

# **Κβαντική Οπτική & Lasers**

**Γεώργιος Ι. Παπαδόπουλος  
Φωτεινή Λ. Παλληκάρη**



**Αθήνα 2009**

# **ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ ΚΑΙ LASERS**

**Γεώργιος Ι. Παπαδόπουλος  
Φωτεινή Α. Παλληκάρη**

Αθήνα 2009

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

<b>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</b> .....	2
<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	9
1.1 Σωματίδιο, ακτίνα φωτός .....	11
1.2 Ηλεκτρικά κύματα .....	12
1.3 Πηγές ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας .....	16
1.4 Ιδιότητες του φωτός από μέλαν σώμα .....	19
<b>2. ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΜΕ ΥΛΗ</b> .....	27
2.1 Προκαταρκτικά .....	27
2.2 Μηχανισμοί αλληλεπίδρασης .....	31
2.3 Νόμος του Planck με βάση τις διεργασίες του Einstein .....	35
2.4 Ασκήσεις .....	40
<b>3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ EINSTEIN ΜΕ ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ</b> .....	43
3.1 Προκαταρκτικά .....	43
3.2 Χρονικά εξαρτωμένη θεωρία διαταραχών .....	46
3.3 Δισταθμικό άτομο υπό την επίδραση πολωμένου H/M κύματος .....	48
3.4 Προσέγγιση Rabi .....	53
3.5 Υπολογισμός του συντελεστή B του Einstein .....	55
3.6 Ασκήσεις .....	59
<b>4. ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ</b> .....	61
4.1 Τελεστές καταστροφής και δημιουργίας, $a, a^+$ .....	66
4.2 Υπολογισμός της Χαμιλτονιανής δισταθμικού ατόμου μέσα από σπινιοριακούς αναστροφείς, $S, S^+$ .....	69
4.3 Η Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης ατόμου και πεδίου .....	70

4.4	Προσέγγιση Rabi .....	72
4.5	Υπολογισμός της πιθανότητας απορρόφησης φωτονίου .....	73
4.6	Υπολογισμός της πιθανότητας εκπομπής φωτονίου .....	76
4.7	Ο εξελκτικός τελεστής για τη Χαμιλτονιανή Rabi .....	78
4.8	Ασκήσεις .....	84
<b>5.</b>	<b>MASER KAI LASER</b> .....	<b>87</b>
5.1	Εισαγωγή .....	87
5.2	Το maser αμμωνίας .....	89
5.3	Η λειτουργία του maser .....	95
5.4	Ο laser αερίου HeNe .....	100
5.5	Η κοιλότητα συντονισμού .....	102
5.6	Εξισώσεις ρυθμών σε laser με δισταθμικά άτομα .....	106
5.7	Υπολογισμός κατωφλίου δράσης laser. Εξισώσεις στάσιμης κατάστασης.....	110
5.8	Laser ημιαγωγών .....	113
5.9	Ασκήσεις .....	116
<b>6.</b>	<b>Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ</b> .....	<b>119</b>
6.1	Η αναμενόμενη τιμή ενός τελεστή με τη βοήθεια του πίνακα πυκνότητας.....	121
6.2	Εξίσωση του πίνακα πυκνότητας .....	122
6.2.1	Χωρίς μηχανισμούς αποδιέγερσης .....	122
6.2.2	Με μηχανισμούς αποδιέγερσης .....	123
6.3	Μέθοδος αποθήκης. Εξίσωση πίνακα πυκνότητας .....	125
6.4	Υπολογισμός της κατανομής ακτινοβολίας μέλανος σώματος (Planck) .....	132
6.5	Ασκήσεις .....	134
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	.....	<b>136</b>

7. Λύση γραμμικού ομογενούς συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων .....	136
8. <b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	139

---

**ΠΡΟΛΟΓΟΣ**

Το βιβλίο αυτό είναι μία εισαγωγή στη κβαντική θεωρία της δράσης laser, δηλαδή του μηχανισμού αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας και ατόμων με αποτέλεσμα την εκπομπή μίας σύμφωνης ηλεκτρομαγνητικής (H/M) δέσμης με εξαιρετικές ιδιότητες: τη συμφωνία, λαμπρότητα, κατευθυντικότητα, μονοχρωματικότητα. Η ανάπτυξη αυτού του θέματος έχει κατανεμηθεί σε έξι κεφάλαια και ένα συμπληρωματικό παράρτημα. Θα μπορούσαν σίγουρα να λεχθούν πολύ περισσότερα στο ίδιο θέμα, αλλά εδώ πρέπει να λάβει κανείς υπόψη το χρονικό περιορισμό ενός 'εξαμήνου' για το οποίο προορίζεται αυτή η ύλη. Περιληπτικά η ύλη έχει κατανεμηθεί ως εξής.

Το πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται γενικά γύρω από τα H/M πεδία και την ακτινοβολία μέλανος σώματος, τη θερμική ακτινοβολία η οποία υπάρχει στο εσωτερικό κοιλότητας της οποίας τα τοιχώματα βρίσκονται σε θερμοκρασία T.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται υπολογισμός της φασματικής κατανομής μέλανος σώματος από τον Einstein μέσα από τους μηχανισμούς αλληλεπίδρασης της H/M ακτινοβολίας με τα άτομα της ύλης. Βάσει αυτής της περιγραφής έγινε δυνατή μετά από 40 περίπου χρόνια η κατασκευή της οπτικής μηχανής, το laser.

Μετά την περιγραφή των μηχανισμών αλληλεπίδρασης, στα επόμενα δύο κεφάλαια γίνεται ο μαθηματικός υπολογισμός των πιθανοτήτων αλληλεπίδρασης φωτονίων με το άτομο (περιοριζόμενοι στο δισταθμικό άτομο). Στο μεν τρίτο κεφάλαιο μέσα από τη θεωρία διαταραχών και αλληλεπίδραση ηλεκτρικού διπόλου, στο δε τέταρτο κεφάλαιο μέσα από τη κβαντική θεωρία πεδίου και την χρήση τελεστών και κυματανυσμάτων.

Για να μην γίνει βαρετή η συνεχής αναφορά στις θεωρίες και τα μαθηματικά της λειτουργίας του laser στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η εφαρμογή της θεωρίας με τη περιγραφή της οπτικής μηχανής. Ακολουθώντας την χρονολογική σειρά με την οποία κατασκευάστηκαν, παρουσιάζεται πρώτα το maser που λειτουργεί στη περιοχή των

μικροκυμάτων και μετά το laser που λειτουργεί στο ορατό (και με επέκταση στο υπέρυθρο και υπεριώδες) φάσμα. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται το πρώτο laser αερίου, το HeNe καθώς και το laser ημιαγωγών.

Το κύριο θέμα του βιβλίου κλείνει στο έκτο κεφάλαιο με εισαγωγή του πίνακα πυκνότητας για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων ατομικής μετάπτωσης. Η μέθοδος του πίνακα πυκνότητας έχει πολλά πλεονεκτήματα. Το κυριότερο από αυτά όμως είναι ότι βοηθά τη μελέτη της αλληλεπίδρασης κβαντικών συστημάτων των οποίων το κυματόνισμα δεν είναι γνωστό αλλά μόνο ορισμένες στατιστικές τους ιδιότητες.

Τέλος, στο παράρτημα δίνεται ένα βοήθημα για τη λύση των συστημάτων διαφορικών εξισώσεων που εμφανίζονται συνέχεια στα μαθηματικά της λειτουργίας του laser.

---

**Χρήσιμες Σταθερές**

Σταθερά	Σύμβολο	Τιμή
Σταθερά Boltzmann	k	$1.38 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$
Φορτίο ηλεκτρονίου	e	$1.6 \cdot 10^{-19} C$
Σταθερά Planck	h	$6.63 \cdot 10^{-34} Js$
Ταχύτητα φωτός στο κενό	c	$3 \cdot 10^8 ms^{-1}$
Μάζα ηλεκτρονίου	$m_e$	$9.1 \cdot 10^{-31} Kg$
Ηλεκτρική διαπερατότητα κενού	$\epsilon_0$	$8.85 \cdot 10^{-12} Fm^{-1}$



### Χρήσιμες Μαθηματικές Σχέσεις

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{x t}{2}\right)}{x^2} dx = \frac{\pi t}{2}$$

- Η αντικατάσταση ενός ανύσματος θέσεως<sup>1</sup> στις καρτεσιανές συντεταγμένες :

$$\underline{r} \rightarrow -\underline{r}$$

Ισοδυναμεί στις σφαιρικές συντεταγμένες στις αντικαταστάσεις:

$$\begin{cases} r \rightarrow r \\ \theta \rightarrow \pi - \theta \\ \varphi \rightarrow \varphi + \pi \end{cases}$$

- $$e^{\pm i(\phi + \pi)} = -e^{\pm i\phi}$$

- $$\int_0^{2\pi} e^{i\phi} d\phi = 0$$

- $$\sqrt{a+x} \cong \sqrt{a} + \frac{x}{2\sqrt{a}} \quad (\text{σε προσέγγιση πρώτης τάξης})$$

- $$\int_0^{\infty} e^{-\gamma r} r^n dr = \gamma^{-(n+1)} n!$$

<sup>1</sup> Τα ανύσματα συμβολίζονται με υπογράμμισμένα γράμματα.

# ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ ΚΑΙ LASERS

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

**T**ο κοινωνικό φαινόμενο που συνιστά αυτό που λέμε επιστήμη, γενικώς, είναι απαύγασμα μίας διαρκούς αλληλεπίδρασης των προϊόντων των αισθήσεων με το διανοητικό σύστημα του ανθρώπου. Η επιστήμη μπορεί να κάνει προβλέψεις που παρακινούν τους παρατηρητές να ελέγξουν την ορθότητα ή μη των προβλέψεων. Έτσι, λοιπόν το διανοητικό αφενός οικονομεί το μνημονικό και αφετέρου εμπλουτίζει το γνωστικό κατόπιν ελέγχου.

Η ανάπτυξη κανόνων για μία γνωστική περιοχή γίνεται με ταυτόχρονη ανάπτυξη ενός συναφούς εννοιολογικού συστήματος που διευκολύνει την επικοινωνία, όσο και την ευρηματικότητα που διακρίνει την επιστήμη. Το εννοιολογικό σύστημα αφορά στην επεξεργασία των πρωτογενών παρατηρήσεων καθώς και στην διατύπωση των κανόνων που διέπουν την παραγωγή ενός συνόλου γνώσεων από ένα αρχικό ελάχιστο αρχών και πρωταρχικών εμπειριών. Όταν οι κανόνες είναι ευρείας εφαρμογής συνιστούν τους λεγόμενους νόμους.

Η τάση της επιστήμης είναι στην κατεύθυνση της ενοποίησης των νόμων, μίας κατεύθυνσης που αποσκοπεί στην εύρεση εκείνου του

συστήματος των νόμων από το οποίο να προβλέπονται όλα γενικώς τα φυσικά φαινόμενα. Μία τέτοια θεώρηση πραγμάτων οδηγεί στην εύρεση της θεωρίας του παντός. Μην σας φαίνεται παράξενο, η τάση αυτή υπάρχει μεταξύ ερευνητών ασχολούμενων με την θεωρία των στοιχειωδών σωματιών. Όμως το θέμα μας έχει να κάνει με ένα ειδικό στοιχειώδες σωματίδιο, το φωτόνιο, του οποίου την έννοια θα κτίσουμε σταδιακά, και έτσι δεν πρόκειται να μας απασχολήσει η θεωρία του παντός.

Θα ακολουθήσουμε, λοιπόν, μία μετριοπαθέστερη πορεία που θα μας κρατά κοντά στα πειραματικά αποτελέσματα ενώ ταυτόχρονα θα επιδιώξουμε την ανάπτυξη ενός θεωρητικού σχήματος κατάλληλου για την περιγραφή των φαινομένων της ροής της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Στο σχήμα αυτό θα ενταχθεί όχι μόνο η ροή και οι μηχανισμοί παραγωγής και απορρόφησης του φωτός από την ύλη, αλλά θα είναι σε θέση να μας καθοδηγεί στην διαμόρφωση συνθηκών εκμετάλλευσης των δυνατοτήτων που παρέχουν τα φαινόμενα της φωτεινής ροής σε εφαρμογές.

Τα φαινόμενα της οπτικής έχουν να κάνουν κατά κύριο λόγο με την ροή του φωτός και γενικότερα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Όπως είναι γνωστό η ακτινοβολία παράγεται από επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία. Η δυναμική της ακτινοβολίας περιγράφεται από τις εξισώσεις του Maxwell. Η δυναμική των φορτίων περιγράφεται από τις εξισώσεις κίνησης της Μηχανικής, όπως είναι οι εξισώσεις του Νεύτωνα. Δεδομένου ότι η ακτινοβολία από ένα σύστημα φορτίων καθορίζεται από τις κινήσεις των φορτίων, ενώ ταυτόχρονα η ακτινοβολία καθορίζει τις δυνάμεις που ασκούνται από αυτή στα φορτία, η δυναμική της ακτινοβολίας και των φορτίων είναι συνδυασμός των δύο δυναμικών σε αλληλεπίδραση.

Η επίλυση του συνδυασμένου προβλήματος είναι στην πράξη εξαιρετικά δύσκολη. Τα πράγματα απλουστεύονται κάπως αν είναι γνωστές οι κινήσεις των φορτίων καθώς και οι δυνάμεις της ακτινοβολίας στα φορτία. Έτσι το πρόβλημα μπορεί να περιοριστεί στις δύο δυναμικές ξεχωριστά. Επειδή γενικά τα προβλήματα είναι σχεδόν ανεπίλυτα, καταφεύγουμε σε ομοιώτυπα (μοντέλα) όπου τα κύρια χαρακτηριστικά του προβλήματος

---

συσσωματώνονται σε ένα δυναμικό σχήμα πιο επιλύσιμο και έτσι γίνεται πρόοδος.

Ιστορικά πρώτα αναπτύχθηκε η γεωμετρική οπτική. Εδώ το ενδιαφέρον περιορίζεται στη ροή της ακτινοβολίας στα διάφορα μέσα, και ιδιαίτερα στο δρόμο που ακολουθεί η ακτινοβολία κατά την πορεία της, όπως επίσης και η ισχύς της και η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται. Οι διάφοροι νόμοι της γεωμετρικής οπτικής (ανάκλασης, διάθλασης) μπορούν να εξαχθούν από τις κυματικές εξισώσεις που κυβερνούν την δυναμική του ηλεκτρικού πεδίου στα διάφορα μέσα. Ακόμη η περίθλαση και φαινόμενα συμβολής του φωτός τα οποία προκύπτουν από την κυματική μορφή του ηλεκτρικού πεδίου της ακτινοβολίας.

## 1.1 Σωματίδιο, ακτίνα φωτός

Σε ότι αφορά την γεωμετρική οπτική θα πρέπει ίσως να αναφέρουμε ότι ο Hamilton προσδιορίζει την τροχιά του φωτός σε ένα μέσο με εξισώσεις παρεμφερείς προς τις εξισώσεις του για την κίνηση σωματιδίου σε δυναμικό όταν η ενέργεια του σωματιδίου είναι δεδομένη.

Μια και μιλάμε για φως και σωματίδια, την παλιά εποχή ο κόσμος φανταζόταν ότι το μάτι έστελνε φωτεινά σήματα προς ένα αντικείμενο προκειμένου να το δει ο κάτοχος του ματιού. Πρώτος ο Επίκουρος (3ος π.Χ. αιώνας) έκανε τη θεώρηση της σωματιδιακής εκπομπής από το αντικείμενο. Κατά τον Επίκουρο, ένα σώμα εκπέμπει μικρά σωματίδια μέσω εσωτερικών ταλαντώσεων, τα οποία κινούνται σε ευθείες γραμμές και όταν προσπέσουν στα μάτια προκαλούν ερεθίσματα τα οποία το μυαλό επεξεργάζεται σε μορφή ειδώλων.

Η σωματιδιακή θεωρία για την υφή του φωτός επανήλθε με τον Νεύτωνα, ο οποίος την υπερασπιζόταν, αποκρούοντας την εποχή εκείνη την

κυματική υφή που προωθούσε ο Huygens, προβάλλοντας το επιχείρημα ότι αν το φως είχε κυματική φύση θα έπρεπε να είχαμε φαινόμενα παρασκιάς, όπως συμβαίνει με τον ήχο που ακούγεται και πίσω από ένα αντικείμενο μεταξύ της πηγής και του αυτιού. Όντως ο Νεύτωνας δεν είχε τότε επαρκή δεδομένα περίθλασης και συμβολής του φωτός που συνηγόρησαν στην κυματική του φύση, η οποία στη διάρκεια της επικράτειας της ιδέας της συνέχειας είχε γίνει η αποδεκτή θεωρία. Να, όμως που και πάλι τα γεγονότα, όπως το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο με τις θεωρήσεις του Einstein [26] ανέσυραν από την αφάνεια τη σωματιδιακή φύση του φωτός. Ο Einstein φανταζόταν το φως να εκπέμπεται από τις ατομικές πηγές βελονοειδώς. Έχοντας υπόψη τα φαινόμενα συμβολής και το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο συνεβίβασε τη διπλή φύση του φωτός. Παρόμοια κατάσταση ακολούθησε στο μεταξύ και για τα ηλεκτρόνια που αρχικά πιστευόταν να έχουν σωματιδιακή υφή.

Αυτά για την εξέλιξη των ιδεών της διπλής φύσης που συνυπάρχει σε οντότητες του μικρόκοσμου, που αναλόγως των συνθηκών εκδηλώνεται εντονότερα η μία ή η άλλη.

## 1.2 Ηλεκτρικά κύματα

Όπως διαφάνηκε και στην εισαγωγή θα κάνουμε χρήση τόσο της κυματικής όσο και της σωματιδιακής περιγραφής της ηλεκτρομαγνητικής (H/M) ακτινοβολίας. Οι δύο αυτές περιγραφές θα αποσαφηνίζονται σταδιακά με την ανάπτυξη κατάλληλου εννοιολογικού πλαισίου.

Αρχίζουμε με την δυναμική εξίσωση που διέπει το ηλεκτρικό πεδίο στο κενό. Είναι γνωστό από τις εξισώσεις του Maxwell για το κενό (στη περίπτωση που δεν κυκλοφορούν φορτία και ρεύματα) ότι το ηλεκτρικό πεδίο,  $\underline{E}$ , της H/M ακτινοβολίας υπακούει τις εξισώσεις

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \underline{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0 \quad (1.1)$$

όπου  $c$ , η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Η πιο απλή λύση για μονοχρωματική ακτινοβολία είναι η λύση επιπέδου κύματος

$$\underline{E}(x, t) = \underline{E}_o e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t + \delta)} \quad (1.2)$$

με  $\omega^2 = c^2 k^2$  (1.3)

και με  $\underline{E}_o$  να υπακούει τη σχέση

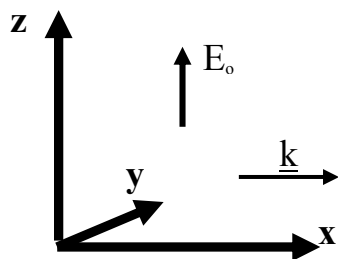
$$\underline{k} \cdot \underline{E}_o = 0 \quad (1.4)$$

πράγμα που σημαίνει ότι το  $\underline{E}_o$  και κατ'επέκταση το  $\underline{E}(x, t)$ , είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\underline{k}$ . Η (1.2) εκφράζει μιγαδική ποσότητα και ως εκ τούτου δεν μπορεί να παριστάνει ηλεκτρικό πεδίο που είναι πραγματικό μέγεθος. Όμως τόσο το πραγματικό της μέρος  $\underline{E}_o \cos(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t + \delta)$  όσο και το φανταστικό της μέρος  $\underline{E}_o \sin(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t + \delta)$  συνιστούν λύσεις που διαφέρουν κατά το όρισμα. Είναι οι ίδιες με διαφορετικά  $\delta$ . Για το ηλεκτρικό πεδίο θα παίρνουμε το πραγματικό μέρος, αλλά θα χρησιμοποιούμε την (1.2) χάριν της μαθηματικής ευκολίας που παρέχει γενικά η μιγαδική μορφή. Το  $E_o$  είναι το πλάτος του κύματος και το όρισμα του εκθετικού στη (1.2), ή των αντιστοίχων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, λέγεται φάση του κύματος.

Για δεδομένη θέση  $\underline{x}$  θα μπορούσατε να σχεδιάσετε το πώς μεταβάλλεται ημιτονοειδώς (δεν σας πειράζει αν θεωρείτε το συνημίτονο) με το χρόνο με κυκλική συχνότητα  $\omega$ . Αυτή είναι η συχνότητα μονοχρωματικού κύματος. Το ηλεκτρικό πεδίο ταλαντούται με περίοδο  $T = 2\pi/\omega$ . Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε για δεδομένο χρόνο  $t$  να δείτε πώς μεταβάλλεται το ηλεκτρικό πεδίο από μία θέση σε άλλη. Ακόμη από την τριγωνομετρική μορφή θα διαπιστώσετε ότι για την ίδια φάση, όποια και να είναι η θέση ή ο χρόνος, θα έχετε την ίδια τιμή για το ηλεκτρικό πεδίο. Είναι εύκολο να δείτε ότι για δεδομένο χρόνο  $t$  τα σημεία του χώρου με την ίδια φάση και ως εκ τούτου με την ίδια τιμή του ηλεκτρικού πεδίου, κείνται όλα σε ένα επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα  $\underline{k}$  που επαληθεύει την εξίσωση

$$\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t + \delta = \text{σταθερό} \quad (1.5)$$

Εξ' ου και η ονομασία επίπεδο κύμα. Δεδομένου ότι το  $\underline{k}$  είναι κάθετο στο επίπεδο των σημείων με την ίδια φάση, η διάδοση του ισοφασικού επιπέδου γίνεται στην κατεύθυνση του διανύσματος  $\underline{k}$  το οποίο συνιστά την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος. Μπορείτε εύκολα να δείτε ότι για δεδομένο  $t$  αν πάρετε το  $x$  στην κατεύθυνση του διανύσματος διάδοσης του κύματος θα βρείτε και πάλι ότι το ηλεκτρικό πεδίο μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με την προβολή του  $x$  παράλληλα στο  $\underline{k}$ .



**Σχήμα 1-1.** Γεωμετρία πλάτους ηλεκτρικού κύματος  $\underline{E}_0$  και διεύθυνσης διανύσματος διάδοσης  $\underline{k}$ .

Για να ευκολύνουμε τα πράγματα θα πάρουμε το  $\underline{k}$  στη κατεύθυνση του άξονα των  $x$ ,  $\underline{k} = k\hat{x}$ , κάθετο προς το πλάτος του κύματος και τα διάφορα ισοφασικά επίπεδα, σχήμα 1.1.

Πέστε τώρα ότι το οδεύον κύμα τη στιγμή  $t$  έχει φθάσει στην θέση  $x$  και η φάση του είναι  $\phi = kx - \omega t + \delta$ . Σε χρόνο  $\Delta t$  θα προχωρήσει κατά  $\Delta x$ . Προκειμένου η φάση του να παραμένει η ίδια θα πρέπει τα  $\Delta x$  και τα  $\Delta t$  να υπακούουν στην σχέση

$$k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t) + \delta = kx - \omega t + \delta \quad (1.6)$$

Από την σχέση (1.6) συνάγεται ότι το ισοφασικό μέτωπο κινείται με ταχύτητα  $v$  (ταχύτητα φάσης)

$$v = \Delta x / \Delta t = \omega / k = (\lambda / T) = c \quad (1.7)$$

Την πιο πάνω σχέση θα μπορούσατε βέβαια να είχατε συνάγει και από τις εικόνες των ημιτονοειδών εκφράσεων των χωρικών και χρονικών μεταβολών ως τον λόγο της χωρικής,  $\lambda$ , προς την χρονική περίοδο,  $T$ . Η κατεύθυνση κατά την οποία πάλλεται το ηλεκτρικό πεδίο  $E_0$ , λέγεται πόλωση του κύματος.

Κάναμε όλη την πιο πάνω, κάπως πολύλογη, ανάλυση προκειμένου να δούμε την σημασία που έχει η φάση στα κυματικά φαινόμενα, χρησιμοποιώντας ως όχημα την απλή περίπτωση του μονοχρωματικού επιπέδου κύματος. Ταυτόχρονα όμως κτίσαμε και ένα μέρος του εννοιολογικού πλαισίου στο οποίο θα μπορούσαμε να εδράσουμε τις περαιτέρω θεωρήσεις μας.

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η κυματική φύση του φωτός για την μελέτη των φαινομένων περίθλασης και συμβολής. Στα φαινόμενα συμβολής η φάση είναι καθοριστικής σημασίας. Όταν δύο μονοχρωματικά κύματα της αυτής συχνότητας και με παράλληλη πόλωση συγκλίνουν σε μία περιοχή εκεί που οι φάσεις συμπίπτουν έχουμε ενίσχυση της ακτινοβολίας. Αυτό συμβαίνει διότι η συνισταμένη των πλατών είναι μεγάλη, ενώ όταν οι φάσεις



διαφέρουν αυτή μικραίνει. Για περιοχές όπου η συμβολή γίνεται με ίσα πλάτη της αυτής πολώσεως και με διαφορά φάσεως κατά  $\pi$ , η ακτινοβολία εκμηδενίζεται.

Όπως γνωρίζουμε η πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου. Πέστε τώρα ότι το πλάτος του κάθε ενός από τα συμβάλλοντα κύματα είναι  $E_0$ . Ανάλογα με την διαφορά φάσεως θα σχηματιστούν περιοχές έντονης πυκνότητας ακτινοβολίας και περιοχές αμυδρής πυκνότητας. Εκεί που έχουμε ισοφασική συμβολή και με την ίδια πόλωση το συνιστάμενο πλάτος θα είναι  $2E_0$  ενώ εκεί που έχουμε διαφορά φάσεως  $\pi$  το αντίστοιχο πλάτος θα είναι μηδέν. Τώρα εύλογα τίθεται το ερώτημα του ισολογισμού της ενέργειας. Αν τα κύματα δεν συνέβαλλαν η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια στην περιοχή όπου συντρέχουν θα ήταν ανάλογη του  $2E_0^2$  απλωμένη ομαλά. Όταν συμβάλλουν στη θέση μέγιστης ακτινοβολίας το πλάτος είναι  $2E_0$  που σημαίνει τετραπλάσια πυκνότητα ενέργειας. Σαφώς δεν έχουμε παραβίαση της διατήρησης της ενέργειας με την συμβολή, δεδομένου ότι στις θέσεις ελαχίστου η πυκνότητα μηδενίζεται ενώ μεταξύ των δύο ακραίων καταστάσεων έχουμε κάτι ενδιάμεσο παρόλο ότι τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά και χρειάζεται περισσότερη διευκρίνηση. Συνολικά έχουμε μία ανακατάταξη στην πυκνότητα ενέργειας με διατήρηση της ενέργειας.

Στο επόμενο εδάφιο θα συζητήσουμε για ιδιότητες της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από διάφορες πηγές.

### **1.3 Πηγές ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας**

Είναι γνωστό ότι τα μακροσκοπικώς επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία παράγουν ακτινοβολία. Εφόσον η ακτινοβολία μεταφέρει ενέργεια, το έργο που προσδίδεται στα φορτία για την επιτάχυνση τους πρέπει να είναι

μεγαλύτερο από ότι χρειάζεται για να αποκτήσουν δεδομένη επιτάχυνση, προκειμένου να αντισταθμίζεται η ακτινοβολούμενη ενέργεια. Τα μήκη κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας είναι της τάξεως μέτρων, δεκάδων μέτρων ή και εκατοντάδων και άνω μέτρων. Με κυματοδηγούς πάμε σε μικρότερα μήκη κύματος, κλάσματα του εκατοστού. Για μικρότερα μήκη κύματος έχουμε τις ατομικές πηγές με εκπομπές από υπέρυθρο ( $10^{-6}$ - $10^{-5}$  m) ως τις ακτίνες X (τάξη Å). Ένα διεγερμένο άτομο σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα (ενδεικτικά της τάξης των  $10^{-8}$ s, μεταπίπτει στη θεμελιώδη κατάσταση, αποδιεγείρεται). Η διέγερση του ατόμου προκαλείται από πρόσδωση εξωτερικής ενέργειας σε τουλάχιστο ένα από τα ηλεκτρόνια το οποίο μεταβαίνει σε υψηλότερη ενεργειακή κατάσταση. Η τάση, όμως της φύσεως είναι το άτομο να επανέλθει στη θεμελιώδη κατάσταση που ενεργειακά είναι η χαμηλότερη ευσταθής. Κατά τη μετάβαση του ηλεκτρονίου από τη υψηλότερη στη χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη φεύγει ενέργεια από το άτομο υπό μορφή H/M ακτινοβολίας. Η εκπομπή της ακτινοβολίας γίνεται προς μία κατεύθυνση ως ένας συρμός. Ο συρμός αυτός της ακτινοβολίας συνιστά ένα φωτόνιο. Η ενέργεια του φωτονίου είναι κατά τι μικρότερη της ενεργειακής διαφοράς μεταξύ των σταθμών από όπου έγινε η μετάπτωση του ηλεκτρονίου. Σε πολύ μεγάλη προσέγγιση η σταθμική διαφορά ενέργειας ισούται με την H/M ενέργεια που φέρει το εκπεμπόμενο φωτόνιο. Η μικρή διαφορά ενέργειας μεταξύ της σταθμικής διαφοράς και αυτής του φωτονίου οφείλεται στη κατευθυνόμενη εκπομπή του φωτονίου το οποίο και μεταφέρει μία δόση ορμής για τη διατήρηση της οποίας στο σύστημα ατόμου φωτονίου, θα πρέπει το άτομο να κινηθεί (αναδράμει) με αντίθετη ορμή. Στην ορμή αυτή αντιστοιχεί μία μικρή κινητική ενέργεια του ατόμου, πράγμα που συνιστά τη διαφορά της φωτονικής και σταθμικής διαφοράς ενέργειας. Σε άλλο σημείο θα δώσουμε περισσότερες λεπτομέρειες. Στη περίπτωση των ατόμων, αυτό που ισχύει για τα μακροσκοπικώς επιταχυνόμενα φορτία δεν ισχύει πάντοτε. Και αυτό συμβαίνει όταν τα ηλεκτρόνια των ατόμων βρίσκονται σε ιδιοκαταστάσεις.

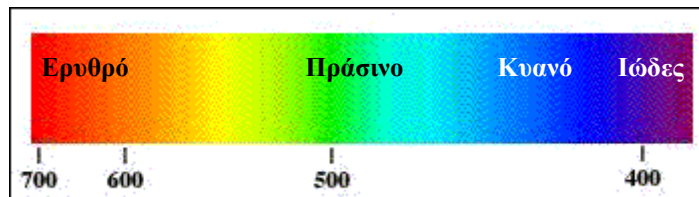
Στις περιπτώσεις αυτές, παρά το ότι τα ηλεκτρόνια έχουν επιτάχυνση δεν εκπέμπουν H/M ακτινοβολία.

Προκειμένου να διευκολύνουμε τη παραπέρα συζήτηση θα θεωρήσουμε το απλούστερο άτομο, το άτομο του υδρογόνου, με ένα ηλεκτρόνιο. Το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου στη θεμελιώδη κατάσταση, σε κλασική περιγραφή κάνει περίπου  $10^{16}$  στροφές/s ( $= \omega$ ) περί το πυρήνα. Έχοντας υπόψη την ακτίνα Bohr,  $a \cong 0.52 \times 10^{-10}$  m, θα βρείτε μία κεντρομόλο επιτάχυνση,  $a\omega^2$ , της τάξης του  $10^{22}$  m/s<sup>2</sup>. Παρά τη φοβερή αυτή επιτάχυνση το άτομο δεν ακτινοβολεί. Ομοίως, δεν ακτινοβολεί και σε διεγερμένη ιδιοκατάσταση. Αυτό μας διδάσκει η κβαντική μηχανική. Αν θέλετε να αναζητήσετε μία ερμηνεία του φαινομένου σε ηλεκτρομαγνητικές θεωρήσεις, θα πρέπει να φανταστείτε στο ατομικό επίπεδο ότι οι ιδιοκατάσεις πραγματοποιούνται με καταστροφική συμβολή. Αυτού του είδους οι θεωρήσεις δεν είναι της ώρας και είναι προσφορότερο να κάνουμε χρήση των κανόνων της κβαντικής μηχανικής.

Για την ώρα θα αφήσουμε τις ατομικές εκπομπές και θα πάμε σε ακόμη μικρότερα μήκη κύματος, τις ακτίνες-γ κάτω του χιλιοστού του Å. Σ' αυτή την τάξη μήκους κύματος η H/M ακτινοβολία παράγεται κατά τις αποδιεγέρσεις πυρήνων. Σκληρότερες ακόμη ακτίνες-γ παράγονται σε αντιδράσεις στοιχειωδών σωματίων, όπως π.χ. την εξαύλωση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου. Στο σχήμα 1-2 παρουσιάζεται το ορατό φάσμα της H/M ακτινοβολίας, από μήκος κύματος 0.4 έως 0.8μm περίπου.

Στα πιο κάτω θα περιορίσουμε τη συζήτηση στην περίπτωση εκπομπών και απορροφήσεων φωτονίων από ατομικές αποδιεγέρσεις και διεγέρσεις αντίστοιχα. Και αυτό διότι οι υφιστάμενοι lasers στο παρόν στάδιο ανάπτυξης της τεχνολογίας στηρίζονται σε ατομικές διεργασίες. Υπάρχουν σχέδια για lasers από πυρηνικές διεργασίες οι λεγόμενοι grasers (η ονομασία προέρχεται από τις ακτίνες -γ, gamma-rays στα αγγλικά) αλλά είμαστε ακόμη μακριά στο χρόνο, λόγω των πολύ μικρών κοιλοτήτων συντονισμού που απαιτούνται για την πραγμάτωση των grasers.

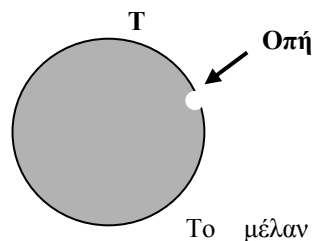
Στο επόμενο εδάφιο θα συζητήσουμε μία άλλη πηγή φωτός, το μέλαν σώμα, η μελέτη της ακτινοβολίας του οποίου σηματοδότησε την απαρχή της κβαντικής μηχανικής στην αρχή του περασμένου αιώνα.



Σχήμα 1-2 Το ορατό φάσμα της Η/Μ ακτινοβολίας (σε nm)

#### 1.4 Ιδιότητες του φωτός από μέλαν σώμα.

Ένα θερμό υλικό με διεργασία αποδιεγέρσεως ατόμων, (σχήμα 2-4), ακτινοβολεί ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η ενέργεια αυτή εκπέμπεται σε ένα φάσμα μηκών κύματος τα οποία είτε τα παρατηρούμε σαν ορατό φως, σχήμα 1-2, είτε μας δίνουν το συναίσθημα θερμότητας ενώ άλλα μήκη κύματος καταγράφονται σε κατάλληλες συσκευές σαν ακτίνες X, υπεριώδεις ακτινοβολία ή ραδιοκύματα, σχήμα 1-4. Όλες αυτές οι ακτινοβολίες αποτελούν το ίδιο φαινόμενο που διαφέρει μόνο ως προς το μήκος κύματος, ή τη συχνότητα.



Σχήμα 1-3. Κοιλότητα μέλανος σώματος. Το εσωτερικό τοίχωμα της κοιλότητας βρίσκεται σε σταθερή θερμοκρασία  $T$ . Η αναπτυσσόμενη Η/Μ ακτινοβολία εξέρχεται από μία μικρή οπή.

σώμα απορροφά πλήρως την ακτινοβολία σε όλα τα μήκη κύματος και ακτινοβολεί με τον ίδιο τρόπο την ίδια ενέργεια εφόσον βρίσκεται σε θερμική ισορροπία. Ένας τρόπος για να διατηρήσουμε την ακτινοβολία σε θερμική ισορροπία προκειμένου να τη μελετήσουμε είναι να δημιουργήσουμε μία κοιλότητα σε ένα σώμα σε σταθερή θερμοκρασία. Για παρατηρήσουμε την ακτινοβολία αυτής της κοιλότητας ανοίγουμε μία μικρή οπή στο πλάι της, πολύ μικρότερη από το μέγεθος του σώματος, σχήμα 1.3 ώστε η θερμική ισορροπία να μην διαταράσσεται. Παρατηρούμε έτσι την ακτινοβολία που διαφεύγει από την οπή που είναι η ακτινοβολία μέλανος σώματος εφόσον η κοιλότητα απορροφά την ακτινοβολία 100%.

