ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΡΓΕΙΑΣ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΣΗΣ ΧΑΡΤΙΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΣΤΗ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΥΠΟΘΕΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Περιβολάρη Αλίκη - Ηλιάνα
7112122100004

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής
Γεώργιος Ψυχάρης Αναπλ. Καθηγητής

Αθήνα
Απρίλιος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 25η Απριλίου από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

	Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪	Ψυχάρη Γ.	Αν. Καθηγητής
▪	Πόταρη Δ.	Καθηγήτρια
▪	Ζαχαριάδη Θ	Ομ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

	Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪	Ψυχάρη Γ.	Αν. Καθηγητής
▪	Πόταρη Δ.	Καθηγήτρια
▪	Ζαχαριάδη Θ.	Ομ. Καθηγητή

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω:

Τον κ. Ψυχάρη για τη συνεχή υποστήριξή του στην εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας μου και για τις εποικοδομητικές του συμβουλές που συνέβαλαν σημαντικά στην εμβάθυνση της έρευνάς μου. Η επιστημονική του στάση σε συνδυασμό με την εμπιστοσύνη και την ενθάρρυνση που μου προσέφερε ενέτειναν το ενδιαφέρον μου για την έρευνα και τη γνώση συνολικά.

Τα μέλη της Συμβουλευτικής Επιτροπής, κ. Πόταρη και κ. Ζαχαριάδη.

Τους μαθητές και τις μαθήτριες που συμμετείχαν στην έρευνα.

Τις καθηγήτριες και τους καθηγητές του ΠΜΣ για τις πολύτιμές γνώσεις και τα εφόδια που μας παρείχαν.

Τις συμφοιτήτριες και τους συμφοιτητές μου για την συνεργασία, τις συζητήσεις και την ανταλλαγή ιδεών που εμπλούτισαν την εκπαιδευτική αυτή εμπειρία.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τη φίλη και συμφοιτήτρια Χαρά Κορομπλή για την στήριξη, ακαδημαϊκή και προσωπική, καθ’ όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μας σπουδών. Οι επιτυχίες που μοιραστήκαμε και οι δυσκολίες που αντιμετωπίσαμε μαζί κατέστησαν τη διαδρομή αυτή μοναδική.

Τον Γιώργο που χωρίς την αδιάκοπη εμψύχωσή του και την πίστη του στις δυνατότητές μου θα ήταν δύσκολη η ολοκλήρωση των σπουδών και της εργασίας μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου που βρίσκεται εκεί σε κάθε μου βήμα να μου δίνει δύναμη.

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα ερευνητική εργασία μελετά τη δυνατότητα της συνδυαστικής χρήσης δύο διαφορετικής φύσης τεχνουργημάτων να συμβάλλει στην νοηματοδότηση εννοιών σχετικών με την παραγωγή υποθετικών προτάσεων της μορφής «αν… τότε» και την απόδειξή τους. Η κατασκευή τέτοιων νοημάτων αποτελεί μια σύνθετη διαδικασία που καλείται να υπερβεί τις δυσκολίες των μαθητών/-ριών που σχετίζονται με την τυπική διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης. Η βασική ερευνητική υπόθεση είναι ότι η ενδεχόμενη συνέργεια που μπορεί να εμφανιστεί μεταξύ δύο τεχνουργημάτων, ενός χειραπτικού και ενός ψηφιακού, μπορεί να προωθήσει την εξέλιξη αρχικών προσωπικών νοημάτων συνδεδεμένων με την εμπειρία του ατόμου κατά την εργασία με ένα τεχνούργημα, σε μαθηματικά και αποπλαισιωμένα νοήματα, κεντρικά για την κατανόηση της υποθετικής πρότασης. Η θεωρία των Μαθηματικών Πεδίων Εργασίας σε συνδυασμό με τη Θεωρία Σημειωτικής Διαμεσολάβησης δομούν έναν θεωρητικό φακό για την ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων. Η παρούσα έρευνα αντλεί τα δεδομένα αυτά από την εργασία δύο ομάδων μαθητών/-ριών της Α’ Λυκείου με τρία κατασκευαστικά – αποδεικτικά προβλήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και με την αξιοποίηση του χειραπτικού μέσου της δίπλωσης χαρτιού και του ψηφιακού μέσου Geometer’s Sketchpad. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης αναδεικνύουν την ιδιαίτερη συμβολή της συνέργειας των δύο αυτών μέσων στην διαμόρφωση και επικύρωση εικασιών, στην κατανόηση των λογικών εξαρτήσεων μεταξύ υποθέσεων και συμπεράσματος μιας υποθετικής πρότασης και τελικά στην απόδειξή της μέσα από την νοηματοδότηση σημείων και διαδικασιών στα δύο πεδία εργασίας και τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ αυτών.

Λέξεις κλειδιά: Συνέργεια, δίπλωση χαρτιού, ΠΔΓ, υποθετική πρόταση, απόδειξη

ABSTRACT

This research paper discusses the contribution of the combined use of two artefacts of different nature to the conceptualization of meanings related to the generation of conditional statements and their proof. The construction of such meanings is a complex process that needs to overcome the difficulties students face related to the formal process of mathematical proof. The main research hypothesis is that the potential synergy that can occur between two artefacts, a manipulative and a digital one, can promote the evolution of initial personal meanings linked to the individual's experience of working with an artefact, into mathematical and de-contextualised meanings that are central to the understanding of the conditional statement. The theory of Mathematical Working Spaces combined with the Theory of Semiotic Mediation construct a theoretical lens for analyzing the research data. This research draws these data from the work of two groups of 10th grade students on three construction-proving problems in Euclidean Geometry context, using the manipulative artefact of paper folding and the digital artefact Geometer's Sketchpad. The results of the analysis highlight the particular contribution of the synergy of these two artefacts in the formation and validation of conjectures, in understanding the logical dependencies between hypotheses and the conclusion of a conditional statement, and finally in proving it through the conceptualization of signs and processes in the two working spaces and the creation of connections between them.

Keywords: Synergy, paper folding, DGE, conditional statement, proof

Κεφάλαιο 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το θέμα της απόδειξης στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης βρίσκεται στο επίκεντρο του ερευνητικού ενδιαφέροντος στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών. Η κεντρικότητα του ζητήματος πηγάζει τόσο από την σημαντική θέση που κατέχει η απόδειξη στα μαθηματικά καθ' αυτά όσο και από τη συμβολή της αποδεικτικής διαδικασίας στην καλλιέργεια της ευρύτερης μαθηματικής γνώσης και κατανόησης από τους/τις μαθητές/-ριες (Hanna, 2000). Το γεγονός, ωστόσο, ότι στην παραδοσιακή εκπαιδευτική πράξη παρατηρείται έντονα ο διαχωρισμός της απόδειξης από διερευνητικές διαδικασίες, ενδεχομένως να αποτελεί παράγοντα δυσκολίας των μαθητών/-ριων κατά την παραγωγή τυπικής απόδειξης (Christou et al., 2004). Αναγνωρίζοντας τη διερεύνηση ως αναπόσπαστο κομμάτι της δραστηριότητας των ερευνητών/-ριων μαθηματικών που προηγείται της απόδειξης κάποιας πρότασης, πολλές έρευνες (Arzarello et al. 2009; Ponte, 2007; Hsieh et al., 2012; Hanna, 2000) τονίζουν την ανάγκη ενσωμάτωσης αυτής της λογικής και στην μαθηματική εκπαίδευση.

Στο πλαίσιο αυτό έχουν πραγματοποιηθεί μελέτες οι οποίες αναδεικνύουν την σημασία της εμπλοκής των μαθητών/-ριων με τεχνουργήματα που επιτρέπουν την εξερεύνηση και κατασκευή μαθηματικής γνώσης. Από τη μια, μια πληθώρα έργων συζητά τον ρόλο που διαδραματίζουν τα Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας (ΠΔΓ) στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Μεταξύ πολλών άλλων, έχει μελετηθεί η επίδραση των ΠΔΓ στην ανάπτυξη θεωρητικής σκέψης και στην ανάδυση της έννοιας της απόδειξης (Mariotti, 2000), το ποιες γνωστικές διεργασίες πραγματοποιούνται κατά τη διαμόρφωση εικασιών και πώς σχετίζονται με συγκεκριμένα είδη συρσίματος (Baccaglini & Mariotti, 2010) και η συνεισφορά αυτών των περιβαλλόντων στην γενίκευση προτάσεων και στην απόδειξή τους (Komatsu & Jones, 2020). Από την άλλη, συναντάμε στη βιβλιογραφία-λιγότερες σε αριθμό- μελέτες (Frigerio, 2002; Golan & Jackson, 2009; Hull, 2013, 2020; Lam & Pope, 2016; Wares, 2011; Wiles, 2013) που ασχολούνται με τη δυνατότητα της δίπλωσης χαρτιού (paper folding) να προσφέρει στην κατασκευή γεωμετρικής κυρίως γνώσης λόγω της χειραπτικής και διερευνητικής φύσης του τεχνουργήματος αλλά και των θεωρητικών εννοιών που είναι ενσωματωμένες στις επιτρεπόμενες διπλώσεις. Τα ευρήματα αυτών των ερευνών τονίζουν τη συνεισφορά της δίπλωσης χαρτιού στην ανάπτυξη χωρικής αντίληψης και οπτικοποίησης (Arıcı & Aslan-Tutak, 2015) και στην καλλιέργεια γεωμετρικού συλλογισμού (Gürbüz et al., 2018).

Λαμβάνοντας υπόψη τις προαναφερθείσες έρευνες αναφορικά με την ανάγκη ενσωμάτωσης διερευνητικών διαδικασιών κατά την εμπλοκή με τη μαθηματική απόδειξη, αλλά και την συμβολή των ψηφιακών και χειραπτικών μέσων στην απόκτηση μαθηματικής γνώσης, ακριβώς λόγω της διερευνητικής τους φύσης, η παρούσα έρευνα αποσκοπεί στην μελέτη του ρόλου της ταυτόχρονης χρήσης ενός χειραπτικού και ενός ψηφιακού μέσου κατά την εμπλοκή με γεωμετρικά προβλήματα. Ειδικότερα, εστίαση της έρευνας αποτελεί ο ρόλος της συνέργειας του χειραπτικού μέσου της δίπλωσης χαρτιού και του ψηφιακού μέσου Geometer’s Sketchpad (GSP) στην νοηματοδότηση της υποθετικής πρότασης «αν…τότε» και της απόδειξής της.

Ο όρος *συνέργεια* αντλείται από το άρθρο των Mariotti και Montone (2020) και αναφέρεται σε κάθε φαινόμενο όπου αναγνωρίζεται ότι η ρητή ή υπόρρητη αναφορά στα δύο τεχνουργήματα που χρησιμοποιούνται κατά την εμπλοκή με ένα μαθηματικό έργο δημιουργεί μια σχέση μεταξύ των νοημάτων που προκύπτουν από τη χρήση τους, η οποία σχέση γίνεται φανερή όταν σημεία του ενός τεχνουργήματος συνδέονται με σημεία του άλλου. Υιοθετώντας την προσέγγιση του Vygotsky, ο όρος σημεία (signs) περιλαμβάνει μέσα αναπαράστασης (γλώσσα, μαθηματικά σύμβολα, διαγράμματα, κ.ά.) τα οποία διαμεσολαβούν στην ανάπτυξη της σκέψης και της δράσης του ατόμου. Τα σημεία αυτά λειτουργούν ως γέφυρες που συνδέουν τα άτομα με το πολιτισμικό και ιστορικό τους πλαίσιο, επιτρέποντάς τους να εσωτερικεύουν και να χρησιμοποιούν εξωτερικά σύμβολα για νοητικές διεργασίες (Bussi & Mariotti, 2008). Η συνέργεια -κατά αυτόν τον ορισμό- ενός χειραπτικού και ενός ψηφιακού μέσου έχει μελετηθεί υπό το πρίσμα της συνεισφοράς της στην κατανόηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών και των ιδιοτήτων τους (Faggiano et al., 2018; Montone et al., 2019; Mariotti & Montone, 2020). Οι μελέτες που πραγματοποιήθηκαν συνηγορούν στο ότι η συνέργεια μεταξύ ενός χειραπτικού τεχνουργήματος (ριζόχαρτο και πινέζες) και ενός ψηφιακού (ΠΔΓ) μπορεί να προωθήσει την αφομοίωση διαφορετικών και συμπληρωματικών εννοιών μέσα από την ενίσχυση των δυνατοτήτων του ενός και του άλλου, παρέχοντας μια στήριξη στην ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα της αξονικής συμμετρίας και των ιδιοτήτων της και της μεταφοράς κατά διάνυσμα.

Ένα σημαντικό κενό που συναντάται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία είναι η μελέτη της συνέργειας ενός χειραπτικού και ενός ψηφιακού μέσου κατά την εμπλοκή με αποδεικτικά προβλήματα και η πιθανή συνεισφορά της στη νοηματοδότηση εννοιών σχετικών με την υποθετική πρόταση και την αποδεικτική διαδικασία. Σχετική με το θέμα αυτό εμφανίζεται μια μόνο έρευνα, των Valori, Giacomone, Albanese και Adamuz Povedano (2022), η οποία ωστόσο δεν αξιοποιεί τον κατά Mariotti και Montone (2020) ορισμό της συνέργειας, αναδεικνύει ωστόσο σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με την αλληλεπίδραση δύο διαφορετικής φύσης τεχνουργημάτων σε γεωμετρικά προβλήματα. Ειδικότερα, η έρευνα αυτή, ακολουθώντας την οντο-σημειωτική προσέγγιση (Godino et al., 2007), εστιάζεται στην επιστημική ανάλυση δύο κατασκευαστικών-αποδεικτικών έργων και στην γνωστική ανάλυση των ενεργειών των μαθητών/-ριων καθώς εργάζονται με τα τεχνουργήματα της δίπλωσης χαρτιού και του GeoGebra. Με αυτόν τον τρόπο οι ερευνήτριες επιχειρούν να εντοπίσουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των συγκεκριμένων τεχνουργημάτων και να αναδείξουν τη σχέση μεταξύ των μαθητών/-ριών και των διαγραμμάτων ερμηνεύοντάς τη μέσα από τις διαλεκτικές, λειτουργικές, οπτικές και μη οπτικές πρακτικές που χρησιμοποιούσαν. Η ανάλυσή τους ανέδειξε ότι οι πολλαπλές οπτικές αναπαραστάσεις επιτρέπουν τον καλύτερο συντονισμό των λειτουργικών και των διαλεκτικών αντιλήψεων (Duval, 1994) κατά τη διαδικασία διαμόρφωσης εικασιών μέχρι την διατύπωση παραγωγικών επιχειρημάτων. Για παράδειγμα, η αντιληπτική κατανόηση του σχήματος στο διπλωμένο χαρτί με την εστίαση σε υποσχήματα της κατασκευής συχνά οδηγούσε στην πραγματοποίηση χρήσιμων διπλώσεων και σε μια λειτουργική κατανόηση του σχήματος που συμπληρωνόταν από τη λειτουργική και διαλεκτική κατανόηση της κατασκευής στο GeoGebra με τη χρήση εργαλείων όπως η μέτρηση ή/και το σύρσιμο. Παρατηρείται, ωστόσο, ότι η συγκεκριμένη έρευνα δεν εστιάζει στο πώς αυτή η αλληλεπίδραση τεχνουργημάτων επηρέασε την τελική απόδειξη, αλλά συζητά το είδος των επιχειρημάτων (εμπειρικά ή παραγωγικά) που ενέπνεε ο τρόπος αντίληψης των πολλαπλών αναπαραστάσεων στα δύο τεχνουργήματα.

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στο να συμβάλλει στην περιορισμένη αυτή μελέτη του ζητήματος, εξετάζοντας την συμβολή της συνέργειας της δίπλωσης χαρτιού και ενός ΠΔΓ στην νοηματοδότηση της υποθετικής πρότασης και της απόδειξής της. Σε μια τέτοια μελέτη κρίνεται σημαντικό να παρατηρηθεί η εργασία σε καθένα από τα δύο αυτά πεδία αλλά βεβαίως και ο τρόπος σύνδεσής τους κατά την εξέλιξη μαθηματικών εννοιών. Για τη μελέτη της εργασίας σε καθένα από τα δύο μέσα, η έρευνα αυτή αξιοποιεί την θεωρία των Μαθηματικών Πεδίων Εργασίας (ΜΠΕ) (Kuzniak & Richard, 2014) η οποία, όπως αναλύεται λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 3, επιτρέπει την ερμηνεία της εργασίας των μαθητών/-ριών σε κάθε πεδίο εργασία λαμβάνοντας υπόψη σημειωτικές, κατασκευαστικές και διαλογικές διαδικασίες που παρατηρούνται. Ως θεωρητικό εργαλείο για τη μελέτη της σύνδεσης των δύο πεδίων εργασίας χρησιμοποιείται η Θεωρία Σημειωτικής Διαμεσολάβησης (ΘΣΔ) (Bussi & Mariotti, 2008) και ειδικότερα η έννοια των σημειωτικών αλυσίδων (βλ. Κεφάλαιο 3) που βρίσκεται στην πυρήνα του όρου της συνέργειας και αναφέρεται στην αλληλουχία σημείων από το ένα στο άλλο πεδίο εργασίας και την οργάνωσή τους σε μια αλυσιδωτή δομή που αναδεικνύει την εξέλιξη κάποιου μαθηματικού νοήματος. Ο συνδυασμός των δύο αυτών θεωριών υποστηρίζεται ότι θα φωτίσει τον τρόπο με τον οποίο επικοινωνούν τα δύο μαθηματικά πεδία εργασίας μέσα από την μεταβίβαση σημείων και το πώς η συνέργειά τους μπορεί να οδηγήσει στην εξέλιξη προσωπικών σε μαθηματικά νοήματα σχετικά με την υποθετική πρόταση «αν…τότε» και την απόδειξή της.

Κεφάλαιο 2 - ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

2.1 Υποθετική πρόταση «αν…τότε», απόδειξη και ΠΔΓ

Η απόδειξη αποτελεί ένα κεντρικό θέμα μελέτης πολλών ερευνητών/-ριων λόγω του θεμελιώδους ρόλου της στην γενικότερη αντίληψη και κατανόηση των μαθηματικών. Με αυτό ως δεδομένο, αποτελεί πρόκληση το να διερευνηθούν αποτελεσματικοί τρόποι εμπλοκής με αποδεικτικές διαδικασίες κατά την εκπαιδευτική πράξη. Εντός αυτού του ερευνητικού διαλόγου, η Hanna (2000) αντιμετωπίζει την απόδειξη ως μια διαδικασία που φέρει ποικίλες λειτουργίες (επαλήθευση, εξήγηση, συστηματοποίηση, ανακάλυψη, επικοινωνία, κατασκευή εμπειρικής θεωρίας, διερεύνηση, ενσωμάτωση) και δίνει μεγάλη έμφαση στη εξήγηση του *γιατί* κάτι είναι αληθές και στην διερεύνηση εικασιών από τους/τις μαθητές/-ριες. Έτσι, αναδεικνύει, όπως και πολλοί/-ες άλλοι/-ες ερευνητές/-ριες (Laborde, 2000; Lopez-Real & Leung, 2006; Stylianides & Stylianides, 2005; Christou et al., 2004; Mariotti, 2000) τη συμβολή των ΠΔΓ στην ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού, στην παραγωγή έγκυρων αποδείξεων γεωμετρικών προτάσεων και σε μια ευρεία κατανόηση των μαθηματικών. Ειδικότερα, οι μελέτες αυτές ανέδειξαν τη δυνατότητα των ΠΔΓ να ενθαρρύνουν τη μετάβαση των μαθητών/-ριων από την εμπειρική εξερεύνηση ενός προβλήματος σε περισσότερο αυστηρά παραγωγικά επιχειρήματα (Christou et al., 2004) μέσα από την αλληλεπίδραση της κατασκευής με την απόδειξη, του να κάνω κάτι στον υπολογιστή και του να αιτιολογώ με τη χρήση θεωρητικών επιχειρημάτων (Laborde, 2000). Επιπλέον, έρευνες που διεξήχθησαν υπογραμμίζουν πως τα ψηφιακά αυτά τεχνουργήματα αποτελούν παράλληλα μια σημαντική στήριξη για τους/τις εκπαιδευτικούς κατά το δύσκολο έργο της επαφής των μαθητών/-ριων με θεωρητικές προοπτικές (Bartolini Buss & Mariotti, 2008; Mariotti 2009; Mariotti & Maracci, 2010; Mariotti, 2012).

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά των ΠΔΓ που τα καθιστούν ικανά να συνεισφέρουν σε νοηματοδοτήσεις σχετικά με την αποδεικτική διαδικασία είναι ο δυναμικός χαρακτήρας τους και κατ' επέκταση η προώθηση διαδικασιών διερεύνησης και πειραματισμού. Θεωρώντας την αποδεικτική διαδικασία ως αποτελούμενη από δύο φάσεις, τη φάση της διερεύνησης και αυτή της τελικής κατασκευής της απόδειξης (Olivero & Robutti, 2007), η διερευνητική φύση των ΠΔΓ είναι υψίστης σημασίας για τις διαδικασίες παραγωγής και ελέγχου εικασιών (conjectures). Η διαδικασία διαμόρφωσης μιας εικασίας (conjecturing) αποτελεί ένα ζήτημα με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών. Ακολουθώντας τους ορισμούς των Baccaglini και Mariotti (2010) η διαμόρφωση εικασίας συνίσταται στην ανάπτυξη μιας υπό συνθήκη σχέσης μεταξύ κάποιας υπόθεσης και ενός γεγονότος, ενός συμπεράσματος. Αυτή η σχέση μπορεί να εκφραστεί μέσω μιας υποθετικής πρότασης (conditional statement). Δηλαδή η υποθετική πρόταση αποτελεί το μέσο διατύπωσης της εικασίας και τα δομικά της στοιχεία είναι η υπόθεση (premise), το συμπέρασμα (conclusion) και οι λογικές συνδέσεις αυτών (conditional links).

Παρά το γεγονός ότι περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας, όπως το Geometer's Sketchpad και το GeoGebra επιτρέπουν την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων σύμφωνα με τις ιδιότητες τους και σχετικά θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, εντούτοις αυτοί οι δύο γεωμετρικοί κόσμοι διαφέρουν σε πολλές πτυχές (Stylianides & Stylianides, 2005). Δύο βασικά διαφοροποιητικά στοιχεία αποτελούν τα εργαλεία της μέτρησης και του συρσίματος (dragging) τα οποία με τη σειρά τους εμπνέουν διαφορετικές αντιλήψεις της κατασκευής αλλά και της επικύρωσης εικασιών. Τα δύο αυτά στοιχεία των ΠΔΓ έχουν αποτελέσει την εστίαση πολλών ερευνών οι οποίες μελετούν εντός αυτού του πλαισίου τη φύση της σχέσης ανάμεσα στο αντιληπτικό, χωρικό-γραφικό και το θεωρητικό επίπεδο (Arzarello et al., 2002; Olivero & Robutti, 2007). Παρά τους επιστημολογικούς προβληματισμούς που αφορούν στα δύο αυτά εργαλεία και τη θέση τους σε γεωμετρικά προβλήματα, αποτελεί κοινό τόπο ερευνητών/-ριών η συμβολή τους στην διαμόρφωση και στον έλεγχο εικασιών. Ειδικότερα, δύνανται να διαδραματίσουν καθοριστικό ρόλο στην οπτική αντίληψη κανονικοτήτων και αναλλοίωτων ιδιοτήτων (Olivero & Robutti, 2007) αλλά και στην κατανόηση λογικών εξαρτήσεων μέσα από την αίσθηση της κινητικής εξάρτησης των διαφόρων αντικειμένων της κατασκευής (Baccaglini & Mariotti, 2010).

2.2 Χειραπτικά μέσα – Δίπλωση χαρτιού (Paper folding)

Αρκετοί/-ες ερευνητές/-ριες έχουν ασχοληθεί με τις δυνατότητες της δίπλωσης χαρτιού (paper folding) σε σχέση με την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Οι Golan και Jackson (2009) στο σχετικό τους άρθρο, περιγράφουν την επιτυχία του προγράμματος *Origametria* που δημιουργήθηκε με στόχο τη διδασκαλία της γεωμετρίας μέσα από τη χρήση origami σε δημοτικά σχολεία, σε τρία επίπεδα: το γνωστικό, που εστιάζει στη συνεισφορά των origami στην ανάπτυξη χωρικής και οπτικής αντίληψης και λογικού συλλογισμού, το συναισθηματικό, που σχετίζεται με την οικοδόμηση αυτοεκτίμησης και την ενίσχυση των συναισθημάτων επιτυχίας και το κινητικό, που αφορά στην ανάπτυξη της κινητικής ικανότητας και τη βελτίωση του συντονισμού χεριού-ματιού. Θετική επίδραση της ένταξης των origami στη γεωμετρία εντοπίζουν κι άλλες έρευνες που εστιάζουν στην χωρική οπτικοποίηση και τον γεωμετρικό συλλογισμό (Arıcı & Aslan-Tutak, 2015; Gürbüz et al., 2018).

Η χειραπτική και διερευνητική φύση της διαδικασίας δίπλωσης χαρτιού σε συνδυασμό με τις έρευνες που αναδεικνύουν την συμβολή της στο γεωμετρικό συλλογισμό εγείρουν το ερώτημα σχετικά με αντίστοιχα οφέλη στην τυπική αποδεικτική διαδικασία στην οποία συχνά μαθητές/-ριες αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες. Αν και περιορισμένος ο αριθμός τους, υπάρχουν μελέτες που ασχολούνται με το ζήτημα της διερεύνησης και διαμόρφωσης εικασιών κατά τον πειραματισμό με διπλώσεις χαρτιού. Αρχικά, είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως, παρά το γεγονός ότι η δίπλωση χαρτιού αποτελεί μια χειραπτική διαδικασία, είναι αποδεκτό ότι καθορίζεται και δέχεται ορισμένα Αξιώματα, γνωστά ως *Huzita's Axioms* (Huzita, 1989), δηλαδή ένα σύνολο κανόνων σχετικών με τις μαθηματικές αρχές των origami που περιγράφουν τις διαδικασίες δίπλωσης που μπορούν να υλοποιηθούν σε ένα χαρτί (Gürbüz et al., 2018).

Η μαθηματική σκέψη δεν έγκειται σε αυτή καθ' εαυτή τη διαδικασία της δίπλωσης αλλά στην επιχειρηματολογία και την αιτιολόγηση στο συγκεκριμένο μοντέλο μαθηματικής εργασίας. Στηριζόμενος σε αυτό το είδος συλλογισμού κατά τη δίπλωση χαρτιού, ο Wiles (2013) αναφέρει ότι η διαδικασία αυτή δύναται να υποστηρίξει τους/τις μαθητές/-ριες να εξερευνήσουν σημαντικές γεωμετρικές ιδέες, να δοκιμάσουν και να διαμορφώσουν εικασίες, να θέσουν νέα ερωτήματα και να αποκαλύψουν σχέσεις που δεν γίνονται αντιληπτές με την πρώτη ματιά. Επιπλέον, η ενδυνάμωση των οπτικό-χωρικών ικανοτήτων θεωρείται θεμέλιο για τον μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών/-ριων και την απόδειξη (Wiles, 2013). Η διερεύνηση κατά τη διάρκεια μιας αποδεικτικής διαδικασίας μπορεί να περιλαμβάνει την αλληλεπίδραση με εξωτερικά περιβάλλοντα όπως χειραπτικά μέσα ή ΠΔΓ (Hsieh et al., 2012). Σύμφωνα με τους ερευνητές του ίδιου άρθρου, η αλληλεπίδραση αυτή με διαφορετικά περιβάλλοντα ενισχύει τη νοητική διερεύνηση και προωθεί την ανακάλυψη ιδιοτήτων αλλά και των απαραίτητων σε μια απόδειξη λογικών βημάτων, υποστηρίζοντας έτσι τη διαδικασία διαμόρφωσης και ελέγχου εικασιών αλλά και την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας.

2.3 Η έννοια της συνέργειας (synergy)

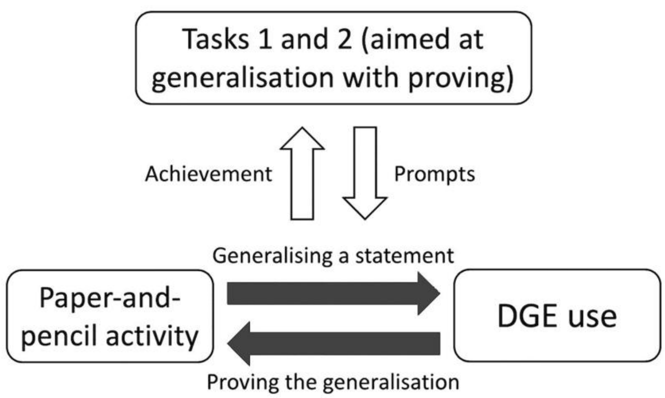
Μια νέα ερευνητική προοπτική που έχει προταθεί από ερευνητές/-ριες (Faggiano et al., 2018; Montone et al., 2019; Mariotti & Montone, 2020; Voltolini, 2018) είναι η διδακτική δυνατότητα της συνδυαστικής χρήσης δύο διαφορετικών ειδών τεχνουργημάτων με στόχο την κατασκευή και νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών. Έτσι, εισάγεται τα τελευταία χρόνια στη βιβλιογραφία η έννοια της *συνέργειας* τεχνουργημάτων. Υπό το πρίσμα της Θεωρίας Σημειωτικής Διαμεσολάβησης (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), η συνέργεια μεταξύ τεχνουργημάτων εμφανίζεται όταν τα νοήματα που σχετίζονται με τη χρήση ενός από τα τεχνουργήματα συμπληρώνουν τα νοήματα που προκύπτουν από τη χρήση του άλλου με τρόπο που συμβάλλει στην εμβάθυνση και την ύφανση του σημειωτικού ιστού που θα οδηγήσει σε κάποιο μαθηματικό νόημα. Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνοντας υπόψη τον όρο *σημειωτική παρεμβολή* (*semiotic interference*) των Maffia και Maracci (2019), ο οποίος αναφέρεται στην αλυσιδωτή σύνδεση σημείων (signs) που προκύπτουν από τη χρήση διαφορετικών τεχνουργημάτων και παραπέμπουν το ένα στο άλλο, ένα *επεισόδιο συνέργειας* παρουσιάζεται όταν η ανάδυση ενός φαινομένου σημειωτικής παρεμβολής ευνοεί την εξέλιξη των σημείων από προσωπικά σε από-πλαισιωμένα και μαθηματικά.

Οι μελέτες των Faggiano, Montone και Mariotti (2018) και Montone και Mariotti (2020) διερευνούν την πιθανή συνέργεια μεταξύ δύο διαφορετικής φύσεως τεχνουργημάτων και συγκεκριμένα την αξιοποίηση της ταυτόχρονης χρήσης χειραπτικών (πινέζες, ριζόχαρτό) και ψηφιακού μέσου (ΠΔΓ GeoGebra) για την κατασκευή των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς της αξονικής συμμετρίας και της μεταφοράς κατά διάνυσμα. Στα συμπεράσματα της έρευνάς τους (Montone & Mariotti, 2020) οι ερευνήτριες συνοψίζουν τις καταστάσεις που παρατήρησαν ότι οδηγούσαν σε επεισόδιο συνέργειας. Πιο συγκεκριμένα, φάνηκε ότι η συνέργεια συχνά προκαλείται από την επίκληση και μόνο της χρήσης ενός από τα δύο τεχνουργήματα, δηλαδή από την προωθούμενη διαδικασία ερμηνείας που συσχετίζει τα σημεία που αναφέρονται στο ένα από τα τεχνουργήματα με τα σημεία που αναφέρονται στο άλλο. Επιπλέον, παρουσιάστηκε συνέργεια κατά την αντιμετώπιση σύγκρουσης ή αμφιβολίας από τους/τις μαθητές/-ριες. Σε αυτή την περίπτωση, ο ίδιος ο μαθητής ενεργοποίησε την χρήση του άλλου τεχνουργήματος προκειμένου να βρει μια εξήγηση της συγκρουσιακής κατάστασης. Τέλος, εντοπίστηκαν επεισόδια συνέργειας που απέρρεαν από την ανάγκη αποσαφήνισης και εξήγησης γεγονότων που παρατηρούνταν στο ένα τεχνούργημα με τη χρήση νοημάτων που αναδύθηκαν κατά την εμπλοκή με το άλλο τεχνούργημα.

Η Voltolini (2018) μελέτησε την συνέργεια μεταξύ χειραπτικών και ψηφιακών περιβαλλόντων για να μελετήσει το πώς η χρήση του διαβήτη επιτρέπει την εξέλιξη ενός νέου εργαλείου, του διαβήτη για την περιστροφή τμημάτων. Το εύρημα της έρευνας αυτής είναι το γεγονός ότι η συνέργεια των δύο τεχνουργημάτων προσδίδει πρόσθετη αξία στο υλικό εργαλείο (διαβήτης) η οποία βοηθά στην υπέρβαση ορισμένων δυσκολιών ή επιστημολογικών εμποδίων που σχετίζονται με τη χρήση του.

2.4 Συνέργεια και απόδειξη

Στο νέο αυτό ερευνητικό πεδίο της συνέργειας για τη νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών υπάρχει ένας μικρός αριθμός έργων που μελετούν τη συνεισφορά της αλληλεπίδρασης ενός χειραπτικού και ενός ψηφιακού μέσου σε διαδικασίες διαμόρφωσης εικασιών και απόδειξης. Οι Komatsu και Jones (2020) μελέτησαν την συνδυαστική εργασία με ΠΔΓ και με χαρτί-μολύβι σε ένα ευρύτερο πεδίο μελέτης της διαδικασίας της απόδειξης που επηρεάζεται από την εμπλοκή των μαθητών/-ριων με διαφορετικά πεδία εργασίας και περιβάλλοντα. Ειδικότερα, διερευνήθηκε η αλληλεπίδραση -με μια ευρύτερη οπτική- του χειραπτικού και ψηφιακού μέσου κατά την παραγωγή και την απόδειξη μιας γενίκευσης ενός γεωμετρικού ισχυρισμού. Η έρευνα αυτή δρα συμπληρωματικά στις ήδη υπάρχουσες μελέτες που αφορούν στη σχέση των ΠΔΓ με τη μαθηματική απόδειξη. Ωστόσο, ενώ η υπάρχουσα βιβλιογραφία εστιάζει κυρίως στον ρόλο των ΠΔΓ στην παραγωγή και τον έλεγχο εικασιών, στη μετάβαση από την παραγωγή εικασιών στην παραγωγή αποδείξεων αλλά και στη μελέτη των δυνατοτήτων που παρέχουν τα ΠΔΓ *σε σύγκριση* με τις αντίστοιχες του περιβάλλοντος χαρτί - μολύβι, η συγκεκριμένη έρευνα εστιάζει στην επακόλουθη διαδικασία, δηλαδή τη γενίκευση *μετά* την απόδειξη μίας γεωμετρικής πρότασης μέσω μετασχηματισμών του διαγράμματος που δίνεται στην αρχική πρόταση. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η χρήση των ΠΔΓ υποστήριξε τη γενίκευση του αρχικού ισχυρισμού με τη δυνατότητα παραγωγής διαφορετικών διαγραμμάτων, ωστόσο η εργασία στο περιβάλλον χαρτί – μολύβι ήταν αναγκαία στα πιο απαιτητικά έργα, ώστε να οδηγηθούν οι μαθητές/-ριες στην απόδειξη της εικασίας. Όπως αναφέρεται, η δυσκολία των μαθητών να προχωρήσουν στην απόδειξη με τη χρήση αποκλειστικά του ΠΔΓ οφείλεται πιθανώς στο ότι τα πολλαπλά διαγράμματα αποσυντονίζουν τους μαθητές, ενώ η εργασία πάνω σε ένα στατικό σχήμα στο χαρτί μπορεί να φανεί χρήσιμη σε αυτή την περίπτωση. Η συνεισφορά του περιβάλλοντος χαρτί – μολύβι αποδίδεται από τους ερευνητές στη δυνατότητα που παρείχε στους/στις μαθητές/-ριες για τον κατά Duval μετασχηματισμό των αναπαραστάσεων (*treatment:* βοηθητικές γραμμές, συμβολισμοί ισότητας και αλγεβρικός χειρισμός των μαθηματικών εκφράσεων, *conversion:* αλγεβρική «μετάφραση» των δεδομένων), μία διαδικασία απαραίτητη κατά τη μαθηματική δραστηριότητα. Καταλήγει, λοιπόν, το άρθρο στο συμπέρασμα ότι τα δύο αυτά περιβάλλοντα (ΠΔΓ, χαρτί – μολύβι) με τις δυνατότητες που προσφέρει καθένα από αυτά, μπορούν να έχουν έναν ρόλο συμπληρωματικό (Εικόνα 1), δίνοντας μία νέα οπτική στην αποδεικτική διαδικασία των μαθητών και ότι είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να μην περιορίζεται στη χρήση ενός εκ των δύο, παρέχοντας ευκαιρίες να αναδειχθούν αυτές οι ξεχωριστές τους ιδιότητες.



