ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

«Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων: Ο ρόλος της αναδρομικής ισομέρισης»

Εμμανουήλ Τουμπακάρης
Α.Μ. 217329

Επιβλέπουσα: Μπούφη Ανδρονίκη, Καθηγήτρια

Συνεπιβλέποντες: Μούτσιος – Ρέντζος Ανδρέας, Επίκουρος καθηγητής
Πρασίδης Ευστράτιος, Καθηγητής

Αθήνα, Μάρτιος 2023

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποσκοπεί στη διερεύνηση της υπόθεσης ότι οι μαθητές της Στ' τάξης Δημοτικού είναι σε θέση να εκτελέσουν τους αλγορίθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων αλλά δεν έχουν κατακτήσει τα προαπαιτούμενα της κατανόησης αυτών των υπολογισμών, όπως είναι η ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης. Μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με τα γνωστικά σχήματα και τις λειτουργίες που οδηγούν στην κατασκευή των εννοιών της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων και την κριτική αξιολόγηση του τρόπου εισαγωγής των εννοιών αυτών στα σχολικά εγχειρίδια της Ε' και Στ' τάξης του Δημοτικού, πραγματοποιείται η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν από την έρευνα που διεξήχθη και εξάγονται τα συμπεράσματα σχετικά με την αρχική υπόθεση της παρούσας εργασίας.

Λέξεις κλειδιά

κλάσματα, πρόσθεση, αφαίρεση, αναδρομική ισομέριση

Abstract

This thesis aims to investigate the assumption that 6th grade students are able to perform the algorithms of addition and subtraction of fractions, while not having mastered the prerequisites of understanding these calculations, such as the development of the recursive partitioning operation. Through the review of the literature on the cognitive schemes and operations that lead to the construction of the concepts of addition and subtraction of fractions and the critical evaluation of the way these concepts are introduced in the textbooks of the 5th and 6th grade of Primary School, the analysis of the data collected from the research conducted is carried out and the conclusions are drawn regarding the initial hypothesis of this thesis.

Key words

Fractions, addition, subtraction, recursive partitioning.

Εισαγωγή

Το κλάσμα αποτελεί μία έννοια η οποία συγκεντρώνει έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον. Στη βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών περιγράφονται τα γνωστικά σχήματα και οι λειτουργίες, οι οποίες οδηγούν στην κατασκευή της έννοιας του κλάσματος και ιδιαίτερα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, έννοιες στις οποίες επικεντρώνεται η παρούσα εργασία.

Πέρα από το θεωρητικό πλαίσιο, η προσωπική μου εμπειρία από την πολυετή διδασκαλία στις τάξεις του Δημοτικού, ανέδειξε την ανάγκη της διερεύνησης του βαθμού με τον οποίο ενισχύεται από τα σχολικά εγχειρίδια η εννοιολογική κατανόηση του κλάσματος και ειδικότερα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων. Στο πλαίσιο αυτού του ερευνητικού ενδιαφέροντος, η παρούσα εργασία διερευνά την ικανότητα των μαθητών να εκτελούν τους αλγορίθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων αλλά και τον βαθμό που έχουν κατακτήσει τα προαπαιτούμενα της κατανόησης αυτών των υπολογισμών, όπως είναι η ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης. Για τον σκοπό αυτό σχεδίασα και διεξήγαγα στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας μία μικρή έρευνα στην τάξη μου προκειμένου να τεκμηριώσω τον βαθμό στον οποίο τα σχολικά εγχειρίδια προωθούν την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών και ενθαρρύνουν την ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας, παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο πάνω στο οποίο στηρίχθηκε η παρούσα έρευνα. Γίνεται αναφορά στα γνωστικά σχήματα και τις λειτουργίες που εμπλέκονται στην κατασκευή της έννοιας του κλάσματος και ιδιαίτερα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης και στην αναγκαιότητα παροχής ευκαιριών αναστοχασμού στους μαθητές.

Στο δεύτερο μέρος, πραγματοποιείται η κριτική αξιολόγηση των διδακτικών εγχειριδίων της Ε’ και Στ’ τάξης ως προς τον τρόπο που προσεγγίζονται οι έννοιες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων. Στις ενότητες αυτού του μέρους, αναζητείται ο βαθμός, στον οποίο οι μαθητές, μέσω των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων, έχουν ευκαιρίες να αναστοχαστούν πάνω στις ενέργειές τους, να αναπτύξουν τη λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης και να κατανοήσουν τις έννοιες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων.

Στο τρίτο μέρος, παρουσιάζεται το πλαίσιο της έρευνας που πραγματοποιήθηκε, αναφέρονται οι σκοποί και οι στόχοι της, παρουσιάζονται τα εργαλεία συλλογής των δεδομένων και η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε.

Στο τέταρτο και τελευταίο μέρος της εργασίας, αναλύονται τα ερευνητικά δεδομένα και καταγράφονται τα συμπεράσματα που εξάγονται από την παρούσα έρευνα βάσει της βιβλιογραφίας και του θεωρητικού πλαισίου που παρουσιάστηκε στο πρώτο μέρος.

ΜΕΡΟΣ 1: Θεωρητικό Υπόβαθρο

1.1.Γνωστικά σχήματα - λειτουργίες

Σύμφωνα με την εποικοδομητική θεωρία μάθησης (constructivism), τα *γνωστικά σχήματα* (schemes) και οι *λειτουργίες* (operations) αποτελούν ένα μέσο μοντελοποίησης της μαθηματικής γνώσης των μαθητών από το δάσκαλο με σκοπό τον προσδιορισμό της γνωστικής τους δομής και των απαραίτητων διδακτικών παρεμβάσεων, που θα διευκολύνουν και θα υποστηρίξουν τη διαδικασία κατασκευής της γνώσης (Cobb & Steffe, 1983). Τα μέσα αυτά δεν αποτελούν ακριβή αναπαράσταση του νοητικού συστήματος των μαθητών αλλά έναν τρόπο εξήγησης και πρόβλεψης των ενεργειών τους από το δάσκαλο (Norton & McCloskey, 2008· Tzur, 1999). Επομένως, τα σχήματα αποτελούν ερμηνείες/υποθέσεις από την πλευρά του δασκάλου-ερευνητή για τους τρόπους με τους οποίους λειτουργεί η σκέψη των μαθητών (Hackenberg, 2010).

Τα γνωστικά σχήματα αποτελούνται από τρία μέρη: την αφομοιωμένη κατάσταση, τη δραστηριότητα και το αποτέλεσμα. Το γνωστικό σχήμα ενεργοποιείται με την αναγνώριση ομοιοτήτων μεταξύ μιας νέας κατάστασης με άλλες καταστάσεις του παρελθόντος. Το άτομο αφομοιώνει τα στοιχεία που ταιριάζουν στις υπάρχουσες γνωστικές του δομές και απορρίπτει ή αγνοεί τα υπόλοιπα (Hackenberg, 2010· von Glaserfeld, 1995). Στη συνέχεια, ακολουθεί μια δραστηριότητα, ένα σύνολο νοητικών ενεργειών/ λειτουργιών που οδηγούν σε ένα αποτέλεσμα. Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, αφομοιώνεται από το άτομο στα υπάρχοντα γνωστικά του σχήματα. Σε αντίθετη περίπτωση, αν το αποτέλεσμα είναι απροσδόκητο, ακολουθεί η λειτουργία της συμμόρφωσης (accommodation). Το άτομο μέσα από μια κατάσταση σύγχυσης (perturbation) οδηγείται στην εξέταση διαφόρων παραμέτρων με αποτέλεσμα την τροποποίηση και την ισχυροποίηση των γνωστικών του σχημάτων, ώστε να είναι διαθέσιμα σε περισσότερες προβληματικές καταστάσεις (Hackenberg, 2010· Norton & McCloskey, 2008).

Οι λειτουργίες είναι νοητικές ενέργειες του ατόμου που προκύπτουν από προηγούμενες εμπειρίες και είναι διαθέσιμες σε κάθε νέα προβληματική κατάσταση. Είναι το αποτέλεσμα του αναστοχασμού του ατόμου πάνω στις γνωστικές διεργασίες (Norton & McCloskey, 2008· Norton & Wilkins, 2009). Για παράδειγμα, όταν το άτομο εμπλέκεται σε πολλαπλές δραστηριότητες αναδίπλωσης κομματιών χαρτιού δημιουργώντας ίσα μερίδια μιας δίκαιης μοιρασιάς ή ίσα μέρη ενός όλου, και αναστοχάζεται πάνω στις ενέργειές του μπορεί να αναπτυχθεί η λειτουργία της ισομέρισης (Norton & Wilkins, 2009), για την οποία θα γίνει ιδιαίτερη αναφορά παρακάτω. Οι λειτουργίες είναι κυρίαρχο στοιχείο των γνωστικών σχημάτων, αφού τα τελευταία αποτελούν, όπως αναφέρθηκε, έναν τρόπο λειτουργίας του ατόμου (Norton & McCloskey, 2008).

Συμπερασματικά αξίζει να σημειωθεί ότι, ο αναστοχασμός του ατόμου πάνω στις ενέργειές του θεωρείται εξαιρετικά κρίσιμη διαδικασία, καθώς μέσω αυτού είναι δυνατή η αναδιοργάνωση, η εσωτερίκευση αλλά και η παγιώση των γνωστικών σχημάτων και των γνωστικών λειτουργιών, που αποτελούν δομικά στοιχεία για την κατασκευή μίας έννοιας από το άτομο (Hackenberg, 2010). Η διαδικασία του αναστοχασμού είναι εφικτή και πρέπει να ενθαρρύνεται καθ’ όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας μέσα από κατάλληλες προβληματικές καταστάσεις αλλά και ερωτήσεις που απευθύνει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές.

1.1.1.Λειτουργίες κλασμάτων

Όπως σημειώθηκε παραπάνω, οι λειτουργίες είναι νοητικές πράξεις που προκύπτουν από τις εμπειρίες του ατόμου και αποτελούν σημαντικό παράγοντα για την κατανόηση εννοιών (McCloskey & Norton, 2009). Παρότι συνδέονται και αναπτύσσονται με φυσικές πράξεις του ατόμου, περιγράφουν πολύ περισσότερο τις νοητικές του διεργασίες (Hackenberg, 2010). Όσον αφορά την κατασκευή της γνώσης των κλασμάτων, οι λειτουργίες που εμπλέκονται και ενεργοποιούνται από τους μαθητές είναι, σύμφωνα με την βιβλιογραφία (Hackenberg, 2010· Norton & McCloskey, 2008) οι παρακάτω:

- Η λειτουργία της *μοναδοποίησης* περιγράφει την αντιμετώπιση από το άτομο ενός αντικειμένου ή μιας συλλογής αντικειμένων ως μια μονάδα ή ένα όλο. Το άτομο μπορεί να ομαδοποιήσει ένα σύνολο αντικειμένων και να δημιουργεί νέες σύνθετες μονάδες. Για παράδειγμα ομαδοποιώντας το άτομο 12 μπίλιες αυτές μπορούν να αποτελούν ένα νέο όλο, μία νέα σύνθετη μονάδα (Norton & McCloskey, 2008).

- Η λειτουργία της *ισομέρισης* περιλαμβάνει τον τεμαχισμό μίας ολόκληρης ποσότητας σε ίσα μέρη με την ταυτόχρονη νοητή διατήρηση της αρχικής ποσότητας ως ένα όλο (Lamon, 2012·Olive & Lobato, 2008). Η ισομέριση αυτή μπορεί να αφορά τον χωρισμό σε ίσα μέρη μιας συνεχούς ποσότητας, όπως, για παράδειγμα, το μοίρασμα μιας σοκολάτας σε δύο άτομα, ή μιας ομάδας διακριτών αντικειμένων, όπως το μοίρασμα δώδεκα μολυβιών σε τέσσερα άτομα (Norton & McCloskey, 2008).

- Η λειτουργία της *απόσπασης* περιλαμβάνει τη νοητή απομάκρυνση από το άτομο κάποιων μερών ενός ισομερισμένου όλου, χωρίς όμως να αλλοιώνεται η αρχική ποσότητα (Norton & McCloskey, 2008). Για παράδειγμα, το άτομο μπορεί να δημιουργήσει το κλάσμα $\frac{3}{4}$, εάν χωρίσει ένα όλο σε τέσσερα ίσα μέρη και αποσπάσει από αυτό τα τρία χωρίς να αλλοιώνεται το αρχικό όλο.

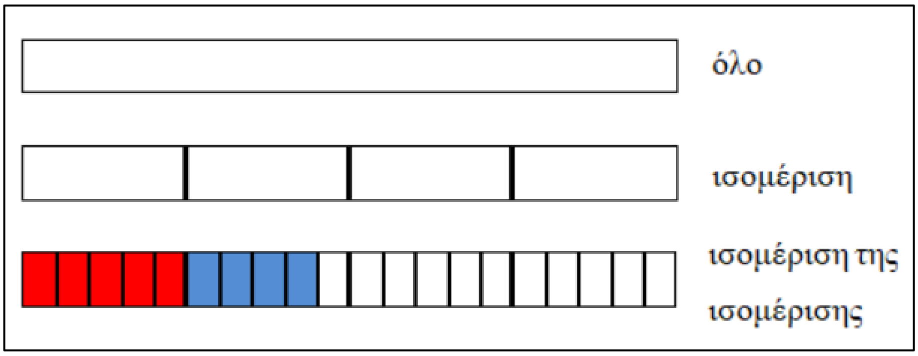
- Η λειτουργία της *επανάληψης* περιγράφει την ικανότητα του ατόμου να επαναλαμβάνει ένα μέρος ενός όλου με σκοπό τη δημιουργία μιας νέας ποσότητας (Hackenberg, 2007· Steffe & Olive, 2010). Για παράδειγμα, επαναλαμβάνοντας 3 φορές το $\frac{1}{4}$ μιας ποσότητας μπορεί να δημιουργηθούν τα $\frac{3}{4}$ της ποσότητας αυτής (Norton & McCloskey, 2008). Η λειτουργία αυτή θεωρείται πολύ σημαντική στη δημιουργία καταχρηστικών κλασμάτων. Αν το άτομο επαναλάβει το μέρος ενός όλου ν φορές, τότε δημιουργεί το όλο, αλλά επαναλαμβάνοντας ν+1 φορές, δημιουργεί ένα καταχρηστικό κλάσμα της μορφής $\frac{\nu+1}{\nu}$ (Hackenberg, 2007· Steffe & Olive, 2010· Tzur, 1999).

- Η λειτουργία, τέλος, της *«ταυτόχρονης ισομέρισης και επανάληψης»* είναι το αποτέλεσμα της εσωτερίκευσης διαδοχικών ισομερίσεων και επαναλήψεων. Η διαδικασία αυτή καθιστά το άτομο ικανό να αντιλαμβάνεται ένα αντικείμενο με έναν πιο γενικό και δυναμικό τρόπο και να αναπτύσσει πιο ισχυρά γνωστικά σχήματα (Wilkins, Norton & Boyce, 2013). Η λειτουργία ενεργοποιείται σε προβληματικές καταστάσεις του τύπου: *«Αυτή η ράβδος έχει μήκος 3 φορές όσο το μήκος της δικής σου. Μπορείς να φτιάξεις την δική σου;»* (Hackenberg, 2010). Για να αντιμετωπίσει μια τέτοια προβληματική κατάσταση το άτομο πρέπει να αναγνωρίσει ένα μήκος ή μια συνεχή ποσότητα που διατηρεί μια πολλαπλασιαστική σχέση με μια άλλη ποσότητα αλλά είναι ανεξάρτητη από αυτή (Steffe, 2002). Έτσι, στο παραπάνω παράδειγμα, το άτομο πρέπει να τεμαχίσει τη δοσμένη ράβδο σε 3 ίσα μέρη και να επαναλάβει 1 φορά το ένα κομμάτι της για να φτιάξει τη δική του ράβδο. Μέσω οποιουδήποτε κλασματικού μέρους και της λειτουργίας της «ταυτόχρονης ισομέρισης και επανάληψης» μπορεί να αναδημιουργηθεί το όλο ή οποιοδήποτε άλλο κλασματικό μέρος (McCloskey & Norton, 2009).

