ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Συμπαγείς Κβαντικές Ομάδες (Compact Quantum Groups)

Συγγραφέας:

ΣΤΑΜΑΤΙΟΣ ΣΚΟΥΡΑΣ

Αθήνα 2023

Στη μνήμη του καθηγητή μου,

Ν. Σταύρου

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Διπλώματος Μεταπτυχιακών Σπουδών με ειδίκευση στα Θεωρητικά Μαθηματικά που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, με τριμελή επιτροπή τους κ.κ. Αριστείδη Κατάβολο, Παντελή Δοδό και Μιχάλη Ανούση.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω το σύνολο της τριμελούς επιτροπής για τη συμμετοχή τους στην εργασία αυτή. Ιδιαιτέρως, ευχαριστώ θερμά τον κ. Αριστείδη Κατάβολο τόσο για την καθοδήγηση, τις υποδείξεις και το επιστημονικό υλικό που μου προσέφερε, αλλά κυρίως για τις πολύτιμες ώρες που αφιέρωσε, το ενδιαφέρον που έδειξε και τη διδασκαλία του, η οποία αναμφίβολα κινεί το ενδιαφέρον το φοιτητή.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια που συνεχώς ήταν δίπλα μου, τα παιδιά που πάντα με στήριζαν, τους φίλους μου Αλέξανδρο και Μιχάλη για το ενδιαφέρον και τη βοήθεια τους καθόλη τη διάρκεια των Σπουδών μου και τη Ναταλία για τη συμπαράσταση της αυτά τα χρόνια.

Σταμάτης,

Ιούνιος 2023

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε τις Συμπαγείς Κβαντικές Ομάδες. Μία Συμπαγής Κβαντική Ομάδα είναι μία C^* άλγεβρα A εφοδισμένη με έναν *-ομομορφισμό

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes_{\min} A$$

(με $A \otimes_{\min} A$ συμβολίζουμε το minimal τανυστικό γινόμενο) ο οποίος έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

- $(\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta$, όπου $\iota : A \to A$, η ταυτοτική απεικόνιση (coassociativity)

- Οι χώροι $\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes_{\min} A) = \text{span}\{\Delta(a) \cdot (\mathbb{1} \otimes_{\min} b) \ , a, b \in A\}$ και $\Delta(A)(A \otimes_{\min} \mathbb{1}) = \text{span}\{\Delta(a) \cdot (b \otimes \mathbb{1}) \ , a, b \in A\}$ είναι πυκνοί στο $A \otimes_{\min} A$

Οι Συμπαγείς Κβαντικές Ομάδες γενικεύουν ταυτόχρονα την περίπτωση της μεταθετικής C^* άλγεβρας $\mathcal{C}(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \text{ συνεχής}\}$, όταν η G είναι συμπαγής ομάδα και της reduced C^* άλγεβρας $C^*_r(\Gamma)$ όταν η Γ είναι διακριτή ομάδα.

Στο πρώτο Κεφάλαιο εισάγουμε τους απαραίτητους ορισμούς για τη μελέτη των C^*-αλγεβρών. Επιπλέον κατασκευάζουμε το minimal τανυστικό γινόμενο δύο C^* αλγεβρών, για να ορίσουμε τον ομομορφισμό Δ. Τέλος, κάνουμε μία μελέτη της άλγεβρας των πολλαπλασιαστών μίας C^* άλγεβρας A.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο, μελετάμε τις Συμπαγείς Ομάδες. Δείχνουμε ότι κάθε συμπαγής ομάδα, έχει μοναδικό αριστερά αναλλοίωτο (κανονικό, Borel) μέτρο πιθανότητας. Σαν εφαρμογή, υπολογίζουμε το μέτρο Haar της ομάδας $SU(2)$.

Στο τρίτο Κεφάλαιο, εισάγουμε τον ορισμό της Συμπαγούς Κβαντικής Ομάδας. Μελετάμε την περίπτωση όπου A είναι μία μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα, για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η μελέτη αυτή, ανάγεται στη μελέτη της συμπαγούς κβαντικής ομάδας $(\mathcal{C}(G), \Delta)$ όπου G είναι συμπαγής ομάδα και Δ κατάλληλος *-ομομορφισμός. Το σημαντικότερο κομμάτι του Κεφαλαίου αυτού είναι η κατασκευή του *Haar State* για μία Συμπαγή Κβαντική Ομάδα. Όπως κάθε Συμπαγής ομάδα δέχεται μοναδικό αριστερά αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας, έτσι κάθε Συμπαγής Κβαντική Ομάδα, δέχεται μοναδικό αριστερά αναλλοίωτο *state*.

Στο τέταρτο Κεφάλαιο, ορίζουμε την αναπαράσταση μίας Συμπαγούς Κβαντικής Ομάδας. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα την άλγεβρα των πολλαπλασιαστών, μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό της αναπαράστασης. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε Θεωρήματα, τα οποία είναι ανάλογα της Κλασικής Θεωρίας Αναπαραστάσεων Συμπαγών Ομάδων.

Abstract

This Masters' Thesis is devoted to the study of Compact Quantum Groups. A Compact Quantum Group is a C^* algebra A equipped with a *-homomorphism

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes_{\text{min}} A$$

(the symbol $A \otimes_{\text{min}} A$ denotes the minimal tensor product) having the following properties:

- $(\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta$, where $\iota : A \to A$ is the identity (coassociativity)
- the spaces $\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes_{\text{min}} A) = \text{span}\{\Delta(a) \cdot (\mathbb{1} \otimes_{\text{min}} b)\ , a, b \in A\}$ and $\Delta(A)(A \otimes_{\text{min}} \mathbb{1}) = \text{span}\{\Delta(a) \cdot (b \otimes \mathbb{1})\ , a, b \in A\}$ are dense in $A \otimes_{\text{min}} A$

Compact Quantum Groups are a simultaneous generalisation of commutative C^* algebras $\mathcal{C}(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \text{ continuous}\}$, when G is a compact group, and of the reduced C^*-algebra $C^*_r(\Gamma)$ when Γ is a discrete group.

In Chapter One we introduce the necessary defintions for the study of C^*-algebras. We also present the construction of the minimal tensor product of two C^* algebras, in order to define the comultiplication Δ. Finally we study the multiplier algebra of a C^* algebra A.

Chapter Two is devoted to the study of Compact Groups. We prove that every compact group possesses a unique left invariant (regular, Borel) probability measure. As an application, we determine the Haar measure of the group $SU(2)$.

In Chapter Three the definition of a Compact Quantum Group is presented. We study the case where A is a unital abelian C^* algebra and we conclude that this case reduces to the study of the compact quantum group $(\mathcal{C}(G), \Delta)$ where G is a compact group and Δ an appropriate *-homomorphism. The most important part of this Chapter is the construction of the *Haar State* for a compact group. Just as any compact group admits a unique left invariant probability measure, any compact quantum group admits a unique left invariant *state*.

In Chapter Four we define the notion of a representation of a Compact Quantum Group. This is achieved through the use of the multiplier algebra. Finally, we present theorems that are analogous to corresponding results in the the representation of compact groups.

Περιεχόμενα

1 C* άλγεβρες

1.1 Βασικοί Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός 1.1.1. *Μία άλγεβρα Banach είναι ένας χώρος Banach που είναι άλγεβρα με την ιδιότητα* $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ *για κάθε* $a, b \in A$.

Ορισμός 1.1.2. *Ενέλιξη σε μία μιγαδική άλγεβρα* A *είναι μία απεικόνιση* $* : A \to A$ *η οποία έχει τις εξής ιδιότητες*

i) $(a + \lambda b)^* = a^* + \overline{\lambda} b^*$

ii) $a^{**} = a$

iii) $(ab)^* = b^* a^*$

για κάθε $a, b \in A$ *και* $\lambda \in \mathbb{C}$

Παράδειγμα 1.1.3. *Έστω* H *χώρος Hilbert και* $\mathcal{B}(H)$ *ο χώρος των φραγμένων γραμμικών τελεστών* $T : H \to H$. *Η* $T \to T^*$ *όπου ο* T^* *ορίζεται από την*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \text{ για κάθε } x, y \in H$$

είναι ενέλιξη στην μιγαδική άλγεβρα $\mathcal{B}(H)$

Παράδειγμα 1.1.4. *Έστω* K *συμπαγής χώρος Hausdorff και* $\mathcal{C}(K)$ *η μιγαδική άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων* $f : K \to \mathbb{C}$. *Η απεικόνιση* $f \to f^*$, *όπου* $f^*(t) = \overline{f(t)}$, *για* $t \in K$ *είναι ενέλιξη.*

Ορισμός 1.1.5. C^* *άλγεβρα είναι μία άλγεβρα Banach* A, *εφοδιασμένη με μία ενέλιξη* $* : A \to A$, *της οποίας η νόρμα ικανοποιεί την ιδιότητα*

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \text{ (C* ιδιότητα)}$$

Ορισμός 1.1.6. *Ένας* **-ομομορφισμός* π *μεταξύ δύο* C^* *αλγεβρών* A *και* B *είναι μία απεικόνιση* $\pi : A \to B$ *η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες*

i) $\pi(a + \lambda b) = \pi(a) + \lambda \pi(b)$

ii) $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$

iii) $\pi(a^*) = (\pi(a))^*$

για κάθε $a, b \in A$ *και* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Αν οι* A, B *έχουν μονάδα* $\mathbb{1}_A$ *και* $\mathbb{1}_B$ *αντίστοιχα, λέμε ότι ο* **-ομομορφισμός διατηρεί τη μονάδα, αν* $\pi(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_B$. *Τέλος, αν* $\|\pi(a)\| = \|a\|$, *για κάθε* $a \in A$, *λέμε ότι ο* **-ομομορφισμός είναι ισομετρικός.*
Ειδικότερα, αν $B = \mathcal{B}(H)$, *όπου* H *χώρος Hilbert , ο* π *καλείται αναπαράσταση της* A *στον χώρο Hilbert H. Η αναπαράσταση καλείται πιστή αν είναι 1-1 και μη εκφυλισμένη, αν* $\overline{span(\pi(A)H)} = H$

Ορισμός 1.1.7. *Έστω* A *μία* C^* *άλγεβρα. Μία* C^* *υπάλγεβρα της* A *είναι μία* $\|\cdot\|$*- κλειστή υπάλγεβρα της* A, *η οποία διατηρεί την ενέλιξη.*

Παρατήρηση 1.1.8. *Έστω* $\{A_i\}_{i \in I}$, *οικογένεια* C^* *υπαλγεβρών μιας* C^* *άλγεβρας* A. *Τότε η* $\bigcap_{i \in I} A_i$ *είναι* C^* *άλγεβρα. Έτσι, αν* $F \subseteq A$, *υπάρχει η ελάχιστη* C^* *άλγεβρα που περιέχει το* F, *και είναι η τομή όλων των* C^* *υπαλγεβρών της* A, *που περιέχουν το* F. *Θα τη συμβολίζουμε με* $C^*(F)$.

Θεώρημα 1.1.9. *(Gelfand-Naimark) Αν* A *είναι μία* C^* *άλγεβρα, τότε υπάρχει πιστή αναπαράσταση* $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$. *Δηλαδή, η* A, *εμφυτεύεται ισομετρικά σε έναν χώρο Hilbert* H.

Ορισμός 1.1.10. *Ιδεώδες μίας* C^* *άλγεβρας* A *είναι ένας μη-τεριμμένος κλειστός υπόχωρος* $\mathcal{I}$ *της* A *με την ιδιότητα,* $ab \in \mathcal{I}$ *και* $ba \in \mathcal{I}$ *, για κάθε* $a \in \mathcal{I}$ *και* $b \in A$. *Το ιδεώδες καλείται μεγιστικό, αν* $\mathcal{I} \neq A$ *και δεν υπάρχει ιδεώδες* $\mathcal{J}$ *, με* $\mathcal{J} \neq A$, *τέτοιο ώστε* $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$

Ορισμός 1.1.11. *Ένα ιδεώδες* $\mathcal{I}$ *μιας* C^* *άλγεβρας* A *καλείται ουσιώδες (essential), αν για κάθε άλλο μη μηδενικό ιδεώδες* $\mathcal{J}$ *της* A *ισχύει* $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$

Παρατήρηση 1.1.12. *Έστω* A *και* $\mathcal{I}$ *ιδεώδες της* A. *Το πηλίκο* $A/\mathcal{I}$ *γίνεται* C^* *άλγεβρα αν το εφοδιάσουμε με τη νόρμα* $\|a + \mathcal{I}\| = \inf\{\|a + i\| : i \in \mathcal{I}\}$

Ορισμός 1.1.13. *Έστω* A *μία* C^* *άλγεβρα. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο* $A^{\sim} = A \oplus \mathbb{C}$ *ορίζουμε μία επιπλέον πράξη ως εξής:*

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu) \text{ για κάθε } a, b \in A \text{ και } \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Τότε η $A^{\sim}$ είναι μιγαδική άλγεβρα και ορίζοντας $\|\cdot\| : A^{\sim} \to \mathbb{R}$ και $^* : A^{\sim} \to A^{\sim}$ με

$$(a,\lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$$
$$\|(a,\lambda)\| = \sup\{\|ab + \lambda b\| \, : \, \|b\| \leq 1 \, , \, b \in A\}$$

για κάθε $(a,\lambda) \in A^{\sim}$, προκύπτει πως η $A^{\sim}$ είναι C^* άλγεβρα με μονάδα το $\mathbb{1}_{A^{\sim}} = (0,1)$ Επιπλέον, η A εμφυτεύεται ισομετρικά στη $A^{\sim}$ μέσω της $A \to A^{\sim} : a \to (a,0)$.

Παρατήρηση 1.1.14. *Έστω A, B C^* άλγεβρες. Κάθε *-ομομορφισμός $\phi : A \to B$, επάγει ομομορφισμό μεταξύ των μοναδοποιήσεων $A^{\sim}$,$B^{\sim}$, ορίζοντας $\phi^{\sim} : A^{\sim} \to B^{\sim}$ με $\phi^{\sim}((a,\lambda)) = (\phi(a),\lambda)$.*

Ορισμός 1.1.15. *Μία δεξιά προσεγγιστική μονάδα σε μία άλγεβρα Banach είναι ένα δίκτυο $\{e_\lambda \, : \, \lambda \in \Lambda\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $a \in A$*

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \|ae_\lambda - a\| = 0$$

Ανάλογα, το δίκτυο $\{e_\lambda \, : \, \lambda \in \Lambda\}$ καλείται αριστερή προσεγγιστική μονάδα, αν για κάθε $a \in A$

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \|e_\lambda a - a\| = 0$$

Μια προσεγγιστική μονάδα για την άλγεβρα Banach A είναι ένα δίκτυο $\{e_\lambda \, : \, \lambda \in \Lambda\}$ που είναι ταυτόχρονα δεξιά και αριστερή προσεγγιστική μονάδα.
Αν A είναι C^* άλγεβρα, προσεγγιστική μονάδα, είναι μία προσεγγιστική μονάδα για την άλγεβρα Banach A η οποία αποτελείται από θετικά στοχεία νόρμας το πολύ 1.

Ορισμός 1.1.16. *Έστω A μία C^* άλγεβρα και $a \in A$. Τότε το a καλείται*
i) φυσιολογικό, αν $a^*a = aa^*$
ii) αυτοσυζυγές, αν $a^* = a$
iii) προβολή αν $a = a^* = a^2$
Αν επιπλέον η A έχει μονάδα, $\mathbb{1}$, τότε το a καλείται unitary, αν $a^*a = aa^* = \mathbb{1}$.
Θα συμβολίζουμε με A_{sa} το σύνολο των αυτοσυζυγών στοιχείων της A.

Ορισμός 1.1.17. *Έστω A μία άλγεβρα Banach και $x \in A$. Το φάσμα του x στην A είναι*

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \, : \, x - \lambda \mathbb{1} \ \textit{δεν είναι αντιστρέψιμο στην} \ A^{\sim}\}$$

Ορισμός 1.1.18. *Έστω A μία C^* άλγεβρα με μονάδα. Ένα στοιχείο $a \in A$ λέγεται θετικό ($a \geq 0$) αν $a = a^*$ και $\sigma_A(a) \subseteq \mathbb{R}^+$. Θα συμβολίζουμε με A_+ τον θετικό κώνο της A.*

Θεώρημα 1.1.19. *Σε μία C^* άλγεβρα A, ένα στοιχείο a είναι θετικό αν και μόνο αν είναι της μορφής b^*b, για κάποιο $b \in A$.*

Παρατήρηση 1.1.20. *Έστω A μία C^* άλγεβρα με μονάδα. Ορίζουμε σχέση διάταξης στο A_{sa} ως εξής. Αν a, b αυτοσυζυγή στοιχεία,*

$$a \leq b \iff b - a \geq 0$$

Παρατήρηση 1.1.21. *Έστω A μία C^* άλγεβρα. Για κάθε $a \in A$, μπορούμε να γράψουμε $a = b + ic$, όπου $b, c \in A$, αυτοσυζυγή στοιχεία. Πράγματι, αν $b = \frac{a+a^*}{2}$ και $c = \frac{a-a^*}{2i}$, έχουμε τη ζητούμενη γραφή.*

Παρατήρηση 1.1.22. *Κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο a μίας C^* άλγεβρας με μονάδα μπορεί να γραφεί στη μορφή $a = a_+ - a_-$, όπου a_+, a_- θετικά στοιχεία της A με $a_+ \cdot a_- = a_- \cdot a_+ = 0$. Επομένως, από το προηγούμενο, κάθε στοιχείο a μίας C^* άλγεβρας με μονάδα A, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων της A.*

Ορισμός 1.1.23. *Έστω A μία C^* άλγεβρα και $a \in A$. Ο αριθμός*

$$r_A(a) = \textit{sup}\{|\lambda| \, : \, \lambda \in \sigma_A(a)\}$$

λέγεται φασματική ακτίνα του στοιχείου a.

Θεώρημα 1.1.24. *Έστω A C^* άλγεβρα και $a \in A$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*
i) $r_A(a) \leq \|a\|$
ii) Αν a φυσιολογικό στοιχείο, τότε $r_A(a) = \|a\|$
iii) Αν a αυτοσυζυγές στοιχείο, τότε $\sigma_A(a) \subseteq [-\|a\|, \|a\|]$
iv) Αν a unitary στοιχείο, τότε $\|a\| = 1$ και $\sigma_A(a) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| = 1\}$
v) Αν a προβολή, τότε $\sigma_A(a) \subseteq \{0, 1\}$

Θεώρημα 1.1.25. *(Gelfand-Naimark) Έστω A μεταθετική C^* άλγεβρα. Τότε, υπάρχει τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff , τέτοιος ώστε $A \cong \mathcal{C}_0(X)$. Εδικότερα, αν η A έχει μονάδα, $A \cong \mathcal{C}(X)$, όπου X συμπαγής χώρος Hausdorff.*

Ορισμός 1.1.26. *Έστω A μία C^* άλγεβρα. Ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\phi : A \to \mathbb{C}$ λέγεται θετικό αν $\phi(a) \geq 0$, για κάθε $a \in A^+$. Αν επιπλέον $\|\phi\| = 1$, το ϕ θα λέγεται κατάσταση (state). Συμβολίζουμε με $\mathcal{S}(A)$, το σύνολο όλων των καταστάσεων μιας C^* άλγεβρας A.*

Ορισμός 1.1.27. *Ένα $\phi \in \mathcal{S}(A)$ καλείται καθαρή κατάσταση αν είναι ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου $\mathcal{S}(A)$.*

Θεώρημα 1.1.28. *(Κατασκευή GNS) Για κάθε κατάσταση ϕ σε μία C^* άλγεβρα A με μονάδα, υπάρχει μία τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$, όπου π_ϕ αναπαράσταση της A στον χώρο Hilbert H_ϕ, και ξ_ϕ κυκλικό μοναδιαίο διάνυσμα, ώστε*

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \text{ για κάθε } a \in A$$

Πρόταση 1.1.29. *Έστω $\psi : A \to \mathbb{C}$ θετική γραμμική μορφή και ϕ μία κατάσταση. Αν $\psi \leq \phi$, τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής B με $0 \leq B \leq I$, που μετατίθεται με την $\pi_\phi(A)$, ώστε*

$$\psi(a) = \langle \pi_\phi(a)B\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \text{ για κάθε } a \in A$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [5], Καθαρές καταστάσεις ..., Πρόταση 2. □

1.2 Τανυστικά Γινόμενα C* Αλγεβρών

Παρατήρηση 1.2.1. *Έστω A, B δύο C^* άλγεβρες με μονάδες $\mathbb{1}_A$ και $\mathbb{1}_B$ αντίστοιχα. Εφοδιάζοντας το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $A \otimes B$ με τις πράξεις*

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1a_2 \otimes b_1b_2$$
$$(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$$

για κάθε $a, a_1, a_2 \in A$ και $b, b_1, b_2 \in B$ και επεκτείνοντας γραμμικά, το $A \otimes B$ γίνεται *-άλγεβρα με μονάδα το $\mathbb{1}_{A\otimes B} = \mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B$

Ορισμός 1.2.2. *Έστω A, B δύο C^* άλγεβρες με μονάδα. Μία νόρμα $\|\cdot\|_\gamma$ στο $A \otimes B$ καλείται C^*- νόρμα αν*
i) $\|xy\|_\gamma \leq \|x\|_\gamma \|y\|_\gamma$
ii) $\|x^*\|_\gamma = \|x\|_\gamma$
iii) $\|x^*x\|_\gamma = \|x\|_\gamma^2$
για κάθε $x, y \in A \otimes B$ και C^* - cross νόρμα αν
iv) $\|a \otimes b\|_\gamma = \|a\|\|b\|$ *για καθε $a \in A$ και $b \in B$.*
Η πλήρωση του αλγεβρικού τανυστικού γινομένου ως προς την $\|\cdot\|_\gamma$ είναι C^* άλγεβρα και θα συμβολίζεται με $A \otimes_\gamma B$

Παρατήρηση 1.2.3. *Ένα αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο C^* αλγεβρών μπορεί εν γένει να εφοδιάζεται με περισσότερες από μία C^* νόρμες.*

1.2.1 Spatial Τανυστικό Γινόμενο

Ορισμός 1.2.4. *Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ και $S \in \mathcal{B}(K)$, όπου H, K χώροι Hilbert. Θέτουμε,*

$$(T \otimes_{sp} S)(h \otimes k) = (Th) \otimes (Sk)$$

Τότε ο $T \otimes_{sp} S$ επεκτείνεται σε φραγμένο γραμμικό τελεστή στον $H \otimes_2 K$ με $\|T \otimes_{sp} K\| = \|T\|\|S\|$, όπου $H \otimes_2 K$ είναι ο χώρος Hilbert τανυστικό γινόμενο των H και K.

Παρατήρηση 1.2.5. *Εύκολα, ελέγχουμε ότι*

$$(T_1 \otimes_{sp} S_2)(T_2 \otimes_{sp} S_2) = (T_1 T_2 \otimes_{sp} S_1 S_2) \text{ και}$$
$$(T \otimes_{sp} S)^* = (T^* \otimes_{sp} S^*)$$

Ορισμός 1.2.6. *Έστω $A_i \subseteq \mathcal{B}(H_i)$, $i = 1, 2$ δύο C^*-υπάλγεβρες. Ορίζουμε το spatial τανυστικό γινόμενο $A_1 \otimes_{sp} A_2$ να είναι ο κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H \otimes_2 K)$ που παράγεται από τους τελεστές $T \otimes_{sp} S$, με $T \in A_1$ και $S \in A_2$*

Παρατήρηση 1.2.7. *Θέτοντας $\|\sum_i T_i \otimes S_i\|_{sp} = \|\sum_i T_i \otimes_{sp} S_i\|$ έχουμε ότι η $\|\cdot\|_{sp}$ είναι μία C^*-cross νόρμα στο $A_1 \otimes A_2$. Άρα, η $A_1 \otimes_{sp} A_2$ είναι C^* άλγεβρα.*

Παρατήρηση 1.2.8. *Έστω A, B, C *- άλγεβρες και $\pi_A : A \to C$, $\pi_B : B \to C$ δύο *-ομομορφισμοί τέτοιοι ώστε*

$$\pi_A(a)\pi_B(b) = \pi_B(b)\pi_A(a) \;\; a \in A\,,\, b \in B$$

Τότε, υπάρχει μοναδικός *-ομομορφισμός $\pi : A \otimes B \to C$, τέτοιος ώστε

$$\pi(a \otimes b) = \pi_A(a)\pi_B(b)$$

Θεώρημα 1.2.9. *Έστω A_i, $i = 1, 2$ C^* άλγεβρες με μονάδα και $\pi_i : A_i \to \mathcal{B}(H_i)$ δύο *-ομομορφισμοί που διατηρούν τη μονάδα. Τότε, υπάρχει μοναδικός *-ομομορφισμός $\pi : A_1 \otimes A_2 \to \mathcal{B}(H_1 \otimes_2 H_2)$, που διατηρεί τη μονάδα, τέτοιος ώστε*

$$\pi(a_1 \otimes a_2) = \pi_1(a_1) \otimes_{sp} \pi_2(a_2) \;\; a_i \in A_i$$

Αν, επιπλέον οι π_i είναι 1-1, τότε ο π είναι 1-1.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$\pi_1' : A_1 \to \mathcal{B}(H_1 \otimes_2 H_2) \;:\; a_1 \to \pi_1(a_1) \otimes_{\text{sp}} \iota_{H_2}$$
$$\pi_2' : A_2 \to \mathcal{B}(H_1 \otimes_2 H_2) \;:\; a_2 \to \iota_{H_1} \otimes_{\text{sp}} \pi_2(a_2)$$

Οι π_i', $i = 1, 2$ είναι *-ομομορφισμοί που διατηρούν τη μονάδα και $\pi_1'(a_1)\pi_2'(a_2) = \pi_2'(a_2)\pi_1'(a_1)$. Άρα, από τη προηγούμενη παρατήρηση, υπάρχει μοναδικός *-ομομορφισμός $\pi : A \otimes B \to \mathcal{B}(H_1 \otimes_2 H_2)$ που διατηρεί τη μονάδα τέτοιος ώστε

$$\pi(a \otimes b) = \pi_1'(a_1)\pi_2'(a_2) = (\pi_1(a_1) \otimes_{\text{sp}} \iota_{H_2})(\iota_{H_1} \otimes_{\text{sp}} \pi_2(a_2)) = \pi_1(a_1) \otimes_{\text{sp}} \pi_2(a_2)$$

Τώρα έστω ότι ο π_i, $i = 1, 2$ είναι 1-1. Θα δείξουμε ότι $\text{Ker}(\pi) = \{0\}$. Έστω $c \in \text{Ker}(\pi)$. Γράφουμε $c = \sum_{j=1}^n k_j \otimes l_j$, όπου το $\{l_1, ..., l_n\}$ γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Αφού π_2 ειναι 1-1, το $\{\pi_2(l_1), ..., \pi_2(l_n)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Άρα

$$\pi(c) = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} \pi_1(k_j) \otimes_{\text{sp}} \pi_2(l_j) = 0$$

Άρα $\pi_1(a_j) = 0$, για κάθε $j \in [n]$. Αφού π_1 είναι 1-1, έχουμε ότι $a_j = 0$, για κάθε $j \in [n]$. Άρα $c = 0$. □

