



University of Athens  
Department of Mathematics

## **Συστήματα εξυπηρέτησης με επαναπροσπάθειες και στρατηγικούς πελάτες**

Διπλωματική εργασία για το μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών με κατεύθυνση Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

**Κωνσταντίνος Μπέκιος**  
Α.Μ:7112112100015

Επιβλέπων:  
Αντώνιος Οικονόμου  
Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2023



Στην οικογένεια μου,  
για την προσφορά της όλα αυτά τα χρόνια



# Abstract

In this thesis we will study the area of Queuing Theory with retrials and strategic customers who will be able to make decisions to enter a queue or not, to leave their contact details or not, to retry with specific rate, etc. This framework is widely used in Queuing Theory and there are several models that have been studied. For example, we can take a service system where if the customers find the server busy they will be able to decide at what rate they will retry. At the same time, they have entered a virtual waiting queue, which is called orbit, until they go to the service area. Their goal is to minimize their total costs (waiting costs and costs per retrial). Here's a dilemma: high rate means lots of retrials but little waiting time, while low rate means few retrials but long waiting time. This will be one of the problems that we will present in this thesis. We will also study the dilemma of join or balk in a system with a known retrial rate and we will analyze some useful results. Therefore, the aim of this thesis is to present a historical track on this field and to broadly analyze the optimal strategies that customers can follow under some models of those that have been studied.



# Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική θα μελετήσουμε την περιοχή της Θεωρίας Ουρών Αναμονής με επαναπροσπάθειες και στρατηγικούς πελάτες οι οποίοι θα καλούνται να πάρουν αποφάσεις να μουν ή όχι σε μια ουρά, να αφήσουν τα στοιχεία τους ή όχι, να επαναπροσπαθούν με κάποιο ρυθμό κ.τ.λ. Αυτό το πλαίσιο χρησιμοποιείται ευρέως στη Θεωρία Ουρών Αναμονής και υπάρχουν αρκετά μοντέλα που έχουν μελετηθεί. Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης όπου αν οι πελάτες βρουν απασχολημένο τον υπηρέτη καλούνται να αποφασίσουν με τι ρυθμό θα επαναπροσπαθούν, ενώ έχουν μπει σε μια εικονική πια ουρά αναμονής, τη λεγόμενη τροχιά. Στόχος τους είναι να ελαχιστοποιήσουν τα συνολικά έξοδα τους (έξοδα αναμονής και έξοδα ανά προσπάθεια). Εδώ υπάρχει το εξής δίλημμα: μεγάλος ρυθμός σημαίνει πολλές προσπάθειες αλλά μικρός χρόνος αναμονής, ενώ μικρός ρυθμός σημαίνει λίγες προσπάθειες αλλά μεγάλος χρόνος αναμονής. Αυτό θα είναι ένα από τα προβλήματα που θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε, όπως θα μελετήσουμε και το δίλημμα του πελάτη να μπει ή όχι στο σύστημα με γνωστό πια ρυθμό επαναπροσπάθειας. Οπότε, στόχος αυτής της διπλωματικής είναι να παρουσιάσει μια ιστορική διαδρομή πάνω σε αυτό το πεδίο και να αναλύσει ευρέως τις βέλτιστες στρατηγικές που μπορούν να ακολουθήσουν οι πελάτες κάτω από ορισμένα μοντέλα από αυτά που έχουν μελετηθεί.





# Ευχαριστίες

Με την παρούσα διπλωματική εργασία ολοκληρώνονται οι σπουδές μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών "Μαθηματικά", στην κατεύθυνση «Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα» του Τμήματος Μαθηματικών Αθήνας. Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ όλους τους δικούς μου ανθρώπους. Την οικογένεια και τους συγγενείς μου που είναι πάντα εκεί να με βοηθούν πνευματικά και οικονομικά δίνοντας μου παράλληλα τα κατάλληλα ηθικά εφόδια για να προχωρήσω, την κοπέλα μου, Όλγα, που είναι πάντα εκεί να με στηρίζει και να πιστεύει στις δυνατότητες μου, καθώς και τους φίλους μου που είναι πάντα εκεί να με ενισχύουν ψυχολογικά. Επίσης, θα ήθελα πολύ να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου για τη συμβολή τους, που από μικρό παιδί με βοήθησαν να ανακαλύψω και να καλλιεργήσω την αγάπη μου για τα Μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, να ευχαριστήσω τους καθηγητές του Τμήματος Μαθηματικών Αθήνας που μου έδωσαν την έμπνευση να ακολουθήσω τον κλάδο της Επιχειρησιακής Έρευνας καθώς και ξεχωριστά τον κύριο Οικονόμου για την άψογη συνεργασία μου μαζί του. Χωρίς όλους αυτούς δεν θα είχα φτάσει εδώ, οπότε οφείλω να το αναγνωρίσω και να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή στη Θεωρία Ουρών Αναμονής</b>	<b>3</b>
1.1	Βασικές γνώσεις από τη Θεωρία Ουρών Αναμονής . . . . .	3
1.2	Βασικές γνώσεις από τη Θεωρία Παιγνίων με εφαρμογή σε ουρές και πλαίσια βελτιστοποίησης . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Επισκόπηση σε ουρές με επαναπροσπάθειες</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Μοντέλα με συνήθεις επαναπροσπάθειες</b>	<b>14</b>
3.1	Βέλτιστες στρατηγικές στην $M/M/1$ ουρά . . . . .	14
3.1.1	Σχεδόν μη παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά . . . . .	15
3.1.2	Παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά . . . . .	22
3.2	Βέλτιστος ρυθμός επαναπροσπαθειών στην $M/M/1$ ουρά . . . . .	27
3.2.1	Κοινωνικά βέλτιστος ρυθμός . . . . .	28
3.2.2	Ατομικά βέλτιστος ρυθμός . . . . .	33
3.3	Βέλτιστος ρυθμός επαναπροσπαθειών στην $M/G/1$ ουρά . . . . .	38
3.3.1	Κοινωνικά βέλτιστος ρυθμός . . . . .	38
3.3.2	Ατομικά βέλτιστος ρυθμός . . . . .	39
3.4	Αριθμητικά παραδείγματα . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Μοντέλα με σταθερές επαναπροσπάθειες</b>	<b>44</b>
4.1	Βέλτιστες στρατηγικές στην $M/M/1$ ουρά . . . . .	44

4.1.1	Σχεδόν μη παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά . . . . .	45
4.1.2	Παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά . . . . .	53
4.2	Βέλτιστες στρατηγικές στην $M/G/1$ και στην $M/M/1$ ουρά με ντετερμινιστικούς χρόνους επαναπροσπάθειας . . . . .	62
4.2.1	Στρατηγικές ισορροπίας στη μη παρατηρήσιμη $M/G/1$ ουρά . . . . .	63
4.2.2	Στρατηγικές κοινωνικής βελτιστοποίησης στη μη παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά με ντετερμινιστικούς χρόνους επανάκτησης . . . . .	67
4.3	Αριθμητικά παραδείγματα . . . . .	75
4.4	Προσομοίωση-υπολογιστικά αποτελέσματα . . . . .	80
<b>A</b>	<b>Κώδικας</b>	<b>82</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>89</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή στη Θεωρία Ουρών Αναμονής

### 1.1 Βασικές γνώσεις από τη Θεωρία Ουρών Αναμονής

Ουρά αναμονής (queue) ή σύστημα εξυπηρέτησης είναι ένα σύστημα όπου καταφθάνουν πελάτες και απαιτούν κάποιου είδους εξυπηρέτηση. Το σύστημα αυτό απαρτίζεται από υπηρέτες και έναν χώρο αναμονής, ενώ κάθε πελάτης που ολοκληρώνει την εξυπηρέτηση του φεύγει από το σύστημα. Οι πιο συνήθεις ουρές αναμονής συναντούνται στις τράπεζες, στα τηλεφωνικά κέντρα, σε νοσοκομεία, άλλα μπορούν να υπάρξουν ακόμα και σε έναν επεξεργαστή ηλεκτρονικού υπολογιστή όπου πελάτης είναι τώρα ένα αίτημα. Οπότε όπως καταλαβαίνουμε οι ουρές αναμονής είναι παντού στη ζωή μας και γι' αυτό τον λόγο ασχολούμαστε με τη μοντελοποίηση τους.

Κάθε ουρά έχει και διαφορετικά χαρακτηριστικά και γι αυτό τον λόγο υπάρχει ο συμβολισμός Kendall προκειμένου να τις ξεχωρίζουμε. Πιο συγκεκριμένα, όταν θα γράφουμε ότι έχουμε μια ουρά αναμονής  $A/B/c/k$ , θα εννοούμε ότι έχουμε διαδικασία αφίξεων  $A$ , χρόνους εξυπηρέτησης  $B$ , πλήθος υπηρέτων  $c$ , χωρητικότητα  $k$  και πειθαρχία FCFS (First Come First Served). Αν η ουρά έχει άλλη πειθαρχία, όπως LCFS (Last Come First Served), SIRO (Service In Random Order) κ.τ.λ, τότε αυτή θα αναγράφεται. Συνήθως έχουμε  $A = M$  (ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων ανεξάρτητοι και εκθετικά κατανομημένοι),  $A = D$  (σταθεροί χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων),  $A = E_k$  (ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων ανεξάρτητοι με κατανομή Erlang- $k$ ),  $A = H_k$  (ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων ανεξάρτητοι με κατανομή υπερεκθετική  $k$ ) και  $A = GI$  (ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων ανεξάρτητοι και ισόνομοι με γενική συνάρτηση κατανομής  $F$ ). Ακριβώς αντίστοιχα έχουμε και για τους χρόνους εξυπηρέτησης με μόνη διαφορά πως οι γενικοί χρόνοι εξυπηρέτησης θα συμβολίζονται με  $G$ . Ακόμη, υπάρχει η περίπτωση να έχουμε ομαδικές αφίξεις ή εξυπηρετήσεις, όπου για παράδειγμα αν έχουμε το σύστημα  $M/M/1$  θα το γράφουμε τώρα  $M^*/M/1$  και  $M/M^*/1$  αντίστοιχα. Με  $\lambda$  θα συμβολίζουμε το ρυθμό αφίξης και με  $\mu$  το ρυθμό εξυπηρέτησης. Τέλος, αν  $k = \infty$  παραλείπεται.

Γενικά θα μας απασχολήσουν κάποια μέτρα απόδοσης που αφορούν τον διαχειριστή, κάποια που αφορούν τους πελάτες και κάποια σχετικά με τους υπηρέτες. Σχετικά με τα πρώτα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \text{πλήθος πελατών στο σύστημα τη στιγμή } t, t \geq 0 \\ Q_s(t) &= \text{πλήθος πελατών στην εξυπηρέτηση τη στιγμή } t, t \geq 0 \\ Q_q(t) &= \text{πλήθος πελατών στην αναμονή τη στιγμή } t, t \geq 0 \end{aligned}$$

και θα μας απασχολεί να υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή  $p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Q(t) = n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Σχετικά με τα μέτρα απόδοσης των πελατών θα έχουμε:

$$\begin{aligned} S_n &= \text{χρόνος παραμονής στο σύστημα (sojourn time) του } n\text{-οστού πελάτη, } n \geq 1 \\ W_n &= \text{χρόνος αναμονής στο σύστημα (waiting time) του } n\text{-οστού πελάτη, } n \geq 1 \\ X_n &= \text{χρόνος εξυπηρέτησης στο σύστημα (service time) του } n\text{-οστού πελάτη, } n \geq 1 \end{aligned}$$

και θα μας απασχολεί να υπολογίσουμε σε κατάσταση ισορροπίας όταν  $n \rightarrow \infty$ , την οριακή κατανομή του χρόνου παραμονής  $F_s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq x)$ . Σχετικά τώρα με τους υπηρέτες θα έχουμε:

$$\begin{aligned} Z_n &= \text{διάρκεια } n\text{-οστού κύκλου απασχόλησης, } n \geq 1 \\ Y_n &= \text{διάρκεια } n\text{-οστής περιόδου συνεχής λειτουργίας, } n \geq 1 \\ I_n &= \text{διάρκεια } n\text{-οστής περιόδου αργίας, } n \geq 1 \end{aligned}$$

και θα μας απασχολούν οι οριακές τυχαίες μεταβλητές  $Z, Y, I$  και οι αντίστοιχες μέσες τους τιμές  $E[Z], E[Y], E[I]$ .

Τέλος, πριν παρουσιάσουμε τρία βασικά αποτελέσματα στη Θεωρία Ουρών Αναμονής θα εξετάσουμε και τις εμφυτευμένες διαδικασίες. Έστω

$$\begin{aligned} Q_n^- &= \text{πλήθος πελατών μόλις πριν την } n\text{-οστή άφιξη} \\ Q_n^+ &= \text{πλήθος πελατών αμέσως μετά την } n\text{-οστή αναχώρηση} \end{aligned}$$

τότε θα μας ενδιαφέρουν οι εξής οριακές κατανομές:

$$\begin{aligned} a_j &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(Q_n^- = j) \\ d_j &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(Q_n^+ = j). \end{aligned}$$

Επίσης, σε ένα σύστημα  $GI/G/c$  με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων ή-και χρόνων εξυπηρέτησης ισχύει πως το σύστημα θα είναι ευσταθές αν και μόνο αν:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \leq c.$$

Τώρα είμαστε σε θέση να αναφέρουμε τρία πολύτιμα εργαλεία μελέτης ουρών αναμονής. Αρχικά, πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα είναι ο νόμος του Little. Πιο συγκεκριμένα, αυτός ο νόμος λέει πως σε ένα ευσταθές σύστημα ο μέσος αριθμός πελατών ισούται με τον μέσο χρόνο παραμονής επί τον ρυθμό άφιξης, δηλαδή θα έχουμε πως:

$$E[Q] = \lambda E[S].$$

Μάλιστα, ο νόμος αυτός μπορεί να εφαρμοστεί και σε υποσυστήματα, για παράδειγμα μόνο σε χώρο εξυπηρέτησης ή μόνο σε χώρο αναμονής βάζοντας τους κατάλληλους ρυθμούς και τις κατάλληλες μέσες τιμές. Επίσης, αναλυτική απόδειξη υπάρχει σε διάφορα άρθρα όπως για παράδειγμα στο άρθρο του Stidham (1972) [22].

Ένα δεύτερο χρήσιμο αποτέλεσμα είναι η ιδιότητα μεμονομένων μεταβάσεων. Ειδικότερα, σε συστήματα που οι πελάτες φτάνουν και αναχωρούν μεμονωμένα οι οριακές κατανομές του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν. Δηλαδή θα έχουμε:

$$(a_j, j \geq 0) = (d_j, j \geq 0).$$

Κλείνοντας το κομμάτι αυτό, χρήσιμη ιδιότητα είναι και η PASTA (Poisson Arrivals See Time Average). Αυτή η ιδιότητα λέει ότι σε συστήματα στα οποία οι πελάτες έρχονται σύμφωνα με Poisson διαδικασία αφίξεων οι οριακές κατανομές του μήκους ουράς σε στιγμές αφίξεων και σε συνεχή χρόνο συμπίπτουν, δηλαδή

$$(a_j, j \geq 0) = (p_j, j \geq 0).$$

Από εδώ και στο εξής θα ασχολούμαστε με απλές Μαρκοβιανές ουρές δηλαδή ουρές αναμονής που μπορούν να περιγραφούν με τη βοήθεια ΜΑΣΧ (Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου). Τότε, εκτός του ρυθμού άφιξης και του ρυθμού εξυπηρέτησης, θα μας ενδιαφέρει και ο ρυθμός πραγματικών αφίξεων (effective arrival rate) και ο ρυθμός διάπερασης (throughput). Με  $\lambda^*$  θα συμβολίζουμε τον μακροπρόθεσμο μέσο αριθμό αφίξεων ανά χρονική μονάδα και μετά από πράξεις έχουμε πως:

$$\lambda^* = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i p_i,$$

ενώ με  $\mu^*$  θα συμβολίζουμε το μακροπρόθεσμο μέσο αριθμό αναχωρήσεων ανά χρονική μονάδα και μετά από πράξεις έχουμε πως:

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i p_i.$$

Μάλιστα, όταν δε χάνονται πελάτες θα ισχύει προφανώς πως  $\lambda^* = \mu^*$ , δηλαδή ο μακροπρόθεσμος μέσος αριθμός αναχωρήσεων ανά χρονική μονάδα θα ισούται με τον μακροπρόθεσμο μέσο αριθμό αφίξεων ανά χρονική μονάδα.

Τέλος, υπάρχουν και άλλοι χρήσιμοι τύποι σχετικά με τα  $a_j, d_j, p_j, j \geq 0$ . Ειδικότερα, μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$a_j = \frac{a_j p_j}{\lambda^*}, j \geq 0$$

$$d_j = \frac{\mu^{j+1} p_{j+1}}{\mu^*}, j \geq 0.$$

## 1.2 Βασικές γνώσεις από τη Θεωρία Παιγνίων με εφαρμογή σε ουρές και πλαίσια βελτιστοποίησης

Στα επομένα κεφάλαια θα μελετήσουμε ουρές αναμονής με επαναπροσπάθειες, όπου τώρα οι πελάτες θα μπορούν να λάβουν κάποιες αποφάσεις. Πιο συγκεκριμένα, θα έχουμε μια δομή κέρδους όπου οι πελάτες θα παίρνουν κάποια αμοιβή από την εξυπηρέτηση τους αλλά θα έχουν και κάποια κόστη σχετικά με τον χρόνο αναμονής τους, με την τιμή εισόδου, τιμή ανά επαναπροσπάθεια κ.τ.λ. Αυτές οι αποφάσεις θα σχετίζονται με το αν αξίζει να εισέλθουν στο σύστημα ή όχι (join or balk) αλλά και με τον βέλτιστο ρυθμό που θα πρέπει να επαναπροσπαθούν δεδομένου ότι εισέρχονται στο σύστημα με πιθανότητα 1, ενώ στα περισσότερα μοντέλα δεν θα επιτρέπεται να αποχωρήσει ο πελάτης από τη στιγμή που θα εισέλθει (not reneging). Αυτές οι αποφάσεις εξαρτώνται από τις παραμέτρους κόστους και κέρδους και από τις πληροφορίες που διαθέτει τη στιγμή που λαμβάνεται η απόφαση του. Συχνά, όμως, συμβαίνει οι αποφάσεις βελτιστοποίησης να εξαρτώνται επίσης από τις ενέργειες των άλλων πελατών στο σύστημα, που κατά τη στιγμή της απόφασης ενός συγκεκριμένου πελάτη δεν του είναι γνωστές. Άρα, οι πελάτες θα αντιμετωπίζονται και σαν παίκτες καθώς θα έχουμε ένα παίγνιο μεταξύ των πελατών στις ουρές. Στα περισσότερα μοντέλα θα έχουμε άπειρο αριθμό όμοιων πελατών όπου θα εικάζουν ποια στρατηγική ακολουθεί ο καθένας.

Σχετικά τώρα με τις πληροφορίες για το σύστημα θα έχουμε είτε μη παρατηρήσιμες ουρές αναμονής όπου οι πελάτες πριν αποφασίσουν αν θα εισέλθουν δεν θα γνωρίζουν την κατάσταση του συστήματος, δηλαδή πόσα άτομα έχει, είτε παρατηρήσιμες ουρές όπου θα γνωρίζουν τα άτομα που υπάρχουν στο σύστημα. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις θα ψάχνουμε βέλτιστες στρατηγικές ως προς διάφορα κριτήρια (ατομικά, κοινωνικά κ.τ.λ) και γι' αυτό τον λόγο πρέπει να αναφέρουμε κάποια βασικά εργαλεία της Θεωρίας Παιγνίων όπως παρουσιάζονται και από τους Hassin και Havin [13].

Αρχικά, θα μιλήσουμε για μη συνεργατικά παιχνίδια όπου οι παίκτες θα λειτουργούν ατομικά. Έστω  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  το σύνολο των παιχτών,  $A_i$  το σύνολο πλάνων δράσης του παίκτη  $i$ , δηλαδή οι πιθανές αποφάσεις που έχει να πάρει. Οι στρατηγικές θα χωρίζονται σε καθαρές (pure) και μικτές (mixed). Οι πρώτες θα είναι στοιχεία του  $A_i$  ενώ οι δεύτερες θα είναι κατανομές πιθανότητας πάνω στα στοιχεία του  $A_i$ . Για παράδειγμα, αν οι αποφάσεις είναι 0 για την αποχώρηση από την ουρά και 1 για την είσοδο τότε μια καθαρή στρατηγική θα ήταν με πιθανότητα 1 να εισέλθει ο πελάτης στο σύστημα ενώ μια μικτή στρατηγική θα ήταν να εισέλθει με πιθανότητα  $\frac{1}{3}$  και να αποχωρήσει με πιθανότητα  $\frac{2}{3}$ .



Οπότε τώρα ορίζουμε με  $S_i$  το σύνολο των μεικτών στρατηγικών του παίκτη  $i$  και άρα ένα προφίλ στρατηγικών θα είναι το διάνυσμα  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , όπου  $s_i \in S_i$ . Αν μας ενδιαφέρει ο παίκτης  $i$  ποια στρατηγική να χρησιμοποιήσει όταν οι υπόλοιποι ακολουθούν κάποια γνωστή στρατηγική, θα γράφουμε  $s = (s_i, s_{-i})$ .

Κατόπιν, θα πρέπει να ορίσουμε και μια συνάρτηση πληρωμής για τον παίκτη  $i$  όταν το προφίλ στρατηγικών θα είναι το  $s$ , έστω  $F_i(s_i, s_{-i})$ . Τώρα θα παρουσιάσουμε κάποιους ορισμούς. Θα λέμε ότι η  $s_i^1$  κυριαρχεί ασθενώς της  $s_i^2$  αν και μόνο αν  $\forall s_{-i} F_i(s_i^1, s_{-i}) \geq F_i(s_i^2, s_{-i})$  και για ένα τουλάχιστον  $s_{-i}$  η ανισότητα είναι  $>$ . Επίσης, θα λέμε ότι η  $s_i^1$  κυριαρχεί ισχυρά της  $s_i^2$  αν και μόνο αν  $\forall s_{-i} F_i(s_i^1, s_{-i}) > F_i(s_i^2, s_{-i})$ . Τώρα, με  $s_i^*$  θα συμβολίζουμε τη βέλτιστη απάντηση έναντι της  $s_{-i}$  το οποίο θα συμβαίνει αν και μόνο αν  $F_i(s_i^*, s_{-i}) \geq F_i(s_i, s_{-i}) \forall s_i$ . Άρα, από εδώ και πέρα όταν θα αναφέρουμε ότι η  $s_i$  είναι ασθενώς ή ισχυρά κυριαρχούσα στρατηγική του  $i$  θα εννοούμε πως θα κυριαρχεί ασθενώς ή ισχυρά αντίστοιχα, έναντι κάθε άλλης στρατηγικής του  $i$ . Επίσης, θα συμβολίζουμε με  $s^e$  το στρατηγικό σημείο ισορροπίας αν και μόνο αν η  $s_i^e$  είναι βέλτιστη απάντηση έναντι της  $s_{-i}^e \forall i \in \mathcal{N}$ . Τέλος, εφόσον όλοι πελάτες θα είναι όμοιοι στα περισσότερα μοντέλα μας, θα έχουμε κοινό σύνολο στρατηγικών  $S$ , κοινή συνάρτηση πληρωμής  $F$ , δηλαδή θα έχουμε  $F(a, b)$  την πληρωμή ενός παίκτη όταν αυτός χρησιμοποιεί τη στρατηγική  $a$  και όλοι άλλοι την  $b$  ενώ οι στρατηγικές που θα λαμβάνουν οι παίκτες θα είναι συμμετρικές. Με τον όρο συμμετρικές εννοούμε πως η  $s^e$  είναι συμμετρική στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν  $F(s^e, s^e) \geq F(s, s^e) \forall s$ . Με άλλα λόγια είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της.

Για να βρούμε, λοιπόν, στρατηγικές ισορροπίας θα υπολογίζουμε το  $F(s_t, s_o)$  όπου με  $s_t$  θα συμβολίζουμε τη στρατηγική του επιλεγμένου πελάτη (tagged) και με  $s_o$  τη στρατηγική των υπολοίπων παιχτών. Τότε θα ψάχνουμε τη βέλτιστη απάντηση του επιλεγμένου πελάτη η οποία θα συμβολίζεται με  $BR(s_o) = \text{argmax}_{s_t} F(s_t, s_o)$  και στη συνέχεια θα υπολογίζουμε τις στρατηγικές που είναι βέλτιστες απαντήσεις στον εαυτό τους, δηλαδή τις  $s^e$  για τις οποίες  $s^e \in BR(s^e)$ . Τέλος, με βάση τη μονοτονία της  $BR(s)$  ως προς  $s$  έχουμε δύο συμπεριφορές των πελατών. Αν η  $BR(s)$  είναι αύξουσα ως προς  $s$  ο πελάτης ακολουθεί το πλήθος (Follow The Crowd ή FTC), δηλαδή αν αυξάνεται η πιθανότητα να εισέλθουν οι άλλοι πελάτες αυξάνεται και η πιθανότητα του επιλεγμένου πελάτη. Αντίθετα αν η  $BR(s)$  είναι φθίνουσα ως προς  $s$  ο πελάτης δεν ακολουθεί το πλήθος (Avoid The Crowd ή ATC), δηλαδή αν αυξάνεται η πιθανότητα να εισέλθουν οι άλλοι πελάτες μειώνεται η πιθανότητα του επιλεγμένου πελάτη. Άρα, στην FTC περίπτωση μπορεί να έχουμε πολλαπλές στρατηγικές ισορροπίας, ενώ στην ATC θα έχουμε μοναδική.

Θα κάνουμε τώρα μια αναφορά και στα είδη των στρατηγικών που θα μας απασχολήσουν παρακάτω. Όταν το μοντέλο θα είναι μη παρατηρήσιμη ουρά επειδή ο πελάτης που έχει το δίλημμα δεν γνωρίζει την κατάσταση του συστήματος, δηλαδή πόσους πελάτες έχει μέσα, θα ακολουθεί στρατηγική εισόδου με πιθανότητα  $q \in [0, 1]$  η οποία θα επηρεάζεται ανάλογα τη δομή κέρδους, τις παραμέτρους του συστήματος κ.τ.λ. Αντίθετα, σε παρατηρήσιμες ουρές επειδή γνωρίζουμε την κατάσταση του συστήματος θα ακολουθούμε στρατηγικές τύπου κατωφλίου. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ότι οι αποφάσεις είναι 0 για αποχώρηση από το σύστημα και 1 για την είσοδο τότε οι στρατηγικές θα είναι της μορφής  $q = (q_0, q_1, \dots)$  όπου  $q_i$  είναι η πιθανότητα να εισέλθω όταν βλέπω στο σύστημα  $i$  πελάτες. Έτσι θα έχουμε τις καθαρές στρατηγικές τύπου κατωφλίου  $n$  που θα είναι της

μορφής  $q = (q_0, q_1, \dots)$  με  $q_i = 1$  για  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  και  $q_i = 0$  για  $i \geq n$ . Με άλλα λόγια ο πελάτης θα εισέρχεται στο σύστημα με πιθανότητα 1 όταν παρατηρεί στο σύστημα από  $n - 1$  πελάτες και κάτω. Επίσης, θα έχουμε και τις μικτές στρατηγικές τύπου κατωφλίου με κατώφλι  $x = n + p$ , με  $n \in \mathcal{N}$  και  $p \in [0, 1)$  που θα είναι της μορφής  $q = (q_0, q_1, \dots)$  με  $q_i = 1$  για  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ,  $q_i = p$  για  $i = n$  και  $q_i = 0$  για  $i \geq n + 1$ . Με άλλα λόγια ο πελάτης θα εισέρχεται στο σύστημα με πιθανότητα 1 όταν παρατηρεί στο σύστημα από  $n - 1$  πελάτες και κάτω και με πιθανότητα  $p$  όταν παρατηρεί  $n$  πελάτες.

Τώρα θα προχωρήσουμε, μελετώντας τα τρία διαφορετικά πλαίσια βελτιστοποίησης που θα χρησιμοποιήσουμε και παρακάτω. Αρχικά, θα ασχοληθούμε με την ατομική βελτιστοποίηση για την εύρεση στρατηγικών ισορροπίας. Ειδικότερα, θα ψάχνουμε στρατηγικές ώστε να μεγιστοποιείται η ωφέλεια των πελατών η οποία ισούται με την αμοιβή από την εξυπηρέτηση, μείον τα κόστη, τα οποία θα είναι συνήθως είτε άμεσα κόστη, είτε κόστη αναμονής. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την κοινωνική βελτιστοποίηση για την εύρεση κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών. Πιο συγκεκριμένα, σκοπός θα είναι να μεγιστοποιήσουμε τον συνολικό κοινωνικό πλούτο επιλέγοντας μια κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική. Ο κοινωνικός πλούτος θα ισούται με ωφέλειες από εξυπηρέτηση μείον κόστη λειτουργίας, μείον κόστη αναμονής. Τέλος, η τρίτη μορφή βελτιστοποίησης που θα δούμε είναι η βελτιστοποίηση του μονοπωλείου. Ένα μονοπώλειο θέλει να επιλέξει συγκεκριμένη τιμή ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος του διαχειριστή ανά χρονική μονάδα καταλήγοντας έτσι σε άλλες στρατηγικές των πελατών.

Έδω αξίζει να σημειωθεί πως παρατηρείται το εξής φαινόμενο: όταν οι πελάτες λειτουργούν εγωιστικά δεν επιτυγχάνεται το κοινωνικά βέλτιστο και αυτό έχει εξήγηση. Ένας πελάτης που μπαίνει στην ουρά μπορεί να κάνει τους μελλοντικούς πελάτες να περνούν περισσότερο χρόνο στο σύστημα, ωστόσο κοιτώντας το δικό του βέλτιστο αδιαφορεί για τις εξωτερικές επιδράσεις (negative externalities) που προκαλεί στους υπόλοιπους. Έτσι, καταλαβαίνουμε ότι οι πελάτες χρησιμοποιούν το σύστημα παραπάνω από όσο είναι κοινωνικά βέλτιστο. Πάνω σε αυτό μπορούμε να ορίσουμε και την τιμή αναρχίας (Price Of Anarchy ή POA). Ειδικότερα, αυτή είναι ο λόγος του κοινωνικού πλούτου κάτω από την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική προς τον κοινωνικό πλούτο κάτω από ισορροπία κάτι που είναι αρκετά δύσκολο να βρεθεί ακόμη και σε απλά μοντέλα. Κλείνοντας, σε αυτό το πλαίσιο μπορεί ένας κοινωνικός σχεδιαστής να επιβάλλει τιμή εξυπηρέτησης σταθερή για όλους τους πελάτες ώστε να πετύχει το κοινωνικά βέλτιστο. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλοι τρόποι συντονισμού του συστήματος που θα δούμε και παρακάτω.

Στα επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε το μέρος της Θεωρίας Ουρών Αναμονής που αναφέρεται σε επαναπροσπάθειες (retrials) με στρατηγικούς παίχτες. Ουσιαστικά θα έχουμε μια ουρά αναμονής με έναν υπηρέτη όπου μια άφιξη βλέποντας το σύστημα απασχολημένο θα καλείται να πάρει κάποιες αποφάσεις. Το μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας στις ουρές με επαναπροσπάθειες ασχολείται με τις συνήθεις επαναπροσπάθειες (usual retrials), σύμφωνα με τις οποίες κάθε πελάτης επιχειρεί εκ νέου, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες. Υπάρχουν όμως πολλές καταστάσεις όπου είναι πιο λογικό να υποθέσουμε ότι μόνο ο πελάτης που βρίσκεται πρώτος στην τροχιά επαναπροσπαθεί. Αυτό το μοντέλο είναι ισοδύναμο με μια πολιτική όπου ο υπηρέτης επιβάλλει πρόσθετες καθυστερήσεις (delays) πριν παραλάβει τον πρώτο πελάτη της τροχιάς. Αυτή η καθυστέρηση

ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι ο υπηρέτης αφιερώνει λίγο χρόνο για να ανακτήσει έναν πελάτη από την τροχιά μετά από κάθε ολοκλήρωση υπηρεσίας. Εδώ αξίζει να τονιστεί πως μέσα σε αυτόν τον χρόνο μπορεί να έρθει νέα άφιξη η οποία θα εισέρχεται άμεσα στο σύστημα. Αυτού του είδους οι επαναπροσπάθειες λέγονται σταθερές (constant retrials) και θα τις δούμε εκτενώς παρακάτω. Τέλος, όταν θα λέμε παρατηρήσιμο μοντέλο θα εννοούμε ότι ο πελάτης θα ξέρει τη κατάσταση του συστήματος αλλά και του υπηρέτη (ενεργός ή ανενεργός), ενώ όταν θα λέμε σχεδόν μη παρατηρήσιμο θα εννοούμε ότι ο πελάτης δε θα ξέρει τη κατάσταση του συστήματος αλλά θα ξέρει την κατάσταση του υπηρέτη.

Αναλυτικότερα, σχετικά με τη δομή που θα ακολουθήσουμε, στο Κεφάλαιο 2 θα δούμε μια ιστορική αναδρομή πάνω στο κομμάτι αυτό και θα παρουσιάσουμε σύντομα διάφορες μελέτες και διάφορα αποτελέσματα που έχουν γραφτεί. Στο Κεφάλαιο 3 θα ασχοληθούμε αναλυτικά με την  $M/M/1$  ουρά (παρατηρήσιμη και σχεδόν μη παρατηρήσιμη) κάτω από το μοντέλο των συνήθων επαναπροσπαθειών παρουσιάζοντας κάποια αποτελέσματα. Κατόπιν θα δούμε και διάφορες μελέτες πάνω στο βέλτιστο ρυθμό επαναπροσπάθειας (κοινωνικό και ατομικό) σε μία  $M/M/1$  ουρά καθώς και σε μια  $M/G/1$  και θα κλείσουμε το Κεφάλαιο με κάποια αριθμητικά αποτελέσματα και ερμηνείες μέσω από διαγράμματα. Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 4 θα ασχοληθούμε αναλυτικά με την  $M/M/1$  ουρά (παρατηρήσιμη και σχεδόν μη παρατηρήσιμη) κάτω από το μοντέλο των σταθερών επαναπροσπαθειών παρουσιάζοντας διάφορα θεωρήματα. Ακόμη, θα δούμε και βέλτιστες στρατηγικές πάνω στη μη παρατηρήσιμη  $M/G/1$  αλλά και στην  $M/M/1$  με ντετερμινιστικούς χρόνους επανάκτησης, τονίζοντας παράλληλα κάποιους τρόπους συντονισμού του συστήματος όταν είναι εφικτό. Κλείνοντας, θα παρουσιάσουμε και κάποια ενδιαφέροντα αποτελέσματα μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων και διαγραμμάτων δίνοντας τις κατάλληλες ερμηνείες.

## Κεφάλαιο 2

# Επισκόπηση σε ουρές με επαναπροσπάθειες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μιλήσουμε για διάφορα μοντέλα που αναπτύχθηκαν τις τελευταίες δεκαετίες πάνω σε ουρές αναμονής με επαναπροσπάθειες, κάνοντας έτσι μια μικρή εισαγωγή σχετικά με την κατεύθυνση που θα ακολουθήσουμε στα παρακάτω κεφάλαια. Είναι γεγονός πως η βιβλιογραφία πάνω σε αυτό το κομμάτι είναι πλούσια καθώς έχουν μελετηθεί πολλά μοντέλα από διάφορες, μάλιστα, σκοπιές.

Αρχικά, πρώτη μελέτη πάνω σε αυτά τα μοντέλα ανήκει στον Cohen (1957) [5]. Πιο συγκεκριμένα, μελέτησε την  $M/M/1$  ουρά με εκθετικούς χρόνους επαναπροσπάθειας. Μάλιστα, το μοντέλο του επέτρεπε στους πελάτες να φεύγουν από το σύστημα προτού εξυπηρετηθούν. Έπειτα, με το σύστημα  $M/G/1$  με εκθετικές επαναπροσπάθειες ασχολήθηκαν ο Aleksandron (1974) [1], καθώς και οι Keilson, Cozolino, και Young (1968) [17], μόνο που τώρα οι πελάτες επαναπροσπαθούν μέχρι να εξυπηρετηθούν, δηλαδή δεν επιτρέπεται να αποχωρήσουν χωρίς εξυπηρέτηση από τη στιγμή που θα εισέλθουν. Σε όλες αυτές τις μελέτες υπολογίστηκαν αναλυτικά διάφορα μέτρα απόδοσης (π.χ αναμενόμενος αριθμός πελατών) με βάση την εκάστοτε στάσιμη κατανομή. Πάνω στα μοντέλα με γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης κινήθηκαν έπειτα και οι Choo και Conolly (1979) [4] καθώς και ο Falin (1979) [10] υπολογίζοντας και άλλα μέτρα απόδοσης όπως συνολικός χρόνος αναμονής συμπεριλαμβανομένης της εξυπηρέτησης μιας νέας άφιξης, χρόνος αργίας υπηρετή κ.τ.λ. Επίσης, σχετικά και με τον αριθμό των υπηρετών ο Le Gall (1976) [20] μελέτησε ένα σύστημα πολλών υπηρετών. Ακόμη, ο Greenberg (1989) [11] ονόμασε τροχιά (orbit) την ειδική ουρά αναμονής και επέτρεψε είτε ο πελάτης να προσπαθεί μέχρι να εξυπηρετηθεί είτε μετά από κάθε αποτυχημένη επαναπροσπάθεια ο πελάτης ή να συνεχίζει να επαναπροσπαθεί με μία πιθανότητα  $r$  μέχρι να επιτευχθεί η υπηρεσία ή να φεύγει από το σύστημα με μια πιθανότητα  $1 - r$ .

Όλες αυτές οι μελέτες όπως παρατηρούμε είναι πάνω σε ουρές αναμονής με επαναπροσπάθειες αλλά οι πελάτες δε λαμβάνουν αποφάσεις με βάση κάποιο οικονομικό, για παράδειγμα, συμφέρον. Δηλαδή, λείπει μια οικονομική δομή ώστε πάνω σε αυτή να χτι-

στούν διάφορες στρατηγικές που θα μπορούσαν να ακολουθούν οι πελάτες, δημιουργώντας έτσι ένα παίγνιο μεταξύ τους. Αυτή η ιδέα μελετήθηκε πρώτα από τους Naor (1969) [21] και από τους Edelson και Hildebrand (1975) [8] σε παρατηρήσιμες και μη παρατηρήσιμες  $M/M/1$  ουρές (χωρίς επαναπροσπάθειες), αντίστοιχα, σχετικά με την απόφαση ένταξης ή όχι σε ένα απασχολημένο σύστημα. Πιο συγκεκριμένα, ο Naor υπολόγισε τις τρεις βέλτιστες στρατηγικές ένταξης στην ουρά (ατομική, κοινωνική, μονοπωλίου) και τις σύγκρινε καταλήγοντας πως του μονοπωλίου είναι μικρότερη της κοινωνικής η οποία με τη σειρά της είναι μικρότερη της ατομικής. Αυτό συμβαίνει γιατί σε γενικές γραμμές, οι πελάτες αγνοούν το κόστος που επάγουν στην κοινωνία καθώς εισέρχονται, π.χ μελλοντικοί πελάτες θα έχουν παραπάνω χρόνο αναμονής, ενώ ένας διαχειριστής χρεώνει υψηλή τιμή που περιορίζει την πρόσβαση σε χαμηλότερα επίπεδα από το κοινωνικά βέλτιστο. Μετέπειτα αναπτύχθηκαν διάφορα μοντέλα όπως αυτά των Hassin and Havin (1997) [14] που αφορά ουρές με προτεραιότητες (priorities), των Burnetas και Economou (2007) [3] με χρόνους εκκίνησης (set up times) κ.τ.λ.

