ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής μέσω δραστηριοτήτων μοντελοποίησης με τη χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας

Γεώργιος-Ιγνάτιος Καφετζόπουλος

ΑΘΗΝΑ 2023

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής μέσω δραστηριοτήτων μοντελοποίησης με τη χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας

Γεώργιος-Ιγνάτιος Καφετζόπουλος

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Γεώργιος Ψυχάρης, Αν. Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γεώργιος Ψυχάρης, Αν. Καθηγητής ΕΚΠΑ

Δέσποινα Πόταρη, Καθηγήτρια ΕΚΠΑ

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης, Ομ. Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γεώργιος Ψυχάρης, Αν. Καθηγητής ΕΚΠΑ

Δέσποινα Πόταρη, Καθηγήτρια ΕΚΠΑ

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης, Ομ. Καθηγητής ΕΚΠΑ

Πολυχρόνης Κυνηγός, Καθηγητής ΕΚΠΑ

Βασίλειος Κόμης, Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Ιωάννης Παπαδόπουλος, Αν. Καθηγητής ΑΠΘ

Χρυσαυγή Τριανταφύλλου, Επίκ. Καθηγήτρια ΕΚΠΑ

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν με τον δικό τους τρόπο ο καθένας για την εκπόνηση της διδακτορικής διατριβής. Συγκεκριμένα, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής για την τιμή που μου έκαναν και τη βοήθεια που μου πρόσφεραν απλόχερα καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής και συγκεκριμένα:
  - ✓ Τον αναπληρωτή καθηγητή Γεώργιο Ψυχάρη, για την ουσιαστική επίβλεψη της παρούσας διατριβής, τις στοχευμένες παρατηρήσεις του, την πολύτιμη καθοδήγησή του και την καθοριστική συμβολή του σε ολόκληρη την ερευνητική πορεία και εξέλιξή μου.
  - ✓ Την καθηγήτρια Δέσποινα Πόταρη για τις συμβουλές, τα σχόλια και τις ουσιαστικές παρατηρήσεις της σε όλο το διάστημα εκπόνησης της διατριβής.
  - ✓ Τον ομότιμο καθηγητή Θεοδόσιο Ζαχαριάδη για τις παρατηρήσεις του, την πολύτιμη βοήθειά του, αλλά και για τις σημαντικές συμβουλές του.

- Τον καθηγητή Jean-Baptiste Lagrange για τη σημαντική καθοδήγησή του και τις πολύτιμες συμβουλές του που με βοήθησαν να εξελιχθώ ερευνητικά.
- Τους διδάκτορες και υποψηφίους διδάκτορες του τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ Ιωάννη Βλάχο, Νίκο Βρούτση, Αγγελική Ζούπα, Σωτήρη Ζωιτσάκο, Διονυσία Μπακογιάννη και Γεωργία Πετροπούλου για την ουσιαστική βοήθειά τους, αλλά και όλους εκείνους που συμμετείχαν στο σεμινάριο υποψηφίων διδακτόρων.
- Τους αποφοίτους του μεταπτυχιακού Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών Ιωάννη Βασιλειάδη, Μάριο Γκούρι, Έλενα Λεοντίου, Ηλία Μπάρμπα και Ματθαίο Τσιλπιρίδη.
- Τους μαθητές και καθηγητές που συμμετείχαν εθελοντικά στην έρευνα.
- Τους φίλους μου για τη βοήθειά τους και συγκεκριμένα τον αρχιτέκτονα Παναγιώτη Κουφό.
- Τους γονείς μου και τα αδέρφια μου που ήταν δίπλα μου σε αυτό το ταξίδι.
- Την οικογένειά μου και περισσότερο από όλους τη σύζυγό μου Παναγιώτα για την αγάπη της και τη βοήθειά της σε όλους τους τομείς της ζωής μου.

Περίληψη

Η κατανόηση των συναρτήσεων και των συμμεταβολών αποτελεί κεντρική πτυχή της στατιστικής σκέψης και αναδεικνύεται ως ουσιώδης για την κατανόηση θεμελιωδών εννοιών της Στατιστικής και του Απειροστικού Λογισμού, όπως για παράδειγμα του ρυθμού μεταβολής. Η παρούσα διατριβή εστιάζει στη μελέτη της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων και τη μετάβαση προς τη συναρτησιακή σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών από μαθητές λυκείου κατά τη μοντελοποίηση διερευνητικών προβλημάτων, τα οποία είναι εμπνευσμένα από αυθεντικές πρακτικές επαγγελματιών του χώρου εργασίας, μέσα από τη χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων. Επίσης, ερευνώνται τα είδη των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων (π.χ. μεγέθη, μεταβλητές) τα οποία συμμεταβάλλονται, αλλά και τα μοντέλα που συμμετέχουν στη διαδικασία μοντελοποίησης, καθώς και στις συνδέσεις μεταξύ τους. Επιπλέον, ερευνάται ο ρόλος του μαθησιακού πλαισίου μέσα από τη μελέτη των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού και τον ρόλο των εργαλείων. Η αλγεβρική μοντελοποίηση γεωμετρικών εξαρτήσεων προσφέρεται ως πεδίο ευκαιριών για την εμπλοκή των μαθητών με τη συναρτησιακή σκέψη και κατ' επέκταση τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Είναι γνωστό ότι η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας αποτελεί εδώ και πολλά χρόνια κεντρικό στοιχείο για την κατανόηση της συνάρτησης ιδιαίτερα μέσα από τη χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων ψηφιακών περιβαλλόντων που προσφέρουν διασυνδεόμενες αλγεβρικές και γεωμετρικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Η παρούσα έρευνα βασίζεται στην χρήση του ψηφιακού περιβάλλοντος Casyopée, το οποίο παρέχει τη δυνατότητα δημιουργίας μίας συνάρτησης από δύο συμμεταβαλλόμενες ποσότητες και της νοηματοδότησής της μέσω της χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Στην παρούσα διατριβή ακολουθήθηκε ποιοτική μεθοδολογία έρευνας και συλλέχθηκαν δεδομένα από δύο φάσεις σχεδιασμού και εφαρμογής κατά τη διάρκεια δύο ετών σε τρία σχολεία. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε ο τρόπος που ομάδες μαθητών Β΄ λυκείου από τρεις σχολικές τάξεις νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων μέσω από την εμπλοκή τους με δραστηριότητες μοντελοποίησης εμπνευσμένες από αυθεντικές καταστάσεις και ειδικά σχεδιασμένα ψηφιακά εργαλεία. Οι παρεμβάσεις βιντεοσκοπήθηκαν, ηχογραφήθηκαν και αποτέλεσαν το κύριο σώμα των δεδομένων. Για την ανάλυση των δεδομένων

χρησιμοποιήθηκε η θεμελιωμένη θεωρία ανάλυσης (grounded theory) και το θεωρητικό πλαίσιο μαθησιακές τροχιές (Clements & Sarama, 2004) σε συνδυασμό με την Αφαίρεση εντός Πλαισίου (Dreyfus et al., 2015). Τα δύο θεωρητικά πλαίσια χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά από κοινού προκειμένου να σκιαγραφηθεί ο τρόπος που νοηματοδοτείται η συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων, αλλά και να αναλυθούν τα στοιχεία του πλαισίου που συμμετέχουν στη νοηματοδότηση της συνάρτησης κατά τη διερεύνηση δραστηριοτήτων μοντελοποίησης. Ως μοντελοποίηση θεωρείται η εργασία σε διάφορα μοντέλα της πραγματικότητας τα οποία ανήκουν σε διαφορετικά επιστημονικά πεδία περιλαμβάνοντας διάφορες μαθηματικοποιήσεις. Η παρούσα έρευνα βασίστηκε στον ορισμό διαφορετικών μοντέλων, τα οποία εμπλέκονται κατά τη μετάβαση από τη συμμεταβολή στις συναρτησιακές σχέσεις. Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων είναι αλληλένδετη με την εργασία των μαθητών στα διαφορετικά μοντέλα. Συνεπώς, αναλύθηκαν οι συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων κατά τη μοντελοποίηση δραστηριοτήτων με στόχο την πιο ολοκληρωμένη σκιαγράφηση της νοηματοδότησης. Επίσης, μέσα από τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και από τον ρόλο των εργαλείων αναλύθηκε ο ρόλος του πλαισίου εφαρμογής στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών.

Τα αποτελέσματα δείχνουν την ανερχόμενη σταδιακή νοηματοδότηση των συναρτησιακών σχέσεων ξεκινώντας από τις ποσοτικές και συμμεταβαλλόμενες σχέσεις μέσα από τη χρήση των μαθησιακών τροχιών. Επίσης, φαίνεται ο ρόλος των μοντέλων, αλλά και των συνδέσεων μεταξύ τους στην εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων των μαθητών. Χρησιμοποιώντας την Αφαίρεση εντός Πλαισίου φαίνεται η δυνατότητα των μαθητών λυκείου να νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων περιλαμβάνοντας τον ρυθμό μεταβολής. Παράλληλα, φωτίζεται ο ρόλος του πλαισίου κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων μέσα από τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και τη χρήση των διαθέσιμων εργαλείων. Τα συμπεράσματα της διατριβής περιλαμβάνουν την ενημέρωση της υπάρχουσας έρευνας σχετικά με τη ανερχόμενη διαδικασία νοηματοδότησης της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων, τον κρίσιμο ρόλο των συνδέσεων των μοντέλων κατά τη μοντελοποίηση δραστηριοτήτων, τον καθοριστικό ρόλο των εργαλείων για τη μετάβαση στις συναρτησιακές σχέσεις, τον καθοριστικό ρόλο των θεωρητικών πλαισίων, τη σύνδεση της μαθησιακής τροχιάς τόσο με τις υπάρχουσες κατηγοριοποιήσεις όσο και με τις έρευνες που υποστηρίζουν τη σύνδεση μεταξύ ποσοτικών, συμμεταβαλλόμενων και συναρτησιακών σχέσεων με τη μοντελοποίηση.

Η παρούσα διατριβή συνεισφέρει στα προαναφερθέντα πεδία, αλλά και σε εκπαιδευτικούς, σχεδιαστές δραστηριοτήτων και ερευνητές που ασχολούνται με τις συναρτήσεις και τις συμμεταβολές. Πιο συγκεκριμένα, βοηθά στο να είναι ενήμεροι για (α) τον κρίσιμο ρόλο των μοντέλων στη δραστηριότητα των μαθητών ιδιαίτερα όταν εμπλέκονται ψηφιακά εργαλεία, (β) τη διαφορετικότητα των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων στα μοντέλα, (γ) τις απαιτήσεις του σχεδιασμού δραστηριοτήτων που ενσωματώνουν αυθεντικές καταστάσεις και μοντελοποίηση και (δ) τον ρόλο του εκπαιδευτικού και των εργαλείων στην εφαρμογή των δραστηριοτήτων.

Abstract

The understanding of functions and covariations is a central aspect of statistical thinking and emerges as essential to understanding fundamental concepts of Statistics and Calculus, such as rate of change. This thesis focuses on the study of the conceptualization of function as a relationship between two covarying quantities and the transition to the functional relationship between two variables from high school students when modeling inquiry-based tasks, which are inspired by authentic practices of workplace professionals, through the use of manual and digital tools. Also, the types of covarying quantities (e.g. magnitudes, variables), the models involved in the modeling process, as well as the connections between them are studied. In addition, the role of the learning context is studied through the role of teacher's interventions and the role of the tools. Algebraic modeling of geometric dependencies is offered as a field of opportunity for engaging students with functional thinking and, by extension, conceptualizing function as a relationship between two covarying quantities. It is known for many years that the use of digital technology has been central to the understanding of function particularly through the use of appropriately designed digital environments that offer interconnected algebraic and geometric representations of function. The present study is based on the use of the digital environment Casyopée, which provides the possibility of creating a function from two covarying quantities and conceptualize it through the use of multiple representations.

In this thesis, a qualitative research methodology was followed and data were collected from two design and implementation phases over two years in three schools. Specifically, it was observed how groups of 11th grade students from three school classes conceptualize function as a relationship between two covarying quantities through their engagement with modeling tasks inspired by authentic situations and specially designed digital tools. The interventions were videotaped, recorded and formed the main body of data. To analyze the data, grounded theory and the theoretical framework learning trajectories (Clements & Sarama, 2004) were used in combination with Abstraction in Context (Dreyfus et al., 2015). The two theoretical frameworks were used for the first time together in order to outline how the function is conceptualized as a relationship between two covarying quantities, but also to analyze the elements of the framework involved in conceptualizing function when exploring modeling tasks. Modeling is considered the work on various models of reality, which

belong to different scientific fields including various mathematizations. The present study was based on the definition of different models, which are involved in the transition from covariation to functional relationships. Conceptualization of function as a relationship between two covarying quantities is interrelated with students' work on the different models. Consequently, the connections between the different models were analyzed when modeling tasks with the aim of a comprehensive conceptualization. Also, through the teacher's interventions and the role of the tools, the role of the context in the students' understandings was analyzed.

The results show the ascending gradual conceptualization of functional relationships starting from quantitative and covariate relationships through the use of learning trajectories. Also, the role of the models and their connections between them in the evolution of the students' conceptualizations is illustrated. Using Abstraction in Context the 11^{th} grade students' ability to conceptualize function as a relationship between two covarying quantities including rate of change is highlighted. At the same time, the role of the framework during the implementation of the activities is illustrated through the interventions of the teacher and the use of the available tools. The conclusions of the thesis include informing of the existing research about the emerging process of conceptualizing function as a relationship between two covarying quantities, the critical role of model connections in the modeling process, the critical role of tools for the transition towards the functional relationships, the crucial role of the theoretical frameworks, the connection of the learning trajectory to existing categorizations and related studies that support coupling of quantitative, covariational and functional relationships with modeling.

This thesis contributes to the aforementioned fields and to educators, task designers, and researchers who study functions and covariations. More specifically, it helps them to be aware of (a) the critical role of models in student’s activity especially when digital tools are involved, (b) the diversity of covarying quantities in the models, (c) the requirements of task design that incorporate authentic situations and modeling and (d) the role of the teacher and tools in implementing the activities.

Στην Παναγιώτα

Πίνακας περιεχομένων

Λίστα εικόνων και πινάκων

Εισαγωγή

Η παρούσα διατριβή εστιάζει στον τρόπο που νοηματοδοτούν οι μαθητές τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων και τη μετάβαση προς τη συναρτησιακή σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών, κατά τη μοντελοποίηση διερευνητικών δυναμικών προβλημάτων, τα οποία είναι εμπνευσμένα από αυθεντικές πρακτικές επαγγελματιών του χώρου εργασίας, μέσα από τη χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων.

Σκεπτικό της έρευνας

Η συνάρτηση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση εισάγεται ως διαδικασία (κανόνας) αντιστοίχισης. Ωστόσο, η σχετική έρευνα δείχνει ότι η έμφαση στην εισαγωγή της συνάρτησης ως διαδικασίας έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τις συνδέσεις μεταξύ των μεταβλητών και των διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης. Από τα μέσα της δεκαετίας του 90, η έννοια της συνάρτησης έχει υποδειχθεί ως αντικείμενο που διέπει συνολικά τη διδασκαλία της Άλγεβρας. Στη θεώρηση αυτή (functional perspective, Kieran, 2007) βασίστηκε ο σχεδιασμός πολλών αναλυτικών προγραμμάτων μαθηματικών διεθνώς, τα οποία συμπεριλάμβαναν τη χρήση ψηφιακών εργαλείων για τη διδασκαλία της συνάρτησης. Ωστόσο, στις περιπτώσεις αυτές η τεχνολογία χρησιμοποιήθηκε κυρίως για την ερμηνεία των συναρτήσεων μέσω γραφημάτων και παρακάμφθηκε ο αλγεβρικός συμβολισμός. Τα τελευταία χρόνια, η θεώρηση του φορμαλισμού ως συστατικού στοιχείου της συνάρτησης και της μαθηματικής σκέψης γενικότερα, οδήγησε αρκετούς ερευνητές (π.χ. Thompson 1994, 2011, Oehrtman et al., 2008, Lagrange & Psycharis, 2014, Thompson & Carlson, 2017) να προτείνουν την προσέγγιση της συνάρτησης μέσα από την κατανόηση της συμμεταβολής με τη χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων ψηφιακών περιβαλλόντων που προσφέρουν διασυνδεόμενες αλγεβρικές και γεωμετρικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης.

Η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας αποτελεί εδώ και πολλά χρόνια κεντρικό στοιχείο των παρεμβάσεων που στοχεύουν στην ενίσχυση της κατανόησης των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης και ιδιαίτερα μέσα από την κατανόηση της συμμεταβολής – τόσο σε επίπεδο έρευνας όσο και σε επίπεδο προγραμμάτων σπουδών. Πιο συγκεκριμένα, με τη χρήση δυναμικών εργαλείων υποδεικνύεται η αλγεβρική μοντελοποίηση γεωμετρικών εξαρτήσεων ως πεδίο ευκαιριών για την εμπλοκή των μαθητών με τη συναρτησιακή σκέψη και κατ' επέκταση με την προσέγγιση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων (Langrange & Psycharis, 2014). Έτσι, η ψηφιακή τεχνολογία σε κάποιες περιπτώσεις χρησιμοποιείται κυρίως για την ερμηνεία των συναρτήσεων μέσω γραφημάτων παρακάμπτοντας τον αλγεβρικό συμβολισμό (Lagrange, 2018). Η αναγνώριση των μεταβλητών και έκφραση συμμεταβολής, ειδικά όταν γίνεται με τη χρήση τεχνολογίας έχει να προσφέρει στον μαθητή τον εντοπισμό των στοιχείων που συνιστούν συνάρτηση, παρά την παραγωγή ενός μαθηματικού τύπου (Lagrange, 2014). Έτσι, η αλγεβρική μοντελοποίηση γεωμετρικών εξαρτήσεων εμφανίζεται ως πεδίο ευκαιριών για την εμπλοκή των μαθητών με τη συναρτησιακή σκέψη (Lagrange & Psycharis, 2014) και κατ' επέκταση τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων.

Η κατανόηση της συμμεταβολής αναφέρεται «στον συντονισμό δύο ποσοτήτων παρακολουθώντας τους τρόπους με τους οποίους αλλάζουν η μία σε σχέση με την άλλη» (Thompson, 1994, Carlson et al., 2002) και αποτελεί μία εξελικτική διαδικασία (Saldanha & Thompson, 1998). Η υπάρχουσα βιβλιογραφία υποδεικνύει ότι η κατανόηση της συμμεταβολής είναι θεμελιώδης για την ανάπτυξη της συναρτησιακής σκέψης, δηλαδή της σκέψης των μεταβολών και των εξαρτήσεων (Confrey & Smith, 1994, Hoffkamp, 2011, Blanton et al., 2015) και συνεπώς αρκετές έρευνες έχουν εστιάσει στη σημασία της σκέψης από τους μαθητές για τη σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων που καταλήγει σε συναρτησιακή σχέση (π.χ. Carlson et al., 2002, Johnson, 2012, Castillo-Garsow, 2012, Johnson, McClintock & Hornbein, 2017, Thompson & Carlson, 2017, Ellis et al., 2020).

Η μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων και η σχέση της με τα μαθηματικά έχει την αφετηρία της στο ρεύμα των Ρεαλιστικών Μαθηματικών (Realistic Mathematics Education, Gravemeijer, 1994), ενώ ο χώρος εργασίας έχει πρόσφατα υποδειχτεί ως πλαίσιο σχεδιασμού δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία των μαθηματικών που επιτρέπουν στους μαθητές να συνδέσουν την αφηρημένη μαθηματική γνώση με την εφαρμογή της (Wake, 2014). Ιδιαίτερα οι δραστηριότητες που αναπτύσσονται εμπνευσμένες από αυθεντικές καταστάσεις οδηγούν σε περισσότερα οφέλη τους μαθητές, όπως ότι διευκολύνουν την εμπλοκή με τα σχολικά μαθηματικά και τις αναπαραστάσεις και τους βοηθούν να εκτιμήσουν τη χρησιμότητα των μαθηματικών ιδεών (Palm, 2009). Επίσης, η χρήση της τεχνολογίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσφέρει στους μαθητές νέες δυνατότητες χειρισμού αλγεβρικών και γεωμετρικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών αντικειμένων, τα οποία εμφανίζονται στο πλαίσιο του χώρου εργασίας.

Η σύνδεση της μαθηματικής μοντελοποίησης με τις ποσοτικές, συμμεταβαλλόμενες και συναρτησιακές σχέσεις έχει προσελκύσει εδώ και πολλά χρόνια το ερευνητικό ενδιαφέρον (Moore & Bowling, 2008, Basu & Panorkou, 2019). Για παράδειγμα η έρευνα των Moore και Carlson (2012) έδειξε ότι η ποσοτική σκέψη και η κατανόηση της συμμεταβολής μπορούν να διευκολύνουν την συναρτησιακή σκέψη σε μία προσέγγιση με δραστηριότητες μοντελοποίησης. Άλλοι ερευνητές έχουν υποδείξει ότι η μοντελοποίηση δυναμικών καταστάσεων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν πτυχές της έννοιας της συνάρτησης και να κάνουν συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών καθημερινότητας και επιστημών (Kaiser, Schwarz, & Buchholtz, 2011, Lagrange, 2018). Οι συναρτησιακές σχέσεις εμφανίζονται σε διαφορετικά πεδία (π.χ. αλγεβρικό, γεωμετρικό) στη διαδικασία μοντελοποίησης και σε αντίστοιχα μοντέλα όπως είναι το φυσικό σύστημα, το δυναμικό σχήμα, τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη και οι αλγεβρικές συναρτήσεις (Lagrange, 2014). Συνοψίζοντας, οι προηγούμενες έρευνες δείχνουν ότι οι συμμεταβολές εμφανίζονται σε μία πολλαπλότητα πεδίων και μοντέλων. Παράλληλα, στις έρευνες φαίνεται να απουσιάζει η εμπλοκή των μαθητών με τα διαφορετικά μοντέλα, στα οποία εμφανίζονται οι συναρτησιακές σχέσεις.

Πρόσφατες έρευνες (π.χ. Psycharis et al., 2021) οι οποίες συνδέουν τις ποσοτικές, συμμεταβαλλόμενες και συναρτησιακές σχέσεις με τη μαθηματική μοντελοποίηση έχουν δείξει το πεδίο της μαθηματικής μοντελοποίησης ως κατάλληλο για τη μελέτη της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων κατά τη μοντελοποίηση δυναμικών καταστάσεων. Ωστόσο, υπάρχουν ακόμα αρκετά σημεία για περεταίρω έρευνα στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, όπως η διαφορετικότητα των μαθηματικών μοντέλων που εμπλέκονται στη διαδικασία μοντελοποίησης, οι συνδέσεις των μοντέλων μεταξύ τους και τα είδη των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων που εμπλέκονται (π.χ. μεγέθη, μεταβλητές). Η παρούσα διατριβή έχει ως στόχο να συνεισφέρει σε αυτά τα πεδία της έρευνας.

Η παρούσα διατριβή στοχεύει στην διερεύνηση των νοηματοδοτήσεων των ποσοτικών και συμμεταβαλλόμενων σχέσεων προς τις συμμεταβαλλόμενες σχέσεις από μαθητές λυκείου, καθώς εμπλέκονται με ψηφιακά εργαλεία και δραστηριότητες μοντελοποίησης. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν ένα ψηφιακό περιβάλλον, το οποίο προσφέρει διασυνδεόμενες αναπαραστάσεις της συνάρτησης που επιτρέπουν τον χειρισμό των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων και την ερμηνεία/αξιοποίηση των αντίστοιχων συναρτήσεων. Ο στόχος της διατριβής είναι να φωτίσει την μαθησιακή τροχιά αυτής της εξέλιξης. Η ερευνητική εστίαση αφορά στους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές νοηματοδοτούν τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες στα διαφορετικά μοντέλα που περιλαμβάνονται στη διαδικασία μοντελοποίησης, εστιάζοντας στις συνδέσεις μεταξύ των μοντέλων. Παράλληλα, έχει σημασία η έρευνα του πλαισίου εφαρμογής μέσα από τον ρόλο των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού και τον ρόλο των εργαλείων που χρησιμοποιούνται. Η παρούσα διατριβή αναμένεται να ενημερώσει την έρευνα που εστιάζει στην εξελικτική πρόοδο των μαθητών για τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες κατά τη μοντελοποίηση δραστηριοτήτων μέσα από τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, λαμβάνοντας υπόψη τα στοιχεία του πλαισίου εφαρμογής.

Δομή της διατριβής

Η παρούσα διατριβή επιμερίζεται σε έξι κεφάλαια. Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση, η οποία περιλαμβάνει μία επισκόπηση της σχετικής υπάρχουσας βιβλιογραφίας. Οι ενότητες του Κεφαλαίου 1 αφορούν (α) κύρια στοιχεία της συνάρτησης, (β) τη θεώρηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων, (γ) υπάρχουσες κατηγοριοποιήσεις σχετικά με τη συμμεταβολή και (δ) τη μελέτη της συνάρτησης στο πλαίσιο της μοντελοποίησης. Το Κεφάλαιο αυτό έχει στόχο να αναδείξει τη σημασία της παρούσας διατριβής σε επίπεδο της θεώρησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής κατά τη μοντελοποίηση δραστηριοτήτων με τη χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας. Ακολουθεί το Κεφάλαιο 2, στο οποίο αναπτύσσονται τα θεωρητικά πλαίσια που χρησιμοποιήθηκαν σχετικά με τη νοηματοδότηση της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, αρχικά αναφέρεται ο τρόπος που θεωρείται η νοηματοδότηση στην παρούσα έρευνα και ακολούθως παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο μαθησιακές τροχιές και το θεωρητικό πλαίσιο Αφαίρεση εντός Πλαισίου.

Το Κεφάλαιο 3 αφορά τη μεθοδολογία της παρούσας έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρονται τα ερευνητικά ερωτήματα και το πλαίσιο της παρούσας έρευνας.

Ακολούθως, παρουσιάζεται η πιλοτική φάση της έρευνας, ο σχεδιασμός και η εφαρμογή των δραστηριοτήτων, καθώς επίσης και το λογισμικό Casyopée, το οποίο ήταν κρίσιμο στη διεξαγωγή της έρευνας. Ακολουθούν ενότητες με την εκ των προτέρων ανάλυση και τη συλλογή δεδομένων. Τέλος, περιγράφεται η μέθοδος ανάλυσης των δεδομένων μέσα από τρία επίπεδα ανάλυσης.

Το Κεφάλαιο 4 αφορά τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας και συγκεκριμένα την τροχιά νοηματοδότησης της συνάρτησης, μέσα από επεισόδια από την εργασία των μαθητών. Επίσης, σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται τόσο η διαφορετικότητα μεταξύ των συστατικών στοιχείων της συνάρτησης όσο και οι συνδέσεις μεταξύ των μοντέλων. Το Κεφάλαιο 5 αφορά τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας σχετικά με τη μαθησιακή τροχιά ανά σχολείο και τον ρόλο του πλαισίου σε αυτή την εξέλιξη μέσα από δύο κύρια χαρακτηριστικά: (α) τον ρόλο των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού και (β) τον ρόλο των εργαλείων. Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται σύνθεση των στοιχείων του πλαισίου κατά την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων και προκύπτει η ταυτότητα της διδασκαλίας του κάθε εκπαιδευτικού.

Στο Κεφάλαιο 6 συζητούνται τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν και την υπάρχουσα βιβλιογραφία. Επίσης, γίνεται αναφορά στη συνεισφορά της διατριβής και στους περιορισμούς που έχει, αφήνοντας περιθώριο για μελλοντικές έρευνες.

1. Συνάρτηση, συμμεταβολή και μοντελοποίηση

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση της διδακτορικής διατριβής που έχει στόχο να ενημερώσει σχετικά με τις έρευνες στο πεδίο των συναρτήσεων αναφορικά με τη συμμεταβολή και τη μοντελοποίηση. Αρχικά, περιγράφεται η μετάβαση στην προσέγγιση της συνάρτησης ως συμμεταβολής, ενώ ακολούθως φωτίζεται το πεδίο σχετικά με τις έρευνες για τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Έπειτα, υποδεικνύονται οι υπάρχουσες κατηγοριοποιήσεις σχετικά με τον τρόπο σκέψης μαθητών για τις σχέσεις μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων και τη μετάβαση στις συναρτησιακές σχέσεις. Τέλος, περιγράφεται η σχέση της συνάρτησης και της μοντελοποίησης υπό το πρίσμα των μοντέλων που συμμετέχουν σε μία διαδικασία μοντελοποίησης με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, η οποία ακολουθεί τον κύκλο μοντελοποίησης.

1.1. Η συνάρτηση ως συμμεταβολή

1.1.1. Η έννοια της συνάρτησης: από τη διαδικασία – αντικείμενο στη συμμεταβολή

Είναι γνωστό ότι αρκετές μαθηματικές έννοιες από τη στιγμή που εμφανίστηκαν υπέστησαν διαρκείς αλλαγές μέσα στους αιώνες μέχρι να οριστικοποιηθούν και ορισμένες εξελίσσονται μέχρι σήμερα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η έννοια της συνάρτησης, στην οποία έχουν αποδοθεί πολλοί και διαφορετικοί ορισμοί σε διαφορετικές περιόδους, όπως για παράδειγμα η προσέγγιση της συνεχούς συμμεταβολής από τον Νεύτωνα, ο οποίος αναφέρθηκε σε ποσότητες που οι τιμές τους μεταβάλλονται (Thompson & Carlson, 2017). Αρκετά χρόνια αργότερα ο Euler διατύπωσε έναν πιο αφηρημένο ορισμό για τη συνάρτηση: *«Μια ποσότητα είναι συνάρτηση όταν εξαρτιέται από μια άλλη ποσότητα με τέτοιο τρόπο ώστε εάν η τελευταία αλλάζει η πρώτη ποσότητα να υφίσταται αλλαγή από μόνη της»*. Ακολούθως, ο Dirichlet όρισε τη συνάρτηση ως εξής: *«Μια συνάρτηση y(x) είναι δοσμένη αν έχουμε οποιοδήποτε κανόνα που δίνει μια συγκεκριμένη τιμή y σε κάθε x σε κάποιο σύνολο σημείων. Δεν είναι αναγκαίο το y να υπόκειται στον ίδιο κανόνα που αφορά το x μέσα σ' ολόκληρο το διάστημα»* (Davis & Hersh, 1981, σελ 257). Ωστόσο, εξαιτίας της πολυπλοκότητας και των απαιτήσεων του ορισμού της συνάρτησης επικράτησε ο ορισμός της αντιστοιχίας διατηρώντας το μονοσήμαντο στην πλειοψηφία των προγραμμάτων σπουδών για τις ανάγκες της μαθηματικής εκπαίδευσης (Sierpinska, 1992).

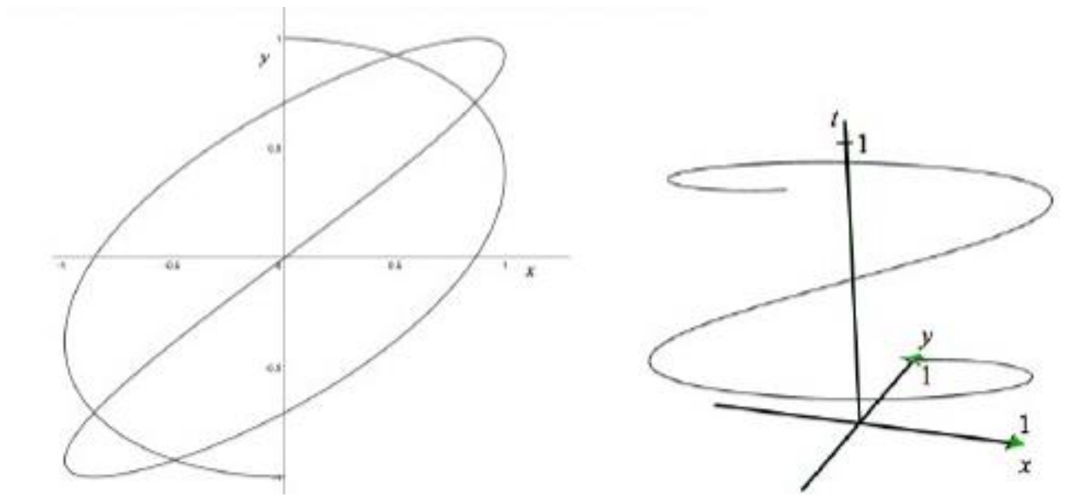
Η έννοια της συνάρτησης διατρέχει τα προγράμματα σπουδών και έχει εξέχοντα ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση. Ωστόσο, η υπάρχουσα βιβλιογραφία επισημαίνει την πολυπλοκότητα των δυσκολιών που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης (Sierpinska, 1992, Dubinsky & Harel, 1992, Thompson, 1994). Η συνάρτηση προσεγγίζεται με δύο διαφορετικούς τρόπους (α) ως αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων και (β) ως συμμεταβολή. Η Sfard (1991) υπέδειξε ότι οι μαθητές μεταβαίνουν από τη διαδικαστική κατανόηση (συνάρτηση ως διαδικασία) στη δομική κατανόηση (συνάρτηση ως αντικείμενο) και επεσήμανε ότι η συγκεκριμένη μετάβαση έχει δυναμικό χαρακτήρα και είναι επιθυμητή η ευελιξία μεταξύ των δύο κατανοήσεων. Παρότι η διάσταση διαδικασία-αντικείμενο βρέθηκε στο επίκεντρο πολλών ερευνών για πολλά χρόνια, από τα μέσα της προηγούμενης δεκαετίας καταγράφεται μία σταδιακή μετακίνηση της εστίασης της έρευνας από τη συνάρτηση ως διαδικασία-αντικείμενο στη συνάρτηση ως συμμεταβολή (π.χ. Carlson et al., 2002, Thompson, 2011, Castillo-Garsow, 2012, Lagrange & Psycharis, 2014, Thompson & Carlson, 2017). Καταλυτικό παράγοντα στην αντιμετώπιση των δυσκολιών που αφορούν τη συνάρτηση, έχει διαδραματίσει η ενσωμάτωση και χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών Άλγεβρας και Γεωμετρίας. Πιο συγκεκριμένα η χρήση των ψηφιακών εργαλείων τα προηγούμενα χρόνια μέσω της χρήσης μεταβλητών, συναρτήσεων ή συναρτησιακών σχέσεων (π.χ. Function Probe - Confrey et al., 1991, Χελωνόκοσμος – Kynigos, 2004, Casyopée – Lagrange, 2010) ενίσχυσε ιδιαίτερα την οπτική της συμμεταβολής. Με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων έχει υποδειχθεί ότι έχει ιδιαίτερη σημασία με ποιους τρόπους έρχεται στην επιφάνεια η συμμεταβολή σε ένα επίπεδο ποσοτήτων και πώς γίνεται η σταδιακή μετάβαση στον κόσμο των συναρτήσεων (Artigue & Lagrange, 2009, Lagrange, 2014).

Από τη μία, είναι γνωστό ότι η προσέγγιση της συνάρτησης ως αντιστοιχίας έδωσε λύσεις σε αρκετά προβλήματα υποστηρίζοντας την επιστήμη των μαθηματικών, ωστόσο η εισαγωγή της στο εκπαιδευτικό σύστημα φαίνεται ότι δεν προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών. Από την άλλη, η προσέγγιση της συμμεταβολής στις αρχές της δεκαετίας του 1990 οδήγησε ορισμένους ερευνητές να θεωρούν την προσέγγιση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων θεμελιώδη στην ανάπτυξη των μαθηματικών από τους μαθητές. Το γεγονός αυτό οφείλεται από τη μία στις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στον χειρισμό συναρτησιακών σχέσεων όταν δεν έχουν τη δυνατότητα να σκεφτούν τη συμμεταβολή στα προβλήματα που αντιμετωπίζουν. Από την άλλη, οι υπάρχουσες βιβλιογραφικές αναφορές υποστηρίζουν τη σκέψη για τη συμμεταβολή, βασιζόμενες στις χρήσεις της συνάρτησης και στις διαφορετικές νοηματοδοτήσεις μαθητών και καθηγητών (Thompson & Carlson, 2017). Επίσης, η σημαντικότητα της κατανόησης της συμμεταβολής βασίζεται στη σύνδεση με την έννοια του ρυθμού μεταβολής και έτσι η συμμεταβολή αναδεικνύεται ως ουσιώδης για την κατανόηση θεμελιωδών εννοιών του Απειροστικού Λογισμού (Thompson, 1994, Confrey & Smith, 1995). Παράλληλα, έρευνες δείχνουν ότι η συμμεταβολή συνεισφέρει στην κατανόηση της Στατιστικής και στην ανάπτυξη του στατιστικού τρόπου σκέψης (π.χ. Cobb, McClain & Gravemeijer, 2003, Moritz, 2004, Bakker, 2004). Έτσι, τα τελευταία χρόνια δίνεται όλο και περισσότερο βάρος στη συνάρτηση μέσα από την κατανόηση της συμμεταβολής.

1.1.2. Ορισμός της συνάρτησης μέσω της συμμεταβολής

Οι Thompson και Carlson (2017) όρισαν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή ως εξής: «Μία συνάρτηση με την έννοια της συμμεταβολής είναι η αντίληψη δύο ποσοτήτων που μεταβάλλονται ταυτόχρονα, ώστε να υπάρχει μία αμετάβλητη σχέση μεταξύ των τιμών τους που έχει την ιδιότητα ότι στην αντίληψη ενός ατόμου, κάθε τιμή της μίας ποσότητας περιγράφει ακριβώς μία τιμή της άλλης». Αυτός ο ορισμός δίνει ιδιαίτερο βάρος στο άτομο που σκέφτεται τη συνάρτηση ως συμμεταβολή, καθώς παρέχεται η ευκαιρία να επιλέξει την ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή ανάλογα με το πρόβλημα και να περιγράψει με ποιον τρόπο εμφανίζεται η εξάρτηση μεταξύ τους. Έτσι, οι Thompson και Carlson (2017) καταλήγουν ότι η σκέψη για τη συμμεταβολή ενισχύεται όταν ένα άτομο σχεδιάζει τον τρόπο με τον οποίο θα διατηρεί στον νου του τις τιμές των ποσοτήτων ταυτόχρονα. Επομένως, η κατανόηση της συνάρτησης μέσω της συμμεταβολής περιλαμβάνει μία νοητική δραστηριότητα κατά την οποία εμφανίζεται πρώτα στον νου και κατόπιν εξωτερικεύεται στο περιβάλλον με ορισμένες συμπεριφορές.

Σχετικά με τη σχέση της συνάρτησης με τη συμμεταβολή ο Thompson (2011) αναφέρει ότι το πιο γενικό νόημα της συμμεταβολής υποστηρίζει την κατανόηση της συμμεταβολής με τρόπους που ξεφεύγουν από τους καθιερωμένους, όπως για παράδειγμα η σκέψη ενός κύκλου ως τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης. Έτσι, η συμμεταβολή μπορεί να περιλαμβάνει περιπτώσεις που ξεφεύγουν από τις κλασσικές συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα οι γραφικές παραστάσεις στην Εικόνα 1 - 1. Στην εικόνα παρουσιάζονται δύο γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης σε δισδιάστατο και τρισδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στα αριστερά για την *[x(t), y(t)] = [sin(4πt), cos(3πt)]*, όπου $0 \leq t \leq 1$ και στα δεξιά για τη γραφική παράσταση της *[x(t), y(t), t]* στον χώρο.



Εικόνα 1 - 1: Γραφικές παραστάσεις της [x(t), y(t)] = [sin(4πt), cos(3πt)] στο επίπεδο και στον χώρο.

Συνολικά στην έρευνα έχει δοθεί μεγάλη έμφαση στον τρόπο σκέψης για τις μεταβολές. Συγκεκριμένα, πρώτος ο Thompson (1994) όρισε τη συμμεταβολή και την κρίσιμη σημασία της. Ακολούθησε ο ορισμός των Carlson et al. (2002) ότι η συμμεταβολή αναφέρεται «στον συντονισμό δύο ποσοτήτων παρακολουθώντας τους τρόπους με τους οποίους αλλάζουν η μία σε σχέση με την άλλη», ο οποίος υιοθετείται στην παρούσα έρευνα. Στη συνέχεια, ο Thompson (2011) υποστηρίζει ότι η συμμεταβολή είναι αναδρομική με μία έννοια, καθώς ορίζεται σε ε-μικρά διαστήματα και με τον ίδιο τρόπο ορίζεται η μεταβολή μέσα σε καθένα από τα ε-μικρά διαστήματα και αυτή η διαδικασία συνεχίζεται ες αεί. Μάλιστα για να δημιουργηθεί μία έννοια συμμεταβολής απαιτείται αρχικά ένα άτομο να σκέφτεται τις μετρήσεις των ποσοτήτων ή των μεγεθών και στη συνέχεια να αντιλαμβάνεται ότι η μεταβολή συμβαίνει σε ένα διάστημα από συνεχείς μετρήσεις.

Επιπροσθέτως, ο Castillo-Garsow (2012) εστίασε στην ιδέα της μεταβολής μελετώντας τα νοήματα μαθητών πάνω σε ένα παράδειγμα ανατοκισμού και διέκρινε την αποσπασματική/διακριτή (chunky) από τη λεία (smooth) συμμεταβολή. Στην πρώτη ο μαθητής θεωρεί ότι οι τιμές μεταβάλλονται λαμβάνοντας διαδοχικές τιμές, όπως για παράδειγμα είναι οι στήλες ενός στατικού πίνακα. Από την άλλη, η λεία συνεχής συμμεταβολή πρόκειται για την περιγραφή της συνεχούς σχέσης της μεταβολής του κεφαλαίου με τον χρόνο. Όμως, πέρα από τη σημασία των δύο τρόπων συμμεταβολής έχει ενδιαφέρον το γεγονός ότι η μαθήτρια που σκεφτόταν με αποσπασματική συμμεταβολή δεν είχε τη δυνατότητα να σκεφτεί τον συνεχή ρυθμό ανατοκισμού, ενώ ο μαθητής που σκεφτόταν με τη λεία συνεχή συμμεταβολή έκανε συνδέσεις με τον ρυθμό αύξησης σε σχέση με τον χρόνο (Castillo-Garsow et al., 2013). Το γεγονός αυτό μας πληροφορεί σχετικά με τις δυνατότητες που έχουν οι μαθητές σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής, όταν σκέφτονται σύμφωνα με τη λεία συνεχή συμμεταβολή. Συνεπώς, η αναζήτηση της τροχιάς της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής φαίνεται να έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη μελέτη της εξέλιξης της σκέψης των μαθητών.

Στην παρούσα έρευνα οι συναρτήσεις που προκύπτουν κατά τη μοντελοποίηση των δραστηριοτήτων αποτελούν συναρτήσεις και συμμεταβολές, καθώς περιγράφουν δυναμικές καταστάσεις που στηρίζονται στη σχέση αιτίου αιτιατού και ικανοποιείται το μονοσήμαντο του ορισμού της συνάρτησης. Παράλληλα, η εξέλιξη της σκέψης των μαθητών έχει ιδιαίτερη σημασία, όταν οι μαθητές αναφέρονται όχι μόνο στη συμμεταβολή, αλλά και στα δομικά στοιχεία της, δηλαδή τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες.

1.1.3. Η μετάβαση από τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες στις συναρτήσεις

Στη βιβλιογραφία φαίνεται έντονο ενδιαφέρον από ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών για την κατανόηση της συμμεταβολής λαμβάνοντας υπόψη τα δομικά στοιχεία της και τη μετάβαση σε συναρτησιακές σχέσεις. Οι Confrey και Smith (1994) όρισαν την κατανόηση της συμμεταβολής ως τον συντονισμό των τιμών δύο μεταβλητών καθώς αυτές αλλάζουν κατά τη μελέτη των νοημάτων των μαθητών που εμπλέκονταν με τη μάθηση των εκθετικών συναρτήσεων. Ωστόσο, στη συγκεκριμένη έρευνα οι μαθητές ασχολούνταν με πίνακες τιμών μελετώντας κάθε στήλη ανεξάρτητα από τις άλλες, έτσι τα στοιχεία κάθε στήλης προέκυπταν ταυτόχρονα, αλλά δεν ήταν εμφανής η σύνδεση των δύο μεταβλητών. Κατά τους Saldanha και Thompson (1998) ένα άτομο κατανοεί τη συμμεταβολή όταν συγκρατεί συνεχώς μία εικόνα των δύο τιμών των ποσοτήτων (μεγεθών) ταυτόχρονα και τα φαντάζεται να μεταβάλλονται και σημειώνουν ότι η κατανόηση της συμμεταβολής πρόκειται για μία αναπτυξιακή διαδικασία. O Thompson (1990, 1994) κατά κύριο λόγο είχε εστιάσει στις σχέσεις μεταξύ μεταβαλλόμενων ποσοτήτων και στην αντίληψη του ρυθμού μεταβολής από τους μαθητές και έδωσε ιδιαίτερη σημασία στις ποσότητες που συμμεταβάλλονται. Ο ίδιος όρισε ως *ποσότητα* τη «νοηματοδότηση κάποιου για ένα αντικείμενο, το οποίο έχει ένα χαρακτηριστικό που μπορεί να μετρηθεί» (Thompson, 2011), ο οποίος υιοθετείται στην παρούσα έρευνα. Έτσι, για παράδειγμα ως χαρακτηριστικό μίας ποσότητας μπορούμε να θεωρήσουμε τη μέτρηση για ένα μήκος, ένα εμβαδό ή έναν όγκο σκεπτόμενοι αντίστοιχα μία μονάδα μέτρησης. Ο Thompson (2011) έδωσε ιδιαίτερη σημασία στην έννοια της ποσοτικοποίησης: «Η ποσοτικοποίηση είναι η διαδικασία νοηματοδότησης ενός αντικειμένου και ενός χαρακτηριστικού του έτσι ώστε το χαρακτηριστικό να έχει μια μονάδα μέτρησης και η μέτρηση του χαρακτηριστικού συνεπάγεται μια αναλογική σχέση με τη μονάδα του». Έτσι, η ποσοτικοποίηση με αυτή την έννοια είναι το όχημα που οδηγεί από την παρατήρηση των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων στη δημιουργία συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ τους. Συνεπώς, η ποσοτικοποίηση είναι καθοριστική στην αναγνώριση και νοηματοδότηση των ποσοτήτων, αλλά και των χαρακτηριστικών των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων, τα οποία θα επιτρέψουν τελικά τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων.

Σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε πρόσθετους όρους εκ των προτέρων για να περιγράψουμε την εργασία με τις ποσότητες σε όλα τα βήματα του πειραματισμού των μαθητών. Ορίζουμε τα *μεγέθη* ως τις μετρήσεις ποσοτήτων (Saldanha & Thompson, 1998, Lagrange, 2014, Psycharis et al., 2021) υποδεικνύοντας τα χαρακτηριστικά των ποσοτήτων ανεξάρτητα από τη μονάδα μέτρησής τους. Για παράδειγμα, το μήκος μίας απόστασης, ένα εμβαδό ή ένας όγκος αποτελούν αριθμούς που είναι μετρήσεις των ποσοτήτων και μπορούν να χρησιμοποιούνται χωρίς αναφορές στη μονάδα μέτρησης. Έτσι, η θεώρηση των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών συνδέει την εργασία με τις εξαρτήσεις μεταξύ χαρακτηριστικών των ποσοτήτων και τις αλγεβρικές συναρτήσεις. Ακολούθως, ορίζεται ο *ποσοτικός συλλογισμός*, δηλαδή η σκέψη πάνω στις ποσότητες, αποτελεί καθοριστικό τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μαθαίνουν να μοντελοποιούν σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων που συμμεταβάλλονται (Thompson, 2011, Jacobson, 2014). Η μετάβαση από τις εξαρτήσεις μεταξύ μεγεθών προς τις μαθηματικές συναρτήσεις υποδεικνύει τον κρίσιμο ρόλο που έχει ο ποσοτική σκέψη και η σκέψη για τη συμμεταβολή στην ανάπτυξη της συναρτησιακής σκέψης από τους μαθητές. Στην παρούσα έρευνα προδιαγράφονται εκ των προτέρων κατανοήσεις των μαθητών για τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες (ως αλληλεξάρτηση μεταξύ των χαρακτηριστικών), τα μεγέθη (ως μετρήσεις μεταξύ αλληλεξαρτώμενων ποσοτήτων) και τέλος τις μεταβλητές (ως στοιχεία που ορίζουν τις μαθηματικές συναρτήσεις) (Εικόνα 1 - 2).

Εξαρτήσεις μεταξύ αντικειμένων (Χαρακτηριστικά των ποσοτήτων)

↓

Μετρήσεις αλληλεξαρτώμενων ποσοτήτων (Μεγέθη)

↓

Συναρτήσεις (Μεταβλητές)

Εικόνα 1 - 2: Η μετάβαση από τα χαρακτηριστικά των ποσοτήτων στις μεταβλητές.

Η βιβλιογραφία προσφέρει πληροφορίες σχετικά με την ουσιώδη μετάβαση από τις ποσοτικές και συμμεταβαλλόμενες σχέσεις στις συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Συγκεκριμένα, οι Confrey και Smith (1994) μελέτησαν τις εκθετικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας πίνακες τιμών και διαφορές μεταξύ των τιμών κατά τη μελέτη συναρτησιακών σχέσεων. Οι ίδιοι αναφέρουν ότι η κατανόηση της συμμεταβολής (covariational reasoning) είναι θεμελιώδης για τη σκέψη στην μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων. Ο Moore (2014) υποστήριξε ότι οι ποσοτική σκέψη και η σκέψη για τη συμμεταβολή είναι κεντρικές για την κατανόηση των συναρτήσεων από τους μαθητές. Μάλιστα, στην έρευνα των Blanton et al. (2015) επισημαίνεται ότι η συναρτησιακή σκέψη περιλαμβάνει (α) τη γενίκευση σχέσεων μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων, (β) την αιτιολόγησή τους χρησιμοποιώντας διάφορες αναπαραστάσεις μέσω της φυσικής γλώσσας, αλγεβρικού συμβολισμού, πινάκων τιμών και γραφημάτων και (γ) τη σκέψη πάνω σε αυτές τις αναπαραστάσεις με στόχο την πρόβλεψη. Τέλος, οι Moore και Carlson (2012) σημειώνουν ότι η ποσοτική σκέψη και η κατανόηση της συμμεταβολής είναι κρίσιμες για τη νοηματοδότηση των συναρτησιακών σχέσεων στο πλαίσιο της μοντελοποίησης χρησιμοποιώντας εφαρμοσμένα προβλήματα (όπως το πρόβλημα του κουτιού που χρησιμοποιούν στην έρευνά τους).

Ένα άλλο μέρος της έρευνας έχει μελετήσει τον τρόπο σκέψης των φοιτητών σχετικά με τη συμμεταβολή ποσοτήτων σε δυναμικές καταστάσεις όπως η δραστηριότητα με το γέμισμα ή το άδειασμα δοχείων (Carlson et al., 2002, Stalvey & Vidakovic, 2015).

Οι Carlson et al. (2002) μελέτησαν την ανάπτυξη της σκέψης φοιτητών σχετικά με τη συμμεταβολή οδηγήθηκαν στην διαμόρφωση ενός πλαισίου πέντε επιπέδων συμμεταβολής που περιγράφονται με βάση τις αντίστοιχες νοητικές διεργασίες: (1) Εξάρτηση (παρατήρηση των αλλαγών στις δύο μεταβλητές), (2) Κατεύθυνση μεταβολής (συσχέτιση της μεταβολής μίας μεταβλητής - αύξηση ή μείωση – με αλλαγές της άλλης), (3) Ποσοτική συσχέτιση (συσχέτιση του ποσού της αλλαγής μίας μεταβλητής με αλλαγές της άλλης), (4) Μέσος ρυθμός (συσχέτιση του μέσου ρυθμού μεταβολής με ομοιόμορφες αυξήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής) και (5) Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής (συσχέτιση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής με συνεχείς αυξήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής). Αξίζει να σημειώσουμε ότι σε αυτό το πλαίσιο σκέψης για τη συμμεταβολή το επίπεδο (1) αναφέρεται στις εξαρτήσεις, τα επίπεδα (2)-(3) περιλαμβάνουν πρόσθετα στοιχεία για τη συμμεταβολή (όπως κατεύθυνση και ποσότητα αύξησης ή μείωσης) και τα τελευταία επίπεδα (4)-(5) αναφέρονται στον ρυθμό μεταβολής. Στην παρούσα έρευνα το συγκεκριμένο πλαίσιο λήφθηκε υπόψη, καθώς ξεκινάει από τις εξαρτήσεις μεταξύ μεταβλητών και καταλήγει στον ρυθμό μεταβολής, ο οποίος αποτελεί μέρος του ερευνητικού ενδιαφέροντος και υποβάθρου της παρούσας διατριβής.

Όσον αφορά στον ρυθμό μεταβολής έχουν γίνει αρκετές έρευνες με στόχο να προκύψουν αφηγήσεις από τους μαθητές σχετικά με τον ποσοτικό συλλογισμό και τη συμμεταβολή. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός μεταξύ συνεχόμενων τιμών στις τιμές της τετμημένης και της τεταγμένης μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές να υπολογίζουν λόγους και να οδηγηθούν στον ρυθμό μεταβολής (Confrey & Smith, 1994, Ellis et al., 2016). Κατ’ αυτό τον τρόπο ένας μαθητής μπορεί να συντονίζει τις μεταβολές στις τιμές από y_m έως y_{m+1} με τις μεταβολές που συμβαίνουν μεταξύ x_m και x_{m+1}. Αναφορικά με τον ρυθμό μεταβολής η Johnson (2015) χρησιμοποίησε δοχεία υγρών που γεμίζουν, ώστε οι μαθητές να παρατηρήσουν τη μεταβολή του τρόπου με τον οποίο το ύψος του υγρού μεταβάλλεται. Με αυτό τον τρόπο, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να φανταστούν τον τρόπο με τον οποίο το ύψος και ο όγκος μεταβάλλονται ταυτόχρονα και ερμηνεύσουν τις γραφικές παραστάσεις, οι οποίες προκύπτουν από τη συμμεταβολή των μεγεθών. Λαμβάνοντας υπόψη τις παρανοήσεις των φοιτητών, οι οποίοι είχαν ανεπτυγμένο μαθηματικό υπόβαθρο, στην ερμηνεία της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης (Carlson et al., 2002), οι γραφικές παραστάσεις δίνονταν στους μαθητές και εκείνοι θα έπρεπε να αντιστοιχίσουν το κάθε δοχείο υγρού με τη γραφική παράσταση ύψους και όγκου. Στη συνέχεια, γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση θα έπρεπε να ζωγραφίσουν το δοχείο, αναδεικνύοντας διάφορα ζητήματα στο πλαίσιο της συμμεταβολής καταλήγοντας σε ένα πλαίσιο για τον ρυθμό μεταβολής (Johnson, 2015). Οι Hitt και González-Martín (2015) σημειώνουν ότι κατά την εμπλοκή των μαθητών με προβληματικές καταστάσεις φάνηκε ότι οι μαθητές νοηματοδοτούν την συμμεταβολή μεταξύ μεταβλητών και έχουν μία αρχική έννοια της συνάρτησης μέσω της διαδικασίας μοντελοποίησης, όπως προέκυψε από την εξέλιξη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές. Με αυτό τον τρόπο ανέδειξαν ως καθοριστικό τον ρόλο της έννοιας της συμμεταβολής προκειμένου οι μαθητές να ερμηνεύσουν τη γραφική παράσταση συνάρτησης και τον ρυθμό μεταβολής.

1.1.4. Κατηγοριοποιήσεις των νοηματοδοτήσεων των μαθητών για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή

Ένα μέρος της προϋπάρχουσας έρευνας για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή εστιάζει στον προσδιορισμό διαφορετικών επιπέδων σκέψης από τους μαθητές σχετικά με τη νοηματοδότηση των συναρτησιακών σχέσεων. Αυτές οι έρευνες εκτείνονται σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες από τους μαθητές Δημοτικού μέχρι τους φοιτητές. Για παράδειγμα, έχει μελετηθεί στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση η σκέψη των μαθητών σχετικά με τον τρόπο που μπορούν να γενικεύουν συναρτησιακές σχέσεις (π.χ. Blanton et al., 2015, Panorkou & Maloney, 2016) και έδειξε τη δυνατότητα των μαθητών να σκέφτονται σύμφωνα με τη συμμεταβολή. Πιο συγκεκριμένα, οι Blanton et al. (2015) μελέτησαν τον τρόπο σκέψης των μαθητών Α’ Δημοτικού σχετικά με τις συναρτησιακές σχέσεις και δημιούργησαν μία μαθησιακή τροχιά. Το αποτέλεσμα της έρευνας ήταν οκτώ επίπεδα σκέψης που έδειξαν την ικανότητα των νεαρών μαθητών να γενικεύουν συναρτησιακές σχέσεις από έναν αναδρομικό τρόπο σε έναν συναρτησιακό τρόπο περιλαμβάνοντας μάλιστα βαθύτερη μαθηματική σκέψη. Συγκεκριμένα τα οκτώ επίπεδα σκέψης είναι τα ακόλουθα: (α) προδομικό (καμία περιγραφή μαθηματικής σχέσης), (β) αναδρομικό-συγκεκριμένο (αναδρομικό μοντέλο συγκεκριμένων στιγμιοτύπων), (γ) αναδρομικό-γενικευμένο (αναδρομικός κανόνας μεταξύ διαδοχικών τιμών), (δ) συναρτησιακό-συγκεκριμένο (συναρτησιακή σχέση ως σύνολο συγκεκριμένων σχέσεων), (ε) αρχικό συναρτησιακό-γενικευμένο (γενικευμένη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων με αναπαραστάσεις με αρχικά χαρακτηριστικά), (στ) εμφανιζόμενο συναρτησιακό-γενικευμένο (εμφάνιση κρίσιμων χαρακτηριστικών σε μία γενικευμένη συναρτησιακή σχέση), (ζ) συμπυκνωμένο συναρτησιακό-γενικευμένο (η συνάρτηση ως γενικευμένη σχέση μεταξύ δύο αυθαίρετων ποσοτήτων) και (η) συνάρτηση ως αντικείμενο (πλήρης κατανόηση της συναρτησιακής σχέσης).

Αναφορικά με τις κατηγοριοποιήσεις για τη σκέψη των μαθητών στη βιβλιογραφία καταγράφονται επίπεδα σκέψης που αφορούν τη συμμεταβολή σε μαθητές λυκείου, λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορές στον τρόπο σκέψης των μαθητών για τις μεταβολές των ποσοτήτων (π.χ. Castillo-Garsow, 2010, Castillo-Garsow, 2012, Thompson & Carlson, 2017). Για παράδειγμα, οι Thompson και Carlson (2017) εισήγαγαν ένα πλαίσιο με έξι επίπεδα για την κατανόηση των μεταβολών και ένα αντίστοιχο πλαίσιο με έξι επίπεδα για την κατανόηση της συμμεταβολής: (α) καμία συσχέτιση, (β) ασύγχρονη συμμεταβολή (μεταβολή των τιμών χωρίς να υπάρχει συντονισμός), (γ) αφελή συσχέτιση των τιμών (η μία ποσότητα αυξάνεται ενώ η άλλη μειώνεται), (δ) συσχέτιση των τιμών (σαν ένα ζεύγος τιμών), (ε) διακριτή συνεχής συμμεταβολή (οι μεταβολές συμβαίνουν ταυτόχρονα αλλά σε διακριτά σημεία) και (στ) λεία συνεχής συμμεταβολή (οι δύο μεταβλητές μεταβάλλονται λεία και συνεχώς). Παρά το γεγονός ότι ο ρυθμός μεταβολής δεν περιλαμβάνεται στο τελευταίο πλαίσιο της συμμεταβολής, οι συγγραφείς τονίζουν ότι η λεία συνεχής συμμεταβολή είναι θεμελιώδης και προαπαιτούμενο για τον ρυθμό μεταβολής. Ωστόσο, έχουν αναφέρει ότι ο ρυθμός μεταβολής αποτελεί μία αρκετά εξεζητημένη και δύσκολη έννοια που απαιτεί «νοηματοδοτήσεις του λόγου, του πηλίκου, της συσσώρευσης και της αναλογικότητας» (Thompson & Carlson, 2017, p. 441). Συνεπώς αυτή η κατηγοριοποίηση υποδεικνύει ότι η διερεύνηση συμμεταβαλλόμενων καταστάσεων παρέχει ένα πλαίσιο για τη διευκόλυνση της νοηματοδότησης εννοιών του Απειροστικού λογισμού από μαθητές λυκείου. Παρόμοια ευρήματα έχουν αναφερθεί σε πρόσφατες έρευνες που τονίζουν τη δυνατότητα των μαθησιακών περιβαλλόντων επαυξημένης πραγματικότητας (augmented reality) για τη διερεύνηση της κατανόησης της συμμεταβολής σε μαθητές λυκείου (Swidan et al., 2019). Για παράδειγμα, οι Swidan et al. (2019) χρησιμοποίησαν ένα περιβάλλον επαυξημένης πραγματικότητας για να εμπλέξουν τους μαθητές στον συντονισμό συνεχών δυναμικών χαρακτηριστικών από πραγματικά φαινόμενα (π.χ. ένα κινούμενο αντικείμενο σε μία επικλινή επιφάνεια) με τις μαθηματικές τους αναπαραστάσεις (π.χ. χάραξη σημείων μίας γραφικής παράστασης, προσθήκη ζευγών τιμών σε ένα πίνακα τιμών) μέσω οπτικο-κιναισθητικών δραστηριοτήτων. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι οι μαθητές ανέπτυξαν πολλαπλά νοήματα για τη συμμεταβολή σχετικά με τα επίπεδα σκέψης που περιγράφονται στο πλαίσιο των Thompson και Carlson (2017).

Οι προηγούμενες έρευνες χρησιμοποιούν είτε μαθηματικού περιεχομένου δραστηριότητες, οι οποίες εντάσσονται σε μαθηματικό πλαίσιο, είτε δραστηριότητες που περιέχουν φυσικά συστήματα, όπως το γέμισμα δοχείων (Carlson, 1998, Carlson et al., 2002, Johnson, 2015), όπου κυρίαρχο ρόλο έχει το πλαίσιο της συμμεταβολής. Ενισχύοντας το βασικό πλαίσιο εργασίας των μαθητών, έχει ενδιαφέρον να φανεί ο τρόπος με τον οποίο προκύπτει η συμμεταβολή, ιδιαίτερα όταν οι μαθητές εργάζονται με δραστηριότητες μοντελοποίησης εμπνευσμένες από αυθεντικές προβληματικές καταστάσεις.

1.2. Συνάρτηση και μοντελοποίηση

«Η μοντελοποίηση θεωρείται ως η εργασία σε διάφορα μοντέλα της πραγματικότητας τα οποία ανήκουν σε διαφορετικά επιστημονικά πεδία περιλαμβάνοντας διάφορες μαθηματικοποιήσεις» (Lagrange, 2018, p.1). Πρόσφατα, η μοντελοποίηση χρησιμοποιείται σε αρκετές έρευνες με σκοπό τη μελέτη των συμμεταβαλλόμενων και συναρτησιακών σχέσεων. Για παράδειγμα, υπάρχουν έρευνες που εστιάζουν στον τρόπο που η κατανόηση της συμμεταβολής προσφέρει νέες δυνατότητες στους μαθητές για την κατανόηση των συναρτήσεων μέσω της μοντελοποίησης δυναμικών καταστάσεων (π.χ. Castillo-Garsow, 2010, Moore & Carlson, 2012). Στη βιβλιογραφία φαίνεται ότι οι ποσοτικές και συμμεταβαλλόμενες σχέσεις μελετήθηκαν σχετικά πρόσφατα στο πλαίσιο της μοντελοποίησης, ώστε να προκύψει αν μία φοιτήτρια μπορεί να δημιουργήσει μία κατανόηση της συνάρτησης που βασίζεται στη συμμεταβολή (π.χ. Paoletti et al., 2018). Πράγματι, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η σκέψη των φοιτητών σε ποσοτικές και συμμεταβαλλόμενες σχέσεις αποτελεί θεμέλιο για τη συνάρτηση όταν εργάζονται σε δραστηριότητες μοντελοποίησης. Παράλληλα, οι Czocher και Hardison (2019) επικεντρώθηκαν στην εξέλιξη των μοντέλων σε δραστηριότητες μοντελοποίησης, υποδεικνύοντας ότι η σύνδεση της ποσοτικής σκέψης με τις συμμεταβαλλόμενες σχέσεις έχει ιδιαίτερο όφελος προς τους μαθητές.

Σε κάποιες έρευνες, η χρήση των ψηφιακών εργαλείων και ο ειδικός σχεδιασμός δραστηριοτήτων χρησιμοποιήθηκαν για να ενισχύσουν τα νοήματα των μαθητών ανάμεσα στις ποσότητες ειδικά όταν συνδεόταν το πλαίσιο της μοντελοποίησης με την ποσοτική σκέψη (π.χ. Johnson, 2012, Ellis et al., 2015, Johnson, McClintock & Gardner, 2020). Για παράδειγμα οι Johnson et al. (2020) υποδεικνύουν τη σημασία των γραφικών παραστάσεων μεταξύ των ποσοτήτων όταν οι μαθητές εργάζονται με ποσοτικές και συμμεταβαλλόμενες σχέσεις σε δραστηριότητες μοντελοποίησης.

Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης προσφέρουν πλούσιες ευκαιρίες στους μαθητές να εμπλακούν με τη συναρτησιακή σκέψη και επομένως να ερμηνεύσουν τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων (Lagrange & Psycharis, 2014). Η προϋπάρχουσα έρευνα σε πολλά προγράμματα σπουδών στο λύκειο έχει μελετήσει τις διδακτικές προσεγγίσεις για τις συναρτήσεις μέσω δραστηριοτήτων μοντελοποίησης βασιζόμενες σε πραγματικές καταστάσεις. Μάλιστα, προέκυψε ότι αρκετές δραστηριότητες κάνουν υπερβολική χρήση αλγεβρικών μεθόδων για να υποστηρίξουν την μετάβαση στη μαθηματική γλώσσα και αγνοούν την πρότερη εργασία των μαθητών που έχει γίνει σε άλλα πεδία όπως για παράδειγμα το γεωμετρικό (Robert & Vandebrouck, 2014). Αυτό το γεγονός περιορίζει τη μετάβαση των μαθητών στο αλγεβρικό πεδίο και την ουσιαστική εμπλοκή τους με τη συναρτησιακή σκέψη (Minh & Lagrange, 2016). Ο Lagrange (2018) προτείνει τη χρήση καταστάσεων μοντελοποίησης ως βάση για δραστηριότητες που διευκολύνουν τη μάθηση των μαθηματικών μέσω συνδέσεων της πραγματικότητας και των μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, ο σχεδιασμός της δραστηριότητας φαίνεται να βασίζεται στη μοντελοποίηση μίας κατάστασης (π.χ. μίας κρεμαστής γέφυρας). Μάλιστα, παρά την πολυπλοκότητα της κατάστασης οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να αντιληφθούν διαφορετικά μοντέλα της κατάστασης (π.χ. φυσικό μοντέλο και γεωμετρικό μοντέλο στη δυναμική γεωμετρία) και να κάνουν συνδέσεις μεταξύ τους. Αυτά τα μοντέλα αφορούν μαθηματικά αντικείμενα, τις σχέσεις μεταξύ τους, εκφράσεις και σχετικές νοητικές εικόνες που εμφανίζονταν κατά τη μοντελοποίηση του προβλήματος. Το αποτέλεσμα ήταν ότι οι συνδέσεις που έκαναν οι μαθητές τους βοήθησαν να καταλάβουν έννοιες που σχετίζονται με τη συνάρτηση και να εκτιμήσουν τη συμβολή των μαθηματικών και των επιστημών στην κατανόηση του πραγματικού κόσμου.

1.2.1. Μοντελοποίηση και διερεύνηση

Ο όρος διερευνητική μάθηση (inquiry-based learning) αναφέρεται σε μαθητοκεντρικές μεθόδους διδασκαλίας στις οποίες οι μαθητές θέτουν ερωτήματα, εξερευνούν καταστάσεις και αναπτύσσουν τους δικούς τους τρόπους για την εξεύρεση λύσεων (Maaß & Artigue, 2013). Πρόκειται για τη διδασκαλία στην οποία οι μαθητές καλούνται να εργαστούν με μεθόδους παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί και γενικότερα οι επιστήμονες. Η διερεύνηση αποτελεί μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση της μάθησης, όπου τόσο οι μαθητές όσο και οι εκπαιδευτικοί αφήνουν τους παραδοσιακούς τους ρόλους. Οι μαθητές θέτουν ερωτήματα, εξερευνούν, εξηγούν, επεκτείνουν, εκτιμούν, συνεργάζονται (Artigue & Blomhøj, 2013). Οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνουν την εξερεύνηση, παροτρύνουν, καθοδηγούν. Διερευνητικές προσεγγίσεις της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών έχουν αναπτυχθεί σε πολλές χώρες, όπως στο Ηνωμένο Βασίλειο (Jaworski, 1994) και στις ΗΠΑ με διδακτικά πειράματα για τη δημιουργία της «διερευνητικής τάξης των μαθηματικών» (Cobb et al., 1992). Επιπλέον, το ρεύμα της διερευνητικής μάθησης για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες τα τελευταία χρόνια έχει ευρύτατη απήχηση στην Ευρώπη, όπου σχεδιάζονται και υλοποιούνται μεγάλα ερευνητικά προγράμματα (Artigue & Baptist, 2012, Maaß & Artigue, 2013).

Οι Artigue και Blomhøj (2013) προτείνουν δραστηριότητες διερευνητικής μάθησης στον σχεδιασμό και την εφαρμογή τέτοιων δραστηριοτήτων ως τρόπο για να διευκολύνουν τους μαθητές να συνδέουν αυθεντικές καταστάσεις με την πειραματική διάσταση των μαθηματικών. Η διερεύνηση μπορεί να πάρει τρεις μορφές: (α) δομημένη, όπου οι κατάλληλες μέθοδοι και τα εργαλεία παρέχονται στους μαθητές για να λύσουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, (β) καθοδηγούμενη, όπου τα απαραίτητα εργαλεία παρέχονται στους μαθητές για τη δραστηριότητα και θα πρέπει να βρουν τις κατάλληλες στρατηγικές για να λύσουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα και (γ) ανοικτή, όπου οι μαθητές αναζητούν για προβλήματα ή ερωτήσεις που θα τους άρεσε να επιλύσουν και επιλέγουν τις κατάλληλες τεχνικές για να την επίλυσή τους (Bruder & Prescott, 2013). Στην παρούσα έρευνα οι δραστηριότητες μοντελοποίησης αφορούν καθοδηγούμενη διερεύνηση και περιλαμβάνουν πειραματισμό με ψηφιακά εργαλεία σε ένα διερευνητικό περιβάλλον, ώστε να διευκολύνεται η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων από τους μαθητές.

1.2.2. Χώρος εργασίας και διερεύνηση

Μία από τις βασικές δυσκολίες της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η αδυναμία σύνδεσής τους με την πραγματική ζωή. Ο Gravemeijer (1994) αποδίδει τις γνωστικές δυσκολίες των μαθητών στο χάσμα που υφίσταται ανάμεσα στην καθημερινή ζωή και τα φορμαλιστικά μαθηματικά. Ο ίδιος πιστεύει ότι το χάσμα μπορεί να γεφυρωθεί μέσω μίας διαδικασίας προοδευτικής μαθηματικοποίησης, στην οποία τα φορμαλιστικά μαθηματικά οικοδομούνται ως φυσική επέκταση της εμπειρικής πραγματικότητας των μαθητών (Gravemeijer, 1994, 1999). Μάλιστα, η αξιοποίηση δραστηριοτήτων, οι οποίες σχετίζονται με τον χώρο εργασίας επιτρέπει την ανάπτυξη παιδαγωγικών στρατηγικών που θα φέρουν τον μαθητή πιο κοντά στα αυστηρά και αφηρημένα μαθηματικά (Williams & Wake, 2007). Έτσι, οι μαθητές, προσεγγίζουν έναν χώρο εργασίας και το ρόλο κάποιου επαγγελματία με στόχο να συνδυάσουν τις γνώσεις τους και να διερευνήσουν δραστηριότητες που βασίζονται σε πραγματικά προβλήματα. Επιπρόσθετα, η χρήση της τεχνολογίας κατά τη διερεύνηση δραστηριοτήτων προσφέρει δυνατότητες δημιουργίας κατασκευών από τους μαθητές (Wake, 2014).

Παράλληλα, δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να αναγνωρίσουν τους περιορισμούς και τις δυσκολίες, τις οποίες αρκετοί εργαζόμενοι συναντούν στον χώρο εργασίας καθώς χρησιμοποιούν τα μαθηματικά. Έτσι, οι μαθητές εργαζόμενοι με διερευνητικές δραστηριότητες στο πλαίσιο του χώρου εργασίας φαίνεται να εργάζονται με προκλητικά προβλήματα χρησιμοποιώντας παράλληλα τα μαθηματικά.

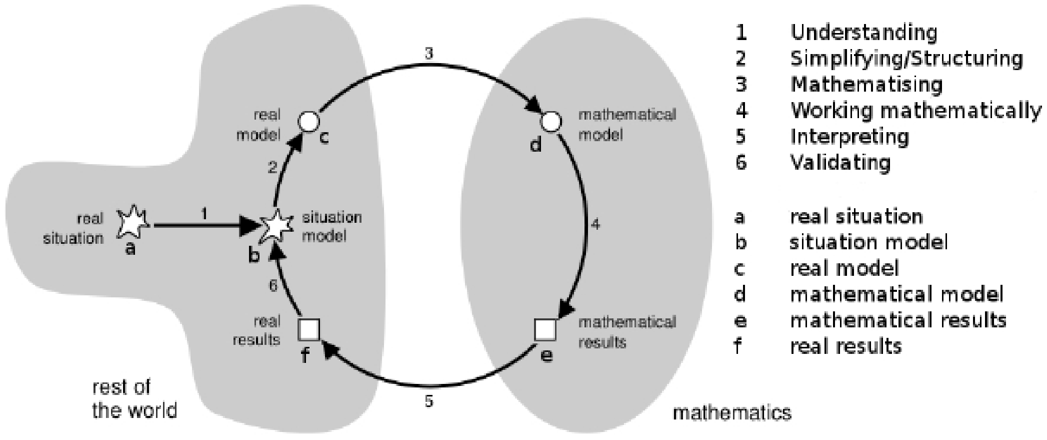
Κατά τη διερεύνηση δραστηριοτήτων μοντελοποίησης, οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να μοντελοποιήσουν προβλήματα, τα οποία έχουν ως αφετηρία αυθεντικές καταστάσεις από κάποιο χώρο εργασίας και ένα αυθεντικό ερώτημα (Maaß, 2010). Η εξάρτηση από το πλαίσιο του χώρου εργασίας φαίνεται να είναι ένας από τους κύριους παράγοντες που υποστηρίζουν τους μαθητές να αναπτύξουν περισσότερο τις νέες τους αντιλήψεις (Triantafillou & Potari, 2014). Έτσι, οι μαθητές διερευνούν προβληματικές καταστάσεις, οι οποίες αποτελούν πρόκληση και αφυπνίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών για τα Μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες, όταν παρέχονται στους μαθητές τα κατάλληλα εργαλεία. Εξαιτίας των καθορισμένων κανόνων και των περιορισμών στον χώρο εργασίας, οι μαθητές δεν εμπλέκονται άμεσα με το πλαίσιο του χώρου εργασίας, αλλά χρησιμοποιούν δραστηριότητες και εργαλεία ως καταστάσεις προσομοίωσης (Triantafillou & Potari, 2014).

1.2.3. Δραστηριότητες εμπνευσμένες από αυθεντικές καταστάσεις

Στη βιβλιογραφία, η μοντελοποίηση αυθεντικών προβλημάτων αφορά γνήσια προβλήματα (Vos, 2011). Μάλιστα ορισμένοι ερευνητές αναφέρουν κριτήρια τα οποία θα πρέπει να πληρούνται ώστε να θεωρείται μία δραστηριότητα αυθεντική, όπως για παράδειγμα το γεγονός που περιγράφεται, η γλώσσα που χρησιμοποιείται και η έμπειρη αληθοφάνεια των στρατηγικών λύσης των μαθητών (Palm, 2006). Ωστόσο, σύμφωνα με τους Kaiser et al. (2011) οι σχεδιαζόμενες δραστηριότητες σχετικά με αυθεντικές καταστάσεις είναι κάπως πιο απλοποιημένες και μπορούν να αναγνωριστούν από ειδικούς ως σενάρια που οι επαγγελματίες μπορεί να συναντήσουν στην πρακτική τους. Συνεπώς, φαίνεται ότι υπάρχουν ερευνητές που αποδέχονται τις προσομοιώσεις πραγματικών καταστάσεων ως αυθεντικές. Ταυτόχρονα έχει υποδειχθεί ότι ο χώρος εργασίας ως πλαίσιο μπορεί να προσφέρει πλούσιες ευκαιρίες στους εκπαιδευτικούς για να χρησιμοποιήσουν δραστηριότητες και να εισάγουν αυθεντικές καταστάσεις στη διδασκαλία τους (Wake, 2014). Η προϋπάρχουσα έρευνα υποδεικνύει τα πλεονεκτήματα που έχουν και οι μαθητές σχετικά με την μοντελοποίηση δραστηριοτήτων που βασίζονται σε αυθεντικές καταστάσεις, όπως ότι διευκολύνουν την εμπλοκή με τα σχολικά μαθηματικά και τις αναπαραστάσεις και τους βοηθούν να εκτιμήσουν τη χρησιμότητα των μαθηματικών ιδεών (Palm, 2009). Ωστόσο, στη βιβλιογραφία προτείνεται η «εκπαιδευτική αλλαγή» αυτών των αυθεντικών καταστάσεων, ώστε να σχεδιαστούν δραστηριότητες, οι οποίες είναι προσβάσιμες από τους μαθητές. Ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων που έχουν ως αφετηρία αυθεντικές καταστάσεις και έχουν διαφορετικές αποστάσεις ανάμεσα στα σχολικά μαθηματικά και την αυθεντική προβληματική κατάσταση είναι αρκετά πολύπλοκος (Dierdorp et al., 2011). Στην έρευνα έχουν αναπτυχθεί δυνατότητες που περιλαμβάνουν τη χρήση της τεχνολογίας ώστε να προκύπτουν τεχνουργήματα που αποτελούν προσομοίωση της πραγματικής κατάστασης σε ένα ψηφιακό περιβάλλον φέρνοντας τα μαθηματικά στην επιφάνεια (π.χ. technology enchanced boundary objects – TEBOs – Bakker et al., 2011). Με αυτό τον τρόπο, τα ψηφιακά εργαλεία μπορούν να παίξουν κρίσιμο ρόλο ως προσομοιώσεις πραγματικών καταστάσεων (π.χ. χώρου εργασίας) διαμεσολαβώντας παράλληλα τη μαθηματική γνώση. Έτσι, στην παρούσα έρευνα σχεδιάστηκαν δραστηριότητες μοντελοποίησης έχοντας ως αφετηρία αυθεντικές καταστάσεις που έχουν διαφορετικές αποστάσεις από την αυθεντικότητα χρησιμοποιώντας αυθεντικά στοιχεία από πραγματικό χώρο εργασίας (όπως περιορισμούς, πρακτικές κλπ). Αυτές οι δραστηριότητες εμπλέκουν τη χρήση ψηφιακών εργαλείων ως προσομοίωση της πραγματικής κατάστασης, ώστε να διευκολύνονται οι μαθητές στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων.

1.2.4. Κύκλος μοντελοποίησης και μοντέλα

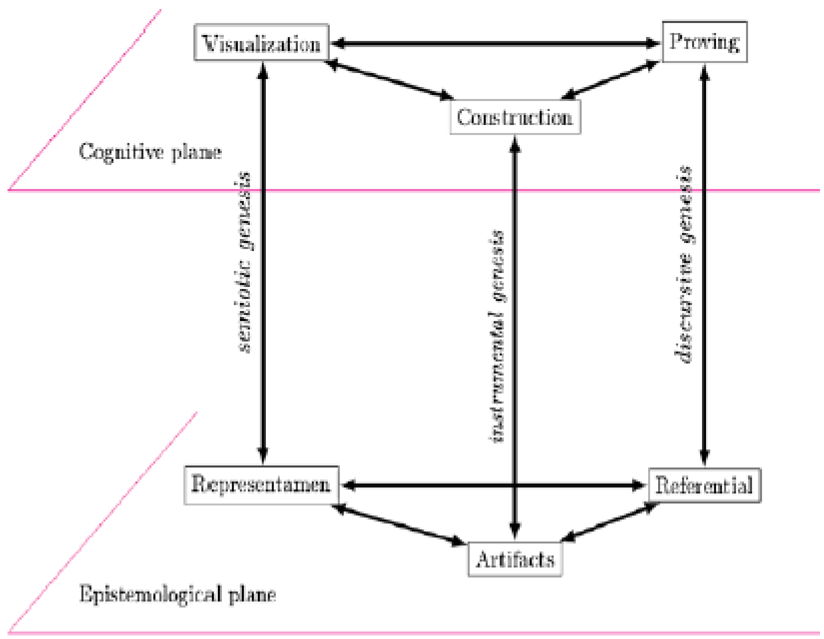
Η μοντελοποίηση περιγράφεται συνήθως μέσω ενός επαναλαμβανόμενου κύκλου που συνδέει τον πραγματικό και τον μαθηματικό κόσμο (π.χ. Blum & Niss, 1991, Kaiser & Sriraman, 2006, Maaß, 2006, Blum & Leiβ, 2007, Stillman, 2011).



Εικόνα 1 - 3: Κύκλος μοντελοποίησης (Blum & Leiß, 2007)

Υπάρχουσες έρευνες έχουν υποδείξει τον κρίσιμο ρόλο της τεχνολογίας στον κύκλο μοντελοποίησης. Κάποιες έρευνες εστιάζουν κυρίως στα πολλαπλά συστήματα αναπαράστασης που εμπλέκονται στην μοντελοποίηση (π.χ. Confrey & Maloney, 2007) και επισημαίνουν την αξία μεταξύ αλληλεπιδράσεων των μαθητών και συζητήσεων στη σχολική τάξη στα διαφορετικά μέρη του κύκλου μοντελοποίησης (Geiger et al., 2010). Από την άλλη άλλες έρευνες δίνουν έμφαση στη συνεισφορά της χρήσης αυθεντικών προβλημάτων στις ικανότητες μοντελοποίησης των μαθητών και στην μαθηματική κατανόηση (π.χ. Greefrath et al., 2018). Επομένως, η χρήση των ψηφιακών εργαλείων και των αυθεντικών καταστάσεων φαίνεται να είναι κρίσιμα στοιχεία που ενισχύουν τη μαθηματική κατανόηση και μοντελοποίηση.

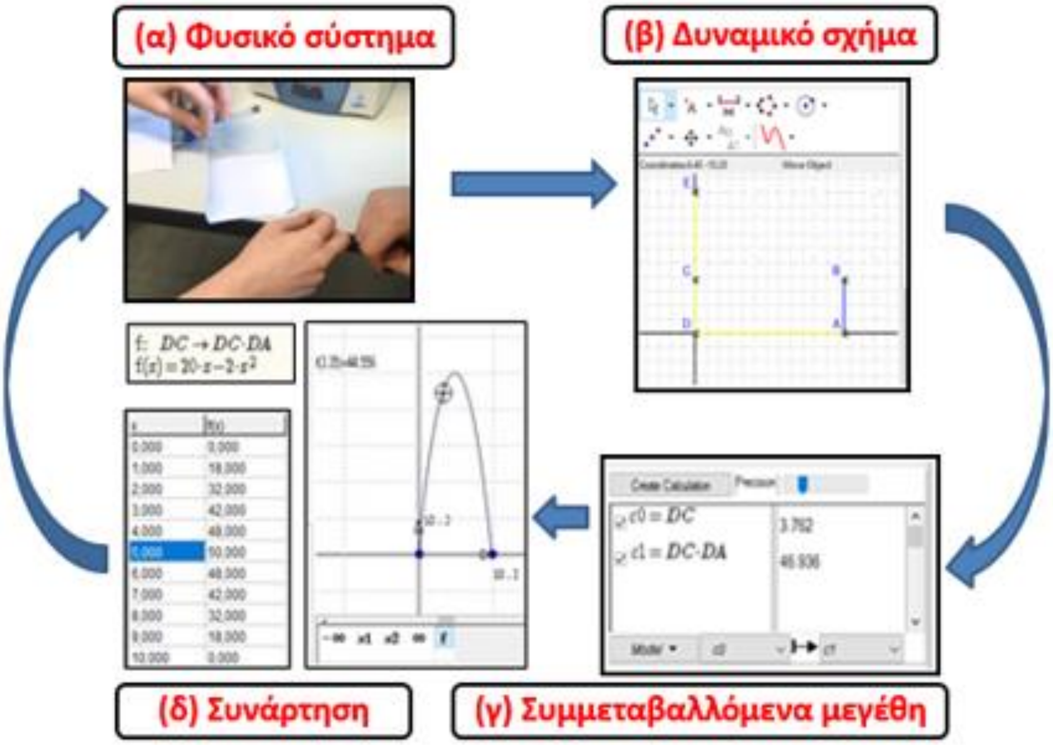
Στη βιβλιογραφία αναφορικά με την πολλαπλότητα των μοντέλων και τη σύνδεση μεταξύ τους υπάρχουν περιορισμένες αναφορές. Οι Czocher και Hardison (2019) αναφέρονται στην εξέλιξη των μοντέλων σε δραστηριότητες μοντελοποίησης συνδέοντας την ποσοτική σκέψη για τη συμμεταβολή. Ωστόσο, σχετικά πρόσφατα η ύπαρξη διαφορετικών μοντέλων συνδέθηκε με την ιδέα των μαθηματικών πεδίων εργασίας (Mathematical Working Spaces, Kuzniak et al., 2016), τα οποία αναφέρονται στη δραστηριότητα των μαθητών μέσα από διαφορετικά πεδία και αναπαραστάσεις με κρίσιμο ρόλο κατά τη νοηματοδότηση της συνάρτησης. Σύμφωνα με τα μαθηματικά πεδία εργασίας, η εργασία των μαθητών λαμβάνει χώρα σε δύο επίπεδα: (α) το επιστημολογικό και (β) το γνωστικό. Το επιστημολογικό επίπεδο αναφέρεται στο μαθηματικό περιεχόμενο της δραστηριότητας που εμπλέκονται οι μαθητές και περιλαμβάνει αντικείμενα, σχήματα σύμβολα, τεχνουργήματα (όπως ψηφιακά εργαλεία). Από την άλλη, το γνωστικό επίπεδο σχετίζεται με την εξέλιξη της σκέψης που διατρέχουν οι μαθητές κατά την εμπλοκή τους με μία δραστηριότητα, μέσα από την ερμηνεία και αξιοποίηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων, συμβόλων, τεχνουργημάτων, αλλά και τις εικασίες ή αποδείξεις που αναπτύσσουν. Έτσι, η σύνδεση μεταξύ των δύο επιπέδων γίνεται μεταξύ τριών διαδικασιών (α) τη σημειωτική (semiotic), που αφορά ενέργειες των μαθητών για να συνδυάσουν τις κατανοήσεις τους όπως η χρήση συμβόλων, αναπαραστάσεων και αντικειμένων (β) την εργαλειακή (instrumental), που αφορά την κατασκευή ή μετατροπή τεχνουργημάτων, γεωμετρικών σχημάτων, γραφημάτων ως εργαλεία δράσης και (γ) τη διαλεκτική (discourse), που αφορά την οργάνωση και σύνδεση ιδιοτήτων ενός θεωρητικού συστήματος αναφοράς με στόχο την αιτιολόγηση και απόδειξη. Για παράδειγμα, οι Derouet et al. (2017) με τη χρήση των τριών διαδικασιών του MWS αναλύουν μία παρέμβαση σε σχολική τάξη στην οποία στόχος είναι η δημιουργία ενός μοντέλου παρατηρώντας στατιστικά δεδομένα μέσα από τρία πεδία (στατιστικής, συναρτήσεων και πιθανοτήτων). Μάλιστα, καταλήγουν ότι το συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο μπορεί να εμπλουτίσει και να ισχυροποιήσει την ανάλυση σε μία διαδικασία μοντελοποίησης μελετώντας την κυκλική μετάβαση μεταξύ των πεδίων της στατιστικής, της ανάλυσης και των πιθανοτήτων.



