Τμήμα Μαθηματικών

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κλασικές,αφινικές και κυκλοτομικές άλγεβρες Yokonuma-Hecke: Δομή και αναπαραστάσεις

Παναγιώτης Μονέ
Μεταπτυχιακός Φοιτητής
ΑΜ 7112112100014

Ηλεκτρονική διεύθυνση
panagiotismone@gmail.com

Αθήνα 2024

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Διπλώματος Μεταπτυχιακών Σπουδών με ειδίκευση στα Θεωρητικά Μαθηματικά που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, με τριμελή επιτροπή τους κ.κ Μαρία Χλουβεράκη,Αριστείδη Κοντογεώργη και Σοφία Λαμπροπούλου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω το σύνολο της τριμελούς επιτροπής για τη συμμετοχή τους στην εργασία αυτή. Ιδιαιτέρως, ευχαριστώ θερμά την κ. Μαρία Χλουβεράκη για την βοήθεια,την στήριξη και το ενδιαφέρον που έδειξε καθόλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου,τους φίλους μου,τους μαθητές μου και όλους όσους με στήριξαν καθόλη την διάρκεια των σπουδών μου όλα αυτά τα χρόνια.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική μελετάμε τις κλασικές,αφινικές και κυκλοτομικές άλγεβρες Yokonuma-Hecke. Οι αφινικές και κυκλοτομικές άλγεβρες Yokonuma-Hecke γενικεύουν τις Ariki-Koike, τις αφινικές Hecke και τις κλασικές Yokonuma-Hecke άλγεβρες. Όλες αυτές οι άλγεβρες γενικεύουν την άλγεβρα ομάδας της συμμετρικής ομάδας και παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη της θεωρίας αναπαραστάσεων της $GL_n(q)$,καθώς και σε άλλους τομείς των μαθηματικών. Μελετάμε τις αναπαραστάσεις αυτών των αλγεβρών και υπολογίζουμε διάφορες βάσεις τους.

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγουμε την απαραίτητη θεωρία για την μελέτη των αναπαραστάσεων των κλασικών,αφινικών και κυκλοτομικών Yokonuma-Hecke αλγεβρών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε την κλασική Yokonuma-Hecke άλγεβρα $Y_{d,n}(q)$. Η Yokonuma-Hecke άλγεβρα (τύπου A) $Y_{d,n}(q)$ παραμέτρου q είναι το πηλίκο της framed braid group $B_{d,n}{:=}C_d^n \rtimes B_n$,όπου B_n είναι η braid group σε n σύμβολα και $C_d^n = C_d \times \cdots \times C_d$,όπου C_d είναι η κυκλική ομάδα τάξης d. Ειδικότερα,αναπαριστάμε την $B_{d,n}$ σε γεννήτορες και σχέσεις και ορίζουμε την άλγεβρα $Y_{d,n}(q)$ ως το πηλίκο της group algebra της $B_{d,n}$ επί του $\mathbb{C}(q)$ επί κάποιων επιπλέον σχέσεων. Έπειτα,αφού υπολογίσουμε κάποιους τύπους για την Yokonuma-Hecke άλγεβρα $Y_{d,n}(q)$,δίνουμε παράσταση σε γεννήτορες και σχέσεις. Τέλος αποδεικνύουμε ότι η άλγεβρα $Y_{d,n}(q)$ είναι ένα ελεύθερο $\mathbb{C}(q)$-πρότυπο με διάσταση $d^n n!$

Στο τρίτο κεφάλαιο,ορίζουμε την άλγεβρα $Y(d,m,n)$,την οποία καλούμε αφινική Yokonuma-Hecke άλγεβρα όταν $m = \infty$ και κυκλοτομική Yokonuma-Hecke όταν $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Έπειτα,υπολογίζουμε κάποιους τύπους και δίνουμε σχέσεις ανάμεσα στους γεννήτορες της $Y(d,m,n)$. Τέλος,ορίζουμε τα Jucys-Murphy στοιχεία της $Y(d,m,n)$,και δίνουμε επίσης σχέσεις ανάμεσα σε αυτά τα στοιχεία και τους γεννήτορες της $Y(d,m,n)$.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάμε τις αναπαραστάσεις της Yokonuma-Hecke άλγεβρας $Y_{d,n}(q)$. Ειδικότερα,μελετάμε μια ειδική περίπτωση αναπαραστάσεων της $Y(d,\infty,2)$. Χρησιμοποιούμε αυτές τις αναπαραστάσεις για να πάρουμε πληροφορίες για το φάσμα των Jucys–Murphy στοιχείων της αφινικής Yokonuma-Hecke άλγεβρας $Y(d,\infty,n)$. Έπειτα,δίνουμε συγκεκριμένους τύπους για τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της $Y_{d,n}(q)$. Αυτοί οι τύποι προκύπτουν από την μελέτη της πιο απλής μη τετριμμένης αφινικής

Yokonuma–Hecke άλγεβρας $Y(d, \infty, 2)$. Δείχνουμε ότι οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της $Y_{d,n}(q)$ παραμετροποιούνται από τις d-διαμερίσεις του n. Για μια d-διαμέριση λ του n, οι ανάγωγες αναπαραστάσεις V_λ έχουν βάση παραμετροποιημένη από standard d-ταμπλώ σχήματος λ,έτσι, οι τύποι μας περιγράφονται με συνδυαστκούς όρους standard d-ταμπλώ. Στην συνέχεια,παίρνουμε ότι το φάσμα των Jucys–Murphy στοιχείων της $Y_{d,n}(q)$ είναι σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με το σύνολο των standard d-ταμπλώ μεγέθους n. Τέλος,αποδεικνύουμε ότι αυτές είναι όλες οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της $Y_{d,n}(q)$.

Στο πέμπτο κεφάλαιο,κατασκευάζουμε ένα σύνολο αναπαραστάσεων της κυκλοτομικής Yokonuma-Hecke άλγεβρας $Y(d, m, n)$ παραμετροποιημένο από συνδυαστικά αντικείμενα τα οποία καλούνται (d, m)-διαμερίσεις. Έπειτα δείχνουμε ότι οι αναπαραστάσεις που κατασκευάστηκαν είναι κατά ζεύγη μη ισόμορφες και ανάγωγες. Στο έκτο κεφάλαιο,παίρνουμε ότι αυτές οι αναπαραστάσεις σχηματίζουν ένα πλήρες σύνολο κατά ζεύγη μη ισόμορφων και ανάγωγων αναπαραστάσεων της $Y(d, m, n)$.

Στο έκτο κεφάλαιο,δίνουμε διάφορα σύνολα γεννητόρων για τις αφινικές και κυκλοτομικές Yokonuma-Hecke άλγεβρες. Χρησιμοποιώντας την διάσταση των ανάγωγων αναπαραστάσεων για πεπερασμένο m, δείχνουμε ότι αυτά τα σύνολα είναι βάσεις για την $Y(d, m, n)$ για κάθε m (για την αφινική περίπτωση, αυτό ανάγεται από την κυκλοτομική περίπτωση). Έτσι,η άλγεβρα $Y(d, m, n)$ είναι ένα ελεύθερο $\mathcal{R}_m$-πρότυπο και, αν $m < \infty$, η διάσταση του ισούται με $(dm)^n n!$,όπου $\mathcal{R}_m := \mathbb{C}[q^{\pm 1}, v_1^{\pm 1}, \ldots, v_n^{\pm 1}]$ για $m \in \mathbb{Z}_{>0}$,και $\mathcal{R}_\infty := \mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ Τέλος, χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου για να συμπεράνουμε ότι οι αναπαραστάσεις που κατασκευάστηκαν στο κεφάλαιο 5 σχηματίζουν ένα πλήρες σύνολο κατά ζεύγη μη ισόμορφων και ανάγωγων αναπαραστάσεων της $Y(d, m, n)$.

Abstract

In this master thesis, we define and study the classical,affine and cyclotomic Yokonuma–Hecke algebras. Affine and cyclotomic Yokonuma–Hecke algebras generalise at the same time the Ariki–Koike and affine Hecke algebras and the Yokonuma–Hecke algebras. All these algebras generalise the group algebra of the symmetric group and they play an important role in the study of the representation theory of $GL_n(q)$,as well as in other areas of mathematics. We study the representation theory of these algebras and construct several bases for them.

Chapter 1

We introduce the necessary theory to study the representations of classical,affine and cyclotomic Yokonuma–Hecke algebras

Chapter 2

The Yokonuma-Hecke algebra (of type A) $Y_{d,n}(q)$ at parameter q is a quotient of the fraimed braid group algebra $B_{d,n}$:=$C_d^n \rtimes B_n$,where B_n is the braid group on n strings of type A,and $C_d^n = C_d \times \cdots \times C_d$,where C_d is the cyclic group with d elements. More precisely,we give a presentation of $B_{d,n}$ by generators and relations and then we define the algebra $Y_{d,n}(q)$ as the quotient of the group algebra of $B_{d,n}$ over $\mathbb{C}$ by the ideal generated by a certain family of quadratic expressions. Then,after computing some formulas for the Yokonuma-Hecke algebra $Y_{d,n}(q)$,we give a presentation by genetarators and relations. Finally,we prove that the algebra $Y_{d,n}(q)$ is a free $\mathbb{C}$-module and its rank is equal to $d^n n!$

Chapter 3

In this chapter,we define the algebra $Y(d,m,n)$,which we call affine Yokonuma-Hecke algebra when $m = \infty$ and cyclotomic Yokonuma-Hecke algebra when $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Then,we compute some formulas and we give relations among the generators of $Y(d,m,n)$.Finally,we define the Jucys-Murphy elements of $Y(d,m,n)$,and we also give relations between them and the generators of $Y(d,m,n)$.

Chapter 4

In this chapter we study the representations of Yokonuma-Hecke algebra $Y_{d,n}(q)$. More precisely,we study a special class of representations of $Y(d,\infty,2)$.We use these representations to obtain information on the spectrum of the Jucys–Murphy elements of the affine Yokonuma-Hecke algebra $Y(d,\infty,n)$. Then,we give explicit formulas for the irreducible representations of $Y_{d,n}(q)$. These formulas originate in the study of the

simplest non-trivial affine Yokonuma–Hecke algebra $Y(d, \infty, 2)$. We show that the irreducible representations of $Y_{d,n}(q)$ are parametrised by the d-partitions of n. For a d-partition λ of n, the irreducible representation V_λ has a basis indexed by the standard d-tableaux of shape λ,thus, our formulas are in the combinatorial terms of standard d-tableaux. So,we obtain that the spectrum of the Jucys–Murphy elements of $Y_{d,n}(q)$ is, in fact, in bijection with the set of standard d-tableaux of size n. Finally,we prove that these are all irreducible representations for $Y_{d,n}(q)$.

Chapter 5

In this section, we construct with explicit formulas a set of representations of the cyclotomic Yokonuma-Hecle algebra $Y(d, m, n)$ labelled by combinatorial objects called (d, m)-partitions. Then we show that the representations constructed are pairwise non-isomorphic and irreducible. In Chapter 5,we obtain that these representations form a complete set of pairwise non-isomorphic irreducible representations for $Y(d, m, n)$.

Chapter 6

In this chapter, we provide several generating sets for both affine and cyclotomic Yokonuma–Hecke algebras. Using the knowledge of the dimension of the irreducible representations for finite m, we show that these spanning sets are bases of $Y(d, m, n)$ for every m (in the affine situation, this is deduced from the results in the cyclotomic case). Thus,$Y(d, m, n)$ is a free $\mathcal{R}_m$-module and, if $m < \infty$, its rank is equal to $(dm)^n n!$,where $\mathcal{R}_m := \mathbb{C}[q^{\pm 1}, v_1^{\pm 1}, \ldots, v_n^{\pm 1}]$ for $m \in \mathbb{Z}_{>0}$,and $\mathcal{R}_\infty := \mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ Finally, we use the results of this section to conclude that the representations constructed in Chapter 4 form a complete set of pairwise non-isomorphic irreducible representations.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Θεωρία αναπαραστάσεων

1.1 Δράσεις ομάδων επί συνόλων

Ορισμός 1.1.0.1. *Μια ομάδα G είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια πράξη ομάδας $G \times G \to G, (a.b) \mapsto a \cdot b$ έτσι ώστε:*
(i) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ για κάθε $a, b, c \in G$.
(ii) Υπάρχει ένα στοιχείο 1_G τέτοιο ώστε $a \cdot 1_G = 1_G \cdot a$ για κάθε $a \in G$.
(iii) Για κάθε $a \in G$ υπάρχει στοιχείο $a^{-1} \in G$ τέτοιο ώστε $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_G$.
Η G καλείται αβελιανή αν $a \cdot b = b \cdot a$ για κάθε $a, b \in G$.
Η τάξη της ομάδας G είναι το πλήθος των στοιχείων της και συμβολίζεται με $|G|$. Η G καλείται πεπερασμένη αν $|G| < \infty$ και άπειρη διαφορετικά.

Παραδείγματα 1.1.0.1. *(i) Οι ακέραιοι modulo n,$\mathbb{Z}_n$,αποτελούν ομάδα με πράξη την πρόθεση.*
(ii) Η συμμετρική ομάδα $S_n = \{f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}, f \quad 1 - 1 \quad \text{και} \quad \text{επί}\}$,
αποτελεί ομάδα με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων.
(iii) Το σύνολο των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$,$GL_n(\mathbb{K})$,αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Ορισμός 1.1.0.2. *Έστω G ομάδα και $X \neq \emptyset$ σύνολο. Μια (αριστερή) δράση της G στο X είναι μια απεικόνιση $G \times X \to X$,$(g, x) \mapsto g \cdot x$ με τις εξής ιδιότητες:*
(i) $1_G \cdot x = x$ για κάθε $x \in X$.
(ii) $(gg') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x)$ για κάθε $x \in X$ και $g, g' \in G$.
Το X καλείται G-σύνολο.

Παρατήρηση 1.1.0.1. *Κάθε αριστερή δράση επάγει δεξιά δράση και αντίστροφα (δίοτι $g \cdot x \iff x \cdot g^{-1}$).*

Παραδείγματα 1.1.0.2. *(i) Έστω G ομάδα και $X = G$. Η G δρα στο X με πολλαπλασιασμό από αριστερά,δηλαδή $g \cdot x = gx$ για κάθε $g \in G$ και $x \in X$.*
(ii) Έστω G ομάδα και X μη κενό σύνολο. Η τετριμμένη δράση της G στο X είναι η δράση $g \cdot x = x$ για κάθε $g \in G$ και $x \in X$.
(iii) Έστω H υποομάδα της G και $X = G/H$ το σύνολο των αριστερών συμπλόκων της H στην G. Η G δρα στο X με $g \cdot (xH) = gxH$ για κάθε $g \in G$ και $xH \in X$.
(iv) Η $GL_n(\mathbb{R})$ δρα στο $X = \mathbb{R}^n$ με $A \cdot x = Ax$ για κάθε $A \in GL_n(\mathbb{R})$ και $x \in \mathbb{R}^n$.
(v) Η συμμετρική ομάδα $G = S_n$ δρα στο $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ με $\sigma \cdot x = \sigma(x)$,για κάθε $\sigma \in S_n$ και $x \in X$.

1.2 Αναπαραστάσεις Ομάδων

Ανεπίσημα μιλώντας,η αναπαράσταση μια ομάδας G είναι ένας τρόπος να γράψουμε τα στοιχεία της ομάδας ως τετραγωνικούς πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{F}$. Η διάσταση της αναπαράστασης ισούται με το μέγεθος του τετραγωνικού πίνακα,δηλαδή ισούται με το πλήθος των γραμμών=πλήθος των στηλών του. Παίρνουμε μια ομάδα και την αφήνουμε να δράσει γραμμικά σε ένα διανυσματικό χώρο,με τρόπο συμβατό με την δομή της ομάδας. Κάθως τα στοιχεία της ομάδας είναι αντιστρέψιμα,μέσω της γραμμικής δράσης τα στοιχεία που προκύπτουν είναι επίσης αντιστρέψιμα. Αυτά τα στοιχεία,τα οποία είναι γραμμικοί αντιστρέψιμοι μετασχηματισμοί επί ενός διανυσματικού χώρου V,αποτελούν ομάδα με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων. Ειδικότερα,αν η διάσταση του διανυσματικού χώρου V είναι πεπερασμένη,πρόκειται για την ομάδα των αντιστρέψιμων τετραγωνικών πινάκων. Πρωτού δώσουμε τους επίσημους ορισμούς,θα δούμε κάποια παραδείγματα:

Παράδειγμα 1.2.0.1. *Αν G ομάδα,θεωρούμε την 1-διάστατη αναπαράσταση $\rho(g) = 1$ για κάθε $g \in G$. Η ρ καλείται η τετριμμένη αναπαράσταση.*

Παράδειγμα 1.2.0.2. *Έστω ζ η n-οστή ρίζα της μονάδας,δηλαδή $\zeta^n = 1$ με $\zeta \in \mathbb{C}$. Από το θεώρημα n-οστής ρίζας οι λύσεις της εξίσωσης $\zeta^n = 1, \zeta \in \mathbb{C}$ είναι οι $\zeta_k = e^{2\pi i k/n}$,όπου $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Αν $G = G_n = \{1, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ η κυκλική ομάδα τάξης n,έχουμε την 1-διάστατη αναπαράσταση $\rho(g^m) = \zeta^m$.*

Παράδειγμα 1.2.0.3. *Έστω $G = D_{2n}$ η διεδρική ομάδα τάξηςς $2n$. Έχουμε την 2-διάστατη αναπαράσταση $\rho(g) = A$,όπου $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε η απεικόνιση $v \mapsto Av, v \in \mathbb{R}^2$ να είναι ανάκλαση ή περιστροφή στον $\mathbb{R}^2$. Επομένως,για g (αριστερόστροφη) περιστροφή κατά γωνία θ,$\rho(g) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$. Για g ανάκλαση ως προς την ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα τον x,$\rho(g) = \begin{pmatrix} cos2\theta & sin2\theta \\ sin2\theta & -cos2\theta \end{pmatrix}$. Επομένως,αν $n = 4$ τότε $|G| = 8$ και δίνουμε παρακάτω την λίστα των στοιχείων $g \in G$ και των πινάκων τους $\rho(g)$:*

- $g = 1 : \rho(1) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $g =$ *περοστροφή κατά γωνία* $\pi/2 : \rho(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $g =$ *περοστροφή κατά γωνία* π: $\rho(g) = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $g =$ *περιστροφή κατά γωνία* $3\pi/2$: $\rho(g) = -I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- $g =$ *ανάκλαση ως προς τον* x-*άξονα* : $\rho(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $g =$ *ανάκλαση ως προς τον εθεία* $x = y : \rho(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $g =$ *ανάκλαση ως προς τον* y-*άξονα* : $\rho(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $g =$ *ανάκλαση ως προς τον εθεία* $x = -y : \rho(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Έστω $\mathbb{F}$ σώμα και V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Θεωρούμε το σύνολο $GL(V) = \{f : V \to V$ γραμμική και αντιστρέψιμη$\}$. Αν ο V έχει μια βάση $v_1, \ldots, v_n$ τότε ταυτίζουμε το σύνολο $GL(V)$ με το σύνολο $GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_{nxn}(\mathbb{F}) : det(A) \neq 0\}$.

Ορισμός 1.2.0.1. *Αναπαράσταση μιας ομάδας G είναι ένα ζευγάρι (V,ρ),όπου V διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\rho : G \to GL(V)$ ομομορφισμός ομάδων. Η διάσταση του διανυσματικού χώρου V είναι ο βαθμός της αναπαράστασης ρ.*

Παρατήρηση 1.2.0.1. *Αν ρ αναπαράσταση της ομάδας G,τότε $\rho(1_G) = 1_V$,$\rho(gg') = \rho(g)\rho(g')$ και $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$ για κάθε $g, g' \in G$ (διότι ρ ομομορφισμός ομάδων).*

Σημείωση 1.2.0.1. *Μπορούμε να σκεφτόμαστε την αναπαράσταση μιας ομάδας G ως ένα ζευγάρι (V,ρ),όπου V διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και μιας απεικόνισης $G \times V \to V$,$g \cdot v = \rho(g)(v)$,η οποία ικανοποιεί τα εξής:*
(1) Είναι δράση της G στον V.
(2) Η απεικόνιση $V \to V$,$v \mapsto g \cdot v$ είναι $\mathbb{F}$-γραμμική για κάθε $g \in G$.
Μ' άλλα λόγια,η αναπαράσταση μιας ομάδας G δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια γραμμική δράση της G στον $\mathbb{F}$-διανυσματικό χώρο V.

Ορισμός 1.2.0.2. *Έστω (V,ρ),(V',ρ') αναπαραστάσεις μια ομάδας G,όπου V, V' $\mathbb{F}$-διανυσματικοί χώροι. Ομομορφισμός αναπαραστάσεων $T : (V,\rho) \to (V',\rho')$ είναι μια $\mathbb{F}$-γραμμική απεικόνιση $T : V \to V'$ τέτοια ώστε $T \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ T$ για κάθε $g \in G$. Μ' άλλα λόγια,απαιτούμε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(g)"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ V' \arrow[r, "\rho'(g)"] & V' \end{tikzcd}$$

Αν επιπλέον η T είναι αντιστρέψιμη,τότε η T είναι ισομορφισμός.

Παρατήρηση 1.2.0.2. *(i) Η T είναι ισομορφισμός αναπαραστάσεων αν και μόνο αν η T^{-1} είναι ισομορφισμός αναπαραστάσεων.*
(ii) Η T είναι ισομορφισμός αναπαραστάσεων αν και μόνο η T είναι ομομορφισμός αναπαραστάσεων,ο οποίος είναι $1-1$ και επί.

Ορισμός 1.2.0.3. *Έστω V, V' διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$. Οι αναπαραστάσεις (V,ρ),(V',ρ') μια ομάδας G καλούνται ισόμορφες αν υπάρχει ισομορφισμός αναπαραστάσεων $T : (V,\rho) \to (V',\rho')$.*

Ορισμός 1.2.0.4. *(i) Έστω V διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και (V,ρ) αναπαράσταση μια ομάδας G. Ο διανυσματικός υπόχωρος W του V(επί του $\mathbb{F}$) καλείται ρ-αναλλοίωτος αν $\rho(g)(W) \subset W$ για κάθε $g \in G$. Μ' άλλα λόγια,ο υπόχωρος W είναι ρ-αναλλοίωτος,αν είναι κλειστός κάτω από την δράση της ρ.*

(ii) Η αναπαράσταση ρ της G καλείται ανάγωγη αν οι διανυσματικοί χώροι V και $\{0\}$ είναι οι μόνοι ρ-αναλλοίωτοι υπόχωροι του V. Μ΄ άλλα λόγια,η αναπαράσταση ρ της G καλείται ανάγωγη αν δεν υπάρχουν μη τεριμμένοι,γνήσιοι ρ-αναλλοίωτοι υπόχωροι του V. Διαφορετικά,καλείται μη ανάγωγη.

Παραδείγματα 1.2.0.1. *(i) Κάθε αναπαράσταση βαθμού 1 είναι ανάγωγη.*
(ii) Μια ομάδα G είναι αβελιανή αν και μόνο αν κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της είναι βαθμού 1.
(iii) Έστω $\mathbb{Z}_n$ το σύνολο των ακεραίων modulo n,όπου $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\zeta \in \mathbb{C}$ n-οστή ρίζα της μονάδας,δηλαδή $\zeta^n = 1$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\rho : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}^\times$ με τύπο $\rho(m) = \omega^m$,όπου $\mathbb{C}^\times$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Η ρ είναι αναπαράσταση βαθμού 1.Ειδικότερα,είναι ανάγωγη.

1.3 Αναπαραστάσεις Προσεταιριστικών Αλγεβρών

Ορισμός 1.3.0.1. *Ένας δακτύλιος είναι ένα μη κενό σύνολο R εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης $+ : R \times R \to R, (r, s) \mapsto r + s$ και του πολλαπλασιασμού $\cdot : R \times R \to R, (r, s) \mapsto r \cdot s$ έτσι ώστε για κάθε $r, s, t \in R$ να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:*
(i) Προσεταιριστικότητα της $+ : r + (s + t) = (r + s) + t$.
(ii) Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου ως προς την $+$:Υπάρχει στοιχείο $0_R \in R$ τέτοιο ώστε $r + 0_R = 0_R + r = r$.
(iii) Ύπαρξη αντιθέτου στοιχείου ως προς την $+$: Για κάθε $r \in R$ υπάρχει $-r \in R$ τέτοιο ώστε $r + (-r) = (-r) + r + 0_R$.
(iv) Μεταθετικότητα της $+ : r + s = s + r$.
(v) Επιμεριστική : $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$ και $(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$.
(vi) Προσεταιριστικότητα του $\cdot$: $r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$.
Ο δακτύλιος R καλείται μεταθετικός αν $r \cdot s = s \cdot r$ για κάθε $r, s \in R$.
Ο δακτύλιος R καλείται μοναδιαίος αν υπάρχει στοιχείο $1_R \in R$ (διάφορο του 0_R) τέτοιο ώστε $1_R \cdot r = r \cdot 1_R = r$.

Παρατήρηση 1.3.0.1. *Τα αξιώματα $(i) - (iv)$ λένε ότι ο δακτύλιος R εφοδιασμένος με την πράξη της πρόσθεσης $+$,$(R, +)$,είναι μια αβελιανή προσθετική ομάδα.*

Παραδείγματα 1.3.0.1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_n, M_{n\times n}(\mathbb{R}), \mathbb{R}[x]$.

Ορισμός 1.3.0.2. *Ένας μη μηδενικός,μεταθετικός και μοναδιαίος δακτύλιος R καλείται σώμα,αν για κάθε μη μηδενικό $r \in R$ υπάρχει $s \in R$ τέτοιο ώστε $r \cdot s = s \cdot r = 1_R$,δηλαδή αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R είναι αντιστρέψιμο (ως προς την πράξη του $\cdot$) εντός του R.*

Παραδείγματα 1.3.0.2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$,*όπου p πρώτος.*

Ορισμός 1.3.0.3. *Ένα διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ ή $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος είναι ένα μη κενό σύνολο V εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης*
$+ : V \times V \to V, (u, v) \mapsto u + v$ *και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού* $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ *έτσι ώστε για κάθε $u, v, w \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:*
(i) Προσεταιριστικότητα της $+$: $u + (v + w) = (u + v) + w$.
(ii) Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου ως προς την $+$:Υπάρχει στοιχείο $0_V \in V$ τέτοιο ώστε $v + 0_V = 0_V + v = v$.
(iii) Ύπαρξη αντιθέτου στοιχείου ως προς την $+$: Για κάθε $v \in V$ υπάρχει $-v \in V$ τέτοιο ώστε $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$
(iv) Μεταθετικότητα της $+$: $u + v = v + u$.
(v) Επιμεριστική : $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ και $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
(vi) Προσεταιριστικότητα του βαθμωτού $\cdot$: $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$
(vii) Υπάρχει στοιχείο $1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $1_{\mathbb{F}} \cdot v = v \cdot 1_{\mathbb{F}} = v$
Τα στοιχεία του συνόλου V καλούνται διανύσματα,ενώ εκείνα του $\mathbb{F}$ συντελεστές.

Παρατήρηση 1.3.0.2. *Τα αξιώματα $(i) - (iv)$ λένε ότι ο $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος V εφοδιασμένος με την πράξη της πρόσθεσης $+$,$(V, +)$,είναι μια αβελιανή προσθετική ομάδα.*

Παραδείγματα 1.3.0.3. *(i) Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού κατά συντεταγμένη είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος.*
(ii) Το σύνολο των πραγματικών ακολουθιών $\mathcal{S} = \{(x_n)_n : \text{πραγματική ακολουθία}\}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού κατά συντεταγμένη είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος.
(iii) Το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού κάποιο μη κενό σύνολο A,$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : \text{συνάρτηση}\}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού κατά σημείο είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.3.0.4. *Μια προσεταιριστική άλγεβρα επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{A}$ επί του $\mathbb{F}$ εφοδιασμένος με μια $\mathbb{F}$-διγραμμική*

απεικόνιση
$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, (a,b) \mapsto ab$ *τέτοια ώστε* $(ab)c = a(bc)$ *για κάθε* $a,b,c \in \mathcal{A}$.
Μ΄ άλλα λόγια, μια προσεταιριστική άλγεβρα $\mathcal{A}$ *επί ενός σώματος* $\mathbb{F}$ *(ή μια* $\mathbb{F}$*-άλγεβρα) είναι ένας δακτύλιος εφοδιασμένος με τις πράξεις τις πρόσθεσης* $(a,b) \mapsto a+b$ *και του πολλαπλασιασμού* $(a,b) \mapsto a \cdot b$*,όπου* $a,b \in \mathcal{A}$*,ο οποίος είναι επίσης διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$*,με την παραπάνω πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό* $(\lambda, a) \mapsto \lambda \cdot a$*,για* $\lambda \in \mathbb{F}, a \in \mathcal{A}$ *έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση:*
$\lambda \cdot (ab) = (\lambda \cdot a)b = a \cdot (\lambda \cdot b)$*,για κάθε* $\lambda \in \mathbb{F}, a \in \mathcal{A}$.
Λέμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{A}$ *έχει μοναδιαίο στοιχείο αν υπάρχει* $e \in \mathcal{A}$ *τέτοιο ώστε* $ea = ae = a$ *για κάθε* $a \in \mathcal{A}$*. Αν η* $\mathcal{A}$ *έχει μοναδιαίο στοιχείο,τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται με 1 ή* $1_{\mathcal{A}}$*. Σε αυτήν την περίπτωση η* $\mathcal{A}$ *καλείται μοναδιαία.*
Η $\mathcal{A}$ *καλείται μεταθετική αν* $ab = ba$ *για κάθε* $a,b \in \mathcal{A}$.
Η διάσταση της $\mathbb{F}$*-άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *είναι η διάσταση της* $\mathcal{A}$ *ως* $\mathbb{F}$*-διανυσματικού χώρου.*

Παραδείγματα 1.3.0.4. (i) *Έστω* $\mathbb{F}$ *σώμα και* $\mathbb{A} = \mathbb{F}$*. Το* $\mathcal{A}$ *είναι μια προσεταιριστική άλγεβρα επί του* $\mathbb{F}$ *διάστασης 1 με πολλαπλασιασμό τον συνήθη πολλαπλασιαμό.*
(ii) *Το σώμα* $\mathbb{C}$ *είναι άλγεβρα επί του* $\mathbb{R}$*,διάστασης 2,με* $\mathbb{R}$*-βάση το σύνολο* $\{1, i\}$.
(iii) *Έστω* $\mathbb{F}$ *σώμα και* $\mathcal{A} = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ *ο πολυωνυμικός δακτύλιος στις μεταβλητές* $x_1, \ldots, x_n$ *με συντελεστές από το* $\mathbb{F}$*. Το* $\mathcal{A}$ *είναι μια προσεταιρισιτκή άλγεβρα επί του* $\mathbb{F}$ *με πολλαπλασιασμό τον συνήθη πολλαπλασιασμό.*
(iv) *Έστω* V *διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος* $\mathbb{F}$ *και* $\mathcal{A} = End_{\mathbb{F}}(V) = \{f : V \to V | f\ \mathbb{F} - γραμμική\}$*. Το σύνολο* $\mathcal{A}$ *είναι μια προσεταιριστική άλγεβρα επί του* $\mathbb{C}$ *με πολλαπλασιασμό την σύνθεση απεικονίσεων.*

Σημείωση 1.3.0.1. *Από εδώ και στο εξής όταν θα γράφουμε άλγεβρα θα εννοούμε προσεταριστική μοναδιαία άλγεβρα.*

Ορισμός 1.3.0.5. *Έστω* $\mathcal{A}$ $\mathbb{F}$*-άλγεβρα και* $\mathcal{B}$ *υποσύνολο της* $\mathcal{A}$*. Το* $\mathcal{B}$ *καλείται* $\mathbb{F}$*-υπάλγεβρα της* $\mathcal{A}$ *αν το* $\mathcal{B}$ *είναι* $\mathbb{F}$*-άλγεβρα με πράξεις που επάγονται από την* $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση 1.3.0.3. *Για να δείξουμε ότι ένα υποσύνολο* $\mathcal{B}$ *μιας* $\mathbb{F}$*-άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *είναι είναι επίσης* $\mathbb{F}$*-άλγεβρα,αρκεί να δείξουμε ότι το* $\mathcal{B}$ *είναι* $\mathbb{F}$*-υπάλγεβρα της* $\mathcal{A}$ *με πράξεις που επάγονται από την* $\mathcal{A}$.