Πρόταση 1.2.10. *Έστω A_1, A_2 δύο C^* άλγεβρες με μονάδα και $\|\cdot\|_\gamma$ μία C^*-νόρμα στο $A_1 \otimes A_2$. Τότε, για κάθε *-ομομορφισμό $\pi : A_1 \otimes_\gamma A_2 \to \mathcal{B}(H)$ που διατηρεί τη μονάδα, υπάρχουν δύο *-ομομορφισμοί $\pi_i : A_i \to \mathcal{B}(H)$ $i = 1, 2$ που διατηρούν τη μονάδα τέτοιοι ώστε*

$$\pi_1(a_1)\pi_2(a_2) = \pi_2(a_2)\pi_1(a_1) \;\; a_i \in A_i$$
$$\pi(a_1 \otimes a_2) = \pi_1(a_1)\pi_2(a_2)$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\pi_1 : A_1 \to \mathcal{B}(H) \,:\, a_1 \to \pi(a_1 \otimes \mathbb{1}_{A_2})$$
$$\pi_2 : A_2 \to \mathcal{B}(H) \,:\, a_2 \to \pi(\mathbb{1}_{A_1} \otimes a_2)$$

Τότε, π_i $i = 1, 2$ είναι * ομομορφισμός που διατηρεί τη μονάδα. Ακόμη,

$$\begin{aligned}\pi_1(a_1)\pi_2(a_2) &= \pi(a_1 \otimes \mathbb{1}_{A_2})\pi(\mathbb{1}_{A_1} \otimes a_2) = \pi(a_1 \otimes a_2)\\ &= \pi\big((\mathbb{1}_{A_1} \otimes a_2)(a_1 \otimes \mathbb{1}_{A_2})\big) = \pi_2(a_2)\pi_1(a_1)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\pi(a_1 \otimes a_2) &= \pi\big((a_1 \otimes \mathbb{1}_{A_2})(\mathbb{1}_{A_1} \otimes a_2)\big)\\ &= \pi(a_1 \otimes \mathbb{1}_{A_2})\pi(\mathbb{1}_{A_1} \otimes a_2)\\ &= \pi_1(a_1)\pi_2(a_2)\end{aligned}$$

□

1.2.2 Minimal Τανυστικό Γινόμενο

Ορισμός 1.2.11. *Έστω A_1 και A_2 δύο C^* άλγεβρες . Ορίζουμε τη minimal C^*-νόρμα στο $A_1 \otimes A_2$ από τη σχέση*

$$\|x\|_{min} = \sup\{\|\pi_1 \otimes \pi_2(x)\| : \ \pi_i : A_i \to \mathcal{B}(H_i) \ \text{*-ομομορφισμοί}\}$$

Πρόταση 1.2.12. *Η $\|\cdot\|_{\min}$ είναι C^*-cross νόρμα*

Ορισμός 1.2.13. *Η πλήρωση του αλγεβρικού τανυστικού γινομένου $A_1 \otimes A_2$ ως προς την $\|\cdot\|_{min}$ συμβολίζεται με $A_1 \otimes_{min} A_2$.*

Θεώρημα 1.2.14. *(Takesaki) Έστω A_1, A_2 δύο C^* άλγεβρες με μονάδα. Η minimal C^*-νόρμα είναι η μικρότερη C^*-νόρμα στο $A_1 \otimes A_2$. Δηλαδή αν $\|\cdot\|_\gamma$ μία άλλη C^*-νόρμα, τότε*

$$\|x\|_{\min} \leq \|x\|_\gamma \ \text{για κάθε} \ x \in A_1 \otimes A_2$$

Πρόταση 1.2.15. *Έστω A_1, A_2 δύο C^* άλγεβρες με μονάδα. Αν $\pi_i : A_i \to \mathcal{B}(H_i)$ $i = 1, 2$ δύο 1-1 $^*-$ ομομορφισμοί που διατηρούν τη μονάδα, τότε*

$$\|x\|_{min} = \|\pi_1 \otimes \pi_2(x)\| \ \text{για κάθε} \ x \in A_1 \otimes A_2$$

Απόδειξη. Η $\|x\|_\gamma = \|\pi_1 \otimes \pi_2(x)\|$ είναι C^*-cross νόρμα στο $A_1 \otimes A_2$ και εξ'ορισμού $\|x\|_\gamma \leq \|x\|_{\min}$. Από το θεώρημα του Takesaki, έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.2.16. *Έστω A_1, A_2 δύο C^*-άλγεβρες με μονάδα. Τότε, κάθε C^*-νόρμα στο $A_1 \otimes A_2$ είναι C^* cross-νόρμα.*

Απόδειξη. Έστω $\|\cdot\|_\gamma$ μία C^*-νόρμα στο $A_1 \otimes A_2$. Θεωρούμε τη καθολική αναπαράσταση του $A_1 \otimes_\gamma A_2$, $\pi : A_1 \otimes_\gamma A_2 \to \mathcal{B}(H)$. Τότε, μπορούμε να βρούμε δύο *-ομομορφισμούς $\pi_i : A_i \to \mathcal{B}(H_i)$ $i = 1, 2$ που διατηρούν την μονάδα ώστε

$$\pi(a_1 \otimes a_2) = \pi_1(a_1)\pi_2(a_2)$$

Άρα,

$$\|a_1\|\|a_2\| = \|a_1 \otimes a_2\|_{\min} \leq \|a_1 \otimes a_2\|_\gamma = \|\pi(a_1 \otimes a_2)\| = \|\pi_1(a_1)\pi_2(a_2)\| \leq \|a_1\|\|a_2\|$$

□

Παράδειγμα 1.2.17. *Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff και A μία C^* άλγεβρα με μονάδα. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}(X;A)$ την C^* άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων F από το X στην A με νόρμα $\|F\| = sup\{\|F(x)\| \,:\, x \in X\}$. Τότε, υπάρχει *-ισομορφισμός*

$$\mathcal{C}(X) \otimes_{min} A \to \mathcal{C}(X;A)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Phi : \mathcal{C}(X) \otimes A \to \mathcal{C}(X;A)$$
$$\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_i \to F = \sum_{i=1}^{n} f_i a_i$$

όπου η συνάρτηση F ορίζεται από τη σχέση $F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)a_i$.
Ισχυρισμός (1): Η Φ είναι 1-1 *-ομομορφισμός.
Απόδειξη Ισχυρισμού (1): Ευκολα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η Φ είναι *-ομομορφισμός. Τώρα, έστω $u \in \mathcal{C}(X) \otimes A$, τέτοιο ώστε $\Phi(u) = 0$. Θα αποδείξουμε ότι $u = 0$. Μπορούμε να γράψουμε το u στη μορφή

$$u = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_i$$

ώστε το σύνολο $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq A$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Εφόσον $\Phi(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(.)a_i = 0$, έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)a_i = 0\,,\ \text{ για κάθε } \ x \in X$$

Από τη γραμμική ανεξαρτησία του συνόλου $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ έχουμε ότι $f_i(x) = 0$, για κάθε $i \in [n]$, για κάθε $x \in X$. Συνεπώς, $u = 0$. □

Ισχυρισμός (2): Η εικόνα $\Phi(\mathcal{C}(X) \otimes A)$ είναι πυκνή στην $\mathcal{C}(X; A)$.

Απόδειξη Ισχυρισμού (2): Έστω $F \in \mathcal{C}(X; A)$. Θα προσεγγίσουμε την F από συναρτήσεις $G \in \mathcal{C}(X) \otimes A$ της μορφής $G = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(\cdot)a_i$, όπου $g_i \in \mathcal{C}(X)$ και $a_i \in A$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $x \in X$, η F είναι συνεχής στο x, άρα μπορούμε να βρούμε ανοικτή περιοχή V_x του x, τέτοια ώστε

$$y \in V_x \implies \|F(y) - F(x)\| < \varepsilon$$

Η οικογένεια $\{V_x : x \in X\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς χώρου X, άρα μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{V_{x_1}, ..., V_{x_n}\}$. Γράφοντας $V_{x_i} := V_i$ και $a_i = F(x_i) \in A$ έχουμε ότι

$$y \in V_i \implies \|F(y) - a_i\| = \|F(y) - F(a_i)\| < \varepsilon$$

Έστω $\{g_1, ..., g_n\}$ διαμέριση της μονάδας που αντιστοιχεί στο $\{V_1, ..., V_n\}$, δηλαδή $g_i : X \longrightarrow [0, 1]$ συνεχείς συναρτήσεις με $\text{supp}(g_i) \subseteq V_i$ για κάθε $i \in [n]$ και $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$, για κάθε $x \in X$. Χρησιμοποιώντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις, έχουμε ότι για κάθε $i \in [n]$

$$\text{για κάθε } x \in X\,, \text{ αν } g_i(x) > 0 \text{ τότε } \|F(x) - a_i\| < \varepsilon$$

Έστω $G(x) := \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x)a_i$. Τότε, $\|F(x) - G(x)\| < \varepsilon$, για κάθε $x \in X$. Πράγματι, αφού $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|F(x) - G(x)\| &= \|\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right) F(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)a_i\| \\
&= \|\sum_{i=1}^{n} g_i(x)(F(x) - a_i)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\|F(x) - a_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

Θεωρούμε ακόμα τη νόρμα $\|\cdot\|_\gamma$ που ορίζεται από την σχέση

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_i\right\|_\gamma = \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i a_i\right\|$$

Η $\|\cdot\|_\gamma$ είναι C^* νόρμα. Πράγματι, έστω $x, y \in \mathcal{C}(X) \otimes A$ με $y = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_i$ και $z = \sum_{j=1}^{m} g_j \otimes b_j$, όπου $f_i, g_j \in \mathcal{C}(X)$ και $a_i, b_j \in A$ για κάθε $(i,j) \in [n] \times [m]$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|yz\|_\gamma &= \left\|\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} g_j \otimes b_j\right)\right\|_\gamma = \left\|\sum_{i,j}^{n,m} f_i g_j \otimes a_i b_j\right\|_\gamma \\
&= \left\|\sum_{i,j} f_i g_j a_i b_j\right\| = \sup_x \left\|\sum_{i,j}^{n,m} f_i g_j(x) a_i b_j\right\| = \sup_x \left\|\sum_{i=1}^{m} f_i(x) a_i \sum_{j=1}^{m} g_j(x) b_j\right\| \\
&\leq \sup_x \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x) a_i\right\| \left\|\sum_{j=1}^{m} g_j(x) b_j\right\| = \sup_x \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x) a_i\right\| \sup_x \left\|\sum_{j=1}^{m} g_j(x) b_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i a_i\right\| \left\|\sum_{j=1}^{m} g_j b_j\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_i\right\|_\gamma \left\|\sum_{j=1}^{m} g_j \otimes b_j\right\|_\gamma = \|y\|_\gamma \|z\|_\gamma
\end{aligned}$$

Ακόμη,

$$\begin{aligned}
\|y^*\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} (f_i \otimes a_i)^*\right\|_\gamma = \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i^* \otimes a_i^*\right\|_\gamma = \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i^* a_i^*\right\| \\
&= \sup_x \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i^*(x) a_i^*\right\| = \sup_x \left\|\sum_{i=1}^{n} \overline{f_i(x)} a_i^*\right\| = \sup_x \left\|\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) a_i)^*\right\| \\
&= \sup_x \left\|\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) a_i)\right\| = \|y\|_\gamma
\end{aligned}$$

Τέλος, για τη C^* ιδιότητα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|y^*y\|_\gamma &= \left\| \left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes a_i\right) \left(\sum_{j=1}^m f_j^* \otimes a_j^*\right) \right\|_\gamma = \left\| \sum_{i,j}^{n,m} f_i f_j^* \otimes a_i a_j^* \right\|_\gamma \\
&= \left\| \sum_{i,j}^{n,m} f_i f_j^* a_i a_j^* \right\| = \sup_x \left\| \sum_{i,j}^{n,m} f_i f_j^*(x) a_i a_j^* \right\| \\
&= \sup_x \left\| \sum_{i,j}^{n,m} f_i(x)\overline{f_j(x)} a_i a_j^* \right\| = \sup_x \left\| \sum_{i=1}^n f_i(x) a_i \sum_{j=1}^m \overline{f_j(x)} a_j^* \right\| \\
&= \sup_x \left\| \left(\sum_{i=1}^n f_i(x) a_i\right) \left(\sum_{j=1}^n f_j(x) a_j\right)^* \right\| = \|y\|_\gamma^2
\end{aligned}$$

Άρα, από τους Ισχυρισμούς (1) και (2), ο Φ επεκτείνεται σε *-ισομορφισμό

$$\mathcal{C}(X) \otimes_\gamma A \to \mathcal{C}(X; A)$$

Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\|\cdot\|_\gamma$ είναι η $\|\cdot\|_{\min}$ Από το θεώρημα του Takesaki, έχουμε ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \otimes a_i \right\|_{\min} \leq \left\| \sum_{i=1}^n f_i \otimes a_i \right\|_\gamma = \sup_x \left\| \sum_{i=1}^n f_i(x) a_i \right\|$$

Τώρα, σταθεροποιούμε ένα $x \in X$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned}
\phi_x : \mathcal{C}(X) &\to \mathbb{C} \\
f &\to f(x)
\end{aligned}$$

η οποία είναι γραμμική συστολή, δηλαδή $\|\phi_x\| \leq 1$. Άρα, υπάρχει φραγμένη απεικόνιση

$$\begin{aligned}
\phi_x \otimes \iota_A : \mathcal{C}(X) \otimes_{\min} A &\to A \\
\sum_{i=1}^n f_i \otimes a_i &\to \sum_{i=1}^n f_i(x) a_i
\end{aligned}$$

με $\|\phi_x \otimes \iota_A\| = \|\phi_x\| \leq 1$. Άρα.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_i\right\|_{\min}$$

Αφού το $x \in X$ ήταν τυχόν

$$\sup_x \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x) a_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_i\right\|_{\min}$$

Τελικά, παίρνουμε ότι

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_i\right\|_{\gamma} = \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i a_i\right\| = \sup_x \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x) a_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_i\right\|_{\min}$$

□

Πόρισμα 1.2.18. *Έστω X, Y συμπαγείς τοπολογικοί χώροι Hausdorff. Τότε*

$$\mathcal{C}(X) \otimes_{min} \mathcal{C}(Y) \cong \mathcal{C}(X \times Y) \text{ *-ισομορφικά}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \mathcal{C}(Y)$, η (μεταθετική) C^* άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων $f : Y \to \mathbb{C}$. Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε ότι

$$\mathcal{C}(X; \mathcal{C}(Y)) \cong \mathcal{C}(X) \otimes_{\min} \mathcal{C}(Y)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathcal{C}(X \times Y) \cong \mathcal{C}(X; \mathcal{C}(Y))$ Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}(X \times Y) &\to \mathcal{C}(X; \mathcal{C}(Y)) \\ f &\to (Tf : x \to (Tf(x) : y \to f(x, y)) \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ότι T είναι *-ισομορφισμός. Έστω $f, f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X \times Y)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$(T(f_1 + \lambda f_2)(x))(y) = (f_1 + \lambda f_2)(x, y) = f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = (Tf_1(x)y) + \lambda(Tf_2(x)y)$$

δηλαδή $T(f_1 + \lambda f_2) = Tf_1 + \lambda Tf_2$

Ακόμη ο T είναι *-ομομορφισμός, αφού

$$(T(f_1 f_2)(x)y) = (f_1 f_2)(x,y) = f_1(x,y)f_2(x,y) = (Tf_1(x)y)(Tf_2(x)y) \tag{1}$$

$$\text{δηλαδή } T(f_1 f_2) = Tf_1 Tf_2 \tag{2}$$

και

$$(T(f^*)(x)y) = f^*(x,y) = \overline{f(x,y)} = \overline{(Tf(x)y)} = (Tf(x)y)^*$$

$$\text{δηλαδή } T(f^*) = (Tf)^*$$

Μένει να αποδείξουμε ότι ο T είναι 1-1 και επί. Πράγματι, έστω $f \in \mathrm{Ker}(T)$. Τότε σταθεροποιώντας ένα $x \in X$ και για κάθε $y \in Y$, έχουμε ότι

$$(Tf(x)y) = 0 \iff f(x,y) = 0$$

Αφού το x ήταν τυχόν, έπεται ότι $f = 0$, δηλαδή $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, άρα T 1-1. Τέλος για το επί. Έστω $g \in \mathcal{C}(X;\mathcal{C}(Y))$. Τότε, για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι $g(x) \in \mathcal{C}(Y)$, άρα $g(x)(y) = \tilde{g}(x,y)$. Για $f = \tilde{g}$, έχουμε ότι $Tf = g$, άρα T είναι επί. □

1.3 Άλγεβρες Πολλαπλασιαστών (Multiplier Algebras)

Ορισμός 1.3.1. *Έστω H χώρος Hilbert και $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$. Ορίζουμε τον μεταθέτη $\mathcal{S}'$ του $\mathcal{S}$ ως ακολούθως*

$$\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{B}(H) : TS = ST \text{ για κάθε } S \in \mathcal{S}\}$$

Παρατήρηση 1.3.2. *Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$, ορίζουμε $\mathcal{S}'' = \{T \in \mathcal{B}(H) : TS = ST$ για κάθε $S \in \mathcal{S}'\}$ και λέμε ότι $\mathcal{S}''$ είναι ο δεύτερος μεταθέτης του $\mathcal{S}$.*

Ορισμός 1.3.3. *Έστω H χώρος Hilbert. Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (sot) στον $\mathcal{B}(H)$ είναι η τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο στον H. Δηλαδή, αν $(T_i)_i$ δίκτυο στον $\mathcal{B}(H)$ και $T \in \mathcal{B}(H)$ $T_i \xrightarrow{sot} T \iff \|T_i(x) - T(x)\|_H \to 0$*

Ορισμός 1.3.4. *Έστω H χώρος Hilbert. Λέμε ότι ένα δίκτυο $(T_i)_{i\in I}$ στον $\mathcal{B}(H)$ συγκλίνει*

*-ισχυρά σε έναν $T \in \mathcal{B}(H)$, αν $T_i \xrightarrow{sot} T$ και $T_i^* \xrightarrow{sot} T^*$

Ορισμός 1.3.5. *Έστω H χώρος Hilbert. Η ασθενής τοπολογία τελεστών (wot) στον $\mathcal{B}(H)$ είναι η ασθενέστερη τοπολογία στον $\mathcal{B}(H)$ ως προς την οποία όλες οι απεικονίσεις της μορφής*

$$\omega_{x,y} : T \to \langle Tx, y\rangle \quad \textbf{όπου } x, y \in H$$

είναι συνεχείς. Λέμε ότι ένα δίκτυο (T_i) του $\mathcal{B}(H)$ συγκλίνει wot στον $T \in \mathcal{B}(H)$ αν

$$\langle T_i x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$$

για κάθε $x, y \in H$.

Παρατήρηση 1.3.6. *Το $\mathcal{S}'$ είναι πάντα άλγεβρα και περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή I_H και ειδικότερα είναι sot-κλειστή. Το $\mathcal{S}'$ είναι *- άλγεβρα αν και μόνον αν το $\mathcal{S}$ είναι αυτοσυζυγές σύνολο, επομένως είναι C^*- άλγεβρα.*

Θεώρημα 1.3.7 (von Neumann bicommutant Theorem). *Έστω A μια αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ η οποία περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Τότε*

$$A'' = \overline{A}^{sot} = \overline{A}^{wot}$$

Ορισμός 1.3.8. *Έστω A μία μη εκφυλισμένη C^* υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$. Ένα $x \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται πολλαπλασιαστής της A αν $xA \subseteq A$ και $Ax \subseteq A$. Το σύνολο όλων αυτών των x λέγεται άλγεβρα των πολλαπλασιαστών της A και συμβολίζεται με $\mathcal{M}(A)$. Δηλαδή*

$$\mathcal{M}(A) = \{x \in \mathcal{B}(H) \,:\, xA \subseteq A \text{ και } Ax \subseteq A\}$$

Παρατήρηση 1.3.9. *Έστω A όπως πριν. Τότε*

$$\mathcal{M}(A) \subseteq A'' \subseteq \mathcal{B}(H)$$

Πράγματι, έστω $x \in \mathcal{M}(A)$. Τότε $xA \subseteq A$, άρα $xA'' = x\overline{A}^{wot} = \overline{xA}^{wot} = (xA)'' \subseteq A''$, όπου έχουμε ότι $x\overline{A}^{wot} = \overline{xA}^{wot}$, αφού ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά συνεχής στην *wot-τοπολογία. Όμως $\mathbb{1} \in A''$, συνεπώς $x \in A''$.*

Πρόταση 1.3.10. *Έστω A μία C^*-άλγεβρα και H χώρος Hilbert. Έστω $\pi : A \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ μη εκφυλισμένη πιστή αναπαράσταση της A στον H. Ορίζουμε*

$$B = \{b \in \mathcal{B}(H) : b\pi(A) \subseteq \pi(A) \text{ και } \pi(A)b \subseteq \pi(A)\}$$

Τότε η π επεκτείνεται σε * ισομορφισμό μεταξύ της $\mathcal{M}(A)$ και της B.
Συνεπώς η $\mathcal{M}(A)$ δεν εξαρτάται από την αναπαράσταση της A.

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [7, Proposition 2.3] □

Πρόταση 1.3.11. *Έστω A μία C^* υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$. Η $\mathcal{M}(A)$ είναι C^* άλγεβρα με μονάδα. Ειδικότερα, είναι η μεγαλύτερη C^* υπάλγεβρα της A'' που περιέχει την A ως ιδεώδες.*

Απόδειξη. Από τη προηγούμενη παρατήρηση $\mathcal{M}(A) \subseteq A''$. Εξ'ορισμού η $\mathcal{M}(A)$ είναι άλγεβρα Banach με την δομή που κληρονομεί από την $\mathcal{B}(H)$. Αφού η A'' είναι C^* άλγεβρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{M}(A)$ είναι αυτοσυζυγής και $\|\cdot\|$-κλειστή. Έστω $x \in \mathcal{M}(A)$. Τότε, $xA \subseteq A$, δηλαδή $xa \in A$, για κάθε $a \in A$. Αφού η A είναι C^* άλγεβρα, $(xa)^* \in A$, άρα $a^*x^* \in A$, δηλαδή $Ax^* \subseteq A$. Όμοια, $x^*A \subseteq A$. Άρα, $x^* \in \mathcal{M}(A)$. Αφού το x ήταν τυχόν, η $\mathcal{M}(A)$ είναι αυτοσυζυγής *-υπάλγεβρα. Έστω τώρα $(x_\lambda)_\Lambda$ δίκτυο στην $\mathcal{M}(A)$ και $x \in A''$ με $x_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Τότε για κάθε $a \in A$, $ax_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} ax$ και $x_\lambda a \xrightarrow{\|\cdot\|} xa$. Αφού η A είναι C^* άλγεβρα, είναι $\|\cdot\|$-κλειστή, συνεπώς $x \in \mathcal{M}(A)$. Τέλος, η $\mathcal{M}(A)$ εξ'ορισμού περιέχει μονάδα και περιέχει την A ως ιδεώδες.
Έστω τώρα $\mathcal{B}$ μία C^*-υπάλγεβρα της A'' που περιέχει την A ως ιδεώδες. Έστω $b \in B$. Τότε $ab \in A$, για κάθε $a \in A$, άρα $Ab \subseteq A$. Όμοια, $ba \in A$ για κάθε $a \in A$, άρα $bA \subseteq A$. Δηλαδή, $b \in \mathcal{M}(A)$. Έτσι, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}(A)$. □

Πρόταση 1.3.12. *Η $\mathcal{M}(A)$ περιέχει την A ως ουσιώδες ιδεώδες.*

Απόδειξη. Από τη προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η $\mathcal{M}(A)$ περιέχει την A ως ιδεώδες. Έστω $\mathcal{I}$ ιδεώδες της A τέτοιο ώστε

$$A \cap J = \{0\}$$

Αν $i \in \mathcal{I}$, τότε $ia \in A \cap \mathcal{I}$ για κάθε $a \in A$, άρα $i = 0$, σύμφωνα με το επόμενο Λήμμα. □

Λήμμα 1.3.13. *Έστω A μία C^*-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$. Αν $x \in A''$ και $xa = 0$ για κάθε $a \in A$, τότε $x = 0$.*

Παράδειγμα 1.3.14. *$\mathcal{M}(A) = A$ αν και μόνον αν η A έχει μονάδα.*

Παράδειγμα 1.3.15. *Η $\mathcal{M}(A)$ είναι μεταθετική αν και μόνον αν η A είναι μεταθετική.*

Για την απόδειξη του παραδείγματος χρειαζόμαστε τις εξής δύο Προτάσεις

Πρόταση 1.3.16. *Έστω X τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff και $A = \mathcal{C}_0(X)$. Έστω ακόμα $\pi : A \to \mathcal{B}(\ell_2(X))$ η μη εκφυλισμένη πιστή αναπαράσταση της A στον $\ell_2(X$ που ορίζεται από την*

$$\pi(f)\xi = f\xi \;\; f \in \mathcal{C}_0(X) \;\; \textit{και} \;\; \xi \in \ell_2(X)$$

Τότε,

$$C_0(X)'' = \ell_\infty(X)$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα του von Neumann έχουμε ότι $\mathcal{C}_0(X)'' = \overline{\mathcal{C}_0(X)}^{wot}$. Άρα

$$\mathcal{C}_0(X)'' = \overline{\mathcal{C}_0(X)}^{wot} \subseteq \overline{\ell_\infty(X)}^{wot} = \ell_\infty(X)$$

αφού ο $\mathcal{C}_0(X) \subseteq \ell_\infty(X)$ και ο $\ell_\infty(X)$ είναι wot-κλειστός.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό: Έστω $T \in \pi(A)'$. Τότε, $T\pi(f) = \pi(f)T$, για κάθε $f \in \ell_\infty(X)$. Έστω $\{e_x : x \in X\}$ η ορθοκανονική βάση του $\ell^2(X)$, όπου $e_x(y) = \delta_{x,y}$. Έστω $g_x = Te_x$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$g_x = \lambda_x e_x \;\; \lambda_x \in \mathbb{C}$$

Έστω $f \in \mathcal{C}_0(X)$ και $x \in X$. Τότε

$$\pi(f)g_x = \pi(f)Te_x = T\pi(f)e_x = Tf(x)e_x = f(x)Te_x = f(x)g_x$$

Γράφουμε $g_x = \sum_y g_x(y)e_y$. Τότε, από τη προηγούμενη σχέση παίρνουμε ότι

$$\pi(f)g_x = \sum_y g_x(y)\pi(f)e_y = \sum_y g_x(y)f(y)e_y$$
$$\text{ενώ } \ f(x)g_x = \sum_y g_x(y)f(x)e_y$$

Άρα

$$\pi(f)g_x = f(x)g_x \iff \sum_y g_x(y)f(y)e_y = \sum_y g_x(y)f(x)y_y \iff \sum_y g_x(y)(f(y)-f(x))e_y = 0$$
$$\iff \forall y \ , \ \forall f \in \mathcal{C}_0(X) \ \text{ ισχύει } \ g_x(y)(f(y)-f(x)) = 0$$

Έστω λοιπόν $f \in \mathcal{C}_0(X)$, τέτοια ώστε $f(y) \neq f(x)$, για κάθε $y \in X$. Τότε $g_x(y) = 0$, για κάθε $y \in X$. Άρα, $g_x = g_x(x)e_x$. Θέτοντας $\lambda_x = g_x(x) \in \mathbb{C}$, έχουμε ότι $g_x = \lambda_x e_x$ Άρα $Te_x = \lambda_x e_x$, δηλαδή $T = \pi(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_x)_{x\in X} \in \ell_\infty(X)$.
Άρα $\pi(A)' = \ell_\infty(X)$. Όμως, $\ell_\infty(X)' = \ell_\infty(X)$ συνεπώς $\pi(A)'' = \ell_\infty(X)$.

