

Η Εικασία Περιορισμού του Stein

**Διπλωματική Εργασία
Στέφανος Κούστας**

Επιβλέπουσα: Μαρίνα Ηλιοπούλου

**Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα - 2023-24**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Μαρίνα Ηλιοπούλου, Καθηγήτρια, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Γεράσιμος Μπαρμπάτης, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Παναγιώτης Σμυρνέλης, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Ευχαριστίες

Με την παρούσα διπλωματική εργασία ολοκληρώνονται οι μεταπτυχιακές μου σπουδές με κατεύθυνση στα Θεωρητικά Μαθηματικά, του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια Μαρίνα Ηλιοπούλου για την πολύτιμη βοήθεια της σε όλη τη διάρκεια συγγραφής της εργασίας. Οι συχνές μας συναντήσεις και η διαρκής καθοδήγησή της με βοήθησαν να καταλάβω το θέμα σε βάθος. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους κυρίους Γεράσιμο Μπαρμπάτη και Παναγιώτη Σμυρνέλη που συμμετείχαν στην Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή της εργασίας μου.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τους φίλους και την οικογένεια μου για την αμέριστη στήριξη τους αυτά τα χρόνια και ιδιαίτερος τον αδερφικό μου φίλο και μέντορα, Θεόδωρη, ο οποίος με ενέπνευσε να ασχοληθώ με τα Μαθηματικά.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Ανισότητες Marcinkiewicz και Hausdorff-Young	2
1.2	Διατύπωση του προβλήματος περιορισμού	6
1.2.1	Αναγκαίες συνθήκες για να ισχύει ένα θεώρημα $R_S(p \rightarrow q)$	7
2	Το Θεώρημα Stein-Tomas	9
2.1	Το Θεώρημα Stein-Tomas	9
2.1.1	Η κατασκευή του Knapp	14
2.2	Η λύση του προβλήματος περιορισμού στις δύο διαστάσεις	15
3	Το πρόβλημα στις 3 διαστάσεις	20
3.1	Προετοιμασία για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.0.1.	21
3.1.1	Το ε -removal Θεώρημα του Tao	24
3.1.2	Η διάσπαση σε wave packets	26
3.2	Πολυωνυμική διαμέριση	33
3.3	Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2	36
3.3.1	Το φράγμα για τους εφαπτομενικούς όρους	42
3.3.2	Η απόδειξη του Θεωρήματος	48
4	Το πρόβλημα στις μεγαλύτερες διαστάσεις	53
4.1	Η διάσπαση σε wave packets	54
4.2	Ευρείες νόρμες $BL_{k,A}^p$	56
4.2.1	Απόδειξη του Θεωρήματος 4.0.1	58
4.3	Αποτελέσματα από την Αλγεβρική Γεωμετρία	61
4.3.1	Εφαπτόμενοι χώροι αλγεβρικών επιφανειών	63
4.4	Εκτιμήσεις εγκάρσιας ισοκατανομής	66
4.5	Προσαρμογή της διάσπασης σε wave packets σε μικρότερες μπάλες	71
4.6	Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2	77
A'	Ασυμπτωτική συμπεριφορά στη σφαίρα	87
B'	Απόδειξη των Λημμάτων 3.3.5 και 3.3.6	91
B'.1	Απόδειξη του Λήμματος 3.3.5	91
B'.2	Απόδειξη του Λήμματος 3.3.6	93
	Βιβλιογραφία	98

Λίστα Συμβόλων

$[f = y] = \{x : f(x) = y\}$	το σύνολο στάθμης της f
$ A = \lambda_n(A)$	το μέτρο Lebesgue του $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$ x = \ x\ _2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	το μήκος του $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = 1\}$	η μοναδιαία σφαίρα του \mathbb{R}^n
$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$	το εσωτερικό γινόμενο των $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
$B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \leq 1\}$	η κλειστή μοναδιαία μπάλα του \mathbb{R}^n
$B_r^n(x_0) = \{x : x - x_0 \leq r\}$	η κλειστή μπάλα με κέντρο x_0 κι ακτίνα $r > 0$
$B_r = \{x : x \leq r\}$	η κλειστή μπάλα με κέντρο 0 κι ακτίνα $r > 0$
$\text{dist}(x, A) = \inf\{ x - y : y \in A\}$	η απόσταση του $x \in \mathbb{R}^n$ από το $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$p^* = \frac{p}{p-1}$	ο συζυγής εκθέτης του $p \in [1, \infty]$
$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$	ο χώρος των πολυωνύμων του \mathbb{R}^n
$\mathbb{R}_N[x_1, \dots, x_n]$	ο χώρος των πολυωνύμων του $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ βαθμού το πολύ N
$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$	ο μετασχηματισμός Fourier της f στο $\xi \in \mathbb{R}^n$
$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy$	η συνέλιξη των f, g
$\ f\ _p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f ^p\right)^{1/p}, p \in [1, +\infty)$	η p -νόρμα της f
$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$	η μερική παράγωγος της $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ στη μεταβλητή x_i

Περίληψη

Η εικασία περιορισμού είναι ένα από τα πιο διάσημα ανοιχτά προβλήματα της Αρμονικής Ανάλυσης. Διατυπώθηκε από τον Stein το 1967 και ισχυρίζεται πως ισχύει η εκτίμηση

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

για $n \geq 2$, κατάλληλες συναρτήσεις f και κατάλληλους εκθέτες $1 \leq p, q \leq \infty$. Έκτοτε έχει διατυπωθεί σε διάφορες μορφές. Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη μερικών από τις διάφορες μορφές του προβλήματος περιορισμού σε 2, 3 και σε περισσότερες από 4 διαστάσεις.

Παρουσιάζουμε συνοπτικά τα περιεχόμενα κάθε κεφαλαίου:

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αρκετά από τα θεωρήματα και τις ανισότητες που θα χρησιμοποιηθούν σε όλη την έκταση της εργασίας. Διατυπώνουμε επίσης την εικασία περιορισμού στη σφαίρα \mathbb{S}^{n-1} του \mathbb{R}^n , όπως και τους περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιούν οι εκθέτες p, q ώστε να μπορεί να υπάρξει λύση για το πρόβλημα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύουμε το θεώρημα Stein-Tomas από το 1975 που μας πιστοποιεί την ισχύ της εικασίας περιορισμού όταν $q = 2$ και το p υπακούει τους περιορισμούς του πρώτου κεφαλαίου και δείχνουμε ότι η εικασία για τη σφαίρα είναι αληθής στις 2 διαστάσεις.

Στα κεφάλαια 3 και 4 μελετάμε την εικασία περιορισμού για έναν τελεστή που γενικεύει τον μετασχηματισμό Fourier, τον τελεστή επέκτασης (extension operator). Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα για το πρόβλημα στις 3 διαστάσεις, το οποίο αποδείχθηκε από τον Guth το 2014 και στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα για το πρόβλημα σε διαστάσεις ≥ 4 , το οποίο οφείλεται επίσης στον Guth. Καταλυτικό ρόλο στις αποδείξεις των κεντρικών θεωρημάτων και των δύο κεφαλαίων θα παίξει η πολυωνυμική διαμέριση (polynomial partitioning), η οποία δημιουργήθηκε από τους Guth και Katz το 2010 για τη λύση του distinct distance problem του Erdős στο επίπεδο κι εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στην Αρμονική Ανάλυση από τον Guth στο [Gu1] το 2014.

Η εργασία αποτελείται επίσης από δύο παραρτήματα.

Στο παράρτημα Α' αποδεικνύουμε μία γνωστή ασυμπτωτική εκτίμηση για τον μετασχηματισμό Fourier του επιφανειακού μέτρου $d\sigma$ της σφαίρας \mathbb{S}^{n-1} . Την εκτίμηση αυτή χρησιμοποιούμε στο πρώτο κεφάλαιο για να αποδείξουμε τους περιορισμούς για τους εκθέτες p, q υπό τους οποίους περιμένουμε να αληθεύει η εικασία.

Στο παράρτημα Β' παρουσιάζουμε συνοπτικά τις αποδείξεις δύο λημμάτων από το τρίτο κεφάλαιο οι οποίες χρησιμοποιούν ιδέες από την Αλγεβρική Γεωμετρία.

Abstract

The restriction conjecture is one of the most famous open problems of Harmonic Analysis. Formulated by Stein in 1967, it claims the validity of the estimate

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

for $n \geq 2$, suitable functions f and suitable exponents $1 \leq p, q \leq \infty$. Since then, it has been formulated in various forms. The aim of this thesis is to study some of the different formulations of the restriction problem in 2, 3 and more than 4 dimensions.

We shortly present the contents of each chapter:

In the first chapter, we present several theorems and inequalities that will be used throughout the thesis. We also formulate the restriction conjecture on the sphere \mathbb{S}^{n-1} of \mathbb{R}^n , as well as the constraints that the exponents p, q must satisfy for a solution for the problem to exist.

In the second chapter, we prove the Stein-Tomas theorem from 1975, certifying the validity of the restriction conjecture when $q = 2$ and p satisfies the constraints from the first chapter. We also show that the restriction conjecture for the sphere is true in 2 dimensions.

In chapters 3 and 4, we study the restriction conjecture for an operator generalizing the Fourier transform, namely the extension operator. In the third chapter, we present a result for the problem in 3 dimensions, proven by Guth in 2014. In the fourth chapter, we present a result for the problem in dimensions ≥ 4 , also due to Guth. A key element in the proofs of the main theorems in both chapters is polynomial partitioning, which was first used by Guth and Katz in 2010 for Erdős' distinct distance problem in the plane and was first applied to Harmonic Analysis by Guth in 2014.

The thesis also consists of two appendices.

In Appendix A, we prove a well-known asymptotic estimate for the Fourier transform of the surface measure $d\sigma$ of the sphere \mathbb{S}^{n-1} . We use this estimate in the first chapter to prove the constraints for the exponents p, q under which we expect the restriction conjecture to hold.

In Appendix B, we provide a brief overview of the proofs of two lemmas from the third chapter, which use ideas from Algebraic Geometry.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Περιεχόμενα

1.1 Ανισότητες Marcinkiewicz και Hausdorff-Young	2
1.2 Διατύπωση του προβλήματος περιορισμού	6
1.2.1 Αναγκαίες συνθήκες για να ισχύει ένα θεώρημα $\mathbf{R}_S(p \rightarrow q)$	7

Σκοπός του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των βασικών θεωρημάτων που θα χρησιμοποιηθούν για τη σύγκριση του μεγέθους μίας συνάρτησης f με το μέγεθος του μετασχηματισμού Φουριερ της. Πιο συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρουν εκτιμήσεις της μορφής

$$\|\hat{f}\|_{L^q(S)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

όπου $p, q \geq 1$ και S τυχαίο Βορελ υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Θα χρησιμοποιούμε κυρίως τον συμβολισμό $\|\hat{f}\|_{L^q(S)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ υπονοώντας την ύπαρξη κάποιας σταθεράς $C = C(p, q, n, S)$ ανεξάρτητης της f στο δεξί μέλος της ανισότητας. Κεντρικό ρόλο θα παίξουν οι ανισότητες παρεμβολής, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε και στα επόμενα κεφάλαια. Σε όλη την εργασία θα θεωρούμε, εκτός αν δηλωθεί το αντίθετο, ότι οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις ανήκουν στην κλάση του Schwartz

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta f)(x)| < \infty\},$$

η οποία είναι πυκνή σε όλους τους χώρους $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty)$, καθώς περιέχει όλες τις συναρτήσεις δοκιμής $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Σημειώνουμε επίσης ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$ είναι καλά ορισμένη γραμμική ισομετρία επί.

Ένας βασικός λόγος για τον οποίο μας ενδιαφέρει να δουλέψουμε στην κλάση του Schwartz είναι η παρακάτω ιδιότητά τους η οποία, δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός Fourier μίας συνάρτησης Schwartz είναι κι αυτός μία συνάρτηση Schwartz, θα μας βοηθήσει να ελέγξουμε τις p -νόρμες του μετασχηματισμού Fourier κάποιων συναρτήσεων που θα εμφανιστούν στα επόμενα κεφάλαια.

Θεώρημα. Μία συνάρτηση f ορισμένη στον \mathbb{R}^n ανήκει στην κλάση του Schwartz αν και μόνο αν για κάθε $N \in \mathbb{N}$, υπάρχει σταθερά $C_N > 0$ ώστε

$$|f(x)| \leq C_N \frac{1}{(1 + |x|)^N}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n.$$

1.1 Ανισότητες Marcinkiewicz και Hausdorff-Young

Πρόταση 1.1.1 (Ανισότητα Young). Έστω $p, q, r \in [1, \infty]$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ και $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Τότε η συνέλιξη $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ και μάλιστα

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.1)$$

Ορισμός 1.1.2 (Ασθενείς χώροι L^p). Έστω (X, \mathcal{A}, μ) χώρος μέτρου και f μετρήσιμη συνάρτηση. Η συνάρτηση κατανομής $d_f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ της f ορίζεται ως

$$d_f(a) = \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq a\}). \quad (1.2)$$

Έστω $p \in (0, +\infty)$. Ο ασθενής χώρος $L^{p,\infty}(X)$ του X είναι ο χώρος όλων των μ -μετρήσιμων συναρτήσεων f με

$$\|f\|_{p,\infty} = \inf_{C>0} \left\{ d_f(a) \leq \left(\frac{C}{a}\right)^p \text{ για κάθε } a > 0 \right\} = \sup_{\gamma>0} \left\{ \gamma d_f(\gamma)^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty.$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι $L^{\infty,\infty}(X) = L^\infty(X)$ και ότι κάθε χώρος L^p περιέχεται στον αντίστοιχο ασθενή χώρο $L^{p,\infty}$ αφού αν $f \in L^p$, από την ανισότητα Markov ισχύει

$$\mu(\{x \in X : |f(x)|^p \geq a^p\}) \leq \frac{\|f\|_p^p}{a^p}.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι αν $f \in L^{p,\infty}(X)$, τότε $\|f\|_{p,\infty} \leq \|f\|_p$.

Θεώρημα 1.1.3 (Παρεμβολής του Marcinkiewicz). Έστω (X, \mathcal{A}, μ) χώρος σ -πεπερασμένου μέτρου και (Y, Ω, ν) χώρος μέτρου. Αν $0 < p_0 < p_1 \leq +\infty$ και

$$T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \rightarrow \{\Omega \text{-μετρήσιμες συναρτήσεις στον } Y\}$$

είναι υπογραμμικός τελεστής για τον οποίο υπάρχουν σταθερές A_0, A_1 ώστε

$$\|Tf\|_{p_0,\infty} \leq A_0 \|f\|_{p_0}, \text{ για κάθε } f \in L^{p_0}(X) \quad (1.3)$$

$$\|Tf\|_{p_1,\infty} \leq A_1 \|f\|_{p_1}, \text{ για κάθε } f \in L^{p_1}(X), \quad (1.4)$$

τότε για κάθε $p \in (p_0, p_1)$ και κάθε $f \in L^p(X)$ ισχύει

$$\|Tf\|_p \leq 2 \left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p} \right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} \|f\|_p. \quad (1.5)$$

Ένα Λήμμα που θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω είναι το ακόλουθο.

Λήμμα 1.1.4 (Ανισότητα Hardy-Littlewood-Sobolev). Αν $0 < \alpha < n$, $1 < p, q < \infty$ και

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n},$$

τότε

$$\left\| f * \frac{1}{|x|^\alpha} \right\|_q \lesssim \|f\|_p. \quad (1.6)$$

Θεώρημα 1.1.5 (Ανισότητα Riesz-Thorin). Έστω (X, \mathcal{A}, μ) και (Y, Ω, ν) χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$ και

$$T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \rightarrow L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$$

γραμμικός τελεστής για τον οποίο ισχύουν οι εκτιμήσεις

$$\|Tf\|_{L^{q_0}(\nu)} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}(\mu)} \quad \text{και} \quad \|Tf\|_{L^{q_1}(\nu)} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}(\mu)}$$

για κάποιες θετικές σταθερές M_0, M_1 . Τότε, για κάθε $t \in (0, 1)$, αν

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

έχουμε

$$\|Tf\|_{L^{q_t}(\nu)} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{L^{p_t}(\mu)}. \quad (1.7)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Riesz-Thorin μπορούμε να συγκρίνουμε το μέγεθος μίας συνάρτησης f με το μέγεθος του μετασχηματισμού Fourier της. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του. Αν f είναι μια συνάρτηση στον \mathbb{R}^n , τότε ο μετασχηματισμός Fourier της ορίζεται ως

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx, \quad \text{για κάθε } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Θεώρημα 1.1.6 (Ανισότητα Hausdorff-Young). Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, 2]$. Τότε, αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p ισχύει

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.8)$$

Απόδειξη. Αν $p = 1$, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε άμεσα την ανισότητα $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$. Αν $p = 2$, από το Θεώρημα Plancherel έχουμε ότι $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Έτσι, από την ανισότητα Riesz-Thorin έχουμε ότι για κάθε $p \in [1, 2]$ ισχύει η ανισότητα

$$\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

όπως θέλαμε. □

Η ανισότητα Hausdorff-Young μας δίνει μια ικανοποιητική απάντηση για τη σχέση που έχουν μεταξύ τους τα μεγέθη των f και \hat{f} , καθώς μας επιτρέπει να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier για συναρτήσεις του L^p , $p \in (1, 2)$ μέσω προσέγγισης με συναρτήσεις που ανήκουν στην κλάση του Schwartz, στην οποία ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει και είναι γραμμική ισομετρία επί. Δεν ξεκαθαρίζει όμως αν υπάρχουν άλλοι εκθέτες p, q για τους οποίους ισχύει μία τέτοια ανισότητα. Αυτό εξετάζουμε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.1.7. Έστω $p, q \in [1, \infty]$ για τους οποίους ισχύει η ανισότητα

$$\|\hat{f}\|_q \leq C \|f\|_p \quad (1.9)$$

για κάθε $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Τότε, $p \leq 2$ και $q = p^*$.

Πριν περάσουμε στην απόδειξη της πρότασης θα διατυπώσουμε ένα πιθανοθεωρητικό αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιήσουμε.

Λήμμα 1.1.8 (Ανισότητα Khintchine). Έστω f_1, \dots, f_N συναρτήσεις και $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ τυχαία πρόσημα, δηλαδή $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Τότε για κάθε $p \in (1, \infty)$ ισχύει

$$\mathbb{E} \left(\left\| \sum_{k=1}^N \varepsilon_k f_k \right\|_p^p \right) \sim \left\| \left(\sum_{k=1}^N |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p. \quad (1.10)$$

Απόδειξη. (Της πρότασης 1.1.7)

Η απόδειξη θα γίνει σε 2 βήματα. Πρώτα δείχνουμε ότι $q = p^*$. Έστω $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε $f(x) = \psi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, όπου λ θετική παράμετρος. Τότε, $\|f\|_p \sim \lambda^{n/p}$.

Για τον μετασχηματισμό Fourier της f έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \psi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx \\ &= \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \lambda y, \xi \rangle} \psi(y) dy \quad (x/\lambda = y) \\ &= \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y, \lambda \xi \rangle} \psi(y) dy \\ &= \lambda^n \hat{\psi}(\lambda \xi). \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\|f\|_q^q = \lambda^{nq} \int |\psi(\lambda x)|^q dx = \lambda^{nq-n} \int |\psi(y)|^q dy.$$

Έτσι, $\|\hat{f}\|_q \sim \lambda^{n - \frac{n}{q}}$. Αφού η (1.9) ισχύει για κάθε συνάρτηση δοκιμής f έχουμε ότι

$$\lambda^{n - \frac{n}{q}} \lesssim \lambda^{n/p}.$$

Το λ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό ή μεγάλο, άρα για να ισχύει η τελευταία σχέση πρέπει οι εκθέτες να είναι ίσοι, δηλαδή

$$n - \frac{n}{q} = \frac{n}{p} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

όπως θέλαμε.

Μένει να δείξουμε ότι $p \leq 2$. Για να το κάνουμε αυτό, επιλέγουμε μία $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ με $\text{supp}(\psi) \subseteq [0, 1]^n$ και την τυχαιοποιούμε. Ορίζουμε δηλαδή

$$f(x) = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \psi(x - k e_1) \quad \text{όπου } \mathbb{P}(\varepsilon_k = \pm 1) = 1/2.$$

Τότε,

$$\|f\|_p = \left(\sum_{k=1}^N \int |\psi(x - k e_1)|^p dx \right)^{1/p},$$

δηλαδή $\|f\|_p \sim N^{1/p}$. Επίσης,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \psi(x - ke_1) dx \\ &= \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \psi(x - ke_1) dx \\ &= \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y + ke_1, \xi \rangle} \psi(y) dy \\ &= \sum_{k=1}^N \varepsilon_k e^{-2\pi i \xi_1 k} \hat{\psi}(\xi).\end{aligned}$$

Από την (1.10),

$$\mathbb{E}(\|\hat{f}\|_q^q) \sim \left\| \left(\sum_{k=1}^N \left| \hat{\psi}(\xi) e^{-2\pi i \xi_1 k} \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q^q \sim N^{q/2}. \quad (1.11)$$

Άρα, υπάρχει κάποια επιλογή προσήμων ε_k για τα οποία

$$\|\hat{f}\|_q \gtrsim N^{1/2}.$$

Από το πρώτο βήμα και την ανισότητα Hausdorff-Young παίρνουμε ότι

$$N^{1/2} \lesssim N^{1/p},$$

το οποίο ισχύει καθώς το $N \rightarrow \infty$ αν και μόνο αν $p \in [1, 2]$. Αυτή η παρατήρηση ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης. \square

Αν θέλουμε να μελετήσουμε συναρτήσεις f των οποίων ο μετασχηματισμός Fourier είναι περιορισμένος σε συμπαγή υποσύνολο του \mathbb{R}^n , τότε η ανισότητα Hausdorff-Young μπορεί να βελτιωθεί και να πάρει τη μορφή

$$\|\hat{f}\|_{L^q(K)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad p \in [1, 2], \quad q \leq p^*, \quad (1.12)$$

όπου K συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^n και p^* ο συζυγής εκθέτης του p . Η περίπτωση $q = p^*$ είναι η ανισότητα Hausdorff-Young. Για τις υπόλοιπες τιμές του q χρησιμοποιούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 1.1.9. Έστω (X, \mathcal{A}, μ) χώρος πεπερασμένου μέτρου. Αν $1 \leq p \leq q < \infty$, ισχύει

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q \quad (1.13)$$

για κάθε $f \in L^q(X)$.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^q(X)$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\|f\|_p^p \leq \left(\int_X 1 d\mu \right)^{1 - \frac{p}{q}} \left(\int_X |f|^q d\mu \right)^{\frac{p}{q}} = \mu(X)^{1 - \frac{p}{q}} \|f\|_q^p$$

από την ανισότητα Hölder. Υψώνοντας στην $\frac{1}{p}$ έχουμε το ζητούμενο. \square

Κλείνουμε την παράγραφο με την ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα.

Θεώρημα 1.1.10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ -πεπερασμένου μέτρου, $p \in [1, +\infty)$ και $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$ μία $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, θέτοντας $f_y(x) = f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in X \times Y$, ισχύει η ανισότητα:

$$\left\| \int_Y f_y d\nu(y) \right\|_{L^p(X)} \leq \int_Y \|f_y\|_{L^p(X)} d\nu(y). \quad (1.14)$$

1.2 Διατύπωση του προβλήματος περιορισμού

Το παραπάνω πρόβλημα γίνεται πιο ενδιαφέρον αν αναζητήσουμε εκτιμήσεις της μορφής (1.12) όταν περιορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της f σε μια επιφάνεια S του \mathbb{R}^n όπως η μοναδιαία σφαίρα \mathbb{S}^{n-1} . Αν ψάχνουμε δηλαδή όλα τα ζεύγη εκθετών (p, q) για τα οποία ισχύει μία ανισότητα της μορφής

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.15)$$

Σε αντίθεση με τις δύο παραπάνω περιπτώσεις, ο περιορισμός σε ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^n μέτρου 0 δεν είναι πάντα δυνατός για $p = 2$. Αυτό γιατί κάθε στοιχείο f του $L^2(\mathbb{R}^n)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier κάποιας συνάρτησης $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, αφού από το Θεώρημα Plancherel ο μετασχηματισμός Fourier είναι επί και είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει συνάρτηση του $L^2(\mathbb{R}^n)$ που δεν ορίζεται στη σφαίρα. Στην περίπτωση που $p = 1$, η (1.15) ισχύει για κάθε $q \geq 1$. Πράγματι, αφού ο μετασχηματισμός Fourier μίας L^1 συνάρτησης είναι συνεχής συνάρτηση (ή, ακόμα ισχυρότερα, ανήκει στον $C_0(\mathbb{R}^n)$ από το Λήμμα Riemann-Lebesgue), ο περιορισμός του \hat{f} στην \mathbb{S}^{n-1} είναι καλά ορισμένος. Επίσης, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε την (1.15) για $q = \infty$.

Για κάθε $q \in [1, \infty)$ ισχύει

$$\|\hat{f}\|_q \leq \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

κι έτσι η (1.15) ισχύει για $p = 1$ και $q \geq 1$. Το πρόβλημα του τι συμβαίνει για τις ενδιάμεσες τιμές του p παραμένει ανοιχτό στην πλήρη γενικότητα.

Για να αντιληφθούμε καλύτερα την (1.15) μπορούμε να την μετασχηματίσουμε σε δυϊκή μορφή. Έστω (p, q) ένα ζεύγος που την ικανοποιεί. Ισχύει

$$\|g\|_p = \sup_{h \in S(\mathbb{R}^n)} \left\{ \int gh : \|h\|_{p^*} \leq 1 \right\}. \quad (1.16)$$

Η (1.15) είναι ισοδύναμη με την

$$\sup_{\|f\|_p=1} \|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim 1.$$

Ισοδύναμα,

$$\sup_{\|f\|_p=1} \sup_{\|g\|_{L^{q^*}(\mathbb{S}^{n-1})}=1} \left| \int \hat{f}(\xi)g(\xi) d\sigma(\xi) \right| \lesssim 1.$$

Εναλλάσσοντας τα supremum και χρησιμοποιώντας τη γενίκευση της ισότητας Parseval για συναρτήσεις Schwartz παίρνουμε

$$\sup_{\|g\|_{L^{q^*}(\mathbb{S}^{n-1})}=1} \sup_{\|f\|_p=1} \left| \int f(x)\widehat{gd\sigma}(x) dx \right| \lesssim 1.$$

Τελικά,

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L^{q^*}(\mathbb{S}^{n-1})}. \quad (1.17)$$

Παρατηρούμε ότι οι ανισότητες (1.15) και (1.17) είναι ισοδύναμες. Μάλιστα, η (1.15) καλείται ανισότητα περιορισμού (restriction inequality), ενώ η (1.17) καλείται ανισότητα επέκτασης (extension inequality). Θα τις καλούμε και τις δύο ανισότητες Περιορισμού, καθώς είναι εξ'ορισμού ισοδύναμες για όλα τα ζεύγη (p, q) για τα οποία δεν γνωρίζουμε αν το θεώρημα ισχύει, καθώς και για όλα τα ζεύγη (p, q) για τα οποία γνωρίζουμε ότι το θεώρημα δεν ισχύει.

Πριν προχωρήσουμε είναι χρήσιμο να εισάγουμε κάποιο συμβολισμό.

Ορισμός 1.2.1. Έστω $S = (S, d\sigma)$ μία επιφάνεια με ή χωρίς σύνορο με επιφανειακό μέτρο $d\sigma$ και $p, q \in [1, \infty]$. Λέμε ότι έχουμε ένα (L^p, L^q) θεώρημα περιορισμού για την S αν ισχύει μια ανισότητα ανάλογη της (1.15) για κάθε συνάρτηση δοκιμής $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Συμβολίζουμε ένα τέτοιο θεώρημα με $R_S(p \rightarrow q)$.

Όπως έχουμε δει παραπάνω, το $R_S(1 \rightarrow q)$ ισχύει για κάθε επιφάνεια S και κάθε $q \in [1, +\infty]$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι αν η S είναι υπερεπιπέδο (ακόμα και συμπαγές υποσύνολο υπερεπιπέδου), τότε το $R_S(p \rightarrow q)$ ισχύει αν και μόνο αν $p = 1$.

Πρόταση 1.2.2. Υποθέτουμε ότι έχουμε την $R_S(p \rightarrow q)$ για κάποιο συμπαγές υποσύνολο S ενός υπερεπιπέδου και για όλες τις συναρτήσεις δοκιμής $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Τότε πρέπει να ισχύει ότι $p = 1$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε για ευκολία ότι $S = \{x_n = 0\} \cap B_2^n$. Επιλέγουμε συνάρτηση Schwartz ψ ώστε $\hat{\psi} \sim 1$ σε μια περιοχή του 0. Ορίζουμε μία συνάρτηση f ως εξής:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n/\lambda),$$

όπου λ θετική παράμετρος. Παρατηρούμε ότι $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{\frac{1}{p}} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, άρα $\|f\|_p \sim \lambda^{\frac{1}{p}}$. Ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι

$$\hat{f}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \lambda \hat{\psi}(\xi_1, \dots, \lambda \xi_n),$$

άρα ο \hat{f} συγκεντρώνεται σε μία συμπιεσμένη μπάλα με διαστάσεις $1 \times \dots \times 1 \times \frac{1}{\lambda}$. Έτσι, όταν περιορίσουμε τον \hat{f} στο S , αυτός θα συγκεντρωθεί στην B_2^{n-1} . Από τον ορισμό της f ισχύει επίσης $\|f\|_{L^q(S)} \sim \lambda$. Έχουμε υποθέσει ότι έχουμε ένα θεώρημα περιορισμού για το S άρα πρέπει να ισχύει μια εκτίμηση της μορφής $\lambda \lesssim \lambda^{\frac{1}{p}}$. Αν αφήσουμε το $\lambda \rightarrow \infty$ βλέπουμε ότι πρέπει να ισχύει $p = 1$. \square

1.2.1 Αναγκαίες συνθήκες για να ισχύει ένα θεώρημα $R_S(p \rightarrow q)$

Θεωρούμε μία επιφάνεια $S = \{(x, \Phi(x)) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}), |x| \lesssim 1\}$ με $\Phi(0) = \nabla\Phi(0) = 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η Φ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν για να μην αναχθούμε στην περίπτωση των υπερεπιπέδων. Θα δείξουμε ότι η ύπαρξη μη τετριμμένων θεωρημάτων περιορισμού για την S εξαρτάται και από την καμπυλότητα Gauss της.

Πρόταση 1.2.3. Υποθέτουμε ότι $\Phi(x) = O(|x|^k)$ για κάποιο $k \geq 2$. Τότε το θεώρημα περιορισμού $R_S(p \rightarrow q)$ είναι δυνατό μόνο αν

$$p^* \geq \frac{n+k-1}{n-1}q. \quad (1.18)$$

Η ιδέα της απόδειξης είναι όμοια με της προηγούμενης πρότασης. Έτσι, όσο πιο επίπεδη είναι η S τόσο λιγότερα restriction estimates περιμένουμε. Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι τουλάχιστον $\Phi(0) = \nabla\Phi(0) = 0$, μπορούμε να πάρουμε τη συνθήκη

$$p^* \geq \frac{n+1}{n-1}q, \quad (1.19)$$

η οποία είναι αναγκαία για να ισχύει το $R_S(p \rightarrow q)$. Υπενθυμίζουμε ότι αν μ είναι ένα μέτρο Borel στον \mathbb{R}^n τότε ο μετασχηματισμός Fourier του ορίζεται ως

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\mu(x), \text{ για κάθε } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Ας επανέλθουμε στην περίπτωση της \mathbb{S}^{n-1} . Ισχύει η ασυμπτωτική εκτίμηση

$$|\widehat{d\sigma}(x)| = O(|x|^{-\frac{n-1}{2}}), \quad |x| \gg 1. \quad (1.20)$$

Δίνουμε μία απόδειξη της στο Παράρτημα Α'. Ας την δεχθούμε για την ώρα. Ο $\widehat{d\sigma}$ μπορεί να ανήκει στον L^{p^*} μόνο αν

$$p^* > \frac{2n}{n-1} \quad \text{ή, ισοδύναμα} \quad p < \frac{2n}{n+1}. \quad (1.21)$$

Άρα, το $R_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \rightarrow q)$ μπορεί να ισχύει μόνο αν ισχύει η αναγκαία συνθήκη

$$p < \frac{2n}{n+1}. \quad (1.22)$$

Δεν είναι γνωστό αν οι συνθήκες (1.19) και (1.22) είναι και ικανές για να ισχύει το $R_S(p \rightarrow q)$. Ο Stein το 1967 ισχυρίστηκε ότι είναι.

Εικασία 1.2.4 (Εικασία Περιορισμού στην \mathbb{S}^{n-1}). *Αν $p, q \in [1, \infty]$ τότε το $R_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \rightarrow q)$ ισχύει αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα οι (1.19) και (1.22).*

Αν και η εικασία περιορισμού διατυπώνεται στην \mathbb{S}^{n-1} , υπάρχει η πεποίθηση ότι εξακολουθεί να ισχύει ακόμα κι αν αντικαταστήσουμε τη σφαίρα με οποιαδήποτε συμπαγή επιφάνεια S της οποίας η καμπυλότητα Gauss είναι παντού μη-μηδενική. Υπενθυμίζουμε ότι αν γράψουμε την S (τοπικά) σαν γράφημα όπως παραπάνω, η καμπυλότητα Gauss της δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{G}(x, \Phi(x)) = \det(H_\Phi(x)),$$

όπου

$$H_\Phi(x) = (\partial_i \partial_j \Phi(x))_{i,j=1}^n$$

ο Εσσιανός πίνακας της Φ .

Κεφάλαιο 2

Το Θεώρημα Stein-Tomas

Περιεχόμενα

2.1 Το Θεώρημα Stein-Tomas	9
2.1.1 Η κατασκευή του Knapp	14
2.2 Η λύση του προβλήματος περιορισμού στις δύο διαστάσεις	15

Σε αυτό το κεφάλαιο επικεντρωνόμαστε σε δύο συγκεκριμένα αποτελέσματα σχετικά με το πρόβλημα περιορισμού. Το πρώτο είναι το Θεώρημα Stein-Tomas, το οποίο μας δίνει τη λύση του προβλήματος περιορισμού για $q = 2$ και για όλους τους δυνατούς εκθέτες p . Το δεύτερο αποτέλεσμα είναι η λύση του προβλήματος περιορισμού στις 2 διαστάσεις για όλους τους δυνατούς εκθέτες (p, q) . Παρουσιάζουμε επίσης το παράδειγμα του Knapp, το οποίο δείχνει ότι το εύρος των εκθετών p για τους οποίους ισχύει το Θεώρημα Stein-Tomas είναι βέλτιστο. Είναι καίριας σημασίας να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι οι τεχνικές που θα χρησιμοποιήσουμε για τη λύση του προβλήματος περιορισμού στη διάσταση 2 έχουν αποδειχθεί αναποτελεσματικές στις μεγαλύτερες διαστάσεις.

2.1 Το Θεώρημα Stein-Tomas

Ένα πρώτο βασικό βήμα προς τη λύση του προβλήματος περιορισμού στη σφαίρα είναι το θεώρημα Stein-Tomas, το οποίο πιστοποιεί την ισχύ του θεωρήματος περιορισμού στην περίπτωση που $q = 2$. Πιο συγκεκριμένα,

Θεώρημα 2.1.1 (Stein-Tomas). *Αν $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$, τότε ισχύει το $R_S(p \rightarrow 2)$.*

Εμείς θα αποδείξουμε κάτι πιο γενικό. Θα αποδείξουμε μια γενίκευση του Θεωρήματος Stein-Tomas για μία κλάση μέτρων Borel του \mathbb{R}^n . Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε βασίζεται σε αυτή του Μήτση στο [Mit02].

Πρόταση 2.1.2. *Έστω μ πεπερασμένο μέτρο Borel στον \mathbb{R}^n με συμπαγή φορέα για το οποίο ισχύουν οι ανισότητες:*

1. $\mu(B(x, r)) \leq r^\alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$
2. $|\hat{\mu}(\xi)| \leq \frac{1}{|\xi|^{\beta/2}}$

για κάποια $0 < \alpha, \beta < n$. Τότε για κάθε $p > \frac{2(2n-2\alpha+\beta)}{\beta}$ ισχύει

$$\|\hat{\mu} * f\|_p \leq \|f\|_{p^*}, \quad (2.1)$$

για κάθε $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(-x)$ και $\check{f}(x) = f(-x)$. Τότε,

$$(\hat{\mu} * f)(x) = (\check{\mu} * \check{f})(-x).$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι $\|\check{\mu} * f\|_p \lesssim \|f\|_{p^*}$. Θεωρούμε μία ομαλή συνάρτηση ψ η οποία είναι ταυτοτικά 0 αν $|x| \leq \frac{1}{2}$ και ταυτοτικά 1 αν $|x| \geq 1$ και ορίζουμε $\phi(x) = \psi(2x) - \psi(x)$.

Παρατηρούμε ότι

$$\text{supp}(\phi) \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{4} \leq |x| \leq 1\right\} \text{ και } \sum_{j=0}^{\infty} \phi(2^{-j}x) = 1, \text{ αν } |x| \geq 1.$$

Διασπάμε τον $\check{\mu}$ ως εξής:

Ορίζουμε

$$\phi_j(x) = \phi(2^{-j}x), \quad K_j(x) = \phi_j(x)\check{\mu}(x)$$

και

$$K_{-\infty}(x) = \left(1 - \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x)\right)\check{\mu}(x)$$

και παρατηρούμε ότι

$$\check{\mu} = K_{-\infty} + \sum_{j=0}^{\infty} K_j. \quad (2.2)$$

Θέλουμε να φράξουμε κατάλληλα την συνέλιξη $K_j * f$ ώστε να μπορέσουμε να τη δούμε σαν φραγμένο τελεστή από τον L^1 στον L^∞ και από τον L^2 στον εαυτό του. Αν το καταφέρουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε παρεμβολή για να εξάγουμε το συμπέρασμα.

Έχουμε

$$\|K_j * f\|_\infty \leq \|K_j\|_\infty \|f\|_1 \lesssim 2^{-j\frac{\beta}{2}} \|f\|_1 \quad (2.3)$$

από την ανισότητα Young για τη συνέλιξη και την υπόθεση 2. Έστω $N = 2\alpha$.

$$\begin{aligned} |\hat{K}_j(\xi)| &= \left| \int \hat{\phi}_j(\xi - y) d\mu(y) \right| \\ &\leq C_N 2^{jn} \int \frac{1}{(1 + |2^j(\xi - y)|)^N} d\mu(y) \quad \text{αφού η } \hat{\phi} \text{ είναι ταχέως φθίνουσα} \\ &= C_N 2^{jn} \int_0^\infty \mu\left(\left\{y : \frac{1}{(1 + |2^j(\xi - y)|)^N} \geq t\right\}\right) dt \\ &= C_N 2^{jn} \int_0^\infty \mu\left(\left\{y : 1 + |2^j(\xi - y)| \leq \frac{1}{t^{1/N}}\right\}\right) dt. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $t^{-\frac{1}{N}}$ είναι φθίνουσα και παίρνει τιμές στο $[0, 1]$, άρα το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι

ίσο με

$$\begin{aligned}
 & C_N 2^{jn} \int_0^1 \mu \left(\left\{ y : 1 + |2^j(\xi - y)| \leq \frac{1}{t^{1/N}} \right\} \right) dt \\
 & \leq C_N 2^{jn} \int_0^1 \mu \left(B \left(\xi, \frac{1}{2^j t^{1/N}} \right) \right) dt \\
 & \leq C_N 2^{jn} 2^{-j\alpha} \int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}} dt \quad \text{από την πρώτη υπόθεση για το } \mu \\
 & \lesssim 2^{j(n-a)}.
 \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|\hat{K}_j\|_\infty \lesssim 2^{j(n-a)}$. Έτσι,

$$\|K_j * f\|_2 = \|\hat{K}_j \hat{f}\|_2 \leq \|\hat{K}_j\|_\infty \|\hat{f}\|_2 \lesssim 2^{j(n-a)} \|f\|_2, \quad (2.4)$$

από το Θεώρημα Plancherel και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Riesz-Thorin. Έχουμε

$$\|K_j * f\|_{p(\theta)} \lesssim A(\theta) \|f\|_{q^*(\theta)}, \quad \theta \in [0, 1] \quad (2.5)$$

με

$$q = p(\theta) = \frac{2}{\theta} \quad q^*(\theta) = \frac{2}{2-\theta} \quad A(\theta) = 2^{j(n-\alpha)\theta - j\frac{\beta}{2}(1-\theta)}.$$

Ισοδύναμα,

$$\|K_j * f\|_p \lesssim 2^{j\left(\frac{2(n-\alpha)}{p} - \frac{\beta}{2}\left(1-\frac{p}{2}\right)\right)} \|f\|_{p^*}, \quad p \geq 2. \quad (2.6)$$

Από την ανισότητα Young,

$$\|K_{-\infty} * f\|_p \lesssim \|f\|_{p^*},$$

αφού $K_{-\infty} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
 \|\check{\mu} * f\|_p & \leq \|K_{-\infty} * f\|_p + \sum_{i=0}^{\infty} \|K_i * f\|_p \\
 & \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\left(\frac{2(n-\alpha)}{p} - \frac{\beta}{2}\left(1-\frac{p}{2}\right)\right)} \|f\|_{p^*}.
 \end{aligned}$$

Ο εκθέτης

$$\frac{2(n-\alpha)}{p} - \frac{\beta}{2}\left(1-\frac{p}{2}\right)$$

είναι αρνητικός δεδομένου ότι

$$p > \frac{2(2n - 2\alpha + \beta)}{\beta}$$

κι έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε τη γενίκευση του θεωρήματος 2.1.1.

Θεώρημα 2.1.3. Έστω μ πεπερασμένο μέτρο Borel με συμπαγή φορέα στον \mathbb{R}^n ώστε

1. $\mu(B(x, r)) \leq r^\alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$

$$2. |\hat{\mu}(\xi)| \leq \frac{1}{|\xi|^{\beta/2}}$$

για κάποια $0 < \alpha, \beta < n$. Τότε για κάθε $p > \frac{2(2n-2\alpha+\beta)}{\beta}$ υπάρχει σταθερά $C = C(p, n, \alpha, \beta) > 0$ ώστε

$$\|\widehat{f d\mu}\|_p \leq C \|f\|_{L^2(\mu)}, \quad (2.7)$$

για κάθε $f \in L^2(\mu)$.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^2(\mu)$ και $g \in S(\mathbb{R}^n)$. Τότε

$$\begin{aligned} \int \widehat{f d\mu}(\xi) g(\xi) d\xi &= \int \hat{g}(y) f(y) d\mu(y) \leq \|\hat{g}\|_{L^2(\mu)} \|f\|_{L^2(\mu)} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \left(\int \hat{g}(y) \overline{\hat{g}(y)} d\mu(y) \right)^{1/2} \|f\|_{L^2(\mu)} \\ &= \left(\int (\hat{\mu} * \bar{g})(x) g(x) dx \right)^{1/2} \|f\|_{L^2(\mu)} \\ &\leq (\|\hat{\mu} * \bar{g}\|_p \|g\|_{p^*})^{1/2} \|f\|_{L^2(\mu)} \quad (\text{Hölder}) \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mu)} \|g\|_{p^*} \quad \text{από την προηγούμενη πρόταση.} \end{aligned}$$

Από την πυκνότητα της $S(\mathbb{R}^n)$ στον $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$\|\widehat{f d\mu}\|_p \lesssim \|f\|_{L^2(\mu)},$$

όπως θέλαμε. □

Το ανάλογο του προηγούμενου θεωρήματος για τη σφαίρα είναι ($\alpha = \beta = n - 1$)

$$\|\widehat{f d\sigma}\|_p \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \quad \text{για } p > \frac{2(n+1)}{n-1},$$

ή ισοδύναμα

$$\|\hat{f}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^2} \quad \text{για } p < \frac{2(n+1)}{n+3}.$$

Έχει μείνει ένα βήμα για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του Θεωρήματος Stein-Tomas, να επιβεβαιώσουμε ότι η εικασία ισχύει και στο άκρο $\frac{2(n+1)}{n+3}$. Αυτό αποδείχθηκε από τον Stein το 1975. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε βρίσκεται στο [Gr2]. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}^2 &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{\hat{f}(\xi)} \hat{f}(\xi) d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}(\xi)} (\hat{f}(\xi) \cdot d\sigma(\xi)) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}(x)} (f * \check{d}\sigma)(x) dx \\ &\leq \|f\|_p \|f * \check{d}\sigma\|_{p^*} \quad (\text{Hölder}). \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $C = C(n)$ ώστε

$$\|f * \check{d}\sigma\|_{p^*} \leq C \|f\|_p, \quad p = \frac{2(n+1)}{n+3}. \quad (2.8)$$

Για να το δείξουμε αυτό, διαμερίζουμε την \mathbb{S}^{n-1} ως εξής:

Κάθε υπερεπίπεδο $\{\xi_j = 0\}$ διχοτομεί την \mathbb{S}^{n-1} σε δύο ημισφαίρια H_j^1 και H_j^2 .

Θεωρούμε (ϕ_i) μία διαμέριση της μονάδας του \mathbb{R}^n ώστε για κάθε $1 \leq j \leq n$ και $l = 1, 2$ να ισχύει

$$\text{supp}(\phi_i) \cap \mathbb{S}^{n-1} \subset H_j^l.$$

Αν περιορίσουμε την οικογένεια (ϕ_i) σε αυτά τα μέλη της των οποίων οι φορείς τέμνουν την \mathbb{S}^{n-1} , θα πάρουμε μία πεπερασμένη διαμέριση της μονάδας της \mathbb{S}^{n-1} αν περιορίσουμε αυτά τα ϕ_i πάνω της. Γράφουμε

$$d\sigma = \sum_{i=1}^m \phi_i d\sigma. \quad (2.9)$$

Έτσι, για να αποδείξουμε την (2.8), αρκεί να την αποδείξουμε για το μέτρο $\phi_i d\sigma$ και να αθροίσουμε ως προς i . Για να διευκολυνθούμε, σταθεροποιούμε $i \in \{1, \dots, m\}$ και υποθέτουμε ότι έχει φορέα

$$\{\xi \in \mathbb{S}^{n-1} : \xi_n > c\} \subset H_n^1$$

για κάποιο $0 < c < 1$. Αν $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, γράφουμε $x = (x', t)$ και $\xi = (\xi', \xi_n)$. Έτσι,

$$\begin{aligned} (\phi_i d\sigma)^\vee(x) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi_i(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\sigma(\xi) \\ &= \int_{|\xi'| \leq 1-c^2} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \frac{\phi_i(\xi', \sqrt{1-|\xi'|^2})}{\sqrt{1-|\xi'|^2}} d\xi' \\ &= \int_{|\xi'| \leq 1-c^2} e^{2\pi i \langle x', \xi' \rangle} e^{2\pi i t \sqrt{1-|\xi'|^2}} \frac{\phi_i(\xi', \sqrt{1-|\xi'|^2})}{\sqrt{1-|\xi'|^2}} d\xi' \\ &= \left(e^{2\pi i t \sqrt{1-|\xi'|^2}} \frac{\phi_i(\xi', \sqrt{1-|\xi'|^2})}{\sqrt{1-|\xi'|^2}} \right)^\nabla, \end{aligned}$$

όπου ∇ ο μετασχηματισμός Fourier στη μεταβλητή ξ' . Ορίζουμε

$$K_t(x') = (\phi_i d\sigma)^\vee(x', t) = (\phi_i^\vee * d\sigma^\vee)(x', t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Από τον υπολογισμό που κάναμε για το $(\phi_i d\sigma)^\vee$ και το γεγονός ότι $1 - |\xi'|^2 > 0$ εντός του $\text{supp}(\phi_i)$ έχουμε

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}} |K_t^\Delta| \leq C < \infty, \quad (2.10)$$

όπου Δ ο μετασχηματισμός Fourier στη μεταβλητή ξ' . Από την (1.20) και το γεγονός ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ϕ_i^\vee είναι συνάρτηση Schwartz έπεται ότι

$$|K_t(x')| \lesssim |t|^{-\frac{n-1}{2}} \quad \text{για κάθε } x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (2.11)$$

Με τους συλλογισμούς του προηγούμενου βήματος της απόδειξης, λόγω των (2.10) και (2.11) μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνέλιξη με την K_t ως φραγμένο γραμμικό τελεστή από τον $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ στον $L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ και από τον $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ στον εαυτό του. Από την Ανισότητα Riesz-Thorin έχουμε

$$\|K_t * g\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim |t|^{-(n-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Για κάθε συνάρτηση f στον \mathbb{R}^n γράφουμε $f_t(x') = f(x', t)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \left\| f * (\phi_i d\sigma) \right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} f_\tau * K_{t-\tau} d\tau \right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1})} \Big\|_{L^{p^*}(\mathbb{R})} \\ &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}} \|f_\tau * K_{t-\tau}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1})} d\tau \right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R})} \\ &\lesssim \left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{\|f_\tau\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1})}}{|t-\tau|^{-(n-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}} d\tau \right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R})} \\ &\lesssim \left\| \|f_t\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η (1.1.4) για $\alpha = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{p}$, $n = 1$ και $q = p^*$. Η παραπάνω συνθήκη για τους δείκτες a, n μας δίνει ότι $p = \frac{2(n+1)}{n+3}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος Stein-Tomas.