Εικόνα 1 - 4: Το θεωρητικό πλαίσιο των μαθηματικών πεδίων εργασίας

Έχοντας εμπνευστεί από τους Kuzniak και Richard (2014) σχετικά με την ύπαρξη μαθηματικών πεδίων εργασίας, τα οποία εξασφαλίζουν τη μαθηματική εργασία σε ένα εκπαιδευτικό περιβάλλον, οι Minh και Lagrange (2016) ανέπτυξαν την ιδέα των συνδεόμενων πεδίων εργασίας (Connected Working Spaces), δηλαδή ενός πλαισίου για τη διδασκαλία και μάθηση συναρτήσεων στο λύκειο. Στο CWS οι μαθητές εργάζονται σε διαφορετικά πεδία εργασίας και να συντονίζουν τις σημειωτικές, οργανικές και λεκτικές διαστάσεις αυτών των χώρων. Έτσι, το θεωρητικό πλαίσιο CWS μπορεί να εφαρμοστεί ιδιαίτερα στην περίπτωση των συναρτήσεων και της μοντελοποίησης (Psycharis et al., 2021). Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του CWS είναι ότι επιτρέπει τη μελέτη των αλληλεξαρτήσεων σε διαφορετικά πεδία εργασίας με τη χρήση διαφορετικών μέσων και κατ’ επέκταση την ερμηνεία των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων με τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων και μέσων.

Αναφορικά με τη μοντελοποίηση καταστάσεων που στοχεύουν στη μάθηση της συνάρτησης από τους μαθητές μέσω προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και ψηφιακών εργαλείων, ο Lagrange (2014) περιέγραψε τον *κύκλο μοντελοποίησης* χρησιμοποιώντας τέσσερα στοιχεία βασιζόμενος στη χρήση του ψηφιακού περιβάλλοντος Casyopée. Ο σχεδιασμός του Casyopée βασίστηκε στην επιδίωξη της διευκόλυνσης των μαθητών να μεταβούν από τον κόσμο των αλληλεξαρτήσεων σε ένα φυσικό σύστημα, στον κόσμο των συναρτήσεων μέσα από τη συμμεταβολή μεγεθών και τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων (Artigue & Lagrange, 2009, Lagrange, 2014). Αυτό το μαθησιακό περιβάλλον δημιουργήθηκε για να διευκολύνει την ενασχόληση των μαθητών με συναρτησιακές σχέσεις καθώς εκείνοι εργάζονται σε διαφορετικά μοντέλα. Τα τέσσερα στοιχεία του κύκλου μοντελοποίησης είναι: (α) ένα φυσικό σύστημα (physical device), το οποίο επιτρέπει στους μαθητές να πειραματιστούν (π.χ. ένα μοντέλο προσομοίωσης), (β) το δυναμικό σχήμα, το οποίο προκύπτει από τη μοντελοποίηση των εξαρτήσεων στο ψηφιακό εργαλείο (π.χ. ένα δυναμικό σχήμα στο παράθυρο της Δυναμικής Γεωμετρίας), (γ) τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη (π.χ. οι μετρήσεις του δυναμικού σχήματος) και (δ) οι αλγεβρικές συναρτήσεις, οι οποίες μοντελοποιούν το πρόβλημα (Εικόνα 1 - 5).



Εικόνα 1 - 5: Επίλυση προβλήματος στα διαφορετικά στοιχεία του κύκλου μοντελοποίησης

Ο Lagrange (2014, 2018) διέκρινε τέσσερα διαδοχικά μοντέλα μέσα στα στοιχεία του κύκλου μοντελοποίησης (π.χ. η εργασία των μαθητών με υλικά αντικείμενα μπορεί να ορίσει ένα μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων) και εστίασε στις μεταβάσεις και στις συνδέσεις που κάνουν οι μαθητές μεταξύ αυτών των μοντέλων. Αυτή η μετάβαση στα διαφορετικά στοιχεία και τα αντίστοιχα μοντέλα, δηλαδή το πέρασμα από τον πειραματισμό με τις εξαρτήσεις στο φυσικό σύστημα προς τις αλγεβρικές συναρτήσεις είναι αρκετά πολύπλοκο καθώς διαμεσολαβείται από διαφορετικά είδη συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων (π.χ. μεγέθη, μεταβλητές).

Στην παρούσα έρευνα, διερευνάται η μαθησιακή τροχιά από τις ποσοτικές και συμμεταβαλλόμενες σχέσεις προς τις συναρτησιακές σχέσεις στο πολύπλοκο μονοπάτι από το φυσικές εξαρτήσεις προς τις μεταβλητές καθώς οι μαθητές εμπλέκονται με τη μοντελοποίηση δραστηριοτήτων εμπνευσμένων από αυθεντικές καταστάσεις χρησιμοποιώντας χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία στο πλαίσιο της σχολικής τάξης. Σε αυτό το μονοπάτι, η συνάρτηση αρχικά εμφανίζεται ως εξάρτηση μεταξύ φυσικών αντικειμένων, έπειτα μεταξύ χαρακτηριστικών των ποσοτήτων (π.χ. φυσικά ή γεωμετρικά αντικείμενα), ακολούθως μεταξύ μεγεθών (δηλ. των μετρήσεων των χαρακτηριστικών των ποσοτήτων) και τέλος μεταξύ μεταβλητών (δηλ. κατά τη μελέτη της μαθηματικής συνάρτησης). Έτσι, δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στη μετάβαση των μαθητών στα διαφορετικά μοντέλα και στις αντίστοιχες συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές που περιλαμβάνονται στη μαθησιακή τροχιά. Τέλος, φωτίζονται οι διαφορετικές νοηματοδοτήσεις, οι οποίες κατασκευάζονται μέσα στα διαφορετικά μοντέλα και ερευνάται ο ρόλος του πλαισίου στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών.

2. Θεωρητικό Πλαίσιο

Στις επόμενες ενότητες περιγράφεται η οπτική που υιοθετήθηκε σχετικά με τη νοηματοδότηση της συνάρτησης και τα θεωρητικά πλαίσια που χρησιμοποιήθηκαν στον σχεδιασμό και στην ανάλυση της διατριβής. Πιο συγκεκριμένα, περιγράφεται η συγκεκριμένη θεώρηση για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης, τα θεωρητικά πλαίσια μαθησιακές τροχιές και Αφαίρεση εντός Πλαισίου (ΑεΠ), αλλά και ο τρόπος που τα δύο θεωρητικά πλαίσια συνομιλούν μέσα από τη δικαιολόγηση για τη χρήση των συγκεκριμένων θεωρητικών οπτικών.

2.1. Η νοηματοδότηση της συνάρτησης

Στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών έχει δοθεί αρκετή βαρύτητα στην έννοια του νοήματος. Με αφετηρία τον Wittgenstein από την Φιλοσοφία ξεκίνησε η θεωρία του νοήματος, η οποία εξελίχθηκε σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Πιο συγκεκριμένα, ο ίδιος ο Wittgenstein (1953) φαίνεται να αποδίδει στη λέξη «νόημα» ένα σύνολο από διαφορετικά στοιχεία, όπως χειρονομίες, δράσεις και δραστηριότητες των υποκειμένων που σχετίζονται με τη χρήση μίας έννοιας. Συνεπώς, προκύπτει ότι ορισμένες ανθρώπινες δραστηριότητες σε ένα κοινωνικό πλαίσιο αποτελούν μέρος των συζητήσεων για ένα συγκεκριμένο νόημα (δηλ. μία νοηματοδότηση). Αναφορικά με τη νοηματοδότηση της συνάρτησης στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών έχει ερευνηθεί η έννοια του νοήματος της συνάρτησης και μάλιστα μέσα στο πλαίσιο της σχολικής τάξης. Πιο συγκεκριμένα, η νοηματοδότηση της συνάρτησης αποτελεί ένα παράδειγμα αρκετά πολύπλοκο, αφού οι συναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν ταυτόχρονα ως μαθηματικά αντικείμενα, αλλά και ως εργαλεία σκέψης (Biehler, 2005). Από την άλλη, άλλοι ερευνητές έχουν υποδείξει ότι το νόημα και κατ' επέκταση η νοηματοδότηση φαίνεται να σχετίζεται με τις προθέσεις/προσδοκίες των μαθητών, ανάλογα με την κατάσταση στην οποία εμπλέκονται (π.χ. Skovmose, 2005). Στο πλαίσιο της κοινότητας μάθησης και συγκεκριμένα της σχολικής τάξης άλλοι ερευνητές (π.χ. Keitel & Kilpatrick, 2005) υποστηρίζουν ότι τα νοήματα είναι συλλογική υπόθεση και όχι ατομική, αφού κοινοποιούνται εντός της κοινότητας. Ειδικότερα κατά τη χρήση ψηφιακών εργαλείων (π.χ. Hoyles & Noss, 1991, Noss & Hoyles 1996, Noss et al., 1997, Laborde, 2005) υπάρχει μεγάλη συζήτηση σχετικά με τους παράγοντες που παίζουν ρόλο στην κατασκευή νοήματος κατά την επίλυση μίας δραστηριότητας με αρκετούς ερευνητές να δίνουν ιδιαίτερη βαρύτητα στη χρήση των ψηφιακών εργαλείων, αλλά και των μέσων (π.χ. καθηγητής, μαθητές, δραστηριότητα, ψηφιακό εργαλείο) που χρησιμοποιούνται. Κατά τη χρήση ψηφιακών εργαλείων η πλαισιοθετημένη αφαίρεση (situated abstraction), δηλαδή η διαδικασία με την οποία οι μαθητές παράγουν γενικευμένες αφαιρέσεις εννοιών, έχοντας την εμπειρία τοπικών γενικεύσεων, συνεισφέρει κατά μεγάλο μέρος στη δημιουργία «βαθύτερων» νοημάτων από τους μαθητές (Hoyles και Noss, 1996). Ιδιαίτερα, η Hoyles (2005) δίνει αρκετή προσοχή στις αλληλεπιδράσεις με τα ψηφιακά εργαλεία και συγκεκριμένα στις στρατηγικές σχεδίασης των λογισμικών, δηλαδή σε αυτό που έχει σχεδιαστεί και σε αυτό που αφήνεται στους μαθητές να κατασκευάσουν οι ίδιοι. Συνεπώς, ως νόημα (και κατ' επέκταση νοηματοδότηση) νοείται το σύνολο των δράσεων του μαθητή, η αλληλεπίδραση του μαθητή με τα ψηφιακά εργαλεία και με τα άτομα και προκύπτει από την ερμηνεία του ερευνητή.

Συνεπώς, το συγκεκριμένο πεδίο έρευνας φαίνεται να έχει αναδείξει την κατασκευή νοήματος ως ιδιαίτερα κρίσιμη που διέπεται από αρκετούς διαφορετικούς παράγοντες και μάλιστα κατά την εμπλοκή ψηφιακών εργαλείων στο πλαίσιο της σχολικής τάξης. Στην παρούσα διατριβή θεωρούμε ότι η νοηματοδότηση αναφέρεται στη δημιουργία νοήματος μέσα από το σύνολο των δράσεων των μαθητών κατά την αλληλεπίδρασή τους με τα ψηφιακά εργαλεία και τα μέλη της ομάδας. Παράλληλα, ο όρος νοηματοδότηση αποτελεί τη διαδικασία και το αποτέλεσμα της κατασκευής νοήματος, το οποίο όμως μπορεί να εκφράζει και μία γενικότερη κατηγορία αντίστοιχων νοηματοδοτήσεων. Επίσης, η δυνατότητα για μία ομάδα μαθητών να δώσει πιο αφηρημένες νοηματοδοτήσεις σε μία αναπτυξιακή ακολουθία έγκειται στον στοχευμένο σχεδιασμό της δραστηριότητας, στον ρόλο των εργαλείων, στις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού, αλλά και στο κλίμα διερεύνησης που αυτός δημιουργεί εντός της σχολικής τάξης. Συνεπώς, οι μαθησιακές τροχιές ως θεωρητικό πλαίσιο προδιαγράφουν και δημιουργούν σταδιακά το σύνολο των νοηματοδοτήσεων, δηλαδή το αναπτυξιακό μονοπάτι που δημιουργεί μία ομάδα μαθητών. Το ΑεΠ χρησιμοποιείται για να φωτίσει την κάθε νοηματοδότηση ως κατασκευή γνώσης (δηλ. κατασκευή αφαιρετικής διαδικασίας) μέσα στα διαφορετικά μοντέλα. Ακολούθως, φωτίζει τις μεταβάσεις μεταξύ δύο νοηματοδοτήσεων μέσα από τον ρόλο του εκπαιδευτικού και τον ρόλο των εργαλείων. Με αυτό τον τρόπο αναδεικνύονται οι νοηματοδοτήσεις ως αφαιρέσεις σε ένα κοινονικοπολιτισμικό πλαίσιο διερεύνησης.

2.2. Μαθησιακές τροχιές (Learning trajectories)

Ένα κατάλληλο πλαίσιο για την αναλυτική περιγραφή της πορείας της μάθησης των μαθηματικών εννοιών είναι οι μαθησιακές τροχιές, οι οποίες δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στον τρόπο που μαθαίνουν οι μαθητές. Οι μαθησιακές τροχιές (Clements & Sarama, 2009) αποτελούνται από τρία ουσιώδη χαρακτηριστικά: (α) έναν συγκεκριμένο μαθηματικό στόχο, (β) εκπαιδευτικές δραστηριότητες προκειμένου να επιτευχθεί ο μαθηματικός στόχος και (γ) μία περιγραφή της αναπτυξιακής πορείας σκέψης των μαθητών καθώς αυτοί εμπλέκονται με τις δραστηριότητες. Μέσω της περιγραφής της αναπτυξιακής πορείας προκύπτει ο τρόπος που οι μαθητές νοηματοδοτούν ένα μαθηματικό αντικείμενο.

2.2.1. Μαθησιακές τροχιές ως εργαλείο σχεδιασμού

Στο παρελθόν οι μαθησιακές τροχιές έχουν χρησιμοποιηθεί κυρίως ως σχεδιαστικό ερευνητικό εργαλείο για την ανάπτυξη προγραμμάτων σπουδών και σχεδιασμό δραστηριοτήτων, αφού δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στους στόχους που οι μαθητές καλούνται να πετύχουν (Simon, 1995, Clements & Sarama, 2009). Ωστόσο, υπάρχουν έρευνες που χρησιμοποιούν τις μαθησιακές τροχιές ως θεωρητικό και ως μεθοδολογικό εργαλείο. Για παράδειγμα, σχετικά πρόσφατα οι μαθησιακές τροχιές έχουν χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση και τον προσδιορισμό διαφορετικών επιπέδων σκέψης για τη συναρτησιακή σκέψη (Blanton et al., 2015). Οι μαθησιακές τροχιές έχουν χρησιμοποιηθεί επίσης κατά το σχεδιασμό σειράς δραστηριοτήτων με στόχο την μάθηση ως διαδικασία αφαίρεσης (Simon, 2016). Σε αυτή την έρευνα, στην οποία ο μαθησιακός στόχος ήταν η διαίρεση κλασμάτων φάνηκε η ιδιαίτερη σημασία της ανάπτυξης υποθετικής μαθησιακής τροχιάς ως μέρος τους σχεδιασμού για τη διερεύνηση των δράσεων ενός μαθητή κατά την επίλυση των δραστηριοτήτων.

Στην έρευνα σχεδιασμού (design based research) οι μαθησιακές τροχιές αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο σχεδιασμού, το οποίο γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ θεωρίας και διδασκαλίας του ερευνητικού πειράματος και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο (α) στον αρχικό σχεδιασμό, (β) κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του ερευνητικού πειράματος και (γ) στην ανάλυση που ακολουθεί (Bakker & van Eerde, 2015). Συγκεκριμένα, κατά την επιλογή των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούνται δίνεται βάρος στην υποθετική μαθησιακή τροχιά (Simon, 1995, Gravemeijer, 2004), η οποία παρέχει οδηγίες στον εκπαιδευτικό για τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων και αποτελέσματα κατά την εφαρμογή τους. Η υποθετική μαθησιακή τροχιά είναι μία χρήσιμη αρχική υπόθεση του σχεδιασμού του εκπαιδευτικού, η οποία εστιάζει στη στοχευμένη μάθηση, ωστόσο σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να διαφέρει από την πραγματική μαθησιακή τροχιά (Simon, 1995). Ιδιαίτερα στο πεδίο της χρήσης ψηφιακών εργαλείων σε συνδυασμό με την πολυπλοκότητα της δραστηριότητας, η πραγματική μαθησιακή τροχιά μπορεί να είναι διαφορετική εξαιτίας της ποικιλομορφίας των δυνατοτήτων που τα ψηφιακά εργαλεία φέρνουν στο προσκήνιο (Sacristán et al., 2010).

2.2.2. Μαθησιακές τροχιές ως εργαλείο ανάλυσης

Κατά τη διάρκεια της ανάλυσης οι μαθησιακές τροχιές παρέχουν ένα πολύ ισχυρό και ευέλικτο εργαλείο για την καταγραφή της σκέψης των μαθητών, καθώς παρέχουν πρόσφορο πεδίο για αναπροσαρμογή και επανασχεδιασμό. Η σύγκριση της υποθετικής μαθησιακής τροχιάς και της πραγματικής μαθησιακής τροχιάς μπορεί να αναδείξει ομοιότητες και διαφορές στον αναμενόμενο τρόπο σκέψης των μαθητών και να αναδείξει την εξέλιξη της σκέψης των μαθητών. Με αυτό τον τρόπο, οι πραγματικές τροχιές καθορίζουν την ανερχόμενη διαδικασία σκέψης των μαθητών για τη συνάρτηση ως σχέσης μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων από απλές σε πιο σύνθετες μορφές. Ωστόσο, αυτή η διαδικασία δεν είναι αποκλειστική, δηλαδή δεν την ακολουθούν με τον ίδιο τρόπο όλοι οι μαθητές. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να μετακινούνται σε διαφορετικούς τρόπους σκέψης στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας, ανάλογα με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν (Clements & Sarama, 2014), όπως για παράδειγμα ο πειραματισμός με μία διαφορετική λειτουργία των ψηφιακών εργαλείων ή μία αλλαγή στο πλαίσιο της δραστηριότητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μετακινήσεις σε πιο απλές νοηματοδοτήσεις από ένα μαθητή σηματοδοτούν την αντιμετώπιση δυσκολιών στη δραστηριότητα ή προκύπτουν από αλλαγές στο μαθησιακό περιβάλλον (Clements & Sarama, 2014).

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές έρευνες που εστιάζουν στη νοηματοδότηση συναρτησιακών σχέσεων με τη χρήση των μαθησιακών τροχιών (π.χ. Baroody et al., 2004, Clements & Sarama, 2014, Ellis et al., 2013, Blanton et al., 2015, Stephens et al., 2016, Ellis et al., 2016). Πιο συγκεκριμένα ορισμένες από τις έρευνες εστιάζουν στη μελέτη της συνάρτησης ως συμμεταβολής με τη χρήση των μαθησιακών τροχιών. Για παράδειγμα, οι Ellis et al. (2013) εστιάζουν στο πώς οι νοηματοδοτήσεις των μαθητών αλλάζουν όταν αλληλεπιδρούν με δραστηριότητες. Έτσι, με τη χρήση των μαθησιακών τροχιών οι ερευνητές δίνουν έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση της συμμεταβολής και την ανάπτυξή της ως μαθησιακή τροχιά. Στην πρόσφατη βιβλιογραφία αναφέρεται η δημιουργία μαθησιακής τροχιάς που περιλαμβάνει αναφορές στη συμμεταβολή κατά τη γενίκευση αλγεβρικών σχέσεων (Blanton et al., 2015). Στην έρευνα των Blanton et al. (2015) όπως έχει ήδη αναφερθεί στη βιβλιογραφική ανασκόπηση έγινε χρήση των μαθησιακών τροχιών και τα αποτελέσματα υποδεικνύουν οκτώ επίπεδα σκέψης των μαθητών για τις συναρτησιακές σχέσεις. Το θεωρητικό πλαίσιο των μαθησιακών τροχιών χρησιμοποιήθηκε στην ανάλυση ως μέσο για την οριοθέτηση των διαφορετικών επιπέδων σκέψης των μαθητών για τις συναρτησιακές σκέψης, ορίζοντας σε κάθε επίπεδο τις χαρακτηριστικές δράσεις των μαθητών, αλλά και τους περιορισμούς σε σχέση με το επόμενο επίπεδο. Σε άλλη έρευνα ερευνώνται επίπεδα σκέψης για τη συμμεταβολή και την αντιστοιχία σχετικά με την εκθετική αύξηση (Ellis et al., 2016). Αυτή η τροχιά δημιουργήθηκε προκειμένου να χαρακτηριστεί η κατανόηση των μαθητών γυμνασίου σε μία σειρά από δραστηριότητες με έμφαση στη συμμεταβολή. Η μαθησιακή τροχιά είχε τη δυνατότητα να αναδείξει τον τρόπο που οι μαθητές κατανοούν την εκθετική αύξηση μέσα από διαφορετικές νοηματοδοτήσεις αντιστοιχίας και συμμεταβολής.

Στην παρούσα έρευνα οι μαθησιακές τροχιές χρησιμοποιούνται στον σχεδιασμό κατά τη δημιουργία των υποθετικών μαθησιακών τροχιών και στην ανάλυση για να περιγράψουν τις πραγματικές μαθησιακές τροχιές των μαθητών που προκύπτουν κατά τη διάρκεια της εφαρμογής των δραστηριοτήτων. Επιλέχθηκαν οι μαθησιακές τροχιές γιατί επιτρέπουν στον ερευνητή να μελετάει διαφορετικούς τρόπους σκέψης ορίζοντας με διαφορετικό τρόπο τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων από απλές σε πιο σύνθετες νοηματοδοτήσεις με στόχο τη δημιουργία μίας ανερχόμενης αναπτυξιακής διαδικασίας για τη συνάρτηση και τον ρυθμό μεταβολής. Το θεωρητικό πλαίσιο των Carlson et al. (2002) για την κατανόηση της συμμεταβολής, το οποίο αναφέρεται ξεκάθαρα στον ρυθμό μεταβολής αποτέλεσε έμπνευση στην ανάπτυξη μίας υποθετικής αναπτυξιακής τροχιάς για την πιθανή εξέλιξη της σκέψης των μαθητών κατά τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων περιλαμβάνοντας τον πειραματισμό με τα ψηφιακά εργαλεία. Οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες επιλέχθηκαν ώστε να διευκολύνουν την πορεία των μαθητών σε μία εξελικτική πρόοδο με στόχο την χαρτογράφηση των νοημάτων που κατασκευάζουν οι μαθητές. Ακόμη, κατά τη διάρκεια διεξαγωγής της ερευνητικής διαδικασίας οι μαθησιακές τροχιές εμπλουτίζουν την πορεία εκτέλεσης των δραστηριοτήτων με στοιχεία που έρχονται από την αρχική εφαρμογή επηρεάζοντας τις αρχικές μαθησιακές τροχιές. Αυτό πρόκειται για ένα στοιχείο της έρευνας σχεδιασμού, το οποίο έλαβε χώρα στην παρούσα έρευνα. Συγκεκριμένα, στη δεύτερη φάση σχεδιασμού και εφαρμογής έγινε τροποποίηση και ένταξη ερωτημάτων στη δεύτερη δραστηριότητα από τη μελέτη των διαλόγων των μαθητών κατά την πρώτη φάση εφαρμογής. Έτσι, ανάλογα με την πορεία σκέψης των μαθητών σημειώνονται οι νοηματοδοτήσεις των μαθητών ορίζοντας τις πραγματικές μαθησιακές τροχιές. Στο επίπεδο της ανάλυσης, η σύγκριση μεταξύ της υποθετικής μαθησιακής τροχιάς και της πραγματικής μαθησιακής τροχιάς επιτρέπει την περιγραφή της αναπτυξιακής πορείας των μαθητών σε σχέση με τις αναμενόμενες νοηματοδοτήσεις.

2.3. Αφαίρεση εντός Πλαισίου (Abstraction in Context)

Στην παρούσα έρευνα θεωρείται η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών ως αφαιρετική διαδικασία σε πλαίσιο (context). Στόχος είναι η δυνατότητα ανάλυσης του ρόλου του πλαισίου εφαρμογής και των διαθέσιμων μέσων στη μαθησιακή διαδικασία και συνεπώς χρησιμοποιείται η Αφαίρεση εντός Πλαισίου (ΑεΠ) (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001, Schwarz, Dreyfus & Hershkowitz, 2009, Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz, 2015). Το θεωρητικό πλαίσιο ΑεΠ έχει χρησιμοποιηθεί ως θεωρητικό και μεθοδολογικό εργαλείο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση της κατασκευής της μαθηματικής γνώσης μέσα από την ανάλυση επεισοδίων που έλαβαν χώρα στη σχολική τάξη. Αυτό το θεωρητικό πλαίσιο βασίζεται σε δύο πυλώνες: από τη μία βασίζεται στην ιδέα του Davidov για την ανάγκη για αφαίρεση και από την άλλη στην ιδέα του Freudenthal για κάθετη μαθηματικοποίηση. Έτσι, η αφαίρεση ορίζεται ως διαδικασία κάθετης αναδιοργάνωσης της προηγούμενης γνώσης των μαθητών (Dreyfus et al., 2015).

2.3.1. Κύρια στοιχεία της Αφαίρεσης εντός Πλαισίου

Σύμφωνα με το ΑεΠ, οι αφαιρετικές διαδικασίες αποτελούνται από τρία στάδια: την ανάγκη, την εμφάνιση και την παγιοποίηση. Αρχικά, οι μαθητές νιώθουν την ανάγκη για αφαίρεση σχετιζόμενη με ένα συγκεκριμένο έργο. Έπειτα, το στάδιο της εμφάνισης αναφέρεται στην εμφάνιση μίας νέας γνώσης για ένα μαθητή σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, η οποία μπορεί να επιμεριστεί σε στοιχεία γνώσης (knowledge elements), τα οποία είναι μικρότερες μονάδες γνώσης. Τα στοιχεία γνώσης αποτελούν αναμενόμενα και ιεραρχικά δομημένα στοιχεία γνώσης, τα οποία ορίζονται στην εκ των προτέρων ανάλυση μίας δραστηριότητας. Στο ΑεΠ παίζει καθοριστικό ρόλο η εκ των προτέρων (a priori) ανάλυση (Dreyfus et al., 2015). Πιο συγκεκριμένα, μία δραστηριότητα σχεδιάζεται προς νέες κατασκευές και γίνονται υποθέσεις σχετικά με τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών. Ο στόχος της εκ των προτέρων ανάλυσης είναι να εντοπίσει στοιχεία γνώσης από τον σχεδιασμό σχετικά με την ανάπτυξη νέας μαθηματικής γνώσης. Έτσι, η εκ των προτέρων ανάλυση σχετίζεται ιδιαίτερα με την επιλογή των στοιχείων γνώσης εκ των προτέρων. Ο καθορισμός των στοιχείων γνώσης λειτουργεί ως δομή για την κατασκευή της μαθηματικής γνώσης μέσω αφαιρέσεων. Ωστόσο, επειδή εξυπηρετεί ως υπόθεση, μπορεί αργότερα να επιβεβαιωθεί ή να τροποποιηθεί από την ανάλυση των δεδομένων (Dreyfus et al., 2015).

Το στάδιο της εμφάνισης της νέας γνώσης διαπραγματεύονται τρεις επιστημικές δράσεις σύμφωνα με το μοντέλο RBC: (α) η *Αναγνώριση (Recognizing - R)* μίας προηγούμενης κατασκευής ως σχετική με την προβληματική κατάσταση, (β) η *Επαναδόμηση (Building-With - BW)* υπάρχουσας γνώσης για την επίτευξη ενός συγκεκριμένου στόχου (π.χ. την λύση ενός προβλήματος) και (γ) η *Κατασκευή (Constructing - C)* της νέας γνώσης μέσω της αλληλεπίδρασης με προηγούμενες κατασκευές (Dreyfus et al., 2015). Η πιο σημαντική από τις επιστημικές δράσεις του RBC μοντέλου είναι η κατασκευή καθώς αναφέρεται στη δημιουργία ή τη χρήση νέας γνώσης από τον μαθητή για πρώτη φορά σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο. Οι μαθητές καθώς εξοικειώνονται με τις κατασκευές, τις χρησιμοποιούν με αυτοπεποίθηση και ευελιξία καταλήγοντας στην παγιοποίηση της κατασκευής, η οποία εκφράζεται από μία σειρά από επαναλαμβανόμενες δραστηριότητες επαναδόμησης (Dreyfus & Tsamir, 2004). Επίσης, οι τρεις επιστημικές δράσεις είναι εμφωλευμένες δυναμικά με την έννοια ότι οι R- και B- δράσεις, οι οποίες σχετίζονται με την αναγνώριση και την επαναδόμηση αντίστοιχα, είναι εμφωλευμένες μέσα στις C-δράσεις, ενώ οι R-δράσεις με τις C-δράσεις είναι εμφωλευμένες μέσα στις B-δράσεις κοκ.. Στο μοντέλο RBC η παγιοποίηση *(Consolidation - C)*, είναι μία πρόσθετη επιστημική δράση που αναφέρεται στην ευελιξία αξιοποίησης μίας κατασκευής σε ένα πλαίσιο επεκτείνοντας το μοντέλο των επιστημικών δράσεων στο RBC + C.

2.3.2. Ο ρόλος του πλαισίου στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών

Ως πλαίσιο θεωρείται μία προσωπική και κοινωνική κατασκευή η οποία περιλαμβάνει το περιβάλλον μάθησης, δηλαδή το κοινωνικό και ατομικό παρελθόν μάθησης του μαθητή, αντιλήψεις, τεχνουργήματα και κοινωνικές αλληλεπιδράσεις των μαθητών (Hershkowitz et al., 2001). Ειδικότερα, το κοινωνικό πλαίσιο και η αλληλεπίδραση στο πλαίσιο της τάξης μπορεί να διαφέρει αρκετά σε διαφορετικές τάξεις σύμφωνα με τις επιλογές του εκάστοτε εκπαιδευτικού (Dreyfus, 2012). Συνεπώς, φαίνεται ότι στο θεωρητικό πλαίσιο ΑεΠ το πλαίσιο περιλαμβάνει τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού. Ιδιαίτερα σε ένα κλίμα διερεύνησης ο ρόλος του εκπαιδευτικού, των εργαλείων και των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούνται φαίνεται να διαδραματίζει περισσότερο κρίσιμο ρόλο. Στην παρούσα έρευνα αποτελεί αναπόσπαστο μέρος το πλαίσιο εφαρμογής, το οποίο θεωρήσαμε ότι στοιχειοθετείται από τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και τον ρόλο των εργαλείων εστιάζοντας ιδιαιτέρως στα ψηφιακά εργαλεία.

Στη βιβλιογραφία έχουν μελετηθεί οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού, καθώς αποτελεσματικές παρεμβάσεις προάγουν την κατανόηση εννοιών από τους μαθητές (Kosko, Rougee & Herbst, 2014). Πιο συγκεκριμένα, η έρευνα των Kosko et al. (2014) έχουν αναπτύξει πλαίσιο ανάλυσης για τον τύπο των ερωτήσεων που θέτει ο εκπαιδευτικός: (α) δήλωση καθηγητή, (β) σιωπή καθηγητή και (γ) άλλες ερωτήσεις. άλλες έρευνες φαίνεται να εστιάζουν σε κωδικοποιήσεις ερωτήσεων (Boaler & Brodie, 2004, Franke et al., 2009). Οι ερευνητές έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί παρεμβαίνουν με διάφορους τρόπους (π.χ. δήλωση καθηγητή ή σιωπή καθηγητή), ωστόσο μερικές παρεμβάσεις τους αφήνουν τους μαθητές σχεδόν αβοήθητους, το οποίο δεν βοηθά στην υποστήριξη της κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Στη βιβλιογραφία έχει υποδειχθεί ο κρίσιμος ρόλος του εκπαιδευτικού ιδιαίτερα σε ένα διερευνητικό πλαίσιο, αφού εγκαθιστά νόρμες που ενισχύουν τη διερεύνηση πλούσιων δραστηριοτήτων (Sullivan et al., 2013). Έτσι, φαίνεται να δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στη μελέτη της συμβολής του εκπαιδευτικού κατά τη διευκόλυνση των μαθητών να κάνουν ερμηνείες (Franke et al., 2009). Πρόσφατη εστίαση στις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού, οι οποίες υποστηρίζουν την κατανόηση των μαθητών (Ellis et al., 2019) διαχωρίζει τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού σε: (α) εκμαίευσης (π.χ. εκμαίευση ιδεών, νοηματοδοτήσεων και εξηγήσεων), (β) απάντησης (π.χ. διόρθωση λαθών των μαθητών, επανάληψη και αξιολόγηση μίας απάντησης), (γ) διευκόλυνσης (π.χ. παροχή βοήθειας) και (δ) επέκτασης (π.χ. ενδυνάμωση της σκέψης, αναζήτηση δικαιολόγησης, πίεση για γενίκευση). Μέσα από αυτό τον διαχωρισμό για τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού φαίνεται ότι υπάρχουν κατηγορίες που άλλοτε βοηθούν περισσότερο και άλλοτε λιγότερο τους μαθητές στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Έτσι, για παράδειγμα η διόρθωση λάθους ενός μαθητή βοηθά λιγότερο την κατανόηση από το να οδηγηθεί ο μαθητής να διορθώσει το λάθος του. Συνεπώς, αυτός ο διαχωρισμός φαίνεται να είναι ιδιαίτερα κρίσιμος για την ανάλυση των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού κατά την υποστήριξη των διαφορετικών κατανοήσεων των μαθητών στο πλαίσιο της σχολικής τάξης.

2.3.3. Το θεωρητικό πλαίσιο ΑεΠ στην υπάρχουσα βιβλιογραφία

Το θεωρητικό πλαίσιο ΑεΠ έχει χρησιμοποιηθεί στη βιβλιογραφία με διαφορετικούς τρόπους. Ένας τρόπος είναι σχετικός με τις συναρτήσεις στην ανάγκη διατύπωσης ορισμού από ζεύγη μαθητών για μία εφαπτομένη συνάρτησης για ένα δοθέν σημείο (Gilboa et al., 2019). Στη συγκεκριμένη έρευνα προέκυψε ότι η κατασκευή της έννοιας δεν περιλαμβάνει απαραίτητα την κατασκευή του ορισμού της, καθώς οι μαθητές μπόρεσαν να χρησιμοποιήσουν την έννοια πριν κατασκευάσουν τον ορισμό της. Πρόσφατα το ΑεΠ χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο σχεδιασμού και ανάλυσης σε έρευνα σχετικά με την κατανόηση της συνάρτησης κατά την μοντελοποίηση μίας σειράς δραστηριοτήτων που σχετίζονταν με μεταβολές (Best & Bikner-Ahsbahs, 2017). Σε αυτή την έρευνα προέκυψε η σημασία κατανόησης του συστήματος συντεταγμένων και της αξιοποίησής του ως πεδίο αναφοράς για τις γραφικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Το ΑεΠ επίσης έχει χρησιμοποιηθεί για πιο αφηρημένες έννοιες, όπως το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και την κατασκευή της επιτάχυνσης (Kouropatov & Dreyfus, 2014). Από την άλλη το θεωρητικό πλαίσιο ΑεΠ έχει χρησιμοποιηθεί και σε συνδυασμό με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων (π.χ. Kidron & Dreyfus, 2010), αναδεικνύοντας μοτίβα επιστημικών δράσεων που αναπτύσσονται και διευκολύνονται από συγκεκριμένους παράγοντες όπως για παράδειγμα η χρήση του ψηφιακού εργαλείου. Έτσι, φαίνεται η συμβατότητά του τόσο στο πλαίσιο της μελέτης συναρτησιακών σχέσεων σε ομάδες μαθητών όσο και στη δυνατότητα χρήσης ψηφιακών εργαλείων. Συνεπώς, το θεωρητικό πλαίσιο ΑεΠ μπορεί να ερμηνεύσει διάφορους παράγοντες που σχετίζονται με το πλαίσιο (π.χ. τον ρόλο των εργαλείων, το πλαίσιο των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης, τις δράσεις του εκπαιδευτικού, κ.α.), αλλά και την κοινωνικοπολιτισμική οπτική της διαδικασίας μάθησης. Παράλληλα, διαθέτει έναν ισχυρό γνωστικό πυλώνα δίνοντας τη δυνατότητα να αναλυθεί η κατασκευή της γνώσης ως διαδικασία συνεχόμενων αφαιρέσεων. Καταλήγοντας, το ΑεΠ κρίνεται κατάλληλο τόσο από θεωρητικής και μεθοδολογικής σκοπιάς όσο και από την πλευρά της ανάλυσης, επιτρέποντας την λεπτομερή αναγνώριση και καταγραφή των παραγόντων του πλαισίου που επηρεάζουν την κατασκευή αφαιρετικών διαδικασιών.

Στην παρούσα έρευνα, χρησιμοποιείται το ΑεΠ ως θεωρητικό πλαίσιο για τον σχεδιασμό της σειράς δραστηριοτήτων καθώς επίσης και για την ανάλυση των διαλόγων στο πλαίσιο της τάξης (είτε μεταξύ μαθητών είτε μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού) εστιάζοντας στις κατασκευές των μαθητών. Συμπερασματικά, χρησιμοποιώντας το ΑεΠ μπορούμε να φωτίσουμε την εμφάνιση της ανερχόμενης διαδικασίας νοηματοδότησης των μαθητών για τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Παράλληλα, με το ΑεΠ δίνεται η δυνατότητα ερμηνείας του ρόλου του πλαισίου μέσα από τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και του ρόλου των διαθέσιμων ψηφιακών εργαλείων κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων.

2.4. Αιτιολόγηση της χρήσης θεωρητικών οπτικών

Συνοψίζοντας, χρησιμοποιούμε τα δύο θεωρητικά πλαίσια και στον σχεδιασμό και στην ανάλυση. Η «διπλή ανάλυση» είναι αποτέλεσμα μίας πιο βαθιάς και ισορροπημένης κατανόησης της φύσης των μαθησιακών καταστάσεων για συναρτήσεις και της διαδικασίας νοηματοδότησης της συνάρτησης από τους μαθητές (Lagrange & Psycharis, 2014). Συγκεκριμένα, ο Lagrange (2014) αναφέρει ότι η κατανόηση των ιδιαιτεροτήτων του θεωρητικού πλαισίου της έρευνας αναδεικνύει ως σημαντικό πεδίο τη διερεύνηση «κοιτώντας από την έξω πλευρά» για να εκτιμηθούν καλύτερα οι ικανότητες του πλαισίου, πέρα από τους περιορισμούς του. Έτσι, περιγράφοντας τις δυνατότητες και τους περιορισμούς κάθε μίας από τις παραπάνω κατευθύνσεις σκιαγραφείται ο τρόπος με τον οποίο θα χρησιμοποιηθούν και θα συνδεθούν τα ανωτέρω θεωρητικά πλαίσια. Με αυτή την έννοια, ο συνδυασμός των δύο θεωρητικών πλαισίων των μαθησιακών τροχιών και του ΑεΠ στην παρούσα έρευνα αφορά την υιοθέτηση αυτού του διπλού φακού στις φάσεις του σχεδιασμού και της ανάλυσης.

Συγκεκριμένα, στη φάση του σχεδιασμού οι μαθησιακές τροχιές ενημερώνουν τη δημιουργία των δραστηριοτήτων σχετικά με το πιθανό μονοπάτι που θα ακολουθήσουν οι μαθητές και τις υποθετικές μαθησιακές τροχιές λαμβάνοντας υπόψη τις υπάρχουσες έρευνες γύρω από τη συμμεταβολή και τα είδη των ποσοτήτων (π.χ. ποσότητες, μεγέθη) που συμμετέχουν. Από την άλλη, τα στοιχεία γνώσης του ΑεΠ εμπλουτίζουν το υπάρχον μαθησιακό μονοπάτι φωτίζοντας την κατασκευή αφαιρέσεων στις διαφορετικές νοηματοδοτήσεις, οι οποίες κατασκευάζονται μέσα στα διαφορετικά μοντέλα. Έτσι η κάθε νοηματοδότηση διαιρείται σε μικρότερα στοιχεία ως μέρος της εκ των προτέρων ανάλυσης του ΑεΠ.

Στο πρώτο μέρος της ανάλυσης οι μαθησιακές τροχιές χρησιμοποιούνται για να ορίσουμε την εξέλιξη στην ανερχόμενη εξελικτική διαδικασία που παράγεται από τις διαφορετικές νοηματοδοτήσεις και το ΑεΠ για να δείξουμε στη μικροκλίμακα την κατασκευή νέας γνώσης ως αφαιρετικής διαδικασίας. Έτσι, χρησιμοποιούμε τις μαθησιακές τροχιές και το ΑεΠ για να ορίσουμε την εξελικτική διαδικασία νοηματοδοτήσεων για τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Στο δεύτερο μέρος της ανάλυσης, το ΑεΠ χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τις υπάρχουσες κατηγοριοποιήσεις για τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού (π.χ. σχετικά με τις παιδαγωγικές παρεμβάσεις), προκειμένου να σκιαγραφήσει τόσο την εξέλιξη της σκέψης εντός των μαθησιακών τροχιών, όσο και τις μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών νοηματοδοτήσεων. Έτσι, στο δεύτερο μέρος της ανάλυσης το ΑεΠ χρησιμοποιείται προκειμένου να υποδείξει τον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων ως στοιχείων του πλαισίου κατά την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων των μαθητών. Συνεπώς, με τη χρήση του ΑεΠ και των κατηγοριοποιήσεων για τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού υποδεικνύεται η επίδραση των στοιχείων του πλαισίου μέσα από (α) τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και (β) τον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων.

3. Μεθοδολογία

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται αναλυτικά η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στην παρούσα έρευνα. Αρχικά, τίθενται τα ερευνητικά ερωτήματα και ακολουθεί η περιγραφή του πλαισίου της έρευνας δίνοντας αρκετές λεπτομέρειες για τα χαρακτηριστικά της έρευνας. Ακολουθεί εν συντομία η ενημέρωση της κυρίως έρευνας από την πιλοτική έρευνα, η περιγραφή του λογισμικού Casyopée και των δυνατοτήτων του, καθώς και ο αρχικός σχεδιασμός και η οριστικοποίηση των δραστηριοτήτων. Κατόπιν γίνεται εκ των προτέρων ανάλυση των δραστηριοτήτων σύμφωνα με τα θεωρητικά πλαίσια που έχουν επιλεγεί. Τέλος, δίνονται πληροφορίες για τη συλλογή δεδομένων και τη μέθοδο ανάλυσης, δηλαδή για τον τρόπο που έγινε η ανάλυση δεδομένων.

3.1. Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι τα ακόλουθα:

1. Με ποιους τρόπους εξελίσσεται η σκέψη των μαθητών Β΄ Λυκείου καθώς νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων στο πλαίσιο δραστηριοτήτων μοντελοποίησης που περιλαμβάνουν τη χρήση χειραπτικών εργαλείων και ψηφιακών εργαλείων;
2. Ποιος είναι ο ρόλος των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού και του ρόλου των ψηφιακών εργαλείων στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών;

Επίσης, στόχος είναι να τονιστούν οι συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων και ο ρόλος των συνδέσεων στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών.

3.2. Το πλαίσιο της έρευνας

Στη βάση της μεθοδολογικής μας προσέγγισης βρίσκεται η παραδοχή ότι η μελέτη της χρήσης της ψηφιακής τεχνολογίας στην έρευνα της μάθησης των μαθηματικών είναι άρρηκτα συνδεδεμένη και συνυφασμένη με την έρευνα της μαθησιακής διαδικασίας στην σχολική τάξη. Η παρούσα έρευνα χαρακτηρίζεται ως έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003, Prediger, Gravemeijer & Confrey, 2015) καθώς: (α) βασίζεται σε καινοτομικές διδακτικές εφαρμογές στο σχολικό πλαίσιο, (β) στοχεύει στη δημιουργία θεωρίας λαμβάνοντας υπόψη τη διδακτική πράξη και τα μέσα που την υποστηρίζουν, (γ) είναι αναστοχαστική, με την έννοια ότι ο σχεδιασμός ενημερώνεται από τη θεωρία και (δ) είναι προσανατολισμένη στην καθημερινή σχολική πρακτική.

Σύμφωνα με την οπτική της έρευνας σχεδιασμού στην παρούσα έρευνα υπήρξε πιλοτική εφαρμογή και δύο φάσεις σχεδιασμού και εφαρμογής δραστηριοτήτων σε σχολικές τάξεις. Ο υποψήφιος διδάκτορας (ονομάζεται ερευνητής στο εξής) οργάνωσε και διεξήγαγε αρχικά την πιλοτική έρευνα. Η πιλοτική έρευνα βοήθησε τον ερευνητή στον σχεδιασμό της 1ης φάσης εφαρμογής (κύκλος σχεδιασμού) και αυτή με τη σειρά της διαμόρφωσε τη 2η φάση σχεδιασμού και εφαρμογής (κύκλος επανασχεδιασμού). Πιο συγκεκριμένα, στην πιλοτική έρευνα σχεδιάστηκαν δύο δραστηριότητες μοντελοποίησης εμπνευσμένες από αυθεντικό χώρο εργασίας, από τις οποίες προέκυψε ότι η κρισιμότητα της σύνδεσης με την αυθεντικότητα. Στην 1η φάση σχεδιασμού και εφαρμογής αρχικά σχεδιάστηκαν τρεις δραστηριότητες μοντελοποίησης (*Σχεδιασμός Υδρορροής*, *Πρόσοψη Καταστήματος*, *Δεξαμενή Πετρελαίου*) έχοντας ως αφετηρία αυθεντικές καταστάσεις από κάποιο χώρο εργασίας (π.χ. σχεδιαστή, αρχιτέκτονα, πωλητή πρατηρίου καυσίμων). Για τον λόγο αυτό αναπτύχθηκε συνεργασία με επαγγελματίες από τον κάθε χώρο με αποτέλεσμα τον σχεδιασμό και τη συνεχή τροποποίηση δραστηριοτήτων που έχουν διαφορετικές αποστάσεις από την εκάστοτε αυθεντική κατάσταση. Συγκεκριμένα, οι δραστηριότητες δέχτηκαν αρκετές τροποποιήσεις τόσο από τους επαγγελματίες για να ανταποκρίνονται τα ερωτήματα στην πραγματικότητα, όσο και μετά από συναντήσεις με εκπαιδευτικούς ή ερευνητές για να μπορούν να εφαρμοστούν στις σχολικές τάξεις και να έχουν νόημα για τους μαθητές (βλέπε Παράρτημα - ημερολόγιο σχεδιασμού/τροποποιήσεων των δραστηριοτήτων). Πραγματοποιήθηκαν δύο τετράωρες συναντήσεις με τον αρχιτέκτονα για τον σχεδιασμό των δύο πρώτων δραστηριοτήτων και δύο τετράωρες συναντήσεις με τον πωλητή πρατηρίου καυσίμων για τον σχεδιασμό της τελευταίας δραστηριότητας. Μετά την οριστικοποίηση των δραστηριοτήτων για την 1η φάση ακολούθησε η εφαρμογή σε δύο σχολεία και κατόπιν οι δραστηριότητες επανασχεδιάστηκαν για να εφαρμοστούν σε ένα σχολείο στη 2η φάση εφαρμογής.

Συνολικά, οι δραστηριότητες εφαρμόστηκαν σε τρία σχολεία της Αθήνας (σχολείο Α, Β, Γ) σε συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς (Στέλιος, Γιώργος, Άννα τα αντίστοιχα ψευδώνυμα) σε διάστημα δύο ετών (ως κύκλοι σχεδιασμού και επανασχεδιασμού). Τα σχολεία Α και Β αποτέλεσαν την 1η φάση, ενώ το σχολείο Γ τη 2η φάση. Οι δραστηριότητες αναφέρονταν σε ρεαλιστικά προβλήματα μεγιστοποίησης και η αλληλουχία τους ήταν τέτοια ώστε η συμμεταβολή να εμφανίζεται από απλές σε περισσότερο σύνθετες καταστάσεις, σύμφωνα με τις μαθησιακές τροχιές που αναμένονταν. Η αλληλουχία των δραστηριοτήτων εφαρμόστηκε σε σχολικές τάξεις λαμβάνοντας υπόψη τα χαρακτηριστικά της διερευνητικής μάθησης, όπως η κουλτούρα επίλυσης προβλήματος, η διερεύνηση, η αυτόνομη μάθηση, η συνεργασία μεταξύ μαθητών και η εργασία των μαθητών με επιστημονικό τρόπο (Artigue & Baptist, 2012).

Όλες οι δραστηριότητες ακολούθησαν αντίστοιχη εφαρμογή στα τρία σχολεία: (α) προβολή ενός μικρής διάρκειας βίντεο (1-2 λεπτών) σχετικό με την αυθεντική κατάσταση για να βοηθήσει τους μαθητές να συνδέσουν τη δραστηριότητα με την προβληματική κατάσταση (π.χ. εργαζόμενοι που διπλώνουν μία λαμαρίνα ώστε να φτιάξουν μία υδρορροή), (β) μία αρχική συζήτηση σε όλη την τάξη για να έρθουν στη συζήτηση στοιχεία της αυθεντικής πρακτικής και να μπορούν οι μαθητές να αναγνωρίσουν τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες καθώς εργάζονται στα διαφορετικά μοντέλα, (γ) κύκλοι αυτόνομης εργασίας των ομάδων μαθητών με σχετικές συζητήσεις ή παρουσιάσεις στην τάξη για την πρόοδό τους και (δ) μία τελική παρουσίαση και συζήτηση σχετικά με τις προτεινόμενες λύσεις των μαθητών. Η εφαρμογή της αλληλουχίας των δραστηριοτήτων σε κάθε σχολείο διήρκησε περίπου 2-3 μήνες.

Στον ακόλουθο πίνακα αναφέρονται τα βασικά στοιχεία σχεδιασμού και εφαρμογής για τις δύο φάσεις (Πίνακας 1):

1η Φάση (2015-2016)	**2η Φάση (2016-2017)**
Σχολείο Α (πειραματικό) και σχολείο Β (γενικό): 14 και 10 ώρες αντίστοιχα	Σχολείο Γ (πειραματικό): 8 ώρες
Β΄ Λυκείου: 23 μαθητές – κυρίως ομάδες των τριών	Β΄ Λυκείου: 25 μαθητές – κυρίως ομάδες των δύο

Δομημένες δραστηριότητες χρησιμοποιώντας υποερωτήματα (π.χ. ζητήθηκε ο πειραματισμός με τα χειραπτικά εργαλεία με σχετικό ερώτημα)	Πιο ανοικτές δραστηριότητες – δόθηκε έμφαση στο κεντρικό ερώτημα (π.χ. προέκυψε ο πειραματισμός με τα χειραπτικά εργαλεία από μαθητές/εκπαιδευτικό)
Συνεντεύξεις από τρεις ομάδες (1 ώρας) στο τέλος της εφαρμογής των δραστηριοτήτων	Συνεντεύξεις (45 λεπτών) στο τέλος κάθε δραστηριότητας

Πίνακας 1: Φάσεις σχεδιασμού και εφαρμογής

Σε κάθε σχολείο οι μαθητές είχαν διδαχθεί τη συνάρτηση σύμφωνα με το ελληνικό πρόγραμμα σπουδών, το οποίο δίνει έμφαση στην προσέγγιση της συνάρτησης ως αντιστοιχίας, ενώ η αναφορά στη συμμεταβολή ήταν αρκετά περιορισμένη έως ανύπαρκτη. Ειδικότερα στη 2η φάση (κύκλος επανασχεδιασμού) ο εκπαιδευτικός και ο ερευνητής είχαν τρεις πεντάωρες συναντήσεις (βλέπε Παράρτημα) με σκοπό τον επανασχεδιασμό των δραστηριοτήτων και συζήτηση σχετικά με τον τρόπο που εφαρμόστηκαν στον πρώτη φάση εφαρμογής. Έτσι, η 1η φάση σχεδιασμού και εφαρμογής ενημέρωσε τη 2η φάση ως εξής: (α) δίνοντας έμφαση και χρόνο στην αρχική συζήτηση για την εμπλοκή των μαθητών στην δραστηριότητα μοντελοποίησης, (β) ενδυναμώνοντας τη διερευνητική διάσταση των δραστηριοτήτων, ώστε να γίνουν πιο ανοικτές. Περισσότερες λεπτομέρειες για τον σχεδιασμό και τις τροποποιήσεις των δραστηριοτήτων βρίσκονται στην ενότητα 3.5 και στο Παράρτημα.

Ο εκπαιδευτικός της τάξης και ένας ερευνητής είχαν συναντήσεις σχεδιασμού ή επανασχεδιασμού (βλέπε Παράρτημα) σχετικά με την εφαρμογή των δραστηριοτήτων και τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων στη σχολική τάξη, ώστε να μπορεί ο ερευνητής να επεμβαίνει ανεξάρτητα στις ομάδες μαθητών. Κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων, ο εκπαιδευτικός εφάρμοζε τις δραστηριότητες και είχε τον ρόλο του διευκολυντή προκαλώντας παράλληλα τους μαθητές με συγκεκριμένες αναφορές στο αυθεντικό πλαίσιο της δραστηριότητας. Ο ερευνητής είχε τον ρόλο συμμετοχικού παρατηρητή και προκαλούσε τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους εντός της ομάδας εργασίας. Η ομάδα εστίασης (μία ανά σχολείο) επιλέχθηκε σε συνεργασία με τον εκπαιδευτικό ανάλογα με την ενασχόληση των μαθητών με τα Μαθηματικά, την εξωστρέφειά τους και το βαθμό πειραματισμού τους στην φάση εξοικείωσης με το Casyopée. Ο εκπαιδευτικός είχε ενημερωθεί ότι μόνο ο ερευνητής μπορούσε να παρέμβει σε αυτήν. Χρησιμοποιήθηκαν δύο κάμερες και τέσσερις συσκευές ηχογράφησης για τη συλλογή δεδομένων σε κάθε σχολείο καλύπτοντας την ομάδα εστίασης και το σύνολο της διερεύνησης στην τάξη (βλέπε ενότητα 3.7).

3.3. Η πιλοτική φάση της έρευνας

Η πιλοτική έρευνα προηγήθηκε χρονικά από τις φάσεις σχεδιασμού και επανασχεδιασμού και έλαβε χώρα σε ένα γενικό λύκειο της Αττικής, στην οποία εφαρμόστηκαν δύο δραστηριότητες (Δημιουργία Καναλιού, Μεταφορική) και ένα μαθηματικό πρόβλημα μοντελοποίησης. Οι δραστηριότητες περιείχαν ερωτήματα και υποερωτήματα και ήταν σχεδιασμένες σύμφωνα με τον κύκλο μοντελοποίησης. Η πιλοτική έρευνα διήρκησε συνολικά πέντε ώρες και έλαβε χώρα σε δύο επισκέψεις στο σχολείο. Ο κύριος στόχος της πιλοτικής έρευνας ήταν να δοκιμαστεί το περιεχόμενο της φάσης εξοικείωσης με το λογισμικό, η καταλληλότητα των δραστηριοτήτων και ερευνητικές επιλογές που αφορούν τη συλλογή δεδομένων.

Σχετικά με τα ευρήματα της πιλοτικής έρευνας παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές γνώριζαν αρκετές λεπτομέρειες στο λογισμικό Casyopée που δεν ήταν απαραίτητες για τη μοντελοποίηση των δραστηριοτήτων. Παράλληλα, ορισμένοι μαθητές εμφάνιζαν δυσκολίες στη δημιουργία γεωμετρικών αντικειμένων, μετρήσεων και συναρτήσεων. Έτσι, αναφορικά με την εξοικείωση του λογισμικού από τα ευρήματα της πιλοτικής έρευνας προέκυψε η ανάγκη μεγαλύτερης και πιο στοχευμένης εξοικείωσης με τη δημιουργία γεωμετρικών αντικειμένων (π.χ. εισαγωγή περιορισμών), τις μετρήσεις και τη δημιουργία συναρτήσεων.

Ένα άλλο εύρημα της πιλοτικής έρευνας ήταν ότι οι μαθητές δεν έμπαιναν αρκετά βαθιά στο ρόλο του επαγγελματία και μερικές φορές δεν έκαναν καθόλου συνδέσεις με το πλαίσιο της δραστηριότητας. Μάλιστα, ένας μαθητής μπορούσε να λύσει τη δραστηριότητα της Μεταφορικής χωρίς τη μοντελοποίηση στο λογισμικό Casyopée. Έτσι, από τα ευρήματα της πιλοτικής έρευνας προέκυψε ότι η αυθεντικότητα της κατάστασης θα πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη για την κυρίως έρευνα. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την τροποποίηση της δραστηριότητας Δημιουργία Καναλιού από τον ερευνητή με τελικό αποτέλεσμα τη δραστηριότητα Σχεδιασμός Υδρορροής, ώστε να ανταποκρίνεται περισσότερο στην αυθεντική πρακτική του σχεδιαστή. Επιπροσθέτως, ακολούθησε διαγραφή της δραστηριότητας Μεταφορικής, από τον ερευνητή καθώς το κεντρικό ερώτημα δεν ήταν αυθεντικό και μπορούσε να απαντηθεί χωρίς τη δημιουργία συνάρτησης. Επίσης, τα ερωτήματα της δραστηριότητας έγιναν μικρότερα και πιο σαφή, ενώ υποστηρίχθηκε η επαναφορά στο πραγματικό πλαίσιο. Μάλιστα, έγιναν τροποποιήσεις στα ερωτήματα των δραστηριοτήτων με τρόπο τέτοιο ώστε να απαντώνται τα Ερευνητικά Ερωτήματα, ενώ αποφασίστηκε η διεξαγωγή συνεντεύξεων, ώστε να διασφαλιστεί η πληρότητα των δεδομένων για τις ομάδες εστίασης.

Ακόμη, όσον αφορά στις ερευνητικές επιλογές παρατηρήθηκε ότι ο πειραματισμός των μαθητών με ένα κομμάτι χαρτιού, το οποίο αντιπροσώπευε τη λαμαρίνα για τη δημιουργία καναλιού στη δραστηριότητα Δημιουργία Καναλιού βοήθησε αρκετά τους μαθητές. Συγκεκριμένα, τους βοηθούσε να μεταφέρουν το πρόβλημα στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας και να μπορούν εύκολα να καταγράφουν τους περιορισμούς της κατασκευής. Έτσι, σημειώθηκε η σημασία πειραματισμού των μαθητών με το κομμάτι χαρτιού, αφού θα μπορούσε να βοηθήσει στη σύνδεση του φυσικού συστήματος και της δυναμικής γεωμετρίας, σύμφωνα με τον κύκλο μοντελοποίησης.

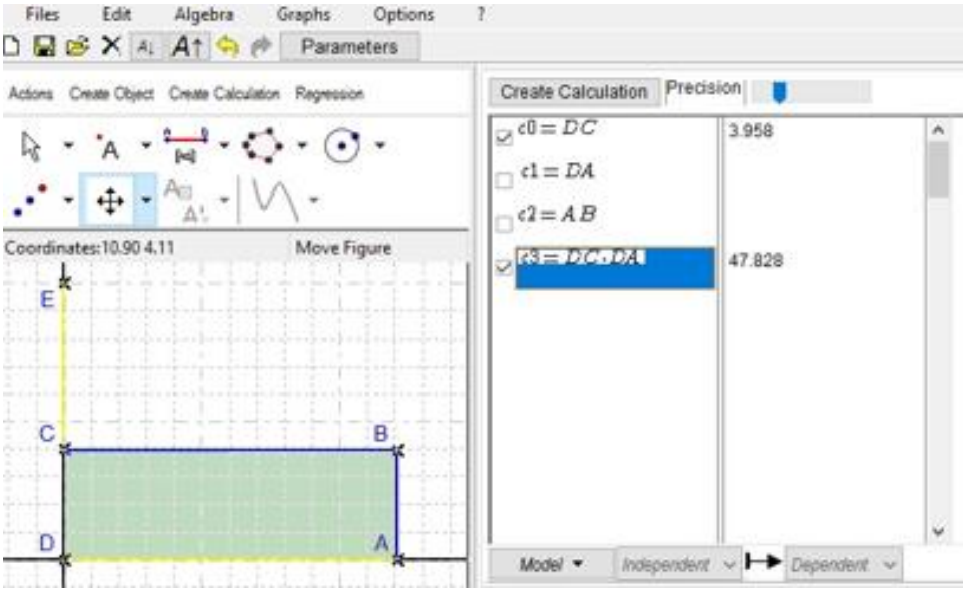
Τέλος, σχετικά με τη συλλογή δεδομένων παρατηρήθηκε ότι η βιντεοσκόπηση θα πρέπει να υποστηριχθεί περαιτέρω στην κυρίως έρευνα και έτσι αποφασίστηκε η χρήση δεύτερης κάμερας μέσα στις σχολικές τάξεις, αφού κρίθηκε σημαντική η καταγραφή της διερεύνησης ολόκληρης της τάξης και της πρακτικής του εκπαιδευτικού. Όλα τα παραπάνω μετά την ανάλυση της πιλοτικής έρευνας βοήθησαν τον ερευνητή στην καλλιέργεια ερευνητικού τρόπου αντιμετώπισης των ερωτημάτων και αναζήτησης της έννοιας της συμμεταβολής μέσα από δραστηριότητες μοντελοποίησης εμπνευσμένες από αυθεντικές καταστάσεις του χώρου εργασίας, καθώς κρίσιμες παράμετροι θα έπρεπε να ληφθούν σοβαρά υπόψη.

3.4. Το λογισμικό Casyopée

Το Casyopée (Calcul Symbolique Offrant des Possibilités à l'Elève et l'Enseignant) είναι ένα ψηφιακό περιβάλλον που συνδυάζει δύο παράθυρα Άλγεβρας και Γεωμετρίας, με στόχο την εκμάθηση των συναρτήσεων για τη δευτεροβάθμια ή και την τριτοβάθμια εκπαίδευση. Στην αρχική φάση ανάπτυξης του λογισμικού, ορισμένοι ερευνητές από το Πανεπιστήμιο Paris-Diderot συνεργάστηκαν με εκπαιδευτικούς με αποτέλεσμα τη σύζευξη του πειραματισμού στο λογισμικό Derive και στον υπολογιστή TI92 (Lagrange, 1999). Στην επόμενη φάση της ανάπτυξης του Casyopée οι ερευνητές δημιούργησαν ένα εργαλείο CAS με σκοπό τη χρήση του στις σχολικές τάξεις για την εκμάθηση των συναρτήσεων. Έτσι, αποτέλεσε ένα καινοτόμο αλγεβρικό εργαλείο, καθώς είχε τη δυνατότητα διερεύνησης και επίλυσης προβλημάτων και τη μοντελοποίηση γεωμετρικών μεγεθών. Ωστόσο, στην τελική φάση της ανάπτυξης του Casyopée στα πλαίσια του προγράμματος Remath, ο στόχος ήταν η ενσωμάτωση των παραθύρων της δυναμικής γεωμετρίας, των μετρήσεων και των συμμεταβολών στο παράθυρο της Άλγεβρας (Lagrange, 2013). Αυτό είχε ως αποτέλεσμα τη δυνατότητα να μελετηθούν τα συμμεταβαλλόμενα χαρακτηριστικά των ποσοτήτων και τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας και των μετρήσεων αντίστοιχα, ενώ σε περίπτωση που υπήρχε συναρτησιακή σχέση μεταξύ τους μπορούσε να δημιουργηθεί μία συνάρτηση αυτόματα από το λογισμικό στο περιβάλλον της Άλγεβρας, συνδέοντας έτσι τα δύο περιβάλλοντα μεταξύ τους και διευκολύνοντας την περιγραφή της συμμεταβολής.

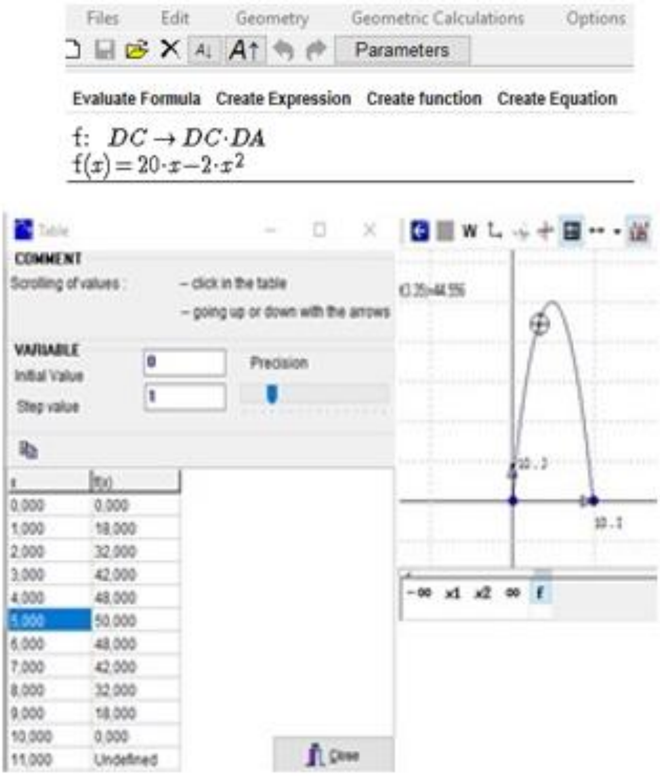
Στην πιο πρόσφατη έκδοσή του το Casyopée (http://casyopee.eu/, Lagrange, 2010) συνδυάζει ένα παράθυρο δυναμικής γεωμετρίας Dynamic Geometry System (DGS) με εργαλεία CAS (Computer Algebra Systems) σε ένα παράθυρο άλγεβρας. Τα δύο διασυνδεόμενα παράθυρα επιτρέπουν στον χρήστη να ασχοληθεί ταυτόχρονα με γεωμετρικές εξαρτήσεις και αλγεβρικές ιδιότητες. Στο παράθυρο της δυναμικής γεωμετρίας, το οποίο είναι εξοπλισμένο με τα κύρια χαρακτηριστικά της δημιουργίας και κίνησης γεωμετρικών αντικειμένων ο χρήστης έχει τη δυνατότητα δημιουργίας γεωμετρικών αντικειμένων, μετρήσεων και παραμέτρων σε ένα σύστημα αξόνων. Το παράθυρο της άλγεβρας προσφέρει εργαλεία και αναπαραστάσεις για τη μελέτη συναρτήσεων (π.χ. παραγοντοποίηση τύπου, εύρεση παραγώγου – παράγουσας, επίλυση εξίσωσης συναρτήσεων). Έτσι, ο χρήστης μπορεί να δημιουργήσει συναρτήσεις, εξισώσεις, να υπολογίσει την παράγωγο συναρτήσεων και να ενεργοποιήσει πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης (αλγεβρικό τύπο, γραφική παράσταση και πίνακα τιμών). Το ισχυρότερο εργαλείο του λογισμικού είναι η μοντελοποίηση δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών, τα οποία εμφανίζονται στο παράθυρο της δυναμικής γεωμετρίας.

Κατά τη μοντελοποίηση ενός προβλήματος, ο χρήστης έχει τη δυνατότητα δημιουργίας ελεύθερων και εξαρτώμενων γεωμετρικών αντικειμένων (π.χ. σημείων, ευθύγραμμων τμημάτων) στο παράθυρο της δυναμικής γεωμετρίας. Ακολούθως, ο χρήστης μπορεί να ορίσει τις μετρήσεις ανεξάρτητων και εξαρτημένων χαρακτηριστικών των ποσοτήτων στο παράθυρο των γεωμετρικών υπολογισμών, να δημιουργήσεις τις αντίστοιχες μετρήσεις στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών (π.χ. μήκη και εμβαδά που συμβολίζονται με c0, c1, c2,…) διερευνώντας περαιτέρω τη συμμεταβολή τους μέσω της λειτουργίας της αυτόματης μοντελοποίησης (Εικόνα 3 - 1).



Εικόνα 3 - 1: Τα παράθυρα δυναμικής γεωμετρίας, γεωμετρικών υπολογισμών και η λειτουργία αυτόματης μοντελοποίησης στο Casyopée

Η λειτουργία της αυτόματης μοντελοποίησης δίνει τη δυνατότητα στον χρήστη να ελέγξει αν μπορεί να οριστεί συνάρτηση από μία επιλογή δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών ως εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. c0=DC και c1=DC*DA, Εικόνα 3 - 1) διαφορετικά παρέχεται κατάλληλη πληροφόρηση ότι δεν μπορεί να προκύψει συνάρτηση από το επιλεγμένο ζεύγος συμμεταβαλλόμενων μεγεθών. Μία συνάρτηση που προκύπτει από τη μοντελοποίηση των επιλεγμένων συμμεταβαλλόμενων μεγεθών στο παράθυρο της αυτόματης μοντελοποίησης από τη μία αναδεικνύει το Casyopée ως εργαλείο για τη μοντελοποίηση δυναμικών καταστάσεων που προέρχονται από γεωμετρικές εξαρτήσεις, ενώ από την άλλη γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ του γεωμετρικού σχήματος και της έννοιας τη συνάρτησης (Artigue & Lagrange, 2009).



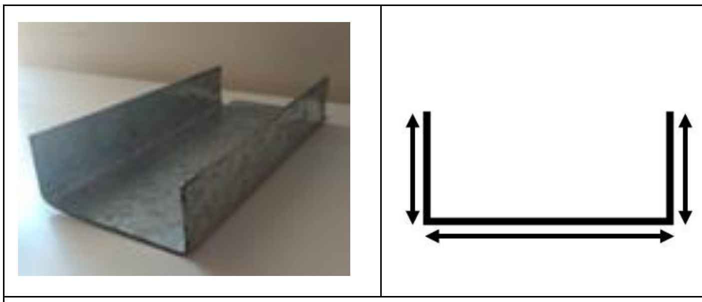
Εικόνα 3 - 2: Το παράθυρο της Άλγεβρας, ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση

Ως αποτέλεσμα της μοντελοποίησης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών προκύπτει ο αλγεβρικός τύπος της συνάρτησης, το πεδίο ορισμού και τα μεγέθη που συμμετέχουν για τη δημιουργία της συνάρτησης στο παράθυρο της Άλγεβρας (Εικόνα 3 - 2). Ακόμη, δίνεται η δυνατότητα εμφάνισης της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών της συνάρτησης στο παράθυρο των γραφικών παραστάσεων επιλέγοντας τα ονόματα των συναρτήσεων. Επιπλέον, κατά την ερμηνεία του πίνακα τιμών δίνονται δυνατότητες διερεύνησης καθώς επιτρέπεται η αλλαγή της αρχικής τιμής και του βήματος που εμφανίζονται στον πίνακα τιμών. Τέλος, δίνονται πρόσθετες δυνατότητες διερεύνησης στις γραφικές παραστάσεις, καθώς ο χρήστης μπορεί να περιηγείται επάνω στην καμπύλη της συνάρτησης με ένα κινούμενο στόχο και να βλέπει τις αλλαγές στα διασυνδεόμενα παράθυρα της δυναμικής γεωμετρίας (στο δυναμικό σχήμα), των γεωμετρικών υπολογισμών (στις μετρήσεις) και της γραφικής παράστασης (στις τιμές της συνάρτησης).

3.5. Σχεδιασμός και εφαρμογή δραστηριοτήτων

Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων στην παρούσα έρευνα ακολούθησε τους κύκλους σχεδιασμού – επανασχεδιασμού. Ο αρχικός σχεδιασμός των δραστηριοτήτων έγινε από τον ερευνητή και ακολούθησε επανασχεδιασμός και τροποποιήσεις από επαγγελματίες, ερευνητές και εκπαιδευτικούς ώστε να μην χάνεται η ερευνητική εστίαση, ο διερευνητικός χαρακτήρας και η σύνδεση με την αυθεντική προβληματική κατάσταση (βλέπε Παράρτημα). Οι βασικές διαφορές από τον αρχικό σχεδιασμό και εφαρμογή μέχρι την τελική εφαρμογή αφορούν στη χρήση ή όχι επιμέρους ερωτημάτων, στη διατύπωση και στην εστίαση της δραστηριότητας αναφορικά με την αυθεντικότητα. Στη συγκεκριμένη ενότητα επιλέχθηκε η παρουσίαση των δραστηριοτήτων που αντιστοιχούν στη 2^{η} φάση σχεδιασμού και εφαρμογής. Ωστόσο, τα υποερωτήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην κάθε δραστηριότητα και εφαρμόστηκαν στον 1^{ο} κύκλο εφαρμογής βρίσκονται στο Παράρτημα.

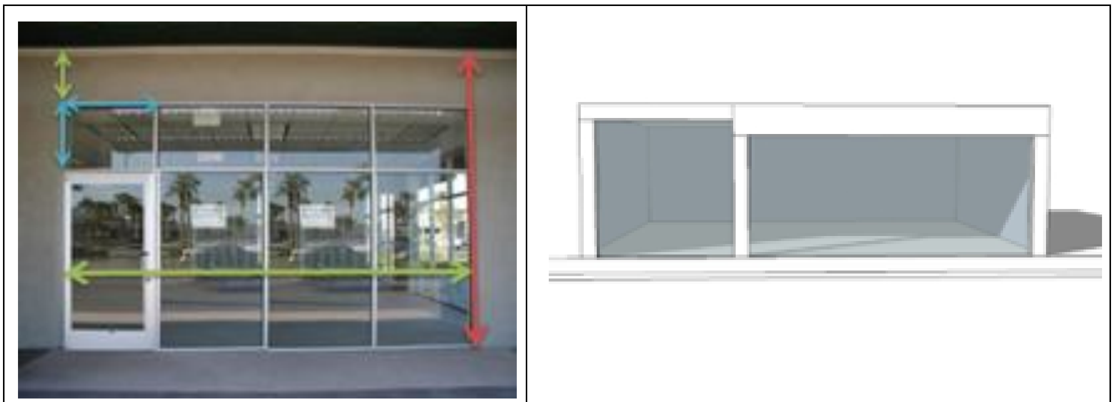
Όλες οι σχεδιαζόμενες δραστηριότητες μοντελοποίησης αφορούν δυναμικά προβλήματα βελτιστοποίησης (βλέπε Παράρτημα) και ήταν εμπνευσμένες από αυθεντικές καταστάσεις. Τα προβλήματα ήταν σχεδιασμένα από τον ερευνητή ώστε να προωθούνται σταδιακά πιο εκλεπτυσμένες νοηματοδοτήσεις σε μία συμμεταβαλλόμενη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων, ακολουθώντας τον κύκλο μοντελοποίησης του Lagrange (2014). Σε όλες τις δραστηριότητες οι μαθητές θα έπρεπε: (α) να πειραματιστούν με τα χειραπτικά εργαλεία ή με ψηφιακή προσομοίωση του προβλήματος, (β) να μοντελοποιήσουν το δυναμικό πρόβλημα με τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων, και (γ) να ορίσουν μία συνάρτηση και χρησιμοποιώντας τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις να καταλήξουν σε μία λύση. Συγκεκριμένα, ο Σχεδιασμός Υδρορροής αναφέρεται στην διαισθητική εμπειρία της συμμεταβολής με τη χρήση χειραπτικών εργαλείων και μέσων με στόχο τον βέλτιστο σχεδιασμό μίας υδρορροής. Η Πρόσοψη Καταστήματος αναφέρεται στη σχέση της συμμεταβολής μεταξύ εμβαδών και τη μετάβαση στον ρυθμό μεταβολής λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς του αρχιτεκτονικού σχεδίου. Η Δεξαμενή Πετρελαίου αναφέρεται σε έναν εκτεταμένο πειραματισμό με τη συμμεταβολή και τον ρυθμό μεταβολής στο πλαίσιο ανεφοδιασμού ενός πρατηρίου καυσίμων.



Εικόνα 3 - 3: Η υδρορροή ως διπλωμένη λαμαρίνα και ως σχέδιο

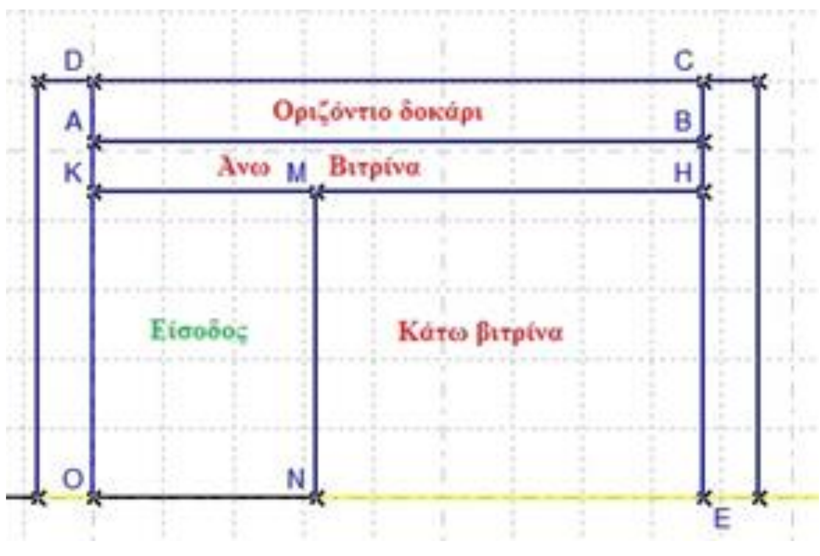
Η δραστηριότητα *Σχεδιασμός Υδρορροής* αφορά στη μεγιστοποίηση της ποσότητας νερού σε σχεδιαζόμενες υδρορροές. Από τους μαθητές ζητείται να μοντελοποιήσουν το πρόβλημα και να αναζητήσουν τη λύση χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης από το ψηφιακό λογισμικό Casyopée. Η δραστηριότητα σχεδιάστηκε βασιζόμενη στην αυθεντική πρακτική επαγγελματιών, οι οποίοι αναζητούν τον βέλτιστο σχεδιασμό για υδρορροές (Εικόνα 3 - 3). Οι τροποποιήσεις που δέχτηκε η δραστηριότητα από ερευνητές και εκπαιδευτικούς αφορούσαν κυρίως τη διατύπωση και τον βαθμό διερεύνησης των μαθητών (αν θα είχε επιμέρους ερωτήματα ή ένα βασικό ερώτημα). Ο στόχος είναι να πειραματιστούν οι μαθητές με τη συμμεταβολή διαισθητικά χρησιμοποιώντας χειραπτικά εργαλεία και να διερευνήσουν περεταίρω τη συμμεταβολή μέσα από τις λειτουργίες του ψηφιακού λογισμικού Casyopée και ακολούθως να νοηματοδοτήσουν τη συνάρτηση ως συμμεταβαλλόμενη σχέση μέσα από τον πειραματισμό με τα χειραπτικά εργαλεία και τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων. Ο σχεδιασμός περιλαμβάνει αρχικά τον πειραματισμό των μαθητών με ένα ορθογώνιο κομμάτι χαρτιού (10 επί 20 εκατοστών) ως πρωτότυπο της μεταλλικής λαμαρίνας που χρησιμοποιούν οι επαγγελματίες στην αυθεντική τους πρακτική προκειμένου να κατασκευάσουν υδρορροές. Στη συνέχεια, οι μαθητές αναμένεται να εμπλακούν με την παρατήρηση των συμμεταβολών και την έκφραση της αλγεβρικής σχέσης τους χρησιμοποιώντας μία μεταβλητή και ακολούθως να σχεδιάσουν ένα δυναμικό ορθογώνιο στο Casyopée παρατηρώντας τους υπολογισμούς του εμβαδού για κάθε διαφορετική δίπλωση (π.χ. η δίπλωση της πλευράς των 10 εκατοστών μπορεί να γίνει ως εξής: 3-4-3 με εμβαδό ορθογωνίου Ε=12τ.εκ.). Έπειτα, οι μαθητές αναμένεται να πειραματιστούν με τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες και να δημιουργήσουν τη συνάρτηση $f(x) = 20x - 2x^2$ η οποία μοντελοποιεί το πρόβλημα [*x*→*x(20-2x)*, όπου x είναι το μήκος της πλευράς του πλαϊνού μέρους].

Η δραστηριότητα *Πρόσοψη Καταστήματος* αναφέρεται στον βέλτιστο σχεδιασμό ενός καταστήματος που βασίζεται σε αυθεντικούς περιορισμούς του χώρου εργασίας του αρχιτέκτονα. Το αυθεντικό πλαίσιο δεν είναι τόσο εμφανές, καθώς δίνεται έμφαση στην εστίαση των μαθητών στα στοιχεία της κατασκευής και στους περιορισμούς μεταξύ τους. Η δραστηριότητα σχεδιάστηκε σε συνεργασία με έναν αρχιτέκτονα κατά τη συζήτηση για συμμεταβαλλόμενες σχέσεις στο χώρο της αρχιτεκτονικής, από όπου προέκυψε ότι το πάχος ενός οριζόντιου δοκαριού αλλάζει ανάλογα με την απόσταση ανάμεσα στις κατακόρυφες κολώνες μίας κατασκευής. Οι τροποποιήσεις που δέχτηκε η δραστηριότητα από ερευνητές και εκπαιδευτικούς αφορούσαν την προσθήκη ή απόρριψη ερωτημάτων και τη διατύπωση και τον βαθμό διερεύνησης των μαθητών (αν θα είχε επιμέρους ερωτήματα ή ένα βασικό ερώτημα). Το πρώτο μέρος της δραστηριότητας περιλαμβάνει συζήτηση σχετικά με τα κρίσιμα στοιχεία της κατασκευής δείχνοντας σχετικές φωτογραφίες από την εργασία του αρχιτέκτονα (Εικόνα 3 - 4) για να βοηθηθούν οι μαθητές και να εστιάσουν στα σημαντικά στοιχεία της κατασκευής που εμφανίζονται στην πρόσοψη του καταστήματος (π.χ. σχέση του εμβαδού του οριζόντιου δοκαριού και της απόστασης ανάμεσα στις κατακόρυφες κολώνες).



Εικόνα 3 - 4: Η πρόσοψη καταστήματος και το σχέδιο του αρχιτέκτονα

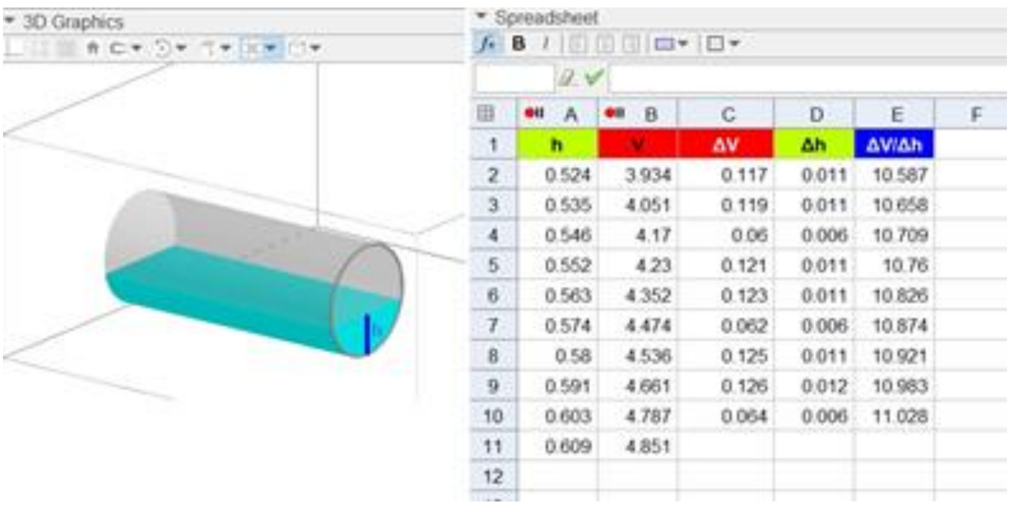
Το δεύτερο μέρος της δραστηριότητας σχετίζεται με μία έτοιμη δυναμική πρόσοψη στο Casyopée όπου φαίνονται οι πραγματικοί περιορισμοί. Συγκεκριμένα, το πάχος του οριζόντιου δοκαριού (DA) εξαρτάται από την απόσταση ανάμεσα στις κατακόρυφες κολώνες (OE) και είναι μία σημαντική παράμετρος της κατασκευής, καθώς επηρεάζει ολόκληρο το τελικό αποτέλεσμα (Εικόνα 3 - 5).



