



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Ουρές Αναμονής με την πειθαρχία
Last-Come-First-Served Preemptive
Resume (LCFS-PR)

Συγγραφέας:

Σακκάς Ραφαήλ

Επιβλέπων Καθηγητής:

Οικονόμου Αντώνιος

Π.Μ.Σ. Μαθηματικά
Κατεύθυνση Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα
Ιούλιος 2023

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	4
2	Βασικά Αποτελέσματα	8
2.1	<i>M/G/1</i> Ουρά	8
2.2	<i>G/G/1</i> Ουρά	10
2.3	<i>G/M/1</i> Ουρά	15
3	LCFS-PR σε συστήματα εξυπηρέτησης με ειδικά χαρακτηριστικά.	17
3.1	<i>G/G/1</i> (LCFS-PR) με χρόνους εξυπηρέτησης που εξαρτώνται από το μέγεθος της ουράς	17
3.2	<i>M/G/1</i> (LCFS-PR) με προσπάθειες επανεισόδου και εξυπηρέτηση δύο φάσεων	24
3.3	<i>M/G/1</i> (LCFS-PR) με προσπάθειες επανεισόδου και χρόνους εκκίνησης	32
4	Στρατηγική συμπεριφορά πελατών	42
4.1	Στρατηγική στην <i>M/M/1</i> (LCFS-PR) ουρά	42
4.2	Στρατηγική σε σύστημα πειθαρχίας (LCFS-PR) με πεπερασμένο πλήθος εισερχόμενων πελατών	44
4.3	Κατάλογος τιμών προτεραιότητας στην <i>M/M/1</i> (FCFS) ουρά	52
5	Σύγκριση με την πειθαρχία FCFS	59
5.1	Αποτελέσματα συστημάτων με την πειθαρχία FCFS	59
5.1.1	<i>M/M/1</i> Ουρά	59
5.1.2	<i>M/G/1</i> Ουρά	61
5.1.3	<i>G/M/1</i> Ουρά	64
5.2	Σύγκριση βασικών αποτελεσμάτων	68
5.3	Σύγκριση στρατηγικής συμπεριφοράς	73
6	Επίλογος	77
7	Παραρτήματα	78
7.1	Παράρτημα 1	78
7.2	Παράρτημα 2	80
8	Βιβλιογραφία	82

1 Εισαγωγή

Η Θεωρία Ουρών Αναμονής είναι ένα πολύ ενδιαφέρον πεδίο μελέτης που ερευνά τη συμπεριφορά και τα χαρακτηριστικά συστημάτων εξυπηρέτησης με σκοπό τη βελτίωση λειτουργίας τους. Έχει βρει εφαρμογές σε ένα ευρύ φάσμα τομέων, συμπεριλαμβανομένων των τηλεπικοινωνιών, των μεταφορών και των δικτύων υπολογιστών. Κατανοώντας τον τρόπο λειτουργίας των ουρών και βελτιστοποιώντας την απόδοσή τους, μπορούμε να βελτιώσουμε την αποτελεσματικότητα, την κατανομή των πόρων και την ικανοποίηση των πελατών και του διαχειριστή ενός συστήματος εξυπηρέτησης.

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, εμβαθύνουμε στο πεδίο των ουρών δίνοντας έμφαση στην πειθαρχία Last Come First Served Preemptive Resume, γνωστή και ως LCFS-PR. Η πειθαρχία αυτή είναι παραλλαγή της κλασικής πειθαρχίας Last Come First Served όπου η πιο πρόσφατη άφιξη έχει την υψηλότερη προτεραιότητα για εξυπηρέτηση. Στην LCFS-PR, όμως, έχουμε την εξής ιδιαιτερότητα. Κάθε νεοεισελθών πελάτης κατευθύνεται απευθείας προς τον χώρο εξυπηρέτησης, αναγκάζοντας το άτομο που εξυπηρετείται να μεταφερθεί στον χώρο αναμονής. Ο πελάτης αυτός θα συνεχίσει την εξυπηρέτησή του, από το σημείο που σταμάτησε, μόλις το σύστημα μείνει άδειο από πελάτες που αφίχθησαν μετά από αυτόν και διέκοψαν την εξυπηρέτησή του. Θα πραγματοποιηθεί εκτενής ανάλυση των συστημάτων που λειτουργούν με τη συγκεκριμένη πειθαρχία, διαφοροποιώντας κάθε φορά τον τρόπο με τον οποίο εισέρχονται και εξυπηρετούνται.

Έπειτα, θα μελετήσουμε πιο περίπλοκα συστήματα με την πειθαρχία LCFS-PR, στοχεύοντας στην απόκτηση βαθύτερων γνώσεων πάνω σε πιο ειδικές καταστάσεις. Μερικές από τις ιδιαιτερότητες που μπορεί να έχουν τα συστήματα αυτά είναι διαφορετικοί τύποι πελατών, διαφορετικοί τύποι εξυπηρέτησεων, περίπλοκοι τρόποι λειτουργίας υπηρετών και αλλαγές σε κάποιους βασικούς κανόνες λειτουργίας των ουρών. Τις γνώσεις που θα αποκομίσουμε από την παραπάνω μελέτη, μπορούμε να τις εφαρμόσουμε σε πραγματικές ουρές, σχεδιάζοντας αποτελεσματικούς αλγόριθμους και επιβάλλοντας κατάλληλους κανόνες που αποσκοπούν στη βέλτιστη λειτουργία του συστήματος.

Με αφορμή το παραπάνω, κρίνεται απαραίτητο να ασχοληθούμε και με τη στρατηγική συμπεριφορά μέσα σε μία ουρά αναμονής. Αυτή μπορεί να αναφέρεται στους πελάτες, που αποσκοπούν στην πιο σύντομη και ποιοτική εξυπηρέτησή τους. Για παράδειγμα, η επιλογή κατάλληλης στιγμής εισόδου στο σύστημα. Μπορεί, όμως, να αναφέρεται και στον διαχειριστή του συστήματος που μοναδικό του μέλημα είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους, επιβάλλοντας, φερ' ειπείν, διάφορα κόσθη. Διευρύνοντας τις στρατηγικές αυτές, μπορούμε να καταλήξουμε σε κατάλληλες παρεμβάσεις με στόχο την καλύτερη απόδοση του συστήματος.

Τέλος, πρόκειται να πραγματοποιήσουμε μια εκτενή σύγκριση ανάμεσα στις πειθαρχίες LCFS-PR και FCFS. Θα βρούμε τις ομοιότητες και τις διαφορές τους, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της καθεμιάς. Βάζοντας στη ζυγαριά αυτούς

τους δύο τρόπους χειρισμού των πελατών, κάθε επαγγελματίας που παίρνει αποφάσεις για κάποιο σύστημα εξυπηρέτησης θα είναι σε θέση να κάνει την καλύτερη επιλογή πειθαρχίας ανάλογα με τις ανάγκες και τους στόχους του.

Συνοψίζοντας, η διπλωματική αυτή έχει σκοπό την ανάλυση πειθαρχιών στον τομέα των ουρών αναμονής, δίνοντας βαρύτητα στην LCFS-PR. Διερευνώντας πολύπλοκα συστήματα, εξετάζοντας τη στρατηγική συμπεριφορά και συγκρίνοντας τη LCFS-PR με την παραδοσιακή πειθαρχία FCFS, στοχεύουμε να συνεισφέρουμε στο σύνολο της γνώσης στη Θεωρία Ουρών και να παρέχουμε πρακτικές για τη βελτιστοποίηση της απόδοσης των συστημάτων σε διάφορες περιπτώσεις.

Introduction

Queueing Theory is a very interesting field of study that investigates the behavior and characteristics of service systems with a view to their optimal operation. It has applications in a wide range of domains, including telecommunications, transportation, and computer networks. By understanding how queues work and optimizing their performance, we can improve efficiency, resource allocation, and customer and manager satisfaction.

In this master thesis, we delve into the world of queueing with an emphasis on the Last Come First Served Preemptive Resume discipline, also known as LCFS-PR. It is a variation of the classic Last Come First Served discipline where the latest arrival has the highest priority for service. However, in LCFS-PR we have the following peculiarity. Each new customer is directed directly to the service area, forcing the person being served to move to the waiting area. This customer will continue his service, from the point where he left off, as soon as the person who interrupted him and later arrivals will have finished their service. An extensive analysis will be carried out of the systems that operate with this specific discipline, differentiating each time the way in which they are entered and served.

Afterwards, we will study more complex systems with the LCFS-PR discipline, aiming to gain deeper insights into more particular situations. Some of the particularities that these systems may have are different types of customers, different types of services, complicated ways of operating servers and changes in some basic rules of queueing operation. We can apply the knowledge we will gain from this study, to real queues, designing efficient algorithms and imposing appropriate rules aimed at the optimal operation of the system.

On the occasion of the above, it is deemed necessary to deal with the strategic behavior in a queueing system. This can refer to customers, aiming for the shortest and highest quality service. For example, choosing the right time to enter the system. However, it can also refer to the system administrators whose only concern is maximizing profit, imposing, for instance, various prices. By investigating these strategies, we can arrive at appropriate interventions that can improve the system performance.

Finally, we are going to perform an extensive comparison between the LCFS-PR and FCFS disciplines. We will find their similarities and differences, the advantages and disadvantages of each one. By weighing these two ways of allocating clients, any professional, who is making decisions about a service system, will be able to make the best choice of discipline according to their needs and goals.

In summary, this master thesis aims to analyze disciplines in the field of queueing, with a particular emphasis on LCFS-PR. By investigating complex

systems, examining strategic behavior, and comparing LCFS-PR with the traditional FCFS discipline, we aim to contribute to the body of knowledge in queueing theory and provide practices for optimizing system performance in various situations.

2 Βασικά Αποτελέσματα

Κάθε σύστημα εξυπηρέτησης χαρακτηρίζεται από την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των αφίξεων, των χρόνων εξυπηρέτησης, τη χωρητικότητα, το πλήθος το υπηρετών αλλά και την πειθαρχία του. Τροποποιώντας τα παραπάνω, προκαλούμε αλλαγές στην κατανομή ισορροπίας του πλήθους των πελατών του συστήματος, στον μέσο χρόνο παραμονής του καθενός ξεχωριστά και στους μέσους κύκλους συνεχούς λειτουργίας και αργίας, υπολογισμοί οι οποίοι είναι σημαντικοί ώστε να έχουμε μια καλή εικόνα για τη συμπεριφορά της ουράς.

Παρακάτω πραγματοποιούμε αυτούς τους υπολογισμούς για μερικά από τα πιο συνήθη συστήματα εξυπηρέτησης με πειθαρχία LCFS-PR:

2.1 $M/G/1$ Ουρά

Ας υποθέσουμε ότι η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson(λ) (Ανεξάρτητοι ενδιάμεσοι χρόνοι X_1, X_2, \dots που ακολουθούν την $\text{Exp}(\lambda)$ κατανομή) και πως η κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης είναι μια γενική κατανομή $B(x)$ με μέση τιμή ίση με $\beta = 1/\mu$. Έστω $\{Q(t) : t \geq 0\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα τη χρονική στιγμή t . Η $\{Q(t)\}$ αποτελεί μια αναγεννητική διαδικασία με στιγμές αναγέννησης τις ενάρξεις των κύκλων συνεχούς λειτουργίας. Συμβολίζουμε, επίσης, με Z το μήκος ενός πλήρους κύκλου απασχόλησης, με Y το μήκος ενός κύκλου συνεχούς λειτουργίας και με I το μήκος μια περιόδου αργίας. Συνεπώς, $Z = Y + I$. Υπό κάποιες ήπιες συνθήκες κανονικότητας (απεριοδικότητα ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων και/ή χρόνων εξυπηρέτησης), ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη οριακής κατανομής είναι η σχέση $E(Z) < \infty$. Επιπλέον, θέτουμε $Y_n, n = 0, 1, 2, \dots$, το συνολικό χρόνο, μέσα σε έναν πλήρη κύκλο απασχόλησης κατά τον οποίο βρίσκονται ακριβώς n πελάτες στο σύστημα. Τότε, ισχύει ότι:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n, n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

όπου $Y_0 = I$.

Επειδή η $\{Q(t)\}$ είναι αναγεννητική διαδικασία συμπεραίνουμε ότι:

$$p_n = \frac{E(Y_n)}{E(Z)}, n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι το Y_{n+1} ισούται με το άθροισμα των χρόνων εξυπηρέτησης T_1, T_2, \dots των πελατών που φτάνουν στο σύστημα και βρίσκουν μπροστά

τους n πελάτες στον αντίστοιχο κύκλο. Έστω K_n το πλήθος αυτό. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson, συνεπώς το παραπάνω πλήθος έχει ίδια κατανομή με τον αριθμό αφίξεων σε χρονικό διάστημα μήκους Y_n . Άρα

$$E(K_n) = E[E(K_n|Y_n)] = E(\lambda Y_n) = \lambda E(Y_n), n \in \mathbb{N}.$$

Επιπροσθέτως οι χρόνοι T_1, T_2, \dots είναι ανεξάρτητοι του K_n . Έτσι, έχουμε:

$$E(Y_{n+1}) = E\left(\sum_{i=1}^{K_n} T_i\right) = E(K_n)E(T_1) = \frac{\lambda E(Y_n)}{\mu} = \rho E(Y_n), n \in \mathbb{N}.$$

Ο Y_1 είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα και δεν βρίσκει πελάτες. Ο Y_1 δεν επηρεάζεται από τις επερχόμενες διακοπές λόγω άφιξης πελατών, καθώς σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχει διακοπή του χρόνου αυτού και συνεχισή του, όταν εξυπηρέτηθούν όλοι πελάτες που προηγούνται, από το σημείο που είχε σταματήσει νωρίτερα. Επομένως, προκύπτει ότι $E(Y_1) = \beta = 1/\mu$, οπότε:

$$E(Y_n) = \frac{\rho^{n-1}}{\mu} = \frac{\rho^n}{\lambda}, n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Μέση διάρκεια κύκλων πλήρους απασχόλησης, λειτουργίας και αργίας

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} E(Y_n) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n}{\lambda}.$$

Όπως προείπαμε, ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη οριακής κατανομής είναι το μέσο μήκος ενός πλήρους κύκλου απασχόλησης να είναι πεπερασμένο. Δηλαδή να ισχύει ότι $E(Z) < \infty$. Για να επιτευχθεί αυτό, σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, πρέπει $\rho < 1$. Άρα, η ύπαρξη οριακής κατανομής συνεπάγεται ότι $\rho < 1$ και το αντίστροφο.

Στην περίπτωση αυτή, η μέση διάρκεια ενός κύκλου απασχόλησης υπολογίζεται ως εξής:

$$E(Z) = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}. \quad (4)$$

Αφού η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson(λ):

$$E(I) = \frac{1}{\lambda}$$

και τελικά:

$$E(Y) = E(Z) - E(I) = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη στο σύστημα

Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα δεν εξαρτάται από το πλήθος των πελατών που βρίσκεται μέσα σε αυτό, αλλά μόνο από αυτούς που πρόκειται να έρθουν μετά την άφιξή του. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ο παραπάνω χρόνος ισούται με τον αντίστοιχο του πρώτου πελάτη που θα μπει στο (κενό) σύστημα. Κατ' επέκταση, ισούται με το μέσο χρόνο συνεχούς λειτουργίας, δηλαδή με $E(Y) = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$.

Οριακή κατανομή πλήθους πελατών του συστήματος

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4):

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n, n \in \mathbb{N}$$

Επομένως, συμπεραίνουμε πως, ανεξάρτητα από την κατανομή $B(x)$ των χρόνων εξυπηρέτησης, το οριακό πλήθος πελατών της ουράς $M/G/1$ (LCFS-PR) ακολουθεί τη Γεωμετρική Κατανομή με παράμετρο ρ .

Παρατήρηση:

Η προαναφερθείσα ιδιότητα μη-ευαισθησίας στην κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης έχει ως συνέπεια τα παραπάνω αποτελέσματα να ισχύουν και για την $M/M/1$ (LCFS-PR) ουρά η οποία είναι ειδική περίπτωση της $M/G/1$.

2.2 $G/G/1$ Ουρά

Έστω, τώρα, ότι πελάτες φθάνουν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots οι οποίες έχουν κατανομή $A(x)$ με μέσο $\alpha = 1/\lambda$. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι και αυτοί ανεξάρτητοι και ισόνομοι με συνάρτηση κατανομής την $B(x)$ με μέσο $\beta = 1/\mu$ και συμβολίζονται με T_1, T_2, \dots . Ορίζουμε, ομοίως με παραπάνω, τα $\{Q(t) : t \geq 0\}, Z, Y, I$. Αντίστοιχα με παραπάνω, για να εξασφαλίσουμε την ευστάθεια της ουράς, πρέπει να ισχύει ότι $\rho < 1 \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Οριακή κατανομή πλήθους πελατών του συστήματος

Έστω B ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση ενός πελάτη και S ο συνολικός χρόνος παραμονής του. Θεωρούμε, επίσης, πως στο σύστημα εξυπηρέτησης τη στιγμή ακριβώς πριν από μια άφιξη πελάτη, βρίσκονται $n - 1$ πελάτες. Συνεπώς, μετά την άφιξη έχουμε n πελάτες και, κατευθείαν, ξεκινούν να μετράνε δύο χρόνοι. Ο ένας είναι ο χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη (έστω A_0) και ο άλλος έως την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του συγκεκριμένου πελάτη (χρόνος B). Αν $B \leq A_0$, τότε η εξυπηρέτηση του πελάτη δεν θα διακοπεί και ισχύει ότι $S = B$. Στην περίπτωση που $B > A_0$, προκύπτει η είσοδος του $(n+1)$ -οστού πελάτη για τον οποίο αρχίζουν να τρέχουν οι δύο χρόνοι που προαναφέραμε. Έστω S_1 , ο χρόνος παραμονής του. Με το πέρασμα του S_1 συνεχίζεται η εξυπηρέτηση του n -οστού πελάτη για χρονικό διάστημα A_1 ώσπου να υπάρξει και πάλι διακοπή μήκους

S_2 . Η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε σε κάποιο $A_{I(B)}$ τέτοιο ώστε $\sigma_{I(B)} < B$ και $\sigma_{I(B)+1} > B$, όπου με $I(B)$ συμβολίζουμε το πλήθος των διακοπών, λόγω άφιξης πελάτη, κατά τη διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης B , $I(B)$, και

$$\sigma_j = \sum_{i=0}^j A_{i-1}.$$

Τελικά, ο χρόνος παραμονής S του συγκεκριμένου πελάτη υπολογίζεται από τη σχέση:

$$S = B + \sum_{i=1}^{I(B)} S_i$$

Με το πέρας του χρόνου S πραγματοποιείται αναχώρηση του n -οστού πελάτη και ξεκινάει ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του $(n-1)$ -οστού.

Σημειώσεις:

- i. Τα $A_i, i = 0, 1, \dots, k-1$, αποτελούν ενδιάμεσους χρόνους άφιξης, συνεπώς έχουν συνάρτηση κατανομής την $A(x)$ και ουσιαστικά είναι κάποια από τα $X_i (i = 1, 2, \dots)$.
- ii. $B(=\text{χρόνος εξυπηρέτησης}) = T_i$ για κάποιο $i \in \mathbb{N}$
- iii. Όπως προαναφέραμε, ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη δεν εξαρτάται από το πλήθος των πελατών που βρίσκει στο σύστημα, αλλά μόνο από το τι θα γίνει στο μέλλον. Έτσι, η παραπάνω διαδικασία περιγράφει έναν κύκλο συνεχούς λειτουργίας. Εναλλακτικά, αν θέσουμε $n = 1$, λαμβάνουμε το ίδιο.

Ας υποθέσουμε τώρα, πως ξεκινάμε τη χρονική στιγμή $t = 0$ με λιγότερους από k πελάτες στο σύστημα, $k = 1, 2, \dots$. Έστω K_1 η πρώτη στιγμή όπου το πλήθος των πελατών αυξάνεται από $k-1$ σε k και K_2 η πρώτη στιγμή που μειώνεται από k σε $k-1$. Η διαφορά $K_2 - K_1$ αποτελεί τον χρόνο παραμονής του πελάτη που εισήχθη στο σύστημα τη χρονική στιγμή K_1 . Κατ' επέκταση, είναι ο χρόνος μιας περιόδου συνεχούς λειτουργίας της ουράς μας. Έστω, επίσης, $C_k, k = 1, 2, \dots$, η κατανομή του χρόνου ανάμεσα σε δύο στιγμές όπου το πλήθος της ουράς αυξάνεται από $k-1$ σε k . Εύκολα καταλαβαίνουμε πως το C_1 είναι η συνάρτηση κατανομής ενός κύκλου και τελικά, λόγω της Σημείωσης (iii), όλα τα $C_k, k = 1, 2, \dots$, έχουν την ίδια κατανομή. Υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ισχύει η σχέση $E[C_1] < \infty$. Επιπροσθέτως, ορίζουμε $\tau_{k,j}$ ($k = 1, 2, \dots$ και $j = 0, 1, 2, \dots$) τον αναμενόμενο χρόνο όπου το σύστημα εξυπηρέτησης θα έχει $k+j$ πελάτες, κατά τη διάρκεια μίας περιόδου C_k . Παρατηρούμε πως $\tau_{k,j+1} = I(B)\tau_{k+1,j}$. Λόγω της Σημείωσης (iii), προκύπτει ότι $\tau_{k,j} = \tau_j$.

Από το Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα (Σ.Α.Θ.):

$$\Pr[N = j + 1] = \frac{\tau_j}{E[C_k]}$$

και προκύπτει ότι:

$$\frac{\Pr[N = k + 1]}{\Pr[N = k]} = \frac{\frac{\tau_{k+1}}{E[C_{k+1}]}}{\frac{\tau_k}{E[C_k]}} = \frac{E[C_k]E[I(B)]\tau_k}{E[C_{k+1}]\tau_k} = E[I(B)], k \in \mathbb{N}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned}\gamma = E[I(B)] &= \int_0^{+\infty} E[I(B)|B = b]dB(b) = \int_0^{+\infty} E[I(B)]dB(b) \\ &\Rightarrow \gamma = \int_0^{+\infty} m_A(b)dB(b)\end{aligned}$$

όπου: $m_A(b)$: ανανεωτική συνάρτηση και έχουμε:

$$\Pr[N = k] = \Pr[N = k - 1]\gamma = \Pr[N = k - 2]\gamma^2 = \Pr[N = 1]\gamma^{k-1}, k \in \mathbb{N}$$

Αφού $\Pr[N = 0] = 1 - \rho$, όπου $\rho = \frac{\beta}{\alpha}$, ισχύει ότι:

$$\Pr[N \geq 1] = \rho$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \Pr[N = k] &= \rho \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[N = 1]\gamma^{k-1} = \rho \Leftrightarrow \frac{\Pr[N = 1]}{1 - \gamma} = \rho \\ &\Leftrightarrow \Pr[N = 1] = \rho(1 - \gamma)\end{aligned}$$

όπου $\gamma \in (0, 1)$ αφού, διαφορετικά, οι πιθανότητες δεν θα άθροιζαν στο 1.

Από τις παραπάνω σχέσεις, λαμβάνουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$\Pr[N = k] = \begin{cases} 1 - \rho, & k = 0 \\ \rho(1 - \gamma)\gamma^{k-1}, & k \in \mathbb{N}_{>0} \end{cases}$$

Παρατήρηση:

$$\Pr[N = k|k > 0] = \frac{\Pr[N = k, k > 0]}{\Pr[k > 0]} = \frac{\rho(1 - \gamma)\gamma^{k-1}}{\rho} = (1 - \gamma)\gamma^{k-1}$$

Άρα, $\{N = k|k > 0\} \sim Geom(\gamma)$.

Παρατηρούμε ότι η οριακή κατανομή του πλήθους των πελατών του συστήματος είναι Γεωμετρική, εφόσον ξέρουμε πως το σύστημα δεν είναι άδειο (με πιθανότητα ρ). Το αποτέλεσμα αυτό είναι παρόμοιο με της $M/G/1$ ουράς, με μοναδική διαφορά τη δέσμευση στο μη μηδενικό πλήθος πελατών, η οποία οφείλεται στη γενικότητα της $G/G/1$.

Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη στο σύστημα

Έστω S ο χρόνος που παραμένει ένας πελάτης στο σύστημα. Εφαρμόζοντας το Νόμο του Little έχουμε:

$$E[Q] = \lambda E[S]$$

$$\text{όπου } \lambda = 1/\alpha \text{ και } E[Q] = (1 - \rho) \cdot 0 + \rho \sum_1^{\infty} (1 - \gamma) k \gamma^{k-1} = \frac{\rho}{1-\gamma}$$

Έτσι προκύπτει η σχέση:

$$\frac{\rho}{1-\gamma} = \frac{1}{\alpha} E[S] \Leftrightarrow \gamma = 1 - \frac{\beta}{E[S]} \Leftrightarrow \gamma = 1 - \frac{1}{\mu E[S]} \Leftrightarrow E[S] = \frac{1}{\mu(1-\gamma)} \quad (5)$$

η οποία δηλώνει πως, με την εύρεση του γ , μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το $E[S]$ και το αντίστροφο.

Μέση διάρκεια κύκλων πλήρους απασχόλησης, λειτουργίας και αργίας

Όπως προηγουμένως, ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα είναι ίσος με τον μέσο κύκλο συνεχούς λειτουργίας. Άρα, ισχύει ότι:

$$E[Y] = E[S].$$

Για να υπολογίσουμε τον μέσο κύκλο πλήρους απασχόλησης, θα ορίσουμε N να είναι το πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται σε έναν κύκλο συνεχούς λειτουργίας που υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης:

$$E[N] = 1 + E[I(B)]E[N] = 1 + \gamma E[N] \quad (6)$$

και θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω σχέση:

$$\lambda = \frac{E[N]}{E[Z]} \quad (7)$$

Η (6) εξηγείται ως εξής: Μπαίνοντας ο πρώτος πελάτης στο άδειο σύστημα, ξεκινάει η εξυπηρέτησή του. Ο χρόνος εξυπηρέτησης συμβολίζεται με B και διακόπτεται κάθε φορά που εισέρχεται πελάτης κατά την ώρα εξυπηρέτησης του πρώτου. Κάθε διακοπή, ουσιαστικά αντιστοιχεί σε μία περίοδο συνεχούς λειτουργίας όπου εξυπηρετούνται N πελάτες. Το μέσο πλήθος διακοπών του πρώτου πελάτη είναι ίσο με $E[I(B)]$ και το μέσο πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται μέσα σε έναν κύκλο συνεχούς λειτουργίας συμβολίζεται με $E[N]$. Λαμβάνοντας υπόψιν και τον αρχικό πελάτη, προκύπτει η παραπάνω εξίσωση.

Η (7) εξηγείται ως εξής: Ο μακροπρόθεσμος ρυθμός αφίξεων πελατών στο σύστημα είναι ίσος με τον λόγο του μέσου πλήθους πελατών που εξυπηρετούνται σε έναν

κύκλο συνεχούς λειτουργίας προς το μήκος του μέσου κύκλου πλήρους απασχόλησης.

Από τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$E[N] = \frac{1}{1-\gamma}$$

και

$$E[Z] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{\frac{1}{1-\gamma}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda(1-\gamma)}$$

Σε συνδυασμό με την εξίσωση (5), για την περίοδο αργίας συμπεραίνουμε ότι:

$$E[I] = E[Z] - E[Y] = \frac{1}{\lambda(1-\gamma)} - \frac{1}{\mu(1-\gamma)} = \frac{1-\rho}{\lambda(1-\gamma)}$$

Εφαρμογή με Erlang χρόνους αφίξεων και εξυπηρετήσεων

Πρέπει να κάνουμε κατάλληλη επιλογή παραμέτρων ώστε να προκύπτει ότι $E[A] = \frac{1}{\lambda}$ και $E[B] = \frac{1}{\mu}$. Έτσι, παίρνουμε $A \sim \text{Gamma}(2, 2\lambda)$ και $B \sim \text{Gamma}(3, 3\mu)$.

Υπολογισμός γ :

$$\begin{aligned} \gamma &= E[I(B)] = E[E[I(B)|B]] = \int_0^{+\infty} E[I(B)|B=b]dB(b) \\ &= \int_0^{+\infty} E[I(b)]f_B(b)db = \int_0^{+\infty} m_A(b)f_B(b)db \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\lambda b - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-4\lambda b} \right) f_B(b)db \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} b f_B(b)db - \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} f_B(b)db + \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} e^{-4\lambda b} f_B(b)db \\ &= \lambda \frac{1}{\mu} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \tilde{B}(4\lambda) = \rho - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{3\mu}{3\mu + 4\lambda} \right)^3 \end{aligned}$$

όπου:

$m_A(b)$: ανανεωτική συνάρτηση,

$\tilde{m}_A(s)$: μετασχηματισμός Laplace - Stieltjes της $m_A(b)$,

$\tilde{A}(s)$: μετασχηματισμός Laplace - Stieltjes της $A(x)$,

$\tilde{B}(s)$: μετασχηματισμός Laplace - Stieltjes της $B(x)$

και ισχύει ότι

$$\tilde{m}_A(s) = \frac{\tilde{A}(s)}{1 - \tilde{A}(s)} = \frac{\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+s} \right)^2}{1 - \left(\frac{2\lambda}{2\lambda+s} \right)^2} = \frac{4\lambda^2}{4\lambda s + s^2} = \lambda \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \frac{4\lambda}{4\lambda + s}$$

$$\Rightarrow m_A(b) = \lambda b - \frac{1}{4}(1 - e^{-4\lambda b}).$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τα παραπάνω λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$E[N] = \frac{1}{1-\omega}, E[Y] = \frac{1}{\mu(1-\omega)}, E[I] = \frac{1}{\lambda} \text{ και } E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\omega)},$$

$$\text{όπου } \omega = \rho - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{3\mu}{3\mu+4\lambda} \right)^3.$$

2.3 G/M/1 Ουρά

Οριακή κατανομή πλήθους πελατών του συστήματος

Η συγκεκριμένη ουρά αποτελεί μια ειδική περίπτωση της G/G/1. Λόγω της εκθετικής φύσης των χρόνων εξυπηρέτησης ($B \sim \exp(\mu)$), είμαστε σε θέση να βρούμε την παράμετρο γ , μέσω της οποίας θα πραγματοποιήσουμε και τους υπόλοιπους υπολογισμούς που θέλουμε.

