ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ:
ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΗΝ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΛΗΣΤΕΙΑΣ

Κώστας Γαβρίνας, ΕΚΠΑ,
kgavrinas@math.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο πρόβλημα-δραστηριότητα οι μαθητές θα κάνουν πρακτική εφαρμογή του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, για να διερευνήσουν ένα πρόβλημα -προϊόν μυθοπλασίας- και θα χρησιμοποιήσουν μαθηματικές δεξιότητες για να εντοπίσουν αποδεικτικά στοιχεία σε μία ληστεία. Το σενάριο της δραστηριότητας πραγματεύεται τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου, τις πυθαγόρειες τριάδες, τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένα τρίγωνο ορθογώνιο. Σκοπός της είναι να εντοπιστούν δυσκολίες ή παρανοήσεις είτε κατά την λεκτική κατανόηση της περιγραφής του προβλήματος είτε κατά την διαδικασία της επίλυσής του, ενώ φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή-βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και στην προσέγγισή τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το θέμα που εξετάζεται σε αυτή την εργασία είναι οι δυσκολίες των μαθητών να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Γενικό ζητούμενο ήταν το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Επιπλέον, έμμεσα εξετάστηκε και το επίπεδο αλγεβρικής σκέψης, καθώς αυτό μπορεί να επηρεάσει τις δεξιότητες της μαθηματικής σκέψης τους στην γεωμετρία.

Με το συγκεκριμένο πρόβλημα, σε αυτήν την εργασία, οι μαθητές καλούνται να λύσουν μια σειρά αστυνομικών εγκλημάτων χρησιμοποιώντας κριτική σκέψη και μαθηματικές δεξιότητες που συνδυάζονται με την έννοια του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, όπου οι μαθητές πρέπει να σκεφτούν να το εφαρμόσουν για να βρουν τα μεγέθη που αναζητούν.

Γενικότερα, το πρόβλημα αυτό φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή/βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και στην διαδικασία προσέγγισής τους. Έτσι, ο εκπαιδευτικός θα ολοκληρώσει την δραστηριότητα εστιάζοντας στην μάθηση και στην εφαρμογή της σε ένα πραγματικό σενάριο. Η κύρια ιδέα είναι να φανεί πώς παρατηρούμε τις λεπτομέρειες και εφαρμόζουμε τα μαθηματικά για να αντιληφθούμε καταστάσεις και να λάβουμε αποφάσεις σε καταστάσεις της (πραγματικής) ζωής.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι μαθητές βλέπουν τα μαθηματικά ως ένα δύσκολο μάθημα που αποτελείται από αφηρημένες έννοιες που είναι μακριά από την ζωή, με μη ελκυστικούς κανόνες και τύπους. Αυτό ισχύει ειδικότερα και για το Πυθαγόρειο Θεώρημα, καθώς η διδασκαλία του δίνεται ως συνήθως με την διατύπωσή του, κάτι που δυσκολεύει τους μαθητές τόσο στην κατανόηση όσο και στην αποστήθιση του.

Το γεγονός αυτό επαληθεύει την άποψη του Γαγάτση (1993), που υποστηρίζει ότι οι μαθητές έχουν δυσκολίες όχι μόνο με τα θεωρήματα που αναφέρονται στα γεωμετρικά σχήματα, αλλά και με τα σχήματα καθαυτά, όσον αφορά στην αντίληψη της μορφής τους και τη λογική τους ταξινόμηση.

Επιπλέον οι μαθητές μαθαίνουν συνήθως «παπαγαλία» το Πυθαγόρειο Θεώρημα, χωρίς να αντιλαμβάνονται γεωμετρικά τι σημαίνει η φράση «το τετράγωνο της υποτείνουσας» ή «το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών», ενώ μερικές φορές συγχέουν τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα.

Σύμφωνα με το ΙΕΠ, «*Τα μαθηματικά αποτελούν ένα ιδιαίτερο αντικείμενο μάθησης. Αναγνωρίζονται ως ένας από τους πλέον κρίσιμους τομείς του ανθρώπινου πολιτισμού, εξαιτίας του ισχυρού τρόπου ερμηνείας του κόσμου που προσφέρουν, με σημαντική συνεισφορά στην ανάπτυξη της ατομικής αλλά και της συλλογικής σκέψης. (…) Ωστόσο, η αφαιρετική τους φύση, η αυστηρότητα και η πολυπλοκότητα των εμπλεκόμενων ιδεών και της οργάνωσής τους, καθώς και η -πολλές φορές- αναποτελεσματική προσέγγισή τους στο σχολείο, εμποδίζουν αρκετούς/ές μαθητές/ήτριες, ειδικώς αυτούς/ές που ανήκουν σε ευάλωτες κοινωνικές ομάδες, να επιτύχουν στα μαθηματικά και να αναπτύξουν θετικά συναισθήματα γι' αυτά*» (ΙΕΠ, 2022-2023).

Περνώντας τα σύνορα της Ελλάδας διαβάζουμε, σύμφωνα με το «Principles and Standards for School Mathematics», ότι για να χρησιμοποιούν σωστά τα μαθηματικά οι μαθητές είναι απαραίτητος ένας συνδυασμός «*πραγματικής γνώσης, διαδικαστικής διευκόλυνσης και εννοιολογικής κατανόησης*» (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, σελ. 20).

Πέρα όμως από αυτά, τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα και ως τέτοια πρέπει να συνδέεται με την πραγματικότητα. Στο νέο πρόγραμμα σπουδών του ΙΕΠ για τα Γυμνάσια (με όμοια περιγραφή και στα αντίστοιχα για τα Δημοτικά και για τα Λύκεια) αναφέρει πως επιδιώκει για τους μαθητές να «*αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, όπως ο συλλογισμός, η μοντελοποίηση, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν τη μάθηση των Μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα*» (ΙΕΠ, 2021).

Μέσα από την διδακτική πράξη (σενάρια, δραστηριότητες) που βασίζεται στην εμπειρία πραγματικών καταστάσεων, επιδιώκεται συνειδητά από τον εκπαιδευτικό να απαλλαγούν οι μαθητές από τον φόβο του λάθους και την άρνηση της μάθησης, που συνδέεται αρκετές φορές με την αυστηρή μαθηματική παρουσίαση, καθώς το ζητούμενο δεν είναι να αποφύγουμε τα λάθη των μαθητών αλλά να οδηγήσουμε τον μαθητή να τα συναντήσει, να τα δημιουργήσει και να τα υπερπηδήσει (Papert, 1991).

Αν και η αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών εμπλέκει τους μαθητές στην επίλυση και τη συζήτηση εργασιών (tasks) που προάγουν τον μαθηματικό συλλογισμό και επίλυση προβλημάτων, «*όλες οι εργασίες δεν παρέχουν τις ίδιες ευκαιρίες στην σκέψη και στην μάθηση των μαθητών*» (National Council of Teachers of Mathematics, 2014, σελ.17).

Ιδιαίτερα όμως, οι υψηλής ποιότητας εργασίες μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τα μαθηματικά. Επιπρόσθετα, εργασίες που τοποθετούν σε εννοιολογικό πλαίσιο «*μαθηματικές ιδέες συνδέοντάς τες με καταστάσεις του πραγματικού κόσμου*» (NCTM, 2014, σελ. 29) μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές πιο αποτελεσματικά για να τις κατανοήσουν.

Ωστόσο, σε πολλά σχολικά βιβλία παρουσιάζονται ψευδο-πλαίσια ή πλαστά προβλήματα του πραγματικού κόσμου, για να πείσουν τους μαθητές ότι η μάθηση στο σχολείο είναι σχετική με την πραγματική ζωή. Δυστυχώς αυτά τα ψευδο-πλαίσια «*δίνουν την αντίθετη εντύπωση οι μαθητές, καθώς δείχνουν τα μαθηματικά να είναι απόκοσμα και εξωπραγματικά*» (Boaler, 2016, σελ. 297).

Αυτή η αποσύνδεση μεταξύ του πραγματικού κόσμου και της σχολικής τάξης μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να πιστεύουν ότι τα μαθηματικά, αντί να είναι ένα ευρέως εφαρμόσιμο εργαλείο, δεν είναι πολύ χρήσιμα ούτε εφαρμόσιμα στη ζωή τους.

Έτσι οι μαθηματικοί (εκπαιδευτικοί και ερευνητές) «*συμφωνούν όλο και περισσότερο ότι η σύνδεση των σχολικών μαθηματικών με εμπειρίες και καταστάσεις εκτός σχολείου, είναι ένα κρίσιμο στοιχείο σημαντικό για τη μάθηση των μαθητών*» (Stoehr et al., 2015, σελ. 1150). Αυτό το επιχείρημα υποστηρίζεται από μελέτες που υποδηλώνουν ότι οι γνώσεις και οι εμπειρίες που φέρνουν οι μαθητές από την καθημερινή τους ζωή μπορούν να χρησιμεύσουν ως πηγές/πόροι για την εκμάθηση μαθηματικών (Civil, 2002), καθώς και απόδειξη ότι η μάθηση των μαθητών ενισχύεται όταν οι έννοιες και οι δεξιότητες συνδέονται με πραγματικά πλαίσια και καταστάσεις (Boaler, 2016).

Εδώ έρχεται και η πρόταση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Realistic Mathematics Education - RME) που βλέπει τα Μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να μαθηματικοποιήσουν ρεαλιστικές καταστάσεις και να επανεφεύρουν μαθηματικές έννοιες με την κατάλληλη καθοδήγηση (Freudenthal, 1973, στο Κωνσταντίνου & Τριανταφύλλου, 2022), εκθέτοντας τον μαθητή σε μια ποικιλία προβλημάτων και καταστάσεων του πραγματικού κόσμου (De Lange, 1995).

Στόχος της RME είναι να κάνει την εκμάθηση των μαθηματικών πιο ενδιαφέρουσα και ουσιαστική για τους μαθητές, εισάγοντας την διδασκαλία των μαθηματικών μέσω περιγραφικών προβλημάτων που επιλύονται από τις γνώσεις και τις εμπειρίες των μαθητών.

Η μορφή της RME ορίζεται κυρίως από την άποψη του ολλανδού Freudenthal (1991) για τα μαθηματικά. Αυτό σημαίνει ότι τα μαθηματικά πρέπει να είναι κοντά στο παιδί και να σχετίζονται με ρεαλιστικές καταστάσεις. Όμως, η λέξη «ρεαλιστική» δεν αναφέρεται μόνο στην σχέση με τον πραγματικό κόσμο, αλλά αναφέρεται επίσης στην πραγματική κατάσταση του προβλήματος μέσα στο μυαλό του μαθητή.

Ο Freudenthal τόνισε ότι δεν είναι όλοι οι μαθητές μελλοντικοί μαθηματικοί: για την πλειοψηφία, όλα τα μαθηματικά που θα χρησιμοποιήσουν ποτέ θα είναι για την επίλυση προβλημάτων σε καταστάσεις καθημερινής ζωής. Ως εκ τούτου, η εξοικείωση των μαθητών με μια μαθηματική προσέγγιση σε αυτό το είδος επίλυσης προβλημάτων αξίζει να αποτελεί ύψιστη προτεραιότητα στη μαθηματική εκπαίδευση. Αυτός ο στόχος θα μπορούσε να συνδυαστεί με το στόχο οι μαθητές να μαθηματικοποιήσουν καταστάσεις προβλημάτων που θα ήταν βιωματικά πραγματικές για αυτούς (Gravemeijer & Terwel, 2000).

Σύμφωνα με τις αρχές και τα χαρακτηριστικά της RME, τα βήματά της στην μάθηση έχουν οριστεί ως εξής:

- κατανόηση του προβλήματος με βάση την διατύπωση
- επίλυση του προβλήματος με βάση την διατύπωση
- σύγκριση και συζήτηση των απαντήσεων
- ολοκλήρωση της απάντησης.

Η διδασκαλία στην τάξη με RME ξεκινά με περιγραφικά προβλήματα που είναι οικεία στους μαθητές δηλαδή είναι μέσα στις εμπειρίες και τις γνώσεις τους. Στην συνέχεια, οι μαθητές λύνουν ή διευκολύνονται να λύσουν τα προβλήματα που παρουσιάζονται με βάση το δοσμένο κείμενο.

Η επίλυση προβλημάτων με βάση περιγραφικό κείμενο είναι γνωστό ότι έχει θετική επίδραση στην ικανότητα των μαθητών να κατανοούν τα μαθηματικά (Bonotto, 2010), καθώς η εκμάθηση των μαθηματικών γίνεται καλύτερα δίνοντας στους μαθητές να λύσουν προβλήματα διατυπωμένα με κείμενο.