Αυτή η δομή και η εισαγωγή ιδεών της Θεωρίας Παιγνίων στον χώρο της Θεωρίας Ουρών Αναμονής έφερε νέες μελέτες και στο κομμάτι των επαναπροσπαθειών. Σχετικά με τις συνήθεις εκθετικές επαναπροσπάθειες και την εύρεση του βέλτιστου ρυθμού, ο Kulkarni (1983) [18] κάτω από μια δομή κόστους υπολόγισε το κοινωνικά βέλτιστο ρυθμό επαναπροσπαθειών σε μια  $M/M/1$  ουρά, ως τον ρυθμό που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κόστος παραμονής στο σύστημα. Επίσης, ο Elcan (1994) [9] υπολόγισε αντίστοιχα τον ατομικά βέλτιστο ρυθμό επαναπροσπαθειών σε ένα σύστημα  $M/M/1$ . Ακόμη, σε αυτό το πεδίο κινήθηκαν και οι Hassin και Havin (1996) [12] όπου βρήκαν τον ατομικά και τον κοινωνικά βέλτιστο ρυθμό επαναπροσπαθειών στην  $M/G/1$  ουρά. Μάλιστα, αξίζει να σημειωθεί πως ο Kulkarni (1983) [19] μελέτησε σύστημα με δύο (ή περισσότερους) τύπους πελατών. Στην περίπτωση αυτή οι πελάτες του τύπου  $i$  ( $i = 1, 2$ ) καλούνται να βρουν τον βέλτιστο ρυθμό επαναπροσπάθειας που θα ελαχιστοποιήσει τη συνολική αναμονή και άρα το κόστος τους. Αυτή όμως η ελαχιστοποίηση επηρεάζεται και από τους δύο ρυθμούς επαναπροσπαθειών. Έτσι, έχουμε πια ένα παιχνίδι δύο ατόμων χωρίς μηδενικό άθροισμα όπου μελετάται τόσο σε συνεργατικό όσο και σε μη συνεργατικό επίπεδο. Τέλος, οι Zhang και Wang (2012) [26] μελέτησαν την ουρά με έναν υπηρέτη, όπου δύο είδη πελατών φτάνουν με δύο διαφορετικές Poisson αφίξεις, έχουν χρόνους εξυπηρέτησης που ακολουθούν δύο διαφορετικές γενικές κατανομές. Επίσης, υπάρχει και η εξής λειτουργία: υποθέτουμε πως όταν μια υπηρεσία έχει ολοκληρωθεί, ο υπηρέτης θα βρεθεί σε αργία μετά από έναν εκθετικά κατανομημένο χρόνο. Επίσης, θα έχει εκθετικό χρόνο ζωής, ενώ θα υπάρχουν και χρόνοι αργίας και επισκευής που θα ακολουθούν γενικές κατανομές. Πάνω σε αυτό το πλαίσιο μελετήθηκαν οι βέλτιστοι, ατομικά και κοινωνικά, ρυθμοί επαναπροσπάθειας.

Παράλληλα, σχετικά με τις συνήθεις εκθετικές επαναπροσπάθειες και την εύρεση βέλτιστων στρατηγικών ένταξης στο σύστημα οι Wang και Zhang (2013) [24] βρήκαν τις στρατηγικές ισορροπίας και κοινωνικού βέλτιστου στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο καθώς και το βέλτιστο ατομικά και κοινωνικά κατώφλι (το τελευταίο υπολογίζεται αριθμητικά) στην  $M/M/1$  ουρά. Επιπρόσθετα, οι Cui, Su, Veeraraghavan (2014) [6] ασχολήθηκαν με την περίπτωση όπου ένας πελάτης επιλέγει αν θα μπει, θα αποχωρήσει ή θα προσπαθήσει ξανά για να εισέλθει στην ουρά σε άλλη περίοδο σε μια παρατηρήσιμη  $M/M/1$  ουρά. Εδώ μελετήθηκαν στρατηγικές ισορροπίας σε ευσταθή και ασταθή συστήματα και

προκύπτει και το αντιδιδαισθητικό αποτέλεσμα πως σχετικά με τις κοινωνικά βέλτιστες αποφάσεις, οι πελάτες ξαναπροσπαθούν σπάνια όταν το κόστος επαναπροσπάθειας είναι χαμηλό και προσπαθούν πολύ συχνά όταν το κόστος επανάληψης είναι υψηλό. Ακόμη, οι Sun, Wang και Zhang (2021) [23] μελέτησαν την περίπτωση Poisson αφίξεων, ενός υπηρέτη αλλά εξυπηρέτησης με ομάδες. Πιο συγκεκριμένα, ανάλογα την κατάσταση του υπηρέτη, ενεργός ή όχι, υπάρχουν δύο περίοδοι. Όσοι τον πετύχουν ελεύθερο εισέρχονται στο σύστημα ενώ σε αντίθετη περίπτωση συσσωρεύονται μέχρι να γίνει ενεργός ο υπηρέτης και τότε εξυπηρετούνται ομαδικά. Εδώ, βρέθηκαν πάλι σημεία ισορροπίας και μελετήθηκαν προβλήματα κοινωνικής βελτιστοποίησης.

Από την άλλη πλευρά, σχετικά με τις σταθερές επαναπροσπάθειες και τον υπολογισμό βέλτιστων στρατηγικών ένταξης έχουν ασχοληθεί οι Economou και Kanta (2010) [7]. Πιο συγκεκριμένα, τόσο στην παρατηρήσιμη όσο και στη σχεδόν μη παρατηρήσιμη  $M/M/1$  βρήκαν βέλτιστες στρατηγικές, τις σύγκριναν και παρουσίασαν κάποια ενδιαφέροντα διαγράμματα όπως θα μελετήσουμε και παρακάτω. Επιπλέον, οι Wang, Zhang και Wang (2014) [27] μελέτησαν ένα μοντέλο που υπόκεινται σε βλάβες και επισκευές και οι πελάτες έχουν το δίλημμα να μπουν ή όχι στην τροχιά και στην παρατηρήσιμη αλλά και στη σχεδόν μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Έτσι μελέτησαν τις βέλτιστες στρατηγικές σε όλα τα επίπεδα και τη σύγκρισή τους. Ακόμη, οι Wang, Zhang και Huang (2017) [25] μελέτησαν το σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο με  $N$  πολιτική, δηλαδή ο υπηρέτης απενεργοποιείται κάθε φορά που το σύστημα αδειάζει και ενεργοποιείται μόνο όταν ο αριθμός των πελατών στη λίστα αναμονής φτάσει το  $N$ . Επίσης, οι πελάτες αντιμετωπίζουν το δίλημμα εισόδου ή όχι. Εδώ οι στρατηγικές ισορροπίας συγκρίνονται με το κοινωνικό βέλτιστο και η τιμή της αναρχίας μελετάται ως μέτρο για την ποσοτικοποίηση της αναποτελεσματικότητας των στρατηγικών ισορροπίας. Παράλληλα, οι Baron, Economou και Manou (2021) [2] δούλεψαν πάνω σε μια  $M/G/1$  ουρά με σταθερές επαναπροσπάθειες και γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης και ανάκτησης, βγάζοντας κάποια ενδιαφέροντα αριθμητικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, υπολογίσαν τη στρατηγική ισορροπίας, αλλά ασχολήθηκαν και με βέλτιστους ντετερμινιστικούς χρόνους επαναπροσπάθειας για μεγιστοποίηση του ρυθμού διαπέρασης και του κοινωνικού βέλτιστου.

Ένα εύλογο ερώτημα πάνω σε όλα αυτά θα ήταν τι ισχύει αν συγκρίνουμε τις εκάστοτε βέλτιστες στρατηγικές σε ατομικό, σε κοινωνικό αλλά και σε επίπεδο μονοπωλίου. Ο Naor (1969) [21] ήταν ο πρώτος που παρατήρησε ότι σε παρατηρήσιμες ουρές, όταν οι πελάτες λειτουργούν εγωιστικά, το βέλτιστο τους δε συμπίπτει με το κοινωνικά βέλτιστο. Ένα επιπρόσθετο ερώτημα εδώ θα ήταν πώς μπορεί να ρυθμιστεί το σύστημα έτσι ώστε οι πελάτες, κοιτώντας το ατομικό τους συμφέρον, να αποφασίζουν να εισέρχονται στην ουρά με τρόπο που να επιτυγχάνεται το κοινωνικό βέλτιστο. Αρκετοί μηχανισμοί αφορούν την επιβολή επιπρόσθετων τιμών. Για παράδειγμα, ο Naor [21], σκέφτηκε να χρεώσει τους πελάτες για την είσοδο τους στην ουρά, οι Hassin και Havin σε μια  $M/G/1$  ουρά προτείνουν είτε μερική αποζημίωση (έκπτωση) στους πελάτες για τα κόστη τους, είτε επιπρόσθετη πληρωμή σε αποτυχημένες επαναπροσπάθειες με τέτοιο τρόπο ώστε να εξισώνονται οι δύο βέλτιστοι ρυθμοί, που είναι και η μεταβλητή απόφασης του μοντέλου τους. Τέλος, οι Zhang, Wang [26] έκαναν το ίδιο στο μοντέλο που αναφέρθηκε παραπάνω βρίσκοντας κατάλληλη επιπρόσθετη τιμή που πρέπει να χρεώνονται οι πελάτες ώστε να έχουμε συντονισμό.

Ωστόσο οι Hanin και Oz (2016, 2018) [15], [16] προτείνουν νέους τρόπους που δεν περιλαμβάνουν αλλαγές στο οικονομικό πλαίσιο και διαθέτουν ορισμένα πλεονεκτήματα έναντι των προηγούμενων καθώς για παράδειγμα νέοι μηχανισμοί τιμολόγησης απαιτούν τη δημιουργία πρόσθετων υποδομών για την είσπραξη. Παράλληλα, οι Baron, Economidou, Manou (2021) [2] στη σχεδόν μη παρατηρήσιμη  $M/M/1$  ουρά με τροχιά χρησιμοποιούν τους χρόνους ανάκτησης πελατών, ως μηχανισμό συντονισμού που θα τους αναγκάσει να συμπεριφέρονται με κοινωνικά βέλτιστο τρόπο και να επιτύχουμε έτσι το μέγιστο κοινωνικά αποτέλεσμα, όποτε μπορεί να συμβεί αυτό.

## Κεφάλαιο 3

# Μοντέλα με συνήθειες επαναπροσπάθειες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μοντέλα όπου οι επαναπροσπάθειες των πελατών να μπουν στο σύστημα γίνονται με τον συνήθη τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, με τον όρο συνήθειες επαναπροσπάθειες εννοούμε την κατάσταση όπου οι πελάτες που επισκέπτονται έναν χώρο εξυπηρέτησης όπου οι υπηρέτες είναι απασχολημένοι ή αντίστοιχα τηλεφωνούν σε ένα κατειλημμένο κέντρο, καλούνται να αποφασίσουν αν θα αποχωρήσουν ή αν θα συνεχίσουν να επαναλαμβάνουν την προσπάθεια τους μετά από κάποια χρονικά διαστήματα μέχρι να βρουν ελεύθερο υπηρέτη. Κατά τη διάρκεια αυτού του χρόνου ουσιαστικά έχουν ενταχθεί σε μια εικονική, και με άπειρο χώρο αναμονής, ουρά τη λεγόμενη τροχιά. Στα μοντέλα αυτά δεν επιτρέπεται ο πελάτης να αποχωρήσει αν ενταχθεί στην τροχιά, ανακαλώντας την απόφαση του. Όποτε κάτω από συγκεκριμένη δομή του προβλήματος (τύπος ουράς, ρυθμοί αφίξεων, ρυθμοί εξυπηρέτησης, ρυθμοί επαναπροσπαθειών, δομή κόστους κ.τ.λ) θα εξετάσουμε και θα συγκρίνουμε βέλτιστες στρατηγικές τόσο σε ατομικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο. Αυτές οι στρατηγικές θα σχετίζονται με την πιθανότητα ένταξης των πελατών στο σύστημα αλλά και με τον βέλτιστο ρυθμό επαναπροσπαθειών. Παρακάτω θα μελετήσουμε το πρόβλημα και από τις δύο σκοπιές δηλαδή με διαφορετικές μεταβλητές απόφασης κάθε φορά, παρουσιάζοντας διάφορα ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Μάλιστα, μέσω διαφόρων προσομοιώσεων που έχουν πραγματοποιηθεί σε διάφορα άρθρα θα παρουσιάσουμε κάποιες λογικές ερμηνείες των θεωρητικών αποτελεσμάτων.

### 3.1 Βέλτιστες στρατηγικές στην $M/M/1$ ουρά

Αρχικά, θα μελετήσουμε την  $M/M/1$  ουρά με την εξής Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου:  $\{(I(t), X(t)), t = 1, 2, \dots\}$ . Η  $I(t)$  δηλώνει την κατάσταση του υπηρέτη (0: ελεύθερος, 1: απασχολημένος) και η  $X(t)$  δηλώνει τον αριθμό των πελατών στην τροχιά. Άρα,



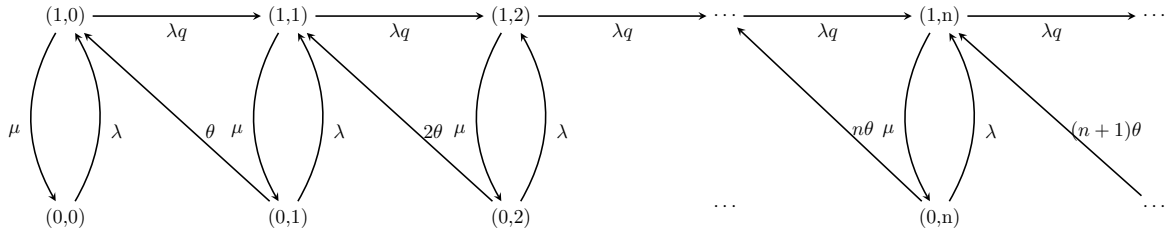
έχουμε τον χώρο καταστάσεων  $(i, j)$  όπου  $i \in \{0, 1\}$  και  $j \in \{0, 1, \dots\}$ . Αν ένας πελάτης βρει ελεύθερο τον υπηρέτη τότε εισέρχεται στο σύστημα και εξυπηρετείται άμεσα, ενώ αν τον βρει απασχολημένο καλείται να αποφασίσει αν θα αποχωρήσει ή αν θα ενταχθεί στην τροχιά, ώστε να επαναπροσπαθεί μέχρι να βρει ελεύθερο τον υπηρέτη. Εδώ θεωρούμε πως είναι ανεξάρτητοι οι χρόνοι επαναπροσπάθειας των πελατών καθώς και οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων μεταξύ επαναλήψεων και εξυπηρετήσεων. Σχετικά με τη δομή κόστους που μπορούμε να υποθέσουμε στο πρόβλημα, ο πελάτης θεωρούμε ότι θα παίρνει  $R$  χρηματικές μονάδες για την εξυπηρέτηση του ενώ θα χρεώνεται  $C$  χρηματικές μονάδες ανά χρονική μονάδα παραμονής στο σύστημα. Στόχος του πελάτη είναι να ελαχιστοποιήσει το συνολικό του κόστος. Εδώ έχουν μελετηθεί δύο μοντέλα από τους Wang και Zhang [24] όπου παρουσιάζουν μια διαφοροποίηση ως προς τις πληροφορίες των πελατών σχετικά με το σύστημα. Ειδικότερα, έχουμε τη σχεδόν μη παρατηρήσιμη  $M/M/1$  ουρά και την παρατηρήσιμη  $M/M/1$  ουρά. Θα παρουσιάσουμε και τα δύο μοντέλα στην συνέχεια.

Οπότε συνοπτικά στα παρακάτω μοντέλα θα έχουμε τα εξής:

- ▶ Διαδικασία αφίξεων:  $\text{Poisson}(\lambda)$
- ▶ Χρόνοι εξυπηρέτησης:  $\text{Exp}(\mu)$
- ▶ Χρόνοι επαναπροσπάθειας:  $\text{Exp}(\theta)$
- ▶ Ένας υπηρέτης και μη ύπαρξη χώρου αναμονής
- ▶ Κέρδος ανά εξυπηρέτηση:  $R$
- ▶ Κόστος ανά μονάδα αναμονής στη τροχιά:  $C$
- ▶ Πιθανότητα να μπει ένας πελάτης αν ο υπηρέτης είναι απασχολημένος:  $q$ .

### 3.1.1 Σχεδόν μη παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά

Σε αυτό το μοντέλο ο πελάτης γνωρίζει την κατάσταση του υπηρέτη σε στιγμές άφιξης και επαναπροσπάθειας αλλά δεν έχει πληροφορία για τον αριθμό των ατόμων στην τροχιά. Στόχος του είναι, με σκοπό να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος, να δει, όταν ο υπηρέτης είναι απασχολημένος, τότε τον συμφέρει να εισέρχεται στο σύστημα, τότε να αποχωρεί, ή τότε να ακολουθεί μια μεικτή στρατηγική (να εισέρχεται με μια πιθανότητα  $q$ ), λαμβάνοντας υπόψη πως όλοι οι πελάτες ακολουθούν την ίδια στρατηγική. Αντίθετα, όταν είναι ελεύθερος ο υπηρέτης δεν υπάρχει κόστος αναμονής, άρα εισέρχεται με πιθανότητα 1 δίχως να επηρεάζεται από τις στρατηγικές των άλλων παιχτών, αφού λαμβάνει ποσό  $R$ . Άρα, παρακάτω θα επικεντρωθούμε σε κάποια λήμματα και θεωρήματα πάνω στην εύρεση της στρατηγικής ισορροπίας του Nash ( $q_e$ ), της στρατηγικής που μεγιστοποιεί το συνολικό κοινωνικό όφελος ( $q^*$ ) και στη σύγκρισή τους. Με βάση και το παραπάνω πλαίσιο έχουμε το εξής διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



Αρχικά, θα ασχοληθούμε με την περίπτωση  $\lambda < \mu$  (συνθήκη ευστάθειας). Έστω η στάσιμη κατανομή  $p(i, j)$  με  $i = 0, 1$  και  $j = 0, 1, 2, \dots$  και οι γεννήτριες:

$$p_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j p(0, j)$$

$$p_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j p(1, j).$$

Σε αυτό το μοντέλο έχουμε τις εξής εξισώσεις ισορροπίας:

$$(\lambda + j\theta)p(0, j) = \mu p(1, j)$$

$$(\lambda q + \mu)p(1, j) = \lambda p(0, j) + (j+1)\theta p(0, j+1) + \lambda q p(1, j-1), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $z^j$  και αθροίζοντας κατά μέλη τις εξισώσεις έχουμε:

$$\lambda p_0(z) + \theta z(p_0(z))' = \mu p_1(z)$$

$$(\lambda q(1-z) + \mu)p_1(z) = \lambda p_0(z) + \theta(p_0(z))'.$$

Άρα, απαλείφοντας το  $p_1(z)$  φτάνουμε στη διαφορική εξίσωση:

$$(p_0(z))' = p_0(z) \frac{\lambda^2 q}{\theta(\mu - \lambda q z)} \Rightarrow \left( \ln(p_0(z)) \right)' = -\frac{\lambda}{\theta} \left( \ln(\mu - \lambda q z) \right)'$$

$$\Rightarrow p_0(z) = (\mu - \lambda q z)^{-\frac{\lambda}{\theta}} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

και με αντικατάσταση έχουμε:  $p_0(z) = \frac{c'}{(1 - \frac{\lambda q}{\mu} z)^{\frac{\lambda}{\theta}}}$  και  $p_1(z) = \frac{\frac{\lambda}{\mu} c'}{(1 - \frac{\lambda q}{\mu} z)^{\frac{\lambda}{\theta} + 1}}$ ,  $c' \in \mathbb{R}$ . Χρησιμοποιούμε τώρα την εξίσωση κανονικοποίησης για να βρούμε τη σταθερά:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (p(0, j) + p(1, j)) = 1 \Rightarrow \frac{c'}{(1 - \frac{\lambda q}{\mu})^{\frac{\lambda}{\theta}}} + \frac{\frac{\lambda}{\mu} c'}{(1 - \frac{\lambda q}{\mu})^{\frac{\lambda}{\theta} + 1}} = 1$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda q}{\mu}\right) c' + \frac{\lambda}{\mu} c' = \left(1 - \frac{\lambda q}{\mu}\right)^{\frac{\lambda}{\theta} + 1}$$

$$\Rightarrow c' = \frac{\left(1 - \frac{\lambda q}{\mu}\right)^{\frac{\lambda}{\theta} + 1}}{1 - \frac{\lambda q}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\Rightarrow c' = \frac{\mu - \lambda q}{\mu + \lambda(1 - q)} \left(1 - \frac{\lambda q}{\mu}\right)^{\frac{\lambda}{\theta}}.$$

Επομένως, οι γεννήτριες δίνονται απο τους τύπους:

$$p_0(z) = \frac{\mu - \lambda q}{\mu + \lambda(1 - q)} \left( \frac{1 - \frac{\lambda q}{\mu}}{1 - \frac{\lambda q}{\mu} z} \right)^{\frac{\lambda}{\theta}} \quad (3.1)$$

$$p_1(z) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda(1 - q)} \left( \frac{1 - \frac{\lambda q}{\mu}}{1 - \frac{\lambda q}{\mu} z} \right)^{\frac{\lambda}{\theta} + 1}. \quad (3.2)$$

Μάλιστα, αξίζει να σημειωθεί ότι από αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε να εξάγουμε και τη στάσιμη κατανομή[24](Theorem 1).

Στη συνέχεια, με βάση τη δομή κόστους που έχουμε υποθέσει το συνολικό όφελος ενός πελάτη που αποφασίζει να μπει ενώ βρίσκει τον υπηρέτη απασχολημένο και οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν στρατηγική  $q$  θα είναι :

$$S(q) = R - CT(q), \quad (3.3)$$

όπου  $T(q)$  είναι ο αναμενόμενος χρόνος που περιμένει ένας πελάτης μέχρι να ξεκινήσει η εξυπηρέτηση του, εάν αποφασίσει να εισέλθει, δεδομένου ότι ο υπηρέτης είναι απασχολημένος και οι υπόλοιποι εισέρχονται με πιθανότητα  $q$ .

Έστω ότι με  $T(1, k)$  συμβολίζουμε τον αναμενόμενο χρόνο που περιμένει ένας πελάτης μέχρι να ξεκινήσει η εξυπηρέτηση του, εάν αποφασίσει να εισέλθει, δεδομένου ότι ο υπηρέτης είναι απασχολημένος αλλά και ότι έχει άλλους  $k$  πελάτες στην τροχιά. Τότε έχουμε:

$$T(q) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} p(1, j) T(1, j)}{\sum_{j=0}^{\infty} p(1, j)}, \quad (3.4)$$

και άρα αν υπολογίσουμε το  $T(1, j)$  συνδιάζοντας τις σχέσεις (3.2), (3.3), (3.4) θα μπορούμε να υπολογίσουμε το  $S(q)$ . Για τον σκοπό αυτό θα παρουσιάσουμε τώρα ένα χρήσιμο Λήμμα των Wang, Zhang [24].

**Λήμμα 3.1.1.** (Lemma 2) Για  $k \geq 0$  ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής  $T(1, k)$  για έναν πελάτη που μόλις φτάνει στο σύστημα και βρίσκεται στην τροχιά μαζί με άλλους  $k$  πελάτες δίνεται από τον εξής τύπο:

$$T(1, k) = mk + b, \quad (3.5)$$

όπου  $m = \frac{1}{2\mu - \lambda q}$  και  $b = \frac{2(\lambda + \theta + \mu) - \lambda q}{\theta(2\mu - \lambda q)}$ .

Θα παρουσιάσουμε μια σύντομη εξήγηση αυτού του αποτελέσματος. Έστω  $m$  ο χρόνος καθυστέρησης στην αναμονή του επιλεγμένου πελάτη λόγω των επιπρόσθετων πελατών που φτάνουν στο σύστημα όσο ο υπηρέτης είναι απασχολημένος. Αποδεικνύεται από τους Hassin and Havin [13] ότι αυτός ο χρόνος είναι ανεξάρτητος του  $k$ . Άρα, ο πελάτης περιμένει  $k$  τέτοιους χρόνους  $m$ . Επίσης, με  $b$  συμβολίζουμε τον αναμενόμενο χρόνο αναμονής του πελάτη όταν είναι μόνος στην τροχιά και ο υπηρέτης είναι απασχολημένος. Άρα, έχουμε ότι  $T(1, k) = mk + b$  και ψάχνουμε τα  $m, b$ .

Για το  $m$  εργαζόμαστε ως εξής: ένας άλλος πελάτης από την τροχιά θα μπει στον χώρο εξυπηρέτησης πριν από τον πελάτη που μελετάμε με πιθανότητα  $\frac{\theta}{\theta+\theta}$  (τρέχουν γι αυτούς τους δύο, δύο εκθετικοί χρόνοι  $\theta$ ). Άρα, τώρα ο χρόνος που επιβαρύνεται ο επιλεγμένος πελάτης είναι ίσος με τον χρόνο εξυπηρέτησης του πελάτη που θα εξυπηρετηθεί ( $\frac{1}{\mu}$ ) συν τον αριθμό των αναμενόμενων αφίξεων στο διάστημα αυτό ( $\frac{\lambda q}{\mu}$ ) επί την καθυστέρηση ( $m$ ) που θα προκαλέσουν αυτές οι αφίξεις. Άρα, έχουμε  $m = \frac{\theta}{\theta+\theta}(\frac{1}{\mu} + \frac{\lambda q}{\mu}m)$ , οπότε λύνοντας ως προς  $m$  παίρνουμε το ζητούμενο  $m$ .

Για το  $b$  εργαζόμαστε ως εξής: ουσιαστικά ζητάμε τον αναμενόμενο χρόνο του πελάτη όταν είναι μόνος στην τροχιά και ο υπηρέτης είναι απασχολημένος. Αυτός ο χρόνος θα είναι ίσος με τον χρόνο του επόμενου γεγονότος δηλαδή νέα άφιξη ή εξυπηρέτηση ( $\frac{1}{\lambda q + \mu}$ ) σύν την πιθανότητα να ήρθε πρώτα άφιξη ( $\frac{\lambda q}{\lambda q + \mu}$ ) επί τον νέο αναμενόμενο χρόνο του επιλεγμένου πελάτη ( $m + b$ ) συν την πιθανότητα να εξυπηρετήθηκε πρώτα ο πελάτης που απασχολεί τον υπηρέτη ( $\frac{\mu}{\lambda q + \mu}$ ) επί τον τον αναμενόμενο χρόνο του πελάτη όταν είναι μόνος στην τροχιά και ο υπηρέτης είναι ελεύθερος ( $W$ ). Αυτός ο χρόνος θα είναι ίσος με τον χρόνο επόμενου γεγονότος, δηλαδή άφιξη ή δεκτή επαναπροσπάθεια ( $\frac{1}{\lambda + \theta}$ ) σύν την πιθανότητα να έγινε πρώτα η άφιξη ( $\frac{\lambda}{\lambda + \theta}$ ) επί τον νέο αναμενόμενο χρόνο αναμονής ( $b$ ) συν την πιθανότητα να έγινε πρώτα η επιτυχημένη επαναπροσπάθεια ( $\frac{\theta}{\lambda + \theta}$ ) επί τον νέο αναμενόμενο χρόνο αναμονής ( $0$ ). Άρα, σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι  $b = \frac{1}{\lambda q + \mu} + \frac{\lambda q}{\lambda q + \mu}(m + b) + \frac{\mu}{\lambda q + \mu}W$ , όπου  $W = \frac{1}{\lambda + \theta} + \frac{\lambda}{\lambda + \theta}b$ . Οπότε αντικαθιστώντας το  $W$  και λύνοντας ως προς  $b$  παίρνουμε το ζητούμενο  $b$ .

Άρα, συνδυάζοντας τα παραπάνω και κάνοντας πράξεις έχουμε ότι:

$$T(q) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j p(1, j)}{\sum_{j=0}^{\infty} p(1, j)} m + b = \frac{p_1(1)'}{p_1(1)} m + b = \frac{1}{\theta} + \frac{\lambda + \theta}{\theta(\mu - \lambda q)}. \quad (3.6)$$

Επομένως το συνολικό όφελος ενός πελάτη που εισέρχεται σε ένα απασχολημένο κέντρο εξυπηρέτησης ενώ οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν στρατηγική  $q$  θα είναι:

$$S(q) = R - C \left( \frac{1}{\theta} + \frac{\lambda + \theta}{\theta(\mu - \lambda q)} \right). \quad (3.7)$$

Τώρα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε το πρώτο βασικό αποτέλεσμα σε αυτό το μοντέλο σχετικά με τον υπολογισμό της στρατηγικής ισορροπίας του Nash  $q_e$  [24].

**Θεώρημα 3.1.2.** (Theorem 3) Στο μοντέλο της σχεδόν μη παρατηρήσιμης  $M/M/1$  ουράς με συνήθειες επαναπροσπάθειες και με  $\lambda < \mu$  υπάρχει μοναδική μικτή στρατηγική ισορροπίας

Nash για έναν πελάτη να μπαίνει στο σύστημα με πιθανότητα  $q_e$  ενώ βλέπει τον υπηρετή απασχολημένο. Αυτή δίνεται από τον εξής τύπο:

$$q_e = \begin{cases} 0 & , \text{αν } \frac{R}{C} \in (0, \frac{\lambda+\theta+\mu}{\theta\mu}] \\ \frac{\mu - \frac{(\lambda+\theta)C}{R\theta-C}}{\lambda} & , \text{αν } \frac{R}{C} \in (\frac{\lambda+\theta+\mu}{\theta\mu}, \frac{\theta+\mu}{\theta(\mu-\lambda)}) \\ 1 & , \text{αν } \frac{R}{C} \in [\frac{\theta+\mu}{\theta(\mu-\lambda)}, \infty) \end{cases} \quad (3.8)$$

Απόδειξη. Μια χρήσιμη παρατήρηση εδώ είναι ότι η  $S(q)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $q$  και άρα έχει μέγιστο το:  $S(0) = R - C\left(\frac{\lambda+\theta+\mu}{\theta\mu}\right)$  και ελάχιστο το:  $S(1) = R - C\left(\frac{\mu+\theta}{\theta(\mu-\lambda)}\right)$ . Άρα, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- ▶  $S(0) \leq 0 \iff \frac{R}{C} \in (0, \frac{\lambda+\theta+\mu}{\theta\mu}]$  (άρα βέλτιστη στρατηγική  $q_e = 0$ ).
- ▶  $S(1) \geq 0 \iff \frac{R}{C} \in [\frac{\mu+\theta}{\theta(\mu-\lambda)}, \infty)$  (άρα βέλτιστη στρατηγική  $q_e = 1$ ).
- ▶  $S(q) = 0$  έχει μοναδική λύση την  $q_e = \frac{\mu - \frac{(\lambda+\theta)C}{R\theta-C}}{\lambda} \iff \frac{R}{C} \in (\frac{\lambda+\theta+\mu}{\theta\mu}, \frac{\mu+\theta}{\theta(\mu-\lambda)})$ .

Οπότε έτσι προκύπτει το θεώρημα. □

Εδώ αξίζει να σημειωθεί πως εφόσον η  $S(q)$  είναι γνησίως φθίνουσα  $\forall q < q_e$  έχουμε  $S(q) > 0$  και άρα η βέλτιστη απάντηση είναι 1,  $\forall q > q_e$  έχουμε  $S(q) < 0$  και άρα η βέλτιστη απάντηση είναι 0, ενώ για  $q = q_e$  κάθε στρατηγική είναι βέλτιστη απάντηση. Άρα, σε αυτό το μοντέλο επικρατεί μια συμπεριφορά ATC. Δηλαδή αν μπαίνουν οι πελάτες με πιθανότητα μεγαλύτερη από αυτή της ισορροπίας του Nash τότε στο σύστημα υπάρχουν παραπάνω πελάτες και έτσι αυτό αποθαρρύνει τον επιλεγμένο πελάτη από το να εισέλθει και αυτός.

Τώρα για να είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε το δεύτερο βασικό αποτέλεσμα σε αυτό το μοντέλο σχετικά με τον υπολογισμό του ( $q_{soc}$ ) αρκεί να βρούμε τη συνάρτηση κοινωνικού όφελους. Εδώ σύμφωνα με τους Wang και Zhang μπορούμε να αποφανθούμε ότι η συνάρτηση κοινωνικού πλούτου ανά μονάδα χρόνου θα είναι:

$$S_{soc}(q) = \lambda^*(q)R - CE(N(q)),$$

όπου  $\lambda^*(q)$  είναι ο μέσος ρυθμός άφιξης των πελατών που μπαίνουν στο σύστημα και  $E(N(q))$  ο μέσος αριθμός πελατών στην τροχιά.

Πιο συγκεκριμένα, από (3.1), (3.2) έχουμε πως  $\lambda^*(q) = \lambda \cdot 1 \cdot p_0(1) + \lambda \cdot q \cdot p_1(1) = \frac{\lambda\mu}{\mu + \lambda(1-q)}$  (ρυθμός εισόδου αν το σύστημα είναι άδειο επί την πιθανότητα να είναι άδειο συν ρυθμός εισόδου αν το σύστημα είναι γεμάτο επί την πιθανότητα να είναι γεμάτο). Επίσης, έχουμε ότι:

$$E(N(q)) = \sum_{j=0}^{\infty} j(p(0, j) + p(1, j)) = p_0(1)' + p_1(1)' = \frac{\lambda^2 q (\theta + \mu + \lambda(1-q))}{(\theta(\mu - \lambda q))}.$$

Άρα, μετά από αντικαταστάσεις έχουμε ότι:  $S_{soc}(q) = R \frac{\lambda \mu}{\mu + \lambda(1-q)} - C \frac{\lambda^2 q (\theta + \mu + \lambda(1-q))}{(\theta(\mu - \lambda q))}$ . Επίσης, αν θέσουμε  $x = \mu - \lambda q$  θέλουμε για  $x \in [\mu - \lambda, \mu]$  να μεγιστοποιήσουμε την εξής συνάρτηση:

$$S_{soc}(x) = \frac{\lambda}{\theta} \left( C + \frac{((\theta - \mu)C + \mu\theta R)x - \mu C(\lambda + \theta)}{x^2 + \lambda x} \right).$$

Οπότε παρακάτω θα διατυπώσουμε το δεύτερο σημαντικό θεώρημα των Wang, Zhang [24].

**Θεώρημα 3.1.3.** (Theorem 4) Στο μοντέλο της σχεδόν μη παρατηρήσιμης  $M/M/1$  ουράς με συνήθεις επαναπροσπάθειες και με  $\lambda < \mu$  υπάρχει μοναδική μικτή στρατηγική, να εισέρχεται ο πελάτης στο σύστημα με πιθανότητα  $q^*$  αν αυτό είναι κατειλημμένο, υπό το πρίσμα να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση κοινωνικού όφελους. Αυτή η στρατηγική δίνεται από τον εξής τύπο:

$$q^* = \begin{cases} 0 & , \text{αν } \frac{R}{C} \in (0, \frac{(\lambda + \theta + \mu)(\lambda + \mu)}{\theta \mu^2}] \\ \frac{\mu - x_2}{\lambda} & , \text{αν } \frac{R}{C} \in (\frac{(\lambda + \theta + \mu)(\lambda + \mu)}{\theta \mu^2}, \frac{\mu^2(\theta + \mu) + \lambda\theta(\mu - \lambda)}{\theta \mu(\mu - \lambda)^2}) \\ 1 & , \text{αν } \frac{R}{C} \in [\frac{\mu^2(\theta + \mu) + \lambda\theta(\mu - \lambda)}{\theta \mu(\mu - \lambda)^2}, \infty) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\text{όπου } x_2 = \frac{\mu C(\lambda + \theta) + \sqrt{(\mu C(\lambda + \theta))^2 + \lambda \mu C(\lambda + \theta)(C(\theta - \mu) + \mu\theta R)}}{(C(\theta - \mu) + \mu\theta R)}.$$

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας την  $S_{soc}(x)$  έχουμε ότι:

$$S_{soc}(x)' = \frac{\lambda}{\theta} \left( \frac{-((\theta - \mu)C + \mu\theta R)x^2 + 2\mu C(\lambda + \theta)x + \lambda \mu C(\lambda + \theta)}{(x^2 + \lambda x)^2} \right).$$

Άρα, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

►  $\frac{d}{dx}S(x) = 0$  έχει δύο ρίζες  $x_1, x_2$ , όπου:

$$x_1 = \frac{\mu C(\lambda + \theta) - \sqrt{(\mu C(\lambda + \theta))^2 + \lambda \mu C(\lambda + \theta)(C(\theta - \mu) + \mu\theta R)}}{(C(\theta - \mu) + \mu\theta R)} \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{\mu C(\lambda + \theta) + \sqrt{(\mu C(\lambda + \theta))^2 + \lambda \mu C(\lambda + \theta)(C(\theta - \mu) + \mu\theta R)}}{(C(\theta - \mu) + \mu\theta R)},$$

αν και μόνο αν:

$$(\theta - \mu)C + \mu\theta R \geq 0 \iff \frac{R}{C} \geq \frac{\mu - \theta}{\theta \mu}.$$

Άρα, από τα παραπάνω παίρνουμε ότι  $S(q)$  είναι φθίνουσα στα διαστήματα:  $(-\infty, x_1)$  και  $(x_2, \infty)$  και αύξουσα στο διάστημα:  $[x_1, x_2]$ . Εδώ έχουμε τις εξής υποπεριπτώσεις ανάλογα με το που πέφτει το  $x_2$ :

$$\alpha) \text{ Αν } \mu < x_2 \iff \frac{R}{C} < \frac{(\lambda+\theta+\mu)(\lambda+\mu)}{\theta\mu^2},$$

τότε το διάστημα που ανήκει το  $x$  βρίσκεται εντός των ριζών άρα η  $S(x)$  είναι αύξουσα και επομένως έχει μέγιστο για  $x = \mu$  δηλαδή για  $q^* = 0$ .

$$\beta) \text{ Αν } \mu - \lambda \leq x_2 \leq \mu \iff \frac{(\lambda+\theta+\mu)(\lambda+\mu)}{\theta\mu^2} \leq \frac{R}{C} \leq \frac{\mu^2(\theta+\mu)+\lambda\theta(\mu-\lambda)}{\theta\mu(\mu-\lambda)^2},$$

τότε έχουμε ότι η  $S(x)$  είναι αύξουσα στο  $[\mu - \lambda, x_2]$  και φθίνουσα στο  $[x_2, \infty)$  και επομένως έχει μέγιστο για  $x = x_2$  δηλαδή για  $q^* = \frac{\mu-x_2}{\lambda}$ .

$$\gamma) \text{ Τέλος, αν } \mu - \lambda > x_2 \iff \frac{R}{C} > \frac{\mu^2(\theta+\mu)+\lambda\theta(\mu-\lambda)}{\theta\mu(\mu-\lambda)^2},$$

τότε έχουμε ότι η  $S(x)$  είναι φθίνουσα στο διάστημα που κινείται το  $x$  και επομένως έχει μέγιστο για  $x = \mu - \lambda$  δηλαδή για  $q^* = 1$ .

$$\blacktriangleright \frac{d}{dx}S(x) > 0, \forall x \in [\mu - \lambda, \mu] \iff (\theta - \mu)C + \mu\theta R \leq 0 \iff \frac{R}{C} \leq \frac{\mu-\theta}{\theta\mu}.$$

Άρα, η  $S(x)$  είναι αύξουσα και επομένως το μέγιστο επιτυγχάνεται για  $x = \mu$ , δηλαδή έχουμε βέλτιστη στρατηγική  $q^* = 0$  σε αυτή την περίπτωση.

Οπότε, αν συγκεντρώσουμε όλα τα παραπάνω, προκύπτει το θεώρημα.

□

Κατόπιν, αφού αποδείξαμε τα δύο κεντρικά αποτελέσματα αυτού του μοντέλου ένα εύλογο ερώτημα θα ήταν αν μπορούν αυτές οι δύο στρατηγικές  $q_e, q^*$  να συγκριθούν. Απάντηση σε αυτό δίνουν οι Wang και Zhang [24]. Πιο συγκεκριμένα, αφού μελετήσουν όλες τις πιθανές περιπτώσεις με βάση τις δύο τρίκλαδες (3.8), (3.9) καταλήγουν στο ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι στο μοντέλο αυτό ισχύει για όλες τις τιμές των παραμέτρων ότι:

$$q^* \leq q_e. \quad (3.10)$$

Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής: υπό το πρίσμα της ατομικής βελτιστοποίησης το άτομο όταν μπαίνει στην τροχιά προσθέτει καθυστέρηση στους πελάτες που θα έρθουν αργότερα και θα μπουκ στην τροχιά, τις οποίες όμως αυτό δεν τις υπολογίζει καθώς κοιτά το δικό του κέρδος. Αυτές όμως οι καθυστερήσεις λαμβάνονται υπόψη όταν κοιτάμε την κοινωνική βελτιστοποίηση. Για αυτόν τον λόγο ο ρυθμός άφιξης κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό άφιξης κάτω από το κοινωνικό πλαίσιο.

