Στρατηγική συμπεριφορά πελατών και βελτιστοποίηση σε δίκτυα ουρών αναμονής

Νικόλαος Γκούμας

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2023

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ'
ΣΤΗΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ 'ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ'

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Τριμελής επιτροπή:

Αντώνιος Οικονόμου (Επιβλέπων)

Αθανασία Μάνου

Απόστολος Μπουρνέτας

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Αντώνιο Οικονόμου, επιβλέποντα καθηγητή της παρούσας διπλωματικής μου εργασίας για την άψογη συνεργασία που είχαμε, καθώς και για την πολύτιμη καθοδήγηση που μου παρείχε. Επίσης, νιώθω ευγνώμων που παρακολούθησα μαζί του το μάθημα των Στοχαστικών Ανελίξεων σε προπτυχιακό επίπεδο και το μάθημα των Στοχαστικών Μοντέλων στην Επιχειρησιακή Έρευνα σε μεταπτυχιακό επίπεδο, καθώς και για την προτροπή του να εγγραφώ σε αυτό το μεταπτυχιακό. Οφείλω να ευχαριστήσω την κυρία Αθανασία Μάνου με την οποία πέρασα δύο μαθήματα στο μεταπτυχιακό μου, τόσο για τη γνώση που μου παρείχε όσο και για την έμπρακτη κατανόηση της σε μία δύσκολη στιγμή στιγμή των σπουδών μου και φυσικά για τη συμμετοχή της στην τριμελή επιτροπή της διπλωματικής μου. Ευχαριστώ τον κύριο Απόστολο Μπουρνέτα, που εκτός από μέλος της τριμελούς επιτροπής της διπλωματικής μου, επί προεδρίας του στο Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ είχαμε εξασφαλίσει χρηματοδότηση (μέσω εσωτερικού διαγωνισμού) για τη συμμετοχή μου σε δύο Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες. Τέλος, όσον αφορά τη διπλωματική ευχαριστώ θερμά τον φίλο μου τον Ανδρέα για όλη τη βοήθεια που μου παρείχε σε τεχνικά ζητήματα.

Αφιερωμένη στους γονείς μου, στους υπόλοιπους συγγενείς μου καθώς και σε όλα τα κοντινά μου πρόσωπα και τέλος σε όλους όσους θα ήταν χαρούμενοι αν έβλεπαν την πανεπιστημιακή μου πορεία αλλά δεν είναι πια μαζί μας...

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

1.1 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Μια Ουρά Αναμονής είναι ένα σύστημα εισόδου-εξόδου αποτελούμενο από διακριτές μονάδες (Πελάτες, Υπηρέτες).

Τα χαρακτηριστικά μίας ουράς αναμονής είναι:

1. Η Διαδικασία Αφίξεων (Α)
2. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης (Β)
3. Ο αριθμός των υπηρετών (Γ)
4. Η χωρητικότητα (πελατών) του συστήματος (Κ)
5. Η πειθαρχία της ουράς, δηλαδή το πώς επιλέγεται από το σύστημα η σειρά εξυπηρέτησης των πελατών

Α) Η διαδικασία αφίξεων με την οποία θα εργαστούμε στη συνέχεια είναι η $Poisson$. Θα τη συμβολίζουμε με $PP(\lambda)$ για ρυθμό λ.

Στην περίπτωση αυτή οι χρόνοι μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων ακολουθούν εκθετική κατανομή. Επομένως, θα ισχύει η αμνήμονη ιδιότητα στις αφίξεις!

Β) Οι χρόνοι εξυπηρέτησης θα είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι μεταξύ τους.

Πιθανές πειθαρχίες ουράς:

F-C-F-S: First Come First Served (η συνήθης)

L-C-F-S: Last Come First Served

S-I-R-O: Service In Random Order (Τυχαία επιλογή πελάτη που θα εξυπηρετηθεί)

S-S-T-F: Shortest Service Time First

Σημαντικά Μέτρα Απόδοσης για τον Διαχειριστή:

$Q(t)$= πλήθος πελατών στο σύστημα τη στιγμή t

Q_q(t) = πλήθος πελατών στην ουρά τη στιγμή t

Q_s(t) = πλήθος πελατών στον χώρο εξυπηρέτησης τη στιγμή t

Προφανώς: $Q(t) = Q_q(t)+Q_s(t)$

Σημαντικά Μέτρα Απόδοσης για τους Πελάτες:

S_n = Χρόνος παραμονής n-οστού πελάτη

W_n = Χρόνος αναμονής στην ουρά του n-οστού πελάτη

B_n = Χρόνος εξυπηρέτησης (από τους υπηρέτες) του n-οστού πελάτη

Προφανώς S_n= W_n+B_n.

1.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Κύκλος λειτουργίας συστήματος: Αρχίζει και τελειώνει κάθε φορά που έρχεται ένας πελάτης και βρίσκει το σύστημα κενό.

Περιγραφή n-οστού κύκλου: Αρχικά αφικνείται ένας πελάτης ο οποίος βλέπει το σύστημα κενό και είναι ο n-οστός πελάτης που του συμβαίνει αυτό. Ύστερα το σύστημα έχει έναν χρόνο συνεχούς λειτουργίας, (δηλαδή δεν είναι κενό) Y_n. Από τη στιγμή που το σύστημα αδειάζει και μέχρι να έρθει ο επόμενος πελάτης το σύστημα θα βρίσκεται στην n-οστή περίοδο αργίας I_n. $Z_n{=}Y_n{+}I_n$ είναι ολόκληρος ο n-οστός κύκλος λειτουργίας. Όταν έρθει πελάτης αρχίζει ο $(n+1)$-οστός κύκλος λειτουργίας.

Οι κύκλοι λειτουργίας είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι, υπό την έννοια ότι οι αντίστοιχες στοχαστικές διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στους κύκλους είναι ανεξάρτητες και στοχαστικά ισοδύναμες.

Επίσης, όταν ξεκινάει ένας νέος κύκλος γίνεται “reset”- αναγέννηση στη διαδικασία και για τη μελλοντική εξέλιξή της δεν έχει σημασία τι συνέβη πριν.

Συμπέρασμα: Έχουμε μία αναγεννητική διαδικασία με σημεία αναγέννησης τις χρονικές στιγμές που ξεκινάει ένας νέος κύκλος λειτουργίας.

Υπό συνθήκες στατιστικής ισορροπίας μπορούν να οριστούν καλά οι κάτωθι ποσότητες, με τους ακόλουθους συμβολισμούς:

$p_j = P(Q = j){=}$ η πιθανότητα ύπαρξης j πελατών στο σύστημα μια χρονική στιγμή t (σε συνεχή χρόνο).

Διαισθητική Ερμηνεία: Ποσοστό του χρόνου με j πελάτες στο σύστημα.

$a_j{=}$P$(Q^-{=}j){=}$ η πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης να βρει ακριβώς j πελάτες μπροστά του.

Διαισθητική Ερμηνεία: Ποσοστό πελατών που όταν φθάνουν στο σύστημα βρίσκουν j πελάτες

$d_j{=}$P$(Q^+{=}j){=}$ η πιθανότητα ένας πελάτης που μόλις αναχώρησε να "άφησε πίσω του" στο σύστημα j πελάτες.

Διαισθητική Ερμηνεία: Ποσοστό πελατών που κατά την αναχώρηση τους αφήνουν στο σύστημα j άτομα.

Από το Εργοδικό Θεώρημα Αναγεννητικών Διαδικασιών:

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t P(Q(u)=j)\,du}{t}$$

με πιθανότητα 1, καθώς δεξιά ποσότητα είναι τυχαία μεταβλητή.

$$p_j = \mathbb{E}\Big(\frac{\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}}\,du}{t}\Big) = \lim_{t\to\infty} P(Q(t)=j) = \frac{\mathbb{E}(\int_0^Z 1_{Q(u)=j}\,du)}{\mathbb{E}(Z)}$$

το "ποσοστό" του χρόνου με j πελάτες σε έναν κύκλο λειτουργίας όπου Z: η διάρκεια ενός κύκλου (τ.μ.) $P(Q(t)=j)$: η πιθανότητα τη στιγμή t να έχει το σύστημα j πελάτες.

Πρόταση: Αν έχω μεμονωμένες αφίξεις τότε a_j=d_j.

Πρόταση (ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA): Αν έχω *Poisson* αφίξεις τότε a_j=p_j

$$a_j = p_j \Rightarrow Q^- \overset{\mathrm{d}}{=} Q$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν έχω *Poisson* αφίξεις και μεμονωμένες αφίξεις και αναχωρήσεις τότε p_j=a_j=d_j

1.3 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Έστω ότι έχουμε μία ουρά $G/G/c$ με:

λ= ρυθμό αφίξεων,

b= μέσο χρόνο εξυπηρέτησης.

Ορίζουμε ρ=λb.

Διαισθητικά, η ποσότητα ρ μπορεί να ερμηνευτεί είτε ως μέση εισερχόμενη εργασία για διεκπεραίωση ανά χρονική μονάδα είτε ως ρυθμός συνωστισμού του συστήματος.

Πρόταση: Ένα μη ντετερμινιστικό σύστημα G/G/c είναι ευσταθές αν και μόνο αν ρ<c.

Η ευστάθεια είναι απαραίτητο χαρακτηριστικό για να είναι μία ουρά "λειτουργική" διότι ένα ασταθές σύστημα εκρήγνυται υπό την έννοια ότι με πιθανότητα 1 ο αριθμός πελατών του συστήματος τείνει στο άπειρο:

$$P(\lim_{t\to\infty} Q(t) = \infty) = 1$$

.

1.4 ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ LITTLE ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Νόμος του Little

$$E(Q) = \lambda \cdot E(S)$$

όπου

$E(Q)$: Μέσος Αριθμός Πελατών

λ: Ρυθμός Αφίξεων

$E(S)$: Μέσος Χρόνος Παραμονής Πελάτη

Οι ποσότητες $E(Q)$, $E(S)$ είναι καλά ορισμένες διότι για το σύστημα υποθέτουμε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας.

Πόρισμα 1: Εφαρμογή Νόμου του Little στον χώρο αναμονής $E(Q_q) = \lambda{\cdot}E(W)$.

Πόρισμα 2: Εφαρμογή Νόμου του Little στον Χώρο Εξυπηρέτησης: $E(Q_s) = \lambda{\cdot}b = \rho$.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ LITTLE

Θα δώσουμε μια οικονομική ερμηνεία για τον συνήθη Νόμο του Little:

$\lambda \cdot E(S)$: Ο μακροπρόθεσμος ρυθμός εσόδων με χρέωση των πελατών 1 χρηματική μονάδα ανά χρονική μονάδα παραμονής τους όταν μπαίνουν στο σύστημα.