Απαραίτητη όμως προϋπόθεση εφαρμογής όλων αυτών είναι η ευχαρίστηση του ίδιου του εκπαιδευτικού από τα μαθηματικά αφού «*κάποιος που δεν μπορεί να εκτιμήσει την ομορφιά και την δύναμη των μαθηματικών δεν θα μεταδώσει σε άλλους την γνήσια συγκίνησή του*» (Ντριάνκος & Τρανός, 2009, σελ. 8).

Και όλα αυτά σε μία περίοδο όπου έχει τεθεί ο προβληματισμός εάν και πότε εφαρμογές τεχνητής νοημοσύνης (π.χ. ChatGPT) μπορεί να υποκαταστήσουν τον άνθρωπο-εκπαιδευτικό (π.χ. Paul von Hippel, 2023).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην δραστηριότητα συμμετείχαν δύο μαθήτριες (αδελφές) Β' Γυμνασίου, που είχαν διδαχθεί το Πυθαγόρειο Θεώρημα πριν τα Χριστούγεννα.

Η δραστηριότητα ήταν χωρισμένη σε πολλά μέρη (φύλλα εργασίας – βλ. Παράρτημα σελ. 11) με ερωτήματα για την αποκάλυψη πιθανών δυσκολιών των μαθητριών.

Μέχρι την στιγμή που οι μαθήτριες πραγματοποίησαν την δραστηριότητα, είχαν εξασκηθεί στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων (του σχολικού βιβλίου) με Πυθαγόρειο Θεώρημα κατά την διάρκεια του μαθήματος στην τάξη ή με τις (συνηθισμένες) εργασίες/ασκήσεις στο σπίτι.

Ειδικότερα στην εργασία τίθενται έμμεσα τα ακόλουθα ζητούμενα:

- να εξεταστεί η μετάβαση από τη συνηθισμένη γλώσσα στην μαθηματική γλώσσα
- να παρατηρηθεί το νόημα που αποδίδουν οι μαθητές στο ΠΘ
- να αναλυθεί η χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων που κάνουν οι μαθητές
- να παρατηρηθεί η ικανότητά τους να ερμηνεύουν τη λύση ενός προβλήματος

- να παρατηρηθεί εάν οι μαθητές μπορούν να συνδέσουν τις οπτικές/γεωμετρικές και αλγεβρικές έννοιες.

Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω των γραπτών απαντήσεων που δόθηκαν στα φύλλα εργασίας και των παρατηρήσεων που καταγράφηκαν κατά την διάρκεια της μίας συνάντησης που διάρκεσε η δραστηριότητα.

Σχεδιασμός

Η δραστηριότητα υλοποιήθηκε εξ ολοκλήρου και από κοινού στην οικία τους, σε ήσυχο χώρο χωρίς να αποσπάται η προσοχή όλων των συμμετεχόντων. Αποτελούνταν από πέντε φύλλα εργασίας, όπου το καθένα συνέχιζε την περιγραφή του προβλήματος του προηγούμενου.

Και οι δύο μαθήτριες ήταν ένα τυπικό δείγμα μαθητή της τάξης/ηλικία τους, χωρίς θετικές ή αρνητικές ιδιαιτερότητες/χαρακτηριστικά.

Η εργασία πραγματοποιήθηκε με ομαδική συνεργασία και όχι ατομικά.

Η δραστηριότητα σχεδιάστηκε ώστε να διαρκεί περίπου δύο ώρες.

Η κάθε μαθήτρια είχε το δικό της φύλλο εργασίας, ατομικά γεωμετρικά όργανα (κανόνας και διαβήτης) και κομπιουτεράκι.

Συλλογή δεδομένων

Για την συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν τα γραπτά των μαθητών πάνω στα φύλλα εργασίας, η ηχογράφηση (και απομαγνητοφώνηση) της δραστηριότητας, φωτογραφίες από συγκεκριμένες φάσεις της δραστηριότητας και παρατηρήσεις-σημειώσεις που καταγράφηκαν από τον εκπαιδευτικό.

Η συνολική διάρκεια της της ηχογράφησης-δραστηριότητας ήταν 1:20.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα ήταν τα αναμενόμενα εκτός από το πέμπτο φύλλο εργασίας (για το οποίο θα αναφερθούμε παρακάτω).

Η δραστηριότητα ολοκληρώθηκε σε χρόνο συντομότερο από τον προϋπολογισθέντα.

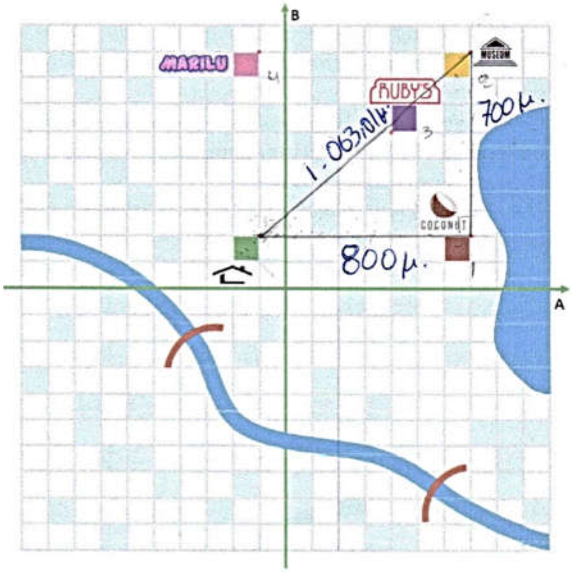
Η συμμετοχή των μαθητριών ήταν πολύ καλή και υπήρχε καλή επικοινωνία του εκπαιδευτικού με τις μαθήτριες αλλά και μεταξύ τους.

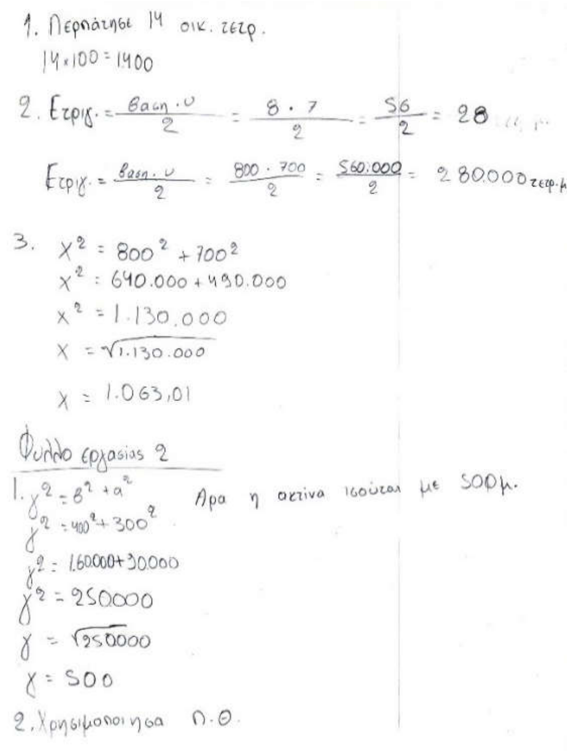
Ο εκπαιδευτικός-ερευνητής δεν χρειάστηκε να εμπλακεί έντονα στην ροή της δραστηριότητας -εκτός από την φάση του πέμπτου φύλλου εργασίας- και οι μαθήτριες προχωρούσαν χωρίς βοήθεια ή παρέμβαση.

Κατά την διάρκεια της δραστηριότητας σημειώθηκαν οι παρακάτω παρατηρήσεις-κρίσιμα σημεία (η απομαγνητοφώνηση βρίσκεται σε ξεχωριστό αρχείο):

- Γίνεται υπερβολική χρήση αριθμομηχανής (κομπιουτεράκι) ακόμα και για πολύ απλές πράξεις προπαίδειας – π.χ. 7*8 (9:15).

- Καθώς η μία μαθήτρια χρησιμοποιεί μία μη τυπική μονάδα μέτρησης (5:20) μετράει οικοδομικά τετράγωνα (τετραγωνάκια) αλλά προβληματίζεται σχετικά, καθώς δεν είναι σίγουρη ότι κάνει κάτι σωστό (χρησιμοποιώντας αυτή την μονάδα μέτρησης).
- Η χρήση αυτής της μονάδας μέτρησης (που υπαγορεύεται από σχήμα) εξακολουθεί και προκαλεί σύγχυση καθώς μπερδεύουν τα μέτρα με τα οικοδομικά τετράγωνα (8:10). Κατά συνέπεια, το εμβαδό βρέθηκε 28 με μονάδα μέτρησης (στο σκεπτικό τους) τα τετραγωνικά μέτρα (9:47) επειδή η άσκηση ζητούσε τετραγωνικά μέτρα. Μετά (10:06) από παρέμβαση του καθηγητή «*28 τι;*», άρχισαν αυθόρμητες και τυχαίες απαντήσεις όπως «28 στην δευτέρα», με τον καθηγητή να παρατηρεί δείχνοντας το πάτωμα του σπιτιού ότι αν αυτό είναι 28 τετραγωνικά μέτρα αποκλείεται να χωρούν 8 οικοδομικά τετράγωνα σε αυτό. Από ότι φαίνεται, οι μαθήτριες βρήκαν ένα αποτέλεσμα αλλά τον αριθμό δεν τον επεξεργάστηκαν με την λογική (δηλ. αν έχει νόημα αυτό που βρήκαν – σχετικός διάλογος μέχρι 11:28), κάτι που φαίνεται αρκετά συνηθισμένο σε μαθηματικά προβλήματα και μάλλον επεκτείνεται και σε προβλήματα της φυσικής ή αλλού.




1. Περπάτησε 14 οικ. τετρ.
$14 \cdot 100 = 1400$

2. $E_{τριγ.} = \frac{βαση \cdot υ}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$

$E_{τριγ.} = \frac{βαση \cdot υ}{2} = \frac{800 \cdot 700}{2} = \frac{560.000}{2} = 280000$ τετ.μ

3. $x^2 = 800^2 + 700^2$
$x^2 = 640.000 + 490.000$
$x^2 = 1.130.000$
$x = \sqrt{1.130.000}$
$x = 1.063,01$

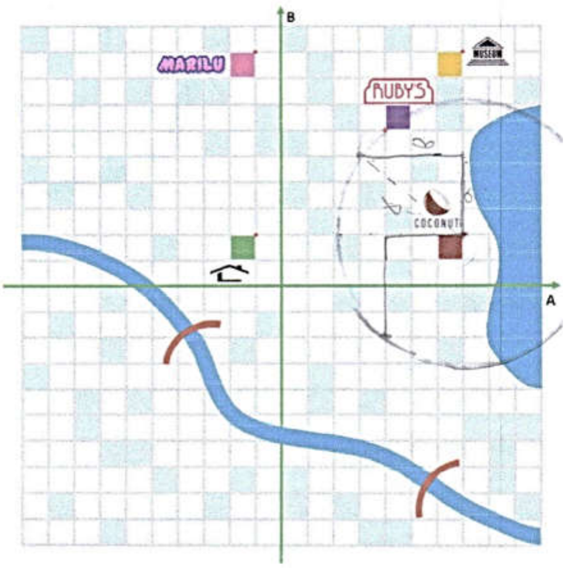
Φύλλο εργασίας 2

1. $γ^2 = β^2 + α^2$ Άρα η ακτίνα ισούται με 500μ.
$γ^2 = 400^2 + 300^2$
$γ^2 = 160000 + 30000$
$γ^2 = 250000$
$γ = \sqrt{250000}$
$γ = 500$

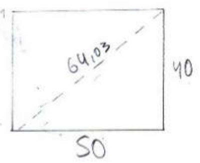
2. Χρησιμοποίησα Π.Θ.

- Σύγχυση με τις μονάδες μέτρησης (δηλ. οικοδομικά τετράγωνα και μέτρα) αναφέρεται και παρακάτω (12:03), όπου η μία μαθήτρια αναφέρει ότι «*η μονάδα μέτρησης με μπερδεύει λίγο*».
- Κατά την εφαρμογή του τύπου του ΠΘ για τον υπολογισμό της υποτείνουσας, υπάρχει προβληματισμός αν θα πρέπει να υπολογιστεί πρώτα η τετραγωνική ρίζα και μετά το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων ή το ανάποδο (16:05). Οι μαθήτριες φαίνεται ότι δεν μπορούν να ερμηνεύσουν εφαρμόσουν σωστά τον τύπο παρόλο που τον έχουν γραμμένο μπροστά τους και τον βλέπουν.
- Η μαθήτρια μπερδεύεται για το πώς πρέπει να προχωρήσει (22:01), διότι έχει υποθέσει η ίδια μία πιθανή διαδρομή (τρόπο λύσης) χωρίς να είναι σίγουρη ότι αυτή είναι σωστή, άρα έχει αμφιβολία για το τι πρέπει να κάνει παρακάτω. Της φαίνεται περίεργο να υπάρχουν δύο τουλάχιστον διαδρομές (απαντήσεις) αφού έχει

συνηθίσει στα προβλήματα μαθηματικών και τις ασκήσεις να υπάρχει μία και μόνο μία σωστή λύση.