□

Πρόταση 1.3.17. *Έστω X τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff. Τότε*

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}_0(X)) \cong \mathcal{C}_b(X)$$

Απόδειξη. Ο $\mathcal{C}_0(X)$ είναι ιδεώδες του $\mathcal{C}_b(X)$. Πράγματι, έστω $f \in \mathcal{C}_b(X)$. Τότε $fg \in \mathcal{C}_0(X)$ για κάθε $g \in \mathcal{C}_0(X)$. Όμως $C_b(X) \subseteq \ell_\infty(X) = A''$, άρα ο $\mathcal{C}_b(X)$ περιέχεται στη μεγαλύτερη C^*- υπάλγεβρα της A'' που περιέχει τον $C_0(X)$ ως ουσιώδες ιδεώδες, δηλαδή την $\mathcal{M}(\mathcal{C}_0(X))$. Δηλαδή

$$\mathcal{C}_b(X) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C}_0(X))$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε $f \in \mathcal{M}(A) \subseteq \ell_\infty(X)$ είναι συνεχής. Έστω Y συμπαγές υποσύνολο του X και $g \in \mathcal{C}_0(X)$ τέτοια ώστε $g|_Y = 1$. Τότε, $fg \in \mathcal{C}_0(X)$ άρα f συνεχής στο Y. Αφού το Y ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο X. Άρα

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}_0(X)) \subseteq \mathcal{C}_b(X)$$

$\square$

Απόδειξη. (Παραδείγματος 1.3.13) Έστω A μεταθετική C^* άλγεβρα. Τότε, υπάρχει συμπαγής χώρος Hausdorff τέτοιος ώστε $A \cong \mathcal{C}_0(X)$. Άρα, από το προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε ότι

$$\mathcal{M}(A) \cong \mathcal{C}_b(X)$$

άρα η $\mathcal{M}(A)$ είναι μεταθετική C^* άλγεβρα.
Αντίστροφα, έστω ότι η $\mathcal{M}(A)$ είναι μεταθετική C^* άλγεβρα. Αφού η A είναι C^* υπάλγεβρα της $\mathcal{M}(A)$, είναι μεταθετική. $\square$

Παράδειγμα 1.3.18. *Έστω $\mathcal{B}_0(H)$ ο χώρος των συμπαγών τελεστών στο χώρο Hilbert H. Τότε*

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H)) = \mathcal{B}(H)$$

1.3.1 Η αυστηρή (strict) τοπολογία στον B(H)

Ορισμός 1.3.19. *Έστω A μία μη εκφυλισμένη C^*-υπάλγεβρα κάποιου $\mathcal{B}(H)$, όπου H χώρος Hilbert.*
Η αυστηρή (strict) τοπολογία στον $\mathcal{B}(H)$ ως προς την $\mathcal{A}$ είναι η ασθενέστερη τοπολογία στον $\mathcal{B}(H)$ για την οποία οι απεικονίσεις

$$\mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H) : x \to xa \quad \textit{και} \quad x \to ax$$

είναι συνεχείς (ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(H)}$) για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Γράφουμε $\mathcal{M}(A)_\beta$ για την $\mathcal{M}(A)$ εφοδιασμένη με την αυστηρή τοπολογία.

Θεώρημα 1.3.20. *Έστω $(x_\lambda)_\Lambda$ δίκτυο στην $\mathcal{M}(A)$ και $x \in \mathcal{M}(A)$. Τότε*
(i) $x_\lambda \xrightarrow{\beta} x$ *αν και μόνον αν* $x_\lambda a \xrightarrow{\|\cdot\|} xa$ *και* $ax_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} ax$ *για κάθε* $a \in A$.
(ii) Η $\mathcal{M}(A)$ είναι αυστηρά (strictly) κλειστή. Δηλαδή,

$$\overline{A}^\beta \subseteq \overline{\mathcal{M}(A)}^\beta = \mathcal{M}(A)$$

Απόδειξη. (i) Άμεσο από τον ορισμό της αυστηρής τοπολογίας.
(ii) Προφανώς, έχουμε ότι $\mathcal{M}(A) \subseteq \overline{\mathcal{M}(A)}^{\beta}$. Αρκεί να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό. Έστω $x \in \overline{\mathcal{M}(A)}^{\beta}$. Τότε, μπορούμε να βρούμε δίκτυο $(x_\lambda)_\Lambda$ στην $\mathcal{M}(A)$ τέτοιο ώστε $x_\lambda \xrightarrow{\beta} x$. Από το προηγούμενο, έχουμε ότι $x_\lambda a \xrightarrow{\|\cdot\|} xa$ και $ax_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} ax$ για κάθε $a \in A$. Τώρα $x_\lambda \in \mathcal{M}(A)$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ και $a \in A$, άρα $x_\lambda a \in A$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Αφού η A είναι $\|\cdot\|$- κλειστή, έχουμε ότι $xa \in A$, για κάθε $a \in A$. Όμοια, παίρνουμε ότι $ax \in A$ για κάθε $a \in A$. Άρα, $x \in \mathcal{M}(A)$.

□

Λήμμα 1.3.21. *Έστω A C^* άλγεβρα. Ένα δίκτυο $(x_\lambda)_\Lambda$ δίκτυο στην A είναι προσεγγιστική μονάδα για την A αν και μόνον αν*

$$x_\lambda \xrightarrow{\beta} \mathbb{1}_{\mathcal{M}(A)}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη έπεται άμεσα από τον ορισμό της προσεγγιστικής μονάδας για το A και το προηγούμενο θεώρημα για τον χαρακτηρισμό της β-σύγκλισης. □

Πρόταση 1.3.22. *(i) Η ενέλιξη $^*: \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(A)$ είναι συνεχής ως προς την αυστηρή τοπολογία.*
(ii) Ο πολλαπλασιασμός στην $\mathcal{M}(A)$ είναι χωριστά συνεχής απεικόνιση ως προς την αυστηρή τοπολογία.

Απόδειξη. (i) Έστω $x \in \mathcal{M}(A)$ και $x_\lambda \xrightarrow{\beta} x$. Τότε

$$x_\lambda a \xrightarrow{\|\cdot\|} xa \quad \text{και} \quad ax_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} ax$$

για κάθε $a \in A$. Όμως η ενέλιξη είναι $\|\cdot\|$-συνεχής απεικόνιση, άρα για κάθε $a \in A$

$$x_\lambda^* a \xrightarrow{\|\cdot\|} x^* a \quad \text{και} \quad ax_\lambda^* \xrightarrow{\|\cdot\|} ax^*$$

Ισοδύναμα,

$$x_\lambda^* \xrightarrow{\beta} x^*$$

(ii) Έστω $x, y \in \mathcal{M}(A)$ και $(x_\lambda)_\Lambda$ ένα δίκτυο στην $\mathcal{M}(A)$ τέτοιο ώστε $x_\lambda \xrightarrow{\beta} x$. Τότε

$$x_\lambda y a \xrightarrow{\|\cdot\|} xya$$

για κάθε $a \in A$ (εφόσον $ya \in A$) και

$$a x_\lambda y \xrightarrow{\|\cdot\|} axy$$

για κάθε $a \in A$, αφού $\|ax_\lambda y - axy\| \leq \|ax_\lambda - ax\|\|y\|$. Άρα

$$x_\lambda y \xrightarrow{\beta} xy$$

□

Παρατήρηση 1.3.23. *Ο πολλαπλασιασμός στην $\mathcal{M}(A)$ είναι συνεχής απεικόνιση στα $\|\cdot\|$ φραγμένα υποσύνολα της $\mathcal{M}(A)$.*

Πρόταση 1.3.24. *Έστω A μη εκφυλισμένη C^* υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$.*
(i) Η αυστηρή τοπολογία στον $\mathcal{B}(H)$ είναι ασθενέστερη από την τοπολογία της νόρμας στον $\mathcal{B}(H)$.
(ii) Η ισχυρή *-τοπολογία στον $\mathcal{B}(H)$ είναι ασθενέστερη από τον περιορισμό της αυστηρής τοπολογίας στα φραγμένα υποσύνολα.
(iii) Οι τοπολογίες ταυτίζονται αν και μόνον αν η $A = \mathcal{M}(A)$, δηλαδή $\mathbb{1} \in A$.

Απόδειξη. (i) Άμεσο, από την υποπολλαπλασιαστικότητα της νόρμας.
(ii) Θα αποδείξουμε ότι για κάθε φραγμένο δίκτυο $(x_\lambda)_\Lambda$ στην $\mathcal{M}(A)$ με $x_\lambda \xrightarrow{\beta} x$ ισχύει ότι $x_\lambda \xrightarrow{sot} x$ και $x_\lambda^* \xrightarrow{sot} x^*$. Έστω $\xi \in H$ και $\varepsilon > 0$. Αφού η A είναι μη εκφυλισμένη, $\overline{\text{span}\{A\xi : \xi \in H\}} = H$, συνεπώς μπορούμε να βρούμε $\eta \in H$ και $a \in A$ τέτοια ώστε

$$\|a(\eta) - \xi\| < \varepsilon$$

Ακόμα, το $(x_\lambda)_\Lambda$ είναι φραγμένο δίκτυο, άρα υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $\|x_\lambda\| \leq M$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Ακόμη, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|x_\lambda(\xi) - x(\xi)\| &= \|x_\lambda(\xi) - x_\lambda a(\eta) + x_\lambda a(\eta) - xa(\eta) + xa(\eta) - x(\xi)\| \\ &\leq \|x_\lambda(\xi) - x_\lambda a(\eta)\| + \|x_\lambda a(\eta) - xa(\eta)\| + \|a(\eta) - x(\xi)\| \\ &\leq (\|x_\lambda\| + \|x\|)\|\xi - a(\eta)\| + \|x_\lambda a - xa\|\|\eta\| \\ &\leq 2M\|\xi - a(\eta)\| + \|x_\lambda a - xa\|\|\eta\|\end{aligned}$$

Αφού το δίκτυο x_λ είναι φραγμένο και $\|x_\lambda(a) - xa\| \to 0$, έχουμε ότι $\|x_\lambda(\xi) - x(\xi)\| \to 0$ δηλαδή $x_\lambda \xrightarrow{sot} x$. Όμοια, έχουμε ότι $x_\lambda^* \xrightarrow{sot} x^*$.

(iii) Έστω $\mathbb{1} \in A$ και $(a_\lambda)_\Lambda$ δίκτυο στην A με $a_\lambda \xrightarrow{\beta} x$. Τότε,

$$\|a_\lambda \mathbb{1} - x\mathbb{1}\| \to 0 \text{ άρα } \|a_\lambda - x\| \to 0$$

Από το (i) έπεται ότι οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται. Αντίστροφα, έστω ότι η A δεν έχει μονάδα. Τότε $\mathbb{1} \in \mathcal{M}(A) \backslash A$. Άρα, αν $(u_\lambda)_\Lambda$ προσεγγιστική μονάδα για την A, τότε $u_\lambda \mathbb{1} \xrightarrow{\beta} \mathbb{1}$, όμως $\|u_\lambda - \mathbb{1}\| \nrightarrow 0$, αφού $u_\lambda \in A$ για κάθε λ και $\mathbb{1} \notin A$.

□

Πρόταση 1.3.25. *Έστω A μία μη εκφυλισμένη C^* υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$. Τότε*

$$\overline{A}^\beta = \mathcal{M}(A)$$

Μάλιστα, κάθε $x \in \mathcal{M}(A)$ προσεγγίζεται στην αυστηρή τοπολογία από φραγμένο *δίκτυο στην A.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δεί ότι $\overline{A}^\beta \subseteq \mathcal{M}(A)$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{M}(A) \subseteq \overline{A}^\beta$. Έστω $(u_\lambda)_\Lambda$ προσεγγιστική μονάδα για την A. Τότε το (u_λ) είναι φραγμένο δίκτυο στην A με $u_\lambda \xrightarrow{\beta} \mathbb{1}$. Άρα, για κάθε $x \in \mathcal{M}(A)$ το $(xu_\lambda)_\Lambda$ είναι φραγμένο δίκτυο της A με $xu_\lambda \xrightarrow{\beta} x$. Άρα $x \in \overline{A}^\beta$. □

Πρόταση 1.3.26 ([7], Proposition 2.5). *Έστω A μία C^* άλγεβρα και H ένας χώρος Hilbert. Έστω $\pi : A \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ μη εκφυλισμένος *-ομομορφισμός. Τότε ο π επεκτείνεται μοναδικά σε μη εκφυλισμένο *-ομομορφισμό $\overline{\pi} : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ που είναι αυστηρά συνεχής στα φραγμένα σύνολα. Αν επιπλέον ο π είναι 1-1, τότε ο $\overline{\pi}$ είναι 1-1.*

Πρόταση 1.3.27. *Έστω τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff, A C^* άλγεβρα και $\mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$ ο χώρος των αυστηρά συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων $f: X \longrightarrow \mathcal{M}(A)$. Η $\mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$ με πράξεις κατά σημείο είναι C^* άλγεβρα. Ειδικότερα η $\mathcal{C}_0(X;A)$ είναι C^* υπάλγεβρα της $\mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η $\mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$ είναι *-άλγεβρα Banach. Έστω $f,g \in \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε,

(i) Προφανώς $f+\lambda g \in \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$

(ii) $fg \in \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$. Πρώτα για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $(fg)(x) \in \mathcal{M}(A)$. Πράγματι, έστω $a \in A$. Αρκεί να δείξουμε ότι $(fg)(x)a \in A$ και $a(fg)(x) \in A$. Έχουμε ότι $(fg)(x)a = f(x)g(x)a$. Όμως, $g(x) \in \mathcal{M}(A)$, άρα $g(x)a = b \in A$. Άρα $(fg)(x)a = f(x)b \in A$, αφού $f(x) \in \mathcal{M}(A)$.Όμοια, $a(fg)(x) \in A$. Άρα $fg(x) \in \mathcal{M}(A)$. Με τον ίδιο τρόπο, $(gf)(x) \in \mathcal{M}(A)$.

Μένει να δείξουμε ότι η fg είναι αυστηρά συνεχής. Έστω $(x_\lambda)_\Lambda$ δίκτυο στον X με $x_\lambda \longrightarrow x$. Θα δείξουμε ότι $fg(x_\lambda) \xrightarrow{\beta} fg(x)$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $a \in A$

$$\|a(f(x_\lambda)g(x_\lambda) - f(x)g(x))\| \longrightarrow 0$$
$$\|(f(x_\lambda)g(x_\lambda) - f(x)g(x))a\| \longrightarrow 0$$

Για το πρώτο, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|a(f(x_\lambda)g(x_\lambda) - f(x)g(x))\| &= \|af(x_\lambda)g(x_\lambda) - af(x)g(x)\| \\
&= \|af(x_\lambda)g(x_\lambda) - af(x)g(x_\lambda) + af(x)g(x_\lambda) - af(x)g(x)\| \\
&\leq \|af(x_\lambda)g(x_\lambda) - af(x)g(x_\lambda)\| + \|af(x)g(x_\lambda) - af(x)g(x)\| \\
&\leq \|a(f(x_\lambda) - f(x)\|\|g(x_\lambda)\| + \|af(x)g(x_\lambda) - af(x)g(x)\|
\end{aligned}$$

Τώρα η f είναι αυστηρά συνεχής άρα $\|a(f(x_\lambda) - f(x)\| \longrightarrow 0$. Ακόμα, $g(x_\lambda)$ φραγμένη, άρα

$$\|a(f(x_\lambda) - f(x)\|\|g(x_\lambda)\| \longrightarrow 0$$

Τέλος, $f(x) \in \mathcal{M}(A)$ άρα $f(x)a = b \in A$, άρα αφού η g είναι και αυτή αυστηρά συνεχής έχουμε ότι

$$\|af(x)g(x_\lambda) - af(x)g(x)\| = \|b(g(x_\lambda) - g(x))\| \longrightarrow 0$$

Άρα $fg \in \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$.

(iii) $f^* \in \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$. Αρχικά, για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι $f^*(x) \in \mathcal{M}(A)$. Πράγματι, από υπόθεση $f(x) \in \mathcal{M}(A)$, άρα για κάθε $a \in A$, οι $f(x)a$ και $af(x)$ ανήκουν στην A. Όμως, η A είναι C^* άλγεβρα, άρα $(f(x)a)^* = a^*f^*(x) \in A$. Άρα $af^*(x) \in A$ για κάθε $a \in A$. Όμοια, από τη σχέση $af(x) \in A$, έχουμε ότι $f^*(x)a \in A$. Τέλος, η f^* είναι β-συνεχής. Πράγματι, έστω $(x_\lambda)_\Lambda$ δίκτυο στον X με $x_\lambda \longrightarrow x$. Τότε, για κάθε $a \in A$,

$$\|a(f^*(x_\lambda) - f^*(x))\| = \|((f(x_\lambda) - f(x))a^*)^*\| \longrightarrow 0$$

αφού $a^* \in A$ και f είναι αυστηρά συνεχής. Όμοια, έχουμε ότι

$$\|(f^*(x_\lambda) - f^*(x))a\| \longrightarrow 0$$

Μένει να αποδείξουμε ότι η $C_\beta(X;\mathcal{M}(A))$ είναι κλειστή. Έστω $f_n \in \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$ με $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f \in \ell^\infty(X;\mathcal{M}(A))$. Θα δείξουμε ότι $f \in \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$. Έστω $(x_\lambda)_\Lambda$ δίκτυο στον X με $x_\lambda \longrightarrow x$. Θα δείξουμε ότι $f(x_\lambda) \xrightarrow{\beta} f(x)$. Έστω $a \in A$. Τότε

$$\begin{aligned}
\|a(f(x_\lambda) - f(x))\| &= \|af(x_\lambda) - af(x)\| \\
&= \|af(x_\lambda) - af_n(x_\lambda) + af_n(x_\lambda) - af_n(x) + af_n(x) - af(x)\| \\
&\le \|af(x_\lambda) - af_n(x_\lambda)\| + \|af_n(x_\lambda) - af_n(x)\| + \|af_n(x) - af(x)\| \\
&\le \|a\|\|f_n(x) - f(x)\| + \|af_n(x_\lambda) - af_n(x)\| + \|a\|\|f_n(x) - f(x)\| \\
&\le \|a\|\|f_n - f\| + \|af_n(x_\lambda) - af_n(x)\| + \|a\|\|f_n - f\|
\end{aligned}$$

Αν δοθεί $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|a\|\|f_n - f\| < \varepsilon/3$.

Επειδή $f_n \in \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$ υπάρχει λ_0 ώστε για κάθε $\lambda \ge \lambda_0$ να έχουμε

$$\|af_n(x_\lambda) - af_n(x)\| < \varepsilon/3$$

Συνεπώς απο την προηγούμενη ανισότητα έχουμε ότι

$$\|af(x_\lambda) - af(x)\| < \varepsilon$$

για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$. Επομένως $\lim_\lambda \|af(x_\lambda) - af(x)\| = 0$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $\lim_\lambda \|f(x_\lambda)a - f(x)a\| = 0$. □

Πρόταση 1.3.28. *Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff και A μη εκφυλισμένη C^* υπάλγεβρα ενός $\mathcal{B}(H)$. Τότε*

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}(X;A)) \cong \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\mathcal{M}(A) \supseteq A$. Άρα

$$\mathcal{C}_{\|\cdot\|}(X;A) \subseteq \mathcal{C}_{\|\cdot\|}(X;\mathcal{M}(A)) \subseteq \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$$

Θεωρούμε το χώρο

$$H_x := \left\{ \xi : X \longrightarrow H : \sum_X \|\xi(x)\|^2 < \infty \right\} \cong \ell^2(X) \otimes_{\min} H$$

Ο H_x είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_X \langle \xi(x), \eta(x) \rangle$$

Έχουμε ότι

$$A \subseteq A'' \subseteq \mathcal{B}(H)$$

Ακόμα, επειδή η $\ell^\infty(X)$ είναι μεταθετική C^*-άλγεβρα με μονάδα, υπάρχει συμπαγής χώρος Hausdorff βX ώστε $\ell^\infty(X) \cong \mathcal{C}(\beta X)$

$$\ell^\infty(X) \otimes_{\min} A \cong \mathcal{C}(\beta X) \otimes_{\min} A \cong \mathcal{C}(\beta X; A) \cong \ell^\infty(X; A)$$

Θεωρούμε την αναπαράσταση

$$\begin{aligned}\pi :&\ell^\infty(X;A) \longrightarrow \mathcal{B}(H_x) = \mathcal{B}(\ell^2(X) \otimes_{\min} A)\\ &(\pi(f)\xi)(x) = f(x)\xi(x)\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ταύτιση $\ell^\infty(X;A) \cong \ell^\infty(X) \otimes_{\min} A$ έχουμε ότι

$$(\pi(f \otimes a)\xi)(x) = f(x)a\xi(x)$$

Έστω $\{e_x\}_{x\in X}$ με $e_x(y) = \delta_{x,y}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\ell^2(X)$. Έχουμε ότι

$$\ell^2(X) \otimes H = \overline{span}\,\{e_x \otimes \xi(x) \,:\, x \in H \text{ και } x \in X\}$$

όπου $\xi = \sum_X e_x \otimes \xi(x)$ με $\xi(x) \in H$ και $\sum_X \|\xi(x)\|^2 < \infty$. Άρα

$$\pi(f \otimes a)(e_x \otimes \xi) = f_x e_x \otimes a\xi$$

με $f(x)e_x \in \ell^2(X)$ και $a\xi \in H$.

Δείχνουμε πρώτα ότι η $\mathcal{C}(X;A)$ είναι ουσιώδες ιδεώδες στην $C_\beta(X;\mathcal{M}(A))$. Πράγματι, έστω $f \in \mathcal{C}(X;A)$ και $g \in \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$. Τότε, fg και $gf \in \mathcal{C}(X;A)$. Πρώτα έχουμε ότι $fg(x) = f(x)g(x) \in A$. Πράγματι, $f(x) \in A$ άρα αφού $g(x) \in \mathcal{M}(A)$ έχουμε ότι $f(x)g(x) \in A$. Όμοια $(gf)(x) \in A$. Μένει να αποδείξουμε ότι fg και gf είναι $\|\cdot\|$ συνεχείς συναρτήσεις. Πράγματι, έστω $(x_\lambda)_\Lambda$ δίκτυο στον X με $x_\lambda \longrightarrow x$. Θα δείξουμε ότι

$$\|fg(x_\lambda) - fg(x)\| \longrightarrow 0 \quad \text{και} \quad \|gf(x_\lambda) - gf(x)\| \longrightarrow 0$$

Για το πρώτο, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|fg(x_\lambda) - fg(x)\| &= \|f(x_\lambda)g(x_\lambda) - f(x)g(x)\|\\ &= \|f(x_\lambda)g(x_\lambda) - f(x)g(x_\lambda) + f(x)g(x_\lambda) - f(x)g(x)\|\\ &\le \|g(x_\lambda)(f(x_\lambda) - f(x))\| + \|f(x)(g(x_\lambda) - g(x))\|\\ &\le \|g(x_\lambda)\|\|f(x_\lambda) - f(x)\| + \|f(x)(g(x_\lambda) - g(x))\|\end{aligned}$$

Τώρα το $(g(x_\lambda))$ είναι φραγμένο δίκτυο και η f είναι $\|\cdot\|$-συνεχής. Άρα

$$\|g(x_\lambda)\|\|f(x_\lambda) - f(x)\| \longrightarrow 0$$

Ακόμη $f(x) \in A$ και g είναι αυστηρά συνεχής συνάρτηση. Άρα,

$$\|f(x)(g(x_\lambda) - g(x))\| \longrightarrow 0$$

Τελικά, $fg \in \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$. Όμοια, έχουμε ότι $gf \in \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$. Επιπλέον, $\mathcal{C}(X;A)$ είναι ουσιώδες ιδεώδες. Έστω $\mathcal{I}$ ιδεώδες της $\mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$ με $\mathcal{I} \cap \mathcal{C}(X;A) = \{0\}$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{I} = \{0\}$. Δηλαδή αν $f \in \mathcal{I}$, τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $f(x) = 0$. Για κάθε $b \in A$ θεωρούμε την

$$g = \mathbb{1} \otimes b$$

Άρα, για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι $g(x) = (\mathbb{1} \otimes b)(x) = \mathbb{1}(x)b = b$. Αν $f \in \mathcal{I}$, έχουμε ότι $fg \in \mathcal{I}$. Ακόμη $fg \in \mathcal{C}(X;A)$. Πράγματι, $(fg)(x) = f(x)g(x) \in A$ αφού $f(x) \in \mathcal{M}(A)$ και $g \in \mathcal{C}(X;A)$ και η fg είναι $\|\cdot\|$ συνεχής- η απόδειξη είναι όμοια με την περίπτωση όπου $f \in \mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$. Άρα $fg \in \mathcal{C}(X;A) \cap I = \{0\}$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
&(fg)(x) = f(x)g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in X \iff \\
&f(x)b = 0 \text{ για κάθε } x \in X \text{ και } b \in A
\end{aligned}$$

Όμως $f(x) \in \mathcal{M}(A)$ άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in X$. Άρα η $\mathcal{C}(X;A)$ είναι ουσιώδες ιδεώδες της $\mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A))$. Όμως η $\mathcal{M}(\mathcal{C}(X;A))$ είναι η μεγαλύτερη C^* άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{C}(X;A)$ ως ουσιώδες ιδεώδες, συνεπώς

$$\mathcal{C}_\beta(X;\mathcal{M}(A)) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C}(X;A))$$

Μένει να αποδείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό. Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathcal{C}(X;A)) \subseteq \ell^\infty(X;A'')$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

(i) για κάθε $x \in X$, $f(x) \in \mathcal{M}(A)$

(ii) Η f είναι φραγμένη

(iii) Για κάθε $x \in X$ η f είναι αυστηρά συνεχής στο x.