Ας παρουσιάσουμε σύντομα την περίπτωση:  $\mu^2 < \lambda(\lambda + \theta + \mu) \iff \frac{(\lambda+\theta+\mu)(\lambda+\mu)}{\theta\mu^2} < \frac{\theta+\mu}{\theta(\mu-\lambda)}$ . Έχουμε τα εξής διαστήματα που μπορεί να πέσει το  $\frac{R}{C}$ :

- ▶  $\frac{R}{C} \in (0, \frac{\lambda+\theta+\mu}{\theta\mu}] \Rightarrow q^* = q_e = 0.$
- ▶  $\frac{R}{C} \in (\frac{\lambda+\theta+\mu}{\theta\mu}, \frac{(\lambda+\theta+\mu)(\lambda+\mu)}{\theta\mu^2}] \Rightarrow q^* = 0, q_e = \frac{\mu - \frac{(\lambda+\theta)C}{R\theta-C}}{\lambda}.$
- ▶  $\frac{R}{C} \in (\frac{(\lambda+\theta+\mu)(\lambda+\mu)}{\theta\mu^2}, \frac{\theta+\mu}{\theta(\mu-\lambda)}] \Rightarrow q^* = \frac{\mu-x_2}{\lambda}, q_e = \frac{\mu - \frac{(\lambda+\theta)C}{R\theta-C}}{\lambda}.$
- ▶  $\frac{R}{C} \in (\frac{\theta+\mu}{\theta(\mu-\lambda)}, \frac{\mu^2(\theta+\mu)+\lambda\theta(\mu-\lambda)}{\theta\mu(\mu-\lambda)^2}] \Rightarrow q^* = \frac{\mu-x_2}{\lambda} \in (0, 1], q_e = 1.$
- ▶  $\frac{R}{C} \in (\frac{\mu^2(\theta+\mu)+\lambda\theta(\mu-\lambda)}{\theta\mu(\mu-\lambda)^2}, \infty) \Rightarrow q^* = q_e = 1.$

Σε όλες τις υποπερίπτώσεις βλέπουμε πως  $q^* \leq q_e$  (η υποπερίπτωση 3 βγαίνει αν δειξουμε πως:  $x_2 > \frac{(\lambda+\theta)C}{R\theta-C}$ ).

Η άλλη περίπτωση υπάρχει αναλυτικά στο άρθρο των Wang and Zhang [24] (Theorem 5, Case 2)

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως υπάρχουν και αντίστοιχα αποτελέσματα για την περίπτωση  $\lambda < \mu$ . Ειδικότερα, οι Wang και Zhang [24] απέδειξαν ότι:

$$q_e = \begin{cases} 0 & , \text{αν } \frac{R}{C} \in (0, \frac{\lambda+\theta+\mu}{\theta\mu}] \\ \frac{\mu - \frac{(\lambda+\theta)C}{R\theta-C}}{\lambda} & , \text{αν } \frac{R}{C} \in (\frac{\lambda+\theta+\mu}{\theta\mu}, \infty) \end{cases} \quad (3.11)$$

$$q^* = \begin{cases} 0 & , \text{αν } \frac{R}{C} \in (0, \frac{(\lambda+\theta+\mu)(\lambda+\mu)}{\theta\mu^2}] \\ \frac{\mu-x_2}{\lambda} & , \text{αν } \frac{R}{C} \in (\frac{(\lambda+\theta+\mu)(\lambda+\mu)}{\theta\mu^2}, \infty) \end{cases}, \quad (3.12)$$

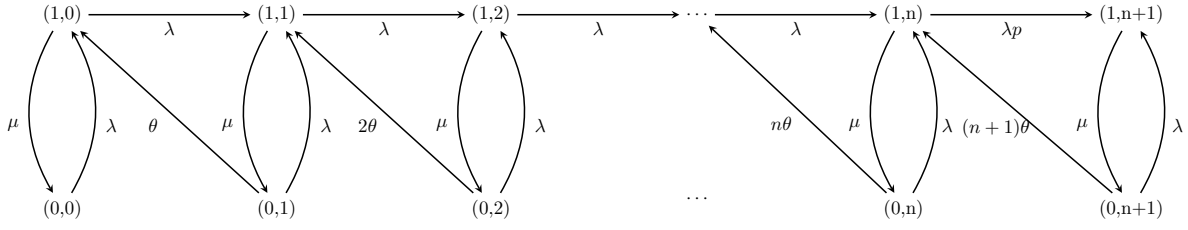
όπου  $x_2$  όπως παραπάνω, καθώς και ότι εξακολουθεί να ισχυεί η σχέση:  $q^* \leq q_e$

### 3.1.2 Παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά

Σε αυτό το μοντέλο οι πελάτες συγκριτικά με το προηγούμενο έχουν την επιπρόσθετη πληροφορία για τον αριθμό των ατόμων στην τροχιά. Εδώ οι στρατηγικές ισορροπίας θα είναι τύπου κατωφλίου  $[n, p]$ ,  $n \in \mathbb{Z}, p \in [0, 1]$ . Πιο συγκεκριμένα, αν ο πελάτης δει κάτω από  $n$  πελάτες στην τροχιά τότε θα εισέρχεται στο σύστημα με πιθανότητα 1, αν δει πάνω από  $n$  θα αποχωρεί, ενώ αν δει ακριβώς  $n$  τότε θα εισέρχεται με πιθανότητα  $p$ . Άρα έχουμε την ίδια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου αλλά με χώρο καταστάσεων  $(i, k)$  όπου  $i \in \{0, 1\}$  και  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Οπότε εδώ έχουμε το εξής διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:

Εδώ θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στον υπολογισμό του  $n_e$  και του  $n^*$  υπό το πλαίσιο της ατομικής και κοινωνικής βελτιστοποίησης αντίστοιχα. Αρχικά με όμοια





λογική με τα προηγούμενα έχουμε πως το αναμενόμενο όφελος του πελάτη ανά μονάδα χρόνου θα είναι ίσο με:

$$S_{[n,p]}(k) = R - C\varphi_{[n,p]}(1, k), n \geq 0, 0 \leq k \leq n,$$

όπου με  $\varphi_{[n,p]}(i, k)$  συμβολίζουμε τον αναμενόμενο υπολειπόμενο χρόνο μέχρι να μπει στον χώρο εξυπηρέτησης ο επιλεγμένος πελάτης αν είναι  $i$  ( $i = 0, 1$ ) πελάτες στον χώρο εξυπηρέτησης και  $k$  επιπλέον στην τροχιά που ακολουθούν την ίδια στρατηγική κατωφλίου. Οπότε σε πρώτο επίπεδο θα παρουσιάσουμε τον τρόπο υπολογισμού της  $\varphi_{[n,p]}(i, k)$  [24] και μετά θα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα εδώ σχετικά με τον υπολογισμό της στρατηγικής ισορροπίας  $[n_e, p_e]$ .

**Θεώρημα 3.1.4.** (Theorem 6) Στο μοντέλο παρατηρήσιμης  $M/M/1$  ουράς με συνήθεις επαναπροσπάθειες, αν όλοι οι πελάτες ακολουθούν στρατηγική τύπου κατωφλίου θα έχουν τον εξής μέσο χρόνο αναμονής μέχρι να περάσουν στον χώρο εξυπηρέτησης, δεδομένου ότι βρήκαν τον υπηρέτη απασχολημένο:

- Για  $n = 0$ ,  $\varphi_{[0,p]}(1, 0) = \frac{\lambda + \theta + \mu}{\theta\mu}$ .
- Για  $n \geq 1$ ,  $\varphi_{[n,p]}(1, k) = \alpha(k)\varphi_{[n,p]}(1, 0) + b(k)$ ,  $0 \leq k \leq n - 1$  και
- για  $k = n$ ,  $\varphi_{[n,p]}(1, n) = \frac{\lambda + \mu + (n+1)\theta}{(n+1)\theta\mu} + \frac{n}{n+1}(\alpha(n-1)\varphi_{[n,p]}(1, 0) + b(n-1))$ ,

όπου

$$\begin{aligned} \varphi_{[n,p]}(1, 0) = & \left\{ \left( \frac{\lambda p(\lambda + n\theta)}{n+1} + n\theta\mu \right) \alpha(n-1) - (n-1)\theta\mu\alpha(n-2) \right\}^{-1} \\ & \cdot \left\{ \lambda + \mu + n\theta + \frac{\lambda p(\lambda + n\theta)(\lambda + \mu + (n+1)\theta)}{(n+1)\theta\mu} \right. \\ & \left. - \left( \frac{\lambda p(\lambda + n\theta)}{n+1} + n\theta\mu \right) b(n-1) + (n-1)\theta\mu b(n-2) \right\}, \end{aligned}$$

$$\alpha(k+1) = f_1(k)\alpha(k) + f_2(k)\alpha(k-1), 1 \leq k \leq n-2,$$

$$b(k+1) = f_1(k)b(k) + f_2(k)b(k-1) + g(k), 1 \leq k \leq n-2,$$

$$\alpha(0) = 1, \alpha(1) = 1 + \frac{\mu\theta}{\lambda(\lambda + \theta)},$$

$$b(0) = 0, b(1) = -\frac{\lambda + \theta + \mu}{\lambda(\lambda + \theta)} \text{ και}$$

$$f_1(k) = 1 + \frac{(k+1)\mu\theta}{\lambda(\lambda + (k+1)\theta)}, k \geq 1,$$

$$f_2(k) = -\frac{k\mu\theta}{\lambda(\lambda + (k+1)\theta)}, k \geq 1,$$

$$g(k) = -\frac{\lambda + (k+1)\theta + \mu}{\lambda(\lambda + (k+1)\theta)}, k \geq 1.$$

Απόδειξη. Εδώ η ιδέα της απόδειξης βασίζεται στην ανάλυση πρώτου βήματος. Για παράδειγμα, θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στον υπολογισμό του  $\varphi_{[n,p]}(1, k)$  για  $k = 0, 1, \dots, n-2$ . Εφόσον ο υπηρέτης είναι απασχολημένος ο χρόνος του επόμενου γεγονότος είναι  $\frac{1}{\lambda+\mu}$  καθώς τρέχουν δύο εκθετικοί χρόνοι (ο χρόνος εξυπηρέτησης και ο χρόνος νέας άφιξης). Έπειτα, με πιθανότητα  $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$  γίνεται πρώτα άφιξη οπότε ο νέος αναμενόμενος χρόνος παραμονής θα γίνει  $\varphi_{[n,p]}(1, k+1)$ . Όμοια, με πιθανότητα  $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$  γίνεται πρώτα εξυπηρέτηση και άρα ο νέος αναμενόμενος χρόνος εξυπηρέτησης τώρα θα γίνει  $\varphi_{[n,p]}(0, k)$ . Άρα, για  $k = 0, 1, \dots, n-2$  παίρνουμε τον εξής τύπο:

$$\varphi_{[n,p]}(1, k) = \frac{1}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \varphi_{[n,p]}(1, k+1) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \varphi_{[n,p]}(0, k).$$

Με την ίδια ακριβώς λογική μπορεί κανείς να υπολογίσει και το  $\varphi_{[n,p]}(1, k)$  για  $k = n-1$  και  $k = n$  καθώς και το  $\varphi_{[n,p]}(0, k)$  για  $k = 0$  και για  $k = 1, 2, \dots, n$  και το  $\varphi_{[0,p]}(1, 0)$  στην περίπτωση που  $n = 0$ . Οπότε τώρα με κατάλληλες αντικαταστάσεις μπορούμε να καταλήξουμε στα ζητούμενα και να έχουμε πια υπολογισμένους τους διάφορους ανά περίπτωση αναμενόμενους χρόνους αναμονής των πελατών της τροχιάς.

□

Τώρα μπορεί να αποδειχθεί άμεσα ότι η συνάρτηση  $\varphi_{[n,p]}(i, k)$  είναι αύξουσα για το  $k$ , αύξουσα και συνεχής για το  $p$  και άρα αν τη στρατηγική  $[n, p]$  τη γράψουμε ως  $[x]$  όπου  $x = n + p$  έχουμε επιπλέον ότι και η  $\varphi_{[x]}(i, k)$  είναι αύξουσα και συνεχής ως προς  $x$ . Με βάση όλα τα παραπάνω έχουμε το εξής θεώρημα[24]:

**Θεώρημα 3.1.5.** (Theorem 7) Στο μοντέλο παρατηρήσιμης  $M/M/1$  ουράς με συνήθεις επαναπροσπάθειες, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας Nash  $[n_e, p_e]$  όπου αν ορίσουμε  $n_e := \max\{n \geq 0 : S_{[n,0]}(n) > 0\}$  τότε η στρατηγική ισορροπίας θα είναι:

►  $[n_e, 1]$  αν  $S_{[n_e,1]}(n_e) \geq 0$ .

►  $[n_e, p_e]$  αν  $S_{[n_e,1]}(n_e) < 0$ ,

όπου  $p_e$  είναι μοναδική λύση της εξίσωσης  $S_{[n_e,p]}(n_e) = 0$  και δίνεται από τον εξής τύπο:

$$p_e = \frac{\lambda + \mu + n_e\theta + \theta\mu \left( (n_e - 1)b(n_e - 2) - n_e b(n_e - 1) - (n_e a(n_e - 1) - (n_e - 1)a(n_e - 2))\psi \right)}{\left( a(n_e - 1)\psi + b(n_e - 1) - \frac{\lambda + \mu + (n_e + 1)\theta}{\theta\mu} \right) \frac{\lambda(\lambda + n_e\theta)}{n_e + 1}},$$

$$\psi = \frac{\left( \frac{R}{C} - \frac{\lambda + \mu + (n_e + 1)\theta}{(n_e + 1)\theta\mu} \right) \frac{n_e + 1}{n_e} - b(n_e - 1)}{a(n_e - 1)}.$$

Απόδειξη. Εδώ θα παρουσιάσουμε σύντομα τον τρόπο εύρεσης των στρατηγικών ισοροπίας χωρίζοντας το πρόβλημα σε δύο περιπτώσεις, ενώ η μοναδικότητα έχει αποδειχθεί αναλυτικά από τους Wang και Zhang [24](Theorem 7). Πιο αναλυτικά, έχουμε τις περιπτώσεις:

►  $S_{[n_e,1]}(n_e) \geq 0$ .

Εδώ όλοι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν στατηγική τύπου  $[n_e, 1]$ . Αν ο επιλεγμένος πελάτης δει  $k$  πελάτες ( $0 \leq k \leq n_e$ ) τότε το αναμενόμενο όφελος του είναι  $S_{[n_e,1]}(k) \geq S_{[n_e,1]}(n_e) \geq 0$ , καθώς έχουμε ότι η  $S_{[n,p]}(k)$  είναι γνησίως φθίνουσα ως προς  $k$  και άρα εισέρχεται στο σύστημα. Αντίθετα αν δει  $n_e + 1$  πελάτες τότε το αναμενόμενο όφελος του είναι  $S_{[n_e,1]}(n_e + 1) = S_{[n_e+1,0]}(n_e + 1) \leq 0$  και άρα δεν εισέρχεται. Άρα, η στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου είναι η  $[n_e, 1]$ .

►  $S_{[n_e,1]}(n_e) < 0$ .

Εδώ υποθέτουμε ότι όλοι άλλοι οι πελάτες ακολουθούν στατηγική τύπου  $[n_e, p_e]$ . Από ορισμό  $S_{[n_e,0]}(n_e) > 0$  και  $S_{[n_e,1]}(n_e) < 0$  και άρα λόγω συνέχειας υπάρχει  $p_e$  με  $0 \leq p_e \leq 1$  για το οποίο ισχύει  $S_{[n_e,p_e]}(n_e) = 0$ . Αν ο επιλεγμένος πελάτης δει  $k$  πελάτες ( $0 \leq k \leq n_e - 1$ ) τότε το αναμενόμενο όφελος του είναι  $S_{[n_e,p_e]}(k) > S_{[n_e,p_e]}(n_e) = 0$ , καθώς έχουμε ότι η  $S_{[n,p]}(k)$  είναι γνησίως φθίνουσα ως προς  $p$  και άρα εισέρχεται στο σύστημα. Αντίθετα αν δει  $n_e + 1$  πελάτες τότε το αναμενόμενο όφελος του είναι  $S_{[n_e,p_e]}(n_e + 1) < S_{[n_e,p_e]}(n_e) = 0$  και άρα δεν εισέρχεται. Τέλος, αν δει  $n_e$  το αναμενόμενο κέρδος είναι 0, τι και να αποφασίσει. Άρα, η στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου είναι η  $[n_e, p_e]$ , όπου το  $p_e$  μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά λύνοντας ως προς  $p$  την εξίσωση  $S_{[n_e,p]}(n_e) = 0$ .

□

Τέλος, για να κλείσουμε με την παρουσίαση αυτού του μοντέλου θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα υπό τη σκοπιά της κοινωνικής βελτιστοποίησης και με την υπόθεση ότι οι πελάτες ακολουθούν στρατηγική τύπου κατωφλίου  $[n, 0]$ , αφού αυτοί που μπαίνουν με

πιθανότητα  $p_e$  δεν έχουν κάποιο κέρδος. Πιο συγκεκριμένα, στην παρατηρήσιμη πια περίπτωση έχουμε ίδια ΜΑΣΧ με πριν μόνο που τώρα ο χώρος καταστάσεων θα είναι ο  $(i, j)$  όπου  $i \in \{0, 1\}$  και  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Οπότε, αν συμβολίσουμε με  $p_{[n,0]}(i, j)$ , όπου  $i \in \{0, 1\}$  και  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , τη στάσιμη κατανομή στο μοντέλο αυτό θα έχουμε ότι ο ρυθμός εισερχόμενων πελατών θα είναι:  $\lambda(1 - p_{[n,0]}(1, n))$  ενώ ο αναμενόμενος αριθμός πελατών στην τροχιά θα είναι:

$$\sum_{j=1}^n j(p_{[n,0]}(0, j) + p_{[n,0]}(1, j)).$$

Άρα, έχουμε το εξής αποτέλεσμα για τη συνάρτηση κοινωνικού όφελους:

$$S_{soc}(n) = \lambda(1 - p_{[n,0]}(1, n))R - \left( \sum_{j=1}^n j(p_{[n,0]}(0, j) + p_{[n,0]}(1, j)) \right) C. \quad (3.13)$$

Άρα, το βέλτιστο  $n^*$  εδώ θα είναι ο ακέραιος που μεγιστοποιεί την  $S_{soc}(n)$ . Για να βρεθεί αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή. Εδώ έχουμε τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\begin{aligned} (\lambda + j\theta)p(0, j) &= \mu p(1, j), \quad j = 0, 1, \dots, n \\ (\lambda + \mu)p(1, j) &= \lambda p(0, j) + (j+1)\theta p(0, j+1) + \lambda p(1, j-1), \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \\ \mu p(1, n) &= \lambda p(0, n) + \lambda p(1, n-1), \end{aligned}$$

με  $p(1, -1) = 0$ .

Απαλοΐφοντας το  $p(0, j)$  έχουμε:

$$\frac{(j+1)\theta\mu}{\lambda + (j+1)\theta} p(1, j+1) - \lambda p(1, j) = \frac{j\theta\mu}{\lambda + j\theta} p(1, j) - \lambda p(1, j-1),$$

ενώ μέσω της πρώτης και τρίτης εξίσωσης ισορροπίας έχουμε:  $p(1, n) = \frac{\lambda(\lambda+n\theta)}{n\theta\mu} p(1, n-1)$ .

Στην παραπάνω σχέση βάζοντας όπου  $j$  το  $n-1$  έχουμε:  $p(1, n-1) = \frac{\lambda(\lambda+(n-1)\theta)}{(n-1)\theta\mu} p(1, n-2)$ .

Άρα, πηγαίνοντας επαγωγικά έχουμε:

$$\begin{aligned} p(1, j) &= \frac{\lambda(\lambda + j\theta)}{j\theta\mu} p(1, j-1) = \left( \frac{\lambda}{\theta\mu} \right)^j \frac{\prod_{i=1}^j (\lambda + i\theta)}{j!} p(1, 0), \quad j = 1, 2, \dots, n \\ p(0, j) &= \frac{\mu}{\lambda + j\theta} p(1, j) = \left( \frac{\lambda}{\theta\mu} \right)^j \mu \frac{\prod_{i=1}^{j-1} (\lambda + i\theta)}{j!} p(1, 0), \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Από εξίσωση κανονικοποίησης έχουμε:

$$\sum_{j=0}^n (p(0, j) + p(1, j)) = 1$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow p(0,0) + p(1,0) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda}{\theta\mu}\right)^j \mu \frac{\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda + i\theta)}{j!} p(1,0) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda}{\theta\mu}\right)^j \frac{\prod_{i=1}^j(\lambda + i\theta)}{j!} p(1,0) = 1 \\ &\Rightarrow p(1,0) = \left(\frac{\mu}{\lambda} + 1 + \sum_{j=0}^n \left(\frac{\lambda}{\theta\mu}\right)^j \left(1 + \frac{\mu}{\lambda + j\theta}\right) \frac{\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda + i\theta)}{j!}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Άρα, στο μοντέλο παρατηρήσιμης  $M/M/1$  ουράς με συνήθεις επαναπροσπάθειες, κάτω από την υπόθεση ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν στρατηγική τύπου κατωφλίου  $[n, 0]$  όταν βρίσκουν το σύστημα απασχολημένο, η στάσιμη κατανομή  $p(i, j)$ ,  $(i, j) \in \{0, 1\} \times \{0, 1, 2, \dots, n\}$  δίνεται από τους εξής τύπους[24]:

$$p_{[n,0]}(1,0) = \left\{ \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda}{\theta\mu}\right)^j \left(1 + \frac{\mu}{\lambda + j\theta}\right) \frac{\prod_{i=1}^j(\lambda + i\theta)}{j!} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right\}^{-1} \quad (3.14)$$

$$p_{[n,0]}(0,0) = \frac{\mu}{\lambda} p(1,0) \quad (3.15)$$

$$p_{[n,0]}(1,j) = \left(\frac{\lambda}{\theta\mu}\right)^j \frac{\prod_{i=1}^j(\lambda + i\theta)}{j!} p(1,0), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

$$p_{[n,0]}(0,j) = \left(\frac{\lambda}{\theta\mu}\right)^j \mu \frac{\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda + i\theta)}{j!} p(1,0), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.17)$$

Κλείνοντας το κομμάτι αυτό, παρά το γεγονός πως βρήκαμε τη στάσιμη κατανομή, αξίζει να σημειωθεί ότι λόγω της πολύπλοκης έκφρασης του  $S_{soc}(n)$  δεν είναι εφικτός ο χαρακτηρισμός του  $n^*$  οπότε συνήθως καταφεύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους για την εύρεση του.

## 3.2 Βέλτιστος ρυθμός επαναπροσπαθειών στην $M/M/1$ ουρά

Τώρα θα κινηθούμε στο ίδιο πλαίσιο με πριν μόνο που ο ρυθμός επαναπροσπαθειών  $\theta$  δεν θα είναι γνωστός και θα έχουμε επιπλέον κόστος  $H$  ανά προσπάθεια του πελάτη. Δηλαδή η μεταβλητή απόφασης μας σε αυτό το πλαίσιο θα είναι ο ρυθμός με τον οποίο επαναπροσπαθεί ο πελάτης. Διαισθητικά μεγάλος ρυθμός σημαίνει αρκετές δοκιμές και άρα θα συσσωρευτούν αρκετά κόστη  $H$  και θα μειωθεί ο χρόνος αναμονής, ενώ μικρός ρυθμός σημαίνει πως θα έχουμε λίγα κόστη  $H$  αλλά θα αυξηθεί το συνολικό κόστος λόγω αρκετής αναμονής. Επομένως, όπως είναι λογικό θα πρέπει να βρεθεί μια ισορροπία (trade-off) σχετικά με τον ρυθμό επαναπροσπαθειών. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε το κομμάτι της θεωρίας όπως παρουσιάστηκε από τον Elcan [9] σχετικά με την εύρεση του βέλτιστου ατομικού ρυθμού επαναπροσπαθειών  $\eta_e(\theta)$  ενός επιλεγμένου πελάτη όταν οι υπόλοιποι επαναπροσπαθούν με ρυθμό  $\theta$  και του κοινωνικά βέλτιστου ρυθμού  $\theta_{soc}$  καθώς και τη σύγκριση τους ως προς τον χρόνο αναμονής στο σύστημα και ως προς το αναμενόμενο όφελος. Μάλιστα, ο Elcan αναφέρεται και στο μοντέλο του Greenberg όπου ουσιαστικά ο

πελάτης μπορεί να συνεχίσει να επαναπροσπαθεί μέχρι να επιτευχθεί η εξυπηρέτηση του μόνο που τώρα έχει την επιλογή να μείνει μετά από κάθε αποτυχημένη επαναπροσπάθεια με πιθανότητα  $r$  ή να φύγει από το σύστημα με πιθανότητα  $1-r$ . Τέλος, με το μοντέλο κάτω από την κοινωνική σκοπιά έχει ασχοληθεί και ο Kulkarni [18], όπου θα παρουσιάσουμε συνοπτικά έναν διαφορετικό τρόπο εύρεσης του  $\theta_{soc}$  από αυτόν του Elcan.

Οπότε συνοπτικά στο παρακάτω μοντέλο θα έχουμε τα εξής:

- ▶ Διαδικασία αφίξεων: Poisson( $\lambda$ )
- ▶ Χρόνοι εξυπηρέτησης: Exp( $\mu$ )
- ▶ Χρόνοι επαναπροσπάθειας: Exp( $\theta$ )
- ▶ Χρόνος επαναπροσπάθειας του επιλεγμένου πελάτη: Exp( $\eta$ )
- ▶ Ένας υπηρέτης και μη ύπαρξη χώρου αναμονής
- ▶ Κόστος ανά χρονική μονάδα αναμονής:  $C$
- ▶ Κόστος ανά επαναπροσπάθεια:  $H$
- ▶ Πιθανότητα να μπει ένας πελάτης αν ο υπηρέτης είναι απασχολημένος:  $q$
- ▶ Πιθανότητα αποχώρησης μετά από αποτυχημένη επαναπροσπάθεια:  $r$ .

### 3.2.1 Κοινωνικά βέλτιστος ρυθμός

Στο κοινωνικό σύστημα ο ρυθμός επαναπροσπαθειών  $\theta$  επιβάλλεται σε όλους τους πελάτες υπό το πλαίσιο να ελαχιστοποιηθεί το αναμενόμενο κοινωνικό κόστος μέσω της βέλτιστης επιλογής  $\theta_{soc}$ . Στο κομμάτι αυτό αφού ο Elcan [9] υπολόγισε τη στάσιμη κατανομή στην περίπτωση της σχεδόν μη παρατηρήσιμης  $M/M/1$  ουράς, κάτω από το μοντέλο του Greenberg, άρχισε να παρουσιάζει κάποιες ενδιαφέρουσες προτάσεις. Τα αποτελέσματα στα οποία κατέληξε αφορούσαν ουσιαστικά τις περιπτώσεις όπου  $r = 1$  (όπως είχαμε και στα παραπάνω μοντέλα),  $\mu = 1$ ,  $C = 1$ , ενώ συγκριτικά με το παραπάνω μοντέλο της σχεδόν μη παρατηρήσιμης  $M/M/1$  ουράς εδώ έχουμε  $q = 1$  δηλαδή ο πελάτης πάντα εισέρχεται στο σύστημα. Γι' αυτό το μοντέλο θα θεωρήσουμε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{(I(t), X(t)), t = 1, 2, \dots\}$  όπου  $I_t, X_t$  όπως στα παραπάνω μοντέλα δηλαδή η  $I(t)$  δηλώνει την κατάσταση του υπηρέτη (0: ελεύθερος, 1: απασχολημένος) και η  $X(t)$  δηλώνει τον αριθμό των πελατών στην τροχιά. Άρα, κάτω από αυτές τις υποθέσεις η μορφή της στάσιμης κατανομής που θα χρησιμοποιήσουμε και παρακάτω, η οποία προκύπτει μέσω των εξισώσεων ισορροπίας, θα είναι η εξής: (ταυτίζεται, όπως αναμενόταν, με τη στάσιμη κατανομή των Wang και Zhang [24] για  $\mu = 1, C = 1, q = 1$ )

$$p(1, j) = \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=1}^j \left( \frac{\lambda}{\theta} + i \right) p(1, 0), \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.18)$$

$$p(0, j) = \frac{1}{\lambda + j\theta} p(1, j), \quad j = 0, 1, \dots, \quad (3.19)$$

$$\text{όπου } p(1, 0) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{\prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{\lambda+i\theta}\right)} \left(1 + \frac{1}{\lambda+k\theta}\right) \right)^{-1}.$$

Επίσης, ορίζουμε  $K$  τον αριθμό των πελατών στην τροχιά και  $L$  τον αριθμό των πελατών συνολικά και  $p_1$  την πιθανότητα να βρει τον υπηρέτη απασχολημένο. Τότε με  $E[W_K]$  συμβολίζουμε τον αναμενόμενο χρόνο που περιμένει ο πελάτης στην τροχιά όταν βρίσκεται το σύστημα γεμάτο καθώς φτάνει, ενώ με  $E[W_L]$  θα συμβολίζουμε τον αναμενόμενο χρόνο που περιμένει ο πελάτης συνολικά στο σύστημα (θα το χρειαστούμε παρακάτω). Άρα για την κοινωνική οφέλεια έχουμε δύο ερμηνείες:

$$S_{soc} = E[K] \cdot 1 + E[K] \cdot \theta \cdot H = \lambda \cdot p_1 \cdot S(\theta).$$

Ουσιαστικά η λογική είναι όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος του Little όπου στη μία περίπτωση θεωρούμε πως οι πελάτες πληρώνουν ανά χρονική μονάδα παραμονής τους στο σύστημα και στην άλλη πως τα πληρώνουν όλα προκαταβολικά. Δηλαδή στη μία περίπτωση έχουμε πως το  $E[K] \cdot 1$  αποτελεί το κόστος αναμονής (θυμίζουμε ότι  $C = 1$ ) ενώ το  $H \cdot E[K] \cdot \theta$  αποτελεί το κόστος επαναπροσπαθειών, και στην άλλη περίπτωση πως οι πελάτες έρχονται με ρυθμό  $\lambda$ , πληρώνουν  $S(\theta)$  και αυτό συμβαίνει μόνο όταν βρουν το σύστημα κατειλημμένο, άρα με πιθανότητα  $p_1$ . Στη συνέχεια, θα δείξουμε πως το  $p_1$  είναι ανεξάρτητο του  $\theta$  και άρα αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε ως προς  $\theta$  το  $S(\theta)$  για να βρούμε τον κοινωνικά βέλτιστο ρυθμό.

Άρα λύνοντας ως προς  $S(\theta)$  έχουμε:

$$S(\theta) = \frac{E[W_K] + HE[W_K]\theta}{p_1},$$

Οπότε αρκεί να υπολογίσουμε το  $E[W_K]$  και το  $p_1$  προκειμένου να είμαστε σε θέση να βρούμε το βέλτιστο  $\theta$ . Εδώ θα παρουσιάσουμε 3 βασικά αποτελέσματα του Elcan[9].

**Θεώρημα 3.2.1.** (Theorem 1 and Corollary 1.2) Αν  $K, L$  όπως τα ορίσαμε παραπάνω έχουμε ότι:

$$E[K] = \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \quad (3.20)$$

$$E[L] = \frac{\lambda}{1-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right). \quad (3.21)$$

Απόδειξη. Σχετικά με το  $E[K]$  έχουμε:

$$E[K] = \sum_{j=0}^{\infty} j(p(0, j) + p(1, j)) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( j \frac{1}{\lambda + j\theta} \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=1}^j \left(\frac{\lambda}{\theta} + i\right) \right) p(1, 0) + \sum_{j=0}^{\infty} \left( j \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=1}^j \left(\frac{\lambda}{\theta} + i\right) \right) p(1, 0).$$

Το δεξί άθροισμα μπορεί να γραφτεί:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda^j}{(j-1)!} \prod_{i=1}^j \left( \frac{\lambda}{\theta} + i \right) \right) &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=1}^{j+1} \left( \frac{\lambda}{\theta} + i \right) \right) \\ &= \lambda \left( \frac{\lambda}{\theta} + 1 \right) \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=2}^{j+1} \left( \frac{\lambda}{\theta} + i \right) \right) \\ &= \lambda \left( \frac{\lambda}{\theta} + 1 \right) \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} \left( \frac{\lambda}{\theta} + i + 2 \right) \right). \end{aligned}$$

Άρα, το παραπάνω άθροισμα μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} (\alpha)_j,$$

όπου  $\alpha = \frac{\lambda}{\theta} + 2$  Παρατηρούμε πως έχει τη μορφή υπεργεωμετρικής συνάρτησης  $F(a, b; b; \lambda)$ ,  $b \neq 0$  όπου γνωρίζουμε ότι είναι μια διωνυμική σειρά:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\alpha}{j} \lambda^j = (1 - \lambda)^{-\alpha}.$$

Άρα, ο δεξιός όρος δίνει:

$$\lambda \left( \frac{\lambda}{\theta} + 1 \right) \frac{1}{(1 - \lambda)^{\frac{\lambda}{\theta} + 2}} p(1, 0).$$

Εντελώς αντίστοιχα ο αριστερός όρος μπορεί να γραφτεί:

$$\frac{\lambda}{\theta} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} \left( \frac{\lambda}{\theta} + i + 1 \right) \right) p(1, 0) = \frac{\lambda}{\theta} \frac{1}{(1 - \lambda)^{\frac{\lambda}{\theta} + 1}} p(1, 0).$$

Άρα, μένει τώρα να βρούμε το  $p(1, 0)$ . Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} p(1, 0) &= \frac{p(1, 0)}{\sum_{j=0}^{\infty} (p(0, j) + p(1, j))} \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda + j\theta} \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=1}^j \left( \frac{\lambda}{\theta} + i \right) \right) + \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=1}^j \left( \frac{\lambda}{\theta} + i \right) \right)} \\ &= \frac{1}{M + N}, \end{aligned}$$



όπου  $M = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda + j\theta} \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=1}^j \left( \frac{\lambda}{\theta} + i \right) \right)$  και  $N = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=1}^j \left( \frac{\lambda}{\theta} + i \right) \right)$ .

Με βάση την υπεργεωμετρική μπορούμε να δούμε ότι  $N = \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}}$ .

Για το  $M$  έχουμε:

$$M = \frac{1}{\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\theta} + j \right) \left( \frac{1}{\lambda + j\theta} \right) \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=1}^{j-1} \left( \frac{\lambda}{\theta} + i \right) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=1}^{j-1} \left( \frac{\lambda}{\theta} + i \right).$$

Χρησιμοποιώντας ότι  $\lambda^j = \int_0^\lambda \frac{x^{j-1}}{j} dx$ , τον τύπο της υπεργεωμετρικής συνάρτησης και λύνοντας το ολοκλήρωμα έχουμε ότι:

$$M = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\theta} \int_0^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} \left( \frac{\lambda}{\theta} + 1 + i \right) dx = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\theta} \int_0^\lambda \frac{1}{(1-x)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}} dx = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}}}.$$

Άρα, αφού βρήκαμε τα  $N$  και  $M$  είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το  $p(1, 0)$  και άρα και το  $E[K]$  καταλήγοντας έτσι στο ζητούμενο, δηλαδή:

$$E[K] = p(1, 0) \left( \frac{\lambda}{\theta} \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}} + \lambda \left( \frac{\lambda}{\theta} + 1 \right) \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+2}} \right) = \lambda(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1} \frac{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1} + \lambda \left( \frac{\lambda}{\theta} + 1 \right)}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+2}} = \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{\theta} \right).$$

Αφού βρήκαμε το  $E[K]$ , το  $E[L]$  υπολογίζεται εύκολα με πράξεις μέσω της σχέσης:

$$E[L] = E[K] + \sum_{j=0}^{\infty} p(1, j) = \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{\theta} \right) + \lambda = \frac{\lambda}{1-\lambda} \left( 1 + \frac{\lambda}{\theta} \right).$$

Αυτό γιατί ο μέσος αριθμός ατόμων στο σύστημα είναι ο μέσος αριθμός ατόμων στην τροχιά συν 1 πελάτη επί το άθροισμα για  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  των πιθανοτήτων να έχουμε  $k$  πελάτες στην τροχιά όταν είναι απασχολημένος ο υπηρέτης. Επομένως, το  $\sum_{j=0}^{\infty} p(1, j)$  μπορούμε να το δούμε και σαν την πιθανότητα να είναι απασχολημένος ο υπηρέτης, άρα με βάση αυτά που βρήκαμε και στον υπολογισμό του  $E[K]$  έχουμε ότι:

$$p_1 = \sum_{j=0}^{\infty} p(1, j) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} p(1, j)}{\sum_{j=0}^{\infty} p(0, j) + \sum_{j=0}^{\infty} p(1, j)} = \frac{N}{N + M} = \frac{\frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}}}{\frac{1}{\lambda(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}}} + \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}}} = \lambda.$$

□

**Θεώρημα 3.2.2.** (Corollary 1.3) Αν  $E[W_L], E[W_K]$  όπως τα ορίσαμε παραπάνω έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[W_L] &= \frac{1}{1-\lambda} \left( 1 + \frac{\lambda}{\theta} \right) \\ E[W_K] &= \frac{\lambda}{1-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{\theta} \right). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Απόδειξη. Από νόμο του Little έχουμε ότι  $E[W_L] = \frac{E[L]}{\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)$ . Τώρα επειδή  $E[W_L] = E[W_K] + 1$  σε συνδυασμό με τον νόμο του Little έχουμε πως  $E[L] = \lambda E[W_L] = \lambda(E[W_K] + 1) = E[K] + \lambda$  άρα έχουμε ότι:

$$E[W_K] = \frac{E[K]}{\lambda} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \left(1 + \frac{1}{\theta}\right).$$

□

Άρα, με βάση τα παραπάνω έχουμε καταλήξει ότι:

$$S(\theta) = \frac{1}{1-\lambda} \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) (1 + H\theta) \quad (3.23)$$

και άρα με κριτήριο πρώτης παραγώγου και απλές πράξεις καταλήγουμε στο πρώτο βασικό αποτέλεσμα της παραγράφου παρατηρώντας μάλιστα ότι ο κοινωνικά βέλτιστος ρυθμός βγαίνει ανεξάρτητος του  $\lambda$  (στη γενική περίπτωση που θα δούμε και παρακάτω εξαρτάται και από το  $\mu$ ).

**Θεώρημα 3.2.3.** (Corollary 1.4) Ο ρυθμός  $\theta_{soc}$  που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος στο κοινωνικό μοντέλο δίνεται από τον τύπο:

$$\theta_{soc} = \sqrt{\frac{1}{H}}. \quad (3.24)$$

Με αυτό το πρόβλημα ασχολήθηκε και ο Kulkarni [18] στην πιο σύνθετη περίπτωση όπου έχουμε πελάτες τύπου 1 και πελάτες τύπου 2 που φθάνουν και εξυπηρετούνται με διαφορετικούς ρυθμούς. Μάλιστα, παρουσίασε την περίπτωση  $M/G/1$  ουράς καθώς οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν μια κατανομή με μέση τιμή  $\tau$  και διασπορά  $\sigma^2$ . Εμείς εδώ θα βρούμε τον βέλτιστο, κοινωνικά, ρυθμό επαναπροσπαθειών στην περίπτωση  $M/M/1$  ουράς με έναν τύπο πελάτη και με  $C = 1, q = 1$  και  $r = 1$ .

Θυμίζουμε ότι από τη σχέση (3.6) έχουμε υπολογίσει τον αναμενόμενο χρόνο  $E[T]$  που περιμένει ένας πελάτης μέχρι να ξεκινήσει η εξυπηρέτησή του, εάν αποφασίσει να εισέλθει, δεδομένου ότι ο υπηρέτης είναι απασχολημένος. Στην περίπτωση που μελετάμε έχουμε  $q = 1$  καθώς εδώ η μεταβλητή απόφασης μας είναι ο ρυθμός επαναπροσπαθειών. Άρα, έχουμε ότι:

$$E[T] = \frac{1}{\theta} + \frac{\lambda + \theta}{\theta(\mu - \lambda)}.$$

Τώρα γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να είναι το σύστημα άδειο είναι  $1 - \rho$ , όπου  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  και άρα αν  $E[S]$  είναι ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής ενός πελάτη μέχρι να ξεκινήσει η εξυπηρέτησή του, έχουμε πως  $E[S] = E[T]\rho + 0(1 - \rho) = E[T]\rho$ .

Άρα, από νόμο του Little στον χώρο αναμονής έχουμε:

$$E[Q_W] = \lambda E[S] = \lambda \rho \left( \frac{1}{\theta} + \frac{\lambda + \theta}{\theta(\mu - \lambda)} \right) = \frac{\lambda \rho}{\theta} + \lambda \rho \frac{\rho + \frac{\theta}{\mu}}{\theta(1 - \rho)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} + \frac{\lambda \rho}{\theta(1 - \rho)},$$

όπου με  $E[Q_W]$  συμβολίζουμε τον μέσο αριθμό πελατών στον χώρο αναμονής. Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε το μέσο κοινωνικό όφελος ανά μονάδα χρόνου μέσω της σχέσης  $S(\theta) = E[Q_W] + H\theta E[Q_W]$ . Με το κριτήριο της πρώτης παραγωγού μπορούμε να βρούμε το βέλτιστο  $\theta_{soc}$ . Ειδικότερα, έχουμε :

$$S(\theta_{soc})' = 0 \iff \frac{H\rho^2}{1 - \rho} - \frac{\lambda\rho}{(1 - \rho)\theta_{soc}^2} = 0 \iff H\rho^2\theta_{soc}^2 = \lambda\rho \iff \theta_{soc} = \sqrt{\frac{\mu}{H}}.$$

Άρα, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

### 3.2.2 Ατομικά βέλτιστος ρυθμός

Στην παράγραφο αυτή θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στον ατομικά βέλτιστο ρυθμό επαναπροσπαθειών. Τα αποτελέσματα στα οποία θα καταλήξουμε αφορούν ουσιαστικά τις περιπτώσεις όπου  $r = 1$  (όπως είχαμε και στα παραπάνω μοντέλα),  $\mu = 1$ ,  $C = 1$  και  $q = 1$  δηλαδή ο πελάτης πάντα εισέρχεται στο σύστημα. Οπότε θα συζητήσουμε για μια ουρά στην οποία ο επιλεγμένος πελάτης κοιτάζει το προσωπικό του συμφέρον και επιλέγει τον ρυθμό επαναπροσπαθειών  $\eta_e(\theta)$  που ελαχιστοποιεί το κόστος του δεδομένης της γνώσης των ρυθμών επαναπροσπαθειών των άλλων πελατών στο σύστημα  $\theta$ .