- Δυσκολεύονται να αποφασίσουν (καθώς μελετούν το πρόβλημα – 35:00) τα μέρη όπου δεν είναι δυνατόν να βρίσκεται ο έφορος, παρόλο που άμα είχαν να το αντιμετωπίσουν στην πραγματικότητα θα αποφάσισαν αμέσως ότι ο έφορος δεν μπορεί να βρίσκεται μέσα στη θάλασσα!
- Υπάρχει προβληματισμός (38:43) καθώς μπερδεύονται για το πώς θα πρέπει να γίνει το σχέδιο του χαρτοφύλακα και να τοποθετήσουν τις τιμές για μήκος, πλάτος, ύψος, διότι θεωρούν ότι έχει σημασία εάν ο χαρτοφύλακας είναι τοποθετημένος όρθιος ή οριζόντιος οπότε θεωρούν ότι οι τρεις αυτές τιμές θα προσδιορίσουν κάθε φορά κάτι διαφορετικό (ανάλογα με τον προσανατολισμό του χαρτοφύλακα). Γίνεται φανερό ότι δεν έχουν αποσαφηνίσει μαθηματικά ότι οι τρεις δεδομένες τιμές αντιστοιχούν στις τρεις διαστάσεις του χαρτοφύλακα, δίχως απαραίτητα κάθε μία από αυτές να ονομάζεται υποχρεωτικά ως μήκος, πλάτος ή ύψος και κατά συνέπεια έχουν την απορία πώς είναι τοποθετημένος χαρτοφύλακας. Τελικά διαπιστώνεται ότι δεν έχει σημασία η ονομασία στην τιμή (διάσταση) αλλά αν έχει χρησιμοποιηθεί σωστά (43:21).



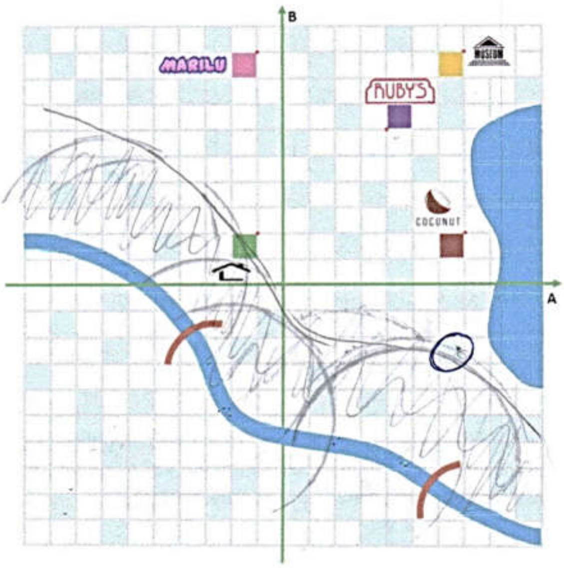
Π.Θ: $x^2 = 40^2 + 50^2$
$x^2 = 1.600 + 2.500$
$x^2 = 4.100$
$x = \sqrt{4.100}$
$x = 64{,}03$

Το σκήπτρο χωράει στον χαρτοφύλακα καθώς η διαγώνιος του ορθογωνίου είναι 64,03.

- Σε κάποια στιγμή (48:45) προβληματίζονται εάν τα τετράγωνα έχουν ίσες πλευρές. Φαίνεται πως αυτά που μαθαίνουν ως έννοιες τα μαθαίνουν εντελώς επιφανειακά (παπαγαλία) δίχως να συγκρατούν χαρακτηριστικά και ιδιότητες.
- Το τέταρτο φύλλο εργασίας επιλύθηκε πιο γρήγορα από όλα -παρόλη την έκτασή του- καθώς χρειαζόταν απλά μία αλγοριθμική προσέγγιση με πράξεις (που έγιναν με το κομπιουτεράκι) για να συμπληρωθεί ο ζητούμενος πίνακας.

β	γ	α	$β^2$	$γ^2$	$α^2$	$β^2 + γ^2$	
3	4	5	9	16	25	25	
24	7	25	576	49	625	625	N
30	16	34	900	256	1.156	1.156	N
15	6	16	225	36	256	261	
21	20	25	441	400	625	841	
12	5	13	144	25	169	169	N
12	10	14	144	100	196	244	

- Το πέμπτο φύλλο εργασίας προέκυψε πιο δύσκολο από το αναμενόμενο. Αν και φάνηκε ότι οι μαθήτριες καταλαβαίνουν τελικά το αποτέλεσμα (αφού το βρήκαν οι ίδιες), είναι δύσκολο να αντιληφθούν την έννοια της μετατόπισης μιας καμπύλης τυχαίας μορφής κατά μία σταθερή ποσότητα. Ο εκπαιδευτικός χρειάστηκε να τις καθοδηγήσει αρκετά ως προς τον τρόπο σκέψης τους για να εντοπίζουν την λύση. Αυτό το φύλλο εργασίας ίσως θα



πρέπει να αποφευχθεί ή να χρησιμοποιηθεί συμμαθητές που είναι άνω του μέσου όρου στα μαθηματικά για αυτήν την ηλικία. Επίσης, ίσως θα πρέπει να αναθεωρηθεί η καμπύλη που αναπαριστά το ποτάμι σε κάποιο πιο απλό γεωμετρικό σχήμα ώστε οι μαθητές να μπορέσουν να σκεφτούν ευκολότερα τι μορφή που θα έχει η ζητούμενη καμπύλη – για παράδειγμα τεθλασμένη γραμμή με δύο ενδιάμεσες κορυφές. Ενώ μετά -ως επέκταση της δραστηριότητας- θα μπορούσε να είναι μία συζήτηση για την τελική θέση της ζητούμενης καμπύλης εάν αυτή είχε αρχική οποιαδήποτε μορφή.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την δραστηριότητα επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος φάνηκε ότι κύριο σημείο είναι να εντοπίσουν οι μαθητές ότι θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί με κάποιον τρόπο το Πυθαγόρειο θεώρημα και όχι κάτι άλλο για να βρεθεί η λύση με αποτέλεσμα να επηρεάστηκε από συγκεκριμένες ικανότητες των μαθητριών (ανάπτυξη εικασιών και αναγνώριση).

Δεν φάνηκε να υπάρχει δυσκολία κατά την μετάβαση από την λεκτική διατύπωση του προβλήματος στην μαθηματική περιγραφή του, καθώς διαπιστώθηκε ότι χωρίς δυσκολία αφαίρεσαν από το (λεκτικό) πλαίσιο του προβλήματος όλα εκείνα τα (περιττά) στοιχεία ώστε να απομείνει κάποιο (γεωμετρικό) σχήμα του οποίου κάποιο χαρακτηριστικό (διάσταση) θα έπρεπε να υπολογίσουν, ενώ η συμβολική αναπαράσταση -όπου χρειάστηκε- έγινε σωστά (αριθμός, σημείο, γραμμή, εξίσωση).

Αντίθετα, δυσκολία φαίνεται να υπάρχει λόγω του τρόπου εκμάθησης των γεωμετρικών εννοιών καθώς οι μαθητές συνδέουν κάποια γεωμετρική έννοια οντότητα με τον τρόπο που αυτή απεικονίζεται συνήθως στο επίπεδο ή στον χώρο, ενώ με διαφορετική απεικόνιση θεωρούν ότι δεν πρόκειται για την ίδια οντότητα (παράδειγμα όρθιος ή οριζόντιος χαρτοφύλακας ή ο τρόπος που είναι σχεδιασμένο το ορθογώνιο τρίγωνο).

Τέλος εμφανίστηκε η πολύ συνηθισμένη τάση για τους μαθητές που τους δείχνει να εξαρτώνται απόλυτα από την αριθμομηχανή (κομπιουτεράκι) για την εκτέλεση ακόμα και απλών πράξεων.

Πάντως, τα συγκεκριμένα ερευνητικά ευρήματα περιορίζονται/οριοθετούνται από τον τύπο της ερευνητικής μεθόδου (μελέτη περίπτωσης), τους χρονικούς περιορισμούς και το πλήθος των μαθητών.

Με βάση όλα όσα προηγήθηκαν, μπορούμε να βγάλουμε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με την ενασχόληση των μαθητών με μαθηματικά προβλήματα.

Ένα από αυτά είναι ότι μπορούμε να παρέχουμε μεθόδους μάθησης βασισμένες σε προβλήματα για να τους βοηθήσουμε να πλησιάσουν τα μαθηματικά, να τους δείξουμε ότι τα μαθηματικά υπάρχουν συνεχώς στο περιβάλλον μας, ώστε να μην τα φοβούνται και να ξεχνούν γρήγορα αυτά που έχουν μάθει νωρίτερα και η κατανόησή τους δεν αφορά πάντα τύπους αλλά και πραγματικές καταστάσεις και την εφαρμογή τους στην καθημερινή ζωή.

Ειδικά, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να σχεδιάζουν στρατηγικές μάθησης και διδασκαλίας με γνώμονα το γνωστικό στυλ των μαθητών. Ο εκπαιδευτικός μπορεί και πρέπει να ενθαρρύνει τον μαθητή να δημιουργήσει και να χρησιμοποιήσει την μαθηματική αναπαράσταση σε ένα πρόβλημα. Έτσι, η διδασκαλία των Μαθηματικών με την μέθοδο RME όχι μόνο βοηθά τους μαθητές να εξασκήσουν τις απαραίτητες μαθηματικές δεξιότητες, αλλά και τους βοηθά να απαντήσουν στην ερώτηση «*γιατί να μάθω μαθηματικά;*».

Με άλλα λόγια, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι ευέλικτοι και δημιουργικοί στην επιλογή κατάλληλων πλαισίων για το γνωστικό επίπεδο των μαθητών καθώς και για το περιεχόμενο διδασκαλίας. Και εδώ το ερώτημα που πλανάται είναι εάν, στην τρέχουσα κατάσταση με το φορτωμένο πρόγραμμα σπουδών και τον περιορισμένο αριθμό διδακτικών ωρών, είναι δυνατό να αφιερωθεί κάποιο μέρος του χρόνου σε τέτοιου δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Boaler, J. (2016). Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages, and innovative teaching. Jossey-Bass. https://studylib.es/doc/9061817/mathematical-mindsets--unleashing-students--potential-throug

Bonotto, C. (2010). Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing. In: Lesh, R., Galbraith, P., Haines, C., Hurford, A. (eds) *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies.* Springer, Boston, MA 399-408. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1

Civil, M. (2002). Culture and mathematics: A community approach. *Journal of Intercultural Studies, 23(2),* 133-148. https://doi.org/10.1080/07256860220151050A

De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. https://www.researchgate.net/publication/255041996_Assessment_No_change_without_problems

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic. https://p4mriunismuh.files.wordpress.com/2010/08/revisiting-mathematics-education.pdf

Gourgey, A. F. (1998). Metacognition in basic skills instruction. *Instructional Science 26,* 81-96. https://doi.org/10.1023/A:1003092414893

Gravemeijer, K. P. E., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32(6),* 777-796. https://doi.org/10.1080/00220270050167170

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). *Principles and Standards for School Mathematics,* USA https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions,* USA. http://areaiihsmap.pbworks.com/w/file/fetch/109255672/Principles.To.Actions.ebook.pdf

Papert, S. (1991). Νοητικές Θύελλες, μτφρ. Αγνή Σταματίου. Αθήνα: Οδυσσέας. https://opac.seab.gr/record=b2293351~S6*gre

Stoehr, K., Turner, E., Sugimoto, A. (2015). One teacher's understandings and practices for real-world connections in mathematics. In T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield, & H. Dominguez (Eds.), *Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1150-1153. East Lansing, MI: Michigan State University https://scholarcommons.scu.edu/tepas/50/

Von Hippel, P. T. (2023). ChatGPT is not ready to teach geometry (yet) https://www.educationnext.org/chatgpt-is-not-ready-to-teach-geometry-yet/

Γαγάτσης, Α. (1993). Θέματα διδακτικής Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Αδελφοί Κυριακίδη. https://opac.seab.gr/record=b2286529~S6*gre

ΙΕΠ, 2021, Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεις του Γυμνάσιου. http://iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli

ΙΕΠ, Οδηγίες διδασκαλίας μαθημάτων της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης κατά το σχολικό έτος 2022-2023. http://iep.edu.gr/images/IEP/EPISTIMONIKI_YPIRESIA/Epist_Monades/tmima_B/115009_2_Παράρτημα_1_Γλώσσα_κλπ.pdf

Κωνσταντίνου Ι., Τριανταφύλλου, Χ. (2022). Μαθητές 'επαναφέρουν' τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης μέσω της επίλυσης ανοικτού προβλήματος κινηματικής. *Πρακτικά 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών*, Αθήνα, ΕΝΕΔΙΜ, 267-276. https://drive.google.com/file/d/14tthA4wdA5LqbonKsD8bOy9c5jseiITB/view

Ντριάνκος Σ., Τρανός, Τ. (2009). Πυθαγόρειο Θεώρημα μια διδακτική προσέγγιση για μαθητές κάθε ηλικίας, *Εισήγηση στο 26ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, Θεσσαλονίκη. http://blogs.sch.gr/sntriankos/files/2015/03/Πυθαγορειο-Θεωρημα.pdf

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

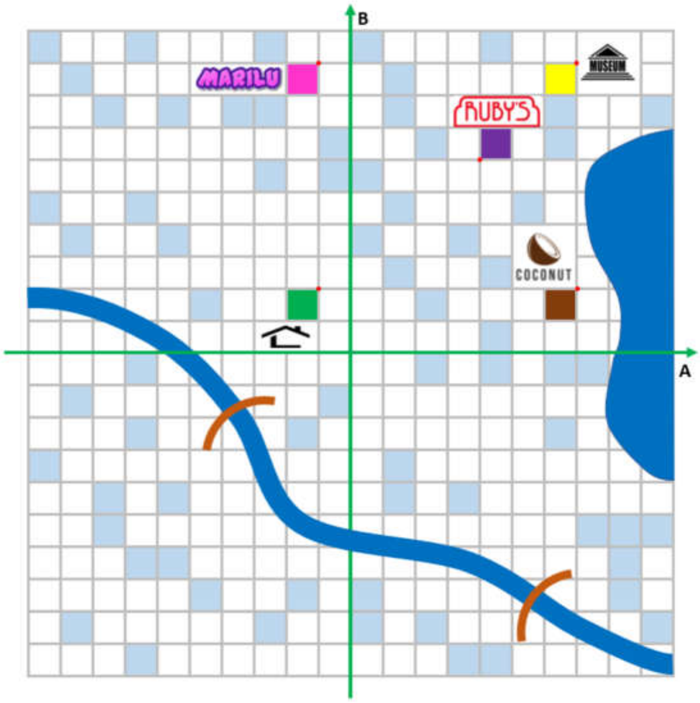
Φύλλο εργασίας 1

Είναι Δευτέρα πρωί. Εσείς και ο κολλητός σας έχετε κληθεί από το τοπικό αστυνομικό τμήμα για να βοηθήσετε σε μια υπόθεση, επειδή οι αστυνομικοί είναι λίγοι λόγω της γρίπης.

Ένας επιστάτης στο τοπικό μουσείο έφτασε στη δουλειά του σήμερα το πρωί και ανακάλυψε ότι η πόρτα του μουσείου ήταν ξεκλείδωτη, πολύτιμα εκθέματα έλειπαν.

Ο έφορος του μουσείου δεν υπήρχε πουθενά και δεν μπορεί να εντοπιστεί.

Σας δίνονται αυτές οι πληροφορίες:



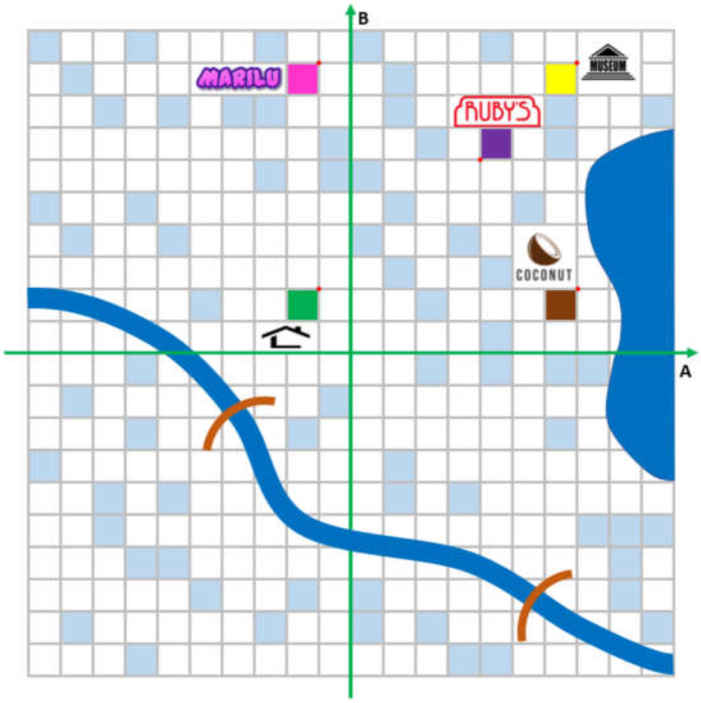
1. *Ο έφορος δεν βρίσκεται στο (κίτρινο) μουσείο ή στο (πράσινο) σπίτι του και δεν έχει εμφανιστεί κάπου από την Παρασκευή.*
2. *Ο έφορος ξεκινώντας από το (πράσινο) σπίτι του, κάθε μέρα περπατάει από και προς τη δουλειά του στο (κίτρινο) μουσείο (βλ. χάρτη).*
3. *Κάθε πρωί σταματά για να πάρει καφέ στο (καφέ) Coconut και κάθε βράδυ σταματά για δείπνο στο (ροζ) Marilou.*
4. *Κάθε μεσημέρι, ο έφορος γευματίζει στο (μοβ) Ruby's.*
5. *Λείπουν τα κλειδιά του εφόρου.*

Στον χάρτη, κάθε τετράγωνο αντιστοιχεί σε ένα οικοδομικό τετράγωνο και κάθε ένα από αυτά έχει πλευρά 90 μέτρα, με το πλάτος των δρόμων 10 μέτρα (οι γραμμές είναι οι δρόμοι). Η κόκκινη κουκίδα στα τέσσερα μέρη δείχνει πού βρίσκεται είσοδος στο καθένα.

<u>Ερωτήσεις</u>

1. Πόσα οικοδομικά τετράγωνα περπάτησε ο έφορος από το σπίτι του, στο καφέ και μετά στο μουσείο; Πόσα μέτρα είναι αυτή η διαδρομή;
2. Εάν ο έφορος περπατούσε απευθείας από το σπίτι στο καφέ, μετά στο μουσείο και μετά στο σπίτι του, και η αστυνομία θέλει να ερευνήσει την περιοχή που περικλείεται από την διαδρομή αυτή, ποιο είναι το εμβαδόν αυτού του σχήματος; Θυμηθείτε ότι κάθε τετράγωνο (μαζί με τον δρόμο) είναι 100 μέτρα.
3. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ του σπιτιού του εφόρου και του μουσείου;
4. Πώς υπολογίσατε την απόσταση;

Φύλλο εργασίας 2



Οι αρχές έχουν λάβει ένα ανώνυμο τηλεφώνημα που έδωσε τις ακόλουθες πληροφορίες:

- *Ο έφορος εθεάθη να μπαίνει σε ένα αυτοκίνητο αμέσως μετά την αναχώρησή του από το καφέ, πριν φτάσει στο μουσείο.*
- *Το αυτοκίνητο κινήθηκε για τρία οικοδομικά τετράγωνα, έστριψε αριστερά, οδήγησε άλλα τέσσερα οικοδομικά τετράγωνα και στην συνέχεια σταμάτησε.*
- *Ο έφορος είναι ακόμα ζωντανός.*
- *Ο καλών αρνήθηκε να δώσει περισσότερες λεπτομέρειες και έκλεισε το τηλέφωνο αμέσως μετά.*

  Οι αρχές θέλουν να θυμάστε ότι ο έφορος δεν έχει φανεί από τότε που εξαφανίστηκε.

Οδηγίες

Κοιτάζοντας το χάρτη, εντοπίστε πιθανά μέρη ως προς το πού μπορεί να βρίσκεται ο χώρος όπου κρατείται ο έφορος. Επίσης, χρησιμοποιώντας το καφέ ως αφετηρία, προσδιορίστε την περιοχή στην οποία βρίσκεται αυτή η τοποθεσία.

Στον χάρτη, κάθε τετράγωνο είναι ένα οικοδομικό τετράγωνο και κάθε ένα από αυτά έχει πλευρά 90 μέτρα, με το πλάτος των δρόμων 10 μέτρα (οι γραμμές είναι οι δρόμοι). Η κόκκινη κουκίδα στα τέσσερα μέρη δείχνει πού βρίσκεται είσοδος στο καθένα.

Ερωτήσεις

1. Ποια είναι η ακτίνα του κύκλου που δημιουργείται γύρω από το καφέ Coconut;
2. Πώς βρήκατε την ακτίνα του κύκλου;
3. Ποια είναι η διάμετρος του κύκλου που δημιουργείται;
4. Χρησιμοποιώντας έναν διαβήτη, σχεδιάστε έναν κύκλο στον χάρτη γύρω από το καφέ Coconut.
5. Ποιο είναι το εμβαδό του κύκλου που δημιουργήθηκε;
6. Είσαστε σε θέση να εξαλείψετε κάποια μέρη του κύκλου όπου είναι αδύνατο να βρίσκεται ο έφορος; Γιατί;

Φύλλο εργασίας 3

Μέρος Α’

Οι αρχές έχουν βίντεο με έναν πιθανό ύποπτο για την διάρρηξη στο μουσείο. Ο ύποπτος εθεάθη να κρατά έναν χαρτοφύλακα διαστάσεων 50x40x10 εκατοστά. Ένα από τα αντικείμενα που κλάπηκαν ήταν ένα κυλινδρικό σκήπτρο με μήκος 55 εκ. και πλάτος 5 εκ. Οι αστυνομικοί θέλουν να δουν εάν αυτό το αντικείμενο μπόρεσε να μεταφερθεί από το μουσείο μέσα στον χαρτοφύλακα αυτού του υπόπτου.

Οδηγίες

- *Χρησιμοποιήστε αυτές τις πληροφορίες για να κάνετε ένα σχέδιο του χαρτοφύλακα και του αντικειμένου που κλάπηκε.*
- *Χωράει το κλεμμένο σκήπτρο μέσα στον χαρτοφύλακα;*

Μέρος Β’

Οι αστυνομικοί ανακάλυψαν ότι ένας μεγάλος πίνακας κλάπηκε από το μουσείο. Χρησιμοποιήστε τις μαθηματικές σας δεξιότητες για να προσδιορίσετε εάν ο πίνακας χώρεσε να βγει από ένα παράθυρο του μουσείου. Τα παράθυρα του μουσείου έχουν όλα ίδιες διαστάσεις, πλάτος 60 εκ. και ύψος 60 εκ. Ο μεγάλος πίνακας που κλάπηκε είχε διαστάσεις 87x90 εκατοστά (μαζί με το κάδρο του).

Με βάση τις πληροφορίες που δίνονται, βρείτε εάν ο πίνακας θα χωρούσε να περάσει μέσα από το παράθυρο. Τα συμπεράσματά σας θα βοηθήσουν να εντοπιστεί κάποιος ύποπτος και επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο δικαστήριο ως αποδεικτικά στοιχεία – γράψτε τα όσο πιο «επίσημα» γίνεται!