Σημειώνουμε ότι η τελευταία απόδειξη που δώσαμε για την ισχύ του θεωρήματος Stein-Tomas στην περίπτωση που $p = \frac{2(n+1)}{n+3}$ αρκεί από μόνη της, μαζί με ένα επιχείρημα παρεμβολής, για να πάρουμε το θεώρημα για όλο το εύρος των δυνατών εκθετών p .

2.1.1 Η κατασκευή του Knapp

Από το Θεώρημα Stein-Tomas έχουμε ότι

$$\|\widehat{fd\sigma}\|_p \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \quad \text{για } p \geq \frac{2(n+1)}{n-1}.$$

Ο Knapp έδειξε ότι η εκτίμηση $p \geq \frac{2(n+1)}{n-1}$ είναι βέλτιστη. Για να το δούμε αυτό, ορίζουμε

$$C_\delta = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : 1 - x \cdot e_n \leq \delta^2\}.$$

Αφού $|x - e_n|^2 = 2(1 - x \cdot e_n)$, ισχύει ότι αν $x \in C_\delta$, τότε $|x - e_n| \lesssim \delta$. Έστω $f = \chi_{C_\delta}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του C_δ . Θα υπολογίσουμε τις $\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}$ και $\|\widehat{fd\sigma}\|_p$. Έτσι,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} = |C_\delta|^{1/2} \approx \delta^{\frac{n-1}{2}}. \quad (2.12)$$

Ο φορέας του $\widehat{fd\sigma}$ περιέχεται σε ένα ορθογώνιο με κέντρο e_n και διαστάσεις $\approx \delta \times \dots \times \delta \times \delta^2$. Τότε ο φορέας του $\widehat{fd\sigma}$ περιέχεται σε ορθογώνιο με διαστάσεις $\approx \delta^{-1} \times \dots \times \delta^{-1} \times \delta^{-2}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $|\xi_i| \leq C_1^{-1}\delta^{-1}$ για κάθε $i < n$ και $|\xi_n| \leq C_1^{-1}\delta^{-2}$ για μία αρκετά μεγάλη σταθερά C_1 . Τότε,

$$\begin{aligned} |\widehat{fd\sigma}(\xi)| &= \left| \int_{C_\delta} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\sigma(x) \right| \\ &= \left| \int_{C_\delta} e^{-2\pi i \langle x - e_n, \xi \rangle} d\sigma(x) \right| \\ &\geq \int_{C_\delta} \cos(2\pi \langle x - e_n, \xi \rangle) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Αν το C_1 είναι αρκετά μεγάλο ώστε $|\langle x - e_n, \xi \rangle| \leq \frac{\pi}{3}$ για κάθε $x \in C_\delta$ έχουμε

$$|\widehat{fd\sigma}(\xi)| \geq \frac{1}{2}|C_\delta| \approx \delta^{n-1}. \quad (2.13)$$

Το σύνολο των ξ στο οποίο περιέχεται ο φορέας του $\widehat{fd\sigma}$ έχει όγκο $\approx \delta^{-(n+1)}$. Έχουμε

$$\|\widehat{fd\sigma}\|_p \gtrsim \delta^{n-1-\frac{n+1}{p}}. \quad (2.14)$$

Συνδυάζοντας τις (2.12) και (2.14) έχουμε

$$\delta^{n-1-\frac{n+1}{p}} \lesssim \delta^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.15)$$

ομοιόμορφα ως προς $\delta \in (0, 1]$. Επομένως,

$$n-1-\frac{n+1}{p} \geq \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow p \geq \frac{2(n+1)}{n-1},$$

όπως θέλαμε.

2.2 Η λύση του προβλήματος περιορισμού στις δύο διαστάσεις

Κλείνουμε το Κεφάλαιο με τη λύση του προβλήματος περιορισμού στις δύο διαστάσεις. Ξεκινάμε διατυπώνοντας το.

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_p, \quad \text{όπου } p < \frac{4}{3} \text{ και } q \leq \frac{1}{3}p^*. \quad (2.16)$$

Γράφουμε το πρόβλημα σε δυϊκή μορφή

$$\|\widehat{fd\sigma}\|_q \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}, \quad \text{όπου } q > 4 \text{ και } q \geq 3p^*. \quad (2.17)$$

Παρατηρούμε ότι αν η (2.17) ισχύει για κάποιο q , τότε αφού ισχύει τετριμμένα για $q = \infty$, από παρεμβολή συμπεραίνουμε ότι ισχύει και για κάθε $q' \geq q$. Επομένως αρκεί να την αποδείξουμε στην περίπτωση που $q = 3p^*$.

Για τη λύση του προβλήματος περιορισμού θα χρειαστούμε κάποια ορολογία που εισάγουμε παρακάτω.

Ορισμός 2.2.1. Έστω (X, \mathcal{A}, μ) χώρος μέτρου και $1 < p, q < \infty$. Λέμε ότι ο υπογραμμικός τελεστής

$$\begin{aligned} T : L^p(\mu) + L^q(\mu) &\rightarrow \{\mu\text{-μετρήσιμες συναρτήσεις}\} \\ f &\mapsto Tf \end{aligned}$$

ικανοποιεί μία:

- Ισχυρού τύπου (p, q) ανισότητα αν

$$\|Tf\|_q \lesssim \|f\|_p.$$

- Περιορισμένου ισχυρού τύπου (p, q) ανισότητα αν

$$\|T\chi_E\|_q \lesssim \mu(E)^{1/p} \text{ για κάθε } E \in \mathcal{A}.$$

- Ασθενούς τύπου (p, q) ανισότητα αν

$$\mu\left([|Tf| \geq \lambda]\right) \lesssim \lambda^{-q} \|f\|_p^q \text{ για κάθε } f \text{ και } \lambda > 0.$$

- Περιορισμένου ασθενούς τύπου (p, q) ανισότητα αν

$$\mu\left(\left[|T\mathcal{X}_E| \geq \lambda\right]\right) \lesssim \lambda^{-q} \mu(E)^{q/p} \text{ για κάθε } E \in \mathcal{A} \text{ και } \lambda > 0. \quad (2.18)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και μία ισχυρότερη μορφή της ανισότητας Marcinkiewicz.

Θεώρημα 2.2.2. Έστω $1 < p_0 < q_0 < \infty$, $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $p_0 < p_1$, $q_0 < q_1$. Υποθέτουμε ότι ο T ικανοποιεί περιορισμένες ασθενούς τύπου (p_0, q_0) και (p_1, q_1) ανισότητες. Τότε ο T ικανοποιεί μία ισχυρού τύπου (p_t, q_t) ανισότητα για κάθε $0 < t < 1$, όπου

$$\frac{1}{p_t} = \frac{(1-t)}{p_0} + \frac{t}{p_1} \text{ και } \frac{1}{q_t} = \frac{(1-t)}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Με την παραπάνω ορολογία το πρόβλημα περιορισμού επαναδιατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 2.2.3. Ο μετασχηματισμός Fourier ικανοποιεί μία ισχυρού τύπου (q, p) ανισότητα για $p < \frac{4}{3}$ και $q \leq \frac{1}{3}p^*$.

Λόγω της εκδοχής της ανισότητας Marcinkiewicz που διατυπώσαμε παραπάνω αρκεί να δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του μέτρου $f d\sigma$ ικανοποιεί μία περιορισμένου ασθενούς τύπου (q, p) ανισότητα για $q = 3p^*$. Θα αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο.

Θα δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier ικανοποιεί μία περιορισμένου ισχυρού τύπου (q, p) ανισότητα της μορφής

$$\|\widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma}\|_q \lesssim |\Omega|^{1/p}$$

για κάθε $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$. Υψώνουμε στο τετράγωνο κι έχουμε

$$\|\widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma}\|_{q/2} \lesssim |\Omega|^{2/p}. \quad (2.19)$$

Το $q/2$ είναι μεγαλύτερο από 2, άρα για να αποδείξουμε την (2.19) μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε τις ποσότητες

$$\|\widehat{f d\sigma} \widehat{g d\sigma}\|_2 \text{ και } \|\widehat{f d\sigma} \widehat{g d\sigma}\|_\infty,$$

όπου f, g συναρτήσεις στον κύκλο. Από την ανισότητα $\|\widehat{f d\sigma}\|_\infty \leq \|f\|_1$ έχουμε άμεσα την

$$\|\widehat{f d\sigma} \widehat{g d\sigma}\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (2.20)$$

Το να φράξουμε την παραπάνω 2-νόρμα είναι σημαντικά δυσκολότερο για γενικές f, g στον κύκλο. Με το παρακάτω λήμμα θα πάρουμε την ανισότητα που θέλουμε προσθέτοντας υποθέσεις για τους φορείς των f και g .

Λήμμα 2.2.4. Έστω f, g συναρτήσεις στον κύκλο με φορείς που περιέχονται σε διαφορετικά θ -τόξα του κύκλου. Έστω επίσης ότι η απόσταση των δύο τόξων είναι συγκρίσιμη με το θ . Τότε,

$$\|\widehat{f d\sigma} \widehat{g d\sigma}\|_2 \lesssim \theta^{-1/2} \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Plancherel, η ζητούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\|f \widehat{d\sigma} * g d\sigma\|_2 = \|f d\sigma * g d\sigma\|_2 \lesssim \theta^{-1/2} \|f\|_2 \|g\|_2,$$

την οποία θα αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τις ανισότητες

$$\|f d\sigma * g d\sigma\|_1 \lesssim \|f\|_1 \|g\|_1 \text{ και } \|f d\sigma * g d\sigma\|_\infty \lesssim \theta^{-1} \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

και παρεμβολή.

Για την πρώτη ανισότητα παρατηρούμε ότι τα μέτρα $f d\sigma$ και $g d\sigma$ είναι στοιχεία του $L^1(\mathbb{R}^2)$, άρα και η συνέλιξή τους είναι στοιχείο του L^1 . Από την ανισότητα Young έχουμε

$$\|f d\sigma * g d\sigma\|_1 \leq \|f d\sigma\|_1 \|g d\sigma\|_1 \lesssim \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Για τη δεύτερη ανισότητα, έστω I, J ξένα θ -τόξα του κύκλου ώστε $\text{supp}(f) \subset I$ και $\text{supp}(g) \subset J$. Ορίζουμε $d\sigma_I, d\sigma_J$ τον περιορισμό του επιφανειακού μέτρου $d\sigma$ στα I, J αντίστοιχα.

Λόγω της υπόθεσης για τους φορείς των f, g έχουμε

$$f d\sigma \leq \|f\|_\infty d\sigma_I \text{ και } g d\sigma \leq \|g\|_\infty d\sigma_J.$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$\|d\sigma_I * d\sigma_J\|_\infty \lesssim \theta^{-1}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και I_ε μία ε -περιοχή του I . Από τον ορισμό του επιφανειακού μέτρου $d\sigma_I$ έχουμε

$$\frac{1}{2\varepsilon} \mathcal{X}_{I_\varepsilon} \rightarrow d\sigma_I \text{ ασθενώς,}$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left\| \frac{1}{2\varepsilon} \mathcal{X}_{I_\varepsilon} * d\sigma_J \right\|_\infty \lesssim \theta^{-1}$$

για κατάλληλα μικρό ε . Για δεδομένο $\varepsilon > 0$, αν το τόξο J τέμνει το I_ε , τότε η τομή είναι ένα τόξο μήκους $\lesssim \varepsilon \theta^{-1}$. Αυτή η γεωμετρική παρατήρηση ολοκληρώνει την απόδειξη του Λήμματος. \square

Μένει να συνδυάσουμε τα παραπάνω για να αποδείξουμε την (2.17), κάτι που δεν μπορούμε να κάνουμε άμεσα λόγω των υποθέσεων για τους φορείς των f και g .

Θα διασπάσουμε το γινόμενο $\widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma}$ κατάλληλα για να εκμεταλευτούμε το Λήμμα 2.2.4.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη διάσπαση Whitney για τον κύκλο, η οποία γίνεται σε βήματα ως εξής: Στο πρώτο βήμα, χωρίζουμε τον κύκλο σε ημικύκλια.

Στο δεύτερο βήμα, χωρίζουμε το κάθε ένα από τα ημικύκλια που κατασκευάσαμε στο βήμα 1 σε δύο τεταρτοκύκλια.

Αναδρομικά, αν $n \geq 1$, κάθε ένα από τα τόξα που κατασκευάστηκαν στο βήμα n χωρίζεται σε τόξα ίσου μήκους στο βήμα $n + 1$.

Συμβολίζουμε με A_n το σύνολο των τόξων που κατασκευάστηκαν στο βήμα n .

Λέμε ότι δύο τόξα $I, J \in A_n$ είναι γειτονικά αν προέρχονται από το ίδιο τόξο ή αν τα τόξα από τα οποία προέρχονται έχουν κατασκευαστεί από το ίδιο τόξο.

Αν $n \geq 2$, λέμε ότι τα τόξα $I, J \in A_n$ είναι κοντινά αν δεν είναι γειτονικά αλλά προέρχονται από γειτονικά τόξα. Αν τα τόξα $I, J \in A_n$ είναι κοντινά, γράφουμε $I \sim J$.

Πρόταση 2.2.5. Έστω $x, y \in \mathbb{S}^1$ με $x \neq y$. Υπάρχει μοναδικό $n \in \mathbb{N}$ και ζεύγος $I \sim J \in A_n$ ώστε $x \in I$ και $y \in J$.

Για την απόδειξη της Πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της γεωδαισιακής μετρικής στον κύκλο, την οποία ορίζουμε παρακάτω.

Ορισμός 2.2.6. Η γεωδαισιακή μετρική ρ στον κύκλο \mathbb{S}^1 ορίζεται ως εξής:

Η απόσταση $\rho(x, y)$ δύο σημείων $x, y \in \mathbb{S}^1$ είναι η κυρτή γωνία xOy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων O και τα x, y . Αν ονομάσουμε αυτή τη γωνία θ , ισχύουν οι σχέσεις

$$\rho(x, y) = \theta \Leftrightarrow |x - y| = 2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ και } \frac{2}{\pi} \rho(x, y) \leq |x - y| \leq \rho(x, y).$$

Απόδειξη. (της Πρότασης 2.2.5.)

Με τη διάσπαση Whitney, σε κάποιο βήμα k έχουμε χωρίσει τον κύκλο σε 2^k τόξα μήκους $\frac{2\pi}{2^k}$, άρα αν βρούμε ένα $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$2^{-k} < \frac{1}{\pi} \rho(x, y) \leq 2^{1-k},$$

τότε τα x, y θα περιέχονται σε δύο ξένα τόξα $I, J \in A_k$. Τα τόξα αυτά είναι κοντινά λόγω κατασκευής, αφού τα x, y χωρίζονται από ακριβώς ένα τόξο, δηλαδή πέραν των ξένων τόξων που τα διαχωρίζουν στο βήμα k , υπάρχει ακριβώς ένα τόξο ανάμεσα στα δύο τόξα που περιέχουν τα x και y .

Με στοιχειώδεις αριθμητικούς υπολογισμούς βρίσκουμε ότι ένα τέτοιο k , αν υπάρχει, πρέπει να ικανοποιεί τη διπλή ανισότητα

$$\log_2 \left(\frac{\pi}{\rho(x, y)} \right) < k \leq \log_2 \left(\frac{2\pi}{\rho(x, y)} \right) = 1 + \log_2 \left(\frac{\pi}{\rho(x, y)} \right)$$

Είναι σαφές ότι υπάρχει τέτοιο $k \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε n τον μέγιστο φυσικό αριθμό που ικανοποιεί τα παραπάνω. Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα αυτού του n , παρατηρούμε ότι αν συνεχίσουμε για ένα ακόμα βήμα τη διάσπαση Whitney, γράψουμε $I = I_1 \cup I_2$ και $J = J_1 \cup J_2$ και υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x \in I_2$ και $y \in J_1$, τότε τα τόξα I_2 και J_1 δεν είναι γειτονικά, αλλά προέρχονται και από μη γειτονικά τόξα. Έτσι, το $n \in \mathbb{N}$ είναι από κατασκευής μοναδικό και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. \square

Η τελευταία πρόταση, αν για κάθε $n \geq 2$ σταθεροποιήσουμε ένα $I_n \in A_n$, μας επιτρέπει να γράψουμε

$$\widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{J \in A_n: \\ J \sim I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_{I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_J}.$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\|\widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma}\|_{q/2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \left\| \sum_{\substack{J \in A_n: \\ J \sim I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_{I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_J} \right\|_{q/2}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε I_n υπάρχουν $O(1)$ τόξα $J \sim I_n$. Θα εκτιμήσουμε την $q/2$ -νόρμα του αριστερού μέλους μέσω των 2 και supremum νορμών. Έχουμε

$$\left\| \sum_{\substack{J \in A_n: \\ J \sim I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_{I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_J} \right\|_{\infty} \lesssim \sum_{\substack{J \in A_n: \\ J \sim I_n}} |\Omega \cap I_n| |\Omega \cap J| \lesssim \sum_{J \in A_n} \frac{2\pi}{2^n} |\Omega \cap J| = \frac{2\pi}{2^n} |\Omega|.$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\left\| \sum_{\substack{J \in A_n: \\ J \sim I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_{I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_J} \right\|_{\infty} \lesssim \left(\sum_{I_n \in A_n} |\Omega \cap I_n| \right) \left(\sum_{I_n \in A_n} |\Omega \cap I_n| \right) = |\Omega|^2.$$

Αν συνδυάσουμε τις δύο τελευταίες ανισότητες έχουμε

$$\left\| \sum_{\substack{J \in A_n: \\ J \sim I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_{I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_J} \right\|_{\infty} \lesssim |\Omega| \min \left\{ |\Omega|, \frac{2\pi}{2^n} \right\}. \quad (2.21)$$

Για να φράξουμε τη 2-νόρμα παρατηρούμε ότι αν $I \sim J$, οι μετασχηματισμοί Fourier των μέτρων $\mathcal{X}_\Omega d\sigma_I$ και $\mathcal{X}_\Omega d\sigma_J$ έχουν ουσιαδώς ξένους φορείς, άρα οι συναρτήσεις είναι ουσιαδώς κάθετες. Έτσι,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\substack{J \in A_n: \\ J \sim I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_{I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_J} \right\|_2 &\lesssim \left(\sum_{\substack{J \in A_n: \\ J \sim I_n}} \|\widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_{I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_J}\|_2^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim 2^{n/2} \left(\sum_{\substack{J \in A_n: \\ J \sim I_n}} |\Omega \cap I_n| |\Omega \cap J| \right)^{1/2} \quad (\text{Πρόταση 2.2.4.}) \\ &\lesssim 2^{n/2} \left(|\Omega| \min \left\{ |\Omega|, \frac{2\pi}{2^n} \right\} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Από την (2.21) και την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\left\| \sum_{\substack{J \in A_n: \\ J \sim I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_{I_n}} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma_J} \right\|_{q/2} \lesssim 2^{2n/q} \left(|\Omega| \min \left\{ |\Omega|, \frac{2\pi}{2^n} \right\} \right)^{1-2q}.$$

Αθροίζοντας ως προς n έχουμε

$$\|\widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma} \widehat{\mathcal{X}_\Omega d\sigma}\|_{q/2} \lesssim \sum_{n=2}^{\infty} 2^{2n/q} \left(|\Omega| \min \left\{ |\Omega|, \frac{2\pi}{2^n} \right\} \right)^{1-2q}.$$

Μένει να εκτιμήσουμε το τελευταίο άθροισμα. Πρώτα το σπάμε σε δύο κομμάτια, ένα για τα n που ικανοποιούν $|\Omega| \leq \frac{2\pi}{2^n}$ κι ένα για τα υπόλοιπα. Η συνθήκη $|\Omega| \leq \frac{2\pi}{2^n}$ είναι ισοδύναμη με την $n \leq \log_2 \frac{2\pi}{|\Omega|}$. Ο μέγιστος φυσικός αριθμός που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι το ακέραιο μέρος του $\log_2 \frac{2\pi}{|\Omega|}$. Θέτουμε $A = \lceil \log_2 \frac{2\pi}{|\Omega|} \rceil$ κι έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} 2^{2n/q} \left(|\Omega| \min \left\{ |\Omega|, \frac{2\pi}{2^n} \right\} \right)^{1-2q} &\lesssim \sum_{n=2}^A 2^{2n/q} (|\Omega|^2)^{1-2q} + \sum_{n=A+1}^{\infty} 2^{2n/q} \left(|\Omega| \frac{2\pi}{2^n} \right)^{1-2q} \\ &= |\Omega|^{4/p} \sum_{n=2}^A (2^{2/q})^n + (2\pi)^{2/p} |\Omega|^{2/p} \sum_{n=A+1}^{\infty} (2^{4/q-1})^n \\ &= |\Omega|^{2/p} \left(|\Omega|^{2/p} \sum_{n=2}^A (2^{2/q})^n + (2\pi)^{2/p} \sum_{n=A+1}^{\infty} (2^{4/q-1})^n \right) \\ &\leq |\Omega|^{2/p} \left(4\pi^2 \sum_{n=2}^A (2^{2/q})^n + 4\pi^2 \sum_{n=A+1}^{\infty} (2^{4/q-1})^n \right) \quad (2/p < 2 \text{ και } |\Omega| \leq 2\pi). \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η ποσότητα στην τελευταία παρένθεση είναι πεπερασμένη. Το πρώτο άθροισμα είναι πεπερασμένο και η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=A+1}^{\infty} (2^{4/q-1})^n$$

συγκλίνει αφού $q > 4$, άρα $4/q - 1 < 0$. Η παρατήρηση αυτή ολοκληρώνει την απόδειξη της (2.19). Έτσι, έχουμε αποδείξει πλήρως τη λύση του προβλήματος περιορισμού στις δύο διαστάσεις.

Κεφάλαιο 3

Το πρόβλημα στις 3 διαστάσεις

Περιεχόμενα

3.1 Προετοιμασία για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.0.1.	21
3.1.1 Το ε -removal Θεώρημα του Tao	24
3.1.2 Η διάσπαση σε wave packets	26
3.2 Πολυωνυμική διαμέριση	33
3.3 Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2	36
3.3.1 Το φράγμα για τους εφαπτομενικούς όρους	42
3.3.2 Η απόδειξη του Θεωρήματος	48

Το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο σε μια μορφή του προβλήματος restriction στις 3 διαστάσεις. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αφορούν σε ομαλές συμπαγείς επιφάνειες S του \mathbb{R}^3 με αυστηρά θετική δεύτερη θεμελιώδη μορφή. Το κεντρικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.0.1 (Guth 2014). Έστω S ομαλή συμπαγής επιφάνεια (με ή χωρίς σύνορο) του \mathbb{R}^3 με αυστηρά θετική δεύτερη θεμελιώδη μορφή. Τότε, για κάθε $p > 3.25$ ισχύει

$$\|E_S f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C(p, S) \|f\|_{L^\infty(S)}, \quad (3.1)$$

όπου

$$E_S f(x) = \int_S f(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\text{vol}(\omega) \quad f : S \rightarrow \mathbb{C}$$

ο τελεστής επέκτασης (extension operator) της S .

Το αποτέλεσμα αυτό αποδείχθηκε στο [Gu1] από τον Guth το 2014. Προηγούμενα γνωστά αποτελέσματα έδιναν αντίστοιχες εκτιμήσεις για $p > \frac{10}{3}$ (Wolff 2001 και Tao 2003) και $p > \frac{56}{17}$ (Bourgain-Guth 2011), ενώ η εικασία του Stein ισχυρίζεται ότι η (3.1) ισχύει για όλα τα $p > 3$. Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη της απόδειξης του Guth υποθέτοντας ότι η S έχει παρόμοιες αναλυτικές ιδιότητες με το συμπιεσμένο παραβολοειδές (truncated paraboloid). Υπό αυτές τις υποθέσεις θα αποδείξουμε την (3.1) και στο τέλος της Παραγράφου 3.1 θα επεκτείνουμε το αποτέλεσμα σε κάθε συμπαγή επιφάνεια με αυστηρά θετική δεύτερη θεμελιώδη μορφή μέσω της παραβολικής αλλαγής κλίμακας (parabolic scaling) των Bourgain και Guth από το [BG].

Πριν συνεχίσουμε, είναι χρήσιμο να δούμε πως προέκυψε ο τελεστής επέκτασης μίας επιφάνειας και γιατί επιλέγουμε επιφάνειες με τις επιθυμητές ιδιότητες. Μπορούμε να γράψουμε (έστω και

τοπικά την S ως γράφημα ομαλής συνάρτησης $h : B_2^2 \rightarrow \mathbb{R}$ κι έτσι για κάθε $f \in S(B_2^2)$ μπορούμε να ορίσουμε

$$\tilde{E}_S f(x) = \int_{B_2^2} e^{2\pi i \langle x, (\omega, h(\omega)) \rangle} f(\omega) d\omega .$$

Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση του Θεωρήματος 3.0.1 είναι ισοδύναμη με την

$$\|\tilde{E}_S f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C(p, S) \|f\|_{L^\infty(B_2^2)} ,$$

γι' αυτό και στο εξής θα ταυτίζουμε τους $E_S f$ και $\tilde{E}_S f$ χωρίς να υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης. Για να δούμε από που προέκυψε ο τελεστής επέκτασης θεωρούμε μία λύση $u(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ της free Schrödinger equation

$$i\partial_t u + \Delta u = 0$$

με αρχική συνθήκη $u(0, x) = u_0(x)$. Η εξίσωση έχει λύση

$$u(t, x) = \int e^{2\pi i (\langle x, \xi \rangle + t|\xi|^2)} \hat{u}_0(\xi) d\xi = \int e^{2\pi i (\langle (x, t), (\xi, |\xi|^2) \rangle)} \hat{u}_0(\xi) d\xi .$$

Έχουμε δηλαδή ότι η λύση της εξίσωσης είναι η $u = E_{\mathbb{P}} \hat{u}_0$, όπου \mathbb{P} το παραβολοειδές

$$\mathbb{P} = \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \tau = 2\pi|\xi|^2\} .$$

3.1 Προετοιμασία για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.0.1.

Υποθέτουμε ότι μια ομαλή συμπαγής επιφάνεια S του \mathbb{R}^3 είναι το γράφημα μίας συνάρτησης $h : B_2^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες για κάποιον μεγάλο $L \in \mathbb{N}$:

(I) $\frac{1}{2} \leq H_h \leq 2$

(II) $h(0) = \nabla h(0) = 0$

(III) Η h είναι της κλάσης C^L

(IV) Για όλα τα $3 \leq l \leq L$, $\|\partial^l h\|_\infty \leq 10^{-9}$.

Στην έκταση της παραγράφου θεωρούμε ότι οι επιφάνειες που μελετάμε πληρούν τις παραπάνω συνθήκες με L παραγώγους. Όταν ισχύουν οι παραπάνω 4 συνθήκες για την S θα λέμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη (\star) με L παραγώγους.

Χωρίζουμε την S σε $\sim K^2$ δίσκους τ διαμέτρου $\sim K^{-1}$. Έστω $f_\tau = f|_{\mathcal{X}_\tau}$ ο περιορισμός της f στο τ .

Ορισμός 3.1.1. Αν $\alpha \in (0, 1)$, λέμε ότι το x είναι α -ευρύ για τον τελεστή επέκτασης $E_S f$ αν

$$\max_\tau |E f_\tau(x)| \leq \alpha |E f(x)| .$$

Ορίζουμε επίσης

$$Br_\alpha E f(x) = \begin{cases} |E f(x)|, & \text{αν το } x \text{ είναι } \alpha\text{-ευρύ για τον } E f \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος (3.0.1) θα γίνει χωρίζοντας τον $E f$ στο ευρύ μέρος του και το μέρος του που δεν είναι ευρύ για δεδομένο α . Το ευρύ μέρος του $E f$ μπορεί να ελεγχθεί από την παρακάτω ανισότητα.

Θεώρημα 3.1.2. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $K = K(\varepsilon)$ με $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K(\varepsilon) = +\infty$ και $L = L(\varepsilon)$ ώστε αν η S ικανοποιεί την (\star) με L παραγώγους, τότε για κάθε $R > 0$,

$$\|Br_{K-\varepsilon}Ef\|_{L^{3.25}(B_R)} \leq C_\varepsilon R^\varepsilon \|f\|_{L^2(S)}^{12/13} \|f\|_{L^\infty(S)}^{1/13}. \quad (3.2)$$

Θα αποδείξουμε το παραπάνω Θεώρημα στην ενότητα 3.3. Μέχρι τότε, θα το χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 3.1.3. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε ακτίνα $R > 0$, ο τελεστής επέκτασης E_S ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|E_S f\|_{L^{3.25}(B_R)} \leq C_\varepsilon R^\varepsilon \|f\|_{L^\infty(S)}. \quad (3.3)$$

Ξεκινώντας την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος και χωρίζοντας το ολοκλήρωμα του $E_S f$ όπως περιγράψαμε, παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\|Br_{K-\varepsilon}Ef\|_{L^{3.25}(B_R)}^{3.25}$ φράσσεται αμέσως από $(C_\varepsilon R^\varepsilon \|f\|_\infty)^{3.25}$ από το Θεώρημα 3.1.2, ενώ το υπόλοιπο δεν μπορεί να ελεγχθεί άμεσα. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα επιχειρήμα παραβολικής αλλαγής κλίμακας από το [BG] για να δείξουμε ότι κι αυτό ικανοποιεί μία αντίστοιχη ανισότητα.

Υπενθυμίζουμε ότι η S ικανοποιεί τη συνθήκη (\star) . Έστω $B^2(\vec{\omega}_0, r) \subseteq B_2^2$ και $S_0 \subseteq S$ το γράφημα της h πάνω από την $B^2(\vec{\omega}_0, r)$. Θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του E_{S_0} στην B_R μέσω του E_{S_1} για μία επιφάνεια $S_1 \subseteq S$ που ικανοποιεί την (\star) . Ορίζουμε \bar{h} ως τη διαφορά της h με τους όρους πρώτης τάξης του αναπτύγματος Taylor της h στο σημείο $\vec{\omega}_0$

$$\bar{h}(\vec{\omega}) = h(\vec{\omega}) - (\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \nabla h(\vec{\omega}_0) - h(\vec{\omega}_0). \quad (3.4)$$

Για κάθε $\vec{\omega} \in B^2(\vec{\omega}_0, r)$ γράφουμε $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + r\vec{\eta}$, $\|\vec{\eta}\|_2 \leq 1$ και ορίζουμε

$$h^1(\vec{\eta}) = \frac{1}{r^2} \bar{h}(\vec{\omega}_0 + r\vec{\eta}).$$

Θέτουμε S_1 το γράφημα της h^1 . Ένας άμεσος υπολογισμός δείχνει ότι η S_1 ικανοποιεί την (\star) . Μάλιστα, για κάθε $l \geq 2$ ισχύει

$$\|\partial^l h^1\|_\infty = r^{l-2} \|\partial^l h\|_\infty.$$

Η συμπεριφορά του E_{S_0} στην B_R συνδέεται με τη συμπεριφορά του E_{S_1} μέσω του ακόλουθου Λήμματος.

Λήμμα 3.1.4. Θεωρούμε την επιφάνεια S_1 όπως ορίστηκε παραπάνω. Αν ο τελεστής επέκτασης της S_1 ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|E_{S_1} g\|_{L^p(B_{10rR})} \leq K \|g\|_{L^\infty(S_1)},$$

τότε ο τελεστής επέκτασης της S_0 ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|E_{S_0} f\|_{L^p(B_R)} \leq CK r^{2-\frac{4}{p}} \|f\|_{L^\infty(S_0)}.$$

Πριν αποδείξουμε το παραπάνω λήμμα είναι σημαντικό να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα του. Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με το λήμμα, αν έχουμε την επιθυμητή ανισότητα σε μικρότερες μπάλες, τότε προκύπτει μία ανισότητα με καλύτερη σταθερά σε όλη τη μεγάλη μπάλα, αλλά μόνο για μικρότερους δίσκους της επιφάνειας.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^p(S_0)$. Εκφράζουμε τον $E_{S_0}f$ μέσω του $E_{S_1}f$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |E_{S_0}f(x)| &= \left| \int_{S_0} e^{i\omega x} f(\omega) \, d\text{vol}(\omega) \right| \\ &= \left| \int_{B_r^2(\vec{\omega}_0)} e^{i\langle \vec{\omega}, x \rangle} e^{ih(\vec{\omega})x_3} f(\vec{\omega}) \sqrt{1 + |\nabla h(\vec{\omega})|^2} \, d\vec{\omega} \right| \quad \omega = (\vec{\omega}, h(\vec{\omega})), \quad x = (\vec{x}, x_3) \\ &= \left| \int_{B_r^2(\vec{\omega}_0)} e^{i\langle \vec{\omega}, \vec{x} + \nabla h(\vec{\omega}_0)x_3 \rangle} e^{i\bar{h}(\vec{\omega})x_3} f(\vec{\omega}) \sqrt{1 + |\nabla h(\vec{\omega})|^2} \, d\vec{\omega} \right| \\ &= \left| \int_{B_2^2} e^{i\langle \vec{\eta}, r(\vec{x} + \nabla h(\vec{\omega}_0)) \rangle} e^{ih^1(\vec{\eta})r^2x_3} f(\vec{\eta}) \sqrt{1 + |\nabla h(\vec{\eta})|^2} r^2 \, d\vec{\eta} \right|. \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με $|E_{S_1}g(y)|$, όπου

$$g(\vec{\eta}) = f(\vec{\omega}_0 + r\vec{\eta}) r^2 \sqrt{1 + |\nabla h(\vec{\eta})|^2} |J_{h^1}(\vec{\eta})|^{-1}$$

και

$$y = (rx_1 + rh_{\omega_1}(\omega_0)x_3, rx_2 + rh_{\omega_2}(\omega_0)x_3, r^2x_3).$$

Έχουμε υποθέσει ότι οι S και S_1 ικανοποιούν την (\star) και ότι $\nabla h(0) = \nabla h^1(0) = 0$, άρα

$$\max\{|H_h|, |H_{h^1}|, |\nabla h|, |\nabla h^1|\} \leq 2.$$

Έπεται ότι $\sqrt{1 + |\nabla h|^2} = |J_h|, |J_{h^1}| \lesssim 1$. Από τον ορισμό της g έχουμε

$$\|g\|_{L^\infty(S_1)} \lesssim r^2 \|f\|_{L^\infty(S_0)}. \quad (3.5)$$

Αφού $|\nabla h(\omega_0)| \leq 2$, από τον ορισμό του y έπεται ότι

$$x \in B_R \Rightarrow y \in B_{10rR}.$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \Phi(x)$ και παρατηρούμε ότι $\det \Phi = r^4$. Έτσι,

$$\begin{aligned} \|E_{S_0}f\|_{L^p(B_R)} &\leq r^{-\frac{4}{p}} \|E_{S_1}g\|_{L^p(B_{10rR})} \\ &\leq r^{-\frac{4}{p}} K \|g\|_{L^\infty(S_1)} \\ &\lesssim r^{2-\frac{4}{p}} K \|f\|_{L^\infty(S_0)}. \end{aligned}$$

□

Έχοντας στα χέρια μας το Λήμμα 3.1.4 μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.1.3.

Απόδειξη. (Του Θεωρήματος 3.1.3.)

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στην ακτίνα R της μπάλας. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\|Ef\|_{L^{3.25}(B_R)} \leq \tilde{C}_\varepsilon R^\varepsilon \|f\|_\infty \quad (3.6)$$

για κάποια σταθερά \tilde{C}_ε ανεξάρτητη της ακτίνας. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία τέτοια σταθερά ανεξάρτητη του R ώστε η (3.6) να ισχύει για όλες τις ακτίνες $N < \frac{R}{2}$. Να ισχύει δηλαδή

$$\|Ef\|_{L^{3.25}(B_N)} \leq \tilde{C}_\varepsilon N^\varepsilon \|f\|_\infty.$$

Παρατηρούμε ότι αν ένα σημείο x δεν είναι $K^{-\varepsilon}$ -ευρύ για τον Ef , τότε υπάρχει κάποιος K^{-1} -δίσκος τ ώστε $|Ef(x)| \leq K^\varepsilon |Ef_\tau(x)|$.

Γράφουμε

$$\int_{B_R} |Ef|^{3.25} dx \leq \int_{B_R} Br_{K^{-\varepsilon}} Ef^{3.25} dx + K^{O(\varepsilon)} \sum_{\tau} \int_{B_R} |Ef_\tau|^{3.25} dx.$$

Το ευρύ μέρος του Ef είναι φραγμένο από $(C_\varepsilon R^\varepsilon \|f\|_\infty)^{3.25}$ από το Θεώρημα 3.1.2. Θέλουμε να βρούμε αντίστοιχο φράγμα για το άθροισμα στο δεξί μέλος. Έστω

$$\tau = \{(\vec{\omega}, h(\vec{\omega})) : \vec{\omega} \in B^2(\vec{\omega}_0, K^{-1})\}$$

το γράφημα μίας συνάρτησης h πάνω από τη μπάλα $B^2(\vec{\omega}_0, K^{-1})$. Χρησιμοποιώντας το parabolic scaling που αναλύσαμε παραπάνω προκύπτει μία επιφάνεια S_1 η οποία ικανοποιεί την (*). Μπορούμε να επιλέξουμε το $K > 20 \Leftrightarrow 10K^{-1}R < \frac{R}{2}$. Έτσι ισχύει η ανισότητα

$$\|E_{S_1} f_\tau\|_{L^{3.25}(B_{10K^{-1}R})} \leq K \|f_\tau\|_{L^\infty(S_1)}.$$

Από το Λήμμα 3.1.4, ο E_τ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\int_{B_R} |Ef_\tau|^{3.25} dx \leq CK^{3.25} K^{\frac{4}{3.25}-2} (\tilde{C}_\varepsilon R^\varepsilon \|f\|_\infty)^{3.25} = CK^{-2.5} (\tilde{C}_\varepsilon R^\varepsilon \|f\|_\infty)^{3.25}.$$

Υπάρχουν $\sim K^2$ δίσκοι τ , άρα η συνολική συνεισφορά του δεξιού μέλους φράσσεται από

$$CK^{-\frac{1}{2}+O(\varepsilon)} (\tilde{C}_\varepsilon R^\varepsilon \|f\|_\infty)^{3.25}.$$

Ισχύει ότι $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K(\varepsilon) = +\infty$. Αν το ε είναι αρκετά μικρό ώστε $CK^{-\frac{1}{2}+O(\varepsilon)} \leq \frac{1}{100}$, τότε η σταθερά που αναζητούμε είναι η $\tilde{C}_\varepsilon = 10C_\varepsilon$. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή και την απόδειξη του θεωρήματος. \square

3.1.1 Το ε -removal Θεώρημα του Tao

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με ένα αποτέλεσμα του Tao που θα χρησιμοποιηθεί στις αποδείξεις των κεντρικών αποτελεσμάτων αυτού του κεφαλαίου και του επόμενου.

Έστω $p, q \geq 1$. Συμβολίζουμε με $R^\alpha(p, q)$ το τοπικό θεώρημα restriction

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim R^\alpha \|f\|_{L^p(B_R)} \quad (3.7)$$

και με $R^*(p, q, \alpha)$ το τοπικό δυϊκό πρόβλημα restriction

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{q^*}(B_R)} \lesssim R^\alpha \|g\|_{L^{p^*}(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

Με $R^0(p, q)$ συμβολίζουμε το θεώρημα restriction

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Διατυπώνουμε τώρα το ε -removal του Tao. Μία απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Tao99].

Θεώρημα 3.1.5 (ε -removal). *Αν $p \leq 2\frac{n+1}{n+3}$ και $0 < \varepsilon \leq \frac{n+1}{2p^*}$, τότε το Θεώρημα $R^\varepsilon(p, p)$ συνεπάγεται το $R^0(q, q)$ όποτε*

$$q^* \geq 2 + \frac{1}{\frac{n+1}{2p^*} - \alpha}.$$

Ένα ακόμη αντίστοιχο αποτέλεσμα, πιο κατάλληλο για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.0.1 είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.1.6 (Bourgain, 1991). Υποθέτουμε ότι ισχύει το $R^*(\infty, p, \alpha)$ για κάποιο $\alpha > 0$ που ικανοποιεί $\alpha < \frac{n+1}{2p}$. Τότε ισχύει και το $R^*(\infty, q)$ όπου

$$q > 2 + \frac{p}{\frac{n+1}{2} - \alpha p}.$$

Από τον ορισμό του δυϊκού προβλήματος και το Θεώρημα 3.1.5 έχουμε ότι αν $p \in (1, \frac{2n}{n+1}]$ και ισχύει το Θεώρημα $R^\varepsilon(p, \infty)$ για κάθε $\varepsilon > 0$, όπως ακριβώς στην περίπτωση του Θεωρήματος 3.1.3, τότε ισχύει και το

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \quad (3.8)$$

για κάθε $q > p$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1.3 και το ε -removal έχουμε ότι για κάθε $p > 3.25$ ισχύει το παρακάτω.

Πόρισμα 3.1.7. Για κάθε $p > 3.25$ ισχύει

$$\|E_S f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C(p) \|f\|_\infty. \quad (3.9)$$

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.0.1.

Αν η S είναι συμπαγής C^∞ επιφάνεια με αυστηρά θετική δεύτερη θεμελιώδη μορφή, μπορούμε να την διαμερίσουμε σε $C(S)$ κομμάτια τ ώστε κάθε κομμάτι να περιέχεται στο γράφημα κάποιας C^∞ συνάρτησης h . Κάνοντας μια αλλαγή συντεταγμένων μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε γράφημα είναι της μορφής

$$\{(\vec{\omega}, h(\vec{\omega})) : \vec{\omega} \in B_R(\vec{\omega}_0), R \sim_S 1\}.$$

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $h(0) = \nabla h(0) = 0$. Από την υπόθεση για τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή της S , έπεται ότι υπάρχουν $\lambda, \Lambda \geq 0$ ώστε

$$\lambda \leq H_h \leq \Lambda.$$

Για κάθε L μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το parabolic scaling που αναλύσαμε παραπάνω στους δίσκους με ακτίνα $r = r(\lambda, \Lambda, \|h\|_{C^L})$, ώστε για τη συνάρτηση h^1 που θα προκύψει να ισχύει

$$|\partial^l h^1| \leq 10^{-9} \quad \text{για κάθε } 3 \leq l \leq L.$$

Διαγωνοποιώντας τον πίνακα $H_h(0)$ με έναν ορθογώνιο πίνακα $O \in \mathcal{O}(2)$, βρίσκουμε διαγώνιο πίνακα P ώστε

$$P = O^T H_h(0) O = H_{O(h)}$$

από τον Κανόνα της Αλυσίδας. Με μία αλλαγή μεταβλητής ακόμα μπορούμε να πετύχουμε $H_h(0) = I_2$. Αν η τελευταία αλλαγή μεταβλητής αυξήσει τις παραγώγους ανώτερης τάξης της h , μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία του parabolic scaling όσες φορές χρειαστεί και να καταλήξουμε σε μια συνάρτηση h' η οποία ικανοποιεί την $(*)$. Έχουμε

$$E_S f(x) \lesssim C(S) \sum_{\tau} E_{\tau} f.$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 3.1.7 σε κάθε ένα από τα τ . Το πλήθος των τ είναι πεπερασμένο κι εξαρτάται μόνο από την S . Αθροίζοντας ως προς τ , έχουμε το Θεώρημα 3.0.1.

3.1.2 Η διάσπαση σε wave packets

Ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.0.1. είναι η διάσπαση σε wave packets, μέσω της οποίας χωρίζουμε τον τελεστή επέκτασης $E_S f$ της f στην B_R σε μικρότερα κομμάτια $E_S f_T$, για κατάλληλες συναρτήσεις f_T που θα κατασκευάσουμε σε αυτή την παράγραφο. Τα κομμάτια αυτά τα αποκαλούμε wave packets και όπως θα δούμε μπορούν να μελετηθούν ευκολότερα.

Η διάσπαση του $E_S f$ σε wave packets γίνεται ως εξής:

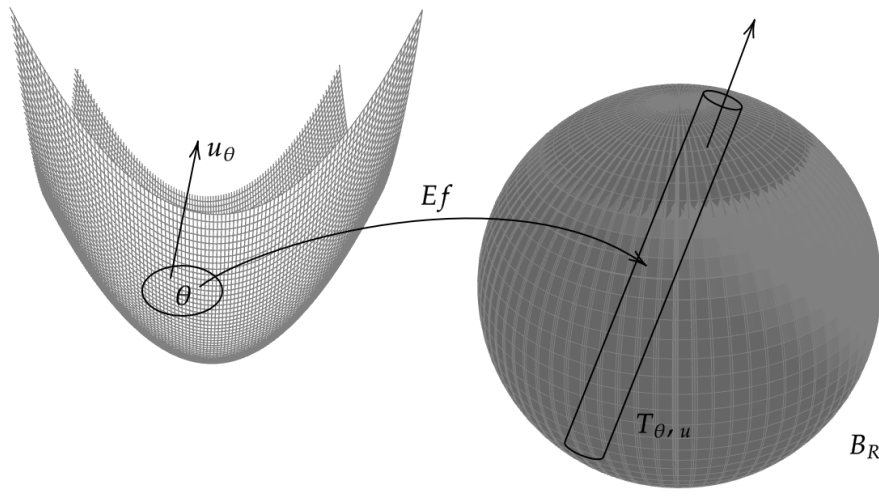
Αρχικά χωρίζουμε την S σε $R^{-1/2}$ -δίσκους θ . Επιλέγουμε ένα σημείο ω_θ αρκετά κοντά στο κέντρο του θ , το οποίο απαιτούμε να περιέχεται στην S κι ορίζουμε u_θ να είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της S στο σημείο ω_θ .

Θεωρούμε μία μικρή θετική παράμετρο $\delta > 0$. Για κάθε δίσκο θ ορίζουμε $\mathbb{W}(\theta)$ ως ένα σύνολο κυλίνδρων που έχουν ακτίνα $R^{1/2+\delta}$, μήκος $\sim R$, άξονα παράλληλο με το u_θ , είναι ουσιαστικά ξένοι άνα δύο και καλύπτουν την B_R . Θα αποδείξουμε ότι η επιλογή της ακτίνας των κυλίνδρων μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε τα wave packets ώστε να φθίνουν απότομα έξω από τους κυλίνδρους, κάτι που θα μας επιτρέψει να τα μελετήσουμε ευκολότερα.

Παρατηρούμε ότι κάθε $x \in B_R$ ανήκει σε $O(1)$ διαφορετικούς κυλίνδρους $T \in \mathbb{W}(\theta)$. Ορίζουμε

$$\mathbb{W} = \bigcup_{\theta} \mathbb{W}(\theta).$$

Για κάθε δίσκο θ γράφουμε 3θ για τον δίσκο με το ίδιο κέντρο και τριπλάσια ακτίνα από τον θ . Αν $T \in \mathbb{W}(\theta)$ είναι ένας κύλινδρος, ορίζουμε $u(T) = u_\theta$ να είναι η κατεύθυνση του T .



Σχήμα 3.1: Οι κύλινδροι που προκύπτουν κατά τη διάσπαση σε wave packets

Η παρακάτω πρόταση συγκεντρώνει τις βασικές ιδιότητες της διάσπασης σε wave packets που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

Πρόταση 3.1.8. Υποθέτουμε ότι η S ικανοποιεί την (\star) με L παραγώγους. Έστω \mathbb{W} όπως πάνω και $\delta > 0$. Αν f είναι μία συνάρτηση στον $L^2(S)$, τότε για κάθε $T \in \mathbb{W}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε συνάρτηση f_T με τις εξής ιδιότητες:

- (I) Αν $T \in \mathbb{W}(\theta)$, τότε $\text{supp}(f_T) \subseteq 3\theta$.

(II) Αν $x \in B_R \setminus T$, τότε $|Ef_T(x)| \leq R^{-1000} \|f\|_2$.

(III) Για κάθε $x \in B_R$, $|Ef(x) - \sum_{T \in \mathbb{W}} Ef_T(x)| \leq R^{-1000} \|f\|_2$.

(IV) Αν $T_1, T_2 \in \mathbb{W}(\theta)$ ξένα, τότε $\int f_{T_1} \overline{f_{T_2}} \leq R^{-1000} \int_\theta |f|^2$.

(V) $\sum_{T \in \mathbb{W}(\theta)} \int_S |f_T|^2 \lesssim \int_\theta |f|^2$.