Αρχικά, θα θεωρήσουμε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{(C(t), I(t), X(t)), t = 1, 2, \dots\}$ , όπου  $I(t), X(t)$  όπως στα παραπάνω μοντέλα και  $C(t)$  είναι 0 αν ο επιλεγμένος πελάτης είναι στην τροχιά ή 1 αν εξυπηρετείται. Άρα, έχουμε τον εξής χώρο καταστάσεων  $(j, i, k)$  όπου  $j \in \{0, 1\}$ ,  $i \in \{0, 1\}$  και  $k \in \{0, 1, \dots\}$ . Οπότε ορίζουμε και  $\phi(j, i, k)$  τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι να αρχίσει η εξυπηρέτηση του επιλεγμένου πελάτη δεδομένου ότι έχουμε  $k$  πελάτες συνολικά (μαζί με αυτόν) και ο υπηρέτης είναι απασχολημένος όταν ο πελάτης εισέρχεται στο σύστημα. Επιπλέον, έχουμε πως το αναμενόμενο κόστος ενός επιλεγμένου πελάτη είναι ίσο με :

$$S(\eta) = E_\eta[T](1 + H\eta),$$

όπου με  $E_\eta[T]$  συμβολίζουμε τον αναμενόμενο χρόνο που περιμένει ο επιλεγμένος πελάτης. Οπότε αρκεί να υπολογίσουμε το  $E_\eta[T]$  προκειμένου να είμαστε σε θέση να βρούμε το βέλτιστο  $\eta$ .

Σχετικά με τα  $\phi(j, i, k)$  μπορούμε μέσω ανάλυσης πρώτου βήματος να καταλήξουμε σε μια εξίσωση διαφορών για τα  $\phi(0, 0, k)$  και  $\phi(0, 1, k)$  η λύση της οποίας με αριθμητικές μεθόδους φαίνεται να είναι γραμμική ως προς  $k$ . Δηλαδή έχουμε  $\phi(0, 0, k) = mk + b$  και  $\phi(0, 1, k) = m'k + b'$ . Για την εύρεση των  $m, m', b, b'$  ο Elcan εργάστηκε ως εξής:

Αρχικά με ανάλυση πρώτου βήματος έχουμε ότι:

$$\phi(0, 0, k) = \frac{1}{\lambda + (k-1)\theta + \eta} + \frac{\lambda}{\lambda + (k-1)\theta + \eta} \phi(1, k) + \frac{(k-1)\theta}{\lambda + (k-1)\theta + \eta} \phi(1, k-1) \quad (3.25)$$

$$\phi(0, 1, k) = \frac{1}{\lambda + 1} + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \phi(1, k + 1) + \frac{1}{\lambda + 1} \phi(0, k). \quad (3.26)$$

Επιπλέον, έχουμε ότι:

$$\phi(0, 1, k) = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \phi(0, 0, k + j) p_j,$$

όπου 1 είναι ο αναμενόμενος χρόνος εξυπηρέτησης και  $p_j$  η πιθανότητα  $j$  πελάτες να φτάσουν όσο ο υπηρέτης είναι απασχολημένος. Αφού όμως  $\phi(0, 0, k) = mk + b$  έχουμε ότι:

$$\phi(0, 1, k) = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} (mk + b) p_j + m \sum_{j=0}^{\infty} j p_j = mk + m\lambda + b + 1 = mk + b'.$$

Οπότε με μια αντικατάσταση στις εξισώσεις διαφορών (3.25), (3.26) καταλήγουμε ότι:

$$m = \frac{\theta}{\theta(1 - \lambda) + \eta}$$

$$b = \frac{1}{\eta} \frac{\theta + \eta + \lambda\eta - \theta\eta}{\theta(1 - \lambda) + \eta}.$$

Επομένως, τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το  $E_\eta[T]$  [9].

**Θεώρημα 3.2.4.** (Theorem 3) Ο αναμενόμενος χρόνος που περιμένει ο επιλεγμένος πελάτης που βρίσκει το σύστημα γεμάτο είναι:

$$E_\eta[T] = \frac{1}{\eta(1 - \lambda)} + \frac{\theta}{(\theta(1 - \lambda) + \eta)(1 - \lambda)} + \frac{\eta}{\theta(1 - \lambda) + \eta}. \quad (3.27)$$

Απόδειξη. Αφού  $\phi(0, 1, k) = mk + m\lambda + b + 1$ , έχουμε ότι:

$$E_\eta[T] = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} p(1, k - 1) \phi(0, 1, k)}{\sum_{k=1}^{\infty} p(1, k - 1)} = m\lambda + b + 1 + m \frac{\sum_{k=1}^{\infty} kp(1, k - 1)}{\lambda}.$$

Τώρα θα υπολογίσουμε αναλυτικά το άθροισμα:  $\frac{\sum_{k=1}^{\infty} kp(1, k - 1)}{\lambda}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} kp(1, k - 1)}{\lambda} &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \prod_{i=1}^{k-1} (\frac{\lambda}{\theta} + i)}{\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=1}^j (\frac{\lambda}{\theta} + i) (1 + \frac{1}{\lambda + j\theta})} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=1}^k (\frac{\lambda}{\theta} + i) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=1}^k (\frac{\lambda}{\theta} + i)}{\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=1}^j (\frac{\lambda}{\theta} + i) + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \frac{1}{\lambda + j\theta} \prod_{i=1}^j (\frac{\lambda}{\theta} + i)}. \end{aligned}$$

Θέτοντας τώρα :

$$a_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=1}^k \left(\frac{\lambda}{\theta} + i\right), a_2 = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=1}^k \left(\frac{\lambda}{\theta} + i\right), a_3 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \frac{1}{\lambda + j\theta} \prod_{i=1}^j \left(\frac{\lambda}{\theta} + i\right),$$

έχουμε ότι:

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} kp(1, k-1)}{\lambda} = \frac{a_2 + a_1}{\lambda(a_1 + a_3)}.$$

Για το  $a_1$  εκμεταλευόμενοι την υπεργεωμετρική συνάρτηση που αναλύσαμε παραπάνω έχουμε:

$$a_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{\theta} + i + 1\right) = \frac{1}{(1-\lambda)^{\left(\frac{\lambda}{\theta}+1\right)}}.$$

Για το  $a_2$  έχουμε:

$$a_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=1}^k \left(\frac{\lambda}{\theta} + i\right) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=1}^{k+1} \left(\frac{\lambda}{\theta} + i\right) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=0}^k \left(\frac{\lambda}{\theta} + i + 1\right) = \lambda I,$$

με  $I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=0}^k \left(\frac{\lambda}{\theta} + i + 1\right).$

Για το  $\lambda I$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda I &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{\theta} + i + 1\right) \left(\frac{\lambda}{\theta} + k + 1\right) \\ &= \frac{\lambda^2}{\theta} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{\theta} + i + 1\right) \right) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{\theta} + i + 1\right) + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{\theta} + i + 1\right). \end{aligned}$$

Άρα, με βάση την υπεργεωμετρική συνάρτηση έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda I &= \frac{\lambda^2}{\theta} \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}} + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{\theta} + i + 1\right) + \lambda \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}} \\ &= \frac{\lambda^2}{\theta} \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}} + \lambda^2 I + \lambda \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$I = \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+2}} + \frac{\lambda}{\theta(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+2}}$$

και επομένως

$$a_2 = \lambda I = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+2}} + \frac{\lambda^2}{\theta(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+2}}.$$

Για το  $a_3$  έχουμε:

$$a_3 = \frac{1}{\theta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \frac{1}{\lambda + j\theta} \prod_{i=1}^{j-1} \left(\frac{\lambda}{\theta} + i\right) (\lambda + j\theta) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} \left(\frac{\lambda}{\theta} + i\right) = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}}}.$$

Άρα, συνολικά έχουμε πως:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} kp(1, k-1)}{\lambda} &= \frac{\frac{\lambda}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+2}} + \frac{\lambda^2}{\theta(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+2}} + \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}}}{\lambda \left( \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}} + \frac{1}{\lambda(1-\lambda)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}} \right)} \\ &= \frac{1 - \lambda + \lambda + \frac{\lambda^2}{\theta}}{\lambda \left( 1 - \lambda + \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} \right)} \\ &= \frac{\theta + \lambda^2}{\theta(1-\lambda)} = \frac{\lambda^2 + \lambda\theta}{\theta(1-\lambda)} + 1 \end{aligned}$$

και επομένως το ζητούμενο μας είναι:

$$E_{\eta}[T] = m\lambda + b + 1 + m \left( \frac{\lambda^2 + \lambda\theta}{\theta(1-\lambda)} + 1 \right).$$

Οπότε αντικαθιστώντας τα  $m, b$  που βρήκαμε παραπάνω έχουμε το αποτέλεσμα.  $\square$

Στη συνέχεια εφόσον έχουμε πια υπολογίσει το  $S(\eta)$ :

$$S(\eta) = \left( \frac{1}{\eta(1-\lambda)} + \frac{\theta}{(\theta(1-\lambda) + \eta)(1-\lambda)} + \frac{\eta}{\theta(1-\lambda) + \eta} \right) (1 + \alpha H), \quad (3.28)$$

με το κριτήριο πρώτης παραγώγου φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι το  $\eta_e$  είναι η θετική ρίζα του πολυωνύμου:

$$\eta^4 + 2\theta(1-\lambda)\eta^3 + \frac{(\theta\lambda(\lambda-2) - 1 + \theta^2 H(1-\lambda))}{H(1-\lambda)} \eta^2 - \frac{2\theta}{H} \eta - \frac{\theta^2(1-\lambda)}{H}. \quad (3.29)$$

Εδώ όμως για να βρούμε τον ατομικά βέλτιστο ρυθμό μπορούμε να σκεφτούμε το εξής: επειδή το  $\eta_e$  είναι συνάρτηση του  $\theta$  αν υποθέσουμε ότι οι άλλοι πελάτες αλλάξουν τον ρυθμό επαναπροσπάθειας τους από  $\theta$  σε  $\eta_e$  τότε αλλάζει και η τιμή της παραμέτρου  $\eta_e$ . Αυτή η διαδικασία συνεχίζει μέχρι να σταθεροποιηθεί σε μία λύση σταθερού σημείου  $\hat{\theta}$  (fixed point solution). Μάλιστα, στην περίπτωση μας έχουμε σύγκλιση αφού μπορούμε να δούμε πως ικανοποιείται το εξής λήμμα:

**Λήμμα 3.2.5.** (Lemma 2) Ας υποθέσουμε ότι το  $a$  είναι μια λύση στο  $x = f(x)$  και ας υποθέσουμε ότι η  $f(x)$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε κάποια γειτονιά γύρω από το  $a$  με  $|f'(a)| < 1$ . Τότε, υπάρχει  $\epsilon > 0$  τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε επιλογή του  $x_0$  στο  $[a - \epsilon, a + \epsilon]$  με  $x_{n+1} = f(x_n)$  για  $n \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  και η λύση  $a$  του  $x = f(x)$  είναι μοναδική.

Τώρα αντικαθιστώντας με  $\hat{\theta}$  όπου  $\eta, \theta$  στην (3.29) έχουμε:

$$\hat{\theta}^4 + 2\hat{\theta}^4(1 - \lambda) + \frac{(\hat{\theta}\lambda(\lambda - 2) - 1 + \hat{\theta}^2 H(1 - \lambda))}{H(1 - \lambda)} \hat{\theta}^2 - \frac{2\hat{\theta}^2}{H} - \frac{\hat{\theta}^2(1 - \lambda)}{H} = 0.$$

Άρα, λύνοντας ως προς  $\hat{\theta}$  καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα: [9] (μάλιστα ικανοποιούνται οι συνθήκες του Λήμματος 3 και άρα έχουμε μοναδική λύση σταθερού σημείου).

**Θεώρημα 3.2.6.** (Theorem 4) Ο ρυθμός  $\eta_e(\theta)$  που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος του επιλεγμένου πελάτη έχει μοναδική λύση σταθερού σημείου (stable fixed point solution) την εξής:

$$\eta_e(\theta) = \hat{\theta} = \frac{\lambda + (\lambda^2 + 8H(1 - \lambda)(2 - \lambda))^{\frac{1}{2}}}{4H(1 - \lambda)}. \quad (3.30)$$

Τέλος, αφού βρήκαμε τους βέλτιστους ρυθμούς επαναπροσπάθειας κάτω από τα δύο μοντέλα (ισορροπίας και κοινωνικό) μπορούμε να τα συγκρίνουμε ως προς το συνολικό κόστος ή και ως προς τον αναμενόμενο χρόνο αναμονής στην τροχιά. Ως προς το συνολικό κόστος έχουμε άμεσα ότι το  $\theta_{soc}$  το ελαχιστοποιεί, μιας και από το Θεώρημα 3.2.3 αυτό επιλέχθηκε ως βέλτιστο ως προς αυτό το κριτήριο. Άρα, το κόστος ενός πελάτη στο κοινωνικό μοντέλο είναι μικρότερο του κόστους στο μοντέλο ισορροπίας. Παρ' όλα αυτά ως προς τον χρόνο αναμονής μπορούμε να δείξουμε ότι είναι μικρότερος κάτω από το σύστημα ισορροπίας για τον επιλεγμένο πελάτη. Πιο συγκεκριμένα, θέτοντας  $E_{soc}[T]$  και  $E_e[T]$  τους ζητούμενους χρόνους, στο κοινωνικό μοντέλο από τη σχέση (3.22) θα έχουμε:

$$E_{soc}[T] = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \left(1 + \frac{1}{\theta_{soc}}\right) = \frac{\lambda}{1 - \lambda} (1 + \sqrt{H}). \quad (3.31)$$

Έπειτα, στο μοντέλο ισορροπίας αντικαθιστώντας τα  $\eta, \theta$  με  $\hat{\theta} = \eta_e$  στην (3.27) έχουμε:

$$E_e[T] = \frac{1}{\hat{\theta}(1 - \lambda)} + \frac{\hat{\theta}}{(\hat{\theta}(1 - \lambda) + \hat{\theta})(1 - \lambda)} + \frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}(1 - \lambda) + \hat{\theta}} = \frac{1}{\hat{\theta}(1 - \lambda)} + \frac{1}{1 - \lambda} = \frac{1}{1 - \lambda} \left(1 + \frac{1}{\hat{\theta}}\right).$$

Οπότε αντικαθιστώντας και το  $\hat{\theta}$  από τη σχέση (3.30) έχουμε ότι:

$$E_e[T] = \frac{1}{1 - \lambda} \left(1 + \frac{4H(1 - \lambda)}{\lambda + (\lambda^2 + 8H(1 - \lambda)(2 - \lambda))^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (3.32)$$

και άρα με απλές πράξεις τα συγκρίνουμε και έχουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε ( $E_e[T] \leq E_{soc}[T]$ ).

### 3.3 Βέλτιστος ρυθμός επαναπροσπαθειών στην $M/G/1$ ουρά

Τώρα, θα κινηθούμε στο ίδιο πλαίσιο με πριν με ρυθμό επαναπροσπαθειών  $\theta$  που δε θα είναι γνωστός και θα έχουμε επιπλέον κόστος  $c$  ανά προσπάθεια του πελάτη και  $w$  κόστος ανά μονάδα παραμονής στο σύστημα. Τώρα όμως θα έχουμε γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης και όχι εκθετικούς. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε το κομμάτι της θεωρίας όπως παρουσιάστηκε από τους Hassin και Hanin [12] σχετικά με την εύρεση του βέλτιστου ατομικού ρυθμού επαναπροσπαθειών  $\theta_e$  ενός πελάτη και του κοινωνικά βέλτιστου ρυθμού  $\theta^*$  καθώς και στη σύγκριση τους και σε διάφορους τρόπους εξισορρόπησης του συστήματος.

Οπότε συνοπτικά σε αυτό το μοντέλο θα έχουμε τα εξής:

- ▶ Διαδικασία αφίξεων: Poisson( $\lambda$ )
- ▶ Χρόνοι εξυπηρέτησης:  $\sim F$  με μέση τιμή  $\tau$  και πεπερασμένη διακύμανση  $\sigma^2$
- ▶ Χρόνοι επαναπροσπάθειας: Exp( $\theta$ )
- ▶ Χρόνος επαναπροσπάθειας του επιλεγμένου πελάτη: Exp( $\gamma$ )
- ▶ Ένας υπηρέτης και μη ύπαρξη χώρου αναμονής
- ▶ Κόστος ανά χρονική μονάδα αναμονής:  $w$
- ▶ Κόστος ανά επαναπροσπάθεια:  $c$ .

#### 3.3.1 Κοινωνικά βέλτιστος ρυθμός

Όσον αφορά το κοινωνικά βέλτιστο ρυθμό, θέτοντας με  $\rho$  τον γινόμενο  $\lambda\tau$ , οι Hassin και Hanin [12] κατέληξαν άμεσα στο εξής αποτέλεσμα:

**Θεώρημα 3.3.1.** Στην  $M/G/1$  ουρά με τη δομή που αναφέρθηκε παραπάνω ο κοινωνικά βέλτιστος ρυθμός επαναπροσπαθειών δίνεται από τον τύπο:

$$\theta^* = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{2w\tau}{c}}.$$

Απόδειξη. Αρχικά ο Kulkarni [19] είχε υπολογίσει τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής στην τροχιά από τη σχέση:

$$E[W] = \frac{\rho}{1-\rho} \left( \frac{1}{\theta} + \frac{S^2}{2\tau} \right)$$

και άρα το αναμενόμενο κόστος θα είναι:

$$(w + c\theta)E[W] = \frac{\rho}{1-\rho} \left( \frac{cS^2}{2\tau}\theta + \frac{w}{\theta} \right) + \frac{\rho}{1-\rho} \left( \frac{wS^2}{2\tau} + c \right).$$



Επομένως, με μια απλή παραγωγή μπορούμε να βρούμε το βέλτιστο  $\theta$  που ελαχιστοποιεί το παραπάνω αναμενόμενο κόστος και έτσι καταλήγουμε στο ζητούμενο  $\theta^*$ .

□

### 3.3.2 Ατομικά βέλτιστος ρυθμός

Σχετικά τώρα με τον ατομικά βέλτιστο ρυθμό οι Hassin και Hanin [12] απέδειξαν το εξής αποτέλεσμα:

**Θεώρημα 3.3.2.** (Theorem 2.1) Στην  $M/G/1$  ουρά με τη δομή που αναφέρθηκε παραπάνω ο ατομικά βέλτιστος ρυθμός επαναπροσπαθειών δίνεται από τον τύπο:

$$\theta_e = \frac{w\rho + \sqrt{w^2\rho^2 + \frac{16w\tau c(1-\rho)^2}{S^2}}}{4c(1-\rho)}.$$

Απόδειξη. Βασισμένοι πάλι στον Kulkarni [18] έχουμε ότι ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής  $E[W_1]$  για ένα άτομο που επαναπροσπαθεί με ρυθμό  $\gamma$  ενώ οι υπόλοιποι με ρυθμό  $\theta$  θα δίνεται από τον τύπο:

$$E[W_1] = \frac{\rho}{(1-\rho)\gamma} + \frac{\lambda S^2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda S^2 \rho}{2(1-\rho)} \frac{\theta - \gamma}{(1-\rho)\theta + \gamma}$$

και άρα το αναμενόμενο κόστος  $E[C]$  θα δίνεται από τον τύπο:

$$E[C] = (w + c\gamma)E[W_1]. \quad (3.33)$$

Άρα, για να βρούμε το ζητούμενο ελάχιστο αρκεί να παραγωγίσουμε τη σχέση (3.33), να την υπολογίσουμε για  $\gamma = \theta$  και να βρούμε το  $\theta_e$  για το οποίο μηδενίζεται και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Ακόμη, εκμεταλευόμενοι τη σχέση  $2 - \rho > 2(1 - \rho)$ , έχουμε ότι:

$$\theta_e > \frac{\sqrt{\frac{32w\tau c(1-\rho)(2-\rho)}{S^2}}}{4c(1-\rho)} = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{2w\tau}{c}} = \theta^*.$$

Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι λογικό λόγω των εξωτερικών επιδράσεων που προκαλούν οι πελάτες που λειτουργούν ατομικά και δε νοιάζονται για το κοινωνικά βέλτιστο. Έτσι, έχουν την τάση να χρησιμοποιούν πιο πολύ το σύστημα έχοντας μεγαλύτερο ρυθμό επαναπροσπαθειών από το κοινωνικά ωφελιμότερο. Σε αυτό το πλαίσιο μελετήθηκαν δύο τρόποι από τους Hassin και Hanin [12] ώστε να αναγκάσουν τους πελάτες να

λειτουργήσουν κοινωνικά βέλτιστα. Πιο συγκεκριμένα, ο πρώτος τρόπος είναι να δωθεί μια αποζημίωση  $r$  στους πελάτες με  $r < w$  για τον χρόνο αναμονής τους και ο δεύτερος τρόπος να μπει επιπλέον  $t$  κόστος ανά αποτυχημένη επαναπροσπάθεια. Σχετικά με τον πρώτο τρόπο, βλέπουμε ότι το  $\theta_e$  φθίνει καθώς το  $w$  μειώνεται και μάλιστα όταν το  $r$  είναι πολύ κοντά στο  $w$  δηλαδή  $w - r \approx 0$  τότε το  $\theta_e$  φθίνει στο 0. Άρα, θα υπάρχει  $r$  τέτοιο ώστε  $\theta_e = \theta^*$ . Όμοια, σχετικά με τον δεύτερο τρόπο, πάλι αυξάνοντας το  $c$  σε  $c+t$  έχουμε μείωση του  $\theta_e$  και άρα επιλέγουμε το κατάλληλο  $t$  ώστε να έχουμε ισότητα στους δύο ρυθμούς.

### 3.4 Αριθμητικά παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε διάφορα αριθμητικά παραδείγματα που εξετάστηκαν από τους Wang και Zhang [24] στο μοντέλο με συνήθεις επαναπροσπάθειες τόσο στη σχεδόν μη παρατηρήσιμη περίπτωση όσο και στην παρατηρήσιμη.

Η λογική που θα ακολουθήσουμε θα είναι η εξής: για να δούμε τον τρόπο που επηρεάζει μια παράμετρος το σύστημα θα κρατάμε όλες τις άλλες σταθερές και θα βλέπουμε πώς θα μεταβάλλονται οι πιθανότητες εισόδου των πελατών ή τα βέλτιστα κατώφλια. Πιο συγκεκριμένα, στην Εικόνα 3.1 παρουσιάζουμε τον τρόπο που επιδρούν στο σύστημα οι παράμετροι:  $\lambda, \mu, \theta$  και  $R$  στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο.

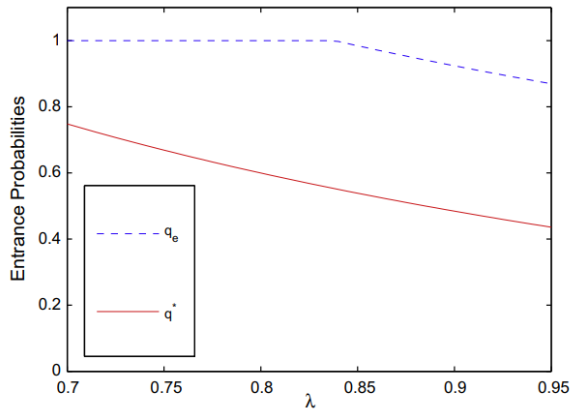
Αρχικά, σχετικά με το  $\lambda$  παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το  $\lambda$  τόσο μειώνεται η πιθανότητα εισόδου και στη στρατηγική ισορροπίας και στη στρατηγική κοινωνικής βελτιστοποίησης. Αυτό είναι λογικό αποτέλεσμα καθώς θα αποθαρρύνονται οι πελάτες να εισέλθουν στο σύστημα γιατί υψηλός ρυθμός άφιξης σημαίνει ότι όταν θα ελευθερώνεται ο υπηρέτης θα εξυπηρετεί κυρίως νέα άφιξη και όχι άτομο της τροχιάς.

Έπειτα, όσο αυξάνεται είτε ο ρυθμός εξυπηρέτησης, είτε ο ρυθμός επαναπροσπαθειών, είτε η αμοιβή εξυπηρέτησης, όπως αναμενόταν παρατηρούμε πως αυξάνεται και η θέληση των πελατών να μπουν στο απασχολημένο σύστημα. Τέλος, επιβεβαιώνεται παράλληλα η σχέση  $q_e \leq q^*$ . Αυτή η σχέση ερμηνεύεται ως εξής: αν οι πελάτες δρουν ατομικά θα μπαίνουν στο σύστημα ακόμα και αν είναι συνωστισμένο, αδιαφορώντας για τις επιδράσεις που ασκούν στους άλλους πελάτες και άρα μη λειτουργώντας με βάση το κοινωνικό όφελος. Γι' αυτό το λόγο είναι πάντα μεγαλύτερη η πιθανότητα εισόδου κάτω από την ισορροπία Nash.

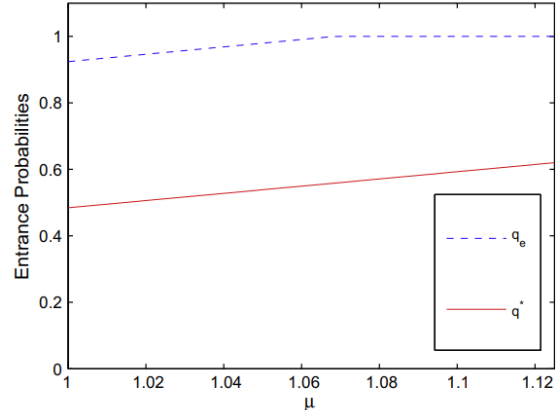
Στη συνέχεια, στην Εικόνα 3.2 παρουσιάζουμε τον τρόπο που επιδρούν στο κοινωνικό όφελος οι παράμετροι:  $\lambda, \mu, \theta$  και  $R$  στο παρατηρήσιμο μοντέλο. Τα αποτελέσματα ερμηνεύονται όπως και πριν με μόνη διαφορά ότι τα βέλτιστα κατώφλια είναι ακέραιοι αριθμοί και γι' αυτό το λόγο έχουν κλιμακωτή μορφή τα διαγράμματα.

Τέλος, έχουν εξεταστεί και κάποια διαγράμματα σχετικά με τον τρόπο επίδρασης των παραμέτρων στο κοινωνικό όφελος όπως παρουσιάζονται στην Εικόνα 3.3. Ειδικότερα, σχετικά με το  $\lambda$  παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται, αυξάνεται και το κοινωνικό όφελος κάτω από κοινωνικές στρατηγικές  $q^*, n^*$  όπως αναμενόταν. Παράλληλα, το  $S_{soc}^{obs}(x_e)$  μειώνεται,

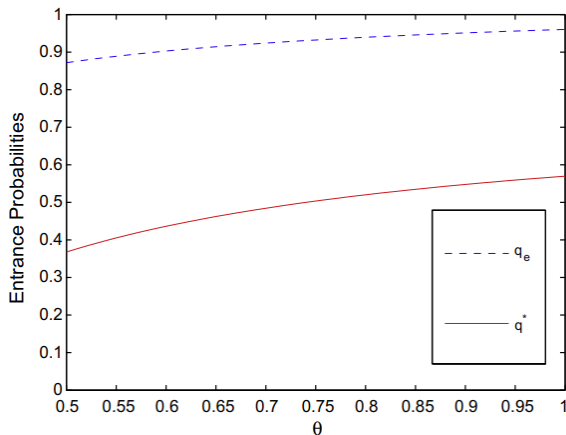
ενώ το  $S_{soc}^{un}(q_e)$  παρουσιάζει μια ιδιαιτερότητα λόγω δύο γεγονότων που το επηρεάζουν. Ειδικότερα, για μικρές τιμές του  $\lambda$  παρακινεί τους πελάτες να εισέλθουν λόγω μικρού ακόμα συνωπισμού με  $q_e = 1$ . Όμως αυτοί οι πελάτες δρώντας ατομικά επηρεάζουν το κοινωνικό όφελος όπως αναφέρθηκε και παραπάνω με αποτέλεσμα να μειώνεται. Όμως, από ένα σημείο και μετά, αυτοί οι πελάτες αρχίζουν και αποθαρρύνονται γιατί υψηλός ρυθμός άφιξης σημαίνει ότι όταν θα ελευθερώνεται ο υπηρέτης θα εξυπηρετεί κυρίως νέα άφιξη και όχι άτομο της τροχιάς και άρα θα έχουμε την περίπτωση που το  $q_e$  θα πηγαίνει στο 0 και έτσι έχουμε αύξηση στην κοινωνική ωφέλεια.



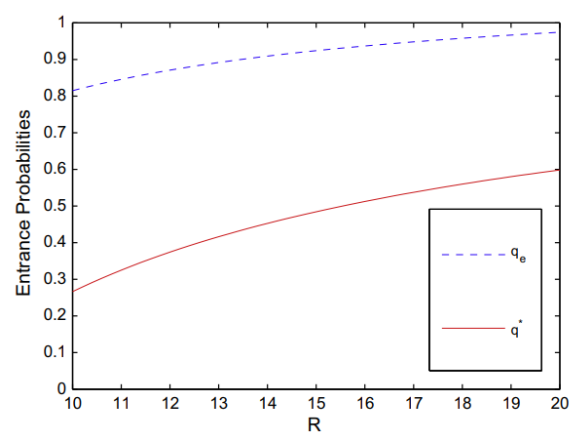
(α) Διάγραμμα των  $q_e, q^*$  με  $\lambda$  στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο με  $\mu = 1, \theta = 0.7, R = 15, C = 1$ .



(β) Διάγραμμα των  $q_e, q^*$  με  $\mu$  στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο με  $\lambda = 0.9, \theta = 0.7, R = 15, C = 1$ .



(γ) Διάγραμμα των  $q_e, q^*$  με  $\theta$  στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο με  $\lambda = 0.9, \mu = 1, R = 15, C = 1$ .

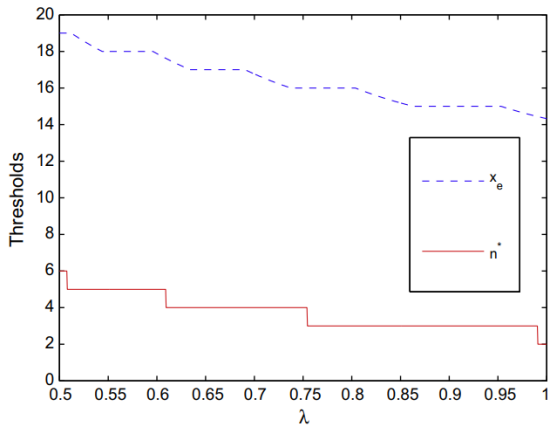


(δ) Διάγραμμα των  $q_e, q^*$  με  $R$  στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο με  $\lambda = 0.9, \mu = 1, \theta = 0.7, C = 1$ .

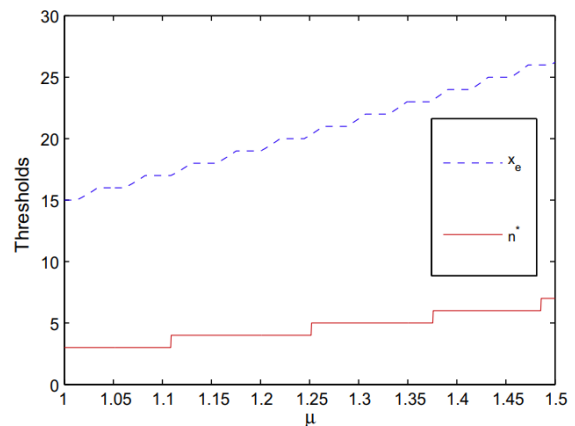
Εικόνα 3.1: Επίδραση παραμέτρων στη στρατηγική ισορροπίας και στη στρατηγική κοινωνικής μεγιστοποίησης στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο.

Επίσης, σχετικά με το  $\theta$  θα αναμέναμε όσο αυξάνεται να αυξάνεται και το συνολικό κοινωνικό όφελος. Παρόλα αυτά, αυτό δεν συμβαίνει μόνο για το  $S_{soc}^{un}(q_e)$  και αυτό έχει εξήγηση. Αυξάνοντας το  $\theta$  δίνεται πρόσθετο κίνητρο στους πελάτες που σκέφτονται ατομικά να μπουν στο σύστημα. Όπως γνωρίζουμε όμως όσοι δρουν ατομικά προκαλούν εξω-

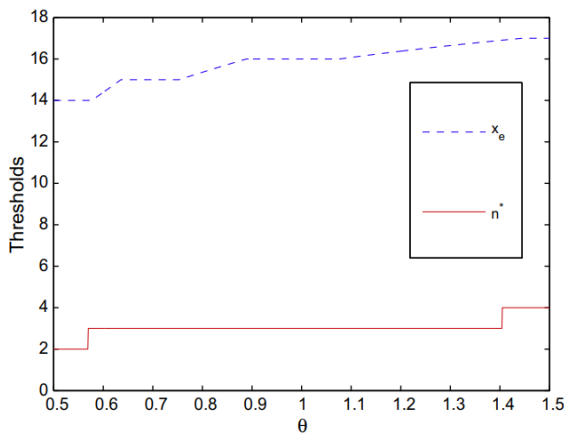
τερικές επιδράσεις στο σύστημα, μειώνοντας έτσι το κοινωνικό όφελος. Επομένως, είναι λογικό όσο παραπάνω κίνητρο τους δίνουμε να μουν στο σύστημα τόσο να μειώνεται το κοινωνικό όφελος. Επιπλέον, όσον αφορά το  $\mu$  και το  $R$  βλέπουμε πως όσο αυξάνονται, αυξάνεται και το κοινωνικό όφελος σε όλες τις περιπτώσεις όπως αναμενόταν. Μάλιστα, στο διάγραμμα με το  $\mu$ , η ουρά όταν το  $\mu \rightarrow \infty$  θα λειτουργεί σαν μια  $M/M/\infty$  ουρά αναμονής, άρα όλοι οι πελάτες θα εισέρχονται και θα έχουν μηδενικό χρόνο αναμονής και άρα το διάγραμμα θα συγκλίνει στο  $R \cdot \lambda = 15 \cdot 9 = 13.5$ , όπως φαίνεται και στο διάγραμμα.



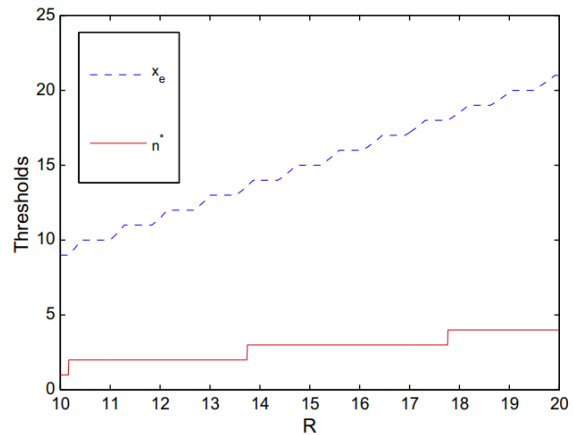
(α) Διάγραμμα των  $x_e, n^*$  με  $\lambda$  στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο με  $\mu = 1, \theta = 0.7, R = 15, C = 1$ .



(β) Διάγραμμα των  $x_e, n^*$  με  $\mu$  στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο με  $\lambda = 0.9, \theta = 0.7, R = 15, C = 1$ .



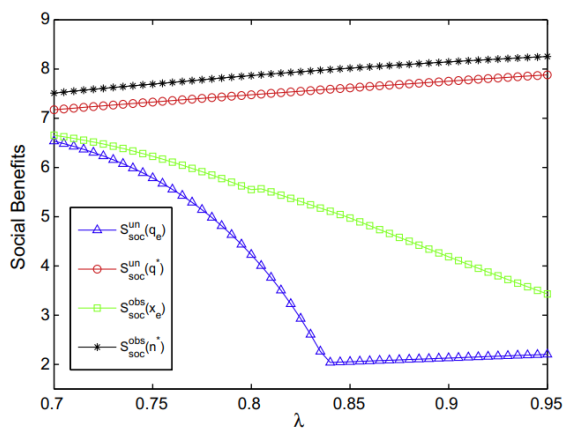
(γ) Διάγραμμα των  $x_e, n^*$  με  $\theta$  στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο με  $\lambda = 0.9, \mu = 1, R = 15, C = 1$ .



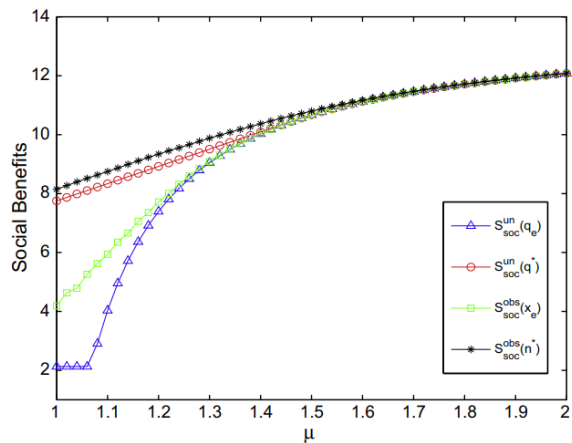
(δ) Διάγραμμα των  $x_e, n^*$  με  $R$  στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο με  $\lambda = 0.9, \mu = 1, \theta = 0.7, C = 1$ .

Εικόνα 3.2: Επίδραση παραμέτρων στη στρατηγική ισορροπίας και στη στρατηγική κοινωνικής μεγιστοποίησης στο παρατηρήσιμο μοντέλο.

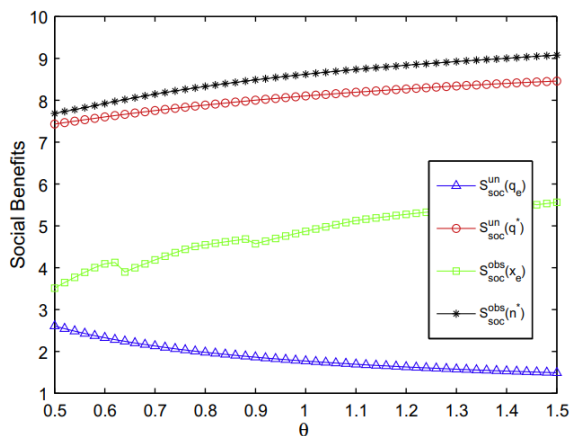
Κλείνοντας, αξίζει να αναφέρουμε ένα ωραίο πόρισμα από αυτά τα διαγράμματα σχετικά με τα δύο μοντέλα. Μπορούμε να δούμε πως ισχύει η σχέση  $S_{soc}^{un}(q_e) \leq S_{soc}^{obs}(x_e) \leq S_{soc}^{un}(q^*) \leq S_{soc}^{obs}(n^*)$ , δηλαδή είτε ο πελάτης σκέφτεται ατομικά, είτε κοινωνικά είναι καλύτερο, ως προς το κοινωνικό όφελος, το παρατηρήσιμο μοντέλο.



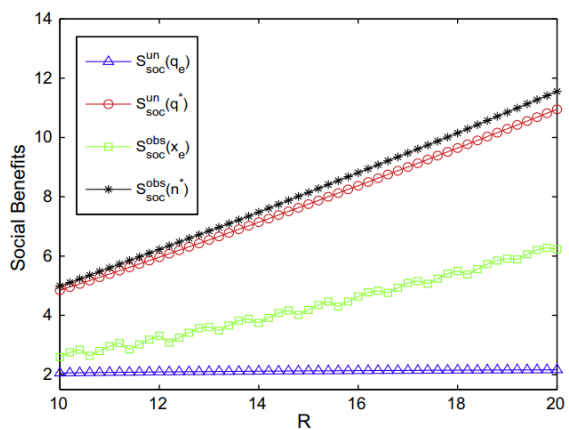
(α) Διάγραμμα του κοινωνικού όφελους με  $\lambda$  και στα δύο μοντέλα με  $\mu = 1, \theta = 0.7, R = 15, C = 1$ .



