ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εκτιμήσεις πυρήνων θερμότητας για ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές τέταρτης τάξης

Παναγιώτης - Χρήστος Μπρανίκας

Διδακτορική Διατριβή

Επιβλέπων καθηγητής: Γεράσιμος Μπαρμπάτης

Απρίλιος 2023

Τριμελής συμβουλευτική επιτροπή

Γεράσιμος Μπαρμπάτης, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α. (επιβλέπων)
Ιωάννης Στρατής, Ομότιμος Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.
Ευστάθιος Φίλιππας, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Επταμελής εξεταστική επιτροπή

Γεράσιμος Μπαρμπάτης, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α. (επιβλέπων)
Ιωάννης Γιαννούλης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Ευαγγελία Κόττα - Αθανασιάδου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.
Παναγιώτης Σμυρνέλης, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.
Ιωάννης Στρατής, Ομότιμος Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.
Αχιλλέας Τερτίκας, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ευστάθιος Φίλιππας, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των Διδακτορικών Σπουδών, του Τομέα Μαθηματικής Ανάλυσης, του Τμήματος Μαθηματικών, του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Γεράσιμου Μπαρμπάτη.

Θα ήθελα από αυτή τη θέση να ευχαριστήσω όσους συνέβαλαν είτε άμεσα είτε έμμεσα στην ολοκλήρωσή της.

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Γεράσιμο Μπαρμπάτη που μου πρότεινε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον αντικείμενο, για τη διαρκή καθοδήγησή του και υπομονή που έδειξε. Οι εύστοχες, πάντα, παρατηρήσεις του καθώς και η προθυμία με την οποία μου εξηγούσε τις μαθηματικές έννοιες και μεθόδους που χρειάστηκα στην επεξεργασία του συγκεκριμένου θέματος, με βοήθησαν σε ολόκληρη τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής. Ο σεβασμός που τρέφω προς το πρόσωπό του είναι τεράστιος.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τον Ομότιμο Καθηγητή κ. Ιωάννη Στρατή και τον Καθηγητή κ. Ευστάθιο Φίλιππα, για τη συμβολή τους στην ολοκλήρωση της διατριβής.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αλέξανδρο, τον Μάριο, τον Χρήστο, την Ουρανία και τον Κυριάκο που μου κάνουν την τιμή να τους έχω φίλους στη ζωή μου. Ξεχωριστό ευχαριστώ οφείλω στον Οδυσσέα και στη Λυδία.

Τέλος, χρωστάω ένα τεράστιο ευχάριστω στα τρία πιο βασικά πρόσωπα της ζωής μου. Στον πατέρα μου, που η σκέψη του πάντα καθοριζεί την πορεία μου. Θα είναι πάντα το σημείο αναφοράς για μένα. Στη μητέρα μου, για την ηθική στήριξη που μου παρείχε και εξακολουθεί να μου παρέχει. Στην αδελφή μου, που μου δείχνει κάθε μέρα την αξία να προχωράς με σταθερά βήματα.

Περίληψη

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή, με τίτλο «Εκτιμήσεις πυρήνων θερμότητας για ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές τέταρτης τάξης» θεωρούμε μία κατηγορία ομοιόμορφα ελλειπτικών τελεστών τέταρτης τάξης σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ και μελετάμε τον σχετικό πυρήνα θερμότητας. Για τελεστές με συντελεστές L^∞ βρίσκουμε Γκαουσιανές εκτιμήσεις με τις βέλτιστες σταθερές, ενώ για τελεστές με σταθερούς συντελεστές βρίσκουμε ασυμπτωτικές εκτιμήσεις. Η καινοτομία αυτής της διατριβής είναι ότι το σχετικό σύμβολο δεν είναι ισχυρά κυρτό. Οι ασυμπτωτικές εκτιμήσεις εμφανίζουν μία συμπεριφορά που είναι ποιοτικά διαφορετική από αυτή της ισχυρά κυρτής περίπτωσης.

Βρίσκουμε επίσης εκτιμήσεις του πυρήνα θερμότητας για μία κατηγορία μη ομοιόμορφα ελλειπτικών τελεστών τέταρτης τάξης στις δύο διαστάσεις. Σε αντίθεση με τα υπάρχοντα αποτελέσματα, οι τελεστές που μελετώνται έχουν σύμβολα που δεν είναι ισχυρά κυρτά. Αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες καθώς είναι γνωστό ότι, σε αντίθεση με την ισχυρά κυρτή περίπτωση, δεν υπάρχει απόλυτη εκθετική σταθερά. Οι εκτιμήσεις μας περιλαμβάνουν σταθερές και αποστάσεις τύπου Finsler που επάγονται από το σύμβολο του τελεστή. Το κύριο αποτέλεσμα βασίζεται σε δύο γενικές υποθέσεις, μία ανισότητα Sobolev με βάρος και μία ανισότητα παρεμβολής με βάρος, οι οποίες σχετίζονται με την ιδιομορφία ή τον εκφυλισμό των συντελεστών.

Abstract

In this doctoral dissertation, entitled "Heat kernel estimates for fourth-order elliptic operators" we consider a class of fourth order uniformly elliptic operators in planar Euclidean domains and study the associated heat kernel. For operators with L^∞ coefficients we obtain Gaussian estimates with best constants, while for operators with constant coefficients we obtain short time asymptotic estimates. The novelty of this thesis is that we do not assume that the associated symbol is strongly convex. The short time asymptotics reveal a behavior which is qualitatively different from that of the strongly convex case.

We also obtain heat kernel estimates for a class of fourth order non-uniformly elliptic operators in two dimensions. Contrary to existing results, the operators considered have symbols that are not strongly convex. This rises certain difficulties as it is known that, as opposed to the strongly convex case, there is no absolute exponential constant. Our estimates involve sharp constants and Finsler-type distances that are induced by the operator symbol. The main result is based on two general hypotheses, a weighted Sobolev inequalitry and an interpolation inequality, which are related to the singularity or degeneracy of the coefficients.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Θεωρούμε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Έστω

$$Hu = \partial_{x_1}^2(\alpha(x)\partial_{x_1}^2 u) + 2\partial_{x_1}\partial_{x_2}(\beta(x)\partial_{x_1}\partial_{x_2} u) + \partial_{x_2}^2(\gamma(x)\partial_{x_2}^2 u), \tag{1}$$

ένας αυτοσυζυγής, ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής τέταρτης τάξης, ορισμένος στο Ω με συντελεστές στο $L^\infty(\Omega)$ ο οποίος ικανοποιεί συνοριακές συνθήκες Dirichlet στο σύνορο $\partial\Omega$. Έχει αποδειχθεί από τον Davies [12] ότι ο τελεστής H έχει έναν πυρήνα θερμότητας $G(x, x', t)$ (αναφέρεται επίσης ως παραβολική συνάρτηση Green) ο οποίος ικανοποιεί την Γκαουσιανή εκτίμηση,

$$|G(x, x', t)| \le c_1 t^{-\frac{1}{2}} \exp\Big(- c_2 \frac{|x - x'|^{4/3}}{t^{1/3}} + c_3 t\Big), \tag{2}$$

για κάποιες θετικές σταθερές c_1, c_2, c_3 και για όλα τα $t > 0$ και $x, x' \in \Omega$.

Το πρόβλημα της εύρεσης της καλύτερης τιμής της εκθετικής σταθεράς c_2 σχετίζεται με την αντικατάσταση της Ευκλείδειας απόστασης $|x - y|$ από μία κατάλληλη απόσταση $d(x, y)$ η οποία επάγεται από τον τελεστή H και, ειδικότερα, από το σύμβολο

$$A(x, \xi) = \alpha(x)\xi_1^4 + 2\beta(x)\xi_1^2\xi_2^2 + \gamma(x)\xi_2^4 \,, \qquad x \in \Omega \,, \;\; \xi \in \mathbb{R}^2 \,.$$

Στο άρθρο [16] οι Evgrafov και Postinkov μελέτησαν την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Green καθώς $t \to 0+$ για τελεστές γενικής τάξης $2m$ στο $\mathbb{R}^n$ με σταθερούς συντελεστές οι οποίοι ικανοποιούν την λεγόμενη υπόθεση της ισχυρής κυρτότητας. Στην περίπτωση τελεστή τέταρτης τάξης στο $\mathbb{R}^2$ η οποία μας ενδιαφέρει, η ασυμπτωτική εκτίμηση έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} G(x, x', t) \quad \sim \quad & h(x - x')^{-2/3} t^{-1/3} \exp\Big(- \frac{3\sqrt[3]{2}}{16} \frac{p_*(x - x')^{4/3}}{t^{1/3}}\Big) \\ & \cos\Big(- \frac{3\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{16} \frac{p_*(x - x')^{4/3}}{t^{1/3}} - \frac{\pi}{3}\Big), \end{aligned} \tag{3}$$

καθώς $t \to 0^+$, για κάθε $x, x' \in \mathbb{R}^2$. Εδώ το h είναι μία θετική ομογενής συνάρτηση βαθμού ένα και p_* είναι η μετρική Finsler που ορίζεται ως η δυϊκή της $p(\xi) = A(\xi)^{1/4}$, δηλαδή

$$p_*(\xi) = \max_{\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{\eta \cdot \xi}{A(\eta)^{1/4}}. \tag{4}$$

Ένας ανάλογος ασυμπτωτικός τύπος έχει βρεθεί στο [26] στη γενικότερη περίπτωση των τελεστών με ομαλούς συντελεστές. Σε αυτήν την περίπτωση η σχετική απόσταση είναι η (γεωδαισιακή) απόσταση Finsler $d_{p_*}(x, x')$ που σχετίζεται με τη μετρική Finsler με στοιχειώδες μήκος $p_*(x, \xi)$, το οποίο ορίζεται παρόμοια με την (4), με την πρόσθετη εξάρτηση από το x.

Μία πιο λεπτή εκδοχή της Γκαουσιανής εκτίμησης (2) θα πρέπει λοιπόν να περιέχει στον εκθετικό όρο τη σταθερά $\frac{3\sqrt[3]{2}}{16}$ καθώς και την κατάλληλη απόσταση Finsler. Μία τέτοια εκτίμηση διατυπώθηκε στο [3] όπου αποδείχθηκε ότι

$$|G(x, x', t)| \le c_\epsilon t^{-\frac{1}{2}} \exp\Big\{ -\Big(\frac{3\sqrt[3]{2}}{16} - cD - \epsilon\Big) \frac{d_M(x, x')^{4/3}}{t^{1/3}} + c_{\epsilon,M} t \Big\}, \tag{5}$$

για αυθαίρετο ϵ και M θετικό. Εδώ το D είναι μία μη-αρνητική σταθερά που σχετίζεται με την κανονικότητα των συντελεστών και $d_M(x, x')$ με $M > 0$, είναι μία οικογένεια αποστάσεων τύπου Finsler στο Ω που αυξάνει μονότονα και συγκλίνει καθώς το $M \to +\infty$, σε μία απόσταση τύπου Finsler $d(x, x')$ στενά συνδεδεμένη με την $d_{p_*}(x, x')$ (βλ. Ενότητα 3.3).

Μία θεμελιώδης υπόθεση για την (5) είναι, όπως και για την (3) η ισχυρή κυρτότητα του συμβόλου $A(x, \xi)$ του τελεστή H. Σημειώνεται όμως ότι η έννοια της ισχυρής κυρτότητας που απαιτείται για τα Γκαουσιανά φράγματα στο (5) είναι λίγο διαφορετική από την αντίστοιχη έννοια που απαιτείται για τις ασυμπτωτικές εκτιμήσεις των Evgrafov και Postinkov στο [16]. Στην πρώτη περίπτωση μία τετραγωνική μορφή πρέπει να είναι θετικά ημιορισμένη, ενώ στη δεύτερη περίπτωση πρέπει να είναι θετικά ορισμένη.

Έτσι λοιπόν, το σύμβολο

$$A(\xi) = \alpha \xi_1^4 + 2\beta \xi_1^2 \xi_2^2 + \gamma \xi_2^4\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

είναι ισχυρά κυρτό με την έννοια του [16] αν και μόνο αν

$$0 < \beta < 3\sqrt{\alpha\gamma}\,, \tag{6}$$

ενώ με την έννοια του [3] (όπου οι συντελεστές α, β, γ είναι συναρτήσεις) το σύμβολο

$$A(x, \xi) = \alpha(x) \xi_1^4 + 2\beta(x) \xi_1^2 \xi_2^2 + \gamma(x) \xi_2^4\,, \qquad x \in \Omega\,,\ \xi \in \mathbb{R}^2,$$

είναι ισχυρά κυρτό αν και μόνο αν

$$0 \leq \beta(x) \leq 3\sqrt{\alpha(x)\gamma(x)}, \qquad x \in \Omega. \tag{7}$$

Δηλαδή, ενώ για ασυμπτωτικές εκτιμήσεις η αυστήρη ανισότητα ήταν απαραίτητη, για Γκαουσιανές εκτιμήσεις η ισότητα είναι επιτρεπτή.

Στη συγκεκριμένη διατριβή, στόχος μας είναι να βρούμε εκτιμήσεις ανάλογες των (3) και (5) στην περίπτωση των μη ισχυρά κυρτών συμβόλων. Ως εκ τούτου, στο Θεώρημα 2.7, στο οποίο λαμβάνουμε ασυμπτωτικές εκτιμήσεις η συνθήκη (6) δεν ισχύει, ενώ στο Θεώρημα 3.10, στο οποίο λαμβάνουμε Γκαουσιανές εκτιμήσεις, η συνθήκη (7) δεν ισχύει.

Στο Κεφάλαιο 2 αποδεικνύουμε ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τη συνάρτηση Green της εξίσωσης $u_t = -Hu$ όταν το σύμβολο του τελεστή H δεν είναι ισχυρά κυρτό. Όπως και στο [16], θεωρούμε τελεστές με σταθερούς συντελεστές, οπότε ο πυρήνας θερμότητας $G(x, x', t) = G(x-x', t)$ δίνεται με χρήση του μετασχηματισμού Fourier από τη σχέση

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi\cdot x - A(\xi)t}\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0.$$

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε τη μέθοδο επικλινέστατης καθόδου (steepest descent method). Για τεχνικούς λόγους, εξετάζουμε μόνο συγκεκριμένες επιλογές του σημείου $x \in \mathbb{R}^2$.

Οι ασυμπτωτικές εκτιμήσεις του Θεωρήματος 2.7 έχουν ξεχωριστό ενδιαφέρον, διότι εμφανίζουν μία συμπεριφορά που είναι ποιοτικά διαφορετική από αυτή της ισχυρά κυρτής περίπτωσης. Έστω

$$Q = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}.$$

Στην ισχυρά κυρτή περίπτωση $0 < Q < 3$, η συνάρτηση Green ταλαντώνεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα. Αντίθετα, όταν $Q < 0$ ή $Q > 3$ η συνάρτηση Green παραμένει θετική για μικρούς χρόνους. Οι οριακές περιπτώσεις $Q = 0$ και $Q = 3$ είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες. Σε αυτές τις δύο περιπτώσεις η ασυμπτωτική έκφραση περιλαμβάνει ταλαντώσεις που αγγίζουν τον οριζόντιο άξονα στα χαμηλότερα σημεία τους (βλ. τα διαγράμματα στην Ενότητα 2.4). Αυτό οφείλεται σε ένα φαινόμενο διακλάδωσης που συμβαίνει στο $Q = 0$ και $Q = 3$. Σε αυτές τις τιμές του Q υπάρχει μία αλλαγή στους κλάδους των σαγματικών σημείων που συμβάλλουν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος. Ενώ για κάθε $Q \neq 0, 3$ υπάρχουν δύο σημεία συνεισφοράς, για κάθε μία από τις τιμές $Q = 0$ και $Q = 3$ υπάρχουν τέσσερα τέτοια σημεία.

Ένα άλλο ενδιαφέρον σημείο το οποίο διαφοροποιεί τις εκτιμήσεις του Θεωρήματος 2.7 από αυτές της ισχυρά κυρτής περίπτωσης είναι το γεγονός ότι η εκθετική σταθερά εξαρτάται πλεόν από την παράμετρο Q.

Στο τέλος του Κεφαλαίου 2 παρουσιάζουμε διαγράμματα από αριθμητικούς υπολογισμούς στα οποία φαίνεται η σύγκλιση των ασυμπτωτικών εκτιμήσεων. Για λόγους πληρότητας, έχουμε συμπεριλάβει και ένα παράρτημα με την απόδειξη των Evgrafov και Postnikov στην ισχυρά κυρτή περίπτωση $0 < Q < 3$.

Στο Κεφάλαιο 3 ο στόχος είναι Γκαουσιανές εκτιμήσεις για το πυρήνα θερμότητας του τελεστή (1) χωρίς την υπόθεση της ισχυρής κυρτότητας. Εδώ η ιδιότητα της ισχυρής κυρτότητας μπορεί να ισχύει για κάποια $x \in \Omega$ και να μην ισχύει για κάποια άλλα. Το βασικό αποτέλεσμα είναι το Θεώρημα 3.10, όπου διατυπώνεται ένα Γκαουσιανό φράγμα που περιλαμβάνει τις αποστάσεις τύπου Finsler $d_M(\cdot,\cdot)$ και μία εκθετική σταθερά σ_* η οποία εξαρτάται από το πεδίο τιμών της συνάρτησης

$$Q(x) = \frac{\beta(x)}{\sqrt{\alpha(x)\gamma(x)}}, \quad x \in \Omega.$$

Επομένως, η ισχυρά κυρτή περίπτωση αντιστοιχεί στην περίπτωση $Q \in [0,3]$, ενώ εδώ επιτρέπουμε στο Q να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $(-1,+\infty)$ (φραγμένο όμως μακρυά από το -1 λόγω της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας). Αξίζει να σημειωθεί ότι, ενώ στην ισχυρά κυρτή περίπτωση έχουμε $\sigma_* = 3\sqrt[3]{2}/16$, στη γενική περίπτωση το σ_* μπορεί να πάρει ένα συνεχές εύρος τιμών. Η ακριβής τιμή του εξαρτάται από την (ουσιώδη) εικόνα της συνάρτησης $Q(x)$, $x \in \Omega$.

Η προσέγγισή μας ακολουθεί τις βασικές ιδέες του [3] και συγκεκριμένα κάνει χρήση της μεθόδου εκθετικής διαταραχής του Davies [12]. Ωστόσο, προκύπτουν τεχνικές δυσκολίες λόγω της ύπαρξης τριών διαφορετικών υποπεριοχών του Ω που εμπλέκονται στην απόδειξη. Οι περιοχές αυτές είναι ουσιαστικά οι αντιστροφές εικόνες των διαστημάτων $(-1,0]$, $[0,3]$ και $[3,+\infty)$ μέσω της συνάρτησης Q. Η σχετική ανάλυση είναι διαφορετική σε κάθε μία περιοχή, και πρέπει να δειχθεί ότι τα σύνολα $\{x : Q(x) = 0\}$ και $\{x : Q(x) = 3\}$ δεν προκαλούν κανένα πρόβλημα.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο επεκτείνουμε τις εκτιμήσεις του Κεφαλαίου 3 στην περίπτωση όπου ο τελεστής H δεν είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός και/ή δεν είναι αυτοσυζυγής. Όσον αφορά την ιδιομορφία (singularity) ή τον εκφυλισμό (degeneracy), υποθέτουμε ότι ο τελεστής H είναι τοπικά ομοιόμορφα ελλειπτικός και ότι υπάρχει μία θετική συνάρτηση βάρους $w(x)$ που ελέγχει, με κατάλληλη έννοια, τη συμπεριφορά των συντελεστών του τελεστή.

Η βασική μελέτη μας στηρίζεται από δύο γενικές υποθέσεις (Y1) και (Y2) για τη συνάρτηση βάρους $w(x)$. Η (Y1) είναι μία ανισότητα Sobolev με βάρος και η (Y2) μία ανισότητα παρεμβολής με βάρος. Αυτές οι υποθέσεις εισήχθησαν στο [6] προκειμένου να ληφθούν Γκαουσιανές εκτιμήσεις (χωρίς βέλτιστη σταθερά) για μη ομοιόμορφα ελλειπτικούς αυτοσυζυγείς τελεστές. Εκτός από τις υποθέσεις (Υ1) και (Υ2), θα υποθέσουμε ότι το σύμβολο $A(x,\xi)$ είναι κοντά (ως προς μία κατάλληλη έννοια) σε μία κατηγορία «καλών» συμβόλων που ορίζονται μέσω της $w(x)$. Αυτά τα σύμβολα αντιστοιχούν σε τελεστές που είναι αυτοσυζυγείς και οι συντελεστές τους είναι τοπικά Lipschitz, με τη συμπεριφορά κοντά στο σύνορο $\partial\Omega$ (ή στο άπειρο) να ελέγχεται από τη συνάρτηση βάρους $w(x)$. Οι εκτιμήσεις που λαμβάνονται εδώ συμπληρώνουν ανάλογες εκτιμήσεις στο [4] όπου εξετάστηκαν μη ομοιόμορφα ελλειπτικοί τελεστές με ισχυρά κυρτό σύμβολο. Το βέλτιστο της εκθετικής σταθεράς σ_* στην Γκαουσιανή μας εκτίμηση προκύπτει και πάλι από τις ασυμπτωτικές εκτιμήσεις του Κεφαλαίου 2.

Η απόδειξη έχει πολλές ομοιότητες με την αντίστοιχη απόδειξη στο Κεφάλαιο 3 με απαραίτητη την επιπλέον προσοχή για τον έλεγχο διαφόρων όρων, ο οποίος είναι δυνατός λόγω των υποθέσεων (Υ1) και (Υ2). Ας σημειωθεί ότι ενώ ο τελεστής H μπορεί να είναι ιδιάζων ή εκφυλισμένος, οι υποθέσεις που γίνονται εγγυώνται ότι η συνάρτηση $Q(x)$ φράσσεται μακρυά από το μηδέν και το άπειρο, κάτι κρίσιμο για την εφαρμογή της μεθόδου.

Τελειώνουμε αυτήν την εισαγωγή με μία παρατήρηση. Όπως επισημαίνεται στο [16], για έναν τελεστή τέταρτης τάξης στις δύο διαστάσεις, η ισχυρή κυρτότητα ισοδυναμεί με την κυρτότητα. Παρόλα αυτά δεν επιλέξαμε να αντικατασταθεί ο όρος «ισχυρά κυρτό» από το «κυρτό» προκειμένου να τονιστεί η σημασία της ισχυρής κυρτότητας στη γενική περίπτωση ενός τελεστή τάξης $2m$ που δρα στον $\mathbb{R}^n$.

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε διάφορες βασικές έννοιες που μας είναι χρήσιμες για τις διατυπώσεις των βασικών θεωρημάτων που θα δούμε παρακάτω.

1.1 Τετραγωνικές μορφές

Έστω H ένας αυτοσυζυγής τελεστής στον μιγαδικό χώρο Hilbert $\mathcal{H}$.

Θεώρημα 1.1 *Υπάρχει ένας χώρος μέτρου* (M, dm), *μία πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση* h *στο* M *και ένας μοναδιαίος τελεστής*

$$U : \mathcal{H} \to L^2(M, dm),$$

τέτοιος ώστε

$$\mathrm{Dom}(H) = \Big\{ f \in \mathcal{H} | \int_M |h(m)Uf(m)|^2 dm < +\infty \Big\},$$

και

$$Hf = U^{-1}hUf,$$

για κάθε $f \in \mathrm{Dom}(H)$.

Έστω D ένας υπόχωρος του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$. Μία συμμετρική διγραμμική μορφή στον D είναι μία απεικόνιση $Q : D \times D \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad Q(\alpha f + \beta g, h) = \alpha Q(f, h) + \beta Q(g, h), \\ &\text{(ii)} \quad Q(f, g) = \overline{Q(g, f)}, \end{aligned}$$

για κάθε $f, g, h \in D$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Από τις σχέσεις (*i*) και (*ii*) προκύπτει ότι

$$\text{(iii)} \quad Q(f, \alpha g + \beta h) = \overline{\alpha} Q(f, g) + \overline{\beta} Q(f, h).$$

Αν ο υπόχωρος D είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$, τότε η μορφή Q λέγεται πυκνά ορισμένη.

Από την ταυτότητα

$$\begin{aligned} Q(f,g) &= \frac{1}{4}Q(f+g,f+g) - \frac{1}{4}Q(f-g,f-g) \\ &\quad + i\frac{1}{4}Q(f+ig,f+ig) - i\frac{1}{4}Q(f-ig,f-ig), \end{aligned}$$

προκύπτει ότι η διγραμμική μορφή $Q(\cdot,\cdot)$ ορίζεται μονοσήμαντα από την τετραγωνική μορφή, που συμβολίζεται επίσης με Q, από τον $\mathcal{H}$ στο $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ που ορίζεται ως

$$Q(f) = \begin{cases} Q(f,f) & \text{αν} \quad f \in \mathrm{Dom}(Q), \\ +\infty & \text{αν} \quad f \notin \mathrm{Dom}(Q). \end{cases}$$

Μία τετραγωνική μορφή λέγεται θετικά ημιορισμένη αν

$$Q(f) \geq 0, \quad \text{για κάθε} \quad f \in \mathrm{Dom}(Q).$$

Μία θετικά ημιορισμένη μορφή Q λέμε ότι είναι κλείσιμη (closabe) αν ο υπόχωρος $\mathrm{Dom}(Q)$ είναι ένας χώρος Hilbert υπό το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f,g\rangle_Q = \langle f,g\rangle + Q(f,g).$$

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.2 *Μία τετραγωνική μορφή Q είναι κλειστή αν και μόνο αν η απεικόνιση $Q : \mathcal{H} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ είναι κάτω ημισυνεχής.*

Επιπλέον, η Q καλείται κλείσιμη (closabe) αν έχει μία κλειστή επέκταση, οπότε έχει μία ελάχιστη κλειστή επέκταση, η οποία ονομάζεται κλειστότητα της Q. Αν η Q είναι κλείσιμη, ένας υπόχωρος D' του D ονομάζεται πυρήνας (form core) της Q αν είναι πυκνός στο D για το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$.