1.1.2.Λειτουργίες που εμπλέκονται στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Καθώς το άτομο εμπλέκεται σε μια προβληματική κατάσταση, ενεργοποιούνται, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα υπάρχοντα γνωστικά του σχήματα και οι αντίστοιχες λειτουργίες. Ειδικότερα για την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων, περιγράφεται στη βιβλιογραφία το κλασματικό σχήμα της πρόσθεσης (fractional adding scheme), το οποίο περιλαμβάνει όλες οι ενέργειες και λειτουργίες που ενεργοποιούνται κατά την προσπάθεια του ατόμου να προσθέσει ή να αφαιρέσει κλάσματα. Η ανάπτυξη του κλασματικού σχήματος της πρόσθεσης συνδέεται άρρηκτα με την ανάπτυξη από τους μαθητές των γνωστικών σχημάτων για τα ισοδύναμα κλάσματα (commensurate fractional scheme), τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (fractional composition scheme) αλλά και της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης (recursive partitioning), η οποία θεωρείται προαπαιτούμενη για την ανάπτυξη των παραπάνω γνωστικών σχημάτων (Steffe, 2003).

Η λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης περιγράφει την ικανότητα του ατόμου να παράγει την ισομέριση μίας ισομέρισης. Η ανάπτυξη της λειτουργίας αυτής είναι δυνατή μέσα από ποικίλες προβληματικές καταστάσεις όπου το άτομο καλείται να ισομερίσει μία δοσμένη ποσότητα ενός όλου χρησιμοποιώντας ακόμα δύο ισομερίσεις, αλλά και να εκφράσει το τελικό αποτέλεσμα, επεκτείνοντας τις ισομερίσεις στο όλο (Steffe, 2003). Η λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη νοηματοδότηση των ισοδύναμων κλασμάτων και στη διαδικασία εύρεσης μίας κοινής ισομέρισης ή μιας κοινής μονάδας μέτρησης των ποσοτήτων (Steffe & Olive, 2010). Θεωρείται απαραίτητη για την εύρεση κοινών παρονομαστών κατά την πρόσθεση ή αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων (Izsák, Tillema, & Tunç-Pekkan, 2008· Olive, 2003· Steffe & Olive, 2010). Οι όροι της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης ετερώνυμων κλασμάτων θα πρέπει να εκφραστούν μέσω μίας κοινής μονάδας μέτρησης, ώστε να μπορούν στη συνέχεια να προστεθούν ή να αφαιρεθούν. Για παράδειγμα, όταν το άτομο καλείται να προσθέσει το $\frac{1}{5}$ και το $\frac{1}{4}$ μίας ποσότητας, θα μπορούσε να το πραγματοποιήσει αν ξεκινούσε από το $\frac{1}{4}$ της ποσότητας (ισομερίζοντάς την σε 4 μέρη) και στη συνέχεια να ισομέριζε το κάθε τέταρτο σε 5 μέρη. Έτσι, κάθε μικρό κομμάτι θα εξέφραζε το $\frac{1}{20}$ της ποσότητας και θα αποτελούσε την κοινή μονάδα στην οποία μπορούν να εκφραστούν ταυτόχρονα τα κλάσματα $\frac{1}{5}$ και $\frac{1}{4}$. Έτσι, το κλάσμα $\frac{1}{5}$ μπορεί να εκφραστεί ως τα $\frac{4}{20}$ του όλου και το $\frac{1}{4}$ ως τα $\frac{5}{20}$ του όλου. Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των παραπάνω κλασμάτων αποτελεί έτσι τα $\frac{9}{20}$ του όλου (Εικόνα 1)[1].



Εικόνα 1. Σχηματική απόδοση πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων

Ακόμα δύο λειτουργίες που θεωρούνται σημαντικές για την εύρεση κοινών ισομερίσεων/κοινής μονάδας μέτρησης είναι η λειτουργία της ταυτόχρονης ισομέρισης και επανάληψης (splitting), η οποία περιγράφηκε παραπάνω, καθώς και η λειτουργία της επιμεριστικής ισομέρισης (distributive partitioning) (Olive & Steffe,

[1] Η εύρεση κοινής μονάδας μέτρησης θα μπορούσε να προετοιμαστεί μέσα από μία ακολουθία δραστηριοτήτων διαβαθμισμένης δυσκολίας (π.χ. «Μία μπάρα χωρισμένη σε 3 ίσα μέρη, πώς θα μπορούσε να χωριστεί σε 15 ίσα μέρη;»)

2010· Steffe, 2010). Η λειτουργία της επιμεριστικής ισομέρισης είναι μια ανεπτυγμένη μορφή ισομέρισης και αναδύεται μέσα από καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς (Lee & Shin, 2013). Η επιμεριστική ισομέριση περιγράφεται από καταστάσεις ισομέρισης ν αντικειμένων σε μ μερίδια, τεμαχίζοντας καθένα από τα ν αντικείμενα σε μ μέρη και κατανέμοντας κάθε μέρος από τα ν αντικείμενα σε μ μερίδια (Lamon, 1996). Σύμφωνα με τους Steffe, Liss, και Lee (2014), η λειτουργία της επιμεριστικής ισομέρισης μπορεί να περιγραφεί και να αναδυθεί από δραστηριότητες του τύπου: *«μοίρασε δίκαια τρεις άνισες πίτσες σε πέντε άτομα»*. Το άτομο, ενεργοποιώντας τη λειτουργία της επιμεριστικής ισομέρισης, θα τεμαχίσει κάθε μία πίτσα σε πέντε ίσα μέρη και θα κατανείμει σε καθένα από τα πέντε άτομα ένα κομμάτι από κάθε πίτσα, συνειδητοποιώντας ταυτόχρονα ότι το μερίδιο του κάθε ατόμου αν επαναληφθεί πέντε φορές θα παραγάγει το όλο, τις τρεις πίτσες.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι όσα περιγράφονται παραπάνω αναφέρονται στην εννοιολογική γνώση την οποία πρέπει να κατασκευάσουν οι μαθητές ώστε να κατανοούν σε βάθος τις έννοιες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Ωστόσο η κατανόηση των εννοιών της πρόσθεσης και της αφαίρεσης απαιτεί τόσο τη διαδικαστική γνώση όσο και την εννοιολογική γνώση. Η διαδικαστική γνώση περιγράφεται ως την ικανότητα του ατόμου να επιλέγει τους κατάλληλους αλγορίθμους και να τους εφαρμόζει, ενώ η εννοιολογική γνώση αφορά την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας από το άτομο (Petit, Laird, Marsden & Ebby, 2015). Όπως επισημαίνει και η Sfard (2003), η κατανόηση μιας έννοιας μπορεί να επιτευχθεί μέσω της χρήσης της και ταυτόχρονα η ικανότητα εφαρμογής μιας έννοιας μπορεί να οδηγήσει στην κατανόησή της. Ωστόσο, κρίνεται αναγκαίο οι παιδαγωγικές πρακτικές να μην εισάγουν στους μαθητές εσπευσμένα αλγορίθμους και διαδικαστικές γνώσεις, ασύνδετες μεταξύ τους, αλλά να στοχεύουν στην εννοιολογική κατανόηση και την επανεπινόηση αλγορίθμων από τους μαθητές που έχουν νόημα και προκύπτουν από τον αναστοχασμό και τη νοητική αφαίρεση των δικών τους ενεργειών (Behr, κ.ά., 1983· Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007· Lamon, 2006).

1.1.3.Συμπερασματικά

Η κατάκτηση της γνώσης και η κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές, σύμφωνα με την εποικοδομητική θεωρία μάθησης, μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την κατασκευή των απαραίτητων γνωστικών σχημάτων αλλά και την ενεργοποίηση των κατάλληλων γνωστικών λειτουργιών που συνδέονται με αυτά. Ο εκπαιδευτικός έχει το ρόλο του διευκολυντή και υποστηριχτή αυτής της διαδικασίας παρέχοντας τις απαραίτητες ευκαιρίες στους μαθητές να ενεργήσουν και να αναστοχαστούν πάνω στις ενέργειές τους, ώστε να αναδιοργανώσουν, να ισχυροποιήσουν και να εσωτερικεύσουν τα γνωστικά τους σχήματα αλλά και να αναπτύξουν τις απαραίτητες γνωστικές λειτουργίες που αναδύονται από αυτά. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ο αναστοχασμός αποτελεί κρίσιμη νοητική διαδικασία, καθώς μέσω αυτού είναι δυνατόν να επιτευχθεί η εννοιολογική γνώση από τους μαθητές. Για να είναι αυτό εφικτό οι μαθητές πρέπει να εργάζονται σε ένα περιβάλλον πλούσιο σε ευκαιρίες για αναστοχασμό, οι οποίες παρέχονται από τις δραστηριότητες που επιλέγει ο εκπαιδευτικός ή από τις ερωτήσεις που απευθύνει στους μαθητές καθ' όλη τη διάρκεια εργασίας τους.

Από το σύνολο των λειτουργιών και των γνωστικών σχημάτων, που παρουσιάστηκαν παραπάνω και εμπλέκονται στην κατασκευή της έννοιας του κλάσματος και ιδιαίτερα της έννοιας της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων, στην παρούσα εργασία θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στη λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης (recursive partitioning). Η λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης θεωρείται κρίσιμη για την κατασκευή του γνωστικού σχήματος για τα ισοδύναμα κλάσματα (commensurate fractional scheme) και το γνωστικό σχήμα του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων (fractional composition scheme), τα οποία αποτελούν βασική προϋπόθεση για την ανάπτυξη του κλασματικού σχήματος της πρόσθεσης, όπως περιγράφεται από τον Steffe (2003).

Στη συνέχεια της παρούσας εργασίας, με γνώμονα τη σημαντικότητα της παροχής ευκαιριών για αναστοχασμό αλλά και ευκαιριών για την ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης στους μαθητές, θα παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζεται η έννοια της πρόσθεσης και της αφαίρεσης από τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Ε' και της Στ΄ Δημοτικού.

ΜΕΡΟΣ 2: Κριτική αξιολόγηση των διδακτικών εγχειριδίων

2.1. Η πρόσθεση και η αφαίρεση κλασμάτων στα σχολικά εγχειρίδια

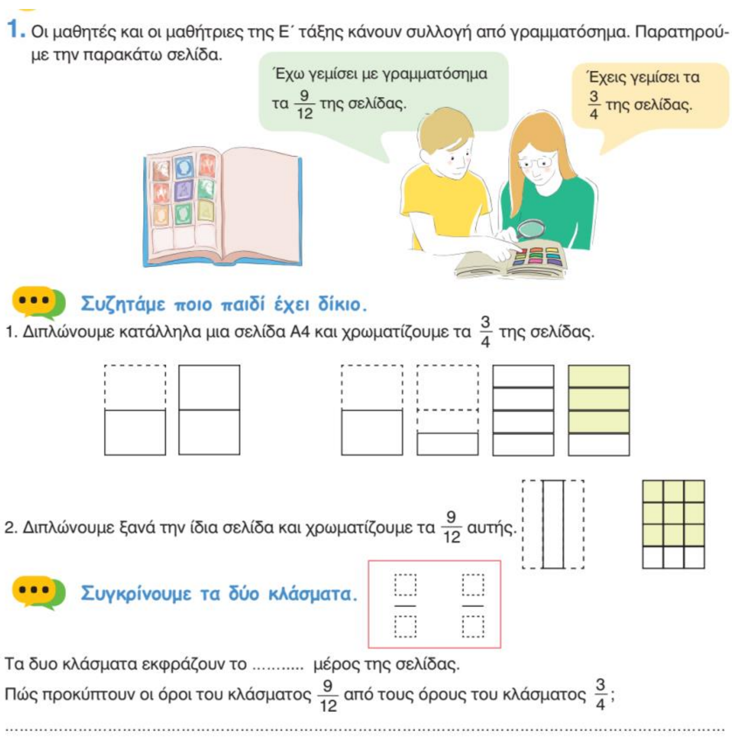
Πολύ συχνά οι δάσκαλοι στηρίζουν τη διδασκαλία τους αποκλειστικά στις δραστηριότητες και στις κατευθύνσεις των σχολικών εγχειριδίων, ειδικά σε γνωστικά αντικείμενα, όπως τα κλάσματα, τα οποία ενδέχεται να μην κατανοούν σε βάθος (Reeder & Utley, 2017). Έτσι, οι ευκαιρίες μάθησης και οι εμπειρίες των μαθητών κατά την επαφή με μια καινούργια έννοια επηρεάζονται πολλές φορές από τον τρόπο παρουσίασης της στο σχολικό εγχειρίδιο. Στη συγκεκριμένη ενότητα, θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο εισάγονται οι έννοιες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Ε’ και Στ’ τάξης του Δημοτικού και θα μελετήσουμε το βαθμό στον οποίο ενθαρρύνεται η εννοιολογική κατανόηση και γνώση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης από τους μαθητές μέσα από ευκαιρίες για αναστοχασμό πάνω στις ενέργειές τους, αλλά και προβληματικές καταστάσεις που προωθούν την ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης.

2.1.1. Η πρόσθεση και η αφαίρεση στα Μαθηματικά Ε’ δημοτικού

Το διδακτικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Ε’ Δημοτικού προσεγγίζει την έννοια των κλασματικών αριθμών στην 3η ενότητα του Α΄ τεύχους, αφιερώνοντας εννέα κεφάλαια για την προσέγγισή της (Κεφ. 13-Κεφ.21). Οι έννοιες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 18 του Βιβλίου Μαθητή (Βρυώνης, Δουκάκης, Καρακώστα, Μπαραλής & Σταύρου, 2018α) και του Τετραδίου εργασιών (Βρυώνης,, κ.ά, 2018β).

Στα κεφάλαια που προηγούνται του κεφαλαίου 18, προσεγγίζεται η έννοια του κλάσματος μέσα από τις διάφορες ερμηνείες του (ως μέρος-όλου, λόγος, μέτρο, πηλίκο και τελεστής), η έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων και η έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων. Στο σύνολο των δραστηριοτήτων στις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές στα κεφάλαια αυτά, παρέχεται σε μεγάλο βαθμό καθοδήγηση από τους συγγραφείς με αποτέλεσμα οι μαθητές να έχουν περιορισμένες ευκαιρίες να αυτενεργήσουν αλλά και να αναστοχαστούν πάνω στις ενέργειές τους. Ακόμα, παρατηρείται εσπευσμένη εισαγωγή αλγορίθμων και διαδικαστικών γνώσεων, η οποία πραγματοποιείται χωρίς να έχει προηγηθεί η βαθιά κατανόηση των εννοιών με τις οποίες σχετίζονται από τους μαθητές.

Ιδιαίτερη αναφορά αξίζει να γίνει στο κεφάλαιο στο οποίο προσεγγίζεται η έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων, καθώς, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, σχετίζεται με την κατάκτηση της έννοιας της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων. Στο κεφάλαιο αυτό, παρότι υπάρχουν δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να ενεργήσουν και να πραγματοποιήσουν αναδιπλώσεις χαρτιών (Εικόνα 2), οι ενέργειες των μαθητών δεν αξιοποιούνται στις επόμενες δραστηριότητες, με αποτέλεσμα να μην προωθούν τον αναστοχασμό των μαθητών πάνω σ' αυτές. Ακόμα, παρότι οι δραστηριότητες αυτές θα μπορούσαν να δημιουργήσουν ένα περιβάλλον κατάλληλο για την ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης, μέσω της εμπλοκής των μαθητών σε καταστάσεις ισομέρισης της ισομέρισης, αυτό δεν πραγματοποιείται. Το κεφάλαιο προωθεί την διαπίστωση της ισοδυναμίας μέσω της παρατήρησης και εισάγει τον αλγόριθμο δημιουργίας ισοδύναμων κλασμάτων, χωρίς αυτός να έχει προκύψει από τις ενέργειες των μαθητών, με αποτέλεσμα τα βήματά του να μην νοηματοδοτούνται από τους αυτούς.

