Μιχάλης Ρούσσος

Εισαγωγή στη Θεωρία αλγεβρικών Ομάδων

Μεταπτυχιακή Εργασία

Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών
Αθήνα 22 Μαρτίου 2024

Εισηγητής: Αριστείδης Κοντογεώργης

Επιτροπή

Αριστείδης Κοντογεώργης

Χλουβεράκη Μαρία

Ντόκας Ιωάννης

Στις αδελφές μου

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι να κάνουμε μία εισαγωγή στην αρκετά πλούσια θεωρία των αλγεβρικών ομάδων. Θα δούμε κάποιες βασικές έννοιες αλλά, την δομή και ταξινόμηση διάφορων ενδιαφερόντων κατηγοριών αλγεβρικών ομάδων, τις άλγεβρες Lie τους και πολλά άλλα.

Θα ήθελα σε αυτό το σημείο, φτάνοντας στο τέλος ενός πολύ δύσκολου, ωραίου και ενδιαφέροντος ταξιδιού, στην κατακλείδα των μεταπτυχιακών σπουδών μου, να ευχαριστήσω για ξεχωριστούς λόγους κάποιους ανθρώπους.

Τον επιβλέποντά μου για την τιμή που μου έκανε να αναλάβει την επίβλεψη της διπλωματικής μου εργασίας και την εμπιστοσύνη που έδειξε προς τη δουλειά μου.

Τους καλούς μου παιδικούς φίλους Ντανιέλ, Στέφανο, Παναγιώτιδες, Βαγγέλη, Μάικ, Δημήτριδες, Αλέξανδρο, Κωστάκη και Τζακ για την στήριξη, τις βαθιές κουβέντες, τις εμπειρίες που έχουμε μοιραστεί και τις συμβουλές που μου έχουν δώσει διαχρονικά.

Την οικογένεια μου και τις αδερφές μου ξεχωριστά που τις αγαπώ πολύ και μου υπενθυμίζουν καθημερινά ότι σε κάποια πράγματα πρέπει να παραμένω παιδί.

Τους φίλους που προέκυψαν αυτά τα 2 χρόνια των σπουδών μου, Στέφανο, Αντριάνα, Μιχάλη, Ινώ, Παναγιώτη και φυσικά την Ελσάρα η οποία μου παρείχε κάτι παραπάνω από πολύτιμη βοήθεια.

Την κοπέλα μου Γαβριέλα η οποία με ανέχεται με ακούει και με αγαπάει.

Μ. Ρούσσος, Αθήνα 2024.

Κεφάλαιο 1: Βασικές Ένοιες

Το k θα είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα οποιασδήποτε χαρακτηριστικής.

.1 Γραμμικές Αλγεβρικές Ομάδες και Μορφισμοί

Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο του k^n της μορφής:

$$X = X(I) = \{\ (x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\ \ \forall f \in I\}$$

για κάποιο ιδεώδες $I \lhd k[T_1, \dots, T_n]$ καλείται αλγεβρικό σύνολο. Θεωρώντας συμπληρώματα αλγεβρικών συνόλων ως ανοικτά σύνολα, ορίζεται μία τοπολογία στον k^n, η τοπολογία του Zariski.

Μία αλγεβρική πολλαπλότητα είναι ένα αλγεβρικό σύνολο εφοδιασμένο με την επαγώμενη τοπολογία του Zariski. Για $X \subset k^n$ μία αλγεβρική πολλαπλότητα, έστω $I \lhd k[T_1, \dots, T_n]$ το (ριζικό) ιδεώδες των πολυωνύμων που μηδενίζονται ταυτοτικά στο X. Ο δακτύλιος πηλίκο $k[X] := k[T_1, \dots, T_n]/I$ καλείται δακτύλιος συντεταγμένων ή άλγεβρα των κανονικών συναρτήσεων στο X, εφόσον μπορεί να ταυτιστεί με την άλγεβρα των πολυωνυμικών συναρτήσεων στο X με τιμές στο k.

Άν $X \subseteq k^n, Y \subseteq k^m$ αφινικές πολλαπλότητες, το καρτεσιανό τους γινόμενο $X \times Y$ είναι με φυσιολογικό τρόπο ένα αλγεβρικό σύνολο του k^{n+m}, συνεπώς αποκτά τη δομή μίας αφινικής πολλαπλότητας. Πάντα θα θεωρούμε το $X \times Y$ εφοδιασμένο με την τοπολογία του Zariski και όχι με την τοπολογία γινόμενο, οι οποίες είναι διαφορετικές.
Παρατήρηση:$k[X \times Y] = k[X] \otimes_k k[Y]$

Μία απεικόνιση $\phi : X \to Y$ μεταξύ δύο αφινικών πολλαπλοτήτων X και Y, η οποία μπορεί να οριστεί από πολυωνυμικές συναρτήσεις στον δακτύλιο συντεταγμένων (δηλαδή για κάθε σημείο $P = (p_1, \dots, p_n)$ έχουμε $\Phi(P) = \phi(p_1, \dots, p_n) = (f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m))$ με $f_i \in k[T_1, \dots, T_n]$) καλείται μορφισμός αφινικών πολλαπλοτήτων. Παρατηρούμε ότι οι μορφισμοί είναι συνεχείς στην τοπολογία του Zariski.
Ένας μορφισμός $\phi : X \to Y$ επάγει φυσιολογικά έναν ομομορφισμό k-αλγεβρών $\phi^* : k[Y] \to k[X]$ με $\phi^*(f) := f \circ \phi$ για $f \in k[Y]$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "\phi^*(f)"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Στην πραγματικότητα τα παραπάνω ορίζουν εναν συναλλοίωτο συναρτητή μεταξύ της κατηγορίας των αφινικών πολλαπλοτήτων με τους μορφισμούς πολλαπλοτήτων και της κατηγορίας των πεπερασμένα παραγώμενων επαγώμενων k-αλγεβρών με ομομορφισμούς k-αλγεβρών, τις λεγόμενες αφινικές k-άλγεβρες.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το κύριο αντικείμενο μελέτης μας:

Ορισμός .1.1. *Μία Γραμμική Αλγεβρική Ομάδα G είναι μία αφινική πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μία δομή ομάδας έτσι ώστε οι πράξεις της ομάδας (πολλαπλασιασμός και αντιστροφή)*

$$\begin{array}{ll} \mu : G \times G \to G \text{ και } i : G \to G \\ \quad (g,h) \mapsto gh \qquad g \mapsto g^{-1} \end{array}$$

να είναι μορφισμοί πολλαπλοτήτων.

Παραδείγματα Το σώμα k μας παρέχει δύο φυσιολογικά παραδείγματα αλγεβρικών ομάδων (τα οποία και θα τα συναντάμε καθόλη τη διάρκεια της μελέτης μας)

(1) Η προσθετική ομάδα $G = (k, +)$ του k η οποία ορίζεται από το μηδενικό ιδεώδες $I = \langle 0 \rangle$ του $k[T]$. Η αντιστροφή και ο πολλαπλασιασμός προέρχονται από πολυώνυμα, άρα η G είναι μια αλγεβρική ομάδα, με δακτύλιο συντεταγμένων $k[G] = k[T]$. Η ομάδα G καλείται προσθετική ομάδα και θα την συμβολίζουμε με $\mathbf{G}_a$

(2) Η Πολλαπλασιαστική Ομάδα $G = (k^{\times}, \cdot)$ του k η οποία μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο των ζευγαριών $\{(x, y) \in k^2 \mid xy = 1\}$ (όπου ο πολλαπλασιασμός είναι κατά συντεταγμένη, πάλι προέρχεται απο πολυώνυμα) η οποία είναι το αλγεβρικό σύνολο που ορίζεται από το ιδεώδες $I = \langle XY - 1 \rangle \lhd k[X, Y]$. Συνεπώς έχουμε ότι: $k[G] = k[X, Y]/\langle XY - 1 \rangle \cong k[X, X^{-1}]$. Η ομάδα G καλείται πολλαπλασιαστική ομάδα και συμβολίζεται με $\mathbf{G}_m$.

(3) Δεν είναι άμεσο από τον παραπάνω ορισμό αλλά η γενική γραμμική ομάδα

$$\mathrm{GL}_n := \{A \in k^{n \times n} | \det A \neq 0\}$$

των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων πάνω από το k είναι μία γραμμική αλγεβρική ομάδα, αφού η προϋπόθεση για την ορίζουσα δεν μας εξασφαλίζει την κλειστότητα. Αλλά όπως και η $\mathbf{G}_m$, έτσι και η GL_n μπορούμε να την θεωρήσουμε ως το παρακάτω κλειστό υποσύνολο:

$$\{(A, y) \in k^{n \times n} \times k \mid \det A \cdot y = 1\}$$

με πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη μέσω $A \mapsto (A, \det A^{-1})$. Ο πολλαπλασιασμός είναι πολυωνυμική απεικόνιση και από την μέθοδο του Cramer το ίδιο ισχύει και για την αντιστροφή. Άρα η GL_n είναι ένα παράδειγμα (και μάλιστα πολύ σημαντικό) γραμμικής αλγεβρικής ομάδας.
Ο δακτύλιος συντεταγμένων της δίνεται από:

$$k[\mathrm{GL}_n] = k[T_{ij}, Y \mid 1 \leq i, j \leq n]/\langle \det(T_{ij})Y - 1 \rangle \cong k[T_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]_{\det(T_{ij})}$$

που είναι το localization του $k[T_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ στο πολλαπλασιαστικό σύνολο που παράγεται από τα $\det(T_{ij})$.
Παρατηρούμε ότι $\mathrm{GL}_1 = \mathbf{G}_m$.

Οι απεικονίσεις μεταξύ αλγεβρικών ομάδων πρέπει να διατηρούν όχι μόνο τη δομή της ομάδας αλλα και τη δομή τους ως αφινικές πολλαπλότητες.

Ορισμός .1.2. *Μία απεικόνιση $\phi : G_1 \to G_2$ γραμμικών αλγεβρικών ομάδων καλείται μορφισμός γραμμικών αλγεβρικών ομάδων εάν είναι ομομορφισμός ομάδων και ταυτόχρονα μορφισμός αφινικών πολλαπλοτήτων (δηλαδή εάν η επαγόμενη απεικόνιση $\phi^* : k[G_2] \to k[G_1]$ είναι ομομορφισμός k-αλγεβρών).*

Παραδείγματα

(1) Άν $G \leq \mathrm{GL}_n$ είναι κλειστή υποομάδα τότε η φυσική εμφύτευση $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ είναι μορφισμός γραμμικών αλγεβρικών ομάδων

(2) Η ορίζουσα $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathbf{G}_m \quad A \mapsto \det A$ είναι ομομορφισμός ομάδων και μορφισμός αφινικών πολλαπλοτήτων, αρα μορφισμός γραμμικών αλγεβρικών ομάδων.

Πρόταση .1.3. *Οι πυρήνες και οι εικόνες μορφισμών γραμμικών αλγεβρικών ομάδων είναι κλειστές υποομάδες.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την εξής πολύ χρήσιμη πρόταση (ιδιότητα μορφισμών γραμμικών αλγεβρικών ομάδων) το οποίο θα χρησιμοποιούμε και καθόλη τη διάρκεια της μελέτης μας.

Πρόταση .1.4. *Άν $\phi : X \to Y$ μορφισμός αφινικών πολλαπλοτήτων, τότε η $\phi(X)$ περιέχει ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο της $\overline{\phi(X)}$*

Απόδειξη. (πρότασης 1.3)
Έστω $\phi : G \to H$ μορφισμός γραμμικών αλγεβρικών ομάδων.
Αφού $\ker(\phi) = \phi^{-1}(1)$ και ϕ συνεχής, ο $\ker(\phi)$ είναι κλειστό.
Από την πρόταση 1.4, η $\phi(G)$ περιέχει ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο της $\overline{\phi(X)}$, άρα η $\phi(G)$ είναι κλειστή (δες παράρτημα Πρόταση 23.1). □

Είναι ξεκάθαρο ότι κάθε κλειστή υποομάδα G της GL_n κληρονομεί τη δομή μίας γραμμικής αλγεβρικής ομάδας. Το εντυπωσιακό είναι ότι ισχύει και το αντίστροφο!

Θεώρημα .1.5. *Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα. Τότε η G μπορεί να εμφυτευτεί ως κλειστή υποομάδα μέσα στη GL_n για κάποιο n*

Η απόδειξη αυτού του πάρα πολύ σημαντικού αποτελέσματος θα προκύψει ως πόρισμα του Θεωρήματος του Chevalley. Για παράδειγμα η απεικόνιση

$$\mathbf{G}_a \to \mathrm{GL}_2 \qquad c \mapsto \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ορίζει μία εμφύτευση της προσθετικής ομάδας $\mathbf{G}_a$ ως μια κλειστή υποομάδα στην GL_2. Στην πραγματικότητα η παραπάνω απεικόνιση είναι ισομορφισμός της $\mathbf{G}_a$ με την εικόνα της.

.2 Παραδείγματα Γραμμικών Αλγεβρικών Ομάδων

Τώρα θα δούμε κάποια βασικά παραδείγματα γραμμικών αλγεβρικών ομάδων τα οποία θα τα βλέπουμε καθόλη τη διάρκεια της μελέτης μας. Θα αρχίσουμε με τρεις υποομάδες της GL_n.
(1) Η ομάδα των αντιστρέψιμων άνω τριγωνικών πινάκων

$$T_n := \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \text{ αντιστρεψιμοι} \right\} = \{(a_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n \mid a_{ij} = 0 \text{ για } i > j\}$$

(2) Η υποομάδα των άνω τριγωνικών πινάκων με 1 στην κύρια διαγώνιό τους

$$U_n := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{(a_{ij}) \in T_n \mid a_{ii} = 1 \text{ για } 1 \leq i \leq n\} \text{ και}$$

(3) Η ομάδα των διαγώνιων αντιστρέψιμων διαγώνινων πινάκων

$$D_n := \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \text{ αντιστρεψιμοι} \right\} = \{\text{diag}(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \neq 0 \text{ για } 1 \leq i \leq n\}$$

και οι τρεις είναι κλειστές υποομάδες της GL_n, άρα γραμμικές αλγεβρικές ομάδες.

Υπενθυμίζουμε ότι μια ομάδα λέγεται μηδενοδύναμη εάν η φθίνουσα κεντρική σειρά της:

$$\mathcal{C}^0 G := G, \qquad \mathcal{C}^i G := [\mathcal{C}^{i-1}G, G] \quad \text{για} \quad i \geq 1$$

γίνεται 1 για κάποιο i.

Παρατηρούμε ότι η U_n είναι μηδενοδύναμη ομάδα με $\mathcal{C}^{n-1}(U_n) = 1$ (Μπορούμε να το δούμε από την φθίνουσα ακολουθία κανονικών υποομάδων της $V_m = \{(a_{i,j}) \in U_n \mid a_{ij} = 0 \text{ για } 1 \leq j - i \leq m\} \text{ για } 1 \leq m \leq n-1)$

Επιπλέον, η κεντρική σειρά μίας ομάδας G ορίζεται ως εξής:

$$G^{(0)} := G, \qquad G^{(i)} := [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] \text{ για } \quad i \geq 1$$

Άν υπάρχει d τέτοιο ώστε $G^{(d)} = 1$, τότε η G καλείται επιλύσιμη και ο ελάχιστος θετικός d καλείται μήκος της G.

Παρατήρηση: $G^{(i)} \leq \mathcal{C}^i G$, άρα κάθε μηδενοδύναμη ομάδα είναι επιλύσιμη.

Από τα παραδείγματά μας η T_n είναι επιλύσιμη με $T_n^{(1)} = U_n$ (Η U_n παράγεται από τους στοιχειώδεις πίνακες οι οποίοι μπορούν να γραφούν ως μεταθέτες). Θα δούμε αργότερα (πόρισμα 4.2) ότι η T_n είναι υπο μία έννοια το προτότυπο μίας συνεκτικής επιλύσιμης γραμμικής αλγεβρικής ομάδας.

Τώρα θα ορίσουμε διάφορες οικογένειες κλασικών ομάδων ως ομάδες ισομετριών μη εκφηλισμένων διγραμμικών ή τετραγωνικών μορφών σε πεπερασμένης διάστασης διανυσματικούς χώρους. Υπενθυμίζουμε ότι το k είναι αλγεβρικά κλειστό.

Η Ειδική Γραμμική Ομάδα

Η ειδική γραμμική ομάδα:

$$\mathrm{SL}_n := \{(a_{i,j}) \in k^{n \times n} \mid \det(a_{i,j}) = 1\}$$

των $n \times n$ πινάκων με ορίζουσα 1 είναι μία κλειστή υποομάδα της GL_n με δακτύλιο συντεταγμένων

$$k[\mathrm{SL}_n] = k[T_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n] / \langle \det(T_{i,j}) - 1 \rangle$$

Εφόσον το k είναι αλγεβρικά κλειστό, έχουμε ότι $\mathrm{GL}_n := Z(\mathrm{GL}_n) \cdot \mathrm{SL}_n$

Οι Συμπλεκτικές Ομάδες

Για $n \geq 1$ ορίζουμε την $J_{2n} := \begin{pmatrix} 0 & K_n \\ -K_n & 0 \end{pmatrix}$ όπου $K_n := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$
Η συμπλεκτική ομάδα διάστασης $2n$ είναι η κλειστή υποομάδα:

$$\mathrm{Sp}_{2n} = \{A \in \mathrm{GL}_{2n} \mid A^T J_{2n} A = J_{2n}\}$$

της GL_{2n}. Δηλαδή είναι η ομάδα των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών του $2n-$διάστατου διανυσματικού χώρου k^{2n} οι οποίοι αφήνουν αναλλοίωτη τη μη εκφυλισμένη αντισυμμετρική διγραμμική μορφή με πίνακα Gram J_{2n} (ή αλλιώς συμπλεκτική μορφή). Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεν είναι καθόλου εύκολο να εκφράσουμε αναλυτικά τον δακτύλιο συντεταγμένων.

Αποδεικνύεται ότι η Sp_{2n} παράγεται από τους πίνακες μεταφορών, συνεπώς $\mathrm{Sp}_{2n} \leq \mathrm{SL}_{2n}$ συνεπώς και για $n = 1$, κάθε πίνακας με ορίζουσα 1 είναι συμπλεκτικός. Άρα $\mathrm{Sp}_2 = \mathrm{SL}_2$ και για $n \geq 2$, η Sp_{2n} είναι γνήσια υποομάδα της SL_{2n}.

Η σύμμορφη συμπλεκτική ομάδα είναι η κλειστή υποομάδα της GL_{2n} που ορίζεται ως:

$$C\mathrm{Sp}_{2n} := \{A \in \mathrm{GL}_{2n} \mid A^T J_{2n} A = cJ_{2n} \text{ για κάποιο } c \in k^\times\}$$

η ομάδα μετασχηματισμών που αφήνει τον J_{2n} αναλλοίωτο ως προς βαθμωτά. Περιέχει την Sp_{2n} ως κλειστή κανονική υποομάδα.

Οι $2n+1$-διάστατες Ορθογώνιες Ομάδες
Πρώτα υποθέτουμε οτι η char$(k) \neq 2$. Για $n \geq 1$ η ορθογώνια ομάδα σε (περιττή) διάσταση $2n+1$ ορίζεται ως:

$$\mathrm{GO}_{2n+1} := \{A \in \mathrm{GL}_{2n+1} \mid A^T K_{2n+1} A = K_{2n+1}\}$$

με K_{2n+1} όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Αυτή είναι η ομάδα των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών που αφήνουν αναλλοίωτη την μη εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή με πίνακα Gram K_{2n+1}.

Άν char$(k) = 2$, οι αντισυμμετρικές και οι συμμετρικές διγραμμικές μορφές ταυτίζονται, άρα η προηγούμενη κατασκευή απλά μας παρέχει την συμπλεκτική ομάδα διάστασης 2n.
Για τυχαίο k οι ορθογώνιες ομάδες ορίζονται μέσω της τετραγωνικής μορφής:

$$f : k^{2n+1} \to k \qquad f(x_1, \dots, x_{2n+1}) := x_1 x_{2n+1} + x_2 x_{2n} + \ldots + x_n x_{n+2} + x_{n+1}^2,$$

στο k^{2n+1} ως προς K_{2n+1}. Η ομάδα ισομετριών

$$\mathrm{GO}_{2n+1} := \{A \in \mathrm{GL}_{2n+1} \mid f(Ax) = f(x) \text{ για κάθε } x \in k^{2n+1}\}$$

της f είναι η περιττής διάστασης ορθογώνια ομάδα πάνω από το k. (Αν char$(k) \neq 2$ τότε ο ορισμός αυτός μας δίνει τον προηγούμενο).

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα έτσι και εδώ υπάρχει η σύμμορφη ορθογώνια ομάδα:

$$2\mathrm{n} + 1 := \{A \in \mathrm{GL}_{2n+1} \mid \exists c \in k^\times : f(Ax) = cf(x) \text{ για κάθε } x \in k^{2n+1}\}$$

η $2n+1$-διάστατη σύμμορφη ορθογώνια ομάδα, η οποία περιέχει την GO_{2n+1} ως κλειστή κανονική υποομάδα.

Οι $2n$-διάστατες Ορθογώνιες Ομάδες
Για άρτια διάσταση $2n \geq 2$ η ορθογώνια ομάδα μπορεί να οριστεί με χρήση της τετραγωνικής μορφής:

$$f : k^{2n} \to k, \qquad f(x_1, \dots, x_{2n}) := x_1 x_{2n} + x_2 x_{2n-1} + \dots + x_n x_{n+1},$$

στο k^{2n} ως προς K_{2n}. Η ομάδα ισομετριών

$$\mathrm{GO}_{2n} := \{A \in \mathrm{GL}_{2n} \mid f(Ax) = f(x) \text{ για κάθε } x \in k^{2n}\}$$

της f είναι η $2n$-διάστατη ορθογώνια ομάδα πάνω απο το k. Αν $\mathrm{char}(k) \neq 2$ μπορούμε να την δούμε ως την ομάδα των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών που αφήνουν αναλλοίωτη την μη εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή με πίνακα Gram K_{2n}:

$$\mathrm{GO}_{2n} := \{A \in \mathrm{GL}_{2n} \mid A^T K_{2n} A = K_{2n}\}$$

Η $2n$-διάστατη σύμμορφη ορθογώνια ομάδα ορίζεται όπως πριν:

$$\mathrm{CO}_{2n} := \{A \in \mathrm{GL}_{2n} \mid \exists c \in k^\times : f(Ax) = cf(x) \text{ για κάθε } x \in k^{2n}\}$$

Η επιλογή των συμμετρικών, αντισυμμετρικών και τετραγωνικών μορφών φαίνεται τυχαία αλλά δεν είναι. Στην πραγματικότητα, κάθε μη εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή μας οδηγεί στην ίδια ομάδα ως προς συζυγία και όμοια για μη εκφυλισμένες αντισυμμετρικές μορφές, αντίστοιχα τετραγωνικές μορφές, αλλά για τις παραπάνω επιλογές, κάποιες γνήσιες υποομάδες τους έχουν μερικές πολύ ωραίες ιδιότητες όπως θα δούμε και παρακάτω.

Πεπερασμένες Ομάδες
Σαν τελευταίο παράδειγμα αυτής της εννότητας θα δούμε πως κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι γραμμική αλγεβρική ομάδα. Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Τότε η G έχει μία πιστή συμμετρική αναπαράσταση, δηλαδή υπάρχει εμφύτευση $G \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ εντός μίας συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$ για κάποιο n. Επιπλέον $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ μέσω της φυσικής συμμετρικής αναπαράστασης. Συνθέτοντας τους δύο αυτούς ομομορφισμούς, παίρνουμε μια εμφύτευση $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ της οποίας η εικόνα είναι μία κλειστή υποομάδα (δηλαδή το σύνολο των ριζών μίας πεπερασμένης συλλογής πολυωνύμων). Συνεπώς κάθε πεπερασμένη ομάδα μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμική αλγεβρική ομάδα, με την διακριτή τοπολογία.

.3 Συνεκτικότητα

Θα υπενθυμίσουμε μία έννοια από την τοπολογία η οποία θα παίξει καθοριστικό ρόλο στη μελέτη των γραμμικών αλγεβρικών ομάδων.

Ορισμός .3.1. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται ανάγωγος αν δεν μπορεί να γραφεί ως $X = X_1 \cup X_2$ όπου X_1, X_2 είναι μη κενά γνήσια κλειστά υποσύνολα του X.*

Για να δούμε το πόσο σημαντική είναι αυτή η έννοια θα δούμε κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες της αναγωγισιμότητας:

Πρόταση .3.2. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για μία αφινική πολλαπλότητα X:*
(1) Η X είναι ανάγωγη
(2) Κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X είναι πυκνό
(3) Κάθε δύο μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X έχουν μη μηδενική τομή

(4) Το ιδεώδες I που αντιστοιχεί στην X (ως αλγεβρικό σύνολο) είναι πρώτο ιδεώδες
(5) Ο $K[X]$ είναι ακέραια περιοχή

Απόδειξη. $(1) \iff (2)$: Πράγματι άν $X_1 \subseteq X$ ανοικτό τότε $X = \overline{X}_1 \cup (X \setminus X_1)$.
$(2) \iff (3)$: Είναι προφανές
Θα δείξουμε τώρα τη συνεπαγωγή $(1) \iff (4)$:
Θα συμβολίσουμε το ιδεώδες I που αντιστοιχεί στην X με $I(X)$.
$(1) \Rightarrow (4)$: Έστω X ένα ανάγωγο σύνολο και έστω $f, g \in I(X)$. Πρέπει να δείξουμε ότι είτε $f \in I(X)$ είτε $g \in I(X)$. Σε κάθε σημείο του X, είτε το f μηδενίζεται είτε το g, άρα $X \subseteq X(f) \cup X(g)$. Συνεπώς

$$X = (X \cap X(f)) \cup (X \cap X(g))$$

Αφού όμως το X είναι ανάγωγο ένα από τα δύο αυτά σύνολα, έστω χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα το $X \cap X(f)$, πρέπει να είναι ίσο με το X. Όμως τότε $f \in I(X)$.

$(4) \Rightarrow (1)$: Έστω X ένα αλγεβρικό σύνολο τέτοιο ώστε το $I(X)$ να είναι πρώτο και έστω $X = X(a) \cup X(b)$ με a, b να είναι ριζικά ιδεώδη. Πρέπει να δείξουμε ότι το X είναι είτε $X(a)$ ή $X(b)$. Το ιδεώδες $a \cap b$ είναι ριζικό και $X(a \cap b) = X(a) \cup X(b)$ (δες ([4] πρόταση 2.10)); άρα $I(X) = a \cap b$.
Αν $X \neq X(a)$ τότε υπάρχει $f \in a \setminus I(X)$.
Έστω $g \in b$, τότε $fg \in a \cap b = I(X)$, δηλαδή $g \in I(X)$, αφού το $I(X)$ είναι πρώτο.
Συνεπώς $b \subseteq I(X)$, άρα $X(b) \supseteq X(I(X)) = X$.
$(4) \iff (5)$: Είναι γνωστό αποτέλεσμα, δείτε για παράδειγμα το Θεώρημα 2.10.3 στο βιβλίο Μια εισαγωγή στην άλγεβρα των Βάρσο Δ., Εμμανουήλ Ι., Μαλιάκα Μ. □

Επιπλέον θα χρειαστούμε τις παρακάτω βασικές ιδιότητες:

Πρόταση .3.3. *Έστω X, Y, Z αφινικές πολλαπλότητες,τότε:*
(1) Ένα υποσύνολο Z της X είναι ανάγωγο αν και μόνο αν η κλειστή του θήκη $\overline{Z}$ είναι ανάγωγη.
(2) Αν X ανάγωγη και $\phi : X \to Y$ είναι μορφισμός τότε η $\phi(X)$ είναι ανάγωγη.
(3) Αν X, Y είναι ανάγωγες τότε και η $X \times Y$ είναι ανάγωγη
(4) Η X έχει πεπερασμένα το πλήθος μεγιστικά ανάγωγα υποσύνολα X_i και $X = \bigcup X_i$. Με άλλα λόγια, κάθε αφινική πολλαπλότητα είναι πεπερασμένη ένωση των ανάγωγων μεγιστικών υποσυνόλων της.

Απόδειξη. (1) Αν Z ανάγωγη τότε από την πρόταση 3.2 (3) $\iff$ η τομή δύο ανοικτών υποσυνόλων της X, τα οποία τέμνουν την Z, επίσης τέμνει την Z και όμοια για την $\overline{Z}$. Αλλά ανοικτά σύνολα που τέμνουν την Z επίσης τέμνουν και την $\overline{Z}$.

(2) Αν U, V είναι ανοικτά υποσύνολα της Y, τα οποία τέμνουν την $\phi(X)$, τότε πρέπει να δείξω ότι και το $U \cap V$ τέμνει την $\phi(X)$. Όμως $\phi^{-1}(U), \phi^{-1}(V)$ είναι μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X, άρα από την πρόταση 3.2 (3) έχουν μη μηδενική τομή (η X είναι ανάγωγη πολλαπλότητα). Άρα η εικόνα της τομής αυτής μέσω της ϕ ανήκει στο $U \cap V \cap \phi(X)$

(3) Έστω ότι η $X \times Y$ να είναι η ένωση δύο κλειστών υποσυνόλων Z_1, Z_2. Πρέπει να δείξω ότι είτε $Z_1 = X \times Y$ ή $Z_2 = X \times Y$.
Αν $x \in X$, τότε το $\{x\} \times Y$ είναι κλειστό (αφού $\{x\}$ κλειστό και Y αφινική πολλαπλότητα, άρα κλειστό). Είναι επίσης και ανάγωγο (κάθε διάσπαση ως ένωση κλειστών

συνόλων θα συνεπαγόταν μία όμοια διάσπαση για το Y, αφού ένα κλειστό υποσύνολο του $\{x\} \times Y$ προφανώς θα ήταν της μορφής $\{x\} \times Z$ για Z κλειστό υποσύνολο του Y).
Άρα η τομή του $\{x\} \times Y$ με τα Z_1, Z_2 δεν μπορεί να είναι γνήσια. Άρα $X = X_1 \cup X_2$, όπου $X_i = \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subset Z_i, i = 1, 2\}$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι κάθε X_i είναι κλειστό υποσύνολο του X: Για κάθε $y \in Y$, το $X \times \{y\}$ είναι κλειστό, επομένως το $(X \times \{y\}) \cap Z_i$ είναι κλειστό, το οποίο συνεπάγεται ότι το σύνολο $X_y^{(i)}$ των πρώτων συντεταγμένων είναι κλειστό στο X. Όμως $X_i = \bigcap_{y \in Y} X_y^{(i)}$.

Από την αναγωγισιμότητα του X συμπεραίνουμε ότι είτε $X = X_1$ ή $X = X_2$, δηλαδή είτε $X \times Y = Z_1$ ή $X \times Y = Z_2$.

(4) · Θα δείξουμε πρώτα τον ισχυρισμό για έναν τοπολογικό χώρο της Noether (δηλαδή κάθε αύξουσα ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ γίνεται τελικά σταθερή).
Θεωρούμε τη συλλογή $\mathcal{A}$ όλων των πεπερασμένων ενώσεων κλειστών ανάγωγων υποσυνόλων του X (π.χ. $\emptyset \in \mathcal{A}$)
Αν το X δεν είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$ από την ιδιότητα της Noether μπορούμε να βρούμε ένα κλειστό υποσύνολο Y του X το οποίο είναι minimal μεταξύ των κλειστών υποσυνόλων (όπως το X) που δεν ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Προφανώς το Y δεν είναι ούτε το $\emptyset$ ούτε ανάγωγο; άρα $Y = Y_1 \cup Y_2$ (Y_1, Y_2 γνήσια κλειστά υποσύνολα του Y). Ο minimal χαρακτήρας του Y μας λέει ότι αναγκαστικά τα Y_1 και Y_2 ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Το οποίο όμως είναι άτοπο διότι έτσι το $Y \in \mathcal{A}$
Άρα $X \in \mathcal{A}$.
Γράφουμε $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ όπου X_i είναι ανάγωγα κλειστά υποσύνολα.
Αν το Y είναι ένα maximal ανάγωγο υποσύνολο του X, τότε αφού είναι $Y = \bigcup_{i=1}^{n} (Y \cap X_i)$ πρέπει να είναι $Y \cap X_i = Y \implies Y = X_i$ από μεγιστικό χαρακτήρα για κάποιο i.
· Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε αφινική πολλαπλότητα είναι της Noether.
Έστω

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \ldots$$

μία ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του V. Τότε αυτή μας δίνει μία ακολουθία ριζικών ιδεωδών

$$I(V_1) \subset I(V_2) \subset I(V_3) \ldots$$

η οποία είναι τελικά σταθερή αφού ο $k[T_1, \ldots, T_n]$ είναι της Noether από το Θεώρημα βάσης του Hilbert (δες παράρτημα Θεώρημα 23.2) □

Τα μεγιστικά ανάγωγα υποσύνολα στο (4) καλούνται ανάγωγες συνιστώσες του X.

Παρατηρηση: Από το (1) οι ανάγωγες συνιστώσες του X είναι κλειστά σύνολα.

Ορισμός .3.4. *Ενας τοπολογικός χώρος λέγεται συνεκτικός αν δεν μπορεί να γραφεί ως ξένη ένωση $X = X_1 \sqcup X_2$ όπου X_1, X_2 είναι μη κενά κλειστά υποσύνολα*

Παρατήρηση: Κάθε ανάγωγο σύνολο είναι συνεκτικό ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα.

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το σύνολο $X = \{(x, y) \in k^2 \mid xy = 0\}$
• X όχι ανάγωγο: Πράγματι, αν θεωρήσουμε το $A = \{(x, y) \in k^2 \mid x = 0\}$ και το $B = \{(x, y) \in k^2 \mid y = 0\}$ τότε τα A, B είναι κλειστά υποσύνολα του X αφού είναι τα σύνολα μηδενισμού των πολυωνύμων των (πεπερασμένα παραγόμενων) ιδεωδών $I(A) = \langle x \rangle$ και $I(B) = \langle y \rangle$ και $X = A \cup B$, άρα X όχι ανάγωγος.

• X συνεκτικό: Πράγματι, τα A, B δεν είναι ξένα, αφού $A \cap B = \{(0,0)\}$. Θα δείξω ότι τα A, B είναι συνεκτικά.
Για το $A = \{(x,y) \in k^2 \mid x = 0\}$ θα δείξω ότι είναι ανάγωγο, από την πρόταση 3.2 (4) $\iff$ το $I(A) = \langle x \rangle$ είναι πρώτο ιδεώδες το οποίο ισχύει αφού το k είναι σώμα και το x είναι ανάγωγο ως πρωτοβάθμιο.
Άρα A ανάγωγο $\Rightarrow$ A συνεκτικό.
Όμοια και το B είναι συνεκτικό.
Άρα το X είναι ένωση συνεκτικών υποσυνόλων του με μη μηδενική τομή, άρα X συνεκτικό.

Παραδείγματα

(1) Οι $\mathbf{G}_a$ και $\mathbf{G}_m$ είναι συνεκτικές από την πρόταση 3.2 (5) αφού οι $k[\mathbf{G}_a] = k[T]$ και $k[\mathbf{G}_m] = k[T, T^{-1}]$ είναι ακέραιες περιοχές

(2) Η GL_n είναι συνεκτική αφού ο $k[\mathrm{GL}_n] = k[T_{ij}]_{\det(T_{ij})}$ είναι ακέραια περιοχή ως η localization του πολυωνιμικού δακτυλίου $k[T_{ij}]$

Η επόμενη πρόταση μας δείχνει το πως η τοπολογία του Zariski σε μία γραμμική αλγεβρική ομάδα μας επιτρέπει να βγάλουμε συμπεράσματα όσον αφορά τη δομή της.

Πρόταση .3.5. *Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα, τότε:*
(1) Οι ανάγωγες συνιστώσες της G είναι ξένες ανα δύο, όπως και οι συνεκτικές συνιστώσες της G
(2) Η ανάγωγη συνιστώσα G^0 που περιέχει το $1 \in G$ είναι κανονική υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη.
(3) Κάθε κλειστή υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη περιέχει την G^0

Απόδειξη. (1) Έστω X, Y δύο ανάγωγες συνιστώσες της G. Έστω $g \in X \cap Y$. Αφού ο πολλαπλασιασμός με g^{-1} είναι μορφισμός της G στον εαυτό της οι $g^{-1}X$, $g^{-1}Y$ είναι ανάγωγες από την πρόταση 3.3 (2) και $1 \in g^{-1}X \cap g^{-1}Y$. Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $1 \in X \cap Y$.
Παρατηρούμε ότι $\mu(X \times Y) = XY$ είναι ανάγωγη από την πρόταση 3.3 (2) και (3).
Αφού $X = X \cdot 1 \subseteq XY$ και $Y = Y \cdot 1 \subseteq XY$, τότε από τον μεγιστικό χαρακτήρα των X, Y παίρνουμε ότι:
$X = XY = Y$, συνεπώς οι ανάγωγες συνιστώσες είναι ξένες ανα δύο

(2) Αφού η G^0 είναι ανάγωγη συνιστώσα, τότε και η $(G^0)^{-1}$ είναι ανάγωγη συνιστώσα και $1 \in G^0 \cap (G^0)^{-1}$. Άρα από το (1) έπεται ότι $G^0 = (G^0)^{-1}$ και όμοια $G^0 \cdot G^0 \subseteq G^0$, συνεπώς G^0 είναι υποομάδα της G.

Έστω $g \in G$, τότε $g^{-1}G^0 g$ είναι επίσης ανάγωγη συνιστώσα ως ισομορφική εικόνα της G^0 και $1 \in G^0 \cap g^{-1}G^0 g$. Άρα από το (1) έπεται ότι $G^0 = g^{-1}G^0 g$ συνεπώς η G^0 είναι κανονική υποομάδα της G.

Έστω X ανάγωγη συνιστώσα της G. Αν $g \in X$ τότε $1 \in g^{-1}X$, άρα $g^{-1}X = G^0$. Έπεται ότι $X = gG^0$, δηλαδή οι ανάγωγες συνιστώσες είναι σύμπλοκα της G^0. Άρα από πρόταση 3.3 (4) υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος ανάγωγες συνιστώσες της G, άρα $|G : G^0|$ είναι πεπερασμένος.

(3) Έστω $H \leq G$ κλειστή υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη. Τότε $H^0 \leq G^0 \leq G$. Επίσης $|G : H^0| = |G : H||H : H^0|$ είναι πεπερασμένος από το (2). Άρα $G^0 = \sqcup g H^0$ είναι πεπερασμένη ξένη ένωση κλειστών συμπλόκων της H^0 και λόγω συνεκτικότητας είναι ίση με την H^0, άρα $G^0 \leq H$ □

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει το σημαντικότατο πόρισμα:

Πόρισμα .3.6. *Σε μία γραμμική αλγεβρική ομάδα οι έννοιες της συνεκτικότητας και της αναγωγισιμότητας ταυτίζονται.*

Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε στις συνεκτικές (ανάγωγες) συνιστώσες της G ως συνιστώσες και μία συνεκτική (ανάγωγη) γραμμική αλγεβρική ομάδα θα την λέμε συνεκτική.

Παραδείγματα

(1) Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα και H μία γνήσια κλειστή υποομάδα της πεπερασμένου δείκτη. Τότε η G δεν είναι συνεκτική από την πρόταση 3.5 (3).

Παρατήρηση: Αν G πεπερασμένη τότε πάντα θα είναι $G^0 = 1$

(2) Έστω η ορθογώνια ομάδα GO_{2n+1} και έστω ο μορφισμός $\det : \mathrm{GO}_{2n+1} \to \mathbf{G}_m$. Προφανώς $\mathrm{im}(\det) \subseteq \{\pm 1\}$. Αφού $-I_{2n+1} \in \mathrm{GO}_{2n+1}$ είναι $\mathrm{im}(\det) = \{\pm 1\}$. Άρα, αν $\mathrm{char}(k) \neq 2$, τότε η GO_{2n+1} δεν είναι συνεκτική από την πρόταση 3.3 (2) αφού η εικόνα δεν είναι συνεκτική.
Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $\mathrm{GO}_{2n+1} \cong \ker(\det) \times \langle -I_{2n+1} \rangle$

Όμοια και για την GO_{2n} θεωρώ τον μορφισμό $\det : \mathrm{GO}_{2n} \to \mathbf{G}_m$. Προφανώς $\mathrm{im}(\det) \subseteq \{\pm 1\}$. Αφού όμως ο πίνακας $A = \mathrm{diag}(-1, 1-1, \ldots, 1) \in \mathrm{GO}_{2n}$, τότε είναι $\mathrm{im}(\det) = \{\pm 1\}$. Άρα από πρόταση 3.3 (2) η GO_{2n} δεν είναι συνεκτική αφού η $\mathrm{im}(\det)$ δεν είναι συνεκτική. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $\mathrm{GO}_{2n} = \ker(\det) \times \langle A \rangle$ για $\mathrm{char}(k) \neq 2$, ενώ για $\mathrm{char}(k) = 2$ η ορίζουσα πρέπει να αντικατασταθεί με την λεγόμενη ψευδοορίζουσα, την οποία δεν θα ορίσουμε εδώ. (δες το βιβλίο του L.Grove, Classical Groups and Geometric Algebra, pages 124-131)

Ορισμός .3.7. *Για $n \geq 2$, η ειδική ορθογώνια ομάδα $\mathrm{SO}_n := G0_n^0$ είναι η συνεκτική συνιστώσα της μονάδας της GO_n*

Αποδεικνύεται ότι αν n περιττός ή $\mathrm{char}(k) \neq 2$, τότε η SO_n είναι ο πυρήνας της ορίζουσας, άρα $\mathrm{SO}_n = \mathrm{GO}_n \cap \mathrm{SL}_n$; όταν n άρτιος και $\mathrm{char}(k) = 2$, η SO_n είναι ο πυρήνας της ψευδοορίζουσας. Άρα η SO_n είναι δείκτη 2 εντός της GO_n εκτός αν n είναι περιττός ή $\mathrm{char}(k) = 2$.
Με ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η άρτιας διάστασης σύμμορφη ορθογώνια ομάδα CO_{2n} δεν είναι συνεκτική και ότι έχουμε $|\mathrm{CO}_{2n} : \mathrm{CO}_{2n}^0| = 2$.