Για το (i), έστω $x \in X$ και $b \in A$. Θεωρώντας ξανά τη συνάρτηση $g = \mathbb{1} \otimes b$, έχουμε ότι $f(\mathbb{1} \otimes b)$ και $(\mathbb{1} \otimes b)f \in \mathcal{C}(X; A)$. Όμως $(f(\mathbb{1} \otimes b))(x) = f(x)b$. Άρα $f(x)b \in A$ για κάθε $b \in A$. Όμοια από την $(\mathbb{1} \otimes b)f \in \mathcal{C}(X; A)$ έχουμε ότι $bf(x) \in A$ για κάθε $b \in A$. Συνεπώς $f(x) \in \mathcal{M}(A)$ για κάθε $x \in X$. Για το (ii), έχουμε ότι

$$f \in \mathcal{M}(\mathcal{C}(X; A)) \subseteq \mathcal{C}(X; A)'' \subseteq \ell^\infty(X; A)$$

συνεπώς είναι φραγμένη. Τέλος, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε δίκτυο $(x_\lambda)_\Lambda$ στον X με $x_\lambda \longrightarrow x$ και για κάθε $b \in A$, ισχύει

$$\begin{aligned} &\|b(f(x_\lambda) - f(x))\| \longrightarrow 0 \ \text{και} \\ &\|(f(x_\lambda) - f(x))b\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Για το πρώτο, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|b(f(x_\lambda) - f(x))\| &= \|bf(x_\lambda) - bf(x)\| \\ &= \|g(x_\lambda)f(x_\lambda) - g(x)f(x)\| \\ &= \|(gf)(x_\lambda) - (gf)(x)\| \end{aligned}$$

Όμως, $gf \in \mathcal{C}(X; A) \subseteq \mathcal{C}(X; \mathcal{M}(A))$ άρα

$$\|(gf)(x_\lambda) - (gf)(x)\| \longrightarrow 0$$

Όμοια δείχνουμε ότι $\|(f(x_\lambda) - f(x))b\| \longrightarrow 0$ Τελικά, $f \in \mathcal{C}_\beta(X; \mathcal{M}(A))$ και έχουμε ότι

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}(X; A)) \subseteq \mathcal{C}_\beta(X; \mathcal{M}(A))$$

□

Πόρισμα 1.3.29. *Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff και A C^* άλγεβρα. Τότε*

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}(X) \otimes_{min} A) \cong \mathcal{C}_\beta(X; \mathcal{M}(A))$$

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δεί ότι

$$\mathcal{C}(X;A) \cong \mathcal{C}(X) \otimes_{\min} A\,, \ \text{άρα}$$
$$\mathcal{M}(\mathcal{C}(X;A) \cong \mathcal{M}(\mathcal{C}(X) \otimes_{\min} A)$$

Άμεσα, από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}(X) \otimes_{\min} A) \cong \mathcal{C}_\beta(X; \mathcal{M}(A))$$

□

Πόρισμα 1.3.30. *Έστω G συμπαγής ομάδα και H χώρος Hilbert. Τότε*

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H) \otimes_{min} \mathcal{C}(G)) \cong \mathcal{C}_\beta(G; \mathcal{B}(H))$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο για $A = \mathcal{B}_0(H)$ και από το γεγονός ότι $\mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H)) = \mathcal{B}(H)$ έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 1.3.31. *Έστω G συμπαγής ομάδα και H χώρος Hilbert. Τότε*

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H) \otimes_{min} \mathcal{C}(G) \otimes_{min} \mathcal{C}(G)) \cong \mathcal{C}_\beta(G \times G; \mathcal{B}(H))$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ταύτιση

$$\mathcal{C}(G) \otimes_{\min} \mathcal{C}(G) \cong \mathcal{C}(G \times G)$$

αρκεί αν αποδείξουμε ότι

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H) \otimes_{\min} \mathcal{C}(G \times G)) \cong \mathcal{C}_\beta(G \times G; \mathcal{B}(H))$$

Όμως $G \times G$ συμπαγής ομάδα αφού G συμπαγής ομάδα. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο πόρισμα για την $G \times G$ έπεται άμεσα το ζητούμενο. □

2 Το μέτρο Haar για Συμπαγείς Ομάδες

2.1 Τοπολογικές Ομάδες

Ορισμός 2.1.1. *Μία τοπολογική ομάδα, είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος, ο οποίος έχει τη δομή ομάδας τέτοιος ώστε*

- *ο πολλαπλασιασμός* $G \times G \to G$ *με* $(x, y) \to x \cdot y$
- *η αντίστροφη απεικόνιση* $G \to G$ *με* $x \to x^{-1}$

να είναι συνεχείς απεικονίσεις ως προς την τοπολογία του G*. Η* G *θα καλείται συμπαγής ομάδα, αν επιπλέον ο χώρος* G *είναι συμπαγής*

Ορισμός 2.1.2. *Έστω* G *τοπολογική ομάδα. Αν* $g \in G$ *και* $U \subseteq G$ *, ορίζουμε την αριστερή μεταφορά του συνόλου* U *ως*

$$g \cdot U = \{g \cdot u \ : \ u \in U\}$$

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω* G *τοπολογική ομάδα. Αν* $U \subseteq G$ *ανοικτό υποσύνολο, τότε το* $g \cdot U$ *είναι επίσης ανοικτό υποσύνολο του* G*.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της τοπολογικής ομάδας, η απεικόνιση $m : G \times G \longrightarrow G$ με $m(x, y) = x \cdot y$ είναι συνεχής, άρα για κάθε $g \in G$ η απεικόνιση $l_g : G \longrightarrow G : h \mapsto gh$ είναι συνεχής, αλλά και η αντίστροφή της $h \mapsto g^{-1}h$ είναι συνεχής. Συνεπώς η l_g ε'ιναι ομοιομορφισμός, άρα διατηρεί τα ανοικτά σύνολα. □

Θεώρημα 2.1.4. *Έστω* G *συμπαγής τοπολογική ομάδα. Τότε το* $G \times G$ *είναι συμπαγής τοπολογική ομάδα, με πράξη πολλαπλασιασμού κατά σημείο.*

Παραδείγματα 2.1.5. *(Συμπαγείς Ομάδες Πινάκων)*
1) Η $O(n) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) \, , \, AA^t = I_n\}$*, όπου* A^t *είναι ο ανάστροφος του πίνακα* A*.*
2) Η $SO(n) = \{A \in O(n) \, , \, \det A = 1\}$*, είναι κλειστό υποσύνολο του* $O(n)$*, αντίστροφη εικόνα του* $\{1\}$ *μέσω της συνεχούς απεικόνισης* det.
3)Η $U(n) = \{A \in Gl(n, \mathbb{C}) \, , \, A^*A = I_n\}$ *όπου* $A^* = \overline{A}^t$*, ο αναστροφοσυζυγής του* A*.*
4) Η $SU(n) = \{A \in U(n) \, , \, \det U = 1\}$*, είναι κλειστό υποσύνολο της συμπαγούς* $U(n)$*, συνεπώς συμπαγές.*

2.2 Το θεώρημα σταθερού σημείου του Kakutani

Ορισμός 2.2.1. *Έστω G τοπολογική ομάδα και E ένας χώρος Banach. Μία αναπαράσταση της G στον E είναι ένας ομομορφισμός ομάδων $\pi : G \to GL(E)$*

Ορισμός 2.2.2. *Έστω G τοπολογική ομάδα, E χώρος Banach και $\pi : G \to GL(E)$ μια αναπαράσταση της G στον E. Η συζυγής αναπαράσταση $\pi^* : G \to GL(E^*)$ είναι μία αναπαράσταση της G στον E^* και ορίζεται για $g \in G$ από την*

$$\pi^*(g)\psi = \psi \circ \pi(g^{-1}) \text{ για κάθε } \psi \in E^*$$

Λήμμα 2.2.3. *Έστω G συμπαγής τοπολογική ομάδα, E χώρος Banach και $\pi : G \to GL(E)$ μια αναπαράσταση της G στον E. Έστω $x_0 \in E$ ώστε η απεικόνιση $g \to \pi(g)x_0$ να είναι συνεχής από την G στον E, όπου ο E έχει τη τοπολογία της νόρμας του. Ορίζουμε $p : E^* \to \mathbb{R}$, από την*

$$p(\psi) = \sup_{g \in G} |\psi(\pi(g)x_0)| \text{ για } \psi \in E^*$$

Το p έχεις τις ακόλουθες ιδιότητες.
α) Είναι θετικά ομογενές και υποπροσθετικό συναρτησοειδές στο E^*
β) Είναι π^* αναλλοίωτο, δηλαδή $p(\pi^*(g)\psi) = \pi(\psi)$ για κάθε $\psi \in E^*$ και $g \in G$
γ) Ο περιορισμός του p σε φραγμένα υποσύνολα του E^* είναι συνεχής, ως προς την w- τοπολογία.*

Απόδειξη. Αρχικά, αφού η G είναι συμπαγής και η απεικόνιση $g \to \psi(\pi(g)x_0)$ είναι συνεχής στο G (ως σύνθεση συνεχών),έχουμε ότι το p είναι καλά ορισμένο.
Έστω $\lambda > 0$ και $\psi \in E^*$.

$$\begin{aligned} p(\lambda\psi) &= \sup_{g \in G} |(\lambda\psi)(\pi(g)x_0)| = |\lambda| \cdot \sup_{g \in G} |\psi(\pi(g)x_0)| \\ &= \lambda \sup_{g \in G} |\psi(\pi(g)x_0)| = \lambda p(\psi) \end{aligned}$$

Επίσης, προφανώς $p(0) = 0$, άρα έχουμε θετική ομογένεια.

Τώρα έστω ψ_1 και ψ_2 στον E^*.

$$p(\psi_1+\psi_2) = \sup_{g\in G}|(\psi_1+\psi_2)(\pi(g)x_0)| \leq \sup_{g\in G}|\psi_1(\pi(g))x)| + \sup_{g\in G}|\psi_2(\pi(g))x_0|$$
$$= p(\psi_1) + p(\psi_2)$$

β) Έστω $\psi \in E^*$ και $k, g \in G$. Τότε,

$$p(\pi^*(g)\psi) = \sup_{k\in G}|(\pi^*(g)\psi)(\pi(k))x_0| = \sup_{k\in G}|\psi(\pi(g^{-1})\pi(k)x_0|$$
$$= \sup_{k\in G}|\psi(\pi(g^{-1}k)x_0| = \sup_{h\in G}|\psi(\pi(h))x_0| = p(\psi)$$

γ) Έστω B^* φραγμένο υποσύνολο του E^*.

Για να αποδείξουμε την w-* συνέχεια του $p|_{B^*}$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\psi_0 \in B^*$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει w-* ανοικτή περιοχή $\mathcal{W}(\psi_0)$ του ψ_0 τέτοια ώστε

$$|\psi(\pi(g)x_0) - \psi_0(\pi(g)x_0)| < \varepsilon \text{ για κάθε } \psi \in \mathcal{W}(\psi_0) \cap B^* \text{ και } g \in G \tag{3}$$

Έστω λοιπόν $\psi_0 \in B^*$ και $\varepsilon > 0$. Αφού το B^* είναι φραγμένο, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|\psi\| \leq M$ για κάθε $\psi \in B^*$.

Τώρα η απεικόνιση $g \to \pi(g)x_0$ είναι συνεχής στο G άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτή περιοχή $\mathcal{O}_{g'}$ του $g' \in G$ ώστε $\|\pi(g)x_0 - \pi(g')x_0\| < \varepsilon$. Όμως $G = \bigcup_{g'\in G}\mathcal{O}_{g'}$ και το G είναι συμπαγές, άρα μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο σύνολο $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ του G και για κάθε $k \in [n]$ ανοικτή περιοχή $\mathcal{O}_{g_k}$ του g_k ώστε το $\{\mathcal{O}_{g_k}\}_{k=1}^n$ να καλύπτει το G και για κάθε $k \in [n]$

$$\|\pi(g)x_0 - \pi(g_k)x_0\| < \frac{\varepsilon}{4M} \text{ για κάθε } g \in \mathcal{O}_{g_k} \tag{4}$$

Ορίζουμε τώρα την w-* ανοικτή περιοχή $\mathcal{W}(\psi_0)$ του ψ_0 με

$$\mathcal{W}(\psi_0) = \{\psi \in E^* : |(\psi - \psi_0)(\pi(g_k)x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για } k \in [n]\}$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι αν $g \in G$, $\psi \in E^*$ και $k \in [n]$

$$\psi(\pi(g)x_0) - \psi_0(\pi(g)x_0) = (\psi - \psi_0)[\pi(g_k)x_0] + (\psi - \psi_0)[\pi(g)x_0 - \pi(g_k)x_0] \tag{5}$$

Για να αποδείξουμε την (3) έστω $g \in G$ και $\psi \in \mathcal{W}(\psi_0) \cap B^*$. Αφού το $\{\mathcal{O}_{g_k}\}_{k=1}^n$ καλύπτει τη G μπορούμε να βρούμε $k_0 \in [n]$ τέτοιο ώστε $g \in \mathcal{O}_{g_{k_0}}$. Επομένως, $(\psi - \psi_0)[\pi(g_k)x_0] < \frac{\varepsilon}{2}$, εφόσον $\psi \in \mathcal{W}(\psi_0)$.

Από την άλλη, δεδομένου ότι $\|\psi - \psi_0\| \leq \|\psi\| + \|\psi_0\| \leq 2M$, έχουμε από την (4) ότι $|(\psi - \psi_0)[\pi(g)x_0 - \pi(g_{k0})x_0]| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Από την (5), έπεται το ζητούμενο. □

Ορισμός 2.2.4. *Έστω G τοπολογική ομάδα, E χώρος Banach και $\pi : G \to GL(E)$ μια αναπαράσταση της G στον E.*

α) Ένα $K \subseteq E$, θα λέγεται π-αναλλοίωτο αν $\pi(g)K \subseteq K$, για κάθε $g \in G$

β) Ένα $x \in E$ θα λέγεταί π-σταθερό αν $\pi(g)x = x$ για κάθε $g \in G$

Λήμμα 2.2.5. *Έστω G συμπαγής ομάδα, E χώρος Banach και $\pi : G \to GL(E)$ μια αναπαράσταση της G στον E.Υποθέτουμε ότι:*

- *Για κάθε $x \in E$ η απεικόνιση $g \to \pi(g)x$ είναι συνεχής από το G στον E, όπου ο E έχει την τοπολογία της νόρμας.*
- *Υπάρχει μη κενό, κυρτό και w-* συμπαγές υποσύνολο K^* του E^*, το οποίο είναι π^*-αναλλοίωτο.*

Τότε, υπάρχει συναρτησοειδές $\psi \in K^*$ το οποίο είναι π^*-σταθερό.

Απόδειξη. Έστω

$$\mathcal{F} = \{\emptyset \neq A^* \subseteq K^* \ : A^* \text{ κυρτό, w-* κλειστό και } \pi^* - \text{αναλλοίωτο}\}$$

Στο $\mathcal{F}$ θεωρούμε τη διάταξη $A^* \leq B^* \iff A^* \supseteq B^*$.

Έστω $\mathcal{D}$ αλυσίδα του μερικώς διατεταγμένου συνόλου $\mathcal{F}$. Θα δείξουμε ότι έχει άνω φράγμα.

Έστω $\mathcal{D} = (A_i^*)_{i\in I}$. Ισχυριζόμαστε ότι το $A'^* = \bigcap_{i\in I} A_i^*$ είναι άνω φράγμα της αλυσίδας.

Αρχικά, το $A'*$ είναι μη κενό. Πράγματι, κάθε πεπερασμένη υποσυλλογή του $\mathcal{D}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Όμως από τη συμπάγεια της G, η $\mathcal{D}$ έχει μη κενή τομή.

Το A'^* είναι κυρτό σύνολο, ως τομή κυρτών συνόλων και w-* κλειστό ως τομή w-* κλειστών συνόλων. Ακόμη, $\pi^*(g)A_i^* \subseteq A_i^*$, για κάθε i, για κάθε $g \in G$, συνεπώς $\pi^*(g)A'^* \subseteq A^*$, δηλαδή το A'^* είναι π^*-αναλλοίωτο. Ειδικότερα, $A'^* \in \mathcal{F}$.

Είναι προφανές, ότι, ως προς τη διάταξη που ορίσαμε, το A'^* είναι άνω φράγμα της $\mathcal{D}$. Αφού η αλυσίδα ήταν τυχούσα, από το *Λήμμα του Zorn*, το $(\mathcal{F}, \leq)$ έχει μεγιστικό στοιχείο, έστω K_0^*.

Τώρα το K_0^*, είναι w-* κλειστό υποσύνολο του w-* συμπαγούς συνόλου K^*, έτσι είναι και αυτό w-* συμπαγές.

Στο εξής, θα συμβολίζουμε το μεγιστικό στοιχείο του $(\mathcal{F}, \leq)$ με K^*.

Ισχυριζόμαστε ότι το K^* είναι μονοσύνολο, δηλαδή $K^* = \{\psi\}$

Έστω, προς άτοπο, ότι το K^* περιέχει δύο διαφορετικά συναρτησοειδή ψ_1 και ψ_2. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x_0 \in E$, τέτοιο ώστε $\psi_1(x_0) \neq \psi_2(x_0)$. Θεωρούμε το $p : K^* \to \mathbb{R}$, με

$$p(\psi) = \sup_{g \in G} |\psi(\pi(g))x_0| \quad \psi \in K^*$$

Αφού το K^* είναι w-* συμπαγές είναι w-* φραγμένο. Συνεπώς από το προηγούμενο Λήμμα, το p είναι w-* συνεχές.

Ορίζουμε τώρα για $r > 0$ και $\eta \in K^*$,

$$B_0(\eta, r) = \{\psi \in K^* \ : p(\psi - \eta) < r\} \text{ και } \overline{B_0}(\eta, r) = \{\psi \in K^* \ : p(\psi - \eta) \leq r\}$$

Τα σύνολα αυτά είναι κυρτά, από την θετική ομογένεια και την υποπροσθετικότητα του p. Ακόμη από τη w-* συνέχεια του $p|_{K^*}$ το B_0 είναι w-* ανοικτό, ενώ το $\overline{B_0}$ είναι w-* κλειστό.

Ορίζουμε τώρα $d = \sup\{\, p(\psi - \phi) \ : \ \psi, \phi \in K^*\}$

Είναι $0 < d < \infty$ αφού από τη w-* συνέχεια του $p|_{K^*}$ είναι $d < \infty$ και αν πάρω τα ψ_1 και ψ_2 που επιλέξαμε παραπάνω, $p(\psi_1 - \psi_2) > 0$, συνεπώς $d > 0$.

Τώρα παρατηρούμε ότι $K^* = \bigcup_{\psi_i \in K^*} B_0(\psi_i, \frac{d}{2})$, δηλαδή έχουμε ανοικτό κάλυμμα για το K^*. Όμως το τελευταίο είναι w-* συμπαγές, συνεπώς μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο υποσύνολο $\{\psi_k\}_{k=1}^n$ τέτοιο ώστε $K^* = \bigcup_{k=1}^n B_0(\psi_k, \frac{d}{2})$.

Ορίζουμε, τότε, το συναρτησοειδές

$$\psi^* = \frac{\psi_1 + \psi_2 + ... + \psi_n}{n}$$

το οποίο ανήκει στο K^* ως κυρτός συνδυασμός στοιχείων αυτού.
Έστω $\psi \in K^*$, τυχόν. Αφού $K^* = \bigcup_{k=1}^{n} B_0(\psi_k, \frac{d}{2})$, μπορούμε να βρούμε $k_0 \in [n]$, τέτοιο ώστε $\psi \in B_0(\psi_{k_0}, \frac{d}{2})$.
Δεδομένου ότι, από τον ορισμό του d, έχουμε $p(\psi - \psi_k) \leq d$ για κάθε $k \in [n]$, και από θετική ομογένεια και υποπρισθετικότητα του p, παίρνουμε

$$p(\psi - \psi_k) = p((\psi - \psi^*) + (\psi^* - \psi_k) \leq d' \text{ όπου } d' = \frac{n-1}{n} \cdot d + \frac{d}{2} < d$$

Ορίζουμε το

$$K' = \bigcap_{\psi \in K^*} \overline{B_0}(\psi, d')$$

Το K' είναι κυρτό (τομή κυρτών συνόλων) και w-* κλειστό (τομή w-* κλειστών συνόλων) και άρα w-* συμπαγές ως υποσύνολο του w-* συμπαγούς K^*.
Ισχυριζόμαστε ότι το K' είναι π^*-αναλλοίωτο. Προς αυτό, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\eta \in K'$, $\psi \in K^*$ και $g \in G$

$$p(\pi^*(g)\eta - \psi) \leq d'$$

Έχουμε ήδη δει ότι το p είναι π^*-αναλλοίωτο και από την $p(\eta - \pi^*(g^{-1})\psi) \leq d'$ (αφού $d' < d$), έχουμε ότι

$$p(\pi^*(g)\eta - \psi) = p(\eta - \pi^*(g^{-1})\psi) \leq d'$$

Έτσι, αφού το K^* είναι μεγιστικό ως προς τη διάταξη στοιχείο και $K' \subseteq K^*$, δηλαδή $K' \geq K^*$, προκύπτει ότι $K' = K^*$
Αυτό, όμως, δεν μπορεί να ισχύει. Πράγματι, αν ίσχυε τότε θα μπορούσαμε να βρούμε ψ' και ψ'' στο K^*, τέτοια ώστε $p(\psi' - \psi'') > d'$ (από τον ορισμό της d και το γεγονός ότι $d' < d$), και άρα το ψ'' δεν ανήκει σε κάποιο $\overline{B_0}(\psi', d')$, άτοπο από τον ορισμό του K'.
Έτσι, $K = \{\psi\}$.
Είναι προφανές ότι το ψ είναι π^*-σταθερό, αφού έχουμε ότι το K^* είναι π^*-αναλλοίωτο,

άρα $\pi^*(g)(\psi) \in K^* = \{\psi\}$, δηλαδή $\pi^*(g)(\psi) = \psi$ $\square$

Ορισμός 2.2.6. *Έστω G συμπαγής ομάδα και $\mathcal{C}(G)$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων από το G στο $\mathbb{R}$, εφοδιασμένος με την maximum νόρμα. Ως κανονική αριστερή αναπαράσταση του G στον $\mathcal{C}(G)$, εννοούμε την αναπαράσταση $\pi : G \to GL(\mathcal{C}(G))$ που ορίζεται από την*

$$[\pi(g)f](x) = f(g^{-1} \cdot x) \text{ για κάθε } f \in \mathcal{C}(G), \ , g \in G \text{ και } x \in G$$

Λήμμα 2.2.7. *Έστω G συμπαγής ομάδα και $\pi : G \to GL(\mathcal{C}(G))$ η κανονική αναπαράσταση του G στον $\mathcal{C}(G)$. Για κάθε $f \in \mathcal{C}(G)$, η απεικόνιση*

$$g \to \pi(g)f$$

από το G στον $\mathcal{C}(G)$ είναι συνεχής, όπου ο $\mathcal{C}(G)$ είναι εφοδιασμένος με την maximum νόρμα.

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{C}(G)$.
Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση είναι συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο ουδέτερο στοιχείο e της ομάδας G. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει περιοχή $\mathcal{U}$ του e τέτοια ώστε

$$|f(g \cdot x) - f(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } g \in \mathcal{U}\, ,\, x \in G \ \textbf{(1)}$$

Έστω $x \in G$. Από τη συνέχεια της f , μπορούμε να βρούμε ανοικτή περιοχή $\mathcal{O}_x$ του x ώστε

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } x' \in \mathcal{O}_x \ \textbf{(2)}$$

Επομένως, εφαρμόζοντας μία τριγωνική ανισότητα

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \text{ για κάθε } x', x'' \in \mathcal{O}_x \ \textbf{(3)}$$

Από τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού στην ομάδα G, μπορούμε να βρούμε περιοχή $\mathcal{U}_e$ του e και περιοχή $\mathcal{V}_x$ του x ώστε $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{O}_x$ και $\mathcal{U}_e \cdot \mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{O}_x$
Τώρα το $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in G}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του G, και το G είναι συμπαγές, άρα μπορούμε να βρούμε πεπερασμένη υποσυλλογή $\{\mathcal{V}_{x_k}\}_{k=1}^n$ με $G = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{V}_{x_k}$.
Ορίζουμε $\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{U}_{x_k}$ η οποία είναι περιοχή του e. Ακόμη $x \in G$, άρα υπάρχει $k_0 \in [n]$,

τέτοιο ώστε $x \in \mathcal{V}_{x_{k_0}}$. Έτσι, προκύπτει ότι για κάθε $g \in \mathcal{U}$

$$x \in \mathcal{V}_{x_{k_0}} \subseteq \mathcal{O}_{x_{k_0}} \text{ και } g \cdot x \in \mathcal{U} \cdot \mathcal{V}_{x_{k_0}} \subseteq \mathcal{U}_{x_{k_0}} \cdot \mathcal{V}_{x_{k_0}} \subseteq \mathcal{O}_{x_{k_0}}$$

Άρα τα $g \cdot x$ και x ανήκουν στη περιοχή $\mathcal{O}_{x_{k_0}}$, άρα από την **(3)**,

$$|f(g \cdot x) - f(x)| < \varepsilon$$

Αν αντί για την $\mathcal{U}$ επιλέξουμε την περιοχή $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{-1}$, τότε $g^{-1} \cdot x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{-1}$, άρα εφαρμόζοντας την προηγούμενη σχέση,

$$|f(g^{-1} \cdot x) - f(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } g \in \mathcal{U} \text{ και } x \in G$$

Άρα,

$$\|\pi(g)f - \pi(e)f\|_{max} < \varepsilon \text{ για κάθε } g \in \mathcal{U}$$

□

Θεώρημα 2.2.8. *(Alaoglu) Έστω E χώρος Banach. Τότε η κλειστή μοναδιαία μπάλα του E^* ως προς την w-* τοπολογία είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.*

Θεώρημα 2.2.9. *(Kakutani) Έστω G συμπαγής ομάδα και $\pi : G \to GL(\mathcal{C}(G))$ η κανονική αναπαράσταση του G στον $\mathcal{C}(G)$. Τότε, υπάρχει συναρτησοειδές πιθανότητας $\psi \in [\mathcal{C}(G)]^*$ το οποίο είναι π^*-σταθερό, δηλαδή*

$$\psi(f) = \psi(\pi(g)f) \text{ για κάθε } f \in \mathcal{C}(G) \text{ και } g \in G$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα του Alaoglu η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $[\mathcal{C}(G)]^*$ είναι w-* συμπαγής τοπολογικός χώρος. Έστω K^* το σύνολο όλων των state του $\mathcal{C}(G)$.

- $K^* \neq \emptyset$, αφού αν $x_0 \in G$, το συναρτησοειδές Dirac το οποίο παίρνει την τιμή $f(x_0)$ στην $f \in \mathcal{C}(G)$, ανήκει στο K^*.

- Το K^* είναι κυρτό σύνολο. Πράγματι,έστω $\psi_1, \psi_2 \in K^*$ και $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ με $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Τότε,

$$\begin{aligned}(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)(\mathbb{1}) &= \lambda_1\psi_1(\mathbb{1}) + \lambda_2\psi_2(\mathbb{1}) \\ &= \lambda_1\mathbb{1} + \lambda_2\mathbb{1} = \mathbb{1}\end{aligned}$$

και αν $f \in [\mathcal{C}(G)]^+$

$$(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)(f) = \lambda_1\psi_1(f) + \lambda_2\psi_2(f) \geq 0$$

- Το K^* είναι w-* συμπαγές. Προς αυτό, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι w-* κλειστό αφού είναι υποσύνολο του w-* συμπαγούς $\overline{B}_{[\mathcal{C}(G)]^*}$.
  Πράγματι, για κάθε $f \in [\mathcal{C}(G)]^+$, το σύνολο $\{\psi \in [\mathcal{C}(G)]^* : \psi(f) \geq 0\}$ είναι w-* κλειστό, ως το σύνολο όλων των συναρτησοειδών ψ το οποία στη σταθερή συνάρτηση $\mathbb{1}$ παίρνουν τη τιμή 1. Άρα το K^* είναι τομή w-* κλειστών συνόλων, συνεπώς w-* κλειστό σύνολο.

- K^* είναι π^*-αναλλοίωτο.
  Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\psi \in K^*$, το $\pi^*(g)\psi$ είναι θετικό συναρτησοειδές πιθανότητας. Για κάθε $x, g \in G$,έχουμε
  (i) $[\pi^*(g)\psi](\mathbb{1})(x) = [\psi(\pi(g^{-1})]\mathbb{1}(x)) = \psi(\mathbb{1}(g \cdot x))$, άρα $[\pi^*(g)]\psi(\mathbb{1}) = 1$
  (ii) Αν $f \in [\mathcal{C}(G)]^+$, τότε $[\pi^*(g)\psi](f)(x) = [\psi(\pi(g^{-1}))](f)(x) = \psi(f(g \cdot x))$, άρα $[\pi^*(g)\psi](f) \geq 0$, για κάθε $f \in [\mathcal{C}(G)]^+$.

- Τέλος, από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι η απεικόνιση $g \to \pi(g)f$, είναι συνεχής.