$E(Q)$: Μακροπρόθεσμος ρυθμός εσόδων με συνεχή χρέωση πελατών (1 χρηματική μονάδα ανά χρονική μονάδα)

Γενικότερα: Το μέσο ποσόν που θα λάβει από τους αναμενόμενους παρόντες στο σύστημα είναι ίσο με τον ρυθμό αφίξεων στο σύστημα επί την μέση πληρωμή που καταβάλλει ένας πελάτης στο τέλος, αφού μπει στο σύστημα.

Πόρισμα 3: Εφαρμογή Νόμου του Little στην θέση j της ουράς.

$P(\exists$ πελάτης στην θέση $j)$=(ρυθμός αφίξεων στη θέση $j)\cdot$(μέσο χρόνο παραμονής στη θέση j).

ΠΡΟΣΟΧΗ! Για να θεωρηθεί ότι ο ρυθμός αφίξεων στη θέση j είναι λ υποθέτουμε ότι όλοι οι εισερχόμενοι πελάτες περνούν από την θέση j, με την προϋπόθεση ότι φεύγουν από αυτήν ακαριαία σε περίπτωση που είτε υπάρχουν κενές θέσεις πιο μπροστά είτε είναι γεμάτο το σύστημα

Εφαρμογή στην ουρά $M/M/1$

Αφίξεις $PP(\lambda)$, Χρόνοι Εξυπηρέτης $\sim Exp(\mu)$

$P(Q \geq 1) = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} \iff 1 - p_0 = \rho \iff p_0 = 1 - \rho$

Για $j \geq 1$:

$$P(Q \geq j) = \lambda \cdot \left[0 \cdot P(Q^- < j-1) + \frac{1}{\mu} P(Q^- \geq j-1)\right] \xrightarrow[\alpha\pi\acute{o} PASTA]{Q^- \overset{\mathrm{d}}{=} Q}$$

$$\sum_{k=j}^{\infty} p_k = \rho \sum_{k=j-1}^{\infty} p_k, \forall j \geq 1 \iff \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k = \rho \sum_{k=j}^{\infty} p_k$$

Αφαιρώ: $p_j = \rho p_{j-1}, \forall j \geq 1$

Άρα:$p_j = \rho^j p_0 \Longrightarrow p_j = (1-\rho)\rho^j, j \geq 0$

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε και έτσι να υπολογίζαμε το p_o, αθροίζοντας στην μονάδα όλα τα $p_j \forall j \geq 0$

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

ΒΑΣΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ $M/M/1$ ΟΥΡΑ

$$E(Q) = \sum_{j=0}^{\infty} jp_j = \sum_{j=0}^{\infty} j(1-\rho)\rho^j = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Από τον Νόμο του Little: $E(j) = \frac{E(Q)}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

<u>ΚΥΚΛΟΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ:</u>

$E(I)$: Μέση Περίοδος Αργίας

$E(V)$: Μέσος Χρόνος Συνεχόμενης Λειτουργίας

$E(Z)$: Μέση διάρκεια ενός Κύκλου Λειτουργίας

$E(N)$: Μέσο πλήθος πελατών που εξυπηρετήθηκαν σε ένα κύκλο λειτουργίας

Εφόσον $I \sim Exp(\lambda)$ (επειδή έχουμε $Poisson$ διαδ. αφίξεων), έχουμε

$$E(I) = \frac{1}{\lambda}$$

$$p_0 = \frac{E(I)}{E(Z)} \iff E(Z) = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$$

$$E(Y) = E(Z) - E(I) = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Έστω N το πλήθος των πελατών που φθάνουν σε έναν κύκλο. Εφόσον το λ αντιπροσωπεύει τον μακροπρόθεσμο ρυθμό αφίξεων θα ισχύει: $\lambda = \frac{E(N)}{E(Z)} \Longrightarrow E(N) = \lambda E(Z) = \frac{1}{1-\rho}$

1.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Η Ανάλυση Μέσης Τιμής χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τα $E(Q), E(S)$ έχοντας $Poisson$ διαδικασία αφίξεων που μας δίνει την ιδιότητα PASTA $Q^- \stackrel{\mathrm{d}}{=} Q$.

Γνωρίζουμε ήδη τον νόμο του Little ($E(Q) = \lambda \cdot E(S)$), επομένως χρειαζόμαστε άλλη μία εξίσωση για τον υπολογισμό αυτών των δύο ποσοτήτων. Για την 2η εξίσωση θεωρούμε ένα πελάτη που μόλις φθάνει στο σύστημα και δεσμεύουμε ως προς το πλήθος πελατών που βρίσκει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ/ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ουρά $M/M/1/1$, αφίξεις $PP(\lambda)$, εξυπηρετήσεις $\sim Exp(\mu)$.

Από τον νόμο του Little έχουμε

$$E(Q) = \lambda E(S). \tag{1.1}$$

Θεωρώντας έναν πελάτη και δεσμεύοντας στον αριθμό των πελατών, Q^-, που βλέπει φθάνοντας στο σύστημα, έχουμε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής του υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} E(S) = E(E(S|Q^-)) &= P(Q^- = 0)E(S|Q^- = 0) + P(Q^- = 1)E(S|Q^- = 1) \\ &= P(Q = 0)\frac{1}{\mu} + P(Q = 1) \cdot 0 \iff E(S) = \frac{p_0}{\mu} \\ &\iff \frac{E(Q)}{\lambda} = \frac{p_0}{\mu} \iff E(Q) = \rho p_0 \end{aligned}$$

όμως $E(Q) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 = p_1 = 1 - p_0$

άρα $\rho p_0 = 1 - p_0 \iff p_0 = \frac{1}{1+\rho}$

άρα $E(Q) = \frac{\rho}{1+\rho}, E(S) = \frac{1}{\mu(1+\rho)}$

1.6 ΑΠΛΕΣ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΟΥΡΕΣ

Η $Q(t), t \geq 0$ αποτελεί Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου με $q_{j,j+1} = \lambda_j, q_{j,j-1} = \mu_j$ Το σύστημα θα είναι ευσταθές

$$\iff \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_j} < \infty$$

Ρυθμός Διαπέρασης:

$$\mu^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n$$

Ρυθμός Εισερχόμενων Πελατών:

$$\lambda^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \lambda_n$$

Στην περίπτωση που δεν έχουμε υπαναχωρήσεις, δηλαδή όσοι μπαίνουν στο σύστημα εξυπηρετούνται, τότε ισχύει: $\mu^* = \lambda^*$.

ΙΣΟΤΗΤΕΣ:

$$a_n = \frac{p_n \lambda_n}{\lambda^*}, d_n = \frac{p_{n+1} \mu_n}{\mu^*}.$$

Στην περίπτωση διαδικασίας αφίξεων $PP(\lambda)$

$$\lambda_n = \lambda = \lambda^* = \mu^*, a_n = p_n$$

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΥΡΑ $M/M/1/k$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & , 0 \leq n \leq k, \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{k+1} & 0 \leq n \leq k, \rho = 1 \end{cases}$$

Κεφάλαιο 2

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

2.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Ονομάζουμε παιχνίδι Γ σε κανονική μορφή τη μαθηματική δομή $< N, S^i, h^i, i \in N >$, όπου

N: το σύνολο των παικτών

S^i: το σύνολο των δυνατών στρατηγικών του παίκτη i

S: $\prod_{i \in N} S^i$ το σύνολο όλων των δυνατών στρατηγικών

h^i: η συνάρτηση της πληρωμής του παίκτη i, $h^i : \prod_{i \in N} S^i \to \mathbb{R}$.

Κάθε παίκτης i επιλέγει μια στρατηγική $s_i \in S^i$.

Επομένως σχηματίζεται μια στρατηγική κατάσταση $s \in S$, και σε κάθε παίκτη αποδίδεται πληρωμή $h^i(s)$.

Σκοπός κάθε παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει μέσω της στρατηγικής που θα ακολουθήσει την ωφέλεια/πληρωμή του.

Αν θέλουμε να εστιάσουμε στον παίκτη i συμβολίζουμε $s = (s^i, s^{-i})$, όπου $s^{-i} = \prod_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} s^j$,

δηλαδή s^i στρατηγική του i, s^{-i} στρατηγική όλων των υπολοίπων.

2.2 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

Αν $S = (S^i, S^{-i})$ ορίζουμε

$$BR^i(s) = \Big\{t^i \in S^i : h^i(t^i, s^{-i}) \geq h^i(u^i, s^{-i}) \forall u^i \in S^i\Big\}$$

Η $BR^i(s)$ αποτελείται από όλες τις δυνατές στρατηγικές (μπορούν να είναι περισσότερες από μία) του παίκτη i οι οποίες απαντάνε βέλτιστα στην στρατηγική s^{-i} των υπολοίπων παικτών. Δηλαδή, αν ο παίκτης i γνωρίζει ότι οι υπόλοιποι παίκτες θα παίξουν s^{-i} τότε το καλύτερο που έχει να κάνει για να μεγιστοποιήσει την πληρωμή του είναι να παίξει οποιαδήποτε στρατηγική ανήκει στο $BR^i(s)$.

Ορίζουμε $BR(s) = \prod_{i \in N} BR^i(s)$ για $s \in S$

και $BR(S) = \Big\{BR(s), s \in S\Big\}$

Αν μια $s \in S$ ανήκει στην $BR(s)$ τότε αυτή η s ονομάζεται Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας (Σ.Σ.Ι.) του παιχνιδιού. Δηλαδή το σύνολο των Σ.Σ.Ι. ενός παιχνιδιού θα είναι το $\Big\{s \in S : s \in BR(s)\Big\}$

Η πρακτική ερμηνεία η οποία κρύβεται σε ένα ΣΣΙ είναι ότι κανένας παίχτης δεν έχει κίνητρο να αλλάξει μονομερώς την στρατηγική του αν η στρατηγική κατάσταση είναι s. Δηλαδή κάθε παίκτης απαντά βέλτιστα στους υπόλοιπους.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u> Αν από τους παίκτες παίζεται ένα ΣΣΙ αυτό δεν είναι απαραίτητα κάτι καλό για αυτούς

πχ :

Το μόνο ΣΣΙ εδώ είναι το (s_1^1, s_1^2) με πληρωμές $(-8,-8)$, σαφώς χειρότερο παίξιμο από το (s_2^1, s_2^2) που δίνει πληρωμές $(-1,-1)$ χωρίς να είναι ΣΣΙ!

	s_1^1	s_2^1
S_1^2	$(-8,-8)$	$(0,10)$
S_2^2	$(-10,0)$	$(-1,-1)$

2.3 ΜΕΙΚΤΗ ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΕΝΟΣ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ

Έστω A_i το σύνολο των (καθαρών) στρατηγικών του παίχτη i.

