ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Η αιτιολόγηση ως προπομπός της απόδειξης παιδιών που δημιουργούν κινούμενα γραμμικά ψηφιακά μοντέλα, προγραμματίζοντας

Κορομπλή Χαρίκλεια
Δ 202029

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Κυνηγός Πολυχρόνης Καθηγητής

Αθήνα
Φεβρουάριος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 22/4/2024 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Π. Κυνηγό (Επιβλέπων)	Καθηγητής
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρη	Αναπλ. Καθηγητής

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Π. Κυνηγό (Επιβλέπων)	Καθηγητής
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Χ. Τριανταφύλλου	Επικ. Καθηγήτρια

Ευχαριστίες

Σε αυτόν τον κύκλο που ολοκληρώνεται με το παρόν έργο, εγγράφονται σκέψεις, εμπειρίες, στιγμές και συναισθήματα, πρόσωπα και ιδέες. Καθετί που συνέβαλε σε αυτή την πορεία, είναι πολύτιμο κομμάτι της.

Θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον κ. Κυνηγό, για τους ορίζοντες που άνοιξε μπροστά μου, τη δημιουργική πίεση και την συνεχόμενη πρόκληση, το «ακαδημαϊκό παιχνίδι» -έκφραση δική του- στο οποίο με προσκάλεσε, και στο οποίο τόσο πολύ με στήριξε.

Ευχαριστώ τον Δημήτρη Διαμαντίδη, για την πολύτιμη βοήθεια του και την όμορφη συνεργασία. Επίσης, τα φοβερά του παιδιά, τις μαθήτριες και τους μαθητές του στο σχολείο, για τα νοήματα και τις εμπειρίες που χτίσαμε μαζί. Τις όμορφες «εκπλήξεις» που μου χάρισαν.

Ευχαριστώ θερμά τα μέλη του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, για τις ιδέες, τη στάση και την έμπρακτη βοήθειά τους.

Συναδέλφισσες, συναδέλφους, καθηγήτριες και καθηγητές στο ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών.

Την Αλίκη, την υπέροχη συναδέλφισσα και φίλη.

Την οικογένειά μου και τον Στέλιο, για την καθημερινή στήριξη, την αλληλεγγύη και το φως τους.

«I ´ve never seen a child
who didn’t want to build something out of blocks, or learn something new
or try the next task,
and I suppose if adults are different
it is because they were sent to schools
and other oppressive institutions.»

Chomsky, N. & Foucault, M.
The Chomsky-Foucault debate ~ On human nature

Περιεχόμενα

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας έρευνας αποτελεί η μελέτη των αιτιολογήσεων των παιδιών και της επιχειρηματολογίας που αναπτύσσουν κατά τη διάρκεια της συνεργασίας τους για την διόρθωση και την παραγωγή ψηφιακών μοντέλων, στα πλαίσια ενός προγραμματιστικού περιβάλλοντος. Κεντρική στόχευση είναι να διερευνηθεί το πώς η εργασία σε τέτοια περιβάλλοντα, και μέσω μετασχηματιστικών τεχνολογιών, επαναπροσδιορίζει τις συνθήκες μάθησης, πώς επηρεάζει την παραγωγή, έκφραση και επικοινωνία ιδεών και, εν συνεχεία, πώς επιδρά στις νοητικές κατασκευές, καλλιεργώντας την ανάγκη παραγωγής μαθηματικών αποδείξεων.

Πρόκειται για μία εμπειρική έρευνα που απευθύνεται σε παιδιά Γ' Γυμνασίου και αποτελείται από μία ακολουθία δραστηριοτήτων που δομούνται αξιοποιώντας το ψηφιακό εργαλείο MaLT2. Η θεματική του σχεδιασμού της εν λόγω παρέμβασης πραγματεύεται το ζήτημα της εγγραψιμότητας. Εξετάζονται οι στρατηγικές που θα καταστρώσουν τα παιδιά, τα νοήματα που θα κατασκευάσουν, οι αιτιολογήσεις που θα επιχειρήσουν, το λεξιλόγιο και οι πρακτικές που θα αναπτύξουν όταν έρθουν αντιμέτωπα με το πρόβλημα του σχεδιασμού του εσωτερικού μίας τρελόμπαλας· ουσιαστικά δηλαδή, με την εγγραφή δισδιάστατων ή τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων σε κύκλο και σε σφαίρα.

Η προβληματική από την οποία εφορμάται η έρευνα αυτή, γεννιέται από την υποψία ότι η θέση που κατέχει η Απόδειξη στην καθεστηκυία σχολική πραγματικότητα είναι ιδιαίτερα υποβαθμισμένη και απροκάλυπτα ξένη προς τον γνήσια συναρπαστικό και «χειρωνακτικό» χαρακτήρα που αυτή φέρει στην μαθηματική πρακτική, ανά τους αιώνες. Η μαθηματική απόδειξη είναι η κατασκευή νέας γνώσης, η θαρραλέα προσπάθεια να εξακριβώσουμε, να πειστούμε, να επικοινωνήσουμε την πίστη μας για την αλήθεια κάποιου συλλογισμού, να προκαλέσουμε, να πείσουμε ή να ηττηθούμε. Αντίθετα τα παιδιά, στα παραδοσιακά σχολικά περιβάλλοντα, καλούνται να απομνημονεύσουν και να αναπαράγουν αποδείξεις. Στερούνται, έτσι, τη χαρά της εμπλοκής και σπάνια έχουν ευκαιρίες να συλλάβουν την πολιτισμική ισχύ και τη σημασία της αποδεικτικής διαδικασίας. Η παρούσα έρευνα επιχειρεί να ιχνηλατήσει το πώς η εργασία σε μία κοινότητα πρακτικής (community of practice) με ψηφιακά εργαλεία, μπορεί να προσφέρει στα παιδιά ευκαιρίες πλούσιας λογικο-μαθηματικής επιχειρηματολογίας και γενίκευσης.

Η παρέμβαση σχεδιάστηκε στα πλαίσια της έρευνας σχεδιασμού (Design-Based Research). Τα ευρήματα αναλύονται μέσα από την παρουσίαση επιλεγμένων κρίσιμων συμβάντων στα οποία υπάρχουν ιδιαίτερα υποσχόμενα και ελπιδοφόρα στοιχεία προσωπικής εμπλοκής, ενεργοποίησης και έντονης τάσης των παιδιών προς την ανάγκη αιτιολόγησης και απόδειξης. Διαφαίνεται επίσης, πως η διδακτική αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων και συγκεκριμένα, η εμπλοκή των παιδιών με δραστηριότητες προγραμματισμού οξύνει την Υπολογιστική Σκέψη (computational thinking) και ταυτόχρονα καλλιεργεί τον μαθηματικό τρόπο σκέπτεσθαι, αντιμετωπίζοντας τα Μαθηματικά ως μία ολότητα, και όχι ως ένα κατακερματισμένο επιστημονικό πεδίο, χωρισμένο σε κεφάλαια και υποενότητες.

Λέξεις-Κλειδιά: Αιτιολόγηση, Απόδειξη, Εγγραψιμότητα, Προγραμματισμός, Υπολογιστική Σκέψη, εννοιολογικά πεδία

ABSTRACT

The subject of this present research is the study of the argumentation students develop during their collaboration on the debugging and production of digital models, within a programming environment. The central aim is to explore how engaging with such environments, and through transformative technologies, redefines learning conditions, affects the production, expression and communication of ideas and, subsequently, how it enriches mental constructions, cultivating the need to produce strong mathematical evidence and proof.

This is an empirical study addressed to 9th grade students and consists of a series of activities that are structured using MaLT2 [1], an online environment that integrates Logo textual programming with the affordances of dynamic manipulation, 3D graphics and camera navigation. The central theme of the design of this intervention is drawn from the issue of inscribability. It examines the strategies that children develop, the meanings they construct, the justifications, the vocabulary and the practices they develop when dealing with the problem of designing the interior space of a crazy ball; in other words, faced with the challenge of inscribing two or three-dimensional geometric objects in a circle and a sphere.

This study discusses how working in a community of practice with digital tools can cultivate childrens' logical-mathematical argumentation and generalization. The results gained from the implementation of the research are highly promising, suggesting that the educational use of digital tools, and specifically, the involvement of children with programming activities provides opportunities of personal involvement, activation and strong tendency of children towards the need for justification and proving. Furthermore, it sharpens computational thinking and, at the same time cultivates the mathematical way of thinking.

Keywords: Reasoning, Evidence, Inscribability, Programming, Computational Thinking, Conceptual Fields

[1] http://etl.ppp.uoa.gr/malt2/

Εισαγωγή

Η παρούσα έρευνα σχεδιάζει και υλοποιεί ένα περιβάλλον ανοιχτής διερεύνησης πάνω στο ζήτημα της εγγραψιμότητας, στοχεύοντας στο να διαμορφώσει συνθήκες κατάλληλες ώστε να έρθουν τα παιδιά αντιμέτωπα με την πραγματική ανάγκη έκφρασης επιχειρημάτων και παραγωγής αιτιολογήσεων. Επίσης μελετά και αναλύει τις νοηματοδοτήσεις, την επιχειρηματολογία και το σύνολο της μαθηματικής τους δραστηριότητας. Για το σκοπό αυτό, επιλέχθηκε τα παιδιά να εργαστούν σε ολιγομελείς κοινότητες πρακτικής, με το προγραμματιστικό εργαλείο MaLT2. Η διδακτική παρέμβαση που σχεδιάστηκε στα πλαίσια της έρευνας, προορίζεται για παιδιά Γ΄ Γυμνασίου. Σε αυτό το στάδιο, τα παιδιά κατέχουν βασικές έννοιες της Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας.

Το ότι δεν υπάρχει αντιστοιχία με το καθιερωμένο αναλυτικό πρόγραμμα και το ότι η εγγραψιμότητα δεν αποτελεί καν διδακτικό αντικείμενο, είναι ένα σημείο-κλειδί για την πορεία του σχεδιασμού. Όπως θα δούμε, υπάρχουν εδάφια στα σχολικά εγχειρίδια του Γυμνασίου και του Λυκείου που πραγματεύονται το ζήτημα αλλά, είτε έχουν αποσπαστεί από τη διδακτέα ύλη τα τελευταία χρόνια, είτε παρουσιάζονται με τη μορφή έτοιμων αποτελεσμάτων προς απομνημόνευση. Αντίθετα, τον παρόντα σχεδιασμό διατρέχει η πεποίθηση ότι η εγγραψιμότητα θα μπορούσε να αποτελέσει ένα πλούσιο πεδίο εννοιολογικών κατασκευών, ανακαλύψεων, συνδέσεων - ήτοι ένα πλούσιο πεδίο ανάπτυξης της γενικευμένης σκέψης, ένα πεδίο πρόσφορο για γνήσια μαθηματική δραστηριότητα. Ταυτόχρονα, κεντρική θέση της ερευνήτριας είναι ότι θα μπορούσε η εγγραψιμότητα να αποτελέσει ένα ζήτημα-κορμό, γύρω από το οποίο θα μπορούσαν να σχεδιαστούν και να αναπτυχθούν πόροι και εκπαιδευτικό υλικό για τα Μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Από τα μέχρι εδώ καταφαίνεται ότι, η έρευνα αυτή δεν φιλοδοξεί να προσεγγίσει τα ζητήματα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης κατά τρόπο συμβατικό. Η εγγραψιμότητα «επινοείται» ως μία πλατφόρμα διερεύνησης και μία αφορμή να σχεδιαστεί μία σειρά δραστηριοτήτων που, μοιραία θα φέρει τα παιδιά αντιμέτωπα με την ανάγκη παραγωγής αιτιολογήσεων. Πολύ συχνά η βιβλιογραφία και η έρευνα για τη Μαθηματική Εκπαίδευση εστιάζει στη σημασία της απόδειξης στη σχολική τάξη, ή στις «δυσκολίες» των παιδιών και στα «εμπόδια» που συναντούν προς την κατεύθυνση της παραγωγής μαθηματικών αποδείξεων · σπανίως όμως στρέφεται η προσοχή στο τί θα ήταν αυτό που θα προκαλούσε την ανάγκη για παραγωγή αιτιολογήσεων και, συνακόλουθα αποδείξεων.

Γνήσια πεποίθηση του Papert και, εν πολλοίς κινητήρια δύναμη για την έρευνα αυτή είναι, ότι τα παιδιά -ούτως ή άλλως- είναι όντα εξερευνητικά και δημιουργικά τα οποία, δοθείσης της ευκαιρίας εμπλέκονται με ζήλο σε νέες περιπέτειες. Άραγε πώς θα σκεφτούν και πώς θα δράσουν; Αν στρέψουμε το ενδιαφέρον μας προς το δημιουργικό τους παιχνίδι, στα εδάφη της εγγραψιμότητας που σχεδιάσαμε εδώ, σίγουρα θα μάθουμε πολλά. Αρωγός, το ψηφιακό προγραμματιστικό εργαλείο που επιλέχθηκε, καθώς κομίζει, όπως θα αναλυθεί παρακάτω, πρόσθετη διδακτική αξία στην ενασχόληση των παιδιών με το ζήτημα. Προωθεί την ανάγκη για να παραχθούν αιτιολογήσεις και για να εκδηλωθούν συμπεριφορές που δύσκολα θα παρατηρούσαμε στα πλαίσια μίας παραδοσιακής διδακτικής κατάστασης. Τα οφέλη που εκπορεύονται από το σχεδιασμό με το εν λόγω ψηφιακό εργαλείο αναδεικνύουν την συνεισφορά των νέων τεχνολογιών στη Μαθηματική εκπαίδευση και την ταυτόχρονη ανάπτυξη της μαθηματικής και της υπολογιστικής σκέψης [computational thinking].

Πριν παρουσιαστεί η διδακτική προσέγγιση, γίνεται ένας βιβλιογραφικός διάλογος πάνω στα ζητήματα που προαναφέρθηκαν και πλαισιώνουν τον προβληματισμό μου, τα θεωρητικά εργαλεία που θεμελίωσαν το σχεδιασμό και τα μεθοδολογικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν. Ακολουθεί η αναλυτική περιγραφή των δραστηριοτήτων που δόθηκαν στα παιδιά, τα αποτελέσματα της έρευνας, η ανάλυσή τους και η εξαγωγή των συμπερασμάτων.

Επισκόπηση Βιβλιογραφίας

<u>Επιστημολογίες για την Μαθηματική Απόδειξη</u>

Η μελέτη της Φιλοσοφίας και της Ιστορίας των Μαθηματικών φέρνει στο φως την ύπαρξη δύο αντικρουόμενων απόψεων για τον ρόλο και τον χαρακτήρα της απόδειξης (Hanna , 2000). Η μία άποψη υποστηρίζει τον εμπειρικό χαρακτήρα της απόδειξης, στήριγμα της οποίας αποτελούν πληροφορίες και εξηγήσεις προερχόμενες από τις αισθήσεις. Η άλλη άποψη υποστηρίζει τον φορμαλιστικό χαρακτήρα της απόδειξης, που κύρια στόχευση έχει να πείσει για την αλήθεια των προτάσεων και των θεωρημάτων που διατυπώνονται με αυστηρούς κανόνες της μαθηματικής λογικής και της τυπικής μαθηματικής γλώσσας.

Η διαμάχη μεταξύ εμπειρικού και φορμαλιστικού χαρακτήρα της απόδειξης στη μαθηματική επιστήμη αφορά την αντίθεση διαφορετικών προσεγγίσεων στην απόδειξη θεωρημάτων και προτάσεων. Η διαμάχη αυτή έχει ιστορική σημασία, καθώς εμφανίστηκε σε δύο διαφορετικές ιστορικές περιόδους: στην Ελληνική περίοδο από τον 6ο έως τον 3ο αιώνα π.Χ. και έπειτα στην περίοδο από τον 17ο έως τον 19ο αιώνα. Η ουσία του προβληματισμού έγκειται στις επιστημολογικές διαφορές των θέσεων για την αποδεικτική διαδικασία στη μαθηματική επιστήμη.

Διατρέχοντας τη βιβλιογραφία βλέπουμε ότι έχουν διατυπωθεί διάφορες επιστημολογικές απόψεις για την απόδειξη. Σημειώνουμε κάποιες από αυτές:

1. Φορμαλιστική Προσέγγιση: Η φορμαλιστική προσέγγιση, κατά την οποία η απόδειξη είναι μια τυπική διαδικασία που μπορεί να αποδειχθεί με εσωτερικά μόνο μέσα. Η εγκυρότητα μιας μαθηματικής πρότασης στηρίζεται στη δυνατότητα απόδειξης της αλήθειας της με τυπικό τρόπο μέσα σε ένα κατάλληλο μαθηματικό σύστημα. Οι φορμαλιστές πίστευαν ότι ένα αντικειμενικό πρότυπο απόδειξης θα μπορούσε να επιτευχθεί ανάγοντας την αποδεικτική διαδικασία σε χειρισμό συμβόλων (Lee, 2002), επιδιώκοντας έτσι να αναδείξουν την αντικειμενικότητα και την ακρίβεια των μαθηματικών αποδείξεων. Σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση, η μαθηματική απόδειξη πρέπει να είναι ανεξάρτητη από το περιεχόμενο της πρότασης και να βασίζεται αποκλειστικά στην ακολουθία των λογικών βημάτων που ακολουθούνται.

2. Λογικιστική Προσέγγιση: Η λογικιστική προσέγγιση, ως προς την μαθηματική απόδειξη, επικεντρώνεται στη χρήση της λογικής και των αξιωματικών συστημάτων για την ανάπτυξη και την αξιολόγηση -μέσα σε αυτά- των μαθηματικών αποδείξεων. Σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση, η απόδειξη ενός θεωρήματος πρέπει να προκύπτει από ένα αυστηρά ορισμένο σύνολο αξιωματικών και κανόνων λογικής. Σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση, η απόδειξη πρέπει να δείξει την ισχύ του αξιωματικού

συστήματος. Ο σκοπός των λογικιστών ήταν να θεμελιώσουν τα μαθηματικά με την εισαγωγή εννοιών που προσδιορίζονται από λογικούς όρους ή με θεωρήματα που μπορούσαν να αποδειχθούν μόνο από στοιχειώδεις προτάσεις μιας λογικής ανάλυσης, χρησιμοποιώντας λογικούς συμπερασματικούς κανόνες απόδειξης. Έτσι η τυπική απόδειξη έπαιξε κεντρικό ρόλο στο πρόγραμμα των λογικιστών. Για τους λογικιστές δεν ήταν επιτρεπτό, λόγου χάριν, να χρησιμοποιούν μαθηματικές μεθόδους απόδειξης - όπως πχ. τη μαθηματική επαγωγή - χωρίς προηγουμένως να δώσουν μια αυστηρώς λογική περιγραφή τους. Το βασικό ενδιαφέρον των λογικιστών είναι να παράγουν θεωρήματα από ένα συγκεκριμένο αξιωματικό σύστημα. Επομένως, η λειτουργία της απόδειξης για τους λογικιστές είναι να δείξει επίσης την ισχύ του αξιωματικού τους συστήματος (Lee, 2002). Σημειώνουμε εδώ, ότι ο Frege (1950), κύριος εκφραστής των απόψεων της σχολής των Λογικιστών, επέμενε ότι τα μαθηματικά δεν ασχολούνται με ιδέες – εικόνες και δεν αποτελούν ψυχική ή διανοητική κατασκευή, αλλά είναι η οικοδόμηση και η σύνδεση εννοιών, οι οποίες είναι οντότητες με την έννοια των φυσικών αντικειμένων που δεν μπορούν να θεωρηθούν ψυχολογικά κατασκευάσματα.

3. Κοινωνιολογική Προσέγγιση: Η απόδειξη είναι ένα κοινωνικό φαινόμενο που εξαρτάται από την κυρίαρχη θεωρία της μαθηματικής κοινότητας . Η κοινωνική προσέγγιση της απόδειξης στη μαθηματική επιστήμη εστιάζει στον τρόπο με τον οποίο η απόδειξη ενός μαθηματικού θεωρήματος παράγεται και αντιλαμβάνεται μέσα από τις κοινωνικές πρακτικές, αναγνωρίζοντας τον κοινωνικό χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας και τη σημασία του πλαισίου μέσα στο οποίο εξετάζεται η απόδειξη. Πιο συγκεκριμένα, η απόδειξη ενός μαθηματικού θεωρήματος προκύπτει μέσα από διεργασίες κοινωνικής διαλεκτικής, όπου η παραγωγή και η κατανόηση της απόδειξης επηρεάζεται από τις ανθρώπινες πρακτικές και το κοινωνικό πλαίσιο. Αυτή η προσέγγιση αναδεικνύει τη σημασία της κοινωνικής διάστασης της μαθηματικής δραστηριότητας και της απόδειξης, καθώς και την αλληλεπίδρασή τους με το πλαίσιο στο οποίο αυτές λειτουργούν. Η κοινωνική προσέγγιση αναδεικνύει τη σημασία της κοινωνιολογικής και πολιτισμικής προέλευσης της μαθηματικής δραστηριότητας και της απόδειξης, και προσφέρει μια διαφορετική οπτική γωνία για την κατανόηση της μαθηματικής επιστήμης. Χαρακτηριστικός εκφραστής της είναι ο Lakatos, που εισάγει τους όρους «Proving-Refuting» και το «zigzag path». Στο έργο του Proofs and Refutations (1983) ανοίγει το πεδίο της αναζήτησης, και της ενθάρρυνσης μη-τυπικών αποδείξεων, δίνοντας έμφαση στη διαίσθηση, τις αναλογίες, σε συλλογισμούς που παραμένουν πάντα ανοικτοί στην κριτική και την αμφισβήτηση, αφήνοντας στην άκρη τον φορμαλισμό και την «βέβαιη γνώση». Η πορεία της μαθηματικής σκέψης προς την απόδειξη παραμένει πάντα μία ανοικτή διεργασία, υπό συνεχή διαπραγμάτευση. [«a process of proof and refutation»]. Επίσης εισάγεται το δίπολο proving–refuting. Ο Lakatos τα θεωρεί ως στοιχεία τα οποία συγχρόνως συγκρούονται και συνεργάζονται, συντίθενται και

αντιμάχονται. Εκεί, εντοπίζεται ο πυρήνας του χτισίματος της νέας γνώσης στα μαθηματικά. Αυτή η παλινδρόμηση και η αέναη νοητική κίνηση μέχρι να καταλήξουμε σε μίας μορφής απόδειξη, χαρακτηρίστηκε από τον Lakatos (1976) «zigzag path». Οι προσπάθειες να αποδείξουμε ή να καταρρίψουμε έναν συλλογισμό βασίζονται στην εύρεση συνδέσεων, θεμελιακών σχέσεων και διαμεσολαβούνται από εικασίες, ημι-εμπειρικές και μη τυπικές μικρο-αποδείξεις που συνεισφέρουν, όσο βελτιώνονται [ή υφίστανται γόνιμη κριτική], στα αποτελέσματα του ορθού λόγου.

> "informal, quasi-empirical, mathematics does not grow through
> a monotonous increase of the number of indubitably established theorems but
> through the incessant improvement of guesses by speculation and criticism, by the
> logic of proofs and refutations"
> (Lakatos 1976, p. 5).

Η ύπαρξη διαφορετικών επιστημολογικών θέσεων ως προς την μαθηματική απόδειξη και η ιστορική διαμάχη ανάμεσα στο φορμαλιστικό και τον εμπειρικό χαρακτήρα της μαθηματικής απόδειξης στα πλαίσια της επιστήμης είχε, συνακόλουθα, σημαντική επίδραση στη μαθηματική εκπαίδευση, στις πεποιθήσεις που διαμορφώνονται σε μαθητές και εκπαιδευτικούς και αντανακλάται στη δομή και την οργάνωση του αναλυτικού προγράμματος.

Τι λέει η έρευνα στη ΔτΜ για την διδασκαλία της Απόδειξης

Η Hanna (1990) διακρίνει την «formal proof» από την «acceptable proof». Η πρώτη, αφορά την αυστηρή - φορμαλιστική παραγωγή στα πλαίσια της μαθηματικής πρακτικής, ενώ η δεύτερη περιγράφει το ευρύτερο σχήμα, κατά το οποίο επιχειρήματα ελέγχονται και γίνονται αποδεκτά εντός της κοινότητας, ακόμα και αν υπολείπονται της κλασσικής τυπικότητας. Υπάρχει, διαπιστώνει, ακόμα και ανάμεσα στους ίδιους τους μαθηματικούς, μία ποικιλία στο βαθμό τυπικότητας μίας απόδειξης. Όχι σπάνια, δίνεται προτεραιότητα στην καθαρότητα, τη σαφήνεια και την επεξήγηση, αφήνοντας τον φορμαλισμό σε δεύτερο πλάνο. Αυτή η οπτική, συναντά το σχόλιο του Ballacheff (1998), πως εντός της μαθηματικής πρακτικής, επικυρώνονται εξίσου, ανά τους αιώνες τόσο «αποδείξεις που αποδεικνύουν», όσο και «αποδείξεις που εξηγούν» [proof that proves-proof that explains].

Ποιο όμως είναι το status μίας σχολικής απόδειξης; Η πιο κρίσιμη εν δυνάμει συνεισφορά της αποδεικτικής διαδικασίας στην σχολική τάξη, είναι η προώθηση της λογικο-μαθηματικής σκέψης, οι πυκνές νοηματοδοτήσεις, η επικοινωνία ιδεών και προτάσεων. Μια απόδειξη, εξάλλου, σημειώνει η Hanna (2020) , είτε στο κομμάτι της εκπαίδευσης είτε στο κομμάτι της μαθηματικής πρακτικής, αντλεί την σημαντικότητά της όταν αναδεικνύει «σπουδαίες μαθηματικές σχέσεις και νοήματα, παρά όταν παρουσιάζει τυπικά την ορθότητα των αποτελεσμάτων μας».

Στο κομμάτι της Διδακτικής των Μαθηματικών, η επίδραση του Polya και του Lakatos είναι, κατά την Hanna, καταλυτική. Για τον Polya, έμφαση πρέπει να δοθεί στην εικασία και τη διερεύνηση πριν την απόδειξη, και όχι στην τυπικότητα και τον φορμαλισμό. Τα τέσσερα βήματα για το problem solving κατά τον Polya (1985) [understand the problem, devise a plan, carry out the plan, look back] εφαρμόζονται απόλυτα και στην κατασκευή μιας απόδειξης.

Η ύπαρξη αποδείξεων στα προγράμματα σπουδών διεθνώς είναι αδιαμφισβήτητη, θα είχε ενδιαφέρον όμως, να αναρωτηθούμε, σε ποιο βαθμό η αποδεικτική διαδικασία πλαισιώνεται και υλοποιείται ως μία αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα [authentic mathematical activity]. Η εμπλοκή με μία αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα, σημειώνουν οι Στυλιανίδης Α, Στυλιανίδης Γ. (2008), δεν αναστέλλεται από τις αδυναμίες ή τις πιθανές γνωστικές /αναπτυξιακές αδυναμίες του ατόμου, αλλά αντίθετα το ενδυναμώνει και το καλλιεργεί, παρέχοντάς του πυκνές ευκαιρίες ανάπτυξης και εξέλιξης.

Η αποδεικτική δραστηριότητα, μέσα στη σχολική τάξη, σημειώνουν οι Στυλιανίδης Α., Komatsu K., Weber K., & Στυλιανίδης Γ., (2022) ορίζεται και κινητροδοτείται από τη ύπαρξη κάποιου κοινού στόχου. Η μαθηματική δραστηριότητα της κοινότητας πρακτικής, έχει έναν σαφή προσανατολισμό. Η ομάδα/οι ομάδες εργάζεται/ονται –όπως ακριβώς και τα επαγγελματικά projects των ερευνητών/μαθηματικών– προς μία κοινή και σαφή κατεύθυνση, με όρους, κανόνες, εργαλεία και μεθόδους επιχειρηματολογίας σαφείς, κοινώς αποδεκτούς. Αξιοσημείωτη είναι η εξής διάκριση ανάμεσα στην Απόδειξη και στην αποδεικτική διαδικασία, όπως υπογραμμίζει ο Στυλιανίδης (2007, 2009, 2022):

> **Proof** is a mathematical argument, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics:
> 1. It uses statements accepted by the classroom community (set of accepted statements) that are true and available without further justification;
> 2. It employs forms of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and
> 3. It is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that areappropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community.
> (Stylianides 2007a, p. 291; italics in original)
>
> **Proving** is defined broadly as the activity in search for a proof (Stylianides 2007a), and it may include activities that are precursors to the development of a proof, such as conjecturing and generalizing by using examples, intuition, analogies, inductive reasoning, abductive reasoning, and so on (e.g., Polya 1954; Schoenfeld 1983; Stylianides 2008; Zaslavsky et al. 2019).

Οι Ball, Hoyles, Jahnke και Hovshovitz-Hadar (2002) σημειώνουν τη διάκριση της απόδειξης από την αιτιολόγηση αλλά τονίζουν πως και οι δύο κατέχουν κεντρική θέση στην μαθηματική εκπαίδευση και έχουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης και στην προετοιμασία των μαθητών για την επίλυση προβλημάτων. Στην έρευνά τους παρουσιάζουν αποτελέσματα που φανερώνουν τις προκλήσεις που αντιμετωπίζει η εκπαιδευτική κοινότητα στη διδασκαλία της απόδειξης. Η απόδειξη αποτελεί τον τρόπο με τον οποίο αποδεικνύεται η ορθότητα μιας μαθηματικής πρότασης ή θεωρίας, ενώ η αιτιολόγηση αποτελεί τον τρόπο με τον οποίο εξηγείται η σχέση μεταξύ διαφόρων μαθηματικών αντικειμένων και η λογική πίσω από αυτήν τη σχέση. Στις προκλήσεις στη διδασκαλία της απόδειξης περιλαμβάνονται τα εξής σημεία: 1. Η απόδειξη απαιτεί υψηλό επίπεδο λογικής σκέψης και κριτικής σκέψης, τα οποία δεν είναι εύκολο να αναπτυχθούν στους μαθητές. 2. Οι μαθητές μπορεί να μην κατανοούν τη σημασία της απόδειξης και να τη θεωρούν απλά μια διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουν χωρίς να κατανοούν τη λογική πίσω από αυτήν. 3. Οι μαθητές μπορεί να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην αναγνώριση των διαφόρων τύπων αποδείξεων και στην επιλογή της κατάλληλης απόδειξης για μια συγκεκριμένη πρόταση. 4. Οι μαθητές μπορεί να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην επικοινωνία των μαθηματικών επιχειρημάτων και στην κατανόηση της γλώσσας των αποδείξεων. 5. Οι εκπαιδευτικοί μπορεί να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην επιλογή της κατάλληλης μεθόδου διδασκαλίας για την απόδειξη και στην παρουσίαση της απόδειξης στους μαθητές.

Διαμορφώνεται επομένως ένα σύνολο ερωτημάτων: πώς μπορεί η ερευνητική και εκπαιδευτική κοινότητα να διαμορφώσει νέες ή να μετασχηματίσει τις υπάρχουσες διδακτικές προσεγγίσεις, ως προς τα ζητήματα της αιτιολόγησης και της απόδειξης;

Η Hoyles (1997) στρέφει το ενδιαφέρον στις δομικές παραμέτρους τους ζητήματος. Η ερευνά της αναδεικνύει πως η δομή και το περιεχόμενο του εκάστοτε αναλυτικού προγράμματος [curriculum] επιδρά καταλυτικά στη διαμόρφωση της στάσης των παιδιών απέναντι στη μαθηματική απόδειξη και την προσέγγιση τους προς τα σχήματα αιτιολόγησης και επιχειρηματολογίας. Φερ' ειπείν, παρατηρείται ότι οι απαντήσεις των μαθητών στη Γεωμετρία διαφέρουν σημαντικά - και ίσως «υπολείπονται», από μαθηματικής άποψης - σε σχέση με αυτές στην Άλγεβρα. Επιπλέον, η έρευνα αναδεικνύει τη σημαντική ποικιλία στις απαντήσεις των μαθητών, ενώ επιχειρεί να αναλύσει πώς οι διάφοροι παράγοντες, όπως η οργάνωση του προγράμματος σπουδών, τα εγχειρίδια, οι εξετάσεις και οι εκπαιδευτικοί επηρεάζουν τη συνολική πορεία προς την αποδεικτική διαδικασία. Η λύση που προτείνει λοιπόν είναι η σχεδίαση διδακτικών συνθηκών που διατρέχουν το εκάστοτε αναλυτικό πρόγραμμα, συνδιαλέγονται κριτικά μαζί του και υποστηρίζουν μια συνεκτική και συνδεδεμένη έννοια της απόδειξης. Με άλλα λόγια, προτάσσει την ανάπτυξη διδακτικών συνθηκών που προάγουν και ενθαρρύνουν πολλαπλές αιτιολογήσεις και μεθόδους απόδειξης, καλλιεργώντας μία νέα κουλτούρα μάθησης. Επί του συγκεκριμένου, παρουσιάζει τη σχεδίαση και την αξιολόγηση δύο υπολογιστικών μικροκόσμων για την εισαγωγή των μαθητών σε μια συνδεδεμένη προσέγγιση της αιτιολόγησης και της αποδεικτικής διαδικασίας στα μαθηματικά.

Στο ίδιο μήκος κύματος κινούνται και οι Nardi και Knuth (2017). Σημειώνουν πως η στροφή του ερευνητικού ενδιαφέροντος προς την εισαγωγή των καινοτόμων τεχνολογιών στην εκπαίδευση επιδρούν άμεσα στην κουλτούρα γύρω από την αιτιολόγηση και τη μαθηματική απόδειξη και επαναδιαπραγματεύονται τα παγιωμένα αναλυτικά προγράμματα, το ρόλο και τη θέση της απόδειξης σε αυτά.

Η απόδειξη στο ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα

Η άποψη που διατυπώνεται σε αρκετά σημεία, διατρέχοντας το ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα (Α.Π.), είναι πως η απόδειξη κατέχει κεντρικό ρόλο και αναφέρεται ότι οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν την ικανότητα να αποδεικνύουν μαθηματικές προτάσεις και να κατανοούν τη σημασία της απόδειξης στη μαθηματική σκέψη. Η γενικότερη φιλοσοφία που διέπει το πρόγραμμα σπουδών για τη Γεωμετρία συγκεκριμένα, είναι ότι η «εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία», ή ότι «ο μαθητής πρέπει να διδαχθεί να κατανοεί την ανάγκη να αποδεικνύει θεωρήματα», ή ότι «είναι σημαντικό ο μαθητής να κατανοεί την καθολικότητα της τυπικής απόδειξης» και άλλες παρόμοιες εκφράσεις. Επιπλέον, το ΑΠ σπουδών του Π.Ι καλλιεργεί στους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς την πεποίθηση ότι η γνώση της απόδειξης προέρχεται από την παρουσίαση αποδεικτικών διαδικασιών από τον εκπαιδευτικό, η οποία πρέπει να ακολουθεί αυστηρό, φορμαλιστικό τρόπο.

Στο πλαίσιο αυτό σπανίως δίνονται περιθώρια αναπαραγωγής συλλογισμών και πειραματισμού των υποθέσεων των ίδιων των παιδιών. Πιο αναλυτικά κατά την διδασκαλία της γεωμετρίας, η κύρια εστίαση του ενδιαφέροντος σχετικά με τη διδασκαλία της απόδειξης είναι η τυπική – δομημένη μορφή για την κατασκευή, την οργάνωση και την παρουσίαση της αποδεικτικής διαδικασίας. Περιλαμβάνει την καταγραφή δεδομένων, ζητούμενων, την παρουσίαση συγκεκριμένης ακολουθίας λογικών βημάτων συλλογισμού με αυστηρή μαθηματική γλώσσα και συμβολισμό. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ταυτίζεται δηλαδή, με τη φορμαλιστική θεώρηση της γεωμετρικής απόδειξης, που σημειώθηκε παραπάνω. Η ορθότητα και η κατανόηση του περιεχομένου της απόδειξης σπάνια έρχεται στο επίκεντρο. Αυτό που καλούνται τα παιδιά, σίγουρα δεν είναι το να κάνουν κάτι με δική τους πρωτοβουλία ή για δικό τους σκοπό, δηλαδή κάτι καινούργιο, ώστε να αιτιολογήσουν με λογικά επιχειρήματα την άποψή τους! Τους υποδεικνύεται πως πρέπει να θεωρούν ότι η γεωμετρική γνώση είναι μη αμφισβητήσιμη και παγιωμένη. Συνεπώς ο ρόλος τους είναι η απομνημόνευση της απόδειξης, όπως την παρουσίασε η πηγή της γνώσης, (ο καθηγητής ή το σχολικό βιβλίο) και μετέπειτα η ακριβής αναπαραγωγή της σε κάποιο επίσημο γραπτό. Η δε πιστή απόδοση της απόδειξης του σχολικού βιβλίου επικροτείται -και απαιτείται, κατά κάποιον τρόπο- καθώς, είθισται να «προικίζει» με αρκετές μονάδες την τελική βαθμολογία ενός γραπτού.

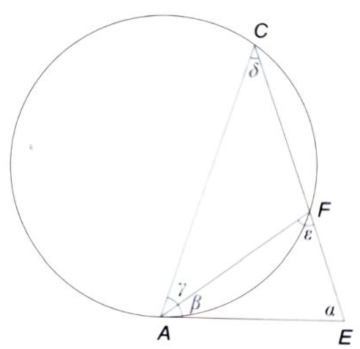
Η κριτική ματιά του Chevallard (2012) στρέφεται στα παγιωμένα εκπαιδευτικά συστήματα και τα χαρακτηρίζει «μνημειακά». Είθισται να παρουσιάζουμε στα παιδιά τα αποτελέσματα κάποιας «μεγάλης ιδιοφυίας», για να τα δουν και να τα μάθουν -ίσως- «απέξω». Ερχόμενοι σε επαφή με τα σχολικά μαθηματικά, «καταναλώνουμε» και «θαυμάζουμε» θραύσματα-προϊόντα γνώσης, σε ένα περιβάλλον αποστειρωμένο, όπου δεν χωρά η αμφιβολία, η προσπάθεια, η αποτυχία, η μη-κομψότητα ή ο μόχθος. Εντελώς ουρανοκατέβατα, και χωρίς την παραμικρή ευκαιρία να συμμετάσχουμε. Σιγά-σιγά, έτσι, ενδυναμώνεται η κουλτούρα της προαποφασισμένης γνώσης και των προγραμματισμένων ερεθισμάτων. Στην περίπτωσή μας, μέσω της εμμονικής προσήλωσης του ΑΠ στη φορμαλιστική, τυπική απόδειξη και στην έμφαση που δίνεται στη δομή και την οργάνωσή της, καλλιεργείται στα παιδιά η πεποίθηση ότι οι μαθηματικές αποδείξεις υπάρχουν a priori και διακρίνονται για το αλάθητο τους και για την αμετάβλητη, διαχρονική αλήθεια που αποκαλύπτουν.

Η εγγραψιμότητα στην Ιστορία των Μαθηματικών και την Έρευνα στη ΔτΜ

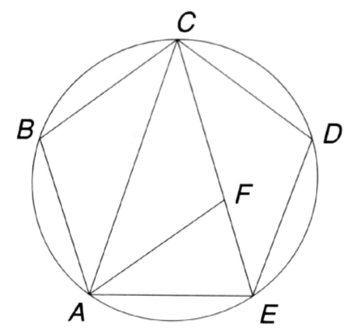
Η προσπάθεια εγγραφής και περιγραφής επιπέδων και στερεών σχημάτων, αποτυπώνεται συστηματικά στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Όπως σημειώνει ο Νεγρεπόντης (2019), «*ο Ευκλείδης, ως προς τις φιλοσοφικές του προτιμήσεις ήταν Πλατωνικός και ήταν γνώστης της φιλοσοφίας αυτής, και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο θεώρησε σκοπό της όλης συγγραφής των Στοιχειών την κατασκευή των καλούμενων "Πλατωνικών Σχημάτων"*». Ας εξετάσουμε προσεκτικά αυτή την πορεία, καθώς είναι η κύρια και συστηματική διαπραγμάτευση του ζητήματος της εγγραψιμότητας στην Ιστορία των Μαθηματικών.

Τα Βιβλία Ι και ΙΙ των *Στοιχειών* αφορούν ιδιότητες ευθυγράμμων σχημάτων, δηλαδή σχημάτων που ορίζονται από ευθύγραμμα τμήματα. Στο Βιβλίο ΙΙΙ, ο Ευκλείδης στρέφεται στις ιδιότητες του πιο θεμελιώδους καμπυλόγραμμου σχήματος, του κύκλου. Σημειώνουμε ότι στους Έλληνες έκανε μεγάλη εντύπωση η συμμετρία του κύκλου. Τον θεωρούσαν το τελειότερο από όλα τα επίπεδα σχήματα, σημειώνει ο Katz (1998) -και το τρισδιάστατο ανάλογό του, δηλαδή τη σφαίρα, τη θεωρούσαν το τελειότερο στερεό σχήμα. Οι φιλοσοφικές αυτές αντιλήψεις αποτέλεσαν τη βάση της ενασχόλησής τους με την προσπάθεια εγγραφής σχημάτων σε κύκλο και σφαίρα, και επηρέασαν βαθύτατα την ελληνική αντίληψη για την αστρονομία. Πολλές από τις Προτάσεις του Βιβλίου ΙΙΙ χρονολογούνται στην παλαιότερη περίοδο των ελληνικών μαθηματικών και φαίνονται ανεξάρτητες μεταξύ τους· η οργανωτική αρχή του Βιβλίου III φαίνεται να είναι η κατοπινή χρήση του στην κατασκευή κανονικών πολυγώνων, τόσο εγγεγραμμένων όσο και περιγεγραμμένων σε κύκλο, που μελετώνται στο Βιβλίο IV. Ειδικότερα, οι περισσότερες από τις προτάσεις από το δεύτερο μισό του Βιβλίου III χρησιμοποιούνται στη δυσκολότερη κατασκευή του Βιβλίου IV, που είναι η κατασκευή του κανονικού πενταγώνου.

Για την κατασκευή αυτή, ο Ευκλείδης χρειάζεται κάποια προπαρασκευαστικά βήματα. Πρώτα δείχνει πώς εγγράφονται τρίγωνα και τετράγωνα σε κύκλους, και κύκλοι σε τρίγωνα και τετράγωνα. Στη συνέχεια, πώς περιγράφονται τρίγωνα και τετράγωνα γύρω από κύκλους, και κύκλοι σε τρίγωνα και τετράγωνα. Κατόπιν προχωρεί στην κατασκευή του κανονικού πενταγώνου σε δύο βήματα: πρώτα κατασκευάζει ένα ισοσκελές τρίγωνο του οποίου οι παρά τη βάση γωνίες είναι διπλάσιες της γωνίας της κορυφής (Πρόταση IV-10), ενώ στο δεύτερο βήμα εγγράφει το πεντάγωνο στον κύκλο (Πρόταση IV-11).



Εικόνα 1: *Στοιχεία*, Πρόταση IV-10

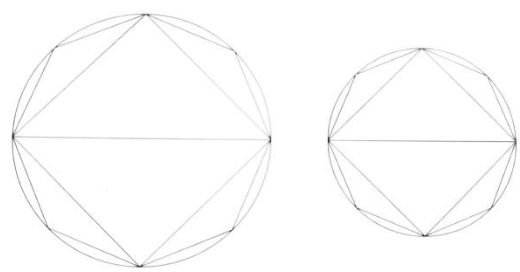


Εικόνα 2: Κατασκευή κανονικού πενταγώνου

Ο Ευκλείδης ολοκληρώνει το Βιβλίο IV με την κατασκευή ενός κανονικού εξαγώνου και ενός κανονικού δεκαπενταγώνου σε κύκλο, αλλά δεν αναφέρει την κατασκευή άλλων κανονικών πολυγώνων. Πιθανότατα γνώριζε ότι, βάσει των κατασκευών που είχε κάνει ήδη, η κατασκευή ενός πολυγώνου με $2^{\nu}\kappa$ πλευρές ($\kappa = 3,4,5$) ήταν εύκολη και ακόμα ότι, σε αναλογία με την κατασκευή του δεκαπενταγώνου, η κατασκευή ενός πολυγώνου με $\kappa\lambda$ πλευρές (όπου κ, λ πρώτοι μεταξύ τους) δεν παρουσίαζε δυσκολίες, εφόσον βέβαια κανείς μπορούσε να κατασκευάσει πολύγωνα με κ και λ πλευρές αντίστοιχα. Δεν γνωρίζουμε βέβαια αν γνώριζε πώς να κατασκευάζει κανονικά επτάγωνα. Σε κάθε περίπτωση, η κατασκευή αυτή, που η πρώτη της καταγραφή βρίσκεται στο έργο του Αρχιμήδη, θα αποτελούσε για τον Ευκλείδη αντικείμενο των ανώτερων μαθηματικών και όχι των «στοιχείων», αφού απαιτεί και τη χρήση άλλων οργάνων πλην του κανόνα και του διαβήτη.