Εικόνα 1: Η θεωρία των Komatsu και Jones

Στο άρθρο τους οι Valori, Giacomone, Albanese και Adamuz Povedano (2022) μελετούν την αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο τεχνουργημάτων, της δίπλωσης χαρτιού (origami) και του ΠΔΓ Geogebra, κατά την εμπλοκή μαθητών Λυκείου με κατασκευαστικά-αποδεικτικά προβλήματα και με τη γενίκευση αυτών στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το κύριο θεωρητικό πλαίσιο της μελέτης αποτελεί η οντο-σημειωτική προσέγγιση. Επιπλέον, περιγράφονται τα κατά Duval είδη κατανόησης του σχήματος και αξιοποιείται το θεωρητικό πλαίσιο των Komatsu και Jones (2020). Δανειζόμενοι από το Hsieh et al., 2012, οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι η αλληλεπίδραση με εξωτερικά αντικείμενα (π.χ. χειραπτικά, ΠΔΓ) λειτουργεί ως ενίσχυση της νοητικής εξερεύνησης και προωθεί την ανακάλυψη ιδιοτήτων καθώς και την ανακάλυψη των λογικών βημάτων που απαιτούνται σε μια απόδειξη, υποστηρίζοντας έτσι τις σχετικές αιτιολογήσεις και επιχειρήματα. Οι ερευνητές υποστηρίζουν στο άρθρο τους ότι οι επτά λειτουργίες που περιγράφουν τις αποδεκτές αναδιπλώσεις για την κατασκευή μίας νέας τσάκισης (Huzita, 1989) είναι ισοδύναμες με τις κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. Όσον αφορά στο GeoGebra, γίνεται αναφορά στη βασική λειτουργία του, το σύρσιμο, και στη δυνατότητα που παρέχει να διατηρούνται οι εσωτερικές σχέσεις κάθε σχήματος που έχει κατασκευασθεί σύμφωνα με τους κανόνες και τις ιδιότητες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο τεχνουργημάτων που εξετάζεται αφορά στις αλληλεπιδράσεις με τα διαγράμματα κατά τη διάρκεια της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως ερμηνεύονται μέσα από τις διαλεκτικές και λειτουργικές, οπτικές και μη οπτικές πρακτικές που χρησιμοποιεί ο μαθητής. Στους/στις συμμετέχοντες/-ουσες δόθηκαν αρχικά κάποιες οδηγίες δίπλωσης και τους ζητήθηκε να διατυπώσουν μια εικασία σχετικά με το είδος του τετραπλεύρου που προέκυπτε. Έπειτα, τους ζητήθηκε να μοντελοποιήσουν την κατασκευή origami στο GeoGebra, να εξηγήσουν τα εμπλεκόμενα μαθηματικά νοήματα της κάθε λειτουργίας του origami και να διερευνήσουν ή/ και να αιτιολογήσουν την προηγούμενη εικασία τους. Ένα δεύτερο έργο στόχευε στη γενίκευση των προηγούμενων αποτελεσμάτων ώστε να συμπεριληφθούν και άλλα ήδη τετραπλεύρων. Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψε ότι ο φυσικό και το ψηφιακό τεχνούργημα έπαιζαν μερικές φορές συμπληρωματικό ρόλο, ενώ άλλες φορές ενίσχυαν το ένα το άλλο και επέτρεπαν στον/στη μαθητή/-ρια να βγάλει συμπεράσματα ή να αναθεωρήσει τις ενέργειες που πραγματοποίησε. Επιπλέον, ενώ στο πρώτο έργο κανένα από τα δύο τεχνουργήματα δεν έπαιξε προνομιακό ρόλο στην προώθηση του παραγωγικού συλλογισμού, στο δεύτερο έργο της γενίκευσης φαίνεται πως το ψηφιακό μέσο αποτέλεσε τη γέφυρα μεταξύ σχηματικής επιχειρηματολογίας (configural reasoning) και της απόδειξης. Βέβαια, και στο πρώτο έργο η συμβολή του GeoGebra ήταν καθοριστική, καθώς οι μεταφορά των λειτουργιών αναδίπλωσης στο ψηφιακό περιβάλλον ενίσχυσε την κατανόηση των υποθέσεων από τον μαθητή, ενώ παράλληλα η χρήση του εργαλείου μέτρησης βοήθησε το μαθητή να βγάλει συμπεράσματα (μέσω του διαγραμματικού συλλογισμού) και να ολοκληρώσει προηγούμενα επιχειρήματά του. Η συνομιλία μεταξύ των οπτικών και αναλυτικών πρακτικών αναδύθηκε μέσα από την επάρκεια και των πλούτο των αντικειμένων που προέκυψαν από τις ενέργειες του μαθητή. Επομένως, η μελέτη αυτή, παρά τους περιορισμούς της, δείχνει πώς οι πολλαπλές οπτικές αναπαραστάσεις επιτρέπουν τον καλύτερο συντονισμό των λειτουργικών και των διαλεκτικών αντιλήψεων κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, ιδίως κατά τη διαδικασία από τη δημιουργία εικασιών μέχρι την κατασκευή αποδείξεων.

Συνεπώς, το κενό που επιχειρεί να καλύψει η παρούσα έρευνα έγκειται στη μελέτη του ρόλου της συνέργειας, όχι με την ευρεία έννοια της αλληλεπίδρασης αλλά με τον ορισμό των Montone και Mariotti (2020) (βλ. ενότητα 2.3), της δίπλωσης χαρτιού και του ΠΔΓ Geometer's Sketchpad (GSP) στην νοηματοδότηση της υποθετικής πρότασης «αν…τότε» και της απόδειξής της με τη συνδυαστική χρήση δύο αναλυτικών φακών, των

Μαθηματικών Πεδίων Εργασίας (ΜΠΕ) (Kuzniak & Richard, 2014) και της Θεωρίας Σημειωτικής Διαμεσολάβησης (ΘΣΔ) (Bussi & Mariotti, 2008) τα οποία περιγράφονται αναλυτικά ακολούθως.

Κεφάλαιο 3 - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει την παρουσίαση των δύο θεωρητικών πλαισίων που αξιοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα, του θεωρητικού πλαισίου των Μαθηματικών Πεδίων Εργασίας και της Θεωρίας Σημειωτικής Διαμεσολάβησης.

3.1 Μαθηματικά Πεδία Εργασίας (ΜΠΕ)

Η έννοια του ΜΠΕ διευρύνει την έννοια του πεδίου εργασίας στη Γεωμετρία που εισήχθη από τους Kuzniak και Houdement (Houdement & Kuzniak, 1999) και αναπτύχθηκε με σκοπό την καλύτερη κατανόηση των διδακτικών προκλήσεων γύρω από το μαθηματικό έργο σε ένα σχολικό περιβάλλον. Ως *μαθηματικό έργο* νοείται η διανοητική εργασία της παραγωγής, η ανάπτυξη και η ολοκλήρωση της οποίας ορίζεται και υποστηρίζεται από τα μαθηματικά. Το *πεδίο* διαμορφώνει ένα καλά σχεδιασμένο και οργανωμένο περιβάλλον που επιτρέπει την εργασία των μαθητών πάνω στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Kuzniak & Richard 2014).

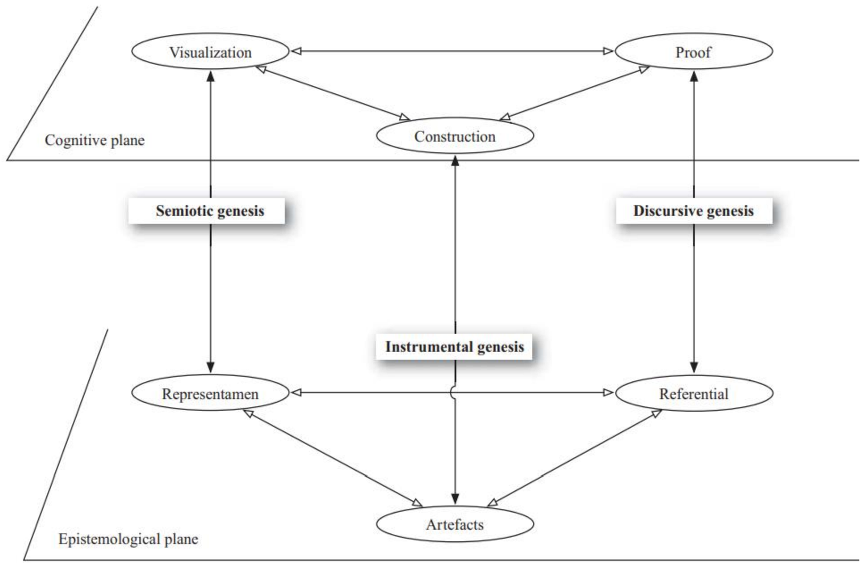
Προκειμένου να μπορεί να μελετηθεί το μαθηματικό έργο κατά την εμπλοκή με μια δραστηριότητα είναι σημαντικό να ληφθούν υπόψη δύο στενά συνδεδεμένες πλευρές του μαθηματικού έργου, μια επιστημολογικής και μια γνωστικής φύσης (Kuzniak, 2022). Έτσι, ένα ΜΠΕ δομείται από το *επιστημολογικό επίπεδο*, το οποίο σχετίζεται με το μαθηματικό περιεχόμενο της περιοχής που μελετάται, και το *γνωστικό επίπεδο* που αφορά στον συλλογισμό του ατόμου που εμπλέκεται με μία μαθηματική δραστηριότητα. Καθένα από τα δύο αυτά επίπεδα περιλαμβάνει τρεις αλληλένδετες συνιστώσες (Εικόνα 2). Πιο συγκεκριμένα, το επιστημολογικό περιλαμβάνει:

- ένα σύνολο συγκεκριμένων και απτών αντικειμένων – συμβόλων (*representamen -signs*), π.χ. γεωμετρικά σχήματα, αλγεβρικά σύμβολα, γραφήματα, εικόνες
- ένα σύνολο τεχνουργημάτων όπως όργανα σχεδίασης ή λογισμικά (*artefacts*) και
- ένα θεωρητικό σύστημα αναφοράς (*theoretical referential*) με ορισμούς, ιδιότητες και θεωρήματα

Το γνωστικό επίπεδο περιλαμβάνει τις εξής διαδικασίες:

- *οπτικοποίηση (visualization)* που συνδέεται με την αποκωδικοποίηση και ερμηνεία σημείων (*signs*). Θα πρέπει να διαχωριστεί από την απλή αντίληψη αντικειμένων, καθώς αποτελεί μια διαδικασία δόμησης των πληροφοριών που παρέχονται από τα σημεία και συμβάλλει στην εδραίωση της εγκυρότητας των ιδιοτήτων τους
- *κατασκευή (construction)* που εξαρτάται από τα τεχνουργήματα και τις τεχνικές αξιοποίησης τους
- *απόδειξη (proving)* που προκύπτει με μια διαλογική διαδικασία παραγωγής επιχειρημάτων βασισμένων στο θεωρητικό σύστημα αναφοράς (Kuzniak & Richard, 2014; Kuzniak, 2022).

Σύμφωνα με τον Kuzniak (2022), υπό το πρίσμα της θεωρίας των ΜΠΕ, η εξέλιξη της μαθηματικής εργασίας είναι μια διαδικασία που αναπτύσσεται προοδευτικά, μέσα από τη γεφύρωση του επιστημολογικού και του γνωστικού επιπέδου. Η γεφύρωση αυτή πραγματοποιείται με τρεις αλληλένδετες γενέσεις, τη σημειωτική (*semiotic genesis*), την εργαλειακή (*instrumental genesis*) και την διαλογική (*discursive genesis*). Κάθε μια από αυτές μπορεί να περιγραφεί σύμφωνα με δύο προοπτικές. Η μια εστιάζει στις επιστημολογικές συνιστώσες (καθοδική διαδικασία) και η άλλη δεύτερη είναι προσανατολισμένη προς τις γνωστικές διαδικασίες (ανοδική διαδικασία) (Εικόνα 2).



Εικόνα 2: Τα δύο επίπεδα ενός ΜΠΕ και οι τρεις γενέσεις μεταξύ αυτών

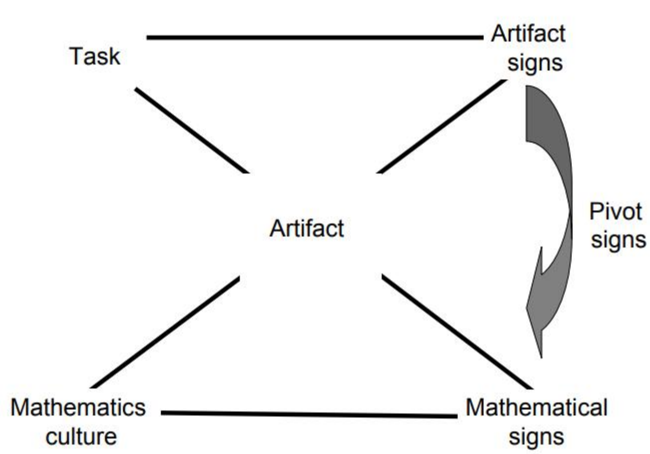
Ο Kuzniak (2022) περιγράφει αναλυτικά τις τρεις αυτές γενέσεις ως εξής:

- Σημειωτική γένεση (*semiotic genesis*): αποκαλύπτει την διαλεκτική σχέση μεταξύ συντακτικής και σημασιολογικής πτυχής ενός μαθηματικού αντικειμένου, εδραιώνοντας συνδέσεις μεταξύ λειτουργίας και δομής των σημείων. Η ανοδική διαδικασία συνιστά αποκωδικοποίηση και ερμηνεία των σημείων μέσα από την οπτικοποίηση, ενώ η καθοδική εκκινεί από την οπτικοποίηση και εμφανίζεται όταν παράγεται ή προσδιορίζεται ένα σημείο
- Εργαλειακή γένεση (*instrumental genesis*): δημιουργεί τη σύνδεση μεταξύ των τεχνουργημάτων και των κατασκευαστικών διαδικασιών που συμβάλλουν στην ολοκλήρωση του μαθηματικού έργου. Η ανοδική διαδικασία περιγράφει τις ενέργειες με τις οποίες ο χρήστης οικειοποιείται τις διάφορες τεχνικές που συνδέονται με το τεχνούργημα και η καθοδική αφορά στην κατάλληλη επιλογή του τεχνουργήματος για την εκτέλεση των προβλεπόμενων ενεργειών.
- Διαλογική γένεση της απόδειξης (*discursive genesis*): ενεργοποιεί τις ιδιότητες και τα αποτελέσματα που οργανώνονται στο θεωρητικό σύστημα αναφοράς ώστε να είναι διαθέσιμα για μαθηματικό συλλογισμό και διαλογικές επικυρώσεις. Συνίσταται από μια ανοδική κίνηση που κινητοποιεί έναν παραγωγικό, αποδεικτικό λόγο που υποστηρίζεται από ιδιότητες δομημένες στο θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς, και μια καθοδική που αφορά στον προσδιορισμό ιδιοτήτων και ορισμών που πρέπει να συμπεριληφθούν στο πλαίσιο.

3.2 Θεωρία Σημειωτικής Διαμεσολάβησης (ΘΣΔ)

Στη Θεωρία Σημειωτικής Διαμεσολάβηση (Theory of Semiotic Mediation) που εισήγαγαν οι Bussi και Mariotti (2008) κεντρική θέση έχει η έννοια των σημείων (signs), οι συνδέσεις αυτών με το εκάστοτε τεχνούργημα αλλά και με το μαθηματικό περιεχόμενο καθώς και η αξιοποίηση των συνδέσεων στην εκπαιδευτική διαδικασία. Σύμφωνα με τις ερευνήτριες (Bussi & Mariotti, 2008) ένα τεχνούργημα (artefact) μπορεί να αξιοποιηθεί από τον/την εκπαιδευτικό ως εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης για την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων, αποκομμένων από τη χρήση του τεχνουργήματος, αλλά διατηρώντας με αυτό μια βαθιά σημειωτική σύνδεση. Η εξέλιξη των νοημάτων περιγράφεται ως η μετάβαση από τα προσωπικά νοήματα που σχετίζονται στενά με τη χρήση του τεχνουργήματος στα μαθηματικά νοήματα που συνδέονται με μαθηματικές έννοιες.

Η διπλή αυτή σημειωτική σχέση ονομάζεται *σημειωτική δυνατότητα ενός τεχνουργήματος* (*semiotic potential of an artefact*) και εκφράζεται μέσα από την σύνθετη διαδικασία αλληλεπίδρασης τριών ειδών σημείων (signs): σημεία από το τεχνούργημα (*artefact signs),* μεταβατικά σημεία *(pivot sign),* μαθηματικά σημεία *(mathematical signs)*. Τα σημεία από το τεχνούργημα αναφέρονται στο πλαίσιο χρήσης του τεχνουργήματος και τα συνδεόμενα νοήματα είναι προσωπικά και συνήθως υπόρρητα, αυστηρά συνδεδεμένα με την εμπειρία του υποκειμένου με το τεχνούργημα. Τα μαθηματικά νοήματα αναφέρονται στο μαθηματικό πλαίσιο, σχετίζονται με μαθηματικά νοήματα, όπως αυτά διαμοιράζονται στην εκάστοτε εκπαιδευτική βαθμίδα (π.χ. δημοτικό - γυμνάσιο) και μπορούν να εκφραστούν με μια πρόταση (π.χ. ορισμός, δήλωση προς απόδειξη, μαθηματική απόδειξη) σύμφωνα με τα πρότυπα της μαθηματικής κοινότητας. Αποτελούν μέρος της πολιτιστικής κληρονομιάς και συνιστούν τον στόχο της σημειωτικής διαμεσολάβησης που ενορχηστρώνει ο/η εκπαιδευτικός. Τέλος, τα μεταβατικά σημεία αποτελούν γέφυρες ανάμεσα στα σημεία από το τεχνούργημα και τα μαθηματικά σημεία. Μπορούν να αναφέρονται τόσο στη δραστηριότητα με το τεχνούργημα- ειδικότερα μπορούν να αναφέρονται σε συγκεκριμένες ενέργειες με εργαλεία- όσο και στη φυσική γλώσσα, καθώς και στο μαθηματικό πεδίο.



Εικόνα 3: Τεχνούργημα και είδη signs

Η εξέλιξη των νοημάτων μπορεί να οργανωθεί σε *σημειωτικές αλυσίδες (semiotic chains)* οι οποίες αναδεικνύουν την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων μέσα από την παρατήρηση των σημείων (signs) και τη μετάβαση από πλαισιωμένα και αυστηρώς συσχετιζόμενα με τη χρήση του τεχνουργήματος σε μαθηματικά σημεία που αποτελούν τη στόχευση της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Στην παρούσα έρευνα τα ΜΠΕ προσφέρουν ένα εργαλείο ανάλυσης της εργασίας των μαθητών/-ριων με τη δίπλωσης χαρτιού και το GSP, λαμβάνοντας υπόψη σημειωτικά, κατασκευαστικά και διαλογικά χαρακτηριστικά. Από την άλλη, η έννοια της σημειωτικής αλυσίδας της ΘΣΔ συμβάλλει στην ανάλυση της σύνδεσης των δύο ΜΠΕ μέσα από την ιχνηλάτηση των μεταβάσεων από διαστάσεις του ενός σε διαστάσεις του άλλου και την παρατήρηση της εξέλιξης των νοημάτων. Έτσι, η συνδυαστική χρήση των δύο αυτών θεωρητικών πλαισίων κρίθηκε κατάλληλη για τη μελέτη της συνέργειας της δίπλωσης χαρτιού και του GSP και τη συμβολή της στην νοηματοδότηση στοιχείων σχετικών με την υποθετική πρόταση και την απόδειξη.

Κεφάλαιο 4 - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1 Στόχοι της έρευνας – Ερευνητικό ερώτημα

Η έννοια της απόδειξης και οι τρόποι ενίσχυσης της κατανόησής της από τους/τις μαθητές/-ριες αποτελούν κεντρικά ερευνητικά ζητήματα στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών. Υποστηρίζοντας την ανάγκη μιας διερευνητικής πλευράς κατά την αποδεικτική διαδικασία, πολλές έρευνες (Arzarello et al. 2002. Mariotti, 2000. Olivero & Robutti, 2007) έχουν μελετήσει τις δυνατότητες που προσφέρουν τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας (ΠΔΓ) σε διερευνητικές διαδικασίες και στη μετάβαση από την διαμόρφωση εικασιών στη δόμηση γεωμετρικών αποδείξεων, συγκρίνοντάς τες κατά βάση με τις αντίστοιχες δυνατότητες-περιορισμούς του περιβάλλοντος χαρτί-μολύβι. Παράλληλα, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, αρκετές είναι και οι έρευνες οι οποίες εξετάζουν το κατά πόσο τα χειραπτικά μέσα (π.χ. φυσικά αντικείμενα, φύλλο χαρτί, origami) ενισχύουν τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών/-ριων (Arıcı & Aslan-Tutak, 2015. Hsieh et al, 2012. Gürbüz et al., 2018). Στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, ωστόσο, σπάνια συναντάμε μελέτες που εστιάζουν στην αλληλεπίδραση των δύο τεχνουργημάτων, ενός ψηφιακού και ενός χειραπτικού, και στην από κοινού τους συμβολή στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων, με τον αριθμό τους να μικραίνει σημαντικά όταν πρόκειται για την συμβολή αυτής της αλληλεπίδρασης σε διαδικασίες απόδειξης και γενίκευσης.

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι να μελετήσει ακριβώς αυτό το ζήτημα, του με ποιον τρόπο μπορεί η συνέργεια, όπως αυτή ορίζεται από τις Mariotti και Montone (2020), μεταξύ της δίπλωσης χαρτιού και του ΠΔΓ Geometer's Sketchpad να συμβάλλει στην εξέλιξη νοημάτων σχετικών με την υποθετική πρόταση «αν…τότε» (conditional statement) και στην απόδειξή της. Η μελέτη αυτή ξεκίνησε με την a priori υπόθεση ότι η εμπειρία από τη χρήση του ενός τεχνουργήματος και τα αναδυόμενα νοήματα συμπληρώνονται και οργανώνονται σε μια εξελικτική διαδικασία με την αντίστοιχη εμπειρία και τα νοήματα του άλλου τεχνουργήματος. Η μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος κρίνεται σημαντική καθώς δύναται να προσφέρει την ευκαιρία οπτικό - απτικού και δυναμικού πειραματισμού και μιας πολύμορφης συνέργειας ικανή να συνεισφέρει σε διαδικασίες διερεύνησης, διατύπωσης και επικύρωσης εικασιών, γενίκευσης και απόδειξης υποθετικών προτάσεων.

Το ερευνητικό ερώτημα δομήθηκε σταδιακά κατά την ερευνητική διαδικασία και τελικά διαμορφώθηκε ως εξής:

Ερευνητικό Ερώτημα
Ποιος ο ρόλος της συνέργειας της δίπλωσης χαρτιού και του ΠΔΓ Geometer's Sketchpad στη διαδικασία ανάπτυξης υποθετικής πρότασης και της απόδειξής της κατά την εργασία μαθητών/-ριων Α' Λυκείου με κατασκευαστικά-αποδεικτικά προβλήματα;

4.2 Το πλαίσιο της έρευνας – Οι συμμετέχοντες/-ουσες

Η έρευνα εφαρμόστηκε αρχικά πιλοτικά σε μία μαθήτρια Α’ Λυκείου με στόχο την ανατροφοδότηση αναφορικά με την κατανόηση των δραστηριοτήτων, την σαφήνεια των ερωτημάτων και τον τρόπο αλληλεπίδρασης με το ψηφιακό και χειραπτικό μέσο τόσο μεμονωμένα όσο και συνδυαστικά. Τα δεδομένα της πιλοτικής έρευνας καταγράφηκαν και μελετήθηκαν, ωστόσο αξιοποιήθηκαν μόνο για την αναθεώρηση και τροποποίηση σημείων των τελικών δραστηριοτήτων της κύριας παρέμβασης και δεν αναλύθηκαν για να συμβάλλουν στην απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων.

Στην κύρια έρευνα που διεξήχθη συμμετείχαν συνολικά 4 μαθητές/-ριες της Α’ Λυκείου οι οποίοι/-ες χωρίστηκαν σε δύο ομάδες των δύο ατόμων. Οι δύο ομάδες εργάστηκαν σε διαφορετικό χρόνο στο χώρο του φροντιστηρίου στο οποίο φοιτούν. Η μη ταυτόχρονη εργασία των δύο ομάδων ήταν μια συνειδητή επιλογή που στόχευε στο να μην επηρεαστεί η μια από τις ιδέες της άλλης και τελικά να υπάρχει ποικιλία δεδομένων όσον αφορά στον τρόπο εμπλοκής με το χειραπτικό και ψηφιακό μέσο και την συνέργειά τους. Η έρευνα και με τις δύο ομάδες πραγματοποιήθηκε τη περίοδο που οι μαθητές/-ριες είχαν ολοκληρώσει την προβλεπόμενη ύλη της Γεωμετρίας Α’ Λυκείου, είχαν διδαχθεί δηλαδή μέχρι και το Κεφάλαιο 5: *Παραλληλόγραμμα-Τραπέζια* του σχολικού βιβλίο, ώστε να δοθεί το περιθώριο να αντλήσουν από ένα εύρος θεωρημάτων και προτάσεων που έκριναν κατάλληλο στα εκάστοτε ερωτήματα των δραστηριοτήτων. Και οι τέσσερεις συμμετέχοντες/-ουσες ήταν μαθητές/-ριες με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη γεωμετρία. Για λόγους δεοντολογίας δεν αναφέρονται οι συμμετέχοντες/-ουσες με τα ονόματά τους, αλλά με τους κωδικούς Μ1, Μ2 για τις μαθήτριες της Ομάδας Α και με Μ3, Μ4 για την μαθήτρια και τον μαθητή της Ομάδας Β. Για την ερευνήτρια χρησιμοποιείται το «Ε».

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε αποτελεί μία μελέτη περίπτωσης (case study). Όπως προαναφέρθηκε, επιλέχθηκαν συγκεκριμένα μαθητές/-ριες της Α’ Λυκείου τη χρονική περίοδο που είχαν ολοκληρώσει την διδακτέα ύλη (μέχρι και το Κεφ. 5 *Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια* του σχολικού βιβλίου), ώστε να υπάρχει εύρος γεωμετρικών γνώσεων για να ανακαλέσουν και κατ’ επέκταση ποικιλία τρόπων διαμόρφωσης, επικύρωσης και απόδειξης της υποθετικής πρότασης κάθε δραστηριότητας, αλλά και ποικιλία τρόπων αλληλεπίδρασης με το χειραπτικό και ψηφιακό πεδίο εργασίας. Όπως τονίζει ο Flyvbjerg (2011), δύο βασικές προϋποθέσεις για να μπορέσει μια μελέτη περίπτωσης να οδηγήσει σε γενικά συμπεράσματα σε ένα συγκεκριμένο πεδίο μελέτης είναι η προσεκτική οριοθέτηση της υπό μελέτη περίπτωσης (*casing*) και η συμβατότητα αυτής την μεθόδου εντατικής παρατήρησης με το πρόβλημα της έρευνας. Έτσι, υποστηρίζεται ότι η μελέτη αυτή θα μπορούσε να συμβάλλει από κοινού με αντίστοιχες έρευνες στην διερεύνηση του ρόλου της συνεργικής σχέσης διαφορετικών πεδίων εργασίας στη διαμόρφωση και απόδειξη υποθετικών προτάσεων (conditional statements).

Πριν την έναρξη της κύριας έρευνας, με την κάθε ομάδα πραγματοποιήθηκε μια συνάντηση που αποσκοπούσε την γνωριμία και εξοικείωση με το λογισμικό του Geometer's Sketchpad, μιας και δεν είχαν εργαστεί προηγουμένως ούτε σε αυτό αλλά ούτε και σε κάποιο άλλο περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας. Στην εισαγωγική αυτή συνάντηση ο/η κάθε μαθητής/-ρια εργαζόταν κυρίως ατομικά με το δικό του laptop πάνω σε μικρές ασκήσεις κατασκευής γεωμετρικών αντικειμένων με πολλαπλούς τρόπους (βλ. Παράρτημα).

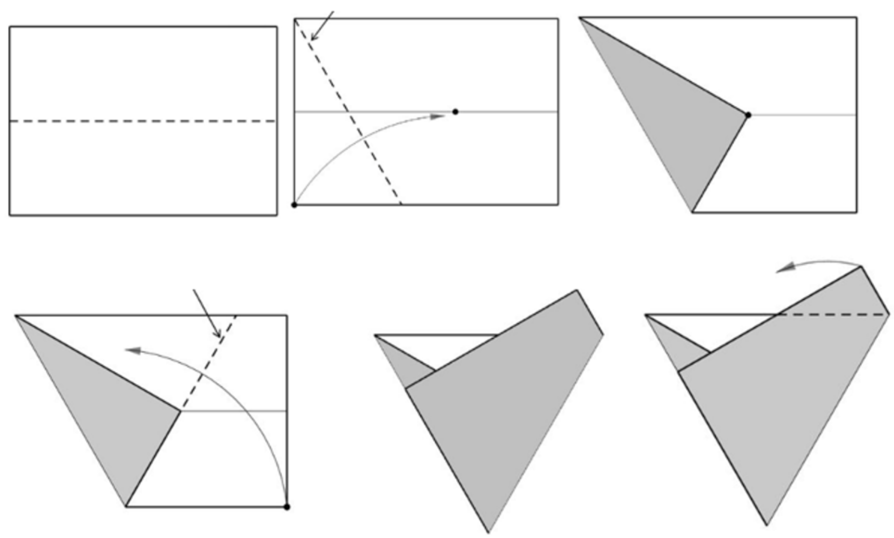
Κατά την εμπλοκή με τις κύριες δραστηριότητες της έρευνας οι μαθητές/-ριες της κάθε ομάδας εργάζονταν συνεργατικά σε έναν laptop όταν απαιτούνταν εργασία στο ψηφιακό περιβάλλον, αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων υπήρχε η προτροπή για συζήτηση και από κοινού διερεύνηση. Η επιλογή του να εργαστούν οι μαθητές/-ριες ομαδικά απορρέει από μια βασική αρχή της Θεωρίας Σημειωτικής Διαμεσολάβησης, σύμφωνα με την οποία η εξέλιξη των προσωπικών νοημάτων σε μαθηματικά είναι μια διαδικασία που ενθαρρύνεται από συγκεκριμένες σημειωτικές δραστηριότητες, ιδίως κατά την αλληλεπίδραση μεταξύ των συνομηλίκων και κατά τις ομαδικές συζητήσεις, οι οποίες ενορχηστρώνονται από την εξειδικευμένη καθοδήγηση της εκπαιδευτικού/ερευνήτριας (Faggiano et al. 2018). Από την άλλη, ο/ καθένας/-μια μαθητής./-ρια είχε το δικό του φύλλο χαρτί για να πραγματοποιεί της διπλώσεις που υποδείκνυαν οι δραστηριότητες, καθώς κρίνεται απαραίτητη η οπτική και απτική εμπειρία της δίπλωσης χαρτιού για την μαθηματική νοηματοδότηση των διάφορων σημείων αυτού του πεδίου εργασίας. Με την κάθε ομάδα πραγματοποιήθηκαν -πέρα από την εισαγωγική- τρεις συναντήσεις με την καθεμία να αφιερώνεται εξολοκλήρου σε μία από τις 3 δραστηριότητες της έρευνας. Η κύρια παρέμβαση με την Ομάδα Α διήρκησε συνολικά περίπου $5\frac{1}{2}$ ώρες και με την Ομάδα Β περίπου $6\frac{1}{2}$ ώρες.

4.3 Σχεδιασμός- Ανάλυση δραστηριοτήτων

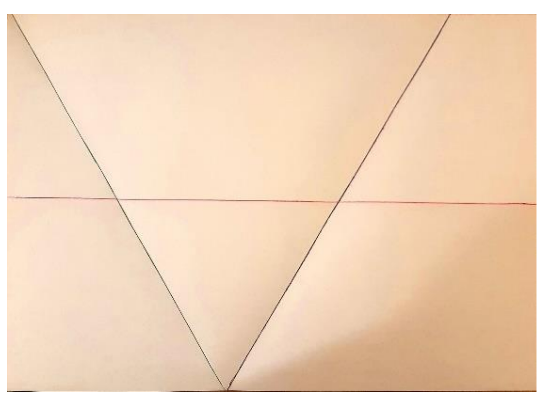
Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων έγινε έχοντας ως στόχο την αλληλεπίδραση των μαθητών/-ριων με δύο πεδία εργασίας – το πεδίο της δίπλωσης χαρτιού και το πεδίο GSP- και τη δημιουργία συνεργικής σχέσης μέσα από την οποία εξελίσσονται μαθηματικά νοήματα σχετικά με την υποθετική πρόταση (conditional statement). Το κοινό μοτίβο και στις τρεις δραστηριότητες είναι ότι αρχικά καλούν τους/τις μαθητές/-ριες να πραγματοποιήσουν συγκεκριμένες διπλώσεις στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού και να διατυπώσουν μια εικασία σχετικά με το προκύπτον κάθε φορά αποτέλεσμα, έπειτα να μεταφέρουν την κατασκευή τους από το χειραπτικό μέσο στο ψηφιακό περιβάλλον του Sketchpad και να ελέγξουν εκ νέου την εικασία τους και τέλος να την αποδείξουν. Παρότι το μοτίβο αυτό φαίνεται να ενέχει μια γραμμικότητα, εντούτοις σε κάθε βήμα η επιστροφή στο προηγούμενο ΜΠΕ είναι απαραίτητη προκειμένου να απαντηθούν κάποια ερωτήματα, με αποτέλεσμα η εμπειρία από τη χρήση του ενός τεχνουργήματος να ενισχύει τη σημειωτική δυνατότητα του άλλου σε σχέση με την παραγωγή εικασίας και τελικά την απόδειξη. Ωστόσο, η κάθε δραστηριότητα ενθαρρύνει διαφορετικές εστιάσεις σχετικά με την διατύπωση και απόδειξη μιας υποθετικής πρότασης και εντέλει δομείται μια πολύπλευρη θέαση της έννοιας της συνέργειας.

Δραστηριότητα 1

Αρχικά ζητείται από τους/τις μαθητές/-ριες να πραγματοποιήσουν σε ένα φύλλο χαρτί Α4 τις διπλώσεις που φαίνονται παρακάτω. Στόχος είναι η ενεργοποίηση της οπτικής αντίληψής τους για την ερμηνεία των διακεκομμένων τμημάτων που αντιστοιχούν στις τσακίσεις και η απτική εμπειρία της δίπλωσης χαρτιού.



Εικόνα 4: Οδηγίες δίπλωσης της Δραστηριότητας 1



Εικόνα 5: Οι τσακίσεις της Δραστηριότητας 1 ένα μετά την ολοκλήρωση των διπλώσεων

Συγκεκριμένα, αναμένεται να διπλώσουν αρχικά το φύλλο Α4 στη μέση ώστε να ταυτιστούν οι απέναντι μεγάλες πλευρές του και σταδιακά, μέσα και από τα επόμενα ερωτήματα τις δραστηριότητας, να φτάσουν στο μαθηματικό νόημα της μεσοπαραλλήλου των δύο απέναντι μεγάλων πλευρών ή ισοδύναμα της μεσοκαθέτου των δύο απέναντι μικρών πλευρών. Έπειτα καλούνται να πραγματοποιήσουν μια τσάκιση η οποία να διέρχεται από την πάνω αριστερή κορυφή και να «μεταφέρει» την κάτω αριστερή κορυφή πάνω στην προηγούμενη τσάκιση. Ουσιαστικά, καλούνται μέσα από αυτή τη δίπλωση να οδηγηθούν στο μαθηματικό νόημα της μεσοκαθέτου του τμήματος με άκρα την κάτω αριστερή κορυφή και το σημειωμένο σημείο πάνω στην πρώτη τσάκιση. Προκειμένου να συμβεί αυτό, ωστόσο, απαιτείται μέσα από τον εντοπισμό κατασκευαστικών εξαρτήσεων και γεωμετρικών σχέσεων να προσδιορίσουν τη θέση αυτού του σημειωμένου σημείου. Η τρίτη τσάκιση, αποτελώντας την προέκταση ήδη υπάρχουσας πλευράς, δεν οδηγεί σε κάποιο μαθηματικό νόημα, και ομοίως η τελευταία.

Ακολούθως, καλούνται να διατυπώσουν μια εικασία σχετικά με το τελικό αποτέλεσμα αυτών των διπλώσεων. Η προσδοκώμενη εικασία είναι ότι το προκύπτον τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Πέρα από τη διατύπωση της εικασίας, ζητείται και να αναζητήσουν μεθόδους επικύρωσής της αξιοποιώντας μόνο το συγκεκριμένο τεχνούργημα. Αυτή η εργασία θα οδηγήσει σε μια διερεύνηση και μια εμπειρική επιβεβαίωση του ισχυρισμού τους η οποία ωστόσο αναμένεται να καθοδηγηθεί -έστω και υπόρρητα- στην ανάκληση θεωρητικών στοιχείων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ειδικότερα, αναμένεται να προβούν σε δύο επιπλέον διπλώσεις του ήδη κατασκευασμένου τριγώνου με τις οποίες θα ελεγχθεί η ταύτιση, άρα και ισότητα δύο ζευγών πλευρών.

