



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Διδακτικό Σενάριο στα πλαίσια της τελικής εργασίας του
μαθήματος Δ2. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ II

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα
στην διερεύνηση σκηνής εγκλήματος

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

Κωνσταντίνος Γαβρίνας

Περιεχόμενα

Τίτλος.....	2
Ταυτότητα σεναρίου	2
Σκεπτικό δραστηριότητας.....	3
Θεωρητικό πλαίσιο.....	3
Καινοτομίες.....	5
Προστιθέμενη αξία.....	5
Γνωστικά-διδασκτικά προβλήματα	6
Πλαίσιο εφαρμογής.....	7
Σε ποιους απευθύνεται	7
Χρόνος υλοποίησης.....	7
Χώρος υλοποίησης.....	7
Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών	7
Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία	7
Κοινωνική ενσχυρήστρωση	7
Στόχοι της δραστηριότητας.....	8
Ανάλυση δραστηριότητας.....	10
Μέρος Α'	10
Μέρος Β'	10
Μέρος Γ'	11
Μέρος Δ'	12
Μέρος Ε'	13
Επέκταση σεναρίου.....	14
Βιβλιογραφικές αναφορές.....	15
Παράρτημα.....	17
Φύλλο εργασίας 1.....	17
Φύλλο εργασίας 2.....	18
Φύλλο εργασίας 3.....	19
Φύλλο εργασίας 4.....	20
Φύλλο εργασίας 5.....	21
Φύλλο εργασίας 6.....	23

Τίτλος

Η διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος δίνεται ως συνήθως με τη διατύπωσή του, κάτι που διαπιστωμένα δυσκολεύει τους μαθητές τόσο στην κατανόηση όσο και την αποστήθιση του.

Σε αυτό το σενάριο, οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν με πρακτική εφαρμογή το Πυθαγόρειο Θεώρημα, για να διερευνήσουν ένα πρόβλημα -προϊόν μυθοπλασίας- και θα χρησιμοποιήσουν μαθηματικές δεξιότητες για να εντοπίσουν αποδεικτικά στοιχεία σε μια σκηνή εγκλήματος.

Ως επί το πλείστον, οι μαθητές θα εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα για να βρουν τα μήκη των αντικειμένων που αναζητούν. Καθώς προχωρούν και ολοκληρώνουν εργασίες και δραστηριότητες, διερευνούν και σταδιακά ανακαλύπτουν ποιος, τι, πότε, πού και πώς. Τελικά οι μαθητές λύνουν την υπόθεση και βρίσκουν πώς συνέβη και ποιος εμπλέκεται.

Abstract

Teaching of the Pythagorean Theorem in elementary school students is usually done by presenting the formula, which is found to be difficult for students either to understand or to memorize it.

In this scenario, students will use the Pythagorean Theorem with the realistic situation of investigating a fictional police situation and will use mathematical skills to find evidence and clues at a crime scene.

For the most part of the scenario, students will have to apply the Pythagorean Theorem to find the lengths of the objects they are looking for. As they progress with the investigation and complete tasks and activities, they explore and gradually discover related facts. Eventually they solve the case and find out what happened and who is involved.

Ταυτότητα σεναρίου

- Συγγραφέας
Κωνσταντίνος Γαβρίνας.
- Γνωστική περιοχή
Γεωμετρία.
- Θέματα
Πυθαγόρειο Θεώρημα, αντίστροφο Πυθαγόρειο Θεώρημα, ορθογώνιο τρίγωνο, κύκλος.

Σκεπτικό δραστηριότητας

Θεωρητικό πλαίσιο

Σύμφωνα με το ΙΕΠ, «*Τα μαθηματικά αποτελούν ένα ιδιαίτερο αντικείμενο μάθησης. Αναγνωρίζονται ως ένας από τους πλέον κρίσιμους τομείς του ανθρώπινου πολιτισμού, εξαιτίας του ισχυρού τρόπου ερμηνείας του κόσμου που προσφέρουν, με σημαντική συνεισφορά στην ανάπτυξη της ατομικής αλλά και της συλλογικής σκέψης. (...) Ωστόσο, η αφαιρετική τους φύση, η αυστηρότητα και η πολυπλοκότητα των εμπλεκόμενων ιδεών και της οργάνωσής τους, καθώς και η -πολλές φορές- αναποτελεσματική προσέγγισή τους στο σχολείο, εμποδίζουν αρκετούς/ές μαθητές/ήτριες, ειδικώς αυτούς/ές που ανήκουν σε ευάλωτες κοινωνικές ομάδες, να επιτύχουν στα μαθηματικά και να αναπτύξουν θετικά συναισθήματα γι' αυτά» (ΙΕΠ, 2022-2023).*

Περνώντας τα σύνορα της Ελλάδας διαβάζουμε, σύμφωνα με το «Principles and Standards for School Mathematics» (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), ότι για να χρησιμοποιούν σωστά τα μαθηματικά οι μαθητές είναι απαραίτητος ένας συνδυασμός «*πραγματικής γνώσης, διαδικαστικής διευκόλυνσης και εννοιολογικής κατανόησης*». Αυτό σημαίνει ότι η ικανότητα της εννοιολογικής κατανόησης είναι η κύρια ικανότητα που πρέπει να διαθέτει ο μαθητής για να έχει άλλες ικανότητες όπως η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων, η ικανότητα επικοινωνίας και η ικανότητα μαθηματικής αναπαράστασης.

Πέρα όμως από αυτά, τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα και ως τέτοια πρέπει να συνδέεται με την πραγματικότητα. Στο νέο πρόγραμμα σπουδών του ΙΕΠ για τα Γυμνάσια (με όμοια περιγραφή και στους αντίστοιχους για τα Δημοτικά και για τα Λύκεια) αναφέρει πως επιδιώκει για τους μαθητές να «*αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, όπως ο συλλογισμός, η μοντελοποίηση, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν τη μάθηση των Μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα*» (ΙΕΠ, 2021).

Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών συμφωνούν όλο και περισσότερο ότι η σύνδεση των σχολικών μαθηματικών με εμπειρίες και καταστάσεις εκτός σχολείου, συμπεριλαμβανομένων των προσωπικών δικών τους, είναι ένα κρίσιμο στοιχείο σημαντικό για τη μάθηση των μαθητών (Turner & Strawhun, 2007). Αυτό το επιχείρημα υποστηρίζεται από μελέτες που υποδηλώνουν ότι οι γνώσεις και οι εμπειρίες που φέρνουν οι μαθητές από την καθημερινή τους ζωή μπορούν να χρησιμεύσουν ως πόροι για την εκμάθηση μαθηματικών (Civil, 2002), καθώς και απόδειξη ότι η μάθηση των μαθητών ενισχύεται όταν οι έννοιες και οι δεξιότητες συνδέονται με ρεαλιστικά πλαίσια και καταστάσεις (Boaler, 2008). Σε αυτό το σενάριο, αναφερόμαστε σε διδασκαλία που περιλαμβάνει συνδέσεις με πραγματικά περιβάλλοντα και καταστάσεις, συμπεριλαμβανομένων των εμπειριών των μαθητών εκτός σχολείου, ως διδασκαλία μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο.

Εδώ μπαίνει και η έννοια της RME (Realistic Mathematics Education) η οποία χαρακτηρίζεται από την δραστηριότητα των μαθητών να επανεφεύρουν τα μαθηματικά υπό την καθοδήγηση ενός ενήλικα, με την επανεφεύρεση να ξεκινά από την έκθεση του μαθητή σε μια ποικιλία προβλημάτων και καταστάσεων του «πραγματικού κόσμου» (De Lange, 1995). Η RME είχε ως στόχο να κάνει στους μαθητές την

εκμάθηση των μαθηματικών πιο ενδιαφέρουσα και ουσιαστική, εισάγοντας την διδασκαλία των μαθηματικών μέσω περιγραφικών προβλημάτων που επιλύονται από τις γνώσεις και τις εμπειρίες των μαθητών.

Η μορφή της RME στις μέρες μας ορίζεται κυρίως από την άποψη του ολλανδού Freudenthal (1991) για τα μαθηματικά. Αυτό σημαίνει ότι τα μαθηματικά πρέπει να είναι κοντά στο παιδί και να σχετίζονται με ρεαλιστικές καταστάσεις. Όμως, η λέξη «ρεαλιστική» δεν αναφέρεται μόνο στην σχέση με τον πραγματικό κόσμο, αλλά αναφέρεται επίσης στην πραγματική κατάσταση του προβλήματος μέσα στο μυαλό του μαθητή. Ο De Lange (1996) δήλωσε ότι μία τέτοια παράθεση του προβλήματος μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως εφαρμογή ή μοντελοποίηση.

Η διδακτική ακολουθία του RME νοείται ως «γραμμή μάθησης» όπου το πλαίσιο του προβλήματος χρησιμοποιείται ως σημείο εκκίνησης για να αποκτήσει την άτυπη συλλογιστική του μαθητή. Το RME ενσωματώνει την άποψη για το τί είναι τα μαθηματικά, πώς ο μαθητής μαθαίνει τα μαθηματικά και πώς πρέπει να διδάσκονται τα μαθηματικά. Ο Freudenthal (1991) πιστεύει ότι ο μαθητής δεν μπορεί να θεωρηθεί παθητικός δέκτης έτοιμων μαθηματικών, αλλά ότι η εκπαίδευση πρέπει να κατευθύνει τους μαθητές στην χρήση οποιωνδήποτε καταστάσεων και να τους δώσει την ευκαιρία να επανεφεύρουν τα μαθηματικά με τον δικό τους τρόπο.

