



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
«Προηγμένα Συστήματα Ελέγχου και Ρομποτικής»  
«Advanced Control Systems and Robotics»

Μεταγωγικός Έλεγχος Ελάστρων σε Βιομηχανίες  
Μετάλλων

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών με τίτλο «Προηγμένα Συστήματα Ελέγχου και Ρομποτικής» του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Προηγμένα Συστήματα Ελέγχου και Ρομποτικής

από τον

Νικόλαο Α. Φούντογλου

Νοέμβριος 2023



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«Προηγμένα Συστήματα Ελέγχου και Ρομποτικής»

«Advanced Control Systems and Robotics»

Μεταγωγικός Έλεγχος Ελάστρων σε Βιομηχανίες  
Μετάλλων

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών με τίτλο «Προηγμένα Συστήματα Ελέγχου και Ρομποτικής» του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Προηγμένα Συστήματα Ελέγχου και Ρομποτικής

από τον

Νικόλαο Α. Φούντογλου

Δήλωση Αυθεντικότητας, ζητήματα **Copyright**

«Ο μεταπτυχιακός φοιτητής που εκπόνησε την παρούσα διπλωματική εργασία φέρει ολόκληρη την ευθύνη προσδιορισμού της δίκαιης χρήσης του υλικού, η οποία ορίζεται στη βάση των εξής παραγόντων: του σκοπού και χαρακτήρα της χρήσης (μη-εμπορικός, μη-κερδοσκοπικός, αλλά εκπαιδευτικός-ερευνητικός), της φύσης του υλικού που χρησιμοποιεί (τμήμα του κειμένου, πίνακες, σχήματα, εικόνες κ.λπ.), του ποσοστού και της σημαντικότητας του τμήματος που χρησιμοποιεί σε σχέση με το όλο κείμενο υπό copyright, και των πιθανών συνεπειών της χρήσης αυτής στην αγορά ή την γενικότερη αξία του υπό copyright κειμένου».

Νοέμβριος 2023

«Η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την τριμελή εξεταστική επιτροπή η οποία ορίστηκε από την Συνέλευση του Γενικού Τμήματος του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, σύμφωνα με το νόμο και τον εγκεκριμένο Οδηγό Σπουδών του ΠΜΣ «Προηγμένα Συστήματα Ελέγχου και Ρομποτικής». Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

1. Φώτιος Ν. Κουμπουλής, Καθηγητής .....(Επιβλέπων)
2. Νικόλαος Δ. Κούβακας, Αναπληρωτής Καθηγητής ..... (Μέλος)
3. Δημήτριος Γ. Φραγκούλης, Επίκουρος Καθηγητής .....(Μέλος)

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Γενικό Τμήμα του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα.

Σύμφωνα με τον Ν. 4589/2019 (ΦΕΚ 13/29-1-2019 τ. Α) το Π.Μ.Σ. «Προηγμένα Συστήματα Ελέγχου και Ρομποτικής» εντάχθηκε στο Γενικό Τμήμα του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.»

## Περίληψη

Ο έλεγχος ψυχρής έλασης σε βιομηχανία μετάλλων και ειδικότερα του αλουμινίου αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά και ενδιαφέροντα πεδία έρευνας παγκοσμίως. Η ανάγκη για την τη βελτίωση της παραγωγικής διαδικασίας του αλουμινίου βασίζεται στην αυξημένη ζήτηση του, στην εύκολη επεξεργασία καθώς και ότι υπάρχει σε αφθονία επειδή θεωρείται ένα από τα πιο ανακυκλώσιμα υλικά παγκοσμίως. Η επιχειρηματική δραστηριότητα του αλουμινίου διακρίνεται σε διάφορους τομείς όπως για παράδειγμα σε συστήματα μεταφοράς & αυτοκινητοβιομηχανίας, οικονομικός και κατασκευαστικός κλάδος, κλάδος δικτύων ισχύος και ενέργειας, κλάδος βιομηχανικών εφαρμογών, καταναλωτικών αγαθών κ.α. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να εμβαδύνουμε στον έλεγχο των κατεργασιών υποσυστημάτων ψυχρής έλασης με εργαλεία μεταγωγικού ελέγχου. Λόγω των υψηλών προδιαγραφών που απαιτεί η διεργασία της έλασης όπως για παράδειγμα οι πολλαπλές μη γραμμικότητες, η πολυπλοκότητα του συστήματος καθώς και η ακρίβεια που απαιτείτε για την εφαρμογή είναι αναγκαία η χρήση τεχνικών μεταγωγικού ελέγχου για την βέλτιστη λειτουργία της διεργασίας.

**Λέξεις κλειδιά:** βιομηχανικός έλεγχος, πολυμεταβλητός έλεγχος, μεταγωγικός έλεγχος, θερμή έλαση, ψυχρή έλαση

## **Abstract**

### **Switching Control of cold rolling processes in metal industries**

The control of cold rolling in metal industry, particular in aluminum industry, is one of the most important and interesting topics of industrial research worldwide. Based on the increased international demand for aluminum, the need to improve the production process of aluminum is increasing. The increasing demand for aluminum is due to its easy processing as well as its abundance because it is considered one of the most recyclable metal materials worldwide. The business activity of aluminum is distinguished in various sectors for example, in transportation and automotive systems, financial and construction sectors, power and energy network sectors, industrial application sectors, consumer goods sectors and more. The purpose of this assignment is to delve deeper into the control of cold rolled subassemblies with commutative control tools. Due to the high specifications required by the rolling process such as multiple non-linearities, the complexity of the system as well as the precision required for the application, the use of switching control techniques is necessary for the optimal operation of the process. The present thesis is devoted in the development of switching control tools for the cold rolling mill process.

**Keywords:** industrial control, multivariable control, switching control

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΙΑ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ .....	4
2.1 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΟΙΟΤΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ....	4
2.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΚΑΤΑ VON KARMAN ΚΑΙ BLAND & FORD.....	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΣ ΥΠΟΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ .....	18
3.1 ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a) .....	18
3.2 ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (b).....	22
3.3 ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c) .....	24
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΝΟΜΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΥΠΟΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ .....	31
4.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a) .....	31
4.1.1 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a).....	31
4.1.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a) .....	34
4.1.3 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a) .....	37
4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΛΕΓΚΤΗ ΤΡΙΩΝ ΟΡΩΝ PID ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a) .....	40
4.2.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΕΛΕΓΚΤΗ ΤΡΙΩΝ ΟΡΩΝ PID ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a).....	41

4.2.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΛΕΓΚΤΗ ΤΡΙΩΝ ΟΡΩΝ PID ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a) .....	46
4.2.3 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ΜΕ ΕΛΕΓΚΤΗ ΤΡΙΩΝ ΟΡΩΝ PID ΓΙΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a).....	49
4.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (b).....	52
4.3.1 ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ .....	52
4.3.2 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (b) .....	57
4.3.3 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (B) .....	60
4.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c) .....	66
4.4.1 ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ .....	66
4.4.2 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c).....	75
4.4.3 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c) .....	79
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΩΝ ΝΟΜΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΒΑΣΙΖΟΜΕΝΟΙ ΣΕ ΛΟΓΙΚΗ ΓΙΑ ΤΑ ΥΠΟΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ.....	92
5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΣΦΑΛΟΥΣ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ.....	92
5.2 ΤΕΧΝΙΚΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΣΦΑΛΟΥΣ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΕΛΕΓΚΤΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a) .....	95
5.2.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a).....	95
5.2.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a).....	97

5.3 ΤΕΧΝΙΚΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΣΦΑΛΟΥΣ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΕΛΕΓΚΤΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (b) .....	99
5.3.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (b).....	100
5.3.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (b).....	104
5.4 ΤΕΧΝΙΚΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΣΦΑΛΟΥΣ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΕΛΕΓΚΤΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c) .....	108
5.4.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c).....	108
5.4.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c).....	118
ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	129
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	130



## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1: Βασικές διατάξεις ελάστρων .....	5
Σχήμα 2: Διεργασία κύριας έλασης.....	6
Σχήμα 3: Γεωμετρική απεικόνιση ψυχρής έλασης.....	7
Σχήμα 4: Διάγραμμα δομής 1 αναστρέψιμου ψυχρού ελάστρου.....	19
Σχήμα 5: Διάγραμμα δομής 2 αναστρέψιμου ψυχρού ελάστρου.....	25
Σχήμα 6: Χονδρικό διάγραμμα ελεγκτή ασυμπωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής ....	34
Σχήμα 7: Ταχύτητα κύριου ελασματοουργείου .....	39
Σχήμα 8: Ρεύμα ελασματοουργείου .....	39
Σχήμα 9: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης .....	40
Σχήμα 10: Χονδρικό διάγραμμα PID ελεγκτή .....	41
Σχήμα 11: Διάγραμμα ροής.....	45
Σχήμα 12: Ταχύτητα κύριου ελασματοουργείου .....	50
Σχήμα 13: Ρεύμα ελασματοουργείου .....	50
Σχήμα 14: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης.....	51
Σχήμα 15: Χονδρικό διάγραμμα ελεγκτή ασυμπωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής ..	60
Σχήμα 16: Τάνυση εκτυλικτικού μηχανισμού .....	62
Σχήμα 17: Ταχύτητα εκτυλικτικού μηχανισμού .....	62
Σχήμα 18: Ταχύτητα κύριου ελασματοουργείου .....	63
Σχήμα 19: Τάνυση τυλικτικού μηχανισμού .....	63
Σχήμα 20: Ταχύτητα τυλικτικού μηχανισμού .....	64
Σχήμα 21: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης .....	64
Σχήμα 22: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης .....	65
Σχήμα 23: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης .....	65
Σχήμα 24: Χονδρικό διάγραμμα ελεγκτή ασυμπωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής ..	79
Σχήμα 25: Τάνυση εκτυλικτικού μηχανισμού .....	81
Σχήμα 26: Ταχύτητα εκτυλικτικού μηχανισμού .....	81
Σχήμα 27: Ρεύμα εκτυλικτικού μηχανισμού .....	82
Σχήμα 28: Ταχύτητα κύριου ελασματοουργείου .....	82
Σχήμα 29: Ρεύμα ελασματοουργείου .....	83
Σχήμα 30: Τάνυση τυλικτικού μηχανισμού .....	83
Σχήμα 31: Ταχύτητα τυλικτικού μηχανισμού .....	84
Σχήμα 32: Ρεύμα τυλικτικού μηχανισμού.....	84
Σχήμα 33: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης .....	85
Σχήμα 34: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης .....	85
Σχήμα 35: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης .....	86
Σχήμα 36: Ροπή αδράνειας εκτυλικτικού.....	86
Σχήμα 37: Ακτίνα εκτυλικτικού.....	87
Σχήμα 38: Ροπή αδράνειας τυλικτικού .....	87
Σχήμα 39: Ακτίνα τυλικτικού.....	88
Σχήμα 40: Ταχύτητα κύριου ελασματοουργείου .....	89
Σχήμα 41: Ροπή αδράνειας εκτυλικτικού μηχανισμού .....	89

Σχήμα 42: Ακτίνα εκτυλικτικού μηχανισμού.....	90
Σχήμα 43: Ροπή αδράνειας τυλικτικού μηχανισμού .....	90
Σχήμα 44: Ακτίνα τυλικτικού μηχανισμού .....	91
Σχήμα 45: Χονδρικό διάγραμμα ελεγκτή βηματικής εντολής ασφαλούς μεταγωγής.....	94
Σχήμα 46: Μεταγωγή ταχύτητας κύριου ελασματουργείου .....	98
Σχήμα 47: Μεταγωγή ρεύματος ελασματουργείου.....	99
Σχήμα 48: Μεταγωγή τάνυσης εκτυλικτικού μηχανισμού.....	105
Σχήμα 49: Μεταγωγή ταχύτητας εκτυλικτικού μηχανισμού .....	106
Σχήμα 50: Μεταγωγή ταχύτητας κύριου ελασματουργείου .....	106
Σχήμα 51: Μεταγωγή τάνυσης τυλικτικού μηχανισμού .....	107
Σχήμα 52: Μεταγωγή ταχύτητας τυλικτικού μηχανισμού .....	107
Σχήμα 53: Μεταγωγή τάνυσης εκτυλικτικού μηχανισμού.....	120
Σχήμα 54: Μεταγωγή ταχύτητας εκτυλικτικού μηχανισμού .....	120
Σχήμα 55: Μεταγωγή ρεύματος εκτυλικτικού μηχανισμού.....	121
Σχήμα 56: Μεταγωγή ταχύτητας κύριου ελασματουργείου .....	121
Σχήμα 57: Μεταγωγή ρεύματος κύριου ελασματουργείου.....	122
Σχήμα 58: Μεταγωγή τάνυσης τυλικτικού μηχανισμού .....	122
Σχήμα 59: Μεταγωγή ταχύτητας τυλικτικού μηχανισμού .....	123
Σχήμα 60: Μεταγωγή ρεύματος τυλικτικού μηχανισμού .....	123
Σχήμα 61: Ροπή αδράνειας εκτυλικτικού μηχανισμού .....	124
Σχήμα 62: Ακτίνα εκτυλικτικού μηχανισμού.....	124
Σχήμα 63: Ροπή αδράνειας τυλικτικού μηχανισμού .....	125
Σχήμα 64: Ακτίνα τυλικτικού μηχανισμού .....	125
Σχήμα 65: Ταχύτητα κύριου ελασματουργείου .....	126
Σχήμα 66: Ροπή αδράνειας εκτυλικτικού μηχανισμού .....	127
Σχήμα 67: Ακτίνα εκτυλικτικού μηχανισμού.....	127
Σχήμα 68: Ροπή αδράνειας τυλικτικού μηχανισμού .....	128
Σχήμα 69: Ακτίνα τυλικτικού μηχανισμού .....	128

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έλαση αλουμινίου αναφέρεται στη διαδικασία καμπυλώσεως ή διαμόρφωσης του αλουμινίου με σκοπό τη δημιουργία καμπυλωτών ή σχημάτων. Κατά τη διάρκεια της έλασης, το αλουμίνιο υπόκειται σε μηχανικές δυνάμεις που το παραμορφώνουν και το καμπυλώνουν σε επιθυμητό σχήμα. Αυτή η διαδικασία μπορεί να γίνει με τη χρήση ειδικών μηχανημάτων και εργαλείων, όπως των κυλινδρικών ραούλων, που ασκούν πίεση στο αλουμίνιο για να το διαμορφώσουν στο επιθυμητό σχήμα. Η έλαση αλουμινίου επιτρέπει την προσαρμογή του υλικού στις απαιτήσεις και τις προδιαγραφές του τελικού προϊόντος. Επιπρόσθετα η έλαση είναι μια συνηθισμένη διαδικασία στη μεταλλουργία και χρησιμοποιείται σε πολλούς τομείς, όπως η κατασκευή αυτοκινήτων, η αεροναυπηγική, η κατασκευή μεταλλικών κατασκευών και άλλες βιομηχανίες.

Ο κύκλος ζωής του αλουμινίου στη βιομηχανία είναι ένα σημαντικό θέμα για την αειφορία και την προστασία του περιβάλλοντος. Η ανακύκλωση και η επαναχρησιμοποίηση του αλουμινίου μπορούν να μειώσουν την ανάγκη για εξόρυξη νέων πόρων και να μειώσουν την εκπομπή αερίων του θερμοκηπίου. Επιπλέον, η ανακύκλωση του αλουμινίου μπορεί να εξοικονομήσει ενέργεια, καθώς η διαδικασία ανακύκλωσης απαιτεί λιγότερη ενέργεια από την παραγωγή νέου αλουμινίου από φυσικούς πόρους.

Αρχικά ξεκινώντας αναλυτικά με το πρώτο στάδιο του κύκλου ζωής του αλουμινίου έχουμε την εξόρυξη όπου συλλέγουμε το αλουμίνιο από φυσικούς πόρους, όπως ο βωξίτης η μέσω της ανακύκλωσης. Έπειτα αφού συλλεχθεί η κατάλληλη ποσότητα υποκατάστατων του αλουμινίου (σκραπ) προετοιμάζονται με τον καθαρισμό και την αφαίρεση οποιωνδήποτε ρύπων ή ακαθαρσιών. Στην συνέχεια έχοντας συλλέξει και ξεκαθαρίσει τα σκραπ του αλουμινίου και προσθέτοντας επιπλέον κάποια συστατικά έτσι ώστε να αποκτήσει το μείγμα κάποιες επιθυμητές ιδιότητες που επιζητά ο πελάτης, μπαίνουμε πλέον στην διαδικασία της χύτευσης. Στην διαδικασία της χύτευσης το αλουμίνιο θερμαίνεται σε πολύ υψηλή θερμοκρασία μέχρι να λιώσει και να γίνει υγρό. Έπειτα το λιωμένο αλουμίνιο χύνεται σε μορφή υγρού σε κατάλληλα καλούπια όπου είναι κατασκευασμένα από μέταλλο, όπως χάλυβα ή ατσάλι και παράλληλα παγώνει και σκληραίνει για να πάρει το επιθυμητό σχήμα. Έτσι έχοντας δημιουργήσει τις πλάκες αλουμινίου μπορούμε πλέον να επεξεργαστούμε εύκολα το σχήμα των πλακών έτσι ώστε να τους δώσουμε τις κατάλληλες διαστάσεις για τα επόμενα στάδια κατεργασιών.

Το επόμενο στάδιο είναι το πιο απαιτητικό και ίσως από τις πιο δύσκολες εφαρμογές που υπάρχουν στην βιομηχανία, δεν είναι άλλο από την έλαση. Η έλαση είναι μια διαδικασία που χρησιμοποιείται στην μεταλλουργία για να διαμορφώσει το μέταλλο σε επίπεδες πλάκες ή ταινίες. Η έλαση του αλουμινίου μπορεί να γίνει με θερμή και ψυχρή μέθοδο, ανάλογα με τις απαιτήσεις τις κάθε εφαρμογής. Η θερμή έλαση πραγματοποιείται σε υψηλές θερμοκρασίες, υψηλότερη από αυτής της ανακρυστάλλωσης. Αυτό έχει δυο βασικά πλεονεκτήματα. Πρώτα, σε υψηλή θερμοκρασία οι μηχανικές ιδιότητες του υλικού μειώνονται σημαντικά. Έτσι, γίνεται κατανοητό ότι η συνολική δύναμη που απαιτείται για την παραμόρφωση υλικών εν θερμό είναι σημαντικά χαμηλότερη από ό,τι εν ψυχρώ με αποτέλεσμα να μπορεί να πραγματοποιηθεί από μηχανολογικό εξοπλισμό με χαμηλότερες δυνατότητες (μικρότερη απαιτούμενη κάθετη δύναμη, μικρότερη ανάγκη λίπανσης). Το δεύτερο πλεονέκτημα είναι ότι ένα υλικό που βρίσκεται σε θερμοκρασία υψηλότερη της θερμοκρασίας ανακρυστάλλωσης μπορεί να δεχθεί μεγάλες παραμορφώσεις χωρίς να εργοσκληρυνθεί. Από την άλλη πλευρά, η ψυχρή έλαση πραγματοποιείται σε θερμοκρασίες κοντά στην θερμοκρασία περιβάλλοντος ή ελαφρώς χαμηλότερη. Αυτή η διαδικασία είναι κατάλληλη για περιπτώσεις όπου απαιτείται μεγάλη ακρίβεια στις διαστάσεις του τελικού προϊόντος. Η ψυχρή έλαση επίσης βελτιώνει την αντοχή και τη σκληρότητα του μετάλλου, καθώς και την επιφανειακή του ποιότητα. Και οι δύο μέθοδοι έλασης έχουν την ικανότητα να διαμορφώσουν το μέταλλο σε επιθυμητά σχήματα και διαστάσεις. Η επιλογή ανάμεσα στη ψυχρή και τη θερμή έλαση εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως το είδος του μετάλλου, οι απαιτήσεις του τελικού προϊόντος και οι διαδικασίες που θα ακολουθήσουν μετά την έλαση.

Όσον αφορά το τελικό στάδιο, αφού έχουν ξεχωρίσει τα ρολά αλουμινίου που είναι έτοιμα να παραδοθούν στον πελάτη, η φύρα που έχει απομείνει από τα ρολά του αλουμινίου ή από τις τελικές μηχανές, όπου τελικές μηχανές θεωρούνται οι μηχανές οι οποίες επιτρέπουν την μετατροπή του υλικού σε τελικά προϊόντα με τις επιθυμητές προδιαγραφές και διαστάσεις, συλλέγονται και μεταφέρονται στο πρώτο στάδιο όπου είναι η διαδικασία της χύτευσης.

Ειδικότερα στο Κεφάλαιο 2 θα αναφερθούν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά καθώς και οι διαδικασίες της διεργασίας ψυχρής έλασης. Επίσης θα γίνει αναφορά στην επίλυση του πρόβλημα της διεργασίας ψυχρής έλασης κατά Von Karman καθώς και κατά Bland & Ford.

Στο Κεφάλαιο 3 θα περιγράψουμε τα ψυχρά έλαστρα και ειδικότερα τα ποιοτικά χαρακτηριστικά και θα παρουσιαστούν τα μαθηματικά μοντέλα των επιμέρους υποσυστημάτων των ενεργοποιητών, των αισθητήρων, και των κινητήρων, είδη υποσυστημάτων της ElvalHalcor S.A. μία από τις μεγαλύτερες εταιρείες έλασης αλουμινίου και χαλκού παγκοσμίως, καθώς και μοναδικός παραγωγός έλασης αλουμινίου στην Ελλάδα.

Στο Κεφάλαιο 4 θα ασχοληθούμε με την γραμμικοποίηση των μη γραμμικών μονομεταβλητών και πολυμεταβλητών μοντέλων υποσυστημάτων ψυχρής έλασης καθώς και τον σχεδιασμό δυναμικών μονομεταβλητών και πολυμεταβλητών ελεγκτών ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής καθώς και PID ελεγκτή. Επίσης θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των αποκρίσεων των καταστάσεων καθώς και τα σφάλματα παρακολούθησης στην μόνιμη κατάσταση.

Στο 5ο και τελευταίο κεφάλαιο θα εφαρμοστεί η τεχνική ελέγχου ασφαλούς μεταγωγής με απώτερο σκοπό την ομαλή λειτουργία και την ακρίβεια των σημάτων αναφοράς και των καταστάσεων κοντά στα σημεία λειτουργίας των διεργασιών ψυχρής έλασης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΙΑ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ

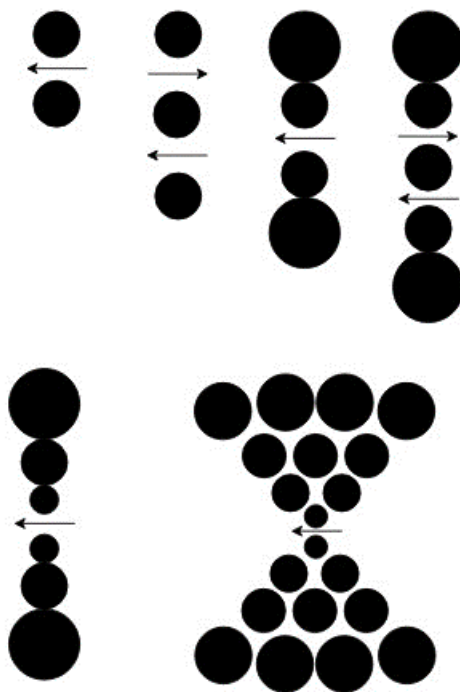
Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει η περιγραφή των ποιοτικών χαρακτηριστικών ψυχρής έλασης, πιο συγκεκριμένα θα αναφερθούν βασικές διατάξεις ελάστρων με παράλληλα ράουλα καθώς και βασικά εξαρτήματα, μηχανισμούς και συστήματα που αποτελούν τον κορμό των κατεργασιών της ψυχρής έλασης γενικότερα ( βλ. για παράδειγμα [5]). Επίσης θα γίνει αναφορά στην επίλυση του πρόβλημα της διεργασίας ψυχρής έλασης κατά Von Karman καθώς και κατά Bland & Ford όπου πιο συγκεκριμένα αναλύεται η γεωμετρική και η δυναμική απεικόνιση λωρίδας και ράουλων εργασίας ως ένα ενιαίο σύστημα ( βλ. για παράδειγμα [6]).

### 2.1 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΟΙΟΤΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ

Το αντικείμενο κάθε διαδικασίας επεξεργασίας μετάλλων είναι η παραμόρφωση του μετάλλου έτσι ώστε το τελικό προϊόν να έχει τις απαιτούμενες διαστάσεις και μεταλλουργικές ιδιότητες. Μια τέτοια διαδικασία είναι η ψυχρή έλαση, όπου το κρύο μέταλλο παραμορφώνεται από τις διαδοχικές εργασίες κύλισης για την παραγωγή επιπέδων φύλλων ή λωρίδων. Κάθε βασικό ψυχρό έλαστρο αποτελείται από μία ενιαία βάση μύλου όπου συνήθως υπάρχουν αρκετές διαδοχικές παραμόρφωσης (η περάσματα) όπου απαιτείται για την παραγωγή του επιθυμητού τελικού προϊόντος. Το ελασματοουργείο όπου πραγματοποιείται η έλαση είναι ένα υδραυλικό σύστημα ελέγχου πάχους, όπου αναγράφεται ως ένα σύστημα HAGC (Hydraulic Automatic Gauge Control) και αποτελείται από τα ράουλα εργασίας και αντιστήριξης όπου η πίεση του μετάλλου γίνεται μέσω ηλεκτροϋδραυλικών σέρβο-βαλβίδων. Οι τρόποι με τους οποίους τοποθετούνται τα ράουλα έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί η έλαση είναι η εξής :

- i. Παράλληλα ράουλα.
- ii. Κάθετα ράουλα.
- iii. Παράλληλα και κάθετα ράουλα.
- iv. Κεκλιμένα ράουλα.
- v. Άλλους τρόπους ράουλων.

Για καλύτερη κατανόηση παρουσιάζονται οι διάφοροι τρόποι τοποθετήσεων ράουλων στο παρακάτω σχήμα :

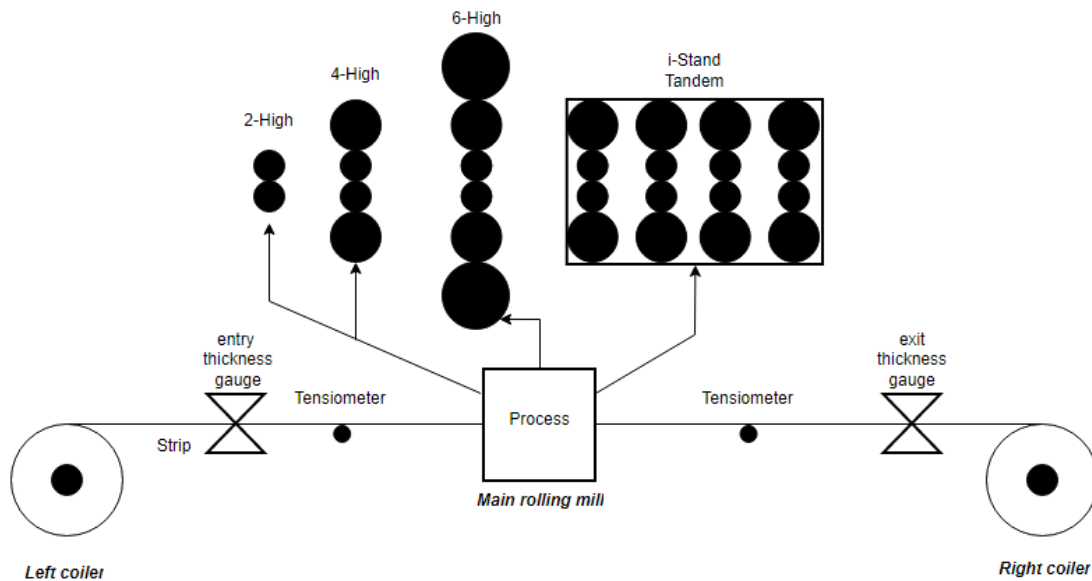


Σχήμα 1: Βασικές διατάξεις ελάστρων

Στο Σχήμα 1 φαίνονται οι βασικές διατάξεις ράουλων για έλαστρα με παράλληλα ράουλα. Τα ράουλα που έρχονται σε άμεση επαφή με την λωρίδα της διεργασίας ονομάζονται ράουλα εργασίας. Στις περιπτώσεις που έχουμε περισσότερα από τρία ράουλα, τότε τα ράουλα όπου δεν έχουν επαφή με την λωρίδα της διεργασίας ονομάζονται ράουλα αντιστήριξης. Είναι προφανές ότι τα ράουλα αντιστήριξης είναι απαραίτητα όταν υπάρχουν ράουλα εργασίας μικρότερης διατομής και αν η εφαρμογή της κατεργασίας απαιτεί μεγαλύτερη μείωση πάχους της λωρίδας, τότε χωρίς την συμβολή των ράουλων αντιστήριξης τα ράουλα εργασίας δεν μπορούν να κρατήσουν το κάθετο φορτίο στα επιθυμητά πλαίσια, έτσι έχουμε ως αποτέλεσμα τα ράουλα εργασίας να κάμπτονται και να ταλαντεύονται. Με την ταλάντωση των ράουλων εργασίας αυξάνεται δραματικά το εύρος πάχους της λωρίδας, έχοντας ως αποτέλεσμα την αστοχία του υλικού.

Για τις διεργασίες ψυχρής έλασης υπάρχει επίσης ένα διαφορετικό σύστημα όπου αποτελείται από διαδοχικούς μύλους και ονομάζεται Tandem Cold Mill (TCM) όπου χρησιμοποιείται κυρίως για την επίτευξη μεγάλου όγκου παραγωγής ( βλ. για παράδειγμα [4]). Σε ένα TCM υπάρχουν πολλές διαδοχικές βάσεις (ελασματουργεία) οι οποίες είναι παρόμοιες στην κατασκευή και χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα σε σειρά κατά μήκος της λωρίδας έτσι ώστε να μπορεί να επιτευχθεί μόνο με ένα πέρασμα (πάσο)

η απαιτούμενη παραμόρφωση του μετάλλου αντί για διαδοχικές διελεύσεις από μία ενιαία βάση όπου κάθε υποσύστημα μύλων μπορεί να είναι 2,4,6 – High αντίστοιχα.



Σχήμα 2: Διεργασία κύριας έλασης

Η κατεργασία της έλασης και πιο συγκεκριμένα, αυτή της ψυχρής έλασης είναι μία από τις πιο περίπλοκες εφαρμογές της βιομηχανίας και αποτελείται από διάφορα εξαρτήματα, μηχανισμούς και υποσυστήματα. Κάποια υποσυστήματα παρουσιάζονται αριθμητικά ως εξής :

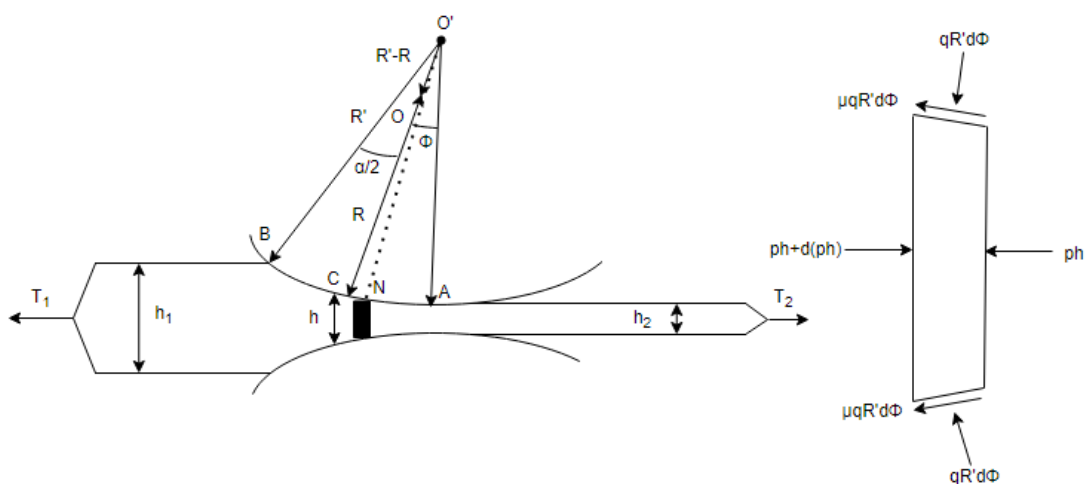
- i. Τα ράουλα εργασίας, όπου είναι τα ράουλα που έχουν άμεση επαφή με την λωρίδα και μεταξύ των οποίων πραγματοποιείται η έλαση.
- ii. Τα ράουλα αντιστήριξης, όπου είναι υπεύθυνα για την στιβαρότητα της έλασης καθώς και για τον έλεγχο του βέλους κάμψης των ράουλων εργασίας.
- iii. Τα έδρανα κύλισης των ράουλων.
- iv. Τους μηχανισμούς ελέγχου δέσης των ράουλων. Ο μηχανισμός στο επάνω μέρος του ελάστρου (στα σύγχρονα ελάστρα είναι δύο μεγάλοι κοχλίες, ένας και κάθε μεριά εδράνων) καθορίζει το διάκενο μεταξύ των ράουλων εργασίας. Ο μηχανισμός στο κάτω μέρος αποτελείται από δύο μεγάλα υδραυλικά έμβολα για μικρές διακυμάνσεις της παραλληλίας και του ορισμού του άξονα συμμετρίας του ελάστρου, που χρησιμεύουν στον έλεγχο της κατεργασίας της έλασης.
- v. Το πλαίσιο του ελάστρου, στο οποίο ολισθαίνουν τα έδρανα στον κατακόρυφο άξονα και στο οποίο μεταδίδεται η δύναμη έλασης μέσω του μηχανισμού ελέγχου δέσης.
- vi. Τον μηχανισμό αντικατάστασης των ράουλων όταν αυτά φθαρούν.



- vii. Τις μηχανές εκτυλικτικού και τυλικτικού μηχανισμού εκατέρωθεν του ελάστρου.
- viii. Τους κινητήρες, που μεταδίδουν την κίνηση μέσω του μειωτήρα στροφών και αξόνων στα ράουλα εργασίας.
- ix. Τις ψυκτικές μονάδες, τόσο για την ψύξη των ραούλων όσο και για την ψύξη της πλάκας.
- x. Τα συστήματα λίπανσης.
- xi. Τα υδραυλικά συστήματα κάμψης των ραούλων, που ασκούν κατακόρυφη δύναμη στα έδρανα των ραούλων για τον έλεγχο της επιπεδότητας.
- xii. Τα όργανα μέτρησης της θερμοκρασίας, καθώς και του πάχους της πλάκας.
- xiii. Τις περιστρεφόμενες βούρτσες για τον συνεχή καθαρισμό της επιφάνειας του ραούλου εργασίας κατά την διάρκεια της κατεργασίας.
- xiv. Τους διάφορους σχιστικούς μηχανισμούς και τα ψαλίδια για την αφαίρεση περίσσειας υλικού για την ακριβή διαστασιολόγηση του υλικού.

## 2.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΚΑΤΑ VON KARMAN ΚΑΙ BLAND & FORD

Γενικά στην ψυχρή έλαση θα διερευνήσουμε τη διαδικασία στην οποία ένα μεταλλικό φύλλο ή λωρίδα, μειώνεται σε πάχος περνώντας την ανάμεσα σε ένα ζεύγος κυλινδρικών ραούλων όπου οι άξονες τους είναι παράλληλα μεταξύ τους. Η γεωμετρική απεικόνιση ψυχρής έλασης δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3: Γεωμετρική απεικόνιση ψυχρής έλασης

Στην έλαση το πλάτος της λωρίδας είναι πολύ μεγαλύτερο από το πάχος του, έτσι θεωρούμε ότι η μεταβολή του πλάτους είναι αμελητέα και επειδή παραμένει σταθερός κατά την έλαση ισχύει η συνθήκη του ασυμπίεστου όπου έχουμε την σχέση :

$$h_1 V_1 = h_2 V_2, h_1 > h_2 \quad (2.1)$$

όπου  $V_1$  και  $V_2$  είναι η ταχύτητες του ελάσματος που αντιστοιχούν στα πάχη  $h_1$  και  $h_2$  της εισόδου και της εξόδου του μύλου αντίστοιχα. Από την σχέση (2.1) είναι φανερό ότι η ταχύτητα του ελάσματος αυξάνεται από την είσοδο προς την έξοδο. Επίσης στην πλευρά εισόδου η περιφερειακή ταχύτητα των κυλινδρικών ράουλων είναι υψηλότερη από αυτή της λωρίδας και κατά συνέπεια οι δυνάμεις τριβής ωθούν την λωρίδα στο διάκενο ανάμεσα στα παράλληλα ράουλα. Στην πλευρά της εξόδου, η λωρίδα κινείται πιο γρήγορα από τα ράουλα και οι δυνάμεις τριβής αντιτίθεται στην κατεύθυνση της λωρίδας. Από αυτό προκύπτει ότι υπάρχει ένα ουδέτερο σημείο  $N$  κάπου στο τόξο επαφής όπου κινείται η λωρίδα με ταχύτητα ίδια με αυτή των κυλινδρικών ράουλων . Έστω  $O$  το κέντρο του επάνω ράουλου και  $O'$  το κέντρο καμπυλότητας του τόξου επαφής  $AB$  (βλ. Σχήμα 3). Η παραμόρφωση του κυλίνδρου θεωρείται τέτοια ώστε το  $O'$  βρίσκεται στην ευθεία γραμμή που ενώνει το  $O$  και το μέσο  $C$  του τόξου επαφής. Αν εμείς αγνοήσουμε το μικρό τμήμα του τόξου επαφής που προκύπτει από την ελαστική ανάκτηση της λωρίδας έλασης, το σημείο  $O'$  θα πρέπει να είναι κατακόρυφα πάνω από το σημείο εξόδου  $A$ . Η γωνία επαφής  $AO'B$  συμβολίζεται με  $\alpha$  και ορίζεται από την ακτίνα  $R'$  του τόξου επαφής και την διαφορά  $h_1 - h_2$  μεταξύ του αρχικού και τελικού πάχους λωρίδας. Έστω  $\varphi$  η γωνιακή απόσταση ενός γενικού σημείου στο τόξο επαφής που μετράτε από το επίπεδο εξόδου. Αν η πίεση σε αυτό το σημείο συμβολίζεται με  $q$ , η τάση τριβής στο σημείο είναι ίση με  $\mu q$  όπου  $\mu$  είναι ένας σταθερός συντελεστής τριβής. Λαμβάνοντας υπόψη την κατεύθυνση των δυνάμεων τριβής στις δύο πλευρές του ουδέτερου σημείου και ολοκληρώνοντας κατά μήκος του τόξου επαφής, από την πλευρά της εξόδου προς την είσοδο προκύπτει η κατακόρυφη δύναμη του ελάστρου ανά μονάδα πλάτους του ελάσματος ως :

$$P = R' \int_0^{\alpha} q \cos \varphi d\varphi + \mu R' \left( \int_{\varphi_n}^{\alpha} q \sin \varphi d\varphi - \int_0^{\varphi_n} q \sin \varphi d\varphi \right) \quad (2.2)$$

όπου  $\varphi_n$  η γωνιακή δέση του ουδέτερου σημείου  $N$ . Στην ψυχρή έλαση η γωνία επαφής του ελάσματος με το ράουλο είναι αρκετά μικρή έστω  $\varphi_0$  τότε θα θεωρήσουμε ότι  $\sin \varphi_0 \approx 0$ ,  $\cos \varphi_0 \approx 1$  Έτσι η σχέση (2.2) περιγράφεται ως εξής :

$$P = R' \int_0^{\alpha} q \cos \varphi d\varphi \approx R' \int_0^{\alpha} q d\varphi \quad (2.3)$$

Έστω  $T_2$  και  $T_1$  οι μπροστινές και οι πίσω τανύσεις που εφαρμόζονται αντίστοιχα ανά μονάδα πλάτους στην λωρίδα . Δηλώνοντας  $T_2 - T_1$  ότι ισούται με  $T$  η συνθήκη ισορροπίας των οριζόντιων δυνάμεων που δρουν στην λωρίδα μπορούν να γραφτούν ως :

$$T = 2R' \int_0^{\alpha} q \sin \varphi d\varphi + 2\mu R' \left( \int_0^{\varphi_n} q \cos \varphi d\varphi - \int_{\varphi_n}^{\alpha} q \cos \varphi d\varphi \right) \quad (2.4)$$

όπου λόγω της μικρής μεταβολής της γωνίας  $\varphi$  θεωρούμε ότι  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$  άρα η σχέση (2.4) περιγράφεται ως εξής :

$$T = 2R' \int_0^{\alpha} q \varphi d\varphi + 2\mu R' \left( \int_0^{\varphi_n} q d\varphi - \int_{\varphi_n}^{\alpha} q d\varphi \right) \quad (2.5)$$

Η ροπή  $G$  ανά μονάδα πλάτους που ενεργεί σε κάθε ράουλο είναι αποτέλεσμα των ροπών των οριζόντιων συνιστωσών των δυνάμεων που δρουν κατά μήκος του τόξου επαφής και δίνεται από την σχέση :

$$G = \mu R R' \left( \int_{\varphi_n}^{\alpha} q d\varphi - \int_0^{\varphi_n} q d\varphi \right) \quad (2.6)$$

Οι δυνάμεις τριβής στο τόξο επαφής παράγουν μια θετική ροπή κατά την είσοδο του ελάσματος ανάμεσα στα ράουλα και μια αρνητική στην έξοδο του ελάσματος . Ως θετική

ορίζεται η ροπή που συνεισφέρει στην κίνηση των ράουλων. Εάν ληφθεί υπόψη η ροπή της πίεσης, η παραπάνω σχέση τροποποιείται και προστίθεται ο όρος :

$$-R'(R' - R) \int_0^{\alpha} q(\alpha/2 - \varphi) d\varphi$$

στην δεξιά πλευρά της σχέσης (2.6). Αυτός ο πρόσθετος όρος είναι συνήθως αρνητικός και το μέγεθος του είναι γενικά αμελητέο. Αν συμπεριλάβουμε τα παραπάνω τελικά η σχέση που περιγράφει την ροπή  $G$  διατυπώνεται ως :

$$G = RR' \int_0^{\alpha} q\varphi d\varphi - \frac{1}{2}RT \quad (2.7)$$

Η πρώτη αναλυτική μέθοδος για την περιγραφή της ψυχρής έλασης χρησιμοποιήθηκε από τον Von Karman όπου υπέθεσε εξαρχής ότι κάθε στοιχείο της λωρίδας συμπίεζεται ομοιόμορφα μεταξύ των κυλινδρικών ράουλων ενώ περνά μέσα από το διάκενο. Η κατακόρυφη συμπίεση της λωρίδας συνοδεύεται από μια οριζόντια δύναμη (οριζόντια ορθή τάση) η οποία γίνεται έντονα θλιπτική όσο πλησιάζουμε το ουδέτερο σημείο και από τις δύο πλευρές. Έστω  $p$  υποδηλώνει την μέση οριζόντια πίεση σε ένα κατακόρυφο τμήμα που καθορίζεται από την γωνιακή συντεταγμένη  $\varphi$  (βλ. σχήμα 3). Η προκύπτουσα θλιπτική δύναμη που ασκείται σε αυτό το τμήμα ανά μονάδα πλάτους είναι  $hp$  όπου το  $h$  δηλώνει το τοπικό πάχος της λωρίδας ανάλογα σε πιο σημείο μεταξύ εισόδου και εξόδου της έλασης βρίσκεται το αποκομμένο τμήμα. Αν σκεφτούμε ότι υπάρχει μια λεπτή φέτα της λωρίδας μεταξύ δύο κατακόρυφων τμημάτων που αντιστοιχούν στις γωνίες  $\varphi$  και  $\varphi + d\varphi$  και δεδομένου ότι οι οριζόντιες συνιστώσες των κανονικών και εφαπτομενικών δυνάμεων που δρουν στα άκρα της φέτας είναι  $qR' \sin \varphi d\varphi$  και  $\mu qR' \cos \varphi d\varphi$  η εξίσωση ισορροπίας ψυχρής έλασης για τον οριζόντιο άξονα περιγράφεται από την σχέση :

$$\frac{d}{d\varphi}(hp) = 2qR'(\sin \varphi \pm \mu \cos \varphi) \quad (2.8)$$

όπου το σύμβολο της πρόσδεσης σε σημεία στην περιοχή μεταξύ του ουδέτερου επιπέδου και του επιπέδου εξόδου και της αφαίρεσης στην περιοχή μεταξύ του ουδέτερου επιπέδου και του επιπέδου εισόδου. Υποθέτοντας ότι το υλικό είναι πάντα

πλαστικό ανάμεσα στα σημεία εισόδου και εξόδου όπου πραγματοποιείται η έλαση δηλαδή στο σημεία  $AB$  του τόξου επαφής και οι κύριες θλιπτικές τάσεις σε κάθε σημείο της διατομής είναι σχεδόν ίσες με  $p$  και  $q$ , σύμφωνα με τα παραπάνω το κριτήριο διαρροής μπορεί να γραφτεί ως :

$$q - p = 2k \quad (2.9)$$

όπου  $k$  είναι η τάση διατμητικής διαρροής η οποία μπορεί να ποικίλει κατά μήκος του τόξου επαφής και ισούται με  $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$  για το κριτήριο Von Mises και  $k = \sigma_0 / 2$  για το κριτήριο Tresca. Η διαφορική εξίσωση (2.8) και το κριτήριο διαρροής (2.9) αποτελούν την διατύπωση της θεωρίας έλασης από τον Von Karman. Η εξίσωση ισορροπίας μπορεί να απλοποιηθεί περεταίρω εξαλείφοντας το  $p$  και χρησιμοποιώντας την σχέση  $\frac{dh}{d\varphi} = 2R' \sin \varphi$  και λόγω της μικρής μεταβολής της γωνίας  $\varphi$  θεωρούμε ότι  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$  άρα η διαφορική εξίσωση παίρνει την μορφή :

$$h \frac{d}{d\varphi} (q - 2k) \mp 2\mu R' q = 4kR' \varphi \quad (2.10)$$

όπου :

$$h = h_2 + 2R'(1 - \cos \varphi) \approx h_2 + R'\varphi^2 \quad (2.11)$$

με τις συνοριακές συνθήκες να είναι  $p = -t_2, q = 2k_2 - t_2$  για  $\varphi = 0$  και  $p = -t_1, q = 2k_1 - t_1$  για  $\varphi = \alpha$  όπου τα  $k_1, k_2$  είναι οι τιμές του  $k$  για την είσοδο και για την έξοδο της λωρίδας κατά την έλαση και τα  $t_1, t_2$  είναι οι τανύσεις εισόδου και εξόδου στην λωρίδα. Η γωνία του τόξου επαφής δίνεται από την γεωμετρία ως εξής :

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{h_1 - h_2}{R'}} = \sqrt{\frac{rh_1}{R'}}$$

όπου  $r = \frac{h_1 - h_2}{h_1}$  είναι η ποσοστιαία μείωση πάχους του ελάσματος. Επίσης η πειραματική σχέση της τάσης διαρροής  $2k$  σε σχέση με την αναλογία πάχους  $\frac{h}{h_1}$  μπορούν να εκφραστούν από την σχέση :

$$2k = 2k_0 \left\{ 1 - m \left( \frac{h}{h_1} \right)^n \right\} \quad (2.12)$$

όπου τα  $k_0, m, n$  είναι εμπειρικές σταθερές.

Είναι βολικό σε αυτό το σημείο να αλλάξουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή  $\varphi$  σε  $\psi$  άρα έχουμε :

$$\psi = \tan^{-1} \sqrt{\frac{R'}{h_2}} \varphi = \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{r}{1-r}} \frac{\varphi}{\alpha} \right\} \quad (2.13)$$

Έτσι εισάγοντας από την (2.10) στην (2.12) αποδεικνύεται εύκολα η σχέση  $h = h_2 \sec^2 \psi$  και  $\sqrt{R'/h_2} d\varphi = \sec^2 \psi d\psi$  από την σχέση (2.13) η διαφορική εξίσωση μεταβάλλεται ως εξής :

$$\frac{dq}{d\psi} \mp 2\alpha q = 4k_0 \left[ 1 - m(1+n)(1-r)^n \sec^{2n} \psi \right] \tan \psi \quad (2.14)$$

όπου :

$$\alpha = \mu \sqrt{\frac{R'}{h_2}} = \frac{\mu}{\alpha} \sqrt{\frac{r}{1-r}}$$

Η λύση της γραμμικής εξίσωσης πρώτης τάξης (2.14) ορίζεται μοναδικά από τις συνοριακές συνθήκες  $q = 2k_2 - t_2$  για  $\psi = 0$  και  $q = 2k_1 - t_1$  για  $\psi = \psi_0$  όπου :

$$\psi_0 = \tan^{-1} \sqrt{\frac{r}{1-r}} = \sin^{-1} \sqrt{r} \quad (2.15)$$

Χρησιμοποιώντας την τυπική μέθοδο επίλυσης γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξης, η κατανομή της πίεση του κυλίνδρου κατά μήκος του τόξου επαφής μπορεί να εκφραστεί σε αδιάστατη μορφή ως :

$$\frac{q}{2k_0} = \left[ 1 - \frac{t_2}{2k_0} - m(1-r)^n + f(\psi) \right] e^{2\alpha\psi} \quad (2.16)$$

$$\frac{q}{2k_0} = \left[ \left( 1 - \frac{t_1}{2k_0} - m \right) e^{2\alpha\psi} + g(\psi) - g(\psi_0) \right] e^{-2\alpha\psi}$$

κατά την εισαγωγή των  $k_1, k_2$  από την σχέση (2.12) όπου η πρώτη εξίσωση αναφέρεται στην έξοδο που αντιστοιχεί στην περιοχή  $0 \leq \psi \leq \psi_n$  και η δεύτερη εξίσωση στην είσοδο που αντιστοιχεί στην περιοχή  $\psi_n \leq \psi \leq \psi_0$  της λωρίδας ανάμεσα από τα δύο παράλληλα ράουλα αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις  $f(\psi), g(\psi)$  σύμφωνα με τα παραπάνω διατυπώνονται ως εξής :

$$f(\psi) = 2 \int_0^\psi \left[ 1 - m(1+n)(1-r)^n \sec^{2n} \psi \right] e^{-2\alpha\psi} \tan \psi d\psi \quad (2.17)$$

$$g(\psi) = 2 \int_0^\psi \left[ 1 - m(1+n)(1-r)^n \sec^{2n} \psi \right] e^{-2\alpha\psi} \tan \psi d\psi$$

Η πίεση των κυλινδρικών ράουλων αυξάνεται σταθερά καθώς προσεγγίζεται το ουδέτερο σημείο  $\psi = \psi_n$  από τα σημεία εισόδου και εξόδου του τόξου επαφής. Το ουδέτερο σημείο προσδιορίζεται από το γεγονός ότι οι δύο τιμές του  $q$  που δίνονται από την σχέση (2.16)

είναι ίδιες στο  $\psi = \psi_n$ . Έτσι από την εξίσωση των σχέσεων και από το γεγονός ότι έλαση είναι δυνατή μόνο αν ισχύει  $\psi_n > 0$ , η ανισότητα :

$$\left(1 - \frac{t_1}{2k_0} - m\right) e^{2\alpha\psi_0} - \left(1 - \frac{t_2}{2k_0}\right) + m(1-r)^n > g(\psi_0)$$

πρέπει να ικανοποιείται πάντα.

Όταν το  $m = 0$  τα ολοκληρώματα της σχέσης (2.17) μπορούν να αντικατασταθούν με την σχέση  $\tan\psi \approx \psi(1 + \psi^2/3)$  με επαρκή ακρίβεια στο σχετικό εύρος  $(0, \psi)$ , έχοντας ως αποτέλεσμα :

$$f(\psi) \approx \frac{1}{2a^2} \left(1 + \frac{1}{2a^2}\right) (1 - e^{-2\alpha\psi}) - \frac{\psi}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2a^2} + \frac{\psi}{2\alpha} + \frac{\psi^2}{3}\right) e^{-2\alpha\psi}$$

$$g(\psi) \approx \frac{1}{2a^2} \left(1 + \frac{1}{2a^2}\right) (e^{2\alpha\psi} - 1) + \frac{\psi}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2a^2} - \frac{\psi}{2\alpha} + \frac{\psi^2}{3}\right) e^{2\alpha\psi}$$
(2.18)

όπου το σφάλμα στην πραγματική πίεση κύλισης σε οποιοδήποτε σημείο λόγω αυτής της προσέγγισης θα να είναι μικρότερη από 5%. Όταν έχει βρεθεί η κατανομή της πίεσης του κυλίνδρου, η δύναμη και η ροπή του κυλίνδρου μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με τις σχέσεις (2.3) και (2.6) οι οποίες γίνονται :

$$\frac{P}{2k_0 h_2} = \frac{R'}{h_2} \int_0^\alpha \left(\frac{q}{2k_0}\right) d\varphi = \sqrt{\frac{R'}{h_2}} \int_0^{\tan\psi_0} \left(\frac{q}{2k_0}\right) d\xi$$

$$\frac{G}{2k_0 R h_2} = \frac{R'}{h_2} \int_0^\alpha \left(\frac{q}{2k_0}\right) \varphi d\varphi - \frac{T}{4k_0 h_2} = \int_0^{\tan\psi_0} \left(\frac{q}{2k_0}\right) \xi d\xi - \frac{T}{4k_0 h_2}$$
(2.19)

όπου  $\xi = \sqrt{R'/h_2} \varphi = \tan\psi$  και είναι μια νέα μεταβλητή. Για δεδομένες τις τιμές  $\alpha, r, m, n, t_1/2k_0, t_2/2k_0$  τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην σχέση (2.19) μπορούν να επιλυθούν με αριθμητικές προσεγγίσεις και χρησιμοποιώντας την σχέση (2.16) για



τον υπολογισμό του  $\psi_n$  που ορίζει την θέση του ουδέτερου σημείου. Η σύγκριση της θεωρητικής κατανομής της πίεσης με κάποια πειραματικά αποτελέσματα έγινε κατά Siebel και Lueg με τη χρήση της πιεζοηλεκτρικής μεθόδου και έδειξε πολύ καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Η ακριβής λύση της εξίσωσης κατά Von Karman απαιτεί αριθμητική ολοκλήρωση ακόμη και με την χρήση κάποιων προσεγγίσεων που αποσκοπούν στην απλούστευση κάποιων παραμέτρων, έτσι για πιο πρακτικούς σκοπούς μια προσέγγιση η οποία έχει αποδειχθεί ότι είναι επαρκής έχει δοθεί κατά Bland και Ford. Η προσέγγιση επιτυγχάνεται ξεκινώντας με την εξίσωση (2.8) όπου το  $p$  υποδηλώνει την μέση οριζόντια πίεση σε ένα κατακόρυφο τμήμα. Έτσι εξαλείφοντας το με την χρήση του κριτήριο διαρροής όπως και κατά Von Karman και λόγω της μικρής μεταβολής της γωνίας  $\varphi$  ισχύει ότι  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$  άρα η διαφορική εξίσωση κατά Bland & Ford παίρνει την μορφή :

$$\frac{d}{d\varphi} \left\{ 2kh \left( \frac{q}{2k} - 1 \right) \right\} = R'q(\varphi \pm \mu) \quad (2.20)$$

όπου αναλύοντας την σχέση (2.20) έχουμε :

$$kh \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{q}{2k} \right) + \left( \frac{q}{2k} - 1 \right) \frac{d}{d\varphi} (kh) = R'q(\varphi \pm \mu) \quad (2.21)$$

Εάν ο ρυθμός εργοσκλήρυνσης ο οποίος αντιτίθεται στην πλαστική παραμόρφωση είναι αρκετά μικρός το  $d(kh)$  θα ήταν αρκετά μικρό σε σχέση με το  $kh$  αφού το  $k$  αυξάνεται προς την κατεύθυνση μείωσης του πάχους. Επίσης αν οι τανύσεις στην λωρίδα ήταν μικρές ή σε λογικές τιμές το  $(q/2k - 1)$  θα ήταν μικρό σε σχέση με το  $d(q/2k)$ , τότε ο δεύτερος όρος στην αριστερή πλευρά της παραπάνω εξίσωσης (2.21) μπορεί να αφαιρεθεί, με αποτέλεσμα μετά την απλοποίηση να έχουμε :

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{q}{2k} \right) = \frac{2R'}{h} (\varphi \pm \mu) \frac{q}{2k} \quad (2.22)$$

όπου  $h = h_2 + R'\varphi^2$ . Η λύση της διαφορικής εξίσωσης με συνοριακές συνθήκες τις  $q/2k = 1 - t_2/2k_2$  για  $\varphi = 0$  και  $q/2k = 1 - t_1/2k_1$  για  $\varphi = \alpha$  μας δίνει την κατανομή της πίεσης κατά μήκος του τόξου επαφής ως :

$$\frac{q}{2k} = \frac{h}{h_2} \left( 1 - \frac{t_2}{2k_2} \right) e^{2\alpha\psi} \quad (2.23)$$

$$\frac{q}{2k} = \frac{h}{h_1} \left( 1 - \frac{t_1}{2k_1} \right) e^{2\alpha(\psi_0 - \psi)}$$

όπου τα  $\alpha, \psi, \psi_0$  είναι ίδια με πριν και η πρώτη σχέση αναφέρεται στην έξοδο και η δεύτερη σχέση στην είσοδο της λωρίδας κατά την έλαση αντίστοιχα. Η συνθήκη συνέχειας  $q/2k$  στο ουδέτερο σημείο  $\varphi = \varphi_n$  δίνεται από την σχέση :

$$\tan^{-1} \sqrt{\frac{R'}{h_2}} \varphi_n = \frac{1}{2} \sin^{-1} \sqrt{r} - \frac{1}{4\alpha} \ln \left\{ \frac{h_1(1 - t_2/2k_2)}{h_2(1 - t_1/2k_1)} \right\} \quad (2.24)$$

όπου υπολογίζεται κατευθείαν η γωνία του ουδέτερου σημείου. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι το ουδέτερο σημείο είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο με τον οποίο η τάση διαρροής ποικίλλει κατά μήκος του τόξου επαφής. Ο ελάχιστος συντελεστής τριβής για τα οποία είναι δυνατή η κύλιση υπό δεδομένες τάσεις είναι :

$$\mu^* = \sqrt{\frac{h_2}{R'}} \ln \left\{ \frac{1}{1-r} \left( \frac{1 - t_2/2k_2}{1 - t_1/2k_1} \right) \right\} (2 \sin^{-1} \sqrt{r}) \quad (2.25)$$

όπου η γωνία επαφής  $\alpha$  θα πρέπει να είναι μικρότερη της γωνίας τριβής  $\tan^{-1} \mu \approx \mu$  ώστε τα ράουλα να μπορούν να τραβήξουν την λωρίδα ανάμεσα από το διάκενο.

Για τον υπολογισμό της δύναμης και της ροπής των ράουλων πρέπει να εισάγουμε την πίεση  $q$  στην σχέση (2.19) και να την ενσωματώσουμε πάνω από το τόξο επαφής, χρησιμοποιώντας την σχέση  $h = h_2(1 + \xi^2)$  και αν  $(k_1 = k_2 = k)$  και οι τανύσεις  $t_{1,2}$  να είναι μηδενικές έχουμε :

$$\frac{P}{P^*} = \sqrt{\frac{1-r}{r}} \left\{ \int_0^{\xi_n} (1+\xi^2) e^{2\alpha\psi} d\xi + (1-r) e^{2\alpha\psi_0} \int_{\xi_n}^{\xi_0} (1+\xi^2) e^{-2\alpha\psi} d\xi \right\} \quad (2.26)$$

$$\frac{G}{G^*} = 2\sqrt{\frac{1-r}{r}} \left\{ \int_0^{\xi_n} \xi (1+\xi^2) e^{2\alpha\psi} d\xi + (1-r) e^{2\alpha\psi_0} \int_{\xi_n}^{\xi_0} \xi (1+\xi^2) e^{-2\alpha\psi} d\xi \right\}$$

όπου  $P^* = 2k\sqrt{R'r h_1}$  και  $G^* = kRr h_1$  αντιστοιχούν στις τιμές των  $P$  και  $G$  για ομοιόμορφη κατανομή της κάθετης πίεσης ίσης με  $2k$  κατά μήκος του τόξου επαφής. Τα  $\psi, \xi_0, \xi_n$  που βρίσκονται στην (2.26) παρουσιάζονται αναλυτικότερα ως εξής :

$$\psi = \tan^{-1} \xi$$

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{r}{1-r}}$$

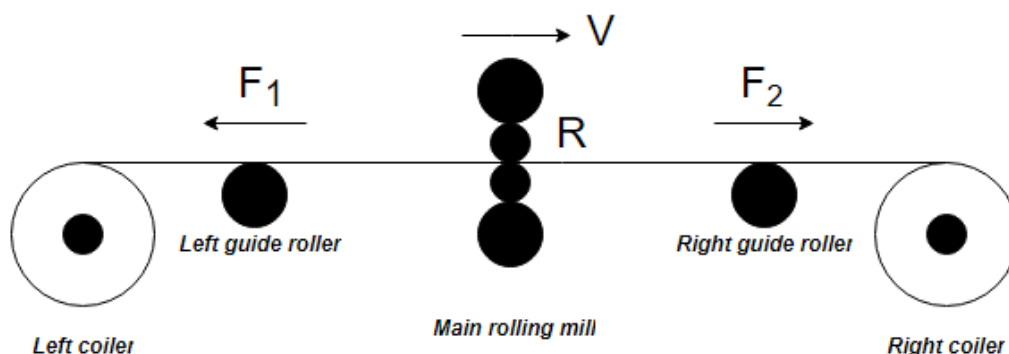
$$\xi_n = \tan\left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \sqrt{r} - \frac{1}{4\alpha} \ln \frac{1}{1-r}\right)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΣ ΥΠΟΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν τρία μοντέλα υποσυστημάτων ψυχρής έλασης με κινητήρα DC από το πιο απλό έως το πιο σύνθετο ( βλ. για παράδειγμα [1],[2],[3]). Το μοντέλο ψυχρής έλασης αποτελείται από το αριστερό τυλικτικό-εκτυλικτικό μηχανισμό (left coiler), το δεξί τυλικτικό-εκτυλικτικό μηχανισμό (right coiler), το κύριο ελασματουργείο (main rolling mill), τον αριστερό οδηγό κύλινδρο (left guide roller) καθώς και τον δεξί οδηγό κύλινδρο (right guide roller). Το πρώτο μοντέλο είναι μονομεταβλητό και γραμμικό και περιγράφει ως καταστάσεις κυρίως την ταχύτητα  $V$  και το ρεύμα  $I$  του κύριου ελασματουργείου καθώς και την τάση εισόδου  $u$ . Το δεύτερο μοντέλο είναι πολυμεταβλητό και μη γραμμικό και αποτελείται από τρία υποσυστήματα: το πρώτο ( $sys_1$ ) όπου αποτελείται από το διάνυσμα κατάστασης  $(F_1, V_1)$  όπου δηλώνουν την τάση και την ταχύτητα εκτυλικτικού και ελέγχεται από την τάση εισόδου  $u_1$ , το δεύτερο ( $sys_2$ ) όπου αποτελείται από το διάνυσμα  $(V_2)$  όπου δηλώνει την ταχύτητα του κύριου ελασματουργείου και ελέγχεται από την τάση εισόδου  $u_2$  και το τρίτο διάνυσμα κατάστασης  $(F_3, V_3)$  όπου δηλώνουν την τάση και την ταχύτητα τυλικτικού και ελέγχεται από την τάση εισόδου  $u_3$ . Το τρίτο και πιο σύνθετο μοντέλο είναι πολυμεταβλητό και μη γραμμικό και ομοίως αποτελείται από τρία υποσυστήματα: ( $sys_1$ ) όπου αποτελείται από το διάνυσμα κατάστασης  $(F_1, V_1, I_1, J_1, R_1)$  όπου δηλώνουν την τάση, την ταχύτητα, το ρεύμα, την ροπή αδράνειας και την ακτίνα του εκτυλικτικού μηχανισμού και ελέγχεται από την τάση  $u_1$ , το δεύτερο διάνυσμα κατάστασης ( $sys_2$ ) όπου αποτελείται από το διάνυσμα  $(V_2, I_2)$  όπου δηλώνουν την ταχύτητα και το ρεύμα του κύριου ελασματουργείου και ελέγχεται από την τάση  $u_2$  και το τρίτο διάνυσμα κατάστασης ( $sys_3$ ) όπου  $(F_3, V_3, I_3, J_3, R_3)$  όπου δηλώνουν την τάση, την ταχύτητα, το ρεύμα, την ροπή αδράνειας και την ακτίνα του τυλικτικού μηχανισμού και ελέγχεται από την τάση  $u_3$ .

### 3.1 ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a)

Σε αυτή την υποενότητα θα παρουσιαστεί το δυναμικό μοντέλο υποσυστήματος ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών. Η σχηματική απεικόνιση του υποσυστήματος αναστρέψιμων ταινιών δίνεται στο Σχήμα 4. Το μοντέλο ψυχρής έλασης αποτελείται από το αριστερό τυλικτικό-εκτυλικτικό μηχανισμό (left coiler), το δεξί τυλικτικό-εκτυλικτικό μηχανισμό (right coiler), το κύριο ελασματουργείο (main rolling mill), τον αριστερό οδηγό κύλινδρο (left guide roller) καθώς και τον δεξί οδηγό κύλινδρο (right guide roller) ( βλ. για παράδειγμα [1]). Η κίνηση του κύριου ελασματουργείου καθώς και η κίνηση του αριστερού και δεξιού τυλικτικού-εκτυλικτικού μηχανισμού επιτυγχάνεται συνήθως με DC κινητήρες συνεχούς ρεύματος. Το υποσύστημα αναστρέψιμων ταινιών δίνει έμφαση στην ταχύτητα  $V$  του κύριου ελασματουργείου καθώς και στο ρεύμα  $I$  του ρότορα. Κύριος στόχος του συγκεκριμένου μοντέλου έχοντας σταθερές τις ταχύσεις  $F_{1,2}$  είναι η διατήρηση της ταχύτητας  $V$  του κύριου ελασματουργείου σε επιθυμητές τιμές παρά τον συνδυασμό διαταραχών και παραμετρικών αβεβαιοτήτων όπου προέρχονται από το βρόχο του συστήματος ταχύτητας και ρεύματος.



Σχήμα 4: Διάγραμμα δομής 1 αναστρέψιμου ψυχρού ελάστρου

Το μπλοκ εξισώσεων δίνεται από την παρακάτω σχέση ( βλ. για παράδειγμα [1]):

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{KR}{J\eta} I + \frac{R^2}{J\eta^2} (F_2 - F_1) - \frac{B_u V}{J} - \frac{M_z R}{J\eta^2} \pm D \\ \dot{I} = \frac{K_s}{l} u - \frac{K\eta}{lR} V - \frac{r}{l} I \pm \Delta \end{cases} \quad (3.1)$$

Όπου  $V$  και  $I$  εκφράζουν την ταχύτητα της αναστρέψιμης ταινίας ψυχρής έλασης καθώς και το ρεύμα του ρότορα και  $u$  εκφράζει την τάση ελέγχου. Τα  $\eta, J$  και  $R$  δηλώνουν την σταθερά αναλογία μείωσης την περιστροφική αδράνεια καθώς και την ακτίνα των ράουλων εργασίας (work roll) του κυρίου έλαστρου. Τα  $F_{1,2}$  είναι οι τανύσεις δεξιά και αριστερά του κύριου έλαστρου (main rolling mill) όπως φαίνεται στο σχήμα αντίστοιχα. Τα  $B_u$  και  $M_z$  είναι ο συντελεστής ροπής και η ροπή κύλισης κατά την έλαση. Τα  $r, l, K$  και  $K_s$  είναι στοιχεία του κινητήρα και δηλώνουν την αντίσταση, την επαγωγή του κυκλώματος οπλισμού, το συντελεστή ροπή του κινητήρα και την ενίσχυση της μονάδας ανορθωτή κινητήρα συνεχούς ρεύματος. Τέλος έχουμε το  $D$  που είναι μια αβεβαιότητα που συμπεριλαμβάνει τις διαταραχές παραμέτρων και την διαταραχή του φορτίου. Η ποσότητα  $\Delta$  είναι μια αβεβαιότητα που προκαλείται από διαταραχές παραμέτρων. Ισχύουν τα ακόλουθα :

$$D = \frac{B_u(q)V}{J} - \frac{\Delta M_z R}{J\eta^2} \quad (3.2)$$

$$\Delta = r(q) \frac{I}{l} \quad (3.3)$$

όπου τα  $B_u, r$  δηλώνουν τις μεταβολές των αβέβαιων παραμέτρων του συντελεστή ροπής και της αντίστασης. Οι παράμετροι αυτοί δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο και ισχύει ότι  $B_u \in (B_u^-, B_u^+)$ ,  $r \in (r^-, r^+)$  όπου τα  $B_u^-, B_u^+, r^-, r^+$  ισούνται με  $B_{u,0} - 10\%B_{u,0}, B_{u,0} + 10\%B_{u,0}, r_0 - 10\%r_0, r_0 + 10\%r_0$  όπου  $B_{u,0}$  είναι η ονομαστική τιμή του  $B_u$  και όπου  $r_0$  είναι η ονομαστική τιμή του  $r$ . Η ποσότητα  $\Delta M_z$  είναι η διαταραχή της ροπής κύλισης και ισούται με  $\Delta M_z = 2500 \sin(10t) N \cdot m$ .

Η περιγραφή του συστήματος στον χώρο κατάστασης είναι της μορφής :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + f(x) + G \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$  και δηλώνουν τις καταστάσεις, τις εισόδους καθώς και τις εξόδους του συστήματος. Τα  $A, B, C, G$  είναι σταθεροί πίνακες με συγκεκριμένες διαστάσεις που εξαρτώνται από τα  $n, m, p$ . Τέλος έχουμε την  $f(x)$  που δηλώνει έναν συνδυασμό αβεβαιοτήτων και διαταραχών του συστήματος. Σύμφωνα με την σχέση (3.1) προκύπτει ότι  $n = 2, m = 1, p = 1$ . Επίσης προκύπτει ότι  $x_1 = V, x_2 = I$ , η είσοδος  $u$  είναι η τάση ελέγχου και η έξοδος  $y = x_1$  όπου  $x_1$  η ταχύτητα της αναστρέψιμης λωρίδας. Οι σταθεροί πίνακες  $A, B, C, G$  καθώς και η σχέση  $f(x)$  περιγράφονται αναλυτικά ως εξής :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{B_u}{J} & \frac{KR}{J\eta} \\ -\frac{K\eta}{lR} & -\frac{r}{l} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_s}{l} \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} D \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{R^2}{J\eta^2}(F_2 - F_1) - \frac{M_z R}{J\eta^2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

Έτσι έχοντας τις παραπάνω σχέσεις το μπλοκ των εξισώσεων των καταστάσεων της σχέσης (3.4) διαμορφώνεται ως εξής :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B_u}{J} & \frac{KR}{J\eta} \\ -\frac{K\eta}{lR} & -\frac{r}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_s}{l} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \frac{R^2}{J\eta^2}(F_2 - F_1) - \frac{M_z R}{J\eta^2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ \Delta \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Οι τιμές των παραμέτρων του δυναμικού μοντέλου αναστρέψιμης ταινίας ψυχρής έλασης δίνονται ως εξής :

Παράμετροι	Ονομαστικές Τιμές	Μονάδες Μέτρησης
$K$	32.6089	$N \cdot m / A$
$F_1$	100	$kN$
$F_2$	120	$kN$
$J$	1274.5	$kg \cdot m^2$
$l$	$1.28 \times 10^{-3}$	$H$
$\eta$	1	–
$r$	0.0159	$\Omega$
$R$	0.20635	$m$
$M_z$	25	$kN \cdot m$
$B_u$	0.5699	$kg \cdot m^2 / s$
$K_s$	135	–

### 3.2 ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (b)

Στην προηγούμενη υποενότητα παρουσιάστηκε το δυναμικό μονομεταβλητό μοντέλο αναστρέψιμων ταινιών ψυχρής έλασης με στόχο τον έλεγχο και την ομαλή λειτουργία της γραμμικής ταχύτητας (main rolling mill) της ταινία παρά τις αβεβαιότητες και τις διαταραχές. Σε αυτή την υποενότητα θα παρουσιαστεί το πιο σύνθετο δυναμικό πολυμεταβλητό μοντέλο αναστρέψιμης ταινίας ψυχρής έλασης με απώτερο σκοπό την καλύτερη προσέγγιση του σε σχέση με την πραγματική διεργασία ( βλ. για παράδειγμα [2]). Η βασική διαφορά του συστήματος της υποενότητας (3.1) σε σχέση με την παρούσα είναι ότι οι τανύσεις  $F_{1,2}$  δεξιά και αριστερά του κύριου έλαστρου (main rolling mill) δεν είναι πλέον σταθερές παράμετροι, αλλά είναι δυναμικές εξισώσεις με μη γραμμικότητες όπου μεταβάλλονται με τον χρόνο. Έτσι λόγω δυναμικής συμπεριφοράς των τανύσεων ένα άλλο μέγεθος που αποκτά δυναμική συμπεριφορά επίσης, είναι οι γραμμικές ταχύτητες  $V_{1,2}$  από τις δύο κατευθύνσεις παράλληλα της λωρίδας. Το μαθηματικό μοντέλο αποτελείται από τρία υποσυστήματα: το πρώτο ( $sys_1$ ) όπου αποτελείται από το διάνυσμα κατάστασης  $(F_1, V_1)$  όπου ελέγχεται από την τάση  $u_1$ , το δεύτερο ( $sys_2$ ) όπου αποτελείται από το διάνυσμα  $(V_2)$  όπου ελέγχεται από την τάση  $u_2$  και το τρίτο διάνυσμα κατάστασης  $(F_3, V_3)$  όπου ελέγχεται από την τάση  $u_3$ . Τα μπλοκ των υποσυστημάτων  $sys_{1,2,3}$  παρουσιάζονται ως εξής :



$$\begin{aligned}
\text{sys}_1 & \begin{cases} \frac{dF_1}{dt} = -\frac{1}{L}V_2F_1 + \frac{ES}{L}(V_2 - V_1) \\ \frac{dV_1}{dt} = \theta_1V_1 + \theta_2F_1 + \theta_3u_1 \end{cases} \\
\text{sys}_2 & \begin{cases} \frac{dV_2}{dt} = \frac{gr_2^2}{J_2}(F_3 - F_1) - \frac{1}{\tau_{em2}}V_2 + \frac{r_2}{\tau_{em2}K_2}u_2 \end{cases} \quad (3.6) \\
\text{sys}_3 & \begin{cases} \frac{dF_3}{dt} = -\frac{1}{L}V_2F_3 + \frac{ES}{L}(V_3 - V_2) \\ \frac{dV_3}{dt} = -\theta_5V_3 - \theta_4F_3 + \theta_6u_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

όπου :

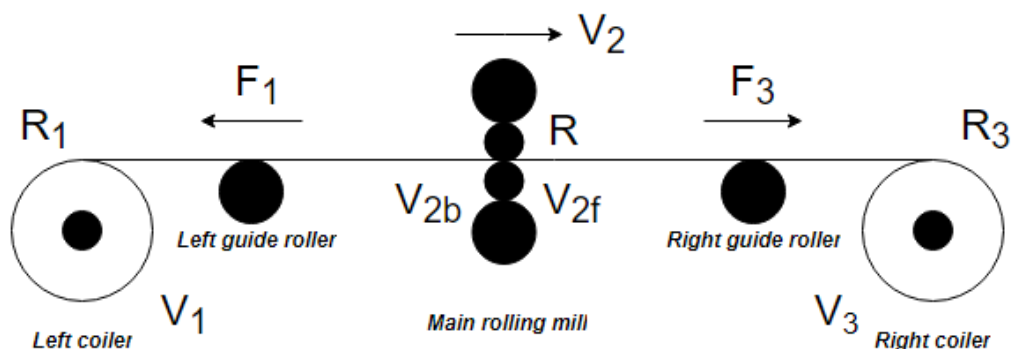
$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{-1}{\tau_{em1}} \\
\theta_2 &= \frac{gr_1^2}{J_1} \\
\theta_3 &= \frac{r_1}{\tau_{em1}K_1} \\
\theta_4 &= \frac{gr_3^2}{J_3} \\
\theta_5 &= \frac{1}{\tau_{em3}} \\
\theta_6 &= \frac{r_3}{\tau_{em3}K_3}
\end{aligned}$$

όπου  $S$  είναι η εγκάρσια επιφάνεια της λωρίδας,  $L$  είναι το μήκος της λωρίδας,  $E$  είναι η σταθερά Yang's Modulus (elastic modulus),  $J_{1,2,3}$  είναι οι ροπές αδράνειας του συστήματος,  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας,  $K_{1,2,3}$  εκφράζουν τους συντελεστές ροπής των DC κινητήρων,  $\tau_{em1,2,3}$  είναι η ηλεκτρομηχανική χρονική σταθερά των κινητήρων DC και τέλος τα  $r_{1,2,3}$  όπου εκφράζουν τις αντιστάσεις των κινητήρων DC. Οι τιμές των παραμέτρων του δυναμικού μοντέλου αναστρέψιμης ταινίας ψυχρής έλασης δίνονται ως εξής :

Παράμετροι	Ονομαστικές Τιμές	Μονάδες Μέτρησης
$S$	1.25	$m$
$L$	3	$m$
$E$	$2.508 \times 10^3$	$N/m^2$
$J_1$	3347	$kg \cdot m^2$
$J_2$	1274.5	$kg \cdot m^2$
$J_3$	406.7	$kg \cdot m^2$
$K_1$	23.6749	$N \cdot m/A$
$K_2$	32.6089	$N \cdot m/A$
$K_3$	23.6749	$N \cdot m/A$
$r_1$	0.021	$\Omega$
$r_2$	0.0159	$\Omega$
$r_3$	0.021	$\Omega$
$\tau_{em1}$	0.2	s
$\tau_{em2}$	0.2	s
$\tau_{em3}$	0.2	s

### 3.3 ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c)

Στην προηγούμενη υποενότητα παρουσιάστηκε το δυναμικό πολυμεταβλητό μοντέλο αναστρέψιμων ταινιών ψυχρής έλασης με στόχο τον έλεγχο και την ομαλή λειτουργία των γραμμικών ταχυτήτων της ταινίας καθώς και των τανύσεων δεξιά και αριστερά του κύριου έλαστρου (main rolling mill). Σε αυτή την υποενότητα θα παρουσιαστεί το ακόμη πιο σύνθετο δυναμικό μοντέλο αναστρέψιμης ταινίας ψυχρής έλασης έτσι ώστε να διατυπωθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η παραπάνω διεργασία σε σχέση με την πραγματική (βλ. για παράδειγμα [3]). Η βασική διαφορά του συστήματος της υποενότητας (3.2) σε σχέση με την παρούσα είναι ότι πλέον προστίθενται οι δυναμικές εξισώσεις των ρευμάτων  $I_{1,2,3}$  του δεξιού, αριστερού τυλικτικού-εκτυλικτικού μηχανισμού (right & left coiler) καθώς και του κύριου ελασματοουργείου (main rolling mill). Επίσης οι ροπές αδράνειας καθώς και οι ακτίνες  $J_{1,2,3}, R_{1,2,3}$  αντίστοιχα, δεν είναι πλέον σταθερές παράμετροι, αλλά είναι δυναμικές εξισώσεις με μη γραμμικότητες όπου μεταβάλλονται με τον χρόνο. Δίνεται το παρακάτω σχήμα :



Σχήμα 5: Διάγραμμα δομής 2 αναστρέψιμου ψυχρού ελάστρου

Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα το δυναμικό μαθηματικό μοντέλο αναστρέψιμων ταινιών αποτελείται από τρία υποσυστήματα: το πρώτο υποσύστημα έχει να κάνει με το αριστερό τυλικτικό-εκτυλικτικό μηχανισμό (left coiler), ( $sys_1$ ) όπου αποτελείται από το διάνυσμα κατάστασης  $(F_1, V_1, I_1, J_1, R_1)$  όπου ελέγχεται από την τάση  $u_1$ , το δεύτερο υποσύστημα όπου είναι αντίστοιχα το κύριο σύστημα των δύο προηγούμενων ενοτήτων (3.1), (3.2) με κάποιες παραλλαγές, δηλαδή αυτό του κυρίου ελασματοουργείου (main rolling mill), ( $sys_2$ ) όπου αποτελείται από το διάνυσμα  $(V_2, I_2)$  και όπου ελέγχεται από την τάση  $u_2$  και το τρίτο διάνυσμα κατάστασης ( $sys_3$ ) έχει να κάνει σχέση με το δεξί τυλικτικό-εκτυλικτικό μηχανισμό (right coiler),  $(F_3, V_3, I_3, J_3, R_3)$  όπου ελέγχεται από την τάση  $u_3$ . Τα μπλοκ των υποσυστημάτων  $sys_{1,2,3}$  αναφέρονται αναλυτικά παρακάτω.

Το υποσύστημα  $sys_1$  του αριστερού τυλικτικού-εκτυλικτικού μηχανισμού (left coiler) παρουσιάζει την δυναμική συμπεριφορά της τάνυσης  $F_1$  της λωρίδας όπου η φορά της καθορίζεται σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, την γραμμική ταχύτητα  $V_1$  όπου λόγω της αναστρέψιμης συμπεριφοράς της ταινίας η φορά της γραμμικής ταχύτητας πραγματοποιείται και από τις δύο κατευθύνσεις παράλληλα της λωρίδας, το ρεύμα  $I_1$ , καθώς και την ροπή αδράνειας  $J_1$  και την ακτίνα  $R_1$ . Το μπλοκ του υποσυστήματος  $sys_1$  παρουσιάζεται ως εξής :

$$\text{sys}_1 : \left\{ \begin{array}{l} \dot{F}_1 = \frac{EA_1}{L} [V_2 (1 - \chi_0 (1 + K_\chi F_1)) - V_1] \\ \dot{V}_1 = \frac{K_1 R_1}{J_1 \eta_1} I_1 + \frac{R_1^2}{J_1 \eta_1^2} F_1 - \left( \frac{B_{u1}}{J_1} - \frac{\dot{R}_1}{R_1} \right) V_1 \\ \dot{I}_1 = \frac{Ks_1}{l_1} u_1 - \frac{K_1 \eta_1}{l_1 R_1} V_1 - \frac{r_1}{l_1} I_1 + \Delta_1 \\ \dot{J}_1(t) = \frac{2\pi\rho B}{\eta_1^2} R_1^3 \dot{R}_1, \quad \dot{R}_1(t) = -\frac{H}{2\pi R_1} V_1 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

όπου οι μεταβλητές απόδοσης του συστήματος είναι τα  $V_1, F_1, I_1, J_1, R_1$  όπως αναφέραμε προηγουμένως καθώς και το  $u_1$  όπου εκφράζει την τάση ελέγχου στον κινητήρα DC. Οι μετρούμενες μεταβλητές σύμφωνα με την παραπάνω σχέση είναι τα  $K_1, \eta_1, B_{u1}$  όπου εκφράζουν το συντελεστή ροπής του DC κινητήρα, την αναλογία μείωσης, καθώς και τον συντελεστή τριβής. Επίσης έχουμε τα  $r_1, l_1, Ks_1$  όπου εκφράζουν την αντίσταση, την αυτεπαγωγή του κυκλώματος σπλισμού, καθώς και την ενίσχυση της συσκευής ανόρθωσης του κινητήρα DC. Επιπλέον έχουμε τα  $E, B, \rho, M_z, L$  όπου είναι η σταθερά Yang's Modulus (elastic modulus), το πλάτος, η πυκνότητα, η ροπή κύλισης και το μήκος της λωρίδας έλασης. Επίσης έχουμε το  $H$  είναι το πάχος εισόδου του υλικού δηλαδή το πάχος όπου είναι τυλιγμένο το υλικό στο αριστερό μηχανισμό (left coiler), το  $A_1$  όπου δηλώνει το εμβαδόν διατομής του υλικού από αριστερά του κύριου ελασματοργείου (main rolling mill), το  $\chi_0, K_\chi$  όπου είναι ο συντελεστής ολίσθησης προς τα πίσω χωρίς τανύσεις και ο παράγοντας επιρροής τάνυσης ολίσθησης προς τα πίσω. Τέλος έχουμε το  $\Delta_1$  δηλώνει μη μοντελοποιήσιμη δυναμική τους συστήματος όπου προκαλούνται από διαταραχές παραμέτρων και διαταραχές φορτίου.

Ομοίως έχουμε το υποσύστημα  $sys_3$  του δεξιού τυλικτικού-εκτυλικτικού μηχανισμού (right coiler) όπου παρουσιάζει την δυναμική συμπεριφορά της τάνυσης  $F_3$  της λωρίδας όπου η φορά της καθορίζεται σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, την γραμμική ταχύτητα  $V_3$  όπου λόγω της αναστρέψιμης συμπεριφοράς της ταινίας η φορά της γραμμικής ταχύτητας πραγματοποιείται και από τις δύο κατευθύνσεις παράλληλα της λωρίδας, το ρεύμα  $I_3$ , καθώς και την ροπή αδράνειας  $J_3$  και την ακτίνα  $R_3$ . Το μπλοκ του υποσυστήματος  $sys_3$  παρουσιάζεται ως εξής :

$$\text{sys}_3 : \begin{cases} \dot{F}_3 = \frac{EA_2}{L} [V_3 - V_2 (1 + \delta_0 (1 + K_\delta F_3))] \\ \dot{V}_3 = \frac{K_3 R_3}{J_3 \eta_3} I_3 - \frac{R_3^2}{J_3 \eta_3^2} F_3 - \left( \frac{B_{u_3}}{J_3} - \frac{\dot{R}_3}{R_3} \right) V_3 \\ \dot{I}_3 = \frac{K_{S_3}}{l_3} u_3 - \frac{K_3 \eta_3}{l_3 R_3} V_3 - \frac{r_3}{l_3} I_3 + \Delta_3 \\ J_3(t) = \frac{2\pi\rho B}{\eta_3^2} R_3^3 \dot{R}_3, \quad \dot{R}_3(t) = \frac{h}{2\pi R_3} V_3 \end{cases} \quad (3.8)$$

όπου οι μεταβλητές απόδοσης του συστήματος είναι τα  $V_3, F_3, I_3, J_3, R_3$  όπως αναφέραμε προηγουμένως καθώς και το  $u_3$  όπου εκφράζει την τάση ελέγχου στον κινητήρα DC. Οι μετρούμενες μεταβλητές σύμφωνα με την παραπάνω σχέση είναι τα  $K_3, n_3, B_{u_3}$  όπου εκφράζουν το συντελεστή ροπής του DC κινητήρα, την αναλογία μείωσης, καθώς και τον συντελεστή τριβής. Επίσης έχουμε τα  $r_3, l_3, K_{S_3}$  όπου εκφράζουν την αντίσταση, την αυτεπαγωγή του κυκλώματος σπλισμού, καθώς και την ενίσχυση της συσκευής ανόρθωσης του κινητήρα DC. Επιπλέον έχουμε τα  $E, B, \rho, M_z, L$  όπου είναι η σταθερά Yang's Modulus (elastic modulus), το πλάτος, η πυκνότητα, η ροπή κύλισης και το μήκος της λωρίδας έλασης. Επίσης έχουμε το  $h$  είναι το πάχος εξόδου του υλικού δηλαδή το πάχος όπου είναι τυλιγμένο το υλικό στο δεξί μηχανισμό (right coiler), το  $A_2$  όπου δηλώνει το εμβαδόν διατομής του υλικού από αριστερά του κύριου ελασματοουργείου (main rolling mill), το  $\delta_0, K_\delta$  όπου είναι ο συντελεστής ολίσθησης προς τα εμπρός χωρίς τανύσεις και ο παράγοντας επιρροής τάνυσης ολίσθησης προς τα εμπρός. Τέλος έχουμε το  $\Delta_3$  δηλώνει μη μοντελοποιημένη δυναμική τους συστήματος όπου προκαλούνται από διαταραχές παραμέτρων και διαταραχές φορτίου.

Τέλος έχουμε το υποσύστημα  $\text{sys}_2$  του κύριου ελασματοουργείου (main rolling mill) όπου παρουσιάζει την δυναμική συμπεριφορά της γραμμικής ταχύτητας  $V_2$  καθώς και το ρεύμα  $I_2$ . Το μπλοκ του υποσυστήματος  $\text{sys}_2$  παρουσιάζεται ως εξής :

$$\text{sys}_2 : \begin{cases} \dot{V}_2 = \frac{K_2 R_2}{J_2 \eta_2} I_2 + \frac{R_2^2}{J_2 \eta_2^2} (F_3 - F_1) - \frac{B_{u_2}}{J_2} V_2 - \frac{M_z R_2}{J_2 \eta_2^2} + \omega_1 \\ \dot{I}_2 = \frac{K_{S_2}}{l_2} u_2 - \frac{K_2 \eta_2}{l_2 R_2} V_2 - \frac{r_2}{l_2} I_2 + \Delta_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

όπου οι μεταβλητές απόδοσης του συστήματος είναι τα  $V_2, I_2$  όπως αναφέραμε προηγουμένως καθώς και το  $u_2$  όπου εκφράζει την τάση ελέγχου στον κινητήρα DC. Οι μετρούμενες μεταβλητές σύμφωνα με την παραπάνω σχέση είναι τα  $K_2, J_2, n_2, R_2, B_{u2}$  όπου εκφράζουν το συντελεστή ροπής του DC κινητήρα, την ροπή αδράνειας του ράουλου εργασίας, την αναλογία μείωσης, την ακτίνα του ράουλου εργασίας του κύριου ελασματοουργείου, καθώς και τον συντελεστή τριβής. Επίσης έχουμε τα  $r_2, l_2, Ks_2$  όπου εκφράζουν την αντίσταση, την αυτεπαγωγή του κυκλώματος οπλισμού, καθώς και την ενίσχυση της συσκευής ανόρθωσης του κινητήρα DC. Τέλος έχουμε τα  $\Delta_2, \omega_1$  όπου δηλώνουν την μη μοντελοποιημένη δυναμική τους συστήματος όπου προκαλούνται από διαταραχές παραμέτρων και διαταραχές φορτίου καθώς και δηλώνει την διαταραχή του φορτίου λόγω της διακύμανσης (τυπική απόκλιση) του πάχους του υλικού.

Λόγο ότι οι μεταβλητές απόδοσης των υποσυστημάτων των σχέσεων (3.1), (3.2), (3.3) αλληλεξαρτούνται είναι αναγκαίο να συνδυάσουμε τα τρία υποσυστήματα ( $sys_1, sys_2, sys_3$ ) σε ένα σύστημα ( $sys$ ), όπου θα αποτελεί και το βασικό σύστημα της συγκεκριμένης διεργασίας. Άρα από τις σχέσεις (3.1), (3.2), (3.3) έχουμε :

$$\text{sys : } \left\{ \begin{array}{l}
\text{sys}_1 : \left\{ \begin{array}{l}
\dot{F}_1 = \frac{EA_1}{L} [V_2 (1 - \chi_0 (1 + K_\chi F_1)) - V_1] \\
\dot{V}_1 = \frac{K_1 R_1}{J_1 \eta_1} I_1 + \frac{R_1^2}{J_1 \eta_1^2} F_1 - \left( \frac{B_{u1}}{J_1} - \frac{\dot{R}_1}{R_1} \right) V_1 \\
\dot{I}_1 = \frac{Ks_1}{l_1} u_1 - \frac{K_1 \eta_1}{l_1 R_1} V_1 - \frac{r_1}{l_1} I_1 + \Delta_1 \\
j_1(t) = \frac{2\pi\rho B}{\eta_1^2} R_1^3 \dot{R}_1, \quad \dot{R}_1(t) = -\frac{H}{2\pi R_1} V_1
\end{array} \right. \\
\text{sys}_2 : \left\{ \begin{array}{l}
\dot{V}_2 = \frac{K_2 R_2}{J_2 \eta_2} I_2 + \frac{R_2^2}{J_2 \eta_2^2} (F_3 - F_1) - \frac{B_{u2}}{J_2} V_2 - \frac{M_z R_2}{J_2 \eta_2^2} + \omega_1 \\
\dot{I}_2 = \frac{Ks_2}{l_2} u_2 - \frac{K_2 \eta_2}{l_2 R_2} V_2 - \frac{r_2}{l_2} I_2 + \Delta_2
\end{array} \right. \\
\text{sys}_3 : \left\{ \begin{array}{l}
\dot{F}_3 = \frac{EA_2}{L} [V_3 - V_2 (1 + \delta_0 (1 + K_\delta F_3))] \\
\dot{V}_3 = \frac{K_3 R_3}{J_3 \eta_3} I_3 - \frac{R_3^2}{J_3 \eta_3^2} F_3 - \left( \frac{B_{u3}}{J_3} - \frac{\dot{R}_3}{R_3} \right) V_3 \\
\dot{I}_3 = \frac{Ks_3}{l_3} u_3 - \frac{K_3 \eta_3}{l_3 R_3} V_3 - \frac{r_3}{l_3} I_3 + \Delta_3 \\
j_3(t) = \frac{2\pi\rho B}{\eta_3^2} R_3^3 \dot{R}_3, \quad \dot{R}_3(t) = \frac{h}{2\pi R_3} V_3
\end{array} \right.
\end{array} \right. \quad (3.10)$$

Οι τιμές των παραμέτρων του δυναμικού μοντέλου αναστρέψιμης ταινίας ψυχρής έλασης δίνονται ως εξής :

Παράμετροι	Ονομαστικές Τιμές	Μονάδες Μέτρησης
$R_1$	0.89	$m$
$R_1$	0.20635	$m$
$R_1$	0.255	$m$
$J_1$	3347	$kg \cdot m^2$
$J_2$	1274.5	$kg \cdot m^2$
$J_3$	406.7	$kg \cdot m^2$
$K_1$	23.6749	$N \cdot m/A$
$K_2$	32.6089	$N \cdot m/A$
$K_3$	23.6749	$N \cdot m/A$
$r_1$	0.021	$\Omega$
$r_2$	0.0159	$\Omega$
$r_3$	0.021	$\Omega$
$B_{u1}$	0.3014	$kg \cdot m^2/s$
$B_{u2}$	0.5699	$kg \cdot m^2/s$
$B_{u3}$	0.3014	$kg \cdot m^2/s$
$K_{S1}$	108	–
$K_{S2}$	135	–
$K_{S3}$	108	–
$l_1$	$1.38 \times 10^{-3}$	$H$
$l_2$	$1.28 \times 10^{-3}$	$H$
$l_3$	$1.38 \times 10^{-3}$	$H$
$\eta_1$	1.807	–
$\eta_2$	1	–
$\eta_3$	1.807	–
$\delta_0$	0.065	–
$\chi_0$	0.182	–
$K_\delta$	$5 \times 10^{-8}$	–
$K_x$	$6.511 \times 10^{-8}$	–
$H$	$2.06 \times 10^{-3}$	$m$
$h$	$1.582 \times 10^{-3}$	$m$
$M_z$	25	$kN \cdot m$
$B$	1.25	$m$
$E$	$2.508 \times 10^9$	$N / m^2$
$L$	3	$m$



## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΝΟΜΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΥΠΟΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ**

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετηθεί το πρόβλημα σχεδιασμού μιας μονάδας αντιστάθμισης με την προσθήκη της οποίας επιτυγχάνεται μια προσεγγιστική παρακολούθηση ενός σήματος αναφοράς στην είσοδο καθώς και μηδενικό σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση ισορροπίας. Τα σήματα αναφοράς ποικίλουν έτσι μπορεί να είναι συναρτήσεις βήματος, συναρτήσεις κλίσης (ράμπες), συναρτήσεις ημιτονοειδών καθώς και άλλα είδη αυθαίρετων σημάτων. Αυτή ιδέα τυποποιείται εδώ με την εισαγωγή της έννοιας του μοντέλου εσωτερικού ελέγχου (internal model). Σε ότι ακολουθεί επιλύεται το πρόβλημα της προσεγγιστικής ακολούθησης βηματικής εντολής με μηδενικό σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση ( βλ. για παράδειγμα [9],[10]).

### **4.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a)**

Σε αυτή την υποενότητα θα μελετηθεί του προβλήματος της προσεγγιστικής ακολούθησης βηματικής εντολής με μηδενικό σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση για το μονομεταβλητό μοντέλο ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC τύπου (a).

#### **4.1.1 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a)**

Έχοντας την σχέση (3.4) του χώρου κατάστασης του μονομεταβλητού μοντέλου ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC και αγνοώντας προς το παρόν τον πίνακα διαταραχών και αβεβαιοτήτων  $f(x)$  θεωρούμε το μοντέλο μεταβλητών κατάστασης για την συγκεκριμένη διεργασία, το οποίο περιγράφεται με τη βοήθεια των εξισώσεων ως εξής :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + G & (4.1) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  και δηλώνουν την τάξη των καταστάσεων, των εισόδων καθώς και των εξόδων του συστήματος. Θα θεωρήσουμε ότι τα σήματα αναφοράς παράγονται από γραμμικά συστήματα και είναι επίσης της μορφής,

$$\dot{x}_r = A_r x_r \quad (4.2)$$

$$r = d_r x_r \quad (4.3)$$

με άγνωστες αρχικές συνθήκες. Ένα ισοδύναμο μοντέλο του σήματος εισόδου αναφοράς  $r(k)$ , είναι :

$$r^{(n)} = a_{n-1}r^{(n-1)} + a_{n-2}r^{(n-2)} + \dots + a_1 r^1 + a_0 r^0 \quad (4.4)$$

Στην δική μας περίπτωση ο πίνακας  $G$  παράγεται από τιμές σταθερών παραμέτρων έτσι θα ξεκινήσουμε με ένα οικείο πρόβλημα σχεδίασης, το οποίο αφορά στον σχεδιασμό ενός ελεγκτή που θα επιτρέπει την παρακολούθηση ενός σήματος αναφοράς μιας βηματικής συνάρτησης με μηδενικό σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας. Στην περίπτωση αυτή το σήμα εισόδου παράγεται από,

$$\dot{x}_r = 0$$

$$r = x_r$$

η ισοδύναμα :

$$\dot{r} = 0$$

και το σφάλμα παρακολούθησης  $e$ , ορίζεται ως :

$$e = r - y \quad (4.5)$$

Λαμβάνοντας την παράγωγο ως προς το χρόνο έχουμε,

$$\dot{e} = -\dot{y} = -C\dot{x} \quad (4.6)$$

όπου έχουμε κάνει χρήση του μοντέλου του σήματος εισόδου αναφοράς της εξίσωσης  $\dot{r} = 0$  καθώς και του μοντέλου της εξίσωσης  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $y(t) = Cx(t)$ . Αν ορίσουμε δυο ενδιάμεσες μεταβλητές  $z$  και  $w$  ως :

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix} + \tilde{B}w \quad (4.7)$$

όπου :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -C & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

και αν το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση (4.7) είναι ελέγξιμο δηλαδή,

$$\text{rank}[U_\varepsilon] = n+1 \quad (4.9)$$

όπου  $U_\varepsilon = [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$  είναι ο πίνακας ελεγχιμότητας του επαυξημένου συστήματος, τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα σήμα ανάδρασης της μορφής :

$$w = -F_{d1}z - F_{d2}e \quad (4.10)$$

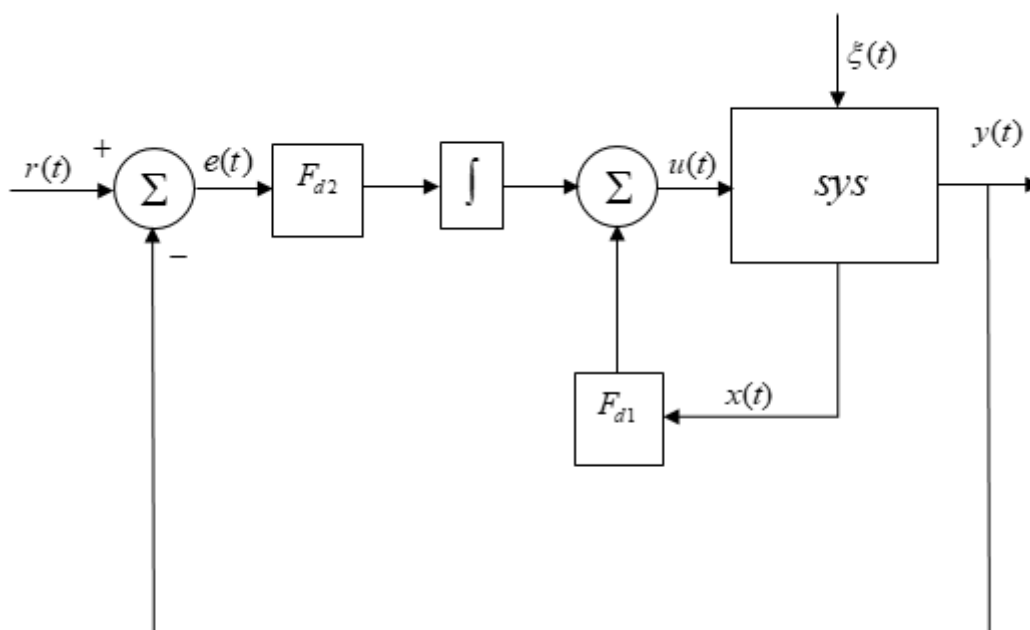
ώστε το σύστημα της εξίσωσης (4.7) να είναι ευσταδές. Αυτό σημαίνει ότι το σφάλμα παρακολούθησης  $e$  είναι ευσταδές. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνουμε το ζητούμενο που είναι προσεγγιστική παρακολούθηση της αναφοράς με μηδενικό σφάλμα στη μόνιμη

κατάσταση ισορροπίας. Το σήμα εισόδου ελέγχου προσδιορίζεται αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση (4.10) και είναι :

$$u(t) = -F_{d1}x(t) - F_{d2} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4.11)$$

όπου  $F_{d1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $F_{d2} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Το χονδρικό διάγραμμα του παραπάνω ελεγκτή φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα :



Σχήμα 6: Χονδρικό διάγραμμα ελεγκτή ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής

#### 4.1.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a)

Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζεται εφαρμογή της προσεγγιστικής ακολούθησης εντολής για το μονομεταβλητό μοντέλο ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC. Αρχικά δημιουργούνται οι επαυξημένοι πίνακες  $\tilde{A}$  και  $\tilde{B}$  της σχέσης (4.8)

οι οποίοι έχουν την παρακάτω μορφή :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

όπου :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{2,1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

όπου τα  $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}, b_{2,1}$  είναι :

$$a_{1,1} = -\frac{B_u}{J}$$

$$a_{1,2} = \frac{KR}{J\eta}$$

$$a_{2,1} = -\frac{K\eta}{lR}$$

$$a_{2,2} = -\frac{r}{l}$$

$$b_{2,1} = \frac{K_s}{l}$$

Ακολουθως ορίζεται ο πίνακας ελεγχιμότητας  $U_\varepsilon = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix}$  όπου ισούται με,

$$U_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,2}a_{2,2}b_{2,1} \\ b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}a_{1,2}b_{2,1} + a_{2,2}a_{2,2}b_{2,1} \\ 0 & 0 & -a_{1,2}b_{2,1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

όπου ισχύει η σχέση (4.9) έτσι το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο.

Στο επαυξημένο σύστημα που περιγράφεται από την σχέση (4.7) εφαρμόζεται στατικός νόμος ανατροφοδότησης κατάστασης της μορφής  $\tilde{u}(t) = F_d \tilde{x}(t)$  όπου  $F_d$  ισούται με,

$$F_d = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Στην συνέχεια υπολογίζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόχου  $P_{cl}(s, F_d) = \det[sI_{n+1} - \tilde{A} + \tilde{B}F_d] = s^\mu + a_1(F_d)s^{\mu-1} + a_2(F_d)s^{\mu-2} + \dots + a_\mu(F_d)s^0$  του επαυξημένου συστήματος όπου το  $\mu = 3$  έτσι δίνεται από την ακόλουθη σχέση :

$$P_{cl}(s, F_d) = s^3 + a_1(F_d)s^2 + a_2(F_d)s^1 + a_3(F_d)s^0 \quad (4.18)$$

όπου :

$$a_1(F_d) = \frac{B_u l + Jr - K_s f_{1,2}}{Jl}$$

$$a_2(F_d) = \frac{K^2 R^2 \eta^2 - K_s f_{1,1} KR \eta + B_u r - B_u K_s f_{1,2}}{Jl}$$

$$a_3(F_d) = \frac{KK_s R f_{1,3} \eta}{Jl}$$

Έστω ότι το επιθυμητό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου είναι της μορφής :

$$P_d(s) = s^{n+1} + d_1 s^n + \dots + d_{n+1} s^0 \quad (4.19)$$

Όπου επιλέγουμε τις επιθυμητές δέσεις (ιδιοτιμές)  $p_1, p_2, p_3$  στις οποίες πρέπει να μετατοπιστούν οι πόλοι. Έτσι το πολυώνυμο έχει την μορφή  $P_d(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)$  και πιο συγκεκριμένα ως,

$$P_d(s) = s^3 + (-p_1 - p_2 - p_3)s^2 + (p_3(p_1 + p_2) + p_1p_2)s^1 + (-p_1p_2p_3)s^0 \quad (4.20)$$

Έτσι εξισώνοντας τις σχέσεις (4.18), (4.19) δηλαδή,

$$P_{cl}(s, F_d) = P_d(s) \quad (4.21)$$

Τα κέρδη του πίνακα ανατροφοδότησης για το επαυξημένο σύστημα διαμορφώνονται ως εξής :

$$f_{1,2} = -\frac{B_u l + Jr}{K_s} - \frac{Jl(-p_1 - p_2 - p_3)}{K_s}$$

$$f_{1,1} = \frac{B_u r - B_u K_s f_{1,2} + K^2 R^2 \eta^2}{K_s KR\eta} - \frac{Jl(p_3(p_1 + p_2) + p_1p_2)}{K_s KR\eta}$$

$$f_{1,3} = \frac{Jl(-p_1p_2p_3)}{KK_s R\eta}$$

Εφαρμόζοντας τον συγκεκριμένο ελεγκτή στο σύστημα, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου από τη σχέση (4.18) θα έχει την ακόλουθη μορφή :

$$P_{cl}(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \quad (4.22)$$

#### 4.1.3 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a)

Στην παρούσα υποενότητα θα εξετάσουμε την συμπεριφορά του συστήματος κλειστού βρόχου με τον νόμο ελέγχου ακολουθήσεως βηματικής εντολής. Εφαρμόζοντας στον νόμο ελέγχου της σχέσης (4.11) στο σύστημα όπως αυτό περιγράφεται από τη σχέση (4.1) προκύπτει το παρακάτω σύστημα κλειστού βρόχου :

$$\dot{x}(t) = (A - BF_{d1})x(t) - BF_{d2} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4.23)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.24)$$

όπου :

$$F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$F_{d2} = f_{1,3} \quad (4.26)$$

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (4.27)$$

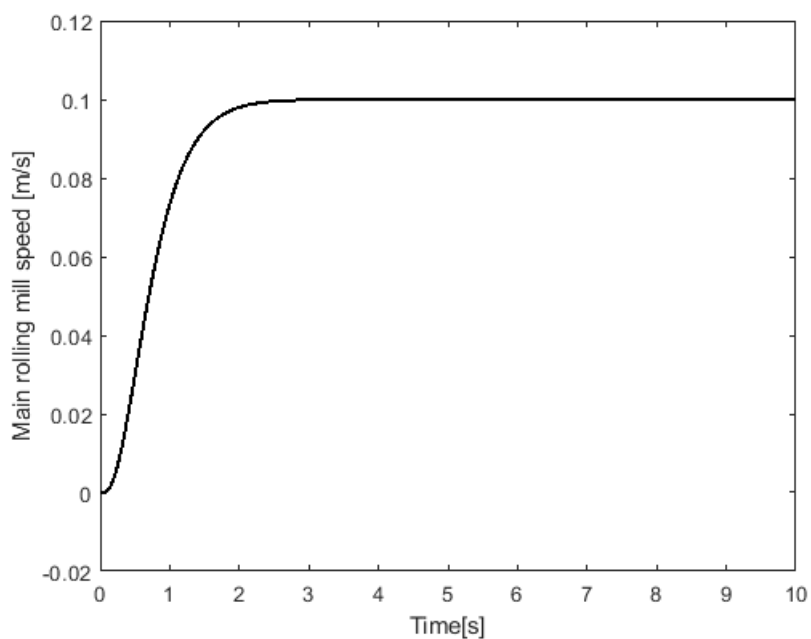
Όταν οι επιθυμητοί πόλοι του συστήματος είναι στις θέσεις:  $-3, -4, -5$ , οι παράμετροι του ελεγκτή θα είναι :

$$F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.75054 & -4 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

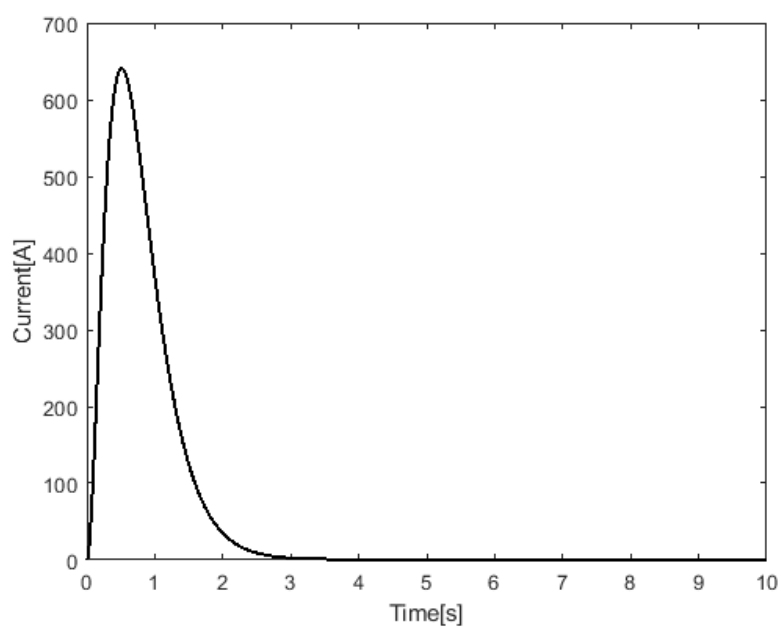
$$F_{d2} = f_{1,3} = -3.51368$$

Τα σήματα διέγερσης της επιθυμητής εισόδου και της διαταραχής του μονομεταβλητού συστήματος ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών είναι  $r(t) = 0.1$  και  $\xi(t) = -0.034$  έτσι οι αποκρίσεις του διανύσματος κατάστασης για το γραμμικό σύστημα κλειστού βρόχου καθώς και το σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση δίνονται στις παρακάτω απεικονίσεις :





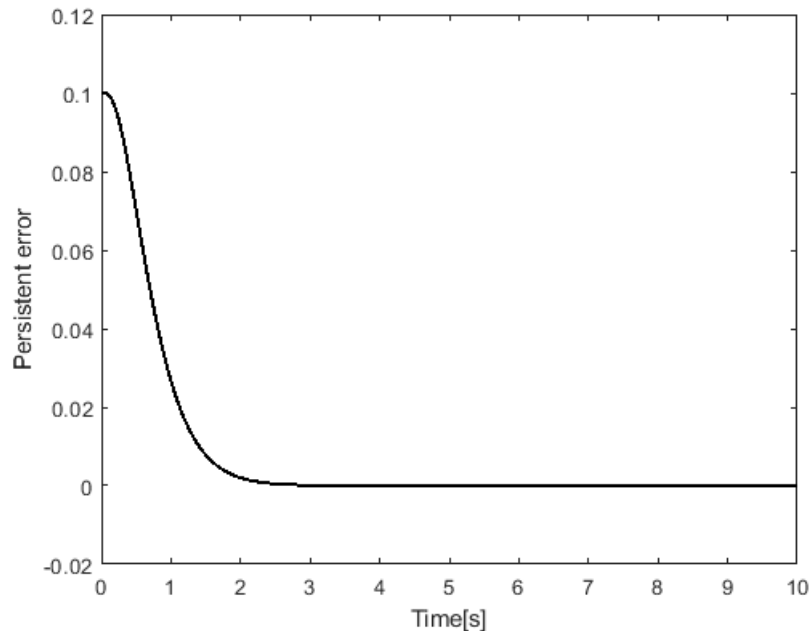
Σχήμα 7: Ταχύτητα κύριου ελασματοργείου



Σχήμα 8: Ρεύμα ελασματοργείου

Από τις αποκρίσεις των καταστάσεων της ταχύτητας του κύριου ελασματοργείου καθώς και του ρεύματος, συμπεραίνουμε ότι ο ελεγκτής ασυμπτωτικής ακολουθίας

βηματικής εντολής λειτούργησε ικανοποιητικά ως προς την ευστάθεια αλλά και ως προς την ακολούθηση εντολής. Έτσι στο παρακάτω σχήμα ( βλ. Σχήμα 9 ) θα παρατηρήσουμε ότι το σφάλμα μόνιμης κατάστασης τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.



Σχήμα 9: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης

#### 4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΛΕΓΚΤΗ ΤΡΙΩΝ ΟΡΩΝ PID ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a)

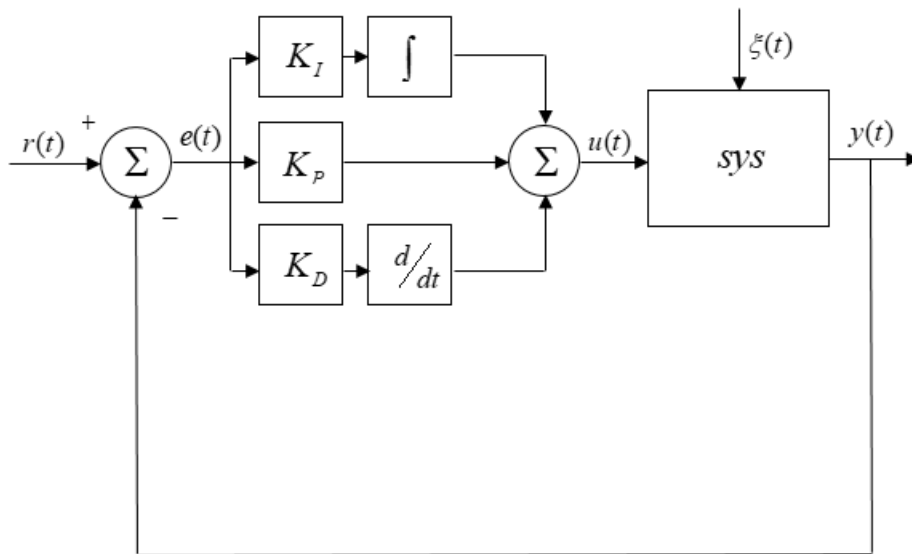
Σε αυτή την υποενότητα θα μελετηθεί το πρόβλημα σχεδιασμού ελεγκτή τριών όρων ή αλλιώς PID ελεγκτή και θα προσδιοριστούν τα κέρδη του προκειμένου η απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου να ακολουθεί μία επιθυμητή εξωτερική εντολή για το μονομεταβλητό μοντέλο ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC τύπου ( a ). Οι ελεγκτές τριών όρων χρησιμοποιούνται εκτεταμένα σε συστήματα βιομηχανικών διεργασιών κυρίως, διότι είναι αξιόπιστοι, εύκολοι στην σχεδίαση τους, είναι εύρωστοι, χαμηλού κόστους και προσφέρουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Επιπλέον λόγω της έλλειψης της πλήρους εικόνας των μαθηματικών μοντέλων καθώς και λόγω φθορών των μηχανολογικών απαρτιών η ακόμη και λόγω θορύβου οι παράμετροι δεν είναι σταθεροί επί το πλείστον ( δηλαδή υπόκεινται σε αβεβαιότητες ) έτσι έχει ως αποτέλεσμα οι περισσότεροι ελεγκτές να αποτυγχάνουν, έτσι αυτό τα γεγονόσ κάνει τον ελεγκτή τριών όρων PID να έχει μεγαλύτερη αξία.

4.2.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΕΛΕΓΚΤΗ ΤΡΙΩΝ ΟΡΩΝ PID ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a)

Έστω ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα που περιγράφεται με το μοντέλο μεταβλητών κατάστασης (4.1). Στο σύστημα ανοικτού βρόχου εφαρμόζεται ο δυναμικός ελεγκτής τριών όρων (βλ. Σχήμα 10).

$$u(t) = \left( K_P + K_D \frac{d}{dt} + K_I \int_0^t dt \right) e(t) \quad (4.28)$$

$$e(t) = (r_{ref}(t) - y(t)) \quad (4.29)$$



Σχήμα 10: Χονδρικό διάγραμμα PID ελεγκτή

Εφαρμόζοντας τον ελεγκτή τριών όρων (4.28) στο σύστημα ανοικτού βρόχου (4.1) προκύπτει η ακόλουθη απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου στο πεδίο της συχνότητας,

$$Y(s) = C \left[ sI_n - A + BCG_{pid}(s) \right]^{-1} BG_{pid}(s)R_{ref}(s) + C \left[ sI_n - A + BCG_{pid}(s) \right]^{-1} D\xi(s) \quad (4.30)$$

όπου  $Y(s), U(s), \Xi(s)$  είναι τα σήματα εξόδου, εισόδου και διαταραχών στο πεδίο της συχνότητας και όπου  $R_{ref}(s)$  είναι ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος αναφοράς. Η συνάρτηση του PID ελεγκτή είναι :

$$G_{pid}(s) = \frac{s^2 K_D + s K_P + K_I}{s} \quad (4.31)$$

είναι η συνάρτηση μεταφοράς του PID ελεγκτή στο πεδίο της συχνότητας. Για να επιτευχθεί ασυμπτωτική ακολούθηση εντολής θα πρέπει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου να μπορεί να ευσταθειοποιηθεί με κατάλληλη επιλογή των βαθμών ελευθερίας  $K_D, K_P, K_I$  του ελεγκτή. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου είναι της μορφής :

$$P_{cl}(s, f) = s \det(sI_n - A + BCG_{pid}(s)) = s^\mu + a_1(f)s^{\mu-1} + a_2(f)s^{\mu-2} + \dots + a_\mu(f)s^0 \quad (4.32)$$

όπου :

$$f = [f_1 \quad f_2 \quad f_3] = [K_D \quad K_P \quad K_I] \quad (4.33)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (4.32) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως ακολούθως :

$$P_{cl}(s, f) = [s^\mu \quad \dots \quad s^0] W^{**} \begin{bmatrix} 1 \\ f \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$W^{**} = [\tilde{a}^T \quad \Omega] \quad (4.35)$$

$$\tilde{a} = [1 \quad a_1(0) \quad \dots \quad a_\mu(0)] \quad (4.36)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_\mu^1 & a_\mu^2 & a_\mu^3 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

και όπου :

$$a_i^j = a_i(f) \Big|_{f_k=1(j=k), f_k=0(\forall j \neq k)} - a_i(0) \quad (4.38)$$

Για να έχει λύση το πρόβλημα της ασυμπτωτικής ακολούθησης εντολής με ταυτόχρονη αυθαίρετη τοποθέτηση των πόλων του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του συστήματος κλειστού βρόχου στους πόλους του επιθυμητού πολυωνύμου :

$$a_d(s) = s^\mu + d_{d,1}s^{\mu-1} + \dots + d_{d,0}s^0 \quad (4.39)$$

θα πρέπει να επιλύεται ως προς  $f^T$  η εξίσωση :

$$W^{**} \begin{bmatrix} 1 \\ f^T \end{bmatrix} = a_d \quad (4.40)$$

όπου :

$$a_d = [1 \quad a_{d,1} \quad \dots \quad a_{d,\mu}]^T \quad (4.41)$$

Η επιλυσιμότητα της εξίσωσης (4.40) είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη,

$$\text{rank} [W^{**} \mid a_d] = \text{rank} [W^{**}] \quad (4.42)$$

Αν ισχύει η συνθήκη (4.42) τότε ο ελεγκτής τριών όρων μπορεί να προσδιοριστεί από την ακόλουθη σχέση :

$$f^T = [0_{3 \times 1} \mid a_d] (W^{**})^T \left[ W^{**} (W^{**})^T \right]^{-1} a_d \quad (4.43)$$

Στην περίπτωση που η συνθήκη (4.42) δεν ικανοποιείται απαραίτητο είναι να εξασφαλιστεί τουλάχιστον η ευσταθειοποίηση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του συστήματος κλειστού βρόχου. Για το λόγω αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος αλγόριθμος ευσταθειοποίησης. Επομένως παρακάτω θα παρουσιαστεί το θεωρητικό υπόβαθρο που αφορά τον αλγόριθμο έτσι ώστε να διατυπωθούν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες επίλυσης του προβλήματος ευσταθειοποίησης.

Έστω ένας πίνακας  $W \in \mathbb{R}^{v \times \phi}$  τότε ο πίνακας  $W^+ \in \mathbb{R}^{(v+1) \times (\phi+1)}$  ονομάζεται άνω επαύξηση του πίνακα  $W$  αν έχει τη μορφή,

$$W^+ = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & W & \\ * & & & \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

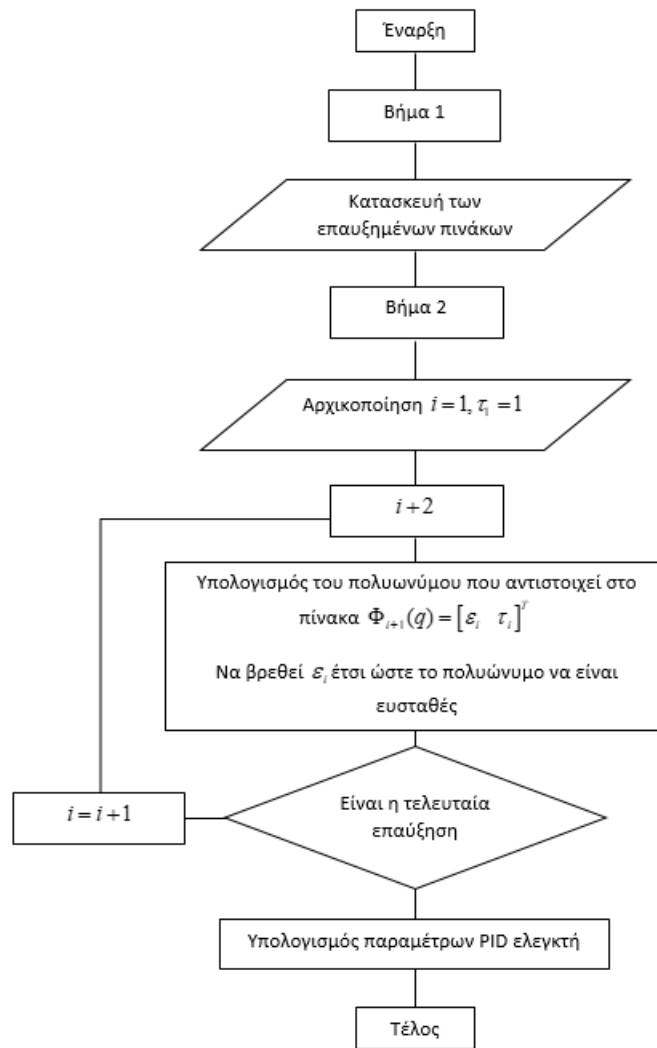
όπου με \* συμβολίζονται οποιεσδήποτε τιμές.

Ο πίνακας  $W^+$  είναι μια θετική άνω επαύξηση του πίνακα  $W$  εάν το στοιχείο  $(v+1), (\phi+1)$  είναι θετικό  $\forall q \in \mathbb{Q}$ .

Θεώρημα : Ο πίνακας  $W \in \mathbb{R}^{v \times \phi}$  είναι θετικά αντισυμμετρικός πίνακας εάν μπορεί να κατασκευαστεί από έναν θετικό πυρήνα  $\bar{c} \in \mathbb{R}^{k \times 1} ([s^k \ s^{k-1} \ \dots \ s^0] \bar{c} : \text{ευσταδές πολυώνυμο})$  με θετικές άνω ή κάτω επαυξήσεις.

Το πολυώνυμο (4.43) μπορεί να ευσταθειοποιηθεί με κατάλληλη επιλογή των βαθμών ελευθερίας  $K_p, K_I, K_D$  του ελεγκτή εάν υπάρχει  $\mu+1$ -υπό-πίνακας του πίνακα  $W^{**}$ , έστω  $W^*$  ο οποίος να είναι θετικά αντισυμμετρικός. Αντί του πίνακα  $W^{**}$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας  $W^* = W^{**}T$  όπου  $T$  είναι κατάλληλος αντιστρέψιμος πίνακας.

Αν το Θεώρημα ικανοποιείται τότε οι παράμετροι του ελεγκτή τριών όρων μπορούν να προσδιοριστούν από τον ακόλουθο αλγόριθμο :



Σχήμα 11: Διάγραμμα ροής

#### 4.2.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΛΕΓΚΤΗ ΤΡΙΩΝ ΟΡΩΝ PID ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (α)

Στην παρούσα υποενότητα θα παρουσιαστεί η εφαρμογή PID για το μονομεταβλητό μοντέλο ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC. Σύμφωνα με τα παραπάνω ο χώρος κατάστασης από την σχέση (4.1) είναι της μορφής :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + G \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  και δηλώνουν την τάξη των καταστάσεων, των εισόδων καθώς και των εξόδων του συστήματος. Όπου οι πίνακες του χώρου κατάστασης είναι :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{B_u}{J} & \frac{KR}{J\eta} \\ -\frac{K\eta}{lR} & -\frac{r}{l} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_s}{l} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{R^2}{J\eta^2}(F_2 - F_1) - \frac{M_z R}{J\eta^2} \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0]$$

Στο σύστημα που εκφράζεται από την εξίσωση (4.1) εφαρμόζεται ο ελεγκτής τριών όρων (4.31). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου σύμφωνα με την σχέση (4.32) είναι της μορφής,

$$\begin{aligned}P_{cl}(s, f) &= s \det(sI_n - A + BCG_{pid}(s)) = \\ &= s^3 + s^2 \left( \frac{B_u l + Jr + KK_D K_s R \eta}{Jl} \right) + s^1 \left( \frac{K^2 R^2 \eta^2 + K_p K_s K R \eta + B_u r}{Jl} \right) + s^0 \left( \frac{KK_I K_s R \eta}{Jl} \right)\end{aligned}\quad (4.45)$$

η ισοδύναμα,



$$P_{cl}(s, f) = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s^1 & s^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{B_u l + Jr}{Jl} & \frac{KK_s R\eta}{Jl} & 0 & 0 \\ \frac{K^2 R^2 \eta^2 + B_u r}{Jl} & 0 & \frac{KK_s R\eta}{Jl} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{KK_s R\eta}{Jl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ K_D \\ K_P \\ K_I \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Έστω το επιθυμητό πολυώνυμο έχει τη μορφή :

$$P_d(s) = s^3 + d_1 s^2 + d_2 s^1 + d_3 s^0 = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s^1 & s^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Από τη σχέση (4.46) και (4.47) οι παράμετροι του ελεγκτή τριών όρων προσδιορίζονται από την ακόλουθη σχέση :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{B_u l + Jr}{Jl} & \frac{KK_s R\eta}{Jl} & 0 & 0 \\ \frac{K^2 R^2 \eta^2 + B_u r}{Jl} & 0 & \frac{KK_s R\eta}{Jl} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{KK_s R\eta}{Jl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ K_D \\ K_P \\ K_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

ή ισοδύναμα από τη σχέση :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ K_D \\ K_P \\ K_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{B_u l + Jr}{Jl} & \frac{KK_s R\eta}{Jl} & 0 & 0 \\ \frac{K^2 R^2 \eta^2 + B_u r}{Jl} & 0 & \frac{KK_s R\eta}{Jl} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{KK_s R\eta}{Jl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Από τη σχέση (4.49) υπολογίζονται οι βαθμοί ελευθερίας του ελεγκτή ως ακολούθως :

$$K_D = \frac{Jld_1 - B_u l + Jr}{KK_s R\eta}$$

$$K_P = \frac{Jld_2 - K^2 R^2 \eta^2 - B_u r}{KK_s R\eta}$$

$$K_I = \frac{Jld_3}{KK_s R\eta}$$

Όπου επιλέγουμε τις επιθυμητές θέσεις (ιδιοτιμές)  $p_1, p_2, p_3$  στις οποίες πρέπει να μετατοπιστούν οι πόλοι. Έτσι το πολυώνυμο έχει την μορφή  $P_d(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)$  και πιο συγκεκριμένα ως,

$$P_d(s) = s^3 + (-p_1 - p_2 - p_3)s^2 + (p_3(p_1 + p_2) + p_1 p_2)s^1 + (-p_1 p_2 p_3)s^0 \quad (4.50)$$

Έτσι τα κέρδη του PID μεταβάλλονται ως εξής ,

$$K_D = \frac{Jl(-p_1 - p_2 - p_3) - B_u l + Jr}{KK_s R\eta}$$

$$K_P = \frac{Jl(p_3(p_1 + p_2) + p_1 p_2) - K^2 R^2 \eta^2 - B_u r}{KK_s R\eta}$$

$$K_I = \frac{Jl(-p_1 p_2 p_3)}{KK_s R\eta}$$

Εφαρμόζοντας τα κέρδη του ελεγκτή στο σύστημα, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου από τη σχέση θα έχει την ακόλουθη μορφή :

$$P_{cl}(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \quad (4.51)$$

#### 4.2.3 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ΜΕ ΕΛΕΓΚΤΗ ΤΡΙΩΝ ΟΡΩΝ PID ΓΙΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a)

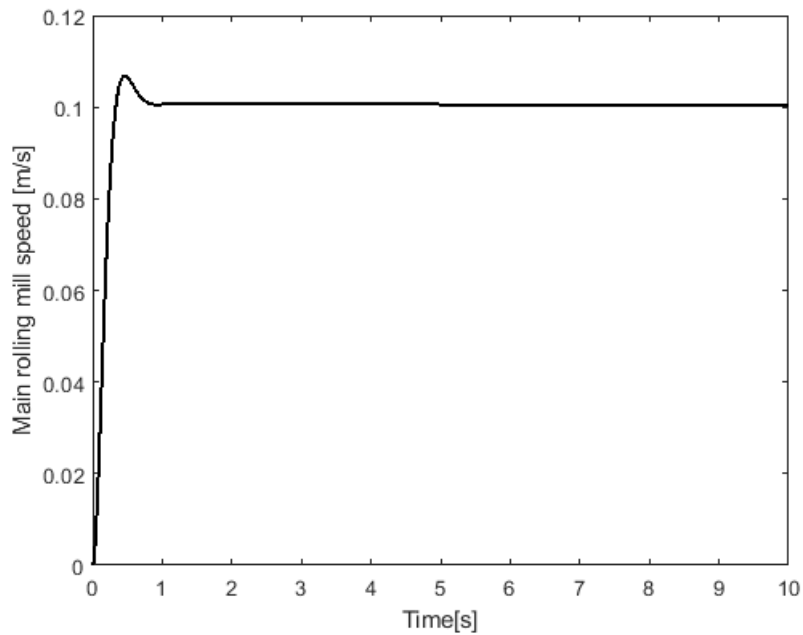
Σε αυτή την υποενότητα θα εξετάσουμε την συμπεριφορά του συστήματος κλειστού βρόχου με τον PID ελεγκτή. Επιλέγοντας οι επιθυμητοί πόλοι του συστήματος είναι στις θέσεις:  $-3, -4, -5$ , οι παράμετροι του ελεγκτή θα είναι :

$$K_D = -0.0247$$

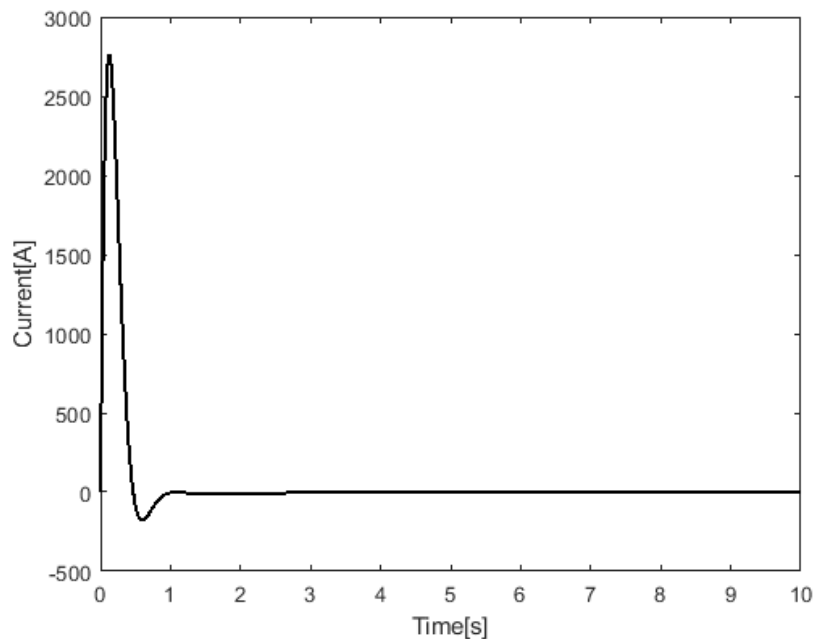
$$K_P = 2.7505$$

$$K_I = 3.5137$$

Τα σήματα διέγερσης της επιθυμητής εισόδου και της διαταραχής του μονομεταβλητού συστήματος ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών είναι  $r(t) = 0.1$  και  $\xi(t) = -0.034$  έτσι οι αποκρίσεις του διανύσματος κατάστασης για το γραμμικό σύστημα κλειστού βρόχου καθώς και το σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση δίνονται στις παρακάτω απεικονίσεις :

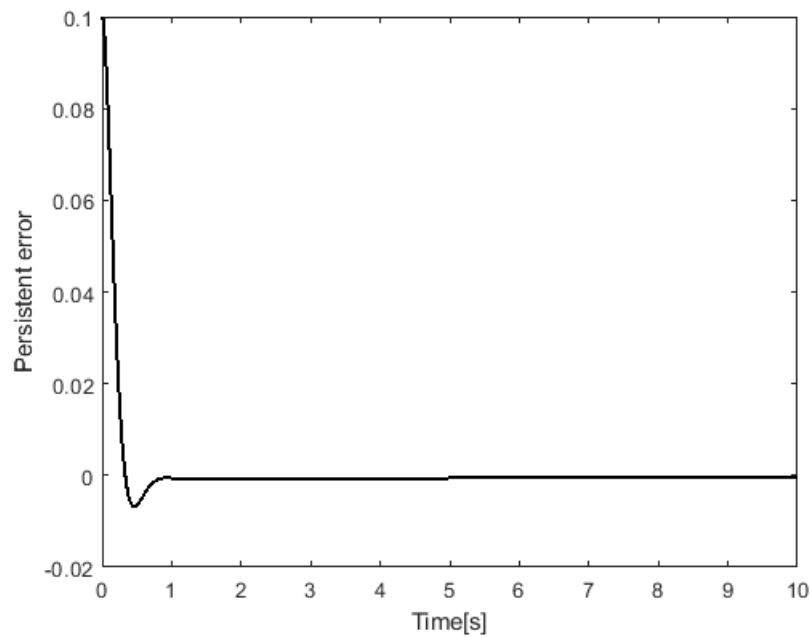


Σχήμα 12: Ταχύτητα κύριου ελασματοουργείου



Σχήμα 13: Ρεύμα ελασματοουργείου

Από τις αποκρίσεις των καταστάσεων της ταχύτητας του κύριου ελασματοουργείου καθώς και του ρεύματος, συμπεραίνουμε ότι ο PID ελεγκτής λειτούργησε ικανοποιητικά ως προς την ευστάθεια αλλά και ως προς την ακολουθία εντολής ομοίως όπως και ο ελεγκτής της υποεπένδυσης (4.1). Έτσι στο παρακάτω σχήμα (βλ. Σχήμα 14) θα παρατηρήσουμε ότι το σφάλμα μόνιμης κατάστασης τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.



Σχήμα 14: Σφάλμα μόνιμης κατάσταση

Συγκρίνοντας τις αποκρίσεις του ελεγκτή ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής σε σχέση με τον ελεγκτή τριών όρων PID, παρατηρούμε ότι όσο αφορά το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν και για τις δύο περιπτώσεις (βλ. Σχήματα 9,14). Εντούτοις αν έπρεπε να διαλέξουμε ανάμεσα από τους δύο παραπάνω ελεγκτές, ο ελεγκτής που θα διαλέγαμε δεν θα ήταν άλλος από τον ελεγκτή ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής. Ο λόγος είναι ότι συγκρίνοντας τις αποκρίσεις των ρευμάτων (βλ. Σχήματα 8,13), η μέγιστη απόλυτη τιμή του ρεύματος του ελεγκτή τριών όρων PID είναι τέσσερις φορές μεγαλύτερη από αυτή του ελεγκτή ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής. Για την κατάσταση του ρεύματος ως φυσικό μέγεθος η τιμή αυτή θα ήταν απαγορευτική σε πρακτική εφαρμογή. Στο επόμενο Κεφάλαιο θα παρουσιαστεί μια τεχνική λογικής ασφαλούς μεταγωγής, που καλείται βηματική ασφαλούς μεταγωγής. Η τεχνική αυτή γενικά μπορεί να υποβιβάσει τις μέγιστες απόλυτες τιμές των καταστάσεων σε δραματικό βαθμό. Αυτό φέρνει ως αποτέλεσμα οι διάφοροι ελεγκτές να μπορούν να υλοποιηθούν και σε πραγματικά συστήματα.

### 4.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (b)

Σε αυτή την υποενότητα θα μελετηθεί η γραμμικοποίηση του μη γραμμικού μαθηματικού μοντέλου ως προς ένα σημείο ισορροπίας έτσι ώστε να σχεδιαστεί μια παραλλαγή ( λόγω ότι το μαθηματικό μοντέλο είναι πολυμεταβλητό ) του προβλήματος της προσεγγιστικής ακολούθησης βηματικής εντολής με μηδενικό σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση για το πολυμεταβλητό μοντέλο ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC τύπου ( b ).

#### 4.3.1 ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Έστω ένα μη γραμμικό σύστημα με είσοδο περιγράφεται από την παρακάτω σχέση :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4.52)$$

όπου :

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \quad (4.53)$$

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m]^T \quad (4.54)$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^n$  και  $u \in \mathbb{R}^m$  και δηλώνουν το διάνυσμα των καταστάσεων και των εισόδων του συστήματος, επίσης τα  $n, m$  δηλώνουν το πλήθος των καταστάσεων και των εισόδων αντίστοιχα,  $f(0,0) = 0$ , ενώ συνάρτηση  $f$  έχει μερικές παραγωγούς έως και πρώτης τάξης, τόσο ως προς  $x$  όσο και ως προς  $u$ . Έστω τώρα ένα σημείο  $(x_0, u_0)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0, u_0) = 0$ . Κάθε σημείο  $(x_0, u_0)$  που ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη καλείται σημείο λειτουργίας του συστήματος.

Έστω ότι :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x=x_0, u=u_0)}, B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x=x_0, u=u_0)} \quad (4.55)$$

όπου οι πίνακες της σχέσης (4.55) ορίζονται ως εξής :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x=x_0, u=u_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x=x_0, u=u_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Προκύπτει το γραμμικό σύστημα :

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \quad (4.58)$$

όπου :

$$\delta x = x - x_0, \delta u = u - u_0 \quad (4.59)$$

αποτελεί την γραμμικοποίηση του μη γραμμικού συστήματος (4.52) γύρω από το σημείο λειτουργίας  $(x_0, u_0)$ . Το γραμμικό σύστημα (4.58) χρησιμοποιείται στην πράξη για τη σχεδίαση ελεγκτή για το μη γραμμικό σύστημα (4.52). Συγκεκριμένα αν  $\delta u(t)$  νόμος ελέγχου που επιτυγχάνει επιθυμητή συμπεριφορά για το γραμμικό σύστημα (4.58), τότε η εφαρμογή του νόμου ελέγχου  $u(t) = \delta u(t) + u_0$  στο μη γραμμικό σύστημα (4.52) αναμένεται να πετύχει επιθυμητή συμπεριφορά του μη γραμμικού συστήματος, υπό την προϋπόθεση ότι οι τροχιές  $(x(t), u(t))$  του συστήματος παραμένουν αρκετά κοντά στο σημείο λειτουργίας  $(x_0, u_0)$ . Το εύρος της περιοχής λειτουργίας όπου ισχύει προαναφερόμενη προσέγγιση δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί και εξαρτάται από την μορφή της συνάρτησης  $f$ . Παρόλα αυτά, παραπάνω τεχνική σχεδίασης ελεγκτών για μη γραμμικά συστήματα χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη. Αυτό συμβαίνει βασικά για

δύο λόγους, ο ένας εκ των δύο είναι ότι διευκολύνει σημαντικά την σχεδίαση του ελεγκτή, καθώς το πρόβλημα ανάγεται στη σχεδίαση ελεγκτή για γραμμικό σύστημα, όπου υπάρχουν πολλές διαθέσιμες τεχνικές και ο δεύτερος λόγος είναι ότι σε πολλές περιπτώσεις το μη γραμμικό μοντέλο δεν είναι διαθέσιμο, ενώ το αντίστοιχο γραμμικό προσδιορίζεται με εφαρμογή διαδικασίας ταυτοποίησης γύρω από το σημείο λειτουργίας.

Για το πολυμεταβλητό σύστημα αναστρέψιμων ταινιών τύπου (b) η σχέση (4.52) μεταβάλλεται ως εξής :

$$\dot{x} = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u_1, u_2, u_3) \quad (4.60)$$

όπου :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ V_1 \\ V_2 \\ F_3 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Έτσι το σύστημα εξισώσεων της υποενοτήτας (3.2) από τις σχέσεις (4.61), (4.62) η σχέση (4.60) προσδιορίζεται αναλυτικά ως εξής :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}x_3x_1 + \frac{ES}{L}(x_3 - x_2) \\ \theta_1x_2 + \theta_2x_1 + \theta_3u_1 \\ \frac{gr_2^2}{J_2}(x_4 - x_1) - \frac{1}{\tau_{em2}}x_3 + \frac{r_2}{\tau_{em2}K_2}u_2 \\ -\frac{1}{L}x_3x_4 + \frac{ES}{L}(x_5 - x_3) \\ -\theta_5x_5 - \theta_4x_4 + \theta_6u_3 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$



Υποθέτοντας ότι το μοντέλο της σχέσης (4.63) βρίσκεται σε ισορροπία και λειτουργεί σε συγκεκριμένες συνθήκες για τις εισόδους  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$  καθώς και για τις μεταβλητές κατάστασης  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5$  μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί η γραμμικοποιημένη μορφή του συστήματος σύμφωνα με τις σχέσεις (4.58), (4.59).

Άρα είναι της μορφής :

$$\delta \dot{x} = A_{lin} \delta x + B_{lin} \delta u \quad (4.64)$$

όπου :

$$\delta x = [x - \bar{x}] = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ x_3 - \bar{x}_3 \\ x_4 - \bar{x}_4 \\ x_5 - \bar{x}_5 \end{bmatrix}, \delta u = \begin{bmatrix} u_1 - \bar{u}_1 \\ u_2 - \bar{u}_2 \\ u_3 - \bar{u}_3 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

και όπου :

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{x}_3}{L} & -\frac{ES}{L} & \left( \frac{ES}{L} - \frac{\bar{x}_1}{L} \right) & 0 & 0 \\ \theta_2 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{gr_2^2}{J_2} & 0 & -\frac{1}{\tau_{em2}} & \frac{gr_2^2}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\left( \frac{\bar{x}_4}{L} + \frac{ES}{L} \right) & -\frac{\bar{x}_3}{L} & \frac{ES}{L} \\ 0 & 0 & 0 & \theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$B_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_2}{\tau_{em2}K_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_6 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Θεωρώντας ως δεδομένες τις ονομαστικές τιμές λειτουργίας των εισόδων, οι ονομαστικές τιμές των μεταβλητών κατάστασης υπολογίζονται από την λύση της εξίσωσης :

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \quad (4.68)$$

Ενδεικτικά, υποθέτοντας ότι οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου της υποενότητας (3.2) είναι όπως παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους καθώς επίσης ότι :

$$u_1 = 0[V], u_2 = 0[V], u_3 = 0[V]$$

προκύπτει ότι οι ονομαστικές τιμές των μεταβλητών κατάστασης είναι :

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5 = 0 \left[ N, \frac{m}{s}, \frac{m}{s}, N, \frac{m}{s} \right]$$

Έτσι οι σχέσεις (4.66), (4.67) μεταβάλλονται ως εξής :

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{ES}{L} & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ \theta_2 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{gr_2^2}{J_2} & 0 & -\frac{1}{\tau_{em2}} & \frac{gr_2^2}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & \frac{ES}{L} \\ 0 & 0 & 0 & \theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$B_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_2}{\tau_{em2}K_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_6 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

#### 4.3.2 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (b)

Από τις παραπάνω σχέσεις της υποενότητα (4.3.1) ο χώρος κατάστασης του γραμμικοποιημένου πολυμεταβλητού συστήματος αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC τύπου (b) διαμορφώνεται ως εξής :

$$\begin{aligned} \delta\dot{x} &= A_{lin}\delta x + B_{lin}\delta u \\ y &= C\delta x \end{aligned} \quad (4.71)$$

όπου :

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{ES}{L} & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ \theta_2 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{gr_2^2}{J_2} & 0 & -\frac{1}{\tau_{em2}} & \frac{gr_2^2}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & \frac{ES}{L} \\ 0 & 0 & 0 & \theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix}$$

$$B_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_2}{\tau_{em2}K_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και όπου  $\delta x \in \mathbb{R}^n, \delta u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$ .

Στην περίπτωση μας επειδή το πλήθος των εισόδων ισούται με τρία ( $m=3$ ) θα πρέπει να οριστούν τρία σήματα αναφοράς όπου είναι της μορφής :

$$r(t) = \begin{bmatrix} r_{ref1} \\ r_{ref2} \\ r_{ref3} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Έτσι ορίζοντας τα σφάλματα εξόδου με τα σήματα αναφοράς έχουμε :

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (4.73)$$

όπου το  $e(t)$  ισούται με :

$$e(t) = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ref1} - y_1 \\ r_{ref2} - y_2 \\ r_{ref3} - y_3 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Παραγωγίζοντας το σφάλμα ως προς το χρόνο λαμβάνεται η σχέση :

$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - \dot{y}(t) = -C\delta\dot{x}(t) \quad (4.75)$$

Παραγωγίζοντας το σύστημα ανοικτού βρόχου (4.71) ως προς το χρόνο και χρησιμοποιώντας την (4.75) προκύπτει το ακόλουθο επαυξημένο με την δυναμική εξίσωση του σφάλματος, σύστημα :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \tilde{A}_{lin} \begin{bmatrix} z(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \tilde{B}_{lin} w(t) \quad (4.76)$$

όπου  $z = \delta\dot{x}(t)$ ,  $w(t) = \delta\dot{u}(t)$  και τα  $\tilde{A}_{lin}$ ,  $\tilde{B}_{lin}$  να ορίζονται ως :

$$\tilde{A}_{lin} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{lin} & 0_{n \times m} \\ -C & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

$$\tilde{B}_{lin} = \begin{bmatrix} B_{lin} \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

και αν το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση (4.76) είναι ελέγξιμο δηλαδή,

$$\text{rank}[U_\varepsilon] = n + m \quad (4.79)$$

όπου  $U_\varepsilon = [\tilde{B}_{lin} \quad \tilde{A}_{lin}\tilde{B}_{lin} \quad \dots \quad \tilde{A}_{lin}^{n+m-1}\tilde{B}_{lin}]$  είναι ο πίνακας ελεγχιμότητας του επαυξημένου συστήματος, τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα σήμα ανάδρασης στο επαυξημένο σύστημα ανοικτού βρόχου (4.76) εφαρμόζεται στατικός ελεγκτής ανατροφοδότησης κατάστασης της μορφής :

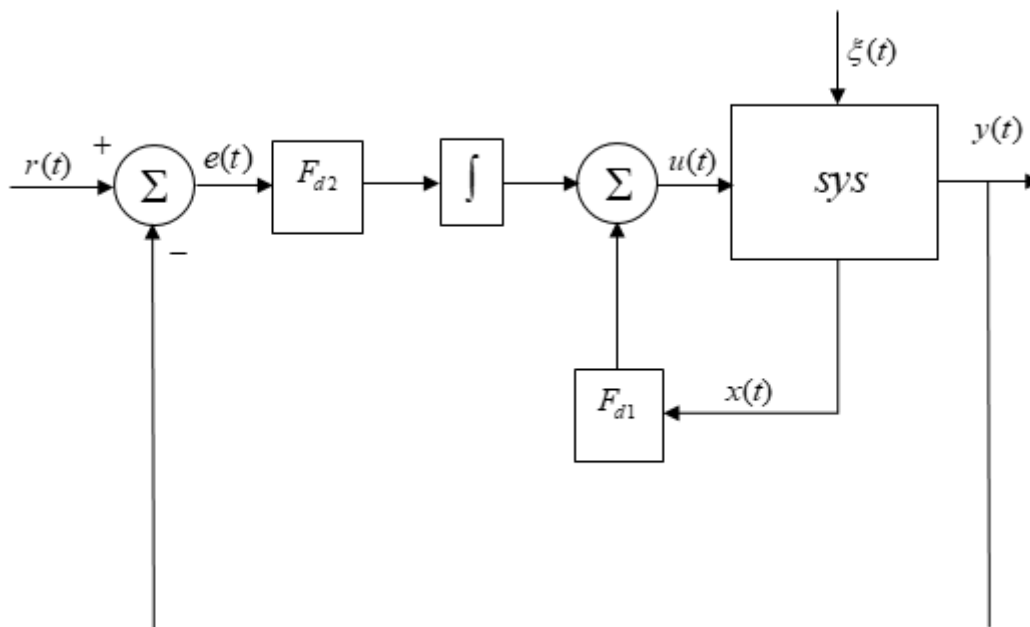
$$w(t) = -F_{d1}z(t) - F_{d2}e(t) \quad (4.80)$$

όπου  $F_{d1} \in \mathbb{R}^{m \times n}, F_{d2} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Το σήμα εισόδου του αυθεντικού συστήματος (4.71) προσδιορίζεται από την ολοκλήρωση της σχέσης (4.80) ως εξής :

$$u(t) = -F_{d1}x(t) - F_{d2} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4.81)$$

Το χονδρικό διάγραμμα του παραπάνω ελεγκτή φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα :



Σχήμα 15: Χονδρικό διάγραμμα ελεγκτή ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής

#### 4.3.3 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (B)

Στην παρούσα υποενότητα θα εξετάσουμε την συμπεριφορά του συστήματος κλειστού βρόχου με τον νόμο ελέγχου ακολούθησης βηματικής εντολής. Εφαρμόζοντας στον νόμο ελέγχου της σχέσης (4.81) στο σύστημα όπως αυτό περιγράφεται από τη σχέση (4.71) προκύπτει το παρακάτω σύστημα κλειστού βρόχου :

$$\dot{x}(t) = (A_{lin} - B_{lin}F_{d1})x(t) - B_{lin}F_{d2} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4.82)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.83)$$

όπου :

$$F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$F_{d2} = \begin{bmatrix} f_{1,6} & f_{1,7} & f_{1,8} \\ f_{2,6} & f_{2,7} & f_{2,8} \\ f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

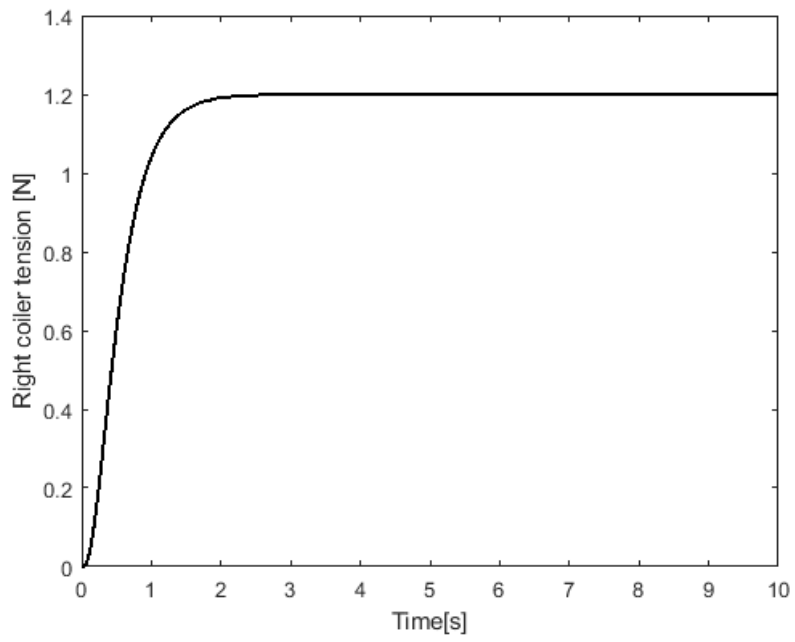
$$e(t) = y(t) - w(t) \quad (4.86)$$

Όταν οι επιθυμητοί πόλοι του συστήματος είναι στις θέσεις:  $-3, -4, -5, -6, -7, -13, -14, -15$ , οι παράμετροι του ελεγκτή θα είναι :

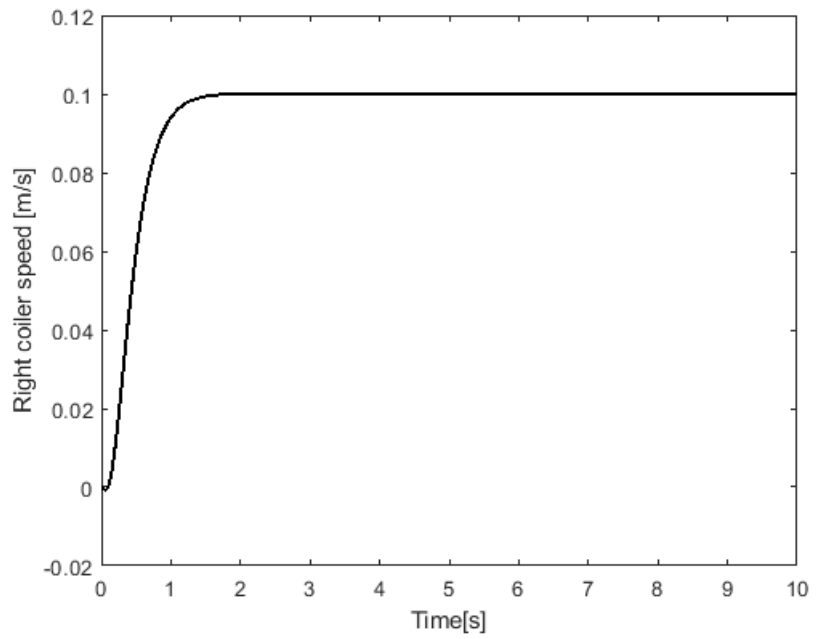
$$F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -260.02 & 150000.67 & -580000.77 & 710.34 & 420000.094 \\ -0.45 & 270.67 & -1000.95 & 1.256 & 720.98 \\ -270.66 & 160000.34 & -580000.78 & 710.57 & 420000.539 \end{bmatrix}$$

$$F_{d2} = \begin{bmatrix} f_{1,6} & f_{1,7} & f_{1,8} \\ f_{2,6} & f_{2,7} & f_{2,8} \\ f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 970.87 & 15000 & -270.99 \\ 1.7 & 25 & -4.78 \\ 970.47 & 15000 & -270.63 \end{bmatrix}$$

Τα σήματα διέγερσης της επιθυμητής εισόδου του πολυμεταβλητού συστήματος ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών είναι  $r(t) = [F_{1ref} \quad V_{2ref} \quad F_{3ref}]^T = [1.2 \quad 0.1 \quad 1.1]^T$  έτσι οι αποκρίσεις του διανύσματος κατάστασης για το μη γραμμικό σύστημα κλειστού βρόχου δίνονται στις παρακάτω απεικονίσεις :

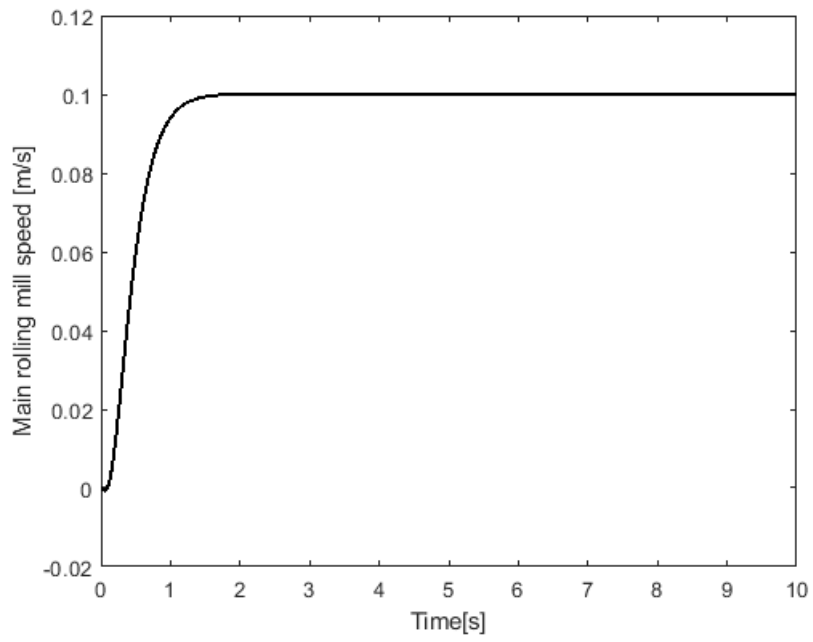


Σχήμα 16: Τάνυση εκτυλικτικού μηχανισμού

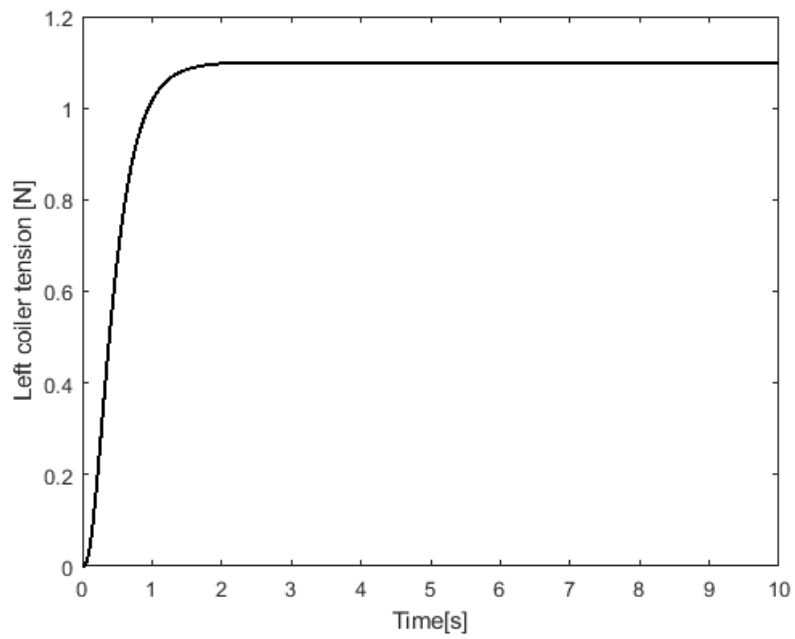


Σχήμα 17: Ταχύτητα εκτυλικτικού μηχανισμού

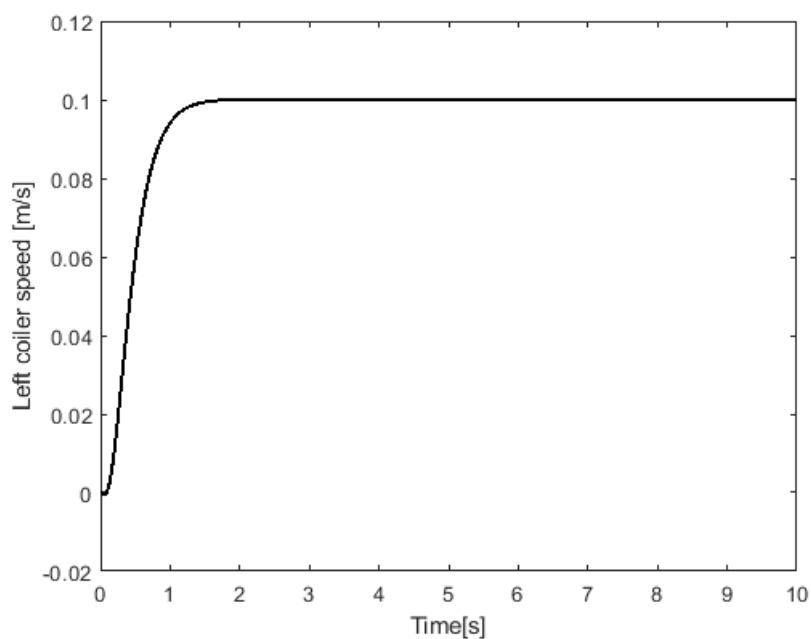




Σχήμα 18: Ταχύτητα κύριου ελασματοργείου

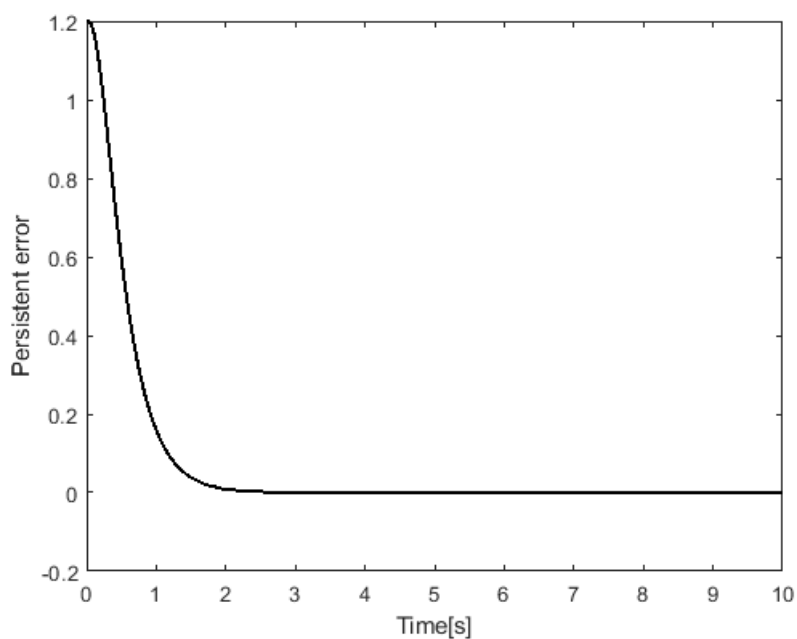


Σχήμα 19: Τάνυση τυλικτικού μηχανισμού

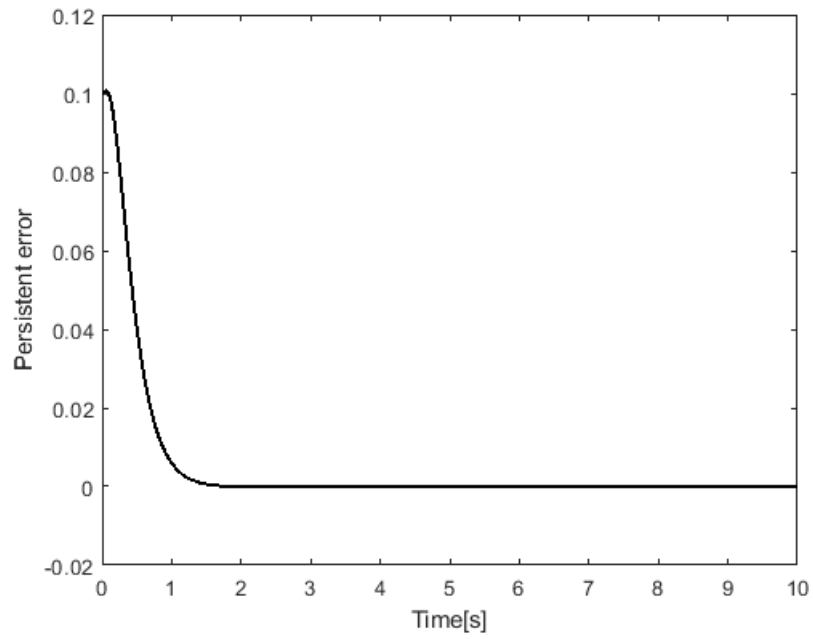


Σχήμα 20: Ταχύτητα τυλικτικού μηχανισμού

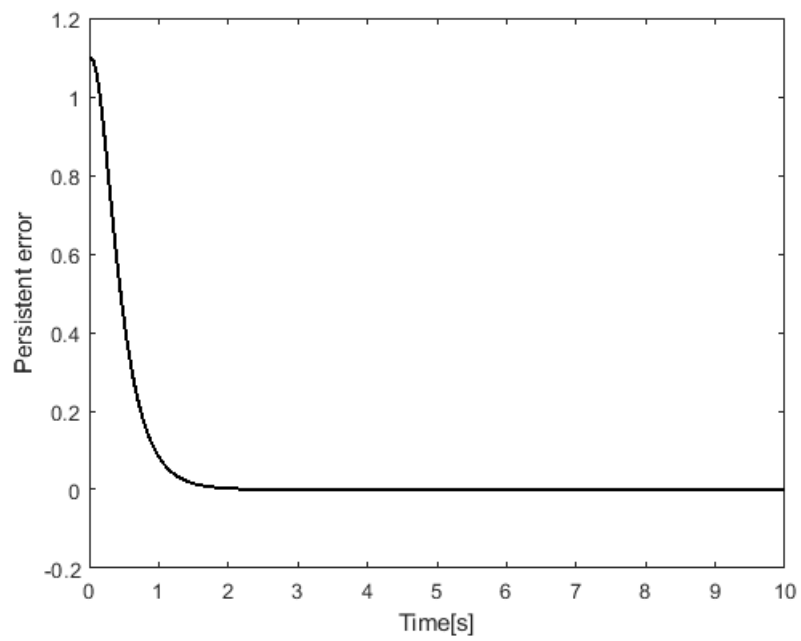
Από τις αποκρίσεις των καταστάσεων των ταχυτήτων καθώς και των τανύσεων του μη γραμμικού συστήματος, συμπεραίνουμε ότι ο πολυμεταβλητός ελεγκτής ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής λειτούργησε ικανοποιητικά στο μη γραμμικό σύστημα ως προς την ευστάθεια αλλά και ως προς την ακολούθηση των εντολών  $F_{1ref}, V_{2ref}, F_{3ref}$ . Έτσι στα παρακάτω σχήματα ( βλ. Σχήμα 30,31,32 ) θα παρατηρήσουμε ότι τα σφάλματα μόνιμης κατάστασης τείνουν ασυμπτωτικά στο μηδέν. Στο επόμενο κεφάλαιο



Σχήμα 21: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης



Σχήμα 22: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης



Σχήμα 23: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης

#### 4.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c)

Σε αυτή την υποενότητα θα μελετηθεί η γραμμικοποίηση του πιο σύνθετου μη γραμμικού μαθηματικού μοντέλου ως προς ένα σημείο ισορροπίας έτσι ώστε να σχεδιαστεί μια παραλλαγή ( λόγω ότι το μαθηματικό μοντέλο είναι πολυμεταβλητό) του προβλήματος της προσεγγιστικής ακολούθησης βηματικής εντολής με μηδενικό σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση για το πολυμεταβλητό μοντέλο ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC τύπου (c).

##### 4.4.1 ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Έστω ένα μη γραμμικό σύστημα με είσοδο περιγράφεται από την παρακάτω σχέση :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4.87)$$

όπου :

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \quad (4.88)$$

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m]^T \quad (4.89)$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^n$  και  $u \in \mathbb{R}^m$  και δηλώνουν το διάνυσμα των καταστάσεων και των εισόδων του συστήματος, επίσης τα  $n, m$  δηλώνουν το πλήθος των καταστάσεων και των εισόδων αντίστοιχα,  $f(0,0) = 0$ , ενώ συνάρτηση  $f$  έχει μερικές παραγωγούς έως και πρώτης τάξης, τόσο ως προς  $x$  όσο και ως προς  $u$ . Έστω τώρα ένα σημείο  $(x_0, u_0)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0, u_0) = 0$ . Κάθε σημείο  $(x_0, u_0)$  που ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη καλείται σημείο λειτουργίας του συστήματος.

Έστω :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x=x_0, u=u_0)}, B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x=x_0, u=u_0)} \quad (4.90)$$

όπου οι πίνακες της σχέσης (4.55) ορίζονται ως εξής :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x=x_0, u=u_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x=x_0, u=u_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

Προκύπτει το γραμμικό σύστημα :

$$\delta \dot{x} = A \delta x + B \delta u \quad (4.93)$$

όπου :

$$\delta x = x - x_0, \delta u = u - u_0 \quad (4.94)$$

αποτελεί την γραμμικοποίηση του μη γραμμικού συστήματος (4.87) γύρω από το σημείο λειτουργίας  $(x_0, u_0)$ . Το γραμμικό σύστημα (4.93) χρησιμοποιείται στην πράξη για τη σχεδίαση ελεγκτή για το μη γραμμικό σύστημα. Συγκεκριμένα αν  $\delta u(t)$  νόμος ελέγχου που επιτυγχάνει επιθυμητή συμπεριφορά για το γραμμικό σύστημα, τότε η εφαρμογή του νόμου ελέγχου  $u(t) = \delta u(t) + u_0$  στο μη γραμμικό σύστημα αναμένεται να πετύχει επιθυμητή συμπεριφορά του μη γραμμικού συστήματος, υπό την προϋπόθεση ότι οι τροχιές  $(x(t), u(t))$  του συστήματος παραμένουν αρκετά κοντά στο σημείο λειτουργίας  $(x_0, u_0)$ . Το εύρος της περιοχής λειτουργίας όπου ισχύει προαναφερόμενη προσέγγιση δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί και εξαρτάται από την μορφή της συνάρτησης  $f$ . Παρόλα αυτά, παραπάνω τεχνική σχεδίασης ελεγκτών για μη γραμμικά συστήματα χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη. Αυτό συμβαίνει βασικά για δύο λόγους, ο ένας εκ των δύο είναι ότι διευκολύνει σημαντικά την σχεδίαση του ελεγκτή, καθώς το πρόβλημα

ανάγεται στη σχεδίαση ελεγκτή για γραμμικό σύστημα, όπου υπάρχουν πολλές διαθέσιμες τεχνικές και ο δεύτερος λόγος είναι ότι σε πολλές περιπτώσεις το μη γραμμικό μοντέλο δεν είναι διαθέσιμο, ενώ το αντίστοιχο γραμμικό προσδιορίζεται με εφαρμογή διαδικασίας ταυτοποίησης γύρω από το σημείο λειτουργίας.

Για το πολυμεταβλητό σύστημα αναστρέψιμων ταινιών τύπου (c) η σχέση (4.87) μεταβάλλεται ως εξής :

$$\dot{x} = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, u_1, u_2, u_3) \quad (4.95)$$

όπου :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ V_1 \\ I_1 \\ V_2 \\ I_2 \\ F_3 \\ V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

Παρατηρείται ότι οι δυναμικές εξισώσεις των ροπών αδράνειας ( $J_1, J_3$ ) καθώς και των ακτινών ( $R_1, R_3$ ) του αριστερού και δεξιού μηχανισμού (left & right coiler) δεν συνυπολογίζονται στην γραμμικοποίηση του μη γραμμικού συστήματος, ο λόγος είναι ότι οι καταστάσεις είναι μη ελέγξιμες και εξαρτώνται αποκλειστικά από τις ταχύτητες ( $V_1, V_3$ ) του συστήματος. Για το λόγω αυτό αντικαθίστανται με σταθερούς παραμέτρους. Έτσι το σύστημα εξισώσεων της υποενοότητας (3.3) από τις σχέσεις (4.96), (4.97) η σχέση (4.95) προσδιορίζεται αναλυτικά ως εξής :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L} [x_4(1 - \chi_0(1 + K_\chi x_1)) - x_2] \\ \frac{K_1 R_1}{J_1 \eta_1} x_3 + \frac{R_1^2}{J_1 \eta_1^2} x_1 - \left( \frac{B_{u1}}{J_1} + \frac{H}{2\pi R_1^2} x_2 \right) x_2 \\ \frac{Ks_1}{l_1} u_1 - \frac{K_1 \eta_1}{l_1 R_1} x_2 - \frac{r_1}{l_1} x_3 \\ \frac{K_2 R_2}{J_2 \eta_2} x_5 + \frac{R_2^2}{J_2 \eta_2^2} (x_6 - x_1) - \frac{B_{u2}}{J_2} x_4 - \frac{M_z R_2}{J_2 \eta_2^2} \\ \frac{Ks_2}{l_2} u_2 - \frac{K_2 \eta_2}{l_2 R_2} x_4 - \frac{r_2}{l_2} x_5 \\ \frac{EA_2}{L} [x_7 - x_4(1 + \delta_0(1 + K_\delta x_6))] \\ \frac{K_3 R_3}{J_3 \eta_3} x_8 - \frac{R_3^2}{J_3 \eta_3^2} x_6 - \left( \frac{B_{u3}}{J_3} - \frac{h}{2\pi R_3^2} x_7 \right) x_7 \\ \frac{Ks_3}{l_3} u_3 - \frac{K_3 \eta_3}{l_3 R_3} x_7 - \frac{r_3}{l_3} x_8 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

Υποθέτοντας ότι το μοντέλο της σχέσης (4.98) βρίσκεται σε ισορροπία και λειτουργεί σε συγκεκριμένες συνθήκες για τις εισόδους  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$  καθώς και για τις μεταβλητές κατάστασης  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8$  μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί η γραμμικοποιημένη μορφή του συστήματος σύμφωνα με τις σχέσεις (4.93), (4.94).

Άρα είναι της μορφής :

$$\delta \dot{x} = A_{lin} \delta x + B_{lin} \delta u \quad (4.99)$$

όπου :

$$\delta x = [x - \bar{x}] = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ x_3 - \bar{x}_3 \\ x_4 - \bar{x}_4 \\ x_5 - \bar{x}_5 \\ x_6 - \bar{x}_6 \\ x_7 - \bar{x}_7 \\ x_8 - \bar{x}_8 \end{bmatrix}, \delta u = \begin{bmatrix} u_1 - \bar{u}_1 \\ u_2 - \bar{u}_2 \\ u_3 - \bar{u}_3 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

και όπου :

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} alin_{1,1} & alin_{1,2} & 0 & alin_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ alin_{2,1} & alin_{2,2} & alin_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & alin_{3,2} & alin_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ alin_{4,1} & 0 & 0 & alin_{4,4} & alin_{4,5} & alin_{4,6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & alin_{5,4} & alin_{5,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & alin_{6,4} & 0 & alin_{6,6} & alin_{6,7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & alin_{7,6} & alin_{7,7} & alin_{7,8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & alin_{8,7} & alin_{8,8} \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

$$B_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ blin_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & blin_{5,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & blin_{8,3} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

όπου :



$$\begin{aligned}
alin_{1,1} &= -\frac{(EA_1 K_\chi \chi_0)}{L} \bar{x}_4 \\
alin_{1,2} &= -\frac{EA_1}{L} \\
alin_{1,4} &= -\frac{(EA_1 (\chi_0 (K_\chi \bar{x}_1 + 1) - 1))}{L} \\
alin_{2,1} &= \frac{R_1^2}{J_1 \eta_1^2} \\
alin_{2,2} &= -\left( \frac{B_{u1}}{J_1} + \frac{H}{\pi R_1^2} \bar{x}_2 \right) \\
alin_{2,3} &= \frac{K_1 R_1}{J_1 \eta_1} \\
alin_{3,2} &= -\frac{K_1 \eta_1}{l_1 R_1} \\
alin_{3,3} &= -\frac{r_1}{l_1} \\
alin_{4,1} &= -\frac{R_2^2}{J_2 \eta_2^2} \\
alin_{4,4} &= -\frac{B_{u2}}{J_2} \\
alin_{4,5} &= \frac{K_2 R_2}{J_2 \eta_2} \\
alin_{4,6} &= \frac{R_2^2}{J_2 \eta_2^2} \\
alin_{5,4} &= -\frac{K_2 \eta_2}{l_2 R_2} \\
alin_{5,4} &= -\frac{r_2}{l_2} \\
alin_{6,4} &= -\frac{EA_2 (1 + \delta_0 (1 + K_\delta \bar{x}_6))}{L} \\
alin_{6,6} &= \frac{EA_2 \delta_0 K_\delta}{L} \bar{x}_4 \\
alin_{6,7} &= \frac{EA_2}{L} \\
alin_{7,6} &= -\frac{R_3^2}{J_3 \eta_3^2} \\
alin_{7,7} &= -\left( \frac{B_{u3}}{J_3} - \frac{h}{\pi R_3^2} \bar{x}_7 \right) \\
alin_{7,8} &= \frac{K_3 R_3}{J_3 \eta_3}
\end{aligned}$$

$$alin_{8,7} = -\frac{K_3 \eta_3}{l_3 R_3}$$

$$alin_{8,8} = -\frac{r_3}{l_3}$$

$$blin_{3,1} = \frac{Ks_1}{l_1}$$

$$blin_{5,2} = \frac{Ks_2}{l_2}$$

$$blin_{8,3} = \frac{Ks_3}{l_3}$$

Θεωρώντας ως δεδομένες τις ονομαστικές τιμές λειτουργίας των εισόδων, οι ονομαστικές τιμές των μεταβλητών κατάστασης υπολογίζονται από την λύση της εξίσωσης :

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \quad (4.103)$$

Ενδεικτικά, υποθέτοντας ότι οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου της υποενότητας (3.3) είναι όπως παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους καθώς επίσης ότι :

$$u_1 = 0[V], u_2 = 0[V], u_3 = 0[V]$$

προκύπτει ότι οι ονομαστικές τιμές των μεταβλητών κατάστασης είναι :

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8 = 0 \left[ N, \frac{m}{s}, A, \frac{m}{s}, A, N, \frac{m}{s}, A \right]$$

Έτσι οι σχέσεις (4.101), (4.102) μεταβάλλονται ως εξής :

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} \bar{a}lin_{1,1} & \bar{a}lin_{1,2} & 0 & \bar{a}lin_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}lin_{2,1} & \bar{a}lin_{2,2} & \bar{a}lin_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a}lin_{3,2} & \bar{a}lin_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}lin_{4,1} & 0 & 0 & \bar{a}lin_{4,4} & \bar{a}lin_{4,5} & \bar{a}lin_{4,6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}lin_{5,4} & \bar{a}lin_{5,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}lin_{6,4} & 0 & \bar{a}lin_{6,6} & \bar{a}lin_{6,7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}lin_{7,6} & \bar{a}lin_{7,7} & \bar{a}lin_{7,8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}lin_{8,7} & \bar{a}lin_{8,8} \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

$$B_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{b}lin_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{b}lin_{5,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{b}lin_{8,3} \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

όπου :

$$\bar{a}lin_{1,1} = 0$$

$$\bar{a}lin_{1,2} = -\frac{EA_1}{L}$$

$$\bar{a}lin_{1,4} = -\frac{(EA_1(\chi_0 - 1))}{L}$$

$$\bar{a}lin_{2,1} = \frac{R_1^2}{J_1\eta_1^2}$$

$$\bar{a}lin_{2,2} = -\frac{B_{u1}}{J_1}$$

$$\bar{a}lin_{2,3} = \frac{K_1R_1}{J_1\eta_1}$$

$$\bar{a}lin_{3,2} = -\frac{K_1\eta_1}{l_1R_1}$$

$$\bar{a}lin_{3,3} = -\frac{r_1}{l_1}$$

$$\bar{a}lin_{4,1} = -\frac{R_2^2}{J_2\eta_2^2}$$

$$\bar{a}lin_{4,4} = -\frac{B_{u2}}{J_2}$$

$$\bar{a}lin_{4,5} = \frac{K_2R_2}{J_2\eta_2}$$

$$\bar{a}lin_{4,6} = \frac{R_2^2}{J_2\eta_2^2}$$

$$\bar{a}lin_{5,4} = -\frac{K_2\eta_2}{l_2R_2}$$

$$\bar{a}lin_{5,4} = -\frac{r_2}{l_2}$$

$$\bar{a}lin_{6,4} = -\frac{EA_2(1 + \delta_0)}{L}$$

$$\bar{a}lin_{6,6} = 0$$

$$\bar{a}lin_{6,7} = \frac{EA_2}{L}$$

$$\bar{a}lin_{7,6} = -\frac{R_3^2}{J_3\eta_3^2}$$

$$\bar{a}lin_{7,7} = -\frac{B_{u3}}{J_3}$$

$$\bar{a}lin_{7,8} = \frac{K_3R_3}{J_3\eta_3}$$

$$\bar{a}lin_{8,7} = -\frac{K_3 \eta_3}{l_3 R_3}$$

$$\bar{a}lin_{8,8} = -\frac{r_3}{l_3}$$

$$\bar{b}lin_{3,1} = \frac{Ks_1}{l_1}$$

$$\bar{b}lin_{5,2} = \frac{Ks_2}{l_2}$$

$$\bar{b}lin_{8,3} = \frac{Ks_3}{l_3}$$

#### 4.4.2 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c)

Από τις παραπάνω σχέσεις της υποενότητα (4.3.1) ο χώρος κατάστασης του γραμμικοποιημένου πολυμεταβλητού συστήματος αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC τύπου (c) διαμορφώνεται ως εξής :

$$\delta \dot{x} = A_{lin} \delta x + B_{lin} \delta u \quad (4.106)$$

$$y = C \delta x$$

όπου :

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} \bar{a}lin_{1,1} & \bar{a}lin_{1,2} & 0 & \bar{a}lin_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}lin_{2,1} & \bar{a}lin_{2,2} & \bar{a}lin_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a}lin_{3,2} & \bar{a}lin_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}lin_{4,1} & 0 & 0 & \bar{a}lin_{4,4} & \bar{a}lin_{4,5} & \bar{a}lin_{4,6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}lin_{5,4} & \bar{a}lin_{5,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}lin_{6,4} & 0 & \bar{a}lin_{6,6} & \bar{a}lin_{6,7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}lin_{7,6} & \bar{a}lin_{7,7} & \bar{a}lin_{7,8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}lin_{8,7} & \bar{a}lin_{8,8} \end{bmatrix}$$

$$B_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{b}lin_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{b}lin_{5,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{b}lin_{8,3} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και όπου  $\delta x \in \mathbb{R}^n, \delta u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$ .

Στην περίπτωση μας επειδή το πλήθος των εισόδων ισούται με τρία ( $m=3$ ) θα πρέπει να οριστούν τρία σήματα αναφοράς όπου είναι της μορφής :

$$r(t) = \begin{bmatrix} r_{ref1} \\ r_{ref2} \\ r_{ref3} \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Έτσι ορίζοντας τα σφάλματα εξόδου με τα σήματα αναφοράς έχουμε :

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (4.108)$$

όπου το  $e(t)$  ισούται με :

$$e(t) = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ref1} - y_1 \\ r_{ref2} - y_2 \\ r_{ref3} - y_3 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

Παραγωγίζοντας το σφάλμα ως προς το χρόνο λαμβάνεται η σχέση :

$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - \dot{y}(t) = -C\delta\dot{x}(t) \quad (4.110)$$

Παραγωγίζοντας το σύστημα ανοικτού βρόχου (4.106) ως προς το χρόνο και χρησιμοποιώντας την (4.110) προκύπτει το ακόλουθο επαυξημένο με την δυναμική εξίσωση του σφάλματος, σύστημα :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \tilde{A}_{lin} \begin{bmatrix} z(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \tilde{B}_{lin} w(t) \quad (4.111)$$

όπου  $z = \delta\dot{x}(t)$ ,  $w(t) = \delta\dot{u}(t)$  και τα  $\tilde{A}_{lin}$ ,  $\tilde{B}_{lin}$  να ορίζονται ως :

$$\tilde{A}_{lin} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{lin} & 0_{n \times m} \\ -C & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

$$\tilde{B}_{lin} = \begin{bmatrix} B_{lin} \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

και αν το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση (4.76) είναι ελέγξιμο δηλαδή,

$$rank[U_\varepsilon] = n + m \quad (4.114)$$

όπου  $U_\varepsilon = [\tilde{B}_{lin} \quad \tilde{A}_{lin}\tilde{B}_{lin} \quad \dots \quad \tilde{A}_{lin}^{n+m-1}\tilde{B}_{lin}]$  είναι ο πίνακας ελεγχιμότητας του επαυξημένου συστήματος, τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα σήμα ανάδρασης στο

επαυξημένο σύστημα ανοικτού βρόχου (4.106) εφαρμόζεται στατικός ελεγκτής ανατροφοδότησης κατάστασης της μορφής :

$$w(t) = -F_{d1}z(t) - F_{d2}e(t) \quad (4.115)$$

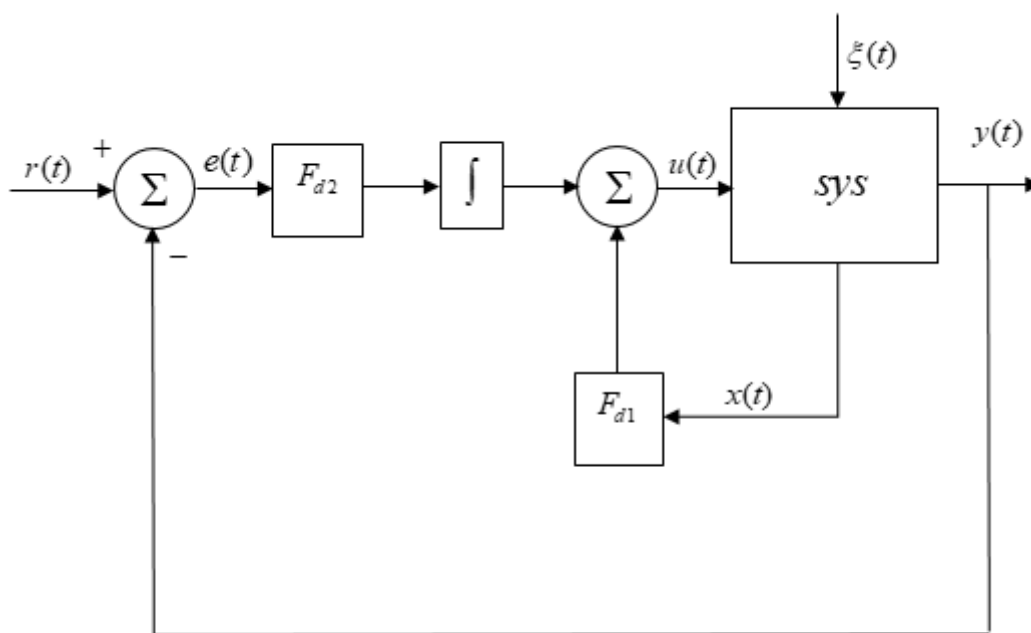
όπου  $F_{d1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $F_{d2} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Το σήμα εισόδου του αυθεντικού συστήματος (4.106) προσδιορίζεται από την ολοκλήρωση της σχέσης (4.115) ως εξής :

$$u(t) = -F_{d1}x(t) - F_{d2} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4.116)$$

Το χονδρικό διάγραμμα του παραπάνω ελεγκτή φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα :





Σχήμα 24: Χονδρικό διάγραμμα ελεγκτή ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής

#### 4.4.3 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c)

Στην παρούσα υποενότητα θα εξετάσουμε την συμπεριφορά του συστήματος κλειστού βρόχου με τον νόμο ελέγχου ακολούθησης βηματικής εντολής. Εφαρμόζοντας στον νόμο ελέγχου της σχέσης (4.116) στο σύστημα όπως αυτό περιγράφεται από τη σχέση (4.106) προκύπτει το παρακάτω σύστημα κλειστού βρόχου :

$$\dot{x}(t) = (A_{lin} - B_{lin}F_{d1})x(t) - B_{lin}F_{d2} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4.117)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.118)$$

όπου :

$$F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} & f_{1,6} & f_{1,7} & f_{1,8} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} & f_{2,6} & f_{2,7} & f_{2,8} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} & f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

$$F_{d2} = \begin{bmatrix} f_{1,9} & f_{1,10} & f_{1,11} \\ f_{2,9} & f_{2,10} & f_{2,11} \\ f_{3,9} & f_{3,10} & f_{3,11} \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

$$e(t) = y(t) - w(t) \quad (4.120)$$

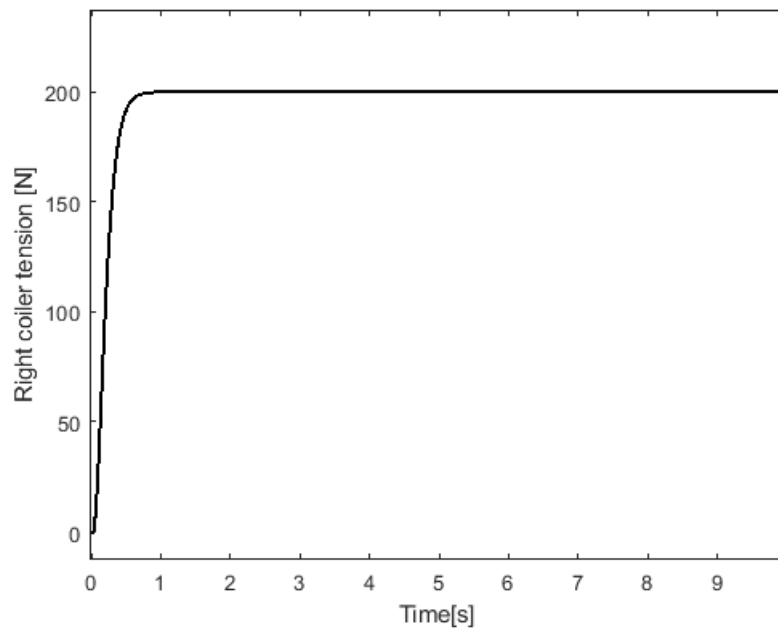
Όταν οι επιθυμητοί πόλοι του συστήματος είναι στις θέσεις:  $-3, -4, -5, -6, -7, -13, -14, -15, -16, -17, -18$ , οι παράμετροι του ελεγκτή θα είναι :

$$F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} & f_{1,6} & f_{1,7} & f_{1,8} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} & f_{2,6} & f_{2,7} & f_{2,8} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} & f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} \end{bmatrix} =$$

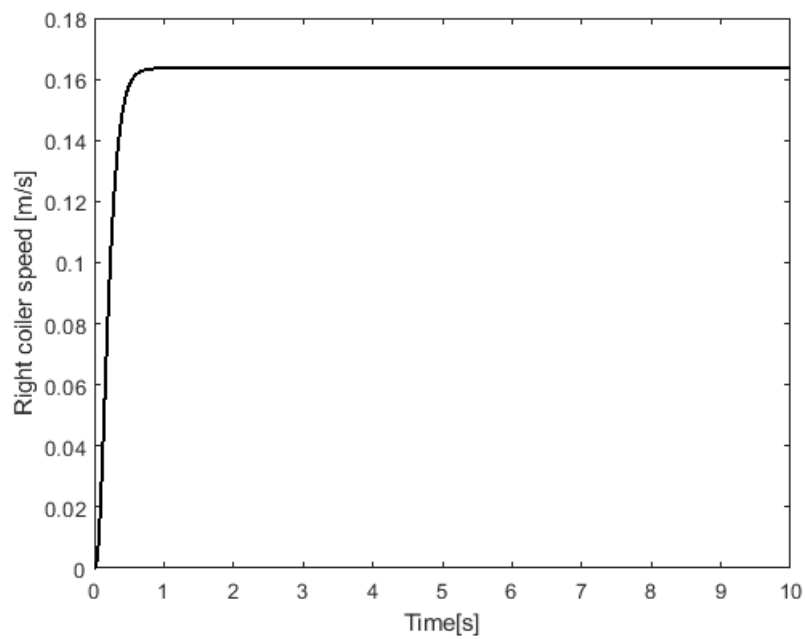
$$= \begin{bmatrix} -5 \times 10^{-5} & -14.32 & -2 \times 10^{-3} & 18.69 & 10^{-3} & -6 \times 10^{-5} & -6.45 & 2.45 \\ -10^{-5} & 8.67 & 9 \times 10^{-4} & -9.58 & -7 \times 10^{-4} & 7 \times 10^{-6} & 1.75 & 4.333 \\ 3 \times 10^{-5} & -6.45 & -3 \times 10^{-3} & 11.78 & 6 \times 10^{-4} & -10^{-5} & -6.97 & 1.57 \end{bmatrix}$$

$$F_{d2} = \begin{bmatrix} f_{1,9} & f_{1,10} & f_{1,11} \\ f_{2,9} & f_{2,10} & f_{2,11} \\ f_{3,9} & f_{3,10} & f_{3,11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 970.87 & 15000 & -270.99 \\ 1.7 & 25 & -4.78 \\ 970.47 & 15000 & -270.63 \end{bmatrix}$$

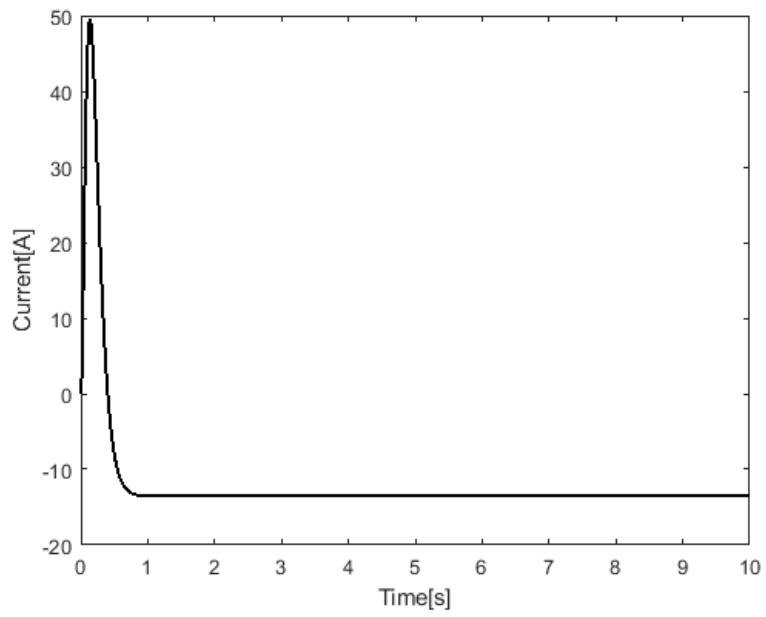
Τα σήματα διέγερσης της επιθυμητής εισόδου του πολυμεταβλητού συστήματος ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών είναι  $r(t) = [F_{1ref} \quad V_{2ref} \quad F_{3ref}]^T = [200 \quad 0.2 \quad 300]^T$  έτσι οι αποκρίσεις του διανύσματος κατάστασης για το μη γραμμικό σύστημα κλειστού βρόχου δίνονται στις παρακάτω απεικονίσεις :



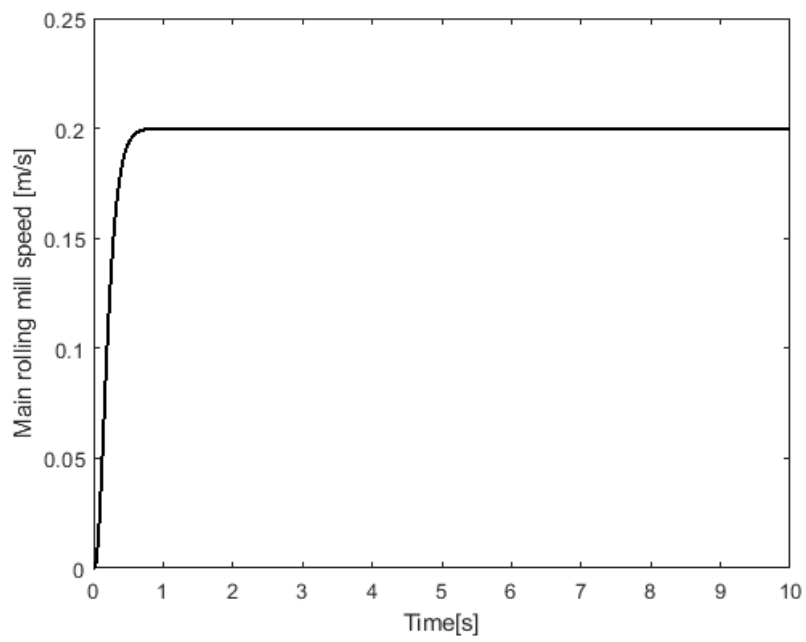
Σχήμα 25: Τάνυση εκτυλικτικού μηχανισμού



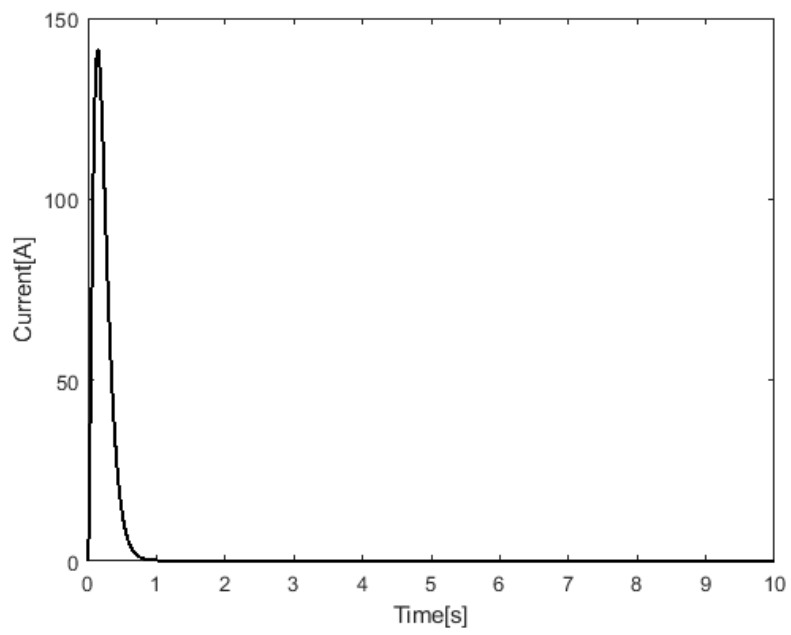
Σχήμα 26: Ταχύτητα εκτυλικτικού μηχανισμού



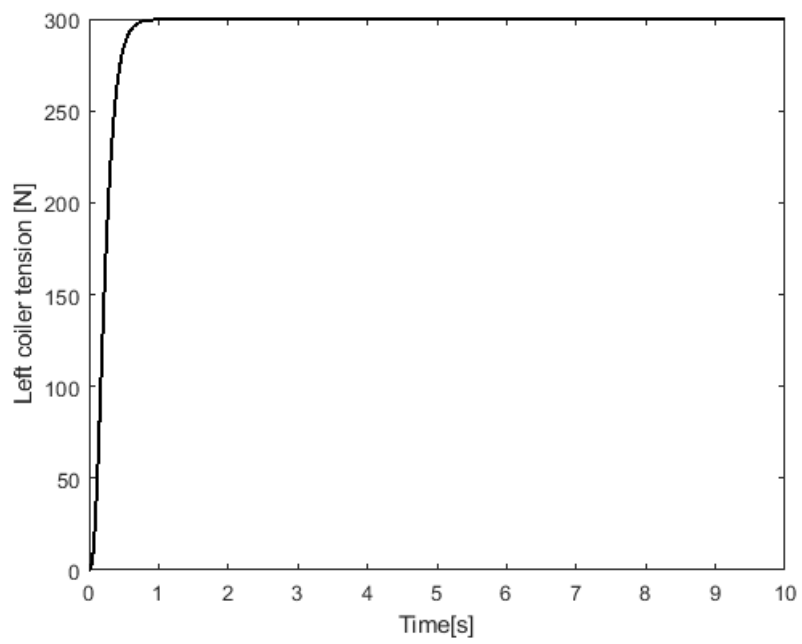
Σχήμα 27: Ρεύμα εκτυλικτικού μηχανισμού



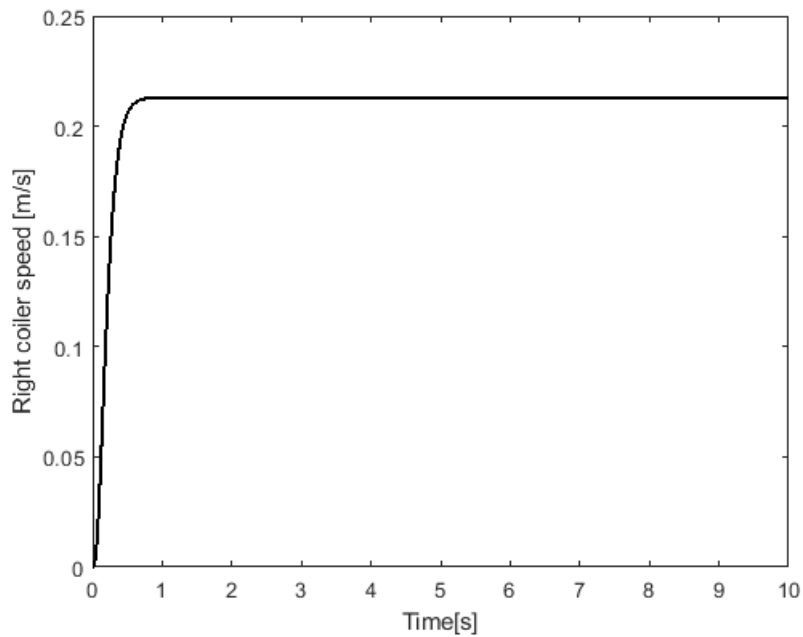
Σχήμα 28: Ταχύτητα κύριου ελασματοργείου



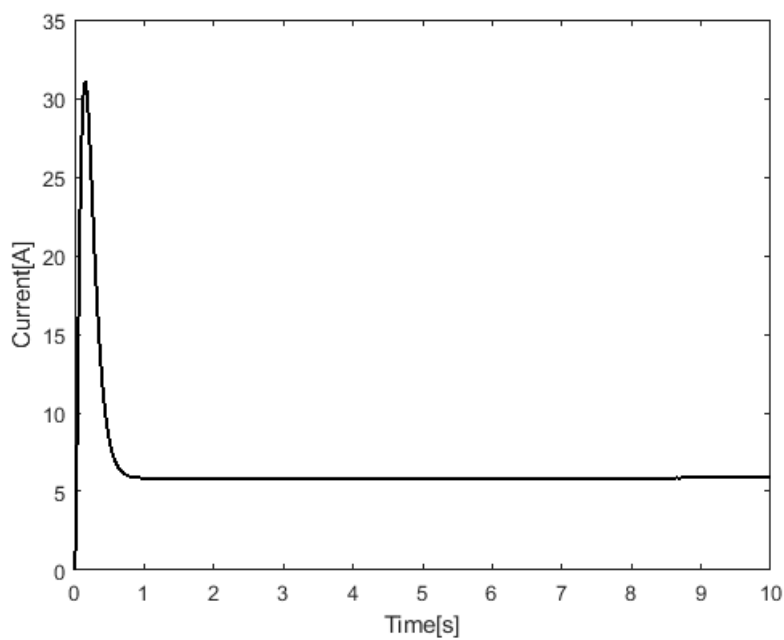
Σχήμα 29: Ρεύμα ελασματοργείου



Σχήμα 30: Τάνυση τυλικτικού μηχανισμού

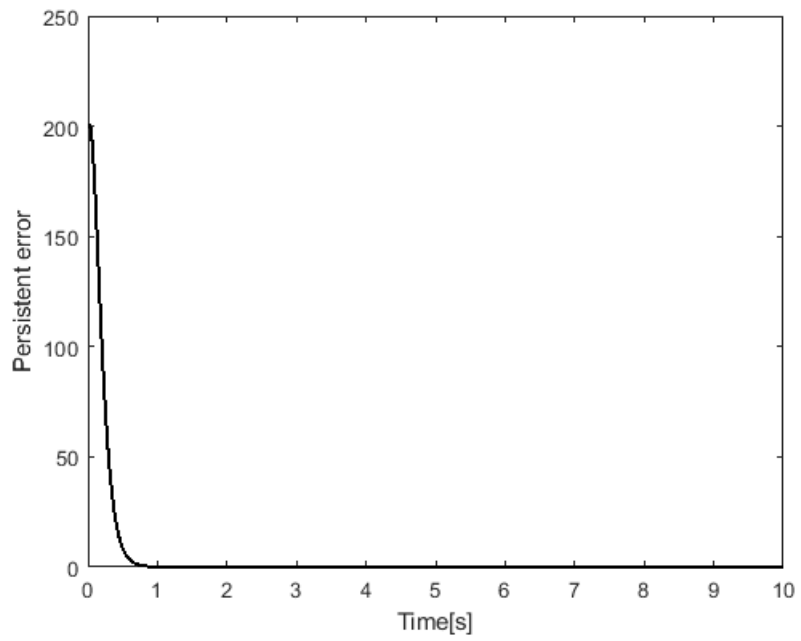


Σχήμα 31: Ταχύτητα τυλικτικού μηχανισμού

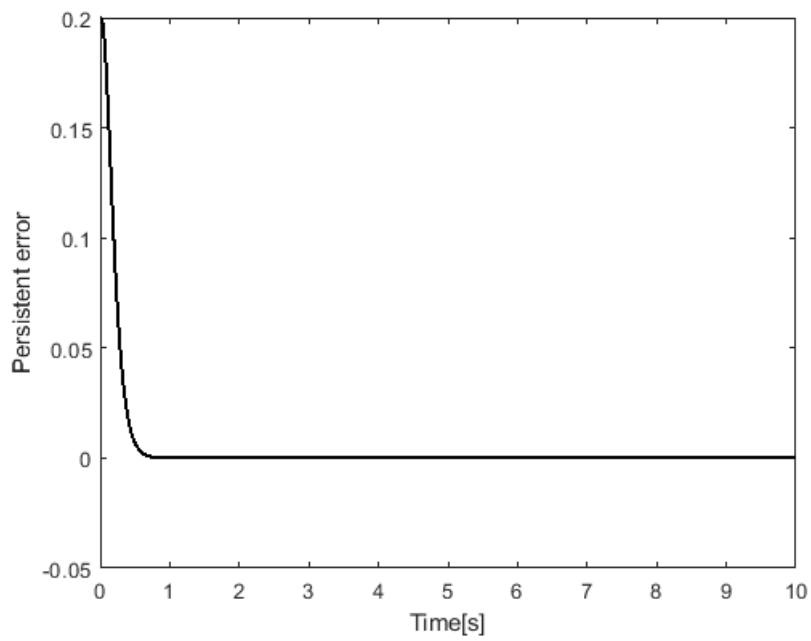


Σχήμα 32: Ρεύμα τυλικτικού μηχανισμού

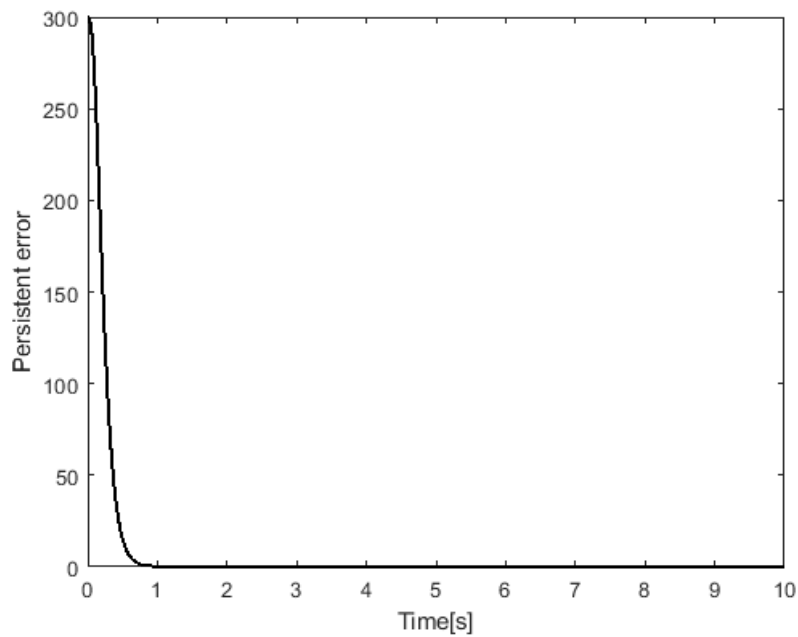
Από τις αποκρίσεις των καταστάσεων των ταχυτήτων, των ρευμάτων καθώς και των τανύσεων του μη γραμμικού συστήματος, συμπεραίνουμε ότι ο πολυμεταβλητός ελεγκτής ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής λειτούργησε ικανοποιητικά στο μη γραμμικό σύστημα ως προς την ευστάθεια αλλά και ως προς την ακολούθηση των εντολών  $F_{1ref}, V_{2ref}, F_{3ref}$ . Έτσι στα παρακάτω σχήματα ( βλ. Σχήμα 42, 43, 44 ) θα παρατηρήσουμε ότι τα σφάλματα μόνιμης κατάστασης τείνουν ασυμπτωτικά στο μηδέν.



Σχήμα 33: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης

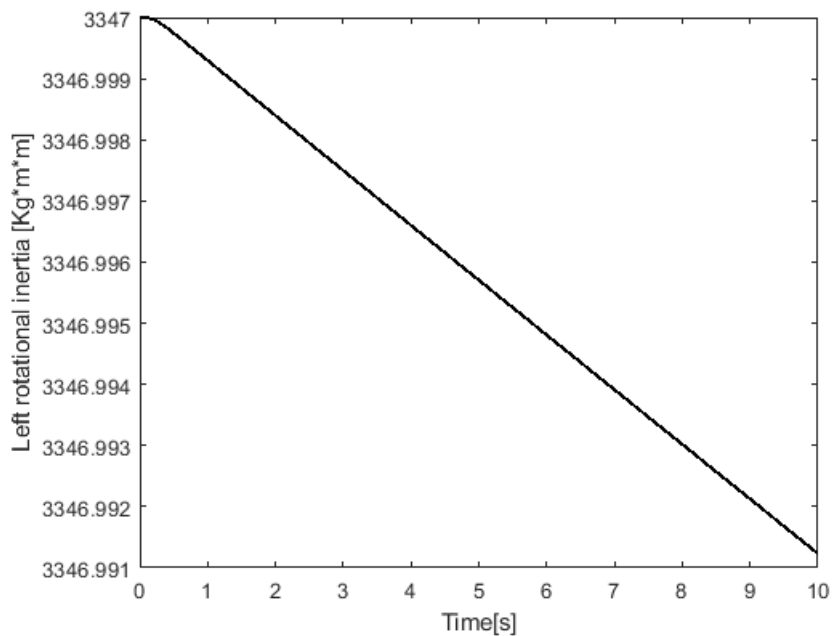


Σχήμα 34: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης



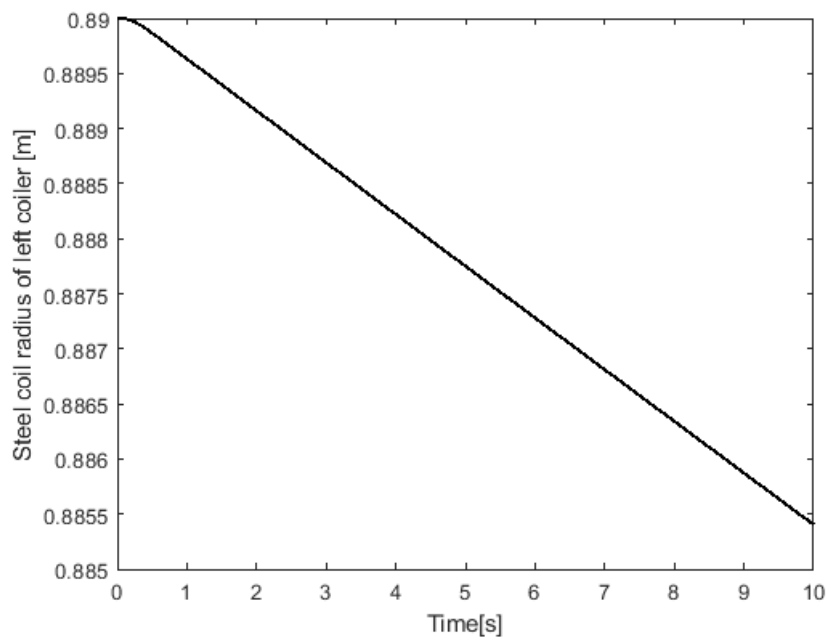
Σχήμα 35: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης

Οι αποκρίσεις των μη ελέγξιμων καταστάσεων των ροπών αδράνειας καθώς και των ακτινών του αριστερού και δεξιού μηχανισμού (left & right coiler) παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα ( βλ. Σχήμα 36,37,38,39 ) ως εξής :

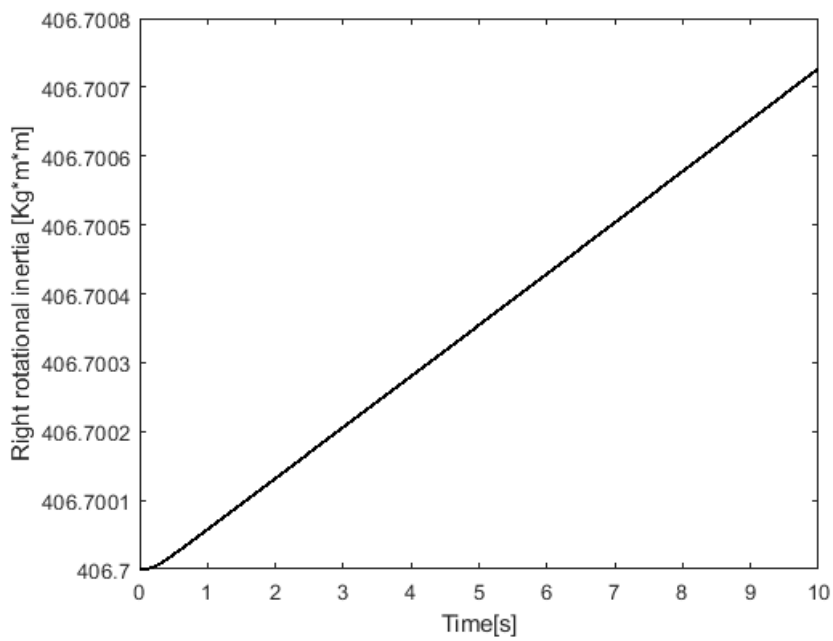


Σχήμα 36: Ροπή αδράνειας εκτυλικτικού

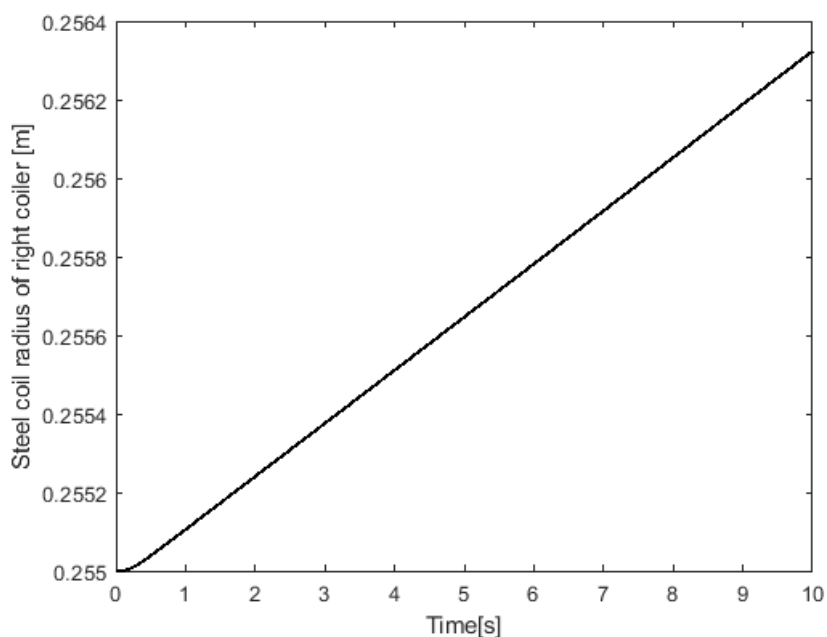




Σχήμα 37: Ακτίνα εκτυλικτικού

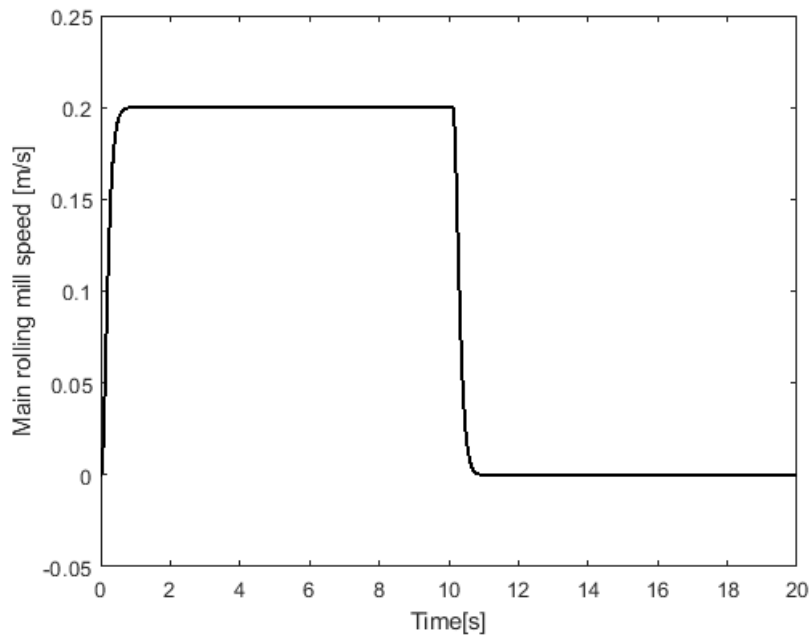


Σχήμα 38: Ροπή αδράνειας τυλικτικού

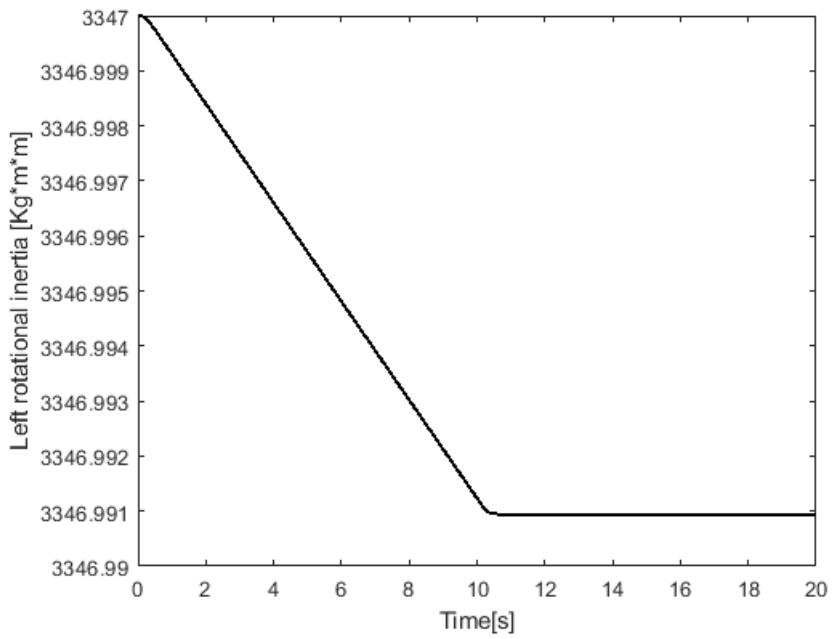


Σχήμα 39: Ακτίνα τυλικτικού

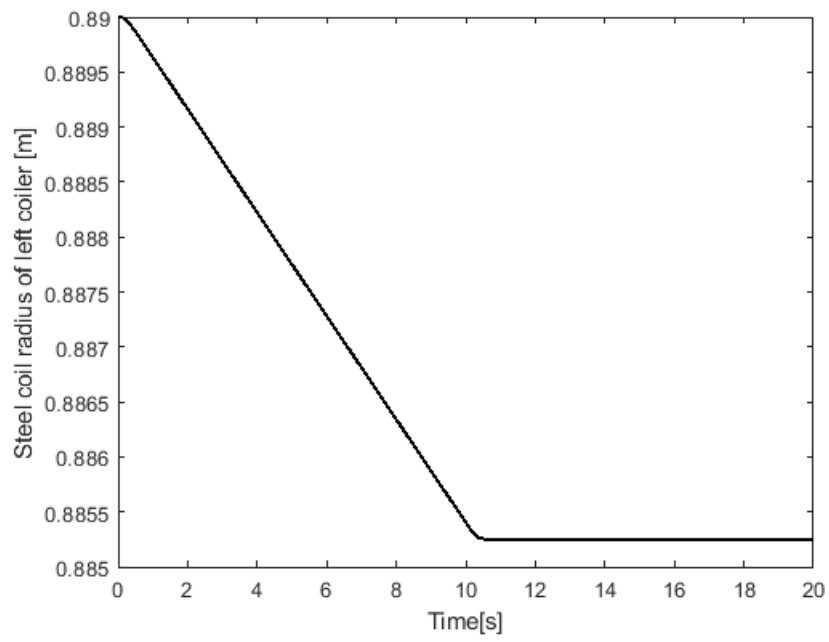
Πρακτικά λόγω ότι οι καταστάσεις των ροπών και των ακτινών είναι μη ελέγξιμες καθώς και ότι η λωρίδα που έχει άμεση επίδραση στο μοντέλο ψυχρής έλασης δεν μπορεί να είναι άπειρη, θα πρέπει να υπάρχει ένας επόπτης λογικός ελεγκτής που θα καθορίζει πότε το σύστημα θα πέφτει σε αναστολή λειτουργίας. Πιο συγκεκριμένα κατά την λειτουργία του ελασματοουργείου η λωρίδα καθώς ξετυλίγεται από το εκτυλικτικό και ξανά τυλίγεται στο τυλικτικό είναι αναγκαίο να υπάρχει κάποιο κατάλληλο αισθητήριο που να υπολογίζει την ακτίνα του εκτυλικτικού έτσι ώστε όταν η ακτίνα τείνει να μηδενιστεί, να λαμβάνει χώρα ο λογικός ελεγκτής έτσι ώστε η ταχύτητα να μηδενιστεί. Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω ως υποθέσουμε το εξής σενάριο. Έστω ότι από το χρονικό διάστημα 0 έως 10 (sec) η ταχύτητα ( $V_{2ref}$ ) βρίσκεται στα 0.2 (m/sec) και από τα 10 έως 20 (sec) λαμβάνει χώρα ο επόπτης ελεγκτής όπου λόγω του κατώτατου ορίου της ακτίνας του εκτυλικτικού δίνει εντολή να μηδενιστεί η ταχύτητα. Θα παρατηρήσουμε ότι οι μεταβολές των ροπών και των ακτινών θα σταθεροποιηθούν (βλ. Σχήματα 40,41,42,43,44).



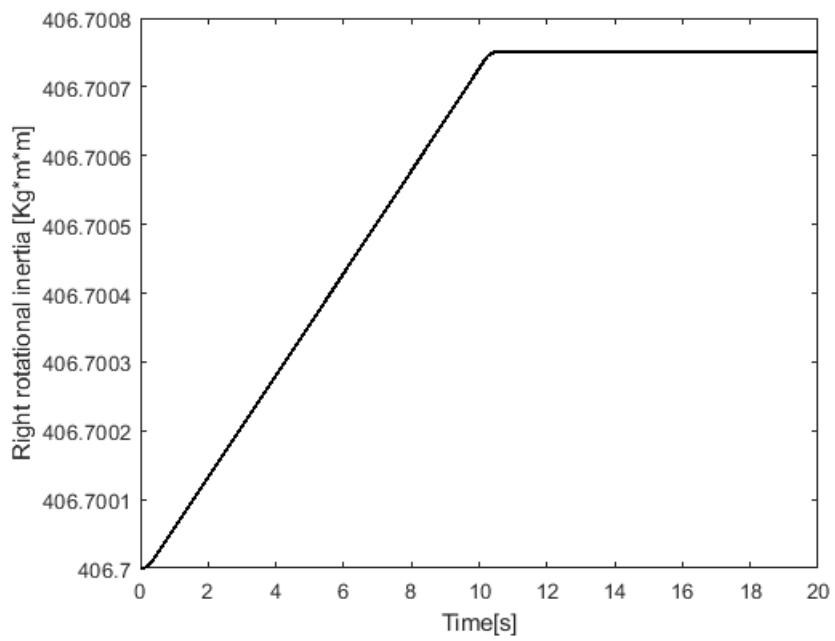
Σχήμα 40: Ταχύτητα κύριου ελασματοργείου



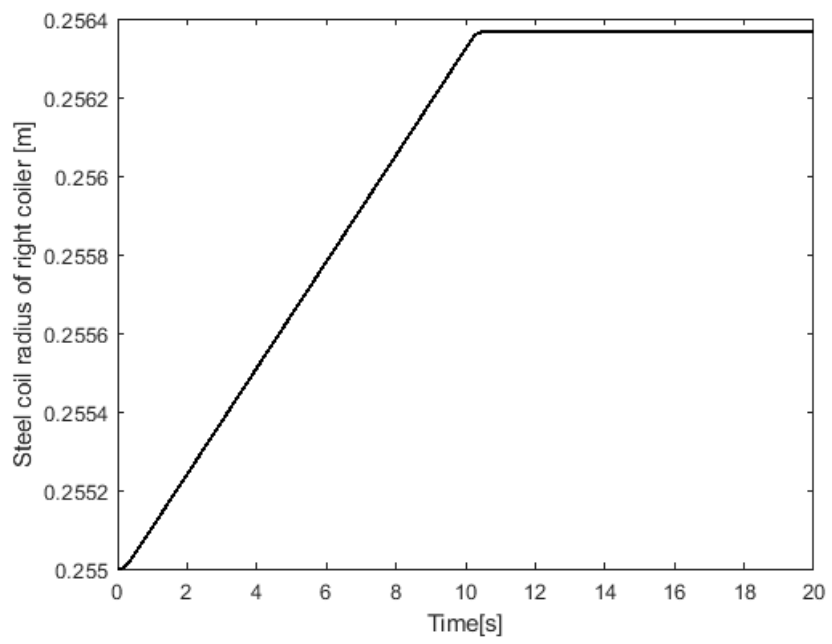
Σχήμα 41: Ροπή αδράνειας εκτυλικτικού μηχανισμού



Σχήμα 42: Ακτίνα εκτυλικτικού μηχανισμού



Σχήμα 43: Ροπή αδράνειας τυλικτικού μηχανισμού



Σχήμα 44: Ακτίνα τυλικτικού μηχανισμού

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΩΝ ΝΟΜΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΒΑΣΙΖΟΜΕΝΟΙ ΣΕ ΛΟΓΙΚΗ ΓΙΑ ΤΑ ΥΠΟΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται μια τεχνική λογικής ασφαλούς μεταγωγής, που καλείται βηματική ασφαλούς μεταγωγής. Η τεχνική αυτή βασίζεται σε μια περιγραφή του συστήματος με γραμμικές προσεγγίσεις που περιγράφουν ικανοποιητικά το σύστημα σε περιοχές λειτουργίας γύρω από ένα πεπερασμένο αριθμό ονομαστικών σημείων λειτουργίας της διεργασίας. Η μεταγωγή λαμβάνει χώρα μεταξύ ελεγκτών που είναι κοινί για γειτονικά ονομαστικά σημεία λειτουργίας, δηλαδή ελεγκτών που επιτυγχάνουν την επιθυμητή απόδοση για τις γραμμικές προσεγγίσεις που αντιστοιχούν σε κάθε ένα από τα γειτονικά ονομαστικά σημεία λειτουργίας. Επιπλέον, η μεταγωγή μεταξύ ελεγκτών λαμβάνει χώρα μόνο όταν οι τροχιές του συστήματος έχουν φτάσει σε ένα σημείο λειτουργίας. Η τεχνική αυτή επιτυγχάνει ευστάθεια και καλή απόδοση για όλες τις μεταβάσεις μεταξύ σημείων λειτουργίας που βρίσκονται μέσα σε γειτονίες των ονομαστικών σημείων λειτουργίας της διεργασίας. Έτσι προκύπτει μια απλή στην σχεδίαση και εύκολη στην εφαρμογή λύση που επιτυγχάνει καλή απόδοση παρά το μειονέκτημα που οφείλεται στην έλλειψη γνώσης των δυναμικών του συστήματος ( βλ. για παράδειγμα [7],[8]).

### 5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΣΦΑΛΟΥΣ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ

Έστω ένα μη γραμμικό σύστημα με είσοδο περιγράφεται από την παρακάτω σχέση :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (5.1)$$

όπου :

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \quad (5.2)$$

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m]^T \quad (5.3)$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^n$  και  $u \in \mathbb{R}^m$  και δηλώνουν το διάνυσμα των καταστάσεων και των εισόδων του συστήματος, επίσης τα  $n, m$  δηλώνουν το πλήθος των καταστάσεων και των εισόδων αντίστοιχα,  $f(0,0) = 0$ , ενώ συνάρτηση  $f$  έχει μερικές παραγωγούς έως και πρώτης τάξης, τόσο ως προς  $x$  όσο και ως προς  $u$ . Έστω τώρα ότι έχουμε  $\mu$  σημεία  $L = \{l_1, l_2, \dots, l_\mu\}$  όπου  $l_{1, \dots, \mu} = [x_{0_{1, \dots, \mu}}, u_{0_{1, \dots, \mu}}]$  τέτοιο ώστε  $f(x_{0_{1, \dots, \mu}}, u_{0_{1, \dots, \mu}}) = 0$ . Κάθε σημείο  $[x_{0_{1, \dots, \mu}}, u_{0_{1, \dots, \mu}}]$  που ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη καλείται σημείο λειτουργίας του συστήματος.

Έστω :

$$A_{1, \dots, \mu} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x=x_{0_{1, \dots, \mu}}, u=u_{0_{1, \dots, \mu}})}, B_{1, \dots, \mu} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x=x_{0_{1, \dots, \mu}}, u=u_{0_{1, \dots, \mu}})} \quad (5.4)$$

όπου οι πίνακες της σχέσης (5.4) ορίζονται ως εξής :

$$A_{1, \dots, \mu} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x=x_{0_{1, \dots, \mu}}, u=u_{0_{1, \dots, \mu}})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$B_{1, \dots, \mu} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x=x_{0_{1, \dots, \mu}}, u=u_{0_{1, \dots, \mu}})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

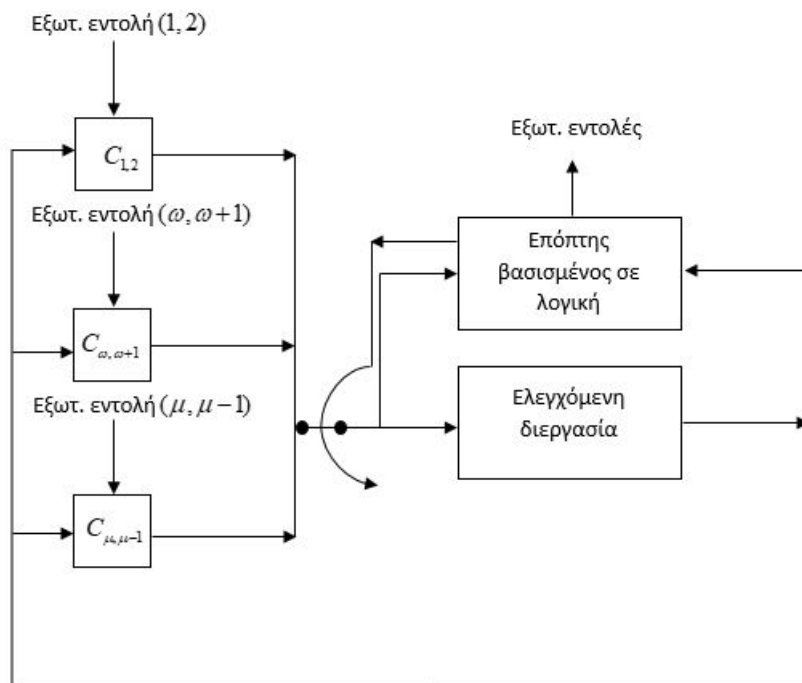
Προκύπτουν τα γραμμικά συστήματα :

$$\begin{aligned}
 S_1 : \delta \dot{x} &= A_1 \delta x + B_1 \delta u \\
 &\vdots \\
 S_\mu : \delta \dot{x} &= A_\mu \delta x + B_\mu \delta u
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

όπου :

$$\delta x = x - x_{0_{1,\dots,\mu}}, \delta u = u - u_{0_{1,\dots,\mu}}
 \tag{5.8}$$

και όπου τα  $\{S_1, \dots, S_\mu\}$  αποτελούν τις γραμμικοποιήσεις και τα  $\{l_1, \dots, l_\mu\}$  αποτελούν τα πολλαπλά σημεία ισορροπίας. Το σύνολο των κοινών ελεγκτών καθορίζεται ως  $\{C_{1,2}, \dots, C_{\mu-1,\mu}\}$  όπου ο κάθε ελεγκτής θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη της ευστάθειας στο σύστημα, δηλαδή από το σημείο λειτουργίας στο οποίο βρίσκεται το σύστημα (αρχική θέση), έως το σημείο στόχου. Για την καλύτερη κατανόηση της αρχιτεκτονικής της βηματικής ασφαλούς μεταγωγής παρουσιάζεται το παρακάτω σχήμα :



Σχήμα 45: Χονδρικό διάγραμμα ελεγκτή βηματικής εντολής ασφαλούς μεταγωγής



## 5.2 ΤΕΧΝΙΚΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΣΦΑΛΟΥΣ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΕΛΕΓΚΤΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a)

Σε αυτή την υποενότητα θα μελετηθεί πρόβλημα της προσεγγιστικής ακολούθησης βηματικής εντολής με την χρήση μεταγωγικού ελέγχου για το μονομεταβλητό σύστημα ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC (a). Η τεχνική βηματικής ασφαλούς μεταγωγής εγγυάται ευστάθεια και καλή απόδοση για όλες τις μεταβάσεις μεταξύ σημείων λειτουργίας που βρίσκονται στις γειτονιές των ονομαστικών σημείων λειτουργίας της διεργασίας. Επίσης η εφαρμογή κοινών ελεγκτών για γειτονικά σημεία λειτουργίας παρέχει χαρακτηριστικά εύρωστης απόδοσης στον αλγόριθμο μεταγωγής. Έτσι σε ότι ακολουθεί επιλύεται το πρόβλημα βηματικής ασφαλούς μεταγωγής με ελεγκτή προσεγγιστικής ακολούθησης βηματικής εντολής για μηδενικό σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση.

### 5.2.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a)

Έχοντας το μαθηματικό μοντέλο της υποενότητας (3.1) ο χώρος κατάστασης του μονομεταβλητού μοντέλου ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC τύπου (a) δίνεται ως εξής :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B_u}{J} & \frac{KR}{J\eta} \\ -\frac{K\eta}{lR} & -\frac{r}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_s}{l} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \frac{R^2}{J\eta^2}(F_2 - F_1) - \frac{M_z R}{J\eta^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

όπου οι καταστάσεις  $x_{1,2}$  δηλώνουν την ταχύτητα και το ρεύμα του κύριου ελασματοουργείου αντίστοιχα και η είσοδος  $u$  δηλώνει την τάση εισόδου στο σύστημα. Επιλύοντας το παραπάνω μπλοκ εξισώσεων ως προς το μηδενικό διάνυσμα και παρατηρώντας ότι οι μεταβλητές των καταστάσεων και της εισόδου υπερέχουν σε αριθμό σε σχέση με το πλήθος των εξισώσεων οι λύσεις της σχέσης  $f(x_1, x_2, u) = 0$  θα είναι άπειρες. Το βασικό κριτήριο επιλογής του σημείου λειτουργίας γίνεται με βάση το εύρος των επιτρεπτών τιμών όπου μπορεί να αποδώσει το σύστημα σε πραγματικές συνθήκες, με αυτό το τρόπο μπορούμε να αποκλείσουμε διάφορα σενάρια λειτουργίας

όπου θα ίσχυαν θεωρητικά αλλά πρακτικά δεν θα μπορούσαν να υλοποιηθούν. Έτσι κάποια από τα σημεία λειτουργίας των διανυσμάτων της ταχύτητα του κύριου ελασματοουργείου, του ρεύματος και της τάση εισόδου της διεργασίας παρουσιάζονται ως εξής :

$$L = \{l_1, l_2, l_3\} \quad (5.10)$$

όπου :

$$l_1 = [\bar{x}_{1_1}, \bar{x}_{2_1}, \bar{u}_{1_1}] = [0.1, 0.2762, 3.4308] \quad (5.11)$$

$$l_2 = [\bar{x}_{1_2}, \bar{x}_{2_2}, \bar{u}_{1_2}] = [0.2, 0.5524, 6.8617] \quad (5.12)$$

$$l_3 = [\bar{x}_{1_3}, \bar{x}_{2_3}, \bar{u}_{1_3}] = [0.3, 0.8285, 10.2925] \quad (5.13)$$

Λόγω ότι το σύστημα είναι γραμμικό είναι προφανές ότι τα γραμμικά συστήματα  $S_1, S_2, S_3$  είναι ισοδύναμα άρα έχουμε :

$$S_{1,2,3} : \delta \dot{x}(t) = A_{1,2,3} \delta x(t) + B_{1,2,3} \delta u(t) \quad (5.14)$$

όπου :

$$\delta x = \delta x - x_{0_{1,2,3}}, \delta u = \delta u - u_{0_{1,2,3}}$$

και όπου οι γραμμικοποιημένοι συστημικοί πίνακες ορίζονται ως :

$$A_{1,2,3} = \begin{bmatrix} -\frac{B_u}{J} & \frac{KR}{J\eta} \\ \frac{K\eta}{IR} & -\frac{r}{l} \end{bmatrix}, \quad B_{1,2,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_s}{l} \end{bmatrix}$$

Για τον ίδιο λόγο, ομοίως όπως για τα γραμμικά συστήματα έτσι και για τους ελεγκτές  $C_{1,2}, C_{2,3}$  θα ισχύει η ισοδυναμία. Έτσι το σχήμα ελέγχου της διεργασίας σύμφωνα και με την θεωρία ελέγχου της υποενότητας (4.1.1) διαμορφώνεται ως εξής :

$$C_{1,2}, C_{2,3} : \delta u(t) = -F_{d1} \delta x(t) - F_{d2} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5.15)$$

όπου τα  $F_{d1}, F_{d2}$  δηλώνουν τα κέρδη του ελεγκτή όπου είναι της μορφής

$$F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} \end{bmatrix}$$

$$F_{d2} = f_{1,3}$$

και το  $e(t) = r(t) - y(t)$  όπου δηλώνει το σφάλμα μόνιμης κατάστασης. \

### 5.2.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (a)

Η βηματική ασφαλή μεταγωγή απαιτεί τον προσδιορισμό των κοινών ελεγκτών  $C_{1,2}, C_{2,3}$  που να ικανοποιούν τις σχεδιαστικές απαιτήσεις για τα ζευγάρια γραμμικών συστημάτων  $(S_1, S_2)$  και  $(S_2, S_3)$ , αντίστοιχα. Έτσι προκειμένου να μετακινηθεί το σύστημα από το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_1$  στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_2$  και στην συνέχεια στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_3$ , ο σχεδιαστής εφαρμόζει βηματική ασφαλή μεταγωγή που παίρνει την ακόλουθη μορφή :

- a) Αρχικά ο ελεγκτής ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής  $C_{1,2}$  εφαρμόζεται με  $r(t) = 0.2$ . Η επιλεγόμενη εξωτερική εντολή οδηγεί το σύστημα από το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_1$  στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_2$ .
- b) Μόλις οι τροχιές των καταστάσεων και των εισόδων προσεγγίσουν το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_2$ , ο σχεδιαστής εφαρμόζει μεταγωγή στον ελεγκτή  $C_{2,3}$  με

$r(t) = 0.3$ . Η επιλεγόμενη εξωτερική εντολή οδηγεί το σύστημα από το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_2$  στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_3$ .

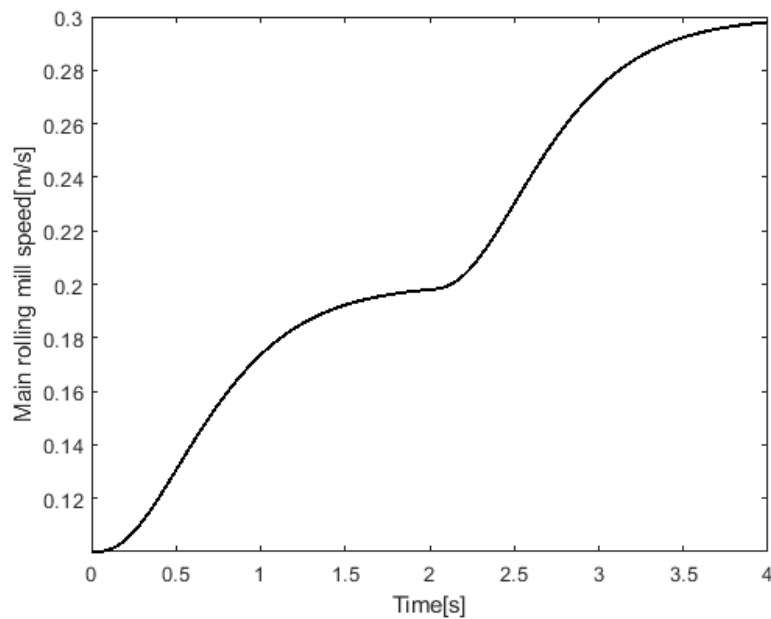
Έτσι εφαρμόζοντας τον νόμο ελέγχου της σχέσης (5.15) τα κέρδη του ελεγκτή καθώς και της εξωτερικής εντολής είναι της μορφής :

$$C_{1,2}, C_{2,3} : F_{d1} = [f_{1,1} \quad f_{1,2}] = [2.75054 \quad -4 \times 10^6]$$

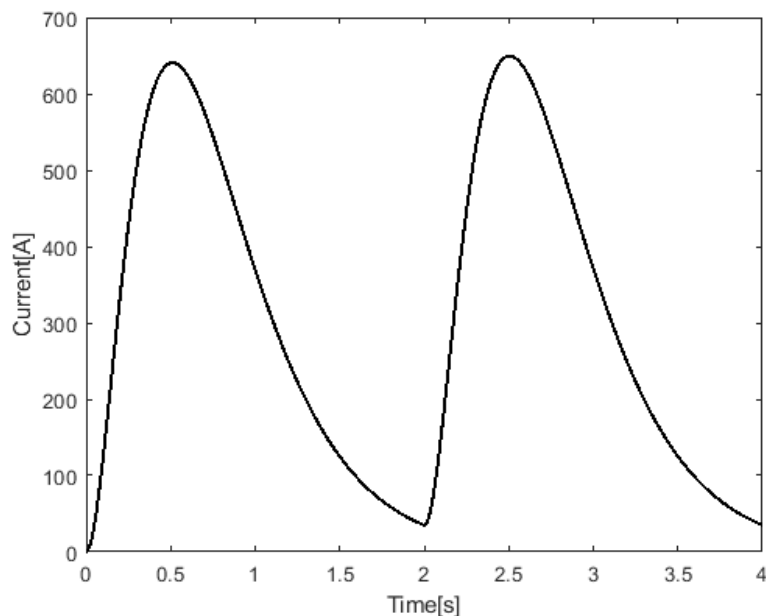
$$C_{1,2}, C_{2,3} : F_{d2} = f_{1,3} = -3.51368$$

$$r(t) = \begin{cases} 0.2 & t \leq 2 \\ 0.3 & t > 2 \end{cases}$$

η απεικόνιση του παραπάνω σεναρίου αποδίδεται σχηματικά ως εξής :



Σχήμα 46: Μεταγωγή ταχύτητας κύριου ελασματουργείου



Σχήμα 47: Μεταγωγή ρεύματος ελασματοργείου

Από τις αποκρίσεις των καταστάσεων της ταχύτητας του κύριου ελασματοργείου καθώς και του ρεύματος, συμπεραίνουμε ότι ο μεταγωγικός ελεγκτής ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής λειτούργησε ικανοποιητικά ως προς την ευστάθεια αλλά και ως προς την ακολούθηση εντολής, δηλαδή την μετακίνηση από το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_1$  στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_2$  και στην συνέχεια στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_3$ .

### 5.3 ΤΕΧΝΙΚΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΣΦΑΛΟΥΣ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΕΛΕΓΚΤΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (b)

Σε αυτή την υποενότητα θα μελετηθεί πρόβλημα της προσεγγιστικής ακολούθησης βηματικής εντολής με την χρήση μεταγωγικού ελέγχου για το μονομεταβλητό σύστημα ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC (b). Η τεχνική βηματικής ασφαλούς μεταγωγής εγγυάται ευστάθεια και καλή απόδοση για όλες τις μεταβάσεις μεταξύ σημείων λειτουργίας που βρίσκονται στις γειτονιές των ονομαστικών σημείων λειτουργίας της διεργασίας. Επίσης η εφαρμογή κοινών ελεγκτών για γειτονικά σημεία λειτουργίας παρέχει χαρακτηριστικά εύρωστης απόδοσης στον αλγόριθμο μεταγωγής. Έτσι σε ότι ακολουθεί επιλύεται το πρόβλημα βηματικής ασφαλούς μεταγωγής με ελεγκτή προσεγγιστικής ακολούθησης βηματικής εντολής για μηδενικό σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση.

5.3.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (b)

Έχοντας το μαθηματικό μοντέλο της υποεπνότητας (3.2) το μπλοκ εξισώσεων του πολυμεταβλητού μη γραμμικού μοντέλου ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC τύπου (b) δίνεται ως :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}x_3x_1 + \frac{ES}{L}(x_3 - x_2) \\ \theta_1x_2 + \theta_2x_1 + \theta_3u_1 \\ \frac{gr_2^2}{J_2}(x_4 - x_1) - \frac{1}{\tau_{em2}}x_3 + \frac{r_2}{\tau_{em2}K_2}u_2 \\ -\frac{1}{L}x_3x_4 + \frac{ES}{L}(x_5 - x_3) \\ -\theta_5x_5 - \theta_4x_4 + \theta_6u_3 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

όπου οι καταστάσεις  $x_{1,4}$  δηλώνουν τις τανύσεις αριστερά και δεξιά του κύριου ελασματοργείου τα  $x_{2,3,5}$  δηλώνουν την ταχύτητα εκτυλικτικού, την ταχύτητα του κύριου ελασματοργείου και την ταχύτητα τυλικτικού και οι είσοδοι  $u_{1,2,3}$  δηλώνουν τις τάσεις στο σύστημα αντίστοιχα. Επιλύοντας το παραπάνω μπλοκ εξισώσεων ως προς το μηδενικό διάνυσμα και παρατηρώντας ότι οι μεταβλητές των καταστάσεων και των εισόδων υπερέχουν σε αριθμό σε σχέση με το πλήθος των εξισώσεων οι λύσεις της σχέσης  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u_1, u_2, u_3) = 0$  θα είναι άπειρες. Το βασικό κριτήριο επιλογής του σημείου λειτουργίας γίνεται με βάση το εύρος των επιτρεπτών τιμών όπου μπορεί να αποδώσει το σύστημα σε πραγματικές συνθήκες, με αυτό το τρόπο μπορούμε να αποκλείσουμε διάφορα σενάρια λειτουργίας όπου θα ίσχυαν θεωρητικά αλλά πρακτικά δεν θα μπορούσαν να υλοποιηθούν. Έτσι κάποια από τα σημεία λειτουργίας των διανυσμάτων των ταχυτήτων, των τανύσεων και των τάσεων εισόδων της διεργασίας παρουσιάζονται ως εξής :

$$L = \{l_1, l_2, l_3\} \quad (5.17)$$

όπου :

$$l_1 = [\bar{x}_{1_1}, \bar{x}_{2_1}, \bar{x}_{3_1}, \bar{x}_{4_1}, \bar{x}_{5_1}, \bar{u}_{1_1}, \bar{u}_{2_1}, \bar{u}_{3_1}] = [1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 2 \quad 0.1 \quad 112.7 \quad 0.1929 \quad 112.7] \quad (5.18)$$

$$l_2 = [\bar{x}_{1_2}, \bar{x}_{2_2}, \bar{x}_{3_2}, \bar{x}_{4_2}, \bar{x}_{5_2}, \bar{u}_{1_2}, \bar{u}_{2_2}, \bar{u}_{3_2}] = [2 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 3 \quad 0.2 \quad 255.5 \quad 0.3857 \quad 255.5] \quad (5.19)$$

$$l_3 = [\bar{x}_{1_3}, \bar{x}_{2_3}, \bar{x}_{3_3}, \bar{x}_{4_3}, \bar{x}_{5_3}, \bar{u}_{1_3}, \bar{u}_{2_3}, \bar{u}_{3_3}] = [3 \quad 0.3 \quad 0.3 \quad 4 \quad 0.3 \quad 338.2 \quad 0.5786 \quad 338.3] \quad (5.20)$$

Αξιοποιώντας τα παραπάνω σημεία λειτουργίας και σύμφωνα με τις σχέσεις (5.4), (5.5) οι συνθήκες γραμμικοποίησης ορίζονται ως εξής :

$$A_{1,\dots,3} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x=x_{0_{1,\dots,3}}, u=u_{0_{1,\dots,3}})}, B_{1,\dots,\mu} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x=x_{0_{1,\dots,3}}, u=u_{0_{1,\dots,3}})} \quad (5.21)$$

όπου οι πίνακες της σχέσης (5.4) ορίζονται ως εξής :

$$A_{1,\dots,3} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x=x_{0_{1,\dots,3}}, u=u_{0_{1,\dots,3}})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$B_{1,\dots,3} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x=x_{0_{1,\dots,3}}, u=u_{0_{1,\dots,3}})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Όπου προκύπτουν τα γραμμικά συστήματα :

$$S_1 : \delta \dot{x} = A_1 \delta x + B_1 \delta u \quad (5.24)$$

$$S_2 : \delta \dot{x} = A_2 \delta x + B_2 \delta u \quad (5.25)$$

$$S_3 : \delta \dot{x} = A_3 \delta x + B_3 \delta u \quad (5.26)$$

όπου :

$$\delta x = \delta x - x_{0_{1...3}}, \delta u = \delta u - u_{0_{1...3}}$$

και όπου οι γραμμικοποιημένοι συστημικοί πίνακες για κάθε σημείο λειτουργίας ορίζονται ως :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{x}_{3_{h_1}}}{L} & -\frac{ES}{L} & \left( \frac{ES}{L} - \frac{\bar{x}_{1_{h_1}}}{L} \right) & 0 & 0 \\ \theta_2 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{gr_2^2}{J_2} & 0 & -\frac{1}{\tau_{em2}} & \frac{gr_2^2}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\left( \frac{\bar{x}_{4_{h_1}}}{L} + \frac{ES}{L} \right) & -\frac{\bar{x}_{3_{h_1}}}{L} & \frac{ES}{L} \\ 0 & 0 & 0 & \theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_2}{\tau_{em2}K_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_6 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{x}_{3_{h_2}}}{L} & -\frac{ES}{L} & \left( \frac{ES}{L} - \frac{\bar{x}_{1_{h_2}}}{L} \right) & 0 & 0 \\ \theta_2 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{gr_2^2}{J_2} & 0 & -\frac{1}{\tau_{em2}} & \frac{gr_2^2}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\left( \frac{\bar{x}_{4_{h_2}}}{L} + \frac{ES}{L} \right) & -\frac{\bar{x}_{3_{h_2}}}{L} & \frac{ES}{L} \\ 0 & 0 & 0 & \theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_2}{\tau_{em2}K_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_6 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$



$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{x}_{3_{l_3}}}{L} & -\frac{ES}{L} & \left(\frac{ES}{L} - \frac{\bar{x}_{1_{l_3}}}{L}\right) & 0 & 0 \\ \theta_2 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{gr_2^2}{J_2} & 0 & -\frac{1}{\tau_{em2}} & \frac{gr_2^2}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{\bar{x}_{4_{l_3}}}{L} + \frac{ES}{L}\right) & -\frac{\bar{x}_{3_{l_3}}}{L} & \frac{ES}{L} \\ 0 & 0 & 0 & \theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_2}{\tau_{em2}K_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_6 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

και όπου τα  $\{S_1, \dots, S_3\}$  αποτελούν τις γραμμικοποιήσεις και τα  $\{l_1, \dots, l_3\}$  αποτελούν τα πολλαπλά σημεία ισορροπίας. Το σύνολο των κοινών ελεγκτών καθορίζεται ως  $\{C_{1,2}, C_{2,3}\}$  όπου ο κάθε ελεγκτής θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη της ευστάδειας στο σύστημα, δηλαδή από το σημείο λειτουργίας στο οποίο βρίσκεται το σύστημα (αρχική θέση), έως το σημείο στόχου. Έτσι το σχήμα ελέγχου της διεργασίας σύμφωνα και με την θεωρία ελέγχου της υποεπένδυσης (4.3.1) διαμορφώνεται ως εξής :

$$C_{1,2} : \delta u(t) = -F_{d1} \delta x(t) - F_{d2} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5.30)$$

$$C_{2,3} : \delta u(t) = -F_{d1} \delta x(t) - F_{d2} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5.31)$$

όπου τα  $F_{d1, d2}$  δηλώνουν τα κέρδη του ελεγκτή όπου είναι της μορφής

$$C_{1,2} : F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} \end{bmatrix}, F_{d2} = \begin{bmatrix} f_{1,6} & f_{1,7} & f_{1,8} \\ f_{2,6} & f_{2,7} & f_{2,8} \\ f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} \end{bmatrix}$$

$$C_{2,3} : F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} \end{bmatrix}, F_{d2} = \begin{bmatrix} f_{1,6} & f_{1,7} & f_{1,8} \\ f_{2,6} & f_{2,7} & f_{2,8} \\ f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} \end{bmatrix}$$

και το  $e(t) = r(t) - y(t)$  όπου δηλώνει το σφάλμα μόνιμης κατάστασης.

5.3.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (b)

Η βηματική ασφαλή μεταγωγή απαιτεί τον προσδιορισμό των κοινών ελεγκτών  $C_{1,2}, C_{2,3}$  που να ικανοποιούν τις σχεδιαστικές απαιτήσεις για τα ζευγάρια γραμμικών συστημάτων  $(S_1, S_2)$  και  $(S_2, S_3)$ , αντίστοιχα. Έτσι προκειμένου να μετακινηθεί το σύστημα από το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_1$  στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_2$  και στην συνέχεια στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_3$ , ο σχεδιαστής εφαρμόζει βηματική ασφαλή μεταγωγή που παίρνει την ακόλουθη μορφή :

- a) Αρχικά ο ελεγκτής ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής  $C_{1,2}$  εφαρμόζεται με  $r(t) = [2 \ 0.2 \ 3]^T$ . Η επιλεγόμενη εξωτερική εντολή οδηγεί το σύστημα από το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_1$  στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_2$ .
- b) Μόλις οι τροχιές των καταστάσεων και των εισόδων προσεγγίσουν το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_2$ , ο σχεδιαστής εφαρμόζει μεταγωγή στον ελεγκτή  $C_{2,3}$  με  $r(t) = [3 \ 0.3 \ 4]^T$ . Η επιλεγόμενη εξωτερική εντολή οδηγεί το σύστημα από το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_2$  στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_3$ .

Έτσι εφαρμόζοντας τους νόμους ελέγχου των σχέσεων (5.30), (5.31) τα κέρδη του ελεγκτή καθώς και της εξωτερικής εντολής είναι της μορφής :

$$C_{1,2} : F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -260.02 & 150000.67 & -580000.77 & 710.34 & 420000.094 \\ -0.45 & 270.67 & -1000.95 & 1.256 & 720.98 \\ -270.66 & 160000.34 & -580000.78 & 710.57 & 420000.539 \end{bmatrix}$$

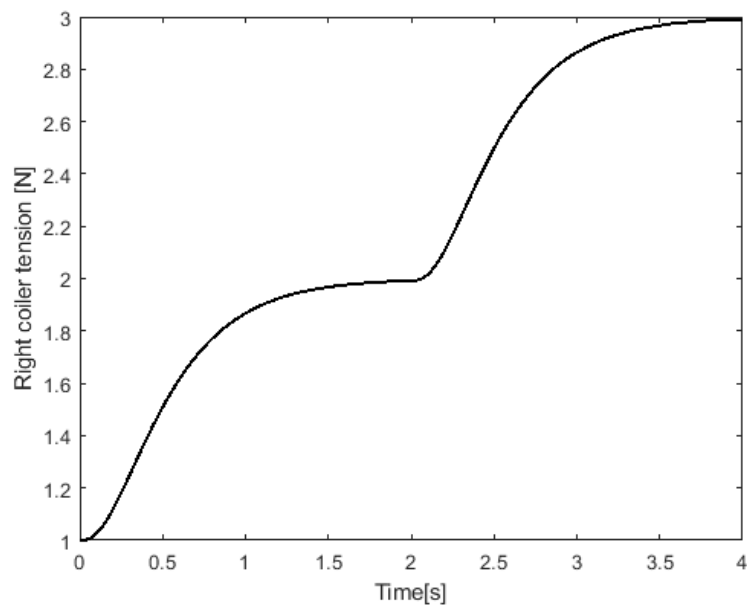
$$C_{1,2} : F_{d2} = \begin{bmatrix} f_{1,6} & f_{1,7} & f_{1,8} \\ f_{2,6} & f_{2,7} & f_{2,8} \\ f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 970.87 & 15000 & -270.99 \\ 1.7 & 25 & -4.78 \\ 970.47 & 15000 & -270.63 \end{bmatrix}$$

$$C_{2,3} : F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -261.02 & 150000.98 & -580000.99 & 711.34 & 420000.1 \\ -0.48 & 271.67 & -1001 & 1.258 & 720.98 \\ -271.66 & 160000.78 & -580000.78 & 711.57 & 420000.6 \end{bmatrix}$$

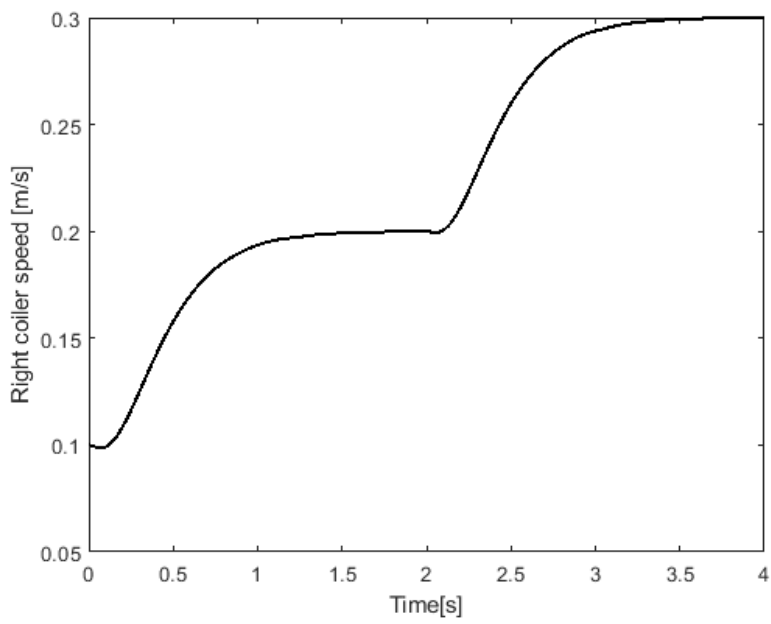
$$C_{2,3} : F_{d2} = \begin{bmatrix} f_{1,6} & f_{1,7} & f_{1,8} \\ f_{2,6} & f_{2,7} & f_{2,8} \\ f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 971.87 & 15000 & -271.99 \\ 1.8 & 25.4 & -4.79 \\ 971.47 & 15000 & -271.63 \end{bmatrix}$$

$$r(t) = \begin{cases} [2 & 0.2 & 3]^T & t \leq 2 \\ [3 & 0.3 & 4]^T & t > 2 \end{cases}$$

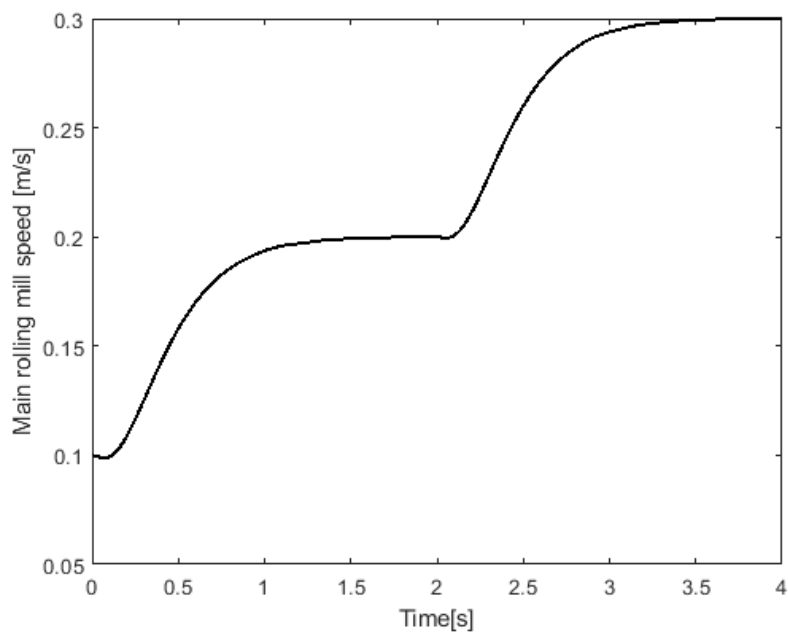
η απεικόνιση του παραπάνω σεναρίου αποδίδεται σχηματικά ως εξής :



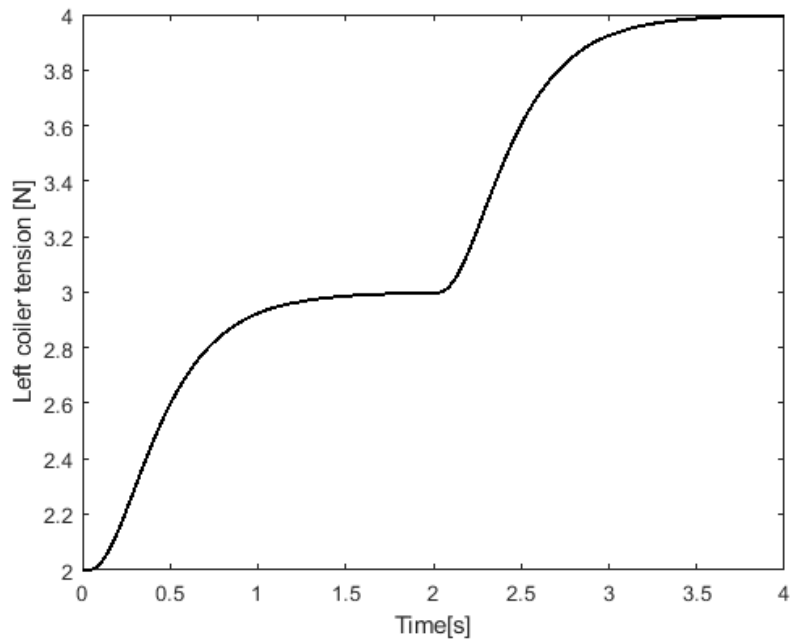
Σχήμα 48: Μεταγωγή τάνσης εκτυλικτικού μηχανισμού



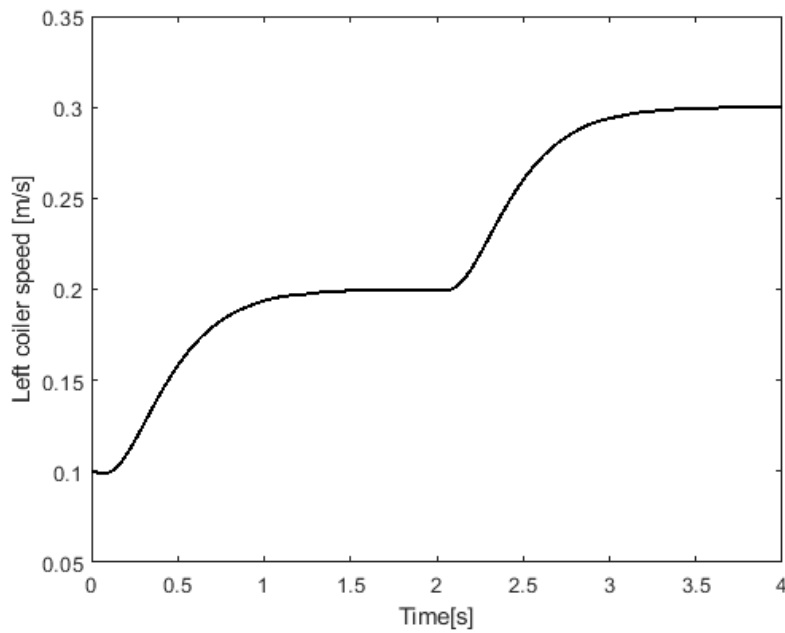
Σχήμα 49: Μεταγωγή ταχύτητας εκτυλικτικού μηχανισμού



Σχήμα 50: Μεταγωγή ταχύτητας κύριου ελασματουργείου



Σχήμα 51: Μεταγωγή τάνυσης τυλικτικού μηχανισμού



Σχήμα 52: Μεταγωγή ταχύτητας τυλικτικού μηχανισμού

Από τις αποκρίσεις των καταστάσεων των ταχυτήτων καθώς και των τανύσεων, συμπεραίνουμε ότι ο μεταγωγικός ελεγκτής ασυμπτωτικής ακολουθήσεως βηματικής εντολής λειτούργησε ικανοποιητικά ως προς την ευστάθεια αλλά και ως προς την

ακολουθήση εντολής, δηλαδή την μετακίνηση από το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_1$  στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_2$  και στην συνέχεια στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_3$ .

#### 5.4 ΤΕΧΝΙΚΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΣΦΑΛΟΥΣ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΕΛΕΓΚΤΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c)

Σε αυτή την υποενότητα θα μελετηθεί πρόβλημα της προσεγγιστικής ακολούθησης βηματικής εντολής με την χρήση μεταγωγικού ελέγχου για το μονομεταβλητό σύστημα ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC (c). Η τεχνική βηματικής ασφαλούς μεταγωγής εγγυάται ευστάθεια και καλή απόδοση για όλες τις μεταβάσεις μεταξύ σημείων λειτουργίας που βρίσκονται στις γειτονιές των ονομαστικών σημείων λειτουργίας της διεργασίας. Επίσης η εφαρμογή κοινών ελεγκτών για γειτονικά σημεία λειτουργίας παρέχει χαρακτηριστικά εύρωστης απόδοσης στον αλγόριθμο μεταγωγής. Έτσι σε ότι ακολουθεί επιλύεται το πρόβλημα βηματικής ασφαλούς μεταγωγής με ελεγκτή προσεγγιστικής ακολούθησης βηματικής εντολής για μηδενικό σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση.

##### 5.4.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c)

Έχοντας το μαθηματικό μοντέλο της υποενότητας (3.3) το μπλοκ εξισώσεων του πολυμεταβλητού μη γραμμικού μοντέλου ψυχρής έλασης αναστρέψιμων ταινιών με κινητήρα DC τύπου (c) δίνεται ως :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L} \left[ x_4 (1 - \chi_0 (1 + K_\chi x_1)) - x_2 \right] \\ \frac{K_1 R_1}{J_1 \eta_1} x_3 + \frac{R_1^2}{J_1 \eta_1^2} x_1 - \left( \frac{B_{u1}}{J_1} + \frac{H}{2\pi R_1^2} x_2 \right) x_2 \\ \frac{Ks_1}{l_1} u_1 - \frac{K_1 \eta_1}{l_1 R_1} x_2 - \frac{r_1}{l_1} x_3 \\ \frac{K_2 R_2}{J_2 \eta_2} x_5 + \frac{R_2^2}{J_2 \eta_2^2} (x_6 - x_1) - \frac{B_{u2}}{J_2} x_4 - \frac{M_z R_2}{J_2 \eta_2^2} \\ \frac{Ks_2}{l_2} u_2 - \frac{K_2 \eta_2}{l_2 R_2} x_4 - \frac{r_2}{l_2} x_5 \\ \frac{EA_2}{L} \left[ x_7 - x_4 (1 + \delta_0 (1 + K_\delta x_6)) \right] \\ \frac{K_3 R_3}{J_3 \eta_3} x_8 - \frac{R_3^2}{J_3 \eta_3^2} x_6 - \left( \frac{B_{u3}}{J_3} - \frac{h}{2\pi R_3^2} x_7 \right) x_7 \\ \frac{Ks_3}{l_3} u_3 - \frac{K_3 \eta_3}{l_3 R_3} x_7 - \frac{r_3}{l_3} x_8 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

όπου οι καταστάσεις  $x_{1,6}$  δηλώνουν τις τανύσεις αριστερά και δεξιά του κύριου ελασματοურγείου τα  $x_{2,4,7}$  δηλώνουν την ταχύτητα εκτυλικτικού, την ταχύτητα του κύριου ελασματοურγείου και την ταχύτητα τυλικτικού, τα  $x_{3,5,8}$  δηλώνουν το ρεύμα του εκτυλικτικού, το ρεύμα του κύριου ελασματοურγείου και το ρεύμα τυλικτικού και οι εισόδοι  $u_{1,2,3}$  δηλώνουν τις τάσεις στο σύστημα αντίστοιχα. Επιλύοντας το παραπάνω μπλοκ εξισώσεων ως προς το μηδενικό διάνυσμα και παρατηρώντας ότι οι μεταβλητές των καταστάσεων και των εισόδων υπερέχουν σε αριθμό σε σχέση με το πλήθος των εξισώσεων οι λύσεις της σχέσης  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, u_1, u_2, u_3) = 0$  θα είναι άπειρες. Το βασικό κριτήριο επιλογής του σημείου λειτουργίας γίνεται με βάση το εύρος των επιτρεπτών τιμών όπου μπορεί να αποδώσει το σύστημα σε πραγματικές συνθήκες, με αυτό το τρόπο μπορούμε να αποκλείσουμε διάφορα σενάρια λειτουργίας όπου θα ίσχυαν θεωρητικά αλλά πρακτικά δεν θα μπορούσαν να υλοποιηθούν. Έτσι κάποια από τα σημεία λειτουργίας των διανυσμάτων των ταχυτήτων, των τανύσεων και των τάσεων εισόδων της διεργασίας παρουσιάζονται ως εξής :

$$L = \{l_1, l_2, l_3\} \quad (5.33)$$

όπου :

$$l_1 = \left[ \bar{x}_{1_1}, \bar{x}_{2_1}, \bar{x}_{3_1}, \bar{x}_{4_1}, \bar{x}_{5_1}, \bar{x}_{6_1}, \bar{x}_{7_1}, \bar{x}_{8_1}, \bar{u}_{1_1}, \bar{u}_{2_1}, \bar{u}_{3_1} \right] =$$

$$[1 \quad 0.0818 \quad -0.0658 \quad 0.1 \quad 0.7688 \quad 2 \quad 0.1065 \quad 0.0418 \quad 0.0288 \quad 0.0051 \quad 0.0108]$$

(5.34)

$$l_2 = \left[ \bar{x}_{1_2}, \bar{x}_{2_2}, \bar{x}_{3_2}, \bar{x}_{4_2}, \bar{x}_{5_2}, \bar{x}_{6_2}, \bar{x}_{7_2}, \bar{x}_{8_2}, \bar{u}_{1_2}, \bar{u}_{2_2}, \bar{u}_{3_2} \right] =$$

$$[200 \quad 0.1636 \quad -13.5786 \quad 0.2 \quad 0.1508 \quad 300 \quad 0.2130 \quad 5.8445 \quad 0.0550 \quad 0.0100 \quad 0.0227]$$

(5.35)

$$l_3 = \left[ \bar{x}_{1_3}, \bar{x}_{2_3}, \bar{x}_{3_3}, \bar{x}_{4_3}, \bar{x}_{5_3}, \bar{x}_{6_3}, \bar{x}_{7_3}, \bar{x}_{8_3}, \bar{u}_{1_3}, \bar{u}_{2_3}, \bar{u}_{3_3} \right] =$$

$$[399 \quad 0.2454 \quad -27.0885 \quad 0.3 \quad -0.4672 \quad 598 \quad 0.3195 \quad 11.6471 \quad 0.0812 \quad 0.0149 \quad 0.0345]$$

(5.36)

Αξιοποιώντας τα παραπάνω σημεία λειτουργίας και σύμφωνα με τις σχέσεις (5.4),(5.5) οι συνθήκες γραμμικοποίησης ορίζονται ως εξής :

$$A_{1,\dots,3} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x=x_{01,\dots,3}, u=u_{01,\dots,3})}, B_{1,\dots,\mu} = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x=x_{01,\dots,3}, u=u_{01,\dots,3})} \quad (5.37)$$

όπου οι πίνακες της σχέσης (5.4) ορίζονται ως εξής :

$$A_{1,\dots,3} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x=x_{01,\dots,3}, u=u_{01,\dots,3})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$B_{1,\dots,3} = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x=x_{01,\dots,3}, u=u_{01,\dots,3})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$



Όπου προκύπτουν τα γραμμικά συστήματα :

$$S_1 : \delta \dot{x} = A_1 \delta x + B_1 \delta u \quad (5.40)$$

$$S_2 : \delta \dot{x} = A_2 \delta x + B_2 \delta u \quad (5.41)$$

$$S_3 : \delta \dot{x} = A_3 \delta x + B_3 \delta u \quad (5.42)$$

όπου :

$$\delta x = x - x_{0_{1,\dots,3}}, \delta u = u - u_{0_{1,\dots,3}}$$

και όπου οι γραμμικοποιημένοι συστημικοί πίνακες για κάθε σημείο λειτουργίας ορίζονται ως :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \text{alin}_{1,1} & \text{alin}_{1,2} & 0 & \text{alin}_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{alin}_{2,1} & \text{alin}_{2,2} & \text{alin}_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{alin}_{3,2} & \text{alin}_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{alin}_{4,1} & 0 & 0 & \text{alin}_{4,4} & \text{alin}_{4,5} & \text{alin}_{4,6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{alin}_{5,4} & \text{alin}_{5,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{alin}_{6,4} & 0 & \text{alin}_{6,6} & \text{alin}_{6,7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{alin}_{7,6} & \text{alin}_{7,7} & \text{alin}_{7,8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{alin}_{8,7} & \text{alin}_{8,8} \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{blin}_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{blin}_{5,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{blin}_{8,3} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

όπου :

$$alin_{1,1} = -\frac{(EA_1 K_z \chi_0)}{L} \bar{x}_{4_h}$$

$$alin_{1,2} = -\frac{EA_1}{L}$$

$$alin_{1,4} = -\frac{\left( EA_1 \left( \chi_0 \left( K_z \bar{x}_{1_h} + 1 \right) - 1 \right) \right)}{L}$$

$$alin_{2,1} = \frac{R_1^2}{J_1 \eta_1^2}$$

$$alin_{2,2} = -\left( \frac{B_{u1}}{J_1} + \frac{H}{\pi R_1^2} \bar{x}_{2_h} \right)$$

$$alin_{2,3} = \frac{K_1 R_1}{J_1 \eta_1}$$

$$alin_{3,2} = -\frac{K_1 \eta_1}{l_1 R_1}$$

$$alin_{3,3} = -\frac{r_1}{l_1}$$

$$alin_{4,1} = -\frac{R_2^2}{J_2 \eta_2^2}$$

$$alin_{4,4} = -\frac{B_{u2}}{J_2}$$

$$alin_{4,5} = \frac{K_2 R_2}{J_2 \eta_2}$$

$$alin_{4,6} = \frac{R_2^2}{J_2 \eta_2^2}$$

$$alin_{5,4} = -\frac{K_2 \eta_2}{l_2 R_2}$$

$$alin_{5,4} = -\frac{r_2}{l_2}$$

$$alin_{6,4} = -\frac{EA_2 \left( 1 + \delta_0 \left( 1 + K_\delta \bar{x}_{6_h} \right) \right)}{L}$$

$$alin_{6,6} = \frac{EA_2 \delta_0 K_\delta}{L} \bar{x}_{4_h}$$

$$alin_{6,7} = \frac{EA_2}{L}$$

$$alin_{7,6} = -\frac{R_3^2}{J_3 \eta_3^2}$$

$$alin_{7,7} = -\left( \frac{B_{u3}}{J_3} - \frac{h}{112 R_3^2} \bar{x}_{7_h} \right)$$

$$alin_{7,8} = \frac{K_3 R_3}{J_3 \eta_3}$$

$$alin_{8,7} = -\frac{K_3 \eta_3}{l_3 R_3}$$

$$alin_{8,8} = -\frac{r_3}{l_3}$$

$$blin_{3,1} = \frac{Ks_1}{l_1}$$

$$blin_{5,2} = \frac{Ks_2}{l_2}$$

$$blin_{8,3} = \frac{Ks_3}{l_3}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} alin_{1,1} & alin_{1,2} & 0 & alin_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ alin_{2,1} & alin_{2,2} & alin_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & alin_{3,2} & alin_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ alin_{4,1} & 0 & 0 & alin_{4,4} & alin_{4,5} & alin_{4,6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & alin_{5,4} & alin_{5,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & alin_{6,4} & 0 & alin_{6,6} & alin_{6,7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & alin_{7,6} & alin_{7,7} & alin_{7,8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & alin_{8,7} & alin_{8,8} \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ blin_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & blin_{5,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & blin_{8,3} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

όπου :

$$alin_{1,1} = -\frac{(EA_1 K_z \chi_0)}{L} \bar{x}_{4_{l_2}}$$

$$alin_{1,2} = -\frac{EA_1}{L}$$

$$alin_{1,4} = -\frac{\left( EA_1 \left( \chi_0 \left( K_z \bar{x}_{1_{l_2}} + 1 \right) - 1 \right) \right)}{L}$$

$$alin_{2,1} = \frac{R_1^2}{J_1 \eta_1^2}$$

$$alin_{2,2} = -\left( \frac{B_{u1}}{J_1} + \frac{H}{\pi R_1^2} \bar{x}_{2_{l_2}} \right)$$

$$alin_{2,3} = \frac{K_1 R_1}{J_1 \eta_1}$$

$$alin_{3,2} = -\frac{K_1 \eta_1}{l_1 R_1}$$

$$alin_{3,3} = -\frac{r_1}{l_1}$$

$$alin_{4,1} = -\frac{R_2^2}{J_2 \eta_2^2}$$

$$alin_{4,4} = -\frac{B_{u2}}{J_2}$$

$$alin_{4,5} = \frac{K_2 R_2}{J_2 \eta_2}$$

$$alin_{4,6} = \frac{R_2^2}{J_2 \eta_2^2}$$

$$alin_{5,4} = -\frac{K_2 \eta_2}{l_2 R_2}$$

$$alin_{5,4} = -\frac{r_2}{l_2}$$

$$alin_{6,4} = -\frac{EA_2 \left( 1 + \delta_0 \left( 1 + K_\delta \bar{x}_{6_{l_2}} \right) \right)}{L}$$

$$alin_{6,6} = \frac{EA_2 \delta_0 K_\delta}{L} \bar{x}_{4_{l_2}}$$

$$alin_{6,7} = \frac{EA_2}{L}$$

$$alin_{7,6} = -\frac{R_3^2}{J_3 \eta_3^2}$$

$$alin_{7,7} = -\left( \frac{B_{u3}}{J_3} - \frac{h}{11 \pi R_3^2} \bar{x}_{7_{l_2}} \right)$$

$$alin_{7,8} = \frac{K_3 R_3}{J_3 \eta_3}$$

$$alin_{8,7} = -\frac{K_3 \eta_3}{l_3 R_3}$$

$$alin_{8,8} = -\frac{r_3}{l_3}$$

$$blin_{3,1} = \frac{Ks_1}{l_1}$$

$$blin_{5,2} = \frac{Ks_2}{l_2}$$

$$blin_{8,3} = \frac{Ks_3}{l_3}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} alin_{1,1} & alin_{1,2} & 0 & alin_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ alin_{2,1} & alin_{2,2} & alin_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & alin_{3,2} & alin_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ alin_{4,1} & 0 & 0 & alin_{4,4} & alin_{4,5} & alin_{4,6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & alin_{5,4} & alin_{5,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & alin_{6,4} & 0 & alin_{6,6} & alin_{6,7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & alin_{7,6} & alin_{7,7} & alin_{7,8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & alin_{8,7} & alin_{8,8} \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ blin_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & blin_{5,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & blin_{8,3} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

όπου :

$$alin_{1,1} = -\frac{(EA_1 K_z \chi_0)}{L} \bar{x}_{4_{i_3}}$$

$$alin_{1,2} = -\frac{EA_1}{L}$$

$$alin_{1,4} = -\frac{\left( EA_1 \left( \chi_0 \left( K_z \bar{x}_{1_{i_3}} + 1 \right) - 1 \right) \right)}{L}$$

$$alin_{2,1} = \frac{R_1^2}{J_1 \eta_1^2}$$

$$alin_{2,2} = -\left( \frac{B_{u1}}{J_1} + \frac{H}{\pi R_1^2} \bar{x}_{2_{i_3}} \right)$$

$$alin_{2,3} = \frac{K_1 R_1}{J_1 \eta_1}$$

$$alin_{3,2} = -\frac{K_1 \eta_1}{l_1 R_1}$$

$$alin_{3,3} = -\frac{r_1}{l_1}$$

$$alin_{4,1} = -\frac{R_2^2}{J_2 \eta_2^2}$$

$$alin_{4,4} = -\frac{B_{u2}}{J_2}$$

$$alin_{4,5} = \frac{K_2 R_2}{J_2 \eta_2}$$

$$alin_{4,6} = \frac{R_2^2}{J_2 \eta_2^2}$$

$$alin_{5,4} = -\frac{K_2 \eta_2}{l_2 R_2}$$

$$alin_{5,4} = -\frac{r_2}{l_2}$$

$$alin_{6,4} = -\frac{EA_2 \left( 1 + \delta_0 \left( 1 + K_\delta \bar{x}_{6_{i_3}} \right) \right)}{L}$$

$$alin_{6,6} = \frac{EA_2 \delta_0 K_\delta}{L} \bar{x}_{4_{i_3}}$$

$$alin_{6,7} = \frac{EA_2}{L}$$

$$alin_{7,6} = -\frac{R_3^2}{J_3 \eta_3^2}$$

$$alin_{7,7} = -\left( \frac{B_{u3}}{J_3} - \frac{h}{116 R_3^2} \bar{x}_{7_{i_3}} \right)$$

$$alin_{7,8} = \frac{K_3 R_3}{J_3 \eta_3}$$

$$alin_{8,7} = -\frac{K_3 \eta_3}{l_3 R_3}$$

$$alin_{8,8} = -\frac{r_3}{l_3}$$

$$blin_{3,1} = \frac{Ks_1}{l_1}$$

$$blin_{5,2} = \frac{Ks_2}{l_2}$$

$$blin_{8,3} = \frac{Ks_3}{l_3}$$

και όπου τα  $\{S_1, \dots, S_3\}$  αποτελούν τις γραμμικοποιήσεις και τα  $\{l_1, \dots, l_3\}$  αποτελούν τα πολλαπλά σημεία ισορροπίας. Το σύνολο των κοινών ελεγκτών καθορίζεται ως  $\{C_{1,2}, C_{2,3}\}$  όπου ο κάθε ελεγκτής θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη της ευστάθειας στο σύστημα, δηλαδή από το σημείο λειτουργίας στο οποίο βρίσκεται το σύστημα (αρχική θέση), έως το σημείο στόχου. Έτσι το σχήμα ελέγχου της διεργασίας σύμφωνα και με την θεωρία ελέγχου της υποενότητας (4.3.1) διαμορφώνεται ως εξής :

$$C_{1,2} : \delta u(t) = -F_{d1} \delta x(t) - F_{d2} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5.49)$$

$$C_{2,3} : \delta u(t) = -F_{d1} \delta x(t) - F_{d2} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5.50)$$

όπου τα  $F_{d1, d2}$  δηλώνουν τα κέρδη του ελεγκτή όπου είναι της μορφής :

$$C_{1,2} : F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} & f_{1,6} & f_{1,7} & f_{1,8} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} & f_{2,6} & f_{2,7} & f_{2,8} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} & f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} \end{bmatrix}, F_{d2} = \begin{bmatrix} f_{1,9} & f_{1,10} & f_{1,11} \\ f_{2,9} & f_{2,10} & f_{2,11} \\ f_{3,9} & f_{3,10} & f_{3,11} \end{bmatrix}$$

$$C_{2,3} : F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} & f_{1,6} & f_{1,7} & f_{1,8} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} & f_{2,6} & f_{2,7} & f_{2,8} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} & f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} \end{bmatrix}, F_{d2} = \begin{bmatrix} f_{1,9} & f_{1,10} & f_{1,11} \\ f_{2,9} & f_{2,10} & f_{2,11} \\ f_{3,9} & f_{3,10} & f_{3,11} \end{bmatrix}$$

και το  $e(t) = r(t) - y(t)$  όπου δηλώνει το σφάλμα μόνιμης κατάστασης.

#### 5.4.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΤΑΙΝΙΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΤΗΡΑ DC (c)

Η βηματική ασφαλή μεταγωγή απαιτεί τον προσδιορισμό των κοινών ελεγκτών  $C_{1,2}, C_{2,3}$  που να ικανοποιούν τις σχεδιαστικές απαιτήσεις για τα ζευγάρια γραμμικών συστημάτων  $(S_1, S_2)$  και  $(S_2, S_3)$ , αντίστοιχα. Έτσι προκειμένου να μετακινηθεί το σύστημα από το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_1$  στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_2$  και στην συνέχεια στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_3$ , ο σχεδιαστής εφαρμόζει βηματική ασφαλή μεταγωγή που παίρνει την ακόλουθη μορφή :

- a) Αρχικά ο ελεγκτής ασυμπτωτικής ακολούθησης βηματικής εντολής  $C_{1,2}$  εφαρμόζεται με  $r(t) = [2 \ 0.2 \ 3]^T$ . Η επιλεγόμενη εξωτερική εντολή οδηγεί το σύστημα από το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_1$  στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_2$ .
- b) Μόλις οι τροχιές των καταστάσεων και των εισόδων προσεγγίσουν το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_2$ , ο σχεδιαστής εφαρμόζει μεταγωγή στον ελεγκτή  $C_{2,3}$  με  $r(t) = [3 \ 0.3 \ 4]^T$ . Η επιλεγόμενη εξωτερική εντολή οδηγεί το σύστημα από το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_2$  στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $l_3$ .

Έτσι εφαρμόζοντας τους νόμους ελέγχου των σχέσεων (5.49), (5.50) τα κέρδη του ελεγκτή καθώς και της εξωτερικής εντολής είναι της μορφής :



$$C_{1,2} : F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} & f_{1,6} & f_{1,7} & f_{1,8} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} & f_{2,6} & f_{2,7} & f_{2,8} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} & f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -5 \times 10^{-5} & -14.32 & -2 \times 10^{-3} & 18.69 & 10^{-3} & -6 \times 10^{-5} & -6.45 & 2.45 \\ -10^{-5} & 8.67 & 9 \times 10^{-4} & -9.58 & -7 \times 10^{-4} & 7 \times 10^{-6} & 1.75 & 4.333 \\ 3 \times 10^{-5} & -6.45 & -3 \times 10^{-3} & 11.78 & 6 \times 10^{-4} & -10^{-5} & -6.97 & 1.57 \end{bmatrix}$$

$$C_{1,2} : F_{d2} = \begin{bmatrix} f_{1,9} & f_{1,10} & f_{1,11} \\ f_{2,9} & f_{2,10} & f_{2,11} \\ f_{3,9} & f_{3,10} & f_{3,11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 970.87 & 15000 & -270.99 \\ 1.7 & 25 & -4.78 \\ 970.47 & 15000 & -270.63 \end{bmatrix}$$

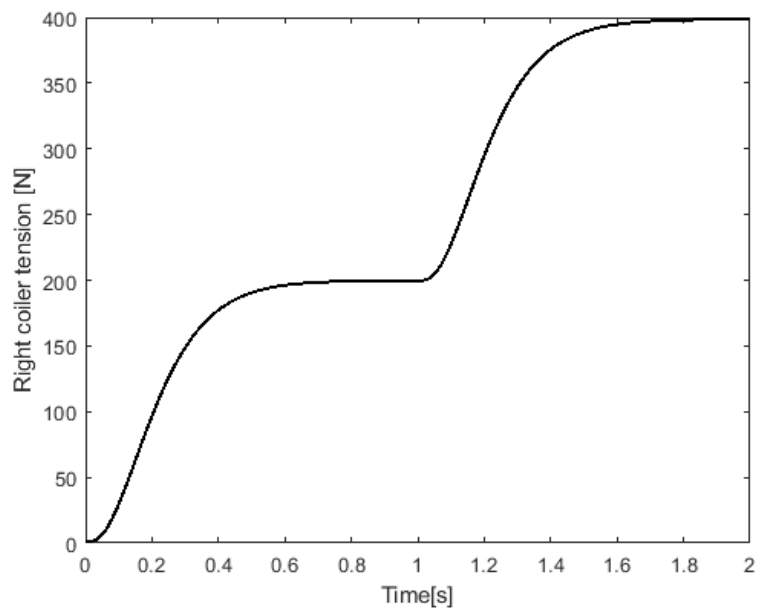
$$C_{2,3} : F_{d1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} & f_{1,6} & f_{1,7} & f_{1,8} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} & f_{2,6} & f_{2,7} & f_{2,8} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} & f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -5 \times 10^{-5} & -14.38 & -2 \times 10^{-3} & 18.74 & 10^{-3} & -6 \times 10^{-5} & -6.46 & 2.46 \\ -10^{-5} & 8.69 & 9 \times 10^{-4} & -9.59 & -7 \times 10^{-4} & 7 \times 10^{-6} & 1.78 & 4.34 \\ 3 \times 10^{-5} & -6.46 & -3 \times 10^{-3} & 11.78 & 6 \times 10^{-4} & -10^{-5} & -6.98 & 1.58 \end{bmatrix}$$

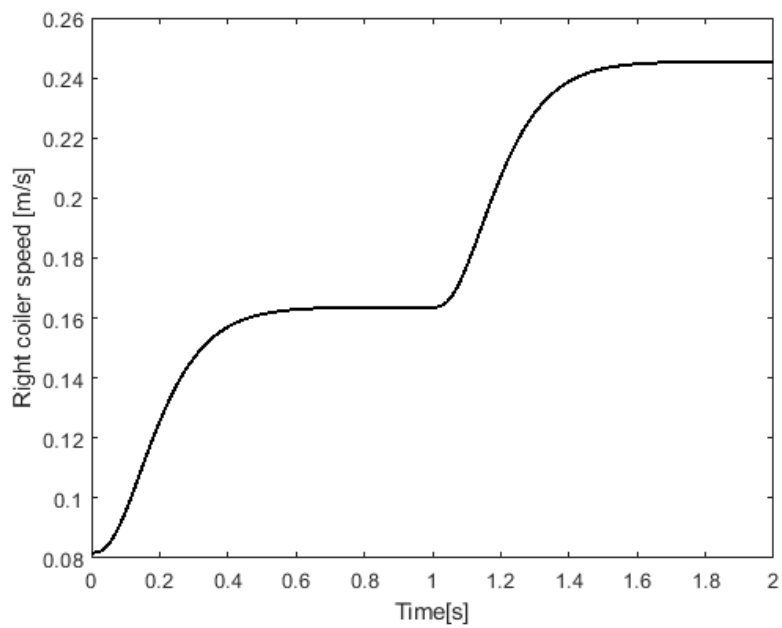
$$C_{2,3} : F_{d2} = \begin{bmatrix} f_{1,9} & f_{1,10} & f_{1,11} \\ f_{2,9} & f_{2,10} & f_{2,11} \\ f_{3,9} & f_{3,10} & f_{3,11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 970.93 & 15000 & -271.39 \\ 1.767 & 25.0012 & -4.79 \\ 971.47 & 15000 & -272.13 \end{bmatrix}$$

$$r(t) = \begin{cases} [200 & 0.2 & 300]^T & t \leq 1 \\ [399 & 0.3 & 598]^T & t > 1 \end{cases}$$

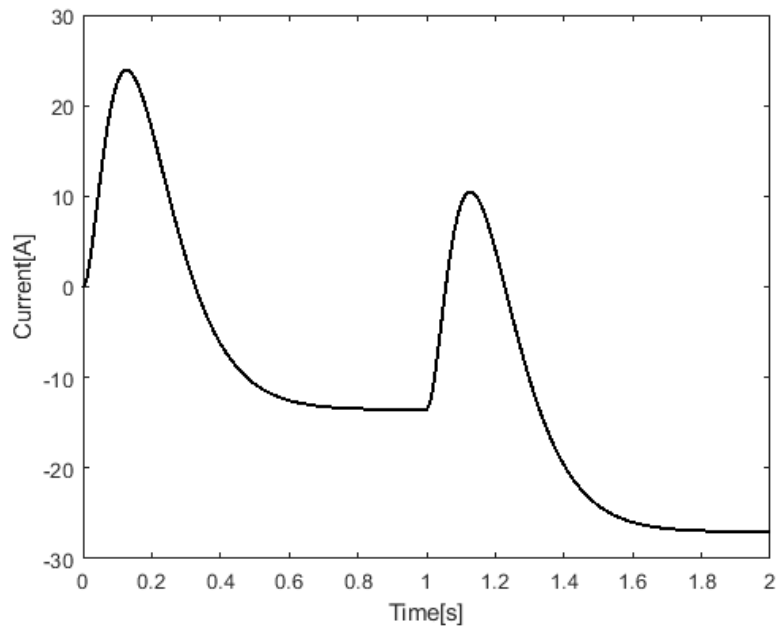
η απεικόνιση του παραπάνω σεναρίου αποδίδεται σχηματικά ως εξής :



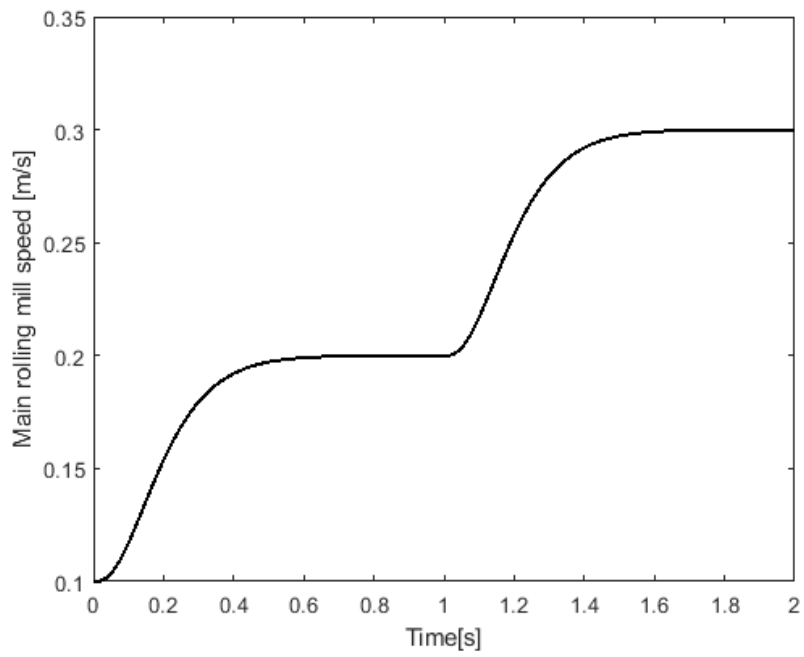
Σχήμα 53: Μεταγωγή τάνσης εκτυλικτικού μηχανισμού



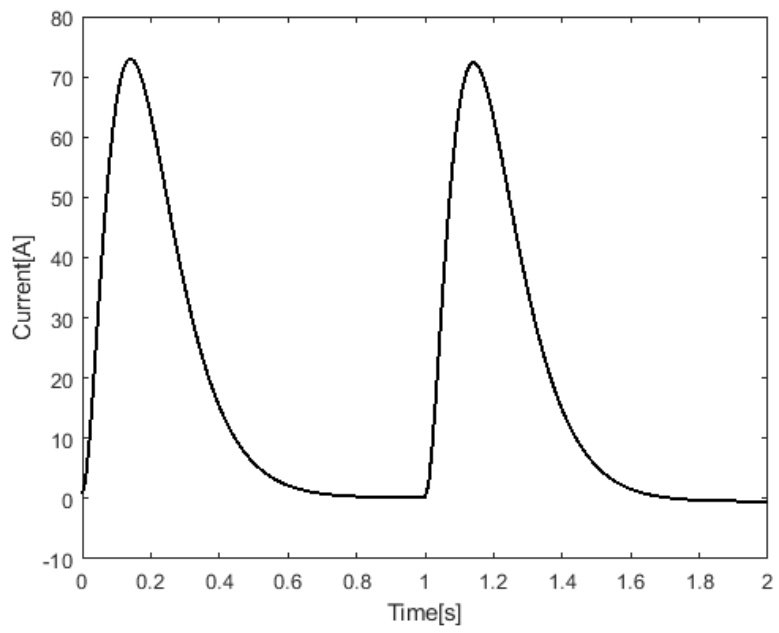
Σχήμα 54: Μεταγωγή ταχύτητας εκτυλικτικού μηχανισμού



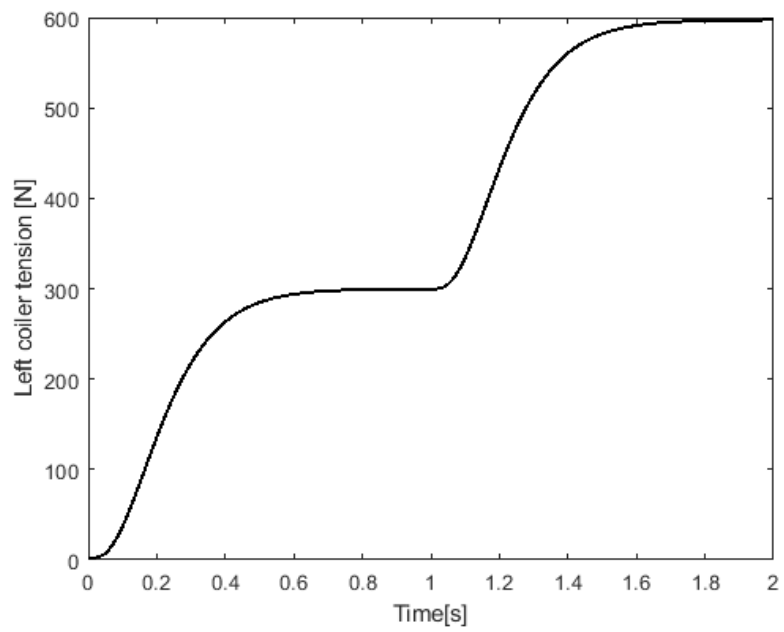
Σχήμα 55: Μεταγωγή ρεύματος εκτυλικτικού μηχανισμού



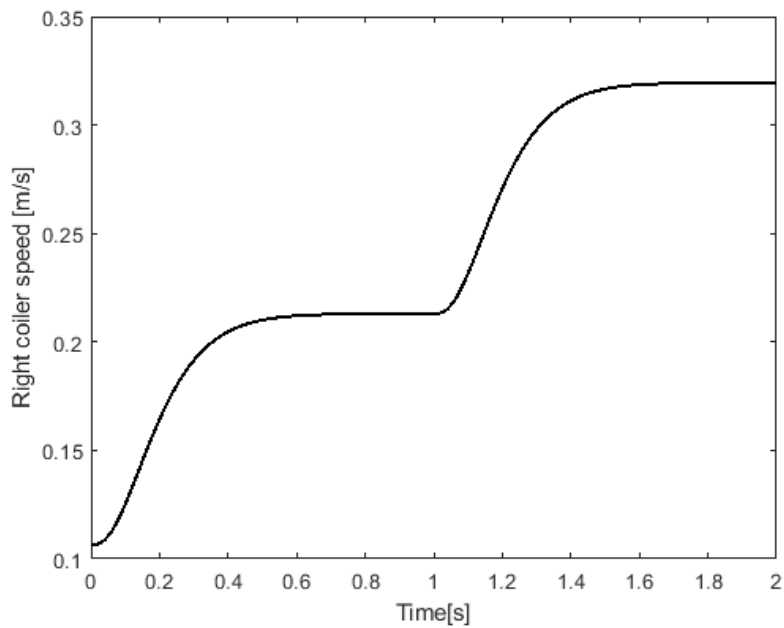
Σχήμα 56: Μεταγωγή ταχύτητας κύριου ελασματοργείου



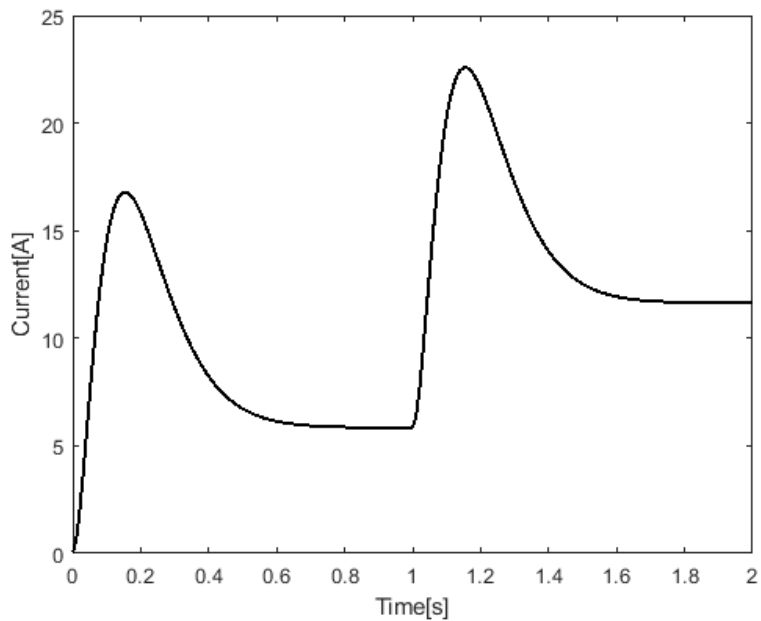
Σχήμα 57: Μεταγωγή ρεύματος κύριου ελασματοργείου



Σχήμα 58: Μεταγωγή τάνσης τυλικτικού μηχανισμού



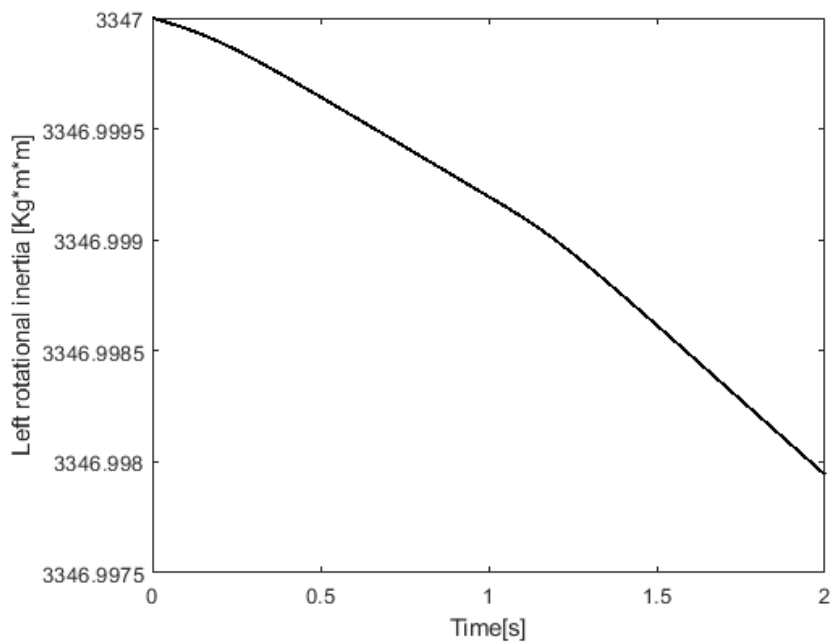
Σχήμα 59: Μεταγωγή ταχύτητας τυλικτικού μηχανισμού



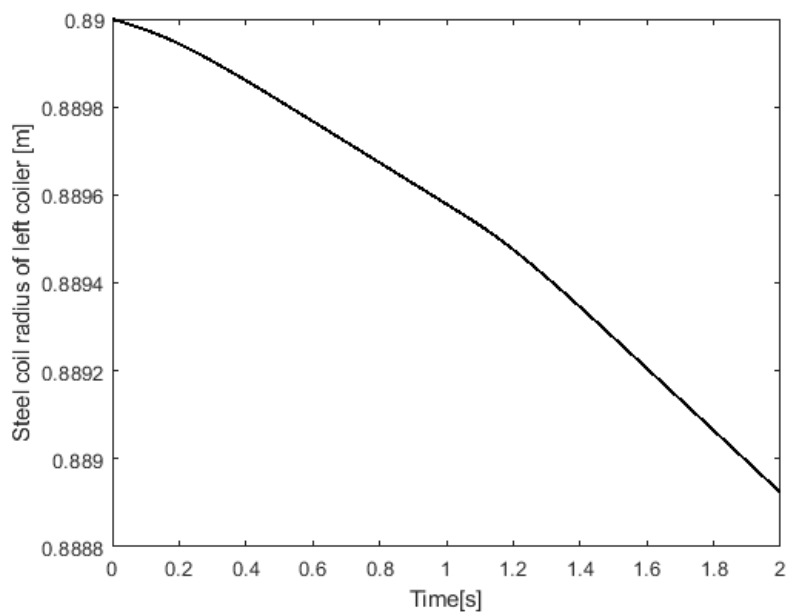
Σχήμα 60: Μεταγωγή ρεύματος τυλικτικού μηχανισμού

Από τις αποκρίσεις των καταστάσεων των ταχυτήτων καθώς και των τανύσεων, συμπεραίνουμε ότι ο μεταγωγικός ελεγκτής ασυμπτωτικής ακολουθίας βηματικής εντολής λειτούργησε ικανοποιητικά ως προς την ευστάθεια αλλά και ως προς την ακολουθία εντολής, δηλαδή την μετακίνηση από το ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_1$  στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_2$  και στην συνέχεια στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας  $I_3$ . Οι αποκρίσεις των μη ελέγξιμων καταστάσεων των ροπών αδράνειας

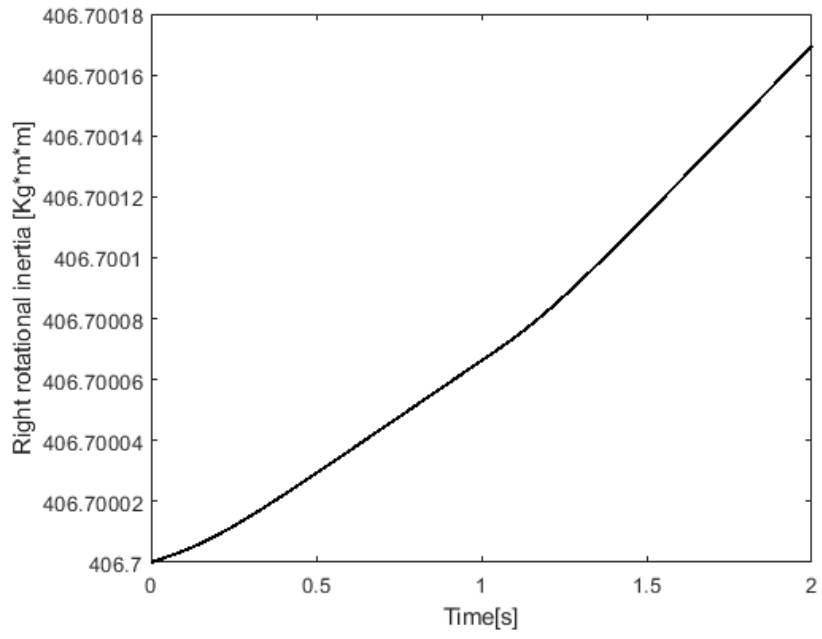
καθώς και των ακτινών του αριστερού και δεξιού μηχανισμού (left & right coiler) παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα ( βλ. Σχήμα 61,62,63,64 ) ως εξής :



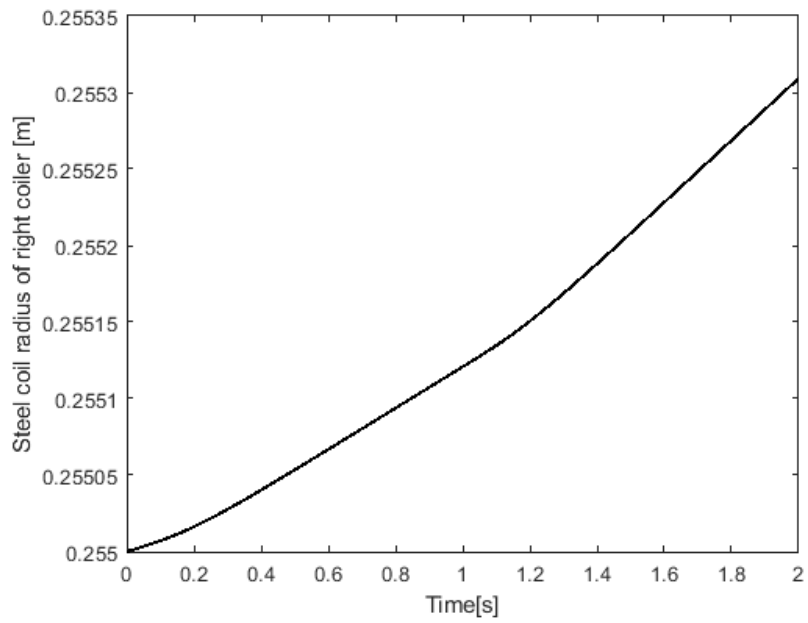
Σχήμα 61: Ροπή αδράνειας εκτυλικτικού μηχανισμού



Σχήμα 62: Ακτίνα εκτυλικτικού μηχανισμού

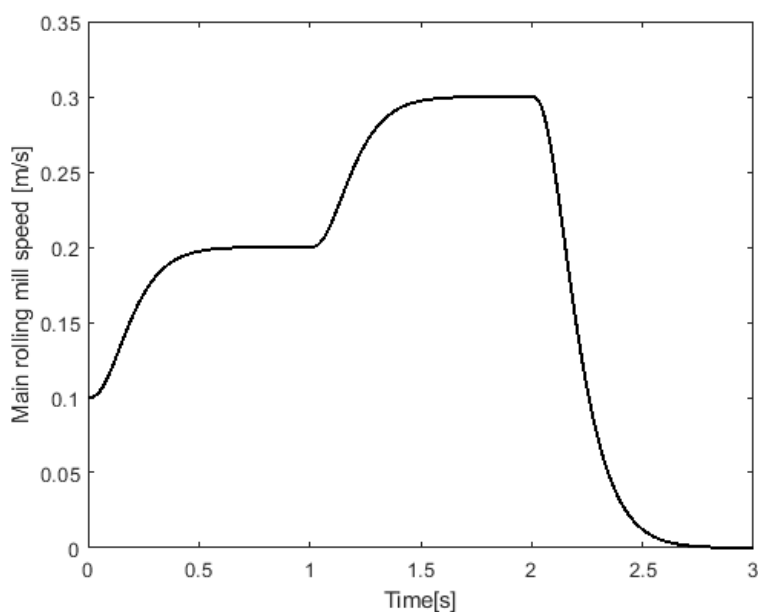


Σχήμα 63: Ροπή αδράνειας τυλικτικού μηχανισμού



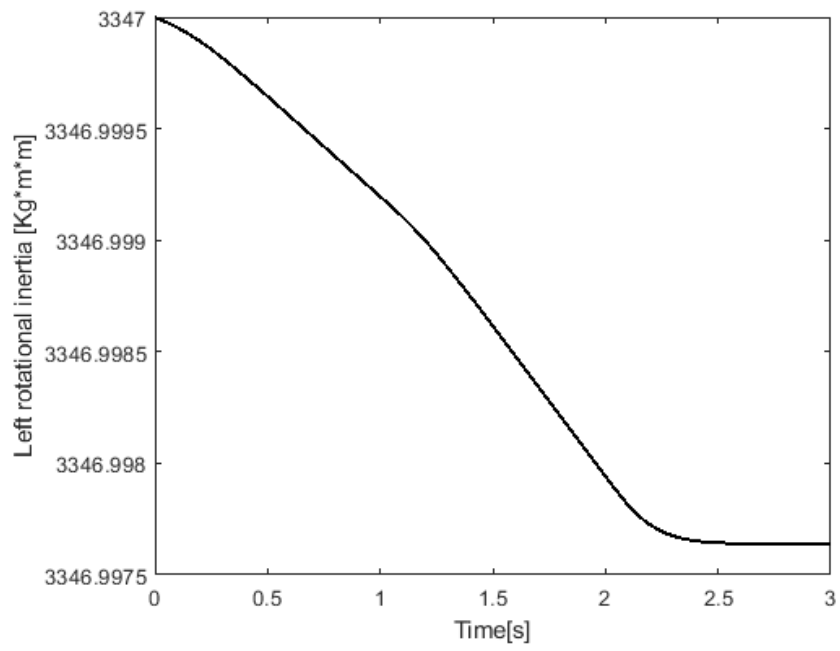
Σχήμα 64: Ακτίνα τυλικτικού μηχανισμού

Πρακτικά λόγω ότι οι καταστάσεις των ροπών και των ακτινών είναι μη ελέγξιμες καθώς και ότι η λωρίδα που έχει άμεση επίδραση στο μοντέλο ψυχρής έλασης δεν μπορεί να είναι άπειρη, θα πρέπει να υπάρχει ένας επόπτης λογικός ελεγκτής που θα καθορίζει πότε το σύστημα θα πέφτει σε αναστολή λειτουργίας. Πιο συγκεκριμένα κατά την λειτουργία του ελασματουργείου η λωρίδα καθώς ξετυλίγεται από το εκτυλικτικό και ξανά τυλίγεται στο τυλικτικό είναι αναγκαίο να υπάρχει κάποιο κατάλληλο αισθητήριο που να υπολογίζει την ακτίνα του εκτυλικτικού έτσι ώστε όταν η ακτίνα τείνει να μηδενιστεί, να λαμβάνει χώρα ο λογικός ελεγκτής έτσι ώστε η ταχύτητα να μηδενιστεί. Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω ως υποθέσουμε το εξής σενάριο. Έστω ότι από το χρονικό διάστημα 0 έως 1 (sec) η ταχύτητα ( $V_{2ref}$ ) από τα 0.1 (m/sec) όπου ήταν το αρχικό σημείο λειτουργίας  $I_1$  με την ασφαλή μεταγωγή έφτασε στο σημείο λειτουργίας  $I_3$  με ταχύτητα 0.3 (m/sec) και από τα 1 έως 2 (sec) λαμβάνει χώρα ο επόπτης ελεγκτής όπου λόγω του κατώτατου ορίου της ακτίνας του εκτυλικτικού δίνει εντολή να μηδενιστεί η ταχύτητα. Θα παρατηρήσουμε ότι οι μεταβολές των ροπών και των ακτινών θα σταθεροποιηθούν ( βλ. Σχήματα 65,66,67,68,69).

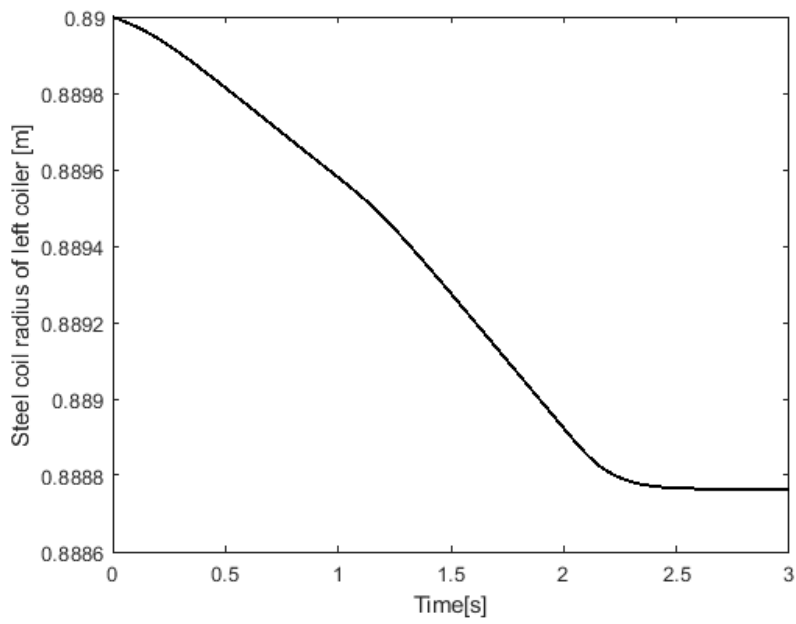


Σχήμα 65: Ταχύτητα κύριου ελασματουργείου

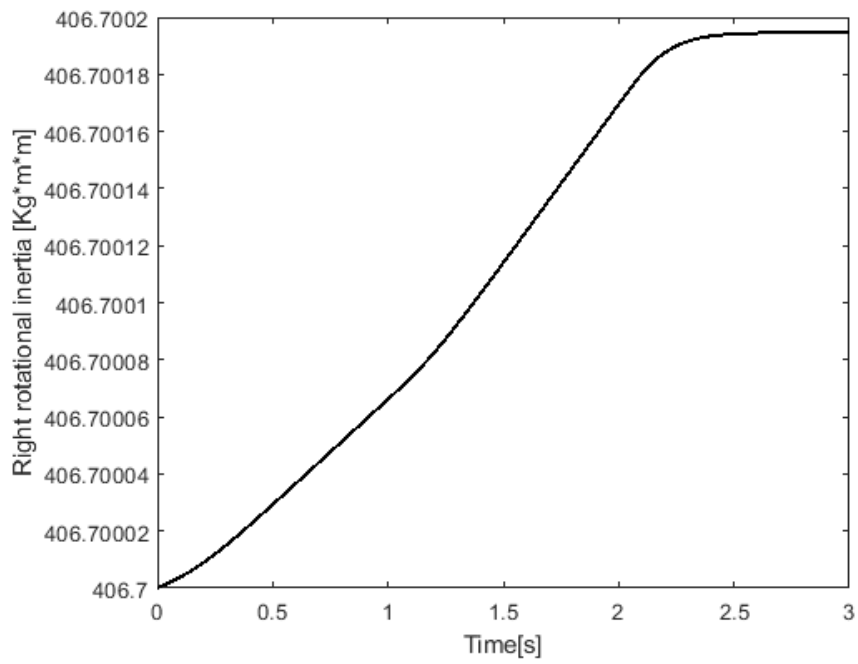




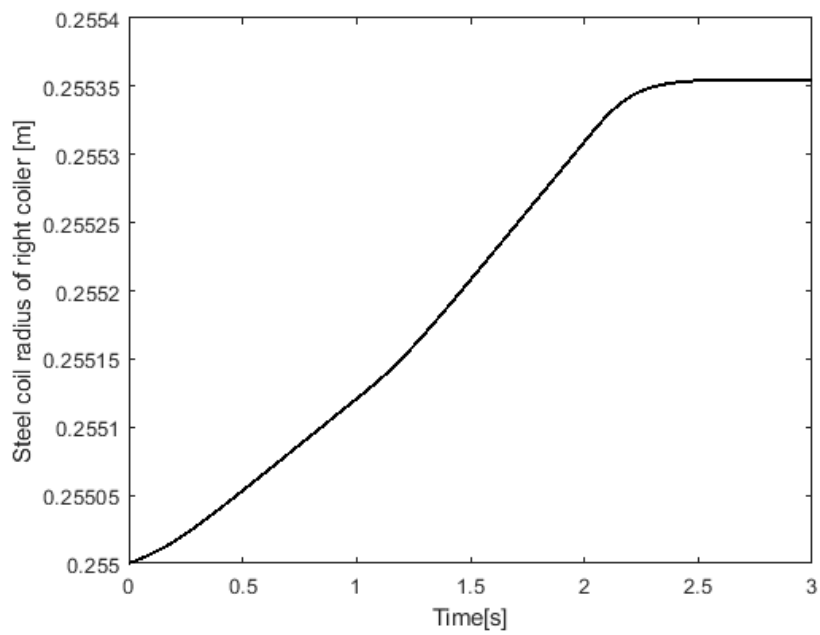
Σχήμα 66: Ροπή αδράνειας εκτυλικτικού μηχανισμού



Σχήμα 67: Ακτίνα εκτυλικτικού μηχανισμού



Σχήμα 68: Ροπή αδράνειας τυλικτικού μηχανισμού



Σχήμα 69: Ακτίνα τυλικτικού μηχανισμού

## ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία παρουσιάστηκε ένας μεταγωγικός αλγόριθμος ακολούθησης εντολής για τη διαδικασία της ψυχρής έλασης σε βιομηχανίες μετάλλου. Μελετήθηκαν διάφορα μοντέλα που περιγράφουν τη διαδικασία της ψυχρής έλασης. Τα μοντέλα αυτά προέρχονται από τη διεθνή βιβλιογραφία.

Τα αποτελέσματα του ελέγχου είναι ικανοποιητικά τόσο για το γραμμικό προσεγγιστικό μοντέλο της διεργασίας όσο και για το μη γραμμικό μοντέλο της διεργασίας. Η ικανοποιητική συμπεριφορά επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων για πολλαπλές μεταβάσεις.

Τα αποτελέσματα της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας συνεισφέρουν στην ακαδημαϊκή βιομηχανική έρευνα αλλά μπορούν να αξιοποιηθούν για την ανάπτυξη λογισμικού ελέγχου της υπό έλεγχο διεργασίας στο βιομηχανικό πεδίο.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας προσφέρονται για επέκταση

α) Στο σχεδιασμό κοινών ελεγκτών, βλ [11]-[13]

β) Στον σχεδιασμό ελεγκτών ασφαλούς μεταγωγής με αυστηρές προδιαγραφές κριτηρίων ελαχιστοποίησης, βλ. [14]-[16].

γ) Την ανάπτυξη εξωτερικών εποπτών σε μορφή πεπερασμένων ντετερμινιστικών αυτόματων, βλ. [17]-[19].

δ) Την ανάπτυξη ενός αντίστοιχου συστήματος υποστήριξης αποφάσεων, βλ. [20].

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. Yu Han, Le Liu and Yiming Fang, “Adaptive Robust Control for the speed system of the cold strip main rolling mill based on global integral sliding mode”, ICIC Express Letters, Part B: Applications Vol. 8, No 3, pp. 593-600, 2017.
2. Abdelmajid AKIL, Mourad Zegrari and Nabila Rabbah dept. of Electrical Engineering, Laboratory of Structural Engineering, Intelligent Systems and Electrical Energy National Higher School of Arts and Crafts (ENSAM), Hassan II University Casablanca, MOROCCO “Robust Adaptive Backstepping Control for web winding system of reversible cold rolling mill”.
3. Le Liu, Nuan Shao, Minghao Lin and Yiming Fang, “Hamilton-based adaptive robust control for the speed and tension system of reversible cold strip rolling mill”, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 33, pp. 626-643, 2019.
4. Eric John Muir. Geddes, Tandem Cold Rolling and Robust Multivariable Control, Ph.D Thesis, University of Leicester, 2014.
5. Γαβαλάς Ευάγγελος, Προσομοίωση της κατεργασίας θερμής έλασης κραμάτων αλουμινίου με χρήση πεπερασμένων στοιχείων, Διδακτορική Διατριβή ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ.
6. J. Chakrabarty, Theory of Plasticity, Third edition published by Elsevier Butterworth-Heinemann 2006.
7. F. N. Koumboulis, R.E. King, A. Stathaki, Logic-Based Switching Controllers – A Stepwise Safe Switching Approach, Information Sciences, vol. 177, no. 13, pp. 2736–2755, 2007.
8. F. N. Koumboulis and M. P. Tzamtzi, Multivariable Step-Wise Safe Switching Controllers, Proceedings of the International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation and International Conference on Intelligent Agents, Web Technologies and Internet Commerce (CIMCA-IAWTIC’05), Vienna, Austria, November 28-30, 2005.

9. Μιχάλης Σκαρπέτης και Φώτης Κουμπουλής, **Αυτόματος Έλεγχος Υδραυλικών και Πνευματικών Συστημάτων**, Διαθέτης (Εκδότης): Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα - Αποθετήριο "Κάλλιπος", 2016.
10. Michael G. Skarpetis , PHD (Editor) Associate Professor, Core Department, National and Kapodistrian University of Athens, Greece, Automatic Control of Hydraulic Systems, NOVA science publishers.
11. F. N. Koumboulis, “On the heuristic design of common PI controllers for multi-model plants”, *2005 IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*, vol. 1, pp-982, 2005.
12. F. N. Koumboulis, “Common I/O decoupling for multi model descriptor systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 3, pp. 783-788, 2016.
13. F. N. Koumboulis, “A unified approach for the common I/O decoupling via measurement output feedback of multi model descriptor and normal systems”, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 353, no. 16, pp. 4253-4279, 2016.
14. G. L Giannaris, N. D Kouvakas, F. N Koumboulis, D. Vouyioukas, “Switching Wireless Control for Longitudinal Quadrotor Maneuvers”, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 102, no. 2, pp. 1-21, 2021.
15. F. N Koumboulis, M. P Tzamtzi, C. E Economakos, “Step-wise safe switching control of a constant turning force system”, *International Journal of Modelling, Identification and Control*, vol. 12, no. 3, pp 191-199, 2011.
16. F. N. Koumboulis, M. P. Tzamtzi, “Towards Analytic Solutions of Step-Wise Safe Switching for Known Affine-Linear Models”, *AIP Conference Proceedings*, vol. 1046, no. 1, pp. 102-110, 2008.
17. F. N. Koumboulis, D. G. Fragkoulis, A. N. Menexis, “Supervisory control for flexibility of production manufacturing processes”, *2017 IEEE 21st International Conference on Intelligent Engineering Systems (INES)*, pp, 169-174, 2017
18. F. N. Koumboulis, D. G. Fragkoulis, K. A. Ioannou, “Control of Router Nodes in Production Manufacturing Processes”, *2018 7th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, pp. 372-377, 2018.
19. F.N. Koumboulis, D.G. Fragkoulis, I. Kalkanias, G.F. Fragulis, Supervisor Design for a Pressurized Reactor Unit in the Presence of Sensor and Actuator Faults, *Electronics*, vol. 11, no. 16, pp. 2534, 2022.

20. M. Pavlovic, F. N Koumboulis, M. P Tzamtzi, C. Rozman, “Role of automation agents in agribusiness decision support systems / Función de los agentes de automatización en los sistemas de apoyo a la toma de decisiones en agronegocios”, *Agrociencia*, vol. 42, no. 8, 2008.