Έχουμε το ακόλουθο βασικό θεώρημα το οποίο δίνει μία 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα σε κλειστές θετικά ημιορισμένες τετραγωνικές μορφές και θετικά ημιορισμένους αυτοσυζυγείς τελεστές:

Θεώρημα 1.3 *(i) Έστω H ένας αυτοσυζυγής θετικά ημιορισμένος τελεστής στον $\mathcal{H}$. Τότε η τετραγωνική μορφή Q με πεδίο ορισμού $\mathrm{Dom}(Q) = \mathrm{Dom}(H^{(\frac{1}{2}})$ και*

$$Q(f) = \langle H^{\frac{1}{2}}f, H^{\frac{1}{2}}f\rangle \quad \text{με} \quad f \in \mathrm{Dom}(H^{\frac{1}{2}}). \tag{1.1}$$

είναι κλειστή και πυκνά ορισμένη.

(ii) Αντίστροφα, για κάθε κλειστή, πυκνά ορισμένη τετραγωνική μορφή Q υπάρχει ένας μοναδικός θετικά ημιορισμένος αυτοσυζυγής τελεστής H έτσι ώστε να ισχύει

η (1.1). *Επιπλέον ισχύει τότε ότι* $f \in \mathrm{Dom}(H)$ *αν και μόνο αν* $f \in \mathrm{Dom}(Q)$ *και υπάρχει* $h \in \mathcal{H}$ *τέτοια ώστε*

$$Q(f, g) = \langle h, g \rangle,$$

για κάθε $g \in \mathrm{Dom}(Q)$*, οπότε* $Hf = h$.

Το πεδίο ορισμού της τετραγωνικής μορφής που αντιστοιχεί στον H ονομάζεται και πεδίο ορισμού τετραγωνικής μορφής (quadratic form domain) του H και συμβολίζεται με $\mathrm{Quad}(H)$, οπότε

$$\mathrm{Quad}(H) = \mathrm{Dom}(H^{\frac{1}{2}}).$$

Παρατήρηση. Εάν η Q είναι κλείσιμη αλλά όχι πυκνά ορισμένη, τότε ορίζει έναν αυτοσυζυγή τελεστή στην κλειστότητα του $\mathrm{Dom}(Q)$ στον $\mathcal{H}$.

1.2 Μέθοδος επικλινέστατης καθόδου (steepest descent method)

Η μέθοδος της επικλινέστατης καθόδου (steepest descent method) είναι μία επέκταση της μεθόδου του Laplace για την ασυμπτωτική εκτίμηση ενός ολοκληρώματος της μορφής

$$\int_C f(z) e^{\lambda g(z)}\, dz,$$

καθώς $\lambda \to +\infty$, όπου το C είναι μία καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο. Η βασική ιδέα της μεθόδου επικλινέστατης καθόδου είναι ότι μέσω μίας κατάλληλης παραμόρφωσης της καμπύλης C εντός του μιγαδικού επιπέδου η ζητούμενη ασυμπτωτική εκτίμηση ανάγεται στην εκτίμηση ενός ολοκληρώματος τύπου Laplace, η οποία είναι απλή [21].

1.2.1 Η μέθοδος στη μία διάσταση

Σε αυτή την ενότητα, θα εφαρμόσουμε ενδεικτικά τη μέθοδο της επικλινέστατης καθόδου, προκειμένου να βρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς $t \to 0+$ της θεμελιώδους λύσης $G(x, t)$ της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$u_t = u_{xxxx}\,, \qquad t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

Χρησιμοποιπώντας τον μετασχηματισμό Fourier βρίσκουμε

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i x\xi - t\xi^4}\, d\xi, \quad x > 0.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής

$$\xi = \left(\frac{x}{4t}\right)^{\frac{1}{3}} \eta,$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{4t}\right)^{\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(\frac{1}{(4t)^{\frac{1}{3}}}\Big(ix\eta - \frac{\eta^4}{4}\Big)\Big) d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{4t}\right)^{\frac{1}{3}} F\Big(\Big(\frac{x^{\frac{4}{3}}}{(4t)^{\frac{1}{3}}}\Big)\Big), \end{aligned} \tag{1.2}$$

όπου

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[\lambda\Big(i\xi - \frac{\xi^4}{4}\Big)\Big]\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}+i0} \exp(\lambda\,\phi(z))\, dz, \end{aligned} \tag{1.3}$$

με

$$\phi(z) = iz - \frac{z^4}{4}.$$

Τα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου της $\phi(z)$ είναι τα

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{6}i}, \quad z_2 = e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\overline{z_1}, \quad z_3 = -i.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι $\phi''(z_k) \neq 0$, δηλαδή τα σημεία μηδενισμού της $\phi'(z)$ είναι απλά σαγματικά σημεία. Παρατηρούμε ότι για τα σημεία αυτά ισχύει

$$\phi(z_k) = \frac{3i}{4} z_k\,, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Όπως θα φανεί και στη συνέχεια, αρκεί να ασχοληθούμε μόνο με τα σημεία z_1 και z_2.

Οι καμπύλες επικλινέστατης καθόδου που διέρχονται από τα σημεία z_1 και z_2 προκύπτουν από τις σχέσεις

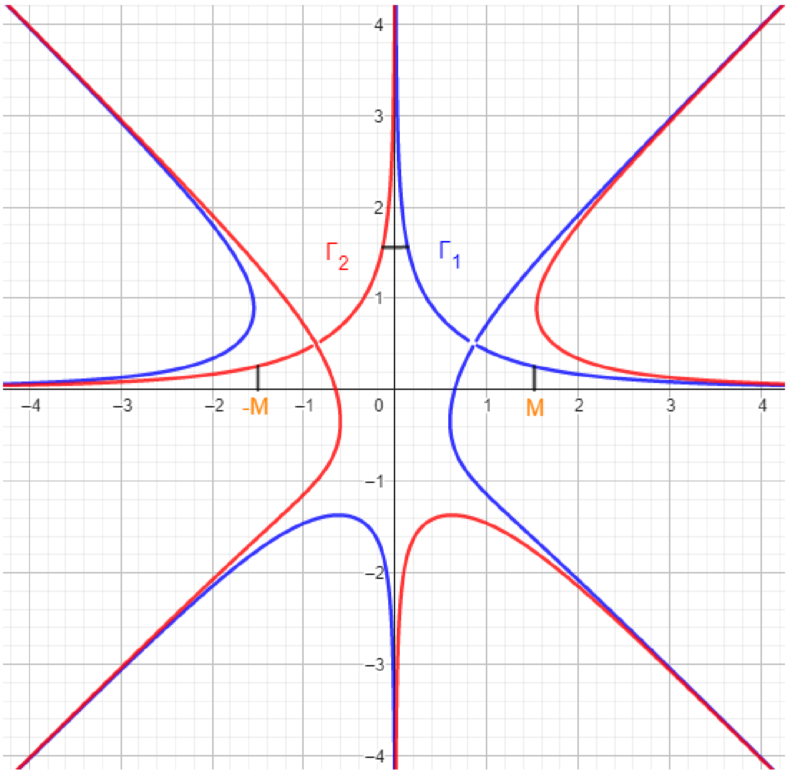
$$\text{Im}\ \phi(z) = \text{Im}\ \phi(z_1), \qquad \text{Im}\ \phi(z) = \text{Im}\ \phi(z_2),$$

με το Re $\phi(z)$ επί των καμπυλών Γ_1 και Γ_2 να λαμβάνει μέγιστη τιμή στα σημείο z_1 και z_2 αντίστοιχα.

Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι οι εξισώσεις των δύο καμπυλών είναι

$$\begin{aligned}\Gamma_1: \quad & x - x^3 y + x y^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8},\\ \Gamma_2: \quad & x - x^3 y + x y^3 = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω καμπυλών (μαζί με άλλες που ικανοποιούν τις ίδιες εξισώσεις) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 1.1: Καμπύλες Γ_1 και Γ_2

Θεωρούμε $M > 0$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Cauchy στην απλή κλειστή καμπύλη που ορίζεται από τις Γ_1, Γ_2 και τις ευθείες $x = \pm M$ και $y = M$. Παίρνοντας το όριο $M \to +\infty$ το ολοκλήρωμα σε κάθε ένα από τα τρία ευθύγραμμα τμήματα τείνει στο μηδέν, και συνεπώς

$$\int_{\mathbb{R}+i0} \exp(\lambda\,\phi(z))\,dz = \int_{\Gamma_1} \exp\left(\lambda\phi(z)\right)\,dz + \int_{\Gamma_2} \exp\left(\lambda\,\phi(z)\right)\,dz\,.$$

Έτσι η (1.3) γίνεται

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\Gamma_1} \exp\left(\lambda\phi(z)\right)\, dz + \int_{\Gamma_2} \exp\left(\lambda\,\phi(z)\,\right)\, dz \\ &= \int_{\Gamma_1} \exp\left(\lambda\phi(z)\right)\, dz + \int_{\Gamma_1} \exp\left(\lambda\,\phi(\overline{z})\,\right)\, dz \\ &= 2\,\mathrm{Re} \int_{\Gamma_1} \exp\left(\lambda\phi(z)\right)\, dz. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ας γράψουμε $\phi(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι αφού η $v(x,y)$ είναι σταθερά κατά μήκος της Γ_1, έχουμε

$$\int_{\Gamma_1} \exp(\lambda\phi(z))\, dz = e^{i\lambda v(x_1,y_1)} \int_{\Gamma_1} e^{\lambda u(x,y)}\, dz\,.$$

Θα υπολογίσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του τελευταίου ολοκληρώματος με χρήση της μεθόδου Laplace.

Από τον τύπο του Taylor στο σημείο z_1, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi(z_1) + \frac{\phi''(z_1)}{2}(z-z_1)^2 + O((z-z_1)^3) \\ &= \phi(z_1) - \frac{3}{2} z_1^2 \rho^2 e^{2i\theta} + O(\rho^3), \end{aligned}$$

όπου έχουμε θέσει

$$z - z_1 = \rho e^{i\theta}.$$

Άρα

$$\phi(z) = \phi(z_1) + \frac{3}{2}\rho^2 e^{i(\frac{4\pi}{3}+2\theta)} + O(\rho^3).$$

Γράφουμε τώρα

$$\int_{\Gamma_1} \exp(\lambda\phi(z))\, dz = \int_{\Gamma_1^-} \exp(\lambda\phi(z))\, dz + \int_{\Gamma_1^+} \exp(\lambda\phi(z))\, dz,$$

όπου οι Γ_1^- και Γ_1^+ είναι όπως στο σχήμα, δηλαδή βρίσκονται αριστερά και δεξιά του z_1 αντίστοιχα. Οι Γ_1^- και Γ_1^+ είναι οι δύο καμπύλες επικλινέστατης καθόδου με αρχικό σημείο το z_1.

Έστω $\omega = \frac{4\pi}{3} + 2\theta$. Η κλίση των καμπυλών $\Gamma_1^\pm$ στο σημείο z_1 προκύπτει θέτοντας

$$\cos\omega = -1,$$

όποτε λαμβάνουμε

$$\theta = -\frac{\pi}{6} \qquad \text{για την } \Gamma_1^+,$$

και

$$\theta = \frac{5\pi}{6} \qquad \text{για την } \Gamma_1^-.$$

Παραμετρικοποιούμε τις καμπύλες $\Gamma_1^\pm$ ως

$$\phi(z) = \phi(z_1) - s\,, \qquad s \geq 0.$$

Τα φανταστικά μέρη απλοποιούνται και ισοδύναμα έχουμε

$$s = (z - z_1)^2 \left[\frac{3}{2} z_1^2 + z_1(z - z_1) + \frac{1}{4}(z - z_1)^2\right]. \tag{1.5}$$

Η παραπάνω σχέση λύνεται ως προς z

$$z = \gamma_\pm(s),$$

όπου $\gamma_\pm$ αντιστοιχεί στην καμπύλη $\Gamma_1^\pm$. Συνεπώς,

$$\int_{\Gamma_1^\pm} e^{\lambda\phi(z)}\, dz = e^{\lambda\phi(z_1)} \int_0^\infty e^{-xs} \dot{\gamma}_\pm(s)\, ds.$$

Από την (1.5) βρίσκουμε τη ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\gamma_\pm(s)$ κοντά στο σημείο $s = 0^+$. Επιλέγοντας τον κλάδο της τετραγωνικής ρίζας ώστε

$$\dot{\gamma}_\pm(0) = \pm\,|\,\dot{\gamma}_\pm(0)\,|\, e^{-\frac{\pi i}{6}},$$

βρίσκουμε

$$\gamma_\pm(s) = z_1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{z_1} s^{\frac{1}{2}} + o(s^{\frac{1}{2}}),$$

και

$$\dot{\gamma}_\pm(s) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{z_1} s^{-\frac{1}{2}} + o(s^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\,\overline{z_1}\, s^{-\frac{1}{2}} + o(s^{-\frac{1}{2}}).$$

Από το λήμμα του Watson προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda s} \dot{\gamma}_\pm(s)\, ds &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\,\overline{z_1}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + o(\lambda^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,\overline{z_1}\,\lambda^{-\frac{1}{2}} + o(\lambda^{-\frac{1}{2}}),\end{aligned} \tag{1.6}$$

καθώς $\lambda \to +\infty$. Συνεπώς, η σχέση (1.4), μέσω της (1.6) γίνεται

$$F(\lambda) \sim 4\mathrm{Re}\left[e^{\lambda\phi(z_1)} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,\overline{z_1}\lambda^{-\frac{1}{2}}\right]. \tag{1.7}$$

Όμως

$$\text{Re}\,[e^{\lambda\phi(z_1)}\overline{z_1}] = e^{-\frac{3\lambda}{8}}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}\lambda}{8} - \frac{\pi}{6}\right),$$

και άρα η (1.7) παίρνει τη μορφή

$$F(\lambda) \sim 2^{\frac{3}{2}}\, 3^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}\exp(-2^{-3}\,3\lambda)\cos\left(2^{-3}\,3^{\frac{3}{2}}\lambda - \frac{\pi}{6}\right), \tag{1.8}$$

καθώς $\lambda \to +\infty$. Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία, βρίσκουμε ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της (1.2), μέσω της (1.8), δίνεται από τη σχέση

$$G(x,t) \sim 2^{\frac{1}{6}}\, 3^{-\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{6}}\exp(-2^{-\frac{11}{3}}\,3x^{\frac{4}{3}}t^{-\frac{1}{3}})\cos\left(2^{-\frac{11}{3}}\,3^{\frac{3}{2}}x^{\frac{4}{3}}t^{-\frac{1}{3}} - \frac{\pi}{6}\right). \tag{1.9}$$

Παρατήρηση 1.4 Είναι φανερό ότι στη σχέση (1.8) ο συμβολισμός $F(\lambda) \sim G(\lambda)$ δεν μπορεί να έχει τη συνήθη σημασία $F(\lambda) = G(\lambda)(1 + o(\lambda))$, καθώς η συνάρτηση G λαμβάνει και την τιμή μηδέν. Στην (1.8) αλλά και στο υπόλοιπο της διατριβής, όταν θα γράφουμε μια ασυμπτωτική σχέση της μόρφής

$$F(\lambda) \sim e^{A\lambda}\lambda^D\cos(B\lambda + C)\,, \qquad \lambda \to +\infty,$$

αυτό που θα εννοούμε είναι ότι

$$F(\lambda) = e^{A\lambda}\lambda^D\Big(\cos(B\lambda + C) + o(1)\Big)\,, \qquad \lambda \to +\infty.$$

Παρατήρηση 1.5 Από τη σχέση

$$s = (z - z_1)^2\left(\frac{3}{2}z_1^2 + O(|z - z_1|)\right),$$

είναι φανερό ότι οι δύο πρώτοι όροι του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του $z = \gamma_+(s)$ ως συνάρτηση του s καθώς $s \to 0^+$ πρέπει να είναι της μορφής

$$z = z_1 + As^{1/2},$$

για κατάλληλο $A \in C$. Καταλήγουμε λοιπόν

$$s = A^2 s\left(\frac{3}{2}z_1^2 + O(s^{1/2})\right),$$

και άρα πρέπει

$$\frac{3}{2}z_1^2A^2 = 1,$$

δηλαδή
$$A = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{z_1}.$$
Το ερώτημα είναι ποιο πρόσημο πρέπει να επιλέξουμε, δηλαδή ποιον κλάδο της τετραγωνικής ρίζας.

Η γ_+ είναι καμπύλη επικλινέστατης καθόδου που ξεκινά από το z_1 με αρχική κατεύθυνση (γωνία) $\theta = -\pi/6$. Άρα το πρόσημο του A πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε $arg(A) = -\pi/6$, που αντιστοιχεί στο πρόσημο +.

Η καμπύλη $\gamma_-(s)$ έχει αντίθετη κατεύθυνση ($\theta = 5\pi/6$), επειδή όμως τη διατρέχουμε πλησιάζοντας το z_1 τελικά δίνει την ίδια συνεισφορά.

1.2.2 Η μέθοδος στις περισσότερες διαστάσεις

Σε αυτή τη διατριβή μας ενδιαφέρει κυρίως η εφαρμογή της μεθόδου σε περισσότερες διαστάσεις, και ιδίως σε διάσταση δύο.

Για τους σκοπούς μας είναι αρκετό να θεωρήσουμε την περίπτωση $f(z) = 1$ οπότε θεωρούμε το ολοκλήρωμα
$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda S(x)}\,dx,$$
όπου λ είναι μία θετική παράμετρος. Ενδιαφερόμαστε για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $F(\lambda)$ καθώς $\lambda \to +\infty$.

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $S(z)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση n μιγαδικών μεταβλητών, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε επίσης
$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda S(z)}\,dz\,. \tag{1.10}$$

Ορισμός 1.6 *Ένα σημείο $z_0 \in \mathbb{C}^n$ λέγεται σαγματικό σημείο του ολοκληρώματος* (1.10) *(ή της συνάρτησης $S(z)$) αν $\nabla S(z_0) = 0$.*

Ορισμός 1.7 *Το σαγματικό σημείο z_0 λέγεται απλό αν*
$$\det\{S_{z_iz_j}(z_0)\}_{i,j=1}^n \neq 0\,.$$

Ορισμός 1.8 *Το $\mathrm{Re}\, S(z_0)$ λέγεται ύψος της $S(z)$ στο σαγματικό σημείο z_0.*

Για την εφαρμογή της μεθόδου επικλινέστατης καθόδου θα χρειαστούμε το παρακάτω θεώρημα (βλ. [16]).

Θεώρημα 1.9 *Έστω ότι υπάρχουν m απλά σαγματικά σημεία $z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}$ και ομαλή προσανατολίσιμη επιφάνεια $E \subset \mathbb{C}^n$ ομοιομορφική προς το $\mathbb{R}^n$ η οποία περιέχει* *τα απλά σαγματικά σημεία* $z^{(1)}, \dots, z^{(m)}$ *ώστε να ισχύουν τα εξής:*

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda S(z)}\, dz = \int_E e^{\lambda S(z)}\, dz.$

(2) *Η ποσότητα*

$$M_r = \max_{E \cap S(r)} \operatorname{Re} S(z),$$

τείνει στο $-\infty$ *καθώς* $r \to +\infty$.

(3) *Το ύψος* $\operatorname{Re} S(z)$ *λαμβάνει μέγιστη τιμή επί της επιφάνειας* E *ακριβώς στα σημεία* $z^{(1)}, \dots, z^{(m)}$.

Τότε η ασυμπτωτική συμπεριφορά της (1.10), καθώς $\lambda \to +\infty$*, δίνεται από τον τύπο*

$$F(\lambda) \sim \left(-\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{m} \frac{e^{\lambda S(z^{(k)})}}{\sqrt{\det S_{z_i z_j}(z^{(k)})}}. \tag{1.11}$$

Παρατήρηση 1.10 Η επιλογή του κλάδου της τετραγωνικής ρίζας στον τύπο (1.11) εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας E.

1.2.3 Εφαρμογή του Θεωρήματος 1.9 στη μία διάσταση

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.9 προκειμένου να ανακτήσουμε την ασυμπτωτική εκτίμηση (1.9). Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\lambda\Big(i\xi - \frac{\xi^4}{4}\Big)\right] d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}+i\eta_0} \exp(\lambda\, \phi(z))\, dz, \end{aligned}$$

με

$$\phi(z) = iz - \frac{z^4}{4}.$$

Θυμίζουμε ότι τα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου της $\phi(z)$ είναι τα

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{6} i}, \quad z_2 = e^{\frac{5\pi}{6} i} = -\overline{z_1}, \quad z_3 = -i.$$

Σε αυτή την περίπτωση τα σαγματικά σημεία που συνεισφέρουν είναι τα σημεία z_1 και z_2. Θα δούμε ότι για τα σημεία και για την ευθεία $E = \mathbb{R} + i\frac{1}{2}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.9.

Το ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις (1) και (2) είναι άμεσο. Για να δείξουμε ότι ικανοποιείται και η (3) πρέπει να δείξουμε ότι

$$\operatorname{Re}\,\phi(z) \leq \operatorname{Re}\,\phi(z_1)\,, \qquad z \in \mathbb{R} + i\frac{1}{2}, \tag{1.12}$$

με την ισότητα να ισχύει ακριβώς στα σημεία z_1 και z_2. Για να αποδείξουμε την (1.12) σημειώνουμε ότι ισοδύναμα γράφεται ως

$$\operatorname{Re}\,z^4 \geq \operatorname{Re}\,z_1^4 = -\frac{1}{2},$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\operatorname{Re}\left(\xi + i\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{2} \geq 0, \quad \text{με} \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Αυτό πράγματι ισχύει αφού

$$\operatorname{Re}\left(\xi + i\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{2} = \left(\xi^2 - \frac{3}{4}\right)^2 \geq 0.$$

Είναι σαφές πως η ισότητα ισχύει μόνο για τα σημεία $\xi = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ και αυτά αντιστοιχούν στα σημεία z_1 και z_2. Οπότε αυτός ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί και έτσι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.9.

Αυτό συνεπάγεται ότι τα σημεία z_1 και z_2 είναι ακριβώς αυτά που συμβάλλουν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της $F(\lambda)$ καθώς $\lambda \to +\infty$. Τώρα, ο τύπος (1.11) γράφεται

$$\begin{aligned} F(\lambda) &\sim \left(-\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{e^{\lambda\phi(z_1)}}{\sqrt{\phi''(z_1)}} + \frac{e^{\lambda\phi(z_2)}}{\sqrt{\phi''(z_2)}}\right] \\ &\sim 2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} i\operatorname{Re}\left[\frac{e^{\lambda\phi(z_1)}}{\sqrt{\phi''(z_1)}}\right] \\ &\sim 2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} i\operatorname{Re}\left[\frac{e^{\lambda\left(-\frac{3}{8}+i\,\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)}}{i\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}}\right] \\ &\sim 2\left(\frac{2\pi}{3\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3}{8}\lambda}\operatorname{Re}\left[e^{i\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda-\frac{\pi}{6}\right)}\right]. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι είναι συζυγείς μιγαδικά μεταξύ τους, και για αυτό η συνολική συνεισφορά αυτών των δύο σημείων είναι ίση με το διπλάσιο του πραγματικού μέρους της συνεισφοράς του σημείου z_1. Άρα, ο τύπος (1.13) θα γίνει

$$F(\lambda) \sim 2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}} \exp(-2^{-3} \cdot 3\lambda)\cos\left(2^{-3} \cdot 3^{\frac{3}{2}}\lambda - \frac{\pi}{6}\right).$$

Έτσι λάβαμε και πάλι, με διαφορετικό όμως τρόπο, τη σχέση (1.8).

1.3 Μετρικές Finsler

Μία μετρική Finsler σε μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα είναι η απόδοση ενός μήκους σε εφαπτόμενα διανύσματα. Σε αντιθέση με τη μετρική Riemann, αυτό το μήκος δίνεται από μία νόρμα και όχι από ένα εσωτερικό γινόμενο.