Κάθε κατανομή πιθανότητας πάνω στο A_i θα ονομάζεται μεικτή στρατηγική του παίκτη i.

Ορίζουμε $\tilde{S}_i$ το σύνολο των μεικτών στρατηγικών του παίκτη i και $\tilde{S} = \prod_{i \in N} \tilde{S}_i$.

Ορισμός: Μεικτή επέκταση ενός παιχνιδιού $\Gamma =< N, S^i, h^i >$ είναι το παιχνίδι $\tilde{\Gamma} =< N, \tilde{S}^i, \tilde{h}^i, i \in N >$ με συνάρτηση $\tilde{h}_i : \prod_{i \in N} \tilde{S}_i \to \mathbb{R}$ με

$$\tilde{h}^i(\tilde{s}) = E(h^i(s)|\tilde{s})$$

.

Στην διακριτή περίπτωση με την οποία θα ασχοληθούμε,

$$h^i(\tilde{s}) = \sum_{s \in S} \tilde{s}(s) h^i(s^i, s^{-i}),$$

όπου η $\tilde{s}^j(s^j) =$ πιθανότητα να επιλεγεί η s^j υπό της $\tilde{s}^j$

$$\tilde{s}(s) = \prod_{j \in N} \tilde{s}^j(s^j)$$

.

Οι ορισμοί που θα δωθούν θα αφορούν τις μεικτές στρατηγικές. Ωστόσο, είναι ακριβώς ίδιοι και στην περίπτωση των καθαρών στρατηγικών.

Έστω s_1^i, s_2^i δύο στρατηγικές του παίκτη i.

Θα λέμε ότι η s_1^i κυριαρχεί ασθενώς την s_2^i αν

$$h^i(s_1^i, s^{-i}) \geq h^i(s_2^i, s^{-i}) \forall s^{-i} \in S^{-i}.$$

Η s_1^i θα κυριαρχεί αυστηρά την s_2^i άμα

$$h^i(s_1^i, s{-}i) > h^i(s_2^i, s^{-i}) \forall s^{-i} \in S^{-i}.$$

2.4 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Οι πελάτες στο πλαίσιο που θα εξετάσουμε είναι ομογενείς. Δηλαδή αν έχουμε μία στρατηγική κατάσταση $s, h^i(s) = h^j(s)$

Λόγω ομοιογένειας των πελατών θα μπορούμε να συμβολίζουμε $h(s)$ αντί $h^i(s)$. Αντίστοιχα ένα προφίλ στρατηγικών (s^i, s^{-i}) θα μπορούμε να το συμβολίζουμε (s, s).

Ορισμός: Μια στρατηγική s^e λέγεται συμμετρική στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της. Δηλαδή:

$$h(s^e, s^e) \geq h(s, s^e) \forall s \in S$$

.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πληρωμής $h(s, s')$ θεωρούμε έναν πελάτη που ακολουθεί τη στρατηγική s ενώ οι υπόλοιποι ακολουθούν την s'.

Θεωρούμε ότι το σύστημα είναι υπό στατιστική ισορροπία. Επομένως, η γενική συμπεριφορά του καθορίζεται πλήρως από την s'.

2.4.1 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Βήμα 1ο: Μελέτη της στάσιμης συμπεριφοράς ενός συστήματος κάτω από κάθε στρατηγική s' των πελατών.

Βήμα 2ο: Υπολογισμός της συνάρτησης πληρωμής $h(s, s')$ ενός επιλεγμένου πελάτη αν οι υπόλοιποι ακολουθούν την s' και αυτός ακολουθεί την s.

Βήμα 3ο: $\forall s'$ εύρεση $BR(s')$.

Βήμα 4ο: Εύρεση στρατηγικών s^e με την ιδιότητα $s^e \in BR(s^e)$, οι οποίες φυσικά θα αποτελούν και τα συμμετρικά Σημεία Στρατηγικής ισορροπίας.

Λόγω ομοιογένειας των παικτών και συμμετρίας στις στρατηγικές μπορούμε να συμβολίζουμε με $BR(s)$ το σύνολο $BR(s^{-i})$.

2.4.2 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΚΑΤΩΦΛΙΟΥ

Ας υποθέσουμε ότι οι πελάτες ενός συστήματος με εξυπηρέτηση τύπου F-C-F-S παρατηρούν το πλήθος των πελατών για να αποφασίσουν αν θα ενταχθούν στο σύστημα ή όχι. Στην περίπτωση αυτή μία στρατηγική ενός παίκτη είναι μία

$$q = (q_0, q_1, q_2, ...q_n, ...)$$

όπου q_n: η πιθανότητα με την οποία θα μπει στο σύστημα αν το πλήθος των πελατών που βλέπει είνα n.

Η στρατηγική $q = (1, 1, ..., 1, 0, 0, ...0, ..)$ (όπου το 1 βρίσκεται έως την $n-1$ θέση) θα λέγεται (καθαρή) στρατηγική κατωφλιού n. Αν παρατηρεί δηλαδή από 0 ως $(n-1)$ πελάτες τότε εισέρχεται στο σύστημα, αλλιώς όχι.

Η στρατηγική $q = (1, 1, ..., 1, p, 0, 0, ..., 0, ...)$ (όπου το p βρίσκεται στην n θέση) θα λέγεται μικτή στρατηγική κατωφλιού $n + p$.

Δηλαδή αν βρει στο σύστημα n πελάτες θα ενταχθεί με πιθανότητα p. Αν βρει λιγότερους εντάσσεται, αν βρει περισσότερους δε εντάσσεται.

Πολλές φορές, θα αναζητούμε στρατηγικές ισορροπίας τύπου κατωφλιού επειδή είναι απλές και διαισθητικά λογικές. Βέβαια, για να μπορεί να εφαρμοστεί αυτό, είναι απαραίτητο ο αφικνούμενος πελάτης να γνωρίζει το πλήθος των πελατών σε κάποιο (αν όχι όλο) κομμάτι του συστήματος.

2.4.3 ΠΛΑΙΣΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Οι πελάτες είναι ουδέτεροι ως προς των κίνδυνο, υπό την έννοια ότι επιθυμούν να μεγιστοποιούν το αναμενόμενο κέρδος τους.

Οι διαχειριστές του συστήματος δρουν είτε ως μονοπωλιακοί σχεδιαστές είτε ως κοινωνικοί σχεδιαστές.

- ⟶ Ο μονοπωλιακός σχεδιαστής επιθυμεί να μεγιστοποιήσει την δικιά του αναμενόμενη ωφέλεια ανά χρονική μονάδα.
- ⟶ Ο κοινωνικός σχεδιαστής θέλει να μεγιστοποιήσει τον αναμενόμενο κοινωνικό πλούτο ανά χρονική μονάδα.

  Στην περίπτωση αυτή δεν λαμβάνονται υπόψη οι πληρωμές μεταξύ οντοτήτων του συστήματος (πχ κάποια πληρωμή των πελατών προς τον διαχειριστή) διότι και ο διαχειριστής, όπως φυσικά και οι πελάτες αποτελούν κομμάτια του "κοινωνικού πλούτου".

Κεφάλαιο 3

ΑΠΛΑ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΑ ΔΙΚΤΥΑ ΟΥΡΩΝ

3.1 ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Ένα δίκτυο συστημάτων εξυπηρέτησης είναι ένα σύνολο από συστήματα εξυπηρέτησης τα οποία συνδέονται μεταξύ τους, υπό την έννοια ότι οι πελάτες που αναχωρούν από ένα σύστημα μπορούν να πάνε σε κάποιο άλλο για να συνεχίσουν εκεί την εξυπηρέτησή τους.

Έστω δίκτυο με N σταθμούς εξυπηρέτησης. Έστω $Q_i(t)$ το πλήθος των παρόντων πελατών στον σταθμό i του δικτύου τη χρονική στιγμή t. Η $\{Q(t)\} = \{(Q_1(t), \ldots, Q_N(t))\}$ θα 'ναι η βασική στοχαστική μας διαδικασία.

Ορισμός: Ένα δίκτυο εξυπηρέτησης θα λέγεται ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΟ αν η $\{Q(t)\}$ είναι ΜΑΣΧ (Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου).

Αν οι πελάτες κινούνται μεμονωμένα θα χουμε ένα απλό Μαρκοβιανό δίκτυο.

Ορισμός: Ένα δίκτυο θα λέγεται ανοιχτό εάν επιτρέπονται οι εξωτερικές αφίξεις σε τουλάχιστον έναν σταθμό του και επιτρέπονται εξωτερικές αναχωρήσεις από τουλάχιστον έναν σταθμό του.

Αλλιώς θα λέγεται κλειστό και θα έχει σταθερό πλήθος πελατών με χώρο καταστάσεων $n = (m, \ldots, n_N) \in (N_0^N : n_i \geq 0, i = 1, \ldots, N)$.

- Αν μία χρονική στιγμή t $Q(t) = n = (n_1, \ldots, n_N)$ και $e_i = (0, 0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$ τότε η επόμενη μετάβαση μπορεί να είναι i.
- $n \to n + e_i$ (Εξωτερική άφιξη στον σταθμό.)
- $n \to n - e_j$ (Αναχώρηση από τον σταθμό j (πρέπει $n_j \geq 1$).)
- $n \to n + e_i - e_j$ (Μετάβαση από τον σταθμό j στον i. (πρέπει $n_j \geq 1$).)

όπου $n \in (\mathbb{N})^N$.

Αντίστοιχοι αριθμοί

- $\lambda_i(n) = q(n, n + e_i)$, ο εξωτερικός ρυθμός αφίξεων στην i, όταν η κατάσταση του δικτύου είναι n.

- $\mu_{j,0}(n) = q(n, n - e_j)$, ο εξωτερικός ρυθμός αναχωρήσεων από την j, όταν η κατάσταση του δικτύου είναι n.
- $\mu_{j,i}(n) = q(n, n + e_j - e_i)$, ο ρυθμός αναχωρήσεων από την j στην i, όταν η κατάσταση του δικτύου είναι n.

Θέτουμε $\mu_j(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} \mu_{j,i}(n)$, το συνολικό ρυθμό εξυπηρέτησης στην j όταν η κατάσταση του δικτύου είναι n.

Σε ένα ανοιχτό απλό δίκτυο ουρών υπάρχουν τουλάχιστον δύο καταστάσεις $n, m \in \mathbb{N}^N$και $i, j \in \{1, \ldots, N\} : \lambda_i > 0, \mu_{j,0}(m) > 0$.

