m_Z^2 \right] + m_Z^2 m_h^2 (-k_a^2 - k_b^2 - 2k_a k_b) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{M_c^2}{4} (k_a^2 + k_b^2 - 2k_a k_b + 4k_a k_b) + M_c^2 (-k_a^2 m_Z^2 - k_b^2 m_h^2 + k_a k_b m_Z^2 + k_a k_b m_h^2) \right. \\
&\quad \left. + k_a k_b m_h^2 + k_a^2 m_Z^2 + k_b^2 m_h^2 - k_a k_b m_h^2 - k_a k_b m_Z^2 - m_Z^2 m_h^2 (k_a + k_b)^2 \right] \\
&= \frac{1}{4} (k_a + k_b)^2 \left(\frac{M_c^4}{4} - m_Z^2 m_h^2 \right) \\
&= \frac{(k_a + k_b)^2}{16} (M_c^4 - 4m_Z^2 m_h^2)
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\hat{k} = \frac{k_b m_h^2 - k_a m_Z^2 + \frac{k_a - k_b}{2} M_c^2 \pm \frac{k_a + k_b}{2} \sqrt{M_c^4 - 4m_Z^2 m_h^2}}{k_b^2 m_h^2 + k_a^2 m_Z^2 + k_a k_b M_c^2} \quad (3.99)$$

$$\lim_{M_c^2 \rightarrow \infty} \hat{k}^{-1} = \lim_{M_c^2 \rightarrow \infty} \frac{k_b^2 m_h^2 + k_a^2 m_Z^2 + k_a k_b M_c^2}{k_b m_h^2 - k_a m_Z^2 + \frac{k_a - k_b}{2} M_c^2 \pm \frac{k_a + k_b}{2} \sqrt{M_c^4 - 4m_Z^2 m_h^2}} = \frac{k_a k_b}{\frac{k_a - k_b}{2} \pm \frac{k_a + k_b}{2}}$$

$$\lim_{M_c^2 \rightarrow \infty} \hat{k}^{-1} = \begin{cases} k_b = m_h^2 - m_Z^2 + M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) - 2m_Z m_h \xrightarrow{M_c^2 \rightarrow \infty} M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) \\ -k_a = m_h^2 - m_Z^2 - M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) + 2m_Z m_h \xrightarrow{M_c^2 \rightarrow \infty} -M_c^2(\mathbf{p}_Z^{cm}, \mathbf{p}_h^{cm}) \end{cases}$$

Προφανώς την δεύτερη λύση την απορρίπτουμε καθώς μας βγάζει μη αποδεκτή λύση. Οπότε, εν τέλει:

$$\hat{k} = \frac{k_b m_h^2 - k_a m_Z^2 + \frac{k_a - k_b}{2} M_c^2 + \frac{k_a + k_b}{2} \sqrt{M_c^4 - 4m_Z^2 m_h^2}}{k_b^2 m_h^2 + k_a^2 m_Z^2 + k_a k_b M_c^2} \quad (3.100)$$

Καθώς ισχύει ότι $\lim_{M_c^2 \rightarrow \infty} k_a = \lim_{M_c^2 \rightarrow \infty} k_b = M_c^2$, οι επιλογές για τα k_a, k_b και \hat{k} εξασφαλίζουν ότι η $\Delta M_{\tilde{\chi}_1}^2$ καθώς και οι επιμέρους μάζες των neutralinos, έχουν ανακατασκευαστεί να είναι όσο το δυνατόν μικρότερα.

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η έκφραση για το M_I , με αυτές τις επιλογές δεν είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz συνάρτηση που σημαίνει ότι πρέπει να ταυτοποιήσουμε την μικρότερη, αναλλοίωτη συνάρτηση των τετραορμών των ορατών σωματιδίων η οποία θα είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο η τωρινή εκτίμηση, το οποίο εξασφαλίζει ότι οι εκτιμήσεις για τις μάζες των αόρατων σωματιδίων θα παραμείνουν μη αρνητικές. Σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε:

$$M_I^2 = M_V^2 - 4m_Z m_h \geq M_I^2|_{M_{\tilde{\chi}_{1b}}=0} \quad (3.101)$$

το οποίο είναι μικρότερο από την τιμή $M_V^2 - 4m_Z^2$ η οποία απαιτείται όταν χρησιμοποιήσουμε τον προηγούμενο *contraboost* JR VI.3.

Οι λεπτομέρειες για το πως επιλέγονται οι τετραορμές των αόρατων neutralinos, με αυτή την προσέγγιση, μπορούν να συνοψιστούν ως ένα πιο γενικό *contraboost* JR:

Jigsaw Rule VI.4 (contraboost invariant): Εάν οι εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας που προσδιορίζουν το πως ένα αόρατο σύστημα $I = \{I_a, I_b\}$ χωρίζεται σε δύο σωματίδια είναι άγνωστοι, τότε μπορούν να προσδιορισθούν επιλέγοντας ένα αντίστοιχο ζεύγος ορατών σωματιδίων, $V = \{V_a, V_b\}$ και εφαρμόζοντας τον περιορισμό $M_{V_a I_a} = M_{V_b I_b}$. Έχει υποτεθεί ότι τα τετρανύσματα των ορατών σωματιδίων είναι γνωστά στο σύστημα κέντρου μάζας $F = \{V, I\}$ όπως και το τετρανύσμα του συστήματος I , \mathbf{p}_I^F . Τα τετρανύσματα των αόρατων σωματιδίων μπορούν να επιλεγούν στο F να είναι:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{I_a}^F &= (\hat{c}_a - 1) \vec{p}_{V_a}^F - \hat{c}_b \vec{p}_{V_b}^F \\ \vec{p}_{I_b}^F &= (\hat{c}_b - 1) \vec{p}_{V_b}^F - \hat{c}_a \vec{p}_{V_a}^F \\ E_{I_a}^F &= (\hat{c}_a - 1) E_{V_a}^F + \hat{c}_b E_{V_b}^F \\ E_{I_b}^F &= (\hat{c}_b - 1) E_{V_b}^F + \hat{c}_a E_{V_a}^F \end{aligned}$$

όπου \hat{c}, c_a και c_b είναι παράγοντες των οποίων οι μορφές εξαρτώνται από τις επιμέρους μάζες των ορατών και αόρατων σωματιδίων. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $m_{V_a} \geq m_{V_b}$ και για τις μάζες του καθενός αόρατου σωματιδίου απαιτείται να ικανοποιούν τις σχέσεις $M_{I_a} \geq \mu_a, M_{I_b} \geq \mu_b$ με $\mu = \max(\mu_a, \mu_b)$

• *JR case VI.4.1* ($\mu \leq m_{V_b}$): Οι παράγοντες c_a, c_b ορίζονται ως προς τις παραμέτρους k_a, k_b και \hat{k} ως εξής:

$$c_a = \frac{1}{2}(1 + \hat{k}k_a), \quad c_b = \frac{1}{2}(1 + \hat{k}k_b)$$

όπου τα k_a, k_b και \hat{k} έχουν επιλεγεί να είναι:

$$\begin{aligned} k_a &= m_{V_a}^2 - m_{V_b}^2 + M_c^2 - 2m_{V_a}^2 m_{V_b}^2 \\ k_b &= (m_{V_a}^2 - m_{V_b}^2) \left(\frac{2\mu}{m_{V_b}} - 1 \right) + M_c^2 - 2m_{V_a}^2 m_{V_b}^2 \\ \hat{k} &= \frac{\hat{k}_n}{\hat{k}_d} \end{aligned}$$

με

$$\begin{aligned} \hat{k}_d^2 &= k_a^2 m_{V_a}^2 + k_b^2 m_{V_b}^2 + k_a k_b M_c^2 \\ \hat{k}_n &= k_a m_{V_a}^2 - k_b m_{V_b}^2 + \frac{k_b - k_a}{2} M_c^2 + \frac{1}{2} \sqrt{(k_a + k_b)^2 (M_c^4 - 4m_{V_a}^2 m_{V_b}^2) + 16\mu^2 \hat{k}_d^2} \end{aligned}$$

όπου $M_c^2 \equiv M_c^2(\mathbf{p}_{V_a}^F, \mathbf{p}_{V_b}^F)$. Ο παράγοντας \hat{c} δίνεται από

$$\hat{c} = \frac{1}{2} \left[\frac{E_V^F + \sqrt{(E_V^F)^2 + M_I^2 - m_V^2}}{c_a E_{V_a}^F + c_b E_{V_b}^F} \right]$$

Για να εξασφαλίσουμε ότι $M_{I_b} \geq M_{I_a} \geq \mu$, η M_I πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο:

$$M_I^2 \geq m_V^2 + 4(\mu + m_{V_a})(\mu - m_{V_b})$$

• JR case VI.4.2 ($\mu > m_{V_b}$): Οι παράγοντες c_a, c_b και \hat{c} ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} c_a &= c_b = 1 \\ \hat{c} &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{(E_V^F)^2 + M_I^2 - m_V^2}}{E_V^F} \right] \end{aligned}$$

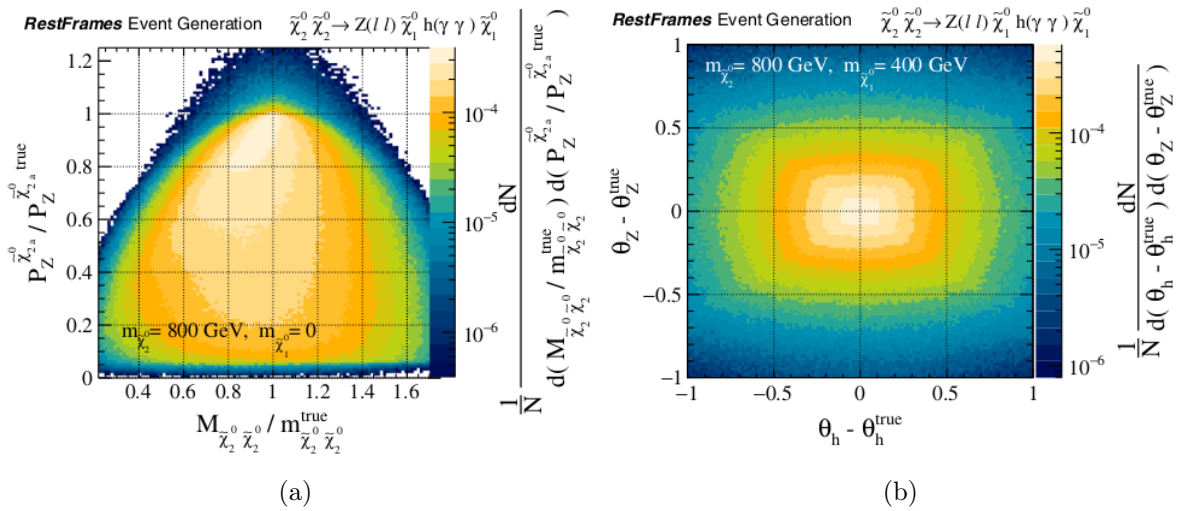
Για να εξασφαλίσουμε ότι $M_{I_a} \geq \mu_a$ και $M_{I_b} \geq \mu_b$ η M_I πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο:

$$M_I^2 \geq \frac{\max(\mu_a^2 - m_{V_a}^2, \mu_b^2 - m_{V_b}^2)}{m_{V_b}} m_V^2$$

Τα βήματα ανάλυσης της αντίδρασης $\tilde{\chi}_2^0 \tilde{\chi}_2^0 \rightarrow Z(l) \tilde{\chi}_1^0 h(\gamma\gamma) \tilde{\chi}_1^0$ με την προσέγγιση RJR, μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

1. Εφαρμόζουμε τον JR VI.1 επιλέγοντας την M_I ως την μικρότερη δυνατή ποσότητα συμβατή με τον JR VI.4.1 και μη ταχυονικά neutralinos
2. Εφαρμόζουμε τον JR V.1, επιλέγοντας $p_{I,z}^{lab}$ χρησιμοποιώντας όλα τα ορατά σωματίδια ως το V
3. Εφαρμόζουμε τον JR VI.4.1, προσδιορίζοντας τα τετρανύσματα των neutralinos, χρησιμοποιώντας την συνθήκη $M_{\tilde{\chi}_{2a}} = M_{\tilde{\chi}_{2b}}$

Παρά τις επιπλοκές που σχετίζονται με τις μη τετριμμένες μάζες των Z και Higgs, ο *constrabooost invariant jigsaw* επιτρέπει την κινηματική αυτών των ορατών συστημάτων στα συστήματα παραγωγής τους, να εκτιμώνται με μικρό συστηματικό σφάλμα. Η ορμή του ανακατασκευασμένου μποζονίου Z στο προσεγγιστικό πλαίσιο παραγωγής του παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.11a. Παρατηρούμε ότι η ομοιότητα με το Σχήμα 3.6 το οποίο παρουσιάζει ανάλογες παρατηρήσιμες ποσότητες, είναι εντυπωσιακή. Η $p_Z^{\tilde{\chi}_{2a}^0}$, η οποία είναι ευαίσθητη στο σπάσιμο της μάζας μεταξύ των δύο neutralino, εκτιμάται σχεδόν ανεξάρτητα από την συνολική μάζα του συστήματος $d\tilde{\chi}_{2a}^0 - M_{\text{cm}}$, με την κορυφή να πέφτει αξιόπιστα πάνω στην πραγματική τιμή. Σε σχέση με τα προηγούμενα παραδείγματα, δεν είναι ορατή καμία πρόσθετη παραμόρφωση στην κατανομή του $p_Z^{\tilde{\chi}_{2a}^0}$ λόγω των μαζών του Z και του Higgs.



Σχήμα 3.11: Κατανομές (a) της ανακατασκευασμένης ορμής του Z μποζονίου στο προσεγγιστικό σύστημα παραγωγής του ως συνάρτηση της M_{cm} (b) της ανακατασκευασμένης γωνίας διάσπασης του Z μποζονίου, θ_Z συναρτήσεως της γωνίας διάσπασης του Higgs θ_h , σε προσομοιωμένα γεγονότα της αντίδρασης $\tilde{\chi}_{2a}^0 \tilde{\chi}_{2a}^0 \rightarrow Z(l l) \tilde{\chi}_{1a}^0 h(\gamma \gamma) \tilde{\chi}_{1a}^0$

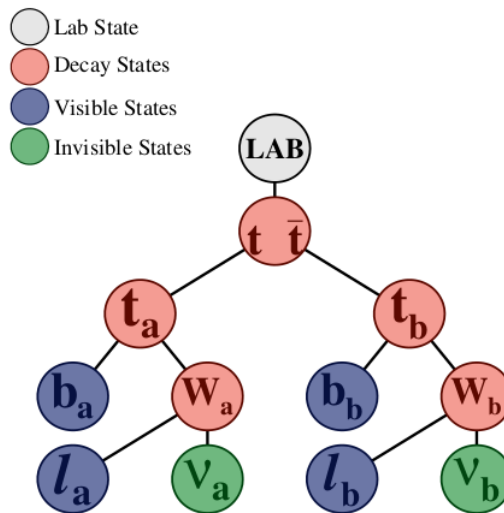
Το ότι οι προσεγγίσεις των πλαισίων ηρεμίας των neutralino, $\tilde{\chi}_{2a}$ και $\tilde{\chi}_{2b}$, έχουν ισχυρή αντιστοιχία με τα πραγματικά, μπορεί να φανεί λαμβάνοντας υπόψη τις ανακατασκευασμένες γωνίες διάσπασης των μποζονίων Z και Higgs, οι οποίες απαιτούν γνώση αυτών των πλαισίων αναφοράς καθώς αυτά είναι τα συστήματα παραγωγής τους. Οι εκτιμήσεις θ_Z και θ_h πλησιάζουν αρκετά καλά τις πραγματικές τιμές τους, όπως φαίνεται από το Σχήμα 3.11b, και μάλιστα είναι ανεξάρτητες της ορμής του συστήματος κέντρου μάζας στο πλαίσιο του εργαστηρίου και των μαζών των sparticles στο event. Αυτό είναι εφικτό, επειδή τα προσεγγιστικά συστήματα ηρεμίας των $\tilde{\chi}_{2a}$ και $\tilde{\chi}_{2b}$ έχουν κληρονομήσει τις ιδιότητες αναλλοιωτότητας από τα συστήματα αναφοράς που ακολουθούν στο διάγραμμα διάσπασης. Η προσεγγιστική ανακατασκευή των ενδιάμεσων συστημάτων διάσπασης στο γεγονός, επιτρέπει τις γωνίες διάσπασης αυτών των ορατών σωματιδίων να μπορούν να εκτιμηθούν με εξαιρετική ακρίβεια.

3.3.2 Συνδυαστικές Ασάφειες

Επεκτείνουμε την βιβλιοθήκη των JR's, θεωρώντας παραδείγματα τα οποία έχουν, όπως και πριν δύο αόρατα σωματίδια αλλά τέσσερα ορατά σωματίδια ως τις τελικές καταστάσεις. Τα δύο επιπλέον σωματίδια, παρέχουν τόσο νέες δυσκολίες όσο και ευκαιρίες. Ενώ πρέπει να επιλυθεί μία συνδυαστική ασάφεια για το ποιο ορατό σωματίδιο σχετίζεται με κάθε αόρατο, περισσότερα ορατά σωματίδια επιτρέπουν καλύτερη ανάλυση της κινηματικής των αόρατων σωματιδίων.

A. $t\bar{t} \rightarrow bW(l\nu)bW(l\nu)$

Το πρώτο παράδειγμα που θα μελετήσουμε με τέσσερα ορατά σωματίδια και δύο αόρατα σωματίδια ως τελικές καταστάσεις είναι η παραγωγή ενός top και antitop κουάρκ τα οποία διασπώνται σε b κουάρκ, λεπτόνια και νετρίνα μέσω δύο ενδιαμέσων W μποζονίων. Υποθέτουμε ότι οι τετραορμές των δύο b κουάρκ ($\mathbf{p}_{b_a}^{lab}, \mathbf{p}_{b_b}^{lab}$) και των δύο λεπτονίων ($\mathbf{p}_{l_a}^{lab}, \mathbf{p}_{l_b}^{lab}$) έχουν μετρηθεί στο σύστημα του εργαστηρίου. Η ελλείπουσα εγκάρσια ορμή, \vec{E}_T μεταφράζεται ως η εγκάρσια ορμή του συστήματος των δύο νετρίνων $I = \{\nu_a, \nu_b\}, p_{I,T}^{lab}$.



Σχήμα 3.12: Το διάγραμμα διάσπασης της αντίδρασης $t\bar{t} \rightarrow bW(l\nu)bW(l\nu)$

Εκτός από τους αγνώστους που σχετίζονται με τα αόρατα σωματίδια, υπάρχει και μία συνδυαστική ασάφεια που σχετίζεται με την απόφαση ποιο ανακατασκευασμένο b jet πρέπει να συσχετιστεί με κάθε λεπτόνιο. Υποθέτουμε ότι δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε αξιόπιστα τα b jets που προέρχονται από τα b κουάρκ και τα αντισωματίδια τους, οπότε αποφασίζουμε βασιζόμενοι αποκλειστικά στην κινηματική του γεγονότος. Καθορίζοντας τα $V_a = \{b_a, l_a\}$, $V_b = \{b_b, l_b\}$ ως τα δύο σύνολα των ορατών σωματιδίων που σχετίζονται με κάθε διάσπαση των top, ορίζουμε έναν JR ο οποίος επιλέγει ποιο ζεύγος b/l ελαχιστοποιεί την συνάρτηση $M_{V_a}^2 + M_{V_b}^2$. Αυτή είναι μία απλή και εν γένει, σωστή προσέγγιση, καθώς επιλέγει συνδυασμούς όπου το άθροισμα των εσωτερικών γινομένων των τετρανυσμάτων είναι μικρότερο, συνδυάζοντας αποτελεσματικά τα σωματίδια που «πετούν» πιο κοντά μεταξύ τους, όπως αναμένεται από μία κοινή διάσπαση. Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε αυτόν τον combinatoric JR ως εξής:

Jigsaw Rule VII.1 (combinatoric minimization): Εάν υπάρχει ένα σύνολο n ορατών σωματιδίων, $V = \{V_1, \dots, V_n\}$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε μία διαμέριση του V σε $m \leq n$ υποσύνολα, $P_V = \{S_{V_1}, \dots, S_{V_m}\}$, ελαχιστοποιώντας μία επιλεγμένη μετρική στο χώρο όλων των έγκυρων διαμερίσεων, $P_V \in \mathbb{P}_V$.

Μία διαμέριση P_V είναι έγκυρη εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες

- (a) $\bigcup_{S_V \in P_V} S_V = V$
- (b) $\forall S_{V_a}, S_{V_b} \in P_V, S_{V_a} \neq S_{V_b} \Rightarrow S_{V_a} \cap S_{V_b} = \emptyset$
- (c) $|S_{V_i}| \geq or = n_i \leq 1$, για οποιοδήποτε n_i
- (d) $Q(S_{V_i}) = q_i$, για οποιαδήποτε φορτία q_i

Υποθέτουμε πως σε κάθε γεγονός υπάρχει τουλάχιστον μία έγκυρη διαμέριση, $\exists |P_V| \geq 1$, και επιλέγουμε ως μετρική προς ελαχιστοποίηση μία συνάρτηση $f(P_V)$ των κινηματικών ποσοτήτων του event. Έτσι, θα επιλέξουμε εκείνη ην διαμέριση \hat{P}_V για την οποία ισχύει ότι

$$f(\hat{P}_V) = \min_{P_V \in \mathbb{P}_V} f(P_V) \quad (3.102)$$

Εάν η συνάρτηση $f(P_V)$ εξαρτάται από άλλες άγνωστες κινηματικές ή συνδυαστικές πληροφορίες οι οποίες εξαρτώνται από την εφαρμογή άλλων JR's οι οποίοι, με την σειρά τους, εξαρτώνται από την επιλογή του \hat{P}_V , τότε αυτοί οι JR's εκτιμώνται ανεξάρτητα για κάθε τιμή του P_V στην (3.102).

