

K-absolutely pure συμπλέγματα και Ευσταθείς
κατηγορίες στη Gorenstein Ομολογική
Άλγεβρα

Καπερώνης Ηλίας

Διδακτορική διατριβή

Επιβλέποντάς Καθηγητής: Ιωάννης Εμμανουήλ
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
2023

A.M.: 20180102

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Ιωάννης Εμμανουήλ (Επιβλέπων Καθηγητής)

Ιωάννης Ντόκας (Επίκουρος Καθηγητής)

Ολυμπία Ταλέλλη (Ομότιμη Καθηγήτρια)

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

Ιωάννης Εμμανουήλ (Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., Καθηγητής)

Μιχαήλ Μαλιάκας (Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., Καθηγητής)

Απόστολος Μπεληγιάννης (Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Καθηγητής)

Ιωάννης Ντόκας (Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., Επίκουρος Καθηγητής)

Μιχαήλ Συκιώτης (Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., Αναπληρωτής Καθηγητής)

Ολυμπία Ταλέλλη (Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., Ομότιμη Καθηγήτρια)

Χρυσόστομος Ψαρουδάκης (Τμήμα Μαθηματικών, Α.Π.Θ., Αναπληρωτής Καθηγητής)

Επιτρέπεται η χρήση του ψηφιακού αρχείου.

Περιεχόμενα

1	Cotorsion ζεύγη και Bousfield localizing ζεύγη	13
1.1	Cotorsion ζεύγη στην $R\text{-Mod}$	13
1.2	Τριγωνισμένες κατηγορίες	24
1.3	Bousfield localizing ζεύγη	36
2	K-Absolutely pure συμπλέγματα	43
2.1	Βασικές Ιδιότητες	43
2.2	K-absolutely pure συμπλέγματα και η pure derived κατηγορία . .	49
2.3	Strongly fp-εμφυτευτικά πρότυπα	53
3	Ευσταθείς κατηγορίες στη Gorenstein Ομολογική Άλγεβρα	59
3.1	Εισαγωγικές έννοιες	59
3.2	Σταθεροποιώντας μέσω της \mathcal{K}^\perp	61
3.3	Σταθεροποιώντας μέσω της PGF	65

*Στη γυναίκα μου Έφη,
και στον γιο μου Δημήτρη-Ιωάννη.*

Ευχαριστίες Η μεγαλύτερη πρόοδος στη μελέτη μου προήλθε από το εβδομαδιαίο σεμινάριο το οποίο διοργάνωνε ο κύριος Εμμανουήλ. Στο σεμινάριο συμμετείχαν συστηματικά οι κύριοι Γιώργος Δαλέζιος και Κωνσταντίνος Χατζησταυρίδης και οι κυρίες Χριστίνα Βασιλακοπούλου, Παναγιώτα Μανουσάκη και Διονυσία Στεργιοπούλου. Θέλω να ευχαριστήσω όλους τους προαναφερθείσες για τη συμμετοχή τους είτε ως ακροατήριο είτε ως ομιλητές. Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στους Γιώργος Δαλέζιος, Χριστίνα Βασιλακοπούλου και Διονυσία Στεργιοπούλου.

Ξεκινώντας τις διδακτορικές μου σπουδές έτυχε ο Γιώργος τον οποίο ήδη γνώριζα από τις Προπτυχιακές μας σπουδές στο Πανεπιστήμιο Πατρών να αποτελέσει μεταδιδακτορικό φοιτητή υπό την επίβλεψη του κύριου Εμμανουήλ. Αμέτρητες συζητήσεις περί μαθηματικών μαζί του πολλές φορές μετατρέποντουσαν σε διδασκαλία. Θέλω να ευχαριστήσω τον Γιώργο για τις πολλές ευχάριστες ώρες που περάσαμε μαζί και τις γνώσεις που μου μεταλαμπάδευσε.

Η κυρία Βασιλακοπούλου διάβασε λεπτομερώς μια πρώτη εκδοχή του κειμένου της παρούσας διδακτορικής διατριβής και μου έδωσε πολλές συμβουλές οι οποίες βελτίωσαν το κείμενο. Την ευχαριστώ θερμά.

Με την κυρία Στεργιοπούλου γράψαμε μαζί την εργασία της οποίας τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο τρίτο κεφάλαιο. Την ευχαριστώ πολύ για τη συνεργασία της.

Θα ήθελα επιπλέον να ευχαριστήσω τον κύριο Μπεληγιάννη του οποίου τα σχόλια βελτίωσαν σημαντικά το κείμενο της παρούσας εργασίας

Από τις ευχαριστίες δεν μπορούν να λείπουν οι τρεις επιβλέποντες μου. Ο κύριος Παναγής Καραζέρης, η κυρία Ολυμπία Ταλέλλη και ο κύριος Ιωάννης Εμμανουήλ.

Ο κύριος Καραζέρης και η κυρία Ταλέλλη υπήρξαν επιβλέποντες των διπλωματικών μου εργασιών στις προπτυχιακές και μεταπτυχιακές σπουδές μου αντίστοιχα. Καθένας τους μου έδειξε διαφορετικούς τρόπου σκέψης και διαφορετικές διαδικασίες μάθησης. Και οι δύο υπήρξαν εξαιρετικά σημαντικοί στην εξέλιξή μου. Τους ευχαριστώ πολύ.

Κλείνω τις ευχαριστίες με τον κύριο Εμμανουήλ. Πέρα του ότι τα αποτελέσματα του δεύτερου κεφαλαίου της παρούσας εργασίας αποτελούν κοινή δουλειά με τον κύριο Εμμανουήλ πρέπει επιπλέον να αναγνωρίσω ότι η καθοδήγηση του ήταν άψογη σε όλη την διάρκεια των διδακτορικών μου σπουδών.

Εισαγωγή

Στην Ομολογική Άλγεβρα εξέχοντα ρόλο κατέχουν τα προβολικά πρότυπα, δηλαδή τα πρότυπα P για τα οποία ο συναρτητής $\text{Hom}_R(P, -)$ είναι ακριβής. Διϊκά με τα προβολικά πρότυπα ορίζονται τα εμφυτευτικά πρότυπα. Εκτός από την διϊκότητα των ορισμών τους αυτές οι δύο κλάσεις προτύπων μοιράζονται και αρκετές διϊκές ιδιότητες. Για παράδειγμα, μπορούμε να επεκτείνουμε την κλάση των προβολικών προτύπων και την κλάση εμφυτευτικών προτύπων ώστε να σχετίζονται με τη purity.

Οι pure βραχείες ακριβείς ακολουθίες ορίζονται ως εκείνες οι βραχείες ακριβείς ακολουθίες που παραμένουν ακριβείς υπό τη δράση του ταυστικού γινομένου. Η κλάση αυτή αποτελεί την κλειστότητα της κλάσης των διασπώμενων βραχειών ακριβών ακολουθιών ως προς κατευθυνόμενα συνόρια. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του επίπεδου προτύπου, δηλαδή ένα πρότυπο καλείται επίπεδο εάν ανήκει στη κλειστότητα ως προς κατευθυνόμενα συνόρια της κλάσης των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων. Ένας άλλος τρόπος ορισμού των επίπεδων προτύπων είναι να αποκαλέσουμε ένα πρότυπο επίπεδο στην περίπτωση που εξαναγκάζει κάθε επιμορφισμό προς αυτό να είναι pure. (Ένας επιμορφισμός καλείται pure επιμορφισμός στην περίπτωση που η βραχεία ακριβής ακολουθία που επάγει είναι pure.) Σημειώνουμε ότι ένα προβολικό πρότυπο εξαναγκάζει κάθε επιμορφισμό προς αυτό να είναι διασπώμενος επιμορφισμός. Διϊκά, κάθε εμφυτευτικό πρότυπο δεν μπορεί να εμφυτευθεί πουθενά, εκτός βέβαια αν η εμφύτευση είναι διασπώμενη.

Είναι επομένως φυσιολογικό το ερώτημα κατά πόσο υπάρχει κάποια έννοια διϊκή σε αυτή του επίπεδου προτύπου. Η κλάση των absolutely pure προτύπων θεωρείται ως η κατάλληλη για να γενικεύσει τα εμφυτευτικά πρότυπα και ταυτόχρονα να θέσει εαυτήν ως διϊκή των επίπεδων προτύπων. Τα absolutely pure πρότυπα ορίζονται ως εκείνα τα πρότυπα τα οποία εξαναγκάζουν κάθε ένθεση τους να είναι pure. (Μία ένθεση καλείται pure στην περίπτωση που επάγει pure βραχεία ακριβή ακολουθία.)

Εξετάζοντας τις επιλύσεις των προτύπων μπορούμε να δώσουμε έναν ακόμα (ισοδύναμο) ορισμό των επίπεδων προτύπων. Πιο συγκεκριμένα ένα πρότυπο είναι επίπεδο εάν κάθε (επαυξημένη) προβολική επίλυση του αποτελεί pure ακυκλικό σύμπλεγμα. Δηλαδή είναι ένα ακυκλικό σύμπλεγμα το οποίο απαρτίζεται από pure βραχείες ακριβείς ακολουθίες. Αυτή η ιδιότητα των επίπεδων προτύπων είναι ανάλογη μιας αντίστοιχης ιδιότητας των προβολικών προτύπων. Δηλαδή ότι ένα

πρότυπο είναι προβολικό αν και μόνο αν κάθε (επαυξημένη) προβολική του επίλυση αποτελεί συμπτύξιμο σύμπλεγμα. (Όπου συμπτύξιμο σύμπλεγμα αποκαλούμε κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα το οποίο απαρτίζεται από διασπώμενες βραχείες ακριβείς ακολουθίες.) Υπάρχει σαφώς και η δυϊκή ιδιότητα των εμφυτευτικών προτύπων η οποία όμως δεν βρίσκει αναλογία στα absolutely pure. Αυτός είναι ο λόγος που έχουν οριστεί τα strongly fp-εμφυτευτικά πρότυπα. Τα strongly fp-εμφυτευτικά πρότυπα είναι ακριβώς εκείνα τα οποία έχουν pure ακυκλικές εμφυτευτικές επιλύσεις.

Η μελέτη των (μη φραγμένων) συμπλεγμάτων έφερε στην επιφάνεια τις κατάλληλες γενικεύσεις των προβολικών, εμφυτευτικών και επίπεδων προτύπων στην ομοτοπική κατηγορία ενός δακτυλίου. Ένα σύμπλεγμα P καλείται K -προβολικό εάν ο συναρτητής $\text{Hom}_R(P, -)$ διατηρεί την ακυκλικότητα. Δυϊκά ορίζονται τα K -εμφυτευτικά συμπλέγματα. Επιπλέον ένα σύμπλεγμα F καλείται K -επίπεδο εάν ο συναρτητής $F \otimes -$ διατηρεί την ακυκλικότητα. Είναι άμεσο το γεγονός ότι ένα πρότυπο αποτελεί K -προβολικό (K -εμφυτευτικό/ K -επίπεδο) σύμπλεγμα αν και μόνο αν είναι προβολικό (εμφυτευτικό/επίπεδο) πρότυπο. Δεν υπήρχε όμως κατάλληλη δυϊκή έννοια ως προς K -επίπεδα πρότυπα. Στις επόμενες παραγράφους θα περιγράψω τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να ορίσουμε αυτή τη δυϊκότητα.

Πρώτα όμως θα υπενθυμίσουμε την έννοια των cotorsion ζευγών (στην κατηγορία των προτύπων). Το ζεύγος κλάσεων $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ καλείται cotorsion ζεύγος εάν η κλάση \mathcal{C} είναι η αριστερή ορθογώνια κλάση (ως προς τον συναρτητή Ext^1) της κλάσης \mathcal{D} και η κλάση \mathcal{D} είναι η δεξιά ορθογώνια κλάση (ως προς τον συναρτητή Ext^1) της κλάσης \mathcal{C} . Συμβολικά γράφουμε $\mathcal{C}^\perp = \mathcal{D}$ και ${}^\perp\mathcal{D} = \mathcal{C}$. Επιπλέον, λέμε ότι το cotorsion ζεύγος $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ είναι πλήρες εάν έχει αρκετά προβολικά και αρκετά εμφυτευτικά. Δηλαδή εάν για κάθε πρότυπο M υπάρχουν αντίστοιχα οι β.α.α.

$$0 \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow 0,$$

και

$$0 \rightarrow M \rightarrow D' \rightarrow C' \rightarrow 0,$$

όπου $C, C' \in \mathcal{C}$ και $D, D' \in \mathcal{D}$. Οι κλάσεις¹ προτύπων στις οποίες έχουμε αναφερθεί συντελούν στη δημιουργία cotorsion ζευγών:

- Το ζεύγος **(Proj, All)** αποτελεί πλήρες cotorsion ζεύγος. (Προφανές)
- Το ζεύγος **(All, Inj)** αποτελεί πλήρες cotorsion ζεύγος. (Προφανές)
- Το ζεύγος **(Flat, Flat[⊥])** αποτελεί πλήρες cotorsion ζεύγος. ([7, Πρόρισμα 11])
- Το ζεύγος **([⊥]Abspure, Abspure)** αποτελεί πλήρες cotorsion ζεύγος. ([23, Θεώρημα 3.4])
- Το ζεύγος **([⊥]Sfpi, Sfpi)** αποτελεί πλήρες cotorsion ζεύγος. ([18, Θεώρημα 3.4])

¹Συμβολίζουμε με **Proj**, **Inj**, **Flat**, **Abspure** και **Sfpi** τις κλάσεις των προβολικών, εμφυτευτικών, επίπεδων, absolutely pure και strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων αντίστοιχα.

Η ομοτοπική κατηγορία $\mathbf{K}(R)$ έχει ως αντικείμενα τα συμπλέγματα προτύπων και ως μορφισμούς τις ομοτοπικές κλάσεις αλυσωτών απεικονίσεων. Για κάθε κλάση προτύπων \mathfrak{X} , συμβολίζουμε με $C(\mathfrak{X})$ τη κλάση των συμπλεγμάτων που αποτελούνται από πρότυπα της \mathfrak{X} ενώ με $\mathbf{K}(\mathfrak{X})$ συμβολίζουμε την κλειστότητα της $C(\mathfrak{X})$ ως προς ομοτοπική ισοδυναμία. Επιπλέον με $(\mathbf{K}_{pac}(\mathfrak{X}))$ $\mathbf{K}_{ac}(\mathfrak{X})$ συμβολίζουμε τη κλάση όλων των (pure) ακυκλικών συμπλεγμάτων της $\mathbf{K}(\mathfrak{X})$.

Έστω X, Y δύο συμπλέγματα, λέμε ότι το X είναι αριστερά ορθογώνιο στο Y και ότι το Y είναι δεξιά ορθογώνιο στο X στην περίπτωση που ή αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y)$ είναι μηδενική. Έστω \mathfrak{A} μια κλάση συμπλεγμάτων, τότε ορίζουμε ως αριστερή ορθογώνια κλάση της \mathfrak{A} στην $\mathbf{K}(R)$ την κλάση ${}^{\perp}\mathfrak{A}$ η οποία αποτελείται από όλα τα συμπλέγματα X , τα οποία είναι αριστερά ορθογώνια ως προς όλα τα συμπλέγματα της \mathfrak{A} . Διότι ορίζουμε τη δεξιά ορθογώνια κλάση της \mathfrak{A} στην $\mathbf{K}(R)$ την οποία συμβολίζουμε με \mathfrak{A}^{\perp} . Μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathbf{K}(R)$ καλείται πυκνή εάν είναι κλειστή ως ευθείς προσθετέους. Ένα ζεύγος πυκνών υποκατηγοριών $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ της $\mathbf{K}(R)$ καλείται Bousfield localizing ζεύγος αν $\mathfrak{A} \subseteq^{\perp} \mathfrak{B}$ (ή ισοδύναμα, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}^{\perp}$) και αν για κάθε σύμπλεγμα X υπάρχει ένα τρίγωνο της μορφής

$$A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow SA,$$

όπου $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ και το SA είναι το shift του A . Σημειώνουμε ότι αν έχουμε ένα Bousfield localizing ζεύγος $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ τότε ισχύουν οι ισότητες $\mathfrak{A} = {}^{\perp}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{\perp}$.

Πριν δώσουμε μερικά Bousfield localizing παραδείγματα εισάγουμε δύο ακόμα κλάσεις προτύπων. Τα pure προβολικά και τα pure εμφυτευτικά πρότυπα. Ένα πρότυπο καλείται pure προβολικό εάν είναι προβολικό ως προς τις pure ακριβείς ακολουθίες. Διότι ορίζονται τα pure εμφυτευτικά πρότυπα. Συμβολίζουμε με $Pproj$ και $Pinj$ τις κλάσεις των pure προβολικών και των pure εμφυτευτικών προτύπων αντίστοιχα.

Τα ακόλουθα αποτελούν παραδείγματα Bousfield localizing ζευγών.

- $(\mathbf{K}\text{-Proj}, \mathbf{K}_{ac}(R))$ ([21])
- $(\mathbf{K}_{ac}(R), \mathbf{K}\text{-Inj})$ ([21])
- $(\mathbf{K}(Pproj), \mathbf{K}_{pac}(R))$ ([22])
- $(\mathbf{K}_{pac}(R), \mathbf{K}(Pinj))$ ([22])
- $(\mathbf{K}\text{-Flat}, \mathbf{K}_{ac}(Pinj))$ ([10])

Με βάση όλα τα προηγούμενα είναι εμφανές ότι η κλάση $\mathbf{K}_{ac}(Pproj)^{\perp}$ αξίζει να φέρει την ονομασία K -Absolutely pure. Τα βασικά αποτελέσματα που αφορούν την καινούργια αυτή κλάση είναι τα εξής:

- Το ζεύγος $(\mathbf{K}_{ac}(Pproj), \mathbf{K}\text{-abspure})$ αποτελεί Bousfield localizing ζεύγος.
- Κάθε K -εμφυτευτικό σύμπλεγμα είναι K -absolutely pure.
- Ένα σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων είναι K -Absolutely pure αν και μόνο αν είναι K -εμφυτευτικό.

- Ισχύει η ισότητα $\mathbf{K}_{pac}(R) = \mathbf{K}_{ac}(R) \cap \mathbf{K}\text{-abspure}$.
- Η κατηγορία $\mathbf{K}\text{-abspure}$ είναι η μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathbf{K}(R)$, που περιέχει τα pure ακυκλικά και K -εμφυτευτικά συμπλέγματα.
- Ένα πρότυπο αποτελεί K -absolutely pure σύμπλεγμα αν και μόνο αν είναι strongly fp-εμφυτευτικό.

Όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο πρώτο κεφάλαιο ήταν γνωστά πριν ξεκινήσω τις διδακτορικές μου σπουδές. Έχουν ενταχθεί στο κείμενο για χάρη πληρότητας. Πιο αναλυτικά, στην πρώτη υποπαράγραφο του πρώτου κεφαλαίου παρουσιάζεται η θεωρία των cotorsion ζευγών ενώ η δεύτερη και η τρίτη υποπαράγραφοι έχουν ως σκοπό να παρουσιάσουν την έννοια του Bousfield localizing ζεύγους.

Τα αποτελέσματα του δεύτερου κεφαλαίου μπορούν να βρεθούν στο [11] όπου ορίζονται τα K -absolutely pure συμπλέγματα και μελετούνται οι ιδιότητες τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο στρέφουμε τη προσοχή μας στην Gorenstein Ομολογική Άλγεβρα, της οποίας η θεωρία μελετάει τα πρότυπα που δέχονται επιλύσεις στην αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με τις επιλύσεις της κλασσικής Ομολογικής Άλγεβρας. Οι βασικές κλάσεις που θα μας απασχολήσουν είναι αυτές των Gorenstein προβολικών και Gorenstein επίπεδων προτύπων τις οποίες θα συμβολίζουμε με \mathbf{GProj} και \mathbf{GFlat} αντίστοιχα. Οι ορισμοί τους είναι αρκετά φυσιολογικοί και θα περίμενε κανείς ότι τα αντίστοιχα πρότυπα συμπεριφέρονται αρκετά καλά. Η κυρίαρχη εικασία της Ομολογικής Άλγεβρας Gorenstein αφορά την τομή των κλάσεων \mathbf{GProj} και \mathbf{GFlat} και εικάζει ότι ισχύει η ισότητα $\mathbf{GProj} \cap \mathbf{GFlat} = \mathbf{GProj}$. Με αφορμή τη παραπάνω εικασία οι Saroch και Stovicek οδηγήθηκαν στον ορισμό μιας καινούργιας κλάσης προτύπων της οποίας τα πρότυπα κατοικούν στη παραπάνω τομή. Τα πρότυπα αυτά λέγονται projectively coresolved Gorenstein flat πρότυπα. Για συντομία θα γράφουμε PGF πρότυπα. Μία από τις σημαντικές ιδιότητες των PGF προτύπων είναι ότι συνδέονται με τα Gorenstein επίπεδα πρότυπα με ένα τρόπο ο οποίος προς το παρόν δεν έχει επιτευχθεί για τα Gorenstein προβολικά πρότυπα. Πιο αναλυτικά, για κάθε Gorenstein επίπεδο πρότυπο M υπάρχουν οι ακολουθίες:

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F' \longrightarrow P' \longrightarrow 0,$$

όπου τα P, P' είναι PGF και τα F, F' είναι επίπεδα. Οι παραπάνω ακολουθίες μπορούν να γενικευτούν για πρότυπα πεπερασμένης Gorenstein επίπεδης διάστασης. Δηλαδή, για κάθε πρότυπο πεπερασμένης Gorenstein επίπεδης διάστασης N , υπάρχουν οι ακολουθίες:

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow P \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} F' \longrightarrow P' \longrightarrow 0,$$

όπου τα P, P' είναι PGF και τα F, F' έχουν πεπερασμένη επίπεδη διάσταση. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση p δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί μέσω ενός προτύπου πεπερασμένης επίπεδης διάστασης εκτός της τετριμμένης περίπτωσης όπου το P είναι προβολικό. Όμοια θα δείξουμε ότι το q απεικόνιση i δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί μέσω ενός PGF προτύπου εκτός της τετριμμένης περίπτωσης όπου το F' είναι προβολικό πρότυπο.

Κεφάλαιο 1

Cotorsion ζεύγη και Bousfield localizing ζεύγη

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε συνοπτικά τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των cotorsion ζευγών καθώς και της θεωρίας των Bousfield localizing ζευγών που θα χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια.

1.1 Cotorsion ζεύγη στην $R\text{-Mod}$

Ορισμός 1.1.1 (Προβολικό πρότυπο). Ένα πρότυπο P καλείται προβολικό όταν ο συναρτητής $\text{Hom}_R(P, -)$ είναι ακριβής.

Σημείωση: Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετοί (ισοδύναμοι) ορισμοί του προβολικού προτύπου. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [2].

Σημειώνουμε επίσης ότι τα εμφυτευτικά πρότυπα ορίζονται με δυϊκό τρόπο. Δηλαδή είναι εκείνα τα πρότυπα I για τα οποία ο συναρτητής $\text{Hom}_R(-, I)$ είναι ακριβής.

Ορισμός 1.1.2 (Επίπεδο πρότυπο). Ένα αριστερό πρότυπο F καλείται επίπεδο όταν ο συναρτητής $- \otimes F$ είναι ακριβής.

Σημείωση: Είναι γνωστό ότι κάθε προβολικό πρότυπο είναι επίπεδο. Δηλαδή η κλάση των επίπεδων προτύπων αποτελεί επέκταση της κλάσης των προβολικών προτύπων. Ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι κατά πόσο υπάρχει κάποια δυϊκή κλάση των επίπεδων προτύπων ώστε να αποτελεί επέκταση των εμφυτευτικών προτύπων με παρόμοιο τρόπο με εκείνον που τα επίπεδα πρότυπα επεκτείνουν τα προβολικά. Πριν εξερευνήσουμε το παραπάνω ερώτημα πρέπει να δώσουμε μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 1.1.3 (Pure ακολουθίες). Μία βραχεία ακριβής ακολουθία αριστερών προτύπων καλείται *pure exact* εάν παραμένει ακριβής μέσω του συναρτητή $A \otimes -$ καθώς το A διατρέχει όλα τα δεξιά πρότυπα.

Πρόταση 1.1.4. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα πρότυπο F .

1. Το F είναι επίπεδο πρότυπο.
2. Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία της μορφής

$$0 \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow F \rightarrow 0$$

είναι *pure exact*.

Παρατήρηση 1.1.5. Η προηγούμενη πρόταση αποτελεί χαρακτηρισμό των ϵ -πίπεδων προτύπων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να ορίσουμε δυϊκά την κλάση των *Absolutely pure* προτύπων.

Ορισμός 1.1.6 (Absolutely pure). Ένα πρότυπο A καλείται *absolutely pure* εάν κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία της μορφής

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

είναι *pure exact*.

Η επόμενη πρόταση θα μας βοηθήσει να δώσουμε έναν επιπλέον χαρακτηρισμό των *absolutely pure* προτύπων.

Πρόταση 1.1.7. Η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

είναι *pure exact* αν και μόνο αν είναι $\text{Hom}(F, -)$ -ακριβής για κάθε πεπερασμένο παριστώμενο πρότυπο F .

Απόδειξη. [17, Θεώρημα 4.89]

□

Λόγω του επόμενου χαρακτηρισμού τα *absolutely pure* πρότυπα είναι γνωστά και ως *fp-εμφυτευτικά*. Όπου τα γράμματα f και p είναι τα αρχικά των αγγλικών λέξεων *finitely, presented*.

