



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

HV Aqr: Ένα εξωτικό σύστημα σε επαφή

Πτυχειακή εργασία
ΤΟΥ

Κωνσταντίνου Α. Μαργέτη
Αριθμός μητρώου: 1110201500238



Επιβλέπων: Δρ. Κοσμάς Γαζέας

Αθήνα 2021



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

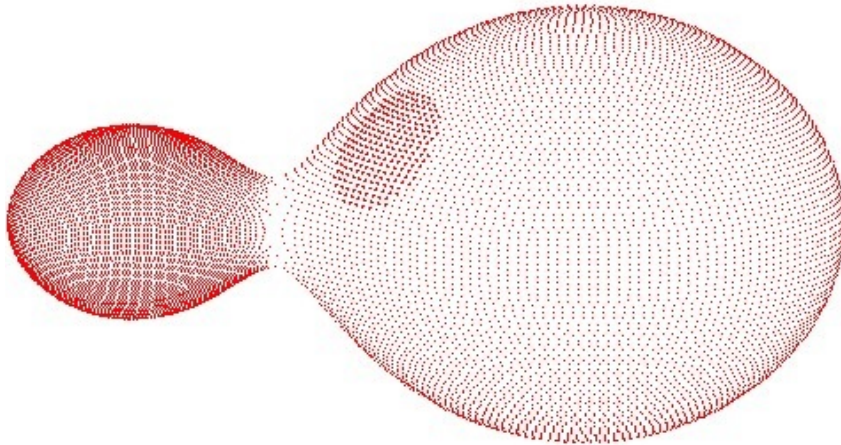
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

ΗV Aqr: Ένα εξωτικό σύστημα σε επαφή

Πτυχιακή εργασία
του

Κωνσταντίνου Α. Μαργέτη
Αριθμός μητρώου: 1110201500238



Επιβλέπων: Δρ. Κοσμάς Γαζέας

Αθήνα 2021

Εικόνα εξωφύλλου: Καλλιτεχνική αναπαράσταση του συστήματος HV Aqr

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ, ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Η εργασία αυτή ήταν υπό την καθοδήγηση του Δρ. Κοσμά Γαζέα.
Ιούλιος 2021

Περίληψη

Τα διπλά εκλειπτικά συστήματα αστέρων ή οι δι' εκλείψεων μεταβλητοί αστέρες είναι ένα σημαντικό αντικείμενο μελέτης για την σύγχρονη αστροφυσική αφού προσφέρονται τόσο για θεωρητικές όσο και για πειραματικές μελέτες. Μέσα από την παρατήρησή τους είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι απόλυτες παράμετροι των αστέρων (π.χ. μάζα, ακτίνα, φωτεινότητα) αλλά και να προσδιοριστούν διάφοροι μηχανισμοί που μπορούν να επηρεάσουν την τροχιακή περίοδο του συστήματος (π.χ. ανταλλαγή μάζας μεταξύ των αστέρων, ύπαρξη τρίτου μέλους).

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην μελέτη ενός διπλού εκλειπτικού συστήματος που ονομάζεται HV Aquarii. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στις κατηγορίες μεταβλητών αστέρων και στις κατηγορίες που ταξινομούνται οι δι' εκλείψεων μεταβλητοί αστέρες. Περιγράφεται αναλυτικά η γεωμετρία τους και ορίζονται οι μεταβλητές τους. Ακόμα περιγράφονται οι κατηγορίες διπλών συστημάτων ανάλογα με τη γεωμετρία Roche αλλά και με την μορφή της καμπύλης φωτός τους. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα όργανα και οι τεχνικές παρατήρησης που χρησιμοποιήθηκαν ώστε να γίνει η φωτομετρία. Στο τρίτο κεφάλαιο υπολογίζονται οι χρόνοι ελαχίστων, η αστρονομική εφημερίδα και το διάγραμμα φάσης για το σύστημα HV Aqr. Με την βοήθεια του αλγορίθμου Wilson - Devinney υπολογίστηκαν οι απόλυτες φυσικές και τροχιακές παράμετροι του συστήματος. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το διάγραμμα O-C και η ανάλυσή του με την βοήθεια υπολογιστικού κώδικα. Ενώ τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο εξάγονται συμπεράσματα για το σύστημα.

Abstract

The double star systems or binary star is an important subject for today astrophysics, because of the use on research and experimental work. Through their observation is possible to calculate the absolute parameters of the stars (e.g. mass, radius, luminosity) and determinate various mechanisms that can affect the orbital period of the system (e.g. exchange mass between the stars, existence of a third star).

The present work focuses on the study of a binary star called HV Aquarii. In the first chapter there is an introduction to the categories of variable stars and the categories in which the eclipsing variables are classified. Their geometry is described in detail and their variables are defined. Binary stars are described depending on the Roche geometry but also on the shape of their light curve. In the next chapter the instruments and observation techniques used to perform the photometry are present. The third chapter calculates the minimum times, the astronomical journal and the phase diagram for the HV Aqr system. Using the Wilson - Devinney algorithm, the absolute physical and orbital parameters of the system are calculated. The fourth chapter presents the O-C diagram and its analysis with the help of a computer code. Finally, in the fifth chapter, conclusions are drawn about the system.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Κατηγορίες μεταβλητών αστέρων	1
1.2	Κατηγορίες διπλών συστημάτων	2
1.3	Μαθηματική περιγραφή του διπλού συστήματος αστέρων	6
1.3.1	Υπολογισμός απόλυτων μεγεθών	6
1.3.2	Η δυναμική του συστήματος και το μοντέλο Roche	10
1.4	Ταξινόμηση ανάλογα τη μορφή της καμπύλης φωτός	14
1.5	Το σύστημα HV Aquarii	17
2	Όργανα παρατήρησης και τεχνικές επεξεργασίας δεδομένων	19
2.1	Περιγραφή οργάνων παρατήρησης	19
2.1.1	Τηλεσκόπιο	19
2.1.2	CCD κάμερα	19
2.2	Τεχνικές επεξεργασίας δεδομένων	23
2.2.1	Διαφορική φωτομετρία διαφράγματος	23
2.2.2	Ηλιοκεντρική διόρθωση	25
3	Φωτομετρική ανάλυση	29
3.1	Υπολογισμός χρόνων ελαχίστων	29
3.2	Αστρονομική εφημερίδα	33
3.3	Διάγραμμα φάσης	35
3.4	Μοντέλο του συστήματος	38
3.4.1	Αλγόριθμος μοντελοποίησης	38
3.4.2	Το μοντέλο του HV Aqr	47
4	Διάγραμμα O - C	57
4.1	Γενική περιγραφή	57
4.2	Ανάλυση του διαγράμματος O - C	67
5	Γενικά συμπεράσματα για το σύστημα HV Aqr	75
	Βιβλιογραφία	83

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην αστροφυσική, μεταβλητοί αστέρες ονομάζονται τα αντικείμενα στα οποία παρατηρούνται σημαντικές¹ μεταβολές στην λαμπρότητά τους με κάποια χρονική εξάρτηση. Σε όλες τις κατηγορίες μεταβλητών αστέρων σημαντικό ρόλο παίζει η καμπύλη φωτός δηλαδή η λαμπρότητα που παρατηρείται σε συνάρτηση με τον χρόνο. Η μελέτη της καμπύλης αυτής είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό των φυσικών παραμέτρων του συστήματος. Επίσης είναι δυνατή η άντληση πολλών πληροφοριών για την αστρική εξέλιξη.

1.1 Κατηγορίες μεταβλητών αστέρων

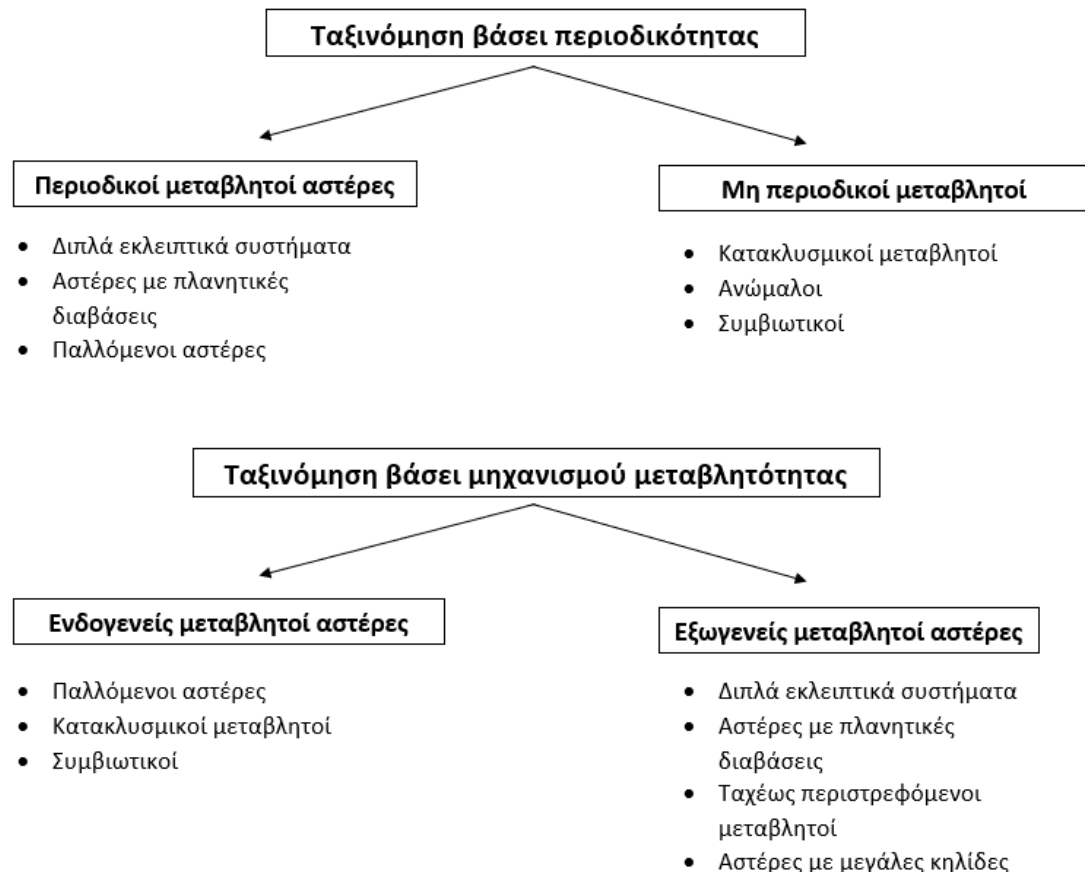
Οι μεταβλητοί αστέρες χωρίζονται ανάλογα με το αν εμφανίζουν περιοδικότητα στην μεταβολή τους. Ταξινόμηση μπορεί να γίνει και ανάλογα με την αιτία που οδηγεί στην μεταβολή της λαμπρότητας τους. Παρακάτω παρουσιάζονται οι διαχωρισμοί αυτοί.

- **Φυσικοί ή ενδογενείς μεταβλητοί αστέρες:** Στην κατηγορία αυτή ανήκουν πηγές στις οποίες η λαμπρότητα μεταβάλλεται λόγω φυσικών αιτιών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της κατηγορίας αυτής είναι οι παλλόμενοι αστέρες. Στην περίπτωση αυτή παρατηρείται περιοδική μεταβολή στην φωτεινότητά τους, λόγω της μεταβολής της ακτίνας του αστέρα η οποία αποτελεί μία απόλυτη παράμετρο. Οι παλλόμενοι αστέρες αποτελούν τα πιο σημαντικά αστροφυσικά εργαλεία μέτρησης αποστάσεων (standard candles), λόγω της γνώσης της φυσικής διεργασίας που προκαλεί την μεταβολή αυτή στην λαμπρότητα τους. Άλλες κατηγορίες φυσικών μεταβλητών αστέρων είναι οι εκρηκτικοί αστέρες (μεταβολές στην λαμπρότητα του αστέρα λόγω εκλάμψεων στην επιφάνεια του), οι κατακλυσμικοί μεταβλητοί (υπερκαινοφανείς, καινοφανείς και επαναληπτικοί καινοφανείς) και οι συμβιωτικοί μεταβλητοί.
- **Γεωμετρικοί ή εξωγενείς μεταβλητοί αστέρες:** Στην κατηγορία αυτή ταξινομούνται πηγές στις οποίες παρατηρείται μεταβολή στην λαμπρότητα λόγω γεωμετρικών φαινομένων. Εδώ ανήκουν τα διπλά εκλειπτικά συστήματα που λόγω

¹Μπορούν να προσδιοριστούν μέσα από παρατήρηση.

της σχετικής θέσης τους με την Γη, παρατηρούνται εκλείψεις που μεταφράζονται σε μεταβολές στην λαμπρότητα. Άλλες κατηγορίες είναι οι αστέρες με πλανητικές διαβάσεις, οι ταχέως περιστρεφόμενοι μεταβλητοί και οι αστέρες με μεγάλες κηλίδες.

Προφανώς υπάρχουν πηγές που μπορεί να έχουν χαρακτηριστικά από πολλές κατηγορίες. Ένα παράδειγμα είναι το σύστημα TY Car (ανακαλύφθηκε από τον Hoffmeister το 1993) το οποίο αποτελεί ένα διπλό εκλειπτικό σύστημα με το ένα μέλος να είναι παλλόμενος αστέρας.



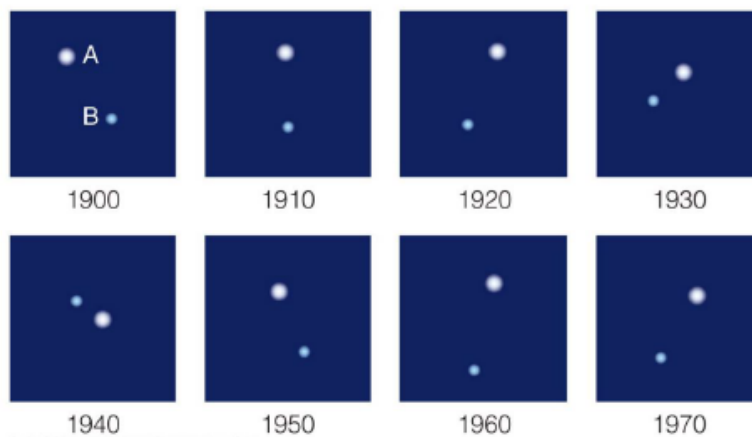
1.2 Κατηγορίες διπλών συστημάτων

Τα διπλά συστήματα αστέρων είναι ηλιακά συστήματα τα οποία αποτελούνται από δύο αστέρες οι οποίοι περιφέρονται γύρω από το κέντρο μάζας τους. Αντίστοιχα υπάρχουν συστήματα με περισσότερους αστέρες-μέλη που όμως είναι αρκετά πιο σπάνια. Τα διπλά συστήματα αστέρων αποτελούν κοινό στοιχείο τουλάχιστον για τον Γαλαξία. Συγκεκριμένα, στατιστικές μελέτες (Abt 1983, Latham et al. 1992, Pinfield et al. 2003) έχουν δείξει ότι το 50-60% των αστέρων στον Γαλαξία είναι μέλη διπλών ή πολλαπλών

συστημάτων. Όπως αναφέρθηκε τα συστήματα αυτά είναι πολύ σημαντικά στην αστροφυσική, διότι μέσα από τις αλληλεπιδράσεις των μελών τους μπορούν να υπολογιστούν οι φυσικές παράμετροι του συστήματος (μάζα, θερμοκρασία κ.α.). Τα διπλά συστήματα αστέρων ταξινομούνται σε κατηγορίες, ανάλογα με τις μεθόδους παρατήρησης.

(α) **Οπτικά διπλά συστήματα (visual binaries):**

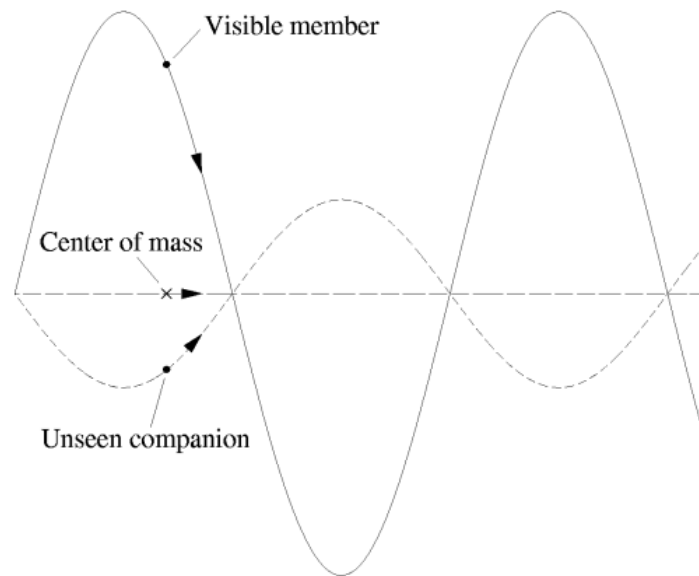
Στην κατηγορία αυτή ταξινομούνται συστήματα που μπορούν να ξεχωρίσουν και οι δύο αστέρες στην ουράνια σφαίρα. Έτσι είναι δυνατόν ο προσδιορισμός των δύο τροχιών και ο υπολογισμός των απόλυτων παραμέτρων του συστήματος. Ένα τέτοιο σύστημα αποτελεί το α Cen (Εικόνα 1.1). Αποτελείται από δύο αστέρες παρόμοια σε διαστάσεις με τον Ήλιο, τα οποία διαγράφουν εμφανείς τροχιές γύρω από το κέντρο μάζας τους.



Εικόνα 1.1: Οι δύο αστέρες του συστήματος α Cen όπως φαίνονται κατά την διάρκεια μίας περιόδου από τηλεσκόπιο στη Γη. Το 1915 ο Robert T. A. Innes ανακάλυψε ότι υπάρχει και τρίτος αστέρας στο σύστημα αυτό.

(β) **Αstromετρικά διπλά συστήματα:**

Όταν το ένα μέλος του συστήματος δεν φαίνεται λόγω αμυδρότητας, μπορεί κανείς να αντιληφθεί την βαρυτική του επίδραση στην ίδια κίνηση (proper motion) του ορατού μέλους (Εικόνα 1.2). Έτσι, είναι δυνατόν να υπολογιστούν κάποιες τουλάχιστον παράμετροι και για τα δύο μέλη του συστήματος (π.χ. μάζα). Ένα από τα πλέον γνωστά αστρομετρικά συστήματα είναι το σύστημα Sirius AB.



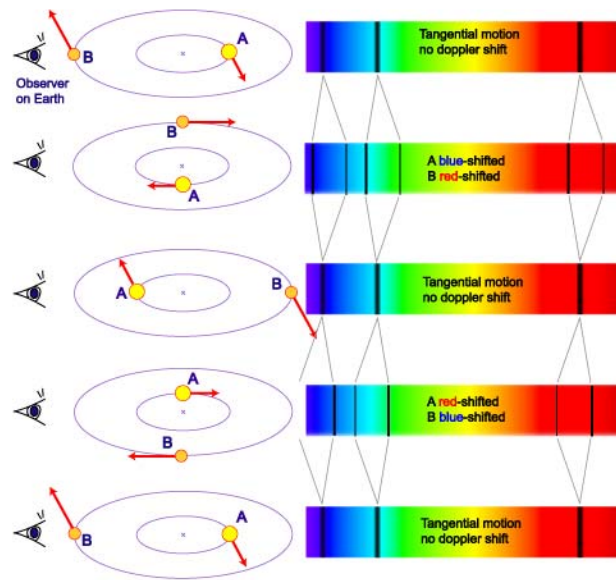
Εικόνα 1.2: Ένα αστρομετρικό διπλό σύστημα. Η κίνηση του ορατού μέλους γύρω από το κέντρο μάζας οδηγεί στον υπολογισμό παραμέτρων του συστήματος όπως για παράδειγμα ο λόγος μαζών M_1/M_2 .

(γ) **Φασματοσκοπικά διπλά συστήματα (spectroscopic binaries):**

Σε αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται συστήματα στα οποία φαίνεται μόνο το ένα μέλος, παρατηρείται δηλαδή μόνο μία πηγή στο τηλεσκόπιο. Το συμπέρασμα ότι αποτελεί διπλό σύστημα αστέρων εκκρίει από το γεγονός ότι το φάσμα έχει υποστεί μετατόπιση Doppler, λόγω της κίνησης γύρω από το κέντρο μάζας. Πιο συγκεκριμένα, εάν απομακρύνεται από τον παρατηρητή υπάρχει μετατόπιση προς το ερυθρό ενώ αν κινείται προς τον παρατηρητή υπάρχει μετατόπιση προς το ιώδες (Εικόνα 1.3). Η μεταβολή του μήκους κύματος λ ($\Delta\lambda$) σε σχέση με την ακτινική ταχύτητα u και την ταχύτητα του φωτός c δίνεται από την σχέση:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{u}{c} \quad (1.1)$$

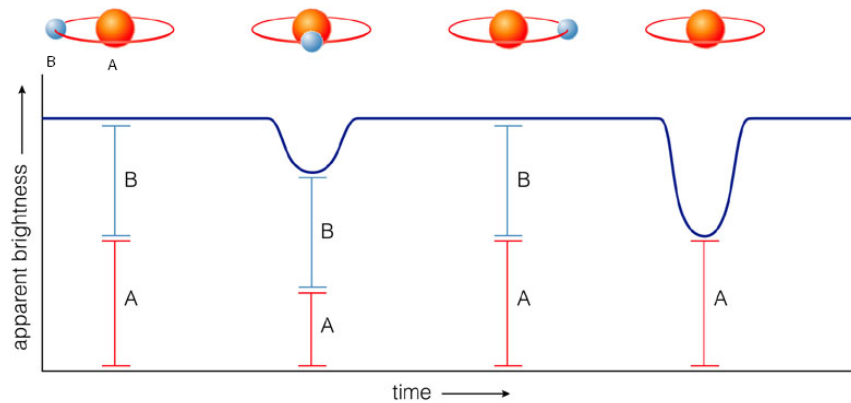
Με τον υπολογισμό της ακτινικής ταχύτητας των δύο αστέρων υπολογίζεται η καμπύλη ταχυτήτων του συστήματος, εργαλείο απαραίτητο για τον υπολογισμό των φυσικών παραμέτρων του εκάστοτε διπλού συστήματος αστέρων. Ανάλογα με τον αριθμό των γραμμών που φαίνονται στο φάσμα, τα αστρικά συστήματα αυτά χωρίζονται σε δύο περαιτέρω κατηγορίες. (i) Φασματοσκοπικά διπλοί αστέρες με διπλές γραμμές: Φαίνονται γραμμές και από τα δύο μέλη. (ii) Φασματοσκοπικά διπλοί αστέρες με μονές γραμμές στο φάσμα τους: Στην περίπτωση αυτή ο ένας αστέρας είναι αρκετά πιο αμυδρός από τον άλλον με αποτέλεσμα στο φάσμα να φαίνονται μόνο οι γραμμές του άλλου.



Εικόνα 1.3: Η μετατόπιση στις φασματικές γραμμές κατά την διάρκεια μιας περιόδου.
 Πηγή: https://www.atnf.csiro.au/outreach/education/senior/astrophysics/binary_types.html

(δ) **Διπλά εκλειπτικά συστήματα:**

Τα διπλά εκλειπτικά συστήματα αποτελούν έναν γεωμετρικό, περιοδικό μεταβλητό αστέρα. Η περιοδικότητα στην μεταβολή της λαμπρότητας οφείλεται στην σχετική θέση των δύο αστέρων του συστήματος με τον παρατηρητή. Συγκεκριμένα, σε μία περίοδο ο ένας αστέρας περνάει μπροστά από τον άλλον και προκαλεί έκλειψη (μείωση στην λαμπρότητα) και αντίστοιχα ο δεύτερος περνάει μπροστά από τον πρώτο και προκαλεί εν γέννη διαφορετική μείωση στην λαμπρότητα. Μια γενική καμπύλη φωτός (Εικόνα 1.4) έχει δύο ελάχιστα που αντιστοιχούν σε αυτές τις δύο εκλείψεις. Το βαθύτερο ελάχιστο αντιστοιχεί στην έκλειψη του λαμπρότερου αστέρα και ονομάζεται **πρωτεύον ελάχιστο**, ενώ αντίστοιχα η μικρότερη μείωση στην λαμπρότητα ισοδυναμεί στην έκλειψη του αμυδρότερου αστέρα και καλείται **δευτερεύον ελάχιστο**. Για να μπορέσουν να παρατηρηθούν οι εκλείψεις αυτές πρέπει η γεωμετρία να είναι κατάλληλη. Χρειάζεται η ευθεία παρατήρησης να σχηματίζει γωνία $\sim 90^\circ$ με τον άξονα που είναι κάθετος στην κίνηση των αστέρων. Στην εργασία αυτή, πρωτεύων αστέρας (primary) θα ονομάζεται ο αστέρας με την μεγαλύτερη μάζα και δευτερεύων (secondary), αυτός με την μικρότερη μάζα.



Εικόνα 1.4: Μία γενική καμπύλη φωτός και η γεωμετρική εξήγηση των ελαχίστων.

Πηγή: http://sciencewise.info/resource/Eclipsing_binary/Eclipsing_binary_by_Internet_Encyclopedia_of_Science

1.3 Μαθηματική περιγραφή του διπλού συστήματος αστέρων

1.3.1 Υπολογισμός απόλυτων μεγεθών

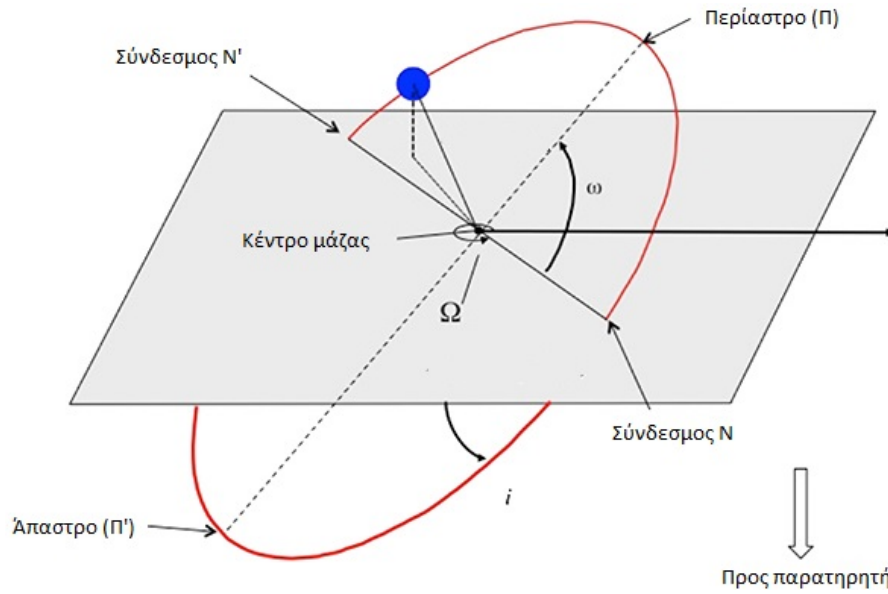
Από την κλασική μηχανική η περιγραφή της κίνησης των δύο μελών ενός διπλού συστήματος αστέρων γίνεται με τους τρεις νόμους του Kepler. Πιο συγκεκριμένα: (i) Οι τροχιές των δύο μελών ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι συνεπίπεδες και διαγράφουν όμοιες ελλείψεις με μεγάλους ημιάξονες α_1 και α_2 αντίστοιχα. (ii) Τα δύο μέλη σαρώνουν ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους. (iii) Ο μεγάλος ημιάξονας της σχετικής τροχιάς α ($= \alpha_1 + \alpha_2$) συνδέεται με την περίοδο περιφοράς P με την σχέση:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}\alpha^3 \quad (1.2)$$

όπου M_1 , M_2 οι μάζες των αστέρων και G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης.

Η παρατήρηση ενός διπλού συστήματος αστέρων γίνεται στην ουράνια σφαίρα (δύο διαστάσεις) και όχι στον πραγματικό χώρο που γίνεται η κίνηση (τρεις διαστάσεις). Ορίζεται σαν πραγματική τροχιά του αστερά η τροχιά που διαγράφει ο αστέρας στον τρισδιάστατο χώρο, ενώ ως φαινόμενη τροχιά η προβολή της πραγματικής τροχιάς του στην ουράνια σφαίρα. Έτσι προκύπτουν οι γωνίες του συστήματος καθορίζοντας την μορφή του. Η γωνία i αποτελεί την κλίση του επιπέδου της τροχιάς ως προς το επίπεδο της ουράνιας σφαίρας. Η γωνία ω μεταξύ του μεγάλου ημιάξονα και του ευθύγραμμου τμήμα των συνδέσμων NN' . Η γωνία Ω ορίζεται από την ημιευθεία που ξεκινά από το KM (κάθετη στην ευθεία παρατήρησης) και τον άξονα NN' (Εικόνα 1.5).

Όπως σημειώθηκε (λόγω της γωνίας i), αυτό που παρατηρείται είναι η προβολή της τροχιάς του κάθε αστερά στην ουράνια σφαίρα. Δηλαδή αντί για το α_1 και α_2 μετρίεται



Εικόνα 1.5: Η γεωμετρία ενός διπλού συστήματος αστέρων με παραδοχή ότι ο πρωτεύων αστέρα βρίσκεται στο κέντρο μάζας.

Πηγή: «Keplerian Orbits», A P Hatzes, 2019, Chapter 8

το $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 \sin i$ και $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 \sin i$ αντίστοιχα. Οπότε, τελικά για τον ορισμό του κέντρου μάζας θα ισχύει:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_1} \quad (1.3)$$

Από 1.2, 1.3 και με δεδομένη την απόσταση d του συστήματος από τον παρατηρητή προκύπτει η τελική σχέση υπολογισμού της μάζας, των δύο μελών:

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G} \left(\frac{d}{\cos i} \right)^3 \frac{\tilde{\alpha}^3}{P^2} \quad (1.4)$$

Τα παραπάνω εργαλεία δίνουν άμεσα αποτελέσματα σε συστήματα αστέρων τα οποία είναι αστρομετρικά και είναι γνωστή η απόσταση d . Από την άλλη μεριά, αν το διπλό σύστημα αστέρων είναι εκλειπτικό και φασματοσκοπικό, υπάρχει η επιπλέον πληροφορία της καμπύλης ταχυτήτων του συστήματος. Από την καμπύλη αυτή, είναι δυνατόν να υπολογιστεί ο μεγάλος ημιάξονας α_1 και α_2 , αντίστοιχα. Για λόγους απλότητας θεωρείται ότι οι τροχιές είναι κυκλικές¹. Οι ακτινικές ταχύτητες δίνονται από την σχέση:

$$u_{1,2} = \frac{2\pi\alpha_{1,2}}{P} \quad (1.5)$$

Για τον ίδιο λόγο, παρατηρούνται οι ταχύτητες προβαλλόμενες στην ουράνια σφαίρα:

¹Στα συστήματα που τα δύο μέλη είναι κοντά όπως το σύστημα που θα μελετηθεί στην εργασία αυτή, οι τροχιές είναι κυκλικές.

$K_1 = u_1 \sin i$ και $K_2 = u_2 \sin i$. Συνδυάζοντας τη Σχέση 1.5 και τον ορισμό για το α :

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{P}{2\pi} (u_1 + u_2) \quad (1.6)$$

Ενώ τελικά συνδυάζοντας τη Σχέση 1.2, 1.6 και τον ορισμό για τις ταχύτητες $K_{1,2}$:

$$M_1 + M_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{(K_1 + K_2)^3}{\sin^3 i} \quad (1.7)$$

Από τα παραπάνω ορίζεται το αδιάστατο μέγεθος q σαν:

$$q = \frac{M_2}{M_1} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad (1.8)$$

Μετρώντας τις ταχύτητες από την καμπύλη ταχυτήτων σε φασματοσκοπικά συστήματα, είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ο λόγος μαζών q . Προφανώς, αν μπορεί να προσδιοριστεί η περίοδος P και η γωνία i (π.χ. από φωτομετρία) μαζί με το q είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η μάζα του κάθε αστέρα ξεχωριστά. Πιο συγκεκριμένα, από τις Σχέσεις 1.6, 1.7, 1.8, με $K_{1,2}$ να δίνονται σε km/sec, η περίοδος P σε days, η μάζα εκφρασμένη σε ηλιακές μάζες $M_\odot = 1.9891 \cdot 10^{30}$ kg και ο ημιάξονας της τροχιάς σε ηλιακές ακτίνες $R_\odot = 6.957 \cdot 10^5$ km, προκύπτουν:

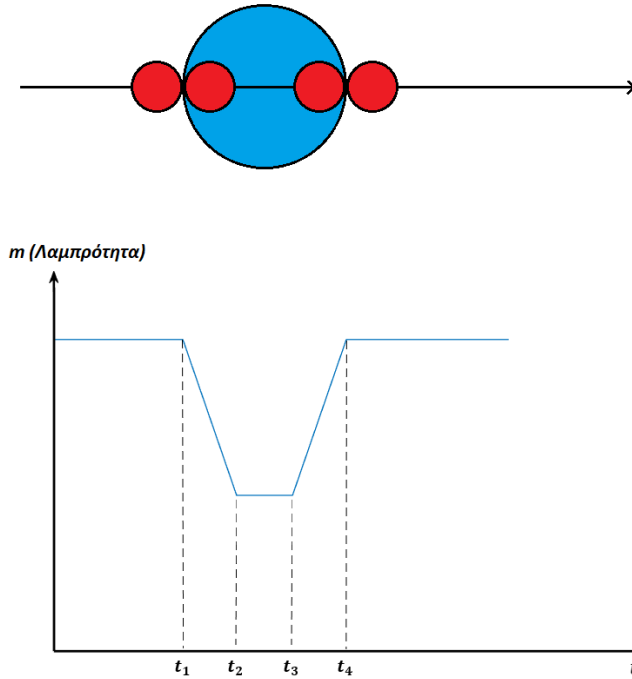
$$M_{1,2} = \left(1.0361 \cdot 10^{-7}\right) \left(1 - e^2\right)^{3/2} (K_1 + K_2)^2 K_{2,1} P (\sin i)^{-3} [M_\odot] \quad (1.9)$$

$$\alpha_{1,2} = \left(1.9758 \cdot 10^{-2}\right) \left(1 - e^2\right)^{1/2} K_{1,2} P (\sin i)^{-3} [R_\odot] \quad (1.10)$$

Σε εκλειπτικά διπλά συστήματα εκτός από τα προηγούμενα μεγέθη είναι δυνατόν να υπολογιστούν και οι ακτίνες των αστέρων R_1 και R_2 . Για να γίνει αυτός ο υπολογισμός χρειάζεται μία καμπύλη φωτός όπως στην Εικόνα 1.6 που απότυπώνεται ένα πρωτεύον ελάχιστο. Στη στιγμή t_1 αρχίζει η μείωση της λαμπρότητας, ξεκινάει δηλαδή η διάβαση του μικρότερου αστέρα (m) μπροστά από τον μεγαλύτερο (M). Κατά τη στιγμή t_2 ο αστέρας με μάζα m έχει βρεθεί πλήρως μπροστά στο δίσκο του μεγαλύτερου και θα φτάσει στο τέλος της διάβασής του τη στιγμή t_3 . Τέλος θα «αποχωρήσει» πλήρως από το δίσκο του αστέρα τη στιγμή t_4 . Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο μικρότερος αστέρας ακτίνας R_m κάλυψε σε χρόνο $t_2 - t_1$ απόσταση ίση με τη διάμετρο του ($2R_m$). Αντίστοιχα σε χρόνο $t_3 - t_1$ κάλυψε απόσταση ίση με τη διάμετρο του μεγάλου ($2R_M$). Επιπλέον σε χρόνο ίσο με την περίοδο του συστήματος P διανύεται απόσταση ίση με την περιφέρεια της τροχιάς $2\pi a$. Με δεδομένο ότι $u = K_1 + K_2 = \frac{2\pi a}{P}$ προκύπτουν:

$$R_m = \frac{u}{2} (t_2 - t_1) = \frac{\pi a}{P} (t_2 - t_1)$$

$$R_M = \frac{u}{2} (t_3 - t_1) = \frac{\pi a}{P} (t_3 - t_1)$$



Εικόνα 1.6: Πρωτεύον ελάχιστο για σύστημα με γωνία $i = 90^\circ$.