(β) Διάγραμμα του κοινωνικού όφελους με  $\mu$  και στα δύο μοντέλα με  $\lambda = 0.9, \theta = 0.7, R = 15, C = 1$ .



(γ) Διάγραμμα του κοινωνικού όφελους με  $\theta$  και στα δύο μοντέλα με  $\lambda = 0.9, \mu = 1, R = 15, C = 1$ .



(δ) Διάγραμμα του κοινωνικού όφελους με  $R$  και στα δύο μοντέλα με  $\lambda = 0.9, \mu = 1, \theta = 0.7, C = 1$ .

Εικόνα 3.3: Επίδραση παραμέτρων στο κοινωνικό όφελος.

## Κεφάλαιο 4

# Μοντέλα με σταθερές επαναπροσπάθειες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μοντέλα όπου οι επαναπροσπάθειες των πελατών να μπουν στο σύστημα γίνονται με σταθερό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, με τον όρο σταθερές επαναπροσπάθειες, εννοούμε την εξής κατάσταση: οι πελάτες που επισκέπτονται έναν χώρο εξυπηρέτησης όπου οι υπηρέτες είναι απασχολημένοι ή αντίστοιχα τηλεφωνούν σε ένα κατειλημμένο κέντρο, καλούνται να αποφασίσουν αν θα αποχωρήσουν ή αν θα συνεχίσουν να επαναλαμβάνουν την προσπάθεια τους μετά από κάποια χρονικά διαστήματα μέχρι να βρουν κάποιο ελεύθερο υπηρέτη. Η διαφορά με το προηγούμενο κεφάλαιο είναι πως τώρα οι ρυθμοί επαναπροσπάθειας είναι σταθεροί, δηλαδή δεν υπάρχει εξάρτηση από το πλήθος των ατόμων στην τροχιά. Μπόρουμε να φανταστούμε ότι ουσιαστικά οι πελάτες αποφασίζουν αν θα αποχωρήσουν ή αν θα αφήσουν τα στοιχεία τους ώστε όταν ελευθερωθεί ο υπηρέτης να θέλει έναν εκθετικό για παράδειγμα χρόνο για να τους καλέσει, ο οποίος θα είναι ανεξάρτητος από το πόσα άτομα είναι στην τροχιά. Στα μοντέλα αυτά πάλι δεν επιτρέπεται ο πελάτης να αποχωρήσει αν μπει στο σύστημα. Όποτε κάτω από συγκεκριμένη δομή του προβλήματος θα παρουσιάσουμε και εδώ βέλτιστες στρατηγικές τόσο σε ατομικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο. Αυτές οι στρατηγικές θα σχετίζονται με την πιθανότητα ένταξης των πελατών στο σύστημα. Παρακάτω θα μελετήσουμε το πρόβλημα σε δύο διαφορετικά μοντέλα και πιο συγκεκριμένα στις ουρές  $M/M/1$  και  $M/G/1$ . Τέλος, μέσω διαφόρων προσομοιώσεων θα παρουσιάσουμε κάποιες λογικές ερμηνείες των θεωρητικών αποτελεσμάτων.

### 4.1 Βέλτιστες στρατηγικές στην $M/M/1$ ουρά

Αρχικά, θα μελετήσουμε την  $M/M/1$  ουρά με την εξής Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου:  $\{(I(t), X(t)), t = 1, 2, \dots\}$ . Η  $I(t)$  θα δηλώνει και εδώ την κατάσταση του υπηρέτη (0: ελεύθερος, 1: απασχολημένος) και η  $X(t)$  θα δηλώνει τον αριθμό των πελατών στην

τροχιά. Άρα, έχουμε τον χώρο καταστάσεων  $(i, k)$  όπου  $i \in \{0, 1\}$  και  $k \in \{0, 1, \dots\}$ . Αν ένας πελάτης βρει ελεύθερο τον υπηρέτη τότε εισέρχεται στο σύστημα και εξυπηρετείται άμεσα ενώ αν τον βρει απασχολημένο καλείται να αποφασίσει αν θα αποχωρήσει ή αν θα ενταχθεί στην τροχιά, αφήνοντας τα στοιχεία στο σύστημα. Στη δεύτερη περίπτωση, όταν ο υπηρέτης μείνει ελεύθερος, με εκθετικό ρυθμό  $\alpha$  θα καλεί πελάτες από την τροχιά στην οποία υπάρχει πειθαρχία FCFS, ενώ ταυτόχρονα θα τρέχουν και εκθετικοί χρόνοι με ρυθμό  $\lambda$  για την άφιξη νέων πελατών. Θεωρούμε και εδώ ότι είναι ανεξάρτητοι οι χρόνοι επαναπροσπάθειας των πελατών καθώς και οι ενδιαμέσων χρόνοι άφιξης μεταξύ επαναλήψεων και εξυπηρέτησεων. Σχετικά με τη δομή κόστους παραμένει η ίδια, δηλαδή ο πελάτης θα παίρνει  $R$  χρηματικές μονάδες για την εξυπηρέτηση του ενώ θα χρεώνεται  $C$  χρηματικές μονάδες ανά χρονική μονάδα παραμονής στο σύστημα. Στόχος του πελάτη είναι να ελαχιστοποιήσει το συνολικό του κόστος. Εδώ έχουν μελετηθεί δυο μοντέλα από τους Eason και Kanra [7] όπου παρουσιάζουν μια διαφοροποίηση ως προς το επίπεδο πληροφόρησης των πελατών σχετικά με το σύστημα. Ειδικότερα, έχουμε τη σχεδόν μη παρατηρήσιμη  $M/M/1$  και την παρατηρήσιμη  $M/M/1$ . Θα παρουσιάσουμε και τα δύο μοντέλα στη συνέχεια.

Οπότε συνοπτικά έχουμε τα εξής:

- ▶ Διαδικασία αφίξεων: Poisson( $\lambda$ )
- ▶ Χρόνοι εξυπηρέτησης: Exp( $\mu$ )
- ▶ Χρόνοι επαναπροσπάθειας-επανάκτησης: Exp( $\alpha$ )
- ▶ Ένας υπηρέτης και μη ύπαρξη χώρου αναμονής
- ▶ Κέρδος ανά εξυπηρέτηση:  $R$
- ▶ Κόστος ανά χρονική μονάδα αναμονής:  $C$
- ▶ Πιθανότητα να μπει ένας πελάτης αν ο υπηρέτης είναι απασχολημένος:  $q$ .

Να σημειωθεί ότι από τη στιγμή που ο πελάτης θέλει να μεγιστοποιήσει το κέρδος του θα εισέρχεται στο σύστημα μόνο αν έχει κέρδος, δηλαδή μόνο αν

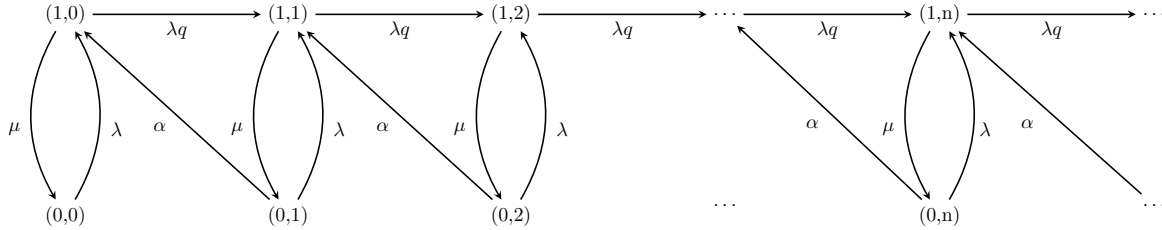
$$R > \frac{C}{\mu}. \quad (4.1)$$

Άρα, αν το σύστημα είναι άδειο εισέρχεται με πιθανότητα 1. Επομένως, η ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι πάλι όταν εισέρχεται και βλέπει το σύστημα γεμάτο.

#### 4.1.1 Σχεδόν μη παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά

Σε αυτό το μοντέλο λοιπόν ο πελάτης γνωρίζει την κατάσταση του υπηρέτη σε στιγμές άφιξης και επαναπροσπάθειας αλλά δεν έχει πληροφορία για τον αριθμό των ατόμων

στην τροχιά. Στόχος του είναι να βρει με ποια πιθανότητα να εισέρχεται αν δει το σύστημα γεμάτο ακολουθώντας μια μεικτή στρατηγική λαμβάνοντας υπόψη ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν την ίδια στρατηγική. Αντίθετα όταν είναι ελεύθερος ο υπηρέτης δεν υπάρχει κόστος αναμονής, άρα εισέρχεται με πιθανότητα 1 όταν ισχύει η σχέση (4.1), δίχως να επηρεάζεται από τις στρατηγικές των άλλων παιχτών. Επομένως, με βάση και το παραπάνω πλαίσιο έχουμε το εξής διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



Άρα, παρακάτω θα επικεντρωθούμε σε κάποια λήμματα και θεωρήματα πάνω στην εύρεση της στάσιμης κατανομής, της μικτής στρατηγικής ισορροπίας του Nash ( $q_e$ ), της μικτής στρατηγικής που μεγιστοποιεί το συνολικό κοινωνικό όφελος ( $q_{soc}$ ), της στρατηγικής για τη βελτιστοποίηση του κέρδους του μονοπωλίου ( $q_{prof}$ ) και πάνω στη σύγκριση των 3 αυτών πιθανοτήτων. Σχετικά με το τελευταίο, θα θεωρήσουμε ότι ο διαχειριστής θέτει μια τιμή εισόδου  $p$  σε κάθε πελάτη που εισέρχεται με σκοπό να μεγιστοποιήσει το δικό του κέρδος ανά μονάδα χρόνου. Θα το αναλύσουμε περαιτέρω παρακάτω.

Αρχικά, θα γράψουμε τις εξισώσεις ισορροπίας με στόχο να βρούμε τη συνθήκη ευστάθειας αλλά και τη στάσιμη κατανομή. Στο μοντέλο αυτό έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda p(0, 0) &= \mu p(1, 0) \\ (\lambda + \alpha)p(0, j) &= \mu p(1, j), j = 1, 2, \dots \\ (\lambda q)p(1, j) &= \alpha p(0, j + 1), j = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τώρα κατάλληλα και θέτοντας  $r = \frac{\lambda q}{\alpha} \frac{\lambda + \alpha}{\mu}$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} p(0, j) &= \left( \frac{\lambda q}{\alpha} \frac{\lambda + \alpha}{\mu} \right)^{j-1} p(0, 1) = r^{j-1} p(0, 1), j = 1, 2, \dots \\ p(1, j) &= \frac{\lambda + \alpha}{\mu} r^{j-1} p(0, 1) = \frac{\alpha}{\lambda q} r^j p(0, 1), j = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Από εξίσωση κανονικοποίησης έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (p(0, j) + p(1, j)) &= 1 \Rightarrow p(0, 0) + \sum_{j=1}^{\infty} r^{j-1} p(0, 1) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha}{\lambda q} r^j p(0, 1) = 1 \\ &\Rightarrow p(0, 1) \left( \frac{\mu \alpha}{\lambda^2 q} + \sum_{j=1}^{\infty} r^{j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha}{\lambda q} r^j \right) = 1 \\ &\Rightarrow p(0, 1) = \frac{1}{\frac{\mu \alpha}{\lambda^2 q} + \frac{1}{1-r} + \frac{\alpha}{\lambda q} \frac{1}{1-r}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\Rightarrow p(0, 1) &= \frac{(1-r)\lambda^2 q}{(1-r)\mu\alpha + \lambda^2 q + \alpha\lambda} \\
\Rightarrow p(0, 1) &= \frac{(1-r)\lambda^2 q}{\alpha\mu - \lambda^2 q - \lambda\alpha q + \lambda^2 q + \alpha\lambda} \\
\Rightarrow p(0, 1) &= \frac{(1-r)\lambda\mu r}{\mu - \lambda q + \lambda} \frac{1}{\lambda + \alpha} \\
\Rightarrow p(0, 1) &= \frac{\mu}{\mu + \lambda(1-q)} \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} (1-r)r.
\end{aligned}$$

Άρα, αν θέσουμε  $A(q) = p(0, 1)$  έχουμε:

$$\begin{aligned}
p(0, j) &= A(q)r^{j-1} = \frac{\mu}{\mu + \lambda(1-q)} \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} (1-r)r^j, \quad j = 1, 2, \dots \\
p(1, j) &= A(q) \frac{\lambda + \alpha}{\mu} r^{j-1} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda(1-q)} (1-r)r^j, \quad j = 0, 1, \dots \\
p(0, 0) &= \frac{\mu}{\lambda} p(1, 0) = \frac{\mu}{\mu + \lambda(1-q)} (1-r)
\end{aligned}$$

και άρα εκτός από τη στάσιμη κατανομή έχουμε και τη συνθήκη ευστάθειας:

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j < \infty \iff |r| = \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\mu\alpha} < 1. \quad (4.2)$$

Στο πλαίσιο της ατομικής βελτιστοποίησης τώρα το αναμενόμενο όφελος ενός πελάτη που αποφασίζει να μπει στο σύστημα ενώ βλέπει απασχολημένο τον υπηρέτη και ενώ όλοι οι άλλοι πελάτες εισέρχονται με πιθανότητα  $q$  θα είναι:

$$S_e(q) = R - CE[S|I = 1],$$

όπου με  $E[S|I = 1]$  συμβολίζουμε τον μέσο χρόνο αναμονής ενός πελάτη δοθέντος ότι βλέπει πως ο υπηρέτης είναι απασχολημένος και εισέρχεται στο σύστημα.

Θα ασχοληθούμε με την εύρεση του  $E[S|I = 1]$  αλλά και του  $E[S]$ . Πιο συγκεκριμένα, από νόμο του Little έχουμε ότι  $E[W] = \frac{1}{\lambda_{ret}} E[X]$ , όπου με  $E[W]$  συμβολίζουμε τον μέσο χρόνο παραμονής του πελάτη στην τροχιά, με  $E[X]$  τον μέσο αριθμό πελατών στην τροχιά και  $\lambda_{ret}$  τον ρυθμό άφιξης στην τροχιά. Τώρα από PASTA έχουμε:

$$\lambda_{ret} = \lambda q \sum_{j=0}^{\infty} p(1, j) = \frac{\lambda^2 q}{\mu + \lambda(1-q)}.$$

Επίσης, μετά απο πράξεις μπορούμε να δούμε ότι:

$$E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} j(p(0, j) + p(1, j)) = \frac{\lambda^2 q(\lambda + \alpha + \mu)}{(\mu + \lambda(1-q))(\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha))}.$$

Άρα, δεδομένου πως ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικός με παράμετρο  $\mu$  έχουμε:

$$E[S|I = 1] = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda_{ret}} E[X] = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha)}. \quad (4.3)$$

Τέλος, μέσω της ιδιότητας PASTA και δεσμεύοντας ως προς τη κατάσταση που βρίσκει ο πελάτης το σύστημα έχουμε:

$$E[S] = \sum_{j=0}^{\infty} p(0, j) \frac{1}{\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} p(1, j) \left( (1 - q)0 + qE[S|I = 1] \right).$$

Δηλαδή, ο μέσος χρόνος αν βρει το σύστημα ελεύθερο είναι  $\frac{1}{\mu}$ , ενώ αν βρει τον υπηρέτη απασχολημένο είναι 0 (δε μπαίνει στο σύστημα) με πιθανότητα  $1 - q$  και  $E[S|I = 1]$  (μπαίνει στο σύστημα) με πιθανότητα  $q$ . Αθροίζοντας όλες τις πιθανές καταστάσεις έχουμε το παραπάνω αποτέλεσμα.

Για τα παραπάνω αθροίσματα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} p(0, j) &= \frac{\mu}{\mu + \lambda(1 - q)} (1 - r) + \frac{\mu\lambda}{(\mu + \lambda(1 - q))(\lambda + \alpha)} r \\ &= \frac{(\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha))}{\alpha(\mu + \lambda(1 - q))} + \frac{\lambda^2 q}{\alpha(\mu + \lambda(1 - q))} \\ &= \frac{\mu - \lambda q}{\mu + \lambda(1 - q)} \\ \sum_{j=0}^{\infty} p(1, j) &= \frac{\lambda}{\mu + \lambda(1 - q)}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα αθροίσματα μετά από πράξεις μπορούμε να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα:

$$E[S] = \frac{\mu(\alpha + \lambda q)}{(\mu + \lambda(1 - q))(\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha))} \quad (4.4)$$

και άρα έχουμε τελικά πως το  $S_e(q)$  θα ισούται με:

$$S_e(q) = R - C \left( \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha)} \right). \quad (4.5)$$

Τώρα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε το πρώτο βασικό θεώρημα σε αυτό το μοντέλο [7].

**Θεώρημα 4.1.1.** (Theorem 3.2) Στο μοντέλο της σχεδόν μη παρατηρήσιμης  $M/M/1$  ουράς με σταθερές επαναπροσπάθειες, με τις σχέσεις (4.1), (4.2) να ισχύουν, υπάρχει μοναδική

μικτή στρατηγική ισορροπίας Nash για έναν πελάτη να μπαίνει στο σύστημα με πιθανότητα  $q_e$  ενώ βλέπει τον υπηρέτη απασχολημένο. Αυτή δίνεται από τον εξής τύπο:

$$q_e = \begin{cases} 0 & , \text{αν } \frac{R}{C} \in (\frac{1}{\mu}, t_{Le}] \\ \frac{\mu\alpha}{\lambda(\lambda+\alpha)} - \frac{\lambda+\alpha+\mu}{\lambda(\lambda+\alpha)} \left(\frac{R}{C} - \frac{1}{\mu}\right)^{-1} & , \text{αν } \frac{R}{C} \in (t_{Le}, t_{Ue}) , \\ 1 & , \text{αν } \frac{R}{C} \in [t_{Ue}, \infty) \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\text{όπου } t_{Le} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda+\alpha+\mu}{\mu\alpha} \text{ και } t_{Ue} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda+\alpha+\mu}{\mu\alpha-\lambda(\lambda+\alpha)}.$$

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η  $S(q)$  είναι φθίνουσα ως προς  $q$  και άρα έχει μέγιστο για  $q = 0$  το  $S_e(0) = R - Ct_{Le}$  και ελάχιστο για  $q = 1$  το  $S_e(1) = R - Ct_{Ue}$ .

Άρα, αν  $\frac{R}{C} \in (\frac{1}{\mu}, t_{Le}]$ , τότε  $S_e(0) < 0$  και επομένως  $S_e(q) < 0 \forall q \in [0, 1]$ . Έτσι, η βέλτιστη απάντηση εδώ είναι  $q_e = 0$  καθώς δε συμφέρει τον πελάτη να εισέλθει στο σύστημα από τη στιγμή που έχει αρνητικό κέρδος.

Αντίστοιχα, αν  $\frac{R}{C} \in [t_{Ue}, \infty)$ , τότε  $S_e(1) > 0$  και άρα  $S_e(q) > 0 \forall q \in [0, 1]$ . Επομένως, η βέλτιστη απάντηση εδώ είναι  $q_e = 1$  καθώς συμφέρει τον πελάτη να εισέλθει στο σύστημα από τη στιγμή που έχει θετικό κέρδος.

Τέλος, αν  $\frac{R}{C} \in (t_{Le}, t_{Ue})$ , τότε λόγω μονοτονίας υπάρχει μοναδική ρίζα  $q_0$  στο  $(0, 1)$  τέτοια ώστε  $S_e(q_0) = 0$ , την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε λύνοντας την  $S_e(q) = 0$  ως προς  $q$  και να βρούμε έτσι τον δεύτερο κλάδο.

□

Εδώ, αξίζει να σημειωθεί πως εφόσον η  $S_e(q)$  είναι γνησίως φθίνουσα,  $\forall q < q_e$  έχουμε πως  $S_e(q) > 0$  και άρα η βέλτιστη απάντηση είναι 1,  $\forall q > q_e$  έχουμε πως  $S_e(q) < 0$  και άρα η βέλτιστη απάντηση είναι 0, ενώ για  $q = q_e$  κάθε στρατηγική είναι βέλτιστη απάντηση. Άρα, και σε αυτό το μοντέλο επικρατεί μια συμπεριφορά ATC.

Στο κοινωνικό τώρα πλαίσιο το αναμενόμενο όφελος ανά μονάδα χρόνου θα είναι:

$$S_{soc}(q) = \lambda^*(q)R - C\lambda E[S(q)],$$

όπου  $\lambda^*(q)$  είναι ο μέσος ρυθμός αφίξεων των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα και  $E[S(q)]$  ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, τον οποίο έχουμε υπολογίσει παραπάνω. Θα πρέπει να προσέξουμε πως εδώ εννοούμε τον χρόνο παραμονής του πελάτη ανεξαρτήτως αν εισέλθει στο σύστημα ή όχι. Χρησιμοποιώντας τώρα τη στάσιμη κατανομή και την ιδιότητα PASTA έχουμε πως:

$$\lambda^*(q) = \lambda p_0 + \lambda q p_1 = \frac{\lambda\mu - \lambda^2 q + \lambda^2 q}{\mu + \lambda(1-q)} = \frac{\lambda\mu}{\mu + \lambda(1-q)}. \quad (4.7)$$

Επομένως, το κοινωνικό όφελος ανά μονάδα χρόνου δίνεται εν τέλει από τον τύπο:

$$S_{soc}(q) = \frac{\lambda\mu}{\mu + \lambda(1-q)} R - C \lambda \frac{\mu(\alpha + \lambda q)}{(\mu + \lambda(1-q))(\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha))} = \frac{(\lambda R + C)\mu}{\mu + \lambda(1-q)} - \frac{C\mu\alpha}{\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha)}. \quad (4.8)$$

Οπότε τώρα θα παρουσιάσουμε το δεύτερο βασικό θεώρημα σε αυτό το μοντέλο [7] σχετικά με το κοινωνικό όφελος.

**Θεώρημα 4.1.2.** (Theorem 3.3) Στο μοντέλο της σχεδόν μη παρατηρήσιμης  $M/M/1$  ουράς με σταθερές επαναπροσπάθειες, με τις σχέσεις (4.1), (4.2) να ισχύουν, υπάρχει μοναδική μικτή στρατηγική που λέει οι πελάτες να μπαίνουν στο σύστημα με πιθανότητα  $q_{soc}$  ενώ βλέπουν τον υπηρέτη απασχολημένο, υπό το πλαίσιο να μεγιστοποιηθεί το κοινωνικό όφελος. Αυτή δίνεται από τον εξής τύπο:

$$q_{soc} = \begin{cases} 0 & , \text{αν } \frac{R}{C} \in \left(\frac{1}{\mu}, t_{Lsoc}\right] \\ \frac{\mu + \lambda - A\mu\alpha}{\lambda(1 - A(\lambda + \alpha))} & , \text{αν } \frac{R}{C} \in (t_{Lsoc}, t_{Usoc}) , \\ 1 & , \text{αν } \frac{R}{C} \in [t_{Usoc}, \infty) \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\text{όπου } t_{Lsoc} = \frac{1}{\mu} + \frac{(\lambda + \alpha + \mu)(\lambda + \mu)}{\alpha\mu^2} , \quad t_{Usoc} = \frac{\mu\alpha(\lambda + \alpha + \mu) + (\lambda + \alpha)(\mu\alpha - \lambda(\lambda + \alpha))}{(\mu\alpha - \lambda(\lambda + \alpha))^2} \text{ και } A = \sqrt{\frac{\lambda R + C}{C\alpha(\lambda + \alpha)}}.$$

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας την  $S_{soc}(q)$ , θέτοντας ίσο με 0 και λύνοντας ως προς  $q$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda R + C)\mu\lambda}{(\mu + \lambda - \lambda q)^2} &= \frac{C\mu\alpha(\lambda^2 + \lambda\alpha)}{(\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha))^2} \iff \frac{\mu + \lambda(1-q)}{\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha)} = \sqrt{\frac{\lambda R + C}{C\alpha(\lambda + \alpha)}} \\ &\iff q = \frac{\mu\alpha\sqrt{\lambda R + C} - (\mu + \lambda)\sqrt{C\alpha(\lambda + \alpha)}}{\lambda\alpha\sqrt{\lambda R + C} + \lambda^2\sqrt{\lambda R + C} - \lambda\sqrt{C\alpha(\lambda + \alpha)}} \\ &\iff q_{soc} = \frac{\mu + \lambda - A\mu\alpha}{\lambda(1 - A(\lambda + \alpha))}. \end{aligned}$$

Άρα, αυτό το αποτέλεσμα μας δίνει τον δεύτερο κλάδο της συνάρτησης μόνο όταν  $q_{soc} \in (0, 1)$ , δηλαδή μόνο όταν  $\frac{R}{C} \in (t_{Lsoc}, t_{Usoc})$ . Πράγματι, λύνοντας για παράδειγμα την ανίσωση  $q_{soc} > 0$  παίρνουμε:

$$\mu + \lambda - A\mu\alpha < 0 \iff \frac{\lambda R + C}{C\alpha(\lambda + \alpha)} > \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{R}{C} > \frac{\alpha(\lambda + \alpha)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \\
&\Leftrightarrow \frac{R}{C} > \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2 + \alpha\mu + \alpha\lambda}{\alpha\mu^2} + \frac{1}{\mu} \\
&\Leftrightarrow \frac{R}{C} > t_{Lsoc}.
\end{aligned}$$

Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι:  $q_{soc} < 1 \Leftrightarrow \frac{R}{C} < t_{U_{soc}}$ .

Έτσι, αν  $\frac{R}{C} \leq t_{Lsoc}$  θα έχουμε ότι η  $S_{soc}(q)$  δεν είναι αύξουσα  $\forall q \in [0, 1]$  άρα θα έχει μέγιστο για  $q_{soc} = 0$  ενώ αν  $\frac{R}{C} \geq t_{U_{soc}}$  θα έχουμε ότι η  $S_{soc}(q)$  δεν είναι φθίνουσα  $\forall q \in [0, 1]$  άρα θα έχει μέγιστο για  $q_{soc} = 1$ . Έτσι έχουμε το θεώρημα.

□

Στο πλαίσιο της βελτιστοποίησης του μονοπωλίου τώρα με  $S_{prof}(q)$  θα συμβολίζουμε το αναμενόμενο κέρδος του διαχειριστή ανά μονάδα χρόνου όταν οι πελάτες χρησιμοποιούν στρατηγική  $q$  ώστε να απαντούν βέλτιστα στον διαχειριστή. Τότε θα έχουμε:

$$S_{prof}(q) = \lambda^*(q)p(q),$$

όπου  $\lambda^*(q)$  το έχουμε υπολογίσει από τη σχέση (4.7) και  $p(q)$  η τιμή που θα ορίσει για εισοδο ο διαχειριστής για να αναγκάσει τους πελάτες να χρησιμοποιούν στρατηγική  $q$ .

Επομένως, εφόσον ο πελάτης λειτουργεί βέλτιστα, με βάση τη λογική του Θεωρήματος 4.1.1 βάζοντας στη θέση του  $R$  το  $R - p$  που είναι πια το κέρδος του πελάτη αν εξυπηρετηθεί, θα πρέπει να λύσουμε ως προς  $p$  την εξίσωση:

$$R - p - C\left(\frac{1}{\mu} + \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha)}\right) = 0 \Leftrightarrow p(q) = R - \frac{C}{\mu} - C\frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha)}.$$

Τελικά, το  $S_{prof}(q)$  δίνεται από τον τύπο:

$$S_{prof}(q) = \left(R - \frac{C}{\mu} + \frac{C}{\lambda}\right)\frac{\lambda\mu}{\mu + \lambda(1 - q)} - C\frac{\mu(\lambda + \alpha)}{\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha)}. \quad (4.10)$$

Επομένως, σειρά τώρα έχει το τρίτο βασικό αποτέλεσμα σχετικά με τη βελτιστοποίηση του διαχειριστή [7].

**Θεώρημα 4.1.3.** (Theorem 3.4) Στο μοντέλο της σχεδόν μη παρατηρήσιμης  $M/M/1$  ουράς με σταθερές επαναπροσπάθειες, με τις σχέσεις (4.1),(4.2) να ισχύουν, υπάρχει μοναδική μικτή στρατηγική που λέει οι πελάτες να μπαίνουν στο σύστημα με πιθανότητα  $q_{prof}$  ενώ

βλέπουν τον υπηρέτη απασχολημένο, υπό το πλαίσιο να μεγιστοποιηθεί το όφελος του διαχειριστή. Αυτή δίνεται από τον εξής τύπο:

$$q_{prof} = \begin{cases} 0 & , \text{αν } \frac{R}{C} \in \left(\frac{1}{\mu}, t_{Lprof}\right] \\ \frac{\mu + \lambda - B\mu\alpha}{\lambda(1 - B(\lambda + \alpha))} & , \text{αν } \frac{R}{C} \in (t_{Lprof}, t_{Uprof}) , \\ 1 & , \text{αν } \frac{R}{C} \in [t_{Uprof}, \infty) \end{cases} \quad (4.11)$$

όπου  $t_{Lprof} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} + \frac{(\lambda + \alpha)^2(\lambda + \mu)^2}{\lambda\mu^2\alpha^2}$  ,  $t_{Uprof} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} + \frac{(\lambda + \alpha)^2\mu^2}{\lambda(\mu\alpha - \lambda(\lambda + \alpha))^2}$  και  $B = \frac{1}{\lambda + \alpha} \sqrt{\frac{\lambda R}{C} - \frac{\lambda}{\mu} + 1}$ .

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας την  $S_{prof}(q)$ , θέτοντας ίσο με 0 και λύνοντας ως προς  $q$ , με όμοιο τρόπο με την προηγούμενη απόδειξη, έχουμε:

$$\begin{aligned} (-\lambda) \left( R - \frac{C}{\mu} + \frac{C}{\lambda} \right) \frac{\lambda\mu}{(\mu + \lambda(1 - q))^2} &= C \frac{\mu(\lambda + \alpha)}{(\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha))^2} (-\lambda^2 - \lambda\alpha) \\ \Rightarrow \frac{\mu + \lambda(1 - q)}{\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha)} &= \frac{\sqrt{\left( R - \frac{C}{\mu} + \frac{C}{\lambda} \right) \lambda}}{(\lambda + \alpha)C^2} \\ \Rightarrow \frac{\mu + \lambda(1 - q)}{\mu\alpha - \lambda q(\lambda + \alpha)} &= \frac{1}{\lambda + \alpha} \sqrt{\frac{\lambda R}{C} - \frac{\lambda}{\mu} + 1} \\ \Rightarrow q_{prof} &= \frac{\mu + \lambda - B\mu\alpha}{\lambda(1 - B(\lambda + \alpha))}. \end{aligned}$$

Άρα, αυτό το αποτέλεσμα μας δίνει τον δεύτερο κλάδο της συνάρτησης μόνο όταν  $q_{prof} \in (0, 1)$ , δηλαδή μόνο όταν  $\frac{R}{C} \in (t_{Lprof}, t_{Uprof})$ . Πράγματι, λύνοντας για παράδειγμα την ανίσωση  $q_{prof} > 0$  παίρνουμε όπως και στην προηγούμενη απόδειξη ότι:  $\frac{R}{C} > t_{Lprof}$  και όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι  $q_{prof} < 1 \iff \frac{R}{C} < t_{Uprof}$ .

Έτσι, αν  $\frac{R}{C} \leq t_{Lprof}$  θα έχουμε ότι η  $S_{prof}(q)$  δεν είναι αύξουσα  $\forall q \in [0, 1]$  άρα θα έχει μέγιστο για  $q_{prof} = 0$  ενώ αν  $\frac{R}{C} \geq t_{Uprof}$  θα έχουμε ότι η  $S_{prof}(q)$  δεν είναι φθίνουσα  $\forall q \in [0, 1]$  άρα θα έχει μέγιστο για  $q_{prof} = 1$ . Έτσι έχουμε το θεώρημα.

□

Τέλος, πριν κλείσουμε το κομμάτι αυτό, θα μας ενδιέφερε πολύ να μπορούμε να συγκρίνουμε τα 3 αποτελέσματα  $q_e, q_{soc}, q_{prof}$  όπως συγκρίναμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο τα  $q_e, q^*$  (3.10). Σε αυτό, απάντηση έχουν δώσει οι Economou και Kanta [7].

**Θεώρημα 4.1.4.** (Theorem 3.5) Για τις πιθανότητες  $(q_e, q_{soc}, q_{prof})$  ισχύει η εξής διάταξη:

$$q_{prof} \leq q_{soc} \leq q_e. \quad (4.12)$$

Απόδειξη. Σχετικά με τον δεύτερο κομμάτι της ανίσωσης μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι ισχύει η διάταξη:  $t_{Le} < t_{Lsoc} < t_{Ue} < t_{Usoc}$ . Άρα, παίρνοντας περιπτώσεις για το που πέφτει το πηλίκιο  $\frac{R}{C}$  παίρνουμε το αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα, αν:

- ▶  $\frac{R}{C} \leq t_{Le} \Rightarrow q_{soc} = q_e = 0$ .
- ▶  $t_{Le} < \frac{R}{C} \leq t_{Lsoc} \Rightarrow q_e \in (0, 1)$  και  $q_{soc} = 0$ .
- ▶  $t_{Lsoc} < \frac{R}{C} \leq t_{Ue} \Rightarrow q_{soc}, q_e \in (0, 1)$ , όπου το αποτέλεσμα βγαίνει μετά απο πράξεις.
- ▶  $t_{Ue} < \frac{R}{C} \leq t_{Usoc} \Rightarrow q_{soc} \in (0, 1)$  και  $q_e = 1$ .
- ▶  $\frac{R}{C} \geq t_{Usoc} \Rightarrow q_e = q_{soc} = 1$ .

Όμοια, μπορεί κανείς να αποδείξει και την αριστερή ανίσωση με τη μόνη διαφορά ότι μπορεί να ισχύει πως  $t_{Lprof} < t_{Lprof}$  και  $t_{Usoc} < t_{Uprof}$  αλλά δεν ισχύει πάντα ότι  $t_{Lprof} < t_{Usoc}$ . Επομένως, αρκεί να πάρουμε δύο περιπτώσεις  $t_{Lprof} < t_{Usoc}$  και  $t_{Lprof} \geq t_{Usoc}$  και να κάνουμε ότι και παραπάνω. Για την πρώτη σχέση η απόδειξη είναι εντελώς παρόμοια όποτε θα παρουσιάσουμε την περίπτωση  $t_{Lprof} \geq t_{Usoc}$ .

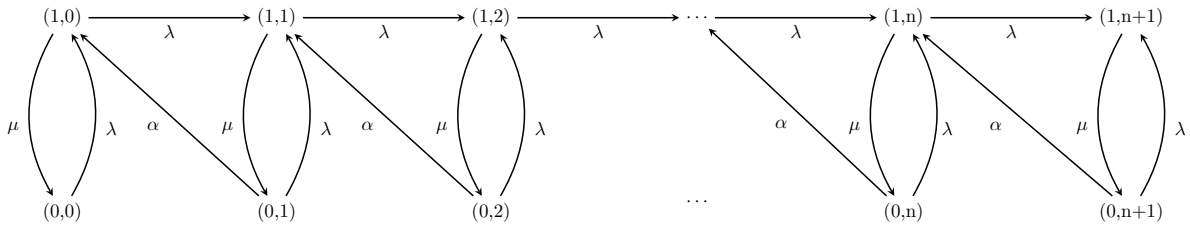
- ▶  $\frac{R}{C} \leq t_{Lsoc} \Rightarrow q_{soc} = q_{prof} = 0$ .
- ▶  $t_{Lsoc} < \frac{R}{C} \leq t_{Usoc} \Rightarrow q_{soc} \in (0, 1)$  και  $q_{prof} = 0$ .
- ▶  $t_{Usoc} < \frac{R}{C} \leq t_{Lprof} \Rightarrow q_{soc} = 1, q_{prof} = 0$ .
- ▶  $t_{Lprof} < \frac{R}{C} \leq t_{Uprof} \Rightarrow q_{prof} \in (0, 1)$  και  $q_{soc} = 1$ .
- ▶  $\frac{R}{C} \geq t_{Uprof} \Rightarrow q_{prof} = q_{soc} = 1$ .

Άρα, έχουμε τη ζητούμενη διάταξη. □

#### 4.1.2 Παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά

Σε αυτό το μοντέλο οι πελάτες συγκριτικά με το προηγούμενο έχουν την επιπρόσθετη πληροφορία για τον αριθμό των ατόμων στην τροχιά. Εδώ οι στρατηγικές ισορροπίας θα είναι τύπου κατωφλίου  $n_e, n_{soc}, n_{prof}$ . Πιο συγκεκριμένα, αν ο πελάτης δει κάτω από  $n$  πελάτες στην τροχιά τότε θα εισέρχεται στο σύστημα με πιθανότητα 1, αν δει πάνω από  $n$  θα αποχωρεί ενώ αν δει ακριβώς  $n$  τότε θα υποθέσουμε πως θα εισέρχεται στο σύστημα. Οπότε εδώ έχουμε την ίδια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου αλλά με χώρο καταστάσεων  $(i, k)$  όπου  $i \in \{0, 1\}$  και  $k \in \{0, 1, \dots, n + 1\}$ . Έτσι έχουμε το εξής διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:

Άρα, παρακάτω θα επικεντρωθούμε σε κάποια λήμματα και θεωρήματα πάνω στην εύρεση της στάσιμης κατανομής, της στρατηγικής ισορροπίας  $n_e$ , της στρατηγικής που



μεγιστοποιεί το συνολικό κοινωνικό όφελος  $n_{soc}$  της στρατηγικής για τη βελτιστοποίηση του κέρδους του μονοπωλίου  $n_{prof}$  και στη σύγκριση και των 3 αυτών στρατηγικών τύπου καταφλίου.

Αρχικά, θα γράψουμε τις εξισώσεις ισορροπίας με στόχο να βρούμε τη στάσιμη κατανομή. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\lambda p(0, 0) &= \mu p(1, 0) \\ (\lambda + \alpha)p(0, j) &= \mu p(1, j) \quad , j = 1, 2, \dots, n + 1 \\ \lambda p(1, j) &= \alpha p(0, j + 1) \quad , j = 0, 1, \dots, n \\ \mu p(1, n + 1) &= \lambda p(1, n) + \lambda p(0, n + 1).\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας κατάλληλα και θέτοντας  $r = \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\lambda + \alpha}{\mu}$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned}p(0, j) &= \left( \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\lambda + \alpha}{\mu} \right)^{j-1} p(0, 1) = r^{j-1} p(0, 1) \quad , j = 1, 2, \dots, n + 1 \\ p(1, j) &= \frac{\lambda + \alpha}{\mu} r^{j-1} p(0, 1) = \frac{\alpha}{\lambda} r^j p(0, 1) \quad , j = 0, 1, \dots, n + 1.\end{aligned}$$

Από εξίσωση κανονικοποίησης έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+1} (p(0, j) + p(1, j)) &= 1 \Rightarrow p(0, 0) + \sum_{j=1}^{n+1} r^{j-1} p(0, 1) + \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\lambda + \alpha}{\mu} r^{j-1} p(0, 1) = 1 \\ &\Rightarrow p(0, 1) \left( \frac{\mu\alpha}{\lambda^2} + \sum_{j=1}^{n+1} r^{j-1} + \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\lambda + \alpha}{\mu} r^{j-1} \right) = 1 \\ &\Rightarrow p(0, 1) = \frac{1}{\frac{\mu\alpha}{\lambda^2} + (1 + r + \dots + r^n) + \frac{\lambda + \alpha}{\mu} (r^{-1} + 1 + r + \dots + r^n)} \\ &\Rightarrow p(0, 1) = \frac{1}{\frac{\mu\alpha}{\lambda^2} + (1 + r + \dots + r^n) + \frac{\alpha}{\lambda} (1 + r + \dots + r^{n+1})}\end{aligned}$$

. Άρα, αν θέσουμε  $A(n) = p(0, 1)$  έχουμε:

$$\begin{aligned}p(0, j) &= A(n) r^{j-1} \quad , j = 1, 2, \dots, n + 1 \\ p(1, j) &= A(n) \frac{\alpha}{\lambda} r^j \quad , j = 0, 1, \dots, n + 1 \\ p(0, 0) &= \frac{\mu}{\lambda} p(1, 0) = A(n) \frac{\mu\alpha}{\lambda^2}.\end{aligned}$$



Έτσι, έχουμε και τη στάσιμη κατανομή.

Στο πλαίσιο ατομικής βελτιστοποίησης τώρα το αναμενόμενο όφελος ενός πελάτη που αποφασίζει να μπει στο σύστημα ενώ βλέπει απασχολημένο τον υπηρέτη και ενώ βλέπει  $j$  πελάτες στην τροχιά θα είναι:

$$S_e(j) = R - CT(1, j + 1),$$

όπου με  $T(1, j + 1)$  συμβολίζουμε τον μέσο χρόνο αναμονής ενός πελάτη δοθέντος ότι βλέπει πως ο υπηρέτης είναι απασχολημένος και εισέρχεται στο σύστημα ενώ βλέπει στην τροχιά  $j$  πελάτες (δηλαδή είναι στην  $j + 1$  θέση).