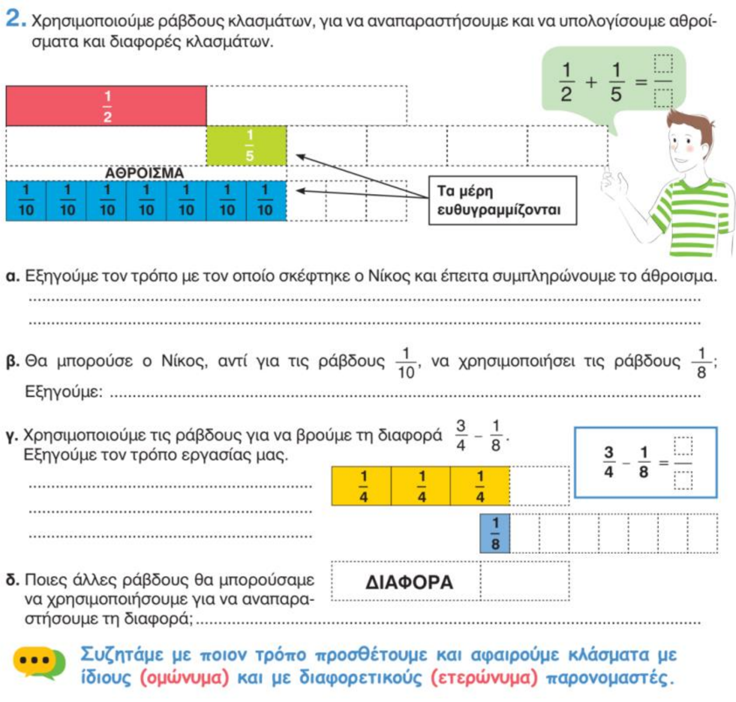


Εικόνα 2.Δραστηριότητα αναδίπλωσης κεφ.16-Ισοδύναμία κλασμάτων (Β.Μ. σελ.45)

Παρατηρείται, λοιπόν, ότι οι μαθητές δεν έχουν προετοιμαστεί κατάλληλα και δεν έχουν τις κατάλληλες ευκαιρίες να αναστοχαστούν αλλά και να αναπτύξουν τη λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης προτού έρθουν σε επαφή με τις έννοιες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων.

Στο Κεφάλαιο 18 – «Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων» ακολουθείται από τους συγγραφείς παρόμοιος τρόπος προσέγγισης με τα προηγούμενα κεφάλαια. Στην αρχική δραστηριότητα της Διερεύνησης υπάρχει μία ακολουθία από ασκήσεις όπου σταδιακά παρουσιάζονται καταστάσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων.

Αρχικά, οι μαθητές καλούνται να προσθέσουν και να αφαιρέσουν ομώνυμα κλάσματα, απεικονίζοντας το αποτέλεσμα της πρόσθεσης σε μία επιφάνεια, η οποία είναι ήδη τεμαχισμένη σε τετραγωνάκια. Στη συνέχεια, καλούνται να εξηγήσουν τον τρόπο που εργάστηκε ο μαθητής της προβληματικής κατάστασης προσθέτοντας αρχικά ετερώνυμα κλάσματα (Εικόνα 3). Η αναπαράσταση των κλασμάτων σε μπάρες δίνεται έτοιμη στους μαθητές καθώς και η αντιστοιχία των κλασμάτων αυτών σε μια μπάρα τεμαχισμένη με την κοινή μονάδα μέτρησης. Οι μαθητές έπειτα καθοδηγούνται να εργαστούν με τον ίδιο τρόπο για την αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων, χρησιμοποιώντας ήδη τεμαχισμένες ράβδους και να εξάγουν συμπεράσματα για τον τρόπο πρόσθεσης και αφαίρεσης ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων.

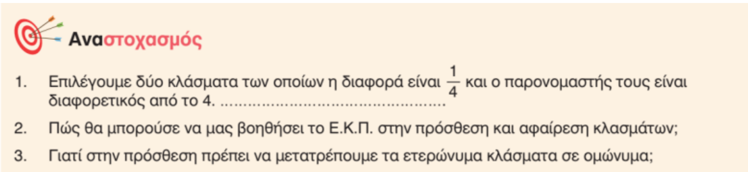


Εικόνα 3. Άσκηση 2 διερεύνησης (Β.Μ. σελ.49)

Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό, ότι η δραστηριότητα αυτή στερεί από τους μαθητές τη δυνατότητα να ενεργήσουν αλλά και να αναστοχαστούν πάνω στις δικές τους ενέργειες, εφόσον δίνει έτοιμες τεμαχισμένες περιοχές και δεν προωθεί την λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης, καθώς δεν δίνεται ευκαιρία στους μαθητές να πραγματοποιήσουν ισομέριση της ισομέρισης, αλλά και δεν τους δημιουργείται η ανάγκη να το πραγματοποιήσουν.

Στη συνέχεια πραγματοποιείται η εισαγωγή του αλγορίθμου πρόσθεσης και αφαίρεσης ετερώνυμων κλασμάτων αλλά και μεικτών αριθμών. Η εισαγωγή του αλγορίθμου κρίνεται εσπευσμένη, καθώς οι δραστηριότητες που έχουν προηγηθεί, δεν δίνουν αρκετές ευκαιρίες στους μαθητές να αναστοχαστούν και να νοηματοδοτήσουν τα αλγοριθμικά βήματα που παρουσιάζονται, αλλά και να κατανοήσουν σε βάθος την ανάγκη της κοινής μονάδας ισομέρισης/ κοινών παρονομαστών.

Ιδιαίτερη αναφορά αξίζει να γίνει στο πλαίσιο του «Αναστοχασμού» (Εικόνα 4) που παρουσιάζεται στο τέλος του κεφαλαίου. Παρότι η δεύτερη και η τρίτη ερώτηση αναστοχασμού θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν κατάλληλα από τον εκπαιδευτικό ώστε οι μαθητές να στοχαστούν πάνω στα βήματα του αλγορίθμου που έχει παρουσιαστεί, παρατηρούμε ότι και πάλι το ενδιαφέρον επικεντρώνεται σε διαδικαστικές γνώσεις.

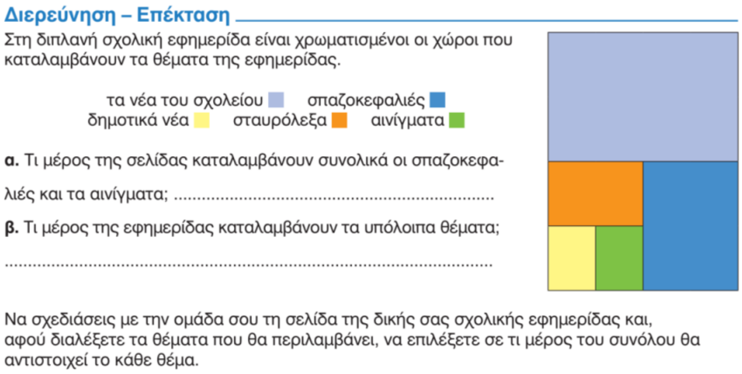

Αναστοχασμός

1. Επιλέγουμε δύο κλάσματα των οποίων η διαφορά είναι $\frac{1}{4}$ και ο παρονομαστής τους είναι διαφορετικός από το 4. ....
2. Πώς θα μπορούσε να μας βοηθήσει το Ε.Κ.Π. στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων;
3. Γιατί στην πρόσθεση πρέπει να μετατρέπουμε τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα;

Εικόνα 4. Αναστοχασμός (Β.Μ. σελ.50)

Οι ερωτήσεις αυτές θα μπορούσαν να αποτελούν πλαίσιο μέσα στο οποίο οι μαθητές θα είχαν την ευκαιρία να ενεργήσουν και να πραγματοποιήσουν πολλαπλές ισομερίσεις των ισομερίσεων, προωθώντας έτσι την ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης. Ωστόσο, η αξιοποίηση των ερωτήσεων αυτών στηρίζεται στις διδακτικές γνώσεις του εκπαιδευτικού αλλά και στην ικανότητά του να ενισχύσει τις ενέργειες και τον αναστοχασμό των μαθητών μέσω των κατάλληλων ερωτήσεων.

Στο Τετράδιο εργασιών, η πλειοψηφία των ασκήσεων και προβλημάτων αφορούν την εφαρμογή του αλγορίθμου της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων. Η «Δραστηριότητα Διερεύνησης – επέκτασης» (Εικόνα 5) θα μπορούσε να αποτελέσει μία ευκαιρία ώστε οι μαθητές να ενεργήσουν και να πραγματοποιήσουν ισομερίσεις των ισομερίσεων των δοσμένων ποσοτήτων της συνολικής επιφάνειας, στο πλαίσιο της προσπάθειας έκφρασης των ποσοτήτων με μία κοινή μονάδα ισομέρισης. Ωστόσο, και πάλι, η αξιοποίησή της είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ευχέρεια του εκπαιδευτικού.



Εικόνα 5.Δραστηριότητα Διερεύνησης-Επέκτασης (σελ.50ΤΕ)

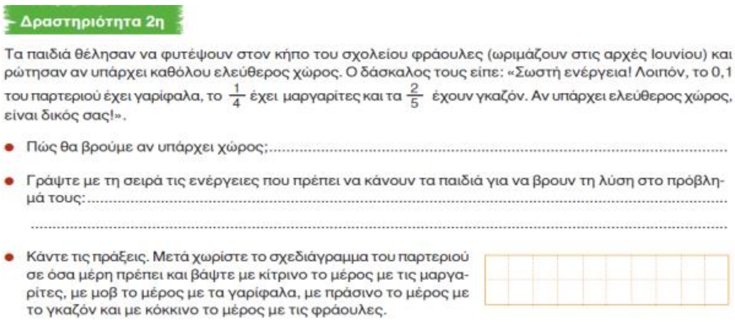
Συμπερασματικά, γίνεται εμφανές από τα παραπάνω ότι στο σχολικό εγχειρίδιο δίνεται μεγαλύτερη έμφαση σε διαδικαστικές γνώσεις και οι ευκαιρίες για αυτενέργεια και αναστοχασμό των μαθητών είναι περιορισμένες. Ακόμα, οι μαθητές δεν εμπλέκονται σε ποικίλες προβληματικές καταστάσεις, οι οποίες θα μπορούσαν να προωθήσουν την ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης. Η καθοδήγηση της σκέψης των μαθητών στο σύνολο των δραστηριοτήτων είναι έντονη, είτε αυτή παρέχεται από τους συγγραφείς είτε από τον εκπαιδευτικό και είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ευχέρεια του αλλά και τη διδακτική προσέγγιση που ο ίδιος επιλέγει.

2.1.2. Η πρόσθεση και η αφαίρεση στα Μαθηματικά Στ' δημοτικού

Το διδακτικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Στ' Δημοτικού αναφέρεται στην έννοια του κλάσματος στην 1η ενότητα- «Αριθμοί και πράξεις», αφιερώνοντας έξι κεφάλαια (Κεφ.19-Κεφ.24). Η πρόσθεση και η αφαίρεση κλασμάτων προσεγγίζεται στο του Βιβλίου Μαθητή (Κασσώτη, Κλιάπης & Οικονόμου, 2017α) και του Τετραδίου εργασιών (Κασσώτη, κ.ά, 2017β).

Στα πρώτα κεφάλαια προσέγγισης της έννοιας του κλάσματος, γίνεται αναφορά στο κλάσμα ως μέρος του όλου κι ως πηλίκο, στη σύγκριση και διάταξη αλλά και την ισοδυναμία κλασμάτων. Στην πλειοψηφία των δραστηριοτήτων με τις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές δεν δίνονται ευκαιρίες για αναστοχασμό αλλά για πραγματοποίηση πολλαπλών ισομερίσεων ποσοτήτων, ώστε να αναπτυχθεί η λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης. Όπως και στα αντίστοιχα κεφάλαια της Ε΄ Δημοτικού, παρατηρείται ότι οι συγγραφείς επικεντρώνονται σε διαδικαστικές γνώσεις. Παραθέτουν κανόνες και αλγοριθμικά βήματα, τα οποία καλούνται να ακολουθήσουν οι μαθητές, χωρίς αυτά να έχουν προκύψει από δικές τους ενέργειες και από τον αναστοχασμό τους πάνω σε αυτές.

Στο Κεφάλαιο 23, όπου προσεγγίζεται η έννοια της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων, οι πρώτες εισαγωγικές δραστηριότητες επικεντρώνονται στα αλγοριθμικά βήματα που πρέπει να ακολουθήσουν οι μαθητές για να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν ποσότητες, οι οποίες εκφράζονται με διάφορες μορφές (κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί). Οι δραστηριότητες αυτές δεν προωθούν καμία ενέργεια ισομέρισης και δεν τους δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να αναστοχαστούν πάνω στις ενέργειές τους. Ακόμα, οι προβληματικές καταστάσεις που επιλέγονται δεν δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές να πραγματοποιήσουν ισομερίσεις των ισομερίσεων, ώστε να βρουν μία κατάλληλη μονάδα μέτρησης/ισομέρισης για να εκφράσουν τα κλάσματα. Ιδιαίτερη αναφορά αξίζει να γίνει στη $2^{η}$ δραστηριότητα, όπου οι μαθητές καθοδηγούνται από τους συγγραφείς να εκτελέσουν πρώτα τις απαραίτητες πράξεις και στη συνέχεια να αποτυπώσουν το αποτέλεσμα στο σχήμα, το οποίο είναι ήδη τεμαχισμένο στην κοινή μονάδα μέτρησης των κλασμάτων (Εικόνα 6).



Δραστηριότητα 2η

Τα παιδιά θέλησαν να φυτέψουν στον κήπο του σχολείου φράουλες (ωριμάζουν στις αρχές Ιουνίου) και ρώτησαν αν υπάρχει καθόλου ελεύθερος χώρος. Ο δάσκαλος τους είπε: «Σωστή ενέργεια! Λοιπόν, το 0,1 του παρτεριού έχει γαρίφαλα, το $\frac{1}{4}$ έχει μαργαρίτες και τα $\frac{2}{5}$ έχουν γκαζόν. Αν υπάρχει ελεύθερος χώρος, είναι δικός σας!».

- Πώς θα βρούμε αν υπάρχει χώρος;……………
- Γράψτε με τη σειρά τις ενέργειες που πρέπει να κάνουν τα παιδιά για να βρουν τη λύση στο πρόβλημά τους:……………
- Κάντε τις πράξεις. Μετά χωρίστε το σχεδιάγραμμα του παρτεριού σε όσα μέρη πρέπει και βάψτε με κίτρινο το μέρος με τις μαργαρίτες, με μοβ το μέρος με τα γαρίφαλα, με πράσινο το μέρος με το γκαζόν και με κόκκινο το μέρος με τις φράουλες.

Εικόνα 6.Δραστηριότητα 2 (Β.Μ. σελ.53)

Στις ασκήσεις στο τετράδιο εργασιών δίνεται και πάλι έμφαση στην εφαρμογή του αλγορίθμου της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, με χαρακτηριστικό παράδειγμα την Άσκηση 2 (Εικόνα 7), όπου οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν μία αριθμητική παράσταση.

Άσκηση 2η

Να υπολογίσεις την παρακάτω αριθμητική παράσταση:

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{11}{12}+\frac{7}{24}\right)-2\frac{2}{6}$$

Εικόνα 7. Άσκηση 2 (Τ.Ε. σελ.15)

2.1.3.Συμπερασματικά

Όπως παρουσιάστηκε στις προηγούμενες υποενότητες, το εγχειρίδιο της Ε΄ Δημοτικού και το εγχειρίδιο της Στ΄ Δημοτικού δεν παρέχουν στους μαθητές τις κατάλληλες ευκαιρίες μέσω των επιλεγμένων δραστηριοτήτων ώστε να κατανοήσουν σε βάθος την έννοια του κλάσματος και ιδιαίτερα τις έννοιες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων.