Λήμμα 1.1.8. Ένα πρότυπο A είναι *absolutely pure* αν και μόνο αν η αβελιανή ομάδα $\text{Ext}^1(F, A)$ είναι τετριμμένη για κάθε πεπερασμένο παριστώμενο πρότυπο F .

Απόδειξη. Άμεσο από την προηγούμενη πρόταση.

□

Χρησιμοποιώντας τις *pure exact* ακολουθίες μπορούμε να ορίσουμε σχετικές έννοιες προβολικότητας και εμφυτευτικότητας.

Ορισμός 1.1.9 (Pure προβολικό και *pure* εμφυτευτικό). Καλούμε ένα πρότυπο P *pure* προβολικό εάν είναι προβολικό ως προς τις *pure exact* ακολουθίες. Δυϊκά ορίζουμε τα *pure* εμφυτευτικά πρότυπα.

Ορισμός 1.1.10 (Ορθογώνιες κλάσεις). Έστω $\mathcal{A} \subset R\text{-Mod}$, τότε καλούμε την κλάση

1. $\mathcal{A}^\perp = \{X \in R\text{-Mod} : \text{Ext}^1(A, X) = 0, \forall A \in \mathcal{A}\}$, δεξιά ορθογώνια κλάση της \mathcal{A} .
2. ${}^\perp\mathcal{A} = \{X \in R\text{-Mod} : \text{Ext}^1(X, A) = 0, \forall A \in \mathcal{A}\}$, αριστερή ορθογώνια κλάση της \mathcal{A} .

Ορισμός 1.1.11 (Cotorsion ζεύγη). Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset R\text{-Mod}$ θα καλούμε το διατεταγμένο ζεύγος $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ cotorsion ζεύγος εάν ισχύουν οι ισότητες $\mathcal{A}^\perp = \mathcal{B}$ και ${}^\perp\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Συμβολισμοί: Συμβολίζουμε με **Proj**, **Inj**, **Flat** και **Abspure** τις κλάσεις των προβολικών, εμφυτευτικών, επίπεδων και absolutely pure προτύπων αντίστοιχα.

Παραδείγματα

- Αν $\mathcal{C} \subset R\text{-Mod}$ τότε το ζεύγος $({}^\perp(\mathcal{C}^\perp), \mathcal{C}^\perp)$ αποτελεί cotorsion ζεύγος και καλείται το cotorsion ζεύγος που παράγεται από την \mathcal{C} .
- Αν $\mathcal{C} \subset R\text{-Mod}$ τότε το ζεύγος $({}^\perp\mathcal{C}, ({}^\perp\mathcal{C})^\perp)$ αποτελεί cotorsion ζεύγος και καλείται το cotorsion ζεύγος που συν-παράγεται από την \mathcal{C} .
- Το ζεύγος **(Proj, All)** αποτελεί cotorsion ζεύγος.
- Το ζεύγος **(All, Inj)** αποτελεί cotorsion ζεύγος.
- Το ζεύγος **(Flat, Flat[⊥])** αποτελεί cotorsion ζεύγος.
- Το ζεύγος **([⊥]Abspure, Abspure)** αποτελεί cotorsion ζεύγος.

Σημείωση: Η κλάση **Flat[⊥]** είναι επώνυμη και καλείται κλάση των cotorsion προτύπων. Συμβολικά γράφουμε: **Cot** = **Flat[⊥]**.

Προς διευκόλυνση του αναγνώστη αποδεικνύουμε στις επόμενες προτάσεις ότι όντως τα δύο τελευταία παραδείγματα αποτελούν cotorsion ζεύγη. Πριν όμως δώσουμε τις αποδείξεις πρέπει να αναπτύξουμε τη σχετική θεωρία, η οποία ξεκινάει με την απόδειξη του ότι το παραγόμενο cotorsion ζεύγος μιας κλάσης \mathcal{C} αποτελεί όντως cotorsion ζεύγος.

Λήμμα 1.1.12. Το παραγόμενο ζεύγος $({}^\perp(\mathcal{C}^\perp), \mathcal{C}^\perp)$ μιας κλάσης \mathcal{C} αποτελεί cotorsion ζεύγος.

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι $({}^\perp(\mathcal{C}^\perp))^\perp = \mathcal{C}^\perp$. Για κάθε κλάση προτύπων \mathcal{C} ισχύει ότι $\mathcal{C} \subset {}^\perp(\mathcal{C}^\perp)$ και επομένως ότι $\mathcal{C}^\perp \supset ({}^\perp(\mathcal{C}^\perp))^\perp$. Επιπλέον, για κάθε κλάση προτύπων \mathcal{D} ισχύει ότι $\mathcal{D} \subset ({}^\perp\mathcal{D})^\perp$, αντικαθιστώντας την κλάση \mathcal{D} με την κλάση \mathcal{C}^\perp λαμβάνουμε την σχέση υποσυνόλου που μας έλειπε. □

Σημείωση: Η απόδειξη για το συν-παραγόμενο ζεύγος μιας κλάσης C είναι όμοια.

Λήμμα 1.1.13 (Hom-Tensor adjunction). Έστω τα πρότυπα ${}_R A, {}_S B, {}_S C$ όπου S, R είναι δακτύλιοι, τότε ο παρακάτω ισομορφισμός είναι φυσικός:

$$\text{Hom}_S(B \otimes_R A, C) \cong \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_S(B, C))$$

Απόδειξη. [2][Θεώρημα 2.76]

□

Ορισμός 1.1.14 (Dual module). Εάν M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο τότε καλούμε Pontryagin δυϊκό πρότυπο του M το δεξιό πρότυπο

$$DM = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι τα cotorsion πρότυπα βρίσκονται σε αφθονία.

Παράδειγμα 1.1.15 (Cotorsion modules). Για κάθε δακτύλιο R ισχύουν τα εξής:

1. Κάθε pure εμφυτευτικό πρότυπο είναι cotorsion.
2. Αν το M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο τότε το DM είναι pure εμφυτευτικό.

Απόδειξη. 1. Έστω M ένα pure εμφυτευτικό πρότυπο και F ένα επίπεδο πρότυπο. Θεωρούμε επίσης την β.α.α

$$0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0,$$

όπου το P είναι προβολικό πρότυπο. Επειδή το F είναι επίπεδο η παραπάνω ακολουθία είναι pure και άρα $\text{Hom}_R(-, M)$ -ακριβής αφού το M είναι pure εμφυτευτικό. Τελικά έχουμε ότι $\text{Ext}^1(F, M) = 0$ διότι $\text{Ext}^1(P, M) = 0$.

2. Έστω $T \hookrightarrow N$ ένας pure μονομορφισμός τότε η ακολουθία

$$\text{Hom}_R(N, DM) \rightarrow \text{Hom}_R(T, DM) \rightarrow 0$$

είναι ακριβής αν και μόνο αν η ακολουθία

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N \otimes M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T \otimes M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

είναι ακριβής. Η τελευταία όμως είναι ακριβής διότι το \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι εμφυτευτικό \mathbb{Z} -πρότυπο και ο μονομορφισμός $T \hookrightarrow N$ είναι pure.

□

Πρόταση 1.1.16 (Flat-cotorsion ζεύγος). Το ζεύγος $(\mathbf{Flat}, \mathbf{Cot})$ αποτελεί cotorsion ζεύγος.

Απόδειξη. Επειδή γνωρίζουμε ότι το ζεύγος $({}^\perp(\mathbf{Flat}^\perp), \mathbf{Flat}^\perp)$ αποτελεί cotorsion ζεύγος αρκεί να δείξουμε ότι ${}^\perp(\mathbf{Flat}^\perp) \subset \mathbf{Flat}$.

Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι, εάν η αβελιανή ομάδα $Ext^1(F, C)$ είναι τετριμμένη για κάθε cotorsion πρότυπο C τότε το F πρέπει να είναι επίπεδο πρότυπο. Όμως, για κάθε δεξιό πρότυπο M έχουμε ότι $Ext^1(F, Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = 0$. Επομένως, έχουμε ότι $Hom_{\mathbb{Z}}(Tor_1(M, F), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ και τελικά συμπεραίνουμε ότι $Tor_1(M, F) = 0$ το οποίο, με τη σειρά του, σημαίνει ότι το F είναι επίπεδο. \square

Πρόταση 1.1.17. Το ζεύγος $({}^\perp \mathbf{Abspure}, \mathbf{Abspure})$ αποτελεί cotorsion ζεύγος.

Απόδειξη. Επειδή είναι γνωστό ότι το ζεύγος $({}^\perp \mathbf{Abspure}, ({}^\perp \mathbf{Abspure})^\perp)$ αποτελεί cotorsion ζεύγος αρκεί να δείξουμε ότι $({}^\perp \mathbf{Abspure})^\perp \subset \mathbf{Abspure}$. Όμως εάν ένα πρότυπο είναι δεξιά ορθογώνιο σε κάθε αριστερά ορθογώνιο των absolutely pure προτύπων τότε θα είναι και δεξιά ορθογώνιο σε κάθε πεπερασμένα παριστώμενο πρότυπο. \square

Στο σημείο αυτό εισαγάγουμε την έννοια του hereditary cotorsion ζεύγους.

Ορισμός 1.1.18 (Hereditary cotorsion ζεύγος). Ένα cotorsion ζεύγος $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, καλείται hereditary εάν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει ότι:

$$Ext^{i>0}(A, B) = 0.$$

Ορισμός 1.1.19 (Επιλύσιμες κλάσεις). (i) Μια κλάση προτύπων \mathcal{A} καλείται προβολικά επιλύσιμη εάν περιέχει όλα τα προβολικά πρότυπα και είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις και πυρήνες επιμορφισμών.

(ii) Μια κλάση προτύπων \mathcal{B} καλείται εμφυτευτικά επιλύσιμη εάν περιέχει όλα τα εμφυτευτικά πρότυπα και είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις και συνπυρήνες μονομορφισμών.

Πρόταση 1.1.20. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για κάθε cotorsion ζεύγος $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

1. Το cotorsion ζεύγος $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ είναι hereditary.
2. Η \mathcal{A} είναι προβολικά επιλύσιμη.
3. Η \mathcal{B} είναι εμφυτευτικά επιλύσιμη.

Απόδειξη. Άμεση από τους ορισμούς. \square

Πρόταση 1.1.21. Το cotorsion ζεύγος $(\mathbf{Flat}, \mathbf{Cot})$ αποτελεί ένα hereditary cotorsion ζεύγος.

Απόδειξη. Η πρόταση είναι προφανής αφού η κλάση των επίπεδων προτύπων είναι κλειστή ως προς πυρήνες επιμορφισμών. \square

Σημείωση Το cotorsion ζεύγος $({}^\perp\mathbf{Abspure}, \mathbf{Abspure})$ δεν είναι hereditary ([18] Παράδειγμα 1).

Για να «διορθώσουμε» το γεγονός ότι το παραπάνω cotorsion ζεύγος δεν είναι hereditary εισαγάγουμε την κλάση strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων.

Ορισμός 1.1.22. Ένα πρότυπο M καλείται *Strongly fp-εμφυτευτικό* εάν

$$\text{Ext}^{i>0}(F, M) = 0,$$

για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο F . Θα συμβολίζουμε με \mathbf{Sfpinj} την κλάση όλων των *strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων*.

Πρόταση 1.1.23. Το ζεύγος $({}^\perp\mathbf{Sfpinj}, \mathbf{Sfpinj})$ αποτελεί *hereditary cotorsion ζεύγος*.

Απόδειξη. Η απόδειξη του ότι το παραπάνω ζεύγος αποτελεί cotorsion ζεύγος είναι όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 1.1.17. Ενώ το ότι είναι hereditary πηγάζει από το γεγονός ότι η κλάση των *strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων* είναι κλειστή ως προς συμπυρήνες μονομορφισμών το οποίο μπορεί να αποδειχθεί μέσω του ορισμού των *strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων*. □

Ορισμός 1.1.24 (Πλήρες cotorsion ζεύγος). Έστω $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ένα cotorsion ζεύγος. Θα λέμε ότι το cotorsion ζεύγος $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ είναι *πλήρες* εάν έχει αρκετά προβολικά και αρκετά εμφυτευτικά. Δηλαδή εάν για κάθε πρότυπο M υπάρχουν αντίστοιχα οι β.α.α.

$$0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow 0,$$

και

$$0 \rightarrow M \rightarrow B' \rightarrow A' \rightarrow 0,$$

όπου $A, A' \in \mathcal{A}$ και $B, B' \in \mathcal{B}$.

Ίσως η πιο σημαντική ανακάλυψη στην θεωρία των πλήρων cotorsion ζευγών είναι το Θεώρημα 10 του [7] στο οποίο διατυπώνεται ότι κάθε cotorsion ζεύγος το οποίο παράγεται από σύνολο είναι πλήρες. Τα παρακάτω έχουν ως σκοπό να παρουσιάσουμε την απόδειξη του εν λόγω Θεωρήματος (Θεώρημα 1.1.32).

Πρόταση 1.1.25. (*Salce Lemma, [3] Λήμμα 5.20*) Οι δύο συνθήκες του παραπάνω ορισμού είναι ισοδύναμες. Δηλαδή ένα cotorsion pair έχει αρκετά εμφυτευτικά αν και μόνο αν έχει αρκετά προβολικά.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι ένα cotorsion ζεύγος $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ το οποίο έχει αρκετά εμφυτευτικά τότε έχει αναγκαστικά και αρκετά προβολικά. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα πρότυπο M και μια βραχεία ακριβή ακολουθία της μορφής:

$$0 \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0,$$

όπου το P είναι προβολικό πρότυπο. Επειδή το $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ έχει αρκετά εμφυτευτικά μπορούμε να βρούμε για το S μια βραχεία ακριβή ακολουθία της μορφής:

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow B^S \longrightarrow A^S \longrightarrow 0,$$

όπου $B^S \in \mathcal{B}$ και $A^S \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε το παρακάτω push-out διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \vdots & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & B^S & \dashrightarrow & X & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A^S & \xrightarrow{\text{id}} & A^S & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Επειδή η κλάση \mathcal{A} είναι αριστερή ορθογώνια της \mathcal{B} , έχουμε ότι η \mathcal{A} είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις και ότι το προβολικό πρότυπο P ανήκει στην \mathcal{A} . Δηλαδή $X \in \mathcal{A}$, το οποίο σημαίνει ότι το $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ έχει αρκετά προβολικά.

Η απόδειξη στην αντίστροφη κατεύθυνση είναι δυϊκή της παραπάνω διαδικασίας. \square

Ορισμός 1.1.26. (Φιλτράρισμα, υπερπεπερασμένες επεκτάσεις). Έστω μια κλάση προτύπων \mathcal{S} , μ ένας διατακτικός αριθμός και A ένα πρότυπο. Λέμε ότι το πρότυπο A επιδέχεται \mathcal{S} -φιλτράρισμα εάν γράφεται ως ένωση μιας συνεχούς αλυσίδας $\{A_\alpha \mid \alpha < \mu\}$ τέτοιας ώστε:

- $A_0 = 0$,
- όλα τα διαδοχικά πηλίκα $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ ανήκουν στην κλάση \mathcal{S} (ή είναι ισόμορφα με κάποιο πρότυπο της \mathcal{S}).

Επιπλέον θέτουμε $A = A_\mu$.

Επίσης, λέμε ότι η κλάση \mathcal{S} είναι κλειστή ως προς υπερπεπερασμένες επεκτάσεις στην περίπτωση που η \mathcal{S} περιέχει όλα τα \mathcal{S} -φιλτραρισμένα πρότυπα.

Λήμμα 1.1.27. Για κάθε πρότυπο S και κάθε διατακτικό αριθμό α το $S^{(\alpha)}$ επιδέχεται $\{S\}$ -φιλτράρισμα. Όπου με $S^{(\alpha)}$ συμβολίζουμε το ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{\beta < \alpha} S$. Ιδιαίτερος κάθε ελεύθερο R -πρότυπο επιδέχεται $\{R\}$ -φιλτράρισμα.

Απόδειξη. Πράγματι το $S^{(\alpha)}$ γράφεται ως ένωση της συνεχούς αλυσίδας $\{S^{(\beta)} \mid \beta < \alpha\}$. \square

Λήμμα 1.1.28. Έστω \mathcal{S} μια κλάση προτύπων και \mathcal{A} η κλάση όλων των \mathcal{S} -φιλτραρισμένων προτύπων. Τότε, ένα πρότυπο M επιδέχεται \mathcal{A} -φιλτράρισμα αν και μόνο αν επιδέχεται \mathcal{S} -φιλτράρισμα.

Απόδειξη. Αν το M επιδέχεται \mathcal{S} -φιλτράρισμα τότε είναι προφανές ότι το M επιδέχεται \mathcal{A} -φιλτράρισμα. Αντιστρόφως, αν το M επιδέχεται το \mathcal{A} -φιλτράρισμα $\{M_\beta | \beta < \mu\}$ τότε μπορούμε να εκλεπτύνουμε το \mathcal{A} -φιλτράρισμα του M σε \mathcal{S} -φιλτράρισμα παρεμβάλλοντας τα \mathcal{S} -φιλτράρισμα των $M_{\beta+1}/M_\beta$. \square

Λήμμα 1.1.29. *Για κάθε κλάση προτύπων \mathcal{S} η κλάση των \mathcal{S} -φιλτραρισμένων προτύπων είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις.*

Πρόταση 1.1.30. *(Λήμμα Eklof, [7] Λήμμα 1) Η αριστερή ορθογώνια κλάση ${}^\perp\mathcal{C}$ μιας οποιασδήποτε κλάσης προτύπων \mathcal{C} είναι κλειστή ως προς υπερπερασμένες επεκτάσεις.*

Απόδειξη. Έστω ότι το πρότυπο $A = A_\mu$ είναι ${}^\perp\mathcal{C}$ -φιλτραρισμένο, δηλαδή θεωρούμε ότι το A_μ γράφεται ως ένωση της συνεχούς αλυσίδας $\{A_\alpha | \alpha < \mu\}$ όπου $A_0 = 0$ και για κάθε $\alpha + 1 \leq \mu$ ισχύει ότι $A_{\alpha+1}/A_\alpha \in {}^\perp\mathcal{C}$.

Η απόδειξη ακολουθεί υπερπερασμένη επαγωγή στον διατακτικό αριθμό $\beta \leq \mu$. Αρχικά υποθέτουμε ότι ο β είναι επόμενος κάποιου, δηλαδή ότι υπάρχει διατακτικός αριθμός γ τέτοιος ώστε $\beta = \gamma + 1$. Για κάθε $C \in \mathcal{C}$ έχουμε την ακριβή ακολουθία:

$$\text{Ext}^1(A_\beta/A_\gamma, C) \longrightarrow \text{Ext}^1(A_\beta, C) \longrightarrow \text{Ext}^1(A_\gamma, C),$$

από την υπόθεση της εκφώνησης και την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι $\text{Ext}^1(A_\beta/A_\gamma, C) = 0$ και ότι $\text{Ext}^1(A_\gamma, C) = 0$, τα οποία μας δίνουν άμεσα το ζητούμενο.

Για τον οριακό β θα δείξουμε ότι για κάθε $C \in \mathcal{C}$ η τυχαία βραχεία ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow N \xrightarrow{\pi} A_\beta \longrightarrow 0,$$

διασπάται. Για το σκοπό αυτό θα κατασκευάσουμε, με υπερπερασμένη αναδρομή, μια συνεχή αλυσίδα ομομορφισμών $\rho_\alpha : A_\alpha \longrightarrow N$ με $\pi \circ \rho_\alpha = id_{A_\alpha}$, για κάθε $\alpha < \beta$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε $\tau < \alpha$ έχουν κατασκευαστεί τα ρ_τ . Αν ο α είναι οριακός διατακτικός αριθμός απλά θέτουμε $\rho_\alpha = \bigcup_{\tau < \alpha} \rho_\tau$. Αν ο α είναι επόμενος κάποιου διατακτικού γ , δηλαδή αν $\alpha = \gamma + 1$ θα επεκτείνουμε τον ομομορφισμό ρ_γ σε κατάλληλο ομομορφισμό ρ_α . Από την υπόθεση της (αρχικής) επαγωγής (όχι της αναδρομής) έχουμε ότι $\text{Ext}^1(A_\alpha, C) = 0$ και επομένως η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(A_\alpha, C) \longrightarrow \text{Hom}_R(A_\alpha, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(A_\alpha, A_\beta) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής. Δηλαδή, η ένθεση $A_\alpha \hookrightarrow A_\beta$ έχει κάποια προεικόνα σ , το οποίο σημαίνει ακριβώς ότι η $\sigma : A_\alpha \longrightarrow N$ είναι τέτοια ώστε $\pi \circ \sigma = id_{A_\alpha}$. Άρα έχουμε ότι $\pi \circ (\rho_\gamma - \sigma|_{A_\gamma}) = 0$, δηλαδή ότι $\rho_\gamma - \sigma|_{A_\gamma} \in \text{Hom}_R(A_\gamma, C)$. Από την εκφώνηση της πρότασης γνωρίζουμε ότι $\text{Ext}^1(A_\alpha/A_\gamma, C) = 0$, δηλαδή η $\rho_\gamma - \sigma|_{A_\gamma}$ επεκτείνεται σε ομομορφισμό $\theta : A_\alpha \longrightarrow C$. Τελικά θέτουμε $\rho_\alpha = \sigma + i \circ \theta$ όπου i είναι η ένθεση $C \hookrightarrow N$. \square

Παρατήρηση 1.1.31. *Αν ένα cotorsion ζεύγος παράγεται από κάποιο σύνολο προτύπων \mathcal{S} τότε παράγεται από το μονοσύνολο $\{S = \bigoplus_{X \in \mathcal{S}} X\}$.*

Θεώρημα 1.1.32 ([3] Θεώρημα 6.11). Για κάθε σύνολο R -προτύπων \mathcal{S} το cotorsion ζεύγος $({}^\perp(\mathcal{S}^\perp), \mathcal{S}^\perp)$ είναι πλήρες.

Απόδειξη. Λόγω της προηγούμενης παρατήρησης μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνολο \mathcal{S} είναι μονοσύνολο, δηλαδή έχουμε $\mathcal{S} = \{S\}$. Λόγω του Λήμματος του Salce αρκεί να δείξουμε ότι το cotorsion ζεύγος $({}^\perp(\mathcal{S}^\perp), \mathcal{S}^\perp)$ έχει αρκετά εμφυτευτικά. Θεωρούμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\mu} F \longrightarrow S \longrightarrow 0,$$

όπου το F είναι ελεύθερο R -πρότυπο και λ έναν άπειρο κανονικό πληθάρημο ώστε το K να παράγεται με λιγότερα από λ στοιχεία.

Για κάθε R -πρότυπο M κατασκευάζουμε με υπερπερασμένη αναδρομή μια συνεχή αλυσίδα προτύπων $(P_\alpha | \alpha < \lambda)$ ως εξής:

- $M = P_0$
- Για να κατασκευάσουμε το $P_{\alpha+1}$ θέτουμε ως σύνολο δεικτών το $I_\alpha := \text{Hom}_R(K, P_\alpha)$. Επιπλέον ορίζουμε ως $\mu_\alpha := \mu^{(I_\alpha)} \in \text{Hom}_R(K^{(I_\alpha)}, P_\alpha^{(I_\alpha)})$ το ευθύ άθροισμα της μ με τον ευατό της $|I_\alpha|$ -φορές. Θεωρούμε επιπλέον την κανονική απεικόνιση $\phi_\alpha \in \text{Hom}_R(K^{(I_\alpha)}, P_\alpha)$, δηλαδή την απεικόνιση της οποίας ο περιορισμός σε κάθε δείκτη $n \in I_\alpha$ ισούται με το δείκτη n . Με άλλα λόγια, για κάθε δείκτη $n \in I_\alpha$ έχουμε τις κανονικές ενθέσεις $\nu_n \in \text{Hom}(K, K^{(I_\alpha)})$ και $\nu'_n \in \text{Hom}(F, F^{(I_\alpha)})$ οι οποίες είναι τέτοιες ώστε $n = \phi_\alpha \nu_n$ και $\nu'_n \mu = \mu_\alpha \nu_n$. Τελικά ορίζουμε ως $P_{\alpha+1}$ το push-out:

$$\begin{array}{ccc} K^{(I_\alpha)} & \xrightarrow{\mu_\alpha} & F^{(I_\alpha)} \\ \phi_\alpha \downarrow & & \downarrow \psi_\alpha \\ P_\alpha & \xleftarrow{\sigma_\alpha} & P_{\alpha+1} \end{array}$$

Σημειώνουμε ότι η σ_α είναι ένα-προς-ένα καθώς η μ_α είναι ένα-προς-ένα. Επιπλέον, καθώς τα push-out διατηρούν του συμπυρήνες, έχουμε ότι ο συμπυρήνας της σ_α ισούται με τον συμπυρήνα της μ_α ο οποίος είναι απλά κάποιο ευθύ άθροισμα του προτύπου S .

- Αν ο $\beta \leq \lambda$ είναι οριακός διατακτικός τότε ορίζουμε $P_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} P_\alpha$ και θέτουμε $P := P_\lambda$.

Τελικά, η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\nu} P \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

όπου η απεικόνιση ν είναι η ένθεση του M στο P , δείχνει ότι το cotorsion ζεύγος $({}^\perp(\mathcal{S}^\perp), \mathcal{S}^\perp)$ έχει αρκετά εμφυτευτικά. Πράγματι, θα δείξουμε ότι $P \in \mathcal{S}^\perp$ και ότι $N \in {}^\perp(\mathcal{S}^\perp)$.