Εικόνα 3 - 5: Η πρόσοψη καταστήματος στο λογισμικό Casyopée

Ο στόχος της συγκεκριμένης δραστηριότητας είναι να πειραματιστούν οι μαθητές με τη συμμεταβολή αλλάζοντας την εξαρτημένη μεταβλητή και να εισαχθούν στον ρυθμό μεταβολής. Η δραστηριότητα πρόκειται για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης του εμβαδού της άνω βιτρίνας (ΑΒΗΚ) και εμπλουτίζεται με τη διερεύνηση του αθροίσματος δύο ποσοτήτων και τη σχέση της συμμεταβολής με τον ρυθμό μεταβολής. Η συμμεταβολή εμφανίζεται από τον πειραματισμό των μαθητών με εμβαδά στη δυναμική γεωμετρία και εξελίσσεται με την εργασία τους με τις συναρτήσεις και τις σχετικές αναπαραστάσεις στο παράθυρο της άλγεβρας. Οι σχετικές συναρτήσεις με το πρόβλημα της πρόσοψης είναι: (α) το εμβαδό της άνω βιτρίνας (ΟΕ → ΑΒΗΚ), (β) το εμβαδό της κάτω βιτρίνας (ΟΕ → ΜΗΕΝ), και (γ) το άθροισμά τους (ΟΕ → ΑΒΗΚ + ΜΗΕΝ). Από τους μαθητές ζητείται να εντοπίσουν τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες στο δυναμικό σχήμα, να προσδιορίσουν την απόσταση ανάμεσα στις κολώνες για την οποία το εμβαδό της άνω βιτρίνας μεγιστοποιείται, να δημιουργήσουν το συνολικό εμβαδό και να πειραματιστούν με τον ρυθμό μεταβολής των εμβαδών.

Η δραστηριότητα *Δεξαμενή πετρελαίου* σχεδιάστηκε βασιζόμενη στην αυθεντική πρακτική του βενζινοπώλη της μέτρησης του πετρελαίου σε κυλινδρικές δεξαμενές σε δύο διαφορετικές τοποθετήσεις (κάθετης και οριζόντιας) με τη χρήση μίας ράβδου μέτρησης. Οι τροποποιήσεις που δέχτηκε η δραστηριότητα από ερευνητές και εκπαιδευτικούς αφορούσαν κυρίως τον περιορισμό των ερωτημάτων και την προσθήκη νέων ερωτημάτων (βλέπε Παράρτημα). Το αυθεντικό πλαίσιο δεν είναι τόσο εμφανές, καθώς η δραστηριότητα αναφέρεται στη διερεύνηση του τρόπου που οι τιμές που αποκτά ο βενζινοπώλης από τη μέτρηση της στάθμης του πετρελαίου αλλάζουν σε σχέση με τον όγκο του καυσίμου εντός της δεξαμενής για τις δύο τοποθετήσεις. Το πρώτο μέρος της δραστηριότητας περιλαμβάνει μία αρχική συζήτηση στο πλαίσιο της σχολικής τάξης σχετικά με την πρακτική του βενζινοπώλη για τη μέτρηση του καυσίμου με τη χρήση μίας ράβδου, ώστε να εμπλακούν οι μαθητές στην αυθεντική εργασία του πωλητή καυσίμων. Στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας δίνεται ένα αρχείο GeoGebra στους μαθητές, το οποίο περιλαμβάνει μία οριζόντια τοποθετημένη κυλινδρική δεξαμενή, η οποία γεμίζει δυναμικά και είναι διασυνδεόμενη με έναν πίνακα τιμών, στον οποίο συμπληρώνονται οι αντίστοιχες τιμές σε πέντε στήλες αναφορικά με το ύψος, τον όγκο, τη διαφορά ύψους, τη διαφορά όγκου και τον λόγο διαφορών κατά την πλήρωση της δεξαμενής (Εικόνα 3 – 6). Το GeoGebra επιλέχθηκε σε αυτή τη δραστηριότητα, καθώς υπήρχε αδυναμία του Casyopée να δημιουργήσει συνάρτηση από το εμβαδό του κυκλικού τομέα.



	A	B	C	D	E	F
1	h	V	ΔV	Δh	ΔV/Δh	
2	0.524	3.934	0.117	0.011	10.587	
3	0.535	4.051	0.119	0.011	10.658	
4	0.546	4.17	0.06	0.006	10.709	
5	0.552	4.23	0.121	0.011	10.76	
6	0.563	4.352	0.123	0.011	10.826	
7	0.574	4.474	0.062	0.006	10.874	
8	0.58	4.536	0.125	0.011	10.921	
9	0.591	4.661	0.126	0.012	10.983	
10	0.603	4.787	0.064	0.006	11.028	
11	0.609	4.851				
12						

Εικόνα 3 - 6: Η δεξαμενή πετρελαίου στο λογισμικό GeoGebra

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι ο πειραματισμός των μαθητών με τη συμμεταβολή, τις γραφικές παραστάσεις και τον ρυθμό μεταβολής στο πλαίσιο της εργασίας του πωλητή καυσίμων. Συγκεκριμένα, από τους μαθητές ζητείται να περιγράψουν την διαδικασία ανεφοδιασμού του πετρελαίου, να παρέχουν την αλγεβρική λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τη ράβδο και να δημιουργήσουν τη γραφική παράσταση ύψους-όγκου. Προκειμένου να διερευνηθεί ο ρυθμός μεταβολής χρησιμοποιήθηκε η ερώτηση: «Αν η μεταβολή της ένδειξης της ράβδου είναι το ¼ του ύψους μίας δεξαμενής, τότε αντιστοιχεί για το γέμισμα κατά το ¼ της δεξαμενής;». Η συγκεκριμένη ερώτηση απαιτεί συμμεταβαλλόμενη σκέψη και σύγκριση διαφορετικών στιγμιότυπων της οριζόντια τοποθετημένης δεξαμενής. Στην κατακόρυφη τοποθέτηση, η αλγεβρική λύση είναι $f(h) = h\pi r^2$ όπου h είναι το ύψος του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή όπως φαίνεται από τη ράβδο και r είναι η ακτίνα της βάσης της δεξαμενής. Στην οριζόντια περίπτωση, η λύση δίνεται από μία σειρά από βήματα για τον υπολογισμό του όγκου του πετρελαίου. Η συμμεταβολή εμφανίζεται στη διερεύνηση της κατακόρυφης και της οριζόντιας τοποθέτησης της δεξαμενής κατά την περιγραφή της πρακτικής και παραμένει κατά τη διάρκεια της δημιουργίας της γραφικής παράστασης, κατά την οποία εμφανίζεται ο ρυθμός μεταβολής.

3.6. Εκ των προτέρων ανάλυση

Στην παρούσα έρευνα οι δραστηριότητες ακολουθούν την ίδια δομή και σύμφωνα με τις μαθησιακές τροχιές ο μαθηματικός στόχος είναι η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Έτσι, οι υποθετικές μαθησιακές τροχιές από τις απλές στις πιο σύνθετες νοηματοδοτήσεις είναι: (Ι) διαισθητική προσέγγιση της συμμεταβολής μέσω χειραπτικών εργαλείων μεταξύ χαρακτηριστικών των ποσοτήτων, (ΙΙ) συμμεταβολή μεταξύ μεγεθών, (ΙΙΙ) συμμεταβολή μεταξύ μεταβλητών και (IV) ρυθμός μεταβολής. Επομένως, επιλέχθηκε μία υπάρχουσα δομή εννοιών για τη συμμεταβολή ως υποθετική τροχιά μάθησης της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων από την υπάρχουσα βιβλιογραφία για τη συμμεταβολή (Lagrange & Artigue, 2009, Lagrange, 2014). Έτσι, εκ των προτέρων αναμέναμε οι μαθητές να έχουν μία πρώτη εμπειρία με τη συμμεταβολή διαισθητικά (δραστηριότητα Σχεδιασμός Υδρορροής), μετά πειραματιστούν με τα χαρακτηριστικά των ποσοτήτων και τα μεγέθη στο Casyopée (δραστηριότητες Σχεδιασμός Υδρορροής και Πρόσοψη Καταστήματος) και τέλος να επικεντρωθούν στον ρυθμό μεταβολής (δραστηριότητες Πρόσοψη Καταστήματος και Δεξαμενή Πετρελαίου).

Επίσης, ορίσαμε εκ των προτέρων τα ακόλουθα μοντέλα εντός των διαφορετικών στοιχείων του κύκλου μοντελοποίησης τα οποία είναι: (1) χειραπτικά εργαλεία, (2) δυναμική γεωμετρία, (3) μετρήσεις και (4) συναρτήσεις. Το μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων είναι το πρώτο μοντέλο κατά τη μοντελοποίηση των προβλημάτων και αναφέρεται στον πειραματισμό με τα φυσικά αντικείμενα. Σε αυτό το μοντέλο η εργασία των μαθητών μοιάζει με κάποιο τρόπο με την αυθεντική πρακτική των επαγγελματιών. Η συμμεταβολή εμφανίζεται μεταξύ χαρακτηριστικών των ποσοτήτων, ωστόσο υπάρχει μικρή δυναμικότητα στο μοντέλο λόγω των φυσικών περιορισμών. Ακολούθως, το μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας είναι μία έκφραση του φυσικού συστήματος σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας. Σε αυτό το μοντέλο υπάρχουν δύο χαρακτηριστικά: (α) οι περιορισμοί της κατασκευής παίζουν κρίσιμο ρόλο στη μοντελοποίηση του προβλήματος και (β) η δυναμική κατασκευή προσφέρει ισχυρή δυναμικότητα και αλληλεπίδραση της κατάστασης. Η συμμεταβολή εμφανίζεται μεταξύ χαρακτηριστικών των αντικειμένων ή σε μετρήσεις ποσοτήτων. Έπειτα, το μοντέλο των μετρήσεων είναι ένα αποτέλεσμα της διαδικασίας ποσοτικοποίησης καθώς η συμμεταβολή εμφανίζεται μεταξύ μεγεθών παρά μεταξύ γεωμετρικών οντοτήτων. Στο μοντέλο των συναρτήσεων μία συνάρτηση εξάγεται ως αποτέλεσμα της επιλογής ενός ζεύγους συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων (π.χ. ένα μήκος ενός ορθογωνίου και ένα εμβαδό) και οι μαθητές εργάζονται με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Αυτό το βήμα δεν είναι προφανές καθώς απαιτείται κατανόηση της κατάστασης σε βάθος και ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο (π.χ. η επιλογή της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής).

Ως βασικό στοιχείο του σχεδιασμού και ως εκ τούτου και της εκ των προτέρων ανάλυσης συμμετείχε και το θεωρητικό πλαίσιο ΑεΠ. Συγκεκριμένα, τα στοιχεία γνώσης με τους όρους του ΑεΠ σχετίζονται με τα διαφορετικά μοντέλα. Έτσι, ορίζουμε εκ των προτέρων τα στοιχεία γνώσης σε κάθε μοντέλο. Για το μοντέλο χειραπτικών εργαλείων (ΧΕ) τα στοιχεία γνώσης είναι: ($ΧΕ_1$) η νοηματοδότηση των στοιχείων της πραγματικής κατάστασης (π.χ. οι τρόποι δίπλωσης, ο όγκος, το εμβαδό διατομής για τη δραστηριότητα *Σχεδιασμός Υδρορροής*), ($ΧΕ_2$) η κατανόηση των μεταβολών στα γεωμετρικά αντικείμενα (οι πλευρές της υδρορροής, το εμβαδό διατομής) και ($ΧΕ_3$) η σύνδεση των μεταβολών των γεωμετρικών αντικειμένων. Συνολικά για το μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων από τα συγκεκριμένα στοιχεία γνώσης αναμενόταν ο πειραματισμός με το φυσικό σύστημα και η σταδιακή αναγνώριση των χαρακτηριστικών των ποσοτήτων που συμμετέχουν στη μοντελοποίηση του προβλήματος. Ακολούθως, αναμενόταν η κατανόηση των μεταβολών των γεωμετρικών χαρακτηριστικών, αλλά και η σύνδεση μεταξύ τους.

Τα στοιχεία γνώσης για το μοντέλο δυναμικής γεωμετρίας (ΔΓ) είναι: ($ΔΓ_1$) η χρήση μίας ανεξάρτητης γεωμετρικής οντότητας για τη δημιουργία ενός δυναμικού μοντέλου (π.χ. η απόσταση ανάμεσα στις κατακόρυφες κολώνες και τα εμβαδά για την *Πρόσοψη Καταστήματος*, ή το ύψος της στάθμης στη ράβδο μέτρησης και ο όγκος του καυσίμου για τη *Δεξαμενή Πετρελαίου*), ($ΔΓ_2$) η σύνδεση της ανεξάρτητης και εξαρτημένης γεωμετρικής οντότητας. Στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας αναμενόταν από τους μαθητές η αναγνώριση ότι μία γεωμετρική οντότητα επηρεάζει το σύνολο της κατασκευής, ενώ ακολούθως η σύνδεσή της με άλλες οντότητες που επηρεάζονται από αυτήν.

Τα στοιχεία γνώσης για το μοντέλο των μετρήσεων (ΜΕ) είναι: ($ΜΕ_1$) η συμμεταβολή μεταξύ μεγεθών και ($ΜΕ_2$) η θεώρηση του ζεύγους μεταξύ συμμεταβαλλόμενων μεγεθών ως ζεύγος συμμεταβαλλόμενων μεταβλητών. Στο μοντέλο των μετρήσεων οι μαθητές αναμενόταν να κατασκευάσουν δύο στοιχεία γνώσης αναφορικά με τη θεώρηση του ζεύγους των συμμεταβαλλόμενων χαρακτηριστικών των ποσοτήτων ως ζεύγος συμμεταβαλλόμενων μεγεθών και ακολούθως ως ζεύγος συμμεταβαλλόμενων μεταβλητών. Το στοιχεία γνώσης στο συγκεκριμένο μοντέλο είναι κρίσιμα για τη δημιουργία συνάρτησης.

Τα στοιχεία γνώσης για το μοντέλο των συναρτήσεων (ΣΥ) είναι: ($ΣΥ_1$) η δημιουργία μία συνάρτησης που μοντελοποιεί ένα ζευγάρι συμμεταβαλλόμενων μεταβλητών, ($ΣΥ_2$) η διερεύνηση της συνάρτησης με τη χρήση των αναπαραστάσεών της (π.χ. αλγεβρική επίλυση του προβλήματος, η χάραξη των γραφικών αναπαραστάσεων, ερμηνεία του πίνακα τιμών) και ($ΣΥ_3$) η κατανόηση του ρυθμού μεταβολής των συναρτήσεων. Στο μοντέλο των συναρτήσεων τα στοιχεία γνώσης αφορούν τη δημιουργία συνάρτησης ως συμμεταβολή μεταξύ μεταβλητών, τη χρήση αναπαραστάσεων και τη δυνατότητα των μαθητών να κατανοήσουν τον ρυθμό μεταβολής. Σε αυτό το μοντέλο το τρίτο στοιχείο γνώσης είναι πιο αφηρημένο προσπαθώντας να καλύψει όλες τις πιθανές κατασκευές που θα προκύψουν από τους μαθητές σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής. Έτσι, ολοκληρώνεται η δομή που προσφέρουν τα στοιχεία γνώσης σχετικά με τις πιθανές κατασκευές των μαθητών στις τρεις δραστηριότητες μοντελοποίησης.

Ο Πίνακας 2 δείχνει ένα χαρακτηρισμό των δραστηριοτήτων εκ των προτέρων σύμφωνα με τα θεωρητικά πλαίσια των μαθησιακών τροχιών, των μοντέλων που προκύπτουν από τον κύκλο μοντελοποίησης και της Αφαίρεσης εντός Πλαισίου.

	Σχεδιασμός Υδρορροής	*Πρόσοψη Καταστήματος*	*Δεξαμενή Πετρελαίου*
Μαθησιακό μονοπάτι (μαθησιακές τροχιές)	(I)-(IV)	(II)-(V)	(II)-(V)
Μοντέλα (κύκλος μοντελοποίησης)	(1)-(4)	(2)-(4)	(2)-(4)
Στοιχεία Γνώσης (ΑεΠ)	($ΧΕ_1$)-($ΣΥ_2$)	($ΔΓ_1$)-($ΣΥ_2$)	($ΔΓ_1$)-($ΣΥ_3$)

Πίνακας 2: Εκ των προτέρων ανάλυση

3.7. Συλλογή δεδομένων

Για τη συλλογή δεδομένων αξιοποιήθηκαν δύο κάμερες και τέσσερις συσκευές μαγνητοσκόπησης σε κάθε σχολική τάξη, καθώς είχε προκύψει από την πιλοτική έρευνα η ανάγκη για πληρέστερα δεδομένα. Τα δεδομένα που συλλέχτηκαν αποτελούνται βιντεοσκοπήσεις της σχολικής τάξης και συγκεκριμένα του εκπαιδευτικού και μίας ομάδας εστίασης. Επιπλέον, συλλέχθηκαν μαγνητοφωνήσεις από τέσσερις ομάδες μαθητών σε κάθε σχολική τάξη κατά την πρώτη και τη δεύτερη φάση εφαρμογής των δραστηριοτήτων. Η μία κάμερα, την οποία χειριζόταν ένας ερευνητής (εκτός του υποψηφίου διδάκτορα), βοήθησε στην καταγραφή των χειρονομιών και της έκφρασης των μαθητών από την ομάδα εστίασης, αλλά και της οθόνης του υπολογιστή κατά τον πειραματισμό με τα ψηφιακά εργαλεία, καθώς δεν υπήρξε η δυνατότητα εγκατάστασης λογισμικού καταγραφής οθόνης. Η άλλη κάμερα, την οποία χειριζόταν ένας ακόμη ερευνητής (εκτός του υποψηφίου διδάκτορα), χρησιμοποιήθηκε κυρίως για την καταγραφή του εκπαιδευτικού και του συνόλου της τάξης. Προκειμένου να συλλεχθεί το σύνολο των δεδομένων από τις βιντεοσκοπήσεις, εκτός από τον ερευνητή συμμετείχαν δύο επιπλέον ερευνητές, οι οποίοι χειρίζονταν τις κάμερες.

Μετά την καταγραφή εντός της τάξης, ο ερευνητής έκανε μία αποτίμηση της ερευνητικής διαδικασίας κρατώντας σημειώσεις που αφορούσαν την πορεία της ομάδας εστίασης κατά τη μοντελοποίηση των δραστηριοτήτων και τον τρόπο παρέμβασης του εκπαιδευτικού μέσα στη σχολική τάξη. Για την παρούσα διατριβή αξιοποιήθηκαν τα δεδομένα που αφορούν την εφαρμογή της αλληλουχίας των δραστηριοτήτων μέσα στη σχολική τάξη, καθώς αντικατοπτρίζουν την αυθεντική νοηματοδότηση των μαθητών κατά τη μοντελοποίηση των δραστηριοτήτων. Τα δεδομένα απομαγνητοφωνήθηκαν πλήρως για την ανάλυση δημιουργώντας ένα κείμενο με εναλλαγές ομιλητών. Συγκεκριμένα, στην ανάλυση δεδομένων αξιοποιήθηκαν δεδομένα που αφορούν: (α) την αυτόνομη εργασία των ομάδων εστίασης (συμβολίζοντας με Ε τον ερευνητή και Μ1-Μ2 για τους μαθητές της ομάδας εστίασης στα επεισόδια) και (β) τις συζητήσεις μέσα στην τάξη (συμβολίζοντας με Κ τον εκπαιδευτικό της τάξης και Μ3 – Μ10 τους μαθητές εκτός της ομάδας εστίασης).

3.8. Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε τρία επίπεδα, τα οποία αρχικά παρουσιάζονται συνοπτικά και αναλύονται στη συνέχεια. Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο μέρος της ανάλυσης είχε ως στόχο τη δημιουργία της τροχιάς νοηματοδότησης από τους μαθητές. Ως νοηματοδότηση νοείται η διαδικασία και το αποτέλεσμα της κατασκευής νοήματος, το οποίο όμως μπορεί να εκφράζει και μία γενικότερη κατηγορία αντίστοιχων νοηματοδοτήσεων. Στο πρώτο επίπεδο έλαβε χώρα δημιουργία θεωρίας θεμελιωμένης στα δεδομένα (grounded approach) και ανοιχτή κωδικοποίηση στιγμιότυπων, δηλαδή δράσεων των μαθητών, οι οποίες υποδείκνυαν διαφορετικούς τρόπους που οι μαθητές αναφέρονταν στη συμμεταβολή μέσα από τρία κριτήρια με αποτέλεσμα την προοδευτική ανέλιξη των νοηματοδοτήσεων (δηλαδή του συνόλου των δράσεων των μαθητών μέσα από την ερμηνεία του ερευνητή). Στόχος ήταν να προκύψουν από τα δεδομένα κωδικοί αναφορικά με τρία κριτήρια, ώστε να βοηθήσουν στη δημιουργία επεισοδίων που θα αναδείξουν τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής αναφορικά με το μοντέλο εργασίας και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται. Στο δεύτερο επίπεδο ανάλυσης στόχος ήταν η περιγραφή της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων μέσα από επεισόδια, η κατασκευή των στοιχείων γνώσης εντός μίας νοηματοδότησης και η ανάδειξη των συνδέσεων των μοντέλων μεταξύ τους με τη χρήση του ΑεΠ. Σε αυτό το επίπεδο πραγματοποιήθηκε κωδικοποίηση επεισοδίων από απλούστερα σε συνθετότερα και ανάλυση σχετικά με το είδος των εκάστοτε συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων/μεγεθών και τη σύνδεση των μοντέλων. Στο τρίτο επίπεδο στόχος ήταν η ανάλυση του ρόλου του πλαισίου στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών μέσα από τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και τα εργαλεία. Σε αυτό το επίπεδο επιλέχθηκαν επεισόδια, τα οποία δείχνουν μία εναλλαγή μεταξύ δύο ή περισσότερων νοηματοδοτήσεων των μαθητών, στα οποία (α) κωδικοποιήθηκαν στοιχεία της διδασκαλίας κάθε εκπαιδευτικού μέσα από τις παρεμβάσεις του και (β) αναλύθηκε ο ρόλος των εργαλείων.

Επίπεδο	Διαδικασία	Μονάδα ανάλυσης	Στόχος
1	Ανοικτή κωδικοποίηση Κριτήρια: (α) είδος εξαρτήσεων, (β) συμμεταβολή, (γ) τρόπος έκφρασης	Στιγμιότυπο	1) Κωδικοποιημένα στιγμιότυπα

	(π.χ. χειρονομίες, λεκτική περιγραφή)		
2	Μικροανάλυση, Κωδικοποίηση μοντέλου	Επεισόδιο	1) Περιγραφή της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων (επεισόδια – από απλά σε σύνθετα) 2) Κατασκευή των στοιχείων γνώσης
3	Επιλογή επεισοδίων που συνεισέφερε ο εκπαιδευτικός ή τα ψηφιακά εργαλεία. Μικροανάλυση, Κωδικοποίηση παρεμβάσεων εκπαιδευτικού	Αντιπροσωπευτικά επεισόδια	1) Αλληλουχία νοηματοδοτήσεων 2) Ρόλος του πλαισίου εφαρμογής μέσα από τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και τον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών

Πίνακας 3: Περιγραφή των επιπέδων της ανάλυσης δεδομένων

3.8.1. Πρώτο επίπεδο ανάλυσης

Στο πρώτο επίπεδο ανάλυσης των δεδομένων κύριος στόχος ήταν ο εντοπισμός ολοένα και πιο αφηρημένων/εξελιγμένων τρόπων σκέψης σχετικά με τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων μέσα από την εργασία των μαθητών με στόχο την ανάδειξη της ανερχόμενης εξελικτικής διαδικασίας νοηματοδότησης σε μία μαθησιακή τροχιά. Το πρώτο επίπεδο ανάλυσης έλαβε χώρα σε δύο φάσεις. Αρχικά, τα απομαγνητοφωνημένα δεδομένα συμπληρώθηκαν με μία επιπλέον στήλη στην οποία προστέθηκαν σχόλια που σχετίζονται με τις δράσεις και τις χειρονομίες των μαθητών από την ανάλυση των βιντεοσκοπήσεων. Η ερευνητική εστίαση αφορούσε την ομάδα εστίασης και τις ομάδες που συμμετείχαν στις συζητήσεις ολόκληρης της τάξης κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων σε κάθε σχολείο. Οι συζητήσεις στην τάξη αφορούσαν συζητήσεις που ξεκινούσε ο εκπαιδευτικός και υπήρχε αλληλεπίδραση ομάδας/ων μαθητών με τον εκπαιδευτικό ή διαφορετικών ομάδων μαθητών εντός της τάξης. Σε αυτή τη φάση υιοθετήθηκαν πρακτικές από την θεμελιωμένη θεωρία (grounded theory, Strauss & Corbin, 1998) στις οποίες περιλαμβάνονταν η ανοικτή κωδικοποίηση (open coding, Charmaz, 2014). Στόχος ήταν ο εντοπισμός και η κωδικοποίηση στιγμιότυπων, δηλαδή εκφράσεων και δράσεων των μαθητών, οι οποίες υποδείκνυαν διαφορετικούς τρόπους που οι μαθητές αναφέρονταν στη συμμεταβολή και συγκεκριμένα στις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες. Έτσι, έλαβε χώρα η κωδικοποίηση των στιγμιότυπων σύμφωνα με τα ακόλουθα κριτήρια: (α) το είδος των εξαρτήσεων με την έννοια των χαρακτηριστικών των ποσοτήτων, των μεγεθών και των μεταβλητών ανάλογα με το μοντέλο στο οποίο εργάζονταν οι μαθητές (χειραπτικά εργαλεία, δυναμική γεωμετρία, μετρήσεις και συναρτήσεις) και τα εργαλεία τα οποία χρησιμοποιούσαν, (β) τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονταν τη συμμεταβολή των χαρακτηριστικών των ποσοτήτων/μεγεθών/μεταβλητών με τη χρήση κωδικών από την υπάρχουσα βιβλιογραφία με αναφορά στον ρυθμό μεταβολής που είναι μέρος του ερευνητικού ενδιαφέροντος (π.χ. εξάρτηση, κατεύθυνση, συμμεταβολή, ρυθμός μεταβολής όπως φαίνονται στις έρευνες Carlson et al., 2002) με στόχο την ανάδειξη των αναμενόμενων/υποθετικών μαθησιακών τροχιών, αλλά και τη χρήση νέων κωδικών που προκύπτανε από τις ιδιαιτερότητες του πλαισίου, όπως για παράδειγμα τη χρήση των διαθέσιμων εργαλείων στο λογισμικό Casyopée) και (γ) αν και με ποιο τρόπο οι μαθητές εκφράζαν τις προαναφερθείσες εκφράσεις της συμμεταβολής (π.χ. μέσω της χρήσης αλγεβρικού συμβολισμού, χειρονομιών, λεκτικών περιγραφών – Πίνακας 3).

Δραστη-ριότητα	**Έκφραση μαθητών από τα στιγμιότυπα**	**Μοντέλο**	**Εργαλείο**	**Κωδικός**
1	Καθώς αυτό το μήκος [*της πλευράς της διατομής*] αλλάζει, αλλάζει και το εμβαδό	Χειραπτικά εργαλεία	Κομμάτι χαρτιού	Αλληλεξάρτηση συμμεταβαλλό-μενων χαρακτηριστικών των ποσοτήτων
2	Όσο η άνω βιτρίνα μεγαλώνει, το πάχος του οριζόντιου δοκαριού μειώνεται	Μετρήσεις	Γεωμετρικοί υπολογισμοί (Casyopée)	Κατεύθυνση συμμεταβαλλό-μενων μεγεθών στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών
2	Η g(x) αυξάνεται καθώς το x αυξάνεται. [*η g(x) είναι η συνάρτηση ΟΕ→ΜΗΕΝ*]	Συναρτήσεις	Αναπαραστάσεις της συνάρτησης (Casyopée)	Συμμεταβολή μεταβλητών με χρήση αλγεβρικού συμβολισμού
3	Ο ρυθμός μεταβολής αυξάνεται συνεχώς για κάθε διάστημα	Συναρτήσεις	Αναπαραστάσεις της συνάρτησης (GeoGebra)	Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής

Πίνακας 4: Κωδικοποίηση των στιγμιοτύπων

Ακολούθως ελέγχθηκαν αντίστοιχα στιγμιότυπα στα δεδομένα και μέσω της χρήσης συνεχών συγκρίσεων απορρίφθηκαν οι περιττοί κωδικοί και προέκυψε η τελική κωδικοποίηση. Οι κωδικοί ομαδοποιήθηκαν σύμφωνα με τον βαθμό εκλέπτυνσης ως προς την εξελικτική διαδικασία νοηματοδότησης και τη χρονική εμφάνισή τους (κατά προσέγγιση) στα στιγμιότυπα κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων (Battista, 2004). Από την ομαδοποίηση φάνηκε μία πρώτη εξέλιξη της μαθησιακής τροχιάς κατά τη νοηματοδότηση της συμμεταβολής και μετά από έλεγχο οδήγησε στον αρχικό χαρακτηρισμό των διαφορετικών τρόπων νοηματοδότησης σε μία λίστα. Αυτός ο χαρακτηρισμός υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώθηκε η πραγματική μαθησιακή τροχιά από τον ερευνητή, κατά την ανάλυση της σκέψης των μαθητών (Clements & Sarama, 2004).

3.8.2. Δεύτερο επίπεδο ανάλυσης

Στο δεύτερο επίπεδο της ανάλυσης επιλέχθηκαν επεισόδια που βασίστηκαν στην κωδικοποίηση στιγμιοτύπων και περιείχαν διαλόγους μαθητών (ή μαθητών με εκπαιδευτικό/ερευνητή) που περιλάμβαναν τη δραστηριότητα των μαθητών σχετικά με τη συμμεταβολή γύρω από τα στιγμιότυπα. Αυτά τα επεισόδια κωδικοποιήθηκαν σε σχέση με το μοντέλο που οι μαθητές εργάζονταν με στόχο την περιγραφή της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Έτσι, καταγράφηκε το μοντέλο εργασίας των μαθητών για να εντοπιστούν οι συσχετίσεις με άλλα μοντέλα, ανάλογα με την επιρροή που έκαναν ή είχαν από άλλα επεισόδια. Αυτά τα επεισόδια επέτρεψαν να σκιαγραφηθούν τα χαρακτηριστικά και η εμφάνιση κάθε νοηματοδότησης, το συγκεκριμένο μοντέλο, το είδος των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων που συμμετέχουν στη συμμεταβολή και οι επιρροές από άλλα μοντέλα. Η ανάλυση διατρέχθηκε σε όλα τα δεδομένα και προέκυψε ένας τελικός χαρακτηρισμός της διαδικασίας εξέλιξης της νοηματοδότησης καταλήγοντας σε επτά νοηματοδοτήσεις της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων, ενώ παράλληλα αναδεικνύονται οι συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων. Σε αυτό το επίπεδο ανάλυσης κύριο ρόλο είχε το θεωρητικό πλαίσιο ΑεΠ (*αναγνώριση, επαναδόμηση* και *κατασκευή*). Μέσα από την εκ των προτέρων ανάλυση είχαν οριστεί τα στοιχεία γνώσης για την εργασία των μαθητών στα διαφορετικά μοντέλα. Η ανάλυση με το ΑεΠ ανέδειξε τη διαδικασία της κατασκευής των στοιχείων γνώσης στις διαφορετικές νοηματοδοτήσεις καθώς οι μαθητές εργάζονταν στα διαφορετικά μοντέλα. Συνεπώς, σε αυτό το επίπεδο, η χρήση του ΑεΠ βοήθησε ώστε να προκύπτει στη μικροκλίμακα (α) η σκιαγράφηση της κατασκευής των στοιχείων γνώσης εντός μίας συγκεκριμένης νοηματοδότησης της συνάρτησης από τη μαθησιακή τροχιά και (β) οι συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων κατά τη μοντελοποίηση των δραστηριοτήτων.

3.8.3. Τρίτο επίπεδο ανάλυσης

Στο τρίτο επίπεδο ανάλυσης στόχος ήταν η ανάδειξη του ρόλου του πλαισίου εφαρμογής μέσα από τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών. Έτσι, χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα από τα προηγούμενα επίπεδα ανάλυσης τα οποία έδωσαν μία σχηματική αναπαράσταση της εξέλιξης της τροχιάς νοηματοδότησης με επτά διαφορετικές νοηματοδοτήσεις από απλούστερες σε συνθετότερες ανά σχολείο (π.χ. Εικόνα 3 – 7, Τροχιά 1 έως 7) λαμβάνοντας υπόψη την αλληλουχία των δραστηριοτήτων. Για παράδειγμα, στο σκαρίφημα των νοηματοδοτήσεων (Εικόνα 3 – 7) παρατίθεται η εμφάνιση της πραγματικής μαθησιακής τροχιάς για την ομάδα εστίασης (ανοικτό γκρι) και των ομάδων που συμμετείχαν στις συζητήσεις ολόκληρης της τάξης (σκούρο γκρι) κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων για το σχολείο Α. Οι διαφορετικές τροχιές των μαθητών σε κάθε σχολείο δείχνουν την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων μέσα από τη διερεύνηση των μαθητών ανεξάρτητα από τον χρόνο εμφάνισης.

Εικόνα 3 - 7: Νοηματοδότηση στο σχολείο Α από την 1η φάση συλλογής δεδομένων

Ακολούθως, προκειμένου να αναλυθεί ο ρόλος του πλαισίου κατά ΑεΠ, δηλαδή του πλαισίου εφαρμογής των δραστηριοτήτων, επιλέχθηκαν ορισμένα από τα επεισόδια της δεύτερης φάσης της ανάλυσης. Αυτά τα επεισόδια έχουν τουλάχιστον ένα από τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: (α) δείχνουν μία ενδιαφέρουσα μετάβαση μεταξύ δύο νοηματοδοτήσεων, (β) δείχνουν μία εναλλαγή μεταξύ περισσότερων από δύο νοηματοδοτήσεων, (γ) δείχνουν στοιχεία της διδασκαλίας κάθε εκπαιδευτικού μέσα από τις παρεμβάσεις του και τις επακόλουθες νοηματοδοτήσεις των μαθητών, (δ) δείχνουν τη συνεισφορά των εργαλείων σε επακόλουθες νοηματοδοτήσεις των μαθητών. Τα συγκεκριμένα επεισόδια αναφέρονταν (α) στον ρόλο των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού (σημειωμένα με κόκκινο χρώμα) και (β) στον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων (σημειωμένα με πορτοκαλί χρώμα) σε διαφορετικούς σταθμούς της εργασίας των μαθητών. Τα συγκεκριμένα επεισόδια αναλύθηκαν γραμμή-γραμμή χρησιμοποιώντας το θεωρητικό πλαίσιο ΑεΠ (*αναγνώριση, επαναδόμηση* και *κατασκευή*) αναδεικνύοντας τον ρόλο των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού και τον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων. Στην παρούσα διατριβή μελετήθηκαν μόνο οι παρεμβάσεις των εκπαιδευτικών που συνεισέφεραν στην εξέλιξη της νοηματοδότησης των μαθητών. Έτσι, υπήρξαν διερευνητικές δράσεις και παρεμβάσεις των εκπαιδευτικών, στις οποίες παρά τον πειραματισμό των μαθητών δεν φάνηκε κάποια νοηματοδότηση της συμμεταβολής και συνεπώς δεν αναλύθηκαν.

Ειδικότερα, για την ανάλυση του ρόλου του εκπαιδευτικού σε ένα περιβάλλον διερεύνησης αναζητήθηκαν κωδικοί των δράσεων/ενεργειών του εκπαιδευτικού από την προϋπάρχουσα έρευνα (π.χ. Kosko et al., 2014, Boaler & Brodie, 2004, Franke et al., 2009, Ellis et al., 2019) για την υποστήριξη της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών μέσα από τις δράσεις του εκπαιδευτικού. Ωστόσο, αναλύοντας συγκεκριμένα επεισόδια που συμμετείχε ο εκπαιδευτικός, παρατηρήθηκε ότι οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού, δηλαδή τα σημεία που διακόπτει τη συζήτηση ομάδων ή μιλά στο σύνολο της τάξης, δεν αναφέρονταν πάντοτε σε ερώτηση και μάλιστα χαρακτηρίζουν την κουλτούρα διερεύνησης της τάξης (π.χ. αν οι μαθητές εργάζονται αποτελεσματικά εντός της ομάδας, αν επιτρέπονται συνεργασίες μεταξύ ομάδων κλπ). Συνεπώς αφενός η εστίαση αφορούσε στις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και αφετέρου έγινε ο χωρισμός των παρεμβάσεων των εκπαιδευτικών σε δύο κατηγορίες: (α) παιδαγωγικές, οι οποίες σχετίζονται με τις παρεμβάσεις με στόχο την ανάδειξη της σημασίας της συνεργασίας και της συμμετοχής (π.χ. συζητείστε στην ομάδα/τάξη, ανταλλάξτε απόψεις) υιοθετώντας κωδικούς από την υπάρχουσα βιβλιογραφία πέρα από τους κωδικούς για τις παρεμβάσεις που εμφανίστηκαν από την ανάλυση (π.χ. παιδαγωγική παρέμβαση συμμετοχής και ομαδικότητας) και (β) διδακτικές, δηλαδή τις παρεμβάσεις που εστιάζουν στο περιεχόμενο του μαθήματος (π.χ. Triantafillou et al., 2021). Ακολούθησε η κωδικοποίηση των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού σε δύο κύριες κατηγορίες (α) παιδαγωγικές (περισσότερες από μία ανά επεισόδιο) και (β) διδακτικές (χαρακτηρίζοντας συνολικά ένα επεισόδιο), με διαφορετικούς τύπους παρεμβάσεων σε κάθε κατηγορία (Πίνακας 4). Έτσι, οι διαφορετικές παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού συσχετίστηκαν με το πώς εξελίχθηκε η νοηματοδότηση ανά σχολείο μέσα από την ανάλυση των επεισοδίων.

Παρεμβάσεις εκπαιδευτικού	**Τύπος παρέμβασης**	**Ορισμός**	**Χαρακτηριστικά παραδείγματα**
Παιδαγωγικές (έμφαση στη διερεύνηση)	Συμμετοχής (Πσ)	Προτροπή όλων των μαθητών να συμμετέχουν.	Μπορώ να έχω την προσοχή σας;

		Άλλες διαστάσεις: Πρόσκληση για προσοχή/εστίαση	
	Ομαδικότητας (Πομ)	Προτροπή μαθητή για συνεργασία με τα μέλη της ομάδας	Οι υπόλοιποι συμφωνείτε; Για δούλεψέ το μαζί με την ομάδα σου.
	Εκμαίευσης (Πε)	Δράσεις βοήθειας/κατεύθυνσης των μαθητών ώστε να εκμαιεύσει μία απάντηση. Άλλες διαστάσεις: εκμαίευση ιδεών μαθητών, εκμαίευση νοηματοδότησης	Για να περνάει η μέγιστη ποσότητα νερού, ποιο πράγμα θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε;
	Απάντησης (Πα)	Δράσεις απάντησης σε μία ιδέα/σκέψη ενός μαθητή Άλλες διαστάσεις: διόρθωση λάθους, επανάληψη	Μ: Νομίζω η κλίση είναι που αλλάζει. Όσο αυξάνεται το ύψος μέχρι την μέση, πρέπει ο όγκος να αυξάνεται. Κ: Και στις δύο γίνεται αυτό. Μ1: Ναι… αλλά η κλίση πρέπει να μεγαλώνει. Κ: Και στις δύο γίνεται αυτό. Και στις δύο η κλίση μεγαλώνει.
	Διευκόλυνσης (Πδ)	Δράσεις διευκόλυνσης της σκέψης ενός μαθητή Άλλες διαστάσεις: παροχή οδηγιών, σκαλωσιά για τη σκέψη του μαθητή, υποστήριξη πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης	Μ: Οποιοδήποτε σημείο να πάρω από την μέση και κάτω, και ομοίως εδώ πέρα από την μέση και κάτω, η εφαπτόμενη θα είναι μεγαλύτερη. Κ: Εμένα μου φαίνεται μικρότερη εδώ. Σε ακούω.
	Επέκτασης (Πεπ)	Δράσεις επέκτασης της σκέψης των μαθητών Άλλες διαστάσεις: υποστήριξη σκέψης	Να σε ρωτήσω κάτι; Άμα ο κύλινδρος είχε μεγαλύτερη ακτίνα;

		και γενίκευσης, προτροπή για παροχή αιτιολογήσεων	
Διδακτικές (έμφαση στο περιεχόμενο)	Εστίασης σε μαθηματικό αντικείμενο (Δε)	Δράσεις για την εστίαση των μαθητών στο μαθηματικό αντικείμενο (π.χ. ποσότητες, μεγέθη, μεταβλητές) στο μοντέλο που πειραματίζονται Άλλες διαστάσεις: απλοποίηση κεντρικού ερωτήματος, πρόκληση	Ποιο πράγμα θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε; (κατά τον πειραματισμό με τα χειραπτικά εργαλεία)
	Αιτιολόγηση/ Επεξήγηση (Δα)	Δράσεις για την αιτιολόγηση ή επεξήγηση της διερεύνησης ενός μαθητή για τη δραστηριότητα	Τι έκανες εκεί; Μπορείς να μας εξηγήσεις πως σκέφτηκες;
	Υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα)	Υποστήριξη των μαθητών για τη σύνδεση αναπαραστάσεων (π.χ. γραφικών, αλγεβρικών) Άλλες διαστάσεις: πρόκληση, διερεύνηση	Θα ήθελα να προτείνετε τα κριτήρια σύγκρισης των δύο γραφικών παραστάσεων.

Πίνακας 5: Κωδικοποίηση των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού

Ακολούθως, μέσα από τη συλλογή των διαφορετικών παρεμβάσεων στα σχολεία δημιουργήθηκε ένας πίνακας συχνοτήτων που δείχνει τη συχνότητα εμφάνισης κάθε τύπου παρέμβασης ανά σχολείο και βοήθησε στον προσδιορισμό της ταυτότητα της διδασκαλίας του κάθε εκπαιδευτικού. Συνεπώς, στο τρίτο επίπεδο ανάλυσης μέσα από την ανάλυση των στοιχείων του πλαισίου στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών προέκυψε (α) ο χαρακτηρισμός της διδασκαλίας του κάθε εκπαιδευτικού και (β) ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων κατά τη μοντελοποίηση των δραστηριοτήτων.

4. Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο αρχικά ορίζονται τα κύρια στοιχεία της τροχιάς νοηματοδότησης ως αποτέλεσμα της νοηματοδότησης τη συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων από μαθητές Β΄ λυκείου κατά την ενασχόλησή τους με δραστηριότητες μοντελοποίησης μέσω της χρήσης χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων. Κατόπιν, παρουσιάζεται η μαθησιακή τροχιά μέσα από επεισόδια από διαφορετικές ομάδες μαθητών στα σχολεία δίνοντας έτσι απάντηση στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα. Συγκεκριμένα, για κάθε διαφορετική νοηματοδότηση παρατίθεται μία περιγραφή και αντίστοιχα επεισόδια από τα σχολεία είτε από τις ομάδες εστίασης είτε από άλλες ομάδες μαθητών που διερευνούσαν τις δραστηριότητες μέσα στην τάξη. Ακολούθως, παρατίθενται στοιχεία από τις συνδέσεις των διαφορετικών μοντέλων απαντώντας στο ερώτημα σχετικά με τις συνδέσεις των μοντέλων στο πλαίσιο της μοντελοποίησης.

Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε δύο ενότητες. Στην πρώτη ενότητα, παρατίθεται ανά ομάδα εστίασης η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων υπογραμμίζοντας τον ρόλο των εργαλείων και του πλαισίου της δραστηριότητας στην εξέλιξη των μαθησιακών τροχιών. Στη δεύτερη ενότητα, παρατίθενται οι συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων.

4.1. Τροχιά νοηματοδότησης

Από την ανάλυση της πραγματικής μαθησιακής τροχιάς προέκυψε η εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων που προκύπτουν από τις εξαρτήσεις μεταξύ χαρακτηριστικών των ποσοτήτων και τη συμμεταβολή μεταξύ μεγεθών προς την συμμεταβολή μεταβλητών και τον ρυθμό μεταβολής. Συγκεκριμένα, στον Πίνακα 5 φαίνεται μία συνολική εικόνα της εξέλιξης των νοηματοδοτήσεων των μαθητών και των μοντέλων στα οποία προέκυψαν οι νοηματοδοτήσεις.

Εξέλιξη νοηματοδοτήσεων	Περιγραφή	Μοντέλα
Αλληλεξάρτηση (Interdependence)	Εντοπισμός αλληλεξαρτήσεων μεταξύ χαρακτηριστικών των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων (π.χ. φυσικά ή γεωμετρικά αντικείμενα)	Χειραπτικά εργαλεία, Δυναμική Γεωμετρία
Συσχέτιση (Correlation)	Συσχετισμός των αλλαγών στο ένα μέγεθος σε σχέση με τις αλλαγές στο άλλο (χωρίς ένδειξη για αύξηση ή μείωση)	Χειραπτικά εργαλεία, Δυναμική Γεωμετρία, Μετρήσεις
Κατεύθυνση (Direction)	Συσχετισμός της κατεύθυνσης της αλλαγής στο ένα μέγεθος με τις αλλαγές στο άλλο (π.χ. αύξηση ή μείωση)	Χειραπτικά εργαλεία, Δυναμική Γεωμετρία, Μετρήσεις
Επιλογή μεταβλητών (Variable selection)	Προσδιορισμός ενός ζεύγους μεγεθών ως ζεύγος ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής	Δυναμική Γεωμετρία, Μετρήσεις, Συναρτήσεις
Συντονισμός (Coordination)	Συντονισμός αλλαγών στις τιμές τις ανεξάρτητης μεταβλητής με αλλαγές στην εξαρτημένη μεταβλητή σε διαφορετικές αναπαραστάσεις στης συνάρτησης	Συναρτήσεις
Ποσό μεταβολής (Amount of change)	Συντονισμός του ποσού μεταβολής στις τιμές τις ανεξάρτητης μεταβλητής με μεταβολές στην εξαρτημένη μεταβλητή σε διαφορετικές αναπαραστάσεις στης συνάρτησης	Συναρτήσεις
Πηλίκο διαφορών (Ομοιόμορφος και στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής – Uniform and instantaneous rate of change)	Συντονισμός του ρυθμού μεταβολής των τιμών της συνάρτησης με ομοιόμορφες μεταβολές ή ενδείξεις από συνεχείς μεταβολές στην ανεξάρτητη μεταβλητή μέσω του πηλίκου διαφορών	Συναρτήσεις

Πίνακας 6: Η μαθησιακή τροχιά των μαθητών

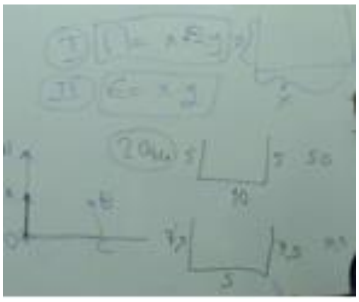
Ακολουθεί, η επισκόπηση των νοηματοδοτήσεων σε όλες τις ομάδες μαθητών κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων, καθώς εργάζονταν στα διαφορετικά μοντέλα. Έτσι, γίνεται επισκόπηση των νοηματοδοτήσεων στην παρούσα έρευνα με επεισόδια από όλα τα σχολεία. Σημειώνεται ότι οι νοηματοδοτήσεις στις διαφορετικές ομάδες ακολουθούν μία ανερχόμενη εξελικτική διαδικασία, η οποία ορίζει την πρόοδο στη σκέψη των μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με τις δραστηριότητες σε ολοένα πιο εξεζητημένες νοητικές κατασκευές.

4.1.1. Αναγνώριση των αλληλεξαρτήσεων (Interdependence)

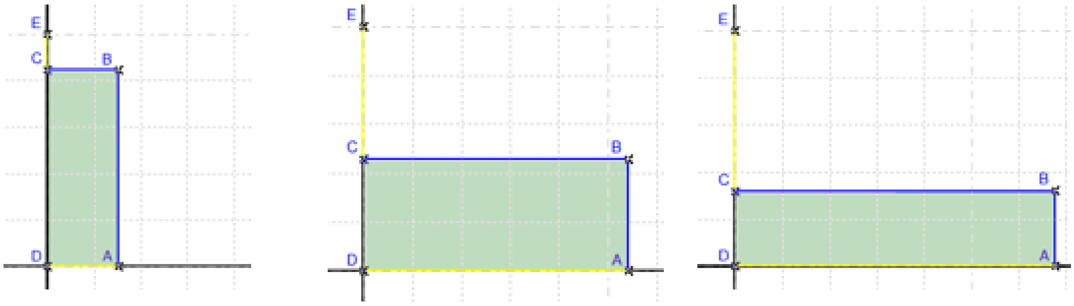
Το κύριο χαρακτηριστικό στο πρώτο μέρος της τροχιάς είναι η αναγνώριση των εξαρτήσεων μεταξύ των συμμεταβαλλόμενων χαρακτηριστικών των ποσοτήτων (π.χ. το μήκος της πλευράς και το εμβαδό διατομής) που είναι απαραίτητα για τη μοντελοποίηση του προβλήματος, καθώς οι μαθητές εργάζονταν είτε στο μοντέλο χειραπτικών εργαλείων είτε στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας. Οι μαθητές στην πρώτη ώρα διερεύνησης είχαν τη δυνατότητα να πειραματιστούν με ένα μοντέλο από χαρτί και στη συνέχεια να μοντελοποιήσουν το πρόβλημα στο λογισμικό δημιουργώντας ένα δυναμικό ορθογώνιο που αναφέρεται στην διατομή της υδρορροής. Έτσι, το πρώτο μέρος της εξελικτικής διαδικασίας εμφανίστηκε κατά την πρώτη ώρα πειραματισμού των μαθητών (α) με τη βοήθεια του μοντέλου από χαρτί (φυσικό αντικείμενο – Εικόνες 4 - 1 και 4 - 2) και (β) με το δυναμικό ορθογώνιο που κατασκεύασαν στο Casyopée – Εικόνα 4 - 4, στο οποίο αναγνώρισαν την αλληλεξάρτηση μεταξύ της μίας πλευράς (π.χ. της DC) και του εμβαδού του ορθογωνίου στο παράθυρο δυναμικής γεωμετρίας (Εικόνα 4 - 4).

Εικόνα 4 - 1:
Το μοντέλο από χαρτί

Εικόνα 4 - 2: Αναζήτηση περιορισμών



Εικόνα 4 - 3: Μοντελοποίηση στη δυναμική γεωμετρία



Εικόνα 4 - 4: Στιγμιότυπα από το δυναμικό ορθογώνιο στη δυναμική γεωμετρία

Για παράδειγμα, από την πρώτη φάση συλλογής δεδομένων, στο σχολείο Α, οι μαθητές της ομάδας εστίασης πειραματίζονταν στο μοντέλο από χαρτί με κατάλληλες διπλώσεις και παρατηρούσαν την αλληλεξάρτηση των πλευρών με στόχο τη μεγιστοποίηση της ποσότητας του νερού που περνάει από την υδρορροή, δηλαδή του εμβαδού διατομής. Στο ακόλουθο επεισόδιο, οι μαθητές αναγνωρίζουν την αλληλεξάρτηση μεταξύ των πλευρών και ακολούθως εντοπίζουν τα χαρακτηριστικά των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων.

203. Κ: Ποιο πράγμα θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε;

204. Μ1: Τον όγκο.

205. Κ: Αυτό… για να περνάει η μέγιστη ποσότητα νερού, ποιο πράγμα θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε;

206. Μ5: Το ύψος

207. Μ2: Το πλάτος, αλλά μέχρι ένα σημείο. Αυτό εδώ [δείχνει τη βάση]

208. Κ: Α, δηλαδή όσο πιο μεγάλο είναι αυτό, τόσο μεγαλύτερο…

209. Μ1: Μεγαλώνοντας τη βάση τόσο περισσότερο νερό θα περνάει. Αλλά τόσο μικρότερα θα είναι τα πλαϊνά τοιχώματα και έτσι μπορεί να έχουμε διαρροές απ’ έξω, ώστε να μεγιστοποιηθεί ο όγκος του. Όχι; (R, BW)

210. Μ2: Το εμβαδό, αυτό το ορθογώνιο. (C)

Στο παραπάνω απόσπασμα ο πειραματισμός των μαθητών με το μοντέλο χαρτιού οδήγησε στην αναζήτηση του βέλτιστου τρόπου δίπλωσης. Στο επεισόδιο οι μαθητές κατασκευάζουν το στοιχείο γνώσης ($ΧΕ_1$) που αφορά στην αναγνώριση των στοιχείων της πραγματικής κατάστασης και συγκεκριμένα του εμβαδού διατομής. Μέσω της δίπλωσης ο Μ1 αναγνωρίζει την αλληλεξάρτηση των δύο πλευρών με στόχο να μεγιστοποιήσει την ποσότητα νερού και στη συνέχεια παρατηρεί ότι είναι και οι δύο πλευρές απαραίτητες για την εύρεση του άλλου μεγέθους (αναγνώριση, επαναδόμηση στίχος 209). Τέλος, η Μ2 κατασκευάζει την αναγνώριση των αλληλεξαρτήσεων, σημειώνοντας ότι το ένα μέγεθος είναι το εμβαδό (κατασκευή, στίχος 210). Στο επεισόδιο είναι καθοριστικός ο ρόλος του χαρτιού ως μοντέλο της πραγματικότητας και οι μαθητές διπλώνοντας το κομμάτι χαρτιού κάνουν προσομοίωση της αυθεντικής πρακτικής των εργαζόμενων στο συγκεκριμένο χώρο εργασίας, όπως στο εισαγωγικό βίντεο που είδαν δύο ειδικούς να χρησιμοποιούν ένα μηχάνημα που διπλώνει μία λαμαρίνα για να δημιουργήσουν μία υδρορροή. Οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα πλήθος από διαφορετικές λέξεις που αναφέρονται στο πλαίσιο της δραστηριότητας και σε μαθηματικές έννοιες (π.χ. όγκος, ύψος, πλάτος, βάση, πλαϊνά τοιχώματα, περισσότερο νερό, εμβαδό). Οι λέξεις αυτές δείχνουν ότι το πλαίσιο της δραστηριότητας ξεκινά να εμφανίζεται με ιδιαίτερη έμφαση στα λόγια των μαθητών και είναι παρόν κατά τον πειραματισμό τους.

Αντίστοιχα επεισόδια εμφανίστηκαν στην πρώτη φάση συλλογής δεδομένων από το σχολείο Β, όπου οι μαθητές μέσω του πειραματισμού τους με το μοντέλο χαρτιού οδηγήθηκαν στη νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης. Το επόμενο επεισόδιο είναι χαρακτηριστικό από τον πειραματισμό των μαθητών με το μοντέλο χαρτιού και τα επακόλουθα που επιφέρει, δηλαδή (α) την αναγνώριση του εμβαδού ως χαρακτηριστικό ποσότητας που συμμετέχει στη συμμεταβολή, καθώς η μία πλευρά είναι σταθερή και (β) η αλληλεξάρτηση των πλευρών με το εμβαδό.

21. Μ1: Όλο αυτό είναι ίσο με 10 εκ. και είναι σταθερό, αλλά ψάχνουμε το μεγαλύτερο [συνδυασμό] ώστε αυτό εδώ πέρα να είναι το μέγιστο. Κατάλαβες;

22. Μ2: Α κατάλαβα. Εντάξει.

23. Μ1: Βασικά κι αυτό εδώ πέρα δεν θα είναι ακριβώς το τέτοιο. Είναι και το 20 αλλά εντάξει αυτό είναι πάντα σταθερό. Έστω ότι αυτό εδώ πέρα είναι η λαμαρίνα. Αυτό εδώ πέρα θα είναι τα 10 εκ., οπότε θα είναι σαν να έχουμε εδώ ένα παραλληλόγραμμο. Άρα παίρνουμε το εμβαδό του (R)

24. Ε: Ποιο εμβαδό του;

25. Μ1: Έχουμε τις δύο συν μία πλευρές του, σαν ένα παραλληλόγραμμο χωρίς την πάνω την οποία δεν τη χρειαζόμαστε, απλά αυτές εδώ οι τρεις μαζί με τις πλαϊνές εκεί κάτω θα είναι 10 εκ. Όταν φτάσουν 10 εκ. ώστε το εμβαδό τους να είναι το μέγιστο. Το εμβαδό τους επί το 20 που θα βγει ο όγκος αλλά εντάξει αυτό δεν μας νοιάζει τώρα, γιατί το 20 παραμένει σταθερό, δεν αλλάζει. (BW)

26. Ε: Πάρα πολύ ωραία.

27. Μ1: Άρα πρέπει να βρούμε μία σχέση μεταξύ πλευρών και εμβαδού (C)

Στο συγκεκριμένο επεισόδιο οι μαθητές της ομάδας εστίασης από το σχολείο Β κατασκευάζουν τα (XE_1) και (XE_2) στοιχεία γνώσης που αφορούν τον πειραματισμό με τα χειραπτικά εργαλεία. Συγκεκριμένα, αρχικά αναγνωρίζουν τα σταθερά μέρη της κατασκευής και οδηγούνται στην επιλογή του εμβαδού ως κρίσιμη ποσότητα, αγνοώντας τον όγκο (αναγνώριση, στίχος 23) αφού η μία πλευρά παραμένει σταθερή παραθέτοντας την κατάλληλη δικαιολόγηση (επαναδόμηση, στίχος 25). Έτσι, κατασκευάζουν το στοιχείο γνώσης (XE_1) που αφορά στη νοηματοδότηση του εμβαδού ως κρίσιμο στοιχείο για τη μοντελοποίηση, αλλά και το στοιχείο γνώσης (XE_2) που αφορά στην κατανόηση των μεταβολών στο εμβαδό διατομής. Κατόπιν, η ομάδα μαθητών κατασκευάζει την αλληλεξάρτηση μεταξύ πλευρών και εμβαδού (κατασκευή, στίχος 27), ως αποτέλεσμα του πρότερου πειραματισμού της. Στο επεισόδιο, πέρα από την επίδραση των εργαλείων στη νοηματοδότηση των μαθητών, εμφανίζεται η ζωντανή σχέση που υπάρχει με το πλαίσιο της δραστηριότητας όπως στο προηγούμενο επεισόδιο, ωστόσο με πρόσθετες λέξεις (π.χ. λαμαρίνα, πλευρές, παραλληλόγραμμο), οι οποίες επισημαίνουν τη στενή σχέση μαθηματικών και πλαισίου της δραστηριότητας.

Στην δεύτερη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Γ εμφανίστηκαν αντίστοιχα επεισόδια, στα οποία η συζήτηση της τάξης πέρασε πρώτα από την αλληλεξάρτηση δίπλωσης-όγκου και κατέληξε στην αλληλεξάρτηση δίπλωσης-εμβαδού, όπως φαίνεται στο ακόλουθο επεισόδιο.

22. Κ: Διαβάσατε; Μπορεί κάποιος να μου πει ποιο είναι το πρόβλημα;

23. Μ5: Έχουμε ένα φύλλο αλουμινίου με συγκεκριμένο πλάτος και πρέπει να βρούμε τον τρόπο κατά τον οποίο θα πρέπει να λυγίσει ώστε να μεταφέρει τη μέγιστη ποσότητα νερού. Μας δίνει διαστάσεις;

24. Κ: Καμία διάσταση.

25. Μ6: Να προσαρμόσουμε τις διαστάσεις του έτσι ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό όγκο. (R)

26. Μ5: Είναι να βρούμε τον τρόπο με τον οποίο θα λυγίσουμε ώστε να μεταφέρει το μεγαλύτερο δυνατό όγκο νερού.

27. Μ1: Κυρία νομίζω ότι ο μέγιστος όγκος νερού που μπορεί να έχει η υδρορροή εξαρτάται από το μέγιστο όγκο που θα δώσουμε στη λαμαρίνα.

28. Μ2: Από το εμβαδό. (BW)

29. Κ: Από ποιο εμβαδό; Το εμβαδό της λαμαρίνας όταν είναι σαν φύλλο αλουμινίου εννοείς;.

30. Μ4: Όχι, αυτού του σχήματος το εμβαδό [δείχνει το εμβαδό διατομής στο φύλλο εργασίας]. (BW)

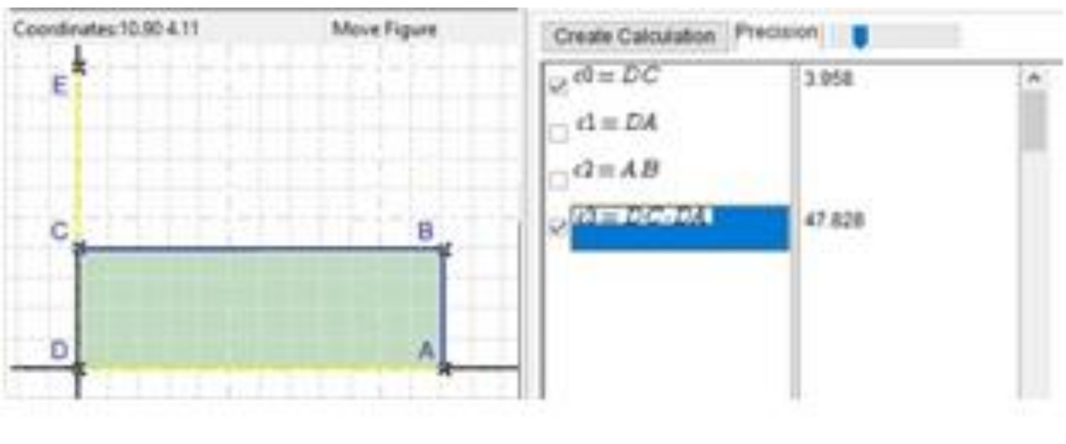
31 Κ: Γιατί;

32. Μ4: Γιατί ο όγκος θα είναι αυτό επί το μήκος του συνόλου. (C)

Στο επεισόδιο οι μαθητές της τάξης κατασκευάζουν τα στοιχεία γνώσης (XE_1) και (XE_2) που αφορούν στον εντοπισμό των κρίσιμων στοιχείων της πραγματικής κατάστασης και τον εντοπισμό των μεταβολών σε αυτά αντίστοιχα. Αρχικά, από την εκφώνηση του προβλήματος αναγνωρίζουν την αλληλεξάρτηση δίπλωσης-όγκου (αναγνώριση, στίχος 25). Μέσα από την αναφορά στο πραγματικό πρόβλημα σε μία συγκεκριμένη στέγη και τον πειραματισμό ορισμένων ομάδων με το μοντέλο του χαρτιού, η συζήτηση της τάξης πέρασε στην αλληλεξάρτηση δίπλωσης-εμβαδού διατομής (επαναδόμηση, στίχοι 28, 30). Ακολούθως, οι μαθητές είναι σε θέση να δικαιολογήσουν την αλληλεξάρτηση της δίπλωσης με το εμβαδό διατομής δικαιολογώντας τη σχέση του με τον όγκο (κατασκευή, στίχος 32). Σε αυτό το επεισόδιο βλέπουμε τον τρόπο που οι μαθητές καταλήγουν στην επιλογή των συμμεταβαλλόμενων χαρακτηριστικών και το επιχείρημα που χρησιμοποιούσαν για να επιλέξουν την αλληλεξάρτηση δίπλωσης-εμβαδού έναντι της δίπλωσης-όγκου. Στο συγκεκριμένο επεισόδιο ο καθοριστικός ρόλος των εργαλείων και του πλαισίου της δραστηριότητας φαίνεται μέσα από τα λόγια των μαθητών (στίχοι 25-26). Ωστόσο, αξίζει να αναφερθεί ότι ο εκπαιδευτικός παραμένει στο πλαίσιο της δραστηριότητας χωρίς να αλλάζει το λεξιλόγιο που χρησιμοποιεί για το πρόβλημα (στίχος 29).

4.1.2. Συσχέτιση (Correlation)

Στη συνέχεια, οι μαθητές μπορούσαν να συνδέσουν τις μεταβολές δύο μεγεθών αναγνωρίζοντας ότι οι μεταβολές συνδέονται. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αναγνώριζαν ότι η μεταβολή ενός μεγέθους προκαλεί μία αντίστοιχη μεταβολή σε ένα άλλο μέγεθος, δηλαδή το κύριο χαρακτηριστικό είναι η σύνδεση των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών καθώς οι μαθητές εργάζονταν είτε (α) με το μοντέλο χειραπτικών εργαλείων είτε (β) με το μοντέλο δυναμικής γεωμετρίας και μετρήσεων στο Casyopée. Μία βασική διαφορά με την προηγούμενη νοηματοδότηση είναι ότι πριν οι μαθητές αναφέρονταν στα χαρακτηριστικά μεταξύ ποσοτήτων, ενώ τώρα αναφέρονται σε μεγέθη. Σε αυτό τον τρόπο σκέψης συμπεριλαμβάνονται και οι περιπτώσεις που οι μαθητές ανέφεραν ότι τα μεγέθη είναι ανάλογα, καθώς η ερμηνεία της αναλογίας αφορά τη σύνδεση δύο ποσοτήτων. Το δεύτερο μέρος της εξελικτικής διαδικασίας εμφανίστηκε την πρώτη και δεύτερη ώρα πειραματισμού: (α) στην αρχική συζήτηση που έγινε στην τάξη και (β) κατά τη μοντελοποίηση του προβλήματος στο λογισμικό στην προσπάθεια των μαθητών να συνδέσουν τη συμμεταβολή των ποσοτήτων (δυναμική γεωμετρία) με τη συμμεταβολή των μεγεθών και των μετρήσεών τους (παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών) (Εικόνα 4 - 5). Ωστόσο, οι μαθητές σε αυτό το σημείο δεν μπορούσαν να δώσουν περαιτέρω πληροφορίες για το είδος της συμμεταβολής. Για παράδειγμα αρκετοί μαθητές κατά τη διάρκεια του πειραματισμού τους έλεγαν: «Όσο μεταβάλλεται το ένα μέγεθος μεταβάλλεται και το άλλο» αναφερόμενοι στο μήκος μίας πλευράς και σε ένα αντίστοιχο εμβαδό.



Εικόνα 4 - 5: Δυναμική γεωμετρία και το παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών

Για παράδειγμα από την πρώτη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Α, οι μαθητές εργαζόμενοι με το μοντέλο χειραπτικών εργαλείων παρατήρησαν την αλληλεξάρτηση των πλευρών και ακολούθως συσχέτισαν τις μεταβολές συνδέοντάς τες για τη μεγιστοποίηση του εμβαδού διατομής.

230. Κ: Δεν μας ενδιαφέρει η οικονομία στη λαμαρίνα. Θεωρούμε ότι θα περνάει η μέγιστη ποσότητα νερού από αυτό. [δείχνει το χαρτί]

231. Μ1: Κάτσε όγκο δεν θέλουμε; Είναι 2*16*10. [στη δίπλωση κατά πλάτος] Αν το κάνουμε με τον τρόπο να είναι πλατύ. [ενν. η βάση]

232. Μ2: Δεν είναι το ίδιο. Θα είναι 2*6*20. Το ένα βγαίνει 320 και το άλλο 240.

233. Μ1: Ναι οπότε συμφέρει καλύτερα η δίπλωση κατά μήκος. (R)

234. Μ2: Άρα το να είναι πιο μακρύ μας βολεύει πιο πολύ, γιατί όσο το αλλάζουμε το μήκος [ενν. τις πλαϊνές πλευρές] το νερό που μπορεί να μεταφέρει θα αλλάζει και συγκεκριμένα θα μεγαλώνει. (BW, C)

Στο παραπάνω απόσπασμα ο πειραματισμός των μαθητών με το μοντέλο χαρτιού οδηγεί τους μαθητές στην κατασκευή του στοιχείου γνώσης (XE_3), δηλαδή της συσχέτισης των δύο μεγεθών. Συγκεκριμένα οι μαθητές αρχικά πειραματίζονται με συγκεκριμένες τιμές και κατασκευάζουν το στοιχείο γνώσης (XE_1), δηλαδή αναγνωρίζουν ότι η δίπλωση κατά μήκος της λαμαρίνας είναι περισσότερο συμφέρουσα μέσα από την επιλογή συγκεκριμένων τιμών δίπλωσης (αναγνώριση, στίχος 233). Κατόπιν, ο Μ2 κατασκευάζει το στοιχείο γνώσης (XE_2) παρατηρώντας τις μεταβολές και κατασκευάζει το στοιχείο γνώσης (XE_3) που αφορά στην συσχέτιση λέγοντας ότι το νερό που μεταφέρεται από την υδρορροή αλλάζει όσο αλλάζουν οι πλευρές (επαναδόμηση, κατασκευή, στίχος 234). Επίσης, πέρα από τη νοηματοδότηση της συσχέτισης πλευράς-εμβαδού στον τελευταίο στίχο παρατηρούμε και την αναφορά σε αύξηση, το οποίο είναι ένα βήμα προς τη νοηματοδότηση της κατεύθυνσης από το μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων. Μέσα από το επεισόδιο φαίνεται η καθοριστική συμβολή του ρόλου των χειραπτικών εργαλείων καθώς βοηθά τους μαθητές να νοηματοδοτούν τη συσχέτιση και ακολούθως την κατεύθυνση. Σχετικά με τον ρόλο του πλαισίου της δραστηριότητας οι μαθητές κατά τη διάρκεια του πειραματισμού τους φαίνεται ότι εργάζονται σαν αληθινοί επαγγελματίες που αναζητούν τη βέλτιστη δίπλωση της λαμαρίνας.

Ένα άλλο παράδειγμα για τη νοηματοδότηση της συσχέτισης από την πρώτη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Β αφορά στον πειραματισμό με το μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας καθώς η ομάδα εστίασης μοντελοποιούσε το πρόβλημα στο λογισμικό Casyopée. Οι μαθητές αρχικά συζητούσαν τους περιορισμούς και με τη χρήση κάποιων μαθηματικών συμβόλων ήταν σε θέση να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες του εξαρτημένου σημείου στη δυναμική γεωμετρία, ώστε να δημιουργηθεί ένα σωστό δυναμικό σχήμα.

61. M1: Ο περιορισμός γι' αυτή τη διάσταση πρέπει να είναι 20. Αυτό είναι 20. Αν τη φτιάξεις την υδρορροή έτσι οι τρεις πλευρές πρέπει να είναι 20. (R)

62. M3: Το εμβαδό;

63. M1: Λοιπόν θέλουμε μία συνάρτηση 2x+y=20, δηλαδή x+x+y=20. (BW)

64. M2: Κοίτα αφού αυτό είναι 20 αν το κάνεις υδρορροή θα σχηματίσει τρεις πλευρές, χωρίς την πάνω. Οπότε μία και μία που θα είναι ίσες, οπότε x+x =2x και άρα 2x+y που είναι η κάτω θα πρέπει να είναι 20 σωστά;

65. E: Θέλουμε να το περιγράψουμε με μία μεταβλητή. Πόσο το έχετε πει το πλαϊνό;

66. M2: x.

67. E: Και τη βάση;

68. M1: 20-2x. Άρα η μία είναι x, και η άλλη 20-2x. Αυτό θέλω να αλλάζει.

69. E: Άρα ποιες θα είναι η συντεταγμένες του σημείου A;

70. M1: Ωραία. Το x του A πρέπει να είναι 0 και το y πρέπει να είναι 20-2xA. (C)

Στο επεισόδιο, οι μαθητές οι μαθητές αρχικά αναγνωρίζουν τον περιορισμό που ισχύει για τις πλευρές της υδρορροής (αναγνώριση, στίχος 61), ενώ ακολούθως περιγράφουν χρησιμοποιώντας σύμβολα τα μήκη των δύο πλευρών (επαναδόμηση, στίχος 63). Έπειτα, οι μαθητές κατασκευάζουν το στοιχείο γνώσης ($ΔΓ_1$) σχετικά με τη χρήση μίας ανεξάρτητης γεωμετρικής οντότητας για τη δημιουργία ενός δυναμικού μοντέλου (στίχος 68). Τέλος, οι μαθητές είναι σε θέση να μπορούν να περιγράψουν τις συντεταγμένες του εξαρτώμενου σημείου A κατασκευάζοντας τη συσχέτιση (κατασκευή, στίχος 70). Έτσι, φαίνεται η κατασκευή του στοιχείου γνώσης ($ΔΓ_2$) που αφορά στη σύνδεση της εξαρτημένης με την ανεξάρτητη οντότητα, καθώς με τη μετακίνηση του ελεύθερου σημείου C, το εξαρτώμενο σημείο A συμμεταβάλλεται στο παράθυρο της δυναμικής γεωμετρίας, καλύπτοντας ανά πάσα στιγμή τον περιορισμό και ταυτόχρονα δημιουργώντας ένα σωστό σχήμα στη δυναμική γεωμετρία. Οι μαθητές παρόλο που χρησιμοποιούν τα εργαλεία της δυναμικής γεωμετρίας και συγκεκριμένα τη δημιουργία σημείου με συγκεκριμένες συντεταγμένες, εντούτοις συνεχίζουν να χρησιμοποιούν λέξεις που αναφέρονται στο πλαίσιο της δραστηριότητας (π.χ. στίχος 61: «αν φτιάξεις την υδρορροή έτσι») δείχνοντας ότι η ισχυρή σχέση μαθηματικών και πραγματικού πλαισίου είναι ισχυρή.

Στη δεύτερη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Γ εμφανίστηκε ένα αντίστοιχο επεισόδιο μέσα από τη συζήτηση στη σχολική τάξη κατά τη μοντελοποίηση του προβλήματος της υδρορροής στη δυναμική γεωμετρία. Η καθηγήτρια της τάξης κάλεσε μαθητές από διαφορετικές ομάδες να μιλήσουν για τα στοιχεία και τους περιορισμούς της κατασκευής (Εικόνα 4 - 5, κατασκευή στη δυναμική γεωμετρία). Οι μαθητές άρχισαν να μοντελοποιούν το πρόβλημα προτείνοντας το σημείο C ως ελεύθερο σημείο και τα εξαρτημένα σημεία A και B της υδρορροής.

172. Κ: Θα χρειαστείτε ένα σημείο στο κάτω μέρος της υδρορροής και ένα σημείο που περιγράφει τη μέγιστη δίπλωση. Μετά θα χρειαστούμε ακόμα ένα σημείο μεταξύ των δύο αυτών σημείων, το οποίο περιγράφει κάθε φορά τη διαφορετική δίπλωση. Πρώτα από όλα θα πρέπει να βρείτε τον περιορισμό της κατασκευής.

173. Μ1: Προτείνω να βάλουμε το σημείο D στο (0,0).

174. Μ2: Θα πρέπει να φτιάξουμε το σημείο E ως (0,10) σε περίπτωση που διπλώσουμε την μεταλλική πλάκα στη μέση, ώστε να πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα για αυτή τη θέση του σημείου C. (R)

Έχοντας δημιουργήσει το σημείο C, οι μαθητές παρατήρησαν τη δίπλωση ώστε να βρουν ένα τρόπο να εκφράσουν την τετμημένη του σημείου A. Οι περισσότερες ομάδες μαθητών προσπάθησαν να το βρουν λύνοντας την εξίσωση x+x+y=20 ως προς y.

175. Μ3: Προσπάθησα να φτιάξω το σημείο A ως (20-2*x , 0), αλλά δεν τα κατάφερα.

176. Μ4: Εμείς φτιάξαμε το σημείο A ως (20-2* yC , 0) και δούλεψε! [χρησιμοποιώντας την τεταγμένη του σημείου C)

177. Μ2: Κι εμείς φτιάξαμε το σημείο A ως (20-2* DC , 0) και τα καταφέραμε, γιατί όσο μετακινούμε το σημείο C, μετακινείται και το σημείο A! (BW, C)

Στο επεισόδιο οι μαθητές κατασκευάζουν το στοιχείο γνώσης ($ΔΓ_2$), δηλαδή τη σύνδεση των δύο γεωμετρικών οντοτήτων και συγκεκριμένα τη σύνδεση των συμμεταβαλλόμενων μηκών που δημιουργούνται από τα σημεία A και C, ωστόσο δεν μπορούν να δώσουν περεταίρω λεπτομέρειες για την κατεύθυνση της μεταβολής. Στο συγκεκριμένο επεισόδιο, ο Μ2 αναγνωρίζει ότι ο περιορισμός της υδρορροής πρέπει να σηματοδοτείται από το σημείο E (αναγνώριση, στίχος 174) και ακολούθως οι περισσότερες ομάδες μαθητών εργάζονται για να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες του σημείου Α χρησιμοποιώντας μία απλή εξίσωση (επαναδόμηση). Έχοντας δημιουργήσει τα στοιχείο γνώσης ($ΔΓ_1$) στο μοντέλο δυναμικής γεωμετρίας, δηλαδή τη χρήση ενός ελεύθερου σημείου και στη σύνδεσή του με άλλα σημεία, ο Μ5 κατασκευάζει το στοιχείο γνώσης ($ΔΓ_2$), προσδιορίζει τις σωστές συντεταγμένες του εξαρτημένου σημείου Α και νοηματοδοτεί τη συσχέτιση (κατασκευή, στίχος 177). Σε αυτό το επεισόδιο η συμμεταβολή υποδεικνύεται από το στίχο 177: «όσο μετακινούμε το σημείο C, μετακινείται και το σημείο Α» και προέκυψε από τον πειραματισμό των μαθητών με το μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας. Εδώ, η συνεισφορά των εργαλείων είναι κρίσιμη στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών και το πλαίσιο της δραστηριότητας εκφράζεται ξεκάθαρα κατά τη διάρκεια των περιορισμών στο Casyopée (στίχος 174).

4.1.3. Κατεύθυνση (Direction)

Στο τρίτο μέρος της εξελικτικής διαδικασίας οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να περιγράφουν την κατεύθυνση των μεταβολών μεταξύ δύο αλληλεξαρτώμενων μεγεθών, συσχετίζοντας τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη καθώς εργάζονταν είτε στο μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων είτε στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας είτε στο μοντέλο των μετρήσεων. Οι μαθητές κατά τη δεύτερη ώρα πειραματισμού: (α) με συγκεκριμένες τιμές δίπλωσης για τον προσδιορισμό του εμβαδού της υδρορροής και (β) με τις μεταβολές στα παράθυρα του Casyopée μπορούσαν όχι μόνο να παρατηρούν τη συσχέτιση των μεγεθών όπως έκαναν μέχρι τώρα, αλλά επιπλέον να δίνουν έμφαση στην κατεύθυνση των μεταβολών. Για παράδειγμα, οι μαθητές συνήθως έλεγαν: «Όσο το ένα μέγεθος μειώνεται, μειώνεται και το άλλο» (Εικόνα 4 - 5).

Για παράδειγμα, στο ακόλουθο επεισόδιο από την πρώτη φάση συλλογής δεδομένων από το σχολείο Α κατά την δραστηριότητα της υδρορροής, οι μαθητές της ομάδας εστίασης σημειώνουν την κατεύθυνση της μεταβολής κατά τον πειραματισμό τους με το κομμάτι από χαρτί στο μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η παρέμβαση του εκπαιδευτικού ήταν καθοριστική στη συγκεκριμένη νοηματοδότηση της κατεύθυνσης.

235. Κ: Για τη μέγιστη ροή νερού τι θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε;

236. Μ2: Το πλάτος, αλλά μέχρι ένα σημείο. Όσο πιο μεγάλο είναι τόσο περισσότερο νερό θα περνάει. Όμως, όσο μεγαλύτερο γίνεται τόσο μικρότερα θα είναι τα πλαϊνά τοιχώματα. (R, BW)

237. Μ1: Συναρτήσει και των δύο πρέπει να βρούμε το μέγιστο εμβαδό. (C)

Στο επεισόδιο παρατηρούμε ότι ο Μ2 κατασκευάζει τα στοιχεία γνώσης (XE_1) και (XE_2) για τον εντοπισμό των κρίσιμων στοιχείων και την κατανόηση των μεταβολών. Αρχικά αναγνωρίζει ότι πρέπει να μεγιστοποιηθεί η μία πλευρά και αυτό θα επιφέρει περισσότερο νερό μέσα στην υδρορροή (αναγνώριση, επαναδόμηση στίχος 236). Ακολούθως, η ομάδα μαθητών κατασκευάζει το στοιχείο γνώσης (XE_3), το οποίο αναφέρεται στη σύνδεση των μεταβολών μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων. Πράγματι, ο Μ2 παρατηρεί η συγκεκριμένη μεγιστοποίηση θα πρέπει να γίνει ώστε να μην είναι αρκετά μικρά τα πλαϊνά τοιχώματα, ενώ ο Μ1 συνδέει τις δύο μεταβολές (κατασκευή, στίχοι 236-237). Έτσι, στον στίχο 236 ο Μ2 παρατηρεί την κατεύθυνση μεταξύ των δύο πλευρών της υδρορροής έχοντας πειραματιστεί με το μοντέλο χαρτιού, σημειώνοντας τη σημασία του ρόλου των εργαλείων. Στη συνέχεια της διερεύνησης της ομάδας στη συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι σε θέση να νοηματοδοτήσει την κατεύθυνση μεταξύ της μίας πλευράς του ορθογωνίου και του εμβαδού. Και πάλι το πλαίσιο είναι παρόν σε αυτό το μικρό επεισόδιο, ενώ είναι κρίσιμος ο ρόλος του εκπαιδευτικού με την παρέμβασή του στην ομάδα μαθητών.

Ένα άλλο επεισόδιο από την πρώτη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Α προέκυψε από μία ομάδα μέσα στην τάξη μέσω της μετακίνησης του ελεύθερου σημείου στη δυναμική γεωμετρία. Η διπλανή ομάδα από την ομάδα εστίασης παρατήρησε ότι προκαλούνται ταυτόχρονες μεταβολές στο δυναμικό σχήμα και στις μετρήσεις των μεγεθών στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών παρατηρώντας τη δυναμική αλλαγή των τιμών στο Casyopée κατά τη μετακίνηση του ελεύθερου σημείου.

11. Ε: Πώς κατασκευάσατε το ορθογώνιο;

12. Μ4: Κοιτάξτε το εμβαδό εδώ. Βλέπουμε ότι το μέγιστο εμβαδό είναι 50 και καθώς αλλάζουμε αυτή την τιμή… [ενν. την τιμή του DC] (R)

13. Μ5: Ωραία. Επιλέξαμε το σημείο C και φέραμε παράλληλη. Βάλαμε την τεταγμένη ίση με μηδέν, αλλά η τετμημένη είναι ίση με AD.

14. Μ4: Εντάξει. Εδώ δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι το μέγιστο. Μπορούμε να δούμε ότι αν αλλάξουμε το σημείο C σε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα [ενν. Το DC] το εμβαδό συνέχεια μειώνεται και μεγιστοποιείται όταν πάρει τη μέγιστη τιμή του. (BW)

15. Μ5: Κοιτάξτε στους γεωμετρικούς υπολογισμούς. Έχουμε τη μέγιστη τιμή του ευθύγραμμου τμήματος DC. Όσο μετακινούμε το C προς τα κάτω, βλέπουμε ότι και το εμβαδό μειώνεται. (C)

Στο επεισόδιο οι μαθητές κατασκευάζουν τα στοιχεία γνώσης ($ΔΓ_2$) και ($ΜΕ_1$), δηλαδή τη σύνδεση εξαρτημένης και ανεξάρτητης γεωμετρικής οντότητας και τη συμμεταβολή μεγεθών καθώς εργάζονται στο μοντέλο των μετρήσεων. Πράγματι, μετακινώντας το σημείο C, συσχέτισαν τις μεταβολές στο μήκος του ευθυγράμμου τμήματος DC με τις μεταβολές του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με σκοπό να μεγιστοποιήσουν το εμβαδό διατομής της υδρορροής. Οι διασυνδεόμενες αναπαραστάσεις βοήθησαν τον μαθητή Μ4 να νοηματοδοτήσει την κατεύθυνση των μεταβολών μεταξύ των μετρήσεων (αναγνώριση, στίχος 12), από την παρατήρηση των συμμεταβαλλόμενων μετρήσεων των μεγεθών. Η ομάδα μαθητών αναγνώρισε ότι οι μεταβολές των τιμών του μήκους του DC μεταβάλλουν τις τιμές του εμβαδού με την μετακίνηση του ελεύθερου σημείου. Στη συνέχεια, έκαναν σύντομη παρουσίαση της διερεύνησής τους με σκοπό τη σύνδεση των δύο μεγεθών (επαναδόμηση, στίχος 14) για να δώσουν απάντηση στο πρόβλημα. Τέλος, η ομάδα μαθητών κατασκεύασε την κατεύθυνση της μεταβολής των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών (κατασκευή, στίχος 15). Συγκεκριμένα, ο μαθητής Μ5 αναφέρει ότι η τιμή του εμβαδού μειώνεται καθώς μετακινεί προς την αρχή των αξόνων το ελεύθερο σημείο C, δηλαδή καθώς ελαττώνει το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος DC. Στο επίπεδο των εργαλείων, οι διασυνδεόμενες αναπαραστάσεις της δυναμικής γεωμετρίας και του παραθύρου γεωμετρικών υπολογισμών αποτέλεσαν πεδίο για τη συγκεκριμένη νοηματοδότηση.