Σύμφωνα με τις αρχές και τα χαρακτηριστικά της RME, τα βήματά της στην μάθηση έχουν οριστεί ως εξής:

- Κατανόηση του προβλήματος με βάση την διατύπωση.
- Επίλυση του προβλήματος με βάση την διατύπωση.
- Σύγκριση και συζήτηση των απαντήσεων.
- Ολοκλήρωση της απάντησης.

Όπως προκύπτει λοιπόν, η RME είναι μια μαθησιακή και διδακτική προσέγγιση που χρησιμοποιεί την πραγματικότητα ως σημείο εκκίνησης στην μαθησιακή και διδακτική διαδικασία και στοχεύει στην υποστήριξη των μαθητών στην οικοδόμηση και την επανεφεύρεση των Μαθηματικών μέσω διαδραστικών περιγραφικών (με απλό και - κατά το δυνατόν- οικείο κείμενο) προβλημάτων (Gravemeijer, 2010). Η διδασκαλία στην τάξη με RME ξεκινά με περιγραφικά προβλήματα που είναι οικεία στους μαθητές δηλαδή είναι μέσα στις εμπειρίες και τις γνώσεις τους.

Στην συνέχεια, οι μαθητές διευκολύνονται να λύσουν τα προβλήματα που παρουσιάζονται με βάση τα το δοσμένο κείμενο. Η επίλυση προβλημάτων με βάση το περιγραφικό κείμενο είναι γνωστό ότι έχει θετική επίδραση στην ικανότητα των μαθητών να κατανοούν τα μαθηματικά (Bonotto, 2010). Η εκμάθηση των μαθηματικών γίνεται καλύτερα δίνοντας στους μαθητές να λύσουν ενεργά προβλήματα διατυπωμένα με κείμενο, καθώς οι μαθητές έρχονται να αντιμετωπίσουν μαθηματικά προβλήματα στην καθημερινότητά τους.

Και όλα αυτά σε μία περίοδο όπου έχει τεθεί ο προβληματισμός εάν και πότε εφαρμογές τεχνητής νοημοσύνης (π.χ. ChatGPT) μπορεί να υποκαταστήσουν τον άνθρωπο-εκπαιδευτικό (π.χ. Paul von Hippel, 2023).

Καινοτομίες

Το σενάριο έχει σχεδιαστεί για να είναι ευέλικτο και ανοιχτού τύπου. Οι μαθητές θα κληθούν να εργαστούν σε έξι φύλλα εργασίας, εξετάζοντας τις παρεχόμενες λεπτομέρειες για την συλλογή πληροφοριών και την επίλυση προβλημάτων. Οι μαθηματικές λειτουργίες που ενσωματώνονται στο σενάριο και θα βοηθήσουν στην λήψη αποφάσεων, είναι η γεωμετρία και η άλγεβρα, μαζί με τον μαθηματικό συλλογισμό, ενώ ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Το σενάριο δίνει ευκαιρίες στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις δεξιότητες και την συλλογιστική τους για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Μέσα από αυτή την εμπειρία μπορούν να αποκτήσουν μια βαθύτερη κατανόηση και εκτίμηση για την εφαρμογή μαθηματικών ιδιοτήτων που μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις.

Οι μαθητές θα μάθουν πώς να αναλύουν δεδομένα, να αναγνωρίζουν και να καταλαβαίνουν σχέδια και να δημιουργούν ένα μοντέλο από τα περιεχόμενα δεδομένα. Εκτός από τα μαθηματικά, οι μαθητές θα έρθουν σε επαφή με έννοιες και ορολογία από τομείς όπως η Εγκληματολογία, η Αρχιτεκτονική και η Μηχανική.

Απαραίτητη προϋπόθεση εφαρμογής αυτού του σεναρίου είναι η ευχαρίστηση του ίδιου του εκπαιδευτικού από τα μαθηματικά αφού *«κάποιος που δεν μπορεί να εκτιμήσει την ομορφιά και την δύναμη των μαθηματικών δεν θα μεταδώσει σε άλλους την γνήσια συγκίνησή του»* (Ντριάνκος & Τρανός, 2009).

Προστιθέμενη αξία

Οι μαθητές καλούνται να λύσουν μια σειρά εγκλημάτων χρησιμοποιώντας κριτική σκέψη, επιστήμη και μαθηματικές δεξιότητες. Καθώς προχωρούν και ολοκληρώνουν εργασίες και δραστηριότητες, διερευνούν και σταδιακά ανακαλύπτουν ποιος, τι, πότε, πού και πώς σε έναν τόπο εγκλήματος. Τελικά οι μαθητές λύνουν την υπόθεση και θα βρουν πώς συνέβη και ποιος εμπλέκεται.

Οι λεπτομέρειες των μαθηματικών που εμπλέκονται σε όλη την διάρκεια του σεναρίου έχουν σχεδιαστεί για να επιβεβαιώνουν υποψίες και να δημιουργούν αδιάσειστα αποδεικτικά στοιχεία που θα χρησιμοποιηθούν για να εξιχνιαστεί το έγκλημα και να λυθεί η υπόθεση.

Με την χρήση του σεναρίου αυτού επιδιώκονται τα παρακάτω:

- Ανάλυση χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων δισδιάστατων και τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων και ανάπτυξη μαθηματικών επιχειρημάτων σχετικά με τις γεωμετρικές σχέσεις.
- Χρησιμοποίηση οπτικοποίησης, χωρικού συλλογισμού και γεωμετρικής μοντελοποίησης για την επίλυση προβλημάτων.
- Καθορισμός τοποθεσιών και περιγραφή χωρικών σχέσεων χρησιμοποιώντας άτυπες συντεταγμένες.
- Αναγνώριση και χρησιμοποίηση συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών ιδεών.
- Κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθηματικές ιδέες διασυνδέονται και βασίζονται η μία στην άλλη για να παράγουν ένα συνεκτικό σύνολο.

- Αναγνώριση και εφαρμογή των μαθηματικών σε περιβάλλοντα εκτός των μαθηματικών.
- Δημιουργία και χρήση αναπαραστάσεων για την οργάνωση, καταγραφή και περιγραφή μαθηματικών ιδεών.
- Χρήση της γλώσσας των μαθηματικών για να εκφραστούν με ακρίβεια οι μαθηματικές ιδέες.
- Επικοινωνία της μαθηματικής σκέψης με συνέπεια και σαφήνεια σε συμμαθητές, δασκάλους και τρίτους.

Μέσα από την διδακτική πράξη, που βασίζεται στην εμπειρία πραγματικών καταστάσεων, επιδιώκεται συνειδητά από τον δάσκαλο να απαλλαγούν οι μαθητές από τον φόβο του λάθους και την άρνηση της μάθησης, που συνδέεται αρκετές φορές με την αυστηρή μαθηματική παρουσίαση. Το ζητούμενο δεν είναι να αποφύγουμε τα λάθη των μαθητών αλλά να οδηγήσουμε τον μαθητή να τα συναντήσει, να τα δημιουργήσει και να τα υπερπηδήσει (Papert, 1991).

Γενικότερα, το σενάριο αυτό φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή/βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και στην διαδικασία προσέγγισής τους.

Γνωστικά-διδακτικά προβλήματα

Η διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος δίνεται ως συνήθως με τη διατύπωση του, κάτι που διαπιστωμένα δυσκολεύει τους μαθητές τόσο στην κατανόηση όσο και την αποστήθιση του.

Γενικότερα

Σύμφωνα με τον Γαγάτση (1993), οι μαθητές έχουν δυσκολίες όχι μόνο με τα θεωρήματα που αναφέρονται στα γεωμετρικά σχήματα, αλλά και με τα σχήματα καθαυτά, όσον αφορά στην αντίληψη της μορφής τους και τη λογική τους ταξινόμηση.

Επίσης, οι Dina van Hiele-Geldof και Pierre van Hiele (1986) παρατήρησαν τις δυσκολίες, που είχαν οι μαθητές τους κατά την εκμάθηση της γεωμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, παρατήρησαν ότι οι μαθητές μαθαίνουν συνήθως «παπαγαλία» το Πυθαγόρειο Θεώρημα, χωρίς να αντιλαμβάνονται γεωμετρικά τι σημαίνει η φράση «*το τετράγωνο της υποτεινουσας*» ή «*το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών*», ενώ μερικές φορές συγχέουν τις κάθετες πλευρές με την υποτεινούσα.

Ειδικότερα

Τα γνωστικά-διδακτικά προβλήματα που ενδεχομένως εμφανιστούν κατά την διάρκεια της εκτέλεσης των δραστηριοτήτων περιγράφονται πιο αναλυτικά μέσα στις διάφορες φάσεις (μέρη) της δραστηριότητας, στο κεφάλαιο «Ανάλυση δραστηριότητας» (σελ. 10).

Πλαίσιο εφαρμογής

Σε ποιους απευθύνεται

Το σενάριο απευθύνεται σε μαθητές της Β' Γυμνασίου, αφού έχουν διδαχθεί το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Χρόνος υλοποίησης

Το σενάριο θα διαρκέσει πέντε διδακτικές ώρες. Σε κάθε μία από αυτές γίνεται επίλυση του εκάστοτε προβλήματος, παρουσίαση στην τάξη και αναστοχασμός στα αποτελέσματα.

Σε κάθε μία διδακτική ώρα αντιστοιχεί και ένα φύλλο εργασίας εκτός από την τελευταία που έχει τα φύλλα εργασίας 5 και 6 μαζί.