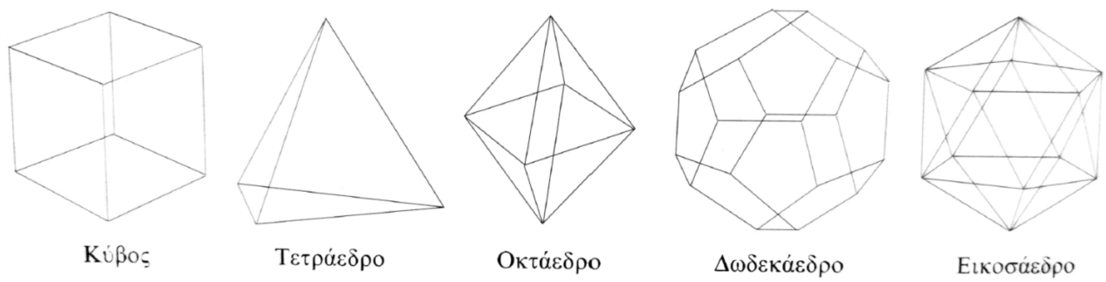
Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την κατασκευή του κανονικού πενταγώνου με τη σειρά της, στην κατασκευή ορισμένων κανονικών πολυέδρων στο Βιβλίο XIII. Τα Βιβλία XI, XII και XIII των *Στοιχείων* αφορούν τη Στερεομετρία. Το Βιβλίο XI περιέχει τα τρισδιάστατα ανάλογα πολλών δισδιάστατων αποτελεσμάτων των Βιβλίων I και VI. Οι εισαγωγικοί ορισμοί συμπεριλαμβάνουν έννοιες όπως οι πυραμίδες τα πρίσματα και οι κώνοι. Ο μόνος ορισμός που είναι κάπως ασυνήθιστος είναι ο ορισμός της σφαίρας, που ορίζεται όχι σε αναλογία με τον ορισμό του κύκλου, αλλά μέσω της περιστροφής ενός ημικυκλίου γύρω από τη διάμετρό του. Προφανώς ο Ευκλείδης χρησιμοποίησε τον ορισμό αυτό επειδή δεν σκόπευε να μελετήσει τις ιδιότητες της σφαίρας με τον τρόπο που είχε μελετήσει τις ιδιότητες του κύκλου στο Βιβλίο III. Οι στοιχειώδεις ιδιότητες της σφαίρας ήταν όντως γνωστές την εποχή του Ευκλείδη και μελετώνταν σε άλλα κείμενα, μεταξύ των οποίων συμπεριλαμβάνεται και ένα δικού του. Στα *Στοιχεία* όμως, ο Ευκλείδης ασχολείται με τη σφαίρα όχι μόνο στο Βιβλίο XII, όπου μελετά τον όγκο της, αλλά και στο Βιβλίο XIII, όπου κατασκευάζει κανονικά πολύεδρα και δείχνει πώς εγγράφονται σε σφαίρα. Οι κατασκευές στο Βιβλίο XIII όντως δείχνουν πώς εγγράφονται τα πολύεδρα αυτά στη σφαίρα με την περιστροφή ενός ημικυκλίου γύρω από αυτά, όπως στον ορισμό του (για τη σφαίρα).

Στο Βιβλίο XII χρησιμοποιείται μια μέθοδος ορίου, γνωστή ως «μέθοδος της εξάντλησης». Αυτή η μέθοδος αναπτύχθηκε από τον Εύδοξο και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου, για τον υπολογισμό του όγκου της πυραμίδας, του κώνου και της σφαίρας. Οι «τύποι» αυτοί ήταν γνωστοί από πολύ παλαιότερα, αλλά πρώτη φορά στα *Στοιχεία* επιχειρούνται οι αποδείξεις τους, και η μέθοδος του Ευδόξου αποτελούσε έναν τρόπο απόδειξής τους. Η κύρια ιδέα της απόδειξης του τύπου για το εμβαδόν του κύκλου, είναι να «εξαντληθεί» το εμβαδόν ενός κύκλου με την εγγραφή σε αυτόν πολυγώνων τα οποία έχουν ολοένα και περισσότερες πλευρές. Για τη μέθοδο της εξάντλησης θα μπορούσαν να αναφερθούν πολλά, αλλά ξεφεύγουν του πλαισίου αυτής της εργασίας.



Εικόνα 3: *Στοιχεία*, Πρόταση XII-2, Η μέθοδος της εξάντλησης

Το τελευταίο βιβλίο των *Στοιχείων*, το Βιβλίο XIII, αφορά την κατασκευή των πέντε κανονικών πολυέδρων και την εγγραφή («περίληψη») τους στη σφαίρα - πρόκειται δηλαδή για το τρισδιάστατο ανάλογο του Βιβλίου IV. Η μελέτη των πέντε κανονικών πολυέδρων [του κύβου, του τετραέδρου, του οκταέδρου, του δωδεκάεδρου και του εικοσάεδρου] και η απόδειξη ότι αυτά είναι τα μόνα κανονικά πολύεδρα οφείλεται στον Θεαίτητο. Τα πρώτα τρία στερεά ήταν γνωστά στους προελληνικούς χρόνους, ενώ υπάρχουν αρχαιολογικά τεκμήρια ορειχάλκινων δωδεκαέδρων που πιθανολογείται ότι είναι του $7^{ου}$ π. Χ αιώνα. Το εικοσάεδρο όμως εικάζεται ότι μελετήθηκε πρώτη φορά από τον Θεαίτητο. Αυτός ήταν επίσης εκείνος που αντιλήφθηκε ότι αυτά είναι τα μόνα κανονικά πολυέδρα και ότι οι ιδιότητές τους ήταν θέμα που αξίζει να μελετηθεί.



Εικόνα 4: Τα πέντε κανονικά πολύεδρα

Στο Βιβλίο XIII ο Ευκλείδης, προχωρώντας συστηματικά, αποδεικνύει ότι κάθε ένα από αυτά τα πολύεδρα μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα, και συγκρίνει το μήκος της ακμής του πολυέδρου (α) με τη διάμετρο της σφαίρας. Ολοκληρώνοντας αρμονικά το Βιβλίο XIII και τα *Στοιχεία*, ο Ευκλείδης κατασκευάζει τις ακμές των πέντε κανονικών στερεών σε ένα επίπεδο σχήμα, συγκρίνοντάς τες μεταξύ τους και με τη διάμετρο της περιγεγραμμένης σφαίρας. Κατόπιν αποδεικνύει ότι δεν υπάρχουν άλλα κανονικά πολύεδρα πλην αυτών των πέντε.

Ας σημειώσουμε την τρομερά προσεκτική και συστηματική μελέτη πάνω στο ζήτημα της εγγραψιμότητας σε δισδιάστατο και, έπειτα, τρισδιάστατο πλαίσιο στα *Στοιχεία*. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, σκοπός της συστηματικής προσπάθειας του Ευκλείδη είναι η κατασκευή των Πλατωνικών Στερεών. Η διερεύνηση και απόδειξη της εγγραψιμότητας σε κύκλο και σφαίρα, υπό αυτή την ανάγνωση, αποτελεί όχημα προς μία μαθηματική-γεωμετρική πραγμάτωση της φιλοσοφικής θέσης του Πλάτωνα. Η φιλοσοφική πρόεκταση και σύνδεση των στοιχείων της φύσης με τα στερεά αυτά, που πραγματοποιείται από τον Πλάτωνα, είναι η εξής: η Γη συνδέεται με τον κύβο, η Φωτιά με το τετράεδρο, ο Αέρας με το οκτάεδρο και το Νερό με το εικοσάεδρο. Σε αυτά τα τέσσερα, ο Πλάτωνας πρόσθεσε και τον Αιθέρα (το Σύμπαν) και το συνέδεσε με το δωδεκάεδρο που αποτελεί το συνδυασμό των υπολοίπων για την περιγραφή του κόσμου, την Πεμπτουσία.

Τα στοιχεία για κάθε κανονικό πολύεδρο οργανώνονται στον παρακάτω πίνακα:

Κανονικό Πολύεδρο	**Είδος Εδρών**	**Έδρες (Ε)**	**Κορυφές(Κ)**	**Ακμές (Α)**	**Διάμετρος περιγεγραμμένης σφαίρας σε σχέση με το μήκος της ακμής του πολυέδρου (α)**
τετράεδρο	τρίγωνα ισόπλευρα	4	4	6	$\frac{\alpha\sqrt{6}}{2}$
κύβος	τετράγωνα	6	8	12	$\alpha\sqrt{3}$
οκτάεδρο	τρίγωνα ισόπλευρα	8	6	12	$\alpha\sqrt{2}$
δωδεκάεδρο	κανονικά πεντάγωνα	12	20	30	$\frac{\alpha\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2}$
εικοσάεδρο	τρίγωνα ισόπλευρα	20	12	30	$\frac{\alpha\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$

Από εκεί και πέρα, διανοίγεται μία οδός έρευνας των κανονικών πολυέδρων στην ως προς τη δυϊκότητά τους και τις συμμετρίες τους. Οι λεπτομέρειες δεν αφορούν το πνεύμα και τους σκοπούς της παρούσας βιβλιογραφικής ανασκόπησης και παραλείπονται.

Ας σημειώσουμε μόνο, όμως, πως η χαρακτηριστική του Euler

$$X(S) = K + E - A$$

για όλα τα πλατωνικά στερεά (όπως και για όλα τα κυρτά πολύεδρα) παίρνει την τιμή 2, όπου:

- S είναι μία προσανατολίσιμη, συνεκτική και τριγωνοποιήσιμη επιφάνεια χωρίς σύνορο
- Κ το πλήθος των κυρυφών ενός κυρτού πολυέδρου
- Ε το πλήθος των εδρών ενός κυρτού πολυέδρου
- Α το πλήθος των ακμών ενός κυρτού πολυέδρου

Η τιμή 2 συμπίπτει με αυτή της σφαίρας, πράγμα που εξηγείται από το γεγονός ότι η χαρακτηριστική Euler είναι τοπολογικός δείκτης και το κάθε πολύεδρο από αυτά είναι τοπολογικά ισοδύναμο με τη σφαίρα, δηλαδή μπορεί να μετασχηματιστεί στη σφαίρα μέσω συνεχών, ελαστικών παραμορφώσεων.

Αυτή ήταν μία απόπειρα πλαισίωσης του ζητήματος της εγγραψιμότητας μέσα στην Ιστορία των Μαθηματικών. Δεν στάθηκε δυνατό να ανιχνευτούν άλλες ιστορικές ενδείξεις ότι η μελέτη της εγγραψιμότητας -είτε ως μέσο, είτε ως σκοπός- απασχόλησε, τόσο ενδελεχώς όσο στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, ή κάπου αλλού αυτοτελώς, τη μαθηματική δραστηριότητα.

Εξετάζοντας τώρα το, αν -και πώς- η Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών έχει διαπραγματευτεί το ζήτημα της εγγραψιμότητας μέχρι τώρα, διαπιστώνεται ότι δεν έχει μελετηθεί η πορεία της έννοιας και της ιδιότητας αυτής μέσα στην μαθησιακή διαδικασία. Αυτό ήταν εν μέρει αναμενόμενο, καθώς η εγγραψιμότητα ουδέποτε αποτέλεσε πλαίσιο διερεύνησης, αντικείμενο προς μελέτη ή ένα αυτοτελές κεφάλαιο στα Αναλυτικά Προγράμματα.

Η παρούσα έρευνα φιλοδοξεί να της προσδώσει υπόσταση εννοιολογικού πεδίου, όπως θα δούμε παρακάτω -όπου θα οριστεί αυστηρά η έννοια «Εννοιολογικό Πεδίο»- και, να την αναδείξει σε έναν σημαντικό άξονα διασυνδεδεμένων νοημάτων.

<u>**Η έννοια της εγγραψιμότητας στο ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα**</u>

Η έννοια της εγγραψιμότητας δεν έχει υπόσταση διδακτικού αντικειμένου στο ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα σε καμία βαθμίδα των εγκύκλιων σπουδών. Σημειώνουμε ότι στο σχολικό εγχειρίδιο που ακολουθείται στις Α΄ και Β΄ Λυκείου υπάρχουν τα εξής σημεία:

- Στο κεφάλαιο 6 [τίτλος: «Εγγεγραμμένα Σχήματα»] αφού πρώτα υπενθυμίζεται η έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας και η σχέση της με την αντίστοιχη επίκεντρη (που είχαν εισαχθεί στη Β΄ Γυμνασίου), και αφού διατυπωθεί η σχέση μεταξύ της γωνίας χορδής και εφαπτομένης, στη συνέχεια μελετώνται τα εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα
- Στο κεφάλαιο 11 [τίτλος: «Μέτρηση Κύκλου»], υπάρχει η παράγραφος 11.3 η οποία πραγματεύεται την εγγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και πινακοποιούνται οι σχέσεις αποστήματος-πλευράς για τρία κανονικά πολύγωνα (ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο και κανονικό εξάγωνο)

Όμως, οι τελευταίες οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (Π.Ι.) δεν περιλαμβάνουν τα παραπάνω σημεία στη διδασκαλία του μαθήματος της Γεωμετρίας ούτε στην Α΄, ούτε στη Β΄ Λυκείου. Πρακτικά δηλαδή, τα σχολικά εγχειρίδια περιλαμβάνουν αντίστοιχα εδάφια τα οποία θα μπορούσαν να διαπραγματευτούν την έννοια της εγγραψιμότητας, αλλά έχει επιλεγεί να παραμένουν εκτός ύλης τα τελευταία χρόνια.

Δεν θα μπορούσαμε βέβαια να μην προσέξουμε πως ακόμα και αν διδάσκονταν τα παραπάνω εδάφια, είναι γραμμένα με τέτοιο τρόπο που απηχούν ένα πνεύμα απόλυτης βεβαιότητας, απέχοντας παρασάγγας από το πνεύμα του παρόντος σχεδιασμού για την έρευνα που εκπονήθηκε. Το σχολικό βιβλίο περιορίζεται στην παρουσίαση και διατύπωση εννοιών θεωρημάτων και κριτηρίων εγγραψιμότητας κατά τρόπο απόλυτο και αμετάκλητο, και οι αποδείξεις αυτών, κατά τρόπο εντελώς τυπικό. Για παράδειγμα, παρατίθεται το απόσπασμα από το Κεφάλαιο 6:

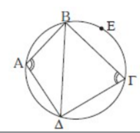
Η μελέτη των εγγράψιμων τετραπλεύρων προέκυψε από το ερώτημα αν τέσσερα σημεία του επιπέδου (ανά τρία μη συνευθειακά) είναι ή όχι ομοκυκλικά.

Γνωρίζουμε βέβαια ότι τρία σημεία του επιπέδου μη συνευθειακά ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αυτό όμως δε συμβαίνει απαραίτητα και για τέσσερα σημεία, π.χ. οι κορυφές ενός τυχαίου παραλληλογράμμου, το οποίο δεν είναι ορθογώνιο, δεν είναι δυνατόν να ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αφού οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες και αν δεν είναι και οι δύο ορθές δεν θα είναι παραπληρωματικές. Απομένει λοιπόν να καθορίσουμε κάτω από ποιες συνθήκες είναι τέσσερα σημεία ομοκυκλικά ή, ισοδύναμα, κάτω από ποιες προϋποθέσεις (**κριτήρια**) ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

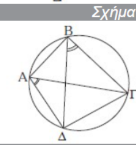
ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

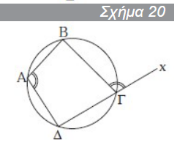
i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.



Σχήμα 19



Σχήμα 20



Σχήμα 21

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Έστω $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$. Φέρουμε τον κύκλο που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Δ και τη χορδή του ΒΔ. Τα σημεία Α, Γ βρίσκονται εκατέρωθεν της ΒΔ, οπότε κάθε εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{B}\mathrm{A}\Delta}$ ισούται με τη $\hat{\Gamma}$, ενώ κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο $\overset{\frown}{\mathrm{B}\mathrm{E}\Delta}$ (σχ.19) ισούται με την παραπληρωματική της, δηλαδή την $\hat{A}$. Επομένως το Γ είναι σημείο του $\overset{\frown}{\mathrm{B}\mathrm{E}\Delta}$ και ομοκυκλικό με τα Α, Β, Δ.

(ii) Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma = \varphi.$$

Τότε τα Α,Β ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου από τα οποία το τμήμα ΓΔ φαίνεται υπό ορισμένη γωνία φ. Ο γεωμετρικός αυτός τόπος είναι (βλ. § 6.4) δύο συμμετρικά τόξα ως προς το ΓΔ. Τα Α,Β όμως βρίσκονται στο ίδιο μέρος της ΓΔ, συνεπώς ανήκουν στο ίδιο τόξο, επομένως τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά.

(iii) Έστω ότι $x\hat{\Gamma}B = \hat{A}$ (σχ. 21), τότε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$, επομένως το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο γιατί έχει δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές, λόγω του κριτηρίου (i).

Εικόνα 5: Κριτήρια Εγγραψιμότητας τετραπλεύρου σε κύκλο, από το Σχολικό Βιβλίο της Α΄ Λυκείου

<u>Ανάπτυξη της Υπολογιστικής Σκέψης - Computational Thinking</u>

Ο όρος "Υπολογιστική Σκέψη" [Computational Thinking] αφορά την διαδικασία κατανόησης και επίλυσης προβλημάτων μέσω της αποτελεσματικής επεξεργασίας πληροφοριών (Lee et al. 2011) και την κατασκευή αυτοματοποιημένων μοντέλων, συστημάτων και αναπαραστάσεων. (Wing 2006; Lee et al. 2011; Grover and Pea 2013). Περιλαμβάνει την ανάπτυξη ενός συνόλου δεξιοτήτων, στρατηγικών και συμπεριφορών που προέρχονται από την επιστήμη των υπολογιστών, αλλά μπορούν επίσης να εφαρμοστούν σε άλλα πλαίσια και καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων. Αυτό το σύνολο δεξιοτήτων περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, την ανάλυση και αναγνώριση προτύπων, τη γενίκευση, την αφαίρεση, τη δημιουργία αλγορίθμων, την εντοπισμό σφαλμάτων και την επεξεργασία πληροφοριών και δεδομένων (Brennan and Resnick 2012; Grover and Pea 2013).

Η Υπολογιστική Σκέψη θεωρείται δεξιότητα-κλειδί στην προετοιμασία των αυριανών ψηφιακών πολιτών σε μια κοινωνία που συνεχώς μετασχηματίζεται, υπογραμμίζουν οι Grizioti, M. & Kynigos, C. (2021). Εφοδιάζει τα άτομα με δεξιότητες απαραίτητες στην ψηφιακή εποχή, όπως το να σκέφτονται ορθολογικά, να επιλύουν προβλήματα, να κατανοούν πολυσύνθετα συστήματα. Επίσης περιλαμβάνει ιδέες και πρακτικές που μπορούν να αξιοποιηθούν στην επίλυση προβλημάτων. Καλλιεργώντας την Υπολογιστική Σκέψη, τα άτομα αναπτύσσουν την ικανότητα να «σπάνε» σύνθετα προβλήματα σε μικρότερες επιλύσιμες μονάδες [Decomposition], να αναγνωρίζουν μοτίβα [Pattern recognition], και να αναπτύσσουν αλγορίθμους για την επίλυσή τους. Έχει πολλαπλές εφαρμογές, επεκτείνεται και πέρα της επιστήμης των υπολογιστών και μπορεί να εφαρμοστεί σε ποικίλους τομείς αλλά και σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Τα άτομα με καλλιεργημένη Υπολογιστική Σκέψη προσδοκάται ότι είναι σε θέση να αναλύουν πολυσύνθετα δεδομένα, να λαμβάνουν αποφάσεις και να βρίσκουν καινοτόμες λύσεις σε πολλούς τομείς. Επίσης, είναι άτομα ψηφιακά εγγράμματα, συνεπώς είναι σε θέση να κατανοούν το πώς λειτουργούν τα ψηφιακά συστήματα, να δημιουργούν δικά τους τεχνουργήματα (artifacts), να εντάσσονται ή ακόμα και να ηγούνται δομών του ψηφιακού κόσμου. Τέλος, η ανάπτυξη της Υπολογιστικής Σκέψης συντελεί ώστε τα άτομα να σκέφτονται δημιουργικά και να βρίσκουν καινοτόμες λύσεις. Προωθεί μία κουλτούρα πειραματισμού, συνεχούς βελτίωσης, μάθησης και προσαρμογής-στοιχεία πολύτιμα σε ένα ταχύτατα αναπτυσσόμενο τεχνολογικό περιβάλλον.

Η Υπολογιστική Σκέψη αποτελεί έντονο θέμα συζήτησης τα τελευταία χρόνια στις Επιστήμες της Εκπαίδευσης και παρατηρείται μία έντονη στροφή προς τη μελέτη και το σχεδιασμό μεθόδων ανάπτυξής της. Παράλληλα όμως, εμφανίζονται ερευνητικά προγράμματα που εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στην σχέση μεταξύ Υπολογιστικής Σκέψης και Μαθηματικής Σκέψης.

Ερευνητικά καταδεικνύεται έντονα ότι τα παιδιά που εμπλέκονται με προγραμματιστικά εργαλεία και ιδέες από το πεδίο του computational thinking (CT) ενδυναμώνονται ως προς την ανάπτυξη της μαθηματικής τους σκέψης [Benton, Hoyles, Kalas, Noss (2016)]. Οι Resnick et al. (2009) μιλώντας (επί παραδείγματι για τη χρήση του Scratch) προτάσσουν τα προγραμματιστικά περιβάλλοντα ως πεδία πολύ πλούσια σε ευκαιρίες επαφής με σημαντικές μαθηματικές ιδέες και ποικίλα υπολογιστικά νοητικά σχήματα. Αποτελούν επίσης γόνιμο έδαφος για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας, της συστηματικής αιτιολόγησης και της συνεργατικότητας.

Αφού μεταξύ άλλων το CT περιλαμβάνει έννοιες όπως το γράψιμο αλγορίθμων, το «σπάσιμο» του προβλήματος σε μικρότερες επιλύσιμες μονάδες [Decomposition], την αναγνώριση μοτίβων [Pattern recognition], την Αφαίρεση [Abstraction], την εκσφαλμάτωση [Debugging] και τη γενίκευση, αποτελεί αδιαμφισβήτητα ένα σύνολο δεξιοτήτων πυρηνικών και καθοριστικών για την γενικευμένη μαθηματική σκέψη. Η "υπολογιστική σκέψη" [computational thinking] θα μπορούσε να προσφέρει πολλά στο κομμάτι της μαθηματικής επιχειρηματολογίας και της αιτιολόγησης (Wing, 2006) καθώς προωθεί τη σκέψη σε πολλαπλά επίπεδα αφαίρεσης , εξελίσσοντας έτσι τους μαθηματικούς συλλογισμούς (Sanford & Naidu, 2016). Η ουσία της Υπολογιστικής Σκέψης φανερώνεται σε διαδικασίες μαθηματικής μοντελοποίησης, οι οποίες είναι αναντίρρητα κρίσιμες για την επίλυση προβλημάτων (Sanford & Naidu, 2017). Επιπροσθέτως, η Υπολογιστική Σκέψη και η Μαθηματική Σκέψη έχουν πλήθος κοινών μεθόδων και διαδικασιών, δίνοντας έμφαση στις λογικο-αναλυτικές μεθόδους προσέγγισης ενός προβλήματος (Nessa & Nugraha, 2019). Η σχέση Υπολογιστικής και Μαθηματικής Σκέψης και Επιχειρηματολογίας έχει μελετηθεί σε κατάλληλα σχεδιασμένα ψηφιακά εκπαιδευτικά περιβάλλοντα με σκοπό την ταυτόχρονη καλλιέργειά τους (Noss, 2020). Επιπλέον, η Υπολογιστική Σκέψη διασυνδέεται έντονα -πέραν της μαθηματικής σκέψης- και με άλλες, όπως η μηχανική (engineering) και η επιστημονική (scientific) σκέψη (Kynigos & Grizioti, 2018).

Υπό μία κονστραξιονιστική οπτική, κατά τους Grizioti M. & Kynigos C. (2019), η Υπολογιστική Σκέψη θα μπορούσε να καλλιεργηθεί μέσα από την εμπλοκή με περιβάλλοντα μάθησης που ενσωματώνουν πολλαπλές δυνατότητες (affordances) στα οποία τα παιδιά κατασκευάζουν, και μοιράζονται τεχνουργήματα [artifacts] τα οποία έχουν ένα προσωπικό νόημα για αυτά. Η υπολογιστική σκέψη αναπτύσσεται καλύτερα μέσω της διερευνητικής και εμπειρικής μάθησης και μέσω της ενεργούς αντιμετώπισης προβλημάτων, παρά μέσω της παραδοσιακής εκπαίδευσης, βασισμένης σε διαλέξεις. Η δημιουργία περιβαλλόντων μάθησης που υποστηρίζουν την ανάπτυξη και μεταφορά των δεξιοτήτων της υπολογιστικής σκέψης είναι σημαντική. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω προοδευτικής συμμετοχής και στήριξης (scaffolding) σε πλούσια υπολογιστικά περιβάλλοντα που παρέχουν «χαμηλό κατώφλι και υψηλή οροφή», επιτρέποντας στους μαθητές να εξερευνούν και να αναπτύσσουν τις δεξιότητές τους σε ποικίλες καταστάσεις. Ιδιαίτερα δημοφιλές, για παράδειγμα, είναι το μοντέλο τριών σταδίων

"Χρήση-Τροποποίηση-Δημιουργία" [“Use-Modify-Create”], (Lee et al. , 2011) ως μια προσέγγιση για την επίτευξη προοδευτικής συμμετοχής νέων μαθητών στις δεξιότητες της Υπολογιστικής Σκέψης μέσα σε πλούσια υπολογιστικά περιβάλλοντα. Αφορά την εμπλοκή των ατόμων σε διαδικασίες Υπολογιστικής Σκέψης μέσα από τη σταδιακή ενασχόλησή τους με δοσμένα μοντέλα ή/και προγράμματα, την εξερεύνηση - επεξεργασία τους, την προσπάθεια τροποποίησής τους και τη δημιουργία νέων, που θα μπορούσαν να βασίζονται σε αυτά.

Στη συνέχεια παρατίθενται δύο τρόποι ανάπτυξης της Υπολογιστικής Σκέψης -σε συνάρτηση με την ανάπτυξη της Μαθηματικής Σκέψης- που αλιεύτηκαν από τη βιβλιογραφική έρευνα και αξιοποιήθηκαν στο σχεδιασμό της παρούσας διπλωματικής.

Η διδακτική αξιοποίηση του προγραμματισμού

Κατά την πορεία της μελέτης της βιβλιογραφίας, παρατηρήθηκε ότι σημαντικό μέρος του ερευνητικού ενδιαφέροντος εστιάζεται σε προτάσεις για δημιουργική σύζευξη του Προγραμματισμού με τη Μαθηματική Εκπαίδευση, ως ένα μέσο για την ταυτόχρονη καλλιέργεια της Υπολογιστικής Σκέψης και της Μαθηματικής Σκέψης. Σε γενικές γραμμές είναι αναντίρρητη η συνεισφορά του Προγραμματισμού στο να μπορέσουν τα παιδιά να συλλάβουν πολυσύνθετες μαθηματικές έννοιες μέσα από κατάλληλα προγραμματιστικά περιβάλλοντα. Χρησιμοποιώντας γλώσσες προγραμματισμού κατάλληλες να διαμορφώσουν δυναμικές αναπαραστάσεις και μοντέλα με πλούσιο μαθηματικό περιεχόμενο, αφηρημένες, ίσως, ιδέες γίνονται πιο στέρεες και εύληπτες. Παράλληλα, τα παιδιά ενθαρρύνονται να πειραματίζονται και να ελέγχουν τα παραγόμενα μοντέλα - προωθείται, έτσι, μία βαθύτερη κατανόηση των θεωρητικών, μαθηματικών αρχών που τα διέπουν.

Η προγραμματιστική δραστηριότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την καλλιέργεια της γενικευμένης σκέψης των παιδιών, καθώς απαιτεί την ανάπτυξη δεξιοτήτων όπως η αφαίρεση, η αναλογική σκέψη, η λογική σκέψη και η δημιουργικότητα, σημειώνει ο Κυνηγός (1993). Επίσης υποστηρίζει πως αν δούμε την παραγωγή κωδίκων ως ένα νέο μέσο έκφρασης και διαμεσολάβησης του νοήματος, τότε ίσως αξίζει τον κόπο να επενδύσουμε στο σχεδιασμό τρόπων που θα κάνουν τον φορμαλισμό να είναι λειτουργικός και γεμάτος νόημα, διασυνδέοντάς τον και με άλλες αναπαραστάσεις. Η δραστηριότητα παιδιών σε Logo-περιβάλλοντα μπορεί να παρέχει ευκαιρίες για την ανάπτυξη μαθηματικών και γεωμετρικών εννοιών, ενώ ταυτόχρονα επιτρέπει στα παιδιά να τις χρησιμοποιούν στο επίπεδο αφαίρεσης που μπορούν να χειριστούν τη δεδομένη στιγμή. Διαπιστώνει ότι ο προγραμματισμός μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να αναπτύξουν την ικανότητα να αναλύουν προβλήματα και να βρίσκουν λύσεις μέσω της δημιουργίας και της εκτέλεσης προγραμμάτων -συνεπώς, ο προγραμματισμός μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά για την ανάπτυξη της γενικευμένης σκέψης των μαθητών και την ενίσχυση των δεξιοτήτων τους σε διάφορους τομείς μάθησης.

Οι Benton, Hoyles, Kalas, Noss (2017) τονίζουν επίσης την πρόσθετη διδακτική αξία που φέρουν τα προγραμματιστικά εργαλεία στην μαθηματική εκπαίδευση. Ο προγραμματισμός παίζει, όπως σημειώνουν, κομβικό ρόλο στην ανάπτυξη της Υπολογιστικής Σκέψης και, παράλληλα, μπορεί να διαμεσολαβήσει ένα πλήθος άλλων νοημάτων και να συντελέσει στην κατασκευή νέων γνώσεων. Συγκεκριμένα, εστιάζουν στο πώς ο προγραμματισμός συνδέεται με την έκφραση μαθηματικών ιδεών: παρέχει έναν «καμβά», όπου οι μαθητευόμενοι επιχειρούν να αποτυπώσουν τις ημι-τελείς (στα πρώτα ίσως στάδια) ιδέες που διαμορφώνουν για τα μαθηματικά νοήματα και ακόμα, να υλοποιήσουν στην οθόνη του υπολογιστή την ημι-σταθερή εικόνα των μαθηματικών δομών που χτίζουν με το μυαλό. Επομένως, η παραπάνω συγγραφική-ερευνητική ομάδα θεωρεί πως υπάρχει μεγάλη ανάγκη να δημιουργηθούν συνδέσεις και συναρμογές μεταξύ των μαθηματικών και των υπολογιστικών ιδεών, αλλά και των δεξιοτήτων, μέσω δραστηριοτήτων στις οποίες κεντρικό ρόλο παίζει ο προγραμματισμός, ήδη από τη δημοτική εκπαίδευση. Σε επίπεδο σχεδιασμού και οργάνωσης των Αναλυτικών Προγραμμάτων, προτείνουν την προσεκτική επιλογή, την εισαγωγή και την παράλληλη ανάπτυξη ιδεών που αποτελούν έννοιες-κλειδιά τόσο για τα Μαθηματικά όσο και για την Επιστήμη των Υπολογιστών, καθ' όλο το εύρος και τις βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Επίσης, σημειώνεται ότι η εισαγωγή στην Μαθηματική Εκπαίδευση διερευνητικών δραστηριοτήτων σε προγραμματιστικά περιβάλλοντα, υλοποιεί ένα πλαίσιο στο οποίο τα παιδιά μπορούν να δουλέψουν συνεργατικά για την επίλυση ενός προβλήματος. Αυτή η προσέγγιση επίσης προάγει την δημιουργικότητα και την καινοτομία απέναντι στις εκάστοτε μαθηματικές προκλήσεις, καθώς τα ενθαρρύνει να υλοποιούν και να επικοινωνούν τους αλγορίθμους και τις λύσεις τους.

Η βιβλιογραφική έρευνα των Wan-Rou Wu and Kai-Lin Yang (2022) για τη σχέση υπολογιστικής και μαθηματικής σκέψης και τη διδακτική της αξιοποίηση στη Μαθηματική Εκπαίδευση, τονίζει τη σημασία της προσφοράς της υπολογιστικής σκέψης στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης, και αντίστροφα. Επίσης σημειώνει μερικά παραδείγματα και προτάσεις για την ταυτόχρονη ενσωμάτωση της υπολογιστικής και της μαθηματικής σκέψης στη διδασκαλία των μαθηματικών, όπως την εφαρμογή μαθηματικών εννοιών για τη δημιουργία προγραμμάτων που λύνουν μαθηματικά προβλήματα, την ανάλυση μοντέλων και τη διόρθωση προγραμμάτων [debugging]. Από τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της μελέτης, ας κρατήσουμε τα εξής σημεία:

- σημειώνεται μία έλλειψη στον ερευνητικό χώρο αναφορικά με την αμοιβαία σχέση μεταξύ CT και MT, με τις περισσότερες εργασίες να επικεντρώνονται στην όψη της CT ως επίλυση προβλημάτων με προγραμματισμό και την όψη της MT ως μαθηματικό περιεχόμενο

- προτείνεται ότι η αμοιβαία σχέση μεταξύ CT και MT μπορεί να ενισχυθεί μέσω της οπτικοποίησης μαθηματικών εννοιών με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων και της ερμηνείας και εξερεύνησης μαθηματικών εννοιών μέσω της συγγραφής προγραμμάτων
- η συμβολή της MT στην CT περιλαμβάνει την εφαρμογή μαθηματικών εννοιών στη συγγραφή προγραμμάτων, προωθώντας την διαδικαστική σκέψη για τον σχεδιασμό αλγορίθμων
- κατά το πλαίσιο των Wu & Yang υπάρχουν δύο μονοπάτια μάθησης για την αμοιβαία σχέση μεταξύ CT και MT: CT→MT→CT και MT→CT→MT, με τον πρώτο να επικεντρώνεται στον προγραμματισμό ως είσοδο και τον δεύτερο στο μαθηματικό πρόβλημα ως κύρια είσοδο.
- η αφαίρεση και η δημιουργία υπολογιστικών αντικειμένων αναγνωρίζονται ως σημαντικές πτυχές της πρακτικής της CT, με τη δημιουργική σκέψη να είναι απαραίτητη για την επίλυση προβλημάτων

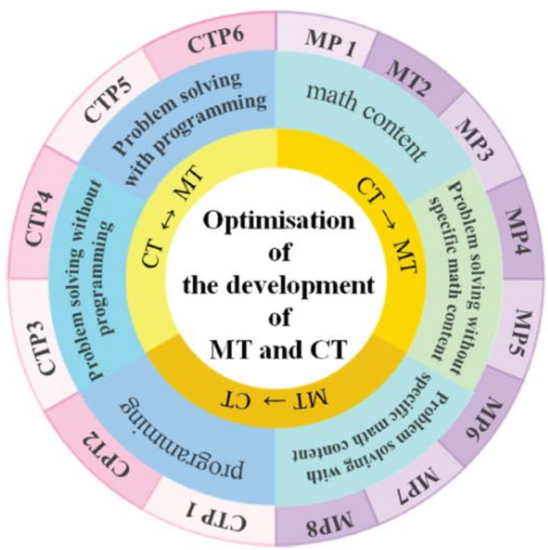


Table 1. Search terms for the three categories

Category	Search terms
CT	computational thinking, computational literacy, computational competence, computational proficiency, computational skill*, programming thinking, programming competence, programming literacy, programming proficiency, programming skill*, programmatic thinking, programmatic literacy, programmatic competence, programmatic proficiency, programmatic skill*
MT	mathematics, mathematical
Task	task*, activity*

Note: CT, computational thinking; MT, mathematical thinking

Εικόνα 6: Το πλαίσιο των Wu & Yang (2022)

Η διδακτική αξιοποίηση της Ανάστροφης Μηχανικής [Reverse Engineering]

Με τον όρο «Reverse Engineering» [RE] περιγράφεται η ενασχόληση με ένα δοσμένο προϊόν-μοντέλο, το οποίο αναλύεται και μελετάται προσεκτικά, ώστε να στοιχειοθετηθούν οι ιδιότητες του θεωρητικού μοντέλου (Zhong et a. 2020) Το RE περιλαμβάνει δραστηριότητες ανάλυσης υπαρχόντων τεχνουργημάτων - έργων, υπό μία προσπάθεια να εξαχθούν οι παράμετροι που καθόρισαν το σχεδιασμό και την συγκεκριμένη εφαρμογή. Η εισαγωγή του RE στην εκπαίδευση έχει τις ρίζες της στη δεκαετία του '90, όπου ο Sheppard (1992), χρησιμοποιώντας τον όρο «Mechanical Anatomy» καλεί τα παιδιά μέσα από το μαστόρεμα, την αποσύνθεση, τον επανασχεδιασμό και την επανακατασκευή, να απελευθερώσουν τη φαντασία και τη δημιουργικότητά τους μέσα από έργα ανάπτυξης μοντέλων και προϊόντων ανταγωνιστικών προς τα ήδη υπάρχοντα.

Η παιδαγωγική αξιοποίηση του RE έχει συγκεντρώσει το ενδιαφέρον ερευνητικών προγραμμάτων τα τελευταία χρόνια και αποκτά σιγά σιγά χαρακτήρα μίας ολοκληρωμένης διδακτικής προσέγγισης που στόχο έχει να ενισχύσει τις ικανότητες επίλυσης προβλημάτων και τη γενικότερη καλλιέργεια του Computational Thinking. (Ehsan et al. 2021, Ladachart et al. 2022, Zhou et al. 2017). Οι Liu , Wang , Xu και Hu (2023) εξετάζουν την παιδαγωγική αξιοποίηση του Reverse Engineering στην ανάπτυξη του Computational Thinking στο STEM, τονίζοντας ότι τα παιδιά δημοτικού που συμμετείχαν στην έρευνα, σε δραστηριότητες μάθησης του φάσματος STEM, σχεδιασμένες υπό το πνεύμα του RE, ανέπτυξαν πλουσιότερα νοήματα και δεξιότητες σχετικές με το Computational Thinking, σε σύγκριση με τα παιδιά τα οποία εργάστηκαν σε πλαίσια παραδοσιακής μάθησης. Η έρευνα κατέδειξε ότι τα άτομα αποκομίζουν πολλαπλά οφέλη από μια τέτοια προσέγγιση. Συγκεκριμένα, παρατηρούνται αυξητικοί δείκτες σε ζητήματα ευρηματικότητας, συνεργατικότητας και επικοινωνίας, μαθηματικής σκέψης, πρακτικότητας και της ανάληψης πρωτοβουλιών.

Σχετικά με την παρούσα έρευνα

Από τη βιβλιογραφική επισκόπηση που προηγήθηκε, σχηματίζεται η εικόνα ότι ο προγραμματισμός και οι δραστηριότητες που εμπλέκουν την Υπολογιστική Σκέψη με τη μαθηματική δραστηριότητα, καλλιεργούν τη γενικευμένη σκέψη και διανθίζουν τη μαθησιακή πορεία με στοιχεία αναστοχασμού, ενισχύοντας την τάση, αλλά και την ανάγκη για αιτιολόγηση και απόδειξη.

Διαμορφώνεται ένα τοπίο γόνιμου προβληματισμού σχετικά με το πώς επιτυγχάνεται αυτό στην πράξη μέσα από την ένταξη και το σχεδιασμό ανάλογων δραστηριοτήτων. Παράλληλα, διανοίγεται μία προοπτική για το πώς θα μπορούσαν να διαμορφωθούν νέες προγραμματικές [curricular] τάσεις για να υλοποιηθεί μία τέτοια πρόθεση σύνδεσης της Μαθηματικής και της Υπολογιστικής Σκέψης· πώς θα μπορούσαν δηλαδή, να προκύψουν τα μέγιστα δυνατά διδακτικά οφέλη από αυτή τη σύζευξη, επί της πράξης. Τα παραπάνω διαμόρφωσαν τον προβληματισμό μου και συνακόλουθα, τη σκοπιά υπό την οποία η παρούσα εργασία έρχεται να «κοιτάξει» το ζήτημα.

Η προσπάθεια αυτή επιχειρεί επίσης, να δώσει στην έννοια της εγγραψιμότητας χώρο και χρόνο για διερεύνηση, παρόλο που είδαμε ότι, είτε έχει εξοβελιστεί από το διδακτικό πλαίσιο, είτε ότι παρουσιάζεται ως προκατασκευασμένη γνώση (όπως είδαμε ότι συμβαίνει στο σχολικό εγχειρίδιο). Διαλέγεται κριτικά με αυτή την παγιωμένη νόρμα και, ουσιαστικά, επιζητεί τα κριτήρια εγγραψιμότητας (στις δραστηριότητες) να προκύψουν από τη διερεύνηση, και να διατυπωθούν από τα ίδια τα παιδιά.

Κεντρικό ρόλο παίζει το «μαστόρεμα» που θα πραγματοποιήσουν τα παιδιά. Μέσα από ομαδικές δραστηριότητες, που παραμένουν ανοιχτές, και στις οποίες έχουν ενσωματωθεί λάθη (εσφαλμένες μαθηματικές σχέσεις) τα παιδιά θα καταπιαστούν με την «ανακάλυψη» τους, τη διόρθωσή τους και τη γενίκευση των μοντέλων ή τη χρήση τους για κατασκευή νέων. Δομικό λίθο λοιπόν, αποτελεί ο μισοψημένος μικρόκοσμος που σχεδιάστηκε και οι διαδικασίες-κώδικες που δίνονται στα παιδιά εξ αρχής. Η επεξεργασία, η ανάλυση, ο επανασχεδιασμός των δοσμένων κωδίκων για να δουν πώς δουλεύουν τα αρχικά μοντέλα [Reverse Engineering] και η διόρθωση τους [debugging], όπου αυτό κρίνεται απαραίτητο, θα αποτελέσουν την αφορμή για μία δραστηριότητα πειραματισμού και διερεύνησης.

Προς αυτή την κατεύθυνση, επιλέχθηκε για την παρούσα έρευνα το προγραμματιστικό εργαλείο MaLT2. Όπως σημειώνουν οι Grizioti M. & Kynigos C. (2021), η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού που παρέχει το εν λόγω εργαλείο και τα τρισδιάστατα γραφικά του, δημιουργούν ένα περιβάλλον πλούσιο σε ευκαιρίες νοηματοδότησης, ανάπτυξης στρατηγικών και υπολογιστικών πρακτικών [computational practices] με βαθύ μαθηματικό περιεχόμενο και προσωπικό νόημα για τα παιδιά. Το ψηφιακό εργαλείο αναμένεται να παίξει καθοριστικό ρόλο στις διαδικασίες αιτιολόγησης και γενίκευσης, κατά την πορεία των δραστηριοτήτων, καθώς η αλληλεπίδρασή του με αυτό, υπό τη ματιά της βιβλιογραφίας, εντείνει και εμπλουτίζει την μαθηματική νοηματοδότηση-δραστηριότητα και, συνάμα, τείνει να καθορίσει την έκφραση των μαθηματικών ιδεών, των νοημάτων και των αιτιολογήσεων που θα προκύψουν.