Μία βασική διαφορά στις νοηματοδοτήσεις των ομάδων είναι ότι στο σχολείο Β από την πρώτη φάση συλλογής δεδομένων στη δραστηριότητα της υδρορροής δεν προέκυψε η κατεύθυνση πριν τη δημιουργία συνάρτησης, παρά μόνο με τη χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Έτσι, για το σχολείο Β δεν υπάρχει κάποιο επεισόδιο διαθέσιμο για να παρατεθεί στη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Αξίζει να σημειωθεί ότι στις επόμενες δραστηριότητες η εμφάνιση της κατεύθυνσης έγινε αμέσως μετά την εμφάνιση της συσχέτισης στα δεδομένα και πριν την επιλογή μεταβλητών, ακολουθώντας την μαθησιακή τροχιά που περιγράφεται από τα άλλα δύο σχολεία.

Στη δεύτερη φάση συλλογής δεδομένων, από το σχολείο Γ παρατίθεται ένα επεισόδιο που διαδραματίστηκε όταν οι μαθητές έκαναν υπολογισμούς πριν μοντελοποιήσουν το πρόβλημα στο Casyopée, με στόχο να εντοπίσουν ποια δίπλωση (δηλαδή κατά μήκος ή κατά πλάτος) είναι καταλληλότερη.

487. Κ: Λέτε: Θα βάλω δύο τιμές από την πλευρά των 20 εκ. και θα κάνω μία δίπλωση. Και παίρνω πείτε 5,10,15,20. Ωραία. Βρίσκω εδώ πέρα το εμβαδό της διατομής, δηλαδή βρίσκω ότι εδώ πέρα είναι 50 το εμβαδό της διατομής, άσχετα αν είναι ανοιχτό από πάνω. Αν το κάνω 7.5, 7.5 και 5 και αν βάλω 20 γιατί το έχει διπλώσει έτσι, το εμβαδό του βγαίνει 37.5. Οι διπλώσεις είναι διαφορετικές μεταξύ τους και βγαίνουν διαφορετικά εμβαδά σε σχέση με την άλλη δίπλωση.

488. Μ1: Ψάχνουμε το μέγιστο γινόμενο είπαμε (R)

489. Κ: Ψάχνουμε το μέγιστο γινόμενο, αλλά ψάχνουμε και τον βέλτιστο τρόπο δίπλωσης.

490. Μ7: Όσο πιο μικρή είναι αυτή η πλευρά [ενν. η βάση] τόσο μεγαλύτερο θα βγαίνει το εμβαδό; Γιατί υποτίθεται ότι θα φεύγει το πάνω. (BW, C)

491. Μ1: Άρα ο βέλτιστος τρόπος θα έχει το μεγαλύτερο γινόμενο

Στο συγκεκριμένο επεισόδιο οι μαθητές εργάζονται στο μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων, κατασκευάζουν τα στοιχεία γνώσης (XE_2) και (XE_3), τα οποία αφορούν στην κατανόηση των μεταβολών και στη σύνδεση των μεταβολών των γεωμετρικών αντικειμένων αντίστοιχα και τέλος νοηματοδοτούν την κατεύθυνση. Αρχικά, η ομάδα μαθητών αναζητά τη δίπλωση που θα επιφέρει το μέγιστο γινόμενο (αναγνώριση, στίχος 488). Ωστόσο, ο Μ7 κατασκευάζει το στοιχείο γνώσης (XE_2) αναφέροντας ότι μεγαλύτερα πλαϊνά τοιχώματα στην υδρορροή θα έχουν αποτέλεσμα μεγαλύτερο εμβαδό διατομής (επαναδόμηση, στίχος 490). Αυτή είναι μία παρανόηση που εμφανίστηκε αρκετές φορές καθώς οι μαθητές σκέφτονταν ότι για να αποφεύγουμε τις διαρροές της υδρορροής θα πρέπει να έχουμε υψηλά πλαϊνά τοιχώματα, άρα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε τη βάση. Έβλεπαν δηλαδή αποσπασματικά τη συμβολή της κάθε πλευράς στο πρόβλημα και όχι την από κοινού συνεισφορά τους. Ωστόσο, ο Μ7 συνδέει τις μεταβολές κατασκευάζοντας το στοιχείο γνώσης (XE_3), χρησιμοποιεί τη συμμεταβολή των γεωμετρικών αντικειμένων και μπορεί να εκφράσει την κατεύθυνση των μεταβολών των μεγεθών που συμμετέχουν σε αυτή (κατασκευή, στίχος 490). Τα εργαλεία που χρησιμοποιούν οι μαθητές στο επεισόδιο είναι οι μετρήσεις που κάνουν χωρίς τη χρήση του λογισμικού.

Στη δεύτερη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Γ, οι μαθητές της ομάδας εστίασης νοηματοδότησαν την κατεύθυνση κατά τη μοντελοποίηση του προβλήματος στη δυναμική γεωμετρία. Η ομάδα εστίασης μετά τον ορισμό του ελεύθερου σημείου A και του C που εξαρτάται από αυτό, όρισαν μόνο τη μέτρηση του εμβαδού στους γεωμετρικούς υπολογισμούς και παρατηρούσαν τις τιμές που αλλάζουν κατά τη μετακίνηση του ελεύθερου σημείου. Έτσι, όσο η καθηγήτρια της τάξης έκανε σύνοψη για τη μοντελοποίηση του προβλήματος και την αναφορά των περιορισμών στην περίπτωση της δίπλωσης της πλευράς των 20 εκ., οι μαθητές της ομάδας εστίασης παρατηρούσαν τη συμμεταβολή πλευράς-εμβαδού στο παράθυρο των γεωμετρικών υπολογισμών, από τη μετακίνηση του ελεύθερου σημείου.

643. Μ2: Ας κάνουμε υπολογισμούς γιατί όταν κουνάμε το C, κουνιέται και το σημείο A και τα υπόλοιπα.

644. Μ1: Η DA, πόσο είναι; [αναζητά τον υπολογισμό της πλαϊνής πλευράς]

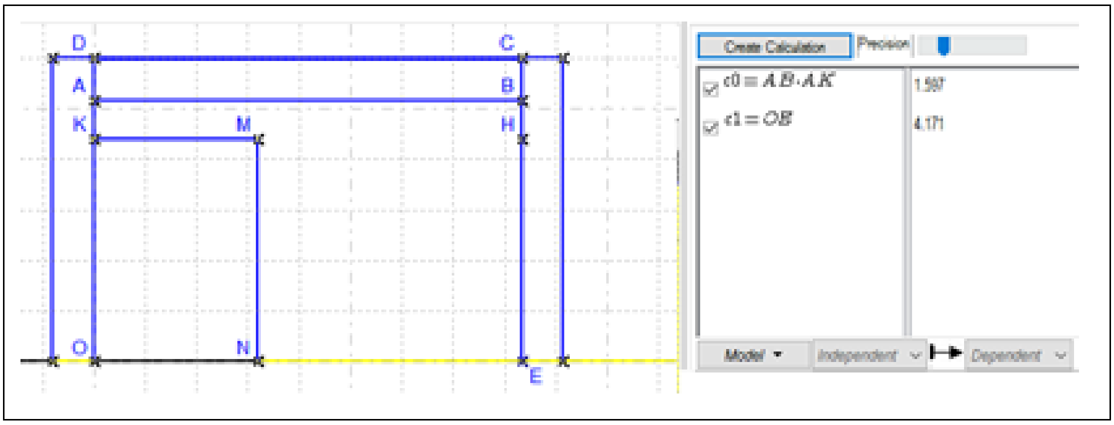
645. Μ2: Να κάνουμε και τον υπολογισμό του εμβαδού DA*DC. Κοίτα εδώ βλέπεις; Αυτό εδώ πρέπει να είναι μέγιστο [δείχνει υπολογισμό εμβαδού]

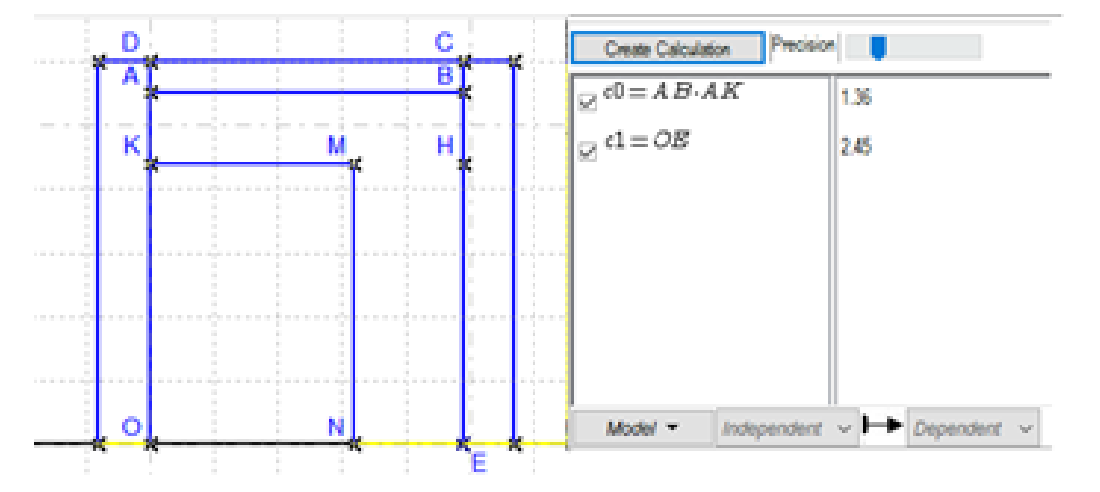
646. Μ1: Αυτό σου λέω θα παίρνω τους συνδυασμούς και θα φτάσω μέχρι το μέγιστο. Να βρούμε εκεί που το επόμενο θα είναι μικρότερο. Το μέγιστο θα είναι εκεί που ο επόμενος συνδυασμός αρχίζει να είναι μικρότερος, όταν αρχίσει να μειώνεται.

Στο επεισόδιο, η ομάδα μαθητών κατασκευάζει τα στοιχεία γνώσης ($ΔΓ_2$) και ($ΜΕ_1$), δηλαδή τη σύνδεση μεταξύ των γεωμετρικών οντοτήτων και την συμμεταβολή μεταξύ μεγεθών αντίστοιχα. Αρχικά, ο μαθητής Μ2 αναγνωρίζει τη συσχέτιση μεταξύ των σημείων C και A (αναγνώριση, στίχος 643) κατασκευάζοντας το στοιχείο γνώσης ($ΔΓ_2$). Ακολούθως, ο ίδιος μαθητής προτείνει τη μεγιστοποίηση του υπολογισμού του εμβαδού DA*DC (επαναδόμηση, στίχος 645). Τέλος, ο Μ1 κατασκευάζει το ($ΜΕ_1$) δηλαδή τη συμμεταβολή μεταξύ μεγεθών υποδεικνύοντας την κατεύθυνση. Ο συγκεκριμένος μαθητής προτείνει τη μελέτη των συμμεταβαλλόμενων τιμών στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών, το οποίο είναι διασυνδεόμενο με τη δυναμική γεωμετρία και μόλις προκύψει ο πρώτος συνδυασμός που φθίνει το εμβαδό σημαίνει ότι θα έχουν εντοπίσει τη δίπλωση με το μέγιστο εμβαδό (κατασκευή, στίχος 646). Στο επίπεδο των εργαλείων αποκαλύπτεται η πλούσια αλληλεπίδραση των παραθύρων του Casyopée, τα οποία βοηθούν τους μαθητές στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβαλλόμενη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων.

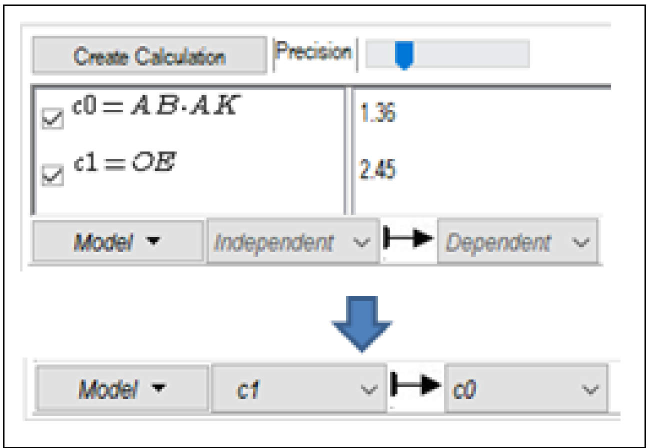
4.1.4. Επιλογή μεταβλητών (Variable selection)

Οι μαθητές κατά τη διάρκεια του πειραματισμού τους είχαν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν ότι το ζεύγος από τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη μπορεί να αποτελέσει ένα ζεύγος συμμεταβαλλόμενων μεταβλητών εργαζόμενοι στο μοντέλο των μετρήσεων και των συναρτήσεων. Έτσι, το κύριο χαρακτηριστικό σε αυτό το σημείο της μαθησιακής τροχιάς είναι η μετάβαση της προσοχής των μαθητών από τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη σε συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές. Οι μαθητές παρατηρούσαν ότι το ένα μέγεθος μπορεί να θεωρηθεί ως ανεξάρτητη μεταβλητή, καθώς προκαλεί τις μεταβολές και το άλλο ως εξαρτημένη με σκοπό τη δημιουργία μίας συνάρτησης που μοντελοποιεί το πρόβλημα. Μάλιστα η συγκεκριμένη νοηματοδότηση είναι πιο σύνθετη από τις προηγούμενες καθώς τονίζεται η συναρτησιακή σχέση που έχουν οι δύο μεταβλητές. Ωστόσο, οι μαθητές φάνηκε να είναι αρκετά προσεκτικοί στην επιλογή της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής και σε αρκετές περιπτώσεις χρησιμοποιούσαν τον πρότερο πειραματισμό τους με το δυναμικό σχήμα στη δυναμική γεωμετρία για να υποστηρίξουν την επιλογή τους. Για παράδειγμα οι μαθητές στη δραστηριότητα της Πρόσοψης Καταστήματος συνήθως έλεγαν: «Αν πούμε εξαρτημένη το AB*AK (το εμβαδό της άνω βιτρίνας), τότε η ανεξάρτητη πρέπει να είναι η απόσταση OE, αφού κουνάμε το σημείο E» (Εικόνα 4 - 6).





Εικόνα 4 - 6: Στιγμιότυπα στη δυναμική γεωμετρία και στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών



Εικόνα 4 - 7: Επιλογή μεγεθών ως μεταβλητές

Για παράδειγμα, στην πρώτη φάση συλλογής δεδομένων από το σχολείο Α, η ομάδα εστίασης αναζητούσε το κατάλληλο ζεύγος ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής προκειμένου να μοντελοποιήσουν το πρόβλημα στο λογισμικό Casyopée. Οι μαθητές είχαν δημιουργήσει μετρήσεις στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών και συζητούσαν για το ποιες είναι οι κατάλληλες μετρήσεις ώστε να προχωρήσουν στη μοντελοποίηση του προβλήματος (Εικόνα 4 - 7).

455. M1: Εδώ πέρα πρέπει πρώτα να ορίσουμε εξαρτημένη ή ανεξάρτητη μεταβλητή. Αν θεωρήσουμε εξαρτημένη την ΑΚ.

456. M3: Εε; Ανεξάρτητη την ΑΚ?

457. M1: Εξαρτημένη την ΑΚ. Ανεξάρτητη την ΑΒ

458. M2: Όχι, όχι καμία, καμία ανεξάρτητη από αυτά. Η ανεξάρτητη βρίσκεται εδώ πέρα.

459. M3: Ναι, η ΝΕ είναι ανεξάρτητη.

460. M1: Η ΟΕ. Ουσιαστικά η ΟΕ είναι ίση με την ΑΒ. Όσο μεταβάλλεται η ΟΕ, μεταβάλλεται και η ΑΒ, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε και την ΑΒ ανεξάρτητη. (R)

461. Μ3: Και η εξαρτημένη ποια βάζουμε;

462. Μ2: Εξαρτημένη είναι από το Ε. Δηλαδή άμα κουνήσω το Ε θα κουνηθεί και η ΑΒ. Γι' αυτό είναι εξαρτημένη. Οπότε ανεξάρτητη είναι η ΟΕ. (BW)

463. Μ3: Και η εξαρτημένη ποια είναι;

464. Μ1: Το εμβαδό ΑΒ*ΑΚ. (C)

Στο επεισόδιο, οι μαθητές εργάζονται στο μοντέλο των μετρήσεων και κατασκευάζουν τα στοιχεία γνώσης ($ΜΕ_1$) και ($ΜΕ_2$), δηλαδή τη συμμεταβολή μεταξύ μεγεθών και την θεώρηση των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών ως ζεύγος μεταβλητών. Αρχικά, η ομάδα μαθητών αναζητά την εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή προτείνοντας αρχικά ως εξαρτημένη την ΑΚ. Ακολούθως μετά από σχετική συζήτηση εντός της ομάδας οι μαθητές κατασκευάζουν το στοιχείο γνώσης ($ΜΕ_1$) και αναγνωρίζουν ως ανεξάρτητη μεταβλητή την ΟΕ (αναγνώριση, στίχος 460) δίνοντας κατάλληλη εξήγηση από την κίνηση του ελεύθερου σημείου Ε (επαναδόμηση, στίχος 462). Τέλος, η ομάδα μαθητών εντοπίζει και την εξαρτημένη μεταβλητή, κατασκευάζει το στοιχείο γνώσης ($ΜΕ_2$) και καταλήγει στο ζευγάρι εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής (κατασκευή, στίχος 464). Αξίζει να σημειωθεί ότι συνήθως οι μαθητές ακολουθούσαν την αντίστροφη πορεία για την επιλογή των μεταβλητών: πρώτα αναγνώριζαν ποια είναι η εξαρτημένη μεταβλητή και ακολούθως έβρισκαν την ανεξάρτητη μεταβλητή καταλήγοντας στο ζεύγος των μεταβλητών. Ο ρόλος των εργαλείων στο συγκεκριμένο επεισόδιο φαίνεται να είναι κρίσιμος καθώς οι μαθητές επιλέγουν με τη βοήθεια της λειτουργίας της αυτόματης μοντελοποίησης το κατάλληλο ζεύγος μεταβλητών.

Αντίστοιχο παράδειγμα στην πρώτη φάση συλλογής δεδομένων προέκυψε από το σχολείο Β, όπου η ομάδα εστίασης αναζητούσε τις κατάλληλες μεταβλητές ώστε να μοντελοποιήσει το πρόβλημα της Πρόσοψης Καταστήματος. Η ομάδα εστίασης είχε δημιουργήσει διαφορετικούς υπολογισμούς στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών και προβληματίζονταν σχετικά με την επιλογή της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής.

26. Μ1: Όσο το μεγαλώνεις χρειάζεται να είναι πιο παχύ πιο παχύ, πιο χοντρό πιο χοντρό για να το κρατάει καλύτερα. Τώρα σου λέει τον χώρο από το εμβαδό ΚΗΒΑ. Αυτόν τον χώρο ανάμεσα στην πόρτα και στο δοκάρι θα τον γεμίσεις με 4 τζάμια και σου λέει που πρέπει να είναι το σημείο Ε – πόσο μακριά ή πόσο κοντά, ώστε αυτό το εμβαδό να είναι το μέγιστο, οπότε πρέπει να φτιάξουμε μία μεταβλητή με το ΟΕ και

μία άλλη μεταβλητή με το ΑΚ*ΑΒ αυτά θα τα φτιάξουμε εδώ. Το ΟΕ είναι η μία μεταβλητή και η άλλη μεταβλητή είναι το ΑΚ*ΑΒ. (R)

27. Μ2: Γιατί;

28. Μ1: Για το εμβαδό. ΑΚ*ΑΒ εμβαδό. Τους υπολογισμούς έτσι τους βάζουμε ή αντίθετα; Έτσι ή αντίθετα; Κάτσε να δω κάτι. Ωραία καλά το έχω βάλει. (BW)

29. Κ: Τι έκανες εκεί;

30. Μ1: Έφτιαξα μία συνάρτηση με βάση το ΟΕ και το εμβαδό ΑΚΗΒ και το έκανα μοντελοποίηση.

31. Κ: Μπορείς να μας εξηγήσεις πως σκέφτηκες;

32. Μ1: Θέλουμε το μέγιστο εμβαδό σε σχέση με την ΟΕ. Σε σχέση με το πόσο μεγάλη θα είναι η βιτρίνα στο μήκος, έτσι αλλάζει και το εμβαδό των βιτρινών που θέλουμε. Των τζαμιών εδώ πάνω. Κι αυτός μας ζητάει το μεγαλύτερο εμβαδό. Οπότε έφτιαξα δύο [υπολογισμούς]… Βασικά έβαλα μία το ΟΕ και μία το εμβαδό και το έκανα μοντελοποίηση και μου έβγαλε εδώ πέρα τη συνάρτηση. και αν τη βάλω στα γραφήματα είναι αυτή εδώ, οπότε το μέγιστο εμβαδό είναι περίπου στο 4. (C)

Στο επεισόδιο, η ομάδα εστίασης κατασκευάζει το στοιχείο γνώσης (ME_2), δηλαδή τη θεώρηση του συμμεταβαλλόμενου ζεύγους μεγεθών ως ζεύγος μεταβλητών. Αρχικά, ο Μ1 αναγνωρίζει τα δύο μεγέθη που θα πρέπει να ορίσει στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών (αναγνώριση, στίχος 26). Στη συνέχεια, εκφράζει το ζεύγος συμμεταβαλλόμενων μεγεθών ως ζεύγος ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, προκειμένου να δημιουργήσει τη συνάρτηση που μοντελοποιεί το πρόβλημα, όμως προβληματίζεται για το ποια θα είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή και ελέγχει τι γίνεται όταν ορίσει ανάποδα τις μεταβλητές (επαναδόμηση, στίχος 28). Μετά από την λανθασμένη επιλογή και την ανατροφοδότηση του λογισμικού, η ομάδα μαθητών δημιουργεί τη συνάρτηση και κατασκευάζει το στοιχείο γνώσης (ME_2). Τέλος, ο Μ1 δίνει εξηγήσεις σχετικά με την επιλογή ανεξάρτητης (ΟΕ) και εξαρτημένης (εμβαδό ΑΒ*ΑΚ) μεταβλητής, καθώς το μήκος της πρόσοψης επηρεάζει το εμβαδό της βιτρίνας (κατασκευή, στίχος 32). Παρατηρούμε τον κρίσιμο ρόλο τόσο των εργαλείων όσο και του πλαισίου της δραστηριότητας στο συγκεκριμένο επεισόδιο. Από τη μία οι μαθητές εργάζονται για την χρήση της λειτουργίας της αυτόματης μοντελοποίησης και από την άλλη μιλούν και επεξεργάζονται τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη ως μεταβλητές αναφερόμενοι στο πραγματικό πλαίσιο (π.χ. πόρτα, δοκάρι, εμβαδό τζαμιών, βιτρίνα).

Στη δεύτερη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Γ κατά την εφαρμογή της δραστηριότητας της Πρόσοψης Καταστήματος φάνηκε πως η ομάδα εστίασης κατά τον πειραματισμό της αναφέρεται στην κατάλληλη επιλογή των γεωμετρικών υπολογισμών για να δημιουργήσει μία συνάρτηση. Στο επόμενο επεισόδιο, η ομάδα εστίασης είχε πειραματιστεί με λανθασμένα ζεύγη από εξαρτημένες και ανεξάρτητες μεταβλητές και ο Μ1 πρότεινε να δημιουργήσουν το εμβαδό της άνω βιτρίνας ως εξαρτημένη μεταβλητή της σχετικής συνάρτησης και να αναζητήσουν την ανεξάρτητη μεταβλητή.

652. Μ1: Στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών θα πρέπει να δημιουργήσουμε μόνο το εμβαδό της άνω βιτρίνας, το οποίο αλλάζει σε σχέση με την άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή. (R)

653. Μ2: Οπότε, ας δημιουργήσουμε τον υπολογισμό της άνω βιτρίνας [ο Μ2 φτιάχνει τον γεωμετρικό υπολογισμό]. (BW)

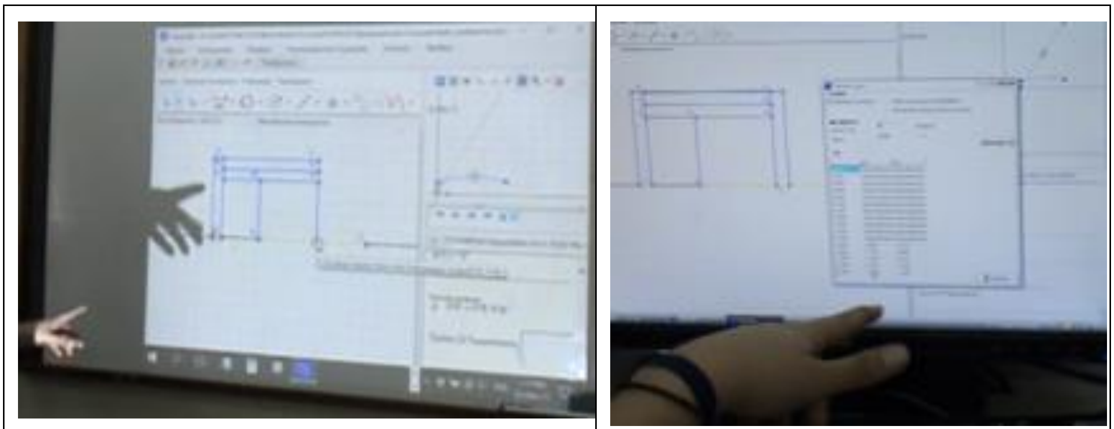
654. Μ1: Εντάξει, ας επιλέξουμε αυτό τον υπολογισμό ως εξαρτημένη μεταβλητή (BW)

655. Μ2: Περίμενε. Θα πρέπει να υπολογίσουμε και το ΟΕ, γιατί μετακινούμε το σημείο Ε. Νομίζω αυτό θα είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. (C)

Οι μαθητές της ομάδας εστίασης προσδιόρισαν το ($ΜΕ_1$) στοιχείο γνώσης σχετικά με τη συμμεταβολή μεγεθών, προτείνουν τη δημιουργία άλλων γεωμετρικών υπολογισμών στο Casyopée και μιλούν για ένα ζευγάρι μεταβλητών αντί για μεγέθη ($ΜΕ_2$) στοιχείο γνώσης (αναγνώριση, στίχος 652). Ακολούθως, επιλέγουν το εμβαδό της άνω βιτρίνας ως την εξαρτημένη μεταβλητή (επαναδόμηση, στίχος 654). Τέλος, ο Μ2 προτείνει τη δημιουργία του ΟΕ ως γεωμετρικό υπολογισμό και το συστήνει ως την κατάλληλη ανεξάρτητη μεταβλητή (κατασκευή, στίχος 655) βασιζόμενος στην παρατήρηση του τρόπου που το δυναμικό εμβαδό της άνω βιτρίνας μεταβάλλεται μέσω της μετακίνησης του ελεύθερου σημείου Ε στο παράθυρο της δυναμικής γεωμετρίας (Εικόνα 4 - 6). Στο επίπεδο της χρήσης εργαλείων, παρόλο που προηγουμένως οι μαθητές εργάστηκαν με τους γεωμετρικούς υπολογισμούς και το παράθυρο της δυναμικής γεωμετρίας, εδώ φαίνεται να εστιάζουν στην αντίθετη κατεύθυνση. Καθώς πειραματίζονταν με τους γεωμετρικούς υπολογισμούς, η ανάγκη για την επιλογή ενός ζεύγους εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής τους οδήγησε στο να χτίσουν στην πρόσφατη εμπειρία τους με τον δυναμικό χειρισμό του σχήματος στη δυναμική γεωμετρία και να κάνουν συνδέσεις. Σχετικά με το πλαίσιο της δραστηριότητας οι λέξεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές για τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη και τις μεταβλητές υποδεικνύουν μία ισχυρή σύνδεση με το πλαίσιο του προβλήματος («άνω βιτρίνα», στίχοι 652-653), συνδέοντας περισσότερο την εργασία τους με τα παράθυρα της δυναμικής γεωμετρίας και των γεωμετρικών υπολογισμών.

4.1.5. Συντονισμός (Coordination)

Ακολούθως, οι μαθητές μπορούσαν να συντονίζουν τις μεταβολές που παρατηρούσαν σε συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές καθώς συνέδεαν διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης, όπως ο αλγεβρικός τύπος, ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση (Εικόνα 4 - 8). Οι μαθητές εργαζόμενοι αποκλειστικά στο μοντέλο των συναρτήσεων έκαναν περιγραφή της συμμεταβολής των δύο μεταβλητών σε αρκετές περιπτώσεις με τη χρήση αλγεβρικών στοιχείων. Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής έγινε σταδιακά ξεκινώντας από τη νοηματοδότηση της μεταβολής της κάθε μεταβλητής χωριστά και καταλήγοντας στη σύνδεση των δύο μεταβολών σύμφωνα με τα εκ των προτέρων ορισθέντα στοιχεία γνώσης. Η συγκεκριμένη νοηματοδότηση εμφανίστηκε όταν οι μαθητές προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν τη συνάρτηση που δημιούργησαν στο λογισμικό για να απαντήσουν στο πρόβλημα της κάθε δραστηριότητας.



Εικόνα 4 - 8: Μαθητές δείχνουν και συντονίζουν τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης

Για παράδειγμα, στην πρώτη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Α κατά την εφαρμογή της Πρόσοψης Καταστήματος, οι μαθητές της ομάδας εστίασης είχαν ορίσει την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή και χρησιμοποιούσαν τον πίνακα τιμών παρατηρώντας τις μεταβολές των δύο μεταβλητών στις στήλες του πίνακα. Στο επόμενο επεισόδιο, οι μαθητές της ομάδας εστίασης ερμηνεύουν τις μεταβολές και νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως συντονισμό των μεταβολών μεταξύ συμμεταβαλλόμενων μεταβλητών και κάνουν σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων συνδέοντας τη λύση που εμφανίζεται από τον πίνακα τιμών με τη γραφική παράσταση.

353. Ε: Τι μας λέει εδώ ο πίνακας τιμών; Πώς θα ξέρουμε; Εγώ βλέπω τρεις στήλες εδώ πέρα, δεν μπορώ να καταλάβω.

354. Μ3: Στην μια στήλη μας λέει πώς μεταβάλλεται το Χ, η μεταβλητή μας. (R)

355. Μ1: Το ΟΕ δεν είναι; Στην πρώτη στήλη μας δείχνει το εμβαδόν της άνω βιτρίνας και στη δεύτερη στήλη μας δείχνει το πενταπλάσιο του εμβαδού των παραθύρων. (R)

356. Ε: Άρα συνολικά τι μας λέει αυτός ο πίνακας;

357. Μ1: Σε ποιο σημείο γίνονται αυτά τα δύο ίσα. Ναι, σε κάθε τιμή του Χ πότε η βιτρίνα είναι ίση με το πενταπλάσιο των παραθύρων. (BW)

358. Ε: Κοντά είσαι. Εδώ αλλάζουν οι τιμές. Έτσι;

359. Μ1: Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν σε σχέση με τις τιμές του Χ.

360. Ε: Θα ήθελα να μου πείτε από εδώ πώς μπορείτε να βρείτε την λύση. Δηλαδή, έχουμε απαντήσει σε αυτό; Βρήκαμε την απόσταση ανάμεσα στις κολόνες ώστε το εμβαδόν της βιτρίνας να είναι ίσο με το εμβαδό των παραθύρων;

361. Μ3: Το ΟΕ είναι η απόσταση ανάμεσα στις κολόνες. Άρα πρέπει να διαλέξουμε μια από αυτές τις τιμές σύμφωνα με την οποία…

362. Μ1: Όχι, πρέπει να βρούμε πότε ενώνονται αυτές οι ευθείες, οπότε ποια τιμή είναι ίδια και το ίδιο και από τη γραφική παράσταση, δηλαδή το σημείο που τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις. (C)

Στο επεισόδιο οι μαθητές της ομάδας εστίασης κατασκευάζουν τα ($ΣΥ_1$) και ($ΣΥ_2$) στοιχεία γνώσης που αφορούν στη δημιουργία συνάρτησης και στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές με συντονισμό διαφορετικών αναπαραστάσεων. Ο πίνακας τιμών βοήθησε την ομάδα μαθητών να αναγνωρίσουν τις μεταβολές κάθε μεταβλητής χωριστά, εξετάζοντας τις διαφορετικές στήλες του πίνακα, κατασκευάζοντας το στοιχείο γνώσης ($ΣΥ_1$) και χρησιμοποιώντας αλγεβρικά σύμβολα στις περιγραφές τους (αναγνώριση, στίχοι 354-355). Ακολούθως, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι η λύση στο ερώτημα δίνεται από την εύρεση των κοινών σημείων των συναρτήσεων, επομένως θα πρέπει να βρουν τα κοινά σημεία από τον πίνακα τιμών (επαναδόμηση, στίχος 357). Τέλος, η ομάδα μαθητών κατασκευάζει το στοιχείο γνώσης ($ΣΥ_2$) που αφορά στον συντονισμό μεταξύ συμμεταβαλλόμενων μεταβλητών κατά τη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων σημειώνοντας τη λύση από τη γραφική παράσταση (κατασκευή, στίχος 362). Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις με πολλές και διαφορετικές δυνατότητες (π.χ. εμφάνιση πίνακα, εμφάνιση γραφήματος) είναι ένα από τα στοιχεία του λογισμικού Casyopée, το οποίο είναι καθοριστικό για τη συγκεκριμένη νοηματοδότηση.

Στην πρώτη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Β οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να δουν τη λύση στον πίνακα τιμών και ακολούθως στη γραφική παράσταση και τέλος να συνδέσουν τις δύο αναπαραστάσεις. Αυτό το επεισόδιο είναι αντιπροσωπευτικό του πειραματισμού των μαθητών και της συγκεκριμένης νοηματοδότησης για όλα τα σχολεία. Συγκεκριμένα, στο επόμενο επεισόδιο οι μαθητές της ομάδας εστίασης μετά τη δημιουργία των συναρτήσεων f και g για την άνω και κάτω βιτρίνα αντίστοιχα κατασκευάζουν τον συντονισμό διαφορετικών αναπαραστάσεων.

148. Ε: Πως χρησιμοποιείτε τον πίνακα τιμών;

149. Μ1: Εδώ πέρα είναι η απόσταση των δύο κάθετων κολώνων. Τώρα η g(x) μισό λεπτό να δω ποια είναι η g και ποια είναι η f. Η g είναι το πενταπλάσιο εμβαδό των παραθύρων.

150. Ε: Όταν λες είναι το πενταπλάσιο εμβαδό τι εννοείς;

151. Μ1: Η g είναι συνάρτηση που ορίζει το πενταπλάσιο εμβαδό τους με το πόσο μεταβάλλεται η ΟΕ. Και η f(x) είναι το εμβαδό της βιτρίνας. (R)

152. Ε: Πάλι τι εννοείς ότι είναι το εμβαδό της βιτρίνας;

153. Μ1: Πόσο μικραίνει και πόσο μεγαλώνει σε σχέση με την ΟΕ το εμβαδό, αλλά και πάλι τιμή που να είναι ίσο το εμβαδό δεν μου τη βρίσκει (R)

154. Ε: Τι θα λέγαμε γι’ αυτό τον πίνακα τιμών;

155. Μ1: Ότι στο 5,006 το εμβαδό της βιτρίνας είναι το πενταπλάσιο από τον εμβαδό των παραθύρων.

156. Ε: Μπράβο, άρα τι θα απαντούσες σε αυτόν που θα σου έλεγε που να βάλω την επόμενη κολώνα;

157. Μ1: Να τη βάλει σε 5 μέτρα απόσταση. (BW)

158. Ε: Σε περίπου 5 μέτρα απόσταση, ωραία. Από τη γραφική παράσταση τι βγαίνει; Ναι τώρα εκεί που μετακινείσαι ακριβώς που είσαι, για πες μου που είσαι;

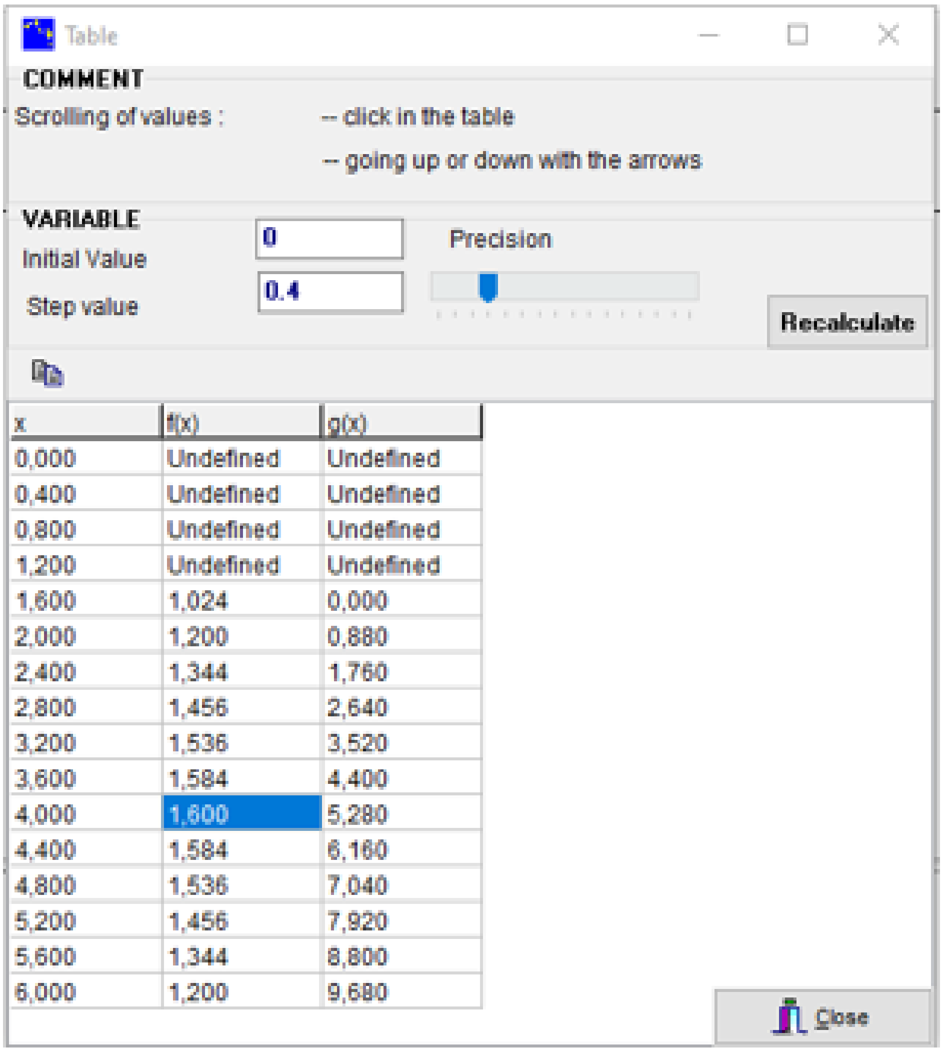
159. Μ1: Είμαι στην f(x) που είναι το πόσο αλλάζει το εμβαδό της βιτρίνας. Η g(x) είναι το πόσο αλλάζει το πενταπλάσιο εμβαδό των παραθύρων. (R)

160. Ε: Κι από το γράφημα τι είναι αυτό που με ενδιαφέρει;

161. Μ1: Εκεί στο 5 είναι πάλι όπως στον πίνακα τιμών, δεν μπορείς να δεις καθαρά όμως. Κάπου εκεί. (C)

Στο επεισόδιο, οι μαθητές της ομάδας εστίασης αρχικά αναγνωρίζουν τις συναρτήσεις που μόλις δημιούργησαν στο Casyopée και κατασκευάζουν το στοιχείο γνώσης ($ΣΥ_1$) που αφορά τη δημιουργία συνάρτησης που μοντελοποιεί ένα ζεύγος συμμεταβαλλόμενων μεταβλητών. Έτσι, είναι σε θέση να περιγράφουν τις συναρτήσεις χρησιμοποιώντας τη συμμεταβολή και αλγεβρικά σύμβολα (αναγνώριση, στίχοι 151, 153). Ακολούθως, οι μαθητές εντοπίζουν ποια είναι η βέλτιστη θέση της κατακόρυφης κολώνας από τον πίνακα τιμών (επαναδόμηση, στίχος 157). Στη συνέχεια, με τη βοήθεια του κινούμενου στόχου ο Μ1 μετακινείται πάνω στη συνάρτηση f και την περιγράφει όπως προηγουμένως από τον πίνακα τιμών, δηλαδή χρησιμοποιώντας τη συμμεταβολή και αλγεβρικά σύμβολα (αναγνώριση, στίχος 159). Τέλος, ο Μ1 κατασκευάζει το ($ΣΥ_2$) στοιχείο γνώσης που αφορά τη διερεύνηση τως συνάρτησης με τη χρήση των αναπαραστάσεών της, καθώς συνδέει το βέλτιστο σημείο που προέκυψε από τη γραφική παράσταση με το βέλτιστο σημείο που προέκυψε προηγουμένως από τον πίνακα τιμών και νοηματοδοτεί τον συντονισμό μεταξύ μεταβλητών κατά τη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων (κατασκευή, στίχος 161). Εδώ, η συνεισφορά του κινούμενου στόχου στη γραφική παράσταση σημειώνεται χαρακτηριστικά αφού επιτρέπει στον μαθητή να παρατηρεί τις τιμές της συνάρτησης μετακινούμενος επάνω στη γραφική παράσταση, διευκολύνοντας τις συνδέσεις με τον πίνακα τιμών.

Στη δεύτερη φάση συλλογής δεδομένων από το σχολείο Γ κατά την εφαρμογή της Πρόσοψης Καταστήματος προέκυψε αντίστοιχο επεισόδιο όπως και στην πρώτη φάση. Οι μαθητές της ομάδας εστίασης είχαν δημιουργήσει τις δύο συναρτήσεις f(x) και g(x) χρησιμοποιώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή το ευθύγραμμο τμήμα ΟΕ (την απόσταση ανάμεσα στις κατακόρυφες κολώνες) και ως εξαρτημένη μεταβλητή το εμβαδό της άνω και κάτω βιτρίνας αντίστοιχα. Επίσης, είχαν εμφανίσει τις δύο γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων (Εικόνες 4 - 8 και 4 - 9). Καθώς αναζητούσαν την βέλτιστη απόσταση, ο Μ1 πρότεινε να δημιουργήσουν τον πίνακα τιμών επιλέγοντας τις αντίστοιχες συναρτήσεις στο παράθυρο των γραφικών παραστάσεων. Το Casyopée έδωσε αυτόματα τον πίνακα με πέντε διαφορετικές τιμές στην στήλη της ανεξάρτητης μεταβλητής x.



Εικόνα 4 - 9: Πίνακας τιμών για την άνω και κάτω βιτρίνα: f(x) και g(x)

Οι μαθητές συζήτησαν τις διαθέσιμες τιμές του x που χρειάζονταν στον πίνακα τιμών ώστε να μπορούν να προσδιορίσουν τη βέλτιστη θέση του σημείου Ε. Κοιτώντας το σχήμα της δυναμικής γεωμετρίας, συνειδητοποίησαν ότι το εύρος της ανεξάρτητης μεταβλητής (ΟΕ) είναι από 1,6 μέχρι 6. Έτσι, άλλαξαν το βήμα της ανεξάρτητης μεταβλητής από 1 σε 0,4 ώστε να εμφανίσουν περισσότερα στιγμιότυπα από τις συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές (Μ1: «Η βέλτιστη περίπτωση είναι όταν το ΟΕ είναι ίσο με 4. Καθώς το 0,4 διαιρεί αυτές τις τιμές, αλλάζουμε το βήμα στο 0,4. Θα έχουμε περισσότερες τιμές στον πίνακα μαζί με την πιο κατάλληλη» - Εικόνα 4 - 9). Στο ακόλουθο επεισόδιο από την εργασία των μαθητών στην ομάδα εστίασης, οι μαθητές μιλούν για τις αλλαγές στις τιμές του πίνακα τιμών.

831. Μ2: Οπότε εδώ είναι οι τιμές, στην πρώτη στήλη έχουμε την απόσταση ανάμεσα στις κολώνες ΟΕ, που είναι το x. [η μεταβλητή x] (R)

832. M1: Στη δεύτερη στήλη έχουμε το εμβαδό της κάτω βιτρίνας και στην τρίτη έχουμε το εμβαδό της άνω βιτρίνας.

833. E: Πολύ ωραία.

834. M2: Επίσης, παρατηρούμε ότι σε αυτή τη στήλη οι τιμές του g(x) συνέχεια αυξάνουν, δεν μειώνονται ποτέ. (R, BW)

835. E: Με ποιο τρόπο το g(x) αυξάνεται;

836. M1: Οι τιμές του g(x) αυξάνονται κατά 0.88.

837. M2: Το g(x) αυξάνεται καθώς το x αυξάνεται και μπορούμε να το δούμε και από τη γραφική παράσταση! (C)

Στο επεισόδιο, οι μαθητές κατασκευάζουν το γνωστικό στοιχείο ($ΣΥ_1$) αναφερόμενοι στην ανεξάρτητη μεταβλητή ως x (αναγνώριση, στίχος 831). Ακολούθως, κατασκευάζουν το ($ΣΥ_2$) στην περιγραφή της συμμεταβολής χρησιμοποιώντας τις δύο άλλες στήλες του πίνακα τιμών με τις τιμές τις εξαρτημένης μεταβλητής, συμβολίζοντάς τες με f(x) και g(x) και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό ως ονόματα για αυτές τις μεταβλητές (αναγνώριση, επαναδόμηση, στίχος 834). Τελικά, ο M2 αναφέρεται στο συμβολικό επίπεδο και μιλά για τη συμμεταβολή μεταξύ x και g(x) συνδέοντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης (κατασκευή, στίχος 837), ενώ ο M1 παρατηρεί μία σταθερή διαφορά μεταξύ των τιμών του g(x). Με αυτό τον τρόπο εμφανίζονται ενδείξεις για πρώιμη νοηματοδότηση του ρυθμού μεταβολής από τον M1 ($ΣΥ_3$, στίχος 836). Στο επίπεδο των εργαλείων, βλέπουμε ότι οι αναπαραστάσεις της συνάρτησης βοηθούν τους μαθητές να νοηματοδοτήσουν τη συνάρτηση ως συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές εστιάζοντας στα δυναμικά στοιχεία του πειραματισμού τους (π.χ. διερεύνηση πολλαπλών τιμών στον πίνακα τιμών, αλλαγή του βήματος). Επιπλέον, οι αλληλεξαρτήσεις που εμφανίστηκαν στο πλαίσιο της δραστηριότητας φαίνεται να έχουν ενσωματωθεί στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών καθώς αυτοί χρησιμοποιούν τις συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές στον πίνακα τιμών (στίχοι 831-832).

4.1.6. Ποσό μεταβολής (Amount of change)

Οι μαθητές εργαζόμενοι αποκλειστικά στο μοντέλο των συναρτήσεων στις δύο τελευταίες δραστηριότητες άρχισαν να εστιάζουν στις διαφορές μεταξύ των διαδοχικών κελιών του πίνακα τιμών της συνάρτησης, το οποίο τους βοήθησε για την αρχική νοηματοδότηση του ποσού μεταβολής. Ένα κύριο χαρακτηριστικό αυτής της νοηματοδότησης είναι ότι προέκυψε αρχικά ως αποτέλεσμα της προσεκτικής παρατήρησης των μεταβολών μεταξύ των τιμών στον πίνακα τιμών. Συνήθως οι μαθητές παρατηρούσαν (α) τη συμμετρία που εμφανιζόταν στις μεταβολές, (β) τη σύγκριση των διαφορών των τιμών της συνάρτησης σε ζεύγη από τον πίνακα τιμών ή τη γραφική παράσταση και (γ) τη σύνδεση του ρυθμού μεταβολής με την κλίση της εφαπτομένης. Το γεγονός ότι το βήμα είναι συγκεκριμένο οδήγησε στη νοηματοδότηση του ποσού μεταβολής. Ωστόσο, εντοπίστηκαν διαφορές εντοπίστηκαν ανάμεσα στα διαφορετικά σχολεία στον τρόπο προσέγγισης του ποσού μεταβολής, καθώς υπάρχουν περιπτώσεις με αναφορές στην κλίση, στην εφαπτομένη ή στη σύγκριση διαφορετικών περιπτώσεων για το ποσό μεταβολής. Για παράδειγμα, κάποιοι μαθητές εστίασαν στις ίσες διαφορές σε διαφορετικά ζευγάρια των τιμών της συνάρτησης, ενώ η εμφάνιση παρόμοιων τιμών υποδηλώνει τη *συμμετρία* των μεταβολών, η οποία εμφανίστηκε κυρίως στα σχολεία Α και Γ. Ωστόσο, καθώς προχωρούσε η διερεύνηση των μαθητών φαίνεται να έκαναν συγκρίσεις με τις διαφορές στις τιμές ανάμεσα σε διαφορετικά ζευγάρια τιμών της συνάρτησης. Για παράδειγμα οι μαθητές αρχικά έλεγαν: «η σταθερή αύξηση κατά 0,4 στις τιμές του x οδηγεί σε σταθερές διαφορές του 0,88 στις τιμές της συνάρτησης g(x)» (βλέπε στήλες x και g(x) στην Εικόνα 4 - 9). Αυτή η φράση τους βοήθησε να συγκρίνουν στη συνέχεια το ποσό μεταβολής μεταξύ διαφορετικών συναρτήσεων (π.χ. της f και g) με τη βοήθεια των διαφορετικών αναπαραστάσεων. Μάλιστα, εμφανίστηκαν διαφοροποιήσεις ανάμεσα στις ομάδες σε αυτές τις νοηματοδοτήσεις, καθώς σε κάποιες περιπτώσεις οι μαθητές αναφέρονταν σε κλίση εφαπτομένης ή σε λόγο μεταβολών.

Συμμετρία των μεταβολών

Στη δεύτερη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Γ από τον πειραματισμό της ομάδας εστίασης στη δραστηριότητα της Πρόσοψης Καταστήματος οι μαθητές αρχικά πειραματίζονταν με τις τιμές της συνάρτησης μέσα από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις. Ωστόσο, σταδιακά άρχισαν να εστιάζουν στις διαφορές των τιμών της συνάρτησης υποστηρίζοντας μία πιο συγκριτική οπτική στο ποσό μεταβολής των διαφορετικών συναρτήσεων. Οι μαθητές είχαν δημιουργήσει τις απαραίτητες συναρτήσεις f, g και h για το εμβαδό της άνω και κάτω βιτρίνας και το εμβαδό του αθροίσματος αντίστοιχα. Οι μαθητές είχαν προτείνει την καταλληλότερη κατασκευή για την πρόσοψη του καταστήματος χρησιμοποιώντας τον πίνακα τιμών και τις σχετικές γραφικές παραστάσεις. Είχε προηγηθεί μία συζήτηση σε όλη την τάξη, καθώς ένας μαθητής αναρωτιόταν πώς είναι δυνατόν για την h(x)=f(x)+g(x) να είναι αύξουσα, ενώ η f(x) είναι φθίνουσα σε ένα διάστημα. Με άλλα λόγια, η ερώτηση αφορά τη σύγκριση των αντίστοιχων ρυθμών μεταβολής. Για παράδειγμα, όπως φαίνεται στο επεισόδιο οι μαθητές Μ1 και Μ2 πειραματίζονται με τον πίνακα τιμών (Εικόνα 4 - 9) και κατασκευάζουν το ποσό μεταβολής.

901. Μ1: Ο Μ2 είπε ότι μπορεί και να μην παρουσιάζει σταθερή αύξηση, αλλά εγώ πιστεύω ότι παρουσιάζει σταθερή αύξηση.

902. Ε: Μπορείς να το δικαιολογήσεις;

903. Μ2: Πάντως παρατηρούμε ότι μετά τη μέγιστη τιμή όσο αυξάνεται προς τα πάνω το ίδιο μειώνεται προς τα κάτω.

904. Ε: Ναι άρα έχει κάποια συμμετρία ας πούμε.

905. Μ1: Ναι, πάνω και κάτω έχει συμμετρία. Βλέπουμε 1.584 και το ίδιο βλέπουμε και κάτω.

906. Ε: Α! ωραίος. Αλλά εσύ λες ότι αυξάνει με τον ίδιο τρόπο

907. Μ1: Έχει κάποιο σταθερό ρυθμό όπως και σταθερό ρυθμό έχει – όχι τον ίδιο ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται αυτή – έχει το δικό της σταθερό ρυθμό. Γιατί όσο αυξάνεται από εδώ ως εδώ αυξάνεται κι από εδώ ως εδώ. [εννοεί 0.88 δείχνοντας τα συνεχόμενα κελιά του πίνακα τιμών] (R)

Στο επεισόδιο οι μαθητές έχουν κατασκευάσει το ($ΣΥ_2$) στοιχείο γνώσης σχετικά με τη διερεύνηση αναπαραστάσεων της συνάρτησης, καθώς διερευνούν τον πίνακα τιμών. Οι μαθητές της ομάδας εστίασης σε αυτό το επεισόδιο κατασκευάζουν το ($ΣΥ_3$) στοιχεί γνώσης σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής. Αρχικά, η ομάδα εστίασης επικεντρώνεται στις διαφορές μεταξύ των τιμών της συνάρτησης αναγνωρίζοντας τη συμμετρία της αλλαγής, η οποία αποτελεί μία πρώτη προσέγγιση του ποσού μεταβολής (αναγνώριση – στίχος 907).

Σύγκριση διαφορών από τον πίνακα τιμών

Ακολούθως, ο στόχος ήταν οι μαθητές να βοηθηθούν στη νοηματοδότηση του ποσού μεταβολής των f(x) και g(x) και ο εκπαιδευτικός κάλεσε όλες τις ομάδες μαθητών να εξηγήσουν πως είναι δυνατόν το άθροισμα δύο συναρτήσεων να είναι αύξουσα συνάρτηση όταν μία από τις δύο συναρτήσεις είναι φθίνουσα. Ο ερευνητής συζητά με τους μαθητές της ομάδας αποκλειστικά.

908. M2: Πως γίνεται να μικραίνει η βιτρίνα και να μεγαλώνει το συνολικό. Αφού αυξάνεται διπλάσια η μεγαλύτερη.

909. M1: Γιατί ο ρυθμός που αυξάνεται η μεγάλη είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό που μειώνεται η μικρή. Κατάλαβες τι είπα; Η μεγάλη αυξάνεται με ένα σταθερό ρυθμό. Όχι με ένα σταθερό, με ένα ρυθμό. Η μικρή μειώνεται με έναν άλλο ρυθμό. Ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η μεγάλη είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό με τον οποίο μειώνεται, άρα επομένως λογικό είναι να συνεχίσει να αυξάνεται. (BW)

910. M2: Βρήκαμε ότι ο ρυθμός αύξησης της κάτω βιτρίνας είναι πολύ μεγαλύτερος από τον ρυθμό με τον οποίο μειώνεται η άνω βιτρίνα (C).

911. E: Τι εννοείτε όταν αναφέρεστε στον ρυθμό μεταβολής;

912. M2: Ότι η κάτω βιτρίνα αυξάνεται κατά 0,88. (BW)

913. M1: Αυξάνεται συνέχεια με σταθερό ρυθμό και παρατηρούμε ότι η άνω βιτρίνα μειώνεται εδώ για παράδειγμα περίπου 0.02, οπότε…

914. M2: Να εδώ μειώνεται περίπου 0,14.

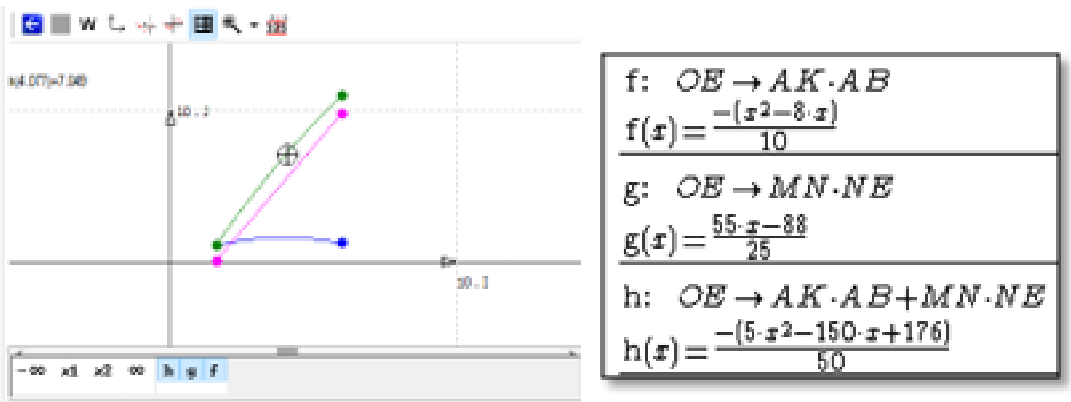
915. M1: Δεν φτάνει ποτέ το 0,88 (BW)

916. M2: Άρα συμπεραίνουμε ότι το συνολικό εμβαδό της βιτρίνας θα συνεχίσει να αυξάνεται. (C)

Στο επεισόδιο, η ομάδα μαθητών νιώθει την ανάγκη να περιγράψει λεκτικά το ποσό μεταβολής μέσω των διαφορών στις τιμές της συνάρτησης (επαναδόμηση, στίχος 909) για να εξηγήσει τις μεταβολές των τιμών στα διαφορετικά κελιά του πίνακα τιμών (Εικόνα 4 - 9). Ο Μ2 συγκρίνει τα ποσά μεταβολής λεκτικά (στίχος 909) και αναγνωρίζει ότι το ένα είναι αρκετά μεγαλύτερο από τον άλλο κατασκευάζοντας το στοιχείο γνώσης ($ΣΥ_3$). Κατόπιν, οι μαθητές επαναδομούν τις διαφορές των συναρτήσεων (f, g και h) και τις συγκρίνουν για να υποστηρίξουν τη θέση τους (στίχοι 912 – 915) και τελικά καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση h(x) θα συνεχίσει να αυξάνεται (κατασκευή, στίχοι 916). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές αποκτούν μία ολική προσέγγιση των συμμεταβαλλόμενων τιμών συνδυάζοντας το σχήμα της γραφικής παράστασης με τις τιμές από τον πίνακα τιμών. Σχετικά με τη χρήση εργαλείων οι τιμές του πίνακα τιμών φαίνεται να διευκολύνουν τους μαθητές να αναγνωρίσουν τόσο τη συμμετρία στις τιμές της συνάρτησης όσο και τις διαφορές μεταξύ τους και να νοηματοδοτήσουν το ποσό μεταβολής λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Τέλος, οι μαθητές αναφέρονται στις συναρτήσεις χρησιμοποιώντας τα στοιχεία της δραστηριότητας (π.χ. άνω και κάτω βιτρίνα) υποδεικνύοντας την σταδιακή μίξη του πλαισίου της δραστηριότητας με τη μαθηματική γλώσσα.

Σύγκριση διαφορών από τη γραφική παράσταση

Στην πρώτη φάση συλλογής δεδομένων από το σχολείο Β εμφανίστηκε για πρώτη φορά το ποσό μεταβολής στη δραστηριότητα της Πρόσοψης Καταστήματος μέσα από τη γραφική παράσταση. Το γεγονός αυτό οδήγησε στη διαμόρφωση της δραστηριότητας ώστε να προκύψουν νοηματοδοτήσεις του ποσού μεταβολής στη δεύτερη φάση συλλογής δεδομένων. Οι μαθητές της ομάδας εστίασης μόλις είχαν ολοκληρώσει την ερμηνεία του πίνακα τιμών και άνοιξαν το παράθυρο των γραφικών παραστάσεων για να συνεχίσουν τη διερεύνησή τους σχετικά με την τελική συνάρτηση που είναι το άθροισμα των εμβαδών της άνω και κάτω βιτρίνας (Εικόνα 4 - 10). Ο μαθητής της ομάδας εστίασης σχολιάζει τη μορφή των συναρτήσεων από τις γραφικές παραστάσεις συγκρίνοντας τα ποσά μεταβολής των διαφορετικών συναρτήσεων.



Εικόνα 4 - 10: Γραφικές παραστάσεις και αλγεβρικός τύπος των συναρτήσεων f (άνω βιτρίνα - μπλε), g (κάτω βιτρίνα - ροζ) και h (άθροισμα άνω και κάτω - πράσινη)

412. Ε: Πάμε τώρα στη γραφική παράσταση. Εδώ τι φαίνεται τώρα; Τι είναι αυτή η συνάρτηση;

413. Μ1: Είναι το άθροισμα των δύο εμβαδών.

414. Ε: Άρα τι παρατηρούμε εδώ;

415. Μ1: Καθώς μετακινούμαι πάνω στη συνάρτηση με τον στόχο, βλέπουμε ότι το δέκα φτάνει μέχρι όταν το x είναι 5,5. Μετά το 5,5 φεύγει πάνω από 10. (R)

416. Ε: Και γιατί δεν ασχολείσαι με πάνω από το 5,5;

417. Μ1: Γιατί εδώ μας λέει μέχρι 10 τ.μ. και λέει αν θα μας φτάσει για όλες τις…

418. Ε: Εντάξει. Όμως, το x δεν θα μπορούσε να πηγαίνει πάνω από τα 5,5 μέτρα και μετά το h(x) να πηγαίνει κάτω από τα 10τ.μ.; Για ποιο λόγο;

419. Μ1: Γιατί μέχρι ένα σημείο αυτό εδώ το εμβαδό των παραθύρων μεγαλώνει και μετά αρχίζει και μικραίνει. Ενώ αυτό εδώ πέρα μεγαλώνει αλλά ο ρυθμός που μεγαλώνει το εμβαδό της βιτρίνας είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό που μικραίνει το εμβαδό των παραθύρων, οπότε δεν μπορεί να μικραίνει αυτή η συνάρτηση. (BW, C)

420. Ε: Και πως φαίνεται αυτό που είπες στο γράφημα;

421. Μ1: Α! Η συνάρτηση είναι αύξουσα.

422. Ε: Μπράβο, επειδή είναι αύξουσα δεν χρειάζεται να κοιτάξω από εκεί και κάτω. Εντάξει αυτό είναι. Για πάμε εδώ.

Στο επεισόδιο, οι μαθητές της ομάδας εστίασης κατασκευάζουν τα ($ΣΥ_2$) και ($ΣΥ_3$) στοιχεία γνώσης σχετικά με την διερεύνηση διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης και το ποσό μεταβολής. Ο μαθητής της ομάδας εστίασης περιηγείται πάνω στην συνάρτηση που αναφέρεται στο άθροισμα των εμβαδών των δύο συναρτήσεων (της άνω και κάτω βιτρίνας) και αναγνωρίζει ότι μέχρι τα 5,5 μέτρα μπορεί να γίνει η κάλυψη με γυαλί, καθώς από εκεί και πέρα ξεπερνάμε τα 10 τετραγωνικά μέτρα γυαλιού στο άθροισμα, απαντώντας στο τελευταίο ερώτημα της δραστηριότητας (αναγνώριση, στίχος 415). Επιπλέον, στην ερώτηση του ερευνητή παρατηρεί ότι δεν θα μπορούσε να υπάρχει άλλο σημείο πέρα από τα 5,5 μέτρα που μειώνεται το συνολικό εμβαδό, γιατί η συνάρτηση του αθροίσματος του γυαλιού είναι γνησίως αύξουσα. Ακόμη, ο μαθητής Μ1 προβαίνει σε περεταίρω δικαιολόγηση της μονοτονίας της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, κατασκευάζει το στοιχείο γνώσης ($ΣΥ_3$), καθώς παρατηρεί ότι το ποσό μεταβολής της κάτω βιτρίνας είναι μεγαλύτερο από το ποσό μεταβολής της άνω βιτρίνας και αυτός είναι ο λόγος που η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, νοηματοδοτώντας έτσι το ποσό μεταβολής (επαναδόμηση, κατασκευή, στίχος 419). Ο μαθητής στον στίχο 419 εισάγει το ποσό μεταβολής χρησιμοποιώντας παράλληλα τις τιμές από τον πίνακα τιμών και τις μονοτονίες των γραφικών παραστάσεων από τα παράθυρα του Casyopée, σημειώνοντας τον ρόλο των εργαλείων κατά τη νοηματοδότηση του ποσού μεταβολής.

Σύνδεση του ποσού μεταβολής με την κλίση της εφαπτομένης

Για παράδειγμα παρά το γεγονός ότι στην πρώτη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Α δεν προέκυψε κάποια αναφορά για το ποσό μεταβολής κατά τον πειραματισμό με την Πρόσοψη Καταστήματος, η συγκεκριμένη νοηματοδότηση σε αυτό το σχολείο προέκυψε μόνο κατά την εφαρμογή της δραστηριότητας της Δεξαμενής πετρελαίου, όπου οι μαθητές έκαναν αναφορές στην εφαπτομένη της γωνίας και στην κλίση. Συγκεκριμένα, στο επεισόδιο που ακολουθεί οι μαθητές αρχικά πειραματίζονταν με την κατακόρυφη τοποθέτηση της δεξαμενής, έδωσαν τον αλγεβρικό τύπο της συμμεταβολής των μεταβλητών και δημιούργησαν τη γραφική παράσταση ύψους – όγκου. Κατά την ερμηνεία της γραφικής παράστασης, ο εκπαιδευτικός της τάξης έθεσε ερωτήματα στον μαθητή που παρουσίαζε στην τάξη (Εικόνα 4 - 11) και προέκυψε η νοηματοδότηση του ποσού μεταβολής.

Εικόνα 4 - 11: Πειραματισμός μαθητή με την κατακόρυφη δεξαμενή

503. Μ5: Έστω ότι είναι… υπολογίζουμε την σχέση… η σχέση που βρήκαμε είναι V=h*A, όπου h είναι η στάθμη

504. Ε: Ωραία, ωραία, πήγαινε στο γράφημα κατευθείαν τώρα. Τα μεγέθη πρώτα απ’ όλα που παρατηρείτε ποια είναι;

505. Μ5: Ο όγκος και η στάθμη. Ωραία. Εδώ είναι η γωνία, η εφαπτομένη της γωνίας είναι Α που είναι το εμβαδόν διατομής, 31,4, εδώ είναι το μέγιστο h είναι τα 6 μέτρα. (R)

506. Κ: Κίμωνα, τι σχέση έχει το Α με την γωνία;

507. Μ5: Τι σχέση έχει το Α με την γωνία. Είναι κάθε στιγμή η διαίρεση V/h.

508. Κ: Άκου με λίγο. Τι σχέση έχει το Α με την γωνία.

509. Μ5: Το Α είναι V/h.

510. Κ: Με την γωνία τι σχέση έχει;

511. Μ6: Μήπως είναι ο ρυθμός μεταβολής;

512. Μ5: Το Α είναι η εφαπτομένη της γωνίας. Η εφαπτομένη της γωνίας, ο ρυθμός μεταβολής. Όλα αυτά το ίδιο περιγράφουνε. (BW)

513. Κ: Ωραία. Να σε ρωτήσω κάτι; Άμα ο κύλινδρος είχε μεγαλύτερη ακτίνα;

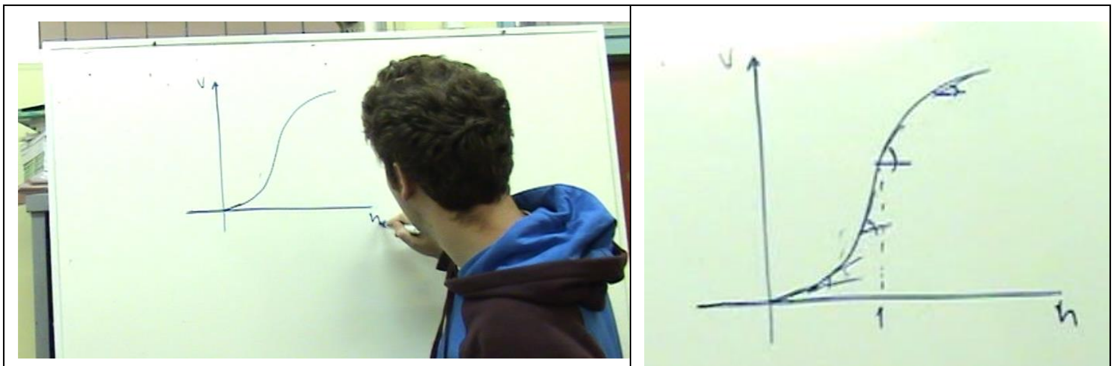
514. Μ5: Άμα ο κύλινδρος είχε μεγαλύτερη ακτίνα τότε το εμβαδόν διατομής θα ήταν μεγαλύτερο, επομένως η κλίση θα ήταν μεγαλύτερη, επομένως ο ρυθμός μεταβολής θα ήταν μικρότερος. Δηλαδή η αναλογία h και V, δηλαδή για το ίδιο ύψος θα γέμιζε πιο αργά με καύσιμο η δεξαμενή. (C)

Στο επεισόδιο παρουσιάζει μία ομάδα μαθητών τη διερεύνησή της από την ενασχόληση με την κατακόρυφη τοποθέτηση της δεξαμενής πετρελαίου. Ο μαθητής έχει κατασκευάσει τα στοιχεία γνώσης ($ΣΥ_1$) και ($ΣΥ_2$) που αφορούν τη μοντελοποίηση του προβλήματος από το ζεύγος μεταβλητών και τη διερεύνηση μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα, ο μαθητής που παρουσιάζει στην τάξη έχει σχεδιάσει τη γραφική παράσταση στον πίνακα και αναφέρει την εφαπτομένη της γωνίας. Μετά από επαναλαμβανόμενη παρέμβαση του εκπαιδευτικού της τάξης ο μαθητής αναγνωρίζει τα δύο μεγέθη που συμμεταβάλλονται και το ποσό μεταβολής τους (αναγνώριση, στίχος 505). Έπειτα γίνεται σύνδεση της κλίσης με το ποσό μεταβολής (επαναδόμηση, στίχος 512). Ακολουθεί δεύτερη παρέμβαση του εκπαιδευτικού και ο μαθητής κατασκευάζει το ($ΣΥ_3$) στοιχείο γνώσης αναφερόμενος στο ποσό μεταβολής και τον συνδέει με την κλίση της γραφικής παράστασης (κατασκευή, στίχος 514). Πέρα από αυτή τη σύνδεση αξίζει να επικεντρωθούμε στο γεγονός ότι ο εκπαιδευτικός της τάξης ρώτησε επανειλημμένα για τη γωνία του γραφήματος (στίχοι 506, 508, 510). Αυτό το σημείο είναι καθοριστικό για τα επεισόδια που θα ακολουθήσουν καθώς οι μαθητές σε αυτό το σημείο έχουν συνδέσει την κλίση και τη γωνία του γραφήματος με το ποσό μεταβολής (στίχοι 512, 514). Το πλαίσιο της δραστηριότητας φαίνεται να έρχεται στα λόγια των μαθητών ανά περιόδους, καθώς γίνονται αναφορές στο καύσιμο στο πετρέλαιο και τη δεξαμενή (στίχοι 503, 505, 514), αλλά και το μαθηματικό πλαίσιο είναι παρόν αφού ο μαθητής μιλάει για εφαπτομένη γωνίας (στίχοι 505, 512), για κυλινδρικό σχήμα της δεξαμενής μετά από παρέμβαση του εκπαιδευτικού (στίχος 514) και για ποσό μεταβολής. Σχετικά με το πλαίσιο της δραστηριότητας ο μαθητής φαίνεται να επηρεάζεται από την ερώτηση που του απευθύνει ο εκπαιδευτικός και απαντά στο ίδιο πλαίσιο.

4.1.7. Πηλίκο διαφορών (Difference quotient)

Στο ανώτερο σημείο της εξελικτικής διαδικασίας οι μαθητές εργαζόμενοι αποκλειστικά στο μοντέλο των συναρτήσεων ήταν σε θέση να νοηματοδοτήσουν τον ομοιόμορφο ρυθμό μεταβολής μέσω του πηλίκου διαφορών. Επιπλέον, σε κάποιες περιπτώσεις οι μαθητές μπορούσαν να νοηματοδοτήσουν τον ρυθμό μεταβολής ως πηλίκο διαφορών ανεξάρτητα από την επιλογή ενός συγκεκριμένου διαστήματος ή βήματος για την ανεξάρτητη μεταβλητή. Αυτές οι ενδείξεις υποδεικνύουν μία πρώιμη νοηματοδότηση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής. Μάλιστα, οι συγκεκριμένες νοηματοδοτήσεις των μαθητών διευκολύνθηκαν ιδιαίτερα από τον πειραματισμό τους με τη γραφική παράσταση στη δραστηριότητα της Δεξαμενής Πετρελαίου.

Συγκεκριμένα, στην πρώτη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Α εμφανίστηκε ένα επεισόδιο που αφορούσε συζήτηση στην τάξη. Σε αυτό το επεισόδιο ο εκπαιδευτικός ζήτησε από τους μαθητές να περιγράψουν τον τρόπο που μεταβάλλεται ο ρυθμός μεταβολής στην οριζόντια τοποθέτηση με στόχο να παρουσιαστεί ο πειραματισμός των προηγούμενων ωρών σχετικά με τη δραστηριότητα. Ένας μαθητής της τάξης και ένας μαθητής της ομάδας εστίασης αναφέρθηκαν στην πιο αφηρημένη νοηματοδότηση της συμμεταβολής περιλαμβάνοντας τη σύνδεση με την κλίση της εφαπτομένης. Συγκεκριμένα, στο ακόλουθο επεισόδιο οι μαθητές της τάξης αναφέρονται στη γραφική παράσταση που σχεδιάζει ο ένας μαθητής στον πίνακα της τάξης (Εικόνα 4 - 12) και χρησιμοποιούν την κλίση της εφαπτομένης στη θέση του λόγου διαφορών. Ο εκπαιδευτικός απευθύνει ερώτηση προς όλους τους μαθητές της τάξης σχετικά με τη μεταβολή του ρυθμού μεταβολής.



(α) **(β)**

Εικόνα 4 - 12: Διερεύνηση μαθητών στη Δεξαμενή Πετρελαίου (οριζόντια τοποθέτηση)

78. Κ: Για πείτε μου τι γίνεται με την μεταβολή του ρυθμού μεταβολής;

79. M1: Αυξάνεται μέχρι την μέση και μετά μειώνεται (R)

80. M5: Αυτό βλέπουμε και στο γράφημα. Στην αρχή η εφαπτομένη αυξάνεται μέχρι τη μέση δηλαδή μέχρι το ένα μέτρο και μετά αλλάζει η καμπυλότητα.

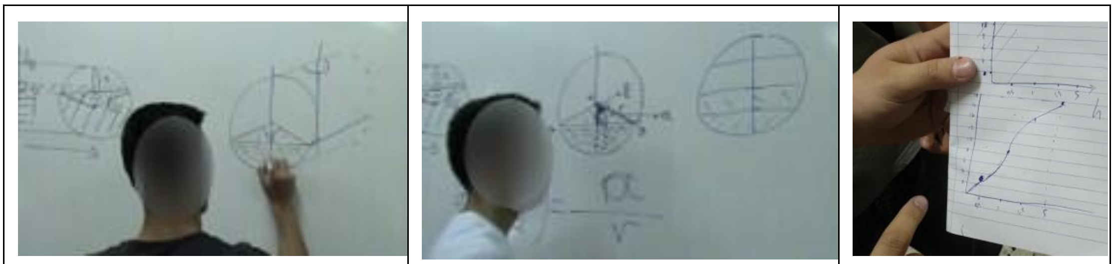
81. Κ: Δηλαδή στην γραφική παράσταση πώς βλέπετε τον ρυθμό μεταβολής; Αυτό θα ήθελα να καταλάβω. Πώς πάει;

82. M1: Η εφαπτομένη μεγαλώνει και μετά μικραίνει. Είναι αυτό που λέμε ο λόγος στην αρχή αυξάνει και μετά μικραίνει. Αλλά ο λόγος εκφράζεται από την εφαπτομένη και αν πάρουμε κάθε φορά την κλίση της εφαπτομένης, στην αρχή αυξάνεται και μετά μειώνεται. (BW, C)

Στο επεισόδιο γίνεται συζήτηση σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής και εμπλουτίζεται η κατασκευή του στοιχείου γνώσης (ΣΥ3). Συγκεκριμένα, ο M1 αναγνωρίζει ότι ο ρυθμός μεταβολής αυξάνεται μέχρι τη μέση και μετά μειώνεται (αναγνώριση, στίχος 79). Μάλιστα υποστηρίζεται από μαθητή άλλης ομάδας, ενώ ακολούθως στη συζήτηση μπαίνει ο λόγος που εκφράζεται από την εφαπτομένη. Ο μαθητής της ομάδας εστίασης είναι ικανός να αναφέρεται στο πηλίκο διαφορών και μάλιστα χωρίς τον περιορισμό του βήματος αφού αναφέρει τη φράση «κάθε φορά» (επαναδόμηση, κατασκευή, στίχος 82). Επίσης, ο ρυθμός μεταβολής στο συγκεκριμένο επεισόδιο ταυτίζεται με την κλίση της εφαπτομένης, δηλαδή νοηματοδοτείται ως πηλίκο διαφορών και σε συνδυασμό με τη φράση «κάθε φορά» πρόκειται για το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής. Ο ρόλος του πλαισίου στο επεισόδιο δεν είναι εμφανής καθώς εμφανίζονται πιο μαθηματικοποιημένες εκδοχές και αφηρημένες νοηματοδοτήσεις.

Στο σχολείο Β καμία ομάδα δεν νοηματοδότησε τον ρυθμό μεταβολής ως πηλίκο διαφορών, όπως προέκυψε από τα δεδομένα που συλλέχθηκαν μέσα από τη σχολική τάξη. Συνεπώς, δεν μπορεί να παρατεθεί κάποιο επεισόδιο προς ανάλυση από το συγκεκριμένο σχολείο.

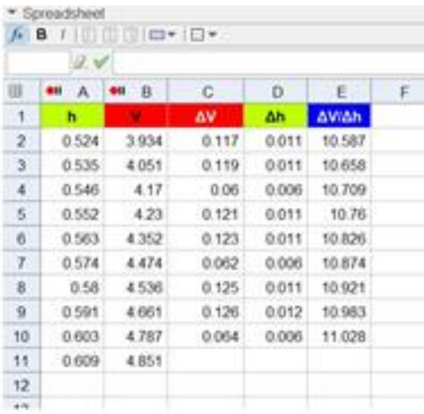
Στη δεύτερη φάση της συλλογής δεδομένων στο σχολείο Γ η νοηματοδότηση του ρυθμού μεταβολής ως πηλίκου διαφορών έλαβε χώρα κατά την τελική παρουσίαση της ομάδας εστίασης στη σχολική τάξη στη δραστηριότητα της Δεξαμενής Πετρελαίου. Στο επεισόδιο, φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές έφτασαν στην κατασκευή του ρυθμού μεταβολής ως πηλίκο διαφορών. Οι μαθητές της τάξης κατά τον πειραματισμό τους με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα είχαν βρει τον αλγεβρικό τρόπο υπολογισμού του καυσίμου χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις της ράβδου και είχαν χαράξει τη γραφική παράσταση της συμμεταβολής των σχετικών μεταβλητών (ύψους – όγκου) στα φύλλα εργασίας τους (Εικόνα 4 - 13).



(α) **(β)** **(γ)**

Εικόνα 4 - 13: Διερεύνηση μαθητών στη Δεξαμενή Πετρελαίου (οριζόντια τοποθέτηση)

Οι μαθητές ολόκληρης της τάξης οδηγήθηκαν σε πέντε διαφορετικές γραφικές παραστάσεις (π.χ. ευθεία γραμμή, καμπύλες γραμμές) και άνοιξε μία συζήτηση σχετικά με το ποια από αυτές είναι η σωστή. Στην εξέλιξη της συζήτησης οι μαθητές της άλλης ομάδας προκειμένου να υποστηρίξουν την επιλογή τους (τη σωστή γραφική παράσταση με ένα σημείο καμπής στη μέση, Εικόνα 4 - 13γ) σχεδίασαν τη γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής βασιζόμενοι στον πίνακα τιμών που συμπληρωνόταν δυναμικά από το αρχείο GeoGebra κατά το γέμισμα της δεξαμενής (Εικόνα 4 - 14). Ο πίνακας τιμών φάνηκε να βοηθά επιπλέον τους μαθητές στο να εστιάσουν στο πηλίκο διαφορών. Αυτό φάνηκε σε μία συζήτηση στην τάξη κοντά στο τέλος του μαθήματος, όπου οι μαθητές Μ1-Μ4 κλήθηκαν να παρουσιάσουν τη διερεύνησή τους σχετικά με το τελευταίο ερώτημα της δραστηριότητας (δηλαδή τη διερεύνηση στο αν η μεταβολή στο ¼ της στάθμης της δεξαμενής αντιστοιχεί στο ¼ του όγκου της).



	A	B	C	D	E	F
1	h	V	ΔV	Δh	ΔV/Δh	
2	0.524	3.934	0.117	0.011	10.587	
3	0.535	4.051	0.119	0.011	10.658	
4	0.546	4.17	0.06	0.006	10.709	
5	0.552	4.23	0.121	0.011	10.76	
6	0.563	4.352	0.123	0.011	10.826	
7	0.574	4.474	0.062	0.006	10.874	
8	0.58	4.536	0.125	0.011	10.921	
9	0.591	4.661	0.126	0.012	10.983	
10	0.603	4.787	0.064	0.006	11.028	
11	0.609	4.851				
12						

Εικόνα 4 - 14: Πίνακας τιμών (GeoGebra)

Κατά τη διάρκεια της παρουσίασης, οι μαθητές χρησιμοποίησαν τη γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής που είχε σχεδιάσει στον πίνακα η άλλη ομάδα για να υποστηρίξουν τα αποτελέσματα της διερεύνησής τους. Στο ακόλουθο επεισόδιο, ο Μ2 αναγνωρίζει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο που η γραφική παράσταση εμφανίζει αλλαγή στην καμπυλότητά της νοηματοδοτώντας το πηλίκο διαφορών.

1138. M2: Νομίζω ότι το κρίσιμο σημείο είναι στη μέση ή στα τέταρτα (Εικόνα 4 - 15)

1139. K: Λες ότι το κρίσιμο σημείο είναι στη μέση ή στα τέταρτα. Ας δούμε τι αλλάζει σε αυτή τη γραφική παράσταση

1140. M4: Ο ρυθμός μεταβολής αλλάζει

1141. K: Τι εννοείς;

1142. M2: Εμείς υπολογίσαμε το V/h εδώ και…

1143. K: Επομένως αυτός είναι ο αριθμός με τον οποίο ο όγκος αλλάζει σε σχέση με το ύψος αλλά εδώ υπάρχει ένα μέγιστο σημείο όπου η αλλαγή του όγκου σε σχέση με το ύψος μεγιστοποιείται.

1144. M1: Αλλάζει κάθε ένα τέταρτο του ύψους.

1145. M3: Όχι, δεν αλλάζει κάθε τέταρτο. (R)

1146. M2: Χρησιμοποιώντας τον ρυθμό μεταβολής εννοούμε πόσο γρήγορα ο όγκος αλλάζει σε σχέση με το ύψος (BW)

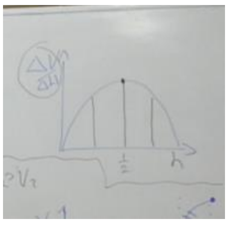
1147. K: Εντάξει, το κρατάμε αυτό. Πόσο γρήγορα: γρήγορα ή αργά; Που φαίνεται πόσο γρήγορα αλλάζει ο όγκος σε σχέση με το ύψος;

1148. M4: Άμα πάρουμε εδώ πέρα το ΔV/Δh [ΔV/Δh στο κάτω μέρος της γραφικής παράστασης] τότε είναι μικρότερο από αυτό [ΔV/Δh κοντά στη μέση της γραφικής παράστασης] (Εικόνα 4 - 15γ) (C)

[…]

1265. K: Μπορείτε να μου πείτε τελικά τι αλλάζει σε αυτή την κατάσταση;

1266. M4: Η ταχύτητα που το πετρέλαιο αυξάνεται. Αυτό αλλάζει. Το πετρέλαιο που παίρνουμε για κάθε Δh. Αυτό αλλάζει, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής. (C)



(α)

(β)

(γ)

(δ)

Εικόνα 4 - 15: Χάραξη γραφικής παράστασης και ερμηνεία

Σε αυτό το επεισόδιο οι μαθητές νοηματοδοτούν τον ρυθμό μεταβολής για διαφορετικές τιμές της διαφοράς των υψών (Δh) εστιάζοντας στις μεταβολές στα διαφορετικά διαστήματα που φαίνονται στη γραφική παράσταση σύμφωνα με το ($ΣΥ_3$)

στοιχείο γνώσης. Πιο συγκεκριμένα, οι Μ1 και Μ3 φαίνεται να αναγνωρίζουν το κρίσιμο σημείο του ρυθμού μεταβολής στη μέση της γραφικής παράστασης (αναγνώριση, στίχος 1145) και ο Μ2 περιγράφει λεκτικά τον ρυθμό μεταβολής (επαναδόμηση, στίχος 1146) χωρίς να αναφέρεται σε συγκεκριμένο βήμα μεταβολής για τη μεταβλητή h. Έπειτα, ο Μ4 νοηματοδοτεί τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής ως πηλίκο διαφορών συγκρίνοντας τον ρυθμό μεταβολής σε δύο στιγμιότυπα του γεμίσματος της δεξαμενής (Εικόνα 4 -15γ). Ακόμη, ο Μ4 δείχνει με τα χέρια του τις αλλαγές στην καμπυλότητα της συνάρτησης σημειώνοντας παράλληλα τη συμμεταβολή τους (κατασκευή, στίχος 1148). Τέλος, οι λέξεις του Μ4 δείχνουν τη δυνατότητα να νοηματοδοτεί τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής για συνεχείς μεταβολές στο ύψος (κατασκευή, στίχος 1266) Σχετικά με τον ρόλο των εργαλείων η ομάδα εστίασης πειραματίστηκε με τα εργαλεία του GeoGebra και συγκεκριμένα με τον δυναμικό χειρισμό του ύψους της δεξαμενής, στο έτοιμο μοντέλο δεξαμενής καταλήγοντας στο γέμισμα του πίνακα τιμών. Αυτός ο πειραματισμός με τα εργαλεία βοήθησε τους μαθητές να προσέξουν τις μεταβολές στις τιμές της συνάρτησης για διαφορετικά διαστήματα. Η γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής που δόθηκε από άλλη ομάδα βοήθησε τους μαθητές να σκεφτούν πέρα από τις διαφορές μεταξύ των τιμών τις συνάρτησης. Σχετικά με το πλαίσιο της δραστηριότητας, σημειώνουμε ότι ένα μοναδικό χαρακτηριστικό αυτής της νοηματοδότησης είναι ότι προέκυψε ως αποτέλεσμα των αλληλεπιδράσεων των μαθητών κυρίως με μαθηματικές αναπαραστάσεις που συνυπήρχαν με το δυναμικό πρόβλημα.