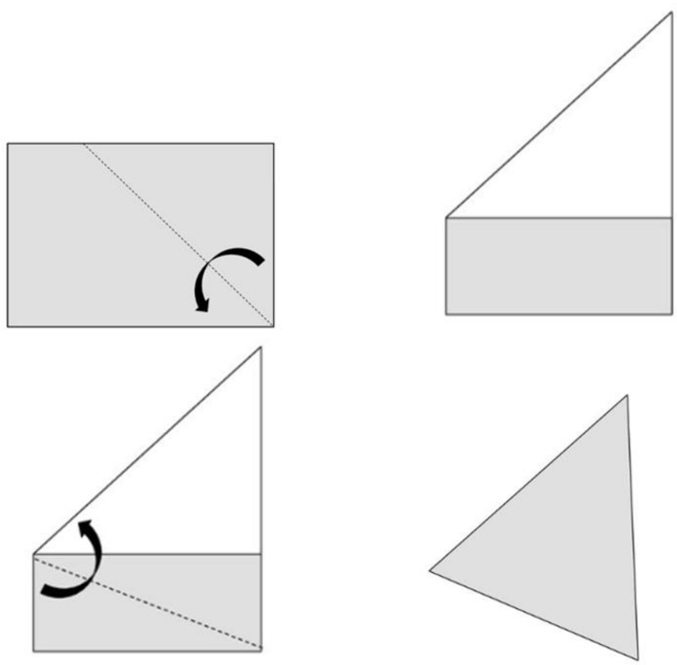
Στο επόμενο στάδιο τους ζητείται να μεταφέρουν βήμα-βήμα τις τσακίσεις που πραγματοποίησαν προηγουμένως στο ψηφιακό περιβάλλον του GSP. Η μεταφορά αυτή απαιτεί την επιστροφή στο χειραπτικό μέσο καθώς και την αλληλεπίδραση αυτού με το ψηφιακό ώστε να μπορέσουν οι διάφορες τσακίσεις και άλλα αντικείμενα που σχετίζονται με αυτές να αποκτήσουν με σαφή τρόπο το μαθηματικό νόημα που προαναφέρθηκε ότι αναμένεται σχετικά με την κάθε τσάκιση. Η συγκεκριμένη εργασία στοχεύει στο να πειραματιστούν οι μαθητές/-ριες με τις ιδιότητες των διπλώσεων και να τις αντιστοιχίσουν με ιδιότητες μαθηματικών οντοτήτων. Μέσα από αυτή την νοηματοδότηση θα αναδυθούν δεδομένα τα οποία στη συνέχεια θα αποτελέσουν τις υποθέσεις της υπό δόμηση υποθετικής πρότασης. Μετά την ολοκλήρωση της κατασκευής στο GSP θα πρέπει να ελέγξουν την εικασία που είχαν διατυπώσει στο πρώτο στάδιο χρησιμοποιώντας εργαλεία του ψηφιακού μέσου. Αναμένεται να βασιστούν στον ορισμό του ισόπλευρου τριγώνου και χρησιμοποιώντας το εργαλείο της μέτρησης του GSP να μετρήσουν τις τρεις πλευρές για να ελέγξουν αν είναι ίσα τα μήκη τους.

Το τελευταίο στάδιο αυτής της δραστηριότητας είναι η απόδειξη της υποθετικής πρότασης που έχουν διαμορφώσει. Η υποθετική πρόταση δεν αναμένεται να διατυπωθεί ρητά στη μορφή «αν…τότε», ωστόσο μέσα από τις ενέργειες που έχουν πραγματοποιήσει σε κάθε πεδίο χωριστά αλλά και με τη συνέργεια των δύο, έχουν ανακαλύψει τις υποθέσεις/δεδομένα της πρότασης αυτής, το συμπέρασμα και τις λογικές συνδέσεις, δηλαδή τα δομικά στοιχεία μιας υποθετικής πρότασης. Για την αποδεικτική διαδικασία, οι μαθητές/-ριες θα χρειαστεί να ανακαλέσουν τις υποθέσεις που αναδύθηκαν προηγουμένως σε συνδυασμό πιθανώς με γνωστές τους προτάσεις και θεωρήματα. Έτσι, οργανώνοντας τα παραπάνω μέσω λογικών βημάτων, αναμένεται να οδηγηθούν στην απόδειξη ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

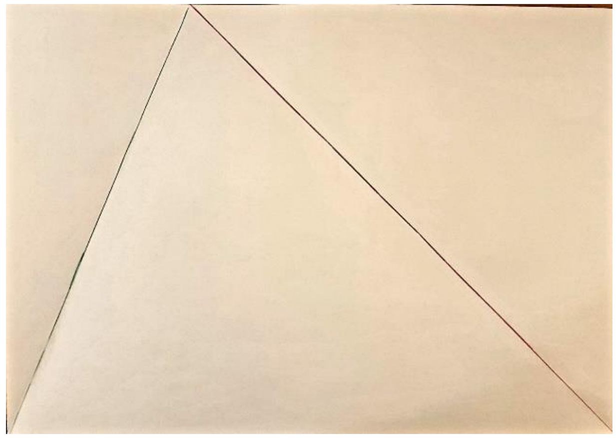
Το χαρακτηριστικό της δραστηριότητας αυτής – η οποία είναι και η συντομότερη από όλες- είναι ο πρωταγωνιστικός ρόλος του χειραπτικού μέσου στη διαμόρφωση της εικασίας. Το ψηφιακό περιβάλλον επιτελεί το ρόλο ενός μέσου αναπαράστασης με μαθηματικό τρόπο των διάφορων σημείων του πεδίου της δίπλωσης, ωστόσο η συνέργεια που αναμένεται να εμφανιστεί σε ορισμένα στάδια της δραστηριότητας, είναι κρίσιμη για την αποδεικτική διαδικασία και αυτή καθ' εαυτή την απόδειξη.

Δραστηριότητα 2

Όμοια με τη Δραστηριότητα 1, αρχικά ζητείται από τους/τις μαθητές/-ριες να προβούν στις παρακάτω διπλώσεις, να διατυπώσουν μια εικασία σχετικά με το τελικό αποτέλεσμα και έπειτα να ελέγξουν την αλήθεια της εργαζόμενοι/-ες στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού. Οι στόχοι αυτών των ερωτημάτων είναι οι ίδιοι με τους αντίστοιχους της προηγούμενης δραστηριότητας.



Εικόνα 6: Οδηγίες δίπλωσης της Δραστηριότητας 2



Εικόνα 7: Οι τσακίσεις της Δραστηριότητας 2 μετά την ολοκλήρωση των διπλώσεων

Ειδικότερα, η εικασία που αναμένεται να διατυπώσουν στη δραστηριότητα αυτή είναι πως το τελικό τρίγωνο είναι ισοσκελές και ο έλεγχος αυτής στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού να πραγματοποιηθεί με μια επιπλέον δίπλωση κατά μήκος της διχοτόμου της κορυφής με την οποία θα παρατηρήσουν την ταύτιση δύο πλευρών του τριγώνου.

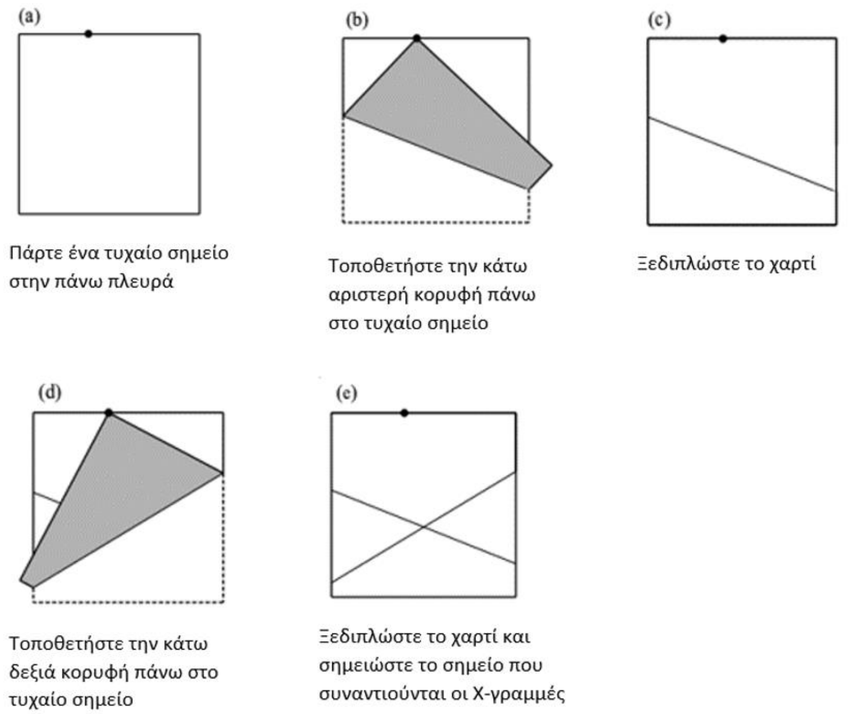
Στο επόμενο στάδιο θα πρέπει να μεταφέρουν την κατασκευή τους στο GSP. Στόχος και πάλι είναι η δημιουργία συνεργικής σχέσης μεταξύ χειραπτικού και ψηφιακού πεδίου μέσα από την οποία θα αναδυθούν οι υποθέσεις της υποθετικής πρότασης. Ολοκληρώνοντας την κατασκευή, καλούνται οι μαθητές/-ριες να ελέγξουν με εργαλεία του ψηφιακού περιβάλλοντος την ισχύ της εικασίας τους. Το προβλεπόμενο είναι να αξιοποιήσουν το εργαλείο της μέτρησης για να εξετάσουν την ισότητα των μηκών των δύο πλευρών. Στο σημείο αυτό αναμένεται να διαπιστώσουν τη μη ισχύ της εικασίας που είχαν διατυπώσει προηγουμένως στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού και κατ’ επέκταση την ύπαρξη αντιφατικών αποτελεσμάτων στα δύο πεδία εργασίας. Συγκεκριμένα, θα παρατηρήσουν ότι στο πεδίο GSP το τρίγωνο που έχει κατασκευαστεί είναι σκαληνό και ακόμα ότι σύροντας σημεία της κατασκευής δεν διατηρούνται αναλλοίωτες σχέσεις. Ο σχεδιασμός για την εμφάνιση της συγκρουσιακής κατάστασης, δηλαδή της ταυτόχρονης εμφάνισης δύο διαφορετικών αποτελεσμάτων ενώ αναμενόταν το ίδιο τελικό συμπέρασμα, έγινε με στόχο να παρακινηθούν οι συμμετέχοντες/-ουσες να διερευνήσουν την αιτία των διαφορετικών συμπερασμάτων και σταδιακά να επανεξετάσουν τις υποθέσεις/δεδομένα τους σε κάθε πεδίο. Προκειμένου να γίνει αυτό, είτε από μόνοι τους είτε με την προτροπή της ερευνήτριας, οι μαθητές/-ριες θα εργαστούν με τα «χειραπτικά αντιπαραδείγματα», τα οποία στην ουσία είναι φύλλα χαρτιού διαφορετικών από το Α4 διαστάσεων. Έτσι, σε πρώτη φάση εμπειρικά, αναμένεται να γίνει κατανοητό ότι διαφορετικές υποθέσεις οδηγούν σε διαφορετικό αποτέλεσμα και αυτό γιατί πραγματοποιώντας στα «χειραπτικά αντιπαραδείγματα» ακριβώς τις ίδιες διπλώσεις που πραγματοποίησαν στο Α4, θα δουν ότι τα προκύπτοντα τρίγωνα δεν είναι στις περιπτώσεις αυτές ισοσκελή. Η αλληλεπίδραση των επιπέδων των δύο πεδίων και κυρίως των εργαλειακών, αναμένεται να οδηγήσει στον εντοπισμό μιας επιπλέον υπόθεσης που ενυπάρχει στο χαρτί και όχι στο GSP. Η υπόθεση αυτή σχετίζεται με τις διαφορετικές διαστάσεις των φύλλων, αλλά για να λάβει μαθηματικό στάτους – το οποίο είναι απαραίτητο για να προβούν σε μια ανθεκτική κατασκευή, όπως τους ζητείται- θα πρέπει εκ νέου να λειτουργήσουν συνεργικά τα δύο μέσα.

Έχοντας φτιάξει μια ανθεκτική κατασκευή και έχοντας επικυρώσει σε αυτήν την ισχύ της αρχικής εικασίας, οι μαθητές/-ριες καλούνται να αποδείξουν την υποθετική πρόταση. Στη διαδικασία αυτή, όπως και στην Δραστηριότητα 1, είναι κρίσιμα όλα τα στοιχεία που αναδύθηκαν κατά τα προηγούμενα στάδια μέσα από τις ενέργειες των ομάδων και στα δύο πεδία και η λογική σύνδεσή αυτών με χρήση πιθανώς και άλλων γνωστών θεωρητικών στοιχείων. Επομένως, η νέα οπτική της συνέργειας που έρχεται να φωτίσει η δραστηριότητα αυτή είναι η δυνατότητα που δίνει στους/στις μαθητές/-ριες να εμπλακούν προσωπικά και σε βάθος με τις υποθέσεις και τις λογικές συνδέσεις με μια διερευνητική ματιά ώστε να αναθεωρήσουν δεδομένα προκειμένου να έχουν το επιθυμητό συμπέρασμα.

Δραστηριότητα 3

Η δραστηριότητα αυτή συμπεριλαμβάνει όλους τους στόχους που προαναφέρθηκαν στις Δραστηριότητα 1 και 2 σχετικά με την διαμόρφωση και επικύρωση του συμπεράσματος σε καθένα από τα δύο πεδία εργασίας και την ανάδυση των υποθέσεων μέσα από την συνέργειά τους. Εντούτοις, το διαφορετικό στοιχείο που έρχεται να προσθέσει είναι η έννοια της γενίκευσης και η διάκριση γενικού-ειδικού μέσα από την αλληλεπίδραση χειραπτικού και ψηφιακού μέσου.

Αρχικά, δίνεται στους/στις μαθητές/-ριες ένα τετράγωνο φύλλο χαρτί και η ακόλουθη σειρά οδηγιών, την οποία έπειτα καλούνται να επαναλάβουν «αρκετές φορές».



Εικόνα 8: Οδηγίες δίπλωσης της Δραστηριότητας 3

Ο μη προσδιορισμός των φορών επανάληψης είναι σκόπιμος, ώστε να μπορεί ο/η κάθε μαθητής/-ρια να καθορίσει τις επαναλήψεις που χρειάζεται για να αρχίσει να σχηματίζει μια εικασία. Λόγω αυτού αλλά και λόγω της πολυπλοκότητας της κατασκευής μετά από κάποιες επαναλήψεις, είναι αναμενόμενη η δυσκολία διαμόρφωσης ενός ισχυρισμού στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού. Αυτό που αναμένεται ωστόσο να παρατηρήσουν είναι ότι τα σημεία τομής των Χ-γραμμών βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετο της πάνω και κάτω πλευράς τους τετραγώνου. Στην περίπτωση που καταλήξουν στην εικασία αυτή, θα πρέπει να αναζητήσουν μεθόδους επικύρωσής της στο πεδίο της δίπλωσης, διαφορετικά να προχωρήσει στο επόμενο στάδιο. Η επικύρωση στο συγκεκριμένο πεδίο αναμένεται να πραγματοποιηθεί διπλώνοντας το χαρτί στη μέση, δηλαδή κατά μήκος της μεσοκαθέτου της πάνω και κάτω πλευράς και να ελεγχθεί κατά πόσο τα σημειωμένα σημεία τομής των Χ-γραμμών βρίσκονται πάνω στην τσάκιση αυτή.

Έπειτα, καλούνται και πάλι να μεταφέρουν την κατασκευή στο ψηφιακό μέσο. Το στάδιο αυτό είναι πολύ πιο απαιτητικό σε σχέση με τα αντίστοιχα των προηγούμενων δραστηριοτήτων. Είναι κρίσιμη η εργασία στο πεδίο της δίπλωσης στο οποίο οι μαθητές/-ριες θα πρέπει να σκεφτούν και να αναζητήσουν μαθηματικές σχέσεις που παραμένουν αναλλοίωτες ανεξάρτητα από την επιλογή του τυχαίου αρχικού σημείου. Συγκεκριμένα, θα χρειαστεί να παρατηρήσουν ότι με τη δίπλωση πάνω σε κάθε τσάκιση ενός ζεύγους Χ-γραμμών δύο τμήματα ταυτίζονται και σταδιακά να οδηγηθούν στη νοηματοδότηση της κάθε τσάκισης των Χ-γραμμών ως η μεσοκάθετος του τμήματος με άκρα το τυχαίο αρχικό σημείο και μια εκ των δύο κάτω κορυφών του τετραγώνου. Η ισότητα των τμημάτων αυτών και κατ’ επέκταση το μαθηματικό νόημα των Χ-γραμμών ως μεσοκάθετοι, αποτελούν αναλλοίωτα στοιχεία, δηλαδή ανεξάρτητα της επιλογής του τυχαίου σημείου στην πάνω πλευρά του τετραγώνου, οδηγώντας έτσι σε έναν ενεργό πειραματισμό με την έννοια της γενίκευσης. Πέρα από αυτό, η ανάδυση της έννοιας της γενίκευσης, θα εμφανιστεί και όταν οι μαθητές/-ριες κατανοήσουν πως στο ψηφιακό περιβάλλον δεν χρειάζεται να επαναλάβουμε βήμα-βήμα όλη τη διαδικασία για να παραχθούν Χ-γραμμές, αλλά μέσω του συρσίματος μπορούν να έχουν πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας κατασκευής.

Στη συνέχεια, αν έχουν προηγουμένως διατυπώσει εικασία τους ζητείται να την ελέγξουν κι αν όχι, καλούνται να πειραματιστούν με την ψηφιακή κατασκευή και να διατυπώσουν έναν ισχυρισμό σχετικά με το οπτικό αποτέλεσμα του συρσίματος του τυχαίου σημείου. Και στις δύο περιπτώσεις είναι σημαντικό να αξιοποιήσουν το εργαλείου του Ίχνους σημείου του GSP το οποίο θα αποκαλύψει τον γεωμετρικό τόπο. Οι μαθητές/-ριες στην ουσία βλέπουν στην οθόνη τους το συμπέρασμα της υποθετικής πρότασης και προκειμένου να αρχίσουν να ανακαλύπτουν και τις υποθέσεις, τους ζητείται να εντοπίσουν την κοινή ιδιότητα των σημείων του γεωμετρικού τόπου. Η μαθηματική διατύπωση αυτής της ιδιότητας θα είναι καθοριστικής σημασία και για την τελική απόδειξη της πρότασης.

Ακολουθεί ένα στάδιο στο οποίο οι ομάδες διερευνούν την ειδική περίπτωση που το τυχαίο σημείο ταυτίζεται με μια εκ των πάνω κορυφών του τετραγώνου. Αρχικά, καλούνται να παρατηρήσουν ποιες θα είναι τώρα οι Χ-γραμμές στο ψηφιακό αλλά και χειραπτικό μέσο και ποιες οι ιδιότητες αυτών των γραμμών. Στόχος είναι να καταλάβουν ότι στην ειδική αυτή περίπτωση οι Χ-γραμμές είναι συγκεκριμένα γνωστά τμήματα στο τετράγωνο, τα οποία -σε αντίθεση με μια γενική περίπτωση- φέρουν κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Η ανακάλυψη αυτών των ιδιοτήτων θα βοηθήσει στην απόδειξη της υποθετικής πρότασης στην ειδική περίπτωση, που ζητείται στη συνέχεια.

Τέλος, οι μαθητές/-ριες θα πρέπει να αποδείξουν την πρόταση στη γενική περίπτωση. Στόχος είναι να συνειδητοποιήσουν ότι θα πρέπει να ακολουθήσουν μια αποδεικτική διαδικασία διαφορετική από αυτή της ειδικής περίπτωσης, καθώς ορισμένες υποθέσεις δεν έχουν γενική ισχύ. Η απόδειξη αυτή είναι αρκετά πιο απαιτητική στη πρώτη φάση της και για αυτό αναμένεται να επιστρέψουν οι ομάδες στο χειραπτικό μέσο για να εντοπίσουν σημαντικές γεωμετρικές σχέσεις, με αποτέλεσμα να εμφανιστούν επεισόδια συνέργειας που προωθούν το μαθηματικό νόημα της υποθετικής πρότασης.

4.4 Ερευνητικά δεδομένα

Τα δεδομένα της έρευνας που καταγράφηκαν και αναλύθηκαν προέκυψαν από τον συνδυασμό της ηχογράφησης, βιντεοσκόπησης, καταγραφής οθόνης, φύλλων εργασίας και των φύλλων χαρτιού με τις τσακίσεις και τις διπλώσεις των μαθητριών. Αναλυτικότερα αξιοποιήθηκαν:

- ✓ Ηχογραφημένες συνομιλίες μεταξύ των μελών της κάθε ομάδας προκειμένου να αναδειχθεί η εξέλιξη των προσωπικών νοημάτων σε περισσότερο μαθηματικά μέσα από την συνεργασία των μαθητών/-ριων
- ✓ Ηχογραφημένες συνομιλίες μεταξύ των μελών της κάθε ομάδας και της ερευνήτριας που αποκάλυπταν συχνά το γεφύρωμα κατά τη διαδικασία εξέλιξη των νοημάτων
- ✓ Φύλλα εργασίας με τις απαντήσεις των ομάδων στα ερωτήματα των δραστηριοτήτων
- ✓ Βίντεο από τον καταγραφέα οθόνης OBS Studio που ήταν εγκατεστημένος στο laptop κάθε ομάδας τα οποία συνέβαλαν στην προσεκτική παρακολούθηση των ενεργειών των μαθητών/-ριών στο Geometer's Sketchpad
- ✓ Τα αρχεία από τις κατασκευές των ομάδων στο Geometer's Sketchpad μέσω των οποίων ήταν εφικτή η εστίαση στην ανθεκτικότητα (robustness) των κατασκευών και κατ' επέκταση ο τρόπος αντίληψης των γεωμετρικών σχέσεων
- ✓ Τ φύλλα χαρτιού με τις τσακίσεις και τις σημειώσεις των μαθητών/-ριών τα οποία φανέρωσαν τον τρόπο εργασίας και παρέμβασης του/της κάθε μαθητή/-ριας στο χειραπτικό πεδίο.

4.5 A priori ανάλυση

Και οι τρεις δραστηριότητες έχουν ως βασικό στόχο την ενεργοποίηση της συνέργειας μεταξύ των δύο τεχνουργημάτων, του χειραπτικού (δίπλωση χαρτιού) και του ψηφιακού (Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας GSP) και την μετάβαση από την διερεύνηση εικασιών στην παραγωγική απόδειξη μέσα από την αλληλεπίδραση των επιπέδων (σημειωτικό, εργαλειακό, διαλογικό) των μαθηματικών πεδίων εργασίας. Ακολουθεί η a priori ανάλυση των δύο μαθηματικών πεδίων εργασίας με βάση το θεωρητικό πλαίσιο των Μαθηματικών Πεδίων Εργασίας (Mathematical Working Space) των Kuzniak και Richard (2014), με έμφαση στην αναμενόμενη εξέλιξη του νοήματος της υποθετικής πρότασης «αν…τότε» (conditional statement) και την συμβολή της συνέργειας σε αυτή.

Πεδίο Εργασίας «δίπλωση χαρτιού»

Το πεδίο της δίπλωσης χαρτιού είναι το πρώτο πεδίο με το οποίο θα εργαστούν οι μαθητές/-ριες και στις τρεις δραστηριότητες. Αρχικά, αναμένεται μια σημειωτική γένεση στο πεδίο αυτό η οποία θα ενεργοποιηθεί κατά την προσπάθεια των μαθητών/-ριών να αποκωδικοποιήσουν τα σημεία (signs) που αναπαριστούν τις ζητούμενες τσακίσεις στο φύλλο οδηγιών (με διακεκομμένα τμήματα). Κατά τη θεωρία των ΜΠΕ, η γνωστική αυτή διαδικασία αντιστοιχεί στην οπτικοποίηση των σημείων και αποτελεί μέρος της σημειωτικής διάστασης του πεδίου εργασίας.

Βασιζόμενοι/-ες στην ερμηνεία των διακεκομμένων τμημάτων, θα προβούν στην κατασκευή των αντίστοιχων τσακίσεων μέσα από κατάλληλες διπλώσεις, ενεργοποιώντας με αυτόν τον τρόπο την εργαλειακή διάσταση του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού αλλά και την σημειωτική, καθώς το αποτέλεσμα των διπλώσεων θα είναι η παραγωγή νέων σημείων, των τσακίσεων. Τα σημεία αυτά (διακεκομμένα τμήματα και τσακίσεις) διερευνώνται αρχικά αποκλειστικά εμπειρικά με εστίαση στις ιδιότητες που φέρουν και δεν αποτελούν ακόμα λειτουργικά μαθηματικά αντικείμενα. Επομένως, η εργασία στο σημειωτικό και εργαλειακό επίπεδο που προαναφέρθηκε συμβάλλει σε μια πρώτη πειραματική και άτυπη επαφή με της υποθέσεις της υπό δόμηση υποθετικής πρότασης. Επιπλέον, και στις τρεις δραστηριότητες είναι πιθανό να υπάρξει εργαλειακή γένεση κατά την αναζήτηση από τις ομάδες επιπλέον υποθέσεων/δεδομένων για τη δόμηση της υποθετικής πρότασης ή/και τον έλεγχο της ισχύος ορισμένων υποθέσεων.

Η εργαλειακή γένεση του πεδίου θα γίνει φανερή και κατά την προσπάθεια των ομάδων να επικυρώσουν, εργαζόμενες αποκλειστικά στο πεδίο της δίπλωσης, την εικασία που θα έχουν διατυπώσει σχετικά με το αποτέλεσμα των διπλώσεων της κάθε δραστηριότητας. Η εργασία στο εργαλειακό επίπεδο θα γίνει φανερή μέσα από την επιλογή κατάλληλων ενεργειών και μεθόδων για την επικύρωση ή απόρριψη του συμπεράσματος. Το σχήμα χρήσης που αναμένεται να αναδυθεί είναι η κατάλληλη κατά περίπτωση δίπλωση του ήδη διπλωμένου χαρτιού. Η εργαλειακή αυτή διάσταση θα συνεισφέρει καθοριστικά στην ισχυροποίηση του συμπεράσματος της υποθετικής πρότασης.

Έντονη διαλογική δραστηριότητα στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού αναμένεται να πραγματοποιηθεί κατά την εμπλοκή με τη Δραστηριότητα 2 και συγκεκριμένα όταν βρεθούν οι ομάδες αντιμέτωπες με τη συγκρουσιακή κατάσταση των αντιφατικών αποτελεσμάτων στο ψηφιακό και χειραπτικό πεδίο. Καθοριστικός θα είναι τότε ο ρόλος των «χειραπτικών αντιπαραδειγμάτων». Ειδικότερα, πραγματοποιώντας σε εργαλειακό και σημειωτικό επίπεδο τις ίδιες τσακίσεις στα διαφορετικά αυτά φύλλα χαρτιού και μέσα από την σύγκριση των τελικών σχημάτων με αυτό του φύλλου Α4, αναμένεται να κινητοποιηθεί μια διεργασία σε διαλογικό επίπεδο. Οι μαθητές/-ριες θα κατανοήσουν και θα διερευνήσουν την απουσία μιας υπόθεσης/δεδομένου στα «χειραπτικά αντιπαραδείγματα» σε σχέση με το Α4, η οποία -αρχικά εμπειρικά- και έπειτα περισσότερο τυπικά θα αναδείξει τη λογική σχέση υποθέσεων-συμπεράσματος μιας υποθετικής πρότασης.

Επιπλέον, και στη Δραστηριότητα 3 προβλέπεται διαλογική γένεση του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού η οποία σχετίζεται με την έννοια της γενίκευσης και αποτελεί ένα διαφορετικό στοιχείο που έρχεται να φέρει η δραστηριότητα στην δόμηση της υποθετικής πρότασης. Το πεδίο της δίπλωσης παρέχοντας στους/στις μαθητές/-ριες περιορισμένες μόνο ενσαρκώσεις της κατασκευής, συμβάλει στο να καθορίσουν οι ίδιοι/-ες το πλήθος των επαναλήψεων που τους είναι επαρκές για τη διατύπωση της εικασίας τους. Με αυτόν τον τρόπο αναμένεται να κατανοήσουν την σημασία της μη εξαγωγής αυθαίρετων και αβέβαιων συμπερασμάτων και να διερευνήσουν τα όρια του ειδικού- γενικού.

Η εργασία στο διαλογικό επίπεδο του πεδίου αυτού θα γίνει φανερή και στο τέλος της Δραστηριότητας 3 που ζητείται από τους/τις μαθητές/-ριες να αποδείξουν την εικασία τους στη γενική περίπτωση. Το ίδιο το φύλλο χαρτιού μπορεί να συνεισφέρει στο να αντιληφθούν ότι απαιτείται μια απόδειξη διαφορετική από αυτή της ειδικής περίπτωσης, καθώς οι τσακίσεις στη γενική περίπτωση δε φέρουν τις ίδιες γεωμετρικές σχέσεις που είχαν στην ειδική περίπτωση. Αναμένεται σε αυτό το σημείο ο πειραματισμός με το GSP να μην φανερώσει κάποιο βοηθητικό στοιχείο για την απόδειξη της γενικής περίπτωσης και τότε είναι που οι μαθητές/-ριες θα ξανά καταφύγουν στο πεδίο της δίπλωσης και στην επανάληψη των τσακίσεων με πιο εστιασμένη διερευνητική ματιά. Από αυτήν την εργασία τους θα αποκαλυφθεί μια βοηθητική γραμμή, την οποία δύσκολα θα σκεφτόντουσαν να φέρουν στο ψηφιακό περιβάλλον από μόνοι/-ες τους. Είναι, λοιπόν, εμφανής η συμβολή αυτής της εργαλειακής και διαλογικής διάστασης του πεδίου της δίπλωσης στην εύρεση στοιχείων για τη γενική απόδειξη και στην απόδειξη αυτή καθ’ εαυτή, αντίστοιχα.

Πεδίο Εργασίας «GSP»

Έπειτα από την ολοκλήρωση των βημάτων δίπλωσης και την διατύπωση της εικασίας, σε κάθε μία από τις δραστηριότητες ακολουθεί η μεταφορά της κατασκευής στο ψηφιακό περιβάλλον του GSP. Το ψηφιακό μέσο θα αποτελέσει σε αυτή τη φάση των δραστηριοτήτων το περιβάλλον στο οποίο θα αναπαραστήσουν οι μαθητές με σαφώς μαθηματικό τρόπο τις τσακίσεις. Η σημειωτική γένεση, επομένως, του πεδίου αυτού είναι φανερή, καθώς με τα εργαλεία και τις εντολές του ψηφιακού περιβάλλοντος θα μπορέσουν οι μαθητές/-ριες να παράγουν στο νέο αυτό περιβάλλον τα αποκωδικοποιημένα από το πεδίο της δίπλωσης σημεία (π.χ. σημεία, τμήματα, διχοτόμοι, διαγώνιοι). Σε αυτή τη διαδικασία και η εργαλειακή και διαλογική διάσταση θα λάβουν χώρα, μέσα από την ταυτοποίηση ιδιοτήτων και ανάκληση γεωμετρικών προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και την αξιοποίηση των κατάλληλων διαθέσιμων εργαλείων του GSP για τη μεταφορά της κατασκευής.

Επιπλέον, αναμένεται και η εργαλειακή γένεση του πεδίου GSP για την επικύρωση των εικασιών που έχουν προηγουμένως διατυπώσει οι μαθητές/-ριες εργαζόμενοι/-ες στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού σε κάθε μια από τις τρεις δραστηριότητες. Ειδικότερα για τις δραστηριότητες 1 και 2, με το εργαλείο της μέτρησης οι μαθητές/-ριες έχουν την δυνατότητα να διερευνήσουν στο ψηφιακό περιβάλλον το κατά πόσο το τρίγωνο που αντιστοιχεί στο τελικό σχήμα της δίπλωσης είναι ισόπλευρο και ισοσκελές αντίστοιχα και τελικά να αποδώσουν ένα μεγαλύτερο ίσως βαθμό βεβαιότητας στην υπό εξέταση εικασία τους, μέσα από την εμπειρική και πάλι επικύρωσή της. Ακόμα, το εργαλείο του συρσίματος θα συμβάλει στον έλεγχο της ανθεκτικότητας της κατασκευής και κατ’ επέκταση στην ισχυροποίηση των λογικών συνδέσεων των δεδομένων που υπόρρητα αναδύονται κατά τη διαδικασία μεταφοράς της κατασκευής στο ψηφιακό περιβάλλον (βλ. ενότητα «Συνέργεια χειραπτικού- ψηφιακού μέσου»).

Στη δραστηριότητα 2, η συμβολή του ψηφιακού πεδίου στην εξέλιξη του νοήματος της υποθετικής πρότασης θα λάβει μια διαφορετική διάσταση. Κατά τη διερεύνηση της ασυμφωνίας των κατασκευών στο διπλωμένο χαρτί και στο GSP, αναμένεται να αξιοποιηθεί το σύρσιμο σε συνδυασμό με τη μέτρηση, με τα εργαλεία αυτά να συμβάλλουν στον εντοπισμό θέσεων στις οποίες επιτυγχάνεται το επιθυμητό/σύμφωνο με αυτό του διπλωμένου χαρτιού αποτέλεσμα. Έτσι, η εργαλειακή αυτή γένεση του ψηφιακού περιβάλλοντος θα συμβάλλει στην συνειδητοποίηση της ύπαρξης μίας επιπλέον υπόθεσης, η οποία βέβαια είναι ακόμα ατελής και για να λάβει μία σαφή μαθηματική διατύπωση θα χρειαστεί οι μαθητές/-ες να επιστρέψουν ξανά στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού (βλ. ενότητα «Πεδίο δίπλωσης χαρτιού»). Με αυτόν τον τρόπο, το ψηφιακό μέσο θα συνεισφέρει καθοριστικά στην περεταίρω εξέλιξη της υποθετικής πρότασης, καθώς θα γίνει φανερή η σχέση λογικής εξάρτησης της υπόθεσης και του συμπεράσματος. Η ανάγκη ανθεκτικής κατασκευής, έπειτα από τον εντοπισμό της επιπλέον υπόθεσης, θα οδηγήσει σε μια εργαλειακή αλλά κυρίως διαλογική γένεση του GSP, καθώς θα χρειαστεί να ανακαλέσουν θεωρητικά στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας για να αποκτήσει μαθηματικό στάτους η επιπλέον υπόθεση.

Για την δραστηριότητα 3, η εργαλειακή διάσταση και η συμβολή της στην εμπειρική επικύρωση της εικασίας, θα γίνει φανερή και με την αξιοποίηση του εργαλείου «Σχεδίαση ίχνους σημείου» σε συνδυασμό με το σύρσιμο. Τα δύο αυτά εργαλεία του GSP δίνουν τη δυνατότητα στο/η μαθητή/-ρια να παράγει πολλές Χ-γραμμές σύροντας απλά το τυχαίο σημείο πάνω στην πλευρά του τετραγώνου και ταυτόχρονα ενεργοποιώντας το ίχνος των σημείων τομής των Χ-γραμμών, να εμφανίσουν έναν γεωμετρικό τόπο. Αυτές οι δυνατότητες, προφανώς δεν υπάρχουν στο πεδίο τις δίπλωσης, καθώς ο πεπερασμένος και μικρός αριθμός τσακίσεων που μπορούν να υλοποιηθούν αλλά και η ίδια η φύση του τεχνουργήματος δεν επιτρέπουν την ανάδειξη γεωμετρικών τόπων (άπειρα σημεία). Η εμφάνιση στην οθόνη ενός γεωμετρικού τόπου θα συμβάλλει από τη μια στο να βεβαιωθούν οι μαθητές/-ριες σχετικά με το συμπέρασμα της υποθετικής πρότασης, και από την άλλη στο να κατανοήσουν τον χαρακτήρα της γενικής ισχύς μιας πρότασης. Η διατήρηση των αναλλοίωτων υποθέσεων-γεωμετρικών σχέσεων κατά το σύρσιμο σε συνδυασμό με την αίσθηση της κινητικής εξάρτησης κατά το σύρσιμο συμβάλλουν στην εξέλιξη των στοιχείων της υποθετικής πρότασης.