Υπολογισμός γ :

$$\begin{aligned} \gamma &= E[I(B)] = E[E[I(B)|B]] = \int_0^{+\infty} E[I(B)|B=b]dB(b) \\ &= \int_0^{+\infty} m_A(b)\mu e^{-\mu b} db = \int_0^{+\infty} \int_0^\beta m'_A(x)dx \mu e^{-\mu b} db \\ \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu b} db m'_A(x) dx &= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu x} dm_A(x) = \tilde{m}_A(\mu) = \frac{\tilde{A}(\mu)}{1-\tilde{A}(\mu)} \end{aligned}$$

όπου:

$m_A(x)$: ανανεωτική συνάρτηση

$\tilde{m}_A(\mu)$: μετασχηματισμός Laplace - Stieltjes της $m_A(x)$ και

$\tilde{A}(\mu)$: μετασχηματισμός Laplace - Stieltjes της $A(x)$.

Έχοντας ότι $\gamma = \tilde{m}_A(\mu)$, από τους υπολογισμούς της ουράς G/G/1, προκύπτει ότι:

$$\Pr[N = k] = \begin{cases} 1 - \rho, & k = 0 \\ \rho(1 - \tilde{m}_A(\mu))\tilde{m}_A(\mu)^{k-1}, & k \in \mathbb{N}_{>0} \end{cases}$$

Επομένως, το οριακό πλήθος πελατών του συστήματος ακολουθεί κατανομή ίδια με την G/G/1 έχοντας, πλέον, συγκεκριμένο $\gamma = \tilde{m}_A(\mu)$.

Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη στο σύστημα

Από τη σχέση (5), ο μέσος χρόνος παραμονής πελάτη υπολογίζεται ως εξής:

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1 - \tilde{m}_A(\mu))}$$

Μέση διάρκεια κύκλων πλήρους απασχόλησης, λειτουργίας και αργίας

Όπως και παραπάνω, $E[Y] = E[S]$, άρα:

$$E[Y] = \frac{1}{\mu(1 - \tilde{m}_A(\mu))}$$

Ο μέσος κύκλος πλήρους απασχόλησης είναι:

$$E[Z] = \frac{1}{\lambda(1 - \tilde{m}_A(\mu))}$$

Και τελικά, για τη μέση περίοδο αργίας, έχουμε:

$$E[I] = \frac{1}{\lambda(1 - \tilde{m}_A(\mu))} - \frac{1}{\mu(1 - \tilde{m}_A(\mu))} = \frac{1 - \rho}{\lambda(1 - \tilde{m}_A(\mu))}$$

3 LCFS-PR σε συστήματα εξυπηρέτησης με ειδικά χαρακτηριστικά.

Στην καθημερινή μας ζωή, πολλές φορές έχουμε τον ρόλο του πελάτη ή του υπηρέτη σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης. Από την ουρά που δημιουργείται με τελικό προορισμό το ταμείο ενός μαγαζιού, μέχρι την αναμονή στο τηλέφωνο ακούγοντας τα λόγια ενός αυτόματου τηλεφωνητή, συνήθως ο πελάτης είναι αναγκασμένος να περιμένει στον αντίστοιχο χώρο αναμονής προκειμένου να καταφέρει να εξυπηρετηθεί. Έτσι, εμπειρικά πολλές φορές, υιοθετεί κάποιες πολιτικές συμπεριφοράς, ώστε να ελαχιστοποιήσει τον χρόνο που θα περιμένει. Για παράδειγμα, φτάνοντας σε ένα κατάστημα και βλέποντας πως η ουρά για να εισέλθει είναι αρκετά μεγάλη, επιλέγει να συνεχίσει τα ψώνια του στα υπόλοιπα μαγαζιά και να γυρίσει αργότερα στο συγκεκριμένο. Αντίστοιχα, ο χρόνος είναι αρκετά σημαντικός και για τους υπηρέτες οι οποίοι, από την πλευρά τους, προσπαθούν να κάνουν την καλύτερη δυνατή διαχείριση χρόνου. Μπορεί να προσαρμόσουν τον ρυθμό εργασίας τους ανάλογα με το μέγεθος της ουράς που περιμένει, να περιμένουν έναν συγκεκριμένο αριθμό πελατών για να ξεκινήσουν να εξυπηρετούν και γενικά να υιοθετήσουν οποιαδήποτε πολιτική εξυπηρέτησης ώστε, τελικά, να ωφεληθούν. Στο παρόν κεφάλαιο, θα αναλύσουμε μοντέλα τέτοιας φιλοσοφίας, συνάγοντας κάποια πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

3.1 $G/G/1$ (LCFS-PR) με χρόνους εξυπηρέτησης που εξαρτώνται από το μέγεθος της ουράς

Έστω το σύστημα εξυπηρέτησης όπου πελάτες φθάνουν τις στιγμές t_1, t_2, \dots ($0 < t_1 < t_2 < \dots$), $n \in \mathbb{N}$, με ενδιάμεσους χρόνους $T_n = t_n - t_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, και $t_0 = 0$ οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι με συνάρτηση κατανομής $A(x)$ που έχει μέσο ίσο με α . Οι χρόνοι εξυπηρέτησης εξαρτώνται από το πλήθος των πελατών που βρίσκει ο πελάτης μπαίνοντας στην ουρά με τέτοιο τρόπο ώστε, όταν συναντά $n - 1$ πελάτες μπροστά του, να του παρέχεται εξυπηρέτηση σύμφωνα με μια συνάρτηση κατανομής B_n με μέση τιμή b_n , $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Μια τέτοια εξυπηρέτηση, θα την ονομάζουμε «τύπου n ». Οι χρόνοι αφίξεων και εξυπηρέτησεων είναι ανεξάρτητοι. Τέλος, υπάρχει ένας υπηρέτης και άπειρη χωρητικότητα.

Υποθέτουμε την εξής πειθαρχία. Κάθε πελάτης που εισέρχεται στο σύστημα αρχίζει να εξυπηρετείται κατευθείαν. Αν υπάρχει άλλος πελάτης που απασχολεί τον υπηρέτη, τότε μεταφέρεται στην ουρά. Μόλις ολοκληρωθεί μία εξυπηρέτηση, ο αντίστοιχος πελάτης αποχωρεί από το σύστημα και τη θέση του παίρνει το άτομο που εισήλθε στην ουρά πιο πρόσφατα. Όπως και νωρίτερα, όταν διακόπτεται μία εξυπηρέτηση και συνεχίζεται μετά από το αντίστοιχο χρονικό διάστημα, συνεχίζει από το σημείο που είχε μείνει. Σημειώνουμε ότι η παροχή εξυπηρέτησης «τύπου n » συνεπάγεται n πελάτες να υπάρχουν στο σύστημα.

Ορίζουμε $\{Q(t) : t \geq 0\}$ να είναι το πλήθος πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή

μή t και $\{V(t) = (V_1(t), V_2(t), \dots, V_{Q(t)}(t)) : t \geq 0\}$ το σύνολο των υπολειπόμενων χρόνων εξυπηρέτησης όλων των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα. Πιο συγκεκριμένα, ο $V_{Q(t)}$ αφορά τον εξυπηρετούμενο πελάτη και ο $V_{Q(t)-j}$, $j \in \mathbb{N}_{>0}$, τον πελάτη που περιμένει j θέσεις πίσω του. Εκτός των $t_n, n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $t'_n, n \in \mathbb{N}$, τους χρόνους αναχώρησης. Τότε, ορίζουμε:

$$Q_k = Q(t_k), V_k = V(t_k), V_{jk} = V_j(t_k)$$

και

$$Q'_k = Q(t'_k), V'_k = V(t'_k), V'_{jk} = V_j(t'_k).$$

Επομένως, οι διαδικασίες $\{(Q_k, V_k) : k \in \mathbb{N}_{>0}\}$, $\{(Q'_k, V'_k) : k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ και $\{(Q(t), V(t)) : t \geq 0\}$ περιγράφουν τη στοχαστική συμπεριφορά του συστήματος σε στιγμές αφίξεων, αναχωρήσεων και σε τυχαίες στιγμές, αντίστοιχα. Η πρώτη από αυτές αποτελεί μια Μαρκοβιανή διαδικασία, με την αιτιολόγηση να είναι απλή. Για να εξάγουμε συμπεράσματα για το μέλλον, αρκεί να έχουμε γνώση δύο πραγμάτων. Των χρόνων επόμενης άφιξης και αναχώρησης. Αμέσως μετά από την άφιξη ενός πελάτη, αυτοί οι δύο χρόνοι ξεκινούν να μετράνε από την αρχή. Οπότε, ξέροντας τις κατανομές τους, είμαστε σε θέση να μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για μετέπειτα. Αντίθετα, σε στιγμές αναχώρησης, ο χρόνος άφιξης έχει ήδη αρχίσει να «τρέχει» και ο επόμενος χρόνος εξυπηρέτησης εξαρτάται από τον υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης του πελάτη που βρίσκεται στην κορυφή της ουράς. Αντίστοιχα, σε τυχαίες στιγμές, οι χρόνοι άφιξης και αναχώρησης έχουν ήδη ξεκινήσει να «τρέχουν». Συνεπώς, διαλέγουμε την $\{(Q_k, V_k) : k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ για να μελετήσουμε το σύστημα σε στιγμές αφίξεων. Για $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, ορίζουμε:

$$r_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Pr(Q_k = n; V_{jk} > x_j, j = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

να είναι η οριακή κατανομή της Μαρκοβιανής διαδικασίας $\{(Q_k, V_k) : k \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Θα δείξουμε ότι το r_n δίνεται από τις σχέσεις:

$$r_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = B \prod_{j=1}^n G_j(x_j)$$

όπου

$$B = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{j=1}^n G_j(0) \right)^{-1}$$

και το $G_j(x)$ δηλώνει τον μέσο αριθμό διακοπών σε μια εξυπηρέτηση τύπου j που απομένει χρόνος τουλάχιστον x για την περάτωσή της.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και ορίζουμε $t_0 > t_{-1} > t_{-2} > \dots$ τις τελευταίες στιγμές αφίξεων. Συμβολίζουμε με C_{-k} τον

πελάτη που έφτασε στο σύστημα τη στιγμή t_{-k} , με X_{-k} τον χρόνο εξυπηρέτησής του και με $T_{-k+1} = t_{-k+1} - t_k$ το χρονικό διάστημα ανάμεσα στις αφίξεις των C_{-k} και C_{-k+1} , $k \in \mathbb{N}$. Για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ και ότι ο πελάτης C_0 , κατά την άφιξή του, συναντά στο σύστημα n το πλήθος πελάτες με υπολειπόμενους χρόνους εξυπηρέτησης x_1, x_2, \dots, x_n . Με άλλα λόγια, συμβαίνει το ενδεχόμενο $\{Q_0 = n, V_{j0} > x_j, j \in \mathbb{N}_{>0}\}$. Κατά την παραμονή του συγκεκριμένου πελάτη στο σύστημα, το πλήθος των πελατών και οι υπολειπόμενοι χρόνοι εξυπηρέτησης θα παραμείνουν σταθεροί λόγω της πειθαρχίας της ουράς. Συνεπώς, ο πελάτης που λάμβανε υπηρεσίες την στιγμή t_0 (με υπολειπόμενο χρόνο μεγαλύτερο του x_n) είναι ο πιο πρόσφατος πελάτης ακριβώς πριν την άφιξη του C_0 , που υπάρχει ακόμα στο σύστημα, και συνάντησε $n - 1$ πελάτες με υπολειπόμενους χρόνους εξυπηρέτησης μεγαλύτερους από x_1, x_2, \dots, x_{n-1} αντίστοιχα. Ονομάζουμε E_k το ενδεχόμενο, ο συγκεκριμένος πελάτης να είναι ο C_{-k} . Αυτό σημαίνει ότι οι πελάτες $C_{-k+1}, C_{-k+2}, \dots, C_{-1}$ θα συναντήσουν τουλάχιστον n το πλήθος πελάτες, μπαίνοντας. Έτσι, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} E_k &= \{Q_{-k} = n - 1; V_{j,-k} > x_j, j = 1, 2, \dots, n - 1; X_{-k} > T_{-k+1}; \\ &X_{-k} + X_{-k+1} > T_{-k+1} + T_{-k+2}; \dots; \\ &X_{-k} + X_{-k+1} + \dots + X_{-1} > T_{-k+1} + T_{-k+2} + \dots + T_0\}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω, καταλαβαίνουμε ότι το ενδεχόμενο $\{Q_0 = n; V_{j0} > x_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ συμβαίνει αν και μόνο αν πραγματοποιείται το E_k , σε συνδυασμό με το ενδεχόμενο οι πελάτες $C_{-k+1}, C_{-k+2}, \dots, C_{-1}$ να αναχωρήσουν από το σύστημα πριν την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία, ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη C_k θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος από x_n . Αυτό, μπορεί να συμβεί με πολλούς τρόπους. Πιο συγκεκριμένα, η εξυπηρέτηση του πελάτη C_{-k} μπορεί να διακοπεί $l - 1$ φορές ($l = 1, 2, 3, \dots, k$) στο χρονικό διάστημα (t_{-k}, t_0) και άλλη μία τη στιγμή t_0 , όπου ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης θα είναι μεγαλύτερος του x_n . Συμβολίζουμε με $F_{kl}(x_n)$ το ενδεχόμενο αυτό. Επιπλέον, λόγω της συγκεκριμένης πειθαρχίας του συστήματος, το πλήθος διακοπών μιας εξυπηρέτησης εξαρτάται από το μέγεθος της ουράς και τους μελλοντικούς χρόνους άφιξης και εξυπηρέτησης. Έτσι, θέτουμε $P_{kl}^j(x_n)$ την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο $F_{kl}(x_n)$ δεδομένου ότι στον πελάτη C_{-k} παρέχεται εξυπηρέτηση τύπου j , $P_{k1}^j(x) = 0$ για $k > 1$.

Είναι ξεκάθαρο, λοιπόν, ότι το ενδεχόμενο $\{Q_0 = n; V_{j0} > x_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ είναι ισοδύναμο με την παρακάτω τομή ενδεχομένων:

$$E_k \cap F_{kl}(x_n) = \{Q_{-k} = n - 1; V_{j,-k} > x_j, j = 1, 2, \dots, n - 1; F_{kl}(x_n)\},$$

όπου: $k \in \mathbb{N}_{>0}$ και $l = 1, 2, \dots, k$.

Επομένως,

$$\begin{aligned} &\Pr[Q_0 = n; V_{j,0} > x_j, j = 1, 2, \dots, n] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^k \Pr[Q_{-k} = n - 1; V_{j,-k} > x_j, j = 1, 2, \dots, n - 1; F_{kl}(x_n)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^k \Pr[Q_{-k} = n-1; V_{j,-k} > x_j, j = 1, 2, \dots, n-1] \\
&\quad \times \Pr[F_{kl}(x_n) | Q_{-k} = n-1; V_{j,-k} > x_j, j = 1, 2, \dots, n-1] \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^k \Pr[Q_{-k} = n-1; V_{j,-k} > x_j, j = 1, 2, \dots, n-1] P_{kl}^n(x_n) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \Pr[Q_{-k} = n-1; V_{j,-k} > x_j, j = 1, 2, \dots, n-1] \sum_{l=1}^k P_{kl}^n(x_n)
\end{aligned}$$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι ο πελάτης C_0 εισέρχεται στο σύστημα όπου επικρατεί στατιστική ισορροπία, δηλαδή η τυχαία μεταβλητή (Q_0, V_0) έχει κατανομή ισορροπίας $r_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Έτσι, κάθε $(Q_{-k}, V_{-k}), k \in \mathbb{N}_{>0}$, έχει επίσης την ίδια κατανομή και από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι:

$$r_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = r_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^k P_{kl}^n(x_n).$$

Θέτοντας

$$G_j(x) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{k=l}^{+\infty} P_{kl}^j(x), j \in \mathbb{N}_{>0},$$

προκύπτει ότι:

$$r_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = r_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) G_n(x_n)$$

και αναδρομικά:

$$r_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = r_0 \prod_{j=1}^n G_j(x_j),$$

όπου το r_0 λαμβάνεται από την εξίσωση κανονικοποίησης:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n(0, 0, \dots, 0) = 1 \Leftrightarrow r_0 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{j=1}^n G_j(0) \right)^{-1}.$$

Σημειώνουμε ότι το άθροισμα $\sum_{k=l}^{+\infty} P_{kl}^j(x)$ υπολογίζει την πιθανότητα μία εξυπηρέτηση τύπου j να διακοπεί τουλάχιστον l φορές και στην l -οστή διακοπή, ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του συγκεκριμένου πελάτη να είναι μεγαλύτερος από x . Επομένως, η ποσότητα $G_j(x)$ είναι ο μέσος αριθμός διακοπών μιας εξυπηρέτησης τύπου j που αφήνουν υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης μεγαλύτερο του x . \square

Τώρα, πρόκειται να προσδιορίσουμε την στοχαστική συμπεριφορά του συστήματος όταν μελετάται σε στιγμές αναχώρησης. Αν και η στοχαστική διαδικασία

$\{(Q'_k, V'_k) : k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ δεν είναι γενικά Μαρκοβιανή, η οριακή της κατανομή μπορεί να προκύψει, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα. Από τη στιγμή που η οριακή κατανομή της στοχαστικής διαδικασίας είναι ανεξάρτητη της αρχικής κατάστασης, υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το σύστημα είναι αρχικά άδειο. Έπειτα, θεωρούμε τα δύο ενδεχόμενα $\{Q'_k \geq n\}$ και $\{Q_{k+n} \geq n\}$. Το πρώτο δηλώνει ότι το πλήθος των πελατών στο σύστημα, μετά την k -οστή αναχώρηση, είναι τουλάχιστον n . Το δεύτερο, ότι το πλήθος, μετά την $(k+n)$ -οστή άφιξη, είναι τουλάχιστον n . Τα δύο αυτά ενδεχόμενα είναι ισοδύναμα. Ένα επιχείρημα υπέρ αυτού είναι ότι το κάθε ένα ισχύει αν και μόνο αν ισχύει το ενδεχόμενο $\{t_{k+n} < t'_k\}$. Επίσης, είναι ξεκάθαρο ότι κατά το χρονικό διάστημα (t_{k+n}, t'_k) το μέγεθος της ουράς είναι μεγαλύτερο το n . Αυτό, λόγω της συγκεκριμένης πειθαρχίας, υποδηλώνει ότι οι υπολειπόμενοι χρόνοι εξυπηρέτησης των n τελευταίων πελατών παραμένουν αναλλοίωτοι, διότι κανείς από αυτούς δεν θα φτάσει σε θέση εξυπηρέτησης κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι τα $\{Q'_k \geq n; V'_{j,k} > x_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ και $\{Q_{k+n} \geq n; V_{j,k+n} > x_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ είναι ισοδύναμα.

Έτσι,

$$\Pr[Q'_k \geq n; V'_{j,k} > x_j, j = 1, 2, \dots, n] = \Pr[Q_{k+n} \geq n; V_{j,k+n} > x_j, j = 1, 2, \dots, n].$$

Παίρνοντας $k \rightarrow +\infty$ και λαμβάνοντας υπόψιν την σχέση (8), τελικά έχουμε:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Pr[Q'_k = n; V'_{j,k} > x_j, j = 1, 2, \dots, n] = r_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (9)$$

Έτσι, τελικά, η οριακή στοχαστική συμπεριφορά του συστήματος είναι ίδια σε εποχές αφίξεων και αναχωρήσεων. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι αρκετά προφανές αν σκεφτούμε ότι, λόγω της πειθαρχίας LCFS-PR, κάθε πελάτης αφήνει το σύστημα στην ίδια κατάσταση με αυτήν που συνάντησε μπαίνοντας. Τελικός σκοπός μας, είναι να βγάλουμε συμπεράσματα για την οριακή συμπεριφορά του συστήματος σε αυθαίρετες στιγμές t , πράγμα που θα επιτευχθεί παρακάτω.

Θέτοντας

$$\sigma_j = G_j(0), j \in \mathbb{N}_{>0}$$

που προσδιορίζει το μέσο πλήθος διακοπών μιας εξυπηρέτησης τύπου j και από την παραπάνω έκφραση για το $r_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, προκύπτει η εξής σχέση:

$$r_n = r_n(0, 0, \dots, 0) = \frac{\prod_{j=1}^n \sigma_j}{\sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^k \sigma_j}, j \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Επίσης, δεδομένου ότι στο σύστημα υπάρχουν n πελάτες, οι υπολειπόμενοι χρόνοι εξυπηρέτησης, V_1, V_2, \dots, V_n , είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής:

$$F_j(x_j) = 1 - \frac{G_j(x_j)}{G_j(0)}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ο τύπος του $F_j(x)$ προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} r_n(x_1, \dots, x_n) &= \Pr[Q = n, V_1 > x_1, \dots, V_n > x_n] = \frac{\prod_{j=1}^n G_j(x_j)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{j=1}^n G_j(0)} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^n G_j(0)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{j=1}^n G_j(0)} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n G_j(x_j)}{\prod_{j=1}^n G_j(0)} = \Pr[Q = n] \cdot \prod_{j=1}^n \frac{G_j(x_j)}{G_j(0)} \end{aligned}$$

Θέτοντας $x_i = 0$, για $i \neq j$, και αθροίζοντας για όλα τα n , προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \Pr[V_j > x_j] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n, V_1 > 0, \dots, V_j > x_j, \dots, V_n > 0] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n] \cdot \frac{G_1(0)}{G_1(0)} \cdot \frac{G_2(0)}{G_2(0)} \cdot \dots \cdot \frac{G_j(x_j)}{G_j(0)} \cdot \dots \cdot \frac{G_{n-1}(0)}{G_{n-1}(0)} \cdot \frac{G_n(0)}{G_n(0)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n] \cdot \frac{G_j(x_j)}{G_j(0)} = \frac{G_j(x_j)}{G_j(0)} \end{aligned}$$

Άρα, τελικά:

$$\Pr[V_j > x_j] = \frac{G_j(x_j)}{G_j(0)} \Leftrightarrow F_j(x_j) = \Pr[V_j \leq x_j] = 1 - \frac{G_j(x_j)}{G_j(0)}$$

Τώρα, θα ασχοληθούμε με την οριακή κατανομή της στοχαστικής διαδικασίας $\{(Q(t); V(t)) : t \geq 0\}$, την οποία ορίζουμε ως εξής:

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[Q(t) = n; V_j(t) > x_j, j = 1, 2, \dots, n]. \quad (10)$$

Εξαιτίας της πειθαρχίας του συστήματος, ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη είναι ανεξάρτητος από τους αντίστοιχους των πελατών που βρίσκονται πίσω του, αφού αυτές παραμένουν σταθερές καθ' όλη τη διάρκεια της παραμονής του. Θέτοντας $\hat{B}_j(x; t)$ να είναι η συνάρτησης κατανομής του χρόνου που απομένει για την ολοκλήρωση μιας εξυπηρέτησης τύπου j , $j \in \mathbb{N}_{>0}$, τη χρονική στιγμή t , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \Pr[Q(t) = n; V_j(t) > x_j, j = 1, 2, \dots, n] &= \\ \Pr[Q(t) = n; V_j(t) > x_j, j = 1, 2, \dots, n-1] \cdot (1 - \hat{B}_n(x_n; t)) & \quad (11) \end{aligned}$$

Θα σκεφτούμε το σύστημα μόνο στις περιόδους που το πλήθος των πελατών είναι ακριβώς n , αγνοώντας τα υπόλοιπα χρονικά διαστήματα. Από την ανανεωτική θεωρία προκύπτει ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{B}_n(x; t) = \frac{\int_0^x (1 - B_j(u)) du}{b_j} = \hat{B}_n(x)$$

Έστω, επίσης, $D(h; t)$ το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί αναχώρηση κατά το χρονικό διάστημα $(t, t + h]$. Υποθέτοντας ότι το h είναι αρκετά κοντά στο 0, έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \Pr[Q(t) = n; V_j(t) > x_j, j = 1, 2, \dots, n-1] \cdot \widehat{B}_n(h; t) \\
&= \Pr[Q(t) = n; V_j(t) > x_j, j = 1, 2, \dots, n-1; V_n(t) \leq h] \\
&= \Pr[Q(t+h) = n-1; V_j(t+h) > x_j, j = 1, 2, \dots, n-1; D(h; t)] \\
&= \Pr[D(h; t)] \cdot \Pr[Q(t+h) = n-1; V_j(t+h) > x_j, j = 1, 2, \dots, n-1 | D(h; t)]
\end{aligned}$$

Παίρνοντας $t \rightarrow +\infty$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
& \frac{h \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[Q(t) = n; V_j(t) > x_j, j = 1, 2, \dots, n-1]}{b_n} = \\
& \frac{h \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[Q'_k = n-1; V'_{jk} > x_j, j = 1, 2, \dots, n-1]}{a}. \tag{12}
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (9) και (12), προκύπτει ότι:

$$\Pr[Q(t) = n; V_j(t) > x_j, j = 1, 2, \dots, n-1] = \rho_n r_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{13}$$

όπου

$$\rho_n = \frac{b_n}{\alpha}, n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Η παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με τις (10) και (11) συνεπάγονται το εξής αποτέλεσμα:

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \rho_n (1 - \widehat{B}_n(x_n)) r_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), n \in \mathbb{N}_{>0} \tag{14}$$

Η μοναδική ποσότητα που απομένει να βρούμε είναι το p_0 , το οποίο θα υπολογιστεί μέσω της εξίσωσης κανονικοποίησης. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(0, 0, \dots, 0) = 1 \\
& \Leftrightarrow p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(0, 0, \dots, 0) = 1 \\
& \Leftrightarrow p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n (1 - \widehat{B}_n(0)) r_{n-1}(0, 0, \dots, 0) = 1 \\
& \Leftrightarrow p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \cdot \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \sigma_j}{\sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^k \sigma_j} = 1 \\
& \Leftrightarrow p_0 = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \cdot \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \sigma_j}{\sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^k \sigma_j}
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο θέτοντας $p_n = p_n(0, 0, \dots, 0)$, $r_n = r_n(0, 0, \dots, 0)$ και παρατηρώντας πως η p_n είναι η οριακή κατανομή του πλήθους πελατών στο σύστημα, καθώς λαμβάνει υπόψιν της μόνο το πλήθος αυτό και όχι τους υπολειπόμενους χρόνους εξυπηρέτησης. Μάλιστα, σε συνδυασμό με την σχέση (13), προκύπτει ότι:

$$p_n = \rho_n r_{n-1}, n \in \mathbb{N}_{>0} \quad (15)$$

Παρατήρηση:

Αν υποθέσουμε ότι οι εξυπηρετήσεις δεν εξαρτώνται από το μέγεθος της ουράς, τότε αναφερόμαστε σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης $G/G/1$ (LCFS-PR) όπως αυτό της παραγράφου 2.2. Συνεπώς, τα αποτελέσματά μας θα πρέπει να ταυτοτικά, πράγμα που επαληθεύουμε παρακάτω. Ακολουθώντας τον παραπάνω συμβολισμό, θέτουμε $G(0)$ να είναι το μέσο πλήθος διακοπών μιας εξυπηρέτησης (που ισούται με το $\gamma = E[I(B)]$ από την παράγραφο 2.2), b τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης και $\rho = \frac{\alpha}{b}$. Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$r_n = r_0 G(0)^n \quad (16)$$

Για τον υπολογισμό του r_0 , θα χρησιμοποιηθεί η εξίσωση κανονικοποίησης, από την οποία υπολογίζουμε:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n = 1 \Leftrightarrow r_0 \sum_{n=0}^{+\infty} G(0)^n = 1 \Leftrightarrow r_0 \cdot \frac{1}{1 - G(0)} = 1 \Leftrightarrow r_0 = 1 - G(0), \quad (17)$$

αν $G(0) \in (0, 1)$.

Έτσι,

$$r_n = (1 - G(0))G(0)^n \quad (18)$$

και από τις σχέσεις (15) - (18) τελικά η οριακή κατανομή πλήθους πελατών του συστήματος είναι η

$$\Pr[N = k] = \begin{cases} 1 - \rho, & n = 0 \\ \rho(1 - G(0))G(0)^n, & n \in \mathbb{N}_{>0}, \end{cases}$$

αποτέλεσμα αντίστοιχο με της $G/G/1$ (LCFS-PR).

3.2 $M/G/1$ (LCFS-PR) με προσπάθειες επανεισόδου και εξυπηρέτηση δύο φάσεων

Πολλές φορές, για να πραγματοποιηθεί μία εξυπηρέτηση, πρέπει ο πελάτης να πληροί κάποιες συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Για παράδειγμα, για να χειρουργηθεί ένας ασθενής, πρέπει πρώτα να υποβληθεί στις απαραίτητες εξετάσεις και να διαπιστωθεί η αναγκαιότητα της εγχείρησης. Ένα τέτοιου είδους μοντέλο θα αναλύσουμε παρακάτω.