Σύνοψη

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάστηκε η εξέλιξη των επτά διαφορετικών νοηματοδοτήσεων, οι οποίες διατρέχουν τη μαθησιακή τροχιά καθώς οι μαθητές εργάζονται με τα διαφορετικά μοντέλα. Οι νοηματοδοτήσεις που προκύπτουν ξεκινούν από τις εξαρτήσεις μεταξύ χαρακτηριστικών των ποσοτήτων και τη συμμεταβολή μεταξύ μεγεθών και φτάνουν προς την συμμεταβολή μεταβλητών και τον ρυθμό μεταβολής. Αρχικά προκύπτει η αλληλεξάρτηση μεταξύ χαρακτηριστικών των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων, ακολουθεί η συσχέτιση μεγεθών, στην οποία γίνεται σύνδεση των αλλαγών και η κατεύθυνση μεγεθών, στην οποία αναφέρεται ρητά η αύξηση ή μείωση κατά την μεταβολή των μεγεθών. Επιπλέον, προέκυψε η επιλογή των μεταβλητών από ένα ζεύγος μεγεθών, ο συντονισμός των μεταβολών στις τιμές της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Οι δύο ανώτερες νοηματοδοτήσεις αφορούν τον συντονισμό του ποσού μεταβολής στις τιμές της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής και τέλος το πηλίκο διαφορών, το οποίο περιλαμβάνει τον ομοιόμορφο και στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής για ομοιόμορφες ή συνεχείς μεταβολές στην ανεξάρτητη μεταβλητή. Οι μαθητές μέσα σε αυτή τη μαθησιακή τροχιά εργάζονταν σε διαφορετικά μοντέλα με τη δυνατότητα κατασκευής των στοιχείων γνώσης που εμφανίζονται σε αυτά, όπως είδαμε στα επεισόδια από όλα τα σχολεία.

4.2. Συνδέσεις μοντέλων

Το σύνολο των διαφορετικών νοηματοδοτήσεων διατρέχει τα διαφορετικά μοντέλα εργασίας των μαθητών και συνεπώς προκύπτει η σημασία της ερευνητικής εστίασης στις συνδέσεις μεταξύ τους. Οι συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων έχουν εντοπιστεί στην υπάρχουσα βιβλιογραφία και χαρακτηρίζονται ως κρίσιμες κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης (Psycharis, Kafetzopoulos & Lagrange, 2021, Kafetzopoulos & Psycharis, 2022). Ιδιαίτερα κρίσιμος χαρακτηρίζεται πρωτίστως ο τρόπος με τον οποίο τα αρχικά μοντέλα επηρεάζουν τα επόμενα, καθώς επίσης και ο τρόπος με τον οποίο ένα μοντέλο επηρεάστηκε από τον πειραματισμό στο προηγούμενο μοντέλο. Η περιγραφή των συνδέσεων ανάμεσα στα διαφορετικά μοντέλα μας βοηθά στο να εντοπίσουμε κρίσιμα σημεία κατά την εξέλιξη των δραστηριοτήτων και ενημερώνουν καθηγητές και ερευνητές για τη σημασία των μεταβάσεων μεταξύ των μοντέλων.

4.2.1. Το μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων

Μέσα από τις αρχικές νοηματοδοτήσεις των μαθητών και συγκεκριμένα της αλληλεξάρτησης, της συσχέτισης και της κατεύθυνσης, οι οποίες εντοπίστηκαν στο μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων (όπως είδαμε στην ενότητα 4.1 Τροχιά νοηματοδότησης) παρατηρούμε ότι οι μαθητές σε όλα τα σχολεία έκαναν εκτενή πειραματισμό με το μοντέλο χαρτιού στη δραστηριότητα της Υδρορροής στο μοντέλο χειραπτικών εργαλείων. Συγκεκριμένα, οι μαθητές των ομάδων εστίασης εργαζόμενοι με το μοντέλο χαρτιού και προσομοιάζοντας την εργασία των ειδικών, έψαχναν τις διαφορετικές διπλώσεις του χαρτιού προκειμένου να εντοπίσουν διαφορετικές περιπτώσεις δίπλωσης χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές, γεγονός που τους οδήγησε στις τρεις πρώτες νοηματοδοτήσεις, αλλά και τους βοήθησε να μοντελοποιήσουν τη δραστηριότητα Σχεδιασμός Υδρορροής. Για παράδειγμα, από τον πειραματισμό των μαθητών με το μοντέλο χειραπτικών εργαλείων στη δεύτερη φάση συλλογής δεδομένων στο σχολείο Γ οι μαθητές μέσω του πειραματισμού διευκολύνθηκαν στον προσδιορισμό των περιορισμών στο μοντέλο δυναμικής γεωμετρίας, αλλά και στη σωστή δημιουργία του εξαρτημένου σημείου Α χρησιμοποιώντας την αλγεβρική εξίσωση $x+x+y=20$, όπως προκύπτει μέσα από το επόμενο επεισόδιο.

172. Κ: Θα χρειαστείτε ένα σημείο στο κάτω μέρος της υδρορροής και ένα σημείο που περιγράφει τη μέγιστη δίπλωση. Μετά θα χρειαστούμε ακόμα ένα σημείο μεταξύ των δύο αυτών σημείων, το οποίο περιγράφει κάθε φορά τη διαφορετική δίπλωση. Πρώτα από όλα θα πρέπει να βρείτε τον περιορισμό της κατασκευής.

173. Μ1: Προτείνω να βάλουμε το σημείο D στο (0,0).

174. Μ2: Θα πρέπει να φτιάξουμε το σημείο Ε ως (0,10) σε περίπτωση που διπλώσουμε την μεταλλική πλάκα στη μέση, ώστε να πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα για αυτή τη θέση του σημείου C. (R)

Έχοντας δημιουργήσει το σημείο C, οι μαθητές παρατήρησαν τη δίπλωση ώστε να βρουν ένα τρόπο να εκφράσουν την τετμημένη του σημείου Α. Οι περισσότερες ομάδες μαθητών προσπάθησαν να το βρουν λύνοντας την εξίσωση x+x+y=20 ως προς y.

175. Μ3: Προσπάθησα να φτιάξω το σημείο Α ως (20-2*x , 0), αλλά δεν τα κατάφερα.

176. Μ4: Εμείς φτιάξαμε το σημείο Α ως (20-2* yC , 0) και δούλεψε! [χρησιμοποιώντας την τεταγμένη του σημείου C)

177. Μ2: Κι εμείς φτιάξαμε το σημείο Α ως (20-2* DC , 0) και τα καταφέραμε, γιατί όσο μετακινούμε το σημείο C, μετακινείται και το σημείο Α! (BW, C)

Στο επεισόδιο οι μαθητές μέσα από τον πειραματισμό με το μοντέλο χαρτιού ως προσομοίωση της υδρορροής αναγνωρίζουν τους περιορισμούς της κατασκευής του δυναμικού ορθογωνίου στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, αναφορικά με την κατασκευή του σημείου Ε που αφορά τον περιορισμό για τα πλαϊνά μέρη της Υδρορροής, οι μαθητές της ομάδας εστίασης αναφέρουν: «θα φτιάξουμε το σημείο Ε ως (0,10) σε περίπτωση που διπλώσουμε τη λαμαρίνα στη μέση» (στίχος 174). Συνεπώς, αυτό το επεισόδιο γεφυρώνει την εργασία των μαθητών στα δύο μοντέλα και αναδεικνύει τη σημασία του πειραματισμού με τα χειραπτικά εργαλεία για την κατασκευή του δυναμικού ορθογωνίου στη δυναμική γεωμετρία με έμφαση στους περιορισμούς της κατασκευής. Ακολούθως, διάφορες ομάδες μαθητών είναι σε θέση να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες του σημείου C, το οποίο είναι εξαρτώμενο από τη μετακίνηση του σημείου Α. Αυτό το χαρακτηριστικό εμφανίστηκε σε όλα τα σχολεία. Για παράδειγμα, οι μαθητές της ομάδας εστίασης του σχολείου Β αναφέρουν: «Αν το πλαϊνό τμήμα είναι x, τότε η βάση είναι 20-2x και άρα οι συντεταγμένες του εξαρτημένου σημείου Α είναι 0 για την τετμημένη και 20-2xA για την τεταγμένη». Συνεπώς, μέσα από τον πειραματισμό τους με τα χειραπτικά εργαλεία οι μαθητές είναι ικανοί να διατυπώνουν τους περιορισμούς, αλλά και να ολοκληρώνουν τη δυναμική κατασκευή του ορθογωνίου στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας.

4.2.2. Το μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας

Στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας παρατηρούμε ότι οι μαθητές των ομάδων εστίασης έχουν επηρεαστεί από την πρότερη ενασχόλησή τους με τα χειραπτικά εργαλεία στη δραστηριότητα της Υδρορροής. Πράγματι, οι μαθητές των ομάδων εστίασης είχαν παρατηρήσει από τον πρότερο πειραματισμό τους με τα χειραπτικά εργαλεία ότι το δυναμικό ορθογώνιο μεταβάλλεται ανάλογα με τη μεταβολή του ύψους της πλαϊνής πλευράς. Αυτό το στοιχείο προέκυψε από το μοντέλο χειραπτικών εργαλείων και ήταν η βάση για τον επακόλουθο πειραματισμό τους και τις νοηματοδοτήσεις στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας. Από την άλλη η χρήση των εργαλείων της δυναμικής γεωμετρίας ενίσχυσε τη δυναμικότητα και την αλληλεπίδραση με τη γεωμετρική αναπαράσταση των συμμεταβαλλόμενων σχέσεων. Συγκεκριμένα, η εργασία των μαθητών στις δραστηριότητες της Υδρορροής και της Πρόσοψης Καταστήματος με τη δυναμική γεωμετρία (όπως η δημιουργία των περιορισμών για τις συντεταγμένες των σημείων φαίνεται να βοήθησε τους μαθητές να αναγνωρίσουν τα εξαρτημένα και τα ανεξάρτητα χαρακτηριστικά της κατασκευής και να τα συνδέσουν με συγκεκριμένες γεωμετρικές οντότητες (όπως για παράδειγμα ένα μήκος ή ένα εμβαδό). Μάλιστα, οι μαθητές προκειμένου να δημιουργήσουν συνάρτηση μέσα από τον πειραματισμό με τις μετρήσεις ανέτρεχαν στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας. Για παράδειγμα στο επόμενο επεισόδιο από τον πειραματισμό των μαθητών της ομάδας εστίασης με την Πρόσοψη Καταστήματος από το σχολείο Α κατά την εργασία των μαθητών με τις μετρήσεις οι μαθητές συζητούσαν για το ποιες είναι οι κατάλληλες μετρήσεις ώστε να προχωρήσουν στη μοντελοποίηση του προβλήματος.

455. Μ1: Εδώ πέρα πρέπει πρώτα να ορίσουμε εξαρτημένη ή ανεξάρτητη μεταβλητή. Αν θεωρήσουμε εξαρτημένη την ΑΚ.

456. Μ3: Εε; Ανεξάρτητη την ΑΚ?

457. Μ1: Εξαρτημένη την ΑΚ. Ανεξάρτητη την ΑΒ

458. Μ2: Όχι, όχι καμία, καμία ανεξάρτητη από αυτά. Η ανεξάρτητη βρίσκεται εδώ πέρα.

459. Μ3: Ναι, η ΝΕ είναι ανεξάρτητη.

460. Μ1: Η ΟΕ. Ουσιαστικά η ΟΕ είναι ίση με την ΑΒ. Όσο μεταβάλλεται η ΟΕ, μεταβάλλεται και η ΑΒ, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε και την ΑΒ ανεξάρτητη. (R)

461. Μ3: Και η εξαρτημένη ποια βάζουμε;

462. Μ2: Εξαρτημένη είναι από το Ε. Δηλαδή άμα κουνήσω το Ε θα κουνηθεί και η ΑΒ. Γι' αυτό είναι εξαρτημένη. Οπότε ανεξάρτητη είναι η ΟΕ. (BW)

463. Μ3: Και η εξαρτημένη ποια είναι;

464. Μ1: Το εμβαδό ΑΒ*ΑΚ. (C)

Στο επεισόδιο, οι μαθητές της ομάδας εστίασης προβληματίζονται σχετικά με την επιλογή της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Ωστόσο, η εργασία των μαθητών στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας φαίνεται να τους επηρεάζει στην επιλογή της κατάλληλης εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής. Πράγματι, η δυναμική μετακίνηση του σημείου Ε εμφανίζεται στους διαλόγους των μαθητών τόσο κατά την επιλογή μεταβλητών όσο και στην περιγραφή συναρτησιακής σχέσης μεταξύ δύο μεγεθών (στίχοι 460, 462). Συνεπώς, η εμπειρία της εργασίας των μαθητών στο μοντέλο δυναμικής γεωμετρίας συνεισέφερε τόσο στην επιλογή και δημιουργία των κατάλληλων μετρήσεων, όσο και στη δημιουργία της συνάρτησης μέσω της λειτουργίας της αυτόματης μοντελοποίησης. Αντίστοιχη συνεισφορά της δυναμικής γεωμετρίας φαίνεται να εμφανίζεται κατά τον πειραματισμό της ομάδας εστίασης σε όλα τα σχολεία.

4.2.3. Το μοντέλο των μετρήσεων

Ακολούθως, στο μοντέλο των μετρήσεων παρατηρούμε ότι ο προηγούμενος πειραματισμός των μαθητών με τη δυναμική γεωμετρία φάνηκε αφ' ενός να βοηθάει στον ορισμό των μετρήσεων που έχουν σημασία για τη μοντελοποίηση του προβλήματος και αφ' ετέρου να παρέχει τη δυνατότητα να δοθούν περεταίρω εξηγήσεις και δικαιολόγηση της επιλογής της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής από τη λειτουργία της «αυτόματης μοντελοποίησης». Κατά τον πειραματισμό των ομάδων με τις δραστηριότητες στο μοντέλο των μετρήσεων, η μετάβαση από τα γεωμετρικά αντικείμενα στις μετρήσεις των ποσοτήτων ήταν ένα κρίσιμο σημείο της διαδικασίας της μοντελοποίησης προκειμένου να προκύψει η μαθηματική συνάρτηση που μοντελοποιεί το πρόβλημα. Στο μοντέλο των μετρήσεων γίνεται η επιλογή ενός μεγέθους ως ανεξάρτητη μεταβλητή και ενός άλλου ως εξαρτημένη μεταβλητή μεταβαίνοντας στο μοντέλο των συναρτήσεων και συνδέοντας την εργασία των μαθητών σε τρία μοντέλα: (α) ο πειραματισμός στη δυναμική γεωμετρία που συνεισφέρει για την αιτιολόγηση της επιλογής των μεγεθών ως μεταβλητών, (β) η δημιουργία των γεωμετρικών υπολογισμών c0, c1, c2,… τα οποία επιλέγονται ως μεταβλητές στο μοντέλο των μετρήσεων και (γ) η συνάρτηση που προκύπτει ως αποτέλεσμα της επιλογής των μεγεθών στο μοντέλο των συναρτήσεων. Για παράδειγμα, στο επόμενο επεισόδιο μέσα από την εμφάνιση των γραφικών παραστάσεων και του πίνακα τιμών στη δραστηριότητα Πρόσοψη Καταστήματος για το σχολείο Β φαίνεται η συνεισφορά του μοντέλου των μετρήσεων στην εργασία των μαθητών με τις συναρτήσεις.

148. Ε: Πως χρησιμοποιείτε τον πίνακα τιμών;

149. Μ1: Εδώ πέρα είναι η απόσταση των δύο κάθετων κολώνων. Τώρα η g(x) μισό λεπτό να δω ποια είναι η g και ποια είναι η f. Η g είναι το πενταπλάσιο εμβαδό των παραθύρων.

150. Ε: Όταν λες είναι το πενταπλάσιο εμβαδό τι εννοείς;

151. Μ1: Η g είναι συνάρτηση που ορίζει το πενταπλάσιο εμβαδό τους με το πόσο μεταβάλλεται η ΟΕ. Και η f(x) είναι το εμβαδό της βιτρίνας. (R)

152. Ε: Πάλι τι εννοείς ότι είναι το εμβαδό της βιτρίνας;

153. Μ1: Πόσο μικραίνει και πόσο μεγαλώνει σε σχέση με την ΟΕ το εμβαδό, αλλά και πάλι τιμή που να είναι ίσο το εμβαδό δεν μου τη βρίσκει (R)

154. Ε: Τι θα λέγαμε γι’ αυτό τον πίνακα τιμών;

155. Μ1: Ότι στο 5,006 το εμβαδό της βιτρίνας είναι το πενταπλάσιο από τον εμβαδό των παραθύρων.

156. Ε: Μπράβο, άρα τι θα απαντούσες σε αυτόν που θα σου έλεγε που να βάλω την επόμενη κολώνα;

157. Μ1: Να τη βάλει σε 5 μέτρα απόσταση. (BW)

158. Ε: Σε περίπου 5 μέτρα απόσταση, ωραία. Από τη γραφική παράσταση τι βγαίνει; Ναι τώρα εκεί που μετακινείσαι ακριβώς που είσαι, για πες μου που είσαι;

159. Μ1: Είμαι στην f(x) που είναι το πόσο αλλάζει το εμβαδό της βιτρίνας. Η g(x) είναι το πόσο αλλάζει το πενταπλάσιο εμβαδό των παραθύρων. (R)

160. Ε: Κι από το γράφημα τι είναι αυτό που με ενδιαφέρει;

161. Μ1: Εκεί στο 5 είναι πάλι όπως στον πίνακα τιμών, δεν μπορείς να δεις καθαρά όμως. Κάπου εκεί. (C)

Στο επεισόδιο οι μαθητές έχουν εμφανίσει τον πίνακα τιμών για τον υπολογισμό εμβαδών τα οποία έχουν μοντελοποιήσει με συναρτήσεις. Ωστόσο, η προηγούμενη εργασία των μαθητών με τις μετρήσεις είναι εμφανής στους στίχους 151 και 153, στους οποίους οι μαθητές χρησιμοποιούν το μέγεθος που έχουν ορίσει ως ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή το μήκος ΟΕ. Έτσι, φαίνεται ότι η εργασία με τις μετρήσεις συνεισέφερε στη δημιουργία της συνάρτησης, αλλά επηρέασε και τη χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Αντίστοιχη συνεισφορά του μοντέλου των μετρήσεων εμφανίζεται σε όλα τα σχολεία κατά τον πειραματισμό της ομάδας εστίασης με τις συναρτήσεις.

4.2.4. Το μοντέλο των συναρτήσεων

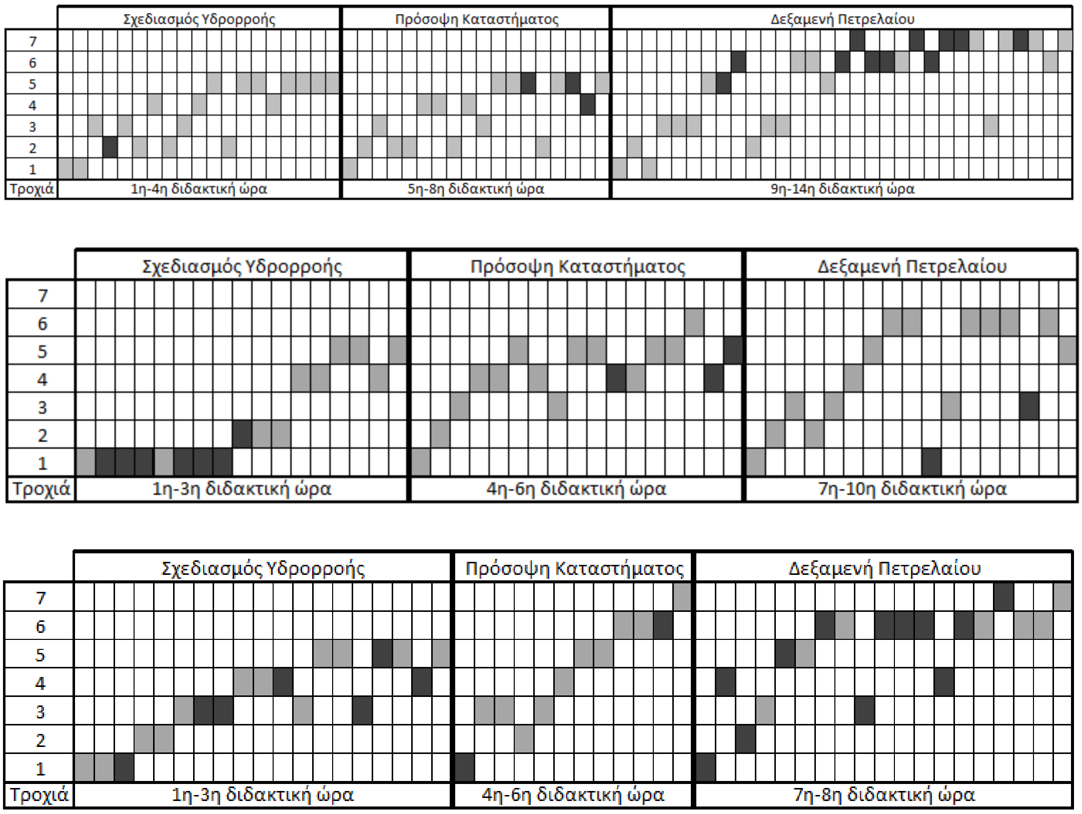
Στο μοντέλο των συναρτήσεων η συνάρτηση που προκύπτει αυτόματα από τις λειτουργίες του λογισμικού παρέχει τη δυνατότητα στους μαθητές να εργαστούν εκτενέστερα με τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες, οι οποίες εμφανίζονται ως μεταβλητές στο μοντέλο των συναρτήσεων μέσω της σύνδεσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Έτσι, κατά τη μετάβαση από το μοντέλο των μετρήσεων στο μοντέλο των συναρτήσεων υπάρχει η δυνατότητα για πιο σύνθετες νοηματοδοτήσεις, στις οποίες συνεισφέρει ο πρότερος πειραματισμός των μαθητών στα μοντέλα που προηγήθηκαν. Όπως είδαμε στα προηγούμενα επεισόδια μέσα από τον πειραματισμό των μαθητών στο μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων οι μαθητές αποκτούν μία αρχική επαφή με τις αλληλεξαρτήσεις και τη συσχέτιση μεταξύ δύο ποσοτήτων. Ακολούθως, οι μαθητές στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας και των μετρήσεων είναι σε θέση να νοηματοδοτούν πιο σύνθετα τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη μέχρι την επιλογή των μεταβλητών. Τέλος, στο μοντέλο των συναρτήσεων οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να πειραματιστούν περεταίρω με τις συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές με μία συνάρτηση που προέκυψε με τη βοήθεια του πειραματισμού μέσα από τα διαφορετικά μοντέλα.

Σύνοψη

Σε αυτή την ενότητα προέκυψαν οι συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων, κατά τη μοντελοποίηση των δραστηριοτήτων καθώς επίσης και τις λειτουργίες των εργαλείων που συνεισφέρουν στις συνδέσεις. Πράγματι, οι μαθητές ξεκινώντας τον πειραματισμό τους από το μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων ήταν σε θέση να παρατηρήσουν τα χαρακτηριστικά των ποσοτήτων και τους περιορισμούς τους και να δημιουργήσουν τη βάση για τον πειραματισμό τους με τα επόμενα μοντέλα. Στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας ο πρότερος πειραματισμός τους με τα χειραπτικά εργαλεία ήταν καθοριστικός για τη μοντελοποίηση της κατάστασης στη δυναμική γεωμετρία. Παράλληλα, ο δυναμικός χειρισμός αντικειμένων τους βοήθησε στον ορισμό των μεγεθών και στην επιλογή μεταβλητών για τη δημιουργία συνάρτησης. Οι μετρήσεις αποτελούν το μοντέλο το οποίο υπήρξε η γέφυρα για τη μετάβαση από τη δυναμική γεωμετρία στις συναρτήσεις δίνοντας στους μαθητές τη δυνατότητα να σκεφτούν τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη και να επιλέξουν την ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή. Τέλος, το μοντέλο των συναρτήσεων ήταν αυτό που δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να πειραματιστούν περεταίρω με τις συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις, στο οποίο συνεισφέρει χαρακτηριστικά ο πρότερος πειραματισμός των μαθητών με τα μοντέλα που προηγήθηκαν.

5. Μαθησιακή τροχιά ανά σχολείο

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης αποκαλύπτουν τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών στις τρεις δραστηριότητες. Ακολούθως παρατίθεται η εμφάνιση της πραγματικής μαθησιακής τροχιάς για την ομάδα εστίασης (ανοικτό γκρι) και των ομάδων που συμμετείχαν στις συζητήσεις ολόκληρης της τάξης (σκούρο γκρι) κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων σε κάθε σχολείο. Οι διαφορετικές τροχιές των μαθητών σε κάθε σχολείο δείχνουν την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων μέσα από τη διερεύνηση των μαθητών ανεξάρτητα από τον χρόνο εμφάνισης.



Εικόνα 5 - 1: Εξέλιξη της σκέψης των μαθητών στο σχολείο Α - 1ης φάσης (πάνω), στο σχολείο Β - 1ης φάσης (μέση) και στο σχολείο Γ - 2ης φάσης (κάτω)

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ομοιότητες και διαφορές που εμφανίζουν οι ομάδες εστίασης. Για παράδειγμα, στο σχολείο Β κατά την πρώτη φάση συλλογής δεδομένων οι μαθητές συνολικά δεν έφτασαν στην πιο αφηρημένη νοηματοδότηση του πηλίκου διαφορών, λόγω των απαιτήσεών της και του κλίματος συνεργασίας μεταξύ των μαθητών. Οι μαθητές της ομάδας εστίασης φαίνεται να κάνουν ενδιαφέρουσες εναλλαγές μεταξύ νοηματοδοτήσεων, όπως για παράδειγμα στο σχολείο Β κατά την πρώτη φάση συλλογής δεδομένων στην δραστηριότητα της Υδρορροής όπου δεν εμφανίστηκε κάποια αναφορά στην κατεύθυνση και οι μαθητές μεταβαίνουν από τη συσχέτιση στην επιλογή μεταβλητών.

Το γεγονός ότι μία ομάδα εστίασης μετακινείται προς πιο απλές νοηματοδοτήσεις υποδεικνύει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές (Clements & Sarama, 2004). Συνεπώς, μία δυσκολία των μαθητών κατά τη μοντελοποίηση της δραστηριότητας μπορεί να προκαλέσει μετακίνηση σε πιο απλή νοηματοδότηση. Για παράδειγμα, από τις εξελίξεις των νοηματοδοτήσεων στα σχολεία φαίνεται ότι μία συνήθης δυσκολία ήταν η μετάβαση από τα μεγέθη στις μεταβλητές, το οποίο είναι αντιπροσωπευτικό στις μαθησιακές τροχιές για όλα τα σχολεία. Για παράδειγμα, στο σχολείο Γ της δεύτερης φάσης συλλογής δεδομένων στις δραστηριότητες της Υδρορροής και της Δεξαμενής Πετρελαίου η ομάδα εστίασης φαίνεται να εστιάζει στην κατεύθυνση των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών αντί για την μετάβαση στις μεταβλητές (π.χ. οι μαθητές έλεγαν: «Είτε αυξάνεται είτε μειώνεται το μήκος βλέπουμε ότι οι αριθμοί συνεχώς αυξάνονται») νοηματοδοτώντας την κατεύθυνση και όχι τον συντονισμό μεταβλητών μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων. Ωστόσο, σε κάθε ομάδα μαθητών και κάθε δραστηριότητα παρατηρούμε ότι η μαθησιακή τροχιά της ομάδας εστίασης ακολουθεί μία ανοδική τάση υποδεικνύοντας την ανερχόμενη πορεία εξέλιξης της σκέψης των μαθητών. Επίσης, φαίνεται ότι οι μαθητές εργάστηκαν στα διαφορετικά μοντέλα και μπορούσαν να νοηματοδοτήσουν τη συνάρτηση ξεκινώντας από τη συμμεταβαλλόμενη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων και καταλήγοντας σε συναρτησιακή σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών και στον ρυθμό μεταβολής. Ειδικότερα στις δύο τελευταίες δραστηριότητες εμφανίζονται νοηματοδοτήσεις των ομάδων εστίασης που αφορούν τις πιο αφηρημένες έννοιες σχετικά με το ποσό μεταβολής και το πηλίκο διαφορών.

Στο παρόν κεφάλαιο η εστίαση αφορά στον ρόλο των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού και στον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων στα διαφορετικά σχολεία. Αρχικά, αναλύεται η εξέλιξη των μαθησιακών τροχιών μέσα από τις ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των σχολείων που αφορούν στις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και στον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων κατά την εργασία των μαθητών μέσα στη σχολική τάξη. Έτσι, επιδιώκεται η παρουσίαση της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων ανά σχολείο και ακολουθεί η σύνθεση μεταξύ των σχολείων με στόχο την ανάδειξη του ρόλου του πλαισίου εφαρμογής.

5.1. Ο ρόλος του πλαισίου στην εξέλιξη των μαθησιακών τροχιών – σχολείο Α

Σχετικά με το σχολείο Α από την $1^η$ φάση συλλογής δεδομένων αφιερώθηκαν συνολικά 14 ώρες για την παρούσα έρευνα σε ένα τμήμα Β΄ λυκείου. Ο Στέλιος (εκπαιδευτικός σχολείου Α) είχε ισχυρό ερευνητικό υπόβαθρο, ως υποψήφιος διδάκτορας στη Διδακτική των Μαθηματικών, ωστόσο δεν είχε ασχοληθεί σε εκτεταμένο βαθμό με τα ψηφιακά εργαλεία, ως μέρος της πρακτικής του. Κατά τη συνεργασία που είχε με τον ερευνητή στον σχεδιασμό, ο Στέλιος διαμόρφωσε την αρχική διατύπωση και τροποποίησε τα υποερωτήματα των δραστηριοτήτων, ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν στην τάξη του και έτσι εξοικειώθηκε με τις δραστηριότητες. Ωστόσο, σχετικά με τα ψηφιακά εργαλεία και ιδιαίτερα με το Casyopée δεν είχε μεγάλη εξοικείωση. Οι μαθητές στο σχολείο Α της $1^{ης}$ φάσης συλλογής δεδομένων είχαν κουλτούρα πειραματισμού και διερεύνησης και εργάζονταν τακτικά σε ομάδες μέσα στη σχολική τάξη πριν την εφαρμογή της έρευνας. Το Casyopée ήταν ένα καινούργιο λογισμικό για τους μαθητές, ωστόσο γνώριζαν αρκετά καλά το GeoGebra, το οποίο έχει αρκετές ομοιότητες με το Casyopée, και έτσι δεν ήταν ιδιαίτερα δύσκολο να προσαρμοστούν στο νέο ψηφιακό εργαλείο.

Στις πρώτες δύο δραστηριότητες οι μαθητές εργάζονταν ανά ομάδα στα υποερωτήματα, ωστόσο κατά τον πειραματισμό με τη Δεξαμενή Πετρελαίου δόθηκε περισσότερη έμφαση σε ανοικτή διερεύνηση στην τάξη και στην επικοινωνία μεταξύ των ομάδων μαθητών, το οποίο φαίνεται και από τις νοηματοδοτήσεις που καταγράφηκαν από την ομάδα εστίασης και τη σχολική τάξη (Εικόνα 5 - 2). Οι μαθητές εντός των ομάδων φάνηκε να νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων κατά την εργασία τους στις ομάδες και την εμπλοκή τους με τις δραστηριότητες. Στην Εικόνα 5 – 2 παρατίθεται η εμφάνιση της πραγματικής μαθησιακής τροχιάς για την ομάδα εστίασης (ανοικτό γκρι) και των ομάδων που συμμετείχαν στις συζητήσεις ολόκληρης της τάξης (σκούρο γκρι) κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων για το σχολείο Α. Οι διαφορετικές τροχιές των μαθητών σε κάθε σχολείο δείχνουν την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων μέσα από τη διερεύνηση των μαθητών ανεξάρτητα από τον χρόνο εμφάνισης. Τα επεισόδια που αφορούν στον ρόλο του εκπαιδευτικού στο σχολείο Α είναι σημειωμένα με κόκκινο και εκείνα που αφορούν στον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων είναι σημειωμένα με πορτοκαλί κατά τη διερεύνηση των δραστηριοτήτων.

Εικόνα 5 - 2: Νοηματοδότηση στο σχολείο Α από την 1η φάση συλλογής δεδομένων

Η ομάδα εστίασης νοηματοδότησε από την αλληλεξάρτηση ποσοτήτων μέχρι τον συντονισμό των μεταβολών σε διαφορετικές αναπαραστάσεις στις δύο πρώτες δραστηριότητες, ακολουθώντας ανοδική πορεία (Εικόνα 5-2). Πιο συγκεκριμένα, στον Σχεδιασμό Υδρορροής αρχικά έγινε συζήτηση στην τάξη σχετικά με τον εντοπισμό των ποσοτήτων από το μοντέλο χαρτιού. Εκεί ο εκπαιδευτικός διευκόλυνε την εμφάνιση νοηματοδοτήσεων καθώς έθετε ερωτήματα στους μαθητές για να εστιάσουν στον προσδιορισμό των δύο ποσοτήτων μέσα από τον πειραματισμό τους με το μοντέλο χαρτιού. Ακολούθως, οι μαθητές ξεκίνησαν να μοντελοποιούν το πρόβλημα στο Casyopée όπου εμφανίστηκαν δυσκολίες κατά τον πειραματισμό στη δυναμική γεωμετρία, αφού εμφανίζονται εναλλαγές στις νοηματοδοτήσεις. Στη συνέχεια, ο ορισμός μεγεθών στο παράθυρο υπολογισμών και η επιλογή συμμεταβαλλόμενου ζεύγους μέσω της λειτουργίας της αυτόματης μοντελοποίησης επέτρεψαν στους μαθητές να νοηματοδοτήσουν την κατεύθυνση και την επιλογή μεταβλητών καταλήγοντας σε μία συνάρτηση εργαζόμενοι σχεδόν αποκλειστικά εντός της ομάδας και λύνοντας τα υποερωτήματα της δραστηριότητας όπως δίνονταν στα φύλλα εργασίας. Στην Πρόσοψη Καταστήματος οι μαθητές συνέχισαν να εργάζονται εντός της ομάδας και με τη βοήθεια του παραθύρου γεωμετρικών υπολογισμών πειραματίζονταν με τις μετρήσεις που όρισαν, ενώ ακολούθως μπορούσαν να συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης για να δικαιολογήσουν τον καταλληλότερο σχεδιασμό της πρόσοψης. Οι μαθητές της ομάδας εστίασης και σε αυτή τη δραστηριότητα δεν κατάφεραν να νοηματοδοτήσουν τον ρυθμό μεταβολής. Στη Δεξαμενή Πετρελαίου, η ομάδα εστίασης έκανε πιο σύνθετες νοηματοδοτήσεις σχετικά με το ποσό μεταβολής και το πηλίκο διαφορών (Εικόνα 5-2). Ο εκπαιδευτικός φάνηκε να είναι περισσότερο διερευνητικός, προκαλώντας αρκετές συζητήσεις στην τάξη σχετικά με τη μορφή της γραφικής παράστασης. Η πρόκληση των μαθητών και οι συζητήσεις μέσα στην τάξη κατέληξαν στη νοηματοδότηση του ποσού μεταβολής στην κατακόρυφη τοποθέτηση, όπως προκύπτει από τα επεισόδια που ακολουθούν. Επίσης, ο εκπαιδευτικός υποστήριξε τους μαθητές διαφορετικών ομάδων στην ερμηνεία της γραφικής παράστασης και εκείνοι νοηματοδότησαν το ποσό μεταβολής και το πηλίκου διαφορών.

Συνεπώς, αναλύονται τα πιο χαρακτηριστικά επεισόδια που αφορούν στον ρόλο του εκπαιδευτικού στο σχολείο Α, τα οποία αναφέρονται στην αρχική συζήτηση με τους μαθητές στην τάξη και τις συζητήσεις για το ποσό μεταβολής και το πηλίκο διαφορών. Ακολούθως, αναλύονται επεισόδια σχετικά με τον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων κατά τη διερεύνηση των δραστηριοτήτων.

5.1.1. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στο σχολείο Α - 1η φάση συλλογής

Μέσα από τα ακόλουθα επεισόδια αναλύθηκε ο ρόλος του εκπαιδευτικού μέσα από τις παρεμβάσεις του κατά την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων των μαθητών σε κρίσιμες στιγμές. Ως κρίσιμες στιγμές θεωρούμε είτε τη σκιαγράφηση μίας νοηματοδότησης (εμφάνιση για πρώτη φορά, κοινοποίηση σε ολόκληρη την τάξη) είτε τις μεταβάσεις ανάμεσα σε δύο νοηματοδοτήσεις. Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζουμε τις διαφορετικές κατηγορίες των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού, θεωρώντας ως συστατικό στοιχείο των παρεμβάσεων τις ερωτήσεις που θέτει ο εκπαιδευτικός, για το σχολείο Α:

Παρεμβάσεις εκπαιδευτικού	**Τύπος παρέμβασης**	**Ορισμός**	**Χαρακτηριστικά παραδείγματα**
Παιδαγωγικές (έμφαση στη διερεύνηση)	Συμμετοχής (Πσ)	Προτροπή όλων των μαθητών να συμμετέχουν. Άλλες διαστάσεις: Πρόσκληση για προσοχή/εστίαση	Μπορώ να έχω την προσοχή σας;
	Εκμαίευσης (Πε)	Δράσεις βοήθειας/κατεύθυνσης των μαθητών ώστε να εκμαιεύσει μία απάντηση. Άλλες διαστάσεις: εκμαίευση ιδεών μαθητών, εκμαίευση νοηματοδότησης	Για να περνάει η μέγιστη ποσότητα νερού, ποιο πράγμα θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε;
	Απάντησης (Πα)	Δράσεις απάντησης σε μία ιδέα/σκέψη ενός μαθητή	Μ: Νομίζω η κλίση είναι που αλλάζει. Όσο αυξάνεται το ύψος μέχρι την μέση,

		Άλλες διαστάσεις: διόρθωση λάθους, επανάληψη	πρέπει ο όγκος να αυξάνεται. Κ: Και στις δύο γίνεται αυτό. Μ1: Ναι… αλλά η κλίση πρέπει να μεγαλώνει. Κ: Και στις δύο γίνεται αυτό. Και στις δύο η κλίση μεγαλώνει.
	Διευκόλυνσης (Πδ)	Δράσεις διευκόλυνσης της σκέψης ενός μαθητή Άλλες διαστάσεις: παροχή οδηγιών, σκαλωσιά για τη σκέψη του μαθητή, υποστήριξη πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης	Μ: Οποιοδήποτε σημείο να πάρω από την μέση και κάτω, και ομοίως εδώ πέρα από την μέση και κάτω, η εφαπτόμενη θα είναι μεγαλύτερη. Κ: Εμένα μου φαίνεται μικρότερη εδώ. Σε ακούω.
	Επέκτασης (Πεπ)	Δράσεις επέκτασης της σκέψης των μαθητών Άλλες διαστάσεις: υποστήριξη σκέψης και γενίκευσης, προτροπή για παροχή αιτιολογήσεων	Να σε ρωτήσω κάτι; Άμα ο κύλινδρος είχε μεγαλύτερη ακτίνα;
Διδακτικές (έμφαση στο περιεχόμενο)	Εστίασης σε μαθηματικό αντικείμενο (Δε)	Δράσεις για την εστίαση των μαθητών στο μαθηματικό αντικείμενο (π.χ. ποσότητες, μεγέθη, μεταβλητές) στο εκάστοτε μοντέλο Άλλες διαστάσεις: απλοποίηση κεντρικού ερωτήματος, ενίσχυση της μαθηματικής πρόκληση	Ποιο πράγμα θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε; (κατά τον πειραματισμό με τα χειραπτικά εργαλεία)
	Υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα)	Υποστήριξη των μαθητών για τη σύνδεση αναπαραστάσεων (π.χ. γραφικών, αλγεβρικών) Άλλες διαστάσεις: ενίσχυση μαθηματικής πρόκλησης, διερεύνησης	Θα ήθελα να προτείνετε τα κριτήρια σύγκρισης των δύο γραφικών παραστάσεων.

Πίνακας 7: Παρεμβάσεις εκπαιδευτικού στο σχολείο Α

Επεισόδιο 1: Εστίαση σε μαθηματικό αντικείμενο - Νοηματοδότηση των αλληλεξαρτήσεων

Κατά την εφαρμογή του Σχεδιασμού Υδρορροής ο ρόλος των παρεμβάσεων του Στέλιου ήταν κρίσιμος διευκολύνοντας τους μαθητές να διερευνήσουν τη δραστηριότητα με τη βοήθεια των υποερωτημάτων. Συγκεκριμένα, στην αρχή της δραστηριότητας κατά τον πειραματισμό των μαθητών με το κομμάτι χαρτιού ο εκπαιδευτικός έδωσε αρκετό χρόνο στην αναγνώριση των δύο χαρακτηριστικών των ποσοτήτων που είναι κρίσιμα για τη μοντελοποίηση του προβλήματος. Στους μαθητές είχαν δοθεί από την αρχή συγκεκριμένες διαστάσεις της μεταλλικής λαμαρίνας για την κατασκευή της υδρορροής και ένα κομμάτι χαρτί συγκεκριμένων διαστάσεων για να πειραματιστούν. Στο ακόλουθο επεισόδιο από τον αρχικό πειραματισμό των μαθητών στην αρχική συζήτηση της τάξης ο Στέλιος (Κ) θέτει ερωτήματα σε όλη την τάξη. Στόχος τους Στέλιου είναι να εστιάσουν οι μαθητές στην αναγνώριση των μαθηματικών αντικειμένων και να νοηματοδοτήσουν την αλληλεξάρτηση μεταξύ των χαρακτηριστικών των ποσοτήτων κατά τον πειραματισμό τους στο μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων.

Εικόνα 5 - 3: Ο εκπαιδευτικός δείχνει το μοντέλο χαρτιού στην τάξη

203. Κ: Ποιο πράγμα θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε; (Δε)

204. Μ1: Τον όγκο.

205. Κ: Αυτό… για να περνάει η μέγιστη ποσότητα νερού, ποιο πράγμα θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε; (Πε)

206. Μ5: Το ύψος

207. Μ2: Το πλάτος, αλλά μέχρι ένα σημείο. Αυτό εδώ [δείχνει τη βάση]

208. Κ: Α, δηλαδή όσο πιο μεγάλο είναι αυτό [δείχνει τη βάση], τόσο μεγαλύτερο…

209. Μ1: Μεγαλώνοντας τη βάση τόσο περισσότερο νερό θα περνάει. Αλλά τόσο μικρότερα θα είναι τα πλαϊνά τοιχώματα και έτσι μπορεί να έχουμε διαρροές απ' έξω, ώστε να μεγιστοποιηθεί ο όγκος του. Όχι; (R, BW)

210. Μ2: Το εμβαδό, αυτό το ορθογώνιο. (C)

Εικόνα 5 - 4: Ο εκπαιδευτικός δείχνει το εμβαδό διατομής που επεσήμανε ο Μ2

Στο επεισόδιο παρατηρούμε ότι ο εκπαιδευτικός πραγματοποιεί διδακτική παρέμβαση στην τάξη με στόχο την εστίαση στο μαθηματικό αντικείμενο που πρέπει να αναγνωρίσουν οι μαθητές στο μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων. Πιο συγκεκριμένα, βοηθά τους μαθητές να εστιάσουν στο εμβαδό διατομής μέσα από τον πειραματισμό με το μοντέλο χαρτιού, ώστε να εστιάσουν στον εντοπισμό των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων που είναι κρίσιμα για τη μοντελοποίηση του προβλήματος. Αρχικά, ο Στέλιος απλοποιεί το βασικό ερώτημα για να βοηθήσει την εστίαση των μαθητών (στίχος 203). Ο Μ1 παρατηρεί ότι ένα μέγεθος θα μπορούσε να είναι ο όγκος, ωστόσο ο εκπαιδευτικός της τάξης κάνει μία παιδαγωγική παρέμβαση εκμαίευσης και επαναλαμβάνει το αρχικό ερώτημα (στίχος 205). Ακολούθως, οι μαθητές της τάξης Μ2 και Μ5 παρατηρούν ότι για τη μεγιστοποίηση της ποσότητας νερού η βάση της υδρορροής πρέπει να αυξηθεί, αλλά μέχρι ενός σημείου. Έτσι, είναι σε θέση να αντιληφθούν τον περιορισμό για την πλευρά της βάσης διαισθητικά. Ο Στέλιος κάνει και δεύτερη διδακτική παρέμβαση σημειώνοντας τη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας και κατ' επέκταση με τα χαρακτηριστικά της προβληματικής κατάστασης. Οι μαθητές αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τις αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των πλευρών και ακολούθως οι Μ1 και Μ2 κατασκευάζουν την αλληλεξάρτηση μεταξύ πλευρών και εμβαδού. Σε αυτό το επεισόδιο ο ρόλος του εκπαιδευτικού θέτοντας συγκεκριμένα ερωτήματα κατά τον πειραματισμό των μαθητών με το κομμάτι χαρτιού είναι κρίσιμος, καθώς καλεί τους μαθητές να σκεφτούν χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα εργαλεία, να αναγνωρίσουν τα χαρακτηριστικά των ποσοτήτων που αλληλεξαρτώνται και να εστιάσουν σε αυτά που έχουν νόημα για την επίλυση του προβλήματος. Συνολικά παρατηρούμε ότι ο εκπαιδευτικός αναφέρεται με συγκεκριμένα παραδείγματα στο κομμάτι του χαρτιού ώστε να παρακινήσει τους μαθητές να διερευνήσουν το δυναμικό φαινόμενο μέσα από τον πειραματισμό με τα χειραπτικά εργαλεία και να εκμαιεύσει τις δύο αλληλεξαρτώμενες ποσότητες.

Επεισόδιο 2: Υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων - Ποσό μεταβολής

Κατά την εφαρμογή της Δεξαμενής Πετρελαίου στόχος του εκπαιδευτικού ήταν η διερεύνηση του ποσού μεταβολής από τα δύο συμμεταβαλλόμενα μεγέθη, τα οποία είναι σε συναρτησιακή σχέση. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα αφιερώθηκε αρκετός χρόνος στον πειραματισμό με την κατακόρυφη και την οριζόντια τοποθέτηση της δεξαμενής, και ιδιαίτερα με τη χάραξη της γραφικής παράστασης. Κατά τη διερεύνηση των μαθητών για την κατακόρυφη τοποθέτηση της δεξαμενής εμφανίστηκαν τα πρώτα επεισόδια σχετικά με το ποσό μεταβολής και ένα μεγάλο μέρος των νοηματοδοτήσεων αναφερόταν στην κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης. Στο επόμενο επεισόδιο, κατά την τελική παρουσίαση της διερεύνησης μίας ομάδας μαθητών για την κατακόρυφη τοποθέτηση της δεξαμενής εμφανίζεται για πρώτη φορά η έννοια της εφαπτομένης και της κλίσης της έπειτα από παρέμβαση του εκπαιδευτικού. Συγκεκριμένα, κατά τη χάραξη της γραφικής παράστασης της μεταβολής ύψους και όγκου από τον μαθητή που παρουσίαζε τέθηκε στο επίκεντρο της συζήτησης η γωνία της ευθείας, δηλαδή η κλίση του γραφήματος μέσα από τη συζήτηση και τα ερωτήματα του εκπαιδευτικού της τάξης. Στόχος του Στέλιου σε αυτό το επεισόδιο ήταν οι μαθητές να συνδέσουν την κλίση της εφαπτομένης με τον αλγεβρικό τύπο της συνάρτησης.

Εικόνα 5 - 5: Χάραξη γραφικής παράστασης στην κατακόρυφη τοποθέτηση της δεξαμενής

503. Μ5: Έστω ότι είναι… υπολογίζουμε την σχέση… η σχέση που βρήκαμε είναι V=h*A, όπου h είναι η στάθμη

504. Ε: Ωραία, ωραία, πήγαινε στο γράφημα κατευθείαν τώρα. Τα μεγέθη πρώτα απ' όλα που παρατηρείτε ποια είναι;

505. Μ5: Ο όγκος και η στάθμη. Ωραία. Εδώ είναι η γωνία, η εφαπτομένη της γωνίας είναι Α που είναι το εμβαδόν διατομής, 31,4 κι εδώ είναι το μέγιστο h που είναι τα 6 μέτρα. (R)

506. Κ: Για πες μου, τι σχέση έχει το εμβαδό διατομής με την γωνία; (Δσα)

507. Μ5: Τι σχέση έχει το Α με την γωνία. Είναι κάθε στιγμή η διαίρεση V/h.

508. Κ: Άκου με λίγο. Τι σχέση έχει το Α με την γωνία. (Δσα)

509. Μ5: Το Α είναι V/h.

510. Κ: Με την γωνία τι σχέση έχει; (Δσα)

511. Μ6: Μήπως είναι ο ρυθμός μεταβολής;

512. Μ5: Το Α είναι η εφαπτομένη της γωνίας. Η εφαπτομένη της γωνίας, ο ρυθμός μεταβολής. Όλα αυτά το ίδιο περιγράφουνε. (BW)

513. Κ: Ωραία. Να σε ρωτήσω κάτι; Άμα ο κύλινδρος είχε μεγαλύτερη ακτίνα; (Πεπ)

514. M5: Άμα ο κύλινδρος είχε μεγαλύτερη ακτίνα τότε το εμβαδόν διατομής θα ήταν μεγαλύτερο, επομένως η κλίση θα ήταν μεγαλύτερη, επομένως ο ρυθμός μεταβολής θα ήταν μικρότερος. Δηλαδή η αναλογία h και V, δηλαδή για το ίδιο ύψος θα γέμιζε πιο αργά με καύσιμο η δεξαμενή. (C)

Στο επεισόδιο ο M5 νοηματοδοτεί το ποσό μεταβολής ως την εφαπτομένη της γωνίας και ως κλίση. Συγκεκριμένα, αρχικά αναγνωρίζει τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη και χαράσσει τη γραφική παράσταση της μεταβολής τους προσδιορίζοντας την κλίση της. Ο εκπαιδευτικός φαίνεται να επανέρχεται με διδακτική παρέμβαση για την σύνδεση αναπαραστάσεων (Δσα) προς τον μαθητή, οι οποίες αφορούν τη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ του εμβαδού διατομής του κυλίνδρου (συμβολίζεται ως Α) και της γωνίας του γραφήματος (στίχοι 506, 508, 510). Τα ερωτήματα που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός στο επεισόδιο έχουν στόχο τη σύνδεση της κλίσης της εφαπτομένης με τον αλγεβρικό τύπο της συνάρτησης και αφορούν στον εμπλουτισμό των νοημάτων που κατασκευάζει ο μαθητής της τάξης. Ο M5 μετά τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού συνδέει για πρώτη φορά το εμβαδό διατομής (Α) με την εφαπτομένη της γωνίας και τον ρυθμό μεταβολής. Ακολούθως, ο εκπαιδευτικός κάνει μία παιδαγωγική παρέμβαση επέκτασης και θέτει ένα ερώτημα επέκτασης (Πεπ) στον M5 σχετικά με την αύξηση της ακτίνας (στίχος 513). Ο M5 συνεχίζει να συνδέει τον ρυθμό μεταβολής με την κλίση κατασκευάζοντας το ποσό μεταβολής. Το γεγονός ότι ο Στέλιος επανέρχεται γύρω από τα συγκεκριμένα ερωτήματα καταλήγει στη νοηματοδότηση του ρυθμού μεταβολής από το M5 και στη σύνδεση της πραγματικής κατάστασης, της γραφικής παράστασης και του ρυθμού μεταβολής.

Επεισόδιο 3: Υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων - Ποσό μεταβολής

Το γεγονός ότι ο εκπαιδευτικός επικεντρώθηκε από νωρίς στη σύνδεση της κλίσης της εφαπτομένης με τον ρυθμό μεταβολής στην κατακόρυφη τοποθέτηση της δεξαμενής φάνηκε να επηρέασε τους μαθητές στη συνέχεια της δραστηριότητας. Η σύνδεση της κλίσης της εφαπτομένης με τον ρυθμό μεταβολής κατά την κατακόρυφη τοποθέτηση επηρέασε τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών σχετικά με το ποσό μεταβολής. Έτσι, στην οριζόντια τοποθέτηση της δεξαμενής η κλίση της εφαπτομένης συνδέθηκε με τον ρυθμό μεταβολής όταν οι μαθητές προσπαθούσαν να αιτιολογήσουν την επιλογή της κατάλληλης γραφικής παράστασης, η οποία απεικονίζει τη συμμεταβολή των μεγεθών ύψους και όγκου πετρελαίου. Οι μαθητές είχαν εντοπίσει τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη και προβληματίζονταν σχετικά με τη χάραξη της γραφικής παράστασης. Στην προσπάθεια όλων των ομάδων μαθητών να χαράξουν τη σωστή γραφική παράσταση προέκυψαν διαφορετικές λύσεις και έγινε διερεύνηση στην τάξη προκειμένου να καταλήξουν στην επιλογή γραφικής παράστασης για την οριζόντια τοποθέτηση. Στο επόμενο επεισόδιο ο εκπαιδευτικός της τάξης παρουσιάζει στον πίνακα τις δύο επικρατέστερες λύσεις για τη γραφική παράσταση και ρωτά όλους τους μαθητές για το ποια είναι η πιο κατάλληλη. Στόχος του Στέλιου ήταν η υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων από τους μαθητές.

Εικόνα 5 - 6: Επιλογή δυνατών λύσεων στην οριζόντια τοποθέτηση της δεξαμενής

436. Κ: Για προσέξτε όλοι. Έχετε φτιάξει βασικά δύο γραφικές παραστάσεις. Η μια είναι κάπως έτσι, η άλλη είναι κάπως έτσι. Κάποιοι έχουνε φτιάξει την μεν, κάποιοι έχουνε φτιάξει την δε. Θέλω να σκεφτείτε ποια από τις δύο είναι η καλή και γιατί; Περιγράψτε το κάπως αυτό. Με Α αναφέρεστε σε αυτή και με Β σε αυτή. Ακούω. (Πσ)

437. Μ7: Το Β πιστεύω ότι είναι το σωστό επειδή στην μέση της γραφικής παράστασης βλέπουμε ότι έχει περισσότερη αύξηση όγκου αναλογικά με το ύψος απ’ ότι στα άκρα. Εκεί πέρα αυξάνεται πολύ ο όγκος στην αρχή και στο τέλος και στην μέση αυξάνεται λιγότερο. Εκεί πέρα αυξάνεται ο όγκος λιγότερο απ’ ότι αυξάνεται στα άκρα αναλογικά με το ύψος. (R, BW)

438. Κ: Άμα το έκανα… δηλαδή θέλω να πω, δεν είναι αυτό το… Άμα το κάνω έτσι δηλαδή; Πάλι φαίνεται ότι εδώ είναι πιο μεγάλο; Ναι, ναι γιατί αν έχουμε συνεννοηθεί μιλάμε για το ίδιο πράγμα. Κατάλαβες τι λέει. Έχει να κάνει με αυτό που έφτιαξα εγώ. Η βασική ιδέα ποια είναι; Μπορεί να περιγράψει κάποιος την διαφορά ανάμεσα σε αυτές τις δύο γραφικές παραστάσεις; Ποια είναι η ποιοτική διαφορά; (Δσα)

439. Μ1: Νομίζω η κλίση είναι που αλλάζει. Όσο αυξάνεται το ύψος μέχρι την μέση, πρέπει ο όγκος να αυξάνεται.

440. Κ: Και στις δύο γίνεται αυτό. (Πα)

441. Μ1: Ναι… αλλά η κλίση πρέπει να μεγαλώνει.

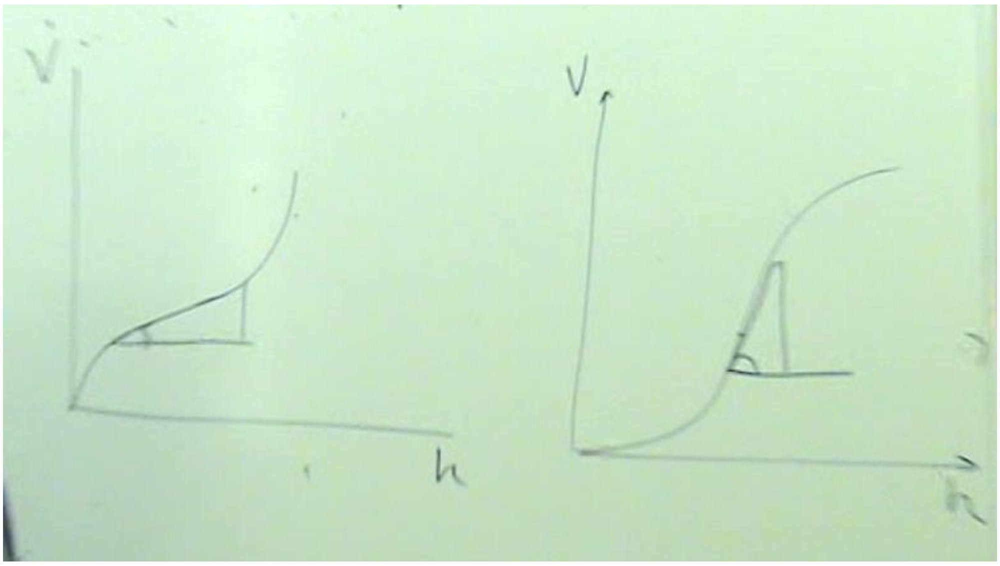
442. Κ: Και στις δύο γίνεται αυτό. Και στις δύο η κλίση μεγαλώνει. (Πα)

443. Μ4: Λοιπόν, στην αρχή όταν γεμίζει με υγρό, με μια μικρή μεταβολή όσο μεταβάλλεται το ύψος, στην αρχή ο όγκος μεταβάλλεται με μεγαλύτερο ρυθμό στην Α γραφική παράσταση. (C)

Στο επεισόδιο ο Στέλιος δημιουργεί ένα πεδίο συζήτησης σχετικά με τη μορφή της γραφικής παράστασης και τη σύνδεσή της με τον ρυθμό μεταβολής με τη χρήση παιδαγωγικού ερωτήματος συμμετοχής (Πσ), καθώς καλεί όλους τους μαθητές να συμμετέχουν και παρουσιάζει τις δύο πιθανές γραφικές παραστάσεις για την περιγραφή της κατάστασης. Αρχικά, ο Μ7 αναγνωρίζει τις διαφορές στην εξαρτημένη μεταβλητή (αναγνώριση, στίχος 437) σημειώνοντας ότι η μεγαλύτερη αύξηση εντοπίζεται στο κέντρο του γραφήματος, ενώ ακολούθως συγκρίνει τα άκρα του γραφήματος (επαναδόμηση, στίχος 437). Στη συνέχεια, παρεμβαίνει ο εκπαιδευτικός και ξεκινάει μία συζήτηση με τον Μ1 (στίχοι 438-442) γύρω από τον ρυθμό μεταβολής και τέλος ο μαθητής Μ4 νοηματοδοτεί το ποσό μεταβολής (κατασκευή, στίχος 443). Ο εκπαιδευτικός συνθέτει τις λύσεις των μαθητών οδηγώντας τους στη νοηματοδότηση του ποσού μεταβολής μέσω της σύγκρισης των γραφικών παραστάσεων (στίχος 436-437). Ακολούθως, πραγματοποιεί διδακτική παρέμβαση υποστηρίζοντας τη σύνδεση μεταξύ των αναπαραστάσεων (Δσα), μέσα από τη σύγκριση των διαφορετικών γραφημάτων (στίχος 438). Συγκεκριμένα, ο όγκος και το ύψος που αναφέρονται (στίχοι 437, 439) είναι οι μεταβλητές που συμμετέχουν στους άξονες του γραφήματος. Η κλίση της εφαπτομένης προέρχεται αφενός από την παιδαγωγική παρέμβαση απάντησης (Πα) του εκπαιδευτικού ώστε να προκαλέσει τη διόρθωση του λάθους του Μ1 (στίχοι 440-442) και αφετέρου από τα επεισόδια που προηγήθηκαν, στα οποία εμφανίστηκε η σχέση της γωνίας και της εφαπτομένης με τη γραφική παράσταση. Σε αυτό το μαθησιακό περιβάλλον που δημιουργήθηκε από τον εκπαιδευτικό για τη σύγκριση των γραφικών παραστάσεων ο Μ4 είναι ικανός να συγκρίνει τους ρυθμούς μεταβολής στην αρχή των δύο γραφικών παραστάσεων νοηματοδοτώντας το ποσό μεταβολής (στίχος 443).

Επεισόδιο 4: Υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων - Πηλίκο διαφορών (ομοιόμορφος ρυθμός μεταβολής)

Στη συνέχεια της δραστηριότητας, ο εκπαιδευτικός της τάξης ξεκίνησε μία συζήτηση στην τάξη για τη σύγκριση των δύο επικρατέστερων γραφικών παραστάσεων, οδηγώντας τους μαθητές σε ανώτερες νοηματοδοτήσεις. Στο επόμενο επεισόδιο, οι μαθητές της τάξης από τρεις διαφορετικές ομάδες διερευνούσαν περαιτέρω τις διαφορές μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων και η συζήτηση αφορούσε τον ρυθμό μεταβολής και την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση, ενώ ολοκληρώθηκε με αναφορές στο σχήμα της δεξαμενής.



Εικόνα 5 - 7: Ο Μ5 χαράσσει τις εφαπτομένες σε αντίστοιχα σημεία στις δύο γραφικές παραστάσεις (στίχοι 26, 28)

25. Κ: Μπορώ να έχω λίγο την προσοχή σας; Θα ήθελα να προτείνετε τα κριτήρια σύγκρισης των δύο γραφικών παραστάσεων. (Πσ - Δσα)

26. Μ4: Να πάρουμε τις εφαπτομένες και να δούμε που είναι ο ρυθμός μεταβολής στις διαφορετικές τιμές στη γραφική παράσταση και όπου αυξάνεται…

27. Κ: Πού να πάρουμε εφαπτόμενες;

28. Μ5: Αν θεωρήσουμε ένα μικρό ευθύγραμμο τμήμα εδώ [στην μέση] και φέρουμε την εφαπτομένη, την παράλληλη στον xx΄ και κάνουμε όμοια εδώ πέρα [στο

τέλος] η εφαπτόμενη όπως είπε ο Μ4, είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου και στην μια περίπτωση είναι μεγαλύτερος απ' ότι στην άλλη, αλλά ο όγκος αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό στην αρχή άρα στην συγκεκριμένη περίπτωση… (R, BW)

29. Κ: Ναι αλλά αυτό μήπως έχει να κάνει με το σημείο στο οποίο πήρες την εφαπτομένη; (Πδ)

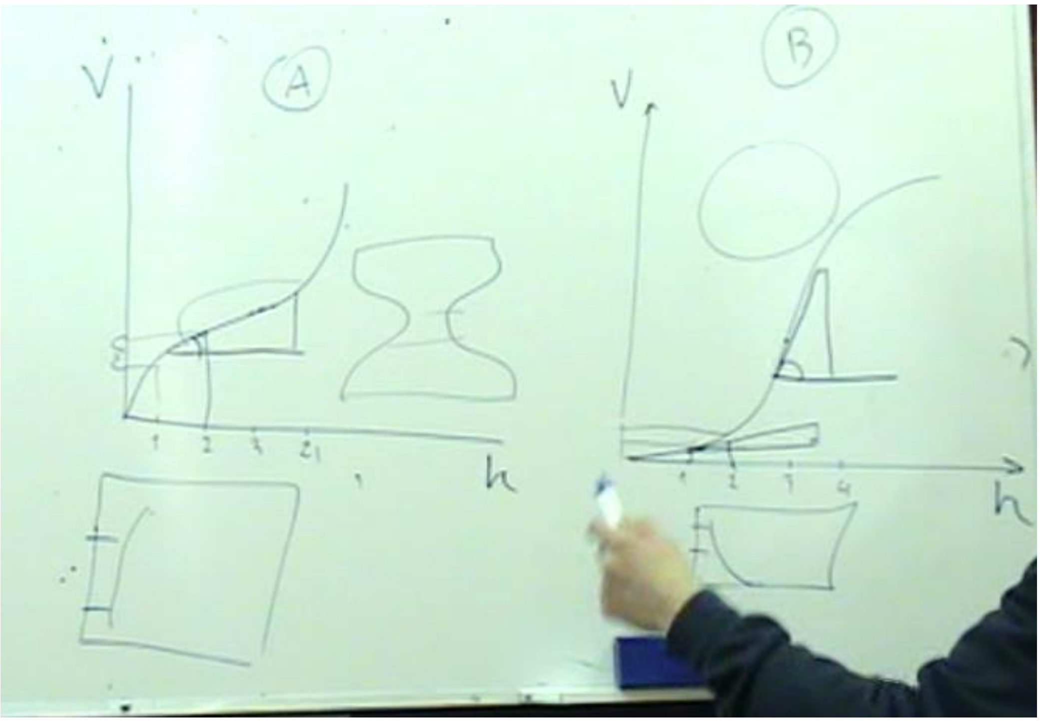
30. Μ5: Όχι, όχι, οποιοδήποτε σημείο να πάρω από την μέση και κάτω, και ομοίως εδώ πέρα από την μέση και κάτω, η εφαπτόμενη θα είναι μεγαλύτερη.

31. Κ: Εμένα μου φαίνεται μικρότερη εδώ. Σε ακούω. (Πδ)

32. Μ6: Αυτό είναι πιο ποιοτικό. Ναι. Αλλά θα μπορούσαμε να κάνουμε και τις δύο γραφικές παραστάσεις σε έναν άξονα, να βάλουμε δύο ύψη, στο κέντρο για παράδειγμα, επειδή οι περισσότεροι λένε ότι στο κέντρο μεταβάλλεται πιο γρήγορα ο όγκος και να δούμε για μια μεταβολή του ύψους κοινή, πόσο μεταβάλλεται ο όγκος. Και αυτό θα το κάνουμε και στα δύο σημεία ας πούμε και στην μέση και στις άκρες. (BW)

33. Μ4: Πριν ξεκινήσουμε αυτό μπορώ να πω κάτι για τις εφαπτομένες; Ότι έτσι όπως είναι το σχήμα, βλέπουμε προς το τέλος ότι αρχίζει να μειώνεται ο ρυθμός μεταβολής του όγκου, οπότε αυτό φαίνεται στο σχήμα. Είναι στην αρχή μικρό, μετά αρχίζει να αυξάνεται μέχρι να σταθεροποιηθεί κάπως και μετά θα αρχίσει πάλι να μειώνεται και αυτό μπορούμε να το δούμε από την γραφική παράσταση. (BW, C)

34. Μ7: Να βάλουμε στην γραφική παράσταση μονάδες στο ύψος και στον όγκο αλλά στο ύψος κυρίως, ίσες μονάδες. Λοιπόν και αυτό που θέλουμε τέταρτα είναι ας πούμε από το 1 μέχρι το 2 στην Α. Θέλω να το κάνω και σε σχέση με το πώς θα είναι η δεξαμενή. Από το 1 μέχρι το 2 η μεταβολή του όγκου είναι αυτή [δείχνει την κλίση της εφαπτομένης], ενώ εδώ από το 1 μέχρι το 2 είναι αυτή εδώ. Δηλαδή αυτή η δεξαμενή είναι κάπως έτσι [σαν κλεψύδρα] και αυτή είναι κάπως έτσι [σαν κύκλος]. Επειδή βλέπουμε ότι εδώ [εννοεί στην Α] στο κέντρο έχει πολύ μικρότερη αύξηση του όγκου σε σχέση με το ύψος ενώ εδώ πέρα στο κέντρο έχει μεγαλύτερη αύξηση του όγκου [δείχνει τη Β]. (BW, C)



Εικόνα 5 - 8: Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων από τον Μ7 (στίχος 34)

Το επεισόδιο ξεκινάει με παιδαγωγική παρέμβαση συμμετοχής (Πσ) και μία διδακτική παρέμβαση για την υποστήριξη των μαθητών στη σύνδεση των αναπαραστάσεων (Δσα) από μεριάς του εκπαιδευτικού. Ο Στέλιος καλεί όλους τους μαθητές να διερευνήσουν τις διαφορές στις δύο διαφορετικές γραφικές παραστάσεις. Αρχικά, οι μαθητές Μ4 και Μ5 αναγνωρίζουν διαφορές στις δύο γραφικές παραστάσεις και συνδέουν τον ρυθμό μεταβολής με την κλίση της εφαπτομένης (αναγνώριση, επαναδόμηση, στίχοι 26, 28, 30). Ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να διορθώσουν τα λάθη τους με παιδαγωγικές παρεμβάσεις διευκόλυνσης (Πδ) και παράλληλα υποστηρίζει τη σύνδεση αναπαραστάσεων με ένα ερώτημα διερεύνησης/πρόσκλησης προκειμένου να γίνει σαφές το επιχείρημα των Μ4 και Μ5, δηλαδή η σύνδεση του ρυθμού μεταβολής με την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης (στίχοι 29-31). Στη συνέχεια, ο Μ6 από άλλη ομάδα σημειώνει ένα τρόπο σύγκρισης για κοινές μεταβολές σε ίδιο σύστημα αξόνων (επαναδόμηση, στίχος 32). Ο Μ4 επανέρχεται στη σύνδεση ρυθμού μεταβολής και κλίσης της εφαπτομένης κάνοντας αντιστοιχία μεταξύ της πραγματικής κατάστασης και της γραφικής παράστασης. Κατόπιν, ο Μ7 από διαφορετική ομάδα από τις προηγούμενες αρχικά παρατηρεί στον πίνακα ποια είναι η μεταβολή του όγκου για ένα μικρό διάστημα και στις δύο γραφικές παραστάσεις και στη συνέχεια προσπαθεί από τη γραφική παράσταση να αποκαλύψει το σχήμα της δεξαμενής κατασκευάζοντας λεκτική περιγραφή του ρυθμού μεταβολής (επαναδόμηση, κατασκευή, στίχος 34). Στο επεισόδιο, ο Στέλιος αρχικά προκαλεί τους μαθητές να συμμετέχουν, ενώ στη συνέχεια αποκτά συντονιστικό ρόλο χρησιμοποιώντας διδακτικές παρεμβάσεις για τη σύνδεση αναπαραστάσεων (Δσα) και ερωτήματα διερεύνησης επιτρέποντας να ακουστούν οι απόψεις των μαθητών από διαφορετικές ομάδες. Παράλληλα με τη χρήση παιδαγωγικών παρεμβάσεων διευκόλυνσης (Πδ) βοηθά τους μαθητές να διορθώσουν τα λάθη τους. Έτσι, προκύπτει μία συλλογή από τις απόψεις των ομάδων μέσα στην τάξη, η οποία μοιράζεται μεταξύ όλων των μαθητών.

Επεισόδιο 5: Υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων - Πηλίκο διαφορών (στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής)

Κατά την τελευταία ώρα διερεύνησης της Δεξαμενής Πετρελαίου ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να κάνουν σύγκριση μεταξύ των δύο τοποθετήσεων με αποτέλεσμα ανώτερες νοηματοδοτήσεις από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, οι μαθητές νοηματοδότησαν τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής μέσα από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Στο ακόλουθο επεισόδιο το οποίο αφορά συζητήσεις σε όλη την τάξη γίνεται σύγκριση των δύο τοποθετήσεων της δεξαμενής σχετικά με όλα τα χαρακτηριστικά τους με ιδιαίτερη έμφαση στη σχέση των μεγεθών και πως αυτή αποτυπώνεται στη γραφική παράσταση. Είναι χαρακτηριστικό ότι σε αυτόν τον διάλογο μεταξύ δύο ομάδων μαθητών στην τάξη προκύπτει μία δυσκολία που καταλήγει σε νοηματοδότηση που δεν σχετίζεται με τον ρυθμό μεταβολής από τους μαθητές της ομάδας εστίασης.

75. Μ2: Ωραία, στην μια είναι ανάλογα και στην άλλη δεν είναι ανάλογα.
76. Κ: Για πείτε μου τι γίνεται με την μεταβολή του ρυθμού μεταβολής; (Δσα)
77. Μ1: Αυξάνεται μέχρι την μέση και μετά μειώνεται (R)
78. Μ5: Μέχρι την μέση αυξάνεται, δηλαδή το ένα μέτρο και μετά μειώνεται. Αυτό το βλέπουμε και στο γράφημα.
79. Ε: Αυτό πώς το βλέπουμε στο γράφημα;
80. Μ5: Στην αρχή η εφαπτομένη αυξάνεται μέχρι το σημείο που είναι η μέση δηλαδή το ένα μέτρο και μετά αλλάζει η καμπυλότητα και… (R)
81. Κ: Θέλεις να σηκωθείς να το κάνεις αυτό που λες στον πίνακα; Δηλαδή στην γραφική παράσταση πώς βλέπετε τον ρυθμό μεταβολής; Πώς πάει; (Δσα – Πεπ)
82. Μ5: Ο όγκος είναι στον κατακόρυφο άξονα. Οπότε εδώ αλλάζει η καμπυλότητα, δηλαδή στην αρχή είναι γνησίως αύξουσα.

83. Κ: Παιδιά πώς φαίνεται από την γραφική παράσταση αυτό; (Δσα)

84. Μ1: Η εφαπτομένη μεγαλώνει και μετά μικραίνει. (R, BW)

85. Μ2: Για x_1 μικρότερο του x_2 το $f(x_1)$ είναι μικρότερο του $f(x_2)$ στην αρχή, ενώ μετά την μέση για x_1 μικρότερο του x_2 ισχύει το αντίθετο.

86. Μ1: Είναι αυτό που λέμε ο λόγος στην αρχή αυξάνει και μετά μικραίνει. Αλλά ο λόγος εκφράζεται από την εφαπτομένη και αν πάρουμε κάθε φορά την εφαπτομένη, στην αρχή αυξάνεται και μετά μειώνεται. (R, BW)

87. Κ: Παιδιά, αυτό που έλεγε ο Μ5 πριν ότι αυξάνεται ο ρυθμός μεταβολής του όγκου μέχρι την μέση. Είναι αυτό που μου είπε ο Μ2; Δηλαδή αν πάρω h_1 μικρότερο του h_2, λέει ο Μ1, το $V(h_1)$ είναι μικρότερο του $V(h_2)$; Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου αυξάνεται;

88. Μ5: Όχι βέβαια γιατί αυτό έχει να κάνει με το άμα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Άμα είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα δεν έχει να κάνει με αυτό εδώ που λέμε.

89. Κ: Ποια αλγεβρική σχέση πρέπει να γράψω για να δηλώνεται η αύξηση του ρυθμού μεταβολής του όγκου; (Δσα)

90. Μ5: Ο λόγος h_1 προς V_1 είναι μικρότερο του h_2 προς V_2 ή κάτι τέτοιο

91. Κ: Ποιος λόγος;

92. Μ1: Ο λόγος ΔV προς Δh. (C)

Στο επεισόδιο, ο εκπαιδευτικός της τάξης καλεί τους μαθητές να συγκρίνουν τις δύο τοποθετήσεις της δεξαμενής ως προς τον ρυθμό μεταβολής χρησιμοποιώντας διδακτική παρέμβαση με ένα ερώτημα για τη σύνδεση του ρυθμού μεταβολής με τη γραφική παράσταση (Δσα). Οι μαθητές ξεκινούν από τον τρόπο συμμεταβολής των μεταβλητών παρατηρώντας ότι στην κατακόρυφη τοποθέτηση τα μεγέθη μεταβάλλονται ανάλογα (στίχος 75). Ωστόσο, η συνέχεια της συζήτησης αφορά τη μεταβολή του ρυθμού μεταβολής (στίχοι 77, 78), ενώ σχετικά σύντομα οι μαθητές συνδέουν τον ρυθμό μεταβολής με την εφαπτομένη (στίχος 80). Κατόπιν, ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί παιδαγωγική παρέμβαση επέκτασης (Πε) ώστε να ενθαρρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τα διαθέσιμα εργαλεία και να προχωρήσουν σε νοηματοδοτήσεις (στίχος 81). Παράλληλα, τους προκαλεί να κάνουν περαιτέρω συνδέσεις αναπαραστάσεων μεταξύ της γραφικής παράστασης και του ρυθμού μεταβολής (στίχοι 81, 83). Στη συνέχεια του επεισοδίου φαίνεται ότι ο Μ2 νοηματοδοτεί την αύξηση του όγκου (στίχος 85) η οποία πρόκειται για την κατεύθυνση της μεταβολής και ο εκπαιδευτικός επεξηγεί τα λεγόμενα του μαθητή (στίχος 87), προκειμένου να διαχωριστεί ο ρυθμός μεταβολής από τη μονοτονία της συνάρτησης. Ο Στέλιος ζητά ξανά από τους μαθητές να συνδέσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις και συγκεκριμένα αναζητά πλέον αλγεβρική σχέση που να συνδέεται με τον ρυθμό μεταβολής και τη γραφική παράσταση (στίχος 89). Ακολούθως, ο Μ1 από την ομάδα εστίασης αντιλαμβάνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής αυξάνεται και ακολούθως μειώνεται και παράλληλα συνδέει την κλίση της εφαπτομένης με τον ρυθμό μεταβολής και τον λόγο μεταβολής (αναγνώριση, επαναδόμηση στίχοι 77, 84, 86). Στη συνέχεια του επεισοδίου ο Μ1 είναι ικανός να νοηματοδοτεί τον ρυθμό μεταβολής ως πηλίκο διαφορών (κατασκευή, στίχος 92), καθώς δεν ορίζει βήμα της μεταβολής για την αλλαγή του ύψους. Συνολικά, η νοηματοδότηση της κατεύθυνσης υποδεικνύει ότι ο Μ2 δυσκολεύτηκε στο διερευνητικό ερώτημα του εκπαιδευτικού σχετικά με τη μεταβολή του ρυθμού μεταβολής και νοηματοδότησε την κατεύθυνση της μεταβολής των μεταβλητών αντί για τον ρυθμό μεταβολής. Ο Στέλιος στο επεισόδιο πραγματοποιεί τακτικά διδακτικές παρεμβάσεις για την υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα), υπογραμμίζει την διαφορετική νοηματοδότηση του Μ2 και ζητά αιτιολογήσεις από τους μαθητές. Παράλληλα, μέσα από την αναζήτηση συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων υποστηρίζει τους μαθητές να νοηματοδοτήσουν τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής, δηλαδή τον ρυθμό μεταβολής ως πηλίκο διαφορών.

Σύνοψη του ρόλου του εκπαιδευτικού Α

Μέσα από τα διαφορετικά επεισόδια για τον ρόλο του Στέλιου στο σχολείο Α φαίνεται ότι επιλέγει να ακολουθήσει τις δραστηριότητες κάνοντας παιδαγωγικές και διδακτικές παρεμβάσεις. Στα επεισόδια συνήθως χρησιμοποιεί στην αρχή παιδαγωγική παρέμβαση συμμετοχής (Πσ) και ακολούθως παιδαγωγικές παρεμβάσεις εκμαίευσης (Πε), απάντησης (Πα), διευκόλυνσης (Πδ) και επέκτασης (Πεπ) για να υποστηρίξει τους μαθητές να σκεφτούν και να διορθώσουν τα λάθη τους. Παράλληλα, πραγματοποιεί διδακτικές παρεμβάσεις εστίασης στα μαθηματικά αντικείμενα (Δε) και υποστήριξης των μαθητών για σύνδεση αναπαραστάσεων (Δσα). Συνολικά οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού αναφορικά με τη συχνότητα εμφάνισης στα επεισόδια που αναλύθηκαν φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Παρεμβάσεις εκπαιδευτικού	Τύπος παρέμβασης	Συχνότητα
Παιδαγωγικές (έμφαση στη διερεύνηση)	Συμμετοχής (Πσ)	2
	Εκμαίευσης (Πε)	1
	Απάντησης (Πα)	1
	Διευκόλυνσης (Πδ)	1
	Επέκτασης (Πεπ)	2
Διδακτικές (έμφαση στο περιεχόμενο)	Εστίασης σε μαθηματικό αντικείμενο (Δε)	1
	Υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα)	4

Πίνακας 8: Πίνακας παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού στο σχολείο Α

Αρχικά, η χρήση της παιδαγωγικής παρέμβασης συμμετοχής υποδεικνύει ότι οι μαθητές διερευνούν το πρόβλημα εντός των ομάδων και τους καλεί να διακόψουν και να συμμετέχουν σε διερεύνηση στη σχολική τάξη. Οι παιδαγωγικές παρεμβάσεις που χρησιμοποιεί υποστηρίζουν τους μαθητές στο να προκύψουν ιδέες και νοηματοδοτήσεις (Πε). Η χρήση διδακτικής παρέμβασης εστίασης στα μαθηματικά αντικείμενα δείχνει την κρισιμότητα της αναγνώρισης των μαθηματικών αντικειμένων πάνω στο μοντέλο χαρτιού (βλέπε επεισόδιο 1), η οποία υποστηρίζει τη μοντελοποίηση των δραστηριοτήτων. Κατά την εξέλιξη της αλληλουχίας των δραστηριοτήτων οι παρεμβάσεις του εστιάζουν στη διόρθωση των αιτιολογήσεων, στην επέκταση της σκέψης των μαθητών και στις συνδέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων (βλέπε επεισόδια 2-5). Στο επεισόδιο 1 ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να εστιάσουν συγκεκριμένα στο μαθηματικό αντικείμενο (εμβαδό) και υποστηρίζει τους μαθητές να το αναγνωρίσουν κατά τον πειραματισμό τους με παιδαγωγική παρέμβαση εκμαίευσης (Πε). Αντίθετα, στα επόμενα επεισόδια τα οποία αφορούν τη νοηματοδότηση του ποσού και του ρυθμού μεταβολής φαίνεται ότι εστιάζει στη σύνδεση αναπαραστάσεων. Αρχικά, με τη χρήση παιδαγωγικών παρεμβάσεων συμμετοχής (Πσ) βοηθά τους μαθητές να εμπλακούν στη διερεύνηση του ρυθμού μεταβολής και να νοηματοδοτήσουν τον ομοιόμορφο και στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής. Για παράδειγμα, εστιάζοντας στη σύνδεση αναπαραστάσεων υποστηρίζει τους μαθητές στη σύνδεση της κλίσης της εφαπτομένης με τον αλγεβρικό τύπο (επεισόδιο 2) με αποτέλεσμα τη νοηματοδότηση του ποσού μεταβολής, βοηθώντας τους να επεκτείνουν τη σκέψη τους μέσα από μία παιδαγωγική παρέμβαση επέκτασης (Πεπ). Ακολούθως, μέσα από απαντήσεις και παροχή βοήθειας στους μαθητές (Πα και Πδ) προκαλεί τη διόρθωση των λαθών στην τάξη, τη σύνδεση διαφορετικών γραφικών παραστάσεων και υποστηρίζει τις νοηματοδοτήσεις του ρυθμού μεταβολής ως πηλίκο διαφορών (ομοιόμορφος ρυθμός μεταβολής, επεισόδια 3 και 4). Τέλος, υποστηρίζει την επέκταση της σκέψης των μαθητών (Πε) παρέχοντάς τους τη δυνατότητα να εργαστούν με τη γραφική παράσταση. Μέσα από τη σύνδεση (Δσα) της γραφικής παράστασης με τον ρυθμό μεταβολής και με την αλγεβρική σχέση του πηλίκου διαφορών οι μαθητές νοηματοδοτούν τον ρυθμό μεταβολής ως πηλίκο διαφορών (στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής, επεισόδιο 5).

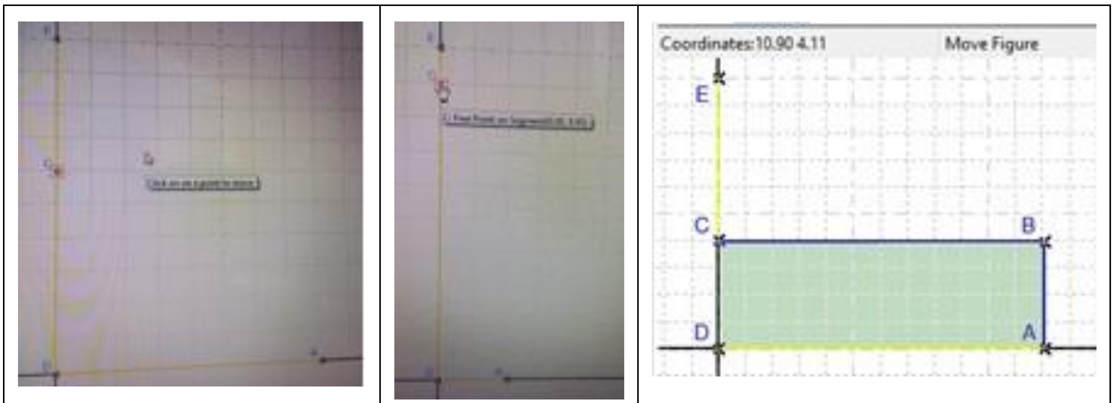
Συνολικά, ο Στέλιος φαίνεται ότι δημιούργησε ένα μαθησιακό περιβάλλον το οποίο σταδιακά ενθάρρυνε τον πειραματισμό και τη διερεύνηση των μαθητών. Έτσι, στις πρώτες δραστηριότητες φαίνεται να προωθούσε τη συζήτηση των μαθητών σε ομάδες και την εστίαση στα κρίσιμα μαθηματικά αντικείμενα. Κατά την εξέλιξη της αλληλουχίας των δραστηριοτήτων εστίασε στη σύνδεση αναπαραστάσεων υποστηρίζοντας τους μαθητές και επιτρέποντας νοηματοδοτήσεις από διαφορετικές ομάδες να προκύψουν μέσα στην τάξη. Για παράδειγμα, αρκετές από τις πιο σύνθετες νοηματοδοτήσεις για το ποσό μεταβολής και τον ομοιόμορφο ρυθμό μεταβολής προήλθαν από διαφορετικές ομάδες μέσα στην τάξη (επεισόδια 2, 3 και 4). Ιδιαίτερα στην τελευταία δραστηριότητα η πλούσια αλληλεπίδραση του εκπαιδευτικού με τη σχολική τάξη βοήθησε τους μαθητές να μετακινούνται σε απαιτητικές νοηματοδοτήσεις σχηματίζοντας μία τροχιά με αρκετές αναφορές στον ρυθμό μεταβολής (Εικόνα 5-2). Επίσης, ο Στέλιος μέσα από τις παρεμβάσεις του δίνει έμφαση στο διαμοιρασμό των ιδεών των μαθητών σε όλη την τάξη. Παράλληλα, υποστηρίζει τις συνδέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων, αφού φαίνεται να καλεί τη σχολική τάξη για συνδέσεις και συγκρίσεις, βοηθώντας τους μαθητές να αναπτύξουν σύνθετες νοηματοδοτήσεις ξεκινώντας από τις αλληλεξαρτήσεις μεταξύ χαρακτηριστικών των ποσοτήτων και καταλήγοντας στον ρυθμό μεταβολής. Συνεπώς, οι παρεμβάσεις που κάνει ο Στέλιος μπορούν να χαρακτηρίσουν τη διδασκαλία του ως διερευνητική με έμφαση στη μάθηση των μαθηματικών.