Χώρος υλοποίησης

Το σενάριο θα υλοποιηθεί εξ ολοκλήρου στην συνηθισμένη αίθουσα διδασκαλίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών

- Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του.
- Οι μαθητές θα πρέπει έχουν κατανοήσει ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει μόνο στα ορθογώνια τρίγωνα.
- Οι μαθητές πρέπει να εκτελούν σωστά τις πράξεις της αριθμητικής (γνωρίζοντας και την προτεραιότητά τους).
- Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν και να σχεδιάζουν τρίγωνα σε έναν χάρτη.
- Οι μαθητές πρέπει να θυμούνται μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με τρίγωνα (είδη/ονομασίες σε σχέση με τις γωνίες ή τις πλευρές, εμβαδό).
- Οι μαθητές πρέπει να θυμούνται μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με τους κύκλους (ακτίνα, διάμετρος, μήκος, εμβαδό).

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία

- Κάθε μαθητής ή ομάδα μαθητών θα έχει το δικό της φύλλο εργασίας.
- Ατομικά γεωμετρικά όργανα (κανόνας και διαβήτη).
- Κομπιουτεράκι (προαιρετικό).
- Προβολέας για τον εκπαιδευτικό (προαιρετικός).

Κοινωνική ενσχυρήστρωση

- Οι μαθητές θα εργάζονται άλλοτε ατομικά και άλλοτε σε δυάδες, ανάλογα με την περιγραφή του κάθε φύλλου εργασίας.
- Καλό είναι οι δυάδες να οριστούν από τον εκπαιδευτικό (Κυνηγός, 2006), ώστε να αποφευχθεί το φαινόμενο να πάνε μαζί οι «κολλητοί» που θα κάνουν χαβαλέ ή οι

καλοί που θα λύσουν τα προβλήματα σε σύντομο χρόνο και μετά θα «χαζεύουν». Ο εκπαιδευτικός που γνωρίζει τις ικανότητες και τους χαρακτήρες των μαθητών θα πρέπει να τους ταιριάζει με τέτοιο τρόπο ώστε να αποφευχθούν «αστοχίες επικοινωνίας» μέσα στην δυάδα (π.χ. να μην βάλει έναν «ζωηρό» με έναν «ντροπαλό»).

- Θα πρέπει να υπάρχει πρόβλεψη για μη ελληνόφωνους που θα πρέπει να τους εξηγηθεί περισσότερο τι δίνεται και τι ζητείται και να υπάρχουν διαθέσιμα επιπλέον φύλλα εργασίας για την περίπτωση που κάποιοι ζητήσουν νέα φύλλα επειδή (για παράδειγμα) μουτζούρωσαν τα αρχικά.
- Μερικοί μαθητές μπορεί να δυσκολευτούν με τις οδηγίες και μπορεί να χρειαστούν βοήθεια, με τον εκπαιδευτικό να ερμηνεύει τις γραπτές οδηγίες και να αναλύει τις εργασίες σε μικρά βήματα.
- Ενώ οι μαθητές επιλύουν τα προβλήματα, ο εκπαιδευτικός θα κινείται στην αίθουσα ακούγοντας την συζήτηση αλλά αποφεύγοντας να απαντήσει άμεσα σε ερωτήσεις. Ο στόχος είναι οι μαθητές να ανακαλύψουν τα μαθηματικά μόνοι τους, οπότε δεν λέει στους μαθητές εάν έχουν δίκιο ή όχι και πρέπει να είναι πολύ προσεκτικός με τις συμβουλές που δίνει.
- Για να διευκολυνθεί η μάθηση, ο εκπαιδευτικός ίσως θα πρέπει να προτείνει στους μαθητές να κάνουν ένα πλάνο ενεργειών για να εργαστούν με βήματα. Θα πρέπει να καταγράψουν τις ιδέες και τα γεγονότα για τα οποία είναι σίγουροι και να εντοπίσουν/εξετάσουν αυτά που δεν γνωρίζουν και πρέπει να ανακαλύψουν.

Στόχοι της δραστηριότητας

Σε αυτό το σενάριο, οι μαθητές θα διερευνήσουν μια κατάσταση και θα χρησιμοποιήσουν μαθηματικές δεξιότητες και ιδιότητες για να εντοπίσουν αποδεικτικά στοιχεία σε μια σκηνή εγκλήματος. Ως επί το πλείστον, οι μαθητές θα εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα για να βρουν τα μήκη των αντικειμένων που αναζητούν.

Οι μαθητές θα ξεκινήσουν αυτό το σενάριο σκεπτόμενοι το πρόβλημα και πώς τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν με διάφορους τρόπους για να συγκεντρώσουν πληροφορίες και να λύσουν το έγκλημα. Το εκάστοτε πρόβλημα θα το λύσουν μόνοι τους ή με έναν συμμαθητή τους. Η ιδέα είναι κάθε μαθητής να κατανοήσει την υπόθεση, να επικεντρωθεί στις λεπτομέρειες και να καταλήξει σε συμπεράσματα.

Στα περισσότερα σημεία, οι μαθητές θα πρέπει να συνεργαστούν σε δυάδες, συνδυάζοντας χαρακτήρες, στυλ μάθησης και ικανότητες. Η κεντρική ιδέα είναι οι μαθητές να συνεργαστούν και να βοηθήσουν ο ένας τον άλλον ώστε να κατανοήσουν τις λεπτομέρειες της εργασίας και να ανακαλύψουν τα μαθηματικά και τις λεπτομέρειες σχετικές με το έγκλημα.

Στην συνέχεια, οι ομάδες των μαθητών θα μοιραστούν τις ιδέες, τις παρατηρήσεις και τα ευρήματά τους στην τάξη. Η ιδέα είναι ότι οι μαθητές θα μοιραστούν πολλαπλές στρατηγικές και θα μάθουν από μια ποικιλία προοπτικών που εμπλέκονται με τις εργασίες στην υπόθεση.

Οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρυνθούν ώστε να είναι καλά προετοιμασμένοι και να παρουσιάσουν τα γεγονότα με σαφήνεια. Το πλαίσιο της κοινοποίησης των ευρημάτων

τους θα συνδεθεί με το πλαίσιο CSI σαν να μοιράζονταν τις παρατηρήσεις τους όπως ο ιατροδικαστής που καταθέτει μπροστά στο δικαστήριο.

Ο εκπαιδευτικός θα ολοκληρώσει την δραστηριότητα εστιάζοντας στην μάθηση και στην εφαρμογή της σε ένα πραγματικό σενάριο. Η κύρια ιδέα είναι να δείξουμε πώς παρατηρούμε τις λεπτομέρειες και εφαρμόζουμε τα μαθηματικά και την επιστήμη για να αντιληφθούμε καταστάσεις και να λάβουμε αποφάσεις στη ζωή.

Γενικότερα

Οι μαθητές θα είναι σε θέση να:

- αναγνωρίσουν τρίγωνα βάσει πλευρών ή γωνιών
- χρησιμοποιήσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα για να υπολογίσουν το μήκος μίας πλευράς όταν γνωρίζουν το μήκος των άλλων δύο
- εφαρμόζουν το αντίστροφο Πυθαγόρειο Θεώρημα για να εντοπίσουν ορθογώνια τρίγωνα (Πυθαγόρειες Τριάδες).

Ειδικότερα

Σε αυτό το σενάριο οι μαθητές:

- θα χρησιμοποιήσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα για να βρουν την απόσταση μεταξύ δύο σημείων σε έναν χάρτη
- θα χρησιμοποιήσουν το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος για να προσδιορίσουν εάν τρία σημεία σε έναν χάρτη σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο
- θα χρησιμοποιήσουν τις παρεχόμενες πληροφορίες του σεναρίου για να χαρτογραφήσουν την ιστορία που τους δίνεται περιγραφικά
- θα χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους για τα ορθογώνια τρίγωνα για να καθορίσουν το μήκος διαδρομών
- θα εντοπίσουν στον χάρτη σημεία που σχηματίζουν ορθογώνια τρίγωνα
- θα χρησιμοποιήσουν επαγωγικό συλλογισμό για να καταλήξουν σε λογικά συμπεράσματα
- θα χρησιμοποιήσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα για να βρουν τα ζητούμενα μήκη των αντικειμένων ώστε να βγάλουν συμπεράσματα, να πάρουν αποφάσεις και να λύσουν προβλήματα
- δίνοντας πληροφορίες σχετικά με τα μήκη των πλευρών ή/και τα μέτρα των γωνιών σε τρίγωνα, θα:
 - προσδιορίσουν εάν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο
 - καθορίσουν το εύρος στο οποίο μπορεί να κυμαίνεται το μήκος της υποτείνουσας
- θα βιώσουν τα μαθηματικά σε ένα πραγματικό σενάριο επίλυσης προβλημάτων και να εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα μαζί με την άλγεβρα
- θα εξάγουν συμπεράσματα που θα βοηθήσουν στην επιβεβαίωση των υποψιών και στην δημιουργία αποδεικτικών στοιχείων για την υπόθεση.

Ανάλυση δραστηριότητας

Μέρος Α΄

Υλοποίηση

Για 5 λεπτά

- Ο εκπαιδευτικός θα υπενθυμίσει στην τάξη το Πυθαγόρειο Θεώρημα, ώστε να διασφαλίσει ότι όλοι οι μαθητές έχουν τις ίδιες γνώσεις πριν ξεκινήσουν το σενάριο.
- Επίσης θα διευκρινίσει ότι ο διευθυντής του μουσείου λέγεται έφορος και ότι η πόλη είναι επίπεδη χωρίς ανηφόρες και κατηφόρες.
- Η ιστορία θα διαβαστεί στην τάξη.