Περιγραφή μοντέλου

Υποθέτουμε μια $M/G/1$ ουρά, με την πειθαρχία (LCFS-PR) και επαναπροσπάθειες των πελατών για πρόσβαση στην περιοχή εξυπηρέτησης. Η εξυπηρέτηση χωρίζεται σε δύο φάσεις. Την πρώτη, θα την ονομάσουμε «αρχική» και την δεύτερη «βασική». Κάθε πελάτης υπόκειται σε αρχική εξυπηρέτηση και, αν κριθεί αναγκαίο, προχωρά στη βασική, με πιθανότητα p . Διαφορετικά, με πιθανότητα $1 - p$, αποχωρεί από το σύστημα. Η αρχική εξυπηρέτηση μπορεί να διακοπεί, λόγω νέας άφιξης πελάτη, ενώ η βασική πρέπει να ολοκληρωθεί. Ορίζουμε $B(x)$ τη συνάρτηση κατανομής του χρόνου αρχικής εξυπηρέτησης, $b(x)$ τη συνάρτηση πυκνότητας χρόνου αρχικής εξυπηρέτησης, $\beta^*(\theta)$ τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes και $\beta_1 = E[B]$, $\beta_2 = E[B^2]$. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις για τους χρόνους βασικής εξυπηρέτησης συμβολίζονται αντίστοιχα με $H(x)$, $h(x)$, $\nu^*(\theta)$ και $\nu_1 = E[H]$, $\nu_2 = E[H^2]$. Πελάτες εισέρχονται στο σύστημα, σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson ρυθμού λ . Υποθέτουμε ότι ο πελάτης που εισέρχεται στο σύστημα ξεκινά κατευθείαν να εξυπηρετείται στέλνοντας το άτομο που απασχολούσε τον υπηρέτη (αν υπάρχει) σε μία ουρά αναμονής για εκ νέου εξυπηρέτηση, όταν μείνει ελεύθερος ο υπηρέτης. Πιο συγκεκριμένα, μόλις ο ολοκληρωθεί μία εξυπηρέτηση, ο πελάτης που βρίσκεται στην κορυφή της ουράς κάνει επαναλαμβανόμενες προσπάθειες για να εισέλθει και να απασχολήσει τον υπηρέτη. Έτσι, κατά κάποιο τρόπο «ανταγωνίζεται» τον ενδεχόμενο νεοεισελθόντα πελάτη που πρόκειται να φτάσει στο σύστημα σύμφωνα με την Poisson(λ) διαδικασία. Οι προσπάθειες αυτές έχουν ενδιάμεσους χρόνους με συνάρτηση κατανομής $A(x)$, συνάρτηση πυκνότητας $a(x)$ και αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes που συμβολίζεται με $\phi^*(\theta)$. Η ουρά που περιμένουν οι πελάτες που έχουν εκτοπιστεί λειτουργεί σύμφωνα με την πειθαρχία (FCFS). Αυτό σημαίνει ότι η εξυπηρέτηση του πελάτη που έφτασε νωρίτερα στην ουρά έχει προτεραιότητα σε σχέση με τους υπόλοιπους. Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξεων, οι ενδιάμεσοι χρόνοι προσπαθειών για εκ νέου εξυπηρέτηση και οι χρόνοι αρχικής και βασικής εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

Το σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας

Η στοχαστική συμπεριφορά του παραπάνω συστήματος μπορεί να περιγραφεί από την Μαρκοβιανή διαδικασία

$$\{N(t); t \geq 0\} = \{(C(t), Q(t), \xi_0(t), \xi_1(t), \xi_2(t); t \geq 0),$$

όπου το $C(t)$ δηλώνει την κατάσταση του υπηρέτη (παίρνει τις τιμές 0, 1 και 2 αν ο υπηρέτης είναι ελεύθερος, παρέχει αρχική ή βασική εξυπηρέτηση αντίστοιχα) και το $Q(t)$ δείχνει το πλήθος των πελατών στην ουρά τη στιγμή t . Αν τώρα, $C(t) = 0$ και $Q(t) > 0$, τότε το $\xi_0(t)$ δηλώνει τον χρόνο που προσπαθεί ο επικεφαλής της ουράς να εξυπηρετηθεί, αν $C(t) = 1$ και $Q(t) \geq 0$, το $\xi_1(t)$ αναφέρεται στον παρελθόντα χρόνο που παρέχεται αρχική εξυπηρέτηση στον αντίστοιχο πελάτη και, τέλος, αν $C(t) = 2$ και $Q(t) \geq 0$, το $\xi_2(t)$ δηλώνει τον χρόνο που έχει περάσει μέχρι τώρα ο πελάτης στον χώρο βασικής εξυπηρέτησης. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει, παραλείπουμε τα $\xi_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, και ασχολούμαστε με το ζευγάρι $(C(t), X(t))$ το

οποίο έχει χώρο καταστάσεων το σύνολο $S = \{0, 1, 2\} \times \mathbb{N}$. Τέλος, ορίζουμε τους δεσμευμένους ρυθμούς επιτυχούς επανεισόδου, περάτωσης αρχικής εξυπηρέτησης και περάτωσης βασικής εξυπηρέτησης, αντίστοιχα, ως εξής:

$$\eta(x) = \frac{\alpha(x)}{1 - A(x)}, \mu_1(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)}, \mu_2(x) = \frac{h(x)}{1 - H(x)}.$$

Οι Arivudainambi, Kumar & Vijayakumar (2002) και Gomez - Corral (1999), χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Foster, κατάφεραν να συναγάγουν την παρακάτω συνθήκη εργοδικότητας:

$$\frac{1 - \beta^*(\lambda)}{\beta^*(\lambda)} + p\lambda\nu_1 < \phi^*(\lambda)$$

Κριτήριο του Foster Μια αδιαχώριστη και απεριοδική Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι εργοδική αν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση $f(j), j \in \mathbb{N}$, και $\epsilon > 0$ τέτοια ώστε η ποσότητα $\chi_j = E[f(Q_{n+1}) - f(Q_n) | Q_n = j]$ να είναι πεπερασμένη για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και $\chi_j \leq -\epsilon$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ με, ενδεχομένως, πεπερασμένο αριθμό εξαιρέσεων.

Εξασφαλίζοντας την ευστάθεια, επόμενος στόχος μας είναι να μελετήσουμε το σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας. Για να επιτευχθεί αυτό, ορίζουμε τις παρακάτω συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας:

$$R_0(t) = \Pr[C(t) = 0, Q(t) = 0],$$

$$R_n(x, t) = \Pr[C(t) = 0, Q(t) = n, x \leq \xi_0(t) < x + dx], t, x, n \geq 0,$$

$$P_n(x, t) = \Pr[C(t) = 1, Q(t) = n, x \leq \xi_1(t) < x + dx], t, x, n \geq 0,$$

και

$$S_n(x, t) = \Pr[C(t) = 2, Q(t) = n, x \leq \xi_2(t) < x + dx], t, x, n \geq 0,$$

Από την τεχνική συμπληρωματικής μεταβλητής (Attahiru & Srinivasa (2000)) προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\frac{dR_0(t)}{dt} = \lambda R_0(t) + q \int_0^{+\infty} P_0(x, t) \mu_1(x) dx + \int_0^{+\infty} S_0(x, t) \mu_2(x) dx, \quad (19)$$

$$\frac{dR_n(x, t)}{dt} + \frac{dR_n(x, t)}{dx} = -(\lambda + \eta(x))R_n(x, t), n \in \mathbb{N}_{>0} \quad (20)$$

$$\frac{dP_n(x, t)}{dt} + \frac{dP_n(x, t)}{dx} = -(\lambda + \mu_1(x))P_n(x, t), n \in \mathbb{N}_{>0} \quad (21)$$

$$\frac{dS_n(x, t)}{dt} + \frac{dS_n(x, t)}{dx} = -(\lambda + \mu_2(x))S_n(x, t) + (1 - \delta_{n0})\lambda S_{n-1}(x, t), n \in \mathbb{N}_{>0} \quad (22)$$

$$\text{όπου: } \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n \neq m \end{cases}$$

Έχουμε, επίσης, τις συνοριακές συνθήκες:

$$R_n(0, t) = (1-p) \int_0^{+\infty} P_n(x, t) \mu_1(x) dx + \int_0^{+\infty} S_n(x, t) \mu_2(x) dx, n \in \mathbb{N}_{>0}, \quad (23)$$

$$P_0(0, t) = \int_0^{+\infty} R_1(x, t) \eta(x) dx + \lambda R_0(t), \quad (24)$$

$$P_n(0, t) = \lambda \int_0^{+\infty} P_{n-1}(x, t) dx + \int_0^{+\infty} R_{n+1}(x, t) \eta(x) dx \\ + \lambda \int_0^{+\infty} R_n(x, t) dx, n \in \mathbb{N}_{>0}, \quad (25)$$

$$S_n(0, t) = p \int_0^{+\infty} P_n(x, t) \mu_1(x) dx, n \in \mathbb{N} \quad (26)$$

Υποθέτοντας ότι ισχύει η συνθήκη ευστάθειας, μπορούμε να ορίσουμε τα παρακάτω:

$$R_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \{R_0(t)\},$$

$$R_n(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \{R_n(x, t)\}, x \geq 0 \text{ και } n \geq 1,$$

$$P_n(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \{P_n(x, t)\}, x \geq 0 \text{ και } n \geq 0,$$

$$S_n(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \{S_n(x, t)\}, x \geq 0 \text{ και } n \geq 0.$$

Αφήνοντας $t \rightarrow +\infty$, οι ισότητες (19) - (26) μας οδηγούν στο παρακάτω σύστημα:

$$\lambda R_0 = (1-p) \int_0^{+\infty} P_0(x) \mu_1(x) dx + \int_0^{+\infty} S_0(x) \mu_2(x) dx, \quad (27)$$

$$\frac{dR_n(x)}{dx} = -(\lambda + \eta(x)) R_n(x), n \in \mathbb{N}_{>0}, \quad (28)$$

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = -(\lambda + \mu_1(x)) P_n(x), n \in \mathbb{N}, \quad (29)$$

$$\frac{dS_n(x)}{dx} = -(\lambda + \mu_2(x)) S_n(x) + (1 - \delta_{n0}) \lambda S_{n-1}(x), n \in \mathbb{N}, \quad (30)$$

τις συνοριακές συνθήκες σε κατάσταση ισορροπίας:

$$R_n(0) = (1-p) \int_0^{+\infty} P_n(x) \mu_1(x) dx + \int_0^{+\infty} S_n(x) \mu_2(x) dx, n \in \mathbb{N}_{>0}, \quad (31)$$

$$P_0(0) = \int_0^{+\infty} R_1(x) \eta(x) dx + \lambda R_0, \quad (32)$$

$$P_n(0) = \lambda \int_0^{+\infty} P_{n-1}(x) dx + \int_0^{+\infty} R_{n+1}(x) \eta(x) dx$$

$$+\lambda \int_0^{+\infty} R_n(x)dx, n \in \mathbb{N}_{>0}, \quad (33)$$

$$S_n(0) = p \int_0^{+\infty} P_n(x)\mu_1(x)dx, n \in \mathbb{N}_{>0} \quad (34)$$

και την εξίσωση κανονικοποίησης:

$$R_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} P_n(x)dx + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} R_n(x)dx + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x)dx = 1. \quad (35)$$

Για να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (27)-(35) ορίζουμε τις πιθανογεννήτριες:

$$P(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)z^n, R(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)z^n \text{ και } S(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x)z^n$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (26)-(34) με z^n και αθροίζοντας για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{dR(x, z)}{dx} = -[\lambda + \eta(x)]R(x, z), \quad (36)$$

$$\frac{dP(x, z)}{dx} = -[\lambda + \mu_1(x)]P(x, z), \quad (37)$$

$$\frac{dS(x, z)}{dx} = -[\lambda(1-z) + \mu_2(x)]S(x, z), \quad (38)$$

$$R(0, z) = (1-p) \int_0^{+\infty} P(x, z)\mu_1(x)dx + \int_0^{+\infty} S(x, z)\mu_2(x)dx - \lambda R_0, \quad (39)$$

$$P(0, z) = \lambda z \int_0^{+\infty} P(x, z)dx + \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} R(x, z)\eta(x)dx + \lambda \int_0^{+\infty} R(x, z)dx + \lambda R_0, \quad (40)$$

$$S(0, z) = p \int_0^{+\infty} P(x, z)\mu_1(x)dx. \quad (41)$$

Οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (36)-(38) δίνονται από τις σχέσεις

$$R(x, z) = R(0, z)e^{-\lambda x}[1 - A(x)], \quad (42)$$

$$P(x, z) = P(0, z)e^{-\lambda x}[1 - B(x)], \quad (43)$$

$$S(x, z) = S(0, z)e^{-\lambda(1-z)x}[1 - H(x)]. \quad (44)$$

Χρησιμοποιώντας την (43) μέσα στην (41) παίρνουμε:

$$S(0, z) = p\beta^*(\lambda)P(0, z) \quad (45)$$

Συνδυάζοντας τις (39), (43), (44), (45) και απλοποιώντας προκύπτει ότι:

$$R(0, z) = P(0, z)[1 - p + p\nu^*(\lambda(1-z))]\beta^*(\lambda) - \lambda R_0 \quad (46)$$

και αντικαθιστώντας τις (42)-(46) στην (40) έχουμε:

$$P(0, z) = \lambda R_0 \frac{(1-z)\phi^*(\lambda)}{D(z)} \quad (47)$$

όπου

$$D(z) = \beta^*(\lambda)\{[(1-z)\phi^*(\lambda) + z][1-p + p\nu^*(\lambda(1-z))] - z^2\} - z(1-z)$$

Συνδυάζοντας τις (42)-(47), τελικά έχουμε:

$$P(x, z) = \lambda R_0 \frac{(1-z)\phi^*(\lambda)e^{-\lambda x}[1-B(x)]}{D(z)}, \quad (48)$$

$$S(x, z) = \lambda R_0 \frac{p(1-z)\beta^*(\lambda)\phi^*(\lambda)e^{-\lambda(1-z)x}[1-H(x)]}{D(z)}, \quad (49)$$

και

$$R(x, z) = \lambda R_0 \frac{z}{D(z)} \times$$

$$\{\beta^*(\lambda)[z - (1-p + p\nu^*(\lambda(1-z)))] + (1-z)\}e^{-\lambda x}[1-A(x)]. \quad (50)$$

Ορίζουμε την περιθώρια πιθανογεννήτρια συνάρτησης $\psi(x, z)$ να είναι η $\psi(z) = \int_0^{+\infty} \psi(x, z) dx$ για κάθε πιθανογεννήτρια $\psi(x, z)$. Έτσι, από τις σχέσεις (48)-(50) προκύπτει ότι:

$$R(z) = R_0 \frac{z(1-\phi^*(\lambda))}{D(z)} \{(1-z) - \beta^*(\lambda)[1-p + p\nu^*(\lambda(1-z)) - z]\} \quad (51)$$

η οποία εκφράζει την πιθανογεννήτρια συνάρτηση του πλήθους πελατών στην ουρά, όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός και το σύστημα δεν είναι άδειο,

$$P(z) = R_0 \frac{\phi^*(\lambda)(1-z)[1-\beta^*(\lambda)]}{D(z)}, \quad (52)$$

η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του πλήθους πελατών στην ουρά, όταν ο υπηρέτης παρέχει αρχική εξυπηρέτηση και

$$S(z) = R_0 \frac{p\phi^*(\lambda)\beta^*(\lambda)[1-\nu^*(\lambda(1-z))]}{D(z)}. \quad (53)$$

η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του πλήθους πελατών στην ουρά, όταν ο υπηρέτης παρέχει βασική εξυπηρέτηση. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης $R_0 + R(1) + P(1) + S(1) = 1$ υπολογίζουμε ότι:

$$R_0 = 1 - \left(\frac{p\lambda\nu_1}{\phi^*(\lambda)} \frac{1-\beta^*(\lambda)}{\beta^*(\lambda)\phi^*(\lambda)} \right)$$

η πιθανότητα ο υπηρέτης να είναι ανενεργός και το σύστημα να είναι άδειο.

Τέλος, θα ορίσουμε άλλες δύο πιθανογεννήτριες. Καταρχάς, ορίζουμε την $\Lambda(z)$, η οποία αναφέρεται στο πλήθος των πελατών στην ουρά αναμονής και υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\Lambda(z) &= E[z^Q] = E[z^{Q \cdot 1_{\{AA\}} + Q \cdot 1_{\{AM\}} + Q \cdot 1_{\{AE\}} + Q \cdot 1_{\{BE\}}}] \\
&= \Pr[AA] \cdot E[z^Q|AA] + \Pr[AM] \cdot E[z^Q|AM] + \Pr[AE] \cdot E[z^Q|AE] \\
&\quad + \Pr[BE] \cdot E[z^Q|BE] \\
&= R_0 \cdot z^0 + \Pr[AM] \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n|AM]z^n + \Pr[AE] \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n|AE]z^n \\
&\quad + \Pr[BE] \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n|BE]z^n \\
&= R_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n, AM]z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n, AE]z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n, BE]z^n \\
&\Rightarrow \Lambda(z) = R_0 + R(z) + P(z) + S(z)
\end{aligned}$$

όπου:

AA: Ανεργός υπηρέτης - άδειο σύστημα
AM: Ανεργός υπηρέτης - μη άδειο σύστημα
AE: Αρχική εξυπηρέτηση
BE: Βασική εξυπηρέτηση.

Μετά από πράξεις, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\Lambda(z) &= \left[1 - \left(\frac{p\nu_1}{\phi^*(\lambda)} \frac{1 - \beta^*(\lambda)}{\beta^*(\lambda)\phi^*(\lambda)} \right) \right] \\
&\quad \times \left[1 + \frac{p\phi^*(\lambda)\beta^*(\lambda)[1 - \nu^*(\lambda(1-z))] + \phi^*(\lambda)(1-z)[1 - \beta^*(\lambda)]}{D(z)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{z(1 - \phi^*(\lambda))\{(1-z) - \beta^*(\lambda)[1 - p + p\nu^*(\lambda(1-z)) - z]\}}{D(z)} \right]. \quad (54)
\end{aligned}$$

Επίσης, ορίζουμε την $K(z)$, η οποία αναφέρεται στο πλήθος των πελατών στο σύστημα (συμπεριλαμβανομένου, δηλαδή, και του ενδεχόμενου πελάτη που εξυπηρετείται) και υπολογίζεται με λογική παρόμοια της $\Lambda(z)$. Πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned}
K(z) &= E[z^Q] = E[z^{Q \cdot 1_{\{AA\}} + Q \cdot 1_{\{AM\}} + (1+Q) \cdot 1_{\{AE\}} + (1+Q) \cdot 1_{\{BE\}}}] \\
&= \Pr[AA] \cdot E[z^Q|AA] + \Pr[AM] \cdot E[z^Q|AM] + \Pr[AE] \cdot E[z^{(1+Q)}|AE] \\
&\quad + \Pr[BE] \cdot E[z^{(1+Q)}|BE] \\
&= R_0 \cdot z^0 + \Pr[AM] \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n|AM]z^n + z \Pr[AE] \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n|AE]z^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +z \Pr[BE] \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n|BE]z^n \\
= & R_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n, AM]z^n + z \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n, AE]z^n + z \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q = n, BE]z^n \\
\Rightarrow & K(z) = R_0 + R(z) + zP(z) + zS(z)
\end{aligned}$$

Η μονάδα αριστερά των δεικτριών των ΑΕ και ΒΕ, στην πρώτη σειρά των υπολογισμών, προστέθηκε λόγω του πελάτη που εξυπηρετείται εκείνη τη στιγμή. Τελικά, μετά από πράξεις, έχουμε ότι:

$$K(z) = R_0 \frac{\phi^*(\lambda)(1-z)\beta^*(\lambda)[1-p+p\nu^*(\lambda(1-z))-z]}{D(z)}. \quad (55)$$

Αποτελέσματα

Έχοντας πραγματοποιήσει την παραπάνω ανάλυση, θα εξάγουμε κάποια αποτελέσματα που θα μας βοηθήσουν να έχουμε καλύτερη εικόνα για την απόδοση του συστήματος. Για ό,τι γράψουμε παρακάτω, υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε σε κατάσταση ισορροπίας.

- i. Η πιθανότητα, P_B , ο υπηρέτης να είναι απασχολημένος παρέχοντας αρχική εξυπηρέτηση:

$$P_B = \lim_{z \rightarrow 1} P(z) = \frac{1 - \beta^*(\lambda)}{\beta^*(\lambda)}$$

- ii. Η πιθανότητα, P_S , ο υπηρέτης να είναι απασχολημένος παρέχοντας βασική εξυπηρέτηση:

$$P_S = \lim_{z \rightarrow 1} S(z) = p\lambda\nu_1$$

- iii. Η πιθανότητα, P_R , ο υπηρέτης να είναι ανενεργός:

$$P_R = \lim_{z \rightarrow 1} R(z) = \frac{[1 - \phi^*(\lambda)][1 - \beta^*(\lambda) + p\lambda\nu_1\beta^*(\lambda)]}{\beta^*(\lambda)\phi^*(\lambda)}.$$

- iv. Το μέσο πλήθος πελατών, L_R , στη ουρά αναμονής σε κατάσταση ισορροπίας υπολογίζεται παραγωγίζοντας την $\Lambda(z)$ και θέτοντας $z = 1$:

$$L_R = \Lambda'(1)$$

- v. Αντίστοιχα, το μέσο πλήθος πελατών, L_S , στο σύστημα (συμπεριλαμβανομένου και του ενδεχόμενου πελάτη που εξυπηρετείται) σε κατάσταση ισορροπίας υπολογίζεται παραγωγίζοντας την $K(z)$ και θέτοντας $z = 1$:

$$\begin{aligned}
L_S = K'(1) = & [2\{(\beta^*(\lambda))^2[p\lambda\nu_1(2 - p\lambda\nu_1) - 1] + \beta^*(\lambda)[1 - p\lambda\nu_1]\} \\
& + (\beta^*(\lambda))^2 p\lambda^2\nu_2] \times (2\beta^*(\lambda)\{\beta^*(\lambda)[1 - \phi^*(\lambda) - p\lambda\nu_1] - 1\})^{-1}.
\end{aligned}$$

3.3 $M/G/1$ (LCFS-PR) με προσπάθειες επανεισόδου και χρόνους εκκίνησης

Περιγραφή μοντέλου

Θεωρούμε ένα σύστημα με προσπάθειες επανεισόδου πελατών και χρόνους επανεκκίνησης του υπηρέτη. Πελάτες φτάνουν στην ουρά σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού λ . Ο υπηρέτης εξυπηρετεί όλους τους αφικνούμενους πελάτες και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές B που έχουν συνάρτηση κατανομής $B(x)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $b(x)$, και πεπερασμένες πρώτες ροπές $E[B]$ και $E[B^2]$. Επιπροσθέτως, υποθέτουμε ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης δεν γίνεται να είναι μηδενικοί, δηλαδή $B(0) = 0$, και ορίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes $B^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dB(x)$.

Ο πελάτης που εισέρχεται στο σύστημα, ξεκινά κατευθείαν να εξυπηρετείται είτε βρίσκει ελεύθερο τον υπηρέτη, είτε όχι. Στην δεύτερη περίπτωση, ωθεί τον διακοπτόμενο πελάτη, με πιθανότητα θ , στην ουρά αναμονής και, με πιθανότητα $1 - \theta$, τον εκτοπίζει από το σύστημα. Ο χώρος αναμονής λειτουργεί με την πειθαρχία FCFS, δηλαδή ο πελάτης που έφτασε νωρίτερα έχει προτεραιότητα σε σχέση με τους υπολοίπους. Ολοκληρώνοντας μια εξυπηρέτηση, ο υπηρέτης πληροφορείται για το πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής. Αν αυτό είναι θετικό, τότε παραμένει στην θέση του έως ότου εισέλθει στον χώρο εξυπηρέτησης είτε νέος πελάτης, είτε ο επικεφαλής της ουράς. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, ο επικεφαλής της ουράς «ανταγωνίζεται» τον νεοεισελθόντα πελάτη για το ποιος θα καταφέρει να φτάσει πρώτος στον υπηρέτη. Θέτουμε H , την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον χρόνο επαναπροσπάθειας πελάτη της ουράς να εισέλθει στον χώρο εξυπηρέτησης με συνάρτηση κατανομής $H(x)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $h(x)$ και μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes $H^*(s)$. Αν, από την άλλη, το πλήθος πελατών, μετά την ολοκλήρωση μιας εξυπηρέτησης είναι μηδενικό, ο υπηρέτης απενεργοποιείται μέχρι την επόμενη άφιξη πελάτη. Όταν πραγματοποιηθεί αυτή, απαιτείται ένα χρονικό διάστημα για να εκκινηθεί και να είναι σε θέση να εξυπηρετήσει εκ νέου ο υπηρέτης. Την τυχαία μεταβλητή, που εκφράζει τον χρόνο αυτό, την συμβολίζουμε με S η οποία ακολουθεί την κατανομή με συνάρτηση $S(x)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $s(x)$ και μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes $S^*(s)$ με τις δύο πρώτες ροπές, $E[S]$ και $E[S^2]$, να είναι πεπερασμένες. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, νέοι αφικνούμενοι πελάτες τοποθετούνται στην ουρά χωρίς να αλλάζει κάτι από τα παραπάνω.

Αντίστοιχα με την προηγούμενη παράγραφο, η στοχαστική συμπεριφορά του συστήματος μπορεί να περιγραφεί από την στοχαστική διαδικασία $\{N(t); t \geq 0\} = \{(C(t), X(t), \xi(t)); t \geq 0\}$, όπου το $C(t)$ προσδιορίζει την κατάσταση του υπηρέτη (0 αν είναι αδρανής, 1 αν είναι απασχολημένος και 2 αν βρίσκεται σε διαδικασία επανεκκίνησης) και το $X(t)$ αναφέρεται στο πλήθος των πελατών που βρίσκονται στην ουρά. Το $\xi(t)$ εκφράζει τα εξής:

- i. αν $C(t) = 0$ και $X(t) > 0$, εκφράζει τον χρόνο που έχει περάσει βρισκόμενο

το σύστημα σε κατάσταση προσπάθειας των πελατών να εισέλθουν,

- ii. αν $C(t) = 1$ και $X(t) \geq 0$, εκφράζει τον παρελθόντα χρόνο εξυπηρέτησης και
- iii. αν $C(t) = 2$ και $X(t) \geq 0$, εκφράζει τον χρόνο που έχει δαπανήσει έως τώρα ο υπηρέτης στην προετοιμασία του, ώστε να εγκατασταθεί και πάλι στον χώρο εξυπηρέτησης.

Η στοχαστική διαδικασία $\{N(t); t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή. Σε ό,τι ακολουθήσει παραλείπουμε το $\xi(t)$ και δουλεύουμε μόνο με το ζευγάρι $(C(t), X(t))$ που έχει χώρο καταστάσεων το σύνολο $E = \{0, 1, 2\} \times \mathbb{Z}_{>0}$. Επιπλέον, ορίζουμε τους δεσμευμένους ρυθμούς περάτωσης εξυπηρέτησης, επιτυχούς επανεισόδου και επιτυχούς επανεκκίνησης του υπηρέτη, αντίστοιχα, ως εξής:

$$\beta(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)}, \eta(x) = \frac{h(x)}{1 - H(x)}, \alpha(x) = \frac{s(x)}{1 - S(x)}.$$

Για να καταφέρουμε να συναγάγουμε μια συνθήκη ύπαρξης της οριακής κατανομής του συστήματος πρέπει, αρχικά, να εξετάσουμε την εργοδικότητά του. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε την εμφυτευμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα του πλήθους πελατών σε στιγμές αναχωρήσεων, αμέσως μετά από ολοκληρώσεις εξυπηρέτησεων. Η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος αφορά καταστάσεις όπου το πλήθος των πελατών στην ουρά είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι χρόνοι επανεκκίνησης του υπηρέτη είναι πεπερασμένοι, μας δίνει τη δυνατότητα να μπορούμε να αγνοήσουμε τους χρόνους αυτούς στη μελέτη μας για τη συνθήκη ευστάθειας. Θέτουμε, λοιπόν, η_k να είναι η στιγμή αναχώρησης του k -οστού πελάτη που ολοκλήρωσε την εξυπηρέτησή του. Ο συγκεκριμένος πελάτης ξεκινά να εξυπηρετείται την στιγμή $\sigma_k = \eta_{k-1} + T_k$, όπου το T_k προσδιορίζει τον τυχαίο χρόνο κατά τον οποίο ο υπηρέτης παρέμεινε κενός περιμένοντας τον επόμενο πελάτη. Ορίζουμε $X_k = X(\eta_k+)$ το πλήθος πελατών στην ουρά αμέσως μετά τη στιγμή η_k . Έτσι, η ακολουθία $\{X_k; k \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου η οποία είναι εμφυτευμένη στο σύστημά μας και μπορούμε εύκολα να δούμε ότι είναι αδιαχώριστη και απεριοδική στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{Z}_{>0}$. Μάλιστα, για την X_k ισχύει η παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$X_k = X_{k-1} - B_k + A_k,$$

όπου A_k είναι το πλήθος των πελατών που παραπέμφθηκαν στην ουρά μετά από διακοπή της εξυπηρέτησής τους κατά το χρονικό διάστημα $\eta_k - \sigma_k$, $B_k = 0$, αν ο πελάτης που ξεκίνησε να εξυπηρετείται τη στιγμή σ_k ήταν νεοεισελθών και $B_k = 1$, αν ήταν ο επικεφαλής της ουράς.

Από τα παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες της Bernoulli τυχαίας μεταβλητής B_k :

$$\begin{aligned} \Pr[B_k = 0 | X_{k-1} = n] &= 1 - H^*(\lambda)U(n), \\ \Pr[B_k = 1 | X_{k-1} = n] &= H^*(\lambda)U(n), n \in \mathbb{N}_{>0}, \end{aligned}$$

όπου:

$$U(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n > 0 \\ 0, & \text{αν } n \leq 0. \end{cases}$$

Είναι εμφανές ότι η ποσότητα $\eta_k - \xi_k$ δηλώνει τον χρόνο παραμονής του k -οστού πελάτη με ολοκληρωμένη εξυπηρέτηση στο σύστημα και, για $k \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι:

$$\eta_k - \xi_k = \sum_{j=1}^n V_j + B, n = 1, 2, 3, \dots$$

όπου το n δηλώνει τον αριθμό των πελατών που εισήλθαν στο σύστημα κατά τη διάρκεια παραμονής του πελάτη αυτού, το $V_j, j = 1, 2, \dots, n$, δηλώνει τον χρόνο παραμονής του κάθε ενός από αυτούς και το B αποτελεί έναν χρόνο εξυπηρέτησης χωρίς διακοπή.