Για να υποστηριχθεί η ερευνητική προσπάθεια αυτή, παρουσιάζονται στη συνέχεια τα θεωρητικά της θεμέλια.

Θεωρητικό Πλαίσιο

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται τα θεωρητικά μοντέλα τα οποία πλαισιώνουν το σχεδιασμό και την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας.

Constructionism

Ο Κονστρουκτιονισμός (Constructionism) αποτελεί μία θεωρία μάθησης (Harel & Papert, 1991; Kafai & Resnick,1996), η οποία στηρίζεται στις κατασκευαστικές θεωρίες του Piaget. Θεωρητική του αφετηρία αποτελεί η παραδοχή ότι η γνώση αποτελεί μία ανακατασκευή και επ' ουδενί δεν είναι κάτι που μεταφέρεται από τους εκπαιδευτικούς στα παιδιά, μα κάτι που δομείται και κατασκευάζεται ενεργητικά από τα ίδια τα παιδιά (Kafai and Resnick, 1996), κατά την εμπλοκή τους με δραστηριότητες και διερευνητικά παιχνίδια. Ο Papert (1980) περιγράφει τη μάθηση ως μία δραστηριότητα σύμφυτη με τη εξερευνητική και δημιουργική ανθρώπινη φύση, και προσεγγίζει την ενασχόληση με τα μαθηματικά μέσα από την ανάπτυξη θεωρητικών προσεγγίσεων στα οποία κεντρικό ρόλο κατέχουν ψηφιακά εργαλεία και δραστηριότητες που έχουν προσωπικό νόημα για τα παιδιά. Όπως σημειώνεται από τον Κυνηγό (2006), ο Papert καλεί τις επιστήμες της αγωγής να εστιάσουν στα νοήματα που δημιουργούν τα ίδια τα παιδιά και όχι στις παρανοήσεις ή τα σφάλματα τους ως προς τις δεδομένες και κοινές μαθηματικές αλήθειες. Ως κύριο στόχο, προτείνει, να θέσουμε την κατανόηση του τρόπου σκέψης και κατασκευής προσωπικών νοημάτων των παιδιών και να απομακρυνθούμε από την τάση να προσπαθούμε να εντοπίσουμε και να «θεραπεύουμε» τις παρανοήσεις τους.

Η μάθηση προκύπτει, κατά το πλαίσιο του Κονστρουκτιονισμού (Constructionism), μέσα από την παραγωγή μαθηματικών νοημάτων κατά την συνειδητή εμπλοκή του ατόμου με κάποια κατασκευή που έχει προσωπικό ή συλλογικό νόημα και αξία για αυτό. Οι εικασίες, οι υποθέσεις και οι έλεγχοι τους, η επαλήθευση ή η αναθεώρηση συνθέτουν ένα τοπίο διαρκούς αμφισβήτησης και, όπως σημειώνει ο Κυνηγός (2006), καθιστούν τα μαθηματικά ένα προσωπικό κατασκεύασμα του κάθε ατόμου. Αυτή η θεώρηση μας απομακρύνει από την πεποίθηση ότι οι μαθηματικές έννοιες αποτελούν αυθύπαρκτες αντικειμενικές οντότητες τις οποίες ως μαθητές ή ως μαθηματικοί καλούμαστε να προσεγγίσουμε και να κατανοήσουμε. Αντιθέτως, μέσα από τη συνεχή αμφισβήτηση των «προσφερόμενων αληθειών», χτίζουμε τη δική μας θεωρία μέσα από λάθη και διορθώσεις. Τα παιδιά που μαθαίνουν Μαθηματικά διαμορφώνουν μαθηματικά νοήματα, κατ' αναλογία με τους μαθηματικούς που παράγουν μαθηματικά αποτελέσματα, μέσα από υποθετικο-παραγωγικές διεργασίες, εικασίες, υποθέσεις, ελέγχους και τροποποιήσεις.

Ακρογωνιαίο λίθο της συλλογιστικής του Papert αποτελεί η πεποίθηση ότι τα παιδιά είναι πολύ πιο ικανά να σκεφτούν με λογικο-μαθηματικό τρόπο απ' ότι συνηθίζεται να προβάλλεται από τη βιβλιογραφία. Δεδομένων κατάλληλων συνθηκών διερεύνησης και

ευκαιριών, τα παιδιά είναι σε θέση να καλλιεργήσουν τη μαθηματική τους σκέψη σε πολύ ανώτερο επίπεδο.
Τα ψηφιακά περιβάλλοντα, κατά τον Papert (1980) αποτελούν πεδία όπου, με κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες, εξασφαλίζονται συνθήκες γόνιμες για να προκύψουν πλούσιες εμπειρίες νοηματοδότησης. Ειδικότερα, έστρεψε το ενδιαφέρον του στον προγραμματισμό. Θεωρώντας τον ένα πολύτιμο εργαλείο έκφρασης, σκέψης και δημιουργίας, ισχυρίστηκε ότι η εμπλοκή με αυτόν ενθαρρύνει τα παιδιά να αναπτύξουν διαισθητικές ιδέες και να δομήσουν προσωπικά νοήματα μέσα από την έκφραση και τον άμεσο έλεγχο των εικασιών τους, ιδιαίτερα στα πλαίσια ομαδοσυνεργατικών δραστηριοτήτων. Σημείωσε μάλιστα, πως η κοινωνική κατασκευή του νοήματος στα πλαίσια μιας κοινότητας πρακτικής μέσα στη σχολική τάξη, αποτελεί καταλυτικό παράγοντα που προσαυξάνει την παιδαγωγική αξία των δραστηριοτήτων σε προγραμματιστικά ψηφιακά περιβάλλοντα.

<u>Αφαίρεση και Γενίκευση</u>

Ο Skemp (2012) προσεγγίζει την αφαίρεση (abstraction) ως το αποτέλεσμα της εμπειρικής διαδικασίας κατά την οποία το άτομο αναγνωρίζει μοτίβα και κανονικότητες μεταξύ των εμπειριών του και καλλιεργεί την ικανότητα να διακρίνει αν οι νέες εμπειρίες έχουν ομοιότητες με άλλες, παρελθοντικές. Ορίζει την «έννοια» ως το προϊόν κάποιας τέτοιας αφαίρεσης. Η «έννοια» αποτελεί λοιπόν ένα γενικευμένο αντικείμενο, αντιπρόσωπο μιας κλάσης αντικειμένων που μοιράζονται κάποια κοινά χαρακτηριστικά. Οι κλάσεις εμπλουτίζονται συνεχώς, καθώς το άτομο, με το πέρασμα του χρόνου, εμπλέκεται σε νέες διαδικασίες μάθησης και βιώνει νέες εμπειρίες. Η διαδικασία κατά την οποία ένα νοητικό προϊόν αφαίρεσης εμπλουτίζεται, ονομάζεται «γενίκευση» (Mitchelmore & White, 2000).
Αξίζει να σημειωθεί ότι η αφαίρεση και η γενίκευση δεν είναι διαδικασίες που αφορούν μεμονωμένες μαθηματικές έννοιες, μα και τις σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ τους και τις συνδέουν. Για παράδειγμα, όταν γενικεύεται η έννοια του αριθμού ώστε να συμπεριληφθούν και οι αρνητικοί σε αυτήν, γενικεύεται την ίδια στιγμή και η έννοια της πρόσθεσης δύο αριθμών. Συνεπώς αναδεικνύεται και ένα στοιχείο φορμαλισμού πιο περίπλοκων μαθηματικών εννοιών, καθώς αυτές ορίζονται ως γενικεύσεις απλούστερων κλάσεων και περιγράφονται καλύτερα μέσω των ιδιοτήτων και των σχέσεων, παρά των αντιπροσώπων τους.
Στην αφαιρετική διαδικασία, τονίζει ο Piaget (1975), κεντρική σημασία κατέχει ο αναστοχασμός. Οι ενέργειες ενός ατόμου και ο αναστοχασμός του πάνω σε αυτές είναι τα στοιχεία που καθορίζουν κυρίως τα προϊόντα της αφαίρεσης, παρά το περιεχόμενο των ενεργειών του.

Επίσης, καθοριστικό ρόλο διαδραματίζει το πλαίσιο και το περικείμενο της μάθησης. Για την Lave (1988), η μάθηση είναι μία δραστηριότητα την οποία πρέπει να εξετάζουμε μέσα στο φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον στο οποίο συντελείται. Η μάθηση γεννιέται μέσα από ανθρώπινες καταστάσεις όπως η κοινωνικότητα, οι προθέσεις, οι αντιλήψεις για το ρόλο του καθενός και η χρήση των εννοιών σε συγκεκριμένες πραγματικές συνθήκες (Κυνηγός, 2006). Αυτού του είδους η μάθηση ορίζεται κατά την Lave ως «εγκαθιδρυμένη μάθηση».

Εγκαθιδρυμένες Αφαιρέσεις

Το θεωρητικό δόμημα των εγκαθιδρυμένων αφαιρέσεων [«situated abstractions»] (Noss & Hoyles, 1996), επιχειρεί να περιγράψει τη διαδικασία γενίκευσης εννοιών. Αντίθετα με την κυρίαρχη προσήλωση της γνωστικής ψυχολογίας στην αναζήτηση και καταγραφή των παρανοήσεων των εννοιών, οι Hoyles και Noss, συμφωνούν με το πνεύμα του Papert, ότι δηλαδή τα παιδιά είναι πράγματι σε θέση να κάνουν μαθηματικές αφαιρέσεις και να δομήσουν νοήματα. Συγκεκριμένα, στρέφουν την προσοχή τους στο να αναζητήσουν εργαλεία και μεθόδους μελέτης και περιγραφής τους. Αναδεικνύουν έντονα πως οι αφαιρέσεις αυτές είναι μερικές και οι γενικεύσεις των μαθητών εξαρτώνται άμεσα από το μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο δρουν. Υπό αυτήν την έννοια, είναι αδιάκριτες από τις πολύ συγκεκριμένες καταστάσεις, τα συγκεκριμένα εργαλεία και τις δραστηριότητες από τις οποίες αναδύονται. Το περιβάλλον εργασίας των παιδιών, τα κατασκευάσματα τους (μοντέλα), η αλληλεπίδραση τους με τα ψηφιακά μέσα, τους συμμαθητές της ομάδας ή τους εκπαιδευτικούς κατά την πορεία της δραστηριότητας, διαδραματίζουν βασικό ρόλο στην κατασκευή του εκάστοτε νοήματος και επηρεάζουν αναντίρρητα την πορεία της εκάστοτε γενίκευσης. Ως εγκαθιδρυμένη αφαίρεση ορίζεται, μέσα σε αυτό το θεωρητικό μοντέλο των Noss & Hoyles, μια ευκρινή δήλωση, μία πεποίθηση του ατόμου αλλά και μία εξελισσόμενη διαδικασία προβληματισμού, την οποία καθορίζει -ως προς τη μορφή και το περιεχόμενο- το μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο το άτομα δρα.

Για τους Noss & Hoyles, ο αναστοχασμός επίσης είναι πλαισιοθετημένος, υπό την έννοια ότι θεάται ως μία δυναμική και συνεχώς εξελισσόμενη νοητική κατασκευή νοημάτων, και όχι ως η αντικατάσταση αποπλαισιωμένων και γενικών νοημάτων με άλλα, νέα. Τον αποδίδουν με τον όρο «εγκαθιδρυμένο αναστοχασμό».

Κατά την ανάλυση της παρούσας έρευνας, οι έννοιες της αφαίρεσης και της γενίκευσης, καθώς και ο αναστοχασμός προσεγγίζονται ως διαδικασίες που πλαισιώνονται στο συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον.

Αναδόμηση

Οι Willensky και Papert (2010) απομακρύνονται από την παραδοσιακή οπτική της έρευνας στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών, που εστιάζει στις δυσκολίες και τις παρανοήσεις των παιδιών. Κύριο μέλημα της συμβατικής αυτής τάσης, είναι να αναζητά τρόπους και μεθόδους διδασκαλίας ώστε να επιτυγχάνονται οι διδακτικοί στόχοι που θέτουν τα εκάστοτε παγιωμένα αναλυτικά προγράμματα. Οι Willensky και Papert αποστρέφουν ρητά το ενδιαφέρον τους από εκεί, και εισάγουν ένα νέο ερευνητικό πλαίσιο, αυτό της αναδόμησης [restructuration].
Η ερευνητική προσοχή εστιάζεται όχι στα μέσα της διδασκαλίας, αλλά στο αντικείμενο της μάθησης. Κυρίως, ενδιαφέρονται να εξετάσουν το πώς η δομή και οι ιδιότητες της γνώσης επηρεάζουν τον τρόπο εκμάθησής της από άτομα ή ομάδες. Στα μαθηματικά, η αναδόμηση είναι η μετατροπή από μία διδακτική δομή σε μία άλλη. Η κωδικοποίηση της γνώσης του εκάστοτε μαθηματικού κλάδου, μέσω ενός δικτύου αναπαραστάσεων που χρησιμοποιείται για να την εκφράσει, δίνει τη θέση της σε μία νέα κωδικοποίηση και ένα νέο αναπαραστασιακό σύστημα. Η μετάβαση αυτή αποτελεί έναν δυναμικό μετασχηματισμό που διαρρηγνύει τα όρια του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας και σκέψης γύρω από τη μαθηματική εκπαίδευση. Για τους Willensky και Papert, αυτός ο μετασχηματισμός αφορά καθολικά τη διαδικασία μάθησης, την διδακτέα ύλη, τις αναπαραστάσεις των παιδιών αλλά και τις κοινωνικές συνιστώσες της μάθησης.
Η αναδόμηση αποτελεί ένα θεωρητικό δόμημα κατά το οποίο ο ίδιος ο σχεδιασμός του μαθήματος ή της έρευνας αμφισβητεί την υπάρχουσα δομή του αναλυτικού προγράμματος και την εστίασή του. Αρθρώνεται ένα νέο πρόταγμα, το οποίο διευρύνει την οπτική γωνία και εμπλουτίζει τις ευκαιρίες για δημιουργία νοημάτων.

Κατά το σχεδιασμό της παρούσας έρευνας, επιχειρήθηκε η αναδόμηση της γνώσης, με κύρια στόχευση να δοθούν νέες ευκαιρίες για δημιουργία πλούσιων νοημάτων από τα παιδιά. Όπως αναλύεται παρακάτω, η έρευνα σχεδιάστηκε με μία τάση αναδιάρθρωσης της ύλης πάνω στο ζήτημα της εγγραψιμότητας και, ταυτόχρονα, επαναδιαπραγματεύτηκε η θέση που κατέχει η απόδειξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα, αξιοποιώντας τις νέες τεχνολογίες και τις δυνατότητες του προγραμματιστικού περιβάλλοντος που επιλέχθηκε. Επιχειρήθηκε να διασυνδεθούν νοήματα της Γεωμετρίας, της Τριγωνομετρίας και της Άλγεβρας κάτω από μία κοινή εννοιολογική ομπρέλα, την έννοια της εγγραψιμότητας.

Εννοιολογικό Πεδίο - Conceptual Field

Η εννοιολογική ομπρέλα της εγγραψιμότητας που προαναφέρθηκε, θα περιγραφεί λεπτομερώς και θα καθοριστεί θεωρητικά, ακολουθώντας το θεωρητικό δόμημα των Εννοιολογικών Πεδίων, που εισήχθηκε από τον Γάλλο ψυχολόγο Vergnaud. Μία μαθηματική έννοια, για τον Vergnaud (1991), όταν θεάται απομονωμένη, στερείται νοήματος και βάθους. Υποστηρίζει πως μία μαθηματική έννοια δεν αφορά μόνο σε έναν τύπο καταστάσεων, και, αντίστροφα, πως μία κατάσταση δεν μπορεί να αναλυθεί μέσω μόνο μίας έννοιας.

Τα Conceptual Fields δομούνται μέσα από τριπλέτες :

- αναπαραστάσεις (γλωσσικές και συμβολικές), που είναι την παρούσα στιγμή διαθέσιμες στο νοητικό οπλοστάσιο του υποκειμένου για την έννοια
- προβλήματα-δραστηριότητες στις οποίες μπορεί να συναντηθεί ή να χρησιμοποιηθεί η έννοια
- άλλες συνδεόμενες/συγγενείς έννοιες

Ο Vergnaud όρισε αυτή την τριάδα ως «Εννοιολογικό Πεδίο» [CF].
Περιέγραψε, επιπρόσθετα, το θεωρητικό δόμημα των «θεωρημάτων εν δράσει» (theorems in action) το οποίο αφορά στα παραγόμενα συμπεράσματα των μαθητών, ως προς τις σταθερές που διακρίνουν και διατυπώνουν, μέσα σε μία ομάδα αντικειμένων, σχέσεων ή προβλημάτων που συνδέονται με αυτά.

Μετά από χρόνια, οι Balacheff και Gaudin(2002), συμπλήρωσαν την πρόταση-ορισμό για τα CF του Vergnaud, επεκτείνοντάς τον με την εισαγωγή μίας τέταρτης διάστασης, ώστε να περιλαμβάνει:

- P, ένα σύνολο προβληματικών καταστάσεων
- R, ένα σύνολο πράξεων, σχέσεων και αξιωμάτων
- L, ένα σύστημα αναπαραστάσεων
- Σ, μία δομή ελέγχου

Το νέο στοιχείο, το Σ, είναι μία δομή που δηλώνει αυτό που απαιτείται προκειμένου να γίνουν από τους μαθητές κρίσεις και κατάλληλες επιλογές ώστε να ληφθούν αποφάσεις κατά την επίλυση ενός προβλήματος. Ουσιαστικά, επαναδιαπραγματεύονται την ιδέα των «θεωρημάτων εν δράσει» του Vergnaud ώστε να αποκτήσει ο όρος αυτός έναν γνήσια κεντρικό ρόλο για την περιγραφή της μαθησιακής διαδικασίας.

Ο σχεδιασμός μίας δραστηριότητας υπό το πρίσμα ενός Εννοιολογικού Πεδίου αφορά κεντρικά ίσως μία έννοια αλλά, ταυτόχρονα περιέχει ανοιχτά νοητικά σχήματα (concepts) και ενέχει την πιθανότητα αλληλεπίδρασης μεταξύ τους και προσαρμογής. Ο νέος τρόπος οργάνωσης και αναφοράς των μαθηματικών εννοιών στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών, που προτείνεται με την εισαγωγή των Εννοιολογικών

Πεδίων προτείνει πως, ερευνητές και εκπαιδευτικοί θα πρέπει να εστιάζουν στην μελέτη εννοιολογικών πεδίων, και όχι μεμονομένων εννοιών. Υπό αυτή τη θεωρητική σκοπιά, η μελέτη της μαθησιακής διαδικασίας ανάγεται στη μελέτη των νοημάτων που κατασκευάζονται από το υποκείμενο. Τα νοήματα αυτά λογίζονται ως δομές που αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα της επαναδιαμόρφωσης συνόλων στενά συνδεδεμένων εννοιών.

Το θεωρητικό μοντέλο των Εννοιολογικών Πεδίων τονίζει την κεντρική σημασία που κατέχει η κατάσταση-δραστηριότητα στην εξέλιξη των αναπαραστάσεων που διαθέτουμε για κάθε έννοια, ακόμα και σε επίπεδα πολύ πρώιμα, όπου δεν χρησιμοποιείται κάποιο γλωσσικό ή συμβολικό σύστημα, καθώς καμία ενέργεια δεν είναι δυνατή χωρίς την ικανότητα να διακρίνουμε κάποια αντικείμενα και κάποιες ιδιότητές τους. Τα πιο σύνθετα νοήματα επίσης, για να αποκτήσουν υπόσταση και λειτουργικότητα, πρέπει να ενταχθούν σε κάποιο πλαίσιο και να συσχετισθούν με κάποια κατάσταση-δραστηριότητα. Σε επίπεδο σχεδιασμού του μαθήματος ή της έρευνας, προτείνεται η διερεύνηση της μαθηματικής ικανότητας [mathematical competency] μέσα από πρωτόγνωρα σχέδια δραστηριοτήτων [tasks] και δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων [problem solving] όπου θα χρειάζεται να προσαρμοστούν κατάλληλα οι γνωστικοί πόροι [resources] των υποκειμένων. Ο σχεδιασμός του μαθήματος , συνακόλουθα, παρέχει ευκαιρίες στα εμπλεκόμενα άτομα να δομήσουν πλούσια διασυνδεδεμένα νοήματα σε έναν μαθηματικό κλάδο και να διακρίνουν τις σχέσεις του με άλλους.

Για την παρούσα έρευνα σχεδιάστηκαν δραστηριότητες υπό το εννοιολογικό πεδίο της εγγραψιμότητας. Σε αυτό το πεδίο εντοπίζονται, με μια πρώτη ματιά, άρρηκτα συνδεδεμένες έννοιες της Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας. Μπορούμε όμως να διακρίνουμε επίσης, συναρτησιακές εκφράσεις που αποτυπώνουν και εκφράζουν τα νοήματα και τις ιδιότητες. Συνεπώς, θα μπορούσαμε να δούμε ότι κάτω από την ευρεία αυτή εννοιολογική ομπρέλα, εντάσσονται γεωμετρικές, τριγωνομετρικές, αλγεβρικές και συναρτησιακές γνώσεις και νοηματοδοτήσεις.

Διαμορφώνεται ένας χώρος στον οποίο τα συμμετέχοντα άτομα έχουν την ευκαιρία να συνδέσουν έννοιες και να αναπτύξουν μάλιστα ισχυρές -για αυτές- συνδέσεις. Στόχος είναι να αντλήσουν τις ιδιότητες και τη σημασία τους μέσα από μία προβληματική κατάσταση [situation], που έχει προσωπικό νόημα για αυτά και να προσπαθήσουν να σταθεροποιήσουν τις νοηματοδοτήσεις τους μέσα από την επικοινωνία και την αιτιολόγηση-απόδειξη στα πλαίσια της ομάδας εργασίας τους. Το εννοιολογικό πεδίο της εγγραψιμότητας συγκροτείται με αυτόν τον τρόπο για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας και μένει να ερευνήσουμε κατά πόσο η εμπλοκή του με αυτό, μέσα από το μαστόρεμα με το ψηφιακό εργαλείο, θα ενδυναμώσει τα ενσωματωμένα σε αυτό νοήματα.

Μικρόκοσμοι

Ο όρος «Μικρόκοσμος» έρχεται από το χώρο της Τεχνητής Νοημοσύνης και χρησιμοποιείται από τον Papert για να περιγράψει έναν χώρο με αυτονομία, στον οποίο τα παιδιά μαθαίνουν να μεταφέρουν συνήθειες, διερευνητικές πρακτικές και μεθόδους, από την καθημερινή τους ζωή στο πεδίο της επιστημονικής δημιουργίας (Papert, 1980). Αντανακλά την πεποίθησή του Papert ότι το παιδί που έρχεται να αντιμετωπίσει κάτι νέο (κάποιο παιχνίδι, μια νέα χορευτική κίνηση ή μία ιδέα) πρώτα θα το συσχετίσει με κάτι που του είναι ήδη οικείο και στη συνέχεια θα χτίσει πάνω σε αυτή τη συσχέτιση-σύνδεση, κάτι καινούργιο. Αναρωτήθηκε πώς θα μπορούσε να συμβεί αυτό στο πεδίο των αφηρημένων και τυπικών γνώσεων, όπως λόγου χάρη τα Μαθηματικά. Δόμησε, αρχικά, καθαρά προγραμματιστικά περιβάλλοντα των οποίων το βασικό χαρακτηριστικό ήταν η δυνατότητα σχεδιασμού γραφικών με χρήση γλώσσας προγραμματισμού.

Η δραστηριότητα των παιδιών σε έναν μικρόκοσμο χαρακτηρίζεται από ευχέρεια στην κατασκευή δομημάτων και στην μετατροπή και επέκταση των αρχών και των σχέσεων που διέπουν το μικρόκοσμο (Healy & Kynigos, 2010). Αυτό το χαρακτηριστικό του, να επιδέχεται αλλαγές, όπως επίσης η άμεση εκτελεσιμότητά και απόκρισή του που ευνοεί τον πειραματισμό, είναι στοιχεία που κάνουν ένα μικρόκοσμο βασικό εργαλείο μάθησης στα πλαίσια του constructionism (Kafai & Resnick, 1996; Papert&Harel, 1991). Οι μικρόκοσμοι είναι περιβάλλοντα που όχι μόνο επιδέχονται μετατροπές, αλλά που είναι κατασκευασμένα ώστε να μπορούν να αναδιαμορφωθούν. Η διαδικασία αναδιαμόρφωσης τους είναι πλούσιας σημασίας, όπως έχει μελετηθεί στα πλαίσια της έρευνας στη ΔτΜ: οι Healy&Kynigos (2010) τονίζουν έντονα τη σχέση ανάμεσα στα εργαλεία, με τα Μαθηματικά που βρίσκονται υπό διαπραγμάτευση στο μικρόκοσμο. Ο μικρόκοσμος εξελίσσεται και αλλάζει στην πορεία, παράλληλα με τον χρήστη, δηλαδή το εργαλείο διαμορφώνει τις πρακτικές του χρήστη και αντίστροφα. Συγκεκριμένα δε για τα εργαλεία, οι Noss & Hoyles (2003) χρησιμοποιούν τον όρο «εκφραστικά μέσα» (expressive media), τονίζοντας το γεγονός ότι στην περίπτωση των μικρόκοσμων η έμφαση δίνεται στην κατασκευή και τον προγραμματισμό [χρήση τυπικού φορμαλισμού για την έκφραση μαθηματικών νοημάτων] (Kafai & Resnick, 1996). Η εγκαθιδρυμένη μάθηση των Noss & Hoyles (1996) πλαισιοθετείται από τα εργαλεία και το διττό τους ρόλο τους: ως εκφραστικά μέσα και ως μέσα δράσης.

Έως σήμερα, οι μικρόσιμοι εξελίσσονται ως ψηφιακά περιβάλλοντα εμποτισμένα με έννοιες και σχέσεις, στα οποία με τις κατάλληλες δραστηριότητες και την ανάλογη παιδαγωγική αξιοποίηση, τα παιδιά μπορούν να εμπλακούν σε διαδικασίες εξερεύνησης και πλούσιας νοηματοδότησης (Healy&Kynigos, 2010).

Μισοψημένοι Μικρόκοσμοι

Ο όρος περιγράφει λογισμικά που είναι σχεδιασμένα έτσι ώστε να προκαλούν τα παιδιά να τα χρησιμοποιήσουν, ώστε να κατασκευάσουν κάτι με αυτά (χρησιμοποιώντας τα δηλαδή ως «δομικούς λίθους» για μία άλλη κατασκευή), να τα αλλάξουν ή να τα αποδομήσουν, κάνοντας μαθηματικά με αυτούς (Kynigos. 2007a) -επί της ουσίας, κάνοντας μαθηματικά που τους αφορούν και έχουν προσωπικό νόημα για αυτά. Ένας μισοψημένος μικρόκοσμος κατέχει, υπό το πρίσμα του costructionism, κεντρικό ρόλο στη διερεύνηση που οδηγεί στη νοηματοδότηση από τα παιδιά. Παράλληλα ας σημειωθεί ότι πραγματώνει κατά μία έννοια τη διαψευσιμότητα των μαθηματικών συστημάτων, ακριβώς επειδή αποτελεί έναν «κόσμο αμφισβήτησης»: είναι ένας «ανοιχτός» κόσμος όπου ενθαρρύνεται η διερεύνηση και η ελεύθερη εξερεύνηση, ή ακόμα και η έκφραση υποθέσεων ως προς το τί κόσμος θα προέκυπτε αν αλλάζαμε τους κανόνες.

Κατά την ανάλυση του σχεδιασμού των δραστηριοτήτων της έρευνας αυτής, δίνονται οι περιγραφές και οι λεπτομέρειες του μικρόκοσμου που δομήθηκε. Στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων παρουσιάζεται και ο τρόπος με τον οποίο επεξεργάστηκε, μετασχηματίστηκε και χρησιμοποιήθηκε για να παραχθούν νέα κατασκευάσματα από τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα. Κάθε κοινότητα πρακτικής απέδωσε διαφορετικά νοήματα και έδρασε εντελώς διαφορετικά δρώντας μέσα στον μικρόκοσμο ή χρησιμοποιώντας τον μικρόκοσμο, προκαλώντας ευχάριστες και ενδιαφέρουσες εκπλήξεις.

<u>UDGS</u>

Οι Hoyles και Noss, το 1987 σχεδιάζουν τον μικρόκοσμο «τα παραλληλόγραμμα». Με όχημα την έρευνα, μέσα από παρεμβάσεις βασισμένες σε αυτόν, έχουν ως στόχο να διατυπώσουν επιστημονική θεωρία για το πώς τα παιδιά εμπλέκονται με μαθηματικές δραστηριότητες μέσα από το «μαστόρεμα» με μοντέλα. Διατυπώνουν το μοντέλο UDGS που περιγράφει ακριβώς αυτή τη διαδικασία.

- **U** «using»/χρησιμοποιώντας

Στην αρχή οι μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιούνται μαζί με μη μαθηματικές, χωρίς να υπάρχει επίγνωση, διάκριση ή πλήρης συναίσθηση για την υπόσταση και τη σημασία τους. Οι μαθηματικές έννοιες έχουν το ρόλο εργαλείων για λειτουργικούς σκοπούς και την επίτευξη συγκεκριμένων στόχων.

- **D** «discriminating»/διακρίνοντας

Ξεκινάει να γίνεται διάκριση ως προς τα μαθηματικά που βρίσκονται «πίσω» από την κατασκευή ή τη δραστηριότητα που αφορά το μαστόρεμα του μοντέλου. Η φάση αυτή αναφέρεται στην ενεργό αναζήτηση και δοκιμή μαθηματικών ιδεών και σχέσεων μέσω της χρήσης ψηφιακών εργαλείων. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης, οι μαθητές εξερευνούν τα μαθηματικά νοήματα που έχουν δημιουργήσει, προσπαθώντας να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ αυτών και να εξετάσουν τις ιδέες τους μέσω πρακτικής εφαρμογής και πειραματισμού.

- **G** «generalizing»/γενικεύοντας

Μέσα από την παρατήρηση αναλλοίωτων σχέσεων ή ιδιοτήτων περνούν σε μία φάση γενικεύσεων. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης, οι μαθητές αναζητούν μαθηματικά πρότυπα στα ψηφιακά εργαλεία που χρησιμοποιούνται και τα επεκτείνουν σε άλλα περιβάλλοντα και περιπτώσεις εφαρμογής. Με άλλα λόγια, η φάση αντιπροσωπεύει τη συνειδητή προσπάθεια των μαθητών να επεκτείνουν τις γνώσεις τους σε ευρύτερα νοητικά σχήματα, γενικότερα μαθηματικά νοήματα καθώς και σχέσεις, που έχουν ανακαλύψει με τα ψηφιακά εργαλεία, προκειμένου να τα εφαρμόσουν και σε άλλες περιπτώσεις/περιβάλλοντα.

- **S** «synthesizing»/συνθέτοντας

Οι γενικεύσεις που έχουν γίνει στο προηγούμενο στάδιο, συσχετίζονται με τα τυπικά μαθηματικά που τις διέπουν. Οι διαισθητικές αντιλήψεις και τα νοήματα που δομήθηκαν κατά τη δραστηριότητα προσλαμβάνουν μία τυποποιημένη μορφή. Η φάση της σύνθεσης αναφέρεται στη δημιουργία νέων μαθηματικών αντικειμένων και σχέσεων μέσω της συνδυασμένης χρήσης ψηφιακών εργαλείων και μαθηματικών γνώσεων. Αυτή η φάση αντιπροσωπεύει τη δημιουργική διαδικασία των μαθητών να συνδυάσουν τις γνώσεις τους από διάφορα μαθηματικά πεδία και ψηφιακά εργαλεία, προκειμένου να δημιουργήσουν νέα μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις.

<u>**5Es**</u>

Το μοντέλο 5 Es [Benton, Hoyles, Kalas, Noss (2016, 2017)] συνιστά ένα εργαλείο δόμησης, πλαισίωσης και καθοδήγησης του σχεδιασμού μίας δραστηριότητας. Συνεπικουρεί ερευνητές και εκπαιδευτικούς που σχεδιάζουν μία διδακτική παρέμβαση με προγραμματιστικά μέσα, υπό το πρίσμα μία κατασκευαστικής (constructionist) προσέγγισης. Οι πέντε -μη ταξινομημένες-φάσεις του, είναι:

- <u>**E**xplore (Εξερευνώ)</u>: Κομβικό στοιχείο αποτελεί ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα διερεύνησης, όπως η αλλαγή/τροποποίηση κάποιου δοσμένου κώδικα, ο εντοπισμός και η διόρθωση σφαλμάτων (debugging), η αναζήτηση αιτιών πίσω από τα αποτελέσματα της εκάστοτε ενέργειας ή εντολής. Κεντρικό μέλημα είναι να διαμορφωθούν συνθήκες κατάλληλες ώστε τα παιδιά να εμπλακούν ενεργά στη διερεύνηση και δοκιμή ιδεών και να πειραματιστούν με το προγραμματιστικό εργαλείο, επιχειρώντας τις δικές τους νοηματοδοτήσεις. Διανοίγει έναν ορίζοντα πρωτοβουλιών από πλευράς των μαθητών και των μαθητριών, αφού τους επιτρέπει να «μαστορέψουν» ελεύθερα τα μοντέλα και να ανακτήσουν τον έλεγχο της μάθησής τους.

Στην εν λόγω παρέμβαση, η ερευνήτρια επιχείρησε να δώσει ιδιαίτερη βαρύτητα στο να σχεδιάσει δραστηριότητες που περιστρέφονται γύρω από την τροποποίηση δοσμένου κώδικα -με την πρόφαση μιας φανταστικής συνθήκης (συμβουλευτική ομάδας για προγραμματισμό ενός μοντέλου)- προς μία ελεύθερη μολαταύτα κατεύθυνση για τα παιδιά, αυτήν της παραγωγής ενός δικού τους μοντέλου σε δισδιάστατο και μετέπειτα τρισδιάστατο πλαίσιο σκέψης. Η εξερεύνηση μέσα στο προγραμματιστικό περιβάλλον της Logo αποτελεί γενεσιουργό συνθήκη για την κύρια μαθηματική εμπειρία (Papert, 1980) και παρέχει στα παιδιά πολλαπλές ευκαιρίες να εμπλακούν «για λογαριασμό τους» με το εργαλείο, να διερευνήσουν ελεύθερα και να αναπτύξουν έννοιες και δεξιότητες μαθηματικής και υπολογιστικής φύσης.

- **E**nvisage (Προβλέπω): Στην φάση αυτή, κυριαρχεί το στοιχείο της εκτίμησης και της εικασίας του αποτελέσματος πριν τη εκτέλεση μίας εντολής ή της χρήσης μεταβολέων για τις παραμέτρους του προγράμματος. Τα παιδιά ενθαρρύνονται να εκφράσουν τις προβλέψεις τους και κατόπιν, να συγκρίνουν το αποτέλεσμα των ενεργειών τους με αυτές. Εάν συνδυαστεί αρμονικά με την παραπάνω φάση [δηλαδή με τη φάση της Εξερεύνησης (Explore)] η φάση της Πρόβλεψης (Envisage) καλλιεργεί ένα πρόσφορο έδαφος για αναστοχασμό και πλούσιες νοηματοδοτήσεις, καθότι η συζήτηση που προκύπτει μέσα στην ομάδα ή στην τάξη, από τις εικασίες και τις συγκρίσεις αυτών με τα τελικά αποτελέσματα, επηρεάζει και, συνάμα, επηρεάζεται από την ελεύθερη διερεύνησή τους με το προγραμματιστικό εργαλείο. Προγραμματίζοντας στη Logo, το άτομο φαντάζεται επί της ουσίας τον εαυτό του ως την οντότητα την οποία προγραμματίζει (Watt 1998). Άλλωστε, όπως σημειώνει ο Papert (1980) στη Logo, τα παιδιά προβλέπουν μέσα από την συντονικότητα του σώματος (body syntonicity) τις κινήσεις της χελώνας, εκτελώντας από πριν, μέσα από το δικό τους σώμα, νοερά, κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού των εντολών που θα της δώσουν.
- **E**xplain (Εξηγώ): Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων πρέπει να παρέχει ευκαιρίες για αναστοχαστική συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης ή στα πλαίσια της ομάδας-κοινότητας πρακτικής, υπό την καθοδήγηση των εκπαιδευτικών, μέσα από στοχευμένες ερωτήσεις και προκλήσεις ερμηνείας, ώστε να αναδειχθούν πτυχές του συλλογισμού των ατόμων που προγραμματίζουν. Οι Harel and Papert (1991) υπογραμμίζουν τα γνωστικά οφέλη που προκύπτουν από την προσπάθεια επεξήγησης και λεκτικής απόδοσης των ιδεών και το πώς αυτές αποκρυσταλλώνονται και ξεκαθαρίζουν μέσα από τη ρητή έκφρασή τους. Σημαντικό στοιχείο της

κατασκευαστικής (constructionist) προσέγγισης αποτελεί άλλωστε η φάση του αναστοχασμού και της ακριβούς άρθρωσης επιχειρημάτων ώστε να δοθούν εξηγήσεις και ερμηνείες (Noss and Hoyles 1996; Brennan 2015). Ένα άτομο, στην προσπάθειά του να αιτιολογήσει, να ερμηνεύσει και να τεκμηριώσει τις απόψεις του, αναζητά τις κατάλληλες μαθηματικές ιδιότητες και ταυτόχρονα κατάλληλους όρους και τρόπους έκφρασης τους. Αυτή η πλούσια και εις βάθος νοητική διαδικασία καλλιεργεί την κουλτούρα της τεκμηρίωσης και προωθεί την ανάπτυξη λεξιλογίου γύρω από τα Μαθηματικά. Ο προγραμματισμός εδώ, λαμβάνει το ρόλο του εργαλείου με το οποίο, κατά κύριο λόγο, θα γίνει ο αναστοχασμός και η διατύπωση των νοηματοδοτήσεων που επιχειρούνται. Τα άτομα σκέφτονται μαζί με το εργαλείο και διατυπώνουν τη σκέψη τους για το πώς σκέφτονται βήμα-βήμα την κατασκευή, τη διόρθωση, την τροποποίηση ή τη γενίκευση του κώδικα που κατασκευάζει το εκάστοτε μοντέλο.

Υπό το πρίσμα των κεντρικών ερευνητικών ζητημάτων της παρούσας εργασίας, που παρατίθενται στο επόμενο κεφάλαιο, η φάση αυτή είναι ιδιαίτερα κρίσιμη. Εστιάζοντας στην Αιτιολόγηση ως προπομπό της μαθηματικής απόδειξης, εξετάζεται εάν -και πώς- τα παιδιά, ερχόμενα αντιμέτωπα με την ανάγκη επεξήγησης και ερμηνείας αφενός των εντολών που δίνουν -τα ίδια- προγραμματίζοντας το ψηφιακό μοντέλο και, αφετέρου, των νοηματοδοτήσεων που επιχειρούν εκσφαλματώνοντας τα προβληματικά σημεία του δοσμένου κώδικα, θα φτάσουν σε ένα σημείο να τους νοιάζει πραγματικά το να μην αφήνεται τίποτα αδικαιολόγητο ή ανεξήγητο και κατ' επέκταση το να θέλουν και να ξέρουν να αποδεικνύουν τους ισχυρισμούς τους.

- **E**xchange (Επικοινωνώ): Αποτελεί μείζον ζήτημα στο σχεδιασμό δραστηριοτήτων αυτού του ύφους η ένταξη σημείων που αποτελούν ευκαιρίες για μοίρασμα και για από κοινού δόμηση νοημάτων. Η επικοινωνία και ανταλλαγή των ιδεών με τους άλλους, συντελεί στο «χτίσιμο» νοήματος εντός της κοινότητας πρακτικής και καλλιεργεί την κουλτούρα της επιχειρηματολογίας και τις αντίστοιχες δεξιότητες γύρω από αυτήν. Η δημιουργία εμπειριών συνεργασίας και αξιοποίησης ιδεών και προτάσεων άλλων, η βελτίωση ή τροποποίηση των δικών μας θέσεων ή των ατόμων με τα οποία συνεργαζόμαστε προς έναν κοινό στόχο, συγκεκριμενοποιεί και διασαφηνίζει προσωπικές ιδέες που ίσως δεν έχουν ακόμα διαμορφωθεί πλήρως, σημειώνει η Hoyles (1985). Το μοίρασμα των ιδεών στα πλαίσια της συνθήκης της συνεργατικής μάθησης δύναται να απελευθερώσει και να εμπλουτίσει ακόμα περισσότερο την εξερεύνηση, να ενθαρρύνει τον μαθηματικό διάλογο, και συνδράμει στην αποκέντρωση του ατόμου, το «άνοιγμα» στην οπτική του άλλου.

  Για την εν λόγω παρέμβαση, η διάσταση της επικοινωνίας θεάται ως κρίσιμο στάδιο στην ανάπτυξη της τάσης προς Αιτιολόγηση και, συνεπώς προς την Απόδειξη, καθότι φέρει τα άτομα αντιμέτωπα με την ανάγκη να επιχειρηματολογήσουν για τις ιδέες και τις πρακτικές τους, να τεκμηριώσουν και να πείσουν ή να αναζητήσουν τεκμήρια από τους συμμαθητές τους για να πειστούν. Αποτελεί κεντρική φιλοδοξία της παρούσας εργασίας να επαναδιαπραγματευθεί τη σημασία, την αξία και τη θέση της απόδειξης στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών και να αποτελέσει μία ευκαιρία να πυκνώσουν οι εμπειρίες των παιδιών στο κομμάτι της λογικο-μαθηματικής επιχειρηματολογίας. Επίσης, να συλλάβουν την πολιτισμική ισχύ και σημασία της αποδεικτικής διαδικασίας, ως μία πορεία για την κατασκευή νέας γνώσης, ως τη θαρραλέα προσπάθεια να εξακριβώσουμε, να πειστούμε, να επικοινωνήσουμε την πίστη μας για την αλήθεια κάποιου συλλογισμού, να προκαλέσουμε, να πείσουμε ή να ηττηθούμε.

- Bridg**E** (Γεφυρώνω): Μετά το «μαστόρεμα» και την παραγωγή μοντέλων, έρχεται η στιγμή του εντοπισμού και της διασύνδεσης των ιδεών που ενσωματώθηκαν στις δραστηριότητες και η «χαρτογράφηση» τους (mapping). Η αναζήτηση του πού εντάσσονται τα μαθηματικά που χρησιμοποιήθηκαν, η αντιστοίχιση και η αναπλαισίωση των γνώσεων που χτίστηκαν αποτελεί σημαντικό στάδιο της κατασκευαστικής (constructionist) πορείας. Η διασύνδεση των μαθηματικών αρχών και γνώσεων με τις ιδέες που αναπτύχθηκαν κατά την εργασία των παιδιών με το προγραμματιστικό εργαλείο είναι αυτό που αναδεικνύει την ισχύ και την δυναμική τους (Papert 1993, 2000). Οι εκπαιδευτικοί συνεπικουρούν αυτήν την διαδικασία ένταξης και διασύνδεσης με τα «επίσημα» Μαθηματικά και τα αντίστοιχα σημεία του Αναλυτικού Προγράμματος, με τα οποία είναι εξοικειωμένα σε κάποιο επίπεδο τα παιδιά.

  Για την εν λόγω εργασία, κρίνεται αναγκαίο να σημειωθεί πως το στάδιο αυτό ενέχει ένα μεγάλο ρίσκο, καθώς η αναπλαισίωση και η διασύνδεση χαρακτηρίζονται από ένα μεγάλο εύρος, και αλλεπάλληλες επικαλύψεις Τριγωνομετρίας και Γεωμετρίας.

Το μοντέλο των 5Es για τη συγκεκριμένη έρευνα κατείχε κεντρικό ρόλο, τόσο στο σχεδιασμό, όσο και στην ανάλυση των αποτελεσμάτων. Επιπλέον, συσχετίζεται άμεσα και με την επιλογή του προγραμματιστικού εργαλείου, πράγμα που τεκμηριώνεται ευκρινέστερα σε παρακάτω κεφάλαιο, όπου γίνεται η παρουσίαση και περιγραφή των δυνατοτήτων που προσφέρει.