Άρα από το Λήμμα μπορούμε να βρούμε θετικό συναρτησοειδές πιθανότητας, π^*- σταθερό. □

2.3 Κατασκευή του Μέτρου Haar για Συμπαγείς Ομάδες

Ένα μέτρο Borel σε εναν συμπαγή χώρο Hausdorff X είναι ένα πεπερασμένο μέτρο που ορίζεται στην Borel σ-άλγεβρα $\mathbb{B}(X)$ υποσυνόλων του X. Θα λέμε ότι ένα μέτρο Borel είναι μέτρο Radon, αν είναι κανονικό μέτρο.

Λήμμα 2.3.1. *Έστω G συμπαγής ομάδα και μ ένα μέτρο Borel στην $\mathbb{B}(G)$. Για $g \in G$ ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση $\mu_g : \mathbb{B}(G) \to [0, \infty)$ με $\mu_g(A) = \mu(g \cdot A)$, για κάθε $A \in \mathbb{B}(G)$. Τότε*

- *Το μ_g είναι μέτρο Borel.*

- *Αν το μ είναι μέτρο Radon, τότε το μ_g είναι μέτρο Radon*

- *Αν $\pi : G \to GL(\mathcal{C}(G))$ είναι η κανονική αναπαράσταση του G στον $\mathcal{C}(G)$, τότε*

$$\int_G \pi(g) f d\mu = \int_G f d\mu_g \text{ για κάθε } f \in \mathcal{C}(G)$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.1.3 έχουμε ότι το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν το $g \cdot A$ είναι ανοικτό, επομένως το A είναι Borel αν και μόνο αν το $g \cdot A$ είναι Borel. Άρα η $\mu_g : \mathbb{B}(G) \to [0, \infty)$ είναι καλά ορισμένη.
Ισχυριζόμαστε ότι το μ_g είναι μέτρο.
Έστω $(U_i)_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανα δύο συνόλων στην $\mathbb{B}(G)$. Τότε τα $(g \cdot U_i)_{i=1}^{\infty}$ είναι ξένα ανά δύο, και από τον ορισμό του μ_g έχουμε,

$$\mu_g(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = \mu(g \cdot \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} g \cdot U_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(g \cdot U_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_g(U_i)$$

Ειδικότερα $\mu_g(G) = \mu(G) < \infty$, και από τα παραπάνω το μ_g είναι μέτρο Borel.
Έστω τώρα ότι το μ είναι μέτρο Radon. Για την εσωτερική κανονικότητα του μ_g , έστω $\mathcal{O}$ ανοικτή περιοχή του g και $\varepsilon > 0$.
Αφού το μ είναι εσωτερικά κανονικό και το $g \cdot \mathcal{O}$ είναι ανοικτό, μπορούμε να βρούμε συμπαγές υποσύνολο του $g \cdot \mathcal{O}$, έστω K, ώστε $\mu((g \cdot O) \backslash K) < \varepsilon$
Έστω $K' = g^{-1} \cdot K$. Τότε αυτό είναι συμπαγές, περιέχεται στο $\mathcal{O}$ και $\mu_g(\mathcal{O} \backslash K') < \varepsilon$. Άρα το μ_g είναι εσωτερικά κανονικό. Όμοια, δείχνουμε την εξωτερική κανονικότητα.
Για την τελευταία σχέση, αν $f = \mathbb{1}_A$, όπου $A \in \mathbb{B}(G)$,

$$\int_G \pi(g) \mathbb{1}_A(x) d\mu(x) = \int_G \mathbb{1}_A(g^{-1} \cdot x) d\mu(x) = \int_G \mathbb{1}_{g \cdot A}(x) d\mu(x) = \mu(g \cdot A) = \mu_g(A) = \int_G \mathbb{1}_A d\mu_g(x)$$

Τώρα, από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος, το ζητούμενο ισχύει για απλές μετρήσιμες Borel συναρτήσεις. Τέλος, αν $f \in \mathcal{C}(G)$, έχουμε ότι η f είναι φραγμένη, ως συνεχής σε συμπαγές σύνολο. Άρα, υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$, για κάθε $x \in G$. Τώρα, μπορούμε να βρούμε ακολουθία απλών συναρτήσεων $(\phi_n(x))_{n=1}^{\infty}$ τέτοιες ώστε

- $\phi_n(x) \longrightarrow f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in G$.

- $|\phi_n(x)| \leq |f(x)| \leq M$, για κάθε $x \in G$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Έτσι, αφού έχουμε το αποτέλεσμα για απλές συναρτήσεις, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης, έπεται το ζήτουμενο για $f \in \mathcal{C}(G)$. $\square$

Ορισμός 2.3.2. *Έστω G συμπαγής ομάδα. Ένα μέτρο Borel $\mu : \mathcal{B}(G) \to [0, \infty)$ καλείται αριστερά αναλλοίωτο αν*

$$\mu(g \cdot A) = \mu(A) \text{ για κάθε } g \in G \text{ και } A \in \mathcal{B}(G)$$

Όμοια ορίζεται και ένα δεξιά αναλλοίωτο μέτρο Borel.

Θεώρημα 2.3.3. *(Riesz-Markov) Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff, και I θετικό γραμμικό συναρτησοειδές στον $\mathcal{C}_c(X)$.*
Τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο Radon μ στη $\mathcal{B}(X)$, τέτοιο ώστε για κάθε $f \in \mathcal{C}_c(X)$,

$$I(f) = \int_X f d\mu$$

Πρόταση 2.3.4. *Έστω G συμπαγής ομάδα. Τότε, υπάρχει Radon μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{B}(G)$ το οποίο είναι αριστερά αναλλοίωτο και Radon μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{B}(G)$ το οποίο είναι δεξιά αναλλοίωτο.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα του *Kakutani* μπορούμε να βρούμε θετικό συναρτησοειδές πιθανότητας $\psi \in [\mathcal{C}(G)]^*$ το οποίο είναι π^*-σταθερό, δηλαδή

$$\psi(f) = \psi(\pi(g^{-1})f) \text{ για κάθε} f \in \mathcal{C}(G) \text{ και } g \in G$$

Από την άλλη από το θεώρημα *Riesz-Markov*, υπάρχει μοναδικό Radon μέτρο μ στην $\mathcal{B}(G)$, ώστε

$$\psi(f) = \int_G f d\mu \text{ για κάθε } f \in \mathcal{C}(G)$$

Άρα από τις δύο προηγούμενες σχέσεις,

$$\psi(f) = \psi(\pi(g^{-1})f) = \int_G \pi(g^{-1}) f d\mu \text{ για κάθε } f \in \mathcal{C}(G) \text{ και } g \in G$$

Άρα από το Λήμμα

$$\psi(f) = \int_G f d\mu_{g^{-1}} \text{ για κάθε } f \in \mathcal{C}(G) \text{ και } g \in G$$

Δεδομένου ότι το $\mu_{g^{-1}}$ είναι μέτρο Radon, από τη μοναδικότητα της αναπαράστασης Riecz-Markov παίρνουμε ότι

$$\mu_{g^{-1}} = \mu \text{ για κάθε } g \in G$$

Συνεπώς το μ είναι αριστερά αναλλοίωτο μέτρο. Είναι και μέτρο πιθανότητας, αφού για $f = \mathbb{1}$, είναι $1 = \psi(\mathbb{1}) = \int_G \mathbb{1} d\mu_g = \mu(G)$

Όμοια, βρίσκουμε δεξιά αναλλοίωτο Radon μέτρο πιθανότητας στην G. □

Ορισμός 2.3.5. *Έστω G συμπαγής ομάδα. Ένα μέτρο Radon στη $\mathcal{B}(G)$, λέγεται μέτρο Haar στη G, αν είναι αριστερά αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας*

Θεώρημα 2.3.6. *Έστω G συμπαγής ομάδα.Υπάρχει μοναδικό μέτρο Haar πιθανότητας στην $\mathcal{B}(G)$. Το μέτρο αυτό είναι και δεξιά αναλλοίωτο.*

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση, μπορούμε να βρούμε αριστερά αναλλοίωτο Radon μέτρο πιθανότητας μ στην $\mathcal{B}(G)$ και δεξιά αναλλοίωτο Radon μέτρο πιθανότητας μ' στην $\mathcal{B}(G)$. Έστω ακόμη, $f \in \mathcal{C}(G)$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : G \times G \to G$ με $h(x, y) = f(x \cdot y)$, η οποία είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών. Θεωρώντας το μέτρο $\mu \times \mu'$, και παρατηρώντας ότι το $G \times G$ είναι συμπαγής ομάδα, έχουμε ότι η h είναι ολοκληρώσιμη ως συνεχής σε συμπαγές.

$$\int_{G\times G} hd(\mu \times \mu') = \int_G (\int_G f(x \cdot y)d\mu(y))d\mu'(x) = \int_G (\int_G f(y)d\mu(y))d\mu'(x) = \int_G f(y)d\mu(y)$$

αφού το μ είναι αριστερά αναλλοίωτο και χρησιμοποιώντας το θεώρημα *Fubini*. Όμοια, βλέπουμε

$$\int_{G\times G} hd(\mu' \times \mu) = \int_G (\int_G f(x \cdot y)d\mu'(x))d\mu(y) = \int_G (\int_G f(x)d\mu'(x))d\mu(y) = \int_G f(x)d\mu'(x)$$

Συνεπώς $\int_G f d\mu = \int_G f d\mu'$ και από τη μοναδικότητα του Riesz-Markov, $\mu = \mu'$. □

Σχόλιο 2.3.7. *Επομένως, σε συμπαγείς τοπολογικές ομάδες το μέτρο Haar είναι μοναδικό, μέτρο πιθανότητας δεξιά και αριστερά αναλλοίωτο.*

Παράδειγμα 2.3.8. *Ένα πολύ χρήσιμο παράδειγμα είναι η συμπαγής ομάδα*

$$SU(2) = \{g \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \ : g^* g = I_2 \textit{ και } \det(g) = 1\}.$$

Για να υπολογίσουμε το μέτρο Haar της, χρειαζόμαστε πρώτα κάποια εργαλεία.

Πρόταση 2.3.9. *Έστω $S^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$ η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^4$. Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\Phi : x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \to \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

Τότε $\Phi : S^3 \to SU(2)$, και είναι ομοιομορφισμός. Δηλαδή, μπορούμε μέσω της Φ να ταυτίζουμε της $SU(2)$ με την S^3

Απόδειξη. Πρώτα δείχνουμε ότι $\Phi(x) \in SU(2)$ $\forall x \in S^3$. Έστω $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Τότε

$$\begin{aligned} \Phi(x)^*\Phi(x) &= \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 & x_3 - ix_4 \\ -x_3 - ix_4 & x_1 + ix_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 - ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 & 0 \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \end{pmatrix} \\ &= I_2. \end{aligned}$$

Ακόμη, $\det(\Phi(x)) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. Άμεσα, η Φ είναι 1-1 και επί. Τέλος η $\Phi^{-1} : SU(2) \to S^3$, είναι συνεχής. Πράγματι, αφού η σφαίρα S^3 είναι συμπαγής και $SU(2)$ Hausdorff τοπολογικός χώρος, η Φ^{-1} είναι συνεχής. □

Πρόταση 2.3.10. *Η δεξιά μεταφορά της $SU(2)$, $R_g : SU(2) \to SU(2)$ με $R_g(x) = xg$ είναι στροφή του $\mathbb{R}^4$, δηλαδή στοιχείο της ομάδας $SO(4) = \{A \in M_{4\times4}(\mathbb{R}) \ : A^TA = AA^T = I_4$ και $\det A = 1\}$*

Απόδειξη. Η απεικόνιση $\Phi : S^3 \to SU(2)$, επεκτείνεται σε γραμμικό ισομορφισμό από το $\mathbb{R}^4$ στον διανυσματικό χώρο $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \ i \in [4] \right\}$. Συμβολίζουμε αυτόν τον γραμμικό ισομορφισμό με Φ.

Ταυτίζοντας το $x \in \mathbb{R}$ με το $\Phi(x) \in V$, είναι $\|x\|^2 = \det x$, που έπεται από τον πολλαπλασιασμό πινάκων της προηγούμενης πρότασης. Άρα η δεξιά μεταφορά R_g επεκτείνεται σε γραμμικό ισμομορφισμό στον $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ και

$$\|xg\|^2 = \det(xg) = \det(x)\det(g) = \det(x) = \|x\|^2 \ x \in \mathbb{R}^4$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^4$ και για κάθε $g \in SU(2)$.Συνεπώς, $R_g \in O(4)$. Ακόμη, $SU(2) \cong S^3$,και η S^3 είναι συνεκτική, άρα $\det(R_g) = 1$, και τελικά $R_g \in SO(4)$. □

Σχόλιο 2.3.11. *Τέλος, πρέπει να ορίσουμε τις πολικές συντεταγμένες στη σφαίρα του* $\mathbb{R}^4$. *Έστω λοιπόν* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$. *Τότε,* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \implies x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 - x_1^2$. *Αφού* $-1 \leq x \leq 1$, *υπάρχει μοναδικός* $\theta \in [0, \pi]$, *τέτοιος ώστε* $x_1 = \cos\theta$. *Άρα,* $x_2^2+x_3^2+x_4^2 = \sin^2\theta$. *Έτσι, βλέπουμε ότι το στοιχείο* (x_2, x_3, x_4) *ανήκει στη σφαίρα ακτίνας* $\sin\theta$.

Χρησιμοποιώντας τις πολικές συντεταγμένες του $\mathbb{R}^3$, *έχουμε ότι* $x_2 = \sin\theta\cos\theta$, $x_3 = \sin\theta\sin\phi\cos\psi$, $x_4 = \sin\theta\sin\phi\sin\psi$, *για* $0 \leq \phi \leq \pi$ *και* $0 \leq \psi \leq 2\pi$

Πρόταση 2.3.12. *Ταυτίζουμε την* $SU(2)$ *με την* S^3, *και την εφοδιάζουμε με τις πολικές συντεταγμένες που είδαμε προηγουμένως. Το μέτρο Haar για την ομάδα* $SU(2)$, *δίνεται από την*

$$\int_G f(x)dx = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi, \psi) \sin^2\theta \sin\phi d\theta d\phi d\psi$$

Απόδειξη. Για το στοιχείο μήκους της S^3 έχουμε $ds^2 = \sum_{i=1}^4 dx_i^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 + \sin^2\theta\sin^2\phi d\psi^2$. Συνεπώς, για το στοιχείο όγκου, παίρνουμε $dx = (\det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} d\theta d\phi d\psi = \sin^2\theta\sin\phi d\theta d\phi d\psi$.Από την προηγούμενη πρόταση, το dx είναι αναλλοίωτο ως προς στροφές.

Θέλουμε ακόμα, να είναι μέτρο πιθανότητας. Υπολογίζοντας, $\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2\theta\sin\phi d\theta d\phi d\psi = 2\pi^2$, παίρνουμε το ζητούμενο. □

3 Συμπαγείς Κβαντικές Ομάδες

3.1 Ορισμοί και Παραδείγματα

Παρακάτω συμβολίζουμε με $A \otimes B$ το minimal τανυστικό γινόμενο των C^* αλγεβρών A και B.

Ορισμός 3.1.1. *Ένα ζεύγος (A, Δ), όπου A είναι C^* άλγεβρα με μονάδα και $\Delta : A \to A \otimes A$ *-ομομορφισμός που διατηρεί τη μονάδα, λέγεται συμπαγής κβαντική ομάδα (CQG) αν*

- $(\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta$ *, όπου $\iota : A \to A$, η ταυτοτική απεικόνιση. (coassociativity)*
- *Οι χώροι $\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A) = span\{\Delta(a) \cdot (\mathbb{1} \otimes b)\ , a, b \in A\}$ και*
  $\Delta(A)(A \otimes \mathbb{1}) = span\{\Delta(a) \cdot (b \otimes \mathbb{1})\ , a, b \in A\}$ είναι πυκνοί στο $A \otimes A$

Παρατήρηση 3.1.2. *Από τις ιδιότητες του ορισμού, είναι προφανές ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes\iota"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\iota\otimes\Delta"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 3.1.3. *Στην αρχή μελετάμε το CQG $(\mathcal{C}(G), \Delta)$, όπου G συμπαγής ομάδα. Θα αποδείξουμε ότι η μελέτη κάθε CQG (A, Δ) όπου A μεταθετική C^* άλγεβρα, ανάγεται στη μελέτη του CGQ $(\mathcal{C}(G), \Delta)$, για κάποια συμπαγή ομάδα G.*

Πρόταση 3.1.4. *Έστω G συμπαγής ομάδα και $A = \mathcal{C}(G)$. Χρησιμοποιώντας την ταύτιση $\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G) \cong \mathcal{C}(G\times G)$, θεωρούμε την $\Delta : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(\mathcal{G} \times \mathcal{G})$ με $\Delta(f)(x, y) = f(xy)$, $\forall x, y \in G$.*
Το (A, Δ) είναι CQG.

Απόδειξη. **α)** Αρχικά γνωρίζουμε ότι η A είναι (μεταθετική) C^* άλγεβρα με μονάδα τη σταθερή συνάρτηση $f = \mathbb{1}$, αφού G συμπαγές. Ο Δ είναι *-ομομορφισμός που διατηρεί τη μονάδα. Πράγματι, έστω $f, g \in \mathcal{C}(G)$ και $x, y \in G$. Τότε,

$$\Delta(fg)(x, y) = (fg)(xy) = (\Delta(f)\Delta(g))(x, y) \text{ και}$$
$$\Delta(f^*)(x, y) = f^*(xy) = \overline{f}(xy) = (\Delta(f))^*(x, y)$$

Τέλος διατηρεί τη μονάδα, αφού

$$\Delta(\mathbb{1})(x,y) = \mathbb{1}(xy) = 1$$

β) Για την coassociativity του Δ. Έχουμε ότι $\Delta(f) \in \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G)$. Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta(f) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} g_i^n \otimes h_i^n, \ \text{ με } \ g_i^n, h_i^n \in \mathcal{C}(G)$$

Έστω $x,y,z \in G$. Τότε,

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes \iota)\Delta(f))(x,y,z) &= (\Delta \otimes \iota)\left(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} g_i^n \otimes h_i^n\right)(x,y,z) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \left(\Delta(g_i^n) \otimes h_i^n\right)(x,y,z) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \Delta(g_i^n)(x,y) h_i^n(z) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} g_i^n(xy) h_i^n(z) \\
&= \left(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} g_i^n \otimes h_i^n\right)(xy,z) \\
&= \Delta(f)(xy,z) = f((xy)z)
\end{aligned}$$

Όμοια, έχουμε ότι $((\iota \otimes \Delta)(\Delta(f))(x,y,z) = f(x(yz))$. Αφού τα $x,y,z \in G$ τυχόντα και G ομάδα, έχουμε ότι $(xy)z = x(yz)$. Άρα,

$$(\iota \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \iota)\Delta$$

γ) Τώρα θα δείξουμε ότι η $\Delta(\mathcal{C}(G))(\mathbb{1} \otimes \mathcal{C}(G))$ είναι πυκνή στην $\mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G) \cong \mathcal{C}(G \times G)$.

- Η $\Delta(\mathcal{C}(G))(\mathbb{1} \otimes \mathcal{C}(G))$ είναι υπάλγεβρα της $\mathcal{C}(G \times G)$. Έστω $f_i, g_i \in \mathcal{C}(G)$, όπου $i = 1,2$. Τότε, $\Delta(f_1)(\mathbb{1} \otimes g_1), \Delta(f_2)(\mathbb{1} \otimes g_2) \in \Delta(\mathcal{C}(G))(\mathbb{1} \otimes \mathcal{C}(G))$. Άρα

$$\Delta(f_1)(\mathbb{1} \otimes g_1)\Delta(f_2)(\mathbb{1} \otimes g_2) = \Delta(f_1)\Delta(f_2)(\mathbb{1} \otimes g_1)(\mathbb{1} \otimes g_2) = \Delta(f_1 f_2)(\mathbb{1} \otimes g_1 g_2)$$

και $f_1f_2, g_1g_2 \in \mathcal{C}(G)$.

- Η $\Delta(\mathcal{C}(G))(\mathbb{1} \otimes \mathcal{C}(G))$ περιέχει τις σταθερές. Πράγματι,$\mathbb{1} \in \mathcal{C}(G)$ και $\Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ άρα

$$\Delta(\mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \in \Delta(\mathcal{C}(G))(\mathbb{1} \otimes \mathcal{C}(G))$$

- Η $\Delta(\mathcal{C}(G))(\mathbb{1} \otimes \mathcal{C}(G))$ διαχωρίζει τα σημεία του $G \times G$, δηλαδή αν $\widetilde{f}(x_1, y_1) = \widetilde{f}(x_2, y_2)$ για κάθε $\widetilde{f} \in \Delta(\mathcal{C}(G))(\mathbb{1} \otimes \mathcal{C}(G))$, τότε $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Γράφουμε $\widetilde{f} = \Delta(f)(\mathbb{1} \otimes g)$, όπου $f, g \in \mathcal{C}(G)$. Τότε,

$$\widetilde{f}(x_1, y_1) = \widetilde{f}(x_2, y_2) \implies \Delta(f)(\mathbb{1} \otimes g)(x_1, y_1) = \Delta(f)(\mathbb{1} \otimes g)(x_2, y_2) \implies f(x_1y_1)g(y_1) = f(x_2y_2)g(y_2)$$

  Αφού η προηγουμενη σχέση ισχύει για κάθε $f, g \in \mathcal{C}(G)$ επιλέγοντας $f = \mathbb{1}$, έχουμε ότι $g(y_1) = g(y_2)$ για κάθε g , άρα $y_1 = y_2$ αφού g συνεχής σε συμπαγές.
  Επιλέγοντας τώρα $g = \mathbb{1}$, παίρνουμε ότι $f(x_1y_1) = f(x_2y_2)$ για κάθε f, άρα $x_1y_1 = x_2y_2 \iff x_1 = x_2$, αφού $y_1 = y_2$. Τελικά $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

- Η $\Delta(\mathcal{C}(G))(\mathbb{1} \otimes \mathcal{C}(G))$ είναι κλειστή ως προς μιγαδικούς συζυγείς. Πράγματι, έστω $\widetilde{f} \in \Delta(\mathcal{C}(G))(\mathbb{1} \otimes \mathcal{C}(G))$. Τότε $\widetilde{f} = \Delta(f)(\mathbb{1} \otimes g)$, με $f, g \in \mathcal{C}(G)$. Όμως $\mathcal{C}(G)$ είναι C^* άλγεβρα, άρα $f^*, g^* \in \mathcal{C}(G)$.

Συνεπώς από το θεώρημα Stone-Weierstrass η $\Delta(\mathcal{C}(G))(\mathbb{1} \otimes \mathcal{C}(G))$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στη $\mathcal{C}(G \times G)$. Όμοια, η $\Delta(\mathcal{C}(G))(\mathcal{C}(G) \otimes \mathbb{1})$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $\mathcal{C}(G \times G)$ □

Πρόταση 3.1.5. *Έστω (A, Δ) CQG με A μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα. Τότε μπορούμε να βρούμε G συμπαγή ομάδα, με $A \cong \mathcal{C}(G)$.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα του Gelfand, μπορούμε να βρούμε συμπαγή Hausdorff τοπολογικό χώρο G, ώστε $A = \mathcal{C}(G)$. Θα αποδείξουμε ότι το G έχει τη δομή ομάδας.
Πρώτα δείχνουμε ότι μπορούμε να εφοδιάσουμε το G με μία απεικόνιση $m : G \times G \to G$, ώστε $m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$, $\forall x, y, z \in G$, δηλαδή το G είναι ημιομάδα.
Πράγματι, αφού $\Delta : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G \times G)$ είναι *-ομομορφισμός που διατηρεί τη μονάδα,

μπορούμε, από το θεώρημα του Gelfand, να βρούμε συνεχή απεικόνιση $m : G \times G \to G$ με $\Delta(f)(x,y) = f(m(x,y))$, $\forall f \in \mathcal{C}(G)$, $\forall x, y \in G$. Τώρα

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \iota)\Delta(f)(x,y,z) &= (\Delta \otimes \iota)(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} g_i^n \otimes h_i^n)(x,y,z) \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \Delta(g_i^n)(x,y)h_i^n(z) \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} g_i^n(m(x,y))h_i^n(z) \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} g_i^n \otimes h_i^n(m(x,y),z) \\ &= \Delta(f)(m(x,y),z) \\ &= f(m(m(x,y),z)).\end{aligned}$$

Όμοια, $(\iota \otimes \Delta)\Delta(f)(x,y,z) = f(m(x,m(y,z)))$
Αφού (A, Δ) είναι CQG, ο Δ είναι coassociative άρα έχουμε ότι $(\Delta \otimes \iota)\Delta(f) = (\iota \otimes \Delta)\ \Delta(f)$, $\forall f \in \mathcal{C}(G)$. Άρα $f(m(m(x,y),z)) = f(m(x,m(y,z)))\ \forall f \in \mathcal{C}(G)$. Αφού f συνεχής σε συμπαγές, διαχωρίζει τα σημεία του χώρου, συνεπώς

$$m(m(x,y),z) = m(x,m(y,z))\ \forall x,y,z \in G$$

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι $\forall x_1, x_2, y \in G$ με $x_1 \cdot y = x_2 \cdot y \implies x_1 = x_2$ (right cancellation rule) και $y \cdot x_1 = y \cdot x_2 \implies x_1 = x_2$ (left cancellation rule).Θα συμβολίζουμε τον πολλαπλασιασμό m με "$\cdot$"
Δείχνουμε το right cancellation rule, και όμοια έχουμε το left.
Έστω λοιπόν $x_1, x_2, y \in G$ με $x_1 \cdot y = x_2 \cdot y$. Τότε, $\forall f, g \in \mathcal{C}(G)$ είναι

$$\Delta(f)(\mathbb{1} \otimes g)(x_1, y) = f(x_1 \cdot y)g(y) = f(x_2 \cdot y)g(y) = \Delta(f)(\mathbb{1} \otimes g)(x_2, y)$$

Όμως η $(x,y) \to (x \cdot y, y)$ είναι 1-1. Άρα από το θεώρημα Gelfand, η $f \to f'$ με $f'(x,y) = f(x \cdot y, y)$ είναι επί. Επομένως, αφού $x_1 \cdot y = x_2 \cdot y$ έχουμε $f(x_1 \cdot y, y) = f(x_2 \cdot y, y)\ \forall f \in \mathcal{C}(G)$. Άρα για κάθε $f' \in \mathcal{C}(G \times G)$ έχουμε $f'(x_1, y) = f'(x_2, y)$, οπότε $(x_1, y) = (x_2, y)$ δηλαδή $x_1 = x_2$.