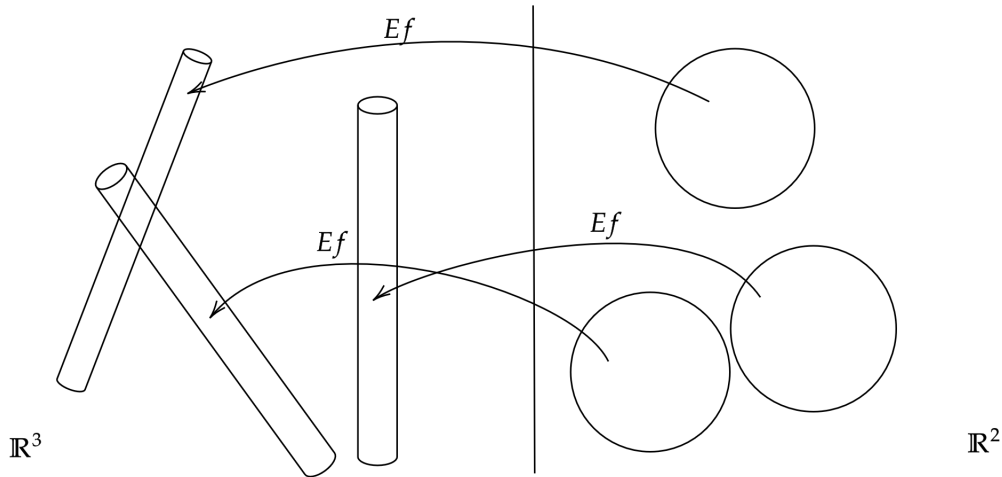
Απόδειξη. Ξεκινάμε ορίζοντας τη συνάρτηση f_T .

Σταθεροποιούμε έναν δίσκο θ . Ορίζουμε $f_\theta = f \chi_\theta$ τον περιορισμό της f στο θ . Για κάθε δίσκο θ επιλέγουμε ορθοκανονικές συντεταγμένες $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ στις οποίες ο δίσκος 5θ είναι το γράφημα ομαλής συνάρτησης h που ικανοποιεί την $(*)$. Γράφουμε δηλαδή $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ και $\omega_3 = h(\vec{\omega})$. Η h είναι ορισμένη σε μία μπάλα ακτίνας $\sim R^{-1/2}$, άρα πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$|h| \lesssim R^{-1}, \quad |\nabla h| \lesssim R^{-1/2}, \quad |\nabla^l h| \lesssim_l 1$$

εντός της μπάλας για κάθε $l \geq 2$. Έστω $(x_1, x_2, x_3) = (\vec{x}, x_3)$ οι δυϊκές συντεταγμένες των $(\vec{\omega}, \omega_3)$. Μπορούμε λόγω της παρασυμπάγειας του \mathbb{R}^2 να τον καλύψουμε με μία τοπικά πεπερασμένη οικογένεια μπαλών B ακτίνας $R^{1/2+\delta}$. Ορίζουμε T να είναι το σύνολο των σημείων $x = (\vec{x}, x_3)$ για τα οποία ισχύει $\vec{x} \in B$. Ως $\mathbb{W}(\theta)$ έχουμε ήδη ορίσει παραπάνω το σύνολο των κυλίνδρων T που αντιστοιχούν μέσω του Ef στις μπάλες B που καλύπτουν την B_R^2 . Ορίζουμε $\mathbb{W}(\theta)$ ως το σύνολο των κυλίνδρων T που αντιστοιχούν μέσω του Ef στις μπάλες B που καλύπτουν τον \mathbb{R}^2 .

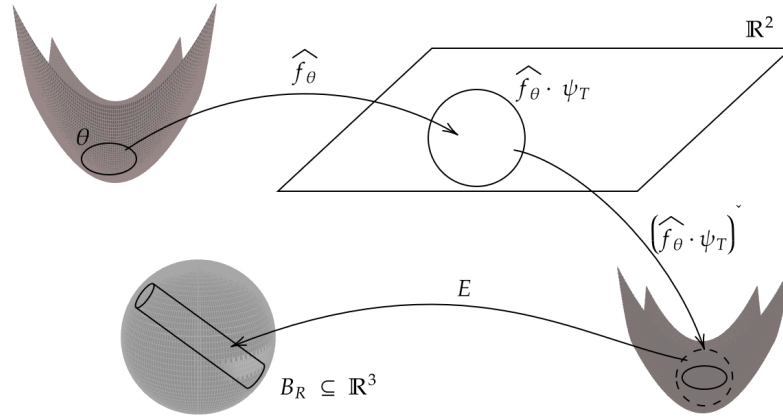
Έστω ψ_T ομαλή διαμέριση της μονάδας του \mathbb{R}^2 συμβατή με το κάλυμμα από τις μπάλες B . Υποθέτουμε μάλιστα ότι $\text{supp}(\psi_T(\vec{\omega})) \subseteq \frac{3}{4}B$ για κάθε κύλινδρο T .



Σχήμα 3.2: Η μετάβαση από μπάλες του \mathbb{R}^2 σε κυλίνδρους του \mathbb{R}^3 μέσω του Ef

Για κάθε κύλινδρο T ορίζουμε $\rho_T = E(\widehat{f_\theta} \cdot \psi_T) = E(f_\theta * \check{\psi}_T)$ και παρατηρούμε ότι σχηματίζει ομαλή διαμέριση της μονάδας συμβατή με το κάλυμμα των κυλίνδρων, αφού οι κυλίνδροι είναι εξ' ορισμού εικόνες των μπαλών B του \mathbb{R}^2 και η ψ_T είναι διαμέριση της μονάδας συμβατή με το κάλυμμα των μπαλών. Η επιλογή της ρ_T δικαιολογείται στο σχήμα που ακολουθεί. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|\nabla^l \rho_T| \lesssim (R^{1/2+\delta})^{-l}$, απ' όπου έπεται ότι, λόγω των υποθέσεων ομαλότητας για την ψ_T , ο $\hat{\rho}_T$ ικανοποιεί την

$$|\hat{\rho}_T(\vec{\omega})| \lesssim \text{Vol}(B) (1 + R^{1/2+\delta} |\vec{\omega}|)^{10^6}.$$



Σχήμα 3.3: Η κατασκευή των συναρτήσεων ρ_T

Έστω ϕ_θ ομαλή συνάρτηση ταυτοτικά ίση με 1 στο 2θ , απότομα φθίνουσα εκτός του και με φορέα $\text{supp}(\phi_\theta) \subseteq 3\theta$. Ισχύει με αυτές τις υποθέσεις μία εκτίμηση της μορφής $|\nabla^l \phi_\theta| \lesssim_l R^{l/2}$. Έστω $J = \sqrt{1 + |\nabla h|^2}$. Ορίζουμε $F_\theta = f_\theta J$ ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} F_\theta(\vec{\omega}) d\omega_1 d\omega_2 &= f_\theta(\omega) d\text{vol}_S \\ &= f_\theta(\vec{\omega}) J(\omega) d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned}$$

από τον ορισμό του επιφανειακού μέτρου της S . Αν θεωρήσουμε την F_θ ως συνάρτηση στον \mathbb{R}^2 και θεωρήσουμε τη συνέλιξη $\hat{\rho}_T * F_\theta$, τότε μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση F_T ως

$$F_T(\vec{\omega}) = \phi_\theta(\vec{\omega}) \cdot (\hat{\rho}_T * F_\theta)(\vec{\omega}).$$

Από τον ορισμό της ϕ_θ έπεται ότι $\text{supp}(F_T) \subseteq 3\theta$. Σταθεροποιούμε έναν κύλινδρο T . Για τη συνάρτηση f_T , μέσω της σχέσης $F_T = f_T \cdot J$, θα αποδείξουμε τις ιδιότητες (I) – (V). Από τον ορισμό της F_T ισχύει

$$\begin{aligned} F_T(\vec{\omega}) d\omega_1 d\omega_2 &= f_T(\omega) d\text{vol}_S \\ &= f_T(\vec{\omega}) J d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned}$$

Αφού $\text{supp}(F_T) \subseteq 3\theta$ έχουμε ότι και ο φορέας της f_T ικανοποιεί την $\text{supp}(f_T) \subseteq 3\theta$, το οποίο αποδεικνύει την ιδιότητα (I).

Για την ιδιότητα (II), έστω $T \in \tilde{\mathbb{W}}(\theta)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} E f_T(x) &= \int e^{2\pi i \langle \omega, x \rangle} f_T(\omega) d\text{vol}_S \\ &= \int e^{2\pi i \langle \vec{\omega}, \vec{x} \rangle} e^{ih(\vec{\omega})x_3} F_T(\vec{\omega}) d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \int e^{2\pi i \langle \vec{\omega}, \vec{x} \rangle} (e^{2\pi ih(\vec{\omega})x_3} \phi_\theta) (\hat{\rho}_T * F_\theta) d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned}$$

Ορίζουμε $G_{x_3}(\vec{\omega}) = e^{2\pi ih(\vec{\omega})x_3} \phi_\theta$. Από τον τύπο αντιστροφής και τη σχέση $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$ μπορούμε να γράψουμε

$$E f_T(x) = G_{x_3}^\vee * (\rho_T \cdot \check{F}_\theta).$$

Το x ανήκει στην B_R , άρα $|x_3| \leq R$, επομένως ισχύει $|\nabla^l G_{x_3}| \lesssim_l R^{l/2}$. Έτσι,

$$\begin{aligned} |G_{x_3}^\vee(\vec{x})| &\leq \int_{B_R} |\hat{G}_{x_3}(\vec{x})| d\vec{x} \\ &\leq \int_\theta |\phi_\theta(\vec{x})| d\vec{x} \\ &\leq C \text{Vol}(\theta) (1 + |x|R^{-1/2})^{-10^6/\delta}, \end{aligned}$$

για κάποια σταθερά $C > 0$, λόγω των υποθέσεων ομαλότητας για την ϕ_θ . Η τελευταία ανισότητα προκύπτει άμεσα με ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $x \notin T$, έχουμε $\text{dist}(x, \text{supp}(\psi_T)) \geq \frac{1}{4}R^{1/2+\delta}$. Πράγματι, έχουμε υποθέσει ότι $\text{supp}(\psi_T) \subseteq \frac{3}{4}B$ και ότι κάθε μπάλα B έχει ακτίνα $R^{1/2+\delta}$, άρα από τον ορισμό του T , για κάθε $y \in \text{supp}(\psi_T)$ ισχύει

$$|x - y| \geq \frac{1}{4}R^{1/2+\delta}.$$

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier \check{F}_θ έχουμε

$$\begin{aligned} |\check{F}_\theta(z)| &\leq \int_\theta |\hat{F}_\theta(z)| dz \\ &\leq \text{Vol}(\theta)^2 \|\hat{F}_\theta\|_2 \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \text{Vol}(\theta)^2 \|F_\theta\|_2 \quad (\text{Plancherel}) \\ &\lesssim \text{Vol}(\theta)^2 \|f\|_{L^2(\theta)}. \end{aligned}$$

Αν συγκεντρώσουμε τις παραπάνω ανισότητες έχουμε

$$\begin{aligned} |Ef_T(x)| &= |G_{x_3}^\vee(x) * (\rho_T \cdot \check{F}_\theta)(x)| \\ &\leq \text{Vol}(\theta) (1 + |x|R^{-1/2})^{-10^6/\delta} * |(\rho_T \cdot \check{F}_\theta)(x)| \\ &\lesssim R^{-1} (1 + R^{1/2+\delta} R^{-1/2})^{-10^6/\delta} * |(\rho_T \cdot \check{F}_\theta)(x)| \quad (x \notin T) \\ &\lesssim R^{-1} (1 + R^\delta)^{-10^6/\delta} * |(\rho_T \cdot \check{F}_\theta)(x)|. \end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε την ακτίνα αρκετά μεγάλη ώστε $R^\delta \geq 1$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} |Ef_T(x)| &\lesssim R^{-1} (2R)^{-10^6} \cdot \int |(\rho_T \cdot \check{F}_\theta)(x)| dx \\ &\lesssim R^{-10^6-1} \|\hat{\rho}_T\|_2 \|f\|_{L^2(\theta)} \\ &\lesssim R^{-10^6-1} \text{Vol}(B)^2 (1 + R \cdot R^{1/2+\delta})^{2 \cdot 10^6} \|f\|_{L^2(\theta)} \\ &\lesssim R^{-10^6} (1 + \text{dist}(x, T))^{-100} \|f\|_{L^2(\theta)}, \end{aligned}$$

αν επιλέξουμε το $\delta > 0$ αρκετά μικρό. Δείξαμε λοιπόν ότι

$$|Ef_T(x)| \leq R^{-10^5} (1 + \text{dist}(x, T))^{-100} \|f\|_{L^2(\theta)}, \quad \text{για κάθε } x \in B_R \setminus T. \quad (3.10)$$

Αυτό αποδεικνύει την Ιδιότητα (II). Μας δίνει μάλιστα ένα καλύτερο φράγμα για τον $|Ef_T|$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ισχυρότερη εκτίμηση για το $|Ef_T(x)|$ που αποδείξαμε για να αποδείξουμε

την Ιδιότητα (III).
Γράφουμε

$$\begin{aligned} Ef(x) &= \sum_{\theta} Ef_{\theta}(x) \\ &= \sum_{\theta} \int e^{2\pi i \omega x} f_{\theta}(\omega) \, d\text{vol}(\omega) \\ &= \sum_{\theta} \int e^{2\pi i \omega x} F_{\theta}(\vec{\omega}) \, d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \sum_{\theta} \int e^{2\pi i \omega x} \phi_{\theta} F_{\theta}(\vec{\omega}) \, d\omega_1 d\omega_2, \end{aligned}$$

αφού η ϕ_{θ} είναι ταυτοτικά ίση με 1 εντός του $\text{supp}(F_{\theta}) \subseteq \theta$. Θέλουμε τώρα να μελετήσουμε το άθροισμα $\sum_{T \in \tilde{\mathbb{W}}(\theta)} \hat{\rho}_T * F_{\theta}$. Το σύνολο $\tilde{\mathbb{W}}(\theta)$ είναι αριθμήσιμο. Έστω $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία αριθμησή του. Το μερικό άθροισμα $\sum_{k=1}^n \hat{\rho}_{T_k} * F_{\theta}$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \hat{\rho}_{T_k} \right) * F_{\theta} &= \widehat{\left(\sum_{k=1}^n \rho_{T_k} \right)} * F_{\theta} \text{ (γραμμικότητα του μετασχηματισμού Fourier)} \\ &:= \widehat{S_n} * F_{\theta}. \end{aligned}$$

Η ακολουθία $(\rho_{T_n})_{n=1}^{\infty}$ είναι διαμέριση της μονάδας, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{T_n}(x) = 1$. Έτσι, έχουμε

$$\widehat{S_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta(1),$$

όπου $\delta(1)$ η δ του Dirac με μάζα στο 1. Έπεται ότι

$$\widehat{S_n} * F_{\theta} \xrightarrow{L^2} F_{\theta}.$$

Επομένως, το γινόμενο $\phi_{\theta} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} S_n * F_{\theta} \right)$ συγκλίνει στον L^2 στη συνάρτηση $\phi_{\theta} F_{\theta}$. Όλες οι εμπλεκόμενες στη σύγκλιση συναρτήσεις έχουν συμπαγή φορέα εντός του δίσκου 3θ , άρα το παραπάνω γινόμενο συγκλίνει και στον L^1 στη συνάρτηση $\phi_{\theta} F_{\theta}$. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε

$$\begin{aligned} Ef(x) &= \sum_{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \int e^{2\pi i \omega x} \phi_{\theta} (\hat{\rho}_{T_n} * F_{\theta}) \, d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \sum_{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \int e^{2\pi i \omega x} F_{T_n} \, d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \sum_{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \int e^{2\pi i \omega x} f_{T_n} \, d\text{vol}(\omega) \\ &= \sum_{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} Ef_{T_n}(x). \end{aligned}$$

Έστω $x \in B_R$. Χωρίζουμε το σύνολο $\tilde{\mathbb{W}}(\theta)$ στα υποσύνολά του $\mathbb{W}(\theta)$ και το συμπλήρωμά του. Έτσι

έχουμε

$$\begin{aligned} Ef(x) &= \sum_{\theta} \left(\sum_{T \in \mathbb{W}(\theta)} Ef_T(x) + \sum_{T \notin \mathbb{W}(\theta)} Ef_T(x) \right) \\ &= \sum_{T \in \mathbb{W}} Ef_T(x) + \sum_{\theta} \sum_{T \notin \mathbb{W}(\theta)} Ef_T(x), \end{aligned}$$

επομένως

$$\left| Ef(x) - \sum_{T \in \mathbb{W}} Ef_T(x) \right| = \left| \sum_{\theta} \sum_{T \notin \mathbb{W}(\theta)} Ef_T(x) \right|.$$

Από το γεγονός ότι το πλήθος των δίσκων θ είναι πεπερασμένο και την (3.10) έχουμε την Ιδιότητα (III).

Η Ιδιότητα (IV) προκύπτει από το Θεώρημα Plancherel. Πράγματι, έστω $T_1, T_2 \in \mathbb{W}(\theta)$ δύο ξένοι κύλινδροι. Τότε

$$\begin{aligned} \int f_{T_1} \overline{f_{T_2}} \, d\text{vol}_S &= \int \mathbf{J} \phi_{\theta} (\hat{\rho}_{T_1} * F_{\theta}) \overline{\phi_{\theta} (\hat{\rho}_{T_2} * F_{\theta})} \, d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \int \mathbf{J} |\phi_{\theta}|^2 (\hat{\rho}_{T_1} * F_{\theta}) \overline{(\hat{\rho}_{T_2} * F_{\theta})} \, d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \int (\check{H} * (\rho_{T_1} \cdot \check{F}_{\theta})) \cdot \overline{(\rho_{T_2} \cdot \check{F}_{\theta})} \, dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

από το Θεώρημα Plancherel αν θέσουμε $H = \mathbf{J}|\phi_{\theta}|^2$. Έχουμε υποθέσει ότι $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, άρα $\text{dist}(\text{supp}(\psi_{T_1}), \text{supp}(\psi_{T_2})) \geq \frac{1}{4}R^{1/2+\delta}$. Από τον ορισμό της G ισχύει $|\nabla^l G| \lesssim_l R^{l/2}$, άρα

$$|\check{G}(\vec{x})| \lesssim \text{Vol}(\theta) (1 + |\vec{c}|R^{-1/2})^{-10^6/\delta}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int f_{T_1} \overline{f_{T_2}} \, d\text{vol}_S &\leq \int |f_{T_1} \overline{f_{T_2}}| \, d\text{vol}_S \\ &= \int |\check{H} * (\rho_{T_1} \cdot \check{F}_{\theta})| \cdot |\rho_{T_2} \cdot \check{F}_{\theta}| \, dx_1 dx_2 \\ &\leq \int |\check{H} * \check{F}_{\theta}| \cdot |\check{F}_{\theta}| \, dx_1 dx_2 \\ &\lesssim \|\check{H}\|_1 \|f\|_{L^2(\theta)}^2 \\ &\lesssim R^{-10^5} \|f\|_{L^2(\theta)}^2 \\ &\leq R^{-10^4} \|f\|_{L^2(\theta)}^2. \end{aligned}$$

Έχει μείνει να αποδείξουμε την Ιδιότητα (V).

Από τους υπολογισμούς που κάναμε παραπάνω, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathbb{W}(\theta)} \int |f_T|^2 \, d\text{vol}_S &= \sum_{T \in \mathbb{W}(\theta)} \int |\phi_{\theta}|^2 \mathbf{J} |\hat{\rho}_T * F_{\theta}|^2 \, d\omega_1 d\omega_2 \\ &\leq 2 \sum_{T \in \mathbb{W}(\theta)} \int |\phi_{\theta}|^2 |\hat{\rho}_T * F_{\theta}|^2 \, d\omega_1 d\omega_2 \quad (1 \leq \mathbf{J} \leq 2) \\ &\leq \sum_{T \in \mathbb{W}(\theta)} \int |\hat{\rho}_T * F_{\theta}|^2 \, d\omega_1 d\omega_2 + O(R^{-10^5} \|f\|_{L^2(\theta)}). \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγω της υπόθεσης ότι ο μετασχηματισμός Fourier της ρ_T φθίνει απότομα αν $|\vec{\omega}| \geq R^{-1/2-\delta}$, άρα

$$\phi_\theta(\hat{\rho}_T * F_\theta)(\vec{\omega}) = (\hat{\rho}_T * F_\theta)(\vec{\omega}) + O(R^{-10^5} (1 + |\vec{\omega}|)^{-10} \|f\|_{L^2(\theta)}).$$

Από το θεώρημα Plancherel,

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathbb{W}(\theta)} \int |\hat{\rho}_T * F_\theta|^2 d\omega_1 d\omega_2 &= \sum_{T \in \mathbb{W}(\theta)} \int |\rho_T|^2 |\check{F}_\theta|^2 dx_1 dx_2 \\ &\leq \sum_{T \in \mathbb{W}(\theta)} \int |\check{F}_\theta|^2 dx_1 dx_2 \quad (\rho_T \text{ διαμέριση της μονάδας}) \\ &= \sum_{T \in \mathbb{W}(\theta)} \int |F_\theta|^2 d\omega_1 d\omega_2 \\ &\lesssim \int_\theta |f|^2. \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει τις Ιδιότητες (I)-(V) και η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης. \square

Από την πρώτη ιδιότητα στην παραπάνω πρόταση, αν ο φορέας της f_τ περιέχεται στο τ , τότε για κάθε T , ο φορέας της $f_{\tau,T} = f_\tau \mathcal{X}_T$ περιέχεται σε μία $O(R^{-1/2})$ περιοχή του τ . Έστω $(\mathbb{W}_i)_{i \in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του \mathbb{W} .

Για κάθε δίσκο τ και κάθε υποσύνολο \mathbb{W}_i ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f_{\tau,i} = \sum_{T \in \mathbb{W}_i} f_{\tau,T}.$$

Λήμμα 3.1.9. Έστω $(\mathbb{W}_i)_{i \in I}$ υποσύνολα του \mathbb{W} . Αν κάθε κύλινδρος T περιέχεται το πολύ σε μ από τα υποσύνολα \mathbb{W}_i , τότε για κάθε θ ,

$$\sum_{i \in I} \int_{3\theta} |f_{\tau,i}|^2 \lesssim \mu \int_{10\theta} |f_\tau|^2.$$

Επίσης,

$$\sum_{i \in I} \int_S |f_{\tau,i}|^2 \lesssim \mu \int_S |f_\tau|^2.$$

Απόδειξη. Αν $T \in \mathbb{W}(\theta')$, τότε $\text{supp} \subseteq 3\theta'$. Άρα, αρκεί να περιοριστούμε στους κυλίνδρους T που ανήκουν στο $\mathbb{W}(\theta)$ για τους $O(1)$ δίσκους θ' που ανήκουν στον δίσκο 10θ για να μελετήσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{3\theta} |f_{\tau,i}|^2$. Ορίζουμε

$$\mathbb{W}_i(\theta') = \mathbb{W}_i \cap \mathbb{W}(\theta') \quad \text{και} \quad f_{\tau,i,\theta'} = \sum_{T \in \mathbb{W}_i(\theta')} f_{\tau,T}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{3\theta} |f_{\tau,i}|^2 &\lesssim \sum_{3\theta \cap 3\theta' \neq \emptyset} \int |f_{\tau,i,\theta'}|^2 \\ &= \sum_i \int \left| \sum_{T \in \mathbb{W}_i(\theta')} f_{\tau,T} \right|^2 \\ &= \sum_i \sum_{\substack{T_j \in \mathbb{W}_i(\theta') \\ j=1,2}} \int f_{\tau,T_1} \overline{f_{\tau,T_2}}. \end{aligned}$$

Αν οι κύλινδροι T_1 και T_2 είναι ξένοι, το ολοκλήρωμα $\int f_{\tau, T_1} \overline{f_{\tau, T_2}}$ φράσσεται από $R^{-1000} \int_{\theta'} |f_{\tau}|^2$ από την ιδιότητα (IV) της παραπάνω πρότασης.

Γενικά, ένας κύλινδρος $T_1 \in \mathbb{W}(\theta')$ τέμνει το πολύ $O(1)$ διαφορετικούς κυλίνδρους $T_k \in \mathbb{W}(\theta')$, επομένως

$$\sum_i \sum_{\substack{T_j \in \mathbb{W}_i(\theta'), \\ j=1,2}} \int f_{\tau, T_1} \overline{f_{\tau, T_2}} \lesssim \sum_i \left(\sum_{T \in \mathbb{W}_i(\theta')} \int |f_{\tau, T}|^2 + O(|\mathbb{W}_i(\theta')|^2 R^{-1000} \|f_{\tau, \theta'}\|_2^2) \right).$$

Ο όρος $O(|\mathbb{W}_i(\theta')|^2 R^{-1000} \|f_{\tau, \theta'}\|_2^2)$ φράσσεται από πάνω από την ποσότητα

$$|I| R^{-950} \|f_{\tau, \theta'}\|_2^2 \leq \mu R^{-900} \|f_{\tau, \theta'}\|_2^2.$$

Από την ιδιότητα (V) της παραπάνω πρότασης έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathbb{W}_i(\theta')} |f_{\tau, T}|^2 &\leq \mu \sum_{T \in \mathbb{W}_i(\theta')} |f_{\tau, T}|^2 \\ &\lesssim \mu \int_{\theta'} |f_{\tau}|^2. \end{aligned}$$

Συγκεντρώνοντας όλες τις ανισότητες έχουμε

$$\sum_i \int_{3\theta} |f_{\tau, i}|^2 \lesssim \mu \int_{10\theta} |f_{\tau}|^2.$$

Αν αθροίσουμε πάνω από όλους τους δίσκους $\theta \subseteq S$ στην τελευταία ανισότητα προκύπτει η σχέση

$$\sum_{\theta} \sum_i \int_{3\theta} |f_{\tau, i}|^2 \lesssim \mu \sum_{\theta} \int_{10\theta} |f_{\tau}|^2,$$

δηλαδή

$$\sum_i \sum_{\theta} \int_{3\theta} |f_{\tau, i}|^2 \lesssim \mu \int_S |f_{\tau}|^2.$$

Τελικά,

$$\sum_i \int_S |f_{\tau, i}|^2 \lesssim \mu \int_S |f_{\tau}|^2,$$

όπως θέλαμε. □

Αν εφαρμόσουμε το τελευταίο λήμμα για ένα υποσύνολο $\mathbb{W}_i \subseteq \mathbb{W}$ προκύπτει το παρακάτω.

Πόρισμα 3.1.10. Αν $\mathbb{W}_i \subseteq \mathbb{W}$, τότε για οποιοδήποτε δίσκο θ και οποιοδήποτε τ ισχύει

$$\int_{3\theta} |f_{\tau, i}|^2 \lesssim \int_{10\theta} |f_{\tau}|^2.$$

3.2 Πολυωνυμική διαμέριση

Η απόδειξη του Guth για την ανισότητα (3.1) στο Θεώρημα 3.0.1 βασίζεται στη διάσπαση σε wave packets που εισαγάγαμε στην Παράγραφο 3.1.2 και στην πολυωνυμική διαμέριση (polynomial partitioning) την οποία θα αποδείξουμε σε αυτή την παράγραφο χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ham-Sandwich των Stone και Tukey.

Θεώρημα 3.2.1 (Stone-Tukey). Έστω V υπόχωρος του $C(\mathbb{R}^n)$ ώστε για κάθε μη μηδενικό στοιχείο του F να ισχύει $|\{f = 0\}| = 0$. Αν $W_1, \dots, W_N \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με $N < \dim V$, τότε υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο $u \in V$, ώστε για κάθε W_j , $j \in [n]$ ισχύει

$$\int_{\{u>0\}} W_j = \int_{\{u<0\}} W_j.$$

Εμείς θα περιοριστούμε στον χώρο $\mathbb{R}_D[x_1, \dots, x_n]$ των πολυωνύμων του \mathbb{R}^n βαθμού το πολύ D , ο οποίος έχει διάσταση $\binom{D+n}{n} \sim_n D^n$. Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα χρειαστούμε το Θεώρημα Borsuk-Ulam από την Αλγεβρική Τοπολογία.

Θεώρημα 3.2.2 (Borsuk-Ulam). Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ είναι συνεχής και περιττή, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{S}^N$ ώστε $f(x) = 0$.

Απόδειξη. (του Θεωρήματος 3.2.1)

Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $\dim V = N + 1$ και να ταυτίσουμε τον V με τον \mathbb{R}^{N+1} , ώστε $\mathbb{S}^N \subseteq V \setminus \{0\}$. Ορίζουμε $F : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^N$ ώστε κάθε συντεταγμένη της F να ισούται με

$$F_j(u) := \int_{\{u>0\}} W_j - \int_{\{u<0\}} W_j. \quad (3.11)$$

Η F είναι περιττή. Είναι και συνεχής. Πράγματι, έστω (u_k) ακολουθία στον $V \setminus \{0\}$ και $u \in V \setminus \{0\}$ ώστε $u_k \rightarrow u$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη γιατί ο V κληρονομεί τη supremum νόρμα από τον χώρο συνεχών συναρτήσεων. Ορίζουμε

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{τα } u_k(x) \text{ και } u(x) \text{ έχουν διαφορετικό πρόσημο}\}.$$

Τότε,

$$\left| F_j(u_k) - F(u_k) \right| \leq \int_{A_k} |W_j|. \quad (3.12)$$

Λόγω της σύγκλισης, έχουμε ότι $\limsup_k A_k \subseteq Z_u := u^{-1}(\{0\})$ και

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} \int_{\cup_{k \geq k_0} A_k} |W_j| \leq \int_{Z_u} |W_j| = 0$$

από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Έτσι, από την (3.12) έπεται ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| F_j(u_k) - F(u_k) \right| = 0,$$

άρα κάθε F_j είναι συνεχής. Από το Θεώρημα Borsuk-Ulam, υπάρχει $v \in V \setminus \{0\}$ ώστε $F(v) = 0$, όπως θέλαμε. \square

Παρατηρούμε ότι αν οι συναρτήσεις W_j είναι σχεδόν παντού μηδενικές, τότε το Θεώρημα Stone-Tukey ισχύει τετριμμένα. Θα διατυπώσουμε τώρα το κεντρικό αποτέλεσμα της παραγράφου, μία διακριτή μορφή του οποίου αποδείχθηκε από τους Guth και Katz κι εφαρμόστηκε στην Αναάλυση από τον Guth.

Θεώρημα 3.2.3 (Polynomial partitioning). Έστω $W \geq 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για κάθε $D \in \mathbb{N}$, υπάρχει μη-μηδενικό πολυώνυμο P βαθμού το πολύ D , ώστε το συμπλήρωμα $\mathbb{R}^n \setminus Z_P$ να διαμερίζεται σε $\sim D^n$ ανοιχτά σύνολα O_i και τα ολοκληρώματα $\int_{O_i} W$ να είναι όλα ίσα.

Απόδειξη. Υπάρχει πολυώνυμο P_1 ώστε

$$\int_{\{P_1>0\}} W = \int_{\{P_1<0\}} W = 2^{-1} \int W.$$

Ορίζουμε $W_1^1 = W \cdot \mathcal{X}_{\{P_1>0\}}$ και $W_2^1 = W \cdot \mathcal{X}_{\{P_1<0\}}$ και βρίσκουμε πολυώνυμο P_2 ώστε για $j = 1, 2$ να ισχύει

$$\int_{\{P_2>0\}} W_j^1 = \int_{\{P_2<0\}} W_j^1 = 2^{-2} \int W.$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} W_1^2 &= W_1^1 \cdot \mathcal{X}_{\{P_2>0\}}, & W_2^2 &= W_1^1 \cdot \mathcal{X}_{\{P_2<0\}} \\ W_3^2 &= W_2^1 \cdot \mathcal{X}_{\{P_2>0\}}, & W_4^2 &= W_2^1 \cdot \mathcal{X}_{\{P_2<0\}} \end{aligned}$$

και βρίσκουμε πολυώνυμο P_3 ώστε για κάθε $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ να ισχύει

$$\int_{\{P_3>0\}} W_j^2 = \int_{\{P_3<0\}} W_j^2 = 2^{-3} \int W.$$

Συνεχίζουμε επαγωγικά κατασκευάζοντας πολυώνυμα P_1, \dots, P_m για κατάλληλο m που θα επιλέξουμε παρακάτω. Ορίζουμε $P = \prod_{i=1}^m P_i$ και παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}^n \setminus Z_P$ διαμερίζεται σε 2^m ξένα ανά δύο ανοιχτά σύνολα O_i , για τα οποία ισχύει

$$\int_{O_i} W = 2^{-m} \int W, \quad 1 \leq i \leq 2^m.$$

Ο βαθμός κάθε πολυωνύμου P_i είναι $\lesssim_n 2^{i/n}$, άρα το P έχει βαθμό το πολύ $C_n 2^{m/n}$. Επιλέγουμε το m ώστε $C_n 2^{m/n} \in [\frac{D}{2}, D]$ κι έτσι έχουμε ότι $\deg P \leq D$ και ότι το πλήθος των O_i είναι $2^m \sim_n D_n$. \square

Ένα πολυώνυμο P καλείται μη ιδιάζον αν $\nabla P \neq 0$ στο Z_P και ιδιάζον αν υπάρχει $x \in Z_P$ ώστε $\nabla P(x) = 0$. Αν το P είναι μη ιδιάζον, τότε το σύνολο μηδενισμού του είναι ομαλή αλγεβρική επιφάνεια. Για τεχνικούς λόγους που θα αναλύσουμε παρακάτω είναι πιο βολικό να δουλεύουμε με μη ιδιάζοντα πολυώνυμα. Για το λόγο αυτό θα αποδείξουμε ένα θεώρημα ανάλογο του 3.2.3 για μη ιδιάζοντα πολυώνυμα. Το βασικό αποτέλεσμα που θα μας επιτρέψει κάτι τέτοιο είναι η πυκνότητα των μη ιδιάζόντων πολυωνύμων στον $\mathbb{R}_D[x_1, \dots, x_n]$, την οποία αποδεικνύουμε στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.2.4. *Τα μη ιδιάζοντα πολυώνυμα είναι πυκνά στον $\mathbb{R}_D[x_1, \dots, x_n]$ για οποιαδήποτε D, n . Επιπλέον τα ιδιάζοντα πολυώνυμα έχουν μέτρο 0.*

Απόδειξη. Το σύνολο $\mathbb{R}_D[x_1, \dots, x_n]$ είναι ομαλή διαφορική πολλαπλότητα αφού είναι \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_D[x_1, \dots, x_n] &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_D[x_1, \dots, x_n] \\ (x, P) &\longmapsto (P(x), P) \end{aligned}$$

η οποία είναι C^∞ . Υποθέτουμε ότι το ζεύγος (h, P) είναι κανονική τιμή της E . Τότε το πολυώνυμο $P - h$ είναι μη ιδιάζον. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι

$$(P - h)(x) = 0 \Leftrightarrow (x, P) \in E^{-1}(h, P).$$

Όμως, το (h, P) είναι κανονική τιμή της E , άρα το διαφορικό

$$dE_{x,P} = (\nabla P, \text{Id}_{\mathbb{R}_D[x_1, \dots, x_n]})$$

είναι γραμμικός επιμορφισμός. Έτσι, αν $(P - h)(x) = 0$, τότε $\nabla(P - h)(x) = \nabla P(x) \neq 0$. Αν γνωρίζαμε ότι οι κρίσιμες τιμές της E έχουν μέτρο 0 στην πολλαπλότητα $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_D[x_1, \dots, x_n]$ από το Θεώρημα Fubini θα συμπεραίναμε ότι τα ιδιάζοντα πολυώνυμα του $\mathbb{R}_D[x_1, \dots, x_n]$ έχουν μέτρο 0 στην πολλαπλότητα $\mathbb{R}_D[x_1, \dots, x_n]$, άρα τα μη ιδιάζοντα πολυώνυμα είναι πυκνά. Το γεγονός ότι οι κρίσιμες τιμές της E είναι μέτρου 0 έπεται από το Θεώρημα του Sard το οποίο διατυπώνουμε παρακάτω. Αυτή η παρατήρηση ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Θεώρημα 3.2.5 (Sard). Έστω $\mathcal{M}^m, \mathcal{N}^n$ ομαλές διαφορικές πολλαπλότητες και $F : \mathcal{M} \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{N}$. Τότε, το σύνολο των κρίσιμων τιμών της F έχει μέτρο 0 στη \mathcal{N} .

Η παραπάνω πρόταση μας επιτρέπει να αποδείξουμε δύο εκδοχές του πολυωνυμικού θεωρήματος ham-sandwich των Stone και Tukey και του polynomial partitioning του Guth.

Πόρισμα 3.2.6. Έστω $W_1, \dots, W_N \geq 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει μη ιδιάζον πολυώνυμο P ώστε για κάθε W_j ισχύει

$$(1 - \varepsilon) \int_{\{P < 0\}} W_j \leq \int_{\{P > 0\}} W_j \leq (1 + \varepsilon) \int_{\{P < 0\}} W_j. \quad (3.13)$$

Απόδειξη. Έστω P μη μηδενικό πολυώνυμο ώστε $\int_{\{P < 0\}} W_j = \int_{\{P > 0\}} W_j$. Έστω (P_k) ακολουθία μη ιδιάζόντων πολυωνύμων που συγκλίνει στο P . Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{P_k < 0\}} W_j = \int_{\{P < 0\}} W_j.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq k_0$ ισχύει

$$\left| \int_{\{P_k < 0\}} W_j - \int_{\{P < 0\}} W_j \right| < \varepsilon$$

και η ζητούμενη ανισότητα έπεται άμεσα. \square

Πόρισμα 3.2.7. Έστω $W \geq 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για κάθε $D \in \mathbb{N}$, υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο P βαθμού το πολύ D ώστε το συμπλήρωμα $\mathbb{R}^n \setminus Z_P$ είναι η ξένη ένωση $\sim D^n$ ανοιχτών συνόλων O_i και τα ολοκληρώματα $\int_{O_i} W_j$ συμφωνούν μέχρι μία δύναμη του 2. Επιπλέον, το P είναι γινόμενο μη ιδιάζόντων πολυωνύμων.

3.3 Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2

Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιούμε την πολυωνυμική διαμέριση του Guth για να προετοιμάσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα επαγωγικό επιχειρήμα κάνοντας μία παραλλαγή στις μέχρι τώρα υποθέσεις μας. Θα περιορίσουμε ξανά την f σε δίσκους τ , αλλά αυτή τη φορά αντί να απαιτήσουμε να είναι ξένοι, θα επιτρέψουμε να έχουν μη

κενή τομή. Υποθέτουμε ότι οι δίσκοι τ καλύπτουν την S και ότι κάθε δίσκος τ είναι το γράφημα μίας ομαλής συνάρτησης h πάνω από μία μπάλα $B_2(\vec{\omega}_\tau, r)$. Θεωρούμε τη διάσπαση

$$f = \sum_{\tau} f_{\tau}, \quad \text{supp}(f_{\tau}) \subseteq \tau$$

και υποθέτουμε ότι τα κέντρα $\vec{\omega}_\tau \in B_2^2$ είναι K^{-1} -διαχωρισμένα.

Ορίζουμε επίσης την πολυπλοκότητα μ του καλύμματος ζητώντας η ακτίνα r κάθε δίσκου τ να ικανοποιεί τη σχέση

$$K^{-1} \leq r \leq \mu^{1/2} K^{-1}.$$

Παρατηρούμε ότι λόγω της συνθήκης διαχωρισμού για τα κέντρα $\vec{\omega}_\tau$ και τον ορισμό του μ , ένα σημείο $s \in S$ ανήκει σε $O(\mu)$ διαφορετικούς δίσκους τ .

Στις προτάσεις και τα λήμματα που θα διατυπώσουμε στην παράγραφο αυτή θα εμφανιστούν αρκετές παράμετροι που εξαρτώνται από κάποιο $\varepsilon > 0$. Τις καταγράφουμε εδώ χωρίς επεξήγηση του τι αντιπροσωπεύει η κάθε μία. Η σχέση που ικανοποιούν μεταξύ τους αυτές οι παράμετροι είναι

$$\varepsilon^6 = \delta_{\text{εγκ}} \ll \varepsilon^4 = \delta_{\text{deg}} \ll \varepsilon^2 = \delta \ll \varepsilon.$$

Θέλουμε επίσης μία σταθερά K αρκετά μεγάλη ώστε $R^{\delta_{\text{εγκ}} \log(10^{-6} K^\varepsilon)} \geq R^{1000}$.

Θεώρημα 3.3.1. *Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν K, L και $0 < \delta_{\text{εγκ}} < \varepsilon$ που εξαρτώνται μόνο από το ε ώστε να ισχύει το ακόλουθο:*

Έστω ότι η S είναι το γράφημα μίας ομαλής συνάρτησης h που ικανοποιεί την (\star) με L παραγώγους. Υποθέτουμε επίσης ότι οι δίσκοι τ που ορίστηκαν παραπάνω καλύπτουν της S με πολυπλοκότητα το πολύ μ . Αν $\alpha \geq K^{-\varepsilon}$ και για κάθε τ και $\omega \in S$ ισχύει

$$\int_{B(\omega, R^{-1/2}) \cap S} |f_{\tau}|^2 \leq 1,$$

τότε

$$\int_{B_R} \text{Br}_\alpha E f^{3.25} \leq C_\varepsilon R^\varepsilon \left(\sum_{\tau} \int_S |f_{\tau}|^2 \right)^{3/2+\varepsilon} R^{\delta_{\text{εγκ}} \log(K^\varepsilon \alpha \mu)}. \quad (3.14)$$

Επιπροσθέτως ισχύει

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K(\varepsilon) = +\infty.$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 θα χρησιμοποιήσουμε το polynomial partitioning. Επιλέγουμε τον αριθμό $D = R^{\delta_{\text{deg}}} = R^{\varepsilon^4}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathcal{X}_{B_R} \text{Br}_\alpha E f^{3.25}$. Έχουμε δει ότι υπάρχει πολυώνυμο P βαθμού το πολύ D για το οποίο το σύνολο $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Z}_P$ είναι η ξένη ένωση $\sim D^3$ κελιών O_i και για κάθε i ισχύει

$$\int_{O_i \cap B_R} \text{Br}_\alpha E f^{3.25} \sim D^{-3} \int_{B_R} \text{Br}_\alpha E f^{3.25}.$$

Μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι το P είναι γινόμενο μη ιδιαζόντων πολυωνύμων.

Ορίζουμε $M = \mathcal{N}_{R^{1/2+\delta}}(\mathcal{Z}_P)$ ως την $(R^{1/2+\delta})$ -περιοχή του \mathcal{Z}_P και $O'_i = (O_i \cap B_R) \setminus M$. Ορίζουμε επίσης $\mathbb{W}_i \subseteq \mathbb{W}$ με

$$\mathbb{W}_i = \{T \in \mathbb{W} : T \cap O'_i \neq \emptyset\}$$

και παρατηρούμε ότι αν $T \in \mathbb{W}_i$, τότε ο άξονας του T έχει μη κενή τομή με το κελί O_i , αφού $T \cap O'_i \neq \emptyset$. Μία ευθεία που δεν περιέχεται στο \mathcal{Z}_P μπορεί να περάσει από το \mathcal{Z}_P το πολύ D φορές, άρα κάθε κύλινδρος $T \in \mathbb{W}$ έχει μη κενή τομή με το πολύ $D + 1$ από τα O'_i .

Έπεται λοιπόν το παρακάτω.

Λήμμα 3.3.2. Κάθε κύλινδρος $T \in \mathbb{W}$ περιέχεται το πολύ σε $D + 1$ από τα σύνολα \mathbb{W}_i .

Θέτουμε

$$f_{\tau,i} = \sum_{T \in \mathbb{W}_i} f_{\tau,T} \text{ και } f_i = \sum_{\tau} f_{\tau,i}.$$

Με τους παραπάνω συμβολισμούς, έχουμε καταφέρει να γράψουμε το αριστερό μέλος της (3.14) ως

$$\int_{O'_i} \text{Br}_\alpha E f^{3.25} + \int_M \text{Br}_\alpha E f^{3.25}.$$

Για να φράξουμε το πρώτο ολοκλήρωμα θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, καλύπτουμε την B_R με $\sim R^{3\delta}$ μπάλες B_j ακτίνας $R^{1-\delta}$. Αν $B_j \cap M \neq \emptyset$, ξεχωρίζουμε τους κυλίνδρους του \mathbb{W} ανάλογα με το αν είναι εφαπτόμενοι ή εγκάρσιοι στο Z_P στην B_j .

Ορισμός 3.3.3. Συμβολίζουμε με $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}$ το σύνολο των κυλίνδρων $T \in \mathbb{W}$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες:

(I) $T \cap M \cap B_j \neq \emptyset$

(III) Αν x είναι ένα μη κρίσιμο σημείο του Z_P που ανήκει στην τομή $2B_j \cap 10T$, τότε

$$\angle(u(T), T_x Z_P) \leq R^{-(1/2)+2\delta}.$$

Ορισμός 3.3.4. Συμβολίζουμε με $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\gamma\kappa}$ το σύνολο των κυλίνδρων $T \in \mathbb{W}$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες:

(I) $T \cap M \cap B_j \neq \emptyset$

(III) Υπάρχει ένα μη κρίσιμο σημείο x του Z_P που ανήκει στην τομή $2B_j \cap 10T$ ώστε

$$\angle(u(T), T_x Z_P) > R^{-(1/2)+2\delta}.$$

Ο λόγος για τον οποίο θέλουμε το φράγμα $R^{-(1/2)+2\delta}$ για τη γωνία στους δύο παραπάνω ορισμούς θα γίνει ξεκάθαρος κατά την απόδειξη του παρακάτω λήμματος στο Παράρτημα B'.

Θέλουμε να δείξουμε ότι ένας κύλινδρος $T \in \mathbb{W}$ που τέμνει το $M \cap B_j$ δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα εφαπτόμενος κι εγκάρσιος στο Z_P στην B_j . Από τους ορισμούς των δύο εννοιών, αρκεί να ελέγξουμε ότι πάντα υπάρχει μη κρίσιμο σημείο του Z_P στην τομή $2B_j \cap 10T$.

Το M είναι η $R^{(1/2)+\delta}$ -περιοχή του Z_P και κάθε κύλινδρος T έχει ακτίνα $R^{(1/2)+\delta}$. Έτσι, αν $y \in T \cap M \cap B_j$, υπάρχει $x \in Z_P$ ώστε $|x - y| \leq R^{(1/2)+\delta}$. Το σημείο x ανήκει επίσης στην τομή $2B_j \cap 10T$. Αφού έχουμε υποθέσει ότι το P είναι γινόμενο μη ιδιαζόντων πολυωνύμων και τα μη κρίσιμα σημεία είναι πικνά στο Z_P , μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα το x ώστε να είναι μη κρίσιμο σημείο του Z_P .

Δείξαμε λοιπόν ότι ένας κύλινδρος $T \in \mathbb{W}$ που τέμνει το $M \cap B_j$ είναι είτε εφαπτόμενος ή εγκάρσιος στο Z_P στην B_j . Για να φράξουμε το ολοκλήρωμα $\int_M \text{Br}_\alpha E f^{3.25}$ θα χρειαστεί να γνωρίζουμε το πλήθος των διαφορετικών συνόλων $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}$ και $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\gamma\kappa}$ στα οποία μπορεί να ανήκει ένας κύλινδρος $T \in \mathbb{W}$.

Λήμμα 3.3.5. Κάθε κύλινδρος $T \in \mathbb{W}$ ανήκει το πολύ σε $\text{Poly}(D) = R^{O(\delta_{deg})}$ διαφορετικά σύνολα $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\gamma\kappa}$.

Συμπεραίνουμε ότι ένας κύλινδρος T τέμνει R^δ διαφορετικές μπάλες B_j . Λόγω της επιλογής $\delta_{deg} = \varepsilon^4$ και $\delta = \varepsilon^2$, ο T ανήκει στο σύνολο $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\gamma\kappa}$ για ένα πολύ μικρό κομμάτι των μπαλών B_j . Αυτή η παρατήρηση μαζί με ένα επαγωγικό επιχείρημα θα μας επιτρέψει να ελέγξουμε τη συνεισφορά των εγκάρσιων κυλίνδρων στο ολοκλήρωμα $\int_M \text{Br}_\alpha E f^{3.25}$.

Το ανάλογο αποτέλεσμα για τους εφαπτόμενους κυλίνδρους είναι το παρακάτω.

Λήμμα 3.3.6. Για κάθε j , το πλήθος των διαφορετικών δίσκων θ για τους οποίους ισχύει $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi} \cap \mathbb{W}(\theta) \neq \emptyset$ είναι το πολύ $R^{(1/2)+O(\delta)}$.

Αποδεικνύουμε τα δύο παραπάνω λήμματα στο παράρτημα Β'. Για να απλοποιήσουμε λίγο τον συμβολισμό των συναρτήσεων που θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 γράφουμε

$$f_{\tau,j,\varepsilon\gamma\kappa} = \sum_{T \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\gamma\kappa}} f_{\tau,T} \text{ και } f_{j,\varepsilon\gamma\kappa} = \sum_{\tau} f_{\tau,j,\varepsilon\gamma\kappa}$$

$$f_{\tau,j,\varepsilon\varphi} = \sum_{T \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}} f_{\tau,T} \text{ και } f_{j,\varepsilon\varphi} = \sum_{\tau} f_{\tau,j,\varepsilon\varphi}.$$

Με τον συμβολισμό που μόλις εισαγάγαμε, μπορούμε να χωρίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{B_R} Br_\alpha Ef^{3.25}$ σε κομμάτια προερχόμενα από τις f_i , τις $f_{j,\varepsilon\gamma\kappa}$ και τις $f_{j,\varepsilon\varphi}$. Ονομάζουμε τις συνεισφορές τους στο ολοκλήρωμα κομμάτια που προέρχονται από τα κελιά O_i , εγκάρσια κομμάτια κι εφαπτομενικά κομμάτια αντίστοιχα. Θα φράξουμε τα κομμάτια που προέρχονται από τα κελιά και τα εγκάρσια κομμάτια με επαγωγή. Θα φράξουμε απευθείας τα εφαπτομενικά κομμάτια στην επόμενη παράγραφο.