Από τη στιγμή που νέοι πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson ρυθμού λ , η πιθανότητα να μην υπάρχει διακοπή εξυπηρέτησης είναι ίση με

$$B^*(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dB(x)$$

Έπειτα, θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής A_k :

$$\begin{aligned} \Pr[A_k = n] &= \sum_{j=0}^{+\infty} \Pr[A_k = n, M = n + j] \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \Pr[A_k = n | M = n + j] \cdot \Pr[M = n + j], \end{aligned}$$

όπου η τυχαία μεταβλητή M δηλώνει το πλήθος των διακοπών εξυπηρέτησεων λόγω άφιξης νέου πελάτη στο σύστημα. Από τα παραπάνω, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η τυχαία μεταβλητή M ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας (διακοπής εξυπηρέτησης) $B^*(\lambda)$. Συνεπώς,

$$\Pr[M = m] = (1 - B^*(\lambda))^m B^*(\lambda), m = 0, 1, 2, \dots$$

Δεδομένου, λοιπόν, ότι η πιθανότητα πελάτη να παραπεμφθεί στην ουρά αναμονής λόγω νέας άφιξης είναι ίση με θ , ισχύει ότι:

$$\Pr[A_k = n | M = n + j] = \binom{n+j}{n} \theta^n (1-\theta)^j, 0 < \theta < 1.$$

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι:

$$\Pr[A_k = n] = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n+j}{n} \theta^n (1-\theta)^j (1 - B^*(\lambda))^{n+j} B^*(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= B^*(\lambda)[\theta(1 - B^*(\lambda))]^n \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n+j}{n} [(1-\theta)(1 - B^*(\lambda))]^j \\
\Rightarrow \Pr[A_k = n] &= \frac{B^*(\lambda)[\theta(1 - B^*(\lambda))]^n}{[1 - (1-\theta)(1 - B^*(\lambda))]^{n+1}}, n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

και η αντίστοιχη μέση τιμή:

$$E[A_k] = \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot \Pr[A_k = n] = \frac{\theta(1 - B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)}.$$

Σκοπός μας είναι να συναγάγουμε μια συνθήκη ευστάθειας για το συγκεκριμένο μοντέλο. Για να επιτευχθεί αυτό, θα παραθέσουμε το παρακάτω θεώρημα και την απόδειξή του.

Θεώρημα 1 Η ανισότητα $\frac{\theta(1-B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)} < H^*(\lambda)$ είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ευστάθειας για το σύστημά μας.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Foster, όπως κάναμε και στην παράγραφο 4.2. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα θέσουμε $f(n) = n$, το οποίο έχει ως συνέπεια ότι:

$$\chi_n = E[X_k - X_{k-1} | X_{k-1} = n] = -E[B_k] + E[A_k].$$

Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\chi_n = -U(n)H^*(\lambda) + \frac{\theta(1 - B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)} = \begin{cases} \frac{\theta(1-B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)}, & \text{αν } n = 0 \\ -H^*(\lambda) + \frac{\theta(1-B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)}, & \text{αν } n > 0. \end{cases}$$

Έτσι, ισχύει ότι $|\chi_n| < \infty, n \in \mathbb{N}$, και εφόσον $\frac{\theta(1-B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)} < H^*(\lambda)$, τότε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \chi_n < 0, n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς, η σχέση $\frac{\theta(1-B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)H^*(\lambda)} < 1$ αποτελεί ικανή συνθήκη ευστάθειας για την εμφυτευμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_k; k \in \mathbb{N}\}$.

Η ίδια ανισότητα είναι, επίσης, και αναγκαία για την ευστάθεια. Όπως τονίζεται στο (Sennot, Humblet & Tweedie (1982)) μπορούμε να εγγυηθούμε την αστάθεια της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_k; k \in \mathbb{N}\}$, αν ικανοποιείται η συνθήκη του Karlan που διατυπώνεται ως εξής: $\chi_n < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ για το οποίο ισχύει ότι $\chi_n \geq 0$ για $n \geq n_0$. Έτσι, η σχέση $\frac{\theta(1-B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)} \geq H^*(\lambda)$ υποδηλώνει την αστάθεια της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Από τη στιγμή που η διαδικασία αφίξεων πελατών είναι Poisson, η ιδιότητα PA-STA σε συνδυασμό με το θεώρημα του Burke (Cooper (1981)) μας οδηγεί στο

συμπέρασμα ότι η οριακή κατανομή της $\{N(t); t \geq 0\} = \{(C(t), X(t)); t \geq 0\}$ υπάρχει αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη του Θεωρήματος 1. \square

Το σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας

Σε αυτήν την παράγραφο, θα παραθέσουμε αναλυτικές αποδείξεις για την από κοινού κατανομή ισορροπίας του πλήθους πελατών στην ουρά και της κατάστασης του υπηρέτη, μέσω πιθανογεννητριών.

Για τη στοχαστική διαδικασία $\{N(t); t \geq 0\}$, ορίζουμε την από κοινού πιθανότητα:

$$R_0(t) = \Pr[C(t) = 0, X(t) = 0], t \geq 0$$

και τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας:

$$R_n(x, t)dx = \Pr[C(t) = 0, X(t) = n, x \leq \xi(t) < x + dx], t \geq 0, x \geq 0, n \in \mathbb{N}_{>0},$$

$$P_n(x, t)dx = \Pr[C(t) = 1, X(t) = n, x \leq \xi(t) < x + dx], t \geq 0, x \geq 0, n \in \mathbb{N},$$

και

$$S_n(x, t)dx = \Pr[C(t) = 2, X(t) = n, x \leq \xi(t) < x + dx], t \geq 0, x \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Δεδομένης της συνθήκης εργοδικότητας, $\frac{\theta(1-B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)} < H^*(\lambda)$, υπάρχει η οριακή πιθανότητα $R_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} R_0(t)$ και οι οριακές πυκνότητες:

$$R_n(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} R_n(x, t), x \geq 0, n \in \mathbb{N}_{>0},$$

$$P_n(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_n(x, t), x \geq 0, n \in \mathbb{N},$$

$$S_n(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} S_n(x, t), x \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Από την τεχνική συμπληρωματικής μεταβλητής (Attahiru & Srinivasa (2000)) προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\lambda R_0 = \int_0^{+\infty} R_0(x)\beta(x)dx, \quad (56)$$

$$\frac{dR_n(x)}{dx} = -(\lambda + \eta(x))R_n(x), x > 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}_{>0} \quad (57)$$

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = -(\lambda + \beta(x))P_n(x), x > 0 \text{ και } n \in \mathbb{N} \quad (58)$$

$$\frac{dS_0(x)}{dx} = -(\lambda + \alpha(x))S_0(x), x > 0 \quad (59)$$

$$\frac{dS_n(x)}{dx} = -(\lambda + \alpha(x))S_n(x), x > 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}_{>0} \quad (60)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του παραπάνω συστήματος σε κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$R_0(0) = \int_0^{+\infty} R_1(x)\eta(x)dx + \lambda(1-\theta) \int_0^{+\infty} R_0(x)dx + \int_0^{+\infty} S_0(x)\alpha(x)dx \quad (61)$$

$$P_n(0) = \lambda\theta \int_0^{+\infty} P_{n-1}(x)dx + \lambda(1-\theta) \int_0^{+\infty} P_n(x)dx + \int_0^{+\infty} R_{n+1}(x)\eta(x)dx \\ + \int_0^{+\infty} S_n(x)\alpha(x)dx + \lambda \int_0^{+\infty} R_n(x)dx, n \in \mathbb{N}_{>0} \quad (62)$$

$$R_n(0) = \int_0^{+\infty} P_n(x)\beta(x)dx, n \in \mathbb{N}_{>0} \quad (63)$$

$$S_n(0) = \lambda R_0 \delta_{n0}, n \in \mathbb{N} \quad (64)$$

και η εξίσωση κανονικοποίησης:

$$R_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} R_n(x)dx + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} P_n(x)dx + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x)dx = 1 \quad (65)$$

Για να καταφέρουμε να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (56)-(64) θα χρησιμοποιήσουμε τις πιθανογεννήτριες των συναρτήσεων $R_n(x)$, $P_n(x)$, $S_n(x)$, τις οποίες ορίζουμε ως εξής:

$$R(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(x)z^n, |z| < 1$$

$$P(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)z^n, |z| < 1$$

και

$$S(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x)z^n, |z| < 1.$$

Μετά από πράξεις και δεδομένης της συνθήκης ευστάθειας, $\frac{\theta(1-B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)} < H^*(\lambda)$, προκύπτει ότι:

$$R(x, z) = \frac{R_0\lambda z \{(1-\theta+\theta z)(1-B^*(\lambda)) - [1-B^*(\lambda)S^*(\lambda(1-z))]\}}{z-z[1-B^*(\lambda)](1-\theta+\theta z) - B^*(\lambda)[H^*(\lambda)+z(1-H^*(\lambda))]} \\ \times e^{-\lambda x - \int_0^x \eta(u)du}, \quad (66)$$

$$P(x, z) = \frac{R_0\lambda \{zS^*(\lambda(1-z)) - [H^*(\lambda)+z(1-H^*(\lambda))]\} e^{-\lambda x - \int_0^x \beta(u)du}}{z-z[1-B^*(\lambda)](1-\theta+\theta z) - B^*(\lambda)[H^*(\lambda)+z(1-H^*(\lambda))]}, \quad (67)$$

και

$$S(x, z) = R_0\lambda e^{-\lambda(1-z)x - \int_0^x \alpha(u)du}, \quad (68)$$

όπου

$$S^*(\lambda(1-z)) = \int_0^\infty \alpha(x) e^{-\int_0^x \alpha(u) du - \lambda(1-z)x} dx,$$

$$H^*(\lambda) = \int_0^\infty \eta(x) e^{-\int_0^x \eta(u) du - \lambda x} dx,$$

$$\text{και } B^*(\lambda) = \int_0^\infty \beta(x) e^{-\int_0^x \beta(u) du - \lambda x} dx,$$

με μόνη μη υπολογισμένη ποσότητα να είναι το R_0 , το οποίο θα βρεθεί παρακάτω.

Τώρα, αντίστοιχα με τη προηγούμενη παράγραφο, ορίζουμε τις περιθώριες πιθανογεννήτριες:

$$R(z) = \int_0^\infty R(x, z) dx, P(z) = \int_0^\infty P(x, z) dx \text{ και } S(z) = \int_0^\infty S(x, z) dx$$

οι οποίες, μετά από πράξεις, σε συνδυασμό με τις σχέσεις (66)-(68) και δεδομένης της συνθήκης εργοδικότητας, $\frac{\theta(1-B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)} < H^*(\lambda)$, μας δίνουν ότι:

$$R(z) = \frac{R_0 z [1 - H^*(\lambda)] \{ (1 - \theta + \theta z) (1 - B^*(\lambda)) - [1 - B^*(\lambda) S^*(\lambda(1-z))] \}}{(1-z) \{ \theta z [1 - B^*(\lambda)] - B^*(\lambda) H^*(\lambda) \}},$$

$$P(z) = \frac{R_0 [1 - B^*(\lambda)] \{ z S^*(\lambda(1-z)) - [H^*(\lambda) + z(1 - H^*(\lambda))] \}}{(1-z) \{ \theta z [1 - B^*(\lambda)] - B^*(\lambda) H^*(\lambda) \}}$$

και

$$S(z) = \frac{R_0 [1 - S^*(\lambda(1-z))]}{(1-z)}.$$

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψιν την συνθήκη κανονικοποίησης (65): $R_0 + R(1) + P(1) + S(1) = 1$, προκύπτει ότι:

$$R_0 = \frac{B^*(\lambda) H^*(\lambda) - \theta [1 - B^*(\lambda)]}{[\lambda E(S) + H^*(\lambda)] [(1 - \theta) + \theta B^*(\lambda)]}.$$

Αποτελέσματα

Θα ορίσουμε, όπως πριν, την πιθανογεννήτρια $\Lambda(z)$, η οποία αναφέρεται στο πλήθος των πελατών στην ουρά αναμονής και δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \Lambda(z) &= R_0 + S(z) + P(z) + R(z) \\ &= \frac{P_0 \left\{ \begin{array}{l} z B^*(\lambda) H^*(\lambda) + z S^*(\lambda(1-z)) [1 - B^*(\lambda) H^*(\lambda)] \\ - [H^*(\lambda) + z(1 - H^*(\lambda))] + \theta z (1-z) (1 - B^*(\lambda)) H^*(\lambda) \\ + (1 - S^*(\lambda(1-z))) [z \theta (1 - B^*(\lambda)) - B^*(\lambda) H^*(\lambda)] \end{array} \right\}}{(1-z) [\theta z (1 - B^*(\lambda)) - B^*(\lambda) H^*(\lambda)]} \quad (33) \end{aligned}$$

και την $K(z)$, η οποία αναφέρεται στο πλήθος των πελατών στο σύστημα (συμπεριλαμβανομένου, δηλαδή, και του ενδεχόμενου πελάτη που εξυπηρετείται) και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} K(z) &= R_0 + z S(z) + z P(z) + R(z) \\ &= \left\{ \frac{[B^*(\lambda) H^*(\lambda) - \theta (1 - B^*(\lambda))]}{[B^*(\lambda) H^*(\lambda) - \theta z (1 - B^*(\lambda))]} \right\} \left\{ \frac{[B^*(\lambda) + (1 - \theta) z (1 - B^*(\lambda))]}{[1 - \theta + \theta B^*(\lambda)]} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{z (1 - S^*(\lambda(1-z))) + (1-z) H^*(\lambda)}{(1-z) [\lambda E(S) + H^*(\lambda)]} \right\}. \end{aligned}$$

Έχοντας πραγματοποιήσει τους παραπάνω υπολογισμούς και πάντα δεδομένης της συνθήκης εργοδικότητας, $\frac{\theta(1-B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)} < H^*(\lambda)$, μπορούμε να εξάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- i. Η πιθανότητα, P_R , ο υπηρέτης να είναι ελεύθερος κατά τη διάρκεια προσπαθειών πελάτη να εισέλθει στο σύστημα:

$$P_R = \lim_{z \rightarrow 1} R(z) = \frac{[1 - H^*(\lambda)] \{ \theta (1 - B^*(\lambda)) + \lambda E(S) B^*(\lambda) \}}{[\lambda E(S) + H^*(\lambda)] [1 - \theta + \theta B^*(\lambda)]}.$$

- ii. Η πιθανότητα, P_B , ο υπηρέτης να είναι απασχολημένος:

$$P_B = \lim_{z \rightarrow 1} P(z) = \frac{[1 - B^*(\lambda)]}{[1 - \theta + \theta B^*(\lambda)]}.$$

- iii. Η πιθανότητα, P_S , ο υπηρέτης να είναι σε κατάσταση επανεγκατάστασης:

$$P_S = \lim_{z \rightarrow 1} S(z) = \frac{\lambda E(S) \{ B^*(\lambda) H^*(\lambda) - \theta [1 - B^*(\lambda)] \}}{[\lambda E(S) + H^*(\lambda)] [1 - \theta + \theta B^*(\lambda)]}.$$

- iv. Η πιθανότητα, P_I , ο υπηρέτης να είναι σε αδράνεια ή ελεύθερος:

$$P_I = R_0 + P_R + P_S = \frac{B^*(\lambda) - \theta [1 - B^*(\lambda)]}{[1 - \theta + \theta B^*(\lambda)]}.$$

- v. Η πιθανότητα η ουρά να είναι άδεια:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= R_0 + S(0) + P(0) + R(0) \\ &= \left\{ \frac{B^*(\lambda) H^*(\lambda) - \theta [1 - B^*(\lambda)]}{B^*(\lambda) [(1 - \theta) + \theta B^*(\lambda)]} \right\} \left\{ \frac{1 + B^*(\lambda) (1 - S^*(\lambda))}{\lambda E(S) + H^*(\lambda)} \right\}. \end{aligned}$$

- vi. Ορίζουμε ως μήκος ενός πλήρους κύκλου απασχόλησης, Z , το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές αφίξεις πελατών που βρίσκουν το σύστημα κενό. Η μέση τιμή του Z μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

Το R_0 ισούται με την πιθανότητα το σύστημα να είναι άδαιο. Με άλλα λόγια, αποτελεί το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι άδαιο. Επίσης, ο μέσος κύκλος αργίας είναι ίσος με $\frac{1}{\lambda}$ λόγω των εκθετικών χρόνων αφίξεων. Τελικά, μέσω του Στοιχειώδους Ανανεωτικού Θεωρήματος (Σ.Α.Θ.), παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\text{Μέσο μήκος κύκλου αργίας}}{\text{Μέσο μήκος κύκλου πλήρους απασχόλησης}} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{E(Z)} \\ &\Rightarrow E(Z) = \frac{\frac{1}{\lambda}}{R_0} \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την έκφραση του R_0 που υπολογίσαμε παραπάνω, προκύπτει ότι:

$$E(Z) = \frac{1}{R_0} = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{[\lambda E(S) + H^*(\lambda)] [(1 - \theta) + \theta B^*(\lambda)]}{[B^*(\lambda)H^*(\lambda) - \theta(1 - B^*(\lambda))]} \right\}.$$

- vii. Ορίζουμε, T_1 , το χρονικό διάστημα όπου ο υπηρέτης είναι αδρανής ή άδειος κατά τη διάρκεια ενός πλήρους κύκλου απασχόλησης, το οποίο έχει μέση τιμή:

$$E(T_1) = R(1)E(Z) = \frac{[1 - H^*(\lambda)]}{\lambda} \left\{ \frac{\theta(1 - B^*(\lambda)) + B^*(\lambda)\lambda E(S)}{B^*(\lambda)H^*(\lambda) - \theta[1 - B^*(\lambda)]} \right\}.$$

- viii. Ορίζουμε, T_2 , το χρονικό διάστημα όπου υπάρχει πελάτης στον χώρο εξυπηρέτησης κατά τη διάρκεια ενός πλήρους κύκλου απασχόλησης, το οποίο έχει μέση τιμή:

$$E(T_2) = P(1)E(Z) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{(1 - B^*(\lambda)) [\lambda E(S) + H^*(\lambda)]}{B^*(\lambda)H^*(\lambda) - \theta[1 - B^*(\lambda)]} \right\}.$$

- ix. Ορίζουμε, T_3 , το χρονικό διάστημα όπου ο υπηρέτης βρίσκεται σε διαδικασία επανεγκατάστασης κατά τη διάρκεια ενός πλήρους κύκλου απασχόλησης, το οποίο έχει μέση τιμή:

$$E(T_3) = S(1)E(Z).$$

- x. Ορίζουμε σαν κύκλο συνεχούς λειτουργίας, Q , το χρονικό διάστημα μεταξύ μιας άφιξης πελάτη που βρίσκει άδειο σύστημα και μιας αναχώρησης πελάτη που αφήνει πίσω του άδειο σύστημα. Επίσης, αντίστοιχα με το αποτέλεσμα (vi), το $1 - R_0$ εκφράζει το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα δεν είναι άδειο. Επομένως, από το Σ.Α.Θ., το $E(X)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$1 - R_0 = \frac{E(X)}{E(Z)} \Rightarrow E(X) = E(Z) \cdot (1 - R_0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(X) &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_0} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\{\lambda E(S) [1 - \theta + \theta B^*(\lambda)] + (1 - B^*(\lambda)) [H^*(\lambda) + \theta(1 - H^*(\lambda))]\}}{\{B^*(\lambda)H^*(\lambda) - \theta[1 - B^*(\lambda)]\}}. \end{aligned}$$

- xi. Το μέσο πλήθος πελατών, L_R , στη ουρά αναμονής σε κατάσταση ισορροπίας υπολογίζεται παραγωγίζοντας την $\Lambda(z)$ και θέτοντας $z = 1$:

$$\begin{aligned} L_R = \Lambda'(1) &= \left(\frac{\frac{\lambda^2 E(S^2)}{2}}{\lambda E(S) + H^*(\lambda)} \right) + \left(\frac{1 - B^*(\lambda)H^*(\lambda)}{(1 - \theta) + \theta B^*(\lambda)} \right) \\ &\times \left\{ \frac{\lambda E(S)}{\lambda E(S) + H^*(\lambda)} + \frac{\theta(1 - B^*(\lambda))}{B^*(\lambda)H^*(\lambda) - \theta(1 - B^*(\lambda))} \right\}. \end{aligned}$$

- xii. Αντίστοιχα, το μέσο πλήθος πελατών, L_S , στο σύστημα (συμπεριλαμβανομένου και του ενδεχόμενου πελάτη που εξυπηρετείται) σε κατάσταση ισορροπίας υπολογίζεται παραγωγίζοντας την $K(z)$ και θέτοντας $z = 1$:

$$L_S = K'(1) = \left(\frac{\lambda E(S) + \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2}}{\lambda E(S) + H^*(\lambda)} \right) + \left(\frac{(1 - B^*(\lambda))}{(1 - \theta) + \theta B^*(\lambda)} \right) \times \left\{ 1 + \frac{\theta [1 - B^*(\lambda)H^*(\lambda)]}{[B^*(\lambda)H^*(\lambda) - \theta(1 - B^*(\lambda))]} \right\}.$$

- xiii. Ορίζουμε, W_R , τον μέσο χρόνο αναμονής πελάτη στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας, ο οποίος, με τη βοήθεια του Νόμου του Little, υπολογίζεται:

$$W_R = \frac{L_R}{\lambda_{\text{ουράς}}},$$

όπου $\lambda_{\text{ουράς}} = \lambda\theta P(1) + \lambda S(1)$ είναι ο ρυθμός αφίξεων πελατών στην ουρά αναμονής.

- xiv. Ορίζουμε, W_S , τον μέσο χρόνο παραναμονής πελάτη στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας, ο οποίος, με τη βοήθεια του Νόμου του Little, υπολογίζεται:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda_{\text{συστήματος}}},$$

όπου $\lambda_{\text{συστήματος}} = \lambda\theta P(1) + \lambda[S(1) + R(1) + R_0]$ είναι ο ρυθμός αφίξεων πελατών στο σύστημα.

4 Στρατηγική συμπεριφορά πελατών

Στην καθημερινή μας ζωή γινόμαστε συχνά πελάτες σε συστήματα εξυπηρέτησης. Τα φυσικά καταστήματα, τα τηλεφωνικά κέντρα και οι διαδικτυακές πλατφόρμες αγορών είναι μερικές μόνο από τις ουρές που γινόμαστε κομμάτι τους για να εξυπηρετηθούμε. Όπως είναι φυσικό, σκοπός κάθε πελάτη είναι να καταφέρει να εξυπηρετηθεί ποιοτικά και να διαθέσει τον λιγότερο δυνατό χρόνο. Έτσι, όλοι μπαίνουμε στη διαδικασία να σκεφτούμε τρόπους επίτευξης του παραπάνω. Δηλαδή, να καταστρώσουμε στρατηγικές. Για παράδειγμα, τι ώρα θα φτάσουμε στο κατάστημα. Παράλληλα, στρατηγικά σκέφτεται και ο διαχειριστής του συστήματος (καταστηματούχος, πολιτεία κ.λπ.) ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του ή να ελαχιστοποιήσει το κόστος του. Φερ' ειπείν, με ποιο τρόπο θα ταξινομήσει τους πελάτες ώστε να εξυπηρετηθούν ή τι τιμές θα επιβάλει στα προϊόντα του. Όλα τα παραπάνω, έχουν οδηγήσει στην ανάπτυξη πολλών μεθόδων διαχείρισης των καταστάσεων αυτών, μερικές από τις οποίες αναλύονται στο συγκεκριμένο κεφάλαιο.

4.1 Στρατηγική στην $M/M/1$ (LCFS-PR) ουρά

Περιγραφή μοντέλου

Πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού λ , με χρόνους εξυπηρέτησης που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ . Κάθε πελάτης λαμβάνει κέρδος R έπειτα από την επιτυχή του εξυπηρέτηση, ενώ πληρώνει C ανά μονάδα χρόνου παραμονής στην ουρά. Οι συναρτήσεις ωφέλειας των πελατών είναι όλες ίδιες και σκοπός κάθε πελάτη είναι να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Η πειθαρχία της ουράς είναι LCFS-PR. Οποιαδήποτε στιγμή, κάθε πελάτης έχει πλήρη γνώση για το μήκος της ουράς και τη θέση που βρίσκεται σε αυτήν. Έτσι, διατηρεί το δικαίωμα να αποχωρήσει από το σύστημα χωρίς επιπλέον κόστος όποτε εκείνος θελήσει, χωρίς να έχει τη δυνατότητα να επιστρέψει σε αυτό.

Στην πειθαρχία FCFS ένας νεοαφιχθέντας πελάτης τοποθετείται στο τέλος της ουράς με αποτέλεσμα να μην προκαλεί αρνητικές εξωτερικές επιδράσεις στους ήδη υπάρχοντες πελάτες, αλλά να προκαλεί στους μελλοντικούς. Από την άλλη, στην LCFS-PR συμβαίνει το αντίθετο. Ο πελάτης που μπαίνει στο σύστημα, λόγω του ότι τοποθετείται στην πρώτη θέση της ουράς, επιδρά αρνητικά στους πελάτες που είναι στην ουρά και δεν επηρεάζει τους πελάτες που πρόκειται να εισέλθουν στο μέλλον. Οι επιδράσεις αυτές αναφέρονται για να τονίσουμε τη διαφορά ατομικής και κοινωνικής ευημερίας σε αυτά τα συστήματα. Κάθε αφικνούμενος πελάτης, αγνοεί τις αρνητικές επιδράσεις που πρόκειται να προκαλέσει σε άλλους, διότι απλώς ενδιαφέρεται για τη δική του εξυπηρέτηση. Συνεπώς, ένας πελάτης ενδέχεται να εισέλθει στο σύστημα ακόμα και αν η αναμενόμενη ευημερία του είναι μικρότερη από την αναμενόμενη αθροιστική μείωση της ευημερίας πελατών που βρίσκονται ήδη εντός της ουράς. Οι πελάτες καλούνται, τελικά, να εισέλθουν και η απόφασή τους να αφορά το πότε θα αποχωρήσουν από το σύστημα. Δεν τίθεται, δηλαδή, θέμα μη εισόδου. Λόγω της αμνήμονης ιδιότητας των χρόνων εξυπηρέτησης, οι υ-

πολειπόμενοι χρόνοι για κάθε πελάτη που περιμένει στη ουρά είναι ανεξάρτητοι του μήκους της, αλλά και του χρόνου που έχει περάσει ο καθένας στη θέση εξυπηρέτησης στο παρελθόν. Έτσι, οι ομογενείς πελάτες συνεπάγονται ανεξάρτητους και ισόνομους χρόνους υπελειπόμενων χρόνων εξυπηρέτησης. Λόγω αυτού, ο πελάτης που αποφασίζει να αποχωρήσει από το σύστημα, προφανώς είναι ο τελευταίος της ουράς και δεν προκαλεί αρνητικές επιδράσεις στους πελάτες που παραμένουν. Η στρατηγική που χρησιμοποιείται σε αυτές τις περιπτώσεις αποσκοπεί στην εύρεση ενός κατωφλίου n^* για το πλήθος πελατών στην ουρά. Η υπέρβαση αυτού, οδηγεί τον τελευταίο στην αποχώρηση.

Επιπτώσεις στρατηγικών στην πειθαρχία LCFS-PR

Ακολουθώντας το παραπάνω μοντέλο, ένας πελάτης που διακόπτεται είναι εύκολο να σκεφτεί να αποχωρήσει και να εισέλθει εκ νέου στο σύστημα, σαν να είναι καινούργιος πελάτης. Τέτοιες συμπεριφορές πρέπει να μην επιτρέπονται όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Στην περίπτωση που δεν ισχύει αυτός ο περιορισμός, μια ελκυστική πολιτική που μπορεί να ακολουθηθεί είναι ο αφικνούμενος πελάτης να τοποθετείται στην προτελευταία θέση της ουράς. Με την ενέργεια αυτή, επιτυγχάνονται τέσσερα πράγματα:

- i. Ο τελευταίος της ουράς, παραμένει στη θέση του καθ' όλη τη διάρκεια της παραμονής του στο σύστημα και έτσι δεν επιφέρει αρνητικές επιδράσεις στο σύστημα.
- ii. Η συγκεκριμένη τεχνική απωθεί τους πελάτες να βγουν και να ξαναμπούν στο σύστημα, αφού ο μόνος που μπορεί να ωφεληθεί από την ενέργεια αυτή είναι ο πελάτης στο τέλος της ουράς. Παρ' όλα αυτά, η πολιτική που προαναφέραμε δημιουργεί ένα πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα απαρτίζεται από n πελάτες. Στην περίπτωση που ο n -οστός πελάτης αποχωρήσει, ο $(n-1)$ -οστός θα γίνει τελευταίος της ουράς και θα «κληρονομήσει» όλα τα αρνητικά αυτής της θέσης. Επομένως, ενδέχεται να προσφέρει αμοιβή στον n -οστό πελάτη ώστε να μην αποχωρήσει. Τέτοιου είδους πληρωμές θα πρέπει να απαγορεύονται. Ένας τρόπος να επιτευχθεί αυτό είναι αποκρύπτοντας τις ταυτότητες των πελατών.
- iii. Η διακοπές προκαλούν απώλειες εξυπηρέτησης και ωθούν τους πελάτες στην αποχώρηση. Με την παραπάνω πολιτική επιτυγχάνεται η μείωσή τους.
- iv. Οι πελάτες που δεν θέλουν να ρισκάρουν, δεν προτιμούν την πειθαρχία LCFS-PR, καθώς η ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης μπορεί να επιτευχθεί κατευθείαν, μπορεί, όμως, και να υπάρξει μεγάλη καθυστέρηση. Με άλλα λόγια, οι χρόνοι παραμονής στο σύστημα έχουν πολύ μεγαλύτερη διακύμανση. Το πρόβλημα αυτό, λύνεται με την καθιέρωση της παραπάνω πολιτικής.