<u>Δημιουργικότητα</u>

Ο Papert προτρέπει να ενθαρρύνουμε τα παιδιά να κάνουν «δημιουργικές ανακαλύψεις» [creative discoveries], καθώς αναγνωρίζει πως τα Μαθηματικά είναι χώρος ανάπτυξης της δημιουργικότητας, που τα παιδιά ούτως ή άλλως φέρουν πριν εισαχθούν στο εκπαιδευτικό σύστημα. Η Riling (2020), επαναδιαπραγματεύεται το ζήτημα της δημιουργικότητας με τον όρο «Action in Context»: εντοπίζει ότι η δημιουργικότητα εκφράζεται και καλλιεργείται μέσα από ευκαιρίες αυτόνομης δράσης, επιλογών, συνδέσεων και μέσα από την επικοινωνία με άλλα άτομα εντός κάποιου κοινωνικο-τεχνολογικού περιβάλλοντος (socio-technical environment). Το πλαίσιο της εκάστοτε κοινότητας διαμορφώνει τις ευκαιρίες να δημιουργηθούν τέτοιες ευκαιρίες. Για εκείνη, η δημιουργική μαθηματική δραστηριότητα ορίζεται ως εξής: «το να φτάνουμε να κάνουμε μαθηματικά ή να σκεφτόμαστε για τα μαθηματικά με τρόπους ως τα πριν αδύνατους, μέσα σε ένα πλαίσιο».

Διαφαίνεται μία σύνδεση με τον Wagner, ο οποίος κάνει λόγο για πρωτοβουλία στη δράση («agency») όταν αναφέρεται στις επιλογές και τις συνδέσεις, τις αποφάσεις και τις δράσεις που γεννιούνται από μία προβληματική κατάσταση. Τα άτομα που έρχονται αντιμέτωπα με ένα πρόβλημα δρουν, συμπεριφέρονται και αποφασίζουν όχι μόνο ατομικά, αλλά και ομαδικά, κάνοντας κάποιες «Επιλογές Δράσης» [Anderson & Noren], στις οποίες αναμφίβολα εκφράζεται η δημιουργικότητα τους.

Οι Κυνηγός & Διαμαντίδης (2021), καταπιανόμενοι με το ζήτημα της δημιουργικότητας στα πλαίσια του προγραμματισμού και του μαστορέματος μαθηματικών μοντέλων, σημειώνουν ότι η δημιουργικότητα σπανίως, κατά το παρελθόν -στις έρευνες για τη μαθηματική εκπαίδευση- συνδέεται με κάποια επιστημολογική σκοπιά για τα Μαθηματικά ή την εργασία σε κοινότητες. Απομακρυσμένοι λοιπόν από το να την εξετάσουν ως ατομικό χαρακτηριστικό ή ταλέντο, υιοθετούν μία διαφορετική σκοπιά: αν δούμε τα μαθηματικά, ως ένα ανθρώπινο κατασκεύασμα, αφαιρείται μονομιάς οποιαδήποτε «μεταφυσική» διάσταση της δημιουργικότητας, καθώς παύει να αποτελεί κάποια μυστηριώδη διαίσθηση ή ένα εξαιρετικό ταλέντο/προνόμιο. Είναι έμφυτη και -εν δυνάμει- φυσιολογικά καλλιεργήσιμη σε όλους.

Στα πλαίσια του σχεδιασμού που θα αναλυθεί παρακάτω, οι ομάδες-κοινότητες πρακτικής προκαλούνται να καταπιαστούν με έργα που προοδευτικά θα απαιτούν όλο και πιο στοχευμένη δημιουργικότητα, γενίκευση και φαντασία. Η δημιουργικότητα είναι το εφαλτήριο για δομήσουν νέες μαθηματικές δυνατότητες. Η δημιουργικότητα, θεωρεί η ερευνήτρια, εκφράζεται και μέσα από το πώς θα αξιοποιήσουν τις ευκαιρίες που τους δίνονται από το σχεδιασμό. Εκφράζεται στο πώς θα νοηματοδοτήσουν, θα σταθεροποιήσουν και θα εκφράσουν ιδέες, σχεδιάζοντας, προγραμματίζοντας και «μαστορεύοντας» μαθηματικά μοντέλα «για λογαριασμό τους» (agency). Η δημιουργικότητα όμως, όχι ως το άθροισμα κάποιων ατομικών κατορθωμάτων, αλλά ως η κοινή έκφραση της σύμπραξης των ατόμων. Η δημιουργικότητα δηλαδή, ιδωμένη κοινοτικά [«social creativity», (Fischer)]: ως σύμπραξη ατόμων, μέσων [media] και τεχνουργημάτων [artifacts].

<u>Κοινωνικο-μαθηματικές Νόρμες</u>

Οι Cobb και Yackel (1996) υποστηρίζουν, ότι η ενασχόληση με τα μαθηματικά είναι τόσο κοινωνική δραστηριότητα όσο και ατομικό-κατασκευαστική. Είναι χρήσιμο να δούμε τα μαθηματικά και ως γνωστική δραστηριότητα, η οποία περιορίζεται από κοινωνικό- πολιτισμικές διαδικασίες, αλλά και ως κοινωνικό-πολιτισμικό φαινόμενο, το οποίο συντελείται σε μία κοινότητα ενεργών ατόμων που ασχολούνται με μαθηματικά που έχουν προσωπικό νόημα για αυτούς. Η θεωρία των κοινωνικο-μαθηματικών νορμών («sociomathematical norms», Cobb & Yackel , 1996) αναπτύχθηκε ώστε να περιγράψει πώς η μαθηματική συνείδηση διαμορφώνεται σε μία τάξη, μέσα από ερμηνεία συμβάντων που λαμβάνουν χώρα σε αυτή. Οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες αναφέρονται στη μαθηματική δραστηριότητα και περιγράφουν κανονικότητες συμπεριφοράς της αλληλεπίδρασης των ατόμων. Μπορεί το περιεχόμενο της μαθηματικής δραστηριότητας να είναι συγκεκριμένο και ορισμένο (πχ ένα μαθηματικό πρόβλημα), αλλά τα πρότυπα που διαμορφώνονται στην τάξη έχουν να κάνουν με συγκεκριμένους στόχους, θέσεις, υποθέσεις και ισχυρισμούς. Το «τι είναι (μαθηματικά) αποδεκτό» σε μία τάξη, συνιστά μία κοινωνικο-μαθηματική νόρμα που διαμορφώνεται ή έχει διαμορφωθεί στην συγκεκριμένη τάξη. Έτσι οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες, οι στόχοι, οι αντιλήψεις και οι απόψεις για το τι σημαίνει «κάνω μαθηματικά» συνδέονται και δεν θα μπορούσαν να ιδωθούν ανεξάρτητα από τα εθνογραφικά χαρακτηριστικά της ομάδας (Cobb & Yackel , 1996).

Η οπτική και οι παράμετροι της μάθησης επεκτείνονται έτσι, από το άτομο (ως υποκείμενο της μαθηματικής ανάπτυξης) σε κάτι ευρύτερο: στη δημιουργία του κοινωνικά κατασκευασμένου νοήματος μέσω της διαπραγμάτευσης και της κοινής συναίνεσης στα πλαίσια μίας κοινότητας ατόμων, που είτε παράγουν μαθηματικά είτε χρησιμοποιούν μαθηματικές έννοιες για την επίτευξη κάποιου στόχου. Όταν λειτουργούμε σ' ένα κοινωνικό – ομαδικό πλαίσιο, τότε βρίσκουμε νόημα σε αυτό που κάνουμε και λόγω ενεργοποίησης οι πιθανότητες να ασχοληθούμε με μαθηματικά πιο υψηλού επιπέδου είναι μεγαλύτερες (Κυνηγός, 2014). Οι κοινωνικές νόρμες που αναπτύσσονται στα πλαίσια της ομάδας ενισχύουν τις ευκαιρίες για μάθηση. Παραδείγματα τέτοιων νορμών στην τάξη είναι η συνεργασία των μαθητών προς επίλυση κάποιου προβλήματος, η νοηματοδότηση αντικειμένων που αποκτά μεγαλύτερη αξία από τις σωστές απαντήσεις και η κοινή συναίνεση στην οποία πρέπει να φτάσουν οι συνεργάτες καθώς δουλεύουν (Hershkowitz & Schwarz, 1999).

Η Marrioti (2006) σημειώνει πως οι νόρμες και οι ρόλοι μέσα στην κοινότητα επηρεάζουν το πώς κάποιος μέσα σε αυτήν (μαθαίνει να) «κάνει μαθηματικά»: πώς παράγει εικασίες/προτάσεις, πώς επιχειρηματολογεί, πώς αξιολογεί τους λόγους των άλλων. Αυτή η εξέλιξη καθορίζει την πορεία μάθησης. Φέρνοντας την έννοια της κοινωνικής διαμεσολάβησης του νοήματος (Vygotsky, 1978) στη μελέτη δραστηριοτήτων με ψηφιακά εργαλεία, διαπιστώνει ότι η μαθηματική δραστηριότητα με ψηφιακά εργαλεία αποτελεί επίσης μία κοινωνική διαμεσολάβηση του μαθηματικού νοήματος, συμπληρωματική ως προς την προφορική ή την γραπτή διαμεσολάβηση.

Το ποιες αιτιολογήσεις γίνονται αποδεκτές και το πώς η κοινότητα πρακτικής κρίνει, αποδέχεται ή απορρίπτει τους συλλογισμούς και τις επεξηγήσεις στα πλαίσιά της, κατά τη διερεύνηση και το «μαστόρεμα» αποτελούν επίσης, υπό την οπτική της παρούσας έρευνας, κοινωνικο-μαθηματικά πρότυπα. Όπως καταδεικνύεται και στην ανάλυση των αποτελεσμάτων, οι αιτιολογήσεις και οι κρίσεις αποτελούν μορφές επικοινωνίας μεταξύ των μελών της κάθε ομάδας και παίζουν καθοριστικό ρόλο στο πώς διαμορφώνονται τα πρότυπα αυτά.

Μεθοδολογία Έρευνας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η ερευνητική μέθοδος, οι στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα, καθώς και οι τρόποι συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων. Κατόπιν, περιγράφονται και αναλύονται οι δραστηριότητες της διδακτικής παρέμβασης.

Ερευνητική Μέθοδος

Επιλέχθηκε να ακολουθηθεί ως είδος έρευνας η Έρευνα Σχεδιασμού (design-based research). Η εν λόγω επιλογή για την εκπόνηση της εργασίας αυτής, καθορίστηκε από το ότι η παρούσα έρευνα επιχειρούσε αρχικά να εστιάσει στη διερεύνηση και στη νοηματοδότηση των παιδιών σε ένα ευρύ πλαίσιο, χωρίς αυστηρώς προκαθορισμένα ερευνητικά ερωτήματα. Κύρια στόχευση ήταν το να μελετηθεί πώς τα παραπάνω θεωρητικά σχήματα και μοντέλα θα λειτουργήσουν στην πράξη, κατά τη διαδικασία του «μαστορέματος» και προγραμματισμού ψηφιακών μοντέλων και κατά πόσο θα αναδειχθεί η αιτιολόγηση ως προπομπός της μαθηματικής απόδειξης.
Ο σχεδιασμός δεν ήταν απόλυτα προκαθορισμένος εξ αρχής. Οι βασικοί άξονες είχαν βέβαια διαμορφωθεί εκ των προτέρων, αλλά η τελική μορφή των δραστηριοτήτων προέκυψε στην πορεία, κατά την εξέλιξη των διδακτικών παρεμβάσεων που διεξήχθησαν. Μια πιλοτική εφαρμογή στην αρχή, τροφοδότησε με κάποια πρώτα αποτελέσματα την ερευνήτρια, τα οποία επεξεργάστηκαν και οδήγησαν σε επανασχεδιασμό και ανασύνθεση των ερευνητικών στόχων. Παρακάτω θα παρουσιαστεί η τελική μορφή της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία επιχειρεί να απαντήσει. Ο ρόλος της ερευνήτριας είναι πολλαπλός, καθώς προσεγγίζει τόσο διδακτικά όσο και ερευνητικά ένα ευρύ φάσμα ζητημάτων, όπως τον σχεδιασμό, την εφαρμογή και την υλοποίηση των διδακτικών παρεμβάσεων, την παρατήρηση και την ανάλυση των αρχικών ευρημάτων, καθώς και την επεξεργασία τους με ενδιάμεσους επανασχεδιασμούς προς την τελική μορφή του ερευνητικού πονήματος.

Έρευνα Σχεδιασμού

Η Έρευνα Σχεδιασμού συνιστά μία εμπειρική μελέτη ανθρώπινων δραστηριοτήτων στο συνηθισμένο χώρο εργασίας τους. Στα πλαίσια των επιστημών της αγωγής, αναφέρεται και ως «έρευνα παρέμβασης», καθώς αφορά τη μελέτη ανθρώπινων δραστηριοτήτων στο πλαίσιο μιας εκπαιδευτικής διαδικασίας, στο σχεδιασμό της οποίας έχουν συμμετάσχει οι ερευνητές που διεξήγαγαν την έρευνα (Κυνηγός, 2011).
Το ερευνητικό μοντέλο είναι κυρίως γενεσιουργό (generative) ως προς το ρόλο των ερευνητικών δεδομένων στην παραγωγή νέας θεωρητικής γνώσης (Goetz & Lacompte, 1984). Δεν γίνεται προσπάθεια να σταθεροποιηθούν όλες οι παράμετροι, εκτός από αυτή που μελετάμε κεντρικά. Στην Έρευνα Σχεδιασμού κυριαρχεί η τάση να εμπλακούμε πολύπλευρα στη μελέτη της ανθρώπινης δραστηριότητας και συμπεριφοράς στα πλαίσια

της τάξης. Η ερευνήτρια μελετά ολιστικά τις δράσεις και τις συμπεριφορές παιδιών και εκπαιδευτικών, μένοντας «ανοιχτή» στα απρόβλεπτα συμβάντα που ενδέχεται να λάβουν χώρα κατά τη διάρκεια (Κυνηγός, 2011), και κρίνει εάν -και κατά πόσο- αυτά εντάσσονται στον επανασχεδιασμό, λαμβάνοντάς τα υπ’ όψιν των ερμηνειών που θα επιχειρήσει. Η ερευνήτρια έχει πολλαπλούς ρόλους: σχεδιάζει και συμμετέχει στην έρευνα, ενώ παράλληλα αναλύει και μελετά τα δεδομένα που προκύπτουν (Κυνηγός, 2011). Έτσι, η πρόκληση για μία αντικειμενική έρευνα είναι αφενός η δημιουργική ισορροπία των δύο αυτών αλληλεξαρτώμενων ρόλων κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού και της υλοποίησης της παρέμβασης και αφετέρου ο ξεκάθαρος διαχωρισμός του ρόλου της ερευνήτριας κατά τη διάρκεια της ανάλυσης των δεδομένων και της συγγραφής των αποτελεσμάτων της έρευνας, τα οποία και καλείται να ερμηνεύσει. Το σχέδιο της παρέμβασης και οι δραστηριότητες που εντάσσονται σε αυτό έχουν επίσης διττή φύση: αφ’ ενός στοχεύουν στην καλλιέργεια συνθηκών γόνιμων σε ευκαιρίες πλούσιας διδακτικής εμπειρίας και αφ’ ετέρου στην καταλυτική συνεισφορά στην παραγωγή αξιόλογων δεδομένων προς ανάλυση.

Η συγκεκριμένη μεθοδολογία έρευνας προτάσσει πως τα ίδια τα δεδομένα γεννούν την επιστημονική γνώση, αντί να χρησιμοποιούνται για να επιβεβαιώσουν μια θεωρητική υπόθεση. Η έρευνα, επομένως, έχει έναν εξελικτικό και αναδυόμενο χαρακτήρα (Yackel &Cobb, 1996) με συχνούς επαναπροσδιορισμούς και διαδοχική εστίαση στο αντικείμενο έρευνας.

Ο αρχικός σχεδιασμός της έρευνας βασίζεται πάνω σε υποθέσεις και εικασίες σχετικά με το περιεχόμενο και τα νοήματα που θα κατασκευαστούν από τους συμμετέχοντες, τα διδακτικά και μαθησιακά μέσα -με άλλα λόγια, ο αρχικός σχεδιασμός διαρθρώνεται πάνω σε μία υποθετική μαθησιακή πορεία. Οι παράμετροι που συμμεταβάλλονται όμως στην πράξη, στα πλαίσια του μαθησιακού περιβάλλοντος όπου διεξάγεται η εκάστοτε παρέμβαση, αυξάνουν την πολυπλοκότητα του ζητήματος του σχεδιασμού και παίζουν αποφασιστικό ρόλο καθόλη τη διάρκειά της έρευνας. Η έρευνα σχεδιασμού χαρακτηρίζεται από συνεχείς βελτιωτικές τροποποιήσεις του σχεδιασμού της παρέμβασης, οι οποίες καθορίζονται από την εξέλιξη της ίδιας της παρέμβασης. (Collins et al., 2004). Κατά τη διάρκεια εξέλιξης της έρευνας, αναδύονται χαρακτηριστικά της πορείας μάθησης, όπως καθορίζεται από τις αρχικές μεταβλητές, τα οποία ενδέχεται να επιδέχονται βελτίωση, προκείμενου να ενισχυθούν οι στόχοι που τίθενται από το ερευνητικό πλαίσιο. Η παρατήρηση των αλληλεπιδράσεων των στοιχείων του περιβάλλοντος με τη μαθησιακή διαδικασία οδηγεί σε αναθεωρήσεις ή επανακαθορίζει τις αρχικές εικασίες, μέσα από κατάλληλες τροποποιήσεις του αρχικού σχεδιασμού. Ο επανασχεδιασμός του σχεδίου παρέμβασης, όσο αυτή εξελίσσεται, απαιτεί πλήθος δεδομένων, δηλαδή ηχητική ή και οπτική καταγραφή της μαθησιακής διαδικασίας σε κάθε στάδιο εξέλιξης της παρέμβασης.

Κεντρική μέριμνα της έρευνας σχεδιασμού είναι η κρίσιμη διαχείριση του κενού μεταξύ Θεωρίας-Πράξης και η δημιουργία ενός προϊόντος άμεσα εφαρμόσιμου στην εκπαιδευτική πράξη (Cobb et al., 2003). Στόχευση ενός πειράματος σχεδιασμού (Collins, 1992) είναι η απόδοση ενός θεωρητικού μοντέλου ευρύτερου από μία αφήγηση των συμβάντων της τάξης, αλλά πιο περιορισμένο απ' ότι θα ήταν μια περιγραφή ανεξάρτητη των συγκυριών της συγκεκριμένης παρέμβασης (diSessa, 1991).

Στα κύρια χαρακτηριστικά της Έρευνας Σχεδιασμού (Cobb et al. 2003; Prediger et al. 2015) συγκαταλέγονται τα εξής: ο παρεμβατικός της χαρακτήρας στις πρακτικές της τάξης, η συμβολή της στην παραγωγή θεωρίας μέσα από την ανάπτυξη νέων -ή βελτιώνοντας ήδη υπάρχουσες - θεωρητικές κατασκευές και μοντέλα, η δημιουργία γόνιμων συνθηκών για κριτικό αναστοχασμό πάνω στην αναπτυσσόμενη θεωρητική κατασκευή, η εξέλιξη της μέσα από επαναληπτικούς κύκλους εικασίας – δοκιμής – αναθεώρησης, η τάση της να λαμβάνει υπ' όψη τις ιδιαιτερότητες της σχολικής πραγματικότητας ως πεδίο έρευνας και τέλος, το ότι κινείται σε ένα πρακτικό πλαίσιο.

Ο όρος «Οντολογική Καινοτομία» [Ontological Innovation] κατέχει κομβική θέση για τους diSessa & Cobb στο σκεπτικό της Έρευνας Σχεδιασμού και κρίσιμο χαρακτηριστικό της, υπό την έννοια ότι αποτελεί μία μεθοδολογία που φιλοδοξεί a priori να εξελίσσει, να επεκτείνει και να εμπλουτίσει τις ήδη υπάρχουσες επιστημονικές κατηγορίες ή να παράγει νέες, μέσα από καινοτόμες σχεδιαστικές πρακτικές. Περιλαμβάνει τη ανάδειξη νέων όρων ή σχημάτων [concepts] που μας καθιστούν ικανούς να νοηματοδοτήσουμε διακρίσεις και να εμβαθύνουμε στις ερμηνείες που επιχειρούμε επί των φαινομένων. Επαναπροσδιορίζει τον τρόπο που βλέπουμε και ερμηνεύουμε τα φαινόμενα της σχολικής τάξης και μπορεί να οδηγήσει στη διαμόρφωση νέων στόχων, στρατηγικών και σημείων αναφοράς ως προς την αξιολόγηση και την ενορχήστρωση της εκπαιδευτικής πρακτικής.

Οι Gravemeijer&Prediger διακρίνουν τις εξής φάσεις σε μία Έρευνα Σχεδιασμού. Στην αρχική φάση προετοιμασίας της ερευνητικής διαδικασίας, καθορίζονται οι διδακτικοί και παιδαγωγικοί στόχοι καθώς και τα σημεία αφετηρίας. Έτσι, ξεκινάει να δομείται μία θεωρία-υπόθεση[2] που στοιχειολογεί την πιθανή πορεία της δραστηριότητας, και τα πιθανά μέσα που θα μπορούσαν να την υποστηρίξουν. Επίσης λαμβάνονται κάποιες αποφάσεις αναφορικά με την θεωρητική στόχευση ολόκληρου του σχεδιασμού, τη συλλογή και την ανάλυση των δεδομένων και αποφασίζεται το θεωρητικό πλαίσιο και οι θεωρητικοί φακοί, υπό τους οποίους αυτά θα εξεταστούν [Vergnaud. 1996, Yackel &Cobb, 1996][3]. Στη συνέχεια, ακολουθεί η εκτέλεση του σχεδιαστικού πειράματος [design experiment]. Στον πυρήνα του υπάρχει μία κυκλική διαδικάσια (επανα)σχεδιασμού και ελέγχου των δραστηριοτήτων και άλλων παραμέτρων. Σαφώς θα

[2] θεωρία-υπόθεση [conjectured local instruction theory] : αποτελεί μία γενική εναρκτήρια (θεωρητική) κατεύθυνση, ένα αρχικό μοντέλο [Simon, 1995] αλλά είναι ξεκάθαρο ότι θα υποστεί αλλαγές και θα διαμορφωθεί από τις νοηματοδοτήσεις και τις ενέργειες των παιδιών κατά τη διάρκεια εμπλοκής τους με τις αρχικές -ή τις τροποιημένες, ίσως, αργότερα- δραστηρίοτητες που τους δίνονται

[3] Η θεωρητική βάση για τις κοινωνικές νόρμες και τις κονωνικο-μαθηματικές νόρμες καταδεικνύουν τί να προσέξουμε για να σχεδιάσουμε μία επιτυχημένη παρέμβαση. Παράλληλα όμως, αποτελούν και ένα θεωρητικό πλαίσιο ερμηνείας και ανάλυσης του discourse και της επικοινωνίας στην τάξη.

υπήρχε αρχικά, μία σειρά από εικασίες για το τί θα νοηματοδοτηθεί ή γίνει από πλευράς μαθητών, αλλά στη φάση αυτή, αναλύονται οι πραγματικές δράσεις και διαδικασίες των μαθητών. Με βάση αυτή την ανάλυση, θα παρθούν αποφάσεις για το αν οι δραστηριότητες χρειάζονται επαναπροσαρμογή και για το αν η θεωρία-υπόθεση χρειάζεται να προσαρμοστεί/τροποποιηθεί. Ακολουθεί η φάση του αναστοχασμού, όπου η ερευνήτρια επαναπροσδιορίζει και επανακαθορίζει το σχέδιο δραστηριότητας, μέσα από την ανατροφοδότηση που της παρέχει η παρατήρηση της εξέλιξης του μαθησιακού περιβάλλοντος.

Αξιοσημείωτα, βέβαια, είναι κάποια σημεία που αποτελούν αδυναμίες της μεθόδου αυτής. Συγκεκριμένα, όπως υπογραμμίζουν οι Gravemeijer&Prediger, κάποιες φορές η σκοπιά μιας Έρευνας Σχεδιασμού είναι περιορισμένη. Ενδέχεται να μην είναι εφαρμόσιμη σε κάθε περίπτωση ή πρόβλημα. Είναι σημαντικό να εξετάσουμε ενδελεχώς το συγκεκριμένο πλαίσιο και τις απαιτήσεις του, πριν επιχειρήσουμε να την εφαρμόσουμε. Επίσης, η μέθοδος αυτή δεν είναι αρκετά ευέλικτη. Πιθανές αλλαγές στα δεδομένα του προβλήματος ή στο πλαίσιο υλοποίησης ενδέχεται να απαιτούν προσεκτικό επανα-σχεδιασμό και εφαρμογή δραστικών τροποποιήσεων και προσαρμογών. Σημειώνεται ακόμα ότι υπάρχει το ενδεχόμενο των βεβιασμένων πορισμάτων. Ειδικά όταν ερχόμαστε αντιμέτωποι με ευαίσθητα ή πολυσύνθετα θέματα, στην Έρευνα Σχεδιασμού, ελλοχεύει ο κίνδυνος να εξαχθούν βεβιασμένα και ανακριβή συμπεράσματα. Άλλη μία αδυναμία της μεθόδου αυτής, είναι πως απαιτεί μεγάλο πλήθος πόρων. Για να σχεδιαστεί και στη συνέχεια να διεξαχθεί μία Έρευνα Σχεδιασμού απαιτείται πολύς χρόνος, εξειδίκευση και τεχνογνωσία. Αυτό, όπως είναι φυσικό, γεννά μια σειρά από προκλήσεις προς τους οργανισμούς ή τα άτομα που έχουν περιορισμένους πόρους. Αμφιβολίες επίσης διατυπώνονται ως προς το ζήτημα της εγκυρότητας. Ανακύπτει συχνά το ερώτημα για την επικύρωση ή τον έλεγχο της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων της εν λόγω μεθόδου. Προβληματισμοί επίσης μπορεί να διατυπωθούν σχετικά με τη διαφάνεια της μεθοδολογίας αυτής. Συχνά, οι διαδικασίες και οι μηχανισμοί της Έρευνας Σχεδιασμού παραμένουν στο παρασκήνιο. Κάτι τέτοιο καθιστά την κατανόηση των αποτελεσμάτων, ή την προσπάθεια για επέκταση της σε άλλα πλαίσια, από τρίτους, αρκετά δύσκολη κάποιες φορές. Τέλος, όχι σπάνια, ασκείται κριτική σχετικά με τους ενδεχόμενους περιορισμούς της Έρευνας Σχεδιασμού. Είναι σημαντικό να αναγνωρίζουμε και να αξιολογούμε προσεκτικά τα σαφή όρια στα οποία κινείται η Έρευνα Σχεδιασμού και στη συνέχεια να σχεδιάζουμε, αν χρειάζεται, εναλλακτικές προσεγγίσεις, προσαρμοσμένες στη θεματική και στο ερευνητικό μας πλαίσιο. Τα παραπάνω αποτελούν αναμφίβολα ορισμένα «τρωτά σημεία» για την Έρευνα Σχεδιασμού. Επαφίεται κυρίως στους ίδιους τους ερευνητές που την επιλέγουν, να τα λαμβάνουν σοβαρά υπόψιν και να προσαρμόζουν ανάλογα το σχεδιασμό και την υλοποίηση του ερευνητικού τους πονήματος.

Αναφορικά με τη δεοντολογία της έρευνας, συμπληρωματικά ως προς το σχεδιασμό και την υλοποίηση της αντίστοιχης παρέμβασης, κρίνεται σημαντικό να σημειωθούν τα παρακάτω. Μέριμνα της ερευνήτριας αποτέλεσε να προστατεύσει τα συμμετέχοντα άτομα από οποιαδήποτε βλάβη φυσικής, ψυχολογικής ή ηθικής φύσεως. Η ταυτότητα των συμμετεχόντων δεν γνωστοποιείται. Τα προσωπικά δεδομένα των μαθητών και των μαθητριών διασφαλίζονται με χρήση κωδικών ή ψευδώνυμων και εγγυάται η εχέμυθη φύλαξη και διαχείριση των δεδομένων και των αρχείων που συλλέχθηκαν στα πλαίσια της παρέμβασης. Ο σχεδιασμός στο σύνολό του είχε πρωταρχική στόχευση να εξασφαλίσει ότι τα εμπλεκόμενα μέλη αποκομίζουν κάτι θετικό, ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα και τα ερευνητικά δεδομένα. Συνακόλουθα, η ερμηνεία των δεδομένων επιχειρείται υπό ένα θετικό πρίσμα, καθώς όπως επισημαίνει ο Κυνηγός (2011), μία τέτοια παρέμβαση και έρευνα, στοχεύει στην αποτύπωση μίας ρεαλιστικής και ερευνητικά έντιμης εικόνας του τι συμβαίνει. Οι δυσκολίες που προέκυψαν παρουσιάζονται και αναλύονται όχι ως αποτυχίες ή αστοχίες, μα σαν δεδομένα που διαφωτίζουν γενικότερα την μαθησιακή διαδικασία και αναδεικνύουν χαρακτηριστικά της παρέμβασης αυτής ως ενδεχόμενη μελλοντική, συστηματική και αναγνωρισμένη δραστηριότητα στο σχολείο (Κυνηγός, 2011).

<u>Στόχοι της Έρευνας - Ερευνητικά Ερωτήματα</u>

Η εν λόγω μεθοδολογία έρευνας, όπως παρουσιάζεται παραπάνω, συνάδει με τη γενικότερη φιλοσοφία της παρούσας έρευνας. Το ερευνητικό ενδιαφέρον εντοπίζεται στην υλοποίηση μίας παρέμβασης στα πλαίσια της οποίας θα μελετηθούν οι δράσεις και οι πρακτικές των συμμετεχόντων κυρίως σε σχέση με την επιχειρηματολογία και τις αιτιολογήσεις που θα επιχειρήσουν να δώσουν, νοηματοδοτώντας μαθηματικές ιδιότητες, καθώς προγραμματίζουν στο περιβάλλον του MaLT2.
Ο εξελικτικός χαρακτήρας της μεθοδολογίας έρευνας που επιλέχθηκε, εναρμονίζεται με τη μετασχηματιστική προσέγγιση που επιχειρείται. Βασικό στόχο της ερευνήτριας αποτελεί η διασύνδεση του προγραμματισμού με τα μαθηματικά προς την καλλιέργεια της γενικευμένης σκέψης και παράλληλα την ανάδειξη της ικανότητας (competence) της αιτιολόγησης ως τάση προς την (αυστηρή, μαθηματική) απόδειξη, μέσα από δραστηριότητες σχεδιασμένες σύμφωνα με τα μοντέλα των UDGS, 5Es και των Conceptual Fields. Βασική ερευνητική και διδακτική προτεραιότητα είναι η δημιουργία συνθηκών που θα γεννήσουν την ανάγκη αιτιολογήσεων και αποδείξεων μέσα στο πλαίσιο του εννοιολογικού πεδίου της εγγραψιμότητας.
Η εκπαιδευτική παρέμβαση που σχεδιάστηκε, επομένως, υπηρετεί αυτό το πνεύμα, καινοτομώντας, και διακρίνοντας τη θέση της από τις παγιωμένες πρακτικές και θέσεις του ελληνικού σχολείου και των τυπικών οδηγιών του Αναλυτικού Προγράμματος. Φιλοδοξεί να διαμορφώσει ένα μαθησιακό περιβάλλον μαθηματικού προγραμματισμού

στο οποίο θα μελετηθούν οι νοηματοδοτήσεις των παιδιών γύρω από μαθηματικές ιδιότητες και έννοιες, μέσα από την εμπλοκή τους με μετασχηματιστικές τεχνολογίες. Κατόπιν, να εξετάσει πώς το μαστόρεμα και η δημιουργία δομημάτων επαναπροσδιορίζει τις συνθήκες μάθησης καθώς και το πώς επιδρά στην παραγωγή, έκφραση και επικοινωνία ιδεών, καλλιεργώντας την ανάγκη παραγωγής μαθηματικών αποδείξεων.

Ο παρεμβατικός και επανασχεδιαστικός χαρακτήρας της συγκεκριμένης ερευνητικής μεθόδου, της Έρευνας Σχεδιασμού, ταιριάζει στο πνεύμα της παρούσας έρευνας, καθότι, στόχευση αποτελεί η μελέτη συμπεριφορών και πρακτικών που δεν εντοπίζονται στα τυπικά εκπαιδευτικά πλαίσια. Πριν λάβει την τελική μορφή που παρουσιάζεται παρακάτω, η διδακτική παρέμβαση επανασχεδιάστηκε και υπέστη τροποποιήσεις, βελτιώσεις και επανασχεδιασμούς, αφού δοκιμάστηκε σε κάποια πιλοτικά στάδια.

Η έρευνα αυτή έχει έναν πειραματικό χαρακτήρα προς την κατεύθυνση της μελέτης των νοηματοδοτήσεων και των αιτιολογήσεων που θα επιχειρήσουν τα παιδιά, μα δεν είχε εξ αρχής σαφώς προκαθορισμένους στόχους. Ακολουθήθηκε όμως μία πορεία με βάση κάποιους άξονες ερευνητικών ερωτημάτων:

- Τι νοήματα κατασκευάζονται από τα παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου πάνω στις μαθηματικές ιδιότητες της εγγραψιμότητας;
- Ποια κριτήρια εγγραψιμότητας θα διατυπώσουν τα παιδιά;
- Είναι η εγγραψιμότητα ένα αποτελεσματικό συνδετικό πεδίο για την ανάπτυξη διασυνδεδεμένων νοημάτων;
- Πώς συμβάλλουν οι συνθήκες εργασίας στο MaLT2 στα πλαίσια μιας κοινότητας πρακτικής, στην ανάγκη αιτιολόγησης, επικοινωνίας και κατ' επέκταση στην ανάγκη παραγωγής μαθηματικών αποδείξεων;

Μέσα από την μελέτη της ενασχόλησης και της αλληλεπίδρασης των συμμετεχόντων με το ψηφιακό εργαλείο MaLT2, η παρούσα έρευνα σκοπεύει να απαντήσει στα παραπάνω ερωτήματα και να διερευνήσει αν τα παιδιά θα φτάσουν αφ' ενός να επιθυμούν και αφ΄ ετέρου να μπορούν να αιτιολογήσουν και να αποδείξουν συλλογισμούς μέσα από την επικοινωνία και τη συνεργασία τους με την ομάδα.

Δεδομένα και Μέθοδος Ανάλυσης

Πλαίσιο έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου, χωρισμένα σε τριμελείς ομάδες, σε δύο συναντήσεις, στο 2^{ο} Πρότυπο Γυμνάσιο Αθήνας. Συνολικά, ο σχεδιασμός απευθύνθηκε στην ολομέλεια της τάξης (26 παιδιά) αλλά η ερευνητική εστίαση προμελετήθηκε να αφορά 3 ομάδες εργασίας. Οι ομάδες αυτές, επιλέχθηκαν καθ' υπόδειξη του καθηγητή της τάξης, ο οποίος ήταν παρών καθ' όλη τη διάρκεια των συναντήσεων, βοηθώντας όπου χρειαζόταν και παρακολουθώντας τη μαθησιακή πορεία όλων των υπόλοιπων παιδιών.

Η πρώτη συνάντηση είχε διάρκεια μίας διδακτικής ώρας και η δεύτερη είχε διάρκεια δύο διδακτικών ωρών. Οι παρεμβάσεις έλαβαν χώρα σε εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου, σε απολύτως πραγματικές συνθήκες τάξης. Υπήρχε εξ αρχής ενημέρωση ότι επρόκειτο για μία διερευνητική δραστηριότητα, στα πλαίσια μίας έρευνας και δεν σχετιζόταν ή δεν θα επηρέαζε καθ' οποιονδήποτε τρόπο την αξιολόγησή τους. Η επιλογή της συγκεκριμένης τάξης κρίθηκε η καταλληλότερη ώστε να διασφαλίζονται συνθήκες κατάλληλες ώστε να μπορούν να ανταπεξέλθουν τα άτομα, γνωστικά, στις προκλήσεις του σχεδιασμού. Επίσης, κρίσιμο σημείο στην επιλογή, αποτέλεσε η καλή γνώση και εξοικείωση των παιδιών με το συγκεκριμένο ψηφιακό εργαλείο, λόγω εμπειρίας εργασίας τους με αυτό. Παρατηρήθηκε πως η οικειότητα των παιδιών με το διερευνητικό περιβάλλον διευκόλυνε την ομαλή εξέλιξη της διαδικασίας.

Η πρώτη διδακτική ώρα ήταν ουσιαστικά μία πιλοτική φάση της έρευνας και αφορούσε μόνο τα αρχικά στάδια της ομάδας δραστηριοτήτων που αναλύεται παρακάτω. Συλλέχθηκαν, κατά τη διάρκειά της, δεδομένα που ανατροφοδότησαν το σχεδιασμό. Συγκεκριμένα, κρίθηκε αναγκαίο να επαναπροσδιοριστούν ζητούμενα που αφορούν την αλληλεπίδραση των παιδιών με την τεχνολογία και να επαναπροσδιοριστεί το ποιες φάσεις του σχεδιασμού κρίνονται πιο σημαντικές, και ποια θα ήταν ίσως καλύτερα να παραληφθεί, χάριν οικονομίας χρόνου. Η επιλογή της φάσης που αφέθηκε τελικά παντελώς εκτός, αφορούσε την εγγραφή κανονικών πολυγώνων μέσα στο τρελομπαλάκι. Αποφασίστηκε να μην ζητηθεί από τα παιδιά να καταπιαστούν με το εν λόγω θέμα, ώστε να δοθεί περισσότερος χώρος, χρόνος και έμφαση στην ελεύθερη διερεύνηση της τελικής φάσης [διερεύνηση εγγραψιμότητας δισδιάστατων/τρισδιάστατων οντοτήτων μέσα στο τρελομπαλάκι (ελέυθερη επιλογή κάθε ομάδας)].

Η δεύτερη συνάντηση (δεύτερη και τρίτη διδακτική ώρα) αποτέλεσε τον κορμό της κύριας έρευνας. Κατά τη διάρκειά της συλλέχθηκαν δεδομένα που αφορούν όλες τις φάσεις του σχεδιασμού, με την αναθεωρημένη εκδοχή του περιγράφηκε μόλις παραπάνω. Αξίζει να σημειωθεί πως, κατά τη διάρκεια της δεύτερης συνάντησης, ο καθηγητής έστρεψε το ενδιαφέρον της ερευνήτριας και προς μία ακόμα ομάδα εργασίας, την οποία δεν στόχευαν εξ' αρχής να παρακολουθούν στενά ή να καταγράφουν. Η εν λόγω ομάδα καταπιάστηκε, με δική της πρωτοβουλία, στη φάση της ελεύθερης διερεύνησης, με το ζήτημα εγγραφής κανονικού εξαγώνου και κανονικού δεκαγώνου, θεωρώντας το, όπως είπαν ως μια επέκταση-γενίκευση των διαδικασιών εγγραφής ισόπλευρου τριγώνου και τετραγώνου μέσα στο τρελομπαλάκι. Η παρατήρηση τους και

η εργασία τους αναλύεται παρακάτω στην ενότητα των αποτελεσμάτων, καθώς κρίθηκε άξια λόγου και ανάλυσης, οπότε συλλέχθηκε υλικό και από αυτήν.
Τελικά, το πλαίσιο των ερευνητικών ευρημάτων αφορά τέσσερις ομάδες: τρείς των τριών ατόμων και μία των δύο ατόμων. Η καταγραφή έγινε μόνο στις αρχικές τρεις, από τις οποίες είχε ληφθεί άδεια για καταγραφή οθόνης και ήχου, ενώ από την τέταρτη λήφθηκαν μόνο σημειώσεις του τρόπου με τον οποίο εργάστηκε.

Τρόπος συλλογής δεδομένων

Αφού κεντρική μέριμνα του ερευνητικού πονήματος ήταν η καταγραφή και μελέτη των τρόπων έκφρασης, αιτιολόγησης και επικοινωνίας των νοημάτων που χτίστηκαν κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων των παιδιών με το ψηφιακό εργαλείο, έγινε προσπάθεια να ληφθούν και να καταγραφούν με ποικίλους τρόπους και μέσω πολλαπλών πηγών τα δεδομένα που προέκυψαν, ώστε να αντανακλούν σφαιρικά και όσο το δυνατόν πιο ολοκληρωμένα την πορεία σκέψης και έκφρασης των ατόμων που συμμετείχαν. Τα δεδομένα, μελετήθηκαν τόσο για τον επανασχεδιασμό όσο και για την ανάλυση των ευρημάτων.
Οι πηγές συλλογής δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα είναι:

- Αρχεία καταγραφής οθόνης και ήχου του υπολογιστή της κάθε ομάδας με το λογισμικό Hyper Cam 2. Το εν λόγω λογισμικό κατέγραφε την εργασία των παιδιών με το ψηφιακό εργαλείο, αποτυπώνοντας εικόνα και ήχο.
- Ηχητική καταγραφή των συζητήσεων στα πλαίσια της ομάδας. Χρησιμοποιήθηκε ένα voice recorder για κάθε ομάδα εστίασης.
- Πρόχειρα σχήματα των παιδιών πάνω στα φύλλα εργασίας
- Τα αρχεία .mlt με τα ψηφιακά δομήματα που προέκυψαν, δηλαδή τους κώδικες τους οποίους συνέταξαν τα παιδιά στο MaLT2.
- Σημειώσεις πεδίου της ερευνήτριας και του καθηγητή

Τρόπος ανάλυσης δεδομένων

Τα δεδομένα αναλύθηκαν με βάση τη θεωρία των κρίσιμων συμβάντων (Maher, 2002; Maher & Martino, 1996a, 1996b, 2000; Noss & Hoyles, 1996). Με τον όρο «κρίσιμο συμβάν» περιγράφεται μία κατάσταση στο πλαίσιο των ερευνητικών δεδομένων που υποδεικνύει μία σημαντική αλλαγή σε σχέση με την προηγούμενη κατάσταση, που μπορεί να διακριθεί ως ένα νοητικό άλμα σε σχέση με την προηγούμενη κατανόηση. Ένα κρίσιμο συμβάν σηματοδοτείται ενδεχομένως από κάποια ενέργεια του μαθητή - φερ' ειπείν, από μία παρατήρησή του, μέχρι τον τρόπο που χειρίζεται τα ψηφιακά εργαλεία με τα οποία εμπλέκεται. Ένα κρίσιμο συμβάν έχει καθοριστική σημασία για το αντικείμενο μελέτης της έρευνας.

Όπως έχει σημειωθεί παραπάνω, στην έρευνα σχεδιασμού δεν υπάρχουν προκαθορισμένες ερευνητικές υποθέσεις οι οποίες τίθενται προς επιβεβαίωση ή απόρριψη. Οι βασικοί άξονες υποθέσεων που έχουν τεθεί στην παρούσα έρευνα είναι ανοιχτοί και ενδεχομένως θα μπορούσαν να αναπτυχθούν προς κάθε πιθανή κατεύθυνση, αλλά αυτό είναι κάτι που εξαρτάται από τα δεδομένα που προκύπτουν κατά τη διάρκεια της έρευνας. Τα κρίσιμα συμβάντα στα οποία θα εστιαστεί η ανάλυση καθορίζουν τα συμπεράσματα που προκύπτουν ως προς τις προαναφερόμενες ή μη εικασίες και υποθέσεις του αρχικού σχεδιασμού. Τα ίδια τα δεδομένα δηλαδή, σχηματοποίησαν τη δομή των αποτελεσμάτων. (Κυνηγός, 2006)

Μέσα από τα κρίσιμα συμβάντα επιχειρείται να απαντηθούν οι κεντρικοί άξονες των ερευνητικών ερωτημάτων. Στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων λοιπόν, θα παρουσιαστούν και θα αναλυθούν κρίσιμα συμβάντα που κρίθηκε ότι δίνουν μια διαφωτιστική απάντηση στα ερωτήματα της παρούσας έρευνας, υπό τους θεωρητικούς φακούς που αναλύθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Αυτά τα κρίσιμα συμβάντα στοιχειοθετούνται από τα αποσπάσματα διαλόγων, τις πρόχειρες σημειώσεις και τα ψηφιακά δομήματα των παιδιών.