Τα δύο λήμματα που ακολουθούν συνδέουν τη συμπεριφορά του α -ευρέος μέρους του $Ef(x)$ με το α -ευρύ μέρος του $Ef_i(x)$. Για να δουλέψουν τα επιχειρήματά μας, υποθέτουμε ότι το $\varepsilon > 0$ είναι αρκετά μικρό και η ακτίνα R είναι αρκετά μεγάλη. Παρατηρούμε ότι αν $x \in O'_i$, τότε ο $Ef_\tau(x)$ είναι σχεδόν ίσος με το $Ef_{\tau,i}(x)$ για κάθε δίσκο τ .

Λήμμα 3.3.7. Αν $x \in O'_i$, τότε

$$Br_\alpha Ef(x) \leq 2Br_{2\alpha} Ef_i(x) + R^{-900} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in O'_i$. Μπορούμε αρχικά να υποθέσουμε ότι το x είναι α -ευρύ για τον Ef , αλλιώς το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας είναι 0. Από την Πρόταση 3.1.9 έχουμε

$$Ef_\tau(x) = \sum_{\tau \in \mathbb{W}} + O(R^{-1000} \|f_\tau\|_2).$$

Αν το $x \in T$, τότε $x \in \mathbb{W}_i$. Αν το $x \notin T$, τότε από την Πρόταση 3.1.9 έχουμε την εκτίμηση

$$|Ef_{\tau,T}(x)| \leq R^{-1000} \|f_\tau\|_2,$$

άρα η συνεισφορά των κυλίνδρων $T \notin \mathbb{W}_i$ είναι

$$Ef_\tau(x) = Ef_{\tau,i}(x) + O(R^{-990} \|f_\tau\|_2). \quad (3.15)$$

Αν αθροίσουμε πάνω από τους δίσκους τ έχουμε

$$Ef(x) = Ef_i(x) + O(R^{-990} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2). \quad (3.16)$$

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $|Ef(x)| \geq R^{-900} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2$ λόγω της υπόθεσής μας ότι η ακτίνα R είναι αρκετά μεγάλη. Έτσι, $|Ef_i(x)| \geq \frac{1}{2} R^{-900} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2$. Από τις σχέσεις (3.15) και (3.16) και την υπόθεση ότι το x είναι α -ευρύ για τον Ef έχουμε

$$\begin{aligned} |Ef_{\tau,i}(x)| &\leq |Ef_\tau(x)| + O(R^{-990} \|f_\tau\|_2) \\ &\leq \alpha |Ef(x)| + O(R^{-990} \|f_\tau\|_2) \\ &\leq \alpha |Ef_i(x)| + O(R^{-990} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2) \\ &\leq 2\alpha |Ef_i(x)|. \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω υποθέσεις και την ανισότητα που μόλις δείξαμε έπεται ότι το x είναι 2α -ευρύ για τον Ef_i και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. \square

Στην περίπτωση που το $x \in M \cap B_j$, η απόδειξη μίας αντίστοιχης εκτίμησης δεν είναι το ίδιο εύκολη. Εδώ ο $Ef(x)$ είναι σχεδόν ίσος με το άθροισμα $Ef_{j,\varepsilon\varphi}(x) + Ef_{j,\varepsilon\gamma\kappa}(x)$. Θα χρειαστούμε κάποιον περαιτέρω συμβολισμό για να αποδείξουμε ότι τα ευρέα μέρη συμπεριφέρονται όπως επιθυμούμε.

Έχουμε χωρίσει την S σε $\sim K^2$ δίσκους τ διαμέτρου K^{-1} . Αν A είναι ένα υποσύνολο των δίσκων αυτών, ορίζουμε

$$f_{A,j,\varepsilon\gamma\kappa} = \sum_{\tau \in A} f_{\tau,j,\varepsilon\gamma\kappa}$$

και

$$f_{\tau,A,j,\varepsilon\gamma\kappa} = \begin{cases} f_{\tau,j,\varepsilon\gamma\kappa}, & \tau \in A \\ 0, & \tau \notin A. \end{cases}$$

Θα εκτιμήσουμε τους όρους που σχετίζονται με τα κομμάτια f_i και $f_{j,\varepsilon\gamma\kappa}$ με επαγωγή παρακάτω. Για τα εφαπτομενικά κομμάτια θα χρησιμοποιήσουμε μία εκτίμηση για τη διγραμμική ποσότητα

$$\text{Bil}(Ef_{j,\varepsilon\varphi}) = \sum_{\tau_1 \approx \tau_2} |Ef_{\tau_1,j,\varepsilon\varphi}|^{1/2} |Ef_{\tau_2,j,\varepsilon\varphi}|^{1/2}.$$

Αν οι τ_1, τ_2 είναι δίσκοι στην S , λέμε ότι είναι μη-γειτονικοί αν η απόστασή τους είναι μεγαλύτερη ή ίση από K^{-1} . Συμβολίζουμε τη σχέση αυτή με $\tau_1 \not\approx \tau_2$. Έχοντας δώσει τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να συνδέσουμε το α -ευρύ μέρος του Ef με τις συναρτήσεις $f_i, f_{j,\varepsilon\gamma\kappa}$ και $f_{j,\varepsilon\varphi}$.

Λήμμα 3.3.8. *Αν $x \in M \cap B_j$ και $\alpha\mu \leq 10^{-5}$ ισχύει*

$$Br_\alpha |Ef(x)| \leq 2 \left(\sum_A Br_{2\alpha} |Ef_{A,j,\varepsilon\gamma\kappa}| + K^{100} \text{Bil}(Ef_{j,\varepsilon\varphi})(x) + R^{-900} \sum_\tau \|f_\tau\|_2 \right). \quad (3.17)$$

Απόδειξη. Έστω $x \in B_j \cap M$. Αν το x δεν είναι α -ευρύ για τον Ef , το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας είναι ίσο με 0. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι το x είναι α -ευρύ για τον Ef . Λόγω της υπόθεσης ότι η ακτίνα R είναι αρκετά μεγάλη, μπορούμε να υποθέσουμε επίσης ότι $|Ef(x)| \geq R^{-900} \sum_\tau \|f_\tau\|_2$. Έστω A το σύνολο των K^{-1} -δίσκων τ για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$|Ef_{\tau,j,\varepsilon\varphi}(x)| \geq K^{-100} |Ef(x)|.$$

Αν το συμπλήρωμα A^c περιέχει τουλάχιστον δύο μη γειτονικούς δίσκους τ_1, τ_2 , τότε

$$|Ef(x)| \leq K^{100} |Ef_{\tau_i,j,\varepsilon\varphi}(x)| \leq K^{100} \text{Bil}(Ef_{j,\varepsilon\varphi})(x).$$

Αν το συμπλήρωμα A^c περιέχει μόνο γειτονικούς δίσκους, τότε από τη συνθήκη διαχωρισμού για τους δίσκους και τη σχέση $K^{-1} \leq r \leq \mu^{1/2} K^{-1}$ που ικανοποιούν οι ακτίνες τους, έχουμε ότι μπορεί να περιέχει το πολύ $10^4 \mu$ δίσκους. Το x είναι α -ευρύ για τον Ef και από την υπόθεση ισχύει $\alpha\mu \leq 10^{-5}$, άρα

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in A^c} |Ef_\tau(x)| &\leq \#\{A^c\} \max_{\tau \in A^c} |Ef_\tau(x)| \\ &\leq 10^4 \mu \alpha |Ef(x)| \\ &\leq 10^{-1} |Ef(x)|. \end{aligned}$$

Έτσι, αφού $Ef(x) = Ef_A(x) + Ef_{A^c}(x)$, έχουμε $|Ef(x)| \leq |Ef_A(x)| + 10^{-1}|Ef(x)|$, επομένως

$$|Ef_A(x)| \geq \frac{9}{10}|Ef(x)|.$$

Χωρίζουμε τον Ef_A σε εγκάρσιες κι εφαπτομενικές συνεισφορές. Για κάθε δίσκο τ ισχύει

$$|Ef_\tau(x)| \leq |Ef_{\tau,j,\text{εγκ}}(x)| + |Ef_{\tau,j,\text{εφ}}(x)| + O(R^{-990}\|f_\tau\|_2),$$

αφού αν ένας κύλινδρος $T \in \mathbb{W}$ τέμνει το $B_j \cap M$, τότε ανήκει ακριβώς σε ένα από τα σύνολα $\mathbb{W}_{j,\text{εγκ}}$ και $\mathbb{W}_{j,\text{εφ}}$. Αν ο T δεν τέμνει το $B_j \cap M$, τότε $|f_{\tau,T}(x)| = O(R^{-1000}\|f_\tau\|_2)$.

Αθροίζουμε ως προς $\tau \in A$ στην τελευταία σχέση κι έχουμε

$$\begin{aligned} |Ef_A(x)| &\leq |Ef_{A,j,\text{εγκ}}(x)| + \sum_{\tau \in A} |Ef_{\tau,j,\text{εφ}}(x)| + O(R^{-990} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2) \\ &\leq |Ef_{A,j,\text{εγκ}}(x)| + \#\{A\}K^{-100}|Ef(x)| + O(R^{-980} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2) \\ &\leq |Ef_{A,j,\text{εγκ}}(x)| + K^{-98}|Ef(x)| + O(R^{-980} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2). \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\frac{9}{10}|Ef(x)| \leq |Ef_{A,j,\text{εγκ}}(x)| + K^{-98}|Ef(x)| + O(R^{-980} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2).$$

Έχουμε υποθέσει ότι $|Ef(x)| \geq R^{-900} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2$, άρα αφού η σταθερά K είναι αρκετά μεγάλη μπορούμε να γράψουμε

$$|Ef(x)| \leq \frac{3}{2}|Ef_{A,j,\text{εγκ}}(x)|. \quad (3.18)$$

Μένει να δείξουμε ότι το x είναι 2α -ευρύ για τον $Ef_{A,j,\text{εγκ}}$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε δίσκο τ ισχύει

$$|Ef_{\tau,j,\text{εγκ}}(x)| \leq \frac{11}{10}\alpha|Ef(x)|.$$

Πράγματι, αν ισχύει η τελευταία ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned} \max_{\tau} |Ef_{\tau,j,\text{εγκ}}(x)| &\leq \frac{11}{10}\alpha|Ef(x)| \\ &\leq \frac{11}{10} \cdot \frac{3}{2}\alpha|Ef_{A,j,\text{εγκ}}(x)| \\ &\leq 2\alpha|Ef_{A,j,\text{εγκ}}(x)|, \end{aligned}$$

από την (3.18). Μένει λοιπόν να αποδείξουμε ότι για κάθε δίσκο $\tau \in A$ ισχύει

$$|Ef_{\tau,j,\text{εγκ}}(x)| \leq \frac{11}{10}\alpha|Ef(x)|. \text{ Έχουμε δείξει ότι ισχύει}$$

$$|Ef_{\tau,j,\text{εγκ}}(x)| \leq |Ef_\tau(x)| + |Ef_{j,\text{εφ},\tau}(x)| + O(R^{-990} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2).$$

Ισχύει επίσης η σχέση $|Ef_{\tau,j,\text{εφ}}(x)| \geq K^{-100}|Ef(x)|$, αφού $\tau \in A$. Έτσι,

$$|Ef_{\tau,j,\text{εγκ}}(x)| \leq \alpha|Ef(x)| + K^{-100}|Ef(x)| + O(R^{-990} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2),$$

αφού το x είναι α -ευρύ για τον Ef . Από τις υποθέσεις $|Ef(x)| \geq R^{-900} \sum_{\tau} \|f_\tau\|_2$ και $\alpha \geq K^{-\varepsilon}$ έπεται η

$$|Ef_{\tau,j,\text{εγκ}}(x)| \leq \alpha|Ef(x)| + 10\alpha^{-1}|Ef(x)| = (1.1)\alpha|Ef(x)|.$$

Επομένως, το x είναι 2α -ευρύ για τον $Ef_{A,j,\text{εγκ}}$. Έπεται έτσι η ανισότητα που θέλαμε. \square

3.3.1 Το φράγμα για τους εφαπτομενικούς όρους

Σε αυτή την παράγραφο ξεκινάμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1. Σε πρώτο στάδιο φράσσουμε τα εφαπτομενικά κομμάτια. Στην επόμενη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση για τα εφαπτομενικά κομμάτια για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη.

Μας ενδιαφέρει να φράξουμε την ποσότητα

$$\int_{B_j \cap M} \text{Bil}(Ef_{j,\varepsilon\varphi})^{3.25}.$$

Καλύπτουμε την τομή $B_j \cap M$ με κύβους Q με μήκος πλευράς $R^{1/2}$ και ορίζουμε $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi,Q}$ ως το σύνολο των κυλίνδρων $T \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}$ που τέμνουν τον κύβο Q . Λόγω της Πρότασης 3.1.9., εντός κάθε τέτοιου κύβου Q μπορούμε να γράψουμε

$$Ef_{\tau,j,\varepsilon\varphi} = \sum_{T \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi,Q}} Ef_{\tau,T} + O(R^{-990} \|f_\tau\|_2).$$

Από τον ορισμό του συνόλου $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}$, όλοι οι κύλινδροι του $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi,Q}$ είναι σχεδόν συνεπίπεδοι. Πράγματι, αφού η τομή $M \cap Q$ είναι μη κενή, υπάρχει ένα σημείο $x \in \mathcal{Z}_P \cap \mathcal{N}_{R^{-(1/2)+\delta}}(Q)$. Για κάθε κύλινδρο $T \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi,Q}$, το x αυτό ανήκει στην τομή $2B_j \cap 10T \cap \mathcal{Z}_P$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι μη κρίσιμο σημείο του \mathcal{Z}_P . Αφού ο κύλινδρος αυτός είναι εφαπτόμενος στο \mathcal{Z}_P , έχουμε ότι

$$\angle(u(T), T_x(\mathcal{Z}_P)) \leq R^{-(1/2)+2\delta} \leq R^{-(1/2)+O(\delta)}.$$

Όροι της τάξης $O(R^{-990} \|f_\tau\|_2)$ είναι αμελητέας σημασίας στους υπολογισμούς μας. Για το λόγο αυτό θα τους αγνοήσουμε γράφοντας

$$Ef_{\tau,j,\varepsilon\varphi} \stackrel{\approx}{=} \sum_{T \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi,Q}} Ef_{\tau,T}.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις έχουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 3.3.9. *Αν οι δίσκοι τ_1, τ_2 είναι μη γειτονικοί, τότε*

$$\int_Q |Ef_{\tau_1,j,\varepsilon\varphi}|^2 |Ef_{\tau_2,j,\varepsilon\varphi}|^2 \stackrel{\approx}{\leq} R^{-(1/2)+O(\delta)} \left(\sum_{T_1 \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi,Q}} \|f_{\tau_1,T_1}\|_2^2 \right) \left(\sum_{T_2 \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi,Q}} \|f_{\tau_2,T_2}\|_2^2 \right). \quad (3.19)$$

Απόδειξη. Εντός του κύβου Q έχουμε

$$Ef_{\tau,j,\varepsilon\varphi} \stackrel{\approx}{=} \sum_{T \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi,Q}} Ef_{\tau,T}.$$

Έστω η_Q ομαλή bump function ίση με 1 στον Q και με φορέα $\text{supp}(\eta_Q) \subseteq 10Q$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$|\hat{\eta}_Q(\omega)| \lesssim \text{Vol}(Q)(1 + |\omega|R^{1/2}|)^{10^6/\delta}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_Q |Ef_{\tau_1,j,\varepsilon\varphi}|^2 |Ef_{\tau_2,j,\varepsilon\varphi}|^2 &\leq \sum_{\substack{T_i, \bar{T}_i \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi,Q} \\ i=1,2}} \int \eta_Q Ef_{\tau_1,T_1} Ef_{\tau_2,T_2} \overline{Ef_{\tau_1,\bar{T}_1}} \overline{Ef_{\tau_2,\bar{T}_2}} \\ &= \sum_{\substack{T_i, \bar{T}_i \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi,Q} \\ i=1,2}} \int_{\mathbb{R}^3} (\hat{\eta}_Q * f_{\tau_1,T_1} \, \text{dvol}_S * f_{\tau_2,T_2} \, \text{dvol}_S) \overline{(f_{\tau_1,\bar{T}_1} \, \text{dvol}_S * f_{\tau_2,\bar{T}_2} \, \text{dvol}_S)} \quad (1), \end{aligned}$$

από το Θεώρημα Plancherel.

Για κάθε κύλινδρο T ορίζουμε $\theta(T)$ ως τον δίσκο θ για τον οποίο ισχύει $T \in \mathbb{W}(\theta)$ και θέτουμε $\omega(T)$ να είναι το κέντρο του $\theta(T)$. Το μέτρο $f_{\tau,T} \text{dvol}_S$ έχει φορέα εντός του $3\theta(T)$ κι έτσι $\text{supp}(f_{\tau,T} \text{dvol}_S) \subseteq \mathcal{N}_{O(R^{1/2})}(\omega(T))$. Ο μετασχηματισμός Fourier της η_Q φθίνει απότομα έξω από τον Q , άρα ένας όρος που συμμετέχει στο άθροισμα είναι αμελητέος εκτός αν τα κέντρα $\omega(T_i)$ και $\omega(\overline{T}_i)$ ικανοποιούν τη σχέση

$$\omega(T_1) + \omega(T_2) = \omega(\overline{T}_1) + \omega(\overline{T}_2) + O(R^{-1/2+\delta}). \quad (3.20)$$

Ισχυρισμός. Δεδομένης της (3.20), τα κέντρα $\omega(T_i)$ και $\omega(\overline{T}_i)$ απέχουν το πολύ κατά $O(R^{-1/2+\delta})$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Τα σημεία $u(T_i)$ και $u(\overline{T}_i)$, τα οποία είναι εξ' ορισμού τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα σημείων κοντά στα κέντρα $\omega(T_i)$ και $\omega(\overline{T}_i)$ αντίστοιχα, περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, έστω $\pi(Q)$. Έτσι, για κάθε σημείο $\vec{\omega}(T_i), \vec{\omega}(\overline{T}_i) \in B_2^2$, η κλίση ∇h ικανοποιεί τη γραμμική εξίσωση:

$$\nu \cdot \nabla h(\vec{\omega}) + b = 0, \quad \nu \in B_2^2, \quad b \in \mathbb{R}, \quad |b| \lesssim 1.$$

Αυτή η εξίσωση ορίζει μία καμπύλη στη μπάλα B_2^2 , η οποία είναι σχεδόν ευθεία, αφού η S ικανοποιεί την $(*)$, δηλαδή ικανοποιεί τις:

$$\frac{1}{2} \leq H_h \leq 2 \quad \text{και} \quad |\partial^3 h| \leq 10^{-9} \quad \text{κατά σημείο.}$$

Μπορούμε, ενδεχομένως μετά από κάποια στροφή στο $\omega_1\omega_2$ -επίπεδο, να περιγράψουμε την καμπύλη αυτή ως το γράφημα

$$\{(\omega_1, g(\omega_1)) : \omega_1 \in B_2^2\},$$

όπου η συνάρτηση g είναι C^∞ και ικανοποιεί τη σχέση $\max\{|\nabla g|, |\nabla^2 g|\} \leq 10^{-6}$. Παραμετροποιούμε την h από τη g . Ορίζουμε δηλαδή $\phi(\omega_1) = h(\omega_1, g(\omega_1))$ και από τον Κανόνα της Αλυσίδας και τις υποθέσεις για τις g, h παρατηρούμε ότι $\phi'' \geq 1/4$.

Έστω $\omega_1(T_i)$ η προβολή του $\omega(T_i)$ στην πρώτη συντεταγμένη. Η (3.20) είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{cases} \omega_1(T_1) + \omega_1(T_2) = \omega_1(\overline{T}_1) + \omega_1(\overline{T}_2) + O(R^{-1/2+\delta}) \\ \phi(\omega_1(T_1)) + \phi(\omega_1(T_2)) = \phi(\omega_1(\overline{T}_1)) + \phi(\omega_1(\overline{T}_2)) + O(R^{-1/2+\delta}) \end{cases} \quad (3.21)$$

Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι

$$\omega_1(\overline{T}_1) < \omega_1(T_1) < \omega_1(T_2) < \omega_1(\overline{T}_2).$$

Αν τα $\omega(T_1)$ και $\omega(T_2)$ δεν περιέχονται στους δίσκους τ_1 και τ_2 αντίστοιχα, βρίσκονται πολύ κοντά τους από τον τρόπο κατασκευής τους. Έχουμε υποθέσει ότι οι τ_1, τ_2 είναι μη γειτονικοί, άρα από την τελευταία παρατήρηση ισχύει $|\omega_1(T_1) - \omega_1(T_2)| \gtrsim K^{-1}$. Θεωρούμε τα κλειστά διαστήματα $I_1 = [\omega_1(\overline{T}_1), \omega_1(T_1)]$ και $I_2 = [\omega_1(T_2), \omega_1(\overline{T}_2)]$. Από την (3.21), τα μήκη των I_1 και I_2 διαφέρουν το πολύ κατά $O(R^{-1/2+\delta})$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής και την υπόθεση ότι $\phi'' \geq 1/4$, έπεται ότι για κάθε $s_1 \in I_1$ και $s_2 \in I_2$ ισχύει

$$\phi'(s_2) - \phi'(s_1) \geq \frac{1}{4}K^{-1}.$$

Έτσι, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$\begin{aligned} |I_1| + |I_2| &\lesssim \int_{I_2} \phi' - \int_{I_1} \phi' + O(R^{-1/2+\delta}) \\ &= \phi(\omega_1(\overline{T}_2)) - \phi(\omega_1(T_2)) + \phi(\omega_1(\overline{T}_1)) - \phi(\omega_1(T_1)) + O(R^{-1/2+\delta}) \\ &= O(R^{-1/2+\delta}), \end{aligned}$$

από την (3.21). Δείξαμε λοιπόν ότι για $i = 1, 2$ ισχύει

$$|\omega(T_i) - \omega(\overline{T_i})| \lesssim R^{-1/2+\delta},$$

όπως θέλαμε. \square

Για κάθε δίσκο θ το πλήθος των κυλίνδρων $T \in \mathbb{W}(\theta)$ που τέμνουν τον κύβο Q είναι πεπερασμένο, έτσι υπάρχουν $O(1)$ κύλινδροι του $\mathbb{W}(\theta)$ εντός του $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi,Q}$. Μπορούμε δηλαδή να φράξουμε το άθροισμα στην (1) από

$$R^{O(\delta)} \sum_{\substack{T_i \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi,Q} \\ i=1,2}} \int |f_{\tau_1, T_1} d\text{vol}_S * f_{\tau_2, T_2} d\text{vol}_S|^2. \quad (3.22)$$

Συμβολίζουμε τα μέτρα $f_{\tau_i, T_i} d\text{vol}_S$ με $f_i dS_i$, όπου S_i είναι ένας δίσκος ακτίνας $\sim R^{-1/2}$ που περιέχει τον φορέα $\text{supp}(f_i)$. Ο δίσκος $\theta(T_i)$ περιέχεται στον τ_i , άρα από τη συνθήκη μη γειτονικότητας των τ_1 και τ_2 , η γωνία ανάμεσα στους εφαπτόμενους χώρους της S πάνω από τα $\theta(T_1)$ και $\theta(T_2)$ είναι $\gtrsim K^{-1}$. Έτσι, μπορούμε να καλύψουμε τον S_1 με φύλλα από καμπύλες γ_t , $t \in [0, R^{-1/2}]$, ώστε η διεύθυνση του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος της γ_t να είναι σχεδόν εγκάρσια στο εφαπτόμενο επίπεδο του S_2 για κάθε t . Μπορούμε επίσης μετά από μία αλλαγή μεταβλητής να γράψουμε

$$d\text{vol}_{S_1} = J d\text{vol}_{\gamma_t} dt,$$

όπου J η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα. Αναπτύσσουμε τη συνέλιξη $f_1 dS_1 * f_2 dS_2$ ως ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{R^{-1/2}} (J f_1 d\text{vol}_{\gamma_t} * f_2 dS_2) dt$$

κι εκτιμούμε την L^2 -νόρμα του. Έχουμε

$$\|J f_1 d\text{vol}_{\gamma_t} * f_2 dS_2\|_2^2 \leq \left(\int_0^{R^{-1/2}} \|J f_1 d\text{vol}_{\gamma_t} * f_2 dS_2\|_2 dt \right)^2$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Το τελευταίο ολοκλήρωμα φράσσεται από το

$$R^{-1/2} \int_0^{R^{-1/2}} \|J f_1 d\text{vol}_{\gamma_t} * f_2 dS_2\|_2^2 dt$$

από την ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα. Από την ιδιότητα

$$\int f * g(x) dx = \left(\int f(x) dx \right) \left(\int g(x) dx \right)$$

της συνέλιξης και μια ακόμα αλλαγή μεταβλητής, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^3} |J f_1 d\text{vol}_{\gamma_t} * f_2 dS_2|^2 \sim \int_{\gamma_t} |f_1|^2 \int_{S_2} |f_2|^2.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \|f_1 dS_1 * f_2 dS_2\|_2^2 &\leq R^{-1/2} \int_0^{R^{-1/2}} \int_{\gamma_t} |f_1|^2 dt \cdot \int_{S_2} |f_2|^2 \\ &\lesssim R^{-1/2} \int_{S_1} |f_1|^2 \int_{S_2} |f_2|^2 \\ &= R^{-1/2} \prod_{i=1}^2 \|f_{\tau_i, T_i}\|_2^2. \end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την τελευταία ανισότητα για να φράξουμε την ποσότητα στην (3.22) έχουμε

$$\int_Q |Ef_{\tau_1, j, \varepsilon\varphi}|^2 |Ef_{\tau_2, j, \varepsilon\varphi}|^2 \lesssim_O R^{-(1/2)+O(\delta)} \prod_{i=1}^2 \left(\sum_{T_i \in \mathbb{W}_{j, \varepsilon\varphi, Q}} \|f_{\tau_i, T_i}\|_2^2 \right)$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. \square

Μέσω της Πρότασης 3.3.9 μπορούμε να εκτιμήσουμε τη συνεισφορά των εφαιπτομενικών κομματιών. Το σημείο αυτό είναι κομβικό για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1, γιατί εμφανίζεται ο κρίσιμος εκθέτης $p = 3.25$ και γίνεται σαφές πως δεν μπορούμε να δείξουμε ανάλογη εκτίμηση για $p < 3.25$ με τα αποτελέσματα που περιγράψαμε. Για να εκτιμήσουμε αυτή τη συνεισφορά θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.3.10. *Ισχύει η εκτίμηση*

$$\|\widehat{f d\sigma}\|_{L^2(B_R)} \lesssim R^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\|\widehat{f d\sigma} \chi_{B_R}\|_2 \lesssim R^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

Επιλέγουμε μία συνάρτηση $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ με φορέα $\text{supp}(\phi) \subseteq B_R$ και με τιμές μακριά από το 0 στην B_R^n . Ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$ είναι γραμμική ισομετρία επί, άρα υπάρχει συνάρτηση $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ με $\phi = \mathcal{F}(\psi)$. Παρατηρούμε ότι από τον τρόπο κατασκευής της ϕ ισχύει $\|\widehat{f d\sigma} \chi_{B_R}\|_2 \leq \|\widehat{f d\sigma} \cdot \psi(x/R)\|_2$. Ορίζουμε $\phi_R(\xi) = R^n \phi(R\xi)$. Μας ενδιαφέρει να φράξουμε την ποσότητα

$$\|\widehat{f d\sigma} \cdot \psi(x/R)\|_2 = \|f d\sigma * \phi_R\|_2$$

από το θεώρημα Plancherel. Θα αποδείξουμε την ανισότητα

$$\|f d\sigma * \phi_R\|_2 \lesssim R^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}$$

χρησιμοποιώντας εκτιμήσεις για τις L^1 και L^∞ νόρμες και παρεμβολή. Από την ανισότητα Young,

$$\|f d\sigma * \phi_R\|_1 \lesssim \|f\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})},$$

λόγω των υποθέσεων για τη ϕ . Θέλουμε να δείξουμε επίσης την ανισότητα

$$\|f d\sigma * \phi_R\|_\infty \lesssim R \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})},$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\left| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\omega) \phi(R(\xi - \omega)) R^n d\omega \right| \lesssim R \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \quad \text{για κάθε } \xi \in B_R.$$

Αν δείξουμε την ισχυρότερη εκτίμηση

$$\left| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(R(\xi - \omega)) d\omega \right| \lesssim R^{1-n} \quad \text{για κάθε } \xi \in B_R$$

θα πάρουμε το ζητούμενο. Αφού η ϕ ανήκει στην κλάση του Schwartz, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{(1 + R|\xi - \omega|)^{n-1}} d\omega \lesssim R^{1-n}.$$

Γράφουμε

$$\int_{|\omega|=1} \frac{1}{(1+R|\xi-\omega|)^{n-1}} d\omega = \int_{|\xi-\omega|\leq 1/R} \frac{1}{(1+R|\xi-\omega|)^{n-1}} d\omega + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{k-1}\leq|\xi-\omega|R\leq 2^k} \frac{1}{(1+R|\xi-\omega|)^{n-1}} d\omega.$$

Εύκολα ελέγχεται ότι όλοι οι όροι του δεξιού μέλους είναι $O(R^{1-n})$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. \square

Όπως φάνηκε από την απόδειξη του παραπάνω λήμματος, μπορούμε να πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα ακόμα κι αν αντικαταστήσουμε τη σφαίρα με οποιαδήποτε συμπαγή επιφάνεια (συνδιδιάστασης 1). Παρατηρούμε επίσης ότι αν $f \in S(\mathbb{R}^n)$, τότε για οποιοδήποτε $p \in [1, \infty)$ ισχύει

$$\|f\widehat{d\sigma}\|_p = \|E_S f\|_p,$$

άρα το τελευταίο λήμμα ξαναγράφεται στη μορφή:

Πόρισμα 3.3.11. Για κάθε συμπαγή επιφάνεια S που ικανοποιεί την (\star) και κάθε ακτίνα $R > 0$ ισχύει

$$\|E f\|_{L^2(B_R)} \lesssim R^{1/2} \|f\|_{L^2(S)}.$$

Σημειώνουμε ότι θα αποδείξουμε ξανά το παραπάνω πόρισμα στο τέταρτο κεφάλαιο αρκετά πιο σύντομα.

Πρόταση 3.3.12. Ισχύει η εκτίμηση

$$\int_{B_j} \text{Bil}(E f_{j,\varepsilon\varphi})^{3,25} \lesssim R^{O(\delta)} \left(\sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2 \right)^{3/2}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$S_{\tau,j,\varepsilon\varphi} = \left(\sum_{T \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}} \mathcal{X}_T R^{-1/4} \|f_{\tau,T}\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Από την Πρόταση 3.3.9 έχουμε

$$\int_Q \prod_{i=1}^2 |E f_{\tau_i,j,\varepsilon\varphi}|^2 \lesssim_{\mathcal{O}} R^{O(\delta)} \int_Q \prod_{i=1}^2 S_{\tau_i,j,\varepsilon\varphi}^2.$$

Αθροίζοντας πάνω από όλους τους κύβους $Q \subseteq B_j \cap M$ έχουμε την εκτίμηση

$$\int_{B_j \cap M} \prod_{i=1}^2 |E f_{\tau_i,j,\varepsilon\varphi}|^2 \lesssim_{\mathcal{O}} R^{O(\delta)} \int_{B_j \cap M} \prod_{i=1}^2 S_{\tau_i,j,\varepsilon\varphi}^2. \quad (3.23)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα φράσσεται από

$$\leq \sum_{\substack{T_i \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi} \\ i=1,2}} R^{-2} \|f_{\tau_1,T_1}\|_2^2 \|f_{\tau_2,T_2}\|_2^2 \int \mathcal{X}_{T_1} \mathcal{X}_{T_2}.$$

Από τη σχέση $\angle(u(T_1), u(T_2)) \gtrsim K^{-1}$, το ολοκλήρωμα $\int \mathcal{X}_{T_1} \mathcal{X}_{T_2}$ είναι $\lesssim K R^{3/2}$ κι έτσι το παραπάνω άθροισμα είναι $\lesssim R^{-1/2} \prod_{i=1}^2 \sum_{T_i \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}} \|f_{\tau_i,T_i}\|_2^2$. Οι συναρτήσεις $(f_{\tau,T})_{T \in \mathbb{W}}$ είναι σχεδόν κάθετες ανά δύο από την Πρόταση 3.1.9 κι έτσι έχουμε

$$\sum_{T \in \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}} \|f_{\tau,T}\|_2^2 \lesssim_{\mathcal{O}} \|f_{\tau,j,\varepsilon\varphi}\|_2^2.$$

Συνθέτοντας αυτές τις παρατηρήσεις με την (3.23) έχουμε την εκτίμηση

$$\int_{B_j \cap M} \prod_{i=2}^2 |Ef_{\tau_i, j, \varepsilon\varphi}|^2 \lesssim_O R^{-1/2+O(\delta)} \prod_{i=1}^2 \|f_{\tau_i, j, \varepsilon\varphi}\|_2^2.$$

Αν αθροίσουμε πάνω από όλους τους μη γειτονικούς δίσκους έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\tau_1 \approx \tau_2} \int_{B_j \cap M} \prod_{i=1}^2 |Ef_{\tau_i, j, \varepsilon\varphi}|^2 &\lesssim R^{-1/2+O(\delta)} \sum_{\tau_1 \approx \tau_2} \prod_{i=1}^2 \|f_{\tau_i, j, \varepsilon\varphi}\|_2 \\ &\lesssim R^{-1/2+O(\delta)} \left(\sum_{\tau} \|f_{\tau, j, \varepsilon\varphi}\|_2^2 \right)^2 \end{aligned}$$

από την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου κι αθροίζοντας πάνω από όλους τους δίσκους. Η ποσότητα $\int_{B_j \cap M} \prod_{i=2}^2 |Ef_{\tau_i, j, \varepsilon\varphi}|^2$ είναι ακριβώς η $\|\text{Bil}(Ef_{j, \varepsilon\varphi})\|_{L^4(B_j \cap M)}^4$. Προκύπτει λοιπόν η εκτίμηση

$$\|\text{Bil}(Ef_{j, \varepsilon\varphi})\|_{L^4(B_j \cap M)} \lesssim_O R^{-1/8+O(\delta)} \left(\sum_{\tau} \|f_{\tau, j, \varepsilon\varphi}\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Από το Πόρισμα 3.3.11 ισχύει η εκτίμηση

$$\|Ef_{\tau, j, \varepsilon\varphi}\|_{L^2(B_R)} \lesssim R^{1/2} \|f_{\tau, j, \varepsilon\varphi}\|_{L^2(S)}.$$

Όπως πριν αθροίζουμε πάνω από τους μη γειτονικούς δίσκους κι έχουμε

$$\|\text{Bil}(Ef_{j, \varepsilon\varphi})\|_{L^2(B_j \cap M)} \lesssim R^{1/2} \left(\sum_{\tau} \|f_{\tau, j, \varepsilon\varphi}\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Έχουμε λοιπόν δείξει L^2 και L^4 εκτιμήσεις για το $\text{Bil}(Ef_{j, \varepsilon\varphi})$. Έστω $p \in [2, 4]$. Από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\|\text{Bil}(Ef_{j, \varepsilon\varphi})\|_{L^p(B_j \cap M)}^p \lesssim R^{O(\delta)} R^{\frac{5}{2} - \frac{3p}{4}} \left(\sum_{\tau} \|f_{\tau, j, \varepsilon\varphi}\|_2^2 \right)^{p/2}.$$

Θέλουμε τώρα να βελτιώσουμε το δεξιό μέλος της τελευταίας ανισότητας για να εξάγουμε το συμπέρασμα που θέλουμε. Για να το κάνουμε αυτό, θεωρούμε τους όρους $\|f_{\tau, j, \varepsilon\varphi}\|_2$. Το Πόρισμα 3.1.11 μας εγγυάται ότι ισχύει η εκτίμηση $\|f_{\tau, j, \varepsilon\varphi}\|_2 \lesssim \|f_{\tau}\|_2$. Από την άλλη, από το Λήμμα 3.3.6 γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\mathbb{W}_{j, \varepsilon\varphi}$ περιέχει κυλίνδρους μόνο σε $R^{1/2+O(\delta)}$ διαφορετικές κατευθύνσεις, δηλαδή ο φορέας κάθε μίας από τις συναρτήσεις $f_{\tau, j, \varepsilon\varphi}$ περιέχεται σε $R^{1/2+O(\delta)}$ δίσκους θ . Σε κάθε έναν από αυτούς τους δίσκους το Πόρισμα 3.1.11 δίνει

$$\int_{\theta} |f_{\tau, j, \varepsilon\varphi}|^2 \lesssim \int_{10\theta} |f_{\tau}|^2 \lesssim 1.$$

Αθροίζουμε πάνω από όλους τους $R^{1/2+O(\delta)}$ δίσκους θ και προκύπτει η εκτίμηση

$$\int |f_{\tau, j, \varepsilon\varphi}|^2 \lesssim R^{-1/2+O(\delta)}.$$

Έτσι, για κάθε $p \geq 3$ έχουμε

$$\left(\sum_{\tau} \|f_{\tau, j, \varepsilon\varphi}\|_2^2 \right)^{p/2} \lesssim R^{O(\delta)} R^{\frac{3}{4} - \frac{p}{4}} \left(\sum_{\tau} \|f_{\tau, j, \varepsilon\varphi}\|_2^2 \right)^{3/2}.$$

Τελικά, για κάθε $p \geq 3$ έχουμε

$$\|\mathbf{Bil}(Ef_{j,\varepsilon\varphi})\|_{L^p(B_j \cap M)}^p \lesssim R^{O(\delta)} R^{\frac{13}{4}-p} \left(\sum_{\tau} \|f_{\tau}\|_2^2 \right)^{3/2}.$$

Αν στην τελευταία ανισότητα επιλέξουμε $p = 3.25$ έχουμε

$$\int_{B_j \cap M} \mathbf{Bil}(Ef_{j,\varepsilon\varphi})^{3.25} \lesssim R^{O(\delta)} \left(\sum_{\tau} \|f_{\tau}\|_2^2 \right)^{3/2}$$

και η απόδειξη της πρότασης έχει ολοκληρωθεί. \square

3.3.2 Η απόδειξη του Θεωρήματος

Στην παράγραφο αυτή ολοκληρώνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 χρησιμοποιώντας ένα επαγωγικό επιχείρημα και την Πρόταση 3.3.12. Εν συνεχεία, το χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.1.2. Υπενθυμίζουμε πρώτα το Θεώρημα 3.3.1.

Θεώρημα (3.3.1). *Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $K(\varepsilon), L(\varepsilon)$ με $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K(\varepsilon) = +\infty$ και $0 < \delta_{\varepsilon\eta\kappa} < \varepsilon$ που εξαρτώνται μόνο από το ε ώστε να ισχύει το ακόλουθο:*

Έστω ότι η S είναι το γράφημα μίας συνάρτησης h που ικανοποιεί την (\star) με L παραγώγους. Αν $\alpha \geq K^{-\varepsilon}$ και για κάθε τ και $\omega \in S$ ισχύει

$$\int_{B(\omega, R^{-1/2}) \cap S} |f_{\tau}|^2 \leq 1,$$

τότε

$$\int_{B_R} \mathbf{Br}_{\alpha} E f^{3.25} \leq C_{\varepsilon} R^{\varepsilon} \left(\sum_{\tau} \int_S |f_{\tau}|^2 \right)^{3/2+\varepsilon} R^{\delta_{\varepsilon\eta\kappa} \log(K^{\varepsilon} \alpha \mu)}. \quad (3.24)$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή επί της ακτίνας R . Για κάθε ακτίνα R , κάνουμε επαγωγή κι επί του αθροίσματος $\sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2$. Αν $R = 1$, η (3.24) γίνεται

$$\int_{B_1} \mathbf{Br}_{\alpha} E f^{3.25} \leq C_{\varepsilon} \left(\sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2 \right)^{3/2+\varepsilon},$$

η οποία ισχύει τετριμμένα. Επίσης, αν $\sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2 \leq R^{-1000}$, τότε

$$\sup |\mathbf{Br}_{\alpha} E f| \leq \sum_{\tau} \int |f_{\tau}| \leq C R^{O(\varepsilon)} \left(\sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2 \right)^{1/2}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Άρα και με αυτή την υπόθεση ισχύει το θεώρημα. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |\mathbf{Br}_{\alpha} E f|^{3.25} &\leq \text{Vol}(B_R) \left(\sum_{\tau} \int |f_{\tau}| \right)^{3.25} \\ &\leq C R^4 \left(\sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2 \right)^{3/2 + 1/8} \\ &\leq C R^4 \left(\sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2 \right)^{3/2 + \varepsilon} R^{-125} \\ &\leq C R^{-121} \left(\sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2 \right)^{3/2 + \varepsilon}. \end{aligned}$$

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για όλες τις ακτίνες $R' < \frac{R}{2}$ και όλες τις συναρτήσεις g που ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{\tau} \int |g_{\tau}|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2.$$

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\alpha\mu \leq 10^{-6}$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\alpha\mu \geq 10^{-6}$ και επιλέξουμε $\delta_{\text{εγκ}} = \varepsilon^6$, $K(\varepsilon) = e^{\varepsilon^{-10}}$, τότε ο όρος $R^{\delta_{\text{εγκ}} \log(K^{\varepsilon} \alpha\mu)}$ ικανοποιεί

$$R^{\delta_{\text{εγκ}} \log(K^{\varepsilon} \alpha\mu)} = R^{\varepsilon^6 \log(K^{\varepsilon} \alpha\mu)} \geq R^{\varepsilon^6 \log(K^{\varepsilon} \cdot 10^{-6})} \gtrsim_{\varepsilon} R^{\varepsilon^{-4}} \geq R^{1000},$$

αν το $\varepsilon > 0$ επιλεγεί αρκετά μικρό. Παρατηρούμε ότι υπό αυτή την υπόθεση το θεώρημα ισχύει. Γράφουμε το ολοκλήρωμα $\int_{B_R} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25}$ στη μορφή

$$\int_{B_R} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25} = \sum_i \int_{B_R \cap O'_i} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25} + \int_{B_R \cap M} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25} \quad (3.25)$$

και εξετάζουμε τις περιπτώσεις στις οποίες κυριαρχεί κάθε ένας από τους όρους του δεξιού μέλους. Αν κυριαρχεί ο όρος $\sum_i \int_{B_R \cap O'_i} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25}$, τότε χρησιμοποιώντας το polynomial partitioning και το γεγονός ότι κάθε ολοκλήρωμα $\int_{B_R \cap O'_i} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25}$ είναι ουσιαστικά ανεξάρτητο του i , βρίσκουμε $\sim D^3$ κελιά O'_i ώστε

$$\int_{B_R \cap O'_i} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25} \sim D^{-3} \int_{B_R} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25}. \quad (3.26)$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25} &\lesssim D^3 \int_{B_R \cap O'_i} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25} \\ &\lesssim D^3 \int_{B_R} \text{Br}_{2\alpha} E f_i^{3.25} + R^{-1000} \sum_{\tau} \|f_{\tau,i}\|_2^{3.25}, \end{aligned}$$

έχοντας εφαρμόσει το Λήμμα 3.3.7 για κάθε i . Αν στην τελευταία ανισότητα κυριαρχεί ο όρος $R^{-1000} \sum_{\tau} \|f_{\tau,i}\|_2^{3.25}$, τότε έχουμε άμεσα το θεώρημα αν αθροίσουμε ως προς i στο δεξιό μέλος. Επικεντρωνόμαστε τώρα στο άθροισμα $\sum_{\tau} \int |f_{\tau,i}|^2$. Έχουμε δει ότι ένας κύλινδρος T μπορεί να ανήκει το πολύ σε $D+1$ διαφορετικά σύνολα \mathbb{W}_i , άρα από το Λήμμα 3.1.10 έχουμε την εκτίμηση

$$\sum_i \int |f_{\tau,i}|^2 \lesssim D \int |f_{\tau}|^2.$$

Σταθεροποιούμε ένα i για το οποίο ισχύει η (3.26). Τότε,

$$\begin{aligned} \sum_i \int |f_{\tau,i}|^2 &\lesssim D \int |f_{\tau}|^2 \\ &\lesssim D \cdot D^{-3} \sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2 \\ &= D^{-2} \sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2. \end{aligned}$$

Ορίζουμε $f_i = \sum_{\tau} f_{\tau,i}$.

Ισχυρισμός. Το θεώρημα ισχύει για κάθε συνάρτηση f_i .

Απόδειξη Ισχυρισμού. Από την πρόταση 3.1.9, ο φορέας $\text{supp} f_{\tau,i}$ είναι μία μικρή κλειστή περιοχή του δίσκου τ , άρα η πολυπλοκότητα μ' του νέου καλύμματος που αποτελείται από τους φορείς είναι μεγαλύτερη από την αρχική πολυπλοκότητα μ αλλά όχι πολύ μεγαλύτερη υπό την έννοια ότι ικανοποιεί τη σχέση $\mu \leq \mu' \leq 2\mu$.

Από το Λήμμα 3.1.11, για κάθε $\omega \in S$ ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{B(\omega, R^{-1/2}) \cap S} |f_{\tau,i}|^2 &\lesssim \int_{B(\omega, 10R^{-1/2}) \cap S} |f_{\tau}|^2 \\ &\lesssim \int_{B(\omega, R^{-1/2}) \cap S} |f_{\tau}|^2 \\ &\leq 1 \quad \text{από την υπόθεση.} \end{aligned}$$

Άρα, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την f_i με μία κατάλληλη σταθερά ώστε να ισχύει $\int_{B(\omega, R^{-1/2}) \cap S} |f_{\tau,i}|^2 \leq 1$ για να δούμε ότι ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του θεωρήματος. Από την υπόθεση για την πολυπλοκότητα μ' έχουμε επιπλέον ότι

$$\sum_{\tau} \int |f_{\tau,i}|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2,$$

άρα από την επαγωγική υπόθεση για το $\sum_{\tau} \int |f_{\tau}|^2$, έπεται ότι το θεώρημα ισχύει για τις συναρτήσεις f_i . \square

Αν εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα στη συνάρτηση f_i έχουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25} &\lesssim D^3 \int_{B_R} \text{Br}_{2\alpha} E f_i^{3.25} \\ &\lesssim D^3 C_{\varepsilon} R^{\varepsilon} R^{\delta_{\text{εγκ}} \cdot \log(\alpha \mu K^{\varepsilon})} \left(\sum_{\tau} \int |f_{\tau,i}|^2 \right)^{3/2+\varepsilon} \\ &\lesssim (CD^{-2\varepsilon} R^{C\delta_{\text{εγκ}}}) C_{\varepsilon} R^{\varepsilon} R^{\delta_{\text{εγκ}} \cdot \log(\alpha \mu K^{\varepsilon})} \left(\sum_{\tau} \int |f_{\tau,i}|^2 \right)^{3/2+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Για να κλείσει η επαγωγή αρκεί ο όρος $CD^{-2\varepsilon} R^{C\delta_{\text{εγκ}}}$ να είναι μικρότερος από 1.

Έχουμε ορίσει $\delta_{\text{εγκ}} = \varepsilon^6$ και $\delta_{\text{deg}} = \varepsilon^4$, άρα ο εκθέτης είναι το πολύ $-\varepsilon\delta_{\text{deg}} + C\delta_{\text{εγκ}} \leq 0$. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή στην περίπτωση που κυριαρχούν οι όροι που προέρχονται από τα κελιά O'_i στην (3.26).

Υποθέτουμε τώρα ότι κυριαρχεί ο όρος $\int_{B_R \cap M} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25}$ στην (3.25). Από το Λήμμα 3.3.8, έχουμε

$$\int_{B_R} \text{Br}_{\alpha} E f^{3.25} \lesssim \sum_{j,I} \int_{B_j} \text{Br}_{2\alpha} E f_{I,j,\text{εγκ}}^{3.25} + K^{100} \sum_j \int_{B_j} \text{Bil}(E f_{j,\text{εφ}})^{3.25} + O(R^{-1000} \sum_{\tau} \|f_{\tau}\|_2^{3.25}). \quad (3.27)$$

Αρκεί λοιπόν να ελεέξουμε την ισχύ του θεωρήματος διακρίνοντας περιπτώσεις ανάλογα με το ποιος από τους τρεις όρους του δεξιού μέλους της τελευταίας ανισότητας κυριαρχεί.

Έστω αρχικά ότι κυριαρχεί το άθροισμα $\sum_{j,I} \int_{B_j} \text{Br}_{2\alpha} E f_{I,j,\text{εγκ}}^{3.25}$.