Το παρακάτω αποτέλεσμα από την αλγεβρική γεωμετρία μας επιτρέπει να διαπιστώσουμε την συνεκτικότητα κάποιων γραμμικών αλγεβρικών ομάδων.
(Για την απόδειξη δες το βιβλίο του M. Geck An Introduction to Algebraic Geometry and Algebraic Groups Theorem 2.4.6)

Πρόταση .3.8. *Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα και $\phi_i : Y_i \to G \quad i \in I$ μία οικογένεια μορφισμών από ανάγωγες αφινικές πολλαπλότητες Y_i τέτοιες ώστε $1 \in G_i := \phi_i(Y_i)$ για κάθε $i \in I$.*
Τότε $H := \langle G_i \mid i \in I \rangle$ είναι κλειστή συνεκτική υποομάδα της G.
Επιπλέον υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $(i_1, \ldots, i_n) \in I^n$ τέτοια ώστε $H = G_{i_1}^{\pm 1} \cdots G_{i_n}^{\pm 1}$

Παραδείγματα

(1) Μία εφαρμογή της παραπάνω πρότασης.
Παρατηρούμε ότι $\mathrm{SL}_2 = \langle U_2, U_2^- \rangle$ όπου $U_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \cong \mathbf{G}_a$, $U_2^- = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}\} \cong$

$\mathbf{G}_a$
και η U_2 και η U_2^- είναι κλειστές και συνεκτικές υποομάδες της SL_2 από το παράδειγμα (1) σελίδα 9 (αφού οι $k[\mathbf{G}_a] = k[T]$ ακαίραιες περιοχές, άρα συνεκτικές), άρα η SL_2 είναι συνεκτική από την προηγούμενη πρόταση.

(2) Με το ίδιο επιχείρημα θα δείξουμε ότι οι T_n, U_n και D_n είναι συνεκτικές για κάθε $n \geq 1$ και η SL_n είναι συνεκτική για $n \geq 2$

• $D_n = \langle D_1, D_2 \ldots, D_n \rangle$, όπου $D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbf{G}_m, D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbf{G}_m, \ldots, D_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbf{G}_m$ με $1 \in D_i$ για κάθε i και $k[\mathbf{G}_m] = k[T, T^{-1}]$ ακέραια περιοχή, άρα $\mathbf{G}_m$ συνεκτική (άρα ανάγωγη). Άρα από πρόταση 3.8 η D_n είναι συνεκτική για κάθε $n \geq 1$.
• $U_n = \langle U_{ij}$ με $i < j, i, j \in \{1, \ldots, n\}$ και $a_{ii} = 1,\ a_{ij} \in \mathbf{G}_a, a_{km} = 0$ για κάθε $k \neq i, m \neq j \rangle$
Τότε $1 \in U_{ij}$ για κάθε i, j κλειστές και $U_{ij} \cong \mathbf{G}_a$ με U_{ij} $\frac{n(n-1)}{2}$ στο πλήθος, $\mathbf{G}_a$ συνεκτική (άρα ανάγωγη)
Άρα από πρόταση 3.8, η U_n είναι ανάγωγη για κάθε $n \geq 1$.
• $T_n = \langle U_n, D_n \rangle$ συνεκτική.
• $\mathrm{SL}_n = \langle U_n^+, U_n^- \rangle$ συνεκτική.

(3) Σε αυτό το παράδειγμα θα δούμε ότι γενικά οι κεντρικοποιούσες ομάδες στοιχείων δεν είναι απαρραίτητα συνεκτικές, ακόμα και σε μία συνεκτική ομάδα. Έστω $G = \mathrm{SL}_2$ πάνω από ένα σώμα k με $\mathrm{char}(k) \neq 2$ και $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
Τότε $C_G(g) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in k\ a^2 = 1\} = H \sqcup \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} H$
όπου $H := \{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in k\}$
Αφού η H είναι κλειστή συνεκτική υποομάδα δείκτη 2 της $C_G(g)$, η κεντρικοποιούσα είναι μη συνεκτική από πρόταση 3.5 (3).

Μία ακόμα εφαρμογή του παραπάνω κριτηρίου συνεκτικότητας είναι η παρακάτω πρόταση την οποία και θα χρισημοποιούμε και αρκετά παρακάτω.

Πρόταση .3.9. *Έστω H,K υποομάδες μιας γραμμικής αλγεβρικής ομάδας G, όπου η K είναι κλειστή και συνεκτική. Τότε η $[H, K]$ είναι κλειστή και συνεκτική.*

Απόδειξη. Για $h \in H$, ορίζουμε $\phi_h : K \to G$ με $g \mapsto [h, g]$. Αφού η ϕ_h είναι σύνθεση πολλαπλασιασμού και αντιστροφής είναι μορφισμός. Επιπλέον $1 = \phi_h(1) \in \phi(K)$ για κάθε h και $[H, K] = \langle \phi_h(K) \mid h \in H \rangle$.
Άρα η $[H, K]$ είναι κλειστή και συνεκτική από την προηγούμενη πρόταση. □

Στην πραγματικότητα για μια G συνεκτική ομάδα, η παράγωγος υποομάδα $[G, G]$ και πιο γενικά όλοι οι όροι στην κεντρική σειρά και στη φθίνουσα κεντρική σειρά της είναι κλειστοί και συνεκτικοί.

.4 Διάσταση

Ένα ακόμα θεμελιώδες αναλοίωτο μέγεθος των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων είναι η διάστασή τους.

Για μία ανάγωγη πολλαπλότητα X, ο δακτύλιος συντεταγμένων $k[X]$ είναι ακαίρεα περιοχή από την πρόταση 3.2 (5). Έστω $k(X)$ το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων του $k[X]$. Ορίζουμε την διάσταση του X να είναι $\dim(X) := \text{trdeg}_k(k(X))$, ο βαθμός υπερβατικότητας του $k[X]$ πάνω από το k. Ισοδύναμα, η διάσταση του X είναι ίση με το μέγιστο μήκος των φθίνουσων αλυσίδων πρώτων ιδεωδών του $k[X]$. Αν X είναι μία μη ανάγωγη αφινική πολλαπλότητα, τότε σύμφωνα με την πρόταση 3.3 (4), μπορεί να γραφεί ως πεπερασμένη ένωση $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ όπου X_i οι ανάγωγες συνιστώσες της X. Τότε ορίζουμε $\dim(X) := \max\{\dim(X_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Για μία γραμμική αλγεβρική ομάδα G, ορίζουμε $\dim(G) = \dim(G^0)$, εφόσον η G είναι η πεπερασμένη ένωση συμπλόκων gG^0 της ανάγωγης υποομάδας G^0. Από την πρόταση 3.5 και απ΄το ότι $\dim(G) = \dim(gG^0) = \dim(G^0)$ (από τον παραπάνω ορισμό). Επίσης είναι $\dim(G) = 0$ αν και μόνο αν η G είναι πεπερασμένη.

Η διάσταση συμπεριφέρεται καλά όσον αφορά τους μορφισμούς υπο την εξής έννοια (για την απόδειξη δες ([2], Θεώρημα 4.3)):

Πρόταση .4.1. *Έστω $\phi : X \to Y$ μορφισμός ανάγωγων πολλαπλοτήτων, με $\phi(X)$ να είναι πυκνό στον Y. Τότε υπάρχει μη κενό ανοικτό υποσύνολο $U \subseteq Y$, με $U \subseteq \phi(X)$ και*

$$\dim(\phi^{-1}(y)) = \dim(X) - \dim(Y) \text{ για κάθε } y \in U.$$

Στην πραγματικότητα, για σύντομες ακριβείς ακολουθίες γραμμικών αλγεβρικών ομάδων η παραπάνω πρόταση λέει ότι:

Πόρισμα .4.2. *Έστω $\phi : G_1 \to G_2$ μορφισμός γραμμικών αλγεβρικών ομάδων, τότε:*

$$\dim(\text{im}(\phi)) + \dim(\ker(\phi)) = \dim(G_1).$$

Απόδειξη. Κάθε νήμα της ϕ είναι ένα σύμπλοκο του πυρήνα, άρα και ίδιας διάστασης. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την πρόταση 4.1 στις ομάδες $X = G_1^0$ και $Y = \text{im}(\phi)^0$ $\square$

Παραδείγματα

(1) $\dim(\mathbf{G}_a) = 1$, αφού $k[\mathbf{G}_a] = k[T]$ με ομάδα αντιστρέψιμων στοιχείων $k(\mathbf{G}_a) = k(T)$.

(2) $\dim(\mathbf{G}_m) = 1$, αφού πάλι $k(\mathbf{G}_m) = k(T)$.

(3) $\dim(\text{GL}_n) = n^2$ αφού τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $k[\text{GL}_n] = k[T_{ij}]_{\det(T_{ij})}$ είναι το $k(T_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n)$

(4) $\dim(\text{SL}_n) = n^2 - 1$ εφαρμόζοντας το πόρισμα 4.2 στην (επί) απεικόνιση $\det : \text{GL}_n \to \mathbf{G}_m$ με πυρήνα την SL_n.

Για επαγωγικές υποθέσεις η επόμενη πρόταση είναι πολύ χρήσιμη:

Πρόταση .4.3. *Αν Y είναι γνήσιο κλειστό υποσύνολο μίας ανάγωγης αφινικής πολλαπλότητας X, τότε $\dim(Y) < \dim(X)$.*

Απόδειξη. Έστω $Y_1 \subseteq Y$ μία ανάγωγη συνιστώσα. Τότε η εμφύτευση $\phi : Y_1 \hookrightarrow Y \hookrightarrow X$ επάγει έναν επιμορφισμό $\phi^* : k[X] \to k[Y_1]$. Αφού η Y_1 ανάγωγη τότε από πρόταση 3.2 (5), ο $k[Y_1]$ είναι ακέραια περιοχή, άρα $\ker(\phi^*)$ είναι πρώτο ιδεώδες του $k[X]$ και μάλιστα μη μηδενικό αφού $Y_1 \subset X$ είναι γνήσιο. Παρατηρούμε ότι κάθε αλυσίδα πρώτων ιδεωδών του $k[Y_1]$ μπορεί να επεκταθεί σε αλυσίδα του $k[X]$ μέσω του $\ker(\phi^*)$, άρα μεγαλύτερου μήκους αφού η X είναι ανάγωγη. $\square$

Κεφάλαιο 2: Διάσπαση Jordan

Πριν μελετήσουμε τη δομή γραμμικών αλγεβρικών ομάδων θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των στοιχείων τους.

.5 Διάσπαση Jordan Ενδομορφισμών

Υπενθυμίζουμε την προσθετική διάσπαση Jordan ενδομορφισμών: Αν V είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος πάνω απο το k και $a \in \mathrm{End}(V)$ ένας ενδομορφισμός του V, τότε υπάρχουν μοναδικοί $s, n \in \mathrm{End}(V)$ τέτοιοι ώστε ο s να είναι ημιαπλός, δηλαδή διαγωνοποιήσιμος, και ο n μηδενοδύναμος, $a = s + n$ και $sn = ns$. Επιπλέον $s = P(a)$ και $n = Q(a)$ για πολυώνυμα $P, Q \in T \cdot k[T]$. Τώρα μπορούμε να ορίσουμε μία πολλαπλασιαστική μορφή των παραπάνω.

Ορισμός .5.1. *Ένας ενδομορφισμός $u \in \mathrm{End}(V)$ ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου V καλείται ταυτοδύναμος αν ο $u - 1$ είναι μηδενοδύναμος.*

Ισοδύναμα, ο u είναι ταυτοδύναμος αν και μόνο αν όλες του οι ιδιοτιμές είναι ίσες με 1. Παρατηρούμε ότι πάνω από ένα σώμα χαρακτηριστικής $\mathrm{char}(k) = p > 0$, ο u είναι ταυτοδύναμος αν και μόνο αν η τάξη του είναι δύναμη του p, εφόσον $0 = (u-1)^{p^i} = u^{p^i} - 1$ για κάθε $i \geq 0$.

Η προσθετική διάσπαση Jordan θα χρησιμοποιηθεί για να ορίσουμε την πολλαπλασιαστική.

Πρόταση .5.2. *Για $g \in \mathrm{GL}(V)$, υπάρχουν μοναδικοί $s, u \in \mathrm{GL}(V)$ τέτοιοι ώστε $g = su = us$, όπου ο s ημιαπλός και ο u ταυτοδύναμος.*

Απόδειξη. Έστω s, n να είναι το ημιαπλό και μηδενοδύναμο μέρος του g, από την προσθετική διάσπαση Jordan. Αφού το g είναι αντιστρέψιμο, τότε και ο s είναι επίσης αντιστρέψιμος και ορίζουμε $u = 1 + s^{-1}n$. Αφού ο n είναι μηδενοδύναμος και $sn = ns$, τότε ο $s^{-1}n = u - 1$ είναι επίσης μηδενοδύναμος. Άρα ο u είναι ταυτοδύναμος και $su = s(1 + s^{-1}n) = s + n = g$. Αν $g = su$ είναι μία άλλη τέτοια διάσπαση, όπου $u = 1 + n$ με n μηδενοδύναμο και να μετατίθεται με τον s, τότε $g = s + sn$ είναι η μοναδική προσθετική διάσπαση Jordan του g, άρα οι s και u είναι μοναδικοί. □

Ορισμός .5.3. *Αν $a \in \mathrm{GL}(V)$ τότε καλούμε s, n και u το ημιαπλό, μηδενοδύναμο και ταυτοδύναμο μέρος του a αντίστοιχα.*

Για να μεταφέρουμε τον ορισμό σε μία τυχαία γραμμική αλγεβρική ομάδα G θα την εμφυτεύσουμε ως κλειστή υποομάδα σε κάποια $\mathrm{GL}(V)$. Πρώτα χρειαζόμαστε την έννοια των τοπικά πεπερασμένων αυτομορφισμών του $k[G]$. Κάθε $x \in G$ ορίζει έναν μορφισμό $G \to G$ όπου $g \mapsto gx$. Συμβολίζουμε τον επαγόμενο ομομορφισμό $k[G]$-άλγεβρών με $\rho_x : k[G] \to k[G]$, με $\rho_x(f)(g) = f(gx)$ για $f \in k[G],\ g \in G$. Έτσι ορίσαμε μία δράση της G στον $k[G]$. Έτσι έχουμε το ακόλουθο:

Πρόταση .5.4. *Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα και V ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός υπόχωρος του $k[G]$. Τότε υπάρχει ένας πεπερασμένης διάστασης G-αναλλοίωτος υπόχωρος X του $k[G]$ που περιέχει τον V. Στην πραγματικότητα, ο $k[G]$ είναι ένωση πεπερασμένης διάστασης G-αναλλοίωτων υποχώρων. Επιπλέον, ο περιορισμός σε κάθε τέτοιον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο μας δίνει έναν μορφισμό γραμμικών αλγεβρικών ομάδων $\rho : G \to \mathrm{GL}(X)$*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για την περίπτωση όπου $V = \langle f \rangle$, ένας μονοδιάστατος υπόχωρος του $k[G]$. Έστω $\mu^*(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes g_i$ έτσι ώστε $\rho_x(f) = \sum_i g_i(x) f_i$. Άρα ο πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος που παράγεται απο τις $\{f_i \mid i \in I\}$ περιέχει τις $\rho_x(f)$ για κάθε $x \in G$. Συνεπώς, ο υπόχωρος X που παράγεται από τις $\{\rho_x(f) \mid x \in G\}$ είναι πεπερασμένης διάστασης G-αναλλοίωτος υπόχωρος του $k[G]$. Είναι ξεκάθαρο από τα παραπάνω ότι οι συντεταγμένες ρ_x είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις του x. Συνεπώς η απεικόνιση $x \mapsto (\rho_x)|_X$ μας δίνει έναν μορφισμό γραμμικών αλγεβρικών ομάδων. □

Επιστρέφουμε τώρα στην διάσπαση Jordan της G. Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πάνω από το k, λέμε ότι ένα στοιχείο $x \in \mathrm{End}(V)$ είναι τοπικά πεπερασμένο αν ο V είναι η ένωση των πεπερασμένης διάστασης x-σταθερών υπόχωρων και λέμε ότι το x είναι τοπικά ημιαπλό, αντίστοιχα τοπικά μηδενοδύναμο, εάν ο περιορισμός του σε κάθε πεπερασμένης διάστασης x-σταθερό υπόχωρο είναι ημιαπλό, αντίστοιχα μηδενοδύναμο. Αποδεικνύεται ότι κάθε τοπικά πεπερασμένος ενδομορφισμός του V έχει διάσπαση Jordan όπως ακριβώς παραπάνω. Επιπλέον, από την πρόταση 5.4 παρατηρούμε ότι ο ρ_x είναι τοπικά πεπερασμένος ενδομορφισμός του $k[G]$ για κάθε $x \in G$. Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα .5.5. *(Διάσπαση Jordan)*
Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα, τότε:

(1) Για κάθε εμφύτευση ρ της G σε κάποια $\mathrm{GL}(V)$ και για κάθε $g \in G$, υπάρχουν μοναδικοί $g_s, g_u \in G$ τέτοιοι ώστε $g = g_s g_u = g_u g_s$, όπου $\rho(g_s)$ είναι ημιαπλό και $\rho(g_u)$ είναι ταυτοδύναμο

(2) Η διάσπαση $g = g_s g_u = g_u g_s$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της εμφύτευσης.

(3) Αν $\phi : G_1 \to G_2$ είναι μορφισμός γραμμικών αλγεβρικών ομάδων, τότε $\phi(g_s) = (\phi(g))_s$ και $\phi(g_u) = (\phi(g))_u$

Απόδειξη. (Σκιαγράφηση)
Για $g \in G$, ο ρ_g είναι αντιστρέψιμος, τοπικά πεπερασμένος γραμμικός μετασχηματισμός του $k[G]$. Εφόσον ο ρ_g είναι ομομορφισμός αλγεβρών, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και οι $(\rho_g)_s$, $(\rho_g)_u$ είναι επίσης ομομορφισμοί αλγεβρών. Συγκεκριμένα, $f \mapsto ((\rho_g)_s(f))(1)$ ορίζει έναν ομομορφισμό $k[G] \to k$, δηλαδή ένα σημείο g_s της G και όμοια για τον $(\rho_g)_u$. Μένει να δείξουμε ότι $(\rho_g)_s = \rho_{g_s}$ και $(\rho_g)_u = \rho_{g_u}$, δείτε το ([2], 2.4.8) για λεπτομέριες.

Θα δούμε τις αποδείξεις για τα (2) και (3) μαζί μόνο για την περίπτωση που $k = \overline{\mathbb{F}}_p$: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $G \leq \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Αφού $\overline{\mathbb{F}}_p$ είναι η ένωση $\bigcup_{i \geq 1} \mathbb{F}_{p^i}$ πεπερασμένων σωμάτων, κάθε $g \in G$ απεικονίζεται σε μία $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ για q μία δύναμη του p, άρα έχει πεπερασμένη τάξη. Τότε g_s είναι διαγωνίσιμο, άρα και τάξης σχετικά πρώτης με το p, ενώ g_u έχει ιδιοτιμές 1, άρα και αυτό έχει τάξη μία δύναμη του p. Αφού $g = g_s g_u$ έπεται ότι το g_s είναι το p' μέρος του g και το g_u είναι το p μέρος του g. Από τη μοναδικότητα των p' και p μερών στοιχείων πεπερασμένων ομάδων, ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. $\square$

Ορισμός .5.6. *Έστω G γραμμική αλγεβρική ομάδα. Η διάσπαση $g = g_s g_u = g_u g_s$ του προηγούμενου θεωρήματος καλείται διάσπαση Jordan του $g \in G$. Το g καλείται ημιαπλό, αντίστοιχα ταυτοδύναμο, αν $g = g_s$, αντίστοιχα $g = g_u$. Γράφουμε:*

$$G_u := \{g \in G \mid g \text{ είναι ταυτοδύναμο}\}$$

$$G_s := \{g \in G \mid g \text{ είναι ημιαπλό}\}$$

για τα υποσύνολα των ταυτοδύναμων και ημιαπλών στοιχείων της G αντίστοιχα. Αν η G περιέχει μόνο ταυτοδύναμα στοιχεία τότε λέμε ότι η G είναι ταυτοδύναμη ομάδα.

Τον όρο ημιαπλή ομάδα θα τον χρησιμοποιήσουμε αργότερα.

Παραδείγματα
Έχουμε ήδη δει παραγείγματα συνεκτικών ομάδων με $G = G_u$ και $G = G_s$:

(1) $\mathbf{G}_a \cong \{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in k\}$ είναι ταυτοδύναμη ομάδα όπως και κάθε U_n για κάθε $n \geq 2$

(2) Η $\mathbf{G}_m$ και γενικώς η $D_n = \{diag(t_1, \ldots, t_n) \mid \prod t_i \neq 0\}$ για $n \geq 1$, περιέχει μόνο ημιαπλά στοιχεία.

(3) Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα. Να αποδειχθεί ότι:
(i) Το σύνολο G_u των ταυτοδύναμων στοιχείων της είναι κλειστό.
(ii) Το G_s δεν είναι ούτε κλειστό, ούτε ανοικτό.

Για το (i): Διαλέγω μία εμφύτευση της $G \overset{\rho}{\hookrightarrow} \mathrm{GL}_n$. Τότε από το Θεώρημα 5.5 για κάθε $g = g_u \in G_u$ το $\rho(g_u)$ είναι ταυτοδύναμος πίνακας.
Άρα το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι το $\mathcal{X}(x) = (x-1)^n$
Άρα το G_u είναι το αλγεβρικό σύνολο που μηδενίζει την συλλογή $\langle (x-1)^n \rangle$, άρα είναι κλειστό στην τοπολογία του Zariski.

Για το (ii): Για παράδειγμα στην GL_n, το σύνολο των ημιαπλών στοιχείων της είναι πυκνό υποσύνολο: Θα δούμε ότι η G_s δεν "συμπεριφέρεται καλα".
Έστω $G = \mathrm{GL}_2$ και $g \in G \setminus G_s$. Τότε το g είναι συζυγές με το $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ για κάποιο $a \in k^\times$. Ορίζουμε $\phi : G \to \mathrm{GL}_2$ με $\phi(t) = \begin{pmatrix} at & 1 \\ 0 & at^{-1} \end{pmatrix}$. Τότε η ϕ είναι μορφισμός και το $\phi(t)$ είναι ημιαπλό για κάθε $at \neq at^{-1}$, άρα για $t \neq \pm 1$.
Άρα $\phi(\mathbf{G}_m \setminus \{\pm 1\}) \subseteq G_s$. Όμως $\mathbf{G}_m \setminus \{\pm 1\}$ είναι ανοικτό στην $\mathbf{G}_m$ και πυκνό από την πρόταση 3.2 (2) αφού η $\mathbf{G}_m$ είναι ανάγωγη.
Άρα $\overline{\mathbf{G}_m \setminus \{\pm 1\}} = \mathbf{G}_m$ και

$$\phi(\mathbf{G}_m) = \phi(\overline{\mathbf{G}_m \setminus \{\pm 1\}}) \subseteq \overline{\phi(\mathbf{G}_m \setminus \{\pm 1\})} \subseteq \overline{G_s}$$

άρα όλα τα μη ημιαπλά στοιχεία της G απεικονίζονται στην $\overline{G_s}$, άρα $\overline{G_s} = G$

.6 Ταυτοδύναμες Ομάδες

Τώρα θα αποδείξουμε ένα βασικό αποτέλεσμα το οποίο μας δείχνει την δομή των ταυτοδύναμων ομάδων. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε γραμμική αλγεβρική ομάδα μπορεί να εμφυτευτεί εντός κάποιας GL_n, άρα θα περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας σε ταυτοδύναμες ομάδες πινάκων.

Πρόταση .6.1. *Έστω $G \le \mathrm{GL}_n$ μία ταυτοδύναμη ομάδα. Τότε υπάρχει $g \in \mathrm{GL}_n$ τέτοιο ώστε $g^{-1}Gg \le U_n$*

Απόδειξη. Γράφουμε $V = k^n$. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο n.
Το μόνο ταυτοδύναμο στοιχείο της GL_1 είναι η μονάδα, άρα ο ισχυρισμός είναι προφανής για $n = 1$.
Αν υπάρχει G-αναλλοίωτος γνήσιος υπόχωρος $0 \neq W < V$, τότε με κατάλληλη επιλογή βάσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $G \le \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) \right\}$

Αφού ο W είναι G-αναλλοίωτος υπόχωρος, επάγει φυσιολογικά ομομορφισμούς $\phi : G \to GL(W)$ και $\phi^* : G \to GL(V/W)$. Εφόσον $\dim(W)$ και $\dim(V/W)$ είναι και οι δύο μικρότερες από την $\dim(V)$, από την υπόθεση επαγωγής παίρνουμε (με αλλαγή βάσης, άρα με συζυγία) ότι:

$$G \le \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & * & & & \\ & \ddots & & & * & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & * \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array} \right) \right\} = U_n$$

όπως ισχυριστήκαμε
Αν από την άλλη, η G δρα ανάγωγα στον V, τότε τα στοιχεία της G παράγουν ολόκληρη την άλγεβρα ενδομορφισμών $\mathrm{End}(V)$ από το Θεώρημα διπλής κεντρικοποίησης του Burnside (δες παράρτημα Θεώρημα 23.3). Αφού κάθε στοιχείο της G είναι ταυτοδύναμο, έχει ίχνος n και παρατηρούμε ότι $\mathrm{tr}((g-1)h) = \mathrm{tr}(gh) - \mathrm{tr}(h) = 0$ για κάθε $h \in G$. Συνεπώς $\mathrm{tr}((g-1)x) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{End}(V)$. Επιλέγοντας έναν πίνακα x με ένα μόνο μη μηδενικό στοιχείο εύκολα προκύπτει ότι $\mathrm{tr}((g-1)x) = 0$ αν $g-1 = 0$, δηλαδή όταν $g = 1$, συνεπώς $G = 1$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση ότι η G δρα ανάγωγα στον V. $\square$

Αφού η U_n είναι μηδενοδύναμη ομάδα (από την ενότητα 2), ένα άμεσο πόρισμα της προηγούμενης πρότασης είναι:

Πόρισμα .6.2. *Μία ταυτοδύναμη γραμμική αλγεβρική ομάδα είναι μηδενοδύναμη, άρα και επιλύσιμη.*

Πάνω από το $k = \overline{\mathbb{F}_p}$, τα ταυτοδύναμα στοιχεία είναι τα p-στοιχεία, άρα μπορούμε να δούμε την παραπάνω κατάσταση για μία αλγεβρική ομάδα, κατ΄αναλογία με το ότι οι πεπερασμένες p-ομάδες είναι μηδενοδύναμες.

Κεφάλαιο 3: Αντιμεταθετικές Γραμμικές Αλγεβρικές Ομάδες

Η διάσπαση Jordan στοιχείων μας οδηγεί σε μία ίδια διάσπαση και για αβελιανές γραμμικές αλγεβρικές ομάδες. Εδώ όμως η περίπτωση που όλα τα στοιχεία είναι ημιαπλά θα παίξει αργότερα πολύ σημαντικό ρόλο.

.7 Διάσπαση Jordan Αβελιανών Ομάδων

Η δομή των γραμμικών αλγεβρικών ομάδων περιγράφεται στο επόμενο Θεώρημα:

Θεώρημα .7.1. *Έστω G αβελιανή γραμμική αλγεβρική ομάδα.*

(1) Τα σύνολα G_s και G_u είναι κλειστές υποομάδες της G

(2) Η απεικόνιση γινόμενο $\pi : G_s \times G_u \to G$ είναι ισομορφισμός αλγεβρικών ομάδων

(3) Αν η G είναι συνεκτική, τότε και οι $G_s,\ G_u$ είναι επίσης συνεκτικές

Απόδειξη. (1) Παίρνουμε μία εμφύτευση της G εντός κάποιας $\mathrm{GL}(V)$ (από το Θεώρημα 1.4) και έστω $g, g' \in G$. Τότε ενδομορφισμοί οι οποίοι μετατίθενται, μπορούν να τριγωνοποιηθούν ταυτόχρονα, άρα αν g, g' είναι ημιαπλά, (αντίστοιχα ταυτοδύναμα), τότε και τα gg' και g^{-1} είναι ημιαπλά (αντίστοιχα ταυτοδύναμα). Συνεπώς οι $G_s,\ G_u$ είναι υποομάδες της G.

Η G_u δείξαμε ότι είναι κλειστή υποομάδα της G. Επίσης η G_s περιέχει τους μεταθετικούς ημιαπλούς ενδομορφισμούς, άρα μπορούν να διαγωνοποιηθούν ταυτόχρονα. Έστω $V_i,\ 1 \leq i \leq t$, οι διαφορετικοί κοινοί ιδιόχωροι της G_s στον V, δηλαδή $V_i = \{v \in V \mid gv = \phi_i(g)v$ για κάθε $g \in G_s\}$ για κατάλληλους μορφισμούς $\phi_i : G_s \to \mathbf{G}_m$ και $V = \bigoplus_{i=1}^t V_i$. Αφού η G_u μετατίθεται με την G_s, τότε διατηρεί όλους τους V_i. Άρα η G σταθεροποιεί κάθε V_i, άρα από πρόταση 6.1 υπάρχει βάση τέτοια ώστε η G_u να δρα με άνω τριγωνικούς πίνακες σε κάθε V_i, ενώ η G_s να δρα με βαθμωτά. Ως προς αυτή τη βάση είναι $G \leq T_n$ και $G_s = D_n \cap G$, όπου $n := \dim(V)$, άρα η G_s είναι κλειστή.

(2) Η απεικόνιση γινόμενο $\pi : G_s \times G_u \to G$, με $\pi(s, u) = su$ είναι ομομορφισμός ομάδων αφού η G είναι αβελιανή. Είναι επί από τη διάσπαση Jordan του Θεωρήματος 5.5 και 1-1 από τη μοναδικότητα της διάσπασης. Επιπλέον, η π είναι μορφισμός αφινικών πολλαπλοτήτων, εφόσον ο πολλαπλασιασμός $\mu : G \times G \to G$ είναι μορφισμός.

Μένει μόνο να δείξουμε ότι η αντιστροφή

$$\pi^{-1} : G \to G_s \times G_u, \quad \pi^{-1}(g) = (g_s, g_s^{-1}g),$$

είναι επίσης μορφισμός. Για αυτό αρκεί απλά να παρατηρήσουμε ότι η απεικόνιση:

$$\psi : G \to G_s,\ g \mapsto g_s,\ \text{δηλαδη} \begin{pmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

είναι μορφισμός.

(3) Αφού η G είναι συνεκτική και $G \to G_s$, $g \mapsto g_s$ είναι μορφισμός, η εικόνα του είναι συνεκτική από την πρόταση 3.3 (2). Όμοια η $G \to G_u$, $g \mapsto g_u = gg_s^{-1}$ είναι μορφισμός, άρα έχει συνεκτική εικόνα. □

Αν συγκρίνουμε το παραπάνω Θεώρημα με την περίπτωση των πεπερασμένων ομάδων, τότε έχουμε ότι: Μία πεπερασμένη αβελιανή ομάδα είναι το ευθύ γινόμενο των Sylow υποομάδων της.

Θεώρημα .7.2. *Αν G είναι μία συνεκτική γραμμική αλγεβρική ομάδα διάστασης 1, τότε $G \cong \mathbf{G}_a$ ή $G \cong \mathbf{G}_m$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη αυτού του φαινομαινικά «αθώου» αποτελέσματος είναι αρκετά δύσκολη, ειδικά η περίπτωση που η G έχει μόνο ταυτοδύναμα στοιχεία. Εμείς θα αποδείξουμε μόνο ότι η G είναι αβελιανή και είτε $G = G_s$ ή $G = G_u$.

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι η G είναι αβελιανή.

Για $g \in G$ ορίζουμε έναν μορφισμό $\phi_g : G \to G$ με $\phi_g(x) := x^{-1}gx$. Αφού η $\phi_g(G)$ είναι ανάγωγη, και η $\overline{\phi_g(G)}$ είναι επίσης ανάγωγη κλειστή υποπολλαπλότητα της G. Άρα από πρόταση 4.3 η $\overline{\phi_g(G)}$ έχει διάσταση 1 ή 0.

Αν έχει διάσταση 0 για κάθε $g \in G$ τότε $\overline{\phi_g(G)} = \{g\}$ λόγω συνεκτικότητας, άρα G αβελιανή.

Αν έχει διάσταση 1, τότε $\overline{\phi_g(G)} = G$, για $g \in G$. Παίρνουμε μία εμφύτευση της G σε κάποια GL_n. Τότε από την πρόταση 1.4 το $\phi_g(G)$ περιέχει ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο της κλειστής του θήκης. Άρα το $G \setminus \phi_g(G)$ περιέχεται σε ένα κλειστό γνήσιο υποσύνολο, μικρότερης διάστασης από πρόταση 4.3, άρα διάστασης 0, άρα πεπερασμένο.

Αφού το $h \in \phi_g(G)$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο ίσο με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του g και υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία στο $G \setminus \phi_g(G)$, υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος χαρακτηριστικά πολυώνυμα $p_1, \dots, p_t$ για τα στοιχεία της G.

Τώρα παρατηρούμε ότι:

$$G = \bigcup_{i=1}^{t} ((\text{ρίζες των } p_i) \cap G)$$

δηλαδή είναι πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων. Εφόσον G είναι συνεκτική, έπεται ότι $t = 1$, συνεπώς $p_1 = (T-1)^n$ (για το $1 \in G$). Άρα η G είναι ταυτοδύναμη και από το πόρισμα 6.2 είναι επιλύσιμη. Από πρόταση 3.9, η $[G, G]$ είναι κλειστή συνεκτική γνήσια υποομάδα της G, άρα από πρόταση 4.3 $[G, G] = 1$ και G αβελιανή άτοπο.

Από το Θεώρημα 7.1, G_s και G_u είναι κλειστές συνεκτικές υποομάδες της G. Αν κάποια από αυτές είναι γνήσια, τότε είναι διάστασης 0, από πρόταση 4.3, άρα τετριμμένη λόγω συνεκτικότητας. Έτσι είτε $G = G_s$, είτε $G = G_u$ όπως ισχυριστήκαμε. □

Δες ορισμό 8.1 και πρόταση 8.7 για το υπόλοιπο της απόδειξης για την περίπτωση που $G = G_s$

.8 Τόροι, Χαρακτήρες και Συγχαρακτήρες

Τώρα θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε συνεκτικές ομάδες οι οποίες περιέχουν μόνο ημιαπλά στοιχεία. Από το Θεώρημα 7.2 κάθε τέτοια ομάδα διάστασης 1 είναι ισόμορφη με την $\mathbf{G}_m$. Αυτό μας οδηγεί στον εξής ορισμό:

Ορισμός .8.1. *Μία γραμμική αλγεβρική ομάδα καλείται τόρος, αν είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο $\mathbf{G}_m \times \ldots \times \mathbf{G}_m$, n φορές την $\mathbf{G}_m$, το οποίο είναι ίσο με τη D_n.*

Οι τόροι μελετούνται καλύτερα μέσω των χαρακτήρων τους.

Ορισμός .8.2. *Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα. Ένας χαρακτήρας της G είναι ένας μορφισμός αλγεβρικών ομάδων $\chi : G \to \mathbf{G}_m$. Το σύνολο των χαρακτήρων της G συμβολίζεται με $X(G)$.*

Παρατήρηση:Το $X(G)$ μπορεί με φυσιολογικό τρόπο να θεωρηθεί ως υποσύνολο του $k[G]$.

Ορισμός .8.3. *Ένας συγχαρακτήρας της G είναι ένας μορφισμός αλγεβρικών ομάδων $\gamma : \mathbf{G}_m \to G$. Το σύνολο των συγχαρακτήρων της G συμβολίζεται με $Y(G)$.*

Προφανώς η $X(G)$ είναι αβελιανή ομάδα (συνήθως γράφεται προσθετικά) με πράξη:

$$(\chi_1 + \chi_2)(g) := \chi_1(g)\chi_2(g) \quad \text{για } \chi_1, \chi_2 \in X(G) \ \ g \in G.$$

Όμοια, αν η G είναι αβελιανή, τότε και η $Y(G)$ είναι αβελιανή ομάδα με πράξη:

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) := \gamma_1(x)\gamma_2(x) \quad \text{για } \gamma_1, \gamma_2 \in Y(G) \ \ x \in \mathbf{G}_m.$$

Παράδειγμα (Χαρακτήρες και Συγχαρακτήρες της D_n)
Έστω $G = D_n$, ένας n-διάστατος τόρος. Αν $n = 1$, τότε $G = \mathbf{G}_m$, άρα $X(G) = \mathrm{End}(\mathbf{G}_m) = \{t \mapsto t^j \mid j \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ (δες παράρτημα πρόταση 23.4).

Για τυχαίο n ορίζουμε $\chi_i \in X(G)$ με $\chi_i(g) := t_i$, αν $g = \mathrm{diag}(t_1 \ldots, t_n) \in G,\ 1 \leq n$. Τότε κάθε $\chi \in X(G)$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως $\chi = \chi_1^{a_1} \ldots \chi_n^{a_n}$ για κάποια $a_i \in \mathbb{Z}$, συνεπώς $X(D_n) \cong \mathbb{Z}^n$. Παρατηρούμε ότι οι χαρακτήρες είναι απλώς τα μονώνυμα στον $k[D_n] = k[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}]$, οπότε αποτελούν μία βάση του δακτυλίου συντεταγμένων.

Όμοια για $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ η απεικόνιση $\mathbf{G}_m \to D_n$, $t \mapsto \mathrm{diag}(t^{a_1}, \ldots, t^{a_n})$, είναι μορφισμός, άρα συγχαρακτήρας. Αντίστροφα, περιορίζοντας έναν συγχαρακτήρα $\gamma : \mathbf{G}_m \to D_n$ στην i-οστή διαγώνια θέση, παρατηρούμε ότι κάθε συγχαρακτήρας έχει την παραπάνω μορφή. Συνεπώς $Y(D_n) \cong \mathbb{Z}^n$.

Ως αποτέλεσμα για τον n-διάστατο Τόρο T έχουμε ότι $X(T) \cong Y(T) \cong \mathbb{Z}^n$. Τώρα για $\chi \in X := X(T)\ \ \gamma \in Y := Y(T)$, η σύνθεση:

$$\chi \circ \gamma : \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m, \quad t \mapsto \chi(\gamma(t)),$$

είναι ενδομορφισμός της $\mathbf{G}_m$. Άρα από την περιγραφή του $\mathrm{End}(\mathbf{G}_\mathrm{m})$ του προηγούμενου παραδείγματος δρα ως κάποια ακέραια δύναμη $\langle \chi, \gamma \rangle \in \mathbb{Z}$, δηλαδή $\chi(\gamma(t)) = t^{\langle \chi, \gamma \rangle}$.

Πρόταση .8.4. *Έστω T ένας τόρος με ομάδα χαρακτήρων X και ομάδα συγχαρακτήρων Y. Η απεικόνιση $\langle , \rangle : X \times Y \to \mathbb{Z}$ είναι ένα τέλειο ζευγάρωμα των X και Y, δηλαδή, κάθε ομομορφισμός $X \to \mathbb{Z}$ είναι της μορφής $\chi \mapsto \langle \chi, \gamma \rangle$ για $\gamma \in Y$ και κάθε ομομορφισμός $Y \to \mathbb{Z}$ είναι της μορφής $\gamma \mapsto \langle \chi, \gamma \rangle$ για $\chi \in X$.*
Το παραπάνω ορίζει ισομορφισμούς ομάδων $Y \cong \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Z})$ και $X \cong \mathrm{Hom}(Y, \mathbb{Z})$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T = \mathbf{G}_m \times \cdots \times \mathbf{G}_m$ (n φορές) και $X = \{\chi_1^{a_1} \ldots \chi_n^{a_n} \mid (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$ με χ_i ορισμένο όπως στο παράδειγμα. Κάθε ομομορφισμός $\phi : X \to \mathbb{Z}$ καθορίζεται πλήρως απο την $\phi(\chi_i) =: d_i \in \mathbb{Z}$, αφού:

$$\phi\left(\prod_{i=1}^n \chi_i^{a_i}\right) = \sum_{i=1}^n a_i \phi(\chi_i) = \sum_{i=1}^n a_i d_i$$

Έστω $\gamma \in Y$ με $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t^{d_n} \end{pmatrix}$ για $t \in \mathbf{G}_m$.

Τότε: $t^{\langle \chi, \gamma \rangle} = \chi(\gamma(t)) = \prod_{i=1}^n \chi_i^{a_i}(\gamma(t)) = t^{\sum_{i=1}^n a_i d_i} = t^{\phi(\chi)}$.
Συνεπώς $\phi(\chi) = \langle \chi, \gamma \rangle$ για κάθε $\chi \in X$.

Άρα η απεικόνιση $Y \to \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Z})$, $\gamma \to \langle -, \gamma \rangle$ είναι επί.
Για το 1-1, υποθέτουμε ότι $\langle \chi, \gamma \rangle = 0$ για κάθε $\chi \in X$, τότε:

$$t^{d_i} = \chi_i(\gamma(t)) = t^{\langle \chi_i, \gamma \rangle} = t^0 = 1$$

για κάθε $t \in \mathbf{G}_m$ και για κάθε i. Συνεπώς είναι $d_i = 0$ για κάθε i, δηλαδή $\gamma = 0$. Συνεπώς $Y \cong \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Z})$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $X \cong \mathrm{Hom}(Y, \mathbb{Z})$. ☐

Ορισμός .8.5. *Έστω T τόρος. Για μία κλειστή υποομάδα $H \leq T$, ορίζουμε:*

$$H^{\perp} := \{\chi \in X(T) \mid \chi(h) = 1 \text{ για κάθε } h \in H\}$$

η οποία είναι υποομάδα της $X(T)$. Όμοια, για μία υποομάδα $X_1 \leq X(T)$, ορίζουμε:

$$X_1^{\perp} := \{t \in T \mid \chi(t) = 1 \text{ για κάθε } \chi \in X_1\} = \bigcap_{\chi \in X_1} \ker(\chi)$$

η οποία είναι κλειστή υποομάδα του .