Πρόταση 1.3.0.1. *Έστω* $\mathbb{F}$ *σώμα και* $\mathcal{A}$ *μια* $\mathbb{F}$*-άλγεβρα. Το υποσύνολο* $\mathcal{B}$ *της* $\mathcal{A}$ *είναι υπάλγεβρα της* $\mathcal{A}$ *αν:*
(i) *Το* $\mathcal{B}$ *είναι* $\mathbb{F}$*-διανυσματικός υπόχωρος της* $\mathcal{A}$*,δηλαδή για κάθε* $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ *και*

$b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ *έχουμε* $\lambda b_1 + \mu b_2 \in \mathcal{B}$
(ii) Το $\mathcal{B}$ *είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό,δηλαδή για κάθε* $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ *έχουμε* $b_1 b_2 \in \mathcal{B}$
(iii) $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{B}$*,δηλαδή το μοναδιαίο στοιχείο* $1_{\mathcal{A}}$ *της* $\mathcal{A}$ *ανήκει στο* $\mathcal{B}$*.*

Παραδείγματα 1.3.0.5. *(i) Έστω* $\mathbb{F}$ *σώμα και* $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ *το σύνολο των* $n\times n$ *πινάκων με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$*. Οι άνω τετραγωνικοί* $n \times n$ *πίνακες με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$*,*$T_n(\mathbb{F}) := \{(a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{F}) | a_{ij} = 0$ *για* $i > j\}$*,είναι* $\mathbb{F}$*-υπάλγεβρα της* $M_{n\times n}(\mathbb{F})$*.*
(ii) Το σύνολο $M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ *δεν είναι* $\mathbb{R}$*-υπάλγεβρα της* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$*,διότι δεν είναι* $\mathbb{R}$*-διανυσματικός υπόχωρος.*

Ορισμός 1.3.0.6. *Έστω* $\mathcal{A}$ $\mathbb{F}$*-άλγεβρα,όπου* $\mathbb{F}$ *σώμα. Το υποσύνολο* I *της* $\mathcal{A}$ *καλείται αριστερό ιδεώδες αν το* $(I, +)$ *είναι υποομάδα της* $(\mathcal{A}, +)$ *τέτοιο ώστε* $ax \in I$ *για κάθε* $x \in I$ *και* $a \in A$*. Όμοια,το υποσύνολο* I *της* A *καλείται δεξί ιδεώδες αν το* $(I, +)$ *είναι υποομάδα της* $(\mathcal{A}, +)$ *τέτοιο ώστε* $xa \in I$ *για κάθε* $x \in I$ *και* $a \in A$*. Αν το* I *είναι ταυτόχρονα αριστερό και δεξί ιδεώδες,τότε το* I *καλείται αμφίπλευρο ιδώδες ή απλά ιδεώδες.*

Παρατήρηση 1.3.0.4. *(i) Αν η* $\mathbb{F}$*-άλγεβρα* $\mathcal{A}$ *είναι μεταθετική,τότε κάθε αριστερό και δεξί ιδεώδες είναι αμφίπλευρο.*
(ii) Έστω $\mathcal{B}$ $\mathbb{F}$*-υπάλγεβρα της* $\mathbb{F}$*-άλγεβρας* $\mathcal{A}$*. Τότε το* $\mathcal{B}$ *είναι αριστερό (ή δεξί) ιδεώδες αν και μόνο αν* $\mathcal{B} = \mathcal{A}$*.*
(iii) Κάθε αριστερό (ή δεξί) ιδεώδες I *μιας* $\mathbb{F}$*-άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *είναι ένας* $\mathbb{F}$*-διανυσματικός υπόχωρος της* $\mathcal{A}$*.*

Ορισμός 1.3.0.7. *Έστω* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *προσεταιριστικές άλγεβρες επί ενός σώματος* $\mathbb{F}$*.*
Ομομορφισμός αλγεβρών είναι μια $\mathbb{F}$*-γραμμική επεικόνιση* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *τέτοια ώστε* $f(ab) = f(a)f(b)$ *για κάθε* $a, b \in \mathcal{A}$*. Αν επιπλέον η* f *είναι* $1-1$ *και επί,οι* $\mathbb{F}$*-άλγεβρες* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *καλούνται ισόμορφες,και γράφουμε* $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$*.*

Παρατήρηση 1.3.0.5. *(i) Λόγω της* $\mathbb{F}$*-γραμμικότητας η παραπάνω συνθήκη αρκεί να ελεγχθεί για δύο οποιαδήποτε στοιχεία της* $\mathbb{F}$*-βάσης της* $\mathcal{A}$*.*
(ii) Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *προσεταιριστικές άλγεβρες επί ενός σώματος* $\mathbb{F}$ *και* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *ομομορφισμός αλγεβρών,τότε* $f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$*.*

Παραδείγματα 1.3.0.6. *(i) Έστω* $\mathbb{F}$ *σώμα. Κάθε 1-διάστατη* $\mathbb{F}$*-άλγεβρα είναι ισόμορφη με το* $\mathbb{F}$*. Πράγματι,έστω* $\mathcal{A}$ *1-διάσταστη* $\mathbb{F}$*-άλγεβρα. Τότε η* $\mathcal{A}$ *περιέχει τα βαθμωτά πολλαπλάσια της μονάδας* $1_{\mathcal{A}}$*,δηλαδή περιέχει την* $\mathbb{F}$*-υπάλγεβρα* $\mathcal{B} = \{\lambda 1_{\mathcal{A}} | \lambda \in \mathbb{F}\}$*. Όμως,*$\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A} = 1 = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{B}$*. Άρα,*$\mathcal{A} = \mathcal{B}$*. Επίσης,καθώς* $\mathcal{B}$ $\mathbb{F}$*-υπάλγεβρα της* $\mathcal{A}$*,κληρονομεί το γινόμενο από αυτήν,το οποίο είναι το σύνηθες γινόμενο. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση* $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{F}$

με τύπο $\phi(\lambda 1_{\mathcal{A}}) = \lambda, \lambda \in \mathbb{F}$. *Η* ϕ *είναι ισομορφισμός* $\mathbb{F}$*-αλγεβρών.*
(ii) *Έστω* $\mathbb{F}$ *σώμα. Κάθε 2-διάστατη* $\mathbb{F}$*-άλγεβρα είναι μεταθετική. Πράγματι,έστω* $\mathcal{A}$ *2-διάσταστη* $\mathbb{F}$*-άλγεβρα. Επιλέγουμε μια βάση της* $\mathcal{A}$ *η οποία περιέχει την μονάδα* $1_{\mathcal{A}}$*,έστω* $\{1_{\mathcal{A}}, b\}$ *αυτή. Καθώς τα στοιχεία της βάσης μετατίθενται,το ίδιο θα συμβαίνει και για οποιουσδήποτε δύο* $\mathbb{F}$*-γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων της βάσης,δηλαδή και για δυο οποιαδήποτε στοιχεία της* $\mathcal{A}$*. Δηλαδή,η* $\mathcal{A}$ *είναι μεταθετική. Να σημειώσουμε ότι από την γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο επεκτείνεται σε βάση (Λήμμα Επέκτασης). Έτσι,αν η βάση που επιλέξουμε δεν περιέχει την μονάδα,απλά της συμπληρώνουμε την μονάδα* $1_{\mathcal{A}}$*.*
(iii) *Ως προς ισομορφισμό,υπάρχουν 3 ακριβώς 2-διάστατες άλγεβρες επί του* $\mathbb{R}$*. Κάθε 2-διάστατη άλγεβρα επί του* $\mathbb{R}$ *είναι ισόμορφη ακριβώς με κάποια εκ των*
$\mathbb{R}[x]/ < x^2 >, \quad \mathbb{R}[x]/ < x^2 - 1 >, \quad \mathbb{R}[x]/ < x^2 + 1 >.$

Ορισμός 1.3.0.8. *Έστω* R *ένας δακτύλιος με μονάδα* 1_R*. Ένα αριστερό* R*-πρότυπο (ή απλά* R*-πρότυπο) είναι μια αβελιανή προσθετική ομάδα* $(M, +)$ *εφοδιασμένη με μια απεικόνιση* $R \times M \to M$*,*$(r, m) \mapsto r \cdot m$ *τέτοια ώστε για κάθε* $r, s \in R$ *και* $m, n \in M$ *να ισχύει:*
(i) $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$*,για κάθε* $r, s \in R$*,για κάθε* $m \in M$
(ii) $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$ *για κάθε* $r \in R$*,για κάθε* $m, n \in M$
(iii) $r \cdot (s \cdot m) = (rs) \cdot m$*για κάθε* $r, s \in R$*,για κάθε* $m \in M$
(iv) $1_R \cdot m = m$*,για κάθε* $m \in M$*.*
Μ΄ άλλα λόγια,πρόκειται για μια (αριστερή) δράση του δακτυλίου R *στην προσθετική αβελιανή ομάδα* $(M, +)$*. Όμοια,ορίζεται και το δεξί* R*-πρότυπο,με την διαφορά ότι είναι εφοδιασμένο με μια απεικόνιση* $M \times R \to M$*,*$(m, r) \mapsto m \cdot r$ *(δεξιά δράση).*

Παρατήρηση 1.3.0.6. *Αν ο δακτύλιος* R *είναι μεταθετικός,κάθε αριστερή* R*-δράση είναι δεξιά* R*-δράση και αντίστροφα. Σε αυτήν την περίπτωση δηλαδή,τα αριστερά* R*-πρότυπα ταυτίζονται με τα δεξιά* R*-πρότυπα.*

Παραδείγματα 1.3.0.7. (i) *Έστω* $\mathbb{F}$ *σώμα. Τα* $\mathbb{F}$*-πρότυπα είναι ακριβώς οι διανυσματικοί χώροι επί του* $\mathbb{F}$*. Δηλαδή,τα πρότυπα είναι μια γενίκευση της έννοιας του διανυσματικού χώρου.*
(ii) *Έστω* $\mathbb{Z}$ *το σύνολο των ακεραίων. Κάθε αβελιανή ομάδα είναι ένα* $\mathbb{Z}$*-πρότυπο.*
(iii) *Έστω* R *δακτύλιος με μονάδα* 1_R *.Κάθε ιδεώδες* I *του* R *είναι ένα* R*-πρότυπο,με* R*-δράση,η οποία δίνεται από τον πολλαπλασσιασμό δακτυλίων.*
(iv) *Κάθε δακτύλιος* R *είναι ένα* R*-πρότυπο,με* R*-δράση,η οποία δίνεται από τον πολλαπλασσιασμό δακτυλίων.*
(v) *Έστω* $\mathbb{F}$ *σώμα και* V *ένας* $\mathbb{F}$*-διανυσματικός χώρος. Έστω*

$\mathcal{L}(V) = \{f : V \to V | f\ \mathbb{F} - \textit{γραμμική}\}$. *Ο* V *είναι ένα* $\mathcal{L}(V)$*-πρότυπο (με τον φυσιολογικό τρόπο). Για παράδειγμα,ο* R^n *είναι ένα* $M_n(R)$*-πρότυπο με δράση* $A \cdot v = Av$ *το σύνηθες γινόμενο,όπου* $A \in M_n(R), v \in R^n$.
(vi) *Κάθε αβελιανή ομάδα* M *είναι ένα* $End(M, \cdot)$*-πρότυπο με δράση* $f \cdot x = f(x)$*,για κάθε* $f \in End(M, \cdot)$*,για κάθε* $x \in M$
(vii) *Έστω* H *χώρος Hilbert και* $\mathcal{B}(H) = \{f : H \to H | f\ \textit{γραμμική και φραγμένη}\}$
Ο H *είναι ένα* $\mathcal{B}(H)$*-πρότυπο (με τον φυσιολογικό τρόπο).*
$(viii)$ *Έστω* $R_1, \ldots, R_n$ R*-πρόπτυπα. Το καρτεσιανό του γινόμενο* $R_1 \times \cdots \times R_n$ *είναι επίσης* R*-πρότυπο.*
(ix) *Έστω* $\mathbb{F}$ *σώμα και* $\mathcal{A}$ *μια* $\mathbb{F}$*-άλγεβρα. Κάθε* $\mathcal{A}$ *πρότυπο* V *είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Ορισμός 1.3.0.9. *Έστω* R *ένας δακτύλιος και* M *ένα* R*-πρότυπο. Το υποσύνολο* N *του* M *καλείται* R*-υποπρότυπο του* M *αν το* $(N, +)$ *είναι υποομάδα της* $(M, +)$ *και επιπλέον είναι κλειστό κάτω από την δράση του δακτυλίου* R*,δηλαδή* $r \cdot n \in N$ *για κάθε* $r \in R$ *και* $n \in N$.

Παρατήρηση 1.3.0.7. *Το* N *είναι* R*-υποπρότυπο του* M *αν και μόνο αν για κάθε* $n_1, n_2 \in N$ *και* $r \in R$ *έχουμε* $n_1 - n_2 \in N$ *και* $r \cdot n_1 \in N$

Παραδείγματα 1.3.0.8. (i) *Τα* $\mathbb{Z}$*-υποπρότυπα του* $\mathbb{Z}$ *είναι της μορφής* $n\mathbb{Z}$*,όπου* $n \in \mathbb{N}$.
(ii) *Αν* N R*-υποπρότυπο του* M*,τότε* $M_{n\times n}(N)$ *είναι* R*-υποπρότυπο του* $M_{n\times n}(M)$.
(iii) *Έστω* N_1, N_2 R*-υποπρότυπα του* R*-προτύπου* M*. Η τομή τους* $N_1 \cap N_2$ *και το άθροισμα τους* $N_1 + N_2$ *είναι επίσης* R*-υποπρότυπο του* R*-προτύπου* M.

Ορισμός 1.3.0.10. *Έστω* R *δακτύλιος και* M, N R*-πρότυπα. Ομομορφισμός* R*-προτύπων* $f : M \to N$ *είναι μια* R*-γραμμική απεικόνιση,δηλαδή:*
(i) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ *για κάθε* $m_1, m_2 \in M$.
(ii) $f(rm) = rf(m)$ *για κάθε* $r \in R$ *και* $m \in M$.
Αν επιπλέον η f *είναι* $1 - 1$ *και επί,τα* R*-πρότυπα* M, N *καλούνται ισόμορφα και γράφουμε* $M \cong N$.

Ορισμός 1.3.0.11. (i) *Αναπαράσταση μιας άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *είναι ένας* $\mathbb{F}$*-διανυσματικός χώρος* V *εφοδιασμένος με έναν ομομορφισμό αλγεβρών* $\rho : \mathcal{A} \to End_{\mathbb{F}}(V)$*. Η διάσταση του διανυσματικού χώρου* V *είναι ο βαθμός της αναπαράστασης* ρ.
(ii) *Έστω* (V, ρ) *αναπαράσταση μιας* $\mathbb{F}-$*άλγεβρας* $\mathcal{A}$*. Υποαναπαράσταση της* (V, ρ) *είναι ένας* $\mathbb{F}$*-διανυσματικός υπόχωρος* W *του* V *ο οποίος είναι κλειστός κάτω από κάθε τελεστή* $\rho(a) : V \to V$ *για κάθε* $a \in \mathcal{A}$*,δηλαδή* $\rho(a)W \subset W$ *για*

κάθε $a \in \mathcal{A}$.
(iii) Μια αναπαράσταση (V, ρ) *μιας* $\mathbb{F}$*-άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *καλείται ανάγωγη αν οι μόνες υποαναπαραστάσεις της είναι η τετριμμένη και ο εαυτός της.*
(iv) Μια αναπαράσταση (V, ρ) *μιας* $\mathbb{F}$*-άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *καλείται πλήρως αναγώμενη αν είναι ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων.*

Θεώρημα 1.3.0.1. *Έστω* $\mathbb{F}$ *σώμα και* $\mathcal{A}$ *μια* $\mathbb{F}$*-άλγεβρα.*
(a) Έστω V *αριστερό* $\mathcal{A}$*-πρότυπο,με δράση* $\mathcal{A} \times V \to V, (a, v) \mapsto a \cdot v$. *Τότε έχουμε αναπαράσταση της* $\mathcal{A}$*,*$\rho : \mathcal{A} \to End_{\mathbb{F}}(V)$ *με τύπο* $\rho(a)(v) = a \cdot v$ *για κάθε* $a \in \mathcal{A}, v \in V$.
(b) Έστω $\rho : \mathcal{A} \to End_{\mathbb{F}}(V)$ *αναπαράστασης της* $\mathcal{A}$*. Τότε,το* V *γίνεται αριστερό* $\mathcal{A}$*-πρότυπο με δράση η οποία δίνεται από* $\mathcal{A} \times V \to V, (a, v) \mapsto a \cdot v := \rho(a)(v)$ *για κάθε* $a \in \mathcal{A}, V \in V$.

Απόδειξη. (a) Θα δείξουμε αρχικά ότι $\rho(a) \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$,δηλαδή θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $\rho(a) : V \to V$ είναι $\mathbb{F}$-γραμμική. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε $\mathcal{A}$-πρότυπο,όπου $\mathcal{A}$ $\mathbb{F}$-άλγεβρα,είναι $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος. Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $v, w \in V$. Έχουμε, $\rho(a)(\lambda v + \mu w) = \rho(a)(\lambda 1_{\mathcal{A}} \cdot v + \mu 1_{\mathcal{A}} \cdot w) = (a\lambda 1_{\mathcal{A}}) \cdot v + (a\mu 1_{\mathcal{A}}) \cdot w = \lambda(a \cdot v) + \mu(a \cdot w) = \lambda\rho(a)(v) = \mu\rho(a)(w)$. Μένει να δείξουμε ότι η ρ είναι ομομορφισμός αλγεβρών. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η ρ είναι $\mathbb{F}$-γραμμική. Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $v \in V$.Έχουμε,
$\rho(\lambda a + \mu b)(v) = (\lambda a + \mu b) \cdot v = \lambda(a \cdot v) + \mu(b \cdot v) = (\lambda\rho(a) + \mu\rho(b))(v)$,δηλαδή $\rho(\lambda a + \mu b) = \lambda\rho(a) + \mu\rho(b)$.Τέλος,για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $v \in V$ έχουμε
$\rho(ab)(v) = (ab) \cdot v = a \cdot b \cdot v = (\rho(a) \circ \rho(b))(v)$,δηλαδή $\rho(ab) = \rho(a) \circ \rho(b)$.
(b) Όμοια με το (a),απλά αντιστρέφοντας τα επιχειρήματα. □

Σημείωση 1.3.0.2. *(i) Λόγω του παραπάνω θεωρήματος,αντί για* $\rho(a)v$ *γράφουμε συνήθως* av *για ένα αριστερό* $\mathcal{A}$*-πρότυπο. Έτσι,η προϋπόθεση να είναι η* $\rho : \mathcal{A} \to End_{\mathbb{F}}(V)$ *ομομορφισμός είναι* $(ab)v = a(bv)$ *για κάθε* $a, b \in \mathcal{A}$. *Παρόμοια,αν* V *δεξί* $\mathcal{A}$*-πρότυπο,αντί για* $\rho(a)v$ *γράφουμε συνήθως* va*,και για τον αντίστοιχο αντί-ομομορφισμό(δηλαδή* $\rho(ab) = \rho(b)\rho(a)$ *για κάθε* $a, b \in \mathcal{A}$*) ελέγχουμε αν* $(va)b = v(ab)$ *για κάθε* $a, b \in \mathcal{A}$.
(ii) Ουσιαστικά,η αναπαράσταση που αντιστοιχεί σε ένα $\mathcal{A}$*-πρότυπο περιγράφει πως κάθε στοιχείο* $a \in \mathcal{A}$ *δρα στον γραμμικό χώρο* V *και αντίστροφα.*

Παραδείγματα 1.3.0.9. *Έστω* $\mathcal{A}$ $\mathbb{F}$*-άλγεβρα,όπου* $\mathbb{F}$ *σώμα. Τότε,η* $\mathcal{A}$ *γίνεται ένα* $\mathcal{A}$*-πρότυπο με* $\mathcal{A}$*-δράση τον συνήθη πολλαπλασιασμό στην* $\mathcal{A}$*. Έτσι,η απεικόνιση* $\rho : \mathcal{A} \to End_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ *με τύπο* $\rho(a)(x) = ax$ *για κάθε* $a, x \in \mathcal{A}$*,είναι αναπαράσταση που αντιστοιχεί στο* $\mathcal{A}$*-πρότυπο* $\mathcal{A}$*,η οποία καλείται κανονική αναπαράσταση της* $\mathcal{A}$.

Ορισμός 1.3.0.12. *Πίνακας αναπαράστασης μιας* $\mathbb{F}$*-άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *είναι ένας ομομορφισμός* $\mathbb{F}$*-αλγεβρών* $\rho : \mathcal{A} \to M_n(F)$*,όπου* $n \geqslant 1$ *φυσικός.*

Παρατήρηση 1.3.0.8. *Αν* $\dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$*,τότε* $End_{\mathbb{F}}(V) \cong M_n(F)$*,δηλαδή κάθε αναπαράσταση* $\rho : \mathcal{A} \to End_{\mathbb{F}}(V)$ *είναι επί της ουσίας ένας πίνακας αναπαράστασης* $\rho : \mathcal{A} \to M_n(F)$*,όπου* $n \geqslant 1$ *φυσικός.*

Ορισμός 1.3.0.13. *Έστω* (V,ρ),(V',ρ') *αναπαραστάσεις μιας* $\mathbb{F}$*-άλγεβρας* $\mathcal{A}$*,όπου* V, V' $\mathbb{F}$*-διανυσματικοί χώροι. Ομομορφισμός αναπαραστάσεων* $T : (V,\rho) \to (V',\rho')$ *είναι μια* $\mathbb{F}$*-γραμμική απεικόνιση* $T : V \to V'$ *τέτοια ώστε* $T \circ \rho(a) = \rho'(a) \circ T$ *για κάθε* $a \in \mathcal{A}$*. Μ΄ άλλα λόγια,απαιτούμε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho(a)} & V \\ {\scriptstyle T}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T} \\ V' & \xrightarrow{\rho'(a)} & V' \end{array}$$

Αν επιπλέον η T *είναι αντιστρέψιμη,τότε η* T *είναι ισομορφισμός*

Παρατήρηση 1.3.0.9. (i) *Η* T *είναι ισομορφισμός αναπαραστάσεων αν και μόνο αν η* T^{-1} *είναι ισομορφισμός αναπαραστάσεων.*
(ii) *Η* T *είναι ισομορφισμός αναπαραστάσεων αν και μόνο η* T *είναι ομομορφισμός αναπαραστάσεων,ο οποίος είναι* $1-1$ *και επί.*

Ορισμός 1.3.0.14. *Έστω* V, V' *διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος* $\mathbb{F}$*. Οι αναπαραστάσεις* (V,ρ),(V',ρ') *μιας* $\mathbb{F}$*-άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *καλούνται ισόμορφες ή ισοδύναμες αν υπάρχει ισομορφισμός αναπαραστάσεων* $T : (V,\rho) \to (V',\rho')$*,και γράφουμε* $(V,\rho) \cong (V',\rho')$*.*

Παρατήρηση 1.3.0.10. (i) *Οι αναπαραστάσεις* (V,ρ),(V',ρ') *μιας* $\mathbb{F}$*-άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *είναι ισόμορφες αν και μόνο αν τα αντίστοιχα* $\mathcal{A}$*-πρότυπα* V, V' *είναι ισόμορφα.*
(ii) *Αν οι αναπαραστάσεις* (V,ρ),(V',ρ') *μιας* $\mathbb{F}$*-άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *είναι πίνακες αναπαράστασης (δηλαδή για παράδειγμα όταν οι* $\mathbb{F}$*-διανυσματικοί χώροι* V, V' *είναι πεπερασμένης διάστασης και ειδικότερα ίσης),τότε είναι ισόμορφες αν και μόνο αν οι αντίστοιχοι πίνακες αναπαράστασεις είναι όμοιοι.*

Λήμμα 1.3.0.1. *(Schur) Έστω* $(V_1,\rho_1),(V_2,\rho_2)$ *αναπαραστάσεις μιας* $\mathbb{F}$*-άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *και* $\phi : V_1 \to V_2$ *μη τετριμμένος ομομορφισμός αναπαραστάσεων. Τότε:*
(i) *Αν η αναπαράσταση* (V_1,ρ_1) *είναι ανάγωγη,ο* ϕ *είναι* $1-1$*.*
(ii) *Αν η αναπαράσταση* (V_2,ρ_2) *είναι ανάγωγη,ο* ϕ *είναι επί.*
Συνεπώς,αν οι $(V_1,\rho_1),(V_2,\rho_2)$ *είναι ανάγωγες,τότε ο* ϕ *είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. (i) Ο πυρήνας της ϕ,$\ker(\phi)$,είναι ρ_1-αναλλοίωτος υπόχωρος της (V_1,ρ_1) (δίοτι ϕ ομομορφιμός αναπαραστάσεων). Όμως,(V_1,ρ_1) ανάγωγη

αναπαράσταση, δηλαδή οι μόνοι ρ_1-αναλλοίωτοι υπόχωροι της είναι οι $\{0\}$ και V_1. Άρα,$\ker(\phi) = \{0\}$ ή $\ker(\phi) = V_1$. Αφού ο ϕ είναι μη τετρμιμμένος,έπεται ότι $\ker(\phi) \neq V_1$. Συνεπώς, $\ker(\phi) = \{0\}$,δηλαδή ο ϕ είναι $1-1$.
(ii) Η εικόνα της ϕ,$\mathrm{Im}(\phi)$,είναι ρ_2-αναλλοίωτος υπόχωρος της (V_2, ρ_2) (διότι ϕ ομομορφιμός αναπαραστάσεων). Όμως,(V_2, ρ_2) ανάγωγη αναπαράσταση,δηλαδή οι μόνοι ρ_2-αναλλοίωτοι υπόχωροι της είναι οι $\{0\}$ και V_2. Άρα,$\mathrm{Im}(\phi) = \{0\}$ ή $\mathrm{Im}(\phi) = V_2$. Αφού ο ϕ είναι μη τετριμμένος,έπεται ότι $\mathrm{Im}(\phi) \neq \{0\}$. Συνεπώς,$\mathrm{Im}(\phi) = V_2$,δηλαδή ο ϕ είναι επί. □

Ορισμός 1.3.0.15. *Ένα σώμα $\mathbb{F}$ καλείται αλγεβρικά κλειστό αν κάθε μη σταθερό πολυώνυμο στο $\mathbb{F}[x]$ έχει ρίζα στο $\mathbb{F}$.*

Παραδείγματα 1.3.0.10. (i) *Το $\mathbb{R}$ δεν είναι αλγεβρικά κλειστό,διότι η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$.*
(ii) *Το $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικά κλειστό,διότι από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας,κάθε μη σταθερό μιγαδικό πολυώνυμο έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{C}$.*

Πόρισμα 1.3.0.1. *Έστω (V, ρ) πεπερασμένης διάστασης ανάγωγη αναπαράσταση μιας άλγεβρας $\mathcal{A}$ επί ενός αλγεβρικά κλειστού σώματος $\mathbb{F}$ και $\phi : V \to V$ ομομορφισμός αναπαραστάσεων. Τότε $\phi = \lambda \cdot \mathbb{I}_d$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\phi(x) = \det(x\mathbb{I}_d - A)$,όπου A ο πίνακας αναπαράστασης της ϕ. Καθώς το $\mathbb{F}$ είναι αλγεβρικά κλειστό,η εξίσωση $\phi(x) = 0$ έχει λύση στο $\mathbb{F}$. Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$ λύση αυτής,δηλαδή το λ είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης ϕ. Τότε η απεικόνιση $\phi - \lambda\mathbb{I}_d$ είναι ομομορφισμός αναπαραστάσεων,ο οποίος δεν είναι ισομορφισμός (διότι $\det(\phi - \lambda\mathbb{I}_d) = 0$). Καθώς (V, ρ) ανάγωγη αναπαράσταση από το λήμμα του Schur ο ομομορφισμός αναπαραστάσεων $\phi - \lambda\mathbb{I}_d$ είναι ο μηδενικός,δηλαδή $\phi = \lambda \cdot \mathbb{I}_d$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$. □

Πόρισμα 1.3.0.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική $\mathbb{F}$-άλγεβρα,όπου $\mathbb{F}$ αλγεβρικά κλειστό σώμα.*
Κάθε ανάγωγη πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ είναι 1-διάστατη.

Απόδειξη. Έστω (V, ρ) ανάγωγη αναπαράσταση της $\mathcal{A}$. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ η απεικόνιση $\rho(a) : V \to V$ είναι ομομορφισμός αναπαραστάσεων. Πράγματι,$\rho(a)\rho(b)(v) = \rho(ab)(v) = \rho(ba)(v) = \rho(b)\rho(a)(v)$ για κάθε $a, b \in V$ (όπου στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε της μεταθετικότητα της $\mathcal{A}$). Από το λήμμα του Schur,η $\rho(a)$ είναι βαθμωτό για κάθε $a \in \mathcal{A}$,δηλαδή $\rho(a) = \lambda \cdot \mathbb{I}_d$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$. Έτσι,κάθε υπόχωρος της (V, ρ) είναι ρ-αναλλοίωτος. Όμως,(V, ρ) ανάγωγη και μη μηδενική,άρα $\dim_{\mathbb{F}}(V) = 1$. □

Παρατήρηση 1.3.0.11. *Καθώς κάθε 1-διάστατη αναπαράσταση είναι ανάγωγη,έπεται ότι μια $\mathbb{F}$-άλγεβρα $\mathcal{A}$,όπου $\mathbb{F}$ αλγεβρικά κλειστό σώμα,είναι μεταθετική αν και μόνο αν κάθε ανάγωγη πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ είναι 1-διάστατη.*

1.4 Αναπαραστάσεις Αλγεβρών ομάδων

Ορισμός 1.4.0.1. *Έστω G ομάδα και $\mathbb{F}$ σώμα. Συμβολίζουμε με $\mathbb{F}G$ τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ ο οποίος έχει βάση το σύνολο $\{g|g \in G\}$ και τον καλούμε άλγεβρα ομάδας.*

Παρατήρηση 1.4.0.1. *(i) Κάθε στοιχείο στον $\mathbb{F}G$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός της μορφής $\sum_{g\in G} \alpha_g g$,όπου $\alpha_g \in \mathbb{F}$. Έστω $\alpha = \sum_{g\in G} \alpha_g g, \beta = \sum_{h\in G} \beta_h h \in \mathbb{F}G$. Το γινόμενο τους δίνεται από $\alpha\beta = \sum_{x\in G}(\sum_{gh=x} \alpha_g \beta_h)x$. Ο $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος $\mathbb{F}G$ εφοδιασμένος με αυτόν τον πολλαπλασιασμό είναι $\mathbb{F}$-άλγεβρα.*
(ii) $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}G < \infty$ αν και μόνο αν $|G| < \infty$. Ειδικότερα,$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}G = |G|$.
(iii) Η άλγεβρα $\mathbb{F}G$ είναι μεταθετική αν και μόνο αν η G είναι αβελιανή.

Παραδείγματα 1.4.0.1. *(i) $\mathbb{C}S_3 = \{\alpha\mathbb{I} + \beta(12) + \gamma(13) + \delta(23) + \epsilon(123) + \zeta(132) : \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta \in \mathbb{C}\}$*
(ii) Έστω G κυκλική ομάδα τάξης 3 με γεννήτορα το στοιχείο x,δηλαδή $G = \{1_G, x, x^2\}$ και $x^3 = 1_G$. Έχουμε
$(a_0 1_G + a_1 x + a_2 x^)(b_0 1_G + b_1 x + b_2 x^) = c_0 1_G + c_1 x + c_2 x^2$,όπου $c_0 = a_0 b_0 + a_1 b_2 + a_2 b_1, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_2, c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$.

Θεώρημα 1.4.0.1. *Έστω G ομάδα και $\mathbb{F}$ σώμα.*
(a) Κάθε αναπαράσταση $\rho : G \to GL(V)$ μιας ομάδας G επί ενός διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}$ επεκτείνεται σε ομομορφισμό $\eta_\rho : \mathbb{F}G \to End_{\mathbb{F}}(V)$ της άλγεβρας ομάδας $\mathbb{F}G$ ως εξής: $\sum_{g\in G} \alpha_g g \mapsto \sum_{g\in G} \alpha_g \rho(g)$.
(b) Αντίστροφα,αν $\eta : \mathbb{F}G \to End_{\mathbb{F}}(V)$ αναπαράσταση της άλγεβρας ομάδας $\mathbb{F}G$,τότε ο περιορισμός $\rho_\eta : G \to GL(V)$ της η στο G είναι αναπαράσταση της ομάδας G επί του $\mathbb{F}$.