Ισχυρισμός. Το θεώρημα ισχύει για κάθε ένα από τα ολοκληρώματα $\int_{B_j} \text{Br}_{2\alpha} E f_{I,j,\text{εγκ}}^{3.25}$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Κάθε μπάλα B_j έχει ακτίνα $R^{1-\delta}$, άρα ικανοποιείται η επαγωγική υπόθεση για την ακτίνα. Με τα ίδια βήματα που ακολουθήσαμε για την απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού μπορούμε να δείξουμε ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε συνάρτηση $f_{j,\text{εγκ},I}$, δηλαδή ισχύει και για κάθε ένα από τα ολοκληρώματα $\int_{B_j} \text{Br}_{2\alpha} E f_{I,j,\text{εγκ}}^{3,25}$. \square

Επομένως, έχουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \int_{B_j} \text{Br}_{2\alpha} E f_{I,j,\text{εγκ}}^{3,25} &\lesssim C_\varepsilon R^{\varepsilon(1-\delta)} R^{\delta_{\text{εγκ}} \log(\alpha \mu K^\varepsilon)} \left(\sum_\tau \int |f_{\tau,j,\text{εγκ}}|^2 \right)^{3/2+\varepsilon} \\ &\leq C_\varepsilon R^{\varepsilon(1-\delta)} R^{\delta_{\text{εγκ}} \log(\alpha \mu K^\varepsilon)} \sum_{j,I} \left(\sum_{\tau \in I} \int |f_{\tau,j,\text{εγκ}}|^2 \right)^{3/2+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 3.3.5, κάθε κύλινδρος T περιέχεται το πολύ σε $\text{Poly}(D) = R^{O(\delta_{\text{deg}})}$ διαφορετικά σύνολα $\mathbb{W}_{j,\text{εγκ}}$. Συνδυάζοντας αυτό με το Λήμμα 3.3.7 έχουμε

$$\sum_\tau |f_{\tau,j,\text{εγκ}}|^2 \lesssim \text{Poly}(D) \sum_\tau |f_\tau|^2$$

κι έτσι

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \text{Br}_\alpha E f^{3,25} &\lesssim \text{Poly}(D) C_\varepsilon R^{\varepsilon(1-\delta)} R^{\delta_{\text{εγκ}} \log(\alpha \mu K^\varepsilon)} \left(\sum_\tau \int |f_\tau|^2 \right)^{3/2+\varepsilon} \\ &= (C \text{Poly}(D) R^{-\delta_\varepsilon} R^{C \delta_{\text{deg}}}) C_\varepsilon R^\varepsilon R^{\delta_{\text{deg}} \log(\alpha \mu K^\varepsilon)} \left(\sum_\tau \int |f_\tau|^2 \right)^{3/2+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Όπως παραπάνω, αρκεί να ελέγξουμε ότι ο όρος $C \text{Poly}(D) R^{-\delta_\varepsilon} R^{C \delta_{\text{deg}}}$ είναι το πολύ 1 για να κλείσει η επαγωγή. Ο όρος αυτός είναι το πολύ $R^{C \delta_{\text{deg}} - \delta_\varepsilon + C \delta_{\text{εγκ}}} \leq R^{C\varepsilon^4 - \varepsilon^3 + C\varepsilon^6}$, το οποίο είναι το πολύ 1 δεδομένου ότι η ακτίνα είναι αρκετά μεγάλη.

Υποθέτουμε τώρα ότι στην (3.27) κυριαρχεί ο όρος $O(R^{-1000} \sum_\tau \|f_\tau\|_2^{3,25})$. Τότε το θεώρημα έπεται από τη σχέση $\sum_\tau \|f_\tau\|_2 \lesssim 1$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι στην (3.27) κυριαρχεί ο όρος $K^{100} \sum_j \int_{B_j} \text{Bil}(E f_{j,\text{εφ}})^{3,25}$. Από την Πρόταση 3.3.12 και το γεγονός ότι το πλήθος των μπαλών B_j είναι $R^{3\delta}$ έχουμε

$$\begin{aligned} K^{100} \sum_j \int_{B_j} \text{Bil}(E f_{j,\text{εφ}})^{3,25} &\lesssim K^{100} R^{3\delta} R^{O(\delta)} \left(\sum_\tau \int |f_\tau|^2 \right)^{3/2} \\ &\leq R^\varepsilon \left(\sum_\tau \int |f_\tau|^2 \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Έχοντας διακρίνει όλες τις πιθανές περιπτώσεις, η απόδειξη ολοκληρώνεται αν παρατηρήσουμε ότι $K(\varepsilon) = \exp(\varepsilon^{-10}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +\infty$. \square

Κλείνουμε την παράγραφο και το κεφάλαιο με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.3.1. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να κανονικοποιήσουμε την f και να υποθέσουμε ότι $\|f\|_\infty = 1$. Χωρίζουμε την S σε ουσιαστικά ξένους K^{-1} -δίσκους τ . Ορίζουμε $f_\tau = f \chi_\tau$. Αφού οι δίσκοι είναι ξένοι έχουμε $\int_S |f|^2 = \sum_\tau \int_S |f_\tau|^2$. Από την υπόθεσή μας ότι $\|f\|_\infty = 1$, έπεται ότι για κάθε δίσκο τ και κάθε υποσύνολο A της S ισχύει

$$\int_A |f_\tau|^2 \leq 1.$$

Θέτουμε $\alpha = K^{-\varepsilon}$. Από το Θεώρημα 3.3.1, ισχύει

$$\int_{B_R} \mathbf{Br}_\alpha E f^{3.25} \leq C_\varepsilon R^{O(\varepsilon)} \left(\int_S |f|^2 \right)^{3/2+\varepsilon},$$

αφού ο όρος $R^{\delta_{\text{εγκ}} \log(K^\varepsilon \alpha \mu)}$ φράσσεται από $R^{C\delta_{\text{εγκ}}} \leq R^{O(\varepsilon)}$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz η τελευταία ανισότητα γίνεται

$$\int_{B_R} \mathbf{Br}_\alpha E f^{3.25} \lesssim C_\varepsilon R^{O(\varepsilon)} \|f\|_2^3 \|f\|_\infty^{1/4}.$$

Υψώνοντας και τα δύο μέλη στην 4/13, έχουμε

$$\|\mathbf{Br}_\alpha E f\|_{L^{3.25}(B_R)} \lesssim C_\varepsilon R^{O(\varepsilon)} \|f\|_2^{12/13} \|f\|_\infty^{1/13}.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, το θεώρημα έπεται. □

Κεφάλαιο 4

Το πρόβλημα στις μεγαλύτερες διαστάσεις

Περιεχόμενα

4.1 Η διάσπαση σε wave packets	54
4.2 Ευρείες νόρμες $BL_{k,A}^p$	56
4.2.1 Απόδειξη του Θεωρήματος 4.0.1	58
4.3 Αποτελέσματα από την Αλγεβρική Γεωμετρία	61
4.3.1 Εφαπτόμενοι χώροι αλγεβρικών επιφανειών	63
4.4 Εκτιμήσεις εγκάρσιας ισοκατανομής	66
4.5 Προσαρμογή της διάσπασης σε wave packets σε μικρότερες μπάλες	71
4.6 Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2	77

Στο κεφάλαιο αυτό συνεχίζουμε τη μελέτη του προβλήματος περιορισμού που κάναμε στο τρίτο κεφάλαιο. Διατυπώνουμε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα με αυτό του τρίτου κεφαλαίου για το παραβολοειδές και για όλες τις διαστάσεις ≥ 4 . Με τον όρο παραβολοειδές εννοούμε την συμπαγή επιφάνεια του \mathbb{R}^n με παραμέτρηση $P = \{\omega = (\vec{\omega}, |\vec{\omega}|^2) : \vec{\omega} \in B_2^{n-1}\}$. Ο τελεστής επέκτασης στην περίπτωση του παραβολοειδούς μπορεί να γραφτεί ως:

$$Ef(x) = \int_{B_2^{n-1}} e^{i(\vec{\omega}\vec{x} + x_n|\vec{\omega}|^2)} f(\vec{\omega}) d\vec{\omega},$$

όπου $x = (\vec{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Το κεντρικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου είναι το ακόλουθο, το οποίο αποδείχθηκε από τον Guth στο [Gu2] το 2016.

Θεώρημα 4.0.1 (Guth). *Για κάθε $n \geq 2$, ο τελεστής επέκτασης του παραβολοειδούς ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\|Ef\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(B_2^{n-1})}, \quad (4.1)$$

αν

$$p > 2 \cdot \frac{3n+2}{3n-2}, \text{ αν το } n \text{ είναι άρτιος} \quad (4.2)$$

$$p > 2 \cdot \frac{3n+1}{3n-3}, \text{ αν το } n \text{ είναι περιττός.} \quad (4.3)$$

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η εικασία του Stein ισχυρίζεται πως η (4.1) ισχύει για όλα τα $p > \frac{2n}{n-1}$ και ότι αν εφαρμόζαμε το θεώρημα στις 3 διαστάσεις θα παίρναμε την (4.1) για $p > \frac{10}{3}$, το οποίο είναι μεν χειρότερο από το φράγμα $p > 3.25$ που αποδείξαμε στο τρίτο κεφάλαιο, αλλά μας λέει ότι ο τελεστής επέκτασης του παραβολοειδούς είναι φραγμένος στον L^p κι όχι φραγμένος από τον L^p στον L^∞ , όπως δείξαμε στο Θεώρημα 3.0.1.

4.1 Η διάσπαση σε wave packets

Έχουμε ήδη μελετήσει τη διάσπαση σε wave packets στο Κεφάλαιο 3. Σε αυτή την ενότητα διαφοροποιούμε ελάχιστα την κατασκευή του κεφαλαίου 3 και μελετάμε τις ιδιότητες που προκύπτουν. Ξεκινάμε με μία συνάρτηση f ορισμένη στη μπάλα B_2^{n-1} . Καλύπτουμε την B_2^{n-1} με μία τοπικά πεπερασμένη οικογένεια μπαλών θ ακτίνας $R^{-1/2}$ και θεωρούμε μία ομαλή διαμέριση της μονάδας ϕ_θ συμβατή με αυτό το κάλυμμα. Έτσι μπορούμε να αναλύσουμε την f ως $f = \sum_\theta \phi_\theta f$. Καλύπτουμε και τον \mathbb{R}^{n-1} με μία τοπικά πεπερασμένη οικογένεια μπαλών ακτίνας $R^{(1+\delta)/2}$ με κέντρα $u \in R^{(1+\delta)/2}\mathbb{Z}^{n-1}$. Όπως και στο κεφάλαιο 3, το δ προστίθεται στην ακτίνα ώστε τα wave packets που θα κατασκευάσουμε να φθίνουν απότομα έξω από τις μπάλες. Θεωρούμε μία ομαλή διαμέριση της μονάδας η_u συμβατή με το κάλυμμα από τις μπάλες. Μπορούμε πάλι να αναλύσουμε την f ως:

$$f = \sum_{\theta, u} (\eta_u(\phi_\theta f)^\wedge)^\vee = \sum_{\theta, u} (\eta_u)^\vee * (\phi_\theta f).$$

Από την κατασκευή της η_u έχουμε ότι ο η_u^\vee φθίνει απότομα αν $|x| \gtrsim R^{(1-\delta)/2}$. Για κάθε δίσκο θ , επιλέγουμε ομαλές συναρτήσεις αποκοπής $\tilde{\phi}_\theta$ ώστε $\text{supp}(\tilde{\phi}_\theta) \subseteq \theta$ και κάθε μία από τις $\tilde{\phi}_\theta$ είναι ίση με 1 σε μία $cR^{-1/2}$ -περιοχή του $\text{supp}(\tilde{\phi}_\theta)$ για κάποια μικρή σταθερά $c > 0$. Ορίζουμε

$$f_{\theta, u} = \tilde{\phi}_\theta(\eta_u^\vee * (\phi_\theta f)),$$

για την οποία ισχύει

$$\|f_{\theta, u} - \eta_u^\vee * (\phi_\theta f)\|_\infty \leq \text{RapDec}(R)\|f\|_2.$$

Οι όροι της μορφής $\text{RapDec}(R)\|f\|_2$ είναι αμελητέοι στις εκτιμήσεις μας. Στο κεφάλαιο 3 συναντήσαμε όρους της τάξης R^{-1000} κατά τη διάσπαση σε wave packets οι οποίοι όπως είδαμε ήταν αμελητέοι λόγω της επιλογής αρκετά μεγάλης ακτίνας R . Έτσι,

$$f = \sum_{\theta, u} f_{\theta, u} + \text{Err} \text{ με } \|\text{Err}\|_\infty \leq \text{RapDec}(R)\|f\|_2.$$

Διατηρούμε τον συμβολισμό $f \stackrel{\circ}{=} \sum_{\theta, u} f_{\theta, u}$ για εκτιμήσεις της παραπάνω μορφής.

Οι συναρτήσεις $f_{\theta, u}$ είναι επίσης ανά δύο σχεδόν ορθογώνιες, δηλαδή ισχύει

$$\left\| \sum_{(\theta, u) \in \mathbb{W}} f_{\theta, u} \right\|_2^2 \sim \sum_{(\theta, u) \in \mathbb{W}} \|f_{\theta, u}\|_2^2,$$

για κάθε σύνολο \mathbb{W} από ζεύγη (θ, u) . Αυτό έπεται άμεσα από το γεγονός ότι η οικογένεια των φορέων $(\text{supp}(f_{\theta, u}))_{(\theta, u)}$ είναι τοπικά πεπερασμένη. Ονομάζουμε wave packets τις συναρτήσεις $Ef_{\theta, u}$.

Ορισμός 4.1.1. Έστω ω_θ το κέντρο ενός δίσκου θ . Ορίζουμε

$$T_{\theta, u} = \{(x', x_n) \in B_R : |x' + 2x_n\omega_\theta + u| \leq R^{1/2+\delta}\}$$

ως τον κύλινδρο στον οποίο περιέχεται ουσιαδώς ο φορέας του $Ef_{\theta, u}$.

Τον ορισμό του κυλίνδρου ως αυτού στον οποίο περιέχεται ουσιαστικά ο φορέας του $Ef_{\theta,u}$ δικαιολογούμε με το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.1.2. *Αν $x \in B_R \setminus T_{\theta,u}$, τότε*

$$|Ef_{\theta,u}(x)| \leq \text{RapDec}(R)\|f\|_2.$$

Έχουμε αποδείξει το παραπάνω λήμμα στο Κεφάλαιο 3. Το διατυπώνουμε ξανά ως αφορμή για να μελετήσουμε πιο αναλυτικά τη διάσπαση που κάναμε.

Ο κύλινδρος $T_{\theta,u}$ έχει μήκος R κι ακτίνα $\sim R^{1/2+\delta}$. Ο άξονας του δείχνει προς την κατεύθυνση $G(\omega)$, όπου $G(\omega)$ το μοναδιαίο διάνυσμα

$$G(\omega) = \frac{(-2\omega_1, \dots, -2\omega_{n-1}, 1)}{|(-2\omega_1, \dots, -2\omega_{n-1}, 1)|}.$$

Για κάθε $\omega \in B_2^{n-1}$ ορίζουμε τη συχνότητα $\xi(\omega)$, η οποία λόγω του τύπου του Ef για το παραβολοειδές ισούται με $\xi(\omega) = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, |\omega|^2)$. Συμβολίζουμε επίσης με $\xi(\theta)$ το σύνολο των συχνοτήτων των $\omega \in \theta$. Ορίζουμε δηλαδή $\xi(\theta) = \{\xi(\omega) \mid \omega \in \theta\}$.

Ορισμός 4.1.3. Έστω \mathbb{W}_α ένα σύνολο από ζεύγη (θ, u) . Λέμε ότι η f είναι συγκεντρωμένη σε wave packets από το \mathbb{W}_α αν

$$f \stackrel{O}{=} \sum_{(\theta,u) \in \mathbb{W}_\alpha} f_{\theta,u} := f_\alpha.$$

Με τον τρόπο που ορίσαμε σε αυτό το κεφάλαιο τη διάσπαση της f σε wave packets μπορούμε με ελάχιστους υπολογισμούς να αποδείξουμε ξανά το Πόρισμα 3.3.11 του Κεφαλαίου 3. Για το σκοπό αυτό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν σταθεροποιήσουμε ένα $x_n \in \mathbb{R}$ και περιορίσουμε τον Ef στο $\mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n\}$, τότε αν γράψουμε $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_2^{n-1}$ μπορούμε να τον εκφράσουμε ως:

$$Ef(x', x_n) = (e^{ix_n|\omega|^2})^\vee(x'),$$

άρα από το θεώρημα Plancherel έχουμε

$$\|Ef\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n\})} = \|f\|_2. \quad (4.4)$$

Έτσι, από το θεώρημα Fubini και το γεγονός ότι $B_R^n \subseteq [-R, R] \times B_R^{n-1}$ έχουμε

$$\int_{B_R} |Ef|^2 \leq \int_{-R}^R \int_{B_R^{n-1}} |Ef|^2 dx' dx_n \leq 2R\|f\|_2.$$

Επομένως, $\|Ef\|_{L^2(B_R)} \leq \sqrt{2}R^{1/2}\|f\|_2$.

Παρουσιάζουμε ακόμα δύο λήμματα που θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω.

Λήμμα 4.1.4. *Υποθέτουμε ότι η f είναι συγκεντρωμένη σε wave packets από κάποιο σύνολο \mathbb{W} και ότι για κάθε ζεύγος $(\theta, u) \in \mathbb{W}$ ισχύει*

$$T_{\theta,u} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n\}) \subseteq B^{n-1}(z_0, r) \times \{x_n\}.$$

Τότε, $\|Ef\|_{L^2(B^{n-1}(z_0, r) \times \{x_n\})} \stackrel{O}{=} \|f\|_2$.

Το παραπάνω λήμμα είναι άμεσο πόρισμα της (4.4) και του Λήμματος 4.1.2.

Λήμμα 4.1.5. Υποθέτουμε ότι η f είναι συγκεντρωμένη σε wave packets από κάποιο σύνολο \mathbb{W} και ότι για κάθε ζεύγος $(\theta, u) \in \mathbb{W}$ ισχύει $T_{\theta,u} \cap B(z, r) \neq \emptyset$ για κάποιο $r \geq R^{1/2+\delta}$. Τότε

$$\|Ef\|_{L^2(B(z,10r))}^2 \sim r\|f\|_2.$$

Απόδειξη. Γράφουμε $z = (z', z_n)$. Για κάθε $x_n \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $|x_n - z_n| \leq r$ και κάθε ζεύγος $(\theta, u) \in \mathbb{W}$, η τομή $T_{\theta,u} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n\})$ περιέχεται στη μπάλα $B(z, 5r)$. Από το παραπάνω λήμμα έχουμε

$$\|Ef\|_{L^2(B(z,5r) \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n\})} \stackrel{\circ}{=} \|f\|_2.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini το ζητούμενο έπεται. \square

4.2 Ευρείες νόρμες $\text{BL}_{k,A}^p$

Για την απόδειξη του θεωρήματος 4.0.1 θα χρησιμοποιήσουμε ένα καινούριο εργαλείο που γενικεύει κατάλληλα τον ορισμό του α -ευρέος κομματιού του Ef που μελετήσαμε στο τρίτο κεφάλαιο, τις ευρείες "νόρμες" $\text{BL}_{k,A}^p$. Για να τις κατασκευάσουμε ξεκινάμε με μία συνάρτηση f ορισμένη στην μπάλα B_2^{n-1} και κάνουμε μία διάσπαση με αρκετές ομοιότητες με αυτή που κάναμε στη διάσπαση σε wave packets στην προηγούμενη ενότητα. Σταθεροποιούμε μία μεγάλη σταθερά $K > 0$. Χωρίζουμε την B_2^{n-1} σε μπάλες τ ακτίνας K^{-1} και γράφουμε $f = \sum_{\tau} f_{\tau}$, όπου $\text{supp}(f_{\tau}) \subseteq \tau$. Για κάθε ακτίνα $R > 0$, αρκετά μεγαλύτερη και από το K , χωρίζουμε την μπάλα B_R^n σε μπάλες $B_{K^2}^n$ ακτίνας K^2 . Για κάθε μπάλα $B_{K^2}^n$ λέμε ότι μία μπάλα $\tau \subseteq B_2^{n-1}$ συνεισφέρει σημαντικά στην $B_{K^2}^n$ αν

$$\int_{B_{K^2}^n} |Ef_{\tau}|^p \gtrsim K^{-10n} \int_{B_{K^2}^n} |Ef|^p.$$

Ορίζουμε $S(B_{K^2}^n)$ ως το σύνολο των μπαλών τ που συνεισφέρουν σημαντικά στην $B_{K^2}^n$.

Ορισμός 4.2.1. Έστω V_1, \dots, V_j υποσύνολα της B_2^{n-1} . Λέμε ότι τα V_i είναι εγκάρσια αν για κάθε επιλογή υποσυνόλων $u_i \subseteq V_i$, οι κατευθύνσεις $G(u_1), \dots, G(u_j)$ είναι ποιοτικά εγκάρσιες, δηλαδή ικανοποιούν την

$$|G(u_1) \wedge \dots \wedge G(u_j)| \gtrsim 1.$$

Χωρίζουμε τις μπάλες $B_{K^2}^n$ σε δύο κατηγορίες σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό. Λέμε ότι μία μπάλα $B_{K^2}^n$ είναι k -εγκάρσια αν υπάρχουν k το πλήθος εγκάρσιες μπάλες τ που συνεισφέρουν σημαντικά στην $B_{K^2}^n$. Σε διαφορετική περίπτωση λέμε ότι η $B_{K^2}^n$ είναι k -μη εγκάρσια. Αν μία μπάλα $B_{K^2}^n$ είναι k -μη εγκάρσια, όλες οι κατευθύνσεις $G(\tau)$ των μπαλών τ που συνεισφέρουν σημαντικά περιέχονται στην K^{-1} περιοχή ενός $(k-1)$ -επιπέδου του \mathbb{R}^{n-1} . Πιο συγκεκριμένα, ισχύει $|S(B_{K^2}^n)| \lesssim K^{k-2}$.

Θα χρειαστούμε κάποιο συμβολισμό πριν ορίσουμε τις $\text{BL}_{k,A}^p$. Ορίζουμε

$$G(\tau) = \bigcup_{\theta \subseteq \tau} G(\theta).$$

Το σύνολο $G(\tau) \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ είναι ένας σφαιρικός τομέας ακτίνας $\sim K^{-1}$ που περιέχει όλες τις δυνατές κατευθύνσεις των wave packets στον Ef_{τ} . Για κάθε μπάλα $B_{K^2}^n$, για να ορίσουμε την k -ευρεία νόρμα, αγνοούμε τις συνεισφορές των f_{τ} για τις οποίες οι κατευθύνσεις $G(\tau)$ περιέχονται σε κάποια $(k-1)$ -επίπεδα και καταγράφουμε τη μεγαλύτερη εναπομείνουσα συνεισφορά. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $A \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ορίζουμε

$$\mu_{Ef}(B_{K^2}^n) = \min_{\substack{V_1, \dots, V_A \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(V_i) = k-1}} \left(\max_{\substack{\tau: \mathcal{A}(G(\tau), V_i) > K^{-1} \\ \forall i=1, \dots, A}} \int_{B_{K^2}^n} |Ef_{\tau}|^p \right).$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το k -ευρύ μέρος της $\|Ef\|_{L^p(B_R)}$ ως

$$\|Ef\|_{\mathbf{BL}_{k,A}^p(B_R)}^p = \sum_{B_{K^2} \subseteq B_R} \mu_{Ef}(B_{K^2}). \quad (4.5)$$

Διατυπώνουμε παρακάτω το βασικό αποτέλεσμα για τις $\mathbf{BL}_{k,A}^p$, το οποίο θα αποδείξουμε στην Ενότητα 4.6. Θα το χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη παράγραφο για να αποδείξουμε το Θεώρημα 4.0.1.

Θεώρημα 4.2.2. *Για κάθε $2 \leq k \leq n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει σταθερά A ώστε για κάθε K ισχύει η εκτίμηση:*

$$\|Ef\|_{\mathbf{BL}_{k,A}^p(B_R)}^p \lesssim_{K,\varepsilon} R^\varepsilon \|f\|_{L^2(B_2^{n-1})}, \quad (4.6)$$

για κάθε $p \geq \bar{p}(k, n) = 2 \cdot \frac{n+k}{n+k-2}$.

Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό θα γράφουμε

$$\mu_{Ef}(B_{K^2}) = \min_{V_1, \dots, V_A} \left(\max_{\tau \notin V_i} \int_{B_{K^2}} |Ef_\tau|^p \right),$$

κι έτσι γίνεται ευκολότερο να δούμε ότι αν $A = 0$, τότε $\mu_{Ef}(B_{K^2}) = \max_{\tau} \int_{B_{K^2}} |Ef_\tau|^p$. Για οποιαδήποτε πεπερασμένη ένωση μπαλών B_{K^2} , έστω M , ορίζουμε την k -ευρεία νόρμα

$$\|Ef\|_{\mathbf{BL}_{k,A}^p(M)}^p = \sum_{B_{K^2} \subseteq M} \mu_{Ef}(B_{K^2}).$$

Αν και η $\mathbf{BL}_{k,A}^p$ δεν είναι νόρμα, ικανοποιεί ασθενείς εκδοχές της τριγωνικής ανισότητας και της ανισότητας Hölder και είναι λογαριθμικά κυρτή. Οι εκδοχές αυτές της τριγωνικής ανισότητας και της ανισότητας Hölder, όπως θα δούμε παρακάτω θα μας βοηθήσουν να αποδείξουμε το θεώρημα 4.2.2. Κλείνουμε την παράγραφο διατυπώνοντας κι αποδεικνύοντας τις δύο αυτές εκδοχές.

Πρόταση 4.2.3. *Έστω $f = g + h$ και $A = A_1 + A_2$, όπου A_1, A_2 μη αρνητικοί ακέραιοι. Τότε,*

$$\|Ef\|_{\mathbf{BL}_{k,A}^p(M)} \lesssim \|Eg\|_{\mathbf{BL}_{k,A_1}^p(M)} + \|Eh\|_{\mathbf{BL}_{k,A_2}^p(M)}.$$

Απόδειξη. Για κάθε μπάλα $B_{K^2} \subseteq M$ έχουμε

$$\min_{V_1, \dots, V_A} \left(\max_{\tau \notin V_i} \int_{B_{K^2}} |Ef_\tau|^p \right) \lesssim \min_{V_1, \dots, V_{A_1}} \left(\max_{\tau \notin \cup_{i=1}^{A_1} V_i} \int_{B_{K^2}} |Eg_\tau|^p \right) + \min_{V_{A_1+1}, \dots, V_A} \left(\max_{\tau \notin \cup_{i=A_1+1}^A V_i} \int_{B_{K^2}} |Eh_\tau|^p \right),$$

από τον ορισμό της $\mathbf{BL}_{k,A}^p$ και την τριγωνική ανισότητα. Αθροίζοντας πάνω από τις μπάλες $B_{K^2} \subseteq M$, η πρόταση έπεται. \square

Όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος A , τόσο περισσότερες φορές μπορούμε να εφαρμόσουμε την τελευταία πρόταση. Ο λόγος για τον οποίο μας ενδιαφέρει αυτό είναι ότι η $\mathbf{BL}_{k,A}^p$ συμπεριφέρεται σαν νόρμα αν εφαρμόσουμε την παραπάνω ασθενή μορφή της τριγωνικής ανισότητας $O_\varepsilon(1)$ φορές κι αν επιλέξουμε κατάλληλα μεγάλη την παράμετρο $A = A(\varepsilon)$.

Πρόταση 4.2.4. *Έστω $1 \leq p, p_1, p_2 < \infty$ και $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ με $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ώστε $\frac{1}{p} = \frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2}$. Υποθέτουμε επίσης ότι $A = A_1 + A_2$. Τότε,*

$$\|Ef\|_{\mathbf{BL}_{k,A}^p(M)} \leq \|Ef\|_{\mathbf{BL}_{k,A_1}^{p_1}(M)}^{\alpha_1} \|Ef\|_{\mathbf{BL}_{k,A_2}^{p_2}(M)}^{\alpha_2}.$$

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο. Πράγματι, αρκεί να σπάσουμε τα maximum και minimum όπως στην απόδειξη της παραπάνω πρότασης και να χρησιμοποιήσουμε τη λογαριθμική κυρτότητα της p -νόρμας. \square

4.2.1 Απόδειξη του Θεωρήματος 4.0.1

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύουμε το Θεώρημα 4.0.1. Ένα βασικό αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 4.2.5 (Bourgain). *Θεωρούμε μία συνάρτηση $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier έχει φορέα εντός της K^{-2} -περιοχής του παραβολοειδούς. Χωρίζουμε αυτή την περιοχή σε πλάκες τ με $(d-1)$ -μεγάλες διευθύνσεις μήκους K^{-1} και μία μικρή διεύθυνση μήκους K^{-2} . Γράφουμε $g = \sum_{\tau} g_{\tau}$, όπου $\hat{g}_{\tau} = \hat{g}\mathcal{X}_{\tau}$. Τότε, σε κάθε μπάλα ακτίνας K^2 και για κάθε $2 \leq p \leq 2\frac{d}{d-1}$ ισχύει*

$$\|g\|_{L^p(B_{K^2})} \lesssim_{\delta} K^{\delta} \left(\sum_{\tau} \|g_{\tau}\|_{L^p(W_{B_{K^2}})}^2 \right)^{1/2},$$

όπου το $W_{B_{K^2}}$ είναι ένα μέτρο στην B_{K^2} με βάρος W το οποίο είναι σχεδόν το μέτρο όγκου στην B_{K^2} και φθίνει απότομα εκτός της μπάλας.

Αν στο παραπάνω θεώρημα θέσουμε $d = k - 1$ μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.2.6.

$$\left(\int_{B_{K^2}} \left| \sum_{\tau \in V_i} Ef_{\tau} \right|^p \right)^{1/p} \lesssim_{\delta} K^{\delta} \left(\sum_{\tau \in V_i} \left(\int W_{B_{K^2}} |Ef_{\tau}|^p \right)^{2/p} \right)^{1/2}.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε συντεταγμένες (u, v) στην B_{K^2} , όπου τα u, v είναι παράλληλα και κάθετα αντίστοιχα στον υπόχωρο V_i . Γράφουμε B_{u,K^2} και B_{v,K^2} για τις μπάλες ακτίνας K^2 στις u και v συντεταγμένες. Αν περιορίσουμε τον Ef_{τ} στο παράλληλο με τον V_i $(k-1)$ -επίπεδο $\{u\} \times \mathbb{R}^{k-1}$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του έχει φορέα εντός της K^{-2} -περιοχής κάποιου δίσκου τ' του παραβολοειδούς. Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε

$$\left\| \sum_{\tau \in V_i} Ef_{\tau} \right\|_{L^p(\{u\} \times B_{v,K^2})} \lesssim_{\delta} K^{\delta} \left(\sum_{\tau \in V_i} \|Ef_{\tau}\|_{L^p(\{u\} \times W_{B_{v,K^2}})}^2 \right)^{1/2}.$$

Από το θεώρημα Fubini μπορούμε να γράψουμε

$$\left\| \sum_{\tau \in V_i} Ef_{\tau} \right\|_{L^p(B_{K^2})} = \left(\int_{B_{u,K^2}} \int_{B_{v,K^2}} \left| \sum_{\tau \in V_i} Ef_{\tau} \right|^p \right)^{1/p} \lesssim \left(\int_{B_{u,K^2}} \int_{\{u\} \times B_{v,K^2}} \left| \sum_{\tau \in V_i} Ef_{\tau} \right|^p \right)^{1/p}.$$

Από την ανισότητα Minkowski, η τελευταία ποσότητα φράσσεται από

$$\begin{aligned} \int_{B_{u,K^2}} \left(\left\| \sum_{\tau \in V_i} Ef_{\tau} \right\|_{L^p(\{u\} \times B_{v,K^2})} \right) &\lesssim_{\delta} K^{\delta} \int_{B_{u,K^2}} \left(\sum_{\tau \in V_i} \|Ef_{\tau}\|_{L^p(\{u\} \times W_{B_{v,K^2}})}^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim_{\delta} K^{\delta} \left(\sum_{\tau \in V_i} \|Ef_{\tau}\|_{L^p(W_{B_{K^2}})}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

όπως θέλαμε. □

Πρόταση 4.2.7. *Υποθέτουμε ότι για κάθε $K, \varepsilon > 0$, ο E ικανοποιεί την k -ευρεία εκτίμηση:*

$$\|Ef\|_{BL_{k,A}^p(B_R)} \lesssim_{K,\varepsilon} R^{\varepsilon} \|f\|_q,$$

για κάποιες σταθεροποιημένες ποσότητες k, A, p, q και για κάθε ακτίνα $R > 0$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι εκθέτες p, q ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$p \leq q \leq \infty \text{ και } 2 \cdot \frac{2n - k + 2}{2n - k} \leq p \leq 2 \cdot \frac{k - 1}{k - 2}.$$

Τότε,

$$\|Ef\|_{L^p(B_R)} \lesssim_\varepsilon R^\varepsilon \|f\|_q.$$

Απόδειξη. Έχουμε υποθέσει ότι ισχύει μία εκτίμηση της μορφής:

$$\sum_{B_{K^2} \subseteq B_R} \min_{V_1, \dots, V_A} \max_{\tau \notin V_i} \int_{B_{K^2}} |Ef_\tau|^p \lesssim_{K, \varepsilon} R^{\varepsilon p} \|f\|_q^p.$$

Για κάθε μπάλα B_{K^2} επιλέγουμε τους $(k-1)$ -υποχώρους V_1, \dots, V_A που υλοποιούν το minimum. Τότε,

$$\int_{B_{K^2}} |Ef|^p \lesssim K^{O(1)} \max_{\tau \notin V_i} \int_{B_{K^2}} |Ef_\tau|^p + \sum_{i=1}^A \left| \int_{B_{K^2}} \sum_{\tau \in V_i} Ef_\tau \right|^p.$$

Μπορούμε να φράξουμε τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους άμεσα από την υπόθεση. Για τον δεύτερο όρο θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.2.5. Το πλήθος των $\tau \in V_i$ είναι $\lesssim K^{k-2}$. Έτσι,

$$\int_{B_{K^2}} \left| \sum_{\tau \in V_i} Ef_\tau \right|^p \lesssim_\delta K^\delta \left(\sum_{\tau \in V_i} \|Ef_\tau\|_{L^p(W_{B_{K^2}})}^2 \right)^{1/2},$$

από το Λήμμα 4.2.6. Από την ανισότητα Hölder, ο τελευταίος όρος είναι

$$\lesssim_\delta K^\delta K^{(k-2)(p/2-1)} \sum_{\tau \in V_i} \int W_{B_{K^2}} |Ef_\tau|^p.$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε μία πιο ασθενή μορφή της τελευταίας ανισότητας. Θα χρησιμοποιήσουμε την

$$\int_{B_{K^2}} \left| \sum_{\tau \in V_i} Ef_\tau \right|^p \lesssim_\delta K^{(k-2)(\frac{p}{2}-1)+\delta} \sum_{\tau} \int W_{B_{K^2}} |Ef_\tau|^p. \quad (4.7)$$

Αθροίζουμε πάνω από όλες τις $B_{K^2} \subseteq B_R$ και πάνω από όλα τα $i = 1, \dots, A$ και έχουμε

$$\sum_{B_{K^2} \subseteq B_R} \sum_{i=1}^A \left| \sum_{\tau \in V_i} Ef_\tau \right|^p \lesssim_\delta K^{(k-2)(\frac{p}{2}-1)+\delta} \sum_{\tau} \int W |Ef_\tau|^p,$$

όπου $W = \sum_{B_{K^2} \subseteq B_R} W_{B_{K^2}}$. Από τις υποθέσεις για τα βάρη $W_{B_{K^2}}$ έχουμε ότι $W \lesssim 1$ εντός της B_{2R} και $W \leq \text{RapDec}(R)$ εκτός της. Έτσι,

$$\sum_{B_{K^2} \subseteq B_R} \sum_{i=1}^A \left| \sum_{\tau \in V_i} Ef_\tau \right|^p \lesssim_\delta K^{(k-2)(\frac{p}{2}-1)+\delta} \sum_{\tau} \int_{B_{2R}} |Ef_\tau|^p + \text{RapDec}(R) \|f\|_q^p.$$

Αν συνδυάσουμε την τελευταία ανισότητα με την εκτίμηση για το ευρύ μέρος έχουμε

$$\int_{B_R} |Ef|^p \leq C(K, \varepsilon) R^{\varepsilon p} \|f\|_q^p + CK^\delta K^{(k-2)(\frac{p}{2}-1)} \sum_{\tau} \int_{B_{2R}} |Ef_\tau|^p. \quad (4.8)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στην ακτίνα R για να αποδείξουμε την πρόταση. Αναζητούμε μία εκτίμηση της μορφής:

$$\int_{B_R} |Ef|^p \lesssim \tilde{C}(\varepsilon) R^{\varepsilon p} \|f\|_q^p, \quad (4.9)$$

η οποία υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε ακτίνα $< \frac{R}{2}$. Θα χρησιμοποιήσουμε και το parabolic rescaling που εισαγάγαμε στο τρίτο κεφάλαιο για να φράξουμε τους όρους $\int |Ef_\tau|^p$.

Σε κάθε μπάλα τ θεωρούμε τις εξής συντεταγμένες:

Έστω ω_τ το κέντρο της τ . Ορίζουμε $\bar{\omega} \in B_2^{n-1}$ ως $\bar{\omega} = K(\omega - \omega_\tau)$. Έτσι, η φάση στις νέες συντεταγμένες γράφεται

$$x_1\omega_1 + \dots + x_{n-1}\omega_{n-1} + x_n|\omega|^2 = F(x) + \bar{x}_1\bar{\omega}_1 + \dots + \bar{x}_{n-1}\bar{\omega}_{n-1} + \bar{x}_n|\bar{\omega}|^2,$$

όπου $F(x)$ είναι μία συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από το x και

$$\bar{x}_i = \begin{cases} K^{-1}(x_i + x_n \mathbf{pr}_i \omega_\tau), & i = 1, \dots, n-1 \\ K^{-2}x_n, & i = n. \end{cases}$$

Η απεικόνιση $\Phi : x \mapsto \bar{x}$, που απεικονίζει την B_R στην $B_{CK^{-1}R}$, είναι γραμμική κι έχει πίνακα $\text{diag}(K^{-1}, \dots, K^{-1}, K^{-2})$ και ορίζουσα $K^{-(n+1)}$. Ορίζουμε

$$\bar{f}_\tau(\bar{\omega}) = f_\tau(K^{-1}\bar{\omega} + \omega_\tau),$$

ώστε να ισχύει $|Ef_\tau(x)| = K^{-(n+1)}|E\bar{f}_\tau(\bar{x})| = K^{-(n+1)}|E\bar{f}_\tau(\Phi(x))|$.

Από την επαγωγική υπόθεση για την ακτίνα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (4.9) ισχύει για την \bar{f}_τ σε κάθε μπάλα ακτίνας $CK^{-1}R < R/2$. Μπορούμε δηλαδή να υποθέσουμε ότι ισχύει μία εκτίμηση

$$\int_{B_{CK^{-1}R}} |E\bar{f}_\tau|^p \lesssim \tilde{C}(\varepsilon) R^{\varepsilon p} K^{-\varepsilon p} \|\bar{f}_\tau\|_q^p.$$

Από τους ορισμούς των \bar{f}_τ και $\bar{\omega}$ και μία αλλαγή μεταβλητής, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{B_{2R}} |Ef_\tau|^p &\lesssim |\det(\Phi)|^{-1} K^{-(n-1)p} \int_{B_{CK^{-1}R}} |E\bar{f}_\tau|^p \\ &\lesssim \tilde{C}(\varepsilon) R^{\varepsilon p} K^{n+1-\varepsilon p-(n-1)p} \|\bar{f}_\tau\|_q^p \\ &= \tilde{C}(\varepsilon) R^{\varepsilon p} K^{n+1-\varepsilon p-(n-1)p} K^{(n-1)p/q} \|f_\tau\|_q^p. \end{aligned}$$

Έτσι, η (4.8) γίνεται

$$\int_{B_R} |Ef|^p \leq C(K, \varepsilon) R^{\varepsilon p} \|f\|_q^p + \tilde{C}(\varepsilon) C R^\varepsilon K^\mu \sum_\tau \|f_\tau\|_q^p,$$

όπου $\mu = (k-2)(p/2-1) + n+1 - (n-1)p - \varepsilon p + \delta + \frac{(n-1)p}{q}$. Αφού $p \leq q$ και το πλήθος των μπαλών τ είναι K^{n-1} , έχουμε

$$\sum_\tau \|f_\tau\|_q^p \leq K^{(n-1)(1-\frac{p}{q})} \|f\|_q^p.$$

Συνδυάζουμε τα παραπάνω και παίρνουμε:

$$\int_{B_R} |Ef|^p \leq C(K, \varepsilon) R^{\varepsilon p} \|f\|_q^p + \tilde{C}(\varepsilon) C R^\varepsilon K^{\mu+(n-1)(1-\frac{p}{q})} \|f\|_q^p.$$

Επιλέγουμε πρώτα το K και μετά το $\tilde{C}(\varepsilon)$ ώστε κάθε ένας από τους δύο όρους του δεξιού μέλους να φράσσεται από $\frac{1}{2}\tilde{C}(\varepsilon)R^{\varepsilon p} \|f\|_p^p$. Επιλέγουμε επίσης $0 < \delta < \varepsilon$. Έχοντας επιλέξει όλες τις παραμέτρους, η επαγωγή ολοκληρώνεται δεδομένου ότι ο εκθέτης

$$\mu + (n-1)(1-p/q) = (k-2)(p/2-1) + 2n - (n-1)p - \varepsilon p + \delta$$

του K είναι αρνητικός. Ισοδύναμα, αν ισχύει:

$$(k-2)(p/2-1) + (n+1) + (n-1)(1-p) \leq 0.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$2 \cdot \frac{2n-k+2}{2n-k} \leq p,$$

η οποία μας δίνει το κάτω φράγμα της πρότασης. Το άνω φράγμα προκύπτει άμεσα από την επιλογή $d = k-1$ που κάναμε για την απόδειξη του Λήμματος 4.2.6. \square

Με την τελευταία πρόταση πηγαίνουμε από ένα πολυγραμμικό αποτέλεσμα σε ένα γραμμικό αποτέλεσμα, για κατάλληλους εκθέτες (p, q) . Η απόδειξη αυτή εμφανίζεται αρχικά στο paper των Bourgain-Guth. Ο Guth γενίκευσε αυτό το αποτέλεσμα για τις ευρείες νόρμες. Με την Πρόταση 4.2.7 και το Θεώρημα 4.2.2 μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 4.0.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.0.1. Η απόδειξη θα γίνει διακρίνοντας περιπτώσεις για το n . Αν είναι άρτιος, επιλέγουμε $k = \frac{n}{2} + 1$. Το Θεώρημα 4.2.2 μας εγγυάται ότι ισχύει η ανισότητα

$$\|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)} \lesssim R^\varepsilon \|f\|_2 \lesssim R^\varepsilon \|f\|_p,$$

για p ελάχιστα μεγαλύτερο από $\bar{p}(k, n) = 2 \cdot \frac{n+k}{n+k-2} = 2 \cdot \frac{2n-k+2}{2n-k} = 2 \cdot \frac{3n+2}{3n-2}$, λόγω της επιλογής του k . Από την Πρόταση 4.2.7 έχουμε

$$\|Ef\|_{L^p(B_R)} \lesssim R^\varepsilon \|f\|_p, \quad p \geq \bar{p}(k, n). \quad (4.10)$$

Από την τετριμμένη L^∞ εκτίμηση $\|Ef\|_{L^\infty(B_R)} \lesssim \|f\|_\infty$ και με παρεμβολή έχουμε την (4.10) για όλα τα $p > \bar{p}(k, n)$. Από το ε -removal του Tao, έχουμε ότι

$$\|Ef\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(B_2^{n-1})}, \quad p > 2 \cdot \frac{3n+2}{3n-2}.$$

Αν ο n είναι περιττός, επιλέγουμε $k = \frac{n+1}{2}$ κι ακολουθούμε την απόδειξη στην περίπτωση που ο n είναι άρτιος με τη μόνη διαφορά ότι στην περίπτωση αυτή ισχύει $\bar{p}(k, n) = 2 \cdot \frac{n+k}{n+k-2} > 2 \cdot \frac{2n-k+2}{2n-k}$ και η απόδειξη του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί. \square

Το κεντρικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου έχει αποδειχθεί. Όλο το υπόλοιπο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στα αποτελέσματα που χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε το Θεώρημα 4.2.2 και στην απόδειξή του.

4.3 Αποτελέσματα από την Αλγεβρική Γεωμετρία

Έστω $P_1, \dots, P_{n-m} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Συμβολίζουμε με $Z_{P_1, \dots, P_{n-m}}$ την αλγεβρική επιφάνεια των κοινών τους ριζών. Σε όλο το κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε σε μια ειδική κλάση αλγεβρικών επιφανειών, τις εγκάρσιες πλήρεις τομές.

Ορισμός 4.3.1. Το σύνολο $Z = Z_{P_1, \dots, P_{n-m}}$ που ορίσαμε παραπάνω λέγεται εγκάρσια πλήρης τομή (transverse complete intersection) αν

$$\nabla P_1(x) \wedge \dots \wedge \nabla P_{n-m}(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in Z.$$

Παρατήρηση 4.3.2. Μία εγκάρσια πλήρης τομή $Z_{P_1, \dots, P_{n-m}}$ είναι διαφορική πολυπλοκότητα διάστασης m .

Ο λόγος για τον οποίο μας ενδιαφέρουν οι εγκάρσιες πλήρεις τομές θα φανεί παρακάτω στο κεφάλαιο. Μία αλγεβρική επιφάνεια δεν είναι πάντα εγκάρσια πλήρης τομή, αλλά αν μας δοθεί μία αλγεβρική επιφάνεια, τότε έχουμε έναν μηχανισμό για να κατασκευάζουμε από αυτήν μία εγκάρσια πλήρη τομή σύμφωνα με το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.3.3. Αν $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, τότε σχεδόν για κάθε $c_0 \in \mathbb{R}$, η αλγεβρική πολυπλοκότητα Z_{P+c_0} είναι εγκάρσια πλήρης τομή. Γενικότερα, αν η $Z = Z_{P_1, \dots, P_{n-m}}$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή, τότε σχεδόν για κάθε $c_0 \in \mathbb{R}$, η $Z_{P_1, \dots, P_{n-m}, P+c_0}$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα βασιστεί στο Θεώρημα του Sard που χρησιμοποιήσαμε και στο 3ο Κεφάλαιο. Η $P : Z \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ , άρα σχεδόν κάθε $y \in \mathbb{R}$ είναι κανονική τιμή του. Αν όμως το $-c_0$ είναι κανονική τιμή του P , τότε $\nabla P(x) \neq 0$ όταν $P(x) + c_0 = 0$. Γενικά, η $P : Z \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ συνάρτηση μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων, άρα σχεδόν κάθε $y \in \mathbb{R}$ είναι κανονική τιμή της. Αν $x \in Z$ και το $P(x)$ είναι κανονική τιμή, τότε $d_x P \neq 0$, όπου

$$dP : T_x Z \rightarrow T_{P(x)} \mathbb{R}$$

το διαφορικό του P στο x . Αυτό σημαίνει ότι

$$\nabla P_1(x) \wedge \dots \wedge \nabla P_{n-m}(x) \wedge \nabla P(x) \neq 0.$$

Αν όμως το $-c_0$ είναι κανονική τιμή του P , τότε η $Z_{P_1, \dots, P_{n-m}, P+c_0}$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή, όπως θέλαμε. \square

Στο τρίτο κεφάλαιο διατυπώσαμε κι αποδείξαμε το polynomial partitioning του Guth. Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω μορφή του.

Θεώρημα 4.3.4. Αν $W \geq 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ με $\deg Q_k \lesssim 2^{k/n}$ με την εξής ιδιότητα: Αν $S \geq 1$ και $\sigma_1, \dots, \sigma_S \in \{-1, +1\}$, τότε

$$\int_{\substack{\text{sgn}(Q_s) = \sigma_s \\ 1 \leq s \leq S}} W = 2^{-S} \|W\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Από το Λήμμα 4.1.3. μπορούμε να μεταφέρουμε κάθε Q_s κατά μια μικρή σταθερά q_s και να ορίσουμε $\tilde{Q}_s = Q_s + q_s$ ώστε οι αλγεβρικές επιφάνειες που θα μελετήσουμε να είναι εγκάρσιες πλήρεις τομές. Αν οι σταθερές q_s επιλεγούν αρκετά μικρές έχουμε το ακόλουθο.

Πόρισμα 4.3.5. Αν $S \geq 1$ και $\sigma_1, \dots, \sigma_S \in \{-1, +1\}$, τότε

$$2^{-S-1} \|W\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\substack{\text{sgn}(Q_s) = \sigma_s \\ 1 \leq s \leq S}} W \leq 2^{-S+1} \|W\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Το τελευταίο πόρισμα μας δίνει μία εκδοχή του polynomial partitioning που επιτρέπει τις μικρές μεταφορές κατά q_s που περιγράψαμε.