Κοινωνική βελτιστοποίηση

Στη συγκεκριμένη παράγραφο, αναλύουμε μια στρατηγική κατωφλίου σύμφωνα με την οποία, όταν ένας πελάτης βρεθεί σε μία συγκεκριμένη απόσταση από τη

θέση εξυπηρέτησης, αποχωρεί από το σύστημα. Έστω, n^* το μέγιστο μέγεθος ουράς συμπεριλαμβανομένου και αυτού που εξυπηρετείται. Με άλλα λόγια, αν στο σύστημα με n^* πελάτες πραγματοποιηθεί άφιξη, το άτομο στο τέλος αυτής θα αποχωρήσει. Θέτουμε, επίσης, f_n το αναμενόμενο κέρδος του ατόμου που βρίσκεται στην n -οστή θέση δεδομένου ότι άμα υποχωρήσει μία επιπλέον θέση, θα αποχωρήσει από το σύστημα. Προφανώς, η f_n είναι γνησίως φθίνουσα ως προς n με το n^* να είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει ότι $f_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με τους (Hassin & Haviv (2003)), ισχύει ότι:

$$f_n = R \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+1}} - \frac{C}{\mu(1 - \rho)} \cdot \left[n - (n + 1)\rho \cdot \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho^{n+1}} \right]. \quad (69)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την (69) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} f_n \geq 0 &\Leftrightarrow f_n = R \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+1}} - \frac{C}{\mu(1 - \rho)} \cdot \left[n - (n + 1)\rho \cdot \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho^{n+1}} \right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{R\mu}{C} \geq \frac{(1 - \rho^{n+1}) \left[n - (n + 1)\rho \cdot \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho^{n+1}} \right]}{(1 - \rho)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{R\mu}{C} \geq \frac{n(1 - \rho^{n+1}) - n\rho(1 - \rho^n) - \rho(1 - \rho^n)}{(1 - \rho)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{R\mu}{C} \geq \frac{n(1 - \rho) - \rho(1 - \rho^n)}{(1 - \rho)^2}. \end{aligned}$$

Θέτουμε το δεξί μέλος της ανισότητας:

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{n(1 - \rho) - \rho(1 - \rho^n)}{(1 - \rho)^2} = \frac{n - \sum_{i=1}^n \rho^i}{1 - \rho} = \sum_{i=1}^n i\rho^{n-i} \\ &\Leftrightarrow g(n) = \sum_{i=0}^{n-1} (n - i)\rho^i. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $g(n)$ είναι μη φραγμένη και γνησίως αύξουσα ως προς n για σταθερό $\rho > 0$ και $g(0) = 0$. Συνεπώς, υπάρχει μοναδικό $n^* \in \mathbb{N}_{>0}$ για το οποίο ισχύει ότι $g(n^*) \leq \frac{R\mu}{C} < g(n^* + 1)$. Αυτό το n^* είναι ο μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός πελατών στο σύστημα και αποτελεί τη βέλτιστη κοινωνική λύση.

4.2 Στρατηγική σε σύστημα πειθαρχίας (LCFS-PR) με πεπερασμένο πλήθος εισερχόμενων πελατών

Περιγραφή μοντέλου

Πεπερασμένο πλήθος πελατών $N = \{1, 2, \dots, n\}$ επιθυμούν να εξυπηρετηθούν από έναν μοναδικό υπρέτη. Το σύστημα ανοίγει τη στιγμή 0 και δεν κλείνει μέχρι να εξυπηρετήσει το σύνολο των ατόμων. Η εξυπηρέτηση είναι ατομική και πραγματοποιείται σύμφωνα με την πειθαρχία LCFS-PR. Αν πελάτες φτάσουν ταυτόχρονα,

τότε ένα τίμιο πείραμα τύχης αποφασίζει ποιος θα έχει προτεραιότητα. Οι πελάτες δεν έχουν τη δυνατότητα να φτάσουν στο σύστημα πριν τη στιγμή 0 αν και, έτσι κι αλλιώς, ένας λογικός πελάτης δεν θα έπραττε έτσι λόγω της συγκεκριμένης πειθαρχίας. Συνεπώς, η στρατηγική ισορροπίας που πρόκειται να προσδιορίσουμε, ταυτίζεται με την αντίστοιχη του συστήματος που επιτρέπονται αφίξεις πριν τη στιγμή 0.

Υποθέτουμε ότι κάθε πελάτης $i, i \in \mathbb{N}$, φτάνει στο σύστημα ανεξάρτητα με τους υπόλοιπους, σύμφωνα με μία απόλυτα συνεχή συνάρτηση κατανομής $F_i, i \in \mathbb{N}$, όπου $F_i(t)$ ισούται με την πιθανότητα ο πελάτης i να έχει φτάσει στο σύστημα μέχρι τη χρονική στιγμή t . Ουσιαστικά, η συνάρτηση F_i είναι η στρατηγική του πελάτη i . Λόγω της απαγόρευσης αφίξεων πριν τη στιγμή 0, ισχύει ότι $F_i(t) = 0$ αν $t < 0$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ το σύνολο όλων των στρατηγικών και με \mathcal{F}^{-i} το σύνολο των στρατηγικών όλων των πελατών εκτός του πελάτη i .

Δεδομένου του συνόλου \mathcal{F} , υποθέτουμε ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι ανεξάρτητοι, ισόνομοι και έχουν συνάρτηση κατανομής S με $S(s) = 0$ για $s \leq 0$, καθώς η πιθανότητα ο χρόνος εξυπηρέτησης s να είναι αρνητικός, είναι μηδενική. Ορίζουμε, επίσης, $D_i(d|t, \mathcal{F}^{-i})$ να δηλώνει την πιθανότητα ο πελάτης i να έχει αποχωρήσει από το σύστημα τη στιγμή d , δεδομένου ότι εισήλθε σε αυτό τη στιγμή t και οι υπόλοιποι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με τη στρατηγική \mathcal{F}^{-i} . Τονίζεται εδώ ότι

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} D_i(d|t, \mathcal{F}^{-i}) = 1,$$

αφού η κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης S έχεις πεπερασμένες ροπές και το πλήθος των πελατών είναι, επίσης, πεπερασμένο. Επιπλέον, $D_i(d|t, \mathcal{F}^{-i}) = 0$ για $d \leq t$.

Υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες έχουν ταυτόσημες προτιμήσεις, σύμφωνα με τις οποίες επιθυμούν να εξυπηρετηθούν όσον το δυνατόν νωρίτερα με τη λιγότερη δυνατή παραμονή στη ουρά. Για να αποτυπώσουμε αυτές τις απαιτήσεις, ορίζουμε τη συνάρτηση $V(t, d)$ η οποία δηλώνει την ωφέλεια ενός πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα τη στιγμή t και αποχωρεί τη στιγμή $d \geq t$. Υποθέτουμε ότι η V είναι συνεχής, άνω φραγμένη, γνησίως αύξουσα ως προς t , γνησίως φθίνουσα ως προς d και για κάθε $c > 0$ η $V(t, t + c)$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς t με $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t, t + c) = -\infty$. Προφανώς, κάθε πελάτης αποσκοπεί στο να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφέλειά του. Έτσι, δεδομένου του \mathcal{F}^{-i} , θέτουμε $U_i(t, \mathcal{F}^{-i})$ να δηλώνει την αναμενόμενη ωφέλεια του πελάτη i που φτάνει στο σύστημα τη στιγμή t , όταν οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική \mathcal{F}^{-i} . Δηλαδή,

$$U_i(t, \mathcal{F}^{-i}) = \int_t^{+\infty} V(t, d) dD_i(d|t, \mathcal{F}^{-i}).$$

Εδώ, το ολοκλήρωμα είναι Lebesgue. Επιπροσθέτως, η αναμενόμενη ωφέλεια ενός πελάτη i που ακολουθεί τη στρατηγική F_i δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{U}_i(F_i, \mathcal{F}^{-i}) = \int_0^{+\infty} U_i(t, \mathcal{F}^{-i}) dF_i.$$

Τελικά, προκύπτει ένα παίγνιο ουρών το οποίο συμβολίζουμε με $\mathcal{G} = \langle n, V, S \rangle$.

Ανάλυση ισορροπίας

Ορισμός Το σύνολο στρατηγικών $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ αποτελεί στρατηγική ισορροπίας αν για κάθε πελάτη $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $s \geq 0$ και t τέτοιο ώστε $F(\omega) < F(t)$ για $\omega < t$, ισχύει ότι $U_i(t, \mathcal{F}^{-i}) \geq U_i(s, \mathcal{F}^{-i})$.

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ορισμός, η στιγμή t ορίστηκε έτσι ώστε η πιθανότητα άφιξης πελάτη, τότε, να είναι θετική. Όταν ένας πελάτης εισέρχεται στο σύστημα τη χρονική στιγμή t , η αναμενόμενη ωφέλειά του είναι μεγαλύτερη ή ίση από οποιαδήποτε άλλη στιγμή $s \geq 0$.

Λήμμα 1 Έστω το παίγνιο \mathcal{G} , $t \in \mathbb{R}$ και δύο σύνολα στρατηγικών \mathcal{F}^{-i} και $\tilde{\mathcal{F}}^{-i}$. Αν $D_i(d|t, \mathcal{F}^{-i}) \geq D_i(d|t, \tilde{\mathcal{F}}^{-i})$ για κάθε $d \in \mathbb{R}$, τότε $U_i(t, \mathcal{F}^{-i}) \geq U_i(t, \tilde{\mathcal{F}}^{-i})$.

Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι η συνάρτηση ωφέλειας V είναι γνησίως φθίνουσα ως προς το χρόνο αναχώρησης.

Λήμμα 2 Έστω το παίγνιο ουρών \mathcal{G} και το σύνολο στρατηγικών \mathcal{F} το οποίο αποτελεί στρατηγική ισορροπίας. Για κάθε $F_i \in \mathcal{F}$ και $t > 0$, ισχύει ότι $F_i(t) = \lim_{s \rightarrow t} F(s)$.

Λήμμα 3 Έστω το παίγνιο ουρών \mathcal{G} και το σύνολο στρατηγικών \mathcal{F} το οποίο αποτελεί στρατηγική ισορροπίας. Τότε το στήριγμα $\mathcal{S}(F_i)$ είναι συμπαγές σύνολο για όλα τα $F_i \in \mathcal{F}$.

Τα παραπάνω τρία Λήμματα αποδεικνύονται στο (Breinbjerg, Platz & Østerdal (2023)).

Τώρα, πρόκειται να ασχοληθούμε με την εύρεση συμμετρικής στρατηγικής ισορροπίας. Έτσι, υποθέτουμε ένα σύνολο στρατηγικών \mathcal{F} τέτοιο ώστε $F_i = F_j = F$ για όλα τα $F_i, F_j \in \mathcal{F}$. Βασικά αποτελέσματα της παραπάνω περίπτωσης, όπως η ύπαρξη και η μοναδικότητα, συνοψίζονται στο παρακάτω Θεώρημα, καθώς και κάποιες επιπλέον ιδιότητες.

Θεώρημα 2 Για κάθε παίγνιο ουρών \mathcal{G} , υπάρχει μοναδική στρατηγική F η οποία αποτελεί συμμετρική στρατηγική ισορροπίας. Επιπροσθέτως, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- i. Η $F(t)$ είναι συνεχής για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $F(0) = 0$.
- ii. Το στήριγμα $\mathcal{S}(F)$ του συνόλου στρατηγικών F είναι ένα κλειστό διάστημα $[0, b]$ για κάποιο $b > 0$.

Διαισθητικά μιλώντας, το Θεώρημα 2 λέει ότι σε κατάσταση ισορροπίας, η πελάτες φτάνουν σύμφωνα με μία συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση κατανομής που

εκτείνεται σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα που έχει αρχή την ώρα ανοίγματος του συστήματος.

Απόδειξη

Ξεκινάμε με το (i) σημειώνοντας ότι, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει συμμετρική ισορροπία F , η F δεν μπορεί να έχει μεταπήδηση τη στιγμή 0, διότι διαφορετικά κάθε πελάτης που φθάνει τότε, θα τον συνέφερε, τελικά, να φτάσει αμέσως μετά τη στιγμή 0. Η παρατήρηση αυτή, σε συνδυασμό με το Λήμμα 2, ολοκληρώνουν την απόδειξη του μέρους (i) του Θεωρήματος 2. Τα υπόλοιπα, αποδεικνύονται με τη βοήθεια των παρακάτω λημμάτων.

Λήμμα 4 Έστω το παίγνιο ουρών \mathcal{G} και F μία συμμετρική στρατηγική ισορροπίας για το \mathcal{G} . Τότε, το στήριγμα $\mathcal{S}(F)$ του συνόλου στρατηγικών F είναι συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη

Από τη στιγμή που η F είναι στρατηγική ισορροπίας, άμεση συνέπεια του Λήμματος 3 είναι ότι το $\mathcal{S}(F)$ είναι φραγμένο με supremum $0 < b < +\infty$. Επιπλέον, από το Λήμμα 2, η F είναι συνεχής και $F(0) = 0$. Επίσης, αφού η F δεν έχει άλματα, η αναμενόμενη ωφέλεια ενός πελάτη i παραμένει ίδια για κάθε $t \in \mathcal{S}(F)$. Τώρα, υποθέτουμε ότι το $\mathcal{S}(F)$ δεν είναι συνεκτικό, με συνέπεια να μπορεί να καλυφθεί από μία ένωση δύο ξένων και μη κενών υποσυνόλων. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει διάστημα $0 \leq t_1 < t_2 \leq b$, με $t_1, t_2 \in \mathcal{S}(F)$, για τα οποία ισχύει $F(t_1) = F(t_2)$. Με το παραπάνω, όμως, οδηγούμαστε σε αντίφαση του ορισμού της ισορροπίας αφού $U_i(t_1, F) > U_i(t_2, F)$. Η τελευταία σχέση ισχύει αν σκεφτούμε το εξής. Ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα τη στιγμή t_1 ξεκινάει κατευθείαν να εξυπηρετείται, λόγω της πειθαρχίας LCFS-PR που επικρατεί. Κατά το διάστημα $[t_1, t_2]$ δεν διαδραματίζεται καμία επίσκεψη. Από τη στιγμή, λοιπόν, που η συνάρτηση ωφέλειας V είναι γνησίως φθίνουσα ως προς την ώρα αναχώρησης, η σχέση $U_i(t_1, F) > U_i(t_2, F)$ είναι ορθή. Τελικά, οδηγούμαστε σε άτοπο και συνάγουμε το συμπέρασμα ότι η στρατηγική F με στήριγμα $\mathcal{S}(F)$ είναι συνεκτικό σύνολο. \square

Υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στρατηγική ισορροπίας F , το μέρος (ii) του Θεωρήματος 2 προκύπτει άμεσα από τα Λήμματα 3 και 4. Τώρα, σειρά έχει να εξετάσουμε την ύπαρξη της F συμμετρικής στρατηγικής ισορροπίας.

Λήμμα 5 Για κάθε παίγνιο ουρών \mathcal{G} , υπάρχει στρατηγική F η οποία είναι συμμετρική στρατηγική ισορροπίας.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το παραπάνω, ορίζοντας μια οικογένεια συναρτήσεων κατανομής $\{X_b\}_{0 < b < +\infty}$, όπου $X_b(s) = 1$ για $s \geq b$. Έπειτα, θα δείξουμε ότι υπάρχει μέλος $\{X_b\}$ της οικογένειας αυτής για το οποίο ισχύει ότι το $\mathcal{F}^{-i} = \{X_b, \dots, X_b\}$ είναι συμμετρική στρατηγική ισορροπίας. Θα θέσουμε $U_i(t, X_b)$ να είναι η αναμενόμενη ωφέλεια του πελάτη i φθάνοντας στο σύστημα τη στιγμή t , όταν

όλοι οι υπόλοιποι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με την στρατηγική X_b , δηλαδή όταν $\mathcal{F}^{-i} = \{X_b, \dots, X_b\}$. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι υπάρχει b τέτοιο ώστε: $U_i(t, X_b) = U_i(s, X_b)$ για κάθε $s, t \in [0, b]$ και $U_i(b, X_b) \geq U_i(q, X_b)$ για $q \geq b$. Να σημειωθεί ότι όποιο X_b ικανοποιεί αυτό το κριτήριο, θα ικανοποιεί και τα κριτήρια του ορισμού παραπάνω. Από την οπτική του πελάτη i , θα σκεφτόμαστε το b ως το ωρικό χρονικό σημείο όπου οι υπόλοιποι $n - 1$ πελάτες έχουν φτάσει στο σύστημα με βεβαιότητα. Έτσι, αν αυτοί ακολουθούν τη στρατηγική X_b , ο πελάτης i μπορεί να εισέλθει τη στιγμή b και να ξεκινήσει κατευθείαν την εξυπηρέτησή του, χωρίς να υπάρχει κάποιος που να μπορεί να τον διακόψει και λαμβάνοντας, τελικά, αναμενόμενη ωφέλεια ίση με $U_i(b, X_b)$. Κατασκευάζουμε την συνάρτηση κατανομής X_b σκεπτόμενοι ότι είναι το όριο μιας συγκλίνουσας και αναδρομικής ακολουθίας συναρτήσεων κατανομής $\{X_{b,h} | 0 < b < +\infty\}_{h \in \mathbb{N}}$. Για $0 < b < +\infty$ και $h \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την $X_{b,h} : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ τέτοια ώστε $X_{b,h}(s) = 1$ για $s \geq b$. Για να ορίσουμε την αναδρομική ακολουθία $X_{b,h} | 0 < b < +\infty, h \in \mathbb{N}$, ξεκινάμε εισάγοντας κάποιο συμβολισμό. Όπως και πριν, το $U_i(t, X)$ δηλώνει την αναμενόμενη ωφέλεια του πελάτη i εφόσον φτάσει στο σύστημα τη στιγμή t και οι υπόλοιποι ακολουθήσουν τη στρατηγική X . Τώρα, δεδομένων των t και $x \in [0, X(t)]$, θέτουμε $U_i(t, X, x)$ να είναι η αναμενόμενη ωφέλεια του πελάτη i ο οποίος εισέρχεται τη στιγμή t και η στρατηγική των άλλων είναι X με την ιδιαιτερότητα ότι η πιθανότητα να φτάσουν πριν τη στιγμή t είναι $X(t) - x$ και ακριβώς τη στιγμή x . Όταν, μάλιστα, φτάνουν ακριβώς τη στιγμή t έχουν προτεραιότητα σε σχέση με τον i . Από τη στιγμή που είναι δεδομένη η συμμετρία, από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε τα U_i με U και τα \tilde{U}_i με \tilde{U} . Έπειτα, ορίζουμε την αρχική συνάρτηση $X_{0,b}$ με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίσουμε ότι $U(t, X_{b,0}) \geq U(t, X_b)$ για $t < b$. Για να καταφέρουμε αυτό, ορίζουμε τη δείτρια συνάρτηση $I(t)$ τέτοια ώστε $I(t) = 1$ για $t \geq 0$ και $I(t) = 0$ διαφορετικά. Συνεπώς, θα σκεφτούμε την $\tilde{U}(t, I, x)$ σαν την αναμενόμενη ωφέλεια του πελάτη φτάνοντας τη στιγμή t , όταν οι υπόλοιποι πελάτες έχουν φτάσει ωρικότα από αυτόν με πιθανότητα $1 - x$ και ακριβώς τη στιγμή t , όπου θα έχουν προτεραιότητα σε σχέση με αυτόν, με πιθανότητα x . Στο σημείο αυτό, τονίζεται ότι η $\tilde{U}(t, I, x)$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς x . Δηλαδή, όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα οι υπόλοιποι πελάτες να φτάσουν ακριβώς τη στιγμή t , τόσο περισσότερο πρόκειται να περιμένει ο πελάτης i ώστε να ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του και να αποχωρήσει.

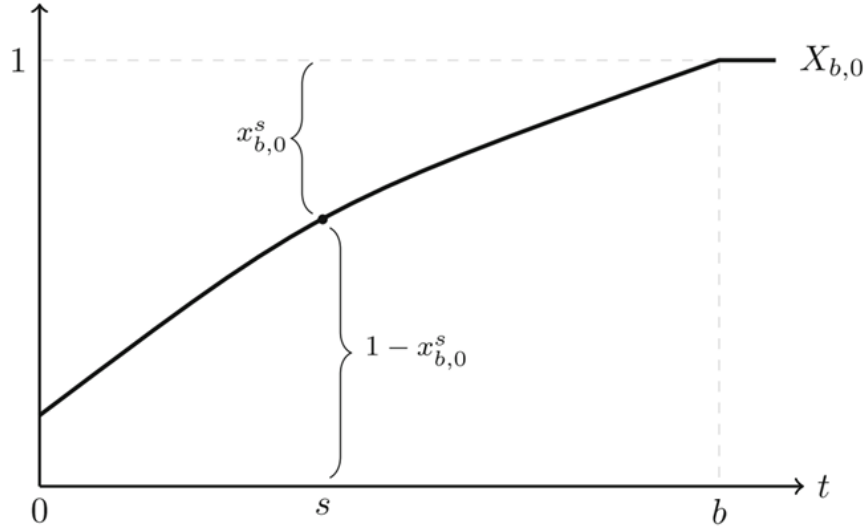
Μεταβάλλοντας την πιθανότητα των υπόλοιπων πελατών να φτάσουν ακριβώς τη στιγμή t και να λάβουν προτεραιότητα σε σχέση με τον πελάτη i , μπορούμε να προσδιορίσουμε το x , ώστε η αναμενόμενη ωφέλεια $\tilde{U}(t, I, x)$ να είναι τουλάχιστον όσο μεγάλη είναι και η αναμενόμενη ωφέλεια $U(b, X_b)$ σύμφωνα με την οποία έχουμε άφιξη τη στιγμή b και άμεση εξυπηρέτηση. Συμβολίζουμε, λοιπόν, αυτό το x με $x_{b,0}^t$ και το ορίζουμε ως εξής:

$$x_{b,0}^t = \max \left\{ x \in [0, 1] \mid \tilde{U}(t, I, x) \geq U(b, X_b) \right\}.$$

Εδώ, να τονιστεί και πάλι ότι, αφού η αναμενόμενη ωφέλεια είναι γνησίως φθίνουσα ως προς d , άφιξη κατά το διάστημα $0 \leq t < b$ και άμεση εξυπηρέτηση είναι πάντα καλύτερη από την $U(b, X_b)$. Έχοντας προσδιορίσει το $x_{b,0}^t$, μπορούμε, πλέον,

να ορίσουμε την αρχική συνάρτηση της ακολουθίας $X_{b,0}, X_{b,1}, X_{b,2}, \dots$, η οποία απεικονίζεται και γραφικά στην Εικόνα 1 ως εξής:

$$X_{b,0}(t) = \begin{cases} 1 - x_{b,0}^t & t \in [0, b) \\ 1 & t \geq b. \end{cases}$$



Εικόνα 1

Από τους Breinbjerg, Platz & Østerdal (2023) έχουμε την ανίσωση:

$$U(t, X_{b,0}) \geq \tilde{U}(t, I, x) \geq U(b, X_b).$$

Επίσης, θέτουμε $A_0(b)$ να αποτελεί την τελευταία στιγμή τέτοια ώστε $X_{b,0}(t) = 0$. Διαφορετικά, $A_0(b) = 0$. Έτσι, δεδομένου ότι η συνάρτηση ωφέλειας V είναι γνησίως φθίνουσα ως προς την ώρα αναχώρησης, από την κατασκευή του το $X_{b,0}$ είναι αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[A_0(b), b]$ και μη φθίνουσα στο $[0, b]$.

Στη συνέχεια, προχωράμε στον χαρακτηρισμό της αναδρομικής σχέσης των $X_{b,h}$ για κάθε $h > 0$ με παρόμοιο τρόπο. Αρχικά, υποθέτουμε ότι υπάρχει η $X_{b,h-1}$. Διαλέγουμε μία στιγμή $t \in [0, b)$ και θέτουμε $\tilde{U}(t, X_{b,h-1}, x)$ να είναι η αναμενόμενη ωφέλεια ενός πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα τη στιγμή t , όταν η πιθανότητα κάθε ενός από τους υπόλοιπους πελάτες να έχει φτάσει ήδη ή να φτάσει ακριβώς τη στιγμή t (και να αποκτήσει προτεραιότητα σε βάρους του άλλου) είναι $X_{b,h-1}(t) - x$ και x , αντίστοιχα. Ορίζουμε, ομοίως με πριν:

$$x_{b,h}^t = \max \left\{ x \in [0, X_{b,h-1}(t)] \mid \tilde{U}(t, X_{b,h-1}, x) \geq U(b, X_b) \right\}$$

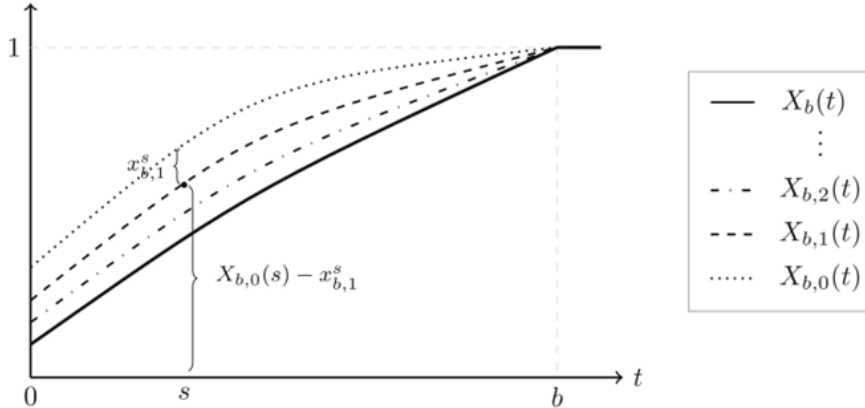
και

$$X_{b,h}(t) = \begin{cases} X_{b,h-1}(t) - x_{b,h}^t & t \in [0, b) \\ 1 & t \geq b. \end{cases}$$

Όπως πριν, προκύπτει από τους Breinbjerg, Platz & Østerdal (2023) ότι:

$$U(t, X_{b,h}) \geq \tilde{U}(t, X_{b,h-1}, x) \geq U(b, X_b)$$

Θέτουμε, πάλι, $A_h(b)$ να είναι η τελευταία στιγμή τέτοια ώστε $X_{b,h}(t) = 0$ και $A_0(b) = 0$, διαφορετικά. Ομοίως με πριν, ισχύει ότι η $X_{b,h}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[A_h(b), b]$. Αναδρομικά, προκύπτει η ακολουθία $X_{b,0}, X_{b,1}, X_{b,2}, \dots$ η οποία είναι φραγμένη και φθίνουσα ως προς $h \in \mathbb{N}$ και ως προς $t \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ συγκλίνει στο $X_b(t) = \lim_{h \rightarrow +\infty} X_{b,h}(t)$. Θέτουμε, επίσης, $A(b) = \lim_{h \rightarrow +\infty} A_h(b)$. Η Εικόνα 2 αναπαριστά ένα παράδειγμα της ακολουθίας $X_{b,0}, X_{b,1}, X_{b,2}, \dots$ στο οποίο φαίνεται η σύγκλιση στο X_b . Για κάθε μέλος του $\{X_b\}$, εξετάζουμε αν αντιπροσωπεύει μια στρατηγική ισορροπίας. Αρχικά, βλέπουμε από την κατασκευή της, ότι για κάθε $b \in (0, +\infty)$ η $\{X_b\}$ αποτελεί μια συνάρτηση κατανομής. Έπειτα, τονίζεται ότι, από τη στιγμή που το X_b πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $U_i(t, X_b) \geq U_i(s, X_b)$ για κάθε $t, s \in [0, b]$, ισχύει ότι $U(0, X_b) = U(A(b), X_b)$. Ωστόσο, αυτό ισχύει μόνο για τιμές του b έτσι ώστε $X_b(0) = 0$ και $A(b) = 0$. Τα παραπάνω αποδεικνύονται με τη βοήθεια του Λήμματος 2 και της σχέσης $A(b) > 0 \Rightarrow X_b(t) = 0$, για $t \in [0, A(b)]$. Επομένως, από τη στιγμή που κανένας πελάτης δεν θα επισκεφτεί το σύστημα κατά το χρονικό διάστημα $[0, A(b)]$, μια σωστή στρατηγική είναι η άφιξη τη στιγμή $t = 0$. Έτσι, ο συγκεκριμένος πελάτης θα εξυπηρετηθεί ανενόχλητος, χωρίς ρίσκο να διακοπεί η εξυπηρέτησή του πριν τη στιγμή $A(b)$.



Εικόνα 2

Μέχρι τώρα, το b ήταν σταθερό. Στο σημείο αυτό, ορίζουμε την οικογένεια συναρτήσεων $\{X_b\}_{0 < b < +\infty}$, όπου για κάθε b , το X_b είναι το όριο σύγκλισης της $\{X_{b,h} | 0 < b < +\infty\}_{h \in \mathbb{N}}$. Για κάθε b , εξετάζουμε αν η $\{X_b\}$ είναι στρατηγική ισορροπίας. Συγκεκριμένα, ορίζουμε μία τιμή του b για την οποία ικανοποιούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις.

- i. Η $\{X_b\}$ είναι μη φθίνουσα και συνεχής στο \mathbb{R}
- ii. $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_b(t) = 1$

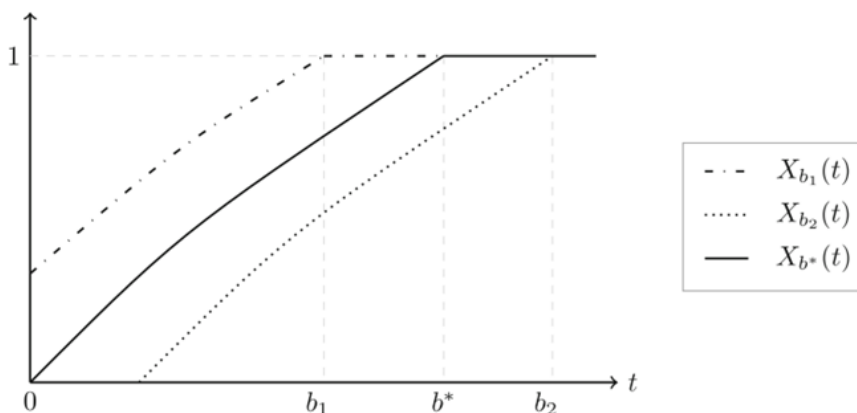
iii. Για κάθε πελάτη i , ισχύει ότι $U_i(t, X_b) \geq U_i(s, X_b)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου $0 < X_b(s) < X_b(t)$ για $s < t$ και $U_i(b, X_b) \geq U_i(q, X_b)$ για $q > b$.

