ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Γ’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ & Α’ ΛΥΚΕΙΟΥ

Κώστας Γαβρίνας, Φερενίκη Γκεσούλη,
Χρήστος Γκοσδής, Ελευθερία Σιτέ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι ανισώσεις α’ βαθμού είναι ένα σημαντικό κεφάλαιο στα μαθηματικά της τελευταίας τάξης του γυμνασίου, ενώ οι δευτεροβάθμιες ανισώσεις (μίας μεταβλητής) εμφανίζονται στα μαθηματικά της Α’ Λυκείου. Ωστόσο, η κατανόηση των ανισώσεων από τους μαθητές δεν είναι ικανοποιητική. Αυτή η εργασία επιθυμεί να παρουσιάσει τα ευρήματα για την προσέγγιση των ανισώσεων από τους μαθητές γυμνασίου και λυκείου, τις κοινές δυσκολίες που εμφανίζουν, τις παρανοήσεις και τις πιθανές πηγές αυτών των δυσκολιών και παρανοήσεων. Η ερευνητική μελέτη χρησιμοποίησε ειδικά διαμορφωμένες δραστηριότητες ώστε να διερευνηθούν οι διαδικαστικές-εννοιολογικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν και οι παρανοήσεις που κάνουν οι μαθητές κατά την επίλυση ανισώσεων, αλλά και η ικανότητα των μαθητών να εντοπίζουν ανισώσεις μέσα από λεκτικά διατυπωμένα προβλήματα. Η έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης και τα δεδομένα αναλύθηκαν χρησιμοποιώντας την μέθοδο της θεματικής ανάλυσης.

Keywords: ανισώσεις, παρανοήσεις, Γ Γυμνασίου, Α Λυκείου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι ανισώσεις είναι ένα σημαντικό αλλά δύσκολο αντικείμενο στα μαθηματικά (Boero & Bazzini, 2004, Verikios & Farmaki, 2010, Almog & Ilany, 2012, Taqiyuddin, Sumiaty & Jupri, 2017) και η κατανόηση των αρχών και της χρήσης των ανισώσεων είναι θεμελιώδους σημασίας σε αυτά.

Σε ένα συμπόσιο για τις ανισώσεις, ο George Polya ισχυρίστηκε ότι «*οι ανισώσεις παίζουν ρόλο στους περισσότερους κλάδους των μαθηματικών και έχουν πολύ διαφορετικές εφαρμογές*» (Tong, 1984, σ. 1).

Οι ανισώσεις είναι σημαντικές στη μελέτη ιδιοτήτων και εφαρμογών συναρτήσεων που απαιτούν από τους μαθητές να κατανοήσουν μεθόδους εύρεσης του συνόλου λύσεων, κάτι το οποίο μπορεί να αναφέρεται σε διαφορετικούς τύπους ανισώσεων (α’ ή β΄ βαθμού, ρητές ή απόλυτων τιμών).

Συγκεκριμένα, πολλές μελέτες έχουν δείξει ότι οι μαθητές συχνά έχουν δυσκολίες και παρανοήσεις όταν ασχολούνται με προβλήματα ανισώσεων. Μερικές από αυτές είναι στην δυσκολία να χρησιμοποιήσουν λογικές συνδέσεις («και»/«ή»), στην εύρεση του συνόλου τιμών της ανίσωσης και στην τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν τα βήματα επίλυσης εξισώσεων για την επίλυση ανισώσεων (Tsamir & Almog, 2001, Almog & Ilany, 2012).

Μια ποικιλία ιδιαίτερα προβληματικών παρανοήσεων είναι για παράδειγμα η πεποίθηση ότι το σύμβολο “=” (ίσον) είναι ένα σύμβολο για πράξεις που πρέπει να εκτελεστούν (Baroody & Ginsburg, 1983, Knuth κ.ά., 2006, Chesney & McNeil, 2014), ότι το σύμβολο “–” (μείον) αντιπροσωπεύει μόνο τη λειτουργία αφαίρεσης και δεν τροποποιεί όρους (Vlassis, 2004) και ότι οι μεταβλητές δεν μπορούν να αντιπροσωπεύουν περισσότερες από μία τιμές (Knuth κ.ά, 2005).

Υπάρχει ευρεία παραδοχή ότι είναι σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς να είναι εξοικειωμένοι με τους τρόπους σκέψης των μαθητών τους σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες, τόσο τους σωστούς όσο και τους λανθασμένους, όπως και να γνωρίζουν τις πιθανές αιτίες των λαθών και των παρανοήσεων από τους μαθητές (Loewenberg κ.ά, 2008).

Αυτό συμβάλλει σημαντικά στην διαδικασία διδασκαλίας (Ball κ.ά., 2008), καθώς η δημιουργία ενός συνόλου γνώσεων σχετικά με τους τρόπους σκέψης, τα λάθη, τις παρανοήσεις, καθώς και τις προηγούμενες αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές σχετικά με τα αυτά που μαθαίνουν στο σχολείο μπορεί να συμβάλει στην γνώση του παιδαγωγικού περιεχομένου των εκπαιδευτικών (Shulman, 1986). Ο εκπαιδευτικός που λαμβάνει υπόψη τις γνώσεις και τους τρόπους σκέψης των μαθητών του μπορεί να αναπτύξει κατάλληλες δραστηριότητες για αυτούς (Even & Tirosh, 1995) και μπορεί να εφαρμόσει ένα μοντέλο διδασκαλίας που δίνει έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση.

Με παρόμοιο σκεπτικό θεωρείται ότι «*τα λάθη των μαθητών είναι το αποτέλεσμα ή το προϊόν προηγούμενης εμπειρίας στην τάξη των μαθηματικών*» (Radatz, 1980, σ. 16).

Οι Lochhead και Mestre (1988), επικαλούμενοι τον Resnick (1983), σημειώνουν ότι «*η ερευνητική βιβλιογραφία δείχνει σταθερά ότι οι παρανοήσεις είναι βαθιά ριζωμένες και δεν απομακρύνονται εύκολα. Σε πολλές περιπτώσεις, οι μαθητές φαίνεται να ξεπερνούν μια παρανόηση μόνο μέχρις ότου επανεμφανιστεί η ίδια παρανόηση λίγο αργότερα. Αυτό το φαινόμενο είναι πιθανώς αποτέλεσμα του γεγονότος ότι όταν οι μαθητές κατασκευάζουν την μάθηση, προσκολλώνται στις έννοιες που έχουν κατασκευάσει*» (Lochhead & Mestre, 1988, σ. 132).

Με βάση τα παραπάνω, η γνώση και η κατανόηση από τον εκπαιδευτικό των λαθών των μαθητών κατά την επίλυση των ανισώσεων θα βοηθήσει στην ανάπτυξη στρατηγικών για την διδασκαλία, που να αντιμετωπίζουν τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις των μαθητών.

Μελέτες έχουν δείξει ότι όχι μόνο μαθητές γυμνασίου και λυκείου έχουν δυσκολίες με τις ανισώσεις, αλλά και εκείνοι της μεταδευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ιδιαίτερα στα ακόλουθα σημεία:

- θεωρώντας τις ανισώσεις ως εξισώσεις (Vaiyavutjamai & Clements, 2006, Blanco & Garrote, 2007)
- περιορισμένη κατανόηση των όρων "περισσότερο" και "λιγότερο" και των αντίστοιχων συμβόλων (Warren, 2006)
- δυσκολίες που σχετίζονται με την χρήση διαφόρων τεχνικών επίλυσης (Tsamir & Almog, 2001, Blanco & Garrote, 2007)
- ερμηνεία των λύσεων (Tsamir & Bazzini, 2004).