Συνέργεια χειραπτικού - ψηφιακού

Πέρα από την άτυπη και εμπειρική απόδειξη της εικασίας στην οποία αναμένεται να προβούν οι μαθητές/-ριες στην αρχή των Δραστηριοτήτων 1 και 2, το πεδίο της δίπλωσης χαρτιού δεν παρέχει τη δυνατότητα να αναπτύξουν, εργαζόμενοι/-ες μόνο σε αυτό το πεδίο, μία φορμαλιστική γεωμετρική απόδειξη, καθώς οι διπλώσεις τους δεν έχουν αποκτήσει ρητά κάποιο μαθηματικό περιεχόμενο. Αυτή η περιορισμένη διαλογική γένεση της απόδειξης του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού θα ενισχυθεί, ωστόσο, από την ακόλουθη εργασία των μαθητών στο πεδίο του GSP, και ειδικότερα από την αλληλεπίδραση του χειραπτικού και του ψηφιακού μέσου. Ο ρόλος που θα διαδραματίσει το GSP σε αυτό το στάδιο και των τριών δραστηριοτήτων (έπειτα από την πρώτη εργασία με το χειραπτικό μέσο και τη διατύπωση -ή όχι- μιας εικασίας) είναι, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα «Πεδίο εργασίας GSP», το ότι θα αποτελέσει ένα περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές/-ριες θα αναπαραστήσουν με σαφώς μαθηματικό τρόπο τις τσακίσεις και τις γεωμετρικές ιδιότητες που -όχι ρητά- υπήρχαν στην κατασκευαστική διαδικασία της δίπλωσης στο χαρτί. Επομένως, η εργασία στο πεδίο της δίπλωσης θα αναδείξει από τη μία τα στοιχεία που χρειάζονται για την κατασκευή στο GSP και από την άλλη θα αποκαλύψει τις απαραίτητες αναλλοίωτες σχέσεις, όπως η ισότητα τμημάτων και γωνιών, οι οποίες, μετά την αποτύπωσή τους στο ψηφιακό περιβάλλον, θα οδηγήσουν στην τελική παραγωγική απόδειξη. Έτσι, η συμβολή της συνέργειας των δύο μέσων σε αυτό το σημείο είναι η αποκάλυψη των πληροφοριών και των λογικών βημάτων που θα χρειαστούν για την απόδειξη της εικασίας. Η συνέργεια αυτή θα γίνει εμφανής κατά τη μεταφορά της κατασκευής από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο, και συγκεκριμένα μέσα από την αλληλεπίδραση των γενέσεων των δύο πεδίων που αναμένεται να πραγματοποιηθεί κατά τη διαδικασία της μεταφοράς. Επαναλαμβάνοντας πιθανώς τις ίδιες διπλώσεις, οι μαθητές/-ριες θα πρέπει να αποδώσουν μαθηματικό περιεχόμενο στις τσακίσεις που έχουν εμφανιστεί, ενεργοποιώντας έτσι την σημειωτική γένεση του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού, αλλά και του GSP. Με αφετηρία το επιστημολογικό επίπεδο του φύλλου Α4 και τις τσακίσεις αυτού, οι μαθητές/-ριες ερμηνεύουν/αποκωδικοποιούν αυτά τα σημεία (signs), μεταβαίνοντας έτσι στην οπτικοποίηση στο γνωστικό επίπεδο αυτού του πεδίου. Η διαλεκτική σχέση μεταξύ της συντακτικής και της σημασιολογικής πτυχής των αναπαραστάσεων θα γίνει εμφανής μέσα από την παρατήρηση των γεωμετρικών σχέσεων και συγκεκριμένα των ισοτήτων που διατηρούνται κατά τις διπλώσεις. Έπειτα, με βάση αυτή την οπτικοποίηση θα μεταβούν στο επιστημολογικό επίπεδο του ψηφιακού πεδίου μέσα από την κωδικοποίηση των ερμηνειών τους σε νέα σημεία, με τη χρήση των εργαλείων του GSP. Από αυτή τη διαδικασία της μεταφοράς από το ένα μέσο στο άλλο, προκύπτει τελικά η κατασκευή στο GSP και επομένως, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μέσω της συνέργειας ενεργοποιείται και η εργαλειακή γένεση του GSP.

Ταυτόχρονα, οργανώνονται οι ιδιότητες της κατασκευής στο θεωρητικό σύστημα αναφοράς (Ευκλείδεια Γεωμετρία), κινητοποιώντας και την διαλογική γένεση της απόδειξης στο GSP, καθώς μετά την νοηματοδότηση και τη γεωμετρική απεικόνιση των τσακίσεων, όλα τα θεωρητικά στοιχεία είναι διαθέσιμα για μαθηματικό συλλογισμό και απόδειξη. Η διαλογική εργασία θα γίνει εμφανής μέσα από την παρατήρηση της εξέλιξης προσωπικών νοημάτων των μαθητών/-ριων που σχετίζονται αποκλειστικά με τη χρήση των τεχνουργημάτων, σε αποπλαισιωμένα μαθηματικά νοήματα. Και στις τρεις δραστηριότητες ένα αναμενόμενο μαθηματικό νόημα είναι αυτό της ισότητας το οποίο θα μπορούσε μέσα από τη συνέργεια των δύο πεδίων να εξελιχθεί όπως υποδεικνύει η εξής σημειωτική αλυσίδα: *δίπλωση (artefact sign) → ταύτιση στοιχείων των διπλωμένων κομματιών του χαρτιού (pivot sign) → ισότητα στοιχείων (mathematical sign).* Η νοηματοδότηση της ισότητας ως ταύτιση τοποθετείται στο επιστημολογικό επίπεδο της δίπλωσης χαρτιού, ωστόσο η συνέργεια αυτού με το GSP είναι που θα ενεργοποιήσει την διαλογική γένεση, καθώς η ανάγκη μεταφοράς της ισότητας στοιχείων στο ψηφιακό περιβάλλον θα οδηγήσει στη γνωστική συνειδητοποίηση αυτού του νοήματος από τους/τις μαθητές/-ριες και τελικά στην αξιοποίησή του τόσο στην κατασκευή όσο και στην απόδειξη.

Λόγω της φύσης της Δραστηριότητας 2, πέρα από τα προαναφερθέντα σημεία, η συνέργεια του ψηφιακού και χειραπτικού μέσου θα λάβει και μια ακόμα έκφραση, καθώς η επικοινωνία των δύο πεδίων εργασίας θα είναι καθοριστική στη τελική διαμόρφωση της εικασίας. Η εργασία στο εργαλειακό επίπεδο του κάθε πεδίου κατά την διερεύνηση της συγκρουσιακής κατάστασης, μέσα από τα «χειραπτικά αντιπαραδείγματα», το σύρσιμο και τη μέτρηση, θα οδηγήσει σε φαινόμενα συνέργειας των δύο μέσων η οποία τελικά θα συμβάλει στη διαλογική γένεση και στον εντοπισμό της επιπλέον υπόθεσης. Επιπλέον, η Δραστηριότητα 3 αναμένεται να φωτίσει μια ακόμα πτυχή της συνέργειας και συγκεκριμένα την δυνατότητά της να βοηθήσει στη νοηματοδότηση της γενίκευσης μιας υποθετικής πρότασης. Τόσο το πεδίο της δίπλωσης χαρτιού όσο και το GSP επιτρέπουν την κατάλληλη εργαλειακή και διαλογική γένεση που θα οδηγήσει στην κατανόηση της γενίκευσης και τη διαφορά ειδικού-γενικού. Στο χειραπτικό μέσο η δυνατότητα αυτή δίνεται μέσα από την διερεύνηση μεμονωμένων περιπτώσεων επανάληψης των ίδιων διπλώσεων, ενώ στο GSP το εργαλείο του συρσίματος παρέχει πολλαπλές ενσαρκώσεις βοηθώντας σε μια περισσότερο ολιστική θέαση των αναλλοίωτων στοιχείων.

Τα προβλεπόμενα επεισόδια συνέργειας που αναφέρθηκαν παραπάνω υποστηρίζεται ότι θα οδηγήσουν συνολικά στην εξέλιξη του μαθηματικού νοήματος της υποθετικής πρότασης. Έχουμε υποθέσει προηγουμένως ότι μέχρι το σημείο που οι μαθητές/-ριες ολοκληρώνουν τις διπλώσεις, διατυπώνουν και ελέγχουν την εικασία τους σχετικά με το προκύπτον σχήμα, μόνο το συμπέρασμα μιας υπό συνθήκη πρότασης τούς είναι φανερό. Κατά την αλληλεπίδραση των δύο πεδίων εργασίας με στόχο τη μεταφορά της κατασκευής στο ψηφιακό, το νόημα της υποθετικής πρότασης θα εμπλουτιστεί καθώς θα αποκαλυφθούν οι υποθέσεις αλλά και οι λογικές συνδέσεις. Προς αυτή την κατεύθυνση θα συμβάλει η χειραπτική εμπειρία της δίπλωσης και η οπτική ανατροφοδότηση του αποτελέσματός της που θα διαδραματίσουν τον καθοριστικότερο ρόλο στη μαθηματική νοηματοδότηση και την ερμηνεία της οπτικό-απτικής εξάρτησης σε λογικές συνδέσεις. Μια πιθανή σημειωτική αλυσίδα αυτής της εξέλιξης θα μπορούσε να είναι: *οπτικό-απτικό αποτέλεσμα των διπλώσεων (artefact sign) → μαθηματικό νόημα των τσακίσεων και των κατασκευαστικών εξαρτήσεων (pivot sign) → υπόθεση και λογικές συνδέσεις του conditional statement (mathematical sign).*

4.6 Μέθοδος ανάλυσης

Η διαδικασία ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε πέντε στάδια. Στο πρώτο στάδιο έγινε η απομαγνητοφώνηση των διαλόγων και η ταυτόχρονη μελέτη του υλικού από τις βιντεοσκοπήσεις και την καταγραφή οθόνης. Δεδομένου ότι στην παρούσα έρευνα μελετάται και η εμπειρία των μαθητών/-ριων με το χειραπτικό μέσο της δίπλωσης χαρτιού και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο οι γενικότερες χειρονομίες ως τρόπος έκφρασης και απόδοσης νοημάτων, στους απομαγνητοφωνημένους διαλόγους προστέθηκαν σε αγκύλες ([…]) με πλάγια γραμματοσειρά περιγραφές αυτών των κινητικών ενεργειών.

Η μέθοδος ανάλυσης των δεδομένων που αξιοποιήθηκε είναι η Θεμελιωμένη Θεωρία – Grounded Theory. Κύριο χαρακτηριστικό της Θεμελιωμένης Θεωρίας είναι η αλληλένδετη σχέση του σχεδιασμού, της συλλογής δεδομένων, της ανάλυσης δεδομένων και της ανάπτυξης μιας νέας θεωρίας. Η νέα θεωρία που αναπτύσσεται εδράζεται στα εμπειρικά δεδομένα και η συγκεκριμένη μέθοδος ανάλυσης παρέχει ένα σύνολο συστηματικών μεθόδων, οι οποίες υποστηρίζουν αφαιρετικές διαδικασίες με στόχο την προοδευτική αναγνώριση κατηγοριών νοήματος και την δημιουργία σχέσεων μεταξύ αυτών (Vollsted and Rezat, 2019).

Έτσι, στο δεύτερο στάδιο χρησιμοποιήθηκε αρχικά κατά την ανάλυση η μέθοδος της ανοιχτής κωδικοποίησης- open coding (Strauss, Corbin, 1998) κατά την οποία αποδόθηκαν -σε μία στήλη στο φύλλο απομαγνητοφώνσης- σε αποσπάσματα κωδικοί σε σχέση με τις διαστάσεις (σημειωτική, εργαλειακή, διαλογική) καθενός από τα δύο ΜΠΕ (πεδίο δίπλωσης χαρτιού και πεδίο GSP) που ενεργοποιούνταν μέσα από την εργασία των μαθητών/-ριων.

Στο τρίτο στάδιο έγινε εστίαση στα σημεία (signs) που παρατηρούνταν κατά την εργασία των μαθητών/-ριών στα αποσπάσματα που μελετήθηκαν στο δεύτερο στάδιο. Σε μια νέα στήλη στο φύλλο απομαγνητοφώνησης προστέθηκαν κωδικοί που αναφέρονται στο είδος των σημείων (artefact, pivot, mathematical) σύμφωνα με τη Θεωρία Σημειωτικής Διαμεσολάβησης. Τα σημεία αυτά αποτέλεσαν τις απτές ενδείξεις πάνω στις οποίες βασίστηκε η ερμηνεία της ερευνήτριας σχετικά με την ανάδυση νοημάτων και την εξέλιξή τους από προσωπικά σε μαθηματικά.

Στο τέταρτο στάδιο εντοπίστηκαν τα αποσπάσματα που συνέθεταν ένα επεισόδιο συνέργειας μεταξύ χειραπτικού και ψηφιακού μέσου. Ο χαρακτηρισμός ενός αποσπάσματος ως επεισόδιο συνέργειας καθοριζόταν από την παρατήρηση της αλληλεπίδρασης των διαστάσεων των δύο ΜΠΕ και ειδικότερα των επιρροών της εργασίας των μαθητών/-ριών σε κάποια από τις διαστάσεις αυτές σε ένα εκ των ΜΠΕ στη μετέπειτα ενεργοποίηση διαστάσεων του άλλου ΜΠΕ. Προκειμένου να περιγραφεί αυτή η αλληλεπίδραση αλλά και να γίνει σαφής η εξέλιξη νοημάτων σχετικών με την υποθετική πρόταση από προσωπικά σε μαθηματικά, τα αναδυόμενα σημεία οργανώθηκαν σε σημειωτικές αλυσίδες. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονισθεί ότι και στις τρεις δραστηριότητες η κάθε ομάδα εργαζόταν αρχικά στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού, έπειτα στο πεδίο GSP και κατά την υπόλοιπη διάρκεια υπήρχε ελευθερία επιλογής του μαθηματικού πεδίου εργασίας που έκριναν κατάλληλο για την ολοκλήρωση του εκάστοτε ερωτήματος. Επομένως, ο τρόπος αλληλεπίδρασης των δύο πεδίων και κατ' επέκταση το είδος της συνέργειας καθοριζόταν κάθε φορά από την εργασία της εκάστοτε ομάδας και τις επιλογές ενεργειών τους. Έτσι, η εστίαση κατά την ανάλυση επικεντρωνόταν στην εργασία σε ένα ΜΠΕ αλλά με παράλληλη ερμηνεία τους αποτυπώματος που άφηνε η προγενέστερη εργασία είτε στο ίδιο είτε σε διαφορετικό ΜΠΕ.

Στο πέμπτο και τελευταίο στάδιο, όπως φαίνεται λεπτομερώς στο επόμενο κεφάλαιο, τα επεισόδια αυτά κατηγοριοποιήθηκαν σε τρεις μεγάλες ενότητες με βάση τη συμβολή τους στην νοηματοδότηση συγκεκριμένων στοιχείων ή διαδικασιών σχετικά με την υποθετική πρόταση. Κάθε ενότητα περιλαμβάνει υποενότητες οι οποίες αναδεικνύουν την ποικιλία των τρόπων συμβολής της συνέργειας στη νοηματοδότηση αυτή.

Κεφάλαιο 5 - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων από τις δύο ομάδες. Με οδηγό το ερευνητικό ερώτημα του ρόλου της συνέργειας του ψηφιακού και χειραπτικού μέσου στην εξέλιξη του νοήματος της υποθετικής πρότασης «αν…τότε» (*conditional statement*) και στην απόδειξη αυτής, παρουσιάζονται και αναλύονται τα επεισόδια συνέργειας που εντοπίστηκαν. Τα επεισόδια αυτά τοποθετούνται σε τρεις εννοιολογικές κατηγορίες οι οποίες διακρίνονται με βάση τη συνεισφορά των επεισοδίων της καθεμιάς στην διαδικασία νοηματοδότησης της υποθετικής πρότασης. Θεωρώντας ότι η εμπλοκή με την έννοια της υποθετικής πρότασης διακρίνεται στη φάση της διερεύνησης και σε αυτή της απόδειξης και διασπώντας τη πρώτη φάση σε δύο μέρη με βάση τα δομικά στοιχεία της υποθετικής πρότασης (υποθέσεις, συμπεράσματα, λογικές συνδέσεις), οι τρεις αυτές κατηγορίες είναι οι εξής: *5.1 Ανάδυση υποθέσεων και λογικών συνδέσεων της υποθετικής πρότασης, 5.2 Ανάδυση συμπεράσματος και ισχυροποίηση των λογικών συνδέσεων της υποθετικής πρότασης* και *5.3 Απόδειξη της υποθετικής πρότασης*. Η μελέτη της συνέργειας πραγματοποιήθηκε με την ταυτόχρονη εστίαση στην επικοινωνία των διαστάσεων των δύο ΜΠΕ και στην εξέλιξη των παρατηρούμενων σημείων και των αντίστοιχων μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με την υποθετική πρόταση. Επομένως, στο τέλος κάθε επεισοδίου, παρατίθεται μια σημειωτική αλυσίδα που συνοψίζει την εξέλιξη αυτή και το είδος της αλληλεπίδρασης των ΜΠΕ.

Για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων κρίθηκε σημαντικό να ακολουθηθεί μη γραμμικός τρόπος ως προς την χρονολογική εξέλιξη των δραστηριοτήτων, αλλά να γίνει μια σύνθεση κρίσιμων επεισοδίων από όλες τις δραστηριότητες και των δύο ομάδων με βάση την συμβολή και τον τρόπο συμβολής στην εξελικτική πορεία των στοιχείων της υποθετικής πρότασης «αν… τότε».

5.1 ΑΝΑΔΥΣΗ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΝΔΕΣΕΩΝ ΤΗΣ ΥΠΟΘΕΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

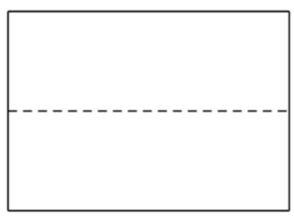
Σε αυτή την κατηγορία αναλύονται επεισόδια στα οποία παρατηρείται η ανάδυση των υποθέσεων και των λογικών συνδέσεων των υποθετικών προτάσεων μέσα από την ανακάλυψη των ιδιοτήτων των διαφόρων μαθηματικών αντικειμένων που συσχετίζονται με τις τσακίσεις στα διπλωμένα χαρτιά. Τα επεισόδια συνέργειας που θα παρουσιαστούν έπονται της ολοκλήρωσης των διπλώσεων του χαρτιού που ζητούνται στα πρώτα ερωτήματα της κάθε δραστηριότητας και της διατύπωσης μιας πρώιμης εικασίας σχετικά με το συμπέρασμα της υποθετικής πρότασης.

5.1.1 Ανάδυση υποθέσεων μέσα από τον εμπειρικό πειραματισμό με το πεδίο δίπλωσης χαρτιού και τη μαθηματική διατύπωση κατά τη μεταφορά στο GSP

Σε αυτήν την ενότητα περιλαμβάνονται επεισόδια στα οποία οι μαθητές/-ριες ανακαλύπτουν εμπειρικά ιδιότητες και μαθηματικές σχέσεις μέσα από την αξιοποίηση των δυνατοτήτων που τους προσφέρει αυτή καθ’ εαυτή η δίπλωση χαρτιού. Ο πειραματισμός και η εμπειρική διατύπωση των υποθέσεων λαμβάνουν μαθηματικό χαρακτήρα κατά τη μεταφορά των ιδιοτήτων και σχέσεων στο ψηφιακό πεδίο, για την οποία καθοριστικός είναι ο ρόλος της συνέργειας των δύο μέσων. Ο συγκεκριμένος τρόπος ανάδυσης υποθέσεων της υπό δόμησης υποθετικής πρότασης αποτελεί ένα φαινόμενο που εντοπίστηκε και στις δύο ομάδες στο ξεκίνημα κυρίως της μεταφοράς της κατασκευής από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο. Τα δύο επεισόδια που ακολουθούν αφορούν στην εργασία των μαθητριών της Ομάδας Α κατά την εμπλοκή τους με τις Δραστηριότητες 1 και 2 αντίστοιχα.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 1: Ανάδυση υποθέσεων μέσα από την οπτικό-απτική εμπειρία της δίπλωσης του χαρτιού

Οι μαθήτριες Μ1, Μ2 έχοντας κατασκευάσει στο GSP ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που αναπαριστά το φύλλο Α4 επιχειρούν να μεταφέρουν στο ψηφιακό περιβάλλον την $1^{η}$ τσάκιση (Εικόνα 9).



Εικόνα 9: Αναπαράσταση της $1^{ης}$ τσάκισης με διακεκομμένο τμήμα στο φύλλο οδηγιών της Δραστηριότητας 1

Αρχικά οι μαθήτριες εργαζόμενες στο σημειωτικό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού οπτικοποιούν την $1^{η}$ τσάκιση (artefact sign-δίπλωση) και αναφέρονται σε αυτήν ως «μεσοπαράλληλος» (mathematical sign). Ζητώντας τους να αιτιολογήσουν αυτή την εικασία, ενεργοποιούν την εργαλειακή διάσταση του πεδίου της δίπλωσης και ξανά διπλώνοντας κατά μήκος της $1^{ης}$ τσάκισης παρατηρούν ότι η πάνω και κάτω πλευρά ταυτίζονται (pivot sign-δίπλωση).

Μ2	Είδαμε ότι οι πλευρές δεν προεξέχει πιο μακριά από την άλλη
Μ1	Ναι αυτό… δύο ίσες
Ε	Ωραία, για ποιες πλευρές είπες; *[απευθύνομαι στην Μ2]*
Μ2	Για αυτές εδώ *[δείχνει την πάνω και κάτω πλευρά του Α4]*
Ε	Ότι δεν προεξέχουν… ότι ταυτίζονται, σωστά;
Μ2	Ναι

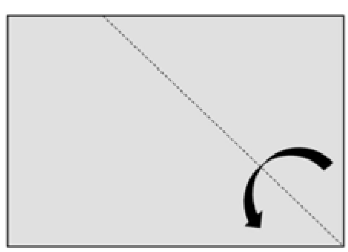
Στη συνέχεια, ανακαλώντας κατάλληλα θεωρητικά στοιχεία, ερμηνεύουν αυτή την απτική -οπτική εμπειρία τους ως συμμετρία των πλευρών και τελικά, παρατηρώντας τις ισότητες που απορρέουν από αυτή τη συμμετρία (mathematical sign), αιτιολογούν τον ισχυρισμό τους. Αυτή η εργαλειακή και διαλογική διάσταση του πεδίου της δίπλωσης κατευθύνει ακολούθως την εργασία τους στο πεδίο GSP. Ειδικότερα, η μαθηματική ερμηνεία της 1ης τσάκισης αποτυπώνεται με μαθηματικό τρόπο στο GSP με τη χρήση των κατάλληλων εντολών (Κατασκευή μέσου τμήματος, Κατασκευή τμήματος) (pivot sign-GSP), με αποτέλεσμα να ενεργοποιείται και η εργαλειακή και διαλογική διάσταση του ψηφιακού πεδίου. Σε σημειωτικό επίπεδο, έχουμε την παραγωγή ενός νέου σημείου στο ψηφιακό περιβάλλον (artefact sign-GSP), του τμήματος που αντιστοιχεί στην 1η τσάκιση.

Παρατηρούμε επομένως ότι σε αυτό το επεισόδιο συνέργειας αλληλεπιδρούν οι εργαλειακές και διαλογικές συνιστώσες των ΜΠΕ με έναν προσανατολισμό από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο αναδύοντας τελικά το μαθηματικό νόημα της συμμετρίας και των ιδιοτήτων της, γεγονός που περιγράφεται μέσω της σημειωτικής αλυσίδας: 1η τσάκιση (Artefact sign -δίπλωση) → ιδιότητες της 1ης τσάκισης κατά τη δίπλωση (pivot sign-δίπλωση) → μεσοπαράλληλος/συμμετρία (mathematical sign) → επιλογή κατάλληλων εργαλείων στο GSP (pivot sign-GSP) → κατασκευή μεσοπαραλλήλου από τα μέσα των απέναντι πλευρών (artefact sign-GSP).

Συνεπώς, μέσω της συνέργειας οι μαθήτριες εμπλούτισαν το μαθηματικό νόημα της μεσοπαραλλήλου, αντιμετωπίζοντάς την ταυτόχρονα και ως άξονα συμμετρίας (στο διπλωμένο χαρτί) και ως το τμήμα με άκρα τα μέσα των δύο απέναντι πλευρών (στο GSP). Όσον αφορά στην εξέλιξη της υποθετικής πρότασης μέσω της συνέργειας αποκαλύπτονται υποθέσεις με βασικότερες τη συμμετρία και τη μεσοπαράλληλο και τις ιδιότητες που αυτές φέρουν ως λειτουργικά πλέον μαθηματικά αντικείμενα.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 2: Ανάδυση υποθέσεων μέσα από την ανακάλυψη γεωμετρικών σχέσεων με βοηθητικές τσακίσεις

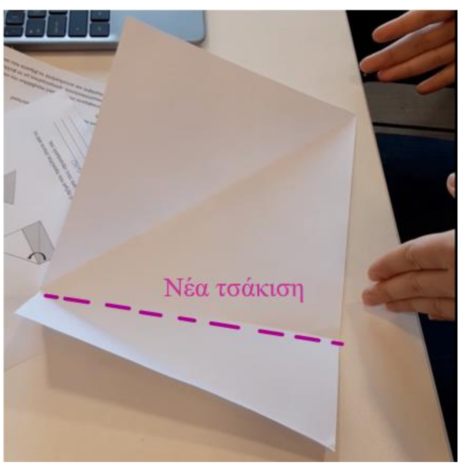
Στο επεισόδιο αυτό οι μαθήτριες νοηματοδοτούν μαθηματικά την 1η τσάκιση της Δραστηριότητας 2 (Εικόνα 10) και την μεταφέρουν στο ψηφιακό περιβάλλον.



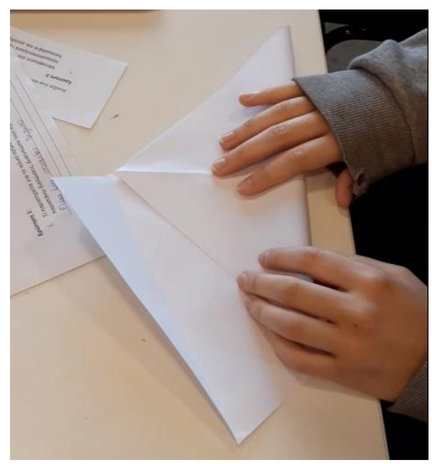
Εικόνα 10: *Αναπαράσταση της 1ης τσάκισης με διακεκομμένο τμήμα στο φύλλο οδηγιών της Δραστηριότητας 2*

Εργαζόμενες αρχικά μόνο στο πεδίο της δίπλωσης εντοπίζουν κατασκευαστικές εξαρτήσεις της συγκεκριμένης τσάκισης και κατ’ επέκταση λογικές εξαρτήσεις αυτού του μαθηματικού αντικειμένου από άλλα. Ειδικότερα, στο σημειωτικό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης χαρακτηρίζουν την ζητούμενη τσάκιση ως διαγώνιο ενός τετραγώνου (mathematical sign) και έπειτα κρίνουν αναγκαίο να κατασκευάσουν πρώτα το σημείο της κάτω πλευράς του Α4 στο οποίο «πέφτει» η πάνω δεξιά κορυφή. Ο εντοπισμός αυτής της κατασκευαστικής εξάρτησης (pivot sign-δίπλωση) τις οδηγεί στο ενεργοποιήσουν την εργαλειακή διάσταση του πεδίου αυτού και να κατασκευάσουν μια νέα βοηθητική τσάκιση (artefact sign-δίπλωση) (Εικόνα 11). Ακολούθως, η εργαλειακή αυτή γένεση κινητοποιεί μια διαλογική γένεση στο πεδίο της δίπλωσης καθώς οι μαθήτριες προβαίνουν σε μια εμπειρική απόδειξη του ότι το νέο τετράπλευρο που σχηματίζεται είναι τετράγωνο, ανακαλώντας τον ορισμό του τετραγώνου (mathematical sign). Κατά την «απόδειξη» αυτή ενεργοποιείται εκ νέου η εργαλειακή διάσταση του πεδίου της δίπλωσης, καθώς οι μαθήτριες με δύο διπλώσεις (Εικόνα 12) παρατηρούν την ισότητα των τεσσάρων πλευρών του τετραπλεύρου και αναφερόμενες στην μεταφορά της ορθής γωνίας (pivot sign-δίπλωση) «αποδεικνύουν» την εικασία τους.

Ε	Για εξηγήστε μου λίγο γιατί είναι τετράγωνο
Μ1	Είδαμε ότι ταυτίζονται όλες οι πλευρές μετά την τσάκιση *[κάνει τη 1η δίπλωση]*
Ε	Οκ και γιατί να μην είναι ρόμβος; Ο ρόμβος δεν έχει όλες τις πλευρές ίσες;
Μ1	*[διπλώνει το χαρτί κατά μήκος της άλλης διαγωνίου του τετραγώνου]*
Μ2	Ναι θα σας πούμε *[γελάει]*
	Αφού έχει ορθές γωνίες!

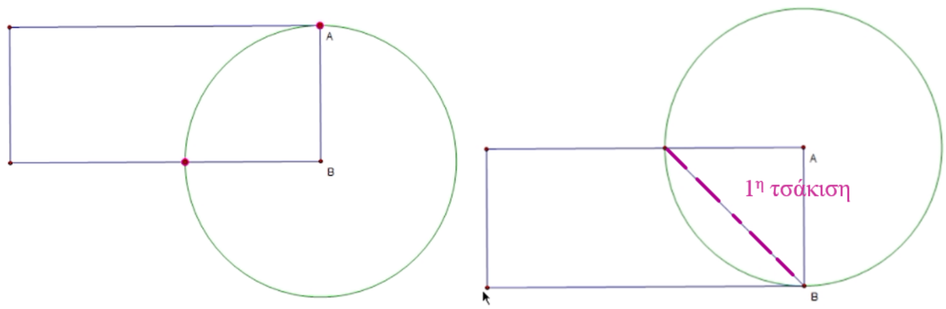


Εικόνα 11: Εμφάνιση νέας-βοηθητικής τσάκισης



Εικόνα 12: Δίπλωση για να «αποδείξουν» πρόκειται για τετράγωνο

Στη συνέχεια, οι μαθήτριες μεταφέρονται στο GSP όπου η εργασία τους κατευθύνεται από την προηγούμενη εργασία τους στο πεδίο της δίπλωσης. Η συνέργεια αυτή των δύο μέσων γίνεται μέσα από την αλληλεπίδραση της εργαλειακής και διαλογικής τους διάστασης. Έχοντας ελέγξει στο χαρτί μέσα από διπλώσεις ότι προκύπτει ένα τετράγωνο, αξιοποιούν το εργαλείο του κύκλου προκειμένου να κατασκευάσουν τα ίσα αυτά τμήματα (pivot sign-GSP). Ο λόγος που προβαίνουν σε αυτή την εργασία στο εργαλειακό επίπεδο του GSP είναι ότι στο διαλογικό επίπεδο έχουνε εντοπίσει τις κατασκευαστικές εξαρτήσεις της ζητούμενης τσάκισης από τα αντικείμενα αυτά. Τέλος, στο διαλογικό επίπεδο του GSP παρατηρούμε ότι οι μαθήτριες εντοπίζουν τις ελάχιστες κατασκευαστικές ενέργειες που απαιτούνται για να πετύχουν τον στόχο τους, στο οποίο βοήθησε η έννοια της συμμετρίας που αναδύθηκε κατά την διερεύνηση στο πεδίο της δίπλωσης (Εικόνα 13). Τελικά, οι μαθήτριες μεταφέρουν την 1^{η} αυτή τσάκιση κατασκευάζοντας τη διαγώνιο του τετραγώνου που είχαν εντοπίσει (artefact sign-GSP).



Εικόνα 13: Ενώ αρχικά κάνουν την αριστερή κατασκευή, στη συνέχεια προβαίνουν στην δεξιά έχοντας καταλήξει στο ότι θα τις οδηγήσει συντομότερα στην 1^{η} τσάκιση

Η συνέργεια που εμφανίζεται στο επεισόδιο αυτό θα μπορούσαμε να πούμε ότι οργανώνεται στην εξής σημειωτική αλυσίδα: βοηθητική τσάκιση (artefact sign-δίπλωση) → κατασκευαστική εξάρτηση 1^{ης} και βοηθητικής τσάκισης/ ταύτιση τμημάτων και μεταφορά της ορθής γωνίας (pivot sign-δίπλωση) → τετράγωνο (mathematical sign) → ελάχιστες ιδιότητες τετραγώνου για την κατασκευή της 1^{ης} τσάκισης (pivot sign- GSP) → 1^{η} τσάκιση (artefact sign -GSP).

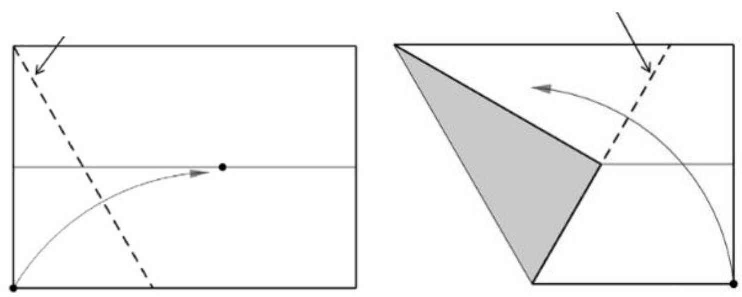
Συνοψίζοντας, τα δύο αυτά επεισόδια φανερώνουν πως στο αρχικό στάδιο της μεταφοράς της κατασκευής από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο οι μαθήτριες ανέπτυξαν πρώιμες υποθέσεις με δύο τρόπους. Από τη μια, στο Επεισόδιο 1 ερμήνευσαν το οπτικό και απτικό αποτέλεσμα της δίπλωσης κατά μήκος της τσάκισης και εργάστηκαν αποκλειστικά με τα υπάρχοντα σημεία του πεδίου της δίπλωσης. Από την άλλη, στο Επεισόδιο 2 αναγνώρισαν την ανάγκη κατασκευής βοηθητικής γραμμής και διερεύνησαν τις γεωμετρικές σχέσεις των σημείων με αυτήν. Και στις δύο περιπτώσεις τα σημεία από τα οποία ξεκίνησαν οι νοηματοδοτήσεις ήταν συνδεδεμένα με το τεχνούργημα του φύλλου Α4. Ο πειραματισμός με τα artefact signs οδήγησε σε pivot signs συνδεδεμένα και πάλι με το πεδίο της δίπλωσης τα οποία τελικά μέσω της συνέργειας των δύο πεδίων εξελίχθηκαν στα μαθηματικά νοήματα της μεσοπαραλλήλου και του τετραγώνου αντίστοιχα. Η εύρεση τρόπου μεταφοράς της κατασκευής στο GSP αποκάλυψε ιδιότητες αυτών των αντικειμένων και οδήγησε σε pivot sign συνδεδεμένα με το GSP και την επιλογή των κατάλληλων εργαλείων, ώστε τελικά να παραχθούν νέα artefact signs στο ψηφιακό μέσο.

5.1.2 Ανάδυση λογικών συνδέσεων μεταξύ των υποθέσεων

Τα δύο επεισόδια που αναλύονται στην ενότητα αυτή αφορούν στην εμπλοκή των μαθητών Μ3, Μ4 της Ομάδας Β με την Δραστηριότητα 1. Μέσα από την ανάλυση αναδύει η σημασία της συνέργειας των δύο πεδίων στην νοηματοδότηση των λογικών συνδέσεων μεταξύ των υποθέσεων της υποθετικής πρότασης. Τα Επεισόδια 1 και 2 παρατίθενται σύμφωνα με τη χρονολογική σειρά που διαδραματίστηκαν και αφορούν και τα δύο στην αναζήτηση τρόπου μεταφοράς της 2ης τσάκισης της Δραστηριότητας 1 στο ψηφιακό περιβάλλον.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 1: Νοηματοδότηση λογικών συνδέσεων μέσα από την αντιστοίχιση σημείων των δύο πεδίων

Παρόλο που οι Μ3, Μ4 έχουν προβεί σε μια λανθασμένη προηγούμενη κατασκευή (αναλύεται στο Επεισόδιο 3 της παραγράφου 5.1.3) η οποία δεν έχει γίνει ακόμα αντιληπτή, προσπαθούν να βρουν τρόπο κατασκευής της 2ης τσάκισης στο ψηφιακό περιβάλλον και έτσι επιστρέφουν στο πεδίο της δίπλωσης προκειμένου να αντλήσουν στοιχεία και θα τους βοηθήσουν στη μεταφορά της κατασκευής. Παρατηρείται έντονη διαλογική εργασία στο πεδίο της δίπλωσης του χαρτιού, η οποία εκφράζεται μέσα από την διερεύνηση κατασκευαστικών εξαρτήσεων των σημείων που σχετίζονται με την 2η αλλά και 3η τσάκιση.



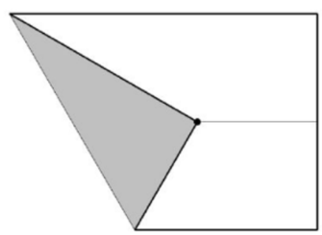
Εικόνα 14: Τα βέλη δείχνουν αριστερά την 2η τσάκιση και δεξιά την 3η

Η διερεύνηση αυτών των εξαρτήσεων φανερώνει και λογικές σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών αντικειμένων του χαρτιού -και μετέπειτα και του GSP- οι οποίες βέβαια στο σημείο αυτό δεν ειπώνονται ρητά από τον μαθητή και τη μαθήτρια. Είναι ωστόσο ένα χαρακτηριστικό δείγμα εκδήλωσης μαθηματικού συλλογισμού (mathematical sign).