Απόδειξη. (a) Η $\mathbb{F}$-γραμμικότητα της η_ρ και το ότι απεικονίζεται στο $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ είναι άμεσα. Μένει να δείξουμε ότι $\eta_\rho(ab) = \eta_\rho(a)\eta_\rho(b)$ για κάθε $a, b \in \mathbb{F}G$. Καθώς η ομάδα G είναι $\mathbb{F}$-βάση της άλγεβρας ομάδας $\mathbb{F}G$ και η η_ρ είναι $\mathbb{F}$-γραμμική,αρκεί να δείξουμε ότι $\eta_\rho(ab) = \eta_\rho(a)\eta_\rho(b)$ για κάθε $a, b \in G$. Έστω $a, b \in G$. Τότε

$\eta_\rho(ab) = \rho(ab) = \rho(a)\rho(b) = \eta_\rho(a)\eta_\rho(b)$.
(b) Το G είναι υποσύνολο της $\mathbb{F}G$. Έτσι,μπορούμε να περιορίσουμε την η στο G και να πάρουμε την απεικόνιση $\rho_\eta : G \to GL(V), \rho_\eta(g) = \eta(g)\ \forall g \in G$. Πράγματι,κάθε στοιχείο $g \in G$ έχει αντίστροφο $g^{-1} \in G$,δηλαδή $gg^{-1} = 1_G$. Εφαρμόζοντας τον ομομορφισμό η παίρνουμε ότι το $\eta(g) \in V$ έχει αντίστροφο το $\eta(g^{-1}) \in V$,δηλαδή $\rho_\eta(g) = \eta(g) \in$ GL(V).για κάθε $g \in G$,δηλαδή ρ_η αντιστρέψιμη απεικόνιση. Επιπλέον, $\rho_\eta(gh) = \eta(gh) = \eta(g)\eta(h) = \rho_\eta(g)\rho_\eta(h)$,για κάθε $g, h \in G$,δηλαδή ρ_η ομομορφισμός ομάδων. Άρα,ρ_η αναπαράσταση της ομάδας G επί του $\mathbb{F}$. $\square$

Κεφάλαιο 2

Yokonuma-Hecke άλγεβρα

2.1 Framed Braid Group

Ορισμός 2.1.0.1. *Συμβολίζουμε με B_n την Braid ομάδα σε n σύμβολα . Η ομάδα B_n έχει παράσταση στους γεννήτορες $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:*

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \text{για } |i-j|>1 \ \text{ και } \quad \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j \text{ για } |i-j|=1 \tag{2.1.0.1}$$

Οι σχέσεις (2.1.0.1) καλούνται braid κινήσεις.

Θα κατασκευάσουμε την framed braid ομάδα:

Έστω $C_r = < t >$ η κυκλική ομάδα με r στοιχεία. Έστω $C_r^n = C_r \times \cdots \times C_r$ (n φορές) και

$$c_i = (1,\dots,t,\dots,1) \in C_r^n,$$

όπου το t εμφανίζεται στην i-θέση. Υπενθυμίζουμε ότι η C_r^n έχει παράσταση στους γεννήτορες $c_1,\dots,c_n$ τέτοιοι ώστε

$$c_i^r = 1 \qquad \text{και} \qquad c_ic_j = c_jc_i \qquad \text{για κάθε } i,j \tag{2.1.0.2}$$

Επίσης,υπενθυμίζουμε ότι η συμμετρική ομάδα S_n σε n σύμβολα έχει παράσταση στους γεννήτορες $s_1,\dots,s_{n-1}$ οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις (2.1.0.1) και επιπλέον κάθε μετάθεση $s_i=(i,i+1)$ είναι στοιχείο τάξης 2 στην S_n. Επομένως, χρησιμοποιώντας την κανονική προβολή από την ομάδα B_n

στην συμμετρική ομάδα S_n σε n σύμβολα $\sigma_i \mapsto s_i$ παίρνουμε ότι η B_n δρα με μεταθέσεις στην C_r^n.

Ορισμός 2.1.0.2. *Συμβολίζουμε με $B_{r,n}$ το ημιευθύ γινόμενο των ομάδων C_r^n,B_n. Η ομάδα $B_{r,n}$ καλείται framed braid ομάδα σε n σύμβολα.*

Παρατηρούμε ότι $B_{1,n}$=B_n και $B_{r,1}$=C_r. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $\iota : C_r^n \to B_{r,n}$ και $\pi : B_{r,n} \to B_n$ με τύπους αντίστοιχα $\iota(c) = (c, 1)$ και $\pi(c, \sigma) = \sigma$,όπου $c \in C_r^n, \sigma \in B_n$. Συμβολίζουμε με t_i το στοιχείο ι(c_i)=(c_i,1) και με σ_i το στοιχείο π^{-1} (σ_i)=(1,σ_i) της $B_{r,n}$

Παρατήρηση 2.1.0.1. *Τα στοιχεία t=t_1,σ_1,...,σ_{n-1} της $B_{r,n}$ ικανοποιούν τις σχέσεις $\sigma_i t$=$t\sigma_i$ (για $i > 1$),$t\sigma_1 t{\sigma_1}^{-1}$=$\sigma_1 t{\sigma_1}^{-1}t$ και*

$$\sigma_{i-1}\cdots\sigma_1 t\sigma_1^{-1}\cdots\sigma_{i-1}^{-1} = \sigma_{i-1}^{-1}\cdots\sigma_1^{-1}t\sigma_1\cdots\sigma_{i-1} = t_i \tag{2.1.0.3}$$

Πρόταση 2.1.0.1. *Η ομάδα $B_{r,n}$ έχει παράσταση στους γεννήτορες t,σ_1,...,σ_{n-1}, όπου τα σ_1,...,σ_{n-1} ικανοποιούν τις σχέσεις (2.1.0.1) και επιπλέον*

$$t^r = 1 \tag{2.1.0.4}$$

$$\sigma_i t = t\sigma_i \qquad \text{για } i > 1 \tag{2.1.0.5}$$

$$\sigma_{i-1}\cdots\sigma_1 t\sigma_1^{-1}\cdots\sigma_{i-1}^{-1} = \sigma_{i-1}^{-1}\cdots\sigma_1^{-1}t\sigma_1\cdots\sigma_{i-1} = t_i \tag{2.1.0.6}$$

$$t\sigma_1 t{\sigma_1}^{-1} = \sigma_1 t{\sigma_1}^{-1}t \tag{2.1.0.7}$$

Απόδειξη. Καθώς η ομάδα B_n έχει παράσταση στους γεννήτορες σ_1,...,σ_{n-1}, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις (2.1.0.1),η C_r^n έχει παράσταση στους γεννήτορες c_1,...,c_n οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις (2.1.0.2) και επιπλέον η $B_{r,n}$ είναι το ημιευθύ γινόμενο των ομάδων B_n,C_r^n παίρνουμε ότι η $B_{r,n}$ παρίσταται στους γεννήτορες t=t_1,...,t_n,σ_1,...,σ_{n-1},όπου άμεσα προκύπτει ότι τα σ_1,...,σ_{n-1} ικανοποιούν τις σχέσεις (2.1.0.1) και τα t_j (δηλαδή τα ι(c_j)) ικανοποιούν τις σχέσεις (2.1.0.2). Όμως η σχέση (2.1.0.3) ορίζει τα t_i βάση των t και σ_i. Επομένως,η $B_{r,n}$ παρίσταται στους γεννήτορες t,σ_1,...,σ_{n-1},όπου τα σ_1,...,σ_{n-1} ικανοποιούν τις σχέσεις (2.1.0.1). Τέλος,από την παρατήρηση 2.1.0.1 παίρνουμε τις σχέσεις (2.1.0.5),(2.1.0.6) και (2.1.0.7),ενώ σχέση (2.1.0.4) προκύπτει από το γεγονός ότι το t είναι το στοιχείο ι(c_1)=(c_1,1)=(t,1,...,1) $\in B_{r,n}$, όπου t γεννήτορας της κυκλικής ομάδας C_r(δηλαδή t^r=1 στην C_r),άρα t^r:=(t,...,1)^r)= (t^r,...,1)=(1,...,1):=1 στην $B_{r,n}$ □

Πόρισμα 2.1.0.1. *Τα στοιχεία σ_i,t_i της $B_{r,n}$ ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις*

$$\sigma_j t_i \sigma_j^{-1} = \begin{cases} t_{i+1} & \text{αν } j{=}i \text{ για κάθε } j \text{ και } i \geqslant 1 \\ t_{i-1} & \text{αν } j = i-1 \text{ για κάθε } j \text{ και } i \geqslant 1 \\ t_i & \text{αν } j > i \text{ για κάθε } j \text{ και } i \geqslant 1 \\ t_i & \text{αν } j < i-1 \text{ για κάθε } j \text{ και } i \geqslant 1 \end{cases} \tag{2.1.0.8}$$

$$t_i^r = 1 \qquad \text{και} \qquad t_i t_j = t_j t_i \qquad \text{για κάθε} i,j \tag{2.1.0.9}$$

Απόδειξη. Για την (2.1.0.8),η περίπτωση $j = i$ προκύπτει πολύ εύκολα από τον ορισμό των t_i. Πράγματι,$\sigma_i t_i \sigma_i^{-1}$=$\sigma_i \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 t\ \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_i^{-1}$=$t_{i+1}$,όπου χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά την σχέση (2.1.0.3). Για την περίπτωση $j = i-1$,έχουμε
$\sigma_{i-1} t_i \sigma_{i-1}^{-1} = \sigma_{i-1}\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} t \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}\sigma_{i-1}^{-1} = \sigma_{i-2}^{-1} \cdots t_1 \cdots \sigma_{i-2} = t_{i-1}$,όπου πάλι χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά την σχέση (2.1.0.3). Τώρα αν $j > i$ έχουμε $\sigma_j t_i = t_i \sigma_j$,δηλαδή $\sigma_j t_i \sigma_j^{-1} = t_i$. Τέλος,για την περίπτωση όπου $j < i-1$ έχουμε $|i - j| > 1$ οπότε $\sigma_j t_i \sigma_j^{-1}$=$\sigma_j \sigma_{i-1} \cdots \sigma_{j+1} \sigma_j \cdots \sigma_1 t$ $\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}\ \sigma_j^{-1}$

$$=\sigma_{i-1} \cdots \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \cdots \sigma_1 t\ \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}$$

$$=\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1} \cdots \sigma_1 t\ \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}$$

$$=\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1} t_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}$$

$$=\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{j+1} \sigma_j t_j \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}$$

$$=t_i$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (2.1.0.3) και επειδή $j < i-1$,γι΄ αυτό και εμφανίζεται το σ_j στους παράγοντες του t_i. Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιούμε την σχέση (2.1.0.1),διότι $|i-j| > 1$,άρα το σ_j αντιμετατίθεται με όλους τους παράγοντες σ_{i-1},σ_{i-2},... Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (2.1.0.1),στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (2.1.3),στην πέμπτη ισότητα την σχέση $\sigma_{j+1} t_j \sigma_{j+1}^{-1}$=$t_j$ και στην έκτη και τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε πάλι την σχέση (2.1.0.3). Για την σχέση (2.1.0.9) η σχέση t_i^r=1,προκύπτει χρησιμοποιώντας την σχέση (2.1.0.3) και έπειτα την σχέση (2.1.0.4). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη,μένει να δείξουμε ότι τα t_i μετατίθενται. Αν $i = j$ είναι προφανές. Αν $i < j$ τότε

$t_i t_j = \sigma_{i-1}\cdots\sigma_1 t_1 \sigma_1^{-1}\cdots\sigma_{i-1}^{-1} t_j = \sigma_{i-1}\cdots\sigma_1 t_1 t_j \sigma_1^{-1}\cdots\sigma_{i-1}^{-1}$,όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (2.1.0.3) και στην δεύτερη ισότητα την σχέση (2.1.0.8). Έτσι για να δείξουμε ότι τα t_i, t_j μετατίθενται,αρκεί να δείξουμε ότι $t_1 t_j = t_j t_1$ για κάθε j. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς j. Για $j = 1$ προφανές. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $j > 1$. Τότε
$t_1 t_{j+1} = t_1 \sigma_j t_j \sigma_j^{-1} = \sigma_j t_1 t_j \sigma_j^{-1} = \sigma_j t_j t_1 \sigma_j^{-1} = \sigma_j t_j \sigma_j^{-1} t_1 = t_{j+1} t_1$,όπου στην πρώτη και την πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (2.1.0.3),στην δεύτερη και την τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (2.1.0.8) (διότι $j > 1$) και τέλος στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση. Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Πόρισμα 2.1.0.2. *Για κάθε* $1 \leqslant m \leqslant r$ *έχουμε*

$$\sigma_j t_i^m \sigma_j^{-1} = \begin{cases} t_{i+1}^m & \text{αν } j{=}i \\ t_{i-1}^m & \text{αν } j = i-1 \\ t_i^m & \text{αν } j > i \\ t_i^m & \text{αν } j < i-1 \end{cases} \tag{2.1.0.10}$$

2.2 Άλγεβρες Hecke και Yokonuma-Hecke

Ορισμός 2.2.0.1. *Έστω $q \in \mathbb{C}$ μη μηδενικός αριθμός. Η άλγεβρα Hecke $H_n{=}H_n(q)$ παραμέτρου q ορίζεται ως το πηλίκο της B_n επί των σχέσεων $\sigma_i^2 = 1 + (q - q^{-1})\sigma_i$. Μ' άλλα λόγια,η άλγεβρα Hecke $H_n{=}H_n(q)$ είναι μια προσεταιριστική άλγεβρα επί του $\mathbb{C}(q)$ με γεννήτορες $h_1, \ldots, h_{n-1}$ και σχέσεις: $h_i h_j{=}h_j h_i$ για $|i - j| > 1$,$h_i h_j h_i{=}h_j h_i h_j$ για $|i - j| = 1$ και $h_i^2 = 1 + (q - q^{-1})h_i$ για κάθε i.*

Θεωρούμε τα στοιχεία $e_i \in C_r^n$:

$$e_i = \frac{1}{r}\sum_{m=0}^{r-1} t_i^m t_{i+1}^{-m},$$

όπου $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Ορισμός 2.2.0.2. *Η άλγεβρα $Y_{r,n}{=}Y_{r,n}(q)$ παραμέτρου q ορίζεται ως το πηλίκο της $B_{r,n}$ επί των σχέσεων*

$$\sigma_i^2 = 1 + (q - q^{-1})e_i\sigma_i \tag{2.2.0.1}$$

Συμβολίζουμε την εικόνα του σ_i *μέσω του κανονικού επιμορφισμού* $B_{r,n} \to Y_{r,n}$ *με* g_i*,και την εικόνα των* t_i *(αντίστοιχα των* e_i*) με* t_i *(αντίστοιχα με* e_i*). Μ' άλλα λόγια,η* $Y_{r,n}$ *είναι η άλγεβρα η οποία παράγεται από τα στοιχεία* $g_1,\ldots,g_{n-1},t$ *όπου τα* $g_1,\ldots,g_{n-1}$ *ικανοποιούν τις σχέσεις (2.1.0.1) και επιπλέον:*

$$t^r = 1 \tag{2.2.0.2}$$

$$g_i t = t g_i \qquad \text{για } i > 1 \tag{2.2.0.3}$$

$$g_{i-1}\cdots g_1 t g_1^{-1}\cdots g_{i-1}^{-1} = g_{i-1}^{-1}\cdots g_1^{-1} t g_1\cdots g_{i-1} = t_i \tag{2.2.0.4}$$

$$t g_1 t g_1^{-1} = g_1 t g_1^{-1} t \tag{2.2.0.5}$$

$$g_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) e_i g_i \tag{2.2.0.6}$$

Παρατήρηση 2.2.0.1. *Από την σχέση (2.2.0.4) τα στοιχεία* $t_i \in Y_{r,n}$ *γράφονται ως*

$$t_i = g_{i-1} t_{i-1} g_{i-1}^{-1} = g_{i-1}^{-1} t_{i-1} g_{i-1} \tag{2.2.0.7}$$

Πρόταση 2.2.0.1. *Η άλγεβρα* $Y_{r,n}$ *έχει παράσταση στους γεννήτορες* $g_1,\ldots,g_{n-1}$*,* $t_1,\ldots,t_n$ *και σχέσεις:*

$$t_i^r = 1 \qquad \text{για κάθε } i \tag{2.2.0.8}$$

$$t_i t_j = t_j t_i \qquad \text{για κάθε } i, j \tag{2.2.0.9}$$

$$t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \qquad \text{για κάθε } i, j \tag{2.2.0.10}$$

$$g_i g_j = g_j g_i \qquad \text{για } |i - j| > 1 \tag{2.2.0.11}$$

$$g_i g_j g_i = g_j g_i g_j \qquad \text{για } |i - j| = 1 \tag{2.2.0.12}$$

$$g_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) e_i g_i \qquad \text{για κάθε } i \tag{2.2.0.13}$$

όπου το $s_i(j)$ *είναι το αποτέλεσμα της δράσης της μετάθεσης* $(i,i+1)$ *στο* j*.*

Λήμμα 2.2.0.1. *Για κάθε* i *έχουμε:*
(2.1) $g_i g_{i-1} t_i^m = t_{i-1}^m g_i g_{i-1}$
(2.2)Τα g_i, e_i *αντιμετατίθενται.Ειδικότερα*

$$g_i e_i = e_i g_i = \frac{1}{r}\sum_{m=0}^{r-1} t_{i+1}^m g_i t_{i+1}^{r-m}$$

Απόδειξη. (2.1)Έχουμε,
$g_i g_{i-1} t_i^m = g_i g_{i-1} g_{i-1}^{-1} t_{i-1}^m g_{i-1} = g_i t_{i-1}^m g_{i-1} = t_{i-1}^m g_i g_{i-1}$, όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (2.1.0.3) και στην τρίτη ισότητα το Πόρισμα 2.1.0.2.
(2.2) Έχουμε, $g_i t_i^m t_{i+1}^{-m} = t_{i+1}^m g_i t_{i+1}^{-m} = t_{i+1}^m t_i^{-m} g_i$. Καθώς $m \in \{0,\ldots,r-1\}$ και το άθροισμα των εκθετών των t_i, t_{i+1} ισούται με r,έπεται το ζητούμενο. □

2.3 Βάση για την Yokonuma-Hecke άλγεβρα

Πρόταση 2.3.0.1. *Κάθε στοιχείο της $Y_{r,n}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των λέξεων $t, g_1, \ldots, g_{n-1}$ που έχουν το πολύ μια εμφάνιση του $A_{n-1} = \{g_{n-1}, t_n^m : 1 \leqslant m \leqslant r-1\}$*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n.
$n = 2$: Έξ ορισμού η $Y_{r,2}$ παράγεται από τα στοιχεία g_1, t. Έστω M μια λέξη στην $Y_{r,2}$. Τότε $M = g_1^{m_1} t^{m_2}$,όπου $m_1 \in \mathbb{Z}, m_2 \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι εμφανίζεται το πολύ ένα εκ των g_1, t_2^m στην μορφή της M. Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.2.0.1) και το λήμμα 2.2.0.1 προκύπτει το ζητούμενο. Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για n. Τώρα,εξ' ορισμού κάθε στοιχείο στην $Y_{r,n+1}$ είναι γραμμικός συνδυασμός λέξεων στα $t, g_1, \ldots . g_n$. Έστω M μια τέτοια λέξη. Πρέπει να δείξουμε ότι το M είναι γραμμικός συνδυασμός λέξεων στα $t, g_1, \ldots . g_n$ που έχουν το πολύ μια εμφάνιση του $A_n = \{g_n, t_{n+1}^m : 1 \leqslant m \leqslant r-1\}$. Γι' αυτό,αρκεί να δείξουμε ότι αν το M έχει δύο εμφανίσεις του A_n,τότε το M είναι γραμμικός συνδυασμός λέξεων που έχουν το πολύ μια εμφάνιση του A_n. Έτσι ας υποθέσουμε ότι $M = M_1 \alpha_n M_2 \alpha_n M_3$,όπου τα $M_i \in Y_{r,n}$,για $i \in \{1, 2, 3\}$ και $\alpha_n \in A_n$. Από την επαγωγική υπόθεση το M_2 είναι λέξη στα $t, g_1, \ldots . g_n$ που έχουν το πολύ μια εμφάνιση του A_{n-1}. Έστω ότι το A_{n-1} δεν εμφανίζεται στην παράσταση του M_2. Αν $\alpha_n = g_n$ τότε το M είναι της μορφής $M = M_1 M_2 g_n^2 M_3$. Από την σχέση (2.2.0.1) και το λήμμα 2.2.0.1 παίρνουμε ότι
$M = M_1 M_2 M_3 + \frac{1}{r}(q - q^{-1}) \sum_{m=1}^{r} M_1 M_2 t_{n+1}^m g_n t_{n+1}^{r-m} M_3$.
και χρησιμοποιώντας την σχέση (2.2.0.7) βλέπουμε ότι στην παράσταση του M εμφανίζεται μόνο ο παράγοντας g_n εκ των g_n, t_{n+1}^m. Αν $\alpha_n = t_{n+1}^m$ τότε ανάγεται τετριμμένα. Τέλος,αν $M = M_1 \alpha_n M_2 \beta_n M_3$,όπου τα $M_i \in Y_{r,n}$,για $i \in \{1, 2, 3\}$ και $\alpha_n = g_n, \beta_n = t_{n+1}^m$,έχουμε ότι τα α_n, M_2 μετατίθενται και έπειτα χρησιμοποιούμε την σχέση (2.2.0.7). Έτσι,ο ισχυρισμός μας αληθεύει σε αυτήν την περίπτωση. Στην περίπτωση που τα στοιχεία του συνόλου A_{n-1} εμφανίζονται ακριβώς μια φορά στην παράσταση του M_2,μπορούμε να γράψουμε το M ως $M_1 A_n A_{n-1} A_n M_2$,όπου τα M_1, M_2 είναι λέξεις στην $Y_{r,n}$ (δηλαδή, από την επαγωγική υπόθεση είναι λέξεις στα $t, g_1, \ldots . g_n$ με το πολύ μια εμφάνιση του A_{n-1}). Επομένως,αρκεί να δείξουμε ότι οι παρακάτω λέξεις είναι γραμμικοί συνδυασμοί λέξεων που έχουν το πολύ μια εμφάνιση του $A_n = \{g_n, t_{n+1}^m : 1 \leqslant m \leqslant r-1\}$:
$(i)\ g_n g_{n-1} g_n$ $(ii)\ g_n t_n^m g_n$ $(iii)\ t_{n+1}^m g_{n-1} g_n$ $(iv)\ t_{n+1}^{m_1} t_n^{m_2} g_n$
$(v) g_n g_{n-1} t_{n+1}^m$ $(vi)\ g_n t_n^{m_1} t_{n+1}^{m_2}$ $(vii)\ t_{n+1}^{m_1} g_{n-1} t_{n+1}^{m_2}$ $(viii)\ t_{n+1}^{m_1} t_n^{m_2} t_{n+1}^{m_3}$
όπου $m_1, m_2, m_3 \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$
Για την λέξη (i) χρησιμοποιούμε την σχέση (2.2.0.12). Για τις λέξεις

$(vii), (viii)$ χρησιμοποιούμε την σχέση (2.2.0.7). Η αναγωγή των λέξεων (iii),(v) προκύπτει χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2.0.7) και (2.2.0.12). Για τις λέξεις (iv) και (vi) μεταθέτουμε τα t_{n+1}, t_n και έπειτα χρησιμοποιούμε την σχέση (2.2.0.7). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη μένει η αναγωγή της λέξης (ii). Έχουμε,
$g_n t_n^m g_n$=$(g_n t_n^m g_n^{-1}) g_n^2$ =$t_{n+1}^m g_n^2$=$t_{n+1}^m (1 + (q - q^{-1}) e_n g_n)$
όπου στην πρώτη ισότητα γράψαμε το g_n ως γινόμενο $g_n^{-1} g_n^2$,στην δεύτερη ισότητα χρησιμποποιήσαμε το Πόρισμα (2.1.0.2) και στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (2.2.0.6). Τώρα παρατηρούμε ότι το στοιχείο $e_n g_n$ χρησιμοποιώντας την (2.2) του λήμματος (2.2.0.1) και την σχέση (2.2.0.7) επίσης ανάγεται. Έτσι,η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Ορισμός 2.3.0.1. *Οι κανονικές λέξεις στην* $Y_{r,n}$ *είναι της μορφής* $v_0 v_1 \cdots v_n$,*όπου* $v_i \in R_i$ *με* $R_0 = \{1, t^m : 1 \leqslant m \leqslant r-1\}$ *και* $R_i = \{1, t_i^m, g_i v : v \in R_{i-1}, 1 \leqslant m \leqslant r-1\}$ $1 \leqslant i \leqslant n-1$

Στόχος 2.3.0.1. *Να δείξουμε ότι το σύνολο των κανονικών λέξεων στην* $Y_{r,n}$ *είναι μια* $\mathbb{C}$*-βάση για την* $Y_{r,n}$

Πρόταση 2.3.0.2. *Η* $Y_{r,n}$ *παράγεται από τις κανονικές λέξεις.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$ ισχύει εξ' ορισμού. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για n. Από την πρόταση 2.3.0.1 η άλγεβρα $Y_{r,n+1}$ παράγεται από τις λέξεις της μορφής
(i) M_1 $(ii) M_2 t_{n+1}^m M_3$ $(iii) M_4 g_n M_5$,
όπου τα M_i,$i \in \{1, 2, 3\}$ είναι λέξεις στην $Y_{r,n}$. Από την επαγωγική υπόθεση τα M_i,$i \in \{1, 2, 3\}$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί κανονικών λέξεων στην $Y_{r,n}$. Επομένως,η απόδειξη ανάγεται στο να δείξουμε ότι οι λέξεις (ii),(iii) είναι γραμμικοί συνδυασμοί κανονικών λέξεων στην $Y_{r,n}$. Έστω $M_3 = v_0 v_1 \cdots v_{n-1}$,όπου $v_i \in R_i$. Έτσι,η (ii) γίνεται $M_2 t_{n+1}^m M_3$=$M_2 t_{n+1}^m v_0 v_1 \cdots v_{n-1}$=$M_2 v_0 \cdots v_{n-2} t_{n+1}^m v_{n-1}$.
Αν $v_{n-1} = t_n^{m'}$,παίρνουμε ότι $M_2 t_{n+1}^m M_3 = M_2 v_0 \cdots v_{n-2} v_{n-1} t_{n+1}^m$,η οποία είναι κανονική λέξη στην $Y_{r,n+1}$(διότι $t_{n+1}^m \in R_{n+1}$) . Αν $v_{n-1} = g_{n-1} v'_{n-2}$,όπου $v'_{n-2} \in R_{n-2}$,παίρνουμε ότι $M_2 t_{n+1}^m M_3$=$M_2 t_{n+1}^m v_0 v_1 \cdots v_{n-1}$=$M_2 v_0 \cdots v_{n-2} t_{n+1}^m$
$g_{n-1} v'_{n-2}$=$(M_2 v_0 \cdots v_{n-2} g_{n-1} v'_{n-2}) t_{n+1}^m$ η οποία είναι λέξη στην $Y_{r,n}$. Επομένως,από την επαγωγική υπόθεση είναι γραμμικός συνδυασμός κανονικών λέξεων. Για την λέξη (iii) τώρα: Έστω $M_5 = v_0 v_1 \cdots v_{n-1}$,όπου $v_i \in R_i$. Έχουμε,
$M_4 g_n M_5 = M_4 g_n v_0 v_1 \cdots v_{n-1} = (M_4 v_0 v_1 \cdots v_{n-2}) g_n v_{n-1}$. Καθώς $g_n v_{n-1} \in R_n$ και η λέξη στην παρένθεση ανήκει στην $Y_{r,n}$,άρα από επαγωγική

υπόθεση είναι γραμμικός συνδυασμός κανονικών λέξεων,έπεται ότι η λέξη $M_4 g_n M_5$ είναι γραμμικός συνδυασμός κανονικών λέξεων στην $Y_{r,n+1}$. □

Θα σκιαγραφήσουμε τώρα την απόδειξη ότι το σύνολο των κανονικών λέξεων στην $Y_{r,n}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στην $Y_{r,n}$. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε (χωρίς να αποδείξουμε) τα παρακάτω :

Πρόταση 2.3.0.3. *Έστω $S_{r,n}$ το ημιευθύ γινόμενο των ομάδων C_r^n, S_n. Το σύνολο των κανονικών λέξεων στην $S_{r,n}$,δηλαδή των λέξεων της μορφής $w_o \cdots w_{n-1}$,όπου $w_i \in P_i$,με $P_0 = \{1, t^m : 1 \leqslant m \leqslant r-1\}$ και $P_i = \{1, t_i^m, s_i w : w \in P_{i-1}, 1 \leqslant m \leqslant r-1\}$,$1 \leqslant i \leqslant n-1$,(τα οποία t, t_i, s_i ικανοποιούν την πρόταση 2.1.0.1),αποτελεί $\mathbb{C}$-βάση για την άλγεβρα $S_{r,n}$.*

Ορισμός 2.3.0.2. *Έστω $w \in S_n$,όπου S_n η συμμετρική ομάδα σε n σύμβολα. Το μήκος της w,$\ell = \ell(w)$ είναι ο μικρότερος αριθμός l τέτοιος ώστε $w = s_{\iota_1} s_{\iota_2} \cdots s_{\iota_\ell}$,όπου $s_i = (i, i+1)$.*

Λήμμα 2.3.0.1. *Για κάθε s_i, s_j και $g \in S_{r,n}$ τέτοια ώστε $\ell(s_i g s_j) = \ell(g)$ και $\ell(s_i g) = \ell(g s_j)$ έχουμε $s_i g = g s_j$.*

Λήμμα 2.3.0.2. *Για κάθε s_i, s_j και $g \in S_{r,n}$ τέτοια ώστε $\ell(s_i g s_j) = \ell(g)$ και $\ell(s_i g) = \ell(g s_j)$ έχουμε (i) $s_i g e_j = e_i g s_j$ και (ii) $g e_i = e_j g$*

Θεωρούμε την άλγεβρα ομάδας $V = \mathbb{C}S_{r,n}$. Θα ορίσουμε ομομορφισμούς $\mathbb{C}$-αλγεβρών $\rho, \lambda : Y_{r,n}(q) \to End(V)$. Έτσι,για κάθε $t \in C_r^n$ ορίζουμε ρ_t και λ_t με $\rho_t g = tg$ και $\lambda_t g = gt$ και για κάθε g_i θέτουμε

$$\rho_{g_i} g = \begin{cases} g_i g & \text{αν } \ell(g_i g) > \ell(g) \\ g_i g + (q - q^{-1}) e_i g & \text{αν } \ell(g_i g) < \ell(g) \end{cases}$$

$$\lambda_{g_i} g = \begin{cases} g g_i & \text{αν } \ell(g g_i) > \ell(g) \\ g g_i + g(q - q^{-1}) e_i & \text{αν } \ell(g g_i) < \ell(g) \end{cases}$$

Προφανώς $\rho_t \lambda_{t'} = \lambda_{t'} \rho_t$ για κάθε $t, t' \in C_r^n$. Διακρίνοντας περιπτώσεις στο μήκος των $g, g_i g, g g_j$,$g_i g g_j$ και χρησιμοποιώντας τα λήμματα 2.3.0.1,2.3.0.2,μπορούμε να δείξουμε ότι $\rho_{g_i} \lambda_{g_j} = \lambda_{g_j} \rho_{g_i}$ για κάθε i, j. Για παράδειγμα ας δούμε την περίπτωση όπου $\ell(g_i g) > \ell(g)$,$\ell(g g_j) > \ell(g)$ και $\ell(g_i g g_j) < \ell(g_i g)$. Έχουμε,

$$g \overset{\rho}{\mapsto} g_i g \overset{\lambda}{\mapsto} (g_i g) g_j + g_i g (q - q^{-1}) e_j$$

$$g \overset{\lambda}{\mapsto} g g_j \overset{\rho}{\mapsto} g_i (g g_j) + (q - q^{-1}) e_i g g_j.$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.3.0.2 παίρνουμε ότι αυτές οι εκφράσεις είναι ίσες. Με αυτόν τον τρόπο λοιπόν μπορούμε να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $t \mapsto \rho_t$,$g_i \mapsto \rho_{g_i}$ ορίζουν ομομορφισμούς $\mathbb{C}$-αλγεβρών $\rho : Y_{r,n} \to End(V)$.