Στην παρακάτω πρόταση έχουμε δύο πολύ χρήσιμες ιδιότητες των παραπάνω ομάδων:

Πρόταση .8.6. *Έστω T ένας τόρος.*
(1) Για κάθε κλειστή υποομάδα $H \leq T$, ο περιορισμός ορίζει έναν ισομορφισμό:

$$X(T)/H^{\perp} \cong X(H).$$

(2) Για κάθε υποομάδα $X_1 \leq X(T)$, $X_1^{\perp\perp}/X_1$ είναι μία πεπερασμένη p-ομάδα, όπου $p = \mathrm{char}(k)$; στην πραγματικότητα $X_1^{\perp\perp} = X_1$, εαν $X(T)/X_1$ έχει τετριμμένη p-στρέψη.

Απόδειξη. (1) Θεωρώ την απεικόνιση $\phi : X(T) \to X(H)$ με $\chi \mapsto \chi|_H$, τότε:
· $\ker\phi = \{\phi(\chi) = 1$ για κάθε $\chi \in X(T)\} = \{\chi|_H = 1$ για κάθε $\chi \in X(T)\} = H^{\perp}$
· $\mathrm{im}\phi = X(H)$
· ϕ ομομορφισμός αφού $\phi(\chi_1 + \chi_2) = (\chi_1 + \chi_2)|_H = \chi_1|_H + \chi_2|_H = \phi(\chi_1) + \phi(\chi_2)$
Άρα από πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού $G/\ker\phi = X(T)/H^{\perp} \cong \mathrm{im}\phi = X(H)$.

(2) Το (2) δεν θα το αποδείξουμε εδώ. ☐

Το παρακάτω αποτέλεσμα αποδεικνύεται χρησιμοποιόντας ιδιότητες των χαρακτήρων (δες παράρτημα πρόταση 23.5 και παρατήρηση από πάνω).

Πρόταση .8.7. *Κάθε κλειστή συνεκτική υποομάδα της D_n είναι τόρος.*

Η παραπάνω πρόταση συμπληρώνει την υπόλοιπη απόδειξη του Θεωρήματος 7.2 για την περίπτωση που $G = G_s$: εμφυτεύουμε την G εντός μίας GL_n και διαγωνοποιούμε.

Αν G είναι γραμμική αλγεβρική ομάδα και H μία κλειστή υποομάδα της G, τότε με $C_G(H)$ και $N_G(H)$ συμβολίζουμε την κεντρικοποιούσα και την κανονικοποιούσα ομάδα της H στην G:

$$C_G(H) = \{x \in G \mid xyx^{-1} = y \text{ για κάθε } y \in H\}$$

$$N_G(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$$

οι οποίες είναι κλειστές υποομάδες της G και η $C_G()$ είναι κανονική υποομάδα της $N_G(H)$.

Το παρακάτω πολύ σημαντικό αποτέλεσμα μας δείχνει και την «ακαμψία» των τόρων: Οι κανονικοποιούσες είναι κατά πεπερασμένο μέρος μεγαλύτερες από τις κεντρικοποιούσες. Θα μας επιτρέψει αργότερα να ορίσουμε την ομάδα του Weyl, μία πεπερασμένη ομάδα η οποία παίζει έναν πολύ σημαντικό ρόλο στο να ελέγξουμε την δομή των ημιαπλών ομάδων.

Η ακαμψία θα προκύψει από δύο βασικές ιδιότητες στοιχείων πεπερασμένης τάξης σε έναν τόρο: (1) Είναι πυκνό υποσύνολο και (2) Υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος από αυτά κάποιας δοσμένης τάξης.
Για να τα δείξουμε αυτά αρκεί απλά να δούμε την περίπτωση $G = \mathbf{G}_m$. Τα στοιχεία του k^* πεπερασμένης τάξης είναι απλά οι m-οστές ρίζες της μονάδας ($m \in \mathbb{Z}^+$), που είναι το πολύ m για κάθε σταθερό m. Εφόσον το k είναι αλγεβρικά κλειστό, υπάρχουν άπειρες διακεκριμένες ρίζες της μονάδας στο k^*; εφόσον η $\mathbf{G}_m$ είναι συνεκτική και μονοδιάστατη, η κλειστή θήκη της παραπάνω υποομάδας είναι η $\mathbf{G}_m$.

Θεώρημα .8.8. *Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα και $T \leq G$ ένας τόρος. Τότε $N_G(T)^0 = C_G(T)^0$, και η $N_G(T)/C_G(T)$ είναι πεπερασμένη.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 23.6 από το παράρτημα για την απόδειξη.

Θέτουμε $G = H$ στην εκφώνηση της πρότασης 23.6, άρα τα (1) και (2) ικανοποιούνται από τα προηγούμενα σχόλια. Τότε έστω $V = N_G(T)^0$. Ορίζουμε $\phi : V \times G \to G$ με $\phi(x, y) = xyx^{-1}$. Προφανώς τα (3) και (4) ικανοποιούνται επίσης. Αυτό έπεται ότι η ϕ_x είναι σταθερή, δηλαδή $\phi_x = \phi_1$, δηλαδή όλα τα $x \in N_G(T)^0$ κεντρικοποιούνται στην G. Προφανώς ισχύει ότι $C_G(T)^0 \subseteq N_G(T)^0$. Άρα έχουμε το ζητούμενο.

Το δεύτερο μέρος θα το δείξουμε στο παρακάτω παράδειγμα μόνο για την $G = \mathrm{GL}_n$. □

Παράδειγμα
Για να καταλάβουμε το παραπάνω Θεώρημα, έστω $G = \mathrm{GL}_n,\ m \leq n$ και

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} * & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & * & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \mid t_i = 1 \text{ για } m+1 \leq i \leq n\}$$

ένας m-διάστατος τόρος της G, ο οποίος είναι ισόμορφος με το $\mathbf{G}_m \times \cdots \times \mathbf{G}_m$ (m το πλήθος). Τότε:

$$C_G(T) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} * & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & * & \\ \hline & O & & A \end{array} \right) \;\middle|\; A \in \mathrm{GL}_{n-m} \right\} \cong D_m \times \mathrm{GL}_{n-m}$$

και $N_G(T) \cong N_{\mathrm{GL}_m}(D_m) \times \mathrm{GL}_{n-m}$, όπου $N_{\mathrm{GL}_m}(D_m) = M$ είναι το σύνολο όλων των μονώνυμων $m \times m$ πινάκων. Αφού η D_m έχει πεπερασμένο δείκτη εντός της M, $M^0 = D_m$. Επίσης η GL_{n-m} είναι συνεκτική, άρα παίρνουμε ότι:

$$N_G(T)^0 \cong D_m \times \mathrm{GL}_{n-m} \cong C_G(T) = C_G(T)^0$$

και η $N_G(T)/C_G(T) \cong M/D_m \cong \mathfrak{S}_m$ είναι μία συμμετρική ομάδα, άρα πεπερασμένη.

Κεφάλαιο 4: Συνεκτικές Επιλύσιμες Ομάδες

Θα επεκτείνουμε τα αποτελέσματα ως προς τη δομή ομάδων από αβελιανές ομάδες σε επιλύσιμες ομάδες. Για να γίνει αυτό η συνεκτικότητα είναι απαραίτητη.

.9 Το Θεώρημα Lie-Kolchin

Αν η $G \leq \mathrm{GL}(V)$ είναι ταυτοδύναμη, τότε από την πρόταση 6.1 πάντα σταθεροποιεί έναν μονοδιάστατο υπόχωρο του V. Αυτό αληθεύει και για μία μεγαλύτερη κλάση ομάδων.
Υπενθυμίζουμε ότι από την πρόταση 3.9 οι υποομάδες μεταθετών μίας ομάδας G είναι κλειστές και συνεκτικές, αν η G είναι κλειστή και συνεκτική.

Θεώρημα .9.1. *(Lie-Kolchin)*
Έστω G μία συνεκτική επιλύσιμη υποομάδα της $\mathrm{GL}(V)$, $V \neq 0$. Τότε υπάρχει $0 \neq v \in V$ το οποίο είναι κοινό ιδιοδιάνυσμα για κάθε $g \in G$, ισοδύναμα υπάρχει ένας μονοδιάστατος υπόχωρος V που σταθεροποιείται από την G.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η G είναι κλειστή, αφού αν η G είναι επιλύσιμη, τότε και η $\overline{G}$ είναι επιλύσιμη.

Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στη διάσταση $n = \dim V$ και στο μήκος d της G.

Για $n = 1$ το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα. Τώρα υποθέτουμε ότι $n > 1$. Αν $d = 1$, τότε η G είναι αβελιανή και το ζητούμενο έπεται από την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1 το (1).

Τώρα υποθέτουμε ότι $d \geq 2$. Αν υπάρχει G-αναλλοίωτος γνήσιος υπόχωρος $0 \neq W < V$ του V, τότε επιλέγουμε κατάλληλη βάση τέτοια ώστε $G \subseteq \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) \right\}$. Τότε πιο συγκεκριμένα, κάθε $g \in G$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως $\left(\begin{array}{c|c} \phi(g) & * \\ \hline 0 & \psi(g) \end{array} \right)$ όπου $\phi : G \to GL(W)$ είναι ο περιορισμός της G και $\psi : G \to GL(V/W)$. Η $\phi(G)$ είναι επιλύσιμη, συνεκτική, δρα στον διανυσματικό χώρο μικρότερης διάστασης $\dim W < \dim V$, άρα από την υπόθεση επαγωγής, υπάρχει κοινό ιδιοδιάνυσμα $w \in W < V$.

Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι η G δρα ανάγωγα στον V. Αφού η $G' := [G, G]$ είναι κλειστή συνεκτική επιλύσιμη υποομάδα της G μήκους $d - 1$, από την υπόθεση επαγωγής, υπάρχει κοινό ιδιοδιάνυσμα $v \in V$ της G'. Εφόσον $G' \triangleleft G$, gv είναι επίσης κοινό ιδιοδιάνυσμα της G' για κάθε $g \in G$.

Έστω W να είναι ο υπόχωρος που παράγεται από όλα τα κοινά ιδιοδιανύσματα της G'. Από την παραπάνω παρατήρηση, ο W είναι G-αναλλοίωτος και $W \neq 0$. Αφού η

G δρα ανάγωγα, είναι αναγκαστικά $V = W$. Συνεπώς, ο V έχει μία βάση από κοινά ιδιοδιανύσματα της G', άρα η G' δρα διαγώνια, που συνεπάγεται ότι η G' είναι αβελιανή.

Τώρα για σταθερό $y \in G'$, όλες οι συζυγίες $x^{-1}yx$ με στοιχεία $x \in G$, είναι στοιχεία της G', άρα δρα διαγώνια με ίδιες ιδιοτιμές με το y. Συνεπώς, υπάρχουν πεπερασμένες επιλογές για το $x^{-1}yx$. Έπεται ότι ο μορφισμός $\phi_y : G \to G',\ x \mapsto x^{-1}yx$ έχει πεπερασμένη εικόνα. Άρα λόγω συνεκτικότητας της G, $\phi_y(G) = \{y\}$, που συνεπάγεται ότι $G' \leq Z(G)$. Αφού η G δρα ανάγωγα στον V, η $Z(G)$ δρα με βαθμωτά από το λήμμα του Schur. Αφού όλα τα στοιχεία της G' έχουν ορίζουσα ίση με 1, έπεται ότι η G' είναι πεπερασμένη, όμως λόγω συνεκτικότητας, είναι $G' = 1$, άρα η G είναι αβελιανή, το οποίο είναι άτοπο αφού $d \geq 2$. □

Πόρισμα .9.2. *Έστω G συνεκτική, επιλύσιμη υποομάδα της GL_n. Τότε η G είναι συζυγής με μία υποομάδα του T_n*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο Θεώρημα και επαγωγικά παίρνουμε μία βάση ως προς την οποία η G είναι τριγωνική. □

Σημείωση: Το παραπάνω πόρισμα δεν ισχύει εάν η G δεν είναι συνεκτική. Παράγματι, μπρούμε να θεωρήσουμε κάθε πεπερασμένη μη τετριμμένη επιλύσιμη υποομάδα της $\mathrm{GL}_n,\ n > 1$, η οποία δρα ανάγωγα.

.10 Δομή Συνεκτικών Επιλύσιμων Ομάδων

Είδαμε στο παραπάνω πόρισμα ότι οι συνεκτικές, επιλύσιμες ομάδες είναι ισόμορφες με υποομάδες της T_n. Αυτό έχει ισχυρές επιπτώσεις όσον αφορά τη δομή τέτοιων ομάδων. Έχουμε μία μικρή ακριβή ακολουθία που διασπάται (δηλαδή μια ακριβής ακολουθία η οποία είναι μικρή της οποίας ο μεσαίος όρος προκύπτει από τους υπόλοιπους με φυσιολογικο τρόπο):

$$1 \longrightarrow U_n \longrightarrow T_n \xrightarrow{\pi} D_n \longrightarrow 1$$

όπου π είναι ο φυσιολογικός μορφισμός με:

$$\pi \begin{pmatrix} t_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}$$

Η παραπάνω ακριβής ακολουθία αλγεβρικών ομάδων διασπάται; η ένθεση $D_n \to T_n$ είναι μορφισμός και νήμα του π (μία αντίστροφη εικόνα).

Έστω $G \leq T_n$ μία κλειστή συνεκτική υποομάδα. Ο περιορισμός της π στην G έχει πυρρήνα $G_u = G \cap U_n$, την κλειστή κανονική υποομάδα της G που περιέχει όλα τα ταυτοδύναμα στοιχεία της. Η εικόνα $T := \pi(G)$ είναι συνεπώς μία κλειστή συνεκτική υποομάδα της D_n, άρα τόρος από την πρόταση 8.7. Συνεπώς ο περιορισμός ορίζει την ακριβή ακολουθία:

$$1 \longrightarrow G_u \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 1$$

Αφού ο τόρος είναι αβελιανή ομάδα, έπεται ότι $[G, G] \leq G_u$.

Από τα παραπάνω σχεδόν αποδεικνύεται το πρώτο μέρος του παρακάτω θεωρήματος δομής για συνεκτικές επιλύσιμες ομάδες.

Θεώρημα .10.1. *Έστω G μία συνεκτική, επιλύσιμη γραμμική αλγεβρική ομάδα. Τότε:*

(1) Η G_u είναι κλειστή, συνεκτική, κανονική υποομάδα της G και $[G, G] \leq G_u$.

(2) Όλοι οι maximal τόροι της G είναι ανα δύο συζυγείς και αν T είναι ένας τέτοιος τόρος, τότε $G = G_u \rtimes T$ και $N_G(T) = C_G(T)$.

Εδώ οι maximal τόροι της G είναι ένας υποτόρος της G ο οποίος είναι maximal ως προς το περιέχεσθαι. Παρατηρούμε από το παραπάνω Θεώρημα ότι όλοι οι maximal τόροι έχουν όλοι την ίδια διάσταση, δηλαδή maximal διάσταση.
Το ημιευθύ γινόμενο δύο αλγεβρικών ομάδων X και N ορίζεται όπως και για τυχαίες ομάδες, με τη διαφορά ότι απαιτούμε ότι η X δρα ώς ομάδα στην αλγεβρική ομάδα αυτομορφισμών της N. Μία αλγεβρική ομάδα H είναι ισομορφική με το ημιευθύ γινόμενο δύο κλειστών υποομάδων της X και N αν $N \lhd H,\ N \cap X = 1$ και η απεικόνιση γινόμενο $N \rtimes X \to H$ είναι ισομορφισμός αλγεβρικών ομάδων.

Απόδειξη. (1) Απομένει να δείξουμε ότι η G_u είναι συνεκτική. Ορίζουμε $K = G/G'$, όπου $G' = [G, G]$. Αφού η K έιναι αβελιανή και συνεκτική, είναι $K = K_u \times K_s$ με K_u συνεκτική από το Θεώρημα 7.1. Τότε $\phi(G_u) \leq K_u$ από το Θεώρημα 2.5, άρα $G_u \leq \phi^{-1}(K_u)$. Από την άλλη μεριά, από τα παραπάνω επιχειρήματά μας πριν το Θεώρημα 10.1, $\ker(\phi) = G' \leq G_u$. Αν $g \in \phi^{-1}(K_u)$, με διάσπαση Jordan $g = g_s g_u$, τότε $\phi(g_s) = (\phi(g))_s = 1$. Συνεπώς $g_s \in \ker(\phi) \leq G_u$, άρα $g_s = 1$ και $g = g_u$ οπότε προκείπτει ότι $\phi^{-1}(K_u) = G_u$. Τώρα εφόσον $G' = \ker(\phi) \leq G_u$ είναι συνεκτική από την πρόταση 3.9, άρα περιέχεται στην G_u^0. Έτσι
$|G_u : G_u^0| = |G_u/G' : G_u^0/G'| = |\phi(G_u) : \phi(G_u^0)| = |K_u : \phi(G_u^0)|$.
Άρα η $\phi(G_u^0)$ είναι κλειστή υποομάδα πεπερασμένου δείκτη εντός της συνεκτικής ομάδας K_u, άρα δείκτη 1. Άρα η G_u είναι επίσης συνεκτική.

(2) Η απόδειξη του (2) είναι πιο δύσκολη και απαιτεί αποτελέσματα σχετικά με δράσεις διαγωνίσιμων ομάδων, οπότε δεν θα το αποδείξουμε.
Ο ισχυρισμός για τις κανονικοποιούσες έπεται από το επιχείρημα του Frattini:
Αν $g = ut \in N_G(T)$, όπου $u \in G_u$ και $t \in T$, τότε $uTu^{-1} = T$. Όμως για $s \in T,\quad usu^{-1} = (usu^{-1}s^{-1})s$ είναι στο T αν και μόνο αν $usu^{-1}s^{-1} = 1$, δηλαδή αν το u κεντρικοποιεί το s. □

Θα δούμε αργότερα (στην πρόταση 12.4) ότι ο παράγοντας K, (ομάδα διά μία κλειστή κανονική υποομάδα), έχει με φυσιολογικό τρόπο δομή γραμμικής αλγεβρικής ομάδας με τέτοιο τρόπο ώστε η φυσική προβολή $\phi : G \to K$ να είναι μορφισμός αλγεβρικών ομάδων.

Ας κάνουμε την σύγκριση του δεύτερου μέρους του προηγούμενου Θεωρήματος με το Θεώρημα των Schur-Zassenhaus για πεπερασμένες ομάδες. Πράγματι, η G είναι ήδη γνωστό ότι είναι μία επέκταση της της ταυτοδύναμης ομάδας G_u με έναν τόρο $\pi(G)$, του οποίου όλα του τα στοιχεία είναι ημιαπλά. Το Θεώρημα μας επιβεβαιώνει ότι ένα συμπλήρωμα της G_u υπάρχει και επιπλέον ότι όλα τα στοιχεία του συμπληρώματος είναι συζυγή. Αν k είναι το σώμα ριζών ενός πεπερασμένου σώματος $\mathbb{F}_p$, τότε τα ταυτοδύναμα στοιχεία έχουν όλα τάξη μία δύναμη του p, ενώ τα ημιαπλά στοιχεία έχουν τάξη σχετικά πρώτη με το p. Συνεπώς η G_u είναι κάτι αντίστοιχο με την κανονική Sylow p υποομάδα της G και κάθε maximal τόρος είναι ένα p' συμπλήρωμα. Για αυτή την κατάσταση, ο ισχυρισμός για το (2) είναι ακριβώς όπως και στο Θεώρημα Schur-Zassenhaus.

Αν η G δεν είναι συνεκτική, τότε τα πάντα μπορεί να συμβούν. Για παράδειγμα, αν $G = N_{\mathrm{GL}_2}(D_2)$, είναι μία επέκταση της D_2 με ένα στοιχείο τάξης 2 και υποθέτουμε ότι $\mathrm{char}(k) = 2$. Τότε παρότι η G είναι επιλύσιμη, η G_u δεν είναι καν υποομάδα πόσο μαλλον κανονική και ο maximal τόρος D_2 δεν κανονικοποιεί τον εαυτό του.

Πόρισμα .10.2. *Έστω G μία συνεκτική, επιλύσιμη γραμμική αλγεβρική ομάδα. Τότε κάθε ημιαπλό στοιχείο της G ανήκει σε έναν maximal τόρο και κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο της G ανήκει σε μία συνεκτική ταυτοδύναμη υποομάδα της G.*

Ο ισχυρισμός μας για τα ταυτοδύναμα στοιχεία έπεται από το Θεώρημα 10.1 το (1) και για τα ημιαπλά στοιχεία από την απόδειξη που παραλείπεται από το Θεώρημα 10.1 το (2)

Εν κατακλείδει, θα χρειαστούμε ένα αποτέλεσμα για τις κεντρικοποιούσες των τόρων συνεκτικών επιλύσιμων ομάδων, το οποίο αργότερα θα γενικευτεί και σε τυχαίες συνεκτικές ομάδες.

Πρόταση .10.3. *Έστω G συνεκτική επιλύσιμη και $S \leq G$ ένας τόρος. Τότε $C_G(S)$ είναι συνεκτική.*

Κεφάλαιο 5: G-χώροι και Πηλίκα

Μία έννοια που ακόμα δεν έχουμε δει εως τώρα στην θεωρία γραμμικών αλγεβρικών ομάδων είναι αυτή της ομάδας πηλίκο. Πρέπει πρώτα να δούμε το πως θα δώσουμε δομή αφινικής πολλαπλότητας σε ένα πηλίκο και θα γίνει ξεκάθαρο ότι δεν μπορούμε να περιοριστούμε σε αφινικές πολλαπλότητες. Συνεπώς θα ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας κάποιες βασικές ένοιες από την γενική θεωρία πολλαπλοτήτων και μορφισμών.

.11 Δράσεις Αλγεβρικών Ομάδων

Στη θεωρία ομάδων είναι συχνά χρήσιμο να θεωρούμε δράσεις ομάδων, για παράδειγμα την δράση μίας ομάδας στον εαυτό της με συζυγία. Θα είναι απαραίτητο να θεωρούμε δράσεις γραμμικών αλγεβρικών ομάδων σε αφινικές και προβολικές πολλαπλότητες.

Για αυτό θα υπενθυμίσουμε ότι ο n διάστατος προβολικός χώρος $\mathbb{P}^n$ ορίζεται ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του $k^{n+1} \setminus \{(0, 0 \ldots, 0)\}$ ως προς τη διαγώνια δράση του $k^\times$ με πολλαπλασιασμό. Θεωρώντας τις κοινές ρίζες μίας συλλογής ομογενών πολυωνύμων στον $k[T_0, T_1, \ldots, T_n]$ για κλειστά σύνολα, ορίζεται μία τοπολογία στον $\mathbb{P}^n$. Μία προβολική πολλαπλότητα είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{P}^n$ εφοδιασμένο με την επαγώμενη τοπολογία του υποχώρου.

Η k-άλγεβρα των κανονικών συναρτήσεων σε μία αφινική πολλαπλότητα εδώ πρέπει να αντικατασταθεί με ένα δράγμα συναρτήσεων ως εξής. Πρώτα αν X μία ανάγωγη αφινική πολλαπλότητα και $x \in X$, έστω $I(X) \lhd k[X]$ το ιδεώδες των συναρτήσεων που μηδενίζονται στο x και έστω $\mathcal{O}_x$ το localization του $k[X]$ ως προς το πρώτο ιδεώδες $I(x)$. Τότε ορίζοντας $\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_x$ για $U \subseteq X$ ανοικτό, ορίζει ένα δράγμα συναρτήσεων $\mathcal{O}_X$ στην X. Προφανώς τα σώματα των αντιστρέψιμων στοιχείων των $\mathcal{O}_X(U)$ και $k[X]$ ταυτίζονται. Πιο γενικά, αν X δεν είναι ανάγωγη, έστω $X = X_1 \cup \ldots \cup X_t$ όπου X_i οι ανάγωγες συνιστώσες της X, τότε ορίζουμε

$$\mathcal{O}_X(U) := \{f : U \to K \mid f|_{U \cap X_i} \in \mathcal{O}_{X_i}(U \cap X_i)\}$$

για $U \subseteq X$ ανοικτό, ορίζει ένα δράγμα στη X. Αποδεικνύεται ότι $\mathcal{O}_X(X) = k[X]$, η συνήθης k-άλγεβρα των κανονικών συναρτήσεων στη X.

Τώρα θεωρούμε το κάλυμμα $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$, όπου U_i περιέχει τα σημεία του $\mathbb{P}^n$ με μη μηδενική i-οστή συντεταγμένη. Τότε το U_i μπορεί να ταυτιστεί με τον αφινικό χώρο k^n μέσω:

$$(x_0, x_1 \ldots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

Επιπλέον η επαγώμενη τοπολογία στα σύνολα U_i είναι ακριβώς η τοπολογία του αφινικού χώρου k^n. Για κάθε $x \in U_i$ έχουμε τον δακτύλιο συναρτήσεων $\mathcal{O}_x$ όπως το ορίσαμε παραπάνω, χρησιμοποιόντας την ταύτιση των U_i με το k^n. Τότε για $U \subseteq \mathbb{P}^n$, ορίζουμε $\mathcal{O}(U) := \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_x$. Το δράγμα των συναρτήσεων για μία τυχαία προβολική πολλαπλότητα ορίζεται περιορίζοντας το δράγμα στον $\mathbb{P}^n$. Είναι τότε ξεκάθαρο ότι οι μόνες συναρτήσεις που ορίζονται παντού στον $\mathbb{P}^n$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις. Αυτό ισχύει και πιο γενικά για τυχαίες προβολικές πολλαπλότητες.

Η διάσταση μίας ανάγωγης προβολικής πολλαπλότητας είναι η διάσταση κάθε αφινικού ανοικτού υποσυνόλου. Για μία τυχαία προβολική πολλαπλότητα, η διάστασή της ισούται με το maximum των διαστάσεων των ανάγωγων συνιστωσών της.

Ένας μορφισμός πολλαπλοτήτων είναι μία συνεχής απεικόνιση $\phi : X \to Y$ μεταξύ δύο (αφινικών η προβολικών) πολλαπλοτήτων τέτοιος ώστε για κάθε $V \subseteq Y$ ανοικτό και $U = \phi^{-1}(V)$ και για κάθε $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ να ισχύει ότι $f \circ \phi \in \mathcal{O}_X(U)$.

Από εδώ και στο εξής, όταν μιλάμε για μία γενική πολλαπλότητα, θα συγκαταλέγουμε και τις προβολικές πολλαπλότητες παρότι θα περιοριζόμαστε στις γραμμικές αλγεβρικές ομάδες οι οποίες είναι πάντα αφινικές πολλαπλότητες. Σημειώνουμε επίσης ότι οι προτάσεις 1.4, 4.1 και 4.3 ισχύουν και για προβολικές πολλαπλότητες.

Σημαντικά παραδείγματα προβολικών πολλαπλοτήτων μας δίνουν οι partial flag πολλαπλότητες ενός n-διάστατου διανυσματικού χώρου V πάνω από το k. Υπενθυμίζουμε ότι μία flag στον V είναι μία αλυσίδα υποχώρων $0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r = V$. Μπορούμε να εφοδιάσουμε το σύνολο των flags με μία σταθερή ακολουθία διαστάσεων $(\dim(V_1), \ldots, \dim(V_r))$ με τη δομή μίας προβολικής πολλαπλότητας, την partial flag πολλαπλότητα. Η περίπτωση $\dim(V_i) = i$ για κάθε i λέμε ότι είναι η flag πολλαπλότητα του V.

Ορισμός .11.1. *Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα G. Μία πολλαπλότητα X λέγεται G-χώρος αν υπάρχει δράση ομάδων $G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g.x$ της G στη X η οποία είναι επίσης μορφισμός πολλαπλοτήτων. Έστω X και Y δύο G-χώροι. Ένας μορφισμός G-χώρων είναι ένας μορφισμός πολλαπλοτήτων $\phi : X \to Y$ τέτοιος ώστε $\phi(g.x) = g.\phi(x)$ για κάθε $g \in G, \ x \in X$. Ένας G-χώρος X λέγεται ομογενής αν η δράση της G στη X είναι μεταβατική.*

Πρόταση .11.2. *Έστω G ένας G-χώρος.*
(1) Για κάθε $x \in X$, η σταθεροποιούσα $G_x := \{g \in G \mid g.x = x\}$ είναι κλειστή υποομάδα.
(2) Το σύνολο των σταθερών σημείων $X^G := \{x \in X \mid g.x = x \text{ για κάθε } g \in G\}$ είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη. (1) Από τον ορισμό των G-χώρων, για κάθε $x \in X$ η απεικόνιση τροχιών:

$$\phi : G \to X, \quad g \mapsto g.x$$

είναι μορφισμός πολλαπλοτήτων. Άρα $\phi^{-1}(x) = G_x$ είναι κλειστό.

(2) Έστω $g \in G$ και ο μορφισμός $\psi : X \to X \times X$ με $x \mapsto (x, g.x)$

Το σύνολο των σταθερών σημείων X^g είναι ακριβώς η αντίστροφη εικόνα μέσω της ψ του (x, x), το οποίο είναι κλειστό στην $X \times X$ εφόσον η X είναι πολλαπλότητα (δες παράρτημα πρόταση 23.8).Άρα και το X^G είναι κλειστό. □

Παραδείγματα

Θα περιγράψουμε δύο σημαντικές πηγές G-χώρων.

(1) Εφοδιάζουμε την G με τη δομή ενός G-χώρου θεωρώντας την δράση της G στον εαυτό της με συζυγία. Τότε η προηγούμενη πρόταση λέει ότι οι κεντρικοποιούσες ομάδες στοιχείων και το κέντρο $Z(G)$ είναι κλειστές υποομάδες.

(2) Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος πάνω από το k. Ένας μορφισμός $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ (αλγεβρικών ομάδων) καλείται ρητή αναπαράσταση της G και ο χώρος V καλείται (ρητό) kG-πρότυπο. Συνεπώς ο V είναι ένας G-χώρος μέσω της δράσης $(g, v) \mapsto \phi(g)v$. Επιπλέον, η G δρα στον αντίστοιχο προβολικό χώρο $\mathbb{P}(V)$ μέσω $(g, \langle v\rangle) \mapsto \langle\phi(g)v\rangle$. Μέσω αυτής της δράσης ο $\mathbb{P}(V)$ γίνεται G-χώρος.

Εν αντιθέσει με τις σταθεροποιούσες, οι οποίες είναι πάντα κλειστές, αυτό δεν αληθεύει για τις τροχιές, δηλαδή δεν είναι πάντα κλειστές. Ισχύει όμως σε ορισμένες περιπτώσεις όπως θα δούμε στην παρακάτω πρόταση:

Πρόταση .11.3. *Έστω $X \neq \emptyset$ ένας G-χώρος.*
(1) Κάθε τροχιά $G.x$ είναι ανοικτή εντός της κλειστής της θήκης.
(2) Οι τροχιές ελάχιστης διάστασης είναι κλειστές.

Απόδειξη. (1) Εφαρμόζουμε την πρόταση 1.4 (το οποίο ισχύει ακόμα και σε αυτή την πιο γενική περίπτωση) στην απεικόνιση τροχιών $G \to X,\ g \mapsto g.x$. Η τροχιά $G.x$ περιέχει ένα ανοικτό μη κενό υποσύνολο Y της κλειστής της θήκης. Εφόσον $G.x$ είναι η ένωση translates του y, έπεται το (1).

(2) Παρατηρούμε ότι για $x \in X,\ g.\overline{G.x}$ είναι κλειστό και περιέχει την $G.x$. Συνεπώς $\overline{G.x} \subseteq g.\overline{G.x}$. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για το g^{-1} απ΄όπου και παίρνουμε ότι $\overline{G.x} = g.\overline{G.x}$ για κάθε $g \in G$. Έπεται δηλαδή ότι η $\overline{G.x}$ είναι ένωση G-τροχιών.

Επιλέγουμε $x \in X$ με $\dim G.x$ να είναι ελάχιστη. Αν $G.x$ δεν είναι κλειστό, ισχυριζόμαστε ότι η ένωση των G-τροχιών $\overline{G.x} \setminus G.x$ έχει αυστηρά μικρότερη διάσταση, το οποίο είναι άτοπο λόγω της ελαχιστικότητας της διάστασης.
Για να το δούμε λίγο καλύτερα, έστω $Y \subseteq \overline{G.x}$ μία ανάγωγη συνιστώσα η οποία τέμνει την $G.x$. Τότε το $G.x \cap Y$ είναι ανοικτό στον Y; άρα $(\overline{G.x} \setminus G.x) \cap Y$ είναι κλειστό στον Y, άρα από πρόταση 4.3 έχει μικρότερη διάσταση. □

.12 Ύπαρξη Ρητής Αναπαράστασης

Υποθέτουμε ότι μία μεταβατική δράση μιας γραμμικής αλγεβρικής ομάδας G αντιστοιχεί στη δράση της G σε ένα σύμπλοκο G/H για μια $H \leq G$. Για να κάνουμε αυτή την ταύτηση, πρέπει να δώσουμε δομή πολλαπλότητας σε ένα σύμπλοκο G/H.

Αν $H \leq G$ είναι μία κλειστή υποομάδα και $I \lhd k[G]$ το ιδεώδες των συναρτήσεων που μηδενίζονται στο H, τότε εύκολα προκύπτει ότι:

$$H = \{x \in G \mid \rho_x(I) \subseteq I\},$$

όπου η ρ_x ο δεξιός πολλαπλασιασμός με x όπως ορίστικε στην ενότητα 5.

Το επόμενο Θεώρημα είναι το πρώτο κύριο αποτέλεσμα για την κατασκευή πηλίκων.

Θεώρημα .12.1. *(Chevalley)*
Έστω $H \leq G$ μία κλειστή υποομάδα μιας γραμμικής αλγεβρικής ομάδας G. Τότε υπάρχει ρητή αναπαράσταση $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ και ένας μονοδιάστατος υπόχωρος $W \leq V$ τέτοιος ώστε $H = \{g \in G \mid \phi(G)W = W\}$.

Απόδειξη. Το ιδεώδες $I \triangleleft k[G]$ των συναρτήσεων που μηδενίζονται στο H είναι πεπερασμένα παραγόμενο, έστω $I = \langle F_j \mid j \in J \rangle$ για κάποιο πεπερασμένο σύνολο J. Από την πρόταση 5.4 έπεται ότι υπάρχει ένας πεπερασμένης διάστασης G-αναλλοίωτος υπόχωρος X του $k[G]$ ο οποίος περιέχει τα $F_j,\ j \in J$ και μία επαγώμενη ρητή αναπαράσταση $\rho : G \to \mathrm{GL}(X)$. Τότε ο $M := X \cap I$ είναι H-αναλλοίωτος. Απ΄την άλλη αν $x \in G$ με $\rho_x(M) = M$, τότε ο M παράγει το ιδεώδες I και έχουμε ότι:

$$\rho_x(I) = \rho_x(M)\rho_x(k[G]) = Mk[G] = I,$$

άρα $H = \{x \in G \mid \rho_x(M) = M\}$. Αν $d = \dim M$, τότε ορίζουμε $V = \wedge^d X$, την d-οστή exterior power του X, με την αναπαράσταση $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ που επάγεται από την φυσική (ρητή) G-δράση. Τότε ο μονοδιάστατος υπόχωρος $W = \wedge^d M$ του V είναι προφανώς $\phi(H)$-αναλλοίωτος.

Τώρα υποθέτουμε ότι $\phi(g)(W) = W$ για κάποιο $g \in G$. Έστω $w_1, \ldots, w_d$ μία βάση του M και $w_{l+1}, \ldots, w_{l+d}$ μία βάση του $g(M)$. Τότε $\phi(g)(w_1 \wedge \cdots \wedge w_d) \in W$ από υπόθεση. Όμως από την επιλογή της δεύτερης βάσης, είναι επίσης πολλαπλάσιο του $w_{l+1} \wedge \cdots \wedge w_{l+d}$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι $\rho_g(M) = M$, άρα $g \in H$.
Συνεπώς ο $W \leq V$ πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος. □

Θα επισημάνουμε δύο πολύ σημαντικά συμπεράσματα του Θεωρήματος. Το πρώτο είναι ο χαρακτηρισμός των γραμμικών αλγεβρικών ομάδων που το έχουμε ήδη αναφέρει από το κεφάλαιο 1.

Πόρισμα .12.2. *Κάθε γραμμική αλγεβρική ομάδα μπορεί να εμφυτευτεί ως κλειστή υποομάδα εντός της* GL_n *για κάποιο* n.

Απόδειξη. Επιλέγοντας $H = 1$ στο Θεώρημα του Chevalley, παίρνουμε μία πιστή ρητή αναπαράσταση $\rho : G \to \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n,\ n = \dim(V)$, της γραμμικής αλγεβρικής ομάδας G στην GL_n, δηλαδή μία εμφύτευση ως κλειστή υποομάδα. □

Το δεύτερο συμπέρασμα είναι το εξής: Για τυχαία $H \leq G$ και V όπως στο Θεώρημα του Chevalley, έστω $\overline{v} \in \mathbb{P}(V)$ να είναι το σημείο στον $\mathbb{P}(V)$ που αντιστοιχεί στην γραμμή $\langle v \rangle$ που σταθεροποιείται από την H. Ορίζουμε $X := G.\overline{v} \subseteq \mathbb{P}(V)$. Τότε ο X είναι ομογενής G-χώρος και η δράση επάγει μία επί απεικόνιση $\phi : G \to X,\ g \mapsto g.\overline{v}$, με νήματα τα σύμπλοκα της H, η οποία επάγει μία 1-1 και επί απεικόνιση $\overline{\phi} : G/H \to X$.

Χρησιμοποιόντας την $\overline{\phi}$, μπορούμε να εφοδιάσουμε την G/H με τη δομή πολλαπλότητας. Πράγματι, η κλειστή θήκη της τροχιάς $\overline{\overline{G}.v} \subseteq \mathbb{P}(V)$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{P}(V)$, άρα μία προβολική πολλαπλότητα. Από την πρόταση 11.3 (1), $G.\overline{v}$ είναι ανοικτό εντός της κλειστής του θήκης. Συνεπώς η $G.\overline{v}$ είναι η λεγόμενη ημιπροβολική πολλαπλότητα.

Καλούμε το G/H, εφοδιασμένο με τη δομή πολλαπλότητας, χώρο πηλίκο της G δια H. Τότε από την παραπάνω κατασκευή, η φυσική προβολή $\pi : G \to G/H$ είναι μορφισμός πολλαπλοτήτων. Αποδεικνύεται ότι η δομή πολλαπλότητας στην G/H είναι ανεξάρτητη από την επιλογή ρητής αναπαράστασης. Επιπλέον από την πρόταση 4.1 έχουμε ότι:

Πρόταση .12.3. *Έστω* $H \leq G$ *μία κλειστή υποομάδα μιας γραμμικής αλγεβρικής ομάδας* G. *Τότε:*

$$\dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H).$$

Ενώ στην περίπτωση που έχουμε H μία κανονική υποομάδα ισχύουν πολλά παραπάνω.

Πρόταση .12.4. *Έστω H μία κλειστή κανονική υποομάδα μιας γραμμικής αλγεβρικής ομάδας G. Τότε:*
(1) Η G/H είναι αφινική πολλαπλότητα
(2) Η G/H με την συνήθη δομή ομάδας είναι γραμμική αλγεβρική ομάδα.

Απόδειξη. (Σκιαγράφηση)
Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Chevalley και παίρνουμε έναν μορφισμό $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ και έναν μονοδιάστατο υπόχωρο $L \subseteq V$ του οποίου η σταθεροποιούσα είναι η H. Τώρα η H δρα στον L με βαθμωτό πολλαπλασιασμό, άρα υπάρχει ένας χαρακτήρας $H \to k^\times$ ο οποίος ορίζει αυτή τη δράση. Έστω ένας χαρακτήρας $\chi \in X(H)$, ορίζουμε:

$$V_\chi = \{v \in V \mid \phi(h)v = \chi(h)v \text{ για κάθε } h \in H\}.$$

Τότε αφού η H είναι κανονική εντός της G, η G μεταθέτει τον V_χ, ένας από τους οποίους περιέχει τον L. Αφού το άθροισμα των V_χ είναι ευθύ, υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος χ για τους οποίους $V_\chi \neq 0$. Μπορούμε λοιπόν να αντικαταστήσουμε τον V με αυτό το ευθύ άθροισμα και να υποθέσουμε από εδώ και στο εξής ότι ο V είναι το ευθύ άθροισμα των V_χ, με την H να δρα με βαθμωτό πολλαπλασιασμό σε κάθε V_χ.

Έστω $W = \{x \in \mathrm{End}(V) \mid x(V_\chi) \subseteq V_\chi \text{ για κάθε } \chi \in X(H)\}$, το οποίο με φυσιολογικό τρόπο είναι ισομορφικό με το $\bigoplus_\chi \mathrm{End}(V_\chi)$. Τώρα $\mathrm{GL}(V)$ δρα μέσω συζυγίας στο $\mathrm{End}(V)$ και $\phi(G) \leq \mathrm{GL}(V)$ σταθεροποιεί τον W. Έτσι έχουμε έναν ομομορφισμό ομάδων $\psi : G \to GL(W)$, ο οποίος είναι ρητή αναπαράσταση. Ισχυριζόμαστε ότι $\ker\psi = H$. Πράγματι, αν $g \in H$ τότε $\phi(g)$ δρα με βαθμωτά σε κάθε V_χ, άρα κάνοντας συζυγία με $\phi(g)$ θα πάρουμε την ταυτοτική απεικόνιση του W. Αντίστροφα τώρα, αν $\psi(g) = 1$, τότε το $\phi(g)$ σταθεροποιεί κάθε V_χ και μετατίθεται με κάθε $\mathrm{End}(V_\chi)$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\phi(g)$ δρα με βαθμωτά σε κάθε V_χ. Συγκεκριμένα $\phi(g)$ σταθεροποιεί τη γραμμή L και από το Θεώρημα του Chevalley, $g \in H$. Άρα έχουμε έναν ισομορφισμό ομάδων $G/H \cong \mathrm{im}(\psi)$. Για να δείξουμε ότι έχουμε πράγματι ισομορφισμό αλγεβρικών πολλαπλοτήτων, θα ανατρέξουμε στο [5], Θεώρημα 6.8. □

Παρατηρήσεις
(1) Με τις ίδιες προϋποθέσεις με την προηγούμενη πρόταση, έστω $\pi : G \to G/H$ η κανονική προβολή. Τότε παρατηρούμε ότι η $\pi^* : k[G/H] \to k[G]$ είναι 1-1. Άρα η $k[G/H]$ μπορεί να θεωρηθεί ως υπάλγεβρα του $k[G]$. Αποδεικνύεται ότι:

$$k[G/H] \cong \{f \in k[G] \mid \rho_x(f) = f \text{ για κάθε } x \in H\},$$

το οποίο σημαίνει ότι η $k[G/H]$ είναι ακριβώς η άλγεβρα των H-αναλλοίωτων συναρτήσεων της G.