Για τους σκοπούς αυτής της διατριβής αρκεί να περιοριστούμε σε μετρικές Finsler στο $\mathbb{R}^n$ ή σε χωρία του $\mathbb{R}^n$. Αυτές μπορεί να είναι δύο τύπων: μπορεί να είναι ανεξάρτητες του χωρικού σημείου (ομογενείς μετρικές Finsler) ή να εξαρτώνται από αυτό (μη ομογενείς μετρικές Finsler)

1.3.1 Ομογενείς μετρικές Finsler

Ορισμός 1.11 *Μία ομογενής μετρική Finsler στον $\mathbb{R}^n$ είναι μία απεικόνιση $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε*

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad p(\xi) \geq 0 \quad \textit{και} \quad p(\xi) = 0 \quad \textit{αν και μόνο αν } \xi = 0, \\
&\text{(ii)} \quad p(\lambda\xi) = |\lambda| p(\xi)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\
&\text{(iii)} \quad \textit{η } p(\xi) \textit{ είναι κυρτή}\,.
\end{aligned}
$$

Ορισμός 1.12 *Έστω μία μετρική Finsler στον $\mathbb{R}^n$. Η δυϊκή μετρική p_* ορίζεται ως*

$$
p_*(\eta) = \max_{\xi \neq 0} \frac{\eta \cdot \xi}{p(\xi)}\,, \quad \eta \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1.14}
$$

Από το γεγονός ότι το supremum κυρτών συναρτήσεων είναι κυρτή συνάρτηση έπεται ότι η p_* είναι κι αυτή μετρική Finsler.

Θεώρημα 1.13 *[25, Ενότητα 1.6] Έστω $p(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, μία μετρική Finsler. Ισχύει $p_{**} = p$.*

1.3.2 Μη ομογενείς μετρικές Finsler

Ορισμός 1.14 *Μία (μη ομογενής) μετρική Finsler στο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι μία απεικόνιση $p : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ η οποία είναι μετρική Finsler για κάθε $x \in \Omega$, δηλαδή:*

$$
\begin{aligned}
&\textit{(i)} \quad p(x,\xi) \geq 0 \textit{ και } p(x,\xi) = 0 \textit{ αν και μόνο αν } \xi = 0, \\
&\textit{(ii)} \quad p(x,\lambda\xi) = |\lambda| p(x,\xi)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\
&\textit{(iii)} \quad p(x,\xi) \textit{ είναι κυρτό ως προς } \xi.
\end{aligned}
$$

Δεδομένης μίας μη ομογενούς μετρικής Finsler η δυϊκή μετρική ορίζεται όπως και στην ομογενή περίπτωση,

$$p_*(x,\eta) = \max_{\xi\neq 0} \frac{\eta\cdot\xi}{p(x,\xi)}\,, \qquad x\in\Omega,\ \eta\in\mathbb{R}^n\,. \tag{1.15}$$

Ορισμός 1.15 *Δίνεται μία απόλυτα συνεχής καμπύλη $\gamma(t)$, $t\in[0,1]$, στο Ω. Ορίζουμε το μήκος $l(\gamma)$ ως*

$$l(\gamma) = \int_0^1 p_*(\gamma(t),\dot\gamma(t))\,dt.$$

Παρατήρηση 1.16 *Το μήκος $l(\gamma)$ είναι αναλλοίωτο ως προς αναπαραμετροποιήσεις της καμπύλης.*

Ορισμός 1.17 *Η (γεωδαισιακή) απόσταση δύο σημείων x, $y\in\Omega$ ορίζεται ως*

$$d(x,y) = \inf_\gamma l(\gamma),$$

όπου το infimum λαμβάνεται στο σύνολο όλων των απόλυτα συνεχών καμπυλών γ στο Ω που ενώνουν τα σημεία x και y.

Παρατήρηση 1.18 *Εύκολα βλέπει κανείς ότι αν υπάρχει $c>1$ ώστε*

$$c^{-1}|\xi| \le p(x,\xi) \le c|\xi|\,, \qquad x\in\Omega\,,\ \xi\in\mathbb{R}^n,$$

τότε

$$c^{-1}d_{Euc}(x,y) \le d(x,y) \le c\,d_{Euc}(x,y), \quad x,y\in\Omega,$$

όπου $d_{Euc}(x,y)$ είναι η γεωδαισιακή απόσταση στο Ω που επάγεται από την Ευκλείδεια μετρική, δηλαδή από τη μετρική $p_{Euc}(x,\xi)=|\xi|$.

Ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 1.19 *[2, Λήμμα 1.3] Αν $p(x,\xi)$ είναι μία μη ομογενής μετρική Finsler τότε για την αντίστοιχη γεωδεσιακή απόσταση έχουμε*

$$d_{p_*}(x,x') = \sup\Big\{\varphi(x')-\varphi(x)\ :\ \varphi\in \mathrm{Lip}(\Omega),\ \ p_{**}(y,\nabla\varphi(y))\le 1\,,\ \ \sigma.\pi.\ \ y\in\Omega\Big\}.$$

1.3.3 Ψευδομετρικές Finsler

Ορισμός 1.20 *Μία ομογενής ψευδομετρική Finsler στον $\mathbb{R}^n$ είναι μία απεικόνιση $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε*

$$\text{(i)} \quad p(\xi) \geq 0 \quad \textit{και} \quad p(\xi) = 0 \quad \textit{αν και μόνο αν } \xi = 0,$$
$$\text{(ii)} \quad p(\lambda\xi) = |\lambda| p(\xi)\ , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Η απεικόνιση $p(\xi)$ ικανοποιεί λοιπόν τις παραπάνω (*i*) και (*ii*) άλλα όχι την (*iii*) του Ορισμού 1.11. Ωστόσο, η δυϊκή μετρική p_* που ορίζεται από τη σχέση (1.14) είναι κυρτή (επειδή είναι το supremum γραμμικών συναρτήσεων) και άρα είναι μία μετρική Finsler.

Μπορούμε συνεπώς και πάλι να ορίσουμε μήκη δρόμων και επομένως τη (γεωδαισιακή) απόσταση μεταξύ σημείων, ακριβώς όπως στην περίπτωση μία ομογενούς μετρικής Finsler.

Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση, η $p_{**}(\xi)$ δε συμπίπτει πλέον με την $p(\xi)$. Είναι μάλιστα γνωστό [25, Ενότητα 1.6] ότι το σύνολο $\{\xi : p_{**}(\xi) \leq 1\}$ είναι ακριβώς η κυρτή θήκη του συνόλου $\{\xi : p(\xi) \leq 1\}$.

Κεφάλαιο 2

Ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Green

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς $t \to 0$, της συνάρτησης Green $G(x,t)$ της εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές

$$u_t = -Hu, \qquad x \in \mathbb{R}^2\,, \quad t > 0, \tag{2.1}$$

όπου

$$H = \partial_{x_1}^4 + 2\beta\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_2}^4\,.$$

Υποθέτουμε ότι $\beta > -1$ καθώς στην αντίθετη περίπτωση ο τελεστής H δεν είναι ελλειπτικός.

Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, η συνάρτηση Green για την εξίσωση (2.1) δίνεται από τον τύπο

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi\cdot x - tA(\xi)}\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^2\,,\ t > 0, \tag{2.2}$$

όπου

$$A(\xi) = \xi_1^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

είναι το σύμβολο του τελεστή H.

2.1 Ισχυρή κυρτότητα

Στη συγκεκριμένη ενότητα θα μελετήσουμε το σύμβολο

$$A(\xi) = \xi_1^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

ως προς την ιδιότητα της *ισχυρής κυρτότητας*. Η έννοια αυτή εισήχθη από τους Evgrafov και Postnikov και είναι η βασική υπόθεση για την εξαγωγή των ασυμπτωτικών εκτιμήσεων της παραβολικής συνάρτησης Green στο [16].

Δίνουμε αρχικά τον ορισμό σε πλήρη γενικότητα, όπου δηλαδή το σύμβολο είναι ένα θετικά ορισμένο ομογενές πολυώνυμο βαθμού $2m$ στο $\mathbb{R}^n$. Για κάθε πολυδείκτη $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ μήκους $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n = 2m$ θέτουμε

$$c_\gamma^{2m} = \frac{(2m)!}{\gamma_1! \cdot \gamma_2! \cdots \gamma_n!}, \tag{2.3}$$

Συμβολίζουμε επίσης

$$\nu = \nu(m, n) = \#\Big\{ \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n \ : \ |\alpha| = m \Big\}.$$

Ορισμός 2.1 *Το σύμβολο*

$$A(\xi) = \sum_{|\gamma|=2m} c_\gamma^{2m} a_\gamma \xi^\gamma, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

λέγεται ισχυρά κυρτό αν η τετραγωνική μορφή

$$\Gamma(p) = \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha+\beta} p_\alpha p_\beta, \qquad p \in \mathbb{R}^\nu, \tag{2.5}$$

είναι θετικά ορισμένη.

Παρατήρηση 2.2 Εύκολα βλέπει κανείς ότι αν το σύμβολο είναι ισχυρά κυρτό τότε η τετραγωνική μορφή $\Gamma(\cdot)$ είναι θετικά ορισμένη και στη γενικότερη περίπτωση όπου θεωρούμε διανύσματα $p \in \mathbb{C}^\nu$.

Πρόταση 2.3 *Το σύμβολο*

$$A(\xi) = \xi_1^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2, \tag{2.6}$$

είναι ισχυρά κυρτό αν και μόνο αν $0 < \beta < 3$.

Απόδειξη. Γράφουμε το σύμβολο (2.6) στη μορφή (2.4). Έχουμε $m = 2$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} A(\xi) = \sum_{|\gamma|=4} c_\gamma^4 a_\gamma \xi^\gamma &= c_{(4,0)}^4 a_{(4,0)} \xi_1^4 + c_{(2,2)}^4 a_{(2,2)} \xi_1^2 \xi_2^2 + c_{(0,4)}^4 a_{(0,4)} \xi_2^4 \\ &\quad + c_{(1,3)}^4 a_{(1,3)} \xi_1 \xi_2^3 + c_{(3,1)}^4 a_{(3,1)} \xi_1^3 \xi_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.3), βρίσκουμε ότι

$$c^4_{(4,0)} = c^4_{(0,4)} = 1\,, \quad c^4_{(2,2)} = 6\,, \quad c^4_{(1,3)} = c^4_{(3,1)} = 0.$$

Επομένως, η σχέση (2.7) θα γίνει

$$A(\xi) = a_{(4,0)}\xi_1^4 + 6a_{(2,2)}\xi_1^2\xi_2^2 + a_{(0,4)}\xi_2^4 + 4a_{(1,3)}\xi_1\xi_2^3 + 4a_{(3,1)}\xi_1^3\xi_2. \tag{2.8}$$

Από τις (2.6) και (2.8) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} a_{(4,0)} &= a_{(0,4)} = 1, \\ a_{(2,2)} &= \frac{\beta}{3}, \\ a_{(1,3)} &= a_{(3,1)} = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Τώρα, η τετραγωνική μορφή (2.5) για $m = 2$, γίνεται

$$\begin{aligned} \Gamma(p) = {} & a_{(4,0)}p^2_{(2,0)} + 2a_{(2,2)}p_{(2,0)}p_{(0,2)} + a_{(0,4)}p^2_{(0,2)} + a_{(2,2)}p^2_{(1,1)} \\ & + 2a_{(3,1)}p_{(2,0)}p_{(1,1)} + 2a_{(1,3)}p_{(1,1)}p_{(2,0)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές (2.9) στη μορφή (2.10) βρίσκουμε ότι

$$\Gamma(p) = p^2_{(2,0)} + \frac{2\beta}{3}p_{(2,0)}p_{(0,2)} + p^2_{(0,2)} + \frac{\beta}{3}p^2_{(1,1)}. \tag{2.11}$$

Η τετραγωνική μορφή (2.11) είναι θετικά ορισμένη όταν ισχύει

$$\begin{cases} \frac{\beta}{3} > 0, \\ \frac{4\beta^2}{9} - 4 < 0, \end{cases}$$

και συνεπώς το σύμβολο (2.6) είναι ισχυρά κυρτό αν και μόνο αν $0 < \beta < 3$. □

Παρατήρηση 2.4 *Προφανώς, με τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύεται ότι το σύμβολο*

$$A(\xi) = \alpha\xi_1^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \gamma\xi_2^4,$$

είναι ισχυρά κυρτό αν και μόνο αν $0 < Q < 3$, *όπου*

$$Q = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}.$$

2.2 Βοηθητικές ανισότητες

Προκειμένου να αποδείξουμε τις βασικές ασυμπτωτικές εκτιμήσεις, θα χρειαστούμε πρώτα ορισμένες βοηθητικές ανισώσεις που σχετίζονται με το σύμβολο

$$A(\xi) = \xi_1^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

του τελεστή H. Το ακόλουθο λήμμα είναι σημαντικό και για τα φράγματα των Κεφαλαίων 3 και 4.

Λήμμα 2.5 *Ισχύει η ανισότητα*

$$\text{Re } A(\xi + i\eta) \geq -k_\beta A(\eta), \qquad \xi, \eta \in \mathbb{R}^2,$$

όπου η σταθερά k_β ορίζεται ως

$$k_\beta = \begin{cases} 8\frac{1-\beta}{(1+\beta)^2}, & \text{αν } \ -1 < \beta < 0, \\ 8, & \text{αν } \ 0 \leq \beta \leq 3, \\ \beta^2 - 1, & \text{αν } \ \beta > 3. \end{cases}$$

Επιπλέον η σταθερά k_β είναι η βέλτιστη δυνατή σε κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις.

Απόδειξη. Έχουμε το σύμβολο

$$A(\xi) = \xi_1^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Re } A(\xi + i\eta) = {} & \xi_1^4 + \xi_2^4 + \eta_1^4 + \eta_2^4 - 6(\xi_1^2\eta_1^2 + \xi_2^2\eta_2^2) \\ & + 2\beta(\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^2\eta_2^2 - \xi_2^2\eta_1^2 + \eta_1^2\eta_2^2 - 4\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Περίπτωση $0 \leq \beta \leq 3$. Με απλές πράξεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} & \text{Re } A(\xi + i\eta) + 8A(\eta) \\ & = \frac{\beta}{3}\left[(|\xi|^2 - 3|\eta|^2)^2 + 4(\xi_1\xi_2 - 3\eta_1\eta_2)^2\right] + \frac{3-\beta}{3}\left[(\xi_1^2 - 3\eta_1^2)^2 + (\xi_2^2 - 3\eta_2^2)^2\right] \\ & \geq 0. \end{aligned}$$

Το γεγονός ότι η σταθερά $k_\beta = 8$ είναι η βέλτιστη δυνατή έπεται από το γεγονός ότι αν $\xi = \sqrt{3}\eta$ τότε η τελευταία ανίσωση γίνεται ισότητα.

Περίπτωση $\beta > 3$. Στην περίπτωση αυτή εύκολα επαληθεύεται ότι

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\, A(\xi + i\eta) + (\beta^2 - 1)A(\eta) \\
&= \xi_1^4 + \xi_2^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \eta_1^4 + \eta_2^4 + 2\beta\eta_1^2\eta_2^2 - 6\xi_1^2\eta_1^2 - 6\xi_2^2\eta_2^2 - 2\beta\xi_1^2\eta_2^2 - 2\beta\xi_2^2\eta_1^2 - 8\beta\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2 \\
&\quad + (\beta^2 - 1)(\eta_1^4 + \eta_2^4 + 2\beta\eta_1^2\eta_2^2) \\
&= \left(|\xi|^2 - \beta\,|\eta|^2\right)^2 + 2(\beta - 3)(\xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2)^2 + 2(\beta - 1)\Big(\xi_1\xi_2 - \frac{\beta + 3}{\beta - 1}\eta_1\eta_2\Big)^2 \\
&\quad + 2\frac{\beta - 3}{\beta - 1} \cdot (\beta + 1)(\beta^2 + 3)\eta_1^2\eta_2^2. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, κάθε όρος της (2.13) είναι μη αρνητικός και συνεπώς

$$\mathrm{Re}\, A(\xi + i\eta) \geq (1 - \beta^2)A(\eta).$$

Το γεγονός ότι η σταθερά $k_\beta = \beta^2 - 1$ είναι η καλύτερη δυνατή έπεται από το ότι αν κάνουμε την επιλογή

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) = (1, 0)\ , \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2) = (0, \pm\sqrt{\beta}),$$

τότε η τελευταία παράσταση μηδενίζεται.

Περίπτωση $-1 < \beta < 0$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\, A(\xi + i\eta) + 8\frac{1 - \beta}{(1 + \beta)^2}A(\eta) \\
&= \xi_1^4 + \xi_2^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \eta_1^4 + \eta_2^4 + 2\beta\eta_1^2\eta_2^2 - 6\xi_1^2\eta_1^2 - 6\xi_2^2\eta_2^2 - 2\beta\xi_1^2\eta_2^2 - 2\beta\xi_2^2\eta_1^2 \\
&\quad - 8\beta\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2 + 8\frac{1 - \beta}{(1 + \beta)^2}(\eta_1^4 + \eta_2^4 + 2\beta\eta_1^2\eta_2^2) \\
&= -\beta\left[(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 + \left(\frac{3 - \beta}{1 + \beta}\right)^2(\eta_1^2 - \eta_2^2)^2\right] + (\beta + 1)\left[\left(\xi_1^2 - \frac{3 - \beta}{1 + \beta}\eta_1^2\right)^2 + \left(\xi_2^2 - \frac{3 - \beta}{1 + \beta}\eta_2^2\right)^2\right] \\
&\quad - 2\beta[(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)^2 + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)^2]. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Αφού κάθε όρος της (2.14) είναι μη αρνητικός,

$$\mathrm{Re}\, A(\xi + i\eta) \geq 8\frac{\beta - 1}{(\beta + 1)^2}A(\eta).$$

Το $k_\beta = 8\frac{1-\beta}{(1+\beta)^2}$ είναι το καλύτερο δυνατό διότι αν στην (2.14) επιλέξουμε

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) = (1, 1)\ , \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2) = \left(\sqrt{\frac{3 - \beta}{1 + \beta}}, -\sqrt{\frac{3 - \beta}{1 + \beta}}\right),$$

τότε η παράσταση (2.14) μηδενίζεται. □

Η γενική περίπτωση. Θεωρούμε τώρα τη γενική περίπτωση όπου το σύμβολο $A(\xi)$ είναι της μορφής

$$A(\xi) = \alpha\xi_1^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \gamma\xi_2^4.$$

Υποθέτουμε ότι

$$\alpha > 0\,, \quad \gamma > 0\,, \quad \alpha\gamma - \beta^2 > 0,$$

ώστε ο αντίστοιχος τελεστής να είναι ελλειπτικός.

Η περίπτωση αυτή ανάγεται στην περίπτωση $\alpha = \gamma = 1$. Πράγματι, κάνοντας τον μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} \xi_1 = \alpha^{-\frac{1}{4}} x_1 \\ \xi_2 = \gamma^{-\frac{1}{4}} x_2 \end{cases},$$

έχουμε

$$A(\xi) = \tilde{A}(x) = x_1^4 + 2Qx_1^2x_2^2 + x_2^4,$$

όπου

$$Q = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}.$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.5 καταλήγουμε στο ακόλουθο:

Λήμμα 2.6 *Ισχύει η ανισότητα*

$$\mathrm{Re}\ A(\xi + i\eta) \geq -k_Q A(\eta), \qquad \xi, \eta \in \mathbb{R}^2,$$

όπου η σταθερά k_Q ορίζεται ως

$$k_Q = \begin{cases} 8\frac{1-Q}{(1+Q)^2}, & \text{αν}\ \ -1 < Q < 0, \\ 8, & \text{αν}\ \ 0 \leq Q \leq 3, \\ Q^2 - 1, & \text{αν}\ \ Q > 3. \end{cases}$$

Επιπλέον η σταθερά k_Q είναι η βέλτιστη δυνατή σε κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις.

2.3 Η μέθοδος επικλινέστατης καθόδου: εύρεση κρίσιμων σημείων

Σε αυτή την ενότητα, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της επικλινέστατης καθόδου, προκειμένου να βρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της θεμελιώδους λύσης (συνάρτηση Green) της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$u_t = -\left(\partial_{x_1}^4 + 2\beta\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_2}^4\right)u.$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η συνάρτηση Green δίνεται από τη σχέση

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi\cdot x - tA(\xi)}\,d\xi, \qquad x\in\mathbb{R}^2,\ t>0. \tag{2.15}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\xi = (4t)^{-1/3}\eta$ βρίσκουμε ότι

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2(4t)^{2/3}}F\Big(\frac{1}{(4t)^{1/3}}\Big)$$

όπου

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2}\exp\Big\{\lambda\,(\,x\cdot\xi - \frac{1}{4}A(\xi))\Big\}\,d\xi\,.$$

Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στην μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $F(\lambda)$ καθώς $\lambda\to+\infty$.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση δύο μιγαδικών μεταβλητών

$$\phi(z) = ix\cdot z - \frac{A(z)}{4}, \qquad z\in\mathbb{C}^2,$$

όπου

$$A(z) = z_1^4 + 2\beta z_1^2 z_2^2 + z_2^4.$$

Για διαφορετικά x, έχουμε ανάλογα β.

Περίπτωση $-1<\beta<0$. Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης

$$\phi(z) = ix\cdot z - \frac{z_1^4 + 2\beta z_1^2 z_2^2 + z_2^4}{4},$$

για $x=(s,s)$ με $s>0$ είναι

$$\begin{aligned}\phi_{z_1} &= is - z_1^3 - \beta z_1 z_2^2,\\ \phi_{z_2} &= is - z_2^3 - \beta z_1^2 z_2.\end{aligned}$$

Τα κρίσιμα σημεία της $\phi(z)$ προκύπτουν από τις λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{aligned}\phi_{z_1} &= 0\\ \phi_{z_2} &= 0\end{aligned}\right\} \quad ή \quad \left.\begin{aligned} z_1^3 + \beta z_1 z_2^2 &= is\\ z_2^3 + \beta z_1^2 z_2 &= is\end{aligned}\right\}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε

$$\xi = \sqrt{\frac{3-\beta}{1+\beta}}(1,-1) \quad \text{και} \quad \eta = (1,1).$$

Τότε ισχύει

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, -\xi_1) \quad \text{και} \quad \eta = (\eta_1, \eta_1),$$

και συνεπώς βρίσκουμε ότι

$$z_2 = \xi_2 + i\eta_2 = -\xi_1 + i\eta_1 = -(\xi_1 - i\eta_1) = -\overline{z_1}.$$

Άρα, η πρώτη εξίσωση του παραπάνω συστήματος γράφεται

$$\begin{aligned}
&z_1^3 + \beta z_1 \overline{z_1^2} = is \quad \text{ή} \\
&z_1^3 + \beta \overline{z_1}\, |z_1|^2 = is \quad \text{ή} \\
&(\xi_1 + i\eta_1)^3 + \beta(\xi_1 + i\eta_1)(\xi_1^2 + \eta_1^2) = is \quad \text{ή} \\
&\xi_1^3 + 3i\xi_1^2\eta_1 - 3\xi_1\eta_1^2 - i\eta_1^3 + \beta\xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) - i\beta\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) = is.
\end{aligned}$$

Χωρίζοντας πραγματικό και φανταστικό μέρος, βρίσκουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} \xi_1^3 - 3\xi_1\eta_1^2 + \beta\xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) = 0 \\ 3\xi_1^2\eta_1 - \eta_1^3 - \beta\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) = s \end{aligned}\right\} \quad \text{ή} \quad \left.\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_1^2 - 3\eta_1^2 + \beta(\xi_1^2 + \eta_1^2) = 0 \\ 3\xi_1^2\eta_1 - \eta_1^3 - \beta\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) = s \end{aligned}\right\}.$$

Για $\xi_1 = 0$, έχουμε

$$-\eta_1^3 - \beta\eta_1\eta_1^2 = s \quad \text{ή} \quad \eta_1^3 = -\frac{s}{1+\beta} \quad \text{ή} \quad \eta_1 = -\left(\frac{s}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ενώ για $\xi_1 \neq 0$, έχουμε

$$\xi_1^2(1+\beta) - \eta_1^2(3-\beta) = 0 \quad \text{ή} \quad \xi_1 = \pm\sqrt{\frac{3-\beta}{1+\beta}}\eta_1. \tag{2.16}$$

Αντικαθιστώντας την (2.16) στο φανταστικό μέρος, βρίσκουμε

$$3\frac{3-\beta}{1+\beta}\eta_1^2 \cdot \eta_1 - \eta_1^3 - \beta\eta_1\left(\frac{3-\beta}{1+\beta}\eta_1^2 + \eta_1^2\right) = s \quad \text{ή}$$

$$8\frac{1-\beta}{1+\beta}\eta_1^3 = s \quad \text{ή} \quad \eta_1^3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{1+\beta}{1-\beta}s \quad \text{ή} \quad \eta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}s\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{2.17}$$