• *JR case VII.1.1 (minimize masses squared)*: Μία βολική επιλογή για την $f(P_V)$ είναι το άθροισμα των εσωτερικών γινομένων των τετρανυσμάτων των στοιχείων των m συνόλων σε μία διαμέριση, η οποία ενδεχομένως να περιλαμβάνει και άλλα σωματίδια. Ορίζοντας με $O = \{O_1, \dots, O_m\}$ το σύνολο αυτών των σωματιδίων που σχετίζονται με κάθε συνδυαστικό υποσύνολο σε μία διαμέριση P_V , μπορούμε να ορίσουμε την $f(P_V)$ ως

$$f(P_V) = \sum_{i=1}^m M_{S_{V_i} O_i}^2 = \sum_{i=1}^m (\mathbf{p}_{S_{V_i}} + \mathbf{p}_{O_i})^2 \quad (3.103)$$

Η ελκυστικότητα αυτής της λειτουργικής μορφής είναι ότι μπορεί να παραγοντοποιηθεί γραμμικά, με την έννοια ότι εάν $P'_V = \{S'_{V_1}, \dots, S'_{V_m}\}$ είναι μία διαμέριση του V όπου P_V είναι η διόρθωση του, έτσι ώστε $|P_V| \leq |P'_V|$ και $\forall S_V \in P_V, \exists S'_V \in P'_V$ με $S_V \subseteq S'_V$, τότε η $f(P_V)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$f(P_V) = \sum_{S'_V \in P'_V} f(S'_V) = \sum_{S'_V \in P'_V} \sum_{S_V \in S'_V} f(S_V) \quad (3.104)$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει αναδρομικές εφαρμογές αυτού του JR που αντιστοιχούν σε μια ακολουθία προοδευτικά λεπτόν διαμερίσεων του V , ελαχιστοποιώντας αποτελεσματικά την ίδια συνάρτηση αλλά σε παραγοντοποιημένα βήματα, βελτιώνοντας πιθανώς την ανάλυση των ενδιάμεσων σωματιδίων σε ένα γεγονός.

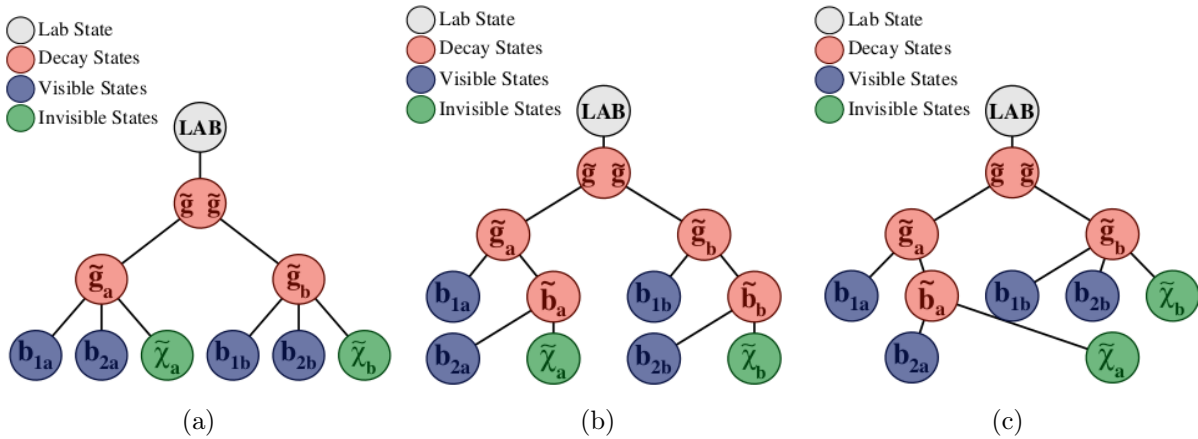
Με αυτή την επιλογή για τα ζεύγη b/l σε κάθε event, οι υπόλοιποι άγνωστοι σχετίζονται με τα νετρίνα και είναι οι ίδιοι με τα προηγούμενα παραδείγματα. Δηλαδή, οι άγνωστες ποσότητες που απομένουν να ανακατασκευαστούν είναι η μάζα του συστήματος I , M_I , η ορμή κατά μήκος του άξονα της δέσμης, ο προσανατολισμός του σπασίματος του I στα δύο νετρίνα και οι δύο επιμέρους μάζες των νετρίνων. Ο αυξημένος αριθμός των ορατών

σωματιδίων σημαίνει ότι υπάρχουν επιλογές στην «στρατηγική» όταν εφαρμόσουμε τον JR VI.4 για την επίλυση αυτών των αγνώστων. Για παράδειγμα, τα δύο λεπτόνια θα μπορούσαν να συζευχθούν με τα δύο νετρίνα και να εφαρμοστεί ένας *contraboost* JR ο οποίος επιβάλλει την συνθήκη $M_{W_a} = M_{W_b}$. Εναλλακτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα δύο ζεύγη b/l , V_a και V_b , επιβάλλοντας την συνθήκη $M_{t_a} = M_{t_b}$.

B. $\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow b\tilde{\chi}_1^0 b\tilde{\chi}_1^0$

Για να μπορέσουμε να αναλύσουμε κάθε πιθανή τοπολογία διάσπασης με την προσέγγιση RJR, πρέπει να εισάγουμε πρόσθετους κανόνες για συνδυαστικές ασάφειες, που προκύπτουν από πολλά πανομοιότυπα ανακατασκευασμένα σωματίδια που εμφανίζονται σε γεγονότα. Ο JR VII.1.1 μπορεί να γενικευθεί ώστε να αντιμετωπίζει έναν αυθαίρετο μεγάλο αριθμό σωματιδίων και διαμερίσεων. Όμως ταυτόχρονα, η επιλογή πολλών αγνώστων σε ένα μόνο βήμα (αντί για παραγοντοποίηση των αγνώστων σε πολλά βήματα) οδηγεί σε χειρότερη ανάλυση των κινηματικών εκτιμήσεων μας. Ακριβώς όπως και για τα JR's των άορατων σωματιδίων, η χρήση combinatoric jigsaws σε επαναλαμβανόμενα βήματα, μπορεί να βοηθήσει στην επίλυση των ενδιάμεσων σωματιδίων στις διασπάσεις.

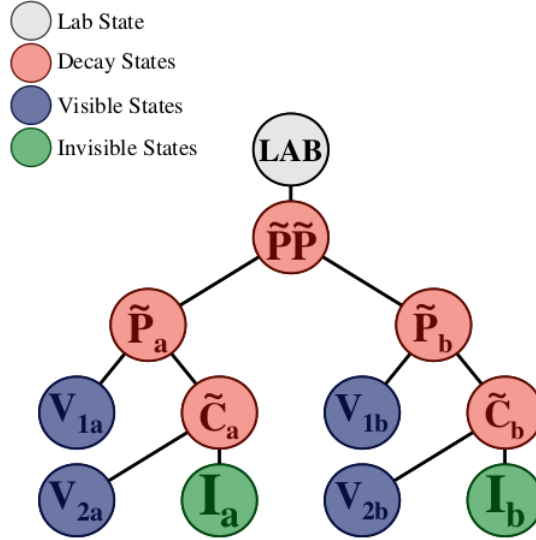
Για να δείξουμε αυτήν την ιδέα, εξετάζουμε το παράδειγμα της παραγωγής gluino σε έναν αδρονικό επιταχυντή, τα οποία διασπώνται σε b κουάρκ και neutralinos. Ενώ τα διαφορετικά b κουάρκ μπορεί να εμφανίζονται σε διαφορετικά σημεία στο διάγραμμα διάσπασης, τα ανακατασκευασμένα b -tagged jets είναι πανομοιότυπα, χωρίς άμεση ένδειξη ποιο είναι ποιο. Θεωρούμε τρεις διαφορετικούς συνδυασμούς διάσπασης των gluino, οι οποίοι παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.13



Σχήμα 3.13: Διαγράμματα διάσπασης για την παραγωγή ζευγών ισχυρά αλληλεπιδρώντων υπερσωματιδίων, gluinos, τα οποία διασπώνται σε τελικές καταστάσεις με b κουάρκ και neutralinos

Όλες αυτές οι διαδικασίες μπορούν να αναλυθούν χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα διάσπασης, το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.14. Τα αντικείμενα $\tilde{P}_{a/b}$ αναπαριστούν τα αρχικώς παραγόμενα υπερσωματίδια (στην προκειμένη περίπτωση gluinos) ενώ τα $\tilde{C}_{a/b}$ είναι τυχόν πρόσθετα υπερσωματίδια που μπορεί να εμφανιστούν στις διασπάσεις. Τα neutralinos αναπαριστώνται από τις άορατες καταστάσεις $I_{a/b}$ και τα ανακατασκευασμένα b -tagged jets αντιστοιχούν στις ορατές καταστάσεις V_{ij} . Παρόλο που ο αριθμός των b -tagged jets ως τελικές καταστάσεις σε αυτό το παράδειγμα είναι 4, η προσέγγιση ανακατασκευής που θα ακολουθήσουμε, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιονδήποτε αυθαίρετο μεγάλο αριθμό. Για

να ληφθούν υπόψη μεγαλύτερες πολλαπλότητες πανομοιότυπων ορατών σωματιδίων στην τελική κατάσταση, καθένα V_{ij} ερμηνεύεται ως ένα σύνολο b-tagged jets, το οποίο μπορεί να περιέχει έναν μεταβλητό αριθμό, με την επιφύλαξη καθορισμένων περιορισμών. Απαιτούμε το κάθε $V_{2a/b}$ να περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο ενώ τα $V_{1a/b}$ μπορούν να μην έχουν κανένα.



Σχήμα 3.14: Διάγραμμα διάσπασης για την ανάλυση διαδικασιών όπως αυτές στο Σχήμα 3.13

Ορίζοντας ως $V = \{b_i\}$ να είναι το σύνολο όλων των ανακατασκευασμένων b-tagged jets, οι «συνδυαστικοί» άγνωστοι είναι αυτοί που σχετίζονται με τη διαίρεση αυτού του συνόλου σε τέσσερα υποσύνολα. Ακολουθώντας το διάγραμμα διάσπασης στο Σχήμα 3.14, η διαμέριση γίνεται σε δύο βήματα με ξεχωριστούς JR's, $V \rightarrow V_a = \{V_{1a}, V_{2a}\}$ και $V_b = \{V_{1b}, V_{2b}\}$. Ενώ ο JR VII.1.1, ο οποίος επιλέγει την διαμέριση ελαχιστοποιώντας τον συνδυασμό $m_{V_a}^2 + m_{V_b}^2$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί, υπάρχει ένας πρακτικός περιορισμός στις περιπτώσεις όπου ο $n_V = |V|$ είναι μεγάλος. Ασυμπτωτικά, αυτός ο αλγόριθμος κλιμακώνεται ως $2^{n_V-1} n_V \log n_V$, το οποίο είναι απαιτητικό υπολογιστικά. Μάλιστα, όταν ο υπολογιστικός χρόνος είναι περιορισμένος, είναι δυναμικά απαγορευτικό. Για να ξεπεραστεί αυτό το εμπόδιο, εισάγουμε έναν επιπλέον συνδυαστικό JR για την διαμέριση ενός συνόλου στα δύο, ο οποίος κλιμακώνεται ως n_V^3 , με μια φυσική επιλογή ελαχιστοποιημένης μετρικής.

Jigsaw Rule VIII.2 (combinatoric minimization): Εάν υπάρχει ένα σύνολο $n \geq 2$ ορατών σωματιδίων, $V = \{V_1, \dots, V_n\}$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε μία διαμέριση του V σε δύο υποσύνολα, $P_V = \{S_{V_a}, S_{V_b}\}$, ελαχιστοποιώντας αποδοτικά τις μάζες των δύο υποσυνόλων στο χώρο όλων των έγκυρων διαμερίσεων, $P_V \in \mathbb{P}_V$. Αυτός ο κανόνας είναι εφαρμόσιμος με μόνη προϋπόθεση τα S_{V_a} και S_{V_b} να περιέχουν το καθένα τουλάχιστον ένα στοιχείο.

Η διαμέριση επιλέγεται αξιολογώντας τα τετραδιανύσματα των ορατών σωματιδίων στο κοινό τους σύστημα κέντρου μάζας. Σημειώνουμε ότι ισχύει $\vec{p}_{S_{V_a}}^V = -\vec{p}_{S_{V_b}}^V$, ανεξάρτητα από την επιλογή της διαμερίσης. Καθώς η m_V είναι επίσης ανεξάρτητη της P_V , η σχέση

$$m_V = \sqrt{|\vec{p}_{S_{V_a/b}}^V|^2 + m_{V_a}^2} + \sqrt{|\vec{p}_{S_{V_a/b}}^V|^2 + m_{V_b}^2} \quad (3.105)$$

υπονοεί ότι μεγιστοποιώντας την ορμή $|\vec{p}_{S_{V_a/b}}^V|$ είναι ισοδύναμο με την ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση του m_{V_a} και του m_{V_b} . Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας P_V η οποία μεγιστοποιεί την

συνάρτηση

$$f(P_V) = |\vec{p}_{S_{V_a}}^V| + |\vec{p}_{S_{V_b}}^V| \quad (3.106)$$

το οποίο μπορεί να γίνει μέσω του προσδιορισμού του άξονα προώθησης σε αυτό το πλαίσιο αναφοράς με πράξεις τάξης $4|V|^3$.

Ο JR VIII.2 χρησιμοποιείται για την διαμέριση του V σε V_a και V_b τα οποία, εάν περιλαμβάνουν περισσότερα από ένα στοιχεία, διαχωρίζονται περαιτέρω στα $V_{1a/b}$ και $V_{2a/b}$ χρησιμοποιώντας τον ίδιο JR. Σε συνδυασμό με τους JR's για την επίλυση της κινηματικής των αόρατων σωματιδίων, η πλήρης μεθοδολογία για την ανάλυση αυτών των διαδικασιών μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

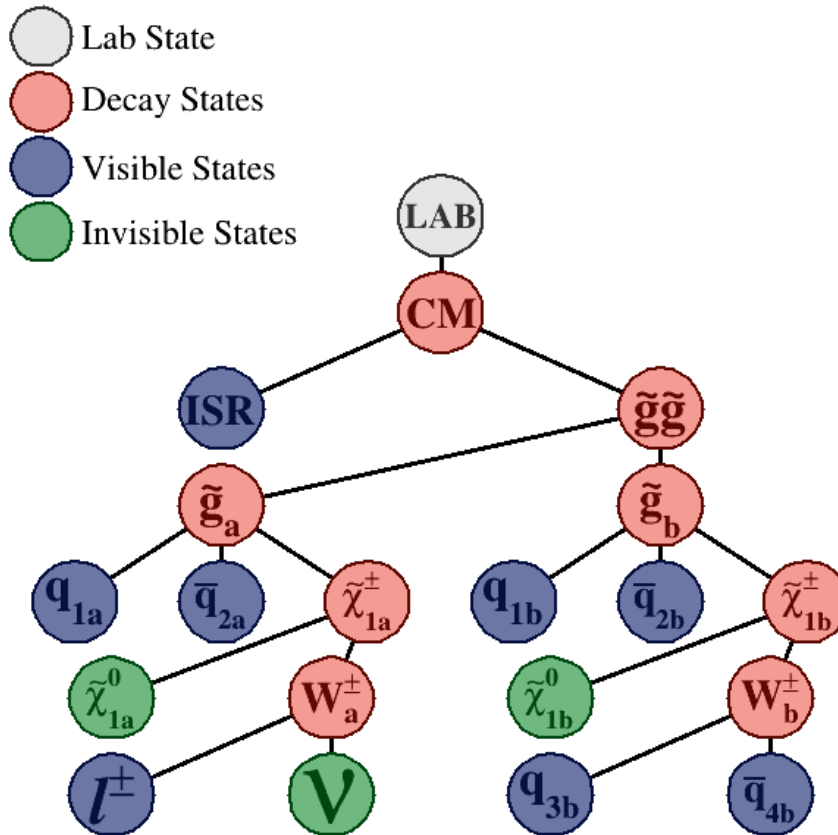
1. Εφαρμόζουμε τον JR VIII.2 για να χωρίσουμε το V στα V_a και V_b
2. Εάν το V_a ή το V_b περιλαμβάνουν περισσότερα από ένα στοιχεία, τα διαχωρίζουμε περαιτέρω στα $V_{1a/b}$ και $V_{2a/b}$, χρησιμοποιώντας τον JR VIII.2
3. Εφαρμόζουμε τον JR VI.1 επιλέγοντας $M_I^2 = m_V^2 - 4m_{V_a}m_{V_b}$
4. Εφαρμόζουμε τον JR V.1, επιλέγοντας $p_{I,z}^{lab}$ χρησιμοποιώντας το σύνολο όλων των ορατών σωματιδίων, V
5. Εφαρμόζουμε τον JR VI.4, χρησιμοποιώντας την συνθήκη $M_{\vec{P}_a} = M_{\vec{P}_b}$

Η επαναλαμβανόμενη διαμέριση των ορατών σωματιδίων σε τέσσερα υποσύνολα παραγοντοποιεί τις συνδυαστικές ασάφειες σύμφωνα με τις διαφορετικές διασπάσεις του Σχήματος 3.13. Μάλιστα, από την στιγμή που οι JR's που εφαρμόζονται για τα αόρατα σωματίδια, κάνουν το ίδιο, αυτό σημαίνει ότι προκύπτοντες κινηματικές εκτιμήσεις μπορούν να υπολογιστούν σχεδόν ανεξάρτητα σε κάθε πλαίσιο αναφοράς. Μία πηγή κατάλοιπης συσχέτισης μεταξύ των ενεργειών των ορατών συνόλων, υπολογισμένων σε κάθε ένα πλαίσιο, είναι οι επιμέρους μάζες τους. Κατά μία έννοια, η μάζα των διαμερίσεων $V_{a/b}$ περιλαμβάνει πληροφορίες σχετικά με τις επακόλουθες διασπάσεις, δίνοντας μια ένδειξη του αριθμού των στοιχείων στα σύνολα. Ομοίως, οι επιμέρους μάζες των μικρότερων συνόλων V_{ij} είναι ευαίσθητες στη σύνθεση και τον αριθμό των στοιχείων που περιέχει το καθένα, ενώ αναμένεται πολύ διαφορετική συμπεριφορά εάν ένα σύνολο περιέχει ένα ή περισσότερα από ένα αντικείμενα.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή της μεθόδου RJR

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο RJR που αναλύσαμε, στην αντίδραση $\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow q\bar{q}\tilde{\chi}_1^\pm(\tilde{\chi}_1^0 W^\pm(l^\pm\nu))q\bar{q}\tilde{\chi}_1^\pm(\tilde{\chi}_1^0 W^\pm(q\bar{q}))$. Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα διάσπασης (Σχήμα 4.1), αρχικά έχουμε την παραγωγή δύο gluinos τα οποία διασπώνται σε δύο jets (κουάρκ - αντικουάρκ) και στο ελαφρύτερο chargino ($\tilde{\chi}_1^\pm$) το καθένα. Στην συνέχεια, κάθε chargino διασπάται σε ένα neutralino, συγκεκριμένα στο LSP ($\tilde{\chi}_1^0$), και σε ένα μποζόνιο W^\pm . Στο τρίτο βήμα αυτής της αντίδρασης, το ένα μποζόνιο W^\pm διασπάται λεπτονικά, δηλαδή σε ένα λεπτόνιο και ένα νετρίνο ενώ το άλλο μποζόνιο διασπάται σε δύο jets, κουάρκ - αντικουάρκ. Επιπλέον, υποθέτουμε την ύπαρξη ενός ISR jet, το οποίο προκαλεί την ανάκρουση του συστήματος $\tilde{g}\tilde{g}$ προς την αντίθετη κατεύθυνση.



Σχήμα 4.1: Το διάγραμμα διάσπασης της αντίδρασης $\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow q\bar{q}\tilde{\chi}_1^\pm(\tilde{\chi}_1^0 W^\pm(l^\pm\nu))q\bar{q}\tilde{\chi}_1^\pm(\tilde{\chi}_1^0 W^\pm(q\bar{q}))$

Θεωρούμε πως οι τετραορμές $\mathbf{p}_{q_1}^{lab}, \mathbf{p}_{q_2}^{lab}, \mathbf{p}_{q_3}^{lab}, \mathbf{p}_{q_4}^{lab}, \mathbf{p}_{q_5}^{lab}, \mathbf{p}_{q_6}^{lab}, \mathbf{p}_{l^\pm}^{lab}$ και \mathbf{p}_{ISR}^{lab} έχουν μετρηθεί από κάποιον ανιχνευτή και λόγω της διατήρησης της ορμής στο επίπεδο κάθετο της δέσμης, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ελλείπουσα εγχάρσια ορμή θα είναι η εγχάρσια ορμή του συστήματος των αόρατων σωματιδίων:

$$\vec{p}_{I,T}^{lab} = \vec{p}_{\tilde{\chi}_{1,a}^0,T}^{lab} + \vec{p}_{\tilde{\chi}_{1,b}^0,T}^{lab} + \vec{p}_{\nu,T}^{lab} = \vec{E}_T \quad (4.1)$$

όπου $I = \{\tilde{\chi}_{1,a}^0, \tilde{\chi}_{1,b}^0, \nu\}$ το σύστημα των αόρατων σωματιδίων. Συνεπώς, οι άγνωστες παράμετροι που πρέπει να προσδιορίσουμε είναι η ορμή του συστήματος I κατά μήκος του άξονα της δέσμης, στο σύστημα του εργαστηρίου $\vec{p}_{I,z}^{lab}$ και η μάζα του, M_I . Αφού προσδιορισθούν αυτές οι παράμετροι του συστήματος, πρέπει να βρούμε το πως αυτές και ειδικότερα η μάζα M_I , μοιράζονται μεταξύ των τριών αόρατων σωματιδίων. Πέραν των κινηματικών ασαφειών που σχετίζονται με τα αόρατα σωματίδια, έχουμε και κάποιες συνδυαστικές ασάφειες για τα ορατά σωματίδια. Συγκεκριμένα, χρειάζεται να προσδιορίσουμε ποια jets αντιστοιχούν σε κάθε gluino καθώς και ποια jets αντιστοιχούν στο μποζόνιο που διασπάται μη λεπτονικά. Για την εύρεση όλων αυτών των ασαφειών χρειάζεται να εφαρμόσουμε τους κατάλληλους κανόνες Jigsaw που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

4.1 Επιλογή των Jigsaw Rules

Αρχικά, όπως σε όλα τα παραδείγματα των αντιδράσεων που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, έτσι και σε αυτή την περίπτωση εφαρμόζουμε τον κανόνα invisible mass JR VI.1 για τον προσδιορισμό της μάζας του συστήματος, M_I . Επομένως, θέτουμε την M_I να είναι ίση με την μικρότερη δυνατή και συνάμα αναλλοίωτη κατά Lorentz συνάρτηση. Παράλληλα, πρέπει να μην οδηγεί σε ταχυονικά αόρατα σωματίδια, αλλά και να είναι συνεπής με τους JR's που θα εφαρμοστούν για τον επιμερισμό του αόρατου συστήματος.