Παρόμοια, οι Blanco και Garrote διαπίστωσαν ότι «*Πολλοί μαθητές κατάλαβαν τα "≥" και "≤" απλά ως έναν "σύνδεσμο" μεταξύ δύο αλγεβρικών εκφράσεων. Στην συνέχεια, μετέφεραν αυτόν τον "σύνδεσμο" στα βήματα για την επίλυση της ανίσωσης χωρίς να του αποδίδουν κανένα νόημα, σε βαθμό να του συμπεριφέρονται όπως με το "=" (ίσον)*» (Blanco & Garrote, 2007, σ. 224). Η αντιμετώπιση των ανισώσεων από τους μαθητές ως ισότητα οδήγησε πολλούς να μην κατανοήσουν την λύση που βρήκαν, ενώ δυσκολεύονταν να καταλάβουν ποιες τιμές επαλήθευαν την ανίσωση και ποιες όχι (Blanco & Garrote, 2007).

Τελικά από τις έρευνες φαίνεται ότι το κυριότερο είδος σφάλματος προκαλείται από την γενίκευση των γνώσεων των μαθητών από την επίλυση εξισώσεων στην επίλυση ανισώσεων, καθώς η τάση υπεργενίκευσης είναι η κεντρική αιτία των λαθών των μαθητών σε πολλά μαθηματικά αντικείμενα (Fischbein κ.ά, 1985).

Οι Tsamir και Almog (2001) διαπίστωσαν ότι οι εκπαιδευτικοί δεν παρουσιάζουν τις ανισώσεις στους μαθητές με οπτικό τρόπο (γραφήματα) όσο συχνά θα έπρεπε, ειδικά με την αυξανόμενη διαθεσιμότητα των υπολογιστών, ενώ οι Blanco και Garrote (2007) επιχειρηματολογούν στο ότι η μάθηση ενισχύθηκε όταν εφαρμόστηκαν στους μαθητές άλλες διαφορετικές μέθοδοι για την επίλυση των ανισώσεων.

Πολλοί ερευνητές έχουν αποδώσει τα λάθη των μαθητών σε πολλές πηγές (Kakoma & Makonye, 2010, Muzangwa & Chifamba, 2012, Chinamasa κ.ά., 2014), αλλά αυτό στο οποίο συμφωνούν όλοι, είναι ότι οι μαθητές διαπράττουν λάθη που είναι αποτέλεσμα υφιστάμενων εννοιολογικών κενών ή παρανοήσεων που εδράζονται στα εννοιολογικά σχήματα που έχουν αυτοί (Godden κ.ά., 2013).

ΣΤΟΧΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στο πρόγραμμα σπουδών του ελληνικού σχολείου, οι ανισώσεις εμφανίζονται ως έννοια για πρώτη φορά στους μαθητές της Γ' Γυμνασίου ως γραμμικές ανισώσεις μίας μεταβλητής (αν και τις έχουν συναντήσει αρκετά νωρίτερα χωρίς να γνωρίζουν την ονομασία τους) και αμέσως μετά -στην Α' Λυκείου- τις ξανασυναντούν ως δευτεροβάθμιες ανισώσεις μίας μεταβλητής, ενώ σε κάθε περίπτωση το πρόγραμμα σπουδών δίνει έμφαση στην πρακτική αλγοριθμική προσέγγιση της επίλυσής τους δίχως περαιτέρω ανάπτυξη.

Η παρούσα μελέτη έχει ως στόχο να διερευνήσει τις δυσκολίες και να φέρει στο φως τις παρανοήσεις των μαθητών, όπως και τις πιθανές πηγές των σφαλμάτων κατά την επίλυση προβλημάτων ανισώσεων στους μαθητές της Γ' Γυμνασίου και της Α' Λυκείου και να περιγράψει τις πιθανές σωστές και λανθασμένες αντιλήψεις που θα διαμορφώσουν τότε και θα μεταφέρουν μαζί τους στα επόμενα σχολικά έτη.

Η εργασία προσπαθεί να απαντήσει στα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

- Ποιες παρανοήσεις-δυσκολίες έχουν οι μαθητές (διαδικαστικές - εννοιολογικές) κατά την επίλυση ανισώσεων;
- Χρησιμοποιούν οι μαθητές ανισώσεις για να επιλύσουν λεκτικά προβλήματα που περιλαμβάνουν όρους ανισοτήτων;

Από τις απαντήσεις μπορούν οι εκπαιδευτικοί να επικεντρωθούν στα σφάλματα στις ανισώσεις και στις λανθασμένες αντιλήψεις που υποκρύπτονται σε αυτά, προκειμένου να ενισχυθεί από τους μαθητές η εννοιολογική κατανόηση των ανισώσεων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην έρευνα συμμετείχαν δύο (ανεξάρτητες) ομάδες μαθητών των δύο ατόμων η κάθε μία, από Γ' Γυμνασίου και Α' Λυκείου. Οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου ήρθαν για πρώτη φορά σε επαφή με την επίλυση ανισώσεων στην τρέχουσα σχολική χρονιά, ενώ οι μαθητές της Α' Λυκείου την διδάσκονται για δεύτερη φορά. Όλοι οι μαθητές είχαν ήδη ολοκληρώσει την μελέτη των ανισώσεων, για το επίπεδο της τάξης τους και έχουν κάνει την παραδοσιακή-τυπική διδασκαλία για το συγκεκριμένο αντικείμενο. Η επιλογή των συμμετεχόντων έγινε από τους ερευνητές.

Χρησιμοποιήθηκαν ασκήσεις/προβλήματα/δραστηριότητες -διαφορετικά για κάθε τάξη- με την μορφή φύλλων εργασίας, προκειμένου να διαπιστωθούν οι δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών στην επίλυση των ανισοτήτων και να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα που έχουν τεθεί.

Η διαδικασία ολοκληρώθηκε σε δύο διδακτικές ώρες, στον χώρο του φροντιστηρίου. Υπήρξε ηχογράφηση και κρατήθηκαν σημειώσεις κατά την διάρκειά της, μαζί με τα γραπτά των μαθητών. Στην συνέχεια ακολούθησε απομαγνητοφώνηση και εντοπίστηκαν τα κρίσιμα συμβάντα της διαδικασίας.

Σε επόμενη φάση θα αναλυθούν τα φύλλα εργασίας των μαθητών και η απομαγνητοφώνηση για να αναδειχθούν οι κωδικοί της έρευνας μέσω των οποίων θα απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα.

Σχεδιασμός

Η έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης και τα δεδομένα αναλύθηκαν χρησιμοποιώντας την μέθοδο της θεματικής ανάλυσης. Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων-ασκήσεων έγινε με σκοπό ώστε να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα.

Περιγραφή Φύλλου Εργασίας Γ’ Γυμνασίου

Δραστηριότητα 1η

Ζητείται από τους μαθητές να μετατρέψουν οκτώ λεκτικές εκφράσεις σε αλγεβρικές (ΕΕ2).

Δραστηριότητα 2η

Περιλαμβάνει μια διπλή ανίσωση και ζητείται η εύρεση των κοινών λύσεων (ΕΕ1).

Δραστηριότητα 3η

Περιλαμβάνει ένα καθημερινό πρόβλημα, το οποίο λύνεται με τη χρήση ανισώσεων (ΕΕ1, ΕΕ2).

Περιγραφή Φύλλου Εργασίας Ανισοτήτων Α’ Λυκείου

Δραστηριότητα 1η

Περιλαμβάνει τρεις ανισώσεις α’ βαθμού προς επίλυση (ΕΕ1).

Δραστηριότητα 2η & 3η

Αποτελούνται από προβλήματα για τη λύση των οποίων απαιτείται μετάφραση από λεκτικές εκφράσεις σε αλγεβρικές με όρους ανισοτήτων (ΕΕ1, ΕΕ2).

Επιλογή συμμετεχόντων

Στην έρευνα έλαβαν μέρος όλοι οι μαθητές των συγκεκριμένων τάξεων όπου είχαν πρόσβαση οι ερευνητές και εξέφρασαν την επιθυμία να συμμετάσχουν.

Εργαλεία

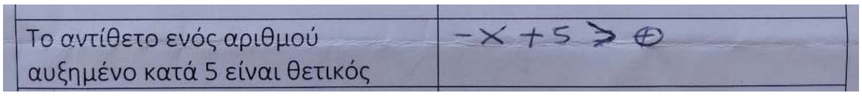
Φύλλα εργασίας, χαρτί και μολύβι, κινητό (για ηχογράφηση).