Μ3	Άμα… κάτσε κάτσε κάτσε
	Άμα κάνουμε αυτή εδώ…αλλά αυτή εδώ πώς θα τη βρούμε; *[δείχνει την 3η τσάκιση στο χαρτί του Μ4]*
	Δηλαδή εδώ έχεις τη μια άκρη *[δείχνει το σημείο που τέμνει η 3η τσάκιση την πάνω πλευρά του Α4]* αλλά πρέπει να βρεις την επόμενη *[δείχνει το σημείο που τέμνει η 3η τσάκιση την κάτω πλευρά του Α4]*
Μ4	Αυτή είναι η επόμενη! *[της παίρνει το χαρτί]*

Μ3	Κάτσε! Φέρε μου λίγο *[ξανά παίρνει το χαρτί του Μ4]*
	Εμείς πρέπει να βρούμε αυτή *[Κάνει νοητά με τα χέρια της τη 2η δίπλωση δείχνοντας το ένα κομμάτι του χαρτιού που πέφτει πάνω στο άλλο]*
Μ4	Αυτή *[δείχνει την 2η τσάκιση]*
Μ3	Αλλά θα έχεις… αν βρεις αυτό εδώ το σημείο *[δείχνει το σημείο που συναντιούνται οι 2η και 3η τσάκιση πάνω στην κάτω πλευρά του Α4]* θα είναι εύκολο να την βρεις *[δείχνει με το δάχτυλό της κατά μήκος της 2ης τσάκισης]*
	Και για να βρεις αυτό το σημείο, έχεις ήδη αυτό το σημείο *[δείχνει το σημείο που τέμνει η 3η τσάκιση της πάνω πλευρά του Α4 και έπειτα δείχνει με το δάχτυλο κατά μήκος της 3ης τσάκισης]*, οπότε με κάποιο τρόπο πρέπει…

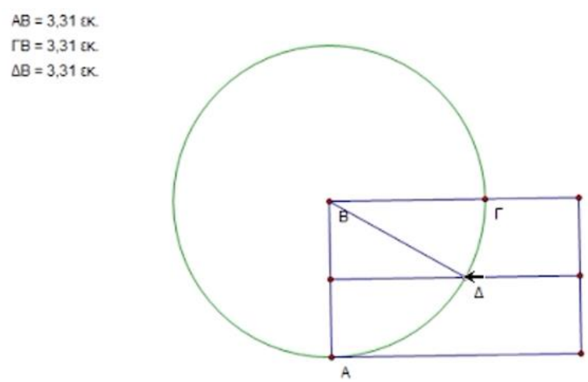
Επηρεασμένοι από την προηγούμενη εργασία τους στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού, οι Μ3, Μ4 επιχειρούν να προσδιορίσουν και στο GSP σημεία από τα οποία εξαρτάται η 2η τσάκιση. Στο επεισόδιο αυτό παρατηρείται η συνέργεια των δύο πεδίων εργασίας, κυρίως σε σημειωτικό και εργαλειακό επίπεδο. Φαίνεται από τον πειραματισμό τους ότι θεωρούν απαραίτητο να προσδιορίσουν πρώτα το σημείο τομής της 5ης τσάκισης με τη μεσοπαράλληλο (artefact sign-δίπλωση) (Εικόνα 15). Ως 5η τσάκιση θεωρούμε την τσάκιση κατά μήκος του τμήματος που ενώνει την πάνω αριστερή κορυφή του τετραγώνου με το σημείο της μεσοπαραλλήλου στο οποίο «πέφτει» η κάτω αριστερή κορυφή και την οποία τσάκιση έχει πραγματοποιήσει η ομάδα πριν το παρόν επεισόδιο.



Εικόνα 15: Το σημείο τομής της 1ης και 5ης τσάκισης

Σε σημειωτικό επίπεδο, ο μαθητής και η μαθήτρια εντοπίζουν ένα σημείο στο GSP που θεωρούν κρίσιμο για τη συνέχεια της κατασκευής και το αντιστοιχίζουν με ένα σημείο από το πεδίο της δίπλωσης. Προκειμένου να αιτιολογήσουν αυτή την αντιστοίχιση των σημείων, ενεργοποιούν την εργαλειακή διάσταση τόσο του χειραπτικού όσο και του ψηφιακού μέσου. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούν ότι το σημείο αυτό είναι σημείο του κύκλου που έχουν προηγουμένως κατασκευάσει στο GSP (artefact sign-GSP) και διπλώνουν ξανά το χαρτί ώστε να επιβεβαιώσουν την ισότητα δύο τμημάτων που αντιστοιχούν σε ακτίνες του κύκλου αυτού (pivot sign-δίπλωση). Έπειτα από αυτή την επικύρωση γυρίζουν ξανά στο GSP, όπου κατασκευάζουν την 5η τσάκιση (τμήμα ΒΔ στην Εικόνα 16), από την οποία έχουν παρατηρήσει ότι εξαρτάται η 2η. Ενεργοποιείται, τέλος, η εργαλειακή διάσταση του GSP μέσα από τη χρήση της μέτρησης, την οποία χρησιμοποίησαν οι Μ3, Μ4 για να διαπιστώσουν αν πράγματι δύο τμήματα – που αντιστοιχούν σε ακτίνες ίδιου κύκλου- είναι ίσα (pivot sign-GSP).

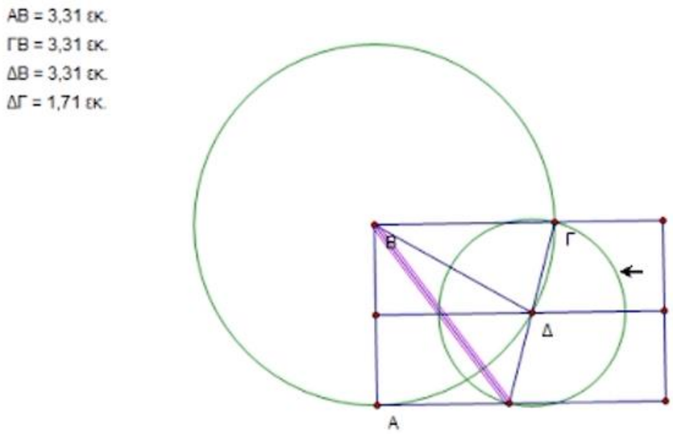
Η σημειωτική αλυσίδα που παρατηρείται είναι: σημείο τομής 1ης και 5ης τσάκισης (artefact sign - δίπλωση)→ σημείο τομής κύκλου και μεσοπαραλλήλου (artefact sign-GSP) → ταύτιση δύο τμημάτων (pivot sign-δίπλωση)→ ίσες μετρήσεις δύο τμημάτων (pivot sign-GSP) → ο κύκλος ως εργαλείο διατήρησης μήκους τμημάτων (mathematical sign) → βοηθητικό σημείο πάνω στη μεσοπαράλληλο (artefact sign- GSP).



Εικόνα 16: Εντοπισμός του ζητούμενου σημείου πάνω στη μεσοπαράλληλο καθώς και του τμήματος που αντιστοιχεί στην 5η τσάκιση

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 2: Νοηματοδότηση λογικών συνδέσεων με την κατασκευή βοηθητικού σημείου

Ο μαθητής και η μαθήτρια αντιλαμβάνονται την κατασκευαστική εξάρτηση της 2ης τσάκισης από το σημείο που αυτή τέμνει την κάτω πλευρά του ορθογωνίου (artefact sign-δίπλωση). Η διαπίστωση αυτή αναδεικνύει λογικές εξαρτήσεις των μαθηματικών αντικειμένων που αντιστοιχούν στα σημεία του πεδίου της δίπλωσης και άρα είναι φανερή η διαλογική γένεση του πεδίου αυτού. Η συνέργεια εκδηλώνεται μέσα από την αλληλεπίδραση των σημειωτικών και εργελειακών διαστάσεων του ψηφιακού και χειραπτικού μέσου. Ξεκινώντας εργαζόμενοι/-ες στο εργαλειακό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης, οι Μ3 και Μ4 παρατηρούν την ισότητα τριών διαδοχικών τμημάτων (pivot sign-δίπλωση). Προκειμένου να μεταφέρουν την ισότητα αυτή στο ψηφιακό περιβάλλον ενεργοποιούν την εργαλειακή διάσταση του GSP και συγκεκριμένα χρησιμοποιούν τον κύκλο για να κατασκευάσουν ίσα τμήματα (pivot sign-GSP) (Εικόνα 17). Στο σημείο αυτό παρατηρούμε και τη διαλογική γένεση του GSP, καθώς ο κύκλος αξιοποιείται ως εργαλείο θεωρητικής κατασκευής/ μεταφοράς της ισότητας (mathematical sign). Ολοκληρώνοντας αυτή την εργασία, εντοπίζουν ένα κρίσιμο σημείο στην κάτω πλευρά του ορθογωνίου από το οποίο εξαρτάται η 2η τσάκιση (artefact sign-GSP). Τέλος εργάζονται στο σημειωτικό επίπεδο του GSP καθώς εμφανίζουν νέα σημεία, την 2η τσάκιση (με μωβ στην Εικόνα 17) και το σημείο τομής τους με την κάτω πλευρά. Η σημειωτική αλυσίδα που παρατηρείται είναι: σημείο τομής 2ης τσάκισης με την κάτω πλευρά του Α4 (artefact sign -δίπλωση)→ ταύτιση τριών τμημάτων (pivot sign- δίπλωση)→ κατασκευή ίσων τμημάτων με κύκλο (pivot sign-GSP) → ο κύκλος ως εργαλείο διατήρησης μήκους τμημάτων (mathematical sign) → κατασκευή $2^{ης}$ και $3^{ης}$ τσάκισης (artefact sign- GSP).



Εικόνα 17: Ο κύκλος (Δ, ΔΓ) αξιοποιείται για την κατασκευή των ίσων τμημάτων που μαζί αποτελούν το αντίστοιχο της $3^{ης}$ τσάκισης

Συνοπτικά, παρατηρείται στα δύο αυτά επεισόδια η διερεύνηση από την Ομάδα Β των κατασκευαστικών εξαρτήσεων διαφόρων σημείων του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού μέσα από την οποία ανακαλύπτουν τις μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν τα αντίστοιχα μαθηματικά αντικείμενα και κατ' επέκταση δομούν υπόρρητα λογικές συνδέσεις μεταξύ των υποθέσεων. Η συνέργεια των δύο πεδίων ενθάρρυνε την διερεύνηση αυτή με δύο τρόπους. Από τη μια, με την αντιστοίχιση σημείων του ενός πεδίου με σημεία του άλλου και τη μαθηματική εξήγηση αυτής της σχέσης (Επεισόδιο 1) και από την άλλη με τον εντοπισμό κατασκευαστικών εξαρτήσεων με ένα νέο βοηθητικό σημείο (Επεισόδιο 2). Και στα δύο επεισόδια, παρόλο που ο αρχικός πειραματισμός πραγματοποιήθηκε στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού, η εμφάνιση του μαθηματικού νοήματος σχετικά με τον κύκλο και τη χρήση του ως εργαλείο διατήρησης ίσων τμημάτων έγινε όχι άμεσα στο πεδίο αυτό, αλλά έπειτα από μια αλληλουχία νοημάτων που εναλλάσσονταν από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο.

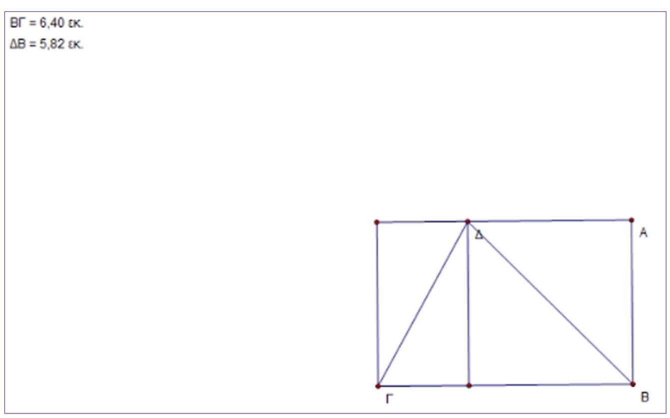
5.1.3 Ανάδυση υποθέσεων και λογικών συνδέσεων μέσα από την διερεύνηση αντιφατικών συμπερασμάτων

Στην ενότητα αυτή τα επεισόδια που αναλύονται αναδεικνύουν τη σημασία της συνέργειας στην επανεξέταση των υποθέσεων και των λογικών συνδέσεων μιας υποθετικής πρότασης έπειτα από την εμφάνιση αντιφατικών συμπερασμάτων στο χειραπτικό και ψηφιακό μέσο. Τα δύο πρώτα επεισόδια που ακολουθούν αφορούν στην εμπλοκή των μαθητριών της Ομάδας Α με την Δραστηριότητα 2, στην οποία ήταν προσχεδιασμένο να εμφανιστούν αντικρουόμενα τελικά αποτελέσματα στο διπλωμένο χαρτί και στο GSP. Για την επίλυση

αυτής της συγκρουσιακής κατάστασης οι μαθήτριες καλούνται να διερευνήσουν τις υποθέσεις που έχουν θεωρήσει ως δεδομένες.
Πέρα από την Δραστηριότητα 2 στην οποία ήταν, όπως προαναφέρθηκε, σχεδιασμένο να εμφανιστούν αντιφατικά αποτελέσματα, κυρίως στην Ομάδα Β παρουσιάστηκαν επεισόδια στα οποία, λόγω κάποιου λάθους στη μεταφορά της κατασκευής από το ένα μέσο στο άλλο, προέκυπτε στην οθόνη μη αναμενόμενο αποτέλεσμα. Μια τέτοια περίπτωση αποτελεί το Επεισόδιο 3 της ενότητας αυτής στο οποίο ο μαθητής και η μαθήτριας εργάζονται πάνω στην εύρεση του λάθους στην κατασκευή στο ψηφιακό μέσο.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 1: Αμφισβήτηση των υποθέσεων και διερεύνηση των λογικών συνδέσεων με την αξιοποίηση του συρσίματος και των «χειραπτικών αντιπαραδειγμάτων»

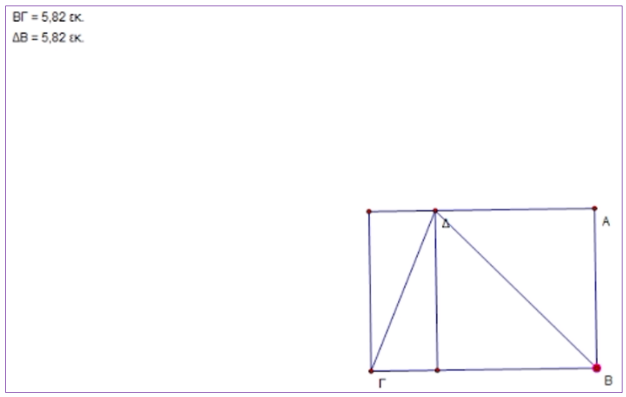
Έχοντας ολοκληρώσει τη μεταφορά της κατασκευής από το χειραπτικό μέσο στο ψηφιακό, οι μαθήτριες της Ομάδας Α εργάζονται αποκλειστικά στο πεδίο GSP και διερευνούν το είδος του τελικού τριγώνου που προκύπτει. Αρχικά, βασιζόμενες στην οπτική ανατροφοδότηση και την αντιληπτική τους ικανότητα, παρατηρούν ότι το τελικό αποτέλεσμα δεν μοιάζει με ισοσκελές τρίγωνο όπως ανέμεναν (artefact sign-GSP). Η εργασία στο σημειωτικό επίπεδο – με την απόδοση νοήματος στο συγκεκριμένο αντικείμενο- συμπληρώνεται από την εργασία στο εργαλειακό επίπεδο του GSP. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθήτριες χρησιμοποιούν το εργαλείο της μέτρησης προκειμένου να ελέγξουν αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές (Εικόνα 18).



Εικόνα 18: Οι μαθήτριες μετράνε τις πλευρές ΒΓ και ΔΒ και διαπιστώνουν ότι το ΔΓΒ δεν είναι ισοσκελές

Η εικασία τους ότι δεν είναι ισοσκελές επιβεβαιώνεται με την εμφάνιση των νέων σημείων, των ενδείξεων των μετρήσεων των δύο πλευρών (pivot sign-GSP), και με την διαλογική εργασία στο πεδίο του GSP, καθώς ανακλήθηκε υπόρρητα ο ορισμός του ισοσκελούς τριγώνου (mathematical sign/διαφορετικό αποτέλεσμα). Μέσα από την εξέλιξη αυτού του νοήματος, οι μαθήτριες διαπίστωσαν το αντιφατικό σε σχέση με το διπλωμένο χαρτί συμπέρασμα.

Στη συνέχεια, οι μαθήτριες συνεχίζουν να εργάζονται κατά κύριο λόγο στο πεδίο GSP. Έχοντας αντιληφθεί την συγκρουσιακή κατάσταση στο τι αποτέλεσμα ανέμεναν και τι βλέπουν τελικά στην οθόνη τους, πειραματίζονται στο εργαλειακό επίπεδο του GSP και κάνοντας guided dragging (artefact sign-GSP), παρατηρώντας ταυτόχρονα τις μετρήσεις των πλευρών, εντοπίζουν θέσεις στις οποίες εμφανίζεται το επιθυμητό αποτέλεσμα (pivot sign – GSP) (Εικόνα 19).



Εικόνα 19: Σύροντας το σημείο Β εντοπίζουν θέσεις στις οποίες ΒΓ=ΔΒ

Οι αλλαγές που συμβαίνουν κατά το σύρσιμο υπονοούν διαφορετικές υποθέσεις/δεδομένα και έτσι, θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε διαλογικό επίπεδο, γίνεται αντιληπτό από τις μαθήτριες ότι διαφορετικές υποθέσεις οδηγούν σε διαφορετικό συμπέρασμα (mathematical sign/αιτία διαφορετικού αποτελέσματος). Ωστόσο, στο επεισόδιο αυτό οι μαθήτριες φαίνεται να μην εστιάζουν στο τι συμβαίνει στα σημεία στα οποία το τρίγωνο γίνεται ισοσκελές, αλλά αναφέρονται στη μεταβλητότητα της κατασκευής στο GSP γενικά ως τον παράγοντα που οδηγεί σε «λανθασμένο» συμπέρασμα. Στο εργαλειακό, λοιπόν, και πάλι επίπεδο του GSP, η αλλαγή των διαστάσεων του ορθογωνίου με το σύρσιμο σε αντίθεση με τις σταθερές διαστάσεις του Α4 οδηγεί στον ισχυρισμό ότι έχουν κάνει λάθος στην κατασκευή στο GSP.

Μ1	Εμ μπορεί να μην είναι σταθερό το σχήμα. Κάτι να έχουμε κάνει εμείς και για αυτό να μην βγήκε ίσως στην αρχή
Ε	Σταθερό τι εννοείς;
Μ1	Αυτό που λέγαμε με το σύρσιμο ότι…
Ε	Το ανθεκτικό, να διατηρεί κάποιες ιδιότητες
Μ1	Ναι ναι
Ε	Οκ, άρα εδώ ποια ιδιότητα θα θέλατε να διατηρείται και δεν διατηρείται ;
Μ1	*[ξανά κάνει τις διπλώσεις]*
Μ2	Το μήκος του τέτοιου… της παράλληλης του ορθογωνίου, γιατί αυτό είναι… στην ουσία δε μεγαλώνει ούτε μικραίνει το χαρτί *[μου δείχνει το Α4]*
	Άρα ξέρουμε ότι σε αυτό είναι ίσο, ενώ εδώ μπορούμε να αλλάξουμε το τέτοιο… [*σύρει το σημείο Β*]
Μ1	Το Β

M2	Το ορθογώνιο

Φαίνεται επομένως ότι δίνουν προτεραιότητα στην ισχύ του συμπεράσματος στο χαρτί, γεγονός που επιβεβαιώνεται από το ότι οι μαθήτριες επέστρεψαν ξανά στο πεδίο του χαρτιού και κάνοντας κατάλληλη δίπλωση επιβεβαίωσαν εκ νέου τον ισχυρισμό τους και την ισχύ του στο πεδίο αυτό (εργαλειακό επίπεδο πεδίου δίπλωσης).

M1,M2	*[κάνουν την ίδια δίπλωση για να ελέγξουν αν είναι ίσες οι πλευρές του τριγώνου]*
M1	Ναι ίσες είναι!
E	Τώρα εδώ γιατί το ξανά κάνατε και οι 2;
M2	Για να είμαστε σίγουρες ότι δεν ήταν σωστή
M1	Για να μην χρειαστεί να αλλάξουμε την εικασία

Όσον αφορά στην υποθετική πρόταση, οι μαθήτριες αντιλαμβάνονται μέσα από την εμπειρία τους με το σύρσιμο ότι θα πρέπει να επανεξετάσουν τις υποθέσεις τους προκειμένου να έχουν το επιθυμητό συμπέρασμα. Αυτή η συγκρουσιακή κατάσταση και η διερεύνησή της στο πεδίο GSP θα δώσει το έναυσμα για την προσεκτική επανεξέταση και παραγωγική αμφισβήτηση των υποθέσεων και των λογικών συνδέσεων στο οποίο θα συμβάλλει η συνέργεια των δύο μέσων.

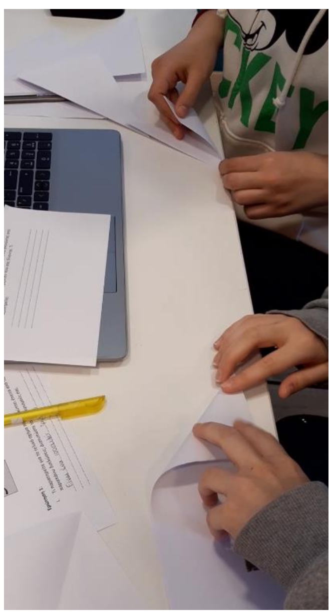
Έπειτα από την εργασία στο ΜΠΕ GSP που αναλύθηκε παραπάνω, παρατηρείται συνέργεια των δύο πεδίων η οποία εκδηλώνεται με την επικοινωνία της εργαλειακής διάστασης του GSP και της διαλογικής του πεδίου της δίπλωσης. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθήτριες στο προηγούμενο επεισόδιο πειραματίζονταν με τις διαστάσεις του ορθογωνίου με την αξιοποίηση του συρσίματος παρατηρώντας το πότε εμφανίζεται τελικά ισοσκελές τρίγωνο. Επηρεασμένες από αυτή τους την εργασία στο εργαλειακό επίπεδο του GSP, φαίνεται στο επεισόδιο αυτό να διατυπώνουν εικασίες σχετικά με το τελικό αποτέλεσμα των διπλώσεων στην περίπτωση που μεταβάλλαμε τις διαστάσεις του A4 (pivot sign-δίπλωση). Αυτή η νοητική τους εργασία στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού αποτελεί στοιχείο μαθηματικού συλλογισμού, καθώς οι μαθήτριες είναι προφανές πλέον ότι συνειδητοποιούν την λογική εξάρτηση του συμπεράσματος από τις υποθέσεις.

M2	Ναι σε αυτές τις διαστάσεις. Αν ήταν λίγο πιο μεγάλο από εδώ *[δείχνει την πάνω πλευρά του A4]* μπορεί να μην έβγαινε
E	Πιο μεγάλο ποιο;
M2	Ας πούμε να ήταν πιο πολλά εκατοστά αυτή και αυτή *[δείχνει το μήκος και το πλάτος του A4]* μπορεί τότε να μην έβγαινε
M1	Δεν νομίζω
E	Άρα εσύ διαφωνείς ότι είναι το θέμα οι διαστάσεις;
M1	Νομίζω ότι άμα μεγάλωνε και από τις δύο πλευρές το ίδιο, δε θα είχε διαφορά
E	Αν μεγάλωνε δηλαδή με ανάλογο τρόπο;
M1	Ναι

Μέσα από τη συνέργεια εξελίχθηκαν τα προσωπικά νοήματα που αναδύθηκαν τόσο κατά το σύρσιμο όσο και κατά την συζήτηση των μαθητριών σχετικά με τις αλλαγές των διαστάσεων του φύλλου χαρτιού σε μαθηματικά νοήματα. Ειδικότερα το μαθηματικό νόημα στο οποίο έφτασαν οι μαθήτριες είναι η έννοια της ομοιότητας και των ανάλογων πλευρών (mathematical sign/αναγκαία συνθήκη για ίδιο αποτέλεσμα), μιας και μια εκ των δύο διαπίστωσε ότι δεν είναι απαραίτητο να έχουν ακριβώς τα ίδια συγκεκριμένα μήκη των πλευρών του A4, αλλά αρκεί να μεταβάλλονται με ανάλογο τρόπο.

Παράλληλα, μέσα από την συνέργεια οι μαθήτριες κατάφεραν να εντοπίσουν εμπειρικά μια υπόθεση που λείπει από την κατασκευή τους στο GSP και ενυπάρχει στο διπλωμένο χαρτί. Η υπόθεση αυτή ωστόσο, θα πρέπει να διατυπωθεί με τρόπο να τις οδηγήσει σε μια ανθεκτική κατασκευή, γεγονός που θα συμβεί στο επόμενο επεισόδιο.

Η υπόθεση των όμοιων με το Α4 διαστάσεων -που αναδύθηκε κατά την συνέργεια που προαναφέρθηκε- οδήγησε τις μαθήτριες στο να εργαστούν στο πεδίο της δίπλωσης του χαρτιού προκειμένου να βεβαιωθούν ότι το μη αναμενόμενο/λανθασμένο συμπέρασμα στο GSP προέκυψε λόγω των διαφορετικών από το του Α4 διαστάσεων του ορθογωνίου. Αρχικά, παρουσιάζουν έντονη δραστηριότητα στο διαλογικό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης, καθώς υποστηρίζουν ότι αν είχαν διαφορετικά φύλλα χαρτιού, δεν θα προέκυπτε ούτε στο διπλωμένο χαρτί ισοσκελές τρίγωνο. Έτσι, από μόνες τους αναφέρονται σε αυτά που έχουν ορισθεί ως «χειραπτικά αντιπαραδείγματα» (artefact sign -δίπλωση). Ο συλλογισμός αυτός φανερώνει με σαφή τρόπο την κατανόηση από μεριάς τους της εξάρτησης του συμπεράσματος μιας υποθετικής πρότασης από τις υποθέσεις της. Έπειτα, εργάζονται στο εργαλειακό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης κατασκευάζοντας τις ίδιες διπλώσεις στα 3 φύλλα διαφορετικών διαστάσεων που τους δόθηκαν (Εικόνα 20).



Εικόνα 20: Οι μαθήτριες κάνουν τις διπλώσεις στα «χειραπτικά αντιπαραδείγματα» και ελέγχουν στο πεδίο αυτό το είδος των τριγώνων που προκύπτουν

Η εργαλειακή διάσταση του πεδίου της δίπλωσης έρχεται στην επιφάνεια, καθώς με μια νέα τσάκιση επιχειρούν και τελικά επικυρώνουν την εικασία τους ότι τα τελικά τρίγωνα των «χειραπτικών αντιπαραδειγμάτων» δεν είναι ισοσκελή (pivot sign-δίπλωση). Βέβαια, από μόνο του το γεγονός ότι σκέφτηκαν να αξιοποιήσουν τα χειραπτικά αντιπαραδείγματα αποτελεί μια εργαλειακή γένεση του πεδίου αυτού, καθώς εστίασαν στο χαρακτηριστικό των διαστάσεών τους και προσέδωσαν ένα συγκεκριμένο σχήμα χρήσης προκειμένου να επιβεβαιώσουν πως σε αυτό το στοιχείο έγκεινται τα διαφορετικά αποτελέσματα. Συνεπώς, οι εργαλειακή και διαλογική διάσταση του πεδίου της δίπλωσης συνέβαλαν από κοινού στην εξέλιξη της υποθετικής πρότασης «αν… τότε» καθώς φαίνεται οι μαθήτριες να κατανοούν την λογική εξάρτηση μεταξύ των υποθέσεων και του συμπεράσματος μιας τέτοιας πρότασης.

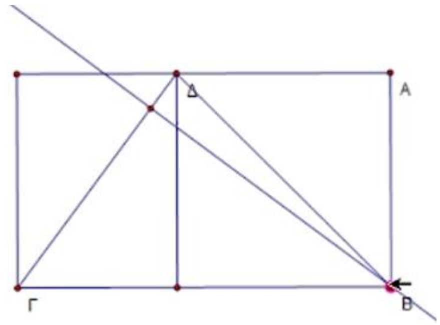
Όλη η παραπάνω διαδικασία συνεχούς αλληλεπίδρασης των δύο ΜΠΕ μπορεί να αποτυπωθεί με την εξής σημειωτική αλυσίδα:
οπτική ανατροφοδότηση από την οθόνη (artefact sign -GSP)→ διαφορετικές ενδείξεις μετρήσεων (pivot sign-GSP) → άνισες πλευρές, όχι ισοσκελές (mathematical sign) → σύρσιμο (artefact sign -GSP)→ αλλαγή της κατασκευής/ μεταβλητότητα (pivot sign -GSP)→ λανθασμένη ή απούσα υπόθεση/δεδομένο στο GSP (mathematical sign) → υποθετική αλλαγή πλευρών του χαρτιού (pivot sign-δίπλωση) → ομοιότητα (mathematical sign) → χειραπτικά αντιπαραδείγματα (artefact sign -δίπλωση)→ διαφορετικές διαστάσεις οδηγούν σε διαφορετικά σχήματα (pivot sign - δίπλωση)→ διαφορετικές υποθέσεις οδηγούν σε διαφορετικά αποτελέσματα (mathematical sign).

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 2: Εντοπισμός αναγκαίας υπόθεσης μέσα την απόδοση μαθηματικού νοήματος στο οπτικό αποτέλεσμα της χειραπτικής και ψηφιακής κατασκευής

Στο προηγούμενο επεισόδιο επιβεβαίωσαν ότι οι διαφορετικές διαστάσεις είναι η πηγή των αντιφατικών αποτελεσμάτων και τώρα εστιάζουν σε μαθηματικές ιδιότητες που θα έπρεπε να έχει η κατασκευής τους για να προκύψει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Έτσι, εργάζονται στο διαλογικό επίπεδο του πεδίου GSP και θεωρούν ότι η επιθυμητή ιδιότητα της κατασκευής τους είναι η σύμπτωση του ύψους και της διαμέσου του τελικού τριγώνου.

Μ1	Κανονικά αν είναι ισοσκελές θα πρέπει η κάθετη να πηγαίνει στη μέση
Ε	Στο μέσο του ΓΔ;
Μ1	Ναι της ΓΔ

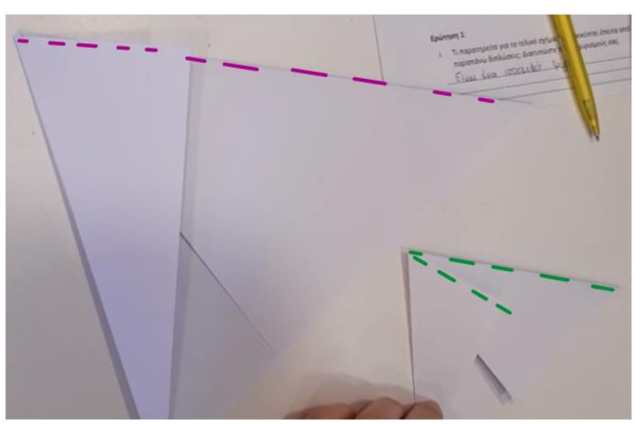
Ανακαλούν λοιπόν μια ιδιότητα του ισοσκελούς τριγώνου από το θεωρητικό σύστημα αναφοράς. Αυτή η διαλογική διαδικασία ενεργοποιεί την εργαλειακή γένεση του πεδίου GSP καθώς οι μαθήτριες κατασκευάζουν την κάθετη σε μια πλευρά του τριγώνου που διέρχεται από την απέναντι κορυφή (Εικόνα 21) ενώ στην συνέχεια με το εργαλείο του συρσίματος σύρουν ένα σημείο προκειμένου να διέρχεται η κάθετη και από το μέσο της πλευράς .



Εικόνα 21: Η Μ2 σύρει το σημείο Β επιχειρώντας να διέρχεται η κάθετη από το Β στο ΓΔ από το μέσο του ΓΔ

Οι δυνατότητες επομένως του ψηφιακού περιβάλλοντος παίζουν καθοριστικό ρόλο στην διερεύνηση της ζητούμενης μαθηματικής υπόθεσης της υποθετικής πρότασης, καθώς μέσω της οπτικής ανατροφοδότησης και της εμπειρίας της κινητικής εξάρτησης οι μαθήτριες αναδεικνύουν μαθηματικές/λογικές σχέσεις που απαιτούνται.

Ο πειραματισμός στο πεδίο GSP που αναλύθηκε παραπάνω από μόνος του δεν βοήθησε τις μαθήτριες να εντοπίσουν την μαθηματική αιτία πίσω από την οπτική ανατροφοδότηση που λάμβαναν. Έτσι, επιστρέφουν στο πεδίο της δίπλωσης και εργάζονται στο εργαλειακό και σημειωτικό επίπεδο του πεδίου. Πιο συγκεκριμένα, προκειμένου να εντοπίσουν την μαθηματική υπόθεση που λείπει και να της αποδώσουν χαρακτηριστικά που θα τις βοηθήσουν να κάνουν μια ορθή κατασκευή στο GSP, επιλέγουν να συγκρίνουν βήμα-βήμα τις ανατροφοδοτήσεις που λαμβάνουν από τις διπλώσεις του A4 και ενός χειραπτικού αντιπαραδείγματος (artefact signs-δίπλωση). Η επιλογή αυτή καθ' αυτή εκδηλώνει την εργαλειακή γένεση του πεδίου της δίπλωσης ως μέσο για τον προσδιορισμό της υπόθεσης που χρειάζονται. Επιπλέον, σε σημειωτικό επίπεδο, παρατηρούν και συγκρίνουν τα χαρακτηριστικά της κάθε δίπλωσης και στα δύο χαρτιά και το διαφορετικό οπτικό αποτέλεσμα που λαμβάνουν κατά τη $2^{η}$ δίπλωση (Εικόνα 22) αναγνωρίζεται ως το στοιχείο που παράγει και διαφορετικά τελικά τρίγωνα στο χαρτί (pivot sign-δίπλωση).



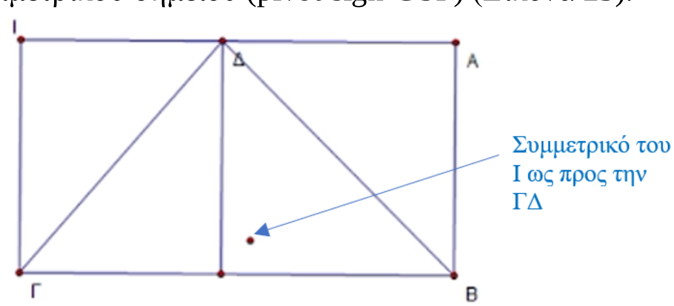
Εικόνα 22: Οι Μ1 και Μ2 παρατηρούν ότι στο A4 κατά τη $2^{η}$ δίπλωση δυο τμήματα ταυτίζονται, ενώ στο χειραπτικό αντιπαράδειγμα όχι

Η μαθηματική νοηματοδότηση αυτού του διαφορετικού αποτελέσματος δεν πραγματοποιείται στο σημείο αυτό, αλλά θα αποτελέσει το έναυσμα για μια συνεργική επικοινωνία των δύο πεδίων και τελικά την μαθηματική έκφραση της ζητούμενης υπόθεσης.

Οι μαθήτριες, εργαζόμενες στο πεδίο του GSP, προσπαθώντας να εντοπίσουν και σε αυτό το περιβάλλον την επιπλέον υπόθεση που εντόπισαν εμπειρικά στο προηγούμενο επεισόδιο στο πεδίο της δίπλωσης, αναφέρονται σε νοήματα συνδεδεμένα με το χειραπτικό μέσο.