Συγκεκριμένα,η $\rho(g)$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμική.Τέλος,έχουμε $\rho(v_o \cdots v_{n-1})(1) = w_{n-1}^{-1} \cdots w_o^{-1}$. Επομένως,κάθε γραμμικός συνδυασμός $\sum_g \alpha_g g = 0$,όπου το g διατρέχει τις κανονικές λέξεις στην $Y_{r,n}$,λόγω γραμμικότητας της ρ γίνεται ένας γραμμικός συνδυασμός $\sum_w \alpha_g w^{-1} = 0$,όπου το w διατρέχει τις κανονικές λέξεις στην $S_{r,n}$. Όμως,από την πρόταση 2.3.0.3 το σύνολο των κανονικών λέξεων στην $S_{r,n}$ είναι $\mathbb{C}$-βάση,άρα $\alpha_g = 0$ για κάθε g,δηλαδή οι κανονικές λέξεις στην $Y_{r,n}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Πόρισμα 2.3.0.1. *Το σύνολο των κανονικών λέξεων στην $Y_{r,n}$ είναι μια $\mathbb{C}(q)$-βάση για την $Y_{r,n}$. Έτσι,η διάσταση της $Y_{r,n}$ είναι $r^n n!$.*

Κεφάλαιο 3

Αφινική και κυκλοτομική Yokonuma-Hecke άλγεβρα

Σημείωση 3.0.0.1. *Έστω* $E_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$,*όπου* $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ *και* $E_\infty = \mathbb{Z}$. *Έστω* v_α *μεταβλητές με* $\alpha \in \mathbb{Z}_{>0}$. *Θέτουμε* $\mathcal{R}_m = \mathbb{C}[q^{\pm 1}, v_1^{\pm 1}, \ldots, v_m^{\pm 1}]$,*όπου* $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ *και* $\mathcal{R}_\infty = \mathbb{C}[q^{\pm 1}]$. *Συμβολίζουμε με* $\mathcal{F}_m$ *το σώμα κλασμάτων του* $\mathcal{R}_m$.

Ορισμός 3.0.0.1. *Έστω* $d \in \mathbb{Z}_{>0}$,$m \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$ *και* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. *Συμβολίζουμε με* $Y(d, m, n)$ *την προσεταιριστική άλγεβρα επί του* $\mathcal{R}_m$ *η οποία παράγεται από τα στοιχεία* $t_1, \ldots, t_n, g_1, \ldots, g_{n-1}, X_1^{\pm 1}$ *τα οποία ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:*

$$\begin{aligned} g_i g_j &= g_j g_i && \text{για κάθε } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ με } |i-j| > 1 \\ g_i g_{i+1} g_i &= g_{i+1} g_i g_{i+1} && \text{για κάθε } i = 1, 2, \ldots, n-2 \\ t_i t_j &= t_j t_i && \text{για κάθε } i, j = 1, 2, \ldots, n \\ t_j g_i &= g_i t_{s_i(j)} && \text{για κάθε } i = 1, \ldots, n-1 \text{ και } j = 1, \ldots, n \\ t_j^d &= 1 && \text{για κάθε } j = 1, \ldots, n \\ g_i^2 &= 1 + (q - q^{-1}) e_i g_i && \text{για κάθε } i = 1, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{3.0.0.1}$$

όπου $s_i(j)$ *είναι το αποτέλεσμα της δράσης της μετάθεσης* $s_i = (i, i+1)$ *στο* j *και*

$$e_i = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{-s}$$

όπου $1 \leqslant i \leqslant n-1$,*μαζί με τις παρακάτω σχέσεις που αφορούν τον γεννήτορα*

X_1:

$$\begin{aligned} X_1 g_1 X_1 g_1 &= g_1 X_1 g_1 X_1 & \\ X_1 g_i &= g_i X_1 & \text{για κάθε } i = 2, \ldots, n-1 \\ X_1 t_j &= t_j X_1 & \text{για κάθε } j = 1, \ldots, n \\ (X_1 - v_1) \cdots (X_1 - v_m) &= 0 & \text{αν } m < \infty \end{aligned} \tag{3.0.0.2}$$

Η άλγεβρα $Y(d, \infty, n)$ καλείται αφινική Yokonuma-Hecke άλγβερα.
Για $m < \infty$,η άλγεβρα $Y(d, m, n)$ καλέιται κυκλοτομική Yokonuma-Hecke άλγβερα.

Παρατήρηση 3.0.0.1. *(1.1) Τα στοιχεία g_i, e_i μετατίθενται $\forall i = 1, \ldots, n-1$*
(1.2) Τα στοιχεία g_i είναι αντιστρέψιμα με $g_i^{-1} = g_i - (q - q^{-1})e_i \forall i = 1, \ldots, n-1$
(1.3)Αν $m < \infty$ το στοιχείο X_1^{-1} μπορεί να παραληφθεί από το σύνολο γεννητόρων.
Πράγματι, αν $m < \infty$ γράφουμε την τελευταία σχέση στην (3.0.0.2) ως εξής $X_1^m + \gamma_{m-1}^{(m)} X_1^{m-1} + \cdots + \gamma_1^{(m)} X_1 + \gamma_0^{(m)} = 0$,όπου $\gamma_0^{(m)}, \ldots, \gamma_{m-1}^{(m)} \in \mathcal{R}_m$.
Καθώς,το στοιχείο $\gamma_0^{(m)} = (-1)^m v_1 \cdots v_m$ είναι αντιστρέψιμο στον $\mathcal{R}_m$,παίρνουμε ότι $X_1^{-1} = -\gamma_0^{(m)} (X_1^{m-1} + \gamma_{m-1}^{(m)} X_1^{m-2} + \cdots + \gamma_2^{(m)} X_1 + \gamma_1^{(m)}) \in \mathcal{R}_m[X_1]$
(1.4) Συμβολίζουμε με $Y_m(d, n)$ την Yokonuma-Hecke άλγεβρα επί του $\mathcal{R}_m$. Η άλγβερα $Y_m(d, n)$ είναι ισομορφική με την υπάλγεβρα της $Y(d.m, n)$ που παράγεται από τα στοιχεία $t_1, \ldots, t_n, g_1, \ldots g_{n-1}$. Πράγματι, υπενθυμίζουμε ότι η Yokonuma-Hecke άλγβερα (τύπου A) είναι μια προσεταιριστική άλγεβρα επί του $\mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ η οποία παράγεται από τα $t'_1, \ldots, t'_n, g'_1, \ldots g'_{n-1}$,τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις (3.0.0.1).
Θεωρούμε την απεικόνιση $\pi_Y : Y(d, m, n) \to Y_m(d, n)$ στους γεννήτορες: $\pi_Y(t_j) = t'_j, j = 1, \ldots, n, \pi_Y(g_i) = g'_i, i = 1, \ldots, n-1$ και $\pi_Y(X_1) = \begin{cases} v_1 \text{ αν } m < \infty \\ 1 \quad \text{αν } m = \infty \end{cases}$ Η π_Y είναι προφανώς επί και ομομορφισμός (λόγω των σχέσεων (3.0.0.1),(3.0.0.2)).
Επιπλέον είναι και ένα προς ένα,διότι αν θεωρήσουμε την ένθεση ϵ_Y: $Y_m(d, n) \to Y(d, m, n)$ η οποία ορίζεται από $\epsilon_Y(g'_i) = g_i, \forall i = 1, \ldots, n-1$ και $\epsilon_Y(t'_j) = t_j, \forall j = 2, \ldots, n$,έχουμε ότι $\pi_Y \circ \epsilon_Y = \iota_{Y_m(d,n)}$,δηλαδή η π_Y έχει δεξί αντίσροφο. Επομένως,η άλγβερα $Y_m(d, n)$ είναι ισομορφική με την υπάλγεβρα της $Y(d.m, n)$ που παράγεται από τα στοιχεία $t_1, \ldots, t_n, g_1, \ldots g_{n-1}$.
(1.5) Τα στοιχεία e_i είναι ταυτοδύναμα για κάθε i,δηλαδή $e_i^2 = e_i$ για κάθε i.
(1.6) Τα στοιχεία t_i ορίζονται ως $t_{i+1} = g_i t_i g_i^{-1} = g_i^{-1} t_i g_i, \forall i = 1, \ldots, n-1$

Σημείωση 3.0.0.2. *Από εδώ και στο εξής (γι΄ αυτό το κεφάλαιο) θα αναφερόμαστε στην $Y_m(d, n)$ ως την Yokonuma-Hecke άλγεβρα.*

Ορισμός 3.0.0.2. *Έστω $w \in S_n$,όπου S_n η συμμετρική ομάδα σε n σύμβολα και έστω $\ell = \ell(w)$ το μήκος της w,δηλαδή $w = s_{\iota_1}s_{\iota_2}\cdots s_{\iota_\ell}$. Αν $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ είναι το ελάχιστο τότε η έκφραση $w = s_{\iota_1}s_{\iota_2}\cdots s_{\iota_\ell}$ καλείται μειωμένη ή μειωμένη διάσπαση.*

Παράδειγμα 3.0.0.1. *Θεωρούμε την μετάθεση $w = (3241) \in S_4$. Μια μειωμένη έκφραση της είναι η $s_1s_2s_1s_3 = (12)(23)(12)(34)$.*

Λήμμα 3.0.0.1. *(Λήμμα του Matsumoto) Έστω $w \in S_n$,όπου S_n η συμμετρική ομάδα σε n σύμβολα. Τότε,για κάθε δύο μειωμένες εκφράσεις της w,η μια μπορεί να μετατραπεί στην άλλη από μια ακολουθία braid κινήσεων (δηλαδή χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.1.0.1) που ορίζουν την B_n).*

Παρατήρηση 3.0.0.2. *Έστω $w \in S_n$ με $w = s_{\iota_1}s_{\iota_2}\cdots s_{\iota_\ell}$ μια μειωμένη έκφραση της w,όπου s_i η μετάθεση $(i, i+1)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Καθώς οι γεννήτορες g_i της $Y(d, m, n)$ ικανοποιούν τις ίδιες braid σχέσεις όπως και οι γεννήτορες της συμμετρικής ομάδας S_n,από το λήμμα του Matsumoto το στοιχείο $g_w = g_{\iota_1}g_{\iota_2}\cdots g_{\iota_\ell}$ είναι καλά ορισμένο στην $Y(d, m, n)$,δηλαδή δεν εξαρτάται από την επιλογή της μειωμένης έκφρασης του $w \in S_n$.*

Ορίζουμε επαγωγικά τα στοιχεία $X_2, \ldots, X_n$ της $Y(d, m, n)$ ως εξής:

$$X_{i+1} = g_iX_ig_i \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{3.0.0.3}$$

Λήμμα 3.0.0.2. *Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε*

$$g_jX_i = X_ig_j \quad \textit{για } j = 1, \ldots, n-1 \textit{ με } j \neq i-1, i \tag{3.0.0.4}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς i. Για $i = 1$ ισχύει εξ΄ ορισμού.
Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για i. Για κάθε $j = 1, \ldots, i-2, i+2, \ldots, n-1$ έχουμε
$X_{i+1}g_j = g_iX_ig_ig_j = g_iX_ig_jg_i = g_ig_jX_ig_i = g_jg_iX_ig_i = g_jX_{i+1}$,όπου στην πρώτη και την πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (3.0.0.3),στην δεύτερη και την τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την πρώτη σχέση της (3.0.0.1)(διότι $|i-j| > 1$) και στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση. Μένει να δείξουμε ότι το X_{i+1} μετατίθεται με το g_{i-1} για $i > 1$. Έχουμε,
$g_{i-1}X_{i+1} = g_{i-1}g_iX_ig_i$

$$= g_{i-1}g_i(g_{i-1}X_{i-1}g_{i-1})g_i$$

$$= g_ig_{i-1}g_iX_{i-1}g_{i-1}g_i$$

$$= g_ig_{i-1}X_{i-1}g_ig_{i-1}g_i$$

$$= g_ig_{i-1}X_{i-1}g_{i-1}g_ig_{i-1}$$

$$= X_{i+1}g_{i-1}$$

όπου στην πρώτη,την δεύτερη και την έκτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (3.0.0.3),στην τρίτη και την πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την δεύτερη σχέση της (3.0.0.1) και τέλος στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση μαζί πάλι με την σχέση (3.0.0.3). □

Πρόταση 3.0.0.1. *Για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$ έχουμε*
(1.1)$X_it_j = t_jX_i$
(1.2)$X_iX_j = X_jX_i$

Απόδειξη. (1.1) Θα χρησιμοπιήσουμε επαγωγή ως προς i.
$i = 1$: Ισχύει εξ' ορισμού. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για i. Τότε,
$X_{i+1}t_j = (g_iX_ig_i)t_j = g_iX_it_{s_i(j)}g_i = g_it_{s_i(j)}X_ig_i = t_j(g_iX_ig_i) = t_jX_{i+1}$
όπου στην πρώτη και την πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (3.0.0.3),στην δεύτερη και την τέταρτη χρησιμοποιήσαμε την τέταρτη σχέση της (3.0.0.1) και στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση.
(1.2) Θέλουμε να δείξουμε ότι το σύνολο $\{X_1, \dots .X_i\}$ είναι μεταθετικό. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς i. Για $i = 1$,προφανώς ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για i. Θα δείξουμε ότι $X_{i+1}X_j = X_jX_{i+1}$. Για $j = 1, \dots, i-1$ έχουμε
$X_{i+1}X_j = (g_iX_ig_i)X_j = g_iX_iX_jg_i = g_iX_jX_ig_i = X_jg_iX_ig_i = X_jX_{i+1}$
όπου στην πρώτη και την πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (3.0.0.3),στην δεύτερη και την τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το λήμμα 3.0.0.2 και τέλος στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση. Μένει να δείξουμε ότι το X_{i+1} μετατίθεται με το X_i. Για $i = 1$ είναι η πρώτη σχέση της (3.0.0.2). Έστω ότι ισχύει για $i > 1$. Γράφοντας $X_i = g_{i-1}X_{i-1}g_{i-1}$,χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.0.0.2 και καθώς το X_{i+1} μετατίθεται με το X_{i-1} παίρνουμε ότι το X_{i+1} μετατίθεται με το X_i. □

Πόρισμα 3.0.0.1. *Τα στοιχεία $t_1, \dots, t_n, X_1, \dots, X_n$ σχηματίζουν μια μεταθετική οικογένεια,δηλαδή $xy = yx \quad \forall x, y \in \{t_1, \dots, t_n, X_1, \dots, X_n\}$.*

Παρατήρηση 3.0.0.3. *Για κάθε $i = 1, \dots, n-1$ έχουμε*

$$g_iX_iX_{i+1} = g_iX_ig_iX_ig_i = X_{i+1}X_ig_i \qquad (3.0.0.5)$$

δηλαδή τα g_i μετατίθονται με τα $X_{i=1}X_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$.
Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την παρατήρηση στο παρακάτω λήμμμα:

Λήμμα 3.0.0.3. *Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ και $i = 1, \ldots, n-1$. Οι παρακάτω σχέσεις ισχύουν στην $Y(d, m, n)$:*

$$g_i X_i^a X_{i+1}^b = \begin{cases} X_i^b X_{i+1}^a g_i - (q-q^{-1}) e_i \sum_{k=1}^{a-b} X_i^{a-k} X_{i+1}^{b+k} & \text{αν } a \geqslant b, \\ X_i^b X_{i+1}^a g_i + (q-q^{-1}) e_i \sum_{k=0}^{b-a-1} X_i^{a+k} X_{i+1}^{b-k} & \text{αν } a \leqslant b, \end{cases} \tag{3.0.0.6}$$

$$X_1\, g_1 X_1^a t_1^b g_1 = g_1 X_1^a t_1^b g_1\, X_1 + (q-q^{-1}) e_1 (X_1 t_1^b\, g_1 X_1^a - X_1^a t_1^b\, g_1 X_1) \tag{3.0.0.7}$$

$$X_1\, g_1^{-1} X_1^a t_1^b g_1 = g_1^{-1} X_1^a t_1^b g_1\, X_1 + (q-q^{-1}) e_1 (X_1 t_1^b\, g_1 X_1^a - X_1^{a+1} t_1^b\, g_1) \tag{3.0.0.8}$$

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$g_i X_i^a = X_{i+1}^a g_i - (q-q^{-1}) e_i \sum_{k=1}^{a} X_i^{a-k} X_{i+1}^{k} \text{όπου } a \in \mathbb{Z}_{>0} \tag{3.0.0.9}$$

$$g_i X_{i+1}^a = X_i^a g_i + (q-q^{-1}) e_i \sum_{k=0}^{a-1} X_i^{k} X_{i+1}^{a-k} \text{όπου } a \in \mathbb{Z}_{>0} \tag{3.0.0.10}$$

οι οποίες αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς a. Πράγματι,θα αποδείξουμε την (3.0.0.9) : Για $a = 1$,θέλουμε να δείξουμε ότι $g_i X_i = X_{i+1} g_i - (q-q^{-1}) e_i X_{i+1}$. Έχουμε,
$X_{i+1} g_i - (q-q^{-1}) e_i X_{i+1} = X_{i+1} g_i - X_{i+1}(q-q^{-1}) e_i = X_{i+1}(g_i - (q-q^{-1}) e_i) = X_{i+1} g_i^{-1} = g_i X_i$,όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι τα X_{i+1}, e_i μετατίθενται το οποίο είναι συνέπεια της (1.1) της πρότασης (3.0.0.1),στην δεύτερη ισότητα κάναμε μια απλή παραγοντοποιήση,στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την παρατήρηση 3.0.0.1 (1.2) και στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (3.0.0.3). Τώρα,για κάθε $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ γράφοντας $g_i X_i^a = g_i \underbrace{X_i \cdots X_i}_{a \text{ φορές}} = (g_i X_i) \underbrace{X_i \cdots X_i}_{a-1 \text{ φορές}}$ και εφαρμόζοντας διαδοχικά την ισότητα $g_i X_i = X_{i+1} g_i - (q-q^{-1}) e_i X_{i+1}$ παίρνουμε το ζητούμενο. Όμοια,αποδεικνύεται και η (3.0.0.10). Για την (3.0.0.6),αν $a \geqslant b$ γράφουμε
$g_i X_i^a X_{i+1}^b = g_i (X_i X_{i+1})^b X_i^{a-b} = (X_i X_{i+1})^b g_i X_i^{a-b}$ και εφαρμόζοντας την (3.0.0.9) έπεται το ζητούμενο (στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η πρόταση (3.0.0.1) και στην δεύτερη ισότητα η σχέση (3.0.0.5)). Όμοια χρησιμοποιώντας την (3.0.0.10) προκύπτει και η δεύτερη περίπτωση της

(3.0.0.6). Για την (3.0.0.7) τώρα :
Για $b = 0$: Από την πρόταση (3.0.0.1) έχουμε ότι $X_2X_1^a = X_1^aX_2$,δηλαδή $g_1X_1g_1X_1^a = X_1^ag_1X_1g_1$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το $g_1^{-1} = g_1 - (q - q^{-1})e_1$ σε συνδυασμό με την αντιμετάθεση του e_1 με τα g_1, X_1 παίρνουμε το ζητούμενο. Έστω $b \in \mathbb{Z}$. Έχουμε,
$X_1\, g_1X_1^at_1^bg_1 = (X_1\, g_1X_1^ag_1)t_2^b = (g_1X_1^ag_1\, X_1 + (q - q^{-1})e_1(X_1\, g_1X_1^a - X_1^a\, g_1X_1))t_2^b$
όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση $t_1^bg_1 = g_1t_2^b$ (ορισμός των t_i) και στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την περίπτωση όπου $b = 0$. Τέλος,καθώς το t_2^b αντιμετατίθεται με το X_1 (πρόταση (3.0.0.1)) και χρησιμοποιώντας πάλι την σχέση $t_1^bg_1 = g_1t_2^b$ παίρνουμε το ζητούμνενο. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη μένει να δείξουμε την σχέση (3.0.0.8). Έχουμε,
$X_1\, g_1^{-1}X_1^at_1^bg_1 = X_1(g_1 - (q - q^{-1})e_1)X_1^at_1^bg_1 = X_1g_1X_1^at_1^bg_1 - X_1(q - q^{-1})e_1X_1^at_1^bg_1$
$=g_1X_1^at_1^bg_1X_1 + (q - q^{-1})e_1(X_1t_1^b\, g_1X_1^a - X_1^at_1^b\, g_1X_1) - X_1(q - q^{-1})e_1X_1^at_1^bg_1$
$=(g_1 - (q - q^{-1})e_1)X_1^at_1^bg_1X_1 + (q - q^{-1})e_1(X_1t_1^b\, g_1X_1^a - X_1^{a+1}t_1^b\, g_1$
$=g_1^{-1}X_1^at_1^bg_1\, X_1 + (q - q^{-1})e_1(X_1t_1^b\, g_1X_1^a - X_1^{a+1}t_1^b\, g_1)$
όπου στην πρώτη και την πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση $g_1^{-1} = g_1 - (q - q^{-1})e_1$,στην δεύτερη και την τέταρτη ισότητα έγινε μια απλή παραγοντοποιήση και τέλος στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (3.0.0.7). □

Παρατήρηση 3.0.0.4. *Υπάρχει ομομορφισμός αλγεβρών* $\eta : Y(d, m, n) \to Y(d, m, n)$ *ο οποίος δίνεται στους γεννήτορες* $x \in \{t_1, \ldots, t_n, g_1, \ldots, g_{n-1}, X_1^{\pm 1}\}$,*με*

$$\eta(x) = x^{-1}, \eta(q) = q^{-1} \quad \textit{και} \quad (\textit{αν } m < \infty) \qquad \eta(v_a) = v_a^{-1}, a = 1, \ldots, m \tag{3.0.0.11}$$

Δίνουμε παρακάτω κάποιους υπολογιστικούς τύπους στην $Y_m(d, n)$:
Έστω $i, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.Θέτουμε

$$e_{i,k} = \frac{1}{d}\sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_k^{-s}$$

Τότε,

$$
\begin{aligned}
e_{i,k} &= e_{k,i} && \text{για κάθε } i,k \in \{1,2,\ldots,n\} \\
e_{i,k}^2 &= e_{i,k} && \text{για κάθε } i,k \in \{1,2,\ldots,n\} \\
e_{i,i+1} &= e_i && \text{για κάθε } i \in \{1,2,\ldots,n\} \\
t_i e_{j,k} &= e_{j,k} t_i && \text{για κάθε } i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\} \\
e_{i,j} e_{k,l} &= e_{k,l} e_{i,j} && \text{για κάθε } i,j,k,l \in \{1,2,\ldots,n\} \\
e_{j,k} g_i &= g_i e_{s_i(j),s_i(k)} && \text{για κάθε } i \in \{1,2,\ldots,n-1\} \text{ και για κάθε } j,k \in \{1,2,\ldots,n\} \\
e_{j,k} g_i^{-1} &= g_i^{-1} e_{s_i(j),s_i(k)} && \text{για κάθε } i \in \{1,2,\ldots,n-1\} \text{ και για κάθε } j,k \in \{1,2,\ldots,n\} \\
t_i e_{i,k} &= t_k e_{i,k} && \text{για κάθε } i,k \in \{1,2,\ldots,n\}
\end{aligned}
\tag{3.0.0.12}
$$

Προφανώς,οι παραπάνω τύποι ισχύουν και στην $Y(d,m,n)$. Ορίζουμε τώρα επαγωγικά τα παρακάτω στοιχεία στην $Y_m(d,n)$:

$$
J_1 := 1 \quad \text{και} \quad J_{i+1} := g_i J_i g_i \quad \text{για κάθε } i = 1,\ldots,n-1 \tag{3.0.0.13}
$$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς i,την σχέση (3.0.0.13) και την την έκτη σχέση της (3.0.0.12) τα J_{i+1} μπορούν να γραφτούν μέσω των γεννητόρων της $Y_m(d,n)$ ως εξής:

$$
J_{i+1} = 1+(q-q^{-1})(e_i g_i + e_{i-1,i+1} g_i g_{i-1} g_i g_{i-1} g_i + \cdots + e_{1,i+1} g_i g_i \cdots g_2 g_1 g_2 \cdots g_i) \tag{3.0.0.14}
$$

Ορισμός 3.0.0.3. *Τα στοιχεία $t_1,\ldots,t_n, J_1,\ldots,J_n$ καλούνται Jucy-Murphy στοιχεία της $Yokonuma-Hecke$ άλγεβρας $Y_m(d,n)$.*

Παρατήρηση 3.0.0.5. *Από την παρατήρηση 3.0.0.1 (1.4) υπάρχει επιμορφισμός αλγεβρών $\pi_Y : Y(d,m,n) \to Y_m(d,n)$ στους γεννήτορες: $\pi_Y(t_j) = t'_j, j = 1,\ldots,n, \pi_Y(g_i) = g'_i, i = 1,\ldots,n-1$ και $\pi_Y(X_1) = \begin{cases} v_1 \text{ αν } m < \infty \\ 1 \quad \text{αν } m = \infty \end{cases}$ Επιπλεόν,αν $m = \infty, \pi(X_i) = J_i$ για κάθε $i = 1,\ldots,n$. Εφαρμόζοντας τον ομομορφισμό π_Y στο λήμμα (3.0.0.2) και την πρόταση (3.0.0.1) έχουμε τα εξής:*

Πόρισμα 3.0.0.2. *Για κάθε $i = 1,2,\ldots,n$ έχουμε*

$$
g_j J_i = J_i g_j \quad \text{για } j = 1,\ldots,n-1 \text{ με } j \neq i-1, i \tag{3.0.0.15}
$$

Πόρισμα 3.0.0.3. *Τα στοιχεία $t_1,\ldots,t_n,J_1,\ldots,J_n$ σχηματίζουν μια μεταθετική οικογένεια,δηλαδή $xy = yx \quad \forall x,y \in \{t_1,\ldots,t_n,J_1,\ldots,J_n\}$.*

Κεφάλαιο 4

Θεωρία Αναπαραστάσεων της Κλασικής Yokonuma-Hecke Άλγεβρας

4.1 Αναπαραστάσεις της Αφινικής Yokonuma-Hecke Άλγεβρας $Y(d, \infty, 2)$

Θεωρούμε την πιο απλή μη τετριμμένη Αφινική Yokonuma-Hecke Άλγεβρα $Y(d, \infty, 2)$. Υπενθυμίζουμε ότι αυτή η άλγεβρα παράγεται από τα στοιχεία $t_1, t_2, X_1^{\pm 1}, g$ τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις: $t_2 = gt_1g^{-1} = g^{-1}t_1g, \quad t_1^d = t_2^d = 1, \quad X_1X_1^{-1} = X_1^{-1}X_1 = 1, \quad g^2 = 1 + (q - q^{-1})eg$,όπου $e := \frac{1}{d}\sum_{s=0}^{d-1} t_1^s t_2^{-s}$. Επίσης,έχουμε
$gX_1gX_1 = X_1gX_1g$ και $AB = BA$ για κάθε$A, B \in \{t_1, t_2, X_1\}$. Το X_2 ορίζεται μέσω του X_1 ως $X_2 = gX_1g$,το οποίο μετατίθεται με τα t_1, t_2 και X_1. Το e είναι ταυτοδύναμο και ανήκει στο κέντρο της $Y(d, \infty, 2)$. Τέλος το g είναι αντιστρέψιμο με $g^{-1} = g + (q^{-1} - q)e$,όπως επίσης και το X_2.
Μας ενδιαφέρουν οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathbb{C}(q)Y(d, \infty, 2)$ τέτοιες ώστε τα t_1, t_2, X_1, X_2 να είναι διαγωνοποιήσιμοι τελεστές. Έστω λοιπόν v κοινό ιδιοδιάνυσμα των t_1, t_2, X_1, X_2 έτσι ώστε $t_1(v) = av, t_2(v) = bv, X_1(v) = cv, X_2(v) = dv$,με $a, b, c, d \in \mathbb{C}(q)Y(d, \infty, 2)$,όπου $a^d = b^d = 1, c \neq 0$ και $d \neq 0$. Θέτουμε $\gamma := \frac{1}{d}\sum_{s=0}^{d-1} a^s b^{-s}$,οπότε $e(v) = \gamma v$. Καθώς το e είναι ταυτοδύναμο,δηλαδή

$e^2 = e$,παίρνουμε ότι $\gamma = 0$ ή $\gamma = 1$. Ειδικότερα, $\gamma = 1$ αν και μόνο αν $a = b$. Υποθέτουμε αρχικά ότι το $g(v)$ είναι πολλαπλάσιο του v,δηλαδή υπάρχει μη μηδενικό $r \in \mathbb{C}(q)Y(d,\infty,2)$ τέτοιο ώστε $g(v) = rv$. Καθώς $t_2 = gt_1g^{-1}$,δηλαδή $t_2(v) = gt_1g^{-1}(v)$,παίρνουμε ότι $a = b$,επομένως $\gamma = 1$. Επίσης,$X_2(v) = gX_1g(v) = cr^2v$. Τέλος,η σχέση $g(g(v)) = v + (q - q^{-1})eg(v)$ δίνει την δευτεροβάθμια εξίσωση $r^2 - (q - q^{-1})r - 1 = 0$,η οποία με την σειρά της δίνει $r = \epsilon q^{\epsilon}$,όπου $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Έτσι,το διάνυσμα v παράγει μια 1-διάστατη αναπαράσταση της $\mathbb{C}(q)Y(d,\infty,2)$, όπου έχουμε:

$$t_1(v) = av, t_2(v) = av, X_1(v) = cv, X_2(v) = cq^{2\epsilon}v, g(v) = \epsilon q^{\epsilon}v,$$

με $\epsilon \in \{-1, 1\}$.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $g(v)$ δεν είναι πολλαπλάσιο του v. Θα υπολογίσουμε την δράση των t_1, t_2, X_1, X_2, g στο $g(v)$. Καθώς $t_2 = gt_1g^{-1} = g^{-1}t_1g$ παίρνουμε ότι

$$t_1g(v) = gt_2(v) = bg(v) \quad \text{και} \quad t_2g(v) = gt_1(v) = ag(v)$$

Επίσης.$eg(v) = \gamma g(v)$. Τώρα,καθώς $X_2 = gX_1g,g^{-1} = g + (q^{-1} - q)e$ και $g^2 = 1 + (q - q^{-1})eg$ παίρνουμε ότι

$$X_1g(v) = g^{-1}X_2(v) = dg^{-1}(v) = d(q^{-1} - q)\gamma v + dg(v)$$

και
$X_2g(v) = gX_1g^2(v) = gX_1\big(v+(q-q^{-1})\gamma g(v)\big) = gX_1(v)+(q-q^{-1})\gamma X_2(v) = d(q - q^{-1})\gamma v + cg(v))$.Τέλος,

$$g\,(g(v)) = g^2(v) = v + (q - q^{-1})\gamma g(v)$$

Συμπερασματικά,έχουμε την παρακάτω ταξινόμηση ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\mathbb{C}(q)Y(d,\infty,2)$ με τα t_1, t_2, X_1, X_2 να είναι διαγωνοποιήσιμοι τελεστές:
(1) 1-διάστατες αναπαραστάσεις,οι οποίες δίνονται από:

$$t_1 \mapsto a, \quad t_2 \mapsto a \quad X_1 \mapsto c \quad X_2 \mapsto cq^{2\epsilon}, \quad g \mapsto \epsilon q^{\epsilon},$$

όπου $\epsilon \in \{-1, 1\}$, $a^d = 1$ και $c \neq 0$
(2) 2-διάστατες αναπαραστάσεις (οι οποίες παράγονται από τον διανυσματικό χώρο που παράγεται από τα διανύσματα $v, g(v)$) με το e να δρα ως ταυτοτικός πίνακας,οι οποίες δίνονται από:
$t_1 \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $t_2 \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $X_1 \mapsto \begin{pmatrix} c & -d(q - q^{-1}) \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $X_2 \mapsto \begin{pmatrix} d & d(q - q^{-1}) \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q - q^{-1} \end{pmatrix}$,όπου $a^d = 1, c, d \neq 0$ (έτσι ώστε

τα X_1, X_2 να είναι διαγωνοποιήσιμοι). Για να είναι αυτές οι αναπαραστάσεις ανάγωγες,πρέπει να μην υπάρχει υποαναπαράσταση διάστασης 1,δηλαδή να μην υπάρχει κοινός ιδιόχωρος και για τους 5 πίνακες. Αυτό συμβαίνει αν $d \neq cq^{\pm 2}$. Έτσι,για την βάση

$$\{v, \frac{d-c}{qd-q^{-1}c}\big(g(v) - \frac{d(q-q^{-1})}{d-c}v\big)\},$$

η δράση των γεννητόρων γίνεται
$t_1 \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $t_2 \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $X_1 \mapsto \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $X_2 \mapsto \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$,
$g \mapsto \frac{1}{d-c}\begin{pmatrix} d(q-q^{-1}) & -(qc-q^{-1}d) \\ (qd-q^{-1}c) & -c(q-q^{-1}) \end{pmatrix}$
(3) 2-διάστατες αναπαραστάσεις με το e να δρα ως μηδενικός πίνακας,οι οποίες δίνονται από:
$t_1 \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $t_2 \mapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $X_1 \mapsto \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $X_2 \mapsto \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
όπου $a^d = b^d = 1, a \neq b$ και $c, d \neq 0$. Θα αποδείξουμε ότι όλες αυτές οι αναπαραστάσεις είναι ανάγωγες. Αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει υποναπαράσταση διάστασης 1,δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει κοινός ιδιόχωρος και για τους 5 πίνακες. Θα υπολογίσουμε τον ιδιόχωρο για καθένα από τους παραπάνω πίνακες. Για τον πίνακα
$E_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ έχουμε : Αφού είναι διαγώνιος οι ιδιοτιμές του είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου, δηλαδή οι $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b$. Ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda_1 = a$ δίνεται από την λύση του συστήματος $(E_1 - \lambda_1 \mathbb{I}_2)X = 0$,όπου $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Το σύστημα αυτό δίνει το σύστημα εξισώσεων $\begin{cases} 0x = 0 & \text{όπου } x \in \mathbb{R} \\ (b-a)y = 0 & \text{όπου } y \in \mathbb{R} \end{cases}$. Η πρώτη εξίσωση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η δεύτερη εξίσωση,αφού $a \neq b$,δίνει $y = 0$. Έτσι,ο ιδιόχωρος του πίνακα E_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = a$ είναι ο $V_a = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Όμοια,ο ιδιόχωρος του πίνακα E_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = b$ είναι ο $V_b = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Παρατηρούμε ότι οι επόμενοι 3 πίνακες έχουν τους ίδιους ιδιόχωρους. Ο 5ος πίνακας όμως,ακολουθώντας την ίδια διαδικάσια,έχει για ιδιόχωρους τους $V_1 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ και $V_{-1} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$. Βλέπουμε δηλαδή ότι δεν υπάρχει κοινός ιδιόχωρος για τους παραπάνω 5 πίνακες. Έτσι,οι αναπαραστάσεις μας είναι ανάγωγες.