(2) Έπεται από την πρόταση 12.4 ότι ότι η το πηλίκο G/G' το οποίο θεωρήσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 10.1 είναι μία γραμμική αλγεβρική ομάδα.

Παράδειγμα
Έστω $G = \mathrm{GL}_n,\ H = Z(G) = \{tI_n \mid t \in k^\times\}$. Τότε η προβολική γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{PGL}_n := \mathrm{GL}_n/Z(\mathrm{GL}_n)$ είναι μία γραμμική αλγεβρική ομάδα διάστασης:

$$\dim(\mathrm{PGL}_n) = \dim(\mathrm{GL}_n) - \dim(Z(\mathrm{GL}_n)) = n^2 - 1.$$

Όμοια παίρνουμε την προβολική σύμμορφη συμπλεκτική ομάδα

$$\mathrm{PCSp}_{2n} := \mathrm{CSp}_{2n}/Z(C\mathrm{Sp}_{2n})$$

όπως επίσης και την προβολική σύμμορφη ορθογώνια ομάδα και την συνεκτική συνιστώσα της μονάδας της

$$P\mathrm{CO}_{2n} := \mathrm{CO}_{2n}/Z(\mathrm{CO}_{2n}), \qquad \mathrm{PCO}^0_{2n} = \mathrm{CO}^0_{2n}/Z(\mathrm{CO}^0_{2n})$$

ότι είναι γραμμικές αλγεβρικές ομάδες.

Κεφάλαιο 6: Υποομάδες Borel

Στην ενότητα 10, κατανοήσαμε αρκετά τη δομή των συνεκτικών επιλύσιμων γραμμικών αλγεβρικών ομάδων. Θα το εκμεταλευτούμε προκειμένου να μελετήσουμε μία συγκεκριμένη οικογένεια συνεκτικών επιλύσιμων υποομάδων μίας τυχαίας γραμμικής αλγεβρικής ομάδας.

Από το Θεώρημα Lie-Kolchin κάθε συνεκτική επιλύσιμη υποομάδα $G \leq \mathrm{GL}_n$ μπορεί να εμφυτευτεί εντός της T_n. Συγκεκριμένα η G σταθεροποιεί μία αλυσίδα $\mathcal{F} : 0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = k^n$ υποχώρων. Επιπλέον, αν G τυχαία κλειστή υποομάδα της GL_n, είναι ξεκάθαρο ότι η σταθεροποιούσα $G_{\mathcal{F}}$ κάθε τέτοιας αλυσίδας είναι επιλύσιμη ομάδα και ο χώρος πηλίκο $G/G_{\mathcal{F}}$ είναι μία ημιπροβολική πολλαπλότητα, δηλαδη ένα ανοικτό υποσύνολο ενός προβολικού χώρου. (τα είδαμε πιο αναλυτικά στην αρχή του κεφαλαίου 5). Τώρα αν διαλέξουμε $\mathcal{F}$ έτσι ώστε η G-τροχία της να είναι ελάχιστης διάστασης, τότε αυτή η τροχιά είναι κλειστή (πρόταση 11.3) συνεπώς ένας προβολικός χώρος. Μπορούμε να πάρουμε τέτοιες τροχιές επιλέγοντας την $G_{\mathcal{F}}$ να είναι ελάχιστης διάστασης μεταξύ των σταθεροποιουσών κάθε αλυσίδας. Αυτό μας οδηγεί στον ορισμό των υποομάδων Borel.

.13 Το Θεώρημα σταθερού σημείου του Borel

Το κύριο συστατικό για την μελέτη των υποομάδων Borel είναι το ακόλουθο Θεώρημα σταθερού σημείου.

Πρωτού αποδείξουμε το Θεώρημα Σταθερού σημείου του Borel, θα κάνουμε μία μικρή κουβέντα για τις λεγόμενες πλήρεις πολλαπλότητες. Μία πολλαπλότητα X καλείται πλήρης αν για κάθε πολλαπλότητα Y, η δεύτερη προβολή $pr_2 : X \times Y \to Y$ είναι κλειστή απεικόνιση. Η γεωμετρική σημασία της πληρότητας δεν φαίνεται απευθείας από τον ορισμό, αλλά έχει να κάνει με μία έννοια συμπάγειας. Οι βασικές ιδιότητες των πλήρων πολλαπλοτήτων αναφέρονται στο παράρτημα στο μέρος Α πρόταση 23.10, λήμματα 23.4 και 23.5

Θεώρημα .13.1. *(Σταθερού σημείου του Borel)*
Έστω G συνεκτική επιλύσιμη γραμμική αλγεβρική ομάδα η οποία δρα σε έναν πλήρη G-χώρο X. Τότε υπάρχει μοναδικό $x \in X$ τέτοιο ώστε $g.x = x$ για κάθε $g \in G$.

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με επαγωγή στη διάσταση $\dim(G)$.
Αν $\dim(G) = 0$ τότε $G = 1$ άρα κάθε $x \in X$ είναι σταθερό σημείο.
Τώρα υποθέτουμε ότι $\dim(G) > 0$. Από την πρόταση 3.9, η $G' = [G, G]$ είναι συνεκτική, μικρότερης διάστασης από την πρόταση 4.3 (αφού η G είναι επιλύσιμη). Άρα το σύνολο Y των σταθερών σημείων της G' στον X είναι μη κενό. Από την πρόταση 11.2 (2), το Y είναι κλειστό στη X, άρα πλήρες (από πρόταση 23.10 (1)) και μάλιστα σταθεροποιείται από την G αφού η G' είναι κανονική. Άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε

το X με το Y.

Τότε όλες οι σταθεροποιούσες G_x για $x \in X$ περιέχουν την G', άρα είναι κανονικές εντός της G. Άρα η G/G_x είναι αφινική πολλαπλότητα από την πρόταση 12.4 (1). Από πρόταση 11.3 (1) υπάρχει $x \in X$ του οποίου η τροχιά είναι κλειστή, άρα πλήρης. Τότε ο κανονικός μορφισμός $G/G_x \to G.x$ είναι 1-1 και επί, με G/G_x αφινική ανάγωγη πολλαπλότητα και $G.x$ πλήρη πολλαπλότητα. Από το λήμμα 23.4 η G/G_x είναι πλήρης. Από την πρόταση 23.10 (3) $G = G_x$ άρα το x, είναι το σταθερό σημείο της G. □

Παρατήρηση: Το Θεώρημα Lie-Kolchin μας λέει ότι για μία G συνεκτική επιλύσιμη υποομάδα της $\mathrm{GL}(V)$, υπάρχει $0 \neq v \in V$ τέτοιο ώστε $g.v \in \langle v \rangle$ για κάθε $g \in G$, δηλαδή η δράση της G στον $\mathbb{P}(V)$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο. (Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Borel).

Ορισμός .13.2. *Έστω G γραμμική αλγεβρική ομάδα. Μία υποομάδα Borel της G είναι μία κλειστή, συνεκτική, επιλύσιμη υποομάδα B της G, η οποία είναι maximal ως προς τις παραπάνω ιδιότητες.*

Προφανώς οι υποομάδες Borel υπάρχουν: Απλά ας θεωρήσουμε μία κλειστή, συνεκτική, επιλύσιμη υποομάδα μέσγιστης πιθανής διάστασης. Στην πραγματικότητα δεν έχουμε και πάρα πολλές επιλογές (δες [2],21.3]).

Θεώρημα .13.3. *Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα. Τότε:*
(1) Όλες οι υποομάδες Borel είναι συζυγείς.
(2) Αν η G είναι συνεκτική, τότε η G/B είναι προβολική για κάθε υποομάδα Borel B της G.

Απόδειξη. (1) Θα αποδείξουμε το (1) θεωρώντας ότι ισχύει το (2): Πρώτα θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $G = \mathrm{GL}_n$. Η ομάδα T_n των άνω τριγωνικών πινάκων είναι κλειστή, συνεκτική, επιλύσιμη υποομάδα της G. Αν H είναι επίσης κλειστή, συνεκτική, επιλύσιμη υποομάδα της G, τότε από το πόρισμα 9.2 είναι $H \leq g^{-1}T_n g$ για κάποιο $g \in G$. Συνεπώς η T_n είναι maximal ανάμεσα στις υποομάδες της G, οι οποίες είναι κλειστές, συνεκτικές και επιλύσιμες, συνεπώς υποομάδα Borel της G και μάλιστα κάθε άλλη υποομάδα Borel είναι συζυγής με την T_n.

Για την γενική περίπτωση, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την G με την G^0, καθώς όλες οι υποομάδες Borel της G^0 είναι υποομάδες Borel της G. Έστω H υποομάδα Borel της G. Υποθέτουμε ότι η G/B είναι προβολική για μία υποομάδα Borel B, τότε η H δρα στον προβολικό χώρο G/B με $gB \mapsto hgB$. Από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Borel, η παραπάνω δράση έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $HgB = gB$. Συνεπώς $g^{-1}Hg \leq B$. Λόγω ότι η H είναι maximal παίρνουμε ότι $H = gBg^{-1}$.

(2)Έστω B μία υποομάδα Borel μέγιστης διάστασης. Από το Θεώρημα 12.1 του Chevalley, παίρνω μία ρητή αναπαράσταση της G σε μία $\mathrm{GL}(V)$ με έναν μονοδιάστατο υπόχωρο V_1 του οποίου η σταθεροποιούσα στην G είναι ακριβώς η B. Η επαγώμενη δράση της B στον V/V_1 είναι τριγωνίσιμη από το Θεώρημα Lie-Kolchin, άρα υπάρχει μία flag υποχώρων $0 \subsetneq V_1 \cdots \subsetneq V_r = V$ η οποία σταθεροποιείται από την B, ας την πούμε f. Στην πραγματικότητα, η B είναι η ομάδα ισοτροπίας (δηλαδή σταθερά σημεία ως προς μία δράση) της f στην G, από την επιλογή του V_1. Έπεται ότι ο επαγόμενος μορφισμός της G/B στην τροχιά της f στην flag πολλαπλότητα είναι 1-1 και επί. Από την άλλη, η σταθεροποιούσα κάθε flag είναι επιλύσιμη συνεπώς δεν έχει διάσταση μεγαλύτερη από την $\dim B$. Έπεται ότι η τροχιά της f έχει ελάχιστη πιθανή διάσταση, άρα είναι κλειστή από την πρόταση 11.3 (2). Συνεπώς η τροχιά είναι πλήρης από πρόταση 23.10 (1) και (5). Άρα η G/B από το λήμμα 23.4 είναι πλήρης, άρα και προβολική (23.10 (4)). □

Όπως και στην περίπτωση των επιλύσιμων ομάδων, λέμε ότι ένας υποτόρος $T \leq G$ είναι ένας maximal τόρος της G μεταξύ των υποτόρων ως προς το περιέχεσθαι.

Πόρισμα .13.4. *Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα. Τότε όλοι οι maximal τόροι της G είναι συζυγείς.*

Απόδειξη. Έστω T_1, T_2 δύο maximal τόροι της G. Εφόσον οι T_i είναι συνεκτικοί και επιλύσιμοι, τότε υπάρχει υποομάδα Borel B_i της G με $T_i \leq B_i$ για $i = 1, 2$. Από το παραπάνω Θεώρημα, υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $B_2 = B_1^g$. Συνεπώς $T_1^g \leq B_2$, άρα T_2 και T_1^g είναι δύο maximal τόροι της συνεκτικής, επιλύσιμης ομάδας B_2. Από το Θεώρημα 10.1 (2) υπάρχει $b \in B_2$ τέτοιο ώστε $T_2 = T_1^{gb}$. □

Ορισμός .13.5. *Η τάξη μιας γραμμικής αλγεβρικής ομάδας G είναι η διάσταση ενός maximal τόρου και συμβολίζεται με* $\mathrm{rk}(G)$.

Παρατήρηση: Από το προηγούμενο πόρισμα, όπως και για συνεκτικές, επιλύσιμες ομάδες, οι maximal τόροι είναι όλοι τόροι maximal διάστασης, άρα η τάξη είναι καλώς ορισμένη.

Παραδείγματα

Θα βρούμε τις υποομάδες Borel, τους maximal τόρους και τις τάξεις κάποιων κλασικών ομάδων.

(1) Αν $G = \mathrm{GL}_n$, τότε η T_n είναι μία υποομάδα Borel (από την απόδειξη του Θεωρήματος 13.3), ενώ η D_n είναι ένας maximal τόρος της T_n, άρα και της G. Συνεπώς $\mathrm{rk}(\mathrm{GL}_n) = \dim(D_n) = n$.

(2) Αν $G = \mathrm{SL}_n$, επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο επιχείρημα όπως και για την GL_n. Παρατηρούμε ότι η $T_n \cap \mathrm{SL}_n$ είναι μία υποομάδα Borel και η $D_n \cap \mathrm{SL}_n$ είναι ένας maximal τόρος της SL_n. Η ακριβής ακολουθία:

$$1 \longrightarrow D_n \cap \mathrm{SL}_n \longrightarrow D_n \xrightarrow{\det} \mathbf{G}_m \longrightarrow 1$$

μας δείχνει μαζί με το πόρισμα 4.2 ότι $\mathrm{rk}(\mathrm{SL}_n) = n - 1$.

(3) Για την ειδική ορθογώνια ομάδα SO_{2n},

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & t_n & & & \\ & & & t_n^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & t_1^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; t_i \in k^\times \right\} \leq \mathrm{SO}_{2n}$$

είναι συνεκτική υποομάδα ισόμορφη με την $\mathbf{G}_m^n$, άρα τόρος με διάσταση $\dim(T) = n$. Συνεπώς $\mathrm{rk}(\mathrm{SO}_{2n}) \geq n$. Τώρα έστω $T_1 \geq T$ ένας maximal τόρος της SO_{2n}. Επιλέγουμε $s \in T$ με διακεκριμένες ιδιοτιμές (το οποίο είναι εφικτό αφού το k είναι άπειρο). Τότε:

$$T_1 \leq C_{\mathrm{SO}_{2n}}(T) \leq C_{\mathrm{GL}_{2n}}(T) \leq C_{\mathrm{GL}_{2n}}(s) = D_{2n}.$$

Όμως μπορούμε εύκολα να δούμε από το πως ορίστηκε η GO_{2n} στην ενότητα 2 ότι $D_{2n} \cap \mathrm{GO}_{2n} = T$, συνεπώς $T = T_1$ είναι ένας maximal τόρος και $\mathrm{rk}(\mathrm{SO}_{2n}) = n$. Με ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $\mathrm{rk}(\mathrm{Sp}_{2n}) = \mathrm{rk}(\mathrm{SO}_{2n+1}) = n$.

(4) Έστω $B := \mathrm{SO}_{2n} \cap T_{2n}$. Με απλούς υπολογισμούς βλέπουμε ότι $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_{2n}$ αν και μόνο αν $A_1^T K_n A_3 = K_n$ και $A_3^T K_n A_2 = -A_2^T K_n A_3$, δηλαδή είναι $A_3 = K_n A_1^{-T} K_n$ και $A_3^T K_n A_2 = K_n A_1^{-1} A_2$ είναι αντισυμμετρικός. (υπενθυμίζουμε από τον ορισμό της, ότι $\mathrm{SO}_{2n} = \mathrm{GO}_{2n}^0$ με οποιαδήποτε χαρακτηριστική). Συγκεκριμένα η B είναι το γινόμενο πινάκων της μορφής:

$$\left\{ \begin{pmatrix} I_n & K_n S \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \;\middle|\; S \in k^{n \times n} \text{ αντισυμμετρικος} \right\}$$

με $\{diag(A, K_n A^{-T} K_n) \mid A \in T_n\} \cong T_n$, διάστασης

$$\dim(B) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix} = n^2, & \text{αν } n \geq 2 \\ \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix} = n^2, & \text{αν } n = 1 \end{cases}$$

Ισχυριζόμαστε ότι B είναι μία υποομάδα Borel της SO_{2n}. Έστω $B_1 \geq B$ μία υποομάδα Borel της SO_{2n}. Τότε η B_1 περιέχεται σε μία υποομάδα Borel της GL_{2n}, επομένως σταθεροποιεί μία πλήρη αλυσίδα του $V = k^{2n}$. Ο μόνος μονοδιάστατος υπόχωρος που παραμένει αναλλοίωτος από την B είναι ο $\langle v_1 \rangle$, που παράγεται από το πρώτο διάνυσμα της κανονικής βάσης. Επομένως αυτό πρέπει να σταθεροποιείται και από την B_1. Όμως η B_1 επίσης σταθεροποιεί και τον $\langle v_1 \rangle^\perp$, έναν υπόχωρο συνδιάστασης 1. Κάνοντας επαγωγή ως προς τη δράση των B_1 , B στον $\langle v_1 \rangle^\perp / \langle v_1 \rangle$, παρατηρούμε ότι η B_1 μπορεί να σταθεροποιήσει μόνο την συνήθη αλυσίδα, συνεπώς περιέχεται στην T_{2n}. Έπεται ότι $B_1 = B$ όπως είχαμε ισχυριστεί.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι $\mathrm{Sp}_{2n} \cap T_{2n}$, $\mathrm{SO}_{2n+1} \cap T_{2n+1}$ είναι υποομάδες Borel των Sp_{2n} και SO_{2n+1} αντίστοιχα.

.14 Ιδιότητες των Υποομάδων Borel

Στη συνέχεια θα δούμε κάποια ακόμα αποτελέσματα που μας δείχνουν την μεγάλη σημασία των υποομάδων Borel τα οποία και θα χρησιμοποιούμε και στη συνέχεια.

Πρόταση .14.1. *Έστω G συνεκτική και B μία υποομάδα Borel της G. Τότε:*
(1) Ο μόνος αυτομορφισμός της G, ο οποίος σταθεροποιεί την B κατα σημείο είναι η ταυτοτική απεικόνιση.
(2) $Z(G)^0 \subseteq Z(B) \subseteq C_G(B) = Z(G)$

Απόδειξη. (1) Έστω σ ένας αυτομορφισμός της G ο οποίος κεντρικοποιεί την B. Τότε ο μορφισμός $\phi : G \to G,\ x \mapsto \sigma(x)x^{-1}$ απεικονίζει την B στο 1, άρα παραγοντοποιείται μέσω της G/B. Από το Θεώρημα 13.3 (2), η G/B είναι προβολική. Η εικόνα μιας προβολικής πολλαπλότητας μέσω ενός μορφισμού είναι κλειστή (δες [2], προταση 6.1(c) και Θεώρημα 6.2]), άρα η $\phi(G)$ είναι κλειστό στην G, άρα αφινικό. Τώρα για 2 διακεκριμένα σημεία σε αυτή την αφινική πολλαπλότητα, υπάρχει μία f η οποία τα διαχωρίζει, άρα η $f \circ \phi$ θα ήταν μία μη σταθερή συνάρτηση η οποία ορίζεται παντού στην προβολική πολλαπλότητα G/B, η οποία δεν υπάρχει. Συνεπώς $\phi(G) = 1$, το ζητούμενο.

(2) Η $Z(G)^0$ είναι κλειστή, συνεκτική, επιλύσιμη υποομάδα της G, επομένως περιέχεται σε μία υποομάδα Borel B της G, και από το Θεώρημα 13.3 (1) σε όλες τις υποομάδες Borel. Ο δεύτερος εγκλεισμός είναι προφανής, αφού $Z(G) \subseteq C_G(B)$. Τέλος για $x \in C_G(B)$, η συζυγία με το x πληρεί τις προϋποθέσεις του (1), απ' όπου προκύπτει ότι $x \in Z(G)$. □

Πόρισμα .14.2. *Έστω G μία συνεκτική γραμμική αλγεβρική ομάδα G με μηδενοδύναμες υποομάδες Borel. Τότε η G είναι μηδενοδύναμη. Συγκεκριμένα, κάθε συνεκτική δυδιάστατη ομάδα είναι επιλύσιμη.*

Είναι μία εύκολη συνέπεια της παραπάνω πρότασης.

Θεώρημα .14.3. *Έστω G μία συνεκτική γραμμική αλγεβρική ομάδα με υποομάδα Borel B. Τότε $G = \bigcup_{g\in G} g^{-1}Bg$.*

Για $G = \mathrm{GL}_n$ παίρνουμε $B = T_n$ και το Θεώρημα προκύπτει από την ύπαρξη κανονικών μορφών Jordan. Αφου $\mathrm{GL}_n = \mathrm{SL}_n \cdot Z(\mathrm{GL}_n)$, το Θεώρημα εφαρμόζεται επίσης και στην SL_n.

Απόδειξη. Έστω T ένας maximal τόρος της G, θέτω $C = C_G(T)^0$.
Τότε η C είναι μηδενοδύναμη ομάδα από το πόρισμα 14.2, άρα από το Θεώρημα 23.7 $C = T \times H_u$.
Επιπλέον υπάρχει ημιαπλό στοιχείο $t \in T$ τέτοιο ώστε $C = C_G(t)^0$ (δες [2] πρόταση 16.4).

Ισχυριζόμαστε ότι $H = C$ και το στοιχείο t ικανοποιεί το λήμμα 23.5 (2). Πράγματι το t σταθεροποιεί ένα σημείο $xC \in G/C$ ακριβώς όταν $x^{-1}tx \in C$, τότε όμως $x^{-1}tx \in C_s = T$, άρα $T \subseteq C_G(x^{-1}tx)^0 = x^{-1}C_G(t)^0x = x^{-1}Cx \Rightarrow T \subseteq C_G(x^{-1}tx)^0 \Rightarrow xTx^{-1} \subseteq C$.
Όμως τότε αναγκαστικά θα είναι $xTx^{-1} =$, $xCx^{-1} = C$.
Όμως από το Θεώρημα 8.8 είναι $C = N_G(C)^0$, το οποίο μας δίνει πεπερασμένες επιλογές για το xC. Ενώ από το Θεώρημα 13.3 (2) αν $H = B$ (τυχαία υποομάδα Borel) ικανοποιεί το λήμμα 23.5 (1).

Άρα για το ζητούμενο, η C περιέχεται σε μία υποομάδα Borel, η οποία είναι συζυγής με την B, άρα η ένωση όλων των συζυγιών είναι πυκνή στην G από το λήμμα 23.5 (2) και από το 23.5 (1) η ένωση αυτή είναι κλειστό σύνολο, άρα έπεται το ζητούμενο. □

Παρατήρηση: Για μία πεπερασμένη ομάδα G δεν μπορούμε ποτέ να έχουμε ότι $G = \bigcup_{g\in G} g^{-1}Hg$ για μία $H < G$ γνήσια υποομάδα. Ως άμεση συνέπεια έπεται ότι:

Πόρισμα .14.4. *Έστω G μία συνεκτική γραμμική αλγεβρική ομάδα. Τότε:*
(1) Κάθε ημιαπλό στοιχείο της G ανήκει σε έναν maximal τόρο της G.
(2) Κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο της G ανήκει σε μία κλειστή συνεκτική ταυτοδύναμη υποομάδα.
(3) Όλες οι maximal κλειστές, συνεκτικές, ταυτοδύναμες υποομάδες της G είναι όλες συζυγείς και έχουν όλες τη μορφή B_u, όπου B είναι μία υποομάδα Borel της G.

Απόδειξη. (1) Κάθε $g \in G$ ανήκει σε μία υποομάδα Borel B της G από το Θεώρημα 14.3. Αν το g είναι ημιαπλό τότε ανήκει σε έναν maximal τόρο της B, άρα και της G από το πόρισμα 10.2
(2) Αν το g είναι ταυτοδύναμο στοιχείο της B, τότε $u \in B_u$ η οποία είναι κλειστή από το Θεώρημα 10.1 (1).
(3) Αν $U \leq G$ είναι κλειστή, συνεκτική, ταυτοδύμαμη, τότε είναι και επιλύσιμη από

το πόρισμα 6.2, άρα περιέχεται σε μία υποομάδα Borel, δηλαδή στην ταυτοδύναμη κανονική υποομάδα της B_u πάλι από το Θεώρημα 10.1 (1). □

Ένα ακόμα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα των υποομάδων Borel είναι ότι ισούνται με τις κανονικοποιούσες τους. Αυτό είναι εύκολο να το δούμε για την GL_n παίρνοντας για υποομάδα Borel την T_n. Για την γενική περίπτωση, έστω $N_G(B)$ η κανονικοποιούσα μίας υποομάδας Borel B της συνεκτικής ομάδας G. Τότε προφανώς η B είναι επίσης μία υποομάδα Borel της $N_G(B)^0$ και προκύπτει φυσικά ότι $N_G(B)^0 = B$ από το Θεώρημα 14.3. Για την απόδειξη του παρακάτω ισχυρότερου ισχυρισμού χρειάζονται ιδιότητες των πλήρων πολλαπλοτήτων (δες [2], Θεώρημα 23.1]).

Θεώρημα .14.5. *Έστω G μία συνεκτική γραμμική αλγεβρική ομάδα και B μία υποομάδα Borel της G. Τότε $N_G(B) = B$.*

Αν $N, N' \trianglelefteq G$ είναι κλειστές, συνεκτικές (και επιλύσιμες) κανονικές υποομάδες, τότε και η NN' είναι κλειστή, συνεκτική, κανονική (και επιλύσιμη) από την πρόταση 3.8. Αυτό δίνει νόημα στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός .14.6. *Η maximal κλειστή, συνεκτική, επιλύσιμη, κανονική υποομάδα μίας γραμμικής αλγεβρικής ομάδας G καλείται ριζικό $R(G)$ της G.*

Από το Θεώρημα 10.1 (1), η $R(G)_u$ είναι κανονική, συνεκτική, ταυτοδύναμη υποομάδα της συνεκτικής υποομάδας $R(G)$. Κάθε κλειστή, συνεκτική, κανονική, ταυτοδύναμη υποομάδα της G είναι επιλύσιμη από το πόρισμα 6.2, συνεπώς περιέχεται στην $R(G)$, άρα και στην $R(G)_u$. Συνεπώς η $R(G)_u$ είναι η maximal κλειστή, συνεκτική, κανονική, ταυτοδύναμη υποομάδα της G, το λεγόμενο ταυτοδύναμο ριζικό $R_u(G)$ της G. Προφανώς $R_u(G) \leq R(G) \leq G^0$.

Στην περίπτωση που $k = \overline{\mathbb{F}}_p$, το ταυτοδύναμο ριζικό είναι η μεγαλύτερη συνεκτική κανονική υποομάδα η οποία περιέχει αποκλειστικά στοιχεία τάξης p, το ανάλογο δηλαδή μίας maximal κανονικής p-υποομάδας $\mathcal{O}_p(G)$ μίας πεπερασμένης ομάδας G.

Ορισμός .14.7. *Μία γραμμική αλγεβρική ομάδα G καλείται reductive αν $R_u(G) = 1$, ενώ καλείται ημιαπλή αν είναι συνεκτική και $R(G) = 1$.*

Οι ταυτοδύναμες ομάδες γενικά έχουν πολύπλοκη δομή. Από την άλλη μεριά, οι συνεκτικές reductive και οι ημιαπλές ομάδες μπορούν να ταξινομηθούν; αυτό θα είναι το θέμα αναπτύξουμε στην ενότητα 22.

Ορισμός .14.8. *Η ημιαπλή τάξη μιας reductive ομάδας G ορίζεται να είναι* $\mathrm{rk}_{ss}(G) := \mathrm{rk}(G/R(G))$.

Θα δούμε αργότερα (πορισμα 20.3) ότι για συνεκτικές reductive ομάδες είναι $\mathrm{rk}_{ss}(G) = \mathrm{rk}([G, G])$.

Το ριζικό της G καθορίζεται πλήρως από τις υποομάδες Borel της.

Πρόταση .14.9. *Έστω G συνεκτική. Τότε $R(G) = (\bigcap_B B)^0$, όπου B οι υποομάδες Borel της G.*

Απόδειξη. $R(G) \trianglelefteq G$ maximal κλειστή συνεκτική επιλύσιμη, δηλαδή
$R(G) \trianglelefteq B$ για κάθε B υποομάδα Borel, δηλαδή
$R(G) \trianglelefteq \bigcap_B B$ άρα
$R(G)\ maximal \trianglelefteq \bigcap_B B$, άρα από πρόταση 3.5
$R(G) = (\bigcap_B B)^0$ □

Παραδείγματα

(1) Αν η G είναι ημιαπλή και T ένας τόρος, τότε η $G \times T$ είναι reductive.

(2) Αν η G είναι επιλύσιμη και συνεκτική, τότε από το Θεώρημα 10.1 είναι $R_u(G) = G_u$ και $R(G) = G$. Άρα μία συνεκτική reductive επιλύσιμη ομάδα είναι ένας τόρος, μία ημιαπλή επιλύσιμη ομάδα είναι μόνο η τετριμμένη.

(3) Η υποομάδα $\left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) | A \in \mathrm{GL}_2 \right\}$ της GL_3 δεν είναι reductive, αφού η $\left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_2 & * \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \right\}$ είναι μία μη τετριμμένη συνεκτική, κανονική, ταυτοδύναμη υποομάδα της.

(4) Η $G = \mathrm{GL}_n$ είναι reductive, αφού από την πρόταση 14.9 και από προηγούμενα παραδείγματα είναι:

$$R(G) \leq T_n \cap T_n^- := \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix} \right\} = D_n,$$

επομένως $R_u(G) = (R(G))_u = 1$. Όμως η GL_n δεν είναι ημιαπλή, εφόσον $Z(\mathrm{GL}_n) = \{tI_n \mid t \in k^\times\} \cong \mathbf{G}_m$ είναι μία συνεκτική, επιλύσιμη, κανονική υποομάδα της. Στην πραγματικότητα, $R(\mathrm{GL}_n) = Z(\mathrm{GL}_n)$ από την πρόταση 14.12 παρακάτω, άρα PGL_n είναι ημιαπλή.

(5) Η $G = \mathrm{SL}_n$ είναι ημιαπλή, αφού από το (4), η SL_n είναι reductive και

$$R(G) = Z(G)^0 = (\{tI_n \mid t \in k^\times\} \cap \mathrm{SL}_n)^0 = \{tI_n \mid t^n = 1\}^0 = 1$$

από την πρόταση 14.12 παρακάτω.

Χρησιμιποιώντας ιδιότητες των υποομάδων Borel, το Θεώρημα 8.8 για τις κεντρικοποιούσες μπορεί να γίνει πιο ισχυρό.

Πρόταση .14.10. *Έστω G μία συνεκτική γραμμική αλγεβρική ομάδα και $T \leq G$ ένας maximal τόρος. Τότε η $C_G(T)^0$ είναι μηδενοδύναμη και ο T είναι ο maximal τόρος της.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $C = C_G(T)^0$. Ο κεντρικός τόρος T της C περιέχεται σε κάθε υποομάδα Borel B της C συνεπως και ο maximal τόρος της. Επομένως η $B/T \cong B_u$ είναι μηδενοδύναμη ομάδα, και αφού ο T κεντρικοποιείται στην B, η B είναι επίσης μηδενοδύναμη. Από το πόρισμα 14.2 συνεπάγεται ότι η $C = B$ είναι μηδενοδύναμη. □

Ενώ τώρα θα αναφερθούμε σε κεντρικοποιούσες υποομάδες αυθαίρετων υποτόρων [3], Θεώρημα 6.4.7.

Θεώρημα .14.11. *Έστω S ένας τόρος μίας συνεκτικής γραμμικής αλγεβρικής ομάδας G.*
(1) Η κεντρικοποιούσα του $C_G(S)$ είναι συνεκτική.
(2) Αν B είναι μία υποομάδα Borel της G, η οποία περιέχει την S, τότε η $C_G(S) \cap B$ είναι υποομάδα Borel της $C_G(S)$ και όλες οι υποομάδες Borel της $C_G(S)$ είναι της παραπάνω μορφής.

Απόδειξη. (Σκιαγράφηση)
(1) Για $c \in C_G(S)$, έστω B μία υποομάδα Borel της G, που περιέχει το c (η οποία υπάρχει από το Θεώρημα 14.3). Ορίζω με $X = \{xB \in G/B \mid x^{-1}cx \in B\}$. Τότε αποδεικνύεται ότι το X είναι κλειστή υποπολλαπλότητα της G/B, συνεπώς προβολική

πολλαπλότητα. Στη συνέχεια θεωρούμε ότι η S δρα στο X με αριστερό πολλαπλασιασμό, άρα από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Borel, υπάρχει σταθερό σημείο $xB \in X$ με $x^{-1}Sx \leq B$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υποομάδα Borel η οποία περιέχει και την S και το c. Επομένως περιοριζόμαστε στην περίπτωση μίας συνεκτικής επιλύσιμης ομάδας, για την οποία η υπόθεση ισχύει από την πρόταση 10.3.

(2) Έστω B όπως στο (2), τότε η $C_G(S) \cap B$ είναι συνεκτική από [3], Πόρισμα 3.3.6 και επιλύσιμη. Για να δείξουμε τον πρώτο ισχυρισμό πρέπει να δείξουμε ότι η $C_G(S)/C_G(S) \cap B$ είναι πλήρης. Υπάρχει ένας 1-1 και επί μορφισμός ομογενών χώρων μεταξύ της $C_G(S)/C_G(S) \cap B$ και της εικόνας της $C_G(S)$. στην G/B. Από το [3] λήμμα 6.2.1 και ότι η $G \to G/B$ είναι ανοικτή, συμπεραίνουμε ότι πρέπει να αποδείξουμε ότι η $Y = C_G(S).B$ είναι κλειστή στην G. Παρατηρούμε ότι η Y είναι η εικόνα της ανάγωγης πολλαπλότητας $C_G(S) \times B$ μέσω ενός μορφισμού, άρα ανάγωγη. Η κλειστή της θήκη είναι επίσης ανάγωγη, άρα συνεκτική (Πρόταση 3.3 (1) πόρισμα 3.6).

Αν $y \in Y$, έχουμε ότι $y^{-1}Sy \subseteq B$. Αυτό επίσης ισχύει όταν $y \in \overline{Y}$. Θεωρούμε τον μορφισμό $\phi : \overline{Y} \times S \to B/B_u$ ο οποίος απεικονίζει το (y, s) στο $y^{-1}syB_u$. Εφαρμόζοντας την [3], πρόταση 3.2.8 στην ϕ (με $V = \overline{Y}, G = S, H = B/B_u$), συμπεραίνουμε ότι για $y \in \overline{Y}$ έχουμε ότι $y^{-1}sy \in sB_u$. Τότε $y^{-1}Sy$ είναι maximal τόρος της SB_u. Λόγω της συζυγίας των maximal τόρων αυτής της ομάδας, υπάρχει $z \in B_u$ με $y^{-1}Sy = z^{-1}Sz$. Έπεται ότι $y \in C_G(S).B = Y$. Άρα η Y είναι κλειστή που είναι το ζητούμενο.

Το τελευταίο επιχείρημα του (2) έπεται από την συζυγία των υποομάδων Borel. □

Είναι αρκετά δύσκολο να εκμεταλευτούμε το γεγονός ότι μία ομάδα είναι reductive, δηλαδή ότι δεν έχει μη τετριμμένες, συνεκτικές, ταυτοδύναμες κανονικές υποομάδες. Τουλάχιστον μπορούμε να δείξουμε το εξής:

Πρόταση .14.12. *Έστω G συνεκτική reductive, τότε:*
(1) Η $R(G) = Z(G)^0$ είναι τόρος.
(2) Η $R(G) \cap [G, G]$ είναι πεπερασμένη
(3) Η $[G, G]$ είναι ημιαπλή

Απόδειξη. (1) $R(G)$ είναι συνεκτική και επιλύσιμη, άρα $R(G) = R(G)_u \rtimes T$, όπου T είναι τόρος από το Θεώρημα 10.1 (2). Αφού η G είναι reductive, $R(G)_u = R_u(G) = 1$, άρα η $R(G) = T$ είναι τόρος. Προφανώς $Z(G)^0 \subseteq R(G)$. Από το Θεώρημα 8.8, η ομάδα πηλίκο $G/C_G(R(G)) = N_G(R(G))/C_G(R(G))$ είναι πεπερασμένη. Από την πρόταση 3.5 (3), η $C_G(R(G))$ περιέχει την G^0, άρα έχουμε ισότητα $C_G(R(G)) = G$ αφού η G είναι συνεκτική, συνεπώς $R(G) \subseteq Z(G)^0$.
(2) Επιλέγουμε μία εμφύτευση $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ σύμγωνα με το Θεώρημα 1.4. Ο τόρος $R(G) = Z(G)^0$ δρα διαγώνια στον V. Οι κοινοί ιδιόχωροι μας δίνουν μία διάσπαση $V = \bigoplus_\chi V_\chi$, με $\chi \in X(R(G))$ (επομένως $t.v = \chi(t)v$ για $v \in V_\chi, t \in R(G)$). Από το (1) είναι $G \leq C_{\mathrm{GL}(V)}(R(G))$, άρα η G σταθεροποιεί κάθε έναν από τους V_χ. Άρα περιέχει τους Block διαγώνιους πίνακες: $G \leq \prod_\chi GL(V_\chi)$, άρα $[G, G] \leq \prod_\chi SL(V_\chi)$, δηλαδή η $[G, G] \cap R(G)$ περιέχει τους πίνακες:

$$\begin{pmatrix} \chi_1(t)I_{d_1} & & \\ & \chi_2(t)I_{d_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

με $d_i := \dim V_{\chi_i}$ και $\chi_i(t)^{d_i} = 1$. Αλλά υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι στο πλήθος τέτοιοι πίνακες.
(3) Από την πρόταση 3.9, η $[G,G]$ είναι συνεκτική. Αφού η $R([G,G])$ είναι μία χαρακτηριστική κανονική υποομάδα της $[G,G]$, $R([G,G]) \leq R(G)$. Επομένως $R([G,G]) \leq (R(G) \cap [G,G])^0 = 1$ από το (2), άρα η $[G,G]$ είναι ημιαπλή. □

Μία ακόμα ιδιότητα που έπρεπε να μπει στην παραπάνω πρόταση είναι ότι $G = R(G)[G,G]$, αλλά η απόδειξή της απαιτεί αισθητά περισσοότερη δουλειά (δες πόρισμα 20.3 παρακάτω).

Κεφάλαιο 7: Η Άλγεβρα Lie μιας Γραμμικής αλγεβρικής Ομάδας

Προκειμένου να μελετήσουμε καλύτερα τις reductive ομάδες απαιτείται να δούμε την έννοια της Άλγεβρας Lie μιας γραμμικής αλγεβρικής ομάδας. Αυτό θα μας επιτρέψει να «γραμμικοποιήσουμε» πολλά ερωτήματα. Θα υποθέσουμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικείωμένος με την έννοια της Άλγεβρας Lie πάνω από ένα σώμα. Θα γράφουμε $\mathfrak{gl}_n$ για την Άλγεβρα Lie των $n \times n$ πινάκων πάνω από το k με Αγκύλη Lie $[X, Y] = XY - YX$.

.15 Παραγωγίσεις και Διαφορικά

Έστω A μία k-Άλγεβρα.

Ορισμός .15.1. *Μία k-γραμμική απεικόνιση $D : A \to A$ με $D(fg) = fD(g) + D(f)g$ για κάθε $f, g \in A$ καλείται παραγώγιση της A.*

Με εύκολο υπολογισμό βλέπουμε ότι αν D_1, D_2 είναι παραγωγίσεις της A, τότε και η

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

είναι επίσης παραγώγιση της A. Η παραπάνω απεικόνιση εφοδιάζει τον k-διανυσματικό χώρο των παραγωγίσεων της A, $\mathrm{Der}_k(A)$ με τη δομή μίας Άλγεβρας Lie.

Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε $A = k[G]$, τον δακτύλιο συντεταγμένων μιας γραμμικής αλγεβρικής ομάδας G. Τότε για $x \in G$ ορίζεται μία δράση $\lambda_x : k[G] \to k[G]$ με $(\lambda_x.f)(g) := f(x^{-1}g)$ για $f \in k[G]$ $g \in G$.

Ορισμός .15.2. *Η Άλγεβρα Lie της G είναι ο υπόχωρος*

$$\mathrm{Lie}(G) := \{D \in \mathrm{Der}_k(k[G]) \mid D\lambda_x = \lambda_x D \text{ για κάθε } x \in G\}$$

των αριστερά αναλλοίωτων παραγωγίσεων του $k[G]$, μία υπάλγεβρα Lie της $\mathrm{Der}_k(k[G])$.

Παραδείγματα
Θα υπολογίσουμε τις Άλγεβρες Lie των μονοδιάστατων συνεκτικών ομάδων.

(1) Έστω $G = \mathbf{G}_a$ με $k[G] = k[T]$. Κάθε παραγώγιση $D \in \mathrm{Der}_k(k[G])$ καθορίζεται πλήρως από την τιμή της $D(T) =: p(T) \in k[T]$ στο T. Για $x \in G$ έχουμε ότι $\lambda_x T = T - x$. Συνεπώς $\lambda_x f(T) = f(T - X)$ για $f \in k[T]$. Άρα η D είναι αριστερά

αναλλοίωτη αν και μόνο αν
$(\lambda_x D)(T) = \lambda_x p(T) = p(T-x)$ ισούται με $(D\lambda_x)(T) = D(T-x) = p(T)$ για κάθε $x \in G$. Δηλαδή η $p(T)$ είναι σταθερή και $D = a\frac{d}{dT}$ για $a = p(1) \in k$.
Συνεπώς $\mathrm{Lie}(G) = \langle \frac{d}{dT} \rangle_k \cong k$ είναι η μοναδική μονοδιάστατη (αντιμεταθετική) Άλγεβρα Lie πάνω από το k.