Συλλογή δεδομένων

Ηχογράφηση, σημειώσεις πεδίου και τα γραπτά των μαθητών.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Γ'ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1</u>



Το αντίθετο ενός αριθμού αυξημένο κατά 5 είναι θετικός	$-x+5 > \oplus$

Εικ. 1

1	Μ	Το αντίθετο ενός αριθμού αυξημένο κατά 5 είναι θετικός.	
2	Μ	Το αντίθετο;	Φαίνεται να προβληματίζεται
3	Ε	Πώς θα μπορούσαμε να συμβολίσουμε το αντίθετο ενός αριθμού;	
4	Μ	Με το πλην	
5	Ε	Πλην τι;	
6	Μ	Πλην x	Η μαθήτρια γράφει -x+5=+
7	Ε	Χμμμ… τι σημαίνει αυτό που έγραψες;	
8	Μ	Ότι θα βγει θετικό	
9	Ε	Μμμμ… Πώς θα μπορούσαμε να συμβολίσουμε με ανίσωση τον θετικό;	Η μαθήτρια διορθώνει σε -x+5>0
10	Ε	Πολύ ωραία! Πάμε στο επόμενο.	

Πιν. 1

Το αντίθετο ενός αριθμού αυξημένο κατά 5είναι θετικός	M1: $\pm x+5<0$ M2: $x>-x+5$

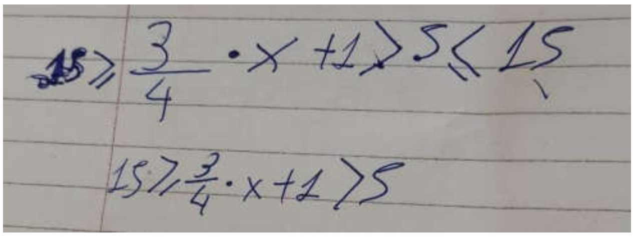
Εικ.2

1	Κ:	"Ο αντίθετος ενός αριθμού αυξημένος κατά 5 είναι θετικός αριθμός". Πως μπορούμε να το εκφράσουμε αυτό;

2	M2:	Χμμμ… αυτό φαίνεται λίγο μπερδεμένο για μένα. Δεν είμαι σίγουρος πώς να εκφράσω τον αντίθετο ενός αριθμού. Μήπως μπορείτε να μου δώσετε ένα παράδειγμα για να καταλάβω καλύτερα;
3	K:	Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός μας είναι το x. Πώς θα μπορούσαμε να εκφράσουμε τον αντίθετό του;
4	M1:	Αν το x είναι θετικός τότε θα βάλουμε -x, ενώ αν είναι αρνητικός τότε θα βάλουμε +x. Οπότε θα καλύψω και τις δύο περιπτώσεις με +, -.
5	K:	Χμμμ… Μ2, συμφωνείς με τον συμμαθητή σου;
6	M2:	Εεεε, νομίζω ότι αν αλλάξω το πρόσημο του αριθμού, θα έχουμε το αντίθετο. Έτσι, αν ο αριθμός είναι x, το αντίθετό του θα είναι -x; Δεν είμαι σίγουρος.
7	K:	Πράγματι, αλλάζοντας το πρόσημο του αριθμού, μπορούμε να πάρουμε τον αντίθετο.
8	M2:	Και πάλι κάτι πάει λάθος δεν ισχύει.
9	K:	Εξήγησέ μου το σκεπτικό σου.
10	M2:	Να, αν πάρουμε για παράδειγμα τον αριθμό -6 και τον αυξήσουμε κατά 5, τότε προκύπτει -6+5=-1. Όμως, ο αριθμός -1 είναι αρνητικός. Άρα, είναι λάθος.
11	K:	Μπράβο! Αντιλαμβάνομαι τη σκέψη σου. Πράγματι, όταν προσθέσουμε το 5 σε έναν αρνητικό αριθμό, το αποτέλεσμα δεν είναι πάντα θετικός αριθμός. Επομένως, η πρόταση ισχύει μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις. Πως λοιπόν θα βρούμε για ποιες τιμές ισχύει;
12	M1:	Χμμμ… Δεν ξέρω!
13	K:	Η λύση της ανίσωσης θα σου δώσει τις τιμές για τις οποίες αληθεύει η πρόταση.
14	M1:	Δηλαδή;
15	K:	Λύστε την ανίσωση -x+5>0 και ας συζητήσουμε το αποτέλεσμα.
16	M1:	Βγαίνει x<5;
17	K:	Σωστά! Για δοκιμάστε να πάρετε οποιαδήποτε τιμή θέλετε που να είναι μικρότερη του 5 και οποιαδήποτε μεγαλύτερη του 5. Τι παρατηρείτε;
18	M2:	Αααα… όντως για x<5 ισχύει. Δεν βγαίνει λάθος. Ουαου!
19	K:	Επίσης, βλέπω ότι έχετε απαντήσει ότι η ανισότητα είναι x>-x+5 και +-x+5<0.

		Μπορείτε να μου εξηγήσετε πώς καταλήξατε σε αυτά τα αποτελέσματα;
20	Μ2:	Στην έκφραση αναφέρεται ότι ο αντίθετος ενός αριθμού αυξημένος κατά 5 είναι θετικός αριθμός. Έτσι, σκέφτηκα ότι αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός είναι x, τότε ο αντίθετός του είναι -x. Αυξάνοντάς τον κατά 5, προκύπτει η έκφραση -x+5. Και από αυτό, συμπεραίνω ότι πρέπει να ισχύει η ανισότητα x>-x+5.
21	Μ1:	Εγώ κατάλαβα ότι πρέπει να δημιουργήσω μια ανισότητα για να εκφράσω ότι ο αντίθετος ενός αριθμού αυξημένος κατά 5 είναι θετικός. Έτσι, έγραψα -x+5<0.
22	Κ:	Η ανισότητα που έγραψες, -x+5<0, σημαίνει ότι η έκφραση -x+5 πρέπει να είναι αρνητική. Ωστόσο, αν θυμηθούμε ότι η εκφώνηση λέει ότι ο αντίθετος αυξημένος κατά 5 αριθμός είναι **θετικός,** τότε θα πρέπει να είναι θετική η έκφραση -x+5. Πως θα το εκφράσουμε αυτό;
23	Μ1:	Αχα! Τώρα καταλαβαίνω το λάθος μου. Μπέρδεψα το σύμβολο. Άρα στην ουσία είναι -x+5>0.
24	Μ2:	Χμμμ… Κι εγώ κατάλαβα που έκανα λάθος!

Πιν. 2



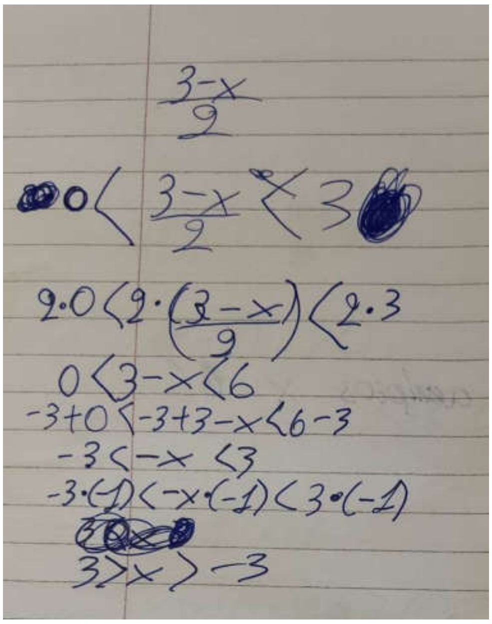
Εικ.3

1	Μ:	Τα 3/4 ενός αριθμού αυξημένα κατά 1 είναι μεγαλύτερο από 5 και μικρότερο ή ίσο από 15	
2	Μ:	3/4 του x δηλαδή +1	
3	Ε:	Σωστά	Ο μαθητής γράφει $\frac{3}{4}x+1>5\leq 15$
4	Μ:	Έτσι;	
5	Ε:	Τι σημαίνει αυτό που έγραψες; Μπορείς να το εξηγήσεις;	
6	Μ:	3/4 του x συν 1 μεγαλύτερο του 5 και μικρότερο ή ίσο του 15	
7	Ε:	Δηλαδή, είναι σωστό όπως το έχεις γράψει;	

8	Μ:	Δεν ξέρω	
9	Ε:	Πώς το σκέφτεσαι;	
10	Μ:	Δεν το σκέφτομαι κάπως. Το έγραψα με την σειρά που το διαβάζω	Ο μαθητής δείχνει να προβληματίζεται
11	Μ:	Άμα έβαζα το 5 μπροστά;	
12	Ε:	3/4 του x συν 1 μεγαλύτερο του 5 είναι σωστό όπως το έχεις γράψει αλλά κάτι πρέπει να αλλάξουμε	
13	Μ:	Αααα, τώρα κατάλαβα	Ο μαθητής γράφει $15\geq\frac{3}{4}x+1>5$
14	Ε:	Ωραία!	