Οπότε, η (2.16) μέσω της (2.17) γίνεται

$$\xi_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-\beta}{1+\beta}}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}s\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Επομένως
$$z_0 = (z_{1,1}, z_{1,2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}s\right)^{\frac{1}{3}} s^{\frac{1}{3}}\left[\sqrt{\frac{3-\beta}{1+\beta}}(1,-1) + i(1,1)\right].$$
Παίρνουμε
$$\eta_0 = \text{Im }(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{3}} s^{\frac{1}{3}}(1,1).$$
Το ύψος της συνάρτησης $\phi(z)$ στο σημείο z_0 είναι
$$\text{Re }\phi(z_0) = \text{Re }\left\{-2s\text{Im }(z_1) - \frac{1}{2}[\text{Re }(z_1^4) + \beta\,|z_1|^4]\right\} = -\frac{3}{4}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{3}} s^{\frac{4}{3}}.$$
Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της συνάρτησης $\phi(z)$ είναι
$$\begin{aligned}\phi_{z_1z_2} &= -3z_1^2 - \beta z_2^2 = -(3z_1^2 + \beta\overline{z_1}^2),\\ \phi_{z_2z_2} &= -3z_2^2 - \beta z_1^2 = -(3\overline{z_1}^2 + \beta z_1^2),\\ \phi_{z_1z_2} &= 2\beta z_1\overline{z_1} = 2\beta\,|z_1|^2,\end{aligned}$$
και η αντίστοιχη ορίζουσα είναι
$$\det(\phi_{z_iz_j})\Big|_{z_0} = 3[2\beta\text{Re}(z_1^4) + (3-\beta^2)\,|z_1|^4] = 3(3-\beta)\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{3}} s^{\frac{4}{3}} \neq 0.$$
Περίπτωση $\beta = 0$. Εδώ έχουμε ότι
$$z_0 = (z_{1,1}, z_{1,2}) = \frac{1}{2}s^{\frac{2}{3}}[\sqrt{3}(1,-1) + i(1,1)].$$
Παίρνουμε
$$\eta_0 = \text{Im }(z_0) = \frac{1}{2}s^{\frac{1}{3}}(1,1).$$
Το ύψος της συνάρτησης $\phi(z)$ στο σημείο z_0 είναι
$$\text{Re }\phi(z_0) = -\frac{3}{4}s^{\frac{4}{3}}.$$
και η αντίστοιχη ορίζουσα είναι
$$\det(\phi_{z_iz_j})\Big|_{z_0} = 9s^{\frac{4}{3}} \neq 0.$$
Περίπτωση $\beta > 3$. Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης
$$\phi(z_1, z_2) = isz_1 - \frac{1}{4}(z_1^4 + 2\beta z_1^2 z_2^2 + z_2^4),$$

για $x = (s, 0)$ με $s > 0$, είναι

$$\begin{aligned} \phi_{z_1} &= is - z_1^3 - \beta z_1 z_2^2, \\ \phi_{z_2} &= -z_2^3 - \beta z_1^2 z_2. \end{aligned}$$

Τα κρίσιμα σημεία της $\phi(z)$ προκύπτουν από τις λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} \phi_{z_1} &= 0 \\ \phi_{z_2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{ή} \quad \left.\begin{aligned} z_1^3 + \beta z_1 z_2^2 &= is \\ z_2^3 + \beta z_1^2 z_2 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος παίρνουμε

$$z_2 = 0 \quad \text{ή} \quad z_2^2 = -\beta z_1^2.$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος θα γίνει

$$\begin{aligned} &z_1^3 + \beta z_1(-\beta z_1^2) = is \quad \text{ή} \\ &z_1^3 - \beta^2 z_1^3 = is \quad \text{ή} \\ &z_1^3(1-\beta^2) = is \quad \text{ή} \\ &z_1^3 = \frac{-i}{\beta^2 - 1} s \quad \text{ή} \\ &z_{n,1} = (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} e^{\left(\frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)i} s^{\frac{1}{3}}, \quad n = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Για $n = 1$, έχουμε

$$z_{1,1} = (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} i s^{\frac{1}{3}},$$

ενώ για $n = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} z_{1,2}^2 &= \beta(\beta^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} s^{-\frac{2}{3}} \quad \text{ή} \\ z_{1,2} &= \pm\sqrt{\beta}(\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} s^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$z_0 = (z_{1,1}, z_{1,2}) = (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} s^{\frac{1}{3}} (i_1 \pm \sqrt{\beta}) = (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} s^{\frac{1}{3}} [(0, \pm\sqrt{\beta}) + i(1, 0)].$$

Παίρνουμε

$$\eta_0 = \mathrm{Im}\,(z_0) = s^{\frac{1}{3}}((\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}, 0).$$

Το ύψος της συνάρτησης $\phi(z)$ στο σημείο z_0 είναι

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\phi(z_0) &= \operatorname{Re}\left[isz_{1,1} - \frac{A(z_0)}{4}\right] \\
&= -s^{\frac{4}{3}}(\beta^2-1)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\operatorname{Re}A(z_0) \\
&= -s^{\frac{4}{3}}(\beta^2-1)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}(\beta^2-1)^{-\frac{1}{3}}s^{\frac{4}{3}} \\
&= -\frac{3}{4}s^{\frac{4}{3}}(\beta^2-1)^{-\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της συνάρτησης $\phi(z)$ είναι

$$\begin{aligned}
\phi_{z_1z_1} &= -3z_1^2 - \beta z_2^2 = (3-\beta^2)(\beta^2-1)^{-\frac{2}{3}}s^{\frac{2}{3}}, \\
\phi_{z_2z_2} &= -3z_2^2 - \beta z_1^2 = -2\beta(\beta^2-1)^{-\frac{2}{3}}s^{\frac{2}{3}}, \\
\phi_{z_1z_2} &= -2\beta z_1z_2 = \mp 2is^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{3}{2}}(\beta^2-1)^{-\frac{2}{3}},
\end{aligned}$$

και η αντίστοιχη ορίζουσα είναι

$$\det(\phi_{z_iz_j})\Big|_{z_0} = 6\beta(\beta^2-1)^{-\frac{1}{3}}s^{\frac{4}{3}} \neq 0.$$

Περίπτωση $\beta = 3$. Εδώ έχουμε ότι

$$z_0 = (z_{1,1}, z_{1,2}) = \frac{1}{2}s^{\frac{1}{3}}[(0, \pm\sqrt{3}) + i(1,0)].$$

Παίρνουμε

$$\eta_0 = \operatorname{Im}(z_0) = \frac{1}{2}s^{\frac{1}{3}}(1,0).$$

Το ύψος της συνάρτησης $\phi(z)$ στο σημείο z_0 είναι

$$\operatorname{Re}\phi(z_0) = -\frac{3}{8}s^{\frac{4}{3}}.$$

και η αντίστοιχη ορίζουσα είναι

$$\det(\phi_{z_iz_j})\Big|_{z_0} = 9s^{\frac{4}{3}} \neq 0.$$

2.4 Ασυμπτωτικές εκτιμήσεις της συνάρτησης Green

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου.

Θεώρημα 2.7 *Για κάθε $s > 0$ ισχύουν οι παρακάτω ασυμπτωτικοί τύποι, καθώς $t \to 0^+$:*

(i) *Αν $-1 < \beta < 0$ και $x = (s, s)$ τότε*

$$G(x,t) \sim \frac{1}{3^{1/2} \cdot 4^{1/3} \pi} \frac{(1-\beta)^{1/6}}{(3-\beta)^{1/2}(1+\beta)^{1/6}} s^{-2/3} t^{-1/3} \exp\Big(- \frac{3}{4^{4/3}} \big(\frac{1+\beta}{1-\beta}\big)^{1/3} \frac{s^{4/3}}{t^{1/3}} \Big).$$

(ii) *Αν $\beta = 0$ και $x = (s, s)$ τότε*

$$G(x,t) \sim \frac{1}{3 \cdot 4^{1/3} \pi} s^{-2/3} t^{-1/3} \exp\Big(- \frac{3}{4^{4/3}} \frac{s^{4/3}}{t^{1/3}} \Big) \cdot \Big(1 + \cos\Big[\frac{3\sqrt{3}}{4^{4/3}} \frac{s^{4/3}}{t^{1/3}} - \frac{\pi}{3} \Big] \Big).$$

(iii) *Αν $\beta = 3$ και $x = (s, 0)$ τότε*

$$G(x,t) \sim \frac{1}{3 \cdot 4^{1/3} \pi} s^{-2/3} t^{-1/3} \exp\Big(- \frac{3}{8 \cdot 4^{1/3}} \frac{s^{4/3}}{t^{1/3}} \Big) \cdot \Big(1 + \cos\Big[\frac{3\sqrt{3}}{8 \cdot 4^{1/3}} \frac{s^{4/3}}{t^{1/3}} - \frac{\pi}{3} \Big] \Big).$$

(iv) *Αν $\beta > 3$ και $x = (s, 0)$ τότε*

$$G(x,t) \sim \frac{1}{2^{7/6} \cdot 3^{1/2} \pi} \beta^{-1/2} (\beta^2 - 1)^{1/6} s^{-2/3} t^{-1/3} \exp\Big(- \frac{3}{4^{4/3}} (\beta^2 - 1)^{-1/3} \frac{s^{4/3}}{t^{1/3}} \Big).$$

Παρατήρηση 2.8 *Ο συμβολισμός $F(\lambda) \sim G(\lambda)$ δεν έχει το σύνηθες νόημα $F(\lambda) = G(\lambda)(1 + o(\lambda))$, αφού η συνάρτηση $G(\lambda)$ μπορεί να μηδενίζεται σε σημεία όπου η $F(\lambda)$ δεν μηδενίζεται. Βλέποντας και την παρακάτω απόδειξη, γίνεται σαφές ότι το νόημα της έκφρασης*

$$F(\lambda) \sim e^{A\lambda} \lambda^D [1 + \cos(B\lambda + C)] , \quad \textit{καθώς } \lambda \to +\infty,$$

είναι ότι

$$F(\lambda) = e^{A\lambda} \lambda^D \Big([1 + \cos(B\lambda + C)] + o(1) \Big) , \quad \textit{καθώς } \lambda \to +\infty.$$

Απόδειξη Θεωρήματος 2.7. Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών στην (2.2) με $\xi = (4t)^{-1/3} \eta$ βρίσκουμε

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2 (4t)^{2/3}} F\Big(\frac{1}{(4t)^{1/3}} \Big), \tag{2.18}$$

όπου

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\lambda \left(i x \cdot \xi - \frac{1}{4} A(\xi) \right)} d\xi.$$

Θεωρούμε λοιπόν την αναλυτική μιγαδική συνάρτηση δύο μεταβλητών, $z = (z_1, z_2)$,

$$\phi(z) = i x \cdot z - \frac{1}{4} A(z) = i(x_1 z_1 + x_2 z_2) - \frac{1}{4}(z_1^4 + 2\beta z_1^2 z_2^2 + z_2^4),$$

Για να βρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $F(\lambda)$ καθώς $\lambda \to +\infty$, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της επικλινέστατης καθόδου και ειδικότερα το Θεώρημα 1.9.

Για το σκοπό αυτό λοιπόν, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Cauchy για ολόμορφες συναρτήσεις δύο μεταβλητών ώστε να παραμορφώσουμε κατάλληλα το $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ σε μία άλλη επιφάνεια $E \subset \mathbb{C}^2$ που θα περιέχει τα σαγματικά σημεία της ϕ τα οποία τελικά θα συμβάλλουν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της $F(\lambda)$.

Οι παραμορφώσεις οι οποίες θα θεωρήσουμε θα είναι ιδιαίτερα απλές, καθώς θα πρόκειται για μία παράλληλη μεταφορά του $\mathbb{R}^2$ κατά ένα κατάλληλο διάνυσμα $i\eta_0 \in i\mathbb{R}^2$. Πράγματι, εύκολα προκύπτει από το θεώρημα του Cauchy ότι για κάθε $\eta_0 \in \mathbb{R}^2$, έχουμε

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2 + i\eta_0} e^{\lambda\phi(z)} dz.$$

Το κύριο θέμα είναι να βρούμε τα σχετικά σαγματικά σημεία και κατ΄ επέκταση το διάνυσμα η_0, ώστε να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.9. Θυμίζουμε ότι αυτό που είναι σημαντικό εδώ είναι το πραγματικό μέρος $\mathrm{Re}\, \phi(z)$, δηλαδή το ύψος της $\phi(z)$. Τα σαγματικά σημεία που συνεισφέρουν δεν είναι απαραίτητα αυτά με το μεγαλύτερο ύψος, αλλά αυτά για τα οποία υπάρχει μία επιτρεπτή παραμόρφωση ώστε το μεγαλύτερο ύψος πάνω σε αυτήν να λαμβάνεται σε αυτά τα σημεία.

Σχετικά με αυτό, θα γράφουμε κάθε $z \in \mathbb{C}^2$ ως $z = (z_1, z_2)$ αλλά επίσης ως $z = \xi + i\eta$ με $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ και $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$.

Τέλος, σημειώνουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση $s = 1$, αφού από τη σχέση

$$G(s\,x, t) = \frac{1}{s^2} G\Big(x, \frac{t}{s^4}\Big), \qquad t, s > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

έπεται μετά η γενική περίπτωση.

Η περίπτωση $-1 < \beta \leq 0$.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $x = (1, 1)$. Δύο σχετικά σαγματικά σημεία είναι

$$z_0^{\pm} = \pm\xi_0 + i\eta_0,$$

όπου

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{1/2}}{(1+\beta)^{1/6}(1-\beta)^{1/3}} (1, -1)\,, \qquad \eta_0 = \frac{1}{2}\Big(\frac{1+\beta}{1-\beta}\Big)^{1/3} (1, 1)\,.$$

Παραμορφώνουμε το $\mathbb{R}^2$ κατά $i\eta_0$ και έχουμε

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2 + i\eta_0} e^{\lambda\phi(z)} dz\,.$$

Περίπτωση 1. $-1<\beta<0$. Σε αυτή την περίπτωση τα σαγματικά σημεία που συνεισφέρουν είναι τα σημεία $z_0^{\pm}$. Θα δούμε ότι για τα σημεία αυτά ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.9. Το ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις (1) και (2) είναι άμεσο. Για να δείξουμε ότι ικανοποιείται και η (3) πρέπει να δείξουμε ότι

$$\operatorname{Re}\phi(z) \leq \operatorname{Re}\phi(z_0^+)\,, \qquad z \in \mathbb{R}^2 + i\eta_0, \tag{2.19}$$

με την ισότητα να ισχύει ακριβώς στα σημεία $z_0^{\pm}$. Για να αποδείξουμε την (2.19) σημειώνουμε ότι ισοδύναμα γράφεται ως

$$\operatorname{Re}A(z) \geq \operatorname{Re}A(z_0^+) = -\Big(\frac{1+\beta}{1-\beta}\Big)^{1/3},$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\operatorname{Re}A(\xi+i\eta_0) + \Big(\frac{1+\beta}{1-\beta}\Big)^{1/3} \geq 0\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Αυτό πράγματι ισχύει και βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}A(\xi+i\eta_0) + \Big(\frac{1+\beta}{1-\beta}\Big)^{1/3} &= -\beta(\xi_1^2-\xi_2^2)^2 + (\beta+1)\Big[\Big(\xi_1^2 - \frac{3-\beta}{4(1+\beta)^{1/3}(1-\beta)^{2/3}}\Big)^2 \\ &\quad + \Big(\xi_2^2 - \frac{3-\beta}{4(1+\beta)^{1/3}(1-\beta)^{2/3}}\Big)^2\Big] - \beta\Big(\frac{1+\beta}{1-\beta}\Big)^{2/3}(\xi_1+\xi_2)^2 \\ &\geq 0,\end{aligned} \tag{2.20}$$

Είναι σαφές πως η ισότητα ισχύει μόνο για τα σημεία $\xi = \pm\xi_0$ και αυτά αντιστοιχούν στα σημεία $z_0^{\pm}$. Οπότε αυτός ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί.

Αυτό συνεπάγεται ότι τα σημεία $z_0^{\pm}$ είναι ακριβώς αυτά που συμβάλλουν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της $F(\lambda)$ καθώς $\lambda \to +\infty$. Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι οι δύο συνεισφορές είναι συζυγείς μιγαδικοί μεταξύ τους, και για αυτό η συνολική συνεισφορά αυτών των δύο σημείων είναι ίση με το διπλάσιο του πραγματικού μέρους της συνεισφοράς του σημείου z_0^+. Αφού αυτά τα δύο σαγματικά σημεία είναι μη εκφυλισμένα, η συνεισφορά του z_0^+ δίνεται από τον τύπο

$$\operatorname{contr}(z_0^+) = \frac{2\pi}{\lambda}\big(\det(\phi_{z_iz_j})\big|_{z=z_0^+}\big)^{-1/2} e^{\lambda\phi(z_0^+)}.$$

Έχουμε

$$\phi(z_0^+) = -\frac{3}{4}\Big(\frac{1+\beta}{1-\beta}\Big)^{1/3}, \qquad \det(\phi_{z_iz_j})|_{z=z_0^+} = \frac{3(3-\beta)(1+\beta)^{1/3}}{(1-\beta)^{1/3}},$$

έτσι συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε ότι

$$F(\lambda) \sim \frac{4\pi}{\lambda} \frac{(1-\beta)^{1/6}}{\sqrt{3}(3-\beta)^{1/2}(1+\beta)^{1/6}} \exp\Big(-\frac{3}{4}\big(\frac{1+\beta}{1-\beta}\big)^{1/3}\lambda\Big), \qquad \text{καθώς } \lambda \to +\infty. \quad (2.21)$$

Περίπτωση 2. $\beta = 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η (2.2) γίνεται

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi_1 x_1 - t\xi_1^4}\, d\xi_1\Big) \cdot \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi_2 x_2 - t\xi_2^4}\, d\xi_2\Big), \ t > 0,$$

και είναι το τετράγωνο ενός ολοκληρώματος για τη μέθοδο στη μία διάσταση. Προτιμούμε, ωστόσο, να εργαστούμε στις δύο διαστάσεις αφού αυτό ταιριάζει περισσότερο σε την υπόλοιπη απόδειξη του θεωρήματος.

Η σχέση (2.20) ισχύει επίσης για $\beta = 0$ και σε αυτή την περίπτωση γράφεται

$$\operatorname{Re} A(\xi + i\eta_0) + 1 = (\xi_1^2 - \frac{3}{4})^2 + (\xi_2^2 - \frac{3}{4})^2 \geq 0\,.$$

Τα σημεία $z_0^{\pm}$ που έχουμε παραπάνω είναι επίσης σαγματικά για $\beta = 0$. Ισχύουν οι ίδιοι υπολογισμοί όπως είδαμε παραπάνω και για αυτό η συνεισφορά τους είναι

$$\text{contr}(z_0^+) + \text{contr}(z_0^-) = \frac{4\pi}{3\lambda}\exp\big(-\frac{3}{4}\lambda\big).$$

Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν άλλα δύο σαγματικά σημεία της ϕ που βρίσκονται στο $\mathbb{R}^2 + i\eta_0$ και αυτά θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν. Αυτά τα σημεία είναι τα

$$z_*^{\pm} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}(1,1) + i\eta_0\,,$$

Για αυτά τα σημεία βρίσκουμε ότι

$$\phi(z_*^{\pm}) = -\frac{3}{4} \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}i\,, \qquad \det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^{\pm}} = 9e^{2\pi i/3},$$

και έτσι παίρνουμε τη συνεισφορά

$$\text{contr}(z_*^+) + \text{contr}(z_*^-) = \frac{4\pi}{3\lambda}\exp\big(-\frac{3}{4}\lambda\big)\cos\Big(\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda - \frac{\pi}{3}\Big).$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω συνεισφορές καταλήγουμε ότι

$$F(\lambda) \sim \frac{4\pi}{3\lambda}\exp\big(-\frac{3}{4}\lambda\big)\Big(1 + \cos\Big(\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda - \frac{\pi}{3}\Big)\Big), \qquad (2.22)$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.18). □

Η περίπτωση $\beta \geq 3$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $x = (1, 0)$. Τα σαγματικά σημεία θα είναι

$$z_0^{\pm} = (\beta^2 - 1)^{-1/3}[(0, \pm\sqrt{\beta}) + i(1, 0)] = \pm\xi_0 + i\eta_0 \,.$$

Όπως πριν, έχουμε

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2 + i\eta_0} e^{\lambda\phi(z)} dz \,.$$

Περίπτωση 1. $\beta > 3$. Σε αυτή την περίπτωση τα σαγματικά σημεία που συνεισφέρουν είναι τα σημεία $z_0^{\pm}$. Η περίπτωση αυτή θα αποδειχθεί εάν αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{Re}\,\phi(z) \leq \mathrm{Re}\,\phi(z_0^+)\,, \qquad z \in \mathbb{R}^2 + i\eta_0, \tag{2.23}$$

με την ισότητα να ισχύει στα σημεία $z_0^{\pm}$. Η (2.23) είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$\mathrm{Re}\,A(z) \geq \mathrm{Re}\,A(z_0^+) = -(\beta^2 - 1)^{-1/3},$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{Re}\,A(\xi + i\eta_0) + (\beta^2 - 1)^{-1/3} \geq 0\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Αυτό πράγματι ισχύει, αφού με υπολογισμούς δείχνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,A(\xi + i\eta_0) + (\beta^2 - 1)^{-1/3} &= \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \beta(\beta^2 - 1)^{-2/3}\right)^2 \\ &\quad + 2(\beta - 1)\xi_1^2\xi_2^2 + 2(\beta - 3)(\beta^2 - 1)^{-2/3}\xi_1^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για τα σημεία

$$\xi_0^{\pm} = \pm(0, \sqrt{\beta}(\beta^2 - 1)^{-1/3}),$$

που αντιστοιχούν στα σημεία $z_0^{\pm}$.

Οι δύο συνεισφορές είναι ξανά συζυγείς μιγαδικές μεταξύ τους και χρησιμοποιούμε ξανά τη σχέση

$$\mathrm{contr}(z_0^+) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\det(\phi_{z_i z_j})\big|_{z=z_0^+}\right)^{-1/2} e^{\lambda\phi(z_0^+)},$$

και επειδή

$$\phi(z_0^+) = -\frac{3}{4}(\beta^2 - 1)^{-1/3}\,, \qquad \det(\phi_{z_i z_j})\big|_{z=z_0^+} = 6\beta(\beta^2 - 1)^{-1/3},$$

συνδυάζοντας τα, βρίσκουμε ότι

$$F(\lambda) \sim \frac{4\pi}{\lambda}(6\beta)^{-1/2}(\beta^2 - 1)^{1/6} \exp\Big(- \frac{3}{4}(\beta^2 - 1)^{-1/3}\lambda\Big), \qquad \text{καθώς } \lambda \to +\infty. \tag{2.25}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.18).

Περίπτωση 2. $\beta = 3$. Η ανισότητα (2.24) ισχύει για $\beta = 3$ και θα είναι

$$\operatorname{Re} A(\xi + i\eta_0) + \frac{1}{2} = (\xi_1^2 + \xi_2^2 - \frac{3}{4})^2 + 4\xi_1^2\xi_2^2 \geq 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση η ισότητα ισχύει όχι μόνο για τα σημεία $\xi_0^{\pm}$ αλλά και για τα σημεία

$$\xi_*^{\pm} = \pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0).$$

Τα αντίστοιχα σημεία στο $\mathbb{C}^2$ είναι τα σημεία

$$z_*^{\pm} = \xi_*^{\pm} + i\eta_0.$$

Όπως και πριν, η συνεισφορά των σημείων $z_*^{\pm}$ είναι το διπλάσιο του πραγματικού μέρους της συνεισφοράς του z_*^{+}. Βρίσκουμε ότι

$$\phi(z_*^{+}) = -\frac{3}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i, \qquad \det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^{+}} = 9e^{2\pi i/3}.$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τον ίδιο τύπο όπως παραπάνω, βρίσκουμε ότι

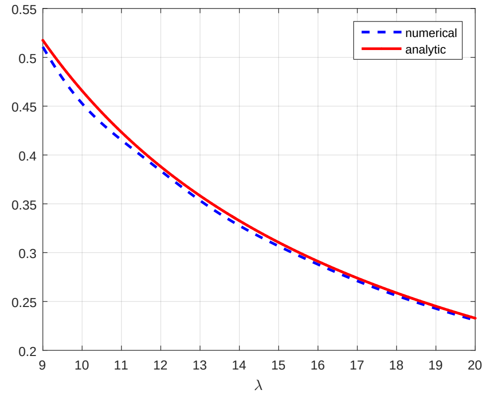
$$\operatorname{contr}(z_*^{+}) + \operatorname{contr}(z_*^{-}) = \frac{4\pi}{3\lambda}\exp\big(- \frac{3}{8}\lambda\big)\cos\big(\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda + \frac{\pi}{3}\big).$$

Η συνεισφορά των δύο πρώτων σημείων $z_0^{\pm}$ δίνεται από τη (2.25) (για $\beta = 3$). Αθροίζοντας τις δύο συνεισφορές καταλήγουμε ότι

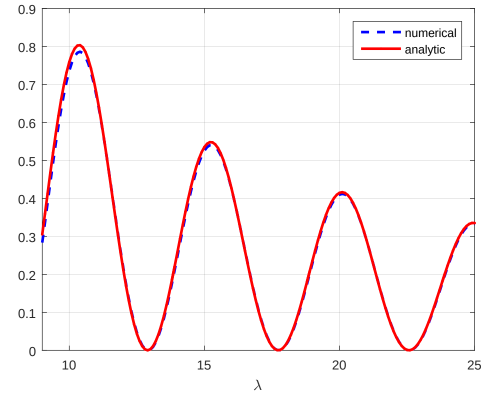
$$F(\lambda) \sim \frac{4\pi}{3\lambda}\exp\big(- \frac{3}{8}\lambda\big)\Big(1 + \cos\big[\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda - \frac{\pi}{3}\big]\Big), \quad \text{καθώς } \lambda \to +\infty. \tag{2.26}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.18). □

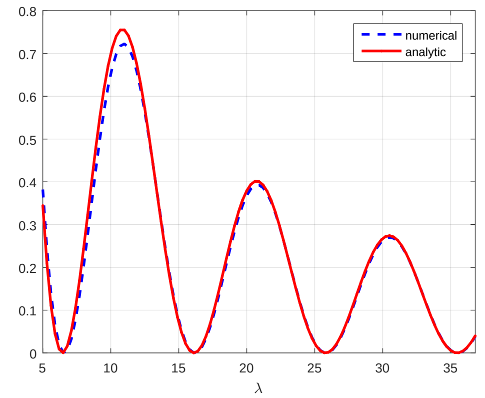
Οι εκτιμήσεις (2.21), (2.22), (2.25) και (2.26) που βρήκαμε παραπάνω από την απόδειξη, έχουν όλες τη μορφή $F(\lambda) \sim G(\lambda)$ για κάποια δοσμένη συνάρτηση $G(\lambda)$. Σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα, έχουμε σχεδιάσει το γράφημα αριθμητικά της $F(\lambda)e^{\sigma\lambda}$ (διακεκομμένο μπλε) σε σχέση με τη συνάρτηση $G(\lambda)e^{\sigma\lambda}$ (συνεχές κόκκινο), όπου σ είναι η θετική σταθερά στους εκθετικούς όρους της $G(\lambda)$. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση $\beta = 4$, η σύγκλιση είναι λιγότερο γρήγορη, αλλά περισσότερο λεπτομερείς αριθμητικοί υπολογισμοί είναι σύμφωνοι με τη διαφορά να είναι της τάξης $O(1/\lambda^2)$.