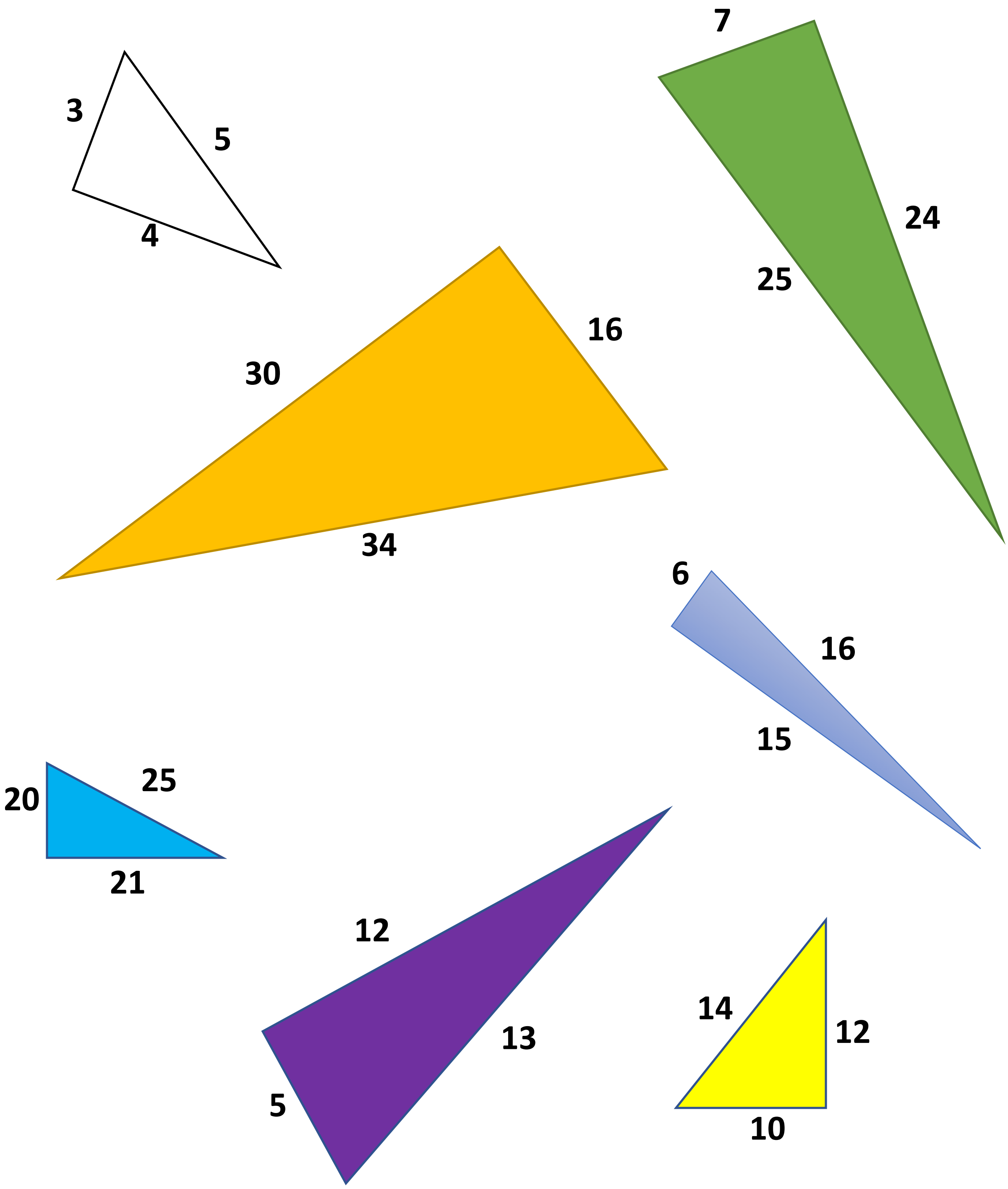
Ερωτήσεις

- *Θα χωρούσε ο πίνακας για να περάσει μέσα από το παράθυρο;*
- *Γιατί ναι ή γιατί όχι; (δώστε αναλυτική και «επίσημη» γραπτή απάντηση)*

Φύλλο εργασίας 4

Οι αρχές βρήκαν ένα λάπτοπ που περιέχει στοιχεία σχετικά με την υπόθεση. Δυστυχώς προστατεύεται με κωδικό πρόσβασης. Το hint για τον κωδικό πρόσβασης είναι «Πυθαγόρειες Τριάδες».

Δίνονται τα παρακάτω τρίγωνα με τις διαστάσεις τους:



- Καταχωρίστε στον παρακάτω πίνακα τα στοιχεία των τριγώνων (α είναι πάντοτε η μεγαλύτερη πλευρά).
- Βρείτε ποια από αυτά είναι ορθογώνια τρίγωνα.
- Το πρώτο τρίγωνο (λευκό) παρέχεται μόνο ως παράδειγμα και δεν αποτελεί μέρος του κωδικού πρόσβασης.

β	γ	α	β^2	γ^2	α^2	$\beta^2 + \gamma^2$
3	**4**	**5**	**9**	**16**	**25**	**25**

Το password είναι όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες από τα παραπάνω ορθογώνια τρίγωνα, όπου κάθε τριάδα είναι από το μικρότερο προς τον μεγαλύτερο αριθμό και οι τριάδες σε σειρά από αυτήν με την μικρότερη υποτείνουσα προς αυτήν με την μεγαλύτερη υποτείνουσα.

Γράψτε εδώ το password που βρήκατε: ....

Φύλλο εργασίας 5

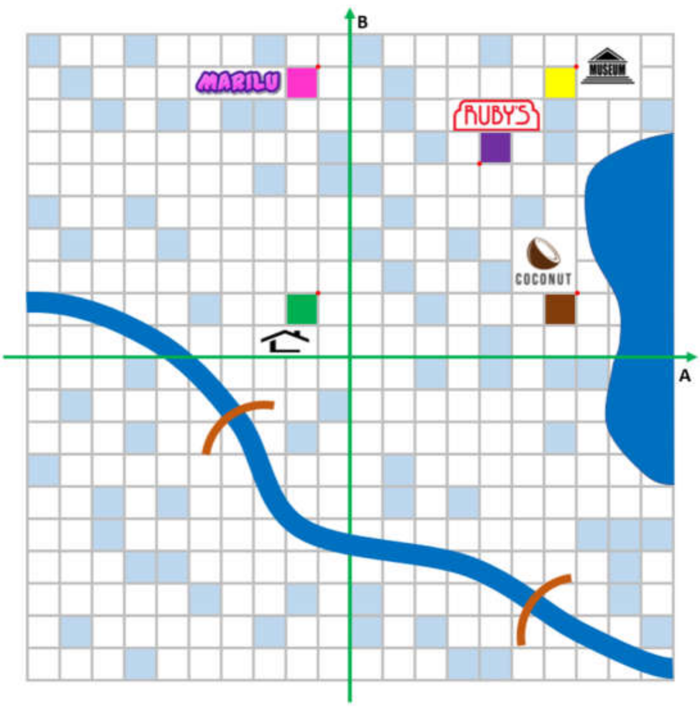
<u>Συγχαρητήρια για το σπάσιμο του κώδικα!</u>

Αυτές είναι οι πληροφορίες που εμφανίστηκαν:

- *Ο έφορος εθεάθη σε ένα παράθυρο που ήταν σε ύψος 5 μέτρα από το πεζοδρόμιο, άρα βρίσκονταν στον πρώτο όροφο.*
- *Από το παράθυρο φαίνεται ο ποταμός.*
- *Όλα τα κτήρια στο τρίτο τεταρτημόριο είναι ισόγεια.*
- *Η απόσταση ποτάμι-παράθυρο είναι μισό χιλιόμετρο.*

<u>Ερωτήσεις</u>

1. Πού βρίσκεται ο έφορος;
2. Κυκλώστε με στυλό το κτήριο που βρήκατε (στο σχήμα τα κτήρια είναι με γαλάζιο χρώμα).



Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που δώσατε εσείς, η αστυνομία περικύκλωσε το κτήριο και εκεί ανακάλυψαν ότι ο έφορος και οι συνεργάτες του ήταν υπεύθυνοι για την ληστεία.

Έγιναν συλλήψεις και τα κλεμμένα αντικείμενα επιστράφηκαν στο μουσείο.

Οι αρχές σας ευχαριστούν θερμά και επιθυμούν να γνωρίζετε ότι δεν θα μπορούσαν να τα καταφέρουν δίχως τις πολύτιμες γνώσεις σας στην γεωμετρία και σας απονέμουν τον ακόλουθο έπαινο για την ουσιαστική σας συμβολή στην εξιχνίαση της υπόθεσης.

THE DETROIT POLICE DEPARTMENT

The Commissioner

presents a

CIVILIAN AWARD

to

whose substantial contribution to good law enforcement
has earned the admiration and appreciation
of the Detroit Police Department.

Date

Commissioner of Police

Form C of D--6-AW

Έπαινος αστυνομίας

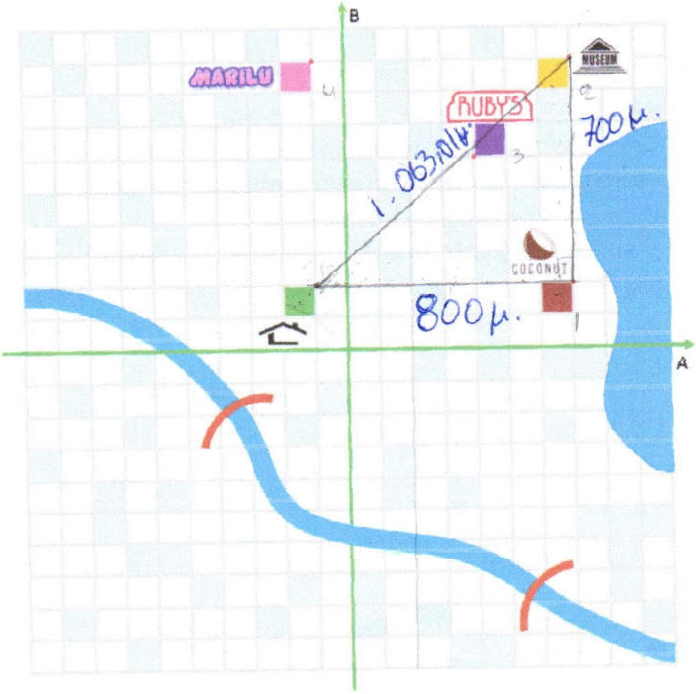
Φύλλο εργασίας 1

Είναι Δευτέρα πρωί. Εσείς και ο κολλητός σας έχετε κληθεί από το τοπικό αστυνομικό τμήμα για να βοηθήσετε σε μια υπόθεση, επειδή οι αστυνομικοί είναι λίγοι λόγω της γρίπης.

Ένας επιστάτης στο τοπικό μουσείο έφτασε στη δουλειά του σήμερα το πρωί και ανακάλυψε ότι η πόρτα του μουσείου ήταν ξεκλείδωτη, πολύτιμα εκθέματα έλειπαν.

Ο έφορος του μουσείου δεν υπήρχε πουθενά και δεν μπορεί να εντοπιστεί.

Σας δίνονται αυτές οι πληροφορίες:



1. *Ο έφορος δεν βρίσκεται στο (κίτρινο) μουσείο ή στο (πράσινο) σπίτι του και δεν έχει εμφανιστεί κάπου από την Παρασκευή.*
2. *Ο έφορος ξεκινώντας από το (πράσινο) σπίτι του, κάθε μέρα περπατάει από και προς τη δουλειά του στο (κίτρινο) μουσείο (βλ. χάρτη).*
3. *Κάθε πρωί σταματά για να πάρει καφέ στο (καφέ) Coconut και κάθε βράδυ σταματά για δείπνο στο (ροζ) Marilou.*
4. *Κάθε μεσημέρι, ο έφορος γευματίζει στο (μοβ) Ruby's.*
5. *Λείπουν τα κλειδιά του εφόρου.*

Στον χάρτη, κάθε τετράγωνο αντιστοιχεί σε ένα οικοδομικό τετράγωνο και κάθε ένα από αυτά έχει πλευρά 90 μέτρα, με το πλάτος των δρόμων 10 μέτρα (οι γραμμές είναι οι δρόμοι). Η κόκκινη κουκίδα στα τέσσερα μέρη δείχνει πού βρίσκεται είσοδος στο καθένα.