Από την κατασκευή της X_b , τα (i) και (ii) ικανοποιούνται για κάθε $0 < b < +\infty$. Για να ισχύει και το (iii), θα πρέπει $X_b(0) = A(b) = 0$. Για να αποδείξουμε το τελευταίο, σκεφτόμαστε ότι η σχέση $A(b) > 0$ συνεπάγεται πως $X_b(t) = 0$ για $t \in [0, A(b)]$. Έτσι, από τη στιγμή που δεν υπάρχει εισροή πελατών στο συγκεκριμένο διάστημα, αν κάποιος επέλεγε να εισέλθει τη στιγμή $t = 0$ θα ξεκινούσε την εξυπηρέτησή του κατευθείαν, χωρίς ρίσκο διακοπής έως τη στιγμή $A(b)$. Με άλλα λόγια, θα ίσχυε ότι $U(0, X_b) > U(A(b), X_b)$ και το (iii) δεν θα ίσχυε.

Στη συνέχεια, κάνουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις:

- α) Για b πολύ κοντά στο 0, $X_b(0) > 0$ και $A(b) = 0$.
- β) Για b πάρα πολύ μεγάλο, $A(b) > 0$ και $X_b(t) = 0$ για $t \in [0, A(b)]$.
- γ) Τα $X_b(0)$ και $A(b)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις για όλα τα b . Επίσης, είναι φθίνουσα και αύξουσα, αντίστοιχα.

Συνδυάζοντας τα (α), (β) και (γ), θα πρέπει να υπάρχει $b = b^*$ τέτοιο ώστε $X_{b^*}(0) = 0$ και $A(b^*) = 0$. Η Εικόνα 3 απεικονίζει γραφικά ένα παράδειγμα τέτοιου X_b . Επομένως, αμέσως προκύπτει ότι το X_{b^*} αντιπροσωπεύει μια στρατηγική συμμετρικής ισορροπίας. \square



Εικόνα 3

Λήμμα 6 Για κάθε παίγνιο ουρών \mathcal{G} , υπάρχει το πολύ μία στρατηγική F η οποία αποτελεί συμμετρική στρατηγική ισορροπίας.

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε το παραπάνω με άτοπο. Έστω F και \tilde{F} δύο διακριτές συμμετρικές στρατηγικές ισορροπίας τέτοιες ώστε $F \neq \tilde{F}$. Έστω, επίσης, $b = \min\{t | F(t) = 1\}$ και $\tilde{b} = \min\{t | \tilde{F}(t) = 1\}$. Τότε, από το Θεώρημα 2 συμπεραίνουμε ότι είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες με στηρίγματα $[0, b]$ και $[0, \tilde{b}]$, αντίστοιχα. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

$b < \tilde{b}$: Απευθείας, έχουμε ότι $U(t, F) > U(t, \tilde{F})$ για κάθε $t \in [0, b]$. Θέτουμε $s = \max\{t | F(t) = \tilde{F}(t), 0 \leq t < b\}$ να είναι η τελευταία στιγμή του χρόνου που οι δύο στρατηγικές τέμνονται. Τονίζεται ότι το s υπάρχει και είναι μοναδικό, από τη στιγμή που $F, \tilde{F} : \text{συνεχείς}, F(0) = \tilde{F}(0)$ και $b < \tilde{b}$. Αυτό, συνεπάγεται ότι το αναμενόμενο ποσοστό των πελατών που φτάνουν στο διάστημα $[s, b]$ είναι αυστηρά μεγαλύτερο υπό τη στρατηγική F παρά υπό τη στρατηγική \tilde{F} . Επομένως, ισχύει ότι $D(d|s, F) \leq D(d|s, \tilde{F})$ για όλα τα d με γνήσια ανισότητα να υπάρχει σε κάποιο ή κάποια d , πράγμα που μας δίνει, τελικά, ότι $U(s, F) < U(s, \tilde{F})$ από το Λήμμα 1. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η F παρέχει υψηλότερη αναμενόμενη ωφέλεια από την \tilde{F} και αποδεικνύει ότι η F και η \tilde{F} δεν μπορούν να είναι και οι δύο στρατηγικές ισορροπίας.

$b > \tilde{b}$: Αυτή η περίπτωση είναι συμμετρική με παραπάνω και αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

$b = \tilde{b}$: Στην συγκεκριμένη περίπτωση προκύπτει αμέσως ότι $U(t, F) = U(t, \tilde{F}) = U(b, F)$ για κάθε $t \in [0, b]$ και $i \in \mathbb{N}$. Έστω, $s = \max\{t | F(t) \neq \tilde{F}(t), 0 \leq t < b\}$ να είναι η τελευταία στιγμή όπου οι $F(t)$ και $\tilde{F}(t)$ είναι άνισες. Το σημείο αυτό πάντα υπάρχει, αφού οι δύο συναρτήσεις δεν ταυτίζονται και είναι συνεχείς. Επιπλέον, ορίζουμε $f_+(s)$ και $\tilde{f}_+(s)$ να είναι οι δεξιές παράγωγοι των F και \tilde{F} στο σημείο s , αντίστοιχα. Τότε, ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- i. $F(s) > \tilde{F}(s)$ και $f_+(s) < \tilde{f}_+(s)$
- ii. $F(s) < \tilde{F}(s)$ και $f_+(s) > \tilde{f}_+(s)$

Στην περίπτωση που είναι ορθό το (i), υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό, τέτοιο ώστε $F(s) - F(s - \epsilon) < \tilde{F}(s) - \tilde{F}(s - \epsilon)$. Αυτό, έχει ως αποτέλεσμα να ισχύει η σχέση $D_i(d|s - \epsilon, F) \geq D_i(d|s - \epsilon, \tilde{F})$ για όλα τα d με αυστηρή ανισότητα για μερικά από αυτά. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι $U_i(s - \epsilon, F) > U_i(s - \epsilon, \tilde{F})$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση $U_i(t, F) > U_i(t, \tilde{F})$ για κάθε $t \in [0, b]$. Η περίπτωση (ii) αιτιολογείται συμμετρικά με την (i).

Τελικά, συμπεραίνουμε την μοναδικότητα της συμμετρικής στρατηγικής ισορροπίας. \square

4.3 Κατάλογος τιμών προτεραιότητας στην $M/M/1$ (FCFS) ουρά

Μια επιχείρηση, θέτοντας ως πρωταρχικό στόχο το κέρδος, καταφέρνει να έχει έσοδα κυρίως με τα προϊόντα και τις υπηρεσίες που προσφέρει στους πελάτες. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν περιπτώσεις που αποσπά μέρος χρημάτων από πληρωμές πελατών οι οποίοι προτιμούν να πληρώσουν περισσότερα και να εξυπηρετηθούν «καλύτερα». Μία τέτοια περίπτωση είναι, για παράδειγμα, τα εισιτήρια με προτεραιότητα για αεροπορικά ταξίδια. Ο πελάτης προτιμά να δώσει περισσότερα χρήματα ώστε να μειώσει κατά πολύ τον χρόνο αναμονής του στο check-in, την επιβίβαση

και τις υπηρεσίες εντός του αεροπλάνου. Στην παράγραφο αυτή, προσδιορίζουμε έναν βέλτιστο κατάλογο τιμών παροχής προτεραιότητας, ανάλογα με το ποσό πληρωμής. Αρχικά, ασχολούμαστε με το ποσό καταβολής και τη βέλτιστη χωρητικότητα σε κάθε κλάση προτεραιότητας. Ως χωρητικότητα της προτεραιότητας i , ορίζουμε το μέγιστο πλήθος n_i , για το οποίο ισχύει ότι αν ένας πελάτης επιθυμεί να αγοράσει τον συγκεκριμένο τύπο προτεραιότητας, το κάνει μόνο αν σε αυτόν βρίσκονται το πολύ $n_i - 1$ πελάτες. Διαφορετικά, δεν τον συμφέρει. Έπειτα, εξάγουμε συμπεράσματα για το καλύτερο δυνατό πλήθος των κλάσεων αυτών. Τέλος, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η πειθαρχία που πετυχαίνει τα παραπάνω καταλήγει να είναι η LCFS-PR.

Περιγραφή μοντέλου

Έστω, σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη. Πελάτες εισέρχονται σε αυτό σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson ρυθμού λ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο μ . Υπάρχει χρέωση ανά μονάδα χρόνου ίση με C για κάθε πελάτη και κέρδος περάτωσης εξυπηρέτησης ίσο με R . Υπάρχουν κλάσεις προτεραιότητας και η πειθαρχία της ουράς είναι preemptive resume, πράγμα που σημαίνει ότι διακόπτεται η εξυπηρέτηση ενός πελάτη κατευθείαν μόλις φτάσει κάποιος με υψηλότερη προτεραιότητα και συνεχίζεται τη στιγμή που στο σύστημα υπάρχουν πελάτες με προτεραιότητα το πολύ ίση με εκείνου. Ορίζουμε, επίσης, $\theta = \{\theta_i; i = 1, 2, \dots, M; \theta_i > \theta_j \text{ αν } i < j\}$ το σύνολο των M ($M \geq 1$) τιμών που προσφέρονται για την απόκτηση συγκεκριμένης προτεραιότητας. Πληρώνοντας $\theta_i, i = 1, 2, \dots, M$, οι πελάτες αποκτούν προτεραιότητα τύπου i , η οποία σημαίνει ότι προηγούνται σε σχέση με κάποιον πελάτη με προτεραιότητα τύπου j με $i < j$. Θέτουμε $n_i, i = 1, 2, \dots, M$, να είναι η χωρητικότητα της κλάσης i , όπου κάθε μία από αυτές λειτουργεί σύμφωνα με την πειθαρχία FCFS. Συνεπώς, το σύστημα με το οποίο ασχολούμαστε είναι το $M/M/1/N_1$ όπου $N_j = \sum_{i=j}^M n_i$.

Βέλτιστος κατάλογος τιμών για οποιοδήποτε πλήθος κλάσεων προτεραιότητας

Συμβολίζουμε με P_x την πιθανότητα εύρεσης x πελατών στο σύστημα:

$$P_x = \frac{\rho^x(1-\rho)}{1-\rho^{N_1+1}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, N_1, \quad (70)$$

όπου $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Έστω, επίσης, $Z(\theta_1, \dots, \theta_M)$ το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα χρόνου για το σύνολο $\{\theta_i\}_{i=1,2,\dots,M}$ που αποτελεί κατάλογο τιμών. Ισχύει ότι:

$$Z(\theta_1, \dots, \theta_M) = \lambda \sum_{i=1}^M \theta_i \sum_{x=N_{i+1}}^{N_i-1} P_x, \quad N_{M+1} = 0. \quad (71)$$

Έπειτα, ορίζουμε $H_{n_i}^f(0, 1)$ ($2 \leq i \leq M, f = n_1 + \dots + n_{i-1}$) ως τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής του πρώτου πελάτη της κλάσης προτεραιότητας i . Σύμφωνα με

τους Adiri & Yechiali (1974) έχουμε ότι:

$$H_{n_i}^f(0, 1) = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho(1 - \rho^f)}{\mu(1 - \rho)} \cdot \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)^{n_i - 1}, \quad n_i \geq 1. \quad (72)$$

Ορίζουμε, επιπροσθέτως, και τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής του τελευταίου πελάτη στην κλάση προτεραιότητας i , έστω $H_{n_i}^f(n_i - 1, n_i)$ ($2 \leq i \leq M, f = n_1 + \dots + n_{i-1}$), για τον οποίο οι Adiri & Yechiali (1974) κατέληξαν στην παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$H_{n_i}^f(n_i - 1, n_i) = \frac{n_i}{\mu} + \frac{\rho(1 - \rho^f)}{\mu(1 - \rho)} \cdot \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_i - 2} \frac{\rho^j}{(1 + \rho)^{2j}} \cdot \sum_{k=1}^{n_i - j - 1} \frac{k \rho^k}{(k + j)(1 + \rho)^k} \cdot \binom{k + 2j - 1}{j} \right\}, \quad n_i \geq 2. \quad (73)$$

Θεώρημα 3 Ο βέλτιστος κατάλογος τιμών προτεραιότητας με M το πλήθος τιμές, $M > 1$, έχει χωρητικότητα ίση με 1 σε κάθε κλάση προτεραιότητας k με $k = 2, 3, \dots, M$.

Απόδειξη

Όταν πραγματοποιείται νέα άφιξη, ο πελάτης ενημερώνεται για την κατάσταση του συστήματος, τον κατάλογο τιμών $\{\theta_i\}_{i=1, \dots, M}$ και τη χωρητικότητα $n_i, i = 1, \dots, M$, κάθε κλάσης προτεραιότητας για τις οποίες πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις, για $i = 3, 4, \dots, M$:

$$\theta_2 + cH_{n_2}^{n_1}(n_2 - 1, n_2) \leq \theta_1 + \frac{c}{\mu} < \theta_2 + cH_{n_2+1}^{n_1}(n_2, n_2 + 1) \quad (74)$$

και

$$\theta_i + cH_{n_i}^f(n_i - 1, n_i) \leq \theta_{i-1} + cH_{n_{i-1}}^f(0, 1) < \theta_i + cH_{n_i+1}^f(n_i, n_i + 1). \quad (75)$$

Τα $\theta_i, i = 2, 3, \dots, M$, μεγιστοποιούνται συναρτήσει του θ_{i-1} όταν η παραπάνω αριστερή ανισότητα γίνεται ισότητα. Επιπλέον, το μέγιστο του θ_1 επιτυγχάνεται ως εξής: $\theta_1 = \text{κέρδος} - \text{συνολικό κόστος} \Rightarrow \theta_1 = R - n_1 \frac{C}{\mu}$. Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, τελικά έχουμε τις παρακάτω εκφράσεις των $\theta_i, i = 1, 2, \dots, M$, συναρτήσει των χωρητικότητων $n_i, i = 1, 2, \dots, M$:

$$\theta_1 = R - n_1 \frac{C}{\mu}, \quad (76)$$

$$\theta_2 = R - (n_1 - 1) \frac{C}{\mu} - cH_{n_2}^{n_1}(n_2 - 1, n_2) \quad (77)$$

και

$$\theta_i = R - (n_1 - 1) \frac{C}{\mu} + C \sum_{j=2}^{i-1} H_{n_j}^f(0, 1) - C \sum_{j=2}^i H_{n_j}^f(n_j - 1, n_j), \quad i = 3, \dots, M. \quad (78)$$

Αντικαθιστώντας τις (70), (72), (73), (76), (77), (78) στην (71) προκύπτουν τα αναμενόμενα έσοδα ανά χρονική μονάδα συναρτήσεσι των $n_i, i = 1, 2, \dots, M$:

$$\begin{aligned}
Z(n_1, \dots, n_M) &= \lambda \left(R - N_1 \frac{C}{\mu} \right) \frac{(1 - \rho^{N_1})}{(1 - \rho^{N_1+1})} + \frac{C\rho}{(1 - \rho^{N_1+1})} \sum_{i=1}^{M-1} (1 - \rho^i) \\
&\quad - \frac{C\rho^4}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N_1+1})} \sum_{i=3}^M \rho^{N_3 - N_i + M - i} (1 - \rho^{n_i - 1}) (1 - \rho^{n_2 + N_{i+1} - M + i - 1}) \\
&\quad - \frac{C\rho^3 (1 - \rho^{n_1 - 1})}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N_1+1})} \sum_{i=2}^M \rho^{N_2 - N_i} \left\{ (1 - \rho^{N_i}) (A_{n_i} - 1) + \rho^{N_{i+1}} \left[(1 - \rho^{n_i - 1}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (n_i - 1) \rho^{n_i - 1} (1 - \rho) \right] \right\} - \frac{C\rho^2}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N_1+1})} \sum_{i=2}^{M-1} \left[1 - \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)^{n_i - 1} \right] \\
&\quad \cdot (1 - \rho^{N_1 - N_i}) (1 - \rho^{N_{i+1}}) - \frac{C\rho^2}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N_1+1})} \\
&\quad \cdot \sum_{i=2}^M (1 - \rho^{N_2 - N_i + 1}) \times [(1 - \rho^{N_i}) (A_{n_i} - 1) - (n_i - 1) \rho^{N_i - 1} (1 - \rho)], \quad (79)
\end{aligned}$$

όπου $N_{M+1} = 0$ και

$$A_{n_i} = \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_i - 2} \frac{\rho^j}{(1 + \rho)^{2j}} \cdot \sum_{k=1}^{n_i - j - 1} \frac{k\rho^k}{(k + j)(1 + \rho)^k} \cdot \binom{k + 2j - 1}{j} \right\}, \quad n_i \geq 2.$$

Όπως φαίνεται στην (79), το $Z(n_1, \dots, n_M)$ μεγιστοποιείται όταν $n_i = 1$ για $i = 2, 3, \dots, M$, διότι μόνο τότε οι τέσσερις τελευταίοι όροι μηδενίζονται ενώ, διαφορετικά, είναι αρνητικοί. \square

Θέτουμε, τώρα $Z(n_1, M)$ να είναι το αναμενόμενο κέρδος ανά χρονική μονάδα για τον κατάλογο τιμών πλήθους M ο οποίος έχει χωρητικότητα n_1 για την κλάση προτεραιότητας 1 και μονάδα για όλες τις υπόλοιπες κλάσεις. Αντικαθιστώντας στη σχέση (79) $n_i = 1$ για $i = 2, 3, \dots, M$ υπολογίζεται ότι:

$$\begin{aligned}
Z(n_1, M) &= \lambda \left\{ \left[R - \frac{C\rho}{\mu(1 - \rho)} \sum_{i=1}^{M-1} (1 - \rho^i) \right] - (n_1 + M - 1) \frac{C}{\mu} \right\} \\
&\quad \times \frac{(1 - \rho^{n_1 + M - 1})}{(1 - \rho^{n_1 + M})} + \frac{C\rho}{(1 - \rho)} \sum_{i=1}^{M-1} (1 - \rho^i). \quad (80)
\end{aligned}$$

Για κάθε $M \geq 1$, αν μελετήσουμε το $Z(n_1, M)$ ως συνάρτηση του n_1 , προκύπτει ότι είναι κοίλη. Συνεπώς, το τοπικό μέγιστο είναι ολικό μέγιστο. Ακολουθώντας

τη λογική της απόδειξης του Naor (1969), το n_1 που μεγιστοποιεί την $Z(n_1, M)$ ισούται με $\lfloor \nu_M \rfloor - M + 1$ όπου το ν_M προκύπτει από την εξίσωση:

$$\nu_M + \frac{(1 - \rho^{\nu_M-1})(1 - \rho^{\nu_M+1})}{\rho^{\nu_M-1}(1 - \rho)^2} = \frac{\mu}{C}R - \frac{\rho}{(1 - \rho)} \sum_{i=1}^{M-1} (1 - \rho^i).$$

Για να αποφύγουμε την περίπτωση αρνητικού n_1 , ορίζουμε, θέτοντας στην (80) $n_1 = 1$, το $M' = \lfloor M_1 \rfloor$ όπου το M_1 κανοποιεί την εξίσωση:

$$M_1 + \frac{(1 - \rho^{M_1-1})(1 - \rho^{M_1+1})}{\rho^{M_1-1}(1 - \rho)^2} = \frac{\mu}{C}R - \frac{\rho}{(1 - \rho)} \sum_{i=1}^{M_1-1} (1 - \rho^i)$$

Τελικά, η μέγιστη χωρητικότητα της πρώτης κλάσης προτεραιότητας προκύπτει από τη σχέση:

$$n'_1 = \begin{cases} \lfloor \nu_M \rfloor - M + 1 & , \text{αν } M < M', \\ 1 & , \text{αν } M \geq M'. \end{cases}$$

Συνεπώς, έχει προκύψει το σύνολο $\{n'_1, 1, 1, \dots, 1\}$ χωρητικοτήτων που αντιστοιχεί στον βέλτιστο κατάλογο τιμών απόδοσης προτεραιότητας ο οποίος έχει πλήθος τιμών ίσο με M . \square

Αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στις σχέσεις (76)-(78), εξάγουμε τις τιμές $\{\theta'_i\}_{i=1, \dots, M}$ του καταλόγου αυτού:

$$\theta'_1 = R - n'_1 \frac{C}{\mu} \quad (81)$$

και

$$\theta'_i = R - n'_1 \frac{C}{\mu} - \frac{\rho(1 - \rho^{n'_1+i-2})}{(1 - \rho)} \frac{C}{\mu}, \quad i = 2, \dots, M. \quad (82)$$

Βέλτιστο πλήθος κλάσεων προτεραιότητας

Έχοντας εξετάσει τις βέλτιστες τιμές σε σχέση με κάθε σύνολο τιμών προτεραιότητας πλήθους $M \geq 1$, θεωρούμε τώρα το βέλτιστο M έτσι ώστε να προσδιορίσουμε τον κατάλογο τιμών προτεραιότητας που εγγυάται υψηλότερα έσοδα από οποιοδήποτε άλλο. Το παρουσιάζουμε μέσα από τα δύο παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 7 Έστω $\{\hat{n}'_1, 1, 1, \dots, 1\}$ και $\{\tilde{n}'_1, 1, 1, \dots, 1\}$ τα σύνολα χωρητικοτήτων για τους βέλτιστους καταλόγους τιμών με πλήθος κλάσεων M και $M + 1$, αντίστοιχα. Τότε, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\tilde{n}_1 < \hat{n}_1 \leq \tilde{n}_1 + 2$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό τους, να \tilde{n}_1 και \hat{n}_1 ικανοποιούν τις σχέσεις $Z(\hat{n}_1, M) \geq Z(\hat{n}_1 \pm 1, M)$ και $Z(\tilde{n}_1, M + 1) \geq Z(\tilde{n}_1 \pm 1, M + 1)$. Αντικαθιστώντας σύμφωνα με τη σχέση (80), οι δύο ανισότητες ισχύουν ταυτόχρονα αν $\hat{n} = \tilde{n} + 1$ ή $\hat{n} = \tilde{n} + 2$. \square

Λήμμα 8 Δεδομένου ότι ο κατάλογος τιμών αποτελείται από $M \leq M'$ τιμές, ισχύει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το M , τόσο μεγαλύτερο είναι και το κέρδος, όπου το M' είναι αυτό που ορίστηκε παραπάνω.

Απόδειξη

Έστω \hat{n}_1 και \tilde{n}_1 οι χωρητικότητες της υψηλότερης κλάσης προτεραιότητας σε καταλόγους τιμών πλήθους M και $M+1$, αντίστοιχα ($M < M'$). Με τη βοήθεια από το Λήμμα 7 και τη σχέση (79), εύκολα προκύπτει ότι $Z(\hat{n}_1, M+1) > Z(\hat{n}_1, M)$ για όλα τα $M < M'$. \square

Από το Λήμμα 8 προκύπτει ότι ο βέλτιστος κατάλογος τιμών αποτελείται από τουλάχιστον M' το πλήθος τιμές προτεραιότητων. Για να βρούμε το βέλτιστο M , αντικαθιστούμε στην (80), $n_1 = 1$, και μετά από πράξεις υπολογίζουμε ότι:

$$Z(1, M) = \lambda R \frac{(1 - \rho^M)}{(1 - \rho^{M+1})} + \frac{C(M+1)\rho^{M+1}}{(1 - \rho^{M+1})} - C\rho.$$

Συμβουλευόμενοι και πάλι τον Naor (1969), παίρνουμε την $Z(1, M)$ ως συνάρτηση του M . Η τελευταία είναι κοίλη, συνεπώς το τοπικό μέγιστο θα είναι και ολικό και θα ισούται με τον ακέραιο $M^* = \lfloor \nu_M \rfloor$, όπου το ν_M είναι λύση της εξίσωσης:

$$\frac{\nu_M(1 - \rho) - \rho(1 - \rho^{\nu_M})}{(1 - \rho)^2} = R \frac{C}{\mu},$$

Τελικά, ο M^* είναι το πλήθος τιμών στον κατάλογο που εγγυάται το μέγιστο κέρδος σε σχέση με οποιονδήποτε άλλο και οι χωρητικότητες σε κάθε κλάση προτεραιότητας, συμπεριλαμβανομένης της υψηλότερης, είναι ίσες με 1. Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στις σχέσεις (81) και (82), λαμβάνουμε τον βέλτιστο κατάλογο τιμών $\{\theta_i^*\}_{i=1, \dots, M^*}$:

$$\theta_i^* = R - \frac{C}{\mu} \sum_{j=0}^{i-1} \rho^j, \quad i = 1, \dots, M^*.$$

Ως αποτέλεσμα όλων των παραπάνω, λαμβάνουμε ότι το μέγιστο κέρδος από τον βέλτιστο κατάλογο τιμών είναι ίσο με:

$$Z(1, M^*) = \frac{\lambda}{1 - \rho^{M^*+1}} \left[\left(R - M^* \frac{C}{\mu} \right) (1 - \rho^{M^*}) + \frac{C}{\mu} \sum_{i=1}^{M^*-1} (1 - \rho^i) \right].$$

Συμπέρασμα

Ένα σύστημα εξυπηρέτησης πελατών μπορεί να επιτύχει μέγιστο κέρδος προσφέροντας στους πελάτες έναν κατάλογο τιμών θ^* για αγορά συγκεκριμένου τύπου προτεραιότητας. Οι τιμές αυτές υπολογίζονται σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο:

$$\theta^* = \left\{ \theta_i \mid \theta_i = R - \frac{C}{\mu} \sum_{j=0}^{i-1} \rho^j, i = 1, 2, \dots, M^* \right\},$$

όπου τα ρ , C και R είναι παράμετροι του συστήματος και το M' είναι το πλήθος τιμών κατά το οποίο επιτυγχάνεται μέγιστο κέρδος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το αναμενόμενο κόστος παραμονής ενός πελάτη με προτεραιότητα τύπου i είναι ίσο με $\frac{C}{\mu} \sum_{j=0}^{i-1} \rho^j$ χρηματικές μονάδες. Όταν το σύστημα προσφέρει στους πελάτες τον κατάλογο τιμών θ^* , η στρατηγική που θα ακολουθηθεί είναι η είσοδος του πελάτη επιλέγοντας τη χαμηλότερη άδεια κλάση προτεραιότητας και η αποχώρηση από το σύστημα, αν το πλήθος των πελατών είναι ίσο με M^* . Επιλέγοντας όλοι τις χαμηλότερες κλάσεις, κάθε νεοεισερχόμενος πελάτης αγοράζει υψηλότερη προτεραιότητα σε σχέση με τους υπόλοιπους που βρίσκονταν ήδη μέσα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το γεγονός ότι, ενώ η πειθαρχία του συστήματος είναι παραλλαγή της FCFS, τελικά η πλήρης βελτιστοποίηση οδηγεί πρακτικά στην εφαρμογή μιας πειθαρχίας LCFS-PR.

5 Σύγκριση με την πειθαρχία FCFS

Η πειθαρχία First-Come-First-Served (FCFS) είναι η πιο συχνή και δημοφιλής διαδικασία ταξινόμησης πελατών σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης. Συναντάται στις περισσότερες ουρές αναμονής της καθημερινής μας ζωής. Για παράδειγμα, στα εστιατόρια, στα ταμεία καταστημάτων και στις εισόδους χώρων διασκέδασης. Αποτελεί τον πιο «δίκαιο» τρόπο απόδοσης προτεραιότητας σε κάθε πελάτη, καθώς όσο νωρίτερα φθάνει κάποιος στο σύστημα, τόσο υψηλότερη προτεραιότητα έχει. Η λογική και η διαίσθηση λέει ότι θα είναι η καταλληλότερη και αποδοτικότερη πειθαρχία για το κοινωνικό σύνολο. Μένει να δείξουμε αν η παραπάνω εικασία αληθεύει ή όχι.

5.1 Αποτελέσματα συστημάτων με την πειθαρχία FCFS

5.1.1 $M/M/1$ Ουρά

Οριακή κατανομή πλήθους πελατών του συστήματος

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $\Pr[N = k]$ θα χρησιμοποιήσουμε το Νόμο του Little στη j -οστή θέση του συστήματος, όπου $j \in \mathbb{N}$.

Έχουμε ότι:

$$E[\text{πλήθος πελατών στη θέση } j] = (\text{Ρυθμός αφίξεων στην } j\text{-οστή θέση}) \times E[\text{χρόνος αναμονής στην θέση } j], j \in \mathbb{N}$$

όπου:

$$E[\text{πελάτες στη θέση } j] = \Pr[\exists \text{ πελάτης στην θέση } j] = \Pr[Q \geq j], j \in \mathbb{N}.$$

Θεωρούμε πως όλοι περνούν από την θέση j . Επομένως, αν το σύστημα έχει πλήθος πελατών μικρότερο από $j - 1$, το πέρασμα του αφικνούμενου πελάτη από τη j -οστή θέση θα είναι στιγμιαίο. Από όλα τα παραπάνω, προκύπτει η εξής σχέση:

$$\Pr[Q \geq j] = \lambda \left(0 \cdot \Pr[Q^- < j - 1] + \frac{1}{\mu} \Pr[Q^- \geq j - 1] \right), j \in \mathbb{N}$$

Άρα,

$$\Pr[Q \geq j] = \frac{\lambda}{\mu} \Pr[Q^- \geq j - 1]$$

$$\Pr[Q \geq j] = \rho \Pr[Q^- \geq j - 1], j \in \mathbb{N}_{>0}$$

Λόγω PASTA έχουμε:

$$\Pr[Q \geq j] = \rho \Pr[Q \geq j - 1]$$

$$\sum_{k=j}^{+\infty} p_k = \rho \sum_{k=j-1}^{+\infty} p_k, j \in \mathbb{N}_{>0}$$

Από αυτήν την σχέση λαμβάνουμε ότι:

Για $j = 1$:

$$1 - p_0 = \rho$$

Για j :

$$\sum_{k=j}^{+\infty} p_k = \rho \sum_{k=j-1}^{+\infty} p_k$$

Για $j + 1$:

$$\sum_{k=j+1}^{+\infty} p_k = \rho \sum_{k=j}^{+\infty} p_k$$

Τα οποία μας οδηγούν στο παρακάτω αποτέλεσμα:

$$p_j = \rho p_{j-1} = \rho^2 p_{j-2} = \dots p_0 \rho^j = (1 - \rho) \rho^j, j \in \mathbb{N}$$

Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι, στην $M/M/1$ ουρά με πειθαρχία FCFS, το πλήθος των πελατών στο σύστημα ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο ρ , πράγμα που ισχύει και στην αντίστοιχη περίπτωση με LCFS-PR.

Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη στο σύστημα

Για τον μέσο χρόνο παραμονής $E[S]$ στο σύστημα, θα εφαρμόσουμε και πάλι το Νόμο του Little:

$$E[Q] = \lambda E[S]$$

όπου:

$$E[Q] = \sum_{k=0}^{+\infty} k \Pr[N = k] = (1 - \rho) \sum_{k=0}^{+\infty} k \rho^k = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Και τελικά:

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Μέση διάρκεια κύκλων πλήρους απασχόλησης, λειτουργίας και αργίας

Λόγω αναγεννητικότητας συμπεραίνουμε ότι:

$$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]}$$

Επίσης, αφίξεις γίνονται σύμφωνα με την $\exp(\lambda)$ κατανομή. Αυτό, συνεπάγεται ότι:

$$E[I] = \frac{1}{\lambda}$$

τότε:

$$E[Z] = \frac{E[I]}{p_0} = \frac{1}{\lambda p_0} = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$$

και

$$E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε πως η οριακή κατανομή πλήθους πελατών στο σύστημα, οι μέσοι χρόνοι κύκλων πλήρους απασχόλησης, λειτουργίας, αργίας και ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα συμπίπτουν στις δύο πειραρχίες.

5.1.2 $M/G/1$ Ουρά

Οριακή κατανομή πλήθους πελατών του συστήματος

Έστω σύστημα εξυπηρέτησης όπου πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ), οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν μια γενική συνάρτηση κατανομής $F_B(x)$, υπάρχει ένας υπηρέτης και άπειρη χωρητικότητα. Θέτουμε $b = \frac{1}{\mu} = E[B]$ και $\sigma_B^2 = Var[B]$. Επίσης, έχουμε όπως και στα προηγούμενα, $Q(t), t \geq 0$ να είναι η διαδικασία πλήθους πελατών στο σύστημα. Έστω, επιπλέον, Q_n^- και Q_n^+ οι διαδικασίες πλήθους πελατών σε στιγμές άφιξης και αναχώρησης, αντίστοιχα. Οι τυχαίες μεταβλητές των παραπάνω διαδικασιών θα συμβολίζονται με Q, Q^- και Q^+ και οι αντίστοιχες συναρτήσεις πιθανότητας με $(p_n), (a_n)$ και (d_n) .

Η διαδικασία $\{Q_n^+\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, γεγονός που φαίνεται από τη σχέση:

$$Q_{n+1}^+ = \max(Q_n^+ - 1, 0) + A_{n+1}, n \in \mathbb{N} \quad (83)$$

όπου A_{n+1} είναι το πλήθος των αφίξεων που πραγματοποιούνται όσο εξυπηρετείται ο πελάτης $n + 1$.

Η σχέση (83) εξηγείται ως εξής:

- Έστω ότι ο πελάτης n αναχωρεί από κενό σύστημα. Τότε ο πελάτης $n + 1$, όταν ολοκληρωθεί η εξυπηρέτησή του, θα αφήσει πίσω το πλήθος των πελατών που συσσωρεύθηκαν κατά την περίοδο παραμονής του (που ταυτίζεται με το χρόνο εξυπηρέτησής του αφού, μπαίνοντας, βρίσκει κενό σύστημα).
- Αν το σύστημα εξυπηρέτησης δεν είναι κενό κατά την αναχώρηση του n -οστού πελάτη, ο $(n + 1)$ -οστός θα αφήσει πίσω του όσους άφησε ο προηγούμενος, χωρίς να περιλαμβάνει τον εαυτό του, συν όσους αφίχθησαν κατά τη δική του εξυπηρέτηση.

Από την (83), λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης για την $\{Q_{n+1}^+\}$:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

όπου $\alpha_j, j \in \mathbb{N}$: η πιθανότητα άφιξης j πελατών κατά τη διάρκεια ενός χρόνου εξυπηρέτησης.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με ρυθμό λ και δεσμεύοντας στη διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης υπολογίζουμε ότι:

$$\alpha_j = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} dF_B(t), j \in \mathbb{N}$$

Παρατηρώντας τη μορφή του πίνακα μετάβασης P προκύπτει ότι:

$$d_n = d_0 \alpha_n + \sum_{i=1}^{n+1} d_i \alpha_{n+1-i}, n \in \mathbb{N} \quad (84)$$

Για να βρούμε την κατανομή $(d_n : n \in \mathbb{N})$ της $\{Q_{n+1}^+\}$ πρέπει να λύσουμε το σύστημα εξισώσεων ισορροπίας που προκύπτει παίρνοντας τις παραπάνω εξισώσεις για όλα τα n . Για να καταφέρουμε το παραπάνω, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πιθανογεννητριών. Έτσι, προσδιορίζουμε τις πιθανογεννήτριες:

$$P_D(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n, |z| \leq 1$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dF_B(t) z^n \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t z)^n}{n!} dF_B(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{\lambda t z} dF_B(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(1-z)t} \\ &= \tilde{F}_B(\lambda(1-z)), |z| \leq 1 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (84) με z^n , αθροίζουμε για όλα τα n και προκύπτει:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n &= d_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n+1} d_i \alpha_{n+1-i} z^n \\ \Leftrightarrow P_D(z) &= d_0 \tilde{F}_B(\lambda(1-z)) + \frac{1}{z} \sum_{i=1}^{+\infty} d_i z^i \sum_{n=i-1}^{+\infty} \alpha_{n+1-i} z^{n+1-i} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P_D(z) = d_0 \tilde{F}_B(\lambda(1-z)) + \frac{1}{z}(P_D(z) - d_0) \tilde{F}_B(\lambda(1-z))$$

Λύνοντας ως προς $P_D(z)$ λαμβάνουμε:

$$P_D(z) = \frac{d_0 \tilde{F}_B(\lambda(1-z))(1-z)}{\tilde{F}_B(\lambda(1-z)) - z}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα $(d_n, n \in \mathbb{N})$ αθροίζονται στο 1 ($\sum_{n=0}^{+\infty} d_n = P_D(1) = 1$) και εφαρμόζοντας τον κανόνα L'Hospital υπολογίζουμε ότι:

$$1 = P_D(1) = \frac{-d_0}{-\lambda \tilde{F}'_B(0) - 1}.$$

Ξέρουμε, όμως, πως $b = E[B] = F'_B(0)$ το οποίο μας οδηγεί στο $d_0 = 1 - \rho$. Έτσι,

$$P_D(z) = \frac{(1-\rho) \tilde{F}_B(\lambda(1-z))(1-z)}{\tilde{F}_B(\lambda(1-z)) - z}.$$

Η παραπάνω πιθανογεννήτρια αντιστοιχεί στο πλήθος πελατών του συστήματος και σε στιγμές αναχωρήσεων, και σε συνεχή χρόνο (λόγω ιδιότητας μεμονομένων μεταβάσεων), και σε στιγμές αφίξεων (λόγω ιδιότητας PASTA).

Κάνοντας την αντικατάσταση $\tilde{F}_B(\lambda(1-z)) = \frac{\mu}{\lambda - \lambda z + \mu}$, υπολογίζουμε τελικά:

$$P_D(z) = \frac{(1-\rho) \frac{\mu}{\lambda - \lambda z + \mu} (1-z)}{\frac{\mu}{\lambda - \lambda z + \mu} - z} = \frac{(1-\rho)\mu(1-z)}{\mu - (\lambda - \lambda z + \mu)z} = \frac{1-\rho}{1-\rho z}.$$

Η συγκεκριμένη πιθανογεννήτρια, αντιστοιχεί στην Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο ρ . Παρακάτω δίνεται η απόδειξη:

$$P_D(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z} = (1-\rho) \frac{1}{1-\rho z} = (1-\rho) \sum_{k=0}^{+\infty} (\rho z)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-\rho) \rho^k z^k$$

Από το οποίο προκύπτει πως:

$$\Pr[N = k] = (1-\rho) \rho^k, k \in \mathbb{N}.$$

Διαπιστώνουμε πως και στην $M/G/1$ (FCFS) ουρά η οριακή κατανομή πλήθους πελατών του συστήματος είναι η Γεωμετρική με παράμετρο ρ .

Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη στο σύστημα

Όμοια με την προηγούμενη παράγραφο, οι μέσοι χρόνοι παραμονής πελάτη στα δύο αυτά συστήματα, θα ταυτίζονται, εφόσον επαναλάβουμε τους ίδιους υπολογισμούς. Άρα:

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Μέση διάρκεια κύκλων πλήρους απασχόλησης, λειτουργίας και αργίας

Αντίστοιχα με παραπάνω, οδηγούμαστε στα:

$$E[I] = \frac{1}{\lambda}, E[Y] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \text{ και τελικά } E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$$

5.1.3 G/M/1 Ουρά

Οριακή κατανομή πλήθους πελατών του συστήματος

Ορίζουμε όμοια με την προηγούμενη παράγραφο τα $\{Q(t), t \geq 0\}$, $\{Q_n^-\}$, $\{Q_n^+\}$, (p_n) , (a_n) και (d_n) . Επιπλέον, έστω $F_A(x)$ η κατανομή ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων πελατών με μέση τιμή a και $\exp(\mu)$ οι χρόνοι εξυπηρέτησης. Λόγω της γενικής κατανομής που έχουν οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης, η $\{Q(t)\}$ δεν είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα. Αν, όμως, κοιτάζουμε το σύστημα ακριβώς πριν από στιγμές αφίξεων, παρατηρούμε ότι:

$$Q_{n+1}^- = \max(Q_n^- + 1 - B_{n+1}, 0) \quad (85)$$

όπου B_{n+1} ισούται με το πλήθος των εξυπηρετήσεων που πραγματοποιούνται στο χρονικό διάστημα ανάμεσα στις αφίξεις του n -οστού και του $(n+1)$ -οστού πελάτη.

Από την σχέση (85), ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της $\{Q_n^-\}$ είναι ο παρακάτω:

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 - \beta_0 - \beta_1 & \beta_1 & \beta_0 & 0 & \dots \\ 1 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

όπου $\beta_j, j \in \mathbb{N}$, είναι η πιθανότητα αναχώρησης j πελατών ανάμεσα σε δύο αφίξεις, δεδομένου ότι ο υπηρέτης δεν έχει σταματήσει να είναι απασχολημένος σε όλο αυτό το χρονικό διάστημα.

Εφόσον οι αναχωρήσεις συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού μ , κατά τη διάρκεια ενός ενδιάμεσου χρόνου αφίξεων και δεδομένης της συνεχούς απασχόλησης του υπηρέτη, δεσμεύουμε σε αυτόν τον ενδιάμεσο χρόνο και προκύπτει ότι:

$$\beta_j = \int_0^{+\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!} dF_A(t), j \in \mathbb{N}.$$

Η πιθανογεννήτρια των β_j υπολογίζεται ως εξής:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j z^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!} dF_A(t) z^j = \int_0^{+\infty} e^{-\mu t} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\mu z t)^j}{j!} dF_A(t) =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\mu t} e^{\mu z t} dF_A(t) = \int_0^{+\infty} e^{-(\mu - \mu z)t} dF_A(t) = \widetilde{F}_A(\mu - \mu z)$$

Τώρα, για να βρούμε την κατανομή $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$, πρέπει να βρούμε τις εξισώσεις ισορροπίας και να λύσουμε το σύστημα που δημιουργείται. Από τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης προκύπτει ότι:

$$\alpha_0 = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i \left(1 - \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j \right)$$

και

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_{n-1+i} \beta_i, n \in \mathbb{N}.$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος θα είναι της μορφής $\alpha_n = c\theta^n, n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Θέτουμε M_{ij} να είναι το πλήθος των επισκέψεων της $\{Q(t)\}$ στην κατάσταση j , μεταξύ δύο διαδοχικών επισκέψεων στην κατάσταση i . Από τη θεωρία των ανανεωτικών διαδικασιών προκύπτει ότι:

$$E(M_{ij}) = \frac{p_j}{p_i}, i, j \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε μονοπάτι της μορφής $0 \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_n \rightarrow 0$ με $i_k > 0, k = 1, 2, \dots, m$, δίνει μια τιμή στην M_{01} . Για παράδειγμα το μονοπάτι $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ δίνει $M_{01} = 2$. Επίσης, το μονοπάτι $0 \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_n \rightarrow 0$ δίνει $M_{01} = k$ αν και μόνο αν το μονοπάτι $j \rightarrow j + i_1 \rightarrow j + i_2 \rightarrow \dots \rightarrow j + i_n \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, j\}$ δίνει $M_{j,j+1} = k$, αφού κάθε μετάβαση σε κατάσταση $s < j$ σταματά τη διαδικασία, διότι η $\{Q_n^-\}$ δεν μπορεί να επισκεφθεί τη $j + 1$ χωρίς, προηγουμένως να περάσει από την j . Επιπροσθέτως, τα δύο παραπάνω μονοπάτια έχουν ίσες πιθανότητες λόγω της μορφής του πίνακα P . Άρα, η κατανομή του $M_{j,j+1}$ είναι ανεξάρτητη του $j, j \in \mathbb{N}$. Έτσι, από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\frac{p_{j+1}}{p_j} = \theta,$$

από το οποίο, αναγωγικά, παίρνουμε:

$$p_j = p_0 \theta^j = c\theta^j. \quad \square$$

Για την εύρεση της παραμέτρου θ αντικαθιστούμε τη γεωμετρική μορφή της λύσης σε μία από τις εξισώσεις ισορροπίας.

Για παράδειγμα, για $n = 1$:

$$c\theta = \sum_{i=0}^{+\infty} c\theta^i \beta_i \Leftrightarrow \theta = \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i \beta_i$$

Το οποίο μας οδηγεί στην σχέση:

$$\theta = \widetilde{F}_A(\mu - \mu\theta) \quad (86)$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση (86) έχει μοναδική λύση $\theta \in (0, 1)$. Δεδομένου ότι ισχύει η συνθήκη ευστάθειας $\rho = \frac{1}{\mu\alpha} < 1$, η συνάρτηση $\widetilde{F}_A(\mu - \mu z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i z^i$ είναι μη αρνητική, αύξουσα και κυρτή στο διάστημα $z \in (0, 1)$, διότι όλοι οι συντελεστές της δυναμοσειράς είναι μη αρνητικοί. Ορίζουμε $f(z) = \widetilde{F}_A(\mu - \mu z) - z$, η οποία είναι, επίσης, κυρτή. Ισχύει ότι $f'(1) = -\widetilde{F}'_A(0)\mu - 1 = \alpha\mu - 1 = \frac{1}{\rho} - 1 > 0$, λόγω της συνθήκης ευστάθειας. Έστω, τώρα, $\epsilon > 0$ πολύ κοντά στο 0. Τότε, $f(1 - \epsilon) < f(1) = \widetilde{F}_A(0) - 1 = 0$. Επιπροσθέτως, $f(0) = \widetilde{F}_A(\mu) = \beta_0 > 0$. Επομένως, προκύπτει ότι $f(0)f(1 - \epsilon) < 0$ και, από το θεώρημα Bolzano, η $f(z) = 0$ έχει λύση $\theta \in (0, 1 - \epsilon) \subseteq (0, 1)$, η οποία είναι και μοναδική λόγω της κυρτότητας της f στο $(0, 1)$.

Από την εξίσωση κανονικοποίησης, προκύπτει ότι:

$$\sum_{n=0}^{=\infty} \alpha_n = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{=\infty} c\theta^n = \frac{c}{1 - \theta} = 1 \Leftrightarrow c = 1 - \theta.$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $\alpha_n = (1 - \theta)\theta^n, n \in \mathbb{N}$.

Εξαιτίας των μεμονομένων μεταβάσεων, ισχύει ότι $\alpha_n = d_n$, άρα τελικά:

$$d_n = (1 - \theta)\theta^n, n \in \mathbb{N}.$$

Επόμενο βήμα, ώστε να βρούμε την οριακή κατανομή της $\{Q(t)\}$, είναι να εντοπίσουμε το πώς συνδέονται τα α_n με τα p_n . Ο οριακός ρυθμός αφίξεων είναι ο λόγος $\frac{1}{E[A]} = \frac{1}{\alpha}$ και με α_{n-1} συμβολίζουμε την πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης να βρίσκει $n - 1$ πελάτες στο σύστημα. Συνεπώς, η ποσότητα $\frac{1}{\alpha}\alpha_{n-1}$ εκφράζει τον οριακό ρυθμό μεταβάσεων τύπου $n - 1 \rightarrow n$. Αντίστοιχα, ο οριακός ρυθμός μεταβάσεων τύπου $n \rightarrow n - 1$ είναι ίσος με $p_n\mu$ όπου p_n : το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση n και μ : ο ρυθμός αναχωρήσεων.

Απαραίτητο είναι να αναφέρουμε πως μεταξύ δύο διαδοχικών μεταβάσεων από την κατάσταση $n - 1$ στην n , συμβαίνει μία μετάβαση από την n στην $n - 1$. Αυτό, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι δύο μακροπρόθεσμοι ρυθμοί μεταβάσεων που βρήκαμε παραπάνω είναι ίσοι μεταξύ τους. Επομένως:

$$\frac{1}{\alpha}\alpha_{n-1} = p_n\mu \Rightarrow p_n = \rho\alpha_{n-1}, n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Από όλα τα παραπάνω, τελικά:

$$\Pr[N = k] = \begin{cases} 1 - \rho, & k = 0 \\ \rho(1 - \theta)\theta^n, & k \in \mathbb{N}_{>0}. \end{cases}$$

Παρατήρηση:

$$\Pr[N = k | k > 0] = \frac{\Pr[N = k, k > 0]}{\Pr[k > 0]} = \frac{\rho(1-\theta)\theta^{k-1}}{\rho} = (1-\theta)\theta^{k-1}$$

Άρα, $\{N = k | k > 0\} \sim Geom(\theta)$.

Η παραπάνω οριακή κατανομή πλήθους πελατών στο σύστημα είναι παρόμοια με την αντίστοιχη της ουράς $G/G/1$ (LCFS-PR). Εδώ το θ είναι η λύση της εξίσωσης (86), ενώ στην $G/G/1$ (LCFS-PR) είναι $\gamma = E[I(B)]$.

Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη στο σύστημα

Η κατανομή του χρόνου παραμονής, έστω S , ενός πελάτη στο σύστημα, θα υπολογιστεί μέσα από μετασχηματισμό Laplace - Stieltjes, δεσμεύοντας στον αριθμό των πελατών που βρίσκει ένας πελάτης κατά την άφιξή του. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_S(s) &= E[e^{-sS}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[Q^- = n] E[e^{-sS} | Q^- = n] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (1-\theta)\theta^n \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1} = (1-\theta)\frac{\mu}{\mu+s} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\theta\mu}{\mu+s}\right)^n \\ &= (1-\theta)\frac{\mu}{\mu+s} \left(1 - \frac{\theta\mu}{\mu+s}\right)^{-1} = \frac{(1-\theta)\mu}{(1-\theta)\mu+s} \end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα είναι ο μετασχηματισμός Laplace - Stieltjes της εκθετικής συνάρτησης με ρυθμό $\mu(1-\theta)$, οπότε $S \sim Exp[\mu(1-\theta)]$. Άρα, ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα είναι ίσος με:

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1-\theta)}$$

Μέση διάρκεια κύκλων πλήρους απασχόλησης, λειτουργίας και αργίας

Ο μέσος κύκλος συνεχούς λειτουργίας υπολογίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$E[Y] = E[B] + \lambda E[B]E[Y]. \quad (87)$$

Η σχέση (87) εξηγείται ως εξής:

Έστω ότι μόλις έφτασε πελάτης σε κενό σύστημα. Ένας κύκλος συνεχούς λειτουργίας, είναι το χρονικό διάστημα που θα κάνει το σύστημα να πάει από την κατάσταση 1, στην κατάσταση 0. Να «κατέβει» μία κατάσταση, δηλαδή. Κατά την εξυπηρέτηση του πρώτου πελάτη, φθάνει ένα πλήθος πελατών, έστω k , συνεπώς,

μόλις ο πρώτος πελάτης αναχωρήσει, το σύστημα θα βρίσκεται στην κατάσταση κ . Για να «κατέβει» το σύστημα στην κατάσταση $\kappa - 1$ πρέπει να περιμένουμε χρονικό διάστημα αντίστοιχο της μετάβασης τύπου $1 \rightarrow 0$. Αυτό το χρονικό διάστημα, όπως προαναφέραμε, είναι ένας κύκλος συνεχούς λειτουργίας $E[Y]$. Στην εξίσωση (87), με $E[B]$ συμβολίζουμε τη μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης ενός πελάτη και $\kappa = \lambda E[B]$ (πλήθος αφίξεων σε χρονικό διάστημα μήκους $E[B]$ με ρυθμό λ).

Λύνοντας την (87), προκύπτει:

$$E[Y] = \frac{E[B]}{1 - \lambda E[B]} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}.$$

Ορίζουμε, τώρα, N : το πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται σε έναν κύκλο συνεχούς λειτουργίας. Με λογική παρόμοια της σχέσης (87):

$$E[N] = 1 + \lambda E[B]E[N] \Leftrightarrow E[N] = \frac{1}{1 - \lambda E[B]} = \frac{1}{1 - \rho}.$$

Τότε, για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό αφίξεων λ , ισχύει ότι:

$$\lambda = \frac{E[N]}{E[Z]},$$

απ' όπου συμπεραίνουμε τα παρακάτω:

$$E[Z] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{\frac{1}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$$

και

$$E[I] = E[Z] - E[Y] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\lambda}.$$

5.2 Σύγκριση βασικών αποτελεσμάτων

Ένα γενικό σχόλιο που μπορούμε να κάνουμε, πριν μιλήσουμε για συγκεκριμένα συστήματα και πειθαρχίες, είναι ότι τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν έχουν αρκετές ομοιότητες μεταξύ τους. Ενώ, αρχικά, μπορεί να είχαμε την υποψία ότι θα αντικρίζαμε ένα χάσμα ανάμεσα στις δύο πειθαρχίες, εν τέλει παρατηρούμε ότι τα επί μέρους στοιχεία μοιάζουν και, μάλιστα, σε μερικές περιπτώσεις συμπίπτουν απόλυτα.

Σύγκριση οριακών κατανομών πλήθους πελατών

Υπολογίζοντας την συγκεκριμένη κατανομή, για διαφορετικά συστήματα και πειθαρχίες, παρατηρούμε πως τις περισσότερες φορές προκύπτει η Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο ρ . Πιο συγκεκριμένα, αυτό το αποτέλεσμα το συναντάμε στα συστήματα $M/M/1$ (LCFS-PR), $M/M/1$ (FCFS), $M/G/1$ (LCFS-PR) και

$M/G/1$ (FCFS). Στα τρία υπολειπόμενα συστήματα, οι κατανομές μοιάζουν αρκετά με Γεωμετρικές.

Στο $G/G/1$ (LCFS-PR) έχουμε:

$$\Pr[N = k] = \begin{cases} 1 - \rho, & k = 0 \\ \rho(1 - \gamma)\gamma^{k-1}, & k \in \mathbb{N}_{>0} \end{cases}$$

όπου $\gamma = E[I(B)]$.

Στο $G/M/1$ LCFS-PR έχουμε:

$$\Pr[N = k] = \begin{cases} 1 - \rho, & k = 0 \\ \rho(1 - \tilde{m}_A(\mu))\tilde{m}_A(\mu)^{k-1}, & k \in \mathbb{N}_{>0} \end{cases}$$

Στο $G/M/1$ (FCFS) έχουμε:

$$\Pr[N = k] = \begin{cases} 1 - \rho, & k = 0 \\ \rho(1 - \theta)\theta^k, & k \in \mathbb{N}_{>0} \end{cases}$$

όπου το θ είναι η λύση της εξίσωσης $\theta = \tilde{F}_A(\mu - \mu\theta)$. Μάλιστα, παρατηρούμε πως αν δεσμεύσουμε σε θετικό πλήθος πελατών προκύπτει, αντίστοιχα:

$$\{N = k | k > 0\} \sim \text{Geom}(\gamma), \{N = k | k > 0\} \sim \text{Geom}(\tilde{m}_A(\mu))$$

$$\text{και } \{N = k | k > 0\} \sim \text{Geom}(\theta).$$

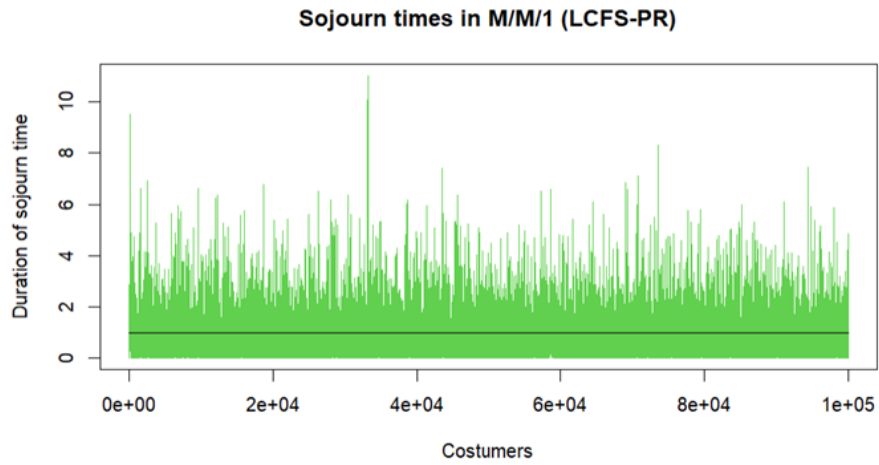
Η Γεωμετρική κατανομή είναι αρκετά λογική, αν σκεφτούμε ως εξής: Η πιθανότητα να υπάρχουν στο σύστημα k πελάτες είναι ίση με την πιθανότητα να μπει ο πρώτος πελάτης, επί την πιθανότητα να μπει ο δεύτερος πελάτης, ..., επί την πιθανότητα να μπει ο k -οστός πελάτης, επί την πιθανότητα να μην μπει $(k + 1)$ -οστός πελάτης.

Σύγκριση μέσων χρόνων παραμονής πελάτη στο σύστημα

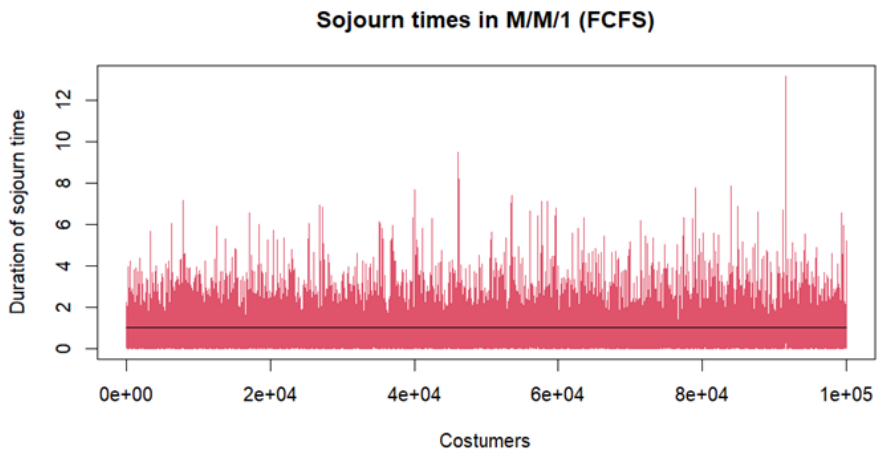
Τα αποτελέσματα και για τον $E[S]$ παρουσιάζουν ομοιότητα σε μεγάλο βαθμό. Εδώ, παρατηρούμε πως πάλι στα συστήματα $M/M/1$ (LCFS-PR), $M/M/1$ (FCFS), $M/G/1$ (LCFS-PR) και $M/G/1$ (FCFS) συμπίπτουν, βγάζοντας το αποτέλεσμα:

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}$$

Έτσι, έχοντας ρυθμό αφίξεων $\lambda = 2$ και ρυθμό αναχωρήσεων $\mu = 3$ ο μέσος χρόνος παραμονής θα πρέπει να προκύπτει ότι είναι ίσος με την ποσότητα $\frac{1}{3(1-\frac{2}{3})} = 1$. Πράγματι, προσομοιώνοντας τις ουρές με ρυθμούς ίδιους με τους προαναφερθέντες και πλήθος πελατών ίσο με 100.000, προκύπτει ότι ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ισούται με 0,9956792 \simeq 1 και 1,004835 \simeq 1 για τις πειθαρχίες (LCFS-PR) και (FCFS), αντίστοιχα, γεγονός που επαληθεύει τους υπολογισμούς μας. Παρακάτω παρουσιάζονται διαγράμματα, που προέκυψαν μέσω προσομοίωσης, με τους χρόνους παραμονής κάθε πελάτη για τα δύο συστήματα. Η οριζόντια μαύρη γραμμή δηλώνει τη μέση τιμή αυτών.