Θα ασχοληθούμε με την εύρεση του  $T(1, j + 1)$ . Ειδικότερα, θέτοντας  $s_j$  την πιθανότητα να εισέλθει στο σύστημα ένας πελάτης που βρίσκει απασχολημένο τον υπηρέτη και βλέπει  $j$  πελάτες στην τροχιά, με ανάλυση πρώτου βήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= \frac{1}{\mu} \\ T(1, j) &= \frac{1}{\lambda s_j + \mu} + \frac{\lambda s_j}{\lambda s_j + \mu} T(1, j) + \frac{\mu}{\lambda s_j + \mu} T(0, j), \quad j = 1, 2, \dots \\ T(0, j) &= \frac{1}{\lambda + \alpha} + \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} T(1, j) + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} T(1, j - 1), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, η δεύτερη σχέση προκύπτει ως εξής: αν το σύστημα είναι στην κατάσταση  $(1, j)$  και ο επιλεγμένος πελάτης είναι στη θέση  $j$  της τροχιάς, τρέχουν δύο χρόνοι: ένας εκθετικός χρόνος με παράμετρο  $\mu$  για την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του πελάτη και ένας εκθετικός χρόνος  $\lambda s_j$  για την είσοδο στο σύστημα ενός νέου πελάτη. Άρα, ο χρόνος μέχρι το επόμενο γεγονός θα ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda s_j + \mu$  και άρα θα ισούται με  $\frac{1}{\lambda s_j + \mu}$ . Τώρα η πιθανότητα να ολοκληρωθεί πρώτα ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι  $\frac{\mu}{\lambda s_j + \mu}$  και τότε πελάτης θα περιμένει μέσο χρόνο  $T(0, j)$  ενώ η πιθανότητα να ολοκληρωθεί πρώτα η είσοδος του νέου πελάτη είναι  $\frac{\lambda s_j}{\lambda s_j + \mu}$  και τότε ο πελάτης θα περιμένει πάλι μέσο χρόνο  $T(1, j)$ .

Αντικαθιστώντας τώρα την τρίτη σχέση στη δεύτερη και λύνοντας αναδρομικά παίρνουμε:

$$\begin{aligned} T(1, j) &= \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu \alpha} + T(1, j - 1), \quad j = 1, 2, \dots \\ T(1, j) &= j \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu \alpha} + \frac{1}{\mu}, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Και άρα αντικαθιστώντας κατάλληλα έχουμε πως :

$$T(0, j) = j \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu \alpha}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Εδώ θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι όταν ένας πελάτης βρει τον υπηρέτη απασχολημένο και την τροχιά άδεια θα πρέπει να τον συμφέρει να μπει στο σύστημα άρα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$R - CT(1, 1) > 0 \iff \frac{R}{C} > \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha} + \frac{1}{\mu}. \quad (4.14)$$

Άρα, έχουμε τελικά πως το  $S_e(j)$  θα ισούται με:

$$S_e(j) = R - C \left( (j+1) \frac{\lambda + \mu + \alpha}{\mu\alpha} + \frac{1}{\mu} \right). \quad (4.15)$$

Τώρα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε το πρώτο βασικό θεώρημα σε αυτό το μοντέλο [7].

**Θεώρημα 4.1.5.** (Theorem 4.1) Στην παρατηρήσιμη  $M/M/1$  ουρά με σταθερές επαναπροσπάθειες κάτω από τη σχέση (4.14) υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου (δεδομένου πως αν είναι αδιάφορος για να εισέλθει ή όχι, τότε θα εισέρχεται) για έναν πελάτη να μπαίνει στο σύστημα, ενώ βλέπει τον υπηρέτη απασχολημένο, αν στην τροχιά είναι το πολύ  $n_e$  πελάτες όπου:

$$n_e = \lfloor x_e \rfloor, \quad (4.16)$$

όπου  $x_e = \frac{\mu\alpha}{\lambda + \alpha + \mu} \left( \frac{R}{C} - \frac{1}{\mu} \right) - 1$ .

Απόδειξη. Έστω ότι όταν φτάνει ο πελάτης το σύστημα είναι στην κατάσταση  $(1, j)$ . Τότε γνωρίζουμε ότι θα εισέλθει στο σύστημα αν  $S_e(j) > 0$ , θα αποχωρήσει αν  $S_e(j) < 0$  και θα είναι αδιάφορος αν  $S_e(j) = 0$ . Λύνοντας τις ανισώσεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned} S_e(j) > 0 &\iff j < \frac{\mu\alpha}{\lambda + \alpha + \mu} \left( \frac{R}{C} - \frac{1}{\mu} \right) - 1 \iff j < n_e \\ S_e(j) < 0 &\iff j > \frac{\mu\alpha}{\lambda + \alpha + \mu} \left( \frac{R}{C} - \frac{1}{\mu} \right) - 1 \iff j > n_e. \end{aligned}$$

Άρα, έχουμε το ζητούμενο, ενώ για τη μοναδικότητα θα χρειαστεί η υπόθεση ότι όταν είναι αδιάφορος μεταξύ του να εισέλθει ή όχι, τότε θα εισέρχεται. Αυτό γιατί αν για παράδειγμα είχαμε ότι ο  $x_e$  ήταν ακέραιος τότε  $S(n_e) = 0$  και άρα ο πελάτης θα εισέλθει αν  $j < n_e$ , θα αποχωρήσει αν  $j > n_e$  και με μία πιθανότητα θα εισέρχεται αν  $j = n_e$ . Το τελευταίο θέλουμε να το αποφύγουμε ώστε να έχουμε μοναδικότητα και άρα θεωρούμε πως όταν είναι αδιάφορος θα εισέρχεται. Άρα, αρκεί  $S(j) \geq 0$  για να μπει στο σύστημα.

□

Στο κοινωνικό τώρα πλαίσιο το αναμενόμενο όφελος ανά μονάδα χρόνου, με τη βοήθεια του νόμου του Little, θα είναι:

$$S_{soc}(n) = \lambda^*(n)R - CE[Q(n)] = \lambda^*(n)R - C\lambda^*(n)E[S^*(n)],$$

όπου  $\lambda^*(n)$  είναι ο μέσος ρυθμός αφίξεων των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα και  $E[S^*(n)]$  ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα ακολουθώντας τη στρατηγική τύπου κατωφλίου, με κατώφλι  $n$ .

Θα ασχοληθούμε με την εύρεση του  $E[S^*(n)]$ . Πιο συγκεκριμένα, δεσμεύοντας σε ποια κατάσταση βρίσκεται ο πελάτης το σύστημα έχουμε πως:

$$\begin{aligned} E[S^*(n)] &= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{p_{0,j}(n)}{1-p_{1,n+1}(n)} \frac{1}{\mu} + \sum_{j=0}^n \frac{p_{1,j}(n)}{1-p_{1,n+1}(n)} \left( \frac{1}{\mu} + (j+1) \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{1-p_{1,n+1}(n)} \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha} \sum_{j=0}^n (j+1)p_{1,j}(n). \end{aligned}$$

Δηλαδή, αν ο πελάτης βρει κατά την άφιξη του τον υπηρέτη ελεύθερο θα παραμείνει στο σύστημα χρόνο  $\frac{1}{\mu}$  οπότε αθροίζουμε πάνω σε όλα τα δυνατά σενάρια να γίνει αυτό με πιθανότητες  $\frac{p_{0,j}(n)}{1-p_{1,n+1}(n)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n+1$ . Αντίθετα, αν βρει κατά την άφιξη του τον υπηρέτη απασχολημένο και  $j$  πελάτες στην τροχιά θα παραμείνει στο σύστημα χρόνο  $T(1, j+1) = \frac{1}{\mu} + (j+1) \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha}$  οπότε αθροίζουμε πάνω σε όλα τα δυνατά σενάρια να γίνει αυτό με πιθανότητες  $\frac{p_{1,j}(n)}{1-p_{1,n+1}(n)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Τέλος, στην περίπτωση που βρει το σύστημα στην κατάσταση  $(1, n+1)$  τότε, με βάση τη στρατηγική τύπου κατωφλίου  $n$  που ακολουθεί, δεν θα εισέλθει στην ουρά.

Επομένως, το κοινωνικό όφελος ανά μονάδα χρόνου δίνεται εν τέλει από τον τύπο:

$$\begin{aligned} S_{soc}(n) &= \lambda^*(n)R - C \left( \lambda^*(n) \frac{1}{\mu} + \lambda \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha} \sum_{j=0}^n (j+1)p_{1,j}(n) \right) \\ &= \lambda^*(n) \left( R - \frac{C}{\mu} \right) - \lambda C \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha} \sum_{j=0}^n (j+1)p_{1,j}(n) \\ &= C \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha} \left( \lambda^*(n) \frac{\mu\alpha}{\lambda + \alpha + \mu} \left( \frac{R}{C} - \frac{1}{\mu} \right) - \lambda \sum_{j=0}^n (j+1)p_{1,j}(n) \right) \\ &= C \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha} \left( \lambda^*(n)(x_e + 1) - \lambda \sum_{j=0}^n (j+1)p_{1,j}(n) \right). \end{aligned}$$

Οπότε τώρα είμαστε θα παρουσιάσουμε το δεύτερο βασικό θεώρημα σε αυτό το μοντέλο [7].

**Θεώρημα 4.1.6.** (Theorem 4.3) Στην παρατηρήσιμη  $M/M/1$  ουρά με σταθερές επαναπροσπάθειες κάτω από τη σχέση (4.14) υπάρχει μοναδική στρατηγική τύπου κατωφλίου για έναν πελάτη να μπαίνει στο σύστημα, ενώ βλέπει τον υπηρέτη απασχολημένο, αν στην τροχιά είναι το πολύ  $n_{soc}$  πελάτες, με σκοπό να βελτιστοποιηθεί η συνάρτηση κοινωνικού όφελους, όπου:

$$n_{soc} = \lfloor x_{soc} \rfloor, \quad (4.17)$$

όπου  $x_{soc}$  είναι η μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης  $g(x) = x_e$  και

$$g(x) = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha}(x + 1) + \frac{\lambda + \alpha r}{(\lambda + \alpha)(1 - r)} \left( (x + 1) - r \frac{1 - r^{x+1}}{1 - r} \right) - 1. \quad (4.18)$$

**Παρατήρηση:** Αν  $g(0) > x_e$  τότε η βέλτιστη στρατηγική σε αυτό το πλαίσιο είναι οι πελάτες όταν βρίσκουν απασχολημένο τον υπηρέτη να αποχωρούν.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι η  $S_{soc}(n)$  είναι μονοκόρυφη (unimodal). Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

$$S_{soc}(n) - S_{soc}(n - 1) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \iff (x_e + 1)(\lambda^*(n) - \lambda^*(n - 1)) &\geq \lambda \left( \sum_{j=0}^n (j + 1)p_{1,j}(n) - \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1)p_{1,j}(n - 1) \right) \\ \iff g(n) &\leq x_e, \end{aligned} \quad (4.19)$$

όπου

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{g_1(n)}{g_2(n)} - 1 \\ g_1(n) &= \lambda \left( \sum_{j=0}^n (j + 1)p_{1,j}(n) - \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1)p_{1,j}(n - 1) \right), \quad g_2(n) = \lambda^*(n) - \lambda^*(n - 1). \end{aligned}$$

Μετά από πράξεις βλέπουμε ότι η  $g(x)$  παίρνει τη μορφή που θέλουμε και μάλιστα με τη βοήθεια της  $f(x) = g(x) - x$  η  $g(x)$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση με  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ .

Άρα, αν  $g(0) > x_e$  έχουμε ότι  $g(n) > x_e$  για  $n = 0, 1, 2, \dots$  και άρα από (4.19) η  $S_{soc}(n)$  είναι φθίνουσα, οπότε το κοινωνικό όφελος μεγιστοποιείται όταν οι πελάτες που βλέπουν απασχολημένο τον υπηρέτη αποχωρούν από την ουρά (το κατώφλι  $n$  είναι ίσο με 0).

Διαφορετικά τώρα θα υπάρχει ένα  $n_{soc}$  τέτοιο ώστε  $g(n_{soc}) \leq x_e \leq g(n_{soc} + 1)$ . Τότε από μονοτονία της  $g(x)$  έχουμε ότι για  $n \leq n_{soc} \Rightarrow g(n) \leq g(n_{soc}) \Rightarrow g(n) \leq x_e$ . Άρα, από (4.19) έχουμε:

$$\begin{aligned} S_{soc}(n) &\geq S_{soc}(n - 1), \quad \text{για } n \leq n_{soc} \\ S_{soc}(n) &< S_{soc}(n - 1), \quad \text{για } n > n_{soc}. \end{aligned}$$

Άρα, το μέγιστο πετυχαίνεται στη θέση  $n_{soc} = \lfloor x_{soc} \rfloor$  όπου  $x_{soc}$  είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης:  $g(x) = x_e$ .

□

Στο πλαίσιο της βελτιστοποίησης του μονοπωλίου τώρα με  $S_{prof}(n)$  θα συμβολίζουμε το αναμενόμενο κέρδος του διαχειριστή ανά μονάδα χρόνου όταν οι πελάτες χρησιμοποιούν στρατηγική τύπου κατωφλίου, με κατώφλι  $n$ , ώστε να απαντούν βέλτιστα στον διαχειριστή. Τότε θα έχουμε:

$$S_{prof}(n) = \lambda^*(n)p(n),$$

όπου  $\lambda^*(n)$  το έχουμε υπολογίσει (4.7) και  $p(n)$  η τιμή που θα ορίσει για είσοδο ο διαχειριστής για να αναγκάσει τους πελάτες να χρησιμοποιούν στρατηγική τύπου κατωφλίου.

Επομένως, εφόσον ο πελάτης λειτουργεί βέλτιστα, με βάση το Θεώρημα 4.1.1 βάζοντας στη θέση του  $R$  το  $R - p$  που είναι πια το κέρδος του πελάτη αν εξυπηρετηθεί, θα πρέπει να λύσουμε ως προς  $p$  την εξίσωση:

$$R - p - C\left(\frac{1}{\mu} + (n+1)\frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha}\right) = 0 \iff p(n) = R - C\left(\frac{1}{\mu} + (n+1)\frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha}\right).$$

Τελικά, το  $S_{prof}(n)$  δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} S_{prof}(n) &= \lambda^*(n)\left(R - C\left((n+1)\frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha} + \frac{1}{\mu}\right)\right) \\ &= \lambda^*(n)C\frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha}\left(-n - 1 - \frac{\alpha}{\lambda + \alpha + \mu} + \frac{R}{C}\frac{\mu\alpha}{\lambda + \alpha + \mu}\right) \\ &= \lambda^*(n)C\frac{\lambda + \alpha + \mu}{\mu\alpha}(x_e - n). \end{aligned}$$

Επομένως, σειρά τώρα έχει το τρίτο βασικό αποτέλεσμα σχετικά με τη βελτιστοποίηση του διαχειριστή [7].

**Θεώρημα 4.1.7.** (Theorem 4.4) Στην παρατηρήσιμη  $M/M/1$  ουρά με σταθερές επαναπροσπάθειες κάτω από τη σχέση (4.14) υπάρχει μοναδική στρατηγική τύπου κατωφλίου για έναν πελάτη να μπαίνει στο σύστημα, ενώ βλέπει τον υπηρέτη απασχολημένο, αν στην τροχιά είναι το πολύ  $n_{prof}$  πελάτες, με σκοπό να βελτιστοποιηθεί η συνάρτηση οφέλους του διαχειριστή, όπου:

$$n_{prof} = \lfloor x_{prof} \rfloor, \quad (4.20)$$

όπου  $x_{prof}$  είναι η μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης  $h(x) = x_e$  και

$$h(x) = x + \frac{\mu(1 - r^{x+1})(1 - \frac{\lambda + \alpha r}{\lambda + \alpha} r^{x+2})}{\lambda x(1 - r)^2}. \quad (4.21)$$

**Παρατήρηση:** Αν  $h(0) > x_e$  τότε η βέλτιστη στρατηγική σε αυτό το πλαίσιο είναι οι πελάτες όταν βρίσκουν απασχολημένο τον υπηρέτη να αποχωρούν.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι η  $S_{prof}(n)$  είναι μονοκόρυφη. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{S_{prof}(n)}{S_{prof}(n-1)} \geq 1 &\iff n + \frac{\lambda^*(n-1)}{\lambda^*(n) - \lambda^*(n-1)} \leq x_e \\ &\iff h(n) \leq x_e, \end{aligned} \quad (4.22)$$

όπου  $h(n) = n + \frac{\lambda^*(n-1)}{\lambda^*(n) - \lambda^*(n-1)}$ .

Μετά από πράξεις βλέπουμε ότι η  $h(x)$  παίρνει τη μορφή που θέλουμε και μάλιστα είναι μια αύξουσα συνάρτηση με  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$ .

Άρα, αν  $h(0) > x_e$  έχουμε ότι  $h(n) > x_e$  για  $n = 0, 1, 2, \dots$  και άρα από (4.22) η  $S_{prof}(n)$  είναι φθίνουσα, οπότε το κέρδος του διαχειριστή μεγιστοποιείται όταν οι πελάτες που βλέπουν απασχολημένο τον υπηρέτη αποχωρούν από την ουρά (το κατώφλι  $n$  είναι ίσο με 0).

Διαφορετικά τώρα θα υπάρχει ένα  $n_{prof}$  τέτοιο ώστε  $h(n_{prof}) \leq x_e \leq h(n_{prof} + 1)$ . Τότε από μονοτονία της  $h(x)$  έχουμε ότι για  $n \leq n_{prof} \Rightarrow h(n) \leq h(n_{prof}) \Rightarrow h(n) \leq x_e$ . Άρα, από (4.22) έχουμε:

$$\begin{aligned} S_{prof}(n) &\geq S_{prof}(n-1), \text{ για } n \leq n_{prof} \\ S_{prof}(n) &< S_{prof}(n-1), \text{ για } n > n_{prof}. \end{aligned}$$

Άρα, το μέγιστο πετυχαίνεται στη θέση  $n_{prof} = \lfloor x_{prof} \rfloor$ , όπου  $x_{prof}$  είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης:  $h(x) = x_e$ .

□

Τέλος, πριν κλείσουμε το κομμάτι αυτό, θα μας ενδιέφερε πολύ να μπορούμε να συγκρίνουμε και εδώ τα 3 κατώφλια  $n_e, n_{soc}, n_{prof}$ . Σε αυτό απάντηση έχουν δώσει οι Economou και Kanta [7].

**Θεώρημα 4.1.8.** (Theorem 4.5) Για τα κατώφλια  $n_e, n_{soc}, n_{prof}$  ισχύει η εξής διάταξη:

$$n_{prof} \leq n_{soc} \leq n_e. \quad (4.23)$$

Απόδειξη. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.6 η  $f(x) = g(x) - x$  είναι αύξουσα συνάρτηση και άρα εφόσον  $f(0) = g(0) = \frac{\alpha r}{\lambda + \alpha} > 0$  έχουμε ότι  $x_{soc} \geq 0 \Rightarrow f(x_{soc}) \geq 0 \Rightarrow g(x_{soc}) \geq x_{soc}$ . Όμως  $g(x_{soc}) = x_e$ , άρα παίρνοντας και ακέραια μέλη έχουμε πως:  $n_{soc} \leq n_e$ .

Τώρα για την άλλη σχέση, έχουμε ότι από τον τύπο της  $S_{prof}(n)$  πως  $S_{prof}(n) < 0$  για τα  $n > x_e$  και άρα έχουμε αναγκαστικά ότι  $n_{prof} \leq n_e$  (αλλιώς το  $n_{prof}$  δεν θα ήταν μέγιστο). Οπότε στην περίπτωση που  $n_{soc} = n_e$  έχουμε  $n_{prof} \leq n_{soc}$  και άρα έχουμε και τη ζητούμενη διάταξη.

Τώρα αν  $n_{soc} < n_e$  αρκεί να δείξουμε ότι για τους φυσικούς  $\{n_{soc}, n_{soc} + 1, \dots, n_e - 1\}$ , δηλαδή για  $n \in [n_{soc}, n_e)$ , ισχύει πως  $S_{prof}(n+1) \leq S_{prof}(n)$ , δηλαδή  $S_{prof}(n)$  φθίνει. Τότε από την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.7 έχουμε ότι το μέγιστο θα πετυχαίνεται για ένα  $n \leq n_{soc}$  και άρα εφόσον το μέγιστο είναι το  $n_{prof}$  θα έχουμε πως  $n_{prof} \leq n_{soc}$ .

Για να αποδείξουμε ότι είναι φθίνουσα θα εκμεταλευτούμε κάποιες σχέσεις των Θεωρημάτων 4.1.6 και 4.1.7. Ειδικότερα, γνωρίζουμε πως:

$$g(n+1) \geq g(n_{soc}+1) > x_e, \quad n \geq n_{soc}.$$

Επίσης, για να δείξουμε ότι για  $n \in [n_{soc}, n_e)$  έχουμε  $S_{prof}(n+1) \leq S_{prof}(n)$  αρκεί να δείξουμε ότι:

$$h(n+1) \geq x_e, \quad n_{soc} \leq n < n_e.$$

Άρα, συνολικά μας αρκεί να αποδείξουμε τη σχέση:  $h(n) \geq g(n)$  όπου μετά από απλοποιήσεις και υποθέτοντας πως  $r < 1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} n+1 &\leq \frac{1-r^{n+1}}{(1-r)r^{n+1}} \left( \frac{\mu(1-\frac{\lambda+\alpha r}{\lambda+\alpha}r^{n+2})}{\lambda} + \frac{\lambda(\lambda+\alpha r)}{\mu\alpha}r^n \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu(1-\frac{\lambda+\alpha r}{\lambda+\alpha}r^{n+2})}{\lambda} + \frac{\lambda(\lambda+\alpha r)}{\mu\alpha}r^n \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{r\alpha} \left( 1 - \frac{\lambda+\alpha r}{\lambda+\alpha}r^{n+2} \right) > 1 \\ &\Leftrightarrow r < 1, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισοδυναμία ισχύει αφού:

$$\frac{1-r^{n+1}}{(1-r)r^{n+1}} = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{1}{r}\right)^j \geq n+1, \quad (4.24)$$

ενώ η τελευταία ισχύει γιατί:

- για το ευθύ, αν  $r \geq 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{r\alpha} \left( 1 - \frac{\lambda+\alpha r}{\lambda+\alpha}r^{n+2} \right) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{r\alpha} \left( 1 - \frac{\lambda+\alpha r}{\lambda+\alpha}r^{n+2} \right) \leq 1$ , άτοπο και
- αντίστροφα, αν  $r < 1 \Rightarrow \frac{1}{r} > 1$  και  $\frac{\lambda}{r\alpha} \left( 1 - \frac{\lambda+\alpha r}{\lambda+\alpha}r^{n+2} \right) > 0$  άρα  $\frac{1}{r} + \frac{\lambda}{r\alpha} \left( 1 - \frac{\lambda+\alpha r}{\lambda+\alpha}r^{n+2} \right) > 1$ .

Με όμοιες πράξεις αποδεικνύεται και στην περίπτωση  $r > 1$  με αντίθετες ανισότητες. Άρα, έχουμε τη ζητούμενη διάταξη. □

## 4.2 Βέλτιστες στρατηγικές στην $M/G/1$ και στην $M/M/1$ ουρά με ντετερμινιστικούς χρόνους επαναπροσπάθειας

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά θα μελετήσουμε την  $M/G/1$  ουρά με την εξής Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου:  $\{(C(t), Q(t), S(t)), t = 1, 2, \dots\}$ . Η  $C(t)$  δηλώνει την κατάσταση του υπηρέτη, η  $Q(t)$  δηλώνει τον αριθμό των πελατών στην τροχιά και η  $S(t)$  τον υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης αν  $C(t) = 1$ , ή τον υπολειπόμενο χρόνο επανάκτησης πελάτη από την τροχιά αν  $C(t) = 0$ . Άρα, έχουμε τον εξής χώρο καταστάσεων  $\{(0, 0)\} \cup \{(0, j, x) : j = 1, 2, \dots | x \geq 0\} \cup \{(1, j, x) : j = 0, 1, \dots | x \geq 0\}$ . Τον χρόνο εξυπηρέτησης τον συμβολίζουμε με  $B$ , όπου  $E[B]$  η μέση τιμή του και  $\tilde{B}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x)$  ο μεταχηματισμός Laplace-Stieltjes (LST). Αντίστοιχα, τον χρόνο επανάκτησης πελάτη από την ουρά τον συμβολίζουμε με  $A$ , όπου  $E[A]$  η μέση τιμή του και  $\tilde{A}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dA(x)$  ο μεταχηματισμός Laplace-Stieltjes. Αν ένας πελάτης βρει ελεύθερο τον υπηρέτη τότε εισέρχεται στο σύστημα και εξυπηρετείται άμεσα, ενώ αν τον βρει απασχολημένο καλείται να αποφασίσει αν θα αποχωρήσει ή αν θα ενταχθεί στην τροχιά αφήνοντας τα στοιχεία του στο σύστημα. Εδώ θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητοι οι χρόνοι επανάκτησης των πελατών καθώς και οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης μεταξύ επανακτήσεων και εξυπηρέτησεων. Σχετικά με τη δομή κόστους ο πελάτης θα παίρνει  $R$  χρηματικές μονάδες για την εξυπηρέτηση του ενώ θα χρεώνεται  $K$  χρηματικές ανά χρονική μονάδα παραμονής στο σύστημα. Άρα, για να συμφέρι τον πελάτη να εισέρχεται στο άδειο σύστημα θα έχουμε από εδώ και πέρα τη συνθήκη:

$$R > KE[B]. \quad (4.25)$$

Στόχος του πελάτη είναι να ελαχιστοποιήσει το συνολικό του κόστος. Αυτό το κωρίο έχει μελετηθεί από τους Baron, Econομου και Manou [2]. Ειδικότερα, θα δούμε στρατηγικές ισορροπίας στη μη παρατηρήσιμη  $M/G/1$  και έπειτα θα στρέψουμε το ενδιαφέρον μας σε στρατηγικές κοινωνικής βελτιστοποίησης στη μη παρατηρήσιμη  $M/M/1$  με ντετερμινιστικούς χρόνους επαναπροσπάθειας. Σχετικά με το τελευταίο θα ασχοληθούμε με τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης κοινωνικού οφέλους σε κατάσταση ισορροπίας (equilibrium social welfare) ως συνάρτηση του χρόνου ανάκτησης και θα συζητήσουμε τη βελτιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας κάτω από κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική με μηδενικό χρόνο επανάκτησης και τον τρόπο να συντονίσουμε το σύστημα. Θα τα παρουσιάσουμε εκτενώς παρακάτω.

Οπότε συνοπτικά έχουμε τα εξής:

- ▶ Διαδικασία αφίξεων: Poisson( $\lambda$ )
- ▶ Χρόνοι εξυπηρέτησης:  $\sim F_B$
- ▶ Χρόνοι επαναπροσπάθειας-επανάκτησης:  $\sim F_A$
- ▶ Ένας υπηρέτης και μη ύπαρξη χώρου αναμονής



- Κέρδος ανά εξυπηρέτηση:  $R$
- Κόστος ανά χρονική μονάδα αναμονής:  $K$
- Πιθανότητα να μπει ένας πελάτης αν ο υπηρέτης είναι απασχολημένος:  $q$ .

#### 4.2.1 Στρατηγικές ισορροπίας στη μη παρατηρήσιμη $M/G/1$ ουρά

Θα ασχοληθούμε αρχικά με την εύρεση της συνάρτησης ατομικού οφέλους  $S^{(u)}(q)$  για τον επιλεγμένο πελάτη που βρίσκει τον υπηρέτη απασχολημένο (σε διαφορετική περίπτωση εισέρχεται με πιθανότητα 1) όταν οι άλλοι πελάτες μπαίνουν στο σύστημα με πιθανότητα  $q$ . Έστω  $E[S_1]$  ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης όπου γνωρίζουμε ότι σε μια  $M/G/1$  ουρά είναι:

$$E[S_1] = \frac{E[B^2]}{2E[B]} \quad (4.26)$$

και έστω  $E[U_0]$  ο μέσος χρόνος από την αρχή της περιόδου ανάκτησης μέχρι να ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση του επιλεγμένου πελάτη και  $E[U_{0,j}]$  ο μέσος χρόνος από την αρχή της περιόδου ανάκτησης μέχρι να ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση του  $j$ -οστού πελάτη. Άρα, ο επιλεγμένος πελάτης θα πρέπει να περιμένει  $Q^- + 1$  περιόδους μέσης διάρκειας  $E[U_{0,j}]$  (αφού είναι ισόνομοι). Άρα, από PASTA:

$$E[U_0] = (E[Q^- | C^- = 1] + 1)E[U_{0,1}] = (E[Q | C = 1] + 1)E[U_{0,1}] \quad (4.27)$$

και επομένως η συνάρτηση ατομικού οφέλους δίνεται από :

$$S^{(u)}(q) = R - K(E[S_1] + E[U_0]). \quad (4.28)$$

Τώρα, σχετικά με την εύρεση του  $E[U_{0,1}]$  αν με  $T_\lambda$  ορίσουμε τον χρόνο μέχρι την επόμενη άφιξη πελάτη, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[U_{0,1}] &= E[\min(A, T_\lambda)] + P[T_\lambda \leq A]E[U_{1,1}] + P[T_\lambda > A]E[B] \\ &= \int_0^\infty P[\min(A, T_\lambda) > x]dx + P[T_\lambda \leq A]E[U_{1,1}] + \int_0^\infty P[T_\lambda > x]dA(x)E[B] \\ &= \int_0^\infty P[T_\lambda > x]dx - \int_0^\infty P[A \leq x]P[T_\lambda > x]dx + P[T_\lambda \leq A]E[U_{1,1}] + \int_0^\infty e^{-\lambda x}dA(x)E[B] \\ &= \frac{1}{\lambda} + 0 - \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x}dA(x) + (1 - \tilde{A}(\lambda))E[U_{1,1}] + \tilde{A}(\lambda)E[B] \\ &= \frac{1 - \tilde{A}(\lambda)}{\lambda} + (1 - \tilde{A}(\lambda))E[U_{1,1}] + \tilde{A}(\lambda)E[B], \end{aligned}$$

όπου  $[U_{1,1}] = E[U_{0,1}] + E[B]$ . Άρα, λύνοντας ως προς  $[U_{0,1}]$  έχουμε:

$$E[U_{0,1}] = \frac{1}{\tilde{A}(\lambda)} \left( \frac{1 - \tilde{A}(\lambda)}{\lambda} + E[B] \right). \quad (4.29)$$

Όσον αφορά το  $E[Q^-|C^- = 1]$  από PASTA έχουμε:  $E[Q^-|C^- = 1] = E[Q|C = 1]$ . Επίσης, από νόμο του Little σε όλο το σύστημα έχουμε ότι:

$$E[Q + C] = \lambda E[S] \quad (4.30)$$

και αν θέσουμε :  $p_0 = P[C = 0]$  και  $p_1 = P[C = 1]$  (θα τα υπολογίσουμε παρακάτω) έχουμε πως:

$$E[Q + C] = p_0 E[Q|C = 0] + p_1 (E[Q|C = 1] + 1). \quad (4.31)$$

Επίσης, με ίδιο σκεπτικό και δεδομένου ότι ο πελάτης που φεύγει έχει μηδενικό χρόνο αναμονής έχουμε :  $E[S] = p_0 E[S|C^- = 0] + p_1 q E[S|C^- = 1, join]$ . Τέλος, από PASTA έχουμε ότι:  $E[S|C^- = 1, join] = E[S_1] + (E[Q|C = 1] + 1) E[U_{0,1}]$  και άρα συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$E[S] = p_0 E[B] + p_1 q (E[S_1] + (E[Q|C = 1] + 1) E[U_{0,1}]). \quad (4.32)$$

Άρα, συνδυάζοντας τις σχέσεις: (4.30), (4.31), (4.32) έχουμε μια πρώτη σχέση μεταξύ  $E[Q|C = 0]$  και  $E[Q|C = 1]$ .

Για τα  $p_0, p_1$  από νόμο του Little στον χώρο εξυπηρέτησης έχουμε:  $p_1 = E[Q_s] = (\lambda p_0 + \lambda q p_1) E[B]$  και άρα η εξίσωση κανονικοποίησης μας δίνει:

$$p_0 + \frac{\lambda p_0 E[B]}{1 - \lambda q E[B]} = 1 \iff p_0 = \frac{1 - \lambda q E[B]}{1 - \lambda q E[B] + \lambda E[B]} \quad (4.33)$$

και άρα

$$p_1 = \frac{\lambda E[B]}{1 - \lambda q E[B] + \lambda E[B]}. \quad (4.34)$$

Επομένως, αναζητάμε άλλη μια σχέση μεταξύ των  $E[Q|C = 0]$  και  $E[Q|C = 1]$ .

Αν θεωρήσουμε αναγεννητική διαδικασία με σημεία αναγέννησης τις επιτυχημένες εξυπηρετήσεις, από το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη (ΣΑΘΚ) έχουμε πως το ποσοστό του χρόνου που ο υπηρέτης είναι απασχολημένος είναι ο λόγος του μέσου χρόνου που είναι απασχολημένος σε έναν κύκλο ( $E[B]$ ) προς τη μέση διάρκεια του κύκλου αυτού ( $r_e \frac{1}{\lambda} + (1 - r_e) \frac{1 - \tilde{A}(\lambda)}{\lambda} + E[B]$ ). Ουσιαστικά ο μέσος χρόνος ενός κύκλου χωρίζεται στον μέσο χρόνο μέχρι να έρθει πελάτης, ο οποίος είτε θα βρει άδεια τροχιά με μια πιθανότητα που τη συμβολίζουμε με  $r_e$  (άρα μέσος χρόνος  $r_e \frac{1}{\lambda}$ ) είτε όχι με πιθανότητα  $1 - r_e$  (άρα μέσος χρόνος  $(1 - r_e) \frac{1 - \tilde{A}(\lambda)}{\lambda}$ ), αφού από παραπάνω έχουμε πως  $E[\min(A, T_\lambda)] = \frac{1 - \tilde{A}(\lambda)}{\lambda}$ . Άρα, έχουμε πως:

$$p_1 = \frac{E[B]}{r_e \frac{1}{\lambda} + (1 - r_e) \frac{1 - \tilde{A}(\lambda)}{\lambda} + E[B]} \iff p_1 = \frac{\lambda E[B]}{r_e + (1 - r_e)(1 - \tilde{A}(\lambda)) + \lambda E[B]}$$

και άρα από τη σχέση (4.34) πρέπει:

$$1 - \lambda q E[B] = r_e + (1 - r_e)(1 - \tilde{A}(\lambda)) \iff r_e = 1 - \frac{\lambda E[B] q}{\tilde{A}(\lambda)}. \quad (4.35)$$

Από τον υπολογισμό του  $r_e$  μπορούμε να βρούμε και τη συνθήκη ευστάθειας γι' αυτό το σύστημα. Πιο συγκεκριμένα, για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει:

$$r_e > 0 \iff 1 - \frac{\lambda E[B]q}{\tilde{A}(\lambda)} > 0 \iff \tilde{A}(\lambda) - \lambda E[B]q > 0. \quad (4.36)$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε και τη μέση διάρκεια ανάκτησης που θα τη συμβολίζουμε με  $E[I]$ , όπου αν η τροχιά είναι άδεια είναι  $\frac{1}{\lambda}$  ενώ αντίθετα είναι  $E[\min(A, T_\lambda)] = \frac{1 - \tilde{A}(\lambda)}{\lambda}$ . Άρα, με μια αντικατάσταση του  $r_e$  έχουμε:

$$E[I] = r_e \frac{1}{\lambda} + (1 - r_e) \frac{1 - \tilde{A}(\lambda)}{\lambda} \iff E[I] = \frac{1 - \lambda E[B]q}{\lambda}. \quad (4.37)$$

Έστω  $Q_{idle}^+$  ο αριθμός των πελατών στην τροχιά στην αρχή του χρόνου ανάκτησης. Αυτός ο αριθμός συμπίπτει με τον αριθμό των πελατών στην τροχιά αμέσως μετά από ολοκλήρωση εξυπηρέτησης. Όμως, λόγω μεμονομένων μεταβάσεων η κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα αμέσως μετά την εξυπηρέτηση είναι η ίδια με την κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα λίγο πριν τις πραγματικές αφίξεις. Άρα, έχουμε πως η άφιξη που θα δει ελεύθερο υπηρέτη θα μπαίνει με ρυθμό  $\lambda p_0$  ενώ η άφιξη που θα δει απασχολημένο υπηρέτη θα μπαίνει με ρυθμό  $\lambda q p_1$ . Στην πρώτη περίπτωση ο αριθμός των ατόμων στην τροχιά θα μείνει ίδιος ( $E[Q]$ ) ενώ στη δεύτερη θα αυξηθεί κατά  $1(E[Q] + 1)$ .

Επομένως, έχουμε πως:  $E[Q_{idle}^+] = \frac{\lambda p_0}{\lambda p_0 + \lambda q p_1} E[Q + C | C = 0] + \frac{\lambda q p_1}{\lambda p_0 + \lambda q p_1} E[Q + C | C = 1]$  και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.33) και (4.34), έχουμε:

$$E[Q_{idle}^+] = (1 - \lambda E[B]q) E[Q | C = 0] + \lambda E[B]q E[Q | C = 1] + \lambda E[B]q. \quad (4.38)$$

Αν θεωρήσουμε ήμι-αναγεννητική διαδικασία με σημεία αναγέννησης τα σημεία που τελειώνει η εξυπηρέτηση και αρχίζει η περίοδος αργίας του υπηρέτη, από το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη έχουμε πως ο μέσος αριθμός πελατών στην τροχιά δεδομένου ότι ο υπηρέτης είναι ελεύθερος, είναι ο λόγος του μέσου αριθμού πελατών σε έναν κύκλο  $((1 - r_e) \frac{1 - \tilde{A}(\lambda)}{\lambda} E[Q_{idle}^+ | Q_{idle}^+ > 0])$  προς τη μέση διάρκεια του κύκλου αυτού ( $E[I]$ ). Ουσιαστικά ο μέσος αριθμός πελατών στην τροχιά σε έναν κύκλο χωρίζεται στην περίπτωση που ο πελάτης βρει άδεια τροχιά με πιθανότητα  $r_e$  (άρα μέσος αριθμός πελατών  $r_e \frac{1}{\lambda} \cdot 0$ ) και στην περίπτωση που δεν θα τη βρει άδεια με πιθανότητα  $1 - r_e$  (άρα μέσος αριθμός πελατών  $(1 - r_e) \frac{1 - \tilde{A}(\lambda)}{\lambda} E[Q_{idle}^+ | Q_{idle}^+ > 0]$ ).

Άρα, λαμβάνοντας υπόψη πως ο αριθμός των πελατών μένει σταθερός κατά τη διάρκεια ενός τέτοιου κύκλου, πως  $1 - r_e = P[Q_{idle}^+ > 0]$  (πιθανότητα να έχει η τροχιά τουλάχιστον έναν πελάτη μετά από ολοκλήρωση εξυπηρέτησης) και πως  $E[Q_{idle}^+] = E[Q_{idle}^+ 1_{\{Q_{idle}^+ > 0\}}]$  έχουμε:

$$E[Q | C = 0] = \frac{r_e \frac{1}{\lambda} \cdot 0 + (1 - r_e) \frac{1 - \tilde{A}(\lambda)}{\lambda} E[Q_{idle}^+ | Q_{idle}^+ > 0]}{E[I]}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1-\tilde{A}(\lambda)}{\lambda} E[Q_{idle}^+ 1_{\{Q_{idle}^+ > 0\}}]}{E[I]} \\
&= \frac{\frac{1-\tilde{A}(\lambda)}{\lambda} E[Q_{idle}^+]}{E[I]} \tag{4.39}
\end{aligned}$$

και άρα από τις σχέσεις (4.38) και (4.39) παίρνουμε μια δεύτερη σχέση για τα  $E[Q|C = 0]$  και  $E[Q|C = 1]$ , η οποία παρουσιάζεται στο Λήμμα 3 (iv) [2].

Άρα, συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις αυτές καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$E[Q|C = 1] = \frac{\lambda q (-2\tilde{A}(\lambda)E^2[B] + \tilde{A}(\lambda)E[B^2] + 2E^2[B])}{2E[B](\tilde{A}(\lambda) - \lambda E[B]q)} \tag{4.40}$$

και με βάση τις σχέσεις (4.26),(4.27),(4.28),(4.29) και (4.40) έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$S^{(u)}(q) = R - K \left( \frac{E[B^2]}{2E[B]} + \frac{(-2\lambda q E^2[B] + \lambda q E[B^2] + 2E[B])(1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B])}{2E[B](\tilde{A}(\lambda) - \lambda E[B]q)\lambda} \right), \tag{4.41}$$

όπου είναι μάλιστα φθίνουσα ως προς  $q$ .