Για να δείξουμε ότι $P \in \mathcal{S}^\perp$, εξετάζουμε την ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(S, P) \longrightarrow \text{Hom}(F, P) \xrightarrow{\mu^*} \text{Hom}(K, P) \longrightarrow \text{Ext}^1(S, P) \longrightarrow 0$$

και παρατηρούμε ότι είναι αρκετό να δείξουμε ότι η μ^* είναι επί. Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $\phi \in \text{Hom}(K, P)$ έχει προεικόνα στο $\text{Hom}(F, P)$. Επειδή το K παράγεται με λιγότερα από λ στοιχεία και ο λ είναι κανονικός πληθάρηθος έχουμε ότι υπάρχει $\alpha < \lambda$ και $n \in I_\alpha$ έτσι ώστε $\phi(k) = n(k)$ για κάθε $k \in K$. Επομένως, μπορούμε να ταυτίσουμε την ϕ με την n . Άρα έχουμε:

$$\sigma_\alpha \phi = \sigma_\alpha n = \sigma_\alpha \phi_\alpha \nu_n = \psi_\alpha \mu_\alpha \nu_n = \psi_\alpha \nu'_n \mu,$$

το οποίο σημαίνει ότι η $\psi_\alpha \nu'_n$ είναι η προεικόνα που ψάχναμε.

Τέλος, για να δείξουμε ότι $N \in {}^\perp(\mathcal{S}^\perp)$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι από την κατασκευή του P έχουμε την ισότητα $N = \bigcup_{\alpha < \lambda} P_\alpha/M$ και ότι η συνεχής αλυσίδα $\{N_\alpha = P_\alpha/M \mid \alpha < \lambda\}$ μπορεί να εκλεπτυνθεί σε $\{S\}$ -φιλτράρισμα του N . Το ζητούμενο έπεται από το Λήμμα του Eklof. \square

Πόρισμα 1.1.33. ([3] Πόρισμα 6.14) Έστω σύνολο \mathcal{S} το οποίο περιέχει τον δακτύλιο R και το cotorsion ζεύγος $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = ({}^\perp(\mathcal{S}^\perp), \mathcal{S}^\perp)$. Η κλάση \mathcal{A} αποτελείται από τους ευθείς προσθετούς των \mathcal{S} -φιλτραρισμένων προτύπων.

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

όπου το F είναι ελεύθερο πρότυπο. Από την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος μπορούμε να βρούμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow B \longrightarrow G \longrightarrow 0,$$

όπου $B \in \mathcal{B}$ και όπου το G είναι \mathcal{S} -φιλτραρισμένο. Θεωρούμε το push-out διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & F & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & B & \dashrightarrow & C & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & G & \xrightarrow{\text{id}} & G & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Η δεύτερη γραμμή του διαγράμματος δείχνει ότι το A είναι ευθύς προσθετός του C . Ενώ η δεύτερη στήλη (μέσω των λημμάτων 1.1.27 και 1.1.29) δείχνει ότι το C επιδέχεται \mathcal{S} -φιλτράρισμα. \square

Πρόταση 1.1.34. Το ζεύγος $({}^\perp \mathbf{Abspure}, \mathbf{Abspure})$ αποτελεί πλήρες cotorsion ζεύγος.

Απόδειξη. Πράγματι, επειδή το άνωθεν cotorsion ζεύγος παράγεται από την κλάση των R -πεπερασμένα παριστώμενων προτύπων έχουμε ότι παράγεται και από το σύνολο $X = \{coker(f) | f : R^m \rightarrow R^n, n, m \in \mathbb{N}\}$. \square

Πρόταση 1.1.35. ([18] Θεώρημα 3.4) Το ζεύγος $({}^\perp \mathbf{Sfpinj}, \mathbf{Sfpinj})$ αποτελεί complete cotorsion ζεύγος.

Απόδειξη. Πράγματι, για κάθε πεπερασμένα παριστώμενο πρότυπο $F \in X = \{coker(f) | f : R^m \rightarrow R^n, n, m \in \mathbb{N}\}$ σταθεροποιούμε μια προβολική του επίλυσης P_F . Επιπλέον, θεωρούμε το σύνολο ker_{P_F} όλων των πυρήνων της προβολικής επίλυσης P_F . Τελικά, το σύνολο $S = (\bigcup_{F \in X} ker_{P_F}) \cup X$ παράγει το ζεύγος $({}^\perp \mathbf{Sfpinj}, \mathbf{Sfpinj})$. \square

1.2 Τριγωνισμένες κατηγορίες

Ορισμός 1.2.1. (Συμπλέγματα) Συνοψίζουμε σε ένα ορισμό τις βασικές έννοιες που αφορούν συμπλέγματα και αλυσωτές απεικονίσεις:

- Σύμπλεγμα R -προτύπων καλείται μία ακολουθία R -προτύπων και R -μορφισμών:

$$(C, d) = \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots,$$

με την ιδιότητα:

$$d_n d_{n+1} = 0, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

- Έστω ένα σύμπλεγμα (C, d) , η ακολουθία μορφισμών $d = (d_n)$ καλείται διαφορικό του συμπλέγματος (C, d) . Όταν θα αναφερόμαστε σε ένα σύμπλεγμα (C, d) συνήθως θα παραλείπουμε το διαφορικό και θα γράφουμε απλά C .
- Ένα σύμπλεγμα C καλείται ακυκλικό αν και μόνο αν $\ker d_n = \operatorname{Im} d_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
- Έστω $(C, d), (C', d')$ δύο συμπλέγματα R -προτύπων, αλυσωτή απεικόνιση μεταξύ των $(C, d), (C', d')$ ονομάζουμε μία ακολουθία ομομορφισμών $f = (f)_n : C_n \rightarrow C'_n$ η οποία κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

1. Μία αλυσωτή απεικόνιση, $f = (f)_n : C_n \rightarrow C'_n$, καλείται ψευδοισομορφισμός (*quasi-isomorphism*) εάν όλες οι επαγόμενες απεικονίσεις της f μέσω του συναρτητή ομολογίας, $f_* : H_n(C) \rightarrow H_n(C')$ είναι ισομορφισμοί.
2. Οι αλυσωτές απεικονίσεις, $f, g : C \rightarrow C'$, είναι ομοτοπικές, συμβολικά $f \simeq g$, ανν υπάρχει ακολουθία μορφισμών $s_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ ώστε:

$$f_n - g_n = d'_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n.$$

3. Αν $f = (f)_n : C_n \rightarrow C'_n$ είναι μία αλυσωτή απεικόνιση τότε ορίζουμε ως κώνο (*mapping cone*) της f το σύμπλεγμα $(\mathbf{cone}(f), D_n)$, όπου

$$\mathbf{cone}(f)_n = C_{n-1} \oplus C'_n$$

και

$$D_n(c_{n-1}, c'_n) = (-d_{n-1}c_{n-1}, d'_n c'_n - f_{n-1}c_{n-1}).$$

- Ένα σύμπλεγμα P καλείται συμπτύξιμο (*contractible*) ανν $\operatorname{id}_P \simeq 0$.

- Για κάθε δύο συμπλέγματα X, Y ορίζουμε το Hom -σύμπλεγμα, $\text{Hom}_R(X, Y)$, των X, Y ως το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων με:

$$\text{Hom}(X, Y)_n = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(X_i, Y_{i+n}),$$

στη θέση n και με διαφορικό το οποίο δίνεται από τον τύπο

$$df = d_Y \circ f - (-1)^n f \circ d_X,$$

για κάθε $f \in \text{Hom}_R(X, Y)_n$.

- Αν το X είναι ένα σύμπλεγμα δεξιών προτύπων και το Y ένα σύμπλεγμα αριστερών προτύπων τότε ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο $X \otimes Y$ των X και Y ως εξής:

$$(X \otimes Y)_n = \bigoplus_i X_i \otimes Y_{n-i}$$

και

$$d_n^{X \otimes Y}(x_i \otimes y_{n-i}) = d^X(x_i) \otimes y_{n-i} + (-1)^i x_i \otimes d^Y(y_{n-i}).$$

- Για κάθε σύμπλεγμα, X συμβολίζουμε με SX το σύμπλεγμα που λαμβάνουμε εάν μετακινήσουμε όλα τα πρότυπα του X κατά μια θέση αριστερά και ως διαφορικό επιλέξουμε το αντίθετο διαφορικό του X . Δηλαδή:

1. $SX_i = X_{i-1}$
2. $d_{SX} = -d_X$.

Θα αναφερόμαστε στο σύμπλεγμα SX ως το *shift* του συμπλέγματος X .

Επιπλέον με $S^{-1}X$ ορίζουμε το σύμπλεγμα εκείνο που είναι τέτοιο ώστε $SS^{-1}X = X$, τελικά για $i \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε $S^{i+1}X = SS^iX$.

- Συμβολίζουμε με $\text{Ch}(R)$ την κατηγορία που έχει ως αντικείμενα τα συμπλέγματα ενός δακτυλίου R και ως μορφισμούς τις αλυσωτές απεικονίσεις.

Ορισμός 1.2.2 (Ομοτοπική κατηγορία). Με τον όρο ομοτοπική κατηγορία του δακτυλίου R εννοούμε την κατηγορία που έχει ως αντικείμενα τα R -συμπλέγματα και ως μορφισμούς τις ομοτοπικές κλάσεις ισοδυναμίας των αλυσωτών απεικονίσεων. Συμβολικά γράφουμε $K(R)$.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι υπάρχει μια θεμελιώδης σύνδεση μεταξύ των Hom_R και $\text{Hom}_{K(R)}$.

Πρόταση 1.2.3. Για κάθε δύο R -συμπλέγματα X, Y η ομολογία του Hom -συμπλέγματος, $\text{Hom}_R(X, Y)$, στη θέση $i \in \mathbb{Z}$ ισούται με το εσωτερικό Hom της $K(R)$, $\text{Hom}_{K(R)}(X, S^{-i}Y)$. Δηλαδή:

$$H_i(\text{Hom}_R(X, Y)) = \text{Hom}_{K(R)}(X, S^i Y).$$

Απόδειξη. Απλός υπολογισμός. □

Ορισμός 1.2.4 (Υποψήφια τρίγωνα). Έστω \mathcal{C} μία προσθετική κατηγορία και

$$\Sigma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

ένας προσθετικός αυτομορφισμός της \mathcal{C} . Καλούμε υποψήφιο τρίγωνο της \mathcal{C} ένα διάγραμμα της παρακάτω μορφής:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X,$$

όπου οι διαδοχικές συνθέσεις είναι όλες μηδέν.

Επιπλέον, ορίζουμε τους μορφισμούς υποψήφιων τριγώνων ως τα μεταθετικά διαγράμματα της μορφής

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \Sigma X \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow \Sigma f \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & \Sigma X' \end{array}$$

Θα συμβολίζουμε τον παραπάνω μορφισμό με (f, g, h) . Ο μορφισμός τριγώνων (f, g, h) καλείται ισομορφισμός στην περίπτωση που οι μορφισμοί f, g, h είναι ισομορφισμοί της \mathcal{C} .

Ορισμός 1.2.5 (Προ-Τριγωνισμένη κατηγορία). Μία προσθετική κατηγορία \mathcal{T} μαζί με έναν προσθετικό αυτομορφισμό $\Sigma : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ και μια κλάση υποψήφιων τριγώνων τα οποία καλούνται διακεκριμένα τρίγωνα (ή απλώς τρίγωνα) καλείται προ-τριγωνισμένη κατηγορία εάν πληρούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

TR0: Η κλάση των τριγώνων είναι κλειστή ως προς ισομορφισμό. Επιπλέον, για κάθε $X \in \mathcal{T}$ απαιτούμε το ακόλουθο υποψήφιο τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\text{id}} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

να είναι διακεκριμένο.

TR1: Κάθε μορφισμός $f : X \longrightarrow Y$ της \mathcal{T} μπορεί να επεκταθεί σε τρίγωνο:

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X,$$

Σημείωση: Το αντικείμενο Z καλείται κώνος μορφισμού f .

TR2: Η περιστροφή τριγώνου είναι τρίγωνο, δηλαδή αν το

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X,$$

είναι τρίγωνο τότε και το

$$Y \xrightarrow{-v} Z \xrightarrow{-w} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma Y,$$

είναι τρίγωνο.

TR3: Κάθε μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \Sigma X \\ \downarrow f & & \downarrow g & & & & \downarrow \Sigma f \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & \Sigma X' \end{array}$$

όπου οι γραμμές είναι τρίγωνα μπορεί να επεκταθεί σε μορφισμό τριγώνων (όχι αναγκαστικά με μοναδικό τρόπο).

Ορισμός 1.2.6. (Τριγωνισμένη κατηγορία) Μια προ-τριγωνισμένη κατηγορία \mathcal{T} καλείται τριγωνισμένη εάν πληροί το ακόλουθο αξίωμα:

TR4' Δοσμένου μεταθετικού διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ f \downarrow & & \downarrow g & & & & \downarrow \Sigma f \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X' \end{array}$$

όπου οι γραμμές είναι τρίγωνα μπορούμε να επιλέξουμε μέσω του **TR3** μια $h : Z \rightarrow Z'$ ώστε το ακόλουθο υποψήφιο τρίγωνο:

$$Y \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -v & 0 \\ g & u' \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -w & 0 \\ h & v' \end{pmatrix}} \Sigma X \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma u & 0 \\ \Sigma f & w' \end{pmatrix}} \Sigma Y \oplus \Sigma X'$$

να είναι διακεκριμένο.

Παρατήρηση 1.2.7. Αν τα

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \Sigma X,$$

$$X' \rightarrow Y' \rightarrow Z' \rightarrow \Sigma X'$$

είναι τρίγωνα μιας τριγωνισμένης κατηγορίας \mathcal{D} τότε (υπενθυμίζουμε ότι) μορφισμό μεταξύ των παραπάνω τριγώνων καλούμε μια τριάδα μορφισμών (f, g, h) η οποία είναι τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow \Sigma f \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X' \end{array}$$

Επειδή σε ένα τρίγωνο οι διαδοχικές συνθέσεις είναι μηδέν μπορούμε να σκεφτόμαστε τα τρίγωνα ως συμπλέγματα της κατηγορίας \mathcal{D} και τους μορφισμούς μεταξύ τους ως αλυσωτές απεικονίσεις. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε τον κώνο (mapping cone) ενός μορφισμού μεταξύ τριγώνων. Στην περίπτωση που ο κώνος ενός μορφισμού τριγώνων (f, g, h) είναι τρίγωνο καλούμε τον (f, g, h) καλό

μορφισμό. Με αυτή την καινούργια ορολογία μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το **TR4** ως εξής: Κάθε μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ f \downarrow & & \downarrow g & & & & \downarrow \Sigma f \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X' \end{array}$$

όπου οι γραμμές είναι τρίγωνα μπορεί να επεκταθεί σε καλό μορφισμό τριγώνων.

Ορισμός 1.2.8. Ένας συναλλοίωτος συναρτητής $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ από μια τριγωνισμένη κατηγορία \mathcal{T} σε μια αβελιανή κατηγορία \mathcal{A} καλείται ομολογικός εάν στέλνει τα τρίγωνα της \mathcal{T} σε ακριβείς ακολουθίες της \mathcal{A} . Δηλαδή, για κάθε τρίγωνο

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

της \mathcal{T} , η επαγόμενη ακολουθία

$$H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z)$$

της \mathcal{A} είναι ακριβής. Διϊκά, καλούμε έναν ανταλλοίωτο συναρτητή $U : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ συνομολογικό εάν απεικονίζει τα τρίγωνα της \mathcal{T} σε ακριβείς ακολουθίες της \mathcal{A} .

Ορισμός 1.2.9. Θα συμβολίζουμε με \mathcal{T}^{op} τη δυϊκή κατηγορία της κατηγορίας \mathcal{T} . Δηλαδή την κατηγορία που έχει τα ίδια αντικείμενα με την \mathcal{T} αλλά μορφισμούς προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Παρατήρηση 1.2.10. Αν η (\mathcal{T}, Σ) είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία τότε και η $(\mathcal{T}^{op}, \Sigma^{-1})$ είναι τριγωνισμένη. (Δείτε [15, Remark 10.1.10(ii)])

Πρόταση 1.2.11. ([19, Λήμμα 1.1.10]) Έστω U ένα αντικείμενο της τριγωνισμένης κατηγορίας \mathcal{T} . Τότε

1. ο συναρτητής $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, U)$ είναι συνομολογικός,
2. ο συναρτητής $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(U, -)$ είναι ομολογικός.

Απόδειξη. 1. Καθώς η δυϊκή κατηγορία μιας τριγωνισμένης κατηγορίας είναι τριγωνισμένη μπορούμε να θεωρήσουμε τον ανταλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, U) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ ως συναλλοίωτο συναρτητή από την κατηγορία \mathcal{T}^{op} στην $\mathbb{Z}\text{-Mod}$ και να εφαρμόσουμε το 2. της πρότασης ([19, Παρατηρήσεις 1.1.5 και 1.1.11]).

2. Αν το

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

είναι τρίγωνο της \mathcal{T} , πρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία:

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(U, X) \xrightarrow{u_*} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(U, Y) \xrightarrow{v_*} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(U, Z)$$

είναι ακριβής. Είναι προφανές ότι η σύνθεση v_*u_* είναι μηδέν, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\ker v_* \subset \operatorname{Im} u_*$. Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(U, Y)$ η οποία απεικονίζεται μέσω της v_* στο 0 έχει προεικόνα μέσω της u_* . Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} U & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma U & \xrightarrow{-id} & \Sigma U \\ f \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \Sigma f \\ Y & \xrightarrow{-v} & Z & \xrightarrow{-w} & \Sigma X & \xrightarrow{-\Sigma u} & \Sigma Y \end{array}$$

το οποίο μπορεί να συμπληρωθεί σε μορφοισμό τριγώνων από το **TR3**. Πράγματι, η πρώτη γραμμή είναι τρίγωνο από τα **TR0** και **TR2** ενώ η δεύτερη γραμμή αποτελεί τρίγωνο από το **TR2**. Έτσι λαμβάνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} U & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma U & \xrightarrow{-id} & \Sigma U \\ f \downarrow & & \downarrow & & \Sigma h \downarrow & & \downarrow \Sigma f \\ Y & \xrightarrow{-v} & Z & \xrightarrow{-w} & \Sigma X & \xrightarrow{-\Sigma u} & \Sigma Y \end{array}$$

το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας h ώστε $uh = f$. □

Ορισμός 1.2.12. (Ομοτοπικά καρτεσιανά τετράγωνα) Έστω \mathcal{T} μια τριγωνισμένη κατηγορία. Ένα μεταθετικό τετράγωνο:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

καλείται ομοτοπικά καρτεσιανό εάν υπάρχει κάποιο διακεκριμένο τρίγωνο της παρακάτω μορφής:

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}} Y' \oplus Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f' & g \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{\theta} \Sigma Y,$$

για κάποιο μορφοισμό θ .

Ορισμός 1.2.13. (Ομοτοπικά pull-back) Αν το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

είναι ένα ομοτοπικά καρτεσιανό τετράγωνο τότε καλούμε το Y το ομοτοπικό pull-back διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow g' \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

Παρατήρηση 1.2.14. 1. Τα ομοτοπικά *push out* ορίζονται δυνικά.

2. Αποδεικνύεται ότι αν το Y είναι το ομοτοπικό *pull-back* του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow g' \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

τότε για κάθε αντικείμενο P και μορφοισμούς $P \rightarrow Z$, $P \rightarrow Y'$ οι οποίοι κάνουν το παρακάτω τετράγωνο μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

υπάρχει (όχι μοναδικός) μορφοισμός $h : P \rightarrow Y$ οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccc} P & & & & \\ & \searrow h & & & \\ & & Y & \longrightarrow & Z \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y' & \longrightarrow & Z' \end{array}$$

Αξίωμα TR4: Έστω $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Y'$ μορφοισμοί της τριγωνισμένης κατηγορίας \mathcal{T} τότε μπορεί να κατασκευαστεί το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \Sigma X \\ \downarrow id & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \Sigma id \\ X & \xrightarrow{gf} & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & \Sigma X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y'' & \longrightarrow & Y'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma X & \longrightarrow & \Sigma Y & \longrightarrow & \Sigma Z & \longrightarrow & \Sigma \Sigma X \end{array}$$

όπου όλες οι γραμμές και οι στήλες είναι τρίγωνα και το τετράγωνο:

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Z' \end{array}$$

είναι ομοτοπικά καρτεσιανό.

Παρατήρηση 1.2.15. ([19, Πρόταση 1.4.6.],[20, Θεώρημα 1.8]) Τα αξιώματα **TR4** και **TR4'** είναι ισοδύναμα.

Πρόταση 1.2.16. Η ομοτοπική κατηγορία ενός δακτυλίου αποτελεί τριγωνισμένη κατηγορία. Το ρόλο των τριγώνων παίζουν τα λεγόμενα *mapping cone* τρήγωνα ενώ ως προσθετικό αυτομορφισμό θεωρούμε το *shift*. Δηλαδή επιλέγουμε ως τρήγωνα τις ακολουθίες που έχουν/(είναι ισόμορφες) τη παρακάτω μορφή/(με ακολουθίες της παρακάτω μορφής):

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \mathbf{cone}(f) \longrightarrow SX.$$

Ορισμός 1.2.17 (Τριγωνισμένες υποκατηγορίες). Έστω \mathcal{T} μια τριγωνισμένη κατηγορία. Μια προσθετική υποκατηγορία, \mathcal{S} της \mathcal{T} καλείται τριγωνισμένη υποκατηγορία εάν ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Η \mathcal{S} είναι πλήρης.
2. Η \mathcal{S} είναι κλειστή ως προς ισομορφισμούς.
3. Η \mathcal{S} είναι κλειστή ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ .
4. Η \mathcal{S} έχει την 2 από τα 3 ιδιότητα ως προς τα διακεκριμένα τρήγωνα. Δηλαδή, αν δύο από τα αντικείμενα X, Y, Z ενός τρήγωνα:

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

ανήκουν στην \mathcal{S} , τότε και το τρίτο αντικείμενο ανήκει στην \mathcal{S} .

Επιπλέον καλούμε την \mathcal{S} πυκνή (*thick*) εάν είναι κλειστή ως προς ευθείς προσθετέους.

Παράδειγμα 1.2.18 ([21],[1]). Οι παρακάτω κλάσεις αποτελούν πυκνές τριγωνισμένες υποκατηγορίες της ομοτοπικής κατηγορίας, $K(R)$, ενός δακτυλίου R .

- Ένα σύμπλεγμα, X , καλείται K -προβολικό εάν το σύμπλεγμα $\mathbf{Hom}_R(X, Y)$ είναι ακυκλικό για κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα Y . Θα συμβολίζουμε τη κλάση όλων των K -προβολικών συμπλεγμάτων με $K\text{-Proj}$.
- Η κλειστότητα ως προς ομοτοπικές ισοδυναμίες της συλλογής όλων των συμπλεγμάτων τα οποία αποτελούνται από προβολικά πρότυπα συμβολίζεται με $K(\text{Proj})$.
- Ένα σύμπλεγμα, X , καλείται *pure* ακυκλικό εάν το σύμπλεγμα $Y \otimes X$ είναι ακυκλικό για κάθε σύμπλεγμα δεξιών προτύπων Y . Την κλάση των *pure* ακυκλικών συμπλεγμάτων θα την συμβολίζουμε με K_{pac} .
- Ένα σύμπλεγμα, X , καλείται K -επίπεδο εάν το σύμπλεγμα $Y \otimes X$ είναι ακυκλικό για κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα δεξιών προτύπων Y .

Ορισμός 1.2.19 (Τριγωνισμένοι συναρτητές). Έστω \mathcal{D}_1 και \mathcal{D}_2 δυο τριγωνισμένες κατηγορίες. Ένας προσθετικός συναρτητής, F , μαζί με έναν φυσικό ισομορφισμό, $\Phi_X : F(\Sigma X) \rightarrow \Sigma(F(X))$ καλείται τριγωνισμένος συναρτητής εάν κάθε τρίγωνο

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{w} \Sigma X,$$

της \mathcal{D}_1 επάγει τρίγωνο

$$FX \rightarrow FY \rightarrow FZ \xrightarrow{\Phi_X \circ F^w} \Sigma(FX),$$

της \mathcal{D}_2 .

Παρατήρηση 1.2.20. Συνήθως, όταν δηλώνουμε έναν τριγωνισμένο συναρτητή παραλείπουμε τον φυσικό ισομορφισμό Φ_X .

Παράδειγμα 1.2.21. Κάθε τριγωνισμένη υποκατηγορία \mathcal{S} μιας τριγωνισμένης κατηγορίας \mathcal{T} επάγει τον τριγωνισμένο συναρτητή της ένθεσης $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{T}$.

Η επόμενη πρόταση μπορεί να θεωρηθεί ως μερικώς αντίστροφη του παραπάνω παραδείγματος.

Πρόταση 1.2.22. Ο πυρήνας κάθε τριγωνισμένου συναρτητή $F : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ αποτελεί πυκνή τριγωνισμένη υποκατηγορία της \mathcal{D}_1 .

Στο σημείο αυτό εισάγουμε την έννοια του Verdier πηλίκου με σκοπό να ορίσουμε την έννοια των Bousfield localization ζευγών. Όλες οι αποδείξεις μπορούν να βρεθούν στο [19, Κεφάλαια 1,2].

Θεώρημα 1.2.23. (Verdier) Έστω \mathcal{D} μια τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της. Τότε υπάρχει μια τριγωνισμένη κατηγορία \mathcal{D}/\mathcal{C} και ένας καθολικός τριγωνισμένος συναρτητής $F_{univ} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ με $\mathcal{C} \subset \ker(F_{univ})$. Το οποίο σημαίνει ότι, κάθε άλλος τριγωνισμένος συναρτητής $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{T}$ με $\mathcal{C} \subset \ker(F)$ παραγοντοποιείται μέσω του F_{univ} .