Πιν. 3

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2</u>



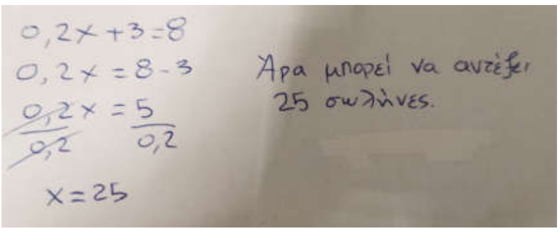
Εικ. 4.

1	Μ:	Να βρείτε όλες τις ακέραιες και τις θετικές τιμές του x ώστε το κλάσμα $\frac{3-x}{2}$ να είναι θετικό και μικρότερο του 3.	Ο μαθητής γράφει σωστά $0<\frac{3-x}{2}<3$ και λύνει την ανίσωση έως ότου καταλήξει στην -3<-x<3
2	Ε:	Πολύ ωραία.	
3	Μ:	Και τώρα θα διώξω το - από το x	

4	Μ:	Θα τα πολλαπλασιάσω όλα με το -1	
5	Ε:	Ακριβώς	Ο μαθητής γράφει $-3\cdot(-1)<-x\cdot(-1)<3\cdot(-1)$ και έπειτα συνεχίζει γράφοντας $3>x>-3$
6	Ε:	Είναι σωστό αυτό που έγραψες;	
7	Μ:	Ναι, είναι σωστό το αποτέλεσμα.	
8	Ε:	Το αποτέλεσμα είναι πράγματι σωστό αλλά ο τρόπος που κατέληξες φαίνεται να μην είναι. Ρίξε μια ματιά στο προτελευταίο βήμα. Είναι σωστό;	
9	Μ:	Ναι	
10	Ε:	Άρα δηλαδή το 3 είναι μικρότερο του -3;	
11	Μ:	Όχι βέβαια. Μισό λεπτό.	Ο μαθητής φαίνεται να κοιτάει ξανά τι μπορεί αν πήγε λάθος
12	Μ:	Κυρία το βρήκα. Έπρεπε να αλλάξω την φορά σε αυτό το βήμα και όχι στο επόμενο.	
13	Ε:	Ακριβώς. Τώρα κατάλαβες γιατί όταν πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αριθμό αλλάζουμε ταυτόχρονα και την φορά των συμβόλων;	
14	Μ:	Ναι, ναι	

Πιν. 4

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3</u>



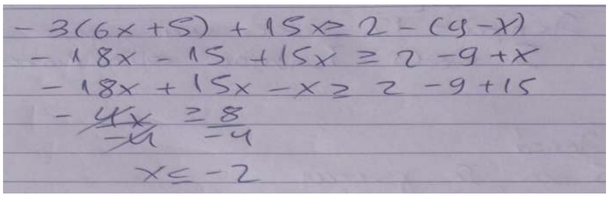
Εικ. 5

1	Κ:	Ας δούμε αυτό το πρόβλημα με τη γέφυρα και τους σωλήνες. Πόσους το πολύ σωλήνες μπορεί να μεταφέρει το φορτηγό ώστε να περάσει με ασφάλεια τη γέφυρα;
2	Μ2:	Μπορώ να πω τι σκέφτηκα;
3	Κ:	Παρακαλώ!
4	Μ2:	Λοιπόν, επειδή η αντοχή της γέφυρας είναι 8 τόνοι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε x σωλήνες. Κάθε σωλήνας ζυγίζει 0,2 τόνους, οπότε η συνολική μάζα των σωλήνων θα είναι 0,2x. Προσθέτοντας το βάρος του φορτηγού, που είναι 3 τόνοι, έχουμε την εξίσωση $0{,}2x+3 = 8$. Επομένως μπορεί να αντέξει $x=25$ σωλήνες. Σωστά;
5	Κ:	Η εξίσωση που δημιούργησες $0{,}2x+3 = 8$, είναι σωστή για να βρεις το μέγιστο αριθμό των σωλήνων. Αλλά θα ήθελα να εστιάσουμε λίγο στην λέξη «το πολύ». Πως θα μπορούσαμε να το εκφράσουμε αυτό;
6	Μ2:	Δεν ξέρω… Δηλαδή αντί για “=” να βάλω “<”; και μετά τι θα απαντήσω; Μμμμ… δεν ξέρω αν θα το σκεφτόμουν. Με εξίσωση μου βγαίνει πιο εύκολα.
7	Κ:	Εφόσον οι σωλήνες είναι το πολύ 25, αυτό τι σημαίνει; Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει;
8	Μ1:	Όλες τις τιμές που είναι μικρότερες του 25, δηλαδή $x < 25$;
9	Μ2:	Όχι δεν συμφωνώ. Αφού η λύση της εξίσωσης είναι το 25, τότε δεν θα πάρει και το 25;
10	Κ:	Φυσικά! Επομένως θέλω να μου πείτε πως θα το εκφράσουμε τελικά ώστε να συμπεριλαμβάνει και το 25 αλλά και τιμές μικρότερες του 25;
11	Μ2:	Αααα… θα βάλουμε το άλλο το σύμβολο… το… “≤”.
12	Κ:	Ακριβώς!
13	Μ2:	Μα και πάλι δεν είναι το ίδιο; Είτε το λύσω με εξίσωση είτε με ανίσωση; Αφού σωστά απάντησα… Δεν καταλαβαίνω…
14	Κ:	Η χρήση της ανισότητας “$x \leq 25$” λαμβάνει υπόψη όλες τις τιμές που είναι μικρότερες ή ίσες του 25, παρέχοντας ένα πιο ακριβές αποτέλεσμα στο πλαίσιο του προβλήματος.

Πιν. 5

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Α’ ΛΥΚΕΙΟΥ

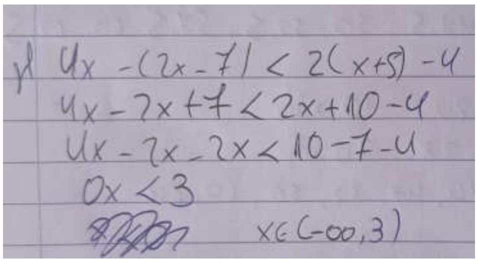
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1