3.2 ΔΙΚΤΥΑ JACKSON

Ορισμός: Ένα απλό μαρκοβιανό δίκτυο συστημάτων εξυπηρέτησης θα λέγεται ΔΙΚΤΥΟ JACKSON αν:

1. $\lambda_i(n) = \lambda_i$(διαδικασία εξωτερικών αφίξεων στον σταθμό i: P(P(λ)))
2. $\mu_j(n) = \mu_j(n_j)$
3. $\mu_{j,i}(n) = \mu_j(n_j) \cdot P_{j,i}$. Στην περίπτωση αυτή οι πελάτες επιλέγουν τους επόμενους σταθμούς που θα εξυπηρετήσουν με βάση μία ΜΑΣΧ.

3.2.1 ΑΝΟΙΧΤΑ ΔΙΚΤΥΑ JACKSON

Ορισμός: Ένα δίκτυο Jackson θα λέγεται ανοιχτό αν υπάρχουν σταθμοί i,j : $\lambda_i > 0, \mu_j(n_j) > 0$

Μαρκοβιανός πίνακας Ανοιχτού Δικτύου Jackson:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \cdots & \frac{\lambda_n}{\lambda} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ \cdots & & & & \\ p_{N,0} & p_{N,1} & p_{N,2} & \cdots & p_{N,N} \end{pmatrix}, \text{όπου } \lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$$

Μαρκοβιανός πίνακας Κλειστού Δικτύου Jackson.

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,N} \\ \cdots & & \\ & & \\ p_{N,1} & \cdots & p_{N,N} \end{pmatrix}$$

Και στις δύο περιπτώσεις τα $p_{i,j}$ συμβολίζουν την πιθανότητα ένας πελάτης που μόλις εξυπηρετήθηκε από τον σταθμό i να πάει στον σταθμό j, για $i, j \geq 1$.

Στην πρώτη περίπτωση το $p_{i,0}$ συμβολίζει την πιθανότητα αποχώρησης του πελάτη από το δίκτυο αφού εξυπηρετηθεί από τον σταθμό i.

Στην πρώτη περίπτωση το $\frac{\lambda_i}{\lambda}$ συμβολίζει την πιθανότητα ενός μόλις αφιχθείς πελάτης τους συστήματος να πάει να εξυπηρετηθεί στον σταθμό i.

$\{Q(t)\}$ αδιαχώριστη $\iff$ Η ΜΑΔΧ των μεταβάσεων ενός πελάτη είναι αδιαχώριστη $\iff \forall i, j \ \exists \ i_1, \ldots, i_n : p_{i,i_1} p_{i,i_2} \cdots p_{i_n,j} > 0 \iff$ Κάθε πελάτης σε όποιο σταθμό κι αν είναι μπορεί να περάσει από όλους τους σταθμούς.

Αποτελεί την μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση, γιατί αλλιώς σπάμε το δίκτυο σε αδιαχώριστα υποδίκτυα Jackson τα οποία μπορούμε να τα μελετήσουμε ξεχωριστά.

Ορισμός: Ο ρυθμός διαπέρασης (throughput) Λ_i ενός σταθμού i σε ένα δίκτυο Jackson ορίζεται ως ο συνολικός ρυθμός περατώσεων εξυπηρετήσεων σε ένα σταθμό i, $i = 1, \ldots, N$.

Εφόσον όσοι φτάνουν σε κάποιο δίκτυο θα εξυπηρετηθούν από αυτό ο ρυθμός διαπέρασης Λ_i είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό αφίξεων στον i, αλλά και με το συνολικό αριθμό αναχωρήσεων στον i.

Θεώρημα: Το Λ_i είναι η μοναδική μη-αρνητική λύση του συστήματος.

$$\Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j p_{j,i}, i = 1, 2, \ldots, N$$

Λ_i : Συνολικός ρυθμός αφίξεων στον σταθμό i

λ_i : Ρυθμός αφίξεων στον i

$\Lambda_j p_{j,i}$: Ρυθμός μεταβάσεων από τον j στον i

ΠΡΟΤΑΣΗ :

$$\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j p_{j,0} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{ρυθμός αναχωρήσεων} & \text{ρυθμός αφίξεων} \\ \text{στο δίκτυο} & \text{στο δίκτυο} \end{array}$$

Θεώρημα: Έστω ανοιχτό δίκτυο με N σταθμούς, ρυθμούς εξυπηρετήσεων $\mu_j(n_j)$ και ρυθμοί εξωτερικών αφίξεων λ_i με πιθανότητες μετάβασης πελατών $p_{i,j}$. Τότε το δίκτυο θα είναι ευσταθες αν και μόνο αν $\forall i = 1, \ldots, N$:

$$B_i^{-1} = 1 + \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\Lambda_i^{n_i}}{\mu_i(1) \cdots \mu_i(n_i)} < \infty$$

Τότε, η κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών σε κάθε σταθμό του δικτύου ταυτίζεται με την κατανομή ισορροπίας μιας απλής Μαρκοβιανής ουράς που τροφοδοτείται με διαδικασία αφίξεων $PP(\Lambda_i)$ και έχει ρυθμούς εξυπηρέτησης $\mu_i(n_i)$.

Κατανομή ισορροπίας: Όταν το δίκτυο είναι ευσταθες τότε η κατανομή ισορροπίας του θα είναι:

$$P(n) = P(n_1, n_2, \ldots, n_N) = P_1(n_1) \cdot P_2(n_2) \cdot \ldots \cdot P_N(n_N),$$

όπου $P_i(n_i) = \dfrac{B_i \Lambda_i^{n_i}}{\mu_i(1) \cdot \mu_i(2) \cdots \mu_i(n_i)}, n_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \ldots, N$

Συνήθης υποπερίπτωση: $\mu_i(k) = \mu_i, i = 1, \ldots, N$.

Τότε

$$B_i^- 1 = 1 + \sum_{n_i=1}^{\infty} (\frac{\Lambda_i}{\mu_i})_i^n = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{\Lambda_i}{\mu_i})^k \overset{\Lambda_i \leq \mu_i}{=}$$

$\frac{1}{1 - \frac{\Lambda_i}{\mu_i}} = \frac{\mu_i}{\mu_i - \Lambda_i}$, οπότε $B_i = \frac{\mu_i - \Lambda_i}{\mu_i}$

ΚΑΙ $P_i(n_i) = \dfrac{(\mu_i - \Lambda_i)\Lambda_i^{n_i}}{\mu_i^{n_i+1}} = \dfrac{\mu_i - \Lambda_i}{\mu_i} (\dfrac{\Lambda_i}{\mu_i})^{n_i} = (1 - p_i) p_i^{n_i}$, με $p_i = \dfrac{\Lambda_i}{\mu_i}$

Όταν ένα δίκτυο Jackson είναι στάσιμο τότε $\forall t$ σταθερό $Q_1(t), \ldots, Q_N(t)$ ανεξάρτητες.

Επομένως
$P(n) = (P_1(n_1), \ldots, P_N(n_N)) = \prod_{i=1}^N P_i(n_i), (n = (n_1, \ldots, n_N))$

Σημείωση. Παρόλο που ισχύει η άνωθι πρόταση οι στοχαστικές διαδικασίες $\{Q_j(t), t \geq 0\}$ δεν είναι ανεξάρτητες.

- Ιδιότητα PASTA για Ανοιχτά Δίκτυα Jackson
  - Σε ένα ανοιχτό δίκτυο jackson οι κατανομές ισορροπίας των αριθμών των πελατών σε στιγμές αφίξεων σε ένα σταθμό και σε συνεχή χρόνο συμπίπτουν.

$$\text{Δηλαδή } \forall i = 1, \ldots, N : \alpha_i(n) = P_i(n)$$

.

- Επέκταση θεωρήματος Burke για Ανοιχτά Δίκτυα Jackson
  - Οι διαδικασίες των εξωτερικών αναχωρήσεων $\{D_i(t), t \geq 0\}, i = 1, \ldots, n$ στους σταθμούς ενός ανοιχτού στάσιμο δικτύου Jackson είναι ανεξάρτητες διαδικασίες $Poisson$ με αντίστοιχους ρυθμούς $\Lambda_i p_{i,0}$.

Επιπλέον, $\forall t > 0$ σταθερό, η διαδικασία του πλήθους των πελατών από την χρονική στιγμή t και μετά είναι ανεξάρτητη από τη διαδικασία αναχωρήσεων από τους σταθμούς πριν τη χρονική στιγμή t.

Εφαρμογή ($M/M/1$ **ουρά με επανάληψη εξυπηρέτησης ποσοστού πελατών**)

Έστω $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρετήσεων μ. Όταν ένας πελάτης ολοκληρώνει την εξυπηρέτηση του τότε ξαναμπαίνει στο σύστημα (στο τέλος της ουράς) με πιθανότητα P.

Να βρεθεί η κατανομή ισορροπίας των πελατών.

Έχουμε ένα δίκτυο Jackson με ένα σταθμό, ανοιχτό.

Εξισώσεις κίνησης: $\Lambda_1 = \lambda_1 + \Lambda_1 P \iff \Lambda_1 = \Lambda = \frac{\lambda_1}{1-P} = \frac{\lambda}{1-P}$

Οπότε $p_n = \frac{(\mu-\Lambda)\Lambda^n}{\mu^{n+1}} = (1 - \frac{\lambda}{(1-P)\mu})(\frac{\lambda}{(1-P)\mu})^n, n \geq 0$

3.2.2 ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ JACKSON

Ο ρυθμός διαπέρασης (throughput) ενός σταθμού i σε ένα κλειστό δίκτυο Jackson ορίζεται όπως και στα ανοιχτά δίκτυα, δηλαδή: συνολικός ρυθμός περατώσεων εξυπηρετήσεων στο σταθμό = αριθμός αφίξεων στο σταθμό.

Οι σχετικοί ρυθμοί διαπέρασης ικανοποιούν το ίδιο συστ.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ:$\Lambda_i = \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j p_{j,i}, \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i = 1$

Σύστημα εξισώσεων ισορροπίας ΜΑΣΧ με πίνακα:

$$\begin{pmatrix} p_{1,j-1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,N} \\ \dots & & & \\ & & & \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \dots & 1-p_{N,N} \end{pmatrix}$$

Η ΜΑΣΧ αυτή είναι πεπερασμένη και αδιαχώριστη άρα θα είναι θετικά επαναληπτική άρα θα έχει στάσιμη κατανομή.