Οι προβληματικές καταστάσεις, οι οποίες επιλέγονται από τους συγγραφείς, δεν παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να ενεργήσουν και να πραγματοποιήσουν ποικίλες ισομερίσεις ποσοτήτων, ούτε προωθούν την ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης μέσα από ισομερίσεις πολλαπλών επιπέδων. Το γεγονός αυτό δεν καθιστά εφικτή τη νοηματοδότηση των αλγοριθμικών βημάτων, τα οποία επίμονα καλούνται να ακολουθήσουν οι μαθητές, και δεν αναδεικνύει την αναγκαιότητα της εύρεσης κοινής μονάδας μέτρησης/ ισομέρισης για την έκφραση των ποσοτήτων κατά τη μετατροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα.

Η καθοδήγηση που παρέχεται από τους συγγραφείς και των δύο εγχειριδίων στερεί την αυτενέργεια των μαθητών και τους στρέφει στην απομνημόνευση και την εκτέλεση αλγοριθμικών βημάτων. Οι ευκαιρίες για αναστοχασμό είναι περιορισμένες, καθώς πολύ συχνά δίνονται έτοιμες σκέψεις, οι οποίες ενδεχομένως να μην συνδέονται με τις νοητικές κατασκευές των μαθητών. Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει αναφορά σε ορισμένες δραστηριότητες, οι οποίες θα μπορούσαν να αποτελέσουν πηγή αναστοχασμού των μαθητών, μέσω της κατάλληλής αξιοποίησης από τον εκπαιδευτικό. Ωστόσο, ο βαθμός που αυτό μπορεί να επιτευχθεί άπτεται στην ευχέρεια του εκπαιδευτικού να διακρίνει τέτοιες καταστάσεις αλλά και να υποστηρίξει τον συλλογισμό των μαθητών προς αυτή την κατεύθυνση με τις κατάλληλες ερωτήσεις. Έτσι, ένας εκπαιδευτικός, ο οποίος ακολουθεί πιστά τα εγχειρίδια για τη διδασκαλία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων, είναι πολύ πιθανό να μην εντοπίσει τέτοιες ευκαιρίες, με αποτέλεσμα να περιοριστεί στη διδασκαλία των αλγοριθμικών βημάτων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, τα οποία στερούνται νοήματος για τους μαθητές.

ΜΕΡΟΣ 3: Διεξαγωγή Έρευνας

3.1 Στόχος έρευνας

Όπως αναδείχθηκε από την παραπάνω παρουσίαση του θεωρητικού πλαισίου, η πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων αποτελούν ένα γνωστικό αντικείμενο το οποίο για να κατανοήσουν οι μαθητές σε βάθος απαιτείται να έχουν εμπλακεί σε καταστάσεις που προωθούν τον αναστοχασμό αλλά και την ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης. Ωστόσο, όπως έγινε φανερό από την ανάλυση του τρόπου προσέγγισης της έννοιας του κλάσματος και ειδικότερα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης από τα σχολικά εγχειρίδια της Ε΄ και Στ΄ τάξης (βλ. Ενότητα 1.2), οι μαθητές δεν έχουν ποικίλες ευκαιρίες να αναστοχαστούν και να αναπτύξουν τη λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης και στρέφονται στην απομνημόνευση αλγοριθμικών βημάτων.

Σε μία τάξη της Στ’ Δημοτικού, στην οποία δίδαξα την ενότητα των κλασμάτων με βάση τα εγκεκριμένα διδακτικά εγχειρίδια για τους μαθητές και τον δάσκαλο, σχεδίασα μια μικρή έρευνα προκειμένου να τεκμηριώσω ότι τα εγχειρίδια αυτά κάθε άλλο παρά προωθούν την εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, υπέθεσα, με βάση όσα αναφέρθηκαν στο πρώτο μέρος της εργασίας, ότι οι μαθητές μου[2] θα ήταν σε θέση να βρίσκουν το άθροισμα ή τη διαφορά δύο κλασμάτων, χωρίς όμως να μπορούν να αντιμετωπίζουν προβλήματα των οποίων η λύση σχετίζεται με τα προαπαιτούμενα της κατανόησης αυτών των υπολογισμών. Στην επόμενη ενότητα, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο έλεγξα αυτή την υπόθεση.

3.2. Μεθοδολογία της έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 25 μαθητές μίας Στ’ τάξης του Ιδιωτικού Σχολείου που διδάσκω. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι μαθητές είχαν διδαχθεί στην Ε’ Δημοτικού τα νέα σχολικά εγχειρίδια (βλ. Ενότητα 2.1.1) και κατά τη χρονική περίοδο της διεξαγωγής της έρευνας είχε ολοκληρωθεί η ενότητα των κλασμάτων της Στ’ Δημοτικού (βλ. Ενότητα 2.1.2).

[2] Οι ίδιοι μαθητές και στην Ε’ τάξη Δημοτικού είχαν διδαχθεί τα κλάσματα από τα αντίστοιχα εγχειρίδια.

Για τους σκοπούς της έρευνας δημιουργήθηκαν δύο φύλλα εργασίας (βλ. Παράρτημα), λαμβάνοντας υπόψη το θεωρητικό πλαίσιο που παρουσιάστηκε παραπάνω. Οι μαθητές δούλεψαν αυτόνομα στα φύλλα εργασίας, χωρίς να δίνεται καμία βοήθεια από τον ερευνητή, αλλά και χωρίς να έχει πραγματοποιηθεί κάποια σχετική προετοιμασία. Τα φύλλα εργασίας διανεμήθηκαν στους μαθητές σε δύο φάσεις και σε περίοδο δύο ημερών και συμπληρώθηκαν ανώνυμα ώστε να μην συνδυαστεί η επεξεργασία τους με μία αξιολογική διαδικασία και να επηρεάσει τις επιδόσεις τους.

Το πρώτο φύλλο εργασίας στοχεύει στον έλεγχο της αρχικής μου υπόθεσης ότι οι μαθητές είναι ικανοί να βρουν το άθροισμα ή τη διαφορά δύο κλασμάτων και περιέχει μία πρόσθεση και μία αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων. Στο δεύτερο φύλλο εργασίας, διερευνάται αν οι μαθητές έχουν κατακτήσει τα προαπαιτούμενα της κατανόησης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων και είναι ικανοί να αντιμετωπίσουν προβλήματα που τα απαιτούν. Στη συνέχεια, ακολουθεί η παρουσίαση της λογικής των προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στα δύο φύλλα εργασίας.

3.2.1. Η λογική των προβλημάτων στα 2 φύλλα εργασίας

Στο Φύλλο εργασίας 1 (βλ. Παράρτημα), ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν το άθροισμα και τη διαφορά δύο ετερώνυμων κλασμάτων. Σωστή απάντηση θεωρείται κάθε ισοδύναμο κλάσμα της αναμενόμενης απάντησης (Εικόνα 8). Εφόσον οι μαθητές απλά θυμούνται τα βήματα των αλγορίθμων της πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων θα δώσουν τις σωστές απαντήσεις.

Με τα προβλήματα του Φύλλου εργασίας 2 θα είμαστε σε θέση να ελέγξουμε αν η γνώση αυτών των βημάτων συνοδεύεται από κατανόηση της πρόσθεσης και αφαίρεσης των κλασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο πρόβλημα του Φύλλου

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{8}{15} \qquad \frac{5}{6}-\frac{4}{9}=\frac{15}{18}-\frac{8}{18}=\frac{7}{18}$$

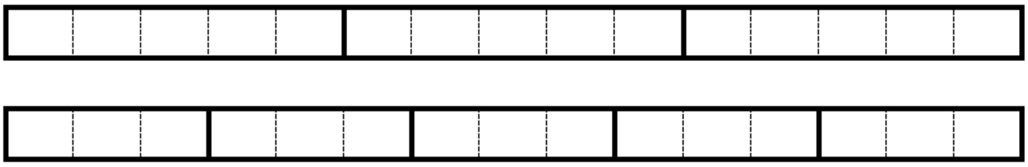
εργασίας 2 (βλ. Παράρτημα) οι μαθητές αναμένεται να τεμαχίσουν μια δοσμένη ποσότητα σε 12 ίσα μέρη και να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο το πραγματοποίησαν. Η ικανότητα των μαθητών να λύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα θα μας δείξει το βαθμό στον οποίο είναι σε θέση να ενεργοποιούν, αυθόρμητα, τη λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης. Αποδεκτή απάντηση στη συγκεκριμένη δραστηριότητα θα μπορούσε να είναι η ισομέριση του όλου σε δύο ίσα μέρη ($\frac{2}{2}$), κάθε μέρος ($\frac{1}{2}$) σε δύο ίσα μέρη ($\frac{4}{4}$) και στη συνέχεια η ισομέριση κάθε μέρους ($\frac{1}{4}$) σε τρία ίσα μέρη ($\frac{12}{12}$) (Εικόνα 9). Βέβαια, αυτές οι διαδοχικές ισομερίσεις που παρουσιάζονται θα μπορούσαν να γίνουν με διαφορετική σειρά.

Εικόνα 9. Προσδοκώμενη απάντηση $1^{ου}$ προβλήματος (Φύλλο εργασίας 2)

Στο δεύτερο πρόβλημα, δίνεται το μέρος μίας ποσότητας στους μαθητές και καλούνται να πραγματοποιήσουν μια νέα ισομέριση αλλά και να την επεκτείνουν στο όλο. Έτσι, οι μαθητές αναμένεται να τεμαχίσουν το $\frac{1}{4}$ του κέικ σε τρία ίσα μέρη, να φανταστούν τα υπόλοιπα κομμάτια του κέικ και να επεκτείνουν την ισομέριση, ώστε να εκφράσουν το μέρος ολόκληρου του κέικ που αποτελεί το μερίδιο κάθε ατόμου (Εικόνα 10). Με το πρόβλημα αυτό, θα φανεί η ικανότητα των μαθητών να προβαίνουν σε αναδρομική ισομέριση ακόμα και σε περιπτώσεις όπου το πλαίσιο μιας προβληματικής κατάστασης δεν παραπέμπει φανερά στη διενέργεια ισομέρισης ενός όλου.

Εικόνα 10. Προσδοκώμενη απάντηση $2^{ου}$ προβλήματος (Φύλλο εργασίας 2)

Στο τρίτο πρόβλημα, οι μαθητές καλούνται να βρουν μία κοινή ισομέριση δύο ποσοτήτων, οι οποίες είναι ήδη τεμαχισμένες με διαφορετικό τρόπο. Το πρόβλημα αυτό συνδέεται άμεσα με την ικανότητα των μαθητών να προσθέτουν και να αφαιρούν ετερώνυμα κλάσματα με νόημα. Οι μαθητές αναμένεται να εκφράσουν τις δύο ποσότητες ως $\frac{15}{15}$, τεμαχίζοντας κάθε μέρος της πρώτης σε πέντε ίσα μέρη και κάθε μέρος της δεύτερης σε τρία ίσα μέρη (Εικόνα 11).



Εικόνα 11. Προσδοκώμενη απάντηση $3^{ου}$ προβλήματος (Φύλλο εργασίας 2)

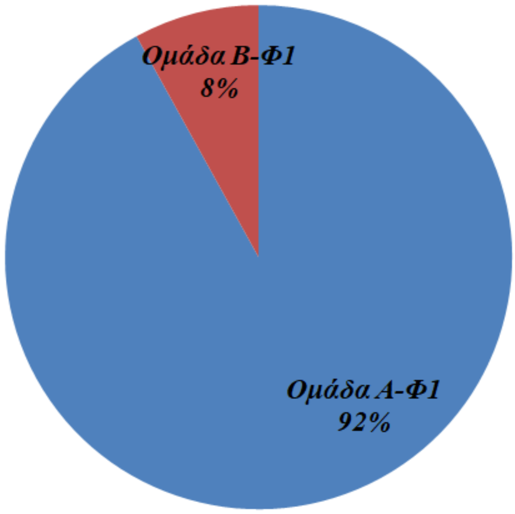
ΜΕΡΟΣ 4: Συμπεράσματα - Προτάσεις

4.1. Ερευνητικά αποτελέσματα

Μετά την ολοκλήρωση της συμπλήρωσης των φύλλων εργασίας από τους μαθητές έγινε ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών. Παρακάτω ακολουθεί αναλυτική παρουσίαση των ερευνητικών αποτελεσμάτων ανά φύλλο εργασίας, καθώς και παραδείγματα του τρόπου με τον οποίο προσέγγισαν οι μαθητές τις προβληματικές καταστάσεις.

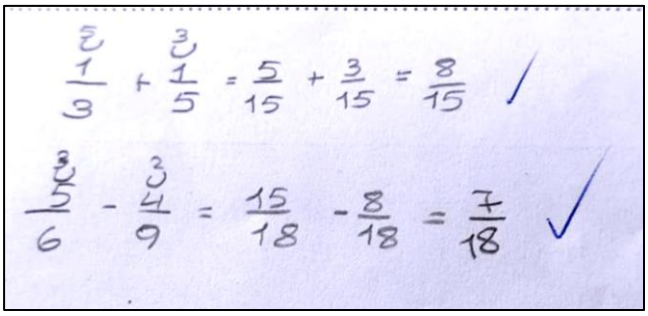
4.1.1. Ανάλυση ερευνητικών αποτελεσμάτων – Φύλλο εργασίας 1

Από τα 25 φύλλα εργασίας που συλλέχθηκαν, οι 23 μαθητές (ποσοστό 92%) ολοκλήρωσαν με επιτυχία τις ζητούμενες πράξεις (*Ομάδα Α-Φ1*), ενώ 2 μαθητές (ποσοστό 8%) δεν κατάφεραν να υπολογίσουν σωστά το αποτέλεσμα των πράξεων (*Ομάδα Β-Φ1*) (Εικόνα 12).

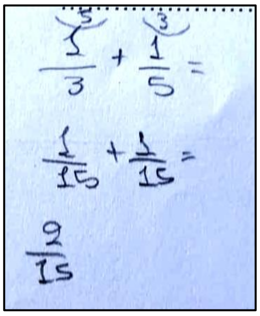


Εικόνα 12. Διάγραμμα ποσοστών επιτυχίας -Φύλλο εργασίας 1

Οι μαθητές της Ομάδας Α μετέτρεψαν σωστά τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα και υπολόγισαν σωστά το τελικό αποτέλεσμα των πράξεων (Εικόνα 13). Οι μαθητές της Ομάδας Β δεν κατάφεραν να ακολουθήσουν τα αλγοριθμικά βήματα και να μετατρέψουν σωστά τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα, καθώς κατά την μετατροπή πολλαπλασίασαν μόνο τους παρονομαστές, διατηρώντας ίδιους τους αριθμητές των κλασμάτων (Εικόνα 14). Θα μπορούσαμε να αναρωτηθούμε εάν οι δύο αυτοί μαθητές διαφέρουν ουσιαστικά από τους υπόλοιπους που βρήκαν τη σωστή απάντηση. Αν οι υπόλοιποι 23 μαθητές απλά θυμήθηκαν τα αλγοριθμικά βήματα, χωρίς να κατανοούν τη σημασία τους, οι 2 αυτοί μαθητές απλά τα ξέχασαν.