Χρησιμοποιώντας το επόμενο Λήμμα, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Λήμμα 3.1.6. *Κάθε συμπαγής ημιομάδα η οποία ικανοποιεί cancellation rules, είναι ομάδα.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό ουδέτερο στοιχείο, και μοναδικό αντίστροφο στη G. Έστω $h \in G$. Θεωρούμε $H =< h >$, την κυκλική υποομάδα της G, που παράγεται από το στοιχείο h. Έστω I_1, I_2 δύο μη κενά ιδεώδη της H.
Ισχυριζόμαστε ότι $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Προς αυτό, δείχνουμε ότι $I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$, και τότε έπεται το ζητούμενο, αφού $I_1 \cdot I_2 \neq \emptyset$. Πράγματι, έστω $a \in I_1 \cdot I_2$. Τότε $a = a_1 \cdot a_2$ με $a_j \in I_j$, $j = 1, 2$. Τώρα το I_1 είναι ιδεώδες άρα $a_1 = b_1 \cdot a_1$ και όμοια $a_2 = a_2 \cdot c_2$, για κάθε $b_1, c_2 \in H$. Άρα $a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot c_2$ και παρατηρούμε ότι

$$b_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot c_2 = b_1 \cdot a_1 \cdot (a_2 \cdot c_2) \in I_1 \text{ , αφού } b_1 \in H \text{ και } a_2 \cdot c_2 \in H$$

$$b_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot c_2 = (b_1 \cdot a_1) \cdot a_2 \cdot c_2 \in I_2 \text{ , αφού } b_1 \cdot a_1 \in H \text{ και } c_2 \in H$$

Συνεπώς $a_1 \cdot a_2 \in I_1 \cap I_2$. Επαγωγικά, βλέπουμε ότι αν $I_1, ..., I_n$ μη κενά ιδεώδη της H, είναι $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \neq \emptyset$, δηλαδή το σύνολο των μη κενών ιδεωδών έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Όμως βρισκόμαστε σε συμπαγή χώρο, άρα για κάθε οικογένεια ιδεωδών $\{I_i\}_{I \in K}$, έχουμε ότι $\bigcap_{i \in K} I_i \neq \emptyset$, και προφανώς $\bigcap_{i \in K} I_i$ είναι ιδεώδες ως τομή ιδεωδών. Έστω

$$I = \bigcap \{I_j \ : \ I_j \text{ ιδεώδες της H}\}$$

. Έστω $i \in I$. Αφού I ιδεώδες, $i \cdot I \subseteq I$ και συνεπώς, αφού το I είναι εξ'ορισμού ελαχιστικό ιδεώδες, $i \cdot I = I$. Επομένως, υπάρχει $e \in I$, τέτοιο ώστε $i \cdot e = i$ για κάθε $i \in I$. Έτσι, για κάθε $g \in G$ είναι $i \cdot e \cdot g = i \cdot g$.Από left cancellation rules, $e \cdot g = g$. Όμοια, τώρα, βρίσκουμε $e' \in I$ τέτοιο ώστε $g \cdot e' = g$ για κάθε $g \in G$.
Ισχυριζόμαστε ότι $e' = e$. Πράγματι, $e, e' \in I$, άρα $e = e \cdot e' = e' \cdot e$. Άρα, $e \cdot g = g \implies e \cdot e' \cdot g = e \cdot g \implies e' \cdot g = g = e \cdot g$. Άρα, $e' \cdot g = e \cdot g$, και χρησιμοποιώντας right cancellation rule, $e = e'$.
Συνεπώς, βρήκαμε $e \in G$, τέτοιο ώστε $\forall g \in G$, ικανοποιεί $g \cdot e = e \cdot g = g$, άρα το G έχει ουδέτερο στοιχείο.

Τώρα, για το h για το οποίο ξεκινήσαμε, $h \cdot I \subseteq I$ και αφού I ελαχιστικό ιδεώδες, $h \cdot I = I$. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε $k \in I$, με $h \cdot k = e$ και $k' \in I$, με $k' \cdot h = e$.
Ισχυριζόμαστε ότι, $k' = k$. Πράγματι, $h \cdot k = k' \cdot h \implies k = k'$, αφού H μεταθετική ομάδα. Άρα βρήκαμε $k \in G$, τέτοιο ώστε $h \cdot k = k \cdot h = e$, για κάθε $h \in H$, άρα κάθε $h \in H$, έχει αντίστροφο στοιχείο. Συνεπώς η G είναι ομάδα. □

Παράδειγμα 3.1.7. *Έστω Γ μια διακριτή ομάδα.*
Θεωρούμε την κανονική αριστερή αναπαράσταση $\lambda : \Gamma \to \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ με $\lambda_\gamma \delta_{\gamma'} = \delta_{\gamma\gamma'}$, για κάθε $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, όπου $\{\delta_\gamma \,, \gamma \in \Gamma\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του $\ell^2(\Gamma)$. Η reduced C^* άλγεβρα $C_r^*(\Gamma)$ της Γ είναι εξ'ορισμού $C_r^*(\Gamma) = \overline{span\,\{\lambda_\gamma : \gamma \in \Gamma\}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))}} \subseteq \mathcal{B}(l^2(\Gamma))$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} w : &\ell^2(\Gamma) \otimes \ell^2(\Gamma) \longrightarrow \ell^2(\Gamma) \otimes \ell^2(\Gamma) \\ &(w\xi)(s,t) \longrightarrow \xi(s,st) \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται [15, Lemma VII.3.6] ότι ο w είναι unitary και

$$w(\lambda_\gamma \otimes \mathbb{1})w^* = \lambda_\gamma \otimes \lambda_\gamma$$

Άρα ο $\lambda_\gamma \otimes \lambda_\gamma$ είναι unitary ισοδύναμος με τον $\lambda_\gamma \otimes I$. Επομένως

$$\|\sum_\gamma a_\gamma \lambda_\gamma \otimes \lambda_\gamma\| = \|\sum_\gamma a_\gamma \lambda_\gamma \otimes \mathbb{I}\| = \|\sum_\gamma a_\gamma \lambda_\gamma\|$$

Επομένως, η απεικόνιση

$$\sum_\gamma a_\gamma \lambda_\gamma \longrightarrow \sum_\gamma a_\gamma \lambda_\gamma \otimes \lambda_\gamma$$

είναι συνεχής και επομένως επεικτείνεται σε συνεχή τελεστή $\Delta : \mathcal{C}_r^*(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}_r^*(\Gamma) \otimes \mathcal{C}_r^*(\Gamma)$. Ορίζουμε $\hat{\Gamma} = (\mathcal{C}_r^*(\Gamma), \Delta)$. Το $\hat{\Gamma}$ είναι CQG.
α) Η $C_r^*(G)$ είναι C^* άλγεβρα με μονάδα.
β) Ο $\Delta : \mathcal{C}_r^*(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}_r^*(\Gamma) \otimes \mathcal{C}_r^*(\Gamma)$ είναι *-ομομορφισμός που ικανοποιεί τις ιδιότητες του CQG.

- $\Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$

- *Έστω* $\gamma, \eta \in \Gamma$. *Τότε, εξ'ορισμού* $x, y \in \mathcal{C}_r^*(\Gamma) \implies x = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} c_i^n \lambda^n_{\gamma(i)}$ *και* $y = \lim_k \sum_{j=1}^{\ell_k} c_j^k \lambda^k_{\eta(j)}$.

$$\begin{aligned}
\Delta(x)\Delta(y) &= \Delta(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} c_i^n \lambda^n_{\gamma(i)})\Delta(\lim_k \sum_{j=1}^{\ell_k} c_j^k \lambda^k_{\eta(j)}) \\
&= \lim_{n,k} \sum_{i,j}^{m_n,\ell_k} c_i^n c_j^k \Delta(\lambda^n_{\gamma(i)})\Delta(\lambda^k_{\eta(j)}) \\
&= \lim_{n,k} \sum_{i,j}^{m_n,\ell_k} c_i^n c_j^k \lambda^n_{\gamma(i)} \otimes \lambda^n_{\gamma(i)}\lambda^k_{\eta(j)} \otimes \lambda^k_{\eta(j)} \\
&= \lim_{n,k} \sum_{i,j}^{m_n,\ell_k} c_i^n c_j^k (\lambda^n_{\gamma(i)}\lambda^k_{\eta(j)}) \otimes (\lambda^n_{\gamma(i)}\lambda^k_{\eta(j)}) \\
&= \Delta(xy)
\end{aligned}$$

Ακόμη αν $x = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} c_i^n \lambda^n_{\gamma(i)}$, *τότε* $x^* = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \overline{c_i^n} (\lambda^n_{\gamma(i)})^*$, *άρα*

$$\begin{aligned}
\Delta(x^*) &= \Delta(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \overline{c_i^n} (\lambda^n_{\gamma(i)})^*) \\
&= \lim_n \sum_{i}^{m_n} \overline{c_i^n} \Delta((\lambda^n_{\gamma(i)})^*) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \overline{c_i^n} (\lambda^n_{\gamma(i)})^* \otimes (\lambda^n_{\gamma(i)})^* \\
&= (\Delta(x))^*
\end{aligned}$$

γ) Για την coassociativity του Δ. *Έστω* $x \in \mathcal{C}_r^*(\Gamma)$.

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \iota)\Delta(x) &= (\Delta \otimes \iota) \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} c_i^n \lambda^n_{\gamma(i)} \otimes \lambda^n_{\gamma(i)} = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} c_i^n \Delta(\lambda^n_{\gamma(i)}) \otimes \lambda^n_{\gamma(i)} \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} c_i^n \lambda^n_{\gamma(i)} \otimes \lambda^n_{\gamma(i)} \otimes \lambda^n_{\gamma(i)} = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} c_i^n \lambda^n_{\gamma(i)} \otimes \Delta(\lambda^n_{\gamma(i)}) \\
&= (\iota \otimes \Delta)\Delta(x)
\end{aligned}$$

δ) Τέλος $\Delta(\mathcal{C}_r^*(\Gamma))(\mathbb{1} \otimes \mathcal{C}_r^*(\Gamma))$ *είναι πυκνή στην* $\mathcal{C}_r^*(\Gamma) \otimes \mathcal{C}_r^*(\Gamma)$. *Για την απόδειξη αυτού,* *παραπέμπουμε στην πρόταση 3.1.15.*

3.1.1 Συμπαγείς Κβαντικές Ομάδες Πινάκων

Ορισμός 3.1.8. *Έστω A μία C^* άλγεβρα με μονάδα, $u \in M_{N\times N}(A)$ και $\mathcal{A}$ η *-υπάλγεβρα της A που παράγεται από τα στοιχεία του πίνακα u, u_{kl} $k,l \in [N]$.*
Λέμε ότι το (A,u) είναι συμπαγής κβαντική ομάδα πινάκων (CMQG) αν

- *η $\mathcal{A}$ είναι πυκνή στην A*
- *Υπάρχει *-ομομορφισμός $\Phi : A \to A \otimes A$, με $\Phi(u_{kl}) = \sum_{r=1}^{N} u_{kr} \otimes u_{rn}$*
- *Υπάρχει γραμμική, αντιπολλαπλασιαστική απεικόνιση $\kappa : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, με $\kappa(\kappa(a^*)^*) = a$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ που ικανοποιεί*
  $\sum_{r=1}^{N} \kappa(u_{kr}) \cdot u_{rl} = \delta_{kl}\mathbb{1}$
  $\sum_{r=1}^{N} u_{kr} \cdot \kappa(u_{rl}) = \delta_{kl}\mathbb{1}$, *όπου $\mathbb{1}$, η μονάδα της A.*

Πρόταση 3.1.9. *Ο *-ομομορφισμός $\Phi : A \to A \otimes A$ με $\Phi(u_{kl}) = \sum_{r=1}^{N} u_{kr} \otimes u_{rn}$ είναι coassociative.*

Απόδειξη. Το δείχνουμε πρώτα για τους γεννήτορες της $\mathcal{A}$. Είναι

$$\begin{aligned}
(\Phi \otimes \iota) \circ \Phi(u_{kl}) &= (\Phi \otimes \iota)(\sum_{r=1}^{N} u_{kr} \otimes u_{rl}) \\
&= \sum_{r=1}^{N} \Phi(u_{kr}) \otimes u_{rl} \\
&= \sum_{r=1}^{N} (\sum_{s=1}^{N} u_{ks} \otimes u_{sr}) \otimes u_{rl} \\
&= \sum_{s=1}^{N} u_{ks} \otimes (\sum_{r=1}^{N} u_{sr} \otimes u_{rl}) \\
&= \sum_{s=1}^{N} u_{ks} \otimes \Phi(u_{sl}) = (\iota \otimes \Phi) \sum_{s=1}^{N} u_{ks} \otimes u_{sl} \\
&= (\iota \otimes \Phi) \circ \Phi(u_{kl}).
\end{aligned}$$

Αφού ισχύει για τους γεννήτορες, ισχύει και για όλα τα στοιχεία της $\mathcal{A}$. Άρα από την πυκνότητα της $\mathcal{A}$ στην A, ισχύει για κάθε $a \in A$. Έτσι, $(\Phi \otimes \iota) \circ \Phi = (\iota \otimes \Phi) \circ \Phi$ □

Πρόταση 3.1.10. *Ο πίνακας $[u_{kl}]_{k,l\in[N]}$ είναι αντιστρέψιμος στην $M_{N\times N}(A)$*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον πίνακα $[\kappa(u_{kl})]_{k,l\in[N]}$, δηλαδή τον πίνακα που στην (k,l) θέση έχει το στοιχείο $\kappa(u_{kl})$. Θα αποδείξουμε ότι $[u_{kl}]_{k,l\in[N]}\cdot[k(u_{kl})]_{k,l\in[N]}=[\delta_{kl}\mathbb{1}]_{k,l\in[N]}$, δηλαδή ο πίνακας που έχει στη διαγώνιο την $\mathbb{1}$ και παντου αλλού 0. Πράγματι, έχουμε για το (k,l) στοιχείο του πίνακα αυτού, είναι το $\sum\limits_{i=1}^{N}u_{ki}\kappa(u_{il})=\delta_{kl}\mathbb{1}$, δηλαδή είναι $\mathbb{1}$, αν $k=l$, δηλαδή αν το στοιχείο αυτό βρίσκεται στη διαγώνιο του πίνακα, και 0 διαφορετικά. Όμοια, από την άλλη σχέση της κ, βλεπουμε ότι $[\kappa(u_{kl})]_{k,l\in[N]}\cdot[u_{kl}]_{k,l\in[N]}=\delta_{kl}\mathbb{1}$, άρα ο $[\kappa(u_{kl})]_{k,l\in[N]}$, είναι ο αντίστροφος του $[u_{kl}]_{k,l\in[N]}$ □

Παρατήρηση 3.1.11. *Για κάθε $a\in\mathcal{A}$, θέτουμε $\omega(a)=\kappa(a^*)$.*
Τότε η $\omega:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, είναι αντιγραμμική ενέλιξη. Πράγματι,

$$\omega(a+b)=\kappa((a+b)^*)=\kappa(a^*+b^*)=k(a^*)+k(b^*)=\omega(a)+\omega(b)\ \text{ και αν }\ \lambda\in\mathbb{C}$$
$$\omega(\lambda a)=\kappa((\lambda a)^*)=\kappa(\overline{\lambda}a^*)=\overline{\lambda}\kappa(a^*)=\overline{\lambda}\omega(a)$$

Ακόμη, είναι involutive, αφού

$$\omega(\omega(a))=\omega(\kappa(a^*))=\kappa(\kappa(a^*)^*)=a,\ \text{ για κάθε }\ a\in\mathcal{A}$$

Παρατήρηση 3.1.12. *$\omega(\kappa(a))=a^*$, για κάθε $a\in\mathcal{A}$.*
Πράγματι, $\omega(\kappa(a))=\kappa(\kappa(a)^*)=(a^*)^*=a$, για κάθε $a\in\mathcal{A}$

Παρατήρηση 3.1.13. *Η ω είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή $\omega(a\cdot b)=\omega(a)\cdot\omega(b)$, για κάθε $a,b\in\mathcal{A}$.*
Πράγματι, $\omega(a\cdot b)=\kappa((a\cdot b)^*)=\kappa(b^*\cdot a^*)=\kappa(a^*)\cdot\kappa(b^*)=\omega(a)\cdot\omega(b)$, αφού η κ είναι αντιπολλαπλασιαστική απεικόνιση.

Πρόταση 3.1.14. *Ο πίνακας $[u^*_{kl}]_{k,l\in[N]}$ είναι αντιστρέψιμος στην $M_{N\times N}(A)$*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της κ έχουμε,

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{N} \kappa(u_{kr})u_{rl} = \delta_{kl}\mathbb{1} \\
&\implies \omega(\sum_{r=1}^{N} \kappa(u_{kr})u_{rl}) = \omega(\delta_{kl}\mathbb{1}) \\
&\implies \sum_{r=1}^{N} \omega(\kappa(u_{kr})u_{rl}) = \delta_{kl}\omega(\mathbb{1}) \\
&\implies \sum_{r=1}^{N} \omega(\kappa(u_{kr}) \cdot \omega(u_{rl})) = \delta_{kl}\mathbb{1} \\
&\implies \sum_{r=1}^{N} u_{kr}^* \cdot \kappa(u_{rl}^*) = \delta_{kl}\mathbb{1}
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τη σχέση $\sum_{r=1}^{N} u_{kr}\kappa(u_{rl}) = \delta_{kl}\mathbb{1}$ στην ω, με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε $\sum_{r=1}^{N} \kappa(u_{kr}^*)u_{rl}^* = \delta_{kl}\mathbb{1}$. Όπως είδαμε στη πρόταση 3.1.10, αυτό συνεπάγεται ότι ο $[u_{kl}^*]_{k,l\in[N]}$ είναι αντιστρέψιμος, με αντίστροφο, $[\kappa(u_{kl}^*)]_{k,l\in[N]}$ □

Πρόταση 3.1.15. *Μια συμπαγής κβαντική ομάδα πινάκων είναι συμπαγής κβαντική ομάδα. Δηλαδή, αν A μία C^* άλγεβρα με μονάδα, που παράγεται από τα στοιχεία u_{kl}, $k, l \in [N]$, ώστε οι πίνακες $[u_{kl}]_{k,l\in[N]}$ και $[u_{kl}^*]_{k,l\in[N]}$ είναι αντιστρέψιμοι στην $M_{N\times N}(A)$, και $\Phi : A \to A \otimes A$ *-ομομορφισμός που διατηρεί τη μονάδα, με*

$$\Phi(u_{kl}) = \sum_{r=1}^{N} u_{kr} \otimes u_{rl}$$

*τότε (A, Φ) είναι **CQG**.*

Απόδειξη. Για την coassociativity του *-ομομορφισμού Φ, έχουμε τελειώσει από την Πρόταση 3.1.9. Θα δείξουμε ότι $\Phi(A)(\mathbb{1} \otimes A)$ είναι πυκνή στο $A \otimes A$. Ισχυριζόμαστε ότι η

$$B = \{a \in A : a \otimes 1 = \sum_{k} \Phi(x_k)(\mathbb{1} \otimes y_k) \text{ για κάποια } x_k, y_k \in A\}$$

είναι πυκνή στην A. Παρατηρούμε, αρχικά ότι η B είναι άλγεβρα. Πράγματι, αν

$$a \otimes \mathbb{1} = \sum_k \Phi(x_k)(\mathbb{1} \otimes y_k) \text{ και}$$
$$b \otimes \mathbb{1} = \sum_l \Phi(x'_l)(\mathbb{1} \otimes y'_l)$$

τότε

$$\begin{aligned} ab \otimes \mathbb{1} &= \sum_k \Phi(x_k)(b \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes y_k) \\ &= \sum_k \Phi(x_k)(\sum_l \Phi(x'_l)(\mathbb{1} \otimes y'_l))(\mathbb{1} \otimes y_k) \\ &= \sum_{k,l} \Phi(x_k) \cdot \Phi(x'_l)(\mathbb{1} \otimes y'_l y_k) \\ &= \sum_{k,l} \Phi(x_k x'_l)(\mathbb{1} \otimes y'_l y_k) \in B. \end{aligned}$$

Έστω $[v_{kl}]_{k,l}$ ο αντίστροφος του πίνακα $[u_{kl}]_{k,l}$. Τότε,

$$\sum_{l=1}^N \Phi(u_{kl})(\mathbb{1} \otimes v_{lr}) = \sum_{l=1}^N (\sum_{r=1}^N u_{kr} \otimes u_{rl})(\mathbb{1} \otimes v_{lr}) = \sum_{l,r=1}^N u_{kr} \otimes u_{rl} v_{lr} = u_{kr} \otimes \mathbb{1}$$

Συνεπώς, $u_{kr} \in B$. Όμοια, $u^*_{kr} \in B$. Άρα η B είναι υπάλγεβρα της A, που περιέχει τους γεννήτορες, συνεπώς είναι πυκνή στην A. Από αυτό έπεται ότι $(\mathbb{1} \otimes A)\Phi(A)$ είναι πυκνή στην $A \otimes A$. Πράγματι, $\forall x \in A$, έχουμε $x = \lim_n \alpha_n$, με $\alpha_n \in B$. Τότε, αν $x \otimes y \in A \otimes A$, είναι

$$x \otimes y = (x \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes y) = (\lim_n \alpha_n \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes y) = \lim_n (\alpha_n \otimes y)$$

και $\alpha_n \otimes y \in B$, από τον ορισμό της. Άρα, η $\Phi(A)(A \otimes \mathbb{1})$ είναι πυκνή στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο, το οποίο είναι πυκνό στο τανυστικό γινόμενο $A \otimes A$. Όμοια, η $(A \otimes \mathbb{1})\Phi(A)$ πυκνή στο $A \otimes A$. □

Πρόταση 3.1.16. *Έστω A C^* άλγεβρα με μονάδα και $\Phi : A \to A \otimes A$ *-ομομορφισμός που διατηρεί τη μονάδα. Υποθέτουμε ότι η A παράγεται από τα στοιχεία (u_{kl}) τέτοιά* *ώστε*

$$\Phi(u_{kl}) = \sum_r u_{kr} \otimes u_{rl}$$

και οι πίνακες $(u_{kl})_{k,l}$ και $(u_{kl})^t_{k,l}$ είναι αντιστρέψιμοι. Τότε το (A, Φ) είναι CMQG.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $(u_{kl})^t_{k,l} = (\overline{u}^*_{kl})_{k,l}$. Άρα, ο $(u_{kl})^t_{k,l}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο $u^*_{kl})_{k,l}$ είναι αντιστρέψιμος. Το ζητούμενο έπεται από το προηγούμενο θεώρημα. □

Παράδειγμα 3.1.17. *(Quantum $SU(2)$ Group)*
Έστω $q \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Ορίζουμε το Quantum $SU(2)$ Group $SU_q(2) = (A, \Delta)$ όπου:
i) A είναι η universal C^* άλγεβρα που παράγεται από τα στοιχεία α και γ τέτοια ώστε ο πίνακας

$$(u_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}$$

να είναι unitary.
ii) Ο $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ ορίζεται στους γεννήτορες από τη σχέση

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \otimes u_{kj}$$

δηλαδή για τους γεννήτορες α και γ έχουμε ότι

$$\Delta(\alpha) = \Delta(u_{11}) = \sum_{k=1}^{2} u_{1k} \otimes u_{k1} = u_{11} \otimes u_{11} + u_{12} \otimes u_{21} = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma \text{ και}$$
$$\Delta(\gamma) = \Delta(u_{21}) = \sum_{k=1}^{2} u_{2k} \otimes u_{k1} = u_{21} \otimes u_{11} + u_{22} \otimes u_{21} = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(u_{ij})_{i,j}$ και $(u^*_{ij})_{i,j}$ είναι αντιστρέψιμα στοιχεία της $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathcal{C}(SU_q(2)))$. Ο $(u_{ij})_{i,j}$ είναι unitary συνεπως αντιστρέψιμος. Για τον $(u^*_{ij})_{i,j}$, έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$\lambda^2 = q$. *Τότε,*

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} (u_{ij}^*)_{i,j} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & -q\gamma \\ \gamma^* & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} = (u_{ij})_{i,j}$$

Συνεπώς, ο $(u_{ij}^*)_{i,j}$ είναι αντιστρέψιμος. Άρα το $SU_q(2)$ είναι CMQG. Εδώ, παρατηρούμε ότι στη περίπτωση όπου $q = 1$, έχουμε τη συνηθισμένη συμπαγή ομάδα $SU(2)$.

Παράδειγμα 3.1.18. *(Free Unitary Quantum Groups)*
Έστω $Q \in GL_n(\mathbb{C})$. Έστω $A_u(Q) = (A_u(Q), \Delta)$ όπου
(i) $A_u(Q)$ η universal C^* άλγεβρα που παράγεται από τους πίνακες $(u_{ij})_{i,j}$ $1 \leq i,j \leq n$ τέτοιοι ώστε

$$uu^* = I_n = u^*u$$
$$u^t Q\overline{u}Q^{-1} = I_n = Q\overline{u}Q^{-1}u^t$$

όπου $\overline{(u_{ij})_{i,j}} = (u_{ij}^*)_{i,j}$

(ii) $\Delta : A_u(Q) \to A_u(Q) \otimes A_u(Q)$ που ορίζεται στους γεννήτορες όπως πριν.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(u_{ij})_{i,j}$ και $(u_{ij})_{i,j}^t$ είναι αντιστρέψιμα στοιχεία της $M_{n\times n}(A_u(Q))$. Ο $u = (u_{ij})_{i,j}$ είναι unitary άρα αντιστρέψιμος. Ακόμη, από τη δεύτερη συνθήκη έχουμε ότι ο $(u_{ij})_{i,j}^t$ είναι αντιστρέψιμος, με αντίστροφο τον $Q\overline{u}Q^{-1}$. Άρα $A_u(Q)$ είναι CMQG.

Παράδειγμα 3.1.19. *(Free Orthogonal Quantum Groups)*
Έστω $Q \in GL_n(\mathbb{C})$. Ορίζουμε $A_o(Q) = (A_o(Q), \Delta)$ όπου:
(i) $A_o(\Delta)$ η universal C^* άλγεβρα που παράγεται από τους πίνακες $(u_{ij})_{i,j}$ $1 \leq i,j \leq n$ τέτοιοι ώστε

$$\overline{u} = u$$
$$uu^t = u^t u = I_n$$
$$u^t QuQ^{-1} = I_n = QuQ^{-1}u^t$$

Το $A_o(Q)$ είναι CMQG, και η απόδειξη είναι όμοια με το προηγούμενο.

Παράδειγμα 3.1.20. *(Quantum Permutation Groups)*
Για $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε $A_s(n)$ να είναι η universal C^* άλγεβρα που παράγεται από τα u_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ ώστε ο πίνακας $U = (u_{ij})_{i,j}$ να είναι unitary, κάθε στοιχείο του να είναι προβολή και το άθροισα όλων των στοιχείων σε κάθε γραμμή και στήλη να κάνει $\mathbb{1}$. Το $(A_s(n), \Delta)$ είναι CMQG.

3.2 Haar State για Συμπαγείς Κβαντικές Ομάδες

Έστω A C^* άλγεβρα με μονάδα και Δ comultiplication. Αν ω_1 , ω_2 φραγμένα γραμμικά συναρτησοδειδή $\omega_i : A \longrightarrow \mathbb{C}$ $i = 1, 2$ ορίζουμε $(\omega_1 * \omega_2)(\alpha) = (\omega_1 \otimes \omega_2)\Delta(\alpha)$, για κάθε $\alpha \in A$.
Παρακάτω συμβολίζουμε με $\mathcal{S}(A)$, το σύνολο των states της C^* άλγεβρας A, δηλαδή $\mathcal{S}(A) = \{\omega \in A \ : \ \omega \geq 0 \text{ και } \omega(\mathbb{1}) = 1\}$

Παρατήρηση 3.2.1. *Αν $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{S}(A)$, τότε $\omega_1 * \omega_2 \in \mathcal{S}(A)$.*

Παρατήρηση 3.2.2. *Έστω (A, Δ) CQG όπου A μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα. Τότε, γράφουμε $A \cong \mathcal{C}(G)$, για κάποια συμπαγή ομάδα G. Έστω μ το μέτρο Haar της G. Τότε, από το αριστερά και δεξιά αναλλοίωτο του μέτρου Haar,*

$$\int_G f(st)d\mu(s) = \int_G f(s)d\mu(s) = \int_G f(ts)d\mu(s) \text{ για κάθε } t \in G$$

Θεωρούμε το state $\phi : A \to \mathbb{R}^+$, με $\phi(f) = \int_G f d\mu$. Τότε, $(\iota \otimes \phi)\Delta(f) = \phi(f)\mathbb{1}$ και $(\phi \otimes \iota)\Delta(f) = \phi(f)\mathbb{1}$. [1] *Αυτό, μας οδηγεί στο να γενικεύσουμε την έννοια του μέτρου Haar για τα CQG. Θα αναζητήσουμε δηλαδή για ένα CQG (A, Δ) , ένα $\phi \in \mathcal{S}(A)$, τέτοιο ώστε*

$$(\iota \otimes \phi)\Delta(\alpha) = (\phi \otimes \iota)\Delta(\alpha) = \phi(\alpha)\mathbb{1} \text{ για κάθε } \alpha \in A$$

Λήμμα 3.2.3. *Έστω $\omega \in \mathcal{S}(A)$. Τότε υπάρχει $\phi \in \mathcal{S}(A)$ τέτοιο ώστε $\phi * \omega = \omega * \phi = \phi$*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\omega_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \omega^k$. Τότε $\omega_n \in \mathcal{S}(A)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω ϕ ένα w* οριακό σημείο της ω_n. Τότε $\phi \in \mathcal{S}(A)$, αφού η A έχει μονάδα και το

[1] Πράγματι, αφού $\Delta f(s,t) = f(st)$ έχουμε $((\iota \otimes \phi)\Delta(f))(s) = \int \Delta f(s,t)dt = \int f(st)dt = \int f(t)dt = \phi(f)$ και $((\phi \otimes \iota)\Delta(f))(t) = \int f(st)ds = \int f(s)ds = \phi(f)$.