3.3 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ JACKSON)

Έστω κλειστό δίκτυο Jackson με N σταθμούς, ρυθμούς εξυπηρετήσεις $\mu_j(n_j), j = 1, \ldots, N$ και πιθανότητες μετάβασης Pj, i. Αν $(\Lambda_i), i = 1, \ldots, N$ η λύση των εξισώσεων κίνησης. Τότε το δίκτυο είναι ευσταθες και η κατανομή ισορροπίας είναι:

$$P(n) = P(n_1, \ldots, n_N) = B_M \prod_{i=1}^{N} \frac{\Lambda_i^{n_i}}{\mu_i(1) \cdots \mu_i(n_i)}, n \in S_c^M$$

$$S_c^M = \{(n_1, \ldots, n_N) \geq 0 : \sum_{i=1}^{N} n_i = M\}$$

$$B_M = (\sum_{n \in S_c^M} \prod_{i=1}^{N} \frac{\Lambda_i^{n_i}}{\mu_i(1) \cdot \mu_i(2) \cdots \mu_i(n_i)})^{-1}$$

(M - ο σταθερός αριθμός πελατών)

Κεφάλαιο 4

ΔΙΚΤΥΑ ΣΕ ΣΕΙΡΑ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΜΟΙΒΕΣ ΣΤΗ ΜΗ-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

4.1 ΜΟΝΤΕΛΟ

Μοντέλο: Έχουμε N Μαρκοβιανές ουρές 1,2,...,N σε σειρά, άπειρης χωρητικότητας η καθεμία, πειθαρχίας F-C-F-S.

Οι πελάτες είναι στρατηγικοί και επιδιώκουν το μέγιστο δυνατό αναμενόμενο κέρδος τους.

Οι πελάτες καταφθάνουν στην ουρά 1 σύμφωνα με μια διαδικασία $Poisson(\Lambda)$.

Η ουρά $n(n = 1, ...N)$ έχει m_n υπηρέτες.

Ο χρόνος εξυπηρέτησης στην ουρά n ακολουθεί Exp(μ_n), $n = 1, ...N$. Επίσης οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι από τις αφίξεις.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ: Έρχεται ένας πελάτης στην ουρά i, και αποφασίζει αν θα εγκαταλείψει ή όχι το σύστημα βάσει μόνον της μεικτής στρατηγικής που επέλεξε πριν εισέλθει στο σύστημα.

Η αξία εξυπηρέτησης από το σταθμό n είναι R_n.

Το κόστος εξυπηρέτησης στον σταθμό n είναι c_n ανά χρονική μονάδα.

Οι πελάτες γνωρίζουν όλες τις άνωθι παραμέτρους του συστήματος ωστόσο δεν μπορούν να παρατηρήσουν/δεν έχουν καμία πληροφορία για τους πελάτες του συστήματος που είναι μπροστά τους.

Μας απασχολεί αρχικά να εξασφαλίσουμε την ευστάθεια του συστήματος και ύστερα να εντοπίσουμε συμμετρικές στρατηγικές, οι οποίες είναι είτε Σημεία Στρατηγικής Ισορροπίας είτε είναι Κοινωνικά Βέλτιστες.

4.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Οι καθαρές στρατηγικές είναι πεπερασμένες και $N+1$ το πλήθος:

$$\{s_0, s_1, ..., s_N\} = \{(0,0,...,0), (1,0,0,...,0), (1,1,0,...,0), ..., (1,1,...,1)\}$$

όπου η στρατηγική s_i=(1,1,...,1,...0,0,...0) [Το 1 φτάνει μέχρι την i-θέση] σημαίνει ότι μπαίνει στις ουρές μέχρι την i και αποχωρεί στην $i+1$ θέση, με $i \geq 1$.

Η $s_0 = (0,0,...,0)$ είναι η στρατηγική κατά την οποία ο πελάτης αποχωρεί κατευθείαν δίχως να μπει σε καμία ουρά.

Έστω $P = \{(p_0, p_1, ..., p_N), p_i \geq 0, \sum_{n=1}^{N} p_n = 1\}$ το σύνολο των μεικτών στρατηγικών του παίκτη i, όπου p_i η πιθανότητα να παιχτεί η στρατηγική s_i.

2ος (ΚΑΙ ΒΟΛΙΚΟΤΕΡΟΣ) τρόπος προσδιορισμού του συνόλου των μεικτών στρατηγικών Έστω $x_n = \displaystyle\sum_{j=n}^{N} p_J$, η πιθανότητα ο πελάτης να φτάσει τουλάχιτον στην ουρά n, $n \geq 1$.

$x = (x_1, ..., x_N)$ μεικτή στρατηγική $\Leftrightarrow 0 \leq x_N \leq ... \leq x_1 \leq 1$

Σε κάθε x αντιστοιχεί μοναδική p και το αντίστροφο.

Επομένως η $x = (x_0, x_1, ..., x_N)$ καθορίζει πλήρως μία μεικτή στρατηγική ενός πελάτη.

4.3 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Λήμμα: Εάν όλοι οι πελάτες ακολουθούν μια μεικτή στρατηγική x τότε το σύστημα θα είναι ευσταθές αν και μόνο αν $x_n < \frac{m_n \mu_n}{\Lambda} \rightarrow$ το ορίζουμε $\tau_n, \forall n = 1, ..., N$

Στην περίπτωση αυτή η ουρά n θα συμπεριφέρεται σαν ουρά $M/M/m_n$ με ρυθμό εισόδου $\lambda_n = \Lambda x_n$

Απόδειξη

Με επαγωγή, πάνω στο πλήθος των ουρών.

Για N=1 έχουμε αφίξεις ρυθμού Λx_1 διότι εφόσον έρχονται οι πελάτες στο σύστημα με διαδικασία $PP(\Lambda)$ και μπαίνουν στην ουρά 1 με πιθανότητα x_1 τότε οι αφίξεις στην ουρά 1 είναι διαδικασία $Poisson(\Lambda x_1)$

Ευστάθεια θα έχουμε $\Leftrightarrow \frac{p_1}{c} < 1 \Leftrightarrow \frac{\Lambda x_1}{m_1 \mu_1} < 1 \Leftrightarrow x_1 < \frac{m_1 \mu_1}{\Lambda} = \tau_1$

Έστω ότι ισχύει το αποτέλεσμα για n ουρές. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $N = n + 1$.

Για k είμαστε καλυμμένοι από την επαγωγική υπόθεση.

Έστω $x_n = 0 \rightarrow x_{n+1} = 0 \rightarrow \lambda_{N+1} = \Lambda x_{N+1)} = 0$, ευστάθεια.

Αν $x_n > 0$ τότε η πιθανότητα ένας πελάτης να φτάσει στην ουρά $n + 1$ με δεδομένο ότι έφτασε στην ουρά n είναι $\frac{x_{n+1}}{x_n}$. Ξέρουμε επίσης ότι ο ρυθμός άφιξης στην ουρά n είναι $\lambda_n = \Lambda x_n$

Οπότε ο ρυθμός άφιξης στην ουρά $(n + 1)$ θα είναι:

$$\lambda_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \lambda_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \Lambda x_n = \Lambda x_{n+1}$$

Ευστάθεια θα έχουμε και στον σταθμό $(n + 1)$ (εκτός από όλους τους άλλους που την έχουμε εξασφαλισμένη από τη επαγωγική υπόθεση) αν και μόνο αν

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\mu_{n+1} m_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow \Lambda x_{n+1} < \mu_{n+1} m_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1} < \tau_{n+1}$$

4.4 ΣΗΜΕΙΟ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Ορισμός: $W_n(\lambda_n)$: Ο μέσος χρόνος που θα περάσει ένας πελάτης στην ουρά n συναρτήσει του λ_n (υπό το άνωθι μοντέλο)

Πρόταση (Lee-Cohen 1983)

Για $\lambda_n < m_n\mu_n$, ισχύει $W_n(\lambda_n) \nearrow$ αύξουσα και κυρτή, και $\lim\limits_{\lambda_n \to m_n\mu_n} W_n(\lambda_n) = +\infty$

Έστω $u_n(x_n) = R_n - C_n W_n(\Lambda x_n), 0 \leq x_n < \tau_n$, το αναμενόμενο όφελος ενός πελάτη από την ουρά n.

Προκύπτει ότι u_n γνησίως φθίνουσα ως προς x_n, γνήσια κοίλη και ότι $\lim\limits_{x_n \to \tau_n} u_n(x_n) = -\infty$.

(*): Έχει αποδειχθεί επίσης ότι $x_n u_n(x_n)$ γνήσια κοίλη και

$$\lim_{x_n \to \tau_n} x_n u_n(x_n) = -\infty$$

Το αναμενόμενο κέρδος ενός παίκτη που παίζει μεμονωμένα y όσο οι υπόλοιποι παίζουν x είναι:

$$\sum_{n=1}^{N} y_n u_n(x_n)$$

Βέλτιστη Απόκριση:

$$F(x) = max\Big\{\sum_{n=1}^{N} y_n u_n(x_n), 1 \geq y_1 \geq ... \geq y_N \geq 0\Big\}$$

Παρατήρηση: Για κάθε στρατηγική x υπάρχει βέλτιστη απάντηση y καθώς το πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού φραγμένο, με μη κενή εφικτή περιοχή.

Το x θα είναι συμμετρικό ΣΣΙ $\Leftrightarrow x \in F(x)$

Θεώρημα 1:

Υπάρχει μοναδικό ΣΣΙ x^e με $x_n^e = \begin{cases} min\{x_{n-1}^e, \theta_n\} & , n = 1, \ldots, N \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$

Όπου $\theta_n = \begin{cases} 0 & , B_n(0) \leq 0 \\ (B_n)^{-1}(0) & , \text{αλλιώς} \end{cases}$

Η B_n ορίζεται ως εξής

$$B_n(x_n) = \begin{cases} u_n(x_n) + B_{n+1}^+(x_n) & , x_n < min(\tau_n, \tau_{n+1}) \\ u_n(x_n) & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για $n < N$ και $B_N(x_N) = u_N(x_N), 0 \leq x_n < \tau_n$.

4.5 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΥ ΠΛΟΥΤΟΥ

Αν από όλους τους παίκτες/πελάτες παίζεται η στρατηγική x τότε ο ρυθμός κέρδους ανά χρονική μονάδα θα είναι:

$$g(x) = \lambda_1 u_1(x_1) + \lambda_2 u_2(x_2) + \ldots + \lambda_N u_n(x_n) = \Lambda \sum_{n=1}^{N} x_n u_n(x_n), x_n < \tau_n$$

Θεώρημα 2: Υπάρχει μοναδική συμμετρική στρατηγική x^* η οποία αποφέρει τον μέγιστο δυνατό κοινωνικό πλούτο, δηλαδή μεγιστοποιεί την $g(x)$.

$$x_n^* = \begin{cases} min\{x_{n-1}^*, \xi_n\} & , n = 1, \ldots, N \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$$

όπου

$$\xi_n = \begin{cases} 0 & , S_n'(0) \leq 0 \\ (S_n')^{-1}(0) & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η S_n ορίζεται ως εξής: $S_n(x_n) = x_n u_n(x_n) + G_{n+1}(x_n)$

για
$G_{N+1}(x) = 0, G_n(x) = max\{x_n u_n(x_n) + G_{N+1}(x), 0 \leq x_n < min(x, \tau_n)\}$

(Αποδεικνύεται ότι η S_n είναι συνεχής διαφορισιμη αλλά και κοίλη για $0 \leq x_n < \tau_n$.)