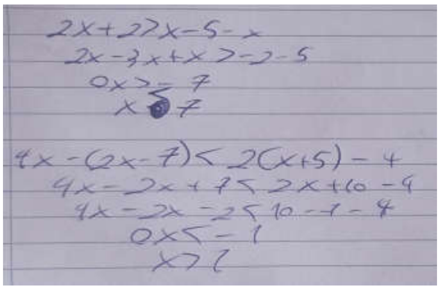
Εικ. 6

1	Μ1:	-4x≥8. Αα, εδώ [δείχνει], έχουμε αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης. Εντάξει ,εύκολο αυτό. Εδώ, απλά αλλάζει η φορά της ανίσωσης στο τέλος! Διαιρώ με το -4 και γίνεται x μικρότερο του -2.
2	Ε:	Δείξε μου, πως γίνεται δηλαδή;
3	Μ1:	Εδώ, διαιρώ και τα δύο μέλη με -4 [χωρίς να αλλάξει τη φορά]. Επομένως βγαίνει x ≤ -2.
4	Ε:	Και γιατί συμβαίνει αυτό;
5	Μ1:	Γιατί έχουμε αρνητικό συντελεστή; [ειρωνεία]. Αυτό δεν έχουμε πει; Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους και αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι αρνητικός, αλλάζει στο τέλος η φορά της ανίσωσης. Τόσο καιρό αυτό δε λέμε;
6	Ε:	Σε ποια ιδιότητα οφείλεται αυτό;
7	Μ1:	(…) Αυτό που σε όλα στα Μαθηματικά υπάρχει μια ιδιότητα. Δεν θυμάμαι, αλλά ξέρω ότι έτσι γίνεται. Σωστό δεν είναι;
8	Ε:	Το πρόβλημα είναι ότι όταν διαιρείς με αρνητικό πρέπει να αλλάζεις τη φορά.
9	Μ1:	Μα αυτό έκανα!
10	Ε:	Σε ποιο σημείο διαίρεσες με το -4;
11	Μ1:	Αααα, εδώ ε; [δείχνει το σωστό σημείο]. Γενικά το ξέρω ότι όταν πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αλλάζει η φορά. Όμως δεν το είχα συνδυάσει έτσι. Πάντα σκεφτόμουν ότι αν εδώ [δείχνει το συντελεστή του αγνώστου] έχω θετικό, η φορά μένει ίδια, αν έχω αρνητικό, η φορά αλλάζει. Πάντα αυτό έκανα.

Πιν. 6



Εικ.7 Δραστηριότητα 1β



Εικ. 8 Δραστηριότητα 1γ

1	M1:	[Κάνει τις πράξεις στην τρίτη γραμμή. Στο δεύτερο μέλος κάνει ένα αριθμητικό λάθος] Βγαίνει 0x μικρότερο του 3. 0x μικρότερο του 3; (…) Άρα και το x θα πρέπει να είναι μικρότερο του 3.
2	E:	Εξήγησε μου.
3	M1:	0x (…) Τι είναι αυτό τώρα; Άρα x; Βασικά όχι, τι λέω; [χτυπάει το μέτωπο του]. 0 επί κάτι κάνει 0.
4	E:	Άρα;
5	M1:	Ναι αλλά τι θα βγει εδώ; x>0; Η μικρότερο του -3; Παγίδα είναι. Βασικά όχι. x<3. Αυτά τα νούμερα έχω. Ή x μικρότερο του 3 θα βγει, ή x μεγαλύτερο του -3; Τι άλλο να βγει;
6	E:	Σκέψου καλύτερα, τι σημαίνει 0x;
7	M1:	Ναι, καταλαβαίνω ότι κάνει 0. Αλλά και τι άλλο να βγει; Ανίσωση δεν είναι;
8	E:	Και τι σημαίνει αυτό;
9	M1:	Ότι κάτι τέτοιο θα βγει. Χ μικρότερο ή x μεγαλύτερο από κάτι. Η μεγαλύτερο η ίσο. Κάτι τέτοιο, ξέρεις, x μεγαλύτερο του 2, του 3, από έναν αριθμό τέλος πάντων.

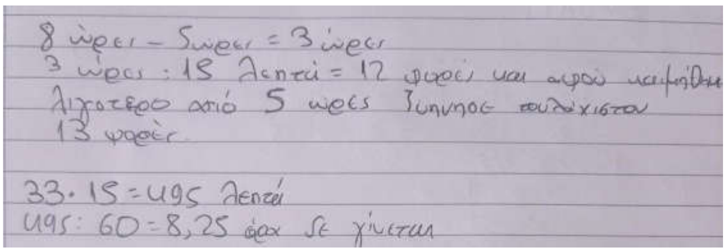
Πιν. 7

1	M2:	0x μεγαλύτερο του -7 ε; Άρα […] Βασικά όχι. Αφού το 0x είναι μεγαλύτερο του -7, αν διαιρέσω, θα αντιστρέψω τη φορά. Άρα το x είναι μικρότερο του 7.
2	Ε:	Διαίρεσες με το 0;
3	M2:	Πωωω, τι λέω. Ναι, έχεις δίκιο […]. Ναι αλλά τι να κάνω; Τι είναι το 0x; Πρέπει να είναι κάποια ειδική περίπτωση. Το έχουμε πει αυτό;
4	Ε:	Ναι.
5	M2:	Ε και τι κάνουμε;
6	Ε:	Πάντως διαίρεση με το 0 δεν γίνεται.
7	M2:	Αλλά πως αλλιώς θα βγει; Πιστεύω ότι αλλάζει η φορά. Μάλλον δεν διαιρούμε με το 0, απλά αλλάζουμε τη φορά. Κάτι τέτοιο δεν είχαμε πει;
8	Ε:	Όχι.
9	M2:	Δε θυμάμαι και καλά, πάει καιρός που τα κάνουμε αυτά. Ξέρω ότι σίγουρα δε διαιρούμε με το 0. Αλλά αφού είναι ανίσωση πρώτου βαθμού, η απάντηση πρέπει να βγει ένα διάστημα.
10	Ε:	Τι εννοείς πως πρέπει να βγει διάστημα;
11	M2:	Όταν κάνουμε ανισώσεις, αυτό δε βγαίνει; Π.χ. x ∈ (-∞,1), δηλαδή x<1. Τέτοιες λύσεις. Εγώ λέω ότι αλλάζει η φορά. Και ας λέει 0x. Δεν το καταλαβαίνω ακριβώς, αλλά δε μου ταιριάζει και κάτι άλλο στην τελική. Πάντως θα είναι η x μικρότερο του 7 ή του -7 ,η μεγαλύτερο του -7 η του 7. Ένα από αυτά τα τέσσερα.
12	Ε:	Γιατί ένα από αυτά τα τέσσερα; Σκέψου το περισσότερο.
13	M2:	Έχω κολλήσει, πραγματικά […] Πάντως έχει μέσα σίγουρα το 7 ή το -7.

Πιν. 8

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Μολονότι η απάντηση του Μ1 είναι τελικά σωστή, είναι αξιοσημείωτο το ότι δεν χρησιμοποίησε όρους ανισοτήτων για να τη λύσει.


8 ώρες – 5ώρες = 3 ώρες
3 ώρες : 15 λεπτά = 12 φορές και αφού κοιμήθηκ
λιγότερο από 5 ώρες ξύπνησε τουλάχιστον
13 φορές

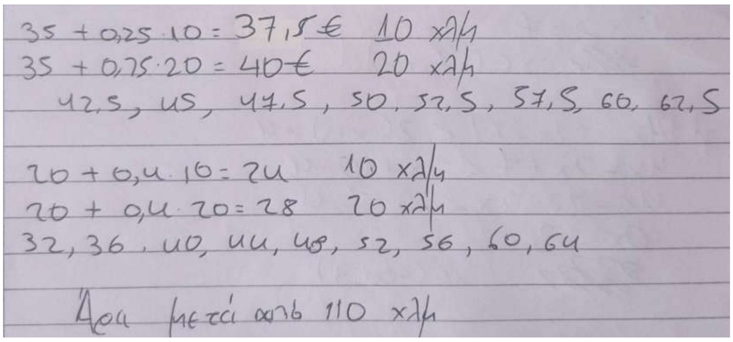
33·15 = 495 λεπτά
495 : 60 = 8,25 άρα δε γίνεται