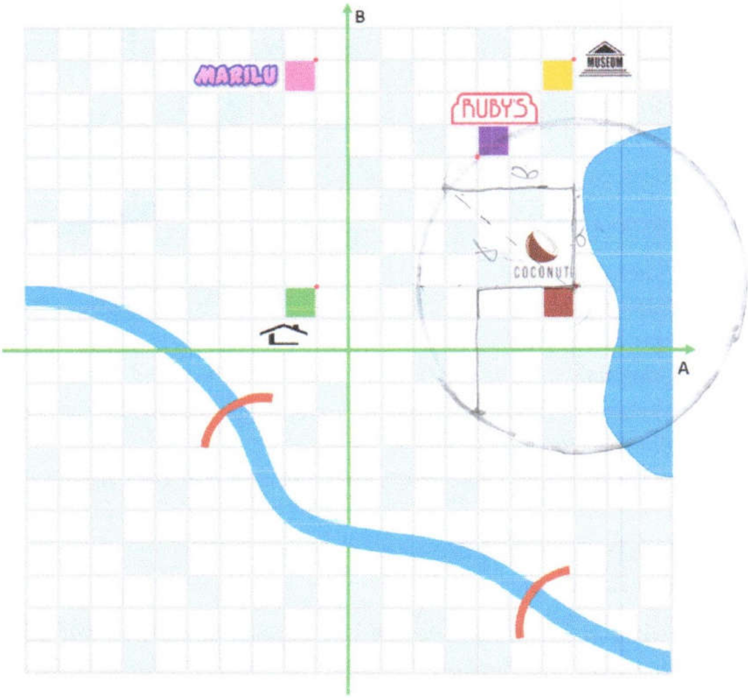
Ερωτήσεις

1. Πόσα οικοδομικά τετράγωνα περπάτησε ο έφορος από το σπίτι του, στο καφέ και μετά στο μουσείο; Πόσα μέτρα είναι αυτή η διαδρομή;
2. Εάν ο έφορος περπατούσε απευθείας από το σπίτι στο καφέ, μετά στο μουσείο και μετά στο σπίτι του, και η αστυνομία θέλει να ερευνήσει την περιοχή που περικλείεται από την διαδρομή αυτή, ποιο είναι το εμβαδόν αυτού του σχήματος; Θυμηθείτε ότι κάθε τετράγωνο (μαζί με τον δρόμο) είναι 100 μέτρα.
3. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ του σπιτιού του εφόρου και του μουσείου;
4. Πώς υπολογίσατε την απόσταση;

Φύλλο εργασίας 2

Οι αρχές έχουν λάβει ένα ανώνυμο τηλεφώνημα που έδωσε τις ακόλουθες πληροφορίες:

- *Ο έφορος εθεάθη να μπαίνει σε ένα αυτοκίνητο αμέσως μετά την αναχώρησή του από το καφέ, πριν φτάσει στο μουσείο.*
- *Το αυτοκίνητο κινήθηκε για τρία οικοδομικά τετράγωνα, έστριψε αριστερά, οδήγησε άλλα τέσσερα οικοδομικά τετράγωνα και στην συνέχεια σταμάτησε.*
- *Ο έφορος είναι ακόμα ζωντανός.*
- *Ο καλών αρνήθηκε να δώσει περισσότερες λεπτομέρειες και έκλεισε το τηλέφωνο αμέσως μετά. Οι αρχές θέλουν να θυμάστε ότι ο έφορος δεν έχει φανεί από τότε που εξαφανίστηκε.*



Οδηγίες:

Κοιτάζοντας το χάρτη, εντοπίστε πιθανά μέρη ως προς το πού μπορεί να βρίσκεται ο χώρος όπου κρατείται ο έφορος. Επίσης, χρησιμοποιώντας το καφέ ως αφετηρία, προσδιορίστε την περιοχή στην οποία βρίσκεται αυτή η τοποθεσία.

Στον χάρτη, κάθε τετράγωνο είναι ένα οικοδομικό τετράγωνο και κάθε ένα από αυτά έχει πλευρά 90 μέτρα, με το πλάτος των δρόμων 10 μέτρα (οι γραμμές είναι οι δρόμοι). Η κόκκινη κουκίδα στα τέσσερα μέρη δείχνει πού βρίσκεται είσοδος στο καθένα.

Ερωτήσεις

1. Ποια είναι η ακτίνα του κύκλου που δημιουργείται γύρω από το καφέ Coconut;
2. Πώς βρήκατε την ακτίνα του κύκλου;
3. Ποια είναι η διάμετρος του κύκλου που δημιουργείται;
4. Χρησιμοποιώντας έναν διαβήτη, σχεδιάστε έναν κύκλο στον χάρτη γύρω από το καφέ Coconut.
5. Ποιο είναι το εμβαδό του κύκλου που δημιουργήθηκε;
6. Είσαστε σε θέση να εξαλείψετε κάποια μέρη του κύκλου όπου είναι αδύνατο να βρίσκεται ο έφορος; Γιατί;

Φύλλο εργασίας 3

Μέρος Α'

Οι αρχές έχουν βίντεο με έναν πιθανό ύποπτο για την διάρρηξη στο μουσείο. Ο ύποπτος εθεάθη να κρατά έναν χαρτοφύλακα διαστάσεων 50x40x10 εκατοστά. Ένα από τα αντικείμενα που κλάπηκαν ήταν ένα κυλινδρικό σκήπτρο με μήκος 55 εκ. και πλάτος 5 εκ. Οι αστυνομικοί θέλουν να δουν εάν αυτό το αντικείμενο μπόρεσε να μεταφερθεί από το μουσείο μέσα στον χαρτοφύλακα αυτού του υπόπτου.

1η Εργασία

- *Χρησιμοποιήστε αυτές τις πληροφορίες για να κάνετε ένα σχέδιο του χαρτοφύλακα και του αντικειμένου που κλάπηκε.*
- *Χωράει το κλεμμένο σκήπτρο μέσα στον χαρτοφύλακα;*

Μέρος Β'

Οι αστυνομικοί ανακάλυψαν ότι ένας μεγάλος πίνακας κλάπηκε από το μουσείο. Χρησιμοποιήστε τις μαθηματικές σας δεξιότητες για να προσδιορίσετε εάν ο πίνακας χώρεσε να βγει από ένα παράθυρο του μουσείου. Τα παράθυρα του μουσείου έχουν όλα ίδιες διαστάσεις, πλάτος 60 εκ. και ύψος 60 εκ. Ο μεγάλος πίνακας που κλάπηκε είχε διαστάσεις 87x90 εκατοστά (μαζί με το κάδρο του).

2η Εργασία

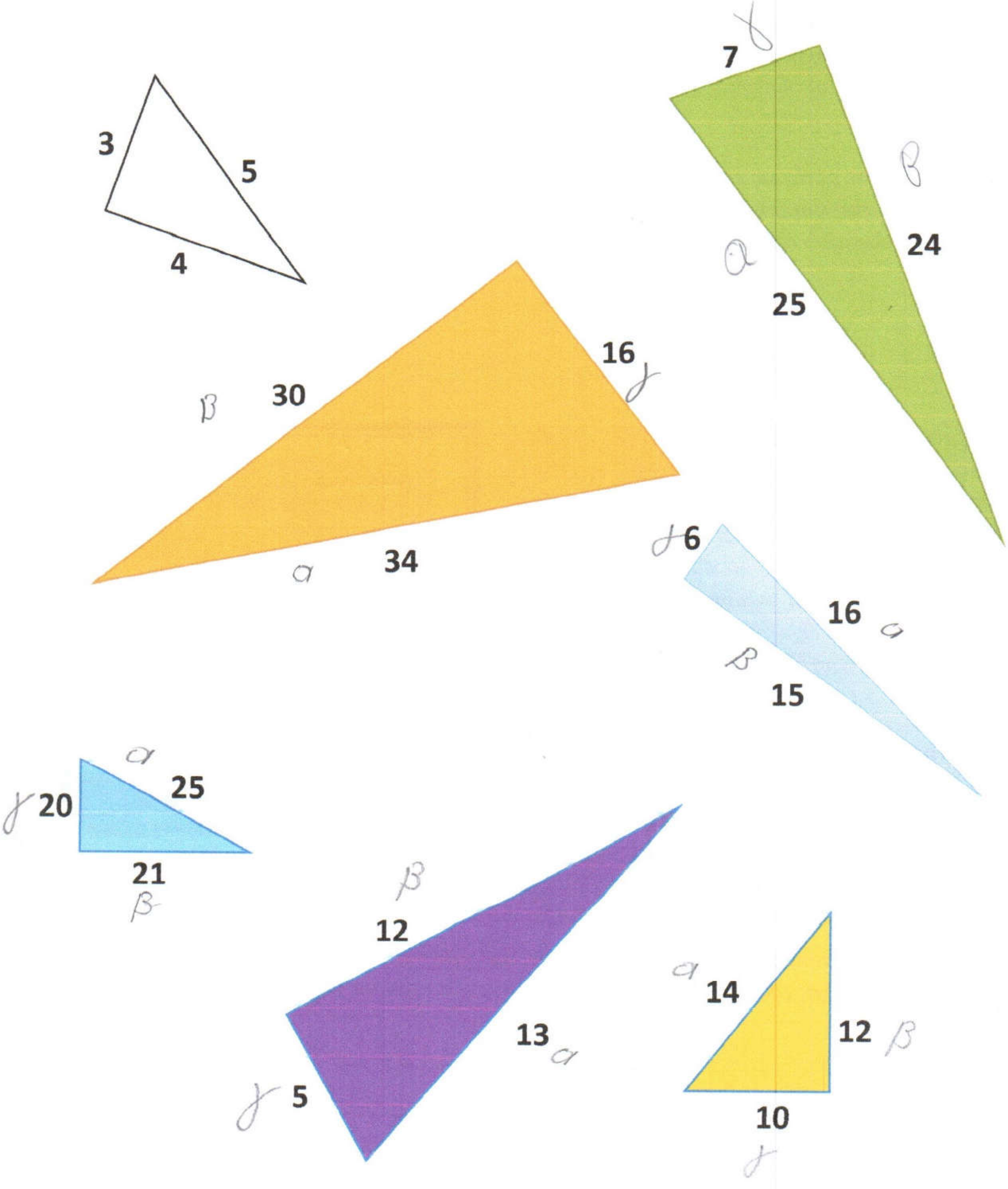
Με βάση τις πληροφορίες που δίνονται, βρείτε εάν ο πίνακας θα χωρούσε να περάσει μέσα από το παράθυρο. Τα συμπεράσματά σας θα βοηθήσουν να εντοπιστεί κάποιος ύποπτος και επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο δικαστήριο ως αποδεικτικά στοιχεία – γράψτε τα όσο πιο «επίσημα» γίνεται!

- *Θα χωρούσε ο πίνακας για να περάσει μέσα από το παράθυρο;*
- *Γιατί ναι ή γιατί όχι; (δώστε αναλυτική και «επίσημη» γραπτή απάντηση)*

Φύλλο εργασίας 4

Οι αρχές βρήκαν ένα λάπτοπ που περιέχει στοιχεία σχετικά με την υπόθεση. Δυστυχώς προστατεύεται με κωδικό πρόσβασης. Το hint για τον κωδικό πρόσβασης είναι «Πυθαγόρειες Τριάδες».

Δίνονται τα παρακάτω τρίγωνα με τις διαστάσεις τους:



Δ7-2023-ΓΑΒΡΙΝΑΣ - Φύλλα Εργασίας 23/04/2023 07:36

- Καταχωρίστε στον παρακάτω πίνακα τα στοιχεία των τριγώνων (α είναι πάντοτε η μεγαλύτερη πλευρά).
- Βρείτε ποια από αυτά είναι ορθογώνια τρίγωνα.
- Το πρώτο τρίγωνο (λευκό) παρέχεται μόνο ως παράδειγμα και δεν αποτελεί μέρος του κωδικού πρόσβασης.

β	γ	α	$β^2$	$γ^2$	$α^2$	$β^2 + γ^2$	
3	4	5	9	16	25	25	
24	7	25	576	49	625	625	N
30	16	34	900	256	1.156	1.156	N
15	6	16	225	36	256	261	
21	20	25	441	400	625	841	
12	5	13	144	25	169	169	N
12	10	14	144	100	196	244	

Το password είναι όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες από τα παραπάνω ορθογώνια τρίγωνα, όπου κάθε τριάδα είναι από το μικρότερο προς τον μεγαλύτερο αριθμό και οι τριάδες σε σειρά από αυτήν με την μικρότερη υποτείνουσα προς την μεγαλύτερη υποτείνουσα.

Γράψτε εδώ το password που βρήκατε: 51213, 72425, 163034

Φύλλο εργασίας 5

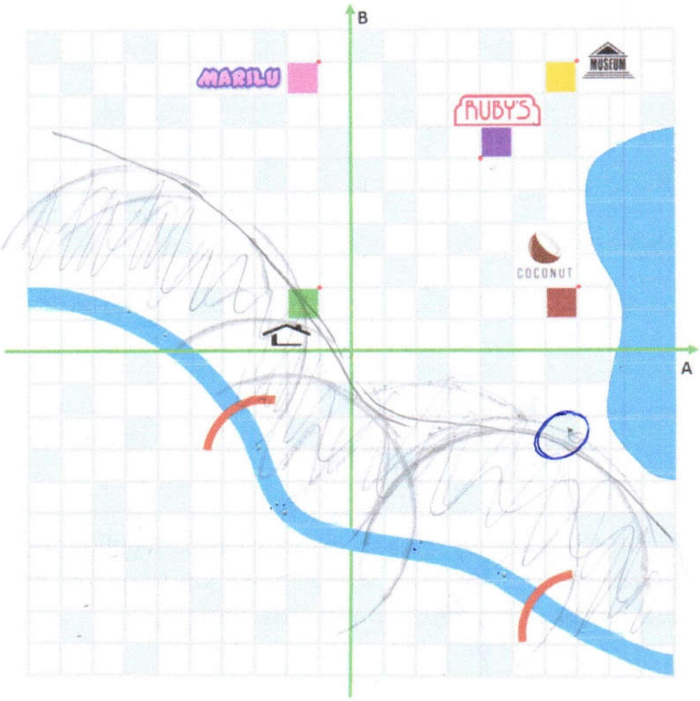
Συγχαρητήρια για το σπάσιμο του κώδικα!