Για 20 λεπτά

- Στους μαθητές θα δοθεί το Φύλλο Εργασίας 1 και οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες των δύο ατόμων.
- Κάθε ομάδα (όχι κάθε μαθητής) θα έχει το δικό της φύλλο εργασίας.

Για 15 λεπτά

- Οι ομάδες μαθητών θα παρουσιάσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις.
- Οι μαθητές θα πρέπει να συζητήσουν τις πιθανές διαφορές μεταξύ των απαντήσεων.
- Ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει το ερώτημα εάν είναι δυνατόν να περπατήσει ο έφορος ακριβώς πάνω στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου του χάρτη εάν ήθελε να πάει κατευθείαν από το σπίτι του στο μουσείο.

Πιθανά λάθη

- Οι μαθητές μπορεί να κάνουν λάθος σκέψεις σχετικά με τον υπολογισμό της απόστασης μεταξύ της κατοικίας του εφόρου και του μουσείου.
- Μπορεί να είναι πολύ συγκεντρωμένοι στην διαδρομή που περπάτησε ο έφορος προς το μουσείο παρά να βρουν την υποτείνουσα του τριγώνου που σχηματίζει η πορεία του.
- Μπορεί να έχουν δυσκολία αντίληψης των ορθογωνίων τριγώνων καθώς αυτά εμφανίζονται σε μη «τυποποιημένες» θέσεις (προσανατολισμούς στο επίπεδο).

Μέρος Β΄

Υλοποίηση

Για 5 λεπτά

Ο εκπαιδευτικός θα διαβάσει την ιστορία του νέου φύλλου εργασίας και θα θέσει κάποιες προφορικές ερωτήσεις πριν αρχίσει η εργασία:

- *Έχει δει ποτέ κανείς μια σκάλα τόσο ψηλή;*
- *Είναι συνηθισμένη;*

Για 15 λεπτά (ατομική εργασία)

Στους μαθητές θα δοθεί το Φύλλο Εργασίας 2, όπου στο πρώτο μέρος οι μαθητές θα κληθούν να κατανοήσουν αυτό που περιγράφεται και θα αρχίσει ο καθένας να εργάζεται μόνος του.

Για 15 λεπτά (ομαδική εργασία)

- Σε δυάδες οι μαθητές θα συνεργαστούν για να συγκρίνουν σκέψεις και αποτελέσματα της προηγούμενης ατομικής εργασίας και να επαληθεύσουν τις λύσεις.
- Στην συνέχεια οι δύο τους θα συνεργαστούν για το επόμενο βήμα της υπόθεσης που είναι το δεύτερο μέρος του φύλλου εργασίας.

Για 10 λεπτά

- Παρουσιάσεις μαθητών, συζήτηση στην τάξη, διερεύνηση και αναστοχασμός.

Πιθανά λάθη

- Οι μαθητές μπορεί να μπερδευτούν με τις τιμές αντικατάστασης των πλευρών ως a , β και γ , δηλαδή ποια είναι η υποτείνουσα στον τύπο $a^2 = \beta^2 + \gamma^2$.
- Οι μαθητές μπορεί να έχουν την άποψη ότι οι κάθετες πλευρές αντιστοιχούνται στα β και γ με μονοσήμαντο τρόπο (π.χ. ότι η μικρότερη κάθετη πρέπει να είναι πάντοτε η β και η μεγαλύτερη να είναι η γ).
- Οι μαθητές μπορεί να πολλαπλασιάσουν τις διαστάσεις επί 2 αντί να υψώσουν στο τετράγωνο.
- Οι μαθητές μπορεί να προσθέσουν τις διαστάσεις των κάθετων πριν τις υψώσουν στο τετράγωνο.

Αυτές οι παρανοήσεις πρέπει να αντιμετωπιστούν προσεκτικά θέτοντας ερωτήσεις για τις ιδιότητες, παραπέμποντας τους μαθητές σε προηγούμενες γνώσεις με παρόμοια παραδείγματα, χωρίς όμως να «προδώσουν την λύση».

Μέρος Γ'

Υλοποίηση

Για 5 λεπτά

Ο εκπαιδευτικός θα υπενθυμίσει σύντομα τα προηγούμενα επεισόδια για να θυμηθούν όλοι τις λεπτομέρειες της υπόθεσης. Θα αναφερθούν και άλλες πληροφορίες σχετικές με τον χάρτη, όπως ότι το μήκος κάθε οικοδομικού τετραγώνου μαζί με τον δρόμο είναι 100 μέτρα. Ως υπενθύμιση θα αναφερθεί στους μαθητές ο τύπος του εμβαδού κύκλου.

Για 20 λεπτά

- Οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες δύο ή τριών ατόμων, θα τους δοθεί το Φύλλο Εργασίας 3 και χρησιμοποιώντας τον χάρτη και τις λεπτομέρειες του επόμενου μέρους της ιστορίας για να προσδιορίσουν πιθανές τοποθεσίες για το πού μπορεί να κρατείται ο έφορος.

- Κάθε ομάδα θα έχει το δικό της φύλλο εργασίας.
- Το φύλλο εργασίας περιέχει ερωτήσεις που θα υποχρεώσουν τους μαθητές στην εύρεση μίας υποτεινούςας. Η τελευταία ερώτηση στο φύλλο εργασίας θα ζητήσει από τους μαθητές να προσδιορίσουν την συνολική περιοχή που θα ερευνηθεί, εφόσον η αναζήτηση πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας τον χάρτη και την περιγραφή που δίνεται.
- Οι μαθητές θα συζητούν μεταξύ τους τους λόγους για την εξάλειψη (πιθανών) υποψήφιων τοποθεσιών όπου μπορεί να βρίσκεται ο έφορος.
- Οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί θα συζητήσουν τη σχέση μεταξύ τριγώνων και κύκλων, ιδιαίτερα τη σχέση μεταξύ της υποτεινούςας του τριγώνου και της ακτίνας του κύκλου και για ποιο λόγο οι μαθητές ισχυρίζονται ότι αυτά τα μήκη είναι τα ίδια.

Για 20 λεπτά

Παρουσιάσεις μαθητών, συζήτηση στην τάξη, διερεύνηση και προβληματισμός είτε για αυτά που σκέφτηκαν ατομικά είτε για αυτά που βρήκαν ομαδικά.

Μέρος Δ'

Υλοποίηση

Για 5 λεπτά

Ο εκπαιδευτικός θα διαβάσει την ιστορία για να προκαλέσει στους μαθητές κάποιες αρχικές σκέψεις.

Για 15 λεπτά (ατομική εργασία – Μέρος Α' του φύλλου εργασίας)

Στους μαθητές δίνεται το Φύλλο Εργασίας 4 το οποίο οι μαθητές θα κληθούν να το κατανοήσουν και να εργαστούν μόνοι τους, αφού πρέπει να χρησιμοποιήσουν τις διαστάσεις που παρέχονται για να προσδιορίσουν μαθηματικά εάν οι υποψίες των αστυνομικών είναι βάσιμες. Οι μαθητές θα πρέπει να περιγράψουν/δείξουν όλη την εργασία/υπολογισμούς που έκαναν και όχι μόνο το τελικό αποτέλεσμα, αναφέροντας σχετικές ιδιότητες και τύπους.

Για 15 λεπτά (ομαδική εργασία – Μέρος Β' του φύλλου εργασίας)

Οι μαθητές θα συνεργαστούν σε δυάδες για να βρουν και να επαληθεύσουν την απάντηση, εργαζόμενοι με παρόμοιο σκεπτικό όπως και στο πρώτο μέρος.

Για 10 λεπτά

- Οι μαθητές θα μοιραστούν τα ευρήματά τους με τους συμμαθητές τους, σε μια σύντομη παρουσίαση. Οι περισσότεροι ή όλοι θα πρέπει να παρουσιάσουν τα ευρήματά τους για τουλάχιστον ένα από τα δύο μέρη του φύλλου εργασίας. Θα πρέπει να εξηγήσουν με σαφήνεια τα συμπεράσματά τους και πώς κατέληξαν σε αυτά.
- Ο εκπαιδευτικός θα τους ωθήσει να βρουν και να πουν ιδέες για άλλες εφαρμογές όπου το Πυθαγόρειο Θεώρημα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην πραγματική ζωή.

Πιθανά λάθη

- Οι μαθητές μπορεί να μπερδευτούν με τις τιμές που αντιστοιχούν στις κάθετες και στην υποτείνουσα του τύπου $a^2 = \beta^2 + \gamma^2$.
- Οι μαθητές μπορεί να έχουν την άποψη ότι οι κάθετες πλευρές αντιστοιχούνται στα β και γ με μονοσήμαντο τρόπο (π.χ. ότι η μικρότερη κάθετη είναι πάντοτε η β και η μεγαλύτερη είναι η γ).
- Οι μαθητές μπορεί να προσπαθήσουν να πολλαπλασιάσουν τις διαστάσεις επί 2 αντί να υψώσουν στο τετράγωνο.
- Οι μαθητές μπορεί να προσθέσουν τις διαστάσεις των κάθετων πριν τις υψώσουν στο τετράγωνο.
- Οι μαθητές μπορεί να συνειδητοποιήσουν ότι το αντικείμενο είναι μεγαλύτερο από το μήκος του χαρτοφύλακα και να θεωρήσουν ότι δεν χωράει σε αυτόν, άρα να παρακάμψουν τον έλεγχο της διαγωνίου του χαρτοφύλακα με το ΠΘ.
- Οι μαθητές μπορεί να συνειδητοποιήσουν ότι ο πίνακας είναι μεγαλύτερος από το πλάτος ή το ύψος του παραθύρου και να θεωρήσουν ότι δεν χωράει σε αυτό, άρα να παρακάμψουν τον έλεγχο της διαγωνίου του παραθύρου με το ΠΘ.