$S(A)$ είναι w* συμπαγές. Άρα, $|\omega_n * \omega(a) - \omega_n(a)| \leq \|\omega_n * \omega - \omega_n\| = \frac{1}{n}\|\omega^{n+1} - \omega\| \leq \frac{2}{n}$ για κάθε $a \in A$ νορμας 1. Παίρνοντας όρια εχουμε $\phi * \omega(a) - \phi(a) = 0$, άρα $\phi * \omega = \phi$. Όμοια $\omega * \phi = \phi$. □

Λήμμα 3.2.4. *Έστω $\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)$ πυκνό στο $A \otimes A$ και $\omega, \phi \in \mathcal{S}(A)$ με $\omega * \phi = \phi$. Αν $\rho \in A^*$ με $0 \leq \rho \leq \omega$, τότε $\rho * \phi = \rho(\mathbb{1})\phi$.*

Απόδειξη. Έστω $a \in A$ και $b = (\iota \otimes \phi)\Delta(a)$, όπου $\iota : A \to A$, η ταυτοτική απεικόνιση. Τότε

$$(\iota \otimes \omega)\Delta(b) = (\iota \otimes \omega * \phi)\Delta(a) = (\iota \otimes \phi)\Delta(a) = b. \tag{6}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
&(\iota \otimes \omega)((\Delta(b) - b \otimes \mathbb{1})^*(\Delta(b) - b \otimes \mathbb{1})) = (\iota \otimes \omega)((\Delta(b^*) - b^* \otimes \mathbb{1})(\Delta(b) - b \otimes \mathbb{1})) = \\
&(\iota \otimes \omega)(\Delta(b^*b) - \Delta(b^*)(b \otimes \mathbb{1}) - (b^* \otimes \mathbb{1})\Delta(b) + b^*b \otimes \mathbb{1}) = \\
&(\iota \otimes \omega)\Delta(b^*b) - (\iota \otimes \omega)(\Delta(b^*)(b \otimes \mathbb{1})) - (\iota \otimes \omega)((b^* \otimes \mathbb{1})\Delta(b)) + (\iota \otimes \omega)(b^*b \otimes \mathbb{1})
\end{aligned} \tag{7}$$

Υπολογίζουμε τα $(\iota \otimes \omega)((b^* \otimes \mathbb{1})\Delta(b))$ και $(\iota \otimes \omega)(\Delta(b^*)(b \otimes \mathbb{1}))$. Αφού $\Delta(b) \in A \otimes A$, έχουμε ότι $\Delta(b) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} c_i^n \otimes d_i^n$, με $c_i^n, d_i^n \in A$.

$$\begin{aligned}
(\iota \otimes \omega)((b^* \otimes \mathbb{1})\Delta(b)) &= (\iota \otimes \omega)((b^* \otimes \mathbb{1})(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} c_i^n \otimes d_i^n)) = (\iota \otimes \omega)(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} b^* c_i^n \otimes d_i^n) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (\iota \otimes \omega)(b^* c_i^n \otimes d_i^n) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \iota(b^* c_i^n)\omega(d_i^n) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} b^* c_i^n \omega(d_i^n) = b^* \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} c_i^n \omega(d_i^n) \\
&= b^* \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (\iota \otimes \omega)(c_i^n \otimes d_i^n) = b^*(\iota \otimes \omega)(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (c_i^n \otimes d_i^n)) \\
&= b^*(\iota \otimes \omega)\Delta(b) = b^*b
\end{aligned}$$

Ακόμη,

$$\begin{aligned}(\iota\otimes\omega)(\Delta(b^*)(b\otimes\mathbb{1})) &= (\iota\otimes\omega)(((b^*\otimes\mathbb{1})\Delta(b))^*)\\ &= ((\iota\otimes\omega)(b^*\otimes\mathbb{1})\Delta(b)))^*\\ &= (b^*b)^* = b^*b\end{aligned}$$

Άρα από τη σχέση (7), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(\iota\otimes\omega)((\Delta(b)-b\otimes\mathbb{1})^*(\Delta(b)-b\otimes\mathbb{1})) &= (\iota\otimes\omega)\Delta(b^*b)-b^*b-b^*b+(\iota\otimes\omega)(b^*b\otimes\mathbb{1})\\ &= (\iota\otimes\omega)\Delta(b^*b)-2b^*b+\iota(b^*b)\omega(\mathbb{1})\\ &= (\iota\otimes\omega)\Delta(b^*b)-2b^*b+b^*b\\ &= (\iota\otimes\omega)\Delta(b^*b)-b^*b \qquad (8)\end{aligned}$$

Έστω $\psi\in\mathcal{S}(A)$ τέτοιο ώστε $\psi*\omega=\psi$

$$\begin{aligned}(\psi\otimes\omega)((\Delta(b)-b\otimes\mathbb{1})^*(\Delta(b)-b\otimes\mathbb{1})) &= (\psi\otimes\iota)(\iota\otimes\omega)((\Delta(b)-b\otimes\mathbb{1})^*(\Delta(b)-b\otimes\mathbb{1}))\\ &= (\psi\otimes\iota)((\iota\otimes\omega)\Delta(b^*b)-(\iota\otimes\omega)(b^*b\otimes\mathbb{1}))\\ &= (\psi\otimes\omega)\Delta(b^*b)-(\psi\otimes\omega)(b^*b\otimes\mathbb{1})\\ &= (\psi*\omega)(b^*b)-\psi(b^*b)\omega(\mathbb{1})\\ &= \psi(b^*b)-\psi(b^*b)=0 \qquad (9)\end{aligned}$$

Επομένως από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και τη σχέση (9), παίρνουμε ότι για κάθε $c,d\in A$

$$\begin{aligned}&|(\psi\otimes\omega)((c\otimes d)(\Delta(b)-b\otimes\mathbb{1}))|^2\\ &\leq|(\psi\otimes\omega)((c\otimes d)^*(c\otimes d))|\cdot|(\psi\otimes\omega)((\Delta(b)-b\otimes\mathbb{1})^*(\Delta(b)-b\otimes\mathbb{1}))|=0\end{aligned}$$

Συνεπώς για κάθε $c,d\in A$,

$$\begin{aligned}&(\psi\otimes\omega)((c\otimes d)(\Delta(b)-b\otimes\mathbb{1}))=0 \implies (\psi\otimes\omega)((c\otimes d)\Delta(b))\\ &=(\psi\otimes\omega)(cb\otimes d) \qquad (10)\end{aligned}$$

Από τη σχέση (10) και το γεγονός ότι $b = (\iota \otimes \phi)\Delta(a)$ έχουμε

$$(\psi \otimes \omega \otimes \phi)((c \otimes d \otimes \mathbb{1})((\Delta \otimes \iota)\Delta(a)) = \omega(d)(\psi \otimes \phi)((c \otimes \mathbb{1})\Delta(a)). \tag{11}$$

Πράγματι, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(\psi \otimes \omega)((c \otimes d)\Delta(b)) = (\psi \otimes \omega \otimes \phi)((c \otimes d \otimes \mathbb{1})(\Delta \otimes \iota)\Delta(a)) \text{ και}$$
$$(\psi \otimes \omega)(cb \otimes d) = \omega(d)(\psi \otimes \phi)((c \otimes \mathbb{1})\Delta(a))$$

Γράφουμε $\Delta(a) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \gamma_i^n \otimes \delta_i^n$ και $\Delta(\gamma_i^n) = \lim_k \sum_{j=1}^{\ell_k} \epsilon_j^k \otimes \zeta_j^k$. Τότε, για τη πρώτη σχέση,

$$\begin{aligned}\Delta(b) = \Delta((\iota \otimes \phi)\Delta(a)) &= \Delta\left((\iota \otimes \phi)(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \gamma_i^n \otimes \delta_i^n)\right)\\ &= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \Delta((\iota \otimes \phi)(\gamma_i^n \otimes \delta_i^n)) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \Delta(\gamma_i^n \phi(\delta_i^n))\\ &= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \Delta(\gamma_i^n)\phi(\delta_i^n)\end{aligned}$$

Άρα,

$$(c \otimes d)\Delta(b) = (c \otimes d)\left(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \Delta(\gamma_i^n)\phi(\delta_i^n)\right) = \phi(\delta_i^n) \lim_{n,k} \sum_{i,j}^{m_n,\ell_k} \left(c\epsilon_j^k \otimes d\zeta_j^k\right)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}(\psi \otimes \omega)((c \otimes d)\Delta(b)) &= (\psi \otimes \omega)\left(\phi(\delta_i^n) \lim_{n,k} \sum_{i,j}^{m_n,\ell_k} \left(c\epsilon_j^k \otimes d\zeta_j^k\right)\right) = \lim_{n,k} \sum_{i,j}^{m_n,\ell_k} \phi(\delta_i^n)(\psi \otimes \omega)(c\epsilon_j^k \otimes d\zeta_j^k)\\ &= \lim_{n,k} \sum_{i,j}^{m_n,\ell_k} \phi(\delta_i^n)\psi(c\epsilon_j^k)\omega(d\zeta_j^k) = \lim_{n,k} \sum_{i,j}^{m_n,\ell_k} (\psi \otimes \omega \otimes \phi)(c\epsilon_j^k \otimes d\zeta_j^k \otimes \delta_i^n)\\ &= \lim_{n,k} \sum_{i,j}^{m_n,\ell_k} (\psi \otimes \omega \otimes \phi)\left((c \otimes d \otimes \mathbb{1})(\epsilon_j^k \otimes \zeta_j^k \otimes \delta_i^n)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (\psi \otimes \omega \otimes \phi) \left((c \otimes d \otimes \mathbb{1})((\lim_k \sum_{j=1}^{\ell_k} \epsilon_j^k \otimes \zeta_j^k) \otimes \delta_i^n) \right) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (\psi \otimes \omega \otimes \phi) \left((c \otimes d \otimes \mathbb{1})(\Delta(\gamma_i^n) \otimes \delta_i^n) \right) \\
&= (\psi \otimes \omega \otimes \phi)((c \otimes d \otimes \mathbb{1})(\Delta \otimes \iota)(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \gamma_i^n \otimes \delta_i^n)) \\
&= (\psi \otimes \omega \otimes \phi)((c \otimes d \otimes \mathbb{1})(\Delta \otimes \iota)\Delta(a))
\end{aligned}
$$

Ακόμη, για τη δεύτερη σχέση έχουμε

$$
(\psi \otimes \omega)(cb \otimes d) = \psi(cb)\omega(d)
$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το $\psi(cb)$. Έχουμε $b = (\iota \otimes \phi)(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \gamma_i^n \otimes \delta_i^n) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \gamma_i^n \phi(\delta_i^n)$

$$
\begin{aligned}
cb = c \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \gamma_i^n \phi(\delta_i^n) &= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} c\gamma_i^n \phi(\delta_i^n) \\
\implies \psi(cb) =& \psi \left(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} c\gamma_i^n \phi(\delta_i^n) \right) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \phi(\delta_i^n)\psi(c\gamma_i^n) = \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (\psi \otimes \phi)(c\gamma_i^n \otimes \delta_i^n) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (\psi \otimes \phi)((c \otimes \mathbb{1})(\gamma_i^n \otimes \delta_i^n)) \\
&= (\psi \otimes \phi)((c \otimes \mathbb{1}) \left(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \gamma_i^n \otimes \delta_i^n \right)) \\
&= (\psi \otimes \phi)((c \otimes \mathbb{1})\Delta(a))
\end{aligned}
$$

Τώρα, από τη coassociativity του Δ, έχουμε

$$
\begin{aligned}
(c \otimes d \otimes \mathbb{1})(\Delta \otimes \iota)\Delta(a) &= (c \otimes d \otimes \mathbb{1})(\iota \otimes \Delta)\Delta(a) \\
&= (\mathbb{1} \otimes d \otimes \mathbb{1})(\iota \otimes \Delta)((c \otimes \mathbb{1})\Delta(a)) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Τώρα από υπόθεση, το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων της μορφής $(c \otimes \mathbb{1})\Delta(a)$ είναι πυκνό στο $A \otimes A$. Άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $(c \otimes \mathbb{1})\Delta(a)$ με το $1 \otimes q$, $q \in A$. Άρα μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (11), ως

$$(\psi \otimes \omega \otimes \phi)((\mathbb{1} \otimes d \otimes \mathbb{1})(\iota \otimes \Delta)(\mathbb{1} \otimes q)) = \omega(d)(\psi \otimes \phi)(\mathbb{1} \otimes q).$$

Αφού ακόμη, $\psi \in \mathcal{S}(A)$, είναι $\psi(\mathbb{1}) = 1$, άρα

$$(\omega \otimes \phi)(d \otimes \mathbb{1})\Delta(q) = \omega(d)\phi(q) \ , \text{ για κάθε } d, q \in A \ . \tag{13}$$

Τώρα έστω (π, H, ξ_0) η αναπαράσταση GNS για το $\omega \in \mathcal{S}(A)$. Έστω $r = (\iota \otimes \phi)\Delta(q)$. Αν $\Delta(q) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} e_i^n \otimes f_i^n$, είναι $r = (\iota \otimes \phi)\Delta(q) = (\iota \otimes \phi)(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} e_i^n \otimes f_i^n) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} e_i^n \phi(f_i^n)$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\langle \pi(r)\xi_0, \pi(d^*)\xi_0 \rangle &= \langle \pi(dr)\xi_0, \xi_0 \rangle = \omega(dr) = \omega(d \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} e_i^n \phi(f_i^n)) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \omega(d e_i^n \phi(f_i^n)) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \omega(d e_i^n)\phi(f_i^n) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (\omega \otimes \phi)(d e_i^n \otimes f_i^n) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (\omega \otimes \phi)(d \otimes \mathbb{1})(e_i^n \otimes f_i^n) = (\omega \otimes \phi)(d \otimes \mathbb{1})(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} e_i^n \otimes f_i^n) \\
&= (\omega \otimes \phi)(d \otimes \mathbb{1})\Delta(q) = \omega(d)\phi(q) = \phi(q)\langle \pi(d)\xi_0, \xi_0 \rangle = \phi(q)\langle \xi_0, \pi(d^*)\xi_0 \rangle.
\end{aligned}$$

Αφού η σχέση $\langle \pi(r)\xi_0, \pi(d^*)\xi_0 \rangle = \langle \xi_0, \pi(d^*)\xi_0 \rangle$ ισχύει για κάθε $d \in A$, και το ξ_0 είναι κυκλικό διάνυσμα, έχουμε ότι για κάθε $\xi \in H$

$$\langle \pi(r)\xi_0, \xi \rangle = \phi(q)\langle \xi_0, \xi \rangle$$

Τέλος $0 \leq \rho \leq \omega$, συνεπώς υπάρχει διάνυσμα ξ τέτοιο ώστε $\rho(x) = \langle \pi(x)\xi_0, \xi \rangle$, για κάθε $x \in A$ (Πρόταση 1.1.29). Όμως,

$$\rho(r) = \langle \pi(r)\xi_0, \xi \rangle = \phi(q)\langle \xi_0, \xi \rangle = \phi(q)\langle \pi(\mathbb{1})\xi_0, \xi \rangle = \phi(q)\rho(\mathbb{1}) \tag{14}$$

Ακόμη,

$$\begin{aligned}
\rho(r) &= \rho((\iota\otimes\phi)\Delta(q)) = \rho((\iota\otimes\phi)(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} e_i^n \otimes f_i^n)) = \rho(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} e_i^n \phi(f_i^n)) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \rho(e_i^n)\phi(f_i^n) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (\rho\otimes\phi)(e_i^n\otimes f_i^n) = (\rho\otimes\phi)(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} e_i^n \otimes f_i^n) \\
&= (\rho\otimes\phi)\Delta(q) = (\rho * \phi)(q) \qquad (15)
\end{aligned}$$

Από (14) και (15) παίρνουμε ότι για κάθε $q \in A$

$$\phi(q)\rho(\mathbb{1}) = (\rho*\phi)(q), \text{ άρα } \rho*\phi = \rho(\mathbb{1})\phi$$

□

Θεώρημα 3.2.5. *Έστω A μια C^* άλγεβρα με μονάδα και Δ comultiplication με $\Delta(A)(A\otimes\mathbb{1})$ πυκνό στο $A\otimes A$. Υπάρχει $\phi \in \mathcal{S}(A)$, τέτοιο ώστε $\rho*\phi = \rho(\mathbb{1})\phi$, για κάθε $\rho \in A^*$*

Απόδειξη. Για κάθε $\omega \geq 0$ ορίζουμε $K_\omega = \{\phi \in \mathcal{S}(A) \;:\; \omega*\phi = \omega(\mathbb{1})\phi\}$. Το K_ω είναι μη κενό σύνολο από το Λήμμα 3.2.3 και w*-συμπαγές υποσύνολο του A^*.
Τώρα από το προηγούμενο αν $0 \leq \rho \leq \omega$, έχουμε ότι $K_\omega \subseteq K_\rho$. Άρα $K_{\omega_1+\omega_2} \subseteq K_{\omega_1}\cap K_{\omega_2}$, για κάθε ζεύγος θετικών γραμμικών συναρτησοειδών ω_1, ω_2. Επαγωγικά, $\bigcap_{i=1}^n K_{\omega_i} \neq \emptyset$, για κάθε πεπερασμένη οικογένεια θετικών γραμμικών συναρτησοειδών. Από συμπάγεια, $\bigcap_{\omega\in A^*,\omega\geq 0} K_\omega \neq \emptyset$. Άρα, υπάρχει $\phi \in \mathcal{S}(A)$ τέτοιο ώστε $\omega*\phi = \omega(\mathbb{1})\phi$ για κάθε $\omega \in A^*, \omega \geq 0$, και από το προηγούμενο λήμμα έπεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.2.6. *Έστω (A,Δ) CQG. Υπάρχει μοναδικό $\phi \in \mathcal{S}(A)$, τέτοιο ώστε $\rho*\phi = \phi*\rho = \rho(\mathbb{1})\phi$ για κάθε $\rho \in A^*$.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει $\phi \in \mathcal{S}(A)$, τέτοιο ώστε $\rho*\phi = \rho(\mathbb{1})\phi$, για κάθε $\rho \in A^*$. Όμοια, από τη πυκνότητα του $\Delta(A)(\mathbb{1}\otimes A)$ στο $A\otimes A$, υπάρχει $\psi \in \mathcal{S}(A)$, τέτοιο ώστε $\psi*\rho = \rho(\mathbb{1})\psi$, για κάθε $\rho \in A^*$. Από την πρώτη σχέση, για $\rho = \psi$, $\psi*\phi = \psi(\mathbb{1})\phi = \phi$, και από τη δεύτερη σχέση για $\rho = \phi$, $\psi*\phi = \phi(\mathbb{1})\psi = \psi$, άρα $\psi*\phi = \phi$ και $\psi*\phi = \phi$, συνεπώς $\psi = \phi$. □

Παρατήρηση 3.2.7. *Από το τελευταίο Θεώρημα, μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο* *ορισμό για το Haar State ενός CQG* (A, Δ). *Είναι το μοναδικό* $\phi \in \mathcal{S}(A)$, *ώστε*

$$(\phi \otimes \iota)\Delta(a) = (\iota \otimes \phi)\Delta(a) = \phi(a)\mathbb{1}$$

Άρα υπάρχει μοναδικό αριστερά αναλλοίωτο state του CQG (A, Δ), *όπως ακριβώς υπάρχει μοναδικό αριστερά αναλλοίωτο μέτρο για μία συμπαγή ομάδα* G.

4 Αναπαραστάσεις Συμπαγών Κβαντικών Ομάδων

4.1 Η δεξιά κανονική αναπαράσταση

Συμβολισμός 4.1.1. *(Leg numbering notation) Έστω η C^* άλγεβρα $A = \mathcal{C}(G)$ και X χώρος Banach. Όπως έχουμε ήδη δει,*

$$X \otimes A \cong \mathcal{C}(G; X)$$

μέσω της απεικόνισης $T \otimes f \mapsto f \cdot T$ όπου $(f \cdot T)(p) = f(p)T$, για κάθε $p \in G$.
Έστω τώρα $u \in \mathcal{C}(G; X)$. Ορίζουμε τις απεικονίσεις $u_{(12)}$ και $u_{(13)}$ στον $\mathcal{C}(G \times G; X)$ από τις σχέσεις $u_{(12)}(p, q) = u(p)$ και $u_{(13)}(p, q) = u(q)$. Επομένως, έχουμε ορίσει τις απεικονίσεις

$$X \otimes A \longrightarrow X \otimes A \otimes A$$
$$u \longrightarrow u_{(12)} \ : \ x \otimes f \longrightarrow x \otimes f \otimes \mathbb{1}$$

και

$$X \otimes A \longrightarrow X \otimes A \otimes A$$
$$u \longrightarrow u_{(13)} \ : \ x \otimes f \longrightarrow x \otimes f \otimes \mathbb{1}$$

για $x \in X$ και $f \in \mathcal{C}(G)$.
Για τα επόμενα, θα χρησιμοποιούμε τον προηγούμενο συμβολισμό για τις άλγεβρες $\mathcal{B}_0(H) \otimes A \cong \mathcal{C}(G; \mathcal{B}(H))$ και $\mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H) \otimes A) \cong \mathcal{C}_\beta(G; \mathcal{B}(H))$.
Επομένως, αν $u \in \mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H) \otimes A)$, παίρνουμε τους πολλαπλασιαστές
$u_{(12)}, u_{(13)} \in \mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H) \otimes A \otimes A)$.

Πριν προχωρήσουμε στα επόμενα, θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 4.1.2. *Έστω G συμπαγής ομάδα και*

$$u : G \longrightarrow \mathcal{B}(H)$$
$$p \longrightarrow u(p)$$

ισχυρά συνεχής unitary αναπαράσταση της G στον χώρο Hilbert H. Τότε, η u είναι συνε-

χής αν εφοδιάσουμε τον $\mathcal{B}(H)$ με την αυστηρή τοπολογία, θεωρώντας τον $\mathcal{B}(H)$ ως την άλγεβρα των πολλαπλασιαστών του $\mathcal{B}_0(H)$.

Απόδειξη. Έστω $(p_\lambda)_\Lambda$ δίκτυο στην G με $p_\lambda \longrightarrow p$. Θα αποδείξουμε ότι $u(p_\lambda) \xrightarrow{\beta} u(p)$, δηλαδή ότι για κάθε $a \in \mathcal{B}_0(H)$ έχουμε

$$\begin{aligned} &\|(u(p_\lambda) - u(p))a\| \longrightarrow 0 \text{ και} \\ &\|a(u(p_\lambda) - u(p))\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Έστω $a \in \mathcal{B}_0(H)$ και $\varepsilon > 0$. Από την πυκνότητα των τελεστών πεπερασμένης τάξης στους συμπαγείς τελεστές, μπορούμε να βρούμε τελεστή πεπερασμένης τάξης f τέτοιον ώστε $\|a - f\| < \varepsilon$. Γράφοντας

$$f = \sum_i \xi_i \eta_i^*$$

έχουμε τα ακόλουθα.

$$\begin{aligned} \|(u(p_\lambda) - u(p))f\| &= \|u(p_\lambda)f - u(p)f\| \\ &= \|\sum_i u(p_\lambda)\xi_i\eta_i^* - \sum_i u(p)\xi_i\eta_i^*\| \\ &= \|\sum_i (u(p_\lambda) - u(p))\xi_i\eta_i^*\| \\ &\leq \sum_i \|(u(p_\lambda) - u(p))\xi_i\|\|\eta_i^*\| \end{aligned}$$

Όμως η u είναι ισχυρά συνεχής απεικόνιση, άρα αφού $p_\lambda \longrightarrow p$, έπεται ότι $u(p_\lambda) \xrightarrow{sot} u(p)$. Ισοδύναμα, για κάθε $\xi \in H$, έχουμε ότι

$$\|(u(p_\lambda) - u(p))\xi\| \longrightarrow 0$$

Άρα, από την προηγούμενη σχέση, έπεται ότι $\|(u(p_\lambda) - u(p))a\| \longrightarrow 0$. Αφού, επιπλέον, η u είναι unitary, έχουμε ότι $\|a(u(p_\lambda) - u(p))\| \longrightarrow 0$. □

Παρατήρηση 4.1.3. *Έστω (A, Δ) CGQ όπου A μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα. Όπως έχουμε δει, το quantum group είναι της μορφής $(\mathcal{C}(G), \Delta)$ όπου G συμπαγής ομάδα* *και*

$$\Delta(f)(p,q) = f(pq) \ \text{για κάθε} \ f \in \mathcal{C}(G) \ \text{και} \ p,q \in G$$

Έστω τώρα

$$\begin{aligned} u : &G \longrightarrow \mathcal{B}(H) \\ &p \longrightarrow u(p) \end{aligned}$$

ισχυρά συνεχής unitary αναπαράσταση της ομάδας G στον χώρο Hilbert H. Τότε

$$(\iota \otimes \Delta)(u) = u_{(12)}u_{(13)}$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο Λήμμα, η u είναι συνεχής απεικόνιση όταν εφοδιάσουμε τον $\mathcal{B}(H)$ με την αυστηρή τοπολογία, θεωρώντας τον $\mathcal{B}(H)$ ως την άλγεβρα των πολλαπλασιαστών του $\mathcal{B}_0(H)$. Άρα

$$u \in \mathcal{C}_\beta(G;\mathcal{B}(H)) = \mathcal{C}_\beta(G;\mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H))) \cong \mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H) \otimes \mathcal{C}(G))$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την ταύτιση

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H) \otimes \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G)) \cong \mathcal{C}_\beta(G \times G;\mathcal{B}(H))$$

έχουμε ότι $u_{(12)}, u_{(13)} \in \mathcal{C}_\beta(G \times G;\mathcal{B}(H))$.
Τώρα, εξ'ορισμού

$$\begin{aligned} &u_{(12)}(p,q) = u(p) \\ &u_{(13)}(p,q) = u(q) \qquad \text{για κάθε } (p,q) \in G \times G \end{aligned}$$

Επιπλέον, αφού η $u : G \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι αναπαράσταση,

$$u_{(12)}u_{(13)}(p,q) = u(p)u(q) = u(pq) \tag{+}$$

Από την άλλη μεριά, η απεικόνιση

$$\iota \otimes \Delta : \mathcal{B}_0(H) \otimes \mathcal{C}(G) \longrightarrow \mathcal{B}_0(H) \otimes \mathcal{C}(G \times G)$$

που είναι μη-εκφυλισμένος *-ομομορφισμός, επεκτείνεται σε *-ομομορφισμό μεταξύ των αντίστοιχων πολλπλασιαστικών αλγεβρών (που τον συμβολίζουμε πάλι $\iota \otimes \Delta$), ο οποίος είναι αυστηρά συνεχής σε φραγμένα σύνολα (Πρόταση 1.3.26) και έχουμε ότι

$$(\iota \otimes \Delta)(u)(p, q) = u(pq) \tag{++}$$

Πράγματι, από την αυστηρή συνέχεια της $\iota \otimes \Delta$ και της εκτίμησης $u \mapsto u(p)$ στα φραγμένα σύνολα, αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο στη περίπτωση όπου $u \in \mathcal{B}_0(H) \otimes A$. Έστω $u = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} T_i^n \otimes f_i^n$, με $T_i^n \in \mathcal{B}_0(H)$ και $f_i^n \in \mathcal{C}(G)$. Τότε

$$\begin{aligned}(\iota \otimes \Delta)\left(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} T_i^n \otimes f_i^n\right)(p, q) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \iota(T_i^n) \otimes \Delta(f_i^n)(p, q) &= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} T_i^n \otimes \Delta(f_i^n)(p, q) \\ &= \left(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} T_i^n \otimes f_i^n\right)(pq) \\ &= u(pq)\end{aligned}$$

Από τις (+) και (++), αφού τα $p, q \in G$ ήταν τυχόντα, έχουμε ότι

$$(\iota \otimes \Delta)(u) = u_{(12)} u_{(13)}$$

□

Βάσει αυτής της παρατήρησης εισάγουμε τον παρακάτω ορισμό για την αναπαράσταση ενός CQG.