Στα στενά διπλά συστήματα αστέρων υπάρχουν ισχυρές βαρυτικές αλληλεπιδράσεις με αποτέλεσμα το σχήμα των αστέρων να αποκλίνει από σφαιρικό. Σε τέτοιες περιπτώσεις ορίζονται τρεις αποστάσεις για το κάθε άστρο (Εικόνα 1.7). Τελικά ως ακτίνα του άστρου θεωρείται η τιμή που προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$R_{1,2} = \alpha (r_{1,2;pole} r_{1,2;side} r_{1,2;back})^{1/3} [R_\odot] \quad (1.11)$$

Η φωτεινότητα των αστέρων δίνεται από τη σχέση:

$$L_{1,2} = R_{1,2} \left(\frac{T_{1,2}}{T_\odot} \right)^4 [L_\odot] \quad (1.12)$$

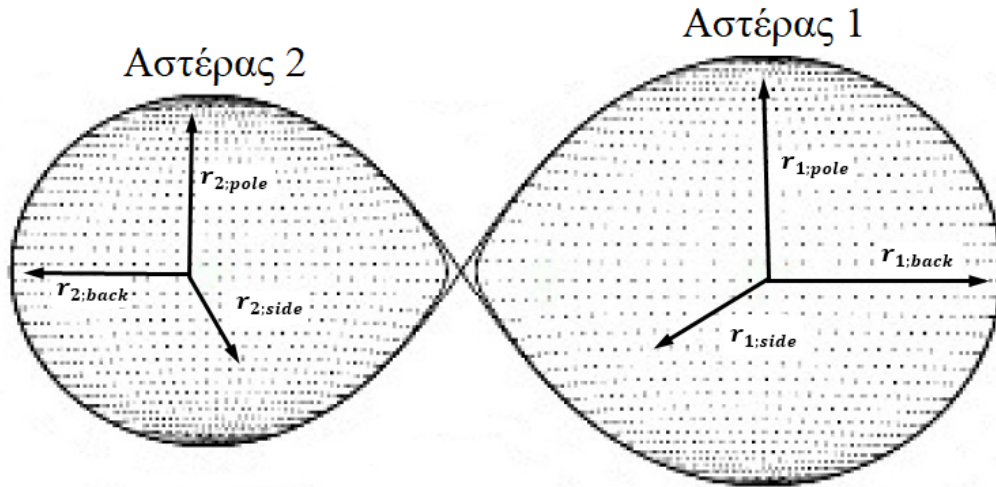
όπου $L_\odot = 3.828 \cdot 10^{26}$ W ηλιακή λαμπρότητα και $T_\odot = 5780$ K η ενεργός θερμοκρασία του Ήλιου.

Το απόλυτο βολομετρικό μέγεθος των αστέρων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$M_{bol,1,2} = 4.82 - 5 \log R_{1,2} - 10 \log \left(\frac{T_{1,2}}{T_\odot} \right) [\text{mag}] \quad (1.13)$$

Ενώ τέλος η επιφανειακή βαρύτητα των αστέρων δίνεται από τη σχέση:

$$\log g_{1,2} = 4.438 + \log M_{1,2} - 2 \log R_{1,2} [\text{cm/sec}^2] \quad (1.14)$$



Εικόνα 1.7: Η παραμόρφωση δύο αστέρων που βρίσκονται σε επαφή και οι ακτίνες που τα χαρακτηρίζουν.

1.3.2 Η δυναμική του συστήματος και το μοντέλο Roche

Στα στενά διπλά συστήματα οι αστέρες δεν εξελίσσονται σαν μεμονωμένα άστρα αλλά η εξελικτική τους πορεία επηρεάζεται από την αλληλεπίδραση με το άλλο μέλος. Αυτή η αλληλεπίδραση πολλές φορές ισοδυναμεί με ανταλλαγή μάζας από τον έναν αστέρα στον άλλον ή ανταλλαγή θερμότητας από τον θερμότερο στον ψυχρότερο. Έτσι η περιγραφή του σύνθετου βαρυτικού δυναμικού που οφείλεται και στους δυο αστέρες είναι απαραίτητη ώστε να υπολογιστούν οι παράμετροι του συστήματος (μάζες, ακτίνες κ.ο.κ.). Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από το μοντέλο Roche.

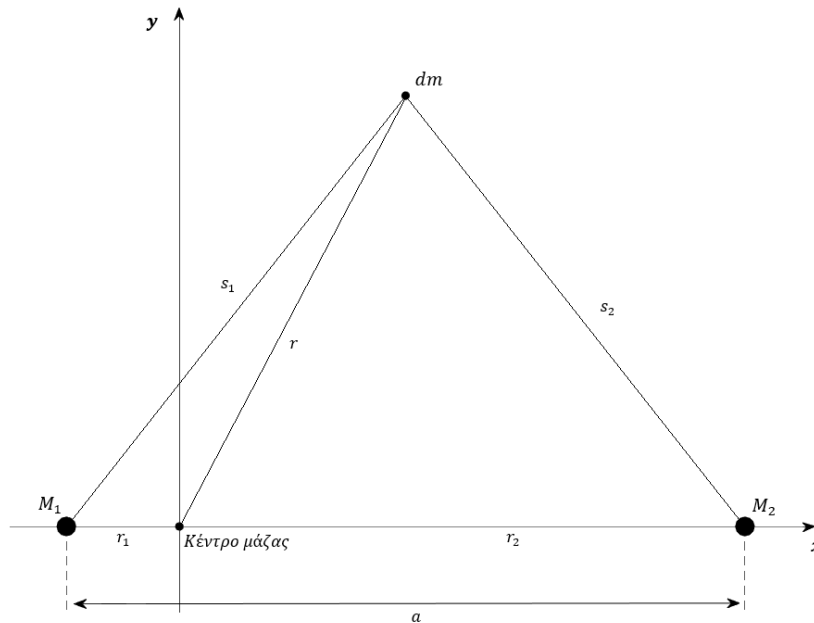
Θεωρείται ένα σύστημα δύο αστέρων με κυκλικές τροχιές και παρατηρείται σε σύστημα αναφοράς το κέντρο μάζας του συστήματος¹. Σαν ανηγμένη βαρύτητα (Φ) ορίζεται η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα στοιχείο μάζας (dm) από τους δύο αστέρες του συστήματος (M_1, M_2), λόγω βαρυτικής έλξης και λόγω περιστροφής του συστήματος αναφοράς (Εικόνα 1.8). Τα παραπάνω γράφονται με την μορφή σχέσης σαν:

$$\Phi = -G \left(\frac{M_1}{s_1} + \frac{M_2}{s_2} \right) - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \quad (1.15)$$

όπου $\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{P} \right)^2 = \frac{G(M_1+M_2)}{a^3}$.

Αποτέλεσμα είναι να ορίζονται οι ισοδυναμικές επιφάνειες στις οποίες η ανηγμένη βαρύτητα του συστήματος είναι κάθετη. Είναι προφανές ότι κοντά στο κέντρο του κάθε αστέρα η βαρυτική έλξη από τον συνοδό του και η δύναμη λόγω περιστροφής του

¹Στο σύστημα αναφοράς αυτό, τα άστρα παραμένουν ακίνητα και περιστρέφεται το σύστημα αναφοράς.



Εικόνα 1.8: Η γεωμετρία των δύο αστέρων (M_1 και M_2) και ενός στοιχείου μάζας (dm).

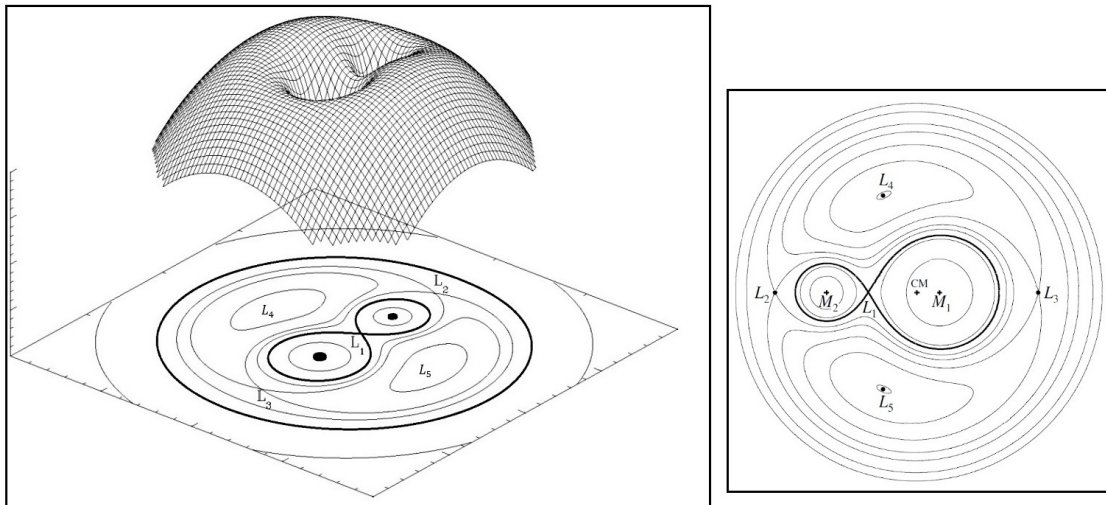
συστήματος αναφοράς θα είναι αμελητέες. Επομένως οι ισοδυναμικές επιφάνειες κοντά στα άστρα θα είναι σφαίρες. Από την άλλη, σε μεγάλες αποστάσεις από τα δύο άστρα οι επιφάνειες είναι σφαιρικές με κέντρο το κέντρο μάζας. Τέλος, στις ενδιάμεσες περιοχές οι ισοδυναμικές επιφάνειες δημιουργούν ένα σύνθετο σχήμα αφού το στοιχείο μάζας δέχεται ισοδύναμα τις δύο δυνάμεις.

Τα δύο μισά της εσωτερικής επιφάνειας που αντιστοιχούν στους δύο αστέρες ονομάζονται **λοβοί Roche** και ενώνονται σε ένα και μοναδικό σημείο, στο Λανγκρατζιανό σημείο ισορροπίας (**Lagrangian point**) L_1 . Ο λοβός Roche έχει ιδιαίτερη σημασία για την εξέλιξη του συστήματος. Καθώς ο ένας αστέρας εξελίσσεται και διαστέλλεται (π.χ. στη φάση ερυθρού γίγαντα) γεμίζει τον λοβό του με αποτέλεσμα να υπάρξει ροή μάζας (αέριο από την αστρική ατμόσφαιρα) από τον έναν αστέρα στον άλλον μέσα από το σημείο L_1 . Αντίστοιχα υπάρχουν τα σημεία ισορροπίας L_2 , L_3 , τα οποία βρίσκονται στην ευθεία που ενώνει τους δύο αστέρες και L_4 , L_5 , στην «πάνω» και αντίστοιχα στην «κάτω» μεριά του επίπεδου της τροχιάς (Εικόνα 1.9).

Η ακτίνα του λοβού Roche για καθένα από τους δύο αστέρες, ονομάζεται «ενεργός ακτίνα» r_L και δίνεται από την εμπειρική σχέση (Eggleton 1983):

$$r_{L_{1,2}} = \frac{0.49 q_{1,2}^{2/3}}{0.69 q_{1,2}^{2/3} + \ln(1 + q_{1,2}^{1/3})} \quad (1.16)$$

Με $q_1 = M_2/M_1$ υπολογίζεται η ακτίνα λοβού για τον πρωτεύοντα αστέρα (r_{L_1}) και



Εικόνα 1.9: Αριστερά: Διδιάστατη (κάτω επίπεδο) και τριδιάστατη (άνω επίπεδο) απεικόνιση του μοντέλου Roche. Στο κάτω επίπεδο διακρίνονται οι ισοδυναμικές επιφάνειες, οι αστέρες στο κέντρο των λοβών και τα σημεία ισορροπίας. Δεξιά: Η κάτοψη του μοντέλου Roche όπου διακρίνονται όλες οι ισοδυναμικές επιφάνειες και τα σημεία ισορροπίας.

Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Roche_lobe & http://mafija.fmf.uni-lj.si/seminar/files/2017_2018/BINARY_STAR_SYSTEMS.pdf

$q_2 = M_1/M_2$ υπολογίζεται η ακτίνα λοβού για τον δευτερεύοντα αστέρα (r_{L_2}). Η παραπάνω σχέση έχει ακρίβεια 1% για κάθε τιμή του λόγου μαζών. Η πραγματική ενεργός ακτίνα του αστέρα R_L προκύπτει από την σχέση:

$$R_L = \alpha r_L \quad (1.17)$$

Να σημειωθεί ότι σε όλη την παραπάνω ανάλυση έχουν γίνει κάποιες υποθέσεις:

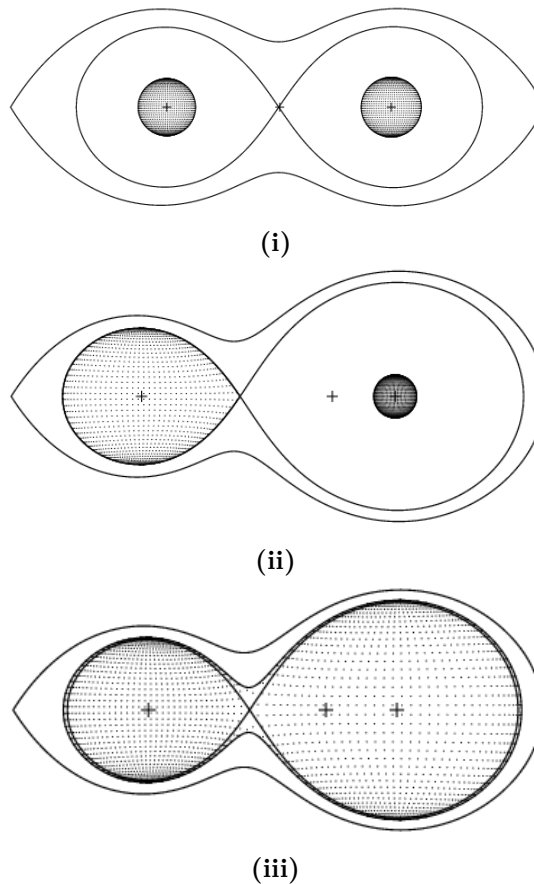
1. Η κατανομή της μάζας σε κάθε αστέρα του συστήματος είναι τέτοια ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι όλη είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο του.
2. Οι τροχιές των αστερών είναι κυκλικές.
3. Η ιδιοπεριστροφή του κάθε αστέρα είναι σύγχρονη με την περιφορά του γύρω από το κοινό κέντρο μάζας.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η φωτόσφαιρα του κάθε αστέρα μπορεί να θεωρηθεί επιφάνεια σταθερής πυκνότητας με αποτέλεσμα να συμπίπτει με κάποια ισοδυναμική επιφάνεια του μοντέλου Roche. Αυτό το συμπέρασμα αποτελεί την βάση για την ταξινόμηση διπλών αστερών κατά τον Zdenek Kopal (1914-1993).

- (α) **Αποχωρισμένα ζεύγη** αποτελούν τα συστήματα στα οποία και οι δύο αστρικές ατμόσφαιρες βρίσκονται εσωτερικά των λοβών Roche (Εικόνα 1.10i). Στα συστήματα

αυτά η αλληλεπίδραση γίνεται μέσω της αμοιβαίας βαρυτικής έλξης. Η ηλικία των δύο αστέρων είναι περίπου η ίδια και η εξελικτική τους πορεία δεν επηρεάζεται πάντα από τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις.

- (β) **Ημιαποχωρισμένα ζεύγη** είναι τα συστήματα όπου η μία από τις δύο αστρικές ατμόσφαιρες συμπίπτει με την επιφάνεια του λοβού Roche (για τον συγκεκριμένο αστέρα), ενώ η άλλη βρίσκεται εσωτερικά του αντίστοιχου λοβού Roche (Εικόνα 1.10ii). Το άστρο που γεμίζει τον λοβό ονομάζεται *μέλος επαφής*, ενώ το άλλο ονομάζεται *αποχωρισμένο μέλος*. Στην κατηγορία αυτή υπάρχει μεταφορά μάζας μέσα από το σημείο L_1 από το άστρο που έχει γεμίσει τον λοβό του προς τον συνοδό του.
- (γ) **Συστήματα σε επαφή** ονομάζονται τα συστήματα στα οποία και οι δύο ατμόσφαιρες έχουν γεμίσει πλήρως ή ξεπερνούν τους αντίστοιχους λοβούς Roche



Εικόνα 1.10: Οι τρεις κατηγορίες που ταξινομούνται τα διπλά συστήματα ανάλογα με τη γεωμετρία Roche.

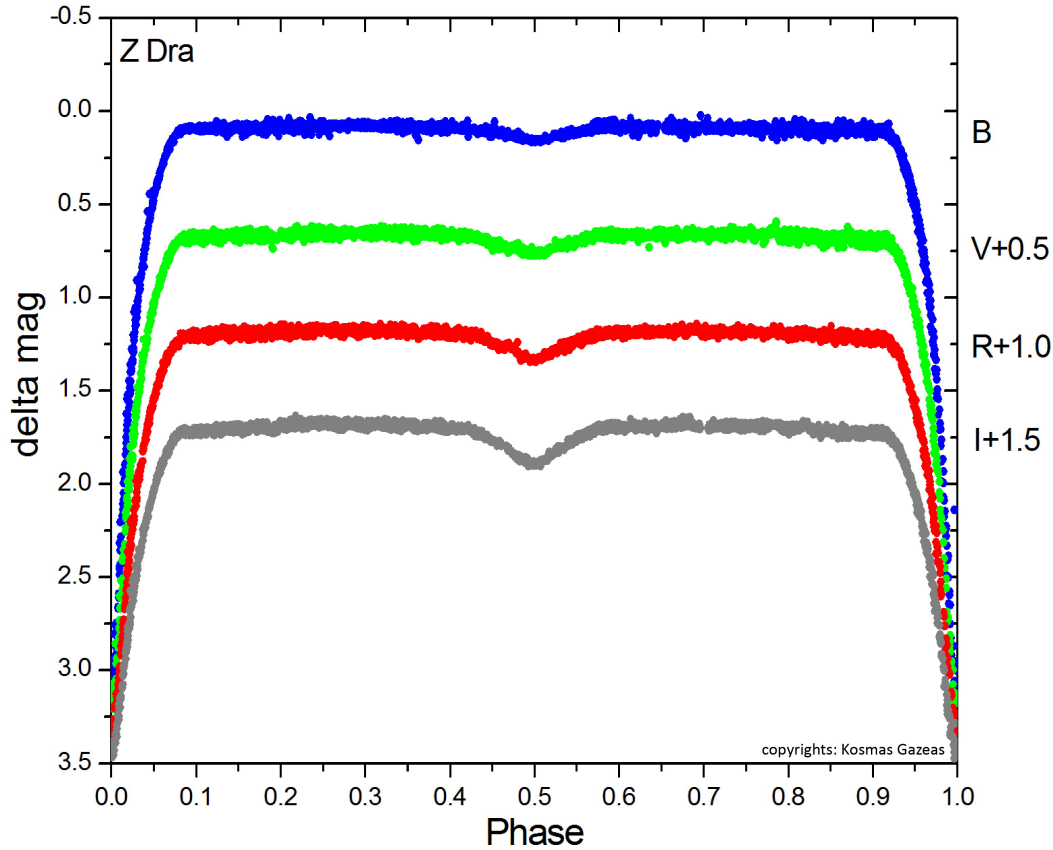
Πηγή: http://caleb.eastern.edu/binary_type_definitions.php

(Εικόνα 1.10iii). Στην περίπτωση που έχουν ξεπεράσει τους λοβούς Roche (συνηθέστερη περίπτωση) τα δύο άστρα περιβάλλονται από ένα κοινό περίβλημα-φωτόσφαιρα.

1.4 Ταξινόμηση ανάλογα τη μορφή της καμπύλης φωτός

Τα διπλά εκλειπτικά συστήματα ταξινομούνται σε τρεις κύριες κατηγορίες ανάλογα με τη μορφή της καμπύλης φωτός τους. Οι κατηγορίες αυτές συνδέονται σε μεγάλο βαθμό με τη γεωμετρία Roche. Συγκεκριμένα:

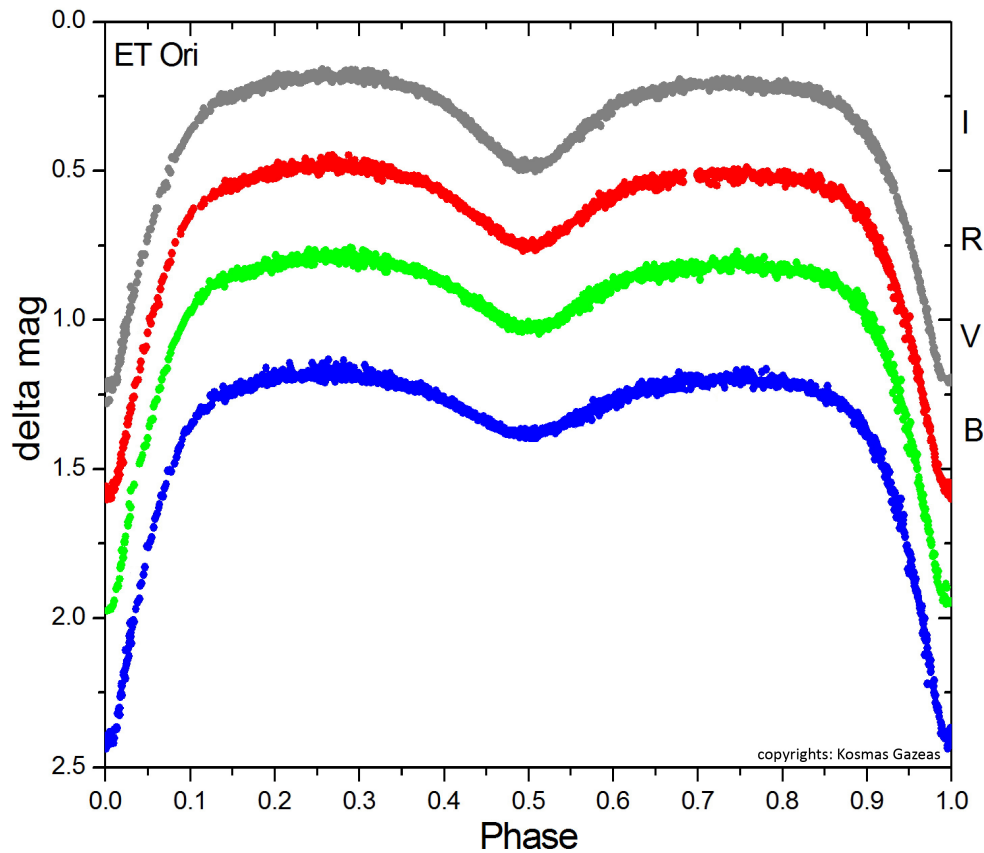
- (α) Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τα συστήματα που έχουν καμπύλη φωτός όπως του αστέρα *Algol* (Εικόνα 1.11). Για αυτό τον λόγο ονομάζονται **Algol ή β Persei τύπου (EA type)**. Ένα παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι ένας αστέρας φασματικού τύπου Β ή Α κυρίας ακολουθίας και ένας ψυχρός αστέρας τύπου Κ ή Μ (ερυθρός γίγαντας ή υπογίγαντας). Αποτέλεσμα είναι ένα πολύ βαθύ πρωτεύον ελάχιστο αφού υπάρχει έκλειψη ενός πολύ φωτεινού αστέρα από έναν πολύ πιο αμυδρό, ενώ αντίστοιχα το δευτερεύον ελάχιστο πολλές φορές είναι δύσκολο να ξεχωρίσει αφού ο αμυδρός αστέρας μετά βίας συνεισφέρει στην συνολική λαμπρότητα. Ανάμεσα στα δύο ελάχιστα η λαμπρότητα παραμένει περίπου σταθερή αφού παρατηρείται το φως και από τους δύο αστέρες. Τα συστήματα αυτά κατά κύριο λόγο είναι αποχωρισμένα συστήματα και σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να είναι ημιαποχωρισμένα με αργή μεταφορά μάζας. Η τροχιακή περίοδος του συστήματος κυμαίνεται από λίγες ώρες μέχρι πολλές μέρες ή μήνες.



Εικόνα 1.11: Η φωτομετρική καμπύλη του συστήματος Z Dra από τον Δρ. Κ. Γαζέα, το οποίο αποτελεί Algol type system. Στην προκείμενη περίπτωση η διαφορά στην φωτεινότητα είναι τόσο μεγάλη που το δευτερεύον ελάχιστο, ελάχιστα ξεχωρίζει στο $\varphi \approx 0.5$.

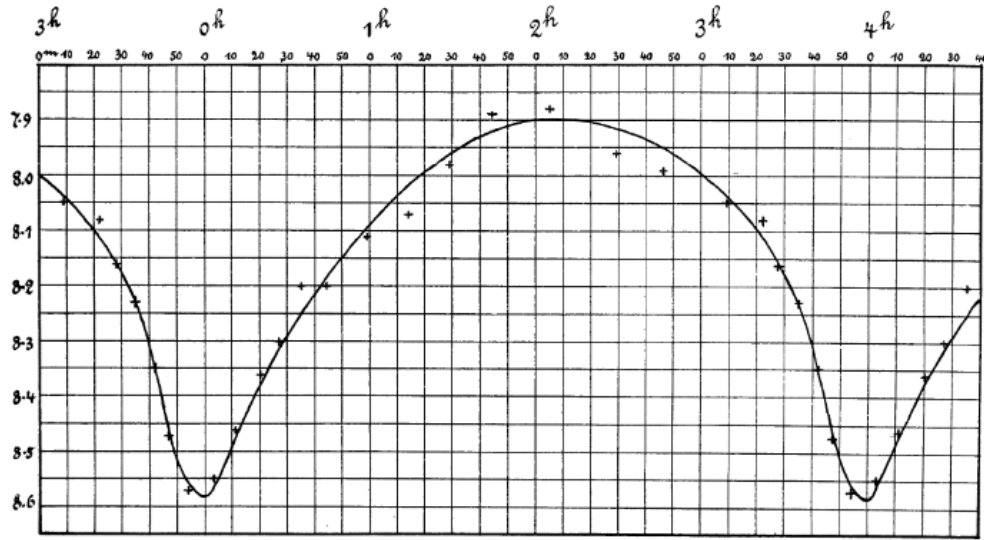
Πηγή: K. Gazeas, http://users.uoa.gr/~kgaze/research_eclipsingbinaries_gr.html

- (β) Τύπου **β Lyrae (EB type)** αποτελούν τα διπλά εκλειπτικά συστήματα που η καμπύλη φωτός μοιάζει με την καμπύλη φωτός της Εικόνας 1.12. Η μεταβολή του φωτός είναι συνεχής γιατί και τα δύο μέλη έχουν παραμορφωθεί λόγω αμοιβαίας βαρυτικής έλξης. Έτσι τα συστήματα αυτά είναι κυρίως ημιαποχωρισμένα συστήματα και σε μερικές περιπτώσεις σε οριακή επαφή (έχουν γεμίσει οριακά οι δύο λοβοί Roche). Η τροχιακή περίοδος του συστήματος κυμαίνεται από λίγες ώρες μέχρι μερικές μέρες.



Εικόνα 1.12: Η φωτομετρική καμπύλη του συστήματος ET Ori από τον Δρ. Κ. Γαζέα. Πηγή: K. Gazeas, http://users.uoa.gr/~kgaze/research_eclipsingbinaries_gr.html

- (γ) Στην τελευταία κατηγορία ανήκουν τα εκλειπτικά συστήματα τύπου **W Ursae Majoris (EW type)** που έχουν καμπύλες φωτός παρόμοιες με την καμπύλη του W UMa (Εικόνα 1.13). Τα συστήματα αυτά είναι συστήματα αστερών σε (υπερ)επαφή δηλαδή έχουν γεμίσει και πολλές φορές υπερχειλίσει τους λοβούς Roche. Η καμπύλη φωτός παρουσιάζει συνεχή μεταβολή και δύο ισοβαθή ελάχιστα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν ξεχωρίζουν οι δύο αστέρες οπότε παρουσιάζεται μία σχεδόν ομοιόμορφη θερμοκρασία στο εξωτερικό περίβλημα. Ο φασματικός τύπος των συστημάτων αυτών κυμαίνεται από F μέχρι και K. Τέλος, η τροχιακή περίοδος του συστήματος κυμαίνεται από μερικές ώρες μέχρι σπάνια σε περιπτώσεις μίας ημέρας.



Εικόνα 1.13: Η πρωτότυπη φωτομετρική καμπύλη του συστήματος W UMa (Muller G. and Kempf P., 1903, AJ, 17).

1.5 Το σύστημα HV Aquarii

Το σύστημα που έχει μελετηθεί σε αυτή την εργασία είναι το HV Aquarii το οποίο ανακαλύφθηκε ως μεταβλητός αστέρας από τον Hutton (1992)¹. Οι συντεταγμένες του συστήματος στην ουράνια σφαίρα είναι $\alpha_{2000} = 21^{\text{h}} 21^{\text{m}} 24^{\text{s}}.81$ και $\delta_{2000} = -03^{\circ} 09' 36''.8$. Η απόσταση του συστήματος προέκυψε από την GAIA² και είναι 195 pc. Το 1992 έγιναν δύο ανεξάρτητες φωτομετρικές αναλύσεις από τον Robb (1992)³ και αντίστοιχα από τους Schirmer και Geyer (1992)⁴ όπου κατέληξαν ότι το HV Aqr είναι ένας αστέρας φασματικού τύπου G5, με μία μέγιστη τιμή $V_{max} = 10.0$ mag και μία μέση τιμή $B - V = 0.7$ mag. Από την μορφή της καμπύλης φωτός έγινε ξεκάθαρο ότι το σύστημα αποτελεί ένα σύστημα σε επαφή (τύπου W UMa). Ακόμα ο Robb (1992) από τις φωτομετρικές του παρατηρήσεις κατέληξε σε έναν πολύ μικρό λόγο μαζών $q = M_2/M_1 = 0.146$, μία γωνία κλίσης $i = 78.3^{\circ}$ και περίπου μία κοινή θερμοκρασία 6500 K.

Από το 1992 μέχρι και το 2020 έχουν δημοσιευθεί πολλοί χρόνοι ελαχίστων ενώ το 2000 δημοσιεύτηκε φασματοσκοπική ανάλυση για το σύστημα από τον Rucinski et al. (2000)⁵ στην οποία κατέληξαν σε μία τιμή για τον λόγο μαζών $q = 0.145 \pm 0.05$ (ο οποίος

¹Hutton R. G., 1992, Inf. Bull. Var. Stars, 3723, 1

²Gaia DR2 2684640639182523264

³R. M. Robb, 1992, IBVS, 3798, 1

⁴J. Schirmer, E. H. Geyer, 1992, IBVS, 3785, 1

⁵S. M. Rucinski et al., 2000, AJ, 120, 1133

είναι πολύ κοντά στον φωτομετρικό λόγο μαζών που είχε βρεθεί λίγα χρόνια πριν) και σε ένα φασματικό τύπο F5V. Βασιζόμενοι στις φασματοσκοπικές τιμές από το DDO, οι D' Angelo, van Kerkwijk και Rucinski το 2006¹ ανακάλυψαν την ύπαρξη ενός τρίτου αστέρα στο σύστημα με μάζα $0.59 M_{\odot}$. Ένα χρόνο μετά οι Rucinski, Pribulla και van Kerkwijk (2007)² χρησιμοποιώντας μία τεχνική με Adaptive Optics βρήκαν έναν αστέρα φασματικού τύπου K2-3V και μάζας $\sim 0.7 M_{\odot}$, να κινείται σε απόσταση 74 AU με περίοδο περιφοράς ~ 430 yr.



Εικόνα 1.14: Εικόνα του ουρανού γύρω από το σύστημα HV Aqr (μπλε βέλος) από το Aladin Sky Atlas. Το οπτικό πεδίο είναι 51×30 arcmin.

¹D'Angelo C., van Kerkwijk M. H., Rucinski S. M., 2006, AJ, 132, 650

²Rucinski S. M., Pribulla T., van Kerkwijk M. H., 2007, AJ, 134, 2353

Κεφάλαιο 2

Όργανα παρατήρησης και τεχνικές επεξεργασίας δεδομένων

Η παρατήρηση του HV Aqr έγινε από το Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο Αθηνών¹ τις χρονιές 2002 και 2005. Τις παρατηρήσεις πραγματοποίησε ο Δρ. Κ. Γαζέας². Αν και η φωτομετρική ανάλυση του συστήματος δημοσιεύτηκε το 2007 (K. D. Gazeas, P. G. Niarchos, S. Zola, 2007, ASPCS, 370) και το 2021 (Gazeas K. et al., 2021, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 501, 2897), ξαναέγινε για το πλαίσιο της εργασίας με τις μεθόδους που αναλύονται παρακάτω.

2.1 Περιγραφή οργάνων παρατήρησης

2.1.1 Τηλεσκόπιο

Το αστεροσκοπείο βρίσκεται στην οροφή του τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών στην Πανεπιστημιούπολη (Ζωγράφου) και είναι σε υψόμετρο ~ 250 m στους πρόποδες του όρους Υμηττού. Το αστεροσκοπείο από το 2000 λειτουργεί με κατοπτρικό τηλεσκόπιο διαμέτρου 40 cm τύπου Cassegrain (CCT-16, DFM ENGINEERING INC., USA) το οποίο τηλεσκόπιο βρίσκεται μέσα σε θόλο 5 m. Ο χειρισμός του τηλεσκοπίου και του θόλου μπορεί να γίνει εξ αποστάσεως από την αίθουσα ελέγχου που βρίσκεται κάτω από το θόλο. Ο ενεργός εστιακός λόγος του τηλεσκοπίου είναι $f/8$. Η στήριξή του είναι ισημερινή διχαλωτού τύπου. Έχει ακρίβεια στόχευσης (λαμβάνοντας υπόψη τις διορθώσεις από διάθλαση και ευθυγράμμιση) καλύτερη από 1 arcmin RMS ενώ η ακρίβεια οδήγησης είναι ± 2 arcsec σε 2 λεπτά και ± 20 arcsec σε 1 ώρα.

2.1.2 CCD κάμερα

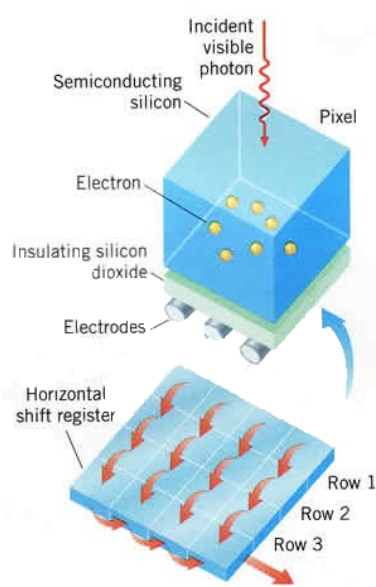
Το ακρωνύμιο CCD προέρχεται από τις των λέξεις «Charge Coupled Devices» (στοιχεία συζευγμένου φορτίου). Αποτελεί τον ιδανικότερο ανιχνευτή ακτινοβολίας καθώς μπορεί να καταγράψει φως από ένα μεγάλο μέρος του H/M φάσματος.

¹<http://observatory.phys.uoa.gr/>

²<http://users.uoa.gr/~kgaze/index.html>



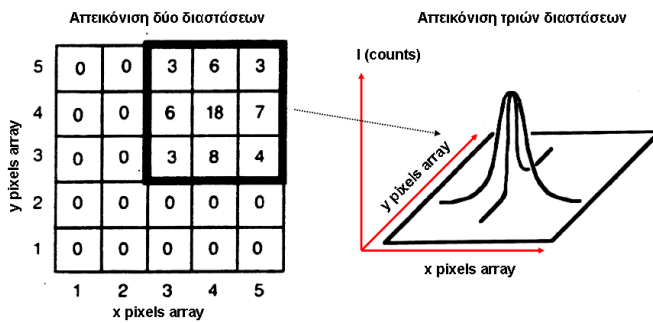
Εικόνα 2.1: Το Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο Αθηνών και το κατοπτρικό τηλεσκόπιο που βρίσκεται στο εσωτερικό του (φωτογραφίες από τον Δρ. Κ. Γαζέα).



Εικόνα 2.2: Αναπαράσταση της δημιουργίας μίας φωτογραφίας. Το κάθε φωτόνιο θα δημιουργήσει ένα ηλεκτρόνιο το οποίο καταλήγει σαν σήμα στον Η/Υ.