Θεώρημα 4.3.6. Έστω $W \geq 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για κάθε $D \in \mathbb{N}$ ισχύει το παρακάτω: Υπάρχουν πολυώνυμα Q_1, \dots, Q_S ώστε $\sum \deg Q_s \lesssim D$ και $2^S \sim D^n$. Ορίζουμε

$$P = \prod_{s=1}^S \tilde{Q}_s = \prod_{s=1}^S (Q_s + q_s), \quad c_s \in \mathbb{R}.$$

Ονομάζουμε O_i τα $2^S \sim D^n$ ανοιχτά σύνολα $[Q_s > 0]$ και $[Q_s < 0]$, $s \in \{1, \dots, S\}$. Τότε $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Z}_P = \cup_i O_i$ και αν οι σταθερές c_s επιλεγούν αρκούτως μικρές, τότε για κάθε ένα από τα O_i ισχύει

$$\int_{O_i} W \sim D^{-n} \|W\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Όπως είδαμε, οι αλγεβρικές επιφάνειες $\mathcal{Z}_{\tilde{Q}_s}$ είναι εγκάρσιες πλήρεις τομές για κάθε s , άρα το \mathcal{Z}_P είναι πεπερασμένη ένωση από εγκάρσιες πλήρεις τομές. Αντίστοιχα, αν η $\mathcal{Z}_{P_1, \dots, P_{n-m}}$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή, τότε για κατάλληλη επιλογή σταθερών c_s , η $\mathcal{Z}_{P_1, \dots, P_{n-m}, \tilde{Q}_s}$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή για κάθε s .

4.3.1 Εφαπτόμενοι χώροι αλγεβρικών επιφανειών

Έστω $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{P_1, \dots, P_{n-m}}$ εγκάρσια πλήρης τομή διάστασης m , $m \leq n$. Θα μελετήσουμε υποσύνολα της \mathcal{Z} των οποίων ο εφαπτόμενος χώρος ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες και θα δείξουμε ότι αυτά τα υποσύνολα είναι εγκάρσιες πλήρεις τομές.

Έστω w ένα m -διάνυσμα $\in \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$. Ισχύει $\dim \Lambda^m(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{m}$. Ορίζουμε

$$\mathcal{Z}_w = \{x \in \mathcal{Z} : \nabla P_1(x) \wedge \dots \wedge \nabla P_{n-m}(x) \wedge w = 0\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\nabla P_1(x) \wedge \dots \wedge \nabla P_{n-m}(x) \wedge w \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n) \approx \mathbb{R}$. Θέτουμε

$$g_w = \nabla P_1(x) \wedge \dots \wedge \nabla P_{n-m}(x) \wedge w \in \mathbb{R}_M[x_1, \dots, x_n], \quad \text{όπου } M = \sum_{i=1}^{n-m} \deg(P_i).$$

και παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{Z}_w = \mathcal{Z}_{P_1, \dots, P_{n-m}, g_w}$$

Λήμμα 4.3.7. Σχεδόν για κάθε $w \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$, το \mathcal{Z}_w είναι εγκάρσια πλήρης τομή.

Απόδειξη. Ορίζουμε $g : \mathcal{Z} \times \Lambda^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x, w) = \nabla P_1(x) \wedge \dots \wedge \nabla P_{n-m}(x) \wedge w.$$

Η g είναι ομαλή χωρίς κρίσιμα σημεία αφού η \mathcal{Z} είναι εγκάρσια πλήρης τομή και ο περιορισμός της g στο $\{x\} \times \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ είναι μη μηδενικός φραγμένος γραμμικός τελεστής χωρίς κρίσιμα σημεία. Άρα, η αντίστροφη εικόνα $\mathcal{N} = g^{-1}(\{0\})$ είναι υποπολλαπλότητα της $\mathcal{Z} \times \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ συνδιάστασης 1. Θεωρούμε την προβολή

$$\Pi_2 : \mathcal{N} \rightarrow \Lambda^m(\mathbb{R}^n), \quad (x, w) \mapsto w.$$

Ισχύει $\Pi_2^{-1}(w) = \mathcal{Z}_w \times \{w\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε την Π_2 για να δείξουμε ότι η \mathcal{Z}_w είναι εγκάρσια πλήρης τομή για κάθε κανονική τιμή w της Π_2 .

Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να ελέγξουμε ότι για κάθε x ώστε $(x, w) \in \mathcal{N}$, δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία της g_w στην \mathcal{Z}_w . Ισοδύναμα, αρκεί να ελέγξουμε ότι για όλα τα $x \in \mathcal{Z}$ για τα οποία ισχύει $(x, w) \in \mathcal{N}$, το (x, w) είναι κανονικό σημείο της g_w . Αν το w είναι κανονική τιμή της Π_2 , τότε για κάθε $x \in \mathcal{Z}$ ώστε $(x, w) \in \mathcal{N}$, το σημείο (x, w) είναι κανονικό για την Π_2 .

Έτσι, αρκεί να ελέγξουμε ότι αν το (x, w) είναι κανονικό σημείο της Π_2 , τότε το x είναι κανονικό σημείο της g_w . Έστω $y = (x, w)$ ένα κανονικό σημείο της Π_2 . Το διαφορικό

$$d\Pi_2 : T_y(\mathcal{N}) \rightarrow T_w(\Lambda^m(\mathbb{R}^n)) = \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$$

είναι επιμορφισμός διανυσματικών χώρων. Για τον εφαπτόμενο χώρο $T_y(\mathcal{N})$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_y(\mathcal{N}) &= \{(v, w') \in T_x\mathcal{Z} \times \Lambda^m(\mathbb{R}^n) \mid \mathbf{d}_y g(v, w') = 0\} \\ &= \{(v, w') \in T_x\mathcal{Z} \times \Lambda^m(\mathbb{R}^n) \mid (\mathbf{d}_x g_w)(v) + \nabla P_1(x) \wedge \dots \wedge \nabla P_{n-m}(x) \wedge w' = 0\}. \end{aligned}$$

Αν το x δεν είναι κανονικό σημείο της g_w , τότε $\mathbf{d}_x g_w = 0$ και

$$T_y(\mathcal{N}) = \{(v, w') \in T_x\mathcal{Z} \times \Lambda^m(\mathbb{R}^n) \mid \nabla P_1(x) \wedge \dots \wedge \nabla P_{n-m}(x) \wedge w' = 0\}.$$

Σε αυτή την περίπτωση όμως, το διαφορικό της Π_2

$$\begin{aligned} d\Pi_2 : T_y(\mathcal{N}) &\rightarrow \Lambda^m(\mathbb{R}^n) \\ (v, w') &\mapsto w' \end{aligned}$$

δεν είναι επί. Έτσι, το x είναι κανονικό σημείο της g_w . Η απόδειξη ολοκληρώνεται με το Θεώρημα Sard, αφού σχεδόν κάθε $w \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ είναι κανονική τιμή της Π_2 . Τελικά, η \mathcal{Z}_w είναι εγκάρσια πλήρης τομή σχεδόν για κάθε $w \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$. \square

Θεωρούμε έναν κύλινδρο T ακτίνας r με άξονα ℓ και υποθέτουμε ότι η αλγεβρική επιφάνεια \mathcal{Z}^m του \mathbb{R}^n είναι εγκάρσια πλήρης τομή. Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{Z}_{>\alpha}$ ως

$$\mathcal{Z}_{>\alpha} = \{z \in \mathcal{Z} \mid \angle(T_z \mathcal{Z}, \ell) > \alpha\}.$$

Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε σύνολα της μορφής $\mathcal{Z}_{>\alpha} \cap T$, όπου T ένας κύλινδρος όπως παραπάνω. Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε μία εκδοχή του θεωρήματος του Βέζουτ.

Θεώρημα 4.3.8 (Βέζουτ). *Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{Q_1, \dots, Q_n}$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή στον \mathbb{R}^n . Τότε $|\mathcal{Z}| \leq \prod_{i=1}^n \deg(Q_i)$.*

Μπορούμε να μελετήσουμε τα σύνολα που μας ενδιαφέρουν μέσω του παρακάτω λήμματος.

Λήμμα 4.3.9. *Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{P_1, \dots, P_{n-m}}$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή και ότι κάθε ένα από τα πολυώνυμα P_k έχει βαθμό το πολύ D . Έστω T κύλινδρος όπως παραπάνω. Τότε, για κάθε $\alpha > 0$, η τομή $\mathcal{Z}_{>\alpha} \cap T$ περιέχεται στην ένωση $\lesssim D^n$ μπαθλών ακτίνας $\lesssim \frac{r}{\alpha}$.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο m . Αν $m = 0$, η \mathcal{Z} έχει το πολύ D^n σημεία από το θεώρημα του Βέζουτ και το συμπέρασμα έπεται άμεσα. Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι ο άξονας ℓ του T είναι ο x_n -άξονας. Συμβολίζουμε με T_r την r -περιοχή του x_n -άξονα.

Μπορούμε επίσης με κατάλληλες αλλαγές κλίμακας να περιοριστούμε στις περιπτώσεις $r = 1$ και $\alpha = 1$ και να δείξουμε ότι η τομή $\mathcal{Z}_{>1} \cap T_1$ περιέχεται σε $\lesssim D^n$ μπάλες ακτίνας $\lesssim 1$. Στην αρχή της παραγράφου ορίσαμε την αλγεβρική επιφάνεια \mathcal{Z}_w για τυχόν $w \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ και τη συνάρτηση g_w . Επιλέγουμε $\lesssim 1$ διαφορετικά w ώστε σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathcal{Z} \setminus \cup_w \mathcal{Z}_w$, ο αντίστοιχος εφαπτόμενος χώρος αλλάζει κατά μία γωνία το πολύ 10^{-2} . Τότε, από την ελευθερία στην επιλογή του w μπορούμε να υποθέσουμε ότι η

$$\mathcal{Z}_w = \mathcal{Z}_{P_1, \dots, P_{n-m}, g_w}$$

είναι εγκάρσια πλήρης τομή διάστασης $m - 1$. Ισχύει επίσης ότι $\deg(g_w) \lesssim D$. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση στην \mathcal{Z}_w για $\alpha = \frac{1}{2}$ και $r = 20$. Έχουμε δηλαδή ότι η τομή $(\mathcal{Z}_w)_{>\frac{1}{2}} \cap T_{20}$ περιέχεται σε $\lesssim D^n$ μπάλες ακτίνας $\lesssim 1$. Παρατηρούμε και ότι ισχύει

$$\mathcal{Z}_{>\frac{1}{2}} \cap \mathcal{Z}_w \subseteq (\mathcal{Z}_w)_{>\frac{1}{2}}.$$

Πράγματι, έστω $x \in \mathcal{Z}_{>\frac{1}{2}} \cap \mathcal{Z}_w$. Τότε,

$$\inf_{v \in T_x \mathcal{Z}_w} \angle(v, \ell) \geq \inf_{v \in T_x \mathcal{Z}} \angle(v, \ell) > \frac{1}{2},$$

αφού $T_x \mathcal{Z}_w \subseteq T_x \mathcal{Z}$. Έτσι, $x \in (\mathcal{Z}_w)_{>\frac{1}{2}}$.

Το πλήθος των w που επιλέξαμε είναι $\lesssim 1$, επομένως το σύνολο

$$\cup_w \mathcal{Z}_{\frac{1}{2}} \cap \mathcal{Z}_w \cap T_{20}$$

περιέχεται σε $\lesssim D^n$ μπάλες B_i ακτίνας $\lesssim 1$. Για κάθε i συμβολίζουμε με $10B_i$ τη μπάλα με ίδιο κέντρο και δεκαπλάσια ακτίνα από την B_i και παρατηρούμε ότι ένα μέρος της τομής $\mathcal{Z}_{>1} \cap T_1$ περιέχεται στην ένωση $\cup B_i$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να καλύψουμε και το υπόλοιπο σύνολο

$$A := (\mathcal{Z}_{>1} \cap T_1) \setminus \cup_i 10B_i.$$

Έστω $z \in A$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε μπάλα B_i έχει ακτίνα τουλάχιστον 2, άρα $\text{dist}(z, \cap_i B_i)$. Έστω C η συνεκτική συνιστώσα του $\mathcal{Z} \cap B(z, 10)$ που περιέχει το z .

Ισχυρισμός. Για όλα τα w που επιλέξαμε ισχύει $A \cap \mathcal{Z}_w = \emptyset$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Θεωρούμε μία καμπύλη γ στο C που ξεκινάει από το z και τέμνει για πρώτη φορά την ένωση $\cap_w \mathcal{Z}_w$ στο σημείο $\tilde{z} \in C$. Κατά μήκος της γ ο εφαιπόμενος χώρος του \mathcal{Z} είναι σταθερός μέχρι μία γωνία το πολύ 10^{-2} . Η γ ξεκινάει από το $z \in \mathcal{Z}_{>1}$, άρα ολόκληρη η γ περιέχεται στο σύνολο $\mathcal{Z}_{>\frac{1}{2}}$. Από τον ορισμό της γ έχουμε ότι $\gamma \subseteq B(z, 10)$. Η τελευταία μπάλα περιέχεται στην περιοχή T_{20} του T . Έτσι, $\gamma \subseteq T_{20}$, δηλαδή

$$\tilde{z} \in \mathcal{Z}_{>\frac{1}{2}} \cap \mathcal{Z}_w \cap T_{20}$$

το οποίο σημαίνει ότι $\tilde{z} \in \cap_i B_i$, το οποίο είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ότι $\tilde{z} \notin \cap_i 10B_i$. Η τελευταία παρατήρηση ολοκληρώνει την απόδειξη του Ισχυρισμού. \square

Από τον Ισχυρισμό και τη συνεκτικότητα του C έπεται ότι ο εφαιπόμενος χώρος της \mathcal{Z} πάνω από το C είναι σταθερός μέχρι μία γωνία μέτρου το πολύ 10^{-2} . Επομένως, το C είναι μια μικρή διαταραχή κάποιου m -επιπέδου σχεδόν εγκάρσιου κατά μήκος του T_1 . Έστω Π ένα $(n - m)$ -επίπεδο το οποίο υποθέτουμε ότι περιέχει τον x_n -άξονα. Τότε σίγουρα ισχύει $\Pi \cap T_1 \neq \emptyset$ κι από την επιλογή του C , με μεγάλη πιθανότητα, η τομή $\Pi \cap C \cap T_1$ είναι μη κενή. Έτσι, από το Θεώρημα Βézout έχουμε $|\Pi \cap \mathcal{Z}| \leq D^{n-m}$. Αφού το Π ήταν τυχόν, το πλήθος των συνόλων C με τις ιδιότητες που περιγράψαμε είναι $\lesssim D^{n-m}$, δηλαδή το σύνολο A περιέχεται σε $\lesssim D^{n-m}$ επιπλέον μπάλες ακτίνας $\lesssim 1$. Συνδυάζοντας τις δύο περιπτώσεις έχουμε ότι το σύνολο $\mathcal{Z}_{>1} \cap T_1$ περιέχεται σε $\lesssim D^n$ μπάλες ακτίνας $\lesssim 1$, όπως θέλαμε. \square

4.4 Εκτιμήσεις εγκάρσιας ισοκατανομής

Έστω $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{P_1, \dots, P_{n-m}}$ εγκάρσια πλήρης τομή. Ο κύλινδρος $T_{\theta, u}$ λέγεται $R^{-1/2+\delta_m}$ εφαπτόμενος στην \mathcal{Z} στην μπάλα B_R αν

$$T_{\theta, u} \subseteq \mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B_R$$

και για κάθε $x \in T_{\theta, u}$ και $z \in \mathcal{Z} \cap B_R$ με $|x - z| \lesssim R^{1/2+\delta_m}$ ισχύει

$$\angle(G(\theta), T_z \mathcal{Z}) \lesssim R^{1/2+\delta_m}.$$

Εδώ το δ_m είναι μία τυχαία θετική σταθερά. Θα την προσδιορίσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2 στην Ενότητα 4.6. Ορίζουμε

$$\mathbb{W}_{\mathcal{Z}} = \{(\theta, u) \mid \text{Ο } T_{\theta, u} \text{ είναι } R^{-1/2+\delta_m} \text{ εφαπτόμενος στην } \mathcal{Z} \text{ στην μπάλα } B_R\}$$

και λέμε ότι η f είναι συγκεντρωμένη σε wave packets από το $\mathbb{W}_{\mathcal{Z}}$ αν

$$\sum_{(\theta, u) \in \mathbb{W}_{\mathcal{Z}}} \|f_{\theta, u}\|_{L^2} \leq \text{RapDec}(R) \|f\|_{L^2}. \quad (4.11)$$

Θεωρούμε μία μπάλα B ακτίνας $R^{1/2+\delta_m}$ στον \mathbb{R}^n και ορίζουμε

$$\mathbb{W}_{B, \mathcal{Z}} = \{(\theta, u) \in \mathbb{W}_{\mathcal{Z}} \mid T_{\theta, u} \cap B \neq \emptyset\}.$$

Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να προσαρμόσουμε τη διάσπαση σε wave packets για μικρότερες μπάλες, κάτι που θα μας χρειαστεί κατά την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2. Ξεκινάμε με μία μορφή της Αρχής της Αβεβαιότητας.

Λήμμα 4.4.1. Έστω $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\text{supp}(\hat{G}) \subseteq B(\xi_0, r)$. Τότε, για κάθε μπάλα $B(x_0, \rho)$ με $\rho \leq r^{-1}$ ισχύει

$$\int_{B(x_0, \rho)} |G|^2 \lesssim \frac{|B_\rho|}{|B_{r^{-1}}|} \int |G|^2.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μία bump function ϕ η οποία φθίνει απότομα έξω από τη μπάλα $B(x_0, \rho)$ ενώ εντός της ικανοποιεί $|\phi| \sim 1$. Τότε, ο μετασχηματισμός Fourier της ϕ φθίνει απότομα έξω από τη μπάλα $B_{\rho^{-1}}$ ενώ εντός της ικανοποιεί $|\hat{\phi}(\xi)| \sim |B_{\rho^{-1}}|$. Έτσι,

$$\int_{B_\rho} |G|^2 \lesssim \|\phi G\|_2 = \|\widehat{\phi G}\|_2 = \|\hat{\phi} * \hat{G}\|_2.$$

Αν $|\xi| \lesssim \rho^{-1}$ έχουμε

$$|\hat{\phi} * \hat{G}(\xi)| \leq \|\hat{\phi} * \hat{G}\|_\infty \leq \|\hat{\phi}\|_\infty \|\hat{G}\|_1 \sim |B_\rho| \int_{B_r} |\hat{G}|.$$

Στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Young (1.1.1) για τη συνέλιξη των $\hat{\phi}$ και \hat{G} .

Αν το ξ είναι μακριά από την $B_{\rho^{-1}}$, η ϕ φθίνει απότομα. Τελικά,

$$\begin{aligned} \|\hat{\phi} * \hat{G}\|_2 &= \int_{|\xi| \lesssim \rho^{-1}} |\hat{\phi} * \hat{G}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq \rho^{-1}} |\hat{\phi} * \hat{G}(\xi)|^2 d\xi \\ &\lesssim |B_{\rho^{-1}}| \left(|B_\rho| \int_{B_r} |\hat{G}|^2 \right)^2 \\ &\leq \frac{|B_\rho|^2}{|B_\rho|} |B_r| \int |\hat{G}|^2 \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \frac{|B_\rho|}{|B_{r^{-1}}|} \int |G|^2. \end{aligned}$$

□

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο λήμμα μπορούμε να αποδείξουμε μία τοπική εκδοχή του.

Πόρισμα 4.4.2. Έστω $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\text{supp}(\hat{G}) \subseteq B(\xi_0, r)$. Τότε, για κάθε μπάλα $B(x_0, \rho)$ με $\rho \leq r^{-1}$ ισχύει

$$\int_{B(x_0, \rho)} |G|^2 \lesssim \frac{|B_\rho|}{|B_{r^{-1}}|} \int W_{B(x_0, r^{-1})} |G|^2,$$

όπου W μία συνάρτηση βάρους ίση με 1 στη μπάλα $B(x_0, r^{-1})$ και απότομα φθίνουσα εκτός της.

Απόδειξη. Θεωρούμε μία συνάρτηση ψ με $\text{supp}(\hat{\psi}) \subseteq B_r$, $|\psi| \sim 1$ στην $B(x_0, r^{-1})$ και απότομα φθίνουσα εκτός της. Θέτουμε $W = |\psi|^2$ και ορίζουμε $H = \psi G$. Τότε $\text{supp}(\hat{H}) \subseteq B(\xi_0, 2r)$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.2.1 στην H κι έχουμε

$$\int_{B(x_0, r)} |G|^2 \lesssim \int_{B(x_0, r)} |H|^2 \lesssim \frac{|B_\rho|}{|B_{r^{-1}}|} \int |H|^2 = \frac{|B_\rho|}{|B_{r^{-1}}|} \int W |G|^2.$$

□

Έστω B μία μπάλα ακτίνας $R^{1/2+\delta_m}$ στον \mathbb{R}^n και V υπόχωρος του \mathbb{R}^n διάστασης m . Ορίζουμε

$$\mathbb{W}_{B,V} = \{(\theta, u) \mid T_{\theta,u} \cap B \neq \emptyset \text{ και } \angle(G(\theta), V) \lesssim R^{-1/2+\delta_m}\}.$$

Συμβολίζουμε με $2B$ τη μπάλα με ακτίνα διπλάσια από της B . Αν

$$g = \sum_{(\theta,u) \in \mathbb{W}_{B,V}} g_{\theta,u},$$

τότε ο Eg είναι ισοκατανεμημένος στη B κατά μήκος κατευθύνσεων εγκάρσιων στον V . Πιο συγκεκριμένα,

Λήμμα 4.4.3. Έστω V υπόχωρος του \mathbb{R}^n διάστασης m . Υπάρχει υπόχωρος V' με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$(I) \dim V' = n - m.$$

(III) Ο V' είναι εγκάρσιος στον V υπό την έννοια ότι αν v, v' είναι μοναδιαία διανύσματα των V, V' αντίστοιχα, ισχύει

$$\angle(v, v') \gtrsim 1.$$

(III) Υποθέτουμε ότι $g = \sum_{(\theta, u) \in \mathbb{W}_{B, V}} g_{\theta, u}$. Αν Π είναι ένα επίπεδο παράλληλο στον V' και

$x_0 \in \Pi \cap B$, τότε για κάθε $R \geq \rho$

$$\int_{\Pi \cap B(x_0, \rho^{1/2 + \delta_m})} |Eg|^2 \lesssim_{\mathcal{O}} R^{O(\delta)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \int_{\Pi \cap 2B} |Eg|^2. \quad (4.12)$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε υποδείκτες G και ξ για τα αντικείμενα που σχετίζονται με την κατεύθυνση και τη συχνότητα αντίστοιχα. Ο υπόχωρος V περιέχει κατευθύνσεις κυλίνδρων, άρα γράφουμε V_G . Ορίζουμε

$$C = \{\omega \in B_2^{n-1} : \angle(G(\omega), V_G) \lesssim \alpha\}$$

για κάποια μικρή σταθερά α . Υπενθυμίζουμε ότι

$$G(\omega) = \frac{(-2\omega_1, \dots, -2\omega_{n-1}, 1)}{|(-2\omega_1, \dots, -2\omega_{n-1}, 1)|}.$$

Θεωρούμε το (x_1, \dots, x_{n-1}) -επίπεδο. Παρατηρούμε ότι για κάθε $\omega \in B_2^{n-1}$ ισχύει η σχέση $\angle(G(\omega), \mathbb{R}^{n-1}) \geq c > 0$, για κάποια απόλυτη σταθερά c .

Ορίζουμε $\text{Angle}(V_G, \mathbb{R}^{n-1}) = \max_{v \in V_G} \angle(v, \mathbb{R}^{n-1})$. Αν η γωνία $\text{Angle}(V_G, \mathbb{R}^{n-1})$ είναι το πολύ $\frac{c}{2}$, τότε το $G(\omega)$ δεν μπορεί να είναι κοντά στον υπόχωρο V_G για οποιοδήποτε $\omega \in B_2^{n-1}$. Στην περίπτωση αυτή όμως έχουμε ότι $\mathbb{W}_{B, V} = \emptyset$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι

$$\text{Angle}(V_G, \mathbb{R}^{n-1}) \gtrsim 1.$$

Ο V_G είναι υπόχωρος, άρα $G(\omega) \in V_G$ αν και μόνο αν $G_0(\omega) = (-2\omega_1, \dots, -2\omega_{n-1}, 1) \in V_G$. Ορίζουμε

$$A_\omega = \{\omega \in \mathbb{R}^{n-1} : G_0(\omega) \in V_G\}$$

και παρατηρούμε ότι ο A_ω είναι αφινικός υπόχωρος του \mathbb{R}^{n-1} διάστασης $m-1$ ¹, αφού από την υπόθεσή μας ο V_G είναι ουσιαστικά εγκάρσιος στον \mathbb{R}^{n-1} . Ισχύει επιπλέον η

$$\text{dist}(\omega, A_\omega) \lesssim \text{Angle}(G(\omega), V_G).$$

Ορίζουμε επίσης $A_\xi = A_\omega \times \mathbb{R}$ και παρατηρούμε ότι είναι αφινικός υπόχωρος του \mathbb{R}^n . Έτσι, από τον ορισμό της συχνότητας $\xi(\omega)$, έχουμε

$$\text{dist}(\xi(\omega), A_\xi) = \text{dist}(\omega, A_\omega).$$

Θεωρούμε τους υποχώρους V_ω και V_ξ οι οποίοι είναι παράλληλοι στους A_ω και A_ξ αντίστοιχα. Ο υπόχωρος V' που αναζητούμε είναι ο κάθετος υπόχωρος V_ξ^\perp . Για τον υπόχωρο αυτό θα αποδείξουμε τις 3 ζητούμενες ιδιότητες. Για την πρώτη, θέλουμε να δείξουμε ότι οι V_G και V' είναι ουσιαστικά εγκάρσιοι. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο. Έστω $P = P_{V'}$ η ορθογώνια προβολή στον υπόχωρο V' .

Ισχυρισμός. $\text{Angle}(V_G, \mathbb{R}^{n-1}) = \angle(V_G, V')$.

¹Μάλιστα, ο λόγος για τον οποίο ο Guth επέλεξε να δουλέψει με το παραβολοειδές είναι ότι ο A_ω είναι αφινικός υπόχωρος του \mathbb{R}^{n-1} , κάτι το οποίο δεν ισχύει γενικά σε τυχαίες επιφάνειες.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Η τομή $V_G \cap G_0(\mathbb{R}^{n-1})$ είναι αφηνικός υπόχωρος του \mathbb{R}^{n-1} κι από τον ορισμό του V_ω έχουμε ότι

$$V_G \cap G_0(\mathbb{R}^{n-1}) // V_\omega .$$

Έστω v_G ένα μοναδιαίο διάνυσμα του V_G κάθετο στον V_ω και $\{v_1, \dots, v_{m-1}\}$ μία ορθοκανονική βάση του V_ω . Τότε, το σύνολο $\{v_1, \dots, v_{m-1}, v_G\}$ είναι ορθοκανονική βάση του V_G . Ισχύει επιπλέον ότι το σύνολο $\{v_1, \dots, v_{m-1}, e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του V_ξ . Από τα παραπάνω έπεται ότι ο V' περιέχεται στον \mathbb{R}^{n-1} και $V_\omega^\perp = V' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Όμως, $v_1, \dots, v_{m-1} \in V_\omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, άρα

$$\text{Angle}(V_G, \mathbb{R}^{n-1}) = \angle(v_G, \mathbb{R}^{n-1}).$$

Επίσης, υποθέσαμε ότι $v_G \in V_\omega^\perp$ άρα $\text{pr}_{\mathbb{R}^{n-1}} v_G \in V'$, δηλαδή

$$\angle(v_G, \mathbb{R}^{n-1}) = \angle(v_G, V').$$

Τα διανύσματα v_1, \dots, v_{m-1} ανήκουν στον V_ξ κι έτσι το v_G είναι το διάνυσμα του V_G που ελαχιστοποιεί τη γωνία με τον V' , οπότε

$$\text{Angle}(V_G, V') = \angle(v_G, V') = \angle(V_G, V'),$$

όπως θέλαμε. □

Από την ισότητα του Ισχυρισμού και την υπόθεσή μας ότι $\text{Angle}(V_G, \mathbb{R}^{n-1}) \gtrsim 1$ έπεται ότι οι υπόχωροι V_G και V' είναι ουσιαστικά εγκάρσιοι.

Για το τελευταίο μέρος της απόδειξης θεωρούμε ένα $(n - m)$ -επίπεδο Π παράλληλο στον V' που περνάει μέσα από τη μπάλα B ακτίνας $R^{1/2+\delta_m}$. Έχουμε δει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του $Eg_{\theta,u}$ έχει φορέα εντός του συνόλου των συχνοτήτων $\xi(\omega)$. Περιορίζουμε τον $Eg_{\theta,u}$ στο επίπεδο Π και παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του έχει φορέα εντός του $P(\xi(\omega))$. Σταθεροποιούμε ένα ζεύγος $(\theta, u) \in \mathbb{W}_{B,V}$. Γνωρίζουμε ότι $\angle(G(\theta), V) \lesssim R^{-1/2+\delta_m}$. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.2.2. Ο $Eg : \Pi \rightarrow \mathbb{C}$ έχει μετασχηματισμό Fourier με φορέα μέσα σε κάποια μπάλα ακτίνας $\lesssim R^{-1/2+\delta_m}$, άρα

$$\begin{aligned} \int_{\Pi \cap B(x_0, \rho^{1/2+\delta_m})} |Eg|^2 &\lesssim \left(\frac{R^{1/2-\delta_m}}{\rho^{1/2+\delta_m}} \right)^{m-n} \int_{\Pi} |Eg|^2 \cdot W_{B(x_0, R^{1/2-\delta_m})} \\ &\lesssim R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \int_{\Pi} |Eg|^2 W_B. \end{aligned}$$

Από τη διάσπαση

$$Eg = \sum_{(\theta,u) \in \mathbb{W}_{B,V}} Eg_{\theta,u}$$

και το γεγονός ότι ο φορέας κάθε ενός από τα wave packets περιέχεται ουσιαδώς στον κύλινδρο $T_{\theta,u}$ έχουμε ότι

$$|Eg(x)| \leq \text{RapDec}(R) \|g\|_2, \text{ για κάθε } x \in \Pi \setminus 2B,$$

αφού ο κύλινδρος $T_{\theta,u}$ είναι εγκάρσιος στο Π και τέμνει την B . Έτσι,

$$\int_{\Pi} |Eg|^2 W_B \leq \int_{\Pi \cap 2B} |Eg|^2.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες έχουμε

$$\int_{\Pi \cap B(x_0, \rho^{1/2+\delta_m})} |Eg|^2 \lesssim R^{O(\delta)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \int_{\Pi \cap 2B} |Eg|^2$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Το κεντρικό αποτέλεσμα της ενότητας είναι η ακόλουθη εκτίμηση εγκάρσιας ισοκατανομής (transverse equidistribution estimate) και είναι πόρισμα του Λήμματος 4.4.3.

Πρόταση 4.4.4. Υποθέτουμε ότι η μπάλα B του \mathbb{R}^n ακτίνας $R^{1/2+\delta_m}$ περιέχεται στην B_R του \mathbb{R}^n . Έστω $\rho \leq R$. Υποθέτουμε ότι

$$g = \sum_{(\theta,v) \in \mathbb{W}_{B,Z}} g_{\theta,v}.$$

Τότε,

$$\int_{B \cap \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(Z)} |Eg|^2 \lesssim_{\mathcal{O}} R^{O(\delta)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \int_{2B} |Eg|^2.$$

Απόδειξη. Έστω $(\theta, u) \in \mathbb{W}_{B,Z}$. Από τον ορισμό του \mathbb{W}_Z έχουμε ότι

$$\angle(T_z \mathcal{Z}, G(\theta)) \lesssim R^{-1/2+\delta_m} \text{ για κάθε } z \in \mathcal{Z} \cap 2B.$$

Θεωρούμε έναν υπόχωρο V ο οποίος έχει τη μικρότερη δυνατή διάσταση ανάμεσα σε όλους τους υποχώρους που ικανοποιούν

$$\angle(V, G(\theta)) \lesssim R^{-1/2+\delta_m} \text{ για κάθε } (\theta, u) \in \mathbb{W}_{B,Z}.$$

Έστω V' ο υπόχωρος του Λήμματος 4.4.3. Έχουμε δει ότι για κάθε επίπεδο Π παράλληλο στον V' έχουμε

$$\int_{\Pi \cap B(x_0, \rho^{1/2+\delta_m})} |Eg|^2 \lesssim_{\mathcal{O}} R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \int_{\Pi \cap 2B} |Eg|^2. \quad (4.13)$$

Δείχνουμε αρχικά ότι για κάθε $z \in \mathcal{Z} \cap B$, ο εφαπτόμενος χώρος $T_z \mathcal{Z}$ είναι ουσιαστικά εγκάρσιος στον V' . Έστω πως αυτό δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $\tilde{z} \in \mathcal{Z}$ και υπόχωρος W του $T_{\tilde{z}} \mathcal{Z}$ με $\dim W > \dim \mathcal{Z} - \dim V$ ώστε για κάθε μη μηδενικό $w \in W$

$$\angle(w, V') \leq o(1),$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\angle(w, V) \gtrsim 1$, αφού οι V και V' είναι ουσιαστικά εγκάρσιοι. Συνδυάζοντας τις δύο αυτές συνθήκες για τις γωνίες έχουμε ότι ο W είναι ουσιαστικά εγκάρσιος στον V ενώ είναι κοντά στον V' . Μπορούμε να ορίσουμε λοιπόν έναν τελεστή $L : \mathbb{R}^n \rightarrow V$, ο οποίος θα ήταν ακριβώς η ορθογώνια προβολή στον V αν οι V, W ήταν κάθετοι. Θέλουμε δηλαδή ο L να ικανοποιεί τις:

$$L|_V = \text{Id} \quad L|_W = 0 \text{ και } |L| \lesssim 1.$$

Έχουμε υποθέσει ότι $(\theta, u) \in \mathbb{W}_{B,Z}$, άρα $\angle(G(\theta), V) \lesssim R^{-1/2+\delta_m}$ κι έτσι

$$|L(G(\theta)) - G(\theta)| \lesssim R^{-1/2+\delta_m}.$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι

$$G(\theta) \subseteq \mathcal{N}_{R^{-1/2+\delta_m}}(T_z \mathcal{Z}) \cap B_2^m,$$

άρα

$$L(G(\theta)) \subseteq L(\mathcal{N}_{R^{-1/2+\delta_m}}(T_z \mathcal{Z}) \cap B_2^m) \subseteq \mathcal{N}_{CR^{-1/2+\delta_m}}(L(T_z \mathcal{Z})),$$

δηλαδή για κάθε $(\theta, u) \in \mathbb{W}_{B,Z}$ ισχύει

$$\angle(G(\theta), L(T_z \mathcal{Z})) \lesssim R^{-1/2+\delta_m}.$$

Ο L είναι ταυτοτικά 0 στον W , άρα η εικόνα $L(T_z \mathcal{Z})$ είναι υπόχωρος διάστασης το πολύ $\dim \mathcal{Z} - \dim W < \dim V$. Αυτό είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ότι ο V έχει την ελάχιστη διάσταση. Έτσι έχουμε ότι για κάθε $z \in \mathcal{Z} \cap 2B$, ο $T_z \mathcal{Z}$ είναι ουσιαστικά εγκάρσιος στον V' .

Έστω Π ένα επίπεδο παράλληλο με τον V' που τέμνει τη B . Από την εγκάρσιότητα των $T_z \mathcal{Z}$ και V' όταν $z \in \mathcal{Z} \cap 2B$ που μόλις αποδείξαμε έπεται ότι

$$\Pi \cap \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B \subseteq \mathcal{N}_{C\rho^{1/2+\delta_m}}(\Pi \cap \mathcal{Z}) \cap \Pi \cap 2B.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η τομή $\Pi \cap \mathcal{Z}$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή διάστασης $m + \dim \mathcal{Z}$.

Από ένα αποτέλεσμα του Wongkew στο [W], που ελέγχει τον όγκο κάθε περιοχής μίας αλγεβρικής επιφάνειας δεδομένης διάστασης και βαθμού μέσα σε κάθε μπάλα (Θεώρημα Β'.2.1 στο Παράρτημα Β) έχουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{N}_{c\rho^{1/2+\delta_m}}(\Pi \cap \mathcal{Z}) \cap \Pi \cap 2B$$

μπορεί να καλυφθεί από $R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m+\dim \mathcal{Z}}$ μπάλες στο Π ακτίνας $\rho^{1/2+\delta_m}$. Αν εφαρμόσουμε την (4.13) σε κάθε μία από αυτές τις μπάλες κι αθροίσουμε έχουμε

$$\int_{\mathcal{N}_{c\rho^{1/2+\delta_m}}(\Pi \cap \mathcal{Z}) \cap \Pi \cap B} |Eg|^2 \lesssim R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \int_{\Pi \cap 2B} |Eg|^2$$

κι αν ολοκληρώσουμε πάνω από όλα τα επίπεδα Π που είναι παράλληλα στον V' παίρνουμε

$$\int_{\mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B} |Eg|^2 \lesssim R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \int_{2B} |Eg|^2$$

από το θεώρημα Fubini. □

Μία διαισθητική επεξήγηση της παραπάνω πρότασης είναι η ακόλουθη:

Οι εφαπτομενικές συνεισφορές της g σε κάθε τομή της \mathcal{Z} με "κάθετο" επίπεδο έχουν παρόμοιο μέγεθος κι έτσι ο τελεστής αποκλείεται να εμφανίσει υπερβολική συγκέντρωση μάζας σε κάποια σημεία. Αν κάτι τέτοιο συνέβαινε, τότε ενδεχομένως κάποιες p -νόρμες της g να γινόντουσαν αναξέλεγκτα μεγάλες.

4.5 Προσαρμογή της διάσπασης σε wave packets σε μικρότερες μπάλες

Υποθέτουμε ότι έχουμε διασπάσει την f σε wave packets από τη μπάλα B_R . Έστω $\rho > 0$ και $y \in B_R$ ώστε $R^{1/2} < \rho < R$ και $B(y, \rho) \subseteq B_R$. Θέλουμε να μελετήσουμε τη σχέση που έχει η διάσπαση της f σε wave packets από την $B(y, \rho)$ με την αρχική διάσπαση από την B_R .

Αν το σημείο y δεν είναι η αρχή των αξόνων, θεωρούμε νέες συντεταγμένες $\tilde{x} = x - y$. Ορίζουμε

$$\psi_y(\omega) = e^{i(y_1\omega_1, \dots, y_{n-1}\omega_{n-1}, y_n|\omega|^2)}$$

και γράφουμε

$$\begin{aligned} Ef(x) &= \int e^{i(x_1\omega_1, \dots, x_{n-1}\omega_{n-1}, x_n|\omega|^2)} f(\omega) \\ &= \int e^{i(\tilde{x}_1\omega_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}\omega_{n-1}, \tilde{x}_n|\omega|^2)} e^{i\psi_y(\omega)} f(\omega) \\ &= E\tilde{f}(\tilde{x}), \end{aligned}$$

όπου $\tilde{f}(\tilde{\omega}) = e^{i\psi_y(\omega)} f(\omega)$.

Διασπάμε την f σε wave packets στη μπάλα B_ρ όπως στην Ενότητα 4.1. Γράφουμε

$$\tilde{f} \stackrel{O}{=} \sum_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \tilde{f}_{\tilde{\theta}, \tilde{u}},$$

όπου κάθε μία από τις συναρτήσεις $\tilde{f}_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$ έχει φορέα εντός του δίσκου $\tilde{\theta}$ κι ο μετασχηματισμός Fourier της έχει φορέα ουσιαδώς εντός της μπάλας $B(\tilde{u}, \rho^{\frac{1+\delta}{2}})$. Επιπροσθέτως, για κάθε ζεύγος $(\tilde{\theta}, \tilde{u})$, ο $\tilde{f}_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$ έχει φορέα ουσιαδώς εντός του κυλίνδρου $T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$ ακτίνας $\rho^{1/2+\delta}$ και μήκους ρ . Στις \tilde{x} -συντεταγμένες, ο κύλινδρος αυτός περιέχεται στην B_ρ ενώ στις αρχικές x -συντεταγμένες περιέχεται στην $B(y, \rho)$.

Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τη σχέση των διασπάσεων

$$f = \sum_{\theta, u} f_{\theta, u} \text{ και } \tilde{f} = \sum_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \tilde{f}_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}.$$

Για να το κάνουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε κάποιο συμβολισμό.

Έστω $y \in \mathbb{R}^n$ και $\omega \in B_2^{n-1}$. Γράφουμε $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = (y', y_n)$. Ορίζουμε

$$\bar{u}(\omega, y) = \partial_\omega \psi_y(\omega) = y' + 2y_n \omega.$$

Ορίζουμε επίσης

$$\tilde{W}_{\theta, u} = \{(\tilde{\theta}, \tilde{u}) : \text{dist}(\theta, \tilde{\theta}) \lesssim \rho^{-1/2} \text{ και } |u + \bar{u}(\omega_\theta, y) - \tilde{u}| \leq R^{\frac{1+\delta}{2}}\}.$$

Λήμμα 4.5.1. Η συνάρτηση $(f_{\theta, u})^\sim = \sum_{(\tilde{\theta}, \tilde{u}) \in \tilde{W}_{\theta, u}} (f_{\theta, u})^\sim_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$ είναι συγκεντρωμένη σε wave packets από το $\tilde{W}_{\theta, u}$, δηλαδή ισχύει

$$(f_{\theta, u})^\sim \stackrel{O}{=} \sum_{(\tilde{\theta}, \tilde{u}) \in \tilde{W}_{\theta, u}} (f_{\theta, u})^\sim_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}.$$

Απόδειξη. Αφού $\text{supp}(f_{\theta, u}) \subseteq \theta$, ο φορέας της $(f_{\theta, u})^\sim$ περιέχεται στην ένωση

$$\bigcup \{\tilde{\theta} \mid \text{dist}(\theta, \tilde{\theta}) \lesssim \rho^{-1/2}\}.$$

Θεωρούμε μία bump function η_θ ίση με 1 στο θ και με φορέα εντός του 2θ . Υπενθυμίζουμε ότι με 2θ συμβολίζουμε τον δίσκο με ίδιο κέντρο και διπλάσια ακτίνα από τον θ . Τότε,

$$\left(e^{i\psi_y(\omega)} f_{\theta, u} \right)^\wedge = \left(\eta_\theta e^{i\psi_y(\omega)} f_{\theta, u} \right)^\wedge,$$

αφού $\text{supp}(f_{\theta, u}) \subseteq \theta$ και $\eta_\theta \equiv 1$ στο θ . Έτσι,

$$\left(e^{i\psi_y(\omega)} f_{\theta, u} \right)^\wedge = \left(\eta_\theta e^{i\psi_y(\omega)} \right)^\wedge * (f_{\theta, u})^\wedge.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της $f_{\theta, u}$ φθίνει απότομα εκτός της $B(y, R^{\frac{1+\delta}{2}})$. Επίσης, ο μετασχηματισμός Fourier της $\eta_\theta e^{i\psi_y(\omega)}$ φθίνει απότομα εκτός της μπάλας $B(\bar{u}(\omega_\theta, y), R^{1/2})$ από το Θεώρημα Α'.0.2 που αποδεικνύουμε στο Παράρτημα Α'.

Δείξαμε λοιπόν ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $(f_{\theta, u})^\sim$ φθίνει απότομα έξω από μία μπάλα με κέντρο $u + \bar{u}(\omega_\theta, y)$ κι ακτίνα $\lesssim R^{\frac{1+\delta}{2}}$ και η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης. \square

Ορισμός 4.5.2 (Απόσταση Hausdorff). Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Η απόσταση Hausdorff των A και B ορίζεται ως

$$d_H(A, B) := \max\{\sup_{a \in A} \text{dist}(a, B), \sup_{b \in B} \text{dist}(A, b)\} = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq B_\varepsilon \text{ και } B \subseteq A_\varepsilon\},$$

όπου

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq \varepsilon\}.$$

Λήμμα 4.5.3. Αν $(\tilde{\theta}, \tilde{u}) \in \tilde{\mathbb{W}}_{\theta, u}$, τότε για τον κύλινδρο $T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$ ισχύουν οι ακόλουθες γεωμετρικές εκτιμήσεις:

$$d_H(T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}, T_{\theta, u} \cap B(y, \rho)) \lesssim R^{1/2+\delta} \quad (4.14)$$

και

$$\angle(G(\theta), G(\tilde{\theta})) \lesssim \rho^{-1/2}. \quad (4.15)$$

Παρατήρηση 4.5.4. Μπορούμε να ορίσουμε την απόσταση Hausdorff για υποσύνολα οποιουδήποτε μετρικού χώρου (X, d) κάνοντας τις προφανείς τροποποιήσεις. Επίσης, η απόσταση Hausdorff γίνεται μετρική αν περιοριστεί στην κλάση $K(X)$ των συμπαγών υποσυνόλων του X .

Απόδειξη του Λήμματος 4.5.2. Η πρώτη εκτίμηση προκύπτει άμεσα συγκρίνοντας τους ορισμούς των $T_{\theta, u}$ και $T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$. Πράγματι, έχουμε

$$T_{\theta, u} = \{(x', x_n) \in B_R : |x' + 2x_n\omega_\theta + u| \leq R^{1/2+\delta}\},$$

άρα

$$T_{\theta, u} \cap B(y, \rho) = \{(\tilde{x}', \tilde{x}_n) \in B_\rho : |\tilde{x}' + 2\tilde{x}_n\omega_{\tilde{\theta}} + u + \bar{u}(\omega_\theta, y)| \leq R^{1/2+\delta}\}.$$

Από την άλλη,

$$T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} = \{(\tilde{x}', \tilde{x}_n) \in B_\rho : |\tilde{x}' + 2\tilde{x}_n\omega_{\tilde{\theta}} + u + \tilde{u}| \leq \rho^{1/2+\delta}\}.$$

Τα κέντρα ω_θ και $\omega_{\tilde{\theta}}$ των δίσκων θ και $\tilde{\theta}$ ικανοποιούν

$$|\omega_\theta - \omega_{\tilde{\theta}}| \lesssim \rho^{1/2+\delta},$$

αφού από τον ορισμό του $\tilde{\mathbb{W}}_{\theta, u}$ έχουμε $\text{dist}(\theta, \tilde{\theta}) \leq \rho^{-1/2}$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε επίσης ότι

$$|2\tilde{x}_n\omega_\theta - 2\tilde{x}_n\omega_{\tilde{\theta}}| \lesssim \rho^{1/2},$$

αφού $\tilde{x}_n \in B_\rho$. Έχουμε επίσης ότι

$$|u + \bar{u}(\omega_\theta, y) - \tilde{u}| \lesssim R^{\frac{1+\delta}{2}}.$$

Αν συνδυάσουμε τα παραπάνω έχουμε

$$d_H(T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}, T_{\theta, u} \cap B(y, \rho)) \lesssim R^{1/2+\delta}.$$

Η εκτίμηση για τις γωνίες προκύπτει άμεσα από τη σχέση $\text{dist}(\theta, \tilde{\theta}) \leq \rho^{-1/2}$. \square

Θέλουμε στη συνέχεια να μπορούμε να ξεχωρίσουμε ποια ζεύγη (θ, u) οδηγούν (ουσιωδώς) στο ίδιο σύνολο $\tilde{\mathbb{W}}_{\theta, u}$. Αν $\text{dist}(\theta_1, \theta_2) \leq \rho^{-1/2}$ και $|u_1 - u_2 + \bar{u}(\omega_{\theta_1}, y) - \bar{u}(\omega_{\theta_2}, y)| \leq R^{\frac{1+\delta}{2}}$, τότε τα σύνολα $\tilde{\mathbb{W}}_{\theta_1, u}$ και $\tilde{\mathbb{W}}_{\theta_2, u}$ ουσιωδώς ίδια. Κατηγοριοποιούμε τα ζεύγη (θ, u) ώστε τα σύνολα που θα προκύψουν να είναι ουσιωδώς ξένα και να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις

ορθογωνιότητας που είδαμε στο κεφάλαιο 3.

Αν $\tilde{\theta}$ είναι ένας δίσκος ακτίνας $\rho^{-1/2}$ και $w \in R^{\frac{1+\delta}{2}} \mathbb{Z}^{n-1}$, ορίζουμε

$$\mathbb{W}_{\tilde{\theta},w} := \{(\theta, u) : \text{dist}(\theta, \tilde{\theta}) \lesssim \rho^{-1/2} \text{ και } |u + \bar{u}(\omega_\theta) - w| \lesssim R^{\frac{1+\delta}{2}}\}.$$

Αν δύο ζεύγη (θ_1, u_1) και (θ_2, u_2) περιέχονται στο ίδιο σύνολο $\mathbb{W}_{\tilde{\theta},w}$, τότε τα σύνολα $\tilde{\mathbb{W}}_{\theta_1, u_1}$ και $\tilde{\mathbb{W}}_{\theta_2, u_2}$ είναι ουσιαδώς ίσα και περιέχονται στο σύνολο

$$\tilde{\mathbb{W}}_{\tilde{\theta},w} := \{(\tilde{\theta}_1, \tilde{u}) : \text{dist}(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}) \lesssim \rho^{-1/2} \text{ και } |\tilde{u} - w| \lesssim R^{\frac{1+\delta}{2}}\}.$$

Μπορούμε έτσι να επαναδιατυπώσουμε το Λήμμα 4.5.1 στην παρακάτω μορφή.