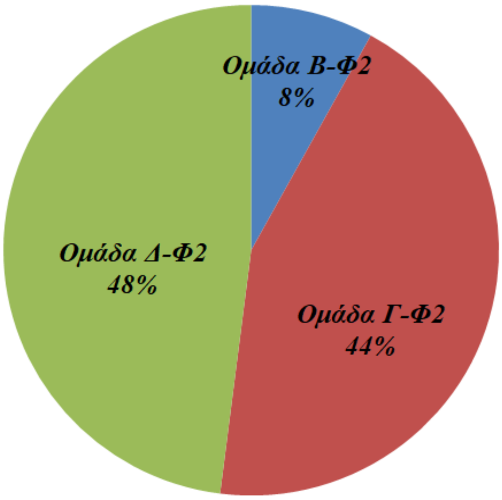
Εικόνα 13. Ενδεικτικό παράδειγμα Ομάδα Α (Φύλλο εργασίας 1)



Εικόνα 14. Ενδεικτικό παράδειγμα Ομάδα Β (Φύλλο εργασίας 1)

4.1.2. Ανάλυση ερευνητικών αποτελεσμάτων – Φύλλο εργασίας 2

Κανείς μαθητής (Ποσοστό 0%) δεν κατάφερε να ολοκληρώσει με επιτυχία και τις τρεις προβληματικές καταστάσεις (*Ομάδα Α-Φ2*). Μόνο 2 μαθητές (Ποσοστό 8%) κατάφεραν να ολοκληρώσουν με επιτυχία δύο από τις τρεις προβληματικές καταστάσεις (*Ομάδα Β-Φ2).* 11 μαθητές (Ποσοστό 44%) κατάφεραν να ολοκληρώσουν με επιτυχία μία από τις τρεις προβληματικές καταστάσεις (*Ομάδα Γ-Φ2),* και οι 12 μαθητές (Ποσοστό 48%) δεν κατάφεραν να ολοκληρώσουν καμία προβληματική κατάσταση με επιτυχία (*Ομάδα Δ-Φ2*) (Εικόνα 15).

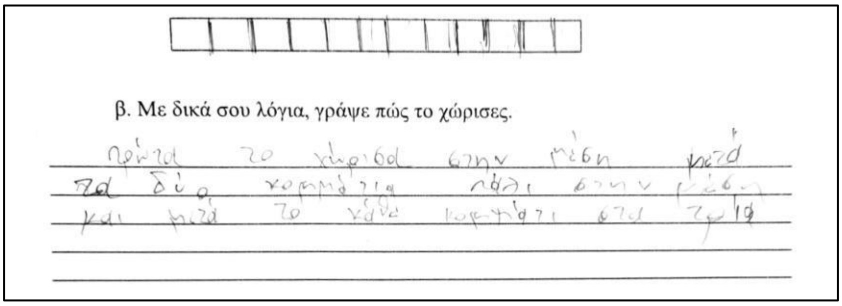


Εικόνα 15.Διάγραμμα ποσοστών επιτυχίας -Φύλλο εργασίας 2

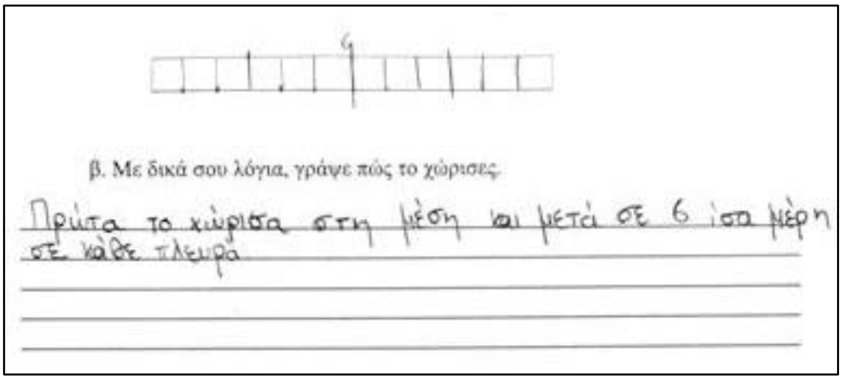
Στη συνέχεια ακολουθεί η ανάλυση των ερευνητικών αποτελεσμάτων ανά πρόβλημα, καθώς και ενδεικτικά παραδείγματα του τρόπου που αυτές προσεγγίστηκαν από τους μαθητές.

Στο πρώτο πρόβλημα, οι 4 μαθητές (Ποσοστό 16%) κατάφεραν να πραγματοποιήσουν με επιτυχία την ισομέριση της δοσμένης ποσότητας σε 12 μέρη χρησιμοποιώντας διαφορετικές στρατηγικές. Οι υπόλοιποι μαθητές (Ποσοστό 84%) δεν επέλεξαν την κατάλληλη στρατηγική ισομέρισης με αποτέλεσμα να μην μπορούν να δημιουργήσουν 12 μέρη ή να τα δημιουργούν «*με το μάτι*», όπως αναφέρουν, και να αποδέχονται τεμαχισμούς από τους οποίους δεν προκύπτουν ίσα μέρη.

Οι μαθητές που πραγματοποίησαν επιτυχώς την ισομέριση επέλεξαν την προσδοκώμενη στρατηγική (βλ. Ενότητα 3.2.2.) με διαφοροποιήσεις στη σειρά των ισομερίσεων που πραγματοποίησαν (Εικόνα 16). Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει ιδιαίτερη αναφορά στην περίπτωση μαθητή, ο οποίος, ενώ είναι φανερό ότι χώρισε την επιφάνεια πρώτα σε δεύτερα, στη συνέχεια σε τέταρτα και έπειτα σε δωδέκατα, στην επεξήγηση της στρατηγικής του αναφέρει ότι «*πρώτα το χώρισα στη μέση και μετά σε 6 ίσα μέρη*» (Εικόνα 17).

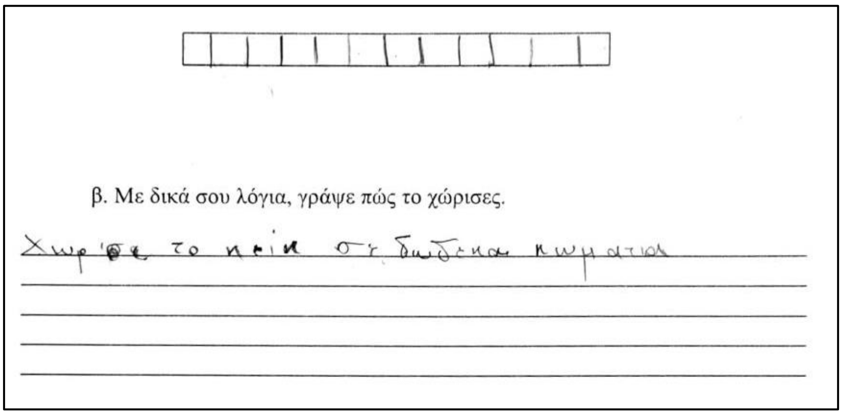


Εικόνα 16. Ενδεικτικό παράδειγμα 1 – επιτυχής ισομέριση

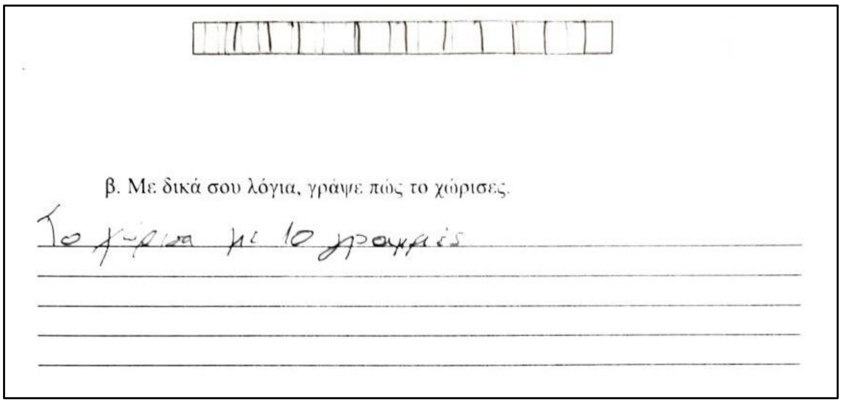


Εικόνα 17. Ενδεικτικό παράδειγμα 2 - επιτυχής ισομέριση

Όσο αφορά τους μαθητές, οι οποίοι πραγματοποίησαν ανεπιτυχώς τη ζητούμενη ισομέριση, οι περισσότεροι δεν δημιούργησαν ίσα μέρη (Εικόνα 18) ή δημιούργησαν λιγότερα από τα ζητούμενα μέρη (Εικόνα 19), καθώς προσπάθησαν με δοκιμές να χωρίσουν την ποσότητα κατευθείαν σε 12 μέρη.

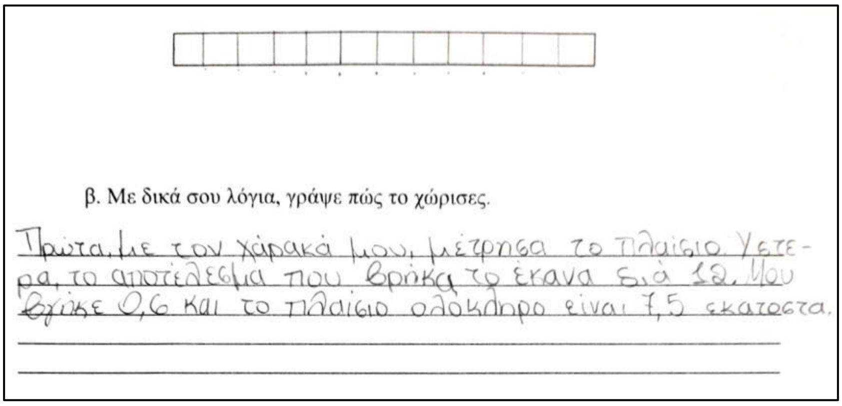


Εικόνα 18. Ενδεικτικό παράδειγμα 1 - ανεπιτυχής ισομέριση



Εικόνα 19.Ενδεικτικό παράδειγμα 2 - ανεπιτυχής ισομέριση

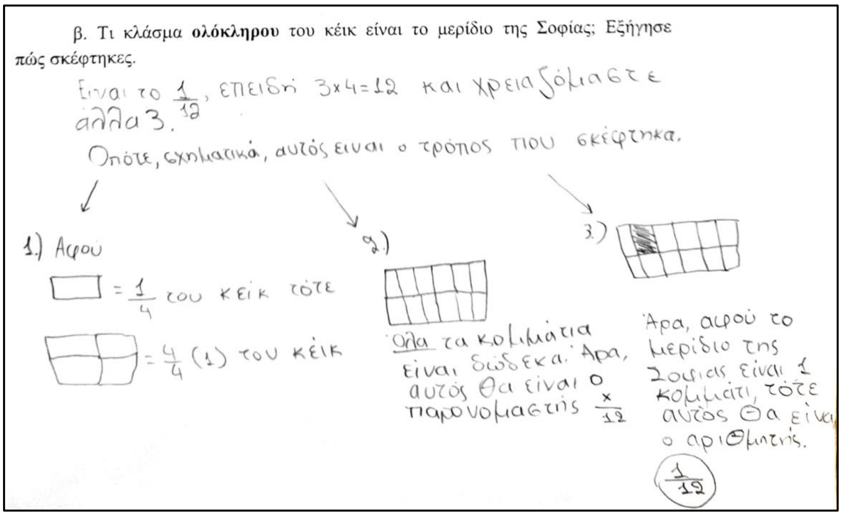
Ιδιαίτερη αναφορά αξίζει να γίνει σε δύο περιπτώσεις, οι οποίες δεν ακολούθησαν την οδηγία του ερευνητή και πραγματοποίησαν την ισομέριση χρησιμοποιώντας χάρακα (Εικόνα 20). Κατά τη διάρκεια της συμπλήρωσης του φύλλου εργασίας οι μαθητές αναρωτήθηκαν *«Δεν πρέπει να έχουμε χάρακα γι' αυτή την άσκηση;»* και παρότι πήραν αρνητική απάντηση από τον ερευνητή, δεν κατάφεραν να βρουν άλλη στρατηγική ισομέρισης. Έτσι, κατέφυγαν στη χρήση του χάρακα. Το γεγονός αυτό φανερώνει ότι οι μαθητές είναι εθισμένοι στην εκτέλεση διαδικαστικών βημάτων και δεν έχουν εξοικειωθεί σε καταστάσεις όπου απαιτείται να ενεργήσουν και να πραγματοποιήσουν ποικίλες ισομερίσεις και να βρουν διαφορετικές στρατηγικές.



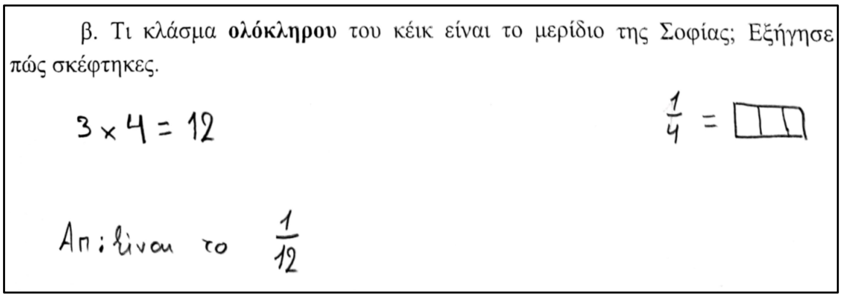
Εικόνα 20. Ενδεικτικό παράδειγμα 3 - ανεπιτυχής ισομέριση

Στο δεύτερο πρόβλημα, οι 8 μαθητές (Ποσοστό 32%) κατάφεραν να πραγματοποιήσουν με επιτυχία την ισομέριση της δοσμένης ποσότητας σε 3 μέρη αλλά και να επεκτείνουν την ισομέριση στο όλο. Οι υπόλοιποι μαθητές (Ποσοστό 68%) δεν κατάφεραν να πραγματοποιήσουν ούτε την ισομέριση ούτε την επέκταση αυτής ή πραγματοποίησαν επιτυχώς την ισομέριση αλλά δεν κατάφεραν να την επεκτείνουν σωστά στο όλο.

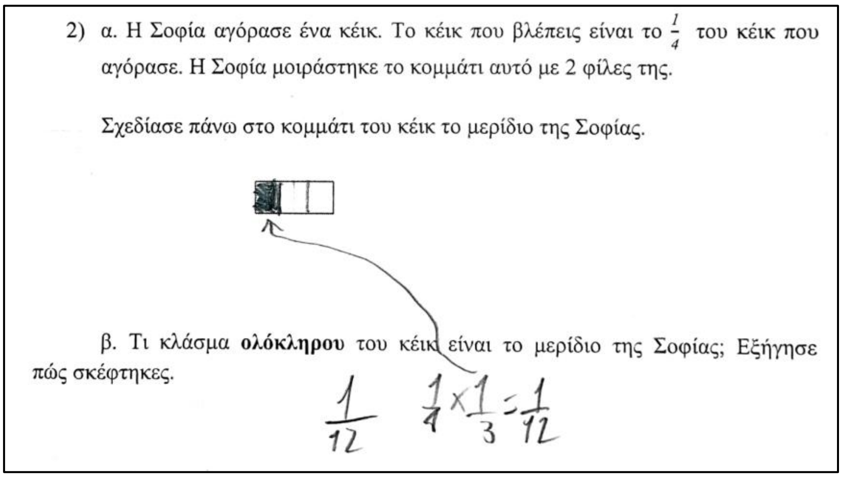
Οι μαθητές, οι οποίοι επίλυσαν σωστά το πρόβλημα εργάστηκαν με διαφορετικούς τρόπους. Κάποιοι σχεδίασαν το όλο (Εικόνα 21) ή το φαντάστηκαν (Εικόνα 22) και πραγματοποίησαν την επέκταση, εκφράζοντας σωστά το μέρος που εκφράζει η ζητούμενη ποσότητα, ενώ κάποιοι άλλοι κατέφυγαν στη χρήση του αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Εικόνα 23). Τίθεται, βέβαια, το ερώτημα κατά πόσον οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού τον έχουν αναπτύξει μέσα από την αναδρομική ισομέριση ή έχουν απλά απομνημονεύσει τα βήματά του.