5.1.2. Ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στην εξέλιξη των μαθησιακών τροχιών στο σχολείο Α

Από την ανάλυση των επόμενων επεισοδίων φαίνεται η εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων των μαθητών σε κρίσιμες στιγμές που αφορούν τον ρόλο των εργαλείων, όπως η μοντελοποίηση στο παράθυρο της δυναμικής γεωμετρίας, μέσω της δυναμικής μετακίνησης σημείων, η επιλογή εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής, ο πειραματισμός με τις μετρήσεις και η σύνδεση αναπαραστάσεων.

Επεισόδιο 1: Μοντελοποίηση στη δυναμική γεωμετρία μέσω δυναμικής μετακίνησης σημείων

Στη δραστηριότητα Σχεδιασμός Υδρορροής οι μαθητές της τάξης δυσκολεύτηκαν κατά τη μοντελοποίηση της δραστηριότητας στο Casyopée. Πιο συγκεκριμένα, στη φάση του αυτόνομου πειραματισμού στις ομάδες μαθητών η ομάδα εστίασης φάνηκε να συναντά δυσκολίες σχετικά με τον ορισμό των σημείων στο λογισμικό, οι οποίες αφορούσαν τη δημιουργία του δυναμικού ορθογωνίου στη δυναμική γεωμετρία ως προσομοίωση του εμβαδού διατομής της υδρορροής. Στο επόμενο επεισόδιο φαίνονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μοντελοποίηση του προβλήματος, αλλά και η συμβολή των εργαλείων ώστε να τις ξεπεράσουν.



Εικόνα 5 - 9: Κατασκευή του δυναμικού ορθογωνίου

686. Μ1: Έχουμε ονομάσει τη βάση με x. […] Επομένως, επειδή είμαστε στον άξονα xx΄ το x είναι ίσο με 20 – 2y. Κατάλαβες; Οπότε το y είναι ίσο με μηδέν και το x είναι ίσο με 20 – 2y. Σωστά;

687. Ε: Εμείς ψάχνουμε τις συντεταγμένες του σημείου Α στον xx΄.

688. Μ1: Το y θα είναι ίσο με μηδέν Και το x θα είναι 20 – 2y. Πλην 2yC (R)

689. Ε: Για συζητήστε τα αυτά.

690. M2: Κοίτα άμα κουνηθεί αυτό, δεν κινείται και τίποτα.

691. M1: Γιατί μας είπε να το ξανακοιτάξουμε όμως; Τι κάναμε λάθος;

692. Ε: Για μετακινήστε το C. Ωραία. Είναι σωστό τώρα έτσι όπως το έχεις φτιάξει; Πόσο είναι το τμήμα DA;

693. M2: Είναι 20 – 2y

694. Ε: Δεν νομίζω ότι το έχεις φτιάξει έτσι. Για δες την τιμή του Α εδώ.

695. M2: Ωπ! Το y του C. Μείον 2yC. Δεν το είχα γράψει σωστά, έλλειπε το δύο.

696. M1: Ωραία και τώρα αντίστοιχα πρέπει να βρούμε το σημείο Β. Σωστά; Άρα να φέρουμε κάθετη στη DA. (BW)

697. M2: Ωραία για κούνα το Μ λίγο. […] Κούνα το Μ, κούνα το Μ. Ωραία. (BW)

698. M1: Μεταβάλλεται, πάρα πολύ ωραία.. Σιγά, από την στιγμή που καταφέραμε να φτιάξουμε το παραλληλόγραμμο δεν σε νοιάζουν οι άλλες γραμμές. Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε το μέγιστο εμβαδό.(C)

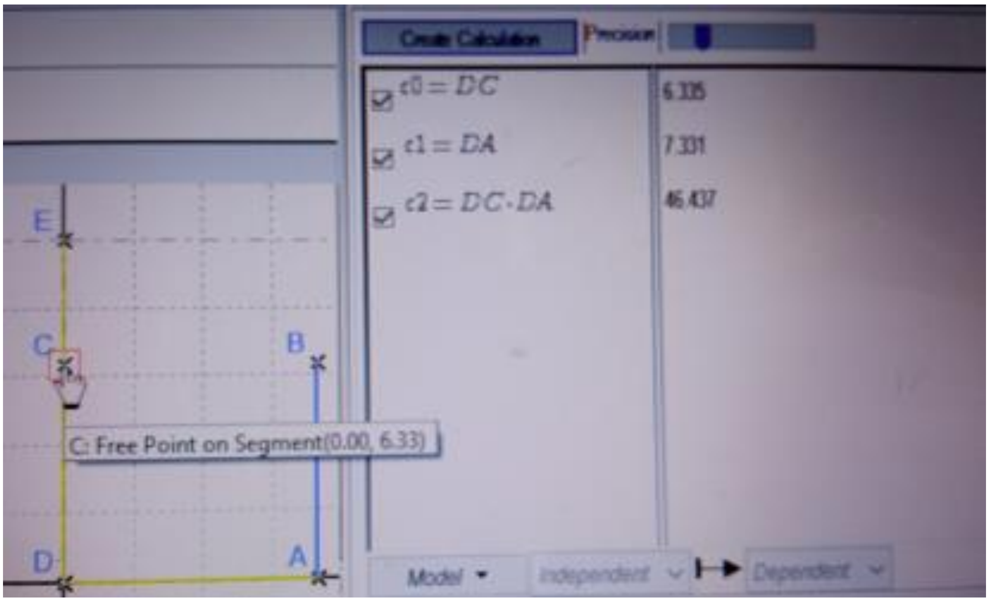
699. M2: Άκου λίγο, άκου λίγο. Θα σβήσουμε τις ευθείες γιατί δεν μου αρέσουνε και θα βάλουμε σημείο Β που θα έχει y το yC και x το xA. […]

700. M1: Είναι σωστό; Τσέκαρε λίγο μέχρι που φτάνει.

Στο επεισόδιο αναδεικνύονται οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη μοντελοποίηση στο λογισμικό Casyopée, αλλά και σημεία που οι μαθητές εντείνουν τον πειραματισμό τους με τη μετακίνηση του ελεύθερου σημείου για επιβεβαίωση. Συγκεκριμένα, στην αρχή του επεισοδίου οι μαθητές παρόλο που εντοπίζουν σωστά τις συντεταγμένες του σημείου Α (αναγνώριση, στίχος 688), δεν συνδέουν το εξαρτημένο σημείο Α με το ελεύθερο σημείο C με αποτέλεσμα να μην εντοπίζουν καμία μεταβολή (στίχος 690). Κατόπιν, οι μαθητές ορίζουν κατάλληλα τα σημεία και επιβεβαιώνουν την επιλογή τους μέσω της μετακίνησης του ελεύθερου σημείου (επαναδόμηση, στίχοι 696-697). Σε αυτό το σημείο είναι κρίσιμη η συμβολή της δυναμικής γεωμετρίας μέσω της μετακίνησης του ελεύθερου σημείου C, καθώς δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να επιβεβαιώσουν τη σωστή επιλογή συντεταγμένων. Ακολούθως, οι μαθητές κατασκευάζουν το δυναμικό ορθογώνιο με τη βοήθεια κάθετων γραμμών (κατασκευή, στίχος 698). Το γεγονός ότι δυσκολεύτηκαν να κατασκευάσουν το δυναμικό ορθογώνιο φαίνεται καθώς οι μαθητές νιώθουν από τη μία ανακούφιση και από την άλλη αβεβαιότητα καθώς μετακινείται το ελεύθερο σημείο (στίχοι 698, 700). Ωστόσο, μέσα από την αλληλεπίδραση μεταξύ τους, οι μαθητές της ομάδας εστίασης ολοκληρώνουν τη μοντελοποίηση του προβλήματος στο λογισμικό. Το ψηφιακό εργαλείο προσφέρει στους μαθητές άμεση αλληλεπίδραση με τη συμμεταβολή με την κίνηση του ελεύθερου σημείου και ευελιξία στον τρόπο που θα μοντελοποιήσουν το πρόβλημα (στίχος 699). Στο συγκεκριμένο επεισόδιο φαίνεται αδύναμη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας, καθώς οι μαθητές αναφέρουν ότι τους ενδιαφέρει το εμβαδό (στίχος 698), ωστόσο η διαρκής μετακίνηση του ελεύθερου σημείου δείχνει τους μαθητές να κάνουν ψηφιακό τσάκισμα του χαρτιού με στόχο την επιβεβαίωση από την εμπειρία τους με τα χειραπτικά εργαλεία (στίχοι 690, 697, 698, 700).

Επεισόδιο 2: Ο ρόλος της αυτόματης μοντελοποίησης στην επιλογή εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής

Οι μαθητές της ομάδας εστίασης παρά τις δυσκολίες που συνάντησαν κατά τη μοντελοποίηση του δυναμικού σχήματος στο λογισμικό, ήταν σε θέση να πειραματιστούν περεταίρω με τις λειτουργίες του και να επιλέξουν τα μεγέθη που είναι κατάλληλα για τη δημιουργία συνάρτησης. Στο επόμενο επεισόδιο αμέσως μετά την ολοκλήρωση της μοντελοποίησης στο λογισμικό η ομάδα εστίασης σε έναν κύκλο αυτόνομης εργασίας δημιούργησε υπολογισμούς στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών καταλήγοντας στη δημιουργία συνάρτησης (Εικόνα 5 - 10).



Εικόνα 5 - 10: Δυναμική Γεωμετρία και παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών

909. Μ1: Πάρα πολύ ωραία. Και τώρα έμεινε να υπολογίσουμε το μέγιστο εμβαδόν. Σωστά;

910. Ε: Πώς θα το κάνουμε αυτό;

911. Μ2: Στον υπολογισμό. Το εμβαδόν είναι DC επί DA. (R)

912. M1: Λοιπόν να υπολογίσουμε το DC, το DA και υπολογίζουμε και το εμβαδό.

913. M2: Ένα λεπτό. Πρέπει να φτιάξουμε ανεξάρτητη κι εξαρτημένη μεταβλητή.

914. M1: Πρέπει να πούμε και DC επί DA; Είναι πιο εύκολο από εδώ, τα έχεις όλα μπροστά σου. Δημιουργία λοιπόν.

915. M2: Ωραία άρα εξαρτημένο είναι αυτό. Εξαρτημένη είναι το εμβαδό, το c2! (BW)

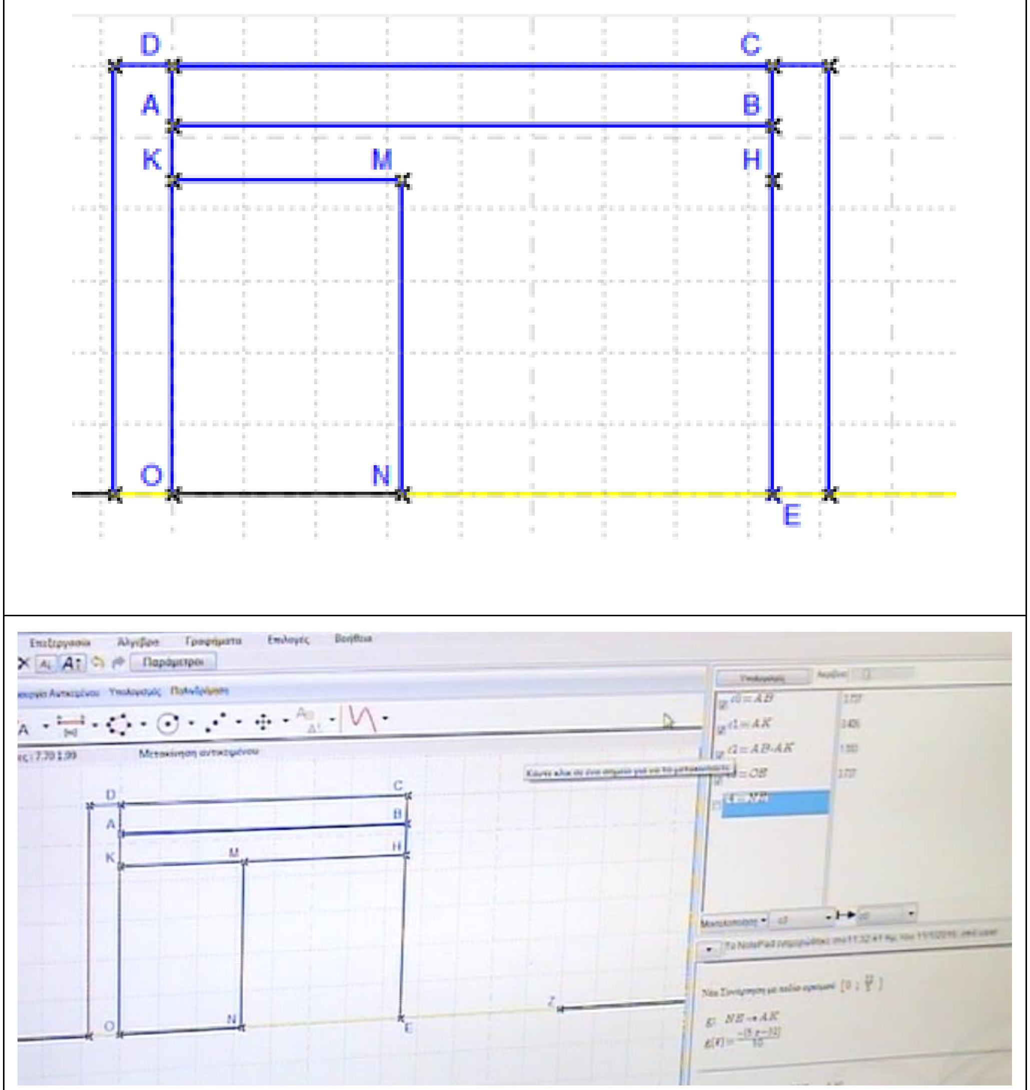
916. M1: Ναι το c2. Ανεξάρτητη πρέπει να είναι…

917. M2: Το DC, αυτό κουνάμε. Άρα DC το c0. Μοντελοποίηση. (BW, C)

Στο επεισόδιο παρατηρούμε την νοηματοδότηση του ζεύγους μεγεθών ως ζεύγος μεταβλητών από την ομάδα εστίασης μέσω της βοήθειας των δυνατοτήτων του Casyopée. Οι μαθητές αναγνώρισαν και δημιούργησαν τους κρίσιμους υπολογισμούς των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών (στίχοι 911-912). Ακολούθως, αναζήτησαν την εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή και όρισαν διαδοχικά τα μεγέθη ως ζεύγος συμμεταβαλλόμενων μεταβλητών (στίχοι 915, 917). Μάλιστα, ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν την επιλογή τους μέσω του παραθύρου της δυναμικής γεωμετρίας, κατασκευάζοντας τα απαραίτητα στοιχεία γνώσης και δημιουργώντας τη συνάρτηση της συμμεταβολής μεταξύ μεταβλητών (κατασκευή, στίχος 917). Παράλληλα, φαίνεται ότι οι μαθητές διευκολύνονται από τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων εργαζόμενοι στο μοντέλο των μετρήσεων (στίχος 914). Συνεπώς, ο ρόλος των εργαλείων φαίνεται να είναι καθοριστικός καθώς επιτρέπει τη δημιουργία συνάρτησης μέσω της επιλογής συμμεταβαλλόμενων μεγεθών ως ζεύγος συμμεταβαλλόμενων μεταβλητών. Η συνεργασία μεταξύ των μελών της ομάδας βοηθάει τους μαθητές να χτίζουν ο ένας στα λεγόμενα του άλλου επιτυγχάνοντας την κατάλληλη επιλογή μεταβλητών. Σχετικά με τη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας, στο επεισόδιο φαίνονται οι αναφορές των μαθητών στο εμβαδό του ορθογωνίου που είναι το εμβαδό διατομής της υδρορροής (στίχοι 909, 911, 912, 915).

Επεισόδιο 3: Πειραματισμός με τις μετρήσεις στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών

Τα διαθέσιμα εργαλεία στη δραστηριότητα της Πρόσοψης Καταστήματος βοήθησαν τους μαθητές να νοηματοδοτήσουν τη συσχέτιση μεγεθών, η οποία εμφανίζεται σε αρκετές νοηματοδοτήσεις. Σχετικά με τη συσχέτιση μεγεθών, οι μαθητές της ομάδας εστίασης επικεντρώθηκαν από την αρχή στην αναζήτηση σταθερών και μεταβλητών στοιχείων στο δυναμικό σχήμα του λογισμικού Casyopée σύμφωνα με το υποερώτημα της δραστηριότητας. Στο ακόλουθο επεισόδιο, οι μαθητές της ομάδας εστίασης κατά την αυτόνομη εργασία τους στην ομάδα πειραματιζόμενοι με το δυναμικό σχήμα στο Casyopée παρατηρούν τις εξαρτήσεις μεταξύ των ποσοτήτων, σημειώνουν τα σταθερά και μεταβλητά μεγέθη και καταλήγουν στην συσχέτιση μεγεθών στη δυναμική γεωμετρία κατά τον πειραματισμό με τις μετρήσεις στο παράθυρο των γεωμετρικών υπολογισμών.



Εικόνα 5 - 11: Το δυναμικό σχήμα της πρόσοψης

269. M1: Μετακινούμε το E

270. M2: Λοιπόν τι γίνεται όταν μεταβληθεί το NE;

271. M3: Ναι όταν αλλάξει αυτή η πλευρά αλλάζουν και οι άλλες αυτόματα. (R)

272. M1: Άρα το NE, όχι το ON

273. M3: Όχι, το ON δεν μεταβάλλεται είναι σταθερό. (R)

274. M2: Το OE

275. M3: Αλλάζεις την βιτρίνα, δεν αλλάζεις και την πόρτα μαζί. Αυτό είναι σταθερό, η πόρτα μένει εκεί.

276. M1: Έχουμε το οριζόντιο δοκάρι που είναι το DABC. Ναι; Εμείς αυτό ξέρουμε ότι είναι μέχρι 6 μέτρα. Επομένως αν αλλάξουμε το μήκος αυτού του δοκαριού. Αν αλλάξουμε το μήκος του ΟΕ τότε θα αλλάξουμε και το πάχος του δοκαριού. Άρα θα γράψουμε αυτό. (BW, C)

277. M3: Σωστά.

278. M2: Για κούνα το λίγο να δω κάτι.

279. M3: Ναι αλλάζει και το DA και το AK.

280. M2: Αλλάζει και όλο το εμβαδό της άνω βιτρίνας, επομένως...

281. M1: Μπορούμε να το γράψουμε ότι όσο μεταβάλλεται το μήκος του ΟΕ μεταβάλλεται και το πλάτος του οριζόντιου δοκαριού. (C)

Στο συγκεκριμένο επεισόδιο παρατηρούμε ότι οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι το σημείο Ε είναι ανεξάρτητο (αναγνώριση, στίχος 271) και μεταβλητό, μέσω της μετακίνησής του, ενώ υπάρχουν και ποσότητες οι οποίες είναι σταθερές (αναγνώριση, στίχος 273). Στη συνέχεια, αναγνωρίζουν στοιχεία του πραγματικού πλαισίου στη δραστηριότητα (στίχοι 275-276), το οποίο δείχνει ότι εργάζονται έχοντας υπόψη τους περιορισμούς της κατασκευής. Ακολούθως, μετακινώντας το ανεξάρτητο σημείο χτίζουν στην αλληλεξάρτηση των ποσοτήτων και παρατηρούν πρόσθετες εξαρτήσεις στο δυναμικό σχήμα (στίχοι 279-280). Τέλος, κατασκευάζουν τη συσχέτιση μεγεθών (κατασκευή, στίχοι 276-281) ως αποτέλεσμα της δυναμικής κίνησης του σημείου Ε παρατηρώντας το συμμεταβολή μεταξύ μήκους και πλάτους του οριζόντιου δοκαριού. Ο συνεχής πειραματισμός με το ψηφιακό εργαλείο και τη μετακίνηση του ελεύθερου σημείου βοηθά τους μαθητές να νοηματοδοτήσουν τη συσχέτιση μεγεθών στο παράθυρο της δυναμικής γεωμετρία. Στη συνέχεια του επεισοδίου, οι μαθητές έχοντας πειραματιστεί με τις μετρήσεις στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών νοηματοδότησαν την επιλογή μεταβλητών. Στο συγκεκριμένο επεισόδιο αναδεικνύεται η σύνδεση με το ρεαλιστικό πρόβλημα, καθώς οι μαθητές πέρα από την ορολογία του χώρου εργασίας χρησιμοποιούν και τους πραγματικούς περιορισμούς για τον εντοπισμό των σταθερών και μεταβλητών στοιχείων της κατασκευής.

Επεισόδιο 4: Σύνδεση αναπαραστάσεων γραφικής παράστασης και πίνακα τιμών

Τα ψηφιακά εργαλεία φαίνεται να χρησιμοποιούνται ως μέσο για να πετύχουν ακριβείς μετρήσεις (π.χ. αλλαγή βήμα στον πίνακα τιμών) από τους μαθητές στο σχολείο Α της

1ης φάσης εφαρμογής, χωρίς αυτοί να εστιάζουν στις διαφορές των τιμών τις συνάρτησης με αποτέλεσμα να μην νοηματοδοτούν τον ρυθμό μεταβολής. Στο ακόλουθο επεισόδιο, κατά την εφαρμογή της Πρόσοψης Καταστήματος, από την τελική παρουσίαση στην τάξη, η ομάδα εστίασης περιγράφει τη διαδικασία που ακολούθησε προς τη λύση του προβλήματος, δηλαδή τον ορισμό του σημείου που η κάτω βιτρίνα είναι ίση σε εμβαδό με το πενταπλάσιο της άνω βιτρίνας. Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης δεν εστιάζουν στις διαφορές μεταξύ των τιμών της συνάρτησης.

481. M1: Αρχικά είπαμε ότι η πλευρά που μεταβάλλεται και μεταβάλλονται και τα άλλα μεγέθη είναι η ΟΕ. Και επειδή είπαμε ότι το εμβαδόν των παραθύρων πρέπει να είναι το πενταπλάσιο από το εμβαδόν της βιτρίνας, υπολογίσαμε το πενταπλάσιο του εμβαδού των παραθύρων. Μετά υπολογίσαμε και το εμβαδόν της βιτρίνας που είναι το ΜΝ επί ΝΕ και δημιουργήσαμε συνάρτηση που είναι το πενταπλάσιο του εμβαδού των παραθύρων σε σχέση με την ΟΕ.

482. Ε: Αυτή η συνάρτηση λοιπόν τι είναι ακριβώς;

483. M1: Είναι το πενταπλάσιο εμβαδόν των παραθύρων σε σχέση με το πώς μεταβάλλεται η ΟΕ. Επίσης κάναμε την συνάρτηση του εμβαδού της βιτρίνας σε σχέση με την ΟΕ. Γι’ αυτό τις εμφανίσαμε και τις δύο γραφικές παραστάσεις και είδαμε ότι έχουνε μια τιμή στην οποία τέμνονται. […] (R)

484. Ε: Πολύ ωραία. Και μετά;

485. M1: Και αν πάμε στον πίνακα τιμών. Και αυξήσουμε την ακρίβεια, βάλε αρχική τιμή 4,5 και βήμα 0,1. (BW)

486. Ε: Ωραία. Τι μας λέει τώρα ο πίνακας;

487. M1: Παρατηρούμε κι εδώ ότι η τιμή του x δηλαδή του ΟΕ που πρέπει να πάρουμε, στο 5 τα εμβαδά είναι πολύ κοντά. Εδώ, στην πρώτη στήλη βλέπουμε τις τιμές του x, δηλαδή τις τιμές που μπορεί να πάρει η ΟΕ, ενώ στη δεύτερη στήλη βλέπουμε τις τιμές που παίρνει το εμβαδόν της κάτω βιτρίνας. (C)

Στο επεισόδιο, οι μαθητές αναγνωρίζουν τις κρίσιμες συναρτήσεις για να εντοπίσουν το σημείου που το πενταπλάσιο εμβαδό της άνω βιτρίνας είναι ίσο με το εμβαδό της κάτω βιτρίνας (αναγνώριση, στίχοι 481, 483). Έχοντας αυτές τις συναρτήσεις οι μαθητές εμφανίζουν τις γραφικές παραστάσεις (στίχος 483) και τον πίνακα τιμών, αλλάζοντας το βήμα προκειμένου να πετύχουν μεγαλύτερη ακρίβεια (επαναδόμηση, στίχος 485). Τέλος, εντοπίζουν ότι το σημείο ενδιαφέροντος είναι κοντά στα πέντε μέτρα για την απόσταση ΟΕ και συνδέουν τις δύο αναπαραστάσεις (κατασκευή, στίχος 487). Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι οι μαθητές της ομάδας εστίασης ερμηνεύουν και συνδέουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις δεν είναι σε θέση να εστιάσουν στις διαφορές μεταξύ των κελιών του πίνακα τιμών για να νοηματοδοτήσουν τον ρυθμό μεταβολής.

Σύνοψη του ρόλου των ψηφιακών εργαλείων στο σχολείο Α

Συνολικά, στο σχολείο Α από την 1η φάση συλλογής δεδομένων ο ρόλος των εργαλείων ήταν κρίσιμος στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών, καθώς επέτρεψε τη μοντελοποίηση των προβλημάτων και την νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων μέσα από τα προηγούμενα αντιπροσωπευτικά επεισόδια της εργασίας των μαθητών. Οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας να πειραματιστούν με τη δυναμική μετακίνηση σημείων κατά τη μοντελοποίηση του προβλήματος στο Casyopée να νοηματοδοτήσουν τη συσχέτιση μεταξύ μεγεθών (επεισόδιο 1) και ακολούθως να επιλέξουν κατάλληλες μεταβλητές για τη δημιουργία συνάρτησης (επεισόδιο 2). Ο πειραματισμός με της μετρήσεις στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών χρησιμοποιήθηκε με στόχο την κατάλληλη επιλογή μεταβλητών και την παρατήρηση των συμμεταβολών στο λογισμικό (επεισόδιο 3). Ωστόσο, οι αναπαραστάσεις της συνάρτησης και συγκεκριμένα η γραφική παράσταση και ο πίνακας τιμών στις δύο πρώτες δραστηριότητες χρησιμοποιήθηκαν με στόχο να πετύχουν οι μαθητές καλύτερη ακρίβεια στις μετρήσεις (επεισόδιο 4) και ως εκ τούτου δεν εμφανίστηκε κάποια νοηματοδότηση του ρυθμού μεταβολής. Αυτό το στοιχείο αξιοποιήθηκε στη φάση του επανασχεδιασμού της δραστηριότητας, επιτρέποντας τη νοηματοδότηση του ρυθμού μεταβολής από τη δραστηριότητα της Πρόσοψης Καταστήματος. Τέλος, η συνεργασία των μαθητών εντός της ομάδας επέτρεψε στους μαθητές να επεκτείνουν τις προσωπικές τους νοηματοδοτήσεις μέσα από το διερευνητικό κλίμα συνεργασίας και να νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων.

5.2. Ο ρόλος του πλαισίου στην εξέλιξη των μαθησιακών τροχιών – σχολείο Β

Στο σχολείο Β από την $1^{η}$ φάση συλλογής δεδομένων αφιερώθηκαν συνολικά 10 ώρες για την εφαρμογή των δραστηριοτήτων σε ένα τμήμα Β΄ λυκείου. Ο Γιώργος (εκπαιδευτικός σχολείου Β) είχε καλή σχέση με την έρευνα, ως μεταπτυχιακός φοιτητής στη Διδακτική των Μαθηματικών, αλλά δεν χρησιμοποιούσε ψηφιακά εργαλεία στη σχολική τάξη ως μέρος της πρακτικής του. Αποφάσισε να εφαρμόσει τις δραστηριότητες όπως σχεδιάστηκαν από τον ερευνητή και όπως είχαν διαμορφωθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή χωρίς να κάνει παρεμβάσεις στο σχεδιασμό των δραστηριοτήτων. Η εξοικείωση του με τις δραστηριότητες προήλθε κατά τη συζήτηση με τον ερευνητή για τον τρόπο εφαρμογής τους. Ωστόσο, τα ψηφιακά εργαλεία ήταν κάτι καινούργιο για αυτόν και επομένως κατά την εφαρμογή ζητούσε τακτικά τη βοήθεια του ερευνητή. Οι μαθητές της τάξης του σχολείου Β είχαν μικρή εμπειρία από προβλήματα διερεύνησης και συνήθως δεν εργάζονταν σε ομάδες μέσα στη σχολική τάξη. Το Casyopée ήταν ένα καινούργιο λογισμικό για τους μαθητές και φάνηκε να εντυπωσίασε τους μαθητές, παρόλο που συνάντησαν αρκετές δυσκολίες. Λίγοι μαθητές είχαν γνώση του GeoGebra και έτσι μερικοί μαθητές δυσκολεύτηκαν να εργαστούν με τα νέα ψηφιακά εργαλεία.

Οι μαθητές στην ερευνητική εφαρμογή εργάζονταν ανά ομάδα στα υποερωτήματα των δραστηριοτήτων. Κατά την εφαρμογή του Σχεδιασμού Υδρορροής οι ομάδες μαθητών συμμετείχαν στην αρχική συζήτηση όπως προκύπτει από τις νοηματοδοτήσεις που καταγράφηκαν από την ομάδα εστίασης και τη σχολική τάξη (Εικόνα 5 - 12). Οι μαθητές εργάζονταν με τις δραστηριότητες σχεδόν αποκλειστικά εντός της ομάδας καθ' όλη τη διάρκεια της εφαρμογής και νοηματοδοτούσαν τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Στην Εικόνα 5 - 12 παρατίθεται η εμφάνιση της πραγματικής μαθησιακής τροχιάς για την ομάδα εστίασης (ανοικτό γκρι) και των ομάδων που συμμετείχαν στις συζητήσεις ολόκληρης της τάξης (σκούρο γκρι) κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων για το σχολείο Β. Οι διαφορετικές τροχιές των μαθητών σε κάθε σχολείο δείχνουν την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων μέσα από τη διερεύνηση των μαθητών ανεξάρτητα από τον χρόνο εμφάνισης. Τα επεισόδια που αφορούν στον ρόλο του εκπαιδευτικού στο σχολείο Β είναι σημειωμένα με κόκκινο και εκείνα που αφορούν στον ρόλο των εργαλείων είναι σημειωμένα με πορτοκαλί κατά τη διερεύνηση των δραστηριοτήτων.

Εικόνα 5 - 12: Νοηματοδότηση στο σχολείο Β από την 1η φάση συλλογής δεδομένων

Στο σχολείο Β η ομάδα εστίασης ακολουθεί ανοδική πορεία σε όλες τις δραστηριότητες και παραμένει σε σύνθετες νοηματοδοτήσεις, χωρίς όμως την εμφάνιση του πηλίκου διαφορών (Εικόνα 5-12). Πιο συγκεκριμένα, στον Σχεδιασμό Υδρορροής αρχικά ο εκπαιδευτικός ξεκίνησε συζήτηση στην τάξη σχετικά με τον εντοπισμό των ποσοτήτων μέσα από τον πειραματισμό με τα χειραπτικά εργαλεία. Ιδιαίτερα, επέλεξε οι μαθητές να αφιερώσουν αρκετό χρόνο στον πειραματισμό τους με το μοντέλο χαρτιού και να αναγνωρίσουν τις αλληλεξαρτήσεις, επιτρέποντας σε αρκετές ομάδες μαθητών να παρουσιάσουν τα αποτελέσματα της διερεύνησής τους. Ακολούθως, μέσω της αυτόματης μοντελοποίησης οι μαθητές επιλέγουν την εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή και δημιουργούν τη συνάρτηση πλευράς και εμβαδού που τους επιτρέπει να χρησιμοποιήσουν και να ερμηνεύσουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις τις συνάρτησης. Στην Πρόσοψη Καταστήματος ένας μαθητής από την ομάδα εστίασης διατρέχει τις αρχικές νοηματοδοτήσεις χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του Casyopée, το οποίο δείχνει ότι έχει γίνει παγιοποίηση των αρχικών νοηματοδοτήσεων στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας, όπως θα δούμε στα ακόλουθα επεισόδια. Στο τέλος της δραστηριότητας ο εκπαιδευτικός καλεί μία ομάδα να παρουσιάσει τη διερεύνηση της δραστηριότητας αποκαλύπτοντας στοιχεία για την ταυτότητα της διδασκαλίας του εκπαιδευτικού, όπως για παράδειγμα ότι ενδιαφέρεται για τη συμμετοχή και την κατανόηση όλων των μαθητών. Κατά τη διερεύνηση της Δεξαμενής Πετρελαίου η ομάδα εστίασης διατρέχει και πάλι τις αρχικές νοηματοδοτήσεις και με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού νοηματοδοτεί το ποσό μεταβολής κατά τη διερεύνηση του γεμίσματος της δεξαμενής στην κατακόρυφη τοποθέτηση. Στη διερεύνηση του γεμίσματος της δεξαμενής για την οριζόντια τοποθέτηση οι πολλαπλές αναπαραστάσεις βοηθούν τους μαθητές να εστιάσουν στις διαφορές των τιμών της συνάρτησης νοηματοδοτώντας το ποσό μεταβολής. Στην εξέλιξη της δραστηριότητας γίνονται σύνθετες νοηματοδοτήσεις, χωρίς να εμφανίζεται το πηλίκο διαφορών.

Συνεπώς, αναλύεται ο ρόλος του εκπαιδευτικού στο σχολείο Β μέσα από τα επεισόδια που ακολουθούν. Αυτά αφορούν την αρχική διερεύνηση του προβλήματος μέσα από διαφορετικές ομάδες μαθητών στην τάξη, την προτροπή του εκπαιδευτικού για συνεργασία εντός των μελών της ομάδας και την έμφαση που δίνει στη συμμετοχή και κατανόηση για τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών που αφορούν την επιλογή μεταβλητών και το ποσό μεταβολής. Ακολούθως, παρατίθενται επεισόδια σχετικά με τον ρόλο του πλαισίου με έμφαση κυρίως στον ρόλο των εργαλείων, στα οποία φαίνεται η συμβολή των χειραπτικών εργαλείων από την δίπλωση του χαρτιού και η αξιοποίηση των λειτουργιών του Casyopée, όπως της αυτόματης μοντελοποίησης. Ακολουθεί η παγιοποίηση των αρχικών νοηματοδοτήσεων στο Casyopée μέσα από τη δυναμική μετακίνηση των σημείων και το παράθυρο των γεωμετρικών υπολογισμών και η συμβολή των αναπαραστάσεων του Casyopée, όπως του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης.

5.2.1. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στο σχολείο Β - 1η φάση συλλογής

Μέσα από τα επόμενα επεισόδια αναλύθηκε ο ρόλος του εκπαιδευτικού μέσα από τις παρεμβάσεις του κατά την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων των μαθητών σε κρίσιμες στιγμές για το σχολείο Β κατά αντιστοιχία με το σχολείο Α. Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζουμε τις διαφορετικές κατηγορίες των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού, για το σχολείο Β:

Παρεμβάσεις εκπαιδευτικού	**Τύπος παρέμβασης**	**Ορισμός**	**Χαρακτηριστικά παραδείγματα**
Παιδαγωγικές (έμφαση στη διερεύνηση)	Συμμετοχής (Πσ)	Προτροπή όλων των μαθητών να συμμετέχουν. Άλλες διαστάσεις: Πρόσκληση για προσοχή/εστίαση	Ποια ομάδα θέλει να μας πει μία άποψη;
	Ομαδικότητας (Πομ)	Προτροπή μαθητή για συνεργασία με τα μέλη της ομάδας	Οι υπόλοιποι συμφωνείτε; Για δούλεψέ το μαζί με την ομάδα σου.

	Εκμαίευσης (Πε)	Δράσεις βοήθειας/κατεύθυνσης των μαθητών ώστε να εκμαιεύσει μία απάντηση. Άλλες διαστάσεις: εκμαίευση ιδεών μαθητών, εκμαίευση νοηματοδότησης	Μ: Λοιπόν εμείς σκεφτήκαμε ότι για να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή ροή νερού, έχει να κάνει με το εμβαδό. Κ: Δηλαδή τι εννοείς με το εμβαδό;
	Απάντησης (Πα)	Δράσεις απάντησης σε μία ιδέα/σκέψη ενός μαθητή Άλλες διαστάσεις: διόρθωση λάθους, επανάληψη	Ακούσατε τι είπε; Έτσι θα έχει μεγάλο πλάτος αλλά το νερό δεν θα συγκρατείται από τα πλάγια.
	Διευκόλυνσης (Πδ)	Δράσεις διευκόλυνσης της σκέψης ενός μαθητή Άλλες διαστάσεις: παροχή οδηγιών, σκαλωσιά για τη σκέψη του μαθητή, υποστήριξη πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης	Δηλαδή έχεις ένα κύλινδρο, εδώ σκέψου. Φανταστείτε ένα κύλινδρο και παίρνουμε δύο μετρήσεις δέκα πόντους. Πόσο ζυγίζει αυτό; Ας πούμε 100γρ. Αν πάρεις από τον ίδιο κύλινδρο πάλι δέκα πόντους πόσο θα ζυγίζει; Το ίδιο θες..
	Επέκτασης (Πεπ)	Δράσεις επέκτασης της σκέψης των μαθητών Άλλες διαστάσεις: υποστήριξη σκέψης και γενίκευσης, προτροπή για παροχή αιτιολογήσεων	Μπορείς να μας εξηγήσεις πως σκέφτηκες;
Διδακτικές (έμφαση στο περιεχόμενο)	Εστίασης σε μαθηματικό αντικείμενο (Δε)	Δράσεις για την εστίαση των μαθητών στο μαθηματικό αντικείμενο (π.χ. ποσότητες, μεγέθη, μεταβλητές) στο μοντέλο που πειραματίζονται Άλλες διαστάσεις: απλοποίηση κεντρικού ερωτήματος, επανάληψη, παράθεση παραδείγματος	Πώς θα σχεδιάσουμε την υδρορροή για να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή ροή νερού; Το σχήμα δηλαδή πως θα είναι μπορείς να μας το δείξεις;
	Αιτιολόγηση/ Επεξήγηση (Δα)	Δράσεις για την αιτιολόγηση ή επεξήγηση της διερεύνησης ενός	Τι έκανες εκεί; Μπορείς να μας

		μαθητή για τη δραστηριότητα	εξηγήσεις πως σκέφτηκες;
	Υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα)	Υποστήριξη των μαθητών για τη σύνδεση αναπαραστάσεων (π.χ. γραφικών, αλγεβρικών) Άλλες διαστάσεις: απλοποίηση κεντρικού ερωτήματος σε απλούστερα, παράθεση παραδείγματος	Φανταστείτε ένα κύλινδρο και παίρνουμε δύο μετρήσεις σε δέκα πόντους. Πόσο ζυγίζει αυτό; Ας πούμε 100γρ. Αν πάρεις από τον ίδιο κύλινδρο πάλι δέκα πόντους πόσο θα ζυγίζει; Το ίδιο θες.. Από 50 έως 60 λέει. Άρα πόσο είναι η διαφορά από 50 έως 60; Δέκα πόντοι δεν είναι;

Πίνακας 9: Παρεμβάσεις εκπαιδευτικού στο σχολείο Β

Επεισόδιο 1: Εστίαση σε μαθηματικό αντικείμενο - Νοηματοδότηση των αλληλεξαρτήσεων

Ο Γιώργος (εκπαιδευτικός σχολείου Β) στην εφαρμογή του Σχεδιασμού Υδρορροής επέλεξε να ακολουθήσει τα υποερωτήματα της δραστηριότητας χωρίς να παρέμβει με τροποποιήσεις. Για παράδειγμα, οι διαστάσεις της μεταλλικής λαμαρίνας για την κατασκευή της υδρορροής ήταν εξ' αρχής γνωστές και δόθηκε στους μαθητές ένα κομμάτι χαρτί συγκεκριμένων διαστάσεων για να πειραματιστούν. Ωστόσο, στο πρώτο μέρος της δραστηριότητας ο Γιώργος ήταν ιδιαίτερα διερευνητικός εμπλέκοντας αρκετές ομάδες στην αναζήτηση των συμμεταβαλλόμενων χαρακτηριστικών των ποσοτήτων. Στο ακόλουθο επεισόδιο από τον αρχικό πειραματισμό των μαθητών της τάξης με το μοντέλο χαρτιού στις ομάδες μαθητών ο εκπαιδευτικός διατηρεί διερευνητική στάση συζητώντας με τις περισσότερες ομάδες μαθητών τα αποτελέσματα της διερεύνησής τους. Στόχος του είναι η υποστήριξη των μαθητών για την αναγνώριση των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων στο μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων.

Εικόνα 5 - 13: Παρουσίαση ομάδας μαθητών στη σχολική τάξη

Εικόνα 5 - 14: Σύνοψη από τον εκπαιδευτικό

83. Κ: Να ακούσουμε τα παιδιά; Ποια ομάδα θέλει να μας πει μία άποψη; Πώς θα σχεδιάσουμε την υδρορροή για να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή ροή νερού; (Πσ, Δε)

84. Μ4: Λοιπόν εμείς σκεφτήκαμε ότι για να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή ροή νερού, έχει να κάνει με το εμβαδό. (R)

85. Κ: Δηλαδή τι εννοείς με το εμβαδό; Το σχήμα δηλαδή πως θα είναι μπορείς να μας το δείξεις; (Πε, Δε)

86. Μ4: Να είναι κάπως έτσι;

87. Κ: Θέλω να είναι ορθογώνιο βασικά. Ναι, δηλαδή ποιο να είναι μεγάλο εμβαδό, για δείξε μας.. Ναι ωραία για δείξε το για να το δουν και οι άλλοι. Αυτό εδώ λέει να είναι το πιο μεγάλο κατά το δυνατό λέει Ωραία. Για ξαναδείξε το σχήμα. Αυτό

εδώ πέρα το πλαϊνό θέλει να είναι η μεγαλύτερη επιφάνεια. Το καταλάβατε; Αυτό λέει η ομάδα της Μ4. Άλλη ομάδα έχει να μας πει κάτι άλλο; Συμφωνείτε; (Πσ, Δε)

88. Μ1: Κι εμείς αυτό λέγαμε.

89. Κ: Για ακούστε λίγο εδώ μία εκδοχή να μας πείτε τι λέτε; (Πσ)

90. Μ5: Όπως έχουμε την υδρορροή έτσι, αν ανοίξουμε λίγο τα πλάγια παραπάνω προκειμένου να αυξηθεί το νερό που θα περνάει. (BW)

91. Κ: Άρα λοιπόν κι εσείς σαν ομάδα βάζετε να είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερη η επιφάνεια. Κι εσείς βάζετε το ίδιο ερώτημα. Για να δούμε την ομάδα του Μ6.

92. Μ6: Οι πλευρές να έχουν τις μεγαλύτερες τιμές, δηλαδή έτσι ώστε να μεγαλώσει… Οι δύο πλευρές, η έτσι και η έτσι αν μεγαλώσουν οι πλευρές στο μέγιστο τότε θα έχουμε το μέγιστο εμβαδό. (BW, C)

93. Κ: Δηλαδή κάτσε να το κάνω εγώ, αν κάνω αυτό εδώ που λέτε τότε όσο πιο μεγάλο είναι αυτό

94. Μ6: Συναρτήσει με το άλλο… Όλη η επιφάνεια που δείχνετε. (C)

95. Κ: Το ίδιο είπε, μη λέμε τα ίδια πράγματα. Άρα συμφωνείτε με τους άλλους.

Στο επεισόδιο φαίνεται ο διερευνητικός χαρακτήρας του Γιώργου με έμφαση στη συμμετοχή αρκετών ομάδων μαθητών. Ο Γιώργος αρχικά χρησιμοποιεί μία παιδαγωγική παρέμβαση συμμετοχής καλώντας όλες τις ομάδες να παρουσιάσουν τη διερεύνησή τους. Κατά την παρουσίαση των ομάδων, η Μ4 αναγνωρίζει ότι η μία ποσότητα είναι το εμβαδό (αναγνώριση, στίχος 84), ωστόσο ο εκπαιδευτικός επανέρχεται με παιδαγωγικές και διδακτικές παρεμβάσεις εστίασης στα μαθηματικά αντικείμενα και συγκεκριμένα στην αναγνώριση του εμβαδού. Μέσα από απλοποίηση του ερωτήματος και πρόκληση των μαθητών καλεί και άλλες ομάδες μαθητών να συμμετέχουν στη συζήτηση. Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός δίνει ένα παράδειγμα για το τι θα συμβεί αν μεγαλώσει αρκετά η μία πλευρά (στίχος 93). Στη συνέχεια του επεισοδίου ο Γιώργος άφησε περισσότερες ομάδες να μιλήσουν. Παράλληλα έδινε κατευθύνσεις στους μαθητές για να σκεφτούν σχετικά με τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες.

200. Κ: Για να μπει το νερό όμως εύκολα εκεί τι πρέπει να έχει; Τα λούκια ας υποθέσουμε ότι είναι συνεχόμενα. Τι πρέπει να έχει εκεί για να πέσει εύκολα το νερό και να μην πιέζεται;

201. Μ7: Μεγαλύτερο πλάτος [ενν. τη βάση] (BW)

202. Κ: Πλάτος αλλά περίμενε μία στιγμή, αν είναι έτσι; Έχει μεγάλο πλάτος αλλά τι γίνεται; (Δε)

203. Μ7: Όχι έτσι! Έχει μεγάλο πλάτος αλλά δεν συγκρατείται το νερό.

204. Κ: Ακούσατε τι είπε; Έτσι θα έχει μεγάλο πλάτος αλλά το νερό δεν θα συγκρατείται από τα πλάγια. Άρα αυτό θέλω να το γυρίσω κάπως ώστε τι να γίνεται εδώ αυτή η επιφάνεια τι πρέπει να είναι; Τι πρέπει να ελέγξω εδώ; (Πα, Πσ – Δε)

205. Μ8: Τα πλάγια ύψη. (BW)

206. Μ9: Και την επιφάνεια. Πρέπει να βρω το μέγιστο δυνατό εμβαδό. (C)

207. Κ: Δεν ξέρω αν σας έπεισα για πείτε μου κι εσείς. Έτσι φαντάζομαι δεν ξέρω αν είναι σωστό. Οι άλλοι τι λέτε; Μπορείς να μας το πεις; (Πσ – Δε)

208. Μ10: Όσο μεγαλύτερη βάση έχει θα μαζεύει περισσότερο νερό και μετά θα σηκώσουμε λίγο τα τοιχώματα στο πλάι, ώστε να είναι αρκετό για να μη φεύγει το νερό, αλλά και τόσο ώστε να έχει κατά το δυνατό μεγαλύτερο εμβαδό. (BW, C)

209. Κ: Ωραία θα σας δώσω μία άποψη εδώ. Λέει θα έχω μεγαλύτερη ποσότητα όταν αυτή εδώ η επιφάνεια που δημιουργείται έχει το μέγιστο εμβαδό

Στο δεύτερο μέρος του επεισοδίου οι μαθητές να συνεχίζουν τη διερεύνησή τους και μέσα από μία παιδαγωγική παρέμβαση διευκόλυνσης (Πα) του εκπαιδευτικού ανακαλύπτουν ότι η βάση και τα πλάγια ύψη είναι τα κρίσιμα στοιχεία της υδρορροής (επαναδόμηση, στίχοι 201, 205). Έτσι, οι διαφορετικές ομάδες μαθητών είναι σε θέση να εντοπίσουν ότι ο συνδυασμός των δύο στοιχείων οδηγεί στο εμβαδό και παρέχοντας κατάλληλη αιτιολόγηση (κατασκευή, στίχοι 206, 208). Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι κρίσιμος ιδιαίτερα στην αρχή του πειραματισμού των μαθητών με τις δραστηριότητες, καθώς εστίασε στις ιδέες των ομάδων μαθητών και τους βοήθησε να συμμετέχουν ενεργά και να διερευνήσουν το πρόβλημα. Τέλος, η παιδαγωγική παρέμβαση απάντησης του εκπαιδευτικού (Πα) βοήθησε τους μαθητές στην εστίαση στις αλληλεξαρτώμενες ποσότητες.

Επεισόδιο 2: Αιτιολόγηση/Επεξήγηση - Επιλογή μεταβλητών

Στη συνέχεια των δραστηριοτήτων, ο Γιώργος φαίνεται πως έδινε ιδιαίτερη έμφαση στην εφαρμογή των ερωτημάτων και στην κατανόηση από τους μαθητές. Για παράδειγμα, στην αρχή της Πρόσοψης Καταστήματος παρατήρησε ότι ένας μαθητής από την ομάδα εστίασης είχε προχωρήσει στη μοντελοποίηση του προβλήματος ανεξάρτητα από την ομάδα του. Ο Γιώργος έκανε παρέμβαση αιτιολόγησης για να εξηγήσει ο μαθητής το αποτέλεσμα της διερεύνησής του και κατόπιν ο Γιώργος τον παρότρυνε να συνεργάζεται με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας του. Στόχος του ήταν να κοινοποιηθεί ο τρόπος σκέψης του μαθητή στα υπόλοιπα μέλη της ομάδας, αλλά και να αναπτύξουν καλύτερο κλίμα συνεργασίας.

29. Κ: Τι έκανες εκεί; (Δα)

30. Μ1: Έφτιαξα μία συνάρτηση με βάση το ΟΕ και το εμβαδό ΑΚΗΒ και το έκανα μοντελοποίηση.

31. Κ: Μπορείς να μας εξηγήσεις πως σκέφτηκες; (Πεπ, Δα)

32. Μ1: Θέλουμε το μέγιστο εμβαδό σε σχέση με την ΟΕ. Σε σχέση με το πόσο μεγάλη θα είναι η βιτρίνα στο μήκος, έτσι αλλάζει και το εμβαδό των βιτρινών που θέλουμε. Των τζαμιών εδώ πάνω. Κι αυτός μας ζητάει το μεγαλύτερο εμβαδό. Οπότε έφτιαξα δύο [υπολογισμούς]… Βασικά έβαλα μία το ΟΕ και μία το εμβαδό και το έκανα μοντελοποίηση και μου έβγαλε εδώ πέρα τη συνάρτηση. και αν τη βάλω στα γραφήματα είναι αυτή εδώ, οπότε το μέγιστο εμβαδό είναι περίπου στο 4. (R, BW, C)

33. Κ: Οι υπόλοιποι συμφωνείτε; Για δούλεψέ το μαζί με την ομάδα σου. (Πομ)

Από το επεισόδιο της ομάδα εστίασης προκύπτει ότι ένας μαθητής ανέλαβε αρκετές πρωτοβουλίες και δεν συνεργαζόταν με τους συμμαθητές του. Ο Γιώργος αρχικά ζήτησε από τον μαθητή να μοιραστεί τις σκέψεις του με τη χρήση διδακτικών παρεμβάσεων αιτιολόγησης (Δα) και παιδαγωγικής παρέμβασης εστίασης (Πε). Ο Μ1 εξηγεί στον Γιώργο τον συλλογισμό του κατασκευάζοντας την αλληλεξάρτηση, τη συσχέτιση και την επιλογή μεταβλητών (κατασκευή, στίχος 32). Η παρέμβαση του εκπαιδευτικού βοήθησε τα μέλη της ομάδας ώστε να έχουν κίνητρο για συμμετοχή στη διερεύνηση του Μ1. Συνεπώς, ο Γιώργος φαίνεται να επιμένει στη συνεργασία μεταξύ των μελών της ομάδας κάνοντας μία παιδαγωγική παρέμβαση ομαδικότητας (Πομ) προτρέποντας τους μαθητές να συνεργάζονται. Επιπλέον, από αυτό το επεισόδιο φαίνεται η παγιοποίηση των αρχικών νοηματοδοτήσεων, καθώς ο μαθητής είναι ικανός να αναγνωρίζει τις αλληλεξαρτήσεις και τις συσχετίσεις μεταξύ μεγεθών και να καταλήγει εύκολα στην επιλογή μεταβλητών.

Επεισόδιο 3: Αιτιολόγηση/Επεξήγηση - Επιλογή μεταβλητών

Στη δραστηριότητα Πρόσοψη Καταστήματος ο Γιώργος ακολούθησε τα ερωτήματα χωρίς να κάνει ιδιαίτερες παρεμβάσεις, όπως προκύπτει και από τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών, οι οποίες αφορούν σε μεγάλο βαθμό την ομάδα εστίασης. Ωστόσο, προς το τέλος της εφαρμογής κάλεσε την ομάδα εστίασης να κάνει την τελική παρουσίαση στην τάξη. Στο επόμενο επεισόδιο από την τελική παρουσίαση στην τάξη ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει τους μαθητές της ομάδας εστίασης που παρουσίαζαν να περιγράψουν τον πειραματισμό τους με τη δραστηριότητα. Στόχος του είναι η αιτιολόγηση/επεξήγηση της διερεύνησης των μαθητών, ώστε να γίνει σαφής στην τάξη η επιλογή της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής στο γεωμετρικό σχήμα.

281. Κ: Για ελάτε πέντε λεπτά να κάνουμε μία παρουσίαση (Πσ)

282. Ε: Θέλουμε να μας πείτε τον τρόπο που σκεφτήκατε για να βρείτε το μέγιστο εμβαδό

283. Μ1: Όταν η απόσταση των δύο κολώνων είναι τέσσερα μέτρα.

284. Κ: Ελάτε γρήγορα… Δυνατά για να ακούμε.

285. Μ2: Δημιουργήσαμε ένα σημείο πάνω στην ΑΒ, έχουμε 4 τζάμια ίδιων διαστάσεων και το εμβαδό τους θα είναι το ΑΒ επί ΑΚ.

286. Ε: Για να καταλάβετε παιδιά, έτσι όπως είναι η κατασκευή στο δοκάρι εδώ πέρα και είναι από κάτω η περιοχή των παραθύρων Εντάξει; Αυτή εδώ είναι η είσοδος.

287. Μ1: Και βγαίνει στα τέσσερα μέτρα για να έχει το μέγιστο εμβαδό.

288. Κ: Από τι εξαρτάται; (Δα)

289. Μ2: Εξαρτάται από το ΟΕ. (R)

290. Κ: Ωραία, κάνατε λοιπόν μία μεταβλητή που την είπατε ΟΕ. (Πα)

291. Μ1: Και επειδή το εμβαδό εξαρτάται από το ΟΕ που μετακινείται, το μέγιστο εμβαδό θα είναι συναρτήσει του… Θα εξαρτάται από το Ε. Και κάναμε μία συνάρτηση για να το βρούμε. (BW, C)

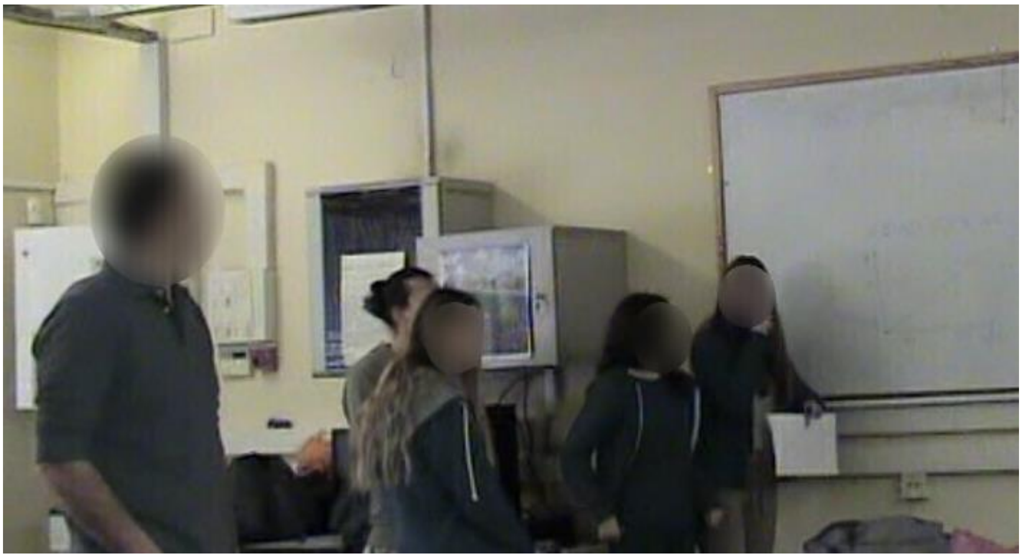
292. Κ: Επιλέξανε λοιπόν σαν ανεξάρτητη μεταβλητή το ΟΕ και σαν εξαρτημένη το ΟΕ επί ΑΚ, εντάξει το καταλάβαμε αυτό; (Πα)

Στο επεισόδιο από την τελική παρουσίαση στην τάξη ο Γιώργος καλεί τους μαθητές της ομάδας εστίασης να παρουσιάσουν τη διερεύνησή τους. Οι μαθητές της ομάδας εστίασης διατυπώνουν τη βέλτιστη λύση και ο Γιώργος κάνει διδακτική παρέμβαση αιτιολόγησης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να κοινοποιηθεί ο τρόπος σκέψης της ομάδας εστίασης στην επιλογή εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής. Ακολούθως, ο Μ2 αναγνωρίζει ότι το ΟΕ είναι το ανεξάρτητο μέγεθος (αναγνώριση, στίχος 289) και ο Μ1 κατασκευάζει την επιλογή μεταβλητών αναφέροντας την αλληλεξάρτηση μεταξύ των δύο μεγεθών (επαναδόμηση, κατασκευή, στίχος 291). Παράλληλα, ο Γιώργος αναπαράγει τα λόγια των μαθητών με τη χρήση παιδαγωγικών παρεμβάσεων απάντησης (Πα), το οποίο δείχνει ότι ενδιαφέρεται για την κατανόηση όλων των μαθητών. Συνεπώς, από αυτό το επεισόδιο φαίνεται από τη μία το ενδιαφέρον του εκπαιδευτικού για το σύνολο της τάξης καθώς και οι παρεμβάσεις του έχουν ως αποδέκτη όλους τους μαθητές.

Επεισόδιο 4: Υποστήριξη σύνδεσης αναπαραστάσεων - Ποσό μεταβολής

Ο Γιώργος στη Δεξαμενή Πετρελαίου βοηθούσε τους μαθητές στις ομάδες κατά τη διερεύνηση της δραστηριότητας. Στο επόμενο επεισόδιο ο Γιώργος συζητά με την ομάδα εστίασης για τις απαντήσεις σχετικά με τα υποερωτήματα της δραστηριότητας στην κατακόρυφη τοποθέτηση. Στόχος του ήταν να βοηθήσει τους μαθητές μέσω ενός παραδείγματος για να προσεγγίσουν την ομοιόμορφη μεταβολή στη γραφική παράσταση μελετώντας παράλληλα τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής.

Εικόνα 5 - 15: Παρέμβαση απλοποίησης από τον εκπαιδευτικό του σχολείου Β



Εικόνα 5 - 16: Παρουσίαση μαθητών στην τάξη

69. Κ: Ακούτε τι λέει; Πως γίνεται η διαδικασία παραλαβής; (Πε)

70. Μ1: Βλέπω πόσο είναι μετά, αφαιρώ αυτό που ήταν από πριν και το πολ/ζω με το εμβαδό της βάσης.

71. Κ: Το καταλάβαμε αυτό; Πως θα βρούμε τη διαφορά; Να βρούμε τη διαφορά της ράβδου και θα πολ/με το εμβαδό είναι εκεί γραμμένο κιόλας, το βλέπετε.

72. Ε: Πάμε στο ερώτημα 2 τώρα. Από δύο μετρήσεις λέει που κάνατε παρατηρήσατε ότι μεταξύ 50 και 60 εκ ο όγκος είναι 314 λίτρα. Πόσα λίτρα βρίσκονται.. Το κάνετε αυτό στις ομάδες. Δεν είναι δύσκολο παιδιά κάντε το λίγο σύντομα αυτό. Δεν είναι δύσκολο.

73. Μ1: Το μισό δεν είναι; Αφού είναι 50-60 και το άλλο είναι 20-30.

74. Ε: Από 50 έως 60 έχεις 314 λίτρα, από 20 έως 30 λες θα έχω το μισό όγκο;

75. Κ: Δηλαδή έχεις ένα κύλινδρο, εδώ σκέψου. Φανταστείτε ένα κύλινδρο και παίρνουμε δύο μετρήσεις δέκα πόντους. Πόσο ζυγίζει αυτό; Ας πούμε 100γρ. Αν πάρεις από τον ίδιο κύλινδρο πάλι δέκα πόντους πόσο θα ζυγίζει; Το ίδιο θες.. (Πδ)

76. Μ1: Το ίδιο;

77. Κ: Από 50 έως 60 λέει. Άρα πόσο είναι η διαφορά από 50 έως 60; Δέκα πόντοι δεν είναι; (Πδ, Δσα)

78. Μ1: Ααα εντάξει κατάλαβα. Έλα το άλλο πόσο είναι; (R)

79. Μ3: Θα είναι το ίδιο.

[…]

255. Ε: Πάμε στο τελευταίο ερώτημα.

256. Μ1: Πως γεμίζει η κατακόρυφη δεξαμενή σε σχέση με τη στάθμη. Ότι η στάθμη. Καταρχάς όσο μεγαλώνει η στάθμη τόσο μεγαλώνει και ο όγκος, θα το έλεγες αυτό για χ και επίσης ότι.. δεν ξέρω. Μη με κοιτάς τώρα σκέφτομαι… Εντάξει πως αλλάζει και πως.. Κοίτα άμα του δώσεις αυτού εδώ πέρα τη συνάρτηση μετά αυτός θα ξέρει ότι ανάλογα με το x – το x θα είναι το ύψος σε εκ ξέρω γω και το y θα είναι ο όγκος που παίρνεις σε λίτρα. Οπότε, ο όγκος του καυσίμου της δεξαμενής είναι ανάλογος με τη στάθμη και δίνεται από τον τύπο y=31,4x όπου y ο όγκος σε λίτρα και χ η στάθμη του καυσίμου σε cm. Άρα όσο μεγαλώνει η στάθμη τόσο θα μεγαλώνει και ο όγκος. (BW)

257. Ε: Απαντήσαμε εδώ; Ο όγκος του καυσίμου της δεξαμενής είναι ανάλογος με τη στάθμη και δίνεται από τον τύπο y=31,4x όπου y ο όγκος σε λίτρα και χ η στάθμη του καυσίμου σε cm. Πολύ ωραία αυτό θα του λέγαμε; Του απαντάμε μόνο με τον τύπο. Αυτός όμως έχει τη ράβδο, οπότε βυθίζει τη ράβδο, βλέπει τη στάθμη και το υπολογίζει έτσι. Αν θέλαμε να τον βοηθήσουμε ακόμα περισσότερο, να του πούμε κι άλλα πράγματα τι θα του λέγαμε;

258. Μ1: Ότι κάθε 10εκ που αυξάνεται η στάθμη, ο όγκος που θα έχει παραπάνω θα είναι 314 λίτρα. (C)

Στο επεισόδιο, ο Γιώργος αρχικά καλεί όλους τους μαθητές να συμμετέχουν στην διερεύνηση για την κατακόρυφη τοποθέτηση της δεξαμενής. Με τη χρήση διδακτικής παρέμβασης επαναλαμβάνει τα λεγόμενα του μαθητή για να κατανοήσουν όλοι οι μαθητές τη διαδικασία παραλαβής του καυσίμου (στίχος 71). Ακολούθως, με τη βοήθεια παιδαγωγικής παρέμβασης διευκόλυνσης ο Γιώργος δίνει ένα παράδειγμα για να τονίσει ότι σε ίσα ύψη έχουμε ίσες διαφορές (στίχος 75). Με αυτό το παράδειγμα βοηθά τους μαθητές να αναγνωρίσουν την ομοιόμορφη μεταβολή στο γεωμετρικό μοντέλο, ενώ παράλληλα εστιάζει στις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής. Ο μαθητής φαίνεται έτσι να αναγνωρίζει τη συμμεταβολή μεταξύ ύψους και εμβαδού για συγκεκριμένα διαστήματα (στίχος 76). Η παρέμβαση που κάνει ο εκπαιδευτικός φαίνεται να επηρεάζει τον μαθητή της ομάδας εστίασης στην εξέλιξη της δραστηριότητας. Πράγματι, κατά τη συζήτηση του τρόπου με τον οποίο γεμίζει η κατακόρυφα τοποθετημένη δεξαμενή ο μαθητής επαναδομεί τον συντονισμό των μεταβλητών προσφέροντας τον αλγεβρικό τύπο (επαναδόμηση, στίχος 256). Ακολούθως, ο Μ1 κατασκευάζει τη νοηματοδότηση του ποσού μεταβολής (κατασκευή, στίχος 258) επιλέγοντας ένα διάστημα με ύψος 10 εκατοστών, όπως ακριβώς αυτό που συζήτησε στην αρχή του επεισοδίου με τον εκπαιδευτικό της τάξης. Στη συνέχεια της δραστηριότητας ο Γιώργος εστιάζει στην τελική παρουσίαση στην σχολική τάξη, όπου προκύπτει η νοηματοδότηση του ποσού μεταβολής για συγκεκριμένο διάστημα. Έτσι, η βοήθεια που παρείχε στους μαθητές μέσα από τις παιδαγωγικές και διδακτικές παρεμβάσεις του φαίνεται να υποστήριξε τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών.

Σύνοψη του ρόλου του εκπαιδευτικού Β

Ο Γιώργος στην εφαρμογή των δραστηριοτήτων χρησιμοποιεί τα υποερωτήματα για να έχει ένα οδηγό κατά την εφαρμογή. Φαίνεται να τον ενδιαφέρει η κατανόηση από όλους τους μαθητές καθώς χρησιμοποιεί πολύ συχνά παιδαγωγικές παρεμβάσεις συμμετοχής, ομαδικότητας, εκμαίευσης και απάντησης (π.χ. επεισόδια 1 και 2), αλλά και διδακτικές παρεμβάσεις εστίασης στα μαθηματικά αντικείμενα (επεισόδιο 1), αιτιολόγησης/επεξήγησης (επεισόδια 2 και 3) και υποστήριξης για τη σύνδεση αναπαραστάσεων (επεισόδιο 4). Συνολικά οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού αναφορικά με τη συχνότητα εμφάνισης στα επεισόδια που αναλύθηκαν φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Παρεμβάσεις εκπαιδευτικού	**Τύπος παρέμβασης**	**Συχνότητα**
Παιδαγωγικές (έμφαση στη διερεύνηση)	Συμμετοχής (Πσ)	2
	Ομαδικότητας (Πομ)	1
	Εκμαίευσης (Πε)	3
	Απάντησης (Πα)	1
	Διευκόλυνσης (Πδ)	1
	Επέκτασης (Πεπ)	1
Διδακτικές (έμφαση στο περιεχόμενο)	Εστίασης σε μαθηματικό αντικείμενο (Δε)	1
	Αιτιολόγηση/Επεξήγηση (Δα)	2
	Υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα)	1

Πίνακας 10: Πίνακας παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού στο σχολείο Β

Κατά την εφαρμογή του Σχεδιασμού Υδρορροής είχε ιδιαίτερα διερευνητικό ρόλο δίνοντας ιδιαίτερη βαρύτητα στη συμμετοχή και τη διερεύνηση των ομάδων μαθητών μέσα στην τάξη μέσα από παιδαγωγικές παρεμβάσεις συμμετοχής, εκμαίευσης και απάντησης (επεισόδιο 1). Ακολούθως, φάνηκε ότι στην Πρόσοψη Καταστήματος έδινε βαρύτητα στην καλή συνεργασία εντός της ομάδας προτρέποντας τους μαθητές να συζητούν τις απόψεις τους με τα υπόλοιπα μέλη με παιδαγωγική παρέμβαση ομαδικότητας (επεισόδιο 2). Στην εξέλιξη των δραστηριοτήτων φαίνεται να ενδιαφέρεται για την κατανόηση των μαθητών στο σύνολο της τάξης κάνοντας παιδαγωγικές παρεμβάσεις συμμετοχής και απάντησης, αναπαράγοντας τη λύση μίας ομάδας σε ολόκληρη την τάξη ώστε να κοινοποιείται ο τρόπος σκέψης σε όλη την τάξη (επεισόδιο 3). Το ενδιαφέρον του για την κατανόηση των μαθητών τον οδηγεί σε διδακτικές παρεμβάσεις για την υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων. Με τη χρήση παιδαγωγικής παρέμβασης διευκόλυνσης (Πδ) για την απλοποίηση του ερωτήματος και παροχή παραδειγμάτων βοηθά τους μαθητές στις πιο απαιτητικές νοηματοδοτήσεις τους (επεισόδιο 4).

Συνολικά, ο εκπαιδευτικός ενδιαφέρεται για την κατανόηση όλων των μαθητών περισσότερο από την εξέλιξη της δραστηριότητας, κάνοντας παιδαγωγικού περιεχομένου παρεμβάσεις εκμαίευσης και απλοποιώντας ή δίνοντας παραδείγματα. Έτσι, υποστηρίζει τους περισσότερους μαθητές να νοηματοδοτήσουν τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Παράλληλα, αυτό προκύπτει και μέσα από τη χρήση των διδακτικών παρεμβάσεων αιτιολόγησης/επεξήγησης, καθώς φαίνεται ότι τον ενδιαφέρει ιδιαίτερα η επεξήγηση και ο διαμοιρασμός των μαθηματικών ιδεών μέσα στην τάξη, ώστε να συμμετέχουν και να κατανοούν όλοι οι μαθητές. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος που χρησιμοποιεί παιδαγωγική παρέμβαση ομαδικότητας. Συμπερασματικά, η διδασκαλία του Γιώργου θα μπορούσε να χαρακτηριστεί μέσα από τις παρεμβάσεις του ως επεξηγηματική με έμφαση στη μαθητική συμμετοχή και κατανόηση.

5.2.2. Ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στην εξέλιξη των μαθησιακών τροχιών στο σχολείο Β

Ο ρόλος των εργαλείων φάνηκε στο σχολείο Β μέσα από τα ακόλουθα επεισόδια καθώς οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να πειραματίζονται τόσο με τα χειραπτικά όσο και με τα ψηφιακά εργαλεία βοηθώντας τις νοηματοδοτήσεις τους. Για παράδειγμα κατά την εφαρμογή του Σχεδιασμού Υδρορροής, τα χειραπτικά και τα ψηφιακά εργαλεία φάνηκε να βοηθούν τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών. Παράλληλα, φαίνεται ότι αυτό βοήθησε και τις επόμενες δραστηριότητες όπως θα δούμε από τα επεισόδια που ακολουθούν.

Επεισόδιο 1: Χειραπτικά εργαλεία και δίπλωση χαρτιού

Τα χειραπτικά εργαλεία στο σχολείο Β βοήθησαν ιδιαίτερα τους μαθητές κατά τη μοντελοποίηση του Σχεδιασμού Υδρορροής, μέσα από τον αρχικό πειραματισμό των μαθητών με τα χειραπτικά εργαλεία. Για παράδειγμα, στο ακόλουθο επεισόδιο οι μαθητές της ομάδας εστίασης δίπλωσαν το κομμάτι χαρτιού σημειώνοντας τις παρατηρήσεις τους.

59. Κ: Λοιπόν παιδιά, επειδή κάποιες ομάδες τελειώσανε θέλετε να ακούσουμε τι κάνανε εκεί; Τι θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε;

60. Ε: Έχετε σκεφτεί πότε αυξάνεται η ποσότητα του νερού που ρέει;

61. Μ1: Εντάξει τον όγκο του… εε το εμβαδό του. (R)

62. Μ2: Τι εννοείς;

63. Μ1: Έχουμε τις δύο συν μία πλευρές του, σαν ένα παρ/μο χωρίς την πάνω την οποία δεν τη χρειαζόμαστε, απλά αυτές εδώ οι τρεις μαζί με τις πλαϊνές εκεί κάτω θα είναι 10 εκ. (BW)

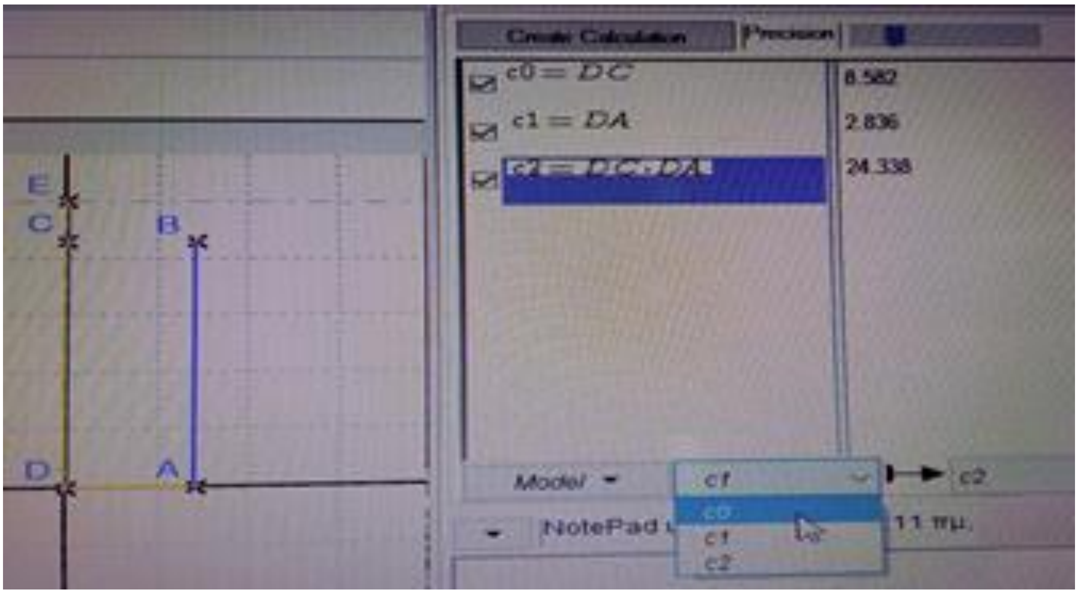
64. Ε: Ναι, και;

65. Μ1: Άρα πρέπει να βρούμε μία σχέση με αυτά. (C)

Στο επεισόδιο οι μαθητές πειραματιζόμενοι με το κομμάτι χαρτιού δημιουργούν ένα μοντέλο υδρορροής και αναγνωρίζουν ότι η κρίσιμη ποσότητα είναι το εμβαδό διατομής και όχι ο όγκος του μοντέλου, προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η ποσότητα του νερού (αναγνώριση, στίχος 61). Στη συνέχεια, σημειώνουν τους περιορισμούς που διέπουν τον σχεδιασμό της υδρορροής όταν διπλωθεί η μία πλευρά (επαναδόμηση, στίχος 63) και τη σημασία των πλευρών στη μεγιστοποίηση της υδρορροής. Τέλος, κατασκευάζουν την αλληλεξάρτηση μεταξύ των δύο ποσοτήτων (στίχος 65) καταλήγοντας στην ανάγκη της σύνδεσης μεταξύ των πλευρών και του εμβαδού διατομής.

Επεισόδιο 2: Αυτόματη μοντελοποίηση

Κατά τον πειραματισμό με τον Σχεδιασμό Υδρορροής οι μαθητές της ομάδας εστίασης είχαν εκτεταμένη αλληλεπίδραση με τα χειραπτικά εργαλεία, αλλά και με το ψηφιακό εργαλείο Casyopée. Συγκεκριμένα, κατά την εξέλιξη της δραστηριότητας οι μαθητές της ομάδας εστίασης μοντελοποίησαν το πρόβλημα στο λογισμικό κατασκευάζοντας ένα δυναμικό ορθογώνιο. Στο επόμενο επεισόδιο φαίνεται η συμβολή του εργαλείου “automatic modeling” στη μοντελοποίηση του προβλήματος κατά τον πειραματισμό των μαθητών στο παράθυρο των γεωμετρικών υπολογισμών.



Εικόνα 5 - 17: Επιλογή μεταβλητών στο Casyopée

26. Μ1: Τώρα τι κάνουμε; Δεν μπορείς να δεις κάτι άλλο. Πρέπει να φτιάξουμε εδώ πέρα δύο υπολογισμούς που ο ένας… (R)

27. Μ2: Δύο υπολογισμούς;

28. Μ1: Ναι, Δύο υπολογισμούς όπως το DC και το άλλο να είναι το AB επί AD που είναι το εμβαδό. Το θυμάσαι που είναι το εμβαδό; Κοίτα αυτό [το εμβαδό] είναι εξαρτημένο από αυτό [το DC]. Οπότε άμα το βάλεις αυτό εδώ πέρα και το κάνεις μοντελοποίηση. (BW)

29. Κ: Τι έκανες εκεί;

30. Μ1: Έφτιαξα μία συνάρτηση με βάση το ΟΕ και το εμβαδό ΑΚΗΒ και το έκανα μοντελοποίηση.

31. Κ: Μπορείς να μας εξηγήσεις πως σκέφτηκες;

32. Μ1: Θέλουμε το μέγιστο εμβαδό σε σχέση με την ΟΕ. Σε σχέση με το πόσο μεγάλη θα είναι η βιτρίνα στο μήκος, έτσι αλλάζει και το εμβαδό των βιτρινών που θέλουμε. Των τζαμιών εδώ πάνω. Κι αυτός μας ζητάει το μεγαλύτερο εμβαδό. Οπότε έφτιαξα δύο [υπολογισμούς]… Βασικά έβαλα μία το ΟΕ και μία το εμβαδό και το έκανα μοντελοποίηση και μου έβγαλε εδώ πέρα τη συνάρτηση. και αν τη βάλω στα γραφήματα είναι αυτή εδώ, οπότε το μέγιστο εμβαδό είναι περίπου στο 4. (BW, C)

33. Κ: Οι υπόλοιποι συμφωνείτε; Για δούλεψέ το μαζί με την ομάδα σου.

34. Ε: Για πες μου τι κάνει αυτή η συνάρτηση;

35. Μ1: Ότι όσο μεγαλώνει η πλευρά DC … Μου δίνει τη σχέση της πλευράς DC με το εμβαδό. (C)

Στο επεισόδιο οι μαθητές της ομάδα εστίασης νιώθουν την ανάγκη να δημιουργήσουν δύο υπολογισμούς στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών (αναγνώριση, στίχος 26). Κατόπιν, δημιουργούν έναν υπολογισμό για την πλευρά DC και έναν υπολογισμό για το εμβαδό του ορθογωνίου και νοηματοδοτούν τη συσχέτιση μεταξύ των μεγεθών (επαναδόμηση, στίχος 28). Μέσω της λειτουργίας της αυτόματης μοντελοποίησης οι μαθητές επιλέγουν την εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή και δημιουργούν τη συνάρτηση πλευράς και εμβαδού (επαναδόμηση, στίχος 32). Ακόμη, μέσα από την επιλογή των δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών ως μεταβλητές οι μαθητές της ομάδας σημειώνουν την επιλογή μεταβλητών (κατασκευή, στίχος 35). Συνεπώς, η αλληλεπίδραση με το λογισμικό φαίνεται να βοήθησε τους μαθητές να εστιάσουν στην επιλογή μεταβλητών αμέσως μετά τη συσχέτιση μεγεθών, παρακάμπτοντας τη νοηματοδότηση της κατεύθυνσης σε αυτή τη δραστηριότητα.

Επεισόδιο 3: Παγιοποίηση μέσω δυναμικής μετακίνησης και γεωμετρικών υπολογισμών

Κατά την εξέλιξη των δραστηριοτήτων οι μαθητές της ομάδα εστίασης φάνηκε να αποκτούν άνεση με τις αρχικές νοηματοδοτήσεις. Έτσι, υπήρξαν επεισόδια στα οποία οι μαθητές είχαν παγιοποιήσει τις πιο απλές νοηματοδοτήσεις και μπορούσαν να μεταβαίνουν με ευκολία προς τις πιο σύνθετες. Για παράδειγμα, στο επόμενο επεισόδιο από στην Πρόσοψη Καταστήματος οι μαθητές στην αρχή του πειραματισμού τους περνούν εύκολα από τις απλές νοηματοδοτήσεις φτάνοντας μέχρι την επιλογή μεταβλητών.

24. Κ: Στο λογισμικό Casyopee μπορείτε να ανοίξετε το αρχείο δοκάρι. Θα πάτε στο παράθυρο της Γεωμετρίας και θα δείτε. Διαβάστε το φύλλο εργασίας.

25. Μ1: Όσο το μεγαλώνεις χρειάζεται να είναι πιο παχύ πιο παχύ, πιο χοντρό πιο χοντρό για να το κρατάει καλύτερα. Αυτόν τον χώρο το ΚΗΒΑ ανάμεσα στην πόρτα και στο δοκάρι θα τον γεμίσεις με 4 τζάμια και σου λέει πόσο πρέπει να είναι το Ε, δηλαδή πόσο μακριά ή πόσο κοντά, ώστε αυτό το εμβαδό να είναι το μέγιστο, οπότε πρέπει να φτιάξουμε μία μεταβλητή με το ΟΕ και μία άλλη μεταβλητή με το ΑΚ επί ΚΗ αυτά θα τα φτιάξουμε εδώ. (R, BW, C1)

26. Μ2: Γιατί;

27. Μ1: Για το εμβαδό. ΑΚ επί ΚΗ εμβαδό. Τους υπολογισμούς έτσι τους βάζουμε ή αντίθετα; Κάτσε να δω κάτι… [τους βάζει αντίθετα] Ωραία καλά το έχω βάλει. (C2)

28. Μ3: Να μου λέτε κι εμένα.

29. Μ1: Εγώ τα έλεγα όσο έλειπες

30. Κ: Ωπ! Τι έκανες εκεί… Για κάτσε!

31. Μ1: Έφτιαξα μία συνάρτηση με βάση το ΟΕ και το εμβαδό ΑΚΗΒ και το έκανα μοντελοποίηση Οπότε έφτιαξα δύο [υπολογισμούς]… Βασικά έβαλα μία το ΟΕ και μία το εμβαδό και το έκανα μοντελοποίηση και μου έβγαλε εδώ πέρα τη συνάρτηση και αν τη βάλω στα γραφήματα είναι αυτή εδώ, οπότε το μέγιστο εμβαδό είναι περίπου στο 4.

Στο επεισόδιο οι μαθητές της ομάδας εστίασης μετακινούν το ελεύθερο σημείο Ε και νοηματοδοτούν την αλληλεξάρτηση μεταξύ απόστασης και πάχους του δοκαριού, τη συσχέτιση, την κατεύθυνση και την επιλογή μεταβλητών (στίχος 25). Έτσι, με το που ξεκινάει ο μαθητής Μ1 να περιγράφει τον συλλογισμό του φαίνεται έτοιμος να επιλέξει τις κατάλληλες μεταβλητές για τη μοντελοποίηση του προβλήματος. Ακολούθως, δοκιμάζει να χρησιμοποιήσει τα μεγέθη, τα οποία δημιούργησε στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών, ως μεταβλητές (στίχος 27). Έτσι, νοηματοδοτεί εύκολα την επιλογή μεταβλητών από την αρχή της δραστηριότητας σημειώνοντας παγιοποίηση των προηγούμενων κατασκευών, καθώς μετακινείται με ευκολία μεταξύ των πιο απλών νοηματοδοτήσεων. Κατόπιν, ο Μ1 παρουσιάζει τη συνάρτηση που προέκυψε και ξεκινά να διερευνά τις διαφορετικές αναπαραστάσεις. Συνεπώς, μέσω της δυναμικής μετακίνησης του ελεύθερου σημείου στη δυναμική γεωμετρία, η οποία συνομιλεί με το παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών οι μαθητές φαίνεται να παγιοποίησαν τις αρχικές νοηματοδοτήσεις και να μεταβαίνουν εύκολα μέχρι την επιλογή μεταβλητών.

Επεισόδιο 4: Πολλαπλές αναπαραστάσεις - δυναμική μετακίνηση και πίνακας τιμών

Κατά την εφαρμογή της Δεξαμενής Πετρελαίου οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να πειραματιστούν εκτεταμένα τόσο με μία προσομοίωση της δεξαμενής όσο και με τον πίνακα τιμών, ο οποίος συμπληρωνόταν αυτόματα από το λογισμικό GeoGebra. Η ενασχόλησή των μαθητών της ομάδας εστίασης με τον πίνακα τιμών τους βοήθησε για να επιλέξουν την κατάλληλη γραφική παράσταση κατά τη συζήτηση σχετικά με τη γραφική παράσταση της μεταβολής των δύο μεγεθών. Στο επόμενο επεισόδιο οι μαθητές νοηματοδοτούν τον ομοιόμορφο ρυθμό μεταβολής από τη μελέτη του πίνακα τιμών στην προσπάθειά τους να χαράξουν τη γραφική παράσταση.