Αυτές οι παρανοήσεις πρέπει να αντιμετωπιστούν προσεκτικά θέτοντας ερωτήσεις για τις ιδιότητες, παραπέμποντας τους μαθητές σε προηγούμενες γνώσεις με παρόμοια παραδείγματα, χωρίς να «προδώσουν την λύση».

Μέρος Ε΄

Εισαγωγή

Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν το αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος για να λύσουν το πρόβλημα που τίθεται. Οι μαθητές θα πρέπει να εντοπίσουν τα (πραγματικά) ορθογώνια τρίγωνα.

Στο πρώτο μέρος θα δοθεί στους μαθητές το Φύλλο Εργασίας 5 που έχει 7 τυχαία τρίγωνα (το 1^ο είναι παράδειγμα). Αυτοί θα πρέπει να εφαρμόσουν το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος για να επαληθεύσουν ποια από αυτά είναι ορθογώνια και θα συμπληρώσουν τον πίνακα με τις Πυθαγόρειες τριάδες όπου υπάρχουν. Οι μαθητές πρέπει να δείξουν αναλυτικά τα βήματα/υπολογισμούς που έκαναν.

Στο δεύτερο μέρος ο εκπαιδευτικός θυμίζει στους μαθητές τι είναι το τεταρτημόριο (Β΄ Γυμνασίου, σελ. 60) και δίνει το τελευταίο φύλλο (Φύλλο Εργασίας 6) που περιέχει τις τελευταίες πληροφορίες, όπου με αυτές θα εξιχνιαστεί η ληστεία.

Υλοποίηση

Για 10 λεπτά

- Οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες των δύο.
- Κάθε ομάδα θα έχει το Φύλλο Εργασίας 5.
- Οι μαθητές θα εκτελέσουν τα ζητούμενα του φύλλου ώστε τελικά να βρουν το password του λαπτοπ.

Για 10 λεπτά

- Οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες των δύο.
- Κάθε ομάδα θα έχει το Φύλλο Εργασίας 6.
- Οι μαθητές με βάση τα δεδομένα θα πρέπει να υπολογίσουν σε ποιο κτήριο βρίσκεται ο έφορος.

Για 15 λεπτά

Κάθε ομάδα μαθητών θα παρουσιάσει την ανακάλυψή τους και θα εξηγήσει γιατί επέλεξε το συγκεκριμένο κτήριο.

Για 10 λεπτά

Ο εκπαιδευτικός θα παρουσιάσει το τελικό τμήμα της αστυνομικής έρευνας και θα μοιράσει τους παίχτους της αστυνομίας σε κάθε μαθητή.

Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που δώσατε εσείς, η αστυνομία περικύκλωσε το κτήριο και εκεί ανακάλυψαν ότι ο έφορος και οι συνεργάτες του ήταν υπεύθυνοι για την ληστεία. Έγιναν συλλήψεις και τα κλεμμένα αντικείμενα επιστράφηκαν στο μουσείο. Οι αρχές σας ευχαριστούν θερμά και επιθυμούν να γνωρίζετε ότι δεν θα μπορούσαν να τα καταφέρουν δίχως τις πολύτιμες γνώσεις σας στην γεωμετρία.

Σε μία ομαδική συζήτηση θα μπορούσαν να βρεθούν και άλλες περιπτώσεις όπου τα μαθηματικά θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την διερεύνηση ενός τόπου εγκλήματος. Επίσης θα συζητηθεί γιατί στο Φύλλο Εργασίας 5, τα σχετικά μεγέθη στο χαρτί των εικονιζόμενων τριγώνων μεταξύ τους δεν συμβαδίζουν με τα μεγέθη (μήκη) των πλευρών τους.

Επέκταση σεναρίου

Μετά την ολοκλήρωση του σεναρίου και την συζήτηση στην τάξη, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να αναζητήσουν άλλα προβλήματα από άλλες επιστήμες όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα μαθηματικά, όπως την ιατρική (π.χ. πόσο γρήγορα εξαπλώνεται μία επιδημία), την βιολογία (π.χ. νόμοι του Mendel) ή την βαλλιστική (π.χ. τροχιά δορυφόρων).

Επίσης, φεύγοντας από το πρίσμα της χρήσης των μαθηματικών στην εγκληματολογία, αλλά παραμένοντας στην θεματολογία του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, ο εκπαιδευτικός μπορεί να αναφέρει κάποιες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις «επέκτασης» του ΠΘ με έννοιες που δεν πάει το μυαλό των μαθητών (και όχι μόνο) όπως:

- «Πυθαγόρειο Θεώρημα» με κανονικά πολύγωνα (<https://www.geogebra.org/m/cdjf2gpv>),
- «Πυθαγόρειο Θεώρημα» με όμοια πολύγωνα (<https://www.geogebra.org/m/Gz9h98wh#material/eU4FHs9w> και <https://www.geogebra.org/m/Gz9h98wh#material/K8K8cZJs>)
- «Πυθαγόρειο Θεώρημα» σε τετράεδρο με ορθή γωνία (ένα τετράεδρο που έχει μία κορυφή όπου οι τρεις ακμές τέμνονται κάθετα ανά δύο):

$$OAB^2 + OAG^2 + OBG^2 = ABG^2$$
 (<https://www.geogebra.org/m/cghmqzyh>)

Βιβλιογραφικές αναφορές

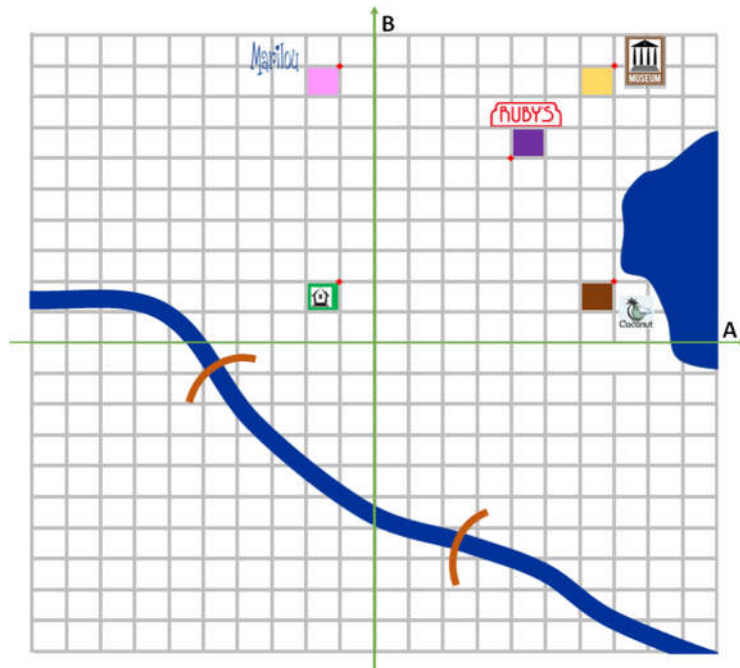
1. Boaler, A. (2008). What's math got to do with it? New York, NY: Penguin Group.
2. Bonotto, C. (2010). Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing. In: Lesh, R., Galbraith, P., Haines, C., Hurford, A. (eds) Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies. Springer, Boston, MA pp. 399-408.
<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-1-4419-0561-1.pdf>
3. Civil, M. (2002). Culture and mathematics: A community approach. Journal of Intercultural Studies, 23(2), pp. 133-148.
<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07256860220151050A>
4. De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems.
https://www.researchgate.net/publication/255041996_Assessment_No_change_without_problems
5. De Lange, J. (1996). Using and Applying Mathematics in Education, In International Handbook of Mathematics Education, Part 1, volume 4. Alan J. Bishop et al. Ed., Netherlands: Springer Netherlands, pp. 49-97.
6. Detroit Historical Society (c.1970), One blank Detroit Police Department Civilian Award certificate.
https://s3.amazonaws.com/pastperfectonline/images/museum_428/120/2011004195.jpg
7. Gravemeijer, K. (1994). Developing realistic mathematics education. Utrecht: CD-β Press.
8. Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic.
<https://p4mriunismuh.files.wordpress.com/2010/08/revisiting-mathematics-education.pdf>
9. National Council of Teachers of Mathematics, (2000). Principles and Standards for School Mathematics, USA
https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_Executive_Summary.pdf
10. Papert, S. (1991). Νοητικές Θύελλες, μτφρ. Αγνή Σταματίου. Αθήνα: Οδυσσέας.
https://opac.seab.gr/record=b2293351~S6*gre
11. Turner, E. & Strawhun, B. (2007). Problem posing that makes a difference: Students posing and investigating mathematical problems related to overcrowding at their school. Teaching Children Mathematics, 13(9), 457-463.
12. Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: A theory of Mathematics Education. New York: Academic Press.
13. Von Hippel, Paul T. (2023). ChatGPT Is Not Ready to Teach Geometry (Yet)
<https://www.educationnext.org/chatgpt-is-not-ready-to-teach-geometry-yet/>
14. Γαγάτσης, Α. (1993). Θέματα διδακτικής Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Αδελφοί Κυριακίδη.
https://opac.seab.gr/record=b2286529~S6*gre
15. ΙΕΠ, 2021, Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στις Α', Β' και Γ' τάξεις του Γυμνάσιου.
<http://iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli>