4.2 Φάσμα των Jucy-Murphy στοιχείων.

Ορισμός 4.2.0.1. *Λέμε ότι ο $2 \times n$ πίνακας*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1^{(\Lambda)} & ,\dots, & a_n^{(\Lambda)} \\ c_1^{(\Lambda)} & ,\dots, & c_n^{(\Lambda)} \end{pmatrix} \tag{4.2.0.1}$$

ανήκει στο φάσμα των Jucy-Murphy στοιχείων $t_1, \dots, t_n, J_1, \dots, J_n$ αν
(α) Υπάρχει αναπαράσταση V_Λ της $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$ η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω δύο συνθήκες:
(i) Τα στοιχεία $t_1, \dots, t_n, J_1, \dots, J_n$ να είναι διαγωνοποιήσιμοι τελεστές.
(ii) Για κάθε $i = 1, \dots, n-1$,η δράση της υπάλγεβρας της $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$ η οποία παράγεται από τα στοιχεία $t_i, t_{i+1}, J_i, J_{i+1}$ και g_i να είναι πλήρως αναγώμενη.(με την έννοια της αναπαράστασης,αφού από το Θεώρημα 1.3.0.1,κάθε δράση δίνει αναπαράσταση και αντίστροφα).
(β) Υπάρχει διάνυσμα $v_\Lambda \in V_\Lambda$ τέτοιο ώστε

$$t_i(v_\Lambda) = a_i^{(\Lambda)} v_\Lambda \quad \text{και} \quad J_i(v_\Lambda) = c_i^{(\Lambda)} v_\Lambda \quad \text{για κάθε} \quad i = 1, \dots, n$$

Σε αυτήν την περίπτωση,λέμε ότι το v_Λ είναι αποδεκτό διάνυσμα για τον πίνακα Λ. Συμβολίζουμε με $Spec_{JM}$ το φάσμα των Jucy-Murphy στοιχείων της $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$.

Από την μελέτη των αναπαραστάσεων της Αφινικής Yokonuma-Hecke άλγεβρας $Y(d, \infty, 2)$, έχουμε:

Πρόταση 4.2.0.1. *Έστω $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & ,\dots, a_i, a_{i+1} & ,\dots, & a_n \\ c_1 & ,\dots, c_i, c_{i+1} & ,\dots, & c_n \end{pmatrix} \in Spec_{JM}$ και έστω v_Λ αποδεκτό διάνυσμα για τον πίνακα Λ. Τότε*
(α) $a_i^d = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και αν $a_{i+1} = a_i$,τότε $c_{i+1} \neq c_i$
(β) Αν $a_{i+1} = a_i$ και $c_{i+1} = c_i q^{2\epsilon}$,όπου $\epsilon = \pm 1$,τότε $g_i(v_\Lambda) = \epsilon q^\epsilon v_\Lambda$
(γ) Αν $a_{i+1} = a_i$ και $c_{i+1} \neq c_i q^{2\epsilon}$,όπου $\epsilon = \pm 1$,τότε

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} a_1 & ,\dots, a_{i+1}, a_i & ,\dots, & a_n \\ c_1 & ,\dots, c_{i+1}, c_i & ,\dots, & c_n \end{pmatrix} \in Spec_{JM}$$

Ειδικότερα,το διάνυσμα $g_i(v_\Lambda) - \frac{c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i} v_\Lambda$ είναι αποδεκτό για τον πίνακα Λ'
(δ) Αν $a_{i+1} \neq a_i$,τότε

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} a_1 & ,\dots, a_{i+1}, a_i & ,\dots, & a_n \\ c_1 & ,\dots, c_{i+1}, c_i & ,\dots, & c_n \end{pmatrix} \in Spec_{JM}$$

Ειδικότερα,το διάνυσμα $g_i(v_\Lambda)$ είναι αποδεκτό για τον πίνακα Λ'.

4.3 Περιεχόμενοι Πίνακες

Ορισμός 4.3.0.1. *Λέμε ότι ο $2 \times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{C}(q)$*

$$\begin{pmatrix} a_1 & ,\dots, & a_n \\ c_1 & ,\dots, & c_n \end{pmatrix}$$

είναι περιεχόμενος πίνακας,αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:
(1) $c_1 = 1$ *και* $a_i^d = 1$*για κάθε* $i = 1, \dots, n$
(2) *Αν* $c_j \neq 1$ *για κάποιο* $j > 1$, *τότε υπάρχει* $i < j$ *τέτοιο ώστε* $a_i = a_j$ *και* $c_i \in \{c_j q^{-2}, c_j q^2\}$.
(3) *Αν* $a_j = a_k$ *και* $c_j = c_k$ *για* $j < k$, *τότε* $k - j \geqslant 3$ *και υπάρχουν* $j + 1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant k - 1$ *τέτοιοι ώστε* $a_{i_1} = a_{i_2} = a_j$, $c_{i_1} = c_j q^{-2}$ *και* $c_{i_2} = c_j q^2$.
Συμβολίζουμε με $Cont_d(n)$ *το σύνολο των περιεχόμενων πινάκων.*

Πρόταση 4.3.0.1. $Spec_{JM} \subseteq Cont_d(n)$.

Απόδειξη. Έστω $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & ,\dots, & a_n \\ c_1 & ,\dots, & c_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Spec}_{JM}$. Θα δείξουμε ότι $\Lambda \in \mathrm{Cont}_d(n)$. Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι ο Λ ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού 4.3.0.1. Για την συνθήκη (1),από την Πρόταση 4.2.0.1,έχουμε ότι $a_i^d = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Επίσης,καθώς $J_1 = 1$ και $J_1(v_\Lambda) = c_1 v_\Lambda$,έπεται ότι $c_1 = 1$. Για την συνθήκη (2) θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς j. Για $j = 2$: Ας υποθέσουμε ότι $c_2 \neq 1$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $a_1 = a_2$ και $c_1 \in \{c_2 q^{-2}, c_2 q^2\}$. Προς άτοπο,ας υποθέσουμε ότι $a_1 \neq a_2$. Από την πρόταση 4.2.0.1(δ),έχουμε ότι

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} a_2, & a_1, & ,\dots, & a_n \\ c_2, & c_1, & ,\dots, & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' & ,\dots, & a_n' \\ c_1' & ,\dots, & c_n' \end{pmatrix} \in \mathrm{Spec}_{JM}$$

Από την συνθήκη (1) παίρνουμε ότι $c_1' = 1$,κάτι το οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει,διότι $c_1' = c_2 \neq 1$. Επομένως,$a_1 = a_2$. Θα δείξουμε τώρα ότι $c_1 \in \{c_2 q^{-2}, c_2 q^2\}$. Καθως $c_1 = 1$,θα δείξουμε ότι $c_2 = q^{\pm 2}$. Προς άτοπο,ας υποθέσουμε ότι $c_2 \neq q^{\pm 2}$. Αφού $a_1 = a_2$ και $c_2 \neq q^{\pm 2}$,από την πρόταση 4.2.0.1(γ) παίρνουμε ότι $\Lambda' \in \mathrm{Spec}_{JM}$. Όπως πριν,καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι ικανοποιείται η συνθήκη (2) του ορισμού 4.3.0.1 (για $j = 2$). Έστω $j > 2$ και $c_j \neq 1$. Αν $a_{j-1} = a_j$ και $c_{j-1} = c_j q^{\pm 2}$,από την επαγωγική υπόθεση για το $j - 1$ υπάρχει $i < j - 1$ τέτοιο ώστε $a_i = a_{j-1}$ και $c_i \in \{c_{j-1} q^{-2}, c_{j-1} q^2\}$,έτσι έπεται το ζητούμενο. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση από την $a_{j-1} = a_j$ και $c_{j-1} = c_j q^{\pm 2}$ χρησιμοποιώντας την πρόταση

4.2.0.1,παίρνουμε ότι

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} a_1 & ,\dots, a_j, a_{j-1} & ,\dots, & a_n \\ c_1 & ,\dots, c_j, c_{j-1} & ,\dots, & c_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Spec}_{JM}$$

Από την επαγωγική υπόθεση έπεται το ζητούμενο. Έτσι,τελειώσαμε με την σύνθηκη (2). Για την συνθήκη (3) τώρα. Έστω $1 \leqslant j < k \leqslant n$ τέτοια ώστε $a_j = a_k$ και $c_j = c_k$. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $k-j \geqslant 3$. Αν $k-j=1$,δηλαδή $k = j+1$,θα είχαμε ότι $a_j = a_{j+1}$ και $c_j = c_{j+1}$,το οποίο βρίσκεται σε αντίφαση με την πρόταση 4.2.0.1(α). Επομένως,$k-j>1$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $k-j=2$. Στην περίπτωση που $a_{j+1} = a_j$ και $c_{j+1} = c_j q^{2\epsilon}$,όπου $\epsilon = \pm 1$,από την πρόταση 4.2.0.1(β),παίρνουμε ότι $g_j(v_\Lambda) = \epsilon q^\epsilon v_\Lambda$ και $g_{j+1}(v_\Lambda) = -\epsilon q^\epsilon v_\Lambda$,κάτι το οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει,διότι $g_j g_{j+1} g_j = g_{j+1} g_j g_{j+1}$. Σε κάθε άλλη περίπτωση εκτός από την $a_{j+1} = a_j$ και $c_{j+1} = c_j q^{2\epsilon}$,η πρόταση 4.2.0.1($\gamma$)-($\delta$) δίνει ότι

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} a_1 & ,\dots, a_{j+1}, a_j, a_k & ,\dots, & a_n \\ c_1 & ,\dots, c_{j+1}, c_j, c_k & ,\dots, & c_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Spec}_{JM},$$

το οποίο αντιβαίνει την πρόταση 4.2.1(α). Συνεπώς,$k-j \geqslant 3$.
Αποδεικνύουμε τώρα ότι υπάρχουν $j+1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant k-1$ τέτοιο ώστε $a_{i_1} = a_{i_2} = a_j$, $c_{i_1} = c_j q^{-2}$ και $c_{i_2} = c_j q^2$,χρησιμοποιώντας επαγωγή στην διαφορά $k-j$.
Έστω ότι $k-j=3$. Για την περίπτωση όπου $a_{j+1} = a_{k-1} = a_j$, $c_{j+1} = c_j q^{-2}$ και $c_{k-1} = c_k q^2$ παίρνουμε ως ζευγάρι δεικτών $\{i_1, i_2\} = \{j+1, k-1\}$ και τελειώσαμε. Σε κάθε άλλη περίπτωση,χρησιμοποιώντας την πρόταση 4.2.0.1(γ)-(δ),επιστρέφουμε στην περίπτωση όπου $k-j=2$. Έστω ότι $k-j>3$. Για την περίπτωση $a_{j+1} = a_{k-1} = a_j$, $c_{j+1} = c_j q^{\pm 2}$ και $c_{k-1} = c_k q^{\pm 2}$,διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $c_{j+1} = c_{k-1} = c_j q^{2\epsilon}$,όπου $\epsilon = \pm 1$,τότε από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $j+1 < l < k-1$ τέτοιο ώστε $a_l = a_{j+1} = a_j$ και $c_l = c_{j+1} q^{-2\epsilon} = c_j$. Αντικαθιστώντας το ζευγάρι (j,k) με το (j,l),και χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση,έπεται το ζητούμενο. Αν $c_{j+1} \neq c_{k-1}$ παίρνουμε ως ζευγάρι δεικτών $\{i_1, i_2\} = \{j+1, k-1\}$ και έχουμε το ζητούμενο. Σε κάθε άλλη περίπτωση πέρα από την $a_{j+1} = a_{k-1} = a_j$, $c_{j+1} = c_j q^{\pm 2}$ και $c_{k-1} = c_k q^{\pm 2}$,χρησιμοποιώντας την πρόταση 4.2.0.1(γ)-(δ) παίρνουμε ότι

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} a_1 & ,\dots, a_{j+1}, a_j, \dots, a_k, & ,\dots, & a_n \\ c_1 & ,\dots, c_{j+1}, c_j, \dots, c_k, & ,\dots, & c_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Spec}_{JM},$$

ή

$$\Lambda'' = \begin{pmatrix} a_1 & ,\dots, a_j, \dots, a_k, a_{k-1}, & ,\dots, & a_n \\ c_1 & ,\dots, c_j, \dots, c_k, c_{k-1} & ,\dots, & c_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Spec}_{JM},$$

και χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση,έπεται το ζητούμενο. Έτσι,η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

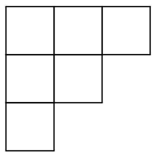
4.4 Στοιχεία Συνδυαστικής

Ορισμός 4.4.0.1. *Λέμε ότι η οικογένεια θετικών ακεραίων* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ *είναι μια διαμέριση του* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *και γράφουμε* $\lambda \vdash n$*,αν* $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant 1$ *και* $|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n$*. Λέμε επίσης ότι το* λ *είναι μια διαμέριση μεγέθους* n*.*

Ταυτίζουμε τις διαμερίσεις με τα Young διαγράμματα τους:

Ορισμός 4.4.0.2. *Young διάγραμμα μιας διαμέρισης* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ *του* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *είναι ένας πίνακας* k *σειρών έτσι ώστε η* j*-η σειρά περιέχει* λ_j *κελιά για κάθε* $j = 1, \ldots, k$*,ο οποίος διαβάζεται από τα αριστερά.*

Παράδειγμα 4.4.0.1. *Το Young διάγραμμα της διαμέρισης* $\lambda = (3, 2, 1)$ *είναι το*



Ορισμός 4.4.0.3. *Γράφουμε* $\theta = (x, y)$ *για το κελί που εμφανίζεται στην σειρά* x *και στην στήλη* y*. Έστω* $\lambda \vdash n$*. Ένα κελί* $\theta \in \lambda$ *καλείται αφαιρέσιμο αν το σύνολο των κελιών που προέρχονται από την διαμέριση* λ *αφαιρώντας το* θ *αποτέλει επίσης διαμέριση του* $n - 1$*. Ένα κελί* $\theta \notin \lambda$ *καλείται προσθέσιμο αν το σύνολο των κελιών που προέρχονται από την* λ *προσθέτωντας το* θ *αποτέλει επίσης διαμέριση του* $n + 1$*.*

Ορισμός 4.4.0.4. *Έστω* $\lambda \vdash n$*,όπου* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$*. Η διαμέριση* $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_l)$ *της* λ *η οποία ορίζεται ως* $\lambda'_j = \#\{i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant k \text{ τέτοιο ώστε } \lambda_i \geqslant j\}$ *και* $l := max\{j|\lambda'_j \neq 0\}$ *καλείται συζυγής διαμέριση της* λ*.*

Παρατήρηση 4.4.0.1. (i) *Το Young διάγραμμα της* λ' *είναι το ανάστροφο του Young διαγράμματος της* λ*.*
(ii) $\theta = (x, y) \in \lambda$ *αν και μόνο αν* $\theta' = (y, x) \in \lambda'$

Παράδειγμα 4.4.0.2. *Θεωρούμε την διαμέριση* $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ *του αριθμού 12. Η συζυγής διαμέριση της* λ *είναι η* $\lambda' = (4, 3, 2, 2, 1)$*.*

Ορισμός 4.4.0.5. (i) *Λέμε ότι η οικογένεια διαμερίσεων* $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(d)})$ *είναι μια* d*-διαμέριση ή Young* d*-διάγραμμα,μεγέθους* n *αν* $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(d)}$ *διαμερίσεις τέτοιες ώστε* $|\lambda^{(1)}| + \ldots + |\lambda^{(d)}| = n$*.*
(ii) *Έστω* $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ *μια* r*-διαμέριση και έστω* $r = dm$*. Θεωρούμε τις* r*-διαμερίσεις ως* d*-άδες* m*-διαμερίσεων και τις αποκαλούμε*

(d,m)-διαμερίσεις. Το μέγεθος της (d,m)-διαμέρισης είναι το μέγεθος της αντίστοιχης dm-διαμέρισης. Θα λέμε ότι η l-οστή διαμέριση της k-οστής d-άδας έχει θέση (k,l)..
(iii) Το ζευγάρι $\Theta = (\theta, k)$ το οποίο περιέχει ένα κελί θ και έναν ακέραιο $k \in \{1,\ldots,d\}$ καλείται d-κελί. Ο ακέραιος k καλείται θέση του κελιού Θ. Έτσι,μια d-διαμέριση είναι ένα σύνολο d-κελιών τέτοια ώστε το υποσύνολο που περιέχει τα d-κελιά τα οποία έχουν θέση k να σχηματίζουν διαμέριση,για κάθε $k \in \{1,\ldots,d\}$.
(iv) Μια τριάδα $\Theta = (\theta, k, l)$ το οποίο περιέχει ένα κελί θ,έναν ακέραιο $k \in \{1,\ldots,d\}$ και έναν ακέραιο $l \in \{1,\ldots,m\}$ καλείται (d,m)-κελί. Ο ακέραιος k καλείται d-θέση του κελιού Θ και ο ακέραιος l καλείται m-θέση του κελιού Θ. Θα λέμε επίσης ότι το (d,m)-κελί Θ έχει θέση (k,l). Έτσι,μια (d,m)-διαμέριση ταυτίζεται με το σύνολο των (d,m)-κελιών τέτοια ώστε το υποσύνολο που περιέχει τα (d,m)-κελιά που έχουν θέση (k,l) να σχηματίζουν διαμέριση,για κάθε $k \in \{1,\ldots,d\}$ και $l \in \{1,\ldots,m\}$. Για ένα (d,m)-κελί Θ που ανήκει σε αυτό το σύνολο θα λέμε ότι είναι ένα (d,m)-κελί της διαμέρισης λ.
(v) Έστω $\lambda = (\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(d)})$ μια d-διαμέριση. Ένα κελί $\Theta = (\theta,k) \in \lambda$ καλείται αφαιρέσιμο από την λ αν το κελί θ είναι αφαιρέσιμο από την $\lambda^{(k)}$,όπου $k \in \{1,\ldots,d\}$. Ένα κελί $\Theta' = (\theta',k') \notin \lambda$ καλείται προσθέσιμο στην λ αν το κελί θ' είναι προσθέσιμο στην $\lambda^{(k')}$,όπου $k \in \{1,\ldots,d\}$. Το σύνολο των d-κελιών τα οποία είναι αφαιρέσιμα από την λ συμβολίζεται με $\mathcal{E}_-(\lambda)$ και το σύνολο των d-κελιών τα οποία είναι προσθέσιμα στην λ συμβολίζεται με $\mathcal{E}_+(\lambda)$. Γράφουμε $\lambda \setminus \{\Theta\}$ για την d-διαμέριση η οποία προέρχεται από την λ αφαιρώντας ένα αφαιρέσιμο d-κελί $\Theta \in \mathcal{E}_-(\lambda)$, και $\lambda \cup \{\Theta'\}$ για την d-διαμέριση η οποία προέρχεται από την διαμέριση λ προσθέτωντας ένα προσθέσιμο d-κελί $\Theta' \in \mathcal{E}_+(\lambda)$. Όμοια ορίζονται και για τις (d,m)-διαμερίσεις.

Παράδειγμα 4.4.0.3. *(i) Ένα παράδειγμα $(2,2)$-διαμέρισης μεγέθους 7 είναι το:*

$$\left(\left(\ydiagram{2,1}\,,\ \ydiagram{1}\right),\left(\varnothing,\ \ydiagram{1,1,1}\right)\right), \tag{4.4.0.1}$$

με την διαμέριση $\ydiagram{2,1}$ στη θέση $(1,1)$, την διαμέριση $\ydiagram{1}$ στην θέση $(1,2)$, την κενή διαμέριση στην θέση $(2,1)$ και την διαμέριση $\ydiagram{1,1,1}$ στην θέση $(2,2)$.

(ii) Τα παρακάτω $(2,2)$-κελιά είναι τα $(2,2)$-κελιά της $(2,2)$-διαμερίσης του παραδείγματος 4.4.0.3 (i):

$$\big((1,1),1,1\big),\ \big((1,2),1,1\big),\ \big((2,1),1,1\big),\ \big((1,1),1,2\big),\ \big((1,1),2,2\big),\ \big((2,1),2,2\big),\ \big((3,1),2,2\big).$$

(iii) Θεωρούμε την 3-διαμέριση $(\square\square, \varnothing, \square)$. *Συμβολίζουμε με* $-/+$ *τα αφαιρέσιμα/προσθέσιμα κελιά. Τα αφαιρέσιμα/προσθέσιμα κελιά της δοθείσας διαμέρισης είναι τα:*

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & - & + \\ \hline + \\ \cline{1-1} \end{array}\ , \ \begin{array}{|c|}\hline + \\ \hline \end{array}\ , \ \begin{array}{|c|c|}\hline - & + \\ \hline + \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

Ορισμός 4.4.0.6. *(i)Για ένα d-κελί Θ το οποίο εμφανίζεται στην σειρά x και την στήλη y του k-οστού Young διαγράμματος,δηλαδή $\Theta = (x, y, k)$,όπου $k \in \{1, \dots, d\}$, ορίζουμε $p(\Theta) := k$,$c(\Theta) := q^{2(y-x)}$ και $hl(\Theta) := \lambda_x^{(k)} - x + \lambda_y^{(k)'} - y + 1$. Ο αριθμός $p(\Theta)$ είναι η θέση του Θ,ο αριθμός $c(\Theta)$ καλείται (κβαντικό) περιέχομενο του Θ και ο αριθμός $hl(\Theta)$ καλέιται hook length του Θ.*
(ii) Για ένα (d, m)-κελί $\Theta = ((x, y), k, l)$,ορίζουμε $p^{(d)}(\Theta) := k$, $p^{(m)}(\Theta) := l$ και το (κβαντικό) περιέχομενο $c(\Theta) := v_l q^{2(y-x)}$ του Θ (όπου $q, v_1, \dots, v_m$ είναι οι παράμετροι που εμφανίζονται στις σχέσεις που ορίζουν την κυκλοτομική Yokonuma-Hecke άλγεβρα $Y(d, m, n)$). Ορίζουμε επίσης το κλασικό περιέχομενο $cc(\Theta) := y - x$ του Θ. Θα αποκαλούμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} p^{(d)}(\Theta) \\ c(\Theta) \end{pmatrix}$ περιεχόμενο πίνακα του (d, m)-κελιού Θ.

Παρατήρηση 4.4.0.2. *(i) Έστω $\lambda \vdash n$ και $\Theta, \Theta' \in \lambda$ δύο d-κελιά τέτοια ώστε $p(\Theta) = p(\Theta')$ και $c(\Theta) = c(\Theta')$. Τότε τα d-κελιά Θ, Θ' βρίσκονται στην ίδια διαγώνιο του Young διαγράμματος της διαμέρισης $\lambda^{(p(\Theta))}$. Αν επιπλέον,$c(\Theta) = c(\Theta') = 1$,τα d-κελιά Θ, Θ' βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο του Young διαγράμματος της διαμέρισης $\lambda^{(p(\Theta))}$.*
(ii) Μια (d, m)-διαμέριση λ χαρακτηρίζεται από την συλλογή πινάκων

$$\left\{ \begin{pmatrix} p^{(d)}(\Theta) \\ c(\Theta) \end{pmatrix} \mid \Theta \in \lambda \right\}.$$

Πράγματι,έστω $\Theta, \Theta' \in \lambda$ δύο (d, m)-κελιά τέτοια ώστε $p^{(d)}(\Theta) = p^{(d)}(\Theta')$ και $c(\Theta) = c(\Theta')$. Τότε τα (d, m)-κελιά Θ, Θ' ικανοποιούν επίσης τις σχέσεις $p^{(m)}(\Theta) = p^{(m)}(\Theta')$ και $cc(\Theta) = cc(\Theta')$,δηλαδή βρίσκονται στην ίδια διαγώνιο της ίδιας διαμέρισης στην λ με θέση $(p^{(d)}(\Theta), p^{(m)}(\Theta))$ της οποία τα κελιά έχουν κλασική σταθερά $cc(\Theta)$. Μόλις μάθουμε και το πλήθος των (d, m)-κελιών σε κάθε διαμέριση της λ,γνωρίζουμε και την (d, m)-διαμέριση λ.

Ορισμός 4.4.0.7. *(i) Έστω $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(d)})$ μια d-διαμέριση του n. Ένα d-ταμπλώ σχήματος λ είναι μια $1 - 1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $\{1, \dots, n\}$ και του συνόλου των d-κελιών στη λ. Μάλλα λόγια,ένα*

d-ταμπλώ σχήματος λ προκύπτει τοποθετώντας τους αριθμούς $1,\ldots,n$ στα d-κελιά της λ. Το μέγεθος του d-ταμπλώ σχήματος λ είναι n,δηλαδή ισούται με το μέγεθος της d-διαμέρισης λ.
(ii) Ένα d-ταμπλώ σχήματος λ καλείται standard αν
(α) Οι ακέραιοι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα οποιασδήποτε γραμμής του Young διαγράμματος αυξάνουν προς τα δεξιά και
(β) Οι ακέραιοι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα οποιασδήποτε στήλης του Young διαγράμματος αυξάνουν προς τα κάτω.
Συμβολίζουμε με $STab_d(n)$ σύνολο των standard d-ταμπλώ μεγέθους n (οποιουδήποτε σχήματος). Όμοια ορίζεται και το (d,m)-ταμπλώ σχήματος λ και συμβολίζουμε με $STab_{d,m}(n)$ σύνολο των standard (d,m)-ταμπλώ μεγέθους n (οποιουδήποτε σχήματος).

Παράδειγμα 4.4.0.4. *(i) Ένα standard 1-ταμπλώ σχήματος $\lambda = (4,4,3,1)$ είναι το*

1	2	4	6
3	7	9	12
8	11	13	
14			

(ii) Το παρακάτω $(2,2)$-ταμπλώ μεγέθους 7 σχήματος του παραδείγματος 4.4.0.3 (i) είναι standard :

$$\left(\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array}\right),\ \left(\varnothing\,,\ \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 6 \\ \hline 7 \\ \hline\end{array}\right)\right).$$

Ορισμός 4.4.0.8. *(i) Για ένα d-ταμπλώ $\mathcal{T}$ ορίζουμε $p(\mathcal{T}|i)$ και $c(\mathcal{T}|i)$ την θέση και το κβαντικό περιεχόμενο του d-κελιού με τον αριθμό i μέσα σε αυτό.*
(ii) Για ένα (d,m)-ταμπλώ $\mathcal{T}$ ορίζουμε $p^{(d)}(\mathcal{T}|i)$, $p^{(m)}(\mathcal{T}|i)$ και $c(\mathcal{T}|i)$ την d-θέση,την m-θέση και το κβαντικό περιεχόμενο του (d,m)-κελιού με τον αριθμό i μέσα σε αυτό.

Παράδειγμα 4.4.0.5. *(i) Θεωρούμε το standard 3-ταμπλώ $\mathcal{T} = (\,\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline\end{array}\,,\ \varnothing\,,\ \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline\end{array}\,)$. Έχουμε,*

$$p(\mathcal{T}|1) = 1,\ p(\mathcal{T}|2) = 3, p(\mathcal{T}|3) = 1 \quad \textit{και} \quad c(\mathcal{T}|1) = 1, c(\mathcal{T}|2) = 1, c(\mathcal{T}|3) = q^2.$$

(ii) Για το $(2,2)$-ταμπλώ του παραδείγματος 4.4.0.4 (ii),έχουμε:
$p^{(d)}(\mathcal{T}|2) = p^{(d)}(\mathcal{T}|3) = p^{(d)}(\mathcal{T}|4) = p^{(d)}(\mathcal{T}|5) = 1$,
$p^{(d)}(\mathcal{T}|1) = p^{(d)}(\mathcal{T}|6) = p^{(d)}(\mathcal{T}|7) = 2$,
$p^{(m)}(\mathcal{T}|2) = p^{(m)}(\mathcal{T}|4) = p^{(m)}(\mathcal{T}|5) = 1$,

$p^{(m)}(\mathcal{T}|1) = p^{(m)}(\mathcal{T}|3) = p^{(m)}(\mathcal{T}|6) = p^{(m)}(\mathcal{T}|7) = 2$,
$c(\mathcal{T}|2) = v_1$, $c(\mathcal{T}|5) = v_1 q^2$, $c(\mathcal{T}|4) = \frac{v_1}{q^2}$,$c(\mathcal{T}|3) = v_1$, $c(\mathcal{T}|1) = v_2$, $c(\mathcal{T}|6) = \frac{v_1}{q^2}$, $c(\mathcal{T}|7) = \frac{v_1}{q^4}$.

Παρατήρηση 4.4.0.3. *(i) Κάθε standard (d,m)-ταμπλώ $\mathcal{T}$ μεγέθους n χαρακτηρίζεται πλήρως από την ακολουθία περιεχόμενων πινάκων του*

$$\left(\begin{pmatrix} p^{(d)}(\mathcal{T}|1) \\ c(\mathcal{T}|1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{(d)}(\mathcal{T}|2) \\ c(\mathcal{T}|2) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} p^{(d)}(\mathcal{T}|n) \\ c(\mathcal{T}|n) \end{pmatrix} \right)$$

(ii) Για κάθε standard (d,m)-ταμπλώ $\mathcal{T}$ και κάθε $i \in \{1,\ldots,n-1\}$,αν έχουμε $p^{(d)}(\mathcal{T}|i) = p^{(d)}(\mathcal{T}|i+1)$,τότε $c(\mathcal{T}|i) \neq c(\mathcal{T}|i+1)$,δηλαδή τα (d,m)-κελιά που περιέχουν τους αριθμούς i και $i+1$ δεν μπορούν να βρίσκονται στην ίδια διαγώνιο του ίδιου διαγράμματος.
(iii) Έστω $\mathcal{T}$ standard (d,m)-ταμπλώ σχήματος λ και μεγέθους n. Καθώς το $\mathcal{T}$ είναι standard,το (d,m)-κελί Θ που περιέχει τον αριθμό n είναι αφαιρέσιμο από την λ. Γράφουμε $\mathcal{T}\backslash\{\boxed{n}\}$ για το standard (d,m)-ταμπλώ σχήματος $\lambda\backslash\Theta$ το οποίο προέρχεται από το $\mathcal{T}$ αφαιρώντας το Θ.