Τα θεωρήματα 1,2 μας δίνουν έναν αλγοριθμικό τρόπο υπολογισμού και της μοναδικής συμμετρικής στρατηγικής x^e η οποία είναι ΣΣΙ καθώς και της x^* η οποία είναι κοινωνικά βέλτιστη

Θεώρημα 3

$$x_n^* \leq x_n^e, \forall n = 0, 1, \ldots, N$$

Κεφάλαιο 5

ΔΙΚΤΥΑ ΣΕ ΣΕΙΡΑ ΜΕ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΜΟΙΒΗ ΥΠΟ ΜΕΡΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗ

5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Έχουμε M ουρές, άπειρης χωρητικότητας τύπου F-C-F-S με έναν υπηρέτη η καθεμιά. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης κάθε ουράς είναι $Exp(\mu_i)$ και η διαδικασία αφίξεων στην πρώτη ουρά είναι $Poisson(\lambda)$.

Οι πελάτες: Μαθαίνουν με το που αφικνούνται τον συνολικό αριθμό πελατών στο σύστημα και αποφασίζουν αν θα εισέλθουν ή όχι στο σύστημα. Γνωρίζουν επίσης και τις εξής παραμέτρους συστήματος:

→ Κόστος αναμονής στον κόμβο i : c_i ανά χρονική μονάδα

→ Αμοιβή R από την ολοκλήρωση της υπηρεσίας στρατηγική $S = (S_0, \ldots, S_k)$όπου S_k η πιθανότητα να μπει πελάτης στο σύστημα αν $\exists k$ άτομα ήδη σε αυτό.

$$P = \begin{cases} R - \sum_{i=1}^{N} c_i s_i & ,\text{αν μπει όπου } s_i \text{ χρόνος παραμονής στον κόμβο i} \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

Υπόθεση

$$R > \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{\mu_i}$$

Δηλαδή αν το σύστημα είναι άδειο, να συμφέρει τον πελάτη να μπει σε αυτό.

Θα αναζητήσουμε στρατηγικές ισορροπίας, τύπου κατωφλιού.

5.2 ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΒΑΣΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ ΚΑΤΩΦΛΙΟΥ

Έστω τη στιγμή t η κατάσταση του συστήματος $(Q_1(t), \ldots, Q_M(t))$.

Αν ακολουθείται στρατηγική S τότε $\{Q_1(t), ..., Q_M(t)\}$ ΜΑΣΧ διότι αν ακολουθείται στραγηγική S κατωφλίου K από όλους του πελάτες. Τότε:

Αν $n = (n_1, ..., n_m)$ τότε υπό την στρατηγική S.

$$q_s(n, n') = \begin{cases} \lambda S|n| & , n' = n + e_1, |n| < K \\ \mu_i & , n' = n + e_{i+1} - e_i \\ \mu_M & , n' = n - e_M \end{cases}$$

$q(n, n) = -\lambda S_{|n|} - \sum_{i=1}^{M} \mu_i I_{n_i > 0}$

Αυτή η ΜΑΣΧ έχει στάσιμη κατανομή που εξαρτάται από την S

$$\Pi_S(n) = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{|n|} S_k \prod_{i=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu_i})^{n_i}}{\displaystyle\sum_{n' \in Z_+^M} \prod_{k=0}^{|n'|} S_k \prod_{i=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu_i})^{n'_i}}, n = (n_1, \ldots, n_\mu) \in \mathbb{R}$$

Όπου $\Pi_S(n) = P((N_1, \ldots, N_M) = (n_1, \ldots, n_M) = n)$

$$\Pi(n|\,|n|) = \Pi(n_1, \ldots, n_M | n_1 + \ldots + n_M = |n|) = \frac{\Pi(n_1, \ldots, n_M)}{\Pi(n_1 + \ldots + n_M = |n|)}$$

$$\overset{\mathrm{n_1+\ldots+n_M=k}}{=} \frac{\Pi(n_1, \ldots, n_M)}{\displaystyle\sum_{\substack{\overline{n} \\ |\overline{n}|=k}} \Pi(\overline{n})} = \frac{\Pi(n_1, \ldots, n_M)}{\displaystyle\sum_{\substack{\overline{n} \\ |\overline{n}|=k}} \Pi(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_M)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\prod_{k=0}^{|n|} S_k \prod_{i=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu_i})^{n_i}}{\sum_{n' \in Z_+^M} \prod_{k=0}^{|n'|} S_k \prod_{i=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu_i})^{n'_i}}}{\sum_{|\overline{n}|=|n|} \dfrac{\prod_{k=0}^{|\overline{n}|} S_k \prod_{i=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu_i})^{\overline{n}'_i}}{\sum_{n' \in Z_+^M} \prod_{k=0}^{|n'|} S_k \prod_{i=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu_i})^{n'_i}}} = \frac{\dfrac{\prod_{k=0}^{|n|} S_k \prod_{i=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu_i})^{n_i}}{\sum_{n' \in Z_+^M} \prod_{k=0}^{|n'|} S_k \prod_{i=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu_i})^{n'_i}}}{\sum_{|\overline{n}|=n} \dfrac{\prod_{k=0}^{|n|} S_k \prod_{i=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu_i})^{\overline{n}_i}}{\sum_{n' \in Z_+^M} \prod_{k=0}^{|n'|} S_k \prod_{i=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu_i})^{\overline{n}'_i}}} =$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{|n|} S_k \prod_{i=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu_i})^{n_i}}{\sum_{|\overline{n}|=n} \prod_{k=0}^{|n|} S_k \prod_{i=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu_i})^{\overline{n}_i}} = \frac{\cancel{\prod_{k=0}^{|n|} S_k \lambda^{|N|M}} \prod_{i=1}^{M} (\frac{1}{\mu_i})^{n_i}}{\sum_{|\overline{n}|=n} \cancel{\prod_{k=0}^{|n|} S_k \lambda^{|N|M}} \prod_{i=1}^{M} (\frac{1}{\mu_i})^{\overline{n}_i}} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{M} (\frac{1}{\mu_i})^{n_i}}{\sum_{|n'|=n} \prod_{i=1}^{M} (\frac{1}{\mu_i})^{\overline{n'}_i}}$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ της στρατηγικής S

5.3 ΕΥΡΕΣΗ (ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΥ) ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη. Υποθέτουμε ότι όλοι οι υπόλοιποι ακολουθούν στρατηγική S. Τα κέρδη του αν εισέλθει στο σύστημα δεδομένου ότι βλέπει οτι υπάρχουν k άτομα στο σύστημα που ακολουθούν τη στρατιγική S είναι

$$P_S(k) = \sum_{|n|=k} P^*(n)\pi_S(n|k),$$

όπου $P^*(n)$ το αναμενόμενο κέρδος του αν η κατάσταση του συστήματος είναι n. Προφανώς $P^*(n)$ ανεξάρτητο του S διότι n σταθερό.

Όμως δείξαμε και ότι $\Pi_S(n|k) = \Pi(n|k)$ Ανεξάρτητη της S

Όποτε έχουμε $P(k) = \sum_{|n|=k} P^*(n)\Pi(n|k)$

Θεώρημα:

$$P(k) = R - \frac{\displaystyle\sum_{|n|=k+1}\sum_{i=1}^{M} n_i c_i \prod_{i=1}^{M}(\frac{1}{\mu_i})^{n_i}}{\displaystyle\sum_{|n|=k}\prod_{i=1}^{M}(\frac{1}{\mu_i})^{n_i}}$$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> $P(k) \searrow$ ως προς k και

$$P(0) = R - \frac{\displaystyle\sum_{|n|=1} n_i c_i \prod_{i=1}^{M}(\frac{1}{\mu_i})^{n_i}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{M}(\frac{1}{\mu_i})^{0}} = R - \sum_{i=1}^{M}(\frac{c_i}{\mu_i}) > 0.$$

Έστω $k^* = max\{k \in \mathbb{N} : P(k) > 0\}$

(ΚΟΙΝΟ $\forall$ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ S!)

Οπότε $S_J = \begin{cases} 1, j \leq k^* \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases}$ (ΣΥΜ/ΚΟ) σημείο στρατιγικής ισορροπίας.

Κεφάλαιο 6

ΔΙΚΤΥΑ ΣΕ ΣΕΙΡΑ ΜΕ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΜΟΙΒΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΑΠΟΧΩΡΗΣΗΣ

6.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Περιγραφή Μοντέλου: Έχουμε δύο ουρές σε σειρά.

- Και οι δύο είναι τύπου F-C-F-S.
- Οι αφίξεις στην πρώτη ουρά γίνονται σύμφωνα με διαδικασία $PP(\lambda)$.
- Οι χρόνοι εξυπηρέτησης στις ουρές 1 και 2 ακολουθούν $Exp(\mu_\alpha)$ και $Exp(\mu_t)$ αντίστοιχα.
- Το κόστος παραμονής στο σύστημα είναι c ανά χρονική μονάδα, ανεξάρτητα με το σε ποια ούρα βρίσκεται ο πελάτης.
- Αν ο πελάτης ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση του και από την πρώτη και από τη δεύτερη ουρά έχει κέρδος V.

Με όλα τα παραπάνω να είναι κοινή γνώση ο κάθε πελάτης, (ο οποίος είναι ουδέτερος ως προς τον κίνδυνο) καλείται να πάρει δύο αποφάσεις.

- Πρώτον, αν θα μπει στο σύστημα κατά την άφιξή του στην πρώτη ουρά ή αν θα αποχωρήσει.
- Δεύτερον, όταν έχει ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση του από την πρώτη ουρά αν θα συνεχίσει στο σύστημα προχωρώντας στη δεύτερη ουρά ή αν θα αποχωρήσει.

Ξέχωρα από την πλήρη γνώση του μοντέλου και των παραμέτρων του, κάθε πελάτης έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει κάποια δεδομένα για την κατάσταση του συστήματος, τόσο τη στιγμή που αφικνείται σε αυτό, όσο και βρισκόμενος ανάμεσα στις δύο ουρές. Στη συνέχεια θα οριστούν και θα αναλυθούν η πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση και η μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση.

Και στις δύο περιπτώσεις οι πελάτες εφόσον έχουν ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή τους από την πρώτη ουρά παρατηρούν το πλήθος των πελατών που βρίσκονται στην δεύτερη ουρά και αναλόγως αποφασίζουν αν θα εισέλθουν ή όχι. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι βλέπουν k άτομα στην δεύτερη ουρά. Για να έχει ένας πελάτης κίνητρο να εισέλθει θα πρέπει να έχει αναμενόμενη ωφέλεια >0. Πιο συγκεκριμένα:

$$V - (k+1) \cdot \frac{c}{\mu_t} > 0 \iff k+1 < \frac{V\mu_t}{c}$$

Άρα η δεύτερη ουρά θα έχει το πολύ $N_t = \lfloor \frac{V\mu_t}{c} \rfloor$ πελάτες.