Η αρχή λειτουργίας είναι αρκετά απλή και στηρίζεται στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Σύμφωνα με αυτό εάν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία προσκρούσει σε μέταλλο τότε ηλεκτρόνια μπορούν να πάρουν ενέργεια ώστε να διαφύγουν (για προφανείς λόγους αυτά τα ηλεκτρόνια ονομάζονται φωτοηλεκτρόνια). Η CCD κάμερα διαθέτει μικρούς ισομεβαδικούς στοιχειώδεις ανιχνευτές ακτινοβολίας που ονομάζονται pixels. Έτσι όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.2 όταν ένα φωτόνιο προσκρούσει σε ένα pixel (ιδανικά) θα δημιουργηθεί ένα ηλεκτρόνιο/σήμα το οποίο αφού ενισχυθεί από έναν ενισχυτή μπορεί να καταγραφεί στον Η/Υ. Αποτέλεσμα η δημιουργία μιας φωτογραφίας δεν είναι τίποτα παραπάνω από το να μετρούνται ηλεκτρόνια σε κάθε pixel (γνωστά ως counts) τα οποία αντιστοιχούν με φωτόνια της πηγής που παρατηρείται. Τελικά θα προκύψει ένας διδιάστατος πίνακας όπου θα είναι γεμάτος με αριθμούς που αντιπροσωπεύουν τα counts για το κάθε pixel (Εικόνα 2.3). Ένα pixel που έχει λίγα counts σε σχέση με ένα άλλο θα είναι πολύ πιο σκοτεινό κ.ο.κ.

Η CCD κάμερα τοποθετείται συνήθως στην κύρια εστία του τηλεσκοπίου. Χρησιμοποιείται για την φωτομετρία ενός αντικειμένου δηλαδή την καταμέτρηση της ροής



Εικόνα 2.3: Αριστερά: Ο αριθμός των counts (εντός των μικρών τετραγώνων), τα οποία καταγράφονται σε κάθε εικονοστοιχείο του CCD. Δεξιά: Τρισδιάστατη απεικόνιση του CCD και η Gaussian καμπύλη, η οποία περιγράφει την ένταση της ακτινοβολίας στα εικονοστοιχεία που περιλαμβάνονται στο έντονο πλαίσιο του αριστερού σχήματος.

της ακτινοβολίας του F , με απώτερο σκοπό τον υπολογισμό της έντασης και της λαμπρότητας της πηγής. Για τους αστέρες, ιδανικό θα ήταν το μέγεθός τους επάνω σε μια εικόνα να καλύπτει μόλις ένα pixel καθώς θεωρούνται με πολύ καλή προσέγγιση σημειακές πηγές (η απόστασή τους από την Γη θεωρείται «άπειρη»). Στην πραγματικότητα όμως, τα είδωλα των αστέρων καλύπτουν παραπάνω από ένα pixel, λόγω ατμοσφαιρικών κυρίως φαινομένων (seeing). Η περιγραφή της κατανομής της έντασης του αστέρα επάνω στα εικονοστοιχεία γίνεται με την κατανομή Gauss (Εικόνα 2.3). Αφού μετρηθούν τα συνολικά counts του αστέρα βάσει της Gaussian καμπύλης του, μπορεί να υπολογιστεί το φαινόμενο μέγεθός του m από τη σχέση Pogson:

$$m = -2.5 \log F + C \quad (2.1)$$

όπου η σταθερά C ονομάζεται «σταθερά μηδενικού σημείου» και χρησιμοποιείται για την προσαρμογή της κλίμακας μεγεθών του CCD στην κλίμακα απολύτων μεγεθών. Για να υπολογιστεί χρησιμοποιείται αστέρας γνωστού φαινομένου μεγέθους στο πεδίο.

Γενικά οι αστροφωτογραφίες έχουν τρεις θορύβους και επειδή όπως αναφέρθηκε οι εικόνες αποτελούν πίνακες διαστάσεων $x \times y$, μπορεί να γίνει επεξεργασία ακολουθώντας την λογική των πράξεων μεταξύ πινάκων.

- Το πρώτο πρόβλημα που υπάρχει είναι ότι κάθε pixel εν γένη μπορεί να έχει διαφορετική απόκριση από το διπλανό του. Αποτέλεσμα αυτού είναι να υπάρχει ηλεκτρονικός θόρυβος απο συγκεκριμένα pixels. Η εξάλειψή του γίνεται με την **εικόνα αντιστάθμισης – Bias**. Λαμβάνεται φωτογραφία με κλειστό το τηλεσκόπιο (πλήρες σκοτάδι) με πολύ μικρό χρόνο έκθεσης πριν και μετά την παρατήρηση (Εικόνα 2.4i).
- Επόμενο πρόβλημα που υπάρχει είναι ότι η κάμερα δεν είναι πάντα σε χαμηλή θερμοκρασία. Έτσι υπάρχει δημιουργία αυθόρμητων ηλεκτρονίων που όμως δεν αντιστοιχούν σε φωτόνια. Για να λυθεί το πρόβλημα, λαμβάνεται μία εικόνα σε πλήρες σκοτάδι η οποία έχει τον ίδιο χρόνο έκθεσης και θερμοκρασία με την αστροφωτογραφία. Η εικόνα αυτή λέγεται **εικόνα σκότους – Dark image** (Εικόνα 2.4ii).

- Τέλος υπάρχει το πρόβλημα του ανομοιόμορφου φωτισμού του πεδίου από έκκεντρο φωτισμό (vignetting). Όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.4iii οι άκρες της εικόνας είναι πολύ πιο σκοτεινές από την υπόλοιπη. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό όπως επίσης και η ύπαρξη κόκκων σκόνης στην επιφάνεια του φακού, λαμβάνεται η **εικόνας απόκρισης – Flat field**. Λαμβάνεται σε ομοιόμορφα φωτισμένη επιφάνεια (π.χ. ουρανός κατά το λυκόφως) με χρόνο έκθεσης μερικά δευτερόλεπτα και με μέγιστη ένταση ακτινοβολίας τα $\sim 2/3$ της δυναμικής περιοχής του CCD.

Να σημειωθεί ότι για καθένα από τα παραπάνω είδη εικόνων πρέπει να λαμβάνονται όσες το δυνατόν περισσότερες εικόνες. Σαν τελική του κάθε είδους (Master) λαμβάνεται η διάμεσος τους, έτσι ώστε να εξαλειφθεί ο τυχαίος ηλεκτρονικός θόρυβος ο οποίος δημιουργείται κατά τη λήψη τους. Αποτέλεσμα να υπάρχουν οι τρεις φωτογραφίες (dark frame := $d(x, y)$, flat field := $f(x, y)$ και bias frame := $b(x, y)$) και προκύπτει η τελική εικόνα επεξεργασμένη:

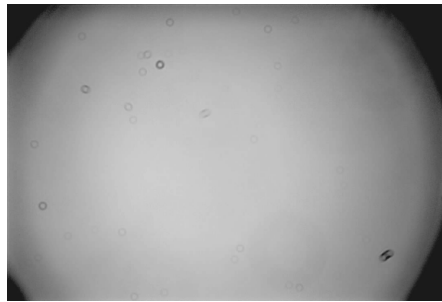
$$\text{Διορθωμένη εικόνα}(x, y) = \frac{\text{αρχική εικόνα}(x, y) - d(x, y) - b(x, y)}{f(x, y)} \quad (2.2)$$



(i) Bias frame



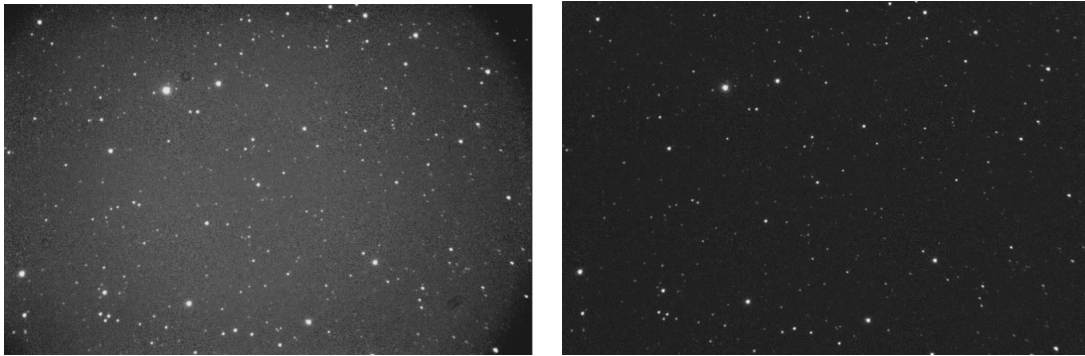
(ii) Dark frame



(iii) Flat field

Εικόνα 2.4: Παράδειγμα εικόνων διόρθωσης (calibration images) που χρησιμοποιούνται για την επεξεργασία (από τον Δρ. Κ. Γαζέα).

Η τελική εικόνα είναι διορθωμένη από ηλεκτρονικούς θορύβους αλλά και απαλλαγμένη τόσο από ανομοιομορφίες λόγω απόκρισης ή έκκεντρο φωτισμού (κανονικοποιημένη στη μέγιστη τιμή της έντασης) όσο και από «ανωμαλίες» λόγω σκόνης ή φθοράς των οπτικών συστημάτων (Εικόνα 2.5).



Εικόνα 2.5: Αριστερά: Η αρχική εικόνα πριν την επεξεργασία. Δεξιά: Η τελική εικόνα μετά την επεξεργασία.

Οι διορθώσεις που έγιναν στη φωτομετρία του συστήματος HV Aqr, ήταν με dark image και flat field. Δεν χρησιμοποιήθηκε Bias image γιατί δεν ήταν καθόλου σημαντική η διακύμανση στην ευαισθησία των pixels. Λήφθηκαν 11 dark εικόνες και 11 flat πριν και μετά από κάθε παρατήρηση αντίστοιχα και υπολογίστηκε η διάμεσός τους.

2.2 Τεχνικές επεξεργασίας δεδομένων

2.2.1 Διαφορική φωτομετρία διαφράγματος

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται έναν μεταβλητό αστέρα, επομένως το ενδιαφέρον εστιάζεται σε μετρήσεις μεταβολής της λαμπρότητας του αστέρα συναρτήσει του χρόνου. Τονίζεται ότι στόχος είναι ο υπολογισμός του πλάτους της μεταβολής και η διάρκειά της και όχι ο υπολογισμός του φαινομένου μεγέθους της πηγής. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκε η τεχνική της διαφορικής φωτομετρίας διαφράγματος με το λογισμικό *Astronomical Image Processing for Windows*¹.

Γενικά τα διαφράγματα χρησιμοποιούνται για να καθοριστούν οι προς μελέτη πηγές ακτινοβολίας και να αφαιρεθεί ο θόρυβος υποβάθρου από τις μετρήσεις. Ως πηγές ακτινοβολίας θεωρούνται οι αστέρες και γενικά όλα τα ουράνια αντικείμενα, τα οποία βρίσκονται στο πεδίο παρατήρησης, ενώ από την άλλη μεριά κάποιες πηγές θορύβου υποβάθρου είναι το διάχυτο φως από τις πηγές του σύμπαντος, το Σεληνόφως, κοντινές τεχνητές πηγές φωτός (π.χ. λάμπες, φωτορύπανση) κ.α.

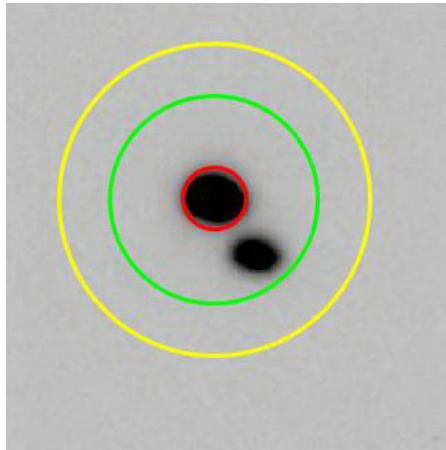
Στη μέθοδο της φωτομετρίας διαφράγματος ορίζονται τρία ομόκεντρα διαφράγματα, κοινά για όλους τους αστέρες που επιλέγονται για χρωμέτρηση, τα οποία με τη σειρά τους ορίζουν δύο ομόκεντρους δακτυλίους. Συγκεκριμένα, τα διαφράγματα είναι:

1. Διάφραγμα αστέρα (star aperture): Περιλαμβάνει ολόκληρο και μόνο τον αστέρα, του οποίου πρέπει να μετρηθεί η διακύμανση της λαμπρότητάς του.

¹Berry, R., Burnell, J. 2000, *The Handbook of Astronomical Image Processing*, Willmann-Bell, Richmond (Virginia)

2. Εσωτερικό διάφραγμα για το υπόβαθρο (sky annulus in).
3. Εξωτερικό διάφραγμα για το υπόβαθρο (sky annulus out).

Το εσωτερικό διάφραγμα για το υπόβαθρο και το διάφραγμα του αστέρα ορίζουν έναν «νεκρό» δακτύλιο γύρω από τον αστέρα, μέσα στον οποίο μπορεί να τοποθετηθεί κάποια κοντινή πηγή φωτός που δεν πρέπει να ληφθεί υπόψη. Το εσωτερικό και εξωτερικό διάφραγμα ορίζουν έναν δεύτερο δακτύλιο μέσα στον οποίο καταμετράτε το φωτεινό υπόβαθρο του ουρανού (διάχυτο φως που προέρχεται από κάθε φωτεινή πηγή του ουρανού) (Εικόνα 2.6).



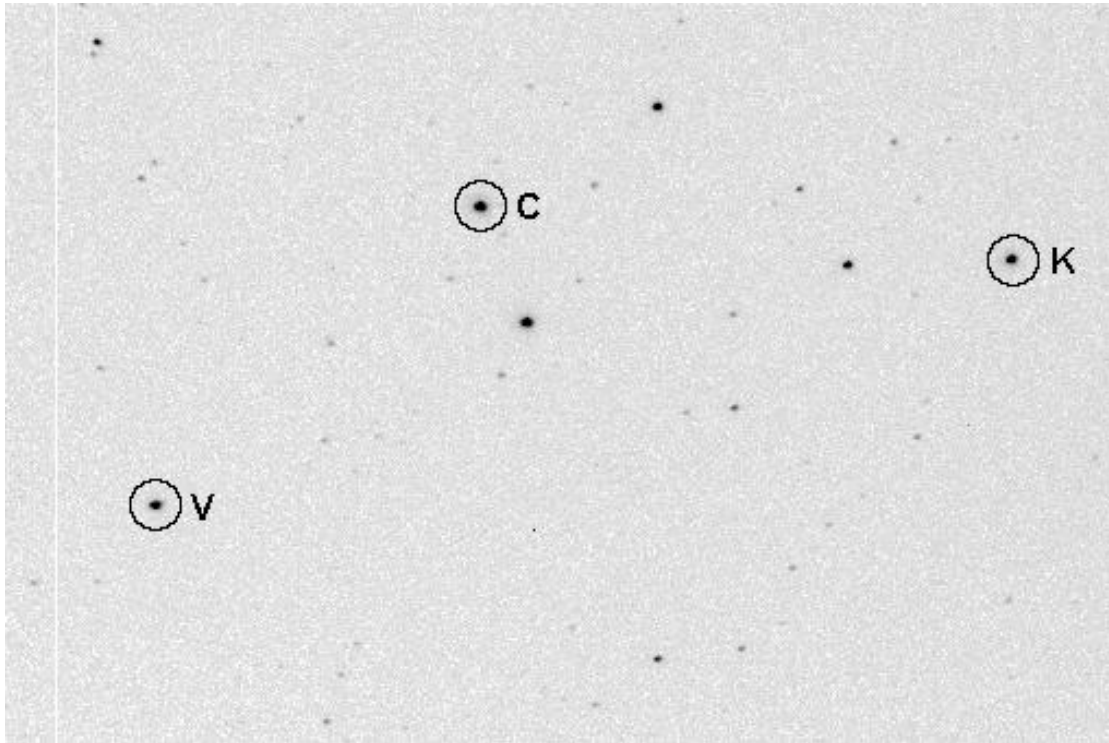
Εικόνα 2.6: Τα διαφράγματα που χρησιμοποιούνται στη φωτομετρία διαφράγματος. Ο κόκκινος κύκλος αντιστοιχεί στο διάφραγμα του αστέρα και ο πράσινος, κίτρινος στο εσωτερικό και εξωτερικό διάφραγμα για το υπόβαθρο αντίστοιχα.

Από τη Σχέση 2.1 υπάρχει η σταθερά μηδενικού σημείου η οποία είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί. Χρησιμοποιώντας πηγές οι οποίες είναι φωτομετρικά σταθερές συναρτήσει του χρόνου μπορούν να υπολογιστούν μεταβολές στη λαμπρότητα άλλων πηγών με απλή σύγκριση των ροών ακτινοβολίας τους. Συγκεκριμένα, η αφαίρεση των ροών των αστέρων μεταξύ τους απαλείφει τη σταθερά. Με αυτόν τον τρόπο αφαιρούνται από τον τελικό υπολογισμό και οι απορροφήσεις της ακτινοβολίας λόγω της αέριας μάζας αλλά και τυχόν παροδικές απορροφήσεις (π.χ. αραιή νέφωση), αφού αυτές συμβαίνουν ταυτόχρονα στις ακτινοβολίες όλων των αστέρων του πεδίου.

Στο αστρικό πεδίο της παρατήρησης επιλέγονται οι αστέρες προς φωτομέτρησης. Αναλυτικά, επιλέγεται ο μεταβλητός αστέρας (V), ο αστέρας σύγκρισης (C, παρακάτω αναφέρεται σαν C₁) ο οποίος πρέπει να έχει σταθερή λαμπρότητα και συγκρίσιμη με εκείνη του μεταβλητού και ο αστέρας ελέγχου (K, παρακάτω αναφέρεται σαν C₂) ο οποίος χρησιμοποιείται για να ελεγχθεί η σταθερότητα της λαμπρότητας του αστέρα σύγκρισης. Οι αστέρες συγκρίσεως C και ελέγχου K πρέπει να ικανοποιούν τα εξής κριτήρια:

- Να είναι περίπου ίδιου φασματικού τύπου με τον μεταβλητό.
- Να απέχουν μικρότερη απόσταση από 1° από τον μεταβλητό.
- Να μην είναι μεταβλητοί αστέρες.
- Να μην είναι ερυθροί αστέρες.
- Να είναι περίπου ίδιας λαμπρότητας (ίδιο φαινόμενο μέγεθος).

Οι αστέρες που χρησιμοποιήθηκαν ως αστέρες σύγκρισης και ελέγχου για τις παρατηρήσεις της εργασίας φαίνονται στην Εικόνα 2.7.



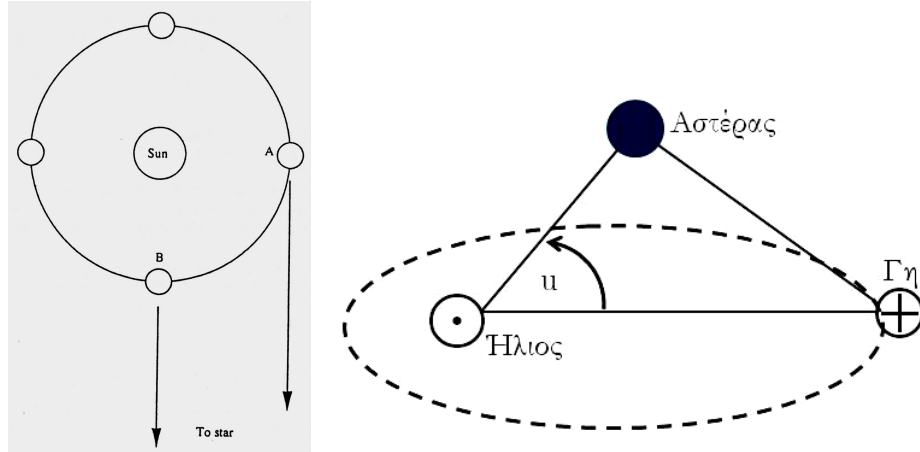
Εικόνα 2.7: Η περιοχή του ουρανού γύρω από τον μεταβλητό αστέρα HV Aqr, διαστάσεων 22.5×15 arcmin. Ο αστέρας σύγκρισης είναι ο GSC 5198-1221 (C) και ο αστέρας ελέγχου ο GSC 5198-1260 (K).

2.2.2 Ηλιοκεντρική διόρθωση

Για να αποδοθεί γραφικά η μεταβολή της φωτεινότητας ενός αστέρα κατασκευάζεται το διάγραμμα της μεταβολής του μεγέθους (φωτεινότητα) ως προς τον χρόνο, δηλαδή η καμπύλη φωτός. Γενικά, ο χρόνος μπορεί να είναι εκφρασμένος σε ώρες, αλλά για παρατηρήσεις πολλών ημερών η μεταβλητή του χρόνου περιέχει τόσο αριθμούς όσο και γράμματα. Κάτι τέτοιο δεν είναι πρακτικό για υπολογισμούς αφού ο υπολογιστής δεν μπορεί να τοποθετήσει εύκολα τα δεδομένα με χρονική σειρά. Έτσι, ως μονάδα μέτρησης χρόνου για τους μεταβλητούς αστέρες έχει επικρατήσει η *Ιουλιανή Ημερομηνία* (*Julian day - JD*) η οποία έχει ως αρχή μέτρησης τη μέση μεσημβρία της 1^{ης} Ιανουαρίου του 4713 π.Χ. Ως αναφορά στις σύγχρονες παρατηρήσεις, μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν δεδομένο ότι το μεσημέρι της 1^{ης} Ιανουαρίου 2000 ήταν $JD = 2451545.0$.

Η ακρίβεια στην καταγραφή του χρόνου είναι κάτι το εξαιρετικά κρίσιμο στην αστρονομική παρατήρηση. Ιδιαίτερα ακριβής (καλύτερη από δευτερόλεπτο) θα πρέπει να είναι όταν η μελέτη αποσκοπεί στην ανεύρεση περιοδικοτήτων μικρής διάρκειας, καθώς και

αναπάσεις των αστέρων. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.8 η ίδια κίνηση της Γης επηρεάζει τον αληθνή χρόνο παρατήρησης λόγω της πεπερασμένης ταχύτητας του φωτός. Οπότε πρέπει να μετατραπεί η *Ιουλιανή Ημερομηνία* σε *Ηλιοκεντρική Ιουλιανή Ημερομηνία (HJD)*:



Εικόνα 2.8: Αριστερά: Η ανάγκη διόρθωσης του χρόνου από Γεωκεντρικό σε Ηλιοκεντρικό έγινε ώστε να εξαλειφθεί η διαφορά του χρόνου που προέκυπτε λόγω της περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο. Δεξιά: Το τρίγωνο Ήλιου – Γης – αστέρα και η γωνία u .

$$\text{HJD} = \text{JD} - \Delta t \quad (2.3)$$

Για να υπολογιστεί η διόρθωση Δt πρέπει να είναι γνωστές οι σχετικές θέσεις Γης-Ήλιου. Αναλυτικότερα ο Δρ. Κ. Γαζέας (Γαζέας Κ., 2002, "CCD φωτομετρία μεταβλητών αστέρων", Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, ΕΚΠΑ) την υπολόγισε από σφαιρική τριγωνομετρία σαν:

$$\Delta t = 0.00578 \cos u \text{ [days]} \quad (2.4)$$

όπου u η γωνία που σχηματίζει η νοητή ευθεία Γης-Ήλιου με την ευθεία Ήλιου-αστέρα και υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\cos u = \sin \delta \sin l_{\odot} \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \alpha \cos l_{\odot} + \cos \delta \sin \alpha \sin l_{\odot} \cos \varepsilon \quad (2.5)$$

όπου (α, δ) οι ουρανογραφικές συντεταγμένες του αστέρα (αλλιώς είναι γνωστές σαν RA και Dec), ε η κλίση του άξονα της Γης ($= 23.5^{\circ}$) και l_{\odot} το ηλιογραφικό μήκος το οποίο δίνεται από την σχέση:

$$l_{\odot} = L + (1.915^{\circ} - 0.0048^{\circ} T) \sin M + 0.020^{\circ} \sin 2M \quad (2.6)$$

όπου L, M το ηλιογραφικό μήκος και πλάτος σε εκλειπτικές συντεταγμένες αντίστοιχα και προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$L = 280.46^{\circ} + 36000.722^{\circ} T \quad (2.7)$$

$$M = 357.528^{\circ} + 35999.050^{\circ} T \quad (2.8)$$

Τέλος, T ο Ιουλιανός αιώνας ορίζεται σαν:

$$T = \frac{\text{JD} - 2451545}{36525} \quad (2.9)$$

Κεφάλαιο 3

Φωτομετρική ανάλυση

3.1 Υπολογισμός χρόνων ελαχίστων

Οι παρατηρήσεις έγιναν τις ημερομηνίες 16, 17, 19 και 20 του Σεπτεμβρίου του 2002 και αντίστοιχα στις 23, 24, 25, 26 και 27 του Ιουλίου του 2005 στα τέσσερα φίλτρα B, V, R, I. Οι παρατηρήσεις π.χ. της 24/7/05 φαίνονται στον Πίνακα 3.1. Η πρώτη στήλη αναφέρεται στον αριθμό της φωτογραφίας, οι δύο επόμενες αναφέρονται στην ημερομηνία και στην ώρα, στην τέταρτη στήλη δίνεται η ημερομηνία σε Julian day, στην επόμενη αναφέρεται η τιμή του ολοκληρώματος (βλ. § 2.2.1) και στην έκτη στήλη το φίλτρο της συγκεκριμένης παρατήρησης. Οι επόμενες τρεις στήλες αποτελούν τα μεγέθη των αστέρων: με V_Mag το μέγεθος του μεταβλητού αστέρα, C1 ο πρώτος αστέρας σύγκρισης και C2 ο δεύτερος αστέρας σύγκρισης αντίστοιχα.

Πίνακας 3.1: Οι πρώτες 20 φωτογραφίες στο B φίλτρο για την ημερομηνία 24/07/2005.

Seq.#	YYYY-MM-DD	HH:MM:SS.sss	Julian_Day	Integr	Filt	V_Mag ± Sigma	C1 ± Sigma	C2 ± Sigma
00001	2005-07-24	20:02:43.000	2453576.33522	60.00	B	18.136 ± 0.0108	17.376 ± 0.0062	18.448 ± 0.0139
00002	2005-07-24	20:04:17.000	2453576.33631	60.00	B	18.144 ± 0.0111	17.371 ± 0.0062	18.423 ± 0.0138
00003	2005-07-24	20:07:16.000	2453576.33838	60.00	B	18.123 ± 0.0106	17.332 ± 0.0060	18.409 ± 0.0132
00004	2005-07-24	20:10:15.000	2453576.34045	60.00	B	18.087 ± 0.0105	17.308 ± 0.0059	18.385 ± 0.0133
00005	2005-07-24	20:13:13.000	2453576.34251	60.00	B	18.081 ± 0.0104	17.303 ± 0.0059	18.383 ± 0.0133
00006	2005-07-24	20:16:13.000	2453576.34459	60.00	B	18.091 ± 0.0103	17.287 ± 0.0059	18.353 ± 0.0129
00007	2005-07-24	20:19:12.000	2453576.34667	60.00	B	18.078 ± 0.0105	17.259 ± 0.0058	18.351 ± 0.0129
00008	2005-07-24	20:22:10.000	2453576.34873	60.00	B	18.053 ± 0.0102	17.225 ± 0.0056	18.319 ± 0.0126
00009	2005-07-24	20:25:08.000	2453576.35079	60.00	B	18.037 ± 0.0099	17.205 ± 0.0056	18.293 ± 0.0122
00010	2005-07-24	20:28:06.000	2453576.35285	60.00	B	18.031 ± 0.0102	17.201 ± 0.0054	18.268 ± 0.0123
00011	2005-07-24	20:31:04.000	2453576.35491	60.00	B	18.009 ± 0.0100	17.162 ± 0.0054	18.244 ± 0.0119
00012	2005-07-24	20:34:02.000	2453576.35697	60.00	B	18.015 ± 0.0102	17.155 ± 0.0054	18.240 ± 0.0121
00013	2005-07-24	20:37:00.000	2453576.35903	60.00	B	18.006 ± 0.0099	17.138 ± 0.0054	18.225 ± 0.0119
00014	2005-07-24	20:39:59.000	2453576.36110	60.00	B	17.996 ± 0.0099	17.112 ± 0.0053	18.206 ± 0.0116
00015	2005-07-24	20:42:58.000	2453576.36317	60.00	B	18.004 ± 0.0102	17.093 ± 0.0052	18.172 ± 0.0114
00016	2005-07-24	20:45:57.000	2453576.36524	60.00	B	17.990 ± 0.0100	17.082 ± 0.0052	18.165 ± 0.0115
00017	2005-07-24	20:48:55.000	2453576.36730	60.00	B	17.988 ± 0.0100	17.056 ± 0.0051	18.156 ± 0.0115
00018	2005-07-24	20:51:54.000	2453576.36938	60.00	B	18.010 ± 0.0103	17.056 ± 0.0051	18.147 ± 0.0115
00019	2005-07-24	20:54:53.000	2453576.37145	60.00	B	18.026 ± 0.0104	17.042 ± 0.0050	18.142 ± 0.0115
00020	2005-07-24	20:57:45.000	2453576.37344	60.00	B	18.020 ± 0.0106	17.031 ± 0.0050	18.146 ± 0.0117

Το επόμενο βήμα ήταν η μετατροπή της Ιουλιανής Ημερομηνίας σε Ηλιοκεντρική Ιουλιανή Ημερομηνία μέσα από τις Σχέσεις 2.3 - 2.9. Ακόμα προστέθηκαν δύο νέες

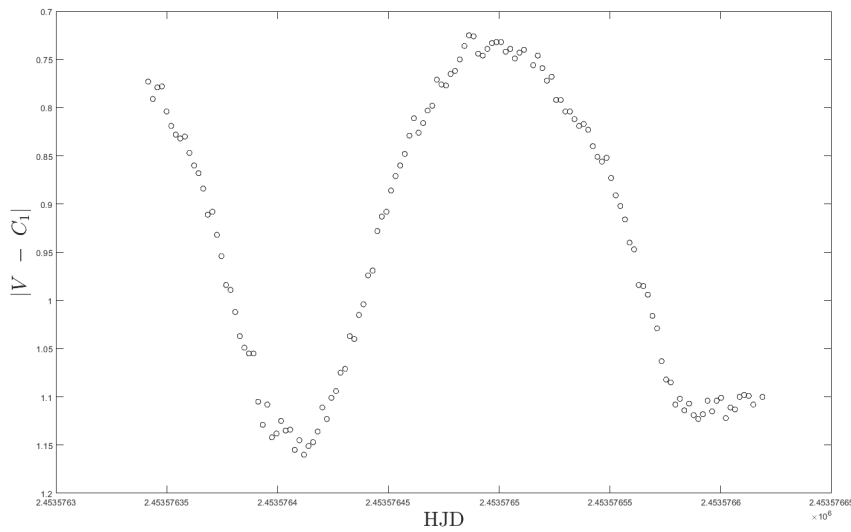
Πίνακας 3.2: Οι τρεις τελικές στήλες για τις πρώτες 20 φωτογραφίες της 24/07/2005. Η στήλη του $|C2 - C1|$ θα πρέπει να είναι σταθερή ευθεία με πολύ καλή συσχέτιση.

HJD	$ V - C1 $	$ C1 - C2 $
2453576.34054	0.76	1.072
2453576.34163	0.773	1.052
2453576.34370	0.791	1.077
2453576.34577	0.779	1.077
2453576.34783	0.778	1.08
2453576.34991	0.804	1.066
2453576.35199	0.819	1.092
2453576.35405	0.828	1.094
2453576.35611	0.832	1.088
2453576.35817	0.83	1.067
2453576.36023	0.847	1.082
2453576.36229	0.86	1.085
2453576.36435	0.868	1.087
2453576.36642	0.884	1.094
2453576.36849	0.911	1.079
2453576.37056	0.908	1.083
2453576.37262	0.932	1.1
2453576.37470	0.954	1.091
2453576.37677	0.984	1.1
2453576.37876	0.989	1.115

στήλες δεδομένων. Η πρώτη αναφέρεται στην τιμή $|C2 - C1|$ και δείχνει κατά πόσο είναι σταθερός ο αστέρας σύγκρισης C1. Αν η διαφορά αυτή παραμένει περίπου σταθερή (μέσα στα όρια του σφάλματος) τότε ο αστέρας C1 μπορεί να θεωρηθεί σταθερός. Έτσι είναι δυνατόν να κατασκευαστεί και η δεύτερη στήλη $|V - C1|$ στην οποία φαίνεται η μεταβλητότητα του αστέρα V (Πίνακας 3.2).

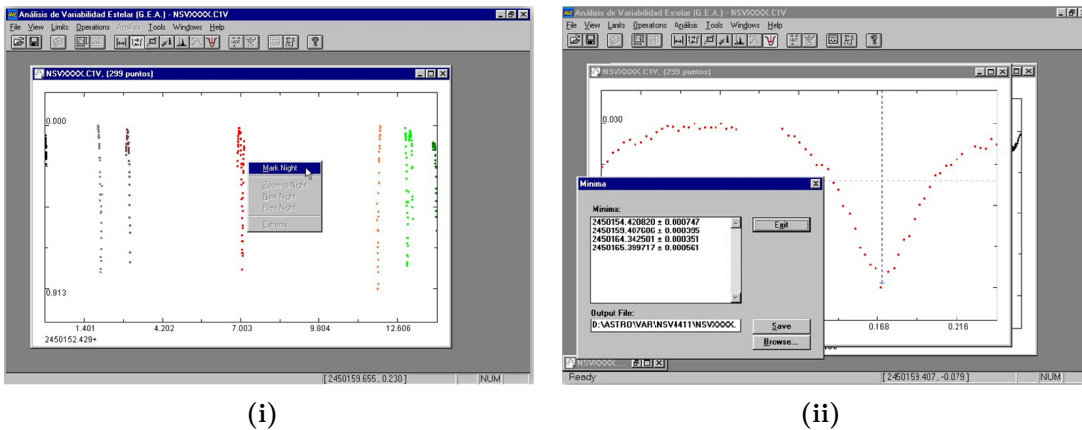
Αφού έγιναν τα παραπάνω σε όλες τις παρατηρήσεις για όλα τα φίλτρα, κατασκευαστεί η καμπύλη φωτός για τον μεταβλητό αστέρα. Η καμπύλη φωτός π.χ. για τη συγκεκριμένη ημέρα στο B φίλτρο φαίνεται στην Εικόνα 3.1. Από τις καμπύλες φωτός της κάθε παρατήρησης στο αντίστοιχο φίλτρο είναι δυνατόν να προσδιοριστούν οι χρόνοι ελαχίστων, δηλαδή οι χρονικές στιγμές που συμβαίνει ελάχιστο.

Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε ήταν το πρόγραμμα AVE. Δημιουργήθηκε από τον Rafael Barbera για την εξυπηρέτηση ενός προγράμματος της GEA (Grup d'Estudis Astronomics). Η μέθοδος που χρησιμοποιεί για τον προσδιορισμό ελαχίστων είναι η μέθοδος Kwee & van Woerden (Kwee & van Woerden, 1956).



Εικόνα 3.1: Κατά την αρχή της νύχτας συμβαίνει το πρωτεύον ελάχιστο και τις πρώτες πρωινές ώρες το δευτερεύον ελάχιστο. Ο άξονας y είναι ανεστραμμένος ώστε να φαίνονται καλύτερα τα ελάχιστα τα οποία συμβαίνουν όταν η διαφορά $V - C1$ είναι μέγιστη (δηλαδή το y να πάρει μεγάλες τιμές).

Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο βήμα είναι να φορτωθούν οι παρατηρήσεις ξεχωριστά για κάθε φίλτρο (Εικόνα 3.2i). Έπειτα επιλέγεται-μαρκάρεται η κάθε νύχτα όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.2ii. Το πρόγραμμα προσαρμόζει συνάρτηση (π.χ. παραβολή ή ημίτονο) στο ελάχιστο και καταλήγει στο χρόνο που γίνεται η έκλειψη, δηλαδή το ακρότατο της συνάρτησης.



(i)

(ii)

Εικόνα 3.2: Το περιβάλλον του προγράμματος AVE (<http://astrogea.org/soft/ave/aveint.htm>).

Αποτέλεσμα οι παρατηρήσεις να οδηγούν στους χρόνους ελαχίστων (σε HJD) για κάθε φίλτρο που φαίνονται στον Πίνακα 3.3.