Παρατήρηση 1.2.24. 1. Η κατηγορία \mathcal{D}/\mathcal{C} καλείται το Verdier πηλίκo της υποκατηγορίας \mathcal{C} .

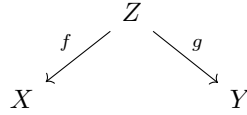
2. Αν συμβολίσουμε με $\bar{\mathcal{C}}$ την πυκνή κλειστότητα της \mathcal{C} (δηλαδή την ελάχιστη πυκνή τριγωνισμένη υποκατηγορία που περιέχει τη \mathcal{C}^1) τότε $\mathcal{D}/\mathcal{C} = \mathcal{D}/\bar{\mathcal{C}}$. Δηλαδή, δύο διαφορετικές τριγωνισμένες υποκατηγορίες της \mathcal{D} μπορεί να έχουν ίδια Verdier πηλικά.

3. Τα αντικείμενα της \mathcal{D}/\mathcal{C} είναι ακριβώς τα αντικείμενα της \mathcal{D} .

4. Ο καθολικός τριγωνισμένος συναρτητής F_{univ} είναι ταυτοτικός στα αντικείμενα.

¹Είναι η πλήρης υποκατηγορία που περιέχει όλους του ευθύς προσθετέους των αντικειμένων της \mathcal{C}

5. Μορφισμός² $X \rightarrow Y$ της \mathcal{D}/\mathcal{C} μεταξύ δυο αντικειμένων $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{D}) = \text{Obj}(\mathcal{D}/\mathcal{C})$ καλούμε κάθε διάγραμμα της παρακάτω μορφής:

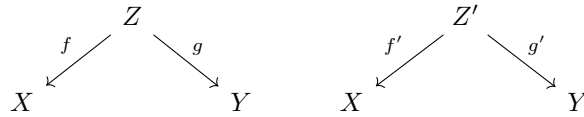


όπου το Z είναι κάποιο αντικείμενο της \mathcal{D} και η f είναι τέτοια ώστε αν συμπληρωθεί σε τρίγωνο:

$$Z \xrightarrow{f} X \rightarrow W \rightarrow \Sigma Z$$

το αντικείμενο W ανήκει στη \mathcal{C} .

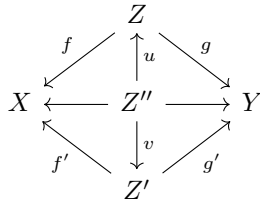
6. Δύο μορφισμοί:



της \mathcal{D}/\mathcal{C} καλούνται ισοδύναμοι αν και μόνο αν υπάρχει μορφισμός:

$$X \leftarrow Z'' \rightarrow Y$$

της \mathcal{D}/\mathcal{C} και μορφισμοί $u : Z'' \rightarrow Z$, $v : Z'' \rightarrow Z'$ της \mathcal{D} ώστε το παρακάτω διάγραμμα:



να είναι μεταθετικό.

7. Συμβολίζουμε με $\text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, Y)$ μια συλλογή (ισοδύναμων) αντιπροσώπων των μορφισμών της \mathcal{D}/\mathcal{C} από το X στο Y . Η συλλογή των μορφισμών $\text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, Y)$ μπορεί να μην είναι σύνολο και να αποτελεί γνήσια κλάση. Δηλαδή εάν η \mathcal{D} έχει μικρά $\text{Hom}_{\mathcal{D}}$ σύνολα δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η \mathcal{D}/\mathcal{C} κληρονομεί την ίδια ιδιότητα.

²Οι μορφισμοί είναι κλάσεις ισοδυναμίας διαγραμμάτων με την έννοια που ορίζεται παρακάτω.

³Οι u και v θα έχουν αναγκαστικά κώνο στην \mathcal{C} ([19, Λήμμα 2.1.12])

8. Η σύνθεση των μορφοισμών :

$$\begin{array}{ccc} & & W_2 \longrightarrow Z \\ & & \downarrow \\ W_1 \longrightarrow & Y & \\ \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

δίνεται από το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc} W & \dashrightarrow & W_2 & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ W_1 & \longrightarrow & Y & & \\ \downarrow & & & & \\ X & & & & \end{array}$$

όπου το τετράγωνο:

$$\begin{array}{ccc} W & \dashrightarrow & W_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_1 & \longrightarrow & Y \end{array}$$

είναι ομοτοπικά καρτεσιανό.

9. Η δράση του καθολικού συναρτητή F_{univ} στον μορφοισμό $f : X \longrightarrow Y$ είναι το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ id \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

10. Τρίγωνο της \mathcal{D}/\mathcal{C} καλούμε κάθε υποψήφιο τρίγωνο το οποίο είναι ισόμορφο με την εικόνα ενός τριγώνου της \mathcal{D} μέσω του F_{univ} .
11. Το ευθύ άθροισμα δύο αντικειμένων $F_{univ}(X)$ και $F_{univ}(Y)$ της \mathcal{D}/\mathcal{C} είναι το $F_{univ}(X \oplus Y)$.
12. Η πρόσθεση μορφοισμών ορίζεται όπως υποδεικνύει ο F_{univ} .

Ορισμός 1.2.25. Έστω \mathcal{C} τριγωνισμένη υποκατηγορία της τριγωνισμένης κατηγορίας \mathcal{D} . Συμβολίζουμε με $Mor_{\mathcal{C}}$ όλους τους μορφοισμούς της \mathcal{D} οι οποίοι έχουν κώνο κάποιο αντικείμενο της \mathcal{C} .

Πρόταση 1.2.26. Έστω \mathcal{C} τριγωνισμένη υποκατηγορία της τριγωνισμένης κατηγορίας \mathcal{D} . Τότε κάθε μορφισμός της $\text{Mor}_{\mathcal{C}}$ απεικονίζεται σε ισομορφισμό στο Verdier πηλίκο \mathcal{D}/\mathcal{C} .

Παρατήρηση 1.2.27. Λόγω της προηγούμενης πρότασης μπορούμε να σκεφτόμαστε τη διαδικασία κατασκευής του Verdier πηλίκου ως μια τυπική διαδικασία η οποία αντιστρέφει κάποιους συγκεκριμένους μορφισμούς.

Ορισμός 1.2.28. 1. Η *derived* κατηγορία $D(R)$ ενός δακτυλίου R ορίζεται να είναι το Verdier πηλίκο της ομοτοπικής κατηγορίας $K(R)$ με την κλάση των ακυκλικών συμπλεγμάτων.

2. Η *pure derived* κατηγορία $D_{\text{pure}}(R)$ ενός δακτυλίου R ορίζεται να είναι το Verdier πηλίκο της ομοτοπικής κατηγορίας $K(R)$ με την κλάση των *pure* ακυκλικών συμπλεγμάτων.

1.3 Bousfield localizing ζεύγη

Ορισμός 1.3.1. ([19, Ορισμός 9.1.1.]) Έστω \mathcal{T} μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά Hom -σύνολα και \mathcal{S} μια πυκνή (*thick*) υποκατηγορία της. Θα λέμε ότι υπάρχει ένας Bousfield localisation συναρτητής για το ζεύγος $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ οποτεδήποτε υπάρχει δεξιά προσαρτημένος συναρτητής του:

$$F_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}.$$

Θα συμβολίζουμε τον Bousfield localisation συναρτητή με $G : \mathcal{T}/\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$.

Συμβολισμοί: i) Καθώς δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα σύγχυσης θα συμβολίζουμε τον συναρτητή F_{univ} απλά με F . Επιπλέον, κάποιες φορές θα αναφερόμαστε στον συναρτητή F ως συναρτητή πηλίκο.

ii) Για μια τριγωνισμένη κατηγορία \mathcal{T} θα συμβολίζουμε την κλάση των μορφισμών μεταξύ δύο αντικειμένων X και Y με $\mathcal{T}(X, Y)$ αντί με $Hom_{\mathcal{T}}(X, Y)$.

iii) Επειδή οι τριγωνισμένες κατηγορίες \mathcal{T} και \mathcal{T}/\mathcal{S} έχουν τα ίδια αντικείμενα είναι συνηθισμένο να γράφουμε x αντί για Fx .

Λήμμα 1.3.2. ([19, Λήμμα 9.1.2]) Έστω ότι υπάρχει ένας Bousfield localisation συναρτητής για το ζεύγος $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ τότε για κάθε

$$s \in \mathcal{S} \text{ και } t \in \mathcal{T}/\mathcal{S}$$

έχουμε ότι κάθε μορφισμός $s \longrightarrow Gt$ είναι μηδενικός.

Απόδειξη. Πράγματι, λόγω της προσάρτησης ισχύει ότι $\mathcal{T}(s, Gt) \simeq \mathcal{T}/\mathcal{S}(Fs, t)$, καθώς $Fs = 0$ έχουμε ότι $\mathcal{T}/\mathcal{S}(Fs, t) = 0$. \square

Ορισμός 1.3.3. Έστω \mathcal{S} μια κλάση αντικειμένων της τριγωνισμένης κατηγορίας \mathcal{T} . Ένα αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$ καλείται δεξιά ορθογώνιο της \mathcal{S} εάν για κάθε $s \in \mathcal{S}$ κάθε μορφισμός της μορφής $s \longrightarrow t$ είναι μηδενικός. Θα συμβολίζουμε τη κλάση όλων των δεξιά ορθογώνιων της \mathcal{S} με \mathcal{S}^{\perp} . Δυϊκά ορίζουμε την κλάση των αριστερά ορθογώνιων της \mathcal{S} την οποία συμβολίζουμε με ${}^{\perp}\mathcal{S}$.

Πρόταση 1.3.4. Αν με \mathcal{S} συμβολίσουμε μια πυκνή τριγωνισμένη υποκατηγορία της τριγωνισμένης κατηγορίας \mathcal{T} η οποία είναι τέτοια ώστε να υπάρχει Bousfield localisation συναρτητής για το ζεύγος $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ τότε ισχύει ότι κάθε Gt είναι δεξιά ορθογώνιο της \mathcal{S} .

Απόδειξη. Λήμμα 1.3.2 \square

Το επόμενο Λήμμα αποτελεί μια ασθενέστερη μορφή του Λήμματος [19, 2.1.26].

Λήμμα 1.3.5. ([19, Λήμμα 2.1.26]) Αν ο μορφισμός $f : x \longrightarrow t$ της \mathcal{T} απεικονίζεται μέσω του F στον μηδενικό μορφισμό της \mathcal{T}/\mathcal{S} τότε ο f παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου s της \mathcal{S} . Δηλαδή, υπάρχουν μορφισμοί β και γ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xrightarrow{\beta} & s & \xrightarrow{\gamma} & t \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & f & &
 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Η υπόθεση $F(f) = 0$ σημαίνει ακριβώς ότι υπάρχει μορφισμός

$$x \xleftarrow{\alpha} w \longrightarrow t$$

της \mathcal{T}/\mathcal{S} (δηλαδή $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{S}}$) και μορφισμοί $\alpha_1, \alpha_2 : w \longrightarrow x$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc}
 & & x & & \\
 & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\
 & id & \alpha_1 & f & \\
 x & \xleftarrow{\alpha} & w & \xrightarrow{\quad} & t \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 & id & \alpha_2 & 0 & \\
 & & x & &
 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε ότι $\alpha_1 = \alpha$ και ότι $f\alpha = 0$. Η τελευταία ισότητα μας δίνει το ζητούμενο. Πράγματι, αφού $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{S}}$ μπορούμε να θεωρήσουμε το ακόλουθο διακεκριμένο τρίγωνο

$$w \xrightarrow{\alpha} x \xrightarrow{\beta} s \longrightarrow \Sigma w$$

της \mathcal{T} , όπου το s ανήκει στην κλάση \mathcal{S} . Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{T}(-, t)$ είναι συνομολογικός έχουμε την επαγόμενη ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{T}(w, t) \xleftarrow{\alpha^*} \mathcal{T}(x, t) \xleftarrow{\beta^*} \mathcal{T}(s, t) \longleftarrow \mathcal{T}(\Sigma w, t).$$

αβελιανών ομάδων. Η f βρίσκεται στην εικόνα της β (και άρα υπάρχει γ ώστε $\gamma\beta = f$) αφού ήδη έχουμε εξασφαλίσει ότι η f βρίσκεται στον πυρήνα της α^* . \square

Λήμμα 1.3.6. ([19, Λήμμα 9.1.5]) Έστω \mathcal{T} μια τριγωνισμένη κατηγορία και \mathcal{S} μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της. Τότε για κάθε $t \in \mathcal{S}^\perp$ και κάθε $x \in \mathcal{T}$ η φυσική απεικόνιση:

$$\Phi : \mathcal{T}(x, t) \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}(Fx, Ft)$$

είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. **Επί:** Έστω

$$\begin{array}{ccc}
 x' & \longrightarrow & t \\
 a \downarrow & & \\
 x & &
 \end{array}$$

ένα στοιχείο του $\mathcal{T}/\mathcal{S}(Fx, Ft)$. Τότε έχουμε ότι ο μορφισμός a ανήκει στη συλλογή μορφισμών $\text{Mor}_{\mathcal{S}}$ (Ορισμός 1.2.25). Δηλαδή, από το **TR2**

και το ορισμό των τριγωνισμένων υποκατηγοριών υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο της \mathcal{T} της παρακάτω μορφής

$$s \longrightarrow x' \xrightarrow{\alpha} x \longrightarrow \Sigma s,$$

όπου το s είναι αντικείμενο της \mathcal{S} . Από την Πρόταση 1.2.11 ο συναρτητής $\mathcal{T}(-, t)$ είναι συνομολογικός και επομένως επάγεται η ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$\mathcal{T}(s, t) \longleftarrow \mathcal{T}(x', t) \longleftarrow \mathcal{T}(x, t) \longleftarrow \mathcal{T}(\Sigma s, t).$$

Επειδή το t είναι δεξιά ορθογώνιο στην \mathcal{S} έχουμε ότι $\mathcal{T}(s, t) = \mathcal{T}(\Sigma s, t) = 0$, το οποίο σημαίνει ότι η απεικόνιση:

$$\mathcal{T}(a, t) : \mathcal{T}(x, t) \longrightarrow \mathcal{T}(x', t),$$

είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων. Δηλαδή, υπάρχει μορφισμός $b : x \longrightarrow t$ της \mathcal{T} ώστε το ακόλουθο τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} x' & \longrightarrow & t \\ a \downarrow & & \downarrow id \\ x & \xrightarrow{b} & t \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Τελικά, έχουμε ότι ο μορφισμός $b : x \longrightarrow t$ αποτελεί προεικόνα του αρχικού μορφισμού

$$\begin{array}{ccc} x' & \longrightarrow & t \\ a \downarrow & & \\ x & & \end{array}$$

αφού ο b απεικονίζεται μέσω της Φ στον μορφισμό

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{b} & t \\ id \downarrow & & \\ x & & \end{array}$$

ο οποίος είναι ισοδύναμος του αρχικού μορφισμού μέσω του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccccc} & & x' & & \\ & a \swarrow & \uparrow id & \searrow & \\ x & \xleftarrow{a} & x' & \xrightarrow{\quad} & t \\ & \swarrow id & \downarrow a & \searrow b & \\ & & x & & \end{array}$$

1-1: Έστω ότι ο μορφισμός $x \rightarrow t$ ανήκει στον πυρήνα της Φ . Από το Λήμμα 1.3.5 έχουμε ότι ο $x \rightarrow t$ παραγοντοποιείται μέσω της κλάσης \mathcal{S} , δηλαδή ότι υπάρχει $s \in \mathcal{S}$ έτσι ώστε ο μορφισμός $x \rightarrow t$ να γράφεται ως κάποια σύνθεση της μορφής

$$x \rightarrow s \rightarrow t.$$

Επειδή το t είναι δεξιά ορθογώνιο στην \mathcal{S} έχουμε ότι ο $s \rightarrow t$ είναι ο μηδενικός μορφισμός και επομένως ο $x \rightarrow t$ είναι επίσης μηδενικός. \square

Ορισμός 1.3.7. Έστω ότι υπάρχει *bousfield localisation* συναρτητής για το ζεύγος $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Για κάθε $t \in \mathcal{T}$ ορίζουμε το *unit* της προσάρτησης ως την απεικόνιση

$$\epsilon_t : t \rightarrow GFt$$

η οποία αντιστοιχεί μέσω του προηγούμενου λήμματος (αφού το GFt ανήκει στην δεξιά ορθογώνια κλάση της \mathcal{S}) στην ταυτοτική απεικόνιση του $\mathcal{T}/\mathcal{S}(Ft, Ft)$ μέσω του φυσικού ισομορφισμού $\mathcal{T}(t, GFt) = \mathcal{T}/\mathcal{S}(Ft, Ft)$.

Λήμμα 1.3.8. ([19, Λήμμα 9.1.7]) Για κάθε $t \in \mathcal{T}$ η $\epsilon_t : t \rightarrow GFt$ είναι ισομορφισμός στη \mathcal{T}/\mathcal{S} .

Πόρισμα 1.3.9. ([19, Πρόταση 9.1.8]) Έστω \mathcal{S} πυκνή τριγωνισμένη υποκατηγορία της \mathcal{T} . Αν υπάρχει *Bousfield localisation* συναρτητής για το ζεύγος $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ τότε για κάθε $t \in \mathcal{T}$ υπάρχει τρίγωνο (προσέγγισης) της μορφής

$$t_{\mathcal{S}} \rightarrow t \xrightarrow{\epsilon_t} Gt \rightarrow \Sigma t_{\mathcal{S}},$$

όπου $t_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$ και $Gt \in \mathcal{S}^{\perp 4}$.

Απόδειξη. Άμεσο από το προηγούμενο Λήμμα. \square

Πόρισμα 1.3.10. Έστω \mathcal{S} πυκνή τριγωνισμένη υποκατηγορία της \mathcal{T} , ώστε να υπάρχει *Bousfield localisation* συναρτητής για το ζεύγος $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Έστω t ένα δεξιά ορθογώνιο αντικείμενο της \mathcal{S} , τότε ο μορφισμός $t \rightarrow Gt$ είναι ισομορφισμός της \mathcal{T} .

Θεώρημα 1.3.11. ([19, Θεώρημα 9.1.13]) Έστω \mathcal{T} μια τριγωνισμένη κατηγορία και \mathcal{S} μια πυκνή υποκατηγορία της. Τότε υπάρχει ένας *Bousfield localisation* συναρτητής για το ζεύγος $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ αν και μόνο αν για κάθε $t \in \mathcal{T}$ υπάρχει τρίγωνο (προσέγγισης) της μορφής

$$t_{\mathcal{S}} \rightarrow t \rightarrow t_{\mathcal{S}^{\perp}} \rightarrow \Sigma t_{\mathcal{S}},$$

όπου $t_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$ και $t_{\mathcal{S}^{\perp}} \in \mathcal{S}^{\perp}$.

⁴Καθώς ο συναρτητής F είναι ταυτοτικός στα αντικείμενα, έχουμε γράψει Gt αντί για GFt

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι το Πρόσλημα 1.3.9. Επομένως μας μένει να δείξουμε ότι η ύπαρξη των τριγώνων προσέγγισης εξασφαλίζει την ύπαρξη Bousfield localisation συναρτητή G . Αρκεί να ορίσουμε $Gt = t_{\mathcal{S}^\perp}$. Πράγματι, αφού γνωρίζουμε ότι $t_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$, έχουμε ότι ο μορφισμός $t \rightarrow t_{\mathcal{S}^\perp}$ του τριγώνου της εκφώνησης γίνεται ισομορφισμός στην \mathcal{T}/\mathcal{S} . Επομένως έχουμε την ισομορφία

$$\mathcal{T}/\mathcal{S}(x, t) = \mathcal{T}/\mathcal{S}(x, t_{\mathcal{S}^\perp}).$$

Επειδή $t_{\mathcal{S}^\perp} \in \mathcal{S}^\perp$ έχουμε την ισομορφία (Λήμμα 1.3.6):

$$\mathcal{T}/\mathcal{S}(x, t_{\mathcal{S}^\perp}) = \mathcal{T}(x, t_{\mathcal{S}^\perp}).$$

Από τις δύο προηγούμενες ισομορφίες έχουμε το ζητούμενο. Δηλαδή ότι:

$$\mathcal{T}/\mathcal{S}(x, t) = \mathcal{T}(x, t_{\mathcal{S}^\perp}).$$

□

Πρόσλημα 1.3.12. [19, Πρόσλημα 9.1.14] Έστω \mathcal{S} πυκνή τριγωνισμένη υποκατηγορία της \mathcal{T} τέτοια ώστε να υπάρχει Bousfield localisation συναρτητής για το ζεύγος $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Τότε, υπάρχει Bousfield localisation συναρτητής για το ζεύγος $(\mathcal{S}^\perp)^{op} \subset \mathcal{T}^{op}$ και ισχύει ότι ${}^\perp(\mathcal{S}^\perp) = \mathcal{S}$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.3.11 για κάθε $t \in \mathcal{T}$ υπάρχει τρίγωνο προσέγγισης της μορφής

$$t_{\mathcal{S}} \rightarrow t \rightarrow t_{\mathcal{S}^\perp} \rightarrow \Sigma t_{\mathcal{S}},$$

όπου $t_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$ και $t_{\mathcal{S}^\perp} \in \mathcal{S}^\perp$. Επειδή $\mathcal{S} \subset {}^\perp(\mathcal{S}^\perp)$ έχουμε ότι $t_{\mathcal{S}} \in {}^\perp(\mathcal{S}^\perp)$. Από το διϊκό του Θεωρήματος 1.3.11 έχουμε ότι υπάρχει Bousfield localisation συναρτητής για το ζεύγος $(\mathcal{S}^\perp)^{op} \subset \mathcal{T}^{op}$. Δηλαδή υπάρχει αριστερός(!) προσαρτημένος συναρτητής για τον συναρτητή πηλίκο

$$U : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}^\perp.$$

Καλούμε

$$L : \mathcal{T}/\mathcal{S}^\perp \rightarrow \mathcal{T}$$

τον αριστερό προσαρτημένο συναρτητή του U .

Για κάθε $t \in \mathcal{T}$ έχουμε το τρίγωνο της \mathcal{T}

$$LUt \rightarrow t \rightarrow t'_{\mathcal{S}^\perp} \rightarrow \Sigma t_{\mathcal{S}},$$

το οποίο μπορεί να ταυτιστεί με το αρχικό

$$t_{\mathcal{S}} \rightarrow t \rightarrow t_{\mathcal{S}^\perp} \rightarrow \Sigma t_{\mathcal{S}}.$$

Από το διϊκό του Προσλήματος 1.3.10 έχουμε ότι ο μορφισμός $LUt \rightarrow t$ είναι ισομορφισμός της \mathcal{T} . Δηλαδή, κάθε $t \in {}^\perp(\mathcal{S}^\perp)$ είναι ισόμορφο με το $LUt \in \mathcal{S}$ το οποίο σημαίνει ότι $t \in \mathcal{S}$. Τελικά, έχουμε ότι ${}^\perp(\mathcal{S}^\perp) = \mathcal{S}$. □

Θεώρημα 1.3.13. [19, Θεώρημα 9.1.16] Έστω \mathcal{S} πυκνή υποκατηγορία της \mathcal{T} και ότι υπάρχει Bousfield localisation συναρτητής για το ζεύγος $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Τότε η σύνθεση

$$\mathcal{S}^\perp \hookrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$$

αποτελεί ισοδυναμία κατηγοριών.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.3.6 έχουμε για κάθε $y \in \mathcal{S}^\perp$ την ισομορφία

$$\mathcal{T}(x, y) = \mathcal{T}/\mathcal{S}(x, y),$$

η οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathcal{T}$ άρα και για κάθε $x \in \mathcal{S}^\perp \subset \mathcal{T}$. Επομένως για $x, y \in \mathcal{S}^\perp$ μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{S}^\perp(x, y) = \mathcal{T}/\mathcal{S}(x, y).$$

Δηλαδή, η σύνθεση της εκφώνησης είναι αυτό που στην αγγλική ορολογία καλείται fully faithful συναρτητής, το οποίο εξ ορισμού σημαίνει ότι ο εν λόγω συναρτητής επάγει ισομορφισμό μεταξύ των "Hom-κλάσεων" των δύο κατηγοριών που συνδέει. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $y \in \mathcal{T}/\mathcal{S}$ υπάρχει $x \in \mathcal{S}^\perp$ έτσι ώστε τα y και Fx να είναι ισόμορφα. Όμως, για κάθε t ισχύει ότι $Gt \in \mathcal{S}^\perp$ (Πρόταση 1.3.4) και γνωρίζουμε για κάθε $t \in \mathcal{S}^\perp$ ότι ο μορφισμός

$$t \xrightarrow{a} Gt$$

είναι ισομορφισμός της \mathcal{S}^\perp (Πόρισμα 1.3.10). Τελικά, το ζητούμενο έπεται μέσω του μορφισμού $F(a)$. \square

Παρατήρηση 1.3.14. Λόγω του Θεωρήματος 1.3.13 αν η \mathcal{S} αποτελεί πυκνή τριγωνισμένη υποκατηγορία της \mathcal{T} , η \mathcal{T} έχει μικρά Hom σύνολα και υπάρχει Bousfield localisation συναρτητής για το ζεύγος $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, τότε το Verdier πηλίκο \mathcal{T}/\mathcal{S} θα έχει μικρά Hom σύνολα.