Τώρα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε το πρώτο βασικό θεώρημα [2] στο μοντέλο αυτό σχετικά με τον υπολογισμό της στρατηγικής ισορροπίας  $q_e^{(u)}$ , κάτω από την υπόθεση ότι το σύστημα είναι ευσταθές αν όλοι εισέρχονται με πιθανότητα 1 και άρα κάτω από τη σχέση (4.36) με  $q = 1$ , δηλαδή αν:

$$\tilde{A}(\lambda) - \lambda E[B] > 0. \tag{4.42}$$

**Θεώρημα 4.2.1.** (Theorem 1) Στη μη παρατηρήσιμη  $M/G/1$  ουρά κάτω από την παραπάνω σχέση (4.42) και θέτοντας  $t^{(u)} = \frac{R}{K} - \frac{E[B^2]}{2E[B]}$  έχουμε την εξής μοναδική στρατηγική ισορροπίας, να εισέρχεται ο επιλεγμένος πελάτης με πιθανότητα  $q_e^{(u)}$  όταν βλέπει τον υπηρέτη απασχολημένο η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$q_e^{(u)} = \begin{cases} 0 & , \text{αν } t^{(u)} \leq \frac{1-\tilde{A}(\lambda)+\lambda E[B]}{\tilde{A}(\lambda)\lambda} \\ x & , \text{αν } \frac{1-\tilde{A}(\lambda)+\lambda E[B]}{\tilde{A}(\lambda)\lambda} < t^{(u)} < \frac{(-2\lambda E^2[B]+\lambda E[B^2]+2E[B])(1-\tilde{A}(\lambda)+\lambda E[B])}{2E[B](\tilde{A}(\lambda)-\lambda E[B])\lambda} \\ 1 & , \text{αν } t^{(u)} \geq \frac{(-2\lambda E^2[B]+\lambda E[B^2]+2E[B])(1-\tilde{A}(\lambda)+\lambda E[B])}{2E[B](\tilde{A}(\lambda)-\lambda E[B])\lambda} \end{cases}, \tag{4.43}$$

$$\text{όπου } x = \frac{2\lambda E[B]\tilde{A}(\lambda)t^{(u)} - 2E[B](1-\tilde{A}(\lambda)+\lambda E[B])}{2\lambda^2 E^2[B]t^{(u)} + (\lambda E[B^2] - 2\lambda E^2[B])(1-\tilde{A}(\lambda)+\lambda E[B])}.$$

Απόδειξη. Μια χρήσιμη παρατήρηση εδώ είναι ότι η  $S^{(u)}(q)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του

$q$  και άρα έχει μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα:

$$S^{(u)}(0) = R - K \left( \frac{E[B^2]}{2E[B]} + \frac{2E[B](1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B])}{2E[B]\tilde{A}(\lambda)\lambda} \right)$$

$$S^{(u)}(1) = R - K \left( \frac{E[B^2]}{2E[B]} + \frac{(-2\lambda E^2[B] + \lambda E[B^2] + 2E[B])(1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B])}{2E[B](\tilde{A}(\lambda) - \lambda E[B])\lambda} \right).$$

Έχουμε τις εξής περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο της  $S^{(u)}(q)$ :

►  $S^{(u)}(0) \leq 0 \iff t^{(u)} \leq \frac{1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B]}{\tilde{A}(\lambda)\lambda}$  (άρα  $q_e = 0$ ).

►  $S^{(u)}(1) \geq 0 \iff t^{(u)} \geq \frac{(-2\lambda E^2[B] + \lambda E[B^2] + 2E[B])(1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B])}{2E[B](\tilde{A}(\lambda) - \lambda E[B])\lambda}$  (άρα  $q_e = 1$ ).

►  $S^{(u)}(q) = 0$  έχει μοναδική λύση την :

$$q_e^{(u)} = \frac{2\lambda E[B]\tilde{A}(\lambda)t^{(u)} - 2E[B](1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B])}{2\lambda^2 E^2[B]t^{(u)} + (\lambda E[B^2] - 2\lambda E^2[B])(1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B])}$$
 αν και μόνο αν:
$$\frac{1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B]}{\tilde{A}(\lambda)\lambda} < t^{(u)} < \frac{(-2\lambda E^2[B] + \lambda E[B^2] + 2E[B])(1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B])}{2E[B](\tilde{A}(\lambda) - \lambda E[B])\lambda}.$$

Οπότε έτσι προκύπτει το θεώρημα.

□

Εδώ οι Baron, Economou, Μανου παρατήρησαν ότι αν δεν ισχύει η συνθήκη (4.42) τότε δεν υφίσταται ο τρίτος κλάδος του  $q_e^{(u)}$  και έχουμε πως:

$$q_e^{(u)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } t^{(u)} \leq \frac{1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B]}{\tilde{A}(\lambda)\lambda} \\ x & \text{αν } \frac{1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B]}{\tilde{A}(\lambda)\lambda} < t^{(u)} \leq \frac{(-2\lambda E^2[B] + \lambda E[B^2] + 2E[B])(1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B])}{2E[B](\tilde{A}(\lambda) - \lambda E[B])\lambda} \end{cases} \quad (4.44)$$

#### 4.2.2 Στρατηγικές κοινωνικής βελτιστοποίησης στη μη παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά με ντετερμινιστικούς χρόνους επανάκτησης

Στην παράγραφο αυτή αρχικά θα ασχοληθούμε με τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης κοινωνικού οφέλους σε κατάσταση ισορροπίας, ως συνάρτηση του ντετερμινιστικού χρόνου επανάκτησης  $d$  και με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης ρυθμού  $\mu$ . Κατόπιν, θα δούμε

τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης κοινωνικού οφέλους κάτω από κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική, με χρόνο επανάκτησης  $d = 0$  και στο τέλος θα αναλύσουμε τρόπους συντονισμού του συστήματος, δηλαδή θα βάζουμε στο σύστημα συγκεκριμένα  $d$  (αν είναι εφικτό), ώστε οι δύο παραπάνω συναρτήσεις κοινωνικού οφέλους να είναι ίσες.

Αν θέσουμε  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  και  $\nu = \frac{R\mu}{K} > 1$  οι σχέσεις (4.41), (4.43) μετά από απλοποιήσεις και γνωρίζοντας πως:  $E[B] = \frac{1}{\mu}$ ,  $E[B^2] = \frac{2}{\mu^2}$ ,  $\tilde{A}(\lambda) = e^{-\lambda d}$ , δίνουν ότι η συνάρτηση ατομικού οφέλους και η τρίκλαδη συνάρτηση της στρατηγικής ισορροπίας δίνονται από τους τύπους:

$$S^{(u)}(q) = \frac{K}{\mu} \left( \nu - 1 - \frac{1 - e^{-\lambda d} + \rho}{\rho(e^{-\lambda d} - \rho q)} \right) \quad (4.45)$$

$$q_e^{(u)}(d) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } d \in [0, (d_2^{(u)})^+] \\ x & , \text{αν } d \in ((d_2^{(u)})^+, (d_1^{(u)})^+) \\ 0 & , \text{αν } d \in [(d_1^{(u)})^+, \infty) \end{cases} \quad (4.46)$$

όπου  $x = \frac{(\rho(\nu-1)+1)e^{-\lambda d} - (1+\rho)}{\rho^2(\nu-1)}$ ,  $d_1^{(u)} = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\rho(\nu-1)+1}{1+\rho} \right)$ ,  $d_2^{(u)} = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\rho(\nu-1)+1}{1+\rho+\rho^2(\nu-1)} \right)$ .

Για παράδειγμα, θα δούμε πως βγαίνει ο πρώτος κλάδος. Έχουμε πως:

$$\begin{aligned} q_e^{(u)} = 1 & \iff t^{(u)} \geq \frac{(-2\lambda E^2[B] + \lambda E[B^2] + 2E[B])(1 - \tilde{A}(\lambda) + \lambda E[B])}{2E[B](\tilde{A}(\lambda) - \lambda E[B])\lambda} \\ & \iff \frac{R}{K} - \frac{1}{\mu} \geq \frac{\frac{2}{\mu}(1 - e^{-\lambda d} + \rho)}{2\rho(e^{-\lambda d} - \rho)} \\ & \iff \nu - 1 \geq \frac{(1 - e^{-\lambda d} + \rho)}{\rho(e^{-\lambda d} - \rho)} \\ & \iff \nu - 1 \geq -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho(e^{-\lambda d} - \rho)} \\ & \iff \rho(\nu - 1) + 1 \geq \frac{1}{e^{-\lambda d} - \rho} \\ & \iff e^{-\lambda d} \geq \rho + \frac{1}{\rho(\nu - 1) + 1} \\ & \iff d \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\rho(\nu - 1) + 1}{1 + \rho + \rho^2(\nu - 1)} \right) \\ & \iff d \leq (d_2^{(u)})^+, \end{aligned}$$

όμοια βγαίνουν και τα υπόλοιπα.

Άρα, εφόσον ο επιλεγμένος πελάτης μπει, θα βρει το σύστημα ελεύθερο με πιθανότητα  $p_0$  και θα έχει όφελος  $R - \frac{K}{\mu}$  ενώ διαφορετικά με πιθανότητα  $p_1$  θα έχει όφελος  $S^{(u)}(q)$ . Επομένως, το κοινωνικό όφελος δεδομένου ότι οι πελάτες ενεργούν ατομικά δηλαδή το σύστημα είναι σε ισορροπία (καθένας εισέρχεται με πιθανότητα  $q_e^{(u)}(d)$  που έχουμε από

(4.46) Θα δίνεται από τον τύπο:

$$SW_e^{(u)}(d) = \lambda p_0 \left(R - \frac{K}{\mu}\right) + \lambda(1 - p_0) q_e^{(u)}(d) S^{(u)}(q_e^{(u)}(d)). \quad (4.47)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.47) το  $p_0$ , το  $q_e^{(u)}(d)$  και το  $S^{(u)}(q_e^{(u)}(d))$  από τις σχέσεις (4.33), (4.45), (4.46) καταλήγουμε στην τρίκλαδη συνάρτηση:

$$SW_e^{(u)}(d) = \begin{cases} K\rho\left(\nu - \frac{1}{e^{-\lambda d} - \rho}\right) & , \text{αν } d \in [0, (d_2^{(u)})^+] \\ K\rho(\nu - 1) \frac{\nu + \frac{1}{\rho} - (\nu - 1 + \frac{1}{\rho})e^{-\lambda d}}{(\nu - 1 + \frac{1}{\rho})(1 + \rho - e^{-\lambda d})} & , \text{αν } d \in \left((d_2^{(u)})^+, (d_1^{(u)})^+\right) \\ K \frac{\rho}{1 + \rho} (\nu - 1) & , \text{αν } d \in \left[(d_1^{(u)})^+, \infty\right) \end{cases} \quad (4.48)$$

Άρα, τώρα είμαστε σε θέση να βρούμε το μέγιστο της κοινωνικής ωφέλειας  $SW_e^{(u)*}$  κάτω από ισορροπία ( $SW_e^{(u)*} = \max_d SW_e^{(u)}(d)$ ) καθώς και για ποιο  $d_e^{(u)*}$  επιτυγχάνεται αυτό ( $d_e^{(u)*} = \operatorname{argmax}_d SW_e^{(u)}(d)$ ). Θα παρουσιάσουμε το αντίστοιχο θεώρημα και την απόδειξη του [2].

**Θεώρημα 4.2.2.** (Proposition 2) Στη μη παρατηρήσιμη  $M/M/1$  ουρά με ντετερμινιστικούς χρόνους επανάκτησης  $d$  έχουμε τα εξής αποτελέσματα σχετικά με το  $q_e^{(u)}(d)$ , το  $SW_e^{(u)*}$  και το  $d_e^{(u)*}$  ανάλογα με την τιμή του  $\nu$ :

► αν  $\nu \in (1, 2]$

$$q_e^{(u)}(d) = 0 \quad \forall d \leq 0, \quad SW_e^{(u)*} = K \frac{\rho}{1 + \rho} (\nu - 1) = \frac{(R\mu - K)\rho}{1 + \rho} \quad \text{και } d_e^{(u)*} \in [0, \infty),$$

► αν  $(\nu \in (2, \frac{2-\rho}{1-\rho})$  και  $\rho < 1)$  ή  $(\nu \in (2, \infty)$  και  $\rho \geq 1)$

$$q_e^{(u)}(d) = \begin{cases} x & , \text{αν } d \in (0, d_1^{(u)}) \\ 0 & , \text{αν } d \in [d_1^{(u)}, \infty) \end{cases} \quad \text{και}$$

$$SW_e^{(u)*} = K \frac{\rho}{1 + \rho} (\nu - 1) = \frac{(R\mu - K)\rho}{1 + \rho} \quad \text{και } d_e^{(u)*} \in [d_1, \infty),$$

► αν  $\nu \in [\frac{2-\rho}{1-\rho}, \infty)$  και  $\rho < 1$

$$q_e^{(u)}(d) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } d \in [0, (d_2^{(u)})^+] \\ x & , \text{αν } d \in \left((d_2^{(u)})^+, (d_1^{(u)})^+\right) \quad \text{και} \\ 0 & , \text{αν } d \in \left[(d_1^{(u)})^+, \infty\right) \end{cases}$$

$$\text{αν } \nu \in \left[\frac{2-\rho}{1-\rho}, \frac{2}{1-\rho}\right)$$

$$SW_e^{(u)*} = K \frac{\rho}{1+\rho}(\nu - 1) = \frac{(R\mu - K)\rho}{1+\rho} \text{ και } d_e^{(u)*} \in [d_1, \infty),$$

$$\text{αν } \nu = \frac{2}{1-\rho}$$

$$SW_e^{(u)*} = K \frac{\rho}{1+\rho}(\nu - 1) = \frac{(R\mu - K)\rho}{1+\rho} \text{ και } d_e^{(u)*} \in \{0\} \cup [d_1, \infty),$$

$$\text{αν } \nu \in \left(\frac{2}{1-\rho}, \infty\right)$$

$$SW_e^{(u)*} = K\rho(\nu - 1) - K \frac{\rho^2}{1-\rho} \text{ και } d_e^{(u)*} = 0.$$

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι  $d_1^{(u)} \geq 0 \iff \nu \geq 2$  και  $d_2^{(u)} \geq 0 \iff (\nu \geq \frac{2-\rho}{1-\rho} \text{ και } \rho < 1)$ .

Άρα, αν  $\nu \in (1, 2]$  έχουμε μόνο τον τρίτο κλάδο στις σχέσεις (4.46),(4.48) και άρα  $q_e^{(u)*}(d) = 0$  και  $SW_e^{(u)}(d) = K \frac{\rho}{1+\rho}(\nu - 1)$  για όλα τα  $d \in [0, \infty)$ . Συνεπώς,  $SW_e^{(u)*} = K \frac{\rho}{1+\rho}(\nu - 1)$  και  $d_e^{(u)*} \in [0, \infty)$ .

Έπειτα, αν  $(\nu \in (2, \frac{2-\rho}{1-\rho})$  και  $\rho < 1)$  ή  $(\nu \in (2, \infty)$  και  $\rho \geq 1)$  έχουμε μόνο τον δεύτερο και τρίτο κλάδο στις σχέσεις (4.46),(4.48) και άρα:

$$q_e^{(u)}(d) = \begin{cases} x & , \text{αν } d \in (0, d_1^{(u)}) \\ 0 & , \text{αν } d \in [d_1^{(u)}, \infty) \end{cases}$$

$$SW_e^{(u)}(d) = \begin{cases} K\rho(\nu - 1) \frac{\nu + \frac{1}{\rho} - (\nu - 1 + \frac{1}{\rho})e^{-\lambda d}}{(\nu - 1 + \frac{1}{\rho})(1 + \rho - e^{-\lambda d})} & \text{αν } d \in (0, d_1^{(u)}) \\ K \frac{\rho}{1+\rho}(\nu - 1) & \text{αν } d \in [d_1^{(u)}, \infty) \end{cases}.$$

Άρα, εύκολα βλέπει κανείς πως η  $SW_e^{(u)}(d)$  είναι αύξουσα για  $d \in (0, d_1^{(u)})$  και σταθερή για  $d \in [d_1^{(u)}, \infty)$ . Συνεπώς,  $SW_e^{(u)*} = K \frac{\rho}{1+\rho}(\nu - 1)$  και  $d_e^{(u)*} \in [d_1, \infty)$ .

Τέλος, αν  $\nu \in [\frac{2-\rho}{1-\rho}, \infty)$  και  $\rho < 1$  έχουμε και τους τρεις κλάδους στις σχέσεις (4.46),(4.48) και άρα εύκολα βλέπει κανείς πως η  $SW_e^{(u)}(d)$  είναι φθίνουσα για  $d \in (0, d_2^{(u)})$ , αύξουσα για  $d \in (d_2^{(u)}, d_1^{(u)})$  και σταθερή για  $d \in [d_1^{(u)}, \infty)$ . Επομένως, πιθανά μέγιστα είναι τα  $SW_e^{(u)}(0), SW_e^{(u)}(d_1^{(u)})$  και άρα συγκρίνοντας τα έχουμε:

$$SW_e^{(u)}(0) < SW_e^{(u)}(d_1^{(u)}) \iff K\rho\left(\nu - \frac{1}{1-\rho}\right) < K \frac{\rho}{1+\rho}(\nu - 1) \iff \nu < \frac{2}{1-\rho}.$$



Επομένως, αν  $\nu \in [\frac{2-\rho}{1-\rho}, \frac{2}{1-\rho})$  έχουμε μέγιστο το  $SW_e^{(u)}(d_1^{(u)})$  και συνεπώς  $SW_e^{(u)*} = K \frac{\rho}{1+\rho}(\nu - 1)$  και  $d_e^{(u)*} \in [d_1, \infty)$ . Έπειτα, αν  $\nu = \frac{2}{1-\rho}$  έχουμε μέγιστο το  $SW_e^{(u)}(d_1^{(u)}) = SW_e^{(u)}(0)$  και συνεπώς  $SW_e^{(u)*} = K \frac{\rho}{1+\rho}(\nu - 1)$  και  $d_e^{(u)*} \in \{0\} \cup [d_1, \infty)$ . Τέλος, αν  $\nu \in (\frac{2}{1-\rho}, \infty)$  έχουμε μέγιστο το  $SW_e^{(u)}(0)$  και άρα  $SW_e^{(u)*} = K\rho(\nu - \frac{1}{1-\rho}) = K\rho(\nu - 1) - K \frac{\rho^2}{1-\rho}$  και  $d_e^{(u)*} = 0$ . Έτσι έχουμε το θεώρημα.

□

Για να προχωρήσουμε τώρα θέτουμε με  $q_s^{(u)}$  την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική των πελατών σε ένα σύστημα με μηδενικό χρόνο ανάκτησης, δηλαδή με  $d = 0$  και  $SW_s^{(u)}$  το αντίστοιχο κοινωνικό όφελος. Όταν οι πελάτες δρουν ατομικά είναι λογικό να αδιαφορούν για τις επιπτώσεις που προκαλούν στους υπόλοιπους, οπότε έχουμε ότι το κοινωνικό όφελος κάτω από ισορροπία είναι μικρότερο από το κοινωνικό όφελος όταν χρησιμοποιείται η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική. Δηλαδή, έχουμε πως:  $SW_e^{(u)}(0) < SW_s^{(u)}$ . Παρακάτω θα δούμε ακριβή υπολογισμό του  $SW_s^{(u)}$  και άρα τα δύο παραπάνω ποσά θα μπορούν να συγκριθούν. Οπότε σε αυτό το σημείο οι Βαρον, Εσονομου, Μανου [2] ασχολήθηκαν με την εύρεση κατάλληλων  $d$ , όταν αυτά υπάρχουν, ώστε να οδηγούν τους πελάτες να λειτουργούν κοινωνικά βέλτιστα και έτσι το σύστημα να συντονίζεται, να αυξάνεται δηλαδή το  $SW_e^{(u)*}$  και να έχουμε  $SW_e^{(u)*} = SW_s^{(u)}$ . Οπότε, αρχικά θα παρουσιάσουμε τον υπολογισμό των  $q_s^{(u)}$  και  $SW_s^{(u)}$  [2].

**Θεώρημα 4.2.3.** (Proposition 3) Στη μη παρατηρήσιμη  $M/M/1$  ουρά χωρίς χρόνους επανάκτησης, δηλαδή με  $d = 0$ , έχουμε τα εξής αποτελέσματα σχετικά με το  $SW_s^{(u)}$  και το  $q_s^{(u)}$  σχετικά με τις τιμές του  $\nu$ :

► αν  $\nu \in (1, 2 + \rho]$

$$SW_s^{(u)} = K \frac{\rho}{1+\rho}(\nu - 1) = \frac{(R\mu - K)\rho}{1+\rho} \text{ και } q_s^{(u)} = 0,$$

► αν  $(\nu \in (2 + \rho, \frac{2-\rho}{(1-\rho)^2}) \text{ και } \rho < 1)$  ή  $(\nu \in (2 + \rho, \infty) \text{ και } \rho \geq 1)$

$$SW_s^{(u)} = \frac{K\rho(\nu-1) - \lambda R\rho q_1^{(u)}}{(1+\rho(1-q_1^{(u)}))(1-\rho q_1^{(u)})} \text{ και } q_s^{(u)} = q_1^{(u)},$$

► αν  $\nu \in [\frac{2-\rho}{(1-\rho)^2}, \infty)$  και  $\rho < 1$

$$SW_s^{(u)} = K\rho(\nu - 1) - K \frac{\rho^2}{1-\rho} \text{ και } q_s^{(u)} = 1,$$

$$\text{όπου } q_1^{(u)} = \frac{1}{\nu\rho}(\nu - 1 - \sqrt{\nu\rho + 1}).$$

Απόδειξη. Από τις σχέσεις (4.45) ,(4.47) με  $q$  στη θέση του  $q_e^{(u)}(d)$  σε συνδυασμό με τη σχέση

$$p_0 = \frac{1 - \lambda q E[B]}{1 - \lambda q E[B] + \lambda E[B]} = \frac{1 - \rho q}{1 - \rho q + \rho} = 1 - \frac{\rho}{1 - \rho q + \rho},$$

έχουμε πως:

$$\begin{aligned} SW^{(u)}(q, 0) &= \lambda p_0 \left( R - \frac{K}{\mu} \right) + \lambda (1 - p_0) q \left( \frac{K}{\mu} \left( \nu - 1 - \frac{1}{1 - \rho q} \right) \right) \\ &= \frac{\lambda - \lambda \rho q}{1 - \rho q + \rho} \left( R - \frac{K}{\mu} \right) + \frac{\lambda \rho q}{1 - \rho q + \rho} \left( \frac{K}{\mu} \left( \nu - 1 - \frac{1}{1 - \rho q} \right) \right) \\ &= \frac{\lambda - \lambda \rho q}{1 - \rho q + \rho} \left( R - \frac{K}{\mu} \right) + \frac{K \rho^2 q}{1 - \rho q + \rho} \left( \nu - 1 - \frac{1}{1 - \rho q} \right) \\ &= \frac{\lambda - \lambda \rho q}{1 - \rho q + \rho} \left( R - \frac{K}{\mu} \right) + \frac{K \rho^2 q}{1 - \rho q + \rho} \left( \frac{\nu - \nu \rho q + \rho q - 2}{1 - \rho q} \right) \\ &= \frac{(\lambda - \lambda \rho q) \left( R - \frac{K}{\mu} \right) (1 - \rho q) + K \rho^2 q (\nu - \nu \rho q + \rho q - 2)}{(1 - \rho q + \rho)(1 - \rho q)} \\ &= \frac{\rho(1 - \rho q)(R\mu - K)(1 - \rho q) + K \rho^2 q \nu - K \rho^3 q^2 \nu + K \rho^3 q^2 - 2K \rho^2 q}{(1 - \rho q + \rho)(1 - \rho q)} \\ &= \frac{(\rho R \mu - K \rho)(1 - 2\rho q + \rho^2 q^2) + K \rho^2 q \nu - K \rho^3 q^2 \nu + K \rho^3 q^2 - 2K \rho^2 q}{(1 - \rho q + \rho)(1 - \rho q)} \\ &= \frac{\rho R \mu - K \rho - 2\rho^2 q R \mu + \rho^3 R \mu q^2 - K \rho^3 q^2 + K \rho^2 q \nu - K \rho^3 q^2 \nu + K \rho^3 q^2}{(1 - \rho q + \rho)(1 - \rho q)} \\ &= \frac{K \rho \nu - K \rho - 2R \lambda \rho q + \rho^3 R \mu q^2 + R \mu \rho^2 q - R \mu \rho^3 q^2}{(1 - \rho q + \rho)(1 - \rho q)} \\ &= \frac{K \rho (\nu - 1) - R \lambda \rho q}{(1 + \rho(1 - q))(1 - \rho q)}. \end{aligned}$$

Όμως, το σύστημα είναι ευσταθές κάτω από τη σχέση (4.36) για  $d = 0$  στο συγκεκριμένο μοντέλο και άρα είναι ευσταθές όταν:

$$e^0 - \rho q > 0 \iff q < \frac{1}{\rho} \quad (4.49)$$

και επομένως στην περίπτωση που  $q \geq \frac{1}{\rho}$  θέτουμε το  $SW^{(u)}(q, 0)$  ίσο με  $-\infty$ .

Άρα, καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$SW^{(u)}(q, 0) = \begin{cases} \frac{K \rho (\nu - 1) - R \lambda \rho q}{(1 + \rho(1 - q))(1 - \rho q)} & \text{αν } q \in [0, 1], q < \frac{1}{\rho} \\ -\infty & \text{αν } q \in [0, 1], q \geq \frac{1}{\rho} \end{cases}.$$

Θα ασχοληθούμε με το πρόσημο της παραγώγου η οποία μετά από πράξεις δίνεται από

τον τύπο:

$$\frac{dSW^{(u)}(q, 0)}{dq} = \frac{\lambda\rho^3 Rq^2 + (-2\rho^2\lambda R + 2K\rho^3)q + \lambda\rho R - K\rho^3 - 2K\rho^2}{(1 + \rho(1 - q))^2(1 - \rho q)^2}.$$

Ο αριθμητής έχει ρίζες  $q_1^{(u)} = \frac{1}{\nu\rho}(\nu - 1 - \sqrt{\nu\rho + 1})$ ,  $q_2^{(u)} = \frac{1}{\nu\rho}(\nu - 1 + \sqrt{\nu\rho + 1})$  ενώ ο παρονομαστής είναι θετικός. Επίσης, από τη μορφή των ριζών βλέπουμε πως:  $q_1^{(u)} < \frac{1}{\rho}$ ,  $q_2^{(u)} > \frac{1}{\rho}$  καθώς και ότι  $q_1^{(u)} \leq 1 \iff \rho \geq 1$  ή  $(\rho < 1$  και  $\nu \leq \frac{2-\rho}{(1-\rho)^2})$ .

Οπότε, αν  $\nu \in (1, 2 + \rho]$  τότε  $q_1^{(u)} < 0$  και εφόσον μεταξύ των ριζών έχουμε αρνητικό πρόσημο του αριθμητή και  $q_1^{(u)} < \frac{1}{\rho} < q_2^{(u)}$  έχουμε ότι για  $q \in [0, \min\{1, \frac{1}{\rho}\}) \Rightarrow \frac{dSW^{(u)}(q,0)}{dq} < 0$  και άρα το μέγιστο πετυχαίνεται για  $q_s^{(u)} = 0$  και με μια αντικατάσταση είναι το ζητούμενο.

Τώρα, αν  $(\rho < 1$  και  $\nu \in (2 + \rho, \frac{2-\rho}{(1-\rho)^2}])$  ή  $(\rho \geq 1$  και  $\nu \in (2 + \rho, \infty])$  τότε  $0 < q_1^{(u)} < 1$  και εφόσον για τιμές μικρότερες του  $q_1^{(u)}$  έχουμε θετικό πρόσημο του αριθμητή και για τιμές μεγαλύτερες του αλλά κάτω από το  $\min\{1, \frac{1}{\rho}\}$  έχουμε αρνητικό πρόσημο του αριθμητή, έχουμε πως για  $q \in [0, q_1^{(u)}) \Rightarrow \frac{dSW^{(u)}(q,0)}{dq} > 0$  και πως για  $q \in (q_1^{(u)}, \min\{1, \frac{1}{\rho}\}) \Rightarrow \frac{dSW^{(u)}(q,0)}{dq} < 0$  και άρα το μέγιστο επιτυγχάνεται για  $q_s^{(u)} = q_1^{(u)}$  και με μια αντικατάσταση είναι το ζητούμενο.

Τέλος, αν  $\rho < 1$  και  $\nu \in (\frac{2-\rho}{(1-\rho)^2}, \infty]$  τότε  $q_1^{(u)} > 1$  και εφόσον για τιμές μικρότερες του  $q_1^{(u)}$  έχουμε θετικό πρόσημο του αριθμητή, έχουμε ότι για  $q \in [0, \min\{1, \frac{1}{\rho}\}) = [0, 1) \Rightarrow \frac{dSW^{(u)}(q,0)}{dq} > 0$  και άρα το μέγιστο επιτυγχάνεται για  $q_s^{(u)} = 1$  και με μια αντικατάσταση είναι το ζητούμενο. □

Τώρα που υπολογίσαμε και τα  $SW_s^{(u)}, q_s^{(u)}$  μπορούμε να κλείσουμε το κομμάτι αυτό βλέποντας τρόπους να συντονίσουμε το σύστημα μέσω του παρακάτω θεωρήματος [2].

**Θεώρημα 4.2.4.** (Theorem 2) Στη μη παρατηρήσιμη  $M/M/1$  ουρά με τροχιά έχουμε τις εξής περιπτώσεις συντονισμού του συστήματος, ανάλογα με τις τιμές του  $\nu$ :

- αν  $\nu \in (1, 2]$ , το σύστημα συντονίζεται με μηδενικό χρόνο επανάκτησης,
- αν  $\nu \in (2, 2 + \rho]$ , το σύστημα μπορεί να συντονιστεί βάζοντας ένα  $d \geq d_1^{(u)}$ ,
- αν  $(\nu \in (2 + \rho, \frac{2}{1-\rho})$  και  $\rho < 1)$  ή  $(\nu \in (2 + \rho, \infty)$  και  $\rho \geq 1)$ , μπορούμε να αυξήσουμε το

$SW_e^{(u)}(0)$  αλλά το σύστημα δε μπορεί να συντονιστεί,

- αν  $\nu \in (\frac{2}{1-\rho}, \frac{2-\rho}{(1-\rho)^2})$  και  $\rho < 1$ , δε μπορούμε να αυξήσουμε το  $SW_e^{(u)}(0)$  και άρα το σύστημα δε μπορεί να συντονιστεί,
- αν  $\nu \in [\frac{2-\rho}{(1-\rho)^2}, \infty)$  και  $\rho < 1$ , το σύστημα συντονίζεται με μηδενικό χρόνο επανάκτησης.

Απόδειξη. Θα βασιστούμε στα Θεωρήματα 4.2.2 και 4.2.3.

Αν  $\nu \in (1, 2]$ , έχουμε πως  $q_e^{(u)}(d) = 0$  για  $d \in [0, \infty)$  και άρα  $q_e^{(u)}(0) = 0$ . Επίσης, έχουμε πως  $q_s^{(u)} = 0$ . Άρα, όταν  $d = 0$  οι πελάτες λειτουργούν και κοινωνικά βέλτιστα άρα το σύστημα είναι συντονισμένο.

Τώρα αν  $\nu \in (2, 2 + \rho]$ , έχουμε πως  $q_e^{(u)}(0) = x > 0$ . Επίσης, έχουμε πως  $q_s^{(u)} = 0$ . Άρα, όταν  $d = 0$  έχουμε ότι  $q_e^{(u)}(0) > q_s^{(u)} = 0$ . Άρα, οι πελάτες δε λειτουργούν κοινωνικά βέλτιστα και έτσι το σύστημα δεν είναι συντονισμένο όταν  $d = 0$ . Εντούτοις, από το Θεώρημα 4.2.2, μπορούμε να αυξήσουμε το κοινωνικό όφελος ισορροπίας με κάποιο  $d \geq d_1^{(u)}$  και τότε θα έχουμε  $SW_e^{(u)}(0) \leq SW_e^{(u)*} = K \frac{\rho}{1+\rho} (\nu - 1)$ . Τότε, βλέπουμε πως  $SW_e^{(u)*} = SW_s^{(u)}$ . Επομένως, στο σύστημα μπορεί να επιτευχθεί συντονισμός θέτοντας ένα  $d \geq d_1^{(u)}$  αυξάνοντας έτσι το κοινωνικό όφελος ισορροπίας κάνοντας το ίσο με το κοινωνικό όφελος κάτω από την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική.

Επίσης, αν  $(\nu \in (2 + \rho, \frac{2}{1-\rho})$  και  $\rho < 1)$  ή  $(\nu \in (2 + \rho, \infty)$  και  $\rho \geq 1)$  έχουμε πως  $q_e^{(u)}(0) = 1$  ή  $q_e^{(u)}(0) = x$ . Ακόμη, έχουμε πως  $q_s^{(u)} = q_1^{(u)}$ . Άρα, όταν  $d = 0$  μπορούμε να δούμε μετά από πράξεις πως και για τις δύο περιπτώσεις του  $q_e^{(u)}(0)$  έχουμε ότι  $q_e^{(u)}(0) > q_s^{(u)}$ . Άρα, οι πελάτες δε λειτουργούν κοινωνικά βέλτιστα και έτσι το σύστημα δεν είναι συντονισμένο όταν  $d = 0$ . Εντούτοις, από το Θεώρημα 4.2.2, μπορούμε να αυξήσουμε το κοινωνικό όφελος ισορροπίας με κάποιο  $d \geq d_1^{(u)}$  και τότε θα έχουμε  $SW_e^{(u)}(0) \leq SW_e^{(u)*} = K \frac{\rho}{1+\rho} (\nu - 1)$ . Όμως, αυτό μπορούμε να δούμε ότι είναι και πάλι μικρότερο του  $SW_s^{(u)} = \frac{K\rho(\nu-1) - \lambda R \rho q_1^{(u)}}{(1+\rho(1-q_1^{(u)}))(1-\rho q_1^{(u)})}$

και άρα δε μπορεί να επιτευχθεί συντονισμός παρ'ότι θέτοντας ένα  $d$  στο σύστημα αυξάνουμε το κοινωνικό όφελος ισορροπίας.

Έπειτα, αν  $\nu \in (\frac{2}{1-\rho}, \frac{2-\rho}{(1-\rho)^2})$  και  $\rho < 1$  έχουμε πως  $q_e^{(u)}(0) = 1$ . Επίσης, έχουμε πως  $q_s^{(u)} = q_1^{(u)}$ . Άρα, όταν  $d = 0$  έχουμε ότι  $q_e^{(u)}(0) > q_s^{(u)}$ . Άρα, οι πελάτες δεν λειτουργούν κοινωνικά βέλτιστα και έτσι το σύστημα δεν είναι συντονισμένο όταν  $d = 0$ . Μάλιστα, με βάση το Θεώρημα 4.2.2 δε μπορούμε να αυξήσουμε το κοινωνικό όφελος ισορροπίας με κάποιο  $d$  αφού  $SW_e^{(u)}(0) = SW_e^{(u)*} = K\rho(\nu - 1) - K \frac{\rho^2}{1-\rho}$  και αυτό μπορούμε να δούμε ότι είναι μικρότερο του  $SW_s^{(u)} = \frac{K\rho(\nu-1) - \lambda R \rho q_1^{(u)}}{(1+\rho(1-q_1^{(u)}))(1-\rho q_1^{(u)})}$  και άρα δεν μπορεί να επιτευχθεί συντονισμός.

Τέλος, εάν  $\nu \in [\frac{2-\rho}{(1-\rho)^2}, \infty)$  και  $\rho < 1$  έχουμε πως  $q_e^{(u)}(0) = 1$ . Επίσης, έχουμε πως  $q_s^{(u)} = 1$ . Άρα, όταν  $d = 0$  οι πελάτες λειτουργούν και κοινωνικά βέλτιστα άρα το σύστημα είναι συντονισμένο.

□

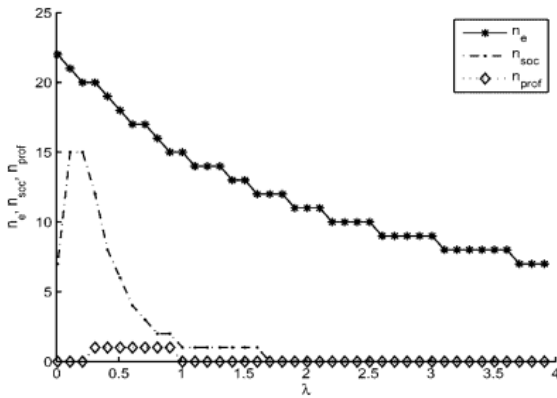
### 4.3 Αριθμητικά παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε διάφορα αριθμητικά παραδείγματα που εξετάστηκαν από τους Economidou και Kanta [7] καθώς και από τους Baron, Economidou, Μανου [2] στο μοντέλο με σταθερές επαναρποσπάθειες τόσο στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση όσο και στην παρατηρήσιμη. Η λογική που θα ακολουθήσουμε θα είναι όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο δηλαδή για να δούμε τον τρόπο που επηρεάζει μια παράμετρος το σύστημα θα κρατάμε όλες τις άλλες σταθερές και θα βλέπουμε πως θα μεταβάλλονται οι πιθανότητες εισόδου των πελατών ή τα βέλτιστα κατώφλια. Πιο συγκεκριμένα, στις πρώτες δύο εικόνες θα αναλύσουμε κάποια από τα διαγράμματα των Economidou και Kanta [7]. Στην Εικόνα 4.1 παρουσιάζουμε τον τρόπο που επιδρούν στο σύστημα οι παράμετροι:  $\lambda$ ,  $\alpha$  και  $R$  στο παρατηρήσιμο μοντέλο. Αρχικά, σχετικά με το  $\lambda$  παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το  $\lambda$  μειώνεται το κατώφλι  $n_e$  γιατί με το που θα ελευθερώνεται ο υπηρέτης θα αναλαμβάνει άτομο νέας άφιξης και όχι από την τροχιά και έτσι θα έχουμε μεγάλα κόστη αναμονής κάτι που δεν συμφέρει τον πελάτη όταν σκέφτεται ατομικά. Άρα, θα μειώνεται το κατώφλι όσο μεγαλώνει το  $\lambda$ .

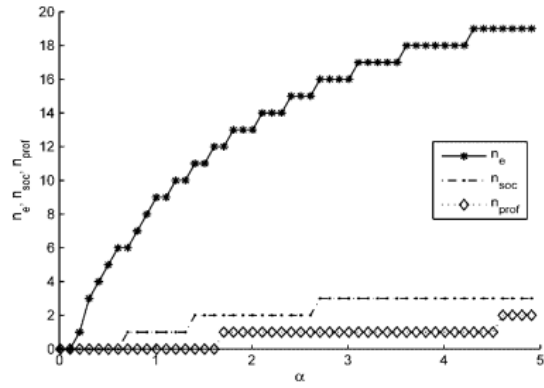
Από την άλλη πλευρά, σχετικά με τα  $n_{soc}, n_{prof}$ , για μικρά  $\lambda$  πρέπει να εισέρχονται όλο και παραπάνω πελάτες (αύξηση κατωφλίου) λόγω μικρής συσσώρευσης πελατών βοηθώντας έτσι το σύστημα. Παρόλα αυτά από ένα σημείο και μετά θα πρέπει να μειωθεί το κατώφλι καθώς οι πελάτες θα έρχονται έτσι και αλλιώς και άρα θα πρέπει να μειωθεί ο αριθμός αυτών που θα εισέρχονται για να μην συσσωρεύεται μεγάλο κόστος αναμονής. Τέλος, και τα τρία κατώφλια όπως παρατηρούμε όσο μεγαλώνει το  $\lambda$  τείνουν στο 0 δηλαδή για μεγάλα  $\lambda$  στο σύστημα εισέρχονται μόνο πελάτες που το βρίσκουν ελεύθερο όπως σε μια  $M/M/1/1$  ουρά αναμονής.