4.5 Standard d-ταμπλώ και φάσμα των Jucy-Murphy στοιχείων.

Πρόταση 4.5.0.1. *Το σύνολο $STab_d(n)$ είναι σε $1-1$ και επί αντιστοιχία με το σύνολο $Cont_d(n)$.*

Απόδειξη. Έστω $\xi_1,\ldots,\xi_d$ οι d-οστές ρίζες της μονάδας (αυθαίρετα διατεταγμένες) και έστω $\mathcal{A}^{2\times n}$ το σύνολο των $2\times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{C}(q)$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathrm{STab}_d(n) \to \mathcal{A}^{2\times n}$ με τύπο

$$f(\mathcal{T}) = \begin{pmatrix} a_1 & ,\ldots, & a_n \\ c_1 & ,\ldots, & c_n \end{pmatrix},$$

όπου,για κάθε $i = 1,\ldots,n$,$a_i := \xi_{p(\mathcal{T}|i)}$, $c_i := c(\mathcal{T}|i)$ και $\mathcal{T} \in \mathrm{STab}_d(n)$.
Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η f είναι $1-1$. Έστω $\mathcal{T},\mathcal{T}' \in \mathrm{STab}_d(n)$ τέτοια ώστε $f(\mathcal{T}) = f(\mathcal{T}')$. Τότε,για κάθε $i = 1,\ldots,n$,έχουμε

$$p(\mathcal{T}|i) = p(\mathcal{T}'|i) \quad \text{και} \quad c(\mathcal{T}|i) = c(\mathcal{T}'|i).$$

Επομένως,τα $\mathcal{T},\mathcal{T}'$ έχουν το ίδιο σχήμα,και επιπλέον το d-ταμπλώ $\mathcal{T}$ προκύπτει από το $\mathcal{T}'$ μεταθέτοντας τα στοιχεία σε κάθε διαγώνιο του κάθε διαγράμματος.

Όμως,τα $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ είναι standard d-ταμπλώ,επομένως τα στοιχεία αυξάνουν καθώς διασχίζουμε κάθε διαγώνιο. Έτσι,αυτή η μετάθεση των στοιχείων σε κάθε διαγώνιο του κάθε διαγράμματος από το ένα ταμπλώ στο άλλο δεν είναι κάποια άλλη πέρα από την τετριμμένη. Συνεπώς,$\mathcal{T} = \mathcal{T}'$,δηλαδή η f είναι $1-1$.
Μένει να δείξουμε ότι $\mathrm{Imf} = \mathrm{Cont}_d(n)$.Έστω,

$$f(\mathcal{T}) = \begin{pmatrix} a_1 & ,\dots, & a_n \\ c_1 & ,\dots, & c_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Imf},$$

για κάποιο $\mathcal{T} \in \mathrm{STab}_d(n)$ σχήματος $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(d)})$. Θα δείξουμε ότι $f(\mathcal{T}) \in \mathrm{Cont}_d(n)$.Γι' αυτό,αρκεί να δείξουμε ότι ο $2 \times n$ πίνακας $f(\mathcal{T})$ ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού 4.3.0.1. Για την πρώτη συνθήκη,καθώς $a_i := \xi_{p(\mathcal{T}|i)}$ είναι d-οστές ρίζες της μονάδας,έπεται ότι $a_i^d = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Επίσης,πάντοτε $c(\mathcal{T}|1) = 1$ (διότι $\mathcal{T}$ standard ταμπλώ),άρα $c_1 = 1$. Για την δεύτερη συνθήκη,ας υποθέσουμε ότι $c_j = c(\mathcal{T}|j) \neq 1$ για κάποιο $j = 2, \dots, n$. Τότε ο αριθμός j βρίσκεται σε ένα κελί του διαγράμματος $\lambda^{(p(\mathcal{T}|j))}$ το οποίο δεν βρίσκεται επάνω στην κύρια διαγώνιο,διότι η κύρια διαγώνιος περιέχει αριθμούς οι οποίοι έχουν κβαντικό περιεχόμενο ίσο με 1. Επομένως,υπάρχει ένα κελί το οποίο βρίσκεται από τα αριστερά του ή από επάνω του. Αν υπάρχει κελί από τα αριστερά του,τότε υπάρχει αριθμός i μέσα σε αυτό το κελί τέτοιος ώστε $i < j, p(\mathcal{T}|i) = p(\mathcal{T}|j)$ και $c(\mathcal{T}|i) = c(\mathcal{T}|j)q^{-2}$ (διότι το d-ταμπλώ $\mathcal{T}$ είναι standard). Όμοια,αν υπάρχει κελί από πάνω του,τότε υπάρχει αριθμός i μέσα σε αυτό το κελί τέτοιος ώστε $i < j, p(\mathcal{T}|i) = p(\mathcal{T}|j)$ και $c(\mathcal{T}|i) = c(\mathcal{T}|j)q^2$. Έτσι,υπάρχει αριθμός $i < j$ τέτοιος ώστε $a_i = a_j$ και $c_i \in \{c_j q^{-2}, c_j q^2\}$. Για την τρίτη συνθήκη,ας υποθέσουμε ότι $a_j = a_k$ και $c_j = c_k$ για κάποια $1 \leqslant j < k \leqslant n$. Τότε $p(\mathcal{T}|j) = p(\mathcal{T}|k)$ (διότι $a_j = a_k$) και οι αριθμοί j και k βρίσκονται σε κελιά Θ και Θ' αντίστοιχα τα οποία ανήκουν στην ίδια διαγώνιο του διαγράμματος $\lambda^{(p(\mathcal{T}|j))}$ (διότι $c_j = c(\mathcal{T}|j) = c(\mathcal{T}|k) = c_k$). Καθώς $\mathcal{T} \in \mathrm{STab}_d(n)$ και $j < k$,τότε υπάρχει ένα κελί κάτω από το Θ,με τον αριθμό i_1 μέσα σε αυτό και ένα κελί δεξιά από το Θ,με τον αριθμό i_2 μέσα σε αυτό. Εδικότερα, $j+1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant k-1$. Άρα,$k - j \geqslant 2$. Αν $k - j = 2$ τότε αναγκαστικά θα είχαμε $i_1 = i_2$,κάτι το οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει,διότι $\mathcal{T}$ είναι standard d-ταμπλώ και δεν μπορούμε να έχουμε επαναλήψεις αριθμών. Συνπεώς,$k - j \geqslant 3$. Έτσι,υπάρχουν $j+1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant k-1$ τέτοιο ώστε $a_{i_1} = a_{i_2} = a_j$, $c_{i_1} = c_j q^{-2}$ και $c_{i_2} = c_j q^2$. Επομένως,$f(\mathcal{T}) \in \mathrm{Cont}_d(n)$ και άρα $\mathrm{Imf} \subseteq \mathrm{Cont}_d(n)$. Από την άλλη πλευρά,έστω

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & ,\dots, & a_n \\ c_1 & ,\dots, & c_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Cont}_d(n)$$

Θα κατασκευάσουμε ένα $\mathcal{T} \in \mathrm{STab}_d(n)$ τέτοιο ώστε $f(\mathcal{T}) = \Lambda$ και έτσι θα δείξουμε ότι $\Lambda \in \mathrm{Imf}$. Για να το επιτύχουμε αυτό,θα ξεκινήσουμε με ένα κενό

d-ταμπλώ και σε κάθε βήμα θα προσθέτουμε ένα d-κελί με τον αριθμό i μέσα σε αυτό τέτοιο ώστε $a_i := \xi_{p(\mathcal{T}|i)}$, $c_i := c(\mathcal{T}|i)$. Το d-κελί με τον αριθμό i μέσα σε αυτό θα προστεθεί στην πρώτη μη κατειλημμένη θέση της διαγωνίου η οποία καθορίζεται από τα $p(\mathcal{T}|i)$ και $c(\mathcal{T}|i)$. Έπειτα,θα δείξουμε ότι μετά από κάθε βήμα το αποτέλεσμα της κατασκευής είναι ένα standard d-ταμπλώ. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς i. Το d-κελί με τον αριθμό 1 μέσα σε αυτό θα προστεθεί προφανώς στην θέση $p(\mathcal{T}|1)$ (η οποία καθορίζεται από το a_1). Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε κατασκευάσει ένα standard d-ταμπλώ $\mathcal{T}'$ μεγέθους $i-1$ τέτοιο ώστε $a_j := \xi_{p(\mathcal{T}|j)}$, $c_j := c(\mathcal{T}|j)$ για κάθε $j = 1, \ldots, i-1$. Έστω $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(d)})$ το σχήμα του d-ταμπλώ $\mathcal{T}'$. Τότε το d-κελί με τον αριθμό i μέσα σε αυτό θα προστεθεί στο διάγραμμα $\lambda^{(p(\mathcal{T}|i))}$ στη πρώτη μη κατειλημμένη θέση της διαγωνίου με κβαντική σταθερά c_i. Ας υποθέσουμε ότι $c_j \neq c_i$ για κάθε $j = 1, \ldots, i-1$ και $a_j = a_i$. Τότε προσθέτοντας το d-κελί με αριθμό i μέσα σε αυτό στο διάγραμμα $\lambda^{(p(\mathcal{T}'|i))}$ κατασκευάζουμε μια νέα διαγώνιο. Αν $c_i \neq 1$ και αφού $\Lambda \in \mathrm{Cont}_d(n)$,από την δεύτερη συνθήκη του ορισμού 4.3.0.1 υπάρχει $k < i$ τέτοιο ώστε $a_k = a_i$ και $c_k \in \{c_i q^{-2}, c_i q^2\}$. Έτσι,όταν $c_j \neq c_i$ για κάθε $j = 1, \ldots, i-1$ και $a_j = a_i$ υπάρχει μοναδικό k που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες και λόγω της επαγωγικής υπόθεσης το $\mathcal{T}'$ είναι standard d-ταμπλώ. Αν $c_k = c_i q^{-2}$,τότε το κελί που περιέχει το i θα προστεθεί από τα δεξιά του κελιού που περιέχει τον αριθμό k,ενώ αν $c_k = c_i q^2$,τότε το κελί που περιέχει το i θα προστεθεί κάτω από το κελί που περιέχει τον αριθμό k. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν,καθώς το $\mathcal{T}'$ είναι standard d-ταμπλώ,το αποτέλεσμα της κατασκευής είναι επίσης ένα standard d-ταμπλώ μεγέθους i. Διαφορετικά,έστω j ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός τέτοιος ώστε $j < i$, $a_j = a_i$ και $c_j = c_i$. Καθώς $\Lambda \in \mathrm{Cont}_d(n)$,από την τρίτη συνθήκη του ορισμού 4.3.0.1,υπάρχουν $j + 1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant k - 1$ τέτοιοι ώστε $a_{i_1} = a_{i_2} = a_j$, $c_{i_1} = c_j q^{-2}$ και $c_{i_2} = c_j q^2$. Καθώς το d-ταμπλώ $\mathcal{T}'$ είναι standard,έπεται ότι το d-κελί $(x, y, p(\mathcal{T}|i))$ που περιέχει το j έχει ένα κελί από κάτω και από τα δεξιά του. Προσθέτουμε τώρα το d-κελί $(x + 1, y + 1, p(\mathcal{T}|i)$ με τον αριθμό i μέσα σε αυτό στο διάγραμμα $\lambda^{(p(\mathcal{T}|i))}$. Καθώς το d-ταμπλώ $\mathcal{T}'$ είναι standard και $i_1, i_2 < i$,το αποτέλεσμα της κατασκευής είναι επίσης standard d-ταμπλώ μεγέθους i. Έτσι,$\mathrm{Cont}_d(n) \subseteq \mathrm{Imf}$. Συνεπώς,$\mathrm{Cont}_d(n) = \mathrm{Imf}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Παράδειγμα 4.5.0.1. *Ο παρακάτω* 2×10 *πίνακας του συνόλου* $Cont_3(10)$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & , & \xi_1 & , & \xi_3 & , & \xi_1 & , & \xi_3 & , & \xi_1 & , & \xi_1 & , & \xi_2 & , & \xi_1 & , & \xi_3 \\ 1 & , & q^2 & , & 1 & , & q^4 & , & q^{-2} & , & q^{-2} & , & q^{-4} & , & 1 & , & 1 & , & q^2 \end{pmatrix},$$

όπου $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ *είναι το σύνολο των κυβικών ριζών της μονάδας,αντιστοιχεί στο* *παρακάτω 3-ταμπλώ μεγέθους 10:*

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 6 & 9 \\ \cline{1-2} 7 \\ \cline{1-1} \end{array} \;,\; \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \;,\; \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 10 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

4.6 Αναπαραστάσεις της Yokonuma-Hecke άλγεβρας.

Ορισμός 4.6.0.1. *Έστω S_n η συμμετρική ομάδα σε n σύμβολα και $\sigma \in S_n$ μετάθεση. Για κάθε d-ταμπλώ $\mathcal{T}$ μεγέθους n,συμβολίζουμε με $\mathcal{T}^\sigma$ το d-ταμπλώ το οποίο προέρχεται από το $\mathcal{T}$ εφαρμόζοντας την μετάθεση σ στους αριθμούς οι οποίοι περιέχονται στα d-κελιά του $\mathcal{T}$. Δηλαδή,έχουμε*

$$p(\mathcal{T}^\sigma|i) = p\big(\mathcal{T}|\sigma^{-1}(i)\big) \quad \textit{και} \quad c(\mathcal{T}^\sigma|i) = c\big(\mathcal{T}|\sigma^{-1}(i)\big) \textit{ για κάθε } i = 1, \dots, n. \tag{4.6.0.1}$$

Παρατήρηση 4.6.0.1. *Αν το d-ταμπλώ $\mathcal{T}$ είναι standard,τότε το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^\sigma$ δεν είναι απαραίτητα standard,διότι αν πάρουμε για παράδειγμα το standard 1-ταμπλώ $\mathcal{T} = (\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array})$ και την μετάθεση $\sigma = (123) \in S_3$,το 1-ταμπλώ $\mathcal{T}^\sigma = (\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array})$ δεν είναι standard.*

Έστω $\xi_1, \dots, \xi_d$ οι d-οστές ρίζες της μονάδας (αυθαίρετα διατεταγμένες). Έστω $\mathcal{P}(d,n)$ το σύνολο των d-διαμερίσεων του n,και έστω $\lambda \in \mathcal{P}(d,n)$. Έστω V_λ ένας $\mathbb{C}(q)$-διανυσματικός χώρος με βάση $\{v_\mathcal{T}\}$ η οποία παραμετροποιείται από το standard d-ταμπλώ $\mathcal{T}$ σχήματος λ. Θέτουμε $v_\mathcal{T} := 0$ για κάθε μη standard d-ταμπλώ $\mathcal{T}$ σχήματος λ.

Παρατήρηση 4.6.0.2. *Υπενθυμίζουμε ότι αναπαράσταση μιας άλγεβρας $\mathcal{A}$ είναι ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος V εφοδιασμέμνος με έναν ομομορφισμό αλγεβρών $\rho : \mathcal{A} \to End_\mathbb{F}(V)$. Δηλαδή,η αναπαράσταση μιας άλγεβρας είναι ένας τρόπος να γράψουμε τα στοιχεία της άλγεβρας ως γραμμικούς μετασχηματισμούς στον διανυσματικό χώρο V έτσι ώστε αυτή η γραφή να σέβεται την αλγεβρική δομή της άλγεβρας. Με την έννοια αλγεβρική δομή,εννοούμε τις σχέσεις που διέπουν την άλγεβρα,οι οποίες δείχουν πως τα στοιχεία της άλγεβρας αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Όταν λέμε ότι ένας διανυσματικός χώρος με δοθείσες δράσεις είναι αναπαράσταση μιας άλγεβρας,εννούμε ότι η δράση των στοιχείων της άλγεβρας μιμείται αυτήν την αλγεβρική δομή. Έτσι,για να δείξουμε ότι ένας διανυσματικός χώρος με* *δοθείσες δράσεις είναι αναπαράσταση μιας άλγεβρας,αρκεί να δείξουμε ότι οι δοθείσες δράσεις ικανοποούν τις σχέσεις που διέπουν την άλγεβρα. Για παράδειγμα αν έχουμε μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ η οποία διέπεται από την σχέση $xy = yx$ για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$ και ορίζουμε δράση της άλγεβρας $\mathcal{A}$ σε ένα διανυσματικό χώρο η οποία να σέβεται αυτήν την αντιμεταθετική σχέση,τότε έχουμε δείξει ότι αυτός ο διανυσματικός χώρος με την συγκεκριμένη δράση είναι αναπαράσταση της άλγεβρας $\mathcal{A}$.*

Πρόταση 4.6.0.1. *Έστω $\mathcal{T}$ ένα standard d-ταμπλώ σχήματος $\lambda \in \mathcal{P}(d, n)$. Για λόγους συντομίας,θέτουμε $p_i := p(\mathcal{T}|i)$ και $c_i := c(\mathcal{T}|i)$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Ο $\mathbb{C}(q)$-διανυσματικός χώρος V_λ είναι αναπαράσταση της $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$ με δράση των γεννητόρων στο στοιχείο της βάσης $v_\mathcal{T}$ η οποία ορίζεται ως ακολούθως: για κάθε $j = 1, \dots, n$,*

$$t_j(v_\mathcal{T}) = \xi_{p_j} v_\mathcal{T}, \tag{4.6.0.2}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n-1$,αν $p_i \neq p_{i+1}$ τότε

$$g_i(v_\mathcal{T}) = v_{\mathcal{T}^{s_i}}, \tag{4.6.0.3}$$

και αν $p_i = p_{i+1}$ τότε

$$g_i(v_\mathcal{T}) = \frac{c_{i+1}(q - q^{-1})}{c_{i+1} - c_i} v_\mathcal{T} + \frac{q c_{i+1} - q^{-1} c_i}{c_{i+1} - c_i} v_{\mathcal{T}^{s_i}}, \tag{4.6.0.4}$$

όπου s_i είναι η μετάθεση $(i, i+1)$.

Απόδειξη. Λόγω της παρατήρησης 4.6.0.2,για να δείξουμε ότι οι δράσεις (4.6.0.2)-(4.6.0.5) ορίζουν αναπαράσταση της άλγεβρας $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$,αρκεί να δείξουμε ότι οι δοθείσες δράσεις ικανοποιούν τις σχέσεις (3.0.0.1) του ορισμού 3.0.0.1 ,δηλαδή τις σχέσεις που διέπουν την άλγεβρα $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$. Αρχικά παρατηρούμε ότι,καθώς το d-ταμπλώ $\mathcal{T}$ είναι standard,το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$ δεν είναι standard αν και μόνο αν $p_{i+1} = p_i$ και $c_{i+1} = c_i q^{\pm 2}$. Αν $p_{i+1} = p_i$ και $c_{i+1} = c_i q^{2\epsilon}$,όπου $\epsilon = \pm 1$,τότε η σχέση (4.6.0.4) γίνεται $g_i(v_\mathcal{T}) = \epsilon q^\epsilon v_\mathcal{T}$. Από την μελέτη της αφινικής Yokonuma-Hecke άλγεβρας $Y(d, \infty, 2)$ παίρνουμε ότι οι σχέσεις $g_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) e_i g_i, g_i t_i = t_{i+1} g_i$ και $g_i t_{i+1} = t_i g_i$ ικανοποιούνται άμεσα. Τώρα η σχέση $t_j^d = 1, j = 1, \dots, n$ ικανοποιείται,διότι ξ_{p_j} είναι d-οστή ρίζα της μονάδας και η σχέση $t_i t_j = t_j t_i, i, j = 1, \dots, n$ ικανοποιείται άμεσα. Επιπλέον,καθώς το $g_i(v_\mathcal{T})$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_\mathcal{T}$ και $v_{\mathcal{T}^{s_i}}$,οι σχέσεις $g_i t_j = t_j g_i$,για $i = 1, \dots, n-1$ και $j = 1, \dots, n$ τέτοιο ώστε $j \neq i, i+1$,ικανοποιούνται επίσης. Οπότε μένει να ελέγξουμε τις σχέσεις

$$g_i g_j(v_\mathcal{T}) = g_j g_i(v_\mathcal{T}) \quad \text{για} \quad i, j = 1, \dots, n-1 \text{τέτοια ώστε} |i-j| > 1, \tag{4.6.0.5}$$

και τις σχέσεις

$$g_i g_{i+1} g_i(v_{\mathcal{T}}) = g_{i+1} g_i g_{i+1}(v_{\mathcal{T}}) \quad \text{για} \quad i = 1, \ldots, n-2. \tag{4.6.0.6}$$

Ελέγχουμε πρώτα την σχέση (4.6.0.5). Για $i, j = 1, \ldots, n-1$ τέτοια ώστε $|i-j| > 1$,αν $p_{i+1} = p_i$ και $p_{j+1} = p_j$ εφαρμόζοντας διαδοχικά την (4.6.0.4) και παρατηρώντας ότι $v_{\mathcal{T}^{s_i s_j}} = v_{\mathcal{T}^{s_j s_i}}$ έπεται το ζητούμενο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $p_{i+1} \neq p_i$ και $p_{j+1} \neq p_j$. Τότε,από την παραπάνω παρατήρηση τα d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$,$\mathcal{T}^{s_j}$,$\mathcal{T}^{s_i s_j}$ και $\mathcal{T}^{s_j s_i}$ είναι standard,και επιπλέον έχουμε $\mathcal{T}^{s_i s_j} = \mathcal{T}^{s_j s_i}$,διότι $s_i s_j = s_j s_i$ (αφού $|i-j| > 1$). Συνεπώς,$g_i g_j(v_{\mathcal{T}}) = v_{\mathcal{T}^{s_j s_i}} = v_{\mathcal{T}^{s_i s_j}} = g_j g_i(v_{\mathcal{T}})$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $p_{i+1} \neq p_i$ και $p_{j+1} = p_j$. Τότε το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$ είναι standard και έχουμε

$$g_i g_j(v_{\mathcal{T}}) = \frac{c_{j+1}(q-q^{-1})}{c_{j+1}-c_j} v_{\mathcal{T}^{s_i}} + \frac{q c_{j+1} - q^{-1} c_j}{c_{j+1}-c_j} g_i(v_{\mathcal{T}^{s_j}})$$

και

$$g_j g_i(v_{\mathcal{T}}) = \frac{c_{j+1}(q-q^{-1})}{c_{j+1}-c_j} v_{\mathcal{T}^{s_i}} + \frac{q c_{j+1} - q^{-1} c_j}{c_{j+1}-c_j} v_{\mathcal{T}^{s_i s_j}}$$

Επομένως,για να δείξουμε ότι $g_i g_j(v_{\mathcal{T}}) = g_j g_i(v_{\mathcal{T}})$,αρκεί να δείξουμε ότι $g_i(v_{\mathcal{T}^{s_j}}) = v_{\mathcal{T}^{s_i s_j}}$. Αν το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_j}$ είναι standard,τότε $g_i(v_{\mathcal{T}^{s_j}}) = v_{\mathcal{T}^{s_j s_i}} = v_{\mathcal{T}^{s_i s_j}}$ (όπου στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση $s_i s_j = s_j s_i$,αφού $|i-j| > 1$). Αν το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_j}$ δεν είναι standard,τότε d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_j s_i}$ δεν είναι ούτε αυτό standard,και άρα $g_i(v_{\mathcal{T}^{s_j}}) = 0 = v_{\mathcal{T}^{s_j s_i}} = v_{\mathcal{T}^{s_I s_j}}$. Όμοια,αποδεικνύεται και η περίπτωση $p_{i+1} = p_i$ και $p_{j+1} \neq p_j$.Έτσι,τελειώσαμε με την σχέση (4.6.0.5). Μένει να αποδείξουμε την σχέση (4.6.0.6). Θα διακρίνουμε και εδώ περιπτώσεις. Ας υποθέσουμε ότι τα p_i, p_{i+1} και p_{i+2} είναι όλα διαφορετικά. Τότε τα d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$,$\mathcal{T}^{s_i s_{i+1}}$,$\mathcal{T}^{s_i s_{i+1} s_i}$,$\mathcal{T}^{s_{i+1}}$,$\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i}$,$\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}$ είναι standard,και έχουμε $\mathcal{T}^{s_i s_{i+1} s_i} = \mathcal{T}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}$,διότι $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$. Συνεπώς,$g_i g_{i+1} g_i(v_{\mathcal{T}}) = v_{\mathcal{T}^{s_i s_{i+1} s_i}} = v_{\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}} = g_{i+1} g_i g_{i+1}(v_{\mathcal{T}})$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $p_i = p_{i+1} \neq p_{i+2}$. Τότε τα d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_{i+1}}$ και $\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i}$ είναι standard και έχουμε

$$\begin{aligned} g_i g_{i+1} g_i(v_{\mathcal{T}}) &= g_i g_{i+1}\big(\tfrac{c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i} v_{\mathcal{T}} + \tfrac{q c_{i+1} - q^{-1} c_i}{c_{i+1}-c_i} v_{\mathcal{T}^{s_i}}\big) \\ &= g_i\big(\tfrac{c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i} v_{\mathcal{T}^{s_{i+1}}} + \tfrac{q c_{i+1} - q^{-1} c_i}{c_{i+1}-c_i} g_{i+1}(v_{\mathcal{T}^{s_i}})\big) \\ &= \tfrac{c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i} v_{\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i}} + \tfrac{q c_{i+1} - q^{-1} c_i}{c_{i+1}-c_i} g_i g_{i+1}(v_{\mathcal{T}^{s_i}}) \end{aligned}$$

Αν το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$ είναι standard,τότε τα d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i s_{i+1}}$ και $\mathcal{T}^{s_i s_{i+1} s_i}$ είναι επίσης standard και έχουμε $g_i g_{i+1}(v_{\mathcal{T}^{s_i}}) = v_{\mathcal{T}^{s_i s_{i+1} s_i}}$. Αν το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$ δεν είναι standard,τότε τα d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i s_{i+1}}$ και $\mathcal{T}^{s_i s_{i+1} s_i}$ δεν είναι ούτε αυτά standard,και έχουμε $g_i g_{i+1}(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i}}) = 0 = \upsilon_{\mathcal{T}^{s_i s_{i+1} s_i}}$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν

$$g_i g_{i+1} g_i(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i}}) = \frac{c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i}\upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1}s_i}} + \frac{qc_{i+1}-q^{-1}c_i}{c_{i+1}-c_i}\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i s_{i+1} s_i}}$$

Από την άλλη πλευρά

$$g_{i+1} g_i g_{i+1}(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i}}) = \frac{c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i}\upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1}s_i}} + \frac{qc_{i+1}-q^{-1}c_i}{c_{i+1}-c_i}\upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}}$$

Καθώς $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$,έπεται ότι $g_i g_{i+1} g_i(\upsilon_{\mathcal{T}}) = g_{i+1} g_i g_{i+1}(\upsilon_{\mathcal{T}})$. Όμοια αποδεικνύεται και η περίπτωση $p_i \neq p_{i+1} = p_{i+2}$. Τέλος,ας υποθέσουμε ότι $p_i = p_{i+2} \neq p_{i+1}$.Τότε τα d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$ και $\mathcal{T}^{s_{i+1}}$ είναι standard και έχουμε

$$\begin{aligned} g_i g_{i+1} g_i(\upsilon_{\mathcal{T}}) &= g_i g_{i+1}(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i}}) \\ &= g_i\big(\tfrac{c_{i+2}(q-q^{-1})}{c_{i+2}-c_i}\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i}} + \tfrac{qc_{i+2}-q^{-1}c_i}{c_{i+2}-c_i}\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i s_{i+1}}}\big) \\ &= \tfrac{c_{i+2}(q-q^{-1})}{c_{i+2}-c_i}\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i^2}} + \tfrac{qc_{i+2}-q^{-1}c_i}{c_{i+2}-c_i} g_i(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i s_{i+1}}}) \\ &= \tfrac{c_{i+2}(q-q^{-1})}{c_{i+2}-c_i}\upsilon_{\mathcal{T}} + \tfrac{qc_{i+2}-q^{-1}c_i}{c_{i+2}-c_i} g_i(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i s_{i+1}}}) \text{ (διότι } s_i^2 = 1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} g_{i+1} g_i g_{i+1}(\upsilon_{\mathcal{T}}) &= g_{i+1} g_i(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1}}}) \\ &= g_{i+1}\big(\tfrac{c_{i+2}(q-q^{-1})}{c_{i+2}-c_i}\upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1}}} + \tfrac{qc_{i+2}-q^{-1}c_i}{c_{i+2}-c_i}\upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i}}\big) \\ &= \tfrac{c_{i+2}(q-q^{-1})}{c_{i+2}-c_i}\upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1}^2}} + \tfrac{qc_{i+2}-q^{-1}c_i}{c_{i+2}-c_i} g_{i+1}(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i}}) \\ &= \tfrac{c_{i+2}(q-q^{-1})}{c_{i+2}-c_i}\upsilon_{\mathcal{T}} + \tfrac{qc_{i+2}-q^{-1}c_i}{c_{i+2}-c_i} g_{i+1}(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1}} s_i}) \text{ (διότι } s_{i+1}^2 = 1) \end{aligned}$$

Αν το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i s_{i+1}}$ είναι standard,τότε $g_i(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i s_{i+1}}}) = \upsilon_{\mathcal{T}^{s_i s_{i+1} s_i}}$. Αν το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i s_{i+1}}$ δεν είναι standard,τότε d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i s_{i+1} s_i}$ δεν είναι επίσης standard,και $g_i(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i s_{i+1}}}) = 0 = \upsilon_{\mathcal{T}^{s_i s_{i+1} s_i}}$. Όμοια,αν το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i}$ είναι standard,τότε $g_{i+1}(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i}}) = \upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}}$. Αν το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i}$ δεν είναι standard,τότε d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}$ δεν είναι επίσης standard,και $g_{i+1}(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i}}) = 0 = \upsilon_{\mathcal{T}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}}$. Καθώς $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$,παίρνουμε ότι $g_i g_{i+1} g_i(\upsilon_{\mathcal{T}}) = g_{i+1} g_i g_{i+1}(\upsilon_{\mathcal{T}})$. Έτσι,η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πρόταση 4.6.0.2. *Έστω λ μια d-διαμέριση του n. Η δράση των Jucy-Murphy στοιχείων $J_1, \ldots, J_n$ της άλγεβρας $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$ στον διανυσματικό χώρο V_λ δίνεται από*

$$J_i(\upsilon_{\mathcal{T}}) = c(\mathcal{T}|i)\upsilon_{\mathcal{T}} \quad \textit{για οποιοδήποτε standard } d\textit{-ταμπλώ } \mathcal{T} \textit{ σχήματος } \lambda. \tag{4.6.0.7}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{T}$ standard d-ταμπλώ σχήματος λ. Για λόγους συντομίας,θέτουμε $p_i := p(\mathcal{T}|i)$ και $c_i := c(\mathcal{T}|i)$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Θα αποδείξουμε την σχέση (4.6.0.7) χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς i. Για $i = 1$,καθώς $J_1 = 1$ και $c_1 = 1$ η (4.6.0.7) επαληθεύεται. Έστω ότι η (4.6.0.7) επαληθεύεται για κάποιο $i > 1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $p_i \neq p_{i+1}$,τότε

$J_{i+1}(v_{\mathcal{T}}) = g_i J_i g_i(v_{\mathcal{T}}) = g_i J_i(v_{\mathcal{T}^{s_i}}) = g_i(c_{i+1}(v_{\mathcal{T}^{s_i}}) = c_{i+1} g_i(v_{\mathcal{T}^{s_i}}) = c_{i+1} v_{\mathcal{T}^{s_i^2}} = c_{i+1} v_{\mathcal{T}}$,όπου στην πρώτη ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση $J_{i+1} = g_i J_i g_i$, στην δεύτερη και την πέμπτη ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση (4.6.0.3),στην τρίτη ισότητα την επαγωγική υπόθεση και τέλος στην έκτη ισότητα την σχέση $s_i^2 = 1$,διότι s_i είναι μετάθεση.