16. ΙΕΠ, Οδηγίες διδασκαλίας μαθημάτων της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης κατά το σχολικό έτος 2022-2023.
http://iep.edu.gr/images/IEP/EPISTIMONIKI_YPIRESIA/Epist_Monades/tmima_B/115009_2_Παράρτημα_1_Γλώσσα_κλπ.pdf
17. Κυνηγός, Χ. (2006). Το Μάθημα της Διερεύνησης: Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
https://opac.seab.gr/record=b2339161~S6*gre
18. Ντριάνκος Σ., Τρανός, Τ. (2009). Πυθαγόρειο Θεώρημα μια διδακτική προσέγγιση για μαθητές κάθε ηλικίας, Εισήγηση στο 26^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Θεσσαλονίκη.
<http://blogs.sch.gr/sntriankos/files/2015/03/Πυθαγορειο-Θεωρημα.pdf>

Παράρτημα

Φύλλο εργασίας 1

Είναι Δευτέρα πρωί. Εσείς και ο κολλητός σας έχετε κληθεί από το τοπικό αστυνομικό τμήμα για να βοηθήσετε σε μια υπόθεση, επειδή οι αστυνομικοί είναι λίγοι λόγω της γρίπης. Ένας επιστάτης στο τοπικό μουσείο έφτασε στη δουλειά του σήμερα το πρωί και ανακάλυψε ότι η πόρτα του μουσείου ήταν ξεκλείδωτη, πολύτιμα εκθέματα έλειπαν και ο έφορος του μουσείου δεν υπήρχε πουθενά και δεν μπορεί να εντοπιστεί.



Σας δίνονται αυτές οι πληροφορίες:

1. Ο έφορος δεν βρίσκεται στο (κίτρινο) μουσείο ή στο (πράσινο) σπίτι του και δεν έχει εμφανιστεί κάπου από την Παρασκευή.
2. Ο έφορος ξεκινώντας από το σπίτι του, περπατάει από και προς τη δουλειά κάθε μέρα (βλ. χάρτη), κάθε πρωί σταματά για να πάρει καφέ στο (καφέ) Coconut και κάθε βράδυ σταματά για δείπνο στο (ροζ) Marilou.
3. Κάθε μεσημέρι, ο έφορος γευματίζει στο (μοβ) Ruby's.
4. Λείπουν τα κλειδιά του εφόρου.

Στον χάρτη, κάθε τετράγωνο αντιστοιχεί σε ένα οικοδομικό τετράγωνο και κάθε ένα από αυτά έχει πλευρά 90 μέτρα, με το πλάτος των δρόμων 10 μέτρα (οι γραμμές είναι οι δρόμοι). Η κόκκινη κουκίδα στα τέσσερα μέρη δείχνει πού βρίσκεται είσοδος στο καθένα.

Ερωτήσεις

1. Πόσα οικοδομικά τετράγωνα περπάτησε ο έφορος από το σπίτι του, στο καφέ και μετά στο μουσείο; Πόσα μέτρα είναι αυτή η διαδρομή;
2. Εάν ο έφορος περπατούσε απευθείας από το σπίτι στο καφέ, μετά στο μουσείο και μετά στο σπίτι του, και η αστυνομία θέλει να ερευνήσει την περιοχή που περικλείεται από την διαδρομή αυτή, ποιο είναι το εμβαδόν αυτού του σχήματος; Θυμηθείτε ότι κάθε τετράγωνο (μαζί με τον δρόμο) είναι 100 μέτρα.
3. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ του σπιτιού του εφόρου και του μουσείου;
4. Πώς υπολογίσατε την απόσταση;
5. Χρησιμοποιώντας τα σημεία που πηγαίνει ο έφορος κάθε μέρα, πόσα ορθογώνια τρίγωνα μπορείτε να σχεδιάσετε;
6. Σχηματίζονται διαφορετικοί τύποι ορθογωνίων τριγώνων; Ποιοι είναι αυτοί;

Φύλλο εργασίας 2

Μέρος Α'

Υπήρξε μια διάρρηξη στο τοπικό μουσείο. Πολύτιμα αντικείμενα έχουν κλαπεί. Δύο παράθυρα έχουν παραβιαστεί και υπάρχουν υποψίες ότι ο δράστης χρησιμοποίησε μια πολύ ψηλή σκάλα για να μπει ή να βγει από το μουσείο από αυτά τα παράθυρα. Οι αρχές ελπίζουν ότι μαθαίνοντας περισσότερα για αυτήν την ασυνήθιστη σκάλα θα δώσουν ενδείξεις για την αναγνώριση ενός υπόπτου.

Κοντά στο πρώτο παράθυρο, βρέθηκαν δύο ρηχά βαθουλώματα στο έδαφος, 5 μέτρα μακριά από τη βάση του κτηρίου. Υπάρχει υποψία ότι αυτά δημιουργήθηκαν από τα πόδια μιας σκάλας. Το πρώτο παραβιασμένο παράθυρο έχει ύψος 10 μέτρα από το έδαφος. Η αστυνομία θέλει να υπολογίσει περίπου πόσο ψηλή ήταν η σκάλα ώστε να ρωτήσει σε σχετικά καταστήματα για πρόσφατη πώληση τόσο μεγάλης σκάλας.

1η Εργασία (ατομική)

Χρησιμοποιήστε τις πληροφορίες που παρέχονται για να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα της σκηνής του εγκλήματος και να βρείτε το μήκος της ύποπτης σκάλας που χρησιμοποιήθηκε. Χρησιμοποιήστε γεωμετρικά όργανα για να δημιουργήσετε ένα όσο γίνεται πιο καλό και λεπτομερές σχέδιο.

Υπόδειξη:

Θεωρείστε ότι ο τοίχος του κτηρίου είναι λείος και κατακόρυφος και το έδαφος είναι οριζόντιο και επίπεδο.

- Γιατί πιστεύετε ότι δίνεται αυτή η υπόθεση; Αναφέρετε τι το καθιστά σχετικό με το σενάριο.

Μέρος Β'

Οι αστυνομικοί διαπίστωσαν ότι το δεύτερο παράθυρο που παραβιάστηκε στο μουσείο ήταν 11 μέτρα από το έδαφος. Δεν βρέθηκαν εμφανείς εσοχές στο έδαφος κάτω από το δεύτερο παράθυρο και δεν είμαστε ακόμα σίγουροι πού βρίσκονταν τα πόδια της σκάλας.

2^η Εργασία (ομαδική)

Χρησιμοποιήστε αυτές τις πληροφορίες για να σχεδιάσετε την σκηνή του εγκλήματος και να εξετάσετε το μήκος της σκάλας που χρησιμοποιήθηκε. Στην συζήτηση στην τάξη να δείξετε τους τύπους ή μαθηματικές ιδιότητες που χρησιμοποιήσατε.

3^η Εργασία (ομαδική)

Με βάση την ίδια υπόδειξη όπως και πριν, συζητήστε οι δύο μεταξύ σας και απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις:

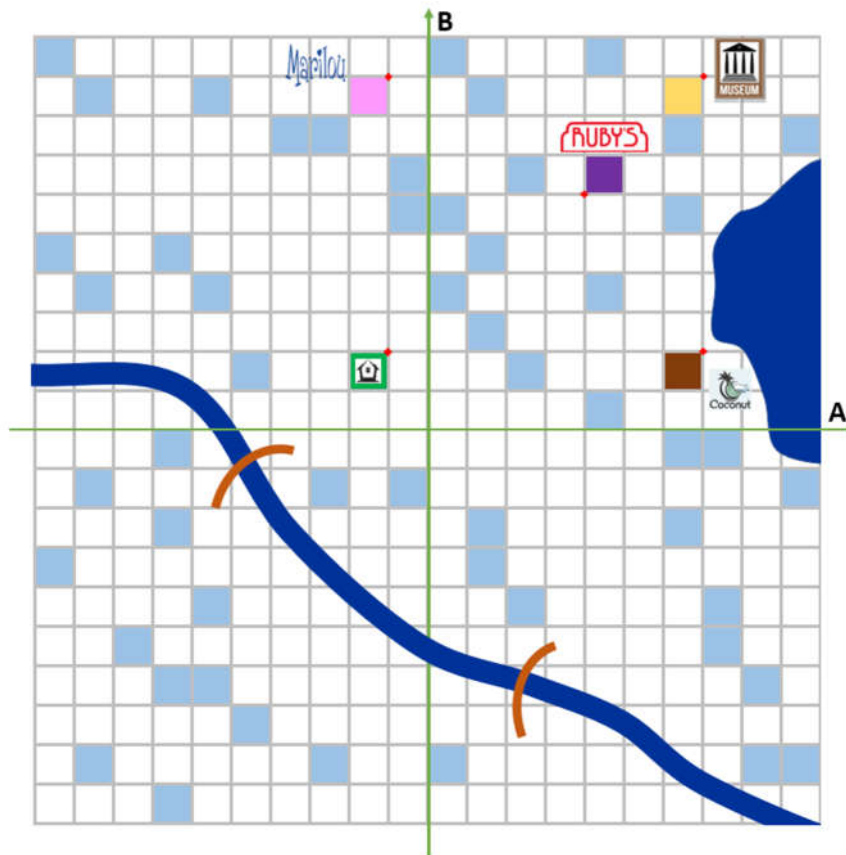
1. Είναι πιθανό ότι η ίδια σκάλα χρησιμοποιήθηκε για να παραβιάσει το δεύτερο παράθυρο;
2. Εάν όχι, εξηγήστε το σκεπτικό σας.