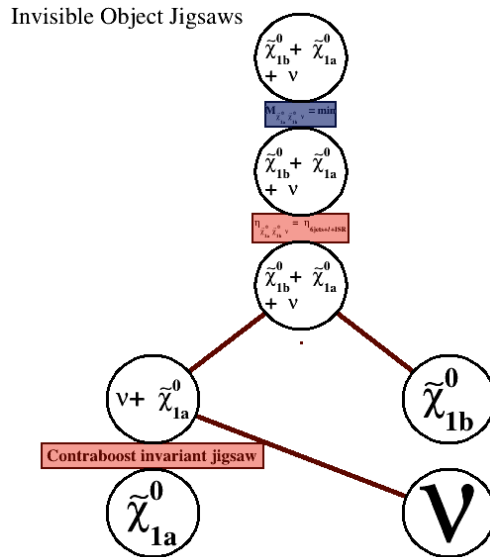
Στην συνέχεια, προσδιορίζουμε την ορμή του συστήματος I κατά μήκος του άξονα της δέσμης, στο σύστημα του εργαστηρίου $\vec{p}_{I,z}^{lab}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα JR V.1 (invisible rapidity), σύμφωνα με τον οποίο απαιτούμε την ωχύτητα του συστήματος των αόρατων σωματιδίων να είναι ίση με αυτήν του συστήματος των ορατών σωματιδίων. Αυτή η απαίτηση, όπως είδαμε αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. σελίδα 42) μας οδηγεί στην σχέση

$$p_{I,z}^{lab} = p_{V,z}^{lab} \sqrt{\frac{m_I^2 + (p_{I,\perp}^{lab})^2}{m_V^2 + (p_{V,\perp}^{lab})^2}}, \text{ όπου } I = \{\tilde{\chi}_{1,a}^0, \tilde{\chi}_{1,b}^0, \nu\} \text{ και } V = \{q_1, \dots, q_6, l, ISR\}, \text{ από την οποία γίνεται ο προσδιορισμός της ορμής.}$$

Το επόμενο βήμα είναι ο σωστός επιμερισμός του συστήματος των αόρατων σωματιδίων. Ειδικότερα, «σπάμε» το σύστημα σε δύο επιμέρους συστήματα, $I_a = \{\tilde{\chi}_{1,a}^0, \nu\}$ και $I_b = \{\tilde{\chi}_{1,b}^0\}$. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της εφαρμογής του κανόνα contraboost invariant jigsaw, επιλέγοντας τα αντίστοιχα συστήματα ορατών σωματιδίων $V_a = \{q_{1a}, q_{2a}, l\}$ και $V_b = \{q_{1b}, q_{2b}, q_{3b}, q_{4b}\}$. Βέβαια, η επιλογή αυτή εισάγει και έναν επιπλέον περιορισμό: $M_{V_a I_a} = M_{V_b I_b} \Rightarrow M_{\tilde{g}_a} = M_{\tilde{g}_b}$ ο οποίος όμως στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι απόλυτα εύλογος αφού οι πραγματικές μάζες των δύο μητρικών υπερσυμμετρικών σωματιδίων πρέπει να είναι μεταξύ τους ίσες.

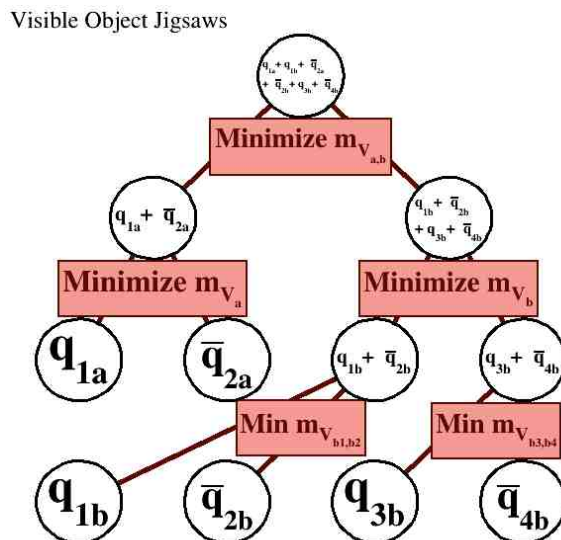
Τέλος, για την ολοκλήρωση του προσδιορισμού των ασαφειών που σχετίζονται με τα αόρατα σωματίδια, χρειαζόμαστε ένα ακόμα «σπάσιμο» για το σύστημα $I_a = \{\tilde{\chi}_{1,a}^0, \nu\}$ στα επιμέρους σωματίδια. Για την επίτευξη αυτού του επιμερισμού έχουμε στην διαθεσή μας τρεις διαφορετικούς κανόνες jigsaw που μπορούμε να εφαρμόσουμε (contraboost invariant, invisible - minimize mass differences, invisible - minimize masses squared), καθένας με διαφορετικούς περιορισμούς. Καθώς δεν υπάρχει κάποιος προφανής λόγος να επιλέξουμε έναν

εκ των τριών θα εφαρμόσουμε όλους τους κανόνες και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα τους. Οι κινηματικοί κανόνες που επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στο Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2: Σχηματική αναπαράσταση των κινηματικών κανόνων jigsaw για τα αόρατα σωματίδια

Βέβαια, όπως αναφέρθηκε πριν, έχουμε και συνδυαστικές ασάφειες που σχετίζονται με τα ορατά σωματίδια και οι οποίες πρέπει να επιλυθούν. Συγκεκριμένα, χωρίζουμε το σύστημα των ορατών σωματιδίων σε δύο «ημισφαίρια» εφαρμόζοντας τον κανόνα combinatoric minimization. Το πρώτο «ημισφαίριο» V_a είναι αυτό που περιλαμβάνει μόνο τα 2 jets που σχετίζονται με το ένα gluino ενώ το δεύτερο «ημισφαίριο» V_b είναι αυτό που εκτός των 2 jets του gluino περιλαμβάνει και τα 2 jets που σχετίζονται με το μποζόνιο W . Στην συνέχεια, με αλληπαλλήλες εφαρμογές του ίδιου κανόνα στα επιμέρους σύνολα, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.3 αναγνωρίζουμε το κάθε jet ξεχωριστά.



Σχήμα 4.3: Σχηματική αναπαράσταση των κινηματικών κανόνων jigsaw για τα ορατά σωματίδια

4.2 Προγραμματισμός της Εφαρμογής με το Πακέτο RestFrames

Το λογισμικό πακέτο RestFrames που χρησιμοποιήθηκε για τον σκοπό της παρούσας πτυχι-ακής, παρέχει στο χρήστη μία πληθώρα βιβλιοθηκών για την παραγωγή και ανάλυση ακόμη και των πιο σύνθετων διαγραμμάτων διάσπασης. Αυτές οι βιβλιοθήκες, μεταξύ άλλων, περιλαμβάνουν κλάσεις (classes) και συναρτήσεις (member functions), κάποιες από τις οποίες ανήκουν στο ROOT [81] (λογισμικό πακέτο ανοικτού κώδικα για ανάλυση δεδομένων που δημιουργήθηκε και χρησιμοποιείται στο CERN), αλλά και πολλές νέες. Το πακέτο RestFrames, όπως και το ROOT, είναι βασισμένο στη γλώσσα προγραμματισμού C++. Κάθε αρχείο πηγαίου κώδικα που δημιουργούμε με τη χρήση του RestFrames μπορούμε να το εκτελέσουμε από τη γραμμή εντολών του ROOT.

Ο κώδικας με τον οποίο έγινε η ανάλυση της αντίδρασης προς διερεύνηση $\tilde{g} \tilde{g} \rightarrow q\bar{q} \tilde{\chi}_1^\pm (\tilde{\chi}_1^0 W^\pm (l^\pm \nu)) q\bar{q} \tilde{\chi}_1^\pm (\tilde{\chi}_1^0 W^\pm (q\bar{q}))$, δημιουργήθηκε με βάση τα ήδη υπάρχοντα παραδείγματα και έχει παρόμοια μορφή με αυτά. Στο πρώτο μέρος του κώδικα είναι η εισαγωγή των δεδομένων που χρειάζονται κατά την παραγωγή του κάθε γεγονόςτος που δημιουργεί αυτόματα το πρόγραμμα. Εκεί εισάγουμε τα πλάτη διάσπασης και τις μάζες των SM σωματιδίων καθώς και τις μάζες των υπερσυμμετρικών σωματιδίων. Για τους σκοπούς της παρούσας πτυχιακής δημιουργήθηκαν πέντε διαφορετικά σενάρια το καθένα από το οποίο έχει διαφορετικούς συνδυασμούς για τις μάζες των υπερσυμμετρικών σωματιδίων. Συγκεκριμένα, στο πρώτο σενάριο όλα τα υπερσυμμετρικά σωματίδια είναι ασυμπιεστά (uncompressed), δηλαδή έχουν μεγάλη διαφορά μάζας το ένα από το άλλο. Οι επιλογές που έγιναν για αυτό το σενάριο ήταν η μάζα των gluinos να είναι ίση με 1800 GeV, η μάζα των charginos να είναι 1000 GeV και η μάζα των neutralinos να είναι 400 GeV. Στο δεύτερο σενάριο έγινε επιλογή των μαζών έτσι ώστε τα πρώτα υπερσυμμετρικά σωματίδια, δηλαδή το gluino και το chargino να είναι συμπιεσμένα (compressed). Δηλαδή επιλέχθηκε η μάζα του gluino να είναι ίση με 1550 GeV και η μάζα του chargino να είναι κατά 50 GeV λιγότερη, στα 1500 GeV ενώ η μάζα του neutralino επιλέχθηκε να είναι στα 450 GeV. Το τρίτο και το τέταρτο σενάριο πρόκειται και πάλι για συμπιεσμένα σενάρια μόνο που η συμπίεση έγινε μεταξύ του chargino και του neutralino. Ειδικότερα, η μάζα των chargino επιλέχθηκε να είναι στα 500 GeV και η μάζα του neutralino στα 450 GeV και στα δύο σενάρια ενώ η μάζα του gluino επιλέχθηκε στο ένα σενάριο να είναι ίση με 1800 GeV και στο άλλο να είναι 1300 GeV, δημιουργώντας διαφορετικό φασικό χώρο σε κάθε περίπτωση. Τέλος, στο πέμπτο σενάριο έγινε η επιλογή, όλα τα υπερσυμμετρικά σωματίδια να είναι συμπιεσμένα μεταξύ τους, δηλαδή για το gluino επιλέχθηκε η μάζα του να είναι ίση με 560 GeV και τα υπόλοιπα να έχουν μία διαφορά 80 GeV σε κάθε βήμα, επομένως η μάζα του chargino να είναι στα 480 GeV και του neutralino στα 400 GeV.

Μάζες \ Σενάριο	1 ^ο	2 ^ο	3 ^ο	4 ^ο	5 ^ο
$m_{\tilde{g}}$	1800 GeV	1550 GeV	1800 GeV	1300 GeV	560 GeV
$m_{\tilde{\chi}_1^\pm}$	1000 GeV	1500 GeV	500 GeV	500 GeV	480 GeV
$m_{\tilde{\chi}_1^0}$	400 GeV	450 GeV	450 GeV	450 GeV	400 GeV

Πίνακας 4.1: Συγκεντρωτικός πίνακας με τις μάζες των υπερσυμμετρικών σωματιδίων για κάθε σενάριο

Σε κάθε περίπτωση παράγονται τόσα γεγονότα όσα χρειάζονται έτσι ώστε να γίνουν αποδεκτά τα πρώτα 10000 που θα πληρούν τις προϋποθέσεις (cuts) που θα παρουσιαστούν παρακάτω. Ο σκοπός μας είναι να μελετήσουμε την συμπεριφορά ορισμένων φυσικών ποσοτήτων στα πέντε αυτά διαφορετικά σενάρια, δίνοντας μεγαλύτερη έμφαση στην μάζα των υπερσυμμετρικών σωματιδίων.

Το επόμενο κομμάτι του κώδικα είναι η κατασκευή του generation. Συγκεκριμένα, ορίζουμε το διάγραμμα διάσπασης σύμφωνα με το «είδος» των σωματιδίων, δηλαδή αν το εκάστοτε σωματίδιο πρόκειται για διασπώμενη (decay), ορατή (visible) ή άορατη (invisible) κατάσταση. Στην συνέχεια, αντιστοιχούμε τα δεδομένα που εισαγάγαμε προηγουμένως στα εκάστοτε σωματίδια ενώ τις μάζες που δεν αντιστοιχούν σε κάποιο συντονισμό τις αφήνουμε τυχαίες. Όσον αφορά τα διασπώμενα σωματίδια, το RestFrames μας παρέχει την δυνατότητα να επιλέξουμε για αυτά μία σταθερή μάζα ή να επιλέξουμε έναν συντονισμό. Συγκεκριμένα στα chargino επιλέγουμε απλά μία σταθερή τιμή για την μάζα ενώ για τα μποζόνια W κάνουμε δειγματοληψία από μία κατανομή Breit-Wigner με $\Gamma = 2.085$ GeV και κεντρική τιμή μάζας 80.385 GeV. Αμέσως μετά ορίζουμε τα cuts που πρέπει να ικανοποιούν τα παραγόμενα ορατά σωματίδια στο σύστημα του εργαστηρίου ώστε να γίνει αποδεκτό το κάθε γεγονός. Ειδικότερα, όσον αφορά την ψευδοωκότητα (pseudorapidity) επιλέχθηκε ένα cut στα 2.5 δηλαδή η ψευδοωκότητα να ανήκει στο διάστημα $-2.5 < \eta < 2.5$, ώστε να προσομοιώνεται επακριβώς η χωρική κάλυψη που παρέχει ο ανιχνευτής τροχιών του CMS ενώ όσον αφορά τις εγκάρσιες ορμές επιλέξαμε για το λεπτόνιο να είναι μεγαλύτερη από 8 GeV και για τα jets συμπεριλαμβανομένου και του ISR jet να είναι μεγαλύτερη από 20 GeV.

Το επόμενο κομμάτι είναι η κατασκευή του reconstruction. Όπως και με το generation, έτσι και εδώ, χρειάζεται να ορίσουμε ένα διάγραμμα διάσπασης όπου θα είναι εμφανές το «είδος» κάθε σωματιδίου που θέλουμε να ανακατασκευάσουμε. Προφανώς, δεν εισάγουμε καμία επιπλέον πληροφορία καθώς το ζητούμενο είναι η εύρεση αυτών των ποσοτήτων.

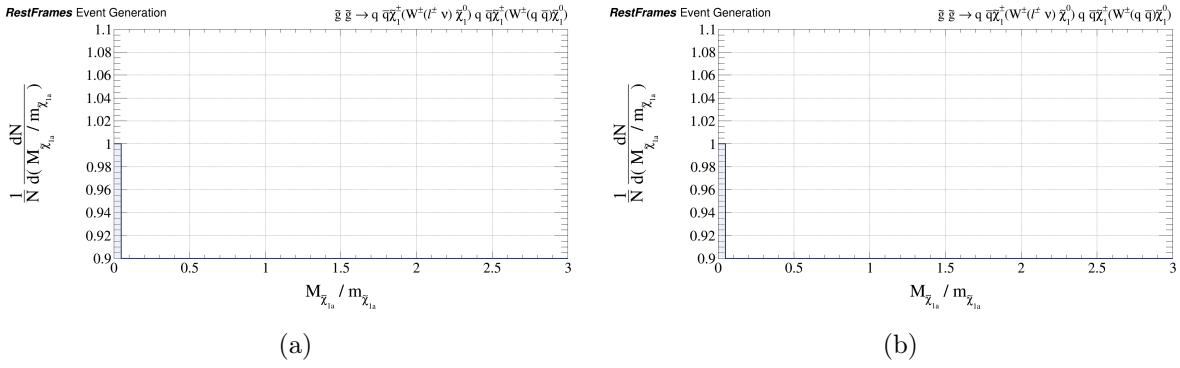
Το επόμενο βήμα στον κώδικα είναι και το σημαντικότερο. Σε αυτό το κομμάτι του κώδικα ορίζουμε τους κανόνες jigsaw που θα χρησιμοποιήσουμε για την σωστή ανακατασκευή της αντίδρασης μας. Ειδικότερα, ορίζουμε αρχικά το σύστημα των άορατων σωματιδίων που έχουμε από την αντίδραση μας και στην συνέχεια εφαρμόζουμε τους κανόνες που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη υποενότητα για την επίλυση των κινηματικών τους ασαφειών. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, αυτή την φορά για τα ορατά σωματίδια για την επίλυση των συνδυαστικών τους ασαφειών.

Στο τελευταίο μέρος του κώδικα, ορίζουμε τα ιστογράμματα που θέλουμε και μέσω μίας δομής επανάληψης γίνεται η παραγωγή, η ανάλυση και η ανακατασκευή των γεγονότων καθώς και ο υπολογισμός των φυσικών ποσοτήτων που μας ενδιαφέρουν.

4.3 Αποτελέσματα και Συμπεράσματα

Σκοπός μας είναι η σωστή ανακατασκευή της υπό διερεύνηση αντίδρασης $\tilde{g} \tilde{g} \rightarrow q\bar{q} \tilde{\chi}_1^\pm (\tilde{\chi}_1^0 W^\pm (l^\pm \nu)) q\bar{q} \tilde{\chi}_1^\pm (\tilde{\chi}_1^0 W^\pm (q\bar{q}))$ εφαρμόζοντας τους καλύτερους δυνατούς JR's καθώς και η μελέτη και σύγκριση των διαφορετικών σεναρίων που ορίσαμε.

Αρχικά, πρέπει να δούμε ποιον από τους τρεις κανόνες θα χρησιμοποιήσουμε για τον επιμερισμό του συστήματος άορατων σωματιδίων $I_a = \{\tilde{\chi}_{1,a}^0, \nu\}$ στα επιμέρους σωματίδια $I_{a1} = \{\tilde{\chi}_{1,a}^0\}$ και $I_{a2} = \{\nu\}$.



Σχήμα 4.4: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των $\tilde{\chi}_{1,a}^0$ με εφαρμογή των κανόνων (a) minimize mass differences και (b) minimize masses squared.

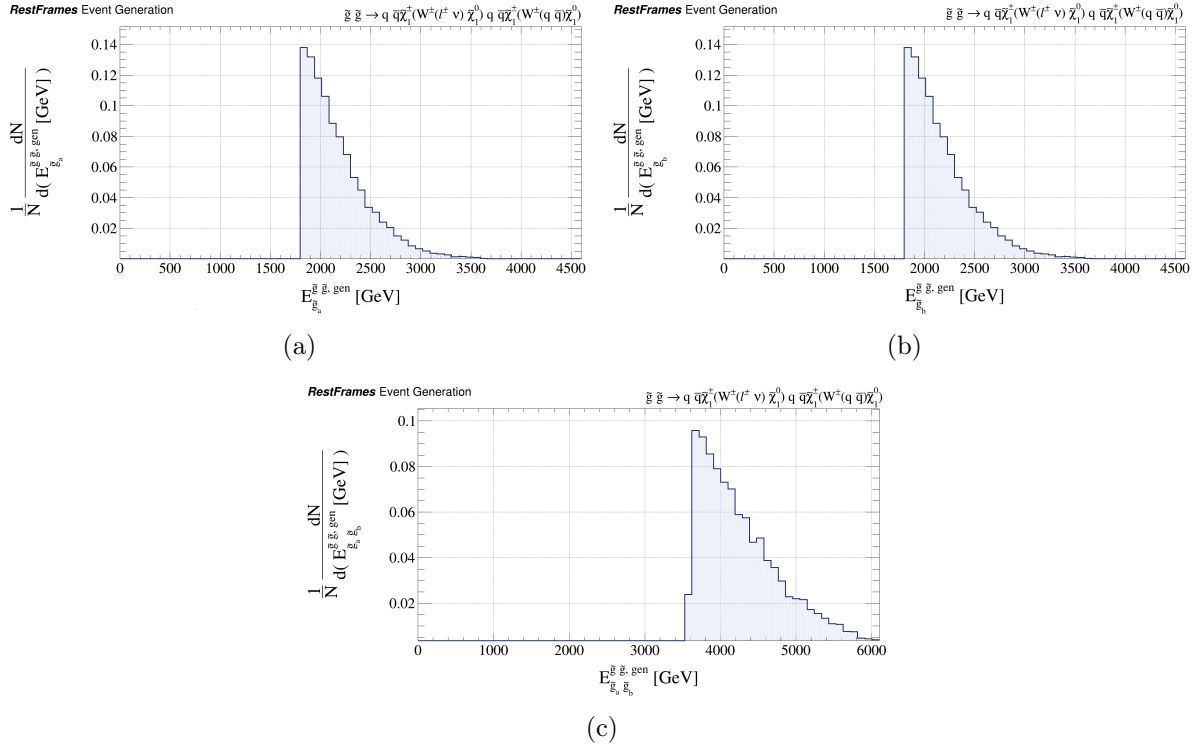
Κάθε κανόνας περιλαμβάνει από μία διαφορετική συνθήκη που επιβάλλεται στο σύστημα των σωματιδίων μας. Πιο συγκεκριμένα, ο κανόνας contraboost invariant, όπως είδαμε επιβάλλει την συνθήκη $M_{V_{a1},I_{a1}} = M_{V_{a2},I_{a2}}$, ο κανόνας minimize mass differences επιβάλλει την συνθήκη $|M_{V_{a1},I_{a1}} - M_{V_{a2},I_{a2}}| = \min$ ενώ ο κανόνας minimize masses squared $M_{V_{a1},I_{a1}}^2 + M_{V_{a2},I_{a2}}^2 = \min$. Στην προκειμένη περίπτωση, λόγω της μεγάλης διαφοράς μαζών μεταξύ του νετρίνου και του neutralino, οι κανόνες minimize mass differences, minimize masses squared, δεν δουλεύουν καλά, όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.4. Συγκεκριμένα, η εφαρμογή αυτών των κανόνων επιβάλλει στην μάζα του neutralino να είναι μηδενική, γεγονός το οποίο δεν είναι επιθυμητό. Συνεπώς, αναγκαστικά επιλέγουμε να συνεχίσουμε με την εφαρμογή του κανόνα contraboost invariant. Στην συνέχεια, θα δούμε πως επηρεάζονται τα αποτελέσματα μας με την εφαρμογή αυτού του κανόνα στα διάφορα σενάρια.