Εικόνα 21.Ενδεικτικό παράδειγμα 1 - επιτυχής επέκταση

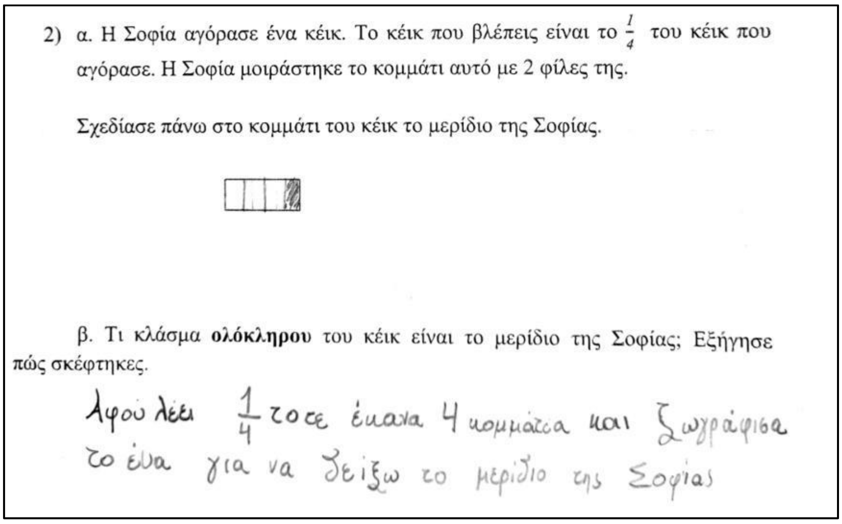


Εικόνα 22.Ενδεικτικό παράδειγμα 2 - επιτυχής επέκταση



Εικόνα 23.Ενδεικτικό παράδειγμα 3 - επιτυχής επέκταση

Οι υπόλοιποι μαθητές, οι οποίοι δεν ολοκλήρωσαν με επιτυχία το δεύτερο πρόβλημα χωρίζονται σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες. Κάποιοι δεν κατάφεραν να πραγματοποιήσουν σωστά ούτε την ισομέριση της αρχικής ποσότητας ούτε την επέκταση αυτής στο όλο (Εικόνα 24, 25), κάποιοι πραγματοποίησαν σωστά την ισομέριση αλλά δεν προσπάθησαν να την επεκτείνουν στο όλο, ενώ κάποιοι άλλοι πραγματοποίησαν σωστά την ισομέριση αλλά πραγματοποίησαν ανεπιτυχώς την επέκτασή της στο όλο. Ενδεικτικό είναι το παράδειγμα μαθητή, ο οποίος κατά την επέκταση της ισομέρισης στο όλο, φαίνεται να προσθέτει με λανθασμένη στρατηγική τα κλάσματα $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{3}$, εξάγοντας το συμπέρασμα ότι το ζητούμενο μερίδιο αποτελεί το $\frac{1}{7}$ του όλου (Εικόνα 26).



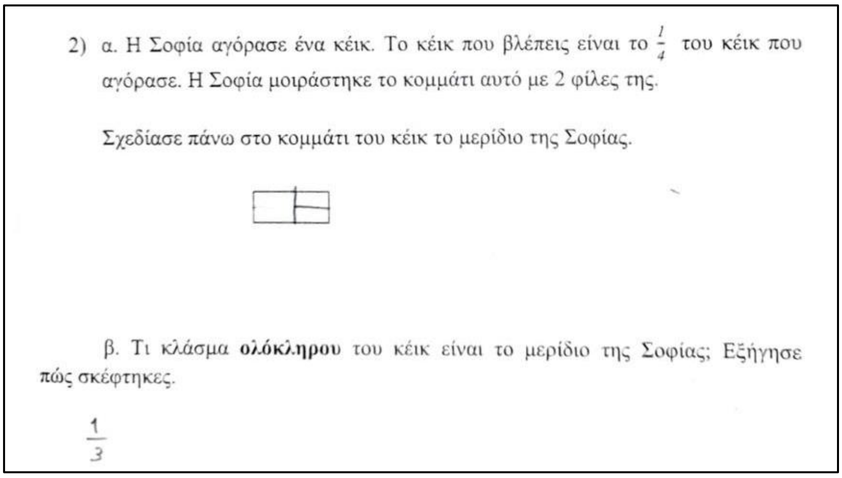
2) α. Η Σοφία αγόρασε ένα κέικ. Το κέικ που βλέπεις είναι το $\frac{1}{4}$ του κέικ που αγόρασε. Η Σοφία μοιράστηκε το κομμάτι αυτό με 2 φίλες της.

Σχεδίασε πάνω στο κομμάτι του κέικ το μερίδιο της Σοφίας.

β. Τι κλάσμα **ολόκληρου** του κέικ είναι το μερίδιο της Σοφίας; Εξήγησε πώς σκέφτηκες.

Αφού λέει $\frac{1}{4}$ τοτε έκανα 4 κομμάτια και ζωγράφισα το ένα για να δείξω το μερίδιο της Σοφίας

Εικόνα 24. Ενδεικτικό παράδειγμα 1 - ανεπιτυχής ισομέριση και επέκταση



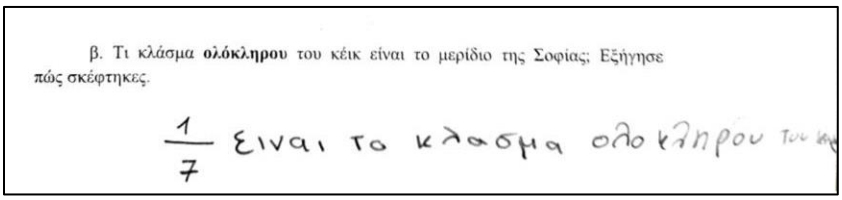
2) α. Η Σοφία αγόρασε ένα κέικ. Το κέικ που βλέπεις είναι το $\frac{1}{4}$ του κέικ που αγόρασε. Η Σοφία μοιράστηκε το κομμάτι αυτό με 2 φίλες της.

Σχεδίασε πάνω στο κομμάτι του κέικ το μερίδιο της Σοφίας.

β. Τι κλάσμα **ολόκληρου** του κέικ είναι το μερίδιο της Σοφίας; Εξήγησε πώς σκέφτηκες.

$\frac{1}{3}$

Εικόνα 25. Ενδεικτικό παράδειγμα 2 - ανεπιτυχής ισομέριση και επέκταση

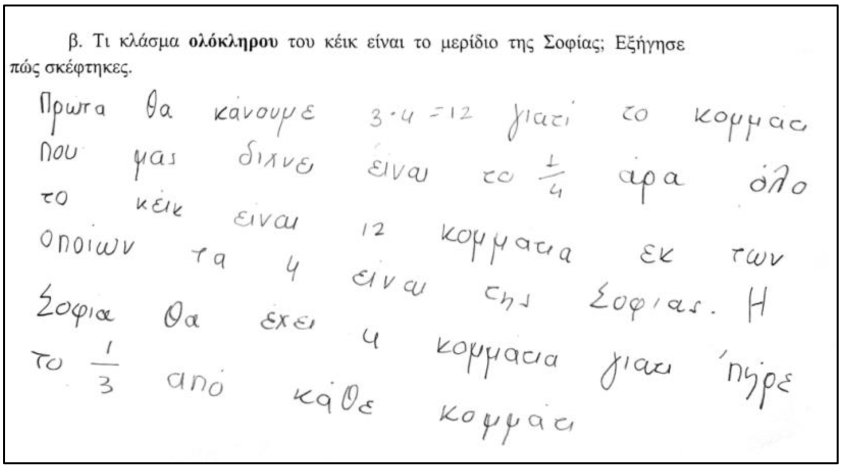


β. Τι κλάσμα **ολόκληρου** του κέικ είναι το μερίδιο της Σοφίας; Εξήγησε πώς σκέφτηκες.

$\frac{1}{7}$ Ειναι το κλασμα ολοκληρου του

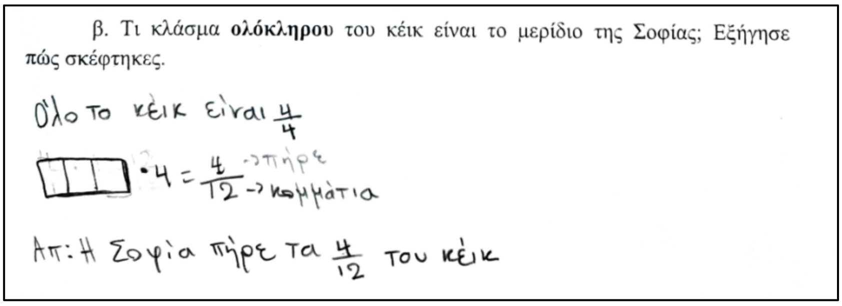
Εικόνα 26.Ενδεικτικό παράδειγμα 1 - ανεπιτυχής επέκταση

Ιδιαίτερη αναφορά αξίζει να γίνει στις περιπτώσεις μαθητών, οι οποίοι ανέπτυξαν μία σωστή στρατηγική για επέκταση της ισομέρισης στο όλο, αλλά τελικά δεν κατάφεραν να εκφράσουν σωστά το μέρος του όλου της ζητούμενης ποσότητας (Εικόνα 27, 28, 29). Ένας από αυτούς τους μαθητές κατά τη διάρκεια της συμπλήρωσης του φύλλου εργασίας αναρωτήθηκε *«Μήπως να σχεδιάσω όλο το κέικ; Θα με βοηθήσει»*, ωστόσο δεν ολοκλήρωσε τον συλλογισμό του επιτυχώς.


β. Τι κλάσμα **ολόκληρου** του κέικ είναι το μερίδιο της Σοφίας; Εξήγησε πώς σκέφτηκες.

Πρωτα θα κανουμε $3 \cdot 4 = 12$ γιατι το κομμαι
που μας διχνε ειναι το $\frac{1}{4}$ άρα όλο
το κεικ ειναι 12 κομματια εκ των
οποιων τα 4 ειναι της Σοφιας. Η
Σοφια θα εχει 4 κομματια γιατι πήρε
το $\frac{1}{3}$ από καθε κομματι

Εικόνα 27.Ενδεικτικό παράδειγμα 1

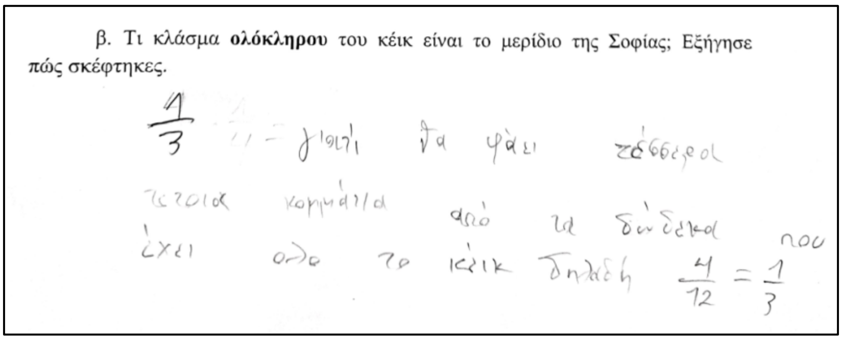

β. Τι κλάσμα **ολόκληρου** του κέικ είναι το μερίδιο της Σοφίας; Εξήγησε πώς σκέφτηκες.

Όλο το κέικ είναι $\frac{4}{4}$

$\cdot 4 = \frac{4}{12}$ -> πήρε, -> κομμάτια

Απ: Η Σοφία πήρε τα $\frac{4}{12}$ του κέικ

Εικόνα 28. Ενδεικτικό παράδειγμα 2


β. Τι κλάσμα **ολόκληρου** του κέικ είναι το μερίδιο της Σοφίας; Εξήγησε πώς σκέφτηκες.

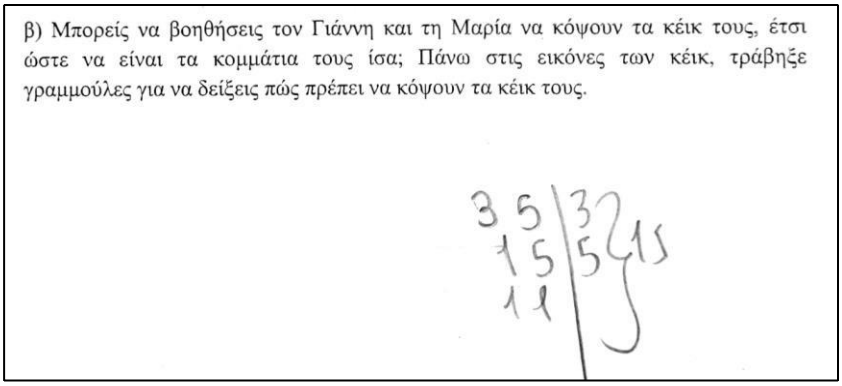
$\frac{1}{3}$ γιατί θα φάει τέσσερα
τέτοια κομμάτια από τα δώδεκα που
έχει όλο το κέικ δηλαδή $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Εικόνα 29. Ενδεικτικό παράδειγμα 3

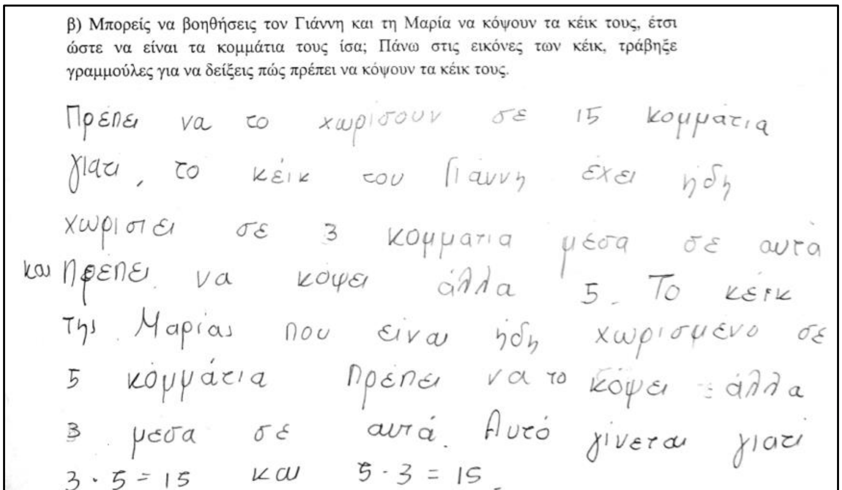
Στο τρίτο πρόβλημα, οι 4 μαθητές (Ποσοστό 16%) κατάφεραν να εκφράσουν τις δοσμένες τεμαχισμένες ποσότητες μέσω μιας κοινής μονάδας ισομέρισης, σύμφωνα με την προσδοκώμενη απάντηση (Βλ. Ενότητα 3.3.2), ενώ οι υπόλοιποι

(Ποσοστό 84%) είτε δεν προσπάθησαν είτε ακολούθησαν ανεπιτυχείς στρατηγικές για να το πραγματοποιήσουν.

Από τους 4 μαθητές που ολοκλήρωσαν επιτυχώς την τρίτη προβληματική κατάσταση οι 2 πραγματοποίησαν σωστά την ισομέριση των δύο ποσοτήτων εκφράζοντάς τις ως $\frac{15}{15}$, χωρίς όμως να δώσουν κάποια επεξήγηση για τον τρόπο που το έπραξαν. Ένας μαθητής κατέφυγε στη χρήση αλγορίθμου για τον προσδιορισμό της κοινής μονάδας ισομέρισης (Εικόνα 30), ενώ ένας άλλος περιέγραψε αναλυτικά τον συλλογισμό του (Εικόνα 31).


β) Μπορείς να βοηθήσεις τον Γιάννη και τη Μαρία να κόψουν τα κέικ τους, έτσι ώστε να είναι τα κομμάτια τους ίσα; Πάνω στις εικόνες των κέικ, τράβηξε γραμμούλες για να δείξεις πώς πρέπει να κόψουν τα κέικ τους.

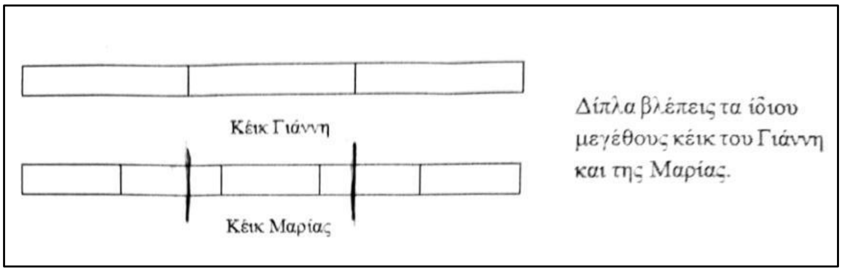
Εικόνα 30. Ενδεικτικό παράδειγμα 1 - επιτυχής ολοκλήρωση


β) Μπορείς να βοηθήσεις τον Γιάννη και τη Μαρία να κόψουν τα κέικ τους, έτσι ώστε να είναι τα κομμάτια τους ίσα; Πάνω στις εικόνες των κέικ, τράβηξε γραμμούλες για να δείξεις πώς πρέπει να κόψουν τα κέικ τους.