3. Εάν ναι, περίπου πού στο έδαφος θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε στοιχεία για το πού βρισκόταν η σκάλα; (η απάντησή σας πρέπει να είναι σε μέτρα και εκατοστά).
4. Πώς θα μπορούσε αυτή η πληροφορία να μας οδηγήσει σε συμπεράσματα σχετικά με την είσοδο και την έξοδο του υπόπτου από το μουσείο;

Φύλλο εργασίας 3

Οι αρχές έχουν λάβει ένα ανώνυμο τηλεφώνημα που έδωσε τις ακόλουθες πληροφορίες:

- Ο έφορος εθεάθη να μπαίνει σε ένα αυτοκίνητο αμέσως μετά την αναχώρησή του από το καφέ, πριν φτάσει στο μουσείο.
- Το αυτοκίνητο κινήθηκε για τρία οικοδομικά τετράγωνα, έστριψε αριστερά, οδήγησε άλλα τέσσερα οικοδομικά τετράγωνα και στην συνέχεια σταμάτησε.
- Ο έφορος είναι ακόμα ζωντανός.
- Ο καλών αρνήθηκε να δώσει περισσότερες λεπτομέρειες και έκλεισε το τηλέφωνο αμέσως μετά. Οι αρχές θέλουν να θυμάστε ότι ο έφορος δεν έχει φανεί από τότε που εξαφανίστηκε.



Οδηγίες:

Κοιτάζοντας το χάρτη, εντοπίστε πιθανά μέρη ως προς το πού μπορεί να βρίσκεται ο χώρος όπου κρατείται ο έφορος. Επίσης, χρησιμοποιώντας το καφέ ως αφετηρία, προσδιορίστε την περιοχή στην οποία βρίσκεται αυτή η τοποθεσία.

Στον χάρτη, κάθε τετράγωνο είναι ένα οικοδομικό τετράγωνο και κάθε ένα από αυτά έχει πλευρά 90 μέτρα, με το πλάτος των δρόμων 10 μέτρα (οι γραμμές είναι οι δρόμοι). Η κόκκινη κουκίδα στα τέσσερα μέρη δείχνει πού βρίσκεται είσοδος στο καθένα.

Ερωτήσεις

1. Ποια είναι η ακτίνα του κύκλου που δημιουργείται γύρω από το καφέ Coconut;
2. Ποια είναι η διάμετρος του κύκλου που δημιουργείται;
3. Πώς καθορίσατε το μήκος της διαμέτρου του κύκλου;
4. Χρησιμοποιώντας έναν διαβήτη, σχεδιάστε έναν κύκλο στον δικό σας χάρτη.
5. Ποιο είναι το εμβαδό του κύκλου που δημιουργήθηκε;
6. Συγκρίνετε τους κύκλους μεταξύ των ομάδων. Υπάρχουν διαφορές μεταξύ τους;
7. Τι μπορεί να εξηγήσει τις διαφορές;
8. Ως ομάδα, είστε σε θέση να εξαλείψετε κάποια μέρη του κύκλου όπου είναι αδύνατο να βρίσκεται ο έφορος; Γιατί;

Φύλλο εργασίας 4

Μέρος Α'

Οι αρχές έχουν βίντεο με έναν πιθανό ύποπτο για την διάρρηξη στο μουσείο. Ο ύποπτος εθεάθη να κρατά έναν χαρτοφύλακα διαστάσεων 50x40x10 εκατοστά. Ένα από τα αντικείμενα που κλάπηκαν ήταν ένα κυλινδρικό σκήπτρο με μήκος 55 εκ. και πλάτος 5 εκ. Οι αστυνομικοί θέλουν να δουν εάν αυτό το αντικείμενο μπόρεσε να μεταφερθεί από το μουσείο μέσα στον χαρτοφύλακα αυτού του υπόπτου.



1^η Εργασία (ατομική)

- Χρησιμοποιήστε αυτές τις πληροφορίες για να κάνετε ένα σχέδιο του χαρτοφύλακα και του αντικειμένου που κλάπηκε.
- Χωράει το κλεμμένο σκήπτρο μέσα στον χαρτοφύλακα;

Μέρος Β'

Οι αστυνομικοί ανακάλυψαν ότι ένας μεγάλος πίνακας κλάπηκε από το μουσείο. Χρησιμοποιήστε τις μαθηματικές σας δεξιότητες για να προσδιορίσετε εάν ο πίνακας χώρεσε να βγει από ένα παράθυρο του μουσείου. Τα παράθυρα του μουσείου είναι όλα άθικτα και ίδιων διαστάσεων με πλάτος 60 εκ. και ύψος 60 εκ. Ο μεγάλος πίνακας που κλάπηκε είχε διαστάσεις 87x90 εκατοστά (μαζί με το κάδρο του).



2^η Εργασία (ομαδική)

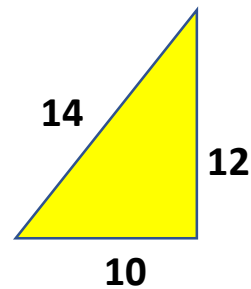
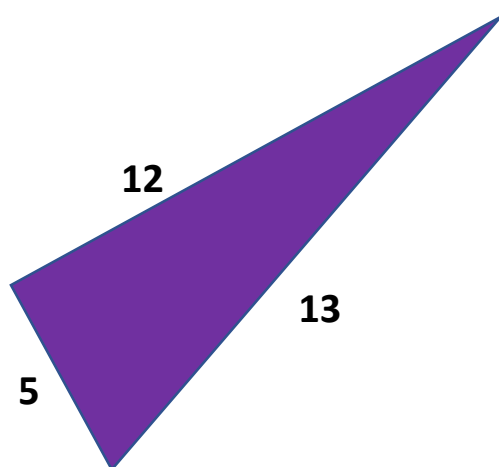
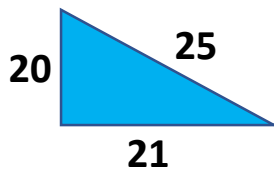
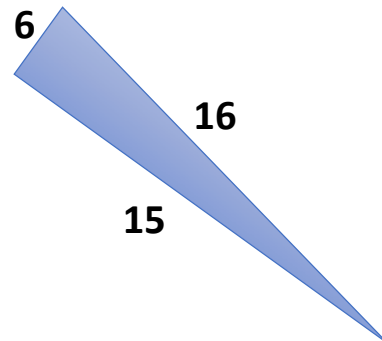
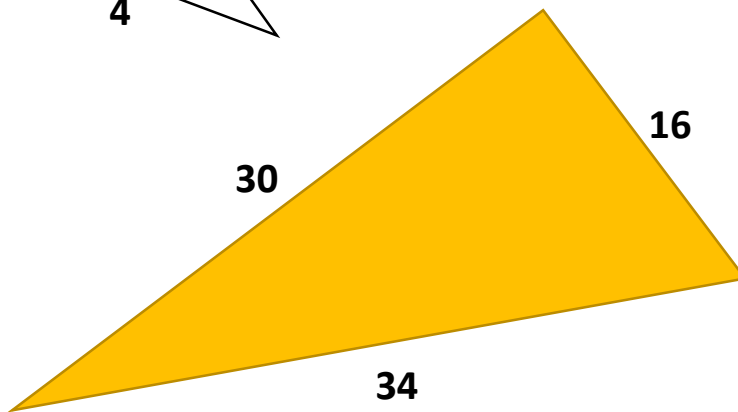
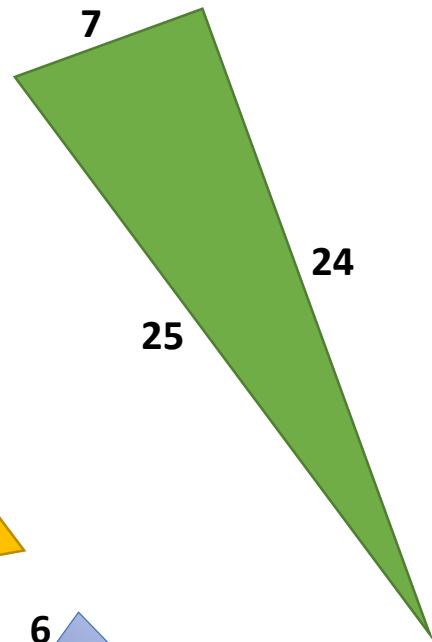
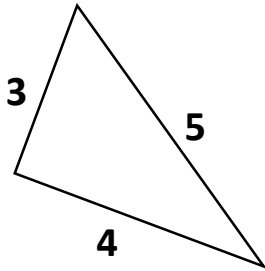
Με βάση τις πληροφορίες που δίνονται, βρείτε εάν ο πίνακας θα χωρούσε να περάσει μέσα από το παράθυρο. Τα συμπεράσματά σας θα βοηθήσουν να εντοπιστεί κάποιος ύποπτος και επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο δικαστήριο ως αποδεικτικά στοιχεία – γράψτε τα όσο πιο «επίσημα» γίνεται!

- Θα χωρούσε ο πίνακας για να περάσει μέσα από το παράθυρο;
- Γιατί ναι ή γιατί όχι; (δώστε αναλυτική και «επίσημη» γραπτή απάντηση)

Φύλλο εργασίας 5

Οι αρχές βρήκαν ένα λάπτοπ που περιέχει στοιχεία σχετικά με την υπόθεση. Δυστυχώς προστατεύεται με κωδικό πρόσβασης. Το hint για τον κωδικό πρόσβασης είναι «Πυθαγόρειες Τριάδες».