(2) Έστω $G = \mathbf{G}_m$ με $k[G] = k[T, T^{-1}]$. Όπως και πριν $D \in \mathrm{Der}_k(k[G])$ καθορίζεται πλήρως από την $D(T) := p(T)$. Εδώ όμως για $x \in G$ έχουμε ότι $\lambda_x T = x^{-1}T$, άρα $\lambda_x f(T) = f(x^{-1}T)$ για $f \in k[G]$; Άρα η D είναι αριστερά αναλλοίωτη αν και μόνο αν $(\lambda_x D)(T) = \lambda_x p(T) = p(x^{-1}T)$ ισούται με $D\lambda_x(T) = D(x^{-1}T) = x^{-1}p(T)$ δηλαδη όταν $p(T) = aT$ για $a \in k$,άρα $D = aT\frac{d}{dT}$ και
$\mathrm{Lie}(G) = \langle T\frac{d}{dT} \rangle_k \cong k$.

Τώρα θα δώσουμε μία δεύτερη πιο γεωμετρική κατασκευή της Άλγεβρας Lie μιας αλγεβρικής ομάδας G.

Για μία αφινική πολλαπλότητα X ορίζουμε τον εφαπτόμενο χώρο της X στο $x \in X$ ως εξης:

$$T_x(X) := \{\delta : k[X] \to k \text{ γραμμική} \mid \delta(fg) = f(x)\delta(g) + \delta(f)g(x) \text{ για κάθε } f, g \in k[X]\}$$

(ο k-διανυσματικός χώρος των παραγωγίσεων στο σημείο x). Στην περίπτωση που η X είναι γραμμική αλγεβρική ομάδα G, τότε η G δρα ομοιογενώς στον εαυτό της με αριστερό πολλαπλασιασμό, ο εφαπτόμενος χώρος σε κάθε στοιχείο $g \in G$ είναι με φυσιολοφικό τρόπο ισόμορφος με τον $T_1(G)$.
Άρα από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε τον εφαπτόμενο χώρο $T_1(G)$. Τώρα η:

$$\Theta : \mathrm{Lie}(G) \to T_1(G), \qquad \Theta(D)(f) := D(f)(1)$$

είναι μία k-γραμμική απεικόνιση. Στην πραγματικότητα, με απλές πράξεις αποδεικνύεται ότι είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων δες ([2] Θεώρημα 9.1). Επομένως η δομή Άλγεβρας Lie της $\mathrm{Lie}(G)$ μπορεί να μεταφερθεί στην $T_1(G)$. Υπο αυτή την εναλλακτική ερμηνεία της Άλγεβρας Lie αποδεικνύεται το εξής (δες [3], Θεώρημα 4.3.7, πόρισμα 4.4.6 και 4.1.7 για τα (1) και (2) και [2], πρόταση 5.1 για το (3)):

Θεώρημα .15.3. *Έστω G, G_1, G_2 γραμμικές αλγεβρικές ομάδες. Τότε:*
(1) $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G^0)$.
(2) $\dim G = \dim G^0 = \dim(\mathrm{Lie}(G))$.
(3) $\mathrm{Lie}(G_1 \times G_2) \cong \mathrm{Lie}(G_1) \oplus \mathrm{Lie}(G_2)$ *ως Άλγεβρες Lie.*

Παράδειγμα

Θα δούμε ένα πιο αναλυτικό παράδειγμα, έστω $G = \mathrm{GL}_n$. Ισχυριζόμαστε ότι $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n) \cong \mathfrak{gl}_n$. Για να το δείξουμε αυτό ορίζουμε:

$$\mathfrak{gl}_n \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[G]), \quad X \mapsto D_X,$$

με $D_X(T_{ij}) := \sum_{l=1}^n T_{il}X_{lj}$. (Υπενθυμίζουμε ότι $k[G] = k[Tij, \frac{1}{det(Tij)}]$). Αποδεικνύεται εύκολα ότι η D_X είναι παραγώγιση. Τώρα για $g \in G$ γράφουμε g_{ij}^{-1} για την (i,j)-οστή θέση του g^{-1}. Τότε:

$$\begin{aligned}
D_X(\lambda_g T_{ij}) &= D_X(\sum_m g_{im}^{-1} T_{mj}) \\
&= \sum_m g_{im}^{-1} D_X(T_{mj}) \\
&= \sum_m g_{im}^{-1} \sum_l T_{ml} X_{lj} = \sum_m \sum_l g_{im}^{-1} T_{ml} X_{lj}
\end{aligned}$$

επίσης,

$$\begin{aligned}
\lambda_g(D_X T_{ij}) &= \lambda_g(\sum_l T_{il} X_{lj}) \\
&= \sum_l X_{lj} \lambda_g(T_{il}) \\
&= \sum_l X_{lj} \sum_m g_{im}^{-1} T_{ml} = \sum_l \sum_m X_{lj} g_{im}^{-1} T_{ml}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς η D_X είναι αριστερά αναλλοίωτη παραγώγιση του $k[G]$. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $X \mapsto D_X$ ορίζει έναν 1-1 ομομορφισμό Αλγεβρών Lie. Επιπλέον αφού $\dim(\mathrm{GL_n}) = n^2 = \dim(\mathrm{GL}_n)$, η παραπάνω απεικόνιση είναι και επί από το Θεώρημα 15.4 (2). Επομένως έχουμε τον ισομορφισμό που θέλαμε.

Επιπλέον, από τον εφαπτόμενο χώρο, θα ολοκληρώσουμε την συναρτησιακή σχέση μεταξύ γραμμικών αλγεβρικών ομάδων και των αλγεβρών Lie τους.

Ορισμός .15.4. *Έστω $\phi : X \to Y$ ένας μορφισμός αφινικών πολλαπλοτήτων. Το διαφορικό $d_x\phi$ της ϕ στο $x \in X$ είναι η απεικόνιση $d_x\phi : T_x(X) \to T_{\phi(x)}(Y)$ που ορίζεται ως εξής: $d_x\phi(\delta) := \delta \circ \phi^*$ για $\delta \in T_x(X)$.*

$$\begin{tikzcd}
k[Y] \arrow[r, "\phi^*"] \arrow[dr, dashed, "d_x\phi(\delta)"'] & k[X] \arrow[d, "\delta"] \\
 & k
\end{tikzcd}$$

Αν $\phi : G \to H$ είναι μορφισμός αλγεβρικών ομάδων ορίζουμε $d\phi := d_1\phi$, το διαφορικό της ϕ στο 1. Στη συνέχεια θα δουμε μερικές ιδιότητες του διαφορικού.

Πρόταση .15.5. *Έστω $X \overset{\phi}{\to} Y \overset{\psi}{\to} Z$ μορφισμοί αφινικών πολλαπλοτήτων και $x \in X$, τότε:*
(1) $d_x(\psi \circ \phi) = d_{\phi(x)}\psi \circ d_x\phi$.
(2) Αν $X = G_1$ και $Y = G_2$ είναι γραμμικές αλγεβρικές ομάδες και ϕ είναι μορφισμός αλγεβρικών ομάδων, τότε $d\phi : \mathrm{Lie}(G_1) \to \mathrm{Lie}(G_2)$ είναι ομομορφισμός Αλγεβρών Lie.
(3)Αν $X = G_1$ και $Y = G_2$ είναι γραμμικές αλγεβρικές ομάδες και ϕ είναι μορφισμός αλγεβρικών ομάδων, τότε ο ϕ είναι ισομορφισμός αλγεβρικών ομάδων αν και μόνο αν ϕ και $d\phi$ είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη. (1) Έστω $\phi^* : k[Y] \to k[X]$, $\psi^* : k[Z] \to k[Y]$ οι αντίστοιχοι ομομορφισμοί που επάγονται από τους ϕ, ψ αντίστοιχα. Τότε παρατηρούμε ότι η $(\psi \circ \phi)^* : k[Z] \to k[X]$ είναι ίση με $\phi^* \circ \psi^*$.
Άρα $d_x(\psi \circ \phi)(\delta) = \delta \circ (\psi \circ \phi)^* = \delta \circ \phi^* \circ \psi^* = (d_x\phi) \circ \psi^*(\delta) = (d_{\phi(x)}\psi) \circ d_x\phi(\delta)$ για κάθε $\delta \in T_x(X)$.

Τα (2) και (3) δεν θα τα αποδείξουμε διότι θέλουν κάποια επιπλέον αποτελέσματα, δες [2] 9.1 και 9.2 για το (2) και [3] Θεώρημα 5.3.2 και πόρισμα 5.3.3 για το (3). $\square$

Παραδείγματα
Θα υπολογίσουμε κάποια διαφορικά.

(1) Θεωρούμε τον μορφισμό $\mu : G\times G \to G,\ (x,y)\mapsto xy$. Για $f\in k[G],\ \ \mu^*(f) = \sum f_i\otimes g_i \in k[G]\otimes k[G]$, έτσι ώστε $f(xy)=\sum f_i(x)g_i(y)$ για κάθε $x,y\in G$. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι $f=\sum f_i(1)g_i=\sum g_i(1)f_i$. Τώρα, έστω $(X,Y)\in T_1(G\times G)\cong T_1(G)\oplus T_1(G)$ και θέτουμε $d\mu(X,Y)=Z$. Τότε

$$Z(f)=d\mu(X,Y)(f)=(X,Y)(\mu^* f)=(X,Y)(\sum f_i\otimes g_i)$$

το οποίο από τον κανόνα του γινομένου των παραγωγίσεων είναι ίσο με $\sum X(f_i)g_i(1)+\sum f_i(1)Y(g_i)$. Αυτό όμως είναι ακριβώς η δράση της $X+Y$ στην f. Συνεπώς έχουμε ότι $d\mu(X,Y)=X+Y$.

(2) Θα δείξουμε ότι το διαφορικό της αντιστροφής $i : G\to G,\ g\mapsto g^{-1}$, είναι $di(X)=-X$ για $X\in T_1(G)$. Θεωρούμε τη σύνθεση:

$$G \xrightarrow{(id,i)} G\times G \xrightarrow{\mu} G$$

η οποία στέλνει το $x\mapsto (x,x^{-1})\mapsto xx^{-1}=1$, επομένως το διαφορικό της θα μας κάνει 0, άρα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 0 &= d(\mu\circ(id,i))_1(X)\\ &= (d\mu)_{(1,1)}(d(id,i)_1(X))\\ &= X+(di)_1(X)\end{aligned}$$

δηλαδή $(di)_1(X)=-X$. (Ενώ χρησιμιποιήσαμε ότι $d(id)(X)=X,\ d(id,i)_1(X)=(X,d(i)_1(X))\ d(1)=0$.

Λόγω αυτού και του προηγούμενου παραδείγματος δικαιολογείται ο συλλογισμός που είχαμε κάνει στην αρχή του κεφαλαίου ότι η Άλγεβρα Lie «γραμμικοποιεί» προβλήματα.

(3) Έστω char$(k)=p>0$. Θεωρούμε τον 1-1 και επι μορφισμό

$$\phi : \mathbf{G}_a\to U_2, \qquad a\mapsto \begin{pmatrix}1 & a^p\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Εδώ θα θεωρήσουμε την απεικόνιση να ειναι $d\phi$: Lie$(G_a)\to$ Lie(U_2). Έχουμε ότι $k[U_2]=k[T_{12}]\cong k[\mathbf{G}_a]=k[T]$. Τώρα παρατηρούμε ότι:

$$\phi^*(T_{12})(a)=T_{12}(\phi(a))=T_{12}\left(\begin{pmatrix}1 & a^p\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=a^p,\ \text{για } a\in\mathbf{G}_a,$$

επομένως $\phi^*(T_{12})=T^p$. Άρα για $D\in$ Lie$(\mathbf{G}_a)$ έχουμε

$$d\phi(D)(T_{12})=D(\phi^*(T_{12}))=D(T^p)=pT^{p-1}D(T)=0.$$

Συνεπώς η $d\phi$ δεν είναι 1-1, οπότε και η ϕ δεν είναι ισομορφισμός αλγεβρικών ομάδων από την πρόταση 15.3 (3). Πράγματι, στους δακτυλίους συντεταγμένων, η $\phi^* : k[T_{12}]\to k[T],\ T_{12}\mapsto T^p$, δεν είναι επι.

Τώρα θα θεωρήσουμε Άλγεβρες Lie κλειστών υποομάδων $H\leq G$. Αν η H ορίζεται από ένα ιδεώδες $I\trianglelefteq k[G]$, τότε εξ ορισμού $k[H]=k[G]/I$. Κάθε $D\in$ Lie(G) με $DI\subseteq I$ με φυσιολογικό τρόπο ορίζει μία παραγώγιση του $k[H]=k[G]/I$ και αντίστροφα, αν $\delta\in T_1(G)$ με $\delta I=0$ με φυσιολογικό τρόπο ορίζει ένα στοιχείο της $T_1(H)$. Με βάση τον προηγούμενο ισχυρισμό έχουμε το εξής:

Θεώρημα .15.6. *Έστω $H \leq G$ με $I \trianglelefteq k[G]$ το ιδεώδες από το οποίο ορίζεται. Τότε:*

(1) $\mathrm{Lie}(H) = \{D \in \mathrm{Lie}(G) \mid DI \subseteq I\}$ *και* $T_1(H) = \{\delta \in T_1(G) \mid \delta I = 0\}$
(2) Αν $H \trianglelefteq G$ είναι κανονική, τότε η $\mathrm{Lie}(H)$ *είναι ιδεώδες της* $\mathrm{Lie}(G)$. *Επιπλέον το διαφορικό της κανονικής προβολής $G \to G/H$ είναι η κανονική προβολή* $\mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(H)$, *άρα επάγεται ένας ισομορφισμός* $\mathrm{Lie}(G/H) \cong \mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(H)$.

Η απόδειξη για το (1) είναι ένας απευθείας υπολογισμός, [5], πρόταση 3.8 και χρήση της ταύτισης της $\mathrm{Lie}(H)$ με τον $T_1(H)$. Για το δεύτερο μέρος δες [2], πόρισμα 10.4A και Sec.11.5].

Παραδείγματα

(1) $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n) = \mathfrak{sl}_n := \{A \in \mathfrak{gl}_n \mid \mathrm{tr}A = 0\}$ (δες παράρτημα Μέρος Β).

(2) $\mathrm{Lie}(\mathrm{PGL}_n) \cong \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n)/\mathrm{Lie}(Z(\mathrm{GL}_n) = \mathfrak{gl}_n/\{cI_n \mid c \in k^\times\}$ από το Θεώρημα 15.6 (2).

Έχουμε την προσθετική διάσπαση Jordan στην $\mathfrak{gl}_n$. Για $X \in \mathfrak{gl}_n$ συμβολίζουμε με X_s, X_n το ημιαπλό και το μηδενοδύναμο μέρος του X. Για κάθε κλειστή υποομάδα $G \leq \mathrm{GL}_n$, εμφυτεύουμε την $\mathrm{Lie}(G)$ στην $\mathfrak{gl}_n$ από το Θεώρημα 15.6 (1) και με αυτό τον τρόπο ορίζουμε το ημιαπλό και μηδενοδύναμο μέρος στοιχείων της $\mathrm{Lie}(G)$. Αυτά ικανοποιούν τις σχέσεις συμβατότητας (δες [2], Θεώρημα 15.3]):

Πρόταση .15.7. *Έστω $G \leq \mathrm{GL}_n$ μία γραμμική αλγεβρική ομάδα και $X \in \mathrm{Lie}(G) \subseteq \mathfrak{gl}_n$. Τότε:*

(1) $X_s, X_n \in \mathrm{Lie}(G)$ *και* $[X_s, X_n] = 0$
(2) Τα X_s, X_n είναι ανεξάρτητα της εμφύτευσης $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$
(3) Αν $\phi : G_1 \to G_2$ είναι μορφισμός γραμμικών αλγεβρικών ομάδων, με διαφορικό $d\phi : \mathrm{Lie}(G_1) \to \mathrm{Lie}(G_2)$, *τότε $(d\phi)(X)_s = d\phi(X_s)$ και $(d\phi)(X)_n = d\phi(X_n)$ για* $X \in \mathrm{Lie}(G_1)$.

Συγκρίνετε αυτό το Θεώρημα με την διάσπαση Jordan της G (Θεώρημα 5.5).

.16 Η Adjoint Αναπαράσταση

Μία σημαντική εφαρμογή της Άλγεβρας Lie είναι ότι ορίζει για κάθε γραμμική αλγεβρική ομάδα G με φυσιολογικό τρόπο μία ρητή αναπαράσταση $G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$ στην Άλγεβρα Lie της με τον εξής τρόπο: Για $x \in G$ ορίζουμε $Int_x : G \to G$ με $Int_x(y) = xyx^{-1}$. Τότε $dInt_x : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$ είναι αυτομορφισμός της Άλγεβρας Lie $\mathrm{Lie}(G)$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Ad}\, x := dInt_x$ για $x \in G$.

Έτσι λοιπόν ορίζεται μία αναπαράσταση

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G)), \qquad x \mapsto \mathrm{Ad}\, x$$

η οποία καλείται adjoint αναπαράσταση της G:

Θεώρημα .16.1. *Έστω G γραμμική αλγεβρική ομάδα, τότε:*

(1) $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathrm{Lie}(G))$ *είναι ρητή αναπαράσταση της G.*
(2) $d\mathrm{Ad} = ad$, *όπου $(ad(X))(Y) = [X, Y]$ για $X, Y \in$* $\mathrm{Lie}(G)$.
(3) Αν η G είναι συνεκτική και reductive, τότε $\ker(\mathrm{Ad}) = Z(G)$.

Δες [2], προταση 10.3, Θεώρημα 10.4 για τα (1) και (2). Το (3) έπεται από το Θεώρημα 19.5 και την [1] άσκηση 10.32. Άρα αν η G είναι συνεκτική και reductive, τότε η Ad είναι σχεδόν πιστή (μόνο το κέντρο της G χάνεται).

Εύκολα αποδεικνύεται ο παρακάτω ισχυρισμός: Αν $H \leq G$ είναι κλειστή, τότε η Lie(H) (ως υπάλγεβρα Lie της Lie(G) σύμφωνα με το Θεώρημα 15.6) είναι Ad $_G(H)$-αναλλοίωτη και ο περιορισμός της adjoint αναπαράστασης της G στην H, δρα στην Lie(H), είναι απλά η adjoint αναπαράσταση της H, δηλαδή Ad $_{G|H}$ $=$ Ad $_H$ στην Lie(H).

Παράδειγμα
Έστω $G = \mathrm{GL}_n$, με Lie$(G) \cong \mathfrak{gl}_n$ από προηγούμενο παράδειγμα και για $X \in \mathfrak{gl}_n$ έχουμε την παραγώγιση $D_X \in$ Lie(G) με $D_X(T_{ij}) = \sum\limits_l T_{il}X_{lj}$.
Από τον ισομορφισμό διανυσματικών χώρων Θ που ορίστηκε πιο πριν, μπορούμε να συνδέσουμε μία σημειακή παραγώγιση δ_X με το X, ως εξής $\delta_X(T_{ij}) = (\sum\limits_l T_{il}X_{lj})(I_n) = X_{ij}$.

Για $g = (g_{ij}) \in G$, μπορούμε να υπολογίσουμε το $(Int_g)^*(T_{ij})$: Για $x = (x_{ij}) \in G$,

$$(Int_g)^*(T_{ij})(x) = T_{ij}(gxg^{-1}) = \sum_{l,m} g_{il}g^{-1}_{mj}x_{lm},$$

άρα $(Int_g)^*(T_{ij}) = \sum\limits_{l,m} g_{il}g^{-1}_{mj}T_{lm}$. Συνεπώς η Ad $g = dInt_g$: Lie$(G) \to$ Lie(G) ικανοποιεί:

$$\begin{aligned}(Ad_g)(\delta_X)(T_{ij}) &= \delta_X((Int_g)^*T_{ij}) \\ &= \delta_X(\sum_{l,m} g_{il}g^{-1}_{mj}T_{lm}) \\ &= \sum_{l,m} g_{il}g^{-1}_{mj}\delta_X(T_{lm}) \\ &= \sum_{l,m} g_{il}g^{-1}_{mj}X_{lm} = (gXg^{-1})_{ij}.\end{aligned}$$

Άρα (Ad $g)(\delta_X) = \delta_{gxg^{-1}}$ και η Ad g για την GL_n είναι απλώς η συζυγία με το g στην $\mathfrak{gl}_n$, και από την επισήμανση που κάναμε πριν από το παράδειγμα, το ίδιο θα ισχύει και για κάθε κλειστή υποομάδα $G \leq \mathrm{GL}_n$.

Θα τελειώσουμε αυτή την εννότητα της adjoint αναπαράστασης της G, αναφέροντας ένα αποτέλεσμα ([3], πορισμα 5.4.7]) το οποίο θα είναι απαραίτητο στην μελέτη της δομής των reductive ομάδων και αφορά την δράση ενός τόρου στην Lie(G).

Πρόταση .16.2. *Έστω G μία συνεκτική γραμμική αλγεβρική ομάδα και $S \leq G$ ένας υποτόρος της G. Τότε (σύμφωνα με την ταύτηση του Θεωρήματος 15.6)*

$$\mathrm{Lie}(C_G(S)) = C_{\mathrm{Lie}(G)}(S) := \{X \in \mathrm{Lie}(G) \mid \mathrm{Ad}\,(s)X = X \text{ για κάθε } s \in S\}.$$

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στη διάσταση $\dim G$ ξεκινόντας με την τετριμμένη ομάδα. Αν η S δρα τετριμμένα στην $\mathfrak{g}$, το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 23.11

Σε διαφορετική περίπτωση, διαλέγουμε $s \in S$ τέτοιο ώστε το σύνολο των σταθερών σημείων του s στην $\mathfrak{g}$ να είναι ένας γνήσιος υπόχωρος της $\mathfrak{g}$. Από το Θεώρημα

23.11 αυτός ο υπόχωρος είναι η άλγεβρα Lie της ομάδας των σταθερών σημείων X^s του s δρώντας στην G. Αυτή είναι υποομάδα μικρότερης διάστασης. Εφόσον ο S είναι αβελιανή ομάδα, έχουμε ότι $\dim C_G(S) = \dim C_{(X^s)^0}(S)$ και τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την υπόθεση επαγωγής. □

Παράδειγμα
Θα εφαρμόσουμε την προηγούμενη πρόταση για $G = \mathrm{GL}_n$. Έστω $m \geq 1$ και S ο $(n-m+1)$-διάστατος υποτόρος $\{\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \mid t_i = t_j$ για $1 \leq i, j \leq m\}$. Τότε:

$$C_G(S) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{m+1} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathrm{GL}_m,\ t_{m+1}, \ldots, t_n \in k^\times \right\}$$

Το ιδεώδες του $k[G] = k[T_{ij}, \mathrm{det}(T_{ij})^{-1}]$ που ορίζει την $C_G(S)$ είναι το:

$$(T_{ij} \mid i \neq j,\ i > m \text{ ή } j > m)$$

Συνεπώς η $\mathrm{Lie}(C_G(S))$ μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο των πινάκων

$$\left\{ \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{m+1} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \;\middle|\; X \in \mathfrak{gl}_m,\ \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n \in k \right\}$$

το οποίο είναι ακριβώς η $C_{\mathfrak{gl}_n}(S)$.

Η πρόταση 16.2 όμως δεν μπορεί να γενικευτεί αντικαθιστώντας τον τόρο με μία τυχαία κλειστή υποομάδα H της G. (δες [1] άσκηση 10.27 (d)).

Κεφάλαιο 8: Δομή των Reductive Ομάδων

Ο καλύτερος τρόπος να μελετήσουμε τις reductive αλγεβρικές ομάδες είναι μέσω της adjoint δράσης τους στην Άλγεβρα Lie τους. Θα ξεκινήσουμε αυτό το κεφάλαιο διασπώντας την Άλγεβρα Lie με βάση την δράση ενός maximal τόρου. Τότε ως προϋπόθεση για την υπόθεση μίας ημιαπλής ομάδας, θα θεωρήσουμε τις μικρότερες μη επιλύσιμες ομάδες με κάποιες επιπλέον λεπτομέριες.

.17 Διάσπαση σε Χώρους Ριζών

Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα, $T \leq G$ ένας maximal τόρος της G. Υποθέτουμε ότι $\dim(T) \geq 1$, το οποίο είναι για παράδειγμα η περίπτωση που $G \neq 1$ και G reductive. Γράφουμε $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ για την Άλγεβρα Lie της G. Η εικόνα του T υπό την adjoint αναπαράσταση Ad $T \leq GL(\mathfrak{g})$ είναι το σύνολο των ημιαπλών στοιχείων που μετατίθενται, επομένως μπορούν όλα να διαγωνοποιηθούν ταυτόχρονα. Για $\chi \in X(T)$ γράφουμε:

$$\mathfrak{g}_\chi = \{v \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{Ad}\ t)(v) = \chi(t)v \text{ για κάθε } t \in T\}$$

για τους κοινούς T-ιδιόχωρους της $\mathfrak{g}$. Τότε είναι $\mathfrak{g} = \oplus_{\chi \in X(T)} \mathfrak{g}_\chi$.

Ορισμός .17.1. *Το σύνολο των μη μηδενικών χαρακτήρων με μη μηδενικό ιδιόχωρο*

$$\Phi(G) := \{\chi \in X(T) \mid \chi \neq 0, \mathfrak{g}_\chi \neq 0\}$$

που προκύπτει από την παραπάνω διάσπαση καλείται σύνολο ριζών της G ως προς τον T και $W = N_G(T)/C_G(T)$ είναι η ομάδα Weyl της G ως προς τον τόρο T. (επίσης θα συμβολίζεται και με $W_G(T)$).

Από το Θεώρημα 8.8 η ομάδα Weyl είναι πεπερασμένη.

Παράδειγμα

Θα βρούμε το $\Phi(G)$ για κάποιες συνεκτικές reductive ομάδες G.

(1) Έστω $G = \mathrm{GL}_n$, με Άλγεβρα Lie $\mathfrak{gl}_n$ (από προηγούμενο παράδειγμα). Τότε επίσης από προηγούμενο παράδειγμα η adjoint δράση της G στην $\mathfrak{gl}_n$ είναι με συζυγία. Έστω $T = D_n$, τότε $\mathrm{Lie}(T)$ είναι το σύνολο των διαγώνιων πινάκων στην $\mathfrak{gl}_n$ (δες παράρτημα Μέρος Β). Έστω $E_{ij} \in \mathfrak{gl}_n$ να είναι οι $n \times n$ πίνακες των οποίων η (l, m) θέση τους είναι $\delta_{il}\delta_{jm}$. Με απλές πράξεις παίρνουμε ότι

$$Ad(\mathrm{diag}(t_1 \ldots, t_n))(E_{ij}) = t_i t_j^{-1} E_{ij}.$$

Συνεπώς ο χαρακτήρας $\chi_{ij} : T \to \mathbf{G}_m,\ \chi_{ij}(\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)) = t_i t_j^{-1}$, είναι ρίζα της G τότε και μόνο τότε όταν $i \neq j$. Επιπλέον $\mathfrak{gl}_n = \bigoplus_{i \neq j} \langle E_{ij} \rangle \oplus \mathrm{Lie}(T)$ και η T δρα τετριμμένα στην $\mathrm{Lie}(T)$. Άρα η G έχει το σύνολο ριζών

$$\Phi(G) = \{\chi_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j\},$$

τάξης $|\phi(G)| = n(n-1)$. Παρατηρούμε ότι όλοι οι $\mathfrak{g}_a,\ a \in \Phi(G)$, είναι μονοδιάστατοι. Η ομάδα Weyl είναι

$$\begin{aligned} W = N_G(T)/T &= (\text{μονώνυμοι πίνακες})/T \\ &\cong (\text{πίνακες μεταθέσεων}) \cong \mathfrak{S}_n \end{aligned}$$

η συμμετρική ομάδα τάξεως n.

(2) Έστω $G = \mathrm{SL}_n$. Τότε επίσης δείξαμε ότο $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n) \cong \mathfrak{sl}_n$, όπως και ότι η δράση της G στην $\mathrm{Lie}(G)$ είναι με συζυγία. Τότε ως προς τον maximal τόρο $D_n \cap \mathrm{SL}_n$, όπως και προηγουμένως παίρνουμε ότι $\Phi(G) = \{\chi_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j\}$.

Η δομή της αρχικής ομάδας G μεταφέρεται και στην ομάδα του Weyl W, η οποία δρα φυσιολογικά στην ομάδα των χαρακτήρων $X(T)$, όπως και στην ομάδα των συγχαρακτήρων $Y(T)$ μέσω

$$\begin{aligned} &(w.\chi)(t) := \chi(t^w) && \text{για κάθε } w \in W,\ \chi \in X(T),\ t \in T, \\ &(w.\gamma)(c) :=^w (\gamma(c)) := \gamma(c)^{w^{-1}} && \text{για κάθε } w \in W,\ \gamma \in Y(T),\ c \in \mathbf{G}_m. \end{aligned}$$

Οι παραπάνω δράσεις αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι πιστές και επιπλέον είναι συμβατές με το ζευγάρωμα $\langle\ ,\ \rangle : X(T) \times Y(T) \to \mathbb{Z}$ όπως ορίστηκε στο παράδειγμα της ενότητας 8 στη σελίδα 19:

Πρόταση .17.2. *Για κάθε $w \in W,\ \chi \in X(T),\ \gamma \in Y(T)$ έχουμε ότι:*

$$\langle w.\chi, \gamma \rangle = \langle \chi, w^{-1}.\gamma \rangle$$

.

Απόδειξη. $\langle w.\chi, \gamma \rangle = \langle \chi, w^{-1}.\gamma \rangle \iff t^{\langle w.\chi, \gamma \rangle} = t^{\langle \chi, w^{-1}.\gamma \rangle} \iff$
$(w.\chi)(\gamma) = \chi(w^{-1}.\gamma) \iff \chi(\gamma(c)^w) = \chi(\gamma(c)^{(w^{-1})^{-1}} \iff$
$\chi(\gamma(c)^w) = \chi(\gamma(c))^w$ που ισχύει. ∎

Τώρα ισχυριζόμαστε ότι η W σταθεροποιεί το σύνολο ριζών $\Phi(G) \subseteq X(T)$. Πράγματι για $n \in N_G(T),\ a \in \Phi(G)$ και $v \in \mathfrak{g}_a,\ (\mathrm{Ad}\ n)(v)$ είναι πάλι ένα κοινό ιδιοδιάνυσμα για κάθε στοιχείο του T, εφόσον

$$\begin{aligned} (\mathrm{Ad}\ t \mathrm{Ad}\ n)(v) &= (\mathrm{Ad}\ n \mathrm{Ad}\ (n^{-1}tn))(v) \\ &= \mathrm{Ad}\ n(a(n^{-1}tn)v) \\ &= a(n^{-1}tn)(\mathrm{Ad}\ n)(v) \quad \text{για κάθε } t \in T. \end{aligned}$$

Εφόσον υπάρχει $t \in T$ τέτοιο ώστε $a(n^{-1}tn) \neq 1$, μόλις αποδείξαμε το παρακάτω:

Πρόταση .17.3. *Έστω G μία reductive ομάδα με maximal τόρο T, σύνολο ριζών Φ και Άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Τότε για κάθε $a \in \Phi,\ n \in N_G(T)$ και $w = nC_G(T) \in N_G(T)/C_G(T)$ έχουμε ότι $((\mathrm{Ad}\ n)(\mathfrak{g}_a) \subseteq \mathfrak{g}_{w.a}$. Δηλαδή η Φ είναι W-αναλλοίωτη.*

.18 Ημιαπλές Ομάδες Τάξης 1

Έστω G μία συνεκτική μη επιλύσιμη ομάδα. Τότε $\mathrm{rk}(G) \geq 1$ και $\dim(G) \geq 3$ από τα πορίσματα 6.2 και 14.2. Σε αυτή την ενότητα θα υποθέτουμε ότι $\mathrm{rk}(G) = 1$.

Έστω B μία υποομάδα Borel της G και $T \leq B$ ένας maximal τόρος τέτοιος ώστε $\dim(T) = 1$ και $T \cong \mathbf{G}_m$. Η ομάδα Weyl $W = N_G(T)/C_G(T)$ δρα πιστά ως ομάδα αυτομορφισμών αλγεβρικής ομάδας στον $T \cong \mathbf{G}_m$, επομένως, $|W| \leq 2$ από την πρόταση 23.4. Τώρα θα δούμε μία πολύ σημαντική πρόταση της οποίας η απόδειξη είναι γεωμετρική και θα παραληφθεί εδώ.

Πρόταση .18.1. *Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα συνεκτική, μη επιλύσιμη, τάξης 1 και B μία υποομάδα Borel της. Τότε $|W| = 2$ και $\dim(G/B) = 1$.*

Το παραπάνω αποτέλεσμα έχει μία άμεση εφαρμογή στη μελέτη ημιαπλών ομάδων τάξης 1 ([2],Θεώρημα 25.3]):

Πρόταση .18.2. *Έστω G μία ημιαπλή γραμμική αλγεβρική ομάδα τάξης 1. Τότε υπάρχει ένας επιμορφισμός $\phi : G \to \mathrm{PGL}_2$ με πεπερασμένο πυρήνα; δηλαδή $\dim(G) = 3$.*

Απόδειξη. (Σκιαγράφηση)
Αφού η G είναι ημιαπλή τότε είναι μη-επιλύσιμη από παλίοτερο παράδειγμα. Από το Θεώρημα 13.3 και την προηγούμενη πρόταση, η G/B είναι προβολική πολλαπλότητα διάστασης 1. Στην πραγματικότητα αποδεικνύεται ότι $G/B \cong \mathbb{P}^1$. Επιπλέον, η G δρα ως αυτομορφισμός της G/B (με αριστερό πολλαπλασιασμό), άρα επάγεται ένας μορφισμός αλγεβρικών ομάδων $\phi : G \to \mathrm{Aut}_a(\mathbb{P}^1) \cong \mathrm{PGL}_2$.

Έστω $g \in \ker(\phi)$. Τότε $ghB = hB$ για κάθε $h \in G$, το οποίο συνεπάγεται ότι $g \in B^h$ για κάθε $h \in G$. Άρα $(\ker\phi)^0 \subseteq (\bigcap_h B^h)^0 = R(G) = 1$ από την πρόταση 14.9. Δηλαδή ο $\ker\phi$ είναι πεπερασμένος. Έχουμε ήδη επισημάνει ότι $\dim(G) \geq 3$, άρα

$$3 \leq \dim(G) = \dim(\phi(G)) \leq \dim(\mathrm{PGL}_2) = 3,$$

άρα $\dim(G) = 3$ και η ϕ είναι επί από το πόρισμα 4.2 και την πρόταση 4.3. □

Έτσι λοιπόν οδηγηθήκαμε στο να λάβουμε σοβαρά υπόψιν τη δομή της ομάδας τάξης 1, $\mathrm{PGL}_2 = \mathrm{GL}_2/\{aI_2 \mid a \in k^\times\}$. Για να το κάνουμε αυτό θα μελετήσουμε την δράση της PGL_2 στην Άλγεβρα Lie της, $\mathrm{Lie}(\mathrm{PGL}_2)$. Γράφουμε $\overline{X}$ για την εικόνα του $X \subseteq \mathrm{GL}_2$ υπο την φυσική προβολή $\pi : \mathrm{GL}_2 \to \mathrm{PGL}_2$. Με βάση τη διάσταση, βλέπουμε ότι η $\overline{T_2}$ είναι μία υποομάδα Borel της PGL_2 και $T := \overline{D_2}$ είναι ένας maximal τόρος που περιέχεται στην $\overline{T_2}$. Μία ακόμα υποομάδα Borel που περιέχει την T είναι η εικόνα των κάτω τριγωνικών πινάκων. Από το παράδειγμα (2) στη σελίδα 47 έχουμε ότι

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{PGL}_2) \cong \mathfrak{gl}_2/\{aI_2 \mid a \in k\}.$$

Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε ότι $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Τότε θα έχουμε ότι $\mathfrak{gl}_2/\{aI_2 \mid a \in k\} \cong \mathfrak{sl}_2$ (οι 2×2 πίνακες με μηδενικό ίχνος). Όπως κάναμε και στην προηγούμενη ενότητα, αν ελέγξουμε τη δράση της adjoint αναπαράστασης της PGL_2 στην $\mathrm{Lie}(\mathrm{PGL}_2)$ θα δούμε ότι είναι απλά η φυσική δράση της PGL_2 στην $\mathfrak{sl}_2$ με συζυγία. Τώρα θα βρούμε τη διάσπαση του χώρου ριζών. Σταθεροποιούμε έναν ισομορφισμό

$$\phi :\ \mathbf{G}_m \to T,\ c \mapsto \overline{\begin{pmatrix} c & \\ & 1 \end{pmatrix}}.$$

Τότε

$$\mathrm{Ad}\,\phi(c)\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{Ad}\,\phi(c)\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

και ο $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ σταθεροποιείται από την Ad $\phi(c)$. Ορίζουμε $\beta, \gamma \in X(T)$ με

$$\beta\left(\overline{\begin{pmatrix} c & \\ & 1 \end{pmatrix}}\right) = c,\ \ \gamma\left(\overline{\begin{pmatrix} c & \\ & 1 \end{pmatrix}}\right) = c^{-1}$$

Εφόσον η $X(T)$ είναι προσθετική, έχουμε ότι $\gamma = -\beta$, άρα η $\mathfrak{sl}_2$ διασπάται ως το ευθύ άθροισμα

$$\mathfrak{sl}_2 = (\mathfrak{sl}_2)_0 \oplus (\mathfrak{sl}_2)_\beta \oplus (\mathfrak{sl}_2)_{-\beta}$$

των κοινών ιδιόχωρων της Ad T, με

$$(\mathfrak{sl}_2)_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ (\mathfrak{sl}_2)_\beta = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,\ (\mathfrak{sl}_2)_{-\beta} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι $X(T) = \langle \beta \rangle$.

Στην πραγματικότητα, ο χαρακτήρας β "προκύπτει εγγενώς" στην PGL_2. Δηλαδή υπάρχει μία υποομάδα της PGL_2 της οποίας η Άλγεβρα Lie αντιστοιχεί στον δεύτερο υπόχωρο της παραπάνω διάσπασης: Θεωρούμε την εικόνα της U_2 εντός της PGL_2. Αυτό είναι λοιπόν το ταυτοδύναμο ριζικό της υποομάδας Borel $\overline{T_2}$ που επιλέξαμε, συνεπώς κανονικοποιείται με την T. Σταθεροποιούμε έναν ισομορφισμό

$$u : \mathbf{G}_a \to \overline{U}_2, \quad u(c) = \overline{\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Τότε το $tu(c)t^{-1} = u(\beta(t)c)$ για κάθε $c \in k,\ t \in T$. Τέλος έχουμε ότι η $W = N_G(T)/T$ είναι τάξης 2, με αντιπροσώπους $\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ Με όμοιο τρόπο προκύπτει και η περίπτωση όπου $\mathrm{char}(k) = 2$.

Τώρα θα θεωρήσουμε G να είναι μία τυχαία ημιαπλή ομάδα τάξης 1; θα τελειοποιήσουμε την πρόταση 18.2 και θα πάρουμε πληροφορίες ως προς τη δομή της οι οποίες μας θυμίζουν ακριβώς αυτά που βρήκαμε από πάνω για την PGL_2. Έστω T ένας maximal τόρος ο οποίος περιέχεται σε μία υποομάδα Borel B της G. Έστω $U = B_u$ και διαλέγω $n \in N_G(T) \setminus C_G(T)$, με $n^2 \in C_G(T)$ και $ntn^{-1} = t^{-1}$ για $t \in T$ (δες πρόταση 18.1). Γράφουμε $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$.

Πρόταση .18.3. *Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι:*

(1) $\dim(G) = 3,\ \dim(B) = 2,\ \dim(U) = 1,\ C_G(T) = T$ *και* $U \cap nUn^{-1} = 1$.
(2) Υπάρχει μοναδικό $a \in X(T)\setminus\{0\}$ *τέτοιο ώστε* $\mathfrak{g}_a = \mathrm{Lie}(U)$ *και* $\mathfrak{g}_{-a} = \mathrm{Lie}(nUn^{-1})$, *και* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(T) \oplus \mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_{-a}$.

Απόδειξη. Θα τα αποδείξουμε και τα 2 μαζί.
Από προτάσεις 18.1 και 18.2, έχουμε ότι $\dim(G) = 3$ και $\dim(G/B) = 1$. Αφού η G είναι μη επιλύσιμη, η B δεν είναι τόρος (πόρισμα 14.2), άρα $\dim(U) = 1$. Από πρόταση 14.10 και το Θεώρημα 14.11 (1), η $C_G(T)$ είναι μηδενοδύναμη και συνεκτική,

άρα περιέχεται σε μία υποομάδα Borel της G. Αφού $\dim(B) = 2$, είναι είτε $C_G(T) = T$ ή $C_G(T)$ είναι μία υποομάδα Borel της G. Στην δεύτερη περίπτωση η G θα ήταν επιλύσιμη από το πόρισμα 14.2, άρα $C_G(T) = T$.
Για το τελευταίο επιχείρημα:

Από το Θεώρημα 7.2, η U είναι ισόμορφη με την $\mathbf{G}_a$. Έστω $u : \mathbf{G}_a \to U$ ένας ισομορφισμός. Αφού η T κανονικοποιεί την U, δρα με αυτομορφισμούς. Αποδεινύεται ότι (δες [1] άσκηση 10.10) οι αυτομορφισμοί της $\mathbf{G}_a$ είναι απλά πολλαπλασιασμοί με μη μηδενικά βαθμωτά, άρα υπάρχει $a \in X(T)$ τέτοιο ώστε $tu(c)t^{-1} = u(a(t)c)$ για κάθε $t \in T$ και $c \in k$. Επιπλέον το a είναι μη τετριμμένο αφού $C_G(T) = T$. Τώρα θα διαφορίσουμε την δράση της T στη U και θα πάρουμε:

$$\text{Ad }(t)Y = a(t)Y, \quad \text{για κάθε } \ t \in T, Y \in \text{Lie}(U).$$

Συγκεκριμένα, η $\text{Lie}(U)$ περιέχεται στον a-ιδιόχωρο $\mathfrak{g}_a$ της δράσης της T στην $\mathfrak{g}$. Αφού η συζυγία με n απεικονίζει την U στην nUn^{-1}, η $\text{Lie}(nUn^{-1})$ περιέχεται στην $\mathfrak{g}_{-a}$ από την πρόταση 17.3 και τον ορισμό του n. Επομένως το (2) έπεται αν συγκρίνουμε διαστάσεις.