Μία αέρια μάζα μεγάλων διαστάσεων, όπως π.χ. η φωτόσφαιρα του ήλιου, συμπεριφέρεται σε όλη την επιφάνεια της ως μέλαν σώμα. Λόγω του μεγάλου βάθους η απ' έξω εισερχόμενη ακτινοβολία απορροφάται πλήρως και έχουμε ένα φάσμα θερμικά παραγόμενης ακτινοβολίας εξερχόμενης από την όλη επιφάνεια, ενώ το σύστημα της εντός ακτινοβολίας και ύλης είναι σε θερμική ισορροπία.

Ακούγοντας εκπομπή από μέλαν σώμα το μυαλό πάει σε εκπομπή στην αόρατη περιοχή της ακτινοβολίας. Και όμως, ο όρος μέλαν σώμα χρησιμοποιείται για ιδανικό σύστημα το οποίο μπορεί να εκπέμπει και να απορροφά σε ευρύ φάσμα ακτινοβολίας. Ο λόγος που ονομάστηκε μέλαν σώμα οφείλεται σε ένα τρόπο πραγματώσεως του, που συνίσταται σε μία κοιλότητα της οποίας το εσωτερικό τοίχωμα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία με το περιεχόμενο. Στην κοιλότητα υπάρχει μία μικρή οπή για τη παρατήρηση της ακτινοβολίας (σχήμα 1-3). Κοιτάζοντας την οπή φαίνεται μαύρη έναντι του περιβάλλοντος. Ιδίως όταν η κοιλότητα είναι ψυχρή η ορατή ακτινοβολία που φτάνει στην οπή διέρχεται προς το εσωτερικό, όπου και απορροφάται, και έτσι η οπή φαίνεται σκοτεινή.

Ουσιαστικά η συσκευή μας δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας φούρνος με μικρό στόμιο. Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν εισάγουμε στον φούρνο ενέργεια. Π. χ. Έχουμε ηλεκτρικές αντιστάσεις που διαρρέονται από ηλεκτρικό ρεύμα. Αυτό που συμβαίνει είναι να έχουμε διεγέρσεις ατόμων

μέσω της παρεχόμενης ενέργειας τα οποία αποδιεγειρόμενα συντείνουν στην αύξηση του ρυθμού εκπομπής στη κοιλότητα. Αυτό σημαίνει πύκνωση της ακτινοβολίας. Ταυτόχρονα όμως, τα φωτόνια που συνιστούν την ακτινοβολία στη κοιλότητα και τα οποία κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις απορροφώνται και αυτά προκαλούν διεγέρσεις στα άτομα της κοιλότητας. Τα άτομα αυτά επανεκπέμπουν κυρίως στη συχνότητα που έχουν απορροφήσει. Έτσι, έχουμε μία διαρκή απορρόφηση και εκπομπή ακτινοβολίας. Εφόσον η θερμοκρασία του φούρνου ανεβαίνει αυτό σημαίνει ότι σε δεδομένο χρονικό διάστημα έχουμε συνολική εκπεμπόμενη ενέργεια ακτινοβολίας μεγαλύτερη παρά απορροφούμενη. Τώρα τι γίνεται όταν συνεχίζουμε να ρίχνουμε ενέργεια στο φούρνο; Θάλεγε κανείς ότι η ακτινοβολία θα πυκνώνει αδιακόπως. Όμως ξεχάσαμε το γεγονός ότι έχουμε και απώλειες. Μέρος της εισαγόμενης ενέργειας, όταν η ακτινοβολία πυκνώνει, φεύγει από τα τοιχώματα του φούρνου προς το περιβάλλον. Μάλιστα, λόγω της διαφυγής αυτής προκειμένου να διατηρήσουμε τη θερμοκρασία του φούρνου σε δεδομένη τιμή (που αντιστοιχεί σε δεδομένη πυκνότητα ακτινοβολίας) θα πρέπει να εισάγουμε ενέργεια στο σύστημα με ρυθμό ίσο προς το ρυθμό απωλειών. Σε κατάσταση ισορροπίας η πυκνότητα ακτινοβολίας παραμένει ουσιαδώς σταθερή και μάλιστα όπως θα δούμε, για κάθε συχνότητα όσα φωτόνια δεδομένης συχνότητας απορροφούνται σε χρόνο  $\Delta t$  τόσα και εκπέμπονται στο εσωτερικό της κοιλότητας. Βέβαια για πάρα πολύ μικρά χρονικά διαστήματα έχουμε αποκλίσεις από την ισότητα της εκπεμπόμενης και απορροφούμενης ενέργειας ακτινοβολίας, πράγμα που οδηγεί σε μικρές διακυμάνσεις στη πυκνότητα ακτινοβολίας. Η μέση όμως τιμή της για μακρύτερα διαστήματα παραμένει σταθερή.

Πειράματα που είχαν γίνει περί το τέλος του 19<sup>ου</sup> αιώνα συναφώς προς την πυκνότητα ακτινοβολίας ενέργειας μέλανος σώματος οδήγησαν τον Wien (1896) στην διαπίστωση ότι η μέγιστη πυκνότης ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας συμβαίνει σε δεδομένη συχνότητα,  $\omega_\mu$ , (σε c/s), η οποία μετατοπίζεται αναλόγως της θερμοκρασίας του φούρνου,  $\omega_\mu \propto T$ .

Ταυτόχρονα ο Wien προσπάθησε να δώσει ένα τύπο κατανομής της πυκνότητας ενέργειας, για δεδομένη θερμοκρασία  $T$ , συναρτήσει της συχνότητας και κατέληξε στη μορφή

$$\rho_{\omega}(\omega, T) = a\omega^3 / e^{b\omega/T} \quad (1.8)$$

Όπου  $b$  παράμετρος προσδιοριζόμενη από το πείραμα [16]. Γράφοντας το εκθετικό στον τύπο του Wien στον αριθμητή και με βάση τη γνώση που έχουμε μετά τον Planck το εκθετικό όρισμα θα πρέπει να είναι  $\hbar\omega/kT$  και ως εκ τούτου η έκφραση (1-8) αποδίδει στην ακτινοβολία στατιστική Boltzmann.

Ο τύπος του Wien παρουσίαζε δυσκολίες. Δεν ανταποκρινόταν στη μετατόπιση του  $\omega_{\mu}$  με τη θερμοκρασία. Πηγαίνει καλά στις υψηλές συχνότητες στο υπέρυθρο, υπήρχαν όμως δυσκολίες στις χαμηλές συχνότητες, όπου το  $\rho(\omega, T) \propto \omega^2 T$ . Στο σημείο αυτό έρχεται ο Planck (1900), ο οποίος αναζητώντας μία σωστότερη έκφραση της ακτινοβολίας που να προκύπτει από αυστηρά επιστημονική απόδειξη και χρησιμοποιώντας τη στατιστική Boltzmann παρήγαγε κάτι ανάλογο προς τον τύπο [15, 16]

$$\rho(\omega, T)d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (1.9)$$

για την πυκνότητα ενέργειας μεταξύ των συχνοτήτων  $\omega$  και  $\omega + d\omega$ . Εδώ εισέρχεται η σταθερά του Planck,  $h = 2\pi\hbar$  όπου  $\hbar = 1.05458866 Js$ . Ο Planck στη συνέχεια επιχειρεί να δικαιολογήσει τον τύπο του. Παρακάτω σκιαγραφούμε ένα από τους τρόπους που μετέλθε, ιδιαίτερα αξιοσημείωτο, καθότι σ' αυτόν εδράζεται η απαρχή της κβαντικής μηχανικής. Ο Planck υπέθεσε ότι η ακτινοβολία στη συχνότητα  $\omega$  εκπέμπεται κατά τεμάχια ενέργειας  $\hbar\omega$  από ταλαντωτές στα τοιχώματα του φούρνου. Η εικόνα εκπομπής φωτός από ταλαντωτές υπήρξε κατά πρώτο στον Επίκουρο (3<sup>ος</sup> π.χ. αιών) στη θεωρία του για το πώς βλέπουμε τα διάφορα σώματα. Μάλιστα ο Επίκουρος υπέθεσε ότι οι ταλαντωτές εξέπεμπαν σωματίδια που

εκινούνται σε ευθείες γραμμές, αυτά που περίπου θα λέγαμε σήμερα φωτόνια. Όταν τα σωματίδια έφταναν στο μάτι οι διεγέρσεις τους έδιναν την αίσθηση της οράσεως των αντικειμένων όπου δρουν οι δονούμενοι μικροταλαντωτές.

Επανερχόμεθα στον Planck. Ο Planck έκανε το άλμα να υποθέσει ότι για τον ταλαντωτή φυσικής συχνότητας  $\omega$  οι ενέργειες που μπορεί να έχει ήταν  $0, \hbar\omega, 2\hbar\omega, \dots, n\hbar\omega, \dots$ . Εδώ έχουμε, μαζί με την τεμαχιστή εκπομπή, τη σπορά της κβαντικής μηχανικής. Παρεμπιπτόντως, το ενεργειακό φάσμα που προκύπτει από την εξίσωση του Schrödinger διαφέρει ελάχιστα, κατά  $\hbar\omega/2$ . Ο Planck υποχρεώθηκε εκ των πραγμάτων να υποθέσει την βηματική φύση του ενεργειακού φάσματος, διότι δεν έβγαινε το αποτέλεσμα που ήθελε με την υπόθεση της συνεχείας στην ενέργεια. Όμως, το ενεργειακό περιεχόμενο της κοιλότητας θεωρούσε συνεχές, παρά το ότι οι ταλαντωτές έπαιρναν και έδιναν ενέργεια με το τεμάχιο. Ο George Gamow (πρώτος ερμηνευτής του φαινομένου σήραγγος) λέει για τον Planck τα εξής: Μιά και άφησε το πνεύμα του κβάντου να βγει από τη μπουκάλα φοβήθηκε να πάει πιο πέρα και θεωρούσε την ακτινοβολία σαν βούτυρο που έφευγε ή ερχόταν στον μπακάλη σε πακέτα, αλλά από την άλλη θα μπορούσε να ήταν σε οποιαδήποτε συνεχή ποσότητα.

Ας δούμε πως ο Planck χρησιμοποίησε την υπόθεση των ταλαντωτών για να καταλήξει στον τύπο της ακτινοβολίας. Σε κατάσταση ισορροπίας σε θερμοκρασία  $T$  τόσο οι ταλαντωτές δεδομένης συχνότητας  $\omega$ , όσο και ακτινοβολία στην ίδια συχνότητα βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία ξεχωριστά. Ανταλλάσσουν σε δεδομένο διάστημα ενέργεια στη συχνότητα αυτή, αλλά ότι δίνει η ακτινοβολία στους ταλαντωτές τόσο παίρνει και τανάπαλιν. Η ενεργειακή κατανομή των ταλαντωτών θα πρέπει να έχει την ίδια μορφή με την ενεργειακή κατανομή της ακτινοβολίας.

Για τους ταλαντωτές κάνουμε χρήση στατιστικής Boltzmann. Η μέση ενέργεια που φέρει ταλαντωτής συχνότητας  $\omega$ , σε κατάσταση ισορροπίας σε θερμοκρασία  $T$ , δίνεται



$$E(\omega, T) = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/kT} n\hbar\omega \quad (1.10)$$

$$\text{όπου} \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/kT} \quad (1.11)$$

Η σειρά  $Z$ , συνάρτηση επιμερισμού, δεν είναι τίποτε άλλο παρά η γεωμετρική πρόοδος που οδηγεί στην έκφραση  $Z = 1/(1 - e^{-\hbar\omega/kT})$ . Η δε άλλη σειρά που εμπεριέχει τον παράγοντα  $n\hbar\omega$  λαμβάνεται από την  $Z$  ως  $-kT\partial Z/\partial(\hbar\omega/kT)$ . Με τις υποδείξεις αυτές προχωρούμε στο αποτέλεσμα

$$E(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (1.12)$$

για τη μέση τιμή ενέργειας ανά ταλαντωτή.

Τώρα η πυκνότητα των ταλαντωτών για κάθε συχνότητα εξαρτάται από των πυκνότητα των υποδοχέων  $H/M$  ακτινοβολίας στην συχνότητα μεταξύ  $\omega$  και  $\omega + d\omega$  που δίνεται από  $\omega^2 d\omega/\pi^2 c^3$ . Έτσι, λοιπόν, η ζητούμενη πυκνότητα ακτινοβολίας δίνεται από το γινόμενο της πυκνότητας υποδοχέων επί την μέση ενέργεια  $E(\omega, T)$  και λαμβάνουμε τον τύπο του Planck (σελίδα 28).

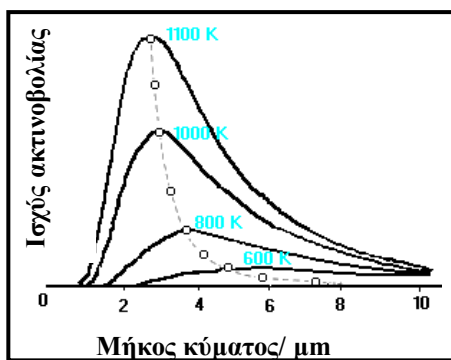
Όπως καταλαβαίνετε ο ρόλος των ταλαντωτών του Planck στον φούρνο παίζει τον ρόλο των ατόμων. Οι ταλαντωτές τρόπον τινά προσομοιώνουν τα άτομα. Όπως, θα δούμε στα επόμενα ο Einstein εισάγει ειδικούς μηχανισμούς αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας με την ύλη [11], και εκεί μάλιστα θεωρεί την ακτινοβολία στην κοιλότητα και παντού να έχει σωματιδιακή μορφή βασιζόμενος ακριβώς στο κβαντικό χαρακτήρα της ακτινοβολίας, μία έννοια που ο Planck απέφευγε να χρησιμοποιήσει. Στο παρόν εδάφιο τελειώνουμε με το ότι σε θερμοδυναμική ισορροπία η ακτινοβολία στην κοιλότητα μπορεί να αναλυθεί σε στάσιμα κύματα, των οποίων η δυναμική περιγραφή δίνεται από ταλαντωτές όπου κατ' ευθείαν

---

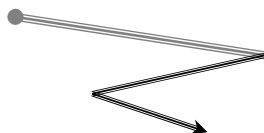
μπορεί να εφαρμοστεί η πιο πάνω διαδικασία, η οποία για τα φωτόνια όπως βλέπετε, από τον τύπο (1-12) οδηγεί σε στατιστική Bose-Einstein. Εύλογα γεννάται το ερώτημα πώς μέσω των ταλαντωτών όπου εφαρμόζουμε στατιστική Boltzmann οδηγούμεθα σε στατιστική Bose; Μα τα διάφορα ενεργειακά τεμάχια για δεδομένη συχνότητα είναι ίσα και μη διακριτά.

Η διατύπωση των μηχανισμών αυτών από τον Einstein, άνοιξε το δρόμο για την κατασκευή των μηχανών φωτός, δηλαδή την κατασκευή του laser, κάτι που οι επιστήμονες πέτυχαν με πολλές προσπάθειες μελετώντας τη δυναμική των φορτίων της ύλης σε σύζευξη με τη δυναμική της H/M ακτινοβολίας του laser. Η ακτινοβολία laser χαρακτηρίζεται από μονοχρωματική ροή ακτινοβολίας σε υψηλή εν γένει πυκνότητα σε συμφωνία. Η ακτινοβολία μέλανος σώματος είναι πολυχρωματική και τα διάφορα φωτόνια που διατρέχουν την κοιλότητα έχουν τυχαίες φάσεις. Με κοιλότητα μέλανος σώματος αν υψώσουμε τη θερμοκρασία μπορούμε να πυκνώσουμε την ακτινοβολία που εξέρχεται από την οπή και αν κάνουμε χρήση φίλτρου μπορούμε να πάρουμε πυκνή μονοχρωματική ακτινοβολία, αλλά όχι σύμφωνη, λόγω της τυχαιότητας των φάσεων σε δεδομένη θέση. Το φίλτρο θα πετύχει μονοχρωματικότητα αλλά θα μειώσει την αρχική ακτινοβολία μέλανος σώματος σημαντικά. Τη μονοχρωματική αυτή ακτινοβολία μέλανος σώματος μπορούμε επι πλέον να τη κάνουμε σύμφωνη και κατευθυνόμενη με κατάλληλο σύστημα φακών και πετάσματος με μικρή οπή. Αλλά ενώ τώρα η ακτινοβολία μέλανος σώματος θα έχει αποκτήσει τα τρία χαρακτηριστικά του laser, συμφωνία, μονοχρωματικότητα και κατευθυντικότητα θα υστερεί σημαντικά ως προς το τρίτο: τη ένταση της. Η δέσμη laser όμως χαρακτηρίζεται συγχρόνως και από τις τέσσερις ιδιότητες: μονοχρωματικότητα, συμφωνία, κατευθυντικότητα και λαμπρότητα. Το πύκνωμα της ακτινοβολίας στο μέλαν σώμα δεν είναι απερίοριστο διότι η θερμοκρασία δεν μπορεί να υψώνεται επ' άπειρον χωρίς η συσκευή να καταστραφεί. Πάρα πολλά μέταλλα τήκονται σε θερμοκρασία έως και 2000 K.

Σε ότι ακολουθεί θα δούμε πώς είναι δυνατό να δημιουργήσουμε δέσμη laser καθώς και τους μηχανισμούς αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας με ατομική ύλη που ευνοούν τη πύκνωση σύμφωνης μονοχρωματικής ακτινοβολίας.



Σχήμα 1-4. Φασματική κατανομή ισχύος ακτινοβολίας μέλανος σώματος



## 2. ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΜΕ ΥΛΗ

### 2.1 Προκαταρκτικά



Θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε ιδιαιτερότητες των ηλεκτρικών φορτίων έναντι των βαρυτικών μαζών. Τα φορτία, σε αντίθεση προς τις μάζες δεν αρέσκονται να φορτώνονται κινητική ενέργεια. Βάλτε μια δύναμη, σταθερή, για ευκολία, να σπρώχνει ένα σωματίδιο με μόνο μάζα, σχ. 2.1. Θα δείτε το έργο που κάνει η δύναμη να γίνεται κινητική ενέργεια. Κάντε, τώρα, το ίδιο με σωματίδιο που φέρει φορτίο, σχ. 2.2. Θα δείτε, τώρα, ότι το σωματίδιο αποκτά μικρότερη κινητική ενέργεια από αυτή που αντιστοιχεί σε δεδομένο χρόνο, διότι το επιταχυνόμενο σωματίδιο εκπέμπει καθ' οδόν H/M ενέργεια, τόση όση είναι η διαφορά αυτής που θα είχε χωρίς φορτίο πλην αυτή που του απέμεινε. Οπωσδήποτε το φορτίο ενεργεί κατά τρόπο που να διατηρείται η ενέργεια. Για να δούμε τι γίνεται και με την ορμή; Εκ πρώτης όψεως, ο νόμος που καθορίζει τη δύναμη

$$\frac{dP}{dt} = F \quad (2.1)$$

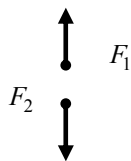
φαίνεται να παραβιάζεται μια και μας δίνει ορμή για τη στιγμή  $t$ ,  $\underline{p}_o + \underline{F}t$ , η οποία αντιστοιχεί σε κινητική ενέργεια,  $(\underline{p}_o + \underline{F}t)^2/2m$ , μεγαλύτερη από αυτή που στη πράξη βλέπουμε λόγω των εκπομπών. Ο νόμος είναι εν τάξει, απλώς εμείς δεν τον εφαρμόσαμε στο όλο σύστημα φορτίου-ακτινοβολίας προς την οποία ακτινοβολία μαζί με τη ροή ενέργειας εκρέει και ορμή με ρυθμό  $d\underline{p}_{εκ}/dt$ . Έτσι, γράφουμε

$$\frac{d}{dt}(\underline{p} + \underline{p}_{\varepsilon\kappa}) = \underline{F} \quad (2.2)$$

και είμαστε εν τάξει. Αν μετασχηματίσετε την (2.2) κρατώντας στο αριστερό μέλος της μόνο τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σωματιδίου,  $d\underline{p}/dt$ , τότε στο δεξιό μέλος θα εμφανιστεί το  $-d\underline{p}_{\varepsilon\kappa}/dt$  ως δύναμη. Η δύναμη αυτή ασκείται από την ακτινοβολία στο σωματίδιο μας ως η αντίδραση της δυνάμεως  $d\underline{p}_{\varepsilon\kappa}/dt$  μέσω της οποίας το φορτίο μεταφέρει ενέργεια στην ακτινοβολία.

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = -\frac{d\underline{p}_{\varepsilon\kappa}}{dt} + \underline{F} \quad (2.3)$$

Τέλος, υπό ορισμένες συνθήκες είναι ενδεχόμενο να έχουμε ροή ενέργειας από την ακτινοβολία προς το φορτίο με αντίθετους ρυθμούς ροής ορμής.



**Σχήμα 2-1** Δύο εσωτερικές ίσες και αντίθετες δυνάμεις

Η ιστορία μας δεν διαφέρει και πολύ από αυτή όπου θα είχαμε, με μια μπάλα η οποία υπό την επίδραση της βαρύτητας πέφτει στο κενό. Σε ορισμένο χρόνο θα αποκτήσει δεδομένη ταχύτητα, χωρίς απώλειες. Αποκτά όλη την κινητική ενέργεια που πήρε ως έργο από την δύναμη της βαρύτητας. Φανταστείτε τώρα την μπάλα να πέφτει υπό την επίδραση της βαρύτητας στον αέρα. Το τι γίνεται τώρα είναι κάτι ανάλογο με την κίνηση φορτίου. Εκρέει κινητική ενέργεια από την μπάλα προς τον περιβάλλοντα αέρα με ταυτόχρονη εκροή ορμής με ένα ρυθμό  $d\bar{p}_{\varepsilon\kappa}/dt$ , ο οποίος πρέπει να ληφθεί υπόψη στην εξίσωση που διέπει τον ρυθμό μεταβολής της ορμής της

μπάλας. Έχουμε, λοιπόν ως εξίσωση που διέπει την κίνηση της μπάλας στον αέρα τη (2.2). Η έκφραση  $-d\vec{p}_{εκ}/dt$  στην περίπτωση αυτή δίνει τη δύναμη που ασκεί ο αέρας αντιτιθέμενος στην κίνηση της μπάλας. Όπως βλέπετε, η δύναμη με την οποία η μπάλα αλληλεπιδρά με τον αέρα συνδέεται για δεδομένο χρόνο με καθορισμένο ποσό ενέργειας. Ανά πάσα στιγμή, με καθορισμένο ρυθμό εκροής ενέργειας.

Με τα πιο πάνω μπορεί κανείς να αισθανθεί τη ρήση του Maxwell κατά την εναρκτήρια διάλεξη του (1860) στο King's College του Πανεπιστημίου του Λονδίνου, που έχει ως εξής:

*«Η έρευνα των ιδιαίτερων σχέσεων μεταξύ σωμάτων που έχει οδηγήσει σε ειδικές εκδηλώσεις δυνάμεων της φύσεως αποτελεί μεγάλο μέρος της πειραματικής φυσικής. Υπάρχουν, όμως, ορισμένοι νόμοι οι οποίοι ρυθμίζουν το ποσό της ενέργειας που διαλαμβάνεται υπό ορισμένες συνθήκες, και που προσδιορίζουν το ολικό αποτέλεσμα των διαπλεκομένων δυνάμεων. Οι νόμοι αυτοί είναι μεταξύ των πλέον σημαντικών συμπερασμάτων της φυσικής επιστήμης. Η επιστήμη που στηρίζεται στους νόμους αυτούς είναι η επιστήμη της ενεργειακής. Η εφαρμογή των αρχών αυτών στα φυσικά φαινόμενα είναι ειδική έρευνα, την οποία η επιστήμη στο παρόν στάδιο της δείχνει ότι θα οδηγήσει στη μορφή εκείνη από την οποία θα αναμένονται τα μεγαλύτερα αποτελέσματα στην επερχόμενη γενεά».*

Το όλο κείμενο μπορείτε να το βρείτε στο Am. J. Physics, **47** (11), (1979), 928-933. Τα λόγια του Maxwell, πριν ενάμιση περίπου αιώνα, υπήρξαν προφητικά. Αυτό γίνεται στη μελέτη των στοιχειωδών σωματίων, στις αλληλεπιδράσεις με τα διάφορα πεδία που συνιστούν τους αντίστοιχους φορείς δυνάμεων.

Περισσότερες ιδιομορφίες θα δει κανείς, αν παραβλέψει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, φορέα των ηλεκτρικών και μαγνητικών δυνάμεων, στην περίπτωση περισσοτέρων φορτίων. Ας πάρουμε δύο, χωρίς εξωτερικές

δυνάμεις, τα οποία σε δεδομένη στιγμή το ένα έχει ταχύτητα  $\underline{v}_1$  και το άλλο  $\underline{v}_2$ . Εφόσον δεν υπάρχει παραλληλία στις ταχύτητες οι αντίστοιχες δυνάμεις Lorentz δεν αθροίζονται στο μηδέν. Η διαφορά από το 0 θα είναι μικρή και θα οφείλεται στο μαγνητικό μέρος των δυνάμεων. Μια και δεν έχουμε εξωτερικές δυνάμεις η δύναμη στο κάθε φορτίο οφείλεται σε δύναμη που προέρχεται από το άλλο. Είναι εσωτερικές δυνάμεις, οι οποίες δεν φαίνεται να ισορροπούν και ο νόμος δράσεως-αντιδράσεως φαίνεται να παραβιάζεται, σχ. 2.2, και όχι μόνο, αν  $\underline{p}_1$ ,  $\underline{p}_2$  είναι οι ορμές των φορτισμένων σωματιδίων θα μπορούσε, αγνοώντας το H/M πεδίο βάσει του νόμου της δυναμικής να καταλήξει ότι

$$\frac{d\underline{p}_1}{dt} + \frac{d\underline{p}_2}{dt} \neq 0 \quad (2.4)$$

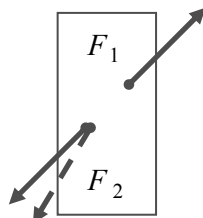
ή

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 \neq 0 \quad (2.5)$$

και να θεωρήσει ότι η ορμή μεμονωμένου συστήματος δεν διατηρείται. Όμως, η διατήρηση της ορμής για συστήματα χωρίς εξωτερικές δυνάμεις είναι νόμος γενικότητας και βασικά το μεμονωμένο σύστημα συνίσταται από τα δύο φορτία και το H/M πεδίο, του οποίου η ορμή είναι διάχυτη στο χώρο, και περιγράφεται με πυκνότητα ορμής. Η ορμή του H/M πεδίου,  $\underline{p}$ , ευρίσκεται με ολοκλήρωση της αντίστοιχης πυκνότητας εφ' όλου του χώρου.

Για το σύστημα των φορτίων και του συναφούς H/M πεδίου έχουμε

$$\frac{d\left(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 + \underline{p}_{\text{ακτινοβ}}\right)}{dt} = 0 \quad (2.6)$$



**Σχήμα 2-2** Εξισορρόπηση εσωτερικών δυνάμεων που ασκούνται από φορτισμένα σωματίδια

Όπου οι ορμές  $\underline{p}_1, \underline{p}_2$  καθορίζονται από τις αντίστοιχες δυνάμεις Lorentz και αντίστοιχους ρυθμούς εκροών, ή και ενδεχομένως εισροών κινητικής ενέργειας στα σωματίδια μας.

Αν και τα διαπλεκόμενα ποσά ορμής μεταξύ ύλης και ακτινοβολίας σε αλληλεπίδραση είναι συγκριτικά μικρά, παίζουν λίαν σημαντικό ρόλο, όπως θα δούμε, στις διεργασίες ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ ατομικής ύλης και ακτινοβολίας. Η διατήρηση της ορμής, σε συνδυασμό με τη συμμετρία εκπομπής έναντι απορρόφησης οδήγησαν τον Einstein (1917), [11], στην διεργασία της επαγόμενης εκπομπής, η οποία και αποτελεί τη βάση για την επίτευξη συνεκτικής ακτινοβολίας laser. Λεπτομέρειες θα δούμε στα επόμενα.

## 2.2 Μηχανισμοί αλληλεπίδρασης

Θα αναφερθούμε σε διεργασίες ανταλλαγής ενέργειας και ορμής μεταξύ ακτινοβολίας και ατομικής ύλης οι οποίες θα μας επιτρέψουν να κατανοήσουμε τη λειτουργία του laser καθώς και τις θεωρήσεις που θα κάνουμε προκειμένου να αναζητήσουμε κατάλληλα υλικά για τη κατασκευή laser. Οι διεργασίες που περιέγραψε ο Einstein σχετικά με την αλληλεπίδραση ακτινοβολίας με την ύλη είναι τρεις: (α) απορρόφησης φωτονίου, (β) αυθόρμητης εκπομπής και (γ) προκαλούμενης ή επαγόμενης εκπομπής.



(α) *Απορρόφηση φωτονίου.* Έστω δισταθμικό άτομο με ενέργειες  $E_2 > E_1$  το οποίο βρίσκεται αρχικά στην θεμελιώδη κατάσταση  $E_1$ . Το άτομο μπορεί να διεγερθεί στην κατάσταση  $E_2$  με απορρόφηση φωτονίου ενέργειας

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega \quad (2.7)$$

όπου  $\omega$  η συχνότητα του φωτονίου. Στη περίοδο από τα τέλη του 1916 έως το 1917 ο Einstein περιέγραψε [11, 20, 22, 23] ότι ο φωτόνιο έχει επίσης μία ορμή  $\underline{p}$  μέτρου

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} \quad (2.8)$$

Προκειμένου να διατηρηθεί η ορμή του συστήματος θα πρέπει το άτομο που είναι αρχικά ακίνητο να αποκτήσει και αυτό μία ορμή  $\underline{p}$ . Το άτομο αποκτώντας αυτή την ορμή αποκτά επίσης και κινητική ενέργεια

$$E_{κιν} = \frac{p^2}{2m} \quad (2.9)$$

Σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ενέργειας θα πρέπει:

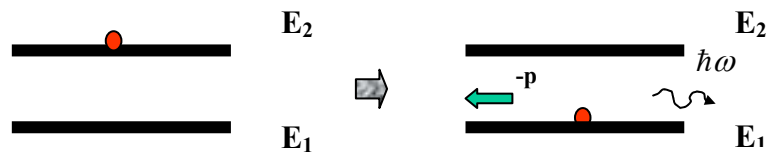
$$E_2 - E_1 + E_{κιν} = \hbar\omega \quad (2.10)$$

Η ορμή όμως που αποκτά το άτομο κατά την απορρόφηση φωτονίου και η κινητική του ενέργεια είναι ελάχιστες και έτσι με καλή προσέγγιση ισχύει η σχέση (2.7) αντί της (2.10). Η διεργασία της απορρόφησης φωτονίου φαίνεται στο σχήμα 2-3.



**Σχήμα 2-3 Μηχανισμός απορρόφησης φωτονίου από αρχικά ακίνητο άτομο**

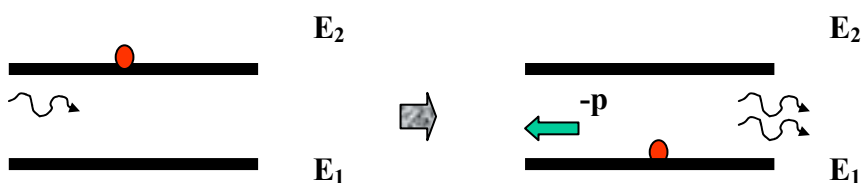
(β) *Διεργασία αυθόρμητης εκπομπής.* Ενώ είναι διεγερμένο το άτομο στην στάθμη  $E_2$  είναι δυνατό να αποδιεγερθεί και να μεταπέσει στην κατάσταση  $E_1$  με σύγχρονη εκπομπή φωτονίου ενέργειας σύμφωνα με την σχέση (2.7). Ανάλογα με το συνδυασμό κυματοσυναρτήσεων των δύο ενεργειακών σταθμών και το εύρος του ενεργειακού χάσματος  $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ , υπάρχει μία πιθανότητα το άτομο να αποδιεγερθεί αυθόρμητα και να μεταπέσει στην ενεργειακή κατάσταση  $E_1$  με σύγχρονη εκπομπή φωτονίου ενέργειας  $\hbar\omega$ . Το φωτόνιο εκπέμπεται προς τυχούσα κατεύθυνση και με τυχαία φάση. Προκειμένου να διατηρηθεί η ορμή του συστήματος άτομο-φωτόνιο το άτομο, αρχικά ακίνητο, αναδρά με ορμή  $-\underline{p}$ , αντίθετη προς αυτή του φωτονίου. Η διεργασία αυτή παρίσταται στο σχήμα 2-4.



**Σχήμα 2-4 Μηχανισμός αυθόρμητης εκπομπής φωτονίου από αρχικά ακίνητο άτομο**

Ο Einstein φανταζόταν την ακτινοβολία να έχει βελονοειδή μορφή, δεδομένου ότι εκπεμόταν ένα σωματίδιο, το φωτόνιο, σε ορισμένη κατεύθυνση. Από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία είναι γνωστό ότι ταλαντευόμενο φορτίο δεν εκπέμπει ακτινοβολία σφαιρικής κατανομής έντασης. Στην προκειμένη περίπτωση της αυθόρμητης εκπομπής επειδή η κατεύθυνση της ορμής του φωτονίου είναι τυχαία, η συνολικά εκπεμπόμενη ακτινοβολία από το σύνολο των ατόμων της ύλης θα έχει σφαιρική κατανομή.

(γ) *Διεργασία εξαναγκασμένης εκπομπής.* Προκειμένου ο Einstein να ερμηνεύσει τον νόμο του Planck χρειάστηκε να υποθέσει επί πλέον της διεργασίας απορρόφησης και αυθόρμητης εκπομπής και αυτή της εξαναγκασμένης εκπομπής. Αυτή είναι η αντίστροφη διεργασία από την απορρόφηση φωτονίου, σχήμα (2-5).



**Σχήμα 2-5 Μηχανισμός εξαναγκασμένης εκπομπής φωτονίου από αρχικά ακίνητο άτομο**

Ένα διεγερμένο άτομο είναι δυνατό να εξαναγκασθεί σε αποδιέγερση και να μεταπέσει σε στάθμη χαμηλότερης ενέργειας, πριν προλάβει να το κάνει αυτό αυθόρμητα, εξ' αιτίας της αλληλεπίδρασης του με ένα άλλο κατάλληλο φωτόνιο ενέργειας  $h\nu$ . Το εκπεμπόμενο φωτόνιο θα έχει την ίδια συχνότητα, φάση και ορμή (και πόλωση) με το αρχικό φωτόνιο

Η δέσμη που θα δημιουργηθεί με αυτό τον τρόπο, η δέσμη laser, θα είναι μονοχρωματική, σύμφωνη, και κατευθυνόμενη. Θα ήταν δυνατό να πάρει κανείς μία φωτεινή δέσμη από συμβατική φωτεινή πηγή που να είναι μονοχρωματική (περνώντας την μέσα από φίλτρα ή φράγματα) και κατευθυνόμενη (με κατάλληλη επεξεργασία), αλλά δεν θα έχει πολύ ισχυρή

ένταση αφού τα οπτικά μέσα που τις έδωσαν τις άλλες ιδιότητες θα έχουν μειώσει την ένταση της παρά το ότι η ισχύς της αυξάνει με τη θερμοκρασία.

Η δέσμη που θα δημιουργηθεί με αυτό τον τρόπο, η δέσμη laser, θα είναι μονοχρωματική, σύμφωνη, και κατευθυνόμενη. Θα ήταν δυνατό να πάρει κανείς μία φωτεινή δέσμη από συμβατική φωτεινή πηγή που να είναι μονοχρωματική (περνώντας την μέσα από φίλτρα ή φράγματα) και κατευθυνόμενη (με κατάλληλη επεξεργασία), αλλά δεν θα έχει πολύ ισχυρή ένταση αφού τα οπτικά μέσα που τις έδωσαν τις άλλες ιδιότητες θα έχουν μειώσει την ένταση της παρά το ότι η ισχύς της αυξάνει με τη θερμοκρασία.

### 2.3 *Νόμος του Planck με βάση τις διεργασίες του Einstein*

Στη διεργασία αυθόρμητης εκπομπής ( $\beta$ ) ο Einstein υπέθεσε (1917) ότι η πιθανότητα να εκπέμψει αυθόρμητα ένα διεγερμένο άτομο στη κατάσταση  $E_2$  φωτόνιο μέσα σε χρόνο  $dt$  είναι

$$dW_{\alpha\beta} = A_{21}dt \quad (2.11)$$

όπου  $A_{21}$  ο συντελεστής αυθόρμητης εκπομπής του Einstein. Με την εκπομπή του φωτονίου το άτομο μεταβαίνει στη θεμελιώδη κατάσταση  $E_1$ . Όσον αφορά την διεργασία ( $\alpha$ ) η πιθανότητα απορρόφησης φωτονίου από H/M ακτινοβολία πυκνότητας  $\rho(\omega)$ ,  $dW_{\alpha\text{απορ}}$ , εκφράζεται μέσα από την

$$dW_{\alpha\text{απορ}} = B_{12}\rho(\omega) dt \quad (2.12)$$

Με την απορρόφηση φωτονίου το άτομο μεταβαίνει στη διεγερμένη κατάσταση  $E_2$ . Ο Einstein πίστευε ότι αν έκανε κατάλληλη χρήση των δύο διεργασιών θα ήταν σε θέση να βγάλει τον τύπο του Planck. Υπέθεσε επίσης

ότι μόνο τα φωτόνια με ενέργεια  $\hbar\omega = E_2 - E_1$  θα είναι δυνατόν να απορροφηθούν. Διαφορετικά, αν  $\hbar\omega \neq E_2 - E_1$  η πιθανότητα να απορροφηθεί το φωτόνιο υπάρχει μεν αλλά είναι πολύ μικρή. Στη συζήτηση που γίνεται εδώ περιοριζόμαστε σε δύο μόνο στάθμες, τα άτομα είναι διασταθμικά παρόλο που ακόμα και αυτά με ένα μόνο ηλεκτρόνιο έχουν πάρα πολλές ενεργειακές στάθμες και μάλιστα στην περιοχή των υψηλών ενεργειών το φάσμα τους είναι σχεδόν συνεχές.