Σχεδιασμός και Ανάλυση Δραστηριοτήτων

Ο σχεδιασμός της έρευνας περιλαμβάνει δραστηριότητες που απηχούν τις ιδέες που αναλύθηκαν στα παραπάνω κεφάλαια και αποτελείται από μία σειρά δραστηριοτήτων που δεν διαπραγματεύονται μία συγκεκριμένη έννοια ή ένα κεφάλαιο της διδακτέας ύλης. Αφορούν και εμπλέκουν τα μαθηματικά ως ολότητα, και όχι μία σειρά από ξεκομμένες και ασύνδετες ενότητες. Εμπλέκει την Άλγεβρα με τη Γεωμετρία και την Τριγωνομετρία, και εξαρτάται -η ορθή παραγωγή μοντέλων- από την διασύνδεση των εννοιών και των γνωστικών περιοχών. Συγκροτούν μία πρόταση, μία διαφορετική μαθησιακή πορεία, κύρια στόχευση της οποίας είναι η παραγωγή αιτιολογήσεων και αποδείξεων μέσα από την κατασκευή ισχυρά διασυνδεδεμένων νοηματοδοτήσεων γύρω από το ζήτημα της εγγραψιμότητας.

Οι έννοιες αποτελούν κατασκευάσματα των παιδιών μέσα από τη δράση τους στα πλαίσια που ορίζει η ευρύτερη μαθηματική κατάσταση-πρόβλημα. Η πρόσθετη αξία που αποδίδεται από τον παρόντα σχεδιασμό, εκπορεύεται από τον κεντρικό ρόλο που κατέχει σε αυτόν το ψηφιακό εργαλείο και η χρήση του. Τα ψηφιακά εργαλεία δημιουργούν ένα περιβάλλον με πολύ περισσότερες ευκαιρίες για τους μαθητές να αναπτύξουν νοήματα, καθώς οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και η ανταπόκριση των εργαλείων στις ενέργειες του χρήστη οδηγούν σε μία πιο εστιασμένη αλληλεπίδραση του μαθητή με τις έννοιες (Κυνηγός, 2011).

Θα έπρεπε να τονιστεί ότι το σύνολο του σχεδιασμού αφορά μία συνθήκη ενεργητικής μάθησης, όπου κεντρικό ρόλο παίζει η κατασκευή, το «μαστόρεμα» και το βίωμα. Τα παιδιά μπαίνουν σε μία διαδικασία να κατασκευάσουν λύσεις σε ένα δεδομένο γεωμετρικό πρόβλημα και, για να συμβεί αυτό, θα πρέπει να εμπλακούν ενεργά με μία δραστηριότητα η οποία θα τα προκαλέσει να διερευνήσουν, να επιχειρηματολογήσουν και να δημιουργήσουν νοήματα συμμετέχοντας σε μία μορφή συλλογικότητας. Μέσα από τον πειραματισμό με το εργαλείο, προκύπτουν προτάσεις ή εικασίες, οι οποίες κάπως θα πρέπει να επικοινωνηθούν και κάπως να εκφραστούν. Αναδεικνύεται, συνεπώς ο μαθηματικός διάλογος (επικοινωνία με την ομάδα) και φαντάζει πιο αναγκαίος από ποτέ ο μαθηματικός φορμαλισμός (επικοινωνία με το μηχάνημα). Η βιωμένη εμπειρία αυτή θα αποτελέσει πολύτιμο εφόδιο στην πορεία καλλιέργειας της μαθηματικής σκέψης των παιδιών. Ο φορμαλισμός που απαιτεί η παραγωγή του κάθε κώδικα θα εντάξει τους συμμετέχοντες σε μία κουλτούρα αυστηρότητας και καθαρότητας λόγου, που είναι σύμφυτη με τον μαθηματικό φορμαλισμό και τα μέσα του. Δίνοντας νόημα στο φορμαλισμό και όχι παρακάμπτοντάς τον τεχνηέντως, αυξάνουμε τη διδακτική αξία που έχει η χρήση ενός ψηφιακού εργαλείου ως προς τα Μαθηματικά. Θα ήταν μία καλή απάντηση στο πώς θα μπορούσαμε να γεφυρώσουμε το χάσμα μεταξύ δράσης και έκφρασης, όπως σημειώνουν οι Noss, Healy & Hoyles (1997). Το συγκεκριμένο, το σταθερό και το χειροπιαστό (το κλικ του ποντικιού, ο προγραμματισμός, κλπ..) φέρουν μέσα τους, τους σπόρους του γενικού, του αφηρημένου, του virtual.

Ο μικρόκοσμος που δομήθηκε, σχεδιαστικά περικλείει κάποια στοιχεία που η ερευνήτρια έκρινε ότι θα ήταν προσοδοφόρα τόσο για την πορεία της έρευνας (ως προς τα ερευνητικά μας ερωτήματα δηλαδή) όσο και για τα ίδια τα εμπλεκόμενα άτομα. Συγκεκριμένα:

- Φέρει στοιχεία του πραγματικού κόσμου, δημιουργώντας την αίσθηση μίας συνθήκης με την οποία λίγο-πολύ τα παιδιά έχουν επαφή από την καθημερινή τους ζωή. Από αυτό, αφενός αντλούνται οφέλη που έχουν να κάνουν με το ότι το θέμα είναι αρκετά προσιτό και οικείο και αφ΄ετέρου, υπονοείται μία επιστημολογική σημείωση για τη φύση των Μαθηματικών: τα μαθηματικά που θα αναδειχθούν και τα νοήματα που θα προκύψουν κατά τη διερεύνηση, δεν θα επιβληθούν από κάποια εξωτερική ή άνωθεν πηγή, μα θα αναδυθούν ως ένας τρόπος να επέμβουμε συστηματικά, να ερμηνεύσουμε και να οργανώσουμε ορθολογικά την πραγματικότητα μιας συνθήκης που έχουμε μπροστά μας και μας προβληματίζει.
- Θεωρήθηκε ότι, εκτός από προσιτό, θα τους ήταν αρκετά ενδιαφέρον το να κληθούν να επέμβουν σε ένα τρελομπαλάκι, διακοσμώντας το εσωτερικό του. Πολύ συχνά απουσιάζουν οι ευκαιρίες τα παιδιά να ξεδιπλώσουν τη φαντασία και τη δημιουργικότητά τους στο μάθημα των Μαθηματικών, κατασκευάζοντας κάτι της αρεσκείας τους -πόσο δε μάλλον, η αναζήτηση και ο σχηματισμός από τα ίδια και για λογαριασμό τους αυστηρών κανόνων και κριτηρίων για να ευοδωθεί η προσπάθειά τους
- Το γενικότερο πλαίσιο είναι κατασκευασμένο ώστε να επιδέχεται αλλαγές που έχουν προσωπικό νόημα για τους χρήστες, αντανακλώντας κάθε στιγμή τις νέες ιδέες τους ή

την αισθητική τους προσέγγιση, αφού οι χρήστες για το μεγαλύτερο τμήμα των δραστηριοτήτων παρεμβαίνουν ελεύθερα και παράγουν μοντέλα της επιλογής τους, μέσα στο τρελομπαλάκι

- Το ψηφιακό εργαλείο δίνει την ευκαιρία άμεσης ανατροφοδότησης η οποία προκαλεί το διάλογο και την επιχειρηματολογία των ατόμων. Ο μικρόκοσμος τελεί εν εξελίξει και αλλάζει, συναρτήσει με τις πρακτικές και τις επιλογές των παιδιών. Υλοποιεί τις ιδέες τους: είναι, όπως σημείωναν οι Hoyles & Noss στη θεωρητική μας πλαισίωση, «ένα εκφραστικό μέσο αλλά και ένα μέσο δράσης». Εδώ, δημιουργώντας μία συνθήκη που τα προκαλεί να εξηγήσουν ή να εκφράσουν τις σκέψεις τους, να αιτιολογήσουν τους συλλογισμούς και τις επιλογές τους. Μένει να εξετάσουμε λοιπόν εάν το ψηφιακό εργαλείο είναι και ένα μέσο - μοχλός σχηματισμού και έκφρασης επιχειρημάτων και αιτιολογήσεων, αν δηλαδή προάγει τη συζήτηση ή/και την αιτιολόγηση των επιλογών και των αλλαγών τους

Τα παραπάνω αποτελούν μία γενική περιγραφή και σκιαγραφούν αχνά το πνεύμα και τον προσανατολισμό του σχεδιασμού. Ας περάσουμε τώρα σε μία αναλυτική περιγραφή του.

Αναλυτική Περιγραφή Δραστηριοτήτων

Η πρόκληση που τους απευθύνεται θέτει το εξής πρόβλημα:

> Ζητούμενο είναι η εγγραφή ενός δισδιάστατου αντικειμένου σε σφαίρα

Η έκφραση αυτού του ζητούμενου επιλέχθηκε να μην είναι αυστηρή και να μην περιλαμβάνει μαθηματικούς / γεωμετρικούς όρους. Τους παρουσιάζεται λοιπόν ως εξής:

> ότι έχουν να σχεδιάσουν μέσα σε ένα διάφανο τρελομπαλάκι κάποιο δισδιάστατο αντικείμενο της επιλογής τους με μοναδικό περιορισμό «η φιγούρα να εφαρμόζει πλήρως στο εσωτερικό» (δηλαδή, «να μην υπάρχει κενός χώρος ανάμεσα στο σχήμα/γράμμα [ή ό,τι άλλο επιλέξουν] και την εσωτερική επιφάνεια της τρελόμπαλας».

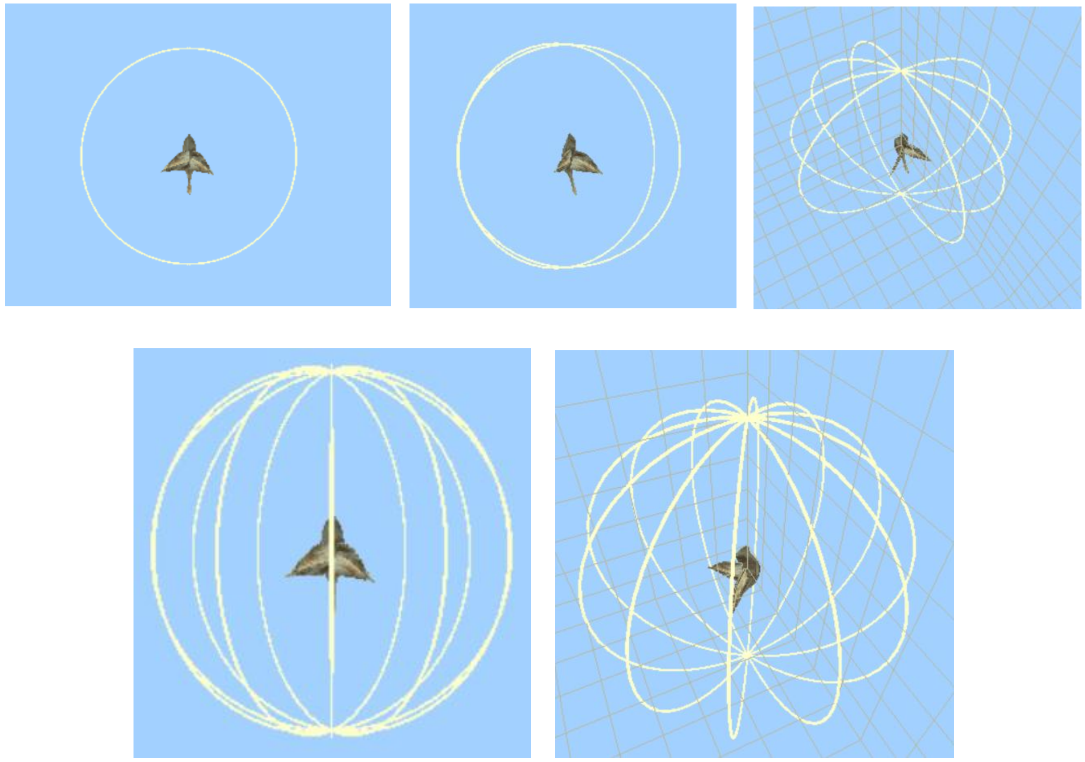
Η επιλογή των εκφράσεων αυτών σκοπό έχει να μην προσανατολίσει τη συζήτηση προς μία συγκεκριμένη εννοιολογική περιοχή των μαθηματικών, απελευθερώνοντας τα παιδιά από το να σκεφτούν με όρους του υπάρχοντος αναλυτικού προγράμματος και αφήνοντας ανοιχτό κάθε διερευνητικό μονοπάτι. Για αυτό αποφεύγεται η λέξη «εγγράψτε» ή τα ομόηχα και παράγωγά της. Επίσης, θέλοντας να εξετάσουμε το πώς θα ξεδιπλωθεί η δημιουργικότητα και η φαντασία τους με το ψηφιακό εργαλείο, αφήνεται επίσης ελεύθερη η επιλογή του αντικειμένου που πρόκειται να εγγραφεί, αρκεί να είναι δύο διαστάσεων: θα μπορούσε να είναι ένα γεωμετρικό σχήμα, κανονικό -ή μη κανονικό, ένα γράμμα, ένα σχέδιο της φαντασίας τους κλπ. Θα είχε μεγάλο ενδιαφέρον φερ’ ειπείν να διερευνήσουν την εγγραψιμότητα μη κυρτών σχημάτων, εάν προταθεί από κάποιο μέλος της ομάδας.

Εξ αρχής δίνεται στα παιδιά μία διαδικασία (η διαδικασία «τρελομπαλάκι») που κατασκευάζει την περιγεγραμμένη σφαίρα μεταβλητής ακτίνας. Η μαθηματική γλώσσα και ορολογία πάλι αποφεύγεται στην εκφώνηση - στα παιδιά περιγράφεται ως εξής: «Σας δίνεται η διαδικασία «τρελομπαλάκι», που φτιάχνει ένα διάφανο τρελομπαλάκι με ακτίνα της επιλογής σας» και τους διευκρινίζεται ότι «μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε έτοιμο. Εσείς θα ασχοληθείτε μόνο με το τι θα φτιάξετε στο εσωτερικό του!».

Ας σχολιάσουμε δύο σημεία του σκεπτικού πίσω από αυτή τη διαδικασία: τον αλγόριθμο σχεδιασμού της και τη διαφάνειά αυτού.

- Ο σχεδιασμός της περιγεγραμμένης σφαίρας βασίζεται σε μία πολυγωνική προσέγγιση (για το μέγιστο κύκλο) που πραγματοποιείται όπως περιγράφεται στο Παράρτημα. Σημειώνεται ότι στην τελική κατασκευή δεν διακρίνεται κάπου το κέντρο του παραπάνω κύκλου, δεν αποτελεί ένα ευδιάκριτο σημείο, και σχεδιαστικά αυτό θεωρούμε ότι συντελεί στην γέννηση της «ψευδαίσθησης» μίας άδειας σφαίρας που αποτελεί το βασικό στοιχείο του μικρόκοσμού μας, δηλαδή το τρελομπαλάκι.

  Έτσι ολοκληρώνεται η κατασκευή του μέγιστου κύκλου. Στη συνέχεια η οντότητα περιστρέφεται στον κατακόρυφο άξονα της αριστερά κατά 30^o και πραγματοποιεί άλλη μία κατασκευή μέγιστου κύκλου επαναλαμβάνοντας την ίδια αλληλουχία εντολών. Συνολικά κατασκευάζονται 12 μέγιστοι κύκλοι όπως περιγράψαμε, γεννώντας την σφαίρα μεταβλητής ακτίνας μέσα από αλλεπάλληλες στροφές του μέγιστου κύκλου. Ο αλγόριθμος που περιγράφεται παραπάνω δίνεται έτοιμος στα παιδιά και παρουσιάζεται στο Παράρτημα της παρούσας εργασίας. Τα στιγμιότυπα αποτυπώνουν την περιγραφή που δίνεται παραπάνω για το σκεπτικό πίσω από τη δημιουργία του.



Εικόνα 7: Στιγμιότυπα περιγραφής του μικρόκοσμου

- Ας σημειώσουμε τώρα, γιατί έγινε η επιλογή να δοθεί απολύτως διαφανής η διαδικασία στα παιδιά, και όχι ως μία blackbox κατασκευή. Με τον όρο «blackbox» στην Επιστήμη των Υπολογιστών και στο χώρο της ανάπτυξης λογισμικού, περιγράφεται ο σχεδιασμός που αποκρύπτει το πρόγραμμα και το οποίο δεν μας επιτρέπει να κατανοήσουμε τη λειτουργία του, αφού δεν έχουμε πρόσβαση στις εντολές του. Οι πληροφορίες υλοποίησης κρύβονται από το χρήστη και του παρέχεται μόνο η τελική λειτουργία του προγράμματος. Αντιθέτως, ένας διαφανής κώδικας είναι ορατός και συνεπώς, με προσπάθεια και νοητική επεξεργασία μπορούμε να τον κατανοήσουμε ή/και να τον αλλάξουμε. Η επιλογή της πλήρους διαφάνειας για τη δοσμένη διαδικασία που κατασκευάζει το εξωτερικό περίβλημα της τρελόμπαλας, αντανακλά το σκεπτικό ότι αν τα παιδιά θελήσουν -ή χρειαστούν για κάποιο λόγο- να εξετάσουν προσεκτικά τη διαδικασία και τη λειτουργικότητά της, καλό θα ήταν αυτή να είναι «ανοιχτή». Τα προσκαλεί και ταυτόχρονα τα προκαλεί για μία ακόμα ενδεχομένως, εμπειρία πάνω στο Reverse Engineering, με την οποία αν επιλέξουν να εμπλακούν θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να παρακολουθήσουμε τι νοήματα θα κατασκευάσουν και θα ρίξει ακόμα περισσότερο φως στο πώς σκέφτονται και επιχειρηματολογούν πάνω στα νοήματα που κατασκευάζουν.

Στη συνέχεια η διδακτική πορεία αρθρώνεται σε τρείς φάσεις, με την επιμέρους θεματολογία που παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

<table>
<tr><th rowspan="2">ΦΑΣΕΙΣ</th><th rowspan="2">Α΄</th><th>Β΄</th><th>Γ΄ ~ Επέκταση</th></tr>
<tr><th colspan="2">ελεύθερη διερεύνηση</th></tr>
<tr><td>ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΘΕΜΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ</td><td>επεξεργασία δεδομένων διαδικασιών και εκσφαλμάτωση κώδικα</td><td>εγγραφή ενός δισδιάστατου αντικειμένου σε σφαίρα</td><td>εγγραφή ενός τρισδιάστατου αντικειμένου σε σφαίρα</td></tr>
</table>

Εικόνα 8: Πίνακας διάρθρωσης των δραστηριοτήτων

Α΄Φάση:

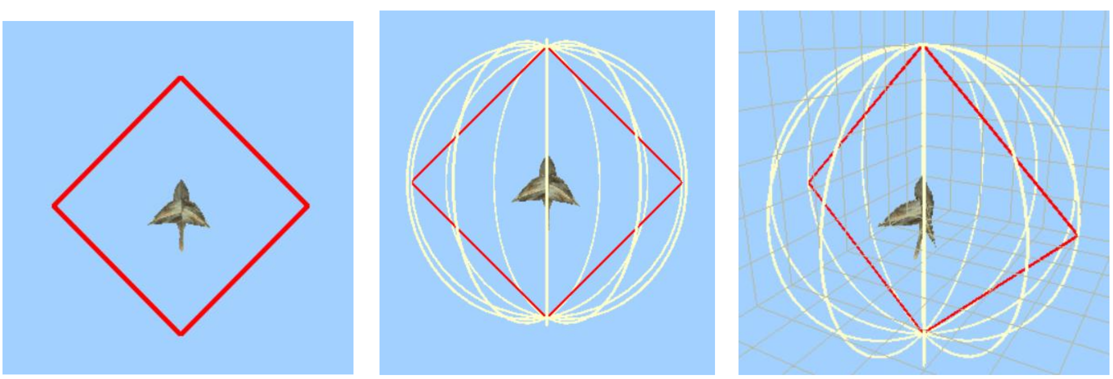
Σε αυτή τη φάση, στα παιδιά δίνεται το εξής πλαίσιο: πρόκειται να βοηθήσουν/συμβουλεύσουν μία ομάδα παιδιών που πρωτύτερα επιχείρησε να καταπιαστεί με το ίδιο πρόβλημα. Αυτή η φανταστική συνθήκη αντλεί την έμπνευσή της από το παιχνίδι ρόλων που φέρνει στο προσκήνιο μοιραία την ανάγκη να υιοθετηθεί μία ενεργητική στάση με κάποιο αντικειμενικό στόχο για τα παιδιά.

1. Στην πρώτη δραστηριότητα αυτής της φάσης δίνονται δύο κώδικες. Ο πρώτος αφορά την εγγραφή τετραγώνου σε κύκλο ακτίνας 50 και ο δεύτερος, ο οποίος είναι ενσφάλματος, αφορά την εγγραφή ισοπλεύρου σε κύκλο ακτίνας 50. Ο σκοπός είναι να κατανοήσουν τη λειτουργικότητά τους, να εντοπίσουν το σφάλμα στο δεύτερο κώδικα και να αιτιολογήσουν/αποδείξουν ποιο είναι το πρόβλημα του, προτού επιχειρήσουν να το διορθώσουν ώστε να ικανοποιεί τη συνθήκη της εγγραψιμότητας. Για να γίνει αυτό πρέπει να στοχαστούν πάνω στο ζήτημα της εγγραψιμότητας τετραγώνου και ισοπλεύρου σε κύκλο, και ίσως να διαμορφώσουν κριτήρια εγγραψιμότητας για τα σχήματα αυτά. Επί του συγκεκριμένου:

Το δοσμένο τετράγωνο

Η συγκεκριμένη ακολουθία εντολών υλοποιεί τέσσερις επαναλήψεις, η καθεμία εκ των οποίων αντιστοιχεί στο κάθε ένα από τα τέσσερα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα στα οποία οι δύο διαγώνιοι χωρίζουν το τετράγωνο. Η μονάδα επανάληψης λοιπόν, είναι το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές 50. Κάθε τέτοια μονάδα, κατασκευάζεται με μία μετατόπιση προς τα πίσω κατά 50, μία στροφή δεξιά κατά 45^o και μία πλάγια μετατόπιση, κατά την υποτείνουσα του ορθογωνίου ισοσκελούς με κάθετες πλευρές 50. Εν συνεχεία, πραγματοποιείται άλλη μία στροφή, και μία προς τα πίσω μετατόπιση κατά 50, και επαναπροσδιορισμός του προσανατολισμού της οντότητας, για να ξεκινήσει την επόμενη μονάδα επανάληψης. Ουσιαστικά, δημιουργείται ένα τετράγωνο εγγράψιμο σε κύκλο ακτίνας 50. Με κατάλληλες εντολές αποκρύπτεται το ίχνος όταν κατασκευάζονται οι διαγώνιοι, οπότε αυτό που προκύπτει φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Αποτελεί ζητούμενο, λοιπόν, αφού τα παιδιά εκτελέσουν τον κώδικα να στοχαστούν πάνω σε αυτόν και να «ανακαλύψουν» πώς στην πραγματικότητα δουλεύει [**E**xplore, Reverse Engineering]. Η πλευρά του τετραγώνου σχεδιάζεται με μήκος $\sqrt{5000}$. Αναμένεται να τη νοηματοδοτήσουν ως την υποτείνουσα του ορθογωνίου ισοσκελούς κάθετης 50, οπότε να αρχίσουν να προσανατολίζουν τη σκέψη τους προς το Π.Θ., πράγμα που, ίσως, θα τους είναι εμπόδιο μετέπειτα, στο να εκφράσουν τις κατάλληλες σχέσεις στο ενσφάλματο μοντέλο που ακολουθεί. Σκόπιμα λοιπόν, η αρχική κατασκευή είναι το εγγεγραμμένο τετράγωνο, ώστε πίσω από την, πιθανότατα, αναμενόμενη διασύνδεση που θα κάνουν τα παιδιά με το Π. Θ. να «αποκρυφτεί» η τριγωνομετρική φύση της σχέσης που έχουν οι πλευρές των εγγεγραμμένων πολυγώνων με την ακτίνα του κύκλου. Αυτή η τεχνηέντως προκαλούμενη σύγχυση, θα αναδείξει ακόμα πιο έντονα, αμέσως μετά, τις κατάλληλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις που διέπουν το πρόβλημα, από τα ίδια τα παιδιά [εφ’όσον τις χρειαστούν, τις αναζητήσουν και τις εκφράσουν συνειδητά].

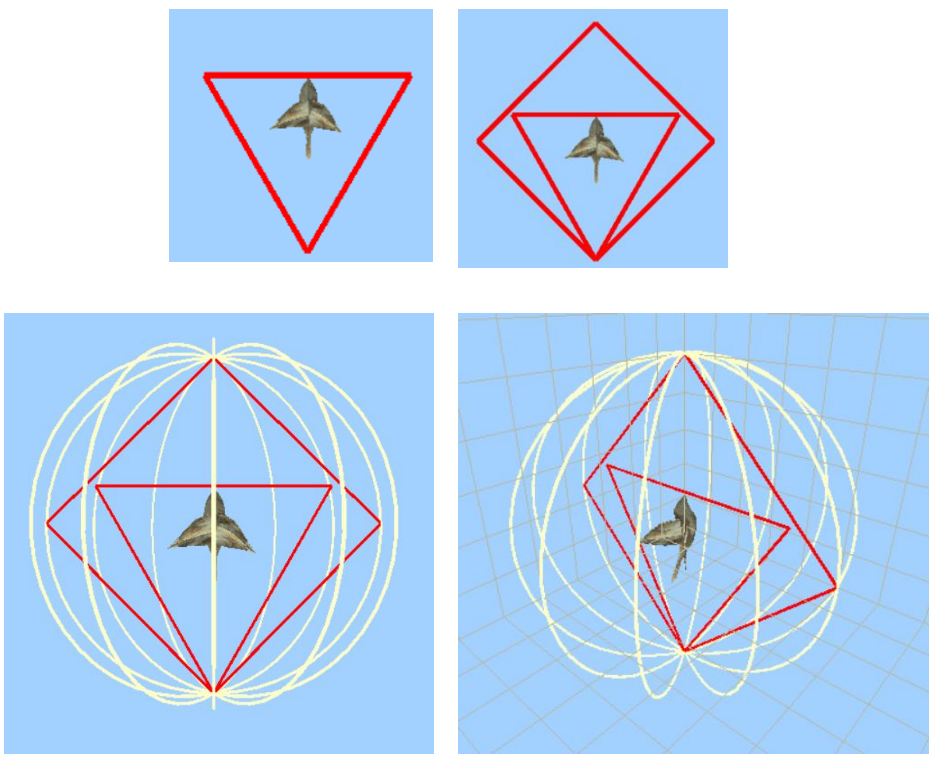


Εικόνα 9: Το δοσμένο (εγγράψιμο) τετράγωνο

Το πρώτο (bugged) ισόπλευρο

Τα παιδιά επεξεργάζονται τον δοσμένο, ενσφάλματο, κώδικα για την κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου εγγράψιμου στον ίδιο κύκλο. Ο κώδικας αυτός αποτελεί μία τροποποίηση του αρχικού κώδικα (δηλαδή του τετραγώνου), η οποία αφορά μόνο τη στρέψη της οντότητας. Το μόνο δηλαδή που έχει αλλαχθεί είναι οι στρέψεις στη μονάδα επανάληψης. Η συμμεταβολή της με την πλευρά αγνοείται πλήρως, οπότε το μοντέλο που θα προκύψει θα είναι λανθασμένο.

Δεν ζητείται από τα παιδιά να «εκσφαλματώσουν» το μοντέλο, αλλά να στοχαστούν πάνω σε αυτό κριτικά, και να αποφασίσουν εάν συμφωνούν με τη διαδικασία ή όχι [**E**xplore]. Όσα θεωρούν ότι είναι σωστό το μοντέλο με βάση τις προκαθορισμένες ιδιότητες που περιγράφονται ότι πρέπει να έχει, θα πρέπει να στηρίξουν με επιχειρήματα και αιτιολόγηση τη συμφωνία τους [**E**xplain]. Όσα διαφωνούν, θα χρειαστεί να δημιουργήσουν κάτι νέο [**E**xplore] . Το σημείο αυτό σχεδιάστηκε θέλοντας να θέσει τα παιδιά ενώπιον μιας λανθασμένης σχέσης. Φαινομενικά, ο κώδικας ένα ισόπλευρο τρίγωνο φτιάχνει αλλά, τα απαιτούμενα δεν ισχύουν! Δεν είναι εγγράψιμο στον ίδιο κύκλο, συνεπώς θα πρέπει να διερευνηθεί, να βρεθεί και να υποστηριχθεί μια άλλη, κατάλληλη σχέση! Σε αυτό το σημείο της δραστηριότητας, δηλαδή, το απόλυτο ενδιαφέρον στρέφεται στη διερεύνηση, τη δραστηριότητα και την επιχειρηματολογία των παιδιών.



Εικόνα 10: Το δοσμένο ενσφάλματο [bugged], μη εγγράψιμο ισόπλευρο τρίγωνο

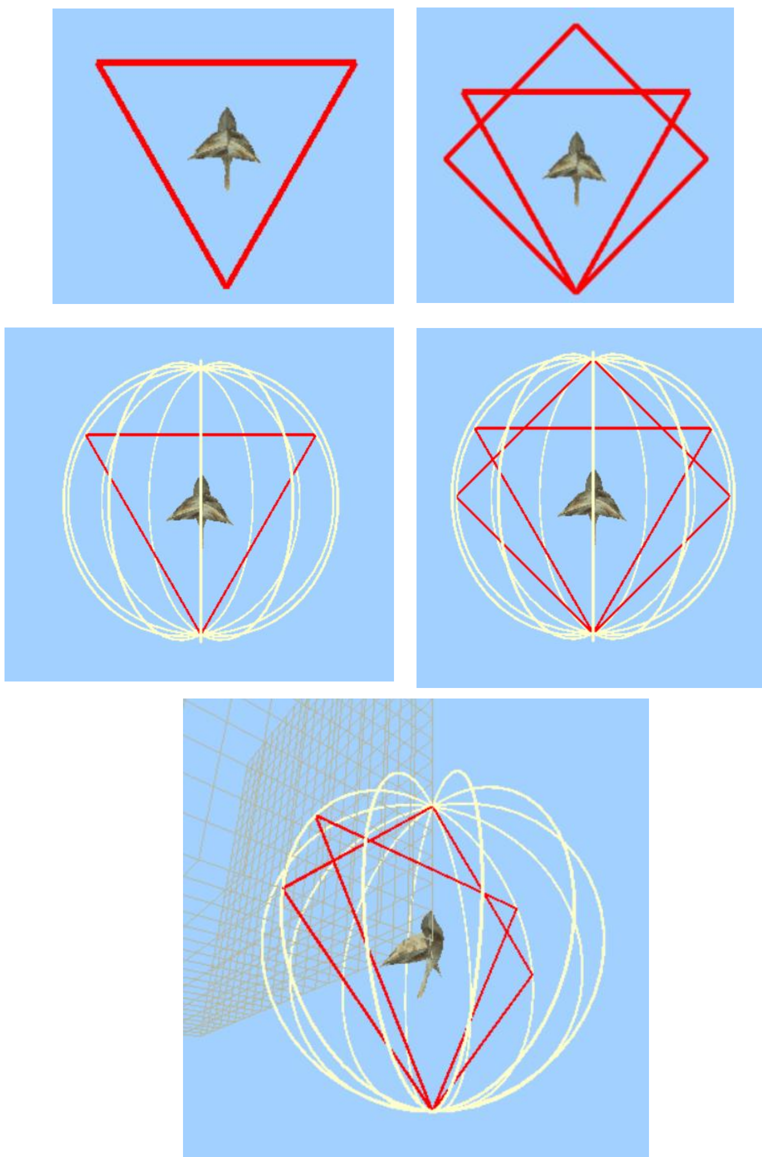
- Ως προς τη διερεύνηση [**E**xplore]: Ελέγχοντας νοερά ή εκτελώντας τον κώδικα, οι μαθητές και οι μαθήτριες θα αρχίσουν να αναζητούν σχέσεις πλευράς-ακτίνας αλλά και, ίσως, μία διασύνδεση ανάμεσα στους δύο κώδικες, και συνεπώς, μία διασύνδεση ανάμεσα στο τετράγωνο και το ισόπλευρο. Το μοντέλο που δίνεται, επιβεβαιώνει πως, μάλλον, η κατάλληλη σχέση δεν έρχεται από το Π. Θ. Σε αυτό το σημείο της δραστηριότητας, η μαθηματική σκέψη έρχεται στο προσκήνιο, καθώς η αναζήτηση συσχετίσεων, καθώς και η ανακάλυψη της συμμεταβολής αποτελεί κομβικό ζητούμενο εδώ.
- Ως προς τη δραστηριότητα: Ακόμα και στην περίπτωση που κάποιο παιδί απαντήσει πως ο κώδικας λειτουργεί και πως συμφωνεί, εκτελώντας τον, θα διαπιστώσει πως δεν αποτελεί λύση του προβλήματος. Στην προσπάθεια εκσφαλμάτωσης του μοντέλου, άραγε, τι «μαστόρεμα» θα προκύψει; Ποιες μαθηματικές έννοιες και ιδιότητες θα νοηματοδοτηθούν και θα συνθέσουν το σκεπτικό που θα αναπτύξουν; [**E**xplore, **E**xplain]. Δεν είναι διόλου απίθανο να προταθεί ένα επίσης λανθασμένο μοντέλο εγγεγραμμένου ισόπλευρου, ίσως αν αναζητήσουν μία γραμμική σχέση πλευράς-ακτίνας, αλλά το άμεσο feedback του εργαλείου θα τους διαψεύσει, οπότε η δραστηριότητα του debugging θα συνεχιστεί.
- Ως προς την επιχειρηματολογία: Η εργασία εντός κοινοτήτων πρακτικής, θα φέρει τα παιδιά αντιμέτωπα με μία κοινή εμπειρία, και ταυτόχρονα με την ανάγκη να δομήσουν ένα κοινό νόημα και να το επικοινωνήσουν [**E**xchange]. Κατά τους Yackel & Cobb (1996), όπως είδαμε, οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες [sociomathematical norms] επηρεάζουν καθοριστικά την ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας, της γλώσσας και της καλλιέργειας της σκέψης. Η εκσφαλμάτωση δεν θα γίνει από το κάθε παιδί ξεχωριστά, μα μέσα στην ομάδα, αποτελεί δηλαδή μία κοινοτική εργασία, οπότε αποτελεί κεντρικό ζητούμενο η συνεργασία, ο διάλογος και η αιτιολόγηση.

Από πολλές απόψεις, τα παιδιά θα ήταν πολύ γόνιμο να «σκοντάψουν» πάνω σε αυτή την ιδιαίτερη συσχέτιση πλευράς-ακτίνας, που όπως σημειώθηκε παραπάνω, αποκρύπτεται στην περίπτωση του τετραγώνου, εξ ου και επιλέχθηκε ως πρώτο σχήμα, για να εντείνει, να καθυστερήσει και να δυσκολέψει την τριγωνομετρική σχέση που μένει να διατυπωθεί!

Μία ορθή -ενδεικτική- απόπειρα θα ήταν αυτή που περιγράφεται στον παρακάτω κώδικα. Παρατηρούμε ότι, εδώ δίνεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο, εγγράψιμο σε κύκλο πάλι ακτίνας 50, όπως ακριβώς ήταν και το τετράγωνο. Η συγκεκριμένη ακολουθία εντολών υλοποιεί τρεις επαναλήψεις, η καθεμία εκ των οποίων αντιστοιχεί στο κάθε ένα από τα τρία ισοσκελή τρίγωνα στα οποία χωρίζεται το ισόπλευρο από τις ακτίνες του κύκλου (κέντρο- κορυφές τριγώνου).

```
ΓΙΑ τρίγωνο2
επανάλαβε 3[σπ
π 50
δ 30
σκ
μ 50*ρίζα(3)
δ 30
σπ
π 50
δ 180]
ΤΕΛΟΣ
```

Η μονάδα επανάληψης λοιπόν, είναι ισοσκελές τρίγωνο με ίσες πλευρές 50. Κάθε τέτοια μονάδα, κατασκευάζεται με μία μετατόπιση προς τα πίσω κατά 50, μία στροφή δεξιά κατά 30^{o} και μία πλάγια μετατόπιση, συνημειτονοειδούς φύσης. Ενδιαφέρον αποτελεί το πώς θα ανακληθούν, εφαρμοστούν και χρησιμοποιηθούν, οι ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου (ακτίνας 50 και προσκείμενων στη βάση 30^{o}). Σε κάθε μονάδα επανάληψης, η βάση του ισοσκελούς μπορεί να αποδοθεί όπως στον παραπάνω κώδικα, ως $50\sqrt{3}$, καθώς το απόστημα (ύψος) είναι και διάμεσος. Εν συνεχεία, πραγματοποιείται άλλη μία στροφή και μία προς τα πίσω μετατόπιση κατά 50, και επαναπροσδιορισμός του προσανατολισμού της οντότητας, για να ξεκινήσει την επόμενη μονάδα επανάληψης. Ουσιαστικά, δημιουργείται ένα ισόπλευρο τρίγωνο εγγράψιμο σε κύκλο ακτίνας 50. Με κατάλληλες εντολές αποκρύπτεται το ίχνος όταν κατασκευάζονται οι ακτίνες, οπότε αυτό που προκύπτει φαίνεται στο πρώτο σχήμα. Στο δεύτερο, φαίνονται μαζί το ισόπλευρο και το τετράγωνο, εγγράψιμο σε κύκλο ακτίνας 50.



Εικόνα 11: Το ισόπλευρο και το τετράγωνο εγγράψιμα στην ίδια σφαίρα

Στον αρχικό σχεδιασμό, με το πέρας της εκσφαλμάτωσης του κώδικα του ισοπλεύρου, ακολουθούσαν οι δραστηριότητες 2 και 3, τις οποίες οι αναγνώστες μπορούν να αναζητήσουν στο Παράρτημα, όπου παρατίθεται το αρχικό Φύλλο Εργασίας. Κατά την εφαρμογή όμως της έρευνας, ο επανασχεδιασμός που συντελέστηκε ανάμεσα στις δύο διδακτικές παρεμβάσεις, περιελάμβανε κρίσεις και αποφάσεις που τελικά τις άφησαν εκτός. Θα μπορούσαμε συνοπτικά εδώ να τις περιγράψουμε καθώς και να σημειώσουμε τους λόγους για τους οποίους τελικά δεν εντάχθηκαν στην τελική μορφή / υλοποίηση του σχεδιασμού.

Η 2. ζητούσε από τα παιδιά την τροποποίηση/γενίκευση του παραπάνω κώδικα (για το ισόπλευρο) ώστε να κατασκευάζει ισόπλευρο τρίγωνο εγγράψιμο σε κύκλο μεταβλητής ακτίνας, με κατάλληλη εισαγωγή μεταβλητής στο πρόβλημα. Για να ξεκινήσει η υλοποίηση αυτού του στόχου, καλό θα ήταν τα παιδιά, πρώτα, να έχουν εξοικειωθεί με τον κώδικα και να έχουν επιχειρήσει να τον τροποποιήσουν ελεύθερα, να λειτουργεί για διάφορες δεδομένες ακτίνες του κύκλου στον οποίο θέλουν να εγγράψουν το τετράγωνο και το ισόπλευρο. Με διαδοχικές αλλαγές στην δεδομένη-αρχική ακτίνα, το «μαστόρεμα» που αντιστοιχεί σε κάθε επιλογή αρχικής ακτίνας θα τους οδηγήσει κάποια στιγμή να αναζητήσουν μία γενικότερη, πιο αφηρημένη φόρμουλα που θα έδινε την κατάλληλη κατασκευή για κάθε δεδομένη ακτίνα, όποια και αν είναι αυτή! Τα παιδιά, μόνα τους, θα έπρεπε να αφεθούν να αποκτήσουν τριβή με συγκεκριμένες τιμές δεδομένης ακτίνας, που τα ίδια θέτουν, και να αναδυθεί η κατάλληλη σχέση συμμεταβολής της με την πλευρά του ισοπλεύρου. Σε αυτό ακριβώς το σημείο της δραστηριότητας, δίνεται μία ευκαιρία, σχεδιαστικά, τα παιδιά να οργανώσουν και να αρθρώσουν μία γενικευμένη σκέψη: να «απαλλαγούν» από την «υποχρεωτική παρουσία» ενός δεδομένου αριθμού που εκφράζει την «ακτίνα του κύκλου στον οποίο η άσκηση θέλει να εγγράψουμε το τετράγωνο και το ισόπλευρο», αλλά να εισάγουν με δική τους πρωτοβουλία την ιδέα ενός γενικευμένου αριθμού που θα εκφράζει κάθε στιγμή ίσως μία διαφορετική ακτίνα, μία ακτίνα που μπορεί να αλλάζει, και να εξετάσουν πώς μπορούν να τροποποιήσουν τον κώδικα ώστε να δουλεύει για κάθε τέτοια τιμή. Ο χειρισμός του δυναμικού μοντέλου φαίνεται να προκαλεί και να αναδεικνεύει την ανάγκη εισαγωγής και χρήσης της μεταβλητής στο ρόλο γενικευμένου αριθμού!
Κρίθηκε όμως ότι θα απαιτούσε χρόνο που δεν είχαμε στη διάθεσή μας και πως αντ' αυτού, σε περίπτωση που ολοκληρωνόταν η εκσφαλμάτωση του ισοπλεύρου σχετικά γρήγορα ή εύκολα, θα μπορούσε να γίνει μία συζήτηση σχετικά με το θέμα, με λόγια ή σχήμα -και όχι την απαίτηση για παραγωγή κώδικα σε αυτή την περίπτωση. Κυρίως για να εντοπίσουμε πώς σκέφτηκαν και το πώς θα επικοινωνήσουν τις ιδέες τους.

Η 3. αφορούσε την εκ νέου τροποποίηση του κώδικα ώστε να κατασκευάζει κανονικά πολύγωνα εγγράψιμα σε κύκλο μεταβλητής ακτίνας, για μη προκαθορισμένο πλήθος πλευρών. Στον αρχικό σχεδιασμό, η δραστηριότητα αυτή κατείχε ιδιαίτερης σημασίας θέση καθώς η εισαγωγή της επιχειρούσε να δώσει μία ισχυρή εμπειρία γύρω από το computational abstraction, καθώς η δημιουργία μιας παραμετρικής διαδικασίας μπορεί να θεωρηθεί ως τέτοια [Kynigos, C., & Grizioti, M. (2018)]. Τα παιδιά θα χρειάζονταν να εισάγουν μια νέα μεταβλητή για το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου, να διερευνήσουν πώς αυτή η νέα μεταβλητή οδηγεί στην ανάγκη για το κατάλληλο, αντίστοιχο «μαστόρεμα» του μοντέλου και να προσαρμόσουν κατάλληλα τον κώδικα προς τη ζητούμενη, γενικευμένη του εκδοχή. Μπορεί να μην αναμέναμε μεγάλη δυσκολία στο να «έρθει» η ιδέα για τη νέα μεταβλητή, καθώς τα παιδιά ήδη θα έφεραν αντίστοιχη εμπειρία από την προηγούμενη κατασκευή της συγκεκριμένης δραστηριότητας, αλλά η παραγωγή κατάλληλου κώδικα θα ήταν απαιτητική και χρονοβόρα.

Στην πρακτική εφαρμογή αυτής της ιδέας λοιπόν, κρίθηκε ότι δεν επαρκεί ο χρόνος που προβλέφθηκε αρχικά και ίσως θα ήταν καλύτερο να το αφήσουμε εκτός, διότι μεγαλύτερη έμφαση θα άξιζε να δοθεί στην επόμενη -και μεθεπόμενη- φάση, δηλαδή την ελεύθερη διερεύνηση εγγραψιμότητας δισδιάστατων-και μετέπειτα τρισδιάστατων-οντοτήτων μέσα στο τρελομπαλάκι (ελέυθερη επιλογή κάθε ομάδας).