Ορισμός 4.1.4. *Έστω (A, Δ) CQG. Μία αναπαράσταση του (A, Δ) σε έναν χώρο Hilbert H είναι ένα στοιχείο $u \in \mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H) \otimes A)$ τέτοιο ώστε*

$$(\iota \otimes \Delta)(u) = u_{(12)} u_{(13)}$$

Αν το u είναι unitary, τότε η αναπαράσταση καλείται unitary.

Έστω ϕ το Haar State του (A, Δ) και (π_h, H, ξ_0) η αναπαράσταση GNS του ϕ. Γράφουμε $a\xi$ αντί για $\pi_h(a)\xi$, όπου $a \in A$ και $\xi \in H$.
Έστω K ένας άλλος χώρος Hilbert και υποθέτουμε ότι η A δρα πιστά και μη εκφυλισμένα στον K. Γράφουμε $a\xi$ για τη δράση ενός $a \in A$ σε ένα $\xi \in K$.

Πρόταση 4.1.5. *Υπάρχει unitary τελεστής* $u : H \otimes K \to H \otimes K$ *που ορίζεται από την* $u(a\xi_0 \otimes \eta) = \Delta(a)(\xi_0 \otimes \eta)$, $a \in A$ *και* $\eta \in K$.

Απόδειξη. Για $a_1, ..., a_n \in A$ και $\eta_1, ..., \eta_n \in K$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|\sum_i \Delta(a_i)(\xi_0 \otimes \eta_i)\|^2 &= \langle \sum_i \Delta(a_i)(\xi_0 \otimes \eta_i), \sum_j \Delta(a_j)(\xi_0 \otimes \eta_j)\rangle = \sum_{i,j} \langle \Delta(a_j^* a_i)(\xi_0 \otimes \eta_i), \xi_0 \otimes \eta_j\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle (\phi \otimes \iota)\Delta(a_j^* a_i)\eta_i, \eta_j\rangle = \sum_{i,j} \phi(a_j^* a_i)\langle \eta_i, \eta_j\rangle = \sum_{i,j} \langle a_j^* a_i \xi_0, \xi_0\rangle\langle \eta_i, \eta_j\rangle \\ &= \|\sum_i a\xi_0 \otimes \eta_i\|^2\end{aligned}$$

όπου για την τρίτη ισότητα παρατηρούμε το εξής. Αν $\Delta(a_j^* a_i) = \lim_n \sum_{k=1}^{m_n} e_k^n \otimes f_k^n$, με $e_k^n, f_k^n \in A$,

$$\begin{aligned}\langle (\phi \otimes \iota)\Delta(a_j^* a_i)\eta_i, \eta_j\rangle &= \langle (\phi \otimes \iota)(\lim_n \sum_{k=1}^{m_n} e_k^n \otimes f_k^n)\eta_i, \eta_j\rangle \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^{m_n} \phi(e_k^n)\langle f_k^n \eta_i, \eta_j\rangle \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^{m_n} \langle e_k^n \xi_0, \xi_0\rangle\langle f_k^n \eta_i, \eta_j\rangle \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^{m_n} \langle e_k^n \xi_0 \otimes f_k^n \eta_i, \xi_0 \otimes \eta_j\rangle \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^{m_n} \langle (e_k^n \otimes f_k^n)(\xi_0 \otimes \eta_i), \xi_0 \otimes \eta_j\rangle \\ &= \langle (\lim_n \sum_{k=1}^{m_n} e_k^n \otimes f_k^n)(\xi_0 \otimes \eta_i), (\xi_0 \otimes \eta_j)\rangle \\ &= \langle \Delta(a_j^* a_i)(\xi_0 \otimes \eta_i), (\xi_0 \otimes \eta_j)\rangle\end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχει ισομετρία $u : H \otimes K \to H \otimes K$ που ορίζεται από την σχέση $u(a\xi_0 \otimes \eta) = \Delta(a)(\xi_0 \otimes \eta)$. Για να είναι unitary, αρκεί να είναι επι. Εφόσον $H \otimes K$ κλειστό και u συνεχής,

αρκεί να δείξουμε ότι η εικόνα του u είναι πυκνή.
Έστω $a \in A$ και $\eta \in K$. Από τη πυκνότητα του $\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)$ στο $A \otimes A$, μπορούμε να γράψουμε

$$a\xi_0 \otimes \eta = \lim_n \sum_{k=1}^{m_n} \Delta(b_k^n)(\xi_0 \otimes c_k^n \eta), \text{ με } b_k^n, c_k^n \in A$$

Όμως,

$$\Delta(b_k^n)(\xi_0 \otimes c_k^n \eta) = u(b_k^n \xi_0 \otimes c_k^n \eta)$$

Αφού το $a \in A$ ήταν τυχόν και το $\xi_0 \in H$ είναι κυκλικό διάνυσμα, έχουμε ότι η εικόνα του u είναι πυκνή.

□

Πρόταση 4.1.6. *Ο τελεστής u που ορίσαμε στην Πρόταση 4.1.5 είναι πολλαπλασιαστής (multiplier) της $\mathcal{B}_0(H) \otimes A$.*

Απόδειξη. Η C^* άλγεβρα $\mathcal{B}_0(H) \otimes A$ δρα πιστά και μη εκφυλισμένα στο $H \otimes K$. Ακόμη, οι τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι πυκνοί στο $\mathcal{B}_0(H)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $u(x \otimes \mathbb{1})$, $(x \otimes \mathbb{1})u \in \mathcal{B}_0(H) \otimes A$, για κάθε τελεστή πεπερασμένης τάξης x.
Έστω x τελεστής τάξης 1, που ορίζεται από την $x(\xi) = \langle \xi, \xi_1 \rangle a\xi_0$, με $a \in A$ και $\xi_0, \xi_1 \in H$. Έστω $\xi \in H$ και $\eta \in K$. Τότε, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} u(x \otimes \mathbb{1})(\xi \otimes \eta) &= u(x(\xi) \otimes \eta) \\ &= \langle \xi, \xi_1 \rangle u(a\xi_0 \otimes \eta) \\ &= \langle \xi, \xi_1 \rangle \Delta(a)(\xi_0 \otimes \eta) \end{aligned}$$

Τώρα, γράφοντας $\Delta(a) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} b_i^n \otimes c_i^n$, με $b_i^n, c_i^n \in A$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi_1 \rangle \Delta(a)(\xi_0 \otimes \eta) &= \langle \xi, \xi_1 \rangle \left(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} b_i^n \otimes c_i^n \right) (\xi_0 \otimes \eta) \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (y_i^n \otimes c_i^n)(\xi \otimes \eta) \end{aligned}$$

όπου y_i^n ο τελεστής τάξης 1 που ορίζεται από την $y_i^n(\xi) = \langle \xi, \xi_1 \rangle b_i^n \xi_0$. Άρα,

$$\left\| \left(u(x \otimes \mathbb{1}) - \sum_i y_i^n \otimes c_i^n \right) (\xi \otimes \eta) \right\| \leq \|\xi_1\| \|\xi\| \left\| \Delta(a) - \sum_i b_i^n \otimes c_i^n \right\| \|\xi \otimes \eta\|,$$

και αφού $\xi \in H$ και $\eta \in K$ τυχόντα

$$\left\| u(x \otimes \mathbb{1}) - \sum_i y_i^n \otimes c_i^n \right\| \leq \|\xi_1\| \|\xi_0\| \left\| \Delta(a) - \sum_i b_i^n \otimes c_i^n \right\|$$

Άρα $u(x \otimes \mathbb{1}) \in \mathcal{B}_0(H) \otimes A$. Από τη πυκνότητα του $A\xi_0$ στον H, παίρνουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για όλους τους τελεστές τάξης 1.
Μένει να αποδείξουμε ότι $(x \otimes \mathbb{1})u \in \mathcal{B}_0(H) \otimes A$, για τελεστές ππερασμένης τάξης x. Αφού u είναι unitary, αρκεί να αποδείξουμε ότι $u^*(x \otimes \mathbb{1}) \in \mathcal{B}_0(H) \otimes A$.
Θεωρούμε πάλι τον τελεστή x τάξης 1, που ορίζεται από την $x(\xi) = \langle \xi, \xi_1 \rangle a\xi_0$, με $a \in A$ και $\xi_0, \xi_1 \in H$. Για $\xi \in H$ και $\eta \in K$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} u^*(x \otimes \mathbb{1})(\xi \otimes \eta) &= u^*(x(\xi) \otimes \eta) \\ &= \langle \xi, \xi_1 \rangle u^*(a\xi_0 \otimes \eta) \\ &= \langle \xi, \xi_1 \rangle u^*(a \otimes \mathbb{1})(\xi_0 \otimes \eta) \end{aligned}$$

Από τη πυκνότητα του $\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)$ στο $A \otimes A$, γράφουμε $a \otimes \mathbb{1} = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \Delta(b_i^n)(\mathbb{1} \otimes c_i^n)$, οπότε η προγούμενη γράφεται

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi_1 \rangle u^* \left(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \Delta(b_i^n)(\mathbb{1} \otimes c_i^n) \right) (\xi_0 \otimes \eta) &= \langle \xi, \xi_1 \rangle \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} u^* u(b_i^n \xi_0 \otimes c_i^n \eta) \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} y_i^n \otimes c_i^n (\xi \otimes \eta) \end{aligned}$$

όπου y_i^n ο τελεστής τάξης 1 που ορίζεται από τη σχέση $y_i^n(\xi) = \langle \xi, \xi_1 \rangle b_i^n \xi_0$. Άρα, όμοια με πριν

$$\left\| u^*(x \otimes \mathbb{1}) \sum_{i=1}^{m_n} y_i^n \otimes c_i^n \right\| \leq \|\xi_1\| \|\xi_0\| \left\| a \otimes \mathbb{1} - \sum_{i=1}^{m_n} \Delta(b_i^n)(\mathbb{1} \otimes c_i^n) \right\|$$

Άρα $u^*(x \otimes \mathbb{1}) \in \mathcal{B}_0(H) \otimes A$, και από τη πυκνότητα του $A\xi_0$ στον H, παίρνουμε ότι το

ζητούμενο ισχύει για όλους τους τελεστές τάξης 1.
Τώρα, από το προηγούμενο, έπεται ότι $u(x \otimes a)$, $(x \otimes a)u \in \mathcal{B}_0(H) \otimes A$, για κάθε $x \in \mathcal{B}_0(H)$ και κάθε $a \in A$. Πράγματι, γράφουμε

$$u(x \otimes a) = u(x \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes a)$$

όπου $\mathbb{1} \otimes a \in \mathcal{B}(H) \otimes A$. Άρα

$$u(x \otimes a) \in \mathcal{B}_0(H) \otimes A$$

αφού $\mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H)) = \mathcal{B}(H)$. Όμοια από την $(x \otimes \mathbb{1}) \in \mathcal{B}_0(H) \otimes A$, παίρνουμε ότι $(x \otimes a)u \in \mathcal{B}_0(H) \otimes A$. □

Θεώρημα 4.1.7. *Ο τελεστής u που ορίσαμε στην Πρόταση 4.1.5 είναι unitary αναπαράσταση του CQG (A, Δ).*

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $u \in \mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H) \otimes A)$. Δεδομένου ότι είναι unitary τελεστής, αρκεί να δείξουμε ότι $(\iota \otimes \Delta)(u) = u_{(12)}u_{(13)}$. Έστω $b, c \in A$ και $\eta_1, \eta_2 \in K$.Τότε,

$$\begin{aligned} u_{(12)}(b \otimes \mathbb{1} \otimes c)(\xi_0 \otimes \eta_1 \otimes \eta_2) &= \Delta(b)(\xi_0 \otimes \eta_1) \otimes c\eta_2 \\ &= (\Delta \otimes \iota)(b \otimes c)(\xi_0 \otimes \eta_1 \otimes \eta_2) \end{aligned}$$

Έστω $a \in A$. Γράφουμε $\Delta(a) = \lim\limits_n \sum\limits_{i=1}^{m_n} b_i^n \otimes c_i^n$, με $b_i^n, c_i^n \in A$. Άρα στη προηγούμενη σχέση μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $b \otimes c$ με $\Delta(a)$, για $a \in A$. Άρα,

$$u_{(12)}u_{(13)}(a\xi_0 \otimes \eta_1 \otimes \eta_2) = ((\Delta \otimes \iota)\Delta(a))(\xi_0 \otimes \eta_1 \otimes \eta_2)$$

Από την άλλη, για κάθε $y \in \mathcal{B}(H)$ και $a \in A$, έχουμε ότι

$$(\iota \otimes \Delta)(y \otimes b)(a\xi_0 \otimes \eta_1 \otimes \eta_2) = ya\xi_0 \otimes \Delta(b)(\eta_1 \otimes \eta_2)$$

Έστω $x \in \mathcal{B}_0(H)$. Τότε, $(x \otimes \mathbb{1})u \in \mathcal{B}_0(H) \otimes A$, και συνεπώς μπορεί να γραφεί ως $\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} y_i^n \otimes b_i^n$, με $y_i^n \in \mathcal{B}_0(H)$ και $b_i^n \in A$. Άρα στη προηγούμενη σχέση μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $y \otimes b$ με $(x \otimes \mathbb{1})u$. Έτσι, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}(\iota \otimes \Delta)((x \otimes \mathbb{1})u)(a\xi_0 \otimes \eta_1 \otimes \eta_2) &= (x \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1})((\iota \otimes \Delta)u)(a\xi_0 \otimes \eta_1 \otimes \eta_2) \\ &= (x \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1})((\iota \otimes \Delta)\Delta(a))(\xi_0 \otimes \eta_1 \otimes \eta_2) \\ &= (x \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1})((\Delta \otimes \iota)\Delta(a))(\xi_0 \otimes \eta_1 \otimes \eta_2) \\ &= (x \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1})(u_{(12)}u_{(13)})(a\xi_0 \otimes \eta_1 \otimes \eta_2)\end{aligned}$$

Αφού το x ήταν τυχόν, $(\iota \otimes \Delta)(u) = u_{(12)}u_{(13)}$. □

Παρατήρηση 4.1.8. *(Η κανονική δεξιά αναπαράσταση)*
Έστω G συμπαγής ομάδα, $A = \mathcal{C}(G)$ και $\Delta : \mathcal{C}(G) \longrightarrow \mathcal{C}(G \times G)$ με $\Delta(f)(p,q) = f(pq)$. Έστω ακόμη $H = \mathcal{L}^2(G)$ ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ως προς το μέτρο Haar της ομάδας. Επιπλέον, έχουμε ότι η $\mathcal{C}(G)$ δρα στον H με πολλαπλασιασμό.
Θεωρούμε την δεξιά κανονική αναπαράσταση u της G που δίνεται από τη σχέση

$$(u(q)\xi)(p) = \xi(pq), \ \ p, q \in G \ \text{ και } \ \xi \in \mathcal{L}^2(G)$$

Θεωρούμε το u ως στοιχείο της άλγεβρας πολλαπλασιαστών $\mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H) \otimes \mathcal{C}(G))$. Τότε για $\xi, \eta \in H$ και $p, q \in G$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}u(\xi \otimes \eta)(p,q) = \xi(pq)\eta(q) &= (u(q)\xi)(p)\eta(q) \\ &= (\Delta(\xi)(\mathbb{1} \otimes \eta))(p,q)\end{aligned}$$

Τώρα, το $\xi_0 = 1$ είναι κυκλικό διάνυσμα του χώρου $\mathcal{L}^2(G)$, επομένως έχουμε το ανάλογο της δεξιάς κανονικής αναπράστασης για συμπαγείς ομάδες.

Τέλος, αποδεικνύουμε Προτάσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα Κεφάλαια.

Πρόταση 4.1.9. *Το σύνολο $\{(\omega \otimes \iota)(u) : \omega \in \mathcal{B}_0(H)^*\}$ είναι πυκνό στην A.*

Απόδειξη. Έστω $a, b \in A$. Για $\xi_1, \xi_2 \in H$, συμβολίζουμε με ω_{ξ_1,ξ_2} το γραμμικό συναρτησοειδές του $\mathcal{B}(H)$ που ορίζεται από την $\omega_{\xi_1,\xi_2}(x) = \langle x\xi_1, \xi_2\rangle$, για κάθε $x \in \mathcal{B}(H)$. Τότε, γράφοντας $u = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} x_i^n \otimes c_i^n$, με $x_i^n \in \mathcal{B}_0(H)$ και $c_i^n \in A$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\langle((\omega_{a\xi_0,b\xi_0} \otimes \iota)u)\eta_1, \eta_2\rangle &= \langle((\omega_{a\xi_0,b\xi_0} \otimes \iota)\left(\lim_n \sum_{i=1}^{m_n} x_i^n \otimes c_i^n\right)\eta_1, \eta_2\rangle \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \langle(\omega_{a\xi_0,b\xi_0} \otimes \iota)(x_i^n \otimes c_i^n)\eta_1, \eta_2\rangle \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \langle\omega_{a\xi_0,b\xi_0}(x_i^n)\iota(c_i^n)\eta_1, \eta_2\rangle \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \langle x_i^n(a\xi_0), b\xi_0\rangle\langle c_i^n\eta_1, \eta_2\rangle \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \langle x_i^n a\xi_0 \otimes c_i^n\eta_1, (b\xi_0 \otimes \eta_2)\rangle \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \langle(x_i^n \otimes c_i^n)(a\xi_0 \otimes \eta_1), (b\xi_0 \otimes \eta_2)\rangle \\
&= \langle u(a\xi_0 \otimes \eta_1), b\xi_0 \otimes \eta_2\rangle \\
&= \langle\Delta(a)(\xi_0 \otimes \eta_1), (b\xi_0 \otimes \eta_2)\rangle \\
&= \langle\Delta(a)(\xi_0 \otimes \eta_1), (b \otimes \mathbb{1})(\xi_0 \otimes \eta_2)\rangle \\
&= \langle(b^* \otimes \mathbb{1})\Delta(a)(\xi_0 \otimes \eta_1), (\xi_0 \otimes \eta_2)\rangle \\
&= \langle(\phi \otimes \iota)((b^* \otimes \mathbb{1})\Delta(a))\eta_1, \eta_2\rangle
\end{aligned}
$$

για κάθε $\eta_1, \eta_2 \in K$. Συνεπώς, $(\omega_{a\xi_0,b\xi_0} \otimes \iota)u = (\phi \otimes \iota)((b^* \otimes \mathbb{1})\Delta(a))$. Τώρα $b^*, a \in A$ άρα, από τη πυκνότητα του $(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)$ στο $A \otimes A$ το σύνολο $\{(\omega_{a\xi_0,b\xi_0} \otimes \iota)u \ : \ a, b \in A\}$ είναι πυκνό στην A. Ακόμη, από τη πυκνότητα του $A\xi_0$ στον H, $(\omega \otimes \iota)u \in A$, για κάθε ω που είναι της μορφής ω_{ξ_1,ξ_2}, όπου $\xi_1, \xi_2 \in H$. Όμως γραμμικοί συνδυασμοί τέτοιων γραμμικών συναρτησοειδών είναι πυκνοί στον $\mathcal{B}_0(H)^*$, έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.1.10. *Για κάθε $a \in A$, $\Delta(a) = u(a \otimes \mathbb{1})u^*$*

Απόδειξη. Έστω $a, b \in A$ και $\eta \in K$. Τότε,

$$
\begin{aligned}
u(a \otimes \mathbb{1})(b\xi_0 \otimes \eta) &= u(ab\xi_0 \otimes \eta) \\
&= \Delta(ab)(\xi_0 \otimes \eta) \\
&= \Delta(a)\Delta(b)(\xi_0 \otimes \eta) \\
&= \Delta(a)u(b\xi_0 \otimes \eta)
\end{aligned}
$$

Άρα $u(a \otimes \mathbb{1}) = \Delta(a)u$, και αφού ο u είναι unitary, $\Delta(a) = u(a \otimes \mathbb{1})u^*$. $\square$

4.2 Στοιχεία Θεωρίας Αναπαραστάσεων

Στα επόμενα (A, Δ) είναι CQG, H χώρος Hilbert. Για τις αποδείξεις των ακόλουθων θεωρημάτων παραπέμπουμε στο [21].

Ορισμός 4.2.1. *Έστω $u \in \mathcal{M}(\mathcal{B}_0(H) \otimes A)$ αναπαράσταση του (A, Δ) στον χώρο Hilbert H. Ένας κλειστός υπόχωρος H_1 του H λέγεται u-αναλλοίωτος αν*

$$(e \otimes \mathbb{1})u(e \otimes \mathbb{1}) = u(e \otimes \mathbb{1})$$

όπου $e : H \to H_1$ η ορθογώνια προβολή του H στον H_1.

Ορισμός 4.2.2. *Έστω u αναπαράσταση του (A, Δ) στον χώρο Hilbert H. Η u λέγεται ανάγωγη αν οι μόνοι u-αναλλοίωτοι κλειστοί υπόχωροι του H είναι ο $\{0\}$ και ο H.*

Ορισμός 4.2.3. *Έστω u, v αναπαραστάσεις του (A, Δ) στους χώρους Hilbert H_1 και H_2 αντίστοιχα. Ένα στοιχείο $x \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ τέτοιο ώστε*

$$(x \otimes \mathbb{1})u = v(x \otimes \mathbb{1})$$

θα λέγεται intertwiner μεταξύ των u και v. Το σύνολο όλων των intertwiners μεταξύ των u και v συμβολίζεται με Mor(u, v).

Ορισμός 4.2.4. *Δύο αναπαραστάσεις u και v του (A, Δ) λέγονται ισοδύναμες αν υπάρχει αντιστρέψιμος intertwiner μεταξύ των u και v. Θα συμβολίζουμε με $u \sim v$. Αν επιπλέον ο intertwiner είναι unitary, λέμε ότι οι αναπαραστάσεις είναι unitary ισοδύναμες και συμβολίζουμε με $u \sim_a v$*

Πρόταση 4.2.5. *Κάθε μη εκφυλισμένη πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση του (A, Δ) είναι ισοδύναμη με μία unitary αναπαράσταση.*

Θεώρημα 4.2.6. *Έστω u μία unitary αναπαράσταση του (A, Δ) στον χώρο Hilbert H. Τότε υπάρχει ένα σύνολο $\{e_a : a \in I\} \subseteq \mathcal{B}(H)$ κάθετων ανά δύο και πεπερασμένης διάστασης προβολών με* *(i)* $\sum_I e_a = \mathbb{1}$ *και*

(ii) $u(e_a \otimes \mathbb{1}) = (e_a \otimes \mathbb{1})u$*, όπου το* $u(e_a \otimes \mathbb{1})$ *ως στοιχείο του* $\mathcal{B}(e_a H) \otimes A$ *είναι πεπερασμένης διάστασης unitary ανάγωγη αναπαράσταση του* (A, Δ).

Θεώρημα 4.2.7. *(Λήμμα του Schur) Έστω* u, v *ανάγωγες unitary αναπαραστάσεις του* (A, Δ) *στούς χώρους Hilbert* H_1 *και* H_2 *αντίστοιχα. Τότε, ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:*

(i) Η u *δεν είναι ισοδύναμη με την* v *και* $Mor(u, v) = 0$

(ii) $u \sim v$ *και υπάρχει αντιστρέψιμος* $x \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *τέτοιως ώστε*

$$Mor(u, v) = \{\lambda x \,:\, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Θεώρημα 4.2.8. *Κάθε unitary ανάγωγη αναπαράσταση είναι ισοδύναμη με υποαναπαράσταση της κανονικής δεξιάς αναπαράστασης.*

Αναφορές

[1] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985

[2] M.S. Dijkhuizen and T.H. Koornwinder, *CQC Algebras: a direct algebraic approach to compact quantum groups*, Lett. Math. Phys., (1994)

[3] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Vol I Springer-Verlag, 1963

[4] U. Franz, A. Skalski & P. Soltan, *Introduction to Compact and Discrete Quantum Groups*, arXiv:1703.10766v1, March 2017

[5] A. Katavolos, *Θεωρία Τελεστών*, Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος, 2018

[6] A. Katavolos, *Θεωρία Τελεστών*, Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος, 2020-2021

[7] E. C. Lance, *Hilbert C*-Modules*, A Toolkit for Operator Algebraists, London Mathematical Society Lectur Notes, Vol. 210, Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[8] G. J. Murphy, *C*-Algebras and Operator Theory*,Academic Press Inc., 1990

[9] S. Negrepontis, T. Zachariades, N.Kalamidas & V. Farmaki, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, 1997

[10] S.Neshveyev & L. Tuset, *Compact Quantum Groups and their Representations Categories*, SMF, 2013

[11] V. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2003

[12] G. Pisier, *Tensor Products of C*-Algebras and Operator Spaces*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 96, Cambridge University Press,Cambridge, 2020

[13] M. Sugiura, *Unitary Representations and Harmonic Analysis, an Introduction*, Bull. American Mathematical Society 83(1) 100-103, January 1977

[14] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*, Vol I, Springer-Verlag, 1979

[15] M. Takesaki, *Theory of operator algebras II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences V 125, Springer-Verlag, 2003

[16] A. Van Daele, *Haar Measure on a Compact Quantum Group*, Proceedings of the American Mathematical Society,Volume 123, Number 10, October 1995

[17] A.Van Daele & A. Maes, *Notes on Compact Quantum Groups*, arXiv:math/9803122v1, March 1998

[18] A. Van Daele & S. Wang, *Universal Quantum Groups*, International Journal of Mathematics, April 1996

[19] N. E. Wegge-Olsen, *K-Theory and C*-Algebras: A friendly Approach*, Oxford University Press, 1993

[20] S. L. Woronowicz, *Compact Matrix Pseudogroups* Communications in Mathematical Physics, Springer-Verlag, 1987

[21] S. L. Woronowicz, *Compact Quantum Groups*, in "Symmetries Quantiques," Proceedings, Les Houches 1995, eds. A. Connes, K. Gawedzki & J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam 1998