Τέλος, $\text{Lie}(U \cap nUn^{-1}) \subseteq \text{Lie}(U) \cap \text{Lie}(nUn^{-1}) = \mathfrak{g}_a \cap \mathfrak{g}_{-a} = 0$, συνεπώς η ομάδα $U \cap nUn^{-1}$ είναι πεπερασμένη από το Θεώρημα 15.3 (2), ταυτοδύναμη και κανονικοποιείται από την T. Άρα αυτή η ομάδα περιέχεται στην $C_G(T) = T$ (δες [1] άσκηση 10.4). Άρα $U \cap nUn^{-1} = 1$. □

Από όλα τα παραπάνω πλέον μπορούμε να ταξινομήσουμε όλες τις ημιαπλές ομάδες τάξης 1. ([3], Θεώρημα 7.2.4]):

Θεώρημα .18.4. *Κάθε ημιαπλή ομάδα τάξης 1 είναι ισόμορφη με την* SL_2 *ή την* PGL_2.

Παράδειγμα
Το παράδειγμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί και αργότερα, ας κοιτάξουμε την περίπτωση της SL_2. Από προηγούμενο παράδειγμα παίρνουμε την ίδια διάσπαση ριζών

$$\mathfrak{sl}_2 = (\mathfrak{sl})_0 + \mathfrak{sl}_a + \mathfrak{sl}_{-a}$$

της $\text{Lie}(\text{SL}_2) = \mathfrak{sl}_2$ ως προς την $T = D_2 \cap \text{SL}_2$ και την δράση της PGL_2, τώρα αν $a \in X(T)$ ορίζεται ως $a \begin{pmatrix} c & \\ & c^{-1} \end{pmatrix} = c^2$. Παρατηρούμε σε αυτή την περίπτωση ότι $\langle a \rangle = 2X(T)$.

Σημείωση: Στους υπολογισμπύς μας για την PGL_2 προηγουμένως βρήκαμε επίσης δύο ρίζες, τις $\pm\beta$ και μία ομάδα Weyl τάξης 2 που τις μεταθέτει. Αυτό σημαίνει ότι οι ομάδες SL_2 και PGL_2 έχουν την ίδια ομάδα Weyl και ''ισομορφικά συστήματα ριζών''.

Θα τελειώσουμε αυτή την ενότητα επεκτείνοντας τα αποτελέσματά μας σε ομάδες τάξης 1:

Πρόταση .18.5. *Έστω G μία συνεκτική, reductive ομάδα, ημιαπλής τάξης 1, $T \leq G$ ένας maximal τόρος, $Z = Z(G)$ και $G' = [G, G]$, τότε:*

(1) $C_G(T) = T$ και έτσι $Z \leq T$.
(2) Η G' είναι ημιαπλή τάξης 1 με maximal τόρο $T \cap G'$ και $G = G'Z$.

Απόδειξη. Από πρόταση 14.12 (1), το ριζικό $R(G) = Z(G)^0$ είναι τόρος, άρα περιέχεται στον T, η G' είναι ημιαπλή και η $G' \cap R(G)$ είναι πεπερασμένη. Αφού η $G/R(G)$ έχουμε υποθέσει ότι είναι ημιαπλή τάξης 1, έχουμε ότι $\dim(G/R(G)) = 3$, από πρόταση 18.2 και η $G/R(G)$ είναι ισόμορφη με την SL_2 ή την PGL_2 και αυτοκεντρικοποιείται. Άρα η T και η $C_G(T)$ έχουν την ίδια εικόνα εντός της $G/R(G)$ υπό την κανονική προβολή, άρα $T \leq C_G(T) \leq TR(G) = T$.

Αφού η απεικόνιση γινόμενο $R(G) \times G' \to G$ έχει πεπερασμένο πυρήνα, έχουμε ότι

$$\dim G' \leq \dim G - \dim R(G) = \dim G/R(G) = 3.$$

Από την άλλη, η G' είναι μη επιλύσιμη (δεν είναι η $G/R(G)$, άρα ούτε και η G), άρα $\dim G' = 3$ από το πόρισμα 14.2. Τώρα, έστω T ένας maximal τόρος της G'. Συγκρίνοντας τις τάξεις, παίρνουμε ότι $T_1R(G)$ είναι maximal τόρος της G, άρα παίρνοντας συζυγία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T = T_1R(G)$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι maximal τόροι των $\mathrm{SL}_2,\ \mathrm{PGL}_2$ κανονικοποιούνται, συμπαιρένουμε ότι $T \cap G' = T_1$. □

.19 Δόμή συνεκτικών reductive ομάδων

Θα αρχίσουμε αυτή την παράγραφο με τον ακόλουθο χαρακτηρισμό του ταυτοδύναμου ριζικού μίας αυθαίρετης συνεκτικής ομάδας, του οποίου η απόδειξη βασίζεται σε αποτελέσματα της δομής ομάδων ημιαπλής τάξης 1 ([2] Θ.26.1):

Θεώρημα .19.1. *Έστω G μία συνεκτική γραμμική αλγεβρική ομάδα με maximal τόρο T. Τότε η $R_u(G)$ είναι η συνεκτική συνιστώσα της μοναδας της τομής των ταυτοδύναμων μερών των υποομάδων Borel οι οποίες περιέχουν την T.*

Παρατηρούμε ότι το πρώτο περιέχεσθαι προκύπτει από την πρόταση 14.9. Για μία reductive ομάδα παίρνουμε ότι:

Πόρισμα .19.2. *Έστω G συνεκτική και reductive.*

(1) Αν S είναι υποτόρος της G, τότε $C_G(S)$ είναι συνεκτική και reductive.
(2) Αν T είναι maximal τόρος της G, τότε $C_G(T) = T$.

Απόδειξη. (1)Έπεται άμεσα εφαρμόζοντας το προηγούμενο Θεώρημα σε έναν maximal τόρο της G που περιέχει την S και το Θεώρημα 14.11. (2) Προκύπτει από το (1) με $S = T$, την πρόταση 14.10 και το παράδειγμα (2) στη σελίδα 39. □

Παράδειγμα
Έστω $G = \mathrm{GL}_n,\ S \leq G$ ένας τόρος διάστασης $m = \dim(S)$ (άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας $S \leq D_n$). Τότε η $C_G(S) \cong S \times \mathrm{GL}_{n-m}$ είναι συνεκτική, reductive και $C_G(S) = S$ αν $m = n$ (δες παράδειγμα στη σελίδα 21-22).

Τώρα θα μελετήσουμε αυθαίρετες reductive αλγεβρικές ομάδες μέσω της adjoint δράσης τους στην Άλγεβρα Lie. Έστω G μία μη επιλύσιμη συνεκτική reductive αλγεβρική ομάδα. Θα κρατήσουμε τους συμβολισμούς T, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G),\ \Phi$ και W όπως και στην ενότητα 18.

Έστω $a \in \Phi$; τότε $T_a := (\ker a)^0 \leq T$ είναι υποτόρος του T από την πρόταση 8.7, συνδυάστασης 1, και θέτω $C_a := C_G(T_a)$ την κεντρικοποιούσα του.

Πρόταση .19.3. *Έστω G μία μη επιλύσιμη, συνεκτική, reductive αλγεβρική ομάδα. Τότε όλες οι C_a $a \in \Phi$ είναι συνεκτικές, reductive, μη επιλύσιμες και $G = \langle C_a \mid a \in \Phi \rangle$.*

Απόδειξη. Οι $C_a,\ a \in \Phi$, είναι συνεκτικές και reductive από το πόρισμα 19.2 (1). Από την πρόταση 3.8, παράγουν μία κλειστή συνεκτική υποομάδα H της G. Επιπλέον, από την πρόταση 16.2, η $\mathrm{Lie}(C_a) = \mathrm{Lie}(C_G(T)) = C_{\mathfrak{g}}(T_a)$ περιέχει και τον χώρο ριζών $\mathfrak{g}_a$ και την $\mathrm{Lie}(T)$ (αφού $\mathrm{Lie}(T) = \mathrm{Lie}(C_G(T)) = C_{\mathfrak{g}}(T)$). Αφού αυτοί οι 2 υπόχωροι παράγουν την $\mathfrak{g}$, έχουμε ότι $\mathrm{Lie}(H) = \mathrm{Lie}(G)$, άρα $\dim(H) = \dim(G)$, άρα $H = G$ από την πρόταση 4.3.

Η reductive ομάδα C_a είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν είναι τόρος. Αλλά μόλις δείξαμε ότι ότι η διάσταση της κεντρικοποιούσας της T_a είναι μεγαλύτερη από την $\dim(T)$. □

Εφόσον η C_a είναι συνεκτική, reductive, μη επιλύσιμη και $T_a < R(C_a)$, βλέπουμε ότι η C_a είναι ημιαπλής τάξης 1 και από την πρόταση 18.5 (2) βλέπουμε ότι η παράγωγος υποομάδα $G_a := [C_a, C_a]$ είναι ημιαπλής τάξης 1 με maximal τόρο $T_1 := T \cap G_a$. Επιπλέον:

Πρόταση .19.4. *Για $a \in \Phi$ έχουμε ότι* $\mathrm{Lie}(C_a) = \mathrm{Lie}(T) \oplus \mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_{-a}$ *και* $\dim \mathfrak{g}_a = 1$.

Απόδειξη. Μπορούμε να διασπάσουμε την $\mathrm{Lie}(C_a) = \mathrm{Lie}(T) \oplus \mathfrak{h}$ με $\mathfrak{h}$ έναν 2-διάστατο T-αναλλοίωτο υπόχωρο ο οποίος περιέχει το σώμα ριζών $\mathfrak{g}_a$ του $\mathfrak{g}$. Από την πρόταση 18.3 (2), έχουμε ότι $\mathrm{Lie}(G_a) = \mathrm{Lie}(T) \oplus \mathrm{Lie}(G_a)_\beta \oplus \mathrm{Lie}(G_a)_{-\beta}$ για κάποιο $\beta \in X(T_1) \setminus \{0\}$. Συγκρίνοντας τον με τους T_1-ιδιόχωρους της $\mathrm{Lie}(C_a)$, βλέπουμε ότι $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{-\beta}$, δηλαδή $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{a_1} \oplus \mathfrak{g}_{a_2}$ ως T-πρότυπο, με $a_i \in X(T)$ και $a_1|_{T_1} = \beta,\ a_2|_{T_1} = -\beta$. Αφού και οι δύο a_i έχουν τον T_a στον πυρήνα τους, είναι ανάλογοι. Αφού ένας από αυτούς πρέπει να είναι α ο ισχυρισμός δείχτηκε. □

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε το πρώτο μεγάλο Θεώρημα δομής για reductive ομάδες (δες επίσης ([3],Θ 8.1.1, Πορ.8.1.2, 8.1.3) ή ([2], Θ 26.3]):

Θεώρημα .19.5. *Έστω G μία συνεκτική reductive ομάδα, $T \leq G$ ένας maximal τόρος της G, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ και $\Phi = \Phi(G)$. Τότε:*

(1) $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(T) \oplus \bigoplus_{a \in \Phi} \mathfrak{g}_a$ *με* $\dim \mathfrak{g}_a = 1$ *για κάθε $a \in \Phi$ και* $\mathrm{Lie}(T) = \mathfrak{g}_0$.
(2) $\dim G = \dim \mathrm{Lie}(G) = |\Phi| + \mathrm{rk}(G)$.
(3) Για κάθε $a \in \Phi$ υπάρχει ένας μορφισμός αλγεβρικών ομάδων $u_a : \mathbf{G}_a \to G$, ο οποίος επάγει έναν ισομορφισμό στο $u_a(\mathbf{G}_a)$ τέτοιο ώστε $tu_a(c)t^{-1} = u_a(a(t)c)$ για κάθε $t \in T,\ c \in k$. Αν u' είναι μορφισμός με τις ίδιες ιδιότητες τότε, υπάρχει μοναδικό $a \in k^\times$ τέτοιο ώστε $u'(c) = u_a(ac)$ για $c \in k$. Επιπλέον, $im(du_a) = \mathfrak{g}_a$.
(4) $U_a := im(u_a)$ είναι η μοναδική μονοδιάστατη, συνεκτική, ταυτοδύναμη υποομάδα της G η οποία κανονικοποιείται από την T με $\mathrm{Lie}(U_a) = \mathfrak{g}_a$.
(5) Για $w \in W$ με αντίστροφη εικόνα $n \in N_G(T)$, έχουμε ότι $nU_an^{-1} = U_{w.a}$.
(6) $[C_a, C_a] = \langle U_a, U_{-a} \rangle$.
(7) $G = \langle T, U_a \mid a \in \Phi \rangle$.
(8) $Z(G) = \bigcap_{a \in \Phi} \ker a$.

Απόδειξη. Το (1) άρα και το (2) προκύπτουν από τις προτάσεις 16.2 και 19.4. Για το (3), έστω $u_a : \mathbf{G}_a \to G_a$ ο μορφισμός όπως ορίστηκε στην απόδειξη της πρότασης 18.3 ως προς τον τόρο T_1. Τότε για κάθε $t \in T,\ c \in k$, έχουμε ότι $tu_a(c)t^{-1} = u_a(a(t)c)$ το ζητούμενο, αφού $T = T_1 \cdot \ker(a)$. Το επιχείρημα ότι $im(du_a) = \mathfrak{g}_a$ προκύπτει όπως την απόδειξη στο μέρος που αναφέρεται. Έστω $U_a := im(u_a)$. Υποθέτουμε ότι $u' : \mathbf{G}_a \to G$ είναι ένας ομομορφισμός όπως ορίστηκε παραπάνω, τότε προφανώς $V := im(u') \leq C_a$. Αφού

$$tu'(c)t^{-1}u'(c)^{-1} = u'(a(t)c)u'(-c) = u'((a(t)-1)c) \ \text{ για } t \in T,\ c \in k,$$

έχουμε ότι η $V \leq G_a$, μία μονοδιάστατη συνεκτική ταυτοδύναμη υποομάδα που κανονικοποιείται από τον T. Τότε T_1V είναι μία υποομάδα Borel της G_a, η οποία περιέχει την T_1. Όμως από την πρόταση 18.3 υπάρχουν ακριβώς δύο τέτοιες υποομάδες Borel της G_a, και συγκεκριμένα οι T_1U_a και T_1U_{-a}. (Κάθε υποομάδα Borel που περιέχει την T, δημιουργεί έναν αντοίστοιχο weight space στην $\text{Lie}(G_a)$.). Αφού η T δρα μέσω του α,τότε θα είναι $V = U_a$. Συνεπώς ο $u^{-1} \circ u'$ είναι αυτομορφισμός της $\mathbf{G}_a$, άρα δίνεται από ένα γινόμενο με μη μηδενικό βαθμωτό. Άρα έπεται το (3).

Αν ο V είναι μία μονοδιάστατη κλειστή συνεκτική ταυτοδύναμη υποομάδα που κανονικοποιείται από την T, με $\text{Lie}(V) = \mathfrak{g}_a$, τότε η δράση του T στην V θα είναι ο χαρακτήρας του α άρα $V \leq C_a = C_G(T_a)$, απ΄όπου και προκύπτει το (4) όπως πριν.

Για $n \in N_G(T)$, nU_an^{-1} είναι μία μονοδιάστατη, κλειστή, συνεκτική, ταυτοδύναμη υποομάδα που κανονικοποιείται από τον T και ο T δρα με $w.a$. Άρα λόγο της μοναδικότητας του (4), έπεται το (5). Το (6) προκύπτει εφαρμόζοντας το Θεώρημα 18.4 στην ομάδα τάξης 1 G_a; το (7) προκύπτει από το (6) και την πρόταση 19.3.

Τέλος, από το (3) και το (7), το δεξί μέλος του (8) περιέχεται στο $Z(G)$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, από το πόρισμα 19.2 έχουμε ότι: $Z(G) \leq C_G(T) \leq T$. Άρα ο αντίστροφος εγκλεισμός έπεται από το (3). $\square$

Ορισμός .19.6. *Η μονοδιάστατη υποομάδα U_a, $a \in \Phi$, του Θεωρήματος 19.5 (4) καλείται η υποομάδα ριζών της G (ως προς τον T) σε σχέση με τον α. Όμοια, ο μονοδιάστατος υπόχωρος $\mathfrak{g}_a$ της $\mathfrak{g}$ καλείται υπόχωρος ριζών.*

.20 Δομή Ημιαπλών Ομάδων

Τώρα θα εστιάσουμε στην περίπτωση των ημιαπλών ομάδων. Για αυτό θα, θα μελετήσουμε τη δράση της W με λίγη παραπάνω λεπτομέρια. Για $a \in \Phi$, έστω $C_a = C_G(T_a)$ να είναι όπως την προηγούμενη ενότητα. Εφόσον ο T_a περιέχεται στο κέντρο της C_a, η κανονική προβολή $C_a \to \tilde{C}_a := C_a/T_a$ επάγει μία 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ $W_{C_a}(T) \cong W_{C_a}(T/T_a)$. Από την πρόταση 18.1, αυτή η όπως θα δούμε αργότερα ομάδα Weyl, είναι τάξης 2. Υπενθυμίζουμε ότι $C_{C_a}(T) = T = C_G(T)$, από το πόρισμα 19.2. Διαλέγω $n_a \in N_{C_a}(T) \setminus C_{C_a}(T)$ και έστω s_a να είναι η εικόνα του n_a στην

$$N_{C_a}(T)/C_{C_a}(T) \leq N_G(T)/C_G(T) = W.$$

Είδαμε στην ενότητα 17 ότι αυτό το n_a δρα με φυσιολογικό τρόπο στον $X = X(T)$ και στον $Y = Y(T)$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι:

Λήμμα .20.1. *Έστω $a \in \Phi$. Τότε:*

(1) Υπάρχει μοναδικό $a^\vee \in Y$ τέτοιο ώστε $s_a.x = x - \langle x, a^\vee \rangle a$ για κάθε $x \in X$. Στην πραγματικότητα $\langle a, a^\vee \rangle = 2$.
(2) Έχουμε ότι $s_a.\gamma = \gamma - \langle a, \gamma \rangle a^\vee$ για κάθε $\gamma \in Y$.
(3) $\text{im}(a^\vee) \subseteq [C_a, C_a]$.

Απόδειξη. Για $\chi \in X$ και $t \in T$ έχουμε ότι

$$(id_X - s_a).\chi(t) = \chi(t)/(s_a.\chi)(t) = \chi(t)/\chi(t^{s_a}) = \chi(tt^{-s_a}).$$

Όμως tt^{-s_a} ανήκει στην τάξης 1 ομάδα $G_a = [C_a, C_a]$, η οποία είναι ισόμορφη με την SL_2 ή την PGL_2 από το Θεώρημα 18.4. Έστω $T_1 := T \cap G_a$, ένας maximal τόρος της G_a από την πρόταση 18.5 (2). Εφόσον $a|_{T_1}$ είναι μία ρίζα του T_1, έχουμε ότι $2X(T_1) \subseteq$

$\langle a|_{T_1}\rangle$ σύμφωνα με το παράδειγμα στη σελίδα 55 (για την περίπτωση που $G_a \cong \mathrm{SL}_2$), αντίστοιχα και για την PGL_2 με υπολογισμούς παίρνουμε ότι $2\chi|_{T_1} = c_\chi a|_{T_1}$ για $c_\chi \in \mathbb{Z}$. Έτσι:

$$2\chi(tt^{-s_a}) = c_\chi a(tt^{-s_a}) = c_\chi(id_X - s_a).a(t) = 2c_\chi a(t),$$

δείχνοντας ότι $(id_X - s_a).\chi = c_\chi a$. Αυτό ορίζει έναν ομομορφισμό $X \to \mathbb{Z},\ \chi \mapsto c_\chi$. Υπολογισμός στην T_1, όπου η s_a δρα με αντιστροφή, μας δείχνει ότι $c_a = 2$. Από την πρόταση 8.4 υπάρχει μοναδικό $a^\vee \in Y$ τέτοιο ώστε $c_\chi = \langle \chi, a^\vee\rangle$, με $s_a.\chi = \chi - \langle \chi, a^\vee\rangle a$ και $\langle a, a^\vee\rangle = c_a = 2$, αποδεικνύοντας το (1).

Για $\chi \in X$ έχουμε από την πρόταση 17.2 και το (1), ότι:

$$\langle \chi, s_a.\gamma\rangle = \langle s_a.\chi, \gamma\rangle = \langle \chi - \langle \chi, a^\vee\rangle a, \gamma\rangle = \langle \chi, \gamma\rangle - \langle a, \gamma\rangle\langle \chi, a^\vee\rangle = \langle \chi, \gamma - \langle a, \gamma\rangle a^\vee\rangle.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε χ, από την πρόταση 8.4 έχουμε ότι $s_a.\gamma = \gamma - \langle a, \gamma\rangle a^\vee$.

Για το (3) απλά παρατηρούμε ότι $a^\vee(c)n_a a^\vee(c)^{-1}n_a^{-1} \in [C_a, C_a]$ για $c \in k^\times$. Όμως από το (1) και το (2) έχουμε ότι $s_a.a^\vee = -a^\vee$, άρα $n_a a^\vee(c)^{-1}n_a^{-1} = a^\vee(c)$. Άρα έχουμε ότι $\mathrm{im}(a^\vee) = \mathrm{im}(2a^\vee) \subseteq [C_a, C_a]$. $\square$

Λέμε ότι $a^\vee$ είναι η coroot που αντιστοιχεί στο α και ορίζουμε

$$\Phi^\vee := \{a^\vee \mid a \in \Phi\}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένα στοιχείο $s \in \mathrm{GL}(V)$, όπου V είναι πεπερασμένης διάστασης πραγματικός διανυσματικός χώρος, καλείται ανάκλαση μεταξύ του $v \in V$, άν το v είναι ιδιοδιάνυσμα του s με ιδιοτιμή -1, και ο s σταθεροποιεί ένα υπερεπίπεδο του V σημειακά. Το λήμμα 20.1 μας δείχνει ότι τα στοιχεία s_a δρουν ως ανακλάσεις στον $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Ας παρατηρήσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα στο s_a για να το έχουμε για αργότερα (για την απόδειξη δες [3] Θεώρημα 8.2.8]):

Πρόταση .20.1. *Η ομάδα Weyl W μίας συνεκτικής reductive ομάδας G παράγεται από τα* $s_a,\ a \in \Phi$.

Η δομή των ημιαπλών ομάδων τώρα δίνεται ως εξής:

Θεώρημα .20.2. *Έστω G μία ημιαπλή ομάδα και T, Φ, U_a όπως το Θεώρημα 19.5. Τότε:*
(1) $G = \langle U_a \mid a \in \Phi\rangle$.
(2) $G = [G, G]$.
(3) Η G έχει πεπερασμένες στο πλήθος μη τετριμμένες minimal κλειστές συνεκτικές κανονικές υποομάδες $G_1, \ldots, G_r$. Επιπλέον, $[G_i, G_j] = 1$ για κάθε $i \neq j$ και η $G_i \cap \prod_{i \neq j} G_j$ είναι πεπερασμένη.
(4) $G = G_1 \cdot \ldots \cdot G_r$ και κάθε G_i είναι απλή αλγεβρική ομάδα.

Θα λέμε ότι μία μη τετριμμένη ημιαπλή αλγεβρική ομάδα καλείται απλή αν η μόνη γνήσια κλειστή συνεκτική κανονική υποομάδα που έχει είναι η τετριμμένη.

Απόδειξη. (1) Έστω $Z = \bigcap_{a \in \Phi} \ker a$. Τότε από το Θεώρημα 19.5 το (3) και το (7), η Z ανήκει στο κέντρο της G συνεπώς είναι πεπερασμένη. Άρα οι ρίζες Φ παράγουν μία υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στην $X(T)$ και στην πραγματικότητα παράγουν τον διανυσματικό χώρο $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Ισχυριζόμαστε ότι το $S := \langle \mathrm{im}(a^\vee) \mid a \in \phi\rangle$ ισούται με T. Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $0 \neq \chi \in X(T)$ τέτοιος ώστε $\chi(S) = 1$. Έτσι $\chi \circ a^\vee = \mathrm{id}$, όπου $\langle x, a^\vee\rangle = 0$ για κάθε $a \in \Phi$. Άρα ο χ σταθεροποιείται από όλες τις ανακλάσεις s_a από το λήμμα 20.1 το (1). Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το $a \in \Phi$

παράγει τον $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Η τελική υπόθεση του (1) προκύπτει από το λήμμα 20.1 το (3) και το Θεώρημα 19.5 τα (7) και (8).

(2) Όπως έχει δειχθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος 19.5 $U_a \leq [C_a, C_a]$ άρα έπεται το (2)

(3) (4) Αν η $G \neq 1$ δεν έχει γνήσιες μη τετριμμένες κλειστές συνεκτικές κανονικές υποομάδες, τότε η G είναι η ίδια απλή, άρα οι υποθέσεις (2) και (3) είναι προφανείς για την G. Άρα ισχυριζόμαστε το αντίθετο και έστω H να είναι μία γνήσια μη τετριμμένη κλειστή συνεκτική κανονική υποομάδα της G. Αφού το ριζικό της H είναι κανονική εντός της G, πρέπει να είναι τετριμμένο άρα η H είναι ημιαπλή. Τώρα διασπάμε το Φ σε $\Phi_1 := \{a \in \Phi \mid U_a \leq H\}$ και $\Phi_2 := \Phi \setminus \Phi_1$; εφόσον η H είναι γνήσια μη τετριμμένη και ημιαπλή, είναι $\Phi_1 \Phi_2 \neq \emptyset$ από το (1).

Ισχυριζόμαστε ότι η υποομάδα $H' := \langle U_\beta \mid \beta \in \Phi_2 \rangle$ μετατίθεται με την H. Για αυτό, έστω T_H ένας maximal τόρος της H; αφού όλοι αυτοί οι τόροι είναι συζυγείς στην H και η H είναι κανονική εντός της G, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T_H \leq T$. Για $\beta \in \Phi_2$ έχουμε από το Θεώρημα 19.5 το (3) ότι $tu_\beta(c)t^{-1}u_\beta(-c) = u_\beta((\beta(t)-1)c) \in H$ για κάθε $t \in T_H$ και $c \in k^\times$. Άρα το ότι $\beta \in \Phi_2$ συνεπάγεται ότι $T_H \leq \ker \beta$, άρα ο T_H κεντρικοποιεί τα U_β.
Στη συνέχεια για $a \in \Phi$ ορίζουμε

$$u_y(c) := [u_\beta(y), u_a(c)]u_a(c) = u_\beta(y)u_a(c)u_\beta(-y) \text{ για } c, y \in k.$$

Τότε $u_y(c) \in H$ για κάθε y και $tu_y(c)t^{-1} = u_y(a(t)c)$ για κάθε $t \in T_H$. Άρα η απεικόνιση $\mathbf{G}_a \to G,\ c \mapsto u_y(c)$ πληρεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 19.5 (3) και παίρνοντας το κομμάτι για τη μοναδικότητα, υπάρχει $a_y \in k^\times$ τέτοιο ώστε $u_y(c) = u_a(a_y c)$ για κάθε $c \in k$. Αυτό ορίζει έναν μορφισμό στον αφινικό 1-χώρο $a : k \to k,\ y \mapsto a_y$ με $a_0 = 1$, του οποίου η εικόνα δεν περιέχει το 0. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο όταν ο α είναι η σταθερή συνάρτηση 1 άρα U_β και U_a μετατίθονται. Έτσι $[H, H'] = 1$ και $G = H \cdot H'$ από το (1).

Τέλος, παρατηρούμε ότι η $H \cap H'$ πρέπει να είναι πεπερασμένη εφόσον είναι κλειστή κανονική υποομάδα της H, η οποία δεν περιέχει την U_a. Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει με επαγωγή στη διάσταση της G, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι H, H' είναι και οι δύο ημιαπλές. □

Πόρισμα .20.3. *Έστω G μία συνεκτική reductive αλγεβρική ομάδα. Τότε*

$$G = [G, G]R(G) = [G, G]Z(G)^0;$$

στην πραγματικότητα, $\mathrm{rk}_{ss}(G) = \mathrm{rk}([G, G])$ *και* $\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}_{ss}(G) + \dim Z(G)$.

Απόδειξη. Ήδη ισχυριστήκαμε ότι η $G/R(G)$ είναι ημιαπλή (δες άσκηση [1] 10.21). Άρα από το Θεώρημα 20.2 (2)

$$G/R(G) = [G/R(G), G/R(G)] = [G, G]R(G)/R(G)$$

. □

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για να αποδείξουμε ότι $\ker(\mathrm{Ad}) = Z(G)$, όπως είχε υποτεθεί στο Θεώρημα 16.1 το (3), δες ([1], άσκηση 10.32).

Κεφάλαιο 9: Ταξινόμιση των Ημιαπλών αλγεβρικών Ομάδων

Ο στόχος εδώ είναι να καταφέρουμε να ταξινομήσουμε τις ημιαπλές ομάδες με όρους συνδυαστικής ανάλυσης. Είναι ξεκάθαρο από την προηγούμενη ενότητα ότι το σύνολο ριζών παίζει καθοριστικό ρόλο στη δομή των reductive ομάδων. Θα κάνουμε πιο επίσημο το προηγούμενο επιχείρημα.

.21 Συστήματα Ριζών

Έστω G μία συνεκτική reductive ομάδα και $T \leq G$ ένας maximal τόρος της. Τότε ως προς τον τόρο αυτό έχουμε πεπερασμένο σύνολο ριζών $\Phi \subset X := X(T)$ με την πεπερασμένη ομάδα Weyl W να δρα πιστά στο X, διατηρώντας το Φ (δες πρόταση 17.3). Υπενθυμίζουμε την ομάδα $Y = Y(T)$ των συγχαρακτήρων του T και το τέλειο ζευγάρωμα όπως ορίστηκε στην ενότητα 8 $\langle\ ,\ \rangle : X \times Y \to \mathbb{Z}$. Θα ταυτήσουμε τα X και Y με τις υποομάδες $E := X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ και $E^{\vee} := Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, αντίστοιχα και θα συμβολίζουμε το αντίστοιχο τέλειο ζευγάρωμα επίσης με $\langle\ ,\ \rangle$. Οι δράσεις της W στα X και Y μπορούν να επεκταθούν σε δράσεις στους E και $E^{\vee}$. Υπενυμίζουμε επίσης τις ανακλάσεις $s_a \in W$ όπως ορίστηκαν στην ενότητα 20.

Πρώτα θα αξιοματοποιήσουμε τις συνδυαστικές ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιούνται από αυτά τα δεδομένα.

Ορισμός .21.1. *Ένα υποσύνολο Φ ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου E καλείται ένα (αυθαίρετο) σύστημα ριζών στην E αν ισχύουν τα παρακάτω:*
(R_1) *Φ είναι πεπερασμένο, $0 \notin \Phi$, $\langle \Phi \rangle = E$;*
(R_2) *Αν $c \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε $a, ca \in \Phi$, τότε $c = \pm 1$;*
(R_3) *Για κάθε τέτοιο $a \in \Phi$ υπάρχει μία ανάκλαση του $s_a \in \mathrm{GL}(E)$ μεταξύ του a η οποία σταθεροποιεί το ϕ;*
(R_4) *(κρυσταλογραφική συνθήκη) για $a, \beta \in \Phi$, $s_a.\beta - \beta$ είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του a.*
Η ομάδα $W = \langle s_a \mid a \in \Phi \rangle$ καλείται ομάδα Weyl του Φ. Η διάσταση του E καλείται τάξη του Φ.

Αφού το Φ είναι πεπερασμένο, παράγει τον E και σταθεροποιείται από την W, την ομάδα Weyl ενός αυθαίρετου συστήματος ριζών η οποία είναι πάντα πεπερασμένη. Συνεπώς υπάρχει μία θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή $(\cdot, \cdot)$ στον E, η οποία είναι μοναδική ως προς μη μηδενικά βαθμωτά σε κάθε ανάγωγο W-υποπρότυπο του E. Πάντα θα υποτίθεται μία τέτοια μορφή από εδώ και στο εξής, οπότε μπορούμε να μιλάμε για μήκη διανυσμάτων και γωνίες μεταξύ διανυσμάτων.

Ας επιστρέψουμε στην reductive ομάδα G μαζί με το σύστημα ριζών της Φ. Είδαμε από το λήμμα 20.1 ότι κάθε s_a δρα ως ανάκλαση στον $E := X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Στην πραγματικότητα έχουμε ότι:

Πρόταση .21.2. *Έστω G και $\Phi \subset X$ όπως παραπάνω. Θα βλέπουμε το Φ ως ένα υποσύνολο του $E := X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Τότε το Φ, μαζί με το $\{s_a \mid a \in \Phi\}$ είναι ένα αυθαίρετο σύστημα ριζών στον $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ με ομάδα Weyl W.*

Επιπλέον, αν η G είναι ημιαπλή τότε $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} = E$.

Απόδειξη. Πρώτα θα ελέγξουμε αν ισχύουν τα αξιώματα $(R_1)-(R_4)$ ενός συστήματος ριζών. Το πρώτο αξίωμα είναι προφανές (από τον περιορισμό μας σε ευκλείδειο χώρο). Το (R_2) προκύπτει από το γεγονός ότι $C_{ca} = C_a$ για κάθε $c \in \mathbb{R}^{\times}$. Το (R_3) είναι απλά η πρόταση 17.3 και το λήμμα 20.1. Το τελευταίο αξίωμα (R_4) δεν θα το αποδείξουμε εδώ διότι θέλει αποτελέσματα αναπαραστάσεων ημιαπλών ομάδων (δες [1] λήμμα 15.5 και παράδειγμα 15.5). Το γεγονός ότι οι s_a παράγουν την πεπερασμένη ομάδα W είναι η πρόταση 20.1.

Το τελευταίο επιχείρημα αποδείχθηκε στο Θεώρημα 20.2 το (1). □

Τα αυθαίρετα συστήματα ριζών μπορούν να ταξινομηθούν. Ένα πάρα πολύ σημαντικό στοιχείο στην ταξινόμησή τους, είναι η έννοια της βάσης:

Ορισμός .21.3. *Έστω Φ ένα αυθαίρετο σύστημα ριζών στον E. Ένα υποσύνολο $\Delta \subseteq \Phi$ καλείται βάση του Φ αν είναι βάση του διανυσματικού χώρου E και κάθε $\beta \in \Phi$ είναι ένας ακέραιος γραμμικός συνδυασμός $\beta = \sum_{a \in \Delta} c_a a$ με κάθε $c_a \geq 0$ ή κάθε $c_a \leq 0$.*

Αν Δ είναι μία βάση του Φ, τότε το υποσύνολο

$$\Phi^+ := \{a \in \Phi \mid a \text{ είναι μη αρνητικός γραμμικός συνδυασμός στο } \Delta\}$$

καλείται σύστημα θετικών ριζών του Φ ως προς την βάση Δ.

Ένα από τα πρώτα αποτελέσματα που θα δείξουμε είναι ότι μία βάση πάντα υπάρχει και μάλιστα είναι ουσιαστικά μοναδική:

Πρόταση .21.4. *Έστω Φ ένα αυθαίρετο σύστημα ριζών.*

(1) Υπάρχει βάση Δ του Φ.
(2) Αν $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Phi$ δύο βάσεις του Φ τότε υπάρχει μοναδικό $w \in W$ τέτοιο ώστε $w(\Delta_1) = \Delta_2$.
(3) Αν Δ είναι μία βάση, τότε $W = \langle s_a, \mid a \in \Delta \rangle$. Επιπλέον, για κάθε $a \in \Phi$ υπάρχει $w \in W$ τέτοιο ώστε $w.a \in \Delta$.

Δες Πρόταση 25.5 για το (1), το Θεώρημα 25.16 για το (2) και την πρόταση 25.8 για το (3).

Παράδειγμα

Θα ταξινομήσουμε τα δυδιάστατα αυθαίρετα συστήματα ριζών. Έστω $E = \mathbb{R}^2$ και $\phi \subset E$ ένα αυθαίρετο σύστημα ριζών με $a, \beta \in \Phi$ γραμμικώς ανεξάρτητα. Ως προς αυτή τη βάση, οι ανακλάσεις που αντιστοιχούν στα α και β αντίστοιχα έχουν τη μορφή:

$$s_a = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix},$$

με $a, b \in \mathbb{Z}$ από το (R_4). Τότε

$$w := s_a s_\beta = \begin{pmatrix} ab - 1 & -a \\ b & -1 \end{pmatrix}$$

ανήκει στην πεπερασμένη ομάδα Weyl W της Φ, άρα το ίχνος της $ab - 2 \in \mathbb{Z}$ είναι το άθροισμα των δύο ριζών της ταυτοτικής. Αυτό συνεπάγεται ότι $ab \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Επιπλέον, ο w δεν είναι διαγωνοποιήσιμος όταν $ab = 4$, άρα όχι πεπερασμένης τάξης. Απομένουν τέσσερεις περιπτώσεις για το ab, και στην πραγματικότητα όλες οδηγούν σε συστήματα ριζών. Γράφοντας ψ για την γωνία ανάμεσα στα a και β, ουσιαστικά έχουμε τις εξής τέσσερεις περιπτώσεις (παρατηρούμε ότι με την πρόταση 25.1, το ab είναι απλά $4\cos(\psi)^2)$):

(1) $a \perp \beta$, τότε $\Phi = \{\pm a, \pm\beta\}$ με $W = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ η ομάδα του Klein.
(2) $\psi = \frac{2\pi}{3}$, τότε $\Phi^+ = \{a, \beta, a + \beta\}$. Αυτό μας δίνει το σύστημα ριζών της SL_3 το οποίο έχουμε ήδη συναντήσει στο παράδειγμα (2) στη σελίδα 52, τύπου A_2 (δες πίνακα παρακάτω).
Εδώ $W = \mathfrak{S}_3$
(3) $\psi = \frac{3\pi}{4}$, τότε $\Phi^+ = \{a, \beta, a + \beta, 2a + \beta\}$. Αυτό μας δίνει το σύστημα ριζών της Sp_4, δες ([1], άσκηση 10.29 (1)), τύπου $B_2 = C_2$ με ομάδα Weyl W την διεδρική ομάδα τάξης 8.
(4) $\psi = \frac{5\pi}{6}$, τότε $\Phi^+ = \{a, \beta, a + \beta, 2a + \beta, 3a + \beta, 3a + 2\beta\}$, με W την διεδρική ομάδα τάξης 12. Αυτό το σύστημα ριζών λέγεται ότι είναι τύπου G_2 και δεν προ κύπτει ως σύστημα ριζών κάποιας «κλασικής» αλγεβρικής ομάδας.

Σε κάθε περίπτωση $\Delta = \{a, \beta\}$ είναι μία βάση του Φ.

Ένα σύστημα ριζών μπορεί να προκύψει από μία βάση σύμφωνα με την πρόταση 21.4 το (3), άρα για να περιγράψουμε ένα σύστημα ριζών, απαιτείται να ξέρουμε τη βάση του. Αυτό γίνεται πιο βολικά με το αντίστοιχο διάγραμμα Dynkin, το οποίο αμέσως θα περιγράψουμε. Το κάθε διάγραμμα έχει έναν κόμβο για κάθε στοιχείο της βάσης Δ και δύο κόμβους που αντιστοιχούν στα $a, \beta \in \Delta$ που συνδέονται από μία ακμή πολλαπλότητας $m_{\alpha,\beta}$ ως εξής:

$$m_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 0 & \text{αν } |(\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta) \bigcap \Phi^+| = 2, \\ 1 & \text{αν } |(\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta) \bigcap \Phi^+| = 3, \\ 2 & \text{αν } |(\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta) \bigcap \Phi^+| = 4, \\ 3 & \text{αν } |(\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta) \bigcap \Phi^+| = 6. \end{cases}$$

(Από το προηγούμενο παράδειγμα, υπάρχουν μόνο τέσσερεις περιπτώσεις. Παρατηρούμε ότι $|(\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta) \bigcap \Phi^+| = o(s_a s_\beta)$, η τάξη του γινομένου των αντίστοιχων απλών αντανακλάσεων.) Το γράφημα που προκύπτει καλείται διάγραμμα Coxeter σε σχέση με το Φ ή την W. Δεν καθορίζει το Φ με μοναδικό τρόπο. Άρα επιπλέον, όποτε α, β έχουν διαφορετικό μήκος και ενώνονται από τουλάχιστον μία ακμή, τότε βάζουμε ένα βέλος σε αυτή την ακμή, σημαδεύοντας προς το μικρότερο από τα δύο μήκη (δες τον παρακάτω πίνακα για παραδείγματα). Αυτό καλείται διάγραμμα Dynkin της Φ. Αποδεικνύεται ότι η βάση μπορεί ουσιαστικά να προκύψει από το διάγραμμα Dynkin της (με αλλαγή στα μήκη σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του διαγράμματος), δες το βιβλίο του J.Humphreys, Conjugacy Classes in Semisimple Algebraic Groups.

Υπάρχει μία προφανής έννοια ισομορφισμού μεταξύ των συστημάτων ριζών και έτσι συμπεραίνουμε ότι δύο συστήματα ριζών είναι ισόμορφα αν και μόνο αν τα διαγράμματα Dynkin του ταυτίζονται.