Αν $p_i = p_{i+1}$,τότε

$J_{i+1}(v_{\mathcal{T}}) = g_i J_i g_i(v_{\mathcal{T}})$

$$=g_i J_i\Big(\tfrac{c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i} v_{\mathcal{T}} + \tfrac{q c_{i+1} - q^{-1} c_i}{c_{i+1}-c_i} v_{\mathcal{T}^{s_i}}\Big)$$

$$=g_i\Big(\tfrac{c_i c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i} v_{\mathcal{T}} + \tfrac{c_{i+1}(q c_{i+1} - q^{-1} c_i)}{c_{i+1}-c_i} v_{\mathcal{T}^{s_i}}\Big)$$

$$=\tfrac{c_i c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i}\Big(\tfrac{c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i} v_{\mathcal{T}} + \tfrac{q c_{i+1} - q^{-1} c_i}{c_{i+1}-c_i} v_{\mathcal{T}^{s_i}}\Big)$$

$$+\tfrac{c_{i+1}(q c_{i+1} - q^{-1} c_i)}{c_{i+1}-c_i}\Big(\tfrac{c_i(q-q^{-1})}{c_i - c_{i+1}} v_{\mathcal{T}^{s_i}} + \tfrac{q c_i - q^{-1} c_{i+1}}{c_i - c_{i+1}} v_{\mathcal{T}}\Big),$$

όπου στην πρώτη ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση $J_{i+1} = g_i J_i g_i$, στην δεύτερη και την τέταρτη ισότητα την σχέση (4.6.0.4) και στην τρίτη ισότητα την επαγωγική υπόθεση. Τώρα,παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του διανύσματος $v_{\mathcal{T}^{s_i}}$ ισούται με 0. Αν το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$ δεν είναι standard,δηλαδή αν $c_{i+1} = c_i q^{\pm 2}$,τότε ο τελευταίος όρος του αθροίσματος είναι 0,και κάνοντας απλούς υπολογισμούς παίρνουμε ότι $J_{i+1}(v_{\mathcal{T}}) = c_{i+1} v_{\mathcal{T}}$. Αν το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$ είναι standard,τότε κάνοντας πάλι υπολογισμούς (περισσότερο χρονοβόρους) παίρνουμε ότι $J_{i+1}(v_{\mathcal{T}}) = c_{i+1} v_{\mathcal{T}}$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.6.0.3. *Το σύνολο $Stab_d(n)$ είναι σε $1-1$ και επί αντιστοιχία με το σύνολο $Spec_{JM}$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{T} \in \mathrm{Stab}_d(n)$ και έστω Λ ο αντίστοιχος πίνακας περιεχομένου, μέσω της ταύτισης των συνόλων $\mathrm{Stab}_d(n)$ και $\mathrm{Cont}_d(n)$ που υποδεικνύει η πρόταση 4.5.0.1. Οι δράσεις των Jucy-Murphy στοιχείων $t_1, \ldots, t_n J_1, \ldots, J_n$ στο διάνυσμα $v_{\mathcal{T}}$,οι οποίες δίνονται από τις προτάσεις 4.6.0.1 και 4.6.0.2,δίνουν ότι $\Lambda \in \mathrm{Spec}_{JM}$ με αποδεκτό διάνυσμα $v_{\mathcal{T}}$. Έτσι,το σύνολο $\mathrm{Stab}_d(n)$ εμφυτέυεται στο σύνολο Spec_{JM}. Από την άλλη πλευρά,λόγω των προτάσεων 4.3.0.1 και 4.5.0.1,το σύνολο Spec_{JM} εμφυτέυεται στο σύνολο $\mathrm{Stab}_d(n)$,και άρα έπεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.6.0.1. *Έστω $\lambda \in \mathcal{P}(d,n)$ και V_λ η αναπαράσταση της $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$ που κατασκευάσαμε στην Πρόταση 4.6.0.1. Τότε*
(α) Αν V_λ είναι ισόμορφη με την V_μ για κάποιο $\mu \in \mathcal{P}(d,n)$,τότε $\lambda = \mu$.
(β) Η αναπαράσταση V_λ είναι ανάγωγη.
(γ) Το σύνολο $\{V_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}(d,n)\}$ είναι ένα πλήρες σύνολο κατά ζεύγη μη ισόμορφων ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$.

Απόδειξη. (α) Προς άτοπο,ας υποθέσουμε ότι $\lambda \neq \mu$. Δηλαδή,το d-διάγραμμα Young μεγέθους n και σχήματος λ έχει διαφορετικό σχήμα από το το d-διάγραμμα Young μεγέθους n και σχήματος μ. Έτσι,χωρίς βλάβη στην γενικότητα υπάρχει ένα d-κελί που εμφανίζεται στο d-διάγραμμα Young σχήματος λ,αλλά δεν εμφανίζεται στο d-διάγραμμα Young σχήματος μ. Θεωρούμε την δράση των Jucy-Murhpy στοιχείων σε αυτό το στοιχείο $\upsilon_{\mathcal{T}}$ παραμετροποιημένο από το standard d-ταπλώ $\mathcal{T}$ που βρίσκεται σε αυτό το d-κελί. Καθώς $V_\lambda \cong V_\mu$,θα έπρεπε να αντιστοιχεί στην ίδια δράση στο d-διάγραμμα Young σχήματος μ,κάτι το οποίο δεν συμβαίνει,διότι αυτό το d-κελί δεν υπάρχει στο d-διάγραμμα Young σχήματος μ. Συνεπώς,$\lambda = \mu$.
(β) Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο μέγεθος n της λ,θα αποδείξουμε ότι η V_λ είναι ανάγωγη. Για $n = 1$,η άλγεβρα $\mathbb{C}(q)Y_{d,1}(q)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα άλγεβρα επί του $\mathbb{C}(q)$ της κυκλικής ομάδας τάξης d,και οι αναπαραστάσεις είναι 1-διάστατες,άρα ανάγωγες. Έστω $n > 1$. Συμβολίζουμε με A την υπάλγεβρα της $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$ η οποία παράγεται από τα στοιχεία $t_1, \ldots, t_{n-1}, g_1, \ldots, g_{n-2}$,. Η άλγεβρα A είναι πηλίκο της άλγεβρας $\mathbb{C}(q)Y_{d,n-1}(q)$. Έστω μ μια d-διαμέριση μεγέθους $n-1$ της μορφής $\lambda \backslash \{\Theta\}$,όπου το Θ είναι ένα αφαιρέσιμο d-κελί της λ. Τότε ο $\mathbb{C}(q)$-διανυσματικός χώρος V_μ είναι ισόμορφος με τον υπόχωρο της V_λ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα της μορφής $\upsilon_{\mathcal{T}}$,όπου $\mathcal{T}$ τέτοιο ώστε το $\mathcal{T} \backslash \{\boxed{n}\}$ να είναι της μορφής μ. Μέσω αυτής της ταύτισης παίρνουμε τον παρακάτω ισομορφισμό $\mathbb{C}(q)$-διανυσματικών χώρων.:

$$V_\lambda \cong \bigoplus_{\Theta \in \mathcal{E}_-(\lambda)} V_{\lambda \backslash \{\Theta\}}, \tag{4.6.0.8}$$

όπου $\mathcal{E}_-(\lambda)$ είναι το σύνολο των αφαιρέσιμων d-κελιών της λ. Ειδικότερα,αν πάρουμε την δράση των γεννητόρων $t_1, \ldots, t_{n-1}, g_1, \ldots, g_{n-2}$,ο παραπάνω ισομορφισμός είναι ισομορφισμός A-προτύπων. Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει μη τετριμμένο-γνήσιο $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$-υποπρότυπο M της V_λ. Τότε,από την επαγωγική υπόθεση,υπάρχει ένα μη κενό υποσύνολο $\mathcal{E}_-(M)$ του $\mathcal{E}_-(\lambda)$ τέτοιο ώστε

$$M \cong \bigoplus_{\Theta \in \mathcal{E}_-(M)} V_{\lambda \backslash \{\Theta\}}, \qquad (4.6.0.9)$$

Έστω $\mathcal{T}$ standard d-ταμπλώ σχήματος λ τέτοιο ώστε ο αριθμός n να περιέχεται σε ένα d-κελί $\Theta \in \mathcal{E}_-(M)$. Τότε $v_{\mathcal{T}} \in M$. Επιπλέον,αφού το M είναι γνήσιο $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$-υποπρότυπο της V_λ,υπάρχει d-κελί $\Theta' \in \mathcal{E}_-(\lambda)$ τέτοιο ώστε $\Theta' \notin \mathcal{E}_-(M)$. Έστω $\mathcal{T}'$ standard d-ταμπλώ σχήματος λ τέτοιο ώστε ο αριθμός n να περιέχεται στο d-κελί Θ'. Τότε $v_{\mathcal{T}'} \notin M$. Έστω $\sigma \in S_n$ μετάθεση τέτοια ώστε $\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}'$. Αν $\sigma = s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_r}$, όπου s_i είναι η μετάθεση $(i, i+1)$, τότε υπάρχει $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ τέτοιο ώστε $v_{\mathcal{T}^{s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}}} \in M$ και $v_{\mathcal{T}^{s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_{k+1}}}} \notin M$. Αντικαθιστούμε τα $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ από τα $\mathcal{T}^{s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}}, \mathcal{T}^{s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_{k+1}}}$,και θέτοντας $i := i_{k+1}$, έχουμε $v_{\mathcal{T}} \in M$ και $v_{\mathcal{T}^{s_i}} \notin M$. Θεωρώντας την δράση της άλγεβρας $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$ στο M της πρότασης (4.6.0.1),αυτό συμβαίνει μόνο όταν $p(\mathcal{T}|i) = p(\mathcal{T}|i+1)$ και $c(\mathcal{T}|i) = q^2 c(\mathcal{T}|i+1)$,δηλαδή όταν το d-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$ δεν είναι standard. Άρα,$v_{\mathcal{T}^{s_i}} = 0$. Όμως,$v_{\mathcal{T}^{s_i}} \notin M$,δηλαδή $0 \notin M$,άτοπο,διότι το M ως $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$-πρότυπο είναι $\mathbb{C}(q)$-διανυσματικός χώρος,άρα περιέχει το μηδενικό στοιχείο. Συνεπώς δεν υπάρχει μη τεριμμένο-γνήσιο $\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)$-υποπρότυπο της V_λ,δηλαδή η αναπαράσταση V_λ είναι ανάγωγη.

(γ) Από την μια πλευρά,από την αντιστοιχία Robinson-Schensted,έχουμε $\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(d,n)} \left(\dim_{\mathbb{C}(q)}(V_\lambda)\right)^2 = d^n n!$. Από την άλλη πλευρά,από το πόρισμα (2.3.0.1) $\dim_{\mathbb{C}(q)}(\mathbb{C}((q)\mathrm{Y}_{d,n}(q)) = d^n n!$. Συνεπώς, $\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(d,n)} \left(\dim_{\mathbb{C}(q)}(V_\lambda)\right)^2 = d^n n! = \dim_{\mathbb{C}(q)}(\mathbb{C}((q)\mathrm{Y}_{d,n}(q))$ και άρα έπεται το ζητούμενο. □

Κεφάλαιο 5

Θεωρία Αναπαραστάσεων της κυκλοτομικής Yokonuma-Hecke άλγεβρας

Ορισμός 5.0.0.1. *Έστω S_n η συμμετρική ομάδα σε n σύμβολα και $\sigma \in S_n$ μετάθεση. Για κάθε (d,m)-ταμπλώ $\mathcal{T}$ μεγέθους n,συμβολίζουμε με $\mathcal{T}^\sigma$ το (d,m)-ταμπλώ το οποίο προέρχεται από το $\mathcal{T}$ εφαρμόζοντας την μετάθεση σ στους αριθμούς οι οποίοι περιέχονται στα (d,m)-κελιά του $\mathcal{T}$. Δηλαδή, για κάθε $i = 1, \ldots, n.$,έχουμε*

$$p^{(d)}(\mathcal{T}^\sigma|i) = p^{(d)}\big(\mathcal{T}|\sigma^{-1}(i)\big), p^{(m)}(\mathcal{T}^\sigma|i) = p^{(m)}\big(\mathcal{T}|\sigma^{-1}(i)\big) \quad \text{και} \quad c(\mathcal{T}^\sigma|i) = c\big(\mathcal{T}|\sigma^{-1}(i)\big) \tag{5.0.0.1}$$

Παρατήρηση 5.0.0.1. *(i) Αν το (d,m)-ταμπλώ $\mathcal{T}$ είναι standard,τότε το (d,m)-ταμπλώ $\mathcal{T}^\sigma$ δεν είναι απαραίτητα standard,διότι αν πάρουμε για παράδειγμα το standard $(2,2)$-ταμπλώ μεγέθους 7*

$$\left(\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array}\right), \left(\varnothing,\ \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 6 \\ \hline 7 \\ \hline\end{array}\right)\right).$$

και την μετάθεση $\sigma = (67) \in S_7$,το $(2,2)$-ταμπλώ μεγέθους 7

$$\left(\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array}\right), \left(\varnothing,\ \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 7 \\ \hline 6 \\ \hline\end{array}\right)\right).$$

δεν είναι standard.
(ii) Αν $\sigma = s_i = (i, i+1)$ *και* $\mathcal{T}$ *standard* (d,m)*-ταμπλώ,τότε το* (d,m)*-ταμπλώ* $\mathcal{T}^{s_i}$ *δεν είναι standard αν και μόνο αν* $p^{(d)}(\mathcal{T}|i) = p^{(d)}(\mathcal{T}|i+1)$ *και* $c(\mathcal{T}|i) = q^{\pm 2}c(\mathcal{T}|i+1)$.

Έστω $\xi_1, \dots, \xi_d$ οι d-οστές ρίζες της μονάδας (αυθαίρετα διατεταγμένες). Έστω $\mathcal{P}(d,m,n)$ το σύνολο των (d,m)-διαμερίσεων του n,και έστω $\lambda \in \mathcal{P}(d,m,n)$. Έστω V_λ ο $\mathcal{F}_m$-διανυσματικός χώρος με βάση $\{v_\mathcal{T}\}$ η οποία παραμετροποιείται από το standard (d,m)-ταμπλώ $\mathcal{T}$ σχήματος λ. Θέτουμε $v_\mathcal{T} := 0$ για κάθε μη standard d-ταμπλώ $\mathcal{T}$ σχήματος λ.

Πρόταση 5.0.0.1. *Έστω* $\mathcal{T}$ *ένα standard* (d,m)*-ταμπλώ σχήματος* $\lambda \in \mathcal{P}(d,m,n)$. *Για λόγους συντομίας,θέτουμε* $p_i^{(d)} := p^{(d)}(\mathcal{T}|i)$ *και* $c_i := c(\mathcal{T}|i)$ *για κάθε* $i = 1, \dots, n$. *Ο* $\mathcal{F}_m$*-διανυσματικός χώρος* V_λ *είναι αναπαράσταση της* $\mathcal{F}_m Y(d,m,n)$ *με δράση των γεννητόρων στο στοιχείο της βάσης* $v_\mathcal{T}$ *η οποία ορίζεται ως ακολούθως:*

$$X_1(v_\mathcal{T}) = c_1(v_\mathcal{T}) \tag{5.0.0.2}$$

για κάθε $j = 1, \dots, n$,

$$t_j(v_\mathcal{T}) = \xi_{p_j{}^{(d)}} v_\mathcal{T}, \tag{5.0.0.3}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n-1$,*αν* $p_i^{(d)} \neq p_{i+1}^{(d)}$ *τότε*

$$g_i(v_\mathcal{T}) = v_{\mathcal{T}^{s_i}}, \tag{5.0.0.4}$$

και αν $p_i^{(d)} = p_{i+1}^{(d)}$ *τότε*

$$g_i(v_\mathcal{T}) = \frac{c_{i+1}(q - q^{-1})}{c_{i+1} - c_i} v_\mathcal{T} + \frac{q c_{i+1} - q^{-1} c_i}{c_{i+1} - c_i} v_{\mathcal{T}^{s_i}}, \tag{5.0.0.5}$$

όπου s_i *είναι η μετάθεση* $(i, i+1)$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι οι δοθείσες δράσεις ικανοποιούν τις σχέσεις (3.0.0.1)-(3.0.0.2) που ορίζουν την κυκλοτομική Yokonuma-Hecke άλγεβρα $Y(d,m,n)$. Αρχικά,παρατηρούμε ότι οι δράσεις των γεννητόρων $t_1, \dots, t_n, g_1, \dots, g_{n-1}$ είναι ακριβώς ίδιες με τις δράσεις της πρότασης (4.6.0.1). Η μόνη διαφορά είναι στην κβαντική σταθερά,η οποία στην κυκλοτομική περίπτωση περιέχει και τις παραμέτρους $v_1, \dots, v_m$. Επιπλέον,λόγω της παρατήρησης 5.0.0.1(ii),για κάθε standard (d,m)-ταμπλώ $\mathcal{T}$,η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το (d,m)-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$ standard είναι ακριβώς η ίδια με την περίπτωση για ένα $(d,1)$-ταμπλώ. Έτσι,για τις δράσεις (5.0.0.3)-(4.0.0.5) δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Μένει να δείξουμε τις σχέσεις (3.0.0.2) που αφορούν τον γεννήτορα X_1. Οι σχέσεις

$$\begin{aligned} X_1 g_i &= g_i X_1 && \text{για κάθε } i = 2, \ldots, n-1, \\ X_1 t_j &= t_j X_1 && \text{για κάθε } j = 1, \ldots, n, \\ (X_1 - \upsilon_1) \cdots (X_1 - \upsilon_m) &= 0 && \text{αν } m < \infty \end{aligned}$$

ικανοποιούνται άμεσα στον V_λ. Τέλος,η σχέση $X_1 g_1 X_1 g_1 = g_1 X_1 g_1 X_1$,ισοδύναμα η σχέση $X_2 X_1 = X_1 X_2$ προκύπτει από το παρακάτω λήμμα. □

Σημείωση 5.0.0.1. *Οι παρακάτω αποδείξεις είναι παρόμοιες με τις αντίστοιχες αποδείξεις στην Yokonuma-Hecke άλγεβρα $Y_{d,n}(q)$ τις οποίες συμπεριλαμβάνουμε για χάρη πληρότητας.*

Λήμμα 5.0.0.1. *Η δράση των στοιχείων $X_1, \ldots, X_n$ στον $\mathcal{F}_m$-διανυσματικό χώρο V_λ,στο στοιχείο της βάσης $\upsilon_\mathcal{T}$,δίνεται από*

$$X_i(\upsilon_\mathcal{T}) = c_i \upsilon_\mathcal{T} \quad \text{για κάθε } i = 1, \ldots, n \tag{5.0.0.6}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{T}$ standard (d,m)-ταμπλώ σχήματος λ. Για λόγους συντομίας,θέτουμε $p_i^{(d)} := p(\mathcal{T}|i)$ και $c_i := c(\mathcal{T}|i)$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Θα αποδείξουμε την σχέση (5.0.0.6) χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς i. Για $i = 1$,ισχύει από την πρόταση (5.0.0.1). Έστω ότι η (5.0.0.6) επαληθεύεται για κάποιο $i > 1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:
Αν $p_i^{(d)} \neq p_{i+1}^{(d)}$,τότε
$X_{i+1}(\upsilon_\mathcal{T}) = g_i X_i g_i(\upsilon_\mathcal{T}) = g_i X_i(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i}}) = g_i(c_{i+1}(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i}}) = c_{i+1} g_i(\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i}}) = c_{i+1}\upsilon_{\mathcal{T}^{s_i^2}} = c_{i+1}\upsilon_\mathcal{T}$,όπου στην πρώτη ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση $X_{i+1} = g_i X_i g_i$, στην δεύτερη και την πέμπτη ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση (5.0.0.4),στην τρίτη ισότητα την επαγωγική υπόθεση και τέλος στην έκτη ισότητα την σχέση $s_i^2 = 1$,διότι s_i είναι μετάθεση.
Αν $p_i^{(d)} = p_{i+1}^{(d)}$,τότε
$X_{i+1}(\upsilon_\mathcal{T}) = g_i X_i g_i(\upsilon_\mathcal{T})$

$$= g_i X_i \Big(\tfrac{c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i} \upsilon_\mathcal{T} + \tfrac{q c_{i+1} - q^{-1} c_i}{c_{i+1}-c_i} \upsilon_{\mathcal{T}^{s_i}} \Big)$$

$$= g_i \Big(\tfrac{c_i c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i} \upsilon_\mathcal{T} + \tfrac{c_{i+1}(q c_{i+1} - q^{-1} c_i)}{c_{i+1}-c_i} \upsilon_{\mathcal{T}^{s_i}} \Big)$$

$$= \tfrac{c_i c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i} \Big(\tfrac{c_{i+1}(q-q^{-1})}{c_{i+1}-c_i} \upsilon_\mathcal{T} + \tfrac{q c_{i+1} - q^{-1} c_i}{c_{i+1}-c_i} \upsilon_{\mathcal{T}^{s_i}} \Big)$$

$$+ \tfrac{c_{i+1}(q c_{i+1} - q^{-1} c_i)}{c_{i+1}-c_i} \Big(\tfrac{c_i(q-q^{-1})}{c_i - c_{i+1}} \upsilon_{\mathcal{T}^{s_i}} + \tfrac{q c_i - q^{-1} c_{i+1}}{c_i - c_{i+1}} \upsilon_\mathcal{T} \Big),$$

όπου στην πρώτη ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση $X_{i+1} = g_i X_i g_i$, στην δεύτερη και την τέταρτη ισότητα την σχέση (5.0.0.5) και τέλος στην τρίτη ισότητα την επαγωγική υπόθεση. Τώρα,παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του διανύσματος $v_{\mathcal{T}^{s_i}}$ ισούται με 0. Αν το (d,m)-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$ δεν είναι standard,δηλαδή αν $c_{i+1} = c_i q^{\pm 2}$,τότε ο τελευταίος όρος του αθροίσματος είναι 0,και κάνοντας απλούς υπολογισμούς παίρνουμε ότι $X_{i+1}(v_{\mathcal{T}}) = c_{i+1}v_{\mathcal{T}}$. Αν το (d,m)-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_i}$ είναι standard,τότε κάνοντας πάλι υπολογισμούς (περισσότερο χρονοβόρους) παίρνουμε ότι $X_{i+1}(v_{\mathcal{T}}) = c_{i+1}v_{\mathcal{T}}$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5.0.0.1. *Οι αναπαραστάσεις V_λ,όπου $\lambda \in P(d,m,n)$,είναι ανάγωγες κατά ζεύγη μη ισόμορφες αναπαραστάσεις της $\mathcal{F}_m Y(d,m,n)$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι οι αναπαραστάσεις V_λ,όπου $\lambda \in P(d,m,n)$, είναι κατά ζεύγη μη ισόμορφες αναπαραστάσεις της $\mathcal{F}_m Y(d,m,n)$. Δηλαδή,θα αποδείξουμε ότι αν V_λ είναι ισόμορφη με την V_μ για κάποιο $\mu \in P(d,n)$,τότε $\lambda = \mu$. Προς άτοπο,ας υποθέσουμε ότι $\lambda \neq \mu$. Δηλαδή,το (d,m)-διάγραμμα Young μεγέθους n και σχήματος λ έχει διαφορετικό σχήμα από το το (d,m)-διάγραμμα Young μεγέθους n και σχήματος μ. Έτσι,χωρίς βλάβη στην γενικότητα υπάρχει ένα (d,m)-κελί που εμφανίζεται στο (d,m)-διάγραμμα Young σχήματος λ,αλλά δεν εμφανίζεται στο (d,m)-διάγραμμα Young σχήματος μ. Θεωρούμε την δράση των στοιχείων $t_1,\dots,t_n,X_1,\dots,X_n$ στο στοιχείο $v_{\mathcal{T}}$ παραμετροποιημένο από το standard (d,m)-ταπλώ $\mathcal{T}$ που βρίσκεται σε αυτό το (d,m)-κελί. Καθώς $V_\lambda \cong V_\mu$,θα έπρεπε να αντιστοιχεί στην ίδια δράση στο (d,m)-διάγραμμα Young σχήματος μ,κάτι το οποίο δεν συμβαίνει,διότι αυτό το (d,m)-κελί δεν υπάρχει στο (d,m)-διάγραμμα Young σχήματος μ. Συνεπώς,$\lambda = \mu$. Για το δεύτερο σκέλος της απόδειξης,έστω $\lambda \in \mathcal{P}(d,m,n)$. Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο μέγεθος n της λ,θα αποδείξουμε ότι η V_λ είναι ανάγωγη. Για $n = 1$,οι αναπαραστάσεις είναι 1-διάστατες,άρα ανάγωγες. Έστω $n > 1$. Συμβολίζουμε με A την υπάλγεβρα της $\mathcal{F}_m Y(d,m,n)$ η οποία παράγεται από τα στοιχεία $t_1,\dots,t_{n-1},g_1,\dots,g_{n-2},X_1$. Η άλγεβρα A είναι πηλίκο της άλγεβρας $\mathcal{F}_m Y(d,m,n-1)$. Έστω μ μια (d,m)-διαμέριση μεγέθους $n-1$ της μορφής $\lambda \backslash \{\Theta\}$,όπου το Θ είναι ένα αφαιρέσιμο (d,m)-κελί της λ. Τότε ο $\mathcal{F}_m$-διανυσματικός χώρος V_μ είναι ισόμορφος με τον υπόχωρο της V_λ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα της μορφής $v_{\mathcal{T}}$,όπου $\mathcal{T}$ τέτοιο ώστε το $\mathcal{T} \backslash \{\boxed{n}\}$ να είναι της μορφής μ. Μέσω αυτής της ταύτισης παίρνουμε τον παρακάτω ισομορφισμό $\mathcal{F}_m$-διανυσματικών χώρων:

$$V_\lambda \cong \bigoplus_{\Theta \in \mathcal{E}_-(\lambda)} V_{\lambda \backslash \{\Theta\}}, \tag{5.0.0.7}$$

όπου $\mathcal{E}_-(\lambda)$ είναι το σύνολο των αφαιρέσιμων (d,m)-κελιών της λ.

Ειδικότερα,αν πάρουμε την δράση των γεννητόρων $t_1, \ldots, t_{n-1}, g_1, \ldots, g_{n-2}, X_1$,ο παραπάνω ισομορφισμός είναι ισομορφισμός A-προτύπων. Από την επαγωγική υπόθεση,οι αναπαραστάσεις $V_{\lambda \backslash \{\Theta\}}$ που εμφανίζονται στην σχέση (5.0.0.7) είναι ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathcal{F}_m Y(d,m,n-1)$,και άρα και της A. Επιπλέον,όπως δειξαμε είναι κατά ζεύγη μη ισόμορφες. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το M είναι μη τεριμμένο-γνήσιο $\mathcal{F}_m Y(d,m,n)$-υποπρότυπο της V_λ. Λόγω της διάσπασης (5.0.0.7),υπάρχουν δύο (d,m)-κελιά Θ, Θ' αφαιρέσιμα από την λ τέτοια ώστε $V_{\lambda \backslash \{\Theta\}} \subset M$ και $V_{\lambda \backslash \{\Theta'\}} \cap M = \{0\}$. Έστω $\mathcal{T}$ ένα standard (d,m)-ταμπλώ σχήματος λ στο οποίο οι αριθμοί n και $n-1$ βρίσκονται στα (d,m)-κελιά Θ και Θ' αντίστοιχα. Τέτοιο standard (d,m)-ταμπλώ υπάρχει,διότι τα (d,m)-κελιά Θ και Θ' είναι αφαιρέσιμα από την λ,και άρα δεν μπορούν να βρίσκονται στην ίδια διαγώνιο ή σε γειτονικές διαγωνίους του ίδιου (d,m)-διαγράμματος Young σχήματος λ. Επιπλέον,το (d,m)-ταμπλώ $\mathcal{T}^{s_{n-1}}$ είναι standard. Λόγω κατασκευής,$v_{\mathcal{T}} \in V_{\lambda \backslash \{\Theta\}}$ και $v_{\mathcal{T}^{s_{n-1}}} \in V_{\lambda \backslash \{\Theta'\}}$. Θα διακρίνουμε τώρα περιπτώσεις:

Αν $p^{(d)}(\Theta) \neq p^{(d)}(\Theta')$,από την σχέση (5.0.0.4) έχουμε

$$g_{n-1}(v_{\mathcal{T}}) = v_{\mathcal{T}^{s_{n-1}}}.$$

Αν $p^{(d)}(\Theta) = p^{(d)}(\Theta')$,από την σχέση (5.0.0.5) έχουμε

$$g_{n-1}(v_{\mathcal{T}}) - \frac{c_n(q-q^{-1})}{c_n - c_{n-1}} v_{\mathcal{T}} = \frac{qc_n - q^{-1}c_{n-1}}{c_n - c_{n-1}} v_{\mathcal{T}^{s_{n-1}}}$$

και $qc_n - q^{-1}c_{n-1} \neq 0$,λόγω της παρατήρησης 5.0.0.1(ii). Σε κάθε περίπτωση λοιπόν,έχουμε ότι το $v_{\mathcal{T}^{s_{n-1}}}$ ανήκει στο $\mathcal{F}_m Y(d,m,n)$-υποπρότυπο M. Όμως,$v_{\mathcal{T}^{s_{n-1}}} \in V_{\lambda \backslash \{\Theta'\}}$,δηλαδή $v_{\mathcal{T}^{s_{n-1}}} \in V_{\lambda \backslash \{\Theta'\}} \cap M$,άτοπο,διότι $V_{\lambda \backslash \{\Theta'\}} \cap M = \{0\}$. Συνεπώς δεν υπάρχει μη τεριμμένο-γνήσιο $\mathcal{F}_m Y(d,m,n)$-υποπρότυπο της V_λ,δηλαδή η αναπαράσταση V_λ είναι ανάγωγη. □

Κεφάλαιο 6

Βάσεις για την $Y(d,m,n)$

6.1 Σύνολα γεννητόρων

Υπενθυμίζουμε ότι ταυτίζουμε την Yokonuma-Hecke άλγεβρα $Y_m(d,n)$ τύπου A με την υπάλγεβρα της $Y(d,m,n)$ η οποία παράγεται από τα στοιχεία $t_1,\dots,t_n,g_1,\dots,g_{n-1}$ Ειδικότερα,από το Πόρισμα 2.3.0.1 η $Y_m(d,n)$ είναι ένα ελεύθερο R_m-πρότυπο τάξης $d^n n!$. Έστω $B_{d,n}$ μια R_m-βάση της $Y_m(d,n)$. Για παράδειγμα το σύνολο

$$\mathcal{B}^{can}_{d,n} = \{t_1^{r_1}\cdots t_n^{r_n} g_w |\, w \in S_n, r_1,\dots,r_n \in \mathbb{Z}_d\},$$

όπου S_n συμμετρική ομάδα σε n σύμβολα και g_w όπως ορίστηκε στην παρατήρηση 3.0.0.2,είναι μια R_m-βάση της $Y_m(d,n)$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}^{\mathrm{AK}}_{d,m,n}$ το παρακάτω σύνολο στοιχείων της $\mathrm{Y}(d,m,n)$:

$$X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n}\cdot\omega \quad \text{όπου } (a_1,\dots,a_n)\in E_m^n \text{ και } \omega\in\mathcal{B}_{d,n}. \tag{6.1.0.1}$$

Εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για $k=1,\dots,n$,

$$W^{(k)}_{J,a,b} := g_J^{-1}\dots g_2^{-1}g_1^{-1}X_1^a\, t_1^b\, g_1g_2\dots g_{k-1}\,,$$

$$W^{(k)-}_{J,a,b} := g_J\dots g_2g_1\, X_1^a\, t_1^b\, g_1^{-1}g_2^{-1}\dots g_{k-1}^{-1}\,,$$

$$\widetilde{W}^{(k)}_{J,a,b} := g_J\dots g_2g_1\, X_1^a\, t_1^b\, g_1g_2\dots g_{k-1}\,,$$

$$\widetilde{W}^{(k)-}_{J,a,b} := g_J^{-1}\dots g_2^{-1}g_1^{-1}\, X_1^a\, t_1^b\, g_1^{-1}g_2^{-1}\dots g_{k-1}^{-1}\,,$$

όπου $J\in\{0,\dots,k-1\}$ και $a,b\in\mathbb{Z}$.