Διάγραμμα 1: Χρόνοι παραμονής FCFS



Διάγραμμα 2: Χρόνοι παραμονής LCFS-PR

Από την άλλη, για την $G/G/1$ (LCFS-PR) υπολογίσαμε:

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1 - \gamma)},$$

για την $G/M/1$ (LCFS-PR):

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1 - \tilde{m}_A(\mu))}$$

και για την $G/M/1$ (FCFS):

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1 - \theta)}.$$

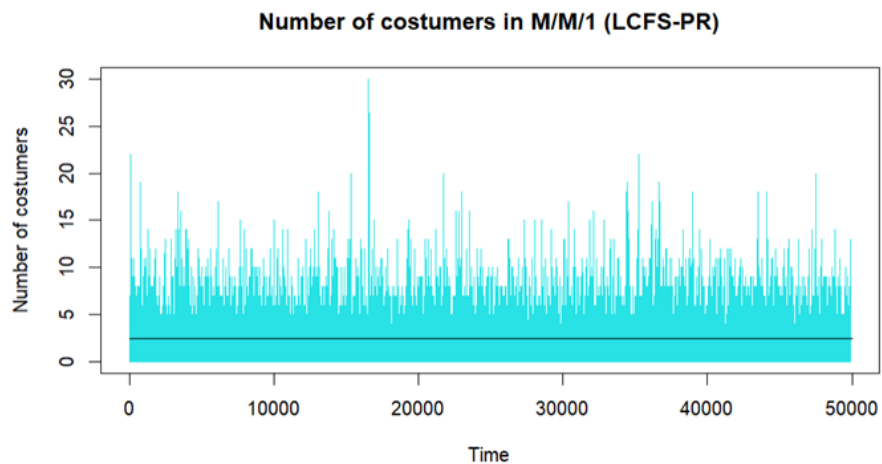
Συγκρίνοντας τον πρώτο και τον τρίτο από τους μέσους χρόνους παραμονής, έχουμε:

$$\frac{1}{\mu(1-\rho)} < \frac{1}{\mu(1-\gamma)} \Leftrightarrow \frac{1}{1-\rho} < \frac{1}{1-\gamma} \Leftrightarrow 1-\rho > 1-\gamma \Leftrightarrow \rho < \gamma,$$

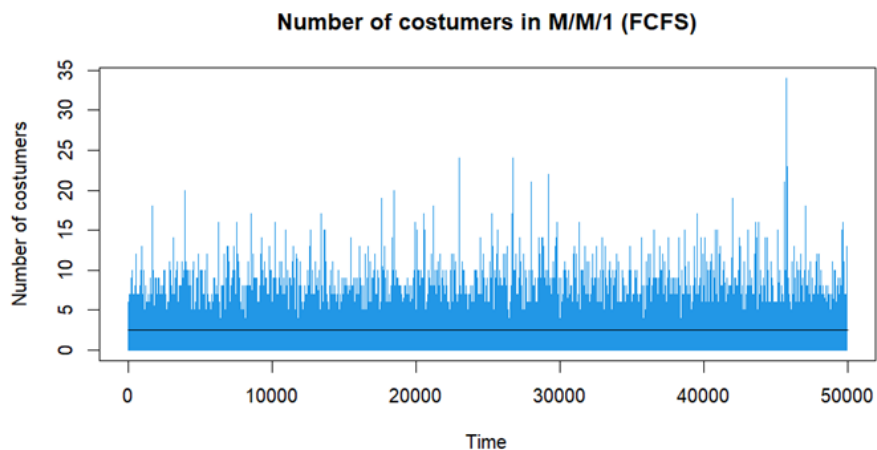
αποτέλεσμα που μας δείχνει ότι μικρότερες παράμετροι αντιστοιχούν σε μικρότερους μέσους χρόνους παραμονής πελατών στο σύστημα.

Σύγκριση μέσου πλήθους πελατών στο σύστημα

Το πλήθος πελατών δεν επιδιώξαμε να το μελετήσουμε θεωρητικά. Θα προχωρήσουμε απευθείας σε σύγκριση μέσω προσομοίωσης και θα βγάλουμε συμπεράσματα μέσω αυτής. Χρησιμοποιώντας τον ίδιο κώδικα με τα παραπάνω διαγράμματα, προκύπτει ότι τα μέσα πλήθη πελατών στα συστήματα $M/M/1$ (LCFS-PR) και $M/M/1$ (FCFS) είναι 2,50529 και 2,51911, αντίστοιχα. Έπειτα από αρκετές δοκιμές, παρατηρήθηκε πως το συγκεκριμένο πλήθος κυμαίνεται γύρω από την τιμή $\frac{\rho}{2} = 2,5$ και για τα δύο συστήματα. Επομένως, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι το μέσο πλήθος πελατών στα δύο αυτά συστήματα είναι το ίδιο. Παρακάτω, παρατίθενται τα αντίστοιχα διαγράμματα που παρουσιάζουν τα πλήθη πελατών κάθε στιγμή και με μία οριζόντια μαύρη γραμμή, η μέση τιμή αυτών.



Διάγραμμα: 3



Διάγραμμα: 4

Σύγκριση μέσων κύκλων πλήρους απασχόλησης, συνεχούς λειτουργίας και αργίας

Εδώ η σύγκριση γίνεται ακόμα πιο απλή. Με εξαίρεση τις $G/G/1$ και $G/M/1$ ουρές με πειθαρχία (LCFS-PR), οι υπόλοιπες παρουσιάζουν τους παρακάτω μέσους κύκλους:

$$E[Z] = \frac{1}{\lambda(1 - \rho)}$$

$$E[Y] = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}$$

$$E[I] = \frac{1}{\lambda}.$$

Για το σύστημα $G/G/1$ (LCFS-PR) ισχύει ότι:

$$E[Z] = \frac{1}{\lambda(1 - \gamma)}$$

$$E[Y] = \frac{1}{\mu(1 - \gamma)}$$

$$E[I] = \frac{1 - \rho}{\lambda(1 - \gamma)}$$

και για το σύστημα $G/M/1$ (LCFS-PR):

$$E[Z] = \frac{1}{\lambda(1 - \tilde{m}_A(\mu))}$$

$$E[Y] = \frac{1}{\mu(1 - \tilde{m}_A(\mu))}$$

$$E[I] = \frac{1 - \rho}{\lambda(1 - \tilde{m}_A(\mu))}.$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, πως η σύγκριση των παραπάνω μεγεθών ανάγεται στην σύγκριση των ρ και γ . Η μεγαλύτερη από αυτές τις δύο παραμέτρους θα δίνει τη μεγαλύτερη πιθανότητα επιτυχίας στην Γεωμετρική κατανομή, τον μεγαλύτερο μέσο χρόνο παραμονής πελάτη αλλά και τους μεγαλύτερους μέσους κύκλους πλήρους απασχόλησης και συνεχούς λειτουργίας, στα αντίστοιχα συστήματα. Για τον μέσο κύκλο αργίας, θα δουλέψουμε διαφορετικά. Αν $\rho > \gamma$, το κλάσμα $\frac{1-\rho}{1-\gamma}$ είναι μικρότερο της μονάδας. Συνεπώς,

$$\frac{1}{\lambda} > \frac{1 - \rho}{\lambda(1 - \gamma)}.$$

Αν $\rho < \gamma$, ισχύει το αντίθετο.

Ακολουθώντας τους τύπους παραπάνω, τα μέσα μήκη κύκλων πλήρους απασχόλησης για τα συστήματα $M/M/1$ (LCFS-PR) και $M/M/1$ (FCFS) είναι $E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$. Θέτοντας $\lambda = 2$ και $\mu = 3$, προκύπτει $E[Z] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{2(1-\frac{2}{3})} = \frac{3}{2} = 1,5$, αποτέλεσμα που επαληθεύεται και μέσω της προσομοίωσης που έχουμε πραγματοποιήσει. Πιο συγκεκριμένα, για την ουρά $M/M/1$ (LCFS-PR), έχουμε $E[Z] = 1,490789 \simeq 1,5$ και για την $M/M/1$ (FCFS), $E[Z] = 1,51313 \simeq 1,5$.

Συνοπτικά, τα αποτελέσματα όλων των παραπάνω συγκρίσεων, μέσω προσομοίωσης, δίνονται στις Εικόνες 4 και 5.

> LCFS(200000,2,3)

The mean duration of a cycle is: 1.490789
The mean number of costumers in the system is: 2.50529
The mean sojourn time for a costumer is: 0.9956792

Εικόνα 4

> FCFS(100000,2,3)

The mean duration of a cycle is: 1.51313
The mean number of costumers in the system is: 2.51911
The mean sojourn time for a costumer is: 1.004835

Εικόνα: 5

5.3 Σύγκριση στρατηγικής συμπεριφοράς

Εκτός των αποτελεσμάτων των δύο πειραρχιών, λογικό είναι να αλλάζει και η στρατηγική που θα υιοθετήσει ο καθένας ώστε να εξυπηρετηθεί όσο πιο ικανοποιητικά, για αυτόν, γίνεται. Η συγκεκριμένη παράγραφος αποτελεί συνέχεια της παραγράφου 4.2 στην οποία αποδείξαμε την ύπαρξη και μοναδικότητα συμμετρικής στρατηγικής ισορροπίας σε ένα σύστημα με πεπερασμένο πλήθος εισερχόμενων πελατών. Θα προσπαθήσουμε να καθορίσουμε την κοινωνική αποτελεσματικότητα των πειραρχιών (LCFS-PR) και (FCFS), δεδομένης της βέλτιστης στρατηγικής

και μέσω αυτών να εξάγουμε συμπεράσματα για το ποια από τις δύο πειθαρχίες παρουσιάζει καλύτερα αποτελέσματα. Θα εστιάσουμε περισσότερο στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων και όχι στη μαθηματική θεμελίωση αυτών.

Ξεκινάμε την ανάλυση με την εξαγωγή μαθηματικής έκφρασης για το D_i του LCFS-PR παίγνιου ουρών με δύο πελάτες, σύμφωνα με ένα λήμμα του Breinbjerg (2017).

Λήμμα 9 Για κάθε παίγνιο ουρών \mathcal{G} με πλήθος πελατών $\eta = 2$ και εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους εξυπηρέτησης S , έστω F μία στρατηγική και $b = \min\{t | F(t) = 1\} < +\infty$. Τότε, η κατανομή χρόνων αναχώρησης D_i μπορεί να γραφτεί:

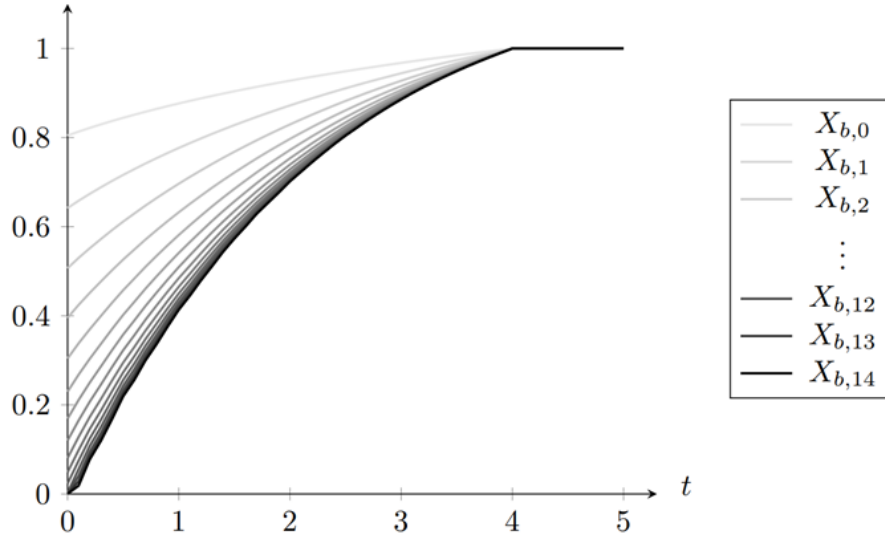
$$\begin{aligned} D_i(d|t, F) &= \sum_{\alpha \leq t} I_\alpha G(d-t; \mu) + \int_{-\infty}^t f_+(\alpha) G(d-t; \mu) d\alpha \\ &+ \sum_{0 < \alpha < b} I_\alpha [G(\alpha-t; \mu) G(d-t; \mu) + (1-G(\alpha-t; \mu)) H(d-\alpha; 2, \mu)] \\ &+ \int_t^b f_+(\alpha) [G(\alpha-t; \mu) G(d-t; \mu) + (1-G(\alpha-t; \mu)) H(d-\alpha; 2, \mu)] d\alpha, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

όπου $G \sim \exp(\mu)$, $H \sim \text{Gamma}(m, \mu)$ και

$$I_\alpha = \begin{cases} F(\alpha) - \lim_{s \rightarrow \alpha} F(s), & \text{αν } F(\alpha) - \lim_{s \rightarrow \alpha} F(s) > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

Ο Breinbjerg (2017) κατάφερε να δημιουργήσει έναν αλγόριθμο εύρεσης μιας $X_{b,h}$, η οποία θα μας βοηθήσει να βρούμε μία καλή προσέγγιση της συνάρτησης X_b , της παραγράφου 4.2. Ο αλγόριθμος αυτός εντοπίζει το κατάλληλο b και έπειτα το κατάλληλο h , ώστε η $X_{b,h}$ να ικανοποιεί τις απαιτήσεις ακρίβειας που έχουμε θέσει. Θυμίζουμε ότι η $X_{b,h}$ συγκλίνει στην X_b καθώς $h \rightarrow +\infty$. Στην παρούσα περίπτωση, εξήχθη ότι για $b = 4$ και $h = 14$ λαμβάνουμε την $X_{4,14}$ η οποία προσεγγίζει αρκετά καλά την X_4 . Η Εικόνα 6 δείχνει γραφικά την πορεία δοκιμών έως την επιλογή του $h = 14$.



Εικόνα 6

Η σύγκριση ανάμεσα στις πειθαρχίες (LCFS-PR) και (FCFS), θα πραγματοποιηθεί υπολογίζοντας την αποτελεσματικότητα κάθε περίπτωσης. Για την επίτευξη του τελευταίου, θα μας βοηθήσει η Τιμή Αναρχίας (Price of Anarchy - PoA) που «μετρά» την αναποτελεσματικότητα και αποτελεί τον λόγο της αθροιστικής αναμενόμενης ωφέλειας των δύο πελατών προς αυτή της κοινωνικά βέλτιστης λύσης. Προφανώς, όσο μικρότερη είναι η (PoA) τόσο μεγαλύτερη η αναποτελεσματικότητα. Βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται όταν ο πρώτος πελάτης ξεκινά την εξυπηρέτησή του τη στιγμή 0 και ο δεύτερος ακριβώς τη στιγμή αναχώρησης του πρώτου. Με αυτόν τον τρόπο, κανείς από τους δύο δεν περιμένει στον χώρο αναμονής και δεν έχει χαθεί καθόλου διαθέσιμος χρόνος έχοντας άδειο το σύστημα. Πιο συγκεκριμένα, θέτουμε W το άθροισμα ωφελειών των δύο πελατών, υπό την κοινωνικά βέλτιστη λύση. Έστω, επίσης, S_1 και S_2 οι ανεξάρτητοι, ταυτοτικοί και εκθετικά κατανομημένοι χρόνοι εξυπηρέτησης. Η αναμενόμενη τιμή του W υπολογίζεται ως εξής:

$$E[W|S_1, S_2] = V(0, S_1) + V(S_1, S_1 + S_2)$$

Σημειώνουμε ότι το άθροισμα δύο ανεξάρτητων εκθετικών συναρτήσεων παραμέτρου μ ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους 2 και μ . Με $g(x; \mu)$ και $h(x; \mu)$, συμβολίζουμε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των G και H που ορίστηκαν παραπάνω. Τότε, ισχύει ότι:

$$E[W] = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (V(0, s) + V(s, z))g(s; \mu)h(z; \mu)dsdz.$$

Με U_i^* δηλώνουμε την αναμενόμενη ωφέλεια του πελάτη i υπό την στρατηγική ισορροπίας ($i=1,2$) που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U_i^*(t, F) = \int_t^{+\infty} V(t, d)dD_i(d|t, F)$$

Συνεπώς, για την Τιμή Αναρχίας (PoA) θα έχουμε:

$$PoA = \frac{\sum_{i=1}^2 U_i^*}{E[W]}.$$

Ο Πίνακας 1 δίνει μία προσέγγιση της τιμής (PoA) του LCFS-PR παιγνίου της Εικόνας 6, στο οποίο η συνάρτηση ωφέλειας που χρησιμοποιήθηκε είναι η $V(t, d) = -d^{0,5}(d-t)^{0,8}$ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο 1. Ακριβώς από κάτω, ακολουθούν τα αντίστοιχα αποτελέσματα της FCFS περίπτωσης. Συγκρίνοντας τις δύο (PoA), παρατηρούμε ότι χαμηλότερη είναι στη δεύτερη περίπτωση.

	$\sum_i U_i^*$	$E[W]$	PoA
LCFS-PR	-2.230	-2.129	2.094
FCFS	-1.925	-2.129	1.808

Πίνακας 1

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, πως δεδομένου του συγκεκριμένου παιγνίου ουρών \mathcal{G} , ένας πελάτης δελεάζεται περισσότερο να εισέλθει στο σύστημα όταν η πειθαρχία που επικρατεί είναι η FCFS. Μια πιθανή εξήγηση του λόγου που η πειθαρχία LCFS-PR παρέχει υψηλότερη κοινωνική αναποτελεσματικότητα, μπορεί να είναι η πρόσθετη αναποτελεσματικότητα που προκαλείται από την ιδιότητα της διακοπής εξυπηρέτησης, λόγω άφιξης νέου πελάτη.

Το παραπάνω αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με την στρατηγική στη $M/M/1$ ουρά. Στην LCFS-PR περίπτωση, ο εισερχόμενος πελάτης προκαλεί αρνητικές επιδράσεις στους ήδη υπάρχοντες πελάτες και καθόλου επιδράσεις στους μελλοντικούς. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, κάθε άτομο να μπαίνει στο σύστημα και να αποχωρεί μόνο αν το πλήθος των πελατών υπερβεί ένα συγκεκριμένο όριο. Αντίθετα, στην FCFS πειθαρχία οι αρνητικές επιδράσεις προκαλούνται στους μελλοντικούς πελάτες και δεν επηρεάζονται αυτοί που είναι ήδη στην ουρά. Εδώ, λοιπόν, το ερώτημα είναι να εισέλθει ή όχι, ανάλογα με το ήδη υπάρχον πλήθος πελατών. Είναι ξεκάθαρο ότι η πειθαρχία LCFS-PR συμφέρει, συγκριτικά με την FCFS, διότι στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει θετική πιθανότητα ο πελάτης να μην εξυπηρετηθεί καθόλου.

6 Επίλογος

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία περιηγηθήκαμε στον κόσμο των ουρών αναμονής, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην πειθαρχία Last-Come-First-Served Pre-emptive Resume. Μέσα από την ανάλυση βασικών αποτελεσμάτων, αποκτήσαμε γνώση για το πώς «συμπεριφέρονται» τα συγκεκριμένα συστήματα, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε από πελάτες (μέσος χρόνος παραμονής), είτε από διαχειριστές (μέσο μήκος κύκλου πλήρους απασχόλησης, μέσο πλήθος πελατών) για την επίτευξη των στόχων τους. Έπειτα, ερευνήσαμε πιο σύνθετα συστήματα στα οποία οι πελάτες, ο υπηρέτης αλλά και ο τρόπος εξυπηρέτησης παρουσιάζουν ιδιαιτερότητες πολύ ενδιαφέρουσες, με αντίστοιχα ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Συνεχίσαμε, αναλύοντας την στρατηγική συμπεριφορά που μπορεί να υιοθετηθεί από πελάτες και διαχειριστές, εξάγοντας χρήσιμα συμπεράσματα τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτιστοποίηση της ωφέλειάς τους. Τέλος, πραγματοποιήσαμε σύγκριση των πειθαρχιών (LCFS-PR) και (FCFS). Ένα από τα βασικότερα αποτελέσματα που προέκυψαν, είναι ότι οι δύο πειθαρχίες παρουσιάζουν ομοιότητες περισσότερες από ότι θα περίμενε κάποιος διαισθητικά. Βασικά μεγέθη, όπως οι μέσοι χρόνοι παραμονής στις δύο πειθαρχίες, πολλές φορές ταυτίζονται ή, τουλάχιστον, παρουσιάζουν εξαιρετικές ομοιότητες. Σε επίπεδο στρατηγικών, κρίθηκε αποτελεσματικότερη η πειθαρχία (FCFS) στην περίπτωση πεπερασμένου πλήθους πελατών που επιδιώκουν να βρουν την κατάλληλη στιγμή εισόδου τους στην ουρά. Συνοψίζοντας, η (LCFS-PR), τελικά, είναι μία ενδιαφέρουσα περίπτωση πειθαρχίας η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συστήματα απλά ή σύνθετα και να μας δώσει αποτελέσματα που άλλες φορές τα περιμένουμε διαισθητικά και άλλες όχι. Μερικές περιπτώσεις ουρών που μπορούν να μελετηθούν στο μέλλον, με τη συγκεκριμένη πειθαρχία, μπορεί να περιλαμβάνουν πλήθος υπηρετών μεγαλύτερο του 1, διαφορετικούς τύπους εξυπηρέτησεων ανάλογα τον υπηρέτη, δυνατότητα αποχώρησης - επανεισόδου και άλλες παραλλαγές αυτών που αναλύθηκαν στις παραπάνω παραγράφους.

7 Παραρτήματα

7.1 Παράρτημα 1

Κώδικας προσομοίωσης της ουράς $M/M/1$ (LCFS-PR):

```
##Simulation of M/M/1 (LCFS-PR) queue

LCFSPR = function(n,lambda,mu)
{
  library(dplyr)

  # Vectors for arrival - departure times and the number
  # of costumers in the system
  x = matrix(0,n,2)
  y = matrix(0,n,2)

  # Arrival time of the first costumer
  x[1,1] = rgamma(1,1,lambda)
  x[1,2] = 1

  # Current number of costumers in the system
  k=1

  # Determination of the arrival - departure times
  for (i in 2:n)
  {
    if (k>0)
    {
      s = rgamma(1,1,2)
      t = rgamma(1,1,3)
      if (s < t)
      {
        k = k + 1
        x[i,1] = s
        x[i,2] = 1
      } else {
        k = k - 1
        y[i,1] = t
        y[i,2] = -1
      }
    } else {
      k = k + 1
      x[i,1] = rgamma(1,1,2)
      x[i,2] = 1
    }
  }

  # Matrix of arrival - departure times and the current
  # number of costumers in the system
```

```

Times = x + y
Times[,1] = cumsum(Times[,1])
Times[,2] = cumsum(Times[,2])

# Mean number of costumers
mean_costumers = mean(Times[,2])

# Calculation of the sojourn times
Arr = Times[c(which(x[,2] == 1)),1]
a = length(Arr)
Dep = Times[c(which(y[,2] == -1)),1]
d = length(Dep)
minimum = min(a,d)
Arr = Arr[c(1:as.integer(minimum))]
Dep = Dep[c(1:as.integer(minimum))]
Sojourn = Dep - Arr

# Mean sojourn times
Mean_Sojourn = mean(Sojourn)

# Calculation of the number of cycles
w = which(Times[,2]==0)
c = length(w)

# Mean length of a full cycle
E_Z = Times[n,1]/c

# Plots
par(mfrow=c(1,2))

# Plot of the number of costumers in the system
plot(Times[,2]~Times[,1], type = "l",main = "Number_of
costumers_in_M/M/1(LCFS-PR)", xlab="Time",
ylab="Number_of_costumers",col=5)
lines(c(mean_costumers,mean_costumers)~c(0,n/4))

# Plot of the sojourn times
plot(Sojourn, type="l",main = "Sojourn_times
in_M/M/1(LCFS-PR)",xlab="Costumers",
ylab="Duration_of_sojourn_time",col=3)
lines(c(Mean_Sojourn,Mean_Sojourn)~c(0,minimum))

# Results
cat("The_mean_duration_of_a_cycle_is:", E_Z, "\n")
cat("The_mean_number_of_costumers_in_the_system_is:",
mean_costumers, "\n")
cat("The_mean_sojourn_time_for_a_costumer_is:",
Mean_Sojourn, "\n")
}

```


7.2 Παράρτημα 2

Κώδικας προσομοίωσης της ουράς $M/M/1$ (FCFS):

```
##Simulation of M/M/1 (FCFS) queue

FCFS <- function(n,lambda,mu)
{
  library(dplyr)
  ss = runif(1,1,100)
  ss = as.integer(ss)
  set.seed(ss)

  # Arrival times
  x = cumsum(rgamma(n,1,lambda))

  # Service times
  set.seed(ss+10)
  k = rgamma(n,1,mu)

  # Vector of departure times
  y = numeric(n)

  # Departure time of the first customer
  y[1] = x[1] + k[1]

  # Determination of the departure times
  for (i in 2:n)
  {
    if (x[i] > y[i-1]){
      y[i] = x[i] + k[i]
    } else {
      y[i] = y[i-1] + k[i]
    }
  }

  # Matrix of arrival - departure times and the current
  # number of costumers in the system
  z = matrix(c(x,y,rep(1,n),rep(-1,n)),2*n,2)
  z = arrange(data.frame(z),X1)
  z[,2] = cumsum(z[,2])

  # Mean number of costumers
  mean_costumers = mean(z[,2])

  # Calculation of the number of cycles
  w = which(z[,2]==0)
  c = length(w)

  # Mean length of a full cycle
  E_Z = z[2*n,1]/c
}
```

```

# Sojourn times
S = y-x

# Mean sojourn times
E_S = mean(S)

# Plots
par(mfrow=c(1,2))

# Plot of the number of costumers in the system
plot(z[,2]~z[,1], type = "l",main = "Number_of_costumers
in_M/M/1_(FCFS)", xlab="Time",
ylab="Number_of_costumers",col=4)
lines(c(mean_costumers,mean_costumers)~c(0,n/2))

# Plot of the sojourn times
plot(S, type="l",main = "Sojourn_times_in_M/M/1_(FCFS)",
xlab="Costumers", ylab="Duration_of_sojourn_time", col=2)
lines(c(E_S,E_S)~c(0,n))

# Results
cat("The_mean_duration_of_a_cycle_is:", E_Z, "\n")
cat("The_mean_number_of_costumers_in_the_system_is:",
mean_costumers, "\n")
cat("The_mean_sojourn_time_for_a_costumer_is:", E_S, "\n")
}

```

8 Βιβλιογραφία

1. Οικονόμου, Α. (2023). Θεωρία Ουρών Αναμονής Κάλλιπος, Άνοικτες Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <https://dx.doi.org/10.57713/kallipos-182>
2. Φακίνος, Δ. (2008). Ουρές αναμονής. Εκδόσεις Συμμετρία
3. Alfa, A. S., & Rao, T. S. S. S. (2000). SUPPLEMENTARY VARIABLE TECHNIQUE IN STOCHASTIC MODELS. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 14(2), 203–218. <https://doi.org/10.1017/s0269964800142068>
4. Alperstein, H. (1988). Note—Optimal Pricing Policy for the Service Facility Offering a Set of Priority Prices. *Management Science*. <https://doi.org/10.1287/mnsc.34.5.666>
5. Breinbjerg, J. (2017). Equilibrium arrival times to queues with general service times and non-linear utility functions. *European Journal of Operational Research*. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.03.010>
6. Breinbjerg, J., & Østerdal, L. P. (2017). Equilibrium Arrival Times to Queues: The Case of Last-Come First-Serve Preemptive-Resume. *Social Science Research Network*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2940130>
7. Breinbjerg, J., Platz, T. T., & Østerdal, L. P. (2023). Equilibrium arrivals to a last-come first-served preemptive-resume queue. *Annals of Operations Research*. <https://doi.org/10.1007/s10479-023-05348-9>
8. Economou, A. (2021). *The Impact of Information Structure on Strategic Behavior in Queueing Systems*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1002/9781119755234.ch4>
9. Fakinos, D. (1981). The G/G/1 Queueing System with a Particular Queue Discipline. <https://www.semanticscholar.org/paper/The-G-G-1-Queueing-System-with-a-Particular-Queue-Fakinos/b8282fcf0265ac4482a2bf24c8c4932f600dec75>
10. Fakinos, D. (1986). On the single-server queue with the preemptive-resume last-come-first-served queue discipline. *Journal of Applied Probability*, 23(1), 243–248. <https://doi.org/10.2307/3214136>
11. Fakinos, D. (1987). The single-server queue with service depending on queue size and with the preemptive-resume last-come-first-served queue discipline. *Journal of Applied Probability*, 24(3), 758–767. <https://doi.org/10.2307/3214105>
12. Fakinos, D. (1988). An Application of Little’s Result to the G/G/1 (LCF-S/P) Queue. *Journal of the Operational Research Society*. <https://doi.org/10.1057/jors.1988.32>

13. Fakinos, D. (1992). The G/G/1 (LCFS/P) queue with service depending on queue size. *European Journal of Operational Research*, 59(2), 303–307. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(92\)90145-y](https://doi.org/10.1016/0377-2217(92)90145-y)
14. Gómez-Corral, A. (1999). Stochastic analysis of a single server retrial queue with general retrial times. *Naval Research Logistics*, 46(5), 561–581. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1520-6750\(199908\)46:5](https://doi.org/10.1002/(sici)1520-6750(199908)46:5)
15. Hassin, R. (1985). On the Optimality of First Come Last Served Queues. ideas.repec.org. <https://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v53y1985i1p201-02.html>
16. Hassin, R. (1986). Consumer Information in Markets with Random Product Quality: The Case of Queues and Balking. <https://www.semanticscholar.org/paper/Consumer-Information-in-Markets-with-Random-Product-Hassin/e19861fa63d14d271be1b3500f278d9f08aee691>
17. Hassin, R., & Haviv, M. (2003). To Queue or Not to Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems. In *International series in management science/operations research*. Springer Science+Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-0359-0>
18. Keilson, J., & J. W. Cohen (1971). The Single Server Queue. *Siam Review*, 13(1). <https://doi.org/10.1137/1013009>
19. Kumar, B. V. K. V., Vijayakumar, A., & Arivudainambi, D. (2002). An M/G/1 Retrial Queueing System with Two-Phase Service and Preemptive Resume. *Annals of Operations Research*. <https://doi.org/10.1023/a:1020901710087>
20. Kumar, B. K., Rathinam, S., & Rukmani, R. (2018). Performance Analysis of an M/G/1 Retrial Queueing Systems Under LCFS-PR Discipline with General Retrial and setup times. *ResearchGate*. <https://www.researchgate.net/publication/326478283>
21. Levy, Y. (1983). *Introduction to queueing theory*, 2nd ed., by Robert B. Cooper, Elsevier North Holland, New York, 1981, 347 pp. *Networks*. <https://doi.org/10.1002/net.3230130112>
22. Naor, P. (1969). The Regulation of Queue Size by Levying Tolls. *Econometrica*, 37(1), 15. <https://doi.org/10.2307/1909200>
23. Núñez-Queija, R. (2001). NOTE ON THE GI/GI/1 QUEUE WITH LCFS-PR OBSERVED AT ARBITRARY TIMES. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 15(2), 179–187. <https://doi.org/10.1017/s0269964801152034>

24. Sennott, L. I., Humblet, P. A., & Tweedie, R. L. (1983). Technical Note - Mean Drifts and the Non-Ergodicity of Markov Chains. *Operations Research*, 31(4), 783–789. <https://doi.org/10.1287/opre.31.4.783>
25. Shanthikumar, J. G., & Sumita, U. (1986). ON G/G/1 QUEUES WITH LIFO-P SERVICE DISCIPLINE. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 29(3), 220–231. <https://doi.org/10.15807/jorsj.29.220>