Ένα σύστημα ριζών Φ με βάση Δ για το οποίο υπάρχει μία διαμέριση $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$ σε δύο μη κενά αμοιβαία ορθογώνια υποσύνολα καλείται διαχωρίσιμο; από πρόταση

25.11 αυτή η περίπτωση γίνεται αν και μόνο αν

$$\Phi = (\mathbb{Z}\Delta_1 \cap \Phi) \sqcup (\mathbb{Z}\Delta_2 \cap \Phi).$$

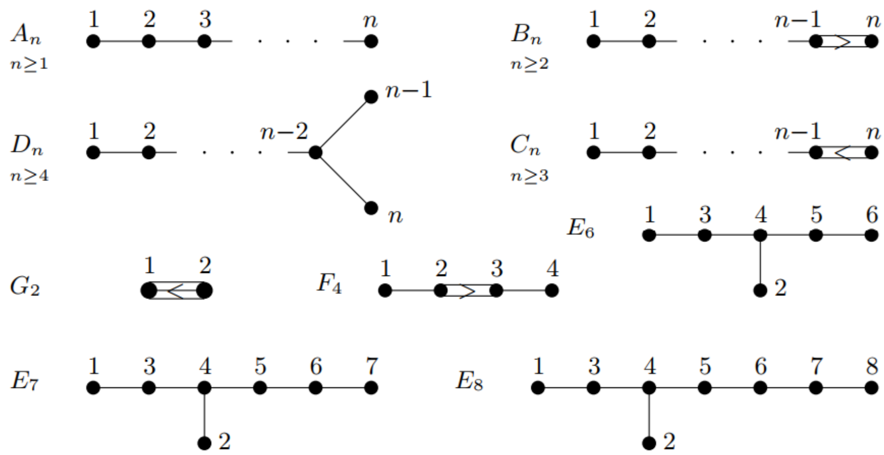
Αν $\Phi \neq \emptyset$ και δεν υπάρχει τέτοια διάσπαση, το Φ καλείται μη διαχωρίσιμο. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ένα σύστημα ριζών είναι μη διαχωρίσιμο αν και μόνο αν η ομάδα Weyl του W δρα ανάγωγα στον περιβάλλοντα πραγματικό διανυσματικό χώρο (δες πρόταση 25.13). Ένα σύστημα ριζών είναι μη διαχωρίσιμο αν και μόνο αν το αντίστοιχο διάγραμμα Dynkin του είναι συνεκτικό. Για παράδειγμα, το σύστημα ριζών (1) στο προηγούμενο παράδειγμα είναι διαχωρίσιμο, ενώ τα άλλα τρία δεν είναι.

Αποδεικνύεται ότι ([2],πορισμα 27.5]) οι απλές αλγεβρικές ομάδες έχουν μη διαχωρίσιμα συστήματα ριζών και αντίστροφα. Έτσι ένα πρώτο βήμα, για τον καθορισμό των απλών ομάδων, είναι η ταξινόμιση των μη διαχωρίσιμων συστημάτων ριζών (δες N.Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie VI (κεφάλαιο 4) ή J.Humphreys, Conjugacy Classes in Semisimple Algebraic Groups. (Θεώρημα 11.4)):

Θεώρημα .21.5. *Έστω Φ ένα μη διαχωρίσιμο σύστημα ριζών σε κάποιον πραγματικό διανυσματικό χώρο $E \cong \mathbb{R}^n$. Τότε ως προς ισομορφισμό το Φ είναι ένας από τους παρακάτω τύπους:*

$$A_n\ (n \geq 1),\ \ B_n\ (n \geq 3),\ \ D_n\ (n \geq 4),\ \ E_6,\ \ E_7,\ \ E_8,\ \ F_4,\ \ G_2,$$

με αντίστοιχα διαγράμματα Dynkin όπως στον παρακάτω πίνακα.



Ένα σύστημα ριζών ή ένα διάγραμμα Dynkin λέμε ότι είναι simply laced αν όλες του οι ρίζες έχουν το ίδιο μήκος, ή ισοδύναμα, αν όλα τα $m_{\alpha,\beta} \in \{0, 1\}$. Άρα τα μη διαχωρίσιμα, simply laced διαγράμματα Dynkin είναι αυτά του τύπου A_n, D_n, E_6, E_7, E_8.

Πεπερασμένες ομάδες ανακλάσεων προκύπτουν από συστήματα ριζών που ικανοποιούν μόνο τα $(R_1) - (R_3)$, αλλά όχι απαραίτητα την κρυσταλλογραφική συνθήκη (R_4), είναι οι λεγόμενες πεπερασμένες ομάδες Coxeter. Με αρκετό ενδιαφέρον, εκτός από τις ομάδες Weyl που προκύπτουν από το Θεώρημα 21.5, μόνο οι δυδιάστατες διεδρικές ομάδες και δύο ακόμα μη διαχωρίσιμες περιπτώσεις, που τις συμβολίζουμε με H_3 και H_4, είναι διάστασης 3 και 4 αντίστοιχα προκύπτουν. Για περισσότερες πληροφορίες για τα μη διαχωρίσιμα συστήματα ριζών και τις ομάδες Weyl τους δείτε για παράδειγμα το ([2] κεφάλαια 2.7 έως 2.11)

Ορισμός .21.6. *Συχνα θα θέλουμε να θεωρήσουμε διαχωρίσιμα συστήματα. Θα χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό: Αν το Φ είναι η ορθογώνια ένωση μη διαχωρίσιμων συστημάτων ριζών $\Phi_1, \Phi_2 \ldots, \Phi_t$, τότε θα αναφερόμαστε στο σύστημα ριζών Φ ως σύστημα τύπου $\Phi_1\Phi_2 \ldots \phi_t$. Αν κάποια από τα Φ_i είναι ισόμορφα, θα γράφουμε $(\Phi_i)^j$ για την ένωση $\Phi_i \sqcup \cdots \sqcup \Phi_i$ (j το πλήθος).*

Παράδειγμα

Θα ταυτίσουμε το σύστημα ριζών της $G = \mathrm{SL}_n$ και θα βρούμε μία βάση και τις αντίστοιχες θετικές ρίζες. Εφόσον $T = D_n \cap \mathrm{SL}_n$ είναι maximal τόρος και $B = T_n \cap \mathrm{SL}_n$ είναι μία υποομάδα Borel (δες παράδειγμα (2) σελίδα 35). Τότε $\Phi = \{x_{ij} \mid i \neq j\}$ όπου $x_{ij}(\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)) := t_i t_j^{-1}$ από το παράδειγμα (2) στη σελίδα 52. Μία βάση του Φ είναι η

$$\Delta := \{x_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Πράγματι

$$x_{ij} = x_{i,i+1} + x_{i+1,i+2} + \ldots + x_{j-1,j} \quad \text{για } i < j,$$

άρα $\Phi^+ = \{x_{ij} \mid i < j\}$ και $\Phi = \Phi^+ \sqcup -(\Phi^+)$. Στην πραγματικότητα έχουμε ότι

$$|\mathbb{Z}x_{i,i+1} + \mathbb{Z}x_{j,j+1} \cap \Phi^+| = \begin{cases} 3 & \text{αν } j = i+1, \\ 2 & \text{αν } j > i+1, \end{cases}$$

απ΄όπου και βλέπουμε ότι το σύστημα ριζών της SL_n είναι τύπου A_{n-1}.

.22 Το Θεώρημα Ταξινόμισης του Chevalley

Ο στόχος εδώ είναι να πετύχουμε την ταξινόμιση των ημιαπλών αλγεβρικών ομάδων με όρους συνδυαστικής ανάλυσης.

Κάποιος μπορεί να νομίζει ότι οι ημιαπλές ομάδες έχουν ήδη καθοριστεί ως προς ισομορφισμό από τα συστήματα ριζών τους. Όμως σε αντίθεση με την περίπτωση των απλών Αλγεβρών Lie, υπάρχουν μη ισόμορφες απλές αλγεβρικές ομάδες οι οποίες έχουν το ίδιο σύστημα ριζών για παράδειγμα οι SL_2, PGL_2 και οι δύο έχουν σύστημα ριζών τύπου A_1 (δες ενότητα 18). Το επιπλέον κομμάτι της συνδυαστικής ανάλυσης θα μας το περέχουν οι coroots και το coroot lattice.

Έστω G ημιαπλή ομάδα και T, W, Φ, X να είναι όπως στην προηγούμενη ενότητα. Από το λήμμα 20.1 πήραμε για κάθε $\alpha \in \Phi$ έναν μοναδικό συγχαρακτήρα $\alpha^\vee \in Y := Y(T)$, coroot που αντιστοιχεί στο α, τέτοια ώστε $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ και επιπλέον η $im(\alpha^\vee)$ είναι ένας maximal τόρος της τάξης 1 ημιαπλής ομάδας $[C_\alpha, C_\alpha]$.

Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε τις coroots των SL_2 και PGL_2.

(1)Έστω $G = \mathrm{SL}_2$. Τότε η ομάδα χαρακτήρων παράγεται από το x, όπου $x\begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} = t$. Είδαμε στο παράδειγμα στη σελίδα 55 ότι $\Phi = \{\pm\alpha\}$, όπου $\alpha\begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} = t^2$. Επομένως $\mathbb{Z}\Phi = \langle 2x \rangle$ και $X = \mathbb{Z}x$. Οι coroot $\alpha^\vee$ δίνεται από $\alpha^\vee : t \mapsto \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix}$, επομένω $\mathbb{Z}\Phi^\vee = Y$.

(2) Έστω $G = \mathrm{PGL}_2$. Από την ενότητα 18 έχουμε ότι $\Phi = \{\pm\beta\}$, όπου $\overline{\begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix}} = t$; στην πραγματικότητα $\mathbb{Z}\Phi = X$. Η coroot $\beta^\vee$ δίνεται από

$$\beta^\vee : t \mapsto \overline{\begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} t^2 & \\ & 1 \end{pmatrix}}.$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $\mathbb{Z}\Phi^\vee = 2Y$.

Οδηγούμαστε στην παρακάτω συνδυαστική δομή:

Ορισμός .22.1. *Μία τετράδα $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ καλείται root datum αν:*

$(RD1)$ $X \cong \mathbb{Z}^n \cong Y$, με τέλειο ζευγάρωμα $\langle\ ,\ \rangle : X \times Y \to \mathbb{Z}$ όπως στην πρόταση 8.4;
$(RD2)$ $\Phi \subseteq X,\ \Phi^\vee \subset Y$ είναι αυθαίρετα συτήματα ριζών στον $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ και $\mathbb{Z}\Phi^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ αντίστοιχα;
$(RD3)$ Υπάρχει ένα προς ένα και επί απεικόνιση $\Phi \to \Phi^\vee$ τέτοια ώστε $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$; και
$(RD4)$ Οι ανακλάσεις s_α του συστήματος ριζών Φ, αντίστοιχα $s_\alpha^\vee$ του $\Phi^\vee$ δίνονται από

$$s_\alpha.\chi = \chi - \langle \chi, a^\vee \rangle \alpha \quad \textit{για κάθε}\ \ \chi \in X,$$

$$s_{\alpha^\vee}.\gamma = \gamma - \langle \alpha, \gamma \rangle \alpha^\vee \quad \textit{για κάθε}\ \ \gamma \in Y.$$

Έπεται εύκολα ότι εάν $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ είναι ένα root datum, τότε οι ομάδες Weyl των Φ και $\Phi^\vee$ είναι ισόμορφες μέσω του $s_\alpha \mapsto s_{\alpha^\vee}$ (δες [1] άσκηση 10.34). Ο προηγούμενος ορισμός δικαιολογείται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση .22.2. *Έστω Φ ένα σύστημα ριζών μίας συνεκτικής reductive ομάδας G ως προς τον maximal τόρο T, με ομάδα Weyl W και ορίζουμε $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$. Τότε $(X(T), \Phi, Y(T), \Phi^\vee)$ είναι root datum.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδει δει στην πρόταση 21.2 ότι το Φ είναι ένα αυθαίρετο σύστημα ριζών στον $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} \leq X_{\mathbb{R}} := X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Επιπλέον στο λήμμα 20.1 πήραμε μία επί απεικόνιση $\Phi \to \Phi^\vee,\ \alpha \mapsto \alpha^\vee$, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (RD_3) και (RD_4) ως προς το τέλειο ζευγάρωμα όπως ορίστικε στην πρόταση 8.4. Υποθέτουμε ότι για τα $\alpha, \beta \in \Phi$ έχουμε ότι $\alpha^\vee = \beta^\vee$. Τότε

$$s_\alpha s_\beta(\chi) = \chi + \langle \chi, \alpha^\vee \rangle (\alpha - \beta) \quad \text{για κάθε } \chi \in X(T).$$

Εφόσον $\langle \alpha - \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$, έχουμε ότι $(s_\alpha s_\beta - id_X)^2 = 0$, επομένως όλες οι ιδιοτιμές της απεικόνισης $s_\alpha s_\beta : X_{\mathbb{R}} \to X_{\mathbb{R}}$ είναι 1. Όμως αυτός είναι ένας μετασχηματισμός πεπερασμένης τάξης στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $X_{\mathbb{R}}$, άρα $s_\alpha s_\beta = 1$ και $\alpha = \beta$. Τότε $\Phi^\vee$ είναι ένα αυθαίρετο σύστημα ριζών από την [1] άσκηση 10.35. □

Παράδειγμα

Έστω G μία συνεκτική reductive αλγεβρική ομάδα με root datum $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ ως προς τον maximal τόρο T και έστω $T' \leq T$ ένας υποτόρος. Τότε ο T' έχει root datum $(X', \emptyset, Y', \emptyset)$, με

$$Y' := \{\gamma \in Y \mid \gamma(\mathbf{G}_m) \leq T'\} = Y(T')$$

και

$$X' := \{\chi|_{T'} \mid \chi \in X\} \cong X/\mathrm{Ann}(Y') = X(T'),$$

όπου, για κάθε υποπρότυπο $Z \leq Y$ ορίζουμε

$$\mathrm{Ann}(Z) := \{\chi \in X \mid \langle \chi, \gamma \rangle = 0 \text{ για κάθε } \gamma \in Z\}.$$

Τότε υπάρχει μία φυσιολογική έννοια ισομορφισμού μεταξύ των root data (δες J.C. Jantzen, Representations of Algebraic Groups Second edition II. 1.13). Τότε το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα ταξινομεί τις ημιαπλές ομάδες (δες [3],9.6.2,10.1.1]):

Θεώρημα .22.3. *(Θεώρημα Ταξινόμισης του Chevalley)*
Δύο ημιαπλές γραμμικές αλγεβρικές ομάδες είναι ισόμορφες αν και μόνο αν έχουν ισόμορφα root data. Για κάθε root datum υπάρχει μία ημιαπλή αλγεβρική ομάδα η οποία να αντιστοιχεί σε αυτό. Η συγκεκριμένη ομάδα είναι απλή αν και μόνο αν το συστημα ριζών της είναι μη διαχωρίσιμο.

Οι ομάδες με συστήματα ριζών τύπου $A_n,\ B_n,\ C_n$, ή D_n καλούνται ομάδες κλασικού τύπου; οι υπόλοιπες απλές ομάδες καλούνται ομάδες ειδικού τύπου.

Κάποιος μπορεί να καθορίσει ακριβώς όλα τα πιθανά root data. Αυτό συμπεριλαμβάνει την εισαγωγή μίας ακόμα πεπερασμένης ομάδας.

Από το (R_1) και την πρόταση 21.2, η $\mathbb{Z}\Phi$ είναι πεπερασμένου δείκτη στο Y όταν η G είναι ημιαπλή ομάδα. Για απλές ομάδες G με σύστημα ριζών Φ όχι τύπου D_{2n}, το root datum, άρα και ο τύπος ισομορφισμού της G, καθορίζεται πλήρως από το Φ και τον δείκτη $|X : \mathbb{Z}\Phi|$.

Πιο γενικά, έστω $\Omega = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\Phi^\vee, \mathbb{Z})$. Ο περιορισμός δίνει με φυσιολογικό τρόπο έναν ομομορφισμό

$$X \cong \mathrm{Hom}(Y, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\Phi^\vee, \mathbb{Z}) = \Omega$$

ο οποίος είναι 1-1. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbb{Z}\Phi \subseteq X \subseteq \Omega$.

Η πεπερασμένη ομάδα $\Lambda := \Lambda(\Phi) := \Omega/\mathbb{Z}\Phi$ δεν εξαρτάται από το X και καλείται θεμελιώδης ομάδα του συστήματος ριζών Φ. Τα root data με σταθεροποιημένο σύστημα ριζών Φ είναι ταξινομημένα από υποομάδες X της Ω που ικανοποιούν $\mathbb{Z}\Phi \subseteq X \subseteq \Omega$ (ως προς αυτομορφισμούς της Ω οι οποίοι σταθεροποιούν το Φ) άρα από υποομάδες $X/\mathbb{Z}\Phi \leq \Omega/\mathbb{Z}\Phi$ της θεμελιώδους ομάδας.

Ορισμός .22.4. *Έστω G μία ημιαπλή αλγεβρική ομάδα, με X, Φ, Ω όπως πριν. Τότε η $\Lambda(G) := \Omega/X$ καλείται θεμελιώδης ομάδα της G. Αν $X = \Omega$ τότε $\Lambda(G) = 1$ και λέμε ότι η G είναι απλά συνεκτική; αν $X = \mathbb{Z}\Phi$ τότε η G λέμε ότι είναι τύπου adjoint. Γράφουμε $G_{ad},\ G_{sc}$ για μία αλγεβρική ομάδα με δοσμένο σύστημα ριζών Φ που είναι adjoint και απλά συνεκτικού τύπου αντίστοιχα. (δες την παρακάτω σημείωση για την κανονική ορολογία.)*

Ένας επιμορφισμός $\Phi : G \to H$ αλγεβρικών ομάδων με πεπερασμένο πυρήνα καλείται ισογενής. Αν ένας τέτοιος μορφισμός ϕ υπάρχει, τότε λέμε ότι η G και η H είναι ισογενείς. Αν η G είναι συνεκτική, τότε ο $\ker\phi$ κεντρικοποιείται από την [1] άσκηση 10.4, και αν επιπλέον η G είναι reductive, τότε ο $\ker\phi$ περιέχεται σε όλους τους maximal τόρους. Οι διάφορες ημιαπλές αλγεβρικές ομάδες G με σταθεροποιημένα συστήματα ριζών Φ καλούνται τύποι ισογένιας που αντιστοιχούν στο Φ χάρη στο εξής αποτέλεσμα:

Πρόταση .22.5. *Έστω G μία ημιαπλή αλγεβρική ομάδα με σύστημα ριζών ϕ. Τότε υπάρχουν φυσιολογικές ισογένειες*

$$G_{sc} \xrightarrow{\pi_1} G \xrightarrow{\pi_2} G_{ad}$$

από την απλά συνεκτική ομάδα G_{sc} στην adjoint ομάδα G_{ad}, με σύστημα ριζών Φ η κάθε μία, $\ker(\pi_1) \cong \Lambda(G)_{p'}$, $\ker(\pi_2) \cong (\Lambda(G_{ad})/\Lambda(G))_{p'}$, *όπου* $p = \mathrm{char}(k)$ *και* $d\pi_i$ *είναι ισομορφισμός για* $i = 1, 2$.

Απόδειξη. (Η περίπτωση όπου $\mathrm{char}(k)$ είναι σχετικά πρώτη με την $|\Lambda(\Phi)|$)
Έστω T ένας maximal τόρος της G με αντίστοιχο σύστημα ριζών Φ. Τότε $Z := Z(G) \leq C_G(T) = T$, άρα $Z = \bigcap_\alpha \ker(\alpha)$. Εφόσον Z ανήκει στον πυρήνα της adjoint αναπαράστασης, η G δρα μέσω G/Z στην $\mathrm{Lie}(G)$, συνεπώς οι ρίζες της G και της G/Z είναι οι ίδιες ως προς την φυσική ένθεση $X(T/Z) \leq X(T)$ που επάγεται από την $T \to T/Z$ (δες [1] άσκηση 10.13). Στην πραγματικότητα, για κάθε υποομάδα $S \leq Z$ έχουμε τους εξής εγκλεισμούς $\mathbb{Z}\Phi \leq X(T/Z) \leq X(T/S) \leq X(T)$. Εφόσον $\mathrm{MK\Delta}(\mathrm{char}(k), |\Lambda|) = 1$, από την πρόταση 8.6 έχουμε ότι $X(T)/\mathbb{Z}\Phi \cong Z$. Επομένως $X(T/Z)/\mathbb{Z}\Phi = 0$ και G/Z είναι τύπου adjoint; άρα παίρνουμε ότι η $\pi_2 : G \to G/Z$ είναι η φυσική προβολή.

Από την άλλη, ξεκινώντας με την G_{sc} και $\Lambda_1 \leq X(T_{sc})/\mathbb{Z}\Phi$ η θεμελιώδης ομάδα της G, τότε με $S = \Lambda_1^\perp \leq Z(G_{sc})$ το πηλίκο G_{sc}/S έχει root datum με θεμελιώδη ομάδα Λ_1. Με $\pi_1 : G_{sc} \to G_{sc}/S$ έχουμε τότε ότι $G \cong G_{sc}/S$. Ο ισχυρισμός ότι $d\pi_i$ είναι ισομορφισμός έπεται από το Θεώρημα 15.6 (2). □

Για την γενική περίπτωση, ο ισχυρισμός έπεται από το Θεώρημα Ισογένειας [3],Θεώρημα 9.6.5 στο οποίο ισχυριζόμαστε ότι κάθε μορφισμός με root data επάγει μία ισογένεια των αντίστοιχων ημιαπλών ομάδων.

Ο πίνακας 9.2 μας παρέχει μία λίστα με τους πιθανούς τύπους ισογένειας για απλές ομάδες και μία ταυτοποίηση με διάφορες κλασικές ομάδες (δες R. Steinberg, Lectures on Chevalley Groups Yale University).

Πίνακας 22.2: Τύποι Ισογένειας απλών αλγεβρικών ομάδων

Φ	$\Lambda(\Phi)$	G_{sc}	G_{ad}	Ανάμεσα
$A_{n-1},\ n \geq 2$	Z_n	SL_n	PGL_n	$\mathrm{SL}_n/Z_d\ (d\mid n)$
$B_n,\ n \geq 2$	Z_2	$Spin_{2n+1}$	SO_{2n+1}	-
$C_n,\ n \geq 2$	Z_2	Sp_{2n}	$PC\mathrm{Sp}_{2n}$	-
$D_n,\ n \geq 3$ περιττός	Z_4	$Spin_{2n}$	PCO_{2n}^0	SO_{2n}
$D_n,\ n \geq 4$ άρτιος	$Z_2 \times Z_2$	$Spin_{2n}$	PCO_{2n}^0	$\mathrm{SO}_{2n},\ \mathrm{HSpin}_{2n}$
G_2	1	G_2		-
F_4	1	F_4		-
E_6	Z_3	$(E_6)_{sc}$	$(E_6)_{ad}$	-
E_7	Z_2	$(E_7)_{sc}$	$(E_7)_{ad}$	-
E_8	1	E_8		-

Παραδείγματα

(1) Στο παράδειγμα στη σελίδα 65 είδαμε ότι $X = \mathbb{Z}\Phi$ για την PGL_2, συνεπώς η PGL_2 είναι τύπου adjoint. Από την άλλη μεριά για την $\mathrm{SL}_2,\ X = \Omega$, άρα η SL_2 είναι απλά συνεκτική.
(2) Για ϕ τύπου E_6, έχουμε ότι $|\Omega/\mathbb{Z}\Phi| = 3$, συνεπώς υπάρχουν δύο τύποι ισογένειας ομάδων τύπου E_6.
(3) Οι ομάδες SO_{2n}, με σύστημα ριζών Φ τύπου D_n δεν είναι ούτε τύπου adjoint, ούτε απλά συνεκτικές. Εδώ η θεμελιώδης ομάδα Λ του Φ είναι τάξης 4 και η SO_{2n} αντιστοιχεί σε μία υποομάδα της Λ τάξης 2. Αν το n είναι άρτιος, τότε η Λ περιέχει δύο ακόμα υποομάδες τάξης 2 οι οποίες αντιστοιχούν στις ισόμορφες απλές ομάδες, τις λεγόμενες half-spin ομάδες HSpin_{2n}. Αν $n = 4$ και οι δύο αυτές επίσης είναι ισόμορφες

με την SO_8. (Αυτοί οι ισομορφισμοί επάγονται από αυτομορφισμούς γραφημάτων των διαγραμμάτων Dynkin τύπου D_n, δες [1] Θεώρημα 11.12). Οι adjoint ομάδες τύπου D_n τις παίρνουμε ως πηλίκα $\mathrm{PCO}_{2n}^{\circ} := \mathrm{CO}_{2n}^{\circ}/Z(\mathrm{CO}_{2n}^{\circ})$ της σύμμορφης ορθογώνιας ομάδας (δες ενότητα 2) διά τον μονοδιάστατο κεντρικό τόρο ή επίσης ως το πηλίκο $\mathrm{SO}_{2n}/Z(\mathrm{SO}_{2n})$.
(4) Οι ορθογώνιες ομάδες απλά συνεκτικού τύπου είναι οι λεγόμενες spin ομάδες $Spin_n$. Η πιστή αναπαράστασή τους είναι διάστασης 2^s, με $s = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Κατασκευάζονται και μελετώνται καλύτερα ως υποομάδες των μονάδων στις Άλγεβρες Clifford.

Για περισσότερες πληροφορίες για τους διάφορους τύπους κλασικών ομάδων, δες για παράδειγμα τα βιβλία των Dieudonne La Gèomètrie des Groupes Classiques, Grove Classical Groups and Geometric Algebra, ή Goodman and Wallach Representations and Invariants of the Classical Groups (για k χαρακτηριστικής 0).

Σημείωση: Ο Steinberg απέδειξε ότι η G_{sc} είναι η καθολική τέλεια κεντρική επέκταση, στην κατηγορία των ομάδων, κάθε ημιαπλής ομάδας με σύστημα ριζών Φ [R. Steinberg, Lectures on Chevalley Groups, Θεώρημα 10]. Δεν υπάρχει τέτοια καθολική κεντρική επέκταση στην κατηγορία των αλγεβρικών ομάδων εφόσον υπάρχουν 1-1 και επι μορφισμοί απλών ομάδων οι οποίοι δεν ειναι ισομορφισμοί. Αυτές οι ισογένειες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στο μέρος 3 του βιβλίου [1]. Πάνω από το $k = \mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών οι ομάδες G_{sc} είναι στην πραγματικότητα απλά συνεκτικές ως προς την μιγαδική τοπολογία, και για G αυθαίρετου τύπου, η $\Lambda(G)$ είναι η τοπολογική θεμελιώδης ομάδα [[R. Steinberg, Lectures on Chevalley Groups,Θεώρημα 13]. Τέλος παρατηρούμε ότι η ομάδα G_{ad} είναι ισομορφική με την εικόνα της κάτω από την adjoint αναπαράσταση, πράγμα το οποίο εξηγεί και την ονομασία της. (Όμως δεν ισχύει απαραίτητα ότι η εικόνα κάθε ομάδας μέσω της adjoint αναπαράστασης είναι και τύπου adjoint. Δες [1] άσκηση 10.37.)

Υπάρχει μία ακόμα καθολική ιδιότητα των ομάδων απλού συνεκτικού τύπου.

Πρόταση .22.6. *Έστω G μία ημιαπλή ομάδα απλά συνεκτικού τύπου. Τότε αν $\pi : H_1 \to H_2$ είναι μία ισόγενεια ημιαπλών ομάδων με $d\pi$ να είναι ισομορφισμός. Τότε κάθε ισογένεια $\Phi : G \to H_2$ μας δίνει μία άλλη ισογένεια $\psi : G \to H_1$ τέτοια ώστε $\phi = \pi \circ \psi$.*

Απόδειξη. Έστω $\tilde{G} := \{(g, h) \in G \times H_1 \mid \phi(g) = \pi(h)\}$, μία κλειστή υποομάδα της $G \times H_1$. Η προβολή $pr_1 : \tilde{G} \to G$ στην πρώτη συνιστώσα είναι ένας επί μορφισμός με πεπερασμένο πυρήνα $1 \times C$, όπου $C = \ker(\pi)$, άρα ο περιορισμός της στην $G_1 := \tilde{G}^{\circ}$ είναι μία ισογένεια.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \subseteq G \times H_1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & H_1 \arrow[d, "\pi"] \\
G \arrow[r, "\phi"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & H_2
\end{tikzcd}$$

Συγκεκριμένα η G_1 είναι ημιαπλή και εφόσον η pr_1 έχει κεντρικό πυρήνα, επάγει έναν ισομορφισμό συστημάτων ριζών, άρα η G_1 έχει τον ίδιο τύπο συστήματος ριζών όπως και η G. Το Θεώρημα Ταξινόμησης του Chevalley μας λέει ότι η G_1 είναι επίσης απλού συνεκτικού τύπου, άρα η $pr_1|_{G_1}$ είναι 1-1. Επιπλέον, το διαφορικό dpr_1 (το οποίο είναι απλά η προβολή στην $\mathrm{Lie}(G)$) έχει πυρήνα $\ker(d\pi)$, ο οποίος είναι 0 από την υπόθεση, επομένως η dpr_1 είναι ισομορφισμός. Από την πρόταση 15.5 το (3), η $pr_1|_{G_1}$ είναι ισομορφισμός, επομένως μπορούμε να πάρουμε την $\psi = pr_2 \circ (pr_1|_{G_1})^{-1}$ η οποία είναι επί αφού η H_1 είναι συνεκτική. □

Παράρτημα

.23 Μέρος Α Στοιχεία από ομάδες και πολλαπλότητες

Πρόταση .23.1. *Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα και $H \leq G$ η οποία περιέχει ένα μη κενό υποσύνολο της κλειστής της θήκης $\overline{H}$, τότε η H είναι κλειστή.*

Απόδειξη. Για να την αποδείξουμε θα αποδείξουμε πρώτα τα εξής:

Λήμμα .23.1. *Έστω U, V ανοικτά και πυκνά υποσύνολα της G.*
Τότε $UV = G$.

Απόδειξη. Ένα υποσύνολο της G είναι ανοικτό και πυκνό $\iff$ τέμνει κάθε μία από τις συνιστώσες της G σε ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο. Η τομή δύο τέτοιων ανοικτών είναι ένα σύνολο με την ίδια ακριβώς ιδιότητα.

Έστω $x \in G$. Τότε xV^{-1} και U είναι ανοικτά, επίσης έχουν μη μηδενική τομή από την πρόταση 3.2 το οποίο σημαίνει ότι $x \in UV$. □

Λήμμα .23.2. *Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα και $H \leq G$.*
Τότε η $\overline{H}$ είναι υποομάδα της G.

Απόδειξη. Έστω $x \in H$, τότε $H = xH \subseteq x\overline{H}$. Εφόσον $x\overline{H}$ είναι κλειστό, έχουμε ότι $\overline{H} \subseteq x\overline{H}$ και $x^{-1}\overline{H} \subseteq \overline{H}$, απ' όπου προκύπτει ότι $H\overline{H} \subseteq \overline{H}$.
Τώρα έστω $x \in \overline{H}$, τότε $Hx \subseteq \overline{H}$ και με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι η $\overline{H}$ είναι κλειστή ως προς τον πολλαπλασιασμό.
Εφόσον η $(\overline{H})^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}$ συμπεραίνουμε ότι η $\overline{H} \leq G$ (δηλαδή η $\overline{H}$ είναι αλγεβρική ομάδα). □

Για το ζητούμενο τώρα:
Αν $U \subset H$ είναι ανοικτό, μη κενό εντός της $\overline{H}$, τότε η H είναι η ένωση translations του U, δηλαδή ανοικτό εντός της $\overline{H}$.
Από το λήμμα 22.1 συμπεραίνουμε ότι $\overline{H} = HH = H$
Άρα η H κλειστή υποομάδα της G. □

Θεώρημα .23.2. *(Βάσης του Hilbert)*
Κάθε ιδεώδες $I \triangleleft k[T_1, \ldots, T_n]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Ισοδύναμα ο δακτύλιος $k[T_1, \ldots, T_n]$ είναι της Noether.

Θεώρημα .23.3. *(Διπλής Κεντρικοποίησης)*
Αν k είναι ένα σώμα, A μία k-άλγεβρα και V είναι μία πιστή ημιαπλή A-άλγεβρα, τότε $C(C(A)) = A$, όπου $C(A)$ είναι η κεντρικοποιούσα της A στην $\mathrm{End}_k(V)$.

Πρόταση .23.4. *Ισχύει ότι:*

$$\mathrm{End}(\mathbf{G}_m) := \{\phi : \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m \mid \phi \text{ είναι μορφισμός αλγεβρικών ομάδων}\} \cong \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη. Για να το δείξουμε πρώτα θα αποδείξουμε το Λήμμα του Dedekind

Λήμμα .23.3. *(Dedekind)*
Έστω G ομάδα και k ένα σώμα. Τότε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathrm{Hom}(G, k^{\times})$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Έστω ότι δεν είναι.
Έστω $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in \mathrm{Hom}(G, k^{\times})$ ένα γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο με $n > 1$ το ελάχιστο τέτοιο πιθανό; χωρίς βλάβη της γενικότητας $\sum_{i=1}^{n-1} a_i\chi_i + \chi_n = 0$ με $a_i \in k$.
Αφού $\chi_1 \neq \chi_n$ μπορούμε να βρούμε $y \in G$ τέτοιο ώστε $\chi_1(y) \neq \chi_n(y)$.
Για τυχαίο $x \in G$ παίρνουμε δύο εξισώσεις:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i\chi_i(x)\chi_i(y) + \chi_n(x)\chi_(y) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i\chi_i(x)\chi_n(y) + \chi_n(x)\chi_(y) = 0$$

Αφαιρώντας μένει ότι $\sum_{i=1}^{n-1} a_i\chi_i(y) - \chi_n(y))\chi_i = 0$ ενώ όλοι οι συντελεστές δεν είναι 0, το οποίο είναι άτοπο, αφού ο n είναι ο ελάχιστος τέτοιος αριθμός για τον οποίο συμβαίνει αυτό. □

Θεωρούμε λοιπόν το σύνολο $X(\mathbf{G}_m) = \{\chi : \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m \mid \chi \text{ μορφισμός αλγεβρικών ομάδων } \}$ των χαρακτήρων της $\mathbf{G}_m$.

Τότε παρατηρούμε ότι $X(\mathbf{G}_m) = \mathrm{End}(\mathbf{G}_m) = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_m = k^{\times})$
Επομένως από το λήμμα του Dedekind το $X(\mathbf{G}_m)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο (υποομάδα) του $k[\mathbf{G}_m] = k[T, T^{-1}]$.
Άρα το $X(\mathbf{G}_m)$ είναι μία βάση του $k[T, T^{-1}]$, δηλαδή όλα τα μονώνυμα και οι αντιστροφές τους, εφόσον κάθε πολυωνυμική συνάρτηση στον $k[T, T^{-1}]$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών.
Άρα κάθε $\chi : \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m$ έχει τη μορφή $t \mapsto t^j$ με $j \in \mathbb{Z}$.
Άρα $X(\mathbf{G}_m) = \mathrm{End}(\mathbf{G}_m) = \{t \mapsto t^j \mid j \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. □

Παρατήρηση: Για την ομάδα $\mathbf{G}_m$, όπως και για έναν n-διάστατο τόρο οι χαρακτήρες αποτελούν βάση του $k[G]$. Οι αλγεβρικές ομάδες για τις οποίες ο $k[G]$ έχει μία βάση από χαρακτήρες ονομάζονται d-ομάδες (δες [2] 16.1).

Αν G, G' είναι δύο d ομάδες ένας μορφισμός $\phi : G \to G'$ αλγεβρικών ομάδων επάγει έναν ομομορφισμό ομάδων $\phi^{\circ} : X(G') \to X(G)$, τον περιορισμό του $\phi^* : k[G'] \to k[G]$. Αντίστροφα, ένας ομομορφισμός ομάδων $\phi : X(G') \to X(G)$ επεκτείνεται (εφόσον τα $X(G'), X(G)$ είναι βάσεις) σε έναν ομομορφισμό k-αλγεβρών $k[G'] \to k[G]$ ο οποίος με τη σειρά του ορίζει έναν μορφισμό $G \to G'$.

Πρόταση .23.5. *(1) Αν H είναι μία κλειστή συνεκτική υποομάδα μίας d-ομάδας G, τότε η H είναι επίσης μία d-ομάδα και είναι η τομή πυρήνων κάποιων χαρακτήρων της G. Συγκεκριμένα, οι ημιαπλές ομάδες είναι d-ομάδες.*
(2) Κάθε d-ομάδα είναι ημιαπλή.

Απόδειξη. (1) Ο περιορισμός $\phi : k[G] \to k[H]$ είναι επίμορφισμος. Προφανώς ο περιορισμός στην H ενός χαρακτήρα της G είναι χαρακτήρας της H, επομένως ο $k[H]$ παράγεται από χαρακτήρες και η H είναι επίσης d-ομάδα. Τώρα έστω $f \in I(H)$, τότε $f = \sum b_i\chi_i,\ \chi \in X(G)$. Από το λήμμα του Dedekind (για την H), αυτοί οι χ_i οι οποίοι έχουν ακριβώς τον ίδιο περιορισμό στην H έχουν άθροισμα συντελεστών ίσο με 0, συνεπώς το $I(H)$ παράγεται από $g = \sum b_i\chi_i$ με $\sum b_i = 0$, με όλους τους χ να είναι ίσοι στην H. Δηλαδή $g = \chi_1 h$, όπου $h = \sum b_i(\chi_1^{-1}\chi_i - 1)$. Συμπεραίνουμε ότι το $I(H)$ παράγεται (σαν ιδεώδες) από τους $\theta - 1$, με $\theta = \chi_1^{-1}\chi_i \in X(G)$. Εφόσον η D_n είναι μία d-ομάδα, συμπεραίνουμε επίσης ότι οι ημιαπλές ομάδες είναι d-ομάδες.

(2) Έστω G μία d-ομάδα. Εφόσον ο $k[G]$ είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη k-άλγεβρα και παράγεται από τους $X(G)$, παράγεται ως k-άλγεβρα από ένα πεπερασμένο σύνολο χαρακτήρων $\chi_1, \ldots, \chi_n$. Ορίζουμε $\phi : G \to \mathbf{G}_m \times \ldots \times \mathbf{G}_m \cong D_n$ με $\phi(x) = (\chi_1(x), \ldots, \chi_n(x))$. Προφανώς η ϕ είναι μορφισμός αλγεβρικών ομάδων με τετριμμένο πυρήνα (αφού οι χ_i παράγουν τον $k[G]$). Συγκεκριμένα, η G πρέπει να είναι αβελιανή και να περιέχει μόνο ημιαπλά στοιχεία, δηλαδή η G είναι ημιαπλή. □

Σαν πόρισμα προκύπτει άμεσα το πόρισμα 8.7

Πρόταση .23.6. *Έστω $\phi : V \times G \to H$ ένας μορφισμός πολλαπλοτήτων με:*
(1) G είναι αλγεβρική ομάδα της οποίας τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης είναι πυκνό υποσύνολό της;
(2) H είναι αλγεβρική ομάδα η οποία περιέχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία τάξης m (για κάθε $m > 0$);
(3) V είναι συνεκτική πολλαπλότητα
(4) Για κάθε $x \in V$, $\phi_x : G \to H$ με $y \mapsto \phi(x, y)$ είναι ομομορφισμός ομάδων.
Τότε ο $x \mapsto \phi(x)$ είναι σταθερός για κάθε $x \in V$. Αν

Απόδειξη. Ορίζουμε για $y \in G, \psi_y(x) = \phi(x, y)$, άρα $\psi_y : V \to H$ είναι μορφισμός. Αν το y έχει πεπερασμένη τάξη, η εικόνα του ψ_y είναι πεπερασμένη από τα (2),(4). Όμως η V είναι συνεκτική από το (3), άρα η εικόνα πρέπει να είναι ένα σημείο. Με άλλα λόγια αν το y είναι πεπερασμένης τάξης στην G είναι $\phi(x, y) = \phi(x', y)$ για κάθε $x, x' \in V$ δηλαδή $\phi_x(y) = \phi_{x'}(y)$. Συνεπώς ο $\phi_x\phi_{x'}^{-1}$ απεικονίζει ένα πυκνό υποσύνολο της G (από το (1)) στο 1.
Συνεπώς $\phi_x = \phi_{x'}$ για κάθε $x, x' \in V$. □

Είδαμε στο κεφάλαιο 4 την δομή των συνεκτικών επιλύσιμων αλγεβρικών ομάδων και ότι κάθε τέτοια ομάδα είναι το ημιευθύ γινόμενο της G_u με έναν maximal τόρο της. Θα δούμε στο παρακάτω Θεώρημα ότι αν η G είναι μηδενοδύναμη τότε το γινόμενο αυτό είναι ευθύ.

Θεώρημα .23.7. *Έστω G μία συνεκτική επιλύσιμη αλγεβρική ομάδα. Τότε η G είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν η G_s είναι υποομάδα, δηλαδή η G_s είναι κλειστή και $G = G_s \times G_u$.*

Απόδειξη. $\Longleftarrow$ Έστω ότι η G_s είναι υποομάδα της G. Στην ακριβή ακολουθία στην ενότητα 10, η π εμφυτεύει την G_s μέσα στην T, άρα η G_s είναι αβελιανή και άρα η $\mathbf{G}_s$ είναι d-ομάδα, που αυτό σημαίνει $\mathbf{G}_s = G_s$. Προφανώς η π απεικονίζει την G_s στην T', άρα η ακριβής ακολουθία διαχωρίζεται: Η G είναι το ημιευθύ γινόμενο $G_s \ltimes G_u$. Όμως η G_s προφανώς είναι κανονική στην G, άρα το γινόμενο είναι ευθύ. Στην πραγματικότητα οι G_s, G_u μετατίθονται ως προς κάθε σημείο τους, άρα $G_s \subseteq Z(G)$. Στη συνέχεια θεωρούμε την $G/Z(G)$ η οποία είναι ισόμορφη με ένα πηλίκο της μηδενοδύναμης ομάδας G_u ([2], 17.5), άρα η G είναι μηδενοδύναμη (αν $G/Z(G)$ τότε και η G μηδενοδύναμη, γνωστή ιδιότητα των μηδενοδύναμων ομάδων).

$\Longrightarrow$ Έστω τώρα ότι η G είναι μηδενοδύναμη. Πρέπει να δείξουμε ότι η G_s είναι υποομάδα; για να το δείξουμε πρέπει απλά να δείξουμε ότι κάθε ζεύγος ημιαπλών στοιχείων x, y μετατίθενται (το γινόμενο 2 ημιαπλών στοιχείων που μετατίθενται είναι επίσης ημιαπλό). Όμως $xyx^{-1}y^{-1} = z \in [G, G] \subseteq G_u, xyx^{-1} = zy$. Αν δείξουμε ότι το y μετατίθεται με όλα τα ταυτοδύναμα στοιχεία, απλά θα προκύψει ότι το δεξί μέρος είναι η διάσπαση Jordan του ημιαπλού στοιχείου xyx^{-1}, με $z = 1$ και $xy = yx$ το ζητούμενο δηλαδή. Για να δείξουμε ότι το $y \in G_s$ κεντρικοποιεί την G_u, δείτε [2,εννότητα 18.3] τα επιχειρήματα πριν το Θεώρημα: το y δρα στην συνεκτική ταυτοδύναμη ομάδα G_u, $M = \gamma_y(G_u)$ και $\gamma_y : M \to M$ είναι 1-1 και επί ([2] Θεώρημα 18.3 (c)). Τότε όμως $M \subseteq G^{\infty} := \cap \mathcal{C}^i G$. Αφού η G είναι μηδενοδύναμη, $M = \{1\}$ και το y κεντρικοποιεί την G_u. □

Πρόταση .23.8. *Έστω X, Y πολλαπλότητες*
Τότε αν $\phi : X \to Y$ είναι μορφισμός, τότε το γράφημα $\Gamma_\phi = \{(x, \phi(x)) \mid x \in X\}$ είναι κλειστό στον $X \times Y$.