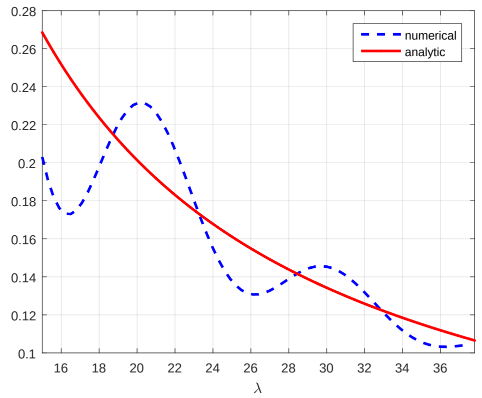
Σχήμα 2.1: $\beta = -0.5,\ x = (1,1)$



Σχήμα 2.2: $\beta = 0,\ x = (1,1)$



Σχήμα 2.3: $\beta = 3,\ x = (1,0)$



Σχήμα 2.4: $\beta = 4,\ x = (1,0)$

Παράρτημα: η ισχυρά κυρτή περίπτωση.

Σε αυτήν την ένοτητα, θα παρουσιάσουμε την απόδειξη των Evgrafov και Postnikov για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης $G(x,t)$ στην ισχυρά κυρτή περίπτωση $0 < \beta < 3$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$.

Για να βρούμε τα κατάλληλα σαγματικά σημεία, σημειώνουμε πρώτα πως λόγω της ισχυρής κυρτότητας του συμβόλου, υπάρχει ένα μοναδικό $q = q(x) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{4}\nabla A(q) = x.$$

Τότε το σημείο $z = \alpha q \in \mathbb{C}^2$ είναι ένα κρίσιμο σημείο της ϕ αν και μόνο αν $\alpha^3 = i$.

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο από αυτά τα σημεία, τα σημεία

$$z_*^{\pm} = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)q =: \pm\xi_0 + i\eta_0\,.$$

Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.7, αλλάζουμε το πεδίο ολοκλήρωσης από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2 + i\eta_0$ και προκειμένου να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.9 πρέπει να δείξουμε ότι

$$\mathrm{Re}\ \phi(z) \le \mathrm{Re}\ \phi(z_0)\,, \qquad \text{για όλα τα } z \in \mathbb{R}^2 + i\eta_0,$$

με την ισότητα να ισχύει ακριβώς στα σημεία $z_*^{\pm}$. Ισοδύναμα,, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathrm{Re}\ A(\xi + i\eta_0) \ge \mathrm{Re}\ A(\xi_0 + i\eta_0)\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\xi = \pm\xi_0$. Για $\alpha = \pm\sqrt{3}/2 + i/2$, υπολογίζουμε

$$\mathrm{Re}\ A(\xi_0 + i\eta_0) = \mathrm{Re}\ A(\alpha q) = \mathrm{Re}\ (\alpha^4)A(q) = -\frac{1}{2}A(q) = -8A(\eta_0),$$

οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{Re}\ A(\xi + i\eta_0) + 8A(\eta_0) \ge 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

με την ισότητα να ισχύει στο $\xi = \pm\xi_0$. Αυτό πράγματι ισχύει, αφού για κάθε $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\, A(\xi + i\eta) + 8A(\eta) &= \frac{\beta}{3}\Big\{(\xi_1^2 - 3\eta_1^2) + (\xi_2^2 - 3\eta_2^2)\Big\}^2 + \frac{4\beta}{3}(\xi_1\xi_2 - 3\eta_1\eta_2)^2 \\ &\quad + \frac{3-\beta}{3}\Big\{(\xi_1^2 - 3\eta_1^2)^2 + (\xi_2^2 - 3\eta_2^2)^2\Big\} \\ &\ge 0.\end{aligned}$$

Έτσι, η ασυμπτωτική συμπεριφορά θα προκύψει όντως από τα σημεία $z_*^{\pm}$. Για να την υπολογίσουμε, πρώτα σημειώνουμε ότι

$$\phi(z_*^{\pm}) = \frac{3}{4}e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}A(q) = -\frac{3}{8}A(q) \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}A(q)\, i.$$

Έχουμε επίσης

$$\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^+} = h(x)^{\frac{4}{3}}e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

όπου η συνάρτηση h είναι θετικά ομογενής πρώτου βαθμού. Άρα

$$\mathrm{contr}(z_*^+) = \frac{2\pi}{\lambda}h(x)^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{\pi i}{3}}\exp\Big(-\frac{3}{8}A(q)\lambda\Big)\exp\Big(\frac{3\sqrt{3}}{8}A(q)\, i\Big).$$

Η συνεισφορά του z_*^- είναι ο συζυγής μιγαδικός της συνεισφοράς z_*^+ και αθροίζοντας τις δύο παραπάνω συνεισφορές βρίσκουμε ότι

$$F(\lambda) \sim \frac{4\pi}{\lambda} h(x)^{-2/3} \exp\Big(-\frac{3}{8} A(q)\lambda\Big) \cos\Big(\frac{3\sqrt{3}}{8} A(q) - \frac{\pi}{3}\Big). \tag{2.27}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $A(q) = d_0(x)^{4/3}$. Πράγματι, από τη σχέση (3.19) έχουμε

$$d_0(x) = p_*(x) = \sup_{\xi} \frac{x \cdot \xi}{A(\xi)^{1/4}} \geq \frac{x \cdot q}{A(q)^{1/4}} = \frac{\frac{1}{4}\nabla A(q) \cdot q}{A(q)^{1/4}} = A(q)^{3/4}.$$

Η αντίστροφη ανισότητα προκύπτει με την παρατήρηση ότι το supremum λαμβάνεται όταν $\xi = q$.

Αντικαθιστώντας το $A(q) = d_0(x)^{4/3}$ στην (2.27) και χρησιμοποιώντας την (2.18) καταλήγουμε ότι καθώς $t \to 0+$ ισχύει

$$G(x,t) \sim \frac{2^{1/3}}{\pi} h(x)^{-2/3} t^{-1/3} \exp\Big(-\frac{3}{8 \cdot 4^{1/3}} \frac{d(x)^{\frac{4}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}\Big) \cos\Big(\frac{3\sqrt{3}}{8 \cdot 4^{1/3}} \frac{d_0(x)^{\frac{4}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}} - \frac{\pi}{3}\Big).$$

Κεφάλαιο 3

Γκαουσιανά φράγματα για την συνάρτηση Green

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο. Θεωρούμε τον αυτοσυζυγή διαφορικό τελεστή H στο $L^2(\Omega)$ (ο οποίος θεωρούμε ότι περιέχει μιγαδικές συναρτήσεις) που δίνεται από τον τύπο

$$Hu(x) = \partial^2_{x_1}(\alpha(x)\partial^2_{x_1}u) + 2\partial^2_{x_1x_2}(\beta(x)\partial^2_{x_1x_2}u) + \partial^2_{x_2}(\gamma(x)\partial^2_{x_2}u),$$

όπου α, β και γ είναι πραγματικές συναρτήσεις στον $L^\infty(\Omega)$.

Το σύμβολο του τελεστή H είναι

$$A(x,z) = \alpha(x)z_1^4 + 2\beta(x)z_1^2z_2^2 + \gamma(x)z_2^4, \qquad x \in \Omega, \quad z \in \mathbb{C}^2\,.$$

Υποθέτουμε ότι ο τελεστής H είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός το οποίο σημαίνει επιπλέον

$$\inf_{x\in\Omega} \alpha(x) > 0\,, \qquad \inf_{x\in\Omega} \gamma(x) > 0\,, \qquad \inf_{x\in\Omega} \frac{\beta(x)}{\sqrt{\alpha(x)\gamma(x)}} > -1\,.$$

Στην περίπτωση όπου $\Omega \neq \mathbb{R}^2$, επιβάλλουμε τις συνθήκες Dirichlet στο σύνορο $\partial\Omega$. Ο αυστηρός ορισμός του τελεστή H γίνεται μέσω της τετραγωνικής μορφής

$$Q(u) = \int_\Omega \left\{\alpha(x)|u_{x_1x_1}|^2 + 2\beta(x)|u_{x_1x_2}|^2 + \gamma(x)|u_{x_2x_2}|^2\right\} dx,$$

με πεδίο ορισμού $\mathrm{Dom}(Q) = H^2_0(\Omega)$. Η υπόθεση της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας συνεπάγεται ότι υπάρχει $c > 1$ ώστε

$$c^{-1}\|u\|_{H^2_0(\Omega)} \leq Q(u) + \|u\|^2 \leq c\|u\|_{H^2_0(\Omega)}\,, \qquad u \in H^2_0(\Omega).$$

Η τετραγωνική μορφή Q είναι κλειστή και ορίζουμε τον τελεστή H ως τον αυτοσυζυγή τελεστή που αντιστοιχεί στην Q σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.

Σύμφωνα με το [12] ο τελεστής H έχει έναν πυρήνα θερμότητας $G(x,x',t)$ ο οποίος ικανοποιεί την Γκαουσιανή εκτίμηση

$$|G(x,x',t)| \le c_1 t^{-\frac{1}{2}} \exp\Big(- c_2 \frac{|x-x'|^{4/3}}{t^{1/3}} + c_3 t\Big),$$

με c_1, c_2, c_3 θετικές σταθερές, $t > 0$ και $x, x' \in \Omega$. Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να βρούμε λεπτές εκδοχές της παραπάνω εκτίμησης στην περίπτωση όπου το σύμβολο του τελεστή δεν είναι (παντού) ισχυρά κυρτό, συμπληρώνοντας έτσι τα αποτελέσματα του [3].

3.1 Βοηθητικά λήμματα

Εισάγουμε αρχικά κάποιους βασικούς ορισμούς. Ορίζουμε αρχικά την κλάση των πραγματικών συναρτήσεων

$$\mathcal{E} = \Big\{\varphi \in C^2(\Omega) : \ \|D^\alpha \varphi\|_\infty < +\infty \,, \ 0 \le |\alpha| \le 2\Big\},$$

και για $M > 0$ τις υποκλάσεις

$$\mathcal{E}_{A,M} = \Big\{\varphi \in \mathcal{E} \ : \ A(y, \nabla\varphi(y)) \le 1 \,, \ y \in \Omega \,, \ \ \text{και} \ \ \|D^\alpha \varphi\|_\infty \le M \,, \ |\alpha| = 2\Big\}.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε μία απόσταση $d_M(\cdot,\cdot)$ στο Ω ως

$$d_M(x,x') = \sup\Big\{\varphi(x') - \varphi(x) \ : \ \ \varphi \in \mathcal{E}_{A,M}\Big\}.$$

Αυτή είναι η απόσταση με βάση την οποία θα εκφραστούν οι Γκαουσιανές εκτιμήσεις.

Δεν είναι δύσκολο να παρατηρήσουμε ότι καθώς το $M \to +\infty$ τότε αυτό συγκλίνει στην απόσταση τύπου Finsler

$$d(x,x') = \sup\Big\{\varphi(x') - \varphi(x) \ : \ \varphi \in \mathrm{Lip}(\Omega), \ \ A(y, \nabla\varphi(y)) \le 1 \,, \ \ \text{σ.π.} \ y \in \Omega\Big\}. \tag{3.1}$$

Ορίζουμε τώρα τις συναρτήσεις

$$Q(x) = \frac{\beta(x)}{\sqrt{\alpha(x)\gamma(x)}}, \qquad\qquad x \in \Omega,$$

$$k(x) = \begin{cases} 8\frac{1-Q(x)}{(1+Q(x))^2}, & \text{αν } -1 < Q(x) < 0, \\ 8, & \text{αν } 0 \le Q(x) \le 3, \\ Q(x)^2 - 1, & \text{αν } Q(x) > 3, \end{cases}$$

και

$$\sigma(x) = \frac{3}{4} \cdot \Big(\frac{1}{4k(x)}\Big)^{1/3} = \begin{cases} \frac{3}{2\cdot 4^{4/3}} \frac{(1+Q(x))^{2/3}}{(1-Q(x))^{1/3}}, & \text{αν } -1 < Q(x) < 0, \\ \frac{3}{8\cdot 4^{1/3}}, & \text{αν } 0 \le Q(x) \le 3, \\ \frac{3}{4^{4/3}}(Q(x)^2 - 1)^{-1/3}, & \text{αν } Q(x) > 3. \end{cases} \tag{3.2}$$

Θέτουμε επίσης

$$k^* = \sup_{x\in\Omega} k(x), \qquad \sigma_* = \inf_{x\in\Omega} \sigma(x) = \frac{3}{4} \cdot \Big(\frac{1}{4k^*}\Big)^{1/3}. \tag{3.3}$$

Τέλος, με D συμβολίζουμε την απόσταση στον $L^\infty(\Omega)$ των συναρτήσεων $\alpha(x)$, $\beta(x)$ και $\gamma(x)$ από τον χώρο όλων των συναρτήσεων Lipschitz, δηλαδή

$$D = \max\Big\{d_{L^\infty}(\alpha, \mathrm{Lip}(\Omega)),\ d_{L^\infty}(\beta, \mathrm{Lip}(\Omega)),\ d_{L^\infty}(\gamma, \mathrm{Lip}(\Omega))\Big\}. \tag{3.4}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν $\psi \in \mathcal{E}$ και $u \in H_0^2(\Omega)$ τότε $e^\psi u \in H_0^2(\Omega)$, δηλαδή ο πολλαπλασιαστικός τελεστής e^ψ αφήνει τον χώρο Sobolev $H_0^2(\Omega)$ αναλλοίωτο. Οπότε, μπορούμε να ορίσουμε μία διγραμμική μορφή Q_ψ στον $H_0^2(\Omega)$ ως

$$Q_\psi(u, v) = Q(e^\psi u, e^{-\psi} v),$$

όπου

$$Q(u, v) = \int_\Omega \Big\{\alpha(x) u_{x_1x_1}\overline{v}_{x_1x_1} + 2\beta(x) u_{x_1x_2}\overline{v}_{x_1x_2} + \gamma(x) u_{x_2x_2}\overline{v}_{x_2x_2}\Big\}\, dx,$$

είναι η διγραμμική μορφή που αντιστοιχεί στην $Q(\cdot)$.

Ορισμός 3.1 *Ο χώρος Sobolev $W^{2,\infty}(\Omega)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις $u \in L^\infty(\Omega)$ που έχουν ασθενείς παραγώγους δεύτερης τάξης και αυτές οι παράγωγοι ανήκουν στον $L^\infty(\Omega)$. Στον $W^{2,\infty}(\Omega)$ ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\|_{2,\infty}$*

$$\|u\|_{2,\infty} = \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Αναλύοντας διάφορους όρους της $Q_\psi(u)$ (βλ. (3.7) παρακάτω) βρίσκουμε ότι οι όροι τέταρτης τάξης συμπίπτουν με αυτούς της $Q(u)$, οπότε από βασικές ανισότητες παρεμβολής θα έχουμε

$$\Big|Q(u) - Q_\psi(u)\Big| \le \epsilon Q(u) + c_\epsilon\Big\{\|\psi\|_{W^{2,\infty}} + \|\psi\|^4_{W^{2,\infty}}\Big\}\|u\|_2^2, \tag{3.5}$$

για κάθε $\epsilon \in (0,1)$ και $u \in H_0^2(\Omega)$.

Λήμμα 3.2 *[9, Πρόταση 2] Έστω $\psi \in \mathcal{E}$ και έστω ακόμα ότι υπάρχει $\tilde{k} > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\operatorname{Re} Q_\psi(u) \geq -\tilde{k}\,\|u\|_2^2, \tag{3.6}$$

για κάθε $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Τότε για κάθε $\delta \in (0,1)$ υπάρχει μία σταθερά c_δ ώστε

$$|G(x,x',t)| \leq c_\delta t^{-1/2} \exp\{\psi(x) - \psi(x') + (1+\delta)\tilde{k}t\},$$

για κάθε $x, x' \in \Omega$ και $t > 0$.

Στο εξής θα θεωρήσουμε $\psi \in \mathcal{E}$ της ειδικότερης μορφής

$$\psi = \lambda\varphi\,, \qquad \varphi \in \mathcal{E}\,, \quad \lambda > 0.$$

Έχουμε λοιπόν τότε

$$\begin{aligned} Q_{\lambda\varphi}(u) \;=\; & \int_\Omega \Big[\alpha(x)(e^{\lambda\varphi}u)_{x_1x_1}(e^{-\lambda\varphi}\overline{u})_{x_1x_1} + 2\beta(x)(e^{\lambda\varphi}u)_{x_1x_2}(e^{-\lambda\varphi}\overline{u})_{x_1x_2} \\ & \qquad + \gamma(x)(e^{\lambda\varphi}u)_{x_2x_2}(e^{-\lambda\varphi}\overline{u})_{x_2x_2}\Big]\,dx. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Leibniz μπορούμε να υπολογίσουμε τις δεύτερες μερικές παραγώγους και τα εκθετικά $e^{\lambda\varphi}$ και $e^{-\lambda\varphi}$ που εμφανίζονται σε κάθε όρο απαλείφονται. Τελικά βρίσκουμε

$$\begin{aligned} Q_{\lambda\varphi}(u) = \int_\Omega & \Big\{\lambda^4[\alpha(x)\varphi_{x_1}^4 + 2\beta(x)\varphi_{x_1}^2\varphi_{x_2}^2 + \gamma(x)\varphi_{x_2}^4]|u|^2 \\ & + \lambda^3\Big\{\alpha(x)2\varphi_{x_1}^3(u_{x_1}\overline{u} - u\overline{u}_{x_1}) \\ & + 2\beta(x)[\varphi_{x_1}^2\varphi_{x_2}(u_{x_2}\overline{u} - u\overline{u}_{x_2}) + \varphi_{x_1}\varphi_{x_2}^2(u_{x_1}\overline{u} - u\overline{u}_{x_1})] \\ & + \gamma(x)2\varphi_{x_2}^3(u_{x_2}\overline{u} - u\overline{u}_{x_2})\Big\} \\ & + \lambda^2\Big\{\alpha(x)[\varphi_{x_1}^2(u\overline{u}_{x_1x_1} + u_{x_1x_1}\overline{u} - 4|u_{x_1}|^2) - 2\varphi_{x_1}\varphi_{x_1x_1}(u\overline{u}_{x_1} + u_{x_1}\overline{u}) - \varphi_{x_1x_1}^2|u|^2] \\ & + 2\beta(x)[\varphi_{x_1}\varphi_{x_2}(u\overline{u}_{x_1x_2} + u_{x_1x_2}\overline{u} - u_{x_1}\overline{u}_{x_2} - u_{x_2}\overline{u}_{x_1}) - (\varphi_{x_2}^2|u_{x_1}|^2 + \varphi_{x_1}^2|u_{x_2}|^2) \\ & - \varphi_{x_1}\varphi_{x_1x_2}(u_{x_2}\overline{u} + u\overline{u}_{x_2}) - \varphi_{x_2}\varphi_{x_1x_2}(u_{x_1}\overline{u} + u\overline{u}_{x_1}) - \varphi_{x_1x_2}^2|u|^2] \\ & + \gamma(x)[\varphi_{x_2}^2(u\overline{u}_{x_2x_2} + u_{x_2x_2}\overline{u} - 4|u_{x_2}|^2) - 2\varphi_{x_2}\varphi_{x_2x_2}(u\overline{u}_{x_2} + u_{x_2}\overline{u}) - \varphi_{x_2x_2}^2|u|^2]\Big\} \\ & + \lambda\Big\{\alpha(x)[2\varphi_{x_1}(u_{x_1}\overline{u}_{x_1x_1} - u_{x_1x_1}\overline{u}_{x_1}) + \varphi_{x_1x_1}(u\overline{u}_{x_1x_1} - u_{x_1x_1}\overline{u})] \\ & + 2\beta(x)[\varphi_{x_1}(u_{x_2}\overline{u}_{x_1x_2} - u_{x_1x_2}\overline{u}_{x_2}) + \varphi_{x_1x_2}(u\overline{u}_{x_1x_2} - u_{x_1x_2}\overline{u}) + \varphi_{x_2}(u_{x_1}\overline{u}_{x_1x_2} - u_{x_1x_2}\overline{u}_{x_1})] \\ & + \gamma(x)[2\varphi_{x_2}(u_{x_2}\overline{u}_{x_2x_2} - u_{x_2x_2}\overline{u}_{x_2}) + \varphi_{x_2x_2}(u\overline{u}_{x_2x_2} - u_{x_2x_2}\overline{u})]\Big\} \\ & + \alpha(x)|u_{x_1x_1}|^2 + 2\beta(x)|u_{x_1x_2}|^2 + \gamma(x)|u_{x_2x_2}|^2\Big\}\,dx. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Καταλήγουμε, επομένως, ότι η $Q_{\lambda\varphi}(u)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός όρων της μορφής

$$\lambda^s \int_\Omega b(x) D^\gamma u \, D^\delta \overline{u} \, dx, \tag{3.8}$$

όπου κάθε συνάρτηση $b(x)$ είναι ένα γινόμενο που αποτελείται από μία από τις συναρτήσεις $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ και των πρώτων ή δεύτερων παραγώγων της συνάρτησης φ. Για κάθε τέτοιο όρο έχουμε $s + |\gamma + \delta| \leq 4$.

Ορισμός 3.3 *Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}$ τον χώρο όλων των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών όρων της μορφής (3.8) με $b(x) \in L^\infty(\Omega)$ για τους οποίους ισχύει $s + |\gamma + \delta| < 4$.*

Ορίζουμε τώρα την τετραγωνική μορφή

$$\begin{aligned}
Q_{1,\lambda\varphi}(u) \;=\; \int_\Omega \Big\{ & \lambda^4 [\alpha(x)\varphi_{x_1}^4 + 2\beta(x)\varphi_{x_1}^2\varphi_{x_2}^2 + \gamma(x)\varphi_{x_2}^4]|u|^2 \\
& + \lambda^3 \Big\{ \alpha(x) 2\varphi_{x_1}^3 (u_{x_1}\overline{u} - u\overline{u}_{x_1}) \\
& + 2\beta(x)[\varphi_{x_1}^2 \varphi_{x_2}(u_{x_2}\overline{u} - u\overline{u}_{x_2}) + \varphi_{x_1}\varphi_{x_2}^2(u_{x_1}\overline{u} - u\overline{u}_{x_1})] \\
& + \gamma(x) 2\varphi_{x_2}^3 (u_{x_2}\overline{u} - u\overline{u}_{x_2}) \Big\} \\
& + \lambda^2 \Big\{ \alpha(x)\varphi_{x_1}^2 (u\overline{u}_{x_1x_1} + u_{x_1x_1}\overline{u} - 4|u_{x_1}|^2) \\
& + 2\beta(x)[\varphi_{x_1}\varphi_{x_2}(u\overline{u}_{x_1x_2} + u_{x_1x_2}\overline{u} - u_{x_1}\overline{u}_{x_2} - u_{x_2}\overline{u}_{x_1}) - (\varphi_{x_2}^2|u_{x_1}|^2 + \varphi_{x_1}^2|u_{x_2}|^2)] \\
& + \gamma(x)\varphi_{x_2}^2 (u\overline{u}_{x_2x_2} + u_{x_2x_2}\overline{u} - 4|u_{x_2}|^2) \Big\} \\
& + \lambda \Big\{ \alpha(x)[2\varphi_{x_1}(u_{x_1}\overline{u}_{x_1x_1} - u_{x_1x_1}\overline{u}_{x_1}) + \varphi_{x_1x_1}(u\overline{u}_{x_1x_1} - u_{x_1x_1}\overline{u})] \\
& + 2\beta(x)[\varphi_{x_1}(u_{x_2}\overline{u}_{x_1x_2} - u_{x_1x_2}\overline{u}_{x_2}) + \varphi_{x_2}(u_{x_1}\overline{u}_{x_1x_2} - u_{x_1x_2}\overline{u}_{x_1})] \\
& + \gamma(x)[2\varphi_{x_2}(u_{x_2}\overline{u}_{x_2x_2} - u_{x_2x_2}\overline{u}_{x_2})] \Big\} \\
& + \alpha(x)|u_{x_1x_1}|^2 + 2\beta(x)|u_{x_1x_2}|^2 + \gamma(x)|u_{x_2x_2}|^2 \Big\} \, dx.
\end{aligned}$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η $Q_{1,\lambda\varphi}(\cdot)$ περιέχει ακριβώς αυτούς τους όρους της μορφής (3.8) από την $Q_{\lambda\varphi}(\cdot)$ για τους οποίους έχουμε ότι $s + |\gamma + \delta| = 4$.