Ε	Λοιπόν, ωραία οπότε εδώ πέρα *[δείχνω την οθόνη]* πώς το αντιλαμβανόμαστε αυτό το διαφορετικό στοιχείο; για δείτε το λίγο
Μ1	Ένα λεπτό *[βλέπει το Α4 στο οποίο έχει κάνει την 1η δίπλωση]*
	Είναι ότι ***άμα κλείσει*** *[κάνει τη 2η δίπλωση]* ότι…
Μ2	Αυτή η γωνία θα έπρεπε **να πηγαίνει κάπου εδώ πάνω** *[επιλέγει πρώτα την πάνω αριστερή κορυφή και έπειτα το τμήμα ΔΒ] (βλ. Εικόνα 21)*
	Δηλαδή ότι η πλευρά αυτή *[δείχνει με το ποντίκι το τμήμα με άκρα την πάνω αριστερή κορυφή του ορθογωνίου και το Δ]*
Μ1	Ναι
Μ2	Να είναι **πάνω σε αυτή** *[δείχνει με το ποντίκι την ΔΒ]*

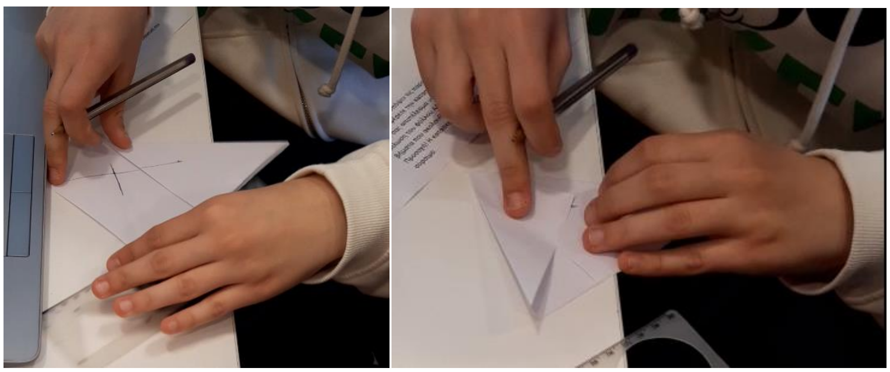
Στόχος τους είναι να προσδιορίσουν στο GSP το σημείο στο οποίο βρίσκεται το συμμετρικό της πάνω αριστερής κορυφής και για να το κάνουν αυτό ανακαλούν την χειραπτική εμπειρία τους από το πεδίο της δίπλωσης. Ενεργοποιώντας την εργαλειακή διάσταση του πεδίου της δίπλωσης, αρχικά προσδιορίζουν το σημείο που «θα έπρεπε να πηγαίνει» η πάνω αριστερή κορυφή στο ορθογώνιο που έχουν στην οθόνη τους και έπειτα προσεγγίζουν χωρίς ακρίβεια το πού βρίσκεται πράγματι το σημείο αυτό στο ορθογώνιο που βλέπουν στο ψηφιακό (pivot sign-GSP). Ερωτώμενες πώς θα βρουν την ακριβή θέση αυτού του σημείου στο GSP, οι μαθήτριες ενεργοποιούν την διαλογική διάσταση του πεδίου της δίπλωσης, καθώς αποδίδουν στη διαδικασία της δίπλωσης τα χαρακτηριστικά της συμμετρίας (mathematical sign). Αυτή η διαλογική γένεση κινητοποιεί την εργαλειακή διάσταση του GSP με τις μαθήτριες να χρησιμοποιούν το εργαλείο της ανάκλασης για τον εντοπισμό του συμμετρικού σημείου (pivot sign-GSP) (Εικόνα 23).



Εικόνα 23: Η κατασκευή συμμετρικού σημείου με τη χρήση του εργαλείου της Ανάκλασης

Η διαλογική διάσταση του πεδίου της δίπλωσης εμφανίζεται και μέσα από τη χρήση των χειραπτικών αντιπαραδειγμάτων κατά την προσπάθεια των μαθητριών να σιγουρευτούν για τη θέση του συμμετρικού σημείου (pivot sign -δίπλωση). Αυτή η ανάγκη οδήγησε τελικά στην κατανόηση της λειτουργικής εξάρτησης της θέσης του συμμετρικού σημείου από τις διαστάσεις του ορθογωνίου και στην ουσία από το αρχικό σημείο και τον άξονα συμμετρίας. Έτσι, η συνέργεια των δύο μέσων ξεκινάει με την εμπειρική διερεύνηση της θέσης του συμμετρικού σημείου και έχει ως αποτέλεσμα την ανάδυση του μαθηματικού νοήματος της συμμετρίας και ειδικότερα της εξάρτησης των αντικειμένων που εμπλέκονται σε αυτή τη μαθηματική σχέση.

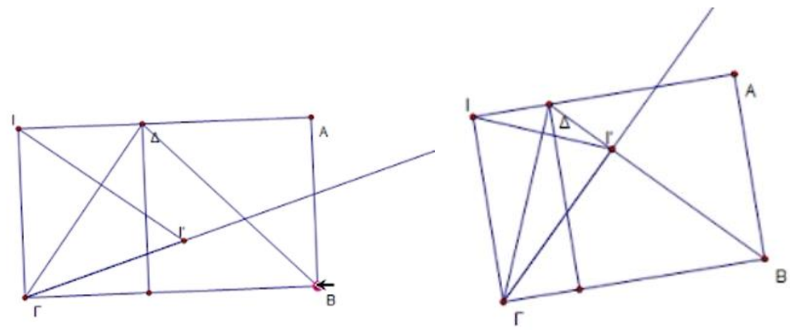
Ενδιαφέρον στο επεισόδιο αυτό έχει επιπλέον η ανάγκη των μαθητριών να προβούν στη θεωρητική κατασκευή του συμμετρικού σημείου πάνω στο φύλλο χαρτί (Εικόνα 24) ως απάντηση στην ερώτηση αν πράγματι κατά τη δίπλωση του χαρτιού έχουμε συμμετρία (pivot sign -δίπλωση).



Εικόνα 24: Η Μ2 κατασκευάζει με κανόνα το συμμετρικό της πάνω αριστερής κορυφής ως προς την $2^η$ τσάκιση ενός «χειραπτικού αντιπαραδείγματος» και έπειτα κάνει τη $2^η$ δίπλωση για να επιβεβαιώσει ότι τα η τσάκιση είναι άξονας συμμετρίας

Η ενέργεια αυτή των μαθητριών συμπληρώνει την διαλογική γένεση του πεδίου της δίπλωσης που αναφέρθηκε παραπάνω, καθώς ανακαλούν από το θεωρητικό σύστημα τους γεωμετρικούς κανόνες κατασκευής συμμετρικού σημείου. Σε σημειωτικό επίπεδο, παρατηρείται η αλλαγής *register*. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθήτριες για να επιβεβαιώσουν τον ισχυρισμό τους ότι πράγματι η δίπλωση σχετίζεται με την έννοια της συμμετρίας, θεωρούν ότι χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν θεωρητικά εργαλεία, πιθανώς θεωρώντας πως η εμπειρική διαπίστωση -που τους ήταν πρόδηλη- δεν αρκούσε. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει μια μετακίνηση των μαθητριών από το εμπειρικό επίπεδο σε περισσότερο αυστηρό-μαθηματικό. Η εργαλειακή διάσταση του πεδίου της δίπλωσης δεν φέρει τα αυστηρά χαρακτηριστικά που κρίνουν οι μαθήτριες ως αναγκαία σε αυτή τη φάση για την επικύρωση της εικασίας τους.

Η συνέργεια των δύο πεδίων συνεχίζεται και στην επόμενη φάση στην οποία οι μαθήτριες επιχειρούν να αποδώσουν την εικασία τους σχετικά με το συμμετρικό σημείο της πάνω αριστερής κορυφής του ορθογωνίου ένα μαθηματικό νόημα περισσότερο απτό ώστε να μπορέσουν ακολούθως να λάβουν υπόψη αυτό το δεδομένο στην κατασκευή τους. Η συνέργεια γίνεται φανερή μέσω της αλληλεπίδρασης των εργαλειακών και διαλογικών επιπέδων των δύο πεδίων. Αρχικά, λοιπόν εργάζονται στο εργαλειακό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης παρατηρώντας τις ιδιότητες της 2ης δίπλωσης (pivot sign -δίπλωση) και στη συνέχεια μεταβαίνουν στο εργαλειακό επίπεδο του GSP και μέσω της αξιοποίησης του συρσίματος (pivot sign-GSP) διερευνούν τι συμβαίνει όταν το συμμετρικό της πάνω αριστερής κορυφής είναι σημείο της 1ης τσάκισης. Σε αυτή τη διερεύνηση συνέβαλε και η κατασκευή της ημιευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται στο συμμετρικό τμήμα της αριστερής πλευράς του ορθογωνίου (Εικόνα 25), καθώς με αυτό το νέο σημείο ήταν πιο εύκολο οπτικά να παρατηρήσουν τα διάφορα φαινόμενα και τις γεωμετρικές σχέσεις.



Εικόνα 25: Σύρσιμο παρατηρώντας την ημιευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το ΙΙ’

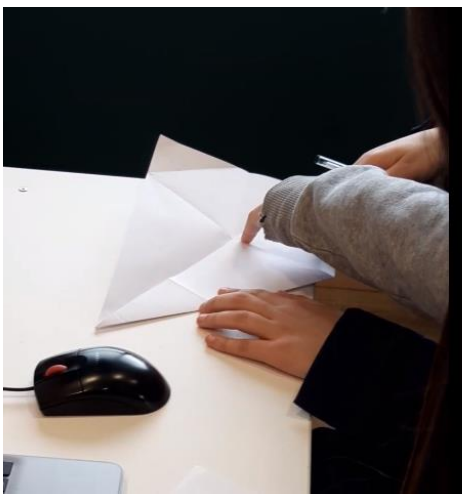
Σε διαλογικό επίπεδο, οι μαθήτριες αιτιολόγησαν την καθετότητα που παρατήρησαν στο GSP αξιοποιώντας τις συμμετρικές ιδιότητες της δίπλωσης. Αυτή η μαθηματική αιτιολόγηση στο διαλογικό επίπεδο της δίπλωσης ενεργοποίησε και την διαλογική διάσταση του GSP, καθώς στη συνέχεια η μαθήτριες χαρακτήρισαν το συμμετρικό της αριστερής πλευράς ως ύψος του τριγώνου, γεγονός που συγκεκριμενοποιεί τον εντοπισμό της ζητούμενης υπόθεσης στο πλαίσιο του υπό συζήτηση τριγώνου (mathematical sign).

Ε	Πότε είναι ορθή;
Μ1	Όταν ταυτίζεται
Ε	Γιατί; Τι συμβαίνει τότε και η γωνία είναι ορθή;
Μ2	Γιατί η γωνία είναι ορθή *[δείχνει στο χαρτί την πάνω αριστερή κορυφή του Α4]*
Μ1	Ναι, είναι ύψος!

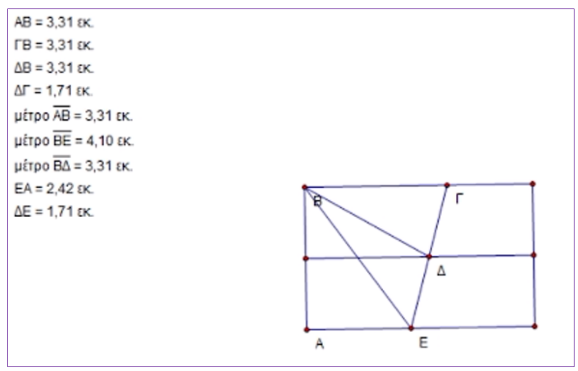
Η σημειωτική αλυσίδα που περιγράφει τη συνεργική σχέση είναι η εξής:
Διπλώσεις φύλλων διαφορετικών διαστάσεων (artefact sign-δίπλωση) → διαφορετικό οπτικό αποτέλεσμα κατά τη 2η δίπλωση/εντοπισμός αναμενόμενης θέσης της πάνω αριστερής κορυφής κατά τη δίπλωση (pivot sign-δίπλωση) → εμπειρικός εντοπισμός της θέσης της πάνω αριστερής κορυφής στο ψηφιακό (pivot sign-GSP) → συμμετρία (mathematical sign) → εργαλείο «ανάκλαση» (artefact sign-GSP) → διαφορετικά φύλλα, διαφορετική θέση συμμετρικού (pivot sign- δίπλωση) → Σύρσιμο για εντοπισμό της αναμενόμενης θέσης της πάνω αριστερής κορυφής στο ψηφιακό (pivot sign-GSP) → λειτουργική εξάρτηση συμμετρικού σημείου από το αρχικό και τον άξονα συμμετρίας (mathematical sign)→ καθετότητα μέσω της οπτικής ανατροφοδότησης (pivot sign-GSP)→ ύψος τριγώνου (mathematical sign).

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 3: Αναγνώριση ύπαρξης λανθασμένων υποθέσεων μέσα από τα αντιφατικά συμπεράσματα και την συνέργεια των πεδίων

Οι Μ3, Μ4 έχοντας μεταφέρει τις τσακίσεις της Δραστηριότητας 1 στο ψηφιακό περιβάλλον αντιλαμβάνονται μέσα από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων στα δύο πεδία εργασίας ότι υπάρχει κάποιο λάθος στην κατασκευή τους στο GSP. Σε πρώτη φάση η αλληλεπίδραση των σημειωτικών διαστάσεων των δύο πεδίων τους οδηγεί στο να διαπιστώσουν ότι δύο ίσα τρίγωνα που εμφανίζονται στο πεδίο της δίπλωσης, δεν εμφανίζονται στην οθόνη τους (artefact signs -δίπλωση και GSP). Προκειμένου να επιβεβαιώσουν αυτόν τον ισχυρισμό τους ελέγχουν μέσα από διπλώσεις ισότητες τμημάτων στο χαρτί (pivot sign- δίπλωση) (Εικόνα 26) και έπειτα με το εργαλείο της μέτρησης διαπιστώνουν την ανισότητά τους στο πεδίο GSP (pivot sign-GSP) (Εικόνα 27).



Εικόνα 26: Η Μ1 δείχνει τα ίσα τμήματα



Εικόνα 27: Διαφορετικές μετρήσεις των ΑΕ και ΔΕ

Επομένως, η συνέργεια εκδηλώνεται με την επικοινωνία τόσο των σημειωτικών όσο και των εργαλειακών διαστάσεων των δύο πεδίων Ο πειραματισμός αυτός λοιπόν, θα μπορούσαμε να πούμε πως προωθεί την εξέλιξη του νοήματος της υπό συνθήκης πρότασης «αν… τότε» καθώς, έχοντας καταλήξει σε διαφορετικά συμπεράσματα, αναζητούν τις διαφορετικές υποθέσεις που οδήγησαν σε αυτή τη συγκρουσιακή κατάσταση (mathematical sign).

Όπως προαναφέρθηκε, η διαπίστωση ύπαρξης λάθους στην κατασκευή προέκυψε μέσω της συνέργειας των δύο μέσων. Ωστόσο, αυτό καθ’ αυτό το λάθος εντοπίστηκε κατά την εργασία των μαθητριών αποκλειστικά στο πεδίο της δίπλωσης που ακολούθησε. Έχοντας προβληματιστεί σχετικά με τη θέση κάποιων σημείων στο ψηφιακό μέσο, ξανά κάνουν ορισμένες διπλώσεις στο χαρτί προκειμένου να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν ισότητες τμημάτων. Με αυτήν την εργασία τους στο εργαλειακό επίπεδο του της δίπλωσης κατορθώνουν να εντοπίσουν το προβληματικό σημείο (σημείο Γ, άρα και Ε στην Εικόνα 27) και κατ’ επέκταση την υπόθεση εκείνη της υπό δόμηση υποθετικής πρότασης που οδήγησε σε λανθασμένο συμπέρασμα. Έτσι, παρατηρείται και μια διαλογική διεργασία στο πεδίο της δίπλωσης και μια εξέλιξη του νοήματος της υποθετικής πρότασης, καθώς ο μαθητής και η μαθήτρια κατανοούν στην πράξη ότι μία εσφαλμένη υπόθεση οδηγεί σε διαφορετικό συμπέρασμα.

Η παραπάνω συνέργεια μπορεί να περιγραφή με τη σημειωτική αλυσίδα: ταύτιση πλευρών κατά τη $2^{η}$ δίπλωση (artefact sign- δίπλωση)→ ανισότητα μετρήσεων των μηκών (artefact sign- GSP)→ εσφαλμένη υπόθεση οδηγεί σε διαφορετικά συμπεράσματα (mathematical sign).

Συνοπτικά, τα τρία αυτά επεισόδια αναδεικνύουν τρεις διαφορετικές πτυχές της συνέργειας των δύο ΜΠΕ που ενθάρρυναν διαδικασίες αναθεώρησης υποθέσεων λόγω της εμφάνισης μη αναμενόμενων συμπερασμάτων της υποθετικής πρότασης. Στο Επεισόδιο 1 η συνέργεια οδήγησε σε μια μίμηση στο ψηφιακό μέσο των ενεργειών που πραγματοποιούσαν οι μαθήτριες στο χειραπτικό μέσο, αλλά και αντίστροφα. Ειδικότερα, παρατηρήθηκε η αντιστοίχιση της ταύτισης τμημάτων στο διπλωμένο χαρτί με την μέτρησης τμημάτων στο ψηφιακό μέσο, η μίμηση της διερεύνησης μέσω συρσίματος με την ανάγκη χρήσης των «χειραπτικών αντιπαραδειγμάτων» και η συσχέτιση του συρσίματος με διατήρηση των αναλογιών των πλευρών με τη δίπλωση φύλλων χαρτιού όμοιων με το Α4. Με τη σειρά που αναφέρθηκαν, οι αντιστοιχίσεις αυτές οδήγησαν σε μαθηματικές νοηματοδοτήσεις σχετικά με την ύπαρξη διαφορετικών τριγώνων, τη διερεύνηση της αιτίας αντιφατικών αποτελεσμάτων και τη συνειδητοποίηση της λογικής εξάρτησης υπόθεσης-συμπεράσματος. Στο Επεισόδιο 2 η συνέργεια έλαβε περισσότερο μαθηματικό παρά εμπειρικό χαρακτήρα και παρακινήθηκε από πρωτοβουλίες των μαθητριών για εστιασμένη διερεύνηση. Και σε αυτό το επεισόδιο υπήρχε συνεχής εναλλαγή των signs των δύο ΜΠΕ με εστίαση στις επιθυμητές αναλλοίωτες σχέσεις και τις λειτουργικές εξαρτήσεις των αντικειμένων σε καθένα από τα δύο μέσα. Στο Επεισόδιο 3 η συνέργεια εμφανίζεται και πάλι με μια περισσότερο εμπειρική πτυχή, καθώς η ομάδα προκειμένου να εντοπίσει τη λανθασμένη υπόθεση που έχει θεωρήσει κατά την κατασκευή στο GSP, εξετάζει artefact signs του πεδίου της δίπλωσης και να επανεξετάσει την ορθότητα της μεταφοράς των σχέσεων των σημείων αυτών στο ψηφιακό μέσο.

5.1.4 Ανάδυση υποθέσεων και λογικών συνδέσεων με γενική ισχύ

Τα επεισόδια της ενότητας αυτής αναφέρονται στην συμβολή της συνέργειας των δύο πεδίων στην ανακάλυψη γενικευμένων ιδιοτήτων και γεωμετρικών σχέσεων από τις ομάδες κατά την εμπλοκή τους με την Δραστηριότητα 3. Η εύρεση μαθηματικών ιδιοτήτων και σχέσεων που μένουν αναλλοίωτες ανεξάρτητα από τη θέση του τυχαίου σημείου στην πάνω πλευρά του τετραγώνου αποτελεί ένα απαραίτητο βήμα προκειμένου να μπορέσουν οι μαθητές/-ριες να μεταφέρουν την κατασκευή των Χ-γραμμών στο ψηφιακό περιβάλλον. Το Επεισόδιο 1 που αναλύεται παρακάτω αφορά στην αναζήτηση γενικών υποθέσεων από την Ομάδα Α και το Επεισόδιο 2 στην αντίστοιχη εργασία της Ομάδας Β.

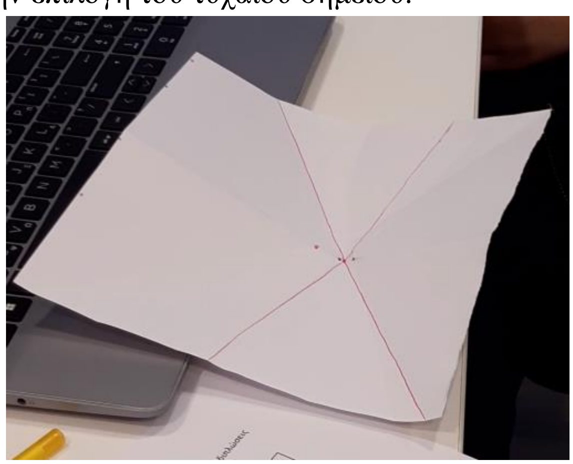
ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 1: Αναζήτηση υποθέσεων με γενική ισχύ μέσα από την εμπειρική διερεύνηση αναλλοίωτων ιδιοτήτων στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού

Οι μαθήτριες έχουν κατασκευάσει στο GSP ένα τετράγωνο και ένα τυχαίο σημείο στην πάνω πλευρά του και στο επεισόδιο αυτό ξεκινούν να διερευνούν το μαθηματικό νόημα των Χ-γραμμών. Όπως φαίνεται από τις ενέργειες και τη συζήτησή τους, επιχειρούν να εντοπίσουν φαινόμενα στο χαρτί τα οποία είναι κοινά ανεξάρτητα από το ποιο σημείο επιλέγουν στην πάνω πλευρά του τετραγώνου. Ακόμα κι αν κάποιες από τις παρατηρήσεις τους δεν συνέβαλαν τελικά στη μαθηματική νοηματοδότηση των Χ-γραμμών, εντούτοις αυτός ο πειραματισμός τους αποτελεί μια εμπλοκή με την έννοια της γενίκευσης με εμπειρικό τρόπο και αναδεικνύει τη δυνατότητα του πεδίου της δίπλωσης να στηρίξει μια τέτοια διερεύνηση.

Αρχικά, εστιάζοντας στο πώς παράγονται οι Χ-γραμμές αναφέρουν ότι η μια από τις κάτω κορυφές συμπίπτει κατά τη δίπλωση με το τυχαίο αρχικό σημείο και διερευνούν κατά πόσο η άλλη κάτω κορυφή «πέφτει» επίσης σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο (Εικόνα 29). Εργαζόμενες στο εργαλειακό επίπεδο της δίπλωσης και μέσα από δύο επαναλήψεις απορρίπτουν αυτόν τον ισχυρισμό.

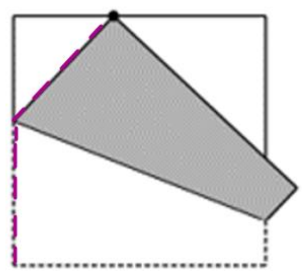
Μ1	Ναι αυτό συμβαίνει
Μ2	Ναι όχι πάντα. Ας πούμε αν πάρεις άλλο ζεύγος *[διπλώνει πάνω στη Χ-γραμμή ενός άλλου ζεύγους]*
	Ας πούμε σε αυτό, εμένα δε βγαίνει.. ντάξει βγήκε από την άλλη

Συνεχίζοντας με το σκεπτικό του εντοπισμού αναλλοίωτων σχέσεων, οι μαθήτριες παρατηρούν ότι δύο σχηματιζόμενα από τις Χ-γραμμές τρίγωνα (Εικόνα 28) είναι πάντα ίσα ανεξάρτητα από την επιλογή του τυχαίου σημείου.

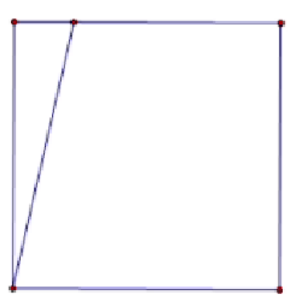


Εικόνα 28

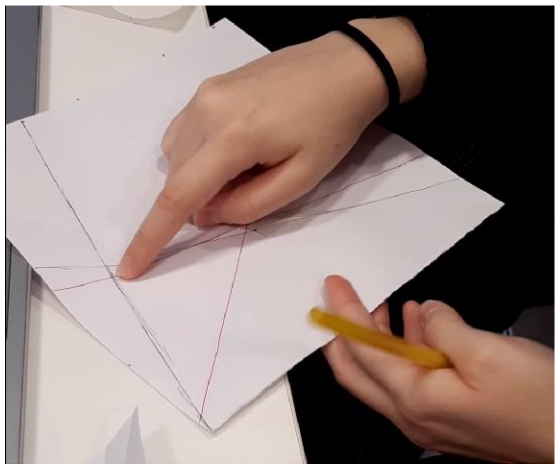
Προκειμένου να αιτιολογήσουν τον ισχυρισμό τους, εργάζονται πρώτα στο εργαλειακό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης όπου με κατάλληλες διπλώσεις παρατηρούν την ταύτιση των αντίστοιχων πλευρών των τριγώνων και έπειτα στο διαλογικό επίπεδο ανακαλώντας θεωρητικά στοιχεία, όπως η ισότητα των κατακορυφήν γωνιών και τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. Επαναλαμβάνοντας την ίδια εμπειρική απόδειξη για ένα ακόμα ζεύγος Χ-γραμμών επιβεβαιώνουν πως η ισότητα των τριγώνων αποτελεί μια αναλλοίωτη σχέση.
Ταυτόχρονα εντοπίζουν μια ακόμα αναλλοίωτη σχέση μέσα από την εργασία τους στο πεδίο της δίπλωσης (artefact sign-δίπλωση), την ισότητα δύο τμημάτων κατά τη δίπλωση πάνω σε μια Χ-γραμμή (με μωβ στην Εικόνα 29), «εγκαταλείποντας» την προηγούμενη αναλλοίωτη ισότητα των δύο προαναφερθέντων τριγώνων. Η ισότητα των τμημάτων αιτιολογείται με αξιοποίηση των ιδιοτήτων της συγκεκριμένης δίπλωσης (pivot sign-δίπλωση), ενώ η γενική ισχύς του ισχυρισμού επικυρώνεται έπειτα από μια ακόμα επανάληψη της ίδιας διαδικασίας εμπειρικής σύγκρισης των τμημάτων αλλά από διαφορετικό αρχικό τυχαίο σημείο (mathematical sign). Η αναλλοίωτη αυτή ισότητα θα διαδραματίσει καθοριστικό ρόλο στη νοηματοδότηση των Χ-γραμμών.


Εικόνα 29

Ο εντοπισμός της αναλλοίωτης ισότητας των δύο τμημάτων (Εικόνα 29) που αναφέρθηκε παραπάνω, οδήγησε σε ένα επεισόδιο συνέργειας μεταξύ των δύο πεδίων σε σημειωτικό και εργαλειακό επίπεδο κατά το οποίο η εργασία στο ένα εκ των δύο μέσων διαδέχεται την εργασία στο άλλο. Αρχικά, οι μαθήτριες κατασκευάζουν στο GSP το τμήματος με άκρα την κάτω αριστερή κορυφή και το τυχαίο σημείο (artefact sign-GSP) (Εικόνα 30). Οδηγούμενες από την απτική εμπειρία της αντίστοιχης δίπλωσης «μεταφράζουν» την μεταφορά της κάτω κορυφής στο τυχαίο σημείο με την κατασκευή του τμήματος με αυτά για άκρα και αναφέρονται σε αυτό ως «διαδρομή της κάτω κορυφής» (pivot sign-GSP).


Εικόνα 30

Έπειτα, επιχειρούν να προσδιορίσουν την σχέση αυτού του τμήματος με την ζητούμενη τσάκιση/Χ-γραμμή και σε σημειωτικό επίπεδο κρίνουν βοηθητικό να σχεδιάσουν και στο χαρτί το αντίστοιχο του τμήματος που κατασκεύασαν στο GSP (artefact sign-δίπλωση). Με την ενέργεια αυτή, και αφού είχαν ήδη σχεδιάσει στο χαρτί το ζεύγος των Χ-γραμμών, μπόρεσαν να οπτικοποιήσουν την σχέση του τμήματος με την μια Χ-γραμμή (Εικόνα 31). Συγκεκριμένα, η Μ1 αρχικά υποψιάζεται ότι η Χ-γραμμή διέρχεται από το μέσο του τμήματος (σημειωτικό επίπεδο) και προκειμένου να επιβεβαιωθεί διπλώνει πάνω στη Χ-γραμμή και πράγματι παρατηρεί την ισότητα των δύο επιμέρους τμημάτων του τμήματος (εργαλειακό επίπεδο).

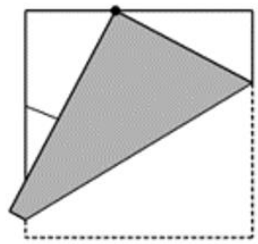


Εικόνα 31: Η Μ1 δείχνει ότι η Χ-γραμμή διέρχεται από το μέσο του τμήματος

Μεταφέρονται έπειτα στο εργαλειακό επίπεδο του GSP όπου κατασκευάζουν το μέσο του τμήματος (artefact sign-GSP). Επομένως, είναι εμφανής η επιρροή της σημειωτικής και εργαλειακής διάστασης του πεδίου της δίπλωσης στην εργασία στις αντίστοιχες διαστάσεις του GSP. Ακόμα, ωστόσο, τα νοήματα των μαθητριών σχετικά με το τμήμα αυτό αλλά και την Χ-γραμμή είναι προσωπικά καθώς τα σημεία (signs) και των δύο πεδίων δεν έχουν λάβει κάποιο μαθηματικό στάτους, εντούτοις παρατηρείται μαθηματική νοηματοδότητηση σχετικά με την έννοια της γενίκευσης με εμπειρικό όμως και πάλι τρόπο. Επομένως, η σημειωτική αλυσίδα που παρατηρείται είναι η εξής: απτική εμπειρία δίπλωσης πάνω σε μια Χ-γραμμή (artefact sign -δίπλωση) → ταύτιση τμημάτων κατά τη δίπλωση πάνω σε μια Χ-γραμμή (pivot sign-δίπλωση) → εμπειρική γενίκευση της ισότητας των δύο τμημάτων (mathematical sign) → κατασκευή του τμήματος με άκρα τα σημεία που ταυτίζονται κατά τη δίπλωσης και του μέσου του (pivot -GSP).

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 2: Λανθασμένος εντοπισμός υποθέσεων με γενική ισχύ μέσα από την διερεύνηση αναλλοίωτων ιδιοτήτων στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού και στο GSP

Στην Δραστηριότητα 3 η Ομάδα Β προσπαθώντας να αποδώσει κάποιο νόημα στις Χ-γραμμές ώστε να μεταφέρει την κατασκευή στο GSP αναφέρεται στην έννοια της συμμετρίας. Ειδικότερα, υποστηρίζουν ότι το τυχαίο σημείο στην πάνω πλευρά του τετράγωνου χαρτιού είναι συμμετρικό (mathematical sign) με την μια κάτω κορυφή του όταν τσακίζουμε πάνω στην αντίστοιχη Χ-γραμμή (Εικόνα 32), γεγονός που αιτιολογούν βασιζόμενοι στην ταύτιση των σημείων κατά την συγκεκριμένη δίπλωση (pivot sign - δίπλωση).



Εικόνα 32

Με βάση αυτή την ερμηνεία ο Μ4 ανακαλεί στη συνέχεια το εργαλείο της Ανάκλασης του GSP (artefact sign- GSP) θεωρώντας ότι αυτό θα βοηθήσει στην κατασκευή των Χ-γραμμών στο ψηφιακό περιβάλλον. Η ανάγκη εύρεσης του άξονα συμμετρίας και αναλλοίωτων σχέσεων τον οδηγεί σε έναν λανθασμένο αλλά ενδιαφέροντα συλλογισμό κατά τον οποίο ο Μ4 αξιοποιώντας ιδιότητες μιας ειδικής περίπτωσης προσπαθεί να τις αναγάγει σε ιδιότητες με γενική ισχύ. Πιο συγκεκριμένα, σύρει το τυχαίο σημείο ώστε να ταυτιστεί με την πάνω αριστερή κορυφή και σε αυτή την ειδική περίπτωση αναγνωρίζει -χωρίς να την κατασκευάσει- την διαγώνιο ως άξονα συμμετρίας της κάτω δεξιάς κορυφής και του τυχαίου σημείου. Προκειμένου να ελέγξει τον ισχυρισμό του επιστρέφει στο χειραπτικό μέσο και προβαίνει στην αντίστοιχη δίπλωση (Εικόνα 33) επιβεβαιώνοντας τελικά ότι ο άξονας συμμετρίας είναι η διαγώνιος. Παρατηρούμε, επομένως, την αλληλεπίδραση των σημειωτικών και εργαλειακών διαστάσεων του χειραπτικού και ψηφιακού πεδίου μέσα από την αποκωδικοποίηση των σημείων καθενός και την κατασκευή του επιθυμητού αποτελέσματος με την αξιοποίηση των δυνατοτήτων του εκάστοτε πεδίου.

Εικόνα 33: Ο Μ4 διπλώνει ώστε η κάτω δεξιά κορυφή να ταυτιστεί με το τυχαίο σημείο που συμπίπτει στην ειδική περίπτωση με την πάνω αριστερή κορυφή. Με τη δίπλωση αυτή επιβεβαιώνει ότι η διαγώνιος είναι ο άξονας συμμετρίας

Το ζητούμενο από τον Μ4 έπειτα από την επιβεβαίωση αυτή ήταν να εντοπίσει αναλλοίωτες ιδιότητες που θα τον βοηθήσουν να κατασκευάσει στο GSP τις Χ-γραμμές. Έτσι, αναφερόμενος στην ειδική περίπτωση που έχει μπροστά του παρατηρεί ότι η απόσταση του τυχαίου σημείου από την πάνω αριστερή κορυφή είναι ίση με την απόσταση της πάνω δεξιάς κορυφής από το σημείο τομής της αντίστοιχης Χ-γραμμής με την δεξιά πλευρά (στην ειδική περίπτωση και οι δύο αποστάσεις είναι ίσες με μηδέν) (pivot sign-δίπλωση). Στη συνέχεια υποστηρίζει ότι αυτή η ισότητα έχει γενική ισχύ βασιζόμενος αρχικά στην οπτική ανατροφοδότηση από το διπλωμένο χαρτί σε ένα τυχαίο σημείο. Η διάψευση της εικασίας του θα επέλθει έπειτα από την μέτρηση των τμημάτων αυτών στο χαρτί με χάρακα.

Μ4	Η απόσταση αυτού του σημείου από εδώ *[δείχνει την πάνω αριστερή κορυφή και έπειτα το τυχαίο σημείο]* ισοδυναμεί με την απόσταση αυτού του σημείο *[δείχνει την πάνω δεξιά κορυφή]* από εδώ ας πούμε [*δείχνει το σημείο τομής της δεξιά πλευράς με την Χ-γραμμή*]
Ε	Από εκεί που θα πέσει η…
Μ4	Αυτό [*δείχνει την Χ-γραμμή*]
Ε	Οκ, και αυτό πώς το ανακάλυψες;
Μ4	Το ανακάλυψα γιατί αν πούμε ότι πήραμε ένα σημείο εδώ ακριβώς [*δείχνει την πάνω αριστερή κορυφή του χαρτιού*]…
	Άμα το παίρναμε έτσι εδώ [*διπλώνει το χαρτί πάνω στη διαγώνιο*], αυτό θα ήταν εδώ ακριβώς [*δείχνει την πάνω δεξιά κορυφή*]

Το επεισόδιο αυτό αναδεικνύει την συνεισφορά της συνέργειας – μέσα από την επικοινωνία της σημειωτικής και εργαλειακής διάστασης των δύο πεδίων- στην διερεύνηση πιθανών υποθέσεων της υποθετικής πρότασης. Ο Μ4 παρόλο που ξεκίνησε την διερεύνησή του με αφετηρία το μαθηματικό νόημα της συμμετρίας εργάστηκε με artefact και pivot signs των δύο ΜΠΕ των οποίων η μη ορθή αντιστοίχιση τον οδήγησε σε λανθασμένα συμπεράσματα. Η σημειωτική αλυσίδα που παρατηρείται είναι η εξής: συμμετρία (mathematical sign) → ταύτιση σημείων κατά τη δίπλωση πάνω σε μια Χ-γραμμή (pivot sign -δίπλωση) → εργαλείο Ανάκλασης (artefact sign-GSP) → ισότητα τμημάτων κατά τη δίπλωση στην ειδική περίπτωση (pivot sign -δίπλωση) → λανθασμένη γενίκευση της ισότητας (artefact sign -δίπλωση).

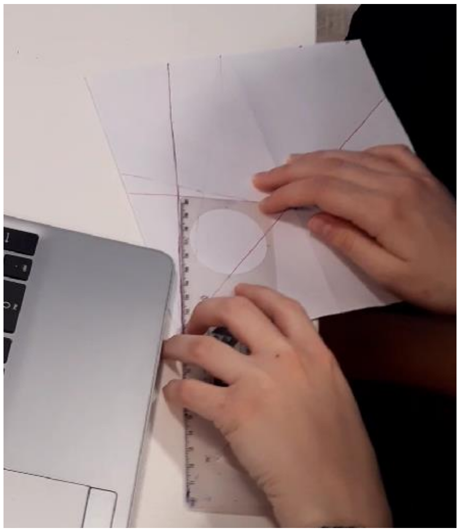
Τα δύο προαναφερθέντα επεισόδια αποδεικνύουν τη δυνατότητα του χειραπτικού μέσου της δίπλωσης χαρτιού να συμβάλλει σε διερευνητικές διαδικασίες σχετικά με την έννοια της γενίκευσης. Η αναζήτηση αναλλοίωτων γεωμετρικών σχέσεων και κατ’ επέκταση υποθέσεων με γενική ισχύ της υποθετικής πρότασης φαίνεται πως έγινε με δύο τρόπους. Στο Επεισόδιο 1 παρατηρούμε ότι το πεδίο της δίπλωσης χαρτιού είχε πρωταγωνιστικό ρόλο και μάλιστα συντέλεσε από μόνο του στον εντοπισμό αναλλοίωτων ιδιοτήτων και στην απόρριψη ή επικύρωση της γενικότητάς τους . Βέβαια, η συνέργεια μπορεί να εμφανίστηκε έπειτα από τον εντοπισμό των γενικών υποθέσεων, ωστόσο συνέβαλε στη μαθηματική αποτύπωσή τους στο GSP. Από την άλλη, στο Επεισόδιο 2 παρατηρούμε μια «αποτυχημένη» θα λέγαμε συνέργεια, καθώς ο μαθητής οδηγήθηκε σε μη ορθή αντιστοίχιση των παρατηρούμενων σχέσεων και τελικά στη διατύπωση εικασίας με μη γενική ισχύ. Και πάλι, όμως, η απόρριψη της εικασίας αυτής ως γενικής σε κάθε περίπτωση πραγματοποιήθηκε με αποκλειστική εργασία στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού.