Αυτές είναι οι πληροφορίες που εμφανίστηκαν:

- *Ο έφορος εθεάθη σε ένα παράθυρο που ήταν σε ύψος 5 μέτρα από το πεζοδρόμιο, άρα βρίσκονταν στον πρώτο όροφο.*
- *Από το παράθυρο φαίνεται ο ποταμός.*
- *Όλα τα κτήρια στο τρίτο τεταρτημόριο είναι ισόγεια.*
- *Η απόσταση ποτάμι-παράθυρο είναι μισό χιλιόμετρο.*

Ερωτήσεις

1. Πού βρίσκεται ο έφορος;
2. Κυκλώστε με στυλό το κτήριο που βρήκατε (στο σχήμα τα κτήρια είναι με γαλάζιο χρώμα).



1. Περπάτησε 14 οικ. τετρ.

$14 \times 100 = 1400$

2. $E_{τριγ.} = \frac{βαση \cdot υ}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$ τετ.μ.

$E_{τριγ.} = \frac{βαση \cdot υ}{2} = \frac{800 \cdot 700}{2} = \frac{560.000}{2} = 280.000$ τετρ.μ

3. $x^2 = 800^2 + 700^2$

$x^2 = 640.000 + 490.000$

$x^2 = 1.130.000$

$x = \sqrt{1.130.000}$

$x = 1.063,01$

Φυλλο εργασιας 2

1. $γ^2 = β^2 + α^2$ Αρα η ακτινα ισουται με 500μ.

$γ^2 = 400^2 + 300^2$

$γ^2 = 160.000 + 90.000$

$γ^2 = 250000$

$γ = \sqrt{250000}$

$γ = 500$

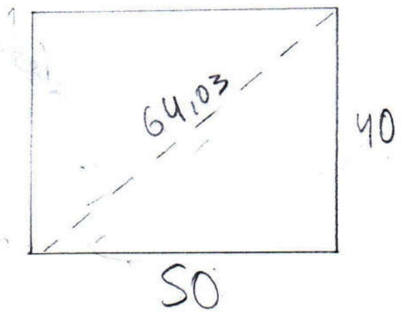
2. Χρησιμοποιησα Π.Θ.

3. Διαμετρος = ρ • 2
Διαμετρος = 500 • 2 = 1.000 μ.

5. $E_{κυκλου} = π \cdot ρ^2 = 3,14 \cdot 250.000 = 785.000$ τετρ. μ.

6. Ο εφορος αποκλείεται να βρίσκεται στη θάλασσα

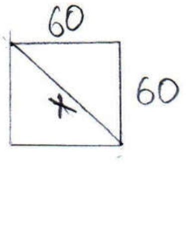
Φυλλο εργασιας 3



$Π.Θ: x^2 = 40^2 + 50^2$
$x^2 = 1.600 + 2.500$
$x^2 = 4.100$
$x = \sqrt{4.100}$
$x = 64,03$

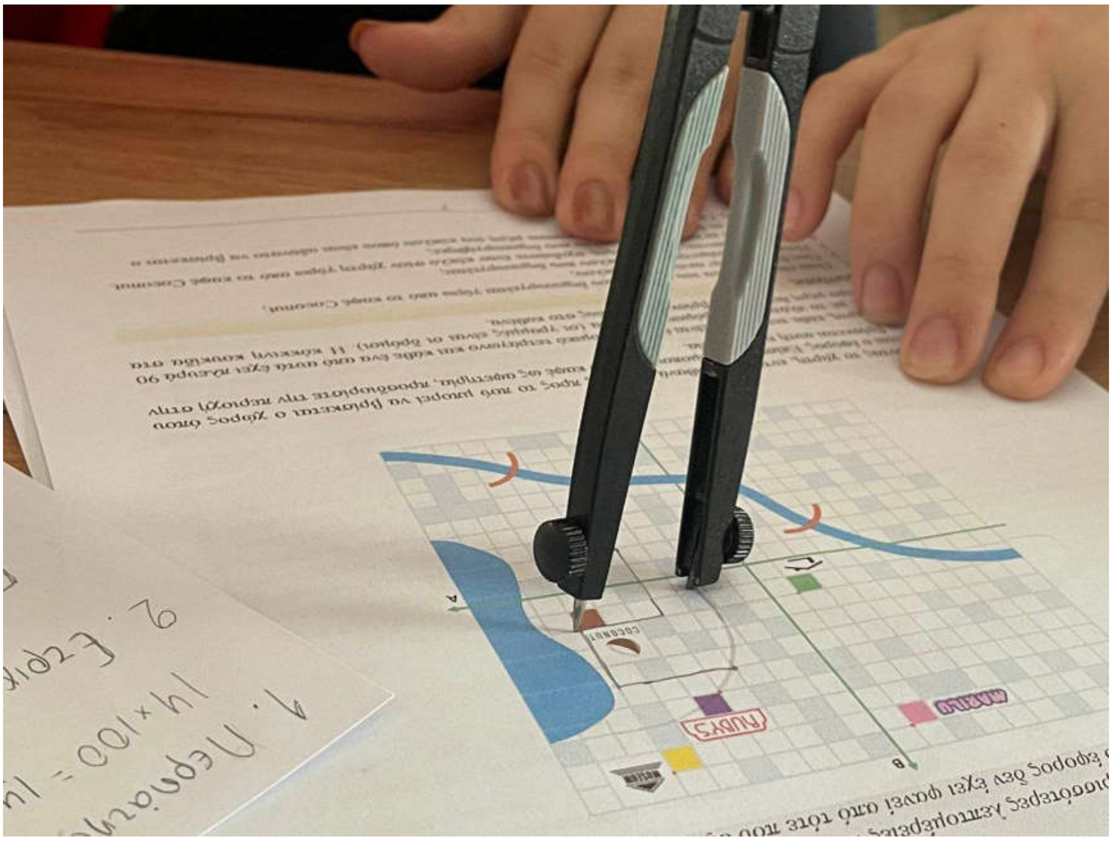
Το σκηπτρο χωράει στον χαρτοφύλακα καθώς η διαγώνιος του ορθογωνίου είναι 64,03.

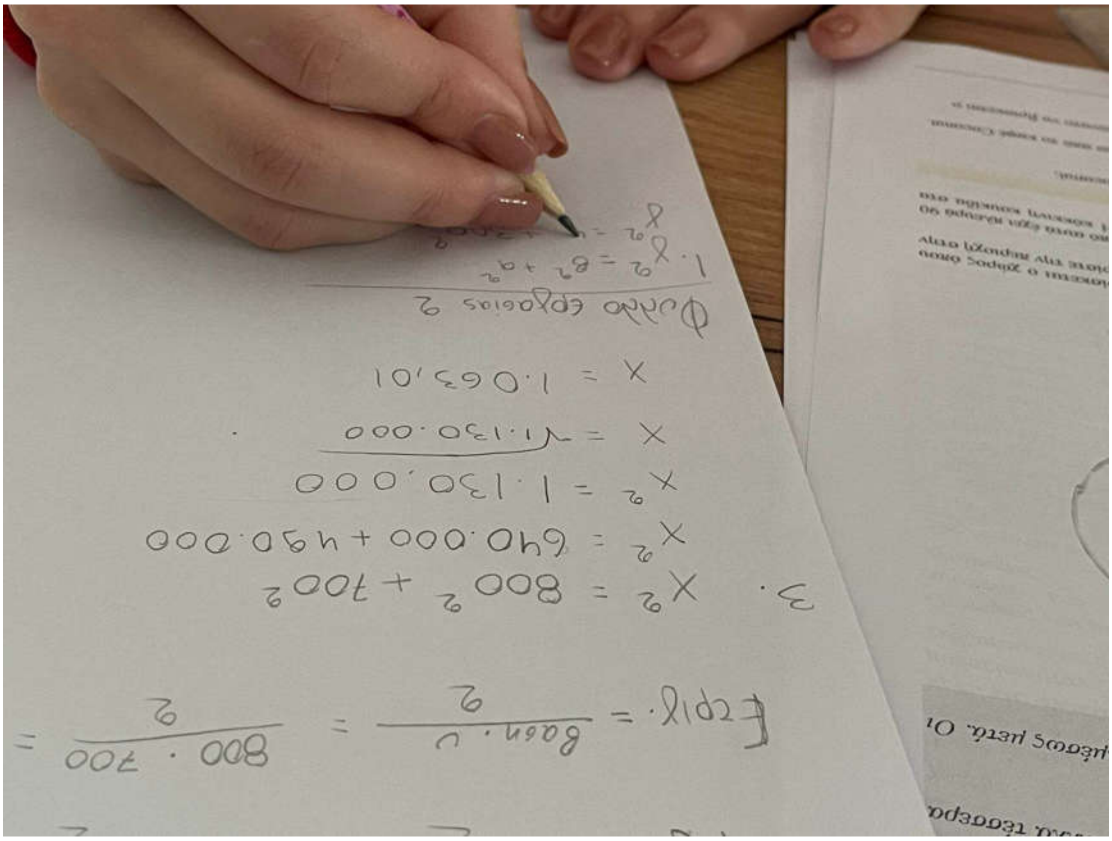
Μερος Β'



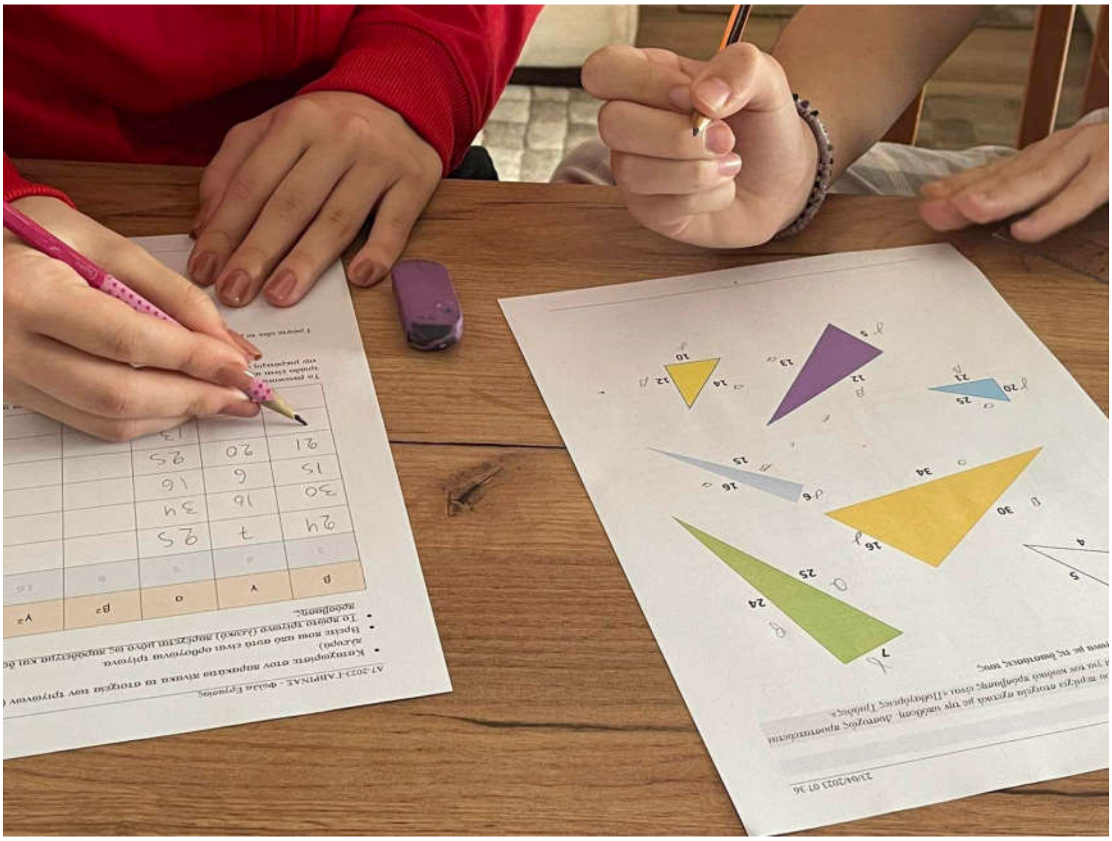
$Π.Θ: x^2 = 60^2 + 60^2$
$x^2 = 3.600 + 3.600$
$x^2 = \sqrt{7.200}$
$x = 84,8$