Οπότε, έχουμε το

Λήμμα 3.4 *Η διαφορά $Q_{\lambda\varphi}(\cdot) - Q_{1,\lambda\varphi}(\cdot)$ ανήκει στον $\mathcal{L}$.*

Απόδειξη. Η διαφορά $Q_{\lambda\varphi}(u) - Q_{1,\lambda\varphi}(u)$ περιέχει ακριβώς αυτούς τους όρους (3.8) από την $Q_{\lambda\varphi}(\cdot)$ για τους οποίους έχουμε ότι $s + |\gamma + \delta| < 4$. □

Ορισμός 3.5 *Ονομάζουμε πολικό σύμβολο του τελεστή H το*

$$A(x, z, z') = \alpha(x) z_1^2 z_1'^2 + 2\beta(x) z_1 z_2 z_1' z_2' + \gamma(x) z_2^2 z_2'^2, \qquad x \in \Omega, \quad z,\, z' \in \mathbb{C}^2,$$

Σημειώνουμε ότι ισχύει $A(x,\xi,\xi) = A(x,\xi)$ για κάθε $x \in \Omega$ και $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Τέλος, για κάθε $x \in \Omega$ και $\xi, \xi', \eta \in \mathbb{R}^2$ θέτουμε

$$S(x,\xi,\xi',\eta) = \operatorname{Re} A(x, \xi + i\eta, \xi' + i\eta) + k(x)A(x,\eta).$$

Για $\varphi \in \mathcal{E}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την τετραγωνική μορφή της $S_{\lambda\varphi}$ στο $H_0^2(\Omega)$ ως

$$S_{\lambda\varphi}(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} S(x,\xi,\xi',\lambda\nabla\varphi) e^{i(\xi-\xi')\cdot x} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi')}\, d\xi\, d\xi'\, dx.$$

Λήμμα 3.6 *Ισχύει ότι*

$$\operatorname{Re} Q_{1,\lambda\varphi}(u) + \int_\Omega k(x)A(x,\lambda\nabla\varphi)|u|^2 dx = S_{\lambda\varphi}(u),$$

για κάθε $\varphi \in \mathcal{E}$, $\lambda > 0$ και $u \in H_0^2(\Omega)$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi\cdot x} \hat{u}(\xi)\, d\xi,$$

και τη σχέση

$$D^\gamma u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (i\xi)^\gamma e^{i\xi\cdot x} \hat{u}(\xi)\, d\xi,$$

όπου γ είναι ένας πολυδείκτης, έχουμε

$$\begin{aligned}
Q_{1,\lambda\varphi}(u) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \Big\{ \lambda^4[\alpha(x)\varphi_{x_1}^4 + 2\beta(x)\varphi_{x_1}^2\varphi_{x_2}^2 + \gamma(x)\varphi_{x_2}^4] \\
&\quad + \lambda^2 \Big\{ \alpha(x)\varphi_{x_1}^2[\overline{(i\xi_1')^2} + (i\xi_1)^2 - 4(i\xi_1)\overline{(i\xi_1')}] \\
&\quad + 2\beta(x)[\varphi_{x_1}\varphi_{x_2}(\overline{(i\xi_1')(i\xi_2')} + (i\xi_1)(i\xi_2) + (i\xi_1)\overline{(i\xi_2')} - \overline{(i\xi_1')}(i\xi_2)) \\
&\quad - (\varphi_{x_2}^2(i\xi_1)\overline{(i\xi_1')} + \varphi_{x_1}^2(i\xi_2)\overline{(i\xi_2')})] \\
&\quad + \gamma(x)\varphi_{x_2}^2[\overline{(i\xi_2')^2} + (i\xi_2)^2 - 4(i\xi_2)\overline{(i\xi_2')}] \Big\} \\
&\quad + \alpha(x)(i\xi_1)^2\overline{(i\xi_1')^2} + 2\beta(x)(i\xi_1)(i\xi_2)\overline{(i\xi_1')(i\xi_2')} \\
&\quad + \gamma(x)(i\xi_2)^2\overline{(i\xi_2')^2} \Big\} e^{i(\xi-\xi')\cdot x} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi')}\, d\xi\, d\xi'\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} [\alpha(x)(\xi_1 - i\lambda\varphi_{x_1})^2(\xi_1' + i\lambda\varphi_{x_1})^2 \\
&\quad + 2\beta(x)(\xi_1 - i\lambda\varphi_{x_1})(\xi_2 - i\lambda\varphi_{x_2})(\xi_1' + i\lambda\varphi_{x_1})(\xi_2' + i\lambda\varphi_{x_2}) \\
&\quad + \gamma(x)(\xi_2 - i\lambda\varphi_{x_2})^2(\xi_2' + i\lambda\varphi_{x_2})^2] e^{i(\xi-\xi')\cdot x} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi')}\, d\xi\, d\xi'\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} A(x, \xi - i\lambda\nabla\varphi, \xi' + i\lambda\nabla\varphi) e^{i(\xi-\xi')\cdot x} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi')}\, d\xi\, d\xi'\, dx.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το Λήμμα 3 του άρθρου [4], μπορούμε να περάσουμε τον τελεστή του πραγματικου μέρους Re μέσα στο παραπάνω τριπλό ολοκλήρωμα (με την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ είναι πραγματικές) και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\ Q_{1,\lambda\varphi}(u) + \int_\Omega k(x)A(x,\lambda\nabla\varphi)|u|^2 dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\iiint_{\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} [\mathrm{Re}\ A(x,\xi - i\lambda\nabla\varphi, \xi' + i\lambda\nabla\varphi) + k(x)A(x,\lambda\nabla\varphi)] \\
&\quad e^{i(\xi-\xi')\cdot x}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi')}\, d\xi\, d\xi'\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\iiint_{\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} S(x,\xi,\xi',\lambda\nabla\varphi)e^{i(\xi-\xi')\cdot x}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi')}\, d\xi\, d\xi'\, dx \\
&= S_{\lambda\varphi}(u).
\end{aligned}$$

□

Για κάθε $x \in \Omega$, ορίζουμε μία τετραγωνική μορφή $\Gamma(x,\cdot)$ στο $\mathbb{C}^6$ ως

$$\Gamma(x,p) = \begin{cases}
(Q+1)|p_1|^2 + (Q+1)|p_2|^2 - Q|p_3|^2 - 2Q|p_4|^2 - 2Q|p_5|^2 - \frac{Q(3-Q)^2}{(1+Q)^2}|p_6|^2, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{αν } -1 < Q(x) < 0, \\
\frac{3-Q}{3}|p_1|^2 + \frac{3-Q}{3}|p_2|^2 + \frac{Q}{3}|p_1+p_2|^2 + \frac{4Q}{3}|p_3|^2, \qquad \text{αν } 0 \le Q(x) \le 3, \\
2(Q-3)|p_1|^2 + |p_2|^2 + 2(Q-1)|p_3|^2 + 2\frac{Q-3}{Q-1}(Q+1)(Q^2+3)|p_4|^2, \quad \text{αν } Q(x) > 3.
\end{cases}$$

για κάθε $p = (p_1,\ldots,p_6) \in \mathbb{C}^6$. Είναι φανερό ότι η $\Gamma(x,\cdot)$ είναι θετικά ημιορισμένη για κάθε $x \in \Omega$. Συμβολίζουμε με $\Gamma(x,\cdot,\cdot)$ την αντίστοιχη διγραμμική μορφή στο $\mathbb{C}^6$, δηλαδή η $\Gamma(x,p,q)$ δίνεται από έναν τύπο ίδιο με τον πιο πάνω όπου κάθε $|p_k|^2$ αντικαθίσταται από το $p_k\overline{q_k}$ και το $|p_1+p_2|^2$ αντικαθίσταται από το $(p_1 + p_2)\overline{(q_1+q_2)}$.

Στη συνέχεια, για κάθε $x \in \Omega$ και $\xi,\eta \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε ένα διάνυσμα $p_{x,\xi,\eta} \in \mathbb{R}^6$ από τη σχέση

$$p_{x,\xi,\eta} = \begin{cases}
\Big(\alpha^{1/2}[\xi_1^2 - \frac{3-Q}{1+Q}\eta_1^2],\ \gamma^{1/2}[\xi_2^2 - \frac{3-Q}{1+Q}\eta_2^2],\ \alpha^{1/2}\xi_1^2 - \gamma^{1/2}\xi_2^2,\ \alpha^{1/2}\xi_1\eta_1 + \gamma^{1/2}\xi_2\eta_2, \\
\quad \alpha^{1/4}\gamma^{1/4}(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1),\ \alpha^{1/2}\eta_1^2 - \gamma^{1/2}\eta_2^2\Big), \qquad \text{αν } -1 < Q(x) < 0, \\
\Big(\alpha^{1/2}[\xi_1^2 - 3\eta_1^2],\ \gamma^{1/2}[\xi_2^2 - 3\eta_2^2],\ \alpha^{1/4}\gamma^{1/4}[\xi_1\xi_2 - 3\eta_1\eta_2],\ 0,\ 0,\ 0\Big), \quad 0 \le Q(x) \le 3, \\
\Big(\alpha^{1/2}\xi_1\eta_1 - \gamma^{1/2}\xi_2\eta_2,\ \alpha^{1/2}(\xi_1^2 - Q\eta_1^2) + \gamma^{1/2}(\xi_2^2 - Q\eta_2^2), \\
\quad \alpha^{1/4}\gamma^{1/4}[\xi_1\xi_2 - \frac{Q+3}{Q-1}\eta_1\eta_2],\ \alpha^{1/4}\gamma^{1/4}\eta_1\eta_2,\ 0,\ 0\Big), \qquad \text{αν } Q(x) > 3.
\end{cases}$$

Μία σημαντική ιδιότητα της μορφής $\Gamma(x,\cdot)$ και των διανυσμάτων $p_{x,\xi,\eta}$ είναι ότι

$$S(x;\xi,\xi,\eta) = \Gamma(x, p_{x,\xi,\eta}, p_{x,\xi,\eta}), \tag{3.9}$$

για κάθε $x \in \Omega$ και $\xi,\eta \in \mathbb{R}^2$.

Ορίζουμε τώρα την τετραγωνική μορφή $\Gamma_{\lambda\varphi}(\cdot)$ στο $H_0^2(\Omega)$ ως

$$\Gamma_{\lambda\varphi}(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \Gamma(x,\ p_{x,\xi,\lambda\nabla\varphi}, p_{x,\xi',\lambda\nabla\varphi}) e^{i(\xi-\xi')\cdot x}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi')}\, d\xi\, d\xi'\, dx.$$

Οπότε έχουμε το

Λήμμα 3.7 *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$ είναι Lipschitz συνεχείς. Τότε η διαφορά $S_{\lambda\varphi}(\cdot) - \Gamma_{\lambda\varphi}(\cdot)$ ανήκει στον $\mathcal{L}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη διαφορά

$$S(x,\xi,\xi',\eta) - \Gamma(x, p_{x,\xi,\eta}, p_{x,\xi',\eta}),$$

των δύο συμβόλων και ομαδοποιούμε τους όρους που έχουν την ιδιότητα ότι αν θέσουμε $\xi' = \xi$ τότε είναι όμοια μονώνυμα των μεταβλητών ξ και η. Λόγω της (3.9) μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες για να καταλήξουμε ότι η συνολική συνεισφορά της κάθε τέτοιας ομάδας ανήκει στον $\mathcal{L}$. Αυτό πρέπει να το αιτιολογήσουμε για δύο συγκεκριμένες ομάδες, η μία που αποτελείται από όρους για τους οποίους $\xi = \xi'$ και περιλαμβάνουν τα μονώνυμα $\xi_1^2\eta_1^2$ και αυτά για τα οποία $\xi = \xi'$ που περιλαμβάνουν τα $\xi_1^2\eta_2^2$. Χάριν συντομίας, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη απευθείας το άθροισμα των δύο ομάδων.

Οι όροι αυτών των δυο ομάδων $S(x,\xi,\xi',\eta)$ αθροίζονται ως

$$-\alpha(x)\eta_1^2(\xi_1^2 + \xi_1'^2 + 4\xi_1\xi_1') - 2\beta(x)\eta_2^2\xi_1\xi_1'.$$

Οι όροι που αντιστοιχούν στη $\Gamma(x, p_{x,\xi,\eta}, p_{x,\xi',\eta})$ είναι

$$\begin{cases} \alpha(x)\eta_1^2[(Q(x)-3)(\xi_1^2+\xi_1'^2) - 2Q(x)\xi_1\xi_1'] - 2\beta(x)\eta_2^2\xi_1\xi_1', & \text{αν } Q(x)\le 0,\\ -3\alpha(x)\eta_1^2(\xi_1^2+\xi_1'^2) - \beta(x)\eta_2^2(\xi_1^2+\xi_1'^2), & \text{αν } 0\le Q(x)\le 3,\\ \alpha(x)\eta_1^2[-Q(x)(\xi_1^2+\xi_1'^2) + 2(Q(x)-3)\xi_1\xi_1'] - \beta(x)\eta_2^2(\xi_1^2+\xi_1'^2), & \text{αν } Q(x)\ge 3. \end{cases}$$

Επομένως η διαφορά αυτών των όρων της $S(x,\xi,\xi',\eta) - \Gamma(x, p_{x,\xi,\eta}, p_{x,\xi',\eta})$ είναι

$$\begin{cases} \alpha(x)\eta_1^2[2-Q(x)](\xi_1-\xi_1')^2, & \text{αν } Q(x)\le 0,\\ [2\alpha(x)\eta_1^2 + \beta(x)\eta_2^2](\xi_1-\xi_1')^2, & \text{αν } 0\le Q(x)\le 3,\\ [\alpha(x)(Q(x)-1)\eta_1^2 + \beta(x)\eta_2^2](\xi_1-\xi_1')^2, & \text{αν } Q(x)\ge 3. \end{cases}$$

Αυτό επίσης μπορεί να γραφεί ως $[\alpha(x)\eta_1^2 R(x) + \eta_2^2 P(x)](\xi_1 - \xi_1')^2$ όπου

$$R(x) = \begin{cases} 2 - Q(x), & \text{αν } Q(x) \leq 0, \\ 2, & \text{αν } 0 \leq Q(x) \leq 3, \\ Q(x) - 1, & \text{αν } Q(x) \geq 3, \end{cases}$$

και

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \beta(x) \leq 0, \\ \beta(x), & \text{αν } \beta(x) \geq 0. \end{cases}$$

Εισάγοντας τα παραπάνω στο τριπλό ολοκλήρωμα και υπενθυμίζοντας ότι $\eta = \lambda\nabla\phi$, βρίσκουμε ότι η συνεισφορά των παραπάνω όρων στη διαφορά $S_{\lambda\phi}(u) - \Gamma_{\lambda\phi}(u)$ είναι

$$\begin{aligned}
& (2\pi)^{-2} \iiint_{\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} [\alpha(x)R(x)\phi_{x_1}^2 + P(x)\phi_{x_2}^2](\xi_1 - \xi_1')^2 \lambda^2 e^{i(\xi-\xi')\cdot x}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi')}\, d\xi\, d\xi'\, dx \\
= {} & \lambda^2 \int_\Omega [\alpha(x)R(x)\phi_{x_1}^2 + P(x)\phi_{x_2}^2](-u_{x_1x_1}\overline{u} - u\overline{u}_{x_1x_1} - 2|u_{x_1}|^2)dx \\
= {} & -\lambda^2 \int_\Omega [\alpha(x)R(x)\phi_{x_1}^2 + P(x)\phi_{x_2}^2](u_{x_1}\overline{u} + u\overline{u}_{x_1})_{x_1} dx \\
= {} & \lambda^2 \int_\Omega [\alpha(x)R(x)\phi_{x_1}^2 + P(x)\phi_{x_2}^2]_{x_1}(u_{x_1}\overline{u} + u\overline{u}_{x_1})dx. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση $\alpha(x)R(x)\phi_{x_1}^2 + P(x)\phi_{x_2}^2$ είναι Lipschitz συνεχής, μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες και να καταλήξουμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα ανήκει στον $\mathcal{L}$. □

Στη συνέχεια έχουμε το ακόλουθα λήμμα (βλ. (3.3)).

Λήμμα 3.8 *Υποθέτουμε ότι οι συνάρτησεις $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ είναι Lipschitz συνεχείς. Έστω επίσης $M > 0$. Τότε για κάθε $\varphi \in \mathcal{E}_{A,M}$ και $\lambda > 0$ έχουμε*

$$\text{Re } Q_{\lambda\varphi}(u) \geq -k^*\lambda^4 \|u\|_2^2 + T(u),$$

για κάποια τετραγωνική μορφή $T \in \mathcal{L}$ και όλες τις συναρτήσεις $u \in H_0^2(\Omega)$.

Απόδειξη. Το γεγονός ότι $\varphi \in \mathcal{E}_{A,M}$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$A(x, \nabla\varphi(x)) \leq 1,$$

για κάθε $x \in \Omega$. Οπότε, χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 3.4, 3.6 και 3.7 βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Re } Q_{\lambda\varphi}(u) &= -\int_\Omega k(x)A(x,\lambda\nabla\varphi)\,|u|^2\,dx + \Gamma_{\lambda\varphi}(u) + T(u) \\ &\geq -k^*\lambda^4 \int_\Omega |u|^2\,dx + \Gamma_{\lambda\varphi}(u) + T(u), \end{aligned}$$

για κάθε $T \in \mathcal{L}$ και $u \in H_0^2(\Omega)$. Επιπλέον είναι

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\varphi}(u) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \Gamma(x,\ p_{x,\xi,\lambda\nabla\varphi}, p_{x,\xi',\lambda\nabla\varphi}) e^{i(\xi-\xi')\cdot x}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi')}\,d\xi\,d\xi'\,dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_\Omega \Gamma\Big(x,\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi\cdot x}\hat{u}(\xi)p_{x,\xi,\lambda\nabla\varphi}d\xi, \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi'\cdot x}\hat{u}(\xi')p_{x,\xi',\lambda\nabla\varphi}d\xi'\Big)\,dx \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

λόγω του ότι η Γ είναι θετικά ημιορισμένη. □

Λήμμα 3.9 *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ είναι Lipschitz συνεχε-ίς. Για κάθε ϵ και M θετικά υπάρχει $c_{\epsilon,M}$ τέτοιο ώστε*

$$\text{Re } Q_{\lambda\varphi}(u) \geq -\Big\{(k^* + \epsilon)\lambda^4 + c_{\epsilon,M}(1+\lambda^3)\Big\}\|u\|_2^2, \tag{3.11}$$

για κάθε $\lambda > 0$ και $\varphi \in \mathcal{E}_{A,M}$.

Απόδειξη. Σημειώνουμε πρώτα (βλ. [3, Λήμμα 7]) ότι για κάθε μορφή $T \in \mathcal{L}$ ισχύει ότι

$$|T(u)| \leq \epsilon Q(u) + c_\epsilon(1+\lambda^3)\,\|u\|_2^2,$$

για κάθε $\epsilon \in (0,1)$, $\lambda > 0$ και $u \in H_0^2(\Omega)$. Οπότε το Λήμμα 3.9 συνεπάγεται

$$\text{Re } Q_{\lambda\varphi}(u) \geq -\Big\{k^*\lambda^4 + c_{\epsilon,M}(1+\lambda^3)\Big\}\|u\|_2^2 - \epsilon Q(u). \tag{3.12}$$

Τώρα, από τη σχέση (3.5) έχουμε ότι για κάθε $\psi \in \mathcal{E}$ ισχύει ότι

$$\Big|Q(u) - Q_\psi(u)\Big| \leq \frac{1}{2}Q(u) + c\Big\{\|\psi\|_{W^{2,\infty}} + \|\psi\|_{W^{2,\infty}}^4\Big\}\|u\|_2^2.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\psi = \lambda\varphi$ με $\lambda > 0$ και $\varphi \in \mathcal{E}_{A,M}$ βρίσκουμε ότι

$$\Big|Q(u) - Q_{\lambda\varphi}(u)\Big| \leq \frac{1}{2}Q(u) + c_M(\lambda + \lambda^4)\|u\|_2^2, \tag{3.13}$$

Τώρα, οι συντελεστές του λ^4 στην έκφραση της $Q_{\lambda\varphi}$ περιέχουν μόνο τις πρώτες παραγώγους της φ. Επειδή $|\nabla\varphi| \leq c$ για κάθε $\varphi \in \mathcal{E}_{A,M}$, η (3.13) γράφεται

$$\Big|Q(u) - Q_{\lambda\varphi}(u)\Big| \leq \frac{1}{2}Q(u) + \{c_M(\lambda + \lambda^3) + c\lambda^4\}\|u\|_2^2,$$

η οποία συνεπάγεται

$$Q(u) \leq\ 2\mathrm{Re}\, Q_{\lambda\varphi}(u) + \{c_M(\lambda+\lambda^3) + c\lambda^4\}\|u\|_2^2. \tag{3.14}$$

Έστω $u \in H_0^2(\Omega)$. Αν το $\mathrm{Re}\ Q_{\lambda\varphi}(u) \geq 0$, τότε η σχέση (3.11) είναι προφανώς αληθής. Αν όχι, τότε από τις σχέσεις (3.12) και (3.14) έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\ \ Q_{\lambda\varphi}(u) \ &\geq\ -\Big\{k^*\lambda^4 + c_\epsilon(1+\lambda^3)\Big\}\|u\|_2^2 - 2\epsilon\,\mathrm{Re}\ Q_{\lambda\varphi}(u) - \epsilon\{c_M(\lambda+\lambda^3) + c\lambda^4\}\|u\|_2^2\\
&\geq\ -\Big\{(k^* + c\epsilon)\lambda^4 + c_\epsilon(1+\lambda^3) + \epsilon\{c_M(\lambda+\lambda^3) + c\lambda^4\}\Big\}\|u\|_2^2,
\end{aligned}$$

και η σχέση (3.11) ισχύει ξανά. □

3.2 Η Γκαουσιανή εκτίμηση

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου. Από τις ασυμπτωτικές εκτιμήσεις του Κεφαλαίου 2 έπεται ότι η σταθερά σ_* στο επόμενο θεώρημα είναι βέλτιστη (βλ. επίσης Ενότητα 3.3).

Θεώρημα 3.10 *Για κάθε $\epsilon \in (0,1)$ και $M > 0$ υπάρχουν $c_\epsilon, c_{\epsilon,M} < \infty$ τέτοια ώστε*

$$|G(x,x',t)| \leq c_\epsilon t^{-1/2} \exp\Big\{ -(\sigma_* - cD - \epsilon)\frac{d_M(x,x')^{4/3}}{t^{1/3}} + c_{\epsilon,M}t\Big\}, \tag{3.15}$$

για όλα τα $x, x' \in \Omega$ και $t > 0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση που οι συντελεστές του H είναι Lipschitz συνεχείς (οπότε $D = 0$). Για τη γενική περίπτωση, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η σχέση (3.6) του Λήμματος 3.2 είναι ευσταθής ως προς L^∞ διαταραχές των συντελεστών, δηλαδή μία μικρή μεταβολή των $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ προκαλεί μικρή μεταβολή στη σταθερά $\tilde{k}$ στη σχέση (3.6).

Μέρος 1. Το Λήμμα 3.2 και η σχέση (3.11) συνεπάγονται ότι

$$|G(x,x',t)| < c_\epsilon t^{-1/2} \exp\Big\{\lambda[\varphi(x) - \varphi(x')] + (1+\epsilon)\{(k^* + \epsilon)\lambda^4 + c_{\epsilon,M}(1+\lambda^3)\}\, t\Big\},$$

για κάθε $\epsilon \in (0,1)$. Βελτιστοποιώντας ως προς $\varphi \in \mathcal{E}_{A,M}$ προκύπτει ότι

$$|G(x,x',t)| < c_\epsilon t^{-1/2} \exp\Big\{ -\lambda d_M(x,x') + (1+\epsilon)\{(k^* + \epsilon)\lambda^4 + c_{\epsilon,M}(1+\lambda^3)\}\, t\Big\}.$$

Τέλος επιλέγοντας $\lambda = [d_M(x,x')/(4k^*t)]^{1/3}$, έχουμε

$$-\lambda d_M(x,x') + k^*\lambda^4 t = -\sigma_* \frac{d_M(x,x')^{4/3}}{t^{1/3}}.$$

Οπότε προκύπτει η σχέση (3.15).