Το μέγιστο δυνατό αναμενόμενο όφελος που θα έχει ένας πελάτης από τη δεύτερη ουρά είναι $V - \frac{c}{\mu_t}$ (στην περίπτωση που τη βρει άδεια).

Έστω ότι ένας πελάτης που αφικνείται στο σύστημα παρατηρεί k πελάτες στην πρώτη ουρά. Τότε στην καλύτερη δυνατή περίπτωση (όταν τελειώσει την εξυπηρέτηση του από την πρώτη ουρά η δεύτερη να είναι άδεια) η αναμενόμενη ωφέλεια του θα είναι $V - \frac{c}{\mu_t} - (k+1)\frac{c}{\mu_\alpha}$

Για να είναι θετική πρέπει $k+1 < (V - \frac{c}{\mu_t})\frac{\mu_\alpha}{c}$.

Επομένως η πρώτη ουρά θα έχει το πολύ $N_\alpha = \lfloor (V - \frac{c}{\mu_t})\frac{\mu_\alpha}{c} \rfloor$.

Τέλος για να μην είναι το σύστημα τετριμμένο (μονίμως κενό) θα πρέπει οπωσδήποτε ένας πελάτης που δεν θα βρει μπροστά του κανέναν ούτε στην 1η αλλά ούτε και στη δεύτερη ουρά να έχει κίνητρο να εισέλθει σε αυτό.

Δηλαδή $V > c(\frac{1}{\mu_\alpha} + \frac{1}{\mu_t})$.

Συνοψίζοντας μπορούμε να προσθέσουμε στις συνθήκες του μοντέλου ότι αν το σύστημα είναι στην κατάσταση (n_α, n_t) θα πρέπει

1. $0 \le n_\alpha \le \lfloor N_\alpha \rfloor, 0 \le n_t \le \lfloor N_t \rfloor$

   Όπου n_α : πλήθος πελατών στη πρώτη ουρά

   n_t : πλήθος πελατών στη δεύτερη ουρά

2. $V > c(\frac{1}{\mu_\alpha} + \frac{1}{\mu_t})$

6.2 ΠΛΗΡΩΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Αν (n_α, n_t) η κατάσταση του συστήματος όταν ο πελάτης αφικνείται στο σύστημα τότε μαθαίνει και το n_α και το n_t. Σε περίπτωση που ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση του από την πρώτη ουρά πληροφορείται το πλήθος των πελατών της δεύτερης ουράς και αποφασίζει αν θα εισέλθει και σε αυτή.

Έστω $q(k; n_\alpha, n_t)$ η πιθανότητα ένας πελάτης που θα εξυπηρετηθεί από την πρώτη ουρά να βρει στη δεύτερη ουρά k πελάτες, αν κατά την άφιξη του στο σύστημα εγκατάστασης του συστήματος είναι (n_α, n_t).

- Αν $k > n_\alpha + n_t$ προφανώς $q(k; n_\alpha, n_t) = 0$ λόγω πειθαρχίας F-C-F-S και των δύο ουρών.
- Έστω $n_\alpha = 0$, τότε $q(k; 0, n_t) = (\frac{\mu_t}{\mu_t+\mu_\alpha})^{n_t-k} \cdot \frac{\mu_\alpha}{\mu_t+\mu_\alpha}$. $1 \leq k \leq n_t$, $q(0; 0, n_t) = (\frac{\mu_t}{\mu_t+\mu_\alpha})^{n_t}$. Αυτό διότι θα πρέπει $n_t - k$ συνεχόμενες φορές να ισχύει $Exp(\mu_\alpha) < Exp(\mu_t)$ και την επόμενη $Exp(\mu_t) < Exp(\mu_\alpha)$.
- Για $n_\alpha \geq 1$: $q(k; n_\alpha, 0) = q(k; n_\alpha - 1, 1)$ διότι η πιθανότητα παραμένει αναλλοίωτη μέχρι και το πέρας της 1ης εξυπηρέτησης από την ουρά 1. Δεν αλλάζει πολύ απλά κανένα δεδομένο. Με το ίδιο σκεπτικό:

  Από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για $n_\alpha \geq 1, 1 \leq n_t \leq N_t - 1$. Δεσμεύοντας στο ποιος από τους 2 εξυπηρετούμενους στις ουρές 1,2 θα εξυπηρετηθεί πρώτος :

  $$q(k; n_\alpha, n_t) = \frac{\mu_\alpha}{\mu_t + \mu_\alpha} q(k; n_\alpha - 1, n_t + 1) + \frac{\mu_t}{\mu_t + \mu_\alpha} q(k; n_\alpha, n_t - 1)$$

6.2.1 ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΩΦΕΛΕΙΑ

Ορισμός: Έστω $u(n_\alpha, n_t)$ η αναμενόμενη ωφέλεια ενός πελάτη που μπαίνει στην πρώτη ουρά ενώ η κατάσταση του συστήματος είναι (n_α, n_t).

$$u(n_\alpha, n_t) = -\frac{c(n_\alpha + 1)}{\mu_\alpha} + \sum_{k=0}^{N_t-1} q(k; n_\alpha, n_t)[V - \frac{(k+1)c}{\mu_t}]$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 (Μονοτονία ως προς n_α με n_t σταθερό)

$$u(n_\alpha + 1, n_t) < u(n_\alpha, n_t), 0 \leq n_\alpha \leq N_\alpha - 1, \forall n_t$$

Διαισθητικά είναι προφανές, σαν να εξαφανίζεται ένας μπροστινός του από το σύστημα. Επομένως αυξάνεται το αναμενόμενο ώφελος του (μπορεί εύκολα να αποδειχθεί δεσμεύοντας στον χρόνο εξυπηρέτησης του "μπροστινού του").

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 (Μονοτονία ως προς n_t με n_α σταθερό)

$$u(n_\alpha, n_t + 1) \leq u(n_\alpha, n_t), 0 \leq n_t \leq N_t - 1, \forall n_\alpha$$

Διαισθητικά η "ακαριαία" εξυπηρέτηση ενός πελάτη στην 2η ουρά αυξάνει το αναμενόμενο όφελος για έναν πελάτη στην 1η ουρά.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3 (Διαγώνια μονοτονία)

$$u(n_\alpha, n_t) \leq u(n_\alpha - 1, n_t + 1), 0 \leq n_t \leq N_t - 1, 1 \leq n_\alpha \leq N_\alpha$$

Διαισθητικά πάλι είναι εύκολο να αντιληφθούμε ότι η "ακαριαία" εξυπηρέτηση ενός πελάτη στην ουρά 1 αυξάνει το αναμενόμενο όφελος ενός πελάτη που βρίσκεται στην ουρά 1 πίσω από αυτόν που "θα εξυπηρετηθεί ακαριαία".

6.2.2 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΚΑΙ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΥΠΟ ΑΥΤΗ ΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

- Οι πελάτες θεωρούμε ότι είναι ομογενείς και θα αναζητήσουμε συμμετρικές στρατηγικές ισορροπίες.
- Έστω $\theta(n_a, n_t)$ η πιθανότητα να εισέλθει στο σύστημα ένας πελάτης που παρατηρεί ότι η κατάσταση του συστήματος είναι (n_α, n_t).

Προφανώς $\theta(n_a, n_t) = \begin{cases} 1 & ,\text{αν } u(n_\alpha, n_t) > 0 \\ 0 & ,\text{αλλιώς} \end{cases}$

Ορισμός :Μία στρατηγική θα καλείται δισδιάστατη στρατηγική κατωφλίου αν $\forall n_t$ υπάρχει κατώφλι $N(n_t)$ τέτοιο ώστε: Ο πελάτης θα εισέρχεται στο σύστημα αν παρατηρεί (n_α, n_t) αν και μόνο αν $n_\alpha < N(n_t)$.

Θεώρημα Στην πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση υπάρχει μοναδική συμμετρική στρατηγική ισορροπίας η οποία είναι δισδιάστατη στρατηγική κατωφλίου. Δηλαδή $\forall n_t$ $\exists N(n_t)$, τέτοιο ώστε οι πελάτες να εισέρχονται στο σύστημα αν και μόνο αν $n_\alpha < N(n_t)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Υπό την στρατηγική ισορροπίας το σύστημα θα αποτελεί μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου.

<u>Απόδειξη</u>

Κατάσταση (n_α, n_t)	Επόμενη	Χρόνοι
$n_\alpha \geq 1$, $n_t \geq 1$ $n_\alpha < N(n_t)$, $n_t < N_t$	$(n_{\alpha-1}, n_{t+1})$ (n_α, n_{t-1}) $(n_{\alpha+1}, n_t)$	$Exp(\mu_\alpha)$ $Exp(\mu_t)$ $Exp(\lambda)$
$n_\alpha \geq N(n_t)$, $1 \leq n_t < N_t$	$(n_{\alpha-1}, n_{t+1})$ (n_α, n_{t-1})	$Exp(\mu_\alpha)$ $Exp(\mu_t)$
$n_\alpha \geq 1$, $n_\alpha < N(n_t)$, $n_t = N_t$	$(n_{\alpha+1}, N_t)$ (n_α, N_{t-1})	$Exp(\lambda)$ $Exp(\mu_t)$
$n_\alpha \geq N(n_t)$, $n_t = N_t$	(n_α, N_{t-1})	$Exp(\mu_t)$
$n_\alpha \geq 1$, $n_t = 0$	$(n_{\alpha+1}, 0)$ $(n_{\alpha-1}, 1)$	$Exp(\lambda)$ $Exp(\mu_t)$
$n_\alpha = 0$, $1 \leq n_t \leq N_t$	$(1, n_t)$ $(0, n_{t-1})$	$Exp(\lambda)$ $Exp(\mu_t)$
$n_\alpha = 0$, $n_t = 0$	(1,0)	$Exp(\lambda)$

Εκθετικοί χρόνοι, παντού επομένως έχουμε ΜΑΣΧ με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων, αδιαχώριστη, οπότε θα έχει και στάσιμη κατανομή $\Pi(n_a, n_t)$.

6.2.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΥ ΠΛΟΥΤΟΥ

ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΣ ΠΛΟΥΤΟΣ: Η συνολική ωφέλεια των πελατών ανά χρονική μονάδα.