Πίνακας 3.3: Οι συνολικά 10 χρόνοι ελαχίστων για τις παρατηρήσεις του 2002 και 2005 στα BVRI φίλτρα (σε HJD). Έχουν γίνει τρεις μετρήσεις για το κάθε ελάχιστο στο κάθε φίλτρο ώστε να βγει ένας μέσος όρος. Παρατηρείται επίσης ότι οι χρόνοι με διαφορετικά φίλτρα είναι αρκετά κοντά, κάτι που είναι απόλυτα λογικό αφού αφορούν την ίδια έκλειψη.

B-filter	V-filter	R-filter	I-filter
2452534.29108 ± 0.00046	2452534.29125 ± 0.00020	2452534.29079 ± 0.00067	2452534.29067 ± 0.00022
2452534.29105 ± 0.00036	2452534.29123 ± 0.00077	2452534.29079 ± 0.00069	2452534.29068 ± 0.00018
2452534.29067 ± 0.00041	2452534.29191 ± 0.00055	2452534.29080 ± 0.00071	2452534.29048 ± 0.00036
2452534.47806 ± 0.00085	2452534.47764 ± 0.00077	2452534.47786 ± 0.00043	2452534.47694 ± 0.00043
2452534.47813 ± 0.00087	2452534.47752 ± 0.00051	2452534.47771 ± 0.00051	2452534.47724 ± 0.00059
2452534.47817 ± 0.00087	2452534.47747 ± 0.00056	2452534.47772 ± 0.00050	2452534.47704 ± 0.00036
2452535.41339 ± 0.00072	2452535.41407 ± 0.00114	2452535.41495 ± 0.00047	2452535.41355 ± 0.00063
2452535.41343 ± 0.00069	2452535.41432 ± 0.00073	2452535.41500 ± 0.00044	2452535.41395 ± 0.00047
2452535.41340 ± 0.00074	2452535.41426 ± 0.00070	2452535.41502 ± 0.00043	2452535.41369 ± 0.00059
2452537.28486 ± 0.00070	2452537.28705 ± 0.00032	2452537.28591 ± 0.00041	2452537.28612 ± 0.00020
2452537.28487 ± 0.00102	2452537.28694 ± 0.00032	2452537.28589 ± 0.00037	2452537.28610 ± 0.00021
2452537.28484 ± 0.00075	2452537.28707 ± 0.00028	2452537.28593 ± 0.00047	2452537.28615 ± 0.00028
2453576.40894 ± 0.00023	2453576.40845 ± 0.00070	2453576.40885 ± 0.00027	2453576.40912 ± 0.00024
2453576.40891 ± 0.00023	2453576.40837 ± 0.00059	2453576.40892 ± 0.00027	2453576.40906 ± 0.00026
2453576.40896 ± 0.00027	2453576.40856 ± 0.00053	2453576.40886 ± 0.00022	2453576.409215 ± 0.00025
2453577.34716 ± 0.00038	2453577.34735 ± 0.00046	2453577.34687 ± 0.00027	2453577.34694 ± 0.00049
2453577.34698 ± 0.00034	2453577.34704 ± 0.00048	2453577.34690 ± 0.00035	2453577.346867 ± 0.00045
2453577.34716 ± 0.00039	2453577.34684 ± 0.00044	2453577.34680 ± 0.00026	2453577.346867 ± 0.00045
2453577.53168 ± 0.00021	2453577.53230 ± 0.00020	2453577.53220 ± 0.00037	2453577.53213 ± 0.00025
2453577.53166 ± 0.00021	2453577.53229 ± 0.00021	2453577.53221 ± 0.00038	2453577.532128 ± 0.00026
2453577.53167 ± 0.00022	2453577.53227 ± 0.00021	2453577.53213 ± 0.00035	2453577.532066 ± 0.00026
2453578.47005 ± 0.00023	2453578.47013 ± 0.00015	2453578.47051 ± 0.00024	2453578.47036 ± 0.00032
2453578.47010 ± 0.00022	2453578.47013 ± 0.00015	2453578.47055 ± 0.00023	2453578.470258 ± 0.00029
2453578.47006 ± 0.00024	2453578.47012 ± 0.00022	2453578.47054 ± 0.00023	2453578.47028 ± 0.00032
2453579.40473 ± 0.00019	2453579.40479 ± 0.00018	2453579.40572 ± 0.00026	2453579.40475 ± 0.00028
2453579.40473 ± 0.00019	2453579.40485 ± 0.00018	2453579.40579 ± 0.00026	2453579.40489 ± 0.00028
2453579.40475 ± 0.00021	2453579.40480 ± 0.00018	2453579.40577 ± 0.00026	2453579.40479 ± 0.00031
2453579.59202 ± 0.00079	2453579.59312 ± 0.00035	2453579.59190 ± 0.00132	2453579.59195 ± 0.00061
2453579.59241 ± 0.00057	2453579.59310 ± 0.00028	2453579.59144 ± 0.00081	2453579.59195 ± 0.00059
2453579.59241 ± 0.00064	2453579.59365 ± 0.00028	2453579.59204 ± 0.00065	2453579.59188 ± 0.00056

Τελικά προκύπτουν οι χρόνοι ελαχίστων για τις παρατηρήσεις από τον μέσο όρο των τεσσάρων φίλτρων που φαίνονται στον Πίνακα 3.4.

Πίνακας 3.4: Ο τελικός πίνακας με τους νέους χρόνους ελαχίστων για το σύστημα HV Aqr.

HJD	Σφάλμα	Φίλτρο	Τύπος ελαχίστου
2452534.2910	0.0005	B, V, R, I	Δευτερεύον
2452534.4776	0.0006	B, V, R, I	Πρωτεύον
2452535.4141	0.0006	B, V, R, I	Δευτερεύον
2452537.2860	0.0004	B, V, R, I	Δευτερεύον
2453576.4089	0.0003	B, V, R, I	Πρωτεύον
2453577.3470	0.0004	B, V, R, I	Δευτερεύον
2453577.5321	0.0003	B, V, R, I	Πρωτεύον
2453578.4703	0.0002	B, V, R, I	Δευτερεύον
2453579.4050	0.0002	B, V, R, I	Πρωτεύον
2453579.5923	0.0006	B, V, R, I	Δευτερεύον

3.2 Αστρονομική εφημερίδα

Ένα από τα πιο βασικά στοιχεία ενός μεταβλητού αστέρα είναι η αστρονομική εφημερίδα. Ουσιαστικά υπολογίζει τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες ο αστέρας παρουσιάζει κάποιο ιδιάζον φαινόμενο. Για τα εκλειπτικά συστήματα έχει καθιερωθεί σαν ορόσημο η χρονική στιγμή ενός πρωτεύοντος ελαχίστου. Αποτελεί δηλαδή την ταυτότητα του συστήματος. Η γενική μαθηματική σχέση η οποία δίνει την αστρονομική εφημερίδα είναι:

$$T = T_0 + P \cdot E \quad [\text{days}] \quad (3.1)$$

όπου T η χρονική στιγμή κάποιας παρατήρησης, T_0 ένας χρόνος πρωτεύοντος ελαχίστου, P η περίοδος του συστήματος εκφρασμένη σε Days και E ένας ακέραιος αριθμός (≥ 1), ο οποίος εκφράζει τους κύκλους περιοδικότητας της μεταβολής και καλείται «τροχιακός κύκλος».

Οι αστρονομικές εφημερίδες προκύπτουν από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων από πληθώρα χρόνων ελαχίστων οι οποίοι έχουν καταγραφεί, αφού η Σχέση 3.1 έχει την μορφή ευθείας με σταθερό τον χρόνο T_0 και κλίση την περίοδο P . Επομένως, εάν υπολογιστούν αυτές οι δύο παράμετροι μπορεί να προβλεφθεί κάθε μελλοντική χρονική στιγμή έκλειψης.

Για τον υπολογισμό της αστρονομικής εφημερίδας του συστήματος HV Aqr χρησιμοποιήθηκαν ελάχιστα και από δημοσιεύσεις από το 2002 μέχρι και το 2012 που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1. Η επιλογή του διαστήματος 2002 - 2012 δεν ήταν τυχαία αλλά επιλέχτηκαν χρόνοι κοντά στις παρατηρήσεις που έγιναν για το πλαίσιο της εργασίας (2002 και 2005 αντίστοιχα), ώστε το διάγραμμα φάσης να αναφέρεται στις παρατηρήσεις αυτές. Σαν T_0 χρησιμοποιήθηκε το πρώτο πρωτεύον ελάχιστο από τις

παρατηρήσεις του 2005 δηλαδή $T_0 = 2453576.4089$ days, ενώ για την περίοδο χρησιμοποιήθηκε η τιμή $P = 0.3744572$ days η οποία υπάρχει από παλιότερη φωτομετρική ανάλυση. Από τη Σχέση 3.5 υπολογίζεται το E και μπορεί να στρογγυλοποιηθεί σε E_{corr} αφού αναφέρεται σε ελάχιστο. Το E_{corr} θα αναφέρεται είτε σε πρωτεύον ελάχιστο οπότε αντιστοιχεί σε ακέραιο αριθμό κύκλων (δεκαδικό μέρος ~ 0), είτε αντιστοιχεί σε δευτερεύον ελάχιστο οπότε έχει συμπληρώσει ακέραιο αριθμό κύκλων συν άλλον μισό κύκλο (δεκαδικό μέρος ~ 0.5).

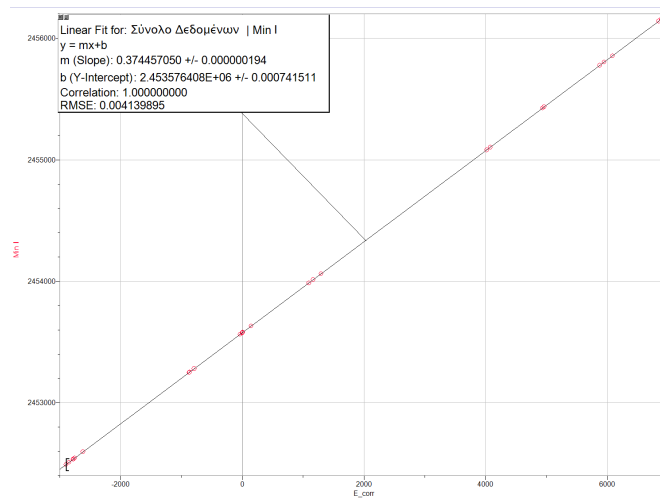
Πίνακας 3.5: Οι χρόνοι ελαχίστων που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό της αστρονομικής εφημερίδας. Η στήλη Min I αποτελεί την στήλη με τους χρόνους ελαχίστων ενώ το πρωτεύον ελάχιστο συμβολίζεται με τον αριθμό 0 και αντίστοιχα το δευτερεύον με την τιμή 0.5.

Min I [HJD]	E	E_{corr}	Τύπος ελαχίστου	Φίλτρο	Δημοσίευση
2452491.4263 ± 0.0001	-2897.48081	-2897.5	0.5	B, V	Tanriverdi T. et al., 2003, IBVS, 5407, 1
2452510.5124 ± 0.0004	-2846.51076	-2846.5	0.5	R	Sarounova L., Wolf M., 2005, IBVS, 5594, 1
2452534.2909 ± 0.0005	-2783.00938	-2783	0	B, V, R, I	Παρούσα Εργασία
2452534.4776 ± 0.0006	-2782.51086	-2782.5	0.5	B, V, R, I	Παρούσα Εργασία
2452535.4141 ± 0.0006	-2780.01001	-2780	0	B, V, R, I	Παρούσα Εργασία
2452537.2860 ± 0.0004	-2775.01106	-2775	0	B, V, R, I	Παρούσα Εργασία
2452545.3387 ± 0.0003	-2753.50601	-2753.5	0.5	B, V	Tanriverdi T. et al., 2003, IBVS, 5407, 1
2452596.2606 ± 0.0003	-2617.51744	-2617.5	0.5	B, V	Tanriverdi T. et al., 2003, IBVS, 5407, 1
2453250.6336	-869.99329	-870	0	ccd	Ogloza W. et al., 2007, IBVS, 5843, 1
2453251.3796 ± 0.0005	-868.00107	-868	0	U, B, V	Aksu O. et al., 2005, IBVS, 5588, 1
2453280.5840	-790.00978	-790	0	ccd	Ogloza W. et al., 2007, IBVS, 5843, 1
2453562.9286 ± 0.0002	-35.99944	-36	0	ccd	Krajci T., 2006, IBVS, 5690, 1
2453575.4741 ± 0.0007	-2.49628	-2.5	0.5	B, V, R, I	Petropoulou M., Gazeas K., Thouganatos L., Karampotsiou E., 2015, IBVS, 6153, 1
2453576.4089 ± 0.0003	0.00000	0	0	B, V, R, I	Παρούσα Εργασία
2453576.5953 ± 0.0005	0.49792	0.5	0.5	B, V, R, I	Petropoulou M., Gazeas K., Thouganatos L., Karampotsiou E., 2015, IBVS, 6153, 1
2453577.3470 ± 0.0004	2.50531	2.5	0.5	B, V, R, I	Παρούσα Εργασία
2453577.5321 ± 0.0003	2.99957	3	0	B, V, R, I	Παρούσα Εργασία
2453578.4703 ± 0.0002	5.50505	5.5	0.5	B, V, R, I	Παρούσα Εργασία
2453579.4050 ± 0.0002	8.00139	8	0	B, V, R, I	Παρούσα Εργασία
2453579.5923 ± 0.0006	8.50156	8.5	0.5	B, V, R, I	Παρούσα Εργασία
2453631.6426 ± 0.0001	147.50351	147.5	0.5	ccd	Dvorak S.W., 2006, IBVS, 5677, 1
2453986.6397	1095.53468	1095.5	0.5	ccd	Ogloza W. et al., 2007, IBVS, 5843, 1
2454012.6534 ± 0.0003	1165.00511	1165	0	ccd	Krajci T., 2007, IBVS, 5806, 1
2454060.9594	1294.00783	1294	0	Ic	Nakajima K., 2007, VSOLJ, 45, 1
2455080.9770	4017.99765	4018	0	Rc	Nakajima K., 2010, VSOLJ, 50, 1
2455102.6932	4075.99146	4076	0	V	Diethelm R., 2010, IBVS, 5920, 1
2455426.0393	4939.49762	4939.5	0.5	Rc	Kazuo N., 2011, VSOLJ, 51, 1
2455435.0242	4963.49209	4963.5	0.5	Rc	Kazuo N., 2011, VSOLJ, 51, 1
2455776.5289 ± 0.0004	5875.49138	5875.5	0.5	ccd	Masek M. et al., 2013, BRNO, 38, 14
2455805.3636 ± 0.0002	5952.49537	5952.5	0.5	-U-I	Hubsercher J., Lehmann P., 2012, IBVS, 6026, 1
2455855.7243 ± 0.0004	6086.98524	6087	0	ccd	Diethelm R., 2012, IBVS, 6011, 1
2456141.0595	6848.98194	6849	0	V, Ic	Kazuo N., 2013, VSOLJ, 55, 1-2
2456156.0393	6888.98620	6889	0	cB, cG, cR	Kazuo N., 2013, VSOLJ, 55, 1-2
2456156.4275	6890.02293	6890	0	ccd	Raetz M
2456167.0874	6918.49042	6918.5	0.5	V	Kazuo N., 2013, VSOLJ, 55, 1-2
2456168.0232	6920.98950	6921	0	V	Kazuo N., 2013, VSOLJ, 55, 1-2
2456180.9432	6955.49278	6955.5	0.5	V	Kazuo N., 2013, VSOLJ, 55, 1-2

Όπως αναφέρθηκε, η αστρονομική εφημερίδα προκύπτει από την γραφική παράσταση του $\text{Min I}(E_{corr})$ με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για τον προσδιορισμό της ευθείας προσαρμογής. Από την ευθεία της μορφής $y = mx + b$, η κλίση θα αποτελεί την περίοδο ($m = P$) και η σταθερά b θα αποτελεί το T_0 (Εικόνα 3.3). Έτσι η τελική αστρονομική εφημερίδα για το σύστημα HV Aqr θα είναι:

$$\text{Min I} = 2453576.4083(7) + 0^d.37445705(19) \cdot E \quad [\text{days}] \quad (3.2)$$

Το σύστημα πραγματοποιεί μία πλήρη περιστροφή σε 0.37445705 days. Δηλαδή σε 8 ώρες, 59 λεπτά και 13.089 δευτερόλεπτα, μία αρκετά μικρή περίοδο. Ακόμα είναι εμφανές



Εικόνα 3.3: Η γραφική παράσταση $\text{Min } I(E_{\text{corr}})$ με την βοήθεια του προγράμματος *Logger Pro*. Φαίνεται και η καμπύλη προσαρμογής μαζί με την εξίσωσή της.

ότι βελτιώθηκε αρκετά η ακρίβεια στην τιμή του P . Η αρχική τιμή (0.3744572 days), που χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά για να βρεθούν τα E_{corr} , «μετατράπηκε» σε μία τιμή με 8 δεκαδικά ψηφία.

3.3 Διάγραμμα φάσης

Το διάγραμμα φάσης ενός δι' εκλείψεων μεταβλητού αστέρα μας πληροφορεί για τη γεωμετρική θέση των αστερών του συστήματος σε σχέση με την οπτική ευθεία παρατήρησης για κάθε χρονική στιγμή της περιόδου τους. Ο όρος φάση, υπεισέρχεται για να αντικαταστήσει τη χρονική εξάρτηση από την HJD με τη γωνία που σχηματίζεται από την ευθεία που συνδέει τα κέντρα των αστερών και την οπτική ευθεία παρατήρησης (φ). Η στιγμή του πρωτεύοντος ελαχίστου, όπου αυτές οι δύο νοητές ευθείες ταυτίζονται, ορίζεται ως αρχή μέτρησης της περιφοράς του συστήματος δηλαδή $\varphi = 0$. Προφανώς, μετά από μια πλήρη περιφορά του συστήματος γύρω από το κέντρο μάζας η γωνία αυτή θα έχει γίνει ίση με 2π και θα βρίσκεται ξανά στο μηδενικό σημείο. Από τη Σχέση 3.1 προκύπτει:

$$\varphi = \frac{T - T_0}{P} - \text{INTEGER} \left(\frac{T - T_0}{P} \right) \quad (3.3)$$

Συνήθως χρησιμοποιείται η κανονικοποιημένη φάση ή απλά φάση, δηλαδή $\varphi/2\pi$ με αποτέλεσμα $\varphi \in [0, 1]$.

Η Σχέση 3.2 δίνει για κάθε παρατήρηση (T) τη φάση που βρίσκεται το σύστημα. Το επόμενο βήμα είναι η μετατροπή των διαφορών στα μεγέθη που παρατηρήθηκαν (δηλαδή όλα τα $|V - C_1|$) σε κανονικοποιημένη ροή ακτινοβολίας F . Από τον νόμο του Pogson για

m_1, m_2 τα φαινόμενα μεγέθη δύο αστέρων και F_1, F_2 οι αντίστοιχες ροές ακτινοβολίας:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{F_1}{F_2} \Leftrightarrow \frac{F_1}{F_2} = 10^{0.4(m_2 - m_1)} \Leftrightarrow$$

$$F = 10^{0.4(\Delta m_{\max} - \Delta m)} \quad (3.4)$$

Στην περίπτωση του συστήματος που μελετάται, το m_2 είναι η ελάχιστη διαφορά $|V - C_1|$ που αντιστοιχεί σε μέγιστη ροή $F_2 = 1$ ενώ το m_1 που αντιστοιχεί σε ροή F είναι για τυχαία φάση το μέγεθος $|V - C_1|$. Η τιμή Δm_{\max} προκύπτει από το μη κανονικοποιημένο διάγραμμα φάσης, με επιλογή τιμών στο μέγιστο ($\varphi \sim 0.25$) και εξαγωγή μέσου όρου.

Για την εξαγωγή διαγράμματος φάσης χρησιμοποιήθηκαν μόνο οι παρατηρήσεις του 2005, μιας και είχαν πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια ¹. Έτσι από τις Σχέσεις 3.3, 3.4 προκύπτουν οι τιμές $F(\varphi)$. Για παράδειγμα στον Πίνακα 3.6 παρουσιάζονται οι πρώτες 15 τιμές για το B φίλτρο. Συνολικά για τα διαγράμματα φάσης χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω τιμές

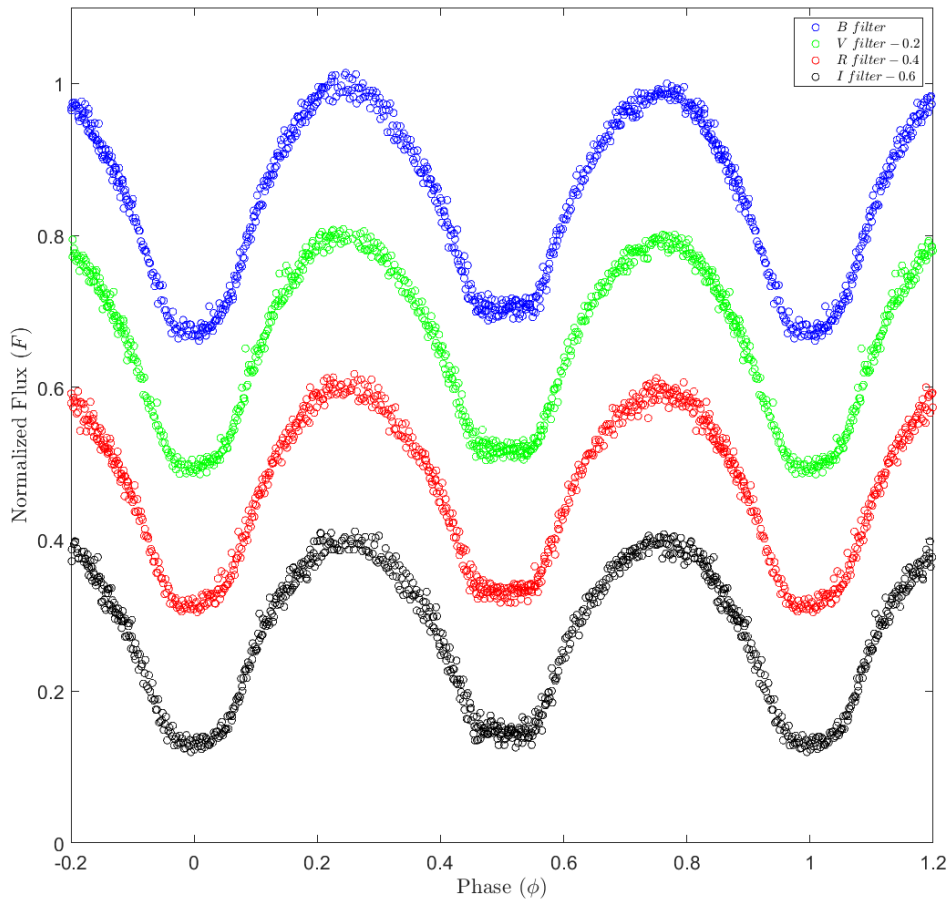
Πίνακας 3.6: Οι 15 χρονολογικά πρώτες παρατηρήσεις του 2005 για το B φίλτρο μαζί με τα αντίστοιχα σφάλματα. Το Δm_{\max} για το συγκεκριμένο φίλτρο είχε την τιμή 0.720 mag.

HJD	$\varphi \pm d\varphi$	Δm [mag]	$F \pm dF$
2453575.45707	0.460 ± 0.002	1.105	0.701 ± 0.005
2453575.45953	0.466 ± 0.002	1.103	0.703 ± 0.003
2453575.46160	0.472 ± 0.002	1.107	0.700 ± 0.003
2453575.46366	0.477 ± 0.002	1.095	0.708 ± 0.003
2453575.46572	0.483 ± 0.002	1.097	0.707 ± 0.003
2453575.46778	0.488 ± 0.002	1.105	0.701 ± 0.003
2453575.46985	0.494 ± 0.002	1.118	0.693 ± 0.003
2453575.47192	0.499 ± 0.002	1.105	0.701 ± 0.003
2453575.47399	0.505 ± 0.002	1.102	0.703 ± 0.003
2453575.47606	0.510 ± 0.002	1.097	0.707 ± 0.003
2453575.47812	0.516 ± 0.002	1.088	0.713 ± 0.003
2453575.48018	0.521 ± 0.002	1.084	0.715 ± 0.003
2453575.48226	0.527 ± 0.002	1.093	0.709 ± 0.003
2453575.48432	0.533 ± 0.002	1.089	0.712 ± 0.003
2453575.48639	0.538 ± 0.002	1.097	0.707 ± 0.003

για το Δm_{\max} ανάλογα το φίλτρο ². Για το B φίλτρο $\Delta m_{\max} = 0.720$ mag, για το V φίλτρο $\Delta m_{\max} = 0.663$ mag, για το R φίλτρο $\Delta m_{\max} = 0.600$ mag και για το I φίλτρο $\Delta m_{\max} = 0.545$ mag. Το διάγραμμα φάσης για τα τέσσερα φίλτρα φαίνεται στην Εικόνα 3.4.

¹ Παρατηρήθηκαν μεγάλες αποκλίσεις στις παρατηρήσεις του 2002, κυρίως λόγω ότι χρησιμοποιήθηκε πιο παλιά CCD κάμερα.

² Έγινε επιλογή αρκετών τιμών στο πρωτεύον μέγιστο ($\varphi \sim 0.25$) και βρέθηκε μέση τιμή.



Εικόνα 3.4: Το διάγραμμα φάσης του συστήματος HV Aqr. Τα V, R, I φίλτρα έχουν υποστεί κατακόρυφη μετατόπιση ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη.

Σε κάθε φίλτρο παρατηρείται διαφορετικό βάθος στα ελάχιστα, κάτι που αναμενόταν μιας και το διπλό αστρικό σύστημα ακτινοβολεί εν γέννη με διαφορετική ένταση στο κάθε μήκος κύματος. Το γεγονός αυτό θα δώσει πληροφορίες για την διαφορά στην θερμοκρασία μεταξύ των δύο αστερών που απαρτίζουν το σύστημα. Συγκεκριμένα, τα πιο θερμά σώματα ακτινοβολούν περισσότερο σε μικρό μήκος κύματος (B φίλτρο), ενώ τα πιο ψυχρά σώματα ακτινοβολούν σε μεγαλύτερο μήκος κύματος (υπέρυθρο - I φίλτρο).

Ακόμα, (κυρίως στο B φίλτρο) φαίνεται το δευτερεύον μέγιστο να μην είναι στο ίδιο επίπεδο με το πρωτεύον (κάτι που συμβαίνει στα συστήματα σε επαφή), αλλά ελάχιστα πιο χαμηλά. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται O'Connell effect και υποδεικνύει την ύπαρξη ψυχρών κηλίδων δηλαδή περιοχές με χαμηλότερη θερμοκρασία από τον υπόλοιπο αστέρα ή/και μαγνητική δραστηριότητα. Παράλληλα υπάρχουν και άλλα φαινόμενα που

διαμορφώνουν το διάγραμμα φάσης.

Το φαινόμενο της ανάκλασης. Στα σε επαφή διπλά αστρικά συστήματα οι δύο αστέρες παρουσιάζουν το φαινόμενο της σύγχρονης περιστροφής, στρέφουν δηλαδή συνεχώς την ίδια πλευρά τους ο ένας στον άλλο (βλ. § 1.3.2). Αν οι δύο αστέρες εμφανίζουν και μια σημαντική διαφορά επιφανειακής θερμοκρασίας ($\geq 5000 \text{ K}$)¹, τότε η ακτινοβολία από το θερμότερο αστέρα θα υψώσει την τοπική θερμοκρασία του γειτονικού ημισφαιρίου του άλλου αστέρα που δέχεται την ενέργεια αυτή. Η ύψωση αυτή θα καταστήσει λαμπρότερη μια περιοχή με κέντρο το υποαστρικό σημείο του ψυχρότερου αστέρα. Στο HV Aq1 λόγω του ότι είναι ένα σύστημα σε υπερχειλίση, οι δύο αστέρες παρουσιάζουν σχεδόν ίδια θερμοκρασία και το φαινόμενο αυτό είναι αμελητέο.

Το φαινόμενο της αμαύρωσης χείλους (*limb darkening*). Η αμαύρωση χείλους οφείλεται στο ότι το φως που παρατηρείται από τις περιοχές της φωτόσφαιρας κοντά στο χείλος του αστρικού δίσκου, απορροφάτε και σκεδάζεται κατά τη διέλευσή του από την αστρική ατμόσφαιρα περισσότερο από ό,τι το φως που προέρχεται από τις κεντρικές περιοχές του δίσκου. Το αποτέλεσμα είναι ο δίσκος να φαίνεται λαμπρότερος στις κεντρικές του περιοχές και αμυδρότερος («αμαυρωμένος») κοντά στο χείλος του.

Το φαινόμενο της βαρυτικής αμαύρωσης (*gravity darkening*). Στην περίπτωση αστέρων που αποκλίνουν από το σφαιρικό σχήμα, η ροή ακτινοβολίας F που απελευθερώνεται από κάθε σημείο της επιφάνειας δεν είναι πλέον ανεξάρτητη από τη θέση του πάνω στην αστρική επιφάνεια, αλλά εξαρτάται από την τοπική επιτάχυνση της βαρύτητας. Προκύπτει ότι η ροή ακτινοβολίας που απελευθερώνεται από κάθε περιοχή της επιφάνειας ενός παραμορφωμένου εκ περιστροφής αστέρα, ο οποίος βρίσκεται σε ισορροπία ακτινοβολίας και σε υδροστατική ισορροπία, είναι ευθέως ανάλογη της τοπικής βαρύτητας g (H. von Zeipel, 1924, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 84).

3.4 Μοντέλο του συστήματος

Το διάγραμμα φάσης ενός διπλού συστήματος αστέρων είναι άρτια συνδεδεμένο με όλες τις παραμέτρους που το χαρακτηρίζουν. Έτσι με την υπόθεση ότι υπάρχει ένας μοναδικός συνδυασμός φυσικών παραμέτρων που μπορούν να αναπαράγουν την συγκεκριμένη καμπύλη, γίνεται προσαρμογή θεωρητικών καμπύλων στα παρατηρησιακά δεδομένα μέχρι να βρεθεί η καλύτερη δυνατή προσαρμογή που αντιστοιχεί στο ζευγάρι παραμέτρων του συστήματος. Οι θεωρητικές αυτές καμπύλες προκύπτουν από συναρτήσεις οι οποίες εμπεριέχουν έναν μεγάλο αριθμό παραμέτρων, μπορούν να καθοριστούν με βάση τα θεωρητικά μοντέλα και να περιγράψουν ποιοτικά και ποσοτικά τα παρατηρησιακά δεδομένα.

3.4.1 Αλγόριθμος μοντελοποίησης

Το επικρατέστερο μοντέλο περιγραφής διπλών εκλειπτικών συστημάτων αστέρων είναι ο κώδικας των Wilson-Devinney (W-D) (Wilson & Devinney 1971, Wilson 1990), ο οποίος βασίζεται στη γεωμετρία Roche και περιγράφεται συνοπτικά από τους Kallrath & Milone

¹Πράγμα δύσκολο στα συστήματα σε επαφή αλλά πολύ πιθανό στα σχεδόν σε επαφή συστήματα.

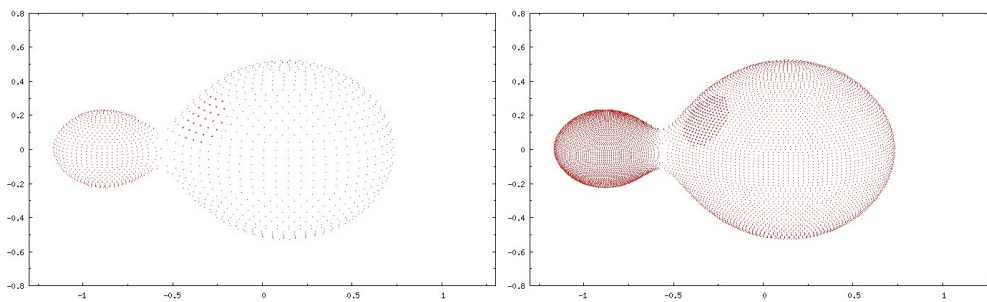
(1999). Ο κώδικας διατίθεται σε γραφικό περιβάλλον μέσω του λογισμικού PHOEBE¹ 0.31a (Prša & Zwitter 2005). Παρακάτω παρατίθενται τα βασικά χαρακτηριστικά του κώδικα W-D.

Ο κώδικας λαμβάνει υπόψη συστήματα με έκκεντρη τροχιά εκκεντρότητας e και μεγάλο ημιάξονα τροχιάς a . Η απόσταση μεταξύ των αστέρων d εξαρτάται από τη φάση ϕ . Η πιθανή ασύγχρονη περιστροφή των μελών υπεισέρχεται με τον παράγοντα συγχρονισμού F (λόγος γωνιακής ταχύτητας ιδιοπεριστροφής προς τη γωνιακή ταχύτητα περιφοράς γύρω από το κοινό κέντρο μάζας). Οι ισοδυναμικές επιφάνειες των αστέρων υπολογίζονται από τη γεωμετρία Roche ως εξής:

$$\Omega(r; q, F, d(\phi)) = \frac{1}{r} + q \left[\frac{1}{\sqrt{d^2 - 2d\lambda r + r^2}} - \frac{\lambda r}{d^2} \right] + \frac{q+1}{2} F^2 r^2 (1 - \nu^2) \quad (3.5)$$

όπου $q = M_2/M_1$ ο λόγος μαζών, λ, ν τα συνημίτονα κατεύθυνσης και $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}(\theta_i, \phi_j; q, F, \Omega, d)$ τα ακτινικά διανύσματα, τα οποία προσδιορίζονται για κάθε αστέρα-μέλος για συγκεκριμένες τιμές των θ και ϕ και καθιερώνουν ένα σύστημα επιφανειακών σημείων rs . Τα δυναμικά Ω_1 και Ω_2 μετρώνται στο σύστημα αναφοράς του πρωτεύοντα αστέρα.

Γενικά η λογική του προγράμματος μοντελοποίησης βασίζεται στην μαθηματική αναπαράσταση των αστέρων του ζεύγους και του φωτός που εκπέμπουν, με ένα πλέγμα επιφανειακών στοιχείων (πλέγμα) που προσδιορίζονται με την χρήση των ισοδυναμικών επιφανειών Roche από τη Σχέση 3.5 (Εικόνα 3.5). Η τιμή της ισοδυναμικής επιφάνειας Ω (όπου το βαρυτικό δυναμικό έχει σταθερή τιμή), μαζί με την τιμή του λόγου των μαζών περιγράφουν τη δομή της επιφάνειας ενός συστήματος που περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα και σε κυκλικές τροχιές. Για παράδειγμα ο Ήλιος, όπου αποτελεί μεμονωμένο αστέρα με μικρή ταχύτητα περιστροφής, θα έχει τη μορφή της ισοδυναμικής επιφάνειας η οποία θα είναι σφαίρα. Καθώς η τιμή της ισοδυναμικής επιφάνειας αυξάνει, το μέγεθος του αστέρα μικραίνει. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού το βαρυτικό δυναμικό αυξάνει καθώς πλησιάζει κανείς το κέντρο μάζας.

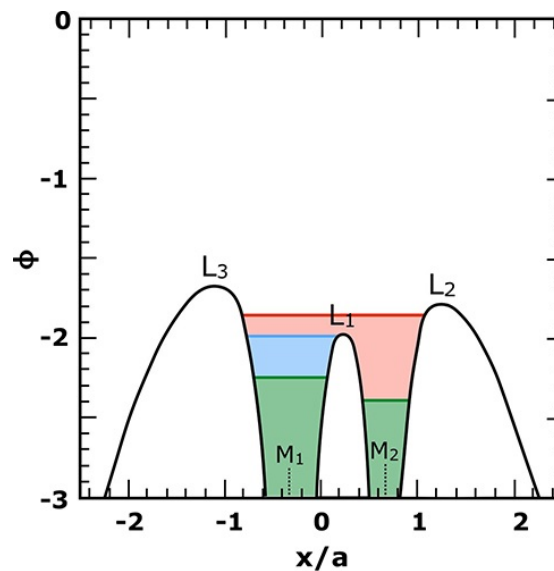


Εικόνα 3.5: Το 3D μοντέλο για το σύστημα HV Aqr σε $\phi = 0.25$ με την βοήθεια του προγράμματος PHOEBE για διαφορετικό αριθμό σημείων στο πλέγμα (διαφορετική ακρίβεια).