Με τις δύο αυτές διεργασίες απορρόφησης και αυθόρμητης εκπομπής ο Einstein δεν κατάφερε να παράγει τον τύπο του Planck της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος και αναγκάστηκε να εισαγάγει και μία τρίτη διεργασία αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας και ύλης: την εξαναγκασμένη ή διεγερμένη εκπομπή. Το διεγερμένο τώρα άτομο αναδρά στην 'σύγκρουση' με το προσπίπτον φωτόνιο και παίρνει την ορμή του αλλά στην αντίθετη κατεύθυνση. Από την αλληλεπίδραση αυτή εκπέμπεται εξαναγκασμένα (όχι αυθόρμητα) ένα άλλο φωτόνιο με την ίδια ορμή, διεύθυνση, συχνότητα και φάση με το προσπίπτον. Η πιθανότητα να συμβεί μία τέτοια εκπομπή είναι κατά τον Einstein:

$$dW_{\text{διεγ.εκπ.}} = B_{21}\rho(\omega) dt \quad (2.13)$$

Με βάση τις τρεις διεργασίες του Einstein γεννήθηκε η ιδέα, με κάποιες αμφιβολίες αρχικά, της κατασκευής της οπτικής μηχανής laser. Για να κατασκευαστεί ο laser θα έπρεπε να υπάρχουν αρχικά πολλά διεγερμένα άτομα στην κατάλληλη στάθμη. Σύμφωνα όμως με την θερμοδυναμική η πιθανότητα  $p_1$  να βρεθεί ένα άτομο στην κατάσταση  $E_1$  είναι:

$$p_1 \sim e^{-\frac{E_1}{kT}} \quad (2.14)$$

και η πιθανότητα  $p_2$  να βρεθεί το άτομο στην κατάσταση  $E_2$  είναι:

$$p_2 \sim e^{-\frac{E_2}{kT}} \quad (2.15)$$

αλλά  $p_2 < p_1$  γιατί  $E_2 > E_1$ . Έτσι η τάση της φύσης είναι να βρίσκονται τα περισσότερα ηλεκτρόνια σε χαμηλότερες στάθμες, δηλ.  $N_2 < N_1$ .

Προκειμένου να εξαχθεί ο νόμος ακτινοβολίας μέλανος σώματος του Planck μέσα από τις τρεις διεργασίες αλληλεπίδρασης ατόμου & φωτονίου σκέφτεται κανείς ως εξής. Σε ένα θερμό σώμα σε θερμοκρασία  $T$ , η πιθανότητα ένα από τα άτομα του να βρίσκεται στην στάθμη  $n$  είναι από την στατιστική του Boltzmann:

$$p_n = \frac{g_n}{Z} e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad (2.16)$$

όπου η  $g_n$  αντιπροσωπεύει τον εκφυλισμό της στάθμης  $E_n$ , δηλ.  $g_n$  στάθμες κατέχουν την ίδια ενέργεια  $E_n$ . Η παράμετρος  $Z$  είναι η συνάρτηση επιμερισμού:

$$Z = \sum_n g_n e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad (2.17)$$

για όλες τις στάθμες  $n$  τέτοια ώστε να κανονικοποιείται η πιθανότητα  $p_n$ . Έστω ότι, από  $N$  συνολικά άτομα σε όλες στις στάθμες, βρίσκονται  $N_n$  άτομα στην κατάσταση  $E_n$ , τότε:

$$N_n = N \frac{g_n}{Z} e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad (2.18)$$

Ο μέσος αριθμός των ατόμων στις ενεργειακές στάθμες  $E_1$  και  $E_2$  (εκφραζόμενος σαν μέσος αριθμός ανά μονάδα όγκου) θα είναι:

$$N_1 = N \frac{g_1}{Z} e^{-\frac{E_1}{kT}} \quad \& \quad N_2 = N \frac{g_2}{Z} e^{-\frac{E_2}{kT}} \quad (2.19)$$

Το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Τα άτομα, δηλαδή, απορροφούν ενέργεια και συγχρόνως την εκπέμπουν. Οι ιδιότητες του συστήματος, θερμοκρασία κλπ., παραμένουν έτσι αναλλοίωτες. Στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας ο μέσος αριθμός ατομικών μεταπτώσεων στη μονάδα του χρόνου στο άτομο από κατάσταση 2→1 είναι:

$$N_2 (dW_{αυθ.} + dW_{διεγ.εκπ.}) \quad (2.20)$$

ίσος με τον μέσο αριθμό των ατόμων που μεταβαίνουν στη μονάδα του χρόνου από την κατάσταση 1→2

$$N_1 dW_{διεγ.απορ.} \quad (2.21)$$

Επομένως η θερμοδυναμική ισορροπία εκφράζεται:

$$N \frac{g_2}{Z} e^{-\frac{E_2}{kT}} [A_{21} dt + B_{21} \rho(\omega, T) dt] = N \frac{g_1}{Z} e^{-\frac{E_1}{kT}} B_{12} \rho(\omega, T) dt \quad (2.22)$$

η οποία οδηγεί στην:

$$g_2 e^{-\frac{E_2}{kT}} [A_{21} + B_{21} \rho(\omega, T)] = g_1 e^{-\frac{E_1}{kT}} B_{12} \rho(\omega, T) \quad (2.23)$$

Ο Einstein χρησιμοποίησε την πειραματικά υποστηριζόμενη υπόθεση ότι η ακτινοβολία  $\rho(\omega, T)$  πυκνώνει με την αύξηση της θερμοκρασίας  $T$ . Έτσι, για  $T \rightarrow \infty$  έπεται ότι  $\rho(\omega, T) \rightarrow \infty$ . Κάτι τέτοιο βέβαια αποτελεί σχήμα λόγου διότι δεν είναι εφικτό να φέρουμε την ύλη σε άπειρη θερμοκρασία. Με αυτή, όμως, την υπόθεση η προηγούμενη έκφραση δίνει:

$$g_2 B_{21} = g_1 B_{12} \quad (2.24)$$

και επομένως:

$$g_1 B_{12} \rho(\omega, T) = g_2 (A_{21} + B_{21} \rho(\omega, T)) e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} \quad (2.25)$$

ενώ  $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ . Από τις δύο προηγούμενες εκφράσεις προκύπτει:

$$\rho(\omega, T) = \frac{A_{21}/B_{21}}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (2.26)$$

Ο Planck είχε ήδη υπολογίσει την πυκνότητα ακτινοβολίας ανά μονάδα συχνότητας,  $\rho(\omega, T)$  με θερμοδυναμικό συλλογισμό ως εξής. Ο αριθμός των τροπών ακτινοβολίας ανά μονάδα συχνότητας ανάμεσα στις συχνότητες  $\omega$  και  $\omega + d\omega$  μέσα στην κοιλότητα όγκου  $V$  υπολογίζεται σε  $\frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$  [7].

Η πιθανότητα που χαρακτηρίζει την εκπομπή κβάντου ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας αυτής της συχνότητας σε θερμοκρασία  $T$  είναι  $\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$ ,

ώστε η πυκνότητα ακτινοβολίας να είναι:

$$\begin{aligned} \rho(\omega, T) &= \frac{\text{ενέργεια}}{(\text{όγκος})(\text{συχνότητα})} = \\ &= \frac{(\text{αριθμός τροπών ακτινοβολίας})}{(\text{συχνότητα})} \cdot \text{πιθανότητα} \cdot \frac{(\text{ενέργεια φωτονίου})}{(\text{όγκος})} = \\ &= \frac{2V\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \cdot \frac{\hbar\omega}{V} \quad (2.27) \end{aligned}$$



Επομένως, από τις σχέσεις 2.26 & 2.27 ο λόγος των συντελεστών Einstein αυθόρμητης και εξαναγκασμένης εκπομπής θα είναι (παραλείποντας τους δείκτες):

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \quad (2.28)$$

Ο λόγος των πιθανοτήτων αυθόρμητης και εξαναγκασμένης εκπομπής θα είναι επομένως:

$$\frac{dW_{\text{αυθ}}}{dW_{\text{διεγ. εκπ}}} = \frac{A}{B\rho} = e^{\hbar\omega/kT} - 1 \quad (2.29)$$

Σε συνήθη θερμοκρασία ο λόγος των δύο πιθανοτήτων είναι υπέρ της αυθόρμητης εκπομπής, η οποία βέβαια δεν συνεισφέρει στη λειτουργία laser. Για να γίνει ο λόγος αυτός ίσος με την μονάδα, για εκπομπή ακτινοβολίας π.χ. στο κίτρινο χρώμα ( $\lambda=0,6 \text{ nm}$ ), θα πρέπει η θερμοκρασία του ατομικού συστήματος να ανέβει στους 34,485 K! Εκτός, φυσικά, αν δημιουργήσω αναστροφή πληθυσμού ( $\Delta N=N_2-N_1>0$ ), μία κατάσταση μη ισορροπίας, οπότε σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος τα φωτόνια της εξαναγκασμένης εκπομπής θα είναι περισσότερα από αυτά της αυθόρμητης τα οποία παίζουν το ρόλο θορύβου στο σήμα laser μέσα στην κοιλότητα. Τα φωτόνια της εξαναγκασμένης εκπομπής θα ενισχύονται μέσα στη κοιλότητα δίνοντας δέσμη μονοχρωματική, κατευθυνόμενη, σύμφωνη και μεγάλης πυκνότητας ακτινοβολίας.

## 2.4 Ασκήσεις

### Άσκηση 2-1

Προκειμένου να πάρετε μία ιδέα για το μέγεθος των ενεργειακών διαφορών σχετικών με τη μεταφορική κίνηση φορτίου, θεωρείστε ηλεκτρόνιο σε

κυβικό κιβώτιο ακμής  $L$ . Βρείτε τύπο για τις ιδιοτιμές της ενέργειας. Σχηματίστε ένα μέρος από το φάσμα των γραμμών εκπομπής.

Για να δείτε τη δυνατότητα εκπομπής στο ‘συνεχές’ βρείτε για δεδομένο μήκος ακμής του κιβωτίου την ελάχιστη συχνότητα (ή μέγιστο μήκος κύματος) με την οποία μπορεί να εκπέμψει φωτόνιο. Βάζοντας αριθμούς μπορείτε να σχηματίσετε αντίληψη για το φάσμα στα μεγάλα μήκη κύματος και τη δυνατότητα παραπλήσιων σε ενέργεια φωτονίων.

### Άσκηση 2-2.

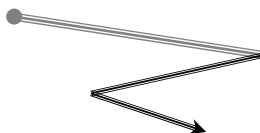
Βρείτε την έκφραση για τη θερμοκρασία στην οποία σε κοιλότητα μέλανος σώματος η πιθανότητα διεγερόμενης εκπομπής για κάποια συχνότητα  $\omega$ , θα είναι ίση με την αντίστοιχη πιθανότητα αυθόρμητης εκπομπής.

Σχεδιάστε σε διάγραμμα τη μεταβολή της θερμοκρασίας ως προς το μήκος κύματος στη περίπτωση αυτή ισορροπίας.

Τι τιμές θα πάρει η θερμοκρασία όταν η συχνότητα μεταβάλλεται από το ένα έως το άλλο άκρο του φάσματος;

### Άσκηση 2-3.

Θεωρείστε την αλληλεπίδραση ακτινοβολίας με την ύλη σε κοιλότητα μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία. Βρείτε την πυκνότητα ακτινοβολίας μέλανος σώματος για διάφορες θερμοκρασίες, π. χ. 900, 1650, και 6400 K (θερμοκρασία επιφάνειας του ήλιου) και για μήκη κύματος  $6,94 \cdot 10^{-7} \text{m}$  (ερυθρό),  $1,15 \cdot 10^{-6} \text{m}$  (υπέρυθρο),  $1,25 \cdot 10^{-2} \text{m}$  (μικροκύματα) και σε περιοχές μηκών κύματος του εύρους  $\Delta\lambda=10\text{nm}$  (ενός φίλτρου).





### 3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ EINSTEIN ΜΕ ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

#### 3.1 Προκαταρκτικά

**Ε**ίδαμε τη σημασία των διεργασιών απορρόφησης και εκπομπής ακτινοβολίας από άτομα για την ακτινοβολία μέλανος σώματος και την ανάπτυξη πυκνής μονοχρωματικής ακτινοβολίας σε laser.

Οι διεργασίες αυτές περιγράφονται φαινομενολογικά μέσω των συντελεστών A και B του Einstein. Μιά και η απορρόφηση και εκπομπή ακτινοβολίας από άτομα διαλαμβάνει αλληλεπίδραση ακτινοβολίας με τα άτομα, θα μπορούσαμε να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη τόσο της ατομικής κίνησης όσο και της ακτινοβολίας κατά την απορρόφηση και διεγερόμενη εκπομπή. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να μελετήσουμε τη δυναμική του συστήματος άτομο και ακτινοβολία σε αλληλεπίδραση. Για να ευκολύνουμε τα πράγματα θα θεωρήσουμε την περίπτωση ενός ατόμου και μίας μονοχρωματικής ακτινοβολίας και μάλιστα θα περιοριστούμε στην κίνηση ενός από τα ηλεκτρόνια του ατόμου. Αυτό μπορεί να γίνει κατά προσέγγιση εφόσον τα φωτόνια που ανταλλάσσει η ακτινοβολία με το άτομο ταιριάζουν ενεργειακά μεταξύ δύο σταθμών όπου μπορεί να κινείται το ηλεκτρόνιο μας. Για να απλοποιήσουμε περισσότερο τα πράγματα μπορούμε στις θεωρήσεις μας να έχουμε υπόψη το άτομο του υδρογόνου που έχει ένα ηλεκτρόνιο ή ένα υδρογονοειδές άτομο του οποίου το υπό θεώρηση ηλεκτρόνιο θα βλέπει ένα θωρακισμένο δυναμικό Coulomb ανάλογο του

$$\left(\frac{1}{r}\right) e^{-\alpha r} \quad (3.1)$$

Σε πρώτο στάδιο θα πάρουμε την ακτινοβολία ως ένα χρονικά διαγραφόμενο εξωτερικό αίτιο και έτσι αυτό που μένει στη μελέτη μας είναι η κίνηση του ατόμου. Αυτή η προσέγγιση είναι επιτρεπτή εφόσον έχουμε αρκετά πυκνή ακτινοβολία μια και η απορρόφηση ή η εκπομπή ενός φωτονίου από το υπό μελέτη άτομο δεν μπορεί να επηρεάσει αισθητά τα πλάτη του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου του κύματος. Σε περιπτώσεις που ενδιαφέρον οι διακυμάνσεις της πυκνότητας της ακτινοβολίας είναι ανάγκη να θεωρήσουμε τόσο τη δυναμική του ατόμου όσο και της ακτινοβολίας σε αλληλεπίδραση. Αυτό θα γίνει αργότερα όταν το σύστημα άτομο-ακτινοβολία θα μελετηθεί στην πλήρη κβαντική του μορφή.

Αρχίζουμε τώρα με την Χαμιλτονιανή του υπό θεώρηση ηλεκτρονίου στο άτομο μας

$$H_o = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) \quad (3.2)$$

Η κατάσταση του ηλεκτρονίου περιγράφεται από την κυματική συνάρτηση  $\Psi(\vec{r}, t)$ , οποία υπακούει την εξίσωση του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = H_o \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.3)$$

Όπως είναι γνωστό η ποσότητα  $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r}$  παρέχει την πιθανότητα ευρέσεως του ηλεκτρονίου τη στιγμή  $t$  μεταξύ  $\vec{r}$  και  $\vec{r} + d\vec{r}$ . Όταν το δυναμικό είναι ελκτικό η (3-3) επιδέχεται περιοδικές λύσεις. Το δυναμικό Coulomb από τον πυρήνα στα άτομα είναι ένα ισχυρό δυναμικό όσο πλησιάζουμε τον πυρήνα. Όπως είπαμε και προηγούμενα για ευκολία μας θα φανταζόμαστε το άτομο του υδρογόνου. Το δυναμικό σε απόσταση  $r$  από τον πυρήνα είναι  $|e|/r$ . Έτσι η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου σε απόσταση  $r$  είναι  $U(r) = -e^2/r$ .

Οι διάφορες περιοδικές λύσεις της εξίσωσης του Schrödinger (3-3) έχουν τη μορφή

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right) \quad (3.4)$$

όπου  $\Phi(\vec{r})$  υπακούει την (χρονικά ανεξάρτητη) εξίσωση Schrödinger

$$H_o \Phi(\vec{r}) = E \Phi(\vec{r}) \quad (3.5)$$

με το  $\Phi(\vec{r})$  να πληροί τις συνήθεις συνοριακές συνθήκες που απαιτούνται στην κβαντική μηχανική δηλαδή όσο μεγαλώνει το  $r$  οι τιμές της  $\Phi(\vec{r})$  να πέφτουν κατά τρόπο που

$$\int |\Phi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} = 1 \quad (3.6)$$

Η εξίσωση της κίνησης (3-3) επιδέχεται απειρία λύσεων της μορφής (3-4) η κάθε μια των οποίων χαρακτηρίζεται από ορισμένους κβαντικούς αριθμούς τους οποίους και θα συμβολίζουμε συλλογικά με ένα δείκτη, πέστε,  $k$ . Π.χ. στην περίπτωση του ατόμου του υδρογόνου το  $k$  στέκει για τρεις κβαντικούς αριθμούς,  $n, \ell, m$ . Στην ιδιοκατάσταση  $\Psi(r, \theta, \varphi)$  αντιστοιχεί ενέργεια

$$E_{nlm} = -\frac{e^2}{2\alpha_o n^2} = -\frac{Ry}{n^2} \quad (3.7)$$

όπου  $\alpha_o (\approx 0.53\text{Å})$  η ακτίνα του Bohr. Έτσι, λοιπόν, η λύση με δείκτη  $k$  θα είναι  $\Phi_k$ . Αυτή είναι μία ιδιοσυνάρτηση της εξίσωσης (3-3). Η  $\Phi_k$  είναι η  $k$  ιδιοσυνάρτηση της (3-5) ή του Χαμιλτονιακού τελεστή  $H_o$  και  $E_k$  είναι η ενέργεια του συστήματος που περιγράφεται από την ιδιοσυνάρτηση (ή ιδιοκατάσταση)  $\Phi_k$

Τα πιο πάνω για υπενθύμιση σας και τώρα μπαίνουμε στο θέμα της χρονικά εξαρτημένης θεωρίας διαταραχών για χρήση στη μελέτη της αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας με άτομα.

### 3.2 Χρονικά εξαρτώμενη θεωρία διαταραχών

Είναι γνωστό ότι ένα μικρό σύνολο από τα προβλήματα της Φυσικής μπορούν να τύχουν ακριβούς αναλυτικής λύσεως. Για να κάνουμε πρόοδο καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές και αριθμητικές λύσεις. Σκοπός της παρεμβολής του εδαφίου αυτού είναι η εξυπηρέτηση του μαθήματος, και ως εκ τούτου η διαμόρφωση του θα αφορά στην αλληλεπίδραση ακτινοβολίας με άτομο.

Θεωρούμε άτομο με ενεργό ηλεκτρόνιο του οποίου η Χαμιλτονιανή είναι  $H_0$  και οι διάφορες ιδιοκαταστάσεις  $\Phi_k$  με αντίστοιχες ιδιοτιμές ενέργειας  $E_k = \hbar\Omega_k$ , τις οποίες είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε. Το  $k$  αντιπροσωπεύει συλλογικά τους διάφορους κβαντικούς αριθμούς. Έχουμε:

$$H_0\Phi_k = \hbar\Omega_k\Phi_k \quad (3.8)$$

Αν διαταράξουμε το σύστημα με πρόσθετο δυναμικό  $V(\vec{r}, t)$  η Χαμιλτονιανή του συστήματος μας γίνεται

$$H = H_0 + V(\vec{r}, t) \quad (3.9)$$

Στις εφαρμογές το  $V$  θα προέρχεται από το ηλεκτρικό πεδίο οδεύοντος ή στάσιμου κύματος και θα είναι μικρό έναντι της  $H_0$ . Το πρόβλημα προς επίλυση είναι πρόβλημα αρχικών τιμών που σχετίζεται με την εξίσωση του Schrödinger με Χαμιλτονιανή την (3-9)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = H\Psi(\vec{r}, t) \quad (3.10)$$

και τίθεται ως εξής: Δεδομένου ότι η κατάσταση του συστήματος τη στιγμή  $t = 0$  είναι

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \Phi(\vec{r}) \quad (3.11)$$

ποία είναι η κατάσταση του συστήματος  $\Psi(\vec{r}, t)$  ανά πάσα στιγμή  $t$ , όταν η  $\Psi$  υπακούει τη (3-10);

Το πρόβλημα αναλυτικά είναι εν γένει άλυτο, και καταφεύγουμε στην πιο κάτω διαδικασία προκειμένου υπό ορισμένες συνθήκες (κατά βάση για μικρούς χρόνους) να προσεγγίσουμε τη λύση. Γράφουμε τόσο την άγνωστη συνάρτηση,  $\Psi$ , όσο και την αρχική κατάσταση,  $\Phi$ , ως γραμμικούς συνδυασμούς των ιδιοσυναρτήσεων  $\Phi_k$ .

$$\Phi(\vec{r}) = \sum f_k \Phi_k(\vec{r}) \quad (3.12)$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) \quad (3.13)$$

Αυτό είναι δυνατό λόγω της πληρότητας του συνόλου των ιδιοκαταστάσεων  $\{\Phi_k\}$ . Είναι ενδεχόμενο πολλοί από τους συντελεστές  $f_k$  (αρχικά μιγαδικά πλάτη) να είναι μηδέν. Τώρα, προκειμένου η  $\Psi(\vec{r}, 0)$  να συμπίπτει με την  $\Phi(\vec{r})$  έχουμε

$$C_k(0) = f_k \quad (3.14)$$

Εν συνεχεία εισάγουμε την (3-13) στην εξίσωση κίνησης (3-10) και λαμβάνοντας υπόψη την (3-8) παίρνουμε

$$\sum_k i\hbar \dot{C}_k e^{-i\Omega_k t} \Phi_k = \sum_k V(\vec{r}, t) \Phi_k C_k e^{-i\Omega_k t} \quad (3.15)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3-15) επί  $\Phi_n^*(\vec{r})$  και ολοκληρώνουμε εφ' όλου του χώρου, και δεδομένης της ορθοκανονικότητας των ιδιοκαταστάσεων  $\Phi_k$ , δηλαδή

$$\int \Phi_n^*(\vec{r}) \Phi_k(\vec{r}) d^3\vec{r} = \delta_{nk} \quad (3.16)$$

καταλήγουμε με απλές ανακατατάξεις στην εξίσωση



$$\dot{C}_n = -\frac{i}{\hbar} \sum_k V_{nk}(t) e^{-i(\Omega_k - \Omega_n)t} C_k \quad (3.17)$$

όπου  $V_{nk}$  είναι το στοιχείο πίνακα που δίνεται ως

$$V_{nk} = \int \Phi_n^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r}) d^3\vec{r} = (\Phi_n | V | \Phi_k) \quad (3.18)$$

Η διαδικασία για την εύρεση της (3-18) ισχύει για όλες τις καταστάσεις της βάσεως  $\{\Phi_n\}$ . Έτσι θεωρώντας όλους του κβαντικούς αριθμούς  $n$  έχουμε ένα άπειρο σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξεως της μορφής (3-17) για τον υπολογισμό των πλατών  $C_n(t)$ . Το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με την εξίσωση του Schrödinger, διότι γνωρίζοντας τα πλάτη  $C_n$  ευρίσκουμε την ζητούμενη λύση μέσω της (3-12) & (3-13). Τα διάφορα  $C_n(t)$  ευρίσκονται κατ' αρχήν από την λύση του συστήματος των (3-17) με αρχικές συνθήκες που δίνονται στην (3-14). Για τη λύση του συστήματος των (3-17), που είναι γραμμικό, μπορεί σε ικανοποιητικό βαθμό να επέμβει ο υπολογιστής ή να γίνει εφαρμογή προσεγγιστικής διαδικασίας που υπολογρεύεται από τις συνθήκες του προβλήματος.

Τα πιο πάνω συνιστούν τη λεγόμενη χρονικά εξαρτημένη θεωρία των διαταραχών, εφαρμογή της οποίας θα κάνουμε σε δισταθμικό άτομο υπό την επίδραση μονοχρωματικού ηλεκτρικού κύματος.

### 3.3 Δισταθμικό άτομο υπό την επίδραση πολωμένου H/M κύματος

Είδαμε ότι οι εξισώσεις για την κίνηση των πλατών,  $C_k$ , των διαφόρων ιδιοκαταστάσεων  $\Phi_k$  ενός ηλεκτρονίου (θεωρούμε την περίπτωση ενός ενεργού ηλεκτρονίου) σε άτομο υπό την επίδραση πολωμένου H/M-κύματος παίρνουν τη μορφή (3.17)

$$\dot{C}_n = -\frac{i}{\hbar} \sum_k V_{nk}(t) e^{-i(\omega_k - \omega_n)t} C_k \quad (3.19)$$

Τα  $n$  και  $k$  είναι συλλογικά στη θέση των κβαντικών αριθμών. Το  $n$  διατρέχει όλες τις δυνατές τιμές του και ως εκ τούτου έχουμε ένα άπειρο σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

Το σύστημα (3-19) με τον μετασχηματισμό

$$C_n = e^{i\omega_n t} C'_n \quad (3.20)$$

μπορεί να γραφτεί ως

$$\dot{C}'_n + i\omega_n C'_n = -\frac{i}{\hbar} \sum_k V_{nk}(t) C'_k \quad (3.21)$$

αν και αυτό δεν πολυεξυπηρετεί, εφόσον ο χρόνος εξακολουθεί να έχει την παρουσία του στα στοιχεία πίνακα  $V_{nk}(t)$ . Το πρόβλημα μας έχει ως εξής: Αν το σύστημα μας πριν την διαταραχή βρισκόταν στην κατάσταση  $\Phi_\ell$  η αρχική κυματική συνάρτηση θα ήταν

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \Phi_\ell(\vec{r}) \quad (3.22)$$

δηλαδή  $C_\ell(0) = 1$  και όλα τα άλλα  $C_n(0) = 0$ . Παρεμπιπτόντως η αρχική κατάσταση του συστήματος μπορεί να είναι μείγμα περισσοτέρων ιδιοκαταστάσεων και τότε θα μας είναι δεδομένα για τη στιγμή 0 τόσα πλάτη όσα επαρκούν για την περιγραφή της  $\Psi(\vec{r}, 0)$ .

Επανερχόμαστε στο πρόβλημα με αρχική τιμή τη (3-22). Η περίπτωση αυτή μας ενδιαφέρει στην αλληλεπίδραση ατόμου με H/M κύμα. Για μικρούς χρόνους από την έναρξη της διαταραχής το  $C_\ell(t)$  δεν θα διαφέρει και πολύ από το 1, ενώ τα άλλα  $C_n(t)$  δεν θα έχουν αποστεί και πολύ από το 0. Το  $|C_\ell(t)|^2$  είναι η πιθανότητα το σύστημα να είναι κατά τη

στιγμή  $t$  στην κατάσταση  $\ell$ . Αντίστοιχα και για τα διάφορα άλλα  $|C_n(t)|^2$ . Για κάθε  $t$  έχουμε

$$\sum_n |C_n(t)|^2 = 1 \quad (3.23)$$

Περιοριζόμαστε τώρα σε δυνάμεις που προέρχονται από το ηλεκτρικό πεδίο οδεύοντος πολωμένου κύματος. Όπως είδαμε στην περίπτωση αυτή το ηλεκτρόνιο μας βρίσκεται κατά πολύ καλή προσέγγιση υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου της μορφής

$$\underline{\mathcal{E}} = \underline{\mathcal{E}}_o \cos(\underline{k} \cdot \underline{R} - \omega t) \quad (3.24)$$

Το  $\underline{R}$  στην (3-24) είναι το άνωσμα της θέσης του πυρήνα του ατόμου και  $\omega$  η συχνότητα του κύματος. Η κατεύθυνση του  $\vec{\mathcal{E}}_o$  καθορίζει την πόλωση. Το  $\underline{k} \cdot \underline{R}$  συνιστά μία φάση την οποία στους πάρα κάτω λογαριασμούς θα παραλείψουμε. Το ηλεκτρικό πεδίο που επενεργεί στο ηλεκτρόνιο μας εξαρτάται μονάχα από τον χρόνο. Έτσι η δυναμική συνάρτηση από την οποία παράγεται η δύναμη της διαταραχής είναι

$$V(\underline{r}, t) = -e\underline{\mathcal{E}}(t) \cdot \vec{r} \quad (3.25)$$

Στα πιο κάτω θα θεωρήσουμε το κύμα μας πολωμένο στην κατεύθυνση  $z$  και έτσι

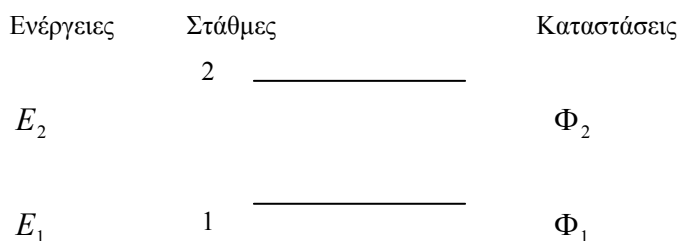
$$\underline{\mathcal{E}}(t) = \hat{z}\mathcal{E}_o \cos(\omega t) \quad (3.26)$$

Όσο μεγαλύτερο το πλάτος του κύματος τόσο μεγαλύτερη και η ενέργεια που εδράζεται σε αυτό. Η συχνότητα  $\omega$  καθορίζει μέσω του τύπου  $\hbar\omega$  την ενέργεια των φωτονίων που μπορεί να ανταλλάξει το κύμα μας.

Ας φανταστούμε τώρα ένα άτομο στην κατάσταση  $\Phi_1$  με (ηλεκτρονική) ενέργεια  $E_1$ . Στο άτομο αυτό υπάρχει και μια παραπλήσια ενεργειακή στάθμη  $E_2$  τέτοια ώστε  $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ , δηλαδή τα φωτόνια του κύματος μας

ταιριάζουν ενεργειακά με την σταθμική διαφορά των καταστάσεων 1 και 2. Στην περίπτωση αυτή λόγω της διατήρησης της ενέργειας η κίνηση των πλατών θα περιορίζεται κατά κύριο λόγο μεταξύ των  $C_1$  και  $C_2$ . Κατά ένα τρόπο θα έχουμε ένα δισταθμικό άτομο τα στοιχεία του οποίου δίνονται στο πιο κάτω διάγραμμα του σχήματος. Όταν περιοριζόμαστε σε δισταθμικό άτομο και το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη θα το λέμε αδιέγερτο και όταν το ηλεκτρόνιο ενεργειακά θα κατέχει την πάνω στάθμη, το άτομο μας θα είναι διεγερμένο.

Μας ενδιαφέρει το πρόβλημα της απορρόφησης ακτινοβολίας από ένα άτομο και για τη μελέτη μας θα κάνουμε χρήση του τεχνάσματος με κατάλληλο δισταθμικό άτομο. Ξεκινάμε με το άτομο μας αδιέγερτο και παίρνουμε το ηλεκτρικό πεδίο πολωμένο στην κατεύθυνση του z-άξονα. Με το ηλεκτρικό πεδίο  $\underline{x}(t) = \hat{z}\underline{E}_o \cos(\omega t)$  που επενεργεί επί του ηλεκτρονίου τα στοιχεία πίνακα  $V_{nk}(t)$  που εμφανίζονται στην (3-19) είναι:



**Σχήμα 3-1** Ενεργειακές στάθμες και ιδιοκαταστάσεις ενός δισταθμικού ατόμου

$$\begin{aligned}
 V_{12} &= -e\mathcal{E}_o \cos(\omega t) \int \Phi_1^*(\vec{r},) (\hat{z} \cdot \vec{r}) \Phi_2(\vec{r}) d^3\vec{r} \\
 V_{21} &= -e\mathcal{E}_o \cos(\omega t) \int \Phi_2^*(\vec{r},) (\hat{z} \cdot \vec{r}) \Phi_1(\vec{r}) d^3\vec{r} = V_{12}^* \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

$$V_{11} = V_{22} = 0$$

Τα  $V_{11}$  και  $V_{22}$  είναι 0 λόγω του ότι η έκφραση  $|\Phi_j(r)|^2 \bar{r}$  είναι αντισυμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων όπου είναι ο πυρήνας του ατόμου.

Το  $\hat{z} \cdot \underline{r}$  στην (3-27) ισούται με  $z$  και θα συμβολίσουμε τα ολοκληρώματα για τα  $V_{12}$  και  $V_{21}$  με  $z_{12}$ ,  $z_{21}$ . Τα  $z_{12}$  και  $z_{21}$  είναι εν γένει μιγαδικά μήκη και είναι κάτι ανάλογο του κλασσικού μήκους του δίπολου που επάγεται από την εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου σε άτομο λόγω της μετατόπισης του κέντρου του ηλεκτρονικού φορτίου έναντι του πυρήνα. Στην κλασική περίπτωση είδαμε την δημιουργία δίπολου και την ανάπτυξη διπολικής ροπής. Στην περίπτωση μας το αντίστοιχο είναι οι διπολικές ροπές  $|e|z_{12}$  και  $|e|z_{21}$ . Στα παρακάτω θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου το  $z_{12}$  είναι πραγματικό και η διπολική ροπή θα είναι

$$p = |e|z_{12} \quad (3.28)$$

Θυμίζουμε ότι η κλασική έκφραση για την ενέργεια δίπολου υπό σταθερό ηλεκτρικό πεδίο είναι:  $- \underline{p} \cdot \underline{E}$ .

Γράφοντας τώρα την διαφορά  $\omega_2 - \omega_1$  ως  $\Omega$  (σταθμική διαφορά  $E_2 - E_1 = \hbar\Omega$ ) και περιοριζόμενοι σε δύο στάθμες 1 και 2 στην (3-19) έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= i \frac{p \mathcal{E}_0}{2\hbar} \left[ e^{-i(\Omega-\omega)t} + e^{-i(\Omega+\omega)t} \right] C_2 \\ \dot{C}_2 &= i \frac{p \mathcal{E}_0}{2\hbar} \left[ e^{i(\Omega-\omega)t} + e^{i(\Omega+\omega)t} \right] C_1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Για την λήψη των (3-29) είχαμε εκφράσει το  $\cos\omega t$  ως  $\frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ . Οι (3-29) είναι οι εξισώσεις στις οποίες κατάληξε ο Rabi την δεκαετία του 30

μελετώντας την απορρόφηση και εκπομπή μικροκυμάτων από σπιν (πραγματικά δισταθμικά “άτομα”) με την διαφορά ότι εκεί την θέση των  $p$  και  $\mathcal{E}_o$  παίρνουν αντίστοιχα η μαγνητική ροπή και πλάτος μαγνητικού πεδίου.

Στα παρακάτω θα πάρουμε για μικρούς χρόνους λύσεις των εξισώσεων κίνησης (3-29) για τα πλάτη  $C_1$  και  $C_2$  κάνοντας χρήση της προσέγγισης Rabi. Στη συνέχεια ξεκινώντας με συνθήκες απορρόφησης φωτονίου θα υπολογίσουμε τον συντελεστή B του Einstein.