622. Ε: Εδώ που ξεκινάμε είμαστε στα πρώτα μέχρι το όγδοο εκατοστό, δεν έχουμε ανέβει πολύ ψηλά. Μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει αυτόν τον πίνακα και να εξηγήσει ποιο από αυτά είναι; Πες το.

623. Μ1: Από αυτόν τον πίνακα στην αρχή αρχίζει να ανεβαίνει ο όγκος με μικρούς ρυθμούς. (R)

624. Ε: Τι εννοείς με μικρούς ρυθμούς;

625. Μ1: Αρχίζει να ανεβαίνει ο όγκος σε σχέση με το ύψος αρχίζει να ανεβαίνει στην αρχή λίγο ο όγκος σε σχέση με το ύψος και όσο μεγαλώνει το ύψος… (R)

626. Ε: Κι αυτό που φαίνεται εδώ;

627. Μ1: Φαίνεται ότι στο πρώτο εκατοστό έχει ανέβει 12, ανάμεσα στο πρώτο και στο δεύτερο έχει ανέβει 20, μετά 26, 31, 38 (BW)

628. Ε: Μετά λες 26, 31, 38. Άρα παρατηρείς τις διαφορές δηλαδή. Και από τις διαφορές τι λες;

629. Μ1: Ότι σε κάθε 1 εκ. όντως αρχίζει και μεγαλώνει – αυξάνεται όλο και περισσότερο, οπότε στην αρχή θα πρέπει να είναι σίγουρα όπως το 2 ή το 3, αλλά στα 100εκ που είναι στη μέση, μετά ο όγκος αρχίζει να ανεβαίνει και πάλι, αλλά με τον ακριβώς αντίθετο ρυθμό, αρχίζει να πέφτει δηλαδή. (C)

Στο επεισόδιο ο μαθητής Μ1 νοηματοδοτεί το ποσό της μεταβολής και αναγνωρίζει τις διαφορές μεταξύ των τιμών του όγκου στον πίνακα τιμών και συσχετίζει τις μεταβολές μεταξύ ύψους και όγκου (αναγνώριση, στίχοι 623, 625). Ακόμη, μέσω του πίνακα τιμών μπορεί και υπολογίζει το ποσό μεταβολής σε κάθε βήμα (επαναδόμηση, στίχος 627). Τέλος, μέσα από την μελέτη των μεταβολών νοηματοδοτεί το ποσό μεταβολής για συγκεκριμένο βήμα ενός εκατοστού για όλες τις ενδείξεις της ράβδου ερμηνεύοντας τις μεταβολές στον πίνακα τιμών (κατασκευή, στίχος 629).

Σύνοψη του ρόλου των ψηφιακών εργαλείων στο σχολείο Β

Μέσα από τα επεισόδια που παρατέθηκαν φαίνεται ότι ο ρόλος των εργαλείων ήταν κρίσιμος και στο σχολείο Β. Πιο συγκεκριμένα, η χρήση των χειραπτικών εργαλείων στον Σχεδιασμό Υδρορροής βοήθησε τους μαθητές να απλοποιήσουν το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του όγκου σε πρόβλημα μεγιστοποίησης του εμβαδού διατομής αποτελώντας την αφετηρία για τον πειραματισμό με τη δυναμική γεωμετρία (επεισόδιο 1). Από την άλλη, τα ψηφιακά εργαλεία στην ίδια δραστηριότητα όπως η λειτουργία της αυτόματης μοντελοποίησης έδωσαν τη δυνατότητα στους μαθητές να νοηματοδοτήσουν εύκολα τη συσχέτιση μεταξύ μεγεθών και ακολούθως την επιλογή μεταβλητών παρακάμπτοντας την κατεύθυνση, διευκολύνοντας το πέρασμα από τα μεγέθη στις μεταβλητές (επεισόδιο 2). Η χρήση των ψηφιακών εργαλείων συνεισέφερε στην παγιοποίηση των αρχικών νοηματοδοτήσεων που είχαν κατασκευάσει οι μαθητές στη δυναμική γεωμετρία, μέσα από τη δυναμική μετακίνηση σημείων και τη σύνδεση με το παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών. Έτσι, μετάβαιναν εύκολα μεταξύ των αρχικών νοηματοδοτήσεων μέσω της διασύνδεσης του παραθύρου της δυναμικής γεωμετρίας με το παράθυρο των γεωμετρικών υπολογισμών. Οι συνδέσεις μεταξύ των δύο παραθύρων βοήθησαν τους μαθητές να μεταβούν πιο εύκολα από τα μεγέθη στις μεταβλητές (επεισόδιο 3). Στη Δεξαμενή Πετρελαίου οι πολλαπλές αναπαραστάσεις, όπως το δυναμικό γέμισμα της δεξαμενής και η ταυτόχρονη συμπλήρωση του πίνακα τιμών παρείχαν τη δυνατότητα στην ομάδα εστίασης να εστιάσει στις μεταβολές του πίνακα τιμών καθώς γεμίζει η δεξαμενή και να νοηματοδοτήσει το ποσό μεταβολής (επεισόδιο 4). Συνεπώς, αναδεικνύεται πλούσια η συμβολή των εργαλείων μέσα από διαφορετικά επεισόδια, καθώς βοηθούν τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων.

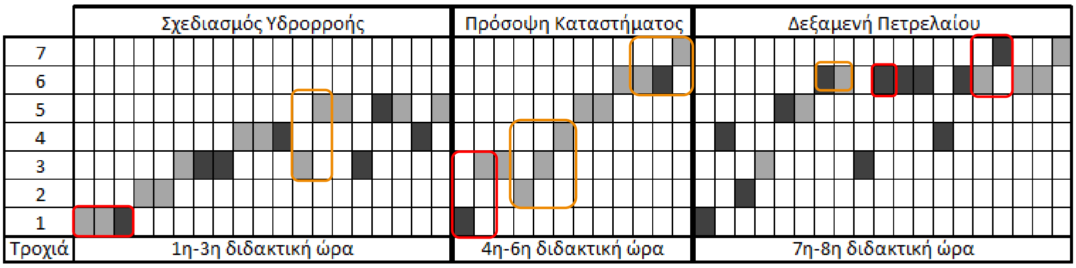
5.3. Ο ρόλος του πλαισίου στην εξέλιξη των μαθησιακών τροχιών – σχολείο Γ

Στο σχολείο Γ, το οποίο αφορά τη 2$^{\eta}$ φάση συλλογής δεδομένων, αφιερώθηκαν συνολικά 8 ώρες για την εφαρμογή των δραστηριοτήτων σε ένα τμήμα Β΄ λυκείου. Η Άννα (εκπαιδευτικός σχολείου Γ) είχε πολύ ισχυρό ερευνητικό υπόβαθρο, ως υποψήφια διδάκτορας στη Διδακτική των Μαθηματικών, ωστόσο δεν χρησιμοποιούσε ψηφιακά εργαλεία στη σχολική τάξη ως μέρος της καθημερινής πρακτικής της. Στη συνεργασία με τον ερευνητή αποφάσισε να αλλάξει σε μεγάλο βαθμό τις δραστηριότητες παραλείποντας τα υποερωτήματα και δίνοντας ένα κεντρικό πρόβλημα όσο το δυνατόν πιο αυθεντικό στους μαθητές, μέσα από τρεις πεντάωρες συναντήσεις. Επίσης, έδωσε βαρύτητα στον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων κατά τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων, ώστε να συνεισφέρουν σημαντικά στη διερεύνηση και να έχουν νόημα για τους μαθητές. Επομένως, η Άννα είχε μεγάλη εξοικείωση με τις δραστηριότητες, αλλά και με τον τρόπο που θα εφαρμοστούν, αφού σε κάποιες περιπτώσεις ζητούσε να μάθει λεπτομέρειες από την εφαρμογή στο σχολείο Α. Τα ψηφιακά εργαλεία δεν τα χρησιμοποιούσε στην καθημερινή της πρακτική, αλλά μέσα από τις συναντήσεις με τον ερευνητή απέκτησε εξοικείωση και με τα δύο λογισμικά. Οι μαθητές της τάξης του σχολείου Γ είχαν εμπειρία από προβλήματα διερεύνησης και εργάζονταν συχνά σε ομάδες μέσα στη σχολική τάξη. Το Casyopée ήταν ένα καινούργιο λογισμικό για τους μαθητές με το οποίο εξοικειώθηκαν γρήγορα, καθώς αρκετοί μαθητές είχαν γνώση του GeoGebra.

Το γεγονός ότι προηγήθηκε η 1η φάση σχεδιασμού και εφαρμογής στα σχολεία Α και Β φαίνεται εκ των προτέρων να έπαιξε ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο, καθώς προηγήθηκε η μελέτη του σχολείου Α και η υιοθέτηση των καλών πρακτικών και επιχειρημάτων του Στέλιου (εκπαιδευτικού Α). Πιο αναλυτικά, στη 2$^{\eta}$ φάση σχεδιασμού και εφαρμογής δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση και στην αρχική συζήτηση αφήνοντας τους μαθητές να εμπλακούν όσο το δυνατόν περισσότερο στο πλαίσιο της δραστηριότητας μοντελοποίησης. Επίσης, η Άννα δίνει ιδιαίτερη βαρύτητα στη διερεύνηση των μαθηματικών ιδεών κάνοντας συνδέσεις με το πλαίσιο της δραστηριότητας, τις οποίες κάνει εμφανείς στους μαθητές. Έτσι, δίνει έμφαση στο κύριο ερώτημα της δραστηριότητας και αφήνει τους μαθητές να εργαστούν σε περισσότερο ανοικτές δραστηριότητες χωρίς να χάνεται η σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας. Σχετικά με τις δραστηριότητες της Πρόσοψης Καταστήματος και της Δεξαμενής

Πετρελαίου προστέθηκε ένα ερώτημα προκειμένου οι μαθητές να νοηματοδοτήσουν τον ρυθμό μεταβολής.

Οι μαθητές στην ερευνητική εφαρμογή εργάζονταν ανά ομάδα στα ερωτήματα που έθετε η εκπαιδευτικός ως υποερωτήματα του κεντρικού ερωτήματος της κάθε δραστηριότητας. Ακόμη, οι ομάδες μαθητών είχαν τη δυνατότητα να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους κατά την εμπλοκή τους με τις δραστηριότητες. Πιο συγκεκριμένα, κατά την εφαρμογή του Σχεδιασμού Υδρορροής δόθηκε έμφαση στην σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας που οδήγησε στον διάλογο ανάμεσα και μεταξύ των ομάδων μαθητών σχετικά με τον τρόπο δίπλωσης από τους σχεδιαστές. Στη δραστηριότητα της Πρόσοψης Καταστήματος οι μαθητές της τάξης περιορίστηκαν στην εργασία εντός της ομάδας, ενώ στη Δεξαμενή Πετρελαίου οι μαθητές δεν εργάζονταν αποκλειστικά εντός της ομάδας, όπως προκύπτει από τις νοηματοδοτήσεις που καταγράφηκαν από την ομάδα εστίασης και τη σχολική τάξη (Εικόνα 5 - 18). Στην Εικόνα 5 - 18 παρατίθεται η εμφάνιση της πραγματικής μαθησιακής τροχιάς για την ομάδα εστίασης (ανοικτό γκρι) και των ομάδων που συμμετείχαν στις συζητήσεις ολόκληρης της τάξης (σκούρο γκρι) κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων για το σχολείο Γ. Οι διαφορετικές τροχιές των μαθητών σε κάθε σχολείο δείχνουν την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων μέσα από τη διερεύνηση των μαθητών ανεξάρτητα από τον χρόνο εμφάνισης. Τα επεισόδια που αφορούν στον ρόλο του εκπαιδευτικού στο σχολείο Γ είναι σημειωμένα με κόκκινο και εκείνα που αφορούν στον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων είναι σημειωμένα με πορτοκαλί κατά τη διερεύνηση των δραστηριοτήτων.



Εικόνα 5 - 18: Νοηματοδότηση στο σχολείο Γ από τη 2η φάση συλλογής δεδομένων

Στο σχολείο Γ η ομάδα εστίασης ακολουθεί σταδιακή ανοδική πορεία σε όλες τις δραστηριότητες . Πιο συγκεκριμένα, στον Σχεδιασμό Υδρορροής η ομάδα εστίασης είχε τη δυνατότητα να συμμετέχει σε μία συζήτηση στην τάξη που ξεκίνησε η εκπαιδευτικός σχετικά με τον εντοπισμό των ποσοτήτων μέσα από τον πειραματισμό με τα χειραπτικά εργαλεία. Η εκπαιδευτικός φάνηκε να δίνει ιδιαίτερη βαρύτητα στο κεντρικό ερώτημα της δραστηριότητας και στο πλαίσιο της δραστηριότητας από την αρχή. Κατά την εξέλιξη του σχεδιασμού υδρορροής εμφανίζονταν σταδιακές μετακινήσεις σε πιο απαιτητικές νοηματοδοτήσεις, ενώ τα ψηφιακά εργαλεία φάνηκε να υποστηρίζουν τους μαθητές στις δυσκολίες που συναντούσαν. Έτσι, οι μαθητές μόλις δημιούργησαν τη συνάρτηση πλευράς – εμβαδού χρησιμοποίησαν τον πίνακα τιμών νοηματοδοτώντας την κατεύθυνση μεγεθών και ακολούθως τον συντονισμό διαφορετικών αναπαραστάσεων. Η δραστηριότητα συνεχίστηκε με νοηματοδοτήσεις από άλλες ομάδες και την τελική παρουσίαση στην τάξη. Στην Πρόσοψη Καταστήματος η εκπαιδευτικός έδωσε από την αρχή βαρύτητα στο πραγματικό πλαίσιο της δραστηριότητας με την παρουσίαση φωτογραφιών προκειμένου να προκύψουν τα αυθεντικά στοιχεία της κατασκευής. Πράγματι, οι μαθητές της ομάδας εστίασης νοηματοδότησαν την κατεύθυνση από την αρχή της δραστηριότητας. Ακολούθως, τα εργαλεία συνέβαλλαν στο να διατρέξουν οι μαθητές τις αρχικές νοηματοδοτήσεις με τη βοήθεια των δυνατοτήτων του Casyopée στη δυναμική γεωμετρία. Στην εξέλιξη της δραστηριότητας οι μαθητές νοηματοδότησαν το ποσό μεταβολής και ακολούθως το πηλίκο διαφορών μέσα από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις. Στη Δεξαμενή Πετρελαίου η εκπαιδευτικός φάνηκε να ενθαρρύνει τις συνεργασίες μεταξύ διαφορετικών ομάδων στην τάξη. Αυτό οδήγησε όλους τους μαθητές της τάξης να κάνουν σύνθετες νοηματοδοτήσεις. Στην εξέλιξη της δραστηριότητας η εκπαιδευτικός έθετε ερωτήματα και εστίαζε στο βασικό πρόβλημα υποστηρίζοντας τις συνεργασίες από διαφορετικές ομάδες βοηθώντας τους μαθητές να νοηματοδοτήσουν το ποσό της μεταβολής και το πηλίκο διαφορών στην τάξη.

Συνεπώς, σχετικά με τον ρόλο του εκπαιδευτικού στο σχολείο Γ αναλύονται τα ακόλουθα επεισόδια. Αυτά αφορούν (α) στην αρχική διερεύνηση των δραστηριοτήτων και τη νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης και της κατεύθυνσης, (β) στη συνεχή υπενθύμιση του κύριου ερωτήματος της δραστηριότητας και (γ) στη συνεργασία μεταξύ των ομάδων που οδήγησαν σε νοηματοδοτήσεις του ποσού μεταβολής και του πηλίκου διαφορών. Τέλος, τα επεισόδια σχετικά με τον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων επισημαίνουν τη συμβολή των λειτουργιών του Casyopée από τις αρχικές νοηματοδοτήσεις προς την επιλογή μεταβλητών, αλλά και την αξιοποίηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων σχετικά με τον αλγεβρικό συμβολισμό και τη νοηματοδότηση του ρυθμού μεταβολής.

5.3.1. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στο σχολείο Γ - 2η φάση συλλογής

Μέσα από τα επόμενα επεισόδια αναλύθηκε ο ρόλος του εκπαιδευτικού μέσα από τις παρεμβάσεις του κατά την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων των μαθητών σε κρίσιμες στιγμές για το σχολείο Γ κατά αντιστοιχία με τα σχολεία Α και Β από την $1^{η}$ φάση συλλογής δεδομένων. Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζουμε τις διαφορετικές κατηγορίες των παρεμβάσεων της εκπαιδευτικού, για το σχολείο Γ:

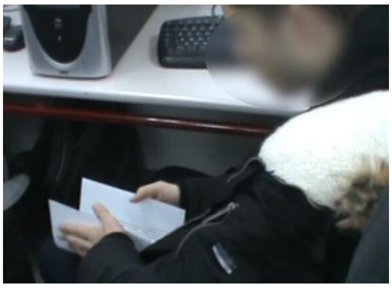
Παρεμβάσεις εκπαιδευτικού	**Τύπος παρέμβασης**	**Ορισμός**	**Χαρακτηριστικά παραδείγματα**
Παιδαγωγικές (έμφαση στη διερεύνηση)	Συμμετοχής (Πσ)	Προτροπή όλων των μαθητών να συμμετέχουν. Άλλες διαστάσεις: Πρόσκληση για προσοχή/εστίαση	Διαβάσατε; Μπορεί κάποιος να μου πει ποιο είναι το πρόβλημα;
	Εκμαίευσης (Πε)	Δράσεις βοήθειας/κατεύθυνσης των μαθητών ώστε να εκμαιεύσει μία απάντηση. Άλλες διαστάσεις: εκμαίευση ιδεών μαθητών, εκμαίευση νοηματοδότησης	Μ: Όχι, αυτού του σχήματος το εμβαδό [δείχνει το εμβαδό διατομής στο φύλλο εργασίας]. Κ: Γιατί το λες αυτό; Μπορείς να το εξηγήσεις;
	Απάντησης (Πα)	Δράσεις απάντησης σε μία ιδέα/σκέψη ενός μαθητή Άλλες διαστάσεις: διόρθωση λάθους, επανάληψη	Μ: Από το εμβαδό. Κ: Από ποιο εμβαδό; Το εμβαδό της λαμαρίνας όταν είναι σαν φύλλο αλουμινίου εννοείς;
	Διευκόλυνσης (Πδ)	Δράσεις διευκόλυνσης της σκέψης ενός μαθητή Άλλες διαστάσεις: παροχή οδηγιών, σκαλωσιά για τη σκέψη του μαθητή, υποστήριξη πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης	Κ: Απλά καταρχήν να καταλάβουμε το πρόβλημα. Μπορείτε να μου πείτε τι ζητάμε; Ανατίθεται στο γραφείο το δικό σας ο σχεδιασμός της πρόσοψης και αναλαμβάνετε εσείς να προτείνετε την κατασκευή που θα εξασφαλίσει την καταλληλότερη

			βιτρίνα στο κατάστημα, αυτό είναι το πρόβλημα. Εντάξει;
	Επέκτασης (Πεπ)	Δράσεις επέκτασης της σκέψης των μαθητών Άλλες διαστάσεις: υποστήριξη σκέψης και γενίκευσης, προτροπή για παροχή αιτιολογήσεων	Σου δίνουν ένα φύλλο λαμαρίνας και σου λένε πως θα τη διπλώσω για να έχω τη μέγιστη ποσότητα νερού; Τι απαντάτε;
Διδακτικές (έμφαση στο περιεχόμενο)	Εστίασης σε μαθηματικό αντικείμενο (Δε)	Δράσεις για την εστίαση των μαθητών στο μαθηματικό αντικείμενο (π.χ. ποσότητες, μεγέθη, μεταβλητές) στο μοντέλο που πειραματίζονται Άλλες διαστάσεις: πλαίσιο δραστηριότητας, προκλήσεις, φωτογραφίες και διερευνητική συζήτηση	Είναι ανοιχτό, δεν έχουμε βάλει ακόμα πόρτα. Απλά έτσι όπως το βλέπετε στο σχέδιο γιατί θεωρείτε ότι το ένα είναι μικρότερο από το άλλο;
	Υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα)	Υποστήριξη των μαθητών για τη σύνδεση αναπαραστάσεων (π.χ. γραφικών, αλγεβρικών) Άλλες διαστάσεις: πλαίσιο δραστηριότητας, ψηφιακό εργαλείο, πρόκληση, διερεύνηση	Δηλαδή θα μπορούσατε ας πούμε κάπως με κάποιο τρόπο να μου δείξετε αυτό που λέτε ότι αλλάζει, ότι είναι διαφορετική η αλλαγή. Ότι αλλάζει το καύσιμο που μας προμηθεύουν με την ένδειξη που μετράμε εμείς με τη δεξαμενή, αλλά αλλιώς αλλάζει όταν είναι γεμάτη κατά 1/4 , αλλιώς αλλάζει όταν είναι γεμάτη κατά ½.. Μπορείτε να μου το δείξετε αυτό κάπως;

Πίνακας 11: Παρεμβάσεις εκπαιδευτικού στο σχολείο Γ

Επεισόδιο 1: Εστίαση σε μαθηματικό αντικείμενο - Νοηματοδότηση των αλληλεξαρτήσεων

Η Άννα (εκπαιδευτικός σχολείου Γ) στην εφαρμογή του Σχεδιασμού Υδρορροής επέλεξε να δώσει έμφαση στο πραγματικό πρόβλημα χωρίς να δίνει συγκεκριμένες διαστάσεις της λαμαρίνας στην αρχή της δραστηριότητας. Έτσι, οι μαθητές αναζήτησαν από μόνοι τους το μοντέλο χαρτιού και έδωσαν έμφαση στον πειραματισμό με αυτό ώστε να νοηματοδοτήσουν τις αλληλεξαρτήσεις μεταξύ ποσοτήτων. Μάλιστα, στο τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές απάντησαν στο πρόβλημα χωρίς την αναφορά σε συγκεκριμένες διαστάσεις. Η Άννα προκαλούσε αρκετές ομάδες στην αναζήτηση των συμμεταβαλλόμενων χαρακτηριστικών των ποσοτήτων. Στο ακόλουθο επεισόδιο από τον αρχικό πειραματισμό των μαθητών της τάξης με το μοντέλο χαρτιού στις ομάδες μαθητών η εκπαιδευτικός αφήνει τις ομάδες μαθητών να διερευνήσουν τα συμμεταβαλλόμενα χαρακτηριστικά των ποσοτήτων τη δραστηριότητα χωρίς να χάνεται η σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας. Στόχος της ήταν οι μαθητές να εργαστούν στο πλαίσιο της δραστηριότητας και να εντοπίσουν τα μαθηματικά αντικείμενα κατά τη δίπλωση του χαρτιού.



Εικόνα 5 - 19: Στιγμιότυπα πειραματισμού των μαθητών

22. Κ: Διαβάσατε; Μπορεί κάποιος να μου πει ποιο είναι το πρόβλημα; (Πσ)

23. Μ5: Έχουμε ένα φύλλο αλουμινίου με συγκεκριμένο πλάτος και πρέπει να βρούμε τον τρόπο κατά τον οποίο θα πρέπει να λυγίσει ώστε να μεταφέρει τη μέγιστη ποσότητα νερού. Μας δίνει διαστάσεις;

24. Κ: Καμία διάσταση.

25. Μ6: Να προσαρμόσουμε τις διαστάσεις του έτσι ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό όγκο. (R)

26. Μ5: Είναι να βρούμε τον τρόπο με τον οποίο θα λυγίσουμε ώστε να μεταφέρει το μεγαλύτερο δυνατό όγκο νερού.

27. M1: Κυρία νομίζω ότι ο μέγιστος όγκος νερού που μπορεί να έχει η υδρορροή εξαρτάται από το μέγιστο όγκο που θα δώσουμε στη λαμαρίνα.

28. M2: Από το εμβαδό. (BW)

29. K: Από ποιο εμβαδό; Το εμβαδό της λαμαρίνας όταν είναι σαν φύλλο αλουμινίου εννοείς; (Πα, Δε)

30. M4: Όχι, αυτού του σχήματος το εμβαδό [δείχνει το εμβαδό διατομής στο φύλλο εργασίας]. (BW)

31 K: Γιατί το λες αυτό; Μπορείς να το εξηγήσεις; (Πε, Δε)

32. M4: Γιατί ο όγκος θα είναι αυτό επί το μήκος του συνόλου. (C)

[…]

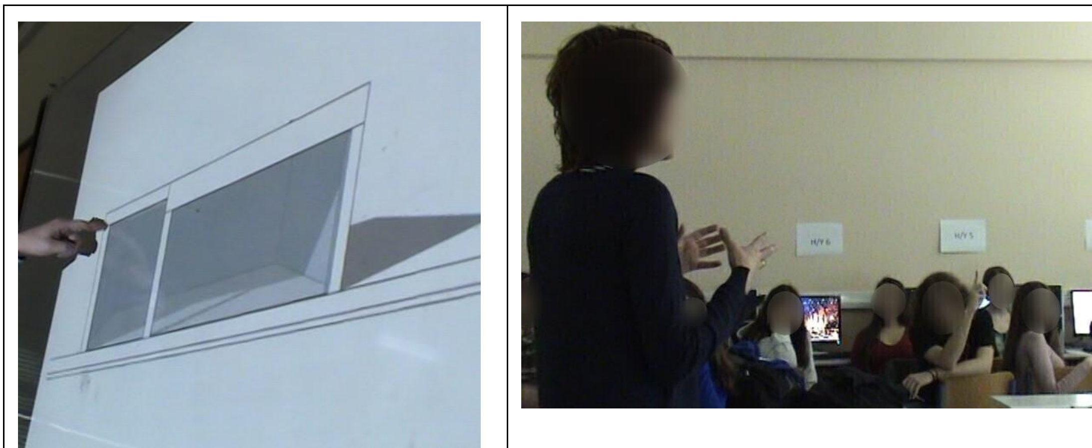
1152 K: Σου δίνουν ένα φύλλο λαμαρίνας και σου λένε πως θα τη διπλώσω για να έχω τη μέγιστη ποσότητα νερού; Τι απαντάτε; (Πεπ, Δε)

1153 M1: Το διαιρείς δια δύο και μετά πάλι δια δύο, δηλαδή διπλώνεις τη μεγαλύτερη πλευρά στη μέση και πάλι στη μέση. [*για να βρεθεί το σημείο δίπλωσης*]

Στο επεισόδιο, η Άννα μέσα από τις παρεμβάσεις της επισημαίνει στους μαθητές το κεντρικό ερώτημα ως μέρος ενός πραγματικού προβλήματος. Αρχικά, η Άννα χρησιμοποιεί παιδαγωγική παρέμβαση συμμετοχής (Πσ) για να καλέσει τους μαθητές να συμμετέχουν στη δραστηριότητα. Εκείνοι αναζητούν συγκεκριμένες διαστάσεις της λαμαρίνας, οι οποίες δεν δίνονται από την εκπαιδευτικό υποστηρίζοντας την αυθεντική κατάσταση (στίχοι 23-24). Έτσι, οι μαθητές εστιάζουν στα μαθηματικά αντικείμενα και συγκεκριμένα στις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες που συμμετέχουν στο μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων μέσω παιδαγωγικών παρεμβάσεων απάντησης και εκμαίευσης (Πα και Πε) από την εκπαιδευτικό. Οι μαθητές αναγνωρίζουν την αλληλεξάρτηση δίπλωσης-όγκου (αναγνώριση, στίχος 25) και η συζήτηση της τάξης περνά στην αλληλεξάρτηση δίπλωσης-εμβαδού διατομής (επαναδόμηση, στίχοι 28, 30). Η Άννα με τη χρήση διδακτικής παρέμβασης εστίασης στις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες (Δε) βοηθά τους μαθητές να ξεκαθαρίσουν μέσα στην τάξη ότι αναφέρονται στο εμβαδό διατομής, ενώ παράλληλα ζητά αιτιολόγηση της επιλογής τους μέσα από παιδαγωγική παρέμβαση επέκτασης (Πεπ). Οι μαθητές είναι σε θέση να δικαιολογήσουν την αλληλεξάρτηση της δίπλωσης με το εμβαδό διατομής δικαιολογώντας τη σχέση του με τον όγκο (κατασκευή, στίχος 32). Συνολικά το επεισόδιο δείχνει την ουσιαστική συμβολή της καθηγήτριας στη διατήρηση του πλαισίου της δραστηριότητας και στη συμβολή της στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών. Πράγματι, στο τέλος της δραστηριότητας μετά από την επεξεργασία συγκεκριμένων αριθμών ως διαστάσεις της λαμαρίνας, η καθηγήτρια αναζητά την απάντηση στο πρόβλημα του σχεδιασμού υδρορροής (στίχος 1152). Ο Μ1 από την ομάδα εστίασης υποδεικνύει το βέλτιστο σημείο δίπλωσης στο αρχικό πρόβλημα, δηλαδή για μία λαμαρίνα με άγνωστες διαστάσεις (στίχος 1153).

Επεισόδιο 2: Εστίαση σε μαθηματικό αντικείμενο - Νοηματοδότηση της κατεύθυνσης

Στο πρώτο μέρος της εφαρμογής δραστηριοτήτων η εκπαιδευτικός προκαλούσε ολόκληρη την τάξη να διερευνήσουν τα στοιχεία που αφορούν το πρόβλημα. Συγκεκριμένα, στην Πρόσοψης Καταστήματος η καθηγήτρια έδειχνε κάποιες φωτογραφίες στους μαθητές της τάξης με στόχο να προκύψει συζήτηση γύρω από το πραγματικό πρόβλημα. Στόχος της Άννας ήταν η εστίαση στα μαθηματικά αντικείμενα στην αρχή της δραστηριότητας μέσα από αρχική διερευνητική συζήτηση στο πλαίσιο της τάξης που αναπτύχθηκε κατά την προβολή των φωτογραφιών. Σε αυτή τη συζήτηση οι μαθητές ανακάλυψαν ορισμένους περιορισμούς της κατασκευής, όπως την αλληλεξάρτηση του πάχους του οριζόντιου δοκαριού με την απόσταση ανάμεσα στις κολώνες, η οποία προετοίμασε τους μαθητές για την εξέλιξη της δραστηριότητας. Στο ακόλουθο επεισόδιο ο Μ8 παρατηρεί από τις φωτογραφίες τη σχέση της απόστασης ανάμεσα στις κατακόρυφες κολώνες μίας πρόσοψης και του πάχους του δοκαριού στήριξης και ακολούθως η ομάδα εστίασης νοηματοδοτεί την κατεύθυνση μεταξύ μεγεθών.



Εικόνα 5 - 20: Αρχική συζήτηση στην τάξη στην Πρόσοψη Καταστήματος

250 Κ: Είναι ανοιχτό, δεν έχουμε βάλει ακόμα πόρτα. Απλά έτσι όπως το βλέπετε στο σχέδιο γιατί θεωρείτε ότι το ένα είναι μικρότερο από το άλλο; (Δε)

251 M3: Μήπως σκέφτονται να βάλουν άλλον ένα όροφο από πάνω και πρέπει να έχει περισσότερο πάχος ώστε να μπορεί να στηρίζεται καλύτερα;

252 M8: Μήπως αν ήταν πιο λεπτό σε εκείνο το σημείο θα κατέρρεε; (R)

253 K: Τι εννοείς; (Πεπ, Δε)

254 M8: Είναι μεγάλη η απόσταση μεταξύ των δύο εκεί πέρα. Επειδή το δεξί κομμάτι έχει διπλάσιο μήκος από το αριστερό πρέπει να είναι διπλάσιο στο πάχος και το δοκάρι; (BW, C)

255 K: Καταρχήν να καταλάβουμε το πρόβλημα. Παιδιά δεν θα το φτιάξετε μόνοι σας το αρχείο. Είναι έτοιμο το αρχείο. Απλά καταρχήν να καταλάβουμε το πρόβλημα. Μπορείτε να μου πείτε τι ζητάμε; Ανατίθεται στο γραφείο το δικό σας ο σχεδιασμός της πρόσοψης και αναλαμβάνετε εσείς να προτείνετε την κατασκευή που θα εξασφαλίσει την καταλληλότερη βιτρίνα στο κατάστημα, αυτό είναι το πρόβλημα. Εντάξει; (Πσ, Πδ)

256 M1: Εντάξει το κατάλαβα. Λοιπόν πρέπει να βρούμε πως θα μεγαλώσει το πάχος αυτού του μέρους της άνω βιτρίνας. (R)

257 K: Λοιπόν πριν πάμε στους υπολογιστές, σκέφτεστε κάτι έτσι όπως συζητήσαμε το πρόβλημα; (Δε)

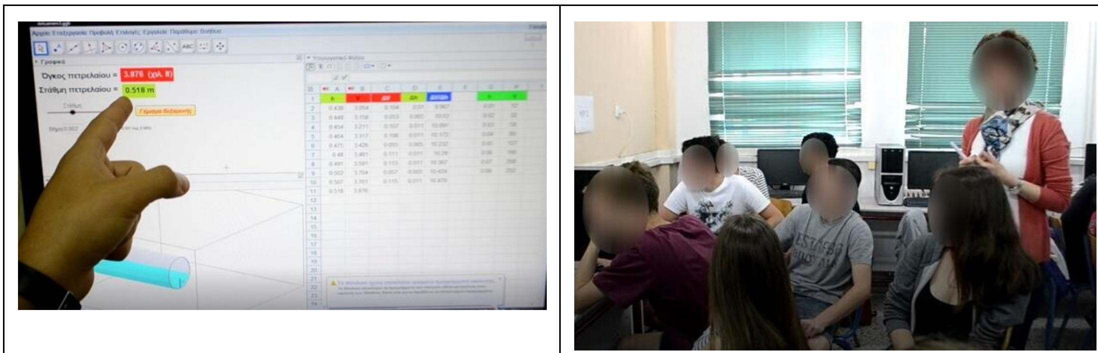
258 M1: Εμείς με το M2 σκεφτήκαμε ότι όσο μεγαλώσουμε τη βιτρίνα, το οριζόντιο δοκάρι το πάχος του αυξάνεται και αφού το μέγεθος της πόρτας παραμένει σταθερό, ενώ μειώνεται η άνω βιτρίνα. Μειώνεται το πάχος της άνω βιτρίνας, κατεβαίνει δηλαδή. (BW, C)

259 K: Κατεβαίνει η άνω βιτρίνα, πράγμα το οποίο δεν το θέλουμε (Δε).

Στο επεισόδιο η Άννα πραγματοποιεί διδακτική παρέμβαση εστίασης στα μαθηματικά αντικείμενα της δραστηριότητας (Δε) σχετικά με τις φωτογραφίες που έχουν δει οι μαθητές της τάξης για να προκύψει η σημασία του οριζόντιου δοκαριού. Ο M8 παρατηρεί τις φωτογραφίες που δίνονται και αναγνωρίζει τον ρόλο του δοκαριού στην κατασκευή (αναγνώριση, στίχος 252), ενώ ακολούθως κατασκευάζει την αλληλεξάρτηση του πάχους του δοκαριού με την απόσταση ανάμεσα στις κατακόρυφες κολώνες (επαναδόμηση, κατασκευή, στίχος 254) μέσα από παιδαγωγική παρέμβαση επέκτασης της εκπαιδευτικού (Πεπ). Στη συνέχεια, η Άννα δίνει έμφαση στο πραγματικό πρόβλημα και στο κεντρικό ερώτημα της δραστηριότητας με μία παιδαγωγική παρέμβαση διευκόλυνσης (Πδ) υποστηρίζοντας το πλαίσιο της δραστηριότητας (στίχος 255). Ο M1 μέσα από την παρέμβαση της εκπαιδευτικού, αναγνωρίζει ότι θα πρέπει να εστιάσουν στη μελέτη της άνω βιτρίνας (αναγνώριση, στίχος 256). Ακολούθως, ο Μ1 νοηματοδοτεί την κατεύθυνση (κατασκευή, στίχος 258), δίνοντας βαρύτητα στο πάχος της άνω βιτρίνας το οποίο περιορίζεται με την μετακίνηση του οριζόντιου δοκαριού καθώς αυξάνεται η απόσταση ανάμεσα στις κατακόρυφες κολώνες. Η Άννα μέσα από την παρέμβαση που έκανε και επέτρεψε στον Μ8 να κατασκευάσει την αλληλεξάρτηση ποσοτήτων φαίνεται να βοήθησε τους μαθητές της ομάδας εστίασης να μεταβούν απ' ευθείας στη νοηματοδότηση της κατεύθυνσης παρακάμπτοντας τη νοηματοδότηση της συσχέτισης.

Επεισόδιο 3: Υποστήριξη σύνδεσης αναπαραστάσεων - Ποσό μεταβολής

Η συμβολή της Άννας ήταν κρίσιμη κατά την εξέλιξη των δραστηριοτήτων και ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που υπήρχε διερευνητική συζήτηση στην τάξη. Για παράδειγμα, στο επόμενο επεισόδιο από τη Δεξαμενή Πετρελαίου, οι μαθητές είχαν βρει τον αλγεβρικό τρόπο υπολογισμού του καυσίμου χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις της ράβδου και είχαν χαράξει τη γραφική παράσταση της συμμεταβολής των σχετικών μεταβλητών (ύψους – όγκου). Η Άννα έθεσε το τελευταίο ερώτημα στην τάξη και προκάλεσε τη νοηματοδότηση του ποσού μεταβολής από ένα μαθητή της τάξης. Στόχος της ήταν η σύνδεση των αναπαραστάσεων κατά τον πειραματισμό με τα ψηφιακά εργαλεία.



Εικόνα 5 - 21: Πειραματισμός με τα ψηφιακά εργαλεία στη Δεξαμενή Πετρελαίου

341 Κ: Και ερχόμαστε στο τελευταίο ερώτημα. Αν η μεταβολή της ένδειξης της ράβδου είναι το ¼ του ύψους μίας δεξαμενής θα πληρώνατε για το γέμισμα κατά το ¼ της δεξαμενής; Σκεφτείτε πάνω σε αυτά που έχετε πει ήδη. (Πσ - Δσα)

342 Μ6: Ανάλογα με το αν υπήρχε πριν πετρέλαιο το ¼ έχει διαφορά δεν είναι πάντα το ίδιο. (R)

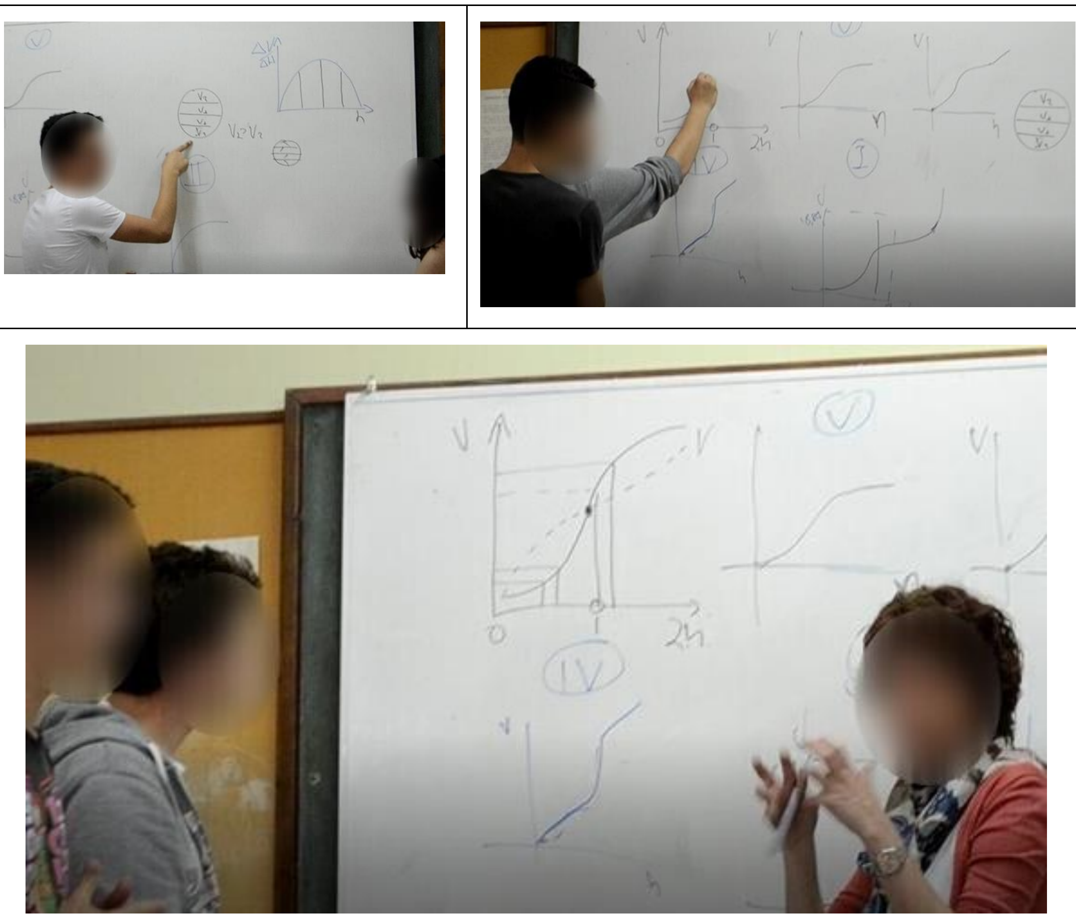
343 Κ: Μπράβο! Είμαστε στην οριζόντια τοποθέτηση ωραία; Και ουσιαστικά προσπαθούμε να ελέγξουμε την παραλαβή. Και λέει ο Μ6. Ακόμα και στην οριζόντια τοποθέτηση που μελετάμε υπάρχει διαφορά στο ¼ ύψους με το ¼ του όγκου. Τι σημαίνει το ¼; Ενώ έχει ήδη πετρέλαιο μέσα ή ¼ ενώ είναι άδεια η δεξαμενή; Γιατί το λέει αυτό μπορείτε να πείτε; (Πεπ, Δσα)

344 Μ6: Γιατί η επιφάνεια του πετρελαίου ανάλογα με το αν θα είναι στο κέντρο της δεξαμενής ή κάτω θα έχει διαφορά, ενώ στο κέντρο της δεξαμενής θα έχει ας πούμε επιφάνεια από άκρη ως άκρη τη διάμετρο του φανταστικού κύκλου που έχουμε δημιουργήσει ενώ αν είναι κάτω θα είναι μικρότερο. (BW, C)

Στο επεισόδιο η Άννα θέτει το τελευταίο ερώτημα της Δεξαμενής Πετρελαίου για την οριζόντια τοποθέτηση με μία διδακτική παρέμβαση για την υποστήριξη σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα) και καλεί όλους τους μαθητές να σκεφτούν σε αυτό με μία παιδαγωγική παρέμβαση συμμετοχής (Πσ). Ο Μ6 αναγνωρίζει ότι θα πρέπει να διευκρινιστεί αν έχει η δεξαμενή πετρέλαιο (αναγνώριση, στίχος 342). Στη συνέχεια, η Άννα επαναλαμβάνει τον συλλογισμό του Μ6 και κάνει μία παιδαγωγική παρέμβαση επέκτασης (Πεπ) βασιζόμενη στη σκέψη του Μ6. Παράλληλα πραγματοποιεί διδακτική παρέμβαση για την υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων μέσα από προκλήσεις, αιτιολογήσεις και τονίζοντας το πλαίσιο της δραστηριότητας (στίχος 343). Ο Μ6 δικαιολογεί το επιχείρημά ότι η αύξηση στο ¼ του ύψους του πετρελαίου είναι διαφορετική ως προς τον όγκο ανάλογα με το περιεχόμενο της δεξαμενής. Αναλυτικότερα, ο Μ6 χρησιμοποιεί τη διατομή του σχήματος της δεξαμενής που είναι κύκλος και νοηματοδοτεί το ποσό μεταβολής του όγκου συγκρίνοντας το κέντρο της δεξαμενής με την αρχή και το τέλος (επαναδόμηση, κατασκευή, στίχος 344). Στη συνέχεια του επεισοδίου οι μαθητές υπολόγισαν αριθμητικά το ποσό μεταβολής από τα ψηφιακά εργαλεία και παρατήρησαν ότι υπάρχει διαφορά για την περίπτωση που η δεξαμενή είναι άδεια όταν γεμίζει το ¼ της στάθμης και όταν γεμίζει το ¼ του όγκου της δεξαμενής. Συνολικά η καθηγήτρια βοήθησε ενισχύοντας τη σκέψη των μαθητών μέσω παιδαγωγικής παρέμβασης επέκτασης και υπογράμμισε την αξιοποίηση του πίνακα τιμών από το ψηφιακό εργαλείο με παράλληλη αναφορά στη γραφική παράσταση της πλήρωσης της δεξαμενής. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την υποστήριξη της νοηματοδότησης του ποσού μεταβολής από τους μαθητές (στίχος 344).

Επεισόδιο 4: Υποστήριξη σύνδεσης αναπαραστάσεων - Πηλίκο διαφορών (στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής)

Η Άννα στη Δεξαμενή Πετρελαίου συνέχισε να δίνει έμφαση στη συνεργασία μεταξύ των ομάδων μαθητών και στην νοηματοδότηση του ρυθμού μεταβολής μέσα από τις παρεμβάσεις στη σχολική τάξη. Στο επόμενο επεισόδιο που είναι από τη διερεύνηση του τελευταίου ερωτήματος στη σχολική τάξη, οι μαθητές έχουν υπολογίσει αριθμητικά τη διαφορά για την περίπτωση που η δεξαμενή είναι άδεια όταν γεμίζει το ¼ της στάθμης και όταν γεμίζει το ¼ του όγκου της δεξαμενής. Η Άννα επιτρέπει τους μαθητές να διερευνήσουν το πρόβλημα υποστηρίζοντας τις συνεργασίες από διαφορετικές ομάδες και οδηγεί τους μαθητές από το ποσό της μεταβολής στη νοηματοδότηση του πηλίκου διαφορών. Στόχος της ήταν η σύνδεση της γραφικής παράστασης του ύψους-όγκου με τα αλγεβρικά στοιχεία που έχουν υπολογίσει οι μαθητές.



Εικόνα 5 - 22: Πειραματισμός μαθητών και παρέμβαση εκπαιδευτικού

670 Κ: Ωραία. Άρα λέτε ότι αυτό που υπολογίσαμε εμείς με τη μέτρηση δεν είναι ακριβώς ίδιο με το ¼ του όγκου της δεξαμενής. (Δσα)

671 Μ7: Ωραία. Όταν όμως φτάσουμε τη στάθμη στο 1 μέτρο, δηλαδή στο μισό της δεξαμενής, παρατηρούμε ότι εκεί είναι το μισό, ο μισός όγκος πετρελαίου, οπότε σε αυτό που είπε ο Μ6 αν έχουμε άδεια ή γεμάτη δεξαμενή του πετρελαίου, αν έχουμε το ¼ ήδη, αν αγοράσουμε ¼ τότε θα κερδίσουμε εμείς, ενώ αν είναι άδεια η δεξαμενή τότε δεν μας συμφέρει. (R)

672 Κ: Δηλαδή, αν η δεξαμενή είναι άδεια στο ¼ δεν μας συμφέρει, στο μισό όμως συμφέρει. Ουσιαστικά αυτό μου λέτε όταν είναι άδεια η δεξαμενή έτσι; (Πα)

673 Μ1: Όχι, αν έχει ήδη ¼ τότε εμείς κερδίζουμε.

674 Μ3: Κι εμείς αυτό βρήκαμε. Πήραμε τη δεξαμενή να έχει ήδη μέσα πετρέλαιο και η στάθμη να είναι στο 0,5 που είναι το ¼ της διαμέτρου και μετά τη γεμίσαμε μέχρι το 1 που είναι το μισό. Θέλαμε να δούμε αν ο τελικός όγκος μείον τον αρχικό όγκο ισούται με το ¼ του όγκου της δεξαμενής που δεν ίσχυε γιατί είναι παραπάνω. Ολόκληρη η δεξαμενή έχει 18,85 τόνους. Εμείς βρήκαμε ότι το ΔV είναι 5 και κάτι και αν αυτό το πολ/σεις επί 4 κάνει 22 και κάτι. (BW)

675 Μ6: Ουσιαστικά δηλαδή είναι ανάλογα με το πόσο καύσιμο έχει η δεξαμενή μέσα. (R)

676 Κ: Ουσιαστικά λέει είναι ανάλογα με το πόσο καύσιμο έχει η δεξαμενή μέσα. Πώς είναι ανάλογα με το πόσο καύσιμο έχει μέσα η δεξαμενή; (Δσα)

677 Μ7: Λογικά εμάς μας συμφέρει το ύψος να μελετηθεί προς το κέντρο της έτσι όπως το βλέπουμε για να μη γίνει η διάμετρος όσο πλησιάζουμε προς τα πάνω ή προς τα κάτω… Έτσι θα έχουμε κι εμείς κέρδος.

678 Κ: Δηλαδή θα μπορούσατε ας πούμε κάπως με κάποιο τρόπο να μου δείξετε αυτό που λέτε ότι αλλάζει, ότι είναι διαφορετική η αλλαγή. Ότι αλλάζει το καύσιμο με την ένδειξη, μισό λεπτό. Ότι αλλάζει το καύσιμο που μας προμηθεύουν με την ένδειξη που μετράμε εμείς με τη δεξαμενή, αλλά αλλιώς αλλάζει όταν είναι γεμάτη κατά 1/4 , αλλιώς αλλάζει όταν είναι γεμάτη κατά ½.. όχι με κάποιον τύπο.. Μπορείτε να μου το δείξετε αυτό κάπως; (Πεπ, Δσα)

679 Μ4: Αυτό που σκέφτηκα εγώ είναι στην περίπτωση που γεμίζουμε το ¼ του ύψους της δεξαμενής και παίρνουμε ¼ του όγκου του πετρελαίου, το πηλίκο ΔV/Δh δηλαδή η διαφορά στον όγκο προς τη διαφορά του ύψους δεν θα είναι σταθερό, ενώ αν όλη η δεξαμενή είναι ομοιόμορφη και κάθε φορά που γεμίζαμε ένα τέταρτο παίρναμε ¼ του όγκου, το πηλίκο αυτό θα ήταν σταθερό. Οπότε θα ψάξουμε να βρούμε την περιοχή στη δεξαμενή που αυτό το πηλίκο είναι όσο πιο κοντά γίνεται σε κάτι σταθερό. (BW, C)

Στο επεισόδιο η Άννα προκαλεί τους μαθητές να νοηματοδοτήσουν τον ρυθμό μεταβολής κατά τη διερεύνηση του τελευταίου ερωτήματος της Δεξαμενής Πετρελαίου. Η Άννα αρχικά επαναλαμβάνει ότι υπάρχει αλγεβρική διαφορά από τη σύγκριση στην περίπτωση της άδειας δεξαμενής μεταξύ ¼ μεταβολής του ύψους και του όγκου με διδακτική παρέμβαση για την υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα). Στη συνέχεια, ο Μ7 αναγνωρίζει ότι άλλοτε συμφέρει το πρατήριο και άλλοτε τον προμηθευτή η πλήρωση του ¼ του ύψους της δεξαμενής με καύσιμο σε σχέση με το ¼ του όγκου της (αναγνώριση, στίχος 671). Κατόπιν, η Άννα κάνει μία παιδαγωγική παρέμβαση απάντησης (Πα), καθώς επαναδιατυπώνει τα λεγόμενα του μαθητή Μ7 επιτρέποντας στον μαθητή Μ3 να παρουσιάσει τη διερεύνηση της ομάδας του υπολογίζοντας τις διαφορές στον όγκο (επαναδόμηση, στίχος 674). Ακολούθως, ο Μ6 αναγνωρίζει ξανά ότι υπάρχουν διαφορές ανάλογα με τη στάθμη του καυσίμου πριν την παραλαβή νέου. Η Άννα κάνει διδακτική παρέμβαση για την υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα) πάνω στα λεγόμενα του Μ6, επιτρέποντας στον Μ7 να διαπιστώσει τις κρίσιμες περιοχές που υπάρχει μεγαλύτερη αύξηση της ποσότητας του όγκου (στίχος 677). Έπειτα, η Άννα κάνει μία διδακτική παρέμβαση υποστηρίζοντας τη σύνδεση αναπαραστάσεων (Δσα) και μία παιδαγωγική παρέμβαση επέκτασης πιέζοντας τους μαθητές για δικαιολόγηση. Ο Μ4 χρησιμοποιεί το πηλίκο διαφορών για να δείξει ότι υπάρχουν διαφορές στον τρόπο γεμίσματος της δεξαμενής (επαναδόμηση, κατασκευή, στίχος 679). Καταλήγοντας, επαναδιατυπώνοντας τα ερωτήματα των μαθητών και προκαλώντας τους να διερευνήσουν περεταίρω την κατάσταση η Άννα υποστήριξε τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις αναπαραστάσεων και να αιτιολογούν τις σκέψεις τους με αποτέλεσμα να δείχνουν αλγεβρικά και γραφικά ότι υπάρχουν διαφορές στον τρόπο γεμίσματος της δεξαμενής.

Σύνοψη του ρόλου της εκπαιδευτικού Γ

Η Άννα μέσα από τα διαφορετικά επεισόδια φαίνεται να χρησιμοποιεί ένα κεντρικό ερώτημα στις δραστηριότητες κάνοντας παράλληλα συνδέσεις με το πλαίσιο της δραστηριότητας, τις οποίες κάνει εμφανείς στους μαθητές και προκαλώντας συζητήσεις/συνεργασίες μέσα στην τάξη. Επίσης, φαίνεται να θέτει επιπλέον ερωτήματα στους μαθητές προκαλώντας τους να νοηματοδοτήσουν τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, πραγματοποιεί παιδαγωγικές παρεμβάσεις συμμετοχής, εκμαίευσης, απάντησης, διευκόλυνσης και επέκτασης. Ιδιαίτερα χρησιμοποιεί τις παρεμβάσεις επέκτασης για να ενισχύσει τη σκέψη των μαθητών, να ζητήσει αιτιολογήσεις ή να πιέσει προς κάποια γενίκευση. Έτσι, για παράδειγμα, μέσα από παιδαγωγική παρέμβαση επέκτασης και διευκόλυνσης αναδείχθηκε το πλαίσιο της δραστηριότητας για την εστίαση στα μαθηματικά αντικείμενα (επεισόδια 1, 2). Ακόμη, φαίνεται να την ενδιαφέρει η σύνδεση αναπαραστάσεων από τους μαθητές (επεισόδια 3, 4), η οποία υποστηρίζεται από το περιβάλλον προκλήσεων και διερεύνησης, αφού εστιάζει στις αιτιολογήσεις των μαθητών. Συνολικά οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού αναφορικά με τη συχνότητα εμφάνισης στα επεισόδια που αναλύθηκαν φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Παρεμβάσεις εκπαιδευτικού	**Τύπος παρέμβασης**	**Συχνότητα**
Παιδαγωγικές (έμφαση στη διερεύνηση)	Συμμετοχής (Πσ)	3
	Εκμαίευσης (Πε)	1
	Απάντησης (Πα)	2
	Διευκόλυνσης (Πδ)	1
	Επέκτασης (Πεπ)	4
Διδακτικές (έμφαση στο περιεχόμενο)	Εστίασης σε μαθηματικό αντικείμενο (Δε)	2
	Υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα)	2

Πίνακας 12: Πίνακας παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού στο σχολείο Γ

Πιο συγκεκριμένα, στην εφαρμογή του Σχεδιασμού Υδρορροής η Άννα έδωσε μεγάλη βαρύτητα στη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας και μέσα από διαφορετικές παιδαγωγικές και διδακτικές παρεμβάσεις κατά την εφαρμογή της η τελική απάντηση των μαθητών αφορούσε την εργασία τους ως σχεδιαστές (επεισόδιο 1). Στην εξέλιξη των δραστηριοτήτων η Άννα φαίνεται να ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για την σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας. Για παράδειγμα, στην Πρόσοψη Καταστήματος έδωσε ιδιαίτερη βαρύτητα από την αρχή του πειραματισμού κατά την προβολή φωτογραφιών, συζητώντας τα κρίσιμα στοιχεία που εμφανίζονται σε μία κατασκευή. Αυτή η δράση της Άννας διευκόλυνε τη σκέψη των μαθητών και υποστήριξε την νοηματοδότηση της κατεύθυνσης κατά τη διερεύνηση του προβλήματος πριν τη χρήση ψηφιακών εργαλείων (επεισόδιο 2). Επίσης, στη Δεξαμενή Πετρελαίου ενδιαφέρεται για ανοικτή διερεύνηση του προβλήματος μέσα στην τάξη και επαναλαμβάνει κρίσιμα σημεία της διερεύνησης των μαθητών (επεισόδιο 3). Επίσης, ενδιαφέρεται για τη συνεργασία των μαθητών όχι μόνο εντός των ομάδων αλλά και μεταξύ τους (επεισόδιο 4), το οποίο πραγματοποιήθηκε με τη χρήση διδακτικών παρεμβάσεων σύνδεσης αναπαραστάσεων μέσα από υποστήριξη της διερεύνησης και των αιτιολογήσεων των μαθητών.

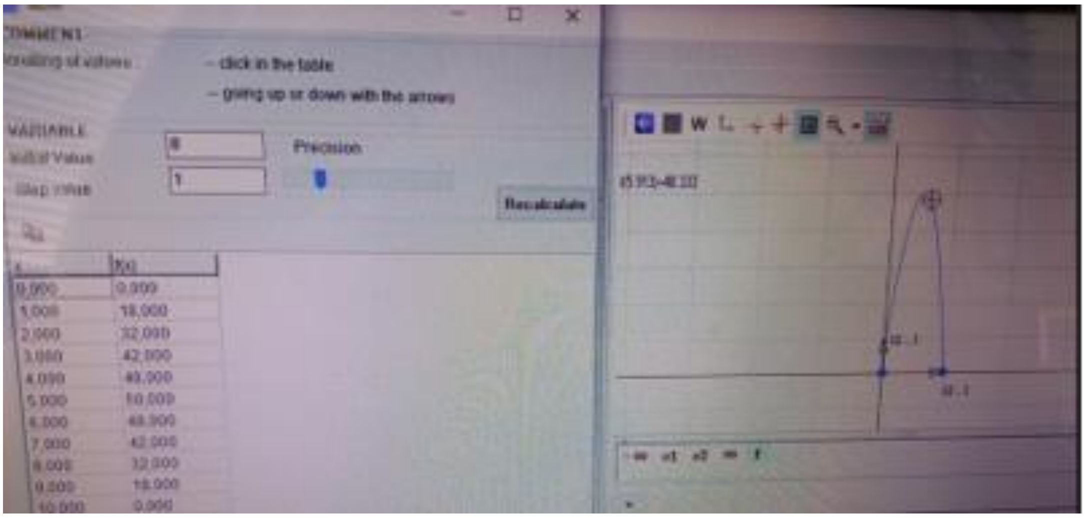
Συνολικά, η εκπαιδευτικός ενδιαφέρεται για τη διερεύνηση μαθηματικών ιδεών χωρίς να χάνεται η σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας, την αιτιολόγηση των απόψεων των μαθητών, την επανάληψη των ενδιαφερουσών απόψεων και τη συμμετοχή των μαθητών. Παράλληλα, είναι ουσιώδεις οι διδακτικές παρεμβάσεις πρόκλησης και διερεύνησης υποστηρίζοντας αρκετούς μαθητές σε σύνθετες νοηματοδοτήσεις της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Συμπερασματικά, οι παρεμβάσεις που κάνει η Άννα μπορούν να χαρακτηρίσουν τη διδασκαλία της ως διερευνητική με έμφαση στις συνδέσεις με το πλαίσιο της δραστηριότητας.

5.3.2. Ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στην εξέλιξη των μαθησιακών τροχιών στο σχολείο Γ

Ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στο σχολείο Γ φαίνεται μέσα από τα ακόλουθα επεισόδια, στα οποία οι μαθητές χρησιμοποιούν αλγεβρικό συμβολισμό στη νοηματοδότηση της συνάρτησης μέσω των διαθέσιμων αναπαραστάσεων, μετακινούν τα ελεύθερα σημεία στη δυναμική γεωμετρία, ορίζουν συμμεταβαλλόμενα μεγέθη και τα επιλέγουν κατάλληλα ως μεταβλητές και νοηματοδοτούν το ποσό μεταβολής και το πηλίκο διαφορών μέσω των διαθέσιμων αναπαραστάσεων.

Επεισόδιο 1: Πολλαπλές αναπαραστάσεις και αλγεβρικός συμβολισμός

Στη δραστηριότητα Σχεδιασμός Υδρορροής οι μαθητές της ομάδας εστίασης, πέρα από τον πειραματισμό με τα χειραπτικά εργαλεία χρησιμοποίησαν τις δυνατότητες του λογισμικού Casyopée. Πιο συγκεκριμένα, στη φάση του αυτόνομου πειραματισμού στις ομάδες μαθητών ο ερευνητής έκανε παρέμβαση στην ομάδα εστίασης μόλις είχαν δημιουργήσει την συνάρτηση που μοντελοποιεί το εμβαδό διατομής επιλέγοντας τις κατάλληλες μεταβλητές. Στο επόμενο επεισόδιο, οι μαθητές έχουν δημιουργήσει τη συνάρτηση πλευράς – εμβαδού και χρησιμοποιούν τον πίνακα τιμών νοηματοδοτώντας την κατεύθυνση μεγεθών και ακολούθως τον συντονισμό μεταβλητών.



Εικόνα 5 - 23: Πειραματισμός μαθητών με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις

881 Ε: Αυτός ας πούμε είναι έτοιμος να διπλώσει στη δίπλωση 2,16,2. Γιατί δεν είναι καλή αυτή η δίπλωση;

882 Μ2: Κοιτάχτε, εδώ πέρα ως f(x) έχουμε ορίσει στην άλγεβρα τη συνάρτηση την οποία μας βρίσκει τη μία πλευρά. Και εδώ πέρα βλέπουμε τη μέγιστη τιμή που

έχουμε βρει ότι είναι 50, αν έχουμε την κάτω πλευρά 10 εκ. και τις άλλες δύο να είναι 5 και 5 εκ.. (R)

883 M1: Ανεβάζοντας και κατεβάζοντας αυτή την πλευρά βλέπουμε ότι τα νούμερα στους υπολογισμούς μικραίνουν είτε ανεβαίνουμε είτε κατεβαίνουμε. (BW, C)

[…]

929 E: Αυτό είναι προφανές, αλλά πως αλλάζουν νομίζω ότι έχει σημασία. Αν σου έλεγε ότι εγώ το έχω διπλώσει 1,18,1 τι θα κάνατε; Πώς φαίνεται αυτό από τον πίνακα τιμών;

930 M1: Θα λέγαμε πως μεταβάλλονται τα δύο (R)

931 M2: Αυτό είναι η μικρή πλευρά, αυτό είναι η μεγάλη και αυτό είναι το εμβαδό; Όσο αυξάνεις τη μικρή μέχρι το 5 παίρνεις το μέγιστο ενώ από δω… (BW)

932 M1: Παίρνουμε τη σχέση g(x), f(x) καθώς μεταβάλλεται το x. (C)

Στο επεισόδιο η δυνατότητα του Casyopée να δημιουργείται συνάρτηση από δύο συμμεταβαλλόμενα μεγέθη αξιοποιείται αρχικά από τους μαθητές, οι οποίοι αναγνωρίζουν τη θέση του μεγίστου μόλις δημιούργησαν συνάρτηση (αναγνώριση, στίχος 882). Επίσης, από τη μετακίνηση του ελεύθερου σημείου νοηματοδοτούν την κατεύθυνση μεταβολής των μεγεθών (επαναδόμηση, κατασκευή στίχος 883). Στην εξέλιξη του επεισοδίου, ο ερευνητής παρακινεί τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις. Από τη γραφική παράσταση και τον πίνακα τιμών οι μαθητές αναγνωρίζουν τη συμμεταβολή πλευράς – εμβαδού (στίχος 930), ενώ ακολούθως χρησιμοποιούν και αλγεβρικό συμβολισμό για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης (επαναδόμηση, κατασκευή στίχοι 931, 932). Συνεπώς, οι μαθητές αρχικά νοηματοδότησαν την κατεύθυνση μεγεθών, ενώ ακολούθως τον συντονισμό μεταξύ των μεταβλητών. Η μετακίνηση προς την κατεύθυνση μεγεθών οφείλεται στις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη μετάβαση από τα μεγέθη στις μεταβλητές, ενώ η μετάβαση στον συντονισμό οφείλεται στον ρόλο του πίνακα τιμών για τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών.

Επεισόδιο 2: Δυναμική μετακίνηση σημείου και επιλογή μεταβλητών

Στη δραστηριότητα Πρόσοψη Καταστήματος οι μαθητές της ομάδας εστίασης χρησιμοποίησαν τη δυναμική μετακίνηση σημείων στη νοηματοδότηση της κατεύθυνσης και στην κατάλληλη επιλογή μεταβλητών που μοντελοποιούν το πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, στη φάση του αυτόνομου πειραματισμού στις ομάδες μαθητών, οι μαθητές της ομάδας εστίασης πειραματίζονταν με τη δυναμική μετακίνηση του ελεύθερου σημείου Ε πριν τη δημιουργία υπολογισμών.

411 Μ2: Όσο μετακινούμε το σημείο Ε, τα εμβαδά αλλάζουν (R)

412 Μ1: Όσο μεγαλώσουμε τη βιτρίνα, μεγαλώνει το πάχος του οριζόντιου δοκαριού και αφού το μέγεθος της πόρτας παραμένει σταθερό μειώνεται η άνω βιτρίνα. Μειώνεται το πάχος της άνω βιτρίνας, κατεβαίνει δηλαδή (BW, C1)

413 Ε: Ωραία τι παρατηρούμε τώρα;

414 Μ1: Φέρε το πάρα πολύ κοντά

415 Μ2: Άμα το φέρουμε πολύ κοντά θα έχουμε πολύ μικρή βιτρίνα και τη μέγιστη άνω βιτρίνα

416 Μ1: Αυτή εδώ είναι η βιτρίνα. Όσο μικραίνουμε την κάτω βιτρίνα, η πάνω βιτρίνα μεγαλώνει (BW, C1)

417 Μ2: Και μικραίνει και το δοκάρι όμως, το πάχος του δοκαριού

[…]

533 Μ1: Έχουμε υπολογίσει το ΑΚ, το ΝΕ, το ΟΕ, οπότε θα πάρω ως ανεξάρτητη το ΝΕ γιατί αυτό μετακινείται. (R, BW)

534 Μ2: Σωστά, γιατί όσο μεγαλώνουμε την απόσταση ανάμεσα στις δύο κολώνες τόσο μεγαλύτερη είναι η συνολική βιτρίνα. Εμείς θέλουμε την καταλληλότερη, άρα μία αρκετά μεγάλη κάτω βιτρίνα και μία ικανοποιητική άνω βιτρίνα. Άρα στους υπολογισμούς πρέπει να φτιάξουμε μόνο το εμβαδό της άνω βιτρίνας που θα μεταβάλλεται με αυτή την ανεξάρτητη μεταβλητή (BW, C2)

Στο επεισόδιο οι μαθητές από τη μετακίνηση του ελεύθερου σημείου Ε αναγνώρισαν τη συσχέτιση μεταξύ μεγεθών (αναγνώριση, στίχος 411). Ωστόσο, χωρίς να έχουν δημιουργήσει υπολογισμούς νοηματοδότησαν την κατεύθυνση μεταξύ των μεγεθών, διατυπώνοντας μερικές φορές λανθασμένες παρατηρήσεις (επαναδόμηση, κατασκευή1, στίχοι 412, 416). Στην εξέλιξη του επεισοδίου οι μαθητές δημιούργησαν υπολογισμούς και μέσω της δυναμικής μετακίνησης σημείων αναγνώρισαν ποια είναι η κατάλληλη ανεξάρτητη μεταβλητή (στίχος 533). Ακολούθως, σύμφωνα με το κεντρικό ερώτημα της δραστηριότητας επιλέγουν σωστά και την εξαρτημένη μεταβλητή κατασκευάζοντας την επιλογή μεταβλητών (κατασκευή2, στίχος 534). Συνεπώς, στο επεισόδιο φαίνεται ο ρόλος της δυναμικής μετακίνησης του ελεύθερου σημείου, της δημιουργίας υπολογισμών και της επιλογής μεταβλητών, που αποτελούν λειτουργίες του λογισμικού Casyopée.

Επεισόδιο 3: Διαφορετικές αναπαραστάσεις και ρυθμός μεταβολής

Στη δραστηριότητα της Πρόσοψης Καταστήματος οι μαθητές της ομάδας εστίασης χρησιμοποιούσαν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις και πειραματίζονταν με τις τιμές της συνάρτησης, αλλά και μελετώντας τις διαφορές μεταξύ των τιμών της συνάρτησης. Οι μαθητές είχαν δημιουργήσει τις απαραίτητες συναρτήσεις f, g και h για το εμβαδό της άνω και κάτω βιτρίνας και το εμβαδό του αθροίσματος αντίστοιχα. Ωστόσο, ένας μαθητής αναρωτιόταν πώς είναι δυνατόν για την h(x)=f(x)+g(x) να είναι αύξουσα, ενώ η f(x) είναι φθίνουσα σε ένα διάστημα. Με άλλα λόγια, η ερώτηση αφορά τη σύγκριση των αντίστοιχων ρυθμών μεταβολής. Στο επόμενο επεισόδιο οι μαθητές της ομάδας εστίασης έχουν παρατηρήσει τη συμμετρία στις μεταβολές των τιμών της συνάρτησης και πειραματίζονται με τον πίνακα τιμών προκειμένου να απαντήσουν στο ερώτημα του μαθητή νοηματοδοτώντας το ποσό μεταβολής και ακολούθως το πηλίκο διαφορών.

908. M2: Πως γίνεται να μικραίνει η βιτρίνα και να μεγαλώνει το συνολικό. Αφού αυξάνεται διπλάσια η μεγαλύτερη. (R)

909. M1: Γιατί ο ρυθμός που αυξάνεται η μεγάλη είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό που μειώνεται η μικρή. Κατάλαβες τι είπα; Η μεγάλη αυξάνεται με ένα σταθερό ρυθμό. Όχι με ένα σταθερό, με ένα ρυθμό. Η μικρή μειώνεται με έναν άλλο ρυθμό. Ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η μεγάλη είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό με τον οποίο μειώνεται, άρα επομένως λογικό είναι να συνεχίσει να αυξάνεται. (R, BW)

910. M2: Βρήκαμε ότι ο ρυθμός αύξησης της κάτω βιτρίνας είναι πολύ μεγαλύτερος από τον ρυθμό με τον οποίο μειώνεται η άνω βιτρίνα (C).

911. E: Τι εννοείτε όταν αναφέρεστε στον ρυθμό μεταβολής;

912. M2: Ότι η κάτω βιτρίνα αυξάνεται κατά 0,88. (BW)

913. M1: Αυξάνεται συνέχεια με σταθερό ρυθμό και παρατηρούμε ότι η άνω βιτρίνα μειώνεται εδώ για παράδειγμα περίπου 0.02, οπότε…

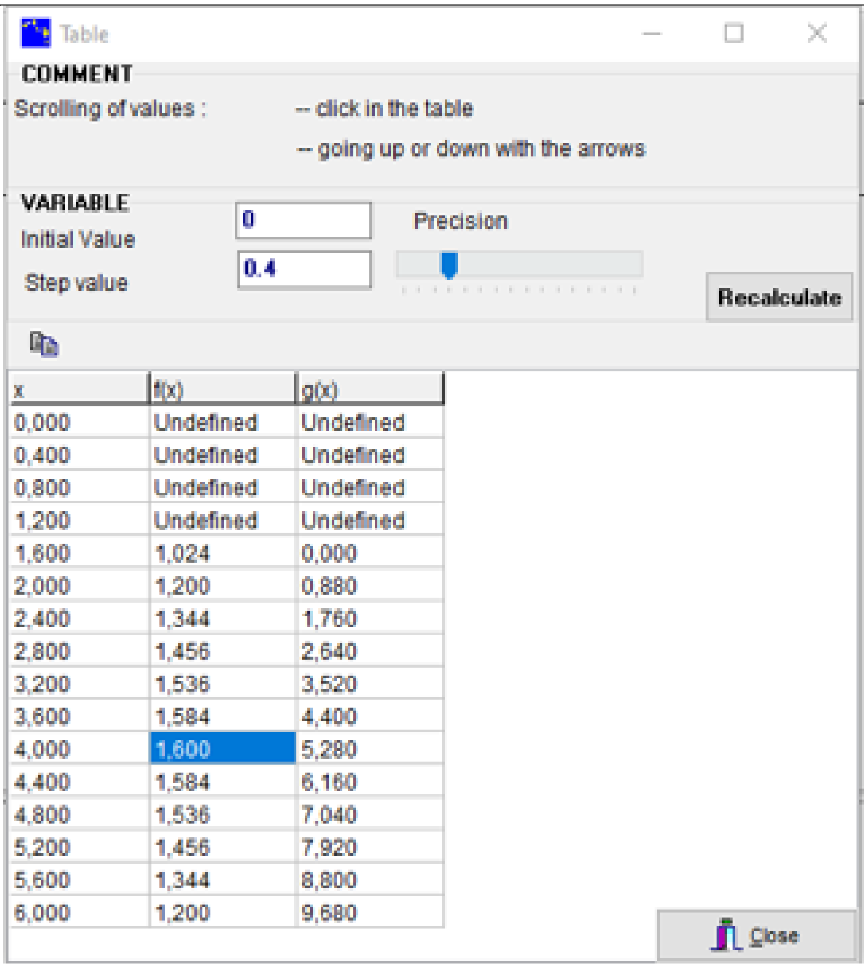
914. M2: Να εδώ μειώνεται περίπου 0,14.

915. M1: Δεν φτάνει ποτέ το 0,88 (BW)

916. M2: Άρα συμπεραίνουμε ότι το συνολικό εμβαδό της βιτρίνας θα συνεχίσει να αυξάνεται. (C)

917. E: Άρα η διαφορά σε ένα βήμα είναι 0.02 και για να φτάσετε στον ρυθμό τι θα κάνετε;

918. M1: Ουσιαστικά ο ρυθμός μεταβολής είναι δέλτα κάτι προς dt. Εδώ, δεν έχουμε dt, άρα ουσιαστικά το δέλτα είναι 0.88 προς το βήμα που θα το ορίσουμε εμείς!



x	f(x)	g(x)
0,000	Undefined	Undefined
0,400	Undefined	Undefined
0,800	Undefined	Undefined
1,200	Undefined	Undefined
1,600	1,024	0,000
2,000	1,200	0,880
2,400	1,344	1,760
2,800	1,456	2,640
3,200	1,536	3,520
3,600	1,584	4,400
4,000	1,600	5,280
4,400	1,584	6,160
4,800	1,536	7,040
5,200	1,456	7,920
5,600	1,344	8,800
6,000	1,200	9,680

Εικόνα 5 - 24: Πίνακας τιμών με τις μεταβολές

Στο επεισόδιο, οι μεταβολές των τιμών της συνάρτησης στα κελιά του πίνακα τιμών βοήθησαν την ομάδα μαθητών να περιγράψει λεκτικά το ποσό μεταβολής (αναγνώριση, επαναδόμηση, στίχος 909) για να εξηγήσει τις εν λόγω μεταβολές (Εικόνα 5 - 24). Κατόπιν, οι μαθητές υπολογίζουν τις διαφορές των συναρτήσεων (f, g και h) και τις συγκρίνουν για να υποστηρίξουν το επιχείρημά τους (επαναδόμηση, στίχοι 912 – 915) συμπεραίνοντας ότι η συνάρτηση h(x) θα συνεχίσει να αυξάνεται (κατασκευή, στίχοι 916). Καταλήγοντας, ο M1 δείχνει ότι έχει τη δυνατότητα να μεταβεί προς το πηλίκο διαφορών (στίχος 918). Έτσι, ο πίνακας τιμών φαίνεται να διευκολύνει τους μαθητές να αναγνωρίσουν τόσο τη συμμετρία στις τιμές της συνάρτησης όσο και τις διαφορές μεταξύ τους και να νοηματοδοτήσουν το ποσό μεταβολής λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης.

Μάλιστα, μόνο η ομάδα εστίασης νοηματοδότησε το ποσό μεταβολής στη συγκεκριμένη δραστηριότητα.

Επεισόδιο 4: Σύνδεση αναπαραστάσεων και ποσό μεταβολής

Στη δραστηριότητα της Δεξαμενής Πετρελαίου οι μαθητές της ομάδας εστίασης χρησιμοποιούσαν την προσομοίωση της οριζόντια τοποθετημένης δεξαμενής και μέσα από το δυναμικό γέμισμα και τον πίνακα τιμών ήταν ικανοί να νοηματοδοτήσουν το ποσό μεταβολής. Για παράδειγμα, στο ακόλουθο επεισόδιο οι μαθητές της ομάδας εστίασης κατά τη διερεύνηση της δραστηριότητας της Δεξαμενής Πετρελαίου προκειμένου να καταλάβουν τον τρόπο που γεμίζει η οριζόντια δεξαμενή χρησιμοποιούν διαφορετικές αναπαραστάσεις και παράλληλα νοηματοδοτούν το ποσό μεταβολής μέσα από τη σύγκριση σε διαφορετικά τέταρτα της δεξαμενής.

635. Κ: Παιδιά να πούμε που έχουμε φτάσει όλοι; Όλες οι ομάδες έχουν σκεφτεί ποιος θέλει να πει;

636. Μ4: Ουσιαστικά αν γεμίσουμε εντελώς τη δεξαμενή βλέπουμε ότι ο συνολικός όγκος που χωράει είναι 18,85 λίτρα. Εμείς θέλουμε να πληρώσουμε για το ¼ αυτής της ποσότητας, δηλαδή το υπολογίσαμε και είναι 4,7125. Αν πάρουμε ως δεδομένο ότι η δεξαμενή είναι άδεια, δεν έχει δηλαδή καθόλου πετρέλαιο. Και βάλουμε τη στάθμη να είναι στο ¼ του ύψους, η ράβδος δηλαδή να ακουμπάει στο ¼ του ύψους. Αφού είναι 2 μέτρα να ακουμπάει στα 0,5 μέτρα, βλέπουμε ότι ο όγκος του πετρελαίου γίνεται 4,291, δηλαδή μικρότερο από το ¼ του όγκου που είναι 4,7125, που είναι αυτό που έχουμε παραγγείλει και αυτό για το οποίο πληρώνουμε. Άρα στην περίπτωση που είναι άδεια η δεξαμενή σημαίνει ότι δεν μας συμφέρει, αφού ο όγκος ο οποίος βγαίνει από το ¼ του ύψους είναι μικρότερος από το ¼ που χωράει η δεξαμενή. (R)

637. Ε: Πολύ ωραία. Το καταλάβαμε οι υπόλοιποι αυτό; Να δούμε λίγο τι είπε η από δω ομάδα και η από κει ομάδα να μας πει τι βρήκατε. Θυμίζει λίγο αυτό που ακούστηκε.

638. Μ1: Λοιπόν ξεκινήσαμε ακριβώς με αυτό που είπε ο Μ4, βρήκαμε ότι το ¼ του όγκου δεν είναι ίσο με το κανονικό ¼ που θα υπολογίζαμε εμείς. Παρατηρήσαμε όμως ότι όταν πάμε τη στάθμη… (R)

639. Μ2: Αυτό που υπολογίσαμε εμείς με τη μέτρηση δεν είναι ακριβώς ίδιο με το ¼ του όγκου της δεξαμενής

640. Μ1: Ναι. Όταν όμως φτάσουμε τη στάθμη στο 1μέτρο, δηλαδή στο μισό της δεξαμενής, παρατηρούμε ότι εκεί είναι το μισό, ο μισός όγκος πετρελαίου, οπότε σε

αυτό που είπε ο Μ4 αν έχουμε άδεια ή γεμάτη δεξαμενή του πετρελαίου, εκεί δεν μας συμφέρει, αν έχουμε όμως το ¼ ήδη και αγοράσουμε ¼ του ύψους εκεί θα κερδίσουμε εμείς, αφού η διαφορά είναι μεγαλύτερη. (BW, C)

Στο επεισόδιο γίνεται διερεύνηση του τρόπου που γεμίζει η δεξαμενή όταν είναι στην οριζόντια θέση. Μέσα από τον πειραματισμό με τα ψηφιακά εργαλεία, ο Μ4 αναγνωρίζει ότι στην περίπτωση που είναι άδεια η δεξαμενή δεν συμφέρει να πληρώσουν για να γεμίσει στο ¼ του ύψους, καθώς ο όγκος που παίρνουν είναι μικρότερος. Ακολούθως, ο Μ1 μέσα από το δυναμικό γέμισμα της δεξαμενής επιβεβαιώνει τον Μ4 (αναγνώριση, στίχος 638). Κατόπιν, παρατηρεί ότι στη μέση ο όγκος της δεξαμενής είναι ίσος με το μισό, επομένως το ποσό της διαφοράς από το ¼ μέχρι τη μέση αυξάνεται περισσότερο από ότι αυξάνεται από την αρχή μέχρι το ¼ (στίχος 640, επαναδόμηση, κατασκευή) και συνεπώς νοηματοδοτεί το ποσό μεταβολής.

Σύνοψη του ρόλου των ψηφιακών εργαλείων στο σχολείο Γ

Ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων ήταν κρίσιμος στο σχολείο Γ μέσα από τα επεισόδια που αναλύθηκαν. Πιο συγκεκριμένα, στον Σχεδιασμό Υδρορροής πέρα από τα χειραπτικά εργαλεία η χρήση αναπαραστάσεων και συγκεκριμένα η γραφική παράσταση και ο πίνακας τιμών βοήθησαν τους μαθητές να νοηματοδοτήσουν την κατεύθυνση μεγεθών και τον συντονισμό μεταξύ των μεταβλητών με τη χρήση αλγεβρικού συμβολισμού (επεισόδιο 1). Στην Πρόσοψη καταστήματος τα ψηφιακά εργαλεία όπως η δυναμική μετακίνηση του ελεύθερου σημείου, η δημιουργία υπολογισμών και η λειτουργία της αυτόματης μοντελοποίησης οδήγησαν τους μαθητές στη νοηματοδότηση της συσχέτισης και της κατεύθυνσης μεταξύ μεγεθών, αλλά και της επιλογής μεταβλητών διευκολύνοντας το πέρασμα από τα μεγέθη στις μεταβλητές (επεισόδιο 2). Τα ψηφιακά εργαλεία συνεισέφεραν στην παγιοποίηση των αρχικών νοηματοδοτήσεων, καθώς οι μεταβάσεις μεταξύ των αρχικών νοηματοδοτήσεων γίνονταν με ιδιαίτερη ευκολία. Παράλληλα, οι διαφορετικές αναπαραστάσεις παρείχαν τη δυνατότητα στην ομάδα εστίασης να εστιάσει στις μεταβολές του πίνακα τιμών καθώς γεμίζει η δεξαμενή και να νοηματοδοτήσει το ποσό μεταβολής, αλλά και να δείξει τη δυνατότητα για τη νοηματοδότηση του πηλίκου διαφορών (επεισόδια 3 και 4). Καταλήγοντας, η συμβολή των ψηφιακών εργαλείων είναι εμφανής μέσα από τα διαφορετικά επεισόδια, καθώς βοηθούν τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων.

5.4. Σύνθεση των στοιχείων του πλαισίου κατά την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων ανά ομάδα

Μέσα από τη μελέτη των αποτελεσμάτων στα διαφορετικά σχολεία παρατηρούμε ότι αναδεικνύονται ομοιότητες και διαφορές σε σχέση με τα στοιχεία του πλαισίου κατά την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων για τις ομάδες εστίασης. Πιο συγκεκριμένα, οι ομοιότητες και οι διαφορές φαίνεται να αφορούν από τη μία τον ρόλο του εκπαιδευτικού και από την άλλη τον ρόλο τον εργαλείων, οι οποίες συζητούνται ακολούθως στην προσπάθεια να αναδειχτούν οι διαφορές μεταξύ των μαθησιακών τροχιών των ομάδων μαθητών. Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται οι συχνότητες των διαφορετικών παρεμβάσεων για τα συγκεκριμένα επεισόδια που παρατέθηκαν και αναλύθηκαν από τα διαφορετικά σχολεία προκειμένου να προκύψει ο χαρακτηρισμός της ταυτότητας της διδασκαλίας του εκπαιδευτικού σε κάθε σχολείο.

Παρεμβάσεις εκπαιδευτικού	**Τύπος παρέμβασης**	**Σχολείο Α**	**Σχολείο Β**	**Σχολείο Γ**
Παιδαγωγικές (έμφαση στη διερεύνηση)	Συμμετοχής (Πσ)	2	2	3
	Ομαδικότητας (Πομ)	0	1	0
	Εκμαίευσης (Πε)	1	3	1
	Απάντησης (Πα)	1	1	2
	Διευκόλυνσης (Πδ)	1	1	1
	Επέκτασης (Πεπ)	2	1	4
Διδακτικές (έμφαση στο περιεχόμενο)	Εστίασης σε μαθηματικό αντικείμενο (Δε)	1	1	2
	Αιτιολόγηση/Επεξήγηση (Δα)	0	2	0
	Υποστήριξη της σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα)	4	1	2

Πίνακας 13: Πίνακας παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού στα σχολεία Α, Β και Γ

Σχετικά με τα σχολεία Α και Β της 1ης φάσης εφαρμογής εμφανίστηκαν επεισόδια, τα οποία έχουν κοινά χαρακτηριστικά, αλλά και διαφορές ως προς τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων στις σχολικές τάξεις με ιδιαίτερη εστίαση στον ρόλο του εκπαιδευτικού και στον ρόλο των εργαλείων. Συγκεκριμένα, σχετικά με τον ρόλο του εκπαιδευτικού οι δύο εκπαιδευτικοί (Στέλιος-σχολείο Α και Γιώργος-σχολείο Β) εφάρμοσαν τις δραστηριότητες με τη βοήθεια των υποερωτημάτων. Ο Στέλιος φαίνεται να δημιούργησε σταδιακά ένα περιβάλλον μάθησης με συνεργασίες εντός αλλά και μεταξύ των ομάδων μαθητών. Αρχικά χρησιμοποιούσε τα ερωτήματα των δραστηριοτήτων με στόχο την εστίαση στα μαθηματικά αντικείμενα κατά την εργασία των μαθητών σε ομάδες, ωστόσο κατά την εξέλιξη της αλληλουχίας των δραστηριοτήτων φάνηκε να είναι πιο διερευνητικός μέσα από τις παρεμβάσεις του με τη χρήση διδακτικών παρεμβάσεων για τη σύνδεση αναπαραστάσεων, επιτρέποντας τη νοηματοδότηση του ρυθμού μεταβολής. Συνολικά, οι παρεμβάσεις που κάνει ο Στέλιος μπορούν να χαρακτηρίσουν τη διδασκαλία του ως διερευνητική με έμφαση στη μάθηση των μαθηματικών. Οι παρεμβάσεις που χρησιμοποιεί συχνότερα είναι η παιδαγωγική παρέμβαση συμμετοχής (Πσ) και επέκτασης (Πεπ) και η διδακτική παρέμβαση σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα). Το μοτίβο που ακολουθεί στις παρεμβάσεις του είναι συμμετοχή, επέκταση και σύνδεση αναπαραστάσεων. Μάλιστα, σε αντίθεση με τους άλλους δύο εκπαιδευτικούς οδήγησε τους μαθητές στη σύνδεση της κλίσης της εφαπτομένης με τον ρυθμό μεταβολής. Ο διερευνητικός χαρακτήρας της διδασκαλίας του φάνηκε σε μεγαλύτερο βαθμό μέσα στην τάξη κατά τη διερεύνηση της Δεξαμενής Πετρελαίου.