Ορισμός 1.3.15. Έστω \mathcal{T} τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathfrak{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{C})$ ένα διατεταγμένο ζεύγος τριγωνισμένων υποκατηγοριών της \mathcal{T} . Καλούμε το ζεύγος \mathfrak{G} bousfield localizing ζεύγος εάν πληρούνται τα ακόλουθα:

- $\mathcal{D}^\perp = \mathcal{C}$
- $\mathcal{D} = {}^\perp\mathcal{C}$
- Για κάθε $t \in \mathcal{T}$ υπάρχει τρίγωνο της μορφής

$$d \longrightarrow t \longrightarrow c \longrightarrow \Sigma d,$$

όπου $d \in \mathcal{D}$ και $c \in \mathcal{C}$.

Πρόταση 1.3.16. Έστω \mathcal{D} πυκνή τριγωνισμένη υποκατηγορία της \mathcal{T} . Το ζεύγος $(\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp)$ αποτελεί Bousfield localizing ζεύγος αν και μόνο αν για κάθε $t \in \mathcal{T}$ υπάρχει τρίγωνο της μορφής

$$d \longrightarrow t \longrightarrow c \longrightarrow \Sigma d,$$

όπου $d \in \mathcal{D}$ και $c \in \mathcal{D}^\perp$.

Απόδειξη. Πράγματι, από το Πρόσμμα 1.3.12 έχουμε ότι ${}^{\perp}(\mathcal{D}^{\perp}) = \mathcal{D}$ το οποίο ήταν το ζητούμενο. \square

Κεφάλαιο 2

K-Absolutely pure συμπλέγματα

2.1 Βασικές Ιδιότητες

Σε αυτήν την υποπαράγραφο ορίζουμε τα K-Absolutely pure συμπλέγματα και μελετάμε τις βασικές τους ιδιότητες. Θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα το γεγονός ότι τα ζεύγη:

- $(\mathbf{K}\text{-Proj}, \mathbf{K}_{ac}(R))$ ([21])
- $(\mathbf{K}_{ac}(R), \mathbf{K}\text{-Inj})$ ([21])
- $(\mathbf{K}(\text{Pproj}), \mathbf{K}_{pac}(R))$ ([22])
- $(\mathbf{K}_{pac}(R), \mathbf{K}(\text{Pinj}))$ ([22])

αποτελούν Bousfield localizing ζεύγη.

Ορισμός 2.1.1 (K-Absolutely pure complex). Θα λέμε ότι ένα σύμπλεγμα R -προτύπων, X , είναι *K-Absolutely pure* εάν κάθε αλυσωτή απεικόνιση, $Y \rightarrow X$, όπου το Y είναι ένα ακυκλικό σύμπλεγμα που αποτελείται από *pure*-προβολικά πρότυπα είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με την μηδενική απεικόνιση. Συμβολίζουμε με $K\text{-abspure}$ την κλάση όλων των *K-absolutely pure* συμπλεγμάτων, δηλαδή έχουμε ότι η κλάση $K\text{-abspure} = K_{ac}(PProj)^\perp$ είναι δεξιά ορθογώνια της κλάσης $K_{ac}(PProj)$ όλων των ακυκλικών συμπλεγμάτων που αποτελούνται από *pure*-προβολικά πρότυπα. Ισοδύναμα, το X είναι *K-Absolutely pure* εάν το Hom σύμπλεγμα $\text{Hom}_R(Y, X)$ είναι ακυκλικό για κάθε $Y \in K_{ac}(PProj)$.

Πρόταση 2.1.2. Η κλάση $K\text{-abspure}$ αποτελεί πυκνή τριγωνισμένη υποκατηγορία της ομοτοπικής κατηγορίας.

Απόδειξη. Πράγματι, αφού κάθε ορθογώνια κλάση αποτελεί πυκνή τριγωνισμένη υποκατηγορία. \square

Είναι γνωστό ότι (cf.[22]) η κλάση $K_{pac}(R)$ των pure ακυκλικών συμπλεγμάτων ισούται με τη δεξιά ορθογώνια κλάση $K(PProj)^\perp$ της κατηγορίας $K(PProj)$ των pure-προβολικών προτύπων. Επομένως, είναι άμεσο ότι $K_{pac}(R) \subset K\text{-abspure}$. Στο [8] έχει αποδειχθεί ότι τα pure ακυκλικά συμπλέγματα είναι ακριβώς τα ακυκλικά \mathbf{K} -επίπεδα συμπλέγματα, στο επόμενο λήμμα δίνουμε έναν ανάλογο χαρακτηρισμό των pure ακυκλικών συμπλεγμάτων, αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας \mathbf{K} -absolutely pure συμπλέγματα.

Λήμμα 2.1.3. Ένα σύμπλεγμα X είναι pure ακυκλικό αν και μόνο αν είναι ακυκλικό και K -absolutely pure. Δηλαδή, έχουμε την ισότητα $K_{pac}(R) = K_{ac}(R) \cap K\text{-abspure}$.

Απόδειξη. Αρχικά, κάθε pure ακυκλικό σύμπλεγμα είναι ακυκλικό και K -absolutely pure. Με σκοπό να δείξουμε τη σχέση υποσυνόλου που απομένει, θεωρούμε ένα ακυκλικό K -absolutely pure σύμπλεγμα X . Μέσω του Bousfield localizing ζεύγους $(\mathbf{K}(PProj), \mathbf{K}_{pac}(R))$ εξασφαλίζεται η ύπαρξη του παρακάτω τριγώνου της $\mathbf{K}(R)$

$$Y \xrightarrow{a} X \longrightarrow Z \longrightarrow SY,$$

όπου το Y είναι ένα σύμπλεγμα pure-προβολικών προτύπων και το Z είναι pure ακυκλικό. Αφού τα X, Z είναι ακυκλικά, έχουμε ότι και το Y είναι ακυκλικό, δηλαδή $Y \in \mathbf{K}_{ac}(PProj)$. Επομένως ο μορφισμός a είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον μηδενικό μορφισμό, και άρα το παραπάνω τρίγωνο διασπάται. Δηλαδή το Z είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με το $X \oplus SY$. Συμπεραίνουμε ότι $X \oplus SY \in \mathbf{K}_{pac}(R)$ το οποίο σημαίνει και ότι $X \in \mathbf{K}_{pac}(R)$. \square

Πρόταση 2.1.4. Ένα σύμπλεγμα X το οποίο αποτελείται από pure-εμφυτευτικά πρότυπα είναι K -absolutely pure εάν και μόνο εάν είναι K -εμφυτευτικό.

Απόδειξη. Εξ ορισμού τα K -εμφυτευτικά συμπλέγματα είναι δεξιά ορθογώνια σε όλα τα ακυκλικά συμπλέγματα, ιδιαίτερος έχουμε ότι $\mathbf{K}\text{-inj} \subseteq \mathbf{K}\text{-abspure}$. Για να δείξουμε την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το X είναι K -absolutely pure σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων. Μέσω του Bousfield localizing pair $(\mathbf{K}_{ac}(R), \mathbf{K}\text{-inj})$ εξασφαλίζεται η ύπαρξη του παρακάτω τριγώνου της $\mathbf{K}(R)$

$$Y \xrightarrow{a} X \longrightarrow Z \longrightarrow SY,$$

όπου το Y είναι ακυκλικό και το Z είναι K -εμφυτευτικό. Επειδή ισχύει η σχέση υποσυνόλου $\mathbf{K}\text{-inj} \subseteq \mathbf{K}\text{-abspure}$ το Z είναι K -absolutely pure. Χρησιμοποιώντας την 2-από-τα-3 ιδιότητα συμπεραίνουμε ότι το Y είναι K -absolutely pure. Το Λήμμα 2.1.3 μας πληροφορεί ότι το Y είναι pure ακυκλικό. Τελικά, αφού $X \in \mathbf{K}(P\text{Inj})$, ο μορφισμός a είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τη μηδενική απεικόνιση, δηλαδή το K -εμφυτευτικό σύμπλεγμα Z είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με το $X \oplus SY$, το οποίο σημαίνει ότι $X \oplus SY \in \mathbf{K}\text{-inj}$. Άρα το X είναι K -εμφυτευτικό ως ευθύς προσθετός K -εμφυτευτικού. \square

Θεώρημα 2.1.5. Το ζεύγος $(K_{ac}(PProj), K\text{-abspure})$ αποτελεί Bousfield localizing ζεύγος.

Απόδειξη. Αφού το ευθύ άθροισμα μια οικογένειας ακυκλικών συμπλεγμάτων pure-προβολικών προτύπων είναι ένα ακυκλικό σύμπλεγμα pure-προβολικών προτύπων, έχουμε ότι η τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathbf{K}_{ac}(\text{PProj})$ της ομοτοπικής κατηγορίας $\mathbf{K}(R)$ είναι πυκνή (thick) [Βλέπε [19], Remark 3.2.7]. Εξ ορισμού έχουμε ότι $\mathbf{K}\text{-abspure} = \mathbf{K}_{ac}(\text{PProj})^\perp$, επομένως απομένει να δείξουμε την ύπαρξη των τριγώνων προσέγγισης (Πρόταση 1.3.16).

Σταθεροποιούμε ένα σύμπλεγμα X και μέσω του Bousfield localizing ζεύγους $(\mathbf{K}_{ac}(R), \mathbf{K}\text{-inj})$ και θεωρούμε το εξής τρίγωνο της $\mathbf{K}(R)$:

$$C \xrightarrow{g} X \longrightarrow I \longrightarrow SC,$$

όπου το C είναι ένα ακυκλικό σύμπλεγμα και το I είναι ένα \mathbf{K} -εμφυτευτικό σύμπλεγμα. Μέσω του Bousfield localizing pair $(\mathbf{K}(\text{PProj}), \mathbf{K}_{pac}(R))$ έχουμε το ακόλουθο τρίγωνο της $\mathbf{K}(R)$:

$$Y \xrightarrow{f} C \longrightarrow Z \longrightarrow SY,$$

όπου το Y είναι ένα σύμπλεγμα pure-προβολικών προτύπων και το Z είναι pure ακυκλικό. Αφού τα C και Z είναι ακυκλικά συμπλέγματα, συμπεραίνουμε ότι το σύμπλεγμα Y είναι επίσης ακυκλικό, δηλαδή $Y \in \mathbf{K}_{ac}(\text{PProj})$. Τελικά επεκτείνουμε τη σύνθεση $gf : Y \longrightarrow X$ σε τρίγωνο

$$Y \xrightarrow{gf} X \longrightarrow W \longrightarrow SY \tag{2.1}$$

ώστε να εφαρμόσουμε το οκταεδρικό αξίωμα **(TR4)** για το ζεύγος μορφισμών (f, g) .

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{f} & C & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & SY \\ \downarrow 1_X & & \downarrow g & & & & \downarrow 1_X \\ Y & \xrightarrow{gf} & X & \longrightarrow & W & \longrightarrow & SY \\ & & \downarrow & & & & \downarrow 0 \\ & & I & \xrightarrow{1_I} & I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & SC & \longrightarrow & SZ & & \end{array}$$

Έτσι, καταφέραμε να κατασκευάσουμε το παρακάτω διακεκριμένο τρίγωνο της $\mathbf{K}(R)$:

$$Z \longrightarrow W \longrightarrow I \longrightarrow SZ.$$

Αφού, τα Z και I είναι \mathbf{K} -absolutely pure συμπλέγματα έχουμε ότι και το W είναι \mathbf{K} -absolutely pure. Δηλαδή, το τρίγωνο (3.1) είναι ένα τρίγωνο προσέγγισης του συμπλέγματος X . \square

Συνοψίζουμε στο επόμενο πόρισμα τις συνέπειες του προηγούμενο θεωρήματος οι οποίες απορρέουν από τη θεωρία των Bousfield localizing ζευγών (Δες [19, Chapter 9] ή το πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας.).

Πόρισμα 2.1.6. 1. Η αριστερή ορθογώνια κλάση ${}^\perp K\text{-abspure}$ των $K\text{-abspure}$ συμπλεγμάτων συμπίπτει με την κλάση $\mathbf{K}_{ac}(\text{PProj})$.

2. Η ένθεση K -abspure $\hookrightarrow K(R)$ επιδέχεται αριστερό προσαρτημένο συναρτητή και η ένθεση $K_{ac}(PProj) \hookrightarrow K(R)$ επιδέχεται δεξιό προσαρτημένο συναρτητή.
3. Έστω $\lambda : K(R) \rightarrow K$ -abspure ο αριστερός προσαρτημένος συναρτητής της ένθεσης K -abspure $\hookrightarrow K(R)$. Τότε, για κάθε σύμπλεγμα X το unit της προσάρτησης $X \rightarrow \lambda X$ είναι ένα K -abspure preenvelope του X .
4. Έστω $K(R)/K$ -abspure το Verdier πηλίκο. Τότε ο συναρτητής πηλίκο $\pi : K(R) \rightarrow K(R)/K$ -abspure επιδέχεται αριστερό προσαρτημένο συναρτητή και η σύνθεση $K_{ac}(PProj) \hookrightarrow K(R) \rightarrow K(R)/K$ -abspure αποτελεί ισοδυναμία κατηγοριών. Ιδιαίτερος, το πηλίκο $K(R)/K$ -abspure έχει μικρά Hom-σύνολα.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το Verdier πηλίκο $\mathbf{K}(R)/\mathbf{K}$ -abspure είναι η κατηγορία $\mathbf{K}_{ac}(PProj)$. Πράγματι, η παραπάνω ταύτιση γίνεται μέσω της σύνθεσης $\mathbf{K}_{ac}(PProj) \hookrightarrow \mathbf{K}(R) \xrightarrow{\pi} \mathbf{K}(R)/\mathbf{K}$ -abspure. Με αυτή τη θεώρηση βλέπουμε ότι ο αριστερός προσαρτημένος συναρτητής του συναρτητή πηλίκο π είναι απλά ο συναρτητής ένθεσης $\mathbf{K}_{ac}(PProj) \hookrightarrow \mathbf{K}(R)$ και ότι, ο δεξιό προσαρτημένος συναρτητής της προηγούμενης ένθεσης είναι ο συναρτητής πηλίκο π .

Μπορούμε επιπλέον να παραστήσουμε διαγραμματικά την πρώτη απόφαση του προηγούμενου πορίσματος με τα παρακάτω διαγράμματα των τριγωνισμένων υποκατηγοριών της ομοτοπικής κατηγορίας $\mathbf{K}(R)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{ac}(PProj) & \longrightarrow & \mathbf{K}_{ac}(R) & & \mathbf{K}\text{-abspure} & \longleftarrow & \mathbf{K}\text{-inj} \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{K}(PProj) & & \mathbf{K}_{pac}(R) & & \end{array}$$

Όλα τα βέλη είναι ενθέσεις και το αριστερό (δεξιό) διάγραμμα λαμβάνεται από το δεξιό (αριστερό) διάγραμμα εφαρμόζοντας αριστερά (δεξιά) Hom-ορθογώνιων υποκατηγοριών. Είναι προφανές ότι η $\mathbf{K}_{ac}(PProj) = \mathbf{K}_{ac}(R) \cap \mathbf{K}(PProj)$ είναι η μεγαλύτερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της ομοτοπικής κατηγορίας, η οποία περιέχεται στις $\mathbf{K}_{ac}(R)$ και $\mathbf{K}(PProj)$. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύεται η ανάλογη ιδιότητα για την \mathbf{K} -abspure, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως εναλλακτικός ορισμός της εν λόγω κλάσης. Επιπλέον, η επόμενη πρόταση μπορεί να θεωρηθεί δυϊκή του αντίστοιχου αποτελέσματος για τα K -flat συμπλέγματα, ότι δηλαδή η κατηγορία των K -Flat είναι η μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathbf{K}(R)$, η οποία περιέχει όλα τα pure ακυκλικά και όλα τα K -προβολικά συμπλέγματα cf. [[10], Proposition 3.6].

Πρόταση 2.1.7. Η \mathbf{K} -abspure είναι η μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathbf{K}(R)$, η οποία περιέχει τις κλάσεις $\mathbf{K}_{pac}(R)$ και $\mathbf{K}\text{-inj}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{K}(R)$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της ομοτοπικής κατηγορίας, η οποία περιέχει τις $\mathbf{K}_{pac}(R)$ και $\mathbf{K}\text{-inj}$, θεωρούμε επιπλέον ένα K -absolutely pure σύμπλεγμα X . Τότε, αφού το ζεύγος $(\mathbf{K}_{pac}(R), \mathbf{K}(PInj))$ αποτελεί Bousfield localizing ζεύγος, έχουμε το εξής διακεκριμένο τρίγωνο της $\mathbf{K}(R)$

$$Y \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow SY,$$

όπου το Y είναι pure ακυκλικό και το Z είναι ένα σύμπλεγμα το οποίο αποτελείται από pure-εμφυτευτικά πρότυπα. Αφού $\mathbf{K}_{pac}(R) \subseteq \mathbf{T}$, έχουμε ότι $Y \in \mathbf{T}$. Επιπροσθέτως, επειδή τα pure ακυκλικά συμπλέγματα είναι K-absolutely pure, συμπεραίνουμε ότι τα Y, X είναι K-absolutely pure· δηλαδή, το Z είναι K-absolutely pure. Μέσω της Πρότασης 2.1.4 έχουμε ότι το Z είναι K-εμφυτευτικό. Αφού, $\mathbf{K-inj} \subseteq \mathbf{T}$, συμπεραίνουμε ότι $Z \in \mathbf{T}$. Άρα, από το προηγούμενο διακεκριμένο τρίγωνο, έχουμε επιπλέον ότι $X \in \mathbf{T}$ το οποίο σημαίνει ότι $\mathbf{K-abspure} \subseteq \mathbf{T}$. \square

Στο σημείο αυτό υπενθυμίζουμε ότι ο Pontryagin συναρτητής δυϊκότητας $DM = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ στέλνει κάθε αριστερό (δεξιό) πρότυπο M στο δεξιό (αριστερό) πρότυπο DM και ότι μπορεί να επεκταθεί φυσιολογικά στην κατηγορία των συμπλεγμάτων.

Μέσω του συναρτητή D μπορούμε να διερευνήσουμε ακόμα περισσότερο τη δυϊκότητα μεταξύ των K-absolutely pure και K-επίπεδων συμπλεγμάτων:

Πρόταση 2.1.8. *Έστω X ένα σύμπλεγμα δεξιών προτύπων. Τότε, το X είναι K-επίπεδο αν και μόνο αν το Pontryagin δυϊκό σύμπλεγμα DX είναι K-absolutely pure.*

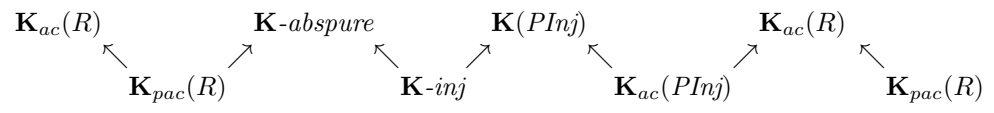
Απόδειξη. Επειδή η αβελιανή ομάδα \mathbb{Q}/\mathbb{Z} αποτελεί injective cogenerator της κατηγορίας των αβελιανών ομάδων έχουμε μέσω της Hom-tensor προσάρτησης ότι για κάθε σύμπλεγμα Y ο μηδενισμός της ομολογίας του $X \otimes_R Y$ σε κάθε βαθμό είναι ισοδύναμος με τον μηδενισμό της ομολογίας του $\text{Hom}_R(Y, DX)$ σε κάθε βαθμό. Δηλαδή το $X \otimes_R Y$ είναι ακυκλικό αν και μόνο αν το $\text{Hom}_R(Y, DX)$ είναι ακυκλικό.

Αν υποθέσουμε ότι το X είναι K-επίπεδο, τότε έχουμε ότι το $X \otimes_R Y$ (επομένως και το $\text{Hom}_R(Y, DX)$) είναι ακυκλικό για κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα Y . Άρα το DX είναι δεξιά ορθογώνιο σε κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα. Ιδιαίτερος, το DX είναι δεξιά ορθογώνιο σε κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα pure-προβολικών προτύπων, δηλαδή $DX \in \mathbf{K-abspure}$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το DX είναι K-absolutely pure. Τότε, με το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο συμπεραίνουμε ότι το $X \otimes_R Y$ είναι ακυκλικό για κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα pure-προβολικών προτύπων Y . Τελικά, μέσω της Πρότασης 2.6 του [9] έπεται ότι το X είναι K-επίπεδο. \square

Πρόταση 2.1.9. *Ισχύουν τα εξής:*

1. Οι κατηγορίες της δεύτερης γραμμής του παρακάτω διαγράμματος είναι οι τομές των κατηγοριών που βρίσκονται ακριβώς από πάνω τους.
2. Οι κατηγορίες της πρώτης γραμμής του διαγράμματος είναι οι μικρότερες τριγωνισμένες υποκατηγορίες της ομοτοπικής κατηγορίας που περιέχουν τις δύο υποκατηγορίες που είναι ακριβώς από κάτω τους.



2.2 K-absolutely pure συμπλέγματα και η pure derived κατηγορία

Σε αυτή τη παράγραφο, θα μελετήσουμε την κλάση των \mathbf{K} -abspure συμπλεγμάτων ως υποκατηγορία της pure derived κατηγορίας $\mathbf{D}_{pure}(R) = \mathbf{K}(R)/\mathbf{K}_{pac}(R)$ του δακτυλίου R . Συμβαίνει ότι η \mathbf{K} -abspure είναι η κλειστότητα της \mathbf{K} -inj ως προς ισομορφισμούς στην $\mathbf{D}_{pure}(R)$. Επιπλέον θα μελετήσουμε K -absolutely επιλύσεις στην $\mathbf{D}_{pure}(R)$.

Θεωρούμε το Bousfield localizing ζεύγος $(\mathbf{K}_{pac}(R), \mathbf{K}(PInj))$ του Stovicek στην $\mathbf{K}(R)$ και τον αριστερό προσαρτημένο συναρτητή ι_λ της ένθεσης $\iota : \mathbf{K}(PInj) \hookrightarrow \mathbf{K}(R)$, σημειώνουμε ότι ο πυρήνας του ι_λ είναι ακριβώς η κλάση των pure ακυκλικών συμπλεγμάτων.

Λήμμα 2.2.1. Για κάθε σύμπλεγμα X το *unit* της προσάρτησης $X \rightarrow \iota_\lambda X$ αποτελεί *quasi*-ισομορφισμό ο οποίος επιπλέον αποτελεί ισομορφισμό της $\mathbf{D}_{pure}(R)$. Απόδειξη. Καθώς ο μορφισμός $a : X \rightarrow \iota_\lambda X$ επάγει τρίγωνο της $\mathbf{K}(R)$

$$Z \rightarrow X \xrightarrow{a} \iota_\lambda X \rightarrow SZ,$$

με κώνο Z ένα pure ακυκλικό (ιδιαιτέρως ακυκλικό) σύμπλεγμα, έχουμε ότι ο a είναι *quasi*-ισομορφισμός. Επιπλέον, αφού το σύμπλεγμα Z είναι pure ακυκλικό είναι άμεσο ότι ο a αποτελεί ισομορφισμό της $\mathbf{D}_{pure}(R)$. \square

Πόρισμα 2.2.2. Ο συναρτητής $\iota_\lambda : \mathbf{K}(R) \rightarrow \mathbf{K}(PInj)$ διατηρεί τα ακυκλικά συμπλέγματα, δηλαδή αν το X είναι ακυκλικό τότε και το $\iota_\lambda X$ είναι ακυκλικό. \square

Πρόταση 2.2.3. Ένα σύμπλεγμα X pure-εμφυτευτικών προτύπων είναι K -εμφυτευτικό αν και μόνο αν η αβελιανή ομάδα $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(Y, X)$ είναι τετριμμένη για κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων Y .

Proof. Ένα K -εμφυτευτικό σύμπλεγμα (pure-εμφυτευτικών προτύπων) είναι δεξιά ορθογώνιο σε κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα, ιδιαιτέρως είναι δεξιά ορθογώνιο σε κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το X είναι ένα σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων και ότι $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(Y, X) = 0$ για κάθε σύμπλεγμα Y pure-εμφυτευτικών προτύπων. Έστω $C \in \mathbf{K}_{ac}(R)$. Αφού το X ανήκει στη $\mathbf{K}(PInj)$, έχουμε ότι το *unit* της προσάρτησης $C \rightarrow \iota_\lambda C$ επάγει ισομορφισμό αβελιανών ομάδων:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\iota_\lambda C, X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(C, X).$$

Από το προηγούμενο πόρισμα, γνωρίζουμε ότι το $\iota_\lambda C$ είναι ένα ακυκλικό σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων, επομένως η ομάδα $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\iota_\lambda C, X)$ είναι τετριμμένη. Τελικά, συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(C, X) = 0$, το οποίο ήταν το ζητούμενο. \square

Το επόμενο Λήμμα δείχνει ότι η κλάση των K -absolutely pure συμπλεγμάτων είναι κλειστή ως προς ισομορφισμό στην pure derived κατηγορία.

Λήμμα 2.2.4. Έστω X, Y δυο συμπλέγματα, τα οποία είναι ισόμορφα στην pure derived κατηγορία $\mathbf{D}_{pure}(R)$ του δακτυλίου R . Τότε, το X είναι K-absolutely pure αν και μόνο αν το Y is K-absolutely pure.