Β΄Φάση:

Στη δεύτερη φάση του σχεδιασμού, τα παιδιά απομακρύνονται από τη συνθήκη του να επεξεργάζονται και να διορθώνουν έτοιμους κώδικες και τους ζητείται να παράξουν ένα δικό τους μοντέλο. Επί της ουσίας τους ζητείται να εγγράψουν ένα δισδιάστατο αντικείμενο μέσα σε σφαίρα μεταβλητής ακτίνας.

Η γλώσσα που επιλέγεται και εδώ για την ανάγκη της εκφώνησης στερείται μαθηματικής τυπικότητας και ορολογίας για δύο, εδώ, λόγους: αφενός για να διατηρήσουμε τα διερευνητικά ενδεχόμενα ανοιχτά και ανεξάρτητα από μαθηματικές έννοιες και πεδία, και αφ' ετέρου για να μην προσανατολίσουμε τη σκέψη και τη δράση τους σε κάτι που ζητείται ή τίθεται έξωθεν.

Θα μπορούσαν, όπως σημειώσαμε παραπάνω, να ασχοληθούν με οποιαδήποτε φιγούρα της επιλογής τους καθώς, αυτό που μας ενδιαφέρει πρωτίστως είναι να τους αφορά, να τους ενδιαφέρει και να τους γεννά την ανάγκη και την πρωτοβουλία, να αναλάβουν δράση και να παράγουν λόγο σχετικά με τη δυνατότητα εγγραφής, τα κριτήρια που πρέπει να διαμορφωθούν και να ικανοποιηθούν για να επιτευχθεί ο στόχος. Τα παιδιά, σε αυτό το σημείο του σχεδιασμού είναι ελεύθερα, για δικό τους λογαριασμό και με δική τους πρωτοβουλία [agency] να επιλέξουν κάτι που έχει προσωπικό νόημα για αυτά και, το ερευνητικό ενδιαφέρον στρέφεται στο να παρατηρήσουμε και να καταγράψουμε τις δράσεις, τις αιτιολογήσεις και τα νοήματα που θα κατασκευάσουν. Το σκεπτικό αυτό φιλοδοξεί να δημιουργήσει συνθήκες για ένα ελεύθερο διερευνητικό παιχνίδι, με τους όρους του Papert.

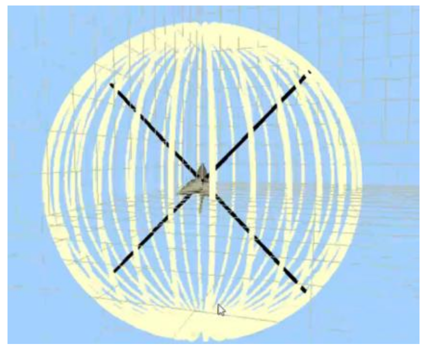
Ακριβώς επειδή το πλαίσιο του προβλήματος διευρύνεται, θα αρκεστούμε μόνο στο να καταγράψουμε τα γενικότερα ζητούμενα αυτής της φάσης καθώς δεν μπορούμε να προβλέψουμε τι θα επιχειρήσει να κατασκευάσει κάθε ομάδα. Μπορούμε λοιπόν να σημειώσεις τα εξής στοιχεία που ζητούμε από τους συμμετέχοντες σε αυτή τα φάση:

- να λειτουργήσουν αρμονικά και αποτελεσματικά στα πλαίσια της κοινότητας πρακτικής ώστε να αποφασίσουν τι ακριβώς μοντέλο θα κατασκευάσουν. Ο διάλογος και η αλληλεπίδραση των παιδιών γύρω από την επιλογή του θέματος αναμένονται να είναι, όπως είδαμε στη θεωρητική μας πλαισίωση, κομβικοί παράγοντες για αυτή την έρευνα, για πολλούς λόγους:
    - θα ορίσουν το θέμα-στόχο της εκάστοτε κοινότητας πρακτικής,
    - αντανακλούν και -συνάμα- διαμορφώνουν τις κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες που συντρέχουν,
    - καθορίζοντας το πλαίσιο της συζήτησης και το κλίμα που θα επικρατήσει κατά την πορεία της διερεύνησης , κατά κάποιον τρόπο πρόκειται να επηρεάσουν τα νοήματα, τις αιτιολογήσεις και τις αποδείξεις που θα προκύψουν
- να διερευνήσουν ίσως άτυπα στην αρχή το ζητούμενο της εγγραψιμότητας μέσα από δοκιμές και μαστόρεμα με το εργαλείο. Συνεπικουρούμενα ίσως από το κλασσικό περιβάλλον χαρτί - μολύβι, αναμένεται να αρχίσουν να συζητούν πάνω σε κάποιους κανόνες που σιγά σιγά θα πρέπει να συγκεκριμενοποιηθούν και να λάβουν ίσως μια πιο τυπική μορφή
- να είναι έτοιμα να εξηγήσουν ή να αιτιολογήσουν την επιβεβαίωση ή μη των δοκιμών και των εικασιών τους από το ψηφιακό εργαλείο. Αυτό απαιτεί την ανάπτυξη λεξιλογίου κατάλληλου και τα παιδιά έρχονται αντιμέτωπα με την ανάγκη να διακρίνουν και να εκφράσουν τα μαθηματικά που χρησιμοποιούν
- Τίθεται, στη συνέχεια, στα παιδιά το ερώτημα εάν, αλλάζοντας το μέγεθος ή τις αναλογίες της φιγούρας που προσπάθησαν να εγγράψουν, αυτή συνεχίζει να μπορεί να εφαρμόζει πλήρως στο εσωτερικό της τρελόμπαλας. Το ερώτημα αυτό σκοπεύει να γεννήσει μία συζήτηση μεταξύ των μελών της κάθε ομάδας για να ισχυροποιηθούν ακόμα περισσότερο τα νοήματα που δομήθηκαν ως εδώ μέσα από την ελεύθερη διερεύνηση
- Το ζητούμενο της εγγραψιμότητας φαίνεται να διανοίγει μία πλατφόρμα και θα είχε μεγάλο ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πώς τα ίδια τα παιδιά θα κινηθούν σε αυτήν. Να εξερευνήσουμε, με άλλα λόγια πώς το αντιλαμβάνονται, πώς το νοηματοδοτούν και πώς θα επιχειρήσουν να το πετύχουν. Για παράδειγμα, γεννώνται ερωτήματα όπως:
    - θα επιχειρήσουν να εγγράψουν τη φιγούρα τους ακόμα και όχι στο μέγιστο κύκλο της σφαίρας;

- η εγγραψιμότητα σχετίζεται με τον προσανατολισμό; προσλαμβάνεται και υλοποιείται από τα παιδιά ως μία χωρική ή ως μία γεωμετρική ιδιότητα;

Ενδεικτικά, θα μπορούσαμε να φανταστούμε τα παιδιά να επιλέξουν κάτι απλό και οικείο, όπως για παράδειγμα ένα γράμμα της ελληνικής ή λατινικής αλφαβήτου, όπως το γράμμα Χ που παρουσιάζεται εδώ.

Ακόμα και αυτή η φαινομενικά «απλή» κατασκευή είναι πλούσια και -ως προς τα ζητούμενα που συζητήθηκαν αμέσως παραπάνω- αρκετά απαιτητική. Δεν μπορεί παρά να αναμένεται με ανυπομονησία η επιλογή και η προσπάθεια της κάθε ομάδας. Η παρουσίαση στο κεφάλαιο των Αποτελεσμάτων επιβεβαιώνει, με μικρές «εκπλήξεις», την παραπάνω πρόταση.



Εικόνα 2: Παράδειγμα αναμενόμενου παραγόμενου μοντέλου με το γράμμα Χ

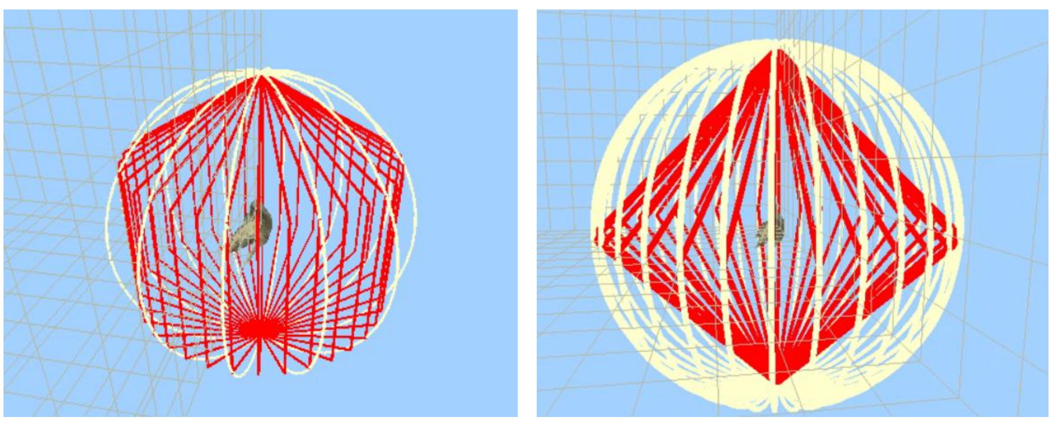
<u>Γ΄Φάση ~ Επέκταση:</u>

Στην τρίτη και τελευταία φάση του σχεδιασμού, που έχει χαρακτήρα επέκτασης του βασικού κορμού της έρευνας, κεντρικό ζητούμενο αποτελεί η εγγραφή ενός τρισδιάστατου αντικειμένου σε σφαίρα μεταβλητής ακτίνας, η επιλογή του οποίου και πάλι επαφίεται στην ελεύθερη επιλογή της κάθε ομάδας. Τα ζητούμενα αυτής της φάσης είναι ανάλογα με αυτά της Β΄ Φάσης, καθώς ο σχεδιασμός δεν μπορεί να προβλέψει σε καμία περίπτωση πώς τα παιδιά θα σκεφτούν σε τρισδιάστατο πλαίσιο. Ας σημειώσουμε ενδεικτικά τα εξής:

- να σταθεροποιήσουν τις σκέψεις και τα νοήματα που ως εδώ δομήθηκαν
- να επιχειρήσουν να τα επεκτείνουν και στην τρίτη διάσταση
- να εκφράσουν πώς αντιλαμβάνονται την εγγραψιμότητα στο νέο αυτό πλαίσιο
- να εξηγήσουν αν τα κριτήρια εγγραψιμότητας που διαμόρφωσαν στην προηγούμενη φάση αρκούν, αν χρειάζονται αλλαγή ή τροποποίηση

Υπ’ όψιν του σχεδιασμού λήφθηκε και κρίνεται αναγκαίο να σημειωθεί εδώ, πως αυτή η φάση ίσως να μην υλοποιηθεί από όλες τις ομάδες για δύο κυρίως λόγους: αφ΄ενός γιατί ίσως η Β΄ Φάση απαιτήσει πολλή ώρα και προσοχή για να ολοκληρωθεί, και αφ΄ετέρου γιατί η διανοητική εργασία τρισδιάστατα, δεν είναι κάτι το οποίο τα παιδιά έχουν εξοικειωθεί να κάνουν σε μαθηματικό πλαίσιο, στη σχολική τους τουλάχιστον εμπειρία, οπότε αποτελεί μία νέα πρόκληση να μεταφέρουν όσα μπορούν να νοηματοδοτήσουν στο προσκήνιο και να τα εκφράσουν με μία γλώσσα μαθηματική ή αργότερα να τα αποδώσουν εκφραστικά ως εντολές του προγράμματος.

Μία ενδεχόμενη σκέψη που θα μπορούσε να προβλεφθεί, στα πλαίσια του παρόντος σχεδιασμού, είναι τα παιδιά να δοκιμάσουν να στρέψουν τη δισδιάστατη οντότητα που ενέγραψαν στη σφαίρα στη Β΄ Φάση και να παράγουν πολλαπλά, κατά στροφή αντίγραφά της, δημιουργώντας μία τρισδιάστατη μορφή όπως οι παρακάτω.



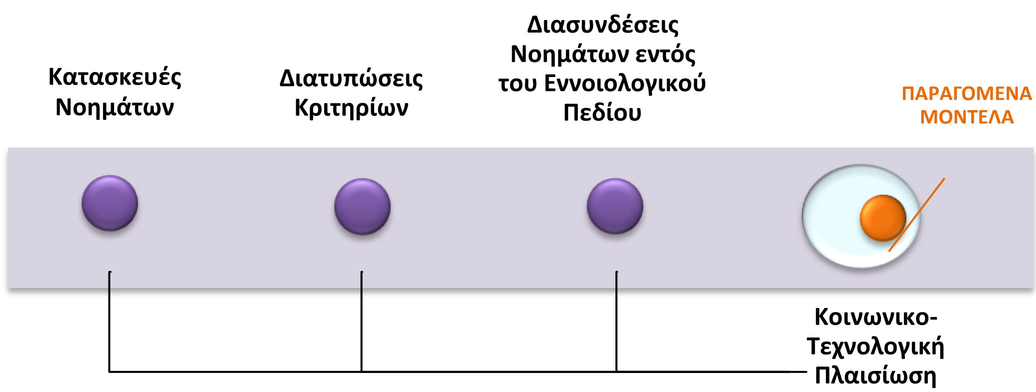
Εικόνα 13: Παραδείγματα αναμενόμενων παραγόμενων μοντέλων με τρισδιάστατα αντικείμενα

Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, αναλύονται τα αποτελέσματα από τη συλλογή και την ανάλυση των δεδομένων της παρούσας έρευνας. Παρουσιάζονται μέσα από την ανάλυση κρίσιμων συμβάντων, τα οποία επιλέχθηκαν αφότου απομαγνητοφωνήθηκαν οι ηχογραφήσεις των παρεμβάσεων, μελετήθηκαν οι σημειώσεις των παιδιών και τα βίντεο καταγραφής οθόνης. Η κατηγοριοποίησή τους, στη συνέχεια, έγινε με τους ακόλουθους άξονες:

- **Κατασκευές Νοημάτων** που αφορούν τις μαθηματικές ιδιότητες και έννοιες που εντοπίζονται στα μοντέλα. Σε αυτό τον άξονα συγκεντρώνονται αποτελέσματα κυρίως από την Α΄ Φάση, που προέκυψαν μέσα από την προσπάθεια των παιδιών να επεξεργαστούν και να διορθώσουν τις δοσμένες διαδικασίες
- **Διατυπώσεις Κριτηρίων** που τα παιδιά επιχειρούν, κατά την προσπάθειά τους να διερευνήσουν την εγγραψιμότητα [ή όχι] σε κύκλο και σφαίρα, στα πλαίσια της προβληματικής κατάστασης που αντιμετώπισαν.
- **Διασυνδέσεις Νοημάτων εντός του Εννοιολογικού Πεδίου,** που πραγματοποιήθηκαν καθ' όλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων, και φάνηκε ότι προέκυψαν ως αναγκαίες για την αιτιολόγηση των επιχειρημάτων ή/και την παραγωγή των μοντέλων
- **Κοινωνικο-Τεχνολογική Πλαισίωση:** σε αυτόν τον άξονα συγκεντρώνονται τα στοιχεία των αποτελεσμάτων που καταδεικνύουν την καθοριστική επίδραση του ψηφιακού εργαλείου και την μεγάλη σημασία που έπαιξε η ομαδική διερεύνηση στην επικοινωνία και στην έκφραση των αιτιολογήσεων των παιδιών. Ως εγκαθιδρυμένα στην πλαισίωση αυτή, συναντούμε και αναλύουμε μοντέλα που παρήγαγαν τα ίδια τα παιδιά

Η κατηγοριοποίηση τους θα μπορούσε να αναπαρασταθεί με το ακόλουθο διάγραμμα:



Η κατηγοριοποίηση αυτή, οργανώνει και ταξινομεί τα αποτελέσματα της έρευνας ως προς τα κύρια ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Τα νοήματα τα οποία τα παιδιά κατασκεύασαν εντός του εννοιολογικού πεδίου της εγγραψιμότητας [πρώτος άξονας αποτελεσμάτων], τα κριτήρια που θεώρησαν ότι πρέπει να ικανοποιούν οι κατασκευές τους στον μικρόκοσμο ώστε να επιτυγχάνεται η εγγραψιμότητα [δεύτερος άξονας αποτελεσμάτων], καθώς και οι διασυνδέσεις νοημάτων που πραγματοποίησαν [τρίτος άξονας αποτελεσμάτων] είναι τρείς γενικοί άξονες. Η σύνδεση τους πραγματοποιείται από τον τέταρτο άξονα, ο οποίος εστιάζει στην συμβολή του κοινωνικο-τεχνολογικού πλαισίου στο μαστόρεμα και την παραγωγή μοντέλων, καθώς και στην πορεία προς την αιτιολόγηση, την επικοινωνία και την ανάγκη παραγωγής μαθηματικών αποδείξεων. Ο άξονας αυτός επί της ουσίας, επιτελεί έναν συνδετικό ρόλο, μία «ομπρέλα» κάτω από την οποία λαμβάνουν χώρα τα κρίσιμα συμβάντα τα οποία, δεν θα μπορούσαν να συντελεστούν ή να ερμηνευτούν εκτός αυτού. Από αυτόν και τη συνδετική του λειτουργία, κατά κύριο, θα προκύψουν έπειτα τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας.

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται οι κωδικοί των ομάδων και των παιδιών που τις αποτελούσαν, χάριν ευκολίας αναφοράς και ανάγνωσης των αποτελεσμάτων. Υπενθυμίζεται ότι από τις τρεις πρώτες ομάδες λήφθηκε οπτικοακουστικό υλικό, ενώ από την τέταρτη δεν υπήρχε αυτή δυνατότητα. Από όλες, συγκεντρώθηκαν πρόχειρες σημειώσεις των παιδιών, σημειώσεις πεδίου και τα αρχεία .mlt. της κάθε ομάδας.

<table>
<tr><th>Ομάδες</th><th>Άτομα</th><th>Υλικό</th></tr>
<tr><td>O1</td><td>M1, M2, M3</td><td rowspan="3">οπτικοακουστικό,
σημειώσεις παιδιών,
σημειώσεις πεδίου,
αρχεία .mlt</td></tr>
<tr><td>O2</td><td>M4, M5, M6</td></tr>
<tr><td>O3</td><td>M7, M8, M9</td></tr>
<tr><td>O4</td><td>M10, M11</td><td>σημειώσεις παιδιών,
σημειώσεις πεδίου,
αρχεία .mlt</td></tr>
</table>

K: καθηγητής
E: ερευνήτρια
Οι τέσσερις γενικοί μας άξονες είναι αλληλένδετοι και αλληλοεξαρτώμενοι. Ακολουθεί η ανάλυσή τους.

Κατασκευές Νοημάτων

Τα νοήματα αυτά προέκυψαν κατά την επεξεργασία , εξερεύνηση (**E**xplore) και την διόρθωση των δοσμένων διαδικασιών κατά την Α΄ Φάση. Τα παιδιά, ξεκίνησαν να εισάγονται στο πλαίσιο του προβλήματος διαβάζοντας την εκφώνηση από το Φύλλο Εργασίας και εκτελώντας την πρώτη διαδικασία, που αφορά το τετράγωνο που εγγράφεται σε κύκλο ακτίνας 50. Στη συνέχεια, εκτέλεσαν την ενσφάλματη διαδικασία που κατασκευάζει το ισόπλευρο και παρατήρησαν ότι δεν εγγράφεται στον ίδιο κύκλο. Οι τρόποι με τους οποίους προσπάθησαν αρχικά να αποδώσουν λεκτικά και να εκφράσουν αυτό που αποτυπώνεται με την εκτέλεση του προγράμματος, αντανακλά τα νοήματα που δομούνται γύρω από την εγγραψιμότητα -ή μη- ενός σχήματος σε κύκλο.

Ως προς τις προσπάθειες έκφρασης και λεκτικής διατύπωσης εντοπίζουμε ένα κοινό χαρακτηριστικό στις 2 από τις 3 ομάδες: η πρώτη ιδέα που παρουσιάζεται είναι η συσχέτιση με τα μεγέθη των πλευρών του τριγώνου.

> στην Ο1
> Μ1: «Το τρίγωνο έχει πρόβλημα!... Νομίζω ότι το τρίγωνο πρέπει να μεγαλώσει..»
>
> στην Ο2
> Μ4: «Πρέπει να αλλάξει κάτι στο τρίγωνο για να εφαρμόζει μέσα στο τρελομπαλάκι.. »
> Ε: «Τι να αλλάξει;»
> Μ4: «Το μέγεθος!.. δηλαδή οι πλευρές»

Παρατηρούμε λοιπόν ότι μία πρώτη νοηματοδότηση που επιχειρείται, αφορά το μέγεθος του σχήματος που εξετάζουμε αν εγγράφεται -ή όχι- στον κύκλο. Τα παιδιά μέσα από προβλέψεις [**E**nvisage] και χωρίς να ξέρουν επακριβώς τι αλλαγές θα χρειαζόταν να κάνουν στον κώδικα «προβλέπουν» ότι μία μεγέθυνση του ισόπλευρου θα ήταν ικανή συνθήκη για να επιτευχθεί η εγγραψιμότητά του.

◆

Στο παρακάτω απόσπασμα, μπορούμε να παρακολουθήσουμε τη συζήτηση της 3ης ομάδας, η οποία διαφοροποιείται από τις δύο προηγούμενες, καθώς συσχετίζει την μη-εγγραψιμότητα του τριγώνου όχι με το μέγεθος των πλευρών, μα με τη θέση του ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο.

> στην Ο3
> Μ8: «Πρέπει να χωράει μέσα στον κύκλο ακριβώς… να ακουμπάει»
> Μ9: «Για να μην υπάρχει περιθώριο.. έτσι δεν ζητάει κιόλας; να ακουμπάει..»

M7: «Να δούμε τις πλευρές»
M8: «Ναι, και τις πλευρές.. Αλλά αρχικά δεν είναι στο κέντρο! Θέλω να δω σαν… κέντρο; τι έχει (εννοεί το τρίγωνο);»
M9: «Πρέπει να κάνει λίγο ακόμα μπροστά»
M7: «Καλά δεν μπορείς να το βάλεις στην τύχη, πρέπει να το υπολογίσεις»

Εκφράζεται η άποψη, από τον M8, ήδη από τις πρώτες στιγμές της διερεύνησης, ότι αυτό που φαίνεται να δημιουργεί το πρόβλημα αφορά τη σχετική θέση του κέντρου του κύκλου, με το «κέντρο» -όπως λέει- του τριγώνου (στοιχεία πρόβλεψης**E**nvisage, καθώς δεν φαίνονται στο παραγόμενο μοντέλο). Από αυτό βλέπουμε αρκετά έντονα την νοηματοδότηση της εγγραψιμότητας ως μία σχέση ενός σχήματος με ένα άλλο. Σημειώνουμε λοιπόν, ότι επιχειρώντας μία πρώτη διερεύνηση των λόγων για τους οποίους το δεδομένο μοντέλο δεν ανταποκρίνεται στα ζητούμενα, εκφράζονται κάποιες πρώτες σκέψεις, που αφορούν τις μαθηματικές ιδιότητες και τις έννοιες που εντοπίζονται. Οι αναφορές αυτές δεν βασίζονται σε κάποια γνώση ή βεβαιότητα, αλλά πηγάζουν από τη διαίσθηση τους και την εικόνα που δίνει το ψηφιακό εργαλείο. Πολύ σύντομα, βλέπουμε ότι τα παιδιά, αυτές τις πρώτες νοηματοδοτήσεις, ξεκινούν να προσπαθούν να τις μετατρέψουν σε δράσεις ή να βασίζονται σε αυτές για να πάρουν αποφάσεις (διατύπωση κριτηρίων).

στην O3
M8: «Παιδιά… από το κέντρο του τριγώνου ξεκινάει αυτός; Το τρίγωνο....Αυτό το τρίγωνο, ένα από τα προβλήματά του, είναι ότι δεν είναι καλά προσανατολισμένο στον κύκλο μας. Δεν είναι σωστά κεντραρισμένο στον κύκλο.. Αν απλώς μεγαλώσουμε το τρίγωνο δεν θα δουλέψει! Πρέπει να κεντράρουμε το τρίγωνο στον κύκλο»
M7: «Κι έτσι, αν μεγαλώσει κιόλας, θα ακουμπήσει στον κύκλο»
M8: «Να προσανατολίσουμε το τρίγωνο πιο πάνω.. να έρθει πιο ψηλά, να μας έρθει πάνω..πρώτα αυτό και μετά μεγαλώνουμε τις πλευρές…»

Οι νοητικές κατασκευές τους κατά την πρώτη διερεύνηση, θα δούμε ότι καθορίζουν εν πολλοίς τον τρόπο με τον οποίο επιχειρούν το μαστόρεμα του μοντέλου και τη διόρθωσή του. Για παράδειγμα, οι O1 και O3 που διατύπωσαν την ιδέα ότι ευθύνεται το μέγεθος των πλευρών του τριγώνου, αποφασίζουν -στην ακριβώς παρακάτω ομάδα αποτελεσμάτων- πως πρέπει να αλλάξουν τις πλάγιες μετατοπίσεις στον κώδικα του τριγώνου, ενώ η O3 οδηγήθηκε σε μία αναζήτηση του «κέντρου του τριγώνου».

Διατυπώσεις Κριτηρίων

Σε αυτό τον άξονα, οργανώνονται τα αποτελέσματα που αφορούν τις προσπάθειες των παιδιών να διαμορφώσουν κανόνες υπό τους οποίους μπορούν να πετύχουν την εγγραφή του ισόπλευρου τριγώνου στον κύκλο. Ο όρος «κριτήρια» χρησιμοποιείται για να εκφράσει τι έκριναν (πίστευαν) τα παιδιά ότι πρέπει να ισχύει, ή να κάνουν - διευκρινίζεται δηλαδή ότι, δεν χρησιμοποιείται με την τυπική έννοια που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά, δηλαδή υπό την έννοια κανόνων ελέγχου σε γενικότερο πλαίσιο. Είναι προϊόντα εγκαθιδρυμένων γενικεύσεων και αφαιρέσεων, με βάση την οπτική που περιγράφηκε στο θεωρητικό πλαίσιο, και ουσιαστικά αποτελούν πεποιθήσεις και ευκρινείς δηλώσεις των παιδιών στο συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς. Επίσης, φάνηκε πως η πορεία των πρώτων αυτών διατυπώσεων εντός τις κάθε ομάδας και η αποδοχή τους (ή η μη αποδοχή τους) επηρεάστηκαν σε μεγάλο βαθμό από τις κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες εντός αυτής, όπως θα φανεί αναλυτικά.
Όπως είπαμε παραπάνω, επηρεάστηκαν από τα νοήματα που σχηματίστηκαν για την εγγραψιμότητα και, μετέπειτα καθόρισαν τις δράσεις και τις ενέργειές τους.
Οι τρεις ομάδες από τις οποίες αντλήθηκε το οπτικοακουστικό υλικό, κινήθηκαν προς την κατεύθυνση του να επεξεργαστούν, να ερμηνεύσουν και να συγκρίνουν τους κώδικες που τους δόθηκαν για το τετράγωνο και το τρίγωνο, προσπαθώντας να αποφασίσουν πώς θα δράσουν στη συνέχεια. Η πορεία της κάθε ομάδας όμως ήταν διαφορετική.

Πιο συγκεκριμένα, οι Ο1, Ο2 (που συσχέτισαν την μη-εγγραψιμότητα του τριγώνου με το μέγεθος των πλευρών του) διαφοροποιήθηκαν ως προς τα κριτήρια που διαμόρφωσαν.

Στην Ο2, έγινε μία προσπάθεια, με τη διακριτική βοήθεια του καθηγητή τους, να εισαχθεί μεταβλητή για την πλάγια μετατόπιση, αλλά μόλις εκείνος απομακρύνθηκε, δεν δομήθηκε κάποιο ισχυρό επιχείρημα εντός της ομάδας γύρω από αυτή την ιδέα.

Μ4: «Μπορούμε να κάνουμε δοκιμές»
Μ5: «Να το κουνάμε και όσο θέλουμε το αλλάζουμε»
Μ4: «Ωραία!»
(δοκιμές με τον ολισθητή)
Μ6: «Έλα θα το βρούμε..στο 86..»
Μ5: «Να το!.. Τέλος, ακούμπησε!»
Μ6: «Τέλος, τελειώσαμε εντάξει χχααχα»

Η Μ5 χρησιμοποιώντας τον ολισθητή (slider) του ψηφιακού εργαλείου, προσπάθησε «με το μάτι» για αρκετή ώρα να βρει την κατάλληλη τιμή ώστε η πλάγια μετατόπιση να μεγαλώσει τόσο που να «ακουμπήσει» το τρίγωνο στο εσωτερικό της τρελόμπαλας. Βλέπουμε πως τα μέλη της ομάδας, δεν είχαν διάθεση να αναζητήσουν σχέσεις ή αιτίες που συνδέουν το οπτικό αποτέλεσμα με την ουσία του προβλήματος, και αντιμετώπισαν με χιούμορ την «εύκολη» λύση που τους προσέφερε το εργαλείο.

◆

Στην Ο1, στην αναζήτηση τρόπου για την αλλαγή του μεγέθους του τριγώνου ακούστηκε η άποψη ότι τα μεγέθη των πλευρών (πλάγιες μετατοπίσεις) πρέπει να αλλάξουν σε σχέση με τις άλλες μετατοπίσεις. Η ιδέα διατυπώθηκε από τον Μ3, ο οποίος αφού παρατήρησε ότι το τρελομπαλάκι είναι μία διαδικασία με μεταβλητή, «δανείστηκε» την ιδέα της εισαγωγής μεταβλητής και λέει:

> Μ3 «Μήπως γίνεται αυτό και στο τρίγωνο;.. Να βρούμε έναν τρόπο ξέρω ΄γω… να αλλάξουμε το ένα, να αλλάξουμε το άλλο.. να τα αλλάξουμε λίγο όλα.. κάπως.. εννοώ την ίδια στιγμή κάπως να αλλάζουν όλα, όχι όλα.. εννοώ πολλά μαζί!»
> Μ1: «Ρε δεν γίνεται αυτό, πάμε στο τετράγωνο»

Παρατηρούμε ότι ο Μ3 προτείνει την εισαγωγή μεταβλητής στη διαδικασία όχι μόνο για να καθορίσει το μήκος της πλευράς, μα γιατί διακρίνει πως υπάρχει μία σχέση μεταξύ των πλάγιων μετατοπίσεων (πλευρές) και των υπολοίπων, που ουσιαστικά είναι οι ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου. Πρότεινε την εισαγωγή μεταβλητής και στο τρίγωνο, θέλοντας να μετατρέψει τη διαδικασία σε παραμετρική, υπονοώντας τη συσχέτιση με άλλες παραμέτρους.
Ας τονίσουμε τη διαφορά με την εισαγωγή μεταβλητής από την Ο2: εκεί, τα παιδιά αξιοποιούν τη δυνατότητα που τους δίνει το ψηφιακό εργαλείο αλλά καθηλώνονται στην οπτική λύση που δίνει ο ολισθητής της αντίστοιχης μεταβλητής. Αντίθετα, η ιδέα του Μ3 διαπιστώνουμε ότι ενέχει μία πλούσια υπόσταση και θα μπορούσε να εμπλουτίσει τη διερεύνηση με την αναζήτηση και έκφραση μίας συναρτησιακής σχέσης ανάμεσα στην πλευρά και την ακτίνα. Όπως όμως είδαμε και παραπάνω η ιδέα δεν υλοποιήθηκε και σε αυτό καθοριστικό ρόλο έπαιξαν οι νόρμες της ομάδας. Δεν δόθηκε χώρος στον συλλογισμό του, δεν τον ανέπτυξε και δεν τον εξήγησε. Ακούστηκε υπερβολικά χρονοβόρος ή δύσκολος, ή τα άλλα άτομα δεν θέλησαν να δώσουν συνέχεια, οπότε η ιδέα εγκαταλείφθηκε.

◆

Η Ο3 έκρινε πως πρέπει να ξεκινήσει μία εκτενή διαδικασία ανάστροφης μηχανικής (Reverse Engineering) η οποία αναλύεται παρακάτω, στον επόμενο άξονα αποτελεσμάτων. Χρησιμοποιώντας το κέντρο της τρελόμπαλας ως κέντρο του νέου τριγώνου, έγραψαν μία δική τους διαδικασία που βασίζεται στο δοσμένο τρίγωνο και αξιοποιεί γνώσεις Γεωμετρίας και Τριγωνομετρίας για την παραγωγή του μοντέλου.

Διασυνδέσεις Νοημάτων εντός του Εννοιολογικού Πεδίου

Κατά το σχεδιασμό της έρευνας κεντρικό ρόλο έπαιξε, όπως είδαμε, η δημιουργία ενός προβληματικού πλαισίου στο εννοιολογικό πεδίο της εγγραψιμότητας, μέσα στο οποίο ενυπάρχουν έννοιες από τη Γεωμετρία, την Τριγωνομετρία και άλλα θεμελιώδη νοήματα όπως η συνάρτηση-συμμεταβολή.
Κατά την πορεία των δραστηριοτήτων, εντοπίστηκε ότι τα παιδιά πραγματοποίησαν ένα πλήθος νοητικών κατασκευών σύνδεσης και συσχέτισης εννοιών, ιδιοτήτων και μαθηματικών γνώσεων από διαφορετικά πλαίσια. Δεν τελεσφόρησαν όλες, ή κάποιες δεν υλοποιήθηκαν καν. Οι «γεφυρώσεις» (bridg**E**, κατά το θεωρητικό δόμημα 5Es) όμως οι οποίες πραγματοποιήθηκαν -ή έστω επιχειρήθηκαν- και παρουσιάζονται παρακάτω καταδεικνύουν πως τα παιδιά βρήκαν, στην εργασία τους με το ψηφιακό εργαλείο, πρωτότυπους τρόπους να συνθέσουν και να συνδυάσουν νοήματα, με δική τους πρωτοβουλία και για τις ανάγκες που προέκυπταν κάθε στιγμή, σε άμεση σχέση με το μαστόρεμά τους ή τις αιτιολογήσεις τους.

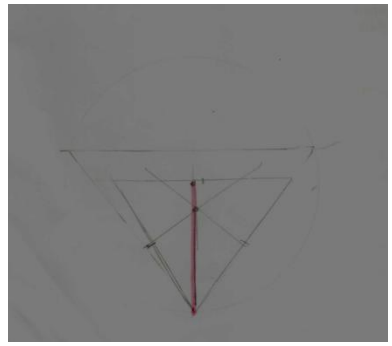
Ας παρακολουθήσουμε την πορεία της Ο3, καθώς επεξεργάζονται το δοσμένο μοντέλο μέσω μίας προσπάθειας ανάστροφης μηχανικής [Reverse Engineering].

> Μ8: «Από που βγαίνει ρε παιδιά το $\sqrt{5000}$;»
> Μ9: «Βάλε [εννοεί «τρέξε»] και το τρελομπαλάκι.. Όταν έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο.. »
> Μ8: (τη διακόπτει) «Κοίτα πως σχεδιάζει το τρίγωνο… Είναι στο κέντρο της τρελόμπαλας, κάνει πίσω 50, δεξιά 30, μπροστά $\sqrt{5000}$ κλπ κλπ…»
> Μ7: «Εγώ πιστεύω αυτή τη στιγμή πρέπει όλο το τρίγωνο να το μεγαλώσουμε»
> Μ9: «Ναι αλλά το πίσω είναι η ακτίνα, για αυτό είμαστε σίγουροι!»
> Μ8: «Λοιπόν, παιδιά, να φτιάξουμε εμείς τον αλγόριθμο που σχεδιάζει το τρίγωνο, να τελειώνουμε;! Ωραία να βρούμε από το κέντρο…! »
> [..]

Υπενθυμίζεται ότι προηγουμένως είχαν αναζητήσει το «κέντρο» του ισοπλεύρου τριγώνου, στη συζήτησή τους. Τώρα ο Μ8 με χαρτί - μολύβι προσπαθεί να το σχεδιάσει.

> Μ8: «Κάτσε, έχω μια απορία.. όταν έχεις το τρίγωνο, το κέντρο το βρίσκεις από τις διχοτόμους;»
> Μ9: «Από τα ύψη το βρίσκεις!»
> Μ8: «Από τα ύψη..»

Χρησιμοποιούν χωρίς κάποια αυστηρότητα ή τυπική τεκμηρίωση, ουσιαστικά ότι αυτό που χρειάζονται είναι το σημείο τομής των διαμέσων-υψών-διχοτόμων του ισοπλεύρου, παρόλο που όπως βλέπουμε αυτό σχεδίασαν! Σαν να υπονοείται ή σαν να είναι προφανές και δεν χρειάζεται τεκμηρίωση. Παρ' όλ' αυτά, όπως φαίνεται στη συνέχεια αξιοποιούν με ενδιαφέροντες συλλογισμούς τα ύψη για να μελετήσουν τα ορθογώνια τρίγωνα και μέσα από εκεί προκύπτει κάποια τριγωνομετρική συσχέτιση!



Εικόνα 14: Σκέψεις της Ομάδας 3 για το κέντρο του ισόπλευρου

Η προσέγγισή τους στερείται ίσως, αυστηρότητας και τυπικότητας, μα είναι κρίσιμη για τη συνέχεια της διερεύνησης. Σημειώνουμε πως αυτό είναι μία φάση της διερεύνησης όπου κυριαρχείται από την ενεργό αναζήτηση και δοκιμή μαθηματικών ιδεών και σχέσεων μέσω της χρήσης του εργαλείου. Υπό το πρίσμα του μοντέλου UDGS, δηλαδή, εκφράζει την προσπάθειά τους να διακρίνουν [**D**\διακρίνοντας] σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών νοημάτων που δημιούργησαν ως εδώ και εξετάζουν τις ιδέες τους μέσω πρακτικής εφαρμογής και πειραματισμού.

Μ8: «Ξεκινάμε από εδώ!»

Μ9: «Αυτό είναι 50, αλλά είναι και η ακτίνα του κύκλου..»

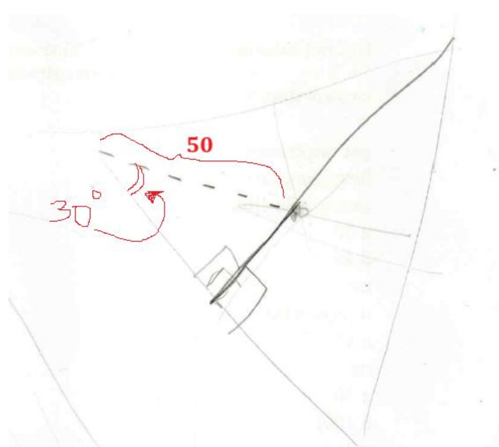
Μ8: «Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και τα ύψη»

Μ9: «Άμα το σκεφτούμε σαν δύο τρίγωνα διαφορετικά; κολλημένα έτσι; [εννοεί όπως στο σχήμα της, δίπλα, αλλά μπερδεύεται λόγω προσανατολισμού.. σκέφτονται..]

Μ8: «Είναι ορθογώνιο αλλά δεν ξέρουμε όλες τις πλευρές… τριγωνομετρία! Ημίτονα, συνημίτονα, τέτοια..»

Εικόνα 15: Σκέψεις της Ομάδας 3 για το κέντρο του ισόπλευρου

Μέσα από τα λεγόμενά τους, διαφαίνεται ότι αποφασίζουν να εκφράσουν το συνημίτονο των 30^o, όπως φαίνεται με τις σημειώσεις μου (κόκκινες προσθήκες) στο σχήμα που ακολουθεί.



Βασικές μικρο-αιτιολογήσεις ή μικρο-αποδείξεις θα μπορούσαν να τους έχουν ζητηθεί για τα παρακάτω ζητήματα, αλλά εκείνη τη στιγμή η ομάδα δούλευε μόνη της και μόνο εκ των υστέρων παρακολουθήθηκε η πορεία της. Τα ερωτήματα που θα έθετε η ερευνήτρια, αν ήταν παρούσα, θα περιστρέφονταν γύρω από τα εξής:

- γιατί μιλάμε για γωνία 30^o;
- η προσκείμενη κάθετη που θα υπολογιστεί γιατί λέτε ότι πρέπει να διπλασιαστεί στη συνέχεια; το ίχνος της καθέτου δηλαδή είναι ταυτόχρονα και μέσο; γιατί;

Η ομάδα ζήτησε άδεια να κάτσει μέσα στο διάλειμμα. Καταπιάνονται με υπολογισμούς, σε κάποια στιγμή επιχειρούν να χρησιμοποιήσουν Πυθαγόρειο Θεώρημα, για την εύρεση της πλευράς που αναζητούσαν (προσκείμενη των 30^o). Τελικά με τριγωνομετρικούς υπολογισμούς, βρίσκουν την πλάγια μετατόπιση. Θα παρακολουθήσουμε την πορεία τους παρακάτω.
Η προσπάθειά τους να φτιάξουν τη δική τους διαδικασία τελικά τους οδήγησε σε μονοπάτια πλούσιας διασύνδεσης και νοηματοδότησης. Αντί να επιχειρήσουν να επέμβουν μόνο σε αυτή και να «διορθώσουν» την τιμή της, όπως για παράδειγμα έγινε στις Ο1 αι Ο2 -και όπως άλλωστε αναμενόταν από το σχεδιασμό- η Ο3, οδηγήθηκε μέσα από δική της κατασκευή στην αλλαγή της, δηλαδή κατά έναν δικό τους, απρόβλεπτο, έμμεσο τρόπο. Αυτό το αναγνώρισαν και τα ίδια τα παιδιά, με αφορμή μία αναστοχαστική ερώτηση του καθηγητή [Κ] τους προς τον Μ8: «Γιατί το έφτιαξες έτσι;»

> Μ8: «Γιατί.. ψιλοπήγαμε να το πάμε με δικό μας τρόπο και μετά είδαμε ότι ο δικός μας τρόπο και μετά είδαμε ότι ο δικός μας τρόπος είναι ίδιος με αυτουνού σχεδόν…»
> Κ: «Πήγατε να φτιάξετε το τρίγωνο μόνοι σας; Για ποιο λόγο;»
> Μ8: «Γιατί δεν μας άρεσε, δεν καταλαβαίναμε τι κάνει η $\sqrt{5000}$..»
> Κ: «Δηλαδή ώστε να καταλαβαίνετε..»
> Μ9: «Ναι!»

Στην εκτέλεση της διαδικασίας όμως, και πάλι το τρίγωνο που προκύπτει δεν είναι σωστό, εγγράψιμο δηλαδή στον κύκλο. Προσπαθούν να βρουν το λάθος.

> Μ9: «Νομίζω πρέπει να βάλεις δυο φορές τη ρίζα! [*εννοεί, και σωστά παρατηρεί ότι, η πλάγια μετατόπιση που έχει οριστεί στη διαδικασία τους αντιστοιχεί μόνο στη μισή πλευρά του εγγράψιμου ισόπλευρου, δηλαδή από την κορυφή του ως το ίχνος του ύψους*]
> Μ8: «Μα το έχω βάλει»

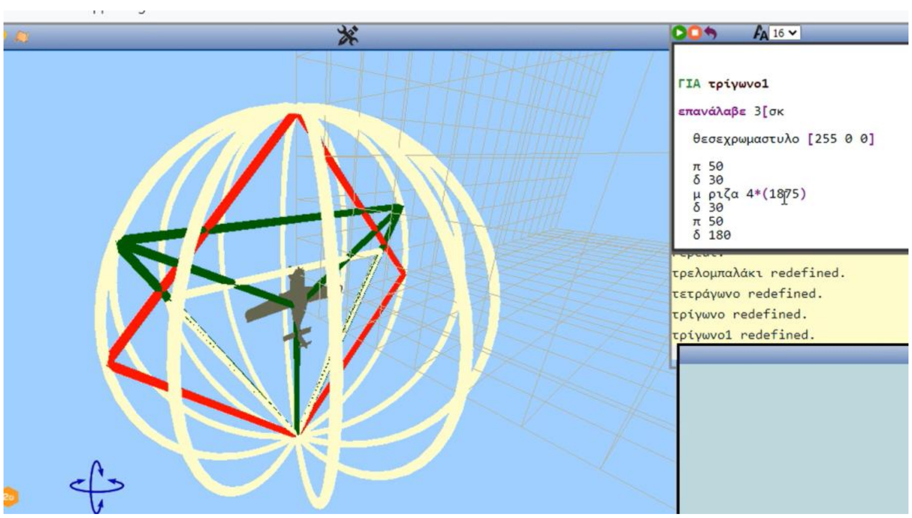
Όπως βλέπουμε από το παρακάτω στιγμιότυπο, ο Μ8 δεν έχει εκφράσει σωστά μέσα στον κώδικα το διπλασιασμό, αλλά η Μ9 το παρατηρεί και το διορθώνει, καταδεικνύοντας ότι ο φορμαλισμός με το ψηφιακό εργαλείο (αφού έχει προκύψει από τα ίδια τα παιδιά για λογαριασμό τους) δεν τους είναι εμπόδιο ή ανοίκειος, αλλά είναι πλέον κτήμα τους και πλούσιος νοημάτων.