Εικ. 9

1	M1:	Θα δω πόσες φορές γαύγισε ώστε να κοιμήθηκε ακριβώς 5 ώρες.
2	E:	Ναι, αλλά εδώ λέει λιγότερο από 5 ώρες.
3	M1:	[…] Εντάξει. Θα βρω πόσες φορές ξύπνησε στις 5 ώρες και θα βάλω και μια παραπάνω.
4	E:	Γιατί αυτό;
5	M1:	Γιατί λέει λιγότερο από 5 ώρες.
6	E:	Μπορείς να γράψεις το λιγότερο με διαφορετικό τρόπο;
7	M1:	Γιατί να μπλέξω; Αφού μπορώ να το λύσω πολύ απλά. Εννοείς με < ; [το γράφει στο χαρτί]
8	E:	Ναι, με αυτά τα σύμβολα δε δείχνουμε το μικρότερο-μεγαλύτερο;
9	M1:	[Ξεφυσάει] Αυτά είναι μπελάς. Θα το δυσκολέψουμε τσάμπα. Και [….] δε ξέρω, δε θέλω να το κάνω έτσι. Κοίτα. Ας πούμε ότι κοιμήθηκε 5 ώρες. 8-5=3 ώρες. [γράφει παράλληλα] 3 ώρες ήταν ξύπνιος. 3 ώρες/15 λεπτά κάνει… 12 φορές.
10	E:	Αυτή είναι η απάντηση σου;
11	M1:	Ναι.
12	E:	Τελική;
13	M1:	Ναι.
14	E:	Εσύ δε μου είπες πριν ότι θα βάλεις και μια παραπάνω;
15	M1:	Πωωω, το ξέχασα. Αφού θέλει λιγότερο από φορές πρέπει να γαύγισε 13 και πάνω. Τουλάχιστον 13. Αν το έκανα με ανισώσεις ίσως να μην την πάταγα. Όμως δε ξέρω, δε τις μπορώ. Εδώ καλά-καλά δε θέλω να λύνω προβλήματα με εξισώσεις , θα πάω να βάλω ανισώσεις; Ενώ έτσι, απλά βρίσκω την μια τιμή και βάζω παραπάνω η παρακάτω μια φορά.
16	E:	Αυτό δεν πετυχαίνει πάντα.
17	M1:	Εμένα αυτό με βολεύει.
18	E:	Ωραία, πάμε στο επόμενο πρόβλημα.

Πιν. 9

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3



Εικ. 10

1	Μ1:	Αφού λέει πόσα χιλιόμετρα και πάνω πρέπει να κάνει για κάνει για να συμφέρει το πρώτο γραφείο […] Θα δοκιμάσω διάφορες τιμές για τα χιλιόμετρα και θα δω πότε αυτό συμβαίνει!
2	Ε:	Δεν κατάλαβα, τι εννοείς τιμές;
3	Μ1:	Λοιπόν 0,35+0,25x δεν είναι του πρώτου γραφείου;
4	Ε:	Ναι.
5	Μ1:	Και 20+0,4x του άλλου έτσι; Εεεε, θα βάλω κάποιες τιμές στο x και θα δω.
6	Ε:	Τυχαίες τιμές;
7	Μ1:	Όχι τυχαίες. Θα δοκιμάσω 10 χιλιόμετρα, 20 χιλιόμετρα κτλ. Και θα δω, μέχρι πόσα χιλιόμετρα συμφέρει το πρώτο γραφείο.
8	Ε:	Γιατί να το κάνεις έτσι;
9	Μ1:	Πως αλλιώς; Να κάτσω να ψάξω για ένα-ένα χιλιόμετρο; Δεν θα τελειώσω ούτε αύριο. Ενώ έτσι, θα ανεβαίνω δέκα-δέκα, θα το βρω γρηγορότερα.
10	[Στο σημείο αυτό ξεκινάει να κατασκευάζει μια ακολουθία με όρους τα κόστη κάθε 10.000 χλμ]	
11	Να, εδώ [δείχνει τη στιγμή που έχει κάνει 110 χλμ.], το πρώτο γραφείο κοστίζει 62,5 ενώ το δεύτερο 64.	
12	Ε:	Γιατί αποφάσισες να ανέβεις ανά 10χλμ;
13	Μ1:	Γιατί διαφορετικά θα έκανα πολύ ώρα.
14	Ε:	Δεν υπάρχουν και άλλοι αριθμοί ανάμεσα στα 10 και τα 20 χλμ.;
15	Μ1:	Υπάρχουν. Αλλά σου είπα. Αν ψάξουμε για αυτούς… Καήκαμε!
16	Ε:	Εσύ λες 110χλμ. Πριν τσέκαρες για τα 100χλμ. Αν η σωστή απάντηση είναι 105 χλμ για παράδειγμα;
17	Μ1:	Αν συμφέρει για τα 105 θα συμφέρει και για τα 110.

18	Ε:	Αν συμφέρει για τα 105 θα συμφέρει και για τα 500 με αυτή τη λογική. Μπορούμε να βρούμε χωρίς δοκιμές για ποια χιλιόμετρα και πάνω συμφέρει το πρώτο γραφείο;
19	Μ1:	Δε βλέπω να γλιτώνουμε τις ανισώσεις τελικά…

Πιν. 10

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ

Από την επεξεργασία των παραπάνω προέκυψε η παρακάτω κωδικοποίηση (Πιν. 11). Η ομάδα κωδικών (1-8) αποκρίνονται στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα και η δεύτερη ομάδα (9-12) στο δεύτερο.

	ΚΩΔΙΚΟΙ	**ΑΠΟΜΑΓΝ.**
1	Δυσκολία στην σύνταξη αλγεβρικών εκφράσεων με χρήση των συμβόλων ⪌.	Πιν. 1 (6) Πιν. 2 (21, 23) Πιν. 3 (3) Πιν. 9 (9)
2	Εκ των προτέρων γνώση της φοράς ανάλογα με το πρόσημο του συντελεστή του αγνώστου.	Πιν. 6 (5, 7, 13) Πιν. 4 (7)
3	Μη αλλαγή φοράς σε πολλαπλασιασμό με αρνητικό αριθμό.	Πιν. 4 (4-5) Πιν. 6 (1-2)
4	Απουσία σύνδεσης αλγορίθμου-ιδιοτήτων διάταξης πραγματικών αριθμών.	Πιν. 6 (11)
5	Δυσκολία στην κατανόηση του συνόλου λύσεων μίας ανίσωσης.	Πιν. 2 (10, 18)
6	Δυσκολία στην ερμηνεία της ανίσωσης 0x⪌a	Πιν. 7 (1) Πιν. 8 (1)
7	Πεποίθηση ότι η λύση μιας ανίσωσης είναι πάντα ανισότητα.	Πιν. 7 (9, 11)
8	Πεποίθηση ότι το σύνολο λύσεων είναι πάντοτε διάστημα.	Πιν. 8 (5, 7)
9	Χρήση εξισώσεων σε πρόβλημα ανισώσεων.	Πιν. 5 (6, 13)
10	Μη χρήση αλγεβρικών εκφράσεων για την επίλυση προβλήματος ανισώσεων.	Πιν. 9 (9)
11	Επίλυση ανίσωσης με δημιουργία ακολουθίας.	Πιν. 10 (8, 10)
12	Πεποίθηση για τη χρήση ανισώσεων σε λεκτικό πρόβλημα	Πιν. 9 (15) Πιν. 10 (19)

Πιν. 11

ΘΕΜΑΤΑ

Από την ομάδα των Κωδικών 1-8 προκύπτουν τα Θέματα 1 έως 4, τα οποία απαντούν στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα. Οι Κωδικοί 1 και 5 έχουν μεταβεί αυτούσιοι στην κατηγορία των θεμάτων. Από την δεύτερη ομάδα Κωδικών προκύπτει το Θέμα 5, το οποίο απαντά στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα.

ΘΕΜΑ 1ο: Δυσκολία στη σύνταξη αλγεβρικών παραστάσεων που περιλαμβάνουν τη χρήση των συμβόλων $\gtreqless$. (Κωδ. 1)

Στον Πιν. 4 (γραμμές 21-24) φαίνεται η δυσκολία του μαθητή στην σύνταξη αλγεβρικών εκφράσεων και στην σωστή χρήση των μαθηματικών συμβόλων “<”, “>”.

Στον Πιν. 5 (γραμμές 2-3) ο μαθητής κάνει λάθος στην ερμηνεία τη λεκτικής διατύπωσης και αυτό επηρεάζει την σωστή περιγραφή της ανισότητας, με αποτέλεσμα λανθασμένη σχέση.

Στον Πιν.1 (γραμμές 3-8) η μαθήτρια χρησιμοποίησε το σύμβολο “=” και έγραψε “-x+5=+”, δηλαδή αντιμετώπισε την ανισότητα ως ισότητα. Παρατηρούμε λοιπόν δυσκολία στην συμβολική αναπαράσταση καθότι η σωστή εκτέλεση θα ήταν $-x+5>0$.