4.3.1 1^ο Σενάριο

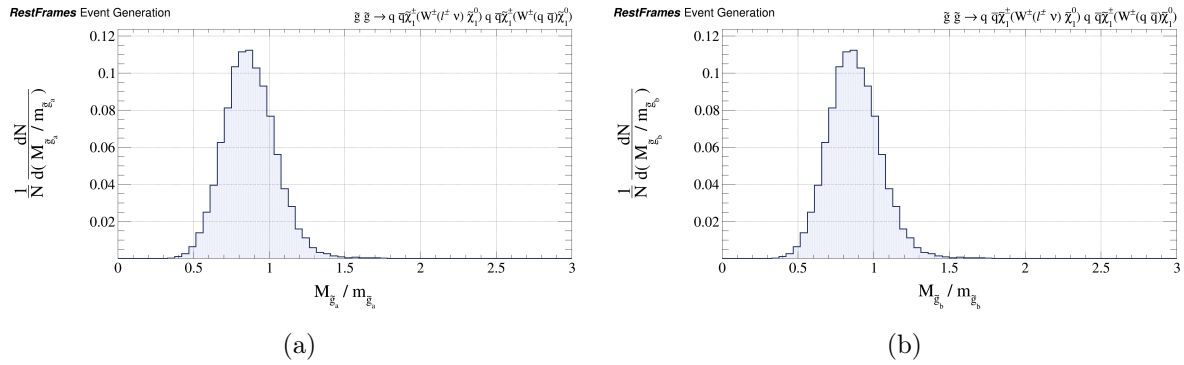
Αρχικά, ας δούμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν για το πρώτο, ασυμπίεστο, σενάριο όπου επιλέξαμε οι μάζες των υπερσυμμετρικών σωματιδίων να είναι $m_{\tilde{g}} = 1800$ GeV, $m_{\tilde{\chi}_1^\pm} = 1000$ GeV και $m_{\tilde{\chi}_1^0} = 400$ GeV. Για να ελέγξουμε κατά πόσο είναι η σωστή η παραγωγή της αντίδρασης μας στο επίπεδο των generated γεγονότων, κατασκευάζουμε κάποια ενδεικτικά διαγράμματα.

Στο Σχήμα 4.5 παρουσιάζονται οι κατανομές των ενεργειών του εκάστοτε gluino καθώς και του συστήματος αυτών, υπολογισμένα στο πλαίσιο αναφοράς αυτού του συστήματος. Με βάση αυτά τα διαγράμματα μπορούμε να ελέγξουμε αν ισχύει η διατήρηση της ενέργειας. Όπως είναι εμφανές από την μορφή τους, η διατήρηση της ενέργειας όντως ισχύει όπως είναι αναμενόμενο. Η δημιουργία αυτών των διαγραμμάτων είναι τετριμμένη, για αυτό και στα επόμενα σενάρια θα τα παραλείψουμε καθώς η διατήρηση της ενέργειας ισχύει σε όλα αφού πρόκειται για μία προϋπόθεση του προγράμματος.

Το κύριο μέρος της ανάλυσης, είναι η μελέτη της ανακατασκευής της αντίδρασης. Συγκεκριμένα θέλουμε να δούμε την ανακατασκευή των μαζών των υπερσυμμετρικών σωματιδίων. Αρχικά παραθέτουμε τις κατανομές των ανακατασκευασμένων (reconstructed) μαζών των gluinos προς τις μάζες των παραγόμενων (generated):

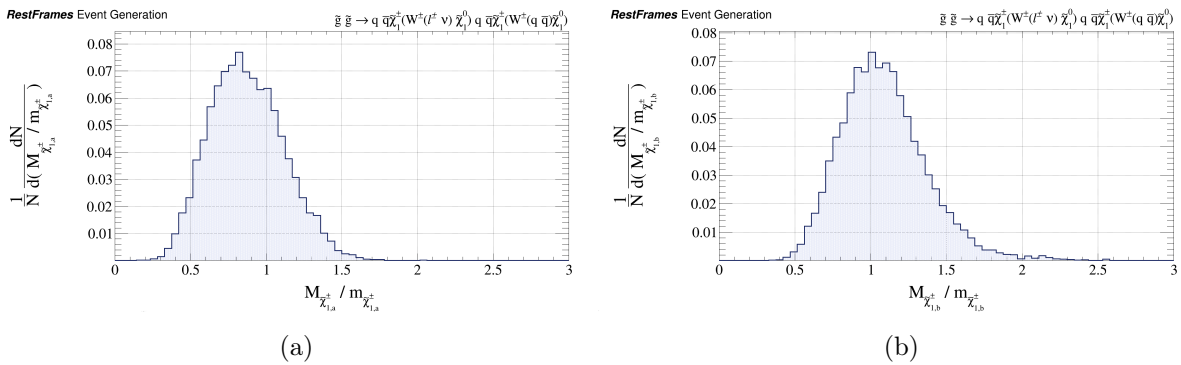


Σχήμα 4.5: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ενεργειών σε επίπεδο generation για (a) \tilde{g}_a , (b) \tilde{g}_b και (c) $\tilde{g}\tilde{g}$, υπολογισμένα στο πλαίσιο αναφοράς του συστήματος $\tilde{g}\tilde{g}$, στην περίπτωση όπου $m_{\tilde{g}} = 1800 \text{ GeV}$



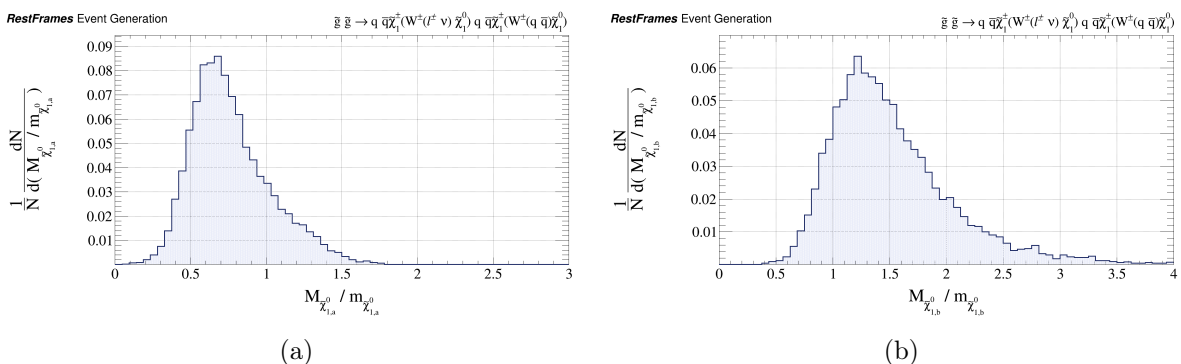
Σχήμα 4.6: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των (a) \tilde{g}_a και (b) \tilde{g}_b , ως προς τις παραγόμενες μάζες στο 1^ο σενάριο

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς οι κατανομές και των δύο είναι σχεδόν ίδιες. Αυτό οφείλεται στην εφαρμογή του κανόνα *contraboost invariant* που χρησιμοποιούμε για τον πρώτο επιμερισμό των άορατων σωματιδίων και ο οποίος εισάγει την απαίτηση $M_{\tilde{g}_a} = M_{\tilde{g}_b}$. Επιπλέον, βλέπουμε ότι οι κατανομές είναι μικρότερες από τις πραγματικές τους τιμές κατά ένα μικρό κλάσμα. Αυτό συμβαίνει αντίστοιχα λόγω της εφαρμογής του κανόνα *invisible mass jigsaw* ο οποίος ελαχιστοποιεί την συνολική μάζα του συστήματος των άορατων σωματιδίων $I = \{\tilde{\chi}_{1,a}^0, \tilde{\chi}_{1,b}^0, \nu\}$. Ως εκ τούτου, ελαχιστοποιείται και η μάζα των μητρικών σωματιδίων, δημιουργώντας έτσι αυτή την μετατόπιση προς τα αριστερά, που βλέπουμε στις κατανομές.



Σχήμα 4.7: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των (a) $\tilde{\chi}_{1,a}^{\pm}$ και (b) $\tilde{\chi}_{1,b}^{\pm}$, ως προς τις παραγόμενες μάζες στο 1^ο σενάριο

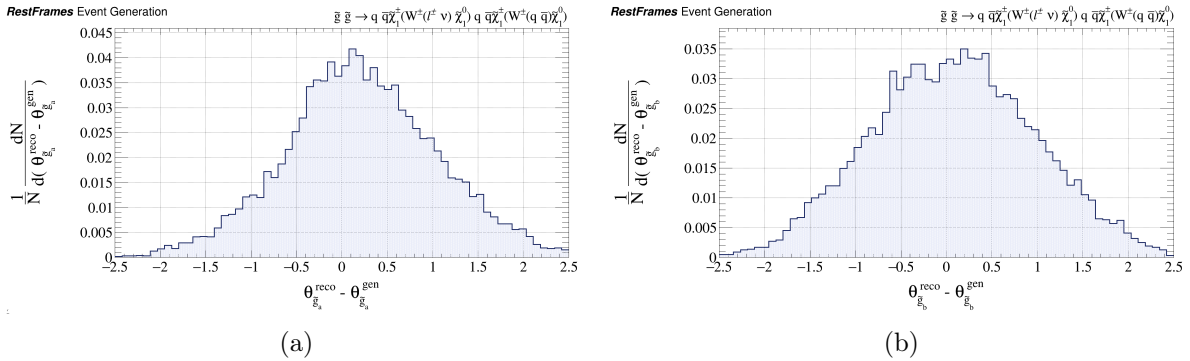
Όσον αφορά τα charginos, σε αντίθεση με τα gluinos, οι κατανομές των μαζών τους δεν είναι ίδιες, όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.7. Ο κύριος λόγος που συμβαίνει αυτό είναι λόγω των διαφορετικών προϊόντων των δύο «ημισφαιρίων». Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο chargino, $\tilde{\chi}_{1,a}^{\pm}$, έχει ως προϊόντα δύο άρατα σωματίδια για τα οποία οι πληροφορίες «χάνονται». Ως εκ τούτου, οι κανόνες που χρειάζεται να εφαρμόσουμε για να «ανακτήσουμε» αυτές τις πληροφορίες, επηρεάζουν και το μητρικό σωματίδιο, δημιουργώντας έτσι ελαφρώς μικρότερη μάζα. Αντίθετα, το δεύτερο chargino, $\tilde{\chi}_{1,b}^{\pm}$, συνοδεύεται μόνο από ένα άρατο σωματίδιο, συνεπώς η ανακατασκευή του γίνεται ορθότερα, γεγονός το οποίο αποδεικνύεται από την κορυφή της κατανομής, η οποία βρίσκεται ακριβώς στο 1. Βέβαια, παρατηρούμε ότι και στα δύο διαγράμματα, υπάρχει μία ασυμμετρία στις ουρές των κατανομών. Το φαινόμενο αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στην συνεισφορά των ορατών σωματιδίων, για αυτό και η ουρά εμφανίζεται πιο έντονη στο δεύτερο chargino $\tilde{\chi}_{1,b}^{\pm}$. Τα τελευταία υπερσυμμετρικά σωματίδια που πρέπει να ανακατασκευάσουμε είναι τα δύο LSPs. Μάλιστα, αυτά είναι και τα πιο δύσκολα στην ανακατασκευή ακριβώς επειδή πρόκειται για άρατα σωματίδια.



Σχήμα 4.8: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των (a) $\tilde{\chi}_{1,a}^0$ και (b) $\tilde{\chi}_{1,b}^0$, ως προς τις παραγόμενες μάζες στο 1^ο σενάριο

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από το Σχήμα 4.8, οι κατανομές μαζών των neutralinos είναι πιο ευρείες σε σύγκριση με τα προηγούμενα υπερσυμμετρικά σωματίδια, γεγονός το οποίο υποδεικνύει την δυσκολότερη ανακατασκευή τους. Επίσης, παρατηρούμε και πάλι ασυμμετρία στις κατανομές και ειδικότερα στις ουρές. Αυτή η ασυμμετρία, κληρονομείται από τα μητρικά σωματίδια τους, τα charginos τα οποία όπως είδαμε έχουν την ίδια συμπεριφορά. Όσον αφορά το πρώτο neutralino, $\tilde{\chi}_{1,a}^0$, είναι εμφανές ότι ανακατασκευάζεται με μικρότερη μάζα από ότι περιμένουμε. Αυτό συμβαίνει ακριβώς λόγω του κανόνα contraboost invari-

ant τον οποίο και χρησιμοποιήσαμε για να «σπάσουμε» το σύστημα $I_a = \{\tilde{\chi}_{1,a}^0, \nu\}$, στα επιμέρους σωματίδια. Η μεγάλη διαφορά μάζας μεταξύ του νετρίνου και του neutralino επηρεάζει την συνθήκη που φέρει ο κανόνας με αποτέλεσμα να ελαχιστοποιεί την μάζα του neutralino. Αντίθετα, το δεύτερο neutralino, $\tilde{\chi}_{1,b}^0$, ανακατασκευάζεται με μεγαλύτερη μάζα από το αναμενόμενο, γεγονός το οποίο μπορεί να δικαιολογηθεί από την εφαρμογή του πρώτου contraboost invariant jigsaw.



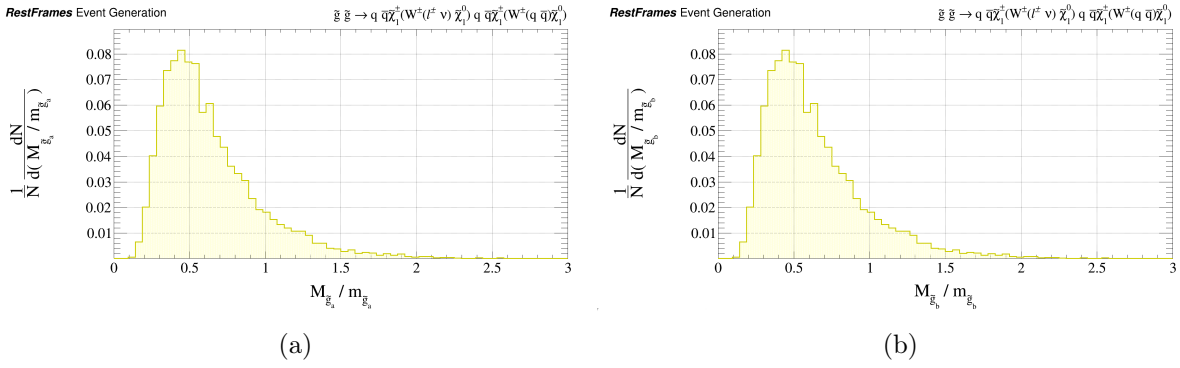
Σχήμα 4.9: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων γωνιών εκπομπής των (a) \tilde{g}_a και (b) \tilde{g}_b , ως προς τις παραγόμενες τιμές τους στο 1^ο σενάριο

Άλλη μία κινηματική ποσότητα που μας ενδιαφέρει, είναι η ανακατασκευασμένη γωνία εκπομπής των επιμέρους μητρικών σωματιδίων, δηλαδή των gluinos καθώς μπορούν να μας εμφανίσουν αν έχουμε κάποια προκατάληψη (bias). Οι κατανομές αυτές παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.9. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι και για τα δύο gluino, οι ανακατασκευασμένες γωνίες εκπομπής τους προσεγγίζουν ικανοποιητικά τις πραγματικές τιμές τους. Πιο συγκεκριμένα, για το \tilde{g}_b βλέπουμε ότι έχει μηδαμινή προκατάληψη λόγω του γεγονότος ότι το δεξί «ημισφαίριο» περιλαμβάνει μόνο ένα άορατο σωματίδιο, σε αντίθεση με το αριστερό «ημισφαίριο» το οποίο περιλαμβάνει δύο, δυσχεραίνοντας έτσι την ανακατασκευή ποσοτήτων σχετιζόμενων με σωματίδια που ανήκουν σε αυτό.

4.3.2 2^ο Σενάριο

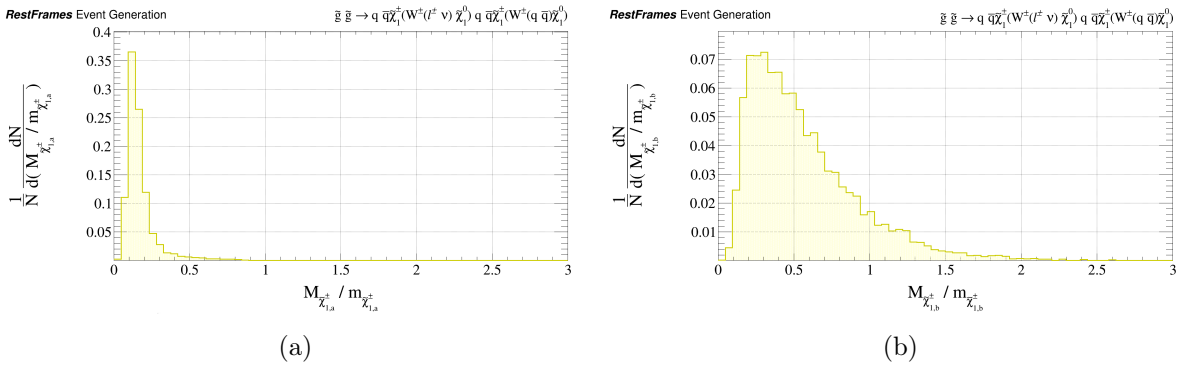
Στην δεύτερη περίπτωση, επιλέξαμε οι μάζες των υπερσυμμετρικών σωματιδίων να είναι $m_{\tilde{g}} = 1550 \text{ GeV}$, $m_{\tilde{\chi}_{1\pm}^0} = 1500 \text{ GeV}$ και $m_{\tilde{\chi}_{10}^0} = 450 \text{ GeV}$. Όπως είναι εμφανές, σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση έχουμε πιο περιορισμένο φασικό χώρο ενώ η μεγαλύτερη διαφορά και μάλιστα το ζητούμενο αυτής της περίπτωσης, είναι η συμπίεση του gluino με το chargino. Αυτή η συμπίεση δημιουργεί κάποια προβλήματα στην ανακατασκευή τα οποία και θα αναλύσουμε στην συνέχεια διεξοδικώς.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, θα παραλείψουμε τα διαγράμματα για την διατήρηση της ενέργειας καθώς είναι τετριμμένα και θα προχωρήσουμε κατευθείαν στην ανάλυση των κατανομών των μαζών των υπερσυμμετρικών σωματιδίων καθώς και των γωνιών εκπομπής των μητρικών σωματιδίων. Αρχικά παρουσιάζονται οι κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των gluinos προς τις μάζες των παραγόμενων:



Σχήμα 4.10: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των (a) \tilde{g}_a και (b) \tilde{g}_b , ως προς τις παραγόμενες μάζες στο 2^ο σενάριο

Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4.10 είναι εμφανής η διαφορά σε σύγκριση με το προηγούμενο σενάριο. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι οι κατανομές των μαζών είναι μετατοπισμένες αρκετά προς τα αριστερά. Μία μικρή μετατόπιση προς τα αριστερά, την αναμέναμε λόγω της εφαρμογής του κανόνα invariant mass jigsaw όπως παρατηρήσαμε και στο ασυμπέστο σενάριο όμως όχι σε τέτοιο βαθμό όπως εδώ. Αυτό οφείλεται ακριβώς στην μικρή διαφορά μάζας μεταξύ του gluino και του chargino. Επίσης, όπως είναι αναμενόμενο, παρατηρούμε και πάλι την ίδια μορφή και στα δύο σωματίδια λόγω της εφαρμογής της συνθήκης $M_{\tilde{g}_a} = M_{\tilde{g}_b}$ που εισάγει ο κανόνας contraboost invariant.

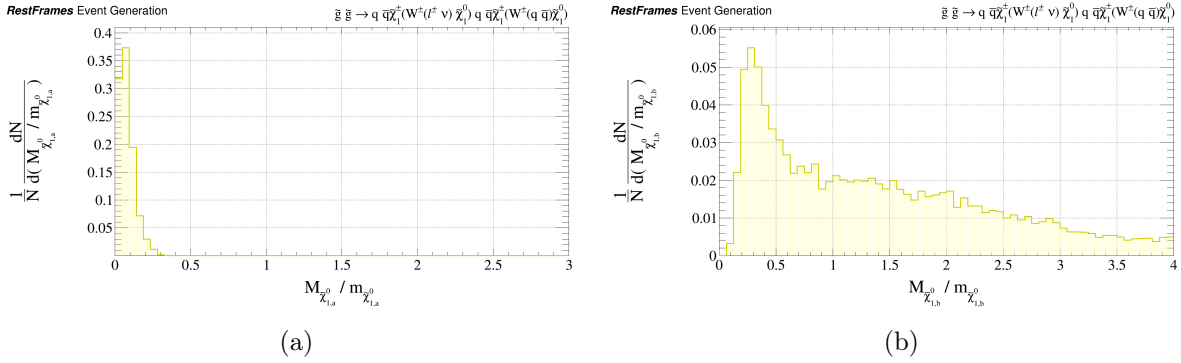


Σχήμα 4.11: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των (a) $\tilde{\chi}_{1,a}^{\pm}$ και (b) $\tilde{\chi}_{1,b}^{\pm}$, ως προς τις παραγόμενες μάζες στο 2^ο σενάριο

Όσον αφορά την ανακατασκευή των charginos τα πράγματα χειροτερεύουν, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4.11. Οι κατανομές των δύο υπερσυμμετρικών σωματιδίων σε αυτή την περίπτωση είναι αρκετά διαφορετικές μεταξύ τους. Το πρώτο chargino, ανακατασκευάζεται με πολύ μικρή μάζα, πράγμα λογικό αν συμπεριλάβουμε υπόψιν μας την κακή ανακατασκευή του μητρικού σωματιδίου καθώς και ότι αυτό το chargino σχετίζεται με τον κλάδο που περιλαμβάνει δύο άορατα σωματίδια. Αντίθετα, το δεύτερο chargino ανακατασκευάζεται με αισθητά μεγαλύτερη μάζα ενώ η κατανομή του είναι αρκετά ασύμμετρη. Αυτή την συμπεριφορά την παρατηρήσαμε και στο προηγούμενο, ασυμπέστο σενάριο, μόνο που σε αυτή την περίπτωση το φαινόμενο ενισχύεται αισθητά λόγω της συμπίεσης των δύο υπερσυμμετρικών σωματιδίων. Η ύπαρξη αυτής της ουράς στην κατανομή, όπως είχαμε αναφέρει και στο προηγούμενο παράδειγμα, σχετίζεται άμεσα με την ύπαρξη των jet σαν τελικές καταστάσεις σε αυτό τον κλάδο.