Μ9: «Να μπει το 2 πριν τη ρίζα για να είναι σωστό»
Μ8: «Είσαι σίγουρη;»
Μ9: «Ε όχι..»

Εικόνα 16: Δοκιμή και παραγωγή νέου μοντέλου με σφάλμα

Η ιδέα της Μ9 δεν υλοποιείται. Τα παιδιά προχωρούν σε δοκιμές τελικά. Επειδή τους φαίνεται «μισό από ότι θα έπρεπε», ο Μ8 βάζει τελικά την εντολή που φαίνεται δίπλα. Εκτελούν την διαδικασία .

Το τρίγωνο έχει κατασκευαστεί σωστά. Τα παιδιά ενθουσιάζονται!



Εικόνα 17: Εκσφαλμάτωση του μοντέλου από την Ομάδα 3. Εδώ φαίνεται η εγγραφή του, μαζί με το τετράγωνο, στη σφαίρα

Αυτή η διασυνδεδεμένη προσέγγιση βλέπουμε ότι διατρέχει το Αναλυτικό Πρόγραμμα - και μάλιστα κατά πρωτοβουλία των παιδιών, υπό την εξής έννοια: σκέφτηκαν ταυτόχρονα σε ποικίλα πλαίσια, φέρνοντας επί τάπητος νοήματα από το καθένα, πλούσια διασυνδεδεμένα. Παρακολουθούμε μία ομαδική δράση που εκτυλίσσεσαι και μία ομαδική σκέψη που εξελίσσεται αρμονικά: διατρέχει την Γεωμετρία και την Τριγωνομετρία και αντλεί στοιχεία που τα παιδιά νομίζουν ότι θα χρειαστούν για να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα κατά έναν, ομολογουμένως, εντυπωσιακά ολιστικό τρόπο. Υπό το πρίσμα του μοντέλου UDGS το επεισόδιο αυτό ενέχει κυρίως στοιχεία Σύνθεσης (**S**\«synthesizing»): δημιουργούνται νέα μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις μέσα από τη συνδιαλλαγή του ψηφιακού εργαλείου με τις μαθηματικές τους γνώσεις. Υπογραμμίζεται ότι αποτελεί συνάμα μία έκφραση της δημιουργικότητάς τους αυτή η σύνθεση και υλοποιεί μια πορεία προς νέες νοηματοδοτήσεις. Η εργασία στο προγραμματιστικό περιβάλλον αναδεικνύει την ισχύ και την δυναμική των συνδέσεων και επιβεβαιώνεται από την ορθή παραγωγή του μοντέλου.

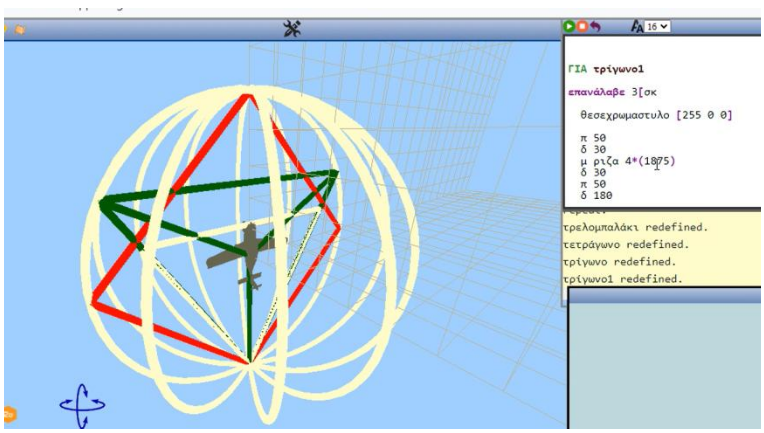
Ο σχεδιασμένος μικρόκοσμος αποτέλεσε μία πλούσια πλατφόρμα νοηματοδοτήσεων και πραγματοποίησης γόνιμων διασυνδέσεων γνώσεων και εννοιών. Στον επόμενο άξονα αποτελεσμάτων, αναλύεται το κατά πόσο το συγκεκριμένο κοινωνικο-τεχνολογικό πλαίσιο πρόσφερε στα παιδιά ερεθίσματα για παραγωγές αιτιολογήσεων και το εάν οδήγησε σε προσπάθειες απόδειξης συλλογισμών.

Κοινωνικο-Τεχνολογική Πλαισίωση

Οι προαναφερθέντες άξονες συγκεντρώνουν όπως είδαμε στοιχεία που προκύπτουν από τη διερεύνηση στο συγκεκριμένο κοινωνικο-τεχνολογικό περιβάλλον που σχεδιάστηκε για τους σκοπούς της έρευνας. Η συνολική πορεία της κάθε ομάδας μέσα στο προγραμματιστικό περιβάλλον, οι αποφάσεις που πάρθηκαν, οι αιτιολογήσεις και τα μοντέλα που παράχθηκαν με το ψηφιακό εργαλείο, θα δούμε εδώ πως απηχούν το πνεύμα και τα χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου κοινωνικο-τεχνολογικού πλαισίου ή, μάλλον ότι, είναι αποτελέσματά του.

Ενδεικτικά ας παρακολουθήσουμε τί συνέβη με την Ο3 όταν ολοκλήρωσαν, όπως είδαμε παραπάνω, την ορθή παραγωγή του ισοπλεύρου.

M9: «Ωπ!»
M8: «Να το!»



Εικόνα 18: Εκσφαλματωμένο μοντέλο

Η ερευνήτρια [Ε] προσπαθεί να ξεκινήσει μία συζήτηση για να αντλήσει αιτιολογήσεις για την ορθότητα του παραγόμενου μοντέλου.

Ε: «Αυτό πως έγινε;»

Μ8: «Ε .. έβαλα 4 επί τη ρίζα..»

Ε: «Γιατί;»

Μ8: «Γιατί απλά μου φαινόταν μισό.. δεν έχει.. κάποια λογική!»

Ε: «Και γιατί πριν δεν δούλευε με το 2, και δουλεύει με το 4; Είναι σωστό;»

Μ8: «Ναι, αφού..»

Μ9: «Να, αφού ακουμπάει, σωστό είναι!»

Ε: «Ναι, αλλά γιατί..; Να βρούμε το γιατί..;»

Μ7: «Πειραματισμός!»

Μ9: «Γιατί δεν είναι το μισό, είναι.. [μπερδεύεται, κάνει παύση]

Ε: «Γιατί;»

Μ8: γελάει αμήχανα

Ε: «Μπορείτε να μου το εξηγήσετε;»

Μ8: «Ωραία, έλα Μ9, πάμε θα το βρούμε..»

Η ερευνήτρια απομακρύνεται για λίγο, καθώς την καλούν από την άλλη ομάδα, και τα παιδιά συνεχίζουν μόνα τους τη συζήτηση.

Μ8: «Γιατί… το βρήκα! το βρήκα! (καλεί την ερευνήτρια να πλησιάσει για να της πει) γιατί το ύψος… τι μπούρδες λέω….»

Ε: «Πες μου, πες μου..»

Μ8: «Μισό!.. (σκέφτεται, μπερδεύεται, αναστενάζει) αχ με ενοχλεί…»

Μ9: «Είναι που το βρήκαμε χαχα..»

Μ8: «Σταμάτα, θα το βρούμε!»

Ε: «Σκεφτείτε το όσο θέλετε, θα ξανάρθω»

Η ερευνήτρια φεύγει.

Μ9: «Βγήκε ή δεν βγήκε;! Αυτό δεν έχει σημασία;! Για αυτό εγώ δεν συμπαθώ τη Γεωμετρία, γιατί είναι όλο γιατί, γιατί, γιατί… πρέπει να εξηγήσεις κάτι..»

Ας δούμε εδώ με προσοχή αυτό το κρίσιμο συμβάν. Η Μ9 καθ΄όλη τη διάρκεια της διερεύνησης έδωσε πλήθος ιδεών στην ομάδα και προχώρησε τη σκέψη της κοινότητας πρακτικής, όπως είδαμε και πρωτύτερα. Μάλιστα, η ορθή παραγωγή του μοντέλου -ίσως χωρίς καν να το αντιληφθεί- συμφωνούσε με τη σκέψη της να διπλασιάσουν τη ρίζα, διότι όπως είχε πει εξ αρχής, το ύψος έρχεται στο μέσο της πλευράς στο ισόπλευρο. Η ιδέα της όμως δεν υλοποιήθηκε και τελικά η ομάδα έφτασε στο αποτέλεσμα με δοκιμή την οποία, τώρα, δεν μπορούν να τεκμηριώσουν. Είχε δηλαδή προβλέψει τη σωστή εντολή που θα έπρεπε να δοθεί στο πρόγραμμα, διότι το πίστευε ή το θυμόταν από

παλαιότερα μαθήματα της Γεωμετρίας. Εδώ όμως, που ελαφρώς πιέζεται να δώσει μία τεκμηρίωση, μία αιτιολόγηση για την ορθή παραγωγή του μοντέλου, αντιδρά.
Λέει ότι δεν της αρέσει η Γεωμετρία γιατί χρειάζονται εξηγήσεις -επί της ουσίας όμως, εκφράζει την αποστροφή της σε κάποια έξωθεν προερχόμενη επιταγή αιτιολόγησης. Και αυτό το ισχυριζόμαστε γιατί, κατά την πορεία της δραστηριότητας είχε πολύ έντονο ρόλο στην ομάδα της, αφού εκτός από το να προτείνει νέα πράγματα και ενέργειες, συχνά «προκαλούσε» τα άλλα μέλη, κυρίως τον Μ8 να εξηγήσει (**E**xplain) τους λόγους που είχε να προτείνει κάτι, με αρκετά «γιατί». Επίσης, έδινε και η ίδια εξηγήσεις στα άλλα μέλη όταν την ρωτούσαν γιατί πρότεινε το ένα ή το άλλο(**E**xplain **&** **E**xchange).
Αυτό μας σχηματίζει την εντύπωση ότι αναγνωρίζει την ανάγκη αιτιολόγησης στους άλλους και σε εκείνη -κατά την ώρα της δράσης ή της λήψης αποφάσεων. Όμως μάλλον, σε αναστοχαστικό πλαίσιο, ή αν ερωτηθεί να αποδώσει εκ των υστέρων επιχειρήματα -αποδεικτικά στοιχεία- για το λόγο που κάτι ισχύει (όπως λόγου χάρη εδώ, ως προς τη σωστή κατασκευή τους) δυσκολεύεται και μάλιστα φορτίζεται συναισθηματικά. Στη συνέχεια, ζήτησε τη βοήθεια του καθηγητή τους, ο οποίος τους πλησίασε και με εκτενή συζήτηση μαζί του τα παιδια αναγνώρισαν ότι το 4 μέσα στη ρίζα, ουσιαστικά είναι το ίδιο πράγμα με την ιδέα της Μ9 να βάλουν εξαρχής 2 έξω από τη ρίζα.
Το εντυπωσιακό ήταν, και αξίζει να σημειωθεί, ότι η χαρά τους όταν τελικά αιτιολογήθηκε η ορθή κατασκευή ήταν ακόμα μεγαλύτερη από εκείνη που είχαν, όταν είδαν πρωτύτερα ότι το μοντέλο τους είναι σωστό! Το πλαίσιο του μικρόκοσμου και η ομαδική διερεύνηση σε αυτό λοιπόν, παρείχε ένα πλούσιο βίωμα τόσο ως προς την νοηματοδότηση και τη σύνδεση εννοιών, αλλά και ως προς την αξία και την ισχύ της αιτιολόγησης σε δύο επίπεδα:

- κατά την πορεία της επίλυσης ενός προβλήματος
- σε φάση αναστοχασμού

◆

Σε αυτόν τον άξονα αποτελεσμάτων μπορούμε να συμπεριλάβουμε πλήθος άλλων στιγμιότυπων που καταδεικνύουν ότι η κοινωνικο-τεχνολογική πλαισίωση που σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε καθόρισε σε μεγάλο βαθμό την έκβαση των ενεργειών, των αποφάσεων και των αιτιολογήσεων των ομάδων που παρακολουθήσαμε. Ας τονίσουμε τα εξής σημεία, με αφορμή την εκτενή παρουσίαση του κρίσιμου συμβάντος, που προηγήθηκε:

- Η παραγωγή των μοντέλων ήταν εξ' ολοκλήρου συνδεδεμένες και εξαρτώμενες από το ψηφιακό περιβάλλον. Όπως είδαμε στις έννοιες που απαρτίζουν τις δεξιότητες της Υπολογιστικής Σκέψης, συγκαταλέγονται το γράψιμο αλγορίθμων, το «σπάσιμο» του προβλήματος σε μικρότερες επιλύσιμες μονάδες [Decomposition], η αναγνώριση μοτίβων [Pattern recognition], η Αφαίρεση [Abstraction], η εκσφαλμάτωση [Debugging], η γενίκευση. Οι προκλήσεις για αφαίρεση, εκσφαλμάτωση, γενίκευση και η υλοποίηση στρατηγικών που συνδυάζουν τα παραπάνω, όπως αυτή που περιγράφεται παραπάνω από την Ο3, καταδεικνύουν έντονα ότι, καθ' όλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων, τα παιδιά τις χρησιμοποίησαν κατά κόρον και παράλληλα εξασκήθηκαν σε αυτές, συνεχίζοντας να τις αναπτύσσουν.

- Οι προκλήσεις για αιτιολόγηση που παρουσιάστηκαν τόσο κατά τη διάρκεια της διερεύνησης, όσο και αναστοχαστικά, στο τέλος της Α΄ Φάσης αποτελεί ένα κρίσιμης σημασίας ζήτημα. Η αιτιολόγηση, όταν πηγάζει κατά την πορεία της διερεύνησης και εκπληρώνει κάποιο σκοπό, όπως τη συνέχιση της σκέψης, την επεξήγηση (**E**xplain) για να πειστούν τα άλλα μέλη της ομάδας ή την επικοινωνία (**E**xchange) μεταξύ τους, πηγάζει φυσιολογικά και συνεπικουρείται από το εργαλείο. Αντίθετα, τα παιδιά, όπως η Μ9 παραπάνω, σε κάποια αναστοχαστική ερώτηση ή συζήτηση τείνουν να εκβιάζουν ή να αποφεύγουν την τεκμηρίωση και την αυστηρή αιτιολόγηση, εκδηλώνοντας ότι νιώθει αμήχανα από την τυπικότητα με την οποία έχει συνηθιστεί να ενδύεται κάθε αποδεικτική διαδικασία στα πλαίσια του μαθήματος της Γεωμετρίας.
- Η πορεία διερεύνησης της Ο3 ήταν μοναδική, όπως και κάθε άλλης ομάδας. Κάθε ομάδα δόμησε διαφορετικά νοήματα και παρήγαγε μοναδικά μοντέλα. Τα νοήματα διαμορφώθηκαν στα πλαίσια του πλαισίου και των νορμών που συντρέχουν σε αυτό. Ακόμα και οι αιτιολογήσεις ή το τι συνιστά πειστικό επιχείρημα και τί όχι, ποια σκέψη συνεχίζεται και υλοποιείται, όπως επί παραδείγματι είδαμε παραπάνω, επηρεάζονται ή μάλλον καθορίζονται από τις κανονικότητες και τις συμπεριφορές των μελών.

Ως εγκαθιδρυμένα προϊόντα αυτών των κοινωνικο-τεχνολογικών πλαισιώσεων θεωρούμε τα μοντέλα που παρήγαγαν τα παιδιά κατά την ελεύθερη διερεύνηση (φάσεις Β΄ & Γ΄)

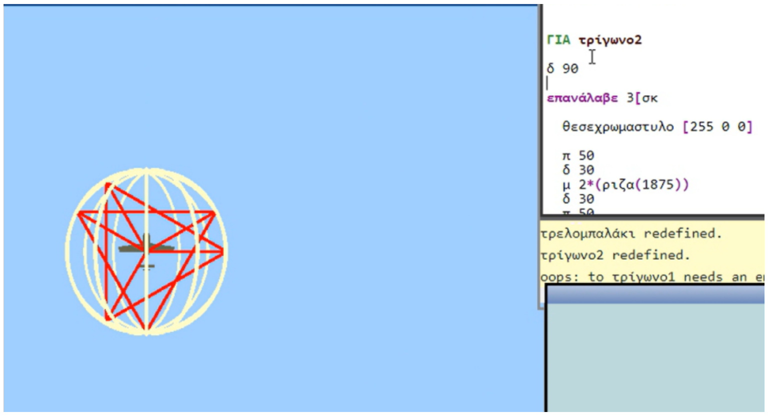
<u>Παραγόμενα Μοντέλα</u>

Τα μοντέλα στα οποία θα εστιάσουμε την ανάλυσή μας προέκυψαν από Ο3 και από την Ο4

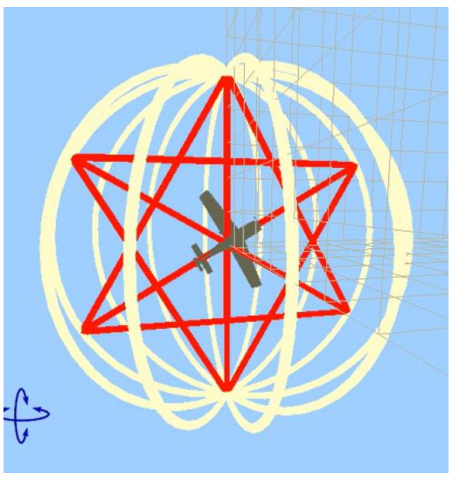
<u>Ομάδα 3 (Ο3)</u>

<u>Για τη Β΄Φάση</u>

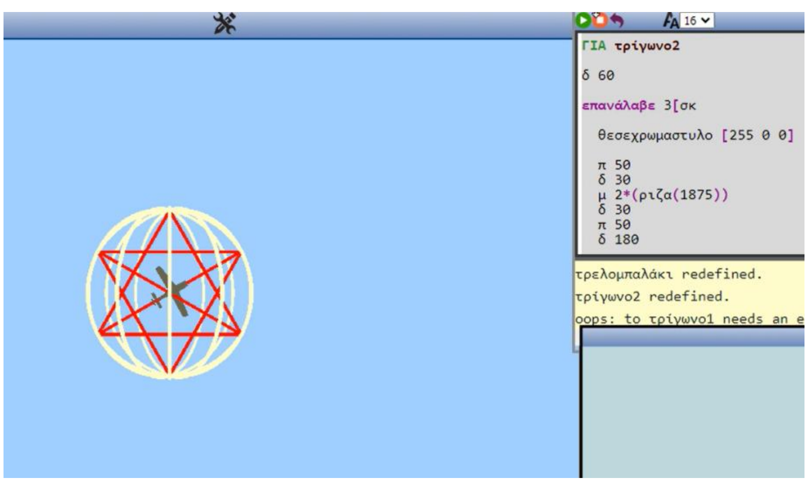
Η Ο3 ξεκινά να φαντάζεται τι μπορεί να σχεδιάσει για να διακοσμήσει το εσωτερικό της τρελόμπαλας. Ο Μ8 προτείνει να φτιάξουν ένα αστεράκι, αντλώντας το θέμα, λέγοντας με χιούμορ, «από τα Χριστούγεννα που έρχονται». Ακόμα και η έκφραση στοιχείων χιούμορ και επικαιρότητας συγκαταλέγονται στα κερδισμένα «στοιχήματα» της έρευνας: δείχνει ότι τα παιδιά ένιωσαν άνετα και δημιουργικά μέσα σε ένα περιβάλλον μη κατευθυνόμενης πορείας κατασκευής γνώσης. Όχι μόνο παίρνουν τη μάθηση στα χέρια τους, μα την εμπλουτίζουν με προσωπικά στοιχεία που έχουν νόημα για τα ίδια. Η Μ9 εξέφρασε την ανησυχία ότι ίσως είναι πολύ δύσκολο, αλλά ο Μ7 έδειξε να ενθουσιάζεται με την ιδέα του συμμαθητή του και του ζήτησε να περιγράψει τι εννοεί. Ο Μ8 ξεκινά να εξηγεί (**E**xplain) τη σκέψη του: αντλώντας έμπνευση από το ισοσκελές τρίγωνο που πριν λίγο κατασκεύασαν με επιτυχία, λέει ότι σκέφτηκε να φτιάξουν ένα είδος τριγώνου με 6 κορυφές, λέγοντας χαρακτηριστικά «σαν να το κουνάμε, να το περιστρέφουμε για να βγάλουμε το δεύτερο». Επί της ουσίας, περιγράφει μία ιδέα που ενέχει στοιχεία που αφήνουν την εντύπωση ότι έχει φτάσει σε ένα υψηλό επίπεδο γενίκευσης. Ο Μ7 πρότεινε αφού εκτελέσουν τη διαδικασία για το ισόπλευρο μία φορά, να στρέψουν την οντότητα κατάλληλα για να επαναλάβουν τη διαδικασία. Η συζήτηση για την εύρεση της κατάλληλης γωνίας εκτυλίχθηκε χωρίς δυσκολίες και παρουσιάζεται μέσα από τα παρακάτω στιγμιότυπα. Είναι εντυπωσιακό ότι η Ο3 συνέχισε να «διορθώνει» μικρές λεπτομέρειες στο τελικό μοντέλο του άστρου μέχρι να παράξει κάτι που να αρέσει σε όλα τα μέλη της. Για παράδειγμα, η Μ9 επέμενε να κρύψουν «τις περιττές γραμμές». Η σύμπραξη των μελών προς μία κοινή τελική κατασκευή φανερώνει πως η επιμονή και η συνεργατικότητά τους αξιοποιήθηκαν προς την επίτευξη κάποιου κοινού στόχου.



εκτέλεση της διαδικασίας του ισοπλεύρου, δοκιμαστική (τυχαία) στρέψη και επανάληψη της διαδικασίας του ισοπλεύρου

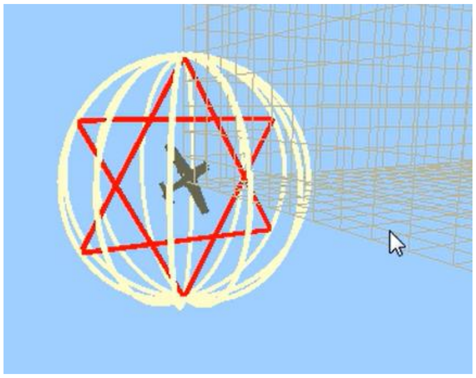


εύρεση της «κατάλληλης» στρέψης πριν την επανάληψη

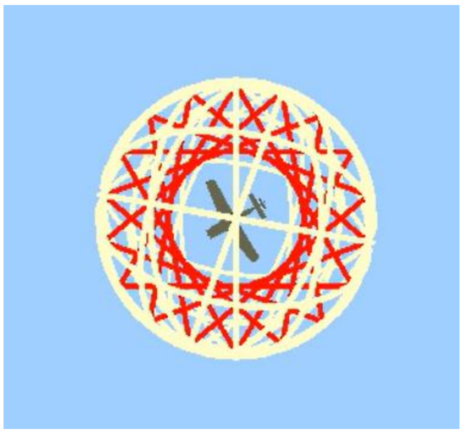


απόκρυψη των «περιττών» ιχνών ώστε να ικανοποιεί τα αισθητικά κριτήρια της ομάδας

Εικόνα 19: Στιγμιότυπα της προσπάθειας της Ομάδας 3 για τη Β΄Φάση



ο Μ7 αφού ολοκληρώθηκε η διπλανή κατασκευή, έδωσε την ιδέα να φτιάξουν άστρο με πιο πολλές κορυφές, σαν το παρακάτω

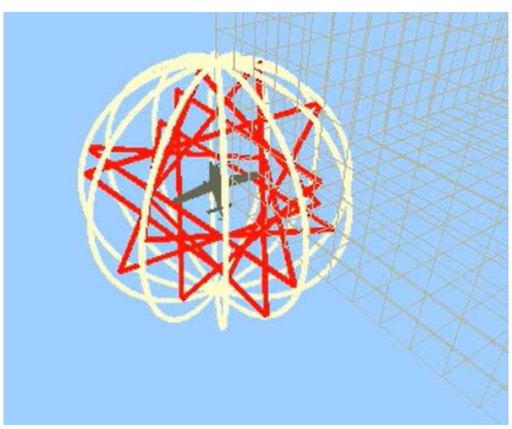


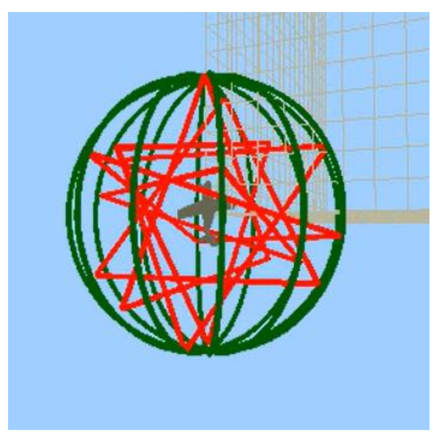
αυτό είναι το τελικό μοντέλο - προϊόν της Ο3 για την ολοκλήρωση της Β’ Φάσης

Εικόνα 20: Στιγμιότυπα της προσπάθειας της Ομάδας 3 για τη Β΄ Φάση

<u>Για τη Γ΄Φάση</u>

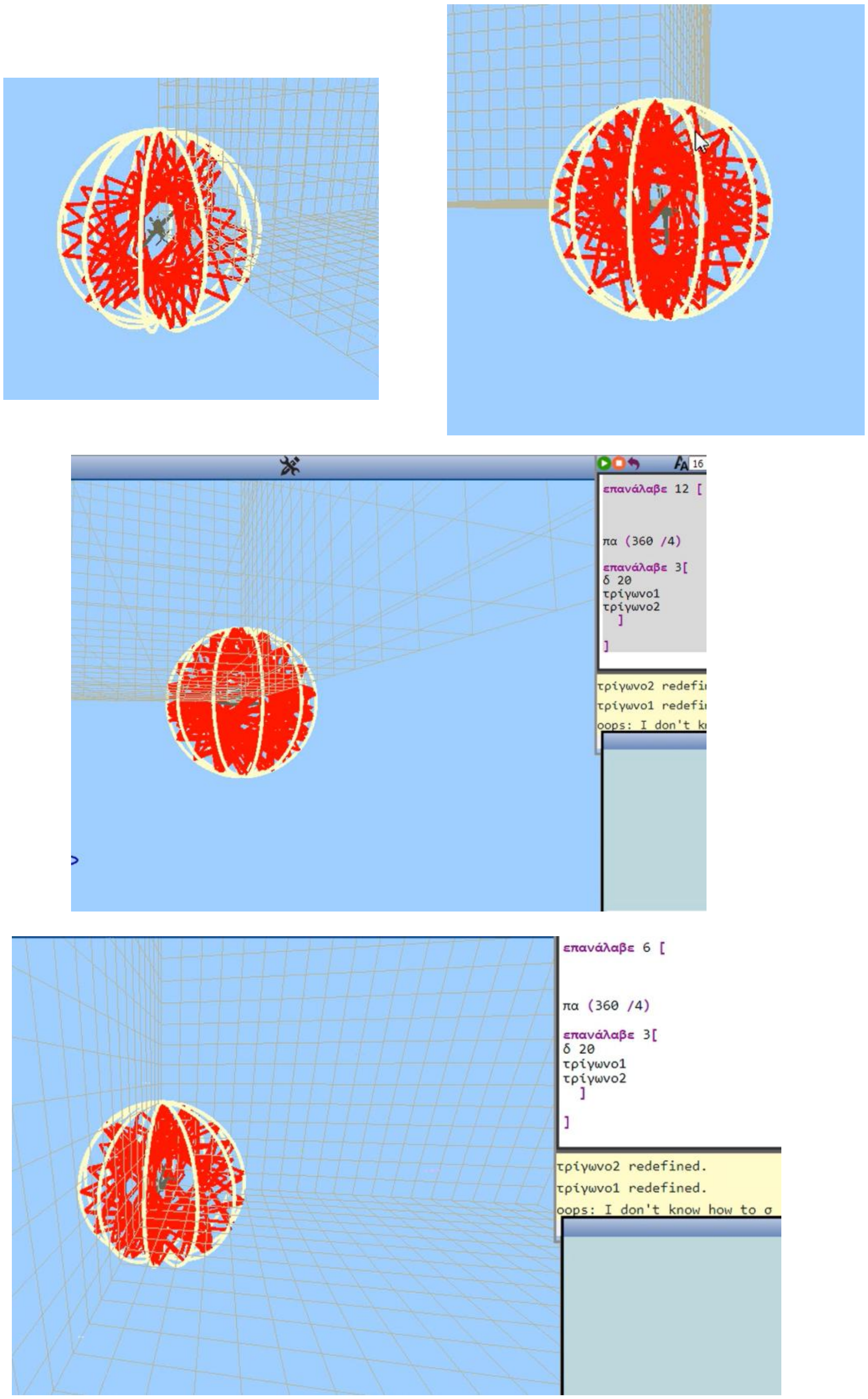
Για την παραγωγή τρισδιάστατου αντικειμένου, τα παιδιά της Ο3 κατά φυσιολογικό τρόπο χρησιμοποιούν και πάλι ως μονάδα επανάληψης το ισόπλευρο και το επαναλαμβάνουν πολλές φορές, στρέφοντάς το όχι μόνο κατά το κέντρο του, μα και κατά άξονες, που ο καθένας είναι ένας μέγιστος κύκλος. Παραθέτουμε κατά σειρά τα στιγμιότυπα που ακολουθούν. Αλλάζουν το πλήθος των στροφών και πειραματίζονται ως προς το τι είναι «πιο ωραίο».





Εικόνα 21: Στιγμιότυπα της προσπάθειας της Ομάδας 3 για τη Γ' Φάση

Οι διαδοχικές δοκιμές και αλλαγές οδηγούν την Ο3 στο τελευταίο από τα παρακάτω μοντέλα, το οποίο ονόμασαν «Χριστουγεννιάτικο στολίδι για το δέντρο», στη μεταξύ τους συζήτηση. Η σημασία του είναι πολύ μεγάλη, γιατί σηματοδοτεί το τέλος μίας δύσκολης και ενδιαφέρουσας πορείας, αποτελεί μία κοινοτική κατασκευή και παριστάνει την μοντελοποίηση κάποιας οντότητας με νόημα και υπόσταση - μία δημιουργία με νόημα.

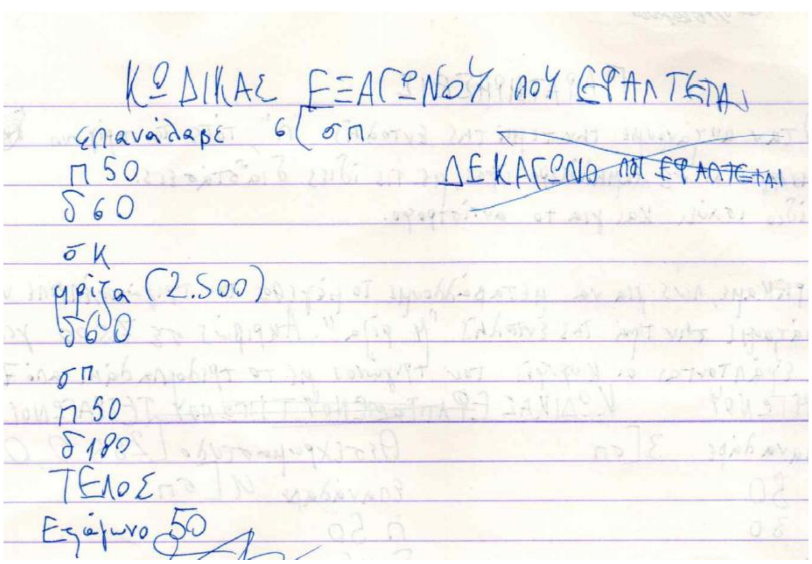


Εικόνα 22: Στιγμιότυπα της προσπάθειας της Ομάδας 3 για τη Γ' Φάση

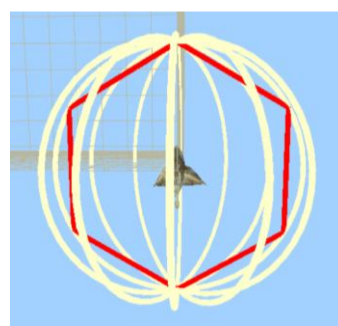
<u>**Ομάδα 4 (Ο4)**</u>

Για τη Β΄Φάση, η Ο4 εμπλέκεται σε μία διαδικασία, η οποία στον αρχικό σχεδιασμό αποτελούσε ζητούμενο, αλλά τελικά, όπως αναλύσαμε αποφασίστηκε να παραμείνει εκτός της τελικής εκδοχής του Φύλλου Εργασίας. Και εδώ, εκπλήσσει όχι μόνο η υλοποίηση της ιδέας, αλλά και η πρωτοβουλία, η έμπνευση και η δημιουργικότητα των παιδιών με το ψηφιακό εργαλείο.
Αποτελεί άλλο ένα στιγμιότυπο όπου τα παιδιά γίνονται υποκείμενα της γνωστικής πορείας και ελέγχουν την έκβαση των νοηματοδοτήσεων και των γενικεύσεών τους. Υπενθυμίζεται ότι από την Ο4 μπορέσαμε να συλλέξουμε μόνο σημειώσεις πεδίου, σημειώσεις των παιδιών και τα αρχεία με τα μοντέλα που παρήγαγαν, διότι δεν αποτελούσε εξ αρχής ομάδα που επρόκειτο να παρακολουθηθεί στενά και να μαγνητοφωνηθεί ή/και καταγραφεί η οθόνη τους. Οπότε δυστυχώς στερούμαστε την αναλυτική πορεία σκέψης τους, και δεν μπορούμε να αναλύσουμε, παρά να παραθέσουμε τα τελικά τους αποτελέσματα, επιχειρώντας μία μικρή ερμηνεία.

Η κανονικότητα ως αναλλοίωτο, κοινό χαρακτηριστικό του ισοπλεύρου και του τετραγώνου, ίσως συλλαμβάνεται από τα παιδιά κατά την Α΄ Φάση, και για αυτό επιχειρούν να την εξερευνήσουν για μεγαλύτερο πλήθος πλευρών, προσαρμόζοντας τους κώδικες και τις σχέσεις γωνιών-πλευρών. Γράφουν τη διαδικασία για το κανονικό εξάγωνο.



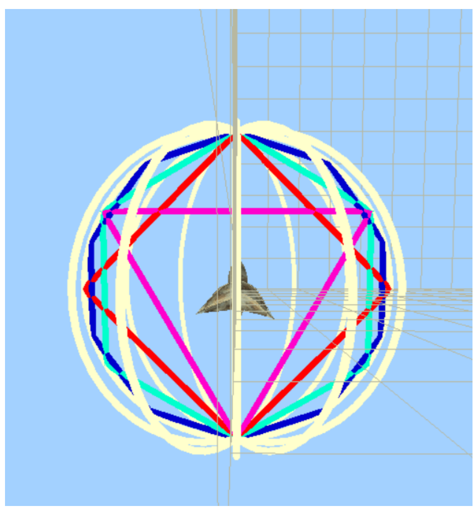
Εικόνα 23: Κώδικας για την εγγραφή 6-γώνου



Εικόνα 24: Η Ομάδα 4 εγγράφει στο τρελομπαλάκι το κανονικό εξάγωνο

Στη συνέχεια, προχωράνε στην κατασκευή δεκαγώνου. Στο τελευταίο στιγμιότυπο αποτυπώνεται η εκτέλεση όλων των διαδικασιών της Ο4: το δοσμένο τετράγωνο, το ισόπλευρο, το κανονικό εξάγωνο και το κανονικό δεκάγωνο, όλα εγγράψιμα σε κύκλο ακτίνας 50. Αν μας δινόταν η ευκαιρία να συνεχίσουμε τη διερεύνηση, θα επιχειρούσαμε να μελετήσουμε στοχευμένα:

- πώς θα αποτύπωναν, τεκμηρίωναν, αιτιολογούσαν την πορεία από το αρχικό σχήμα προς το δεκάγωνο
- αν και πώς θα συνέχιζαν προς ακόμα μεγαλύτερο πλήθος πλευρών
- το τελευταίο ερώτημα θα μπορούσε να επεκταθεί προς δύο κατευθύνσεις
  - θα γεννιόταν η ανάγκη μετά από αρκετές προσπάθειες να εισαχθεί μεταβλητή για το πλήθος των πλευρών; πώς θα συνέτασσαν τη γενικευμένη διαδικασία;
  - θα προέκυπτε ίσως μοιραία μία συζήτηση γύρω από την πολυγωνική προσέγγιση του κύκλου;



Εικόνα 25: Παρουσίαση όλων των εγγράψιμων που παρήγαγε η Ομάδα 4. Υπάρχει το δοσμένο τετράγωνο, και τα δικά τους παραγόμενα: ισόπλευρο, 6-γωνο και 10-γωνο

Συμπεράσματα

Ο σχεδιασμός της έρευνας αποτελείται από δραστηριότητες οι οποίες προσεγγίζουν με έναν μη συμβατικό, διδακτικά, τρόπο την παραδοσιακή διδασκαλία και τείνει να επαναδιαπραγματευτεί την θέση της απόδειξης στη σχολική πραγματικότητα. Το ζήτημα της εγγραψιμότητας αποτέλεσε το εφαλτήριο για μία ανοιχτή διερεύνηση στα πλαίσια μιας κοινότητας πρακτικής. Δουλεύοντας με το προγραμματιστικό εργαλείο MaLT2, τα παιδιά ήρθαν αντιμέτωπα με μία δημιουργική πρόκληση, την παραγωγή μοντέλων για τη διακόσμηση του εσωτερικού μίας τρελόμπαλας.

Η πρόκληση αυτή ήταν σκόπιμα απομακρυσμένη από το ύφος των τυπικών μαθηματικών δραστηριοτήτων και απέκρυπτε τα μαθηματικά που βρίσκονται πίσω από το πρόβλημα. Οι στόχοι που τέθηκαν ήταν εξ αρχής ανοιχτοί: να καταγράψουμε πώς τα παιδιά αντιλαμβάνονται την εγγραψιμότητα, πώς τη νοηματοδοτούν και εν συνεχεία πώς προσπάθησαν να την «πετύχουν» στα πλαίσια του δεδομένου προβλήματος. Κατά την πορεία της έρευνας συλλέχθηκαν στιγμιότυπα που αφορούν την παραγωγή νοημάτων, τη διατύπωση κριτηρίων, αιτιολογήσεων και επιχειρημάτων που προέκυψαν κατά το μαστόρεμα των μοντέλων και της συνέργειας μέσα στην κάθε ομάδα. Τι αποκομίσαμε όμως, επί του συγκεκριμένου, από όλα αυτά;

Κατά την Α΄ Φάση, τα παιδιά διερεύνησαν το ζήτημα της εγγραψιμότητας σχημάτων σε κύκλο μέσα από τη διόρθωση δοσμένων κωδίκων. Μελετώντας το προβληματικό πλαίσιο του μικρόκοσμου που σχεδιάστηκε για αυτό το σκοπό, ξεκίνησαν να δομούν νοήματα και να ανακαλύπτουν λόγους πίσω από την εγγραψιμότητα -ή όχι- σε κύκλο, συνδέοντας την δοσμένη κατάσταση με μαθηματικές ιδιότητες και έννοιες που εντοπίζονταν στα μοντέλα. Στην προσπάθειά τους να διορθώσουν το ενσφάλματο μοντέλο για το ισόπλευρο τρίγωνο, ώστε να το εγγράψουν σε κύκλο (και ακολούθως σε σφαίρα), διατύπωσαν εν συνεχεία κριτήρια και έλαβαν αποφάσεις που σχετίζονταν με τις εντολές που έπρεπε να δώσουν στο πρόγραμμα. Στις δύο επόμενες φάσεις, τα παιδιά επέκτειναν τις γνώσεις τους για να παράγουν τα δικά τους μοντέλα.

Παρατηρήθηκαν σχέσεις και συνδέσεις ανάμεσα στους άξονες των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, εντοπίζεται ότι οι νοηματοδοτήσεις των παιδιών (πρώτος άξονας αποτελεσμάτων), διαμόρφωσαν τα κριτήρια που κατόπιν διατυπώθηκαν (δεύτερος άξονας αποτελεσμάτων) και εν πολλοίς καθόρισαν ποιες έννοιες αναδύθηκαν και διασυνδέθηκαν για την επίλυση του προβλήματος και την ορθή παραγωγή των μοντέλων (τρίτος άξονας αποτελεσμάτων). Επί παραδείγματι, η ομάδες 1 και 2 που συσχέτισαν την εγγραψιμότητα με το μέγεθος, προσπάθησαν να αυξήσουν το μήκος των πλευρών του ισοπλεύρου ώστε να επιτύχουν την εγγραψιμότητά του και δυσκολεύτηκαν στην εκσφαλμάτωση του μοντέλου. Αντιθέτως η Ομάδα 3, που εστίασε την προσοχή της στη θέση του κέντρου του ισοπλεύρου ως προς το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, ακολούθησε μία ολότελα διαφορετική πορεία. Η ανάγκη εύρεσης του κέντρου, προκάλεσε την κατασκευή υψών ώστε να αναζητηθεί το σημείο τομής τους και αυτή η ιδέα, με την σειρά της, έφερε στην επιφάνεια τις τριγωνομετρικές συσχετίσεις των πλευρών του ισοπλεύρου με τα ύψη του. Συνακόλουθα, η Ομάδα 3 συσχέτισε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές του ισοπλεύρου. Αυτή η ακολουθία νοητικών σκαλοπατιών, τα οποία βρίσκονται σε άρρηκτη σχέση αιτιότητας μεταξύ τους, σηματοδοτεί μία εντυπωσιακή μαθηματική πορεία σκέψης, κοινοτικά κατασκευασμένης.

Αναμφισβήτητα, αυτό που συνέδεσε τις νοηματοδοτήσεις, τις διατυπώσεις κριτηρίων και τις διασυνδέσεις εννοιών (δηλαδή ανάμεσα στις τρείς πρώτες ομάδες αποτελεσμάτων), είναι το κοινωνικο-τεχνολογικό πλαίσιο (τέταρτος άξονας αποτελεσμάτων) και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του. Το ψηφιακό εργαλείο και η διερευνητική εργασία σε μικρές ομάδες διαδραμάτισαν καταλυτικό ρόλο στη διαμόρφωση της συνθήκης εργασίας και μάθησης.

Αρχικά, οι συνθήκες του μικρόκοσμου που σχεδιάστηκε, καθόρισαν τις αφαιρέσεις και τις γενικεύσεις που συντελέστηκαν. Ως ξεκάθαρη έκφραση τους, λάβαμε τα παραγόμενα μοντέλα και τις αιτιολογήσεις που έγιναν. Επίσης, οι προσπάθειες εκσφαλμάτωσης, καθώς και άλλες διεργασίες Υπολογιστικής Σκέψης [CT] ή η ανάστροφη μηχανική [Reverse Engineering] συντελέστηκαν, ακριβώς εξαιτίας, και με χρήση του ψηφιακού εργαλείου, στα πλαίσια του συγκεκριμένου προγραμματιστικού περιβάλλοντος. Δεν θα ήταν άστοχο λοιπόν, να ισχυριστεί κανείς πως σε οποιοδήποτε άλλο παραδοσιακό μαθησιακό περιβάλλον, τα αποτελέσματα της έρευνας δεν θα ήταν τα ίδια, ακόμα και αν συμμετείχαν ακριβώς τα ίδια άτομα.