Δίνονται τα παρακάτω τρίγωνα με τις διαστάσεις τους:



- Καταχωρίστε στον παρακάτω πίνακα τα στοιχεία των τριγώνων (α είναι πάντοτε η μεγαλύτερη πλευρά).
- Βρείτε ποια από αυτά είναι ορθογώνια τρίγωνα.
- Το πρώτο τρίγωνο (λευκό) παρέχεται μόνο ως παράδειγμα και δεν αποτελεί μέρος του κωδικού πρόσβασης.

β	γ	α	β^2	γ^2	α^2	$\beta^2 + \gamma^2$
3	4	5	9	16	25	25

Το password είναι όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες από τα παραπάνω ορθογώνια τρίγωνα, όπου κάθε τριάδα είναι από το μικρότερο προς τον μεγαλύτερο αριθμό και οι τριάδες σε σειρά από αυτήν με την μικρότερη υποτείνουσα προς την μεγαλύτερη υποτείνουσα.

Γράψτε εδώ το password που βρήκατε:.....

Φύλλο εργασίας 6

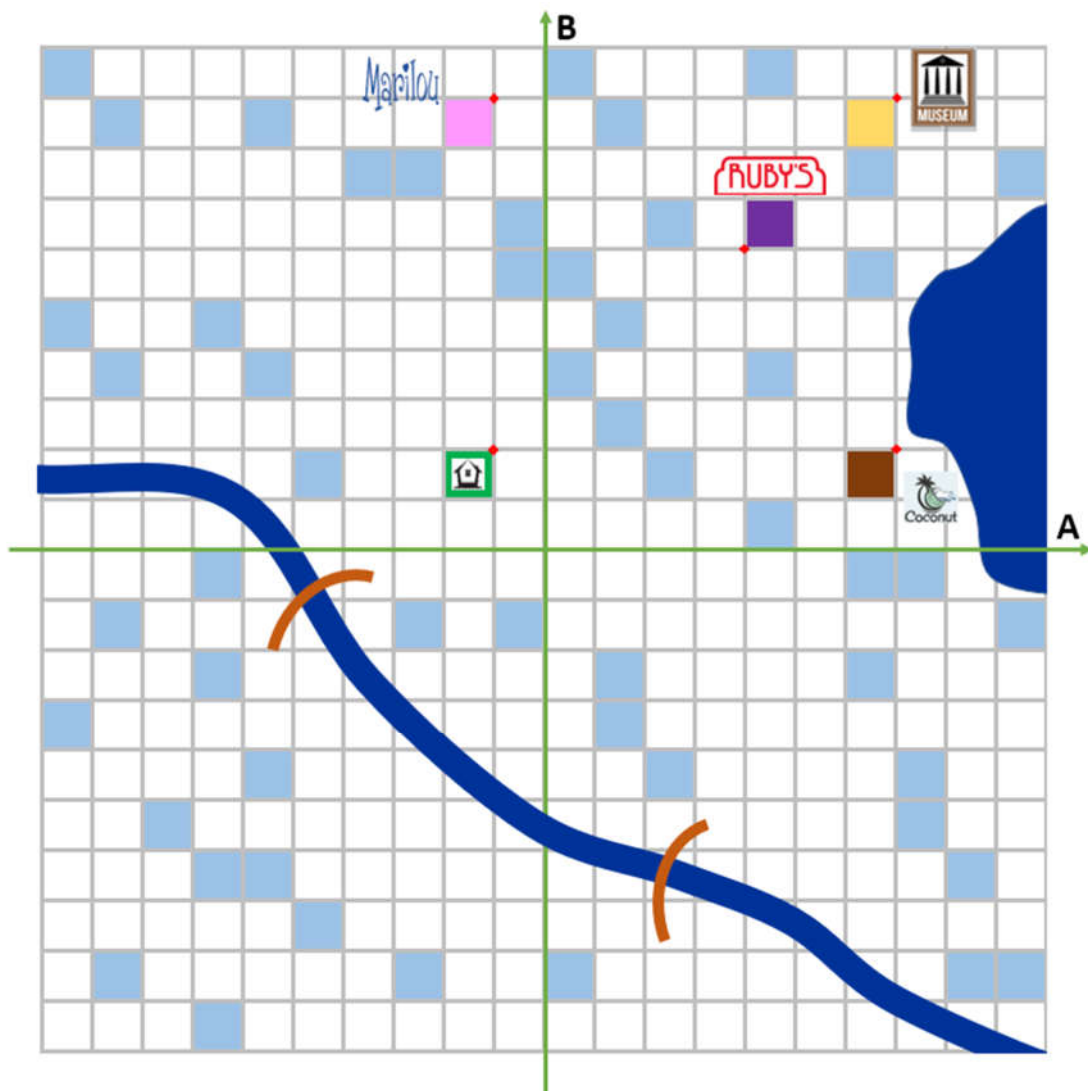
Συγχαρητήρια για το σπάσιμο του κώδικα!

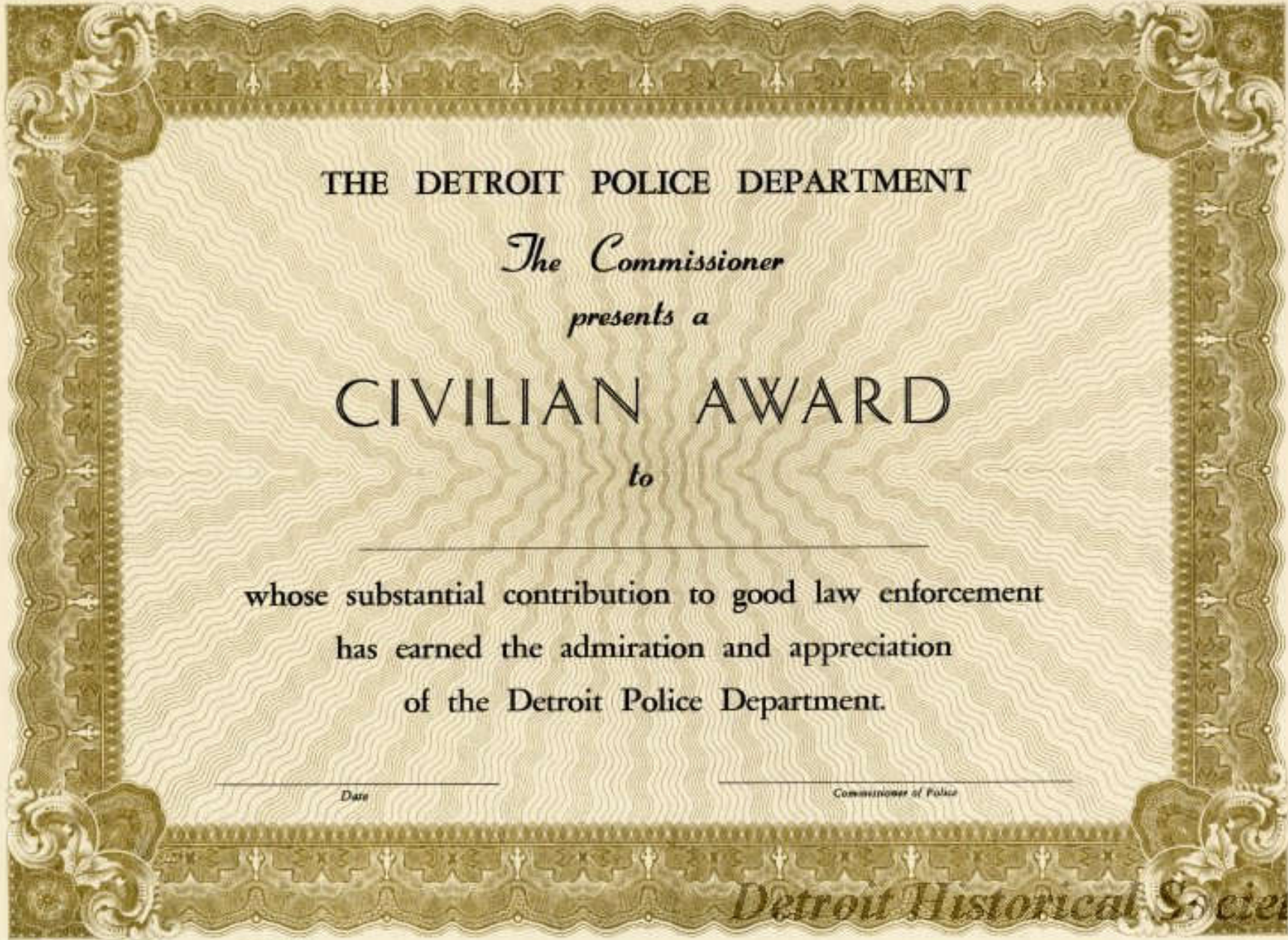
Αυτές είναι οι πληροφορίες που εμφανίστηκαν:

- Ο έφορος εθεάθη σε ένα παράθυρο που ήταν σε ύψος 5 μέτρα από το πεζοδρόμιο, άρα βρίσκονταν στον πρώτο όροφο. Όλα τα κτήρια στο τρίτο τεταρτημόριο είναι ισόγεια.
- Από το παράθυρο φαίνεται ο ποταμός.
- Η απόσταση ποτάμι-παράθυρο είναι μισό χιλιόμετρο.

Ερωτήσεις

1. Πού βρίσκεται ο έφορος;
2. Κυκλώστε με στυλό το κτήριο που βρήκατε (στο σχήμα τα κτήρια είναι με γαλάζιο χρώμα).





THE DETROIT POLICE DEPARTMENT

The Commissioner

presents a

CIVILIAN AWARD

to

whose substantial contribution to good law enforcement
has earned the admiration and appreciation
of the Detroit Police Department.

Date

Commissioner of Police

Detroit Historical Society

Circle 528

Form C of D-4-AW

Εταινος αστυνομίας