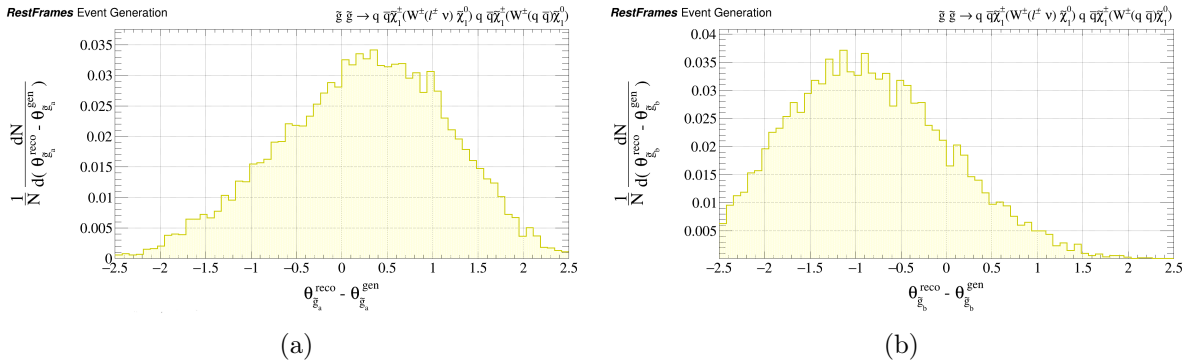
Αντίστοιχη συμπεριφορά με τα charginos, έχουν και τα neutralinos όπως φαίνεται από

το ακόλουθο Σχήμα 4.12.



Σχήμα 4.12: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των (a) $\tilde{\chi}_{1,a}^0$ και (b) $\tilde{\chi}_{1,b}^0$, ως προς τις παραγόμενες μάζες στο 2^ο σενάριο

Όπως ήταν αναμενόμενο, τα neutralinos κληρονομούν την μορφή των charginos από τα οποία προέρχονται. Το πρώτο neutralino, που σχετίζεται με τα δύο άορατα σωματίδια, λόγω των περιορισμών στην ανάλυση του, ανακατασκευάζεται με πολύ μικρή μάζα. Αντίθετα, το δεύτερο neutralino, λαμβάνει αισθητά μεγαλύτερη μάζα η οποία όμως παρουσιάζει μία αρκετά μεγάλη ουρά στην κατανομή λόγω των συνδυαστικών ασαφειών.



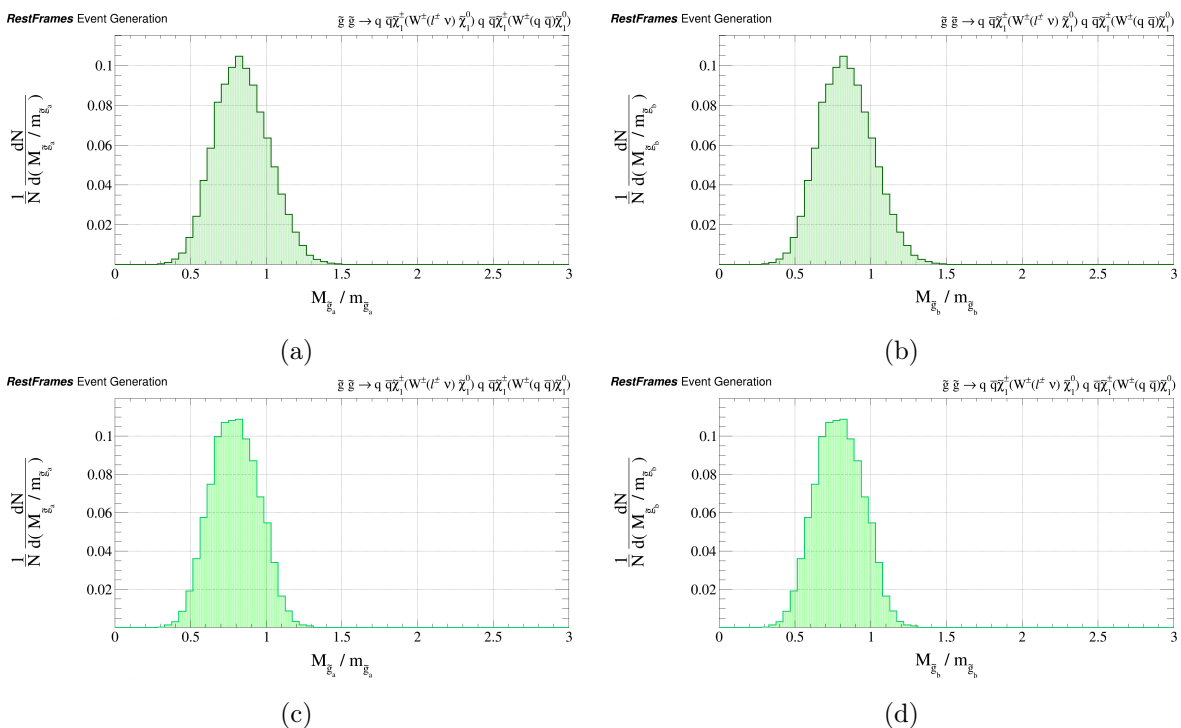
Σχήμα 4.13: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων γωνιών εκπομπής των (a) \tilde{g}_a και (b) \tilde{g}_b , ως προς τις παραγόμενες τιμές τους στο 2^ο σενάριο

Όσον αφορά τις γωνίες εκπομπής των gluinos, βλέπουμε στο Σχήμα 4.13 ότι υπάρχει ένα σημαντικό bias και στις δύο περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε μία μετατόπιση προς τα δεξιά για το πρώτο ημισφαίριο η οποία προκύπτει λόγω των περιορισμών που επιβάλλουμε. Στο δεύτερο ημισφαίριο, η κατάσταση είναι χειρότερη. Εμφανίζεται ένα μεγάλο συστηματικό σφάλμα, γεγονός το οποίο ήταν κάπως αναμενόμενο λαμβάνοντας υπόψη την μορφή του Σχήματος 4.12b.

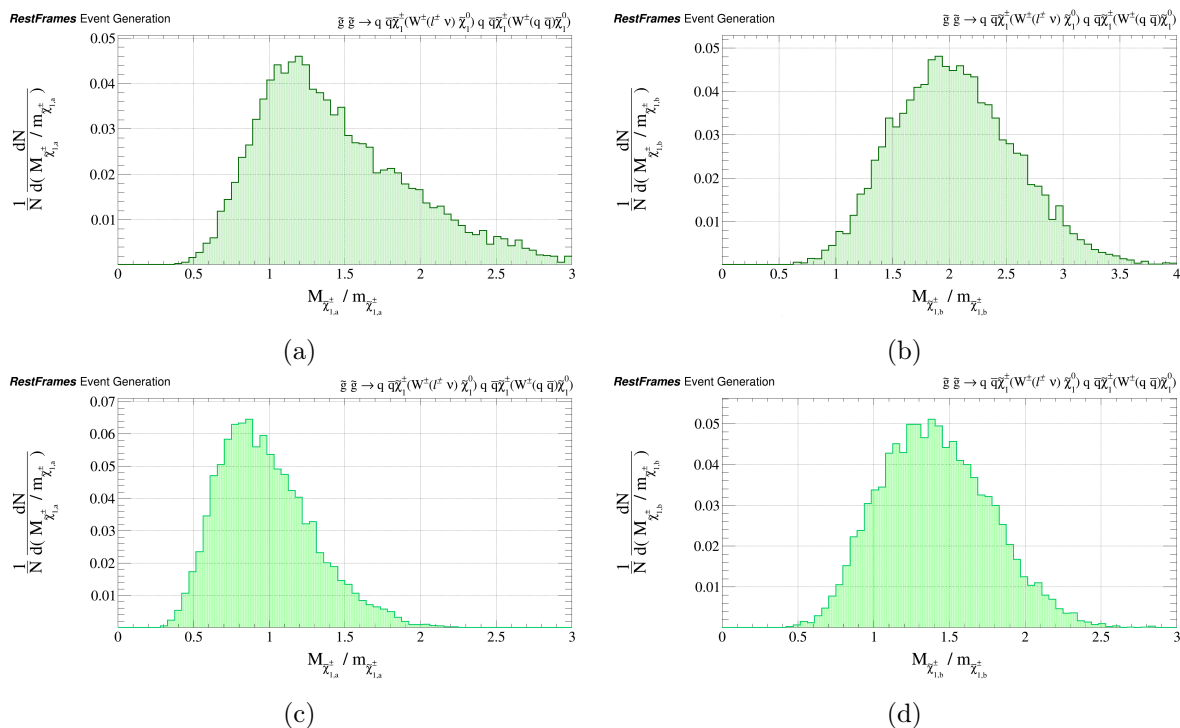
4.3.3 3^ο & 4^ο Σενάριο

Η επόμενη περίπτωση που μελετάμε είναι η αντίστροφη από την προηγούμενη. Δηλαδή τώρα, θεωρούμε ότι έχουμε συμπίεση μεταξύ των chargino και των neutralino. Μάλιστα, λόγω της ελευθερίας που έχουμε για την επιλογή της μάζας του gluino, δημιουργήσαμε δύο διαφορετικά σενάρια, με διαφορετικό φασικό χώρο, έστω να μελετήσουμε περαιτέρω την επίπτωση αυτού στα αποτελέσματά μας. Συγκεκριμένα, έχουμε επιλέξει οι μάζες των chargino και των neutralino να είναι 500 GeV και 450 GeV αντίστοιχα, ενώ την μάζα του gluino την επιλέγουμε να είναι 1800 GeV στο 3^ο σενάριο και 1300 GeV στο 4^ο σενάριο.

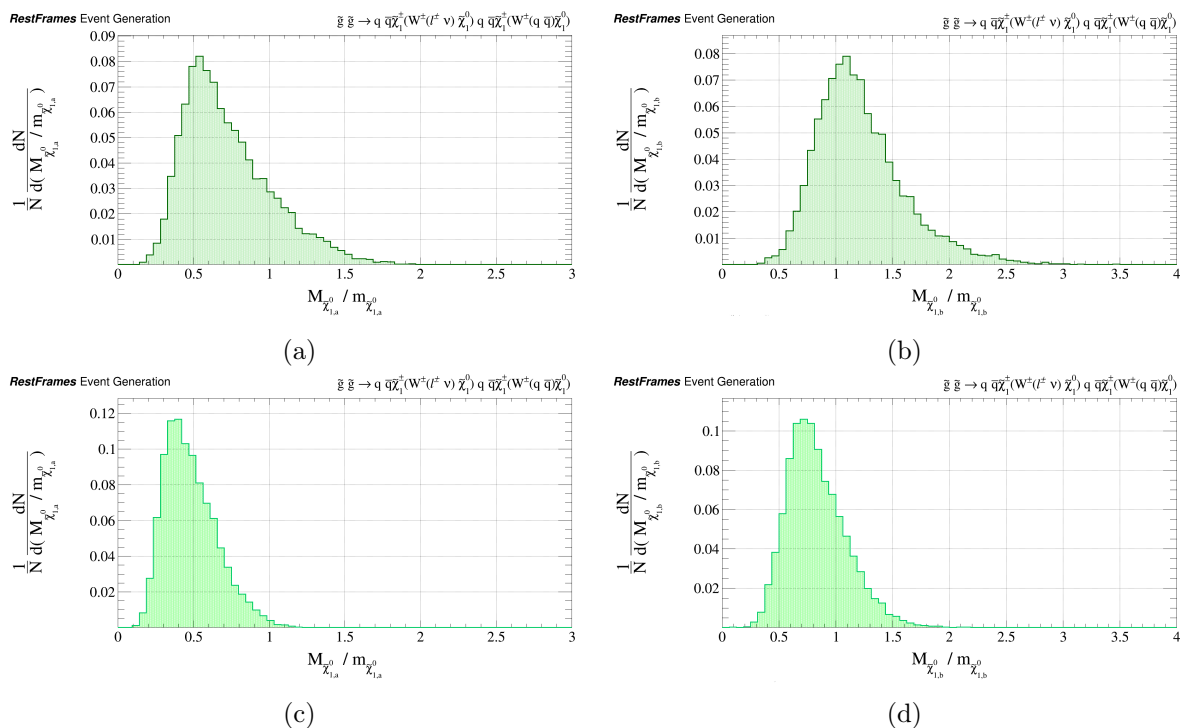
Όπως και προηγουμένως, έτσι και εδώ ξεκινάμε την ανάλυση μας με την ανακατασκευασμένη μάζα των gluino. Στο Σχήμα 4.14 παρουσιάζονται οι κατανομές αυτών των μαζών και για τα δύο σενάρια. Είναι προφανές και πάλι, ότι η μορφή των δύο gluino είναι ακριβώς ίδια, λόγω της συνθήκης που εισάγει ο *contraboost invarinat jigsaw*, ενώ υπάρχει μία μικρή μετατόπιση προς τα αριστερά λόγω της ελαχιστοποίησης της μάζας του συστήματος. Επίσης, παρατηρούμε ότι παρά την διαφορά του φασικού χώρου, η ανακατασκευή και στα δύο σενάρια είναι παρόμοια. Μάλιστα, η ανακατασκευή για το 4^ο σενάριο είναι οριακά καλύτερη, λόγω της στενότερης της μορφής, συμπεριφορά η οποία δεν ήταν αναμενόμενη, καθώς θα περίμενε κανείς λόγω του μικρότερου φασικού χώρου να γίνεται χειρότερη ανακατασκευή.



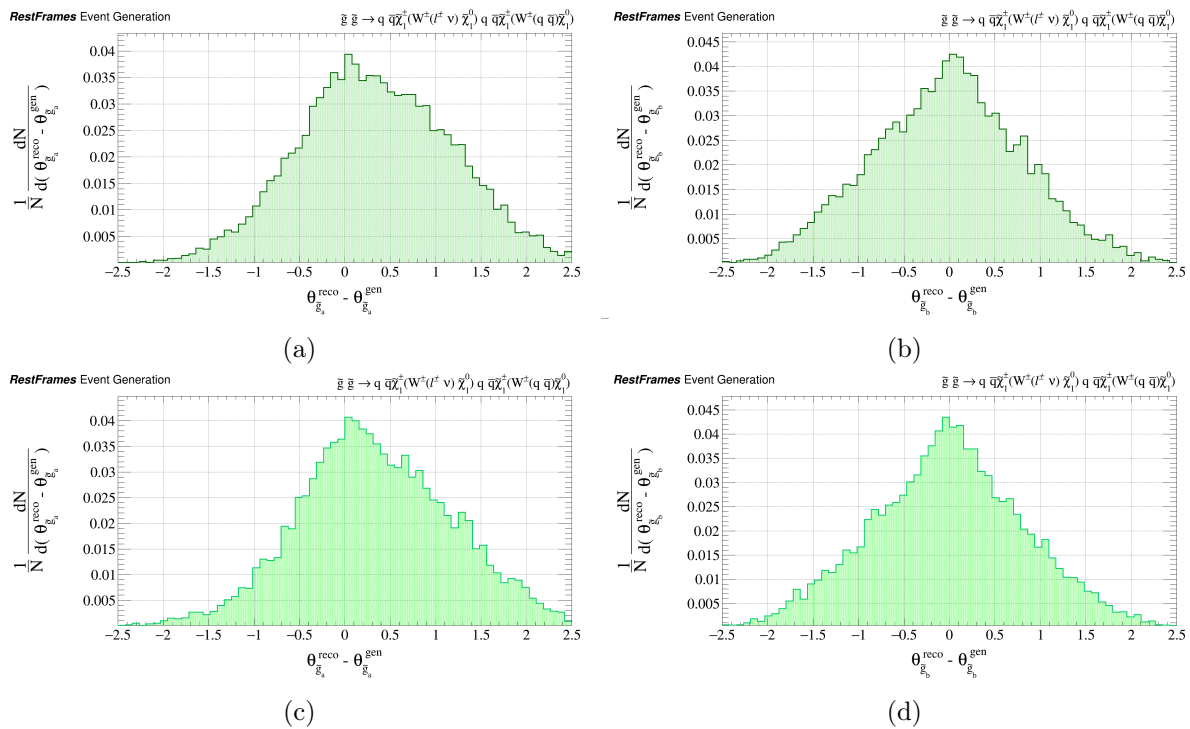
Σχήμα 4.14: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των (a) \tilde{g}_a , (b) \tilde{g}_b , στο 3^ο σενάριο και (c) \tilde{g}_a , (d) \tilde{g}_b στο 4^ο σενάριο, ως προς τις παραγόμενες μάζες τους



Σχήμα 4.15: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των (a) $\tilde{\chi}_{1,a}^\pm$, (b) $\tilde{\chi}_{1,b}^\pm$, στο 3^ο σενάριο και (c) $\tilde{\chi}_{1,a}^\pm$, (d) $\tilde{\chi}_{1,b}^\pm$ στο 4^ο σενάριο, ως προς τις παραγόμενες μάζες τους



Σχήμα 4.16: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των (a) $\tilde{\chi}_{1,a}^0$, (b) $\tilde{\chi}_{1,b}^0$, στο 3^ο σενάριο και (c) $\tilde{\chi}_{1,a}^0$, (d) $\tilde{\chi}_{1,b}^0$ στο 4^ο σενάριο, ως προς τις παραγόμενες μάζες τους



Σχήμα 4.17: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων γωνιών εκπομπής των των (a) \tilde{g}_a , (b) \tilde{g}_b , στο 3^ο σενάριο και (c) \tilde{g}_a , (d) \tilde{g}_b στο 4^ο σενάριο, ως προς τις παραγόμενες τιμές τους

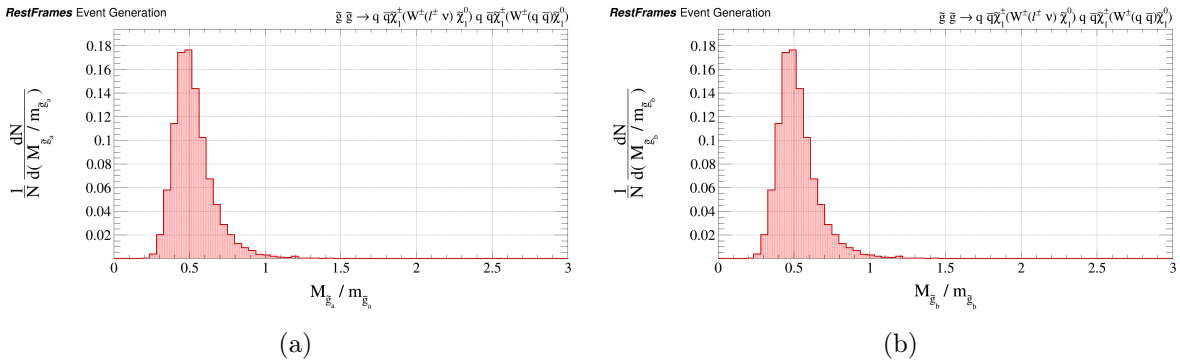
Μεγάλο ενδιαφέρον έχει να δούμε την συμπεριφορά των συμπιεσμένων charginos. Οι κατανομές των μαζών αυτών, απεικονίζονται στο Σχήμα 4.15. Όσον αφορά το 3^ο σενάριο, η ανακατασκευή των chargino γίνεται, συστηματικά, με μεγαλύτερη από την πραγματική μάζα. Επιπλέον παρατηρούμε ότι υπάρχει ασυμμετρία στις ουρές των κατανομών με το φαινόμενο να είναι πιο αισθητό στην περίπτωση του $\tilde{\chi}_{1,a}^\pm$. Αντίστοιχα είναι τα αποτελέσματα και για το 4^ο σενάριο. Συγκεκριμένα, η μορφή των δύο κατανομών παρουσιάζει μία ασυμμετρία, με το φαινόμενο και πάλι να είναι πιο εμφανές στο $\tilde{\chi}_{1,a}^\pm$. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η μορφή των δύο κατανομών, μεταξύ των δύο σεναρίων είναι ακριβώς ίδια με μόνη διαφορά ότι οι κατανομές για το 3^ο σενάριο είναι πιο ευρείες. Αυτό οφείλεται ακριβώς στον αυξημένο φασικό χώρο. Είναι προφανές ότι η ανακατασκευή των chargino στο 4^ο σενάριο είναι σημαντικά καλύτερη.

Αντίστοιχες παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε και για τα neutralinos, Σχήμα 4.16. Όπως και με τα charginos, έτσι και εδώ, οι κατανομές εμφανίζουν την ίδια μορφή με την διαφορά ότι λόγω του διαφορετικού φασικού χώρου, οι κατανομές στο 3^ο σενάριο είναι πιο ευρείες. Ειδικότερα, βλέπουμε ότι η ανακατασκευή των neutralinos που σχετίζονται με τα αόρατα σωματίδια να είναι χειρότερη, με την έννοια ότι λαμβάνουν αρκετά μικρότερη μάζα από την παραγόμενη. Η κατάσταση βελτιώνεται στα neutralinos που σχετίζονται με τα ορατά σωματίδια. Μάλιστα, η ανακατασκευή αυτού στο 3^ο σενάριο πλησιάζει πολύ κοντά την μονάδα.