Διαπιστώσαμε πως το εργαλείο έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην παραγωγή νοημάτων και αιτιολογήσεων: προώθησε την ανάγκη για παραγωγή αιτιολογήσεων και έφερε στο προσκήνιο, κατά τρόπο ουσιαστικό και καίριο, τον μαθηματικό φορμαλισμό - αντί να τον παρακάμπτει τεχνηέντως. Οι συμπεριφορές, οι αποφάσεις και τα επιχειρήματα που καταγράφηκαν καταδεικνύουν πώς ο μικρόκοσμος που σχεδιάστηκε φαίνεται να ικανοποίησε τους στόχους και τις προοπτικές της έρευνας. Αποτέλεσε ένα έδαφος πρόσφορο για την κατασκευή νοημάτων εντός του Εννοιολογικού Πλαισίου της Εγγραψιμότητας και την ανάπτυξη της τάσης για αιτιολογήσεις, καθώς επίσης και για την ανάπτυξη γενικευμένων σκέψεων.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι εδώ, η πορεία της Ομάδας 4 που, με αφορμή τους δοσμένους κώδικες, προχώρησε γενικευτικά στο γράψιμο κώδικα που εγγράφει στο δοσμένο κύκλο ένα κανονικό εξάγωνο και ένα κανονικό δεκάγωνο. Η προσπάθεια της ομάδας αυτής είναι πολλά υποσχόμενη, από την άποψη ότι φαίνεται να οδεύει προς την κατεύθυνση της παραγωγής μιας γενικευμένης διαδικασίας, τη σύνταξη δηλαδή ενός προγράμματος που θα μπορούσε να εγγράψει οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο σε κύκλο σταθερής, ή αργότερα, μεταβλητής ακτίνας. Αποτελεί ένα στιγμιότυπο που εξέπληξε την ερευνήτρια καθώς η ίδια, όπως είδαμε, είχε σχεδιάσει -πριν την πιλοτική φάση- μία αντίστοιχη δραστηριότητα αλλά, στα πλαίσια του επανασχεδιασμού χρειάστηκε να την αφαιρέσει από την τελική διδακτική παρέμβαση που δόθηκε στα παιδιά. Διαφαίνεται ότι τα παιδιά εμπνεύστηκαν από τον ίδιο το μικρόκοσμο και τις εκφραστικές δυνατότητες του εργαλείου και, προχώρησαν αυτοβούλως σε μία πορεία γενίκευσης.

Ακόμα, στεκόμαστε στο ότι το κοινωνικό περιβάλλον και οι νόρμες του, επηρέασαν το πώς διατυπώθηκαν και υποστηρίχθηκαν τα επιχειρήματα, οι ιδέες, οι απόψεις των ατόμων ενώπιων των άλλων μελών της κοινότητας πρακτικής, ακόμα και η σύμπραξη με το εργαλείο. Η ύπαρξη ενός κοινού στόχου ήταν αυτή που ανέδειξε, συμπεραίνουμε, την ανάγκη παραγωγής επιχειρημάτων και αιτιολογήσεων. Μπορεί, κάποιες φορές, να στερούνταν -όπως είδαμε- μαθηματικής τυπικότητας ή ακόμα και της φόρμας μίας αποδεικτικής διαδικασίας, αλλά έφεραν μέσα τους, πλέον έντονα, το σπόρο της ανάγκης να πείσουν, να εδραιώσουν τη θέση τους μέσα στην κοινότητα πρακτικής και να συναποφασίσουν το τελικό αποτέλεσμα. Σε όλες τις φάσεις της διεξαγωγής της έρευνας, το επικοινωνιακό πλαίσιο εντός των ομάδων παρατηρήθηκε πως ήταν ιδιαιτέρως πυκνό. Τα παιδιά επιχειρηματολογούσαν, αναζητούσαν αιτίες και εφεύρισκαν τρόπους να πείσουν τα άλλα μέλη της ομάδας. Προσπαθούσαν έντονα -και πολύ σημαντικό, για λογαριασμό τους- να δικαιολογήσουν τα λεγόμενά τους ή επέμεναν με ερωτήσεις να βεβαιωθούν για την ορθότητα των λεγόμενων των άλλων.

Ως προς την πρόθεση της ερευνήτριας να σχεδιάσει και να υλοποιήσει μία παρέμβαση με αφετηρία το ζητούμενο της εγγραψιμότητας, για να διερευνήσει εάν -και κατά πόσο- το θέμα αυτό αποτελεί ένα καλό Εννοιολογικό Πεδίο για την ανάπτυξη διασυνδεδεμένων νοημάτων και την παραγωγή αιτιολογήσεων, τα αποτελέσματα της έρευνας είναι θετικά. Προέκυψαν, σημειώσαμε, πλούσιες συνδέσεις νοημάτων εντός του εννοιολογικού πεδίου της εγγραψιμότητας, καθώς τα παιδιά, παρακολουθήσαμε πως «ελίσσονταν» σε διαφορετικές μαθηματικές περιοχές -με δική τους, μάλιστα, πρωτοβουλία. Αντλούσαν ιδέες από διαφορετικά πεδία, από τη Γεωμετρία, την Τριγωνομετρία, και συνέθεταν νέα νοήματα στην προσπάθειά τους να αρθρώσουν επιχειρήματα και να παράγουν αιτιολογήσεις.

Καταγράφηκε ένα πλήθος επεκτάσεων και συνδέσεων που αυτοβούλως πραγματοποίησαν τα παιδιά σε σχέση με μαθηματικές έννοιες. Ενώ δεν είναι σπάνιο να καταγράφονται στη βιβλιογραφία δυσκολίες των παιδιών Γυμνασίου στη σύνδεση εννοιών από διαφορετικά πεδία της μαθηματικής επιστήμης, στη γόνιμη ένταξη τους σε κάποια διαδικασία επίλυσης προβλήματος ή στην παραγωγή μίας απόδειξης, η πορεία της παρούσας έρευνας έρχεται να αμφισβητήσει την παραπάνω θέση. Κατέδειξε ότι τα παιδιά, ερχόμενα αντιμέτωπα με μία πρόκληση σχεδιασμένη σε ένα πλούσιο εννοιολογικό πεδίο -εδώ, αυτό της εγγραψιμότητας- ξεπερνούν τα εμπόδια και κάποιες «αναμενόμενες» δυσκολίες, εργάζονται πολυεπίπεδα και συνδυαστικά, επιστρατεύοντας τη φαντασία, τη δημιουργικότητα και την εφευρετικότητά τους - όπως θα έκαναν και στα πλαίσια ενός παιχνιδιού ή μιας δραστηριότητας με προσωπικό νόημα για αυτά.

Προκύπτει -όπως ακριβώς σημείωνε και η Hoyles (1997)- ότι η διασυνδεδεμένη προσέγγιση που σχεδιάστηκε, διατρέχοντας το Αναλυτικό Πρόγραμμα και συνδιαλεγόμενη κριτικά μαζί του, ενίσχυσε τη μαθηματική δραστηριότητα και καλλιέργησε την τάση για πλούσιες νοηματοδοτήσεις και αιτιολογήσεις. Η παρούσα έρευνα μας χάρισε μία σειρά από εκπλήξεις: κάποια αξιόλογα, εντυπωσιακά και απρόβλεπτα πορίσματα! Πριν την υλοποίηση της παρέμβασης δεν θα μπορούσαν επ΄ουδενί να προβλεφθούν όλες οι νοητικές συνδέσεις και οι «διαδρομές» που έγιναν, ούτε οι δημιουργικές συνθέσεις των παιδιών σε εννοιολογικό και συνδυαστικό επίπεδο - οι οποίες μεταφράστηκαν και υλοποιήθηκαν κατά την παραγωγή των μοντέλων της Β΄ και Γ΄ Φάσης.

Ας σταθούμε σε κάποιες παρατηρήσεις για το ύφος της έρευνας. Το προβληματικό πλαίσιο που τέθηκε, είχε εξαρχής μία παιγνιώδη χροιά και τελικά αποδείχθηκε ικανή συνθήκη ώστε τα παιδιά να ξετυλίξουν τη δημιουργικότητά τους στα πλαίσια μίας γνήσιας μαθηματικής κατάστασης. Κατά κύριο λόγο επέδειξαν αξιοθαύμαστη συνέπεια ως προς το πλαίσιο εργασίας, έδειξαν να τα ενδιαφέρει πραγματικά η κατασκευή και να τα νοιάζει το τελικό αποτέλεσμα. Θα το συγκαταλέγαμε αυτό, στα θετικά στοιχεία της ερευνητικής προσπάθειας, καθώς έφερε στο προσκήνιο την αξία και τη γοητεία των μαθηματικών. Τα παιδιά λειτούργησαν μαθηματικά, με ανοιχτό τρόπο, χαρά και χιούμορ· ξεχνώντας τα κεφάλαια και τις υποενότητες του Αναλυτικού Προγράμματος ή την τυπικότητα με την οποία έχουν συνηθίσει να προσεγγίζουν τις ασκήσεις και τις δραστηριότητες στο μάθημα των Μαθηματικών. Η λαχτάρα της Ομάδας 3 να προσπαθεί -ακόμα και μετά την ολοκλήρωση της Γ΄ Φάσης- να επέμβει στο τρελομπαλάκι ώστε να δώσουν μία τελική μορφή που θα τους ικανοποιούσε όχι μόνο μαθηματικά αλλά και αισθητικά, είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. Υπενθυμίζουμε, το σχόλιο αυτό αφορά στο ότι ήθελαν να μειώσουν τις περιστροφές της οντότητάς τους, ώστε να προκύψει ένα τρισδιάστατο μοντέλο λιγότερο «φλύαρο», και οπτικά πιο «καθαρό».

Από τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας, γεννιούνται κάποιες σκέψεις για τις προοπτικές που διανοίγονται εφεξής. Θα μπορούσε η εγγραψιμότητα να αποτελέσει ένα ευρύτερο πλαίσιο μελέτης, γύρω από το οποίο θα μπορούσαν να σχεδιαστούν και να αναπτυχθούν πόροι και εκπαιδευτικό υλικό για τα Μαθηματικά της Γ΄ Γυμνασίου. Επίσης, θα μπορούσε να επεκταθεί ώστε να απευθύνεται σε παιδιά και άλλων τάξεων ή να επανέρχεται κυκλικά, διατρέχοντας τις διάφορες εκπαιδευτικές βαθμίδες, προσαρμοζόμενο κάθε φορά στο γνωστικό επίπεδο, τις απαιτήσεις και τις δεξιότητες κάθε ηλικίας.

Σε επίπεδο εκπαιδευτικής πρακτικής, η υλοποίηση του σχεδιασμού φέρνει στην επιφάνεια ζητήματα που αφορούν το ρόλο των εκπαιδευτικών σε ένα τέτοιο, συνεχώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον τάξης, όπως αυτό που προέκυψε. Η διαρκής ετοιμότητα και η διακριτική παρουσία των εκπαιδευτικών κρίνεται απαραίτητη. Η συμμετοχή τους στο διερευνητικό «παιχνίδι» καλό θα ήταν να εκφράζεται μέσα από εύστοχες παρατηρήσεις και κρίσιμες ερωτήσεις. Όπως είδαμε, κάποιες φορές τα παιδιά θέλησαν να αποφύγουν μία αυστηρή αιτιολόγηση ή έτειναν να την παρακάμψουν. Τα «γιατί;» των εκπαιδευτικών σε τέτοια σημεία, ή οι επίμονες ερωτήσεις τους προς τα παιδιά, για να εξηγήσουν τις σκέψεις τους και για να αναλύσουν τους ισχυρισμούς τους, εξασφαλίζουν ότι η πορεία προς την κατασκευή της νέας γνώσης είναι μία πορεία μεθοδική και δεν θα αφεθεί στην τυχαιότητα ή απλώς στην οπτική επιβεβαίωση την οποία μπορεί να μας εξασφαλίζει το εργαλείο.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδωσε κάποια στοιχεία που απαντούν στους αρχικούς προβληματισμούς μα, ως επί το πλείστον, γεννά στην ερευνήτρια την ανάγκη να επιχειρήσει να καταπιαστεί με το ζήτημα της εγγραψιμότητας και σε επόμενους κύκλους έρευνας. Θα μπορούσε η μελέτη του ζητήματος να επεκταθεί προς την διερεύνηση της εγγραψιμότητας και σε άλλα σχήματα -πέραν του κύκλου, ή της εγγραψιμότητας μιας τρισδιάστατης φιγούρας σε μία σφαίρα, ένα πρίσμα ή σε έναν κύβο. Μία άλλη κατεύθυνση θα ήταν μια μελλοντική έρευνα να εμβαθύνει στο πώς παιδιά διαφορετικών ηλικιών θα καταπιάνονταν με το πρόβλημα. Άλλωστε το εννοιολογικό πεδίο το οποίο ανοίγεται μπροστά μας φαίνεται να είναι ιδιαίτερα πλούσιο.

Αρθρώνεται, τέλος, ένα ελπιδοφόρο πρόταγμα: μια διαφορετική διάρθρωση των αναλυτικών προγραμμάτων και μια διαφορετική διδακτική αξιοποίηση των τεχνολογιών, θα ήταν δυνατό να προάγει μία εντελώς διαφορετική κουλτούρα γύρω από τα Μαθηματικά, την Υπολογιστική Σκέψη, την Αιτιολόγηση και την Απόδειξη -που όπως φαίνεται, θα μας εκπλήξει ευχάριστα.

Βιβλιογραφία

1. Abelson, H., & DiSessa, A. (1981). Turtle Geometry: The computer as a Medium for Exploring Mathematics. Cambridge, M.A.: MIT Press.

2. Balacheff, N. (1988).A study of pupils' proving processes at the junior high school level. Unpublished paper presented at the Joint International Conference 66th NCTM and UCSMP Project, Chicago.

3. Ball, Deborah & Hoyles, Celia & Jahnke, Hans & Movshovitz-Hadar, Nitsa. (2003). The Teaching of Proof.

4. Benton L. & Hoyles C. & Kalas I. & Noss R. (2016). Building mathematical knowledge with programming: insights from the ScratchMaths project.

5. Benton, L., Hoyles, C., Kalas, I. et al. (2017) Bridging Primary Programming and Mathematics: Some Findings of Design Research in England. Digit Exp Math Educ 3, 115–138

6. Chevallard, Y. Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In The proceedings of the 12th international congress on mathematical education, 2012

7. Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. Educational researcher, 32(1), 9-13.

8. Cobb, P., McClain, K., Lamberg, T. d., & Dean, C. (2003). Situating Teachers‟ Instructional Practices in the Institutional Setting of the School and District. Educational Researcher , 32 (6), 13-24.

9. Collins, A. (1992). Toward a design science of education. In New directions in educational technology (pp. 15-22). Springer, Berlin, Heidelberg.

10. Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. The Journal of the learning sciences, 13(1), 15-42.

11. DiSessa, A. (1991). Epistemological micromodels: The case of coordination and quantities. In J. Montanegro, & A. Tryphon (Eds.), Psychologie génétique et sciences cognitives, 169-194.

12. Disessa, Andrea & Cobb, Paul. (2004). Ontological Innovation and the Role of Theory in Design. Journal of the Learning Sciences. 13. 10.1207/s15327809jls1301_4.

13. Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics

and curriculum theory. Journal of Curriculum Studies, 32:6, 777-796. https://doi.org/10.1080/00220270050167170

14. Grizioti, M., Kynigos, C. (2021) Code the mime: A 3D programmable charades game for computational thinking in MaLT2. British Journal of Educational Technology, Wiley, UK., 52(3), 1004-1023

15. Grizioti M. , Kynigos C. (2019). Computer-based learning, computational thinking, and constructionist approaches, In Arthur Tatnall (Eds.) Encyclopedia of Education and Information Technologies. Springer

16. Grover, S., & Pea, R. (2017). Computational Thinking: A Competency Whose Time Has Come. In Computer Science Education. doi:10.5040/9781350057142.ch-003

17. Hanna, Gila. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. Educational Studies in Mathematics. 44. 5-23. 10.1023/A:1012737223465.

18. Hanna, Gila. (1990). Some pedagogical aspects of proof. Interchange. 21. 6-13. 10.1007/BF01809605.

19. Harel, I. E., & Papert, S. E. (1991). Constructionism. Ablex Publishing.

20. Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: making connections with computers?. Mathematical Thinking and learning, 1(1), 59-84.

21. Healy, L. Kynigos, C. (2010) Charting the microworld territory over time: design and construction in learning, teaching and developing mathematics, The International Journal of Mathematics Education, ZDM, Springer Verlag, 42. 63-76

22. Hoyles, C. (1987). Tools for Learning – Insights for Mathematics Educator from a Logo Programming Environment. For the Learning of Mathematics, 7(2), 32-37.

23. Hoyles, C. (1997). The Curricular Shaping of Students’ Approaches to Proof. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 7–16. http://www.jstor.org/stable/40248217

24. Kafai, Y., & Resnick, M. (Eds.) (1996). Constructionism in Practice. Designing, Thinking and Learning in a Digital World. Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

25. Katz, Victor J. (1998). A history of mathematics : An introduction. Second Edition. Addison-Wesley Longman Inc.

26. Κυνηγός Χ., Το Μάθημα της Διερεύνησης, Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών (από την έρευνα στη σχολική τάξη), 2011, Εκδόσεις Τόπος

27. Kynigos, C. Children's inductive thinking during intrinsic and Euclidean Geometrical activities in a computer programming environment. Educ Stud Math 24, 177–197 (1993). https://doi.org/10.1007/BF01273691

28. Kynigos C., Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design?, Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education, Springer International Publishing Switzerland 2015, S.J. Cho (ed.)

29. Kynigos, C., & Grizioti, M. (2018). Programming approaches to computational thinking: Integrating Turtle geometry, dynamic manipulation and 3D Space. Informatics in Education, 17(2), 321-340.

30. Kynigos, C. (2007b). Half-baked Logo microworlds as boundary ogjects in integrated design. Informatics in Education , 6 (2), 335-358.

31. Kynigos, C. (2007a). Half-baked Microworlds in Use in Challenging teacher educators' knowing. *International Journal of Computers for Mathematical Learning , 12* (2), p. 87-111.

32. Laborde C., Kynigos C., Hollebrands & Straesser, Teaching and Learning Geometry with Technology, Á. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), 2006, Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, 275- 304.

33. Lakatos, I. (1976) Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

34. Lave, J. (1988). Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life. Cambridge University Press.

35. Lee, J. K. (2002) Philosophical perspectives on proof in mathematics education. Philosophy of Mathematics Education, 16. http ://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome16/docs/lee.pdf

36. Lee I, Martin F, Denner J et al (2011) Computational thinking for youth in practice. ACM Inroads 2(1): 32–37

37. Liu X, Wang X, Xu K, Hu X. Effect of Reverse Engineering Pedagogy on Primary School Students’ Computational Thinking Skills in STEM Learning Activities. Journal of Intelligence. 2023; 11(2):36.

38. Mariotti, M. A. (1997) Justifying and Proving in Geometry: the Mediation of a Microworld. Preuve Proof Prueda Web Newsletter. November/December 1997. http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Mariotti/Mariotti97a/Mariotti97a.html

39. Mariotti, M. A. (2000) Introduction to proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. Educational Studies in Mathematics, 44(1/2): 25-53. http://www.springerlink.com/content/lh5t8t2w01463232/BodyRef/PDF/10649_2004_Article_357658.pdf

40. Mariotti M., Proof and Proving in Mathematics Education, Á. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), 2006, Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, 173- 204.

41. Mitchelmore, M. C., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. Educational Studies in Mathematics, 41(3), 209-238.

42. Nardi, E., & Knuth, E. (2017). Changing classroom culture, curricula, and instruction for proof and proving: how amenable to scaling up, practicable for curricular integration, and capable of producing long-lasting effects are current interventions? Educational Studies in Mathematics, 96(2), 267–274. http://www.jstor.org/stable/45185372

43. Νεγρεπόντης Στ & Φαρμάκη Β. (2019) , Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, Τόμος Ι, Εκδόσεις Εκρεμμές

44. Nessa, W. and Nugraha, Y. (2019). Relationship between computational thinking and number sense ability among fifth-grade students in bandung indonesia. People International Journal of Social Sciences, 5(3), 224-232. https://doi.org/10.20319/pijss.2019.53.224232

45. Noss, R. & Hoyles, C. (1996). Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

46. Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The Construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic. Educational Studies in Mathematics, 33(2),203–233.

47. Noss, R. (2020). Making constructionism work at scale: the story of scratchmaths., 39-52. https://doi.org/10.7551/mitpress/12091.003.0007

48. Papert, S. (1980). Mindstorms. Children, Computers and Powerful Ideas. Boston, Massachusetts: Harvester Press.

49. Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating Constructionism. Ablex Publishing Corporation.

50. Retrieved from: https://web.media.mit.edu/~calla/web_comunidad/Reading-En/situating_constructionism.pdf

51. Piaget, J. (1975). Comments on mathematical education. Contemporary education, 47(1), 5.

52. Radford L. , Barwell R., Language in Mathematics Education Research, Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), 2016, The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, 275–313.

53. Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernández, A. R., Eastmond, N. E., Brennan, K., Millner, A., Rosenbaum, E., Silver, J., Silverman, B., & Kafai, Y. (2009). Scratch: programming for all. Communications of the ACM, 52, 60–67.

54. Riling M., "Recognizing Mathematics Students as Creative: Mathematical Creativity as Community-Based and Possibility-Expanding," Journal of Humanistic Mathematics, Volume 10 Issue 2 (July 2020), pages 6-39.

55. Sanford, J. and Naidu, J. (2016). Computational thinking concepts for grade school. Contemporary Issues in Education Research (Cier), 9(1), 23-32. https://doi.org/10.19030/cier.v9i1.9547

56. Sanford, J. and Naidu, J. (2017). Mathematical modeling and computational thinking. Contemporary Issues in Education Research (Cier), 10(2), 158-168. https://doi.org/10.19030/cier.v10i2.9925

57. Shoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.

58. Skemp, R. R. (2012). The psychology of learning mathematics: Expanded American edition. Routledge.

59. Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the Transition from Empirical Arguments to Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 314–352. http://www.jstor.org/stable/40539339

60. Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321. http://www.jstor.org/stable/30034869

61. Stylianides, G. J. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9–16. http://www.jstor.org/stable/40248592

62. Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. Human Development, 52(2), 83–94.

63. Vygotsky, L. S. (1978). Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processess. Harvard University Press.

64. Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), 458–477.

65. Wan-Rou Wu & Kai-Lin Yang (2022) The relationships between computational and mathematical thinking: A review study on tasks, Cogent Education, 9:1, 2098929, DOI: 10.1080/2331186X.2022.2098929

66. Wilensky, U., & Papert, S. (2010). Restructurations: Reformulations of knowledge disciplines through new representational forms. Constructionism.

67. Wing, J. (2006). Computational thinking. Communications of the Acm, 49(3), 33-35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

68. Wing J. and Jeannette M. (2011). Research notebook: Computational thinking—What and why? The Link Newsletter 6: 1–32. Available online:http://link.cs.cmu.edu/files/11-399_The_Link_Newsletter-3.pdf (accessed on 4 December 2022).

Παράρτημα Ι - Φύλλο Εργασίας

Πρόκληση

Μέσα σε ένα διάφανο τρελομπαλάκι να σχεδιάσετε κάποιο αντικείμενο της επιλογής σας. Θα μπορούσε να είναι ό,τι θέλετε [π.χ. ένα γεωμετρικό σχήμα, ένα γράμμα, κλπ.] μόνο που πρέπει η φιγούρα να εφαρμόζει πλήρως στο εσωτερικό (δηλαδή, να μην υπάρχει κενός χώρος ανάμεσα στο σχήμα σας και την εσωτερική επιφάνεια της τρελόμπαλας).

Σας δίνεται η διαδικασία **«τρελομπαλάκι»**, που φτιάχνει ένα διάφανο τρελομπαλάκι με ακτίνα της επιλογής σας.
Σχόλιο: Το «τρελομπαλάκι» μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε έτοιμο. Εσείς θα ασχοληθείτε μόνο με το τι θα φτιάξετε στο εσωτερικό του!

```
Για τρελομπαλάκι :ρ
θεσεχρωμαστυλο [255 255 255]
θεσεπαχοσστυλο 0.4
επανάλαβε 12[επανάλαβε :ρ
[σπ π :ρ
δ (180-(360/:ρ))/2 σκ
μ 2*:ρ*cos(((180-(360/:ρ))/2))
δ (180-(360/:ρ))/2 σπ
π :ρ
δ 180]
σκ πα 30]
τελος
```

Α΄ Φάση

Η ομάδα της Καίτης, του Σωτήρη και του Γρηγόρη ξεκίνησαν να σκέφτονται το πρόβλημα και ζητάνε τη βοήθειά σας.

Η Καίτη σκέφτηκε να φτιάξουν ένα τετράγωνο μέσα σε ένα τρελομπαλάκι ακτίνας 50. Έγραψε λοιπόν τη διαδικασία **«τετράγωνο»** , που εγγράφει ένα τετράγωνο σε κύκλο ακτίνας 50.

```
για τετράγωνο
θεσεχρωμαστυλο [255 0 0]
επανάλαβε 4[σπ
π 50
δ 45
σκ
μ ρίζα(5000)
δ 45
σπ
π 50
δ 180]
τελος
```

Ο Σωτήρης πήρε το **«τετράγωνο»** και το άλλαξε ώστε να φτιάχνει ένα ισόπλευρο τρίγωνο στον ίδιο κύκλο με το τετράγωνο της Καίτης. Έγραψε τη διαδικασία **«τρίγωνο»**.

```
για τρίγωνο
επανάλαβε 3[σπ
π 50
δ 30
σκ
μ ρίζα(5000)
δ 30
σπ
π 50
δ 180]
τελος
```

1. Δείτε αν το **«τρίγωνο»** του Σωτήρη είναι σωστό.

- Αν πιστεύετε ότι είναι σωστό, πείτε γιατί.
- Αν υπάρχουν λάθη, να τα βρείτε και να τα διορθώσετε

2. Ο Γρηγόρης λέει: «*Αφού η διαδικασία* ***«τρελομπαλάκι»*** *μας αφήνει να επιλέγουμε εμείς την ακτίνα της τρελόμπαλας, μήπως να φτιάξουμε τη διαδικασία για το τρίγωνο μας, ώστε να δουλεύει χωρίς να έχει συγκεκριμένη ακτίνα;*»

Πώς θα γίνει αυτό με το τρίγωνο του Σωτήρη για διάφορα μεγέθη τρελόμπαλας;

3. Η Καίτη σκέφτηκε πως το δικό της τετράγωνο, καθώς και το τρίγωνο του Σωτήρη, ανήκουν στην ίδια ομάδα, τα κανονικά πολύγωνα.

Δοκιμάστε να φτιάξετε ένα κανονικό πεντάγωνο, ένα κανονικό εξάγωνο, ένα κανονικό επτάγωνο, ένα κανονικό οκτάγωνο, ένα κανονικό εννιάγωνο, κλπ κλπ.

Υπάρχει τρόπος να γράψετε ***μία*** διαδικασία για όλα τα κανονικά πολύγωνα;

Β΄ Φάση

Φτιάξτε τη δική σας φιγούρα μέσα στο τρελομπαλάκι. Παρουσιάστε τα αποτελέσματα της ομάδας σας και το πώς σκεφτήκατε.

Αλλάζοντας το μέγεθος ή τις αναλογίες της φιγούρας σας, συνεχίζει να μπορεί να εφαρμόζει πλήρως στο εσωτερικό της τρελόμπαλας;

Γ΄ Φάση ~ Επέκταση

Μπορείτε να φτιάξετε μία τρισδιάστατη φιγούρα μέσα στο τρελομπαλάκι;
Δοκιμάστε να φτιάξετε ό,τι θέλετε, αλλά και πάλι, πρέπει να εφαρμόζει πλήρως στο εσωτερικό της τρελόμπαλας!

Παράρτημα ΙΙ - Πίνακας Εντολών MaLT2

Εντολές της «Χελωνόσφαιρας» - "MaLT2"

Πίνακας 1: Εντολές Ελέγχου της Οντότητας

Ελληνική Εντολή	Αγγλική Εντολή	Περιγραφή	Παράδειγμα
		Κίνηση της οντότητας	
μπροστά/μ *αριθμός*	**forward/fd** *number*	Η οντότητα προχωράει **μπροστά** τόσα βήματα όσο ο *αριθμός*.	μπροστά 50
πίσω/π *αριθμός*	**back/bk** *number*	Η οντότητα προχωράει **πίσω** τόσα βήματα όσο ο *αριθμός*.	πίσω 70
		Κατεύθυνση της οντότητας	
δεξιά/δ *αριθμός*	**right/rt** *number*	Η οντότητα στρίβει προς τα **δεξιά** τόσες **μοίρες** όσες ο *αριθμός*.	δεξιά 90
αριστερά/α *αριθμός*	**left/lt** *number*	Η οντότητα στρίβει προς τα **αριστερά** τόσες **μοίρες** όσες ο *αριθμός*.	αριστερά 120
πάνω *αριθμός*	**up** *number*	Η οντότητα στρίβει το κεφάλι της προς τα **πάνω (κοιτάει πάνω)** τόσες **μοίρες** όσες ο *αριθμός*.	πάνω 50
κάτω *αριθμός*	**down/dn** *number*	Η οντότητα στρίβει το κεφάλι της προς τα **κάτω (κοιτάει κάτω)** τόσες **μοίρες** όσες ο *αριθμός*.	κάτω 60
περιστροφήαριστερά/πα *αριθμός*	**roll_left/rl** *number*	Η οντότητα **περιστρέφεται** γύρω από τον άξονα της προς τα αριστερά τόσες **μοίρες** όσες ο *αριθμός*.	πα 30

περιστροφήδεξιά/πδ *αριθμός*	**roll_right/ rr** ***number***	Η οντότητα **περιστρέφεται** γύρω από τον άξονα της προς τα δεξιά τόσες **μοίρες** όσες ο *αριθμός.*	πδ 40

Θέση της Οντότητας			
θέσεχ ***αριθμός***	**setx** ***number***	Θέτει το χ της θέσης της οντότητας στην τιμή του *αριθμού.*	θέσεχ 100
θέσεy ***αριθμός***	**sety** ***number***	Θέτει το y της θέσης της οντότητας στην τιμή του *αριθμού.*	θέσεy -50
θέσεz ***αριθμός***	**setz** ***number***	Θέτει το z της θέσης της οντότητας στην τιμή του *αριθμού.*	θέσεz 90
θέσεχy ***α1 α2***	**setxy** ***n1 n2***	Θέτει το χ και το y της θέσης της οντότητας στην τιμή των α1 και α2 αντίστοιχα.	θέσεχy 50 100
θέσεχz ***α1 α2***	**setxz** ***n1 n2***	Θέτει το χ και το z της θέσης της οντότητας στην τιμή των α1 και α2 αντίστοιχα.	θέσεχz 50 -90
θέσεyz ***α1 α2***	**setyz** ***n1 n2***	Θέτει το y και το z της θέσης της οντότητας στην τιμή των α1 και α2 αντίστοιχα.	θέσεyz 50 -90
θέσεθέση [*α1 α2 α3*]	**setpos [*n1 n2 n3*]**	Θέτει το x y z της θέσης της οντότητας στους αριθμούς α1 α2 α3 αντίστοιχα.	θέσεθέση [0 30 70]
θεσηχ	**xcor**	**Επιστρέφει** την τιμή x της θέσης της οντότητας.	

θεσηy	**ycor**	**Επιστρέφει** την τιμή y της θέσης της οντότητας.	
θεσηz	**zcor**	**Επιστρέφει** την τιμή z της θέσης της οντότητας.	
θεση	**pos**	**Επιστρέφει** την τρέχουσα θέση της οντότητας σε έναν πίνακα τριών αριθμών [x y z] .	
αποστασηαπο ***[x y z]***	**distanceto** ***[x y z]***	Υπολογίζει και **επιστρέφει** την απόσταση της οντότητας από το σημείο (x, y, z) που δίνεται σαν όρισμα πίνακα.	αποστασηαπο [100 20 30]

Ίχνος της οντότητας			
στυλοπάνω/σπ	**penup/pu**	Το ίχνος δεν εμφανίζεται όταν η οντότητα μετακινείται.	
στυλοκάτω/σκ	**pendown/pd**	Το ίχνος εμφανίζεται όταν η οντότητα μετακινείται.	
θεσεπαχοσστυλο ***αριθμός***	**setpensize** ***number***	Θέτει το πάχος του ίχνους στην τιμή του *αριθμού*. (**Προεπιλογή το 1**)	θεσεπαχοσστυλο 5
θεσεχρωμαστυλο ***[r b g]***	**setpencolor** ***[r b g]***	Θέτει το χρώμα του ίχνους στην τιμή των αριθμών r b g (red blue green).	θεσεχρωμαστυλο [0 0 0] (Μαύρο)
στηναρχη	**home**	Η οντότητα επιστρέφει στο σημείο (0,0,0) αφήνοντας ίχνος πίσω της.	

σβησεγραφικα/καθαρισεοθονη/σβγ	**clearscreen/cs/cg**	Σβήνει το ίχνος από τη σκηνή. Η οντότητα επιστρέφει στη θέση (0, 0, 0).	
σβησειχνος/σβιχ	**cleartrace/ct**	Σβήνει το ίχνος από τη σκηνή. Η οντότητα και η κάμερα παραμένουν στην τρέχουσα θέση τους.	
δειξεχελώνα/δχ	**showturtle/st**	Εμφανίζει την οντότητα στη σκηνή.	
κρυψεχελώνα/κχ	**hideturtle/ht**	Κρύβει την οντότητα από τη σκηνή.	
Άλλες εντολές			
καθαρισεκειμενο	**cleartext/ct**	Καθαρίζει τα μηνύματα από την περιοχή μηνυμάτων του συντάκτη.	
τυπωσε	**print/pr**	Εκτυπώνει στην περιοχή των μηνυμάτων την τιμή μιας μεταβλητής ή το αποτέλεσμα μιας εντολής ή μιας πράξης.	τυπωσε 1+1 τυπωσε θεσηχ τυπωσε :ύψος
σταμάτησε	**stop**	Σταματάει την εκτέλεση του κώδικα μιας επανάληψης ή μιας αναδρομικής κλίσης. Είναι απαραίτητη στις αναδρομές!	Παράδειγμα με αναδρομική κλίση ΓΙΑ φτερό :α :ν :κ αν :κ < 1 [σταμάτησε] πολύγωνο :α :ν φτερό 2*:α/3 :ν :κ-1 ΤΕΛΟΣ

Βασικοί κωδικοί χρωμάτων RBG για την αλλαγή χρώματος του ίχνους

Κόκκινο	255	0	0
Πράσινο	0	255	0
Μπλε	0	0	255

Άσπρο	255	255	255
Μαύρο	0	0	0

Περισσότερους κωδικούς χρωμάτων μπορείτε να βρείτε στην παλέτα χρωμάτων της «Χελωνόσφαιρας».

Πίνακας 2: Προγραμματιστικές δομές

Ελληνική εντολή	**Αγγλική εντολή**	**Περιγραφή**	**Παράδειγμα**
		Δομές επιλογής	
αν ***συνθήκη*** **[σύνολο εντολών]**	**if** ***condition*** **[commands]**	Αν η *συνθήκη* είναι αληθής, εκτελείται το σύνολο εντολών μέσα στις αγκύλες [] .	αν :x > 10 [μπροστά 100 δεξιά 90]
αναλλιως ***συνθήκη*** **[συνολοεντολών 1] [συνολοεντολών 2]**	**ifelse** ***condition*** **[commands1] [commands2]**	Αν η *συνθήκη* είναι αληθής, εκτελείται το πρώτο σύνολο εντολών μέσα στις αγκύλες [ ], αλλιώς αν είναι ψευδής εκτελείται το δεύτερο σύνολο εντολών που είναι μέσα στις δεύτερες αγκύλες [ ] .	αναλλιως :x > 10 [μπροστά 100 δεξιά 90] [αριστερά 90 μπροστά 100]
	if and ***condition*** **[commands]**	Αν είναι αληθή και τα δύο μέρη της συνθήκης, εκτελείται το σύνολο εντολών μέσα στις αγκύλες [ ] .	if and :x>3 :y>5 [μπροστά 100]
		Δομές επανάληψης	
επαναλαβε ***n*** **[συνολο εντολών]**	**repeat** ***n*** **[commands]**	Επαναλαμβάνονται **n φορές** το σύνολο των εντολών μέσα στις αγκύλες [ ] .	επαναλαβε 4 [μπροστά 100 δεξιά 90]
οσο ***συνθήκη*** **[συνολο εντολών]**	**while** ***condition*** **[commands]**	**Όσο η *συνθήκη* είναι αληθής** επαναλαμβάνεται το σύνολο των εντολών μέσα στις αγκύλες [ ] .	φτιαξε "x 1 οσο :x<5 [μπροστά 100 δεξιά 90 φτιαξε "x :x+1]

μέχρι *συνθήκη* **[συνολο εντολών]**	**until** *condition* **[commands]**	**Μέχρι η *συνθήκη* να γίνει αληθής ,** επαναλαμβάνεται το σύνολο των εντολών μέσα στις αγκύλες [ ] .	φτιαξε "x 0 μεχρι :x = 5 [μ 100 δ 90 φτιαξε "x :x+1]
	repcount	**Επιστρέφει** τον τρέχοντα **αριθμό επανάληψης**. Χρησιμοποιείται **μόνο μέσα**	επαναλαβε 4 [μπροστά 100 τυπωσε repcount]
	Τελεστές		
η *Έκφραση1 Εκφραση2*	**or** *Expr1 Expr2*	Επιστρέφει αληθές αν μία από τις δυο εκφράσεις είναι αληθής.	αν η 2>3 4<5 [τύπωσε 'αληθής'] (είναι αληθής)
και *Έκφραση1 Εκφραση2*	**and** *Expr1 Expr2*	Επιστρέφει αληθές αν και οι δυο εκφράσεις είναι αληθείς.	αν και 2>3 4<5 [τύπωσε 'αληθής'] (είναι ψευδής)
οχι *Έκφραση1*	**not** *Expr1*	Επιστρέφει αληθές όταν η έκφραση1 δεν είναι αληθής.	αν οχι 2>3 [τύπωσε 'αληθής'] (είναι αληθής)

	equal? *Value1 Value2*	Επιστρέφει αληθές αν η τιμή 1 είναι ίση με την τιμή2.	if equal? :χ :ψ [τυπωσε 'ίσα']
	notequal? *Value1 Value2*	Επιστρέφει αληθές αν η τιμή 1 δεν είναι ίση με την τιμή2.	if notequal? :χ :ψ [τυπωσε 'όχι ίσα']
	greater? *Value1 Value2*	Επιστρέφει αληθές αν η τιμή 1 είναι μεγαλύτερη από την τιμή2.	if greater? :χ :ψ [τυπωσε 'χ μεγαλυτερο']
	less? *Value1 Value2*	Επιστρέφει αληθές αν η τιμή 1 είναι μικρότερη από την τιμή2.	if less? :χ :ψ [τυπωσε 'χ μικρότερο']

	greaterequal? *Value1 Value2*	Επιστρέφει αληθές αν η τιμή 1 είναι μεγαλύτερη ή ίση από την τιμή2.	
	lessequal? *Value1 Value2*	Επιστρέφει αληθές αν η τιμή 1 είναι μικρότερη ή ίση από την τιμή2.	
Άλλες εντολές			
φτιάξε ***"μεταβλητή τιμή***	**make** ***"variable number***	**Ορίζει** την *μεταβλητή* και της δίνει μια **τιμή**. Στη συνέχεια, η μεταβλητή μπορεί να καλείται ως **:μεταβλητή**	φτιάξε "ύψος 30
τυχαιο ***α β***	**rand/random** ***a b***	**Επιστρέφει** έναν τυχαίο αριθμό από το α μέχρι το β-1.	rand 0 4 (επιστρέφει τυχαία 0, 1, 2, 3)
επεστρεψε ***value***	**output** ***value***	Η τρέχουσα διαδικασία σταματάει και επιστρέφει την τιμή. Χρησιμοποιείται **μέσα σε διαδικασίες.**	ΓΙΑ άθροισμα :α :β επεστρεψε :α + :β ΤΕΛΟΣ

Πίνακας 3: Μαθηματικές εντολές

Ελληνική εντολή	Αγγλική εντολή	Περιγραφή	Παράδειγμα	Αποτέλεσμα
αθροισμα ***α β***	**sum/add** ***a b***	Επιστρέφει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των αριθμών α και β. (α+β)	sum 3 5	8
διαφορα ***α β***	**difference/sub** ***a b***	Επιστρέφει το αποτέλεσμα της αφαίρεσης των αριθμών α και β. (α-β)	difference 8 3	5
γινομενο ***α β***	**product/mul** ***a b***	Επιστρέφει το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού των αριθμών α και β. (α*β)	product 2 4	8

πηλικο *α β*	**divide/div** ***a b***	Επιστρέφει το αποτέλεσμα της διαίρεσης των αριθμών α και β. (α/β)	divide 6 3	2
υπολοιπο *α β*	**remainder/modulo/mod** ***a b***	Επιστρέφει το υπόλοιπο της διαίρεσης των αριθμών α και β. (α/β)	remainder 11 2	1
ρίζα ***αριθμός***	**sqrt** ***number***	Επιστρέφει την τετραγωνική ρίζα του *αριθμού.*	ρίζα 36	6
δυν ***x n***	**power/pow** ***x n***	Επιστρέφει το αποτέλεσμα της ύψωσης του χ σε εκθέτη n. Δηλαδή $χ^n$.	δυν 2 4	16
συν ***μοίρες***	**cos** ***degrees***	Επιστρέφει το συνημίτονο της γωνίας.	συν 60	0.5
ημ ***μοίρες***	**sin** ***degrees***	Επιστρέφει το ημίτονο της γωνίας.	ημ 60	0.866
εφ ***μοίρες***	**tan** ***degrees***	Επιστρέφει την εφαπτομένη της γωνίας .	εφ 180	0
τοξσυν ***αριθμός***	**arccos** ***number***	Επιστρέφει το τόξο συνημίτονου του *αριθμού.*	τοξσυν 0.5	60
τοξημ ***αριθμός***	**arcsin** ***number***	Επιστρέφει το τόξο ημιτόνου του *αριθμού.*	τοξημ 0.5	30
τοξεφ ***αριθμός***	**arctan** ***number***	Επιστρέφει το τόξο εφαπτομένης του *αριθμού.*	τοξεφ 1	45
	radcos ***rads***	Επιστρέφει το συνημίτονο της γωνίας δοσμένη σε ακτίνια.		
	radsin ***rads***	Επιστρέφει το ημίτονο της γωνίας δοσμένη σε ακτίνια.		
	exp ***number***	Επιστρέφει το αποτέλεσμα της εκθετικής συνάρτησης του *αριθμού* (e^{number}).	exp 1	2.718

λογάριθμος ***αριθμός***	**ln** ***number***	Επιστρέφει τον λογάριθμο του *αριθμού.*	ln 1	0
	log10 ***number***	Επιστρέφει την τιμή του log10 του *αριθμού.*	log10 10	1
ακέραιος ***αριθμός***	**integer/int** ***number***	Επιστρέφει το ακέραιο μέρος του *αριθμού.*	integer 2.8	2
	round ***number***	Επιστρέφει τη στρογγυλοποίηση του *αριθμού.*	round 2.3 round 3.8	2 4
αρνητικό ***αριθμός***	**minus** ***number***	Επιστρέφει τον αρνητικό αριθμό του *αριθμού.*	minus 10	-10
απολ ***αριθμός***	**abs** ***number***	Επιστρέφει την απόλυτη τιμή του *αριθμού.*	απολ -3	3
πι	**pi**	Επιστρέφει την τιμή του πι (3,14).	πι	3.14

http://etl.ppp.uoa.gr/malt2/#G