Στον Πιν.2 (γραμμές 3 & 10) φαίνεται ο μαθητής να έχει δυσκολία στην συμβολική αναπαράσταση καθότι γράφει την ανισότητα με την σειρά που την διαβάζει χωρίς να δίνει σημασία αν μπορεί να γραφεί η σχέση $\frac{3}{4}x+1>5\leq 15$.

ΘΕΜΑ 2ο: Η διαδικασία επίλυσης εκτελείται μηχανικά

Τόσο στη Γ΄ Γυμνασίου όσο και στην Α΄ Λυκείου, παρατηρείται η διατήρηση της φοράς της ανίσωσης κατά τη διαίρεση με αρνητικό αριθμό, συγκεκριμένα με το συντελεστή του αγνώστου (Κωδ. 3). Ωστόσο, η φορά φαίνεται να αντιστρέφεται στην τελευταία γραμμή, όπου ουσιαστικά ο μαθητής παρουσιάζει τη λύση της ανίσωσης.

Από την απομαγνητοφώνηση (Κωδ. 2), φαίνεται πως οι μαθητές εκ των προτέρων γνωρίζουν για την αλλαγή φοράς στην περίπτωση ύπαρξης αρνητικού συντελεστή του αγνώστου, όταν όμως ερωτήθηκαν για την σχετική με την αλλαγή της φοράς ιδιότητα, απάντησαν ότι δεν συσχετίζουν την αλλαγή με κάποια ιδιότητα (Κωδ. 4), αλλά ότι είναι μια διαδικασία την οποία «έτσι έχουν μάθει».

ΘΕΜΑ 3ο: Δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του συνόλου λύσεων μίας ανίσωσης. (Κωδ. 5)

Στον Πιν. 4 (γραμμές 10-18) ο μαθητής προσπαθεί να επαληθεύσει την αλήθεια μιας ανισοτικής σχέσης χρησιμοποιώντας ως αντιπρόσωπο έναν αριθμό εκτός του συνόλου λύσεων της ανίσωσης.

ΘΕΜΑ 4ο: Δυσκολία στην επίλυση ανισώσεων της μορφής 0x⪌a.

Και οι δύο μαθητές της Α' Λυκείου αντιμετώπισαν δυσκολία στην ερμηνεία της ανίσωσης 0x⪌a (Κωδ. 6). Στην απομαγνητοφώνηση εκφράζουν ξεκάθαρα την πεποίθηση τους ότι η λύση μιας ανίσωσης είναι πάντοτε ανισότητα (Κωδ. 7) ή ότι το σύνολο λύσεων μιας ανίσωσης είναι πάντα διάστημα (Κωδ. 8). Παρότι αντιλαμβάνονται ότι 0x=0, θεωρούν ότι η συγκεκριμένη ανίσωση είναι κάποια ειδική περίπτωση ή «παγίδα» όπως χαρακτηριστικά ανέφεραν και πως η λύση δεν μπορεί να παρά να είναι της μορφής x⪌a.

ΘΕΜΑ 5ο: Επίλυση λεκτικών προβλημάτων που περιλαμβάνουν όρους ανισοτήτων.

Όλοι οι μαθητές που ήταν σε θέση να λύσουν προβλήματα απέφυγαν τη χρήση ανισώσεων (παρότι παροτρύνθηκαν από τους ερευνητές ώστε να γίνει χρήση αυτών), αναφέροντας μάλιστα ότι οι ανισώσεις είναι «μπελάς» ή ότι «θα μπλέξουν» (Κωδ. 12). Αντί αυτού χρησιμοποίησαν εναλλακτικές μορφές επίλυσης (Κωδ. 9,10,11)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα φαίνεται πως οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την διάρκεια επίλυσης ή σχηματισμού μιας ανίσωσης μπορεί να είναι συμβολικού, διαδικαστικού ή εννοιολογικού χαρακτήρα.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές και των δύο τάξεων που συμμετείχαν στην έρευνα, αντιμετώπισαν δυσκολίες κατά τη μετάφραση λεκτικών προτάσεων σε αλγεβρικές εκφράσεις. Τα σύμβολα "<", ">" άλλοτε δεν χρησιμοποιήθηκαν καθόλου (παρά την παρότρυνση των ερευνητών) και άλλοτε χρησιμοποιήθηκαν αποδίδοντας όμως διαφορετικό νόημα (Warren, 2006). Η δυσκολία αυτή ήταν σαφώς πιο έντονη στους μαθητές της Γ' Γυμνασίου, οι οποίοι για πρώτη φορά έρχονται σε επαφή με ανισώσεις και γενικότερα ανισοτικές σχέσεις. Όμως και οι μαθητές της Α' Λυκείου δυσκολεύτηκαν στο να σχηματίσουν αλγεβρικές εκφράσεις με όρους ανισοτήτων όταν τους ζητήθηκε να επιλύσουν λεκτικά προβλήματα.

Κοινό χαρακτηριστικό των μαθητών και των δύο τάξεων αποτελεί η μηχανιστική επίλυση, κυρίως όσον αφορά το σημείο της διαδικασίας που αφορά τη διαίρεση και των δυο μελών της ανίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου. Οι Blanco και Garrote (2007) διαπιστώνουν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις ανισώσεις σαν εξισώσεις, χωρίς να αποδίδουν νόημα στα σύμβολα “<”, “>”.

Στο σημείο αυτό, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας διαφοροποιούνται από αυτά της βιβλιογραφίας. Οι μαθητές φαίνεται να έχουν κατηγοριοποιήσει τη μορφή της λύσης της ανίσωσης ανάλογα με το πρόσημο του συντελεστή του αγνώστου. Όμως αυτό δε το αποδίδουν στην γνωστή μας ιδιότητα, που σχετίζεται με τη διαίρεση ανισοτικής σχέσης με θετικό ή αρνητικό αριθμό και την διατήρηση ή μη της φοράς. Αντίθετα, οι μαθητές το χρησιμοποιούν σαν κάτι που “έτσι έχουν μάθει” ως έναν (εσφαλμένο) μνημονικό κανόνα (βλ. Πιν. 5 - γραμμή 6). Αν και δεν προκύπτει από τα δεδομένα, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι οι μαθητές επικεντρώνονται περισσότερο στο “σωστό αποτέλεσμα”, παρά στην σύνδεση της αλγοριθμικής διαδικασίας με τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Ιδιαίτερα σημαντική θεωρούμε την δυσκολία που παρουσίασαν οι μαθητές της Α’ Λυκείου (οι δραστηριότητες της Γ’ Γυμνασίου δεν περιλαμβάνουν κάτι σχετικό) στο να επιλύσουν ανισώσεις της μορφής $0x \gtreqless a$. Είναι ξεκάθαρη η πεποίθηση των μαθητών πως η λύση μιας ανίσωσης είναι πάντοτε ανισότητα (Tsamir & Bazzini, 2004, Tsamir & Almog, 1999) και αυτή λειτουργεί ως ανασταλτικός παράγοντας στην ερμηνεία της σχετικής ανίσωσης. Θεωρώντας πως η λύση μιας ανίσωσης πρέπει να είναι της μορφής $x \gtreqless a$, οδηγούνται σε λανθασμένες απαντήσεις ή αναληθείς υποθέσεις (βλ. Πιν. 8 - γραμμή 7).

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, κατά την επίλυση των λεκτικών προβλημάτων που περιλαμβάνουν όρους ανισοτήτων, κανένας μαθητής δεν χρησιμοποίησε ανίσωση. Μάλιστα, χαρακτήρισαν τις ανισώσεις ως “μπλέξιμο” και “μπελά” και προτίμησαν εναλλακτικές μεθόδους επίλυσης. Σε αυτό συντελεί και η δυσκολία που πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν κατά την μετάφραση ενός λεκτικού προβλήματος σε τυπική μαθηματική γλώσσα (βλ. Πιν. 9 - γραμμή 15).