¹<http://phoebe-project.org/>

Σαν Ω_{inner} ορίζεται η τιμή του δυναμικού της εσωτερικής επιφάνειας Roche η οποία περνάει από το σημείο L_1 , το σημείο που οι αστέρες μόλις έρχονται σε επαφή (Εικόνα 1.9), ενώ σαν Ω_{outer} ορίζεται η τιμή του δυναμικού της εξωτερικής επιφάνειας Roche που περνά από το σημείο L_2 . Οι αστέρες με Ω_1, Ω_2 είναι αποχωρισμένοι εάν $\Omega_1, \Omega_2 < \Omega_{\text{inner}}$. Όταν ο ένας αστέρας γεμίσει τον λοβό του θα υπάρξει μεταφορά μάζας μέσα από το σημείο L_1 (ημιαποχωρισμένο σύστημα). Τότε η τιμή του Ω για τον συγκεκριμένο αστέρα θα γίνει ίση με Ω_{inner} ενώ για τον άλλον αστέρα παραμένει $< \Omega_{\text{in}}$. Όταν και ο δεύτερος αστέρας γεμίσει τον λοβό του (σε επαφή σύστημα) θα ισχύει $\Omega_1 = \Omega_2 \equiv \Omega = \Omega_{\text{inner}}$. Από εκεί και πέρα το Ω μπορεί να αυξάνει μέχρι την μέγιστη τιμή Ω_{outer} που το σύστημα θα αρχίσει να χάνει μάζα από το σημείο L_2 , δηλαδή θα «υπερχειλίσει». Η τελευταία κατηγορία (δηλαδή $\Omega > \Omega_{\text{inner}} \& \Omega < \Omega_{\text{outer}}$) συνήθως αναφέρεται σαν σύστημα σε υπερεπαφή (overcontact) (Εικόνα 3.6).

Για τα διπλά αστρικά συστήματα σε επαφή και σε υπερεπαφή ορίζεται ο **συντελεστής πληρότητας (fillout factor) f** σαν το μέγεθος που καθορίζει τις



Εικόνα 3.6: Το δυναμικό Roche για διπλό σύστημα αστέρων με λόγο μαζών $q = M_1/M_2 = 2$. Ο άξονας x έχει μονάδες του μεγάλου ημιάξονα a ενώ το δυναμικό Φ έχει μονάδες $G(M_1 + M_2)/a$. Φαίνεται η αντιστοιχία των κατηγοριών: στην πρώτη περίπτωση (πράσινο χρώμα) αποχωρισμένο σύστημα, οι δύο αστέρες δεν έχουν γεμίσει τον λοβό τους. Στην δεύτερη (μπλε χρώμα) ημιαποχωρισμένο σύστημα, ο αστέρας με μάζα M_1 έχει γεμίσει τον λοβό του και από εκεί και πέρα «πέφτει» μάζα στο πηγάδι του αστέρα M_2 . Αφού γεμίσει το «πηγάδι» του αστέρα 2 οι αστέρες γίνονται σύστημα σε επαφή. Ενώ τέλος από εκεί και πέρα μέχρι να φτάσει στο όριο του L_2 το σύστημα είναι overcontact (κόκκινο χρώμα).

Πηγή: *Principles of Close Binary Evolution (Chapter 28)*, Henny Lamers & Emily Levesque, 2017

ισοδυναμικές επιφάνειες και άρα το βαθμό πλήρωσης του λοβού Roche:

$$f = \frac{\Omega - \Omega_{\text{inner}}}{\Omega_{\text{outer}} - \Omega_{\text{inner}}} \quad (3.6)$$

Στα συστήματα επαφής θα ισχύει $f = 0$ ενώ αντίστοιχα σε συστήματα που έχουν γεμίσει οι λοβοί Roche θα ισχύει $f \in (0, 1]$. Συχνά ο συντελεστής πληρότητας εκφράζεται σε ποσοστιαίες μονάδες. Τέλος, μπορεί να γενικευτεί και σε αποχωρισμένα συστήματα παίρνοντας αρνητικές τιμές.

Στα διπλά αστρικά συστήματα η ολική ροή ακτινοβολίας J συναρτήσει της φάσης φ δίνεται σαν:

$$J(\phi) = J_1(\phi) + J_2(\phi) + J_3 \quad (3.7)$$

όπου δείκτες 1,2 αντιστοιχούν στον πρωτεύοντα και στον δευτερεύοντα αστέρα, ενώ ο δείκτης 3 αναφέρεται σε κάποιο τρίτο μέλος το οποίο συνεισφέρει στην συνολική ακτινοβολία ανεξάρτητα της φάσης (π.χ. ένας αστέρας που βρίσκεται πίσω από το διπλό σύστημα). Η ροή ακτινοβολίας (μονοχρωματική, μήκος κύματος λ) του συνοδού k που φεύγει από την επιφάνεια του είναι:

$$J_k(\phi) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} X(r_s) I(\cos \gamma; g, T, \lambda) \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \quad (3.8)$$

όπου I η ένταση της ακτινοβολίας και αποτελεί συνάρτηση της θερμοκρασίας T και του συντελεστή βαρυτικής αμαύρωσης χείλους g και γ η γωνία μεταξύ της οπτικής ευθείας και της πορείας της ακτινοβολίας από την επιφάνεια του αστέρα. Αν και η ολοκλήρωση συμβαίνει σε ολόκληρη την αστρική επιφάνεια (με ϕ αζιμουθιακή γωνία και θ πολική γωνία) υπάρχει ο παράγοντας $X(r_s)$ που ελέγχει τότε «φαίνεται» η αστρική επιφάνεια και τότε όχι. Έτσι ορίζεται: $X(r_s) \equiv \begin{cases} 0, & \text{εάν } r_s \text{ αόρατο} \\ 1, & \text{εάν } r_s \text{ ορατό} \end{cases}$ όπου με τη σειρά της η συνάρτηση

$X(r_s)$ παράγει δύο χαρακτηριστικές συναρτήσεις $X^A(r_s)$ και $X^B(r_s)$ οι οποίες ονομάζονται συναρτήσεις «ορίζοντα» και «εκλείψεων» αντίστοιχα και ορίζονται ως εξής:

$$X^A(r_s) \equiv \begin{cases} 2, & \text{εάν } \cos \gamma < 0 \text{ (ή } \gamma > 90^\circ) \\ 0, & \text{εάν } \cos \gamma > 0 \text{ (ή } \gamma < 90^\circ) \end{cases},$$

$$X^B(r_s) \equiv \begin{cases} 1, & \text{εάν το } r_s \text{ δεν αποκρύπτεται από τον συνοδό} \\ 0, & \text{εάν το } r_s \text{ αποκρύπτεται από τον συνοδό} \end{cases}$$

Έτσι η Σχέση 3.8 γίνεται:

$$J_k(\phi) = I \sum_{\phi=0}^{2\pi} \sum_{\theta=0}^{\pi} \left[G_k R_k D_k \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} r^2 \sin \theta \Delta \phi \Delta \theta \right] \quad (3.9)$$

όπου G_k , R_k , D_k οι αδιάστατοι λόγοι που αντιστοιχούν στο φαινόμενο της αμαύρωσης λόγω βαρύτητας, στο φαινόμενο ανάκλασης και στο φαινόμενο της αμαύρωσης χείλους αντίστοιχα και δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

- **Φαινόμενο αμαύρωσης λόγω βαρύτητας (gravity darkening):**

$$G = \frac{F_l}{F_p} = \left(\frac{g_l}{g_p} \right)^g \quad (3.10)$$

όπου

$$g = \begin{cases} 1, & \text{για αστέρες με ζώνη ακτινοβολίας (von Zeipel 1924)} \\ 0.32, & \text{για αστέρες με ζώνη μεταφοράς (Lucy 1967)} \end{cases} \quad (3.11)$$

Με g ο συντελεστής αμαύρωσης λόγω βαρύτητας, F_l και F_p η βολομετρική ροή σε τυχαίο σημείο της αστρικής επιφάνειας (l) και στον πόλο του αστέρα (p) αντίστοιχα.

- **Φαινόμενο ανάκλασης (reflection effect):**

$$R = 1 + A_t \frac{F_s}{F_t} \quad (3.12)$$

όπου F_s η βολομετρική ροή ακτινοβολίας εξερχόμενη από τον έναν αστέρα, F_t η τοπική «αδιατάραχτη» ροή του συνοδού στον οποίο προσπίπτει η ακτινοβολία, στον οποίο ορίζεται ο βολομετρικός συντελεστής ανάκλασης A_t και προσδιορίζει τον τοπικό λόγο της επαναακτινοβολούμενης προς την προσπίπτουσα ενέργεια σε όλα τα μήκη κύματος. Με:

$$A = \begin{cases} 1, & \text{για αστέρες με ζώνη ακτινοβολίας (von Zeipel 1924)} \\ 0.5, & \text{για αστέρες με ζώνη μεταφοράς (Rucinski 1969)} \end{cases} \quad (3.13)$$

Γενικά ο συντελεστής ανάκλασης μπορεί να πάρει και τιμές μεταξύ 0.5 και 1 σε περιπτώσεις όπου οι αστέρες του συστήματος έχουν πολύ μεγάλη διαφορά θερμοκρασίας.

- **Φαινόμενο αμαύρωσης χείλους (limb darkening):**

$$D_\lambda(\gamma) = 1 - x_\lambda (1 - \cos \gamma) \quad (3.14)$$

όπου x_λ οι συντελεστές αμαύρωσης χείλους και εξαρτώνται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας λ , άρα κατ' επέκταση και από τη θερμοκρασία και έχουν υπολογιστεί από τον van Hamme (van Hamme, W., 1993, AJ, 106, 2096).

Ο κώδικας W-D περιέχει πληθώρα παραμέτρων οι οποίοι σχετίζονται είτε με την ακτινοβολία είτε με τη γεωμετρία των αστέρων του συστήματος. Στον Πίνακα 3.7 παρατίθενται όλες οι παράμετροι του κώδικα W-D, όπως παρουσιάζονται στο λογισμικό PHOEBE με μια σύντομη επεξήγηση.

Πίνακας 3.7: Οι παράμετροι του κώδικα W-D όπως παρουσιάζονται στο λογισμικό PHOEBE.

Παράμετροι σχετικές με το σύστημα	
HJD ₀	Χρόνος πρωτεύοντος ελαχίστου
PERIOD - P	Περίοδος του συστήματος
DPDT	Πρώτη παράγωγος της περιόδου
PSHIFT - Φ ₀	Μετατόπιση της καμπύλης φωτός σε φάση
SMA - α	Ημιάξονας της σχετικής τροχιάς
RM - q (= M ₂ /M ₁)	Λόγος μαζών των αστέρων
INCL - i	Κλίση του τροχιακού επιπέδου του συστήματος ως προς το επίπεδο του ουρανού
VGA - γ	Συστημική ακτινική ταχύτητα

Data	Parameters	Fitting	Plotting
Ephemeris System Orbit Component Surface Luminosities Limb Darkening Spots			
HJD0 - Origin of HJD time			
0.000000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.000100	Min: -10000000000.0 Max: 10000000000.0
PERIOD - Orbital period in days			
1.0000000000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.0001000000	Min: 0.0000000000 Max: 10000000000.0
DPDT - First time derivative of period (days/day)			
0.0000000000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.0000010000	Min: -1.0000000000 Max: 1.0000000000
PSHIFT - Phase shift			
0.000000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.0100000000	Min: -0.5000000000 Max: 0.5000000000
Ephemeris System Orbit Component Surface Luminosities Limb Darkening Spots			
SMA - Semi-major axis in solar radii			
10.000000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.010000	Min: 0.000000 Max: 10000000000.0000
RM - Mass ratio (secondary over primary)			
1.000000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.010000	Min: 0.000000 Max: 10000000000.0000
VGA - Center-of-mass velocity in km/s			
0.000000	<input type="checkbox"/>	Step: 1.000000	Min: -1000.000000 Max: 1000.000000
INCL - Inclination in degrees			
90.000000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.010000	Min: 0.000000 Max: 180.000000

Παράμετροι σχετικές με την τροχιά του συστήματος	
PERR0 - ω	Όρισμα του περιάστρου της σχετικής τροχιάς
DPERDT	Πρώτη παράγωγος του ορίσματος του περιάστρου της σχετικής τροχιάς
ECC - e	Εκκεντρότητα του συστήματος
F ₁	Συντελεστής συγχρονισμού του πρωτεύοντα αστέρα
F ₂	Συντελεστής συγχρονισμού του δευτερεύοντα αστέρα

Data	Parameters	Fitting	Plotting
Ephemeris System Orbit Component Surface Luminosities Limb Darkening Spots			
PERR0 - Argument of periastron			
0.000000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.010000	Min: 0.000000 Max: 6.28318
DPERDT - First time derivative of periastron			
0.0000000000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.000000	Min: -1.000000 Max: 1.000000
ECC - Orbital eccentricity			
0.000000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.0100	Min: 0.0000 Max: 1.0000
F1 - Primary star synchronicity parameter			
1.000000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.010000	Min: 0.000000 Max: 1.000000
F2 - Secondary star synchronicity parameter			
1.000000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.010000	Min: 0.000000 Max: 1.000000

Παράμετροι σχετικές με τους αστέρες

TAVH - T_1 [K]	Θερμοκρασία του πρωτεύοντα αστέρα
TAVC - T_2 [K]	Θερμοκρασία του δευτερεύοντα αστέρα
PHSV - Ω_1	Δυναμικό επιφανείας του πρωτεύοντα αστέρα
PCSV - Ω_2	Δυναμικό επιφανείας του δευτερεύοντα αστέρα
MET 1	Μεταλλικότητα του πρωτεύοντα αστέρα
MET 2	Μεταλλικότητα του δευτερεύοντα αστέρα

Data	Parameters	Fitting	Plotting				
Ephemeris	System	Orbit	Component	Surface	Luminosities	Limb Darkening	Spots
TAVH - Primary star effective temperature in K							
6000	<input type="checkbox"/>	Step: 10	Min: 3500	Max: 50000			
TAVC - Secondary star effective temperature in K							
6000	<input type="checkbox"/>	Step: 10	Min: 3500	Max: 50000			
PHSV - Primary star surface potential							
10.00000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.01000	Min: 0.00000	Max: 10000000000.00000			
Calculate							
PCSV - Secondary star surface potential							
10.00000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.01000	Min: 0.00000	Max: 10000000000.00000			
Calculate							
MET1 - Primary star metallicity							
0.000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.010	Min: -10.000	Max: 10.000			
MET2 - Secondary star metallicity							
0.000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.010	Min: -10.000	Max: 10.000			

Παράμετροι σχετικές με την επιφάνεια των αστέρων

ALB1 - A_1	Συντελεστής ανάκλασης του πρωτεύοντα αστέρα
ALB2 - A_2	Συντελεστής ανάκλασης του δευτερεύοντα αστέρα
GR1 - g_1	Φαινόμενο αμαύρωσης λόγω βαρύτητας του πρωτεύοντα αστέρα
GR2 - g_2	Φαινόμενο αμαύρωσης λόγω βαρύτητας του δευτερεύοντα αστέρα

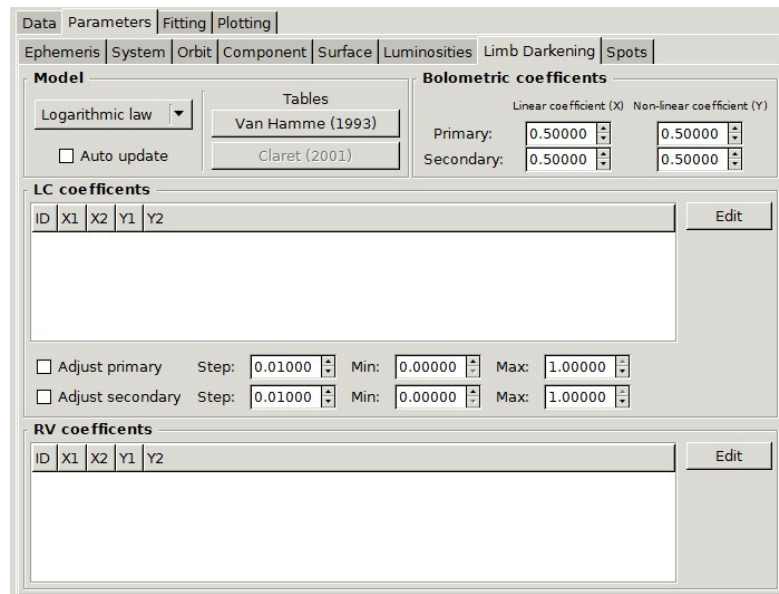
Data	Parameters	Fitting	Plotting				
Ephemeris	System	Orbit	Component	Surface	Luminosities	Limb Darkening	Spots
ALB1 - Primary star surface albedo							
0.60000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.01000	Min: 0.00000	Max: 1.00000			
ALB2 - Secondary star surface albedo							
0.60000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.01000	Min: 0.00000	Max: 1.00000			
GR1 - Primary star gravity brightening							
0.32000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.01000	Min: 0.00000	Max: 1.00000			
GR2 - Secondary star gravity brightening							
0.32000	<input type="checkbox"/>	Step: 0.01000	Min: 0.00000	Max: 1.00000			

Παράμετροι σχετικές με τις φωτεινότητες των αστέρων

Primary level luminosity	Φωτεινότητα του πρωτεύοντα αστέρα ανά φίλτρο
Secondary level luminosity	Φωτεινότητα του δευτερεύοντα αστέρα ανά φίλτρο
3rd light level – L ₃	Συνεισφορά της φωτεινότητας του τρίτου σώματος είτε σε ποσοστό επί της ολικής φωτεινότητας είτε στη ροή ανά φίλτρο

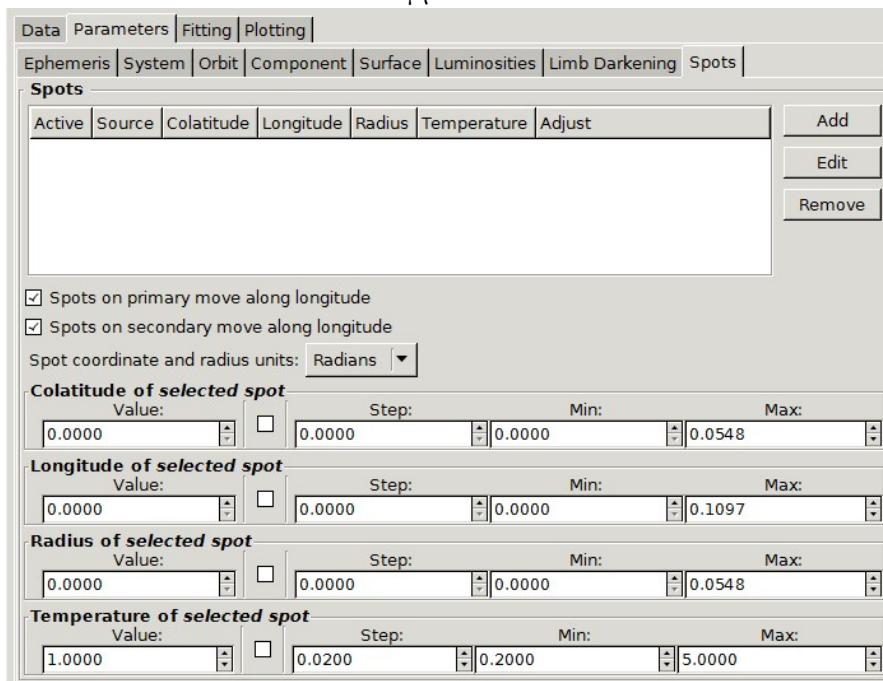
Παράμετροι σχετικές με το φαινόμενο αμαύρωσης χείλους

Limb darkening law	Εξίσωση υπολογισμού του φαινομένου (συνημίτονο, λογάριθμος, τετραγωνική ρίζα)
Bolometric coefficients	Συντελεστές βολομετρικού μεγέθους
LC Monochromatic Limb darkening coefficients/filter	Συντελεστές του φαινομένου αμαύρωσης χείλους ανά φίλτρο στις μονοχρωματικές καμπύλες φωτός
RV Monochromatic Limb darkening coefficients/filter	Συντελεστές του φαινομένου αμαύρωσης χείλους ανά φίλτρο στις μονοχρωματικές καμπύλες ακτινικών ταχυτήτων



Παράμετροι σχετικές τις κηλίδες

Colatitude of selected spot	Αστρογραφικό πλάτος της κηλίδας
Longitude of selected spot	Αστρογραφικό μήκος της κηλίδας
Radius of selected spot	Ακτίνα της κηλίδας
Temperature of selected spot	Θερμοκρασία της κηλίδας σε σχέση με τον αστέρα που βρίσκεται



Για να δημιουργηθεί το θεωρητικό μοντέλο του συστήματος (κατά συνέπεια και το αντίστοιχο διάγραμμα φάσης), χρειάζεται να βρεθεί το ολικό ελάχιστο μίας σύνθετης μαθηματικής εξίσωσης με όλες αυτές τις παραμέτρους. Το πρόγραμμα χρησιμοποιεί την μέθοδο των διαφορικών διορθώσεων (differential corrections). Η λογική είναι ότι οι παράμετροι δέχονται μία αρχική τιμή και στη συνέχεια συγκλίνουν σε καινούργιες τιμές. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην αντικατάσταση των μερικών παραγώγων με πεπερασμένες διαφορές.

Στα διπλά εκλειπτικά συστήματα, μερικές παράμετροι έχουν σταθερές, γνωστές τιμές και αναφέρονται ως **fixed**. Τέτοιες fixed παράμετροι που προκύπτουν από την βιβλιογραφία ή τη θεωρία, είναι οι τιμές για το φαινόμενο της αμαύρωσης λόγω βαρύτητας (g_1, g_2), οι βολομετρικοί συντελεστές ανάκλασης (A_1, A_2), οι συντελεστές αμαύρωσης χείλους (x_1, x_2) και συνήθως η θερμοκρασία του πρωτεύοντα αστέρα T_1 ¹.

Χρησιμοποιείται επίσης η μέθοδος των πολλαπλών υποσυνόλων (multiple subsets) των παραμέτρων (Wilson & van Hamme 2003) δηλαδή σε κάθε επανάληψη προσαρμογής νέας θεωρητικής καμπύλης (iteration) θα αφήνονται ελεύθερες προς σύγκλιση ορισμένες μόνο παράμετροι, ενώ οι υπόλοιπες θα παραμένουν σταθερές. Τα υποσύνολα παραμέτρων περιέχουν πάντα παραμέτρους, οι οποίες δεν αλληλοσχετίζονται. Αυτά τα σύνολα είναι:

1. Φ_0, i, T_2
2. $L_1, \Omega_1, \Omega_2, q, \alpha, \gamma, L_3$

Το πρόγραμμα μετά από κάθε επανάληψη κατασκευάζει νέα θεωρητική καμπύλη και συγκλίνει σε νέα λύση. Από το άθροισμα των τετραγώνων των υπολοίπων αλλά και από την προσαρμογή της θεωρητικής καμπύλης στα παρατηρησιακά δεδομένα ανά φίλτρο, ο χρήστης μπορεί να κρίνει εάν θα συνεχίσει τις επαναλήψεις προκειμένου να βρει νέα λύση. Τα παρατηρησιακά δεδομένα (διαγράμματα φάσης στα τέσσερα φίλτρα) έχουν εισαχθεί στο πρόγραμμα σε μορφή πίνακα με στήλες την φάση φ και την κανονικοποιημένη ροή F .

3.4.2 Το μοντέλο του HV Aqr

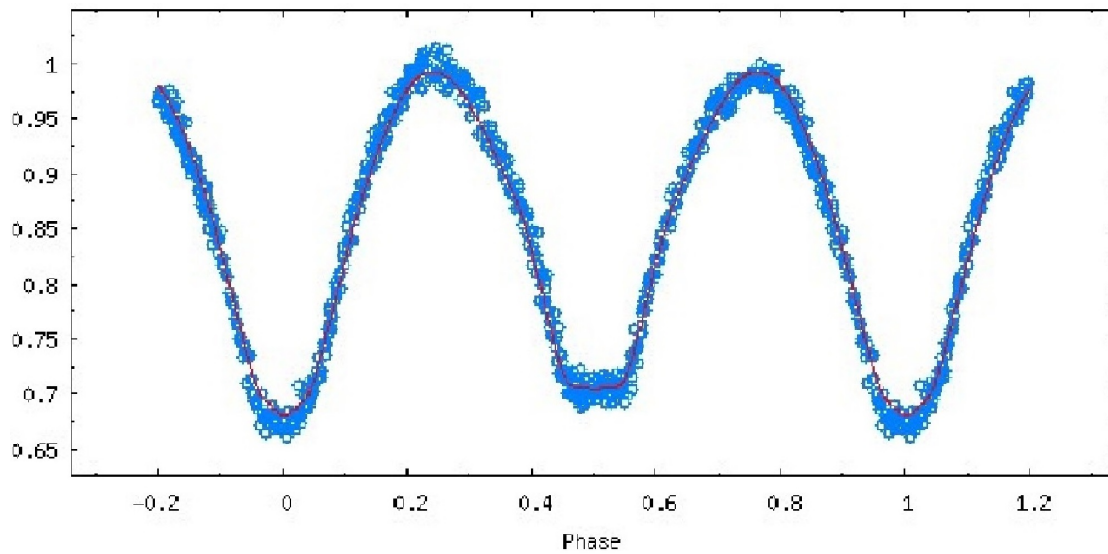
Οι γνωστές παράμετροι για το σύστημα που μελετήθηκε στην παρούσα εργασία ήταν οι ακόλουθες: Αρχικά από την φασματοσκοπία του 2000 (Rucinski et al., 2000) έχει υπολογιστεί ο λόγος μαζών σαν $q = 0.145 \pm 0.050$. Από τον πίνακα του Harmanec (1988) και τον φασματικό τύπο του συστήματος προέκυψε η θερμοκρασία του πρωτεύοντα αστέρα σαν $T_1 = 6460$ K. Οι βολομετρικοί συντελεστές ανάκλασης πήραν την τιμή $A_1 = A_2 = 0.5$ (Σχέση 3.13), ενώ οι συντελεστές για την αμαύρωση λόγω βαρύτητας πήραν την τιμή $g_1 = g_2 = 0.32$ (Σχέση 3.11). Για το φαινόμενο της αμαύρωσης χείλους χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές από τον πίνακα του Claret (Claret, A., 2000, A&A, 363, 1081). Πιο συγκεκριμένα, για το B φίλτρο $x_1(B) = x_2(B) = 0.710$, για το V φίλτρο $x_1(V) = x_2(V) = 0.630$, για το R φίλτρο $x_1(R) = x_2(R) = 0.505$ και για το I φίλτρο $x_1(I) = x_2(I) = 0.426$. Για φώς από τρίτο σώμα έγινε η υπόθεση ότι $L_3 = 0$.

¹Η τιμή της θερμοκρασίας βασίζεται στον φασματικό τύπο του αστέρα ή του συστήματος και δίνεται σε αντίστοιχους πίνακες.

Έτσι, οι ελεύθερες παράμετροι που υπολογίστηκαν θα είναι οι εξής: Η μετατόπιση φάσης Φ_0 , η γωνία κλίσης i , η θερμοκρασία T_2 του δευτερεύοντος αστέρα, το δυναμικό $\Omega_1 = \Omega_2$ και η σχετική λαμπρότητα των αστέρων σε κάθε φίλτρο L_1, L_2 . Με τα παραπάνω μεγέθη θα γίνει εφικτός ο υπολογισμός και των απόλυτων παραμέτρων του συστήματος όπως για παράδειγμα οι μάζες των αστέρων.

Θα εξεταστούν τρεις περιπτώσεις: **(1)** Μοντέλο χωρίς κηλίδα και σταθερό q . **(2)** Μοντέλο με ύπαρξη κηλίδας και σταθερό q . **(3)** Μοντέλο με ύπαρξη κηλίδας και ελεύθερο q . Χρησιμοποιώντας κάποιες αρχικές τιμές για τις ελεύθερες παραμέτρους έγιναν επαναλήψεις κρατώντας σταθερό το ένα σύνολο παραμέτρων. Παραδείγματος χάριν ξεκίνησαν οι επαναλήψεις με σταθερά τα μεγέθη L_1, Ω, q και ελεύθερα να «τρέχουν» τα Φ_0, i, T_2 και αντίστροφα. Στο τέλος όταν το σφάλμα (τυπική απόκλιση στο PHOBE) έγινε μεγαλύτερο από την διαφορά $|J_{n-1} - J_n|$, όπου J_{n-1}, J_n αντίστοιχα οι τιμές για μία παράμετρο πριν και μετά από μία επανάληψη, έγιναν επαναλήψεις και με τα δύο σύνολα ελεύθερα συγκλίνοντας προς την τελική λύση (Πίνακας 3.8). Να σημειωθεί ότι τα σφάλματα τυπικής απόκλισης που έβγαζε σαν αποτέλεσμα το PHOBE αν και από μαθηματικής πλευράς είναι σωστά, από φυσικής είναι πλασματικά. Έτσι έγινε η υπόθεση ότι είναι τουλάχιστον μίας τάξης μεγέθους μεγαλύτερα.

Γενικά, ίδιες θεωρητικές καμπύλες μπορούν να παράξουν διαφορετικούς συνδυασμούς παραμέτρων για την κηλίδα. Για παράδειγμα μία μεγάλη κηλίδα είναι ισοδύναμη με πολλές μικρές σε ακτίνα κηλίδες ή μία μεγάλη κηλίδα με μεγάλο συντελεστή θερμοκρασίας είναι επίσης ισοδύναμη με μία κηλίδα που βρίσκεται κοντά στους πόλους με έναν μικρό σχετικά συντελεστή θερμοκρασίας. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει μοναδικότητα στη λύση. Στα παρακάτω μοντέλα έγινε η σύμβαση ότι υπάρχει μία κηλίδα η οποία βρίσκεται στον πρωτεύοντα αστέρα κοντά στον ισημερινό του. Στην Εικόνα 3.7 παρουσιάζεται το διάγραμμα φάσης στο B φίλτρο μαζί με την καμπύλη προσαρμογής και φαίνεται η ανάγκη εισαγωγής κηλίδας στο σύστημα, αφού δεν είναι καλή η προσαρμογή στο δευτερεύον μέγιστο.



Εικόνα 3.7: Το διάγραμμα φάσης για $\varphi \in [-0.2, 1, 2]$ (μπλε κύκλοι) και η καμπύλη προσαρμογής από την λύση του συστήματος χωρίς κηλίδα με γνωστό λόγο μαζών $q = 0.145$ (μπλε καμπύλη). Στο δευτερεύον μέγιστο φαίνεται η ασυμφωνία της θεωρητικής καμπύλης με τα πειραματικά δεδομένα (η θεωρητική καμπύλη είναι πιο ψηλά από την πειραματική), O'Connell effect.

Στην τελευταία λύση έγινε αναζήτηση για φως από τρίτο σώμα και οι τιμές που προέκυψαν ήταν: $I_3(B) = 0.000 \pm 0.004$, $I_3(V) = 0.000 \pm 0.004$, $I_3(R) = 0.001 \pm 0.004$ και $I_3(I) = 0.001 \pm 0.004$. Όπως φαίνεται η συνεισφορά του είναι μηδενική και δεν αλλάζει καθόλου την τελική μορφή του μοντέλου (κάτι που φάνηκε και στην αντίστοιχη καμπύλη προσαρμογής).

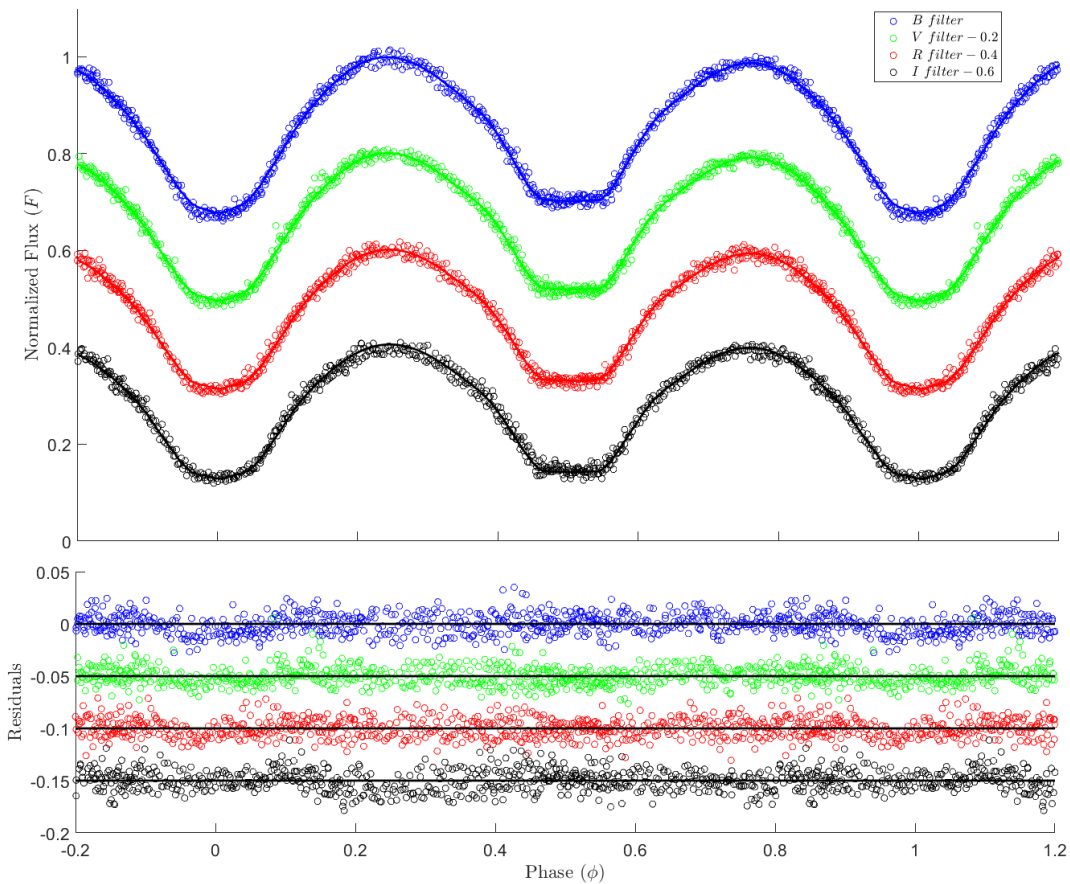
Πίνακας 3.8: Οι λύσεις για το σύστημα του HV Aqr.