Απόδειξη. Ένας ισομορφισμός της $\mathbf{D}_{pure}(R) = \mathbf{K}(R)/\mathbf{K}_{pac}(R)$ μεταξύ των X και Y είναι ένα διάγραμμα της ομοτοπικής κατηγορίας της μορφής: $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$, όπου οι κώνοι των f και g είναι pure ακυκλικά συμπλέγματα. Δηλαδή, υπάρχουν τα παρακάτω διακεκριμένα τρίγωνα:

$$Z \xrightarrow{f} X \longrightarrow W \longrightarrow SZ \quad \text{and} \quad Z \xrightarrow{g} Y \longrightarrow W' \longrightarrow SZ$$

της ομοτοπικής κατηγορίας $\mathbf{K}(R)$ του δακτυλίου, όπου $W, W' \in \mathbf{K}_{pac}(R)$. Αφού κάθε σύμπλεγμα της $\mathbf{K}_{pac}(R)$ είναι K-absolutely pure και επειδή η κλάση $\mathbf{K}\text{-abspure}$ αποτελεί τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathbf{K}(R)$, έχουμε ότι το X είναι K-absolutely pure αν και μόνο αν το Z είναι K-absolutely pure αν και μόνο αν το Y είναι K-absolutely pure. \square

Το Λήμμα 2.2.1 μας πληροφορεί ότι κάθε σύμπλεγμα X της pure derived κατηγορίας είναι ισόμορφο με ένα σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων ${}_{\lambda}X$. Μπορούμε να γενικεύσουμε το παραπάνω συμπέρασμα υιοθετώντας μια διαφορετική οπτική. Δηλαδή, αν συμβολίσουμε με $p : \mathbf{K}(R) \longrightarrow \mathbf{K}(R)/\mathbf{K}_{pac}(R) = \mathbf{D}_{pure}(R)$ τον συναρτητή πηλίκο, τότε η σύνθεση

$$\mathbf{K}(\text{PInj}) \xrightarrow{\iota} \mathbf{K}(R) \xrightarrow{p} \mathbf{D}_{pure}(R) \quad (2.2)$$

αποτελεί ισοδυναμία κατηγοριών, όπου ο ψευδο-αντίστροφος συναρτητής επάγεται (μέσω του συναρτητή πηλίκο) από τον αριστερό προσαρτημένο συναρτητή: ${}_{\lambda} : \mathbf{K}(R) \longrightarrow \mathbf{K}(\text{PInj})$. Έχουμε, δηλαδή, ταυτίσει τις $\mathbf{K}(\text{PInj})$ και $\mathbf{D}_{pure}(R)$. Επιπλέον, αφού οι συναρτητές ι και ${}_{\lambda}$ διατηρούν την ακυκλικότητα των συμπλεγμάτων (Πόρισμα 2.2.2), μπορούμε να ταυτίσουμε τα ακυκλικά συμπλέγματα $\mathbf{K}_{ac}(\text{PInj})$ της $\mathbf{K}(\text{PInj})$ με τα ακυκλικά συμπλέγματα $p\mathbf{K}_{ac}(R)$ της $\mathbf{D}_{pure}(R)$.

Θα συμβολίζουμε με $\text{Hom}_{\mathbf{D}_{pure}}(-, -)$ τις Hom-κλάσεις της pure derived κατηγορίας $\mathbf{D}_{pure}(R)$. Επειδή η σύνθεση $p\iota : \mathbf{K}(\text{PInj}) \longrightarrow \mathbf{D}_{pure}(R)$ αποτελεί ισοδυναμία κατηγοριών, για οποιαδήποτε δύο συμπλέγματα X, Y pure-εμφυτευτικών προτύπων, έχουμε τον εξής ισομορφισμό αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}_{pure}}(X, Y)$.

Θεώρημα 2.2.5. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για ένα σύμπλεγμα X :

- (i) Το X είναι K-absolutely pure,
- (ii) το X είναι ισόμορφο στη $\mathbf{D}_{pure}(R)$ με ένα K-εμφυτευτικό σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων,
- (iii) το X είναι ισόμορφο στη $\mathbf{D}_{pure}(R)$ με ένα K-εμφυτευτικό σύμπλεγμα,
- (iv) ισχύει ότι $\text{Hom}_{\mathbf{D}_{pure}}(C, X) = 0$ για κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα C και
- (v) το σύμπλεγμα ${}_{\lambda}X$ είναι K-εμφυτευτικό.

Proof. Θα αποδείξουμε ότι (i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) \rightarrow (i) και ότι (ii) \rightarrow (iv) \rightarrow (v) \rightarrow (ii). Είναι προφανές ότι (ii) \rightarrow (iii), ενώ η συνεπαγωγή (v) \rightarrow (ii) έπεται από το Λήμμα 2.2.1.

(i)→(ii): Θεωρούμε έναν quasi-ισομορφισμό $f : X \rightarrow I$, όπου το I είναι K -εμφυτευτικό σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων. Επειδή κάθε K -εμφυτευτικό είναι K -absolutely pure έχουμε ότι ο κώνος $c(f)$ του f είναι ένα ακυκλικό K -absolutely pure σύμπλεγμα, το οποίο σημαίνει ακριβώς ότι ο κώνος $c(f)$ αποτελεί ένα pure ακυκλικό σύμπλεγμα. Τελικά, το τρίγωνο

$$X \rightarrow I \rightarrow c(f) \rightarrow SX$$

της $\mathbf{K}(R)$ μας πληροφορεί ότι ο f επάγει ισομορφισμό στην $\mathbf{D}_{\text{pure}}(R)$.

(iii)→(i): Άμεσο από το Λήμμα 2.2.4

(ii)→(iv): Έστω ότι το X είναι ισόμορφο στην $\mathbf{D}_{\text{pure}}(R)$ με ένα K -εμφυτευτικό σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων Y και ότι το C είναι ένα ακυκλικό σύμπλεγμα. Θα δείξουμε ότι η κλάση $\text{Hom}_{\mathbf{D}_{\text{pure}}}(C, X) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}_{\text{pure}}}(C, Y)$ είναι τετριμμένη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι το C είναι ένα ακυκλικό σύμπλεγμα αποτελούμενο από pure-εμφυτευτικά πρότυπα. Πράγματι, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το C με το $i_\lambda C$ (Λήμμα 2.2.1 και Πρόσχημα 2.2.2). Πλέον, το ζητούμενο έπεται εύκολα καθώς ισχύει ότι $\text{Hom}_{\mathbf{D}_{\text{pure}}}(C, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{K}}(C, Y)$ και ότι η $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(C, Y)$ είναι τετριμμένη, αφού το Y είναι K -εμφυτευτικό και το C είναι ακυκλικό.

(iv)→(v): Έστω ότι $\text{Hom}_{\mathbf{D}_{\text{pure}}}(C, X) = 0$ για κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα. Επειδή το X είναι $\mathbf{D}_{\text{pure}}(R)$ -ισόμορφο με το $i_\lambda X$, συμπεραίνουμε ότι $\text{Hom}_{\mathbf{D}_{\text{pure}}}(C, i_\lambda X) = 0$ για κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα C . Ιδιαίτερω, για κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων C έχουμε ότι $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(C, i_\lambda X) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}_{\text{pure}}}(C, i_\lambda X) = 0$. Τελικά, από την Πρόταση 2.2.3 συμπεραίνουμε ότι το $i_\lambda X$ είναι K -εμφυτευτικό. \square

Είναι γνωστό ότι κάθε σύμπλεγμα X επιδέχεται έναν quasi-ισομορφισμό $i : X \rightarrow I$, όπου το I είναι K -εμφυτευτικό σύμπλεγμα (pure-)εμφυτευτικών προτύπων. Μπορούμε να εκφράσουμε ισοδύναμα το παραπάνω γεγονός λέγοντας ότι κάθε σύμπλεγμα X επιδέχεται έναν quasi-ισομορφισμό $i : X \rightarrow I$, όπου το I είναι K -absolutely pure σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων (Πρόταση 2.1.4). Στα παρακάτω αναλύουμε περισσότερο τις K -absolutely pure επιλύσεις.

Παρατήρηση 2.2.6. (i) Έστω I ένα K -εμφυτευτικό σύμπλεγμα και $f : X \rightarrow Y$ ένας quasi-ισομορφισμός, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός $f^* : \text{Hom}_{\mathbf{K}}(Y, I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}}(X, I)$ αποτελεί ισομορφισμό. Για κάθε σύμπλεγμα X υπάρχει μοναδικός, ως προς ομοτοπική ισοδυναμία, quasi-ισομορφισμός $X \rightarrow I$ από το X προς ένα K -εμφυτευτικό σύμπλεγμα I . Επιπλέον η διαδικασία της κατασκευής της K -εμφυτευτικής επίλυσης ορίζει συναρτητή (στην $K(R)$). Θα μπορούσαμε, δηλαδή, μεταφράζοντας στα ελληνικά τη λέξη "functorial", να πούμε ότι η διαδικασία αντιστοίχισης ενός συμπλέγματος στην επίλυση του είναι συναρτητική ([21]).

(ii) Έστω X ένα σύμπλεγμα και $i : X \rightarrow I$ ένας quasi-ισομορφισμός, με το I να είναι ένα K -εμφυτευτικό σύμπλεγμα. Θεωρούμε επίσης, έναν quasi-ισομορφισμό $j : X \rightarrow J$, όπου το J είναι ένα K -absolutely pure σύμπλεγμα. Λόγω του (i) γνωρίζουμε ότι ο i μπορεί να παραγοντοποιηθεί στην $K(R)$ ως μια

σύνθεση $X \xrightarrow{j} J \xrightarrow{f} I$, για μια κατάλληλη αλυσωτή απεικόνιση f , μοναδική ως προς ομοτοπία. Αφού οι j και $fj \simeq i$ είναι quasi-ισομορφισμοί, συμπεραίνουμε ότι και η f αποτελεί quasi-ισομορφισμό. Επειδή, ο κώνος της f είναι ένα ακυκλικό K -absolutely pure σύμπλεγμα (και άρα pure ακυκλικό) έχουμε ότι η f επάγει ισομορφισμό στην $\mathbf{D}_{\text{pure}}(R)$. Συνεπώς, οι K -absolutely pure επιλύσεις είναι μοναδικές ως προς ισομορφισμό στην $\mathbf{D}_{\text{pure}}(R)$.

(iii) Έστω ο quasi-ισομορφισμός $f : X \rightarrow Y$ και οι εξής K -εμφυτευτικές επιλύσεις $i_X : X \rightarrow I_X$ and $i_Y : Y \rightarrow I_Y$. Τότε, υπάρχει μοναδική ως προς ομοτοπία αλυσωτή απεικόνιση $\phi : I_X \rightarrow I_Y$ η οποία κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_X \downarrow & & \downarrow i_Y \\ I_X & \xrightarrow{\phi} & I_Y \end{array}$$

Καθώς τα I_X, I_Y είναι K -εμφυτευτικά και ο ϕ είναι quasi-ισομορφισμός έχουμε ότι ο κώνος $c(\phi)$ είναι αναγκαστικά συμπτύξιμο σύμπλεγμα.

(iv) Έστω X, Y δύο συμπλέγματα, υπενθυμίζουμε ότι ένας μορφισμός $\xi : X \rightarrow Y$ μεταξύ των X, Y στην $\mathbf{D}_{\text{pure}}(R)$ είναι μια κλάση ισοδυναμίας διαγραμμάτων $X \leftarrow W \rightarrow Y$ της $\mathbf{K}(R)$. Θεωρούμε έναν αντιπρόσωπο $X \xleftarrow{f} W \xrightarrow{g} Y$, έτσι ώστε ο κώνος $c(f)$ της f να είναι pure ακυκλικό σύμπλεγμα. Θεωρούμε επιπλέον, τις εξής K -εμφυτευτικές επιλύσεις $i_X : X \rightarrow I_X, i_W : W \rightarrow I_W, i_Y : Y \rightarrow I_Y$. Από την παρατήρηση (i) γνωρίζουμε ότι υπάρχουν κατάλληλες ϕ και γ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & Y \\ i_X \downarrow & & i_W \downarrow & & i_Y \downarrow \\ I_X & \xleftarrow{\phi} & I_W & \xrightarrow{\gamma} & I_Y \end{array}$$

Από τη παρατήρηση (iii) και το γεγονός ότι η f είναι quasi-ισομορφισμός έχουμε ότι ο κώνος της ϕ αποτελεί συμπτύξιμο σύμπλεγμα (επομένως και pure ακυκλικό). Τελικά, η δεύτερη γραμμή του παραπάνω διαγράμματος, αποτελεί μορφισμό $\eta : I_X \rightarrow I_Y$ της $\mathbf{D}_{\text{pure}}(R)$ ο οποίος κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\xi} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_X & \xrightarrow{\eta} & I_Y \end{array}$$

Σημειώνουμε ότι ο μορφισμός $\eta \in \text{Hom}_{\mathbf{D}_{\text{pure}}}(I_X, I_Y)$ είναι μοναδικός. Πράγματι, καθώς τα I_X, I_Y περιέχονται στην $\mathbf{K}\text{-inj} \subseteq \mathbf{K}(\text{PInj}) = \mathbf{K}_{\text{pac}}(R)^\perp$ έχουμε ότι η κανονική απεικόνιση $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(I_X, I_Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}_{\text{pure}}}(I_X, I_Y)$ είναι ισομορφισμός, ενώ από το [19, Λήμμα 2.1.26] έχουμε ότι η $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(X, I_Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}_{\text{pure}}}(X, I_Y)$ είναι ένα-προς-ένα. Δηλαδή, δείξαμε ότι η διαδικασία αντιστοίχισης K -absolutely pure επιλύσης ορίζει συναρτητή στην $\mathbf{D}_{\text{pure}}(R)$.

2.3 Strongly fp-εμφυτευτικά πρότυπα

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα K-absolutely pure πρότυπα μέσω της κλάσης Sfpinj των strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων. Πιο συγκεκριμένα, θα δώσουμε παραδείγματα K-absolutely pure συμπλεγμάτων τα οποία δεν είναι K-εμφυτευτικά. Επιπλέον, θα περιγράψουμε την κλάση των (ακυκλικών) K-absolutely pure συμπλεγμάτων τα οποία αποτελούνται από strongly fp-εμφυτευτικά πρότυπα.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα πρότυπο M καλείται absolutely pure εάν αποτελεί pure υποπρότυπο σε κάθε πρότυπο στο οποίο περιέχεται. Ισοδύναμα, το M είναι absolutely pure αν και μόνο αν ισχύει ότι $\text{Ext}_R^1(C, M) = 0$ για κάθε πεπερασμένο παριστώμενο πρότυπο C . Είναι σαφές ότι η κλάση των absolutely pure προτύπων είναι κλειστή ως προς pure υποπρότυπα.

Υπενθυμίζουμε επιπλέον ότι ένα πρότυπο M είναι strongly fp-εμφυτευτικό αν και μόνο αν ισχύει ότι $\text{Ext}_R^n(C, M) = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και κάθε πεπερασμένο παριστώμενο πρότυπο C . Σημειώνουμε ότι κάθε εμφυτευτικό πρότυπο είναι strongly fp-εμφυτευτικό και ότι κάθε strongly fp-εμφυτευτικό είναι absolutely pure. Επομένως, ένα δεξιό πρότυπο N είναι επίπεδο αν και μόνο αν το Pontryagin δυϊκό πρότυπο DN είναι strongly fp-εμφυτευτικό. Οι κλάσεις των absolutely pure και strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων συμπίπτουν μόνο στην περίπτωση των (αριστερά) coherent δακτυλίων.

Λήμμα 2.3.1. *Το M είναι strongly fp-εμφυτευτικό αν και μόνο αν κάθε πυρήνας $(\Sigma^n M)_{n \geq 0}$ μιας εμφυτευτικής επίλυσης του M είναι absolutely pure.*

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι προφανές αφού ισχύει ότι $\text{Ext}_R^n(-, M) = \text{Ext}_R^1(-, \Sigma^{n-1}M)$ για κάθε $n \geq 1$. \square

Η επόμενη πρόταση δείχνει τη σημασία της κλάσης Sfpinj των strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων στη μελέτη των K-absolutely pure συμπλεγμάτων. Επιπλέον απαντάει στη φυσιολογική ερώτηση του πότε ένα πρότυπο αποτελεί K-absolutely pure σύμπλεγμα.

Πρόταση 2.3.2. *Ένα πρότυπο M είναι strongly fp-εμφυτευτικό αν και μόνο αν το σύμπλεγμα $M[0]$ (δηλαδή το σύμπλεγμα που αποτελείται από το M στον μηδενικό βαθμό και μηδενικά στους υπόλοιπους βαθμούς) είναι K-absolutely pure.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια εμφυτευτική επίλυση του M

$$\mathbf{X} = 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots$$

και το εξής υποσύμπλεγμα της παραπάνω επίλυσης

$$\mathbf{I} = 0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \dots$$

Η αλυσωτή απεικόνιση $\eta : M[0] \longrightarrow \mathbf{I}$ επάγει το παρακάτω διακεκριμένο τρίγωνο της $\mathbf{K}(R)$

$$S^{-1}\mathbf{I} \longrightarrow S^{-1}\mathbf{X} \longrightarrow M[0] \longrightarrow \mathbf{I}.$$

Αφού το \mathbf{I} είναι ένα αριστερά φραγμένο σύμπλεγμα εμφυτευτικών προτύπων, έχουμε ότι είναι K-εμφυτευτικό (και επομένως K-absolutely pure). Δηλαδή το $M[0]$ είναι K-absolutely pure αν και μόνο αν το \mathbf{X} είναι K-absolutely pure. Από το Λήμμα 2.1.3 γνωρίζουμε ότι το \mathbf{X} είναι K-absolutely pure αν και μόνο αν είναι pure ακυκλικό. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι το M είναι strongly fp-εμφυτευτικό αν και μόνο αν το \mathbf{X} είναι pure ακυκλικό.

Έστω ότι το M είναι strongly fp-εμφυτευτικό, τότε από το Λήμμα 2.3.1 οι πυρήνες $\Sigma^n M$ κάθε εμφυτευτικής επίλυσης του M είναι absolutely pure πρότυπα. Επομένως, οι βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow \Sigma^n M \longrightarrow I^n \longrightarrow \Sigma^{n+1} M \longrightarrow 0$$

είναι pure για κάθε $n \geq 0$ και επομένως το X είναι pure ακυκλικό. Αντιστρόφως, αν το X είναι pure ακυκλικό, τότε οι παραπάνω βραχείες ακριβείς ακολουθίες είναι pure exact. Δηλαδή το πρότυπο $\Sigma^n M$, αποτελεί pure υποπρότυπο του εμφυτευτικού I^n , και επομένως είναι absolutely pure. Τελικά, από το Λήμμα 2.3.1 συμπεραίνουμε ότι το M είναι absolutely pure. \square

Το επόμενο Λήμμα θα μας βοηθήσει να χαρακτηρίσουμε τα αριστερά φραγμένα συμπλέγματα strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων ως K-absolutely pure.

Λήμμα 2.3.3. Έστω X, Y δύο συμπλέγματα για τα οποία ισχύουν τα εξής:

(i) το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(X, Y_n)$ είναι ακυκλικό για κάθε n και

(ii) $\text{Hom}_R(X_n, Y_n) = 0$ για κάθε $n \gg 0$.

Τότε, κάθε αλυσωτή απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με τη μηδενική.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με ∂^X και ∂^Y τα διαφορικά των συμπλεγμάτων X και Y αντίστοιχα. Για κάθε αλυσωτή απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ κατασκευάζουμε γραμμικές απεικονίσεις $\Sigma_n : X_n \longrightarrow Y_{n+1}$, τέτοιες ώστε $f_n = \partial^Y \Sigma_n + \Sigma_{n-1} \partial^X$ για κάθε n . Ορίζουμε $\Sigma_n = 0$ για κάθε $n \gg 0$ και εφαρμόζουμε φθίνουσα επαγωγή στο n . Δηλαδή για τον ακέραιο n υποθέτουμε ότι η κατασκευή των Σ_i έχει ολοκληρωθεί για κάθε $i \geq n$. Τότε, η γραμμική απεικόνιση $f_n - \partial^Y \Sigma_n : X_n \longrightarrow Y_n$ είναι ένας n -κύκλος του συμπλέγματος $\text{Hom}_R(X, Y_n)$:

$$\begin{aligned} (f_n - \partial^Y \Sigma_n) \partial^X &= f_n \partial^X - \partial^Y \Sigma_n \partial^X \\ &= f_n \partial^X - \partial^Y (f_{n+1} - \partial^Y \Sigma_{n+1}) \\ &= f_n \partial^X - \partial^Y f_{n+1} + \partial^Y \partial^Y \Sigma_{n+1} \\ &= f_n \partial^X - \partial^Y f_{n+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Για να ολοκληρώσουμε το επαγωγικό βήμα χρησιμοποιούμε την πρώτη υπόθεση της εκφώνησης, η οποία εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας γραμμικής απεικόνισης $\Sigma_{n-1} : X_{n-1} \longrightarrow Y_n$, η οποία είναι τέτοια ώστε $f_n - \partial^Y \Sigma_n = \Sigma_{n-1} \partial^X$. \square

Πόρισμα 2.3.4. Κάθε αριστερά φραγμένο σύμπλεγμα strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων είναι K-absolutely pure.

Απόδειξη. Έστω X ένα αριστερά φραγμένο σύμπλεγμα strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων. Για να δείξουμε ότι είναι K-absolutely pure θα δείξουμε ότι κάθε αλυσωτή απεικόνιση $P \rightarrow X$, όπου το P είναι ακυκλικό σύμπλεγμα pure-προβολικών προτύπων είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με τη μηδενική απεικόνιση. Από την Πρόταση 2.3.2 έχουμε ότι το σύμπλεγμα $\text{Hom}_R(P, X_n)$ είναι ακυκλικό για κάθε n . Επιπλέον επειδή το X είναι αριστερά φραγμένο έχουμε ότι $\text{Hom}_R(P_n, X_n) = 0$ για κάθε $n \gg 0$. Τελικά, το ζητούμενο έπεται από το προηγούμενο Λήμμα. \square

Στη συνέχεια εξερευνούμε και περιγράφουμε την κλάση των K-absolutely pure συμπλεγμάτων που αποτελούνται από Strongly fp-εμφυτευτικά πρότυπα. Θα χρειαστούμε τις παρακάτω βασικές ιδιότητες της κλάσης των Strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων (βλέπε [18]):

- (i) Η κλάση των Strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων είναι κλειστή ως προς γινόμενα, επεκτάσεις, συνπυρήνες μονομορφισμών και πυρήνες pure επιμορφισμών.
- (ii) Υπάρχει ένα σύνολο προτύπων S το οποίο μπορεί να περιγράψει την κλάση Sfpinj ως το πυρήνα του συναρτητή $\bigoplus_{C \in S} \text{Ext}_R^1(C, -)$.¹

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι από τις Προτάσεις 1.1.23 και 1.1.35 (δείτε επιπλέον [18] Θεώρημα 3.4) έχουμε ότι το ζεύγος $(\mathcal{C}, \text{Sfpinj})$ ² αποτελεί complete hereditary cotorsion ζεύγος.³

Στο σημείο αυτό ορίζουμε όπως στο [13] τις παρακάτω κλάσεις συμπλεγμάτων

(a) Η κλάση $\tilde{\mathcal{C}}$ είναι κλάση των ακυκλικών συμπλεγμάτων που έχουν συζυγίες πρότυπα της \mathcal{C} .

(b) Η κλάση $\widetilde{\text{Sfpinj}}$ είναι κλάση των ακυκλικών συμπλεγμάτων των οποίων οι συζυγίες είναι Strongly fp-εμφυτευτικό πρότυπα.

(c) Η κλάση $dg \tilde{\mathcal{C}}$ αποτελείται από τα συμπλέγματα που έχουν πρότυπα στην κλάση \mathcal{C} , και επιπλέον είναι αριστερά ορθογώνια σε όλα τα συμπλέγματα της Sfpinj . Δηλαδή, $X = (X_n, d_n) \in dg \tilde{\mathcal{C}}$ αν και μόνο αν $X_n \in \mathcal{C}$ και κάθε αλυσωτή απεικόνιση $X \rightarrow Y$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με τη μηδενική απεικόνιση για κάθε $Y \in \widetilde{\text{Sfpinj}}$.

(d) Η κλάση $dg \widetilde{\text{Sfpinj}}$ αποτελείται από τα συμπλέγματα που έχουν strongly fp-εμφυτευτικά πρότυπα και είναι δεξιά ορθογώνια σε όλα τα σύμπλεγμα της $\tilde{\mathcal{C}}$. Από τα [13] και [24] έχουμε τα εξής αποτελέσματα

(i) Τα ζεύγη $(\tilde{\mathcal{C}}, dg \widetilde{\text{Sfpinj}})$ και $(dg \tilde{\mathcal{C}}, \widetilde{\text{Sfpinj}})$ αποτελούν complete cotorsion ζεύγη της κατηγορίας των αλυσωτών συμπλεγμάτων.

(ii) Ισχύει ότι $C_{ac}(R) \cap dg \tilde{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{C}}$ και $C_{ac}(R) \cap dg \widetilde{\text{Sfpinj}} = \widetilde{\text{Sfpinj}}$, όπου με $C_{ac}(R)$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των ακυκλικών αλυσωτών συμπλεγμάτων.

Λήμμα 2.3.5. (i) Ισχύει ότι $C_{ac}(R) \cap dg \widetilde{\text{Sfpinj}} = \widetilde{\text{Sfpinj}} = C_{pac}(R) \cap C(\text{Sfpinj})$.

(ii) Κάθε σύμπλεγμα pure-προβολικών προτύπων ανήκει στην $dg \tilde{\mathcal{C}}$.

¹Πρόταση 1.1.35

²Με \mathcal{C} συμβολίζουμε την αριστερή ορθογώνια κλάση της Sfpinj .