Έπειτα, όσο αυξάνεται είτε ο ρυθμός ανάκτησης, είτε η αμοιβή εξυπηρέτησης, παρατηρούμε, όπως αναμενόταν, πως αυξάνεται και το κατώφλι εισόδου των πελατών και στις δύο περιπτώσεις. Μάλιστα, αξίζει να σημειωθεί πως όσο το  $\alpha$  γίνεται πολύ μεγάλο, τότε όλο και παραπάνω πελάτες θα εισέρχονται στο σύστημα, κι αν είναι απασχολημένος ο υπηρέτης, με αποτέλεσμα καθώς  $\alpha \rightarrow \infty$  να έχουμε μια  $M/M/1$  παρατηρήσιμη ουρά και το κατώφλι από τη σχέση 4.16 να τείνει στο  $\lfloor \frac{R\mu}{C} - 1 \rfloor - 1$  το οποίο συμφωνεί και με τα αποτελέσματα του Naor [21] για την ίδια ουρά αναμονής.

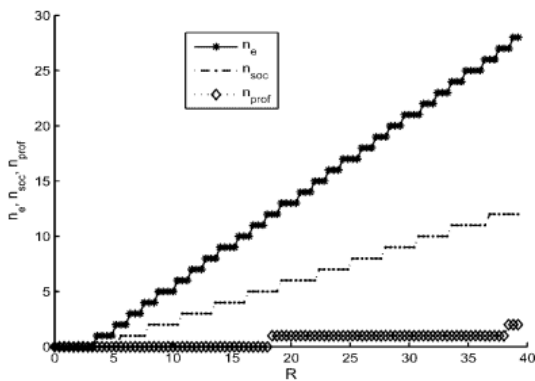
Τέλος, επιβεβαιώνεται παράλληλα η σχέση  $n_{prof} \leq n_{soc} \leq n_e$ . Αυτή η σχέση ερμηνεύεται ως εξής: αν οι πελάτες δρουν ατομικά θα μπαίνουν στο σύστημα ακόμα και αν είναι συνωστισμένο, αδιαφορώντας για τις επιδράσεις που ασκούν στους άλλους πελάτες και άρα αδιαφορώντας για το κοινωνικό όφελος. Γι' αυτό το λόγο το κατώφλι εισόδου κάτω



(α) Διάγραμμα  $n_e, n_{soc}, n_{prof}$  με  $\lambda$



(β) Διάγραμμα  $n_e, n_{soc}, n_{prof}$  με  $\alpha$

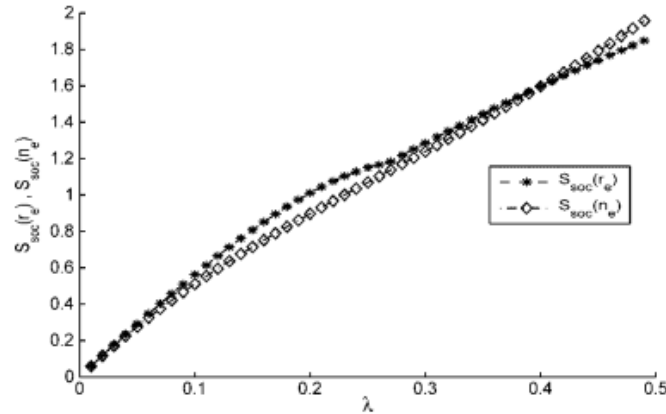


(γ) Διάγραμμα  $n_e, n_{soc}, n_{prof}$  με  $R$

Εικόνα 4.1: Επίδραση παραμέτρων στα βέλτιστα κατώφλια.

από την ισορροπία Nash είναι μεγαλύτερο από το κοινωνικά βέλτιστο κατώφλι, ενώ σύμφωνα και με τον Naor [21] κάτω και από το μονοπώλιο δεν θα επιτυγχάνεται το κοινωνικά βέλτιστο καθώς το κατώφλι κάτω από στρατηγική μονοπωλίου θα είναι μικρότερο από το κοινωνικά βέλτιστο κατώφλι.

Στη συνέχεια, στην Εικόνα 4.2 παρουσιάζουμε τον τρόπο που επιδρά στο κοινωνικό όφελος ο ρυθμός άφιξης  $\lambda$  τόσο στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο όσο και στο παρατηρήσιμο κάτω από στρατηγικές ισορροπίας. Να σημειωθεί πως η καμπύλη  $S_{soc}(r_e)$  δεν είναι τίποτα άλλο από την καμπύλη  $S_{soc}(q_e)$  όπου για λόγους συμβολισμού στη θέση του  $r_e$  έχουμε βάλει το  $q_e$ . Τώρα, αν εστιάσουμε και στα δύο μοντέλα βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται ο ρυθμός εισόδου, αυξάνεται και το κοινωνικό όφελος. Αυτό συμβαίνει γιατί αποθαρρύνονται οι ιδιοτελείς πελάτες και έτσι μειώνονται οι εξωτερικές επιδράσεις. Στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο ωστόσο παρατηρούμε μια αλλαγή στην αύξηση αυτή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχουν δύο αντικρουόμενα γεγονότα που συμβαίνουν. Για μικρά  $\lambda$  η τροχιά θα είναι συνήθως άδεια επομένως αυξάνοντας τον ρυθμό άφιξης, αυξάνουμε τα κέρδη χωρίς να αυξάνουμε παράλληλα τα κόστη από χρόνους αναμονής. Από ένα ση-

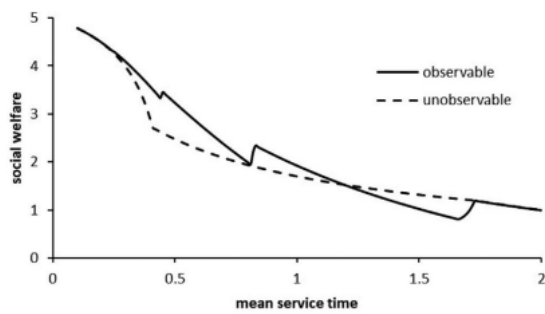


Εικόνα 4.2: Κοινωνικό όφελος συναρτήσει του ρυθμού άφιξης στο παρατηρήσιμο και στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο κάτω από τις στρατηγικές ισορροπίας.

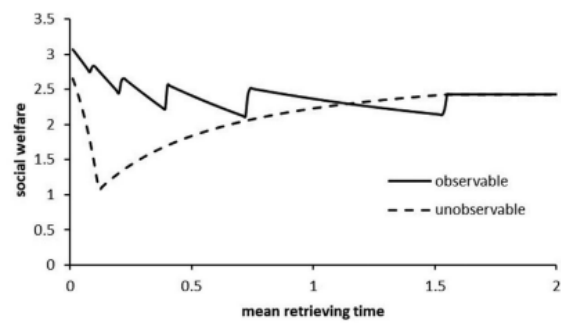
μείο όμως και μετά εφόσον οι πελάτες λειτουργούν ατομικά οι εξωτερικές επιδράσεις αρχίζουν και εμφανίζονται καθώς αυξάνεται ο ρυθμός άφιξης τους. Όμως καθώς  $\lambda \rightarrow \infty$  πελάτες φτάνουν συνεχώς, με αποτέλεσμα όταν ο υπηρέτης είναι απασχολημένος να μην θέλουν να εισέλθουν στην τροχιά γιατί θα τους παίρνει τη θέση πάντα μία νέα άφιξη. Έτσι, εισέρχεται μόνο ο πελάτης που θα βρει το σύστημα άδειο. Επομένως, αυτό θα συμβαίνει με ρυθμό  $\mu$  και άρα το κοινωνικό όφελος συγκλίνει στο  $R\mu - C$  και η ουρά γίνεται πια μια  $M/M/1/1$  ουρά με άπειρο ρυθμό άφιξης, ρυθμό εξυπηρέτησης  $\mu$  και ρυθμό εισόδου στο σύστημα  $\mu$ . Επομένως, το πρώτο κομμάτι της Εικόνας 4.2 αντιπροσωπεύει την περίπτωση που  $q_e = 1$  ενώ στο δεύτερο όσο το  $\lambda$  μεγαλώνει το  $q_e$  αρχίζει και φθίνει στο 0 όπως δείχνει και η σχέση (4.6).

Ταυτόχρονα, αξίζει να σημειωθεί πως για μικρά  $\lambda$  φαίνεται πως είναι προτιμότερο το σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο ενώ για μεγάλα το παρατηρήσιμο. Αυτό έχει την εξής εξήγηση: για μικρά  $\lambda$  στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο μπαίνουν όλοι σχεδόν οι πελάτες ενώ στο παρατηρήσιμο υπάρχει και η περίπτωση του «άτυχου» πελάτη που μπορεί να τύχει να δει συνωσιτισμένο σύστημα και να μην εισέλθει, έστω και αν είναι αυτή σπάνια περίπτωση. Άρα, όταν έχουμε μικρά  $\lambda$  είναι προτιμότερο το σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο ώστε να εισέρχονται όλοι οι πελάτες. Από την άλλη πλευρά για μεγάλα  $\lambda$  αποθαρρύνονται στο σχεδόν μη παρατηρήσιμο μοντέλο, αλλά στο παρατηρήσιμο υπάρχει πάλι η εξαίρεση του «τυχερού» πελάτη που μπορεί να πετύχει το σύστημα με λίγα άτομα και να τον συμφέρει να εισέλθει. Άρα, όταν έχουμε μεγάλα  $\lambda$  είναι προτιμότερο το παρατηρήσιμο μοντέλο ώστε έστω κάποια άφιξη να εισέλθει.

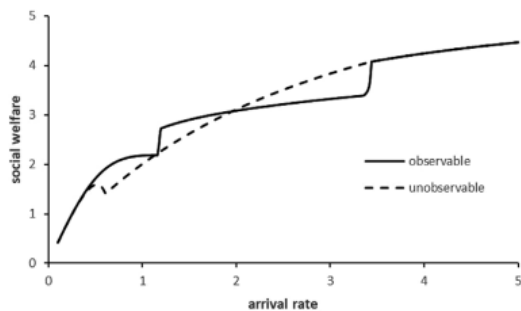
Όσον αφορά τα αποτελέσματα των Baron, Economou, Manou [2] έχουμε την Εικόνα 4.3 που αποτελείται από 3 διαγράμματα σε κατάσταση ισορροπίας. Στο πρώτο διάγραμμα βλέπουμε τον τρόπο που επηρεάζεται το κοινωνικό όφελος από το μέσο χρόνο εξυπηρέτησης όταν  $\lambda = 1, R = 5, K = 1, A \sim Erlang(2, 3)$  και  $B \sim Erlang(3, \mu)$  με  $\mu \in [1.5, 30]$  (δηλαδή το  $E[A]$  κινείται από 0.1 έως 2). Πιο συγκεκριμένα, στο μη παρατηρήσιμο μοντέλο έχουμε ότι το κέρδος φθίνει όσο αυξάνεται ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης, ωστόσο στην παρατη-



(α) Διάγραμμα  $S_{soc}$  με  $E(B)$



(β) Διάγραμμα  $S_{soc}$  με  $E(A)$



(γ) Διάγραμμα  $S_{soc}$  με  $\lambda$

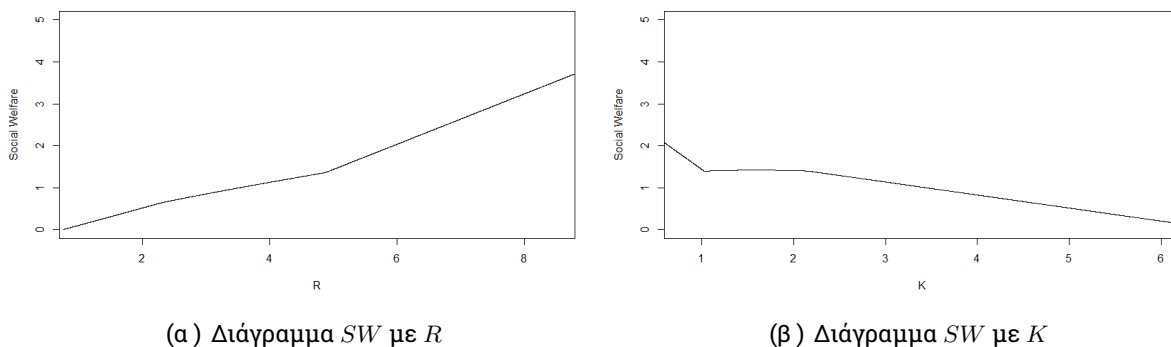
Εικόνα 4.3: Κοινωνικό όφελος συναρτήσει του μέσου χρόνου εξυπηρέτησης, του μέσου χρόνου ανάκτησης και του ρυθμού άφιξης.

ρήσιμη περίπτωση η κατάσταση είναι λίγο πιο σύνθετη. Τα διαστήματα που έχουμε φθίνουσα μορφή, που είναι και η αναμενόμενη μορφή, ουσιαστικά η στρατηγική κατωφλίου είναι καθαρή της μορφής  $q = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ , ενώ όταν έχουμε αύξηση του κοινωνικού οφέλους έχουμε μεικτές στρατηγικές της μορφής  $q = (1, 1, \dots, 1, q, 0, \dots)$  και αυτό έχει εξήγηση. Καθώς αυξάνεται ο χρόνος εξυπηρέτησης οι πελάτες αποθαρρύνονται και άρα το  $q$  ελαττώνεται. Όμως, οι πελάτες που εισέρχονται με πιθανότητα  $q$  είναι αδιάφοροι, δηλαδή έχουν μηδενικό κοινωνικό όφελος. Έτσι, μειώνεται το ποσοστό των αδιάφορων πελατών και αυξάνεται παράλληλα το ποσοστό των πελατών που έχουν καθαρό κέρδος. Γι' αυτό τον λόγο στα διαστήματα που έχουμε αύξηση του οφέλους έχουμε μεικτές στρατηγικές.

Στο μη παρατηρήσιμο μοντέλο όμως δε συμβαίνει το ίδιο. Όταν η στρατηγική είναι της μορφής  $q \in (0, 1)$  αυτοί που εισέρχονται, όταν το σύστημα είναι απασχολημένο, πάλι έχουν μηδενικό κοινωνικό όφελος και όσο το  $E[B]$  αυξάνεται, θα μειώνεται το  $q$ . Έτσι, θα αυξάνεται το ποσοστό των πελατών που θα βρίσκουν άδειο τον υπηρέτη, ωστόσο τώρα θα μειώνεται το αναμενόμενο όφελος τους που είναι  $R - KE[B]$  και αυτή η μείωση θα υπερτερεί. Γι' αυτό τον λόγο έχουμε συνεχόμενη μείωση του κοινωνικού οφέλους με διαφορετική ωστόσο κλίση γιατί έχουμε αλλαγή στην πιθανότητα που εισέρχονται οι πελάτες στο σύστημα από 1 σε  $q \in (0, 1)$ . Τέλος, βλέπουμε και αλλαγή στην κλίση στο σημείο που αλλάζει η στρατηγική από καθαρή σε μεικτή.



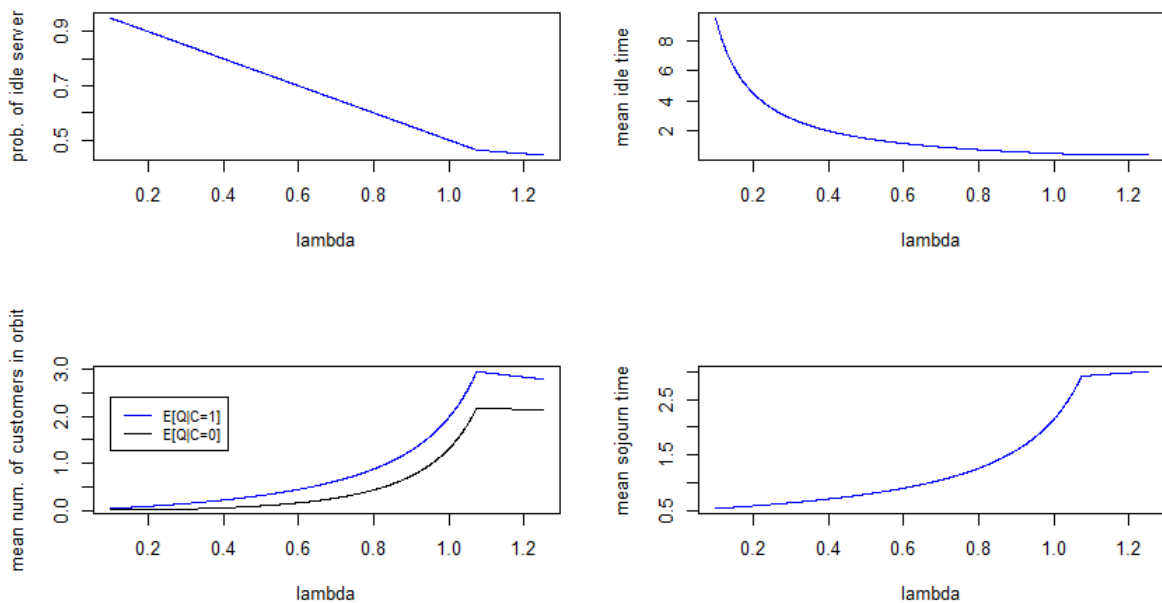
Κατόπιν, στο δεύτερο διάγραμμα βλέπουμε τον τρόπο που επηρεάζεται το κοινωνικό όφελος από τον μέσο χρόνο ανάκτησης όταν  $\lambda = 1, R = 5, K = 1, A \sim Erlang(2, \mu)$  με  $\mu \in [1, 20]$  και  $B \sim Erlang(3, 4)$  (δηλαδή το  $E[A]$  κινείται από 0.1 έως 2). Ειδικότερα, στο παρατηρήσιμο μοντέλο ισχύει η ίδια κατάσταση. Πάλι θα περιμέναμε καθώς αυξάνεται ο μέσος χρόνος ανάκτησης να μειώνεται συνεχώς το κοινωνικό όφελος, ωστόσο όταν χρησιμοποιούνται μεικτές στρατηγικές έχουμε αύξηση για τον ίδιο λόγο που αναφέρθηκε παραπάνω. Στο μη παρατηρήσιμο μοντέλο τώρα, έχουμε την εξής κατάσταση: για μικρές τιμές χρόνου ανάκτησης είναι σταθερός ακόμα ο αριθμός των πελατών που εισέρχονται, με αποτέλεσμα να μειώνεται το κοινωνικό όφελος. Ωστόσο από ένα σημείο και μετά αποθαρρύνονται οι πελάτες που λειτουργούν ατομικά και έτσι έχουμε αύξηση του οφέλους και σύγκλιση στο κοινωνικά βέλτιστο. Είναι εντελώς αντίστοιχη κατάσταση με την επιβολή πληρωμής τιμής  $p$  στους πελάτες που εισέρχονται ώστε να πετύχουμε το κοινωνικά βέλτιστο, μόνο που τώρα θέτουμε ένα χρόνο ανάκτησης για να πετύχουμε το βέλτιστο, αντί να θέσουμε μια τιμή εισόδου.



Εικόνα 4.4: Κοινωνικό όφελος συναρτήσεϊ του κέρδους και του κόστους.

Τέλος, στο τρίτο διάγραμμα βλέπουμε τον τρόπο που επηρεάζεται το κοινωνικό όφελος από τον ρυθμό άφιξης όταν  $\lambda \in [0.1, 5], R = 5, K = 1, A \sim Erlang(2, 3)$  και  $B \sim Erlang(3, 4)$ . Όπως θα αναμέναμε στο μη παρατηρήσιμο μοντέλο όσο αυξάνεται το  $\lambda$  βλέπουμε πως αυξάνεται και το κοινωνικό όφελος καθώς αποθαρρύνονται οι πελάτες που λειτουργούν ατομικά. Παράλληλα, η κλίση όλο και μειώνεται καθώς για μεγάλα  $\lambda$  ολοένα και λιγότεροι πελάτες θα είναι πρόθυμοι να εισέλθουν στο σύστημα, ενώ βλέπουμε και αλλαγή στην κλίση στο σημείο που αλλάζει η στρατηγική από καθαρή σε μεικτή. Κλείνοντας, στο παρατηρήσιμο μοντέλο, στα διαστήματα που έχουμε αλλαγή στον τρόπο αύξησης έχουμε μεικτές στρατηγικές και για τον λόγο που αναφέρθηκε και παραπάνω έχουμε αλλαγή στον τρόπο αύξησης του κοινωνικού οφέλους.

Κλείνοντας, στην Εικόνα 4.4 για το μη παρατηρήσιμο μοντέλο σε κατάσταση ισορροπίας με  $\lambda = \frac{3}{5}$ , χρόνο εξυπηρέτησης  $B \sim Erlang(3, 4)$  και χρόνο ανάκτησης  $A \sim Erlang(2, 3)$  έχουμε την επίδραση του  $R$  στην κοινωνική ωφέλεια όταν  $K = 1$  καθώς και την επίδραση του  $K$  όταν  $R = 5$ . Παρατηρούμε ότι στο πρώτο διάγραμμα έχουμε αύξουσα μορφή όπως θα αναμέναμε ενώ στο δεύτερο φθίνουσα μορφή. Μάλιστα βλέπουμε και αλλαγές στις κλίσεις καθώς σε εκείνα τα σημεία αλλάζουν οι στρατηγικές, για παράδειγμα από  $q = 1$  σε



Εικόνα 4.5: Τρόπος που επιδρά το  $\lambda$  σε διάφορα μέτρα απόδοσης(πιθανότητα ελεύθερου υπηρέτη, μέσος χρόνος αργίας, μέσος αριθμός πελατών στην τροχιά δοθέντος την κατάσταση του υπηρέτη και μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα).

$q \in (0, 1)$  ή από  $q \in (0, 1)$  σε  $q = 0$  ανάλογα την περίπτωση. Τέλος στην εικόνα 4.5 βλέπουμε τον τρόπο που επιδρά το  $\lambda$ , με τις παραπάνω υποθέσεις για τις υπόλοιπες παραμέτρους, σε διάφορα μέτρα απόδοσης.

#### 4.4 Προσομοίωση-υπολογιστικά αποτελέσματα

Τα παρακάτω έχουν υπολογιστεί σε γλώσσα προγραμματισμού R και ο κώδικος βρίσκεται στο παράρτημα.

Από εδώ και στο εξής θα θέσουμε:  $R = 5, K = 1, \lambda = 0.9$ , χρόνους εξυπηρέτησης Erlang(3, 6) και χρόνους επανάκτησης Erlang(2, 5). Τότε κάτω από ισορροπία μπορούμε να υπολογίσουμε τα εξής:

- ▶ Πιθανότητα κατά την είσοδο ενός πελάτη να είναι ο υπηρέτης απασχολημένος:  $\sim 0.55$ .
- ▶ Μέσος αριθμός πελατών στην τροχιά όταν ο υπηρέτης είναι απασχολημένος:  $\sim 1.28$ .
- ▶ Μέσος αριθμός πελατών στην τροχιά όταν ο υπηρέτης είναι ελεύθερος:  $\sim 0.73$ .

- Μέση διάρκεια του χρόνου ανάκτησης-αργίας του υπηρέτη:  $\sim 0.61$ , ενώ μέσω προσομοίωσης: (1000 επαναλήψεις, ορίζοντα 100)  $\sim 0.65$ .
- Μέσος χρόνος παραμονής του πελάτη στο σύστημα:  $\sim 1.58$ , ενώ μέσω προσομοίωσης: (1000 επαναλήψεις, ορίζοντα 100)  $\sim 1.72$ .

Τα πρώτα αποτελέσματα ουσιαστικά αποτελούν απλές αντικαταστάσεις των τύπων του κεφαλαίου ωστόσο για τα τελευταία δυο αποτελέσματα έγινε και μια προσομοίωση του συστήματος η οποία δίνει τα εξής αποτελέσματα:

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]
M	0	0.000000	0.000000	0.000000
	1	1.516012	2.154740	0.000000
	2	3.453340	4.108844	0.000000
	3	3.754764	8.187705	7.353521
	4	3.937801	8.794874	8.438779
	5	4.333086	5.092904	0.000000
	6	5.444369	6.163269	0.000000
	7	6.496242	6.928765	0.000000
	8	6.538596	11.114451	10.496545
	9	7.698094	11.607389	11.269411
	10	9.101869	10.061931	0.000000
	11	11.344889	11.975659	11.657833
	12	12.732483	13.269666	0.000000
	13	13.264711	14.571478	13.851655
	14	13.393814	13.657619	0.000000
	15	14.064754	15.328586	15.059241
	16	15.842009	16.093943	0.000000
	17	17.277721	17.524872	0.000000
	18	18.089809	18.951540	0.000000
	19	18.434291	20.220922	19.525960
	20	18.691964	20.783323	20.296004

Σχετικά με την προσομοίωση υπολογίζει έναν πίνακα με 4 στήλες όπου η πρώτη στήλη αντιπροσωπεύει τον αριθμό άφιξης, η δεύτερη στήλη τον χρόνο άφιξης του πελάτη, η τρίτη στήλη τον χρόνο μετά την εξυπηρέτηση του και η τέταρτη στήλη τον χρόνο που ξεκίνησε η εξυπηρέτηση για τα άτομα που είχαν μπει στην τροχιά. Ειδικότερα το αποτέλεσμα μιας προσομοίωσης ενός συστήματος θα είναι το εξής: όπου μπορεί κανείς να δει πως λειτουργεί αυτή η ουρά ως προς τον χρόνο αναμονής, τον μέσο χρόνο ανάκτησης-αργία του υπηρέτη αλλά και ως προς άλλα μέτρα απόδοσης, για παράδειγμα να υπολογίσουμε μέσω προσομοίωσης τον μέσο αριθμό ατόμων στην τροχιά κάτω από τις παραπάνω παραμέτρους, οι οποίες έχουν επιλεχθεί ώστε να ικανοποιούν τη συνθήκη ευστάθειας.

# Παράρτημα Α

## Κώδικας

```
#Social welfare vs R
```

```
l=3/5
```

```
K=1
```

```
unsoc=function(R){
```

```
  muA=3
```

```
  tildaA=(muA/(muA+1))^2
```

```
  muB=4
```

```
  muB2=(3/muB)^2+3/muB^2
```

```
  t=R/K-(muB2/(2*3/muB))
```

```
  if(tildaA-l*3/muB>0){
```

```
    if(t<=(1-tildaA+l*3/muB)/(tildaA*1)){
```

```
      q=0
```

```
    }
```

```
    else if(t>(1-tildaA+l*3/muB)/(tildaA*1) & t<((-2*l*  
(3/muB)^2+l*muB2+2*3/muB)*(1-tildaA+l*3/muB))/(2*3/muB*(tildaA-l*3/muB)*1)){
```

```
      q=(2*l*3/muB*tildaA*t-(2*3/muB)*(1-tildaA+l*3/muB))/(2*l^2*  
(3/muB)^2*t+(1*muB2-2*l*(3/muB)^2)*(1-tildaA+l*3/muB))
```

```
    }
```

```
    else if(t>((-2*l*(3/muB)^2+l*muB2+2*3/muB)*(1-tildaA+l*3/muB))/(2*3/muB*(tildaA-l*3/muB)*1)){
```

```
      q=1
```

```
    }
```

```
  }
```

```
  else if(tildaA-l*3/muB<=0) {
```

```
    if(t<=(1-tildaA+l*3/muB)/(tildaA*1)){
```

```
      q=0
```

```
    }
```

```
    else if(t>(1-tildaA+l*3/muB)/(tildaA*1) & t<((-2*l*
```

```
(3/muB)^2+l*muB2+2*3/muB)*(1-tildaA+l*3/muB))/(2*3/muB*(tildaA-l*3/muB)*1)){
```

```

l*3/muB)*1))){
  q=(2*l*3/muB*tildaA*t-(2*3/muB)*(1-tildaA+l*3/muB))/(2*l^2*
  (3/muB)^2*t+(l*muB2-2*l*(3/muB)^2)*(1-tildaA+l*3/muB))
}
}
suq=R-K*(muB2/((3/muB)*2)+((-2*l*q*(3/muB)^2+l*q*muB2+2*3/muB)*
(1-tildaA+l*3/muB))/(2*3/muB*(tildaA-l*3/muB*q)*1))
po=(1-l*q*3/muB)/(1-l*q*3/muB+l*3/muB)
sw=l*po*(R-K*3/muB)+l*(1-po)*q*suq
return(sw)}

g=seq(from=0.76,to=9,by=0.001)
unsoc2=rep(0,length(g))
unsoc3=rep(0,length(g))
for(i in 1:length(g)){
  unsoc2[i]=unsoc(g[i])
}
plot(unsoc2~g,xlim=c(3,8.5),ylim=c(0,5),xlab='R',ylab='social
welfare',type='l')

#Social welfare vs K

l=3/5
R=5
unsoc=function(K){
muA=3
tildaA=(muA/(muA+l))^2
muB=4
muB2=(3/muB)^2+3/muB^2
t=R/K-(muB2/(2*3/muB))
  if(tildaA-l*3/muB>0){
    if(t<=(1-tildaA+l*3/muB)/(tildaA*1)){
      q=0
    }
    else if(t>(1-tildaA+l*3/muB)/(tildaA*1) & t<((-2*l*
(3/muB)^2+l*muB2+2*3/muB)*(1-tildaA+l*3/muB))/(2*3/muB*(tildaA-
l*3/muB)*1)){
      q=(2*l*3/muB*tildaA*t-(2*3/muB)*(1-tildaA+l*3/muB))/(2*l^2*
(3/muB)^2*t+(l*muB2-2*l*(3/muB)^2)*(1-tildaA+l*3/muB))
    }
    else if(t>((-2*l*(3/muB)^2+l*muB2+2*3/muB)*(1-
tildaA+l*3/muB))/(2*3/muB*(tildaA-l*3/muB)*1)){
      q=1
    }
  }
}

```

```

else if(tildaA - l*3/muB <= 0) {
  if (t <= (1 - tildaA + l*3/muB) / (tildaA * l)) {
    q = 0
  }
  else if (t > (1 - tildaA + l*3/muB) / (tildaA * l) & t <= ((-2 * l *
(3 / muB)^2 + l * muB2 + 2 * 3 / muB) * (1 - tildaA + l*3/muB)) / (2 * 3 / muB * (tildaA -
l * 3 / muB) * l)) {
    q = (2 * l * 3 / muB * tildaA * t - (2 * 3 / muB) * (1 - tildaA + l*3/muB)) / (2 * l^2 *
(3 / muB)^2 * t + (l * muB2 - 2 * l * (3 / muB)^2) * (1 - tildaA + l*3/muB))
  }
}
suq = R - K * (muB2 / ((3 / muB) * 2) + ((-2 * l * q * (3 / muB)^2 + l * q * muB2 + 2 * 3 / muB) *
(1 - tildaA + l*3/muB)) / (2 * 3 / muB * (tildaA - l * 3 / muB * q) * l))
po = (1 - l * q * 3 / muB) / (1 - l * q * 3 / muB + l * 3 / muB)
sw = l * po * (R - K * 3 / muB) + l * (1 - po) * q * suq
return (sw)}

```

```

g = seq(from = 0.1, to = 6.8, by = 0.001)
unsoc2 = rep(0, length(g))
unsoc3 = rep(0, length(g))
for (i in 1:length(g)) {
  unsoc2[i] = unsoc(g[i])
}
plot(unsoc2 ~ g, xlim = c(0.1, 2.3), ylim = c(0, 5), xlab = 'K'
, ylab = 'social welfare', type = 'l')

```

#Calculate from equations

```

K = 1
R = 5
a = 3
b = 6
l = 0.9
muA = 5
tildaA = (muA / (muA + l))^2
muB = 6
muB2 = (3 / muB)^2 + 3 / muB^2
t = R / K - (muB2 / (2 * 3 / muB))

if (tildaA - l*3/muB > 0) {
  if (t <= (1 - tildaA + l*3/muB) / (tildaA * l)) {
    q = 0
  }
  else if (t > (1 - tildaA + l*3/muB) / (tildaA * l) & t <= ((-2 * l *
(3 / muB)^2 + l * muB2 + 2 * 3 / muB) * (1 - tildaA + l*3/muB)) / (2 * 3 / muB * (tildaA -
l * 3 / muB) * l)) {

```

```

    q=(2*l*3/muB*tildaA*t-(2*3/muB)*(1-tildaA+l*3/muB))/(2*l^2*
    (3/muB)^2*t+(1*muB2-2*l*(3/muB)^2)*(1-tildaA+l*3/muB))
  }
  else if (t>=((-2*l*(3/muB)^2+l*muB2+2*3/muB)*(1-
  tildaA+l*3/muB))/(2*3/muB*(tildaA-l*3/muB)*l)){
    q=1
  }
}

```

```
#Calculate p0
```

```
p0=(1-l*q*a/b)/(1-l*q*a/b+l*a/b)
```

```
#Mean sojourn time
```

```

s1=((a/b)^2+a/b^2)/(2*a/b)
s2=(l*q*(-2*tildaA*(a/b)^2+tildaA*(a/b^2+(a/b)^2)+2*
(a/b)^2))/(2*a/b*(tildaA-l*a/b*q))
s3=1/tildaA*((1-tildaA)/l+a/b)
s4=(s2+1)*s3
s=s1+s4
snew=p1*s+p0*(a/b)
snew

```

```
#Mean idle time
```

```
i=(1-l*a/b*q)/l
```

```
#mean number of customer when server is free
```

```
s5=((l*q*(-2*tildaA*(a/b)^2+tildaA*(a/b^2+(a/b)^2)+2*
(a/b)^2))/(2*a/b*(tildaA-l*a/b*q))+1)*p1/p0*(1-tildaA)/(tildaA)
```

```
#Mean number of customer when server is busy
```

```
s2=(l*q*(-2*tildaA*(a/b)^2+tildaA*(a/b^2+(a/b)^2)+2*
(a/b)^2))/(2*a/b*(tildaA-l*a/b*q))
```

```
#Simulation of the queue
```

```

simmm1=function(l,a,b,c,d,R,K,T)
{t=0
  n=0
  M=c(0,0,0,0)
  Nar=0
  i=0
  j=3
  ta=rexp(1,l)

```

```

td=Inf
muB=b/a
muA=d
tildaA=(muA/(muA+1))^c
muB2=(1/muB)^2+a/b^2
t=R/K-(muB2/(2*1/muB))
if (tildaA-1*1/muB>0){
  if (t<=(1-tildaA+1*1/muB)/(tildaA*1)){
    q=0
  }
  else if (t>(1-tildaA+1*1/muB)/(tildaA*1) & t<((-2*1*(1/muB)^2+
1*muB2+2*1/muB)*(1-tildaA+1*1/muB))/(2*1/muB*(tildaA-1*1/muB)*1)){
    q=(2*1*1/muB*tildaA*t-(2*1/muB)*(1-tildaA+1*1/muB))/(2*1^2*
(1/muB)^2*t+(1*muB2-2*1*(1/muB)^2)*(1-tildaA+1*1/muB))
  }
  else if (t>=((-2*1*(1/muB)^2+1*muB2+2*1/muB)*(1-
tildaA+1*1/muB))/(2*1/muB*(tildaA-1*1/muB)*1)){
    q=1
  }
}
}
while (t<T)
{
  if (ta<td)
  { s=runif(1,0,1)
  if (q>s || td==Inf){
    t=ta
    n=n+1
    Nar=Nar+1
    i=cbind(i,Nar)
    if (n>=1 & Nar>1){
      M=rbind(M,c(Nar,t,NA,0))
      ta=t+rexp(1,1)}
    if (n==1 & Nar==1){
      td=t+rgamma(1,a,b)
      M=rbind(M,c(Nar,t,td,0))
      ta=t+rexp(1,1)
      l1=rgamma(1,c,d)}
    }
  else if (q<s){
    t=ta
    ta=t+rexp(1,1)
  }
  } else if (ta>td & ta<td+l1){
    t=ta
    n=n
    Nar=Nar+1

```



```

    td=t+rgamma(1,a,b)
    M=rbind(M,c(Nar,t,td,0))
    ta=t+rexp(1,l)
  }
  else if (ta>td+l1& n>1){
    t=td+l1
    n=n-1
    td=t+rgamma(1,a,b)
    M[i[j]+1,3]=td
    M[i[j]+1,4]=t
    j=j+1
    l1=rgamma(1,c,d)
  }
  else if (ta>td+l1& n==1){
    Nar=Nar+1
    n=n
    t=ta
    td=t+rgamma(1,a,b)
    M=rbind(M,c(Nar,t,td,0))
    ta=t+rexp(1,l)
  }
}
M=replace(M,is.na(M),0)
return(M)
}

```

#Calculate mean sojourn time

```

N=1000
s1=0
for(i in 1:N){
  sim=simmml(0.9,3,6,2,5,5,1,100)
  s=0
  for(k in 1:nrow(sim)){
    if(sim[k,3]>0)
      s=s+sim[k,3]-sim[k,2]}
  s1=s1+s/(nrow(sim)-1)
}

s2=sum(s1)/N
s2

```

#Calculate mean retrieving time

```

N=1000
s2=rep(0,N)
for(i in 1:N){
  sim=simmm1(0.9,3,6,2,5,5,1,100)
  for(k in 1:(nrow(sim)-1)){
    if(sim[k,4]>0){
      sim[k,2]=sim[k,4]}
  }
  s3=rep(0,nrow(sim)-1)
  for(k in 1:(nrow(sim)-1)){

    x=rep(0,nrow(sim))
    for(j in 1:(nrow(sim))){
      x[j]=sim[k+1,2]-sim[j,3]
    }
    s3[k]= min(x[x>0])
  }
  s2[i]=sum(s3)/(nrow(sim)-1)
}

s4=sum(s2)/N
s4

```

# Βιβλιογραφία

- [1] Aleksandrov, A.M. (1974). A queueing system with repeated orders, *Engrg. Cybernet. Rev.* 12 (3), 1-4.
- [2] Baron, O., Economou, A., Manou, A. (2021). Increasing social welfare with delays: strategic customers in the M/G/1 orbit queue.
- [3] Burnetas, A., Economou, A., (2007). Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times. *Queueing Systems* 56, 213–228.
- [4] Choo, Q.H., Conolly, B.W. (1979). New results in the theory of repeated orders queueing systems, *J. Appl. Probab.* 16, 631-640.
- [5] Cohen, J.W. (1957). Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls, *Philips Telecommunication*.
- [6] Cui, S., Su, X. and Veeraraghavan, S.K. (2014). A model of rational retrial in queues. *operations research*, 67, 1699–1718.
- [7] Economou, A. and Kanta, S. (2011). Equilibrium customer strategies and social–profit maximization in the single-server constant retrial queue. *Naval Research Logistics* 58, 107-122.
- [8] Edelson, N.M., Hildebrand, K. (1975). Congestion tolls for Poisson queueing processes. *Econometrica*, 43, 81–92.
- [9] Elcan, A. (1994). Optimal customer return rate for an M/M/1 queueing system with retrials. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 8, 521-539.
- [10] Falin, G.I. (1979). A single-line system with secondary orders, *Engrg. Cybernet. Rev.* 17 (2), 76-83.
- [11] Greenberg, B. (1989). *M/G/1* queueing systems with returning customers. *Journal of Applied Probability* 26: 152-163.
- [12] Hassin, R. and Haviv, M. (1996). Optimal and equilibrium retrial rates in a busy system. *probability in the engineering and informational sciences* 10, 223-227.
- [13] Hassin, R. and Haviv, M. (2003). *To Queue or Not to Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems*, Kluwer academic publishers, Boston.

- [14] Hassin, R., Haviv, M., (1997). Equilibrium threshold strategies: the case of queues with priorities. *Operations Research* 45, 966–973.
- [15] Haviv, M., Oz, B. (2016). Regulating an observable  $M/M/1$  queue. *Operations Research Letters*, 44, 196.
- [16] Haviv, M., Oz, B. (2018). Self-regulation of an unobservable queue. *Management Science*, 64, 2380–2389.
- [17] Keilson, J., Cozzolino, J. and Young, H. (1968). A service system with unfilled requests repeated. *Operations Research* 16: 1126-1137.
- [18] Kulkarni, V.G. (1983). On queueing systems with retrials. *Journal of Applied Probability* 20, 380-389.
- [19] Kulkarni, V.G (1983a.). A game theoretic model for two types of customers competing for service. *Operation Research Letters* 2, 119–122.
- [20] Le Gall, P. (1976). Trafics generaux de telecommunications sans attente. *Commutation et Electronique* 55: 5-24.
- [21] Naor, P. (1969). The regulation of queue size by levying tolls.
- [22] Stidham, S.Jr. (1974). Technical note—A last word on  $L = \lambda w$ .
- [23] Sun, K., Wang J. and Zhang G. (2021). Strategic joining in a single-server retrial queue with batch service.
- [24] Wang, J. and Zhang, F. (2013). Strategic joining in M/M/1 retrial queues. *European Journal of Operational Research*, 230, 76–87.
- [25] Wang, J., Zhang, X. and Huang, P. (2017). Strategic behavior and social optimization in a constant retrial queue with the N-policy.
- [26] Zhang, F., Wang, J., Liu, B., (2012). On the optimal and equilibrium retrial rates in an unreliable retrial queue with vacations. *Journal of Industrial and Management Optimization* 8, 861–875.
- [27] Zhang, Z., Wang, J. and Zhang, F. (2014). Equilibrium customer strategies in the single-server constant retrial queue with breakdowns and repairs.