5.1.5 Ανάδυση υποθέσεων με την αξιοποίηση τεχνουργημάτων διαφορετικών του χαρτιού και του GSP

Στην ενότητα αυτή αναλύεται ένα επεισόδιο από την εργασία των μαθητριών της Ομάδας Α στην Δραστηριότητα 3. Στην προσπάθειά τους να μεταφέρουν την κατασκευή από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο οι Μ1, Μ2 αναζητούν υποθέσεις που σχετίζονται με το μαθηματικό στάτους των Χ-γραμμών.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ: Ανάδυση υποθέσεων με την αξιοποίηση της εργαλειακής διάστασης ενός χάρακα και ενός φύλλου Α4

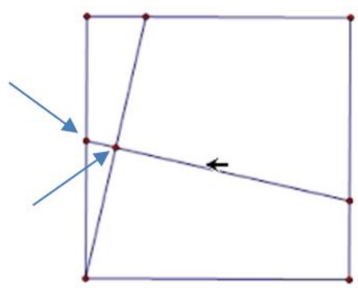
Έχοντας βρει ότι η ζητούμενη Χ-γραμμή που θέλουν να κατασκευάσουν διέρχεται από το μέσο του τμήματος που έχουν κατασκευάσει στο GSP (Ενότητα 5.1.4, Επεισόδιο 1), εργάζονται αρχικά στο διαλογικό επίπεδο της δίπλωσης χαρτιού και αναφέρουν ότι για να προσδιορίσουν την Χ-γραμμή είτε θα πρέπει να βρουν ένα ακόμα σημείο από το οποίο διέρχεται είτε να ανακαλύψουν -αν υπάρχει- κάποια επιπλέον ιδιότητα που θα την διακρίνει από τις άπειρες ευθείες που διέρχονται από το μέσο (mathematical sign). Βασιζόμενη αρχικά στην αντιληπτική της ικανότητα, η Μ2 θεωρεί ότι η Χ-γραμμή και το τμήμα είναι κάθετα μεταξύ τους γεγονός που πυροδοτεί την εργασία των μαθητριών στο εργαλειακό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης προκειμένου να αιτιολογήσουν αυτόν τον ισχυρισμό. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάσει το γεγονός ότι προκειμένου να αποδείξουν εμπειρικά την καθετότητα αυτή προσδίδουν κατάλληλα σχήματα χρήσης σε έναν χάρακα και σε ένα άλλο τετράγωνο φύλλο χαρτιού (artefact signs). Ειδικότερα, όσον αφορά στο χάρακα, τον τοποθετούν ώστε η μια γωνία του να συμπίπτει με τη γωνία που ισχυρίζονται ότι είναι ορθή (Εικόνα 34) και αντίστοιχα εργάζονται με το φύλλο χαρτιού του οποίου επίσης τοποθετεί την μια ορθή γωνία πάνω στην υπό εξέταση γωνία (pivot signs) (Εικόνα 35).



Εικόνα 34

Εικόνα 35

Επιπλέον, και σε αυτή την περίπτωση, προκειμένου να βεβαιωθούν για τη γενική ισχύ αυτής της γεωμετρικής σχέσης, επαναλαμβάνουν τον ίδιο εμπειρικό έλεγχο για μια Χ-γραμμή που αντιστοιχεί σε διαφορετικό αρχικό σημείο (mathematical sign).
Η ανακάλυψη της γεωμετρικής σχέσης της καθετότητας και η εμπειρική απόδειξή της στο πεδίο της δίπλωσης ενεργοποίησε την εργασία και στα τρία επίπεδα του πεδίου GSP. Αρχικά οι μαθήτριες με το κατάλληλο εργαλείο κατασκευάζουν την κάθετη ευθεία που διέρχεται από το μέσο του τμήματος (εργαλειακό επίπεδο) και έπειτα κατασκευάζουν το τμήμα πάνω σε αυτήν που αναπαριστά την μια Χ-γραμμή καθώς και τα σημεία τομής της με την δεξιά και αριστερή πλευρά του τετραγώνου (σημειωτικό επίπεδο) (pivot signs) (Εικόνα 36).

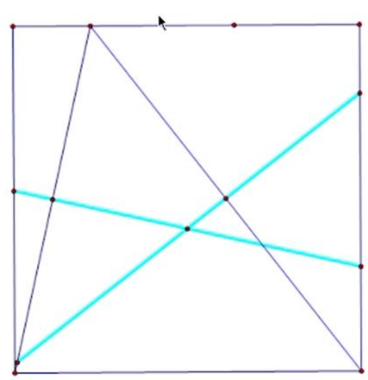


Εικόνα 36: Η κατασκευή της μιας Χ-γραμμής ενός ζεύγους

Πέρα από την εμπειρική όμως απόδειξη της καθετότητας που αναλύθηκε παραπάνω, οι μαθήτριες δεν έχουν ακόμα αιτιολογήσει μαθηματικά αυτή τη σχέση. Η αιτιολόγηση και κατ' επέκταση η πλήρης μαθηματική νοηματοδότηση των Χ-γραμμών εμφανίζεται έπειτα από την κατασκευή της Χ-γραμμής στο GSP και ως αποτέλεσμα της συνέργειας του χειραπτικού και ψηφιακού μέσου. Ειδικότερα, έπειτα από την κατασκευή αυτή, αναφέρονται στη Χ-γραμμή με τον όρο μεσοκάθετος (mathematical sign), στο οποίο οδήγησαν τα συγκεκριμένα βήματα κατά τη μεταφορά στο GSP. Ερωτώμενες πώς θα αποδείξουν ότι πράγματι πρόκειται για τη μεσοκάθετο, οι μαθήτριες ενεργοποιούν την διαλογική διάσταση τόσο του GSP όσο και του πεδίου της δίπλωσης. Τονίζουν ότι θα πρέπει όλα τα σημεία της να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος και για να το επιβεβαιώσουν εστιάσουν στα σημεία που δείχνουν τα βελάκια στην Εικόνα 36 (pivot sign). Επιστρέφουν στο εργαλειακό επίπεδο της δίπλωσης χαρτιού και κάνοντας τη δίπλωση πάνω στην Χ-γραμμή παρατηρούν ότι τα σημεία αυτά ισαπέχουν από την κάτω αριστερή κορυφή και το τυχαίο σημείο. Έτσι, μέσω της συνέργειας αποκαλύπτονται γεωμετρικές σχέσεις και ιδιότητες που δομούν τις υποθέσεις της υποθετικής πρότασης που θα κληθούν τελικά να αποδείξουν.

Η σημειωτική αλυσίδα που αναπαριστά τη συνεργική αυτή αλληλεπίδραση είναι η εξής: ανάγκη προσδιορισμού της συγκεκριμένης ιδιότητας που διακρίνει τη Χ-γραμμή από τις άλλες άπειρες ευθείες που διέρχονται από το μέσο του τμήματος (mathematical sign) →καθετότητα και τομή στο μέσο μέσω της οπτική- απτική ανατροφοδότηση της δίπλωσης (artefact sign -δίπλωση)→ εμφάνιση νέων χειραπτικών μέσων (χάρακας και χαρακτηριστικά του Α4 (artefact signs) → εμπειρική επικύρωση της καθετότητας (pivot sign) → κατάλληλες εντολές για την κατασκευή της Χ-γραμμής στο ψηφιακό (pivot sign-GSP) → η Χ-γραμμή ως μεσοκάθετος (mathematical sign-GSP) → ίσες αποστάσεις δύο σημείων από τα άκρα (pivot sign- δίπλωση) → η Χ-γραμμή ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα (mathematical sign-δίπλωση). Φαίνεται, επομένως, ότι οι Χ-γραμμές νοηματοδοτούνται ως μεσοκάθετοι των τμημάτων που ενώνουν το τυχαίο σημείο με την εκάστοτε κάτω κορυφή, μια νοηματοδότητση που φέρει δύο πτυχές, καθώς αντιμετωπίζουν αυτά τα αντικείμενα και ως ευθείες που είναι κάθετες στο μέσο ενός τμήματος (κατασκευαστική πτυχή) και ως ένα σύνολο σημείων με κοινή ιδιότητα (πτυχή γεωμετρικού τόπου).

Η κατασκευή της δεύτερης Χ-γραμμής του ίδιου ζεύγους γίνεται με το ίδιο ακριβώς τρόπο. Ολοκληρώνοντας την μεταφορά του ζεύγους, οι μαθήτριες κατασκευάζουν και το σημείο τομής τους (Εικόνα 37).



Εικόνα 37

Συνοψίζοντας, το Επεισόδιο αυτό αναδεικνύει ταυτόχρονα τους περιορισμούς που συνάντησαν οι μαθήτριες για την επικύρωση εικασίας με χρήση των δύο μόνο ΜΠΕ στα οποία προηγουμένως εργάζονταν, αλλά και την ενεργοποίηση συνεργικής σχέσης του χειραπτικού και ψηφιακού πεδίου με τη βοήθεια των νέων τεχνουργημάτων. Ειδικότερα, η βοήθεια των νέων χειραπτικών μέσων περιορίστηκε στη επικύρωση της εικασία περί καθετότητας δύο τμημάτων και έδωσε το έναυσμα για μια πλούσια σημειωτική αλυσίδα με εναλλαγή νοημάτων από το πεδίο της δίπλωσης χαρτιού και το GSP. Αποτέλεσμα αυτής της αλληλεπίδρασης των διαφόρων σημείων (artefact και pivot) ήταν η διπλή νοηματοδότηση της μεσοκαθέτου ως γεωμετρικός τόπος αλλά και ως αντικείμενο που φέρεται κάθετο στο μέσο ενός τμήματος.

Σύνοψη 1ης κατηγορίας επεισοδίων

Η πρώτη αυτή βασική κατηγορία επεισοδίων που παρατέθηκε στην ενότητα 5.1, αναδεικνύει μια ποικιλία πτυχών της συνέργειας του χειραπτικού και ψηφιακού μέσου κατά την ανακάλυψη υποθέσεων και λογικών συνδέσεων μιας υποθετικής πρότασης. Η ποικιλία αυτή γίνεται φανερή τόσο μέσα από τους διαφορετικούς τρόπους νοηματοδότησης διαδικασιών και αντικειμένων όσο και μέσα από τις διαφορετικές δομές των σημειωτικών αλυσίδων που αναδύθηκαν. Ένα κοινό στοιχείο που εμφανίστηκε, ωστόσο, είναι ότι η διερεύνηση ξεκινούσε από το χειραπτικό μέσο αλλά το σαφές μαθηματικό νόημα γινόταν συνειδητό κατά τη μεταφορά στο GSP και κατά αντιστοιχία οι αρχικές υποθέσεις εμφανίζονταν εμπειρικά και ακολούθως μαθηματικά διατυπωμένες.
Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι κατά τη μεταφορά των αρχικών τσακίσεων από το πεδίο της δίπλωσης στο GSP πρωταρχικός είναι ο ρόλος του χειραπτικού μέσου στη μαθηματική νοηματοδότηση σημείων. Στις περιπτώσεις αυτές παρατηρήθηκε σχετικά απλή και γραμμική σημειωτική αλυσίδα με κατεύθυνση από artefact signs του πεδίου της δίπλωσης σε αντίστοιχα pivot signs, έπειτα μαθηματικά και τελικά artefact signs του GSP. Πιθανώς η ανακάλυψη των υποθέσεων που σχετίζονται με τις αρχικές τσακίσεις να ήταν σχετικά εύκολη λόγω του ότι η κατασκευή ήταν ακόμα απλή και η εστίαση γινόταν σε ένα συγκεκριμένο σημείο αυτής. Όμοια, οι σημειωτικές αλυσίδες που σημειώθηκαν κατά την ανακάλυψη λογικών συνδέσεων της υποθετικής πρότασης ήταν επίσης σχετικά απλές μιας κατεύθυνσης. Το διαφορετικό ωστόσο εύρημα είναι ότι σε αυτή την περίπτωση, με αφετηρία τον εντοπισμό κατασκευαστικών εξαρτήσεων των διάφορων σημείων του χειραπτικού οι ομάδες νοηματοδοτούσαν σημεία τα οποία δεν υπήρχαν στην κατασκευή, αλλά των οποίων χρειάζονταν τις ιδιότητες για να προσδιορίσουν μαθηματικές σχέσεις άλλων αντικειμένων. Οι σημειωτικές αλυσίδες γίνονται συνθετότερες στα επεισόδια που οι ομάδες επιχειρούν να εντοπίσουν αναλλοίωτες ιδιότητες και τελικά υποθέσεις με γενική ισχύ. Σε αυτές τις περιπτώσεις αφετηρία του πειραματισμού είναι και πάλι το χειραπτικό μέσο – αναδεικνύοντας τις δυνατότητες του σε νοηματοδοτήσεις σχετικές με τη διάκριση γενικού /ειδικού – ωστόσο παρατηρούνται συνεχείς εναλλαγές στο είδος των signs και στο ΜΠΕ από το οποίο προέρχονται. Τέλος, η οι συνθετότερες σημειωτικές αλυσίδες εντοπίστηκαν κατά τη διερεύνηση αντιφατικών αποτελεσμάτων από τα δύο ΜΠΕ. Στα επεισόδια αυτά η πρόκληση της αναθεώρησης των δεδομένων και αναζήτησης

λανθασμένων υποθέσεων ώθησε σε σημαντικές αλυσιδωτές νοηματοδοτήσεις μεταξύ των δύο μέσων. Οι νοηματοδοτήσεις αυτές σχετίζονται με τη μαθηματική φύση αντικειμένων, με λειτουργικές εξαρτήσεις αυτών αλλά και με αντιστοιχίσεις ενεργειών από το ένα ΜΠΕ στο άλλο.

5.2 ΑΝΑΔΥΣΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΙΣΧΥΡΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΝΔΕΣΕΩΝ ΤΗΣ ΥΠΟΘΕΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

Σε αυτή την κατηγορία περιγράφονται επεισόδια τα οποία αναφέρονται στον ισχυρισμό που διατύπωσαν οι ομάδες σχετικά με τα τελικά αποτελέσματα των διπλώσεων στις τρεις δραστηριότητες. Επιπλέον, τα επεισόδια που παρατίθενται αναφέρονται στην εύρεση μεθόδων επικύρωσης της ισχύος της εκάστοτε εικασίας σε καθένα από τα δύο ΜΠΕ.

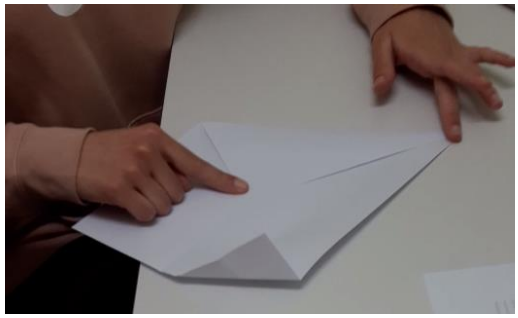
5.2.1 Διατύπωση και επικύρωση εικασίας μέσα από την εργασία στο πεδίο δίπλωσης χαρτιού

Στις Δραστηριότητες 1, 2 και οι δύο ομάδες, έχοντας ολοκληρώσει τις ζητούμενες διπλώσεις στο χαρτί Α4, βασιζόμενες αρχικά μόνο στο οπτικό αποτέλεσμα και την αντιληπτική τους ικανότητα, διατυπώνουν την εικασία ότι το προκύπτον τρίγωνο είναι ισόπλευρο και ισοσκελές, αντίστοιχα. Για την επικύρωση του ισχυρισμού στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού τόσο η Α όσο και η Β ομάδα προβαίνουν σε κατάλληλες διπλώσεις των τελικών τριγώνων ώστε να ελέγξουν την σύμπτωση ή μη των πλευρών των οποίων η ισότητα τους ενδιαφέρει. Ενδεικτικά, αναλύεται παρακάτω το Επεισόδιο 1 το οποίο αναφέρεται στην εργασία της Ομάδας Β στη Δραστηριότητα 1.
Στη Δραστηριότητα 3 το ζητούμενο στα πρώτα ερωτήματα της δραστηριότητας είναι να διατυπώσουν οι μαθητές/-ριες μια εικασία σχετικά με τον γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής των Χ-γραμμών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εύρεσης μεθόδου για τη διάκριση ειδικού-γενικού είναι το Επεισόδιο 2 από την εργασία της Ομάδας Α.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 1: Διατύπωση και επικύρωση εικασίας μέσα από κατάλληλες διπλώσεις του χαρτιού

Η Ομάδα Β αμέσως πριν από το παρόν επεισόδιο είχε διαπιστώσει παρατηρώντας το διπλωμένο χαρτί πως πρόκειται για ένα τρίγωνο και είχε ισχυριστεί ότι δεν είναι δυνατόν να εξάγει κάποιο βέβαιο συμπέρασμα σχετικά με το είδος του τριγώνου. Η αβεβαιότητα αυτή είναι αναμενόμενη και μάλιστα αποτελεί δείγμα αντίληψης της αυστηρότητας των μαθηματικών προτάσεων, αλλά είναι και αυτή που ακολούθως θα οδηγήσει τον μαθητή και τη μαθήτρια στην αναζήτηση (εμπειρικής) μεθόδου διερεύνησης του είδους του τριγώνου.
Στο επεισόδιο λοιπόν αυτό, η ομάδα αρχικά εργάζεται στο σημειωτικό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού επιχειρώντας να ερμηνεύσει με μαθηματικό τρόπο ένα σημείο

(artefact sign) που θεωρεί κρίσιμο. Ειδικότερα, η Μ1 ισχυρίζεται πως το τμήμα που δείχνει στην Εικόνα 38 είναι ύψος και διάμεσος ενώ ο Μ2 τονίζει ότι μόνο για την καθετότητα μπορούν να γνωρίζουν δεδομένου ότι αυτή προέχεται από την ορθή γωνία του Α4 (pivot sign).



Εικόνα 38

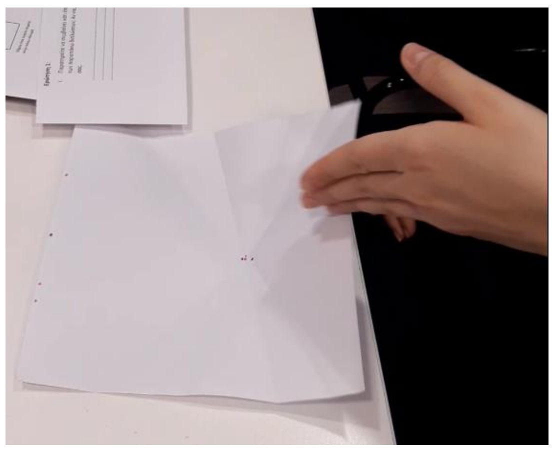
Η διερεύνηση του μαθηματικού νοήματος του συγκεκριμένου τμήματος ενεργοποιεί την εργαλειακή και σημειωτική διάσταση του πεδίου της δίπλωσης, καθώς η Μ1 διπλώνει κατά μήκος αυτού προκειμένου να ελέγξει τις ιδιότητές του. Παράγοντας τη νέα αυτή τσάκιση (artefact sign) στο σημειωτικό επίπεδο παρατηρούν την σύμπτωση δύο πλευρών του τριγώνου (pivot sign). Έπειτα, επαναλαμβάνουν την ίδια διαδικασία μια ακόμα φορά για να ελέγξουν κατά πόσο υπάρχει σύμπτωση και με την τρίτη πλευρά, καταλήγοντας στον ισχυρισμό ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Έτσι, εργάζονται και στη διαλογική διάσταση του πεδίου της δίπλωσης, μιας και ανακαλούν τον ορισμό του ισοπλεύρου και εντοπίζουν τα ελάχιστα αναγκαία στοιχεία για να επικυρώσουν την εικασία τους (η ισότητα δύο ζευγών πλευρών αρκεί για να είναι ένα τρίγωνο ισόπλευρο) (mathematical sign).

Μ1	Θα το ξανά διπλώσουμε πάλι και θέλουμε να μετρήσουμε τώρα αυτή εδώ
Μ2	Εμείς ξέρουμε ότι αυτή με αυτή
Μ1	Είναι ίσες
Μ2	Είναι ίσες, αλλά δεν ξέρουμε αυτή
Μ1	Ωραία, εντάξει πρέπει να αποδείξουμε μια από αυτές τις δύο
Μ2	Γυρνάμε έτσι ας πούμε *[περιστρέφει το διπλωμένο χαρτί της Μ1]*
	Και το διπλώνουμε και αν αυτή είναι ίση με αυτή, τότε είναι ισόπλευρο, γιατί αν είναι ίση με αυτή συνεπάγεται ότι θα είναι ίση και με την άλλη

Η αλληλεπίδραση και των τριών διαστάσεων του πεδίου της δίπλωσης οδηγεί στην εμφάνιση της σημειωτικής αλυσίδας: τμήμα πάνω στο διπλωμένο χαρτί (artefact sign) → ιδιότητες αυτού του τμήματος/ύψος (pivot sign) → νέα τσάκιση κατά μήκος του τμήματος (artefact sign) → ιδιότητες αυτού του τμήματος/σύμπτωση τμημάτων -διάμεσος (pivot sign) →ταύτιση πλευρών στο διπλωμένο χαρτί (pivot sign) → ορισμός ισοπλεύρου (mathematical sign). Ταυτόχρονα, εξελίσσεται και η υποθετική πρόταση «αν…τότε», καθώς, πειραματιζόμενοι στο πεδίο της δίπλωσης, επιχειρούν να εντοπίσουν λογικές συνδέσεις που οδηγούν στο επικυρωμένο πλέον συμπέρασμα ότι πρόκειται για ισόπλευρο τρίγωνο.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 2: Διατύπωση και επικύρωση γενικευμένης εικασίας στο πεδίο δίπλωσης χαρτιού με την εξέταση μιας ακόμα περίπτωσης και την κατάλληλη δίπλωση του χαρτιού

Κάθε μια από τις μαθήτριες έχει κατασκευάσει στο τετράγωνο χαρτί 4 ζεύγη Χ-γραμμών και στο επεισόδιο αυτό διερευνούν τι συμβαίνει σχετικά με τα σημεία τομής τους. Διατυπώνουν την εικασία ότι τα σημεία τομής βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία (Εικόνα 39) και συγκεκριμένα στην μεσοπαράλληλο της δεξιάς και αριστερής πλευράς του τετράγωνου χαρτιού (mathematical sign). Η διατύπωση της εικασίας από τις μαθήτριες σχετίζεται με τη σημειωτική διάσταση του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού και συγκεκριμένα με την σχεδίαση σημείων πάνω σε αυτό.



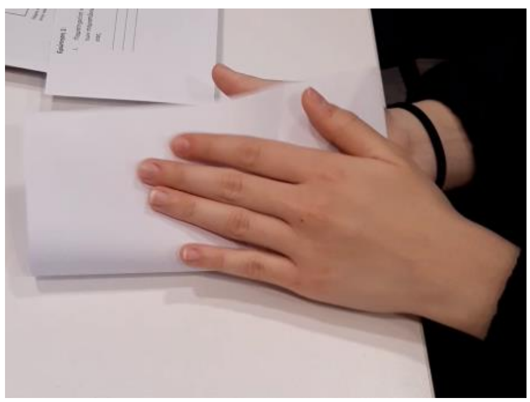
Εικόνα 39: Η Μ1 δείχνει με το χέρι της κατά μήκος την ευθείας που βρίσκονται τα σημεία τομής των Χ-γραμμών

Για την επικύρωση της εικασία εμφανίστηκαν δύο εργασίες/μέθοδοι στο εργαλειακό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης. Από τη μια η Μ2 προκειμένου βεβαιωθεί για την αλήθεια του ισχυρισμού προβαίνει στην κατασκευή ενός ακόμα ζεύγους Χ-γραμμών (artefact sign). Αυτός ο συλλογισμός της υποδεικνύει ότι θα ήθελε να αποκλείσει το ενδεχόμενο να έτυχε τα 4 σημεία τομής να βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Μ1	Όλα είναι στην ίδια γραμμή;
Ε	Ποια γραμμή;
Μ1	*[δείχνει με το δάχτυλό της κατά μήκος της ευθείας στην οποία φαίνεται να ανήκουν τα σημεία τομής]*
Ε	Άρα αυτό παρατηρούμε;
Μ1	Ναι
Ε	Μ2 αυτό παρατηρούμε;
Μ2	Ναι…βασικά να κάνω άλλο ένα;

Ο μικρός αριθμός των περιπτώσεων που βλέπει στο χαρτί πιθανώς να μην της φαίνεται επαρκής για τη διατύπωση ενός βέβαιου συμπεράσματος, γεγονός που θέτει τα θεμέλια για την ανάδυση του νοήματος της γενίκευσης μιας πρότασης και τη διερεύνηση της σχέσης ειδικό -γενικό. Επομένως, θα μπορούσαμε να πούμε ότι, πέρα από το εργαλειακό επίπεδο, ο μαθηματικός αυτός συλλογισμός και η υπόρρητη ανάγκη για αυστηρότητα αποτελούν διεργασίες στο διαλογικό επίπεδο του πεδίου δίπλωσης.

Από την άλλη, η Μ1, εργαζόμενη στο εργαλειακό επίπεδο του πεδίου αυτού, κάνει μια δίπλωση (Εικόνα40) (artefact sign) ώστε να ταυτιστούν οι αριστερή και δεξιά πλευρά του τετράγωνου χαρτιού και παρατηρεί ότι τα σημεία τομής που έχει σχεδιάσει βρίσκονται πράγματι πάνω σε αυτή την τσάκιση, επομένως επικυρώνει την εικασία ότι βρίσκονται σε μια ευθεία και μάλιστα στη μεσοπαράλληλο της δεξιάς και αριστερής πλευράς. Ερωτώμενες γιατί η αυτή η τσάκιση είναι η μεσοπαράλληλος της δεξιάς και αριστερής πλευράς, οι μαθήτριες μεταβαίνουν στο διαλογικό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης και αναφέρουν ότι η τσάκιση αυτή είναι άξονας συμμετρίας καθώς κατά τη δίπλωσης επιμέρους τμήματα ταυτίζονται (pivot sign) και εφόσον οι απέναντι πλευρές του τετραγώνου είναι παράλληλες, από τον ορισμό της μεσοπαραλλήλου (mathematical sign) σιγουρεύονται πως αυτή είναι η μαθηματική νοηματοδότηση της τσάκισης.



Εικόνα 40

Στο επεισόδιο αυτό, μέσα από την συνεργασία των τριών διαστάσεων του ΜΠΕ δίπλωση χαρτιού, παρατηρείται η σημειωτική αλυσίδα: νοητή ευθεία πάνω στην οποία βρίσκονται τα σημειωμένα σημεία (artefact sign) → παραγωγή ενός ακόμα ζεύγους Χ-γραμμών (artefact sign) → παραγωγή νέας τσάκισης κατά μήκος της νοητής ευθείας (artefact sign) → ταύτιση της νοητής ευθείας και της τσάκισης με την οποία συμπίπτουν η δεξιά και αριστερή πλευρά (pivot sign) → μεσοπαράλληλος δεξιάς και αριστερής πλευράς (mathematical sign). Τέλος, όσον αφορά στην υποθετική πρόταση, είναι φανερό προς το παρόν στις μαθήτριες το συμπέρασμα αυτής αλλά όχι η υπόθεση και οι λογικές συνδέσεις.

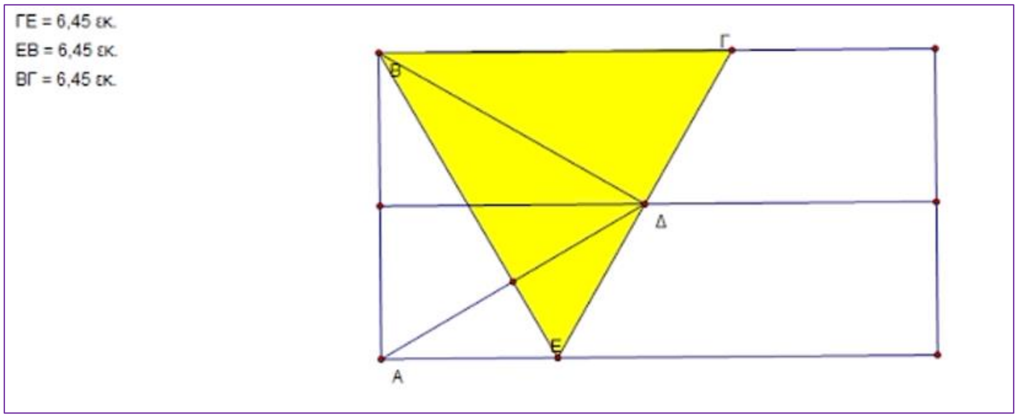
Συνοπτικά, όπως φάνηκε στα δύο προηγούμενα επεισόδια που είναι αντιπροσωπευτικά του τρόπου εργασίας των ομάδων στις τρεις δραστηριότητες, η βασική μέθοδος που επιλέχθηκε για την επικύρωση ισχυρισμών στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού είναι η πραγματοποίηση νέων διπλώσεων. Ο εμπειρικός αυτός έλεγχος της εικασίας στηρίχθηκε σε ένα ήδη διαμορφωμένο μαθηματικό νόημα που είχαν αναπτύξει οι ομάδες. Για παράδειγμα, στο Επεισόδιο 1, ο μαθητής και η μαθήτρια είχαν ήδη στο νου τους τον ορισμό του ισοπλεύρου και αυτή η μαθηματική έννοια ενεργοποίησε τη συγκεκριμένη μέθοδο ελέγχου. Σε αυτές τις περιπτώσεις εργάστηκαν αποκλειστικά στο χειραπτικό μέσο, όπως υποδείκνυε η εκφώνηση, και οι σημειωτικές αλυσίδες ήταν απλές ξεκινώντας από σημεία του χειραπτικού και φτάνοντας σε ολοκληρωμένα μαθηματικά νοήματα. Ωστόσο, η φύση της Δραστηριότητας 3 και η εμπλοκή της έννοιας της γενίκευσης οδήγησε την Ομάδα Α και σε μια διαφορετική μέθοδο επικύρωσης ενός γενικευμένου συμπεράσματος. Έχοντας εκ των προτέρων ως στόχο της την ανάδυση της διαφοράς ειδικού-γενικού και του νοήματος της υποθετικής πρότασης με γενική ισχύ, η δραστηριότητα αυτή φαίνεται να τον πετυχαίνει, καθώς από τα πρώτα κιόλας στάδια του εμπειρικού πειραματισμού με το χαρτί, οι μαθήτριες κατανοούν τη σημασία της γενίκευσης. Συγκεκριμένα, προκειμένου να επικυρώσουν τους ισχυρισμούς τους σχετικά με τον γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής των X-γραμμών, προέβησαν σε μία νέα επανάληψη των διπλώσεων προκειμένου να εξετάσουν αν οι νέες περιπτώσεις συμφωνούν με τις προηγούμενες ως προς το οπτικό αποτέλεσμα. Το κοινό στοιχείο και στις δύο μεθόδους είναι η ανάδειξη των δυνατοτήτων του χειραπτικού μέσου στην επικύρωση εικασιών εμπειρικά και κατ’ επέκταση στην ισχυροποίηση των υποθέσεων και των λογικών συνδέσεων που έχουν προηγουμένως υπόρρητα ανακαλυφθεί.

5.2.2 Διατύπωση και επικύρωση εικασίας μέσα από την εργασία στο πεδίο GSP

Έχοντας μεταφέρει με ανθεκτικό τρόπο τις κατασκευές της κάθε δραστηριότητας από το διπλωμένο χαρτί στο GSP, οι μαθητές/-ριες αναζητούν σε αυτό το μέσο τρόπους επαλήθευσης του ισχυρισμού που είχαν διατυπώσει και επικυρώσει προηγουμένως στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού. Παρακάτω αναλύεται ένα επεισόδιο από την Δραστηριότητα 1 της Ομάδας Α και ένα επεισόδιο της ίδιας ομάδας από τη Δραστηριότητα 3. Το Επεισόδιο 2 είναι ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα της εργασίας που ακολούθησαν και οι μαθητές της Ομάδας Β.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 1: Επικύρωση της ισχύος του συμπεράσματος και των κατασκευαστικών/λογικών συνδέσεων των υποθέσεων με την αξιοποίηση της μέτρησης και του συρσίματος του πεδίου GSP

Στο επεισόδιο αυτό οι μαθήτριες, αφού εντοπίσουν στην οθόνη το αντίστοιχο του τριγώνου που είχαν κατασκευάσει κατά την εμπλοκή τους με τη δίπλωση του χαρτιού, προβαίνουν στη μέτρηση των πλευρών (Εικόνα 41) (artefact sign-GSP) προκειμένου να ελέγξουν αν πράγματι είναι ισόπλευρο, όπως είχαν εικάσει και ελέγξει εμπειρικά εργαζόμενες στο πεδίο δίπλωσης χαρτιού. Παρατηρώντας τις ίσες μετρήσεις (pivot sign-GSP) ισχυροποιούν-χωρίς βέβαια και πάλι να έχουν αποδείξει- την εικασία τους ότι το προκύπτον σχήμα είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο (mathematical sign) και επομένως είναι φανερή η εργαλειακή γένεση του πεδίου του GSP για την επικύρωση εικασιών.



Εικόνα 41

Έτσι, παρατηρούμε τη συνέργεια των δύο μέσων αρχικά σε σημειωτικό επίπεδο μέσα από την αντιστοίχιση των τσακίσεων και τμημάτων του διπλωμένου χαρτιού με τα τμήματα στο ψηφιακό περιβάλλον. Επιπλέον, μέσω της συνέργειας των δύο πεδίων και ειδικότερα των εργαλειακών επιπέδων τους, οι μαθήτριες εμπλέκονται με την έννοια της ισότητας τόσο με όρους ταύτισης (mathematical sign-δίπλωση) όσο και με όρους ισότητας μηκών (mathematical sign-GSP), με αποτέλεσμα να ισχυροποιούν το συμπέρασμα της υποθετικής πρότασης, το οποίο βέβαια και στις δύο περιπτώσεις έχουν ελέγξει με εμπειρικό τρόπο.

Ωστόσο, οι μαθήτριες δεν περιορίζονται μόνο σε αυτό, αλλά προβαίνουν σε σύρσιμο δύο σημείων (artefact sign-GSP) για να ελέγξουν αν η κατασκευή είναι ανθεκτική (pivot sign-GSP). Πέρα από το εργαλειακό επίπεδο, η επιλογή τους να σύρουν αντικείμενα υποδηλώνει και μια εργασία στο διαλογικό επίπεδο του GSP, καθώς με αυτόν τον τρόπο επιχειρούν να αποδώσουν έναν ανθεκτικό και αυστηρό χαρακτήρα στην κατασκευή τους και να βεβαιωθούν ότι δεν έχουν κάνει αυθαίρετες κατασκευές. Με αυτόν τον τρόπο επιβεβαιώνεται θα λέγαμε και το γεγονός ότι η συνέργεια των πεδίων που αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα οδήγησε σε συνεπή αποτελέσματα (mathematical sign).

Ε	Οκ. Οπότε τώρα είστε σίγουρες ότι είναι ισόπλευρο;
Μ1	Ναι
Μ2	Να ελέγξουμε αν δεν κουνιέται μόνο
	[σύρει τα σημεία Β και Γ]
Μ2	Να ελέγξουμε αν είναι σταθερό
Μ1	Ναι είναι σταθερό

Αυτή η διαλογική διεργασία περιγράφεται μέσα από τη σημειωτική αλυσίδα: Μέτρηση (artefact sign-GSP)→ ίσα μήκη πλευρών (pivot sign-GSP) → αντιστοίχιση με τα ταυτιζόμενα τμήματα κατά τη δίπλωση του χαρτιού (pivot sign-δίπλωση) → σύρσιμο (artefact sign-GSP) → αναλλοίωτη κατασκευή και σταθερά μήκη πλευρών (pivot sign-

GSP) → ισόπλευρο τρίγωνο και θεωρητική και όχι αυθαίρετη κατασκευή (mathematical sign).