Παράμετρος	HV Aqr χωρίς κηλίδα	HV Aqr με κηλίδα (q fixed)	HV Aqr με κηλίδα (q ελεύθερο)
Φ_0	0.003 ± 0.002	0.004 ± 0.001	0.004 ± 0.001
i ($^\circ$)	78.2 ± 0.1	78.1 ± 0.3	79.5 ± 0.1
T_1 (K)	6460*	6460*	6460*
T_2 (K)	6552 ± 30	6654 ± 50	6590 ± 70
$g_1 = g_2$	0.32*	0.32*	0.32*
$A_1 = A_2$	0.50*	0.50*	0.50*
$\Omega_1 = \Omega_2$	2.025 ± 0.001	2.034 ± 0.001	2.074 ± 0.007
$q = M_2/M_1$	0.145*	0.145*	0.156 ± 0.002
filling factor (%)	$(69 \pm 1) \%$	$(59 \pm 1) \%$	$(43 \pm 1) \%$
$L_1/(L_1 + L_2)$ (B)	0.799 ± 0.008	0.794 ± 0.004	0.795 ± 0.005
$L_1/(L_1 + L_2)$ (V)	0.806 ± 0.007	0.802 ± 0.004	0.802 ± 0.007
$L_1/(L_1 + L_2)$ (R)	0.810 ± 0.005	0.807 ± 0.003	0.806 ± 0.005
$L_1/(L_1 + L_2)$ (I)	0.816 ± 0.005	0.814 ± 0.003	0.812 ± 0.005
$x_1 = x_2$ (B)	0.710*	0.710*	0.710*
$x_1 = x_2$ (V)	0.630*	0.630*	0.630*
$x_1 = x_2$ (R)	0.505*	0.505*	0.505*
$x_1 = x_2$ (I)	0.426*	0.426*	0.426*
$r_{1;pole}$	0.5272 ± 0.0005	0.5248 ± 0.0005	0.5167 ± 0.0005
$r_{1;side}$	0.5874 ± 0.0005	0.5835 ± 0.0005	0.5715 ± 0.0005
$r_{1;back}$	0.6131 ± 0.0005	0.6084 ± 0.0005	0.5959 ± 0.0005
$r_{2;pole}$	0.2326 ± 0.0005	0.2295 ± 0.0005	0.2303 ± 0.0005
$r_{2;side}$	0.2450 ± 0.0005	0.2412 ± 0.0005	0.2414 ± 0.0005
$r_{2;back}$	0.3082 ± 0.0005	0.2973 ± 0.0005	0.2898 ± 0.0005
Παράμετροι κηλίδας			
Αστρογραφικό πλάτος ($^\circ$)	–	65	65
Αστρογραφικό μήκος ($^\circ$)	–	32	32
Ακτίνα ($^\circ$)	–	17	16
Συντελεστής θερμοκρασίας	–	0.945	0.946
$\sum \chi^2$ για B φίλτρο	0.0813	0.0627	0.0610
$\sum \chi^2$ για V φίλτρο	0.0696	0.0561	0.0553
$\sum \chi^2$ για R φίλτρο	0.0674	0.0590	0.0591
$\sum \chi^2$ για I φίλτρο	0.0800	0.0713	0.0749

* fixed τιμές από βιβλιογραφία

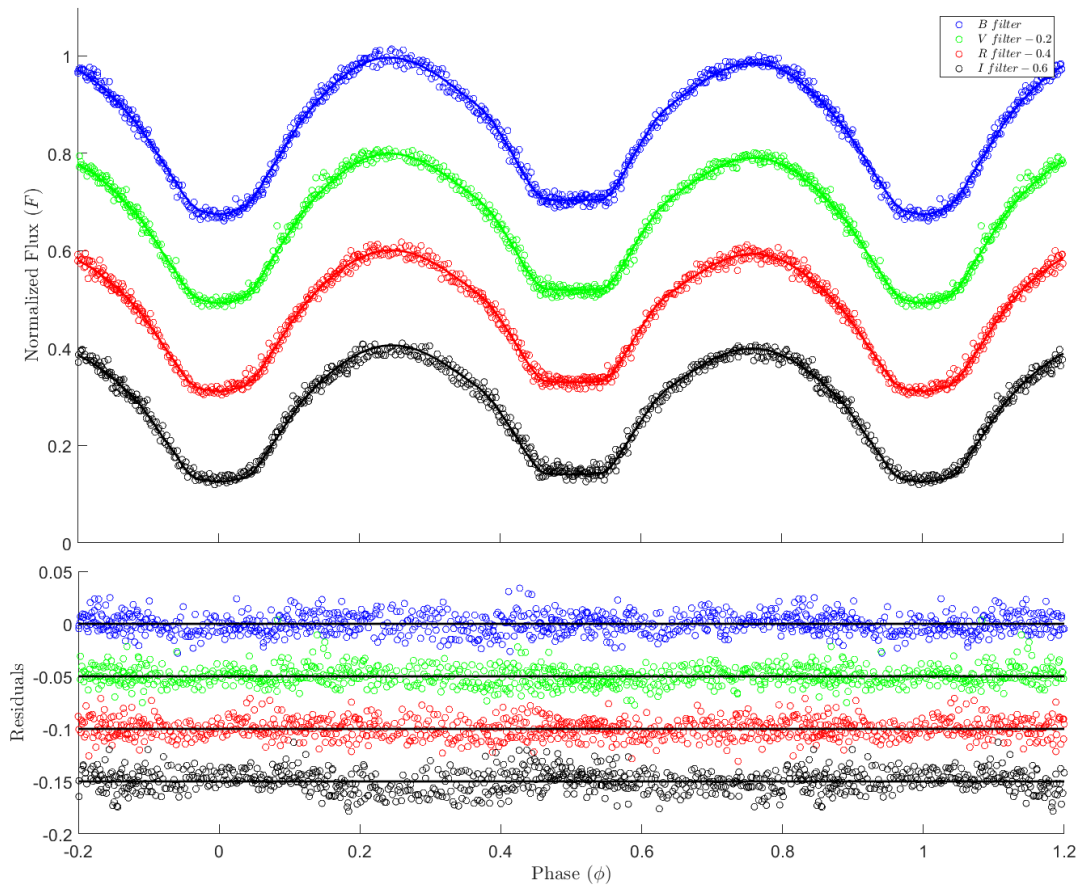
Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα φάσης για τις δύο λύσεις (q fixed & q ελεύθερο με ύπαρξη κηλίδας) και οι καμπύλες προσαρμογής. Ακριβώς κάτω από κάθε διάγραμμα παρουσιάζονται τα residuals (δηλαδή η διαφορά παρατηρήσεων με το θεωρητικό μοντέλο).

- Λύση για σύστημα με λόγο μαζών $q=0.145$ και ύπαρξη κηλίδας:



Εικόνα 3.8: Πάνω: Το διάγραμμα φάσης από τις παρατηρήσεις (κενοί κύκλοι) και η θεωρητική καμπύλη (συμπαγείς καμπύλες) για το σύστημα HV Aqr με $q = 0.145$. Έχει γίνει μετατόπιση στην κάθε καμπύλη κατά 0.2. Κάτω: Τα residuals στο κάθε φίλτρο. Έχει γίνει μετατόπιση κατά 0.05 ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη.

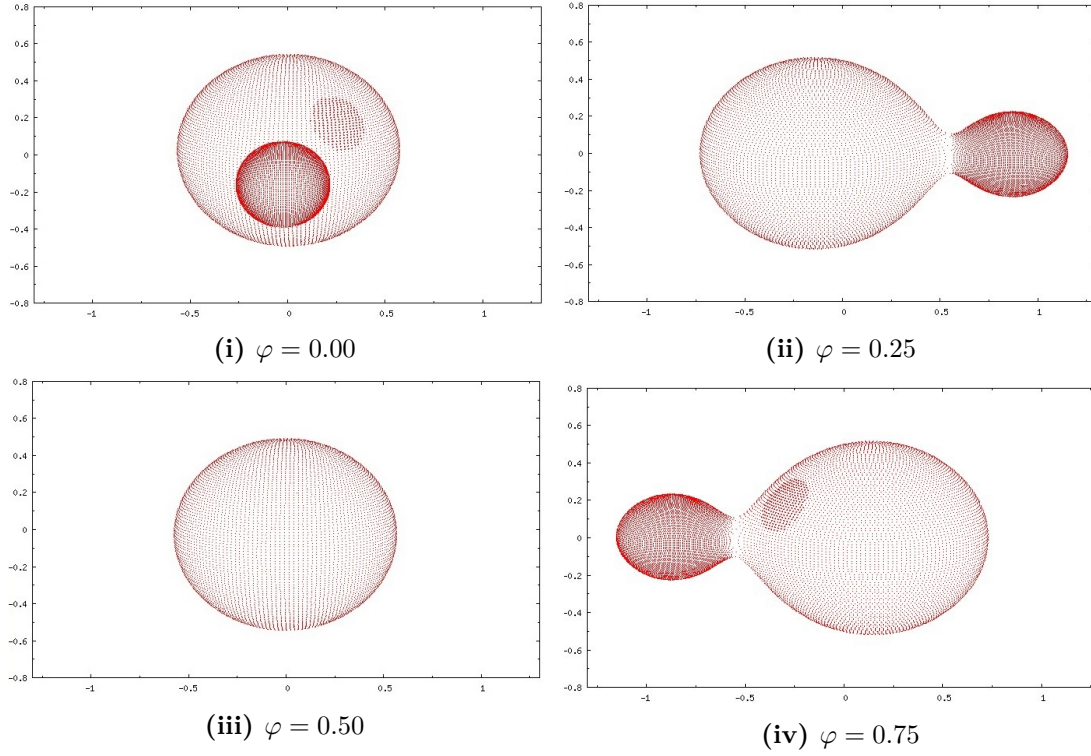
- Λύση για σύστημα με λόγο μαζών $q=0.156$ και ύπαρξη κηλίδας:



Εικόνα 3.9: Πάνω: Το διάγραμμα φάσης από τις παρατηρήσεις (κενοί κύκλοι) και η θεωρητική καμπύλη (συμπαγείς καμπύλες) για το σύστημα HV Aqr με $q = 0.156$ και ύπαρξη κηλίδας. Έχει γίνει μετατόπιση στην κάθε καμπύλη κατά 0.2. Κάτω: Τα residuals στο κάθε φίλτρο. Έχει γίνει μετατόπιση κατά 0.05 ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη.

Τέλος το τριδιάστατο μοντέλο για το σύστημα HV Aqr σε μία περίοδο φαίνεται στην Εικόνα 3.10, το οποίο έγινε για την τελευταία κατά σειρά λύση, στο πρόγραμμα RHOEBE.

Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα (Εικόνες 3.8 και 3.9) είναι πολύ σημαντικό να υπάρχει μία τιμή για το q και για την T_1 από φασματοσκοπία. Σε αντίθετη περίπτωση, δεν θα υπήρχε μονοσήμαντη λύση, μιας και διαφορετικός συνδυασμός τους θα έδινε την ίδια θεωρητική καμπύλη. Συγκριτικά φαίνεται ότι η λύση με $q = 0.156$ έχει αρκετά πιο ικανοποιητική προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα. Η μεγάλη διαφορά φαίνεται στο πρωτεύον ελάχιστο ($\varphi = 0.00$ ή αντίστοιχα $\varphi = 1.00$) όπου η λύση με $q = 0.145$ δεν έχει



Εικόνα 3.10: Το τριδιάστατο μοντέλο του HV Aqr (με κηλίδα & ελεύθερο το q) για τις φάσεις 0.00, 0.25, 0.50, 0.75.

καλή προσαρμογή τουλάχιστον για B, V φίλτρα, με τα residuals να είναι όλα κάτω από την μηδενική τους τιμή. Το πρόβλημα φαίνεται να εξαλείφεται όταν αλλάζει το q . Μία εξήγηση είναι ότι η φασματοσκοπία αν και δίνει μία πολύ καλή προσέγγιση στο q , δεν δίνει την ακριβή τιμή για συστήματα σε επαφή, μιας και δεν μπορεί να συμπεριλάβει την παραμόρφωση (απόκλιση από σφαιρικό σχήμα) των αστέρων.

Στην συνέχεια, υπολογίστηκαν οι απόλυτες παράμετροι για το σύστημα από τις Σχέσεις 1.9 - 1.14, με το δείκτη 1 να αναφέρεται στον πρωτεύοντα και με το δείκτη 2 στο δευτερεύοντα αστέρα (Πίνακας 3.9). Οι ταχύτητες προέκυψαν από την φασματοσκοπία του 2000 (Rucinski et al., 2000) ενώ η εκκεντρότητα του συστήματος ήταν μηδέν. Τα σφάλματα που επισήλθαν στις απόλυτες παραμέτρους είναι τα $\delta K_{1,2}$, δP , δi , $\delta r_{1,2;pole}$, $\delta r_{1,2;side}$, $\delta r_{1,2;back}$, $\delta T_{1,2}$ που αναφέρονται στα αντίστοιχα μεγέθη και δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$dM_{1,2} = \sqrt{\sum_{j=1}^2 \left(\delta K_j \frac{\partial M_{1,2}}{\partial K_j} \right)^2 + \left(\delta P \frac{\partial M_{1,2}}{\partial P} \right)^2 + \left(\delta i \frac{\partial M_{1,2}}{\partial i} \right)^2} [M_{\odot}] \quad (3.15)$$

$$d\alpha_{1,2} = \sqrt{\sum_{j=1}^2 \left(\delta K_j \frac{\partial \alpha_{1,2}}{\partial K_j} \right)^2 + \left(\delta P \frac{\partial \alpha_{1,2}}{\partial P} \right)^2 + \left(\delta i \frac{\partial \alpha_{1,2}}{\partial i} \right)^2} [R_{\odot}] \quad (3.16)$$

$$dR_{1,2} = \sqrt{\sum_{j=pole,side,back} \left(\delta r_j \frac{\partial R_{1,2}}{\partial r_j} \right)^2 + \left(\delta \alpha \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \alpha} \right)^2} [R_{\odot}] \quad (3.17)$$

$$dL_{1,2} = \sqrt{\left(\delta R_{1,2} \frac{\partial L_{1,2}}{\partial R_{1,2}} \right)^2 + \left(\delta T_{1,2} \frac{\partial L_{1,2}}{\partial T_{1,2}} \right)^2} [L_{\odot}] \quad (3.18)$$

$$dM_{bol,1,2} = \sqrt{\left(\delta R_{1,2} \frac{\partial M_{bol,1,2}}{\partial R_{1,2}} \right)^2 + \left(\delta T_{1,2} \frac{\partial M_{bol,1,2}}{\partial T_{1,2}} \right)^2} [\text{mag}] \quad (3.19)$$

$$d(\log g_{1,2}) = \sqrt{\left(\delta M_{1,2} \frac{\partial (\log g_{1,2})}{\partial M_{1,2}} \right)^2 + \left(\delta R_{1,2} \frac{\partial (\log g_{1,2})}{\partial R_{1,2}} \right)^2} [\text{cm/sec}^2] \quad (3.20)$$

Πίνακας 3.9: Οι απόλυτες παράμετροι του HV Aqr.

	HV Aqr χωρίς κηλίδα	HV Aqr με κηλίδα (q fixed)	HV Aqr με κηλίδα (q ελεύθερο)
M_1	$(1.368 \pm 0.052) M_{\odot}$	$(1.367 \pm 0.052) M_{\odot}$	$(1.345 \pm 0.048) M_{\odot}$
M_2	$(0.198 \pm 0.011) M_{\odot}$	$(0.198 \pm 0.011) M_{\odot}$	$(0.195 \pm 0.010) M_{\odot}$
α_1	$(0.335 \pm 0.030) R_{\odot}$	$(0.335 \pm 0.031) R_{\odot}$	$(0.330 \pm 0.027) R_{\odot}$
α_2	$(2.310 \pm 0.190) R_{\odot}$	$(2.300 \pm 0.200) R_{\odot}$	$(2.283 \pm 0.170) R_{\odot}$
R_1	$(1.522 \pm 0.040) R_{\odot}$	$(1.514 \pm 0.040) R_{\odot}$	$(1.464 \pm 0.035) R_{\odot}$
R_2	$(0.688 \pm 0.018) R_{\odot}$	$(0.674 \pm 0.018) R_{\odot}$	$(0.660 \pm 0.016) R_{\odot}$
L_1	$(3.620 \pm 0.200) L_{\odot}$	$(3.580 \pm 0.200) L_{\odot}$	$(3.350 \pm 0.170) L_{\odot}$
L_2	$(0.764 \pm 0.050) L_{\odot}$	$(0.799 \pm 0.053) L_{\odot}$	$(0.736 \pm 0.046) L_{\odot}$
$M_{bol,1}$	$(3.425 \pm 0.057) \text{ mag}$	$(3.436 \pm 0.058) \text{ mag}$	$(3.509 \pm 0.051) \text{ mag}$
$M_{bol,2}$	$(5.433 \pm 0.057) \text{ mag}$	$(5.381 \pm 0.058) \text{ mag}$	$(5.586 \pm 0.051) \text{ mag}$
$\log g_1$	$(4.209 \pm 0.028) \text{ cm/sec}^2$	$(4.214 \pm 0.029) \text{ cm/sec}^2$	$(4.237 \pm 0.026) \text{ cm/sec}^2$
$\log g_2$	$(4.058 \pm 0.032) \text{ cm/sec}^2$	$(4.077 \pm 0.033) \text{ cm/sec}^2$	$(4.090 \pm 0.031) \text{ cm/sec}^2$

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα ο ένας αστέρας μοιάζει αρκετά με τον Ήλιο στις παραμέτρους του, ενώ ο δευτερεύον αστέρας είναι ένα πολύ πιο μικρός αστέρας.

Οι παραπάνω τιμές είναι παρόμοιες με αυτές που δημοσιεύτηκαν το 2021 από τους Gazeas et al. (Gazeas K. et al., 2021, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 501, 2897) όπου υπολογίστηκαν οι μάζες σαν $M_1 = 1.240 \pm 0.028$ & $M_2 = 0.186 \pm 0.017$ [M_\odot], οι ακτίνες σαν $R_1 = 1.456 \pm 0.012$ & $R_2 = 0.601 \pm 0.005$ [R_\odot] και οι λαμπρότητες σαν $L_1 = 3.326 \pm 0.213$ & $L_2 = 0.638 \pm 0.044$ [L_\odot]. Η διαφορά στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο αποτελεί το πραγματικό σφάλμα στις φυσικές παραμέτρους, οπότε είναι αρκετά κοντά οι δύο λύσεις. Στον Πίνακα 3.9 τα σφάλματα είναι πλασματικά όπως συζητήθηκε προηγουμένως.

Κεφάλαιο 4

Διάγραμμα O - C

Διαγράμματα μεταβολής της τροχιακής περιόδου εκλειπτικών συστημάτων αστέρων είναι ευρέως γνωστά ως διαγράμματα Observed-Calculated (O - C). Μας πληροφορούν για την κατανομή των χρονικών διαφορών μεταξύ των παρατηθέντων (T_{observed}) και των υπολογιζόμενων ($T_{\text{calculated}}$) από τις αστρονομικές εφημερίδες χρόνων ελαχίστων του συστήματος, συναρτήσει του τροχιακού κύκλου E . Βάσει της αστρονομικής εφημερίδας ενός δι' εκλείψεων μεταβλητού αστέρα (Σχέση 3.2), μπορούν να προβλεφθούν οι χρονικές στιγμές των μελλοντικών ελαχίστων του. Πολλές φορές όμως οι χρόνοι ελαχίστων που τελικά παρατηρούνται δεν ταυτίζονται με το θεωρητική πρόβλεψη. Με άλλα λόγια δεν ισχύει πάντα $O-C \sim 0$, αλλά μπορεί να παρουσιάζει ιδιαιτερότητες (π.χ. ημιτονοειδής συμπεριφορά των σημείων), οι οποίες απαιτούν ειδική ανάλυση ώστε να ερμηνευτούν. Τέτοιου είδους διαγράμματα μπορούν να δώσουν πληροφορίες για φυσικούς μηχανισμούς που λαμβάνουν χώρα στο σύστημα (π.χ. ανταλλαγή μάζας από τον έναν αστέρα στον άλλον ή ύπαρξη τρίτου μέλους).

4.1 Γενική περιγραφή

Η κατασκευή του διαγράμματος O-C ενός εκλειπτικού συστήματος γίνεται με την παρακάτω μέθοδο: Αρχικά, επιλύεται η Σχέση 3.2 ως προς τον τροχιακό κύκλο E :

$$E = \frac{T_{\text{obs}} - T_0}{P} \quad (4.1)$$

Είναι γνωστό ότι οι ακέραιες τιμές του τροχιακού κύκλου αντιστοιχούν σε χρόνους πρωτεύοντος ελαχίστου, ενώ οι ημι-ακέραιες τιμές σε χρόνους δευτερεύοντος ελαχίστου (Πίνακας 3.5). Βάσει της Σχέσης 4.1 υπολογίζεται για κάθε παρατηρηθέντα χρόνο ελαχίστου (T_{obs}) του συστήματος η τιμή του E . Οι τιμές που προκύπτουν για τον τροχιακό κύκλο δεν είναι πάντα ακέραιες ή ημι-ακέραιες. Χρειάζεται να γίνει μία στρογγυλοποίηση E_{fixed} , ώστε να αντιστοιχούν σε πρωτεύον ή δευτερεύον ελάχιστο βάσει της αστρονομικής εφημερίδας η οποία χρησιμοποιήθηκε. Με δεδομένες αυτές τις νέες τιμές μπορεί να υπολογιστούν οι θεωρητικοί χρόνοι ελαχίστων από την Σχέση 3.2, η οποία γίνεται:

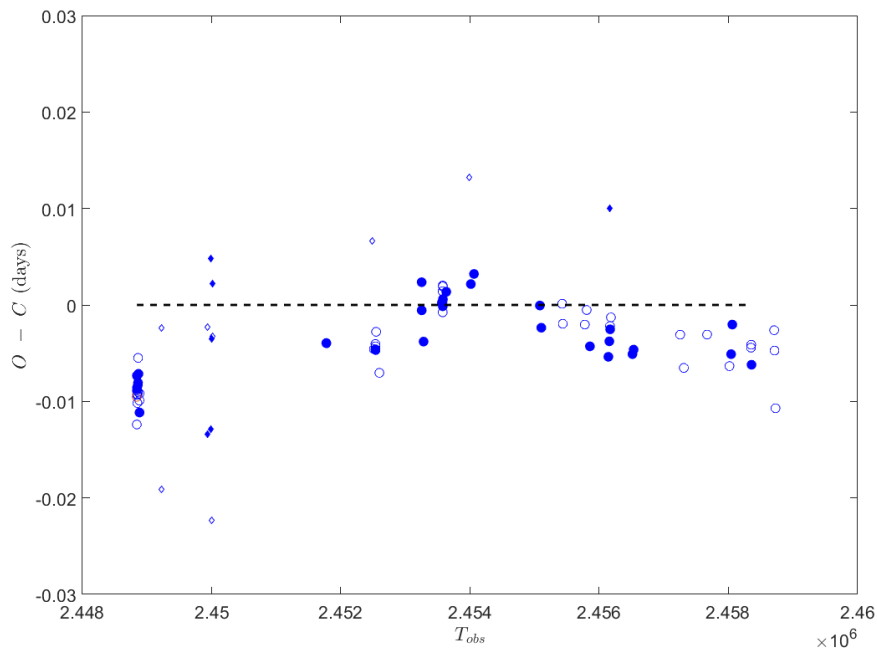
Πίνακας 4.1: Οι χρόνοι ελαχίστων για το σύστημα HV Aqr μαζί με την διαφορά τους O-C από την υπολογιζόμενη τιμή (T_{cal}). Το στατιστικό βάρος θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για την προσαρμογή καμπύλης.

T_{obs} [HJD]	E	E_{fixed}	T_{cal}	O - C	Τύπος	Φίλτρο	Στατιστικό βάρος	Δημοσίευση
2448835.7737 ± 0.012	-12660.02540	-12660.0	2448835.78321	-0.00951	0	R,V	10	Robb R. M.,1992, IBVS, 3798, 1
2448840.4544	-12647.52543	-12647.5	2448840.46392	-0.00952	0.5	V	10	Schirmer J., Geyer E.H., 1992, IBVS, 3785, 1
2448841.5749	-12644.53310	-12644.5	2448841.58729	-0.01239	0.5	V	10	Schirmer J., Geyer E.H., 1992, IBVS, 3785, 2
2448842.5161	-12642.01959	-12642.0	2448842.52344	-0.00734	0	V	10	Schirmer J., Geyer E.H., 1992, IBVS, 3785, 3
2448843.4507	-12639.52371	-12639.5	2448843.45958	-0.00888	0.5	V	10	Schirmer J., Geyer E.H., 1992, IBVS, 3785, 4
2448844.7616 ± 0.003	-12636.02291	-12636.0	2448844.77018	-0.00858	0	R,V	10	Robb R. M.,1992, IBVS, 3798, 1
2448844.9481 ± 0.003	-12635.52485	-12635.5	2448844.95741	-0.00931	0.5	R,V	10	Robb R. M.,1992, IBVS, 3798, 1
2448845.8848 ± 0.006	-12633.02336	-12633.0	2448845.89355	-0.00875	0	R,V	10	Robb R. M.,1992, IBVS, 3798, 1
2448850.5641	-12620.52714	-12620.5	2448850.57426	-0.01016	0.5	V	10	Schirmer J., Geyer E.H., 1992, IBVS, 3785, 1
2448852.8126 ± 0.004	-12614.52244	-12614.5	2448852.82100	-0.00840	0.5	R,V	10	Robb R. M.,1992, IBVS, 3798, 1
2448853.9351 ± 0.004	-12611.52477	-12611.5	2448853.94437	-0.00927	0.5	R,V	10	Robb R. M.,1992, IBVS, 3798, 1
2448858.8033 ± 0.003	-12598.52408	-12598.5	2448858.81232	-0.00902	0.5	R,V	10	Robb R. M.,1992, IBVS, 3798, 1
2448859.7404 ± 0.004	-12596.02152	-12596.0	2448859.74846	-0.00806	0	R,V	10	Robb R. M.,1992, IBVS, 3798, 1
2448859.9275 ± 0.005	-12595.52186	-12595.5	2448859.93669	-0.00819	0.5	R,V	10	Robb R. M.,1992, IBVS, 3798, 1
2448862.5514	-12588.51465	-12588.5	2448862.55689	-0.00549	0.5	V	10	Schirmer J., Geyer E.H., 1992, IBVS, 3785, 1
2448866.8560 ± 0.004	-12577.01907	-12577.0	2448866.86314	-0.00714	0	R,V	10	Robb R. M.,1992, IBVS, 3798, 1
2448882.3932	-12535.52646	-12535.5	2448882.40311	-0.00991	0.5	V	10	Schirmer J., Geyer E.H., 1992, IBVS, 3785, 1
2448883.3281	-12533.02977	-12533.0	2448883.33925	-0.01115	0	V	10	Schirmer J., Geyer E.H., 1992, IBVS, 3785, 1
2448883.5173	-12532.52451	-12532.5	2448883.52648	-0.00918	0.5	V	10	Schirmer J., Geyer E.H., 1992, IBVS, 3785, 1
2449217.5230	-11640.55106	-11640.5	2449217.50468	0.01832	0.5	vis	1	Martignoni, M., 1996, BBSAG Bull, 113, 11
2449219.4120	-11635.50643	-11635.5	2449219.41441	-0.00241	0.5	vis	1	Martignoni, M., 1996, BBSAG Bull, 113, 11
2449934.6250	-9725.50608	-9725.5	2449934.62728	-0.00228	0.5	vis	1	Molik P., Wolf M., 2000, IBVS, 4951, 1
2449935.5500	-9723.03584	-9723.0	2449935.56342	-0.01342	0	vis	1	Molik P., Wolf M., 2000, IBVS, 4951, 1
2449983.4810	-9595.03449	-9595.0	2449983.49392	-0.01291	0	vis	1	Molik P., Wolf M., 2000, IBVS, 4951, 1
2449989.4900	-9578.98725	-9579.0	2449989.48523	0.00477	0	vis	1	Molik P., Wolf M., 2000, IBVS, 4951, 1
2449999.3860	-9552.55965	-9552.5	2449999.40834	-0.02234	0.5	vis	1	Molik P., Wolf M., 2000, IBVS, 4951, 1
2450000.3410	-9550.00929	-9550.0	2450000.34448	-0.00348	0	vis	1	Molik P., Wolf M., 2000, IBVS, 4951, 1
2450015.3250	-9509.99402	-9510.0	2450015.32276	0.00224	0	vis	1	Molik P., Wolf M., 2000, IBVS, 4951, 1
2450017.3790	-9504.50874	-9504.5	2450017.38227	-0.00327	0.5	vis	1	Molik P., Wolf M., 2000, IBVS, 4951, 1
2451774.5178	-4812.01054	-4812.0	2451774.52175	-0.00395	0	R	10	Molik P., Wolf M., 2000, IBVS, 4951, 1
2451775.4539	-4809.51062	-4809.5	2451775.45789	-0.00398	0.5	R	10	Molik P., Wolf M., 2000, IBVS, 4951, 1
2452491.4263 ± 0.0001	-2897.48230	-2897.5	2452491.41967	0.00663	0.5	B,V	1	Tanriverdi T. et al., 2003, IBVS, 5407, 1
2452510.5124 ± 0.0004	-2846.51223	-2846.5	2452510.51698	-0.00458	0.5	R	10	Sarounova L., Wolf M., 2005, IBVS, 5594, 1
2452534.29095 ± 0.00046	-2783.01081	-2783.0	2452534.29500	-0.00405	0	B,V,R,I	10	Παρούσα Εργασία
2452534.47763 ± 0.00060	-2782.51229	-2782.5	2452534.48223	-0.00460	0.5	B,V,R,I	10	Παρούσα Εργασία
2452535.41408 ± 0.00064	-2780.01144	-2780.0	2452535.41837	-0.00429	0	B,V,R,I	10	Παρούσα Εργασία
2452537.28598 ± 0.00044	-2775.01249	-2775.0	2452537.29066	-0.00468	0	B,V,R,I	10	Παρούσα Εργασία
2452545.3387 ± 0.0003	-2753.50743	-2753.50000	2452545.34148	-0.00278	0.5	B,V	10	Tanriverdi T. et al., 2003, IBVS, 5407, 1
2452596.2606 ± 0.0003	-2617.51878	-2617.50000	2452596.26763	-0.00703	0.5	B,V	10	Tanriverdi T. et al., 2003, IBVS, 5407, 1
2453250.6336	-869.99370	-870.00000	2453250.63124	0.00236	1	ced	10	Ogloza W. et al., 2008, IBVS, 5843, 1
2453251.3796 ± 0.0005	-868.00148	-868.00000	2453251.38015	-0.00055	1	U,B,V	10	Aksu O. et al., 2005, IBVS, 5588, 1
2453280.5840	-790.01015	-790.00000	2453280.58780	-0.00380	0	ced	10	Ogloza W. et al., 2008, IBVS, 5843, 1
2453562.9286 ± 0.0002	-35.99941	-36.00000	2453562.92838	0.00022	1	ced	10	Krajič T., 2006, IBVS, 5690, 1
2453575.4741 ± 0.0007	-2.49623	-2.50000	2453575.47269	0.00141	0.5	B,V,R,I	10	Petropoulou M., Gazetas K. et al., 2015, IBVS, 6153, 1
2453576.40885 ± 0.00034	0.00005	0.00000	2453576.40883	0.00002	0	B,V,R,I	10	Παρούσα Εργασία
2453576.5953 ± 0.0005	0.49797	0.50000	2453576.59606	-0.00076	0.5	B,V,R,I	10	Petropoulou M., Gazetas K. et al., 2015, IBVS, 6153, 1
2453577.34698 ± 0.00039	2.50536	2.50000	2453577.34497	0.00201	0.5	B,V,R,I	10	Παρούσα Εργασία
2453577.53206 ± 0.00026	2.99963	3.00000	2453577.53220	-0.00014	0	B,V,R,I	10	Παρούσα Εργασία
2453578.47026 ± 0.00024	5.50511	5.50000	2453578.46834	0.00191	0.5	B,V,R,I	10	Παρούσα Εργασία
2453579.40503 ± 0.00023	8.00145	8.00000	2453579.40449	0.00054	0	B,V,R,I	10	Παρούσα Εργασία
2453579.59232 ± 0.00062	8.50162	8.50000	2453579.59171	0.00061	0.5	B,V,R,I	10	Παρούσα Εργασία
2453631.6426 ± 0.0001	147.50364	147.50000	2453631.64124	0.00136	0	ced	10	Dvorak S.W., 2006, IBVS, 5677, 1
2453986.6397	1095.53532	1095.50000	2453986.62647	0.01323	0.5	ced	1	Ogloza W. et al., 2008, IBVS, 5843, 1
2454012.6534 ± 0.0003	1165.00578	1165.00000	2454012.65124	0.00216	0	ced	10	Krajič T., 2007, IBVS, 5806, 1
2454060.9594	1294.00858	1294.00000	2454060.95619	0.00321	0	lc	10	Kazuo Nagai, 2010, VSOLLJ, 45, 1
2455080.9770	4017.99985	4018.00000	2455080.97706	-0.00006	0	Rc	10	Kazuo Nagai, 2010, VSOLLJ, 50, 1
2455102.6932	4075.99369	4076.00000	2455102.69556	-0.00286	0	V	10	Diethelm R., 2010, IBVS, 5920, 1
2455426.0393	4939.50032	4939.50000	2455426.03918	0.00012	0.5	Rc	10	Kazuo N., 2011, VSOLLJ, 51, 1
2455435.0242	4963.49479	4963.50000	2455435.02615	-0.00195	0.5	Rc	10	Kazuo N., 2011, VSOLLJ, 51, 1
2455776.5289 ± 0.0004	5875.49457	5875.50000	2455776.53093	-0.00203	0.5	ced	10	Masek M. et al., 2013, BRNO, 38, 14
2455805.3636 ± 0.0002	5952.49860	5952.50000	2455805.36412	-0.00052	0.5	-U-I	10	Hubscher J., Lehmann P., 2012, IBVS, 6026, 1
2455855.7243 ± 0.0004	6086.98855	6087.00000	2455855.72859	-0.00429	0	ced	10	Diethelm R., 2012, IBVS, 6011, 1
2456141.0595	6848.98565	6849.00000	2456141.06482	-0.00537	0	V,Ic	10	Kazuo N., 2013, VSOLLJ, 55, 1-2
2456156.0393	6888.98993	6889.00000	2456156.04310	-0.00377	0	cB,cG,cR	10	Kazuo N., 2013, VSOLLJ, 55, 1-2
2456156.4275	6890.02666	6890.00000	2456156.41756	0.00998	0	ced	1	Retz M
2456167.0874	6918.49417	6918.50000	2456167.08958	-0.00218	0.5	V	10	Kazuo N., 2013, VSOLLJ, 55, 1-2
2456168.0232	6920.99325	6921.00000	2456168.02573	-0.00253	0	V	10	Kazuo N., 2013, VSOLLJ, 55, 1-2
2456180.9432	6955.49655	6955.50000	2456180.94449	-0.00129	0.5	V	10	Kazuo N., 2013, VSOLLJ, 55, 1-2
2456514.0189	7844.98639	7845.00000	2456514.02400	-0.00509	0	Ic	10	Kazuo N., 2014, VSOLLJ, 56, 1
2456531.9933	7892.98763	7893.00000	2456531.99793	-0.00463	0	Ic	10	Kazuo N., 2014, VSOLLJ, 56, 1
2457253.0118	9818.49176	9818.50000	2457253.01488	-0.00308	0.5	Ic	10	Kazuo N., 2016, VSOLLJ, 61, 1
2457308.4280 ± 0.002	9966.48259	9966.50000	2457308.43452	-0.00652	0.5	ced	10	Paschke A., 2017, OEJV, 181, 1
2457669.4080 ± 0.004	10930.49181	10930.50000	2457669.41107	-0.00307	0.5	ced	10	Paschke A., 2017, OEJV, 181, 1
2458015.4030 ± 0.004	11854.48308	11854.50000	2458015.40934	-0.00634	0.5	ced	10	Paschke A., 2018, OEJV, 191, 1
2458041.4290 ± 0.006	11923.98639	11924.00000	2458041.43410	-0.00510	0	ced	10	Paschke A., 2018, OEJV, 191, 1
2458059.4060 ± 0.007	11971.99457	11972.00000	2458059.40803	-0.00203	0	ced	10	Paschke A., 2018, OEJV, 191, 1
2458349.0461	12745.48819	12745.50000	2458349.05052	-0.00442	0.5	B,V,Ic	10	Kazuo N., 2019, VSOLLJ, 66, 1
2458352.0421	12753.48897	12753.50000	2458352.04618	-0.00413	0.5	V, Ic	10	Kazuo N., 2019, VSOLLJ, 66, 1
2458357.0952	12766.98345	12767.00000	2458357.10135	-0.00620	0	Ic, V	10	Kazuo N., 2019, VSOLLJ, 66, 1
2458707.0288	13701.49302	13701.50000	2458707.03142	-0.00262	0.5	V, Ic	10	Kazuo N., 2020, VSOLLJ, 67, 1
2458713.0180	13717.48738	13717.50000	2458713.02273	-0.00473	0.5	Ic	10	Kazuo N., 2020, VSOLLJ, 67, 1
2458727.9903	13757.47141	13757.50000	2458728.00101	-0.01071	0.5	Ic	10	Kazuo N., 2020, VSOLLJ, 67, 1

$$T_{\text{cal}} = T_0 + P \cdot E_{\text{fixed}} \quad (4.2)$$

Δημιουργείται η στήλη O-C με τις τιμές $T_{\text{obs}} - T_{\text{cal}}$. Χρησιμοποιήθηκαν χρόνοι ελαχίστων από όλες τις δημοσιεύσεις μέχρι το 2020 κατασκευάζοντας τον Πίνακα 4.1. Από τις τιμές O-C συναρτήσε του χρόνου που έγιναν οι παρατηρήσεις, προκύπτει το διάγραμμα O-C όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.1.