Σύμβαση 6.1.0.1. *Για* $\epsilon = \pm 1$, $g_J^\epsilon \dots g_2^\epsilon g_1^\epsilon := 1$ *και* $g_{k-J}^\epsilon \dots g_{k-2}^\epsilon g_{k-1}^\epsilon := 1$ *αν* $J = 0$.

Συμβολίζουμε αντίστοιχα με $\mathcal{B}_{d,m,n}^{Ind}$, $\mathcal{B}_{d,m,n}^{Ind-}$, $\widetilde{\mathcal{B}}_{d,m,n}^{Ind}$ και $\widetilde{\mathcal{B}}_{d,m,n}^{Ind-}$ τα παρακάτω σύνολα στοιχείων της $\mathrm{Y}(d,m,n)$:

$$W_{J_n,a_n,b_n}^{(n)} \dots W_{J_2,a_2,b_2}^{(2)} W_{J_1,a_1,b_1}^{(1)}, \quad J_k \in \{0,\dots,k-1\},\ a_k \in E_m \text{ και } b_k \in \{0,\dots,d-1\}. \tag{6.1.0.2}$$

$$W_{J_n,a_n,b_n}^{(n)-} \dots W_{J_2,a_2,b_2}^{(2)-} W_{J_1,a_1,b_1}^{(1)-}, \quad J_k \in \{0,\dots,k-1\},\ a_k \in E_m \text{ και } b_k \in \{0,\dots,d-1\}. \tag{6.1.0.3}$$

$$\widetilde{W}_{J_n,a_n,b_n}^{(n)} \dots \widetilde{W}_{J_2,a_2,b_2}^{(2)} \widetilde{W}_{J_1,a_1,b_1}^{(1)}, \quad J_k \in \{0,\dots,k-1\},\ a_k \in E_m \text{ και } b_k \in \{0,\dots,d-1\}. \tag{6.1.0.4}$$

$$\widetilde{W}_{J_n,a_n,b_n}^{(n)-} \dots \widetilde{W}_{J_2,a_2,b_2}^{(2)-} \widetilde{W}_{J_1,a_1,b_1}^{(1)-}, \quad J_k \in \{0,\dots,k-1\},\ a_k \in E_m \text{ και } b_k \in \{0,\dots,d-1\}. \tag{6.1.0.5}$$

Πρόταση 6.1.0.1. *Καθένα από τα σύνολα* $\mathcal{B}_{d,m,n}^{\mathrm{AK}}$,$\mathcal{B}_{d,m,n}^{Ind}$, $\mathcal{B}_{d,m,n}^{Ind-}$, $\widetilde{\mathcal{B}}_{d,m,n}^{Ind}$ *και* $\widetilde{\mathcal{B}}_{d,m,n}^{Ind-}$ *παράγει (επί του* $\mathcal{R}_m$*) την άλγεβρα* $Y(d,m,n)$

Απόδειξη. Για το $\mathcal{B}_{d,m,n}^{\mathrm{AK}}$: Έστω A το $\mathcal{R}_m$-υποπρότυπο της $Y(d,m,n)$ που παράγεται από το $\mathcal{B}_{d,m,n}^{\mathrm{AK}}$,δηλαδή το σύνολο των στοιχείων της (6.1.0.1) στην $Y(d,m,n)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}_{d,m,n}^{\mathrm{AK}}$ παράγει (επί του $\mathcal{R}_m$) την άλγεβρα $Y(d,m,n)$,δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι $A = Y(d,m,n)$. Γι αυτό,αρκεί να δείξουμε ότι το A είναι υπάλγεβρα της $Y(d,m,n)$ που περιέχει την μονάδα και όλους τους γεννήτορες της $Y(d,m,n)$. Ισοδύναμα,αρκεί να δείξουμε ότι το $1 \in A$ και το γινόμενο (για παράδειγμα από τα αριστερά) ενός γεννήτορα της $Y(d,m,n)$ με ένα στοιχείο του $\mathcal{B}_{d,m,n}^{\mathrm{AK}}$ ανήκει στο A:
Το μοναδιαίο στοιχείο της $Y(d,m,n)$ ανήκει στο A,διότι το $B_{d,n}$ είναι μια $\mathcal{R}_m$-βάση της $Y_d(m,n)$,άρα το μοναδιαίο στοιχείο μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της $B_{d,n}$ με συντελεστές στο $\mathcal{R}_m$. Μένει να δείξουμε ότι $yX_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \cdot \omega \in A$ $\forall y \in \{X_1^{\pm 1}, t_1, \dots, t_n, g_1, \dots, g_{n-1}\}$,όπου $(a_1,\dots,a_n) \in E_m^n$ και $\omega \in \mathcal{B}_{d,n}$. Για τους γεννήτορες $X_1^{\pm 1}$ έχουμε $X_1^{\pm 1} X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \cdot \omega = X_1^{a_1 \pm 1} \cdots X_n^{a_n} \cdot \omega \in A$. Για τους γεννήτορες $t_1,\dots,t_n$ λόγω της αντιμετάθεσης των t_j, X_i (πρόταση 3.0.0.1) παίρνουμε ότι $t_j X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \cdot \omega = X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \cdot t_j \omega$ για κάθε $j = 1,\dots,n$. Καθώς $t_j \in Y_m(d,n)$,$\omega \in B_{d,n}$ έπεται ότι το στοιχείο $t_j\omega$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της $B_{d,n}$,δηλαδή $t_j\omega \in B_{d,n}$. Επομένως,$X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \cdot t_j \omega \in A$. Για τους γεννήτορες $g_1,\dots,g_{n-1}$ έχουμε
$g_i X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \cdot \omega = X_1^{a_1} \cdots (g_i X_i^{a_i} X_{i+1}^{a_{i+1}}) \cdots X_n^{a_n} \omega$

$$=$$

$$X_1^{a_1} \cdots (X_i^{a_{i+1}} X_{i+1}^{a_i} g_i - (q - q^{-1}) e_i \sum X_i^{a_i - k} X_{i+1}^{a_{i+1}+k}) \cdots X_n^{a_n} \omega$$

$$= X_1^{a_1} \cdots X_i^{a_{i+1}} X_{i+1}^{a_i} g_i \cdots X_n^{a_n} \omega + \text{ένα στοιχείο του A}$$

$$= X_1^{a_1} \cdots X_i^{a_{i+1}} X_{i+1}^{a_i} \cdots X_n^{a_n} g_i \omega + \text{ένα στοιχείο του A}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$,όπου χρησιμοποιήσαμε στην πρώτη και την τέταρτη ισότητα το λήμμα (3.0.0.2),στην δεύτερη ισότητα το λήμμα (3.0.0.3) και στην τρίτη ισότητα κάναμε μια παραγοντοποιήση σε συνδυασμό με την παρατήρηση ότι το άθροισμα που προκύπτει στα δεξιά είναι στοιχείο του A. Τέλος,καθώς το $g_i \omega$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της $B_{d,n}$ με συντελεστές από τον $\mathcal{R}_m$,έπεται το ζητούμενο.
Για το $\mathcal{B}^{Ind}_{d,m,n}$: Όπως πριν,το μοναδιαίο στοιχείο της $Y(d, m, n)$ ανήκει στο $\mathcal{R}_m$-span του $\mathcal{B}^{Ind}_{d,m,n}$. Επομένως,αρκεί να δείξουμε ότι το γινόμενο (για παράδειγμα,από τα αριστερά) ενός γεννήτορα της $Y(d, m, n)$ με ένα στοιχείο του $\mathcal{B}^{Ind}_{d,m,n}$ ανήκει στο $\mathcal{R}_m$-span του $\mathcal{B}^{Ind}_{d,m,n}$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$: Παρατηρούμε ότι $W^{(n)}_{j,a,b+d} = W^{(n)}_{j,a,b}$,για κάθε $b \in \mathbb{Z}$ (διότι $t^d = 1$). Επίσης,αν $m < \infty$,λόγω της παρατήρησης 3.0.0.1 (1.3) το στοιχείο $W^{(n)}_{j,a,b}$ με $a \in \mathbb{Z}$ μπορεί να γραφτεί ως ένας $\mathcal{R}_m$-γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $W^{(n)}_{j,a',b'}$ με $a' \in E_m$. Έτσι,έχουμε το ζητούμενο. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για $n > 1$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το γινόμνεο $y \cdot W^{(n)}_{j,a,b}$,όπου $y \in \{t_1, \ldots, t_n, g_1, \ldots, g_n, X_1^{\pm 1}\}$,$j \in \{0, \ldots, n-1\}$,$a, b \in \mathbb{Z}$ είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{R}_m$-span του $\mathcal{B}^{Ind}_{d,m,n}$. Λόγω της παραπάνω παρατήρησης,αρκεί να δείξουμε ότι τα παραπάνω γινόμενα μπορούν να γραφτούν ως $\mathcal{R}_m$-γραμμικοί συνδυασμοί όρων της μορφής $W^{(n)}_{j',a',b'} \cdot u$,με $u \in Y(d, m, n-1)$,$j' \in \{0, \ldots, n-1\}$ και $a, b \in \mathbb{Z}$. Για τους γεννήτορες g_i,όπου $i = 1, \ldots, n-1$ έχουμε

$$g_i \cdot W^{(n)}_{J,a,b} = \begin{cases} W^{(n)}_{J,a,b} \cdot g_i & \text{αν } i < J\,, \\ W^{(n)}_{J-1,a,b} & \text{αν } i = J\,, \\ W^{(n)}_{J+1,a,b} + (q - q^{-1}) \dfrac{1}{d} \displaystyle\sum_{s=0}^{d-1} W^{(n)}_{J,a,b-s} \cdot t^s_{J+1} & \text{αν } i = J+1\,, \\ W^{(n)}_{J,a,b} \cdot g_{i-1} & \text{αν } i > J+1\,, \end{cases} \tag{6.1.0.6}$$

Για τους γεννήτορες t_l,όπου $l=1,\ldots,n$ έχουμε:

$$t_l\cdot W^{(n)}_{J,a,b}=\begin{cases} W^{(n)}_{J,a,b}\cdot t_l & \text{αν } l<J\,,\\ \\ W^{(n)}_{J,a,b+1} & \text{αν } l=J\,,\\ \\ W^{(n)}_{J,a,b}\cdot t_{l-1} & \text{αν } l\geqslant J+1\,,\end{cases} \tag{6.1.0.7}$$

Για την περίπτωση $l<J$ έχουμε:
$t_l\cdot W^{(n)}_{J,a,b}\cdot t_l^{-1}=(g_l^{-1}t_{l-1}g_l)W^{(n)}_{J,a,b}(g_l^{-1}t_{l-1}^{-1}g_l)=g_l^{-1}t_{l-1}W^{(n)}_{J,a,b}g_lg_l^{-1}t_{l-1}^{-1}g_l=$
$=g_l^{-1}t_{l-1}W^{(n)}_{J,a,b}t_{l-1}^{-1}g_l$,όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό των t_i και στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την πρώτη περίπτωση του τύπου (6.1.0.6). Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία $l-1$ φορές καταλήγουμε ότι το αρχικό γινόμενο ισούται με $W^{(n)}_{J,a,b}$,όπως θέλαμε. Για την περίπτωση $l=J$ έχουμε:
$t_l\cdot W^{(n)}_{J,a,b}=t_Jg_J^{-1}\ldots g_2^{-1}g_1^{-1}X_1^a\,t_1^b\,g_1g_2\ldots g_{n-1}=g_J^{-1}\ldots g_2^{-1}g_1^{-1}t_1X_1^a\,t_1^b\,g_1g_2\ldots g_{n-1}$
$=g_J^{-1}\ldots g_2^{-1}g_1^{-1}X_1^a\,t_1^{b+1}\,g_1g_2\ldots g_{n-1}$,όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό των $W^{(n)}_{J,a,b}$,στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά την σχέση $t_jg_j^{-1}=g_j^{-1}t_{j-1}$ και τέλος στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την πρόταση 3.0.0.1. Για την περίπτωση $l=J+1$ έχουμε
$t_l\cdot W^{(n)}_{J,a,b}=(g_{J+1}t_Jg_{J+1}^{-1})(g_J^{-1}\ldots g_2^{-1}g_1^{-1}X_1^a\,t_1^b\,g_1g_2\ldots g_{n-1})=g_{J+1}t_JW^{(n)}_{J+1,a,b}$
$=g_{J+1}W^{(n)}_{J+1,a,b}t_J=g_{J+1}(g_{J+1}^{-1}\ldots g_2^{-1}g_1^{-1}X_1^a\,t_1^b\,g_1g_2\ldots g_{n-1})t_J=W^{(n)}_{J,a,b}t_{l-1}$,
όπου σε όλες τις ισότητες έχει χρησιμοποιηθεί ο ορισμός των $W^{(n)}_{J,a,b}$ και επιπλέον στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό των t_i,στην τρίτη ισότητα βρισκόμαστε πάλι στην πρώτη περίπτωση (διότι $J<J+1$,άρα τα στοιχεία $t_JW^{(n)}_{J+1,a,b}$ αντιμετατίθενται) και στην τέταρτη ισότητα έχουμε $J=l-1$,διότι είμαμστε στην περίπτωση $l=J+1$. Τέλος η περίπτωση $l>J+1$ προκύπτει χρησιμοποιώντας τον τύπο (6.1.0.6) και κάνοντας παρόμοιους συλλογισμούς.
Για τον γεννήτορα X_1,έχουμε

$$X_1\cdot W^{(n)}_{J,a,b}=\begin{cases} W^{(n)}_{0,a+1,b} & \text{αν } J=0\,,\\ \\ W^{(n)}_{J,a,b}\cdot X_1+(q-q^{-1})\dfrac{1}{d}\displaystyle\sum_{s=0}^{d-1}\Big(W^{(n)}_{0,1,b-s}\cdot g_{J-1}^{-1}\ldots g_1^{-1}t_1^sX_1^a & \\ \qquad -W^{(n)}_{0,a+1,b-s}\cdot g_{J-1}^{-1}\ldots g_1^{-1}t_1^s\Big) & \text{αν } J>0\,,\end{cases} \tag{6.1.0.8}$$

Η περίπτωση $J=0$ είναι τετριμμένη. Για την περίπτωση $J>0$ έχουμε:
$X_1 \cdot W^{(n)}_{J,a,b} = X_1(g_J^{-1}\dots g_2^{-1}g_1^{-1}X_1^a t_1^b g_1g_2\dots g_{n-1}) = g_J^{-1}\dots g_2^{-1}(X_1g_1^{-1}X_1^a t_1^b g_1)g_2\dots g_{n-1}$
$=g_j^{-1}\dots g_2^{-1}(g_1^{-1}X_1^a t_1^b g_1 X_1 + (q-q^{-1})e_1(X_1t_1^b g_1X_1^a - X_1^{a+1}t_1^b g_1)g_2\dots g_{n-1}$
$=W^{(n)}_{J,a,b} \cdot X_1 + (q-q^{-1})\frac{1}{d}\sum\limits_{s=0}^{d-1}\Big(W^{(n)}_{0,1,b-s} \cdot g_{J-1}^{-1}\dots g_1^{-1}t_1^sX_1^a - W^{(n)}_{0,a+1,b-s} \cdot g_{J-1}^{-1}\dots g_1^{-1}t_1^s\Big)$,
όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε των ορισμό των $W^{(n)}_{J,a,b}$,στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το λήμμα 3.0.0.2,στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (3.0.0.8) του λήμματος 3.0.0.3 και τέλος στην τέταρτη και τελευταία ισότητα κάνοντας επιμεριστική,το άθροισμα στα αριστερά προέκυψε χρησιμοποιώντας τον ορισμό των $W^{(n)}_{J,a,b}$ σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το X_1 μετατίθεται με τα $g_2,\dots,g_{n-1}$(λόγω του λήμματος 3.0.0.2),ενώ το άθροισμα στα δεξιά προέκυψε χρησιμοποιώντας την ισότητα $g_J^{-1}\dots g_2^{-1} \cdot W^{(n)}_{0,a,b} = W^{(n)}_{0,a,b} \cdot g_{J-1}^{-1}\dots g_1^{-1}$,η οποία προκύπτει από τον τύπο (6.1.6).
Για πεπερασμένο m η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Για την περίπτωση $m=\infty$ έχουμε και τον γεννήτορα X_1^{-1},για τον οποίο έχουμε

$$X_1^{-1}\cdot W^{(n)}_{J,a,b} = \begin{cases} W^{(n)}_{0,a-1,b} & \text{αν } J=0\,,\\ W^{(n)}_{J,a,b}\cdot X_1^{-1} + (q-q^{-1})\dfrac{1}{d}\displaystyle\sum_{s=0}^{d-1}\Big(W^{(n)}_{0,0,b-s}\cdot g_{J-1}^{-1}\dots g_1^{-1}t_1^sX_1^{a-2} \\ \qquad -W^{(n)}_{0,a+1,b-s}\cdot g_{J-1}^{-1}\dots g_1^{-1}t_1^sX_1^{-2}\Big) & \text{αν } J>0\,,\end{cases} \tag{6.1.0.9}$$

όπου η περίπτωση $J=0$ είναι τετριμμένη,ενώ η περίπτωση $J>0$ προκύπτει άμεσα από την σχέση (3.0.0.8) απλά πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας από τα αριστερά με X_1^{-2}.
Για το $\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind}_{d,m,n}$: Αποδεικνύουμε αρχικά ότι η μονάδα της $Y(d,m,n)$ ανήκει στο $\mathcal{R}_m$-span του συνόλου $\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind}_{d,m,n}$,χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς n. Για $n=1$,έχουμε $1=\widetilde{W}^{(1)}_{0,0,0}$. Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση σε συνδυασμό με την παρατήρηση ότι $1 = g_{k-1}^{-1}g_{k-2}^{-1}\dots g_1^{-1}\widetilde{W}^{(k)}_{0,0,0}$ για κάθε $k=2,\dots,n$ έπεται το ζητούμενο. Μένει να δείξουμε ότι το γινόμενο (για παράδειγμα,από τα αριστερά) ενός γεννήτορα της $Y(d,m,n)$ με ένα στοιχείο του $\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind}_{d,m,n}$ ανήκει σε ένα $\mathcal{R}_m$-span του $\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind}_{d,m,n}$. Όπως προηγουμένως,αρκεί να δείξουμε ότι αυτά τα γινόμενα μπορούν να γραφτούν ως $\mathcal{R}_m$-γραμμικοί συνδυασμοί όρων της μορφής $W^{(n)}_{j',a',b'} \cdot u$,με $u \in Y(d,m,n-1)$,$j' \in \{0,\dots,n-1\}$ και $a,b \in \mathbb{Z}$. Για τους γεννήτορες

t_l, g_i,όπου $l = 1,\ldots,n$ και $i = 1,\ldots,n-1$ δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο με πριν. Για τον γεννήτορα X_1 έχουμε $X_1 \cdot W^{(n)}_{J,a,b} = W^{(n)}_{0,a+1,b}$ αν $J = 0$ και αν $J > 0$ έχουμε,
$X_1 \cdot W^{(n)}_{J,a,b} = X_1(g_J \ldots g_2 g_1 X_1^a t_1^b g_1 g_2 \ldots g_{n-1}) = g_J \ldots g_2(X_1 g_1 X_1^a t_1^b g_1) g_2 \ldots g_{n-1}$
$=g_J \ldots g_2(g_1 X_1^a t_1^b g_1 X_1 + (q-q^{-1}) e_1 (X_1 t_1^b g_1 X_1^a - X_1^a t_1^b g_1)) g_2 \ldots g_{n-1}$
$=W^{(n)}_{J,a,b} \cdot X_1 + (q-q^{-1})\frac{1}{d}\sum\limits_{s=0}^{d-1}\Big(W^{(n)}_{0,1,b-s} \cdot g_{J-1}\ldots g_1 t_1^s X_1^a - W^{(n)}_{0,a+1,b-s} \cdot g_{J-1}\ldots g_1 t_1^s\Big)$,
όπου έχουν γίνει οι ίδιοι υπολογισμοί με την παραπάνω περίπτωση με την διαφορά ότι στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (3.0.0.7) αντί της (3.0.0.8). Για πεπερασμένο m η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Για την περίπτωση $m = \infty$ δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο με παραπάνω.
Για τα $\mathcal{B}^{Ind-}_{d,m,n}$,$\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind-}_{d,m,n}$: Από την παρατήρηση 3.0.0.4 υπάρχει ομομορφισμός $\eta : Y(d,m,n) \to Y(d,m,n)$ στους γεννήτορες $x \in \{t_1,\ldots,t_n,g_1,\ldots,g_{n-1},X_1^{\pm 1}\}$ με $\eta(x) = x^{-1}$, $\eta(q) = q^{-1}$ και (αν $m < \infty$) $\eta(v_a) = v_a^{-1}$,$a = 1,\ldots,m$
Καθώς τα σύνολα $\mathcal{B}^{Ind}_{d,m,n}$,$\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind}_{d,m,n}$ παράγουν (επί του $\mathcal{R}_m$) την άλγεβρα $Y(d,m,n)$,
μέσω του ομορφισμού η έπεται ότι και τα σύνολα $\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind-}_{d,m,n}$, $\mathcal{B}^{Ind-}_{d,m,n}$ παράγουν επίσης (επί του $\mathcal{R}_m$) την άλγβερα $Y(d,m,n)$. □

6.2 Βάσεις

Σημείωση 6.2.0.1. *Χρησιμοποιώντας θεωρία αναπαραστάσεων θα αποδείξουμε ότι τα σύνολα της πρότασης 5.1.0.1 αποτελούν $\mathcal{R}_m$-βάση για την άλγεβρα $Y(d,m,n)$. Για τον σκοπό αυτό θα χρειαστούμε το εξής:*
Έστω E'_m υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{X_1^a \,|\, a \in E'_m\}$ είναι $\mathcal{R}_m$-βάση του $\mathcal{R}_m[X_1^{\pm 1}]$. Συμβολίζουμε αντίστοιχα με $\mathcal{B}^{AK}_{d,m,n}(E'_m)$, $\mathcal{B}^{Ind}_{d,m,n}(E'_m)$, $\mathcal{B}^{Ind-}_{d,m,n}(E'_m)$, $\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind}_{d,m,n}(E'_m)$ και $\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind-}_{d,m,n}(E'_m)$ τα σύνολα των στοιχείων των (6.1.0.1)-(6.1.0.5),όπου οι συνθήκες $a_k \in E_m$ έχουν αντικατασταθεί με $a_k \in E'_m$. Τότε τα παραπάνω σύνολα παράγουν επίσης (επί του $\mathcal{R}_m$) την άλγεβρα $Y(d,m,n)$. Τώρα,αν $m = \infty$ τότε $E'_\infty = E_\infty = \mathbb{Z}$. Αν $m < \infty$ από την παρατήρηση 3.0.0.1(1.3)
$X_1^m + \gamma^{(m)}_{m-1} X_1^{m-1} + \cdots + \gamma^{(m)}_1 X_1 + \gamma^{(m)}_0 = 0$,*όπου* $\gamma^{(m)}_0,\ldots,\gamma^{(m)}_{m-1} \in \mathcal{R}_m$
$X_1^{-1} = -\gamma^{(m)}_0 (X_1^{m-1} + \gamma^{(m)}_{m-1} X_1^{m-2} + \cdots + \gamma^{(m)}_2 X_1 + \gamma^{(m)}_1) \in \mathcal{R}_m[X_1]$
Εφαρμόζοντας τον ομομορφισμό η στις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι

$E'_m = -E_m$.
Ειδικότερα,πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με $X_1^{-(m-1)/2}$*,παίρνουμε ότι το* $X_1^{(m+1)/2}$ *είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του συνόλου* $\{X_1^a \mid a \in E'_m\}$. *Επίσης,εφαρμόζοντας τον ομομορφισμό η παίρνουμε ότι και το στοιχείο* $X_1^{-(m+1)/2}$ *είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του συνόλου* $\{X_1^a \mid a \in E'_m\}$. *Συνεπώς,το σύνολο* $\{X_1^a \mid a \in E'_m\}$ *είναι* $\mathcal{R}_m$*-βάση του* $\mathcal{R}_m[X_1^{\pm 1}]$*,όπου* $E'_m = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{m-1}{2}\}$ *υποσύνολο του* $\mathbb{Z}$.

Θεώρημα 6.2.0.1. *Καθένα από τα σύνολα* $\mathcal{B}_{d,m,n}^{AK}$, $\mathcal{B}_{d,m,n}^{Ind}$, $\mathcal{B}_{d,m,n}^{Ind-}$, $\widetilde{\mathcal{B}}_{d,m,n}^{Ind}$ *και* $\widetilde{\mathcal{B}}_{d,m,n}^{Ind-}$ *είναι* $\mathcal{R}_m$*-βάση της* $Y(d, m, n)$. *Ειδικότερα,η άλγεβρα* $Y(d, m, n)$ *είναι ένα ελεύθερο* $\mathcal{R}_m$*-πρότυπο και,αν* $m < \infty$*,η διάσταση του ισούται με* $(dm)^n n!$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $m < \infty$. Από την αντιστοιχία Robinson-Schensted έχουμε ότι $\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(d,m,n)} \big(\dim(V_\lambda)\big)^2 = (dm)^n n!$,όπου $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}(d,m,n)}$ το σύνολο των κατά ζεύγη μη-ισόμορφων ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\mathcal{F}_m \mathrm{Y}(d, m, n)$.
Επομένως, $\dim(\mathcal{F}_m \mathrm{Y}(d, m, n)) \geqslant (dm)^n n!$. Όμως,από την πρόταση 6.1.0.1,καθένα από τα σύνολα $\mathcal{B}_{d,m,n}^{AK}$,$\mathcal{B}_{d,m,n}^{Ind}$, $\mathcal{B}_{d,m,n}^{Ind-}$, $\widetilde{\mathcal{B}}_{d,m,n}^{Ind}$ και $\widetilde{\mathcal{B}}_{d,m,n}^{Ind-}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων της $\mathcal{F}_m \mathrm{Y}(d, m, n)$ επί του $\mathcal{F}_m$,όπου το καθένα περιέχει $(dm)^n n!$ στοιχεία. Συνεπώς,τα στοιχεία του κάθε συνόλου είναι γραμμικά ανεξάρτητα επί του $\mathcal{F}_m$,και κατά συνέπεια του $\mathcal{R}_m$ (διότι $\mathcal{F}_m$ είναι το σώμα κλασμάτων του $\mathcal{R}_m$,άρα $\mathcal{R}_m \subset \mathcal{F}_m$). Έτσι για πεπερασμένο m η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $m = \infty$. Λόγω της Πρότασης 6.1.0.1,αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σύνολα $\mathcal{B}_{d,\infty,n}^{AK}$,$\mathcal{B}_{d,\infty,n}^{Ind}$, $\mathcal{B}_{d,\infty,n}^{Ind-}$, $\widetilde{\mathcal{B}}_{d,\infty,n}^{Ind}$ και $\widetilde{\mathcal{B}}_{d,\infty,n}^{Ind-}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (επί του $\mathcal{R}_\infty$) υποσύνολα της $Y(d, \infty, n)$. Αρχικά,παρατηρούμε ότι $\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{R}_m$ και για $m < \infty$,η άλγεβρα $Y(d, m, n)$ είναι είναι το πηλίκο της $\mathcal{R}_m \otimes_{\mathcal{R}_\infty} \mathrm{Y}(d, \infty, n)$ επί της τελευταίας σχέσης στον ορισμό της $Y(d, m, n)$ (σχέση (3.0.0.2)). Συμβολίζουμε με $\pi^{(m)}$ τον αντίστοιχο επιμορφισμό. Θα αποδείξουμε πρώτα την γραμμική ανεξαρτησία (επί του $\mathcal{R}_\infty$) του συνόλου $\mathcal{B}_{d,\infty,n}^{AK}$. Έστω Λ (μη τετριμμένος) γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\mathcal{B}_{d,\infty,n}^{AK}$ με συντελεστές στον $\mathcal{R}_\infty$. Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία του συνόλου είναι γραμμικά εξαρτημένα (επί του $\mathcal{R}_\infty$),δηλαδή υποθέτουμε ότι $\Lambda = 0$ με κάποιον εκ των συντελεστών να είναι μη μηδενικός. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τον γραμμικό συνδυασμό Λ από τα αριστερά με αρκετά μεγάλες δυνάμεις των X_i,σε αυτόν θα εμφανίζονται μόνο μη αρνητικές ακέραιες δυνάμεις (με αυτόν τον τρόπο η γραμμική εξάρτηση παραμένει). Έστω $m_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ ο μεγαλύτερος από όλες τις δυνάμεις των X_i που εμφανίζονται στον γραμμικό συνδυασμό Λ. Εφαρμόζοντας τον επιμορφισμό $\pi^{(m_0)}$ στον Λ,παίρνουμε ότι η σχέση

$\pi^{(m_0)}(\Lambda) = 0$ δίνει (επίσης) γραμμική εξάρτηση επί του $\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{R}_{m_0}$,ανάμεσα στα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{B}^{AK}_{d,m_0,n}$,κάτι το οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει,διότι όπως δείξαμε το σύνολο $\mathcal{B}^{AK}_{d,m_0,n}$ είναι $\mathcal{R}_{m_0}$-βάση της $Y(d, m_0, n)$. Άρα η σχέση $\Lambda = 0$ συνεπάγεται ότι οι συντελεστές(επί του $\mathcal{R}_\infty$) είναι όλοι μηδενικοί,δηλαδή έχουμε γραμμική ανεξαρτησία (επί του $\mathcal{R}_\infty$). Τώρα για τα σύνολα $\mathcal{B}^{Ind}_{d,\infty,n}$, $\mathcal{B}^{Ind-}_{d,\infty,n}$, $\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind}_{d,\infty,n}$ και $\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind-}_{d,\infty,n}$ θεωρούμε τον γραμμικό συνδυασμό Λ με στοιχεία σε αυτά και συντελεστές στον $\mathcal{R}_\infty$. Όπως προηγουμένως,υποθέτουμε ότι τα στοιχεία αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα (επί του $\mathcal{R}_\infty$),δηλαδή υποθέτουμε ότι $\Lambda = 0$ με κάποιο εκ των συντελεστών να είναι μη μηδενικός. Έστω $m_+ \in \mathbb{Z}$ ο μεγαλύτερος κατά απόλυτη τιμή από όλες τις δυνάμεις του X_1 που εμφανίζονται στον γραμμικό συνδυασμό Λ και έστω $m_0 = 2m_+ + 1$. Εφαρμόζοντας τον επιμορφισμό $\pi^{(m_0)}$ στον Λ η σχέση $\pi^{(m_0)}(\Lambda) = 0$ δίνει γραμμική εξάρτηση επί του $\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{R}_{m_0}$ ανάμεσα στα στοιχεία σε καθένα από τα σύνολα $\mathcal{B}^{Ind}_{d,m,n}(E'_{m_0})$, $\mathcal{B}^{Ind-}_{d,m,n}(E'_{m_0})$, $\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind}_{d,m,n}(E'_{m_0})$ και $\widetilde{\mathcal{B}}^{Ind-}_{d,m,n}(E'_{m_0})$,όπου $E'_{m_0} = \{0, \pm 1, \ldots, \pm m_+\}$(όπου E'_m το σύνολο το οποίο αναφέραμε στην σημείωση 6.2.0.1). Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει,διότι τα παραπάνω σύνολα όπως δείξαμε αποτελούν $\mathcal{R}_{m_0}$-βάσεις της $Y(d, m_0, n)$. Έτσι,η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πόρισμα 6.2.0.1. *Το σύνολο $\{V_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}(d, m, n)\}$ είναι ένα πλήρες σύνολο κατά ζεύγη μη ισόμορφων ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\mathcal{F}_m Y(d, m, n)$,όπου V_λ η αναπαράσταση της $\mathcal{F}_m Y(d, m, n)$ που κατασκευάσαμε στην Πρόταση 4.7.0.1.*

Βιβλιογραφία

[1] M. Chlouveraki, L. Poulain d'Andecy, *Representation theory of the Yokonuma–Hecke algebra*, Adv. Math. **259** (2014), 134–172.

[2] J. Juyumaya, *Markov trace on the Yokonuma–Hecke algebra*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004) 25–39.

[3] M. Chlouveraki, L. Poulain d'Andecy, *Markov traces on affine and cyclotomic yokonuma–hecke algebras.*,International Mathematics Research Notices, 2016(14):4167–4228, 2016.

[4] Karin Erdmann and Thorsten Holm. Algebras and Representation Theory.