Απόδειξη. Πράγματι το Γ_ϕ είναι η αντίστροφη εικόνα $\Delta(Y)$ του μορφισμού $X \times Y \to Y \times Y$, ο οποίος στέλνει το (x, y) στο $(\phi(x), y)$. □

Ορισμός .23.9. *Μία πολλαπλότητα X καλείται πλήρης αν για κάθε πολλαπλότητα Y, η δεύτερη προβολή $pr_2 : X \times Y \to Y$ είναι κλειστή απεικόνιση.*

Στην παρακάτω πρόταση και το παρακάτω λήμμα θα δούμε μερικές (πολύ) βασικές ιδιότητες των πλήρων ομάδων (τις οποίες δεν θα αποδείξουμε, δες [2] Παράγραφο 6.1).

Πρόταση .23.10. *(1) Μία κλειστή υποπολλαπλότητα μίας πλήρους πολλαπλότητας είναι πλήρης*
(2) Αν $\phi : X \to Y$ είναι μορφισμός πολλαπλοτήτων με την X να είναι πλήρης, τότε και η εικόνα είναι κλειστή και πλήρης υποπολλαπλότητα της Y.
(3) Μία πλήρης αφινική πολλαπλότητα έχει διάσταση 0.
(4) Κάθε προβολική πολλαπλότητα είναι πλήρης; πλήρεις ημιπροβολικές πολλαπλότητες είναι προβολικές.
(5) Η flag πολλαπλότηα ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου V είναι προβολική, άρα πλήρης.

Λήμμα .23.4. *Έστω G μία αλγεβρική ομάδα η οποία δρα μεταβατικά σε δύο ανάγωγες πολλαπλότητες X, Y και έστω $\phi : X \to Y$ ένας 1-1 και επί μορφισμός G-χώρων. Τότε αν η Y είναι πλήρης και η X είναι πλήρης.*

Για την απόδειξη του παρακάτω πολύ χρήσιμου λήμματος δείτε ([2], 22.1)

Λήμμα .23.5. *Έστω H μία κλειστή συνεκτική υποομάδα της G και ορίζουμε $X = \bigcup_{x \in G} xHx^{-1}$*
(1) Αν η G/H είναι πλήρης, τότε η X είναι κλειστή υποομάδα.
(2) Αν κάποιο στοιχείο της H σταθεροποιεί μόνο πεπερασμένα το πλήθος σημεία της G/H, τότε η X περιέχει ένα ανοικτό υποσύνολο της G (συγκεκριμένα το X είναι πυκνό).

Έστω G μία γραμμική αλγεβρική ομάδα και $\sigma : G \to G$ ένας αυτομορφισμός της G. Τότε το σύνολο:

$$G_\sigma = \{x \in G \mid \sigma x = x\}$$

είναι κλειστή υποομάδα της G.

Συμβολίζουμε με χ τον μορφισμό $G \to G$ με $\chi(x) = (\sigma x)x^{-1}$. Το διαφορικό $d\sigma$ είναι ένας αυτομορφισμός της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$. Ορίζουμε:

$$\mathfrak{g}_\sigma = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(x) = X\}$$

τότε (δες [3] 5.4.4):

Θεώρημα .23.11. *Αν σ ημιαπλός, τότε* $\mathrm{Lie}(G_\sigma) = \mathfrak{g}_\sigma$.

.24 Μέρος Β: Άλγεβρες Lie

Ορισμός .24.1. *Μία ομάδα πινάκων Lie είναι μία υποομάδα $G \subseteq \mathrm{GL}_n$ με την παρακάτω ιδιότητα: Αν $\{A_k\}$ είναι μία συγκλίνουσα ακολουθία στην G, $A_k \to A$ για $A \in \mathfrak{gl}_n$, τότε είτε $A \in G$ ή ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Σημείωση: Ένας ισοδύναμος τρόπος να ορίσουμε μία ομάδα πινάκων Lie είναι να την ορίσουμε ως μία κλειστή υποομάδα της GL_n (δηλαδή μία γραμμική αλγεβρική ομάδα).

Παραδείγματα
Οι ομάδες $\mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{GO}_n, \mathrm{GSO}_n, D_n$ είναι ομάδες πινάκων Lie.

Ορισμός .24.2. *Μία άλγεβρα Lie A πάνω από ένα σώμα k είναι ένας k διανυσματικός χώρος μαζί με μία διγραμμική μορφή, την αγκύλη Lie $[,] : A \times A \to A$ η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω:*
(1) $[x, x] = 0 \; \forall x \in A$.
(2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \; \forall x, y, z \in A$.

Η αγκύλη Lie συχνά αναφέρεται και ως μεταθέτης των x, y και η ιδιότητα (2) ονομάζεται ταυτότητα του Jacobi.

Ορισμός .24.3. *Αν A μία άλγεβρα Lie πάνω από ένα σώμα k, τότε μία υπάλγεβρα Lie B είναι ένας υπόχωρος του A για τον οποίο ισχύει ότι*

$$[x, y] \in B \; \forall x, y \in B.$$

Ένα παράδειγμα μιας άλγεβρας Lie, θεωρούμε το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου V, $\mathfrak{gl}_V$, με αγκύλη Lie:

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x \; \forall x, y \in \mathfrak{gl}(V)V$$

Αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι η παραπάνω απεικόνιση ικανοποιεί τις δύο ιδιότητες της αγκύλης Lie. Τώρα θα ορίσουμε την εκθετική απεικόνιση η οποία θα μας επιτρέψει να υπολογίσουμε τις άλγεβρες Lie όλων των σημαντικών ομάδων πινάκων Lie μέσω των ιδιοτήτων της.

Ορισμός .24.4. *Έστω $A \in \mathfrak{gl}_n$, ορίζουμε την εκθετική απεικόνιση $e : \mathfrak{gl}_n \to \mathfrak{gl}_n$ με*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Η απόδειξη για την σύγκλιση της παραπάνω σειράς είναι γνωστή.
Στη συνέχεια θα δούμε μερικές πολύ βασικές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης:

Πρόταση .24.5. *Έστω $A, B \in \mathfrak{gl}_n$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*
(1) $e^0 = I$
(2) $(e^A)^T = e^{A^T}$
(3) e^A *είναι αντιστρέψιμο και* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
(4) Αν A, B *μετατίθενται τότε* $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$
(5) Αν $S \in \mathrm{GL}_n$*, τότε* $e^{SAS^{-1}} = Se^A S^{-1}$
(6) $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$
(7) $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$

Η παρακάτω πρόταση είναι επίσης πολύ σημαντική

Πρόταση .24.6. *Έστω $A, B \in \mathfrak{gl}_n$, τότε*

$$e^{A+B} = \lim_{k\to\infty} (e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}})^k$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να ορίσουμε την άλγεβρα Lie μίας ομάδας πινάκων Lie:

Ορισμός .24.7. *Έστω G μία ομάδα πινάκων Lie. Ορίζουμε* $\mathrm{Lie}(G)$ *να είναι:*

$$\mathrm{Lie}(G) = \{A \in \mathfrak{gl}_n \mid e^{tA} \in G,\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Θα δείξουμε ότι η $\mathrm{Lie}(G)$ είναι υπόχωρος του $\mathfrak{gl}_n$. Έστω $A, B \in \mathrm{Lie}(G)$. Έχουμε ότι

$$e^{t(A+B)} = \lim_{k\to\infty} (e^{\frac{tA}{k}} e^{\frac{tB}{k}})^k \in G,$$

όπου το τελευταίο συμπέρασμα προκύπτει απ' το ότι η G είναι κλειστή στην GL_n. Συνεπώς $A + B \in \mathrm{Lie}(G)$. Επίσης, αν $A \in \mathrm{Lie}(G)$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε προφανώς $aA \in \mathrm{Lie}(G)$. Συνεπώς, η $\mathrm{Lie}(G)$ είναι επίσης κλειστή και σε βαθμωτά γινόμενα, άρα η $\mathrm{Lie}(G)$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathfrak{gl}_n$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η $\mathrm{Lie}(G)$ είναι κλειστή ως προς την αγκύλη Lie. Δηλαδή θα δείξουμε ότι για κάθε $A, B \in \mathrm{Lie}(G)$, έχουμε $[A, B] \in \mathrm{Lie}(G)$, όπου $[A, B] = AB - BA$. Θα χρειαστούμε το εξής πολύ βασικό λήμμα:

Λήμμα .24.1. *Έστω G μία ομάδα πινάκων Lie και έστω $A \in G,\ X \in \mathrm{Lie}(G)$. Τότε $AXA^{-1} \in \mathrm{Lie}(G)$.*

Απόδειξη. Απλά παρατηρείστε ότι $e^{tAXA^{-1}} = Ae^{tX}A^{-1} \in G$ για κάθε $t \geq 0$ και έπεται το λήμμα. □

Συνέχεια στο να δείξουμε ότι $[A, B] \in \mathrm{Lie}(G)$ για κάθε $A, B \in \mathrm{Lie}(G)$. Ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση:

$$\Lambda(t) = e^{tA}Be^{-tA},$$

Παρατηρούμε ότι από το λήμμα 24.1 $\Lambda(t) \in \mathrm{Lie}(G)$ για κάθε $t \geq 0$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\Lambda'(t) = Ae^{tA}Be^{-tA} - e^{tA}BAe^{-tA}.$$

Συνεπώς

$$AB - BA = \Lambda'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Lambda(h) - B}{h} \in \mathrm{Lie}(G),$$

όπου το τελευταίο συμπέρασμα προκείπτει απ' το ότι η $\mathrm{Lie}(G)$ είναι υπόχωρος του $\mathfrak{gl}_n$ άρα και κλειστός τοπολογικός υπόχωρος ως προς την νόρμα της $\mathfrak{gl}_n$ (δες [6] παράγραφο 3). Ως αποτέλεσμα των παραπάνω έχουμε ότι:

Θεώρημα .24.8. *Έστω G μία ομάδα πινάκων Lie. Τότε* $\mathrm{Lie}(G)$ *είναι μία υπάλγεβρα του* $\mathfrak{gl}_n$ *με αγκύλη Lie όπως ορίστηκε προηγουμένως.*

Παραδείγματα: Θα υπολογίσουμε τις άλγεβρες Lie των βασικών ομάδων πινάκων Lie.

(1) Αν $G = \mathrm{GL}_n$, τότε:

$$\mathrm{Lie}(G) = \{A \in \mathfrak{gl}_n : \ e^{tA} \in \mathrm{GL}_n \ \forall t \in \mathbb{R}\} = \mathfrak{gl}_n$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 24.5 (3).

(2) Αν $G = \mathrm{SL}_n$, τότε

$$\begin{aligned}\mathrm{Lie}(G) &= \{A \in \mathfrak{gl}_n : \ e^{tA} \in \mathrm{SL}_n, \forall t \in \mathbb{R}\}\\ &= \{A \in \mathfrak{gl}_n : \ \det(e^{tA}) = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}\}\\ &= \{A \in \mathfrak{gl}_n : \ e^{t\mathrm{tr}(A)} = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}\}\\ &= \{A \in \mathfrak{gl}_n : \ \mathrm{tr}(A) = 0\}\end{aligned}$$

(3) Αν $G = \mathrm{GO}_n$, τότε:

$$\begin{aligned}\mathrm{Lie}(G) &= \{A \in \mathfrak{gl}_n : \ e^{tA} \in \mathrm{GO}_n \ \forall t \in \mathbb{R}\}\\ &= \{A \in \mathfrak{gl}_n : \ (e^{tA^T})(e^{tA}) = I \ \forall t \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Διαφορίζουμε την σχέση $(e^{tA^T})(e^{tA}) = I$ ως προς t και παίρνουμε ότι,

$$A^T(e^{tA^T})(e^{tA}) + (e^{tA^T})A(e^{tA}) = 0$$

η οποία για $t = 0$ μας δίνει ότι:

$$A^T + A = 0$$

Συνεπώς $\mathrm{Lie}(G) = \{A \in \mathfrak{gl}_n : \ A^T + A = 0\}$.

(4) Αν $G = \mathrm{GSO}_n$, τότε με τα ίδια ακριβώς επιχειρήματα προκύπτει ότι $\mathrm{Lie}(G) = \{A \in \mathfrak{gl}_n \ A^T + A = 0$ με $\mathrm{tr}(A) = 0\}$

(5) Αν $G = D_n$, τότε

$$\mathrm{Lie}(G) = \{A \in \mathfrak{gl}_n : \ e^{tA} \in D_n \ \forall t \in \mathbb{R}\} = \{\text{διαγώνιοι πίνακες της } \mathfrak{gl}_n\}.$$

Πράγματι, αν A διαγώνιος πίνακας της $\mathfrak{gl}_n$ τότε προφανώς $e^{tA} \in D_n$ αφού κάθε όρος στο άθροισμα είναι δύναμη διαγώνιου, άρα διαγώνιος.
Αν $e^{tA} \in D_n$, τότε αφού οι A και e^{tA} μετατίθενται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (αυτό ισχύει και γενικά) τότε και ο A είναι διαγώνιος.

.25 Μέρος Γ: Συστήματα Ριζών

Υπενθυμίζουμε ότι ένα στοιχείο $s \in \mathrm{GL}(V)$, όπου V είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος, καλείται (γραμμική) ανάκλαση ως προς το $a \in V$, αν το a είναι ιδιοδιάνυσμα του s με ιδιοτιμή -1 και το s σταθεροποιεί ένα υπερεπίπεδο του V κατα σημείο.

Η δράση των ανακλάσεων σε έναν ευκλείδειο χώρο E περιγράφεται από τον εξής εύκολο τύπο:

Πρόταση .25.1. *Έστω $s \in GL(E)$ μία ανάκλαση η οποία σταθεροποιεί την θετικά ορισμένη διγραμμική μορφή $(\cdot,\cdot)$ στον E. Τότε για κάθε ιδιοδιάνυσμα α των μη τετριμμένων ιδιοτιμών του s έχουμε ότι:*

$$s.v = v - 2\frac{(v,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

Απόδειξη. Έστω $H \subset E$ ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1, ο χώρος που σταθεροποιεί το s. Τότε για $v \in H$ έχουμε ότι

$$(v,\alpha) = (s.v, s.\alpha) = (v, -\alpha),$$

επομένως $(v,\alpha) = 0$ για κάθε $v \in H$. Συνεπώς η γραμμική απεικόνιση $E \to E,\ v \mapsto v - 2\frac{(v,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$, είναι ίση με την s στον H, όπως και στο α, άρα $E = H \oplus \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$. □

Ορισμός .25.2. *Ένα υποσύνολο Φ ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου E καλείται ένα (αυθαίρετο) σύστημα ριζών στην E αν ισχύουν τα παρακάτω:*
(R_1) *Φ είναι πεπερασμένο, $0 \notin \Phi$, $\langle\Phi\rangle = E$;*
(R_2) *Αν $c \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε $a, ca \in \Phi$, τότε $c = \pm 1$;*
(R_3) *Για κάθε τέτοιο $a \in \Phi$ υπάρχει μία ανάκλαση του $s_a \in GL(E)$ μεταξύ του a η οποία σταθεροποιεί το ϕ;*
(R_4) *(κρυσταλογραφική συνθήκη) για $a, \beta \in \Phi$, $s_a.\beta - \beta$ είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του a.*
Η ομάδα $W = \langle s_a \mid a \in \Phi\rangle$ καλείται ομάδα Weyl του Φ. Η διάσταση του E καλείται τάξη του Φ.

Έστω Φ ένα σύστημα ριζών στον E. Εφόσον το Φ είναι πεπερασμένο, παράγει τον E και σταθεροποιείται από την W, την ομάδα Weyl ενός αυθαίρετου συστήματος ριζών η οποία είναι πάντα πεπερασμένη. Άρα σταθεροποιεί μία θετικά ορισμένη W-αναλλοίωτη συμμετρική διγραμμική μορφή $(\cdot,\cdot)$ στον E, η οποία είναι μονδική ως προς μη μηδενικά βαθμωτά σε κάθε ανάγωγο W-υποπρότυπο του E. Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε μία τέτοια μορφή να έχει επιλεχθεί έτσι ώστε ο E να είναι ευκλείδειος για να μπορούμε να μιλήσουμε για μήκη και γωνίες διανυσμάτων.

Χρησιμοποιώντας την μη εκφυλισμένη διγραμμική μορφή $(\cdot,\cdot)$ μπορούμε να ταυτίσουμε τον E με τον δϋικό του $E^* = \mathrm{Hom}(E,\mathbb{R})$ με $v \mapsto (E \to \mathbb{R}, u \mapsto v(u) := (u,v))$. Για $\alpha \in \Phi$ ορίζουμε την αντίστοιχη coroot $\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$. Τότε ο τύπος της πρότασης 25.1 για μία ορθογώνια ανάκλαση s ως προς το α γίνεται:

$$s.v = v - (v,\alpha^\vee)\alpha = v - (v,\alpha)\alpha^\vee = v - \alpha^\vee(v)\alpha.$$

Ορισμός .25.3. *Έστω Φ ένα σύστημα ριζών. Το σύνολο $\Phi^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$ καλείται δϋικό του συστήματος ριζών Φ.*

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το $\Phi^\vee$ είναι ένα σύστημα ριζών στον E.

Λήμμα .25.1. *Έστω Φ ένα σύστημα ριζών με ομάδα Weyl W. Τότε για κάθε $\alpha \in \Phi$, $w \in W$ έχουμε ότι:*

$$ws_\alpha w^{-1} = s_{w.\alpha}.$$

Απόδειξη. Από την πρόταση 25.1 έχουμε ότι:

$$ws_\alpha w^{-1}.v = w.(w^{-1}.v - 2\frac{(w^{-1}.v,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = v - 2\frac{(v,w.\alpha)}{(w.\alpha,w.\alpha)}w.\alpha = s_{w.\alpha}.v$$

για κάθε $v \in E$. □

Θεωρώντας μία ολική σχέση διάταξης " $>$ " στον E συμβατή με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό με θετικούς πραγματικούς αριθμούς λέμε ότι το $v \in E$ είναι θετικό αν $v > 0$. Προφανώς μία τέτοια σχέση διάταξης υπάρχει: Επιλέγω μία βάση B του E και θεωρούμε την λεξικογραφική διάταξη στα διανύσματα των συντελεστών ως προς αυτή τη βάση.

Ορισμός .25.4. *Ένα υποσύνολο $\Phi^+ \subseteq \Phi$ το οποίο περιέχει όλες τις θετικές ρίζες του Φ ως προς την ολική διάταξη του E όπως ορίστηκε παραπάνω καλείται σύστημα θετικών ριζών ή θετικό σύστημα του Φ. Ένα υποσύνολο $\Delta \subseteq \Phi$ καλείται βάση του Φ αν είναι διανυσματική βάση του E και κάθε $\beta \in \Phi$ είναι γραμμικός συνδυασμός $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ όπου είτε όλσ τα $c_\alpha \geq 0$ ή $c_\alpha \leq 0$.*

Παρατηρούμε ότι αν $\Phi^+ \subseteq \Phi$ ένα θετικό σύστημα ρζών, τότε $\Phi = \Phi^+ \sqcup -\Phi^+$ από τα (R_2), (R_3). Θα γράφουμε επίσης ότι $\Phi^- := -\Phi^+$.

Λήμμα .25.2. *Έστω $\Phi^+ \subseteq \Phi$ ένα θετικό σύστημα και $\Delta \subseteq \Phi^+$ minimal ως προς την ιδιότητα ότι κάθε στοιχείο του Φ^+ είναι μη αρνητικός γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της Δ. Τότε $(\alpha, \beta) \leq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha \neq \beta$.*

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει για κάποια α, β. Από την πρόταση 25.1 έχουμε ότι $s_\alpha.\beta = \beta - c\alpha$ για κάποιο $c > 0$, και από το (R_3) αυτό πρέπει να είναι στοιχείο του Φ, άρα είτε $s_\alpha.\beta$ ή $-s_\alpha.\beta$ πρέπει να είναι στοιχείο του Φ^+. Αν $s_\alpha.\beta \in \Phi^+$ τότε μπορεί να γραφεί ως $s_\alpha.\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$ με $c_\gamma \geq 0$. Τώρα αν $c_\beta \geq 1$ παίρνουμε ότι

$$0 = s_\alpha.\beta - (\beta - c\alpha) = c\alpha + (c_\beta - 1)\beta + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma$$

το οποίο είναι άτοπο εφόσον όλοι οι προσθεταίοι στο δεξί μέλος είναι μη αρνητικοί και ο πρώτος είναι αυστηρά θετικός. Από την άλλη αν $c_\beta < 1$ τότε η παραπάνω εξίσωση συνεπάγεται ότι $(1 - c_\beta)\beta$ είναι μη αρνητικός γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\Delta \setminus \{\beta\}$ το οποίο είναι άτοπο αφού το Δ είναι το minimal τέτοιο σύνολο. Συνεπώς $-s_\alpha.\beta \in \Phi^+$, αλλά τότε ένα όμοιο επιχείρημα μας οδηγεί πάλι σε άτοπο. □

Πρόταση .25.5. *Έστω Φ ένα αυθαίρετο σύστημα ριζών. Τότε κάθε θετικό σύστημα έχει μοναδική βάση. Αντίστροφα, κάθε βάση περιέχεται σε ένα μοναδικό θετικό σύστημα.*

Απόδειξη. Έστω Φ^+ ένα θετικό σύστημα του Φ και επιλέγω $\Delta \subseteq \Phi^+$ minimal ως προς την ιδιότητα ότι κάθε στοιχείο του Φ^+ είναι μη αρνητικός γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της Δ. (Προφανώς ένα τέτοιο σύνολο υπάρχει) Πρέπει να δείξουμε ότι η Δ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Για αυτό έστω $\sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha = 0$. Συμβολίζουμε με $\Delta' := \{\alpha \in \Delta \mid c_\alpha \geq 0\} \subseteq \Delta$, τότε μπορούμε να ξανα γράψουμε την παραπάνω εξίσωση ως $\sum_{\alpha \in \Delta'} c_\alpha \alpha = \sum_{\alpha \notin \Delta'} c_\beta \beta =: v$ με μη αρνητικούς συντελεστές και στις 2 μεριές. Τότε:

$$0 \leq (v, v) = -\sum_{\alpha \in \Delta'} \sum_{\beta \notin \Delta'} c_\alpha c_\beta (\alpha, \beta) \leq 0$$

από το λήμμα 25.2, συνεπώς $v = 0$ και άρα, εφόσον $c_\alpha \alpha \geq 0$ για κάθε α, όλα τα $c_\alpha = 0$, αποδεικνύοντας την γραμμική ανεξαρτησία του Δ. Προφανώς το Δ χαρακτηρίζεται ως το σύνολο των ριζών στο Φ^+ οι οποίες δεν εκφράζονται ως ένας μη αρνητικός γραμμικός συνδυασμός περισσότερων από ενός στοιχείου του Φ^+, άρα είναι μοναδικό.

Αντίστροφα τώρα, έστω μία βάση Δ, επιλέγω μία ολική διάταξη στην Δ και ορίζω μία ολική διάταξη στον E ως εξής, το $\sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ να είναι θετικό αν και μόνο αν ο πρώτος μη μηδενικός συντελεστής c_α (ως προς τη διάταξη της Δ) είναι θετικός. Τότε το σύνολο των θετικών στοιχείων στο Φ είναι ένα θετικό σύστημα το οποίο περιέχει την Δ. Πάλι η μοναδικότητα είναι προφανής εφόσον κάθε θετικό σύστημα που περιέχει τη βάση Δ πρέπει να περιέχει ακριβώς αυτές τις ρίζες οι οποίες είναι μη αρνητικός γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της Δ. $\square$

Στην πραγματικότητα αυτό μας δείχνει ότι οι βάσεις συστημάτων ριζών υπάρχουν και μπορούμε να μιλάμε για την βάση ενός θετικού συστήματος, ή το θετικό σύστημα που περιέχει μία δωσμένη βάση. Τα στοιχεία της Δ είναι οι λεγόμενες απλές ρίζες ως προς το Φ^+

Ο επόμενος μας στόχος είναι να δείξουμε ότι η ομάδα Weyl δρα μεταβατικά στο σύνολο των βάσεων. Πρώτα θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα .25.3. *Έστω Δ η βάση του συστήματος ριζών Φ και $\alpha \in \Delta$. Τότε το α είναι η μόνη θετική ρίζα φτιαγμένη αρνητικά από την s_α, δηλαδή $s_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) \subseteq \Phi^+$.*

Απόδειξη. Από το (R_3) έχουμε ότι $s\alpha(\Phi^+) \subset \Phi$. Κάθε $\beta \in \Phi^+$ μπορεί να γραφεί ως $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ με $c_\alpha \geq 0$. Τότε όλοι οι συντελεστές του $s_\alpha.\beta = \beta - (\beta, \alpha^\vee)\alpha$ είναι ακόμα μη αρνητικοί, εκτός ίσως από το συντελεστή του α. Από την ιδιότητα του ορισμού της βάσης, αν $s_\alpha.\beta \in \Phi^-$, τότε αναγκαστικά θα είναι $c_\gamma = 0$ για $\gamma \neq \alpha$, δηλαδή ότι το β είναι ένα (θετικό) πολλαπλάσιο του α. Από το (R_2) αυτό συνεπάγεται ότι $\beta = \alpha$. $\square$

Πρόταση .25.6. *Κάθε δύο βάσεις (αντίστοιχα θετικά συστήματα) ενός συστήματος ριζών Φ είναι συζυγή ως προς την ομάδα Weyl W του Φ*

Απόδειξη. Από την ύπαρξη και μοναδικότητα των ισχυρισμών της πρότασης 25.5, αρκεί να το δείξουμε απλά για θετικά συστήματα. Άρα έστω Φ_1^+, Φ_2^+ δύο θετικά συστήματα του Φ. Θα το δείξουμε με επαγωγή στο $n := |\Phi_1^+ \cap -\Phi_2^+|$. Αν $n = 0$ τότε δεν έχουμε κάτι να δείξουμε. Υποθέτουμε ότι $n > 0$. Τότε η βάση Δ του Φ_1^+ δεν μπορεί να περιέχεται στο Φ_2^+, έστω $\alpha \in \Delta \cap -\Phi_2^+$. Τότε το λήμμα 25.3 μας λέει ότι $|s_\alpha.\Phi_1^+ \cap -\Phi_2^+| = n - 1$. Το ζητούμενο προκείπτει από την υπόθεση επαγωγής εφαρμοσμένη στα $s_\alpha.\Phi_1^+, \Phi_2^+$. $\square$

Ορισμός .25.7. *Έστω Δ είναι μία βάση στο σύστημα ριζών Φ. Το ύψος μίας ρίζας $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha \in \Phi$ (σε σχέση με την Δ) ορίζεται ως ht(β) $:= \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha$.*

Πρόταση .25.8. *Αν Δ είναι μία βάση, τότε $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$. Επιπλέον για κάθε $\alpha \in \Phi$ υπάρχει $w \in W$ έτσι ώστε $w, \alpha \in \Delta$.*

Απόδειξη. Έστω $W' := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$, μια υποομάδα της W. Για κάθε $\beta \in \Phi^+$, $W'.\beta \cup \Phi^+$ είναι ένα μη κενό σύνολο από θετικές ρίζες. Έστω $\gamma \in W'\ .\beta \cup \Phi^+$ το μικρότερο ύψος, έστω $\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta}$ με $c_\alpha \leq 0$. Τότε

$$0 < (\gamma, \gamma) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha (\gamma, \alpha),$$

όπου $(\gamma, \alpha) > 0$ για κάποιο α. Υποθέτουμε ότι $\gamma = \alpha$. Από την άλλη $s_\alpha \cdot \gamma$ είναι θετικό από το Λήμμα 25.3, αλλά από την άλλη αυτό λαμβάνεται από το γ αφαιρώντας ένα πολλάπλασιου του α, έτσι αυτό είναι αυστηρά μικρότερου ύψους από το γ. Αφού $s_\alpha.\gamma \in W'.\beta \cup \Phi^+$ αυτό αντιφάσκει από την επιλογή του γ. Έτσι έχουμε δείξει ότι $\gamma = \alpha \in \Delta$.

Ειδικότερα η W' τροχιά από κάθε $\beta \in \Phi^+$ περιέχει μια απλή ρίζα, έτσι $\Phi^+ \subset W'.\Delta$. Αφού $s_\alpha.\alpha = -\alpha$ συμπεραίνουμε στην πραγματικότητα ότι $-\Phi^+ \subseteq W'.(-\Delta) \subseteq$

$W'.\Delta$. Τώρα θεωρούμε κάθε γεννήτορα s_β της W, όπου $\beta \in \Phi$. Από τα παραπάνω έχουμε ότι $\beta = w.\alpha$ για κάποιο $w \in W'$, $\alpha \in \Delta$, έτσι $s_\beta = s_{w.\alpha} = xs_\alpha w^{-1} \in W'$ από Λήμμα 25.1, απ' όπου $W = W'$. $\square$. $\square$

Οι ανακλάσεις $S := \{s_{alpha} \mid \alpha \in \Delta\}$ κατά μήκος των ριζών του Φ ονομάζονται οι απλές ανακλάσεις της W (σε σχέση με το Δ). Ως άμεση συνέπεια, λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα ακεραιότητας, το οποίο για πρώτη φορά χρησιμοποιεί το αξίωμα (R_4).

Πόρισμα .25.9. *Έστω Δ μία βάση του Φ. Τότε κάθε $\alpha \in \Phi$ είναι ένας ακέραιος γραμμικός συνδυασμός των ριζών της Δ.*

Απόδειξη. Το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα για τις ρίζες της Δ. Τώρα έστω $\beta \in \Phi$ και $\alpha \in \Delta$. Αν ο ισχυρισμός ισχύει για το β, τότε ισχύει επίσης και για το $s_\alpha.\beta = \beta - 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ από το (R_4). Εφόσον κάθε $\beta \in \Phi$ είναι της μορφής $w.\gamma$ για κάποιο $w \in W$ και $\gamma \in \Delta$ και το w μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ανακλάσεων s_α με $\alpha \in \Delta$ από την πρόταση 25.8, ο ισχυρισμός έπεται επαγωγικά. $\square$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με διασπάσεις συστημάτων ριζών.

Ορισμός .25.10. *Ένα μη κενό σύστημα ριζών Φ με βάση Δ καλείται διαχωρίσιμο αν υπάρχει μη τετριμμένη διαμέριση $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$ τέτοια ώστε $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ για κάθε $\alpha_i \in \Delta_i, ; i = 1, 2$; αν δεν υπάρχει τέτοια διάσπαση τότε το Φ καλείται μη διαχωρίσιμο.*

Παρατηρούμε από την πρόταση 25.1 ότι η παραπάνω έννοια δεν εξαρτάται από την επιλογή ενός W-αναλλοίωτου βαθμωτού γινομένου στον E.

Πρόταση .25.11. *Έστω Φ ένα διαχωρίσιμο σύστημα ριζών με διαμέριση βάσης $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$ και ορίζουμε $E_i := \mathbb{R}\Delta_i,\ \Phi \cap E_i,\ i = 1, 2$. Τότε ισχύουν:*

(1) Φ_i είναι συστήματα ριζών στους E_i με βάσεις Δ_i για $i = 1, 2$.
(2) $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ και $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ για κάθε $\alpha_1 \in \Phi_1,\ \alpha_2 \in \Phi_2$.
(3) $W(\Phi) = W(\Phi_1) \times W(\Phi_2)$ θεωρώντας ότι $W(\Phi_i)$ δρα τετριμμένα στον E_{3-i}.

Απόδειξη. Από την πρόταση 25.1 για $\alpha \in \Delta_1,\ \beta \in \Delta_2$ έχουμε ότι $s_\beta.\alpha = \alpha$, συνεπώς οι s_α, s_β μετατίθονται από το λήμμα 25.1. Αφού η W παράγεται από τις $s_\alpha,\ \alpha \in \Delta$ από την πρόταση 25.8, κάθε $w \in W$ μπορεί να γραφεί ως ένα μεταθετικό γινόμενο $w = w_1 w_2$ με $w_i \in W_i$, όπου $W_i := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta_i\rangle,\ i = 1, 2$. Τώρα κάθε $w \in W_i$ αφήνει σταθερά όλα τα στοιχεία του Δ_{3-i} και πάλι από την πρόταση 25.1 επίσης $W_i.\Delta_i \subset E_i$. Άρα η τομή $W_1 \cap W_2$ σταθεροποιεί την βάση Δ του E, δηλαδή είναι τετριμμένη, άρα $W = W_1 \times W_2$.

Επιπλέον, από την πρόταση 25.8 έχουμε ότι

$$\Phi = W.\Delta = (W_1 \times W_2).(\Delta_1 \cup \Delta_2) = W_1.\Delta_1 \cup W_2.\Delta_2 \subset E_1 \cup E_2.$$

Αφού η Δ είναι βάση του E, $E = E_1 \oplus E_2$, άρα $\Phi_i = \Phi \cap E_i = W_i.\Delta_i$, που έπεται το (2).
Προφανώς τα αξιώματα $(R_1) - (R_4)$ ικανοποιούνται για $\Phi_i \subset E_i,\ \Delta_i$ είναι μία βάση του Φ_i, έτσι $W_i = W(\Phi_i)$ από την πρόταση 25.8 αποδεικνύοντας τα (1) και (3). $\square$

Επαγωγικά παίρνουμε ότι

Πόρισμα .25.12. *Κάθε σύστημα ριζών Φ μπορεί να διαχωριστεί με μοναδικό τρόπο σε μία ξένη ορθογώνια ένωση $\Phi_1 \sqcup \ldots \sqcup \Phi_r$ μη διαχωρίσιμων συστημάτων ριζών Φ_i και επιπλέον $W(\Phi) \cong W(\Phi_1) \times \cdots \times W(\Phi_r)$.*

Τα Φ_i στο παραπάνω πόρισμα καλούνται μη διαχωρίσιμες συνιστώσες του συστήματος ριζών Φ.

Πρόταση .25.13. *Ένα σύστημα ριζών είναι μη διαχωρίσιμο αν και μόνο αν η ομάδα Weyl του δρα ανάγωγα στον E.*

Απόδειξη. Αν το Φ είναι διαχωρίσιμο, τότε η W δεν είναι ανάγωγη από την πρόταση 25.11 (3).
Αντίστροφα τώρα, αν $E_1 < E$ είναι ένας μη τετριμμένος W-αναλλοίωτος υπόχωρος, τότε παίρνουμε μία W-αναλλοίωτη ορθογώνια διάσπαση $E = E_1 \oplus E_2$ με $E_2 = E_1^{\perp}$. Ισχυριζόμαστε ότι κάθε $\alpha \in \Phi$ απεικονίζεται είτε στο E_1 ή στο E_2. Πράγματι, αφού το s_α δρα ημιαπλά στον E, υπάρχει βάση του E_1 η οποία περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του s_α. Αν η ιδιοτιμή -1 προκύπτει, τότε ο -1-ιδιόχωρος του s_α παράγεται από το α, άρα έχουμε ότι $\alpha \in E_1$. Διαφορετικά, $E_1 \leq \ker(s_\alpha - 1)$. Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα ισχύει και για το E_2. Εφόσον προφανώς δεν μπορούμε να έχουμε και τα δύο $E_1, E_2 \leq \ker(s_\alpha - 1),\ \alpha \in E_i$ για κάποιο i. Άρα η $\Delta \subset E_1 \cup E_2$ μας δίνει μία ορθογώνια (και μη τετριμμένη διάσπαση της Δ. $\square$

Θα τελειώσουμε αυτή την παράγραφο με ένα πολύ σημαντικό εργαλείο, την συνάρτηση μήκους, η οποία θα μας βοηθήσει (εν μέρη γιατί το ένα μέρος έχει ήδη αποδειχθεί) στην απόδειξη του τελευταίου βασικού αποτελέσματος και γενικά στη μελέτη ενός συστήματος ριζών και της ομάδας Weyl του.

Ορισμός .25.14. *Έστω Δ μία βάση του Φ. Το μήκος $l(w)$ του $w \in W$ (ως προς την Δ) είναι ο ελάχιστος ακέραιος l τέτοιος ώστε $w = s_{\alpha_1} \dots w_{\alpha_l}$ με $\alpha_i \in \Delta$. Κάθε τέτοια έκφραση του w ελάχιστου μήκους καλείται reduced.*

Είναι προφανές ότι $l(ws_\alpha) = l(w) \pm 1$ για $w \in W,\ \alpha \in \Delta$ και επίσης $l(w) = l(w^{-1})$ εφόσον όλες οι s_α είναι involutions.

Ορίζουμε μία δεύτερη συνάρτηση στην W ως εξής:

$$n(w) := |\{\beta \in \Phi^+ \mid w.\beta \in \Phi^-\}|,$$

ο αριθμός των θετικών ριζών φτιαγμένες αρνητικά από το $w \in W$. Θα προκύψει ότι αυτό είναι ίσο με το μήκος $l(w)$ που ορίσαμε παραπάνω. Για να το δείξουμε αυτό θα χρειαστούμε το εξής λήμμα:

Λήμμα .25.4. *Έστω $\alpha \in \Delta$ και $w \in W$. Τότε:*

$$n(ws_\alpha) = \begin{cases} n(w) + 1 & \text{αν } \ w.\alpha \in \Phi^+ \\ n(w) - 1 & \text{αν } \ w.\alpha \in \Phi^- \end{cases}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $N(w) := (w.\Phi^+) \cap \Phi^-$, έτσι ώστε να είναι $n(w) = |N(w)|$. Τότε από το λήμμα 25.3 έχουμε ότι

$$N(ws_\alpha) = (ws_\alpha.\Phi^+) \cap \Phi^- = w.(\Phi^+ \setminus \{\alpha\} \sqcup \{-\alpha\}) \cap \Phi^-.$$

Έτσι αν $w.\alpha \in \Phi^+$ τότε

$$N(ws_\alpha) = (w.(\Phi^+ \setminus \{\alpha\} \sqcup \{-w.\alpha\}) \cap \Phi^- = N(w) \sqcup \{-w.\alpha\},$$

δηλαδή το ζητούμενο. Από την άλλη, αν $w.\alpha \in \Phi^-$ τότε αυτό μας δείχνει ότι $N(ws_\alpha) = N(w) \setminus \{w.\alpha\}$. $\square$

Πρόταση .25.15. *Ισχύει ότι* $l(w) = n(w)$ *για κάθε* $w \in W$.

Απόδειξη. Έστω $w \in W$. Με μία εύκολη επαγωγή, ξεκινώντας με $w = 1$ και κάνοντας χρήση του προηγούμενου λήμματος έχουμε ότι $n(w) \leq l(w)$ για κάθε $w \in W$. Υποθέτουμε τώρα ότι $n(w) < l(w)$ και διαλέγουμε μία reduced έκφραση $w = s_1 \dots s_l$ με $s_i = s_{\alpha_i}$ για $\alpha_i \in \Delta$ και $l = l(w)$. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα υπάρχει $j < l$ με $n(s_1 \dots s_{j+1}) < n(s_1 \dots s_j)$ και $s_1 \dots s_j.\alpha_{j+1} \in \Phi^-$. Εφόσον $\alpha_{j+1} \in \Phi^+$ υπάρχει $i \leq j$ τέτοιο ώστε $s_i \dots s_j.\alpha_{j+1} \in \Phi^-$ και $s_{i+1} \dots s_j.\alpha_{j+1} \in \Phi^+$, συνεπώς $s_{i+1} \dots s_j.\alpha_{j+1} = \alpha_i$ από το λήμμα 25.3. Αν $u := s_{i+1} \dots s_j$ τότε

$$s_{i+1} \dots s_j \cdot s_{j+1} \cdot s_j \dots s_{i+1} = us_{j+1}u^{-1} = s_{u.\alpha_{j+1}} = s_{\alpha_i} = s_i$$

από το λήμμα 25.1, επομένως $s_{i+1} \dots s_{j+1} = s_i \dots s_j$. Αντικαθστώντας το δεξί μέλος με το αριστερό στο w και χρησιμοποιώντας ότι $s_i^2 = 1$ βρήκαμε μία μικρότερη έκφραση για το w, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς $n(w) = l(w)$ όπως ισχυριστήκαμε. □

Θεώρημα .25.16. *Η* W *δρα μεταβατικά στο σύνολο των βάσεων (αντίστοιχα στο σύνολο των θετικών συστημάτων) του* Φ*, δηλαδή το μόνο στοιχείο της* W *που σταθεροποιεί μία δωσμένη βάση setwise είναι το 1.*

Απόδειξη. Την μεταβατικότητα την έχουμε ήδη αποδείξει στην πρόταση 25.6. Τώρα αν $w \in W$ σταθεροποιεί την Δ, τότε προφανώς σταθεροποιεί και το Φ^+, απ' όπου $l(w) = n(w) = 0$ από την προηγούμενη πρόταση. □

Βιβλιογραφία

[1] Gunter Malle and Donna Testerman *Linear Algebraic Groups and Finite Groups of Lie Type*. cambridge studies in advanced mathematics

[2] James E. Humphreys *Linear Algebraic Groups*. Springer (1988)

[3] T.A. Springer, Linear Algebraic Groups. Progress in Mathematics

[4] J.S. Milne, Algebraic Geometry

[5] Armand Borel, Linear Algebraic Groups, second enlarged edition

[6] Alen Alexanderian, Matrix Groups and their Lie Algebras

[7] Qizhen He, Lie algebras and Lie brackets of Lie groups-matrix groups