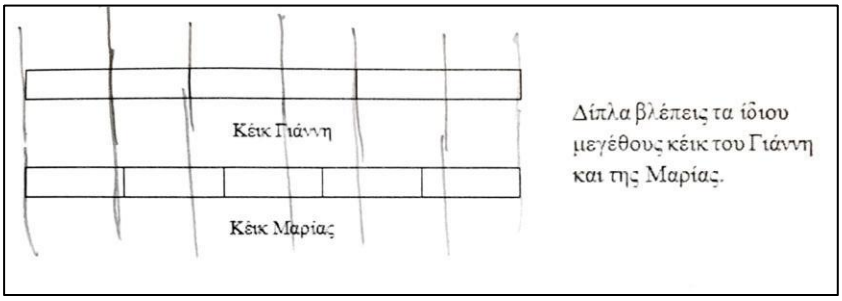
Πρεπει να το χωρισουν σε 15 κομματια
γιατι, το κέικ του Γιαννη εχει ηδη
χωρισει σε 3 κομματια μεσα σε αυτα
και πρεπει να κοψει άλλα 5. Το κεικ
της Μαριας που ειναι ηδη χωρισμενο σε
5 κόμματια πρεπει να το κόψει άλλα
3 μεσα σε αυτά. Αυτό γίνεται γιατι
3 · 5 = 15 και 5 · 3 = 15.

Εικόνα 31.Ενδεικτικό παράδειγμα 2 - επιτυχής ολοκλήρωση

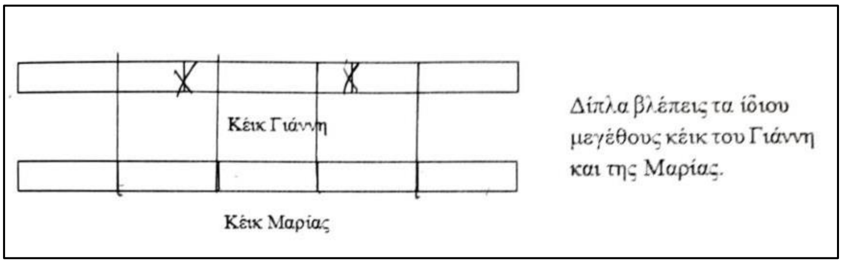
Η πλειοψηφία των υπόλοιπων μαθητών, οι οποίοι δεν εξέφρασαν επιτυχώς τις δοσμένες ποσότητες μέσω μίας κοινής μονάδας ισομέρισης, προσπάθησαν να πραγματοποιήσουν νέες ισομερίσεις της πρώτης ή της δεύτερης ποσότητας, εκφράζοντας και τις δύο ποσότητες ως $\frac{3}{3}$ ή $\frac{5}{5}$ (Εικόνα 32) ή και των δύο ποσοτήτων, εκφράζοντάς τις για παράδειγμα ως $\frac{6}{6}$ (Εικόνα 33). Στην προσπάθειά τους αυτή, παραβλέπουν την αρχική ισομέριση των ποσοτήτων, πολλές φορές διαγράφοντάς την (Εικόνα 34), είτε γιατί δεν κατανοούν ακριβώς το ζητούμενο της προβληματικής κατάστασης (Εικόνα 35) είτε γιατί δεν μπορούν να βρουν τη σωστή στρατηγική για να το πράξουν. Κατά τη συμπλήρωση της προβληματικής κατάστασης πολλοί μαθητές αναρωτήθηκαν *«Μπορούμε να σβήσουμε τις γραμμές;»*, γεγονός που φανερώνει τη στρατηγική που σκέφτονταν να ακολουθήσουν στη συνέχεια.



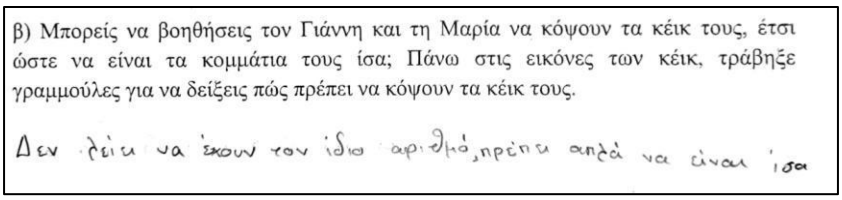
Εικόνα 32. Ενδεικτικό παράδειγμα 1 - νέα ισομέριση



Εικόνα 33.Ενδεικτικό παράδειγμα 2 - νέα ισομέριση



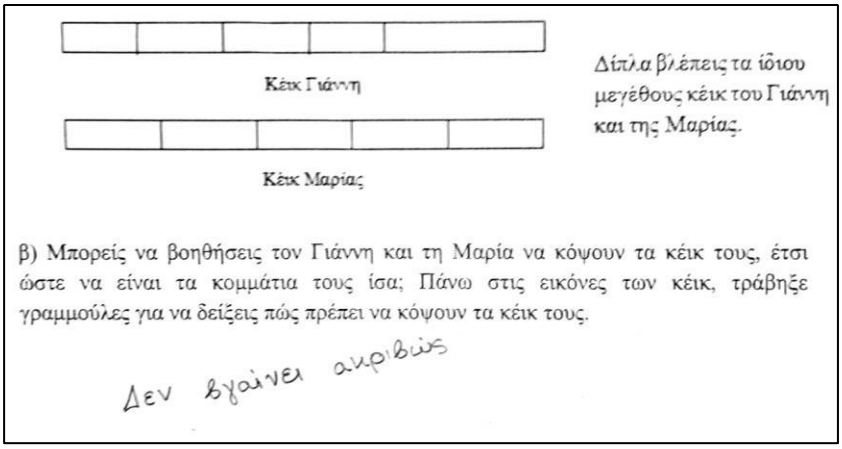
Εικόνα 34.Ενδεικτικό παράδειγμα 3 - νέα ισομέριση


β) Μπορείς να βοηθήσεις τον Γιάννη και τη Μαρία να κόψουν τα κέικ τους, έτσι ώστε να είναι τα κομμάτια τους ίσα; Πάνω στις εικόνες των κέικ, τράβηξε γραμμούλες για να δείξεις πώς πρέπει να κόψουν τα κέικ τους.

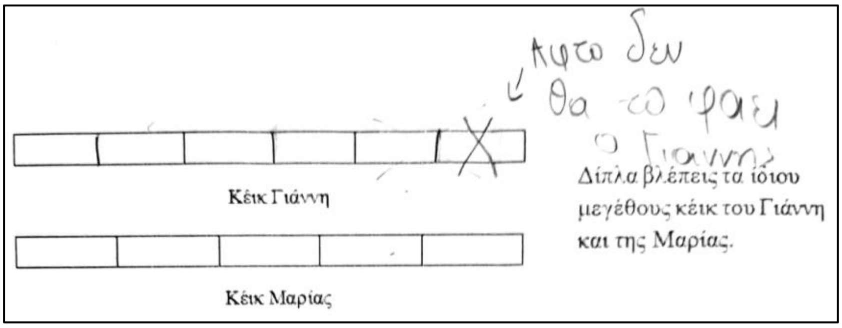
Δεν λέει να έχουν τον ίδιο αριθμό, πρέπει απλά να είναι ίσα

Εικόνα 35. Ενδεικτικό παράδειγμα – ελλιπής κατανόηση ζητούμενου

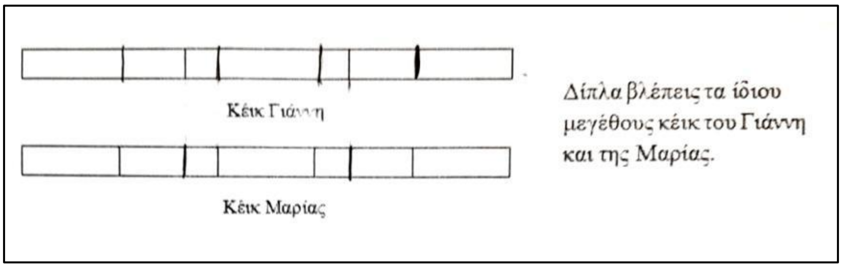
Ιδιαίτερη αναφορά αξίζει να γίνει στις περιπτώσεις δύο μαθητών, οι οποίοι προσπαθούν να πραγματοποιήσουν την κατάλληλη ισομέριση για να εκφραστεί η πρώτη ποσότητα σε $\frac{5}{5}$, καταλήγοντας ο πρώτος στο συμπέρασμα ότι *«Δε βγαίνει ακριβώς»* (Εικόνα 36) και ο δεύτερος στο συμπέρασμα ότι το ένα από τα κομμάτια που δημιουργήθηκαν πρέπει να διαγραφεί (Εικόνα 37). Επίσης, κάποιος άλλος μαθητής τεμαχίζει τις ποσότητες χωρίς να πραγματοποιεί ισομέριση στην προσπάθεια να δημιουργήσει ίσα κομμάτια στις δύο ποσότητες (Εικόνα 38).



Εικόνα 36. Ενδεικτικό παράδειγμα 1 - ανεπιτυχής ισομέριση



Εικόνα 37. Ενδεικτικό παράδειγμα 2 - ανεπιτυχής ισομέριση

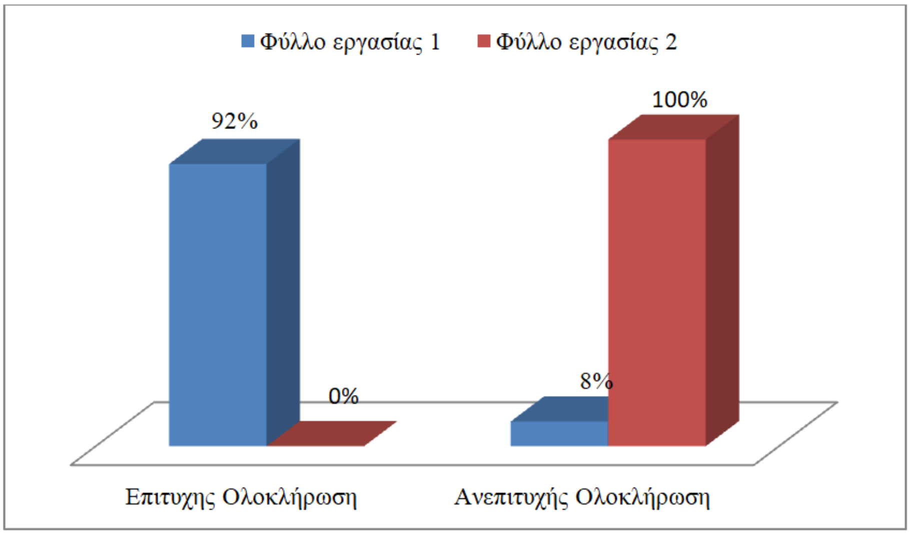


Εικόνα 38. Ενδεικτικό παράδειγμα 3 ανεπιτυχής ισομέριση

4.2. **Συμπεράσματα έρευνας**

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστούν κάποια συμπεράσματα από την ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων και θα αναζητηθούν απαντήσεις στην αρχική μας υπόθεση.

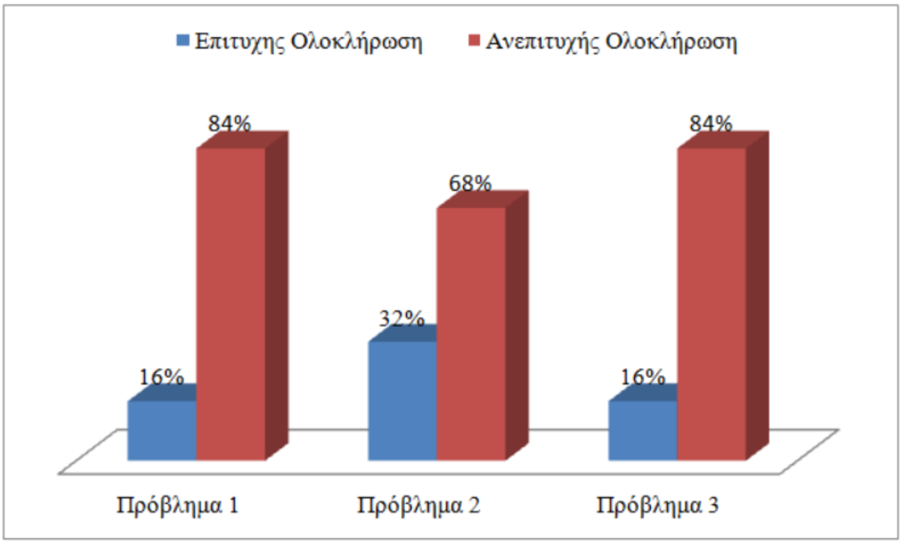
Όπως παρατηρήθηκε από την παραπάνω ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών ήταν σαφώς υψηλότερα στο Φύλλο εργασίας 1 σε σχέση με το Φύλλο εργασίας 2 (Εικόνα 39), στο οποίο κανένας μαθητής δεν κατάφερε να διαχειριστεί επιτυχώς και τα τρία προβλήματα.



Εικόνα 39. Ποσοστά επιτυχίας Φύλλο εργασίας 1 -Φύλλο εργασίας 2

Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει την αρχική υπόθεση της παρούσας εργασίας, όσο αφορά στη διαφοροποίηση των επιδόσεων των μαθητών σε καταστάσεις διαδικαστικού τύπου σε σχέση με τις επιδόσεις τους σε καταστάσεις εννοιολογικού τύπου. Η πλειοψηφία των μαθητών φαίνεται να είναι εξοικειωμένοι σε δραστηριότητες που απαιτούν την εφαρμογή αλγορίθμων και να ενεργούν σύμφωνα με αυτούς, χωρίς να υπάρχει η προαπαιτούμενη κατανόηση. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται να επιβεβαιωθεί και από την τάση των μαθητών να καταφεύγουν στη χρήση αλγορίθμων ακόμα κι όταν το πρόβλημα απαιτεί να ενεργήσουν και να στοχαστούν πάνω στις ενέργειες τους. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της τάσης των μαθητών αποτελούν: η ισομέριση της δοσμένης ποσότητας με τη χρήση του χάρακα, η εφαρμογή του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού για την επέκταση της ισομέρισης στο όλο, αλλά και ο προσδιορισμός της κοινής μονάδας ισομέρισης μέσω της αλγοριθμικής εύρεσης του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου (βλ. Ενότητα 4.1.2).

Στη συνέχεια, ακολουθούν κάποια συμπεράσματα από την ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων του Φύλλου εργασίας 2. Όπως έγινε φανερό, ένα πολύ μικρό ποσοστό των μαθητών κατάφερε να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις του Φύλλου εργασίας 2 (Εικόνα 40).



Εικόνα 40. Ποσοστά επιτυχίας ανά προβληματική κατάσταση (Φύλλο εργασίας 2)

Αναλύοντας τα ποσοστά επιτυχίας στο πρώτο πρόβλημα του Φύλλου εργασίας 2, φαίνεται ότι οι μαθητές δεν είναι ικανοί να ισομερίσουν μία ποσότητα με την κατάλληλη στρατηγική. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει τη σημαντικότητα της παροχής ποικίλων ευκαιριών ισομέρισης ποσοτήτων, είτε μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια είτε από τις διδακτικές ενέργειες του εκπαιδευτικού. Παρόλα αυτά, καθώς τα σχολικά εγχειρίδια δεν προωθούν την εμπλοκή των μαθητών σε καταστάσεις αναδρομικής ισομέρισης, το γεγονός ότι υπήρχαν μαθητές που έλυσαν σωστά κάποια από τα προβλήματα του φύλλου 2 είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικό. Το ποσοστό αυτό των μαθητών θα ήταν πολύ υψηλότερο εάν όλοι οι μαθητές είχαν ευκαιρίες για ενασχόληση με διαδοχικές ισομερίσεις ποσοτήτων.

Τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στην επέκταση της ισομέριση μίας δοσμένης ποσότητας στο όλο είναι αρκετά χαμηλά. Οι μαθητές δεν είναι ικανοί να πραγματοποιήσουν σε μεγάλο βαθμό την ισομέριση μίας ισομέρισης και να επεκτείνουν το αποτέλεσμα αυτής στο όλο. Έτσι, αναδεικνύεται ότι οι μαθητές δεν έχουν αναπτύξει τη λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης, η οποία αποτελεί βασική προϋπόθεση για την κατασκευή του κλασματικού σχήματος της πρόσθεσης, όπως παρουσιάστηκε στο θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας εργασίας.

Η ελλιπής ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης από τους μαθητές επιβεβαιώνεται και από τα ποσοστά επιτυχίας τους στο τρίτο πρόβλημα του Φύλλου εργασίας 2. Οι μαθητές στην πλειοψηφία τους δεν αντιλαμβάνονται την ανάγκη εύρεσης μίας κοινής μονάδας ισομέρισης δύο ήδη τεμαχισμένων ποσοτήτων και δεν είναι ικανοί, όπως φάνηκε παραπάνω, να το πραγματοποιήσουν με επιτυχία. Το γεγονός αυτό οφείλεται και πάλι στην απουσία ποικίλων ευκαιριών ισομέρισης αλλά και αναστοχασμού από τα σχολικά εγχειρίδια και κατ' επέκταση από τον εκπαιδευτικό.

Συμπερασματικά, τα ερευνητικά δεδομένα έρχονται να επιβεβαιώσουν το γεγονός ότι η έλλειψη προβληματικών καταστάσεων από την μαθησιακή διαδικασία που παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να ενεργήσουν πραγματοποιώντας ποικίλες ισομερίσεις ποσοτήτων και να αναστοχαστούν πάνω στις ενέργειές τους, δεν προωθεί την ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης. Η καθοδήγηση και η επιμονή στην απομνημόνευση και εκτέλεση αλγοριθμικών βημάτων, τα οποία δεν έχουν νοηματοδοτηθεί από τις ενέργειες και τον αναστοχασμό των ίδιων των μαθητών, επηρεάζουν την επίδοσή τους σε καταστάσεις που απαιτούν από αυτούς να ενεργήσουν.

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει αναφορά στο γεγονός ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία στην περιγραφή του συλλογισμού που ακολούθησαν για να ολοκληρώσουν τα προβλήματα. Έτσι, στις περισσότερες περιπτώσεις δεν εξηγούν τον τρόπο που ενήργησαν, αλλά και στις περιπτώσεις που αυτό γίνεται, αναλύονται διαδικαστικά τα βήματα που ακολουθήθηκαν. Η δυσκολία αυτή των μαθητών συνδέεται άμεσα με τις ευκαιρίες που παρέχονται στη μαθησιακή διαδικασία, αλλά και στην αξία που δίνεται από τα σχολικά εγχειρίδια και τους εκπαιδευτικούς στην ενίσχυση του αναστοχασμού των μαθητών και στην ανάδειξη μέσα στην τάξη των διαφορετικών στρατηγικών που επιλέγουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με προβληματικές καταστάσεις.

4.3 Συμπεράσματα - Προτάσεις

Η παρούσα εργασία είχε ως στόχο να διερευνήσει τον βαθμό με τον οποίο ενισχύεται από τα σχολικά εγχειρίδια η εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων. Για τον σκοπό αυτό σχεδιάστηκε και διεξήχθη μία μικρή έρευνα σε μαθητές μιας Στ’ τάξης του Δημοτικού με κεντρική υπόθεση ότι οι μαθητές είναι ικανοί να εκτελέσουν σωστά τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων αλλά δυσκολεύονται να αντιμετωπίσουν προβλήματα των οποίων η λύση σχετίζεται με τα προαπαιτούμενα αυτών των υπολογισμών.

Όπως αναδείχθηκε στο πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας τα κλάσματα, και ιδιαίτερα η πρόσθεση και αφαίρεση των κλασμάτων, αποτελούν έννοιες των οποίων η εννοιολογική κατανόηση συνδέεται με την κατασκευή του κλασματικού γνωστικού σχήματος της πρόσθεσης (Steffe, 2003). Η λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης θεωρείται προαπαιτούμενη για την ανάπτυξη του παραπάνω γνωστικού σχήματος, καθώς διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διαδικασία εύρεσης μίας κοινής μονάδας ισομέρισης/μέτρησης (Steffe & Olive, 2010). Μέσα από ακολουθίες δραστηριοτήτων διαβαθμισμένης δυσκολίας, όπου οι μαθητές ενεργούν και πραγματοποιούν ισομερίσεις των ισομερίσεων, θα μπορούσε να γεννηθεί η ανάγκη για εύρεση μίας κοινής μονάδας μέτρησης (Steffe, 2003). Ο αναστοχασμός των μαθητών πάνω σε αυτές τις ενέργειές τους είναι δυνατόν να οδηγήσει στην ανάπτυξη γνωστικών λειτουργιών (Hackenberg, 2010· Norton & McCloskey, 2008· Norton & Wilkins, 2009), όπως τη λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης.

Ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζονται οι έννοιες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στα σχολικά εγχειρίδια καθορίζουν τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών, καθώς οι εκπαιδευτικοί στηρίζονται πολλές φορές αποκλειστικά στις κατευθύνσεις και στις δραστηριότητες που αυτά προτείνουν (Reeder & Utley, 2017). Μέσα από την κριτική αξιολόγηση των σχολικών εγχειριδίων της Ε’ τάξης Δημοτικού (Βρυώνης, Δουκάκης, Καρακώστα, Μπαραλής & Σταύρου, 2018α, 2018β) και Στ’ τάξης του Δημοτικού (Κασσώτη, Κλιάπης & Οικονόμου, 2017α,2017β), αναζητήθηκε ο βαθμός στον οποίο ενθαρρύνεται η εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης από τους μαθητές μέσα από ευκαιρίες για αναστοχασμό πάνω στις ενέργειές τους αλλά και δραστηριότητες που προωθούν την ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης.

Σύμφωνα με τα δεδομένα που παρουσιάστηκαν στο δεύτερο μέρος της παρούσας εργασίας, οι δραστηριότητες των κεφαλαίων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων, που περιέχονται και στα δύο σχολικά εγχειρίδια, δεν παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες να ενεργήσουν και να πραγματοποιήσουν ποικίλες ισομερίσεις ποσοτήτων ούτε προωθούν την ανάπτυξη της αναδρομικής ισομέρισης μέσα από ισομερίσεις πολλαπλών επιπέδων. Επιπρόσθετα, η καθοδήγηση που παρέχεται από τους συγγραφείς στερεί την αυτενέργεια των μαθητών και τους στρέφει στην απομνημόνευση και εκτέλεση αλγοριθμικών βημάτων. Οι μαθητές δεν έχουν ευκαιρίες για αναστοχασμό πάνω στις ενέργειές τους, καθώς πολύ συχνά παρέχονται έτοιμες σκέψεις.

Καθώς ο αναστοχασμός και η λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης δεν προωθούνται από τα σχολικά εγχειρίδια της Ε’ και Στ’ Δημοτικού η εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων των μαθητών δεν ενθαρρύνεται. Το γεγονός αυτό αποτυπώνεται και στα ερευνητικά δεδομένα της παρούσας εργασίας, επιβεβαιώνοντας και την αρχική μου υπόθεση.

Οι μαθητές κατάφεραν στην πλειοψηφία τους να υπολογίσουν σωστά το άθροισμα και τη διαφορά του Φύλλου εργασίας 1, παρουσίασαν, όμως, αξιοσημείωτες δυσκολίες στα προβλήματα του Φύλλου εργασίας 2, των οποίων η λύση σχετίζεται με τα προαπαιτούμενα της κατανόησης αυτών των υπολογισμών, όπως είναι η λειτουργία της αναδρομικής ισομέρισης. Έτσι, μέσα από τα ερευνητικά δεδομένα έγινε σαφές ότι οι μαθητές είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με διαδικασίες απλής εφαρμογή αλγορίθμων και λιγότερο με διαδικασίες, οι οποίες στηρίζονται στην αυτενέργεια και τον αναστοχασμό τους.

Αξίζει να σημειωθεί, βεβαίως, ότι παρόλο που τα συμπεράσματα αυτής της εργασίας ήταν αναμενόμενα από την κριτική αξιολόγηση των διδακτικών εγχειριδίων, ωστόσο, το δείγμα της εργασίας ήταν εξαιρετικά μικρό. Ως εκ τούτου, χρειάζεται μια μεγαλύτερης έκτασης έρευνα. Η επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων μας στην περιοχή της πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων, καθώς και σε άλλες περιοχές του αναλυτικού προγράμματος, ίσως να οδηγούσε τους υπεύθυνους στη λήψη αποφάσεων και πολιτικών σχεδιασμών, ώστε να προχωρήσουν σε ουσιαστικές παρεμβάσεις (νέα αναλυτικά προγράμματα, διδακτικά εγχειρίδια, εκπαίδευση εκπαιδευτικών, κτλ.) για τη βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Από τα θεωρητικά αλλά και τα ερευνητικά δεδομένα της παρούσας εργασίας, αναδεικνύεται η αναγκαιότητα της παροχής στους μαθητές ποικίλων ευκαιριών για αυτενέργεια και αναστοχασμό αλλά και η σημαντικότητα της εμπλοκής των μαθητών σε καταστάσεις που ενισχύουν την ανάπτυξη της λειτουργίας της αναδρομικής ισομέρισης. Μέσω αυτών μπορεί να επιτευχθεί η βαθιά κατανόηση της έννοιας της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων. Τα σχολικά εγχειρίδια και οι διδακτικές ενέργειες του εκπαιδευτικού διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη διευκόλυνση και τη δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο μπορεί να καταστεί εφικτή η κατασκευή της γνώσης από τους ίδιους τους μαθητές αλλά και η κατανόηση όσων απαιτούνται για την εκτέλεση των πράξεων αυτών.

Παράρτημα

Φύλλο εργασίας 1ο

Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} =$$

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{9} =$$

Φύλλο Εργασίας 2ο

1) α. Κόψε το παρακάτω κέικ σε 12 ίσα μέρη, τραβώντας γραμμούλες.

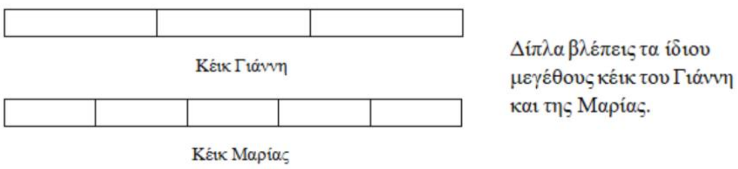
β. Με δικά σου λόγια, γράψε πώς το χώρισες.

2) α. Η Σοφία αγόρασε ένα κέικ. Το κέικ που βλέπεις είναι το $\frac{1}{4}$ του κέικ που αγόρασε. Η Σοφία μοιράστηκε το κομμάτι αυτό με 2 φίλες της.

Σχεδίασε πάνω στο κομμάτι του κέικ το μερίδιο της Σοφίας.

β. Τι κλάσμα **ολόκληρου** του κέικ είναι το μερίδιο της Σοφίας; Εξήγησε πώς σκέφτηκες.

3)



α) Ποιανού παιδιού το κέικ είναι κομμένο σε μικρότερα κομμάτια;

β) Μπορείς να βοηθήσεις τον Γιάννη και τη Μαρία να κόψουν τα κέικ τους, έτσι ώστε να είναι τα κομμάτια τους ίσα; Πάνω στις εικόνες των κέικ, τράβηξε γραμμούλες για να δείξεις πώς πρέπει να κόψουν τα κέικ τους.

Βιβλιογραφία

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαραλής, Γ., & Σταύρου, Ι. (2018α). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού- Βιβλίο Μαθητή*. Αθήνα: Διόφαντος.

Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαραλής, Γ., & Σταύρου, Ι. (2018β). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού- Τετράδιο Εργασιών*. Αθήνα: Διόφαντος.

Charalambous., Ch., & Pitta-Pantazi. D. (2007). Drawing a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 293-316.

Cobb, P., & Steffe, L. (1983). The constructivist Researcher as Teacher and Model Builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14* (2), 83-94.

Hackenberg, A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(1), 27–47.

Hackenberg, A. (2010). Students' Reasoning with Reversible Multiplicative Relationships. *Cognition and Instruction, 28* (4), 383-432.

Hackenberg, A., Norton, A., & Wright, R. (2016). *Developing Fractions Knowledge*. UK:SAGE.

Izsák, A., Tillema, E., & Tunç-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(1) 33-62.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2017α). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού – Βιβλίο Μαθητή*. Αθήνα: Διόφαντος.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2017β). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού – Τετράδιο Εργασιών*, Β΄ Τεύχος. Αθήνα: Διόφαντος.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2017γ). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού – Βιβλίο Δασκάλου*. Αθήνα: Διόφαντος.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 170–193.

Lamon., S. (2006) *Teaching fractions and ratios for understanding* (2nd ed.). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. New York: Routledge.

Lee, S. J., & Shin, J. (2013). Distributive partitioning operation in mathematical situations involving fractional quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(2), 329-355.

McCloskey, A. V., & Norton, A. H. (2009). Using Steffe's advanced fraction schemes. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(1), 44-50.

Morales, Z. (2014). *Analysis of Students' Misconceptions and Error Patterns in Mathematics: The Case of Fractions*. Education Commons. Retrieved from https://digitalcommons.fiu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1350&context=sferc

Norton, A., & McCloskey, A. (2008). Modelling students' mathematics using Steffe's fraction schemes. *Teaching Children Mathematics, 15* (1), 48-54.

Norton, A., & Wilkins, J. (2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fraction schemes. *Journal of Mathematical Behavior, 28*, 150-161.

Olive, J. (2003). Nathan's strategies for simplifying and adding fractions in third grade.In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the *27th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 421–428). Honolulu, HI: University of Hawai'i at Manoa.

Olive, J., & Lobato, J. (2008). The learning of rational number concepts using technology. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on Technology in the Learning and Teaching of Mathematics* (pp. 1-53). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 61-83.

Petit, M. M., Laird, R. E., Marsden, E. L., & Ebby, C. B. (2015). *A focus on fractions: Bringing research to the classroom (2nd ed.)*. New York: Routledge

Reeder, S., & Utley, J. (2017).What is a Fraction? Developing Fraction Understanding in Prospective Elementary Teachers. *School Science and Mathematics, 117*, 307-316.

Sfard, A. (2003). Balancing the unbalanceable: the NCTM Standards in light of theories of learning. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter (Eds), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.353-392), Reston, VA: NCTM.

Steffe, L. (2002). A new Hypothesis concerning Children's Fractional Knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 20,* 267-307.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes: Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 237-295.

Steffe, L. P. (2010). The partitioning and fraction schemes. In L. P. Steffe & J. Olive (Eds.), *Children's Fractional Knowledge* (pp. 315-340). New York: Springer.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge.* New York: Springer.

Steffe, L. P., Liss, D. R. I., & Lee, H. Y. (2014). On the operations that generate intensive quantity. *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing*, *4*, 49-79.

Tzur, R. (1999). An Integrated Sruty of Children's Construction of Improper Fractions and the Teacher's Role in Promoting That Learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30* (4), 390-416.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* Washington, DC: Falmer Press.

Wilkins, L. M., Norton, A., & Boyce S. (2013). Validating a Written Instrument for Assesing Students' Fraction Schemes and Operations. *The Mathematics Educator*, 22 (2), 31-54.