Λήμμα 4.5.5. *Αν μία συνάρτηση g είναι συγκεντρωμένη σε wave packets από το $\mathbb{W}_{\tilde{\theta},w}$, τότε η συνάρτηση \tilde{g} που ορίστηκε παραπάνω είναι συγκεντρωμένη σε wave packets από το $\tilde{\mathbb{W}}_{\tilde{\theta},w}$, δηλαδή αν*

$$g \stackrel{O}{=} \sum_{(\theta,u) \in \mathbb{W}_{\tilde{\theta},w}} g_{\theta,u},$$

τότε

$$\tilde{g} \stackrel{O}{=} \sum_{(\tilde{\theta},\tilde{u}) \in \tilde{\mathbb{W}}_{\tilde{\theta},w}} \tilde{g}_{\tilde{\theta},\tilde{u}}.$$

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις έχουμε ότι τα σύνολα $\mathbb{W}_{\tilde{\theta},w}$ είναι ουσιαδώς ξένα ανά δύο όπως θέλαμε και η ένωσή τους περιέχει όλα τα πιθανά ζεύγη (θ, u) . Ομοίως τα σύνολα $\tilde{\mathbb{W}}_{\tilde{\theta},w}$ είναι ουσιαδώς ξένα ανά δύο και η ένωσή τους περιέχει όλα τα πιθανά ζεύγη $(\tilde{\theta}, \tilde{u})$.

Ορίζουμε

$$g_{\tilde{\theta},w} = \sum_{(\theta,u) \in \mathbb{W}_{\tilde{\theta},w}} g_{\theta,u} \text{ και } \tilde{g}_{\tilde{\theta},w} = \sum_{(\tilde{\theta},\tilde{u}) \in \tilde{\mathbb{W}}_{\tilde{\theta},w}} \tilde{g}_{\tilde{\theta},\tilde{u}}$$

και παρατηρούμε ότι από τα παραπάνω, για κάθε επιλογή συναρτήσεων g και \tilde{g} έχουμε δύο διασπάσεις

$$g = \sum_{(\theta,u) \in \mathbb{W}_{\tilde{\theta},w}} g_{\theta,u} \text{ και } \tilde{g} = \sum_{(\tilde{\theta},\tilde{u}) \in \tilde{\mathbb{W}}_{\tilde{\theta},w}} \tilde{g}_{\tilde{\theta},\tilde{u}},$$

οι οποίες ικανοποιούν τις

$$\|g\|_2^2 \sim \sum_{(\tilde{\theta},w)} \|g_{\tilde{\theta},w}\|_2^2 \text{ και } \|\tilde{g}\|_2^2 \sim \sum_{(\tilde{\theta},w)} \|\tilde{g}_{\tilde{\theta},w}\|_2^2. \quad (4.16)$$

Έχουμε δει ότι για κάθε ζεύγος $(\theta, u) \in \mathbb{W}_{\tilde{\theta},w}$, τα σύνολα $T_{\theta,u} \cap B(y, \rho)$ είναι ουσιαστικά τα ίδια. Συμβολίζουμε κάθε τέτοια τομή με $T_{\tilde{\theta},w}$ και παρατηρούμε ότι είναι κύλινδρος μήκους ρ κι ακτίνας $R^{1/2+\delta_m}$. Έτσι μπορούμε να περιγράψουμε γεωμετρικά το $\mathbb{W}_{\tilde{\theta},w}$ ως το σύνολο των ζευγών (θ, u) για τα οποία η τομή $T_{\theta,u} \cap B(y, \rho)$ είναι ουσιαστικά το $T_{\tilde{\theta},w}$. Για τα ζεύγη αυτά, η κατεύθυνση του $T_{\theta,u}$ ικανοποιεί την εκτίμηση $\angle(G(\tilde{\theta}), G(\theta)) \lesssim \rho^{-1/2}$.

Έχουμε ξεκινήσει με μία συνάρτηση g συγκεντρωμένη σε wave packets στο $\mathbb{W}_{\mathcal{Z}}$ και θέλουμε να μελετήσουμε τον Eg στην $B(y, \rho)$. Θέλουμε επίσης να δούμε τι προκύπτει αν διασπάσουμε τη g σε wave packets προερχόμενα από την $B(y, \rho)$. Με τις υποθέσεις που έχουμε για τη g και το Λήμμα 4.5.1 γνωρίζουμε ότι η \tilde{g} είναι συγκεντρωμένη σε wave packets στην ένωση $\bigcup_{(\theta,u) \in \mathbb{W}_{\mathcal{Z}}} \tilde{\mathbb{W}}_{\theta,u}$.

Έχουμε δείξει ότι αν $(\theta, u) \in \mathbb{W}_{\mathcal{Z}}$, τότε ο κύλινδρος $T_{\theta, u}$ είναι εφαπτόμενος στην \mathcal{Z} στη B_R , άρα ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις:

$$T_{\theta, u} \cap B(y, \rho) \subseteq \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B(y, \rho)$$

και

$$\angle(G(\theta, T_z \mathcal{Z})) \lesssim R^{-1/2+\delta_m},$$

για κάθε $x \in T_{\theta, u}$ και $z \in \mathcal{Z} \cap B(y, \rho)$ με $|x - z| \lesssim R^{1/2+\delta_m}$.

Αν επιλέξουμε ένα ζεύγος $(\tilde{\theta}, \tilde{u}) \in \tilde{\mathbb{W}}_{\theta, u}$, τότε το Λήμμα 4.5.2 μας εξασφαλίζει ότι

$$T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \cap B(y, \rho) \subseteq \mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B(y, \rho),$$

αφού $d_H(T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}, T_{\theta, u} \cap B(y, \rho)) \lesssim R^{1/2+\delta}$. Το ίδιο λήμμα μας εξασφαλίζει επίσης ότι

$$\angle(G(\tilde{\theta}), T_z \mathcal{Z}) \lesssim R^{-1/2+\delta_m} + \rho^{-1/2} \leq \rho^{-1/2+\delta_m}$$

για κάθε $x \in T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$ και $z \in \mathcal{Z} \cap B(y, \rho)$ με $|x - z| \lesssim R^{1/2+\delta_m}$.

Η τελευταία εκτίμηση για τις γωνίες μας δίνει ότι ο κύλινδρος $T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$ είναι $\rho^{-1/2+\delta_m}$ -εφαπτόμενος στην \mathcal{Z} στη μπάλα $B(y, \rho)$. Δεν ισχύει όμως ότι

$$T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \subseteq \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B(y, \rho),$$

όπως θα θέλαμε. Αυτό που ισχύει είναι ότι αν $b \in B_{R^{1/2+\delta_m}}$ και υποθέσουμε ότι $T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \cap \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B(y, \rho) \neq \emptyset$, τότε

$$T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \subseteq \mathcal{N}_{2\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z} + b) \cap B(y, \rho)$$

και ο $T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$ είναι εφαπτόμενος στην $\mathcal{Z} + b$ στην B_j . Για κάθε $b \in B_{R^{1/2+\delta_m}}$ ορίζουμε

$$\tilde{\mathbb{W}}_{\mathcal{Z}+b} := \{(\tilde{\theta}, \tilde{u}) : \text{Ο } T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \text{ είναι εφαπτόμενος στην } \mathcal{Z} + b \text{ στην } B_j\}$$

και

$$\tilde{g}_b := \sum_{(\tilde{\theta}, \tilde{u}) \in \tilde{\mathbb{W}}_{\mathcal{Z}+b}} \tilde{g}_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}.$$

Παρατηρούμε ότι υπό την προϋπόθεση ότι η g είναι συγκεντρωμένη σε wave packets στο $\mathbb{W}_{\mathcal{Z}}$ έχουμε ότι η \tilde{g} είναι συγκεντρωμένη σε wave packets στο $\bigcup_{|b| \lesssim R^{1/2+\delta_m}} \tilde{\mathbb{W}}_{\mathcal{Z}+b}$. Σταθεροποιούμε ένα ζεύγος $(\tilde{\theta}, \tilde{u}) \in \bigcup_{|b| \lesssim R^{1/2+\delta_m}} \tilde{\mathbb{W}}_{\mathcal{Z}+b}$ για το οποίο υποθέτουμε ότι ισχύει $T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \cap \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B(y, \rho) = \emptyset$. Τότε, $(\tilde{\theta}, \tilde{u}) \notin \tilde{\mathbb{W}}_{\mathcal{Z}+b}$. Έπεται ότι αν $(\tilde{\theta}, \tilde{u}) \in \tilde{\mathbb{W}}_{\mathcal{Z}+b}$, τότε $T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \cap \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B(y, \rho) \neq \emptyset$. Επομένως αν $x = \tilde{x} + y \in B(y, \rho)$, ισχύει

$$|E_{\tilde{g}_b}(\tilde{x})| \sim \mathcal{X}_{\mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}+b)}(x) E g(x),$$

αφού $E_{\tilde{g}_b}(\tilde{x}) = E_{g_b}(x)$ από τους ορισμούς των \tilde{g} και \tilde{x} .

Έχουμε διασπάσει την g σε $g = \sum_{\tilde{\theta}, w} g_{\tilde{\theta}, w}$. Θέτουμε $h = g_{\tilde{\theta}, w}$. Επιλέγουμε μια μπάλα $\tilde{B} = B(x_0, R^{1/2+\delta_m})$ με $x_0 \in T_{\tilde{\theta}, w}$. Για κάθε ζεύγος $(\theta, u) \in \mathbb{W}_{\tilde{\theta}, w}$ έχουμε $T_{\theta, u} \cap B(y, \rho) \subseteq T_{\tilde{\theta}, w}$ κι έτσι η τομή $T_{\theta, u} \cap \tilde{B}$ είναι κυλινδρικός τομέας μήκους $R^{1/2+\delta_m}$.

Από το λήμμα 4.1.5 έχουμε την εκτίμηση

$$\|h\|_2^2 \sim R^{-(1/2+\delta_m)} \|Eh\|_{L^2(\tilde{B})}^2. \quad (4.17)$$

Έχουμε επίσης ότι

$$|E_{\tilde{h}_b}(\tilde{x})| \sim \mathcal{X}_{\mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}+b)}(x) E h(x).$$

Συνδυάζουμε τις δύο τελευταίες εκτιμήσεις κι έχουμε

$$\|\tilde{h}_b\|_2^2 \sim R^{-(1/2+\delta_m)} \|Eh\|_{L^2(\tilde{B} \cap \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}+b))}^2. \quad (4.18)$$

Λήμμα 4.5.6. Υποθέτουμε ότι η h που ορίστηκε παραπάνω είναι συγκεντρωμένη σε wave packets στο $\mathbb{W}_{\tilde{\theta}, w}$ για κάποιο ζεύγος $(\tilde{\theta}, w)$ και ότι το x_0 είναι ένα σημείο του κυλίνδρου $T_{\tilde{\theta}, w}$. Αν επιλέξουμε ένα σύνολο διανυσμάτων $b \in B_{R^{1/2+\delta_m}}$ ώστε τα σύνολα

$$B(x_0, R^{1/2+\delta_m}) \cap \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z} + b)$$

είναι ξένα ανά δύο, τότε

$$\sum_b \|\tilde{h}_b\|_2^2 \lesssim \|h\|_2^2.$$

Απόδειξη. Η ζητούμενη εκτίμηση προκύπτει άμεσα από έναν απλό υπολογισμό. Πράγματι, έχουμε

$$\sum_b \|\tilde{h}_b\|_2^2 \sim R^{-(1/2+\delta_m)} \sum_b \|Eh\|_{L^2(\tilde{B} \cap \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}+b))}^2 = R^{-(1/2+\delta_m)} \|Eh\|_{L^2(\tilde{B} \cap (\cup_b \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}+b)))}^2$$

από το Πυθαγόρειο Θεώρημα και την υπόθεση μας για το σύνολο των b . Η τελευταία ποσότητα είναι το πολύ

$$R^{-(1/2+\delta_m)} \|Eh\|_{L^2(\tilde{B})}^2 \sim \|h\|_2^2,$$

από την (4.17). □

Κλείνουμε την ενότητα αυτή αποδεικνύοντας δύο εκτιμήσεις παρόμοιες με τις εκτιμήσεις εγκάρσιας ισοκατανομής της προηγούμενης ενότητας χρησιμοποιώντας τις (4.17) και (4.18) και την Πρόταση 4.4.4.

Λήμμα 4.5.7. Υποθέτουμε ότι η h είναι συγκεντρωμένη σε wave packets στο $\mathbb{W}_{\mathcal{Z}}$ και σε wave packets στο $\mathbb{W}_{\tilde{\theta}, w}$ για κάποιο ζεύγος $(\tilde{\theta}, w)$. Για κάθε $b \in B_{R^{1/2+\delta_m}}$ έχουμε

$$\|\tilde{h}_b\|_2^2 \leq R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \|h\|_2^2.$$

Απόδειξη. Από την (4.18) έχουμε

$$\|\tilde{h}_b\|_2^2 \sim R^{-(1/2+\delta_m)} \|Eh\|_{L^2(\tilde{B} \cap \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}+b))}^2 \lesssim R^{-(1/2+\delta_m)} R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \|Eh\|_{L^2(\tilde{B})}^2$$

από την Πρόταση 4.4.4. Από την (4.17) έχουμε ότι

$$R^{-(1/2+\delta_m)} R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \|Eh\|_{L^2(\tilde{B})}^2 \sim R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \|h\|_2^2$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

Λήμμα 4.5.8. Αν μία συνάρτηση g είναι συγκεντρωμένη σε wave packets στο $\mathbb{W}_{\mathcal{Z}}$, τότε για κάθε b έχουμε

$$\|\tilde{g}_b\|_2^2 \leq R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \|g\|_2^2.$$

Απόδειξη. Γράφουμε $g = \sum_{\tilde{\theta}, w} g_{\tilde{\theta}, w}$. Αν ένα wave packet συνεισφέρει σημαντικά στα $g_{\tilde{\theta}, w}$, τότε συνεισφέρει σημαντικά και στη g , άρα κάθε $g_{\tilde{\theta}, w}$ είναι επίσης συγκεντρωμένη σε wave packets στο $\mathbb{W}_{\mathcal{Z}}$. Σταθεροποιούμε ένα ζεύγος $(\tilde{\theta}, w)$. Από το προηγούμενο λήμμα ισχύει

$$\|(g_{\tilde{\theta}, w})_b\|_2^2 \leq R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \|g_{\tilde{\theta}, w}\|_2^2.$$

Αθροίζουμε ως προς όλα τα ζεύγη $(\tilde{\theta}, w)$:

$$\sum_{\tilde{\theta}, w} \|(g_{\tilde{\theta}, w})_{\tilde{b}}\|_2^2 \leq R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \sum_{\tilde{\theta}, w} \|g_{\tilde{\theta}, w}\|_2^2 \sim R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \|g\|_2^2,$$

αφού οι $g_{\tilde{\theta}, w}$ είναι ανά δύο ορθογώνιες. Η απεικόνιση $g \mapsto \tilde{g}_b$ είναι γραμμική, άρα

$$\tilde{g}_b = \sum_{\tilde{\theta}, w} (g_{\tilde{\theta}, w})_{\tilde{b}}.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η τελευταία διάσπαση είναι ορθογώνια. Έχουμε δείξει ότι η $(g_{\tilde{\theta}, w})_{\tilde{b}}$ είναι συγκεντρωμένη σε wave packets από το $\tilde{\mathbb{W}}_{\tilde{\theta}, w}$, άρα και η $(g_{\tilde{\theta}, w})_{\tilde{b}}$ είναι συγκεντρωμένη σε wave packets από το $\tilde{\mathbb{W}}_{\tilde{\theta}, w}$. Τα σύνολα $\tilde{\mathbb{W}}_{\tilde{\theta}, w}$ είναι ξένα ανά δύο κι έτσι οι συναρτήσεις $(g_{\tilde{\theta}, w})_{\tilde{b}}$ είναι ανά δύο ορθογώνιες. Τελικά,

$$\|\tilde{g}_b\|_2^2 \sim \sum_{\tilde{\theta}, w} \|(g_{\tilde{\theta}, w})_{\tilde{b}}\|_2^2 \sim R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \|g\|_2^2,$$

όπως θέλαμε. □

4.6 Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2

Στην ενότητα αυτή ολοκληρώνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2. Όπως θα δούμε, είναι άμεσο πόρισμα της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 4.6.1. *Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν μικρές σταθερές $0 < \delta \ll \delta_{n-1} \ll \dots \ll \delta_0 \ll \varepsilon$ και μία κατάλληλη μεγάλη σταθερά \tilde{A} ώστε να ισχύει το ακόλουθο:*

Έστω $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{P_1, \dots, P_{n-m}}$ μία εγκάρσια πλήρης τομή διάστασης m με $1 \leq m \leq n$. Υποθέτουμε ότι κάθε πολυώνυμο P_i έχει βαθμό το πολύ $D_{\mathcal{Z}}$. Θεωρούμε μία συνάρτηση f συγκεντρωμένη σε wave packets από το $\mathbb{W}_{\mathcal{Z}}$. Τότε, για κάθε $1 \leq A \leq \tilde{A}$ και κάθε ακτίνα $R \geq 1$ ισχύει:

$$\|Ef\|_{BL_{k,A}^p(B_R)} \leq C(K, \varepsilon, m, D_{\mathcal{Z}}) R^{\varepsilon m} R^{\delta \log(\tilde{A}/A)} R^{1/2-e} \|f\|_2, \quad (4.19)$$

όπου $e = e(k, n, p) = \frac{k+n}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)$ και $2 \leq k \leq n$, για κάθε

$$2 \leq p \leq \bar{p}(k, m) = 2 \cdot \frac{m+k}{m+k-2}.$$

Όπως θα δούμε, η απόδειξη της παρακάτω πρότασης χωρίζεται σε δύο σκέλη. Το δεύτερο σκέλος της απόδειξης έχει αρκετά κοινά στοιχεία με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 του προηγούμενου κεφαλαίου καθώς εμφανίζονται οι εφαπτόμενες κι εγκάρσιες συνεισφορές των wave packets. Η ουσιώδης διαφορά ανάμεσα στις δύο αποδείξεις είναι ότι αντί να αναζητούμε φράγματα για δι-γραμμικές ποσότητες, προσπαθούμε να φράξουμε τις ευρείες νόρμες του Ef .

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή στη διάσταση m , την ακτίνα R και τη σταθερά A . Παρατηρούμε αρχικά ότι για μικρές τιμές της ακτίνας R μπορούμε να επιλέξουμε τη σταθερά C όσο μεγάλη χρειάζεται ώστε να ισχύει το αποτέλεσμα. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε

ότι $\max\{K, \varepsilon, m, D_{\mathcal{Z}}\} \ll R$. Επίσης, αν $A = 1$, μπορούμε να επιλέξουμε $\tilde{A} = \exp\{10n\delta^{-1}\}$. Στην περίπτωση αυτή η πρόταση έπεται άμεσα από την εκτίμηση

$$\|Ef\|_{\text{BL}_{k,1}^p(B_R)} \lesssim R^{n/p} \|f\|_2 \leq \text{Vol}(B_R) \|f\|_2.$$

Για να αποδείξουμε την τελευταία εκτίμηση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\|Ef\|_{\text{BL}_{k,1}^p(B_R)}^p = \mu_{Ef}(B_R) = \int_{B_R} |Ef_{\tilde{\tau}}|^p$$

για κατάλληλη μπάλα $\tilde{\tau}$ που υλοποιεί το maximum στον ορισμό του $\mu_{Ef}(B_R)$ και να στραφούμε στο Λήμμα 4.1.2. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $A > 1$. Αν επίσης η διάσταση της \mathcal{Z} είναι $k-1$, τότε σταθεροποιούμε μία μπάλα $B = B_{K^2}$ για την οποία υποθέτουμε ότι περιέχεται στην τομή $\mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B_R$ και θεωρούμε τον εφαιπόμενο χώρο $T_z\mathcal{Z}$ της \mathcal{Z} πάνω από το σημείο $z \in \mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(B_{K^2})$. Αν κάποιος κύλινδρος $T_{\theta,u}$ τέμνει την B και αν $(\theta, u) \in \mathbb{W}_{\mathcal{Z}}$, τότε $\angle(G(\theta), V) \lesssim R^{-1/2+\delta_m}$. Έστω τ η μπάλα η οποία υλοποιεί το maximum στο $\mu_{Ef}(B_{K^2})$. Αν η τ περιέχει κάποιο θ για το οποίο ισχύει $(\theta, u) \in \mathbb{W}_{\mathcal{Z}}$, τότε $\angle(G(\tau), T_z\mathcal{Z}) \leq K^{-1}$, δηλαδή $\|Ef\|_{\text{BL}_{k,1}^p(B_{K^2})} = 0$. Στην περίπτωση που η τ δεν περιέχει κανένα τέτοιο θ έχουμε

$$\|f_{\tau}\|_2 \leq \text{RapDec}(R) \|f\|_2,$$

αφού η f είναι συγκεντρωμένη σε wave packets εφαιπόμενα στη \mathcal{Z} . Έτσι,

$$\max_{\tau: \angle(G(\tau), T_z\mathcal{Z}) > K^{-1}} \int_{B_{K^2}} |Ef_{\tau}|^p \leq \text{RapDec}(R) \|f\|_2^p.$$

Αν η μπάλα B που επιλέξαμε δεν περιέχεται στην $\mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z})$, τότε

$$|Ef| \leq \text{RapDec}(R) \|f\|_2.$$

Έτσι έχουμε ότι αν $m = k-1$, τότε

$$\|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)} \leq \text{RapDec}(R) \|f\|_2.$$

Είναι επίσης εύκολο να δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει αν $p = 2$. Πράγματι, έχουμε

$$\|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^2(B_R)}^2 \leq \sum_{\tau} \|Ef_{\tau}\|_{L^2(B_R)}^2 \lesssim R \sum_{\tau} \|f_{\tau}\|_2^2 = R \|f\|_2^2.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση ισχύει για κάθε διάσταση $< m$, κάθε ακτίνα $< \frac{R}{2}$ και κάθε σταθερά $< A$. Ορίζουμε το p ως:

$$p = \begin{cases} \tilde{p}(k, m), & \text{αν } m > k \\ \tilde{p}(m, m) + \delta, & \text{αν } m = k. \end{cases}$$

Αν αποδείξουμε την πρόταση για αυτή την τιμή του p , τότε μπορούμε να δείξουμε τη γενική περίπτωση χρησιμοποιώντας την εκδοχή της ανισότητας Hölder που δείξαμε στην Πρόταση 4.2.3 και την L^2 -εκτίμηση που δείξαμε παραπάνω.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η μάζα του μέτρου μ_{Ef} είναι συγκεντρωμένη σε μία μικρή περιοχή κάποιας αλγεβρικής επιφάνειας χαμηλότερης διάστασης ή όχι. Θεωρούμε μία συνάρτηση $D(\varepsilon, D_{\mathcal{Z}})$ την οποία θα ορίσουμε στη συνέχεια και λέμε ότι βρισκόμαστε στην αλγεβρική περίπτωση αν υπάρχει μία εγκάρσια πλήρης τομή $X^{\ell} \subset \mathcal{Z}$ διάστασης $\ell < m$, η οποία κατασκευάζεται από πολυώνυμα βαθμού το πολύ $D(\varepsilon, D_{\mathcal{Z}})$ ώστε

$$\mu_{Ef}(\mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(X) \cap B_R) \gtrsim \mu_{Ef}(B_R).$$

Αν δεν υπάρχει τέτοια εγκάρσια πλήρης τομή λέμε ότι βρισκόμαστε στη μη αλγεβρική περίπτωση. Θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει και στις δύο περιπτώσεις. Ξεκινάμε με τη μη αλγεβρική περίπτωση.

Ισχυρισμός 1. Η πρόταση ισχύει στη μη αλγεβρική περίπτωση.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1. Η απόδειξη του ισχυρισμού βασίζεται στο polynomial partitioning. Για να το χρησιμοποιήσουμε εντοπίζουμε το κομμάτι της τομής $\mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B_R$ πάνω από το οποίο ο επαπτόμενος χώρος της \mathcal{Z} δεν αλλάζει γρήγορα. Πιο συγκεκριμένα, λέμε ότι μία μπάλα

$$\tilde{B} = B(x_0, R^{1/2+\delta_m}) \subseteq \mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B_R$$

είναι κανονική αν οι επαπτόμενοι χώροι της \mathcal{Z} πάνω από κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathcal{Z} \cap 10\tilde{B}$ διαφέρουν ανά δύο κατά μία γωνία το πολύ 10^{-2} . Έστω $w \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$. Έχουμε ορίσει την αλγεβρική επιφάνεια \mathcal{Z}_w κι έχουμε δει ότι για τυχαίο w είναι εγκάρσια πλήρης τομή διάστασης $m-1$ που είναι κατασκευασμένη από πολυώνυμα βαθμού το πολύ $D_{\mathcal{Z}}$. Επιλέγουμε ένα σύνολο με $\lesssim 1$ τέτοια w ώστε οι επαπτόμενοι χώροι της \mathcal{Z} πάνω από κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathcal{Z} \setminus \cup_w \mathcal{Z}_w$ διαφέρουν ανά δύο κατά μία γωνία μέτρου το πολύ 10^{-2} . Βρισκόμαστε στη μη αλγεβρική περίπτωση κι έτσι έχουμε

$$\mu_{Ef}(\cup_w \mathcal{N}_{10R^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}_w) \cap B_R) \leq 10^{-2} \mu_{Ef}(B_R).$$

Αν μία μπάλα \tilde{B} όπως ορίστηκε παραπάνω δεν τέμνει την ένωση $\cup_w \mathcal{N}_{10R^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}_w)$, τότε από την επιλογή που κάναμε για το σύνολο των w , η μπάλα αυτή είναι κανονική, δηλαδή σχεδόν όλη η μάζα του μ_{Ef} είναι συγκεντρωμένη στις κανονικές μπάλες.

Για κάθε κανονική μπάλα $\tilde{B} \subseteq \mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B_R$ επιλέγουμε ένα σημείο $x \in \mathcal{Z} \cap \tilde{B}$ και θεωρούμε τον επαπτόμενο χώρο $T_x \mathcal{Z}$. Για κάθε m -επίπεδο V ορίζουμε \mathcal{B}_V ως το σύνολο των κανονικών μπαλών που ικανοποιούν

$$\angle(T_x \mathcal{Z}, V) \leq 10^{-2}.$$

Εφόσον είμαστε στη μη αλγεβρική περίπτωση, μπορούμε από την Αρχή του Περιστερώνα να επιλέξουμε το V ώστε να ισχύει

$$\mu_{Ef}(\cup_{B \in \mathcal{B}_V} B) \gtrsim \mu_{Ef}(B_R).$$

Ορίζουμε $N_1 = \cup_{B \in \mathcal{B}_V} B \subseteq \mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B_R$ και $\mu_1 = \mu_{Ef}|_{N_1}$.

Όπως είδαμε, σχεδόν όλη η μάζα του μ_{Ef} είναι συγκεντρωμένη στο N_1 κι έτσι $\mu_1(N_1) \sim \mu_{Ef}(B_R)$. Τώρα χρησιμοποιούμε το polynomial partitioning. Με P_V συμβολίζουμε οποιοδήποτε πολυώνυμο $P_V : V \rightarrow \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ορθή προβολή $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ του \mathbb{R}^n στον V . Θα χρησιμοποιήσουμε το polynomial partitioning για το push-forward μέτρο $\Pi_* \mu_1$ στον V που ορίζεται ως

$$\Pi_* \mu_1(A) := \mu_1(\Pi^{-1}(A)),$$

για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο A του V . Ο βαθμός για τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε το polynomial partitioning είναι $D = D(\varepsilon, D_{\mathcal{Z}})$. Βρίσκουμε ένα μη μηδενικό πολυώνυμο P_V βαθμού το πολύ D ώστε το συμπλήρωμα $V \setminus \mathcal{Z}_{P_V} = \cup_i O_{V,i}$, όπου το πλήθος των κελιών $O_{V,i}$ είναι $\sim D^m$ και για κάθε ένα από αυτά ισχύει

$$\Pi_* \mu_1(O_{V,i}) \sim D^{-m} \Pi_* \mu_1(V).$$

Μπορούμε επιπροσθέτως να γράψουμε το P_V ως το γινόμενο μη ιδιάζοντων πολυωνύμων $Q_{V,j}$. Επεκτείνουμε το P_V σε πολυώνυμο $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζοντας $P(x) := P_V(\Pi(x))$ και παρατηρούμε ότι $\mathcal{Z}_P = \Pi^{-1}(\mathcal{Z}_{P_V})$. Ορίζουμε επίσης $O_i = \Pi^{-1}(O_{V,i})$ και σημειώνουμε τη σχέση

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Z}_P = \mathbb{R}^n \setminus \Pi^{-1}(\mathcal{Z}_{P_V}) = \Pi^{-1}(V \setminus \mathcal{Z}_{P_V}) = \Pi^{-1}(\cup_i O_{V,i}) = \bigcup_i \Pi^{-1}(O_{V,i}) = \bigcup_i O_i.$$

Με παρόμοιους συλλογισμούς δείχνουμε ότι

$$\mu_1(O_i) = \Pi_* \mu_1(O_{V,i}) \sim D^{-m} \mu_1(N_1).$$

Επεκτείνουμε τώρα και κάθε ένα από τα πολυώνυμα $Q_{V,j}$ σε όλο τον \mathbb{R}^n με τον ίδιο τρόπο που επεκτείνουμε το P_V , ορίζουμε δηλαδή

$$Q_j(x) = Q_{V,j}(\Pi(x))$$

και παρατηρούμε ότι $P = \prod_j Q_j$ και ότι κάθε ένα από τα Q_j έχει επίσης βαθμό το πολύ D . Από τον ορισμό των $Q_{V,j}$ μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα τον σταθερό όρο των Q_j ώστε για κάθε j , η αλγεβρική επιφάνεια

$$X_j := \mathcal{Z}_{P_1, \dots, P_{n-m}, Q_j}$$

να είναι εγκάρσια πλήρης τομή.

Ορίζουμε $W = \mathcal{N}_{R^{1/2+\delta}}(\mathcal{Z}_P)$ και $O'_i = O_i \setminus W$. Κάθε κύλινδρος $T_{\theta,u}$ έχει ακτίνα $R^{1/2+\delta}$, άρα από τον ορισμό του W , κάθε κύλινδρος τέμνει το πολύ D διαφορετικά κελιά O'_i .

Είμαστε στη μη αλγεβρική περίπτωση, άρα το μέτρο $\mu_1(\mathcal{N}_{10R^{1/2+\delta_m}}(X_j))$ είναι αμελητέο για κάθε j . Θα δείξουμε ότι και το $\mu_1(W) = \mu_1(W \cap N_1)$ είναι αμελητέο δείχνοντας ότι ισχύει

$$W \cap N_1 \subseteq \bigcup_j \mathcal{N}_{20R^{1/2+\delta_m}}(X_j).$$

Θεωρούμε ένα $x \in W \cap N_1$. Υπάρχει μία κανονική μπάλα $\tilde{B} = B(x_0, R^{1/2+\delta_m}) \in \mathcal{B}_V$ που το περιέχει. Από τον ορισμό του \mathcal{B}_V , υπάρχει κάποιο σημείο $x_B \in \mathcal{Z} \cap \tilde{B}$ με

$$\angle(T_{x_B} \mathcal{Z}, V) \leq 10^{-2}.$$

Έστω $\mathcal{Z}_{\tilde{B}}$ η συνεκτική συνιστώσα του $\mathcal{Z} \cap 10\tilde{B}$ που περιέχει το x_B . Η μπάλα \tilde{B} είναι κανονική και $x_B \in \tilde{B}$. Έτσι, κατά μήκος της $\mathcal{Z}_{\tilde{B}}$, ο εφαπτόμενος χώρος της \mathcal{Z} σχηματίζει μικρή γωνία με το V , δηλαδή μπορούμε να γράψουμε την $\mathcal{Z}_{\tilde{B}}$ σαν γράφημα ομαλής συνάρτησης h με $w = h(v)$ στις συντεταγμένες (v, w) όπου $v \in V$ και $w \in V^\perp$. Παρατηρούμε ότι λόγω της συνθήκης για τη γωνία, η συνάρτηση h έχει σταθερά Lipschitz το πολύ 10^{-2} .

Το x ανήκει επίσης στο W , άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $(v_0, w_0) \in \mathcal{Z}_P \cap B(x, R^{1/2+\delta})$. Στο σημείο αυτό έχουμε $P(v_0, w_0) = P_V(v_0) = 0$, άρα το σημείο $(v_0, h(v_0))$ ανήκει στην τομή $\mathcal{Z}_P \cap \mathcal{Z}_{\tilde{B}}$, δηλαδή υπάρχει κάποιο j ώστε $(v_0, h(v_0)) \in X_j$. Συνολικά, έχουμε δείξει ότι

$$(v_0, h(v_0)) \in \mathcal{Z}_{\tilde{B}} \subseteq 10\tilde{B} \text{ και } x \in \tilde{B},$$

δηλαδή έχουμε ότι $x \in \mathcal{N}_{20R^{1/2+\delta_m}}(X_j)$.

Τελικά,

$$W \cap N_1 \subseteq \bigcup_j \mathcal{N}_{20R^{1/2+\delta_m}}(X_j).$$

Έτσι,

$$\mu_1(N_1) = \mu_1(N_1 \cap W) \leq \sum_j \mu_1(\mathcal{N}_{20R^{1/2+\delta_m}}(X_j))$$

και το τελευταίο άθροισμα είναι αμελητέο. Επομένως,

$$\mu_1(O'_i) \sim D^{-m} \mu_1(N_1) \sim D^{-m} \mu_{Ef}(B_R) = D^{-m} \|Ef\|_{\text{Bl}_{k,A}^p(B_R)}^p$$

για τα περισσότερα από τα i . Για κάθε δείκτη i ορίζουμε

$$\mathbb{W}_i = \{(\theta, u) : T_{\theta,u} \cap O'_i \neq \emptyset\} \text{ και } f_i = \sum_{(\theta,u) \in \mathbb{W}_i} f_{\theta,u}.$$

Κάθε μία από τις f_i είναι συγκεντρωμένη σε wave packets στο \mathbb{W}_Z . Υπάρχουν επίσης $\sim D^m$ κελιά O'_i για τα οποία ισχύει

$$\|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)} \lesssim D^m \mu_1(O'_i) \lesssim D^m \mu_{Ef_i}(O'_i) \lesssim D^m \mu_{Ef_i}(B_R) = D^m \|Ef_i\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)}.$$

Κάθε κύλινδρος $T_{\theta,u}$ εισέρχεται σε $\lesssim D$ κελιά O'_i , άρα κάθε ζεύγος (θ, u) περιέχεται σε $\lesssim D$ από τα σύνολα \mathbb{W}_i . Έτσι,

$$\sum_i \|f_i\|_2^2 \sim \sum_i \sum_{(\theta,u) \in \mathbb{W}_i} \|f_{\theta,u}\|_2^2 \lesssim D \sum_{(\theta,u)} \|f_{\theta,u}\|_2^2 \sim D \|f\|_2^2.$$

Μπορούμε να συνοψίσουμε τις παραπάνω παρατηρήσεις μας ως εξής:
Υπάρχουν $\sim D^m$ διαφορετικά i που ικανοποιούν

$$\|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)} \lesssim D^m \|Ef_i\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)} \quad (4.20)$$

και

$$\|f_i\|_2^2 \lesssim \sum_{(\theta,u) \in \mathbb{W}_i} \|f_{\theta,u}\|_2^2 \lesssim D^{-m} \sum_{(\theta,u)} \|f_{\theta,u}\|_2^2 \sim D \cdot D^{-m} \|f\|_2^2 = D^{1-m} \|f\|_2^2. \quad (4.21)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις (4.20) και (4.21) για να αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή στην ακτίνα R . Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό ορίζουμε

$$S = C(K, \varepsilon, m, D_Z) R^{\varepsilon m} R^{\delta \log(\frac{A}{\lambda})} R^{1/2-e}$$

κι έτσι θέλουμε να δείξουμε την $\|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)} \leq S \|f\|_2$. Έχουμε υποθέσει ότι η (4.19) ισχύει για όλες τις μπάλες με ακτίνα $< \frac{R}{2}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει και για κάθε μπάλα ακτίνας R με διαφορετική σταθερά. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι

$$\|Ef_i\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)}^p \leq CS \|f_i\|_2.$$

Έτσι έχουμε

$$\|Ef_i\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)}^p \lesssim D^m \|Ef_i\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)} \lesssim D^m S^p \|f_i\|_2^p \lesssim D^m D^{(1-m)\frac{p}{2}} S^p \|f\|_2^p$$

από τις (4.20) και (4.21). Από την υπόθεση μας ότι $p > \frac{2m}{m-1}$, έχουμε ότι $1 - m < -2mp$ κι έτσι ο εκθέτης $m + (1 - m)\frac{p}{2} < m(1 - p^2)$ είναι αρνητικός. Αν $m > k$, τότε ο εκθέτης έχει μεγάλη απόλυτη τιμή κι αν $m = k$, τότε ο εκθέτης ισούται με $\frac{1-m}{2}\delta$.

Τώρα επιλέγουμε το $D = D(\varepsilon, D_Z)$. Το θέλουμε αρκετά μεγάλο ώστε να κυριαρχεί τη σταθερά. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)}^p \leq S \|f\|_2$$

και η επαγωγή κλείνει στη μη αλγεβρική περίπτωση. \square

Ισχυρισμός 2. Η πρόταση ισχύει και στην αλγεβρική περίπτωση.

Απόδειξη Ισχυρισμού 2. Υπάρχει μία εγκάρσια πλήρης τομή X^ℓ διάστασης $\ell < m$ κατασκευασμένη από πολυώνυμα P_k βαθμού το πολύ $D = D(\varepsilon, D_Z)$ ώστε

$$\mu_{Ef}(\mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(X)) \gtrsim \mu_{Ef}(B_R).$$

Χωρίζουμε την B_R σε μικρότερες μπάλες B_j ακτίνας ρ . Μάλιστα επιλέγουμε την ακτίνα ρ ώστε να ικανοποιεί τη σχέση $\rho^{1/2+\delta_\ell} = R^{1/2+\delta_m}$, όπου δ_ℓ η σταθερά στη θέση ℓ στην πεπερασμένη ακολουθία μικρών σταθερών που θέλουμε να δείξουμε πως υπάρχει. Για κάθε j ορίζουμε

$$\mathbb{W}_j = \{(\theta, u) : T_{\theta, u} \cap \mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(X) \cap B_j \neq \emptyset\}$$

και $f_j = \sum_{(\theta, u) \in \mathbb{W}_j} f_{\theta, u}$. Εντός της τομής $\mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(X) \cap B_j$ έχουμε $Ef_j = Ef$. Έτσι,

$$\|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)}^p = \mu_{Ef}(B_R) \leq \sum_j \mu_{Ef}(B_j).$$

Παρατηρήσαμε ότι στην B_j έχουμε $Ef_j = Ef$, άρα

$$\sum_j \mu_{Ef}(B_j) \lesssim \sum_j \mu_{Ef_j}(B_j) + \text{RapDec}(R) \|f\|_2^p,$$

δηλαδή

$$\|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)}^p \lesssim \sum_j \|Ef_j\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_j)}^p + \text{RapDec}(R) \|f\|_2^p.$$

Χωρίζουμε κάθε \mathbb{W}_j σε κυλίνδρους που είναι εφαπτόμενοι ή εγκάρσιοι στην X . Υπενθυμίζουμε ότι ένας κύλινδρος $T_{\theta, u}$ καλείται εφαπτόμενος στην X στην B_j αν

$$T_{\theta, u} \cap 2B_j \cap \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_\ell}}(X) \cap B_j$$

και για κάθε $x \in T_{\theta, u}$ και $y \in X \cap 2B_j$ με $|x - y| \lesssim \rho^{1/2+\delta_\ell}$ ισχύει

$$\angle(G(\theta), T_y X) \lesssim \rho^{-1/2+\delta_\ell}.$$

Ορίζουμε τα σύνολα των εφαπτόμενων και των εγκάρσιων wave packets ως

$$\mathbb{W}_{j, \text{εφ}} = \{(\theta, u) \in \mathbb{W}_j : \text{ο } T_{\theta, u} \text{ είναι εφαπτόμενος στην } X \text{ στην } B_j\}$$

και

$$\mathbb{W}_{j, \text{εγκ}} = \mathbb{W}_j \setminus \mathbb{W}_{j, \text{εφ}}.$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε $f_j = f_{j, \text{εφ}} + f_{j, \text{εγκ}}$, όπου

$$f_{j, \text{εφ}} = \sum_{(\theta, u) \in \mathbb{W}_{j, \text{εφ}}} f_{\theta, u} \text{ και } f_{j, \text{εγκ}} = \sum_{(\theta, u) \in \mathbb{W}_{j, \text{εγκ}}} f_{\theta, u}.$$

Από την ασθενή μορφή της τριγωνικής ανισότητας που ικανοποιεί η $\text{BL}_{k,A}^p$ προκύπτει η

$$\sum_j \|Ef_j\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_j)}^p \lesssim \sum_j \|Ef_{j, \text{εφ}}\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(B_j)}^p + \sum_j \|Ef_{j, \text{εγκ}}\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(B_j)}^p. \quad (4.22)$$

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις αναλόγα με το ποιος από τους δύο προσθετέους του δεξιού μέλους κυριαρχεί στο άθροισμα. Στην περίπτωση που κυριαρχούν οι εφαπτομενικοί όροι θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο m , ενώ αν κυριαρχούν οι εγκάρσιοι όροι θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στην ακτίνα R .

Υποπερίπτωση 1η: Στην (4.22) κυριαρχούν οι εφαπτομενικοί όροι.

Θέλουμε να κάνουμε επαγωγή στο $Ef_{j,\varepsilon\varphi}$ στην B_j . Θα χρησιμοποιήσουμε τη διάσπαση σε wave packets για τη μπάλα B_j . Γράφουμε $h = f_{j,\varepsilon\varphi}$. Έχουμε

$$\tilde{h} = \sum_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \tilde{h}_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$$

και πρέπει να ελέγξουμε ότι η \tilde{h} είναι συγκεντρωμένη σε wave packets εφαιπόμενα στην X στη B_j . Θέλουμε δηλαδή να δείξουμε ότι τα ζεύγη $(\tilde{\theta}, \tilde{u})$ ικανοποιούν

$$T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \subseteq \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_\ell}}(X) \cap B_j$$

και για κάθε $x \in T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$ και $y \in X \cap B_j$ με $|x - y| \lesssim \rho^{1/2+\delta_\ell}$ έχουμε

$$\angle(G(\tilde{\theta}), T_y X) \lesssim \rho^{-1/2+\delta_\ell}.$$

Η h είναι συγκεντρωμένη σε wave packets στο $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}$, άρα έχουμε

$$T_{\theta, u} \cap B_j \subseteq \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_\ell}}(X) \cap B_j \quad (4.23)$$

και

$$\angle(G(\theta), T_y X) \lesssim \rho^{-1/2+\delta_\ell}. \quad (4.24)$$

Έχουμε επίσης δείξει ότι για κάθε ζεύγος (θ, u) , η $(f_{\theta, u})^\sim$ είναι συγκεντρωμένη σε wave packets στο $\tilde{\mathbb{W}}_{\theta, u}$. Επιπροσθέτως, για κάθε ζεύγος $(\tilde{\theta}, \tilde{u}) \in \tilde{\mathbb{W}}_{\theta, u}$, το Λήμμα 4.5.2 μας δίνει ότι

$$d_{\text{H}}(T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}, T_{\theta, u} \cap B_j) \lesssim R^{1/2+\delta}$$

και

$$\angle(G(\tilde{\theta}), G(\theta)) \lesssim \rho^{-1/2}.$$

Έτσι έχουμε ότι αν $(\theta, u) \in \mathbb{W}_{\theta, u}$ και $(\tilde{\theta}, \tilde{u}) \in \tilde{\mathbb{W}}_{\theta, u}$, τότε ο $T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$ ικανοποιεί τις (4.23) και (4.24).

Έχουμε λοιπόν ότι η \tilde{h} , η X και η B_j ικανοποιούν τις υποθέσεις της πρότασης, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική μας υπόθεση για τη διάσταση. Από την επαγωγική μας υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned} \|Ef_{j,\varepsilon\varphi}\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(B_j)} &= \|E\tilde{h}\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(B_\rho)} \\ &\leq C(K, \varepsilon, \ell, D(\varepsilon, D_{\mathcal{Z}})) \rho^{\varepsilon\ell} \rho^{\delta \log(2\tilde{A}/A)} \rho^{1/2-e} \|f_{j,\varepsilon\varphi}\|_2 \end{aligned}$$

για κάθε $2 \leq p \leq \bar{p}(k, \ell) = 2 \cdot \frac{k+\ell}{k+\ell-2}$. Η X έχει διάσταση $\ell < m$, άρα $\bar{p}(k, m) < \bar{p}(k, \ell)$ και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τελευταία εκτίμηση. Αθροίζουμε πάνω από τις $\lesssim R^{O(\delta_\ell)}$ μπάλες B_j και προκύπτει η εκτίμηση

$$\begin{aligned} \|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)} &\lesssim \sum_j \|Ef_j\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_j)} \lesssim R^{O(\delta_\ell)} \|Ef_{j,\varepsilon\varphi}\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(B_j)} \\ &\lesssim R^{O(\delta_\ell)} C(K, \varepsilon, \ell, D(\varepsilon, D_{\mathcal{Z}})) \rho^{\varepsilon\ell} \rho^{\delta \log(2\tilde{A}/A)} \rho^{1/2-e} \|f\|_2. \end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε την $C(K, \varepsilon, m, D_{\mathcal{Z}})$ αρκετά μεγαλύτερη από την $C(K, \varepsilon, \ell, D_{\varepsilon, D_{\mathcal{Z}}})$ και παρατηρήσουμε ότι $R^{O(\delta_\ell)} R^{\varepsilon\ell} \leq R^{\varepsilon m}$ αφού $\delta_\ell \ll \varepsilon$, η επαγωγή κλείνει στην υποπερίπτωση που κυριαρχούν οι εφαιπόμενοι όροι.

Υποπερίπτωση 2η: Στην (4.22) κυριαρχούν οι εγκάρσιοι όροι.

Από τον ορισμό των $f_{j,\text{εγκ}}$ έχουμε

$$\sum_j \|f_{j,\text{εγκ}}\|_2^2 = \sum_{\theta,u} |\{j : (\theta, u) \in \mathbb{W}_{j,\text{εγκ}}\}| \|f_{\theta,u}\|_2^2.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος (θ, u) , από το Λήμμα 4.3.9,

$$|\{j : (\theta, u) \in \mathbb{W}_{j,\text{εγκ}}\}| \lesssim_{\varepsilon, D_{\mathcal{Z}}} 1.$$

Έστω T ένας κύλινδρος με ίδιο κέντρο με τον $T_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$ ακτίνας $\rho^{1/2+\delta_\ell}$. Θεωρούμε $\alpha = \rho^{-1/2+\delta_\ell}$. Έστω λ ο άξονας του T . Αφού $(\theta, u) \in \mathbb{W}_{j,\text{εγκ}}$, η τομή $T \cap X_{>\alpha} \cap 2B_j$ είναι μη κενή. Μάλιστα, η τομή $T \cap X_{>\alpha}$ περιέχεται σε $\leq D_X^n$ μπάλες ακτίνας $\rho^{1/2+\delta_\ell} \alpha^{-1} \sim \rho$. Βρισκόμαστε ακόμα στην αλγεβρική περίπτωση, άρα η X έχει κατασκευαστεί από πολυώνυμα βαθμού $D_X \leq D(\varepsilon, D_{\mathcal{Z}}) \lesssim_{\varepsilon, D_{\mathcal{Z}}} 1$, δηλαδή το (θ, u) ανήκει σε $\lesssim_{\varepsilon, D_{\mathcal{Z}}} 1$ διαφορετικά σύνολα $\mathbb{W}_{j,\text{εγκ}}$. Έτσι,

$$\sum_j \|f_{j,\text{εγκ}}\|_2^2 \lesssim_{\varepsilon, D_{\mathcal{Z}}} \|f\|_2^2.$$

Θα μελετήσουμε τον $Ef_{j,\text{εγκ}}$ σε κάθε μπάλα B_j χρησιμοποιώντας επαγωγή στην ακτίνα. Θα χρησιμοποιήσουμε τη διάσπαση σε wave packets προσαρμοσμένη στην B_j όπως στην Ενότητα 4.5. Ορίζουμε $g = f_{j,\text{εγκ}}$ κι έχουμε $\tilde{g} = \sum_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \tilde{g}_{\tilde{\theta}, \tilde{u}}$. Έχουμε ορίσει

$$\tilde{g}_b = \sum_{(\tilde{\theta}, \tilde{u}) \in \mathbb{W}_{\mathcal{Z}+b}} \tilde{g}_{\tilde{\theta}, \tilde{u}} \text{ για κάθε } b \in B_{R^{1/2+\delta_m}}.$$

Για κάθε b , η \tilde{g}_b είναι συγκεντρωμένη σε wave packets εφαιπόμενα στην $\mathcal{Z} + b$ στη B_j , άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στην ακτίνα για να μελετήσουμε τον $E\tilde{g}_b$. Έστω y_j το κέντρο της B_j και $x = y_j + \tilde{x} \in B_j$. Στην Ενότητα 4.5 αποδείξαμε ότι

$$|E\tilde{g}_b(\tilde{x})| \sim \mathcal{X}_{\mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}+b)}(x) |Eg(x)|.$$

Ορίζουμε επίσης $f_{j,\text{εγκ},b} = e^{-i\psi_y(\omega)} \tilde{g}_b$ ώστε να ισχύει $(f_{j,\text{εγκ},b})^\sim = \tilde{g}_b$ και μπορούμε να γράψουμε

$$|Ef_{j,\text{εγκ},b}(x)| \sim \mathcal{X}_{\mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}+b)}(x) |Eg(x)|. \quad (4.25)$$

Επιλέγουμε ένα σύνολο διανυσμάτων $b \in B_{R^{1/2+\delta_m}}$ το οποίο θα προσδιορίσουμε σε λίγο. Καλύπτουμε την τομή $\mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B_j$ με ξένες ανά δύο μπάλες B ακτίνας $R^{1/2+\delta_m}$.