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εναλλακτικές λύσεις των μαθητών. Στην μία περίπτωση χρησιμοποιήθηκε εξίσωση, κάτι το οποίο αναφέρεται και στην υπάρχουσα βιβλιογραφία (Vaiyavutjamai & Clements, 2006, Blanco & Garrote, 2007). Στην παρούσα έρευνα παρουσιάζονται και δυο διαφορετικές μέθοδοι επίλυσης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές που πήραν μέρος σε αυτή. Στην περίπτωση η οποία περιγράφεται στην απομαγνητοφώνηση του Πιν. 9, ο μαθητής δεν χρησιμοποίησε άλγεβρα, αλλά έδωσε μια στοιχειώδη-εμπειρική λύση, ενώ στην περίπτωση που περιγράφεται στην απομαγνητοφώνηση του Πιν. 10, ο μαθητής δημιούργησε μια ακολουθία όρων ώστε να εκτιμήσει τις συγκρινόμενες ποσότητες και να προσεγγίσει τη λύση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Almog, N., & Ilany, B. S. (2012). Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions. *Educ Stud Math 81,* 347-364 https://doi.org/10.1007/s10649-012-9404-z

Baroody, A., & Ginsburg, H. (1983). The effects of instructions on children's understanding of the equal sign. *The Elementary School Journal, 84(2),* 199-212. http://doi.org/10.1086/461356

Blanco, L. J., & Garrote, M. (2007). Difficulties in Learning Inequalities in Students of the First Year of Pre-University Education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 3*(3), 221-229. https://doi.org/10.12973/ejmste/75401

Boero, P., & Bazzini, L. (2004). *28th PME Conf (Bergen)* 1_139-1_143. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489178.pdf

Chesney, D. L., & McNeil, N. M. (2014). Activation of operational thinking during arithmetic practice hinders learning and transfer. *The Journal of Problem Solving, 7(1),* Article 4. https://doi.org/10.7771/1932-6246.1165

Chinamasa, E., Nhamburo, V., & Sithole, M. (2014). Analysis of students' errors on linear programming at secondary school level: implications for instruction. *Zimbabwe Journal of Educational Research. 26(1),* 54-72. https://www.academia.edu/87734664/Analysis_of_students_errors_on_linear_programming_at_secondary_school_level_implications_for_instruction

Even, R., Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educ Stud Math 29,* 1-20. https://doi.org/10.1007/BF01273897

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17. https://doi.org/10.2307/748969

Godden, H., Mbekwa, M., & Julie, C. (2013). An analysis of errors and misconceptions in the 2010 Grade 12 Mathematics Examination: A Focus on quadratic equations and inequalities. *In proceedings of the 19th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa, 1,* 70-79. http://www.amesa.org.za/AMESA2013/Files/P08.pdf

Kakoma, L. & Makonye, J. P. (2010). Learner Errors and Misconceptions in Elementary Analysis: A Case Study of a Grade 12 Class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia, 3(3),* 36-46. https://www.researchgate.net/publication/49614471_Learner_errors_and_misconceptions_in_elementary_analysis_A_case_study_of_a_grade_12_class_in_South_Africa

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & Variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 37,* 68-76. https://doi.org/10.1007/BF02655899

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37,* 297-312. https://www.researchgate.net/publication/234007126_Does_understanding_the_equal_sign_matter_Evidence_from_solving_equations

Lochhead, J., & Mestre, J.P. (1988). From words to algebra: mending misconceptions. In Coxford, A.F. & Shulte, A.P. The ideas of algebra, K-12. 1988 Yearbook. NCYM. 127-135. https://paperzz.com/doc/9028578/fromwordstoalgebra--mendingmisconceptions

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59(5),* 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Muzangwa, J., & Chifamba, P. (2012). Analysis of Errors and Misconceptions in the Learning of Calculus by Undergraduate Students. *Acta Didactica Napocensia, 5(2),* 1-10. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1054301.pdf

Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, *1*(1), 16-20. http://www.jstor.org/stable/40247696

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.2307/1175860

Taqiyuddin, M., Sumiaty. E., & Jupri, A, (2017). *AIP Conference Proceedings 1868, 050033,* 1-12. https://doi.org/10.1063/1.4995160

Tong, Y. L. (1984). Introduction. Lecture Notes-Monograph Series, Vol. 5, Inequalities in Statistics and Probability, 1-3. http://www.jstor.org/stable/4355476

Tsamir, P., & Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32,* 513-524 https://doi.org/10.1080/00207390110038277

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single-value' inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35:6,* 793-812. https://doi.org/10.1080/00207390412331271357

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of Classroom Instruction on Student Performance on, and Understanding of, Linear Equations and Linear Inequalities, Mathematical Thinking and Learning, 8:2, 113-147, https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0802_2

Verikios, P., & Farmaki, V. (2010). From equation to inequality using a function-based approach, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41:4,* 515-530. https://doi.org/10.1080/00207390903564611

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and Instruction, Volume 14, Issue 5,* 469-484. http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012

Warren, E. (2006). Comparative Mathematical Language in the Elementary School: A Longitudinal Study. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(2), 169-189. http://www.jstor.org/stable/25472094

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Φύλλο εργασίας ανισοτήτων α’ βαθμού στην Γ’ Γυμνασίου

1. Να μετατρέψετε τις παρακάτω λεκτικές εκφράσεις σε συμβολικές:
    a. Το διπλάσιο ενός αριθμού είναι μικρότερο του 5
    b. Ένας αριθμός αυξημένος κατά 3 είναι μεγαλύτερος από το πενταπλάσιό του
    c. Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 5 είναι μικρότερο από το μισό του αυξημένο κατά 2
    d. Το αντίθετο ενός αριθμού αυξημένο κατά 5 είναι θετικός
    e. Τα 3/4 ενός αριθμού αυξημένα κατά 1 είναι μεγαλύτερο από 5 και μικρότερο ή ίσο από 15
    f. Το άθροισμα τριών διαδοχικών αριθμών υπερβαίνει το 100
    g. Το οκταπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 4 είναι τουλάχιστον 12
    h. Το εξαπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 3 έχει μέγιστη τιμή 2 και ελάχιστη -2
2. Να βρείτε όλες τις ακέραιες και θετικές τιμές του x ώστε το κλάσμα $\frac{3-x}{2}$ να είναι θετικό και μικρότερο του 3.
3. Η αντοχή μιας γέφυρας είναι 8 τόνοι. Ένα φορτηγό με καθαρό βάρος 3 τόνους μεταφέρει σωλήνες που ο καθένας ζυγίζει 200 kg. Πόσους το πολύ σωλήνες μπορεί να μεταφέρει, ώστε να περάσει με ασφάλεια τη γέφυρα;

Φύλλο εργασίας ανισοτήτων α’ βαθμού στην Α’ Λυκείου

1. Να λυθούν οι ανισώσεις:
    a. $-3(6x + 5) + 15x \geq 2 - (9 - x)$
    b. $2x + 2 > 3x - 5 - x$
    c. $4 - (2x - 7) < 2(x + 5) - 4$
2. Η Ειρήνη παρατηρεί ότι κάθε φορά που ο σκύλος της γαβγίζει τη νύχτα ξυπνάει και χάνει 15 λεπτά ύπνου. Το προηγούμενο βράδυ κοιμήθηκε λιγότερο από 5 ώρες, ενώ συνήθως (αν δεν γαβγίσει ο σκύλος) κοιμάται 8 ώρες το βράδυ.
    a. Πόσες τουλάχιστον φορές ξύπνησε το προηγούμενο βράδυ η Ειρήνη;
    b. Μπορεί να την ξύπνησε το γάβγισμα 33 φορές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.
3. Ο Λουκάς απευθύνθηκε σε δυο γραφεία ενοικίασης αυτοκινήτων. Το πρώτο γραφείο του ζήτησε 35€ για δικαιώματα ενοικίασης και επιπλέον 0,25€ για κάθε χιλιόμετρο που θα διανύσει. Το δεύτερο γραφείο του ζήτησε 20€ για δικαιώματα ενοικίασης και επιπλέον 0,40€ για κάθε χιλιόμετρο που θα διανύσει. Πόσα χιλιόμετρα και πάνω πρέπει να κάνει ο Λουκάς, ώστε να τον συμφέρει η ενοικίαση αυτοκινήτου από το πρώτο γραφείο;