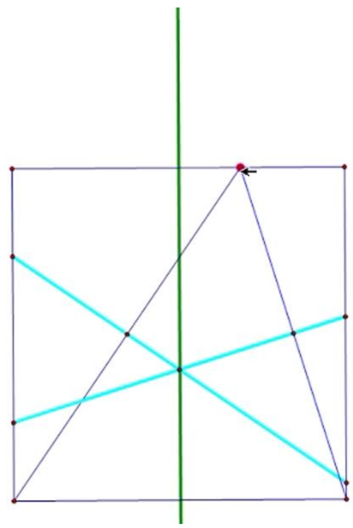
ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 2: Επικύρωση της ισχύος του συμπεράσματος και των κατασκευαστικών/λογικών συνδέσεων των υποθέσεων με την αξιοποίηση του ίχνους και την κατασκευή του μαθηματικού αντικειμένου του συμπεράσματος

Στο επεισόδιο αυτό οι μαθήτριες, έχοντας ολοκληρώσει τη μεταφορά της κατασκευής τους στο GSP και μέσω του συρσίματος την οπτικοποίηση πολλαπλών Χ-γραμμών, επιχειρούν την επικύρωση του ισχυρισμού ότι τα σημεία τομής των Χ-γραμμών βρίσκονται πάνω στη μεσοπαράλληλο της δεξιάς και αριστερής πλευράς του τετραγώνου. Για το στόχο αυτό οι μαθήτριες υλοποιούν δύο μεθόδους επικύρωσης του ισχυρισμού αξιοποιώντας εργαλεία του GSP οι οποίες υποστηρίζεται ότι συνδέονται με τις δύο μεθόδους επικύρωσης που ακολούθησαν στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού.

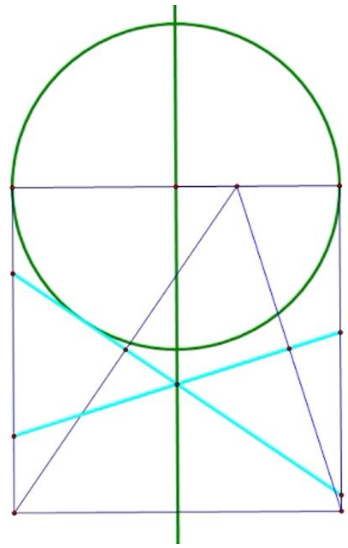
Η Μ2 αναφέρει πως για να επιβεβαιώσουν ότι τα σημεία τομής των Χ-γραμμών είναι πάνω στην μεσοπαράλληλο (mathematical sign) μπορούν να την κατασκευάσουν (artefact sign-GSP) και έπειτα να ελέγξουν αν πράγματι τα σημεία τομής είναι σημεία της με την αξιοποίηση του (line) συρσίματος (pivot sign-GSP) (Εικόνα 42).

Μ2	Θα τραβήξουμε την κάθετη *[επιλέγει το σημείο τομής των Χ-γραμμών και την πάνω πλευρά]*
	[κατασκευάζει την κάθετη από το σημείο τομής στην κάτω πλευρά του τετραγώνου]
	Για να δούμε αν αυτό το σημείο μένει πάντα στο κέντρο
	[σύρει το τυχαίο σημείο]
Μ1	Ναι είναι

Ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι η Μ2 προκειμένου να κατασκευάσει τη μεσοπαράλληλο κατασκεύασε μια ευθεία κάθετη από το σημείο τομής στην κάτω πλευρά του τετραγώνου. Ερωτώμενες αν είναι η ευθεία αυτή μεσοπαράλληλος της δεξιάς και αριστερής πλευράς του τετραγώνου, οι μαθήτριες εργάζονται τόσο στο διαλογικό επίπεδο, ανακαλώντας τον ορισμό αυτού του μαθηματικού αντικειμένου, όσο και στο εργαλειακό επίπεδο του GSP, στο οποίο κατασκευάζουν τον κύκλο της Εικόνας 43 και έτσι αξιοποιώντας τον ως εργαλείο σύγκρισης τμημάτων, αιτιολογούν το ότι η ευθεία είναι πράγματι μεσοπαράλληλος.



Εικόνα 42

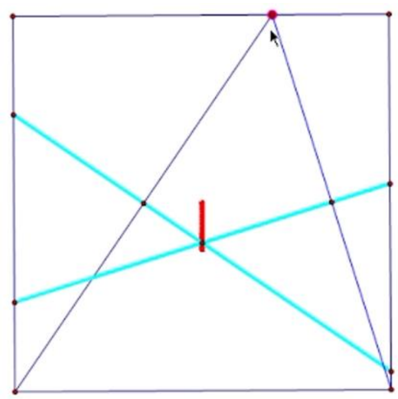


Εικόνα 43

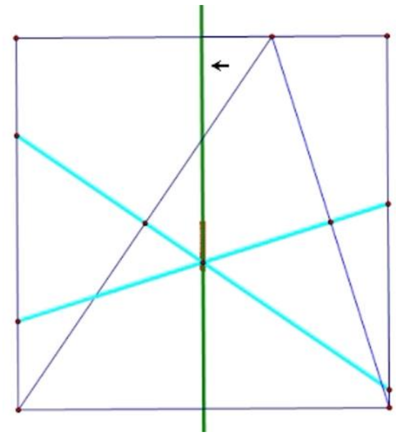
Η μέθοδος αυτή επικύρωσης του ισχυρισμού με την κατασκευή στην ουσία του ίδιου του γεωμετρικού τόπου αντιστοιχίζεται με το σχήμα χρήσης που ανέπτυξαν οι μαθήτριες σε προηγούμενο επεισόδιο (Ενότητα 5.2.1, Επεισόδιο 2) διπλώνοντας το φύλλο χαρτί κατά μήκος της μεσοπαραλλήλου (artefact sign-δίπλωση) και ελέγχοντας κατά πόσο τα σημειωμένα σημεία τομής των Χ-γραμμών βρίσκονται πάνω στην τσάκιση (pivot sign-δίπλωση). Το κοινό στοιχείο και στις δύο περιπτώσεις είναι ότι προηγείται η κατασκευή του γεωμετρικού τόπου αξιοποιώντας ιδιότητες που έχει ως ολότητα και ακολουθεί ο έλεγχος του κατά πόσο τα σημεία αυτά ανήκουν πάνω σε αυτό το αντικείμενο.

Η Μ1 στη συνέχεια αναφέρει ως τρόπο επικύρωσης του ισχυρισμού τη σχεδίαση του ίχνους των σημείων τομής των Χ-γραμμών (artefact sign -GSP) και έπειτα τον εμπειρικό έλεγχο (μέσω της αντιληπτικής ικανότητας) του κατά πόσο το σχέδιο που εμφανίζεται είναι η μεσοπαράλληλος (Εικόνα 44) (pivot sign-GSP). Ενεργοποιείται επομένως το εργαλειακό και σημειωτικό επίπεδο του πεδίου GSP. Σημειώνεται ότι, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 44, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής της μεσοκαθέτου είναι ένα τμήμα που ανήκει στη μεσοπαράλληλο και όχι ολόκληρη η ευθεία, γεγονός που δεν λαμβάνεται υπόψη στη Δραστηριότητα 3.

Στο ίδιο ερώτημα, ζητείται από τις μαθήτριες να περιγράψουν τον γεωμετρικό τόπο των σημείων αυτών και να εντοπίσουν την κοινή τους ιδιότητα. Τότε η Μ1 κατασκευάζει τη μεσοκάθετο της πάνω και κάτω πλευράς του τετραγώνου (Εικόνα 45) και αναφέρει ότι ως μεσοπαράλληλος όλα τα σημεία της ισαπέχουν από τη δεξιά και αριστερή πλευρά ενώ ως μεσοκάθετος όλα τα σημεία της ισαπέχουν από τα άκρα του κάτω και πάνω τμήματος ξεχωριστά (mathematical sign).



Εικόνα 44



Εικόνα 45

Η μέθοδος αυτή αντιστοιχίζεται με την δεύτερη μέθοδο που πραγματοποίησαν οι μαθήτριες για την επικύρωση του ισχυρισμού στο πεδίο της δίπλωσης, κατά την οποία, παρατηρώντας ότι μάλλον τα σχεδιασμένα σημεία είναι συνευθείακα, η Μ2 επιλέγει να κάνει μια ακόμα επανάληψη για να έχει η εικασία της μεγαλύτερο βαθμό βεβαιότητας. Το κοινό των δύο αυτών μεθόδων είναι ότι το τελικό αποτέλεσμα δεν εμφανίζεται ως ολότητα αλλά ως ένα σύνολο σημείων με μια κοινή ιδιότητα, κάτι που αποτελεί και τον ορισμό του γεωμετρικού τόπου.

Επομένως, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι μέσω της συνέργειας των μέσων που εμφανίστηκε κατά την επικύρωση του ισχυρισμού στο GSP, αναδύθηκε το μαθηματικό νόημα του γεωμετρικού τόπου και ειδικότερα η θεώρησή του και ως σύνολο άπειρων σημείων με κοινή ιδιότητα και ως μαθηματικό αντικείμενο που συνολικά φέρει ιδιότητες. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, η ευθεία αυτή αντιμετωπίστηκε και ως μεσοκάθετος και ως μεσοπαράλληλος γεγονός που αποκαλύπτει πολλές υποθέσεις που μπορούν να φανούν σημαντικές κατά την τυπική αποδεικτική διαδικασία. Έτσι, όσον αφορά στην υποθετική πρόταση, ισχυροποιούνται οι λογικές συνδέσεις των υποθέσεων και γίνεται ορατό και με διαφορετικό τρόπο το επικυρωμένο πλέον και στο GSP συμπέρασμα.

Η συνέργεια που εμφανίζεται σε αυτό το επεισόδιο περιγράφεται με δύο σημειωτικές αλυσίδες: κατασκευή της ίδιας της μεσοπαραλλήλου που αποτελεί το συμπέρασμα (artefact sign-GSP)→ επικύρωση μέσω line συρσίματος (pivot sign-GSP) → αντιστοίχιση της μεσοπαραλλήλου με την νέα τσάκιση στο πεδίο της δίπλωσης (pivot sign-δίπλωση) → η μεσοπαράλληλος ως ολότητα με συγκεκριμένες ιδιότητες (mathematical sign) και
Ενεργοποίηση ίχνους (artefact sign-GSP)→ επικύρωση μέσω συρσίματος και εμφάνισης της μεσοπαραλλήλου στην οθόνη (pivot sign-GSP) → αντιστοίχιση της λειτουργίας του ίχνους με την επανάληψη των βημάτων παραγωγής Χ-γραμμών (pivot sign-δίπλωση) → η μεσοπαράλληλος ως γεωμετρικός τόπος σημείων με κοινή ιδιότητα (mathematical sign).

Συνοψίζοντας, όπως αναλύθηκε στην ενότητα αυτή, η συνέργεια των δύο μέσων έγινε ορατή όταν οι ομάδες κλήθηκαν να επικυρώσουν τον ισχυρισμό τους στο ψηφιακό μέσο, αφότου είχε προηγηθεί ο αντίστοιχος έλεγχος στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού. Η ενεργοποίηση λειτουργιών στο ψηφιακό μέσο βασιζόταν στην ύπαρξη ενός μαθηματικού νοήματος στο νου των μαθητών/-ριών και με βάση αυτό επιλέγονταν οι κατάλληλες εντολές. Ειδικότερα, παρατηρήθηκαν τρεις μέθοδοι επικύρωσης εικασιών στο GSP. Η απλούστερη εξ αυτών είναι η αξιοποίηση της μέτρησης και του συρσίματος μέσω των οποίων ελέγχθηκε η αναλλοίωτη ισότητα των πλευρών ενός τριγώνου. Έπειτα, μια άλλη μέθοδος αποτελεί ο συνδυασμός της κατασκευής του υπό εξέταση αντικειμένου και του συρσίματος και η αιτιολόγηση της ισχύος του συμπεράσματος μέσω της παρατήρησης του οπτικού αποτελέσματος στην οθόνη. Η τελευταία μέθοδος επικύρωσης συμπεράσματος σχετίζεται με την ενεργοποίηση του ίχνους και πάλι σε συνδυασμό με το σύρσιμο σημείων. Όπως φαίνεται και από τις σημειωτικές αλυσίδες, στην πρώτη μέθοδο έχουμε περισσότερο απλή και γραμμική εξέλιξη νοημάτων ενώ στις άλλες δύο γίνεται συνθετότερη. Πιθανώς, το συμπέρασμα αυτό να σχετίζεται με το γεγονός ότι οι δύο τελευταίες μέθοδοι παρατηρήθηκαν κατά την εμπλοκή με γεωμετρικό τόπο όπου υπάρχει το περιθώριο πολλαπλών μαθηματικών νοηματοδοτήσεων.

Σύνοψη 2ης κατηγορίας επεισοδίων

Εστιάζοντας στα αποτελέσματα των δύο παραπάνω ενοτήτων (Ενότητες 5.2.1 και 5.2.2) υποστηρίζεται ότι οι μέθοδοι που ακολούθησαν οι ομάδες για να επικυρώσουν τις εικασίες τους στο ψηφιακό περιβάλλον αντιστοιχίζονται ή/ και συμπληρώνουν τις μεθόδους στο χειραπτικό μέσο που προηγήθηκαν. Έτσι, τα διαφορετικά νοήματα που αναδύονται κατά την αναζήτηση και εφαρμογή τρόπων επικύρωσης στο κάθε μέσο, συνθέτουν μια αλυσίδα νοημάτων η οποία -πέρα από τον επιθυμητό στόχο της επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας εικασίας- συμβάλλει στην ανάδειξη πολλαπλών ιδιοτήτων και σχέσεων της σχετικής μαθηματικής έννοιας, φωτίζοντας σε κάθε μέσο διαφορετικές πτυχές της.

Επιπλέον, οι μέθοδοι αυτές που αξιοποιήθηκαν έδρασαν αποτελεσματικά και συνεργικά στα δύο ΜΠΕ ώστε να ισχυροποιηθούν οι κατασκευαστικές εξαρτήσεις των αρχικών σημείων με το τελικό οπτικό αποτέλεσμα. Συνεπαγωγικά, ακόμα και υπόρρητα, απέκτησαν μεγάλο βαθμό βεβαιότητας οι λογικές συνδέσεις των υποθέσεων με το συμπέρασμα, εξελίσσοντας περαιτέρω την έννοια της υποθετικής πρότασης «αν…τότε».

5.3 ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΥΠΟΘΕΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

Η ενότητα αυτή περιλαμβάνει επεισόδια τα οποία έλαβαν χώρα στο τελευταίο στάδιο των δραστηριοτήτων, κατά την αποδεικτική διαδικασία. Ειδικότερα, έπειτα από την ολοκλήρωση της μεταφοράς της κατασκευής από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο και την επικύρωση της εικασίας στο τελευταίο, ακολουθούσε η τυπική απόδειξη της εκάστοτε υποθετικής πρότασης. Στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι η προς απόδειξη υποθετική πρόταση δεν ήταν ρητά διατυπωμένη από τους/τις μαθητές/-ριες στη μορφή «αν…τότε», ωστόσο ήταν σαφώς διατυπωμένο το συμπέρασμά της και οι υποθέσεις είχαν ανακαλυφθεί στα προηγούμενα στάδια των δραστηριοτήτων, όπως φάνηκε και στις ενότητες 5.2 και 5.3.

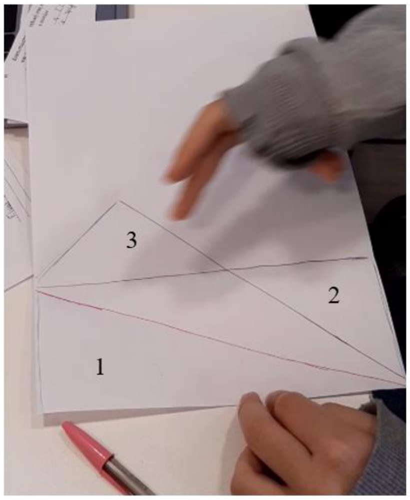
5.3.1 Απόδειξη με αξιοποίηση μόνο των υποθέσεων που αναδύθηκαν κατά τη μεταφορά από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο

Στις λιγότερο σύνθετες κατασκευές και κατ' επέκταση υποθετικές προτάσεις παρατηρήθηκε ότι οι δύο ομάδες ολοκλήρωναν άμεσα την απόδειξη αντλώντας τα απαραίτητα δομικά στοιχεία από τις γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις που ανακάλυψαν κατά τη μεταφορά της εκάστοτε κατασκευής από το πεδίο της δίπλωσης στο ψηφιακό. Το Επεισόδιο 1 που ακολουθεί αναφέρεται στην αποδεικτική διαδικασία που ακολούθησε η Ομάδα Α στην Δραστηριότητα 2 και στο οποίο, όπως φαίνεται, οι αναγκαίες υποθέσεις για την παραγωγή της απόδειξης ήταν ήδη επιλεγμένες από την εργασία που είχαν προηγουμένως κάνει. Το Επεισόδιο 2 αφορά στην εμπλοκή των μαθητών της Ομάδας Β με την Δραστηριότητα 3 και ειδικότερα στην απόδειξη της ειδικής περίπτωσης της υποθετικής πρότασης.

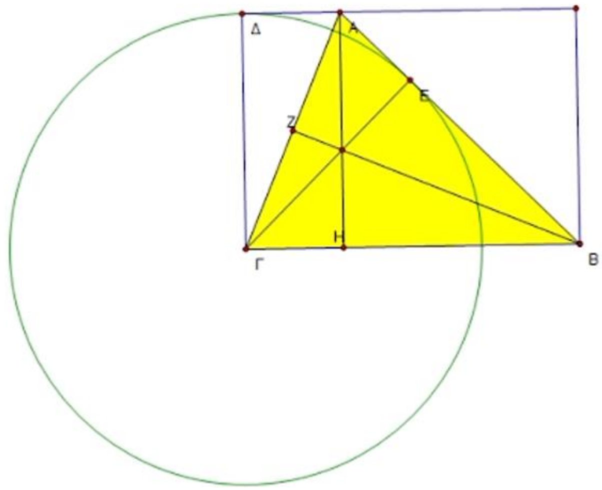
ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 1: Απόδειξη της υποθετικής πρότασης με αξιοποίηση αποτελεσμάτων της συνέργειας που προηγήθηκε

Οι μαθήτριες συλλαμβάνουν και διατυπώνουν μια τυπική παραγωγική απόδειξη της υποθετικής πρότασης ότι τα συγκεκριμένα κατασκευαστικά βήματα οδηγούν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο. Όπως θα γίνει φανερό και από την ανάλυση του επεισοδίου, στην απόδειξη αυτή συνέβαλαν καθοριστικά οι γεωμετρικές σχέσεις που ανακάλυψαν οι μαθήτριες μέσα από την συνέργεια του ψηφιακού και χειραπτικού μέσου. Έτσι, ως αποτέλεσμα της επικοινωνίας των διαστάσεων των δυο ΜΠΕ γίνονται ορατές οι λογικές συνδέσεις που οδηγούν από τις υποθέσεις στο τελικό συμπέρασμα.

Σε προηγούμενη φάση της δραστηριότητας, οι μαθήτριες μέσα από τις ιδιότητες των διπλώσεων απέδειξαν με εμπειρικό τρόπο ότι τρία τρίγωνα είναι ίσα (Εικόνα 46). Ωστόσο, η εμπειρική αυτή απόδειξη έλαβε μαθηματικό χαρακτήρα κατά τη μεταφορά της κατασκευής στο ψηφιακό περιβάλλον. Ειδικότερα, η ισότητα των τριγώνων 1, 2 αιτιολογήθηκε μαθηματικά με αξιοποίηση της ιδιότητας των διαγωνίων κάθε ορθογωνίου να το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα, ενώ η αιτιολόγηση της ύπαρξης του ορθογωνίου αυτού καθ’ αυτού αιτιολογήθηκε μέσα από τα βήματα κατασκευής στο GSP. Από την άλλη, η ισότητα των τριγώνων 1,3 αιτιολογήθηκε μέσω της συμμετρίας η οποία εκφράστηκε στο GSP με αξιοποίηση του εργαλείου της ανάκλασης.



Εικόνα 46



Εικόνα 47

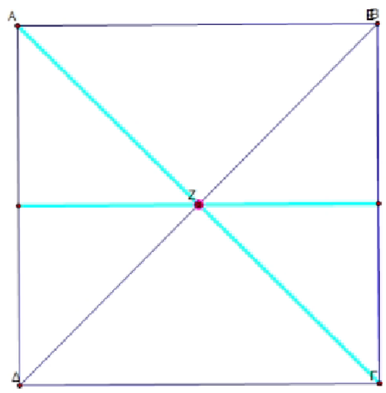
Τελικά, οι μαθήτριες μέσω της λογικής σχέσης «αν α=β και β=γ τότε α=γ» αιτιολόγησαν την ισότητα των τριγώνων 2, 3 από τα οποία αξιοποίησαν την ισότητα των γωνιών ΑΓΒ και ΓΑΒ (Εικόνα 47).

Μ2	Περίμενε! *[παίρνει το Α4 και κάνει την 2η δίπλωση]*
	Ξέρουμε ότι αυτά είναι ίσα *[δείχνει τα τρίγωνα 1,3]*
Μ1	Ναι
Μ2	Όπως και αυτό είναι ίσο με αυτό *[δείχνει τα τρίγωνα 1, 2]*
Μ1	Ναι
	Άρα …
Μ2	Όχι, ξέρουμε από αυτές τις συγκρίσεις ότι αυτή είναι ίση με αυτή *[δείχνει στο χαρτί τις αντίστοιχες των γωνιών ΑΓΒ και ΔΑΓ]*
Μ1	Ποια;
Μ2	Και αυτή είναι ίση με αυτή *[δείχνει στο χαρτί τις αντίστοιχες των γωνιών ΔΑΓ και ΓΑΒ]*
Μ1	Θα τα βγάλεις από τα τρίγωνα;
Μ2	Ναι!
Μ1	Ωραία, για… μισό
	[σκέφτονται και παρατηρούν την κατασκευή]
Μ1	Από αυτά τα 2 ορθογώνια… από το ΓΕΑ και το ΑΗΓ *[τα γράφει στο χαρτί]*
	Έχεις ότι… η Γ είναι ίση με την Α
Μ2	Ναι!
Μ1	Άρα έφυγε! Άρα είναι ισοσκελές

Επομένως, η τυπική αυτή απόδειξη είναι αποτέλεσμα της σημειωτικής αλυσίδας που αναδύθηκε μέσα από την συνέργεια των δύο πεδίων: ισότητα τριγώνων 1,2,3 μέσα από τις διπλώσεις και τις ιδιότητες των σημείων (pivot sign -δίπλωση) → γεωμετρικές σχέσεις της συμμετρίας και ιδιότητες του ορθογωνίου (mathematical sign) → κατασκευή των ίσων τριγώνων (pivot sign-GSP)→ αιτιολόγηση ισότητας των ζητούμενων γωνιών/ορισμός ισοσκελούς (mathematical sign).

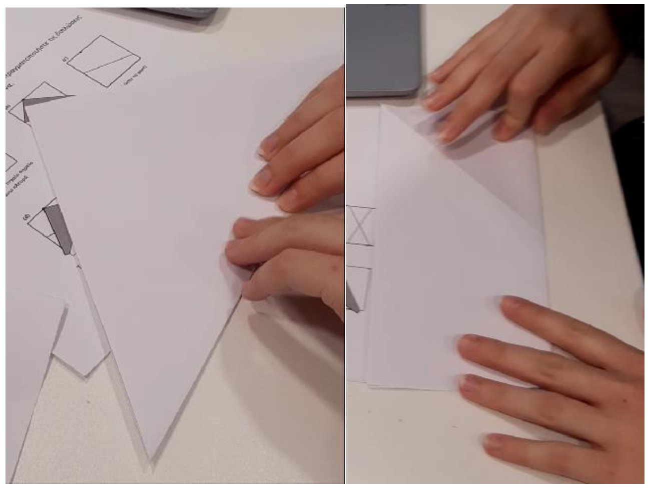
ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 2: Απόδειξη υποθετικής πρότασης στην ειδική περίπτωση με αξιοποίηση αποτελεσμάτων της συνέργειας που προηγήθηκε

Σε προηγούμενο από αυτό της απόδειξης ερώτημα ζητείται από τον μαθητή και τη μαθήτρια να παρατηρήσουν τι συμβαίνει τόσο στο ψηφιακό όσο και στο χειραπτικό μέσο στην περίπτωση που το τυχαίο σημείο ταυτίζεται με μια από τις δύο πάνω κορυφές του τετραγώνου. Εργαζόμενοι/-ες αρχικά στο εργαλειακό επίπεδο του GSP, σύρουν το τυχαίο σημείο Ε ώστε να συμπέσει με την κορυφή Β (Εικόνα 48).



Εικόνα 48

Ερμηνεύοντας τώρα σε σημειωτικό επίπεδο τις Χ-γραμμές, παρατηρούν ότι η μια εξ αυτών είναι τώρα διαγώνιος του τετραγώνου και η άλλη μεσοπαράλληλος των ΑΒ και ΓΔ. Στη συνέχεια, παίρνουν ένα νέο τετράγωνο χαρτί και μεταφέρουν το ειδικό αυτό ζεύγος Χ-γραμμών (Εικόνα 49). Η εργαλειακή αυτή γένεση του πεδίου δίπλωσης και η παραγωγή αυτού του ζεύγους τσακίσεων (artefact sign- δίπλωση) επηρεάστηκε από την οπτικοποίηση των σημείων/Χ-γραμμών του ψηφιακού περιβάλλοντος (artefact sign-GSP). Η αιτιολόγηση του μαθηματικού χαρακτηρισμού της μιας Χ-γραμμής ως μεσοπαραλλήλου αξιοποίησε την έννοια της συμμετρίας στο εργαλειακό επίπεδο της δίπλωσης και τον ορισμό της μεσοπαραλλήλου σε διαλογικό επίπεδο (pivot sign-δίπλωση). Ο χαρακτηρισμός της άλλης ως διαγωνίου του τετραγώνου δεν αιτιολογήθηκε καθώς είναι προφανές από το οπτικό αποτέλεσμα.



Εικόνα 49: Οι διπλώσεις πάνω στις Χ-γραμμές της ειδικής περίπτωσης

Η αποδεικτική διαδικασία ξεκινάει με τους Μ3, Μ4 να βρίσκονται στο διαλογικό επίπεδο του GSP και να προσδιορίζουν ποια είναι η συγκεκριμένη μαθηματική σχέση που καλούνται να αποδείξουν. Η Μ3 διατυπώνει την εξής συνεπαγωγή «Αν το Ζ ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος, τότε είναι στη μεσοκάθετο» ανακαλώντας στην ουσία την κοινή ιδιότητα όλο των σημείων της μεσοκαθέτου (mathematical sign). Έτσι, αναφέρουν ως στόχο τους την απόδειξη της ισότητας ΖΑ=ΖΒ (Εικόνα 48). Στο σημείο αυτό, αρχικά συμβάλει ο μαθηματικός χαρακτηρισμός του ειδικού ζεύγους Χ-γραμμών που προαναφέρθηκε καθώς οι μαθήτριες ανακάλεσαν από το θεωρητικό σύστημα ιδιότητες των διαγωνίων ενός τετραγώνου (mathematical sign).

Μ1	Λοιπόν, αφού είναι τετράγωνο… όλες οι διαγώνιοι διχοτομούνται
Μ2	Είναι ίσες, διχοτομούνται και τέμνονται και κάθετα
Μ1	Είναι ίσες… ναι, είναι ίσες και διχοτομούνται

Τότε, παρατηρώντας την κατασκευή στο GSP οδηγούνται, πάλι εργαζόμενες στο διαλογικό επίπεδο, στο ότι ΖΑ=ΖΒ ως μισά των ίσων διαγωνιών ΑΓ, ΒΔ. Βέβαια, η διαλογική διαδικασία συνεχίστηκε και όταν ο μαθητής και η μαθήτρια θέλησαν να αποδείξουν ότι η μια Χ-γραμμή είναι πράγματι διαγώνιος του τετραγώνου. Για την απόδειξη αυτή καθοριστική ήταν η συνεισφορά της συνέργειας που αναδύθηκε σε προηγούμενα στάδια της δραστηριότητας. Το γεγονός ότι η ΒΔ είναι διαγώνιος και το Ζ μέσο της αιτιολογήθηκε από τα βήματα κατασκευής που ακολούθησαν κατά τη μεταφορά των Χ-γραμμών στο ψηφιακό μέσο. Επιπλέον το σημείο Ζ αποτελεί το σημείο τομής των Χ-γραμμών και το μέσο της μιας διαγωνίου, άρα αναγκαστικά και η άλλη διαγώνιος θα διέρχεται από αυτό. Ο μαθηματικός αυτός συλλογισμός τους φανερώνει την ανάγκη των μαθητριών να αιτιολογούν μαθηματικά κάθε φαινόμενο που παρατηρούν εμπειρικά.

Η τυπική αυτή απόδειξη της γενικής περίπτωσης της υποθετικής πρότασης ήταν αποτέλεσμα της συνέργειας των δύο ΜΠΕ η οποία αποτυπώνεται μέσα από τη σημειωτική αλυσίδα: Χ-γραμμές στην ειδική περίπτωση στο GSP (artefact sign -GSP) → κατασκευή

Χ-γραμμών στην ειδική περίπτωση στο χαρτί (artefact sign-δίπλωση) → αιτιολόγηση μαθηματικού χαρακτηρισμού των Χ-γραμμών μέσα από τις ιδιότητες των διπλώσεων (pivot sign-δίπλωση)→ ανάκληση της κοινής ιδιότητας των σημείων της μεσοκαθέτου → αιτιολόγηση ισότητας τμημάτων με χρήση ιδιοτήτων του ορθογωνίου (mathematical sign).

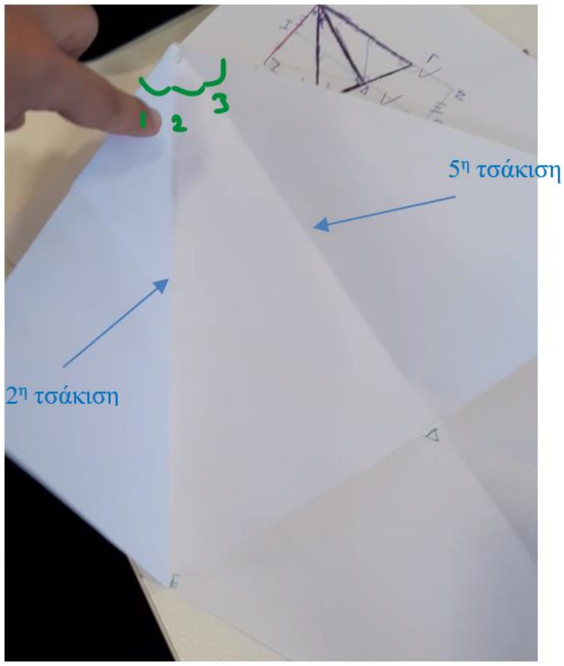
Συνοπτικά, στην ενότητα αυτή παρατηρούμε ότι η απόδειξη των υποθετικών προτάσεων πραγματοποιήθηκε με άμεση αξιοποίηση των δεδομένων που είχαν αναδυθεί σε στάδια προγενέστερα της αποδεικτικής διαδικασίας. Κοινό και στα δύο επεισόδια είναι η ευκολία με την οποία οι μαθητές/-ριες ανακάλεσαν τις κατάλληλες γεωμετρικές σχέσεις και ιδιότητες των αντικειμένων που είχαν νοηματοδοτήσει με τη συνέργεια των δύο ΜΠΕ, τις οποίες συνέδεσαν με άλλα ήδη γνωστά τους θεωρητικά στοιχεία για να κατασκευάσουν την παραγωγική απόδειξη. Η ευκολία αυτή αποτυπώνεται και στη δομή των σημειωτικών αλυσίδων. Το Επεισόδιο 1 είχε αφετηρία σημεία σχετικά με το χειραπτικό μέσο και γενικότερα η ομάδα επικεντρώθηκε σε νοήματα συνδεδεμένα με το πεδίο της δίπλωσης, ενώ στο Επεισόδιο 2 αφετηρία ήταν το οπτικό αποτέλεσμα στο GSP και, ενώ ακολούθησε η αποτύπωση των νοημάτων και στο χειραπτικό μέσο, οι αναγκαίες ιδιότητες εμφανίστηκαν εστιάζοντας απλά στην ψηφιακή κατασκευή.

5.3.2 Απόδειξη με ανακάλυψη νέων ιδιοτήτων στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού

Τα δύο επεισόδια που αναλύονται στην ενότητα αυτή αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα των περιπτώσεων που οι μαθητές/-ριες αντιμετώπισαν αρχικά δυσκολίες στο να αποδείξουν την υποθετική πρόταση αξιοποιώντας τις υποθέσεις που είχαν ανακαλύψει κατά τη μεταφορά της κατασκευής από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο. Η ολοκλήρωση της αποδεικτικής διαδικασίας πραγματοποιήθηκε σε αυτές τις περιπτώσεις με την ανακάλυψη νέων ιδιοτήτων μέσα από την επιστροφή και τον πειραματισμό με το πεδίο της δίπλωσης χαρτιού. Το Επεισόδιο 1 αναφέρεται στην εργασία της Ομάδας Α στην Δραστηριότητα 1 και το Επεισόδιο 2 στην εργασία της Ομάδας Β στην Δραστηριότητα 2.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 1: Απόδειξη της υποθετικής πρότασης έπειτα από την εστίαση σε νέες ιδιότητες της δίπλωσης

Η Ομάδα Α επιχείρησε αρχικά να αποδείξει ότι το προκύπτον τρίγωνο είναι ισόπλευρο αναζητώντας στοιχεία για την ισότητα των τριών πλευρών του. Δυσκολευόμενες να ολοκληρώσουν την απόδειξη με αυτή τη μέθοδο, οι μαθήτριες αποφασίζουν να αλλάξουν αποδεικτική πορεία και να αποδείξουν ότι κάθε μια από τις γωνίες του τριγώνου είναι 60 μοίρες. Σε πρώτη φάση, η επιλογή τους αυτή κατευθύνθηκε από την εργασία τους με τις διπλώσεις του χαρτιού, καθώς παρατήρησαν ότι διπλώνοντας πάνω στην $2^{η}$ και $5^{η}$ τσάκιση (artefact sign-δίπλωση) η αρχική ορθή γωνία του Α4 τριχοτομείται (Εικόνα 50). Εργάζονται λοιπόν στο εργαλειακό και διαλογικό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης και αιτιολογούν εμπειρικά την ισότητα των τριών γωνιών αναφερόμενες στην ταύτισή τους κατά τις διπλώσεις (pivot sign-δίπλωση).



Εικόνα 50: Η Μ2 δείχνει τις ίσες γωνίες που προκύπτουν κατά τη 2η και 5η δίπλωση

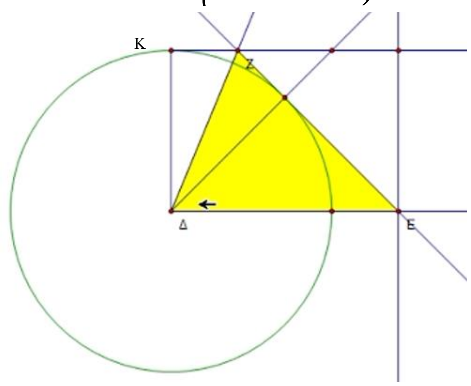
Ο εμπειρικός αυτός συλλογισμός τους και η εργασία στο εργαλειακό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης, λαμβάνει μαθηματικά αυστηρό θεωρητικό χαρακτήρα όταν αιτιολογούν την παρατήρησή τους αναφερόμενες στην έννοια της συμμετρίας (mathematical sign). Αξιοποιώντας, λοιπόν, την νοηματοδότηση της 2ης και 5ης τσάκισης ως αξόνων συμμετρίας και ειδικότερα την ισότητα των συμμετρικών γωνιών και τμημάτων, ένα μαθηματικό νόημα που αναδύθηκε μέσα από τη συνέργεια των δύο πεδίων, οι Μ1 και Μ2 ολοκληρώνουν την απόδειξή τους αιτιολογώντας με μαθηματικό τρόπο το ότι όλες οι γωνίες του τριγώνου είναι 60 μοίρες.

Μ2	Αν το διπλώσεις στα 3 θα είναι όλες 90
Μ1	30 και 30 και 30
Ε	Είναι;
Μ1	Είναι αλλά πώς θα το αποδείξουμε
Ε	Τι έκανε τώρα με τη δίπλωση;
Μ1	Είναι άξονας συμμετρίας
Μ2	Άρα είναι και η ΒΔ άξονας συμμετρίας;
Ε	Είναι;
Μ2	Είναι, αφού είναι κάθετη στο μέσο, θα είναι

Η σημειωτική αλυσίδα που σημειώνεται στο επεισόδιο αυτό είναι ουσιαστικά μια συμπλήρωση της σημειωτικής αλυσίδας που παρατηρήθηκε μέσα από τη συνεργική σχέση των δύο ΜΠΕ κατά τη μεταφορά της συγκεκριμένης κατασκευής στο GSP. Τα νέα αυτά στοιχεία ήταν που τελικά οδήγησαν ωστόσο στην τυπική απόδειξη: 2η και 5η