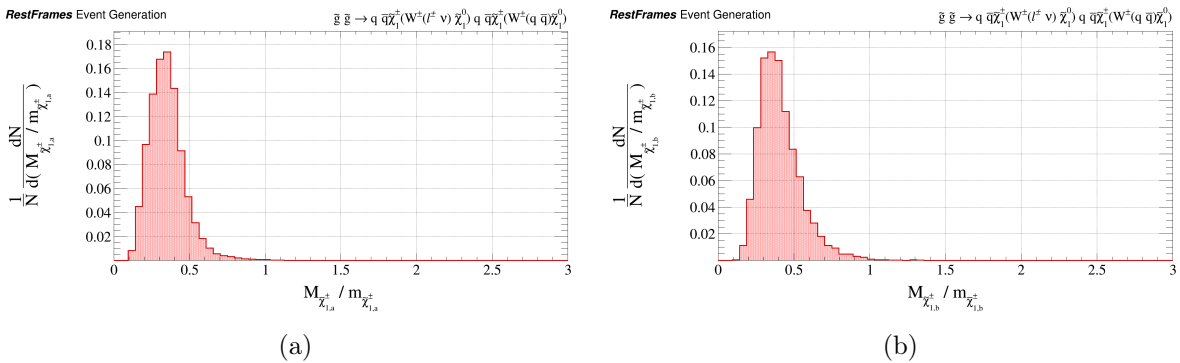
Αναφορικά με τις γωνίες εκπομπής των gluino, βλέπουμε ότι (Σχήμα 4.17) η κατανομή τους, σε αυτές τις περιπτώσεις, είναι πολύ καλύτερη σε σύγκριση με το προηγούμενο, συμπιεσμένο, σενάριο. Εμφανίζεται μόνο μία μικρή ασυμμετρία στην κατανομή της γωνίας που σχετίζεται με το \tilde{g}_a και για τις δύο περιπτώσεις. Γενικότερα, παρατηρούμε ότι λόγω των περιορισμών που θέτουμε μέσω των JR's που επιβάλλουμε, η $\theta_{\tilde{g}_a}$ εμφανίζει, και στα 4 σεναρία που έχουμε δει μέχρι στιγμής, μία ασυμμετρία προς τα δεξιά. Η $\theta_{\tilde{g}_b}$ από την άλλη, εδώ, ανακατασκευάζεται εκπληκτικά συμμετρικά, δηλαδή χωρίς κάποιο bias.

4.3.4 5^ο Σενάριο

Τελευταία και πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι αυτή όπου και τα τρία υπερσυμμετρικά σωματίδια είναι συμπιεσμένα. Ειδικότερα, για αυτή την περίπτωση έχει επιλεγεί οι μάζες του να είναι: $m_{\tilde{g}} = 560$ GeV, $m_{\tilde{\chi}_1^\pm} = 480$ GeV και $m_{\tilde{\chi}_1^0} = 400$ GeV. Σε αυτή την περίπτωση, θέλουμε να δούμε, πως επιδρά, η συμπίεση που επιβάλλουμε, στα αποτελέσματα μας και να τα συγκρίνουμε τα παραπάνω σενάρια. Αρχικά, παρουσιάζονται οι ανακατασκευασμένες μάζες των gluino στο Σχήμα 4.18. Όπως και στο 2^ο σενάριο, έτσι και εδώ, λόγω της συμπίεσης, τα gluino ανακατασκευάζονται με αισθητά μικρότερη μάζα. Βέβαια, παρατηρούμε ότι η κατανομή τους είναι αισθητά καλύτερη, υπό την έννοια ότι είναι πιο στενή και δεν έχει περιέργες ουρές. Φυσικά, όπως και με όλα τα προηγούμενα σενάρια, έτσι και εδώ, η μορφή των δύο gluino είναι πανομοιότυπη λόγω της εφαρμογής της συνθήκης $M_{\tilde{g}_a} = M_{\tilde{g}_b}$ η οποία επιβάλλεται από τον *contraboost invariant jigsaw*.



Σχήμα 4.18: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των (a) \tilde{g}_a και (b) \tilde{g}_b ως προς τις παραγόμενες μάζες στο 5^ο σενάριο

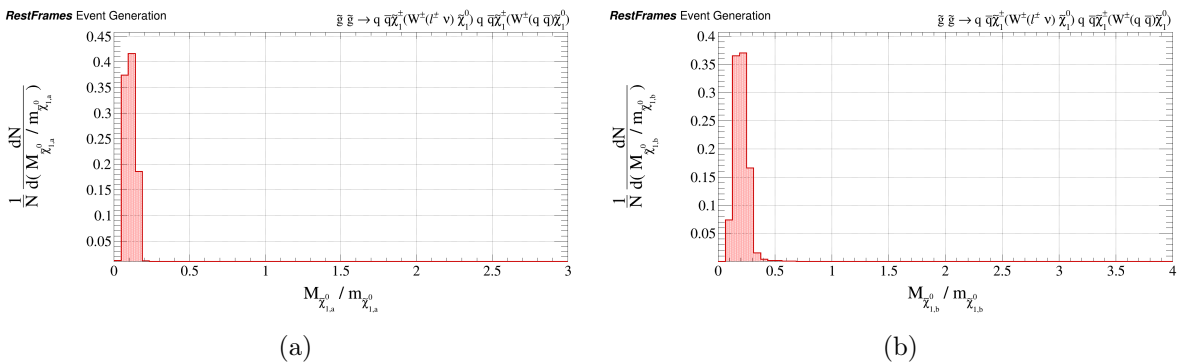


Σχήμα 4.19: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των (a) $\tilde{\chi}_{1,a}^\pm$ και (b) $\tilde{\chi}_{1,b}^\pm$ ως προς τις παραγόμενες μάζες στο 5^ο σενάριο

Στο Σχήμα 4.19 παρουσιάζονται οι κατανομές για τα charginos. Όπως μπορούμε να δούμε, η ανακατασκευή τους είναι αρκετά καλή, με μόνη εξαίρεση το γεγονός ότι λαμβάνουν μικρότερη από την πραγματική μάζα. Αυτό βέβαια είναι απόλυτα λογικό, αν λάβουμε υπόψη την κατανομή των gluinos καθώς και το γεγονός ότι έχουν πολύ μικρή διαφορά μάζας. Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι και πάλι η κατανομή τους, παρόλη την συμπίεση είναι πολύ καλή, σε αντίθεση με το 2^ο σενάριο, όπου το ένα ανακατασκευαζόταν με πολύ μικρή μάζα και το άλλο με πολύ μεγάλη ασυμμετρία. Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε μόνο μία

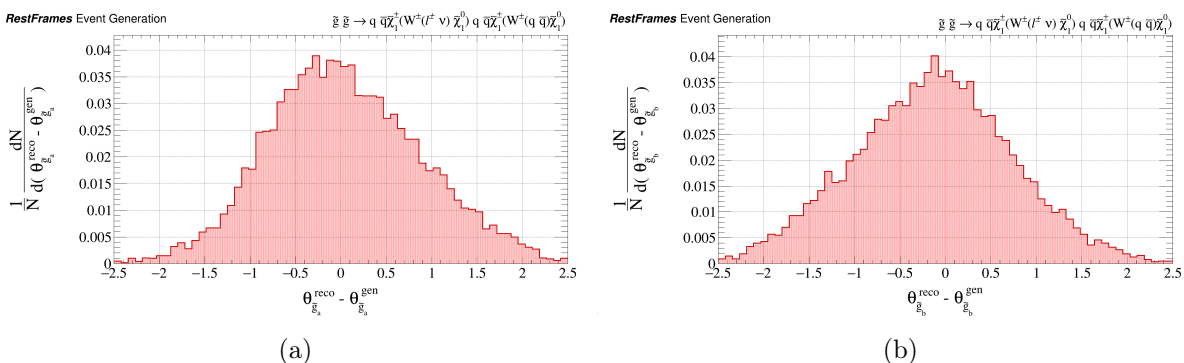
πολύ μικρή διαφορά μεταξύ των δύο charginos, γεγονός το οποίο οφείλεται στο ότι το $\tilde{\chi}_{1,a}^{\pm}$ σχετίζεται με τα δύο άορατα σωματίδια.

Αντίστοιχη συμπεριφορά, παρουσιάζει και η μορφή των κατανομών των neutralinos. Όπως ήταν αναμενόμενο, η υποτίμηση στις μάζες συνεχίζεται, με τα neutralino να λαμβάνουν ελάχιστη μάζα. Βέβαια, είναι σημαντικό το γεγονός ότι και εδώ η κατανομή τους, δεν παρουσιάζει περίεργη συμπεριφορά λόγω της συμπίεσης. Αυτό που χρειάζεται να επισημάνουμε είναι ότι και πάλι, όπως και με τα charginos, το $\tilde{\chi}_{1,a}^0$ που σχετίζεται με τα άορατα σωματίδια, ανακατασκευάζεται με μικρότερη μάζα από το $\tilde{\chi}_{1,b}^0$ λόγω της επιπρόσθετης συνθήκης που εφαρμόζεται σε αυτό από τον δεύτερο contraboost invariant jigsaw.



Σχήμα 4.20: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων μαζών των (a) $\tilde{\chi}_{1,a}^0$ και (b) $\tilde{\chi}_{1,a}^0$ ως προς τις παραγόμενες μάζες στο 5^ο σενάριο

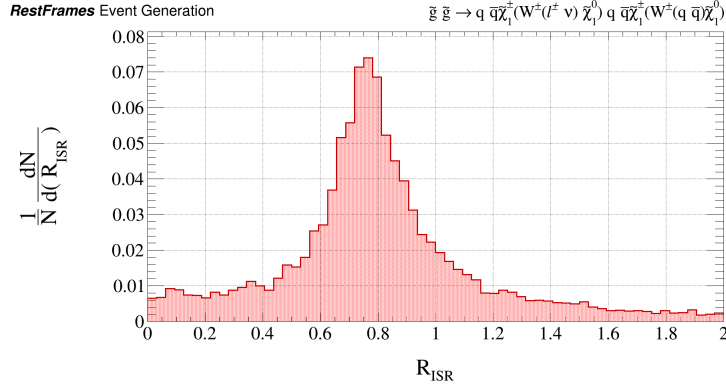
Η επόμενη ποσότητα που μελετάμε είναι οι γωνίες εκπομπής των gluinos. Παρατηρούμε στο Σχήμα 4.21 ότι η μορφή αυτών των κατανομών είναι παρόμοια με αυτή των σεναρίων 1, 3 και 4. Ειδικότερα, παρόλο το compression που έχουμε επιβάλλει, εμφανίζεται μηδαμινό bias. Το μόνο που μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι, μία μικρή ασυμμετρία στις δύο κατανομές, με την κατανομή της $\theta_{\tilde{g}_a}$ να τείνει προς τα δεξιά ενώ αυτή της $\theta_{\tilde{g}_b}$ να τείνει ελάχιστα προς τα αριστερά. Βέβαια η διαφορά είναι τόσο μικρή, ειδικά για την $\theta_{\tilde{g}_b}$, όπου δεν θεωρείται σημαντική.



Σχήμα 4.21: Οι κανονικοποιημένες κατανομές των ανακατασκευασμένων γωνιών εκπομπής των (a) \tilde{g}_a και (b) \tilde{g}_b ως προς τις παραγόμενες τιμές τους στο 5^ο σενάριο

Τέλος, σε αυτό το συμπιεσμένο σενάριο μπορούμε να δούμε την συμπεριφορά της ποσότητας R_{ISR} που ορίσαμε εξίσωση (3.2). Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4.22, παρατηρούμε κορυφή κοντά στο 0.8 το οποίο είναι περίπου ο λόγος των μαζών των θυγατρικών σωματιδίων προς τα μητρικά, δηλαδή στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι ο λόγος των neutralinos προς

τα gluinos, όπως ακριβώς αναμένουμε από την προσέγγιση που εισαγάγαμε στην ενότητα 3.1 όπου και καταλήξαμε στην εξίσωση (3.3). Σύμφωνα με την θεωρία, περιμένουμε ότι όσο πιο συμπιεσμένη ήταν η μάζα των υπερσυμμετρικών σωματιδίων, τόσο πιο κοντά θα ήταν η κατανομή στην μονάδα.



Σχήμα 4.22: Η κανονικοποιημένη κατανομή της ποσότητας R_{ISR}

4.3.5 Τελικά Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος Recursive Jigsaw Reconstruction λειτουργήσει ικανοποιητικά στην ανακατασκευή της αντίδρασης $\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow q\bar{q}\tilde{\chi}_1^\pm(\tilde{\chi}_1^0 W^\pm(l^\pm\nu))q\bar{q}\tilde{\chi}_1^\pm(\tilde{\chi}_1^0 W^\pm(q\bar{q}))$. Συγκεκριμένα, τα καλύτερα αποτελέσματα τα είδαμε, προφανώς, στο ασυμπίεστο σενάριο, με το χειρότερο, προς έκπληξη μας, να είναι το 2^ο σενάριο στο οποίο είχαμε συμπίεση των gluinos με τα charginos. Παραδόξως, το πλήρως συμπιεσμένο σενάριο, ανακατασκευάστηκε αρκετά καλά με μόνη εξαίρεση το ότι υποτιμούνται συστηματικά οι μάζες, γεγονός το οποίο ήταν κάπως αναμενόμενο. Όσον αφορά τα άλλα δύο σενάρια στα οποία είχαμε συμπίεση μεταξύ των charginos και των neutralinos, παρατηρήσαμε ότι η μέθοδος RJR αποδίδει καλύτερα σε αυτό με τον μικρότερο φασικό χώρο, με μηδανινό bias και στις δύο περιπτώσεις.

Παράρτημα Α

Χρήσιμα Μεγέθη

A.1 Μετασχηματισμοί Lorentz

Οι μετασχηματισμοί Lorentz αποτελούν μια ομάδα μετασχηματισμών, που χρησιμοποιείται για να μετασχηματίσει τις χωροχρονικές συντεταγμένες, ή γενικότερα οποιοδήποτε τετράνυσμα, από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ , σε ένα άλλο Σ' , όπου το Σ' κινείται με σχετική ταχύτητα \vec{u} ως προς το Σ . Για μια προώθηση (boost) σε τυχαία κατεύθυνση ο μετασχηματισμός Lorentz είναι:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{\beta}^T \\ -\gamma \vec{\beta} & I + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \vec{\beta} \vec{\beta}^T \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

όπου

$$\gamma(\beta) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{\beta}|^2}} \text{ με } \vec{\beta} = \frac{\vec{u}}{c} \quad (\text{A.2})$$

Εν γένει, στις συγκρούσεις σωματιδίων μας ενδιαφέρουν ποσότητες που είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz έτσι ώστε να είναι ίδιες ανεξάρτητα σε ποιο σύστημα τις υπολογίζουμε, είτε αυτό είναι το σύστημα του εργαστηρίου είτε το σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου.

A.2 Εγκάρσια Ορμή & Ενέργεια

Στον LHC, οι δέσμες των πρωτονίων κινούνται στην διεύθυνση του άξονα που ορίζει ο επιταχυντής, ο οποίος κατά σύμβαση ταυτίζεται με τον άξονα z . Όμως, τα πρωτόνια δεν είναι στοιχειώδη σωματίδια δηλαδή έχουν εσωτερή δομή, η οποία αποτελείται από παρτόνια, δηλαδή γλουόνια και κουάρκ. Επομένως, όταν τα πρωτόνια συγκρούονται, στην πραγματικότητα, η σύγκρουση γίνεται μεταξύ των παρτονίων, τα οποία μεταφέρουν ένα άγνωστο κλάσμα της ορμής του πρωτονίου. Δηλαδή, το μέτρο της ορμής του παρτονίου είναι $p_{parton} = x P_{proton}$ με $x \in [0, 1]$. Συνεπώς, δεν γίνεται να μιλήσουμε για διατήρηση της ορμής στην αρχική διεύθυνση των δεσμών (άξονας z). Από επειδή κάθε ένα από τα παρτόνια έχει μηδενική εγκάρσια ορμή, τότε γνωρίζουμε ότι αρχικά η ορμή στο επίπεδο κάθετο στην διεύθυνση των δεσμών είναι μηδέν. Γι' αυτό το λόγο παίζει πολύ σημαντικό ρόλο η μέτρηση της ορμής στο

κάθετο επίπεδο. Έτσι, ορίζουμε την εγκάρσια ορμή ενός σωματιδίου:

$$\vec{p}_T = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = p \sin \theta \quad (\text{A.3})$$

Αντίστοιχα, ορίζουμε την εγκάρσια ενέργεια, μέσω της εγκάρσιας ορμής ως εξής:

$$E_T = \sqrt{E^2 - p_z^2} = \sqrt{m^2 + p_T^2} \quad (\text{A.4})$$

A.3 Ελλείπουσα Εγκάρσια Ορμή & Ενέργεια

Πολλά από τα σωματίδια που προκύπτουν από τις διασπάσεις αλληλεπιδρούν μόνο ασθενώς με την ύλη (π.χ νετρίνα, LSPs), οπότε δεν μπορεί να γίνει άμεση παρατήρηση τους από τους ανιχνευτές. Για αυτόν τον λόγο ο μόνος τρόπος να τα εντοπίσουμε είναι αξιοποιώντας την αρχή διατήρησης της ορμής στο εγκάρσιο επίπεδο, καθώς ένα σημαντικό κλάσμα της συνολικής ενέργειας των αρχικών πρωτονίων δεν ανιχνεύεται και έτσι το άθροισμα των εγκάρσιων ορμών των σωματιδίων που λαμβάνουν μέρος σε αυτά τα γεγονότα δεν είναι μηδενικό. Έτσι για να υπολογισθεί η εγκάρσια ορμή τους, αθροίζονται όλες οι άλλες ορμές των παρατηρούμενων σωματιδίων και βλέπουμε τι «λείπει», ώστε να αθροίζονται στο μηδέν. Συνεπώς εισάγονται τα μεγέθη της ελλείπουσας εγκάρσιας ορμής και ελλείπουσας εγκάρσιας ενέργειας (MET):

$$\vec{E}_T^{miss} = \vec{E}_T = - \sum_i \vec{p}_T^i \quad (\text{A.5})$$

$$MET = E_T = |\vec{E}_T| \quad (\text{A.6})$$

Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζουμε την ολική εγκάρσια ελλείπουσα ορμή και όχι την εγκάρσια ορμή ενός αόρατου σωματιδίου, αφού δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τον συνολικό αριθμό των σωματιδίων που δραπετεύουν από τους ανιχνευτές, αλλά και ποιο κλάσμα της ορμής αυτής αντιστοιχεί σε κάθε σωματίδιο.

A.4 Αναλλοίωτη Μάζα

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, [A.1](#), μας ενδιαφέρουν μεγέθη που είναι αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Η αναλλοίωτη μάζα είναι ένα τέτοιο αναλλοίωτο μέγεθος το οποίο χρησιμοποιείται στις αναλύσεις των γεγονότων που προκύπτουν από συγκρούσεις σωματιδίων και ορίζεται ως εξής:

$$M = \sqrt{\mathbf{p}^\mu \cdot \mathbf{p}_\mu} = \sqrt{E^2 - \vec{p}^2} \quad (\text{A.7})$$

Το μέγεθος αυτό, είναι προφανές ότι είναι αναλλοίωτο καθώς προκύπτει από ένα εσωτερικό γινόμενο Minkowski το οποίο εξ'ορισμού παραμένει σταθερό κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς. Συνεπώς, η αναλλοίωτη μάζα είναι ανεξάρτητη της επιλογής αδρανειακού συστήματος αναφοράς και διατηρεί τη τιμή της σε όλα τα συστήματα αναφοράς.

Για ένα σύστημα πολλών σωματιδίων η αναλλοίωτη μάζα του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$M = \sqrt{(\mathbf{p}_1^\mu + \mathbf{p}_2^\mu + \dots + \mathbf{p}_N^\mu)^2} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^N E_n\right)^2 - \left(\sum_{n=1}^N \vec{p}_n\right)^2} \quad (\text{A.8})$$

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε και την εγκάρσια μάζα ενός πλήθους N σωματιδίων η οποία είναι πολύ χρήσιμη σε αναλύσεις γεγονότων από συγκρούσεις σωματιδίων.

$$M_T = \sqrt{(E_{T,1} + E_{T,2} + \dots + E_{T,N})^2 - (\vec{p}_{T,1} + \vec{p}_{T,2} + \dots + \vec{p}_{T,N})^2} \quad (\text{A.9})$$

A.5 Ωκύτητα - Ψευδοωκύτητα

Πέραν των εγκάρσιων μεγεθών, χρειάζεται να ορίσουμε ένα μέγεθος το οποίο θα σχετίζεται με την p_z . Αυτό το μέγεθος λέγεται ωκύτητα (rapidity) και ορίζεται ως εξής:

$$y \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{p_z}{E} \right) \quad (\text{A.10})$$

Ας δούμε τώρα πως αυτή μετασχηματίζεται κάτω από έναν μετασχηματισμό Lorentz. Ισχύει ότι για προώθηση στον άξονα z , ο μετασχηματισμός Lorentz γράφεται ως

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Οπότε η ενέργεια και η ορμή στην z διεύθυνση, γράφονται ως

$$E' = \gamma(E - \beta p_z) \text{ και } p'_z = \gamma(p_z - \beta E)$$

Δηλαδή με βάση αυτούς τους μετασχηματισμούς η ωκύτητα γίνεται

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E' + p'_z}{E' - p'_z} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma E - \gamma\beta p_z + \gamma p_z - \gamma\beta E}{\gamma E - \gamma\beta p_z - \gamma p_z + \gamma\beta E} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\gamma(E + p_z) - \gamma\beta(E + p_z)}{\gamma(E - p_z) + \gamma\beta(E - p_z)} \right] = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma - \gamma\beta}{\gamma + \gamma\beta} \right) \end{aligned}$$

οπότε έχουμε εν τέλει ότι στο νέο σύστημα αναφοράς ισχύει:

$$y' = y + \ln \left(\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \right) \quad (\text{A.11})$$

Αυτός ο σχετικιστικός μετασχηματισμός της ωκύτητας έχει μια πολύ σημαντική συνέπεια. Έστω ότι μετά από μία σύγκρουση σωματιδίων προκύπτουν νέα σωματίδια με ωκύτητες y_1 και y_2 και ότι σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς έχουν μετρηθεί οι y'_1 και y'_2 . Τότε ισχύει ότι

$$y'_1 - y'_2 = y_1 + \ln \left(\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \right) - y_2 - \ln \left(\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \right) = y_1 - y_2 \quad (\text{A.12})$$

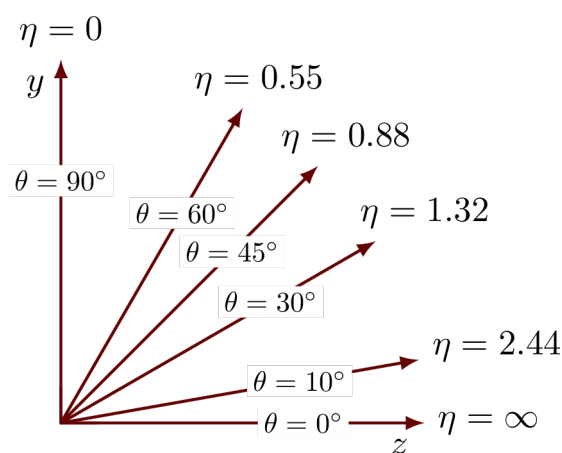
Συνεπώς η διαφορά στις ωκύτητες μεταξύ δύο σωματιδίων είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz για προωθήσεις στην διεύθυνση του z . Για αυτό ακριβώς, η ωκύτητα είναι ένα πολύ σημαντικό μέγεθος για την φυσική των επιταχυντών.