Από την άλλη, ο Γιώργος στην αρχή φάνηκε να ενδιαφέρεται για τη συμμετοχή όλων των ομάδων μαθητών (εντός και εκτός της ομάδας) και εφαρμόζει συχνά παιδαγωγικές παρεμβάσεις εκμαίευσης (Πε), αλλά και διδακτικές παρεμβάσεις αιτιολόγησης/επεξήγησης (Δα). Ωστόσο, στις δύο τελευταίες δραστηριότητες περιορίζει τις παρεμβάσεις του και δίνει βαρύτητα στην τελική παρουσίαση στην τάξη. Συνοψίζοντας, η διδασκαλία του Γιώργου θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως επεξηγηματική με έμφαση στη μαθητική συμμετοχή και κατανόηση, καθώς ενδιαφέρεται για την συμμετοχή όλων των ομάδων μαθητών στην τάξη και επεξηγεί/απλοποιεί τις μαθηματικές ιδέες για να είναι κατανοητές από όλους. Οι παρεμβάσεις που χρησιμοποιεί συχνότερα είναι η παιδαγωγική παρέμβαση συμμετοχής (Πσ), η παιδαγωγική παρέμβαση εκμαίευσης (Πε) και η διδακτική παρέμβαση αιτιολόγησης/επεξήγησης (Δα). Το μοτίβο που ακολουθεί στις παρεμβάσεις του είναι συμμετοχή, εκμαίευση και αιτιολόγηση/επεξήγηση. Σε αντίθεση με τους άλλους δύο εκπαιδευτικούς κάνει παιδαγωγικές παρεμβάσεις ομαδικότητας (Πομ) για να συνεργάζονται καλύτερα οι μαθητές εντός της ομάδας και διδακτικές παρεμβάσεις αιτιολόγησης/επεξήγησης μαθηματικού συλλογισμού υποστηρίζοντας την κατανόηση των μαθητών. Ο διερευνητικός χαρακτήρας της διδασκαλίας του φάνηκε σε μεγαλύτερο βαθμό μέσα στην τάξη κατά τη διερεύνηση του Σχεδιασμού Υδρορροής.

Οι δύο εκπαιδευτικοί φαίνεται να αποτελούν έναυσμα για τους μαθητές τους στη νοηματοδότηση του ομοιόμορφου ρυθμού μεταβολής, είτε με την αναφορά στην κλίση της εφαπτομένης (σχολείο Α) είτε με την αναφορά σε σταθερό βήμα μεταβολής (σχολείο Β). Ο Στέλιος φάνηκε να έχει ιδιαίτερα διερευνητική διδασκαλία στην τελευταία δραστηριότητα παρέχοντας αναπαραστάσεις στους μαθητές για συζήτηση, σε αντίθεση με τον Γιώργο, ο οποίος σταματά να συζητά με τις ομάδες μαθητών. Τέλος, και από τα δύο σχολεία υπήρξαν αναφορές στην κλίση και στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης, ωστόσο στο σχολείο Α προήλθε από τον εκπαιδευτικό, ενώ στο σχολείο Β από τους μαθητές.

Όσον αφορά το σχολείο Γ της 2ης φάσης εφαρμογής μέσα από τα επεισόδια που μελετήθηκαν παρατηρούμε ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των σχολείων. Συγκεκριμένα, σχετικά με τον ρόλο του εκπαιδευτικού η Άννα (εκπαιδευτικός σχολείου Γ) έδωσε τις δραστηριότητες με ένα κεντρικό ερώτημα οδηγώντας σε συζητήσεις στη σχολική τάξη και ενθαρρύνοντας την επικοινωνία εντός και μεταξύ των ομάδων. Η Άννα μέσα από τις επιλογές που έκανε φαίνεται να δημιούργησε ένα περιβάλλον μάθησης με κατάλληλο κλίμα συνεργασίας, δίνοντας αρκετά μεγάλη βαρύτητα στα αυθεντικά στοιχεία της δραστηριότητας. Αρχικά, φαίνεται να είχε ως σημείο αναφοράς το κεντρικό ερώτημα της κάθε δραστηριότητας, στο οποίο πρόσθετε διάφορα υποερωτήματα. Η Άννα φάνηκε να έχει διερευνητική στάση σε όλη τη διάρκεια εφαρμογής των δραστηριοτήτων μέσα από τις παρεμβάσεις της με τη χρήση παρεμβάσεων συμμετοχής και επέκτασης. Παράλληλα υποστήριζε τους μαθητές με διδακτικές παρεμβάσεις εστίασης στα μαθηματικά αντικείμενα και σύνδεσης αναπαραστάσεων. Ο ρυθμός μεταβολής στο σχολείο Γ προέκυψε από τον πειραματισμό των μαθητών με τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις. Συνολικά η στάση της Άννας φάνηκε να βοηθά ιδιαίτερα τη νοηματοδότηση της συνάρτησης και του ρυθμού μεταβολής μέσα από τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις. Συνεπώς, οι παρεμβάσεις που κάνει η Άννα μπορούν να χαρακτηρίσουν τη διδασκαλία της ως διερευνητική με έμφαση στις συνδέσεις με το πλαίσιο της δραστηριότητας. Οι παρεμβάσεις που χρησιμοποιεί συχνότερα είναι η παιδαγωγική παρέμβαση συμμετοχής (Πσ), απάντησης (Πα) και επέκτασης (Πεπ). Από διδακτικές παρεμβάσεις χρησιμοποιεί εστίασης στα μαθηματικά αντικείμενα (Δε) και σύνδεσης αναπαραστάσεων (Δσα). Το μοτίβο που ακολουθεί στις παρεμβάσεις της είναι συμμετοχής, απάντησης και επέκτασης. Επίσης, δίνει αρκετή έμφαση στα αυθεντικά στοιχεία της δραστηριότητας και στη διερεύνηση και δικαιολόγηση από τους μαθητές. Σε αντίθεση με τους άλλους δύο εκπαιδευτικούς κάνει αρκετές παιδαγωγικές παρεμβάσεις επέκτασης (Πεπ) βοηθώντας τους μαθητές να κάνουν γενικεύσεις και σύνθετες νοηματοδοτήσεις. Ο διερευνητικός χαρακτήρας της διδασκαλίας της Άννας φάνηκε σε μεγαλύτερο βαθμό μέσα στην τάξη κατά τη διερεύνηση του Σχεδιασμού Υδρορροής και της Δεξαμενής Πετρελαίου.

Οι βασικές διαφορές με την 1η φάση εφαρμογής είναι ότι οι μαθητές φαίνεται να εργάζονται σε ένα διερευνητικό περιβάλλον με αρκετές προκλήσεις, καθώς η Άννα έδινε ιδιαίτερη έμφαση στη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας, χωρίς να κάνει τακτικά διδακτικές παρεμβάσεις απλοποίησης. Πράγματι, χρησιμοποιούσε στα επεισόδια χρησιμοποιούσε τακτικά παιδαγωγικές παρεμβάσεις επέκτασης και διδακτικές παρεμβάσεις εστίασης στα μαθηματικά αντικείμενα και σύνδεσης αναπαραστάσεων, διατηρώντας τη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας ενεργή και επεκτείνοντας τη μαθηματική πρόκληση. Αντίθετα στο σχολείο Α οι παιδαγωγικές παρεμβάσεις επέκτασης είναι πιο περιορισμένες και οι μαθητές δουλεύουν αρκετά με τα μαθηματικά αντικείμενα. Σε σύγκριση με το σχολείο Β, στο οποίο ο Γιώργος χρησιμοποιεί διδακτικές παρεμβάσεις επεξήγησης/αιτιολόγησης, η Άννα φαίνεται να κάνει παιδαγωγικές παρεμβάσεις επέκτασης φέροντας τη μαθηματική πρόκληση και το πλαίσιο της δραστηριότητας σε πρώτο πλάνο. Παράλληλα, η Άννα δημιούργησε κλίμα καλής συνεργασίας εντός και μεταξύ των ομάδων, καθώς έκανε αρκετές παιδαγωγικές παρεμβάσεις συμμετοχής, χωρίς να πραγματοποιεί παιδαγωγικές παρεμβάσεις ομαδικότητας. Έτσι, σε αντίθεση με τους εκπαιδευτικούς από τα σχολεία Α και Β, η διδασκαλία της Άννας χαρακτηρίζεται ως διερευνητική υποστηρίζοντας τη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας.

Σχετικά με τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν στα σχολεία Α και Β φαίνεται να παίζουν κρίσιμο ρόλο τα χειραπτικά εργαλεία, η μοντελοποίηση στη δυναμική γεωμετρία, οι μετρήσεις, η αυτόματη μοντελοποίηση και οι πολλαπλές αναπαραστάσεις. Στο σχολείο Α οι διαφορετικές αναπαραστάσεις ήταν το εργαλείο, το οποίο φάνηκε να παίζει περισσότερο ρόλο στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών καθώς έγιναν αρκετές νοηματοδοτήσεις που αφορούσαν τόσο τη συμμεταβολή όσο και τον ρυθμό μεταβολής από την ομάδα εστίασης, αλλά και από τις υπόλοιπες ομάδες μέσα στην τάξη. Μία βασική διαφορά με το σχολείο Β είναι ότι οι αναπαραστάσεις στις δύο πρώτες δραστηριότητες οι διαφορετικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές ως μέσο για να έχουν ακρίβεια στις μετρήσεις. Στο σχολείο Β, φάνηκε ότι η αυτόματη μοντελοποίηση σε συνδυασμό με το παράθυρο των μετρήσεων και της δυναμικής γεωμετρίας που συνομιλούν προσέφερε την παγιοποίηση των αρχικών νοηματοδοτήσεων οδηγώντας σε εύκολες αναβάσεις μεταξύ των αρχικών νοηματοδοτήσεων. Σχετικά με τη χρήση των εργαλείων στο σχολείο Γ, ο ρόλος των εργαλείων φάνηκε ότι είναι παρεμφερής με το σχολείο Α. Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι οι διαθέσιμες αναπαραστάσεις ήταν κρίσιμες στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών και αποτέλεσαν το κύριο εργαλείο για τη νοηματοδότηση του ρυθμού μεταβολής. Παράλληλα, σε όλα τα σχολεία η διασύνδεση του παραθύρου της δυναμικής γεωμετρίας με το παράθυρο των γεωμετρικών υπολογισμών επέτρεψε στους μαθητές να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των δύο παραθύρων και να οδηγούνται εύκολα από τα μεγέθη στις μεταβλητές.

Συνοψίζοντας τη σύγκριση των τριών σχολείων για τα στοιχεία του πλαισίου στις διαφορετικές νοηματοδοτήσεις, στο σχολείο Α οι μαθητές έκαναν πιο σύνθετες νοηματοδοτήσεις ιδιαίτερα στην τελευταία δραστηριότητα. Σε όλα τα σχολεία οι ομάδες ανέβαιναν εύκολα σε απλές νοηματοδοτήσεις και έκαναν πισωγυρίσματα στην τελευταία δραστηριότητα με τον ρυθμό μεταβολής καθώς (α) πρόκειται για απαιτητική δραστηριότητα και (β) απαιτεί εξεζητημένο τρόπο σκέψης. Το γεγονός ότι στο σχολείο Α οι μαθητές της ομάδας εστίασης, αλλά και δύο ακόμα ομάδες μαθητών έφτασαν στην πιο σύνθετη νοηματοδότηση φαίνεται να σχετίζεται με τις διερευνητικές δράσεις του εκπαιδευτικού και στο κλίμα συνεργασίας των μαθητών στην τάξη. Στο σχολείο Α υποστηριζόταν η συζήτηση μεταξύ των μελών της ομάδας, αλλά και μεταξύ των ομάδων σε αντίθεση με το σχολείο Β που η σύνθεση της ομάδας οδήγησε σε φτωχότερη αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών. Στο σχολείο Γ οι μαθητές έκαναν σύνθετες νοηματοδοτήσεις ιδιαίτερα στην τελευταία δραστηριότητα, όπως ακριβώς στο σχολείο Α. Το γεγονός ότι στη 2η φάση εφαρμογής το πλαίσιο εργασίας διευκόλυνε τη διερεύνηση σε μεγαλύτερο βαθμό (δραστηριότητες χωρίς τη χρήση υποερωτημάτων, έμφαση στη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας, παιδαγωγικές παρεμβάσεις συμμετοχής και επέκτασης από την εκπαιδευτικό) οδήγησε το σχολείο Γ να έχει αντίστοιχες νοηματοδοτήσεις σε μικρότερο χρονικό διάστημα συλλογής δεδομένων.

6. Συζήτηση

Σε αυτό το κεφάλαιο πραγματοποιείται η συζήτηση των αποτελεσμάτων της παρούσας διατριβής. Αρχικά, γίνεται σύνθεση των ευρημάτων ανά ερευνητικό ερώτημα. Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο ερευνητικό ερώτημα αφορούσε τους τρόπους με τους οποίους εξελίσσεται η σκέψη των μαθητών Β΄ Λυκείου καθώς νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων στο πλαίσιο δραστηριοτήτων μοντελοποίησης που περιλαμβάνουν τη χρήση χειραπτικών εργαλείων και ψηφιακών εργαλείων. Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα εξέταζε τον ρόλο των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού και τον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών. Ακολούθως, σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται σύνδεση με την υπάρχουσα έρευνα και εξετάζεται η συνεισφορά της διατριβής, όπως και σχετικά ζητήματα που φαίνεται να προκύπτουν. Παράλληλα, γίνεται αποτίμηση της χρήσης των θεωρητικού πλαισίων και ακολούθως αναφέρεται η συνεισφορά και οι περιορισμοί της έρευνας. Τέλος, γίνονται προτάσεις για μελλοντικές έρευνες.

6.1. Απάντηση στο 1ο Ερευνητικό Ερώτημα

Το 1^{ο} ερευνητικό ερώτημα όπως αναφέρεται στο κεφάλαιο της μεθοδολογίας είναι το εξής:

- Με ποιους τρόπους εξελίσσεται η σκέψη των μαθητών Β΄ Λυκείου καθώς νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων στο πλαίσιο δραστηριοτήτων μοντελοποίησης που περιλαμβάνουν τη χρήση χειραπτικών εργαλείων και ψηφιακών εργαλείων;

- Επίσης, στόχος είναι να τονιστούν οι συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων και ο ρόλος των συνδέσεων στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών.

Στο θεωρητικό μέρος της παρούσας διατριβής αναφορικά με τη συνάρτηση, τη συμμεταβολή και τη μοντελοποίηση έγινε επισκόπηση της έννοιας της συνάρτησης και της μετάβασης στη συμμεταβολή. Μάλιστα, αναφέρθηκε ότι τα τελευταία χρόνια τα ψηφιακά εργαλεία έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην έμφαση που δίνουν αρκετοί ερευνητές στη συμμεταβολή (π.χ. Lagrange & Psycharis, 2014). Παράλληλα, υπάρχουν αρκετές κατηγοριοποιήσεις σχετικά με τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών (π.χ. Carlson et al., 2002, Thompson & Carlson, 2017) και δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στη μετάβαση από τον ποσοτική σκέψη στις συναρτησιακές σχέσεις (π.χ.Moore, 2014, Blanton et al., 2015). Η μελέτη του είδους των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών μέσα από δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν για την παρούσα έρευνα αναφορικά με τα μοντέλα που εμπλέκονται οι μαθητές σε μία διαδικασία μοντελοποίησης επέτρεψε να σκιαγραφηθούν οι νοηματοδοτήσεις των μαθητών κατά τη μετάβαση από τις εξαρτήσεις μεταξύ ποσοτήτων στις συναρτησιακές σχέσεις. Με τη χρήση διερευνητικών δραστηριοτήτων μοντελοποίησης, οι οποίες έχουν ως αφετηρία αυθεντικές καταστάσεις και περιλαμβάνουν τη χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων μέσα σε σχολικές τάξεις συλλέχθηκαν δεδομένα προκειμένου να σκιαγραφηθεί η τροχιά νοηματοδότησης μαθητών Β΄ λυκείου για τη συνάρτηση ως συμμεταβαλλόμενη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων. Μέσα από την ανάλυση των δεδομένων με τη χρήση της θεωρίας θεμελιωμένης στα δεδομένα (grounded theory) επιλέχθηκαν επεισόδια, τα οποία αναλύθηκαν με τη χρήση των θεωρητικών πλαισίων μαθησιακές τροχιές (Clements & Sarama, 2009) και της Αφαίρεσης εντός Πλαισίου (Dreyfus et al., 2015), λαμβάνοντας υπόψη την εκ των προτέρων ανάλυση και υπάρχουσες έρευνες.

Η ανάλυση των επεισοδίων αναδεικνύει τη μαθησιακή τροχιά της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων και υποδεικνύει τη δυνατότητα των μαθητών να μεταβούν από την ποσοτική σκέψη και την κατανόηση της συμμεταβολής στη συναρτησιακή σκέψη. Συγκεκριμένα, οι μαθητές καθώς εργάζονταν εντός των διαφορετικών μοντέλων στις δραστηριότητες μοντελοποίησης εντόπισαν την αλληλεξάρτηση μεταξύ συμμεταβαλλόμενων χαρακτηριστικών από ποσότητες διαισθητικά μέσω του πειραματισμού με τα χειραπτικά εργαλεία. Στη συνέχεια, συσχέτισαν τις μεταβολές στο ένα συμμεταβαλλόμενο μέγεθος σε σχέση με το άλλο χωρίς να αναφέρουν αύξηση ή μείωση μεταξύ των τιμών. Ακόμη, οι μαθητές νοηματοδότησαν την κατεύθυνση της μεταβολής μεταξύ μεγεθών υποδεικνύοντας την αύξηση ή μείωση μεταξύ των τιμών και εστίασαν στις συμμεταβαλλόμενες τιμές τους. Επιπροσθέτως, επέλεξαν ένα ζεύγος από μία εξαρτημένη και μία ανεξάρτητη μεταβλητή και δημιούργησαν μία συνάρτηση. Μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης όπως τη γραφική παράσταση, τον πίνακα τιμών και τον αλγεβρικό τύπο της συνάρτησης, οι μαθητές συντόνισαν τις μεταβολές στις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής με τις αλλαγές τις εξαρτημένης. Τέλος, οι μαθητές νοηματοδότησαν το ποσό της αλλαγής και το πηλίκο διαφορών (που περιλαμβάνει τον ομοιόμορφο και τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής) μέσα από την εμπλοκή τους με τα ψηφιακά εργαλεία και την συγκριτική οπτική που είχαν στις τιμές της συνάρτησης.

Σε αυτή τη μαθησιακή τροχιά το θεωρητικό πλαίσιο ΑεΠ δείχνει τον τρόπο εξέλιξης της σκέψης των μαθητών κατά την εμπλοκή τους με τα διαφορετικά μοντέλα. Η χειραπτική εμπειρία με τη συμμεταβολή, η οποία σχετίζεται με την αναγνώριση της αλληλεξάρτησης στο μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων ήταν η βάση για τη σύνδεση των μεγεθών στη δυναμική γεωμετρία. Ακολούθως, στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας εμφανίζεται μία ποικιλία νοηματοδοτήσεων από την αλληλεξάρτηση (με τον εντοπισμό ελεύθερων και σταθερών σημείων και τη σχέση τους με το δυναμικό σχήμα) μέχρι την επιλογή μεταβλητών υποστηρίζοντας τη μετάβαση στα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη στο μοντέλο των μετρήσεων. Το μοντέλο των μετρήσεων παρείχε ένα σύνδεσμο μεταξύ των μοντέλων της δυναμικής γεωμετρίας και των συναρτήσεων, επιτρέποντας στους μαθητές να κάνουν συνδέσεις και με τα δύο μοντέλα κατά τη μοντελοποίηση των δραστηριοτήτων. Συγκεκριμένα, η εμπλοκή των μαθητών με τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη στο μοντέλο των μετρήσεων τους πρόσφερε την δυνατότητα να συνδέσουν τις γεωμετρικές οντότητες με συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές. Ακόμη, αυτό το μοντέλο επέτρεψε στους μαθητές να δημιουργήσουν μία συνάρτηση και να επιστρέψουν στο μοντέλο δυναμικής γεωμετρίας για να αιτιολογήσουν την επιλογή της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής. Τέλος, οι μαθητές εργάστηκαν με ένα ζεύγος από συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές στο μοντέλο των συναρτήσεων. Αυτό οδήγησε σε περισσότερο σύνθετες νοηματοδοτήσεις, όπως είναι ο συντονισμός των μεταβλητών κατά τη σύνδεση αναπαραστάσεων, το ποσό μεταβολής και ο ρυθμός μεταβολής. Αυτά τα ευρήματα φωτίζουν την εργασία των μαθητών ανάμεσα στα διαφορετικά στοιχεία του κύκλου μοντελοποίησης που οδηγούν στη μετάβαση από τα χαρακτηριστικά των ποσοτήτων στις μεταβλητές, συμπληρώνοντας έρευνες που ασχολούνται με την εργασία των μαθητών στα διαφορετικά μοντέλα (π.χ. Psycharis et al., 2021, Kafetzopoulos & Psycharis, 2022).

Τα αποτελέσματα επιτρέπουν τη συζήτηση του ρόλου των εργαλείων στη μαθησιακή τροχιά μέσα από τον πειραματισμό στα αντίστοιχα μοντέλα. Αρχικά, στο μοντέλο χειραπτικών εργαλείων οι νοηματοδοτήσεις των μαθητών βασίζονταν σε διαισθητικό πειραματισμό με τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες (π.χ. το κομμάτι χαρτιού). Ωστόσο, τα χειραπτικά εργαλεία πρόσφεραν τη δυνατότητα στους μαθητές να αναγνωρίσουν τις ποσότητες που συμμεταβάλλονται και να εντοπίσουν τα χαρακτηριστικά τους. Στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας οι νοηματοδοτήσεις των μαθητών εκτείνονταν από την αλληλεξάρτηση μέχρι τη νοηματοδότηση των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών ως μεταβλητές. Τα ψηφιακά εργαλεία προκάλεσαν τους μαθητές να εντοπίσουν σχέσεις μεταξύ συντεταγμένων σημείων, το οποίο μπορεί να ερμηνευθεί ως μία αρχική εμπλοκή με τον αλγεβρικό συμβολισμό. Στο μοντέλο των μετρήσεων, οι μαθητές αναφέρονταν σε πιο σύνθετες νοηματοδοτήσεις μεγεθών νοηματοδοτώντας τη συμμεταβολή, την κατεύθυνση και την κρίσιμη επιλογή μεταβλητών που έλαβε χώρα στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών μέσω της λειτουργίας της αυτόματης μοντελοποίησης. Στο μοντέλο των συναρτήσεων οι αιτιολογήσεις των μαθητών χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης και η σκέψη τους σε αυτές τις αναπαραστάσεις διευκόλυνε τις νοηματοδοτήσεις των συναρτησιακών σχέσεων, το οποίο είναι σύμφωνο με τα ευρήματα της υπάρχουσας βιβλιογραφίας (π.χ. Blanton et al., 2015, Carlson et al., 2002), οι οποίες εστιάζουν σε νεαρούς μαθητές ή φοιτητές. Στην παρούσα έρευνα, μέσω των διαθέσιμων αναπαραστάσεων, οι μαθητές λυκείου έκαναν συγκρίσεις μεταξύ των τιμών μίας συνάρτησης και εργαζόμενοι με τις συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές νοηματοδότησαν το ποσό της αλλαγής. Ακολούθως, οι μαθητές λυκείου νοηματοδότησαν το πηλίκο διαφορών (τον ομοιόμορφο και στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής) χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο βήμα είτε αλλάζοντάς το συνεχώς. Έτσι, τα προαναφερθέντα ευρήματα της διατριβής συνεισφέρουν στην υπάρχουσα βιβλιογραφία για τη συμμεταβολή σε έρευνες που αφορούν μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Τα θεωρητικά πλαίσια που χρησιμοποιήθηκαν για την απάντηση στο 1^{ο} ερευνητικό ερώτημα είναι οι μαθησιακές τροχιές, η Αφαίρεση εντός Πλαισίου και ο κύκλος μοντελοποίησης του Lagrange. Ο συνδυασμός τους οδήγησε στην απάντηση του ερωτήματος σχετικά με τον σχεδιασμό της μαθησιακής τροχιάς που περιλαμβάνει τις διαφορετικές νοηματοδοτήσεις και την εργασία των μαθητών στα διαφορετικά μοντέλα, τα οποία προκύπτουν από τα στοιχεία του κύκλου μοντελοποίησης. Από την άλλη, η χρήση του ΑεΠ βοήθησε να οριστούν εκ των προτέρων τα στοιχεία γνώσης και έδειξε τον τρόπο που κατασκευάζεται η γνώση και οι νοηματοδοτήσεις στην πραγματική τροχιά των μαθητών, σημειώνοντας τη χρήση των εργαλείων και το πλαίσιο της δραστηριότητας. Η ανάλυση για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα δείχνει ότι ο συνδυασμός των μαθησιακών τροχιών με την Αφαίρεση εντός Πλαισίου και τον κύκλο μοντελοποίησης φάνηκε να είναι παραγωγικός στην κατεύθυνση της ερευνητικής εστίασης. Εκ των προτέρων, αυτός ο συνδυασμός ήταν χρήσιμος για (α) να περιγραφεί η πιθανή εξέλιξη του νοητικού μονοπατιού από τους μαθητές σε σχέση με τη σειρά των δραστηριοτήτων από μία διαισθητική αντιμετώπιση προς τη συμμεταβολή και τον ρυθμό μεταβολής, (β) να οριστούν τα μοντέλα που εμπλέκονται στα στοιχεία του κύκλου μοντελοποίησης (φυσικό σύστημα, δυναμική γεωμετρία, συμμεταβαλλόμενα μεγέθη, αναπαραστάσεις της συνάρτησης) και (γ) να οριστούν τα στοιχεία γνώσης εντός του κάθε μοντέλου που σκιαγραφούν την εξέλιξη των νοηματοδοτήσεων μέσα στο εκάστοτε μοντέλο. Εκ των υστέρων, αυτός ο συνδυασμός επέτρεψε (α) μία παραγωγική περιγραφή της εξέλιξης των νοηματοδοτήσεων των μαθητών από τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες εντός και μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων, λαμβάνοντας υπόψη τη διαφορετικότητα στα είδη των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων στην ανερχόμενη εξελικτική διαδικασία και (β) την περιγραφή του τρόπου που κατασκευάζεται η γνώση μέσα από τα στοιχεία γνώσης στην πραγματική τροχιά των μαθητών, σημειώνοντας τη χρήση των εργαλείων και του πλαισίου της δραστηριότητας.

Συνοψίζοντας, τα παραπάνω αποτελέσματα, τα οποία προέκυψαν από το πρώτο και δεύτερο επίπεδο ανάλυσης των δεδομένων, απαντούν στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα της διατριβής. Μάλιστα πέρα από τους τρόπους εξέλιξης των μαθητών κατά τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων στο πλαίσιο δραστηριοτήτων μοντελοποίησης που περιλαμβάνουν τη χρήση χειραπτικών εργαλείων και ψηφιακών εργαλείων δίνουν πληροφορίες σχετικά με τις συνδέσεις των μοντέλων. Πράγματι, στην παρούσα διατριβή οι συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων και ο ρόλος των συνδέσεων στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών αποτελούσε ένα ακόμη στοιχείο που ερευνήθηκε παράλληλα αναδεικνύοντας τη σημασία των συνδέσεων μεταξύ των μοντέλων, αλλά και τον ουσιώδη ρόλο τους στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών λυκείου.

6.2. Απάντηση στο 2ο Ερευνητικό Ερώτημα

Κατά την εξέλιξη της παρούσας έρευνας μελετήθηκε το πλαίσιο σχετικά με τον ρόλο των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού και τον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών ως κύρια στοιχεία του. Συνεπώς, το 2ο ερευνητικό ερώτημα όπως αναφέρεται στο κεφάλαιο της μεθοδολογίας είναι το εξής:

- Ποιος είναι ο ρόλος των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού και του ρόλου των ψηφιακών εργαλείων στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών;

Προκειμένου να απαντηθεί το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα αναλύθηκαν επεισόδια, στα οποία κωδικοποιήθηκαν στοιχεία της διδασκαλίας κάθε εκπαιδευτικού μέσα από τις παρεμβάσεις του και αναλύθηκε ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών. Έτσι, τα αποτελέσματα αφορούν την ανάλυση του ρόλου του εκπαιδευτικού και του ρόλου των ψηφιακών εργαλείων μέσα από αντιπροσωπευτικά επεισόδια στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών. Οι τρεις εκπαιδευτικοί δημιούργησαν διαφορετικό κλίμα διερεύνησης κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων πραγματοποιώντας άλλοτε παρόμοιες και άλλοτε διαφορετικές παρεμβάσεις δείχνοντας κάθε φορά την ταυτότητα της διδασκαλίας τους. Από την ανάλυση των παρεμβάσεων των εκπαιδευτικών που συνέβαλλαν στις νοηματοδοτήσεις προέκυψε ο χαρακτηρισμός της διδασκαλίας του κάθε εκπαιδευτικού. Οι τρεις χαρακτηρισμοί για τη διδασκαλία των εκπαιδευτικών στα σχολεία Α, Β και Γ ήταν (α) διερευνητική με έμφαση στη μάθηση των μαθηματικών, (β) επεξηγηματική με έμφαση στην κατανόηση και συμμετοχή των μαθητών, και (γ) διερευνητική με έμφαση στη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας.

Τα αποτελέσματα της έρευνας συνεισφέρουν στο ήδη υπάρχον πλαίσιο σχετικά με τις παιδαγωγικές παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού (Ellis et al., 2019). Οι παιδαγωγικές παρεμβάσεις φαίνεται να συμπληρώνονται από δράσεις πρόσκλησης για συμμετοχή που αναφέρονται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία (π.χ. Herbel-Eisenmann et al., 2013). Ωστόσο, η παρέμβαση της ομαδικότητας φαίνεται να διαφέρει από τις υπάρχουσες κινήσεις τις βιβλιογραφίας, επεκτείνοντας τις δυνατότητες των παιδαγωγικών παρεμβάσεων. Από την άλλη, οι διδακτικές παρεμβάσεις αναπτύχθηκαν από τα δεδομένα στην παρούσα έρευνα χαρακτηρίζοντας το κάθε επεισόδιο και έτσι αφορούν περισσότερο το πλαίσιο που αναπτύχθηκαν. Συνεπώς, η σύνδεση ευρημάτων μεταξύ των διαφορετικών ερευνών αναφορικά με τις παιδαγωγικές παρεμβάσεις, αλλά και η εμφάνιση νέων χαρακτηρισμών για τις παρεμβάσεις προσφέρει νέες δυνατότητες για τον χαρακτηρισμό του τρόπου με τον οποίο ο εκπαιδευτικός ενισχύει τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών με στόχο την προώθηση της μαθηματικής κατανόησης στα μέλη μίας ομάδας. Τα παραπάνω αποτελούν σημεία που ενισχύουν τη συνεισφορά της διατριβής.

Από τον χαρακτηρισμό της διδασκαλίας του κάθε εκπαιδευτικού προκύπτει και το είδος των νοηματοδοτήσεων που ευνόησε ο κάθε εκπαιδευτικός μέσα από τη διδασκαλία του. Πιο συγκεκριμένα, η διερευνητική διδασκαλία με έμφαση στη μάθηση των μαθηματικών φαίνεται να οδήγησε σε αρκετές νοηματοδοτήσεις που αφορούν το συντονισμό μεταβλητών μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις, το ποσό μεταβολής και το πηλίκο διαφορών. Από την άλλη, η επεξηγηματική διδασκαλία με έμφαση στην κατανόηση και συμμετοχή των μαθητών ενίσχυσε την αναγνώριση της αλληλεξάρτησης από τις περισσότερες ομάδες μαθητών στην τάξη και προέκυψαν νοηματοδοτήσεις μέχρι το ποσό μεταβολής, χωρίς οι μαθητές να ασχοληθούν με το πηλίκο διαφορών. Τέλος, η διερευνητική διδασκαλία με έμφαση στη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας βοήθησε τους μαθητές να νοηματοδοτήσουν το συντονισμό μεταβλητών μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις, το ποσό μεταβολής και να φτάσουν μέχρι το πηλίκο διαφορών. Έτσι, η βασική διαφορά με τις προηγούμενες διδασκαλίες είναι ότι αυτές οι νοηματοδοτήσεις εμφανίζονταν κατά την εργασία στο πλαίσιο της δραστηριότητας είτε με σαφείς αναφορές στην αυθεντική κατάσταση από την εκπαιδευτικό είτε μέσω των εργαλείων ως μία προσομοίωση της αυθεντικής κατάστασης.

Σχετικά με τα στοιχεία του πλαισίου της δραστηριότητας στη μαθησιακή τροχιά παρατίθενται εν συντομία τα ευρήματα μέσα από τα επεισόδια που αναλύθηκαν. Ιδιαίτερα κρίσιμος σε αυτή την περίπτωση ήταν ο ρόλος του εκπαιδευτικού, ο οποίος έδινε διαφορετική βαρύτητα στο πλαίσιο της δραστηριότητας στις διαφορετικές παρεμβάσεις. Για παράδειγμα, σε όλα τα σχολεία, στον Σχεδιασμό Υδρορροής, η αυθεντικότητα της δραστηριότητας ήταν παρούσα μέσα από τη δίπλωση του χαρτιού που αναπαριστά τη μεταλλική λαμαρίνα που χρησιμοποιείται από τους επαγγελματίες. Έτσι, η σύνδεση με το πλαίσιο στον Σχεδιασμό Υδρορροής έγινε σε μεγάλο βαθμό μέσα από τα ρεαλιστικά μοντέλα που είχαν κατασκευαστεί εκ των προτέρων και δόθηκαν στους μαθητές για πειραματισμό. Ο πειραματισμός με τις διαφορετικές διπλώσεις επέτρεψε στους μαθητές να καθορίσουν τα εξαρτημένα και ανεξάρτητα χαρακτηριστικά και να χρησιμοποιήσουν όρους όπως «εμβαδό διατομής» και «πλευρές υδρορροής» που σχετίζονται με το μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων. Επιπλέον, οι περιορισμοί του σχεδιασμού είχαν σημαντικό ρόλο στη μοντελοποίηση του προβλήματος στο λογισμικό Casyopée. Σε όλα τα σχολεία, στην Πρόσοψη Καταστήματος, η προσομοίωση στη δυναμική γεωμετρία και οι αυθεντικοί περιορισμοί από τον αρχιτέκτονα βοήθησαν τη μετάβαση των μαθητών στη νοηματοδότηση της κατεύθυνσης και του συντονισμού αναπαραστάσεων χρησιμοποιώντας όρους που προέρχονται από το πλαίσιο, όπως «απόσταση ανάμεσα στις κολώνες» και «άνω/κάτω βιτρίνα». Σε όλα τα σχολεία, στη Δεξαμενή Πετρελαίου το στοιχείο με τη ράβδο μέτρησης που χρησιμοποιείται από τους επαγγελματίες χρησιμοποιήθηκε στην αρχή κατά κύριο λόγο. Οι μαθητές εργάζονταν κυρίως με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ωστόσο ορισμένες φράσεις τους «βλέπουμε μία αύξηση στην ταχύτητα του όγκου του καυσίμου καθώς το ύψος αυξάνεται, που είναι ο ρυθμός μεταβολής» υποδεικνύουν ότι υπήρχε ισχυρή σχέση μεταξύ του μαθηματικού κόσμου και του αυθεντικού πλαισίου. Συνεπώς, η αυθεντικότητα της δραστηριότητας σε όλα τα σχολεία φαίνεται ότι διευκόλυνε τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών με πολλούς τρόπους, όπως ο πειραματισμός με το κομμάτι χαρτιού, οι αυθεντικοί περιορισμοί στη δυναμική γεωμετρία και η αυθεντική πρακτική στα πρατήρια καυσίμων. Έτσι, συμπληρώνεται η υπάρχουσα έρευνα σχετικά με τις δραστηριότητες που έχουν ως αφετηρία αυθεντικές καταστάσεις και αποτελούν προσομοιώσεις της κατάστασης (βλ. Palm, 2009, Dierdorp et al., 2011). Ωστόσο, στην παρούσα έρευνα ο κάθε εκπαιδευτικός φάνηκε να δίνει διαφορετική έμφαση στη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας όπως προέκυψε από τις παρεμβάσεις τους.

Παράλληλα, η εργασία των μαθητών με τα ψηφιακά εργαλεία σε κάθε σχολείο φάνηκε να παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες καταλήγοντας στην κρισιμότητα του ρόλου των εργαλείων σε όλα τα σχολεία μέσα από παρόμοιες δυνατότητες των χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων. Μέσα από τα διαφορετικά μοντέλα πειραματισμού των μαθητών φάνηκε ο κρίσιμος ρόλος των ψηφιακών εργαλείων και των δυνατοτήτων τους, καθώς διαμεσολάβησαν στις δραστηριότητες μοντελοποίησης επιτρέποντας τη μαθηματική διερεύνηση των δραστηριοτήτων και φέρνοντας τα μαθηματικά στην επιφάνεια. Έτσι, οι μαθητές εργάζονταν σε προσομοίωση της πραγματικής κατάστασης με ψηφιακά εργαλεία που φέρνουν τα μαθηματικά κοντά στο μαθητή κατά αναλογία με τα TEBOs (technology enhanced boundary objects, Bakker et al., 2011). Πιο συγκεκριμένα, ο πειραματισμός με τα χειραπτικά εργαλεία, η διερεύνηση στη δυναμική γεωμετρία, οι μετρήσεις και η αυτόματη μοντελοποίηση και οι διαφορετικές αναπαραστάσεις φάνηκε να παίζουν κρίσιμο ρόλο σε όλα τα σχολεία στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Έτσι, οι μαθητές μέσα από τα ψηφιακά εργαλεία που λειτούργησαν ως προσομοιώσεις ήρθαν πιο κοντά στον χώρο εργασίας ξεφεύγοντας από καθιερωμένες μεθόδους εργασίας.

Το θεωρητικό πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε στο συγκεκριμένο ερώτημα είναι η Αφαίρεση εντός Πλαισίου. Η χρήση του ΑεΠ σε αυτό το ερώτημα βοήθησε περισσότερο στη διερεύνηση του ρόλου του πλαισίου (μέσα από τον ρόλο του εκπαιδευτικού και τον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων). Ιδιαίτερα σε αυτό το ερώτημα έδειξε τον τρόπο που οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού οδηγούν σε νοηματοδοτήσεις από την πλευρά των μαθητών. Επιπλέον, μέσα από τον πειραματισμό με τα διαθέσιμα εργαλεία έδειξε τη συνεισφορά του κρίσιμου ρόλου των ψηφιακών εργαλείων, ο οποίος οδηγούσε τους μαθητές σε μία ποικιλία νοηματοδοτήσεων.

Συνοψίζοντας, τα παραπάνω αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν από το τρίτο επίπεδο ανάλυσης των δεδομένων απαντούν στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα της διατριβής. Μάλιστα, ο ρόλος των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού φάνηκε να είναι ιδιαίτερος σε συνάρτηση με την ταυτότητα της διδασκαλίας του κάθε εκπαιδευτικού και τη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας. Παράλληλα, ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών φάνηκε να είναι αντίστοιχος μεταξύ των σχολείων υποδεικνύοντας τις κρίσιμες λειτουργίες στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών κατά τη διερεύνηση των δραστηριοτήτων.

6.3. Συνεισφορά της έρευνας

Στην παρούσα διατριβή αρχικά ερευνήθηκαν οι τρόποι με τους οποίους εξελίσσεται η σκέψη των μαθητών Β΄ Λυκείου καθώς νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων στο πλαίσιο δραστηριοτήτων μοντελοποίησης που περιλαμβάνουν τη χρήση χειραπτικών εργαλείων και ψηφιακών εργαλείων. Στα αποτελέσματα προέκυψε η μαθησιακή τροχιά νοηματοδότησης της συνάρτησης ως ζεύγος συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων όταν οι μαθητές εμπλέκονται με δραστηριότητες μοντελοποίησης μέσα στη σχολική τάξη. Η εξελικτική διαδικασία της μαθησιακής τροχιάς συνεισφέρει στην υπάρχουσα βιβλιογραφία υποδεικνύοντας πιθανά επίπεδα σκέψης που χαρακτηρίζουν τη μετάβαση από την ποσοτική σκέψη και την κατανόηση της συμμεταβολής στη συναρτησιακή σκέψη (π.χ. Thompson & Carlson, 2017, Ellis et al., 2020). Ειδικότερα, ο χαρακτήρας της εξέλιξης που έχει η πραγματική τροχιά επιτρέπει τη θεώρηση του χαρακτηρισμού των επεισοδίων ως τη βάση για τον χαρακτηρισμό επιπέδων από απλές σε πιο σύνθετες νοηματοδοτήσεις.

Ένα ζήτημα που προκύπτει κατά την νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων αφορά τα είδη των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων/μεγεθών/μεταβλητών που συμμετέχουν. Στην παρούσα διατριβή προδιαγράφηκαν εκ των προτέρων κατανοήσεις των μαθητών για τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες, τα μεγέθη τέλος τις μεταβλητές κατά τη μετάβαση από τον ποσοτικό συλλογισμό στις συναρτησιακές σχέσεις λαμβάνοντας υπόψη έρευνες (π.χ. Thompson, 2011, Lagrange 2014, Psycharis et al., 2021). Μέσα από την ανάλυση συνδέθηκαν τα είδη των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων/μεγεθών/μεταβλητών τόσο με τις νοηματοδοτήσεις όσο και με τα διαφορετικά μοντέλα στα οποία εμφανίζονται. Για παράδειγμα, στο μοντέλο των χειραπτικών εργαλείων οι μαθητές ανακαλύπτουν τις ποσότητες και αναγνωρίζουν τα χαρακτηριστικά των ποσοτήτων. Ακολούθως, στο μοντέλο της δυναμικής γεωμετρίας οι μαθητές δημιουργούν τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη και στο μοντέλο των μετρήσεων εμφανίζουν τις μετρήσεις τους. Τέλος, έχουν τη δυνατότητα να επιλέξουν δύο συμμεταβαλλόμενα μεγέθη και να τα θεωρήσουν ως μεταβλητές, ώστε να προκύψει συνάρτηση στο μοντέλο των συναρτήσεων. Συνεπώς, μία ακόμη συνεισφορά της παρούσας διατριβής είναι ότι στα αποτελέσματα γίνεται σύνδεση ανάμεσα στα είδη των ποσοτήτων/μεγεθών και των διαφορετικών νοηματοδοτήσεων των μαθητών στην τροχιά νοηματοδότησης, αλλά και του μοντέλου στο οποίο εμφανίστηκε η νοηματοδότηση.

Στη συνέχεια, στην παρούσα διατριβή εξετάστηκαν οι συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων και ο ρόλος τους στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών. Στα αποτελέσματα φάνηκε ότι οι μαθητές όταν εργάζονται σε διαφορετικά μοντέλα μπορούν να μεταβαίνουν σε πιο σύνθετες νοηματοδοτήσεις που ξεκινούν από τις εξαρτήσεις ποσοτήτων και φτάνουν στη συμμεταβολή μεταβλητών περιλαμβάνοντας τον ρυθμό μεταβολής. Ακόμη, φάνηκε να προκύπτουν οι συνδέσεις των διαφορετικών μοντέλων και η σημασία τους στην μαθηματική σκέψη. Επομένως, μία άλλη συνεισφορά της έρευνας είναι ότι φέρνει στο προσκήνιο τη διαφορετικότητα των μοντέλων που διευκολύνουν τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων και την ποικιλία στα είδη των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων εντός και μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων. Πιο συγκεκριμένα, η παρούσα έρευνα ενημερώνει τη βιβλιογραφία σχετικά με την εξέλιξη των μοντέλων στη διαδικασία μοντελοποίησης από τους μαθητές και τη νοηματοδότηση μίας σχέσης συμμεταβολής (π.χ. Czocher & Hardison, 2019) παρέχοντας μία συνολική εικόνα για την εργασία των μαθητών σε κάθε μοντέλο και τις συνδέσεις μεταξύ αυτών. Το τελευταίο σημείο επιτρέπει να αντιληφθεί κανείς τη μετάβαση των μαθητών από τις εξαρτήσεις μεταξύ χαρακτηριστικών των ποσοτήτων στις συναρτήσεις, λαμβάνοντας υπόψη τα είδη των ποσοτήτων που εμπλέκονται σε αυτή τη μετάβαση, αλλά και τα μέσα με τα οποία διαμεσολαβήθηκε.

Ακόμη, στην παρούσα διατριβή εξετάστηκε ο ρόλος των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού και ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ποια είναι τα στοιχεία του πλαισίου που έπαιξαν κρίσιμο ρόλο στις τροχιές των μαθητών δίνοντας ιδιαίτερη βαρύτητα στις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού. Πιο συγκεκριμένα, ο ρόλος του εκπαιδευτικού μέσα από παιδαγωγικές και διδακτικές παρεμβάσεις υποστήριζε τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών και τη σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας. Οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού ενημερώνουν το πεδίο που ασχολείται με ερωτήσεις ή παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού στη σχολική τάξη (π.χ. Kosko et al., 2014, Ellis et al., 2019). Από την άλλη, τα χειραπτικά και τα ψηφιακά εργαλεία βοήθησαν τους μαθητές να εντοπίσουν τις ποσότητες στις δραστηριότητες, να τις μεταφέρουν στη δυναμική γεωμετρία ως μεγέθη εμφανίζοντας τις μετρήσεις τους, να μεταβούν από τις εξαρτήσεις μεταξύ χαρακτηριστικών των ποσοτήτων στα μεγέθη και τις μεταβλητές και να χρησιμοποιήσουν πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης για να δώσουν απάντηση στις δραστηριότητες μοντελοποίησης. Έτσι, φαίνεται καθοριστική η συμβολή του λογισμικού Casyopée κατά τη μοντελοποίηση των δραστηριοτήτων, εξαιτίας των δυνατοτήτων που έχει, όπως ήδη αναφέρεται στη βιβλιογραφία (π.χ. Lagrange, 2010, 2014).

Μία ακόμη συνεισφορά της παρούσας διατριβής αφορά τη σημασία του πλαισίου ανά σχολείο. Πιο συγκεκριμένα, στα αποτελέσματα μέσα από την τροχιά νοηματοδότησης ανά σχολείο φαίνεται ότι οι μαθητές από το σχολείο Γ ευνοήθηκαν αρκετά από την εφαρμογή όσον αφορά στις νοηματοδοτήσεις που έκαναν. Σε αυτό το γεγονός κύριο ρόλο έχει το είδος των αλληλεπιδράσεων που έγιναν στη σχολική τάξη, όπως για παράδειγμα οι παιδαγωγικές παρεμβάσεις επέκτασης και οι διδακτικές παρεμβάσεις σύνδεσης αναπαραστάσεων, καθώς επίσης και η κουλτούρα διερεύνησης της τάξης, από όλους τους μαθητές κατά τη διάρκεια της εφαρμογής. Έτσι, για παράδειγμα η παρούσα διατριβή μπορεί να ενημερώσει τόσο τους ερευνητές που ασχολούνται με τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού (π.χ. Ellis et al., 2019, Kosko et al., 2014) όσο και τους εκπαιδευτικούς, ώστε να γνωρίζουν το είδος των παρεμβάσεων που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός στην τάξη των μαθηματικών σε σχέση με τις επακόλουθες νοηματοδοτήσεις που ενδέχεται να προκύψουν.

Η παρούσα διατριβή συνεισφέρει σχετικά με τις απαιτήσεις του σχεδιασμού και εφαρμογής δραστηριοτήτων με στόχο την υποστήριξη της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων μέσα από δραστηριότητες μοντελοποίησης που είχαν ως αφετηρία αυθεντικές προβληματικές καταστάσεις. Με αφετηρία την μοντελοποίηση και την αυθεντικότητα προβληματικών καταστάσεων κατά τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων προέκυψαν δραστηριότητες που υποστήριξαν τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις εντός και μεταξύ διαφορετικών μοντέλων. Έτσι, για παράδειγμα η διατριβή μπορεί να ενημερώσει σχεδιαστές δραστηριοτήτων, καθηγητές και ερευνητές στον προσανατολισμό της δραστηριότητας των μαθητών μέσα στη σχολική τάξη εντοπίζοντας εκ των προτέρων τα κρίσιμα σημεία των νοηματοδοτήσεων των μαθητών. Αυτά τα κρίσιμα σημεία αφορούν (α) τον κρίσιμο ρόλο των διαφορετικών μοντέλων στη δραστηριότητα των μαθητών, ειδικότερα όταν αξιοποιούν τη δυναμικότητα των ψηφιακών εργαλείων, (β) τα είδη των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων μέσα στα μοντέλα, (γ) τον ρόλο του εκπαιδευτικού και των εργαλείων στην εφαρμογή των δραστηριοτήτων, (δ) τις απαιτήσεις του σχεδιασμού δραστηριοτήτων που συνδυάζει αυθεντικές καταστάσεις και μοντελοποίηση. Αντίστοιχο θέμα συζητούν οι Lagrange et al. (2022) σχετικά με την ανάγκη σχεδιασμού δραστηριοτήτων που θα δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στις μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών χώρων εργασίας, οι οποίοι ορίζονται από την αυθεντική κατάσταση και τη διαφορετικότητα των μοντέλων που σχετίζονται με αυτή. Έτσι, η διατριβή συνεισφέρει σε αυτή την κατεύθυνση της μαθηματικής μοντελοποίησης σχετικά με τη φύση των μοντέλων που εμπλέκονται και τη σχέση τους με τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών λαμβάνοντας υπόψη τον ρόλο των στοιχείων του πλαισίου. Καταλήγοντας, η παρούσα διατριβή δημιουργεί νέα πεδία για περαιτέρω έρευνα σχετικά με τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών μελετώντας τον ρόλο των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού, αλλά και την εμπλοκή των μαθητών με χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία.

6.4. Περιορισμοί της έρευνας

Οι περιορισμοί για την παρούσα διατριβή αφορούν κυρίως στοιχεία που συνδέονται με τη μεθοδολογία της έρευνας. Έτσι, παρόλο που έγινε σε διάστημα δύο χρόνων σε τρία σχολεία δύσκολα μπορεί να γενικευτεί σε μεγάλη κλίμακα. Για παράδειγμα, η συγκεκριμένη έρευνα εφαρμόστηκε σε σχολεία, στα οποία σύμφωνα με το επίσημο πρόγραμμα σπουδών δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στην κατανόηση της συνάρτησης ως αντιστοιχίας και όχι στην κατανόηση της συνάρτησης με τη βοήθεια της συμμεταβολής. Επίσης, όσον αφορά στα ψηφιακά εργαλεία, η χρήση ψηφιακών εργαλείων που είναι σχεδιασμένα για ερευνητικούς σκοπούς (όπως το Casyopée) ελλοχεύει κινδύνους όσον αφορά στην επαναληψιμότητα της έρευνας. Αναφορικά με την επαναληψιμότητα της έρευνας προκύπτει ότι ο συν-σχεδιασμός των δραστηριοτήτων με τους εκπαιδευτικούς είναι κρίσιμος προκειμένου να ανταποκρίνονται στις ανάγκες της κάθε τάξης. Ένας ακόμη περιορισμός είναι ότι ως παράμετροι του πλαισίου θεωρήθηκαν κυρίως οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και τα ψηφιακά εργαλεία κατά κύριο λόγο, περιορίζοντας την πραγματικότητα της κατάστασης. Ένας άλλος περιορισμός αφορά στον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων ώστε να εφαρμόζονται σε σχολικές τάξεις και στην απόσταση που έχουν από την αυθεντική κατάσταση σε ένα χώρο εργασίας. Πέρα από αυτά τα προβλήματα και τους περιορισμούς, η παρούσα έρευνα δίνει απαντήσεις σχετικά με τον τρόπο που νοηματοδοτούν οι μαθητές τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων κατά τη διερεύνηση δραστηριοτήτων μοντελοποίησης έχοντας ως αφετηρία αυθεντικές καταστάσεις, μέσω της χρήσης χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων. Επίσης, ενημερώνει για τις συνθήκες του πλαισίου λαμβάνοντας υπόψη τον ρόλο του εκπαιδευτικού και τον ρόλο των ψηφιακών εργαλείων.

6.5. Προτάσεις για μελλοντικές έρευνες

Οι μελλοντικές έρευνες προκύπτουν κυρίως από τους περιορισμούς της παρούσας έρευνας σε συνδυασμό με την υπάρχουσα βιβλιογραφία αναφορικά με το σημείο εστίασης της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, αναφορικά με τους περιορισμούς της έρευνας σε μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να εφαρμοστούν σε σχολεία με διαφορετικό πρόγραμμα σπουδών σε χώρες του εξωτερικού, λαμβάνοντας υπόψη τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων και την απόσταση από την αυθεντική κατάσταση. Άλλωστε, η μελέτη των συμμεταβαλλόμενων σχέσεων και η νοηματοδότηση των συναρτήσεων μέσω της συμμεταβολής μέσα από διαφορετικές προσεγγίσεις προγραμμάτων σπουδών προτείνεται και σε υπάρχουσες έρευνες σχετικά με τη συμμεταβολή (π.χ. Thompson & Carlson, 2017). Επιπλέον, αναφορικά με τη χρήση διαφορετικών θεωρητικών πλαισίων προτείνεται η χρήση ενός διαφορετικού θεωρητικού πλαισίου, όπως το CWS, το οποίο έχει υποδειχθεί ότι μπορεί να συνεισφέρει σε έρευνες αναφορικά με τη συνάρτηση, καθώς αποτελεί έννοια που έχει πολλαπλά πεδία και μπορεί να μελετηθεί μέσα από διαφορετικές διαστάσεις (Psycharis et al., 2021). Το CWS αποτελεί ένα θεωρητικό πλαίσιο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί παράλληλα με το ΑεΠ και να προκύψει μία διπλή ανάλυση που θα φωτίσει τη μετάβαση των μαθητών από τις αλληλεξαρτήσεις στις συναρτησιακές σχέσεις. Αναφορικά με τη μελέτη του ρόλου του εκπαιδευτικού ως μέρος του πλαισίου της έρευνας αποτελεί πρόσφορο πεδίο για μελλοντικές έρευνες, καθώς στην παρούσα διατριβή αποτέλεσε μόνο ένα μέρος της ερευνητικής εστίασης. Στην έρευνα επισημαίνεται ο ρόλος του εκπαιδευτικού για τη μελέτη των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων (π.χ. Thompson & Carlson, 2017), αλλά και η σημασία των παρεμβάσεών του (π.χ. Ellis et al., 2019). Συνεπώς, ενισχύονται μελλοντικές έρευνες ώστε να έχουν ως κύριο σημείο εστίασης τον εκπαιδευτικό εστιάζοντας στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων.

Αναφορές

Artigue, M. & Baptist, P. (2012). Inquiry in mathematics education. Fibonacci Project. Retrieved from: http://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/inquiry_in_mathematics_education.pdf.

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *45*(6), 797–810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Artigue, M. & Lagrange, J.-B. (2009). Students' activities about functions at upper secondary level: a grid for designing a digital environment and analysing uses. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 465-472). Thessaloniki, Greece: PME.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools* (Doctoral dissertation).

Bakker, A., Kent, P., Hoyles, C., & Noss, R. (2011). Designing for communication at work: A case for technology-enhanced boundary objects. *International Journal of Educational Research*, *50*(1), 26-32. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.04.006

Basu, D., & Panorkou, N. (2019). Integrating covariational reasoning and technology into the teaching and learning of the greenhouse effect. *Journal of Mathematics Education*, 12(1), 6–23. https://doi.org/10.26711/007577152790035

Battista, M. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 185–204. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_6

Best, M., & Bikner-Ahsbahs, A. (2017). The function concept at the transition to upper secondary school level: tasks for a situation of change. *ZDM*, *49*(6), 865-880. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0880-6

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: The concept of function as an example. In *Meaning in mathematics education* (pp. 61-81). Springer, New York, NY.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37–68. https://doi.org/10.1007/BF00302716

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines et al. (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economic* (pp. 222–231). Chichester: Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Boaler, J., & Brodie, K. (2004). The importance, nature and impact of teacher questions. In *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 774-782).

Bruder, R. & Pescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *45*(6), 811–822. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0542-2

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378. https://doi.org/10.2307/4149958

Castillo-Garsow, C. C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth* (Unpublished doctoral dissertation). Arizona State University, Tempe.

Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes & L. L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (Vol. 2, pp. 55–73). Laramie, WY: University of Wyoming College of Education.

Charmaz, K. (2014). *Constructing grounded theory*. London, England: SAGE.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81–89. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203520574

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). Learning trajectories: Foundations for effective, research-based education. In A. P. Maloney, J. Confrey, & K. H. Nguyen (Eds.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (pp. 1–30). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Cobb P., Wood, T., Yackel, E. & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal*, 29, 573-604.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32,* 9-13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Cobb, P., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2003). Learning about statistical covariation. *Cognition and instruction*, *21*(1), 1-78.

Confrey, J., Smith, E., & Carroll, F. (1991). Function Probe: Academic Version. *Department of Education, Cornell University, Ithaca-NY*.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. In *Learning mathematics* (pp. 31-60). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/BF01273661

Confrey, J., Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. In: Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, HW., Niss, M. (eds) *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New ICMI Study Series, vol 10. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_4

Czocher, J. A., & Hardison, H. (2019). Characterizing evolution of mathematical models. In S. Otten, A. G. Candela, Z. de Arauji, C. Hains, & C. Munter (Eds.), *Proceedings of the 41st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 864–873). St. Louis, MO: University of Missouri.

Davis, P. J. and Hersh, R. (1981). The Mathematical Experience. Houghton Mifflin, Boston and New York.

Derouet, C., Kuzniak, C., Laval, D., Delgadillo, E., Moutet, L., Nechache, A. , Parzysz, B. & Vivier, L. (2017). Modeling tasks and mathematical work. In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.) *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10)* (pp. 1031-1032). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Dierdorp, A., Bakker, A., Eijkelhof, H., & van Maanen, J. (2011). Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 132-151. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538294

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B.B. (2015). The nested epistemic actions model for Abstraction in Context: Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 185–217). Dordrecht, The Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_8

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 271-300. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.06.002

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C. C., & Amidon, J. (2013). An exponential growth learning trajectory. In *Proceedings of the 37th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 273-280).

Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Williams, C. C., & Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 135–155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.004

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical thinking and learning*, *18*(3), 151-181. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090

Ellis, A., Özgür, Z., & Reiten, L. (2019). Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, *31*(2), 107-132. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0246-6

Ellis, A., Ely, R., Singleton, B., & Tasova, H. (2020). Scaling-continuous variation: Supporting students' algebraic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *104*(1), 87-103. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09951-6

Franke, M. L., Webb, N. M., Chan, A. G., Ing, M., Freund, D., & Battey, D. (2009). Teacher questioning to elicit students' mathematical thinking in elementary school classrooms. *Journal of Teacher Education*, *60*(4), 380-392. https://doi.org/10.1177/0022487109339906

Geiger, V., Faragher, R., & Goos, M. (2010). CAS-enabled technologies as 'agents provocateurs' in teaching and learning mathematical modelling in secondary school classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, *22*(2), 48-68. https://doi.org/10.1007/BF03217565

Gilboa, N., Kidron, I., & Dreyfus, T. (2019). Constructing a mathematical definition: the case of the tangent. *International journal of mathematical education in science and technology*, *50*(3), 421-446. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1516824

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 105–128. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_3

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H.-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools—A quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *50*(1–2), 233–244. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6

Herbel-Eisenmann, B. A., Steele, M. D., & Cirillo, M. (2013). (Developing) teacher discourse moves: A framework for professional development. *Mathematics Teacher Educator*, 1(2), 181–196. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.1.2.0181

Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195-222. https://doi.org/10.2307/749673

Hitt, F. & González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, 88, pp. 201-219.

Hoyles, C. (2005). Making mathematics and sharing mathematics: two paths to co-constructing meaning?. In *Meaning in mathematics education* (pp. 139-158). Springer, New York, NY.

Jaworski, B. (1994). Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry. London: Falmer Press.

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 313–330. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.01.001

Johnson, H. L. (2015). Secondary students' quantification of ratio and rate: A framework for reasoning about change in covarying quantities. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 64–90. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981946

Johnson, H. L., McClintock, E., & Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: A case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM*, *49*(6), 851-864. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0866-4

Johnson, H. L., McClintock, E. D., & Gardner, A. (2020). Opportunities for Reasoning: Digital Task Design to Promote Students' Conceptions of Graphs as Representing Relationships between Quantities. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *6*(3), 340-366. https://doi.org/10.1007/s40751-020-00061-9

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, *38*(3), 302-310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education. Examples and experiences. *Journal for Didactics of Mathematics*, *31*(1), 51-76. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0001-3

Kaiser, G., Schwarz, B., & Buchholtz, N. (2011). Authentic modelling problems in mathematics education. In *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 591-601). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_57

Keitel, C., & Kilpatrick, J. (2005). Mathematics education and common sense. In *Meaning in mathematics education* (pp. 105-128). Springer, New York, NY.

Kidron, I., & Dreyfus, T. (2010). Interacting parallel constructions of knowledge in a CAS context. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(2), 129-149.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester Jr. (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age Publishing; Reston, VA: NCTM.

Kosko, K. W., Rougee, A., & Herbst, P. (2014). What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom?. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(3), 459-476. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0116-1

Kouropatov, A., Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM Mathematics Education* **46**, 533–548. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0571-5

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Mathematical Working Spaces. Viewpoints and perspectives. Relime, Revista Latinoamerica de investigacion en matematica educative, 17(4), 5–40. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Kynigos, C. (2004). A" black-and-white box" approach to user empowerment with component computing. *Interactive Learning Environments*, *12*(1-2), 27-71. https://doi.org/10.1080/1049482042000300896

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In *Meaning in mathematics education* (pp. 159-179). Springer, New York, NY.

Lagrange, J.-B. (2010). Teaching and learning about functions at upper secondary level: designing and experimenting the software environment Casyopée. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 243-255. https://doi.org/10.1080/00207390903372395

Lagrange, J.-B. (2014). New representational infrastructures: broadening the focus on functions. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *33*(3), 179-192. https://doi.org/10.1093/teamat/hru018

Lagrange, J.-B. & Psycharis, G. (2014). Investigating the potential of computer environments for the teaching and learning of functions: A double analysis from two research traditions. *Technology, Knowledge and Learning*, *19*(3), 255-286. https://doi.org/10.1007/s10758-013-9211-3

Lagrange, J.-B. (2018). Connected working spaces: designing and evaluating modelling based teaching situations. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of PME 42* (Vol. 3, pp. 291-298). Umeå, PME.

Lagrange, J.-B., Huincahue, J. A. & Psycharis, G. (2022). Modelling in education: new perspectives opened by the theory of mathematical working spaces. In: A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, P. R. Richard (Eds), *Mathematical Work in*

Educational Context (pp. 247-266). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_11

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 38*(2), 113–142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 285-311. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2

Minh, T. K. & Lagrange, J. B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *48*(6), 793-807. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0774-z

Moore, K. C., & Bowling, S. A. (2008). Covariational reasoning and quantification in a college algebra course. In *Proceedings for the eleventh special interest group of the mathematical association of america on research in undergraduate mathematics education conference on research in undergraduate mathematics education*. San Diego - Mission Valley, California.

Moore, K. C., & Carlson, M. P. (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 48-59. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.09.001

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 102-138. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0102

Moritz, J. (2004). Reasoning about covariation. In *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 227-255). Springer, Dordrecht.

Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(2), 203-233.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings*. Dordrecht: Kluwer.

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics, MAA Notes* (Vol. 73, pp. 27–42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Palm, T. (2006). Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics*, *26*(1), 42–47. https://www.jstor.org/stable/40248523

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In *Words and Worlds* (pp. 1-19). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087909383_002

Panorkou, N., & Maloney, A. P. (2016). Early algebra: expressing covariation and correspondence. *Teaching children mathematics*, *23*(2), 90-99. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.23.2.0090

Paoletti, T., Stevens, I. E., Hobson, N. L., Moore, K. C., & LaForest, K. R. (2018). Inverse function: Pre-service teachers' techniques and meanings. *Educational Studies in Mathematics*, *97*(1), 93-109. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9787-y

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM*, *47*(6), 877-891. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3

Psycharis, G. (2015). Formalising functional dependencies: The potential of technology. *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp.2388-2395), Prague, Czech Republic.

Psycharis, G., Potari, D., Triantafillou, C., & Zachariades, T. (2019). Teachers' attempts to address both mathematical challenge and differentiation in whole class discussion. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 27). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Psycharis, G., Kafetzopoulos, G & Lagrange, J.-B. (2021). A framework for analysing students' learning of function at upper secondary level: Connected Working Spaces and Abstraction in Context. In A. Clark-Wilson, A. Donevska-Todorova, E. Faggiano, J. Trgalová and H-G. Weigand (Eds.), *Mathematics education in the digital age: learning practice and theory* (pp. 150–167). Abingdon, UK: Routledge.

Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves: analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en didactique des mathématiques*, *43*(2–3), 239–285.

Sacristán, A.I., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., & Perrusquía, E. (2010). The influence and shaping of digital technologies on the learning–and learning trajectories–of mathematical concepts. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Proceedings of the Mathematics education and technology—rethinking the terrain: The seventeenth ICMI study* (pp. 179–226). Boston, MA: Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146- 0_9

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berenson, K. R. Dawkins, M. Blanton, W. N. Coloumbe, J. Kolb, K. Norwood & L. Stiff (Eds.), *Proceedings of the 20th annual meeting of the Psychology of Mathematics Education North American Chapter* (Vol. 1, pp. 298-303). Raleigh, NC: North Carolina State University.

Sandie, S., & Susiaty, U. (2020). Student's covariational reasoning in solving covariational problems of dynamic events. *Journal of Education, Teaching and Learning*, *5*(2), 375-382. https://doi.org/10.26737/jetl.v5i2.2092

Schwarz, B. B., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. In B. B. Schwarz, T. Dreyfus & R.

Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 11-41). London, UK:Routledge.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function, in E. Dubinsky and G. Harel (Eds.), The Concept of Function. *Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes*, *vol. 25*, pp. 25–58.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 114–145. https://doi.org/10.2307/749205

Simon, M.A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration ofthe hypothetical learning trajectory. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 91–104. https://doi.org/10.2307/749205

Simon, M. A. (2016). An approach to design of mathematical task sequences: Conceptual learning as abstraction. *PNA*, 10(4), 270–279.

Skovsmose, O. (2005). Meaning in mathematics education. In *Meaning in mathematics education* (pp. 83-100). Springer, New York, NY.

Stalvey, H. E., & Vidakovic, D. (2015). Students' reasoning about relationships between variables in a real-world problem. *The Journal of Mathematical Behavior, 40,* 192–210. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.08.002

Stephens, A., Fonger, N. L., Blanton, M., & Knuth, E. (2016). Elementary Students' Generalization and Representation of Functional Relationships: A Learning Progressions Approach. *Grantee Submission*.

Stillman, G. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borrromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), Trends in teaching and learning of mathematical modelling (pp. 165–180). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_18

Sullivan, P., Aulert, A., Lehmann, A., Hislop, B., Shepherd, O., & Stubbs, A. (2013). Classroom culture, challenging mathematical tasks and student persistence. In V. Steinle, L. Ball, & C. Bardini (Eds.), *Mathematics education: Yesterday, today and tomorrow (Proceedings of the 36th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 618–625). Melbourne: MERGA.

Swidan, O., Schacht, F., Sabena, C., Fried, M., El-Sana, J., & Arzarello, F. (2019). Engaging students in covariational reasoning within an augmented reality environment. In *Augmented Reality in Educational Settings* (pp. 147-167). Brill Sense. https://doi.org/10.1163/9789004408845_007

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate mathematics curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in* *collegiate mathematics education*, 1, issues in mathematics education (Vol. 4, pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbmath/004/02

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education*. WISDOMe Mongraphs, 1, pp. 33-57. Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Triantafillou, C. & Potari, D. (2014). Revisiting the place value concept in the workplace context: The issue of transfer development. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 337–358. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9543-5

Triantafillou, C., Psycharis, G., Potari, D., Bakogianni, D., & Spiliotopoulou, V. (2021). Teacher educators' activity aiming to support inquiry through mathematics and science teacher collaboration. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*(1), 21-37. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10153-6

Vos, P. (2011). What is 'authentic' in the teaching and learning of mathematical modelling? In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 713–722). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_68

Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: The interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 271-290. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9540-8

Williams, J. S., & Wake, G. D. (2007). Metaphors and models in translation between college and workplace mathematics. Educational Studies in Mathematics, 64(3), 345-371.

Wittgenstein, L. (1953). Philosophical investigations**.** Oxford: Basil Blackwell.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΥΔΡΟΡΡΟΗΣ

Οι υδρορροές συλλέγουν το νερό της βροχής και το κατευθύνουν μέσω σωληνώσεων στο έδαφος. Για να δημιουργηθεί μία υδρορροή χρησιμοποιούνται μεταλλικά τμήματα, στα οποία ο σχεδιαστής αναζητά τον τρόπο δίπλωσης, ώστε να συγκρατείται κι έτσι να μεταφέρεται η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα νερού. Η κατασκευή της υδρορροής πραγματοποιείται λυγίζοντας τα πλαϊνά τμήματα κάθετα στο υπόλοιπο σώμα της μεταλλικής λαμαρίνας.

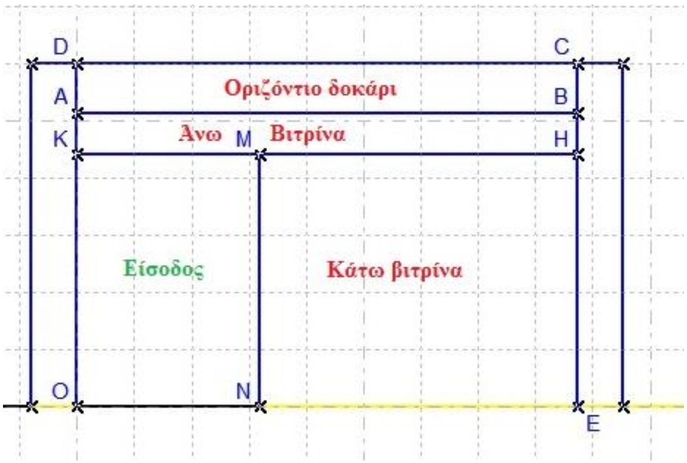
Εργάζεστε σε μία εταιρεία σχεδιασμού και παρέχετε βοήθεια σε εργοστάσια σχετικά με την κατασκευή υδρορροών. Η εταιρεία που εργάζεστε έχει αναλάβει να προτείνει στο εργοστάσιο τον τρόπο που θα γίνει η δίπλωση στις μεταλλικές λαμαρίνες, **ώστε να κατασκευαστεί μία υδρορροή που θα συγκρατεί τη μεγαλύτερη ποσότητα νερού**.

Η εργασία που σας έχει ανατεθεί είναι να υποδείξετε τον βέλτιστο τρόπο δίπλωσης μίας λαμαρίνας σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου συγκεκριμένων διαστάσεων προκειμένου να κατασκευαστεί μία υδρορροή που προσαρμόζεται στη στέγη ενός σπιτιού.

Υποερωτήματα:

1. Συζητήστε στην τάξη τον τρόπο που η ποσότητα του νερού αλλάζει σε μία υδρορροή χρησιμοποιώντας ένα κομμάτι χαρτί 10Χ20εκ (ως μοντέλο υδρορροής).
2. Διερευνήστε τη δραστηριότητα στο Casyopée, δημιουργώντας ένα ορθογώνιο με ένα μόνο ελεύθερο σημείο.
3. Ορίστε τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες και τις μετρήσεις τους στο Casyopée.
4. Μπορείτε να προσδιορίσετε μία θέση του ελεύθερου σημείου που η ποσότητα νερού μεγιστοποιείται; Χρησιμοποιείστε τις διαφορετικές λειτουργίες του Casyopée για να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΠΡΟΣΟΨΗ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΟΣ



Ο σχεδιασμός της πρόσοψης ενός καταστήματος εξαρτάται από αρκετούς παράγοντες, οι οποίοι επηρεάζουν το τελικό έργο. Απαραίτητα στοιχεία της πρόσοψης είναι δύο κατακόρυφες κολόνες, ένα οριζόντιο δοκάρι στήριξης που συγκρατεί την οροφή και η πόρτα εισόδου. Σε συμβατικές περιπτώσεις οι κατακόρυφες κολώνες έχουν παρόμοιες διαστάσεις, αλλά ο σχεδιασμός του οριζόντιου δοκαριού στήριξης προβληματίζει τους αρχιτέκτονες, καθώς εξαρτάται από την απόσταση ανάμεσα στις κατακόρυφες κολώνες. Για λόγους στατικότητας στις κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα το πάχος του οριζόντιου δοκαριού είναι το $1/10$ της απόστασης ανάμεσα στις δύο κατακόρυφες κολώνες, η οποία δεν πρέπει να ξεπερνά τα 6μ., καθώς οδηγούμαστε σε ειδικές κατασκευές. Η πρόσοψη εκτός από τις κολόνες, την είσοδο και το οριζόντιο δοκάρι στηρίξεως συνήθως επενδύεται με γυαλί το οποίο χρησιμοποιείται ως βιτρίνα.

Κάποιος επαγγελματίας ενδιαφέρεται να χτίσει ένα κατάστημα που, σύμφωνα με τις προδιαγραφές του οικοπέδου, πρέπει να έχει ύψος 3μ., ύψος εισόδου 2.20μ. και πλάτος 1.60μ.. Ο επαγγελματίας ενδιαφέρεται για τη συνολική βιτρίνα του καταστήματος και ιδιαίτερα για την επιφάνεια κάτω από το οριζόντιο δοκάρι ως κύρια βιτρίνα για τα προϊόντα του. Ο σχεδιασμός της πρόσοψης ενός τέτοιου καταστήματος ανατίθεται στο αρχιτεκτονικό γραφείο που εργάζεστε ως αρχιτέκτονας. Αναλαμβάνετε **να προτείνετε την κατασκευή που θα εξασφαλίσει την καταλληλότερη βιτρίνα στο κατάστημα**.

Υποθέτοντας ότι μπορείτε να παραγγείλετε μέχρι 10τ.μ. της βιτρίνας με γυαλί, θα μπορούσατε να καλύψετε τη βιτρίνα με γυαλί για όλες τις περιπτώσεις;

Υποερωτήματα:

1. Συζητήστε στην τάξη τη σημαντικότητα της βιτρίνας (δείχνοντας σχετικές εικόνες)
2. Διερευνήστε την έτοιμη κατασκευή στο Casyopée και συζητήστε τον τρόπο που αλλάζουν τα εμβαδά.
3. Ορίστε τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες και τις μετρήσεις τους στο Casyopée.
4. Μπορείτε να προσδιορίσετε μία θέση του ελεύθερου σημείου στην οποία η κατασκευή θα έχει την πιο κατάλληλη άνω βιτρίνα; Χρησιμοποιείστε τις διαφορετικές λειτουργίες του Casyopée για να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΔΕΞΑΜΕΝΗ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΥ

Στα πρατήρια υγρών καυσίμων οι κυλινδρικές δεξαμενές πετρελαίου έχουν δύο δυνατούς τρόπους τοποθέτησης. Ο πρώτος είναι η κατακόρυφη τοποθέτηση και ο δεύτερος είναι η οριζόντια τοποθέτηση της κυλινδρικής δεξαμενής. Η μέτρηση της ποσότητας του καυσίμου μέσα σε μία δεξαμενή γίνεται με τη βύθιση μίας ράβδου μέτρησης και την αντιστοίχιση της ένδειξης της ράβδου σε ποσότητα καυσίμου με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών.

Είστε πωλητής σε πρατήριο υγρών καυσίμων, το οποίο διαθέτει κυλινδρικές δεξαμενές συγκεκριμένων διαστάσεων με πετρέλαιο, άλλες τοποθετημένες **κατακόρυφα** και άλλες **οριζόντια**. Κατά την παραλαβή του καυσίμου, έχετε στη διάθεσή σας μία ράβδο μέτρησης προκειμένου να μετρήσετε την ποσότητα του καυσίμου που προστίθεται στη δεξαμενή από τους προμηθευτές.

Σας ανατίθεται **να ελέγξετε τη διαδικασία παραλαβής** του καυσίμου ως προς την ακρίβεια για διαφορετικές ενδείξεις της ράβδου.

Αν η μεταβολή της ένδειξης της ράβδου είναι το ¼ του ύψους μίας δεξαμενής, θα πληρώνατε για το γέμισμα κατά το ¼ της δεξαμενής;

Υποερωτήματα:

1. Συζητήστε στην τάξη τον τρόπο μέτρησης του πετρελαίου χρησιμοποιώντας μία ράβδο μέτρησης για την κατακόρυφη τοποθέτηση της δεξαμενής.
2. Ορίστε τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες και τις μετρήσεις τους.
3. Δημιουργήστε τη γραφική παράσταση ύψους - όγκου και εξηγήστε.
4. Δώστε αλγεβρικό τύπο της σχέσης των δύο ποσοτήτων.
5. Συζητήστε στην τάξη τον τρόπο μέτρησης της ποσότητας του καυσίμου χρησιμοποιώντας τη ράβδο μέτρησης στην οριζόντια τοποθέτηση της δεξαμενής.
6. Ορίστε τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες και τις μετρήσεις τους.
7. Συζητήστε στην τάξη πως μπορείτε να υπολογίσετε τον όγκο του καυσίμου.
8. Διερευνήστε το γέμισμα της δεξαμενής στο GeoGebra και συζητήστε τον τρόπο που αλλάζει κάθε ποσότητα.

Δημιουργήστε τη γραφική παράσταση ύψους σε σχέση με τον όγκο και εξηγήστε.

ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Ημερομηνία	**Περιγραφή σχεδιασμού/τροποποίησης**
12/12/2014	Δημιουργία 2ης δραστηριότητας από τον ερευνητή: Σχεδιασμός πρόσοψης (Πρόσοψη Καταστήματος)
03/03/2015	Δημιουργία 3ης δραστηριότητας από τον ερευνητή: Δεξαμενή υγρού καυσίμου (Δεξαμενή Πετρελαίου)
13/03/2015	Δημιουργία 1ης δραστηριότητας από τον ερευνητή: Κανάλι νερού (Σχεδιασμός Υδρορροής)
19/04/2015	Δημιουργία 0ης δραστηριότητας από τον ερευνητή: Μεταφορική
30/04/2015	Τροποποίηση δραστηριοτήτων (0,1,2,3) για την πιλοτική έρευνα, ώστε να εφαρμόζονται σε σχολική τάξη
11/05/2015	Πιλοτική έρευνα σε δημόσιο σχολείο με δραστηριότητες (0,1)
04/06/2015	Σεμινάριο Υπ. Διδακτόρων: Πιθανή απόρριψη δραστηριότητας Μεταφορικής, γιατί λύνεται παρακάμπτοντας τη μοντελοποίηση
18/06/2015	Συνάντηση με ερευνητή: Ο χώρος εργασίας να ληφθεί σοβαρά υπόψη – Οριστική απόρριψη της δραστηριότητας Μεταφορικής
06/07/2015 08/07/2015	Θερινό σχολείο: Έναρξη συνεργασίας με εκπαιδευτικό σχολείου Α και συζήτηση για τροποποίηση της δραστηριότητας, ώστε να εφαρμόζεται στην τάξη του
13/07/2015	Σχόλια από επιβλέποντα καθηγητή για την 1η δραστηριότητα (Σχεδιασμός Υδρορροής) – συνάντηση και προσθήκη σχολίων υλοποίησης
31/07/2015	Σχόλια από επιβλέποντα καθηγητή για την 2η δραστηριότητα (Πρόσοψη Καταστήματος)
11/09/2015	Συν-σχεδιασμός με επιβλέποντα καθηγητή για τη 2η δραστηριότητα – προσθήκη σχολίων υλοποίησης
22/10/2015	1η συνάντηση με τον πωλητή πρατηρίου καυσίμων. Προσθήκη σχολίων υλοποίησης για την 3η δραστηριότητα, ώστε να εφαρμόζεται στη σχολική τάξη
27/10/2015	Συνάντηση με την τριμελή επιτροπή. Αναθεώρηση των δραστηριοτήτων (1,2,3) και επανασχεδιασμός
01/11/2015	1η συνάντηση με τον αρχιτέκτονα. Διαμόρφωση εκ νέου των ερωτημάτων ώστε να συνδέονται με πραγματικούς προβληματισμούς από τον χώρο της αρχιτεκτονικής
13/12/2015	Παρατηρήσεις από τον καθηγητή σχολείου Α – 1η φάση (ανταλλαγή μηνυμάτων για λεπτομέρειες εφαρμογής στη δραστηριότητα 1). Οριστικοποίηση της δραστηριότητας με εισαγωγικό κείμενο και με μορφή υποερωτημάτων, τα οποία είναι σαφή για τους μαθητές. (βλέπε υποερωτήματα δραστηριότητας Σχεδιασμός Υδρορροής) Χρήση πρόσθετου ερωτήματος σε περίπτωση που υπάρχει χρόνος: «Σχεδιάστε εκ νέου την υδρορροή ώστε να αφήνεται 1 εκ. περιθώριο σε κάθε πλευρά»
14/12/2015	Έναρξη 1ης φάσης εφαρμογής σε δύο σχολικές τάξεις
03/01/2016	2η συνάντηση με τον αρχιτέκτονα. Πρόσθετα σχόλια στη διαμόρφωση της γλώσσας που χρησιμοποιείται στα ερωτήματα (πριν εφαρμοστούν στην 1η φάση εφαρμογής)

10/01/2016	Συν-σχεδιασμός με εκπαιδευτικό σχολείου Α – $1^{η}$ φάση (συνομιλία για τη διαμόρφωση εικόνας, εισαγωγικού κειμένου στη δραστηριότητα 2)
16/01/2016	Προβληματισμός για την εφαρμογή δραστηριοτήτων – Επικοινωνία με εκπαιδευτικό σχολείου Α – $1^{η}$ φάση εφαρμογής και συζήτηση 30 λεπτών για τη δραστηριότητα 2. Οριστικοποίηση της δραστηριότητας με εισαγωγικό κείμενο και με μορφή υποερωτημάτων, τα οποία είναι σαφή για τους μαθητές. (βλέπε υποερωτήματα δραστηριότητας Πρόσοψη Καταστήματος) Χρήση πρόσθετου ερωτήματος σε περίπτωση που υπάρχει χρόνος: «Να βρεθεί το σημείο που το εμβαδό της κάτω βιτρίνας είναι πενταπλάσιο της άνω βιτρίνας».
15/02/2016-20/02/2016	$2^{η}$ συνάντηση με τον πωλητή από το πρατήριο υγρών καυσίμων. Επανασχεδιασμός του task 3. Δημιουργία δομήματος Geogebra σε συνεργασία με εκπαιδευτικό απόφοιτο του ΠΜΣ.
04/01/2017-27/01/2017	Επανασχεδιασμός με εκπαιδευτικό σχολείου Γ – $2^{η}$ φάση, τροποποίηση δραστηριότητας 1. Έμφαση στο κεντρικό ερώτημα για τη διατήρηση του διερευνητικού χαρακτήρα της δραστηριότητας. Διαγραφή του πρόσθετου ερωτήματος της δραστηριότητας από την $1^{η}$ φάση εφαρμογής.
27/01/2017	Υλοποίηση της δραστηριότητας 1 με εκπαιδευτικό σχολείου Γ – $2^{η}$ φάση
19/02/2017	Επανασχεδιασμός της δραστηριότητας 2 με εκπαιδευτικό σχολείου Γ– $2^{η}$ φάση. Αλλαγές στο ίδιο πνεύμα με τη δραστηριότητα 1. Διαγραφή του πρόσθετου ερωτήματος της δραστηριότητας από την $1^{η}$ φάση εφαρμογής, γιατί εξυπηρετούσε μόνο ερευνητικούς σκοπούς και δεν είχε νόημα ως μέρος της δραστηριότητας μοντελοποίησης.
01/03/2017	$1^{η}$ Συνάντηση (skype) της τριμελούς επιτροπής και επανασχεδιασμός της δραστηριότητας 2.
27/04/2017	Επανασχεδιασμός της δραστηριότητας 3 με εκπαιδευτικό σχολείου Γ – $2^{η}$ φάση. Αλλαγές στο ίδιο πνεύμα με τις προηγούμενες δραστηριότητες. Διατήρηση κεντρικού ερωτήματος, διαγραφή πρόσθετων ερωτημάτων.
28/04/2017	Ολοκλήρωση της ερευνητικής διαδικασίας με την υλοποίηση της δραστηριότητας 3 στο σχολείο Γ - Ολοκλήρωση $2^{η}$ φάσης σχεδιασμού και εφαρμογής.