Στην περίπτωση που ακολουθείται η στρατηγική ισορροπίας και το σύστημα είναι στάσιμο ο κοινωνικός πλούτος SW_F θα είναι:

$$SW_F = \lambda \sum_{(n_\alpha, n_t)} \Pi(n_\alpha, n_t)\theta^*(n_\alpha, n_t)u(n_\alpha, n_t)$$

Οι παράμετροι στο άθροισμα εξαρτώνται από το λ. Μάλιστα $\exists \lambda_0$:

$$SW_F(\lambda) \uparrow \text{για } \lambda \leq \lambda_0, SW_F \downarrow \text{για } \lambda \geq \lambda_0$$

και επομένως ο μέγιστος κοινωνικός πλούτος επιτυγχάνεται για $\lambda = \lambda_0$

6.3 ΜΕΡΙΚΩΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

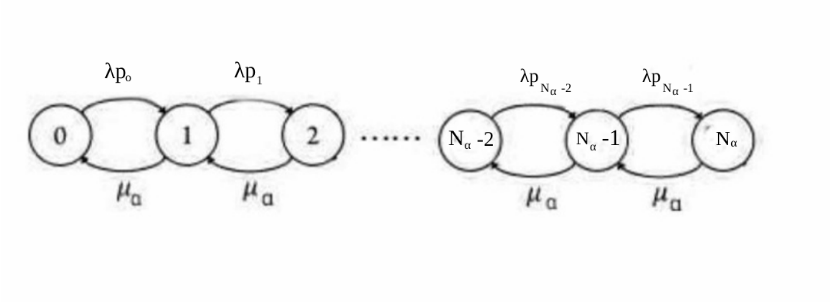
Στην περίπτωση αυτή οι πελάτες μόλις αφικνίονται στο σύστημα παρατηρούν το μήκος μόνο της πρώτης ουράς.

Στην περίπτωση που επιλέξουν να εισέλθουν στην πρώτη ουρά τότε έχουν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν το μήκος της δεύτερης σειράς και αναλόγως αποφασίζουν αν θα συνεχίσουν την εξυπηρέτησή τους στην δεύτερη ουρά ή αν θα εγκαταλείψουν το σύστημα.

Στην περίπτωση αυτή η στρατηγική ενός παίκτη θα περιγράφεται ως $p = (p_0, p_1, \ldots, p_{N_a-1})$ όπου p_i η πιθανότητα εισόδου στην πρώτη ουρά αν δει σ' αυτήν i πελάτες.

Αν όλοι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική p τότε ορίζουμε ως $\Pi_p(n_\alpha, n_t)$ τη στάσιμη πιθανότητα η κατάσταση του συστήματος να είναι (n_α, n_t).

Το πλήθος των πελατών στην 1η ουρά τότε θα είναι μία ΜΑΣΧ η οποία περιγράφεται από το παρακάτω διάγραμμα:



Ρυθμοί μετάβασης:

$q_{i,i+1} = \lambda p_i, 0 \leq i \leq N_{\alpha-1}$, Αλλιώς $q_{ij} = 0$

$q_{i+1,i} = \mu_\alpha, i = 0, \ldots N_{\alpha-1}$, Αλλιώς $q_{ij} = 0$

Από εξισώσεις Γενικευμένης Ισορροπίας για $S = \{0, 1, \ldots j\}, j \geq 1$:

$$\sum_{j\in A}\sum_{i\in A^c} \Pi_j q_{j,i} = \sum_{i\in A^c}\sum_{j\in A} \Pi_i q_{i,j} \Rightarrow \Pi_j q_{j,j+i} = \Pi_{j+1} q_{j+1,j} \Rightarrow$$

$$\Pi_j \cdot \lambda p_j = \Pi_{j+1} \cdot \mu_\alpha.\text{Άρα για } j \geq 1 :$$

$$\Pi_j = \Pi_0 \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\lambda}{\mu_\alpha} \cdot p_j \iff \Pi_j = \Pi_0 (\frac{\lambda}{\mu_\alpha})^j \prod_{i=0}^{j-1} p_{i,j} = 0, \ldots, N_\alpha (*)$$

$$\sum_{j=0}^{N_\alpha} \Pi_j = 1 \overset{*}{\iff} \Pi_0 = [1 + \sum_{j=0}^{N_a} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\lambda}{\mu_a} p_i]^{-1}$$

Επομένως $\Pi_j = \Pi_0 (\frac{\lambda}{\mu_\alpha})^j \prod_{i=0}^{j-1} p_i$

Εφόσον στο παραπάνω μοντέλο έχουμε υποθέσει τη στρατηγική p μπορούμε τα Π_j να τα συμβολίζουμε ως $\Pi_p(j)$.

Αν για κάποια στρατηγική p και $n_a \in \mathbb{N}, n_\alpha \leq N_\alpha$ ισχύει $\Pi_p(n_a) = 0$ τότε προφανώς στην πρώτη ουρά η χωρητικότητα θα είναι το πολύ n_a άτομα.

Έστω $\overline{n_\alpha(p)} = max\{n_\alpha \in \mathbb{N} : \Pi_p(n_\alpha) > 0\}$

Το σύνολο αυτό έχει μέγιστο διότι $\Pi_p(N_\alpha) = 0$.

Ορίζουμε $\Pi_p(n_t|n_\alpha) = \frac{\Pi_p(n_\alpha,n_t)}{\Pi_p(n_\alpha)} \forall 0 \leq n_\alpha \leq \overline{n_\alpha(p)}$ την πιθανότητα το σύστημα να είναι στην κατάσταση (n_α, n_t) δεδομένου ότι στην πρώτη ουρά υπάρχουν n_α πελάτες.

Έστω $q_p(k, n_\alpha)$ η πιθανότητα ένας πελάτης που εισέρχεται στην πρώτη ουρά έχοντας n_α πελάτες μπροστά του να βρει ακριβώς k πελάτες στην 2η ουρά με το που ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση του από την 1η ουρά.

Από Θ.Ο.Π. $q_p(k, n_\alpha) = \sum_{n_t=0}^{N_t} q(k; n_\alpha, n_t)\Pi_p(n_t|n_\alpha)$

6.3.1 ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΩΦΕΛΕΙΑ

Θεωρούμε μία στρατηγική P, και έστω $n_\alpha \leq \overline{n_\alpha(P)}$

Ορίζουμε $u_p(n_\alpha)$ το αναμενόμενο κέρδος ενός πελάτη ο οποίος εισέρχεται στην πρώτη ουρά, βρίσκοντας n_α άτομα, και όλοι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική P. Τότε:

$$u_p(n_\alpha) = -\frac{(n_\alpha + 1)c}{\mu_\alpha} + \sum_{k=0}^{N_t-1} q_p(k, n_\alpha)[V - \frac{(k+1)c}{\mu_t}]$$

<u>Λήμμα:</u> Αν $u(n_\alpha, n_t)$ το αναμενόμενο κέρδος ενός πελάτη στην πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση τότε :

$$u_p(n_\alpha) = \sum_{n_t=0}^{N_t} \Pi_p(n_t|n_\alpha)u(n_\alpha, n_t)$$

Βέλτιστη απόκριση:

$$P_{n_\alpha}^{BR} = \begin{cases} \{1\}, & u_P(n_\alpha) > 0 \\ [0,1], & u_P(n_\alpha) = 0 \;, \forall n_\alpha \leq \overline{n_\alpha(p)} \\ \{0\}, & u_P(n_\alpha) < 0 \end{cases}$$

Θεώρημα: Υπάρχει συμμετρική στρατηγική ισορροπίας στη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση.

Ορισμός: Ως κοινωνικός πλούτο ορίζουμε τον αριθμό αφίξεων των πελατών επί την αναμενόμενη ωφέλεια που θα έχει κάποιος πελάτης από το σύστημα.

$$SW_P = \lambda \sum_{\substack{0 \leq n_\alpha \leq \overline{n_\alpha(p)} \\ 0 \leq n_t \leq N_t}} \Pi_P(n_\alpha, n_t) P_{n_\alpha} u_P(n_\alpha)$$

Ειδική περίπτωση

Αν $N_t = 1$, δηλαδή η δεύτερη ουρά έχει χωρητικότητα 1 τότε θα υπάρχει μία στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλιου:

1. Αν $(\frac{1}{\mu_\alpha} + \frac{1}{\mu_t})c < V < (\frac{2}{\mu_\alpha} + \frac{3}{\mu_t})c$ $P = [P_0, 0]$ όπου

$$P_0 = min\{1, \frac{\mu_\alpha(\mu_\alpha + \mu_t)(-c\mu_\alpha - c\mu_t + V\mu_\alpha\mu_t)}{\lambda\mu_t(-2c\mu_\alpha - c\mu_t + \mu_a\mu_t V)}\}$$

2. Αν για κάποιο $n \geq 1 : (\frac{n+1}{\mu_\alpha} + \frac{n+2}{\mu_t})c < V < (\frac{n+2}{\mu_\alpha} + \frac{n+3}{\mu_t})c$ τότε

$$P = (\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n+1\text{μονάδες}}, 0, 0, 0, \ldots)$$

3. Αν για κάποιο n ισχύει : $V = c(\frac{n+1}{m_\alpha} + \frac{n+2}{\mu_t})$ τότε

$$P = (\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n+1\text{μονάδες}}, \theta, 0, 0, 0, \ldots), \theta \in [0, 1]$$

Βιβλιογραφία

[1] Αντώνιος Θ. Οικονόμου, *«Θεωρία Ουρών Αναμονής»* 2022.

[2] Burnetas, *Equilibrium in Markovian queues in series* 2013.

[3] D Auria Kanta, *Tandem network under partial information* 2015.

[4] Hassin Haviv, *To Queue or Not to Queue* 2003.

[5] Kim Kim, *Tandem network under partial information* 2016.

[6] Ji Roet-Green Snitkovsky, *Foresee the next line* 2020.

[7] Burnetas, A. , Economou, A., Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times 2007.

[8] Economou, A. , Gomez-Corral, A. , Kanta, S. , *Optimal balking strategies in single-server queues with general service and vacation times* 2011.

[9] Economou Antonis Manou Athanasia *Strategic behavior in an observable fluid queue with an alternating service process* 2016.

[10] Economou Antonis Manou Athanasia *Equilibrium threshold strategies for a clearing queuing system in alternating environment* 2011.

[11] Hassin, R. Haviv M , *Equilibrium threshold strategies* 1997.

[12] Φακίνος Δ. , *Ουρές Αναμονής:Θεωρία και Ασκήσεις* 2003.

[13] Guo, P. , Hassin, R. , *Strategic behavior and social optimization in Markovian vacation queues* 2011.

[14] Baron O,Economou A,Manou A. ,*The state-dependent M/G/1 queue with orbit.*

[15] Logothetis D, Economou A. , *Routine of Strategic Passengers in a Transportation Station* 2021.