Ωστόσο, επειδή στην Σωματιδιακή Φυσική ασχολούμαστε με υψηλές ενέργειες, μας ενδιαφέρει το όριο όπου $|\vec{p}| \gg m$, δηλαδή στο όριο που $m \rightarrow 0$. Σε αυτό το όριο η ωκύτητα παίρνει άλλη μορφή, την οποία και ονομάζουμε ψευδοωκύτητα (pseudorapidity):

$$\eta \equiv \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \quad (\text{A.13})$$

και επειδή $E \approx |\vec{p}|$ και $p_z = |\vec{p}| \cos \theta$, έχουμε:

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|\vec{p}| + |\vec{p}| \cos \theta}{|\vec{p}| - |\vec{p}| \cos \theta} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) = -\ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (\text{A.14})$$



Σχήμα A.1: Οι τιμές του $|\eta|$ για διαφορετικές γωνίες

Παράρτημα Β

Κώδικας

```
#define COMPILER (!defined(__CINT__) && !defined(__CLING__))
#if defined(__MAKECINT__) || defined(__ROOTCLING__) || COMPILER
#include "RestFrames/RestFrames.hh"
// #include "RestFrames/MaxProbBreitWignerCombJigsaw.hh"
#else
RestFrames::RFKey ensure_autoload(1);
#endif

using namespace RestFrames;

void example_DiGluino_to_qqX2WlnuX1qqX2WqqX1(std::string output_name =
    "output_DiGluino_to_qqX2WlnuX1qqX2WqqX1.root"){

gROOT->SetBatch(kTRUE); // not show canvas when draw

    // Masses for the simulation
    double mG = 1800.;
    double mX2 = 1000.;
    double mX1 = 400. ;
    double mW = 80.385; // GeV, PDG 2016
    double wW = 2.085;
    double mL = 0.106; //muons
    double mN = 0.;
    double mup = 0.00216;
    double md = 0.00467;

    // Number of events to generate
    int Ngen = 10000;

    ////////////////////////////////////////////////////////////////////

    //Start of generation
    ////////////////////////////////////////////////////////////////////
    g_Log << LogInfo << "Initializing generator frames and tree..." << LogEnd;
    ////////////////////////////////////////////////////////////////////
    ppLabGenFrame LAB_Gen("LAB_Gen", "LAB");
    DecayGenFrame CM_Gen("CM_Gen", "CM");
```



```

//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//
CM_Gen.SetVariableMass();
GG_Gen.SetVariableMass();
// set gluino masses
Ga_Gen.SetMass(mG);
Gb_Gen.SetMass(mG);
// set X masses
X2a_Gen.SetMass(mX2);
X2b_Gen.SetMass(mX2);
X1a_Gen.SetMass(mX1);
X1b_Gen.SetMass(mX1);
// set W's pole masses and width
Wa_Gen.SetMass(mW);           Wa_Gen.SetWidth(wW);
Wb_Gen.SetMass(mW);           Wb_Gen.SetWidth(wW);
//set lepton's mass
L_Gen.SetMass(mL);
//set neutrino's mass
NU_Gen.SetMass(mN);
//set quarks' masses
V1a_Gen.SetMass(mup);
V2a_Gen.SetMass(md);
V1b_Gen.SetMass(md);
V2b_Gen.SetMass(mup);
V3b_Gen.SetMass(mup);
V4b_Gen.SetMass(md);

// set jet pT and eta cuts
V1a_Gen.SetPtCut(20.);        V1a_Gen.SetEtaCut(2.5);
V1b_Gen.SetPtCut(20.);        V1b_Gen.SetEtaCut(2.5);
V2a_Gen.SetPtCut(20.);        V2a_Gen.SetEtaCut(2.5);
V2b_Gen.SetPtCut(20.);        V2b_Gen.SetEtaCut(2.5);
V3b_Gen.SetPtCut(20.);        V3b_Gen.SetEtaCut(2.5);
V4b_Gen.SetPtCut(20.);        V4b_Gen.SetEtaCut(2.5);
// set lepton pT and eta cuts
L_Gen.SetPtCut(8.);           L_Gen.SetEtaCut(2.5);

ISR_Gen.SetPtCut(20.);        ISR_Gen.SetEtaCut(2.5);

if(LAB_Gen.InitializeAnalysis())
  g_Log << LogInfo << "...Successfully initialized generator analysis" <<
    std::endl << LogEnd;
else
  g_Log << LogError << "...Failed initializing generator analysis" << LogEnd;
//-----
//End of generation
//-----

// Start of reconstruction
//-----

```

```

g_Log << LogInfo << "Initializing reconstruction frames and trees..." <<
  LogEnd;
////////////////////////////////////
LabRecoFrame    LAB("LAB", "LAB");
DecayRecoFrame  CM("CM", "CM");
VisibleRecoFrame ISR("ISR", "ISR");
DecayRecoFrame  GG("GG", "#tilde{g}#tilde{g}");
DecayRecoFrame  Ga("Ga", "#tilde{g}_{a}");
DecayRecoFrame  Gb("Gb", "#tilde{g}_{b}");

VisibleRecoFrame V1a("V1a", "q_{1a}");
VisibleRecoFrame V2a("V2a", "#bar{q}_{2a}");
DecayRecoFrame  X2a("X2a", "#tilde{#chi}_{1a}^{#pm}");
DecayRecoFrame  Wa("Wa", "W_a");
InvisibleRecoFrame X1a("X1a", "#tilde{#chi}_{1a}^{0}");
VisibleRecoFrame L("L", "#it{l}");
InvisibleRecoFrame NU("NU", "#nu");

VisibleRecoFrame V1b("V1b", "q_{1b}");
VisibleRecoFrame V2b("V2b", "#bar{q}_{2b}");
DecayRecoFrame  X2b("X2b", "#tilde{#chi}_{1b}^{#pm}");
DecayRecoFrame  Wb("Wb", "W_b");
InvisibleRecoFrame X1b("X1b", "#tilde{#chi}_{1b}^{0}");
VisibleRecoFrame V3b("V3b", "q_{3b}");
VisibleRecoFrame V4b("V4b", "#bar{q}_{4b}");
//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//
LAB.SetChildFrame(CM);
CM.AddChildFrame(ISR);
CM.AddChildFrame(GG);
GG.AddChildFrame(Ga);
GG.AddChildFrame(Gb);

Ga.AddChildFrame(V1a);
Ga.AddChildFrame(V2a);
Ga.AddChildFrame(X2a);

X2a.AddChildFrame(X1a);
X2a.AddChildFrame(Wa);

Wa.AddChildFrame(L);
Wa.AddChildFrame(NU);

Gb.AddChildFrame(V1b);
Gb.AddChildFrame(V2b);
Gb.AddChildFrame(X2b);

X2b.AddChildFrame(X1b);
X2b.AddChildFrame(Wb);

Wb.AddChildFrame(V3b);

```

```

Wb.AddChildFrame(V4b);

if(LAB.InitializeTree())
  g_Log << LogInfo << "...Successfully initialized reconstruction trees" <<
    LogEnd;
else
  g_Log << LogError << "...Failed initializing reconstruction trees" <<
    LogEnd;

//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//

if(LAB.InitializeTree())
  g_Log << LogInfo << "...Successfully initialized reconstruction trees" <<
    LogEnd;
else
  g_Log << LogError << "...Failed initializing reconstruction trees" <<
    LogEnd;

//-----//

//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//

//Invisible system and jigsaws applied to it

InvisibleGroup INV("INV","Invisible Object Jigsaws");
INV.AddFrames(X1a+X1b+NU);

// Set invisible system's mass to minimum Lorentz-invariant expression:
SetMassInvJigsaw
  MinMassJigsaw("Invisible_system_mass","M_{#tilde{#chi}}_{1a}^{ 0}
  #tilde{#chi}_{1b}^{ 0} #nu} = min");
INV.AddJigsaw(MinMassJigsaw);

// Set invisible system's rapidity to that of visible particles:
SetRapidityInvJigsaw
  RapidityJigsaw("Invisible_eta","#eta_{#tilde{#chi}}_{1a}^{ 0}
  #tilde{#chi}_{1b}^{ 0} #nu} = #eta_{V1a V2a V1b V2b V3b V4b #it{1}
  ISR}");
INV.AddJigsaw(RapidityJigsaw);
RapidityJigsaw.AddVisibleFrames(ISR+L+V1a+V2a+V1b+V2b+V3b+V4b);
//RapidityJigsaw.AddVisibleFrames((LAB.GetListVisibleFrames()));

// First breakdown of invisible system:
ContraBoostInvJigsaw ContraBoostJigsaw1("contra_inv","Contraboost invariant
  Jigsaw");
INV.AddJigsaw(ContraBoostJigsaw1);
ContraBoostJigsaw1.AddVisibleFrames(V1a+V2a+L, 0);
ContraBoostJigsaw1.AddVisibleFrames(V1b+V2b+V3b+V4b, 1);
ContraBoostJigsaw1.AddInvisibleFrames(X1a+NU, 0);
ContraBoostJigsaw1.AddInvisibleFrame(X1b, 1);

```

```

// Second breakdown of invisible system:
ContraBoostInvJigsaw ContraBoostJigsaw2("contra_inv2","Contraboost invariant
  Jigsaw");
INV.AddJigsaw(ContraBoostJigsaw2);
ContraBoostJigsaw2.AddVisibleFrames(L+V1a+V2a, 0);
ContraBoostJigsaw2.AddVisibleFrames(L+V1a+V2a, 1);
ContraBoostJigsaw2.AddInvisibleFrame(X1a, 0);
ContraBoostJigsaw2.AddInvisibleFrame(NU, 1);

//Visible system and jigsaws applied to it

CombinatoricGroup VIS("VIS","Visible Object Jigsaws");
VIS.AddFrame(V1a);
VIS.AddFrame(V1b);
VIS.AddFrame(V2a);
VIS.AddFrame(V2b);
VIS.AddFrame(V3b);
VIS.AddFrame(V4b);
VIS.SetNElementsForFrame(V1a,1,false);
VIS.SetNElementsForFrame(V1b,1,false);
VIS.SetNElementsForFrame(V2a,1,false);
VIS.SetNElementsForFrame(V2b,1,false);
VIS.SetNElementsForFrame(V3b,1,false);
VIS.SetNElementsForFrame(V4b,1,false);

//Breakdown of visible system into two subsets (JR VIII.2)
MinMassesCombJigsaw HemiJigsaw("HEM_JIGSAW","Minimize m_{V_{a,b}} Jigsaw");
VIS.AddJigsaw(HemiJigsaw);
HemiJigsaw.AddFrame(V1a,0);
HemiJigsaw.AddFrame(V1b,1);
HemiJigsaw.AddFrame(V2a,0);
HemiJigsaw.AddFrame(V2b,1);
HemiJigsaw.AddFrame(V3b,1);
HemiJigsaw.AddFrame(V4b,1);

//Breakdown of first branch
MinMassesCombJigsaw C1HemiJigsaw("C1HEM_JIGSAW","Minimize m_{C_{1}}
  Jigsaw");
VIS.AddJigsaw(C1HemiJigsaw);
C1HemiJigsaw.AddFrame(V1a,0);
C1HemiJigsaw.AddFrame(V2a,1);
C1HemiJigsaw.AddFrame(X1a,1);
//Breakdown of second branch
MinMassesCombJigsaw C2HemiJigsaw("C2HEM_JIGSAW","Minimize m_{C_{2}}
  Jigsaw");
VIS.AddJigsaw(C2HemiJigsaw);
C2HemiJigsaw.AddFrame(V1b,0);
C2HemiJigsaw.AddFrame(V2b,0);
C2HemiJigsaw.AddFrame(V3b,1);
C2HemiJigsaw.AddFrame(V4b,1);

```



```

//C2HemiJigsaw.AddFrame(X1b,1);

MinMassesCombJigsaw C21HemiJigsaw("C21HEM_JIGSAW","Minimize m_{C_{21}}
  Jigsaw");
VIS.AddJigsaw(C21HemiJigsaw);
C21HemiJigsaw.AddFrame(V1b,0);
C21HemiJigsaw.AddFrame(V2b,1);
C21HemiJigsaw.AddFrame(X1b,1);
MinMassesCombJigsaw C22HemiJigsaw("C22HEM_JIGSAW","Minimize m_{C_{22}}
  Jigsaw");
VIS.AddJigsaw(C22HemiJigsaw);
C22HemiJigsaw.AddFrame(V3b,0);
C22HemiJigsaw.AddFrame(V4b,1);
C22HemiJigsaw.AddFrame(X1b,1);

//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//---//

// check reconstruction trees
if(LAB.InitializeAnalysis())
  g_Log << LogInfo << "...Successfully initialized analyses" << LogEnd;
else
  g_Log << LogError << "...Failed initializing analyses" << LogEnd;

////////////////////////////////////
// draw some pictures of our trees
////////////////////////////////////

TreePlot* tree_plot = new TreePlot("TreePlot","TreePlot");

// generator tree
tree_plot->SetTree(LAB_Gen);
tree_plot->Draw("GenTree", "Generator Tree", true);

// signal reco tree
tree_plot->SetTree(LAB);
tree_plot->AddJigsaw(ContraBoostJigsaw1);
tree_plot->AddJigsaw(ContraBoostJigsaw2);
tree_plot->AddJigsaw(HemiJigsaw);
tree_plot->AddJigsaw(C1HemiJigsaw);
tree_plot->AddJigsaw(C2HemiJigsaw);
tree_plot->AddJigsaw(C21HemiJigsaw);
tree_plot->AddJigsaw(C22HemiJigsaw);
tree_plot->Draw("SigRecoTree", "Signal Reconstruction Tree");

// Invisible Jigsaws
tree_plot->SetTree(INV);
tree_plot->Draw("InvTree", "Invisible Objects Jigsaws");

```

```

// Visible Jigsaws
tree_plot->SetTree(VIS);
tree_plot->Draw("VisTree", "Visible Objects Jigsaws");

//-----//

// Declare observables for histogram booking:
std::string plot_title = "#tilde{g} #tilde{g} #rightarrow q
#bar{q}#tilde{#chi}_{1}^{#pm}(W^{#pm}({it{1}^{#pm}} #nu)
#tilde{#chi}_{1}^{0}) q #bar{q}#tilde{#chi}_{1}^{#pm}(W^{#pm}(q
#bar{q}#tilde{#chi}_{1}^{0})";
HistPlot* histPlot = new HistPlot("Plots",plot_title);

const HistPlotVar& E_g_a_in_gg_gen =
    histPlot->GetNewVar("E_ga_in_gg_gen","E^{#tilde{g} #tilde{g},
gen}_{#tilde{g}_{a}} [GeV]",0.,4600.);
const HistPlotVar& E_g_b_in_gg_gen =
    histPlot->GetNewVar("E_gb_in_gg_gen","E^{#tilde{g} #tilde{g},
gen}_{#tilde{g}_{b}} [GeV]",0.,4600.);
const HistPlotVar& E_gg_in_gg_gen =
    histPlot->GetNewVar("E_gg_in_gg_gen","E^{#tilde{g} #tilde{g},
gen}_{#tilde{g}_{a} #tilde{g}_{b}} [GeV]",0.,6100.);

const HistPlotVar& M_ga_to_m_ga =
    histPlot->GetNewVar("M_ga_to_m_ga","M_{#tilde{g}_{a}} /
m_{#tilde{g}_{a}}",0.,3.);
const HistPlotVar& M_gb_to_m_gb =
    histPlot->GetNewVar("M_gb_to_m_gb","M_{#tilde{g}_{b}} /
m_{#tilde{g}_{b}}",0.,3.);
const HistPlotVar& M_X2a_to_m_X2a =
    histPlot->GetNewVar("M_X1cha_to_m_X1cha","M_{#tilde{#chi}^{#pm}_{1,a}} /
m_{#tilde{#chi}^{#pm}_{1,a}}",0.,3.);
const HistPlotVar& M_X2b_to_m_X2b =
    histPlot->GetNewVar("M_X1chb_to_m_X1chb","M_{#tilde{#chi}^{#pm}_{1,b}} /
m_{#tilde{#chi}^{#pm}_{1,b}}",0.,3.);
const HistPlotVar& M_X1a_to_m_X1a =
    histPlot->GetNewVar("M_X1a_to_m_X1a","M_{#tilde{#chi}^{0}_{1,a}} /
m_{#tilde{#chi}^{0}_{1,a}}",0.,3.);
const HistPlotVar& M_X1b_to_m_X1b =
    histPlot->GetNewVar("M_X1b_to_m_X1b","M_{#tilde{#chi}^{0}_{1,b}} /
m_{#tilde{#chi}^{0}_{1,b}}",0.,4.);

const HistPlotVar& E_ga_in_gg_reco_to_gen =
    histPlot->GetNewVar("E_ga_in_gg_reco_to_gen","E^{#tilde{g} #tilde{g},
reco}_{#tilde{g}_{a}} / E^{#tilde{g} #tilde{g},
gen}_{#tilde{g}_{a}}",0.,3.);
const HistPlotVar& E_gb_in_gg_reco_to_gen =
    histPlot->GetNewVar("E_gb_in_gg_reco_to_gen","E^{#tilde{g} #tilde{g},

```

```

    reco}_{#tilde{g}_{b}} / E^{#tilde{g} #tilde{g},
    gen}_{#tilde{g}_{b}}",0.,3.);
const HistPlotVar& E_Wa_in_ga_reco_to_gen =
    histPlot->GetNewVar("E_Wa_in_ga_reco_to_gen","E^{#tilde{g}_{a},reco}_{W_a}
    / E^{#tilde{g}_{a}, gen}_{W_a}",0.,5.);
const HistPlotVar& E_Wb_in_gb_reco_to_gen =
    histPlot->GetNewVar("E_Wb_in_gb_reco_to_gen","E^{#tilde{g}_{b},reco}_{W_b}
    / E^{#tilde{g}_{b}, gen}_{W_b}",0.,5.);
const HistPlotVar& p_Wa_in_ga_reco_to_gen
    =histPlot->GetNewVar("p_Wa_in_ga_reco_to_gen","|#vec{p}^{#tilde{g}_{a},reco}_{W_a}|
    /|#vec{p}^{#tilde{g}_{a}, gen}_{W_a}|",0.,7.);
const HistPlotVar& theta_ga_reco_to_gen =
    histPlot->GetNewVar("theta_ga_reco_to_gen","#theta^{
    reco}_{#tilde{g}_{a}} - #theta^{ gen}_{#tilde{g}_{a}}",-2.5,2.5);
const HistPlotVar& theta_gb_reco_to_gen =
    histPlot->GetNewVar("theta_gb_reco_to_gen","#theta^{
    reco}_{#tilde{g}_{b}} - #theta^{ gen}_{#tilde{g}_{b}}",-2.5,2.5);

const HistPlotVar& R_ISR = histPlot->GetNewVar("R_ISR","R_{ISR}",0.,1.4);

histPlot->AddPlot(E_g_a_in_gg_gen);
histPlot->AddPlot(E_g_b_in_gg_gen);
histPlot->AddPlot(E_gg_in_gg_gen);

histPlot->AddPlot(M_ga_to_m_ga);
histPlot->AddPlot(M_gb_to_m_gb);
histPlot->AddPlot(M_X2a_to_m_X2a);
histPlot->AddPlot(M_X2b_to_m_X2b);
histPlot->AddPlot(M_X1a_to_m_X1a);
histPlot->AddPlot(M_X1b_to_m_X1b);

histPlot->AddPlot(E_ga_in_gg_reco_to_gen);
histPlot->AddPlot(E_gb_in_gg_reco_to_gen);
histPlot->AddPlot(E_Wa_in_ga_reco_to_gen);
histPlot->AddPlot(E_Wb_in_gb_reco_to_gen);
histPlot->AddPlot(p_Wa_in_ga_reco_to_gen);
histPlot->AddPlot(theta_ga_reco_to_gen);
histPlot->AddPlot(theta_gb_reco_to_gen);

histPlot->AddPlot(R_ISR);

for(int igen = 0; igen < Ngen; igen++){
    if(igen%((std::max(Ngen,10))/10) == 0)
        g_Log << LogInfo << "Generating event " << igen << " of " << Ngen <<
            LogEnd;

    // generate event
    LAB_Gen.ClearEvent(); //clear the gen tree

    LAB_Gen.SetPToverM(LAB_Gen.GetRandom()); // give the di-gluinos some Pt

```

```

LAB_Gen.AnalyzeEvent(); // generate a new event

// analyze event
TVector3 MET = LAB_Gen.GetInvisibleMomentum(); // Get the MET from gen tree
MET.SetZ(0.);

std::vector<TLorentzVector> JETS; // Get the Jets from gen tree
JETS.push_back(V1a_Gen.GetFourVector());
JETS.push_back(V2a_Gen.GetFourVector());
JETS.push_back(V1b_Gen.GetFourVector());
JETS.push_back(V2b_Gen.GetFourVector());
JETS.push_back(V3b_Gen.GetFourVector());
JETS.push_back(V4b_Gen.GetFourVector());

// give the signal-like tree the event info and analyze
LAB.ClearEvent(); // clear the signal-like tree

INV.SetLabFrameThreeVector(MET); // Set the MET in reco tree

L.SetLabFrameFourVector(L_Gen.GetFourVector(), -1);

std::vector<RFKey> jetID; // ID for tracking jets in tree

ISR.SetLabFrameFourVector(ISR_Gen.GetFourVector());

for(int i = 0; i < int(JETS.size()); i++)
    jetID.push_back(VIS.AddLabFrameFourVector(JETS[i]));

LAB.AnalyzeEvent();

////////////////////////////////////
// Observable Calculations
////////////////////////////////////

E_g_a_in_gg_gen = Ga_Gen.GetEnergy(GG_Gen);
E_g_b_in_gg_gen = Gb_Gen.GetEnergy(GG_Gen);
E_gg_in_gg_gen = GG_Gen.GetEnergy(GG_Gen);

M_ga_to_m_ga = Ga.GetMass() / Ga_Gen.GetMass();
M_gb_to_m_gb = Gb.GetMass() / Gb_Gen.GetMass();
M_X2a_to_m_X2a = X2a.GetMass() / X2a_Gen.GetMass();
M_X2b_to_m_X2b = X2b.GetMass() / X2b_Gen.GetMass();
M_X1a_to_m_X1a = X1a.GetMass() / X1a_Gen.GetMass();
M_X1b_to_m_X1b = X1b.GetMass() / X1b_Gen.GetMass();

theta_ga_reco_to_gen = acos(Ga.GetCosDecayAngle()) -
    acos(Ga_Gen.GetCosDecayAngle());