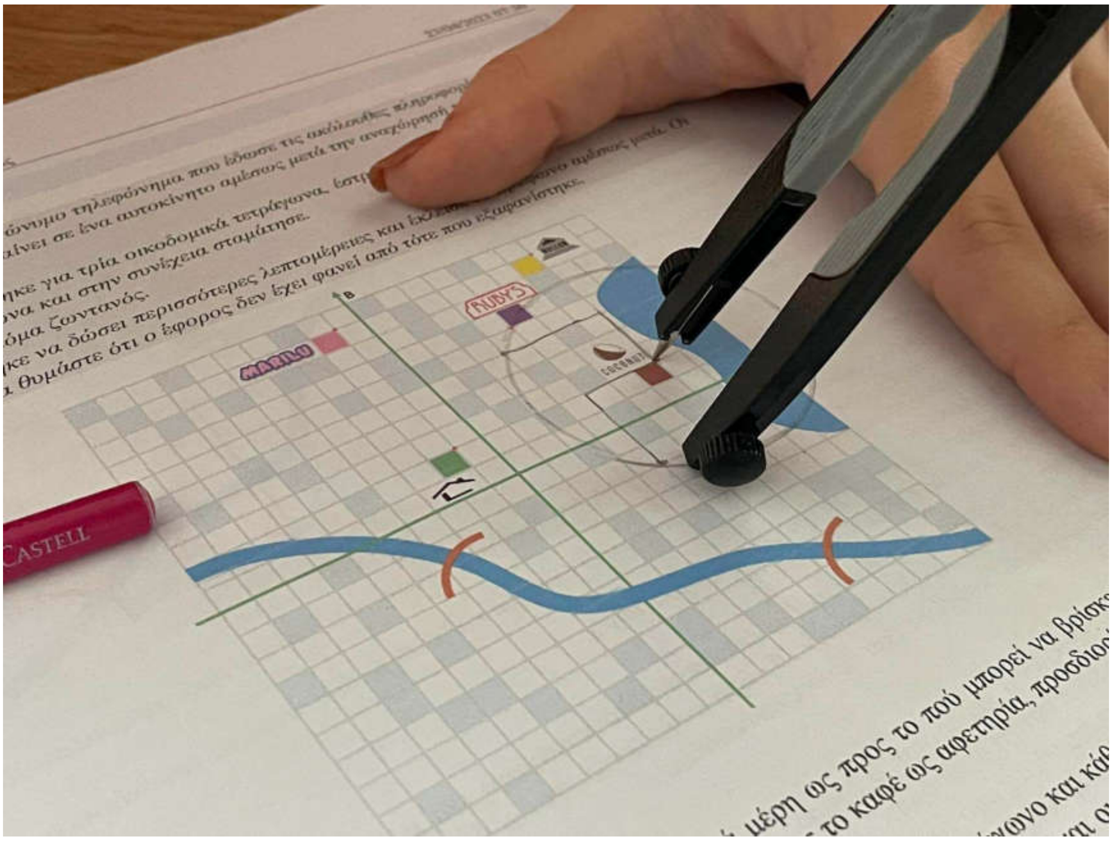
Ο πίνακας δεν χωράει απο το παράθυρο διότι η υποτείνουσα είναι 84,8εκ. ενώ το πλάτος του πίνακα είναι 87εκ.

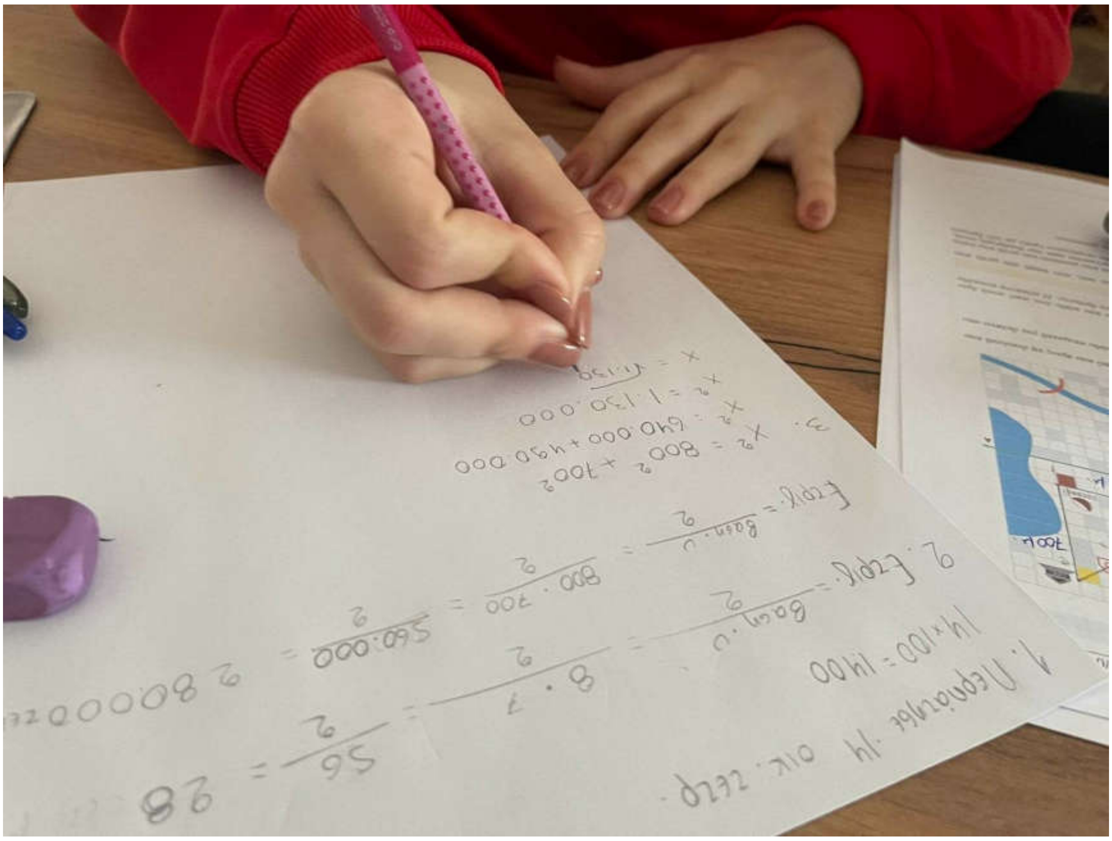



Φύλλο εργασίας 2
x = 1.063,01
x = √1.130.000
x² = 1.130.000
x² = 640.000 + 490.000
3. x² = 800² + 700²
Εμβ. = βάση · υ / 2 = 800 · 700 / 2 =

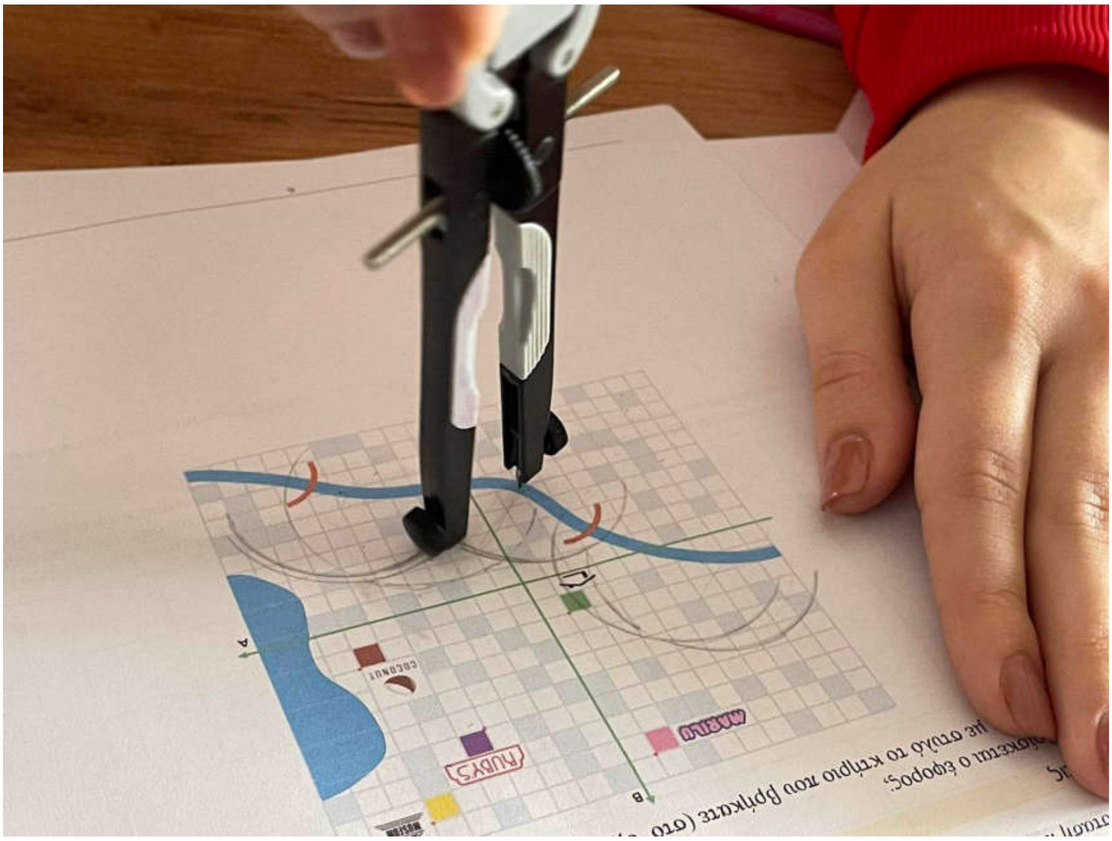

04:33

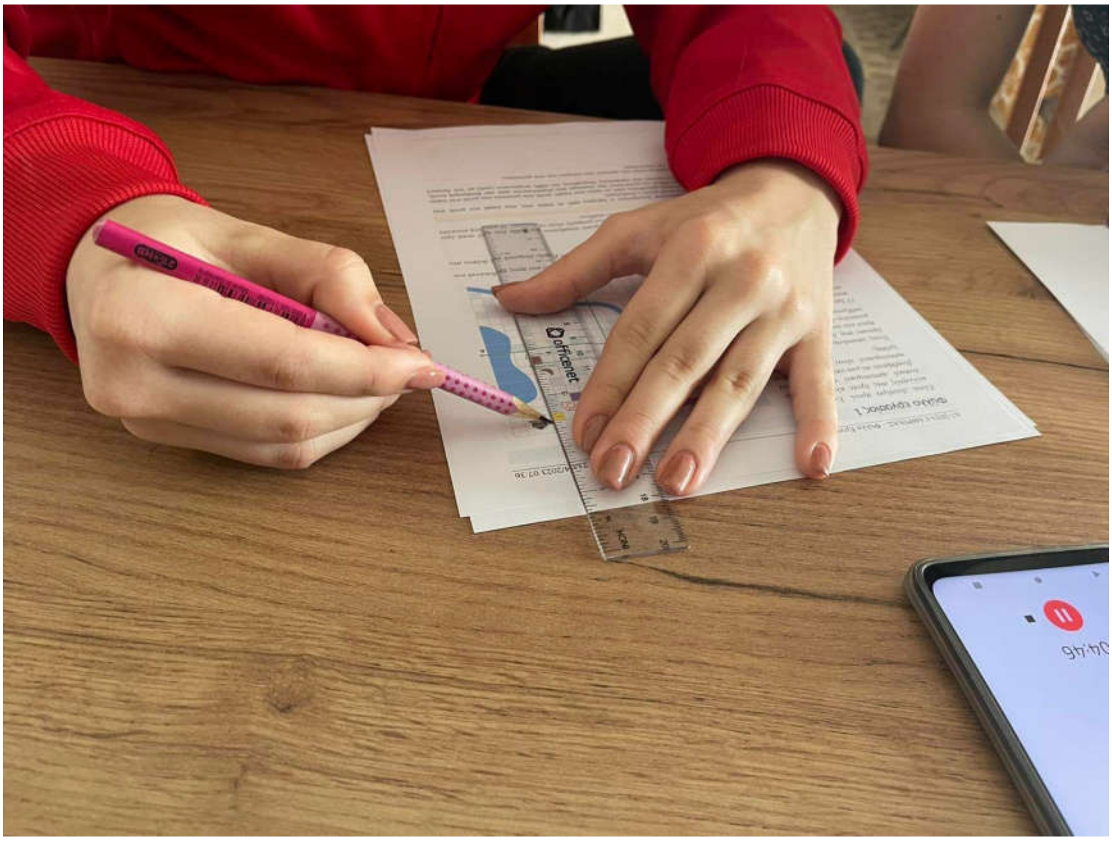



MARILU
RUBY'S
CASTELL




04:30




officenet
04:46


officenet
07:25