### 3.4 Προσέγγιση Rabi

Οι εξισώσεις (3-29) είναι μεν γραμμικές, αλλά η εμφάνιση του χρόνου στους συντελεστές είναι τέτοια που δεν επιτρέπει την εύρεση αναλυτικών λύσεων. Το πρόβλημα μας για την απορρόφηση φωτονίου είναι, δοθέντος ότι

$$C_1(0) = 1, \quad C_2(0) = 0 \quad (3.30)$$

το πως θα εξελιχθούν τα  $C_1(t)$  και  $C_2(t)$  με βάση την δυναμική των (3-29);

Ακολουθούμε την επαναληπτική μέθοδο του Νεύτωνα, παίρνοντας ως μηδενικής τάξεως προσέγγιση των εξής:  $C_1^{(0)}(t) = 1$ ,  $C_2^{(0)}(t) = 0$ . Αυτό γίνεται με την σκέψη ότι για μικρούς χρόνους η λύση μας για μεν το  $C_1$  δεν θα απέχει πολύ του 1 και για το  $C_2$  θα είναι κοντά στο 0. Από την δεύτερη των (3-29) έχουμε

$$\dot{C}_2^{(1)} = i \frac{P\mathcal{E}_o}{2\hbar} \left[ e^{i(\Omega-\omega)t} + e^{i(\Omega+\omega)t} \right] = f(t)$$

(3.31)

Διατηρώντας την αρχική συνθήκη  $C_2^{(0)} = 0$  η (3-31) δίνει:

$C_2^{(1)}(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  και παίρνουμε

$$C_2^{(1)}(t) = \frac{p\mathcal{E}_0}{2\hbar} \left[ \frac{e^{i(\Omega-\omega)t} - 1}{\Omega - \omega} + \frac{e^{i(\Omega+\omega)t} - 1}{\Omega + \omega} \right] \quad (3.32)$$

Η (3-32) είναι η λύση για τη  $C_2$  αλλά για μικρά  $t$ .

Προκειμένου να προχωρήσουμε θα εφαρμόσουμε την επαναληπτική διαδικασία. Για δισταθμικά άτομα και μονοχρωματικά πεδία η λύση με την επαναληπτική διαδικασία επαρκεί σε πρώτη τάξη. Αν όμως υπάρχουν πολλές συχνότητες τότε η προσέγγιση αυτή δεν δίνει ακριβή λύση. Η ακριβέστερη λύση βρίσκεται όταν θεωρήσουμε το πεδίο στη κβαντισμένη του μορφή όπως στο επόμενο κεφάλαιο. Πλην, όμως, ας εξετάσουμε στενότερα την (3-32). Για οπτικές συχνότητες το  $\Omega$  και  $\omega$  είναι της τάξεως του  $10^{14} \text{ Hz}$  ως  $10^{15} \text{ Hz}$ . Δεδομένου ότι  $\Omega - \omega \approx 0$  το δεύτερο κλάσμα στις τετραγωνικές παρενθέσεις είναι μηδαμινό έναντι του πρώτου που περιέχει το  $\Omega + \omega$ . Αν κατ' αυτό τον τρόπο πάμε σε ανώτερες τάξεις προσεγγίσεις θα γεννηθούν όροι ανωτέρας τάξεως με το  $\Omega + \omega$  στον παρανομαστή και ο λόγος της παράλειψής τους γίνεται έτσι ευκολότερος. Παραλείπουμε λοιπόν από τις αρχικές εξισώσεις (3-29) τους όρους που διαλαμβάνουν το  $\Omega + \omega$  και λαμβάνουμε τις προσεγγιστικές εξισώσεις Rabi.

$$\begin{aligned} i\dot{C}_1 &= \frac{p\mathcal{E}_0}{2\hbar} e^{-i(\Omega-\omega)t} C_2 \\ i\dot{C}_2 &= \frac{p\mathcal{E}_0}{2\hbar} e^{i(\Omega-\omega)t} C_1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Οι (3-33) συνιστούν τις εξισώσεις Rabi στην προσέγγιση του λεγόμενου στρεφόμενου κύματος. Στη (3-33) έχουμε διατηρήσει τους όρους συστροφής από την (3-29) και αποδιώξαμε τους όρους αντιστροφής. Η ορολογία προέκυψε από την στροφή στο μιγαδικό επίπεδο. Για το άτομο

παίρνουμε  $\Psi \sim e^{-i\Omega t}$  ομοίως και για το κύμα  $\Psi_{HM} \sim e^{-i\omega t}$ . Και οι δύο εκφράσεις δίνουν ομόφορες στροφές στο μιγαδικό επίπεδο. Όμως, ο τρόπος που συμπλέκονται είναι  $\Psi^* \Psi_{HM} \sim e^{i(\Omega-\omega)t}$ . Η έκφραση  $e^{i(\Omega-\omega)t}$  διαλαμβάνει αντίφορο στροφή.

Οι εξισώσεις (3-33) μπορούν να λυθούν επακριβώς, πλην όμως στο παρόν στάδιο θα αρκεστούμε στο να τις μετασχηματίσουμε σε βολικότερη μορφή μέσω της αλλαγής των μεταβλητών  $C_1$  και  $C_2$  ως εξής:

$$\begin{aligned} C_1 &= e^{-i(\Omega-\omega)t/2} C'_1 \\ C_2 &= e^{-i(\Omega-\omega)t/2} C'_2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Εισάγοντας τις (3-34) στις (3-33) καταλήγουμε

$$\begin{aligned} i\dot{C}'_1 + \frac{\Omega - \omega}{2} C'_1 &= \frac{p\mathcal{E}_0}{2\hbar} C'_2 \\ i\dot{C}'_2 + \frac{\Omega - \omega}{2} C'_2 &= \frac{p\mathcal{E}_0}{2\hbar} C'_1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Οι (3-35) λύνονται αναλυτικά, αλλά αυτό θα γίνει αργότερα. Επί του παρόντος θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό του συντελεστή  $B$ , όπου επαρκεί η προσέγγιση για μικρούς χρόνους.

### 3.5 Υπολογισμός του συντελεστή $B$ του Einstein

Προκειμένου να υπολογίσουμε την πιθανότητα διέγερσης του ατόμου σε μικρούς χρόνους κάνουμε χρήση της αντίστοιχης λύσεως (3-32) για το πλάτος  $C_2^{(1)}(t)$  ευρέσεως του ηλεκτρονίου στη στάθμη 2. Από την (3-32) κρατάμε τον μεγάλο όρο συστροφής και έχουμε ύστερα από τροποποίηση



$$C_2(t) \approx -\frac{p\epsilon_o}{2\hbar} e^{i(\Omega-\omega)t} \frac{e^{i(\Omega-\omega)t/2} - e^{-i(\Omega-\omega)t/2}}{\Omega - \omega} \quad (3.36)$$

Η πιθανότητα διέγερσης του ατόμου γράφεται, από την (3-36), ως

$$|C_2(t)|^2 = \frac{p^2 \epsilon_o^2}{4\hbar^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\Omega - \omega}{2} t\right)}{\left(\frac{\Omega - \omega}{2}\right)^2} \quad (3.37)$$

Στο μέλαν σώμα το  $E_o^2$  στην (3-37) προέρχεται από μία πυκνότητα ακτινοβολίας  $\rho(\omega)$  μεταξύ  $\omega$  και  $\omega + d\omega$  και αντικαθιστούμε με

$$\mathcal{E}_o^2 = \int \frac{1}{\epsilon_o} \rho(\omega) d\omega \quad (3.38)$$

όπου  $\epsilon_o$  η διηλεκτρική σταθερά του κενού.

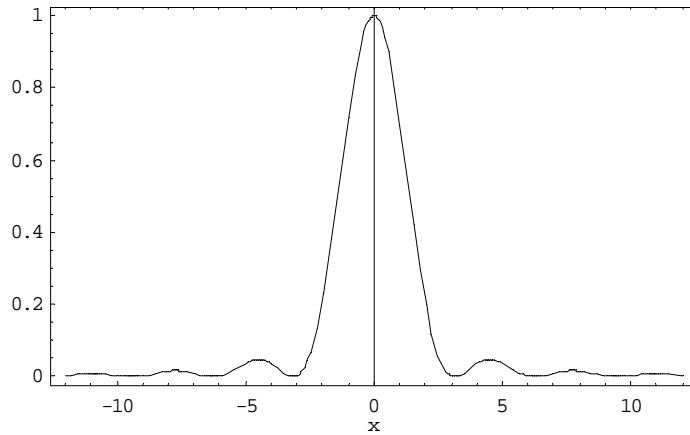
Η πιθανότητα διέγερσης του ατόμου από κύματα (της αυτής πολώσεως) και όλων των συχνοτήτων είναι

$$P_2 = \frac{p^2}{4\epsilon_o \hbar^2} \int d\omega \rho(\omega) \frac{\sin^2\left(\frac{\Omega - \omega}{2} t\right)}{\left(\frac{\Omega - \omega}{2}\right)^2} \quad (3.39)$$

Στο ολοκλήρωμα της (3-39) η ολοκλήρωση γίνεται εφ' όλων των συχνοτήτων, αλλά σημαντική συμβολή έχουν μόνον συχνότητες παραπλήσιες στην συχνότητα,  $\Omega$ , του ατόμου. Για τον υπολογισμό του πιο πάνω ολοκληρώματος γράφουμε

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\Omega - \omega}{2} t\right)}{\left(\frac{\Omega - \omega}{2}\right)^2} = t^2 \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad \text{όπου} \quad x = \frac{\omega - \Omega}{2} t \quad (3.40)$$

Σχεδιάζουμε τώρα τη συνάρτηση  $(\sin^2 x)/x^2$  και έχουμε:



**Σχήμα 3-2.** Η μεταβολή της συνάρτησης  $(\sin^2 x)/x^2$  συναρτήσει της  $x$

Βλέπουμε ότι η συμβολή σε ένα ολοκλήρωμα της  $(\sin^2 x)/x^2$  με μία συνάρτηση  $F(x)$  προέρχεται από τις τιμές του  $x$  γύρω από το  $x=0$ . Όταν η  $F(x)$  περί το  $x=0$  μεταβάλλεται αργά έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \approx F(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi F(0) \quad (3.41)$$

Μπορούμε κατά ένα τρόπο να κάνουμε την αντικατάσταση

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \rightarrow \pi \delta(x) \quad (3.42)$$

Με τη βοήθεια των (3-40) και (3-42) η (3-39) γράφεται

$$P_2 = \frac{p^2}{2\varepsilon_0 \hbar^2} \pi t \rho(\Omega) \quad (3.43)$$

όπου για την (3-43) λάβαμε υπόψη ότι  $d\omega = (2/t)dx$ .

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{\pi p^2}{2\varepsilon_0 \hbar^2} \rho(\Omega) \quad (3.44)$$

Η (3-44) παρέχει τον ρυθμό της πιθανότητας απορρόφησης ενός φωτονίου από άτομο αρχικά στην στάθμη  $E_1$  που διαθέτει στάθμη  $E_2 = E_1 + \hbar\Omega$ . Ο εν λόγω ρυθμός έχει υπολογιστεί με βάση κύματα πολωμένα σε δεδομένη κατεύθυνση. Στην περίπτωση μέλανος σώματος η ακτινοβολία δεν είναι πολωμένη και κατά ένα τρόπο το  $\rho(\Omega)$  μίας πόλωσης στην (3-44) θα πρέπει να αντικατασταθεί με το  $\rho(\Omega)/3$ , σύμφωνα με τις σχέσεις πλατών έντασης πεδίου

$$\langle \varepsilon_o^2 \rangle = \langle \varepsilon_{ox}^2 + \varepsilon_{oy}^2 + \varepsilon_{oz}^2 \rangle = 3 \langle \varepsilon_{oz}^2 \rangle, \quad \langle \varepsilon_{oz}^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \varepsilon_o^2 \rangle \quad (3.45)$$

Για μέλαν σώμα η (3-44) τροποποιείται στην

$$dP_2 = \frac{\pi p^2}{6\varepsilon_o \hbar^2} \rho(\Omega) dt \quad (3.46)$$

Συγκρίνοντας την (3-46) με την σχέση του Einstein για διεγερμένη απορρόφηση

$$dW_{\delta,\alpha} = B\rho(\Omega) dt \quad (3.47)$$

παίρνουμε για την συντελεστή B την έκφραση

$$B = \frac{\pi p^2}{6\varepsilon_o \hbar^2} \quad (3.48)$$

Όπως είδαμε και προηγούμενα ο συντελεστής  $A$  εξαρτάται από τους διαύλους που έχει διαθέσιμους σε μία κοιλότητα να εκπέμψει ένα διεγερμένο άτομο. Έχοντας υπόψη ότι για το μέλαν σώμα ο λόγος  $A/B$  είναι

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar\Omega^3}{\pi^2 c^3} \quad (3.49)$$

βρίσκουμε για τον συντελεστή A την έκφραση

$$A = \frac{p^2 \Omega^3}{6\pi \hbar \varepsilon_o c^3} \quad (3.50)$$

Στους λογαριασμούς μας, όπως θα προσέξατε, ξεχάσαμε την συνθήκη διατήρησης της ορμής.

### 3.6 Ασκήσεις

#### Άσκηση 3-1.

Θεωρήστε άτομο με ένα οπτικά ενεργό ηλεκτρόνιο το οποίο υπό την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου

$$\underline{E} = \hat{i}E_x(z,t) = \hat{i}E_0(z)\cos(\omega t)$$

περιορίζεται να κινείται μεταξύ των ιδιοκαταστάσεων  $u_1(\underline{r})$ ,  $u_2(\underline{r})$  της αδιατάρακτης Χαμιλτονιανής του ατόμου με αντίστοιχες ενέργειες  $E_1$ ,  $E_2$ .

Αν η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου υπό την επίδραση της Η/Μ ακτινοβολίας είναι

$$\Psi(\underline{r},t) = C_1(t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_1t\right)u_1(\underline{r}) + C_2(t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_2t\right)u_2(\underline{r})$$

βρείτε τις εξισώσεις κίνησης των (μιγαδικών) πλατών  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$  όταν το  $E(z)$  μεταβάλλεται ελάχιστα σε αποστάσεις της τάξης των ατομικών διαστάσεων. Αν  $E_1 < E_2$ , δώστε τις αρχικές συνθήκες στις οποίες θα υποβάλετε τα πλάτη  $C_1$ ,  $C_2$  προκειμένου να βρείτε τη πιθανότητα ώστε το άτομο να απορροφήσει ενέργεια  $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ . Εκφράστε τη πιθανότητα αυτή συναρτήσει των πλατών. Δώστε την αντίστοιχη απάντηση όταν το άτομο θα εκπέμψει ενέργεια  $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ .

#### Άσκηση 3-2.

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$r_{1j} = \int u_1^*(\underline{r}) r u_j(\underline{r}) d^3r$$

όταν η  $u_1(\underline{r})$  είναι η θεμελιώδης κατάσταση του Υδρογόνου  $\Phi_{100}(r,\theta,\varphi)$ , και η  $u_j(\underline{r})$  είναι μία από τις διεγερμένες καταστάσεις  $\Phi_{200}$ ,  $\Phi_{210}$ ,  $\Phi_{21\pm 1}$

$$\Phi_{100}(r, \theta, \phi) = (\pi a_0^3)^{-1/2} \exp\left(-r/a_0\right)$$

$$\Phi_{200}(r, \theta, \phi) = (32\pi a_0^3)^{-1/2} \left(2 - r/a_0\right) \exp\left(-r/2a_0\right)$$

$$\Phi_{210}(r, \theta, \phi) = (32\pi a_0^3)^{-1/2} \left(r/a_0\right) \cos \theta \exp\left(-r/2a_0\right)$$

$$\Phi_{21,\pm 1}(r, \theta, \phi) = (64\pi a_0^3)^{-1/2} \left(r/a_0\right) \sin \theta \exp(\pm i\phi) \exp\left(-r/2a_0\right)$$

με αντίστοιχες ενέργειες

$$\hbar\Omega_n = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\alpha_0 n^2}$$

όπου  $\epsilon_0$  είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού και  $\alpha_0 = 0.53 \text{ \AA}$  η ακτίνα του Bohr.

(α) Δείξτε ότι  $r_{11} = r_{22} = 0$ .

(β) Βρείτε μεταξύ ποίων καταστάσεων  $u_{ij}$  μπορεί να αναπτυχθεί διπολική ροπή  $p \neq 0$ . Διατυπώστε συμπεράσματα σε ότι αφορά τη δυνατότητα διέγερσης του ατόμου από τη στάθμη  $E_1$  στη  $E_2$  μέσω ηλεκτρικού πεδίου για τις διάφορες καταστάσεις  $u_j$ .

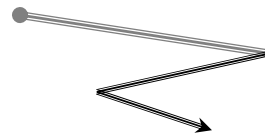
(γ) Βάσει των σχέσεων (3-48) & (3-50) για το ρυθμό πιθανότητας διεγερμένης εκπομπής από την ακτινοβολία μέλανος σώματος, υπολογίστε τους συντελεστές B και A για τις συγκεκριμένες ατομικές μεταβάσεις στο άτομο Υδρογόνου.

Οι υπολογισμοί διευκολύνονται αν χρησιμοποιήσετε την πιο κάτω έκφραση για το διάνυσμα της θέσης

$$\underline{r} = \frac{1}{2} r \sin \theta \left[ (\hat{i} - i \hat{j}) e^{i\phi} + (\hat{i} + i \hat{j}) e^{-i\phi} \right] + \hat{k} r \cos \theta$$

και το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma r} r^n dr = \gamma^{-(n+1)} n!$$



## 4. ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ- ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ

# M

έχρι τώρα θεωρούσαμε ότι κατά την αλληλεπίδραση του ατόμου με την H/M ακτινοβολία η ένταση της ακτινοβολίας παρέμενε σταθερή. Χωρίς αμφιβολία, το άτομο απορροφά ενέργεια (υπό μορφή φωτονίων) από το πεδίο καθώς επίσης του προσφέρει ενέργεια. Εάν το πεδίο είναι εξαιρετικά πυκνό (πολύ μεγάλος αριθμός φωτονίων στη μονάδα του όγκου) η αυξομείωση της έντασης του κατά τις ατομικές μεταπτώσεις θα μεταβάλλει ελάχιστα την ένταση του, ώστε αυτή να μπορεί να θεωρηθεί σταθερή. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση όμως, όπως στην περίπτωση στάσιμου H/M κύματος σε κοιλότητα, θα πρέπει να μελετηθεί συγχρόνως με την κατάσταση του ατόμου και η κατάσταση του πεδίου κατά την αλληλεπίδραση. Διευκολύνει στην περίπτωση αυτή να εκφράζεται η κατάσταση του πεδίου με τη γλώσσα των φωτονίων. Το πρώτο βήμα για να επιτευχθεί αυτό είναι να βρεθεί μια έκφραση της Χαμιλτονιανής του πεδίου που να επιτρέπει το μετασχηματισμό της στη γλώσσα του αριθμού φωτονίων, αντί της γλώσσας που χρησιμοποιεί τα ανυσματικά μεγέθη της έντασης του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου.

Έστω η κοιλότητα του σχήματος 7-1 & 7-2 μέσα στην οποία η H/M ακτινοβολία, που διαδίδεται κατά τον άξονα της κοιλότητας (άξονα  $z$ ), προσκρούει και ανακλάται στα δύο κάτοπτρα (στις θέσεις  $z = 0$  &  $z = L$ ) δημιουργώντας έτσι ένα στάσιμο κύμα. Η διάταξη των κατόπτρων επιτρέπει σε ορισμένα μόνο μήκη κύματος να αναπτυχθούν στην κοιλότητα που υπακούουν στη σχέση 5-21. Προκειμένου να εκφράσουμε τη Χαμιλτονιανή

του πεδίου στην μορφή αρμονικού ταλαντωτή, λύνουμε τις εξισώσεις του Maxwell που διέπουν την διάδοση της H/M ακτινοβολίας. Από κει και πέρα θα είναι εύκολη η μετατροπή της στην γλώσσα των φωτονίων.

Αν εκφρασθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και η μαγνητική μετατόπιση σαν  $E$  και  $B$ , αντίστοιχα, οι εξισώσεις Maxwell, όταν δεν υπάρχουν φορτία στο χώρο, γράφονται

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} &= c^2 (\nabla \wedge \underline{B}) \\ \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} &= -\nabla \wedge \underline{E} \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \underline{E} &= 0\end{aligned}\quad (4.1)$$

Η H/M ακτινοβολία είναι πολωμένη και το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο γράφεται

$$\begin{aligned}\underline{E} &= \hat{i} E_x \\ \underline{B} &= \hat{j} B_y\end{aligned}\quad (4.2)$$

ενώ οι συνοριακές συνθήκες επάνω στα κάτοπτρα επιβάλλουν στη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου τους περιορισμούς

$$E_x(0, t) = E_x(L, t) = 0 \quad (4.3)$$

Η  $E_x$  παράλληλα στην επιφάνεια του κατόπτρου είναι μηδέν διότι το υλικό του κατόπτρου είναι τέλειος αγωγός. Αν γινόταν κάποια στιγμή η συνιστώσα να μην είναι μηδέν, τότε η διαφορά δυναμικού που θα εμφανιζόταν στην επιφάνεια θα ανάγκαζε τα φορτία να μετακινηθούν. Αυτό όμως θα είχε σαν αποτέλεσμα να μηδενιστεί η διαφορά δυναμικού, δηλαδή η παράλληλη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου θα έπρεπε να ήταν μηδέν. Το μαγνητικό πεδίο εξάλλου, ανταλλάσσει την ενέργεια του με το ηλεκτρικό πεδίο όπως ένας ταλαντωτής ανταλλάσσει την ενέργεια του από κινητική σε δυναμική και το αντίθετο και παίρνει τη μέγιστη τιμή όπου η ηλεκτρική

συνιστώσα γίνεται ελάχιστη. Σύμφωνα με τα πιο πάνω οι εξισώσεις του Maxwell (4-1) γράφονται

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{\partial B_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.4)$$

επειδή τα ανύσματα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου είναι πολωμένα<sup>2</sup>,

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \hat{i}E_x + \hat{j}0 + \hat{k}0 \\ \underline{B} &= \hat{i}0 + \hat{j}B_y + \hat{k}0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

ενώ ισχύουν από τα εσωτερικά ανυσματικά γινόμενα

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \& \quad \nabla \cdot \underline{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι οι συνιστώσες εκείνες του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου που επιζούν είναι συναρτήσεις των  $z$  και  $t$ , δηλαδή:

$$E_y, E_z, B_x, B_z = 0 \quad \& \quad E_x, B_y = f(z, t) \quad (4.6)$$

Από τις εξισώσεις (4-4), απαλείφοντας διαδοχικά τις συνιστώσες,  $E_x$  &  $B_y$  προκύπτουν οι σχέσεις<sup>3</sup>

<sup>2</sup> και επειδή τα ανυσματικά εξωτερικά γινόμενα δίνονται από εκφράσεις της μορφής

$$\nabla \wedge \underline{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{κλπ}$$

<sup>3</sup>  $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z}$   $\frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial z}$ , διότι οι  $E_x$  &  $B_y$  είναι συνεχείς συναρτήσεις



$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= 0\end{aligned}\quad (4.7)$$

Οι (4-7) έχουν την μορφή εξίσωσης χωρδής. Η λύση των εξισώσεων αυτών ακολουθεί τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών. Έστω ότι η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να χωριστεί σε γινόμενο δύο άλλων συναρτήσεων κάθε μίας από τις δύο μεταβλητές  $E_x(z, t) = Z(z)G(t)$  ώστε η (4-7) να δίνει

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = \frac{\ddot{Z}(z)}{Z(z)} = -\kappa^2 = \text{σταθερό} \quad (4.8)$$

ή

$$\begin{aligned}\ddot{Z} + \kappa^2 Z &= 0 \\ \ddot{G} + \omega^2 G &= 0\end{aligned}\quad (4.9)$$

Οι (4-9) είναι εξισώσεις αρμονικού ταλαντωτή. Ας πάρουμε την πρώτη. Θα έχει λύση<sup>4</sup>

$$Z(z) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi l}{L} z\right) \quad (4.10)$$

κάνοντας χρήση της συνθήκης ορθοκανονικότητας

$$\frac{1}{V} \int_V Z_l^* Z_{l'} dV = \delta_{ll'} \quad (4.11)$$

Ο παράγων που αφορά την χρονική μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου,  $G(t)$ , μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας αρμονικός ταλαντωτής ιδιοσυχνότητας  $\omega$ . Σύμφωνα με το μηχανικό μοντέλο μπορούμε να θεωρήσουμε μία υποθετική

---

<sup>4</sup> εφόσον οι συνοριακές συνθήκες (4-3) οδηγούν στην  $\kappa = \frac{l\pi}{L}$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots$

μάζα  $M_I$  σε μία θέση  $q_I(t)$  η οποία εκτελεί αυτή την αρμονική ταλάντωση και που να αντιστοιχεί στην 1 τροπή ακτινοβολίας η οποία μπορεί να υποστηριχθεί στην κοιλότητα. Η δυναμική της ενέργεια αυτής της υποθετικής μάζας θα είναι  $\frac{M_I \omega_I^2 q_I^2}{2}$ . Θεωρώντας ότι η πυκνότητα ενέργειας που αντιστοιχεί στο ηλεκτρικό πεδίο  $\epsilon_0 G^2(t)/2$  της H/M ακτινοβολίας (όπου  $\epsilon_0$  η διηλεκτρική σταθερά του κενού) ταυτίζεται με την πυκνότητα ενέργειας αυτής της υποθετικής μάζας (θα μπορούσαμε να την είχαμε ταυτίσει με την πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου), καταλήγουμε στις εκφράσεις

$$G(t) = \left( \frac{M_I \omega_I^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} q_I(t) \quad (4.12)$$

και

$$E_x^I(z, t) = q_I(t) \left( \frac{2M_I \omega_I^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin\left(\frac{\pi}{L} z\right) \quad (4.13)$$

Η συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου  $B_y$  υπολογίζεται από την  $E_x(z, t)$  μέσα από την σχέση (4-4) και δεδομένου ότι το μαγνητικό πεδίο είναι μέγιστο όπου το ηλεκτρικό είναι ελάχιστο

$$B_y^I(z, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^z E_x^I(z, t) dz + C = \frac{1}{c} \dot{q}(t) \left( \frac{2M_I}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \cos\left(\frac{\pi}{L} z\right) \quad (4.14)$$

Η Χαμιλτονιανή  $H_I$  της μιάς από τις δυνατές τροπές του H/M πεδίου, και το αθροίσματός τους,  $H$ , θα είναι επομένως:

$$H = \sum_l H_l, \text{ με } H_l = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (E_l^2 + c^2 B_l^2) dV$$

$$H = \sum_l \frac{1}{2} (M_l \dot{q}_l^2 + M_l \omega_l^2 q_l^2) = \sum_l \left( \frac{p_l^2}{2M_l} + \frac{M_l \omega_l^2 q_l^2}{2} \right) \quad (4.15)$$

Η (4-15) είναι η χαρακτηριστική Χαμιλτονιανή ενός συστήματος αρμονικών ταλαντωτών με ιδιοτιμές

$$E_n^l = \left( n_l + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_l \quad (4.16)$$

που είναι ανεξάρτητη της αρχικά υποθετικής μάζας. Ο πρώτος προσθετός στο δεξί μέλος της (4-15) αντιπροσωπεύει την κινητική ενέργεια του ταλαντωτή και αντιστοιχεί στο μαγνητικό πεδίο (γιατί έχει αρχικά υποτεθεί ότι προέρχεται από αυτό). Ο δεύτερος προσθετός αντιπροσωπεύει τη δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή και αντιστοιχεί στο ηλεκτρικό πεδίο. Θα μπορούσε η αντιστοιχία αυτή να ήταν αντίστροφη, αν είχαμε κάνει αρχικά αυτή την υπόθεση.

#### 4.1 Τελεστές καταστροφής και δημιουργίας, $a$ και $a^\dagger$

Είναι τώρα εύκολο να κβαντωθεί η Χαμιλτονιανή που περιγράφει το πεδίο αρκεί να εφαρμοστεί η αντιστοιχία τελεστών

$$\boxed{\begin{array}{l} q_l \rightarrow q_l \\ p_l \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_l} \\ H_l \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \end{array}} \quad (4.17)$$

Το επόμενο βήμα είναι να εισαχθούν οι τελεστές  $\alpha$  και  $\alpha^+$ . Για λόγους ευκολίας αναφερόμαστε σε μία μόνο τροπή οπότε παραλείπεται ο δείκτης 1. Οι τελεστές ορίζονται με τις εκφράσεις

$$\begin{aligned}\alpha &= (2M\hbar\omega)^{-1/2}(M\omega q + ip) \\ \alpha^+ &= (2M\hbar\omega)^{-1/2}(M\omega q - ip)\end{aligned}\quad (4.18)$$

και κάνουμε χρήση των αντιμεταθετικών ιδιοτήτων

$$\begin{aligned}[\alpha, \alpha^+] &= \alpha\alpha^+ - \alpha^+\alpha = 1 \\ [q, p] &= i\hbar\end{aligned}\quad (4.19)$$

Από τις σχέσεις (4-18) υπολογίζονται οι τελεστές θέσης και ορμής μέσα από τους τελεστές  $\alpha$  και  $\alpha^+$

$$\begin{aligned}q &= \left(\frac{\hbar}{2M\omega}\right)^{1/2}(\alpha^+ + \alpha) \\ p &= i\left(\frac{M\hbar\omega}{2}\right)^{1/2}(\alpha^+ - \alpha)\end{aligned}\quad (4.20)$$

Με αντικατάσταση των (4-20) στην (4-15) για μία τροπή ακτινοβολίας, την οποία παραλείπουμε, η Χαμιλτονιανή του ελεύθερου πεδίου παίρνει τη κβαντισμένη της έκφραση

$$H = \hbar\omega\left(\alpha^+\alpha + \frac{1}{2}\right)\quad (4.21)$$

Οι τελεστές  $\alpha$  και  $\alpha^+$  έχουν τις πιο κάτω ιδιότητες

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad \alpha |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \\ |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\alpha^+)^n |0\rangle, \quad \alpha |0\rangle = 0 \\ a^+ \alpha |n\rangle = n |n\rangle \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Οι ιδιοτιμές τις Χαμιλτονιανής δίνονται από την σχέση (4-16)

$$H |n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \quad (4.23)$$

όπου  $|n\rangle$  παριστά την κατάσταση του H/M πεδίου με n αριθμό φωτονίων.

Την ονομάζουμε κατάσταση φωτονικών αριθμών. Τα  $|n\rangle$  αποτελούν ένα πλήρες σύστημα βάσεων,  $\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$ .

Με βάση τις (4-13) & (4-20) το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται

$$E_x(z, t) = \left( \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (\alpha^+ + \alpha) \sin kz, \quad k = \frac{\pi}{L} l \quad (4.24)$$

Μπορεί να δειχθεί ότι η αναμενόμενη τιμή του τελεστή του ηλεκτρικού πεδίου ως προς τις καταστάσεις  $|n\rangle$  είναι μηδέν

$$\langle n | E_x(z, t) | n \rangle = 0 \quad (4.25)$$

ενώ η αναμενόμενη τιμή του τελεστή της έντασης θα είναι διάφορος του μηδενός

$$\langle n | E_x^2(z, t) | n \rangle \neq 0 \quad (4.26)$$

Η (4-26) υποδηλώνει ότι υπάρχουν διαταραχές του ηλεκτρικού πεδίου. Οι

διαταραχές αυτές που αντιστοιχούν στην ενέργεια μηδενικού σημείου  $\frac{\hbar\omega}{2}$

της σχέσης (4-23), θεωρούνται η αιτία που προκαλεί την αυθόρμητη εκπομπή στο διεγερμένο άτομο, όπως θα αναφερθεί στο εδάφιο 4.6.

## 4.2. Υπολογισμός της Χαμιλτονιανής δισταθμικού ατόμου μέσα από σπινორιακούς αναστροφείς $S$ και $S^+$

Σε ένα δισταθμικό ατομικό σύστημα οι καταστάσεις με μικρότερη και μεγαλύτερη ενέργεια, αντίστοιχα, παρίστανται με τα δυδιάστατα ανύσματα<sup>5</sup>

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και } |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Οι σπινორιακοί τελεστές<sup>6</sup>

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } S^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

έχουν την ιδιότητα να ανυψώνουν και κατεβάζουν τις καταστάσεις του δισταθμικού ατόμου

$$S |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \text{ και } S^+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad (4.29)$$

ενώ

$$S |\downarrow\rangle = 0 \text{ και } S^+ |\uparrow\rangle = 0 \quad (4.30)$$

με άθροισμα

$$S^+ + S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

και γινόμενο

<sup>5</sup> Είτε και αντίστροφα όπως αναφέρεται στην [2].

<sup>6</sup> Από συνδυασμούς των σπινორιακών πινάκων του Pauli,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και υπακούουν την αγκύλη Poisson :  $\{S^+, S\} = S^+S + SS^+ = 1$

$$S^+ S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Τα ιδιοανύσματα του τελεστή  $S^+ S$  είναι τα  $|\downarrow\rangle$  &  $|\uparrow\rangle$  με ιδιοτιμές 0 και 1

$$\begin{aligned} S^+ S |\uparrow\rangle &= 1 |\uparrow\rangle \\ S^+ S |\downarrow\rangle &= 0 |\downarrow\rangle \end{aligned} \quad (4.33)$$

Το δισταθμικό άτομο έχει ιδιοκαταστάσεις με ενέργεια  $E_1$  και  $E_2$ , με  $E_1 < E_2$  και ο πίνακας που παριστά την Χαμιλτονιανή γράφεται

$$H_{\text{ατομ}} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 + \hbar\Omega \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

επειδή  $E_2 - E_1 = \hbar\Omega$

Αν μετράμε την  $E_2$  με αναφορά την  $E_1$  μπορούμε να θέσουμε  $E_1=0$  και η (4-34) γίνεται

$$H_{\text{ατομ}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\Omega \end{pmatrix} = \hbar\Omega \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

ή λόγω της (4-32)

$$\boxed{H_{\text{ατομ}} = \hbar\Omega S^+ S} \quad (4.36)$$

### 4.3. Η Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης ατόμου και πεδίου

Θεωρούμε ότι η αλληλεπίδραση ανάμεσα στο πεδίο και το δισταθμικό άτομο γίνεται με μηχανισμό ηλεκτρικού δίπολου. Άλλοι μηχανισμοί

αλληλεπίδρασης είναι δυνατόν να συμβούν (ηλεκτρικού τετραπόλου ή μαγνητικού δίπολου) αλλά έχουν μικρότερες πιθανότητες.

Η ενέργεια του ατομικού ηλεκτρικού δίπολου  $P$  μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο  $E$  είναι  $-P \cdot E$  και επομένως η Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας με δισταθμικό άτομο στη μορφή πίνακα (δες αντίστοιχες εκφράσεις στις 3-9, 3-18 και 5-11) στο μοντέλο ηλεκτρικού δίπολου θα είναι για πολωμένο πεδίο μέσα από την 4-13

$$H_{αλλ} = -eE_x(z, t)x_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -ex_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} q(t) \left( \frac{2M\omega^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz) \quad (4.37)$$

Αντικαθιστώντας το  $q$  της (4-20) στην (4-37)

$$H_{αλλ} = -ex_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left( \alpha^+ + \alpha \right) \left( \frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz) \quad (4.38)$$

ή από την 4-31

$$H_{αλλ} = \hbar g (S^+ + S) (\alpha^+ + \alpha) \quad (4.39)$$

με

$$\hbar g = -ex_{12} \left( \frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz) \quad (4.40)$$

Η συνολική Χαμιλτονιανή, επομένως, του ατομικού συστήματος και πεδίου θα είναι από τον συνδυασμό των (4-39), (4-36) και (4-21) παραλείποντας την ενέργεια μηδενικού πεδίου

$$\boxed{H = \hbar\omega\alpha^+\alpha + \hbar\Omega S^+S + \hbar g (S^+ + S) (\alpha^+ + \alpha)} \quad (4.41)$$



#### 4.4. Προσέγγιση Rabi

Η Χαμιλτονιανή (4-41) μπορεί να απλοποιηθεί με τη βοήθεια της προσέγγισης Rabi<sup>7</sup>. Ο τελευταίος της προσθετέος αναλύεται στους όρους

$$(S^+ + S)(a^+ + a) = S^+ a^+ + S^+ a + S a^+ + S a \quad (4.42)$$

Από τους τέσσερις προσθετέους του δεύτερου μέλους της (4-42) είναι δυνατόν να παραληφθούν ο πρώτος και ο τελευταίος διότι δεν έχουν φυσική σημασία στο συγκεκριμένο πρόβλημα της αλληλεπίδρασης δισταθμικού ατόμου με Η/Μ ακτινοβολία. Έστω ότι αρχικά το σύστημα βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση  $|\downarrow, n\rangle$  (ή τη διεγερμένη  $|\uparrow, n\rangle$ ) και το πεδίο έχει  $n$  φωτόνια. Αν επιδράσουν επάνω τους οι δύο τελεστές αυτοί θα προκύψουν νέες καταστάσεις χωρίς λογική υπόσταση, δηλαδή

$$S^+ a^+ |\downarrow, n\rangle = \sqrt{n+1} |\uparrow, n+1\rangle \quad (A) \quad (4.43)$$

$$S a |\uparrow, n\rangle = \sqrt{n} |\downarrow, n-1\rangle \quad (B)$$

δηλαδή στην (A) το σύστημα απορροφά ένα φωτόνιο από το πεδίο και διεγείρεται ενώ ο αριθμός των φωτονίων αυξάνεται κατά ένα! Στην (B) περίπτωση ενώ το σύστημα αποδιεγείρεται εκπέμποντας ένα φωτόνιο το πεδίο συγχρόνως χάνει ένα φωτόνιο! Τα άλλα δύο απομένοντα γινόμενα τελεστών δίνουν συμβατά αποτελέσματα

$$\begin{aligned} S a^+ |\uparrow, n\rangle &= \sqrt{n+1} |\downarrow, n+1\rangle \\ S^+ a |\downarrow, n\rangle &= \sqrt{n} |\uparrow, n-1\rangle \end{aligned} \quad (4.44)$$

Η Χαμιλτονιανή με τη προσέγγιση Rabi θα είναι επομένως

<sup>7</sup> Isidor Isaac Rabi 1898-1988. Γεννηθείς στην Αυστρία, εργάστηκε στο Columbia University, ΗΠΑ και επίσης συνεργάστηκε στην Ευρώπη με τους Sommerfeld, Bohr, Pauli, Stern, Heisenberg.

$$H_R = \hbar\Omega S^+ S + \hbar\omega a^+ a + \hbar g(S^+ a + S a^+) \quad (4.45)$$

Με τη προσέγγιση Rabi απλοποιούνται τα βήματα για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων ατομικής μετάβασης που αποτελεί τον σκοπό αυτού του κεφαλαίου. Τώρα η Χαμιλτονιανή θα εκφράζεται μέσα από σπινωριακούς τελεστές και τελεστές δημιουργίας και καταστροφής μετά από την κβάντωση του πεδίου που εισαγάγαμε στο κεφάλαιο αυτό. Με αυτό το μοντέλο δισταθμικού ατόμου δεν γίνεται αναφορά σε μεταπτώσεις προς άλλες καταστάσεις. Σε αυτή τη περίπτωση θα αναφερθούμε στο κεφάλαιο 6.

#### 4.5. Υπολογισμός της πιθανότητας απορρόφησης φωτονίου

Το σύστημα βρίσκεται αρχικά στη θεμελιώδη κατάσταση  $|\downarrow, n\rangle$  και αλληλεπιδρά με πεδίο  $n$  φωτονίων. Οι δυνατές καταστάσεις ατόμου – πεδίου είναι δύο: είτε αδιεγερτο άτομο – αριθμός φωτονίων  $n$ , είτε διεγερμένο άτομο – αριθμός φωτονίων  $(n - 1)$

$$|\Psi(t)\rangle = C_1(t)|\downarrow, n\rangle + C_2(t)|\uparrow, n-1\rangle \quad (4.46)$$

με αρχικές συνθήκες

$$C_1(0)=1 \quad \& \quad C_2(0)=0 \quad (4.47)$$

Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε, τους συντελεστές  $C(t)$  &  $C_2(t)$ , την αναμενόμενη τιμή των τελεστών που προσδιορίζουν τον φωτονικό αριθμό,

$\langle a^\dagger a \rangle$  και τις ατομικές μεταπτώσεις,  $\langle SS^\dagger \rangle$ . Οι εκφράσεις των  $\langle a^\dagger a \rangle$  και  $\langle SS^\dagger \rangle$  υπολογίζονται ως εξής, βλέπε άσκηση 4-2

$$\begin{cases} \langle a^\dagger a \rangle = \langle \Psi(t) | a^\dagger a | \Psi(t) \rangle \\ \langle S^\dagger S \rangle = \langle \Psi(t) | S^\dagger S | \Psi(t) \rangle \end{cases} \quad (4.48)$$

και

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger a \rangle &= n - |C_2|^2 \\ \langle S^\dagger S \rangle &= |C_2|^2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Όπως δείχνει η 4-49, επαληθεύεται η αρχή της διατήρησης της ενέργειας

$$\langle a^\dagger a \rangle + \langle S^\dagger S \rangle = n \quad (4.50)$$

Η πιθανότητα απορρόφησης  $|C_2|^2$  υπολογίζεται από την λύση της εξίσωσης του Schrödinger (3-10) με βάση τις αρχικές συνθήκες (4-47) και εφαρμογή της Χαμιλτονιανής Rabi (4-45). Προκύπτει το σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\omega & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \Omega - \omega + n\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

Ορίζεται ως συχνότητα Rabi  $\Omega_n$

$$\Omega_n = \sqrt{\left(\frac{\Omega - \omega}{2}\right)^2 + g^2 n} \quad (4.52)$$

Η συχνότητα Rabi δίνει ένα μέτρο της έντασης αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο ηλεκτρικό πεδίο και στην ατομική μετάπτωση. Ακολουθώντας τα βήματα που αναφέρονται στο παράρτημα (7-1) και με εφαρμογή των αρχικών συνθηκών η λύση των εξισώσεων αυτών βρίσκεται να είναι

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= e^{-i\left[n\omega + \frac{\Omega - \omega}{2}\right]t} \left\{ \cos(\Omega_n t) + i \frac{\Omega - \omega}{2\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right\} \\
C_2(t) &= e^{-i\left[n\omega + \frac{\Omega - \omega}{2}\right]t} \left\{ -i \frac{g\sqrt{n}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right\}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Από την (4-53) η πιθανότητα απορρόφησης υπολογίζεται ίση με

$$\boxed{|C_2|^2 = \frac{g^2 n}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t)} \tag{4.54}$$

Συνεπώς οι αναμενόμενες τιμές των τελεστών θα είναι

$$\langle a^+ a \rangle_t = n - \frac{g^2 n}{\left(\frac{\Omega - \omega}{2}\right)^2 + g^2 n} \sin^2(\Omega_n t) \tag{4.55}$$

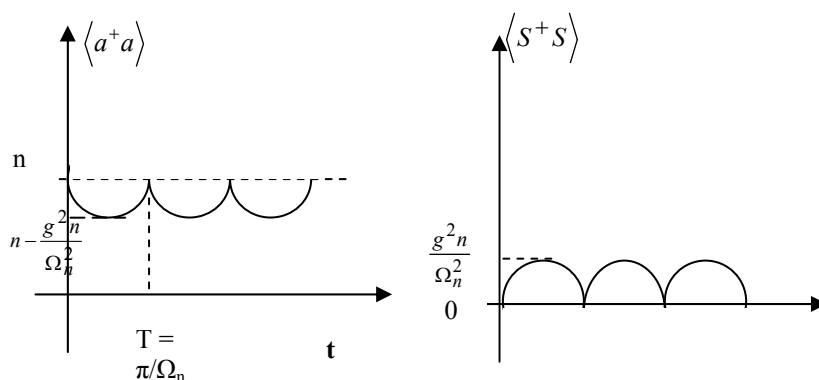
$$\langle S^+ S \rangle_t = \frac{g^2 n}{\left(\frac{\Omega - \omega}{2}\right)^2 + g^2 n} \sin^2(\Omega_n t) \tag{4.56}$$

Η χρονική εξέλιξη των αναμενόμενων τιμών των φωτονικών αριθμών και ατομικών μεταπτώσεων παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 4-1. Μέσα σε χρόνο  $T/2$  ( $=\pi/2\Omega_n$ ) η πιθανότητα να απορροφηθεί το φωτόνιο γίνεται μέγιστη. Εάν το σύστημα είναι μακριά από τον συντονισμό,  $\Omega \neq \omega$ , η

μέγιστη τιμή της πιθανότητας είναι  $\frac{g^2 n}{\Omega_n^2}$ , μικρότερη της μονάδας. Στο

συντονισμό,  $\Omega = \omega$ , η μέγιστη τιμή της πιθανότητας απορρόφησης γίνεται ίση με τη μονάδα, η αναμενόμενη τιμή των φωτονικών αριθμών είναι  $n-1$  ενώ το ατομικό σύστημα μεταβαίνει από τη κατάσταση 0 στη 1. Είναι επομένως φανερό ότι η συχνότητα Rabi προσδιορίζει τον χρόνο μέσα στον

οποίο θα πραγματοποιηθεί εξαναγκασμένη μετάπτωση και τη πιθανότητα να συμβεί αυτό. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως δίνει ένα μέτρο της έντασης αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο ηλεκτρικό πεδίο και στην ατομική μετάπτωση.



**Σχήμα 4-1** Χρονική εξέλιξη των αναμενόμενων των φωτονικών αριθμών και ατομικών μεταπτώσεων περίπτωση απορρόφησης φωτονίου

#### 4.6 Υπολογισμός της πιθανότητας εκπομπής φωτονίου

Η διαδικασία ακολουθεί ανάλογα βήματα όπως και στον υπολογισμό της απορρόφησης φωτονίου. Στην αρχική κατάσταση το άτομο είναι διεγερμένο και ο αριθμός των φωτονίων στο πεδίο είναι  $n$

$$|\Psi_2(0)\rangle = |\uparrow, n\rangle \quad (4.57)$$

Σε μια μετέπειτα χρονική στιγμή  $t$  η κατάσταση του συστήματος θα περιγράφεται από την

$$|\Psi(t)\rangle = C_1 |\downarrow, n+1\rangle + C_2 |\uparrow, n\rangle \quad (4.58)$$

όπου οι αρχικές συνθήκες επιβάλλουν

$$C_1(0)=0 \text{ \& } C_2(0)=1 \quad (4.59)$$

Η μέση τιμή του αριθμού φωτονίων και ατομικών μεταπτώσεων υπολογίζεται ανάλογα σε

$$\begin{aligned} \langle a^+ a \rangle_t &= n + |C_1|^2 \\ \langle S^+ S \rangle_t &= |C_2|^2 \end{aligned} \quad (4.60)$$

και επομένως<sup>8</sup>

$$\langle S^+ S \rangle_t + \langle a^+ a \rangle_t = n + 1 \quad (4.61)$$

δηλαδή μετά από την εκπομπή θα προστεθεί στα αρχικά  $n$  φωτόνια και άλλο ένα. Οι συντελεστές  $C_1$  και  $C_2$  υπολογίζονται να είναι

$$\begin{aligned} C_1(t) &= e^{-i\left[(n+1)\omega + \frac{\Omega - \omega}{2}\right]t} \left[ -i \frac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_{n+1}} \sin(\Omega_{n+1}t) \right] \\ C_2(t) &= e^{-i\left[(n+1)\omega + \frac{\Omega - \omega}{2}\right]t} \left[ \cos(\Omega_{n+1}t) - i \frac{\Omega - \omega}{2\Omega_{n+1}} \sin(\Omega_{n+1}t) \right] \end{aligned} \quad (4.62)$$

και

$$\begin{aligned} |C_1|^2 &= \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1}t) \\ |C_2|^2 &= 1 - \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1}t) \end{aligned} \quad (4.63)$$

όπου

$$\Omega_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{\Omega - \omega}{2}\right)^2 + g^2(n+1)} \quad (4.64)$$

---

<sup>8</sup> Επειδή  $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$

Όταν ο αριθμός των φωτονίων είναι μηδέν, ( $n=0$ ), η πιθανότητα αποδιέγερσης, έτσι όπως υπολογίσθηκε στην (4-63), γίνεται

$$|C_1|^2 = \frac{g^2}{\Omega_1^2} \sin^2(\Omega_1 t) \quad (4.65)$$

Απουσία Η/Μ πεδίου, ( $n=0$ ), όπως αναφέρθηκε στο εδάφιο 4.1, σαν παράγον αλληλεπίδρασης,  $g$ , θεωρείται η αλληλεπίδραση με το ηλεκτρικό πεδίο που αντιστοιχεί στην ενέργεια μηδενικού πεδίου.

Στην επόμενη παράγραφο θα περιγραφεί μία τεχνική υπολογισμού πιθανοτήτων με τη βοήθεια του εξελικτικού τελεστή για τη Χαμιλτονιανή Rabi.

#### **4.7 Ο εξελικτικός τελεστής για τη Χαμιλτονιανή Rabi**

Η εξέλιξη της κυματικής συνάρτησης,  $\Psi(x,t)$ , συστήματος με Χαμιλτονιανή  $H$ , όταν αυτή τη στιγμή  $t = 0$  είναι

$$\Psi(x,0) = \Phi(x) \quad (4.66)$$

ευρίσκεται από την επίλυση της εξίσωσης του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi \quad (4.67)$$

υπό την συνθήκη (4-66). Αυτό είναι το λεγόμενο πρόβλημα των αρχικών τιμών. Όταν η Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου (όταν δηλαδή το σύστημα είναι διατηρητικό) η ζητούμενη λύση παίρνει τη μορφή:

$$\Psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht\right)\Phi(x) \quad (4.68)$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η (4-68) υπακούει τη δυναμική εξίσωση (4-67) του συστήματος και ότι κατά την αρχική στιγμή ταυτίζεται με τη δεδομένη κυματική συνάρτηση (4-66).

Ο εκθετικός τελεστής που προηγείται της αρχικής καταστάσεως,  $\Phi(x)$ , στην (4-68) έχει πάρει το όνομα εξελικτικός τελεστής. Με την επίδραση του στην αρχική κατάσταση οδηγούμαστε στην εξέλιξη της στο χρόνο. Η (4-68) μας παρέχει μία συνταγή για την εύρεση της ζητούμενης κυματικής συνάρτησης, όπως αυτή εξελίσσεται στο χρόνο. Αυτό γίνεται με χρήση, του αναπτύγματος του εξελικτικού τελεστή, δηλαδή

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = \{ & 1 + \frac{1}{i!} \left(-\frac{i}{\hbar} t\right) H + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar} t\right)^2 H^2 + \\ & + \frac{1}{3!} \left(-\frac{i}{\hbar} t\right)^3 H^3 + \frac{1}{4!} \left(-\frac{i}{\hbar} t\right)^4 H^4 + \dots \} \Phi(x) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Για την εφαρμογή της (4-69) έχουμε μπροστά μας ένα φοβερά επίπονο έργο. Μας χρειάζονται τα αποτελέσματα των διαφόρων δυνάμεων του τελεστή  $H$  απάνω στην  $\Phi$ . Για μικρούς χρόνους μπορούμε χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστικά τους πρώτους όρους του αναπτύγματος. Για μεγαλύτερους χρόνους θα πρέπει να πάμε βαθύτερα στο ανάπτυγμα και τα πράγματα δυσκολεύουν, διότι γενικά εμπλεκόμαστε σε απροσμέτρητη πολυπλοκότητα. Τα μαθηματικά, όμως, φτιάχτηκαν για την εξαγωγή πληροφορίας από τα πολύπλοκα. Αν έχουμε κάτι πολύπλοκο, ψάχνουμε για κανονικότητες τις οποίες εκμεταλλευόμενοι μπορούμε να καταλήξουμε σε κάτι χρησιμοποιήσιμο. Μια τέτοια απλοποίηση θα δούμε αμέσως παρακάτω με την Χαμιλτονιανή Rabi.

Η Χαμιλτονιανή Rabi έχει τη μορφή

$$H_R = \hbar\Omega S^+ S + \hbar\omega a^+ a + \hbar g(S^+ a + Sa^+) \quad (4.70)$$



Ως γνωστόν κατάλληλη βάση για έκφραση της (4-70) σε στοιχεία πίνακα είναι οι ατομικές-φωτονικές καταστάσεις

$$|s, n\rangle = |s\rangle |n\rangle \quad (s = \downarrow, \uparrow ; n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.71)$$

Η γενική κυματική κατάσταση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των (4-71)

$$|\Phi\rangle = \sum_{s,n} \varphi_{sn} |s, n\rangle \quad (4.72)$$

Προκειμένου να βρούμε την εξέλιξη της κατάστασης του συστήματος με Χαμιλτονιανή (4-70) αρκεί να γνωρίζουμε την εξέλιξη των διαφόρων καταστάσεων της βάσης,  $|s, n\rangle$ . Για το σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι η (4-70) μπορεί να γραφτεί ως

$$H_R = H_0 + H_1 \quad (4.73)$$

όπου

$$H_0 = \hbar\omega(S^+S + a^+a) + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \quad (4.74)$$

$$H_1 = \hbar(\Omega - \omega)(S^+S - \frac{1}{2}) + \hbar g(S^+a + Sa^+) \quad (4.75)$$

Ουσιαστικά για να σπάσουμε την (4-70) στα δύο συνθετικά της  $H_0$  και  $H_1$  προσθαφαιρούμε στη Χαμιλτονιανή Rabi τον τελεστή  $\hbar(\Omega - \omega)(S^+S - \frac{1}{2})$ . Το ξεχώρισμα της (4-70) σε  $H_0$  και  $H_1$  έγινε από τον D. F. Walls [5] και έχει το πλεονέκτημα ότι τα δύο κομμάτια της Χαμιλτονιανής αντιμετωπίζονται, (4-76), και επιπλέον ότι η  $H_0$  είναι διαγώνια έναντι της βάσεως  $\{|s, n\rangle\}$ .

Από το ότι

$$[H_0, H_1] = 0 \quad (4.76)$$

έπεται ότι ο εξελικτικός τελεστής  $U(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_R t)$  μπορεί να πάρει τις μορφές

$$U(t) = U_0(t)U_1(t) \quad (4.77)$$

όπου

$$U_0(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t) , \quad U_1(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_1 t) \quad (4.78)$$

Για το τμήμα της Χαμιλτονιανής  $H_0$  οι συναρτήσεις βάσεως είναι ιδιοκαταστάσεις, δηλαδή

$$H_0 \begin{cases} |\downarrow, n\rangle \\ |\uparrow, n\rangle \end{cases} = \begin{cases} \left[ n\hbar\omega + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \right] |\downarrow, n\rangle \\ \left[ (n+1)\hbar\omega + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \right] |\uparrow, n\rangle \end{cases} \quad (4.79)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$f(H_0) \begin{cases} |\downarrow, n\rangle \\ |\uparrow, n\rangle \end{cases} = \begin{cases} f \left[ n\hbar\omega + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \right] |\downarrow, n\rangle \\ f \left[ (n+1)\hbar\omega + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \right] |\uparrow, n\rangle \end{cases} \quad (4.80)$$

Έχουμε

$$U_0(t) \begin{cases} |\downarrow, n\rangle \\ |\uparrow, n\rangle \end{cases} = \begin{cases} e^{-i \left[ n\omega + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \right] t} |\downarrow, n\rangle \\ e^{-i \left[ (n+1)\omega + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \right] t} |\uparrow, n\rangle \end{cases} \quad (4.81)$$

Έτσι, λοιπόν, μας μένει να βρούμε την επίδραση του τελεστή  $U_1(t)$  στις καταστάσεις  $|s, n\rangle$  προκειμένου να έχουμε το πλήρες αποτέλεσμα του εξελικτικού τελεστή.

Το τμήμα της Χαμιλτονιανής  $H_1$  δυστυχώς δεν είναι διαγώνιο, αλλά ευτυχώς το τετράγωνο του είναι και ισούται με

$$H_1^2 = \hbar^2 \left[ \left( \frac{\Omega - \omega}{2} \right)^2 + g^2 (S^+ S + a^+ a) \right] = \hbar^2 G \quad (4.82)$$

Παροτρύνεστε κάνοντας χρήση των μεταθετικών ιδιοτήτων των σπινιοριακών τελεστών  $S^+, S$  και φωτονικών τελεστών  $a^+, a$  να δείξετε την (4-82). Με βάση την (4-82) δίνουμε μία εύχρηστη έκφραση για τον εξελικτικό τελεστή [1] με Χαμιλτονιανή  $H_1$ .

Έχουμε, τροποποιώντας το ανάπτυγμα του τελεστή  $\exp[-iH_1 t / \hbar]$  ως

$$U_1(t) = 1 - \frac{iH_1}{\hbar\sqrt{G}} \frac{1}{1!} \sqrt{G}t - \frac{1}{2!} (\sqrt{G}t)^2 + \frac{iH_1}{\hbar\sqrt{G}} \frac{1}{3!} (\sqrt{G}t)^3 + \frac{1}{4!} (\sqrt{G}t)^4 - \frac{iH_1}{\hbar\sqrt{G}} (\sqrt{G}t)^5 - \dots \quad (4.83)$$

Η σειρά των τελεστών  $H_1$  και δυνάμεων του  $\sqrt{G}$  δεν έχει σημασία δεδομένου ότι  $G = H_1^2 / \hbar^2$ . Μαζεύοντας του άρτιους και περιττούς όρους ως προς  $\sqrt{G}$  στην (4-83) λαμβάνουμε

$$U_1(t) = \cos(\sqrt{G}t) - \frac{iH_1}{\hbar\sqrt{G}} \sin(\sqrt{G}t) \quad (4.84)$$

Η μορφή (4-84) επιτρέπει τώρα εύκολα την εύρεση του αποτελέσματος του τελεστή  $U_1(t)$  στις καταστάσεις  $|s, n\rangle$ . Ως παράδειγμα θεωρούμε την περίπτωση  $U_1(t)|\downarrow, n\rangle$  και παίρνουμε

$$U_1(t)|\downarrow, n\rangle = \left[ \cos(\Omega_n t) + i \frac{\Omega - \omega}{2\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right] |\downarrow, n\rangle - i \frac{g\sqrt{n}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) |\uparrow, n-1\rangle$$

(4.85)

όπου

$$\Omega_n = \sqrt{\left(\frac{\Omega - \omega}{2}\right)^2 + g^2 n}$$

(4.86)

είναι η γνώριμη μας συχνότητα Rabi. Αφήνουμε τώρα ως άσκηση να δείξετε το αποτέλεσμα.

$$\begin{aligned} U_1(t)|\uparrow, n\rangle &= \\ &= \left[ \cos(\Omega_{n+1} t) - i \frac{\Omega - \omega}{2\Omega_{n+1}} \sin(\Omega_{n+1} t) \right] |\uparrow, n\rangle - i \frac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_{n+1}} \sin(\Omega_{n+1} t) |\downarrow, n+1\rangle \end{aligned}$$

(4.87)

Με τη βοήθεια του τύπου (4-87) σε συνδυασμό με τις (4-79) και (4-81) είμαστε τώρα σε θέση να γράψουμε το αποτέλεσμα του εξελικτικού τελεστή επί της καταστάσεως  $|\downarrow, n\rangle$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} U(t)|\downarrow, n\rangle &= \\ &= \exp\left[-i\left(n\omega + \frac{\Omega - \omega}{2}\right)t\right] \left\{ \begin{aligned} &\left[ \cos(\Omega_n t) + i \frac{\Omega - \omega}{2\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right] |\downarrow, n\rangle \\ &- i \frac{g\sqrt{n}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) |\uparrow, n-1\rangle \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (4.88)$$

και η εξέλιξη της κατάστασης δισταθμικού ατόμου όταν αρχικά είναι διεγερμένο θα είναι

$$\begin{aligned}
 U(t)|\uparrow, n\rangle = & \\
 = \exp \left[ -i \left( (n+1)\omega + \frac{\Omega - \omega}{2} t \right) \right] & \left\{ \begin{aligned} & \left[ \cos(\Omega_{n+1} t) - i \frac{\Omega - \omega}{2\Omega_{n+1}} \sin(\Omega_{n+1} t) \right] |\uparrow, n\rangle \\ & -i \frac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_{n+1}} \sin(\Omega_{n+1} t) |\downarrow, n+1\rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.89)
 \end{aligned}$$

Από τις 4-88 και 4-89 υπολογίζονται οι πιθανότητες απορρόφησης και εκπομπής φωτονίου, όπως προηγουμένως στις 4-53, 4-54, 4-62, 4-63 αυτή τη φορά όμως χωρίς τη λύση διαφορικών εξισώσεων. Η πιο πάνω τεχνική, όπως βλέπετε, παρακάμπτει το πρόβλημα των ιδιοτιμών και παρέχει την εξέλιξη οπουδήποτε γραμμικού συνδυασμού καταστάσεων της μορφής  $|s, n\rangle$  που συνιστά και τη πιο γενική μορφή αρχικών καταστάσεων. Στην πράξη η κατάσταση ατόμου-φωτονίων είναι μείγμα καταστάσεων  $|s, n\rangle$ .

## 4.6. Ασκήσεις

### Άσκηση 4-1

Θεωρείστε δισταθμικό άτομο σε κοιλότητα συντονισμού. Υποθέστε ότι το άτομο δέχεται την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου  $\underline{E} = \hat{i}E_0(z)\cos\omega t$ .

(α) Βρείτε την εξίσωση που διέπει τη κίνηση των πλατών  $C_1, C_2$ , στη κυματική συνάρτηση του ατόμου  $\Psi(\underline{r}, t) = C_1(t)\mu_1(\underline{r}) + C_2(t)\mu_2(\underline{r})$  στη

$$\text{μορφή} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = H' \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

όπου

$$H' = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 + \hbar\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ex_{12} \\ -ex_{12} & 0 \end{pmatrix} E_0 \cos\omega t.$$

Πάρτε  $E_1=0$  και  $x_{12}$  πραγματικό και εκφράστε την πιο πάνω Χαμιλτονιανή χρησιμοποιώντας σπινორιακούς αναστροφείς  $S^+$ ,  $S$ .

(β) Για τη πιο πάνω περίπτωση βρείτε τη Χαμιλτονιανή του συστήματος άτομο-μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας  $\omega$ , στη μορφή

$$H = \hbar\omega\alpha^+\alpha + \hbar\Omega S^+S + \hbar g(S + S^+)(\alpha + \alpha^+)$$

### Άσκηση 4-2

Χρησιμοποιώντας ως βάση τις καταστάσεις ατόμου-φωτονίων  $|\downarrow, n\rangle$ ,  $|\uparrow, n\rangle$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , βρείτε τη κυματική συνάρτηση του κβαντισμένου συστήματος 'άτομο-μονοχρωματική ακτινοβολία' (στη προσέγγιση Rabi) υπό τις εξής αρχικές συνθήκες  $|\Psi_1(0)\rangle = |\downarrow, n\rangle$ ,  $|\Psi_2(0)\rangle = |\uparrow, n\rangle$ . Υπολογίστε για τις περιπτώσεις αυτές την εξέλιξη των αναμενόμενων τιμών των φωτονικών αριθμών και των ατομικών ταλαντώσεων. Βρείτε τις αντίστοιχες πιθανότητες απορρόφησης και εκπομπής ενός φωτονίου.

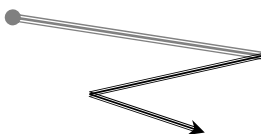
### Άσκηση 4-3

Θεωρήστε δισταθμικό άτομο σε κοιλότητα συντονισμού το οποίο δέχεται την επίδραση πολωμένου H/M κύματος σε κατεύθυνση κάθετη στον άξονα της κοιλότητας. Χειριστείτε την επίδραση του H/M κύματος ως διαταραχή στη δυναμική του ατόμου και δείξτε ότι η κβαντική πραγμάτευση αναδεικνύει αυτόματα την ύπαρξη αυθόρμητης εκπομπής. Υπολογίστε με βάση τα δεδομένα της συσκευής, τη θέση του ατόμου και πυκνότητα ακτινοβολίας, την πιθανότητα της προκαλούμενης και αυθόρμητης αποδιέγερσης του ατόμου.

**Άσκηση 4-4**

Η κυματική συνάρτηση του αρμονικού ταλαντωτή στη θεμελιώδη του κατάσταση είναι η (7-12). Βρείτε τη τιμή της έκφρασης  $a\Phi_0$  καθώς και την ενέργεια που αντιστοιχεί στη κυματική συνάρτηση  $a^+\Phi_0$  και ερμηνέψτε τα αποτελέσματα σας κάνοντας χρήση της γλώσσας με αριθμούς φωτονίων.

Επαναλάβετε το ίδιο για την έκφραση  $\frac{a^{+2}}{\sqrt{2!}}\Phi_0$ .



## 5. MASER KAI LASER

### 5.1 Εισαγωγή

**Ο** δρόμος για την κατασκευή του laser (από τα αρχικά του **L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation) άνοιξε το 1917 με την περιγραφή του μηχανισμού αλληλεπίδρασης φωτονίων με την ύλη και την εκπομπή φωτονίων με μηχανισμό διεγερμένης εκπομπής από τον Einstein [11]. Βάσει αυτής της διεργασίας το 1954 λειτούργησε ο πρώτος maser αμμωνίας από τον Αμερικανό Charles Hard Townes με σκοπό την ενίσχυση της H/M ακτινοβολίας στη περιοχή μικροκυμάτων (Microwave Amplification, κλπ). Ο προορισμός του ήταν χρησιμοποιηθεί στις επικοινωνίες και σε συσκευές πλοήγησης μεγάλης ακρίβειας. Η συσκευή λειτούργησε πρώτα στη περιοχή των μικροκυμάτων επειδή η υπεροχή της αυθόρμητης & ασύμφωνης ακτινοβολίας (θόρυβος) ως προς τη χρήσιμη εξαναγκασμένη & σύμφωνη (σήμα) εξαρτάται από τη τρίτη δύναμη της συχνότητας και είναι πολύ μικρότερη στα μικροκύματα από ότι στο ορατό φάσμα. Η θεωρητική περιγραφή της δυνατότητας λειτουργίας της συσκευής σαν ενισχυτής στο ορατό φάσμα (σαν laser) έγινε από τον ίδιο τον Townes μαζί με τον Αμερικανό Arthur Schawlow το 1958 [12] με βάση τις αρχές της λειτουργίας του maser αμμωνίας. Ενώ φαινόταν πιο πιθανό η λειτουργία ενός laser στο ορατό να προέρχεται από αέρια συστήματα, εντούτοις ο πρώτος laser που λειτούργησε ήταν στερεού, ο ruby laser το 1960 από τον Theodore Harold Maiman [13], χρησιμοποιώντας σαν υλικό laser μία ράβδο κρυστάλλου Ρουβιδίου. Η λειτουργία του πρώτου laser ήταν υπό μορφή παλμών σαν μία συνεχή δέσμη. Ένα χρόνο αργότερα λειτούργησε και ο πρώτος laser αερίου, ο He-Ne, με συνεχή λειτουργία δέσμης από τον Αμερικανό Ιρανικής καταγωγής Ali Javan [14]. Το 1966 κατασκευάστηκε και ο laser υγρής κατάστασης από τον Αμερικανό φυσικό



Peter Sorokin. Σήμερα η λειτουργία laser φτάνει ακόμη και σε περιοχές συχνοτήτων ακτίνων-X. Η κατασκευή του πρώτου laser συνάντησε πολύ μεγαλύτερες δυσκολίες από ότι του maser γιατί η κατασκευή μιάς μηχανής συνεκτικής ακτινοβολίας αυξάνει σε δυσκολία όσο μικραίνει το μήκος κύματος λειτουργίας της. Ο laser ακτίνων-X (κατασκευάστηκε το 1984) π.χ., απαιτεί κοιλότητες συντονισμού πολύ μικρότερων διαστάσεων. Πρόσφατα βρέθηκαν αστρικά νέφη που εκπέμπουν δέσμη laser ακτίνων-X, ενώ αστρική εκπομπή maser έχει ήδη διαπιστωθεί εδώ και 25 περίπου χρόνια!

Η δέσμη Laser έχει βρει τόσες εφαρμογές όσες μπορεί να βάλει κανείς με το μυαλό του και αυτό οφείλεται στις εξαιρετικές της ιδιότητες με τις οποίες υπερέχει από άλλες συμβατικές πηγές φωτός. Συνδυάζει μεγάλη ένταση, κατευθυντικότητα, συμφωνία και μονοχρωματικότητα. Οι lasers έχουν αποβεί πολύτιμα εργαλεία στην βιομηχανία, στην επιστημονική έρευνα [10], στις επικοινωνίες, την ιατρική, στρατιωτική τεχνολογία για να ονομάσουμε μόνο μερικές από τις εφαρμογές τους. Ανάλογα με το είδος του υλικού laser που χρησιμοποιείται, διακρίνονται οι εξής κατηγορίες laser: αερίων, στερεάς κατάστασης, υγρής κατάστασης και ημιαγωγών.

Σαν υλικά laser στερεάς κατάστασης χρησιμοποιούνται ράβδοι Ρουβιδίου, αλλά και γυαλιά ή κρυσταλλικά υλικά εμποτισμένα με προσμίξεις Νεοδύμιου (Nd). Λειτουργούν εκπέμποντας παλμούς μεγάλης ισχύος σε περιοχές συχνοτήτων που εκτείνονται από το υπέρυθρο ως το υπεριώδες και στη περιοχή των ακτίνων-X. Στους lasers αερίων το υλικό είναι είτε καθαρό αέριο, είτε μίγμα αερίων ή ακόμη και ατμοί μετάλλων. Ο Από αυτούς ο laser HeNe, διακρίνεται για τη μονοχρωματικότητα & κατευθυντικότητα της δέσμης του, λειτουργεί όμως σε σχετικά χαμηλή ισχύ. Ο Laser CO<sub>2</sub> αντίθετα λειτουργεί σε υψηλή ένταση σε συνεχή λειτουργία δέσμης (~80kW).

Από τους πιο συμπαγείς σε μέγεθος είναι τα laser ημιαγωγών. Αποτελούνται συνήθως από μία επαφή ανάμεσα σε στρώματα ημιαγωγών που καθένα έχει διαφορετικές ιδιότητες ηλεκτρικής αγωγιμότητας. Ο

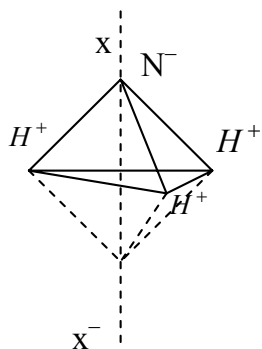
ημιαγωγός που χρησιμοποιείται συνήθως είναι το GaAs. Τα laser ημιαγωγών έχουν μεγάλη απόδοση σε ισχύ και λόγω του μικρού όγκου και της συνεχούς λειτουργίας τους βρίσκουν πολλές εφαρμογές στη καθημερινή ζωή, όπως π.χ. σε συσκευές Compact Disk (CD), εκτυπωτές και δείκτες οθόνης. Οι lasers υγρής φάσης χρησιμοποιούν σαν ενεργό υλικό συνήθως ανόργανες βαφές που περιέχονται μέσα σε δοχεία. Έχουν σαν πλεονέκτημα τη λειτουργία σε μία πολύ μεγάλη περιοχή μηκών κύματος που επιλέγονται εύκολα με στροφή ενός πρίσματος. Τα δοχεία όμως που χρησιμοποιούν για το υγρό ενεργό υλικό κάνουν τα lasers αυτά δύσχρηστα. Τελευταία γίνεται προσπάθεια κατασκευής laser βαφής στερεάς κατάστασης με διαχέυση της βαφής στους πόρους ανόργανου γυαλιού (solgel πυριτίου) [6]. Από το 1977 έχει αναπτυχθεί και μια νέα κατηγορία, αυτή των laser ελεύθερων ηλεκτρονίων. Σε αυτές τις συσκευές μία δέσμη ηλεκτρονίων περιστρέφεται γύρω από δυναμικές μαγνητικές γραμμές εκπέμποντας Η/Μ ακτινοβολία. Οι lasers αυτοί μεταβάλλουν το μήκος κύματος λειτουργίας τους με φάσμα που θεωρητικά φθάνει μέχρι και ακτίνες-Χ.

Από αυτή την τεράστια ποικιλία συσκευών laser εδώ θα αναπτύξουμε για ιστορικούς λόγους τον πρώτο που λειτούργησε στη περιοχή μικροκυμάτων τον maser αμμωνίας. Ο πρώτος laser αερίου που λειτούργησε ο HeNe, θα περιγραφεί στις βασικές αρχές λειτουργίας του ενώ τελικά θα δοθεί μία εισαγωγική περιγραφή του laser ημιαγωγών.

## 5.2 Το maser αμμωνίας

Το ενεργό υλικό στο maser αμμωνίας συνίσταται όπως λέει και η ονομασία του, από μόρια  $NH_3$  των οποίων η δομή παρίσταται γραφικά στο σχήμα 5-1. Το άτομο του αζώτου στο μόριο αμμωνίας βρίσκεται κορυφή της πυραμίδας που σχηματίζει με τα τρία υδρογόνα στη βάση, με διαστάσεις

ύψους  $0.38 \text{ \AA}$  και ακμής  $1.014 \text{ \AA}$ , σχήμα 5-1. Η θέση αυτή με τη χαμηλότερη ενέργεια είναι και η θέση ισορροπίας του N.

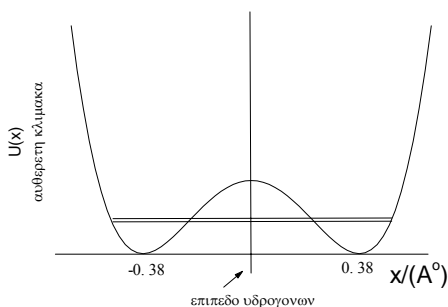


**Σχήμα 5-1** Το μόριο της αμμωνίας. Η ακμή της πυραμίδας έχει μήκος  $1,014 \text{ \AA}$  και το ύψος της  $0,38 \text{ \AA}$ .

Εάν διεγερθεί και απομακρυνθεί από αυτή τη θέση εξασκούνται είτε ελκτικές είτε απωστικές δυνάμεις που το επαναφέρουν στην αρχική του θέση ισορροπίας, ανάλογα με τη κατεύθυνση της μετατόπισης του. Οι δυνάμεις που εξασκούνται στο άτομο του αζώτου από τα υδρογόνα περιγράφονται από ένα δυναμικό της μορφής, σχήμα 5-2

$$U(x) = \hbar\omega \left( \frac{\alpha}{4} x^4 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{16\alpha} \right) \quad (5.1)$$

όπου  $\alpha=0.06$ , το  $x$  μετράται σε μονάδες μήκους  $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$  και  $\hbar\omega$  η ιδιοτιμή της ενέργειας.



**Σχήμα 5-2.** Το άτομο του αζώτου στο μόριο της αμμωνίας υπόκειται στο δυναμικό  $U(x)$  εξαιτίας της παρουσίας των τριών υδρογόνων. Οι δύο πρώτες ιδιοτιμές ενέργειας βρίσκονται χαμηλότερα από το φράγμα δυναμικού.

---

 Η εξίσωση του Schrödinger

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right] \Phi = E\Phi \quad (5.2)$$

προβλέπει μεγάλο αριθμό ιδιοτιμών ενέργειας και ιδιοκαταστάσεων τις οποίες μπορεί να κατέχει το άζωτο στο περιβάλλον των υδρογόνων. Οι δύο πρώτες ιδιοκαταστάσεις  $\Phi_1$  και  $\Phi_2$ , έχουν αντίστοιχες ενέργειες χαμηλότερες από την τιμή της ενέργειας που έχει το άζωτο όταν βρίσκεται στο επίπεδο των υδρογόνων (γύρω στα 46% και 44% χαμηλότερες) που αποτελεί ένα φραγμό δυναμικού. Οι ενέργειες αυτές διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους σε σχέση με την ενέργεια του φραγμού και βρίσκονται πολύ κοντά, αφού η διαφορά τους αποτελεί το ~1.9% της ενέργειας φραγμού. Τις ιδιοκαταστάσεις αυτές μπορεί εύκολα να τις πάρει το μόριο της αμμωνίας σε συνήθεις θερμοκρασίες όπου η θερμική ενέργεια  $kT$  είναι της τάξης των 0.025 eV μεγαλύτερη από τις αντίστοιχες ιδιοτιμές  $E_1, E_2 \sim 0.003\text{eV}$ , ενώ η διαφορά τους είναι πάρα πολύ μικρότερη  $E_1 - E_2 \sim 0.0001\text{eV}$ . Από την κατανομή πιθανοτήτων του Boltzmann και επειδή  $E_1 - E_2$  είναι μικρό

$$\frac{P_1}{P_2} = \exp\left[-\frac{E_1 - E_2}{kT}\right] \quad (5.3)$$

προκύπτει, ότι η πιθανότητα  $P_1$  να βρίσκεται το μόριο της αμμωνίας στη κατάσταση  $\Phi_1$  με ενέργεια  $E_1 = \hbar\omega_1$  είναι σχεδόν ίδια με τη πιθανότητα  $P_2$  να βρίσκεται στη  $\Phi_2$  με ενέργεια  $E_2 = \hbar\omega_2$ . Επομένως οι δύο ενεργειακές καταστάσεις έχουν περίπου τον ίδιο πληθυσμό. Οι επόμενες διεγερμένες καταστάσεις της αμμωνίας έχουν ενέργειες πάνω από το φραγμό δυναμικού.

Στις δύο πρώτες ιδιοκαταστάσεις το άτομο του αζώτου μπορεί να βρίσκεται είτε δεξιά είτε αριστερά του επιπέδου των υδρογόνων, όπως φαίνεται και στα σχήματα 5-1 & 5-2, ξεπερνώντας το φραγμό με φαινόμενο της σήραγγας. Αυτές οι δύο πρώτες ενεργειακές στάθμες χρησιμοποιούνται για τη δράση maser στο μόριο της αμμωνίας. Η χαμηλότερη ενέργεια

αντιστοιχεί σε μία συμμετρική ιδιοκατάσταση, ενώ η μεγαλύτερη σε μία αντισυμμετρική (σχήματα 5-3 & 5-4), δηλαδή

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= \Phi_1(-x) \\ \Phi_2(x) &= -\Phi_2(-x)\end{aligned}\quad (5.4)$$

Η γενική κυματοσυνάρτηση του μορίου της αμμωνίας θα αποτελεί υπέρθεση των δύο αυτών ιδιοκαταστάσεων [2]

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} \Phi_1(x) + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t} \Phi_2(x) \right] \quad (5.5)$$

η οποία μπορεί να μετασχηματισθεί στην

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \Phi_1(x) + e^{-i\omega t} \Phi_2(x) \right] \quad (5.6)$$

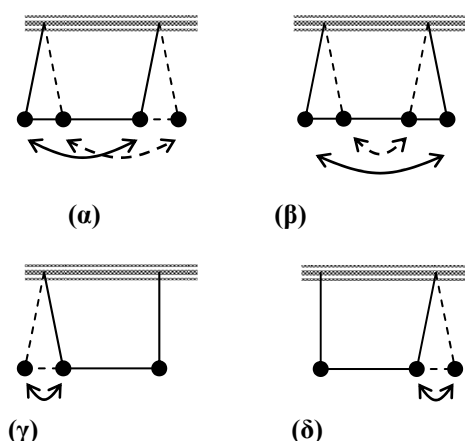
αν γραφτεί  $\hbar(\omega_2 - \omega_1) = \hbar\omega$  και παραληφθεί ο παράγοντας φάσης  $e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}$  ο

ο οποίος δεν συνεισφέρει στον υπολογισμό της πιθανότητας,  $|\Psi(x,t)|^2$ , να βρεθεί το άτομο του αζώτου κάποια χρονική στιγμή,  $t$ , σε κάποια θέση  $x$ . Η κυματοσυνάρτηση παίρνει τις ακόλουθες ενδιαφέρουσες εκφράσεις σαν συνάρτηση της θέσης στις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές,  $t=0$  και  $t=\pi/\omega$

$$\begin{aligned}\Psi(x,0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_1(x) + \Phi_2(x)] = \Psi_L(x) \\ \Psi\left(x, \frac{\pi}{\omega}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_1(x) - \Phi_2(x)] = \Psi_R(x)\end{aligned}\quad (5.7)$$

Οι εκφράσεις αυτές είναι χρήσιμες για να κατανοήσει κανείς την κίνηση του μορίου της αμμωνίας είτε αν βρίσκεται κάπου ανάμεσα στις αντίστοιχες δύο ιδιοκαταστάσεις  $\Phi_1$  και  $\Phi_2$  (εξισώσεις 5-5 ή 5-6), ή όταν βρίσκεται συντονισμένο σε μία από αυτές. Η κυματοσυνάρτηση που προκύπτει από

την υπέρθεση τους δίνει τη πιθανότητα το άτομο του αζώτου να βρεθεί είτε αριστερά του φραγμού

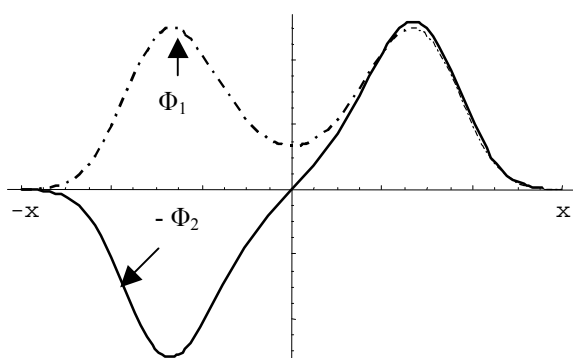


**Σχήμα 5-3.** Κλασικό μοντέλο δύο ασθενώς συνεζευγμένων εκκρεμών για την περιγραφή της συμπεριφοράς του μορίου της αμμωνίας (γ) & (δ) ανταλλαγή ενέργειας ανάμεσα στα εκκρεμή, (α) σύμφωνη ταλάντωση, (β) ασύμφωνη ταλάντωση.

των υδρογόνων  $|\Psi_L|^2$  όπως στο σχήμα 5-3γ είτε δεξιά  $|\Psi_R|^2$ , σχήμα 5-3δ. Θα χρειασθεί να φαντασθεί κανείς το κλασικό μοντέλο δύο ασθενώς συνεζευγμένων εκκρεμών. Τα ασθενώς συνδεδεμένα εκκρεμή κάνουν γενικά μια πολύπλοκη κίνηση. Έστω ότι κάποια χρονική στιγμή το δεξί εκκρεμές είναι ακίνητο ενώ το αριστερό μετατοπίζεται ελαφρά από τη θέση ισορροπίας του (σχ. 5-3γ), τότε θα επακολουθήσει μία κίνηση του συστήματος όπου μέσα σε μισή περίοδο,  $\pi/\omega$ , χαρακτηριστική της σύζευξης του συστήματος, η ταλάντωση θα μεταφέρεται πλήρως από το ένα στο άλλο εκκρεμές. Όταν 'το δεξί εκκρεμές ταλαντεύεται και το αριστερό είναι ακίνητο' αναλογεί στο άζωτο να βρίσκεται δεξιά του φραγμού και περιγράφεται από την  $|\Psi_R(x)|^2$  στην 5-7, ενώ η κατάσταση 'το αριστερό εκκρεμές να ταλαντεύεται και το δεξί να είναι ακίνητο' περιγράφεται από την πιθανότητα  $|\Psi_L(x)|^2$  και αναλογεί στο άζωτο να βρίσκεται αριστερά του

φραγμού. Αυτό φαίνεται και από την γραφική υπέρθεση της συμμετρικής  $\Phi_1$  και αντισυμμετρικής  $\Phi_2$  στο σχήμα 5-5. Αν όμως διεγερθεί ακριβώς η μία από τις δύο ιδιοκαταστάσεις ώστε το μόριο της αμμωνίας συντονισθεί σε μία από αυτές τις δύο, θα παραμείνει σε αυτή επ'άοριστον. Οι αντίστοιχες πιθανότητες θα είναι οι  $|\Phi_1|^2$  ή  $|\Phi_2|^2$  που υπολογίζονται μέσα από τις σχέσεις (5-8) η πρώτη σαν μία σύμφωνη ταλάντωση με τη χαμηλότερη ενέργεια, σχήμα 5-3α και η δεύτερη σαν μία ασύμφωνη ταλάντωση με την υψηλότερη ενέργεια, σχήμα 5-3β.

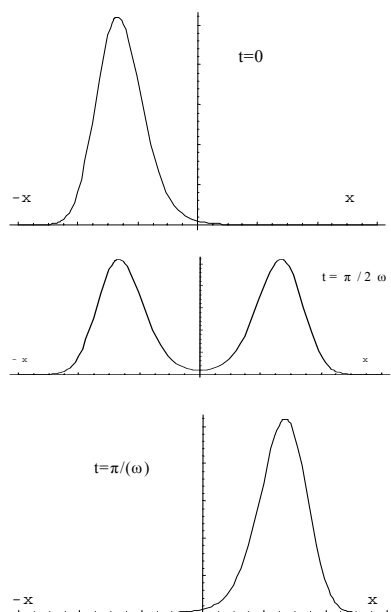
$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_L(x) + \Psi_R(x)] \\ \Phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_L(x) - \Psi_R(x)]\end{aligned}\quad (5.8)$$



**Σχήμα 5-4.** Η γραφική παράσταση της συμμετρικής ιδιοκατάστασης  $\Phi_1$  (διακεκομμένη) και της αντισυμμετρικής  $\Phi_2$ .

Σε αναλογία με το κλασικό παράδειγμα αν τη χρονική στιγμή  $t=0$  το άζωτο βρίσκεται αριστερά του φραγμού δυναμικού των υδρογόνων μέσα σε χρόνο  $t=\pi/\omega$  θα μεταναστεύσει δεξιά του φραγμού, σχήμα 5-5. Σε μισό από αυτό

το χρόνο,  $t=\pi/2\omega$ , θα έχει κάποια (μικρότερη πιθανότητα) να βρίσκεται συγχρόνως και δεξιά και αριστερά του φραγμού [8].



**Σχήμα 5-5.** Υπέρθυση των  $\Phi_1$  &  $\Phi_2$  του σχ. 5-4. Αν τη χρονική στιγμή  $t=0$  από την υπέρθεση των  $\Phi_1$  και  $\Phi_2$  προκύπτει η  $\Phi_L$ , αριστερά του φραγμού μετά από χρόνο  $\pi/\omega$  η υπέρθεση τους θα αντιστοιχεί στην  $\Phi_R$  το άζωτο να έχει μεταπηδήσει δεξιά του φραγμού, ενώ σε χρόνο  $\pi/2\omega$  το άζωτο θα έχει κάποια πιθανότητα να βρίσκεται και δεξιά και αριστερά του φραγμού σχέσεις (5-7). Τα μέγιστα ή ελάχιστα βρίσκονται στις αντίστοιχες θέσεις του σχήματος 5-2.

### 5.3 Η λειτουργία του maser

Από το φούρνο, που λειτουργεί στους 300-400 K, ευθυγραμμίζονται & διοχετεύονται προς τον στον εστιαστή ίσες ποσότητες μορίων αμμωνίας στις δύο χαμηλότερες ενεργειακές καταστάσεις. Στον εστιαστή διαχωρίζονται τα μόρια αμμωνίας στην  $|\uparrow\rangle$  κατάσταση από την  $|\downarrow\rangle$  κατάσταση με τη βοήθεια ενός μικρού συνεχούς πεδίου κυλινδρικής συμμετρίας, σχήμα 5-6. Ο εστιαστής ονομάζεται επίσης και επιλογέας επειδή επιλέγει τα διεγερμένα



από τα αδιέγεργα άτομα. Μετά από την επιλογή τους τα ‘χρήσιμα’ μόρια εισέρχονται στον συντονιστή και αποδίδουν την ενέργεια τους κατά τη διάρκεια της πτήσης τους μέσα στη κοιλότητα. Εάν διέρχεται στον συντονιστή δέσμη σύμφωνων φωτονίων της ίδιας συχνότητας  $\omega$  αυτή συνέχεια θα ενισχύεται. Ας δούμε τώρα πώς λειτουργεί ο επιλογέας.

Αν  $\rho$  είναι η απόσταση από τον άξονα του πεδίου, η ένταση του πεδίου θα έχει τη μορφή

$$E_{\rho}(\rho) = 2\zeta\rho \quad (5.9)$$

Η Χαμιλτονιανή του μορίου μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο θα γράφεται<sup>9</sup>

$$H = H_0 + qE_{\rho}\rho \quad (5.10)$$

ή σε μορφή πίνακα για το δισταθμικό άτομο

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & PE_{\rho} \\ PE_{\rho} & E_2 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

όπου  $P$  η πόλωση  $P_{12} = q\langle\Phi_1|\rho|\Phi_2\rangle = P_{21} = P$  ανάμεσα στις δύο ιδιοκαταστάσεις  $\Phi_1$  και  $\Phi_2$  με ενέργειες  $E_1, E_2$  ( $E_1 < E_2$ ), αντίστοιχα. Η οριζούσα των ιδιοτιμών της ενέργειας θα είναι

$$\begin{vmatrix} E_1 - \lambda & PE_{\rho} \\ PE_{\rho} & E_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5.12)$$

Οι λύσεις της 5-12 είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned} E'_2 = \lambda_2 &\cong E_2 + \frac{4P^2\zeta^2}{E_2 - E_1}\rho^2 \\ E'_1 = \lambda_1 &\cong E_1 - \frac{4P^2\zeta^2}{E_2 - E_1}\rho^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

<sup>9</sup>  $-e=q$  & η μερική λύση είναι:  $e^{-i\lambda' t}$  όπου  $\lambda = \hbar\lambda'$

Όπως δείχνουν οι 5-13, η επίδραση του πεδίου μετατοπίζει τις δύο

στάθμες κατά τη ποσότητα  $\frac{P^2 E_\rho^2}{E_2 - E_1}$ , την μεν πάνω στάθμη προς τα πάνω

τη δε κάτω στάθμη προς τα κάτω. Τα μόρια της κάτω στάθμης

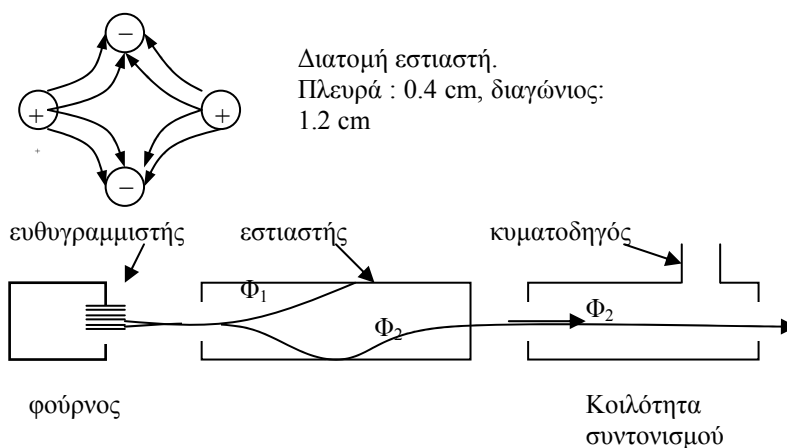
‘αισθάνονται’ μία απωστική δύναμη  $F = -\frac{\partial E}{\partial \rho}$  και απομακρύνονται από τον

άξονα του εστιαστή, ενώ τα μόρια της πάνω στάθμης ‘αισθάνονται’ μία ελκτική δύναμη και εκτελούν αρμονική ταλάντωση γύρω από τον άξονα του

$$-\frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho} = \kappa \rho > 0$$

$$-\frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho} = -\kappa \rho < 0$$

(5.14)



Σχήμα 5-6. Σχηματικό διάγραμμα συσκευής maser αμμωνίας

εστιαστή σύμφωνα με τις 5-14. Ακολουθώντας τον άξονα του εστιαστή τα άτομα της πάνω στάθμης κατευθύνονται στην έξοδο του και εισέρχονται στη κοιλότητα συντονισμού. Η διαδρομή τους μέσα στη κοιλότητα συντονισμού διαρκεί ακριβώς τόσο χρόνο όσο χρειάζονται να αποδιεγερθούν στη κάτω στάθμη. Κατά την αποδιέγερση τους τα μόρια αμμωνίας αποδίδουν την ενέργεια τους στο πεδίο το οποίο συνεχώς και ενισχύεται. Ο χρόνος αποδιέγερσης  $\pi/2\Omega_{n+1}$  υπολογίστηκε στην (4-64) και εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του συντονιστή, τη διπολική ροπή, τη διαφορά ενέργειας των δύο σταθμών και τον αριθμό φωτονίων στη κοιλότητα. Αν η ταχύτητα των μορίων είναι μικρότερη από την κρίσιμη, τα άτομα θα αποδιεγερθούν και διεγερθούν ξανά πριν βγουν από την κοιλότητα απορροφώντας ενέργεια αντί να την αποδίδουν. Στην περίπτωση αυτή το πεδίο στη κοιλότητα θα μειώνεται αντί να ενισχύεται. Η ταχύτητα των μορίων ρυθμίζεται κατάλληλα για ενίσχυση του πεδίου, αλλά οι απώλειες δεν αποφεύγονται, όπως από τη πρόσκρουση των μορίων με τα τοιχώματα της κοιλότητας και θέρμανση τους.

Οι απώλειες μέσα στη κοιλότητα εκφράζονται με το συντελεστή ποιότητας της κοιλότητας συντονισμού,  $Q$ ,

$$Q = \Omega \frac{\text{ενέργεια αποθηκευμένη στο πεδίο}}{\text{ρυθμός απωλειών ενέργειας}} \quad (5.15)$$

όπου  $\Omega$  η χαρακτηριστική συχνότητα συντονισμού της κοιλότητας. Η ποιότητα του συντονιστή καθορίζεται από το πόσο μεγάλες τιμές παίρνει το  $Q$ . Μία τυπική τιμή είναι  $Q \sim 10^3$ . Στους καλύτερους σύγχρονους συντονιστές των οποίων τα τοιχώματα διατηρούνται σε χαμηλή θερμοκρασία το  $Q$  φθάνει το  $10^8$ . Η μέση ενέργεια που αποθηκεύεται στη κοιλότητα σε μια περίοδο υπολογίζεται με ολοκλήρωση στον όγκο του συντονιστή για μία περίοδο σε<sup>10</sup>

<sup>10</sup>  $\underline{E}(z, t) = \underline{E}_0 \sin \omega t \sin kz$ , με χαρακτηριστική πόλωση

$$\text{Αποθηκευμένη ενέργεια} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_V (\epsilon_0 E^2) dV dt = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 V \quad (5.16)$$

και ο ρυθμός απωλειών ανά δευτερόλεπτο θα είναι από τις 5-15 & 5-16,

$$\text{Ρυθμός απωλειών} = \frac{1}{4} \frac{\Omega}{Q} \epsilon_0 E_0^2 V \quad (5.17)$$

Αν  $r$  είναι ο ρυθμός εισόδου  $N$  διεγερμένων μορίων αμμωνίας,  $u$  η ταχύτητα τους στον άξονα του συντονιστή και  $L$  το μήκος του, στη κατάσταση ισορροπίας ανάμεσα στην ενίσχυση και τις απώλειες, θα ισχύει

$$r = \frac{Nu}{L} = \frac{N}{t_{εξόδου}} \quad (5.18)$$

όπου  $t = t_{εξόδου} = \frac{\pi}{2\Omega_{n+1}}$  ο χρόνος πτήσης των μορίων μέσα στο συντονιστή. Οι απώλειες στον συντονιστή αυξάνονται με την αύξηση του πεδίου (ανάλογα με το σχήμα 5-10). Όταν η παραγωγή ενέργειας ισορροπήσει τις απώλειες η ενίσχυση στη κοιλότητα θα εκφράζεται από την εξίσωση

$$\text{Ρυθμός παραγωγής ενέργειας} = \frac{Nu}{L} |C_1|_{εξόδου}^2 \hbar \omega \quad (5.19)$$

όπου το  $|C_1|_{εξόδου}^2$  (βλέπε σχέση 4-63) είναι η πιθανότητα το διεγερμένο μόριο της αμμωνίας να βγει από τον εστιαστή στη θεμελιώδη κατάσταση, δηλαδή η πιθανότητα να αποδιεγερθεί σε χρόνο  $t = t_{εξόδου}$ , προσφέροντας ενέργεια  $\hbar \omega$ . Η συχνότητα  $\omega$  του πεδίου βρίσκεται κοντά στη συχνότητα της κοιλότητας συντονισμού,  $\omega \sim \Omega$ , και επομένως θεωρείται ότι  $\omega = \Omega$  ώστε η εξίσωση ισορροπίας να γραφτεί

$$\frac{1}{4Q} \epsilon_0 E_0^2 V = \frac{Nu}{L} |C_1|_{εξόδου}^2 \hbar \quad (5.20)$$

Ακτινοβολία μικροκυμάτων κατάλληλης συχνότητας που διέρχεται από την κοιλότητα συντονισμού στην οποία διοχετεύονται τα διεγερμένα μόρια αμμωνίας θα βγεί από αυτήν ενισχυμένη. Εφόσον η ενίσχυση στη κοιλότητα έχει αυξηθεί στο ύψος των απωλειών από εκεί και πέρα ο maser λειτουργεί σαν ταλαντωτής. Ο maser αμμωνίας χρησιμοποιείται σαν ενισχυτής ακτινοβολίας (σε τηλεπικοινωνίες ) όταν η λειτουργία του είναι κάτω από το κατώφλι ισορροπίας μεταξύ απολαβής και απωλειών, ή σαν ταλαντωτής όταν βρίσκεται στη κατάσταση ισορροπίας.

#### **5.4 To laser αερίου HeNe**

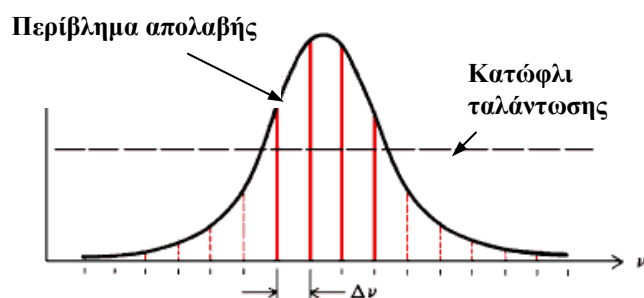
Το πρώτο laser αερίου που λειτούργησε συνεχούς δέσμης είναι το laser HeNe. Η χαρακτηριστική κόκκινη γραμμή στα 632.8 nm χρησιμοποιούταν αρχικά για ανάγνωση των barcodes πριν αντικατασταθεί από τα laser ημιαγωγών, και τώρα βρίσκει εκτεταμένη χρήση στα εργαστήρια οπτικής. Το υλικό laser είναι ένα μίγμα αερίων He & Ne σε (ιδανική) αναλογία 9:1 αντίστοιχα. Η άντληση επιτυγχάνεται συγχρόνως με ηλεκτρική εκκένωση και με ανταλλαγή ενέργειας από τα άτομα του He στα άτομα του Ne. Τα άτομα του He και του Ne συγκρούονται με τα ηλεκτρόνια της εκκένωσης και διεγείρονται σε διάφορα ενεργειακά επίπεδα στα οποία παραμένουν για μικρό χρόνο. Κατά την αποδιέγερση τους τα άτομα του He συγκεντρώνονται στις στάθμες  $2^1S$  &  $2^3S$  και τα άτομα του Ne  $3s$  &  $2s$  που η κάθε μία τους έχει σχεδόν την ίδια ενέργεια με τις αντίστοιχες δύο του He, σχήμα 5-7 [3]. Οι στάθμες αυτές του He είναι μετασταθείς, δηλαδή χαρακτηρίζονται από συγκριτικά μεγάλο χρόνο ζωής (της τάξεως των  $10^{-6}$  s) και δεν μπορούν να αποδιεγερθούν με σύγχρονη εκπομπή φωτονίου. Αποδιεγείρονται όμως με κρούση συγκρουόμενα με αδιέγερτα άτομα Ne στα οποία μεταφέρουν την ενέργεια τους διεγείροντας τα στις στάθμες  $3s$  &

2s που έχουν χρόνους ζωής  $10^{-7} s$  &  $10^{-8} s$ , αντίστοιχα. Με κύριο μηχανισμό άντλησης των ατόμων του Ne την ανταλλαγή αυτή ενέργειας (εκτός από την ηλεκτρική εκκένωση) επιτυγχάνεται αναστροφή πληθυσμού ανάμεσα στις στάθμες 3s, 2s και τις 3p, 2p. Η μετάπτωση από τη στάθμη 3s στην 2p δίνει ακτινοβολία ερυθρού χρώματος στο μήκος κύματος 632.8 nm, η γνωστή δέσμη laser HeNe, ενώ οι άλλες μεταπτώσεις δίνουν ακτινοβολία στο υπέρυθρο (1.15 μm, 3.39 μm). Τα χαμηλής ισχύος laser HeNe, (μερικά mW), βρίσκουν πολλές εφαρμογές κυρίως σαν εκπαιδευτικά εργαλεία.

Διαλέγοντας κάτοπτρα που ανακλούν στη μία (την κόκκινη) από αυτές τις γραμμές επιτυγχάνεται εκπομπή σε μία μόνο γραμμή. Η γραμμή αυτή του ατόμου Ne έχει κάποιο εύρος που οφείλεται κυρίως στο μηχανισμό διεύρυνσης Doppler με Γκαουσιανή κατανομή. Το εύρος της κόκκινης γραμμής είναι γύρω στα 1.7 GHz. Μέσα σε αυτό το εύρος γραμμής συμπίπτουν αρκετές διαμήκεις, σχέση 5-21, καθώς και εγκάρσιες συχνότητες συντονισμού της κοιλότητας (βλέπε εδάφιο 7-3 & άσκηση 5-2). Κάθε μία από τις συχνότητες συντονισμού έχει εύρος πολύ μικρότερο από το εύρος της γραμμής. Το εύρος της συχνότητας συντονισμού καθορίζεται από το ρυθμό απωλειών της κοιλότητας<sup>11</sup> σύμφωνα με τη σχέση  $\Delta\nu_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\tau_0}$  και είναι της τάξης 1-10 MHz. Οι διαμήκεις συχνότητες συντονισμού απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$  της τάξης του 375 MHz για μήκος κοιλότητας  $L = 0.4$  m. Ποιές από αυτές θα επιζήσουν τελικά στην κοιλότητα εξαρτάται από τις απώλειες που υφίστανται. Θα πρέπει η ενίσχυση του H/M πεδίου του αντίστοιχου συντονισμού να εξισορροπεί τις απώλειες σε δεδομένο ρυθμό άντλησης, γ, πάνω από την κρίσιμη τιμή  $\tau_{2c}$ , σχέση 5-37. Στο σχήμα 5-8 ο ρυθμός άντλησης ενισχύει το H/M πεδίο στην

<sup>11</sup>  $E(z, t) = E(z) \exp(i\omega t) \exp(-t/2\tau_0)$ , όσο μικρότερη η ανακλαστικότητα των κατόπτρων της κοιλότητας συντονισμού τόσο μεγαλύτερος ο χρόνος  $\tau_0$ .

κοιλότητα και το επίπεδο ισορροπίας επιτυγχάνεται στο κατώφλι ταλάντωσης.



**Σχήμα 5-7.** Η απολαβή σε ένα laser HeNe είναι μία Γκαουσιανή. Ανάλογα με το ύψος του ρυθμού άντλησης επιστούν ωρισμένες μόνο συχνότητες, που εδώ είναι μόνο 4.

Μόνο όσοι συντονισμοί της κοιλότητας έχουν ισχύ πάνω από το κατώφλι μπορούν να επιζήσουν. Όλοι οι άλλοι δυνατοί συντονισμοί δεν μπορούν να ξεπεράσουν τις απώλειες στην κοιλότητα και είναι καταδικασμένοι. Στην κοιλότητα του σχήματος 5-7 μπορούν να ταλαντεύονται μόνο 4 συντονισμοί.

### 5.5 Κοιλότητα συντονισμού

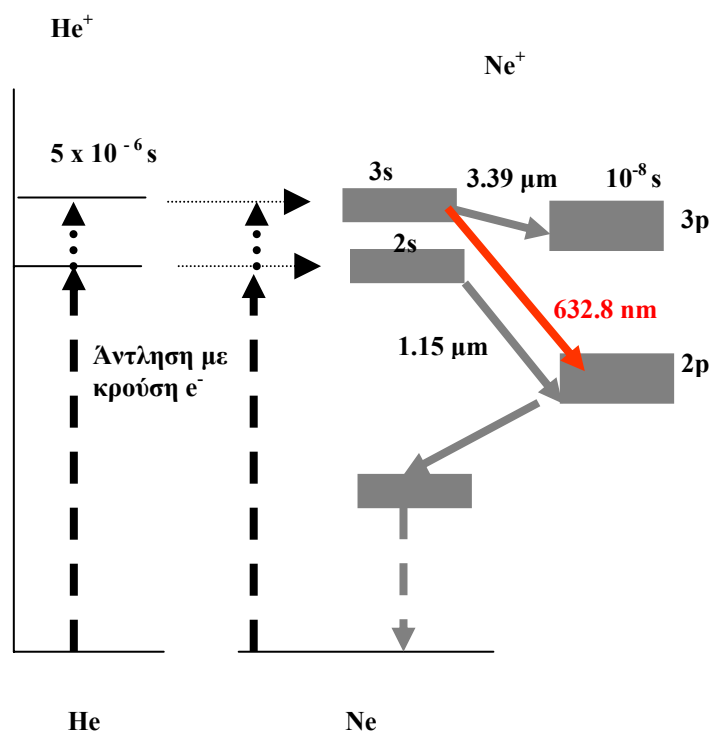
Αναστροφή πληθυσμού σε ένα ατομικό σύστημα που λειτουργεί σαν ενεργό υλικό laser επιτυγχάνεται με κατάλληλο μηχανισμό άντλησης (ώστε ο πληθυσμός της διεγερμένης στάθμης να είναι μεγαλύτερος του πληθυσμού της αδιέγερτης) ανάμεσα σε δύο παράλληλες υψηλής ανακλαστικότητας κατοπτρικές επιφάνειες που βρίσκονται σε απόσταση  $L$  μεταξύ τους, την ονομαζόμενη κοιλότητα συντονισμού, σχήμα 5-9. Η κοιλότητα επιτρέπει

τον συντονισμό της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (μήκους κύματος  $\lambda$ ) σε μία από τις ιδιοσυχνότητες της που επαληθεύουν τη σχέση:

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.21)$$

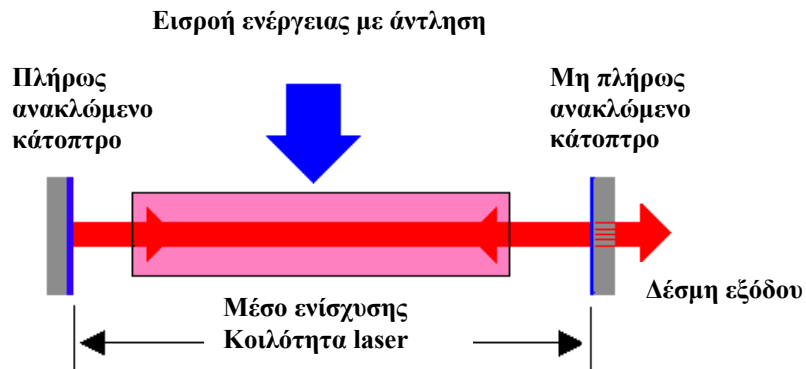
Ένα φωτόνιο που θα εκπεμφθεί αυθόρμητα μέσα στο ενεργό υλικό laser δυνατόν να εξαναγκάσει διεγερμένα άτομα σε αποδιέγερση σε χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση με σύγχρονη εκπομπή ενός φωτονίου ίδιου μήκους κύματος, φάσης και ορμής. Εφόσον η ορμή του φωτονίου είναι περίπου κάθετη στα κάτοπτρα, τα φωτόνια να κάνουν επανειλημμένες διαδρομές ανάμεσα στα κάτοπτρα μετά από πολλαπλές ανακλάσεις, ενώ θα εξαναγκάζουν συνεχώς σε αποδιέγερση κατά τη διαδρομή τους όλο και περισσότερα φωτόνια σε ένα φαινόμενο χιονοστιβάδας. Έτσι δημιουργούνται σύμφωνα στάσιμα κύματα στην κοιλότητα σε μήκη κύματος που επαληθεύουν την (5.21), των οποίων ο αριθμός των φωτονίων θα αυξάνεται όλο και περισσότερο και θα συναγωνίζεται να υπερβεί τον αριθμό των φωτονίων που χάνονται από την κοιλότητα συντονισμού λόγω απωλειών. Οι κυριότερες απώλειες οφείλονται στη μερική διαπερατότητα των κατόπτρων (~1%), ή συνήθως ενός μόνο από τα δύο από όπου και εξέρχεται η δέσμη, καθώς και σε απώλειες στα χείλη των κατόπτρων. Όταν η ενέργεια που παράγεται, κυρίως με εξαναγκασμένη εκπομπή, ισορροπεί το σύνολο όλων των άλλων απωλειών δημιουργείται μία στάσιμη κατάσταση στη Η/Μ ακτινοβολία της κοιλότητας και εξέρχεται συνεχής δέσμη laser από το/τα κάτοπτρο/α, όπως υποδεικνύει και το παράδειγμα στο μηχανικό ανάλογο του σχ. 5-10. Αυτή η εξισορρόπηση δεν γίνεται ακαριαία αλλά παίρνει κάποιο μικρό χρόνο για να επιτευχθεί.





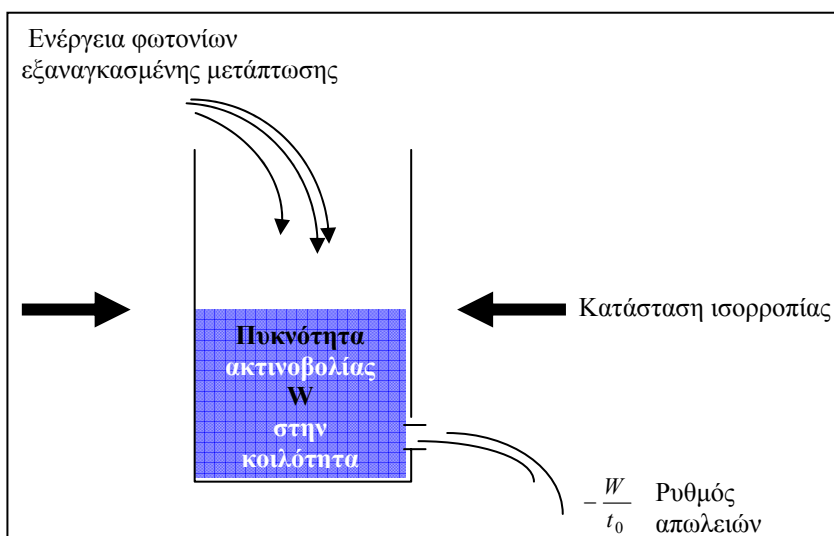
**Σχήμα 5-8.** Ενεργειακές στάθμες και διεργασία άντλησης σε laser HeNe

Στο σχήμα 5-9 περιγράφεται η απλή διάταξη laser αποτελούμενη από το ενεργό υλικό laser το οποίο ενισχύει την σύμφωνη δέσμη με κατάλληλη άντληση και αναστροφή πληθυσμού με πολλαπλές ανακλάσεις ανάμεσα στα δύο κάτοπτρα. Το ένα κάτοπτρο ανακλά τη δέσμη κατά 100% ενώ το άλλο δεν την ανακλά πλήρως (99% περίπου). Όταν επιτευχθεί συνθήκη ισορροπίας η δέσμη laser εξέρχεται από το μη πλήρως ανακλώμενο κάτοπτρο. Στην κατάσταση ισορροπίας οι απώλειες από το μερικώς ανακλώμενο κάτοπτρο αναπληρώνονται από την παραγωγή σύμφωνης ακτινοβολίας μέσα στη κοιλότητα με το μηχανισμό εξαναγκασμένης εκπομπής φωτονίων.



**Σχήμα 5-9** Διάταξη λειτουργίας συσκευής laser

Στο σχήμα 5-10 συμβολίζεται, με ένα μηχανικό ανάλογο, η συνθήκη ισορροπίας ανάμεσα στις απώλειες και στην δημιουργία σύμφωνων φωτονίων μέσα στο ενεργό υλικό laser στη κοιλότητα συντονισμού. Ένα δοχείο γεμίζει με νερό, με σταθερό ρυθμό εισόδου στη μονάδα του χρόνου (αντίστοιχο του ρυθμού άντλησης, ενώ ένα μέρος αυτού χάνεται από μικρή οπή στη βάση του δοχείου, αντίστοιχο με τις απώλειες στα κάτοπτρα. Ο ρυθμός απωλειών εξαρτάται από τη ποσότητα νερού στο δοχείο και την υδροστατική πίεση που εξασκεί. Ανάλογα, ο ρυθμός απωλειών στα κάτοπτρα εξαρτάται από τη ποσότητα αποθηκευμένης ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας στην κοιλότητα συντονισμού,  $W$ , σχ. 5.10. Όταν ο ρυθμός απωλειών αυξηθεί αρκετά ώστε να εξισορροπήσει τη σταθερό ρυθμό της παροχής νερού του παραδείγματος, τότε η στάθμη του νερού παραμένει σταθερή. Έχει επιτευχθεί κατάσταση ισορροπίας. Ανάλογα και στο laser στην κοιλότητα συντονισμού, ο ρυθμός απωλειών εξαρτάται από την πυκνότητα ενέργειας σύμφωνων φωτονίων και αυξάνεται με αυτή, βλέπε άσκηση 5-1. Υλικό laser μπορεί να είναι είτε σε αέρια, υγρή ή στερεά φάση.



**Σχήμα 5-10.** Σχηματική παράσταση κατάστασης ισορροπίας μέσα στην κοιλότητα του laser

### 5.6. Εξισώσεις ρυθμών σε laser με δισταθμικά άτομα

Έστω υλικό laser σε συμβολόμετρο Fabry-Perot του οποίου τα άτομα θεωρούνται δισταθμικά, ξεχωρίζουμε δηλαδή δύο από όλα τα άλλα ενεργειακά επίπεδα, τα  $E_1$  &  $E_2$  χαρακτηριστικά μιάς μετάπτωσης. Η μέση πυκνότητα των ατόμων (πληθυσμός) στις στάθμες (1) & (2) είναι  $N_1$  &  $N_2$ , ο οποίος παραμένει σταθερός:  $N = N_1 + N_2 = \text{σταθερό}$ . Οι εξισώσεις που καθορίζουν την μεταβολή των πληθυσμών (του μέσου αριθμού ατόμων ανά μονάδα όγκου) των δύο σταθμών,  $\frac{dN_1}{dt}$  &  $\frac{dN_2}{dt}$  θα είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = AN_2 + WB(N_2 - N_1) - \frac{N_1}{t_1} \quad (5.22) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 - AN_2 - WB(N_2 - N_1) \quad (5.23) \end{array} \right.$$

όπου  $W$  η πυκνότητα Η/Μ ακτινοβολίας ανά μονάδα συχνότητας.

Ο πρώτος προσθετός στο δεξί μέλος της (5-22) αφορά την αύξηση του πληθυσμού της στάθμης (1) λόγω αυθόρμητης μετάπτωσης. Ο δεύτερος και τρίτος προσθετός αφορούν την αύξηση και μείωση του πληθυσμού λόγω εξαναγκασμένης εκπομπής και απορρόφησης ακτινοβολίας αντίστοιχα. Ο τελευταίος προσθετός αφορά τον ρυθμό απωλειών λόγω μεταπτώσεων προς άλλες στάθμες χαμηλότερα από την (1). Εάν δεν υπήρχε ο μηχανισμός της αυθόρμητης και εξαναγκασμένης εκπομπής και η στάθμη (1) βρισκόταν με πληθυσμό  $N_1$  αυτός θα μειωνόταν εκθετικά με σταθερά χρόνου  $t_1$  σύμφωνα με την

$$N_1(t) = N_1(0)e^{-t/t_1} \quad (5.24)$$

εξαιτίας αυτών των απωλειών. Η παράμετρος  $t_2$  παριστά τον ρυθμό άντλησης στην στάθμη (2), ενώ ο δεύτερος και τρίτος προσθετός έχουν παρόμοια ερμηνεία όπως και στη σχέση (5-22). Οι εξισώσεις (5-22) & (5-23) περιγράφουν τα ατομικά χαρακτηριστικά και ονομάζονται 'εξισώσεις της ύλης'. Η εξίσωση που περιγράφει πως αναπτύσσεται η πυκνότητα ακτινοβολίας,  $W$ , μέσα στο συμβολόμετρο Fabry-Perot, η 'εξίσωση του πεδίου', θα είναι

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{W}{t_o} + [A'N_2 + WB(N_2 - N_1)] \hbar\omega F(\omega) \quad (5.25)$$

Η συνάρτηση  $F(\omega)$  λέγεται συνάρτηση φασματικής γραμμής με διαστάσεις αντιστρόφου συχνότητας ( $\text{Hz}^{-1}$ ). Η μορφή της γραμμής φασματικής

μετάπτωσης μπορεί να είναι μία Lorentzian<sup>12</sup> (όπως όταν η διεύρυνση οφείλεται σε συγκρούσεις ανάμεσα σε άτομα) ή Gaussian<sup>13</sup> ανάλογα με τους μηχανισμούς που είναι κυρίως υπεύθυνοι για την διεύρυνση της αρχικής και τελικής ενεργειακής κατάστασης σε μία μετάπτωση στη συχνότητα  $\omega$ . Οι μηχανισμοί διεύρυνσης μπορούν να χωριστούν γενικά σε (α) φυσική διεύρυνση, λόγω αυθόρμητης μετάπτωσης, (β) λόγω συγκρούσεων, (γ) λόγω εξαναγκασμένης μετάπτωσης και (δ) διεύρυνση Doppler σε άτομα αερίων. Η φυσική, συγκρούσεων και εξαναγκασμένης μετάπτωσης διεύρυνση δίνει Lorentzian φασματική γραμμή. Η διεύρυνση Doppler δίνει Gaussian φασματική γραμμή που είναι συγκριτικά ‘οξύτερη’ από την Lorentzian. Οι διάφοροι μηχανισμοί διεύρυνσης μικραίνουν τον χρόνο ζωής της διεγερμένης κατάστασης και μεγαλώνουν το εύρος γραμμής της φασματικής μετάπτωσης. Το εύρος της φασματικής γραμμής εξαρτάται τόσο από το χρόνο ζωής της διεγερμένης όσο και από της θεμελιώδους κατάστασης, αλλά ο τελευταίος θεωρείται συγκριτικά άπειρος, και έτσι το εύρος της γραμμής μετάπτωσης θα εξαρτάται κυρίως από το χρόνο ζωής της διεγερμένης κατάστασης και τους μηχανισμούς διεύρυνσης της. Στο laser HeNe ο κύριος μηχανισμός διεύρυνσης είναι ο Doppler. Γενικά όταν υπάρχουν πολλοί μηχανισμοί η τελική διεύρυνση προκύπτει από το συνδυασμό τους, αλλά αυτό το πρόβλημα δεν θα μας απασχολήσει εδώ.

Ο συντελεστής  $A'$  στην 5-25 αντιπροσωπεύει το ρυθμό πιθανότητας αυθόρμητο φωτόνιο να εκπεμφθεί στην διεύθυνση διάδοσης του H/M κύματος. Τα αυθόρμητα φωτόνια εκπέμπονται από το ενεργό υλικό όμως

$$^{12} F(\omega) = \frac{T_2}{\pi} \left[ \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2} \right]$$

όπου  $T_2 =$  χρόνος μεταξύ δύο συγκρούσεων

$$^{13} F(\omega) = \frac{c}{\omega_0} \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{Mc^2}{2kT} (\omega - \omega_0)^2 / \omega_0^2 \right],$$

όπου  $M =$  μάζα ατόμου αερίου

προς όλες τις κατευθύνσεις. Αν τα κάτοπτρα ήταν σφαιρικά και κάλυπταν όλο το ενεργό υλικό όλη η παραγόμενη αυθόρμητη ακτινοβολία θα παρέμενε μέσα στην κοιλότητα. Επειδή ενεργός διατομή της δέσμης στην κοιλότητα έχει μικρή έκταση, το ποσοστό της αυθόρμητης ακτινοβολίας που διαδίδεται στη διεύθυνση του άξονα της κοιλότητας laser είναι ένα ελάχιστο κλάσμα όλης της αυθόρμητα παραγόμενης ώστε να ισχύει η σχέση ανάμεσα στους συντελεστές:  $A' = 10^{-9}A$ . Παρόλο που ενισχύεται η H/M ακτινοβολία από διεγερμένες μεταπτώσεις μέσα από πολλαπλές διαδρομές ανάμεσα στα κάτοπτρα καθώς και από την αξονικά διαδιδόμενη αυθόρμητη ακτινοβολία, υπάρχουν και απώλειες όπως αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, κυρίως εξαιτίας της μερικής διαπερατότητας των κατόπτρων και απώλειες στα χείλη των κατόπτρων δεδομένου ότι η δέσμη επεκτείνεται γύρω από τον άξονα της κοιλότητας (δες παράγραφο 7-3). Ο μηχανισμός αυτός απωλειών περιγράφεται με τον πρώτο προσθετό στο δεξί μέλος της (5-25). Για να εξέλθει συνεχής δέσμη laser από τα κάτοπτρα θα πρέπει η ενίσχυση να εξισορροπήσει τις απώλειες. Για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει ο ρυθμός άντλησης να αυξηθεί μέχρι μία χαρακτηριστική τιμή  $r_{2c}$  που λέγεται άντληση κατωφλίου. Η επιλογή του υλικού συστήματος σαν επίδοξο για υλικό laser γίνεται με ορισμένους κανόνες επιλογής:

- (α) Ο χρόνος ζωής στη στάθμη (2) να είναι σχετικά μεγάλος, μεγαλύτερος της στάθμης (1)  $t_2 > t_1$ , ή  $1/A > t_1$
- (β) Ο χρόνος ζωής της στάθμης (1) να είναι σχετικά μικρός.
- (γ) Να είναι δυνατόν να μεταπέσει το άτομο από την (2) στην (1) με εκπομπή φωτονίου. Κάτι τέτοιο ελέγχεται από την τιμή της διπολικής ροπής της αντίστοιχης μετάπτωσης, η οποία πρέπει να είναι  $\neq 0$ , (βλέπε άσκηση 3-2).

Η παράμετρος  $t_0$  χαρακτηρίζει τον χρόνο που χρειάζεται για να αδειάσει λόγω απωλειών στα κάτοπτρα η κοιλότητα συντονισμού από την υπάρχουσα αποθηκευμένη ακτινοβολία,  $W$ , αν δεν υπάρχει ενεργό υλικό laser, δες υποσημείωση 11. Πιο κάτω θα αποδειχθεί η σχέση 5-37 για την κρίσιμη τιμή

άντλησης πάνω από την οποία επέρχεται ταλάντωση του πεδίου στη κοιλότητα. Η συνθήκη (α) προκύπτει και από την 5-37 σαν προϋπόθεση να παίρνει θετικές τιμές η κρίσιμη άντληση.

### 5.7. Υπολογισμός κατωφλίου δράσης laser- Εξισώσεις στάσιμης κατάστασης

Ο ρυθμός άντλησης καθορίζει το αν η αναπτυσσόμενη σύμφωνη Η/Μ ακτινοβολία ανάμεσα στα κάτοπτρα ξεπεράσει τις απώλειες. Η κρίσιμη τιμή του ρυθμού άντλησης,  $r_c$ , για την οποία εξέρχεται δέσμη laser από τα κάτοπτρα φέρνει το ατομικό σύστημα και την δημιουργούμενη ακτινοβολία σε κατάσταση ισορροπίας. Για τιμές, επομένως

$$\begin{aligned} r_2 < r_c, \quad W &= 0 \\ r_2 \geq r_c, \quad W &\neq 0 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Στην κατάσταση αυτή τόσο οι πληθυσμοί των δύο σταθμών όσο και η πυκνότητα ακτινοβολίας διατηρούνται σταθερά. Όση καθαρή ακτινοβολία παράγεται στη μονάδα του χρόνου τόση εξέρχεται από το κάτοπτρο σαν δέσμη laser. Στη συνέχεια θα υπολογισθεί η κρίσιμη τιμή του ρυθμού άντλησης που φέρει το ατομικό σύστημα και την Η/Μ ακτινοβολία σε στάσιμη κατάσταση, όπου ισχύει

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = 0 \\ \frac{dN_2}{dt} = 0 \\ \frac{dW}{dt} = 0 \end{array} \right. \tag{5.27}$$

Μεταπτώσεις γίνονται φυσικά συνέχεια ανάμεσα στις στάθμες είτε προς τα πάνω ή κάτω ώστε οι πληθυσμοί τους να παραμένουν σταθεροί στη κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Από τις 5-22, 5-23, 5-25 & 5-27 προκύπτουν οι εξισώσεις στάσιμης κατάστασης για τους πληθυσμούς και την πυκνότητα ενέργειας, 5-28, 5-29, & 5-30. Ο προσθετός  $A' (\ll A)$  είναι ένας πάρα πολύ μικρός αριθμός και μπορεί να παραληφθεί από την εξίσωση 5-25 χωρίς να επηρεάσει σημαντικά το αποτέλεσμα, ώστε τελικά [4]

$$AN_2 + WB(N_2 - N_1) - \frac{N_1}{t_1} = 0 \quad (5.28)$$

$$r_2 - AN_2 - WB(N_2 - N_1) = 0 \quad (5.29)$$

$$-\frac{W}{t_o} + WB(N_2 - N_1)\hbar\omega F(\omega) = 0 \quad (5.30)$$

Η λύση των εξισώσεων 5-28 έως 5-30 καταλήγει στον υπολογισμό των πληθυσμών και πυκνότητας ενέργειας σαν συνάρτηση του ρυθμού άντλησης για την στάσιμη κατάσταση,  $N_1(r_2)$ ,  $N_2(r_2)$ ,  $W(r_2)$ . Αυτές θα είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = t_1 r_2 \quad \text{για όλες τις τιμές του } r_2 \\ (5.31) \quad N_2 = \frac{r_2}{A} \quad \text{για } r_2 < r_c, \text{ \& } W = 0 \\ (5.32) \quad N_2 = \frac{r_c}{A} + (r_2 - r_c) t_1 \quad \text{για } r_2 > r_c, \text{ \& } W \neq 0 \\ (5.33) \quad W = \frac{A}{B r_c} r_2 - \frac{A}{B} \quad \text{για } r_2 > r_c \end{array} \right.$$

(5.34)

Οι εκφράσεις 5-31 έως και 5-34 παρίστανται γραφικά στο σχήμα 5-11 (α) & (β). Η κλίση της ευθείας 5-31, είναι μικρότερη της κλίσης της ευθείας 5-32,  $t_1 < 1/A$ . Το  $1/A$  όμως συμβολίζει τον χρόνο ζωής της στάθμης (2), έτσι ώστε



ο χρόνος ζωής της στάθμης (1) να είναι μικρότερος του χρόνου ζωής της στάθμης (2). Αυτό όμως εκφράζει η περιοριστική συνθήκη (α) της προηγούμενης παραγράφου για τα χαρακτηριστικά των επίδοξων σταθμών laser.

Η αναστροφή πληθυσμού  $\Delta N = N_2 - N_1$  υπολογίζεται μέσα από την λύση των εξισώσεων της στάσιμης κατάστασης ως

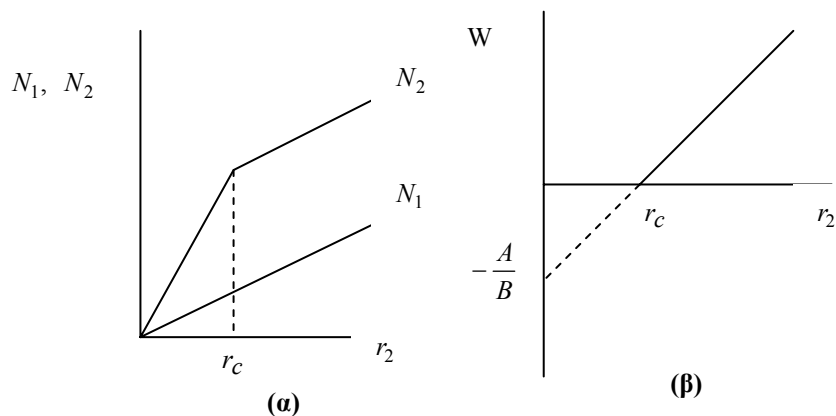
$$\left[ \begin{array}{l} \Delta N = \frac{1}{t_0 \hbar \omega B F(\omega)} \quad \text{για } W \neq 0 \\ \Delta N = r_2 \left( \frac{1}{A} - t_1 \right) \quad \text{για } W = 0 \end{array} \right. \quad (5.35)$$

(5.36)

από τις οποίες υπολογίζεται η κρίσιμη τιμή άντλησης

$$r_c = \frac{A}{(1 - At_1) t_0 B F(\omega) \hbar \omega} \quad (5.37)$$

Η κρίσιμη τιμή του ρυθμού άντλησης είναι μικρή εφόσον ο χρόνος  $t_0$  είναι μεγάλος (μικρές απώλειες) και ο χρόνος ζωής της στάθμης 2 είναι πολύ μεγαλύτερος από αυτόν της στάθμης 1, ( $At_1 \ll 1$ ). Για όσες συχνότητες του σχήματος 5-7 η  $F(\omega)$  εξασφαλίζει  $r_c$  μικρότερο από το εφαρμοζόμενο ρυθμό άντλησης η συχνότητα αυτή θα επιζήσει στη κοιλότητα. Δεδομένου ότι ο λόγος  $A/B$  είναι ανάλογος της τρίτης δύναμης της συχνότητας, η τιμή της  $r_c$  έχει μικρότερες τιμές σε χαμηλές συχνότητες (π.χ. στα μικροκύματα), έναντι των συχνοτήτων στο ορατό φάσμα.

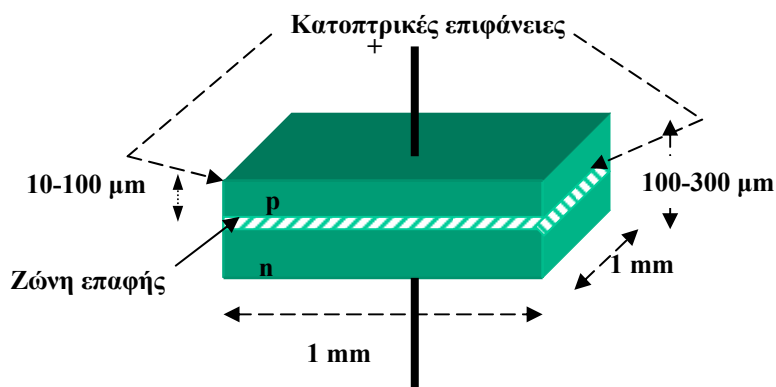


Σχήμα 5-11. (α) Η μεταβολή των ατομικών πληθυσμών και (β) της πυκνότητας δέσμης laser συναρτήσει του το ρυθμού άντλησης.

### 5.8. Laser ημιαγωγών

Τα laser ημιαγωγών, ή διαφορετικά laser επαφής p-n (συνήθως GaAs) έχουν πολύ μικρές διαστάσεις, της τάξης του mm, όπως φαίνεται στο σχήμα (5-12), ενώ το όλο σύστημα με τη μεταλλική θήκη του δεν ξεπερνά τα 5- 10 mm. Τα laser αυτά είναι μικροσκοπικές ηλεκτρονικές συσκευές που δεν διαφέρουν από τα γνωστά LED (Light Emitting Diodes), τις μικρές ενδεικτικές λυχνίες λειτουργίας ηλεκτρικών και ηλεκτρονικών συσκευών. Ο αριθμός των 'κατάλληλων' προσμίξεων είναι στο καθένα από τους δύο ημιαγωγούς της επαφής τόσο μεγάλος ( $\sim 10^{18}$  άτομα/cm<sup>3</sup>) ώστε στον ημιαγωγό τύπου-p η στάθμη Fermi  $F_p$  να πέφτει στη ζώνη σθένους, ενώ η στάθμη Fermi  $F_n$  να πέφτει στη ζώνη αγωγιμότητας στον ημιαγωγό-n. Σε συνθήκες θερμοδυναμικής ισορροπίας όταν ένας ημιαγωγός τύπου-p έλθει

σε επαφή με ημιαγωγό τύπου-n οι δύο στάθμες Fermi,  $F_p$ ,  $F_n$ , θα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, σχήμα (5-13α). Η υψηλή συγκέντρωση οπών από την πλευρά του ημιαγωγού-p και η υψηλή συγκέντρωση ηλεκτρονίων από τη πλευρά του ημιαγωγού-n κάνει τα φορτία αυτά να διαχέονται στην αντίθετη πλευρά της επαφής. Τα ηλεκτρόνια που κινούνται προς τον ημιαγωγό-p επανασυνδέονται με τη περίσσεια οπών του, ενώ οι οπές που κινούνται προς τον ημιαγωγό-n επανασυνδέονται με τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του. Έτσι εμφανίζεται αρνητικό φορτίο από τη πλευρά-p και θετικό φορτίο από τη πλευρά του ημιαγωγού-n της ζώνης επαφής που αντιτίθενται στη διάχυση περισσότερων φορέων φορτίου.



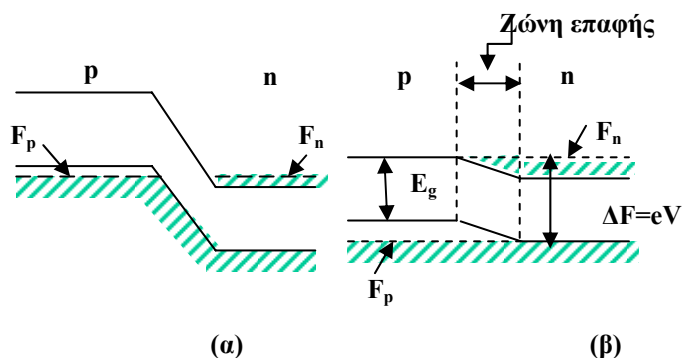
**Σχήμα 5-12. Χαρακτηριστικά επαφής p-n laser ημιαγωγού**

Η δημιουργούμενη διαφορά δυναμικού της τάξης  $\sim 10^{-1}$  V, προκαλεί φραγμό στη περαιτέρω διάχυση φορέων η οποία και σταματά. Εάν εφαρμοσθεί ορθή πόλωση V, όπως στο σχήμα (5-13β), οι δύο στάθμες Fermi θα διαχωριστούν κατά ένα ποσό

$$\Delta F = F_n - F_p = eV \quad (5.38)$$

Έτσι επιτυγχάνεται αναστροφή πληθυσμού στη πολύ μικρών διαστάσεων ζώνη επαφής ( $\sim 1\mu\text{m}$ ), διότι η επανασύνδεση φορέων μέσα στη ζώνη αγωγιμότητας τώρα είναι συνεχής. Η επανασύνδεση οπών και ηλεκτρονίων στη ζώνη επαφής έχει σαν αποτέλεσμα την αυθόρμητη εκπομπή φωτονίων. Τα φωτόνια που εκπέμπονται από την αυθόρμητη αυτή εκπομπή είναι ασύμφωνα, εξαναγκάζουν όμως σε μετάπτωση άλλα ηλεκτρόνια από τη ζώνη αγωγιμότητας προς τη ζώνη σθένους, όπου επανασυνδέονται με οπές. Ένα από τα αυθόρμητα φωτόνια είναι δυνατόν να διεγείρει την επανασύνδεση φορέων και την εξαναγκασμένη εκπομπή φωτονίου της ίδιας συχνότητας, φάσης, ορμής αλλά και πόλωσης. Το δημιουργούμενο Η/Μ πεδίο ταλαντεύεται ανάμεσα στις κατοπτρικές επιφάνειες του συντονιστή και ενισχύεται σε δέσμη laser. Επειδή οι φορείς φορτίων κατανέμονται μέσα στις ευρείς ζώνες σθένους και αγωγιμότητας των ημιαγωγών και όχι σε λεπτές στάθμες όπως στα αέρια, η ακτινοβολία έχει μεγάλο εύρος, 100 με 1000 φορές μεγαλύτερο από ότι στον laser HeNe. Μία λυχία LED μπορεί επομένως να εκπέμψει δέσμη laser εάν διαθέτει κοιλότητα συντονισμού.

Η τάση λειτουργίας  $V$  του laser διόδου είναι πολύ μικρή ( $\sim \text{Volt}$ ) εφόσον το  $\Delta F$  είναι της τάξης του ενεργειακού χάσματος του ημιαγωγού,  $E_g$ . Η ισχύς των laser ημιαγωγών που συναντά κανείς σε δείκτες οθόνης και CD players βρίσκεται στα 3-5 mW. Στα CD players και CDROM drives το μήκος κύματος είναι στο εγγύς υπέρυθρο (780nm) και σαν αόρατη η ακτινοβολία των συσκευών αυτών αποτελεί κίνδυνο για την όραση παρόλο το μικρό τους μέγεθος. Οι laser διόδου χαρακτηρίζονται από μεγάλη απόδοση που μπορεί να φθάσει και τα 70%. Εκπέμπουν σε μήκη κύματος από το ορατό μέχρι και το υπέρυθρο.



**Σχήμα 5-13.** Η επαφή p-n (α) χωρίς πόλωση και (β) με ορθή πόλωση. Αναστροφή πληθυσμού δημιουργείται μέσα στη ζώνη επαφής ( $\sim 10^{-3}$  mm), ανάμεσα στη γραμμοσκιασμένη ενεργειακή περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας και την κενή περιοχή της ζώνης σθένους.

## 5.9. Ασκήσεις

### Άσκηση 5-1.

Οι εξισώσεις ρυθμών για την ατομική ύλη και πυκνότητα ακτινοβολίας ανά μονάδα συχνότητας για ένα laser με δισταθμικά ενεργά άτομα δίνονται από τις εκφράσεις 5-22, 5-23, 5-25. Λύστε τις εξισώσεις αυτές για τη στάσιμη κατάσταση και εκφράστε τα  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $W$ , συναρτήσει του ρυθμού άντλησης  $r_2$ . Δείξτε ότι το σύστημα υπόκειται σε μεταβολή φάσεως (μετάβαση από αεργία laser,  $W=0$ , σε έναρξη δραστηριότητας,  $W \neq 0$ ) όταν  $r_2$  γίνει  $r_c$ . Συζητήστε τις συνθήκες για να γίνει αυτό και δώστε τις συναφείς γραφικές παραστάσεις.

### Άσκηση 5-2

Στο σχήμα (5-9) εικονίζεται η συσκευή και στο σχήμα (5-7) το ενεργειακό διάγραμμα των σταθμών ενός laser He-Ne σχετικές με τη λειτουργία του.

Αν η απόσταση μεταξύ των κατόπτρων (ρυθμιζόμενη μικρομετρικά) είναι 0.4 m, βρείτε τον πλησιέστερο ακέραιο που εκφράζει τη τάξη του στάσιμου κύματος που μπορεί να υποστηριχθεί στη συχνότητα  $\omega$  που αντιστοιχεί στο μήκος κύματος  $\lambda=632.8$  nm.

Βρείτε τη μικρομετρική ρύθμιση,  $\xi$ , που πρέπει να γίνει στην απόσταση των κατόπτρων ώστε να έχουμε συντονισμό στο πιο πάνω μήκος κύματος.

Αν στη κοιλότητα υπάρχουν  $n$  φωτόνια συχνότητας  $\omega$  σε δεδομένη πόλωση, υπολογίστε το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου (V/m) που προκαλούν τα φωτόνια αυτά, δεδομένου ότι ο συντονιστής είναι κυλινδρικός ακτίνας 2 mm.

### Άσκηση 5-3

Ναδειχθεί ότι το εύρος της γραμμής (στο μισό ύψος της μέγιστης ισχύος) της προηγούμενης άσκησης, που οφείλεται στη διεύρυνση Doppler εξαρτάται από τη θερμοκρασία και τη συχνότητα σύμφωνα με τη σχέση

$$\Delta\omega_D = 2\omega_0 \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2} \ln 2}$$

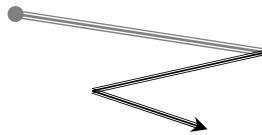
όπου  $M$  η μάζα του ατόμου Ne και να υπολογισθεί η τιμή της για θερμοκρασία δωματίου (Δες υποσημείωση στη σελίδα 81).

Πόσες διαμήκεις συχνότητες συντονισμού θα μπορούσαν να υποστηριχθούν στη κοιλότητα μέσα στο εύρος γραμμής;

### Άσκηση 5-4

Στον εστιαστή maser αμμωνίας τα ενεργά δισταθμικά άτομα υποβάλλονται σε μικρό συνεχές ηλεκτρικό πεδίο κυλινδρικής συμμετρίας  $E_\rho(\rho) = 2\zeta\rho$ . Αν  $p_1$  είναι η πόλωση μεταξύ των σταθμών  $E_1, E_2$  υπολογίστε

σε προσέγγιση πρώτης τάξης τις νέες ενέργειες που αποκτούν τα άτομα που βρίσκονται αρχικά στη στάθμη  $E_1$  και τα άτομα αρχικά στη στάθμη  $E_2$ . Δείξτε ότι το συνεχές ακτινικό πεδίο απομακρύνει από τον άξονα του εστιαστή τα άτομα στη χαμηλή στάθμη και σπρώχνει στον άξονα τα διεγερμένα άτομα.



## 6. Ο πίνακας πυκνότητας



τα προηγούμενα κεφάλαια η πιθανότητα να βρεθεί δισταθμικό άτομο με χαρακτηριστική κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(r, t) = c_1(t)u_1(\underline{r}) + c_2(t)u_2(\underline{r}) \quad (6.1)$$

στη θεμελιώδη ή διεγερμένη κατάσταση εκφράσθηκε μέσα από τα πλάτη  $|c_1|^2 = c_1 c_1^*$  &  $|c_2|^2 = c_2 c_2^*$ , αντίστοιχα. Στους υπολογισμούς όμως της διπολικής ροπής  $\langle e \underline{r} \rangle$  έκαναν την εμφάνισή τους και συνδυασμένες εκφράσεις πιθανότητας:  $c_1 c_2^*$  &  $c_2 c_1^*$

$$\begin{aligned} \langle e \underline{r} \rangle &= \int \Psi^*(\underline{r}, t) e \underline{r} \Psi(\underline{r}, t) d^3 r = \\ &= c_1 c_2^* \int u_1^* e \underline{r} u_2 d^3 r + c_2 c_1^* \int u_2^* e \underline{r} u_1 d^3 r \end{aligned} \quad (6.2)$$

ή

$$\langle e \underline{r} \rangle = e [c_1 c_2^* \underline{r}_{21} + c_2 c_1^* \underline{r}_{12}] \quad (6.3)$$

Εάν οι  $u_1$  και  $u_2$  είναι πραγματικές συναρτήσεις τότε  $e \underline{r}_{12} = e \underline{r}_{21} = e \underline{r}_{12}^* = P$ . Η μέση τιμή της διπολικής ροπής είναι πραγματικός αριθμός γιατί υπολογίζεται από το άθροισμα δύο συζυγών, των γινομένων των πλατών πιθανότητας. Γινόμενα όπως τα

$$c_1 c_1^* \quad c_1 c_2^* \quad c_2 c_1^* \quad c_2 c_2^* \quad (6.4)$$



χρησιμοποιούνται συχνά και προκειμένου να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί ταυτίζονται με τα στοιχεία ενός πίνακα, του πίνακα πυκνότητας. Ορίζεται έτσι ο πίνακας πυκνότητας  $\rho$  (η έννοια έχει εισαχθεί από τον von Neumann)

$$\rho = \begin{pmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Το στοιχείο του πίνακα πυκνότητας είναι το

$$\rho_{nm} = c_n c_m^* \quad (6.6)$$

με διαγώνια στοιχεία τις γνωστές πιθανότητες εύρεσης ενός δισταθμικού ατόμου στη θεμελιώδη και διεγερμένη κατάσταση

$$\rho_{11} = |c_1|^2 \quad \& \quad \rho_{22} = |c_2|^2 \quad (6.7)$$

Ο πίνακας γράφεται επίσης σαν το γινόμενο

$$\rho = \Psi \Psi^* = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

και είναι μία αναπαράσταση του τελεστή της πυκνότητας πιθανότητας<sup>14</sup>  $\rho$ ,

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (6.9)$$

ώστε το στοιχείο πίνακα  $\rho_{12}$  να είναι

$$\rho_{12} = \langle u_1 | \rho | u_2 \rangle = \langle u_1 | \Psi \rangle \langle \Psi | u_2 \rangle = c_1 c_2^* \quad (6.10)$$

όταν η κυματοσυνάρτηση είναι η 6-1. Η (6-9) αποτελεί και το γενικό ορισμό του τελεστή του πίνακα πυκνότητας όταν η κυματοσυνάρτηση  $|\Psi\rangle$  είναι γνωστή.

Οι διαστάσεις του πίνακα πυκνότητας για το δισταθμικό άτομο είναι 2x2, εάν κανείς όμως μελετά προβλήματα με περισσότερες από δύο

<sup>14</sup> όταν πρόκειται για ένα σύστημα σε συγκεκριμένη γνωστή κατάσταση  $|\Psi\rangle$ , κοίτα επίσης και την σχέση 6-28.

ιδιοκαταστάσεις οι διαστάσεις αυξάνονται ανάλογα. Ο πίνακας πυκνότητας έχει την ιδιότητα το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του να ισούται με τη μονάδα, ανεξάρτητα από τη βάση ως προς την οποία αναπτύσσεται, δεδομένου ότι αντιπροσωπεύει το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων. Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων ενός πίνακα, που είναι και το άθροισμα των ιδιοκαταστάσεων του, ονομάζεται ίχνος του πίνακα (trace) και συμβολίζεται με το Tr, επομένως:

$$\text{Tr}\rho = \sum_m \rho_{mm} = \sum_m |c_m|^2 = 1 \quad (6.11)$$

### 6.1 Η αναμενόμενη τιμή ενός τελεστή A με τη βοήθεια του πίνακα πυκνότητας

Η αναμενόμενη τιμή ενός τελεστή A ορίζεται ως

$$\langle A \rangle = \int \Psi^*(\underline{r}, t) A \Psi(\underline{r}, t) d^3 \underline{r} \quad (6.12)$$

εάν η κυματοσυνάρτηση  $\Psi(\underline{r}, t)$  ως προς κάποια βάση  $u_n$  στην εικόνα αλληλεπίδρασης είναι

$$\Psi(\underline{r}, t) = \sum_n c_n(t) u_n(\underline{r}) \quad (6.13)$$

η  $\langle A \rangle$  μπορεί να υπολογισθεί με τη βοήθεια του πίνακα πυκνότητας. Αποδεικνύεται (άσκηση 6-1) ότι η αναμενόμενη τιμή ενός τελεστή A που γράφεται υπό μορφή πίνακα με στοιχεία  $A_{nm}$ , είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του τελεστή που προκύπτει αν πολλαπλασιασθεί ο πίνακας πυκνότητας  $\rho$  με τον A,

$$\langle A \rangle = \sum_m (\rho A)_{mm} \quad (6.14)$$

Εάν χρειάζεται να υπολογισθεί η μέση τιμή της  $\langle A \rangle$  ως προς κάποια παράμετρο  $\xi$  του τελεστή  $A$  (π.χ. το  $A$  είναι ο τελεστής της κινητικής ενέργειας που εξαρτάται από τις διάφορες δυνάμεις  $\xi$  ενός συστήματος μορίων αερίου) τότε η μέση τιμή της  $\langle A \rangle$  ως προς  $\xi$  θα υπολογίζεται όπως και στην (6-14) αλλά χρησιμοποιώντας τώρα τη μέση τιμή του πίνακα πυκνότητας (άσκηση 6-1)

$$\langle \bar{A} \rangle = \sum_m (\bar{\rho} A)_{mm} \quad \& \quad \frac{d}{dt} \langle A(t) \rangle = \sum_m (\dot{\rho} A)_{mm} \quad (6.15)$$

## 6.2 Εξίσωση του πίνακα πυκνότητας

### 6.2.1 Χωρίς μηχανισμούς αποδιέγερσης

Ο ρυθμός μεταβολής ενός στοιχείου του πίνακα θα είναι

$$i\hbar \dot{\rho}_{nm} = i\hbar c_n \dot{c}_m^* + i\hbar \dot{c}_n c_m^* \quad (6.16)$$

Ισχύει όμως για την εξίσωση του Schrödinger

$$i\hbar \dot{c}_n = \sum_k H_{nk} c_k \quad \text{και} \quad -i\hbar \dot{c}_m^* = \sum_k H_{mk}^* c_k^* \quad (6.17)$$

όπου<sup>15</sup>

$$H_{nk} = \int u_n^* H u_k d^3 r \quad (6.18)$$

---

<sup>15</sup> με  $H = H_0 + V$

τότε η εξίσωση του στοιχείου  $\rho_{nm}$  του πίνακα θα είναι

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\rho}_{nm} &= \sum_k \left( H_{nk} c_k c_m^* - c_n c_k^* H_{mk} \right) = \\ &= \sum_k \left( H_{nk} \rho_{km} - \rho_{nk} H_{km} \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Η γενική εξίσωση του πίνακα πυκνότητας υπολογίζεται από την (6-9)<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\partial}{\partial t} (|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \\ &= |\dot{\Psi}\rangle\langle\Psi| + |\Psi\rangle\langle\dot{\Psi}| = -\frac{i}{\hbar} H |\Psi\rangle\langle\Psi| + \frac{i}{\hbar} |\Psi\rangle\langle\Psi| H^* = \\ &= -\frac{i}{\hbar} (H\rho - \rho H^*) = -\frac{i}{\hbar} (H\rho - \rho H) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\boxed{\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]} \quad (6.21)$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί την εξίσωση κίνησης του πίνακα πυκνότητας

Το στοιχείο πίνακα της εξίσωσης κίνησης (6-19) προκύπτει εξ' άλλου και από την (6-21) ως εξής

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\rho}_{nm} &= \langle n | (H\rho - \rho H) | m \rangle = \\ &= \sum_k \left\{ \langle n | H | k \rangle \langle k | \rho | m \rangle - \langle n | \rho | k \rangle \langle k | H | m \rangle \right\} = \sum_k (H_{nk} \rho_{km} - \rho_{nk} H_{km}) \end{aligned} \quad (6.22)$$

### 6.2.2 Με μηχανισμούς αποδιέγερσης

Η εξίσωση της κίνησης 6-21 υπολογίστηκε χωρίς να ληφθούν υπόψη μηχανισμοί αποδιέγερσης των δύο σταθμών. Οι μηχανισμοί αποδιέγερσης

<sup>16</sup> Οι τετραγωνικές αγκύλες συμβολίζουν το μεταθέτη  $[A, B] = AB - BA$

που συμβαίνουν όχι μόνο από αυθόρμητη μετάπτωση αλλά και από άλλους μηχανισμούς όπως συγκρούσεις στα αέρια, είναι απαραίτητοι για τη λειτουργία του laser. Η ταχεία αποδιέγερση της κατώτερης στάθμης  $E_1$  συμβάλλει στην επίτευξη της συνθήκης αναστροφής πληθυσμού όπως συζητήθηκε στο κεφάλαιο 5. Ο χρόνος ζωής της στάθμης αυτής πρέπει να είναι μικρός, μικρότερος από αυτόν της διεγερμένης στάθμης  $E_2$ . Στο εδάφιο αυτό θα υπολογισθεί η εξίσωση κίνησης (6-21) αυτή τη φορά λαμβάνοντας υπόψη τους μηχανισμούς αποδιέγερσης των δύο σταθμών.

Ο νέος αυτός περιορισμός περιγράφεται αρκετά καλά με προσθήκη δύο προσθετών στις εξισώσεις των συντελεστών  $c_1$  &  $c_2$  (6-17)

$$\begin{aligned}\dot{c}_1 &= -\frac{i}{\hbar} E_1 c_1 - \frac{i}{\hbar} V_{12} c_2 - \frac{1}{2} \gamma_1 c_1 \\ \dot{c}_2 &= -\frac{i}{\hbar} E_2 c_2 - \frac{i}{\hbar} V_{12} c_1 - \frac{1}{2} \gamma_2 c_2\end{aligned}\quad (6.23)$$

Τα  $\gamma_1, \gamma_2$  είναι οι σταθερές απόσβεσης των πιθανοτήτων  $|c_1|^2$  &  $|c_2|^2$ . Από την (6-8)

$$i\hbar\dot{\rho} = i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \end{pmatrix} + i\hbar \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1^* & \dot{c}_2^* \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Οι παράγωγοι των  $c_1$  &  $c_2$  είναι γνωστοί από τις 6-23 και αντικαθιστώντας στην 6-24 προκύπτει

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho] - \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* \end{pmatrix} - \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Θέτοντας

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

προκύπτει η νέα εξίσωση κίνησης του πίνακα πυκνότητας<sup>17</sup> με μηχανισμούς αποδιέγερσης των δύο σταθμών

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho] - \frac{i\hbar}{2} \{\Gamma, \rho\} \quad (6.27)$$

### 6.3 Μέθοδος αποθήκης. Εξίσωση πίνακα πυκνότητας

Έως τώρα ασχοληθήκαμε με συστήματα που αποτελούνται από το άτομο συν το πεδίο για τη μελέτη ανταλλαγής φωτονίων. Πολλές φορές όμως μας ενδιαφέρει μόνο η εξέλιξη του H/M πεδίου στο laser ανεξάρτητα από το τι κάνουν τα άτομα στο υλικό laser μέσα στο συντονιστή. Στη περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε τον ανηγμένο πίνακα πυκνότητας του H/M πεδίου (που παίζει το ρόλο ενός αρμονικού ταλαντωτή), θεωρώντας το υλικό laser σαν μία αποθήκη δισταθμικών ατόμων. Θεωρούμε επίσης ότι το πεδίο μεταβάλλεται ελάχιστα κατά την διεργασία ανταλλαγής φωτονίου ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός μίας αδρομερούς εξίσωσης του πίνακα πυκνότητας ως προς το πεδίο μονάχα. Για τον υπολογισμό της εξίσωσης του πίνακα πυκνότητας, θεωρείται αρχικά ότι το πεδίο αλληλεπιδρά με τα δισταθμικά άτομα, υπολογίζεται στη συνέχεια ο συνδυασμένος πίνακας πυκνότητας πεδίου-ατόμου και τελικά λαμβάνεται από αυτόν ο ανηγμένος πίνακας πυκνότητας βρίσκοντας το ίχνος του ως προς τις ατομικές συντεταγμένες.

Συνήθως σε ένα σύστημα που αποτελείται από πολλά σώματα δεν γνωρίζουμε ακριβώς το συγκεκριμένη τους κατάσταση  $|\Psi\rangle$  αλλά το κλάσμα τους<sup>18</sup>  $P_\Psi$  που έχει κυματόνισμα  $|\Psi\rangle$ . Ο πίνακας πυκνότητας του πεδίου την χρονική στιγμή  $t$  θα γράφεται

<sup>17</sup> Η αγκύλη Poisson ορίζεται ως  $\{A, B\} = AB - BA$

$$\rho(t) = \sum P_{\Psi} |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (6.28)$$

Έστω ότι μέσα στο συντονιστή εισέρχονται άτομα στη κάτω στάθμη με ρυθμό  $r_1$  και στη πάνω στάθμη με ρυθμό  $r_2$ , όπως ακριβώς στη περίπτωση του maser (εδάφιο 5-3), βλέπε σχήμα 6.1. Τα άτομα αυτά, που βρίσκονται στη θερμοκρασία  $T$ , θα έχουν κατανομή Boltzmann στις ενέργειες τους

$$\frac{r_2}{r_1} = \exp[-(E_2 - E_1)/kT] = \exp(-\hbar\omega/kT) \quad (6.29)$$

Αν εμφανισθεί αδιέγερτο άτομο η πυκνότητα  $\rho(t)$  θα μεταβληθεί μέσα σε μικρό χρονικό διάστημα  $\tau$  κατά  $\delta\rho(t)$

$$\delta\rho(t) = \rho(t + \tau) - \rho(t) \quad (6.30)$$

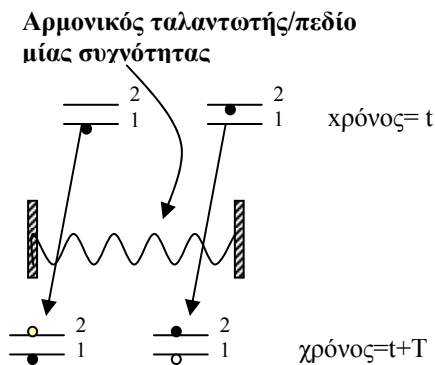
Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τη μεταβολή του πίνακα πυκνότητας. Αν μέσα σε χρόνο  $\tau$  εισάγονται αδιέγερτα άτομα στη στάθμη  $|\downarrow\rangle$  με ρυθμό  $r_1$  και διεγερμένα άτομα στη στάθμη  $|\uparrow\rangle$  με ρυθμό  $r_2$  η μεταβολή του  $\rho(t)$  θα είναι, επειδή για μικρούς χρόνους  $\tau$  στην πράξη είναι

$$\tau \equiv dt, \quad \delta\rho(t) \equiv d\rho(t) \quad (6.31)$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt} \approx \frac{\delta\rho(t)}{t + \tau - t} = r_1 (\delta\rho(t))_1 + r_2 (\delta\rho(t))_2 \quad (6.32)$$

Συνολικά επομένως εισάγονται στο μικρό χρόνο  $\tau$ ,  $r_2\tau$  διεγερμένα και  $r_1\tau$  αδιέγερτα άτομα ενώ η μεταβολή του πίνακα πυκνότητας είναι  $(\delta\rho_2)$  και  $(\delta\rho_1)$ , αντίστοιχα. Αρχικά θα υπολογισθεί η μεταβολή του πίνακα πυκνότητας του συστήματος άτομο-πεδίο για ένα μόνο (διεγερμένο ή αδιέγερτο) άτομο υπολογίζοντας πρώτα το  $\rho(t+\tau)$  και αφαιρώντας του το  $\rho(t)$ , σχέση 6-30.

<sup>18</sup> Στην (6-9) το σύστημα βρίσκεται σε μία μόνο συγκεκριμένη κατάσταση



**Σχήμα 6-1.** Η διαδρομή δισταθμικών ατόμων μέσα στο συντονιστή. Αρχικά στη στάθμη 1 ή 2 μετά από χρόνο  $t$  μεταβαίνουν στη άλλη στάθμη προς τα πάνω ή κάτω αλληλεπιδρώντας με ηλεκτρικό πεδίο μιας συχνότητας.

Μετά είναι εύκολο να θεωρηθεί η μεταβολή του  $\rho$  για όλα τα εισαγόμενα άτομα ανάγοντας τον μόνο ως προς τις συντεταγμένες του πεδίου.

Σύμφωνα με τη (6-28) και επειδή το κυματόνισμα  $|\Psi\rangle$  είναι η υπέρθεση ιδιοκαταστάσεων  $|n\rangle$  με πλάτος πιθανότητας  $c_n$ ,

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n(t) |n\rangle, \langle\Psi| = \sum_m c_m^*(t) \langle m| \quad (6.33)$$

ο πίνακας πυκνότητας παίρνει τη μορφή

$$\rho(t) = \sum_{\Psi} P_{\Psi} \sum_{n,m} c_n^{\Psi}(t) c_m^{*\Psi}(t) |n\rangle \langle m| = \sum_{n,m} \rho_{n,m} |n\rangle \langle m| \quad (6.34)$$

όπου

$$\rho_{nm} = \sum_{\Psi} P_{\Psi} c_n^{\Psi}(t) c_m^{*\Psi}(t) \quad (6.35)$$

---

$|\Psi\rangle$



Έστω ότι τη χρονική στιγμή  $t$  ένα αδιέγερτο άτομο  $|\downarrow\rangle$  διέρχεται μέσα στο συντονιστή και η διαδρομή του διαρκεί χρόνο  $\tau$ . Στο χρόνο αυτό η πυκνότητα θα γίνει  $\rho(t+\tau)$ . Η εξέλιξη της  $\rho(t)$  σε  $\rho(t+\tau)$  υπολογίζεται από την αρχική της τιμή με την επίδραση του εξελικτικού τελεστή

$$\rho_{\text{άτομο-πεδίο}}(t+\tau) = e^{-i/\hbar H(t+\tau-t)} \rho_{\alpha-\pi}(t) e^{i/\hbar H(t+\tau-t)} \quad (6.36\alpha)$$

που στην εικόνα της αλληλεπίδρασης γίνεται

$$\rho_{\text{άτομο-πεδίο}}(t+\tau) = e^{-i/\hbar H_1\tau} \rho_{\alpha-\pi}(t) e^{i/\hbar H_1\tau} \quad (6.36\beta)$$

όπου

$$\rho_{\alpha-\pi}(t) = \sum_{n,m} \rho_{nm}(t) |\downarrow n\rangle \langle m \downarrow| \quad (6.37)$$

Η Χαμιλτονιανή,  $H$ , γράφεται στη προσέγγιση Rabi όπως στην (4-70). Όπως συζητήθηκε όμως στο εδάφιο 4-7 η επίδραση του εξελικτικού τελεστή στην αρχική κατάσταση σύμφωνα με τη (4-85) στη προκειμένη περίπτωση, ( $\Omega=\omega$ ) είναι

$$e^{-i/\hbar H_1\tau} |\downarrow n\rangle = \cos(g\sqrt{n}\tau) |\downarrow n\rangle - i \sin(g\sqrt{n}\tau) |\uparrow n-1\rangle \quad (6.38)$$

επειδή

$$\begin{aligned} e^{-i/\hbar H_1\tau} |\downarrow n\rangle &= \\ &= \cos\left[g\tau\sqrt{S^+S+a^+a}\right] |\downarrow, n\rangle - i\hbar g(S^+a + Sa^+) \frac{\sin\left[g\tau\sqrt{S^+S+a^+a}\right]}{\hbar g\sqrt{S^+S+a^+a}} |\downarrow, n\rangle \end{aligned}$$

(6.39)

Ομοίως

$$\langle m, \downarrow | e^{i/h H_1 \tau} = \cos(g\tau\sqrt{m}) \langle m, \downarrow | + i \sin(g\tau\sqrt{m}) \langle m-1, \uparrow | \quad (6.40)$$

και από την (6-36) προκύπτει

$$\rho_{a-\pi}(t+\tau) = \sum_{n,m} \rho_{nm}(t) \left\{ \begin{array}{l} \cos(g\tau\sqrt{n})\cos(g\tau\sqrt{m}) \langle \downarrow, n | \langle m, \downarrow | + \\ i \cos(g\tau\sqrt{n})\sin(g\tau\sqrt{m}) \langle \downarrow, n | \langle m-1, \uparrow | \\ - i \sin(g\tau\sqrt{n})\cos(g\tau\sqrt{m}) \langle \uparrow, n-1 | \langle m, \downarrow | + \\ \sin(g\tau\sqrt{n})\sin(g\tau\sqrt{m}) \langle \uparrow, n-1 | \langle m-1, \uparrow | \end{array} \right\} \quad (6.41)$$

Το ίχνος της (6-41) ως προς τις ατομικές μεταβλητές  $|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle$  δίνει τον ανηγμένο πίνακα πυκνότητας του πεδίου τη χρονική στιγμή  $t+\tau$ , δηλαδή

$$\rho(t+\tau) = \sum_{n,m} \rho_{nm}(t) \left\{ \begin{array}{l} \cos(g\tau\sqrt{n})\cos(g\tau\sqrt{m}) \langle n | \langle m | + \\ \sin(g\tau\sqrt{n})\sin(g\tau\sqrt{m}) \langle n-1 | \langle m-1 | \end{array} \right\} \quad (6.42)$$

Οι τριγωνομετρικές εκφράσεις μπορούν να απλοποιηθούν μέσα από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \cos(g\tau\sqrt{n})\cos(g\tau\sqrt{m}) &\approx 1 - \frac{1}{2} g^2 \tau^2 (n+m) \\ \sin(g\tau\sqrt{n})\sin(g\tau\sqrt{m}) &\approx g^2 \tau^2 \sqrt{nm} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Από την (6-32) τότε υπολογίζεται η μεταβολή στον πίνακα πυκνότητας του πεδίου μέσα σε χρόνο  $\tau$  από την είσοδο αδιέγειρων ατόμων

$$\delta\rho_1(t) = \sum_{nm} \rho_{nm}(t) (g\tau)^2 \left[ -\frac{1}{2} (n+m) \langle n | \langle m | + \sqrt{nm} \langle n-1 | \langle m-1 | \right] \quad (6.44)$$

του οποίου το  $kl$  στοιχείο πίνακα είναι<sup>19</sup>

$$\delta\rho^{(1)}_{kl}(t) = \langle k | \delta\rho^{(1)}(t) | l \rangle = (g\tau)^2 \left[ -\frac{1}{2} \rho_{kl}(t) (k+l) + \rho_{k+1,l+1}(t) \sqrt{(k+1)(l+1)} \right] \quad (6.45)$$

εφόσον μόνο για  $k=n$ ,  $l=m$  στον πρώτο προσθεταίο και  $k=n-1$ ,  $l=m-1$  στο δεύτερο προσθεταίο της (6.44) τα γινόμενα ανυσμάτων κατάστασης δεν είναι μηδέν. Από αυτήν υπολογίζεται η μεταβολή του πίνακα πυκνότητας για συγκεκριμένο αριθμό  $k$  φωτονίων μέσα στο συντονιστή, όταν διέρχεται από αυτόν ένα αδιέγερτο άτομο:

$$\langle k | \delta \rho_1(t) | k \rangle = (g\tau)^2 [-k\rho_{kk}(t) + (1+k)\rho_{k+1,k+1}(t)] \quad (6.46)$$

και όταν διέρχονται  $N$  αδιέγερτα άτομα

$$N \langle k | \delta \rho_1(t) | k \rangle = N(g\tau)^2 [-k\rho_{kk}(t) + (1+k)\rho_{k+1,k+1}(t)] \quad (6.47)$$

Ανάλογα, υπολογίζεται και η μεταβολή του πίνακα πυκνότητας  $\delta\rho_2(t)$  όταν διέρχεται ένα διεγερμένο άτομο στον συντονιστή

$$\delta\rho_2(t) = (g\tau)^2 \sum_{nm} \rho_{nm}(t) \left[ -\frac{1}{2}(n+m+2)|n\rangle\langle m| + \sqrt{(n+1)(m+1)}|n+1\rangle\langle m+1| \right] \quad (6.48)$$

Επομένως συνολικά υπολογίζεται από τις (6-30), (6-45), (6-48) η μεταβολή του πίνακα πυκνότητας σε

$$\begin{aligned} \langle n | \dot{\rho}(t) | m \rangle = \dot{\rho}_{nm}(t) = & -\frac{1}{2}[R_1(n+m) + R_2(n+m+2)]\rho_{nm}(t) + \\ & + R_1\sqrt{(n+1)(m+1)}\rho_{n+1,m+1}(t) + R_2\sqrt{nm}\rho_{n-1,m-1}(t) \end{aligned} \quad (6.49)$$

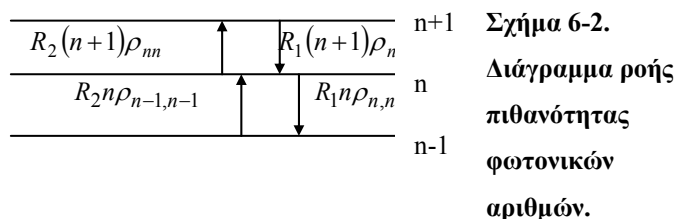
όπου οι συντελεστές ρυθμού,  $R_i$ , είναι

$$R_i = r_i (g\tau)^2 \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.50)$$

Μπορεί τώρα να υπολογισθεί από την (6-49) η εξίσωση ρυθμού της πιθανότητας φωτονίων που συμβολίζεται  $\rho_{nn}$

$$\dot{\rho}_{nn} = -[R_1n + R_2(n+1)]\rho_{nn} + R_1(n+1)\rho_{n+1,n+1} + R_2n\rho_{n-1,n-1} \quad (6.51)$$

<sup>19</sup> Δεδομένου ότι η βάση  $|n\rangle, |m\rangle$  είναι ορθοκανονική



Το σχήμα (6-2) δείχνει το διάγραμμα καταστάσεων των φωτονικών αριθμών. Οι όροι με το  $R_2$  αντιστοιχούν σε εισαγωγή διεγερμένων ατόμων που προσφέρουν ένα φωτόνιο στο πεδίο, άρα τα αντίστοιχα βέλη κοιτούν προς τα πάνω, ενώ όταν εισέρχεται αδιέγερτο άτομο τα βέλη κοιτούν προς τα κάτω. Έστω ότι το πεδίο έχει  $n$  φωτόνια και υφίσταται μόνο μικρές μεταβολές γύρω από κατάσταση  $n$  φωτονίων. Ο όρος  $R_2(n+1)\rho_{nn} = r_2 \cdot (n+1)(g\tau)^2 \cdot \rho_{nn}$  αναφέρεται (α) στο αριθμό διεγερμένων ατόμων που εισάγονται σε χρόνο  $\tau$ ,  $r_2$ , (β) στην πιθανότητα αλληλεπίδρασης (εξαναγκασμένης εκπομπής) από πεδίο  $n$  φωτονίων μέσα στο χρόνο αυτό,  $g^2(n+1)\tau^2$  (το αντίστροφο της συχνότητας Rabi), ενώ το πεδίο πηγαίνει από κατάσταση  $n \rightarrow n+1$ , (γ) και την πιθανότητα το πεδίο να έχει  $n$  φωτόνια,  $\rho_{nn}$ . Όσον αφορά την εισαγωγή αδιέγερτων ατόμων ο αντίστοιχος όρος στο ρυθμό πίνακα πιθανότητας είναι ο  $r_1 \cdot n(g\tau)^2 \cdot \rho_{nn}$ , έχοντας ομαδοποιήσει πάλι τους επί μέρους παράγοντες για ευκολία στη συζήτηση. Ο όρος αυτός προκύπτει από (α) τη συνεισφορά του αριθμού αδιέγερτων ατόμων που εισέρχονται σε χρόνο  $\tau$ ,  $r_1$ , (β) τη πιθανότητα αλληλεπίδρασης τους (απορρόφησης) με τα  $n$  φωτόνια του πεδίου στο χρόνο αυτό που είναι αντίστροφο της συχνότητας Rabi  $g^2 n \tau^2$  (το πεδίο πάει από  $n \rightarrow n-1$  φωτόνια) και (γ) τη πιθανότητα το πεδίο να έχει  $n$  φωτόνια,  $\rho_{nn}$ . Εφόσον επομένως υπάρχουν πιθανότητες το πεδίο να έχει είτε  $n+1$  είτε  $n-1$  φωτόνια θα πρέπει και αυτές οι περιπτώσεις να υπάρχουν μέσα στο ρυθμό του πίνακα πυκνότητας όταν θεωρείται η κατάσταση ισορροπίας. Αν λοιπόν το πεδίο έχει  $n-1$  φωτόνια, αλληλεπιδρά με τα

διεγερμένα άτομα και πηγαίνει από  $n-1 \rightarrow n$  φωτόνια με διεργασία διεγερμένης και αυθόρμητης εκπομπής, ενώ αν είχε  $n+1$  φωτόνια αλληλεπιδρά (απορρόφηση) με αδιέγερτα άτομα και πηγαίνει από  $n+1 \rightarrow n$ . Έτσι εισάγονται οι δύο επί πλέον προσθεταίοι στην εξίσωση ρυθμού.

Ισορροπία επιτυγχάνεται όταν εξισώνονται οι συνεισφορές ανάμεσα από δύο επίπεδα φωτονικών καταστάσεων, όπως π.χ.

$$r_2 n (g\tau)^2 \rho_{n-1, n-1} = r_1 n (g\tau)^2 \rho_{nn} \quad (6.52)$$

Η σχέση (6-52) γράφεται επίσης

$$\rho_{nn} = \frac{r_2}{r_1} \rho_{n-1, n-1} \quad (6.53)$$

Ο λόγος των ρυθμών εισαγωγής ατόμων όμως ακολουθεί τη κατανομή Boltzmann (6-29) και από τη (6-53) προκύπτει

$$\rho_{nn} = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \rho_{n-1, n-1} \quad (6.54)$$

#### 6.4 Υπολογισμός της κατανομής μέλανος σώματος (Planck)

Αντικαθιστώντας με επανάληψη την (6-54) στο τον εαυτό της, για  $n = 1, 2, 3 \dots$  προκύπτει

$$\rho_{nn} = \rho_{00} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} \quad (6.55)$$

Το  $\rho_{00}$  προσδιορίζεται από τη συνθήκη ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων ιδιοκαταστάσεων  $n$  του πεδίου πρέπει να είναι ίσο προς 1,  $Tr\rho_{nn} = 1$ , δηλαδή

$$\sum_n \rho_{00} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} = 1 \quad (6.56)$$

Η έκφραση  $e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}$  αποτελεί μία φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο και από το άθροισμα των άπειρων όρων της<sup>20</sup> η (6-56) γίνεται

$$\rho_{00} = 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \quad (6.57)$$

ώστε

$$\rho_{nn} = \frac{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}} \quad (6.58)$$

Η (6-58) είναι μια μορφή της κατανομής ακτινοβολίας μέλανος σώματος του Planck, ενός πεδίου με  $\langle n \rangle$  φωτόνια κατά μέσον όρο σε θερμοδυναμική ισορροπία. Από αυτήν υπολογίζεται το  $\langle n \rangle$ : Ο πίνακας πυκνότητας (6-58) πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό των φωτονίων,  $n$ , και υπολογίζεται το ίχνος του πίνακα που προκύπτει σύμφωνα με την (6-14)

$$\langle n(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho_{nn}(t) \quad (6.59)$$

ώστε τελικά να βρεθεί το  $\langle n(t) \rangle$ <sup>21</sup>

$$\langle n(t) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \quad (6.60)$$

---

<sup>20</sup>  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\lambda} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}$ , πρώτος όρος = 1 και ο λόγος =  $e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$

<sup>21</sup>  $\frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\lambda}$  με παραγωγή του αθροίσματος άπειρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου

η κατανομή Bose-Einstein όπως είχε αναφερθεί στη σχέση 2-27.

## 6.5 Ασκήσεις

### Άσκηση 6-1

Χρησιμοποιώντας ένα πλήρες σύστημα κυματικών συναρτήσεων  $\{u(r)\}$  ως βάση, δείξτε ότι η αναμενόμενη τιμή ενός τελεστή  $A$ , όταν το σύστημα εκτυλίσσεται σύμφωνα με τη κυματική συνάρτηση (6-13) παίρνει τη μορφή

$$\langle A \rangle = \sum_{n,m} c_n(t) c_m^*(t) A_{mn}$$

όπου το στοιχείο του πίνακα  $A_{mn}$  δίνεται από την

$$A_{mn} = \int u_m^*(r) A u_n(r) d^3 r.$$

Δείξτε ότι ο πίνακας πυκνότητας  $\rho(t)$  στη βάση  $\{u_n\}$  με στοιχεία

$$\rho(t) = c_n(t) c_m^*(t)$$

έχει ως εξίσωση για τη κίνηση του την (6-21) (ανάλογο της κλασικής εξίσωσης του Liouville) όπου η  $H$  είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος και δίνεται μέσω στοιχείων πίνακα της μορφής (6-18). Αν έχουμε συλλογή από πανομοιότυπα συστήματα που να περιγράφεται με κατανομή τυχαίων μεγεθών, δείξτε ότι η μέση τιμή της αναμενόμενης τιμής του τελεστή  $A$  δίνεται από την (6-15), όπου  $\bar{\rho}$  είναι η μέση τιμή του πίνακα πυκνότητας η οποία υπακούει τη κβαντική εξίσωση Liouville.

### Άσκηση 6-2

(α) Βρείτε τις εξισώσεις που κυβερνούν τη κίνηση των στοιχείων πίνακα δισταθμικού ατόμου (στάθμες  $E_1, E_2$ ) υπό την επίδραση εξωτερικού κλασικού ηλεκτρικού πεδίου  $E_x \hat{i}$ . Στη περίπτωση αυτή η βάση αποτελείται από τις  $|u_1\rangle = |\downarrow\rangle, |u_2\rangle = |\uparrow\rangle$ .

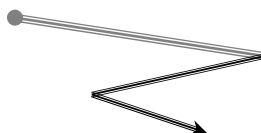
(β) Βρείτε ακόμη τις εξισώσεις του πίνακα πυκνότητας για το δισταθμικό άτομο σε πολωμένο κβαντισμένο H/M πεδίο λαμβάνοντας υπόψη και τη δυναμική H/M πεδίου. Η βάση τώρα αποτελείται από τις συναρτήσεις  $|\downarrow, n\rangle, |\uparrow, m\rangle$ ,  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ . Ερμηνέψατε και στις δύο περιπτώσεις τα στοιχεία του πίνακα πυκνότητας.

### Άσκηση 6-3

Υποθέστε ότι οι πιθανότητες κατάληψης των σταθμών 1 και 2 σε ένα δισταθμικό άτομο φθίνουν με σταθερές απόσβεσης  $\gamma_1, \gamma_2$ . Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης του πίνακα πυκνότητας παίρνει τη μορφή (6-27).

### Άσκηση 0-4

Υπολογίσατε τη πιθανότητα απορρόφησης  $\rho_{22}(t)$  φωτονίου από την εξίσωση του πίνακα πυκνότητας (6-21) όταν αδιέγερτο δισταθμικό άτομο αλληλεπιδρά με το ηλεκτρικό πεδίο της άσκησης 4-1.





## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### 7. Λύση γραμμικού ομογενούς συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων

**T**ο σύστημα του ενδιαφέροντος μας είναι της μορφής

$$\begin{aligned} i\dot{C}_1 - \Delta_1 C_1 &= GC_2 \\ i\dot{C}_2 - \Delta_2 C_2 &= GC_1 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$C_1 = e^{-i\lambda t} X, \quad C_2 = e^{-i\lambda t} Y \quad (7.2)$$

Εισάγουμε τις (7-2) στις (7-1)

$$\lambda X = \Delta_1 X + GY$$

$$\lambda Y = GX + \Delta_2 Y$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 - \lambda & G \\ G & \Delta_2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0 \quad (7.3)$$

Θέλουμε τα  $\lambda$  και  $X, Y$  για τα οποία λύνεται το αλγεβρικό σύστημα (7-3).

Το σύστημα είναι ομογενές και για να βρούμε λύση πέραν της μηδενικής θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να είναι μηδέν

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 - \lambda & G \\ G & \Delta_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7.4)$$

Η (7-4) δίνει τα  $\lambda$  για τα οποία οι εκφράσεις (7-2) μπορούν να είναι λύσεις.

Έχουμε:  $(\Delta_1 - \lambda)(\Delta_2 - \lambda) - G^2 = 0$  και

$$\lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \frac{\sqrt{(\Delta_2 - \Delta_1)^2 + 4G^2}}{2} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \Omega_R \\ \lambda_2 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - \frac{\sqrt{(\Delta_2 - \Delta_1)^2 + 4G^2}}{2} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - \Omega_R \end{cases} \quad (7.5)$$

όπου  $\Omega_R$  η συχνότητα Rabi. Θέλουμε και τα αντίστοιχα  $X$  και  $Y$ . Για την λύση  $\lambda_1$  (ιδιοτιμή) πέστε  $X_1, Y_1$  και για την  $\lambda_2$ :  $X_2, Y_2$ . Πάμε στις (7-3), π.χ. για  $\lambda = \lambda_1$

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 - \lambda_1 & G \\ G & \Delta_2 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.6)$$

Μια και η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι μηδέν οι δύο εξισώσεις του συστήματος είναι συμβατές και για τον υπολογισμό επιλέγουμε όποια βολεύει καλύτερα. Παίρνουμε την πρώτη για  $\lambda = \lambda_1$

$$(\Delta_1 - \lambda_1)X_1 + GY_1 = 0 \quad (7.7)$$

Η (7-7) είναι εξίσωση ευθείας και τα ζητούμενα  $X_1, Y_1$  είναι οι συντεταγμένες των σημείων που την επαληθεύουν. Εκφράζουμε τα  $Y$  συναρτήσει των  $X$ .

$$Y_1 = \frac{\lambda_1 - \Delta_1}{G} X_1 \quad (7.8)$$

Ομοίως για την ιδιοτιμή  $\lambda_2$  έχουμε για τα  $X, Y$  τη σχέση

$$Y_2 = \frac{\Delta_2 - \lambda_2}{G} X_2 \quad (7.9)$$

Επειδή το σύστημα (7-1) είναι γραμμικό το άθροισμα των δύο λύσεων που βρήκαμε είναι πάλι λύση και μάλιστα η πιο γενική. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned}
 C_1 &= e^{-i\lambda_1 t} X_1 + e^{-i\lambda_2 t} X_2 \\
 C_2 &= \frac{\lambda_1 - \Delta_1}{G} e^{-i\lambda_1 t} X_1 + \frac{\lambda_2 - \Delta_2}{G} e^{-i\lambda_2 t} X_2 \quad (7.10)
 \end{aligned}$$

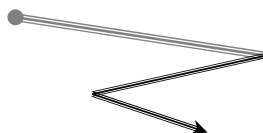
Η (7-10) είναι η γενική λύση γιατί περιέχει όλες τις αυθαίρετες σταθερές του προβλήματος οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν ώστε η λύση να προσαρμοστεί στις συνθήκες του προβλήματος.

Τα διανύσματα  $\begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix}$  που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $\lambda_j$  ( $j=1,2$ ) λέγονται

ιδιοδιανύσματα. Αν ξέρω ένα από την κάθε λύση τα ξέρω όλα, διότι για την ίδια λύση το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Για τον υπολογισμό των σταθερών  $X_1$  και  $X_2$  εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες που αντιστοιχούν στο εκάστοτε πρόβλημα.

#### Άσκηση 7-1.1:

Δείξτε ότι δύο ιδιοδιανύσματα  $X_i$ ,  $Y_i$ , που αντιστοιχούν σε διαφορετικές λύσεις είναι κάθετα μεταξύ τους.



---

## 8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. G. J. Papadopoulos. *Phys.Rev.* 37 2482 (1971)
2. M. Sargent III, M. O. Scully, W. E. Lamb Jr. *Laser Physics*, Addison-Wesley, London (1977)
3. O. Svelto. *Principles of Lasers*. Plenum Press, New York, (1982)
4. D R Tilley *Physics and Computing. The value of computers in undergraduate physics teaching.* *Phys. Bull.* 38, 456 (1985)
5. D. F. Walls, *J. Phys.* A4, 638 (1971)
6. F. Pallikari et al, *J. Sol-Gel Sci. & Tech.* 7, 203-209 (1996)
7. G. H. Wannier, *Statistical Physics*. Dover Publications Inc., New York (1966)
8. G. J. Papadopoulos, *Time dependent quantum tunneling. Group theoretical methods in Physics*, Proc. Moscow USSR, Springer-Verlag (1990)
9. W. Koechner, *Solid State Laser Engineering*, Springer Series in Optical Sciences
10. F. Viras and T.A.King. *On the Universality of Low Frequency Raman Scattering from Amorphous Solids' J.Non-Cryst. Solids*, 119, 65-74 (1990)
11. Einstein, *Phys. Z.* 18, 121 (1917)
12. A. Einstein, *Verh. Deutsch Phys. Ges.* 18, 318 (1916)
13. A. Einstein, *Mitt. Phys. Ges. Zürich*, 16, 47 (1916)
14. A. Einstein, *Phys.Zeitschr.*, 18, 121 (1917)
15. A. Einstein *Annalen der Physik*, 17, 132 (1905)
16. A. L. Schawlow, C. H. Townes, *Phys. Rev.* 112, 1940 (1958)
17. T. H. Maiman, *Nature*, 187, 493 (1960)
18. W. Javan, R. Bennet and R. Herriott, *Phys. Rev. Lett.* 6, 106 (1961)

19. K. Mendelsson. *The Quest for Absolute Zero- the meaning of low temperature physics*. Taylor & Francis Ltd, London (1977).
20. H. Kragh, Max Planck: The reluctant revolutionary. *Physics World*, 13 (12), (2000).
21. A. Pais. *Subtle is the Lord. The Science and the Life of Albert Einstein*. Oxford University Press, Oxford (1982)
22. A. Yariv, *Introduction to Optical Electronics*. Holt, Rinehart and Winston, New York, (1976)