³Υπάρχει κάποιο σύνολο S το οποίο είναι τέτοιο ώστε κάθε πρότυπο της \mathcal{C} να γράφεται ως ευθής προσθετός ενός S -φιλτραρισμένου προτύπου (Πόρισμα 1.1.33 και Πρόταση 1.1.35).

(iii) Κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα pure-προβολικών προτύπων ανήκει στην $\tilde{\mathcal{C}}$.

Απόδειξη. (i) Η πρώτη ισότητα έπεται από το Θεώρημα 3.12 του [13]. Για να δείξουμε τη δεύτερη ισότητα θεωρούμε ένα ακυκλικό σύμπλεγμα X το οποίο έχει strongly fp-εμφυτευτικές συζυγίες και εξετάζουμε τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow Z_n X \longrightarrow X_n \longrightarrow Z_{n-1} X \longrightarrow 0$$

οι οποίες είναι pure για κάθε n , ισοδύναμα έχουμε ότι το X είναι pure ακυκλικό. Αρχικά, τα πρότυπα X_n είναι strongly fp-εμφυτευτικά επειδή η κλάση των strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις, δηλαδή έχουμε ότι $X \in C(\text{Sfpinj})$. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το X είναι pure ακυκλικό σύμπλεγμα strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων. Είναι γνωστό ότι κάθε pure υποπρότυπο ενός absolutely pure προτύπου είναι επίσης absolutely pure, άρα για κάθε n το πρότυπο $Z_n X$ είναι absolutely pure ως pure υποπρότυπο του strongly fp-εμφυτευτικού X_n . Τελικά, επειδή για κάθε πεπερασμένα παριστώμενο πρότυπο C και κάθε ζεύγος ακεραίων n, i με $i \geq 1$ ισχύει ότι $\text{Ext}_R^i(C, Z_n X) = \text{Ext}_R^1(C, Z_{n-i+1} X) = 0$, συμπεραίνουμε ότι όλες οι συζυγίες $Z_n X$ είναι strongly fp-εμφυτευτικά πρότυπα, δηλαδή συμπεραίνουμε ότι $X \in \widetilde{\text{Sfpinj}}$.

(ii) Σημειώνουμε ότι κάθε pure προβολικό P πρότυπο ανήκει στην κλάση \mathcal{C} . Πράγματι, για κάθε $S \in \text{Sfpinj}$ θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow I^S \longrightarrow I/S \longrightarrow 0$$

όπου I^S είναι η εμφυτευτική θήκη του S . Αφού το S είναι strongly fp-εμφυτευτικό η παραπάνω ακολουθία είναι pure και επομένως $\text{Hom}_R(P, -)$ -ακριβής, τελικά από τη μακρά ακριβή ακολουθία του συναρτητή Ext έχουμε ότι $\text{Ext}^1(P, S) = 0$, το οποίο σημαίνει ακριβώς ότι $P \in \mathcal{C}$. Επομένως, για να δείξουμε ότι κάθε σύμπλεγμα pure-προβολικών προτύπων X είναι $dg \tilde{\mathcal{C}}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(X, C) = 0$ για κάθε $C \in \widetilde{\text{Sfpinj}}$. Όμως από το (i) του Λήμματος, έχουμε ότι κάθε σύμπλεγμα της $\widetilde{\text{Sfpinj}}$ είναι pure ακυκλικό το οποίο σημαίνει ότι $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(X, C) = 0$.

(iii) Άμεσο από το (ii), αφού $C_{ac}(R) \cap dg \tilde{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{C}}$. □

Θεώρημα 2.3.6. Η κλάση $dg \widetilde{\text{Sfpinj}}$ αποτελείται από όλα τα K-absolutely pure συμπλέγματα strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων.

Proof. Έστω X ένα σύμπλεγμα της $dg \widetilde{\text{Sfpinj}}$. Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα pure-προβολικών προτύπων C ανήκει στη κλάση $\tilde{\mathcal{C}}$, δηλαδή έχουμε ότι $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(C, X) = 0$. Επομένως, το X είναι K-absolutely pure.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το X είναι ένα K-absolutely pure σύμπλεγμα strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων. Για να αποδείξουμε ότι το X ανήκει στην κλάση $dg \widetilde{\text{Sfpinj}}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(C, X) = 0$ για κάθε $C \in \tilde{\mathcal{C}}$. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε ένα σύμπλεγμα C της $\tilde{\mathcal{C}}$ και έναν quasi-ισομορφισμό $f : X \longrightarrow I$, όπου το I είναι ένα K-εμφυτευτικό σύμπλεγμα εμφυτευτικών προτύπων ([1, §1]). Αρχικά, σημειώνουμε ότι επειδή το C είναι ακυκλικό, έχουμε ότι

$\text{Hom}_{\mathbf{K}}(C, I) = 0$. Επιπλέον, θεωρούμε τον κώνο $c(f)$ της f και το παρακάτω διακεκριμένο τρίγωνο

$$S^{-1}c(f) \longrightarrow X \longrightarrow I \longrightarrow c(f)$$

της ομοτοπικής κατηγορίας. Για να δείξουμε ότι $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(C, X) = 0$ θα δείξουμε ότι $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(C, S^{-1}c(f)) = 0$. Αφού τα εμφυτευτικά πρότυπα είναι strongly fp-εμφυτευτικά, συμπεραίνουμε ότι ο κώνος $c(f)$ αποτελείται από strongly fp-εμφυτευτικά πρότυπα. Επιπλέον επειδή ισχύει ότι $\mathbf{K}\text{-Inj} \subset \mathbf{K}\text{-abspure}$ έχουμε ότι τα X και I είναι K-absolutely pure. Άρα, από το προηγούμενο διακεκριμένο τρίγωνο έχουμε ότι και ο κώνος $c(f)$ είναι επίσης K-absolutely pure. Επειδή η f είναι quasi-ισομορφισμός έχουμε ότι το σύμπλεγμα $c(f)$ είναι ακυκλικό. Από το Λήμμα 2.1.3 συμπεραίνουμε ότι το σύμπλεγμα $c(f)$ (επομένως και το $S^{-1}c(f)$) είναι pure ακυκλικό. Από το προηγούμενο Λήμμα έπεται ότι το $S^{-1}c(f)$ ανήκει στην $dg\widetilde{\text{Sfrij}}$. Τελικά, επειδή $C \in \widetilde{\mathcal{C}}$ έχουμε άμεσα ότι $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(C, S^{-1}c(f)) = 0$, το οποίο ήταν το ζητούμενο. \square

Πόρισμα 2.3.7. Τα συμπλέγματα της $\widetilde{\text{Sfrij}}$ είναι ακριβώς τα ακυκλικά K-absolutely pure συμπλέγματα strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων.

Απόδειξη. Επειδή, $\widetilde{\text{Sfrij}} = C_{ac}(R) \cap dg\widetilde{\text{Sfrij}}$, το ζητούμενο είναι άμεσο. \square

Παρατήρηση 2.3.8. (i) Με βάση την ορολογία που παρουσιάστηκε αρχικά στο [5] καλούμε ένα πρότυπο M pure Sfrij-περιδικό εάν υπάρχει pure ακριβής ακολουθία της μορφής:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow J \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου το J είναι strongly fp-εμφυτευτικό. Το γεγονός ότι κάθε pure ακυκλικό σύμπλεγμα strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων έχει αναγκαστικά strongly fp-εμφυτευτικούς πυρήνες μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «Κάθε pure Sfrij-περιδικό πρότυπο είναι Sfrij». Πράγματι, χρησιμοποιώντας την παραπάνω βραχεία ακριβή ακολουθία μπορούμε να κατασκευάσουμε το παρακάτω pure ακυκλικό σύμπλεγμα:

$$\dots \longrightarrow J \longrightarrow J \longrightarrow J \longrightarrow \dots$$

του οποίου οι πυρήνες είναι ακριβώς το πρότυπο M .

(ii) Η παραπάνω αναδιατύπωση μπορεί να θεωρηθεί ανάλογη της Πρότασης 3.8(1) του [5] που μας πληροφορεί ότι κάθε pure Inj-περιδικό πρότυπο είναι εμφυτευτικό.

Ο Jan Stovicek απέδειξε ότι [[22], Corollary 5.9] οι οι πυρήνες $Z_n X$ ενός ακυκλικού συμπλέγματος X εμφυτευτικών προτύπων X μηδενίζουν τους συναρτητές $\text{Ext}_R^1(F, -)$, για κάθε F πεπερασμένης επίπεδης διάστασης. Ιδιαίτερως, οι πυρήνες $Z_n X$ είναι cotorsion πρότυπα. Το επιχείρημα του όμως δείχνει γενικότερα ότι κάθε

ακυκλικό σύμπλεγμα pure-εμφυτευτικών προτύπων έχει cotorsion πυρήνες. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε τα δυϊκά αποτελέσματα των παραπάνω για την κλάση \mathcal{E} . Υπενθυμίζουμε ότι ένα πρότυπο M ανήκει στη \mathcal{E} αν και μόνο αν οι συναρτητές $\text{Ext}_R^1(M, -)$ μηδενίζονται σε όλα τα strongly fp-εμφυτευτικά πρότυπα.

Έστω M πρότυπο τέτοιο ώστε ο i -οστός πυρήνας μιας εμφυτευτικής του επίλυσης είναι strongly fp-εμφυτευτικό πρότυπο. Τότε, επειδή η κλάση των strongly fp-εμφυτευτικών προτύπων περιέχει όλα τα εμφυτευτικά πρότυπα και είναι κλειστή ως προς πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα και ευθείς προσθετέους μπορούμε να συμπεράνουμε από το Λήμμα Schanuel ότι ο i -οστός πυρήνας κάθε εμφυτευτικής επίλυσης του M είναι strongly fp-εμφυτευτικό πρότυπο. Επιπλέον, επειδή η κλάση Sfprin είναι κλειστή ως προς συνπυρήνες μονομορφισμών έχουμε ότι ο j -οστός κάθε εμφυτευτικής επίλυσης του M είναι strongly fp-εμφυτευτικό πρότυπο για κάθε $j \geq i$. Θα συμβολίζουμε με $\overline{\text{Sfprin}}$ την κλάση των προτύπων για τα οποία υπάρχει κάποια εμφυτευτική επίλυση τους της οποίας κάποιος πυρήνας είναι strongly fp-εμφυτευτικό πρότυπο.

Πόρισμα 2.3.9. Έστω X ένα ακυκλικό σύμπλεγμα pure-προβολικών προτύπων.

(i) Οι πυρήνες $Z_n X$ του X ανήκουν στην κλάση \mathcal{E} .

(ii) Αν, επιπλέον, το X αποτελείται από προβολικά πρότυπα, τότε $\text{Ext}_R^1(Z_n X, M) = 0$ για κάθε n και κάθε $M \in \overline{\text{Sfprin}}$.

Απόδειξη. (i) Έστω M ένα strongly fp-εμφυτευτικό πρότυπο. Από την Πρόταση 2.3.2 έχουμε ότι το σύμπλεγμα $M[0]$ είναι K-absolutely pure. Επομένως το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(X, M)$ είναι ακυκλικό. Δηλαδή, έχουμε ότι οι βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow Z_n X \longrightarrow X_n \longrightarrow Z_{n-1} X \longrightarrow 0$$

επάγουν τις εξής βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(Z_{n-1} X, M) \longrightarrow \text{Hom}_R(X_n, M) \longrightarrow \text{Hom}_R(Z_n X, M) \longrightarrow 0$$

για κάθε n . Αφού κάθε πρότυπο αποτελεί pure επιμορφική εικόνα ενός ευθέως αθροίσματος πεπερασμένα παριστώμενων προτύπων έχουμε ότι κάθε pure-προβολικό πρότυπο είναι ευθύς προσθετέος ενός ευθέως αθροίσματος πεπερασμένα παριστώμενων προτύπων. Ιδιαίτερος, έχουμε ότι $\text{Ext}_R^1(X_n, M) = 0$ για κάθε n . Τελικά, από τη μακρά ακριβή ακολουθία του θ-συνομολογικού συναρτητή Ext έχουμε ότι $\text{Ext}_R^1(Z_{n-1} X, M) = 0$ για κάθε n το οποίο ήταν το ζητούμενο.

(ii) Έστω $M \in \overline{\text{Sfprin}}$ και $\Sigma^i M$ ο i -οστός πυρήνας μια εμφυτευτικής επίλυσης του M ο οποίος μπορεί να υποθεθεί Strongly fp-εμφυτευτικό πρότυπο. Τότε, έχουμε τις ισότητες

$$\text{Ext}_R^1(Z_n X, M) = \text{Ext}_R^{i+1}(Z_{n-i} X, M) = \text{Ext}_R^1(Z_{n-i} X, \Sigma^i M) = 0,$$

που δίνουν άμεσα το ζητούμενο. \square

Παρατήρηση 4.3.10. Το Πόρισμα 4.3.9.(ii) σημαίνει ότι κάθε Gorenstein προβολικό πρότυπο ([14]) ανήκει στη κλάση \mathcal{E} .

Κεφάλαιο 3

Ευσταθείς κατηγορίες στη Gorenstein Ομολογική Άλγεβρα

3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με πλήρη hereditary cotorsion ζεύγη $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ τα οποία είναι τέτοια ώστε η κλάση \mathcal{L} να είναι κλειστή ως προς πυρήνες επιμορφισμών και να περιέχει όλα τα προβολικά πρότυπα. Θα αποδείξουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση μια επιμορφική εικόνα ενός προτύπου K της \mathcal{K} με πυρήνα στην \mathcal{L} παραγοντοποιείται μέσω ενός προτύπου της \mathcal{L} μόνο στην τετριμμένη περίπτωση όπου και το K καθώς και η εικόνα του ανήκουν στην \mathcal{L} . Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω στην Gorenstein Ομολογική Άλγεβρα. Επιπλέον, θα διατυπώσουμε τα δυϊκά αποτελέσματα του κεφαλαίου τα οποία έχουν δυϊκές αποδείξεις. Ξεκινάμε τη μελέτη μας με μια γενικευμένη μορφή του Λήμματος Scauel και συνεχίζουμε με κάποια προαπαιτούμενα αποτελέσματα της Gorenstein Ομολογικής Άλγεβρας.

Λήμμα 3.1.1 (Schanuel). Έστω M ένα R -πρότυπο. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι βραχείες ακριβής ακολουθίες $0 \rightarrow F \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ και $0 \rightarrow \bar{F} \rightarrow \bar{L} \rightarrow M \rightarrow 0$, όπου $\text{Ext}_R^1(L, \bar{F}) = 0$ και $\text{Ext}_R^1(\bar{L}, F) = 0$. Τότε, υπάρχει ισομορφισμός $L \oplus \bar{F} \simeq \bar{L} \oplus F$.

Ορισμός 3.1.2 (Gorenstein προβολικό πρότυπο). Gorenstein προβολικό πρότυπο καλούμε κάθε συζυγία ενός ακυκλικού συμπλέγματος προβολικών προτύπων \mathbb{P} το οποίο διατηρεί την ακρίβεια του μέσω του συναρτητή $\text{Hom}_R(-, P)$, για κάθε προβολικό πρότυπο P .

Θα συμβολίζουμε τη κλάση των Gorenstein προβολικών προτύπων με GProj .

Επειδή δεν θα μελετήσουμε τα Gorenstein εμφυτευτικά πρότυπα (που ορίζονται δυϊκά) παραλείπουμε τον ορισμό τους.

Ορισμός 3.1.3 (Gorenstein επίπεδα πρότυπα). *Gorenstein επίπεδο πρότυπο* καλούμε κάθε συζυγία ενός ακυκλικού συμπλέγματος επίπεδων προτύπων \mathbb{F} το οποίο διατηρεί την ακρίβεια του μέσω του συναρτητή $I \otimes -$, για κάθε εμφυτευτικό πρότυπο I .

Θα συμβολίζουμε τη κλάση των Gorenstein επίπεδων προτύπων με GFlat .

Δεν γνωρίζουμε εάν όλα τα Gorenstein προβολικά πρότυπα είναι και Gorenstein επίπεδα. Γι αυτόν τον λόγο οι Saroch και Stovicek όρισαν ([25]) μια καινούργια κλάση προτύπων που περιέχεται στην τομή των GProj και GFlat . Ονόμασαν τα καινούργια αυτά πρότυπα Projectively coresolved Gorenstein Flat πρότυπα (για συντομία γράφουμε PGF πρότυπα).

Ορισμός 3.1.4 (PGF πρότυπα). *Θα καλούμε ένα πρότυπο PGF* εάν αποτελεί συζυγία ενός ακυκλικού συμπλέγματος προβολικών προτύπων \mathbb{P} το οποίο διατηρεί την ακρίβεια του μέσω του συναρτητή $I \otimes -$, για κάθε εμφυτευτικό πρότυπο I .

Θα συμβολίζουμε τη κλάση των PGF προτύπων με PGF .

Παρουσιάζουμε σύντομα τα βασικά αποτελέσματα που θα μας χρειαστούν σε αυτό το κεφάλαιο.

Θεώρημα 3.1.5. [25, Θεώρημα 4.4] *Κάθε PGF πρότυπο είναι Gorenstein προβολικό*

Θεώρημα 3.1.6. [25, Θεώρημα 4.9] *Το ζεύγος $(\text{PGF}, \text{PGF}^\perp)$ αποτελεί ένα πλήρες hereditary cotorsion ζεύγος. Επιπλέον η κλάση PGF^\perp είναι κλειστή ως προς πυρήνες επιμορφισμών.*

Θεώρημα 3.1.7. [25, Θεώρημα 4.11] *Για κάθε Gorenstein επίπεδο πρότυπο M υπάρχει μια ακολουθία προσέγγισης της μορφής:*

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου $P \in \text{PGF}$ και το F είναι επίπεδο πρότυπο.

Επιπλέον, ισχύει ότι $\text{Gflat} \cap \text{PGF}^\perp = \text{Flat}$, όπου με Flat συμβολίζουμε τη κλάση των επίπεδων προτύπων.

Θεώρημα 3.1.8. [25, Πρόταση 4.12] *Το ζεύγος $(\text{GFlat}, \text{GFlat}^\perp)$ αποτελεί ένα πλήρες hereditary cotorsion ζεύγος.*

Στη συνέχεια ορίζουμε την κλάση των προτύπων που έχουν πεπερασμένη (Gorenstein) επίπεδη διάσταση. Για τη σχετική θεωρία της Gorenstein επίπεδης διάστασης ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το [6]. Σημειώνουμε ότι η εργασία [6] είχε γραφεί μόνο για δακτυλίους στους οποίους η κλάση Gflat είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις, όμως είναι γνωστό πλέον ότι η προαναφερθείσα ιδιότητα των Gorenstein επίπεδων προτύπων ισχύει σε κάθε δακτύλιο (Θεώρημα 3.1.8).

Ορισμός 3.1.9. *Θα λέμε ότι ένα πρότυπο M έχει πεπερασμένη (Gorenstein) επίπεδη διάσταση εάν έχει πεπερασμένη (Gorenstein) επίπεδη επίλυση.*

Συμβολίζουμε με $\overline{\text{Flat}}$ και $\overline{\text{GFlat}}$ τις κλάσεις των προτύπων πεπερασμένης επίπεδης και Gorenstein επίπεδης διάστασης αντίστοιχα.

Το επόμενο αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί άμεσα από τους Ορισμούς 3.1.4 και 3.1.9 και από τα Θεωρήματα 3.1.6, 3.1.7 και 3.1.8. Ο αναγνώστης μπορεί να δει το [12, Θεώρημα 2.1] για περισσότερες πληροφορίες.

Πρόταση 3.1.10. *Για κάθε πρότυπο πεπερασμένης Gorenstein επίπεδης διάστασης M υπάρχει μια ακολουθία προσέγγισης της μορφής*

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου $P \in \text{PGF}$ και το F έχει πεπερασμένη επίπεδη διάσταση.

3.2 Σταθεροποιώντας μέσω της \mathcal{K}^\perp

Έστω \mathcal{L} μια κλειστή ως προς πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα κλάση προτύπων. Το σύνολο των R -μορφισμών $f : M \rightarrow N$ που παραγοντοποιούνται μέσω ενός προτύπου της \mathcal{L} αποτελεί υποομάδα της αβελιανής ομάδας $\text{Hom}_R(M, N)$. Θα συμβολίζουμε με $\mathfrak{L}\text{-Hom}_R(M, N)$ την αντίστοιχη ομάδα πηλίκο και με $[f] = [f]_{\mathfrak{L}}$ την κλάση μιας απεικόνισης $f \in \text{Hom}_R(M, N)$. Επιπλέον, για κάθε κλάση R -προτύπων \mathcal{K} , συμβολίζουμε με $\mathfrak{L}\text{-}\mathcal{K}$ την κατηγορία που έχει ως αντικείμενα τα πρότυπα της \mathcal{K} ενώ ως σύνολα μορφισμών θεωρούμε τις αβελιανές ομάδες $\mathfrak{L}\text{-Hom}_R(M, N)$.

Λήμμα 3.2.1. *Έστω $f : M \rightarrow N$ ένας R -μορφισμός και δύο κλάσεις R -προτύπων \mathcal{L}, \mathcal{K} τέτοιες ώστε να ισχύει ότι $\mathcal{K} \subseteq {}^\perp\mathcal{L}$ και ότι $\text{Proj}(R) \subseteq \mathcal{L}$ ενώ επιπλέον απαιτούμε η \mathcal{L} να είναι κλειστή ως προς πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα και πυρήνες επιμορφισμών. Επιπλέον, θεωρούμε δύο βραχείες ακριβείς ακολουθίες R -προτύπων*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{\iota} K \xrightarrow{p} M \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad 0 \rightarrow L' \xrightarrow{j} K' \xrightarrow{q} N \rightarrow 0,$$

όπου $K, K' \in \mathcal{K}$ και $L, L' \in \mathcal{L}$. Τότε ισχύουν τα εξής,

- (i) υπάρχει R -μορφισμός $g : K \rightarrow K'$, τέτοιος ώστε $qg = fp$.
- (ii) Αν $g, g' : K \rightarrow K'$ είναι δύο R -μορφισμοί με $qg = fp$ και $qg' = fp$, τότε ισχύει ότι $[g] = [g'] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K')$.
- (iii) Αν $[f] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(M, N)$ και $g : K \rightarrow K'$ είναι ένας R -μορφισμός τέτοιος ώστε $qg = fp$, τότε $[g] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K')$.

Απόδειξη. (i) Αφού ισχύει ότι $\text{Ext}_R^1(K, L') = 0$ συμπεραίνουμε ότι η $q_* : \text{Hom}_R(K, K') \rightarrow \text{Hom}_R(K, N)$ είναι επιμορφισμός. Επομένως, υπάρχει R -μορφισμός $g : K \rightarrow K'$ τέτοιος ώστε $fp = q_*(g)$.

(ii) Έστω $g, g' : K \rightarrow K'$ δύο R -μορφισμοί ώστε $qg = fp$ και $qg' = fp$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & L & \xrightarrow{h} & K & \xrightarrow{p} & M & \rightarrow & 0 \\ & & & & g \downarrow \downarrow g' & & f \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & L' & \xrightarrow{j} & K' & \xrightarrow{q} & N & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Έχουμε ότι $q(g' - g) = qg' - qg = fp - fp = 0$ άρα υπάρχει R -μορφισμός $h : K \rightarrow L'$, τέτοιος ώστε $g' - g = jh$. Αφού $L' \in \mathcal{L}$ καταλήγουμε στο ζητούμενο, δηλαδή $[g] = [g'] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K')$.

(iii) Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\text{Proj}(R) \subseteq \mathcal{K}$.

Έστω f μια γραμμική απεικόνιση η οποία παραγοντοποιείται ως: $M \xrightarrow{a} \Lambda \xrightarrow{b} N$, όπου $\Lambda \in \mathcal{L}$. Επειδή η \mathcal{L} είναι κλειστή ως προς πυρήνες επιμορφισμών και κάθε προβολικό πρότυπο ανήκει στην \mathcal{L} , μπορούμε να κατασκευάσουμε την παρακάτω ακολουθία

$$0 \rightarrow \Lambda' \rightarrow P \xrightarrow{\pi} \Lambda \rightarrow 0$$

όπου το P είναι προβολικό και $\Lambda' \in \mathcal{L}$. Μέσω του (i), εξασφαλίζεται η ύπαρξη των μορφισμών $\alpha : K \rightarrow P$ και $\beta : P \rightarrow K'$, οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε $p\alpha = a\pi$ και $q\beta = b\pi$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & L & \xrightarrow{h} & K & \xrightarrow{p} & M & \rightarrow & 0 \\ & & & & \alpha \downarrow & & a \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Lambda' & \rightarrow & P & \xrightarrow{\pi} & \Lambda & \rightarrow & 0 \\ & & & & \beta \downarrow & & b \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & L' & \xrightarrow{j} & K' & \xrightarrow{q} & N & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Τελικά, $q(\beta\alpha) = (ba)p = fp$ και επομένως για κάθε μορφισμό $g : K \rightarrow K'$ ο οποίος είναι τέτοιος ώστε $qg = fp$ έχουμε ότι $[g] = [\beta\alpha] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K')$. Άρα $[\beta\alpha] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K')$, το οποίο σημαίνει ότι $[g] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K')$. \square

Έστω $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ ένα πλήρες cotorsion ζεύγος, ως ακολουθία προσέγγισης του προτύπου M εννοούμε κάθε ακολουθία της μορφής

$$0 \rightarrow L \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow 0,$$

όπου $L \in \mathcal{L}$ και $K \in \mathcal{K}$. Θεωρούμε ότι $\text{Proj}(R) \subset \mathcal{L}$ και ότι η \mathcal{L} είναι κλειστή ως προς πυρήνες επιμορφισμών. Τα Λήμματα 3.1.1 και 3.2.1 μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη του προσθετικού συναρτητή

$$\mu : \mathfrak{L}\text{-R-Mod} \rightarrow \mathfrak{L}\text{-}\mathcal{K}$$

ο οποίος απεικονίζει το πρότυπο R -πρότυπο M σε ένα πρότυπο της \mathcal{K} το οποίο εμφανίζεται σε μια ακολουθία προσέγγισης του M . Επιπλέον, ο συναρτητής μ απεικονίζει τη κλάση $[f] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(M, N)$ του μορφισμού $f : M \rightarrow N$ στην κλάση $[g] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K')$ κάποιου μορφισμού $g : K \rightarrow K'$ τη συνθήκη του Λήμματος 3.2.1(i).