Η ανάλυση των διαγραμμάτων O-C γίνεται με τη χρήση ενός υπολογιστικού κώδικα (Zasche et al. 2009) στο λογισμικό MATLAB, ο οποίος προσαρμόζει βάσει της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων με στατιστικά βάρη, θεωρητικές καμπύλες στα σημεία O-C. Στόχος των προσαρμογών των θεωρητικών καμπύλων είναι η εύρεση των παραμέτρων των μηχανισμών. Τα στατιστικά βάρη στα O-C σημεία δίνονται ανάλογα με την αξιοπιστία του τρόπου παρατήρησης του φωτομετρικού ελαχίστου, αλλά και γενικότερα την διασπορά από τις υπόλοιπες τιμές. Συγκεκριμένα, για χρόνους ελαχίστων που υπολογίστηκαν βάσει οπτικών παρατηρήσεων (visual) δίνεται βάρος 1, ενώ για CCD παρατηρήσεις δίνεται βάρος 10. Παράλληλα μερικές μετρήσεις που παρουσίασαν μεγάλη διασπορά (π.χ. $T_{\text{obs}} = 2452491.4263$ από Tanriverdi T. et al., 2003) επιλέχθηκε στατιστικό βάρος 1, αν και ήταν CCD παρατήρηση. Η διαφορά στα στατιστικά βάρη μπορεί να φανεί στα σύμβολα αφού μεγάλοι κύκλοι έχουν επιλεγεί για τα στατιστικά βάρη ίσα με 10 και μικρά διαμάντια για τα στατιστικά βάρη ίσα με 1. Τέλος, «γεμισμένο» σύμβολο αντιστοιχεί σε χρόνους



Εικόνα 4.1: Το διάγραμμα O-C για το HV Aqr. Με κύκλους συμβολίζονται τα σημεία με στατιστικό βάρος 10 ενώ με διαμάντια τα σημεία με στατιστικό βάρος 1. Τα γεμάτα σύμβολα αντιστοιχούν σε πρωτεύοντα ελάχιστα ενώ τα άδεια σε δευτερεύοντα.

πρωτευόντων ελαχίστων, ενώ «άδεια» σύμβολα αντιστοιχούν σε χρόνους δευτερευόντων ελαχίστων. Παρακάτω, παρουσιάζονται οι επικρατέστεροι φυσικοί μηχανισμοί οι οποίοι είναι ικανοί να επηρεάσουν την τροχιακή περίοδο ενός εκλειπτικού συστήματος αστέρων.

• Light-Time Effect

Το Light-Time Effect (LITE) αναφέρεται στις περιοδικές μεταβολές της τροχιακής περιόδου ενός εκλειπτικού συστήματος αστέρων, λόγω ύπαρξης ενός τρίτου σώματος σε τροχιά γύρω από αυτό. Το διπλό σύστημα περιφέρεται γύρω από το κέντρο μάζας του τριπλού συστήματος, με αποτέλεσμα η απόστασή του από τον παρατηρητή να αυξομειώνεται περιοδικά. Έτσι, οι χρόνοι ελαχίστων θα μεταβάλλονται και αυτοί περιοδικά.

Οι Frieboes-Conde & Herczeg (1973) δημοσίευσαν μια λίστα με τα κριτήρια που θα έπρεπε να πληρούν οι παρατηρήσεις σε εκλειπτικά συστήματα αστέρων, ώστε να ερμηνευτούν οι περιοδικές μεταβολές των σημείων των διαγραμμάτων O-C τους με το LITE:

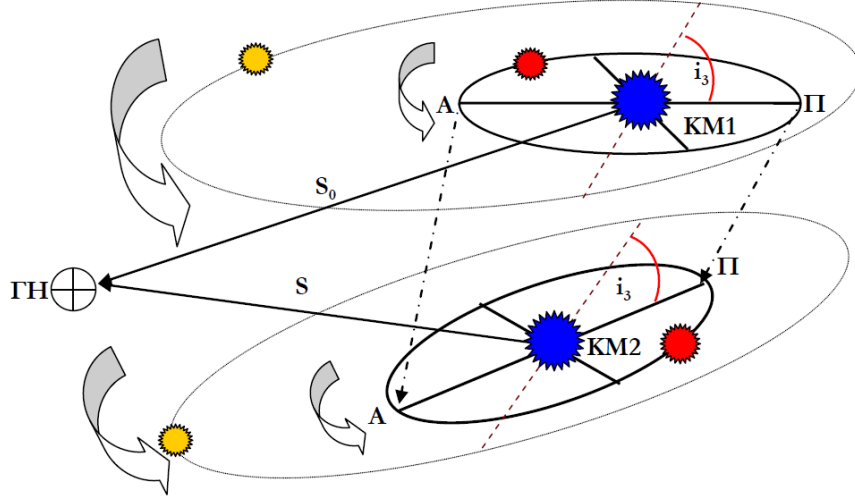
- (1) Συμφωνία των O-C σημείων με τη θεωρητική καμπύλη του LITE.
- (2) Τα σημεία O-C που αντιστοιχούν σε δευτερευόντα ελάχιστα να έχουν ταυτοτική συμπεριφορά με αυτά των πρωτευόντων.
- (3) Λογική τιμή της συνάρτησης μάζας (συγκρίσιμη με τις μάζες των αστέρων του εκλειπτικού συστήματος), ώστε να αποδεικνύεται η ύπαρξη του τρίτου αστέρα.
- (4) Αντίστοιχες μεταβολές στις ακτινικές ταχύτητες των αστέρων του εκλειπτικού συστήματος.

Η παρουσία ενός τρίτου σώματος στη γειτονιά του εκλειπτικού συστήματος αστέρων προκαλεί μετατόπιση του κέντρου μάζας του. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η χρονική διαφορά μεταξύ των φωτεινών σημάτων που λαμβάνει ο παρατηρητής λόγω των διαφορών μεταξύ παρατηρηθέντων και προβλεπόμενων χρόνων ελαχίστων. Το κέντρο μάζας του διπλού συστήματος διαγράφει ομοιόθετη ελλειπτική τροχιά προς εκείνη του τρίτου σώματος. Η απόστασή του S από τον παρατηρητή σε τυχαία χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση (Martynov 1973):

$$S = S_0 + U_{0b}(t - T_0) + \alpha_{1,2}(1 - e_{1,2} \cos \epsilon_3) \sin i_3 \sin(v_3 + \omega_3) \quad (4.3)$$

όπου S_0 η απόσταση του κέντρου μάζας του συστήματος από τον παρατηρητή τη χρονική στιγμή T_0 , U_{0b} η συνιστώσα της ταχύτητας του διπλού συστήματος στη διεύθυνση της ευθείας παρατήρησης, $\alpha_{1,2}$ το μήκος του ημιάξονα της τροχιάς του κέντρου μάζας του διπλού συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του τριπλού συστήματος, $e_{1,2}$ η εκκεντρότητα της τροχιάς του κέντρου μάζας του διπλού συστήματος, i_3 η κλίση της τροχιάς του τρίτου αστέρα ως προς το τροχιακό επίπεδο του εκλειπτικού συστήματος, ω_3 το μήκος του περιάστρου της τροχιάς του και v_3 , ϵ_3 η αληθής και έκκεντρη ανωμαλία αντίστοιχα του τρίτου αστέρα σε τυχαία χρονική στιγμή (Εικόνα 4.2).

Οι παρατηρούμενες O-C μεταβολές λόγω LITE δίνονται από τη σχέση:



Εικόνα 4.2: Γεωμετρία ενός εκλειπτικού συστήματος αστέρων (κόκκινος και μπλε κύκλος) με την παρουσία ενός τρίτου αστήρα (κίτρινος κύκλος) και η μετατόπιση του κέντρου μάζας (KM) του διπλού συστήματος (από KM1 στο KM2). Επίσης, έχει σχεδιαστεί και η διαφορά των οπτικών δρόμων S και S_0 και η γραμμή των αψίδων (ΠΑ).

$$O - C = \frac{A}{\sqrt{1 - e_3^2 \cos^2 \omega_3}} \left[\frac{1 - e_3^2}{1 + e_3 \cos v_3} \sin(v_3 + \omega_3) + e_3 \sin \omega_3 \right] \quad [\text{days}] \quad (4.4)$$

με A το ημιπλάτος της καμπύλης του LITE και δίνεται σαν:

$$A = \frac{1}{2} [(O - C)_{\max} - (O - C)_{\min}] = \frac{\alpha_{1,2} \sin i_3 \sqrt{1 - e_3^2 \cos^2 \omega_3}}{173.145} \quad [\text{days}] \quad (4.5)$$

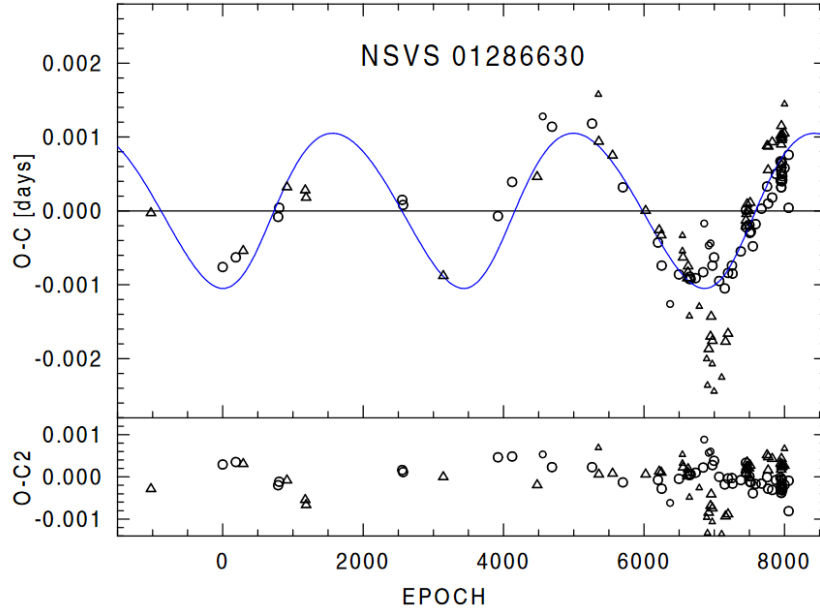
με $\alpha_{1,2}$ ο ημιάξονας της τροχιάς του διπλού συστήματος γύρω από το βαρύνκτρο του τριπλού συστήματος και υπολογίζεται από τον τρίτο νόμο του Kepler (Σχέση 1.2):

$$\alpha_{1,2} = \left(\frac{(M_3 \sin i_3)^3 P_3^2}{(M_1 + M_2 + M_3)^2} \right)^{1/3} \quad [\text{AU}] \quad (4.6)$$

όπου P_3 η περίοδος του τρίτου σώματος γύρω από το κοινό κέντρο μάζας εκφρασμένη σε years και οι μάζες $M_{1,2,3}$ των αστέρων εκφρασμένες σε ηλιακές μάζες.

Η συνάρτηση μάζας του τρίτου σώματος δίνεται από τη σχέση (Torres et al., 2010):

$$f(m_3) = \frac{(\alpha_{1,2} \sin i_3)^3}{P_3^2} = \frac{(M_3 \sin i_3)^3}{(M_1 + M_2 + M_3)^2} = \frac{1}{P_3^2} \left[\frac{173.145 A}{\sqrt{1 - e_3^2 \cos^2 \omega_3}} \right]^3 \quad [M_{\odot}] \quad (4.7)$$



Εικόνα 4.3: Το διάγραμμα O-C για το σύστημα NSVS 01286630 (Wolf, M., Zasche, P., Kučáková, H. et al., 2016, A&A, 587, A82). Η προσαρμογή περιοδικής συνάρτησης οδηγεί στο συμπέρασμα ύπαρξης τρίτου σώματος.

βάσει της οποίας προκύπτει η μάζα του τρίτου σώματος M_3 .

Από την άλλη μεριά, μπορεί να βγει το συμπέρασμα για την ύπαρξη τρίτου μέλους μέσα από της καμπύλες ταχυτήτων, δηλαδή από φασματοσκοπία. Λόγω της ύπαρξης του τρίτου σώματος παρατηρείται μεταβολή στις ακτινικές ταχύτητες V_r των αστερών του εκλειπτικού συστήματος, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$V_r = K [\cos(v_3 + \omega_3) + e_3 \cos \omega_3] \quad (4.8)$$

όπου το K δίνεται από την σχέση:

$$K = \frac{A}{P_3} \frac{5156}{\sqrt{(1 - e_3^2) (1 - e_3^2 \cos^2 \omega_3)}} \quad (4.9)$$

• Μεταφορά και απώλεια μάζας-στροφορμής

Η μεταφορά μάζας μεταξύ των μελών ενός διπλού συστήματος λαμβάνει χώρα όταν ο ένας εκ των δύο ή και οι δύο αστέρες του συστήματος γεμίσει/ουν τον/τους λοβό/ούς Roche του/τους. Αντίθετα, απώλεια μάζας από το σύστημα μπορεί να πραγματοποιηθεί ανεξάρτητα από την πλήρωση των λοβών. Στην απλούστερη περίπτωση (συντηρητική), ο ένας εκ των δύο αστερών μεταφέρει μάζα στον συνοδό του, ο οποίος τη δέχεται χωρίς απώλειες. Αποτέλεσμα, η ολική μάζα του συστήματος $M_{ολ}$ παραμένει σταθερή και η ολική στροφορμή $J_{ολ}$ διατηρείται. Παρακάτω οι δείκτες 1 και 2 αντίστοιχα αναφέρονται στον

αποδέκτη και στον δότη μάζας αστέρα:

$$M_1 + M_2 = M_{o\lambda} = \text{σταθερό} \quad (4.10)$$

$$dM_1 = -dM_2 \quad (4.11)$$

Η ολική στροφορμή δίνεται από τη σχέση:

$$J_{o\lambda} = \sqrt{\frac{GM_1^2 M_2^2 \alpha (1 - e^2)}{M_{o\lambda}}} = \text{σταθερό} \quad (4.12)$$

Από τη Σχέση 4.12 προκύπτει (με $c = \text{σταθερά}$):

$$\alpha = \frac{c}{(M_1 M_2)^2} \quad (4.13)$$

ενώ ο τρίτος νόμος του Kepler (Σχέση 1.2) μπορεί να γραφτεί σαν:

$$GM_{o\lambda} = 4\pi^2 \frac{\alpha^3}{P^2} \quad (4.14)$$

Επομένως, από τις Σχέσεις 4.13 και 4.14 φαίνεται ότι στη συντηρητική περίπτωση μεταφοράς μάζας μεταβάλλεται και η τροχιακή περίοδος του συστήματος αφού μεταβάλλεται ο ημιάξονάς του.

Έστω ότι αρχικά οι μάζες των αστέρων ήταν M_{1i} , M_{2i} και P_i η αρχική περίοδος του συστήματος πριν ξεκινήσει η μεταφορά της μάζας. Σε μία τυχαία χρονική στιγμή t από τις Σχέσεις 4.13 και 4.14 θα ισχύει:

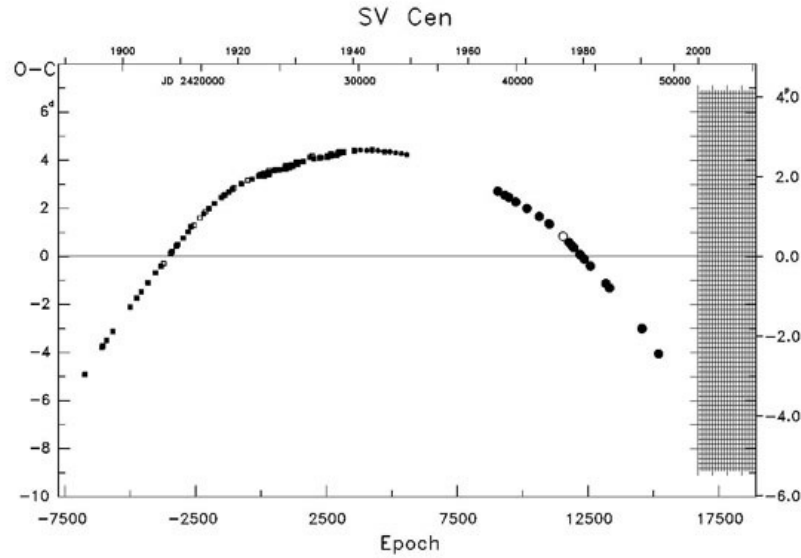
$$\frac{P(t)}{P_i} = \left(\frac{M_{1i} M_{2i}}{M_1 M_2} \right)^3 \quad (4.15)$$

Διαφορίζοντας τη Σχέση 4.15 και χρησιμοποιώντας την Σχέση 4.11 προκύπτει (Kruszewski 1966, Hilditch 2001):

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{3\dot{M}_1 (M_1 - M_2)}{M_1 M_2} = 3 \frac{1 - q^2}{q (M_1 + M_2)} \dot{M} \quad (4.16)$$

όπου \dot{P} η μεταβολή της περιόδου P και $\dot{M} > 0$ η μεταφορά μάζας (γενικά ο συμβολισμός της τελείας πάνω από ένα μέγεθος αναφέρεται στη χρονική μεταβολή του). Ανάλογα με τη φορά της ροής μάζας (π.χ. από τον μεγαλύτερης προς τον μικρότερης μάζας αστέρα) και τις τιμές των μαζών των αστέρων, η περίοδος μπορεί είτε να αυξάνεται είτε να μειώνεται. Στην Εικόνα 4.4 φαίνεται ένα τέτοιο παράδειγμα. Η περίοδος του συστήματος SV Cen συνεχώς μειώνεται (μεταφορά μάζας) μέχρι να έχει μεταφερθεί αρκετή μάζα, ώστε να αλλάξει φορά η ροή και η περίοδος να αρχίσει να αυξάνεται.

Ένα κοινό φαινόμενο που συμβαίνει σε διπλά συστήματα αστέρων, είναι, εκτός από μεταφορά μάζας να χάνεται μάζα από το σύστημα. Μηχανισμοί που εξηγούν το φαινόμενο



Εικόνα 4.4: Το διάγραμμα O-C για το σύστημα SV Cen (Kreiner, Kim and Nha, 2001). Το παραβολοειδές σχήμα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μεταβολή στην περίοδο (στην προκειμένη περίπτωση οφείλεται σε μεταφορά μάζας).

αυτό είναι: (1) Ύπαρξη αστρικών ανέμων, (2) υπερπλήρωση του λοβού Roche και ταχεία μεταφορά μάζας (Εικόνα 3.6, περίπτωση «υπερχείλισης»), (3) ξαφνική απώλεια μάζας εάν το σύστημα γίνει καινοφανής ή ένα από τα μέλη του υπερκαινοφανής και (4) απώλεια μάζας λόγω μαγνητικής πέδησης.

Για την απώλεια μάζας λόγω αστρικών ανέμων όπως και για την απώλεια λόγω μαγνητικής πέδησης, μπορεί να γίνει μαθηματική περιγραφή της μεταβολής στην περίοδο. Πιο συγκεκριμένα, η πιο απλή περίπτωση είναι αυτή της συμμετρικής απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου από κάποιον μαγνητικά ενεργό αστέρα, χωρίς απαραίτητα να υπάρχει αλληλεπίδραση με τον συνοδό. Με δείκτη 1 τον αστέρα που χάνει μάζα και με 2 τον συνοδό προκύπτει η σχέση (Hilditch 2001):

$$\frac{\dot{P}}{P} = -\frac{2\dot{M}_1}{M_1 + M_2} \quad (4.17)$$

Με τις συνθήκες υπόθεσης:

$$\dot{M}_1 < 0 \text{ και } \dot{M}_2 = 0 \quad (4.18)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνεται ότι στην περίπτωση απώλειας μάζας λόγω αστρικών ανέμων από κάποιον εκ των συνοδών (ή ακόμα και από τους δύο) ενός διπλού συστήματος, τότε υποχρεωτικά η περίοδος του συστήματος αυξάνεται.

Από την άλλη μεριά, μαγνητική πέδηση (magnetic braking) είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η γωνιακή ταχύτητα ιδιοπεριστροφής Ω ενός μαγνητικά ενεργού αστέρα μειώνεται λόγω της ροπής που αναπτύσσεται από την αζιμουθιακή συνιστώσα της δύναμης Lorentz, ως συνέπεια της στρέβλωσης των δυναμικών γραμμών (Νανούρης 2011). Προτάθηκε για

πρώτη φορά από τον Schatzman (1962). Οι Erdem et al. (2005) έδειξαν ότι η μεταβολή στη περίοδο με απώλεια μάζας από τον αστέρα λόγω μαγνητικής πέδησης δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\dot{P}}{P} = 3 \left(\frac{kr_A}{\alpha} \right)^2 \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} \dot{M} \quad (4.19)$$

όπου r_A η ακτίνα Alfvén του μαγνητικά ενεργού αστέρα έχοντας μία τυπική τιμή $r_A \sim 10R$ (Soydugan et al., 2011), kR η γυροσκοπική ακτίνα του αστέρα και α ο ημιάξονας της τροχιάς του συστήματος. Επομένως, από τη Σχέση 4.19 προκύπτει το συμπέρασμα ότι σε περίπτωση ύπαρξης μαγνητικής πέδησης η περίοδος του συστήματος μειώνεται.

Ο συνδυασμός όλων των παραπάνω μηχανισμών μπορεί να δώσει ένα αρκετά σύνθετο διάγραμμα O-C, χωρίς να είναι πάντα απλό να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταφοράς/απώλειας μάζας. Ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να υπολογιστεί μέσω των διαγραμμάτων O-C ο ρυθμός μεταβολής της περιόδου είναι ο παρακάτω: Αρχικά, έστω γνωστή εφημερίδα για το σύστημα (Σχέση 3.2), από τον ορισμό του O-C θα ισχύει:

$$\begin{aligned} O - C &= T_{\text{obs}} - T_{\text{cal}} = \Delta T(E) = T_{\text{obs}} - T_0 - E \cdot P \Rightarrow \\ T_{\text{obs}} &= \Delta T(E) + T_{\text{cal}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

όπου ο προβλεπόμενος χρόνος ελαχίστου T_{cal} υπολογίζεται από μια γραμμική εφημερίδα, η οποία περιέχει μια σταθερή τιμή της περιόδου P_e δηλαδή:

$$T_{\text{cal}} = T_0 + P_e E \quad (4.21)$$

Αποτέλεσμα η τιμή της περιόδου η οποία μεταβάλλεται ανά τροχιακό κύκλο, θα δίνεται από τη σχέση:

$$P(E) = T_{\text{obs}}(E) - T_{\text{obs}}(E - 1) = P_e + \Delta T(E) - \Delta T(E - 1) \quad (4.22)$$

Η διαφορά $\Delta T(E)$ μπορεί να γραφτεί σε μια γενική πολυωνυμική μορφή:

$$\Delta T(E) = \sum_{j=0}^n c_j E^j \quad (4.23)$$

Συνδυάζοντας τις Σχέσεις 4.22 και 4.23 προκύπτει:

$$\begin{aligned} P(E) &= P_e + \sum_{j=0}^n c_j E^j - \sum_{j=0}^n c_j (E - 1)^j \Rightarrow \\ \frac{dP(E)}{dE} &= \sum_{j=0}^n c_j j E^{j-1} - \sum_{j=0}^n c_j j (E - 1)^{j-1} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Από τη Σχέση 4.20 και διαφορίζοντας την, προκύπτει:

$$\frac{dE}{dT_{\text{cal}}} = \frac{1}{P_e} \quad (4.25)$$

η οποία με χρήση του κανόνα της «αλυσίδας» δίνει:

$$\frac{dP(E)}{dT_{\text{cal}}} \equiv \dot{P} = \frac{1}{P_e} \frac{dP(E)}{dE} \quad (4.26)$$

Η Σχέση 4.24 προσδιορίζει την μεταβολή της περιόδου, αρκεί να οριστεί ο αριθμός των όρων που θα κρατηθούν. Ουσιαστικά, πρόκειται για διόρθωση της γραμμικής εφημερίδας τοποθετώντας επιπλέον όρους, οι οποίοι αποβλέπουν στη βελτίωση της πρόβλεψης των χρόνων ελαχίστων του εκλειπτικού συστήματος. Μία καλή προσέγγιση των O-C σημείων είναι το παρακάτω τριώνυμο:

$$O - C = c_0 + c_1 E + c_2 E^2 \quad (4.27)$$

Από την Σχέση 4.24 αναπτύσσοντας μέχρι $j = 3$ (δηλαδή κρατώντας τους όρους c_0, c_1, c_2) προκύπτει:

$$c_2 = \frac{1}{2} \frac{dP(E)}{dE} \xrightarrow{\text{Σχέση 4.26}} c_2 = \frac{P_e \dot{P}}{2} \Rightarrow \dot{P} = \frac{2c_2}{P_e} \quad (4.28)$$

Η σταθερά c_2 προκύπτει από την προσαρμογή παραβολής στα σημεία O-C (εφόσον το διάγραμμα O-C έχει παραβολική συμπεριφορά). Έτσι, μπορεί να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της περιόδου και κατά συνέπεια να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταφοράς ή/και απώλειας μάζας.

• Μηχανισμός Applegate

Ο Applegate (1992) πρότεινε μια εναλλακτική εξήγηση για πιθανή διαμόρφωση των διαγραμμάτων O-C από τη μαγνητική δραστηριότητα κάποιου εκ των δύο αστέρων του συστήματος. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, περιοδικές μεταβολές της τροχιακής περιόδου ενός διπλού συστήματος της τάξεως των δεκαετιών, είναι πιθανόν να προέρχονται από τη μαγνητική δραστηριότητα ενός εκ των δύο αστέρων μελών. Γι' αυτόν τον μηχανισμό απαιτείται παρουσία ζώνης μεταφοράς στο εσωτερικό του αστέρα, ώστε να υπάρξει μαγνητικό δυναμό. Προφανώς, μεταβολές στην τροχιακή περίοδο λόγω αυτού του μηχανισμού μπορούν να παρουσιάσουν τα συστήματα εκείνα στα οποία τουλάχιστον ο ένας αστέρας έχει βαθιά ζώνη μεταφοράς και από την οποία εξαρτάται η ένταση του μαγνητικού του πεδίου.

Σύμφωνα με τον μηχανισμό Applegate (1992), οι μεταβολές της τροχιακής περιόδου του συστήματος οφείλονται στη μεταβολή της τετραπολική ροπής (quadruple moment variation) ΔQ του μαγνητικά ενεργού αστέρα. Ο μαγνητικά ενεργός αστέρας γίνεται πεπλατυσμένος στο ισημερινό του επίπεδο και εξαρτάται από τον ρυθμό περιστροφής των εξωτερικών στρωμάτων του. Η μεταφορά ιδιοστροφορμής από το εσωτερικό προς τα εξωτερικά στρώματα του αστέρα προκαλεί ιδιοπεριστροφή με μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα, και κατ' επέκταση ολοένα και μεγαλύτερη πλάτυνση. Ωστόσο, εάν με τη σειρά τους τα εξωτερικά στρώματα χάνουν στροφορμή (π.χ. λόγω αστρικού ανέμου), τότε η

πλάτυνση μειώνεται. Εφόσον ο σημαντικότερος παράγοντας ανάπτυξης και διατήρησης του δυναμό είναι το μαγνητικό πεδίο του αστέρα, η διαφορική περιστροφή του παίζει σημαντικότατο ρόλο. Ποσοτικά, εάν το μαγνητικό πεδίο κάτω από τη φωτόσφαιρα του αστέρα είναι της τάξης των μερικών KG, τότε δύναται να μεταφέρει την απαιτούμενη ποσότητα στροφορμής στα εξωτερικά στρώματα και να ικανοποιεί τις παρατηρούμενες μεταβολές στην περίοδο του συστήματος.

Η μεταβολή της τροχιακής περιόδου ΔP υπολογίζεται από τη σχέση (Rovithis-Livaniou et al. 2000) σαν:

$$\Delta P = A \sqrt{2 \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{P}{P_{\text{mod}}} \right) \right]} \quad (4.29)$$

όπου A το πλάτος της O-C μεταβολής, P_{mod} η περίοδος της μεταβολής της τροχιακής περιόδου P του συστήματος. Προσδιορίζονται μέσω προσαρμογής μιας περιοδικής συνάρτησης στο διάγραμμα O-C.

Οι Lanza & Rodonò (2002) απέδειξαν ότι η τροχιακή περίοδος ενός διπλού συστήματος δύναται να επηρεαστεί από τη μεταβολή της τετραπολικής ροπής κάποιου εκ των μελών του μόνο όταν αυτή βρίσκεται μεταξύ του εύρους $10^{50} - 10^{51} \text{ gr} \cdot \text{cm}^2$.

4.2 Ανάλυση του διαγράμματος O - C

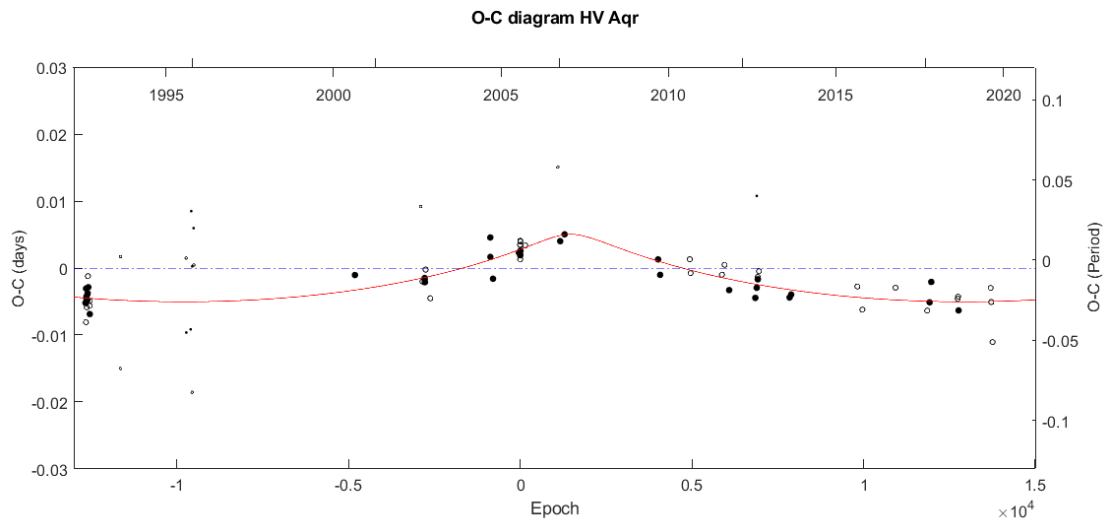
Από τις Σχέσεις 4.4, 4.27, 4.28 και από την βασική γραμμική σχέση εφημερίδας (Σχέση 4.21 ισοδύναμα Σχέση 3.2) προκύπτει η προσέγγιση που μπορεί γενικά να περιγράψει διάφορες μεταβολές σαν:

$$\text{Min I} = T_0 + P_e E + \frac{P_e}{2} \frac{dP}{dt} E^2 + A \sin \left(\frac{2\pi E}{P_e} + \phi \right) \quad (4.30)$$

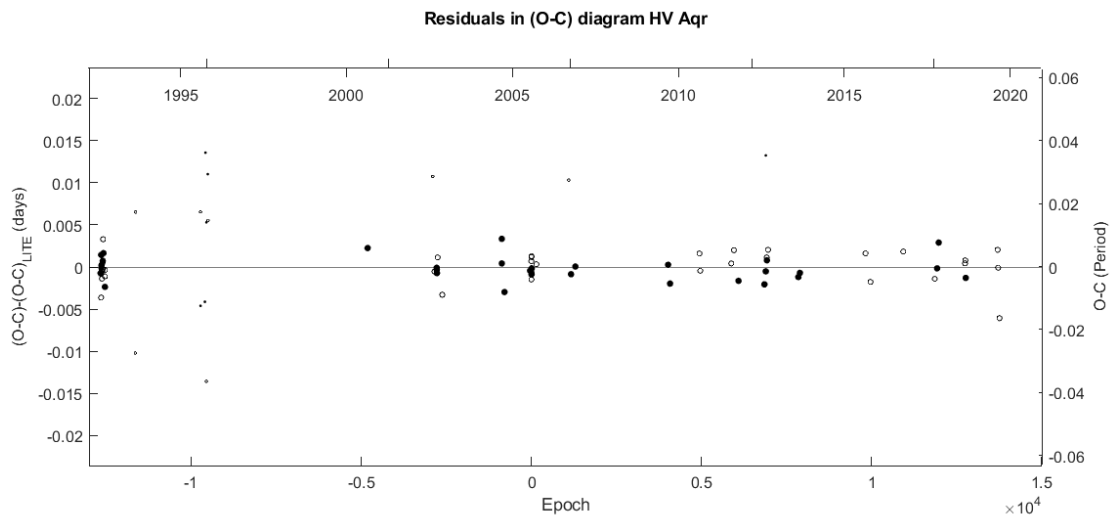
όπου $T_0 = 2453576.4083 \text{ days}$, $P_e = 0.37445705 \text{ days}$ και A , ϕ , $\frac{dP}{dt}$ σταθερές που υπολογίζονται από την προσαρμογή καμπυλών στα σημεία O-C.

Ο υπολογιστικός κώδικας (Zasche et al. 2009) δέχεται την αστρονομική εφημερίδα για ένα διπλό σύστημα, τους χρόνους ελαχίστων και τα στατιστικά βάρη τους σε ένα αρχείο txt. Ακόμα σε ένα άλλο αρχείο επιλέγονται ποιες παράμετροι υπολογίζονται (π.χ. η τροχιακή περίοδος του τρίτου αστέρα-μέλος γύρω από το διπλό σύστημα) και ποιες παράμετροι θα μείνουν fixed (π.χ. οι μάζες των αστέρων του διπλού συστήματος, η αστρονομική εφημερίδα κ.α.). Στη συνέχεια αφού ξεκινά ο κώδικας να τρέχει, επιλέγεται από τον χρήστη ποια προσαρμογή επιθυμεί να γίνει (LITE only, quadratic term only, both) και με πόσα βήματα. Για το διάγραμμα O-C του HV Aqr (Εικόνα 4.1) έγινε αναζήτηση δύο λύσεων. Στην πρώτη περίπτωση υπήρχε μόνο προσαρμογή περιοδικού όρου (LITE), ενώ στη δεύτερη υπήρχαν και οι δύο προσαρμογές (LITE και quadratic term). Πιο αναλυτικά:

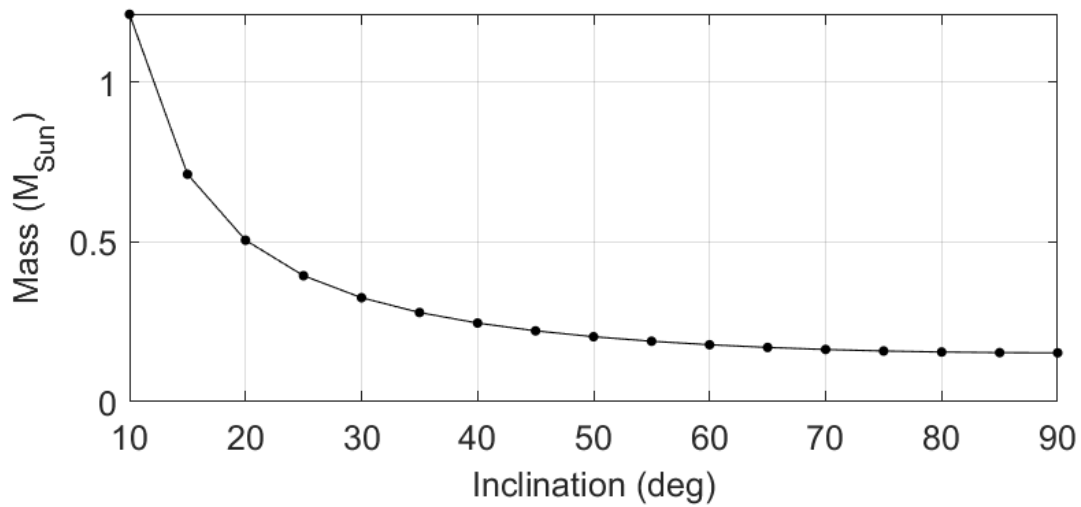
• Λύση μόνο με *LITE*



Εικόνα 4.5: Το διάγραμμα O-C για το σύστημα HV Aqr με την προσαρμογή περιοδικού όρου.



Εικόνα 4.6: Τα residuals για το διάγραμμα O-C του συστήματος HV Aqr μετά την αφαίρεση της θεωρητικής περιοδικής καμπύλης.