```

```
theta_gb_reco_to_gen = acos(Gb.GetCosDecayAngle()) -
    acos(Gb_Gen.GetCosDecayAngle());

TVector3 vP_ISR = ISR.GetFourVector(CM).Vect();
TVector3 vP_I = GG.GetListInvisibleFrames().GetFourVector(CM).Vect();
vP_ISR.SetZ(0.);
vP_I.SetZ(0.);
R_ISR = fabs(vP_I.Dot(vP_ISR.Unit())) / vP_ISR.Mag();

    histPlot->Fill();
}

histPlot->Draw();

TFile fout(output_name.c_str(), "RECREATE");
fout.Close();
tree_plot->WriteOutput(output_name);
histPlot->WriteOutput(output_name);
histPlot->WriteHist(output_name);

    }
# ifndef __CINT__ // main function for stand-alone compilation
int main(){
    example_DiGluino_to_qqX2WlnuX1qqX2WqqX1();
    return 0;
}
#endif
```

Βιβλιογραφία

- [1] Mark Thomson. *Modern particle physics*. New York: Cambridge University Press, 2013. ISBN: 978-1-107-03426-6.
- [2] F. Halzen and Alan D. Martin. *QUARKS AND LEPTONS: AN INTRODUCTORY COURSE IN MODERN PARTICLE PHYSICS*. 1984. ISBN: 978-0-471-88741-6.
- [3] Donald H. Perkins. *Introduction to High Energy Physics*. 4th ed. Cambridge University Press, 2000. DOI: [10.1017/CB09780511809040](https://doi.org/10.1017/CB09780511809040).
- [4] Michael E. Peskin. *Concepts of Elementary Particle Physics*. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, Sept. 2019. ISBN: 978-0-19-881218-0, 978-0-19-881219-7. DOI: [10.1093/oso/9780198812180.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198812180.001.0001).
- [5] B.R. Martin and G. Shaw. *Particle Physics*. Manchester Physics Series. Wiley, 2016. ISBN: 9781118912218. URL: <https://books.google.gr/books?id=aJaDDQAAQBAJ>.
- [6] Paul Adrien Maurice Dirac and Ralph Howard Fowler. “The quantum theory of the electron”. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 117.778 (1928), pp. 610–624. DOI: [10.1098/rspa.1928.0023](https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023). URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1928.0023>.
- [7] F. J. Dyson. “The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman”. In: *Phys. Rev.* 75 (3 Feb. 1949), pp. 486–502. DOI: [10.1103/PhysRev.75.486](https://doi.org/10.1103/PhysRev.75.486). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.75.486>.
- [8] R. P. Feynman. “Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics”. In: *Phys. Rev.* 76 (6 Sept. 1949), pp. 769–789. DOI: [10.1103/PhysRev.76.769](https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.769). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.76.769>.
- [9] Julian Schwinger. “Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation”. In: *Phys. Rev.* 74 (10 Nov. 1948), pp. 1439–1461. DOI: [10.1103/PhysRev.74.1439](https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.1439). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.1439>.
- [10] S. Tomonaga. “On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields*”. In: *Progress of Theoretical Physics* 1.2 (Aug. 1946), pp. 27–42. ISSN: 0033-068X. DOI: [10.1143/PTP.1.27](https://doi.org/10.1143/PTP.1.27). eprint: <https://academic.oup.com/ptp/article-pdf/1/2/27/24027031/1-2-27.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1143/PTP.1.27>.
- [11] Steven Weinberg. “A Model of Leptons”. In: *Phys. Rev. Lett.* 19 (21 Nov. 1967), pp. 1264–1266. DOI: [10.1103/PhysRevLett.19.1264](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1264). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.19.1264>.

- [12] Sheldon L. Glashow. “Partial-symmetries of weak interactions”. In: *Nuclear Physics* 22.4 (1961), pp. 579–588. ISSN: 0029-5582. DOI: [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(61\)90469-2](https://doi.org/10.1016/0029-5582(61)90469-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029558261904692>.
- [13] A. Salam and J.C. Ward. “Electromagnetic and weak interactions”. In: *Physics Letters* 13.2 (1964), pp. 168–171. ISSN: 0031-9163. DOI: [https://doi.org/10.1016/0031-9163\(64\)90711-5](https://doi.org/10.1016/0031-9163(64)90711-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031916364907115>.
- [14] T. W. B. Kibble. *History of electroweak symmetry breaking*. 2015. DOI: [10.48550/ARXIV.1502.06276](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1502.06276). URL: <https://arxiv.org/abs/1502.06276>.
- [15] H. Fritzsch, Murray Gell-Mann, and H. Leutwyler. “Advantages of the Color Octet Gluon Picture”. In: *Phys. Lett. B* 47 (1973), pp. 365–368. DOI: [10.1016/0370-2693\(73\)90625-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(73)90625-4).
- [16] F. Englert and R. Brout. “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons”. In: *Phys. Rev. Lett.* 13 (9 Aug. 1964), pp. 321–323. DOI: [10.1103/PhysRevLett.13.321](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.321). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.321>.
- [17] Peter W. Higgs. “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons”. In: *Phys. Rev. Lett.* 13 (16 Oct. 1964), pp. 508–509. DOI: [10.1103/PhysRevLett.13.508](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.508). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.508>.
- [18] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble. “Global Conservation Laws and Massless Particles”. In: *Phys. Rev. Lett.* 13 (20 Nov. 1964), pp. 585–587. DOI: [10.1103/PhysRevLett.13.585](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.585). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.585>.
- [19] M. Tanabashi et al. “Review of Particle Physics”. In: *Phys. Rev. D* 98 (3 Aug. 2018), p. 030001. DOI: [10.1103/PhysRevD.98.030001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.030001). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>.
- [20] C. S. Wu et al. “Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay”. In: *Phys. Rev.* 105 (4 Feb. 1957), pp. 1413–1415. DOI: [10.1103/PhysRev.105.1413](https://doi.org/10.1103/PhysRev.105.1413). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.105.1413>.
- [21] CMS Collaboration. “Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC”. In: *Physics Letters B* 716.1 (Sept. 2012), pp. 30–61. DOI: [10.1016/j.physletb.2012.08.021](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.021). URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physletb.2012.08.021>.
- [22] ATLAS Collaboration. “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC”. In: *Physics Letters B* 716.1 (Sept. 2012), pp. 1–29. DOI: [10.1016/j.physletb.2012.08.020](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.020). URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physletb.2012.08.020>.
- [23] ATLAS and CMS Collaborations. “Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments”. In: *Physical Review Letters* 114.19 (May 2015). DOI: [10.1103/physrevlett.114.191803](https://doi.org/10.1103/physrevlett.114.191803). URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.114.191803>.
- [24] ATLAS Collaboration. “ATLAS Feature: The Higgs boson”. General Photo. June 2018. URL: <https://cds.cern.ch/record/2627611>.
- [25] CERN. URL: <https://home.cern/science/physics/higgs-boson>.

- [26] Julia Woithe, Gerfried J Wiener, and Frederik F Van der Veken. “Let’s have a coffee with the Standard Model of particle physics!” In: *Physics Education* 52.3 (Mar. 2017), p. 034001. DOI: [10.1088/1361-6552/aa5b25](https://doi.org/10.1088/1361-6552/aa5b25). URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6552/aa5b25>.
- [27] P. Bagnaia et al. “Evidence for $Z^0 \rightarrow e^+e^-$ at the CERN $\bar{p}p$ Collider”. In: *Phys. Lett. B* 129 (1983), pp. 130–140. DOI: [10.1016/0370-2693\(83\)90744-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90744-X).
- [28] G. Arnison et al. “Experimental Observation of Isolated Large Transverse Energy Electrons with Associated Missing Energy at $\sqrt{s} = 540$ GeV”. In: *Phys. Lett. B* 122 (1983), pp. 103–116. DOI: [10.1016/0370-2693\(83\)91177-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)91177-2).
- [29] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani. “Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry”. In: *Phys. Rev. D* 2 (7 Oct. 1970), pp. 1285–1292. DOI: [10.1103/PhysRevD.2.1285](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.2.1285). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.2.1285>.
- [30] J. -E. Augustin et al. “Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation”. In: *Phys. Rev. Lett.* 33 (23 Dec. 1974), pp. 1406–1408. DOI: [10.1103/PhysRevLett.33.1406](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.33.1406). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.33.1406>.
- [31] J. J. Aubert et al. “Experimental Observation of a Heavy Particle J ”. In: *Phys. Rev. Lett.* 33 (23 Dec. 1974), pp. 1404–1406. DOI: [10.1103/PhysRevLett.33.1404](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.33.1404). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.33.1404>.
- [32] Makoto Kobayashi and Toshihide Maskawa. “CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction”. In: *Progress of Theoretical Physics* 49.2 (Feb. 1973), pp. 652–657. ISSN: 0033-068X. DOI: [10.1143/PTP.49.652](https://doi.org/10.1143/PTP.49.652). eprint: <https://academic.oup.com/ptp/article-pdf/49/2/652/5257692/49-2-652.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1143/PTP.49.652>.
- [33] S. W. Herb et al. “Observation of a Dimuon Resonance at 9.5 GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions”. In: *Phys. Rev. Lett.* 39 (5 Aug. 1977), pp. 252–255. DOI: [10.1103/PhysRevLett.39.252](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.39.252). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.39.252>.
- [34] F. Abe et al. “Observation of Top Quark Production in p - p Collisions”. In: *Physical Review Letters* 74.14 (Apr. 1995), pp. 2626–2631. DOI: [10.1103/physrevlett.74.2626](https://doi.org/10.1103/physrevlett.74.2626). URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.74.2626>.
- [35] S. Abachi et al. “Observation of the Top Quark”. In: *Physical Review Letters* 74.14 (Apr. 1995), pp. 2632–2637. DOI: [10.1103/physrevlett.74.2632](https://doi.org/10.1103/physrevlett.74.2632). URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.74.2632>.
- [36] Takaaki Kajita. “Atmospheric neutrino results from Super-Kamiokande and Kamiokande — Evidence for ν_μ oscillations”. In: *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* 77.1 (1999), pp. 123–132. ISSN: 0920-5632. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0920-5632\(99\)00407-7](https://doi.org/10.1016/S0920-5632(99)00407-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563299004077>.
- [37] Q. R. Ahmad et al. “Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory”. In: *Phys. Rev. Lett.* 89 (1 June 2002), p. 011301. DOI: [10.1103/PhysRevLett.89.011301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.011301). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.011301>.
- [38] Howard Georgi and S. L. Glashow. “Unity of All Elementary-Particle Forces”. In: *Phys. Rev. Lett.* 32 (8 Feb. 1974), pp. 438–441. DOI: [10.1103/PhysRevLett.32.438](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.32.438). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.32.438>.

- [39] Katherine Garrett and Gintaras Duda. “Dark Matter: A Primer”. In: *Advances in Astronomy* 2011 (2011), pp. 1–22. DOI: [10.1155/2011/968283](https://doi.org/10.1155/2011/968283). URL: <https://doi.org/10.1155/2011/968283>.
- [40] P. Fayet and S. Ferrara. “Supersymmetry”. In: *Physics Reports* 32.5 (1977), pp. 249–334. ISSN: 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(77\)90066-7](https://doi.org/10.1016/0370-1573(77)90066-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157377900667>.
- [41] J Wess and B Zumino. “Supergauge transformations in four dimensions”. In: *Nucl. Phys. B* 70 (1974), pp. 39–50. DOI: [10.1016/0550-3213\(74\)90355-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90355-1). URL: <http://cds.cern.ch/record/201649>.
- [42] P. Fayet. “Supersymmetry and weak, electromagnetic and strong interactions”. In: *Physics Letters B* 64.2 (1976), pp. 159–162. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(76\)90319-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(76)90319-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269376903191>.
- [43] S. Dimopoulos and G.F. Giudice. “Naturalness constraints in supersymmetric theories with non-universal soft terms”. In: *Physics Letters B* 357.4 (Sept. 1995), pp. 573–578. DOI: [10.1016/0370-2693\(95\)00961-j](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)00961-j). URL: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(95\)00961-j](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)00961-j).
- [44] Michele Papucci, Joshua T. Ruderman, and Andreas Weiler. “Natural SUSY endures”. In: *Journal of High Energy Physics* 2012.9 (Sept. 2012). DOI: [10.1007/jhep09\(2012\)035](https://doi.org/10.1007/jhep09(2012)035). URL: [https://doi.org/10.1007/jhep09\(2012\)035](https://doi.org/10.1007/jhep09(2012)035).
- [45] Stephen P. Martin. “A Supersymmetry Primer”. In: *Perspectives on Supersymmetry*. World Scientific, July 1998, pp. 1–98. DOI: [10.1142/9789812839657_0001](https://doi.org/10.1142/9789812839657_0001). URL: https://doi.org/10.1142/9789812839657_0001.
- [46] Jared Little and Atlas Collaboration. “Searching for a Pair-Produced Supersymmetric Top Partner using Recursive Jigsaw Variables and Boosted Decision Trees in pp Collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS Detector”. In: *APS April Meeting Abstracts*. Vol. 2021. APS Meeting Abstracts. Jan. 2021, S18.007, S18.007. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2021APS..APRS18007L>.
- [47] Oliver Sim Brüning et al. *LHC Design Report*. CERN Yellow Reports: Monographs. Geneva: CERN, 2004. DOI: [10.5170/CERN-2004-003-V-1](https://doi.org/10.5170/CERN-2004-003-V-1). URL: <https://cds.cern.ch/record/782076>.
- [48] Lyndon Evans and Philip Bryant. “LHC Machine”. In: *Journal of Instrumentation* 3.08 (Aug. 2008), S08001. DOI: [10.1088/1748-0221/3/08/S08001](https://doi.org/10.1088/1748-0221/3/08/S08001). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1748-0221/3/08/S08001>.
- [49] CERN. URL: <https://home.cern/news/news/physics/lhc-run-3-physics-record-energy-starts-tomorrow>.
- [50] Ewa Lopienska. “The CERN accelerator complex, layout in 2022. Complexe des accélérateurs du CERN en janvier 2022”. In: (2022). General Photo. URL: <https://cds.cern.ch/record/2800984>.
- [51] CERN. URL: <https://home.cern/news/news/accelerators/so-long-linac2-and-thanks-all-protons>.
- [52] CERN. URL: <https://home.cern/resources/faqs/facts-and-figures-about-lhc>.

- [53] “Cumulative delivered and recorded luminosity versus time for 2010-2012 and 2015-2018 (pp data only)”. In: (2022). Public CMS Luminosity Information. URL: https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/CMSPublic/LumiPublicResults#Multi_year_plots.
- [54] “High-Luminosity Large Hadron Collider (HL-LHC) : Preliminary Design Report”. In: (Dec. 2015). Ed. by G Apollinari et al. DOI: [10.5170/CERN-2015-005](https://doi.org/10.5170/CERN-2015-005).
- [55] G L Bayatian et al. *CMS Physics: Technical Design Report Volume 1: Detector Performance and Software*. Technical design report. CMS. There is an error on cover due to a technical problem for some items. Geneva: CERN, 2006. URL: <https://cds.cern.ch/record/922757>.
- [56] Julia Bauer. “Prospects for the Observation of Electroweak Top Quark Production with the CMS Experiment”. PhD thesis. KIT, Karlsruhe, Dept. Phys., 2010. DOI: [10.5445/IR/1000018393](https://doi.org/10.5445/IR/1000018393).
- [57] David Barney. “CMS Detector Slice”. CMS Collection. 2016. URL: <https://cds.cern.ch/record/2120661>.
- [58] V Karimäki et al. *The CMS tracker system project: Technical Design Report*. Technical design report. CMS. Geneva: CERN, 1997. URL: <https://cds.cern.ch/record/368412>.
- [59] S. Chatrchyan et al. “The CMS Experiment at the CERN LHC”. In: *JINST* 3 (2008), S08004. DOI: [10.1088/1748-0221/3/08/S08004](https://doi.org/10.1088/1748-0221/3/08/S08004).
- [60] A Dominguez et al. *CMS Technical Design Report for the Pixel Detector Upgrade*. Tech. rep. 2012. URL: <http://cds.cern.ch/record/1481838>.
- [61] W. Adam et al. “The CMS Phase-1 pixel detector upgrade”. In: *Journal of Instrumentation* 16.02 (Feb. 2021), P02027. DOI: [10.1088/1748-0221/16/02/P02027](https://doi.org/10.1088/1748-0221/16/02/P02027). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1748-0221/16/02/P02027>.
- [62] *The Phase-2 Upgrade of the CMS Tracker*. Tech. rep. Geneva: CERN, 2017. DOI: [10.17181/CERN.QZ28.FLHW](https://doi.org/10.17181/CERN.QZ28.FLHW). URL: <https://cds.cern.ch/record/2272264>.
- [63] Luigi Calligaris and on behalf of the CMS collaboration. “Status of the Phase-2 Tracker Upgrade of the CMS experiment at the HL-LHC”. In: *Journal of Physics: Conference Series* 1690.1 (Dec. 2020), p. 012039. DOI: [10.1088/1742-6596/1690/1/012039](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1690/1/012039). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1690/1/012039>.
- [64] R.M. Brown. “The CMS electromagnetic Calorimeter”. In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 572.1 (2007). Frontier Detectors for Frontier Physics, pp. 29–32. ISSN: 0168-9002. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2006.10.240>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016890020601970X>.
- [65] CMS Collaboration. “Performance of the CMS hadron calorimeter with cosmic ray muons and LHC beam data”. In: *Journal of Instrumentation* 5.03 (Mar. 2010), T03012–T03012. DOI: [10.1088/1748-0221/5/03/t03012](https://doi.org/10.1088/1748-0221/5/03/t03012). URL: <https://doi.org/10.1088/1748-0221/5/03/t03012>.
- [66] D Contardo et al. *Technical Proposal for the Phase-II Upgrade of the CMS Detector*. Tech. rep. Geneva, 2015. DOI: [10.17181/CERN.VU8I.D59J](https://doi.org/10.17181/CERN.VU8I.D59J). URL: <https://cds.cern.ch/record/2020886>.

- [67] Christophe Ochando. “HGCAL: A High-Granularity Calorimeter for the endcaps of CMS at HL-LHC”. In: *J. Phys.: Conf. Ser.* 928.1 (2017), p. 012025. DOI: [10.1088/1742-6596/928/1/012025](https://doi.org/10.1088/1742-6596/928/1/012025). URL: <https://cds.cern.ch/record/2311394>.
- [68] *The CMS magnet project: Technical Design Report*. Technical design report. CMS. Geneva: CERN, 1997. DOI: [10.17181/CERN.6ZU0.V4T9](https://doi.org/10.17181/CERN.6ZU0.V4T9). URL: <http://cds.cern.ch/record/331056>.
- [69] François Kircher et al. “Final design of the CMS solenoid cold mass”. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 10 (2000), pp. 407–410.
- [70] A. Herve et al. “Status of the construction of the CMS magnet”. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 14.2 (2004), pp. 542–547. DOI: [10.1109/TASC.2004.829715](https://doi.org/10.1109/TASC.2004.829715).
- [71] Vyacheslav Klyukhin. “Design and Description of the CMS Magnetic System Model”. In: *Symmetry* 13.6 (June 2021), p. 1052. DOI: [10.3390/sym13061052](https://doi.org/10.3390/sym13061052). URL: <https://doi.org/10.3390/sym13061052>.
- [72] A. Herve. “The CMS detector magnet”. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 10.1 (2000), pp. 389–394. DOI: [10.1109/77.828255](https://doi.org/10.1109/77.828255).
- [73] Daniel Froidevaux and Paris Sphicas. “General-Purpose Detectors for the Large Hadron Collider”. In: *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 56.1 (2006), pp. 375–440. DOI: [10.1146/annurev.nucl.54.070103.181209](https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.54.070103.181209). URL: <https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.54.070103.181209>.
- [74] CMS Collaboration. “Precise mapping of the magnetic field in the CMS barrel yoke using cosmic rays”. In: *Journal of Instrumentation* 5.03 (Mar. 2010), T03021. DOI: [10.1088/1748-0221/5/03/T03021](https://doi.org/10.1088/1748-0221/5/03/T03021). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1748-0221/5/03/T03021>.
- [75] J. G. Layter. *The CMS muon project: Technical Design Report*. Technical design report. CMS. Geneva: CERN, 1997. URL: <https://cds.cern.ch/record/343814>.
- [76] A.M. Sirunyan et al. “Performance of the CMS Level-1 trigger in proton-proton collisions at $s = 13$ TeV”. In: *Journal of Instrumentation* 15.10 (Oct. 2020), P10017. DOI: [10.1088/1748-0221/15/10/P10017](https://doi.org/10.1088/1748-0221/15/10/P10017). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1748-0221/15/10/P10017>.
- [77] Paul Jackson, Christopher Rogan, and Marco Santoni. “Sparticles in motion: Analyzing compressed SUSY scenarios with a new method of event reconstruction”. In: *Phys. Rev. D* 95 (3 Feb. 2017), p. 035031. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.035031](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.035031). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.035031>.
- [78] Paul Jackson and Christopher Rogan. “Recursive jigsaw reconstruction: HEP event analysis in the presence of kinematic and combinatoric ambiguities”. In: *Phys. Rev. D* 96 (11 Dec. 2017), p. 112007. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.112007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.112007). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.112007>.
- [79] Marco Santoni. “Probing Supersymmetry with Recursive Jigsaw Reconstruction”. PhD thesis. Adelaide U., 2017.
- [80] Christopher Rogan. *RestFrames*. URL: <http://restframes.com/>.
- [81] Rene Brun et al. *root-project/root: v6.18/02*. Version v6-18-02. Aug. 2019. DOI: [10.5281/zenodo.3895860](https://doi.org/10.5281/zenodo.3895860). URL: <https://root.cern/>.