Θεώρημα 3.2.2. *Ο προσθετικός συναρτητής $\mu : \mathfrak{L}\text{-R-Mod} \rightarrow \mathfrak{L}\text{-}\mathcal{K}$ αποτελεί δεξιά προσαρτημένο συναρτητή της ένθεσης $\mathfrak{L}\text{-}\mathcal{K} \hookrightarrow \mathfrak{L}\text{-R-Mod}$.*

Απόδειξη. Έστω N ένα πρότυπο και

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{\lambda} K \xrightarrow{q} N \rightarrow 0,$$

μια ακολουθία προσέγγισης του N , όπου $K \in \mathcal{K}$ και $L \in \mathcal{L}$. Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση

$$[q]_* : \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(\Lambda, K) \rightarrow \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(\Lambda, N)$$

είναι φυσική και στο $\Lambda \in \mathcal{K}$ (προφανώς) και στο N (από το Λήμμα 3.2.1). Θα δείξουμε τη ζητούμενη προσάρτηση αποδεικνύοντας ότι η απεικόνιση $[q]_*$ αποτελεί ισομορφισμό.

Η απεικόνιση

$$q_* : \text{Hom}_R(\Lambda, K) \rightarrow \text{Hom}_R(\Lambda, N)$$

είναι επί αφού $\text{Ext}_R^1(\Lambda, L) = 0$, επομένως έπεται ότι και η $[q]_*$ είναι επί. Για να δείξουμε ότι η $[q]_*$ είναι ένα-προς-ένα, θεωρούμε μια απεικόνιση $g : \Lambda \rightarrow K$, τέτοια ώστε $[qg] = [q][g] = [q]_*[g] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(\Lambda, N)$. Έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \Lambda & = & \Lambda & \rightarrow & 0 \\ & & & & g \downarrow & & qg \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & L & \xrightarrow{\lambda} & K & \xrightarrow{q} & N & \rightarrow & 0 \end{array}$$

το οποίο μέσω του Λήμματος 3.2.1(iii), μας βοηθάει να συμπεράνουμε ότι $[g] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(\Lambda, K)$. \square

Πόρισμα 3.2.3. Έστω $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ ένα πλήρες hereditary cotorsion ζεύγος τέτοιο ώστε και η κλάση \mathcal{L} να είναι κλειστή ως προς πυρήνες επιμορφισμών και να περιέχει όλα τα προβολικά πρότυπα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα πρότυπο M .

(i) $M \in \mathcal{L}$,

(ii) $\mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, M) = 0$ για κάθε $K \in \mathcal{K}$ και

(iii) υπάρχει βραχεία ακριβής ακολουθία R -προτύπων $0 \rightarrow L \rightarrow K \xrightarrow{q} M \rightarrow 0$, όπου $L \in \mathcal{L}$ και $K \in \mathcal{K}$, τέτοια ώστε $[q] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, M)$.

Απόδειξη. Οι συνεπαγωγές (i) \Rightarrow (ii) and (ii) \Rightarrow (iii) είναι άμεσες. Επομένως, αρκεί να δείξουμε τη συνεπαγωγή (iii) \Rightarrow (i). Η προσάρτηση που περιγράφει το Θεώρημα 3.2.2 μας πληροφορεί ότι η απεικόνιση

$$[q]_* : \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K) \rightarrow \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, M)$$

είναι ισομορφισμός. Αφού $[q]_*[1_K] = [q][1_K] = [q1_K] = [q] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, M)$, συμπεραίνουμε ότι $[1_K] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K)$. Άρα, η ταυτοτική απεικόνιση του K παραγοντοποιείται μέσω ενός προτύπου $L' \in \mathcal{L}$. Επειδή η \mathcal{L} είναι κλειστή ως προς ευθείς προσθετέους έχουμε ότι το K ανήκει στη \mathcal{L} . Επιπλέον, επειδή η κλάση \mathcal{L} είναι κλειστή ως προς συμπυρήνες μονομορφισμών το ζητούμενο έπεται λόγω της ύπαρξης της βραχείας ακριβής ακολουθίας $0 \rightarrow L \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow 0$. \square

Τα επόμενα μπορούν να θεωρηθούν ως απλή προσαρμογή των μέχρι τώρα εδραιωμένων αποτελεσμάτων. Αυτήν τη φορά θα ασχοληθούμε με τις ακολουθίες προσέγγισης ενός προτύπου πεπερασμένης επίπεδης Gorenstein επίπεδης διάστασης όπως αυτές λαμβάνονται από τη Πρόταση 3.1.10.

Ανάλογα με πριν έχουμε ότι το σύνολο των R -μορφισμών $f : M \rightarrow N$ παραγοντοποιούνται μέσω ενός προτύπου πεπερασμένης επίπεδης διάστασης αποτελεί υποομάδα της αβελιανής ομάδας $\text{Hom}_R(M, N)$. Συμβολίζουμε με $\mathfrak{F}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, N)$ την αντίστοιχη ομάδα πηλίκο και με $[f] = [f]_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}}$ την κλάση του R -μορφισμού $f \in \text{Hom}_R(M, N)$. Επιπλέον συμβολίζουμε με $\mathfrak{F}\mathfrak{F}\text{-}R\text{-Mod}$ την κατηγορία που έχει ως αντικείμενα όλα τα R -πρότυπα και της οποία τα σύνολα μορφισμών δίνονται μέσω των αβελιανών ομάδων $\mathfrak{F}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, N)$. Από το Λήμμα 3.1.1 έχουμε ότι το PGF πρότυπο G , το οποίο εμφανίζεται στην ακολουθία προσέγγισης της Πρότασης 3.1.10 ενός προτύπου πεπερασμένης Gorenstein επίπεδης διάστασης M προσδιορίζεται μοναδικά ως προς ισομορφισμό στην κατηγορία $\mathfrak{F}\mathfrak{F}\text{-}R\text{-Mod}$.

Τα Λήμματα 3.1.1 και 3.2.1 μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη του προσθετικού συναρτητή

$$\mu' : \mathfrak{F}\mathfrak{F}\text{-}\overline{\text{GFlat}}(R) \rightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{F}\text{-PGF}(R),$$

ο οποίο απεικονίζει κάθε πρότυπο πεπερασμένης Gorenstein επίπεδης διάστασης M στο PGF πρότυπο που εμφανίζεται στην ακολουθία προσέγγισης του M μέσω της Πρότασης 3.1.10.

Το ακόλουθο θεώρημα είναι ανάλογο του Θεωρήματος 3.2.2.

Θεώρημα 3.2.4. *Ο προσθετικός συναρτητής $\mu' : \mathfrak{F}\mathfrak{F}\text{-}\overline{\text{GFlat}}(R) \rightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{F}\text{-PGF}(R)$ αποτελεί δεξιά προσαρτημένο συναρτητή της ένθεσης $\mathfrak{F}\mathfrak{F}\text{-PGF}(R) \hookrightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{F}\text{-}\overline{\text{GFlat}}(R)$.*

Το ακόλουθο πόρισμα είναι ανάλογο του Πορίσματος 3.2.3.

Πόρισμα 3.2.5. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα πρότυπο πεπερασμένης Gorenstein επίπεδης διάστασης M*

- (i) *Το M έχει πεπερασμένη επίπεδη διάσταση,*
- (ii) *$\mathfrak{F}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(L, M) = 0$ για κάθε PGF πρότυπο L ,*
- (iii) *υπάρχει μια βραχεία ακριβής ακολουθία $0 \rightarrow F \rightarrow L \xrightarrow{q} M \rightarrow 0$, με $F \in \overline{\text{Flat}}$ και $L \in \text{PGF}$ έτσι ώστε $[q] = [0] \in \mathfrak{F}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(L, M)$.*

Σημείωση: Οι σταθεροποιημένες κατηγορίες που θεωρήσαμε σε αυτή την υποπαράγραφο είναι οι συνηθισμένες ευσταθείς κατηγορίες. Πράγματι, στην περίπτωση όπου η κλάση \mathcal{L} περιέχει όλα τα προβολικά πρότυπα και είναι κλειστή ως προς πυρήνες επιμορφισμών τότε για κάθε κλάση \mathcal{K} με την ιδιότητα $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}^\perp$ θεωρήσαμε την κατηγορία $\mathfrak{L}\text{-}\mathcal{K}$ που έχει ως αντικείμενα τα πρότυπα της \mathcal{K} ενώ απαιτήσαμε κάθε μορφισμός που παραγοντοποιείται μέσω της \mathcal{L} να είναι μηδέν. Για να δείξουμε το ισχυρισμό μας, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μορφισμός που παραγοντοποιείται μέσω της \mathcal{L} παραγοντοποιείται και μέσω ενός προβολικού προτύπου. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μορφισμός της μορφής $F : K \rightarrow L$ όπου $K \in \mathcal{K}$

και $L \in \mathcal{L}$ παραγοντοποιείται μέσω ενός προβολικού προτύπου. Όμως, για κάθε $L \in \mathcal{L}$ μπορούμε να βρούμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow L' \rightarrow P \rightarrow L \rightarrow 0,$$

όπου το P είναι προβολικό και το L είναι πρότυπο της \mathcal{L} . Το ζητούμενο έπεται διότι $\text{Ext}^1(K, L') = 0$.

3.3 Σταθεροποιώντας μέσω της PGF

Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου είναι δυϊκά των αποτελεσμάτων της προηγούμενης παραγράφου. Όλες οι αποδείξεις είναι δυϊκές των αντίστοιχων αποδείξεων που έχουμε ήδη παρουσιάσει.

Ξεκινάμε τη μελέτη μας με το δυϊκό λήμμα του γενικευμένου Λήμματος Scauel. Αμέσως μετά παραθέτουμε τη δυϊκή πρόταση της Πρότασης 3.1.10.

Λήμμα 3.3.1 (Scauel). Έστω M ένα R -πρότυπο. Θεωρούμε δύο ακολουθίες προτύπων $0 \rightarrow M \rightarrow F' \rightarrow L' \rightarrow 0$ και $0 \rightarrow M \rightarrow \overline{F'} \rightarrow \overline{L'} \rightarrow 0$ όπου $\text{Ext}_R^1(L', \overline{F'}) = 0$ και $\text{Ext}_R^1(\overline{L'}, F') = 0$. Τότε, υπάρχει ισομορφισμός $L' \oplus \overline{F'} \simeq \overline{L'} \oplus F'$.

Πρόταση 3.3.2. Για κάθε πρότυπο πεπερασμένης Gorenstein επίπεδης διάστασης M υπάρχει μια ακολουθία προσέγγισης της παρακάτω μορφής

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F' \longrightarrow L' \longrightarrow 0,$$

όπου $F' \in \overline{\text{Flat}}$ και $L' \in \text{PGF}$.

Το σύνολο των R -μορφισμών $f : M \rightarrow N$ που παραγοντοποιούνται μέσω ενός PGF προτύπου αποτελεί υποομάδα της αβελιανής ομάδας $\text{Hom}_R(M, N)$. Συμβολίζουμε με $\mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, N)$ την αντίστοιχη ομάδα πηλίκο και με $[f] = [f]_{\mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}}$ την κλάση του R -μορφισμού $f \in \text{Hom}_R(M, N)$.

Επιπλέον, συμβολίζουμε με $\mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-}R\text{-Mod}$ την κατηγορία που έχει ως αντικείμενα όλα τα R -πρότυπα ενώ ως σύνολα μορφισμών θεωρούμε τις αβελιανές ομάδες $\mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, N)$. Το Λήμμα 3.3.1 μας εξασφαλίζει ότι το πρότυπο F' το οποίο ορίζεται μέσω της Πρότασης 3.3.2 για κάθε πρότυπο πεπερασμένης Gorenstein επίπεδης διάστασης είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό στην κατηγορία $\mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-}R\text{-Mod}$.

Λήμμα 3.3.3. Έστω $f : M \rightarrow N$ ένας R -μορφισμός μεταξύ δύο προτύπων πεπερασμένης Gorenstein επίπεδης διάστασης. Επιπλέον θεωρούμε δύο βραχείες ακριβής ακολουθίες

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{h} F \xrightarrow{p} L \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad 0 \rightarrow N \xrightarrow{g} F' \xrightarrow{q} L' \rightarrow 0,$$

όπου τα F, F' έχουν πεπερασμένη επίπεδη διάσταση και τα L, L' είναι PGF. Τότε,

(i) υπάρχει ένα R -μορφισμός $g : F \rightarrow F'$, τέτοιος ώστε $g_i = jf$.

(ii) Αν $g, g' : F \rightarrow F'$ είναι δύο R -μορφισμοί με $g\iota = jf$ και $g'\iota = jf$, τότε $[g] = [g'] \in \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(F, F')$.

(iii) Αν $[f] = [0] \in \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, N)$ και $g : F \rightarrow F'$ είναι ένας R -μορφισμός τέτοιος ώστε $g\iota = jf$, τότε $[g] = [0] \in \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(F, F')$.

Απόδειξη. (i) Αφού $\text{Ext}_R^1(L, F') = 0$, συμπεραίνουμε ότι η $\iota^* : \text{Hom}_R(F, F') \rightarrow \text{Hom}_R(M, F')$ αποτελεί επιμορφισμό. Επομένως, υπάρχει R -μορφισμός $g : F \rightarrow F'$ τέτοιος ώστε $gf = \iota^*(g)$, το οποίο ήταν το ζητούμενο.

(ii) Έστω $g, g' : F \rightarrow F'$ δύο R -μορφισμοί $g\iota = jf$ και $g'\iota = jf$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{p} & L & \rightarrow & 0 \\ & & f \downarrow & & g \downarrow \downarrow g' & & & & \\ 0 & \rightarrow & N & \xrightarrow{j} & F' & \xrightarrow{q} & L' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Τότε, $(g' - g)\iota = g'\iota - g\iota = jf - jf = 0$ επομένως υπάρχει R -μορφισμός $h : L \rightarrow F'$, τέτοιος ώστε $g' - g = hp$. Αφού το L είναι PGF, συμπεραίνουμε ότι $[g] = [g'] \in \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(F, F')$.

(iii) Έστω ότι η f παραγοντοποιείται ως την σύνθεση $M \xrightarrow{a} \Gamma \xrightarrow{b} N$, όπου το Γ είναι PGF. Από τον ορισμό των PGF προτύπων έχουμε την ακολουθία

$$0 \rightarrow \Gamma \xrightarrow{k} P \rightarrow \Gamma' \rightarrow 0,$$

όπου το P είναι προβολικό και το Γ' είναι PGF. Από το (i), μπορούμε να βρούμε R -μορφισμούς $\alpha : F \rightarrow P$ και $\beta : P \rightarrow F'$, οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε $\alpha\iota = ka$ και $\beta k = j b$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{p} & L & \rightarrow & 0 \\ & & a \downarrow & & \alpha \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & \Gamma & \xrightarrow{k} & P & \rightarrow & \Gamma' & \rightarrow & 0 \\ & & b \downarrow & & \beta \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & N & \xrightarrow{j} & F' & \xrightarrow{q} & L' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Ισχύει ότι $(\beta\alpha)\iota = j(ba) = jf$ το οποίο σημαίνει ότι για κάθε R -μορφισμό $g : F \rightarrow F'$ με $g\iota = jf$ έχουμε $[g] = [\beta\alpha] \in \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(F, F')$ ((ii)). Τελικά, έχουμε $[\beta\alpha] = [0] \in \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(F, F')$. \square

Παρατήρηση 3.3.4. Η απόδειξη του προηγούμενο λήμματος δεν αλλάζει αν απλά θεωρήσουμε ότι τα πρότυπα F, F' ανήκουν στην δεξιά ορθογώνια κλάση των PGF προτύπων. Επιπλέον, σε αυτή την περίπτωση δεν χρειάζεται να περιοριστούμε σε πρότυπα πεπερασμένης Gorenstein επίπεδης διάστασης καθώς οι αντίστοιχες ακολουθίες προσέγγισης υπάρχουν για κάθε R -πρότυπο λόγω του Θεωρήματος 3.1.6.

Όπως και στη προηγούμενη παράγραφο υπάρχουν οι προσθετικοί συναρτητές

$$\nu : \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-G}\overline{\text{Flat}}(R) \rightarrow \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-}\overline{\text{Flat}}(R),$$

$$\nu' : \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-}R\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-PGF}(R)^\perp,$$

όπου ο ν αντιστοιχίζει κάθε πρότυπο πεπερασμένης επίπεδης διάστασης M στο πρότυπο F' που εμφανίζεται στην ακολουθία προσέγγισής της Πρότασης 3.3.2 ενώ ο ν' αντιστοιχίζει κάθε R -πρότυπο M στο πρότυπο της $\text{PGF}(R)^\perp$ που εμφανίζεται σε μια ακολουθία προσέγγισής της μορφής

$$0 \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow 0$$

όπου $K \in \text{PGF}(R)^\perp$ και $L \in \text{PGF}(R)$. Επιπλέον, οι συναρτητές ν και ν' δρουν στους μορφισμούς με τον τρόπο που υποδεικνύει το Λήμμα 3.3.3(i).

Θεώρημα 3.3.5. (i) Ο προσθετικός συναρτητής $\nu : \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-GFlat}(R) \rightarrow \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-Flat}(R)$ αποτελεί αριστερά προσαρτημένο συναρτητή της ένθεσης $\mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-Flat}(R) \hookrightarrow \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-GFlat}(R)$.

(ii) Ο προσθετικός συναρτητής $\nu' : \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-R-Mod} \rightarrow \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-PGF}(R)^\perp$ αποτελεί αριστερά προσαρτημένο συναρτητή της ένθεσης $\mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-PGF}(R)^\perp \hookrightarrow \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-R-Mod}$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο το (i) καθώς η απόδειξη του (ii) είναι όμοια. Έστω F ένα R -πρότυπο πεπερασμένης επίπεδης διάστασης και M ένα R -πρότυπο πεπερασμένης Gorenstein επίπεδης διάστασης. Επιπλέον, θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\iota} F' \xrightarrow{p} L \rightarrow 0,$$

όπου το F' έχει πεπερασμένη επίπεδη διάσταση και το L είναι PGF. Η απεικόνιση

$$[\iota]^* : \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(F', F) \rightarrow \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, F)$$

είναι φυσική στο F (προφανώς) και στο M (Λήμμα 3.3.3). Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η $[\iota]^*$ είναι ισομορφισμός. Πράγματι, αφού το L είναι PGF και το F έχει πεπερασμένη επίπεδη διάσταση, έχουμε ότι $\text{Ext}_R^1(L, F) = 0$. Άρα, η

$$\iota^* : \text{Hom}_R(F', F) \rightarrow \text{Hom}_R(M, F)$$

αποτελεί επιμορφισμό το οποίο σημαίνει ότι και η $[\iota]^*$ αποτελεί επιμορφισμό. Για να δείξουμε την ιδιότητα ένα-προς-ένα υποθέτουμε ότι για την $g : F' \rightarrow F$ ισχύει ότι $[g] = [g][\iota] = [\iota]^*[g] = [0] \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, F)$. Το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{\iota} & F' & \xrightarrow{p} & L & \rightarrow & 0 \\ & & g \downarrow & & g \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & F & = & F & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

και το Λήμμα 3.3.3(iii), μας δίνουν το ζητούμενο: $[g] = [0] \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(F', F)$. \square

Πόρισμα 3.3.6. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα πρότυπο πεπερασμένης Gorenstein επίπεδης διάστασης M

- (i) Το M είναι PGF,
- (ii) $\mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, F) = 0$ για κάθε πρότυπο F πεπερασμένης επίπεδης διάστασης,

(iii) υπάρχει μια βραχεία ακριβής ακολουθία $0 \rightarrow M \xrightarrow{\iota} F \rightarrow L \rightarrow 0$, όπου $F \in \overline{\text{Flat}}$ και $L \in \text{PGF}$ έτσι ώστε $[\iota] = [0] \in \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, F)$.

Απόδειξη. Οι συνεπαγωγές (i) \Rightarrow (ii) και (ii) \Rightarrow (iii) είναι άμεσες, επομένως μας μένει να δείξουμε ότι (iii) \Rightarrow (i). Από την απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος έχουμε ότι η

$$[\iota]^* : \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(F, F) \longrightarrow \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, F)$$

αποτελεί ισομορφισμό. Αφού ισχύει ότι $[\iota]^*[1_F] = [1_F][\iota] = [1_F\iota] = [\iota] = [0] \in \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, F)$, συμπεραίνουμε ότι $[1_F] = [0] \in \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(F, F)$, άρα η ταυτοτική απεικόνιση του F παραγοντοποιείται μέσω του PGF προτύπου L . Δηλαδή, το F είναι PGF ως ευθύς προσθετός του L . Τελικά, το M είναι PGF ως πυρήνας μιας απεικόνισης μεταξύ δύο PGF προτύπων. \square

Πόρισμα 3.3.7. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- (i) $M \in \text{PGF}$,
- (ii) $\mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, K) = 0$ για κάθε $K \in \text{PGF}(R)^\perp$,
- (iii) υπάρχει μια βραχεία ακριβής ακολουθία $0 \rightarrow M \xrightarrow{\iota} K \rightarrow L \rightarrow 0$, όπου $K \in \text{PGF}(R)^\perp$ και $L \in \text{PGF}$ έτσι ώστε $[\iota] = [0] \in \mathfrak{B}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, K)$.

Απόδειξη. Όμοια με την προηγούμενη απόδειξη. \square

Βιβλιογραφία

- [1] Avramov, L., Foxby, H.-B.: Homological dimensions of unbounded complexes. *J. Pure Appl. Algebra* 71, 129-155 (1991)
- [2] Joseph J. Rotman, An introduction to Homological Algebra , 2ed ed., Springer, 2008
- [3] Göbel, Rüdiger and Trlifaj, Jan. Approximations and Endomorphism Algebras of Modules: Volume 1 - Approximations / Volume 2 - Predictions, Berlin, Boston: De Gruyter, 2012
- [4] Hovey, Mark. “Cotorsion pairs and model categories.” *Contemporary Mathematics* (2008).
- [5] Bazzoni, S., Cortés-Izurdiaga, M. Estrada, S. Periodic Modules and Acyclic Complexes. *Algebr Represent Theor* 23, 1861–1883 (2020).
- [6] D. Bennis, Rings over which the class of Gorenstein flat modules is closed under extensions, *Com. Algebra* **37** (2009), 855–868.
- [7] EKLOF, P., TRILIFAJ, J. 2001, ‘How To Make Ext Vanish’, Cambridge University Press, *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 33, no. 1, pp. 41–51.
- [8] Emmanouil, I.: On pure acyclic complexes. *J. Algebra* 465, 190-213 (2016)
- [9] Emmanouil, I.: On the relation between K-flatness and K-projectivity. *J. Algebra* 517, 320-335 (2019)
- [10] Emmanouil, I.: K-flatness and orthogonality in homotopy categories, *Isr. J. Math.* (2022).
- [11] Emmanouil, I., Kaperonis, I.: On K-absolutely pure complexes, *Journal of Algebra*, 2023, ISSN 0021-8693,
- [12] I. Emmanouil, Modules of Finite Gorenstein flat dimension and approximations, *Math. Nachr.* 00 (2023), 1–21.
- [13] Gillespie, J.: The flat model structure on $\text{Ch}(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.* 356, 3369-3390 (2004)

- [14] Holm, H.: Gorenstein homological dimensions. *J. Pure Appl. Algebra* 189, 167-193 (2004)
- [15] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. “Categories and Sheaves.” (2005).
- [16] I. Kaperonis, D.-D. Stergiopoulou, Finiteness criteria for Gorenstein flat dimension and stability, *Comm. Algebra* (2023),
- [17] T.Y. Lam, Lectures on modules and rings, *Grad. Texts Math.* 189, Springer-Verlag, New York, 1999
- [18] Li, W., Guan, J., Ouyang, B.: Strongly FP-injective modules. *Comm. Algebra* 45, 3816-3824 (2017)
- [19] Neeman, A.: *Triangulated Categories*. *Annals of Mathematics Studies* 148, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [20] Neeman, Some new axioms for triangulated categories, *J. Algebra* 139 (1991), 221–255.
- [21] Spaltenstein, N.: Resolutions of unbounded complexes. *Compos. Math.* 65, 121-154 (1988)
- [22] Stovicek, J.: On purity and applications to coderived and singularity categories. [arxiv:1412.1615](https://arxiv.org/abs/1412.1615)
- [23] Trlifaj, J. (2000). Covers, Envelopes, and Cotorsion Theories. Lecture notes for the workshop, Homological Methods in Module Theory, 10–16 September, Cortona.
- [24] Yang, X., Ding, N.: On a question of Gillespie. *Forum Math.* 27, 3205–3231 (2015)
- [25] J. Šaroch, J. Šťovíček, Singular compactness and definability for Σ -cotorsion and Gorenstein modules, *Sel. Math. New Ser.* **26** (2020), Paper No. 23.