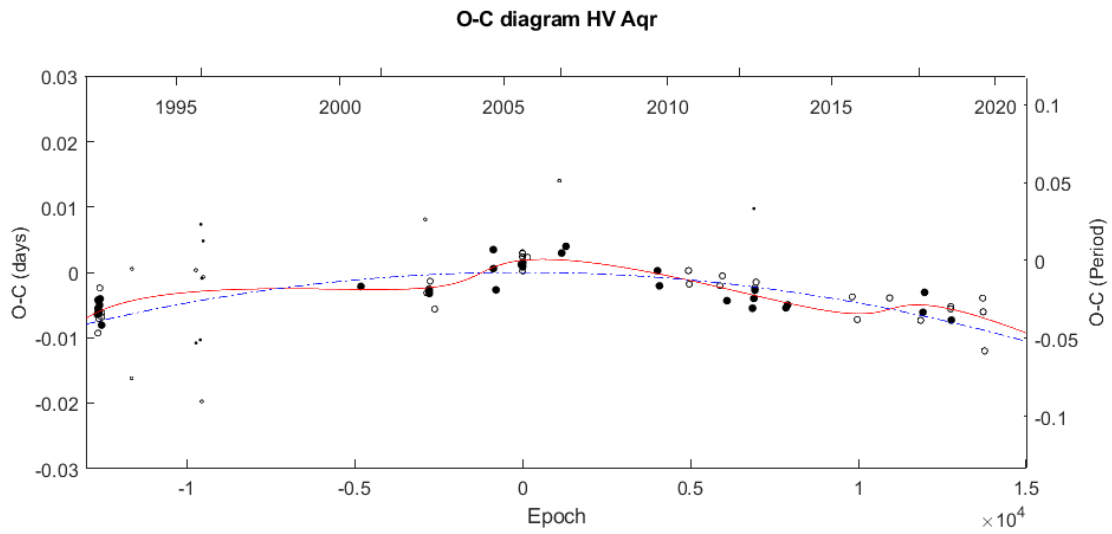
Εικόνα 4.7: Η συνάρτηση μάζας του τρίτου αστέρα μέλους για το σύστημα HV Aqr

Πίνακας 4.2: Οι παράμετροι που προέκυψαν από την προσαρμογή μόνο περιοδικού όρου στο διάγραμμα O-C για το σύστημα HV Aqr.

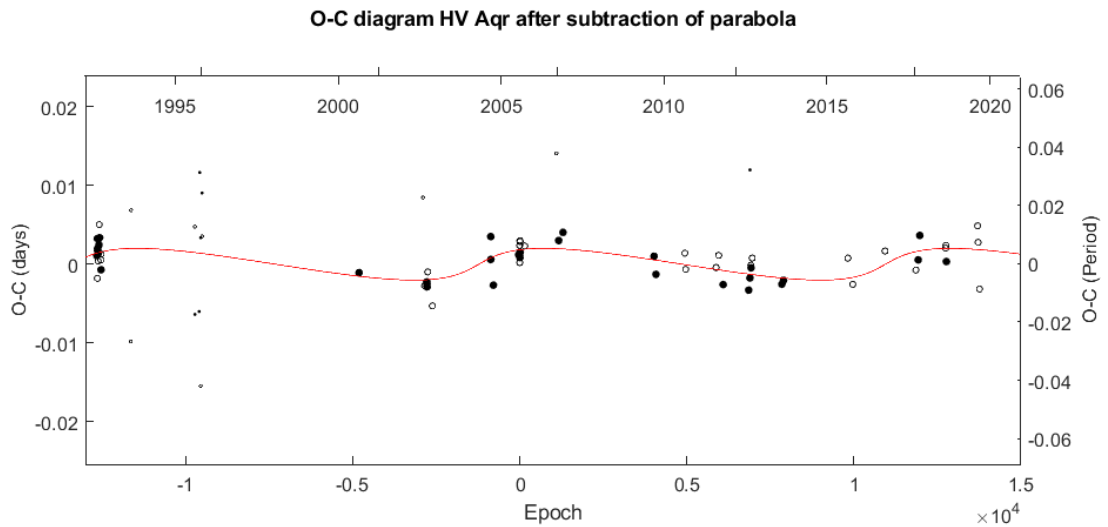
Παράμετρος	Τιμή \pm σφάλμα
P_3 [years]	23.2985 ± 0.0001
T_3 [HJD]	-549746 ± 872
A [days]	0.0050481 ± 0.0007043
ω_3 [$^\circ$]	88.3 ± 45.1
e_3	0.69 ± 0.24
$\alpha_{1,2} \cdot \sin i$ [AU]	0.87 ± 0.12
$f(m_3)$ [M_\odot]	0.0012306 ± 0.0000035
$m_3(i = 90^\circ)$ [M_\odot]	0.15217 ± 0.00015
$m_3(i = 60^\circ)$ [M_\odot]	0.17746 ± 0.00018
$m_3(i = 30^\circ)$ [M_\odot]	0.32470 ± 0.00035
$\Sigma \chi^2$	0.002981

όπου T_3 αποτελεί το σημείο αναφοράς για το περίαστρο της τροχιάς του τρίτου αστέρα μέλους.

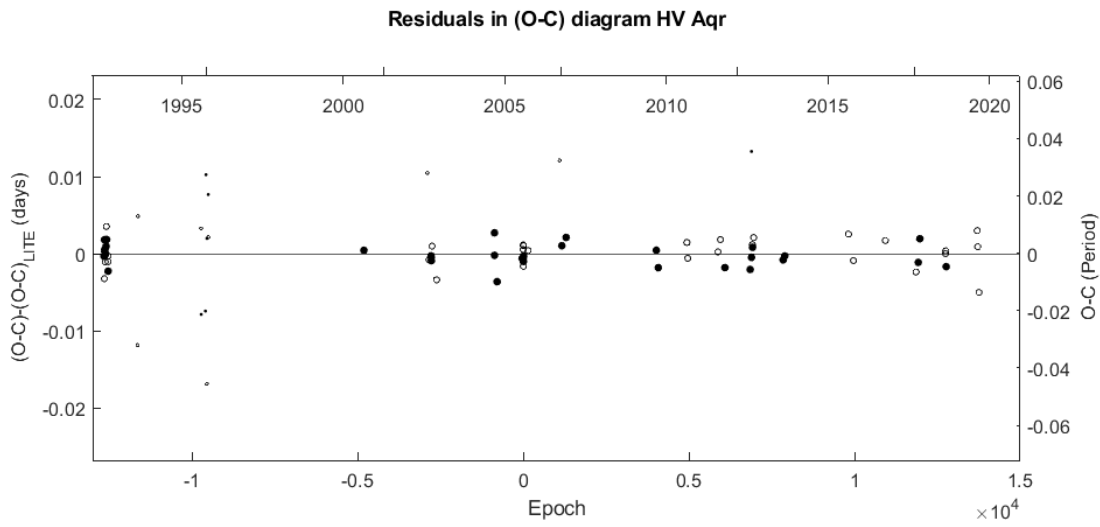
• Λύση με *LITE* και παραβολικό όρο



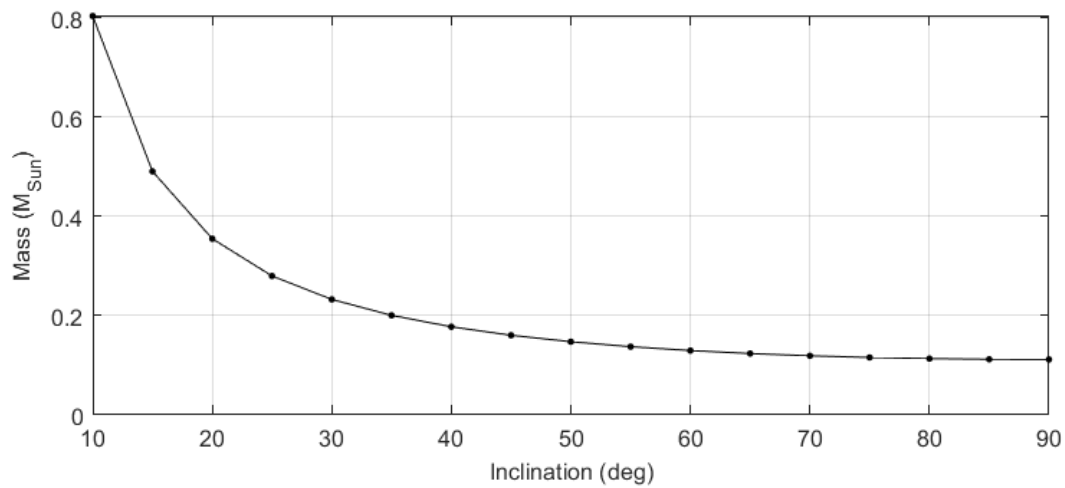
Εικόνα 4.8: Το διάγραμμα O-C για το σύστημα HV Aqr με την προσαρμογή περιδικού όρου και παραβολής.



Εικόνα 4.9: Το διάγραμμα O-C του συστήματος HV Aqr μετά την αφαίρεση της θεωρητικής παραβολής.



Εικόνα 4.10: Τα residuals για το διάγραμμα O-C του συστήματος HV Aqr μετά την αφαίρεση της θεωρητικής περιοδικής καμπύλης και της παραβολής.



Εικόνα 4.11: Η συνάρτηση μάζας του τρίτου αστέρα μέλους για το σύστημα HV Aqr.

Πίνακας 4.3: Οι παράμετροι που προέκυψαν από την προσαρμογή περιοδικού όρου (LITE) και παραβολικού όρου στο διάγραμμα O-C για το σύστημα HV Aqr.

Παράμετρος	Τιμή \pm σφάλμα
P_3 [years]	12.48 ± 0.96
T_3 [HJD]	1614644 ± 64468
A [days]	0.00202 ± 0.00067
ω_3 [°]	0.0 ± 44.9
e_3	0.57 ± 0.85
gmt	$(-0.4692 \pm 0.0001) \cdot 10^{-10}$
$\alpha_{1,2} \cdot \sin i$ [AU]	0.42 ± 0.14
$f(m_3)$ [M_\odot]	0.000491 ± 0.000008
$m_3(i = 90^\circ)$ [M_\odot]	0.11066 ± 0.00063
$m_3(i = 60^\circ)$ [M_\odot]	0.12870 ± 0.00073
$m_3(i = 30^\circ)$ [M_\odot]	0.23110 ± 0.00140
$\sum \chi^2$	0.002900

Αρχικά, με την υπόθεση ότι η μεταβολή στη τροχιακή περίοδο οφείλεται σε μεταφορά μάζας¹ μπορεί να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταφοράς μάζας από τον πρωτεύοντα στον δευτερεύοντα αστέρα από την παράμετρο gmt . Προκύπτει:

$$\dot{M}_1 = -(1.90 \pm 0.11) \cdot 10^{-8} M_\odot/\text{yr}$$

Ενώ η μεταβολή στην περίοδο προκύπτει:

$$\dot{P} = \frac{dP}{dt} = -(9.150 \pm 0.002) \cdot 10^{-8} \text{ days/yr}$$

Από μελέτες που έχουν δημοσιευτεί (Kouzuma, 2018, PASJ, 70, 5 & Li et al., 2020, AJ, 159, 5) η παραπάνω μεταφορά μάζας είναι ελαφρώς μικρότερη από τις τιμές που γενικά συναντώνται σε διπλά συστήματα σε επαφή.

Από την άλλη μεριά η περιοδική συνάρτηση στις δύο προσαρμογές θα μπορούσε να οφείλεται στον μηχανισμό Applegate (Σχέση 4.29). Για να γίνει αυτό θα πρέπει να ισχύει το κριτήριο Lanza & Rodonò, δηλαδή τουλάχιστον για τον έναν αστέρα να ισχύει $\Delta Q_i > 10^{50} \text{ gr cm}^2$ & $\Delta Q_i < 10^{51} \text{ gr cm}^2$. Μετά από πράξεις (για τις απόλυτες παραμέτρους της λύσης με κηλίδα και q ελεύθερο) προκύπτει ότι για την πρώτη περίπτωση (μόνο LITE):

$$\Delta Q_1 = (3.7 \pm 0.5) \cdot 10^{49} \text{ gr cm}^2 \text{ και } \Delta Q_2 = (0.53 \pm 0.08) \cdot 10^{49} \text{ gr cm}^2$$

για την λύση με LITE και παραβολικό όρο:

$$\Delta Q_1 = (2.7 \pm 0.9) \cdot 10^{49} \text{ gr cm}^2 \text{ και } \Delta Q_2 = (0.40 \pm 0.01) \cdot 10^{49} \text{ gr cm}^2$$

¹Όπως αναφέρθηκε θα μπορούσε να οφείλεται και σε ύπαρξη μαγνητικής πέδησης.

Οπότε, η τετραπολική ροπή της δύναμης δεν είναι αρκετή ώστε να μετακινήσει κηλίδες στην φωτόσφαιρα στον έναν από τους δύο αστέρες και να προκαλέσει περιοδική μεταβολή στην περίοδο.

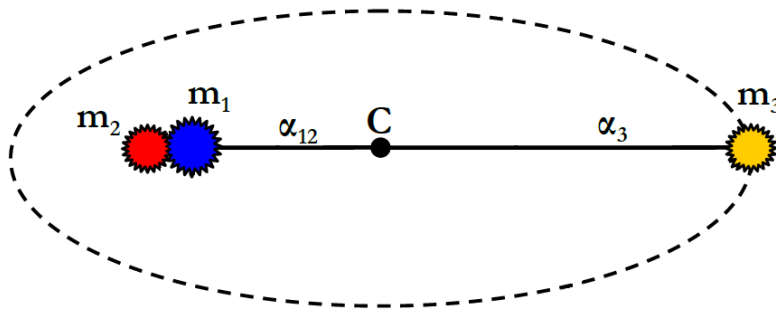
Από το άθροισμα των residuals φαίνεται ότι η δεύτερη κατά σειρά λύση περιγράφει καλύτερα το διάγραμμα O-C (έχουν ουσιαστικά μία τάξης μεγέθους διαφορά). Ακόμα, κάτι που φαίνεται και στις δύο λύσεις είναι ότι η εκκεντρότητα όπως επίσης και το μήκος του περιάστρου έχουν πολύ σημαντικό σφάλμα. Αυτό ενδεχομένως να συμβαίνει λόγω της μορφής της περιοδικής συνάρτησης (Εικόνες 4.5 και 4.8). Λόγω του ότι δεν υπάρχουν «πολλές κορυφές» στην περιοδικότητα, μπορούν να προσαρμοστούν πολλές καμπύλες με διαφορετικό συνδυασμό e και ω_3 .

Επιλέγοντας την τελευταία κατά σειρά λύση (LITE και παραβολικό όρο) υπολογίστηκαν τα τροχιακά χαρακτηριστικά του τρίτου αστέρα-μέλους. Με παραμέτρους τη λύση με κηλίδα και ελεύθερο q , προέκυψε ο παρακάτω πίνακας ανάλογα την γωνία i :

Πίνακας 4.4: Τα τροχιακά χαρακτηριστικά του τρίτου αστέρα-μέλους για το σύστημα HV Aqr για διάφορες γωνίες i .

Παράμετρος	$i = 90^\circ$	$i = 60^\circ$	$i = 30^\circ$
L_3 [%]	0.01	0.02	0.15
Δm [mag]	9.89 ± 0.09	9.32 ± 0.09	7.09 ± 0.09
α_{12} [AU]	0.43 ± 1.34	0.49 ± 1.32	0.85 ± 1.18
α_3 [AU]	5.9 ± 18.7	5.9 ± 15.78	5.66 ± 7.88
θ_3 [mas]	32.6 ± 0.1	32.7 ± 0.1	33.4 ± 0.1

όπου το L_3 είναι το ποσοστό της φωτεινότητας του τρίτου αστέρα από την συνολική, Δm είναι η διαφορά του φαινομένου μεγέθους του τρίτου αστέρα σε σχέση το διπλό σύστημα, η απόσταση α_{12} και α_3 μπορεί να φανεί στην Εικόνα 4.12 και η γωνιακή απόσταση θ_3 για το τρίτο σώμα από το διπλό σύστημα σε milliarcseconds (mas). Το ποσοστό για την



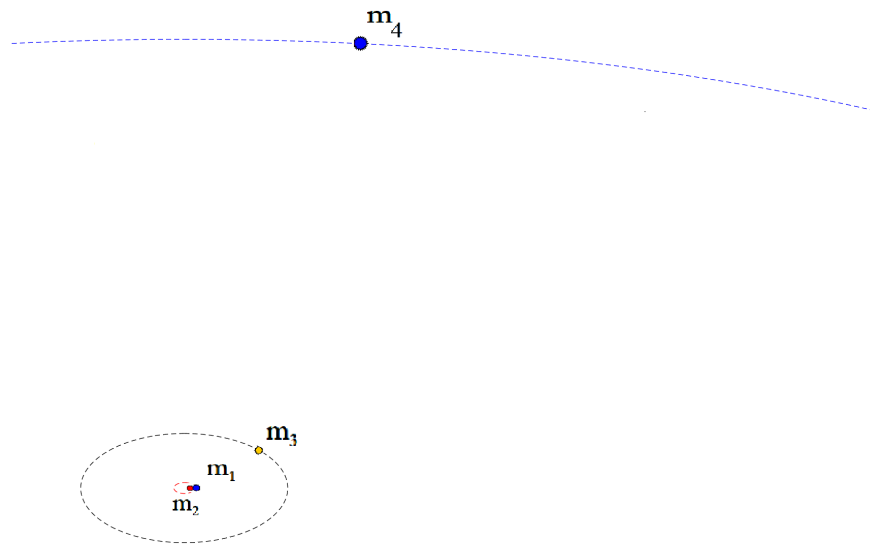
Εικόνα 4.12: Οι αποστάσεις του τριπλού συστήματος από το κέντρο βάρους (C).

φωτεινότητα του 3ου αστέρα έρχεται σε συμφωνία και με την φωτομετρική ανάλυση (βλ. § 3.4.2) όταν προστέθηκε στην ανάλυση «τρίτο φως». Η ανάλυση έδινε μία λύση με ένα αμυδρό φως (σε σχέση με το διπλό σύστημα) στο ερυθρό και στο υπέρυθρο, κάτι που

προέκυψε και από την περιοδική μεταβολή στο O-C.

Συμπερασματικά, ο αστέρας είναι φασματικού τύπου M, μάζας $0.11 - 0.23 M_{\odot}$ και κινείται σε απόσταση περίπου ~ 6 AU από το κέντρο μάζας του συστήματος με περίοδο 12.5 χρόνων.

Από τη βιβλιογραφία (βλ. § 1.5) το τρίτο μέλος που ανακαλύφθηκε από φασματοσκοπία είναι φασματικού τύπου K2-3V, έχει μάζα $\sim 0.7 M_{\odot}$ και κινείται σε απόσταση ~ 74 AU με περίοδο περιφοράς 430 χρόνων. Όπως φαίνεται δεν πρόκειται για το ίδιο σώμα. Μία υπόθεση είναι ότι η παραβολή στην Εικόνα 4.8, που ερμηνεύτηκε σαν μεταφορά μάζας, δεν είναι τίποτα άλλο παρά μέρος μίας «τεράστιας» περιοδικής συνάρτησης περιόδου ~ 430 ys. Έτσι, το σύστημα ενδεχομένως να μην είναι τριπλό αλλά τετραπλό. Μια γραφική αναπαράσταση του υποθετικού αυτού συστήματος φαίνεται στην Εικόνα 4.13.



Εικόνα 4.13: Υποθετική αναπαράσταση σε κλίμακα του τετραπλού συστήματος HV Aqr. Με κόκκινο χρώμα φαίνεται η έλλειψη του διπλού συστήματος ($m_1 = 1.345 M_{\odot}$ και $m_2 = 0.195 M_{\odot}$), με μαύρο η έλλειψη του αστέρα που βρέθηκε από την ανάλυση του διαγράμματος O-C ($m_3 \sim 0.15 M_{\odot}$) και με μπλε ο αστέρας που βρέθηκε από την φασματοσκοπία του Rucinski et al. το 2007 ($m_4 = 0.7 M_{\odot}$). Οι τροχιές έχουν σχεδιαστεί με κέντρο το βαρύκεντρο του συστήματος ($m_1 + m_2$, m_3) και με μεγάλους ημιάξονες $a_{12} = 0.6$ AU, $a_3 = 6$ AU (33 mas) και $a_4 = 74$ AU (394 mas).

Κεφάλαιο 5

Γενικά συμπεράσματα για το σύστημα HV Aqr

Στην εργασία αυτή μελετήθηκε το σύστημα HV Aqr με σκοπό τον υπολογισμό των απόλυτων παραμέτρων των μελών του και την ερμηνεία των μεταβολών που υπήρχαν στο διάγραμμα O-C. Το τελευταίο ειδικά, είχε ιδιαίτερη σημασία μιας και τέτοια ανάλυση δεν είχε γίνει για το συγκεκριμένο σύστημα.

Έγινε φωτομετρία σε παρατηρήσεις του 2002 και 2005, με αποτέλεσμα να υπολογιστούν χρόνοι ελαχίστων για το σύστημα (Πίνακας 3.4). Επίσης με τη συνδρομή των δημοσιεύσεων που υπάρχουν για το σύστημα, υπολογίστηκε η αστρονομική εφημερίδα (Σχέση 3.2). Έχοντας την αστρονομική εφημερίδα και τις παρατηρήσεις του 2005 κατασκευάστηκε το διάγραμμα φάσης του συστήματος για τα φίλτρα B, V, R, I (Εικόνα 3.4). Το επόμενο βήμα ήταν να κατασκευαστεί το μοντέλο του συστήματος και ο υπολογισμός των απόλυτων παραμέτρων του. Στο στάδιο αυτό έπαιξε καθοριστικό ρόλο η ύπαρξη φασματοσκοπίας, μιας και δεν θα ήταν δυνατός ο προσδιορισμός της μοναδικότητας της λύσης. Η γνώση της θερμοκρασίας του πρωτεύοντα αστέρα όπως επίσης και η γνώση του λόγου μαζών, οδήγησε στον Πίνακα 3.8 όπου εξετάστηκαν διάφορες περιπτώσεις. Τελικά η ακριβέστερη λύση ήταν αυτή με q ελεύθερο ίσο με 0.156 και ύπαρξη κηλίδας στο σύστημα. Έτσι προέκυψε ο Πίνακας 3.9 που παρουσιάστηκαν οι απόλυτες παράμετροι για το σύστημα HV Aqr. Προέκυψαν σχετικά κοντά με τις απόλυτες παραμέτρους που υπάρχουν από την βιβλιογραφία (π.χ. Gazeas K. et al., 2021, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 501, 2897).

Πριν την ανάλυση του διαγράμματος O-C αναμενόταν να επιβεβαιωθεί η ύπαρξη του τρίτου αστέρα που έχει ήδη βρεθεί από την φασματοσκοπία του Rucinski et al. το 2007. Κάτι τέτοιο με πρώτη ματιά δεν έγινε, μιας και προέκυψε η ύπαρξη ενός αστέρα τελείως διαφορετικού από ότι είχε ήδη βρεθεί. Μία λύση για το πρόβλημα αυτό όπως αναφέρθηκε, θα είναι αν στην Εικόνα 4.8 η παραβολή δεν αποτελεί παραβολή αλλά έναν περιοδικό όρο με μεγάλη περίοδο (~ 430 yr).

Για να επιβεβαιωθεί η ύπαρξη του αστέρα με περίοδο ~ 12.5 yr (ο αστέρας της μαύρης καμπύλης στην Εικόνα 4.13) θα χρειαστούν στο επόμενο διάστημα και άλλοι χρόνοι ελαχίστων για το σύστημα. Επίσης, πρέπει να γίνει μία ανάλυση για το κατά πόσο ένα τετραπλό σύστημα με τις παραπάνω παραμέτρους είναι ευσταθές.

Για να επιβεβαιωθούν οπτικά οι συνοδοί αστέρες m_3 και m_4 θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν επίγεια ή διαστημικά τηλεσκόπια. Ενώ ο συνοδός αστέρας m_4

ανακαλύφθηκε με adaptive optics από επίγειο τηλεσκόπιο (Rucinski et al., 2007), ο αστέρας m_3 δεν μπορεί να παρατηρηθεί τόσο εύκολα. Θα χρειαζόταν συμβολομετρία όπως επίσης και adaptive optics από επίγεια τηλεσκόπια ώστε η διακριτική ικανότητα να φτάσει ~ 30 mas και να διακρίνει τον αστέρα m_3 σαν ξεχωριστό σώμα. Αυτό εφαρμόζεται σε λαμπρά αντικείμενα, πράγμα το οποίο δεν ισχύει για τον αστέρα m_3 ο οποίος είναι εξαιρετικά αμυδρός (Πίνακας 4.4). Ενδεχομένως ο αστέρας αυτός να μπορούσε να διακριθεί από το διαστημικό τηλεσκόπιο της Gaia αφού έχει την απαιτούμενη διακριτική ικανότητα. Ωστόσο δεν υπάρχουν τέτοιες ενδείξεις για κανέναν από τους συνοδούς αστέρες (m_3 και m_4). Έτσι, φαίνεται η σημαντικότητα της ανάλυσης του διαγράμματος O-C αφού μπορεί να «δει» αλληλεπιδράσεις πολύ κοντινές στο σύστημα ακόμα και αν δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες.

Βιβλιογραφία

- [1] Γαζέας Κ. “CCD Φωτομετρία μεταβλητών αστέρων”. Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2002.
- [2] Λιάκος Α. “Μελέτη Επιλεγμένων Εκλειπτικών Μεταβλητών Αστέρων τύπου ΕΑ, οΕΑ και ΕΒ”. Διδακτορική διατριβή. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2012.
- [3] Ματθαίου Α. “Φωτομετρική μελέτη αποχωρισμένων εκλειπτικών συστημάτων στο Μικρό Νέφος του Μαγγελάνου από το OGLE II”. Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία. Πανεπιστήμιο Πατρών, 2013.
- [4] H. A. Abt. “Normal and abnormal binary frequencies.” In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 21 (1983), pp. 343–372. DOI: [10.1146/annurev.aa.21.090183.002015](https://doi.org/10.1146/annurev.aa.21.090183.002015).
- [5] O. Aksu et al. “Photoelectric Minima of Some Eclipsing Binary Stars”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 5588 (2005), p. 1.
- [6] James H Applegate. “A mechanism for orbital period modulation in close binaries”. In: *The Astrophysical Journal* 385 (1992), pp. 621–629.
- [7] Richard Berry and James Burnell. “Astronomical Image Processing”. In: *Willman-Bell, Inc* (2000).
- [8] A Claret. “A new non-linear limb-darkening law for LTE stellar atmosphere models. Calculations for $-5.0 \leq \log [M/H] \leq +1$, $2000 \text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 50000 \text{ K}$ at several surface gravities”. In: *Astronomy and Astrophysics* 363 (2000), pp. 1081–1190.
- [9] Roger Diethelm. “Timings of Minima of Eclipsing Binaries”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 5920 (2010), p. 1.
- [10] Roger Diethelm. “Timings of Minima of Eclipsing Binaries”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 6029 (2012), p. 1.
- [11] S. W. Dvorak. “Times of Minima for Neglected Eclipsing Binaries in 2005”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 5677 (2006), p. 1.
- [12] AHMET Erdem et al. “The close binary system EG Cephei”. In: *Astronomische Nachrichten: Astronomical Notes* 326.5 (2005), pp. 332–337.
- [13] Hildegard Frieboes-Conde and Tibor Herczeg. “Period variations of fourteen eclipsing binaries with possible light-time effect”. In: *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* 12 (1973), p. 1.

- [14] Hutton R. G. In: *Information Bulletin On Variable Stars* 3723 (1992).
- [15] K Gazeas et al. “Physical parameters of close binary systems: VIII”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 501.2 (2021), pp. 2897–2919.
- [16] K. D. Gazeas, P. G. Niarchos, and S. Zola. “HV Aqr: A Totally Eclipsing Binary System with Solar-type Components”. In: *Solar and Stellar Physics Through Eclipses*. Vol. 370. Astronomical Society of the Pacific Conference Series. 2007, p. 279.
- [17] Ronald W Hilditch. *An introduction to close binary stars*. Cambridge University Press, 2001.
- [18] K. Hoňková et al. “B.R.N.O. Contributions #38 Times of minima”. In: *Open European Journal on Variable Stars* 160 (2013), p. 1.
- [19] Lehmann P. Hubsercher J. “BAV-Results of observations - Photoelectric Minima of Selected Eclipsing Binaries and Maxima of Pulsating Stars”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 6026 (2012), p. 1.
- [20] Josef Kallrath, Eugene F Milone, and RE Wilson. *Eclipsing binary stars: modeling and analysis*. Springer, 2009.
- [21] Shinjiro Kouzuma. “Mass-transfer properties of overcontact systems in the Kepler eclipsing binary catalog”. In: *Publications of the Astronomical Society of Japan* 70.5 (2018).
- [22] Tom Krajci. “Photoelectric Minima of Some Eclipsing Binary Stars”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 5690 (2006), p. 1.
- [23] Tom Krajci. “Photoelectric Minima of Some Eclipsing Binary Stars”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 5806 (2007), p. 1.
- [24] Jerzy Marek Kreiner, Chun-Hwey Kim, and Il-song Na. *An atlas of O-C diagrams of eclipsing binary stars*. 2001.
- [25] Andrzej Kruszewski. “Exchange of matter and period changes in close binary systems”. In: *Advances in Astronomy and Astrophysics*. Vol. 4. Elsevier, 1966, pp. 233–299.
- [26] KùK Kwee and H Van Woerden. “A method for computing accurately the epoch of minimum of an eclipsing variable”. In: *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands* 12 (1956), p. 327.
- [27] Henny J.G.L.M. Lamers and Emily M. Levesque. “Principles of Close Binary Evolution”. In: *Understanding Stellar Evolution*. 2514-3433. IOP Publishing, 2017, 28–1 to 28–10. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/978-0-7503-1278-3ch28>.
- [28] AF Lanza and M Rodonò. “Gravitational quadrupole-moment variations in active binaries”. In: *Astronomische Nachrichten* 323.3-4 (2002), pp. 424–431.
- [29] D. W. Latham et al. “Spectroscopic Binaries in the Halo”. In: *IAU Colloq. 135: Complementary Approaches to Double and Multiple Star Research*. Vol. 32. 1992, p. 158.

- [30] Kai Li et al. “The First Light Curve Modeling and Orbital Period Change Investigation of Nine Contact Binaries around the Short-period Cutoff”. In: *The Astromical Journal* 159.5 (2020).
- [31] Leon B Lucy. “Gravity-darkening for stars with convective envelopes”. In: *Zeitschrift fur Astrophysik* 65 (1967), p. 89.
- [32] M. Martignoni. “Improved elements for the eclipsing binary EH Cnc.” In: *Bulletin der Bedeckungsveränderlichen-Beobachter der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft* 113 (1996), p. 11.
- [33] D Ya Martynov. “Eclipsing variable stars”. In: *New York: J. Wiley* (1973).
- [34] Petr Molik and Marek Wolf. “CCD Photometry of the Eclipsing Binary HV Aquarii”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 4951 (2000).
- [35] G. Muller and P. Kempf. “A new variable star of unusually short period.” In: *Astrophysical Journal* 17 (1903), pp. 201–211.
- [36] Kazuo Nagai. “Visual and CCD minima of eclipsing binaries during 2006”. In: *Variable Star Bulletin* 45 (2007).
- [37] Kazuo Nagai. “Visual and CCD minima of eclipsing binaries during 2009”. In: *Variable Star Bulletin* 50 (2010).
- [38] Kazuo Nagai. “Visual and CCD minima of eclipsing binaries during 2010”. In: *Variable Star Bulletin* 51 (2011).
- [39] Kazuo Nagai. “Visual and CCD minima of eclipsing binaries during 2012”. In: *Variable Star Bulletin* 55 (2013).
- [40] Kazuo Nagai. “Visual and CCD minima of eclipsing binaries during 2013”. In: *Variable Star Bulletin* 56 (2014).
- [41] Kazuo Nagai. “Visual, CCD and DSLR minima of eclipsing binaries during 2015”. In: *Variable Star Bulletin* 61 (2016).
- [42] Kazuo Nagai. “Visual, CCD and DSLR minima of eclipsing binaries during 2018”. In: *Variable Star Bulletin* 66 (2019).
- [43] Kazuo Nagai. “Visual, CCD and DSLR minima of eclipsing binaries during 2019”. In: *Variable Star Bulletin* 67 (2020).
- [44] Νικόλαος Νανούρης. “Μελέτη των μακροχρόνιων παρατηρούμενων μεταβολών της τροχιακής περιόδου στα διπλά εκλειπτικά αστρικά συστήματα”. PhD thesis. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών ..., 2011.
- [45] W. Ogloza et al. “Times of minima observed by ”Pi of the sky””. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 5843 (2008).
- [46] A. Pashke. “A LIST OF MINIMA AND MAXIMA TIMINGS”. In: *Open European Journal on Variable Stars* 181 (2017).

- [47] A. Pashke. “A LIST OF MINIMA AND MAXIMA TIMING”. In: *Open European Journal on Variable Stars* 191 (2018).
- [48] M. Petropoulou et al. “110 minima timings of eclipsing binaries”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 6153 (2015).
- [49] D. J. Pinfield et al. “Brown dwarfs and low-mass stars in the Pleiades and Praesepe: membership and binarity”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 342.4 (2003), pp. 1241–1259. URL: <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06630.x>.
- [50] Andrej Prša and Tomaz Zwitter. “A computational guide to physics of eclipsing binaries. I. Demonstrations and perspectives”. In: *The Astrophysical Journal* 628.1 (2005), p. 426.
- [51] R. M. Robb. “On the Variability of BD -3 5183”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 3798 (1992), p. 1.
- [52] H Rovithis-Livaniou et al. “Study of the period changes of X Trianguli”. In: *Astronomy and Astrophysics* 354 (2000), pp. 904–908.
- [53] Slavek M. Rucinski, Wenxian Lu, and Stefan W. Mochnacki. “Radial Velocity Studies of Close Binary Stars. III”. In: *The Astronomical Journal* 120.2 (2000), pp. 1133–1139. URL: <https://doi.org/10.1086/301458>.
- [54] Slavek M. Rucinski, Theodor Pribulla, and Marten H. van Kerkwijk. “Contact Binaries with Additional Components. III. A Search Using Adaptive Optics”. In: *The Astronomical Journal* 134.6 (2007), pp. 2353–2365. URL: <https://doi.org/10.1086/523353>.
- [55] SM Rucinski. “The proximity effects in close binary systems. II. The bolometric reflection effect for stars with deep convective envelopes”. In: *Acta Astronomica* 19 (1969), p. 245.
- [56] L. Sarounova and M. Wolf. “Precise CCD Times of Minima of Selected Eclipsing Binaries”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 5594 (2005).
- [57] Evry Schatzman. “A theory of the role of magnetic activity during star formation”. In: *Annales d’Astrophysique*. Vol. 25. 1962, p. 18.
- [58] J. Schirmer and E. H. Geyer. “GSC 5198.00659, the New Variable in Aquarius is a W UMa System”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 3785 (1992), p. 1.
- [59] E Soydugan et al. “A comprehensive photometric study of the Algol-type eclipsing binary: BG Pegasi”. In: *New Astronomy* 16.2 (2011), pp. 72–78.
- [60] T. Tanriverdi et al. “Photoelectric Minima of Some Eclipsing Binary Stars”. In: *Information Bulletin on Variable Stars* 5407 (2003).
- [61] G Torres, J Andersen, and A Giménez. “Accurate masses and radii of normal stars: modern results and applications”. In: *The Astronomy and Astrophysics Review* 18.1-2 (2010), pp. 67–126.

- [62] W Van Hamme. “New limb-darkening coefficients for modeling binary star light curves”. In: *The Astronomical Journal* 106 (1993), pp. 2096–2117.
- [63] H Von Zeipel. “The radiative equilibrium of a rotating system of gaseous masses”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 84 (1924), pp. 665–683.
- [64] R Wilson and W Hamme. “Computing Binary Star Observable”. In: (2004).
- [65] RE Wilson. “Accuracy and efficiency in the binary star reflection effect”. In: *The Astrophysical Journal* 356 (1990), pp. 613–622.
- [66] Robert E Wilson. “Eccentric orbit generalization and simultaneous solution of binary star light and velocity curves”. In: *The Astrophysical Journal* 234 (1979), pp. 1054–1066.
- [67] Robert E Wilson and Edward J Devinney. “Realization of accurate close-binary light curves: application to MR Cygni”. In: *The Astrophysical Journal* 166 (1971), p. 605.
- [68] M Wolf et al. “Substellar companions in low-mass eclipsing binaries-NSVS 01286630, NSVS 02502726, and NSVS 07453183”. In: *Astronomy & Astrophysics* 587 (2016), A82.
- [69] P Zasche et al. “Period changes in six contact binaries: WZ And, V803 Aql, DF Hya, PY Lyr, FZ Ori, and AH Tau”. In: *New Astronomy* 14.2 (2009), pp. 121–128.