Μέρος 2. Τώρα θεωρούμε τη γενική περίπτωση όπου οι συναρτήσεις $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ δεν είναι Lipschitz συνεχείς. Τότε, υπάρχουν Lipschitz συναρτήσεις $\tilde{\alpha}(x), \tilde{\beta}(x), \tilde{\gamma}(x)$ τέτοιες ώστε

$$\max\{\,\|\alpha - \tilde{\alpha}\|_\infty,\ \|\beta - \tilde{\beta}\|_\infty,\ \|\gamma - \tilde{\gamma}\|_\infty\,\} < 2D.$$

Υποθέτουμε ότι το D είναι αρκετά μικρό ώστε ο αντίστοιχος τελεστής $\tilde{H}$ να είναι ελλειπτικός. Για $\varphi \in \mathcal{E}_{\tilde{A},M}$ και $\lambda > 0$ συμπεραίνουμε από το πρώτο μέρος της απόδειξης ότι

$$\text{Re }\ \tilde{Q}_{\lambda\varphi}(u) \geq -\Big\{\tilde{k}^*\lambda^4 + c_\epsilon(1+\lambda^3)\Big\}\|u\|_2^2 - \epsilon Q(u). \tag{3.16}$$

Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι

$$|k^* - \tilde{k}^*| \leq cD\ , \qquad \Big|Q_{\lambda\varphi}(u) - \tilde{Q}_{\lambda\varphi}(u)\Big| \leq cD\{Q(u) + \lambda^4\|u\|_2^2\}. \tag{3.17}$$

Από τις σχέσεις (3.16) και (3.17) βρίσκουμε ότι

$$\text{Re }\ Q_{\lambda\varphi}(u) \geq -\Big\{(k^* + cD)\lambda^4 + c_\epsilon(1+\lambda^3)\Big\}\|u\|_2^2 - \epsilon Q(u).$$

Όπως και στο μέρος 1, αυτό οδηγεί σε μία Γκαουσιανή εκτίμηση που περιέχει τη σταθερά $\sigma_* - cD$ και την απόσταση $\tilde{d}_M(x,x')$. Για να αντικαταστήσουμε το $\tilde{d}_M(x,x')$ με το $d_M(x,x')$ σημειώνουμε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε αν $\varphi \in \mathcal{E}_{\tilde{A},M}$ τότε $(1+cD)^{-1}\varphi \in \mathcal{E}_{A,M}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\tilde{d}_M(x,x') \geq (1+cD)^{-1}d_M(x,x')$ που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 3.10.

3.3 Μερικά σχόλια για την απόσταση $d(x,x')$

Θα κάνουμε ορισμένα σχόλια για την απόσταση

$$d(x,x') = \sup\Big\{\varphi(x') - \varphi(x)\ :\ \varphi \in \text{Lip}(\Omega),\ \ A(y, \nabla\varphi(y)) \leq 1\,,\ \ \text{σ.π. } y \in \Omega\Big\}$$

που ορίστηκε στη σχέση (3.1).

Η απεικόνιση

$$p(x,\xi) = A(x,\xi)^{1/4}\ , \quad x \in \Omega\,, \ \ \xi \in \mathbb{R}^2,$$

ικανοποιεί τις ιδιότητες (*i*) και (*i*) του Ορισμού 1.14 άλλα όχι απαραίτητα την (*iii*), είναι δηλαδή μία ψευδομετρική Finsler. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.19, για την επαγόμενη γεωδαισιακή απόσταση ισχύει

$$d_{p_*}(x,x') = \sup\Big\{\varphi(x') - \varphi(x)\ :\ \varphi \in \text{Lip}(\Omega),\ \ p_{**}(y, \nabla\varphi(y)) \leq 1\,,\ \ \sigma.\pi.\ y \in \Omega\Big\}.$$

Από το γεγονός ότι το σύνολο $\{\xi : p_{**}(x,\xi) \leq 1\}$ είναι ακριβώς η κυρτή θήκη του συνόλου $\{\xi : p(x,\xi) \le 1\}$ (βλ. [25, Ενότητα 1.6]) έπεται ότι $p_{**} \le p$ και συνεπώς

$$d(x,x') \le d_{p_*}(x,x') \ , \qquad x,\ x' \in \Omega.$$

Αυτό όμως δεν χαλάει το βέλτιστο της σταθεράς σ_* του Θεωρήματος 3.10. Στην περίπτωση μάλιστα τελεστή με σταθερούς συντελεστές οι δύο αποστάσεις είναι ίσες. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 3.11 *Έστω μία ομογενής ψευδομετρική Finsler $p(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, και έστω*

$$d_0(x) = \sup\Big\{\varphi(x) \ : \ \varphi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2), \ \ \varphi(0) = 0 \ , \ \ p(y, \nabla\varphi(y)) \le 1 \ , \ \ \sigma.\pi. \ \ y \in \mathbb{R}^n\Big\}. \quad (3.18)$$

Ισχύει τότε

$$d_0(x) = p_*(x) \ , \qquad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.19)$$

Απόδειξη. Έστω φ μία συνάρτηση όπως στην σχέση (3.18). Έχουμε τότε

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\varphi(tx)dt = \int_0^1 \nabla\varphi(tx)\cdot x\,dt \le \int_0^1 p(\nabla\varphi(tx))p_*(x)\,dt \le p_*(x)\,,$$

οπότε $d_0(x) \le p_*(x)$. Για το αντίστροφο, έστω $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Η συνάρτηση

$$\varphi(y) = \frac{\xi\cdot y}{p(\xi)} \ , \qquad y \in \mathbb{R}^2,$$

ικανοποιεί τη σχέση $p(\nabla\varphi(y)) = 1$ και άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μία συνάρτηση δοκιμής στη σχέση (3.18). Άρα

$$\frac{\xi\cdot x}{A(\xi)^{1/4}} = \varphi(x) \le d_0(x),$$

και μεγιστοποιώντας ως προς ξ βρίσκουμε ότι $p_*(x) \le d_0(x)$. □

Τώρα, προκύπτει άμεσα από τη σχέση (1.15) ότι

$$p_*(x) \ge \frac{|x|^2}{p(x)} \ , \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \quad (3.20)$$

Θα αναζητήσουμε τα $x \in \mathbb{R}^2$ για τα οποία η (3.20) γίνεται ισότητα. Για τα x αυτά έχουμε

$$p_*(x)p_{**}(x) \le p_*(x)p(x) = |x|^2 \le p_*(x)p_{**}(x),$$

και συνεπώς $p_{**}(x) = p(x)$.

Απο την ομογένεια, είναι αρκετό να θεωρήσουμε σημεία της μορφής $e_\phi =$

$(\cos\phi, \sin\phi)$. Αναζητούμε, λοιπόν, κατευθύνσεις ϕ για τις οποίες

$$\frac{1}{A(e_\phi)^{1/4}} = \max_{\theta\in\mathbb{R}} \frac{e_\phi \cdot e_\theta}{A(e_\theta)^{1/4}}.$$

Οπότε, έστω $\phi \in [0, 2\pi]$ σταθερή και

$$g(\theta) = \frac{e_\phi \cdot e_\theta}{A(e_\theta)^{1/4}} = \frac{\cos(\phi-\theta)}{\left(1 + \frac{\beta-1}{2}\sin^2 2\theta\right)^{1/4}}.$$

Τότε

$$g'(\theta) = A(e_\theta)^{-1/4}\sin(\theta-\phi) - \frac{\beta-1}{4}A(e_\theta)^{-5/4}\cos(\theta-\phi)\,\sin 4\theta\,.$$

Προκύπτει ότι $g'(\phi) = 0$ αν και μόνο αν $\sin 4\phi = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν ϕ είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του $\pi/4$. Αυτό αντιστοιχεί ακριβώς στα σημεία που θεωρήσαμε στο Θεώρημα 2.7, οπότε και για αυτά τα σημεία η ανισότητα (3.20) γίνεται ισότητα. Συγκεκριμένα, ανακαλώντας την (3.19) έχουμε

$$d_0(s, 0) = s,$$

και

$$d_0(s, s) = \frac{2s^2}{(2s^4 + 2\beta s^4)^{1/4}} = 2^{3/4}(1+\beta)^{-1/4}s\,.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\beta \geq 3$. Τότε έχουμε $\sigma = 3 \cdot 4^{-4/3}(\beta^2 - 1)^{-1/3}$. Αυτό αποδεικνύει το βέλτιστο της σταθεράς σ_* στο Θεώρημα 3.10 στο διάστημα $Q \geq 3$.

Ομοίως, αν $-1 < \beta \leq 0$ τότε

$$\sigma = \frac{3}{2 \cdot 4^{4/3}} \frac{(1+\beta)^{2/3}}{(1-\beta)^{1/3}},$$

και οπότε

$$\exp\Big(-\frac{3}{4^{1/3}}(\frac{1+\beta}{1-\beta})^{1/3}\frac{s^{4/3}}{t^{1/3}}\Big) = \exp\Big(-\sigma_*\frac{d_0(s,s)^{4/3}}{t^{1/3}}\Big).$$

Άρα η σταθερά σ_* είναι επίσης βέλτιστη στην περιοχή $-1 < Q \leq 0$.

Κεφάλαιο 4

Γκαουσιανά φράγματα για μη ομοιόμορφα ελλειπτικούς τελεστές

Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να επεκτείνουμε τις εκτιμήσεις του Κεφαλαίου 3 στην περίπτωση που ο τελεστής H δεν είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός και/ή δεν είναι αυτοσυζυγής.

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο. Και σε αυτό το κεφάλαιο, θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή H στον $L^2(\Omega)$ που δίνεται από τον τύπο

$$Hu(x) = \partial^2_{x_1}\big(\alpha(x)\partial^2_{x_1}u\big) + 2\partial^2_{x_1x_2}(\beta(x)\partial^2_{x_1x_2}u) + \partial^2_{x_2}(\gamma(x)\partial^2_{x_2}u), \tag{4.1}$$

όπου α, β και γ είναι τοπικά φραγμένες μιγαδικές συναρτήσεις στο Ω. Στην περίπτωση που $\Omega \neq \mathbb{R}^2$ επιβάλλουμε συνθήκες Dirichlet στο σύνορο $\partial\Omega$.

Ο H ορίζεται μέσα από την διγραμμική μορφή

$$Q(u,v) = \int_\Omega \Big\{\alpha(x)u_{x_1x_1}\overline{v}_{x_1x_1} + 2\beta(x)u_{x_1x_2}\overline{v}_{x_1x_2} + \gamma(x)u_{x_2x_2}\overline{v}_{x_2x_2}\Big\}\,dx,$$

που ορίζεται αρχικά στο $C_c^\infty(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία θετική συνάρτηση βάρους $w(x)$ με $w^{\pm 1} \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ που ελέγχει τις συνάρτησεις $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ με την ακόλουθη έννοια: Αφενός, ισχύει

$$|\alpha(x)| \le cw(x), \qquad |\beta(x)| \le cw(x), \qquad |\gamma(x)| \le cw(x), \qquad x \in \Omega, \tag{4.2}$$

για κάποιο $c > 0$ και αφετέρου, η ανισότητα Gårding με βάρος

$$\mathrm{Re}\; Q(u) \ge c\int_\Omega w(x)|\nabla^2 u|^2\,dx, \qquad u \in C_c^\infty(\Omega), \tag{4.3}$$

η οποία ισχύει για κάποιο $c > 0$ (εδώ το $\nabla^2 u$ υποδηλώνει το διάνυσμα του οποίου οι συνιστώσες είναι οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της u). Αυτό συνεπάγεται (βλ.

[1, Θεώρημα 7.12]) μία ανάλογη ανισότητα για το σύμβολο

$$A(\xi) = \alpha\xi_1^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \gamma\xi_2^4,$$

του H και συγκεκριμένα

$$\mathrm{Re}\, A(x,\xi) \geq c\, w(x)|\xi|^4 \;, \qquad x \in \Omega\,,\; \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Η τετραγωνική μορφή Q είναι κλείσιμη (closabe) και το πεδίο ορισμού της κλειστότητας είναι ένας χώρος Sobolev με βάρος τον οποίο συμβολίζουμε ως $H^2_{w,0}(\Omega)$. Διατηρούμε το ίδιο σύμβολο, Q, για την κλειστότητα της παραπάνω μορφής. Τέλος, ορίζουμε ως H τον αντίστοιχο αυξητικό (accretive) τελεστή στον $L^2(\Omega)$, βλ. [19, Κεφ. VI,Θεώρημα 1.27], οπότε ισχύει

$$\langle Hu, v\rangle = Q(u,v)\;, \qquad u \in \mathrm{Dom}(H)\;, \quad v \in \mathrm{Dom}(Q).$$

Θα κάνουμε δύο υποθέσεις στη συνάρτηση βάρους $w(x)$, μία ανισότητα Sobolev με βάρος και μία ανισότητα παρεμβολής με βάρος:

(Υ1) Υπάρχει $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ και $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\|u\|_\infty \leq c[\mathrm{Re}\; Q(u)]^{\frac{s}{2}}\|u\|_2^{1-s}, \qquad u \in C_c^\infty(\Omega).$$

(Υ2) Υπάρχει μία σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_\Omega w^{\frac{1}{2}}|\nabla u|^2\, dx \;<\; \epsilon \int_\Omega w|\nabla^2 u|^2\, dx + c\epsilon^{-1}\int_\Omega |u|^2\, dx,$$

για όλα τα $0 < \epsilon < 1$ και $u \in C_c^\infty(\Omega)$.

Τόσο η υπόθεση (Υ1) όσο και η υπόθεση (Υ2) ικανοποιούνται όταν ο τελεστής H είναι ομοιόμορφα ελλεπτικός. Σε αυτή την περίπτωση, η καλύτερη τιμή για τον εκθέτη s είναι $s = 1/2$, το οποίο συνεπάγεται ότι στη γενική περίπτωση δεν μπορεί να έχουμε τιμή μικρότερη από $1/2$. Ειδικότερα, η υπόθεση (Υ1) ισχύει όταν $s = 1/2$ εάν η συνάρτηση βάρους $w(x)$ είναι φραγμένη μακριά από το μηδέν.

Λήμμα 4.1 *Η υπόθεση (Υ2) συνεπάγεται ότι για οποιαδήποτε k, l με $k \geq 0$, $l \leq 2$, $k + l < 4$, υπάρχει μία σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε*

$$(1+\lambda^{4-k-l})\int_\Omega w^{\frac{k+l}{4}}|\nabla^k u|\,|\nabla^l u|\, dx \;\leq\; \epsilon\,\mathrm{Re}\; Q(u) + c\epsilon^{-\frac{k+l}{4-k-l}}(1+\lambda^4)\|u\|_2^2, \qquad (4.4)$$

για όλα τα $\epsilon \in (0,1)$, $\lambda > 0$ και $u \in C_c^\infty(\Omega)$.

Απόδειξη. Πράγματι, για $\lambda = 1$, η (4.4) γίνεται

$$2\int_\Omega w^{\frac{k+l}{4}} |\nabla^k u|\,|\nabla^l u|\,dx \;\le\; \epsilon \operatorname{Re} Q(u) + 2c\epsilon^{-\frac{k+l}{4-k-l}} \|u\|_2^2,$$

η οποία είναι συνέπεια της υπόθεσης (Υ2), της ανισότητας (4.3) και της ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Η περίπτωση $\lambda < 1$ προκύπτει τετριμμένα από την περίπτωση $\lambda = 1$.

Τέλος, γράφοντας την (4.4) για $\lambda = 1$ και αντικαθιστώντας το ϵ με $\epsilon\lambda^{k+l-4}$, βρίσκουμε

$$2\int_\Omega w^{\frac{k+l}{4}} |\nabla^k u|\,|\nabla^l u|\,dx \;\le\; \epsilon\lambda^{k+l-4} \operatorname{Re} Q(u) + 2c\epsilon^{-\frac{k+l}{4-k-l}} \lambda^{k+l} \|u\|_2^2,$$

και καταλήγουμε στο αποτέλεσμα για $\lambda > 1$. □

Ορίζουμε τον χώρο Sobolev με βάρος

$$W^{1,\infty}_w(\Omega) = \Big\{ u \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \;:\; \exists c \ge 0 \;:\; |u(x)| \le c\, w(x)\,, \quad |\nabla u(x)| \le c\, w(x)^{\frac{3}{4}},\; x \in \Omega \Big\}.$$

Ορισμός 4.2 *Το σύμβολο $A(x,\xi)$ βρίσκεται στο $\mathcal{G}_w$ αν οι συναρτήσεις $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ είναι πραγματικές και ανήκουν στο $W^{1,\infty}_w(\Omega)$.*

Με την υπόθεση των (4.2), η τελευταία συνθήκη ισχύει αν και μόνο αν

$$|\nabla\alpha(x)| + |\nabla\beta(x)| + |\nabla\gamma(x)| \le c w(x)^{\frac{3}{4}}\,, \quad x \in \Omega\,.$$

Για να διατυπώσουμε το κύριο αποτέλεσμά μας χρειαζόμαστε μερικούς παραπάνω ορισμούς. Πρώτα θέτουμε:

$$\mathcal{E}_w = \Big\{ \phi \in C^2_{\mathbb{R}}(\Omega) \cap L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega) \;:\; \exists\, c > 0 \;:\; |\nabla\phi| \le c w^{-\frac{1}{4}}\,,\; |\nabla^2\phi| \le c w^{-\frac{1}{2}} \Big\}.$$

Στην περίπτωση που το σύμβολο $A(x,\xi)$ ανήκει στο $\mathcal{G}_w$ (και άρα είναι πραγματικό) ορίζουμε επιπροσθέτως για κάθε $M > 0$ το υποσύνολο

$$\mathcal{E}_{A,M} = \Big\{ \phi \in \mathcal{E}_w \;:\; A(x, \nabla\phi(x)) \le 1,\; |\nabla^2\phi(x)| \le M\, w(x)^{-\frac{1}{2}},\; x \in \Omega \Big\}.$$

Οι Γκαουσιανές μας εκτιμήσεις θα εκφραστούν βάσει της απόστασης

$$d_M(x, x') = \sup\Big\{ \phi(x') - \phi(x) \;:\; \phi \in \mathcal{E}_{A,M} \Big\},$$

για αυθαίρετα μεγάλο (αλλά πεπερασμένο) M. Σημειώνουμε ότι καθώς το $M \to$

$+\infty$, αυτή συγκλίνει στο

$$d(x,x') = \sup\Big\{\phi(x') - \phi(x) \;:\; \phi \in \mathrm{Lip}(\Omega)\,, \;\; A(y, \nabla\phi(y)) \le 1\,, \;\; y \in \Omega\Big\}.$$

Η περιοχή Ω είναι ουσιαστικά διαχωρισμένη σε τρία μέρη, ανάλογα με τις τιμές της φραγμένης συνάρτησης $Q(x)$. Συγκεκριμένα, υποθέτοντας πάντα ότι το σύμβολο $A(x,\xi)$ ανήκει στο $\mathcal{G}_w$, ορίζουμε ανάλογα (Κεφάλαιο 3) τις τοπικά συναρτήσεις Lipschitz

$$k(x) = \begin{cases} 8\frac{1-Q(x)}{(1+Q(x))^2}, & \text{αν } Q(x) \le 0, \\ 8, & \text{αν } 0 \le Q(x) \le 3, \\ Q(x)^2 - 1, & \text{αν } Q(x) \ge 3, \end{cases}$$

και

$$\sigma(x) = \frac{3}{4} \cdot \Big(\frac{1}{4k(x)}\Big)^{1/3} = \begin{cases} \frac{3}{8\cdot 4^{1/3}} \frac{(1+Q(x))^{2/3}}{(1-Q(x))^{1/3}}, & \text{αν } Q(x) \le 0, \\ \frac{3}{8\cdot 4^{1/3}}, & \text{αν } 0 \le Q(x) \le 3, \\ \frac{3}{4^{4/3}}(Q(x)^2 - 1)^{-1/3}, & \text{αν } Q(x) \ge 3. \end{cases}$$

Θέτουμε επίσης

$$k^* = \sup_{x\in\Omega} k(x) \quad \text{και} \quad \sigma_* = \inf_{x\in\Omega} \sigma(x) = \frac{3}{4} \cdot \Big(\frac{1}{4k^*}\Big)^{1/3}.$$

Στην γενική περίπτωση που το σύμβολο δεν ανήκει στο $\mathcal{G}_w$, ορίζουμε ως θ την παρακάτω απόσταση του συμβόλου $A(x,\xi)$ από το $\mathcal{G}_w$

$$\theta = \inf_{\tilde{A}\in\mathcal{G}_w} \sup_{\Omega} \max_{|\xi|=1} \frac{\big|A(x,\xi) - \tilde{A}(x,\xi)\big|}{w(x)}\,. \tag{4.5}$$

Θα θεωρούμε το θ ως έναν μικρό αριθμό.

4.1 Βοηθητικά λήμματα

Από την υπόθεση (Υ2) προκύπτει ότι για κάθε $\psi \in \mathcal{E}_w$ ο πολλαπλασιαστικός τελεστής e^{ψ} αφήνει τον χώρο Sobolev $H^2_{w,0}(\Omega)$ αναλλοίωτο, οπότε μπορούμε να ορίσουμε την (μη συμμετρική) διγραμμική μορφή Q_ψ στο $H^2_{w,0}(\Omega)$ ως $Q_\psi(u) = Q(e^{\psi}u, e^{-\psi}u)$. Εδώ

$$Q(u,v) = \int_\Omega \{\alpha(x)u_{x_1x_1}\overline{v}_{x_1x_1} + 2\beta(x)u_{x_1x_2}\overline{v}_{x_1x_2} + \gamma(x)u_{x_2x_2}\overline{v}_{x_2x_2}\}\,dx,$$

είναι η διγραμμική μορφή που σχετίζεται με την $Q(\cdot)$. Άρα

$$\begin{aligned} Q_\psi(u) &= \int_\Omega \Big[\alpha(x)(e^{\psi}u)_{x_1x_1}(e^{-\psi}\overline{u})_{x_1x_1} + 2\beta(x)(e^{\psi}u)_{x_1x_2}(e^{-\psi}\overline{u})_{x_1x_2} \\ &\qquad +\gamma(x)(e^{\psi}u)_{x_2x_2}(e^{-\psi}\overline{u})_{x_2x_2}\Big]\,dx. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το:

Λήμμα 4.3 *[5, Πρόταση 3.2] Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις (Υ1) και (Υ2). Έστω $\psi \in \mathcal{E}_w$ και $k \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\mathrm{Re}\, Q_\psi(u) \geq -k\,\|u\|_2^2,$$

για κάθε $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Τότε για κάθε $\delta \in (0,1)$ υπάρχει μία σταθερά c_δ τέτοια ώστε

$$|G(x,x',t)| \leq c_\delta t^{-s} \exp\{\psi(x) - \psi(x') + (1+\delta)kt\},$$

για κάθε $x, x' \in \Omega$ και $t > 0$.

Τώρα, θέτουμε στην (4.6) $\psi = \lambda\phi$ όπου $\lambda > 0$ και $\phi \in \mathcal{E}_{A,M}$. Αφού αναπτύξουμε την $Q_{\lambda\phi}(u)$, τα εκθετικά $e^{\lambda\phi}$ και $e^{-\lambda\phi}$ διαγράφονται και βρίσκουμε ότι η $Q_{\lambda\phi}(u)$ είναι ανάλογα (βλ. Κεφάλαιο 3) ένας γραμμικός συνδυασμός όρων της μορφής

$$\lambda^s \int_\Omega b_{s,\gamma,\delta}(x) D^\gamma u\, D^\delta \overline{u}\, dx, \tag{4.7}$$

όπου $s + |\gamma+\delta| \leq 4$ και κάθε συνάρτηση $b_{s\gamma\delta}(x)$ είναι ένα γινόμενο μίας εκ των συναρτήσεων $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ και πρώτης ή δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης $\phi(x)$ (βλ. επίσης (4.10) παρακάτω). Λόγω της σχέσης (4.2), βλέπουμε πως για κάθε τέτοιο όρο έχουμε

$$|b_{s,\gamma,\delta}(x)| \leq c w(x)^{\frac{|\gamma+\delta|}{4}}, \qquad x \in \Omega. \tag{4.8}$$

Ορισμός 4.4 *Ορίζουμε ως $\mathcal{L}_w$ τον χώρο των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών των όρων του τύπου (4.7) με $s + |\gamma+\delta| < 4$ και $|b_{s,\gamma,\delta}(x)| \leq c w(x)^{\frac{|\gamma+\delta|}{4}}$.*

Σημειώνουμε ότι αν ο όρος (4.7) ανήκει στον $\mathcal{L}_w$, τότε από τη (4.4) έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |T(u)| &\leq c\lambda^s \int_\Omega c w(x)^{\frac{|\gamma+\delta|}{4}} |D^\gamma u|\,|D^\delta u| dx \\ &\leq \epsilon\, \mathrm{Re}\, Q(u) + c\epsilon^{-\frac{|\gamma+\delta|}{4-|\gamma+\delta|}}(1 + \lambda^{\frac{4s}{4-|\gamma+\delta|}})\|u\|_2^2 \\ &\leq \epsilon\, \mathrm{Re}\, Q(u) + c\epsilon^{-3}(1+\lambda^3)\|u\|_2^2\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ορίζουμε ξανά (Κεφάλαιο 3) την τετραγωνική μορφή

$$
\begin{aligned}
Q_{1,\lambda\phi}(u) = \int_\Omega \Big\{ & \lambda^4[\alpha(x)\phi_{x_1}^4 + 2\beta(x)\phi_{x_1}^2\phi_{x_2}^2 + \gamma(x)\phi_{x_2}^4]|u|^2 \\
& + \lambda^2\Big\{\alpha(x)\phi_{x_1}^2(u\overline{u}_{x_1x_1} + u_{x_1x_1}\overline{u} - 4|u_{x_1}|^2) \\
& + 2\beta(x)[\phi_{x_1}\phi_{x_2}(u\overline{u}_{x_1x_2} + u_{x_1x_2}\overline{u} - u_{x_1}\overline{u}_{x_2} - u_{x_2}\overline{u}_{x_1}) - (\phi_{x_2}^2|u_{x_1}|^2 + \phi_{x_1}^2|u_{x_2}|^2)] \\
& + \gamma(x)\phi_{x_2}^2(u\overline{u}_{x_2x_2} + u_{x_2x_2}\overline{u} - 4|u_{x_2}|^2)\Big\} \\
& + \alpha(x)|u_{x_1x_1}|^2 + 2\beta(x)|u_{x_1x_2}|^2 + \gamma(x)|u_{x_2x_2}|^2\Big\}\, dx. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Φαίνεται ότι η $Q_{1,\lambda\phi}(u)$ περιέχει συγκεκριμένα αυτούς τους όρους του τύπου (4.7) από το ανάπτυγμα της $Q_{\lambda\phi}(u)$ για τους οποίους έχουμε $s + |\gamma + \delta| = 4$. Συνεπώς, από τη σχέση (4.8), η διαφορά $Q_{\lambda\phi}(\cdot) - Q_{1,\lambda\phi}(\cdot)$ ανήκει στον $\mathcal{L}_w$.

Ορίζουμε τώρα το πολικό σύμβολο

$$A(x, z, z') = \alpha(x)z_1^2 z_1'^2 + 2\beta(x)z_1z_2z_1'z_2' + \gamma(x)z_2^2z_2'^2, \qquad x \in \Omega, \quad z, z' \in \mathbb{C}^2 .$$

Σημειώνουμε ότι για $z = z' = \xi \in \mathbb{R}^2$ οδηγούμαστε στο σύμβολο $A(x, \xi)$ του H. Για $x \in \Omega$ και $\xi, \xi', \eta \in \mathbb{R}^2$, θέτουμε επίσης

$$S(x, \xi, \xi', \eta) = \operatorname{Re} A(x, \xi + i\eta, \xi' + i\eta) + k(x)A(x, \eta). \qquad (4.11)$$

Για $\phi \in \mathcal{E}_w$ και $\lambda > 0$ ορίζουμε την τετραγωνική μορφή $S_{\lambda\phi}$ στο $H^2_{w,0}(\Omega)$ ως

$$S_{\lambda\phi}(u) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iiint_{\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} S(x, \xi, \xi', \lambda\nabla\phi)e^{i(\xi-\xi')\cdot x}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi')}\, d\xi\, d\xi'\, dx.$$

Λήμμα 4.5 *Υποθέτουμε ότι το σύμβολο $A(x, \xi)$ ανήκει στο $\mathcal{G}_w$. Έστω $\phi \in \mathcal{E}_w$ και $\lambda > 0$. Ισχύει ότι*

$$\operatorname{Re} Q_{1,\lambda\phi}(u) + \int_\Omega k(x)A(x, \lambda\nabla\phi)|u|^2 dx = S_{\lambda\phi}(u),$$

για κάθε $u \in C_c^\infty(\Omega)$.

Όπως και στο Κεφάλαιο 3, ορίζουμε με τον ίδιο τρόπο, την τετραγωνική μορφή

$\Gamma(x,\cdot)$ στο $\mathbb{C}^6$ ως

$$\Gamma(x,p) = \\ = \begin{cases} (Q+1)|p_1|^2 + (Q+1)|p_2|^2 - Q|p_3|^2 - 2Q|p_4|^2 - \\ \qquad\qquad -2Q|p_5|^2 - \frac{Q(3-Q)^2}{(1+Q)^2}|p_6|^2, & \text{αν } -1 < Q(x) < 0, \\ \frac{3-Q}{3}|p_1|^2 + \frac{3-Q}{3}|p_2|^2 + \frac{Q}{3}|p_1+p_2|^2 + \frac{4Q}{3}|p_3|^2, & \text{αν } 0 \le Q(x) \le 3, \\ 2(Q-3)|p_1|^2 + |p_2|^2 + 2(Q-1)|p_3|^2 + 2\frac{Q-3}{Q-1}(Q+1)(Q^2+3)|p_4|^2, & \text{αν } Q(x) > 3, \end{cases}$$

για κάθε $p = (p_1, \ldots, p_6) \in \mathbb{C}^6$. Στη συνέχεια, για κάθε $x \in \Omega$ και $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε ξανά ένα διάνυσμα $p_{x,\xi,\eta} \in \mathbb{R}^6$ ως

$$p_{x,\xi,\eta} = \\ \begin{cases} \Big(\alpha^{1/2}[\xi_1^2 - \frac{3-Q}{1+Q}\eta_1^2],\, \gamma^{1/2}[\xi_2^2 - \frac{3-Q}{1+Q}\eta_2^2],\, \alpha^{1/2}\xi_1^2 - \gamma^{1/2}\xi_2^2,\, \alpha^{1/2}\xi_1\eta_1 + \gamma^{1/2}\xi_2\eta_2, \\ \qquad \alpha^{1/4}\gamma^{1/4}(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1),\, \alpha^{1/2}\eta_1^2 - \gamma^{1/2}\eta_2^2\Big), & \text{αν } -1 < Q(x) < 0, \\ \Big(\alpha^{1/2}[\xi_1^2 - 3\eta_1^2],\, \gamma^{1/2}[\xi_2^2 - 3\eta_2^2],\, \alpha^{1/4}\gamma^{1/4}[\xi_1\xi_2 - 3\eta_1\eta_2],\, 0,\, 0,\, 0\Big), & \text{αν } 0 \le Q(x) \le 3, \\ \Big(\alpha^{1/2}\xi_1\eta_1 - \gamma^{1/2}\xi_2\eta_2,\, \alpha^{1/2}(\xi_1^2 - Q\eta_1^2) + \gamma^{1/2}(\xi_2^2 - Q\eta_2^2), \\ \qquad \alpha^{1/4}\gamma^{1/4}[\xi_1\xi_2 - \frac{Q+3}{Q-1}\eta_1\eta_2],\, \alpha^{1/4}\gamma^{1/4}\eta_1\eta_2,\, 0,\, 0\Big), & \text{αν } Q(x) > 3. \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε ότι μία σημαντικά ιδιότητα της $\Gamma(x,\cdot)$ και των διανυσμάτων $p_{x,\xi,\eta}$ είναι ότι

$$S(x;\xi,\xi,\eta) = \Gamma(x, p_{x,\xi,\eta}, p_{x,\xi,\eta}), \tag{4.12}$$

για κάθε $x \in \Omega$ και $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε τέλος και την τετραγωνική μορφή $\Gamma_{\lambda\phi}(\cdot)$ στο $H^2_{w,0}(\Omega)$ ως

$$\Gamma_{\lambda\phi}(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \Gamma(x,\, p_{x,\xi,\lambda\nabla\phi}, p_{x,\xi',\lambda\nabla\phi}) e^{i(\xi-\xi')\cdot x} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi')}\, d\xi\, d\xi'\, dx.$$

Οπότε έχουμε

Λήμμα 4.6 *Ας υποθέσουμε ότι το σύμβολο $A(x,\xi)$ βρίσκεται στο $\mathcal{G}_w$. Τότε η διαφορά $S_{\lambda\phi}(\cdot) - \Gamma_{\lambda\phi}(\cdot)$ ανήκει στον $\mathcal{L}_w$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την απόδειξη του Λήμματος 3.7, βρίσκουμε ξανά τη σχέση (3.10), όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η συνάρτηση $\alpha(x)R(x)\phi_{x_1}^2 + P(x)\phi_{x_2}^2$ είναι τοπικά Lipschitz. Για να καταλήξουμε ότι η τελευταία έκφραση ανήκει στον $\mathcal{L}_w$, πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει η σχέση (4.8), που είναι $\left|[\alpha(x)R(x)\phi_{x_1}^2 + P(x)\phi_{x_2}^2]_{x_1}\right| \le cw(x)^{\frac{1}{4}}$. Θα πρέπει να λάβουμε μόνο υπόψη τους δυο όρους, με την απόδειξη να είναι παρόμοια με τη δεύτερη. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $|Q(x)| \le c$, $|\nabla Q(x)| \le cw(x)^{-1/4}$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\left|(\alpha(x)R(x)\phi_{x_1}^2)_{x_1}\right| &\le |\alpha_{x_1}R|\phi_{x_1}^2 + |\alpha R_{x_1}|\phi_{x_1}^2 + 2|\alpha R\phi_{x_1}\phi_{x_1x_1}| \\
&\le cw^{\frac{3}{4}}w^{-\frac{1}{2}} + cww^{-\frac{1}{4}}w^{-\frac{1}{2}} + cww^{-\frac{1}{4}}Mw^{-\frac{1}{2}} \\
&= c_M w^{\frac{1}{4}},
\end{aligned}$$

που χρειαζόμαστε. □

Λήμμα 4.7 *Υποθέτουμε ότι το σύμβολο $A(x,\xi)$ βρίσκεται στο $\mathcal{G}_w$ και έστω $M > 0$. Τότε για κάθε $\phi \in \mathcal{E}_{A,M}$ και $\lambda > 0$ έχουμε*

$$\mathrm{Re}\ Q_{\lambda\phi}(u) \ge -k^*\lambda^4 \,\|u\|_2^2 + T(u),$$

για μία τετραγωνική μορφή $T \in \mathcal{L}_w$ και για κάθε $u \in C_c^\infty(\Omega)$.

Απόδειξη. Η υπόθεση ότι $\phi \in \mathcal{E}_{A,M}$ συνεπάγεται ότι $A(x,\nabla\phi(x)) \le 1$, $x \in \Omega$. Υπενθυμίζοντας ότι η διαφορά $Q_{\lambda\phi}(\cdot) - Q_{1,\lambda\phi}(\cdot)$ ανήκει στον $\mathcal{L}_w$ και χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 4.5, 4.6 και 4.7, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\ Q_{\lambda\phi}(u) &= -\int_\Omega k(x)A(x,\lambda\nabla\phi)\,|u|^2\,dx + \Gamma_{\lambda\phi}(u) + T(u) \\
&\ge -k^*\lambda^4 \int_\Omega |u|^2\,dx + \Gamma_{\lambda\phi}(u) + T(u),
\end{aligned}$$

για κάποια μορφή $T \in \mathcal{L}_w$ και $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Επιπλέον

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\lambda\phi}(u) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\iiint_{\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \Gamma(x,\ p_{x,\xi,\lambda\nabla\phi}, p_{x,\xi',\lambda\nabla\phi})e^{i(\xi-\xi')\cdot x}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi')}\,d\xi\,d\xi'\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_\Omega \Gamma\Big(x,\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi\cdot x}\hat{u}(\xi)p_{x,\xi,\lambda\nabla\phi}d\xi,\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi'\cdot x}\hat{u}(\xi')p_{x,\xi',\lambda\nabla\phi}d\xi'\Big)\,dx \\
&\ge 0,
\end{aligned}$$

από τη θετικά ημιορισμένη Γ.

4.2 Βασικό θεώρημα

Θεώρημα 4.8 *Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις (Υ1) και (Υ2).*
(α) Υποθέτουμε ότι το σύνολο $A(x,\xi)$ ανήκει στο $\mathcal{G}_w$. Τότε για όλα τα $\epsilon \in (0,1)$ και M υπάρχουν $c_\epsilon, c_{\epsilon,M} < \infty$ τέτοια ώστε

$$|G(x,x',t)| \le c_\epsilon t^{-s}\exp\Big\{-(\sigma_* - \epsilon)\frac{d_M(x,x')^{4/3}}{t^{1/3}} + c_{\epsilon,M}t\Big\}, \tag{4.13}$$

για κάθε $x, x' \in \Omega$ και $t > 0$.

(β) Αν το $A(x, \xi)$ δεν ανήκει στο $\mathcal{G}_w$ τότε υπάρχει $c > 0$ τέτοια ώστε για όλα τα $\epsilon \in (0, 1)$ και M υπάρχουν $c_\epsilon, c_{\epsilon,M} < \infty$ τέτοια ώστε

$$|G(x, x', t)| \le c_\epsilon t^{-s} \exp\Big\{ -(\sigma_* - c\theta - \epsilon)\frac{d_M(x, x')^{4/3}}{t^{1/3}} + c_{\epsilon,M} t\Big\}, \tag{4.14}$$

για κάθε $x, x' \in \Omega$ και $t > 0$. Σε αυτή την περίπτωση σ_* και $d_M(x, x')$ ορίζονται όπως παραπάνω ώστε να αντιστοιχούν σε ένα σύμβολο $\tilde{A}(x, \xi)$ στο $\mathcal{G}_w$ για το οποίο ισχύει $|A(x, \xi) - \tilde{A}(x, \xi)| \le 2\theta w(x)|\xi|^4$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Παρατήρηση 4.9 *Όπως και στο Θεώρημα 3.15 η σταθερά σ_* είναι η καλύτερη δυνατή.*

Απόδειξη Θεωρήματος 4.8. ***Μέρος 1.*** Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε ϵ και θετικό M υπάρχει $c_{\epsilon,M}$ τέτοιο ώστε

$$\mathrm{Re}\ Q_{\lambda\phi}(u) \ge -\Big\{(k^* + \epsilon)\lambda^4 + c_{\epsilon,M}(1 + \lambda^3)\Big\}\|u\|_2^2, \tag{4.15}$$

για κάθε $\lambda > 0$ και $\phi \in \mathcal{E}_{A,M}$. Για να το αποδείξουμε υπενθυμίζουμε πρώτα ότι κάθε $T \in \mathcal{L}_w$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$|T(u)| \le \epsilon Q(u) + c_{\epsilon,M}(1 + \lambda^3)\,\|u\|_2^2,$$

για κάθε $\epsilon \in (0, 1)$, $\lambda > 0$ και $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Οπότε, το Λήμμα 4.7 συνεπάγεται

$$\mathrm{Re}\ Q_{\lambda\phi}(u) \ge -\Big\{k^*\lambda^4 + c_{\epsilon,M}(1 + \lambda^3)\Big\}\|u\|_2^2 - \epsilon Q(u). \tag{4.16}$$

Τώρα, απο το ανάπτυγμα της $Q_{\lambda\phi}$ και από τη σχέση (4.4), συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια σταθερά c_M τέτοια ώστε για κάθε $\phi \in \mathcal{E}_{A,M}$ και $\lambda > 0$ ισχύει

$$\Big|Q(u) - Q_{\lambda\phi}(u)\Big| \le \frac{1}{2}Q(u) + c_M(\lambda + \lambda^4)\|u\|_2^2\,. \tag{4.17}$$

Επιπροσθέτως, σημειώνουμε ότι η εξάρτηση από το M σε αυτή την εκτίμηση προκύπτει από αυτούς τους όρους στο ανάπτυγμα της $Q_{\lambda\phi}$ που περιέχουν τουλάχιστον μία παράγωγο δευτερης τάξης του ϕ. Επειδή ο συντελεστής του λ^4 στο ανάπτυγμα περιλαμβάνει μόνο τις πρώτες παραγώγους της ϕ, η (4.17) μπορεί να γίνει

$$\Big|Q(u) - Q_{\lambda\phi}(u)\Big| \le \frac{1}{2}Q(u) + \{c_M(\lambda + \lambda^3) + c\lambda^4\}\|u\|_2^2,$$

το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται

$$Q(u) \le\ 2\mathrm{Re}\, Q_{\lambda\phi}(u) + \{c_M(\lambda + \lambda^3) + c\lambda^4\}\|u\|_2^2. \tag{4.18}$$

Έστω $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Αν Re $Q_{\lambda\phi}(u) \geq 0$, τότε η (4.15) προφανώς ισχύει. Αν όχι, τότε έχουμε από την (4.16) και την (4.18)

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\ Q_{\lambda\phi}(u) &\geq -\Big\{k^*\lambda^4 + c_{\epsilon,M}(1+\lambda^3)\Big\}\|u\|_2^2 - 2\epsilon\,\mathrm{Re}\ Q_{\lambda\phi}(u) - \epsilon\{c_M(\lambda+\lambda^3)+c\lambda^4\}\|u\|_2^2 \\ &\geq -\Big\{(k^*+c\epsilon)\lambda^4 + c_{\epsilon,M}(1+\lambda^3) + \epsilon\{c_M(\lambda+\lambda^3)+c\lambda^4\}\Big\}\|u\|_2^2,\end{aligned}$$

και η (4.15) ισχύει, οπότε αποδεικνύεται ο ισχυρισμός.

Ολοκληρώνοντας το βασικό επιχείρημα, από το Λήμμα 4.3 και τη σχέση (4.15) έπεται ότι

$$|G(x,x',t)| < c_\epsilon t^{-s} \exp\Big\{\lambda(\phi(x)-\phi(x')) + (1+\epsilon)\{(k^*+\epsilon)\lambda^4 + c_{\epsilon,M}(1+\lambda^3)\}\,t\Big\},$$

για κάθε $\epsilon \in (0,1)$. Βελτιστοποιώντας τη $\phi \in \mathcal{E}_{A,M}$ βρίσκουμε

$$|G(x,x',t)| < c_\epsilon t^{-s} \exp\Big\{-\lambda d_M(x,x') + (1+\epsilon)\{(k^*+\epsilon)\lambda^4 + c_{\epsilon,M}(1+\lambda^3)\}\,t\Big\}.$$

Τέλος, επιλέγοντας $\lambda = [d_M(x,x')/(4k^*t)]^{1/3}$ έχουμε

$$-\lambda d_M(x,x') + k^*\lambda^4 t = -\sigma_* \frac{d_M(x,x')^{4/3}}{t^{1/3}},$$

και έτσι προκύπτει η σχέση (4.13).

Μέρος 2. Υπάρχει ένα σύμβολο $\tilde{A}(x,\xi)$ στο $\mathcal{G}_w$ τέτοιο ώστε

$$\max\{|\alpha(x)-\tilde{\alpha}(x)|\,,\ |\beta(x)-\tilde{\beta}(x)|\,,\ |\gamma(x)-\tilde{\gamma}(x)|\} \leq 2\theta\, w(x)\,, \qquad x \in \Omega.$$

Με δεδομένο ότι $\phi \in \mathcal{E}_{\tilde{A},M}$ και $\lambda > 0$, από το πρώτο μέρος της απόδειξης, προκύπτει ότι

$$\mathrm{Re}\ \tilde{Q}_{\lambda\phi}(u) \geq -\Big\{k^*\lambda^4 + c_{\epsilon,M}(1+\lambda^3)\Big\}\|u\|_2^2 - \epsilon\,\mathrm{Re}\ Q(u), \tag{4.19}$$

για κάθε $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Επιπλέον, εύκολα φαίνεται ότι

$$\Big|Q_{\lambda\phi}(u) - \tilde{Q}_{\lambda\phi}(u)\Big| \leq c\theta\{\mathrm{Re}\ Q(u) + \lambda^4\|u\|_2^2\}. \tag{4.20}$$

Το επιχείρημα που χρησιμοποιείται στη (4.18) εφαρμόζεται επίσης στον H και έτσι βρίσκουμε

$$\mathrm{Re}\, Q(u) \leq\ 2\mathrm{Re}\, Q_{\lambda\phi}(u) + \{c_M(\lambda+\lambda^3) + c\lambda^4\}\|u\|_2^2. \tag{4.21}$$

Συνδυάζοντας τις (4.19), (4.20) και (4.21), καταλήγουμε ότι

$$\mathrm{Re}\ Q_{\lambda\phi}(u) \geq -\Big\{(k^*+c\theta+\epsilon)\lambda^4 + c_{\epsilon,M}(1+\lambda^3)\Big\}\|u\|_2^2, \qquad u \in C_c^\infty(\Omega),$$

και το επιχείρημα συμπληρώνεται όπως στο μέρος (α). Περισσότερες λεπτομέρειες παραλείπονται. □

Βιβλιογραφία

[1] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems,* Van Nostrand 1965; revised edition 2010

[2] S. Agmon, *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations,* Mathematical Notes, Princeton University Press, 1982

[3] G. Barbatis, *Explicit estimates on the fundamental solution of higher-order parabolic equations with measurable coefficients*, J. Differential Equations **174** (2001), 442-463

[4] G. Barbatis, *Sharp heat kernel bounds and Finsler-type metrics*, Quart. J. Math. Oxford **49** (1998), 261-277

[5] G. Barbatis, *Sharp heat kernel estimates for higher-order operators with singular coefficients*, Edinburgh Mathematical Society **47** (2004), 53-67

[6] G. Barbatis, *Spectral theory of singular elliptic operators with measurable coefficients*, J. Funct. Analysis **155** (1998), 125-152

[7] G. Barbatis, P. Branikas, *On the heat kernel of a class of fourth order operators in two dimensions: Sharp Gaussian estimates and short time asymptotics*, J. Differential Equations **265** (2018), 5237-5261

[8] G. Barbatis, P. Branikas, *Heat kernel estimates for fourth-order non-uniformly elliptic operators with non-strongly convex symbols*, Electron. J. Differential Equations **2022** (2022), No. 76, 1-11

[9] G. Barbatis, E.B. Davies, *Sharp bounds on heat kernels of higher order uniformly elliptic operators*, J. Operator Theory **36** (1996), 179-198

[10] J. Cao, Y. Liu, D. Yang, C. Zhang, *Gaussian estimates for heat kernels of higher order Schrödinger operators with potentials in generalized Schechter Classes*, J. London Math. Soc. **106** (2022), 2136-2192

[11] N.S. Claire, *Gaussian upper bounds on heat kernels of uniformly elliptic operators on bounded domains*, J. Operator Theory **68** (2012), 85-100

[12] E.B. Davies, *Uniformly elliptic operators with measurable coefficients*, J. Funct. Anal. **132** (1995), 141-169

[13] Q. Deng, Y. Ding, X. Yao, *Gaussian bounds for higher-order elliptic differential operators with Kato type potentials*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 5377-5397

[14] N. Dungey, *Higher order operators and Gaussian bounds on Lie groups of polynomial growth*, J. Operator Theory **46** (2001), 45-61

[15] J. Dziubański, A. Hejna, *On semigroups generated by sums of even powers of Dunkl operators*, Integral Equations Operator Theory **93** (2021), no. 3, Paper No. 31, 30 pp.

[16] M.A. Evgrafov, M.M. Postnikov, *Asymptotic behavior of Green's functions for parabolic and elliptic equations with constant coefficients*, Math. USSR Sbornik **11** (1970), 1-24

[17] M.V. Fedoryuk, *Asymptotic methods in analysis*, in Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol13 (ed. R.V. Gamkrelidze), Springer 1986

[18] S. Huang, M. Wang, Q. Zheng, Z. Duan, *L^p estimates for fractional Schrφdinger operators with Kato class potentials,* J. Differential Equations **265** (2018), 4181-4212

[19] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators.* Reprint of the 1980 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[20] X. Li, R. Wong, *Asymptotic behaviour of the fundamental solution to $u_t = -(-\Delta)^m u$*,Proc. Roy. Soc. London Ser. A 441 (1993), no. 1912, 423-432.

[21] J.D. Murray, *Asymptotic analysis.* Second edition. Applied Mathematical Sciences, 48. Springer-Verlag, New York, 1984. vii+164 pp.

[22] C. Quesada, A. Rodríguez-Bernal, *Smoothing and perturbation for some fourth order linear parabolic equations in R^N*, J. Math. Anal. Appl. **412** (2014), 1105-1134

[23] E. Randles, L. Saloff-Coste, *Davies' method for heat-kernel estimates: an extension to the semi-elliptic setting,* Trans. Amer. Math. Soc. **373** (2020), 2525-2565

[24] E. Randles, L. Saloff-Coste, *On-diagonal asymptotics for heat kernels of a class of inhomogeneous partial differential operators*, preprint 2022, arXiv:2206.05865v1

[25] R. Schneider, Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory, Second expanded edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[26] K. Tintarev, *Short time asymptotics for fundamental solutions of higher order parabolic equations*, Comm. Partial Differential Equations **7** (1982), 371-391

[27] Wong, R. Asymptotic approximations of integrals. Corrected reprint of the 1989 original. Classics in Applied Mathematics, 34. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2001. xviii+543 pp

[28] C. Zeng, *Time analyticity of the biharmonic heat equation, the heat equation with potentials and some nonlinear heat equations*, Commun. Pure Appl. Anal. **21** (2022), 749-783