Ομαδοποιούμε δυαδικά τον όγκο αυτών των μπαλών ορίζοντας για κάθε s

$$\mathbb{B}_s = \{B(x_0, R^{1/2+\delta_m}) \subseteq \mathcal{N}_{R^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}) \cap B_j : \text{Vol}(B(x_0, R^{1/2+\delta_m}) \cap \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z})) \sim 2^s\}.$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν $\sim \log R$ διαφορετικά σύνολα \mathbb{B}_s . Θέτουμε

$$\mathbb{A} = \bigcup_{B \in \mathbb{B}_s} B.$$

Μπορούμε λοιπόν, από την Αρχή του Περιστερώνα, να επιλέξουμε κατάλληλο s ώστε

$$\|Eg\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(\mathbb{A})} \gtrsim (\log R)^{-1} \|Eg\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(B_j)}.$$

Από όλα τα ζεύγη $(\theta, u) \in \mathbb{W}_{j,\text{εγκ}}$ μας ενδιαφέρουν μόνο αυτά για τα οποία οι αντίστοιχοι κύλινδροι $T_{\theta,u}$ τέμνουν κάποια από τις μπάλες του \mathbb{B}_s , καθώς αυτές περιέχουν σχεδόν όλη την πληροφορία που μας χρειάζεται. Ορίζουμε λοιπόν \mathbb{M} ως το σύνολο των (θ, u) που μας ενδιαφέρουν. Ορίζουμε επίσης

$$f_{\mathbb{M}} = \sum_{(\theta,u) \in \mathbb{M}} f_{\theta,u}$$

και παρατηρούμε ότι η νόρμα $\|f_{\mathbb{M}}\|_2$ είναι σίγουρα μικρότερη από την $\|g\|_2$, ενώ οι $\|Eg\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(B_j)}^p$ και $\|Ef_{\mathbb{M}}\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(B_j)}^p$ διαφέρουν το πολύ κατά έναν παράγοντα της τάξης $\log R$.

Τώρα μπορούμε να επιλέξουμε το σύνολο των b . Επιλέγουμε ένα τυχαίο σύνολο από $\text{Vol}(B_{R^{1/2+\delta_m}})/2^s$ διανύσματα $b \in B_{R^{1/2+\delta_m}}$. Για κάθε μπάλα $B(x_0, R^{1/2+\delta_m}) \in \mathbb{B}_s$, η ένωση $\cup_b \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z} + b)$ καλύπτει ένα τυχαίο μέρος της. Έτσι, λόγω της (4.25) και τον ορισμό του συνόλου \mathbb{B}_s έχουμε

$$\|Eg\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(B_j)}^p \lesssim \sum_b \|Ef_{\mathbb{M}}\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(\mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z}+b) \cap B_j)}^p$$

με μεγάλη πιθανότητα. Κάθε σημείο της $B(x_0, R^{1/2+\delta_m})$ περιέχεται σε $\lesssim 1$ από τις περιοχές $\mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z} + b)$, άρα τα σύνολα $B(x_0, R^{1/2+\delta_m}) \cap \mathcal{N}_{\rho^{1/2+\delta_m}}(\mathcal{Z} + b)$ είναι ουσιαστικά ξένα ανά δύο. Έχουμε διασπάσει τη g σε

$$g = \sum_{\tilde{\theta}, w} g_{\tilde{\theta}, w},$$

άρα από το Λήμμα 4.5.6 έχουμε

$$\sum_b \|(g_{\tilde{\theta}, w})_{\tilde{b}}\|_2^2 \lesssim \|g_{\tilde{\theta}, w}\|_2^2.$$

Παρατηρούμε ότι είτε η $g_{\tilde{\theta}, w}$ είναι αμελητέα ή ο κύλινδρος $T_{\tilde{\theta}, w}$ τέμνει κάποια από τις μπάλες $B(x_0, R^{1/2+\delta_m}) \in \mathbb{B}_s$. Όπως είδαμε και στην απόδειξη του Λήμματος 4.5.8, οι διασπάσεις

$$\tilde{g}_b = \sum_{\tilde{\theta}, w} (g_{\tilde{\theta}, w})_{\tilde{b}} \quad \text{και} \quad g = \sum_{\tilde{\theta}, w} g_{\tilde{\theta}, w}$$

είναι ουσιαστικά ορθογώνιες. Έτσι,

$$\sum_b \|\tilde{g}_b\|_2^2 \sim \sum_{b, \tilde{\theta}, w} \|(g_{\tilde{\theta}, w})_{\tilde{b}}\|_2^2 \lesssim \sum_{\tilde{\theta}, w} \|g_{\tilde{\theta}, w}\|_2^2 \sim \|g\|_2^2.$$

Συγκεντρώνουμε εδώ όλες τις εκτιμήσεις που αποδείξαμε και θα χρησιμοποιήσουμε για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της εγκάρσιας υποπερίπτωσης.

Έχουμε

$$\begin{aligned} \|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)}^p &\lesssim \log R \sum_{j,b} \|Ef_{j,\text{εγκ},b}\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(B_j)}^p \cdot \\ &\sum_{j,b} \|f_{j,\text{εγκ},b}\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(B_j)}^p \lesssim \|f\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Το σύνολο των b είναι πεπερασμένο, άρα από το Λήμμα 4.5.8 έχουμε

$$\max_b \|f_{j,\text{εγκ},b}\|_2^2 \leq R^{O(\delta_m)} \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^{m-n} \|g\|_2^2. \quad (4.27)$$

Από την επαγωγική υπόθεση για την ακτίνα έχουμε

$$\begin{aligned} \|Ef_{j,\varepsilon\gamma\kappa,b}\|_{\text{BL}_{k,A/2}^p(B_j)} &\leq C(K, \varepsilon, m, D_{\mathcal{Z}})\rho^{\varepsilon m}\rho^{\delta(\log(2\tilde{A}/A))}\rho^{1/2-e}\|f_{j,\varepsilon\gamma\kappa,b}\|_2 \\ &\leq C(K, \varepsilon, m, D_{\mathcal{Z}})R^\delta\rho^{\varepsilon m}\rho^{\delta(\log(\tilde{A}/A))}\rho^{1/2-e}\|f_{j,\varepsilon\gamma\kappa,b}\|_2. \end{aligned}$$

Αποδεικνύουμε τώρα την (4.19) με επαγωγή στην ακτίνα.

$$\begin{aligned} \|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p}^p &\lesssim R^{O(\delta)}(C(K, \varepsilon, m, D_{\mathcal{Z}})\rho^{\varepsilon m}\rho^{\delta(\log(\tilde{A}/A))}\rho^{1/2-e})^p \sum_{j,b} \|Ef_{j,\varepsilon\gamma\kappa,b}\|_2^p \\ &\lesssim R^{O(\delta_m)}(C(K, \varepsilon, m, D_{\mathcal{Z}})\rho^{\varepsilon m}\rho^{\delta(\log(\tilde{A}/A))}\rho^{1/2-e})^p \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}}\right)^{(n-m)(1-\frac{p}{2})} \|f\|_2^p \end{aligned}$$

από τις (4.26) και (4.27).

Για τον εκθέτη $p = \bar{p}(k, m)$ υπολογίζουμε

$$(\rho^{1/2-e})^p \left(\frac{R^{1/2}}{\rho^{1/2}}\right)^{(n-m)(1-\frac{p}{2})} = (R^{1/2-e})^p.$$

Στην περίπτωση που $m = k$, έχουμε ορίσει $p = \bar{p}(m, m) + \delta$ και η εκτίμηση ισχύει πολλαπλασιάζοντας με έναν ακόμα παράγοντα της μορφής $R^{O(\delta)}$. Αντικαθιστούμε τις τιμές των p, e στην τελευταία εκτίμηση κι έχουμε

$$\|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p}^p \leq C(n, \varepsilon, D_{\mathcal{Z}})R^{O(\delta_m)}(R/\rho)^{-\varepsilon m}(C(K, \varepsilon, m, D_{\mathcal{Z}})\rho^{\varepsilon m}\rho^{\delta(\log(\tilde{A}/A))}\rho^{1/2-e})^p \|f\|_2^p.$$

Για να κλείσει η επαγωγή αρκεί να δείξουμε ότι $C(n, \varepsilon, D_{\mathcal{Z}})R^{O(\delta_m)}(R/\rho)^{-\varepsilon m} \leq 1$. Σημειώνουμε ότι $R/\rho = R^{O(\delta_e)}$ κι επιλέγουμε τα δ ώστε $\delta_m \ll \varepsilon\delta_{m-1}$. Έτσι, ο όρος $(R/\rho)^{-\varepsilon m}$ κυριαρχεί τους υπόλοιπους και η επαγωγή κλείνει στην εγκάρσια υποπερίπτωση. \square

Έχουμε επιβεβαιώσει την ισχύ της πρότασης διακρίνοντας όλες τις πιθανές περιπτώσεις κι έτσι η απόδειξη είναι πλήρης. \square

Τώρα είμαστε σε θέση να ολοκληρώσουμε και την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2. Επιλέγουμε $m = n$ και $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^n$. Επιλέγουμε επίσης $D_{\mathcal{Z}} = 1$, $A = \tilde{A}$ και $p = \bar{p}(k, n)$. Υπολογίζουμε με αυτές τις υποθέσεις το e :

$$2e = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)(k+n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{k+n-2}{2(k+n)}\right)(k+n) = \frac{k+n}{2} - \frac{1}{2}(k+n-2) = 1,$$

άρα $-e + 1/2 = 0$. Έτσι,

$$\|Ef\|_{\text{BL}_{k,A}^p(B_R)} \leq C(K, \varepsilon, n)R^\varepsilon\|f\|_2,$$

όπως θέλαμε. \square

Παράρτημα Α΄

Ασυμπτωτική συμπεριφορά στη σφαίρα

Σκοπός του παραρτήματος είναι η απόδειξη της (1.20). Μάλιστα, θα αποδείξουμε μία ανάλογη σχέση για επιφανειακά μέτρα. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό τους.

Ορισμός Α΄.0.1. Έστω S μία ομαλή επιφάνεια του \mathbb{R}^n . Έστω επίσης U ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^{n-1} ώστε $0 \in U$ και

$$S = \{(x, \phi(x)) : x \in U\},$$

όπου $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ομαλή. Το επιφανειακό μέτρο $d\sigma$ της S δίνεται από τη σχέση

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla\phi|^2} dx.$$

Αν σ το επιφανειακό μέτρο της S , τότε ο μετασχηματισμός Fourier του είναι

$$\hat{\sigma}(\xi) = \int e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \sqrt{1 + |\nabla\phi(x)|^2} dx, \text{ για κάθε } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Φαίνεται λοιπόν ότι μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I(\lambda) = \int e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx,$$

όπου $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ και $\lambda > 0$.

Θεώρημα Α΄.0.2. Αν $\nabla\phi(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \text{supp}(\psi)$, τότε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$I(\lambda) \leq C(\phi, \psi, N) \lambda^{-N}.$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα στην περίπτωση που $n = 1$. Πράγματι, αφού $\nabla\phi \neq 0$ στον $\text{supp}(\psi)$, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι υπάρχει $j \in \{1, \dots, n\}$ ώστε $\frac{d\phi}{dx_j}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \text{supp}(\psi)$ και για ευκολία πάρουμε $j = n$, τότε αν $x = (x', x_n)$, από το Θεώρημα Fubini, μπορούμε να γράψουμε

$$I(\lambda) = \int_A \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx_n dx',$$

όπου A η προβολή του $\text{supp}(f)$ στο $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Όποιες σταθερές εξαρτώνται από το x' είναι ομοιόμορφα φραγμένες, άρα εφαρμόζοντας την υπόθεσή μας παίρνουμε το ζητούμενο. Γενικά, καλύπτουμε από πεπερασμένες το πλήθος μπάλες B_1, \dots, B_m τον $\text{supp}(\psi)$ ώστε για κάποιον δείκτη j_k να ισχύει $\frac{\partial \phi}{\partial x_{j_k}} \neq 0$ αν $x \in B_k$. Έστω $(\psi_k)_{k=1}^m$ ομαλή διαμέριση της μονάδας συμβατή με το κάλυμμα $(B_k)_{k=1}^m$. Ορίζουμε

$$\psi = \sum_k \psi_k$$

εφαρμόζουμε το παραπάνω για κάθε μία από τις ψ_k και αθροίζουμε ως προς k . Μένει να αποδείξουμε τη μονοδιάστατη περίπτωση. Έστω $N \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$g_1(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi(x)}{\phi'(x)} \right), \quad g_2(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{g_1(x)}{\phi'(x)} \right), \quad g_N(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{g_{N-1}(x)}{\phi'(x)} \right).$$

Θέτουμε $B = \text{supp}(\psi)$ και γράφουμε

$$\begin{aligned} |I(\lambda)| &= \left| \int_B e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx \right| \\ &= \lambda^{-1} \left| - \int_B e^{i\lambda\phi(x)} g_1(x) dx \right| \quad (\text{Ολοκλήρωση κατά μέρη}) \\ &= \lambda^{-N} \left| \int_B e^{i\lambda\phi(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{g_N(x)}{\phi'(x)} \right) dx \right| \\ &\leq \lambda^{-N} \int_B \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{g_N(x)}{\phi'(x)} \right) \right| dx. \end{aligned}$$

□

Στο παραπάνω θεώρημα υποθέσαμε ότι $\nabla\phi \neq 0$ στον $\text{supp}(\psi)$. Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση της σφαίρας. Θα χρειαστούμε κάτι ισχυρότερο.

Λήμμα Α'.0.3 (Van der Corput). Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1$, $x \in [a, b]$ και ότι ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής:

- $k = 1$ και ϕ' μονότονη
- $k \geq 2$.

Τότε, για κάθε $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ισχύει

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx \right| \leq (5 \cdot 2^{k-1} - 2) \lambda^{-1/k} \left(|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx \right).$$

Λήμμα Α'.0.4 (Morse). Έστω U ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ομαλή και $x_0 \in U$ ώστε $\phi(x_0) = \nabla\phi(x_0) = 0$ και $\det(H_\phi)(x_0) \neq 0$. Τότε, υπάρχουν V, W ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n με $0 \in V$, $x_0 \in W$ και αμφιδιαφόριση $G : V \rightarrow W$ με $G(0) = x_0$ ώστε

$$\phi \circ G(x) = \sum_{j=1}^{k-1} x_j^2 - \sum_{j=k}^n x_j^2, \quad x \in V$$

για κάποιο $k \in \{1, \dots, n\}$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 = 0$ και ότι ο Εσσιανός Πίνακας της ϕ είναι διαγώνιος με μη μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις έχουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(0) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}(0) \neq 0.$$

Από το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης, υπάρχει $W_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό με $0 \in W_1$ και $g : W_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ομαλή με $g(0) = 0$ ώστε

$$\frac{\partial \phi(g(x'), x')}{\partial x_1} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 \phi(g(x'), x')}{\partial x_1^2} \neq 0$$

για $x' = (x_2, \dots, x_n) \in W_1$ και

$$\frac{\partial \phi(x_1, x')}{\partial x_1} \neq 0, \quad \text{αν} \quad (x_1, x') \in U, \quad x' \in W_1 \quad \text{και} \quad x_1 \neq g(x').$$

Ορίζουμε $F(x) = (x_1 + g(x'), x')$ και $\psi(x) = \phi \circ F(x)$. Από τον Κανόνα της Αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial \psi(0, x')}{\partial x_1} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 \psi(0, x')}{\partial x_1^2} \neq 0 \quad \text{αν} \quad x' \in W_1.$$

Από το Θεώρημα Taylor, συρρικνώνοντας κατάλληλα το W_1 , μπορούμε να γράψουμε την ψ ως $\psi(x) = \psi(0, x') \pm h(x)x_1^2$, όπου h μία αυστηρά θετική ομαλή συνάρτηση. Ορίζουμε

$$E(x) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{h(x)}}, x' \right).$$

Τότε, $\psi \circ E(x) = \pm x_1^2 + \psi(0, x')$, δηλαδή $\phi \circ F \circ E(x) = \pm x_1^2 + \psi(0, x')$. Η συνάρτηση $G_1(x) = F \circ E(x)$ είναι αμφιδιαφόριση σε γειτονιά του 0. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με την $\psi(0, x')$ αντί της ϕ και συνεχίζουμε κάνοντας τα ίδια βήματα άλλες $(n - 2)$ φορές. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Morse μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο.

Πρόταση Α'.0.5. *Αν όλα τα κρίσιμα σημεία της ϕ στον $\text{supp}(\psi)$ είναι μη εκφυλισμένα, δεν μηδενίζει δηλαδή ο Εσσιανός Πίνακας στα σημεία αυτά, τότε*

$$|I(\lambda)| \leq C(\phi, \psi) \lambda^{-n/2}.$$

Κλείνουμε την παράγραφο με το κεντρικό αποτέλεσμα από το οποίο θα πάρουμε την (1.20).

Θεώρημα Α'.0.6. *Έστω $S = \{(x, \phi(x)) : x \in U\}$ ομαλή επιφάνεια και σ το επιφανειακό της μέτρο. Αν $\det(H_\phi(x)) \neq 0$ για κάθε $x \in U$, τότε*

$$|\hat{\sigma}(\xi)| \leq C(\phi) |\xi|^{\frac{1-n}{2}}.$$

Απόδειξη. Έστω $\xi = \lambda\eta$ με $\lambda - |\xi| > 0, |\eta| = 1$ και

$$\phi_\eta(x) = -2\pi(\eta_1 x_1 + \dots + \eta_{n-1} x_{n-1} + \eta_n \phi(x)), \quad x \in U.$$

Έχουμε

$$\nabla \phi_\eta(x) = 2\pi((\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) + \eta_n \phi'(x))$$

και

$$H_{\phi_\eta}(x) = -2\pi\eta_n H_\phi(x).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $|\hat{\sigma}(\xi)| = \left| \int e^{i\lambda\phi_\eta(x)} \psi(x) dx \right| \lesssim_\eta \lambda^{\frac{1-n}{2}}$.

Αν $\eta_n = 0$, τότε $\nabla\phi_\eta(x) \neq 0$ για κάθε $x \in U$ κι έχουμε τη ζητούμενη ανισότητα από την (Α'.0.2).

Αν $\eta_n \neq 0$, τότε από την υπόθεση για την Ερμιτιανή έχουμε $\det(H_{\phi_\eta}(x)) \neq 0$ για κάθε $x \in U$ και το ζητούμενο έπεται από την (Α'.0.5). \square

Παράρτημα Β΄

Απόδειξη των Λημμάτων 3.3.5 και 3.3.6

Περιεχόμενα

Β΄.1 Απόδειξη του Λήμματος 3.3.5	91
Β΄.2 Απόδειξη του Λήμματος 3.3.6	93

Στο παράρτημα αυτό αποδεικνύουμε τα λήμματα 3.3.5 και 3.3.6 χτίζοντας πάνω σε έννοιες από τα Κεφάλαια 3 και 4.

Β΄.1 Απόδειξη του Λήμματος 3.3.5

Έχουμε ορίσει το σύνολο $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\gamma\kappa}$ ως το σύνολο των κυλίνδρων $T \in \mathbb{W}$ για τους οποίους υπάρχει μη κρίσιμο σημείο $z \in 10T \cap 2B_j \cap \mathcal{Z}_P$ ώστε $\angle(u(T), T_z \mathcal{Z}_P) > R^{-1/2+2\delta}$. Θα δείξουμε ότι κάθε κύλινδρος $T \in \mathbb{W}$ ανήκει το πολύ σε $\text{Poly}(D)$ διαφορετικά σύνολα $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\gamma\kappa}$.

Για την απόδειξη του Λήμματος 3.3.5 θα χρειαστούμε γενικεύσεις του Λήμματος 4.3.9 στις 2 και 3 διαστάσεις, τις οποίες θα διατυπώσουμε σε αυτή την ενότητα.

Λήμμα Β΄.1.1. Έστω $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ ένα μη ιδιάζον πολυώνυμο. Για κάθε α , υπάρχει πολυώνυμο P_1 που εξαρτάται μόνο από τα P και α ώστε η αθροιστική επιφάνεια $\mathcal{Z}_{=\alpha}(P)$ να ισούται με την \mathcal{Z}_{P,P_1} . Επίσης, σχεδόν για κάθε τιμή του α , η $\mathcal{Z}_{=\alpha}(P)$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή.

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathcal{Z}_P$. Έχουμε υποθέσει ότι το P είναι μη ιδιάζον, άρα $\nabla P(x) \neq 0$. Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της \mathcal{Z}_P στο x είναι το $\pm \frac{\nabla P(x)}{|\nabla P(x)|}$, δηλαδή $x \in \mathcal{Z}_{=\alpha}(P)$ αν και μόνο αν

$$\left\langle \frac{\nabla P}{|\nabla P|}, u(T) \right\rangle = \pm \sin \alpha,$$

το οποίο ισχύει αν και μόνο αν

$$P_1 := \langle \nabla P, u(T) \rangle^2 - \sin^2 \alpha |\nabla P|^2 = 0.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το P_1 είναι πολυώνυμο και ότι $x \in \mathcal{Z}_{=\alpha}(P)$ αν και μόνο αν $P_1(x) = 0$, δηλαδή $\mathcal{Z}_{=\alpha}(P) = \mathcal{Z}_{P,P_1}$. Σταθεροποιούμε ένα α . Έστω $y \in \mathcal{Z}_{P,P_1}$. Τα διανύσματα

∇P και ∇P_1 είναι γραμμικά εξαρτημένα στο y αν και μόνο αν $\nabla f(y) = 0$, όπου

$$f : \mathcal{Z}_P \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(z) = \frac{\langle \nabla P(z), u(T) \rangle^2}{|\nabla P(z)|^2}.$$

Η f είναι C^∞ αφού το P είναι μη ιδιάζον και $f(x) = \sin^2 \alpha$ αν και μόνο αν $x \in \mathcal{Z}_{=\alpha}(P)$. Κατά μήκος της \mathcal{Z}_P το P_1 ισούται με $P_1(x) = |\nabla P(x)|^2 (f(x) - \sin^2 \alpha)$. Ιδιαίτερος, στο y ισχύει $f(y) = \sin^2 \alpha$. Με μία διαφορίση παίρνουμε ότι

$$\nabla P_1(y) = |\nabla P_1(y)|^2 \nabla f(y).$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι τα διανύσματα $\nabla P(y)$ και $\nabla P_1(y)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν ο περιορισμός του ∇P_1 στον εφαπτόμενο χώρο $T_y \mathcal{Z}_P$ είναι μη μηδενικός, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν $\nabla f(y) \neq 0$. Από το Θεώρημα Sard έχουμε ότι σχεδόν για κάθε α το $\sin^2 \alpha$ είναι κανονική τιμή της f . Για κάθε τέτοιο α , τα διανύσματα ∇P και ∇P_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή η $\mathcal{Z}_{=\alpha}(P)$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή. \square

Ξεκινάμε την απόδειξη του Λήμματος 3.3.5 από ένα αποτέλεσμα στις 2 διαστάσεις.

Λήμμα Β'.1.2. Υποθέτουμε ότι

(I) Το T είναι ένα ορθογώνιο του \mathbb{R}^2 με πλάτος 2ρ και τυχαίο πεπερασμένο μήκος.

(II) Το $0 < \alpha < 10^{-1}$ συμβολίζει μία γωνία.

(III) Το T είναι χωρισμένο σε κυλινδρικούς τομείς μήκους $\geq \frac{\rho}{\alpha}$.

(IV) Το P είναι ένα μη ιδιάζον πολυώνυμο βαθμού το πολύ D .

Τότε, η τομή $\mathcal{Z}_{\geq \alpha} \cap T$ περιέχεται σε $\lesssim D^2$ από τους κυλινδρικούς τομείς του T .

Θα αποδείξουμε τώρα την τρισδιάστατη γενίκευση του πρώτου λήμματος.

Λήμμα Β'.1.3. Έστω $X = \mathcal{Z}_{P_1, P_2}$ εγκάρσια πλήρης τομή στον \mathbb{R}^3 . Υποθέτουμε ότι οι βαθμοί των πολυώνυμων P_1 και P_2 είναι το πολύ D . Τότε το σύνολο $X_{=\alpha}$ είναι αλγεβρική επιφάνεια τη μορφής $\mathcal{Z}_{P_1, P_2, P_\alpha}$, όπου P_α είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\lesssim D$ που εξαρτάται μόνο από τα P_1, P_2 και α . Επιπλέον, σχεδόν για κάθε α , η $X_{=\alpha}$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή κι αποτελείται από $\lesssim D^3$ στοιχεία.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Το διάνυσμα $\nabla P_1(x) \times \nabla P_2(x)$ παράγει τον εφαπτόμενο χώρο $T_x X$, άρα $\angle(u(T), T_x X) = \alpha$ αν και μόνο αν

$$P_\alpha := \langle \nabla P_1(x) \times \nabla P_2(x), u(T) \rangle^2 - \cos^2 \alpha |\nabla P_1(x) \times \nabla P_2(x)|^2 = 0.$$

Έτσι, $X_{=\alpha} = \mathcal{Z}_{P_1, P_2, P_\alpha}$. Για να δείξουμε ότι η $X_{=\alpha}$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή σχεδόν για κάθε α χρησιμοποιούμε ένα επιχείρημα ανάλογο με αυτό που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του Λήμματος Β'.1.1. Ορίζουμε

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(z) = \frac{\langle \nabla P_1(z) \times \nabla P_2(z), u(T) \rangle^2}{|\nabla P_1(z) \times \nabla P_2(z)|^2}$$

και παρατηρούμε ότι $f(x) = \cos^2 \alpha$ αν και μόνο αν $x \in X_{=\alpha}$. Σταθεροποιούμε ένα α . Έστω $y \in X_{=\alpha}$. Απλοποιούμε τον τύπο του P_α γράφοντας

$$P_\alpha(x) = |\nabla P_1(x) \times \nabla P_2(x)|^2 (f(x) - \cos^2 \alpha).$$

Έτσι έχουμε ότι τα διανύσματα $\nabla P_1, \nabla P_2, \nabla P_\alpha$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο y αν και μόνο αν $\nabla f(y) \neq 0$, θεωρώντας το ∇f ως διανυσματικό πεδίο στην πολλαπλότητα X . Από το Θεώρημα Sard, σχεδόν για κάθε α το $\cos^2 \alpha$ είναι κανονική τιμή της f , άρα η $X_{=\alpha}$ είναι εγκάρσια πλήρης τομή. Τέλος, από το Θεώρημα Βézout που είδαμε στο τέταρτο κεφάλαιο έχουμε ότι $|X_{=\alpha}| \lesssim D^3$. \square

Το τελευταίο βήμα πριν την απόδειξη του Λήμματος 3.3.5 είναι το παρακάτω λήμμα, το οποίο είναι η τρισδιάστατη εκδοχή του Λήμματος Β'.1.2.

Λήμμα Β'.1.4. Υποθέτουμε ότι

(I) Ο T είναι ένας κύλινδρος του \mathbb{R}^3 ακτίνας ρ με τυχαίο πεπερασμένο μήκος.

(II) Το $0 < \alpha < 10^{-1}$ συμβολίζει μία γωνία.

(III) Ο T είναι χωρισμένος σε κυλινδρικούς τομείς μήκους $\geq \frac{\rho}{\alpha}$.

(IV) Το P είναι ένα μη ιδιάζον πολυώνυμο βαθμού το πολύ D .

Τότε, η τομή $Z_{\geq \alpha} \cap T$ περιέχεται σε $\lesssim D^3$ από τους κυλινδρικούς τομείς του T .

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Λήμμα 3.3.5.

Απόδειξη του Λήμματος 3.3.5. Το P είναι γινόμενο μη ιδιαζόντων πολυωνύμων. Υποθέτουμε επίσης ότι τα πολυώνυμα, έστω P_1, \dots, P_ℓ , με τα οποία έχουμε αναλύσει το P είναι ανάγωγα. Για κάθε ένα από αυτά τα πολυώνυμα εφαρμόζουμε το τελευταίο λήμμα για $\rho = 10R^{1/2+\delta}$ και $\alpha = R^{-1/2+2\delta}$. Έτσι το μήκος κάθε κυλινδρικού τομέα είναι $\rho\alpha^{-1} = 10R^{1-\delta}$, δηλαδή κάθε κυλινδρικός τομέας τέμνει το πολύ $O(1)$ από τις μπάλες B_j . Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να συγκρίνουμε αυτό που μόλις αποδείξαμε με τον ορισμό του συνόλου $\mathbb{W}_{j,\text{εγκ}}$. \square

Β'.2 Απόδειξη του Λήμματος 3.3.6

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε το Λήμμα 3.3.6. Το βασικό εργαλείο για την απόδειξη είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα του Wongkew από το [W].

Θεώρημα Β'.2.1. Αν το P είναι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο του \mathbb{R}^n με βαθμό το πολύ D , τότε

$$\text{Vol}(B(L) \cap \mathcal{N}_\rho(Z_P)) \lesssim_n \rho D L^{n-1},$$

όπου $B(L)$ είναι μία n -διάστατη μπάλα ακτίνας $L > 0$.

Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε μία παραλαγή του παραπάνω αποτελέσματος του Wongkew.

Θεώρημα Β'.2.2. Έστω Q ένα ορθογώνιο πλέγμα διαστάσεων $Q_1 \times \dots \times Q_n$, για τις οποίες υποθέτουμε ότι $1 \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_n$, αποτελούμενο από μοναδιαίους κύβους. Τότε, το πλήθος των κύβων του πλέγματος που τέμνουν το Z_P είναι το πολύ $c_n D \prod_{j=2}^n Q_j$.

Για να αποδείξουμε το Λήμμα 3.3.6, το διατυπώνουμε λίγο γενικότερα. Έστω B μία τρισδιάστατη μπάλα ακτίνας $L > 0$. Έστω επίσης $P \in \mathbb{R}_D[x_1, x_2, x_3]$, το οποίο έχουμε αναλύσει σε γινόμενο μη ιδιαζόντων πολυωνύμων.

Ορισμός Β'.2.3. Έστω \mathbb{T} ένα σύνολο κυλινδρων T ακτίνας $\rho/2$. Ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{T}_{\text{εφ}}$ ως το σύνολο των κυλινδρων $T \in \mathbb{T}$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $2T \cap Z \cap (11/10)B \neq \emptyset$ και για κάθε μη κρίσιμο σημείο $x \in 10T \cap Z \cap 2B$ ισχύει

$$\angle(u(T), T_x Z) \leq \frac{\rho}{L}.$$

Λέμε ότι δύο κύλινδροι $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ έχουν διαφορετικές κατευθύνσεις αν

$$\angle(u(T_1), u(T_2)) \geq \frac{\rho}{L}.$$

Θέλουμε να ελέγξουμε το πλήθος των κυλίνδρων που δείχνουν σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Για να το κάνουμε αυτό θα χρειαστούμε ένα αποτέλεσμα του Córdoba, το οποίο μάλιστα είναι εξαιρετικά σημαντικό. Είναι η διάσημη μεγιστική εικασία Kaakeya στις δύο διαστάσεις και η απόδειξη που θα δώσουμε βρίσκεται στο [TN] και είναι η λύση της.

Θεώρημα Β'.2.4. Έστω $(R_\alpha)_{\alpha \in A}$ μία οικογένεια ίσων ορθογωνίων του \mathbb{R}^2 εκκεντρότητας $^1 \delta^{-1}$, οι κατευθύνσεις α των οποίων είναι δ -διαχωρισμένες. Τότε,

$$\left\| \sum_{\alpha \in A} \mathcal{X}_{R_\alpha} \right\|_2 \lesssim (\log \delta^{-1})^{1/2} \left(\sum_{\alpha \in A} |R_\alpha| \right)^{1/2}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\alpha \in A} \mathcal{X}_{R_\alpha} \right\|_2^2 &= \int \left(\sum_{\alpha \in A} \mathcal{X}_{R_\alpha} \right)^2 \\ &= \int \sum_{\alpha \in A} \sum_{\alpha' \in A} \mathcal{X}_{R_\alpha} \mathcal{X}_{R_{\alpha'}} \\ &= \sum_{\alpha, \alpha' \in A} |R_\alpha \cap R_{\alpha'}|. \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα του τελευταίου μας υπολογισμού με τη ζητούμενη εκτίμηση παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{\substack{\alpha' \in A \\ \alpha' \neq \alpha}} |R_\alpha \cap R_{\alpha'}| \lesssim \log(\delta^{-1}) |R_\alpha|.$$

Υποθέτουμε ότι τα α και α' διαφέρουν σε γωνία κατά μία σταθερά συγκρίσιμη με 2^{-k} για κάποιο k που ικανοποιεί $\delta \lesssim 2^{-k} \lesssim 1$. Τότε,

$$|R_\alpha \cap R_{\alpha'}| \lesssim 2^k \delta |R_\alpha|.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\log(\delta^{-1})} \sum_{\substack{\alpha' \in A \\ \angle(\alpha', \alpha) \sim 2^{-k}}} 2^k \delta \lesssim \log(\delta^{-1}),$$

το οποίο ισχύει αφού για κάθε k υπάρχουν $O((2^k \delta)^{-1})$ κατευθύνσεις α' εντός κάθε $O(2^{-k})$ -περιοχής του α . \square

Για το λήμμα που ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε το hairbrush argument του Wolff από το [Wp], με το οποίο έδειξε ότι τα σύνολα Kaakeya στον \mathbb{R}^n έχουν διάσταση τουλάχιστον $(n+2)/2$. Πιο συγκεκριμένα, ο Wolff έδειξε ότι υπάρχει ένας κύλινδρος (το handle του hairbrush) από τον οποίο περνούν πολλοί άλλοι και παρατήρησε ότι μακριά από το handle οι κύλινδροι δεν επικαλύπτονται πολύ. Για να το δείξει αυτό χρησιμοποίησε ότι η εικασία Kaakeya ισχύει σε κάθε διδιάστατο επίπεδο που περιέχει το handle για να περάει στην εικασία Kaakeya σε n διαστάσεις.

Σύνολο Kaakeya στον \mathbb{R}^n ονομάζουμε κάθε υποσύνολό του που περιέχει ευθύγραμμο τμήμα σε κάθε κατεύθυνση. Ένα παράδειγμα συνόλου Kaakeya σε κάθε διάσταση είναι οποιαδήποτε μπάλα του με ακτίνα $\geq 1/2$.

¹Ως εκκεντρότητα ενός ορθογωνίου ορίζουμε το λόγο της μεγαλύτερης του πλευράς προς τη μικρότερη.

Λήμμα Β'.2.5. Έστω \mathbb{T}' ένα υποσύνολο του $\mathbb{T}_{\varepsilon\varphi}$ που αποτελείται από κυλίνδρους T που έχουν ανά δύο διαφορετικές κατευθύνσεις. Τότε,

$$|\mathbb{T}'| \lesssim D^2 \log^2(L\rho^{-1})L\rho^{-1}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε μετά από μία αλλαγή κλίμακας να υποθέσουμε ότι $\rho = 1$.

Δείχνουμε αρχικά ότι αν ένας κύλινδρος $T \in \mathbb{T}_{\varepsilon\varphi}$, τότε η τομή $T \cap (3/2)B$ περιέχεται σε μία 10-περιοχή της \mathcal{Z}_P .

Από την υπόθεση, υπάρχει ένα μη κρίσιμο $x_0 \in 2T \cap \mathcal{Z}_P \cap (11/10)B$. Έχουμε επίσης υποθέσει ότι το P είναι γινόμενο μη ιδιαζόντων πολυωνύμων P_1, \dots, P_m , άρα η \mathcal{Z}_P είναι η ένωση των αλγεβρικών επιφανειών $\mathcal{Z}_{P_1}, \dots, \mathcal{Z}_{P_m}$ και το x_0 περιέχεται ακριβώς σε μία από αυτές. Για να δούμε ότι πράγματι το x_0 περιέχεται ακριβώς σε μία από τις \mathcal{Z}_{P_i} υποθέτουμε το αντίθετο. Τότε, υπάρχουν πολυώνυμα P_j, P_k ώστε $x_0 \in \mathcal{Z}_{P_k} \cap \mathcal{Z}_{P_j}$, δηλαδή η πολυπλοκότητα της ρίζας x_0 του P είναι τουλάχιστον 2, δηλαδή $\nabla P(x_0) = 0$, το οποίο είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ότι το x_0 είναι μη κρίσιμο σημείο του P . Έστω ότι το x_0 ανήκει στην \mathcal{Z}_{P_ℓ} για κάποιο μοναδικό $1 \leq \ell \leq m$.

Θεωρούμε μία καμπύλη στην \mathcal{Z}_{P_ℓ} που ξεκινάει από το x_0 και βρίσκεται όσο πιο κοντά γίνεται στον άξονα του T . Επιλέγουμε συντεταγμένες x_1, x_2, x_3 στις οποίες ο T είναι το σύνολο $[x_2^2 + x_3^2 \leq 1]$ και το κέντρο της μπάλας B έχει 0 στην x_1 -συντεταγμένη.

Για κάθε $z \in 10T \cap \mathcal{Z}_{P_\ell} \cap 2B$ ισχύει

$$\angle(u(T), T_z \mathcal{Z}_{P_\ell}) \leq \rho L^{-1} = L^{-1},$$

κι έτσι μπορούμε να παραμετρήσουμε κάθε καμπύλη της \mathcal{Z}_{P_ℓ} που ξεκινάει από το x_0 ως γράφημα της μορφής $(x_2, x_3) = f(x_1)$, όπου η f ικανοποιεί την

$$|\nabla f| \leq L^{-1} \text{ για } |x_1| \leq \frac{3}{2}L.$$

Κάθε τέτοια καμπύλη περιέχεται και στην \mathcal{Z}_P και από τα παραπάνω, η τομή $T \cap (3/2)B$ περιέχεται σε μία 10-περιοχή της καμπύλης. Επομένως, η τομή $T \cap (3/2)B$ περιέχεται σε μία 10-περιοχή της \mathcal{Z}_P .

Υποθέτουμε ότι $|\mathbb{T}'| = \beta L$. Θα δείξουμε ότι $\beta \lesssim D^2 \log^2 L$. Για κάθε κύλινδρο T έχουμε $\text{Vol}(B \cap T) \sim L$. Καλύπτουμε την τομή $\mathcal{N}_{10}(\mathcal{Z}_P) \cap B$ με κύβους Q πλευράς 1. Από το θεώρημα του Wongkew που διατυπώσαμε παραπάνω παίρνουμε ότι το πλήθος των κύβων Q είναι $\lesssim DL^2$. Κάθε ένας από τους κυλίνδρους $T \in \mathbb{T}'$ τέμνει $\gtrsim L$ κύβους Q , οπότε κατά μέσο όρο κάθε κύβος τέμνει τουλάχιστον βD^{-1} κυλίνδρους.

Θεωρούμε τώρα τριάδες της μορφής (Q, T_1, T_2) , όπου Q κύβος και $T_1, T_2 \in \mathbb{T}'$. Αν υποθέσουμε ότι το β είναι σημαντικά μεγαλύτερο από το D , τότε αν θέσουμε K να είναι το σύνολο των κύβων και

$$A := \{(Q, T_1, T_2) : Q \in K, T_1, T_2 \in \mathbb{T}'\},$$

έχουμε ότι

$$|A| = |K| \cdot |\mathbb{T}'|^2 \gtrsim |K|^2 \cdot L^2 \gtrsim (\beta/D)^2 |\mathbb{T}'|^2 L^2 \gtrsim (\beta/D)^2 DL^2 = \beta^2 D^{-1} L^2.$$

Ομαδοποιούμε τις τριάδες (Q, T_1, T_2) σε δυαδικά blocks ανάλογα με τη γωνία $\angle(u(T_1), u(T_2))$ των κατευθύνσεων των κυλίνδρων T_1, T_2 . Ορίζουμε δηλαδή

$$\mathbb{B}_k := \{(T_1, T_2) \in \mathbb{T}' : 2^{-(k+1)} \leq \angle(u(T_1), u(T_2)) \leq 2^{-k}\}.$$

Αν επιλέξουμε δύο διαφορετικούς κυλίνδρους $T_1, T_2 \in \mathbb{T}'$, τότε από τον ορισμό του \mathbb{T}' , δείχνουν σε διαφορετικές κατευθύνσεις, άρα $\angle(u(T_1), u(T_2)) \geq L^{-1}$. Η ακραία περίπτωση για τους T_1, T_2 είναι να έχουν κάθετους άξονες. Έτσι,

$$L^{-1} \leq \angle(u(T_1), u(T_2)) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Από τον ορισμό των \mathbb{B}_k και τη συνθήκη για τις γωνίες έπεται ότι το πλήθος $k \in \mathbb{N}$ των δυαδικών blocks που χρειαζόμαστε ώστε να καλύπτουν όλα τα πιθανά ζεύγη (T_1, T_2) ικανοποιεί

$$L^{-1} \lesssim 2^{-k} \lesssim \frac{\pi}{2}.$$

Η παραπάνω ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $-\log(\pi) \lesssim k \lesssim \log L$, άρα υπάρχουν $\sim \log L$ δυαδικά blocks.

Επιλέγουμε ένα τέτοιο block με εύρος γωνιών $[\theta, 2\theta]$ για $L^{-1} \leq \theta \leq 2$. Το πλήθος των τριάδων για τις οποίες ισχύει

$$\angle(u(T_1), u(T_2)) \in [\theta, 2\theta]$$

είναι $\gtrsim \beta^2 D^{-1} L^2 (\log L)^{-1}$.

Έχουμε υποθέσει ότι $|\mathbb{T}'| = \beta L$. Από την Αρχή του Περιστερώνα είναι βέβαιο ότι μπορούμε να επιλέξουμε έναν κύλινδρο T_1 ο οποίος εμφανίζεται σε

$$\gtrsim \frac{\beta^2 D^{-1} L^2 (\log L)^{-1}}{\beta L} = \beta D^{-1} L (\log L)^{-1}$$

τριάδες για τις οποίες ισχύει $\angle(u(T_1), u(T_2)) \in [\theta, 2\theta]$.

Ορίζουμε

$$\mathcal{H} = \bigcup_{T \in \mathbb{S}_\theta} T \cap (3/2)B,$$

όπου

$$\mathbb{S}_\theta = \{T_1, T_2 \in \mathbb{T}' : \theta \leq \angle(u(T_1), u(T_2)) \leq 2\theta\}.$$

Δεδομένου ότι κάθε ζεύγος $(T_1, T_2) \in \mathbb{S}_\theta$ ικανοποιεί $\angle(u(T_1), u(T_2)) \sim \theta$, έχουμε ότι κάθε τέτοιο ζεύγος μπορεί να εμφανιστεί σε $\lesssim \theta^{-1}$ τριάδες κι έτσι, αν σταθεροποιήσουμε έναν κύλινδρο T_1 , έχουμε

$$\#(T_2 \in \mathcal{H}) \gtrsim \frac{\beta D^{-1} L (\log L)^{-1}}{\theta^{-1}} = \beta D^{-1} \theta L (\log L)^{-1}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την τελευταία εκτίμηση και το θεώρημα του Wongkew για να καταλήξουμε στο επιθυμητό φράγμα για το β . Αποδεικνύουμε πρώτα ένα κάτω φράγμα για τον όγκο του \mathcal{H} .

Οι κύλινδροι του \mathcal{H} αν και δεν είναι αναγκαστικά ξένοι ανά δύο, είναι ανά δύο θ -διαχωρισμένοι. Χωρίζουμε το \mathcal{H} σε $\sim \theta L$ επίπεδες πλάκες πάχους 1 και παρατηρούμε ότι κάθε σημείο εκτός της $(\theta/10)L$ -περιοχής του άξονα του T_1 ανήκει σε $\lesssim 1$ επίπεδες πλάκες. Εντός μίας επίπεδης πλάκας Π , δυο κύλινδροι T, S ικανοποιούν $\angle(u(T), u(S)) \gtrsim L^{-1}$. Από το Θεώρημα B'.2.4 έχουμε ότι

$$\text{Vol}\left(\bigcup_{T \in \Pi} T\right) \lesssim (\log L)^{-1} \sum_{T \in \Pi} \text{Vol}(T).$$

Επομένως

$$\text{Vol}(\mathcal{H}) \gtrsim L (\log L)^{-1} \#(T_2 \in \mathcal{H}) \gtrsim \beta D^{-1} L^2 (\log L)^{-2}. \quad (\text{B'.1})$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη βρίσκοντας κι ένα άνω φράγμα για τον $\text{Vol}(\mathcal{H})$. Παρατηρούμε ότι το \mathcal{H} περιέχεται σε έναν κύλινδρο γύρω από τον άξονα του T_1 με ακτίνα θL . Ο κύλινδρος αυτός είναι περίπου ίσος με ένα ορθογώνιο με διαστάσεις $\theta L \times \theta L \times L$ και το \mathcal{H} περιέχεται σε μία $O(1)$ -περιοχή του \mathcal{Z}_P μέσα στο ορθογώνιο. Από το θεώρημα του Wongkew παίρνουμε το φράγμα

$$\text{Vol}(\mathcal{H}) \lesssim D \theta L^2. \quad (\text{B'.2})$$

Αν συνδυάσουμε τις εκτιμήσεις (B'.1) και (B'.2) έχουμε

$$\beta D^{-1} \theta L^2 (\log L)^{-2} \lesssim D \theta L^2$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\beta \lesssim D^2 \log^2 L .$$

Η τελευταία εκτίμηση ήταν η ζητούμενη και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. \square

Κλείνουμε το παράρτημα με την απόδειξη του Λήμματος 3.3.6.

Απόδειξη του Λήμματος 3.3.6. Παίρνουμε $B = B_j$, $L = R^{1-\delta}$ και $\rho = R^{1/2+\delta}$.

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις έχουμε ότι αν το σύνολο $\mathbb{T}' \subseteq \mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}$ αποτελείται από κυλίνδρους με $R^{-1/2+2\delta}$ -διαχωρισμένες κατευθύνσεις, τότε το πλήθος των στοιχείων του \mathbb{T}' ικανοποιεί

$$|\mathbb{T}'| \lesssim R^{1/2+O(\delta)}$$

από το Λήμμα B'.2.5.

Ορίζουμε \mathbb{S} ως το υποσύνολο του $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}$ του οποίου τα στοιχεία είναι κύλινδροι με $R^{-1/2}$ -διαχωρισμένες κατευθύνσεις και φράσσουμε το $|\mathbb{S}|$ από $R^{O(\delta)}|\mathbb{T}'|$.

Από τον ορισμό του $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}$ και τις παραπάνω παρατηρήσεις έπεται ότι το πλήθος των διαφορετικών κατευθύνσεων των κυλίνδρων του $\mathbb{W}_{j,\varepsilon\varphi}$ είναι $\lesssim R^{1/2+O(\delta)}$ και η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης. \square

Βιβλιογραφία

- [B1] J. Bourgain, *Moment inequalities for trigonometric polynomials with spectrum in curved hypersurfaces*, Israel J. Math. 193, no. 1, 441-458. (2013).
- [BG] J. Bourgain, L. Guth, *Bounds on oscillatory integral operators based on multilinear estimates*, Geom. Funct. Anal. 21, no. 6, pp 1239-1295. (2011).
- [Gr1] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, NY, 2014.
- [Gr2] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, NY, 2014.
- [Gu1] L. Guth, *A restriction estimate using polynomial partitioning*, J. Amer. Math. Soc. 29 , no. 2, pp 371-413. (2016).
- [Gu2] L. Guth, *Restriction estimates using polynomial partitioning II*, Acta Math. .221, pp.81-142. (2018).
- [Mat] P. Mattila, *Fourier Analysis and Hausdorff Dimension*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [Mit02] T. Mitsis, *A Stein-Tomas restriction theorem for general measures*. Publ. Math. Debrecen, 60(1-2), pp 89-99. (2002).
- [Stein] E. M. Stein, *Harmonic Analysis, Real Variable Methods Orthogonality & Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.
- [Tao99] T. Tao, *The Bochner-Riesz conjecture implies the restriction conjecture*, Duke Math. J. 96, no. 2, pp 363-375. (1999).
- [TN] T. Tao, *Lecture notes on restriction*, Math 254B, Spring 1999.
- [Tao03] T. Tao, *Recent progress on the restriction conjecture*, ArXiv eprint (2003), arxiv: math/0311181.
- [Wp] T. H. Wolff, *An improved bound for Kakeya type maximal functions*, Revista Matematica Iberoamericana, 11(3) :651-674 (1995).
- [Wolff] T. H. Wolff, *Lectures on Harmonic Analysis*, American Mathematical University Lecture Series, 2002.
- [W] R. Wongkew, *Volumes of tubular neighbourhoods of real algebraic varieties*, Pacific J. Math. 159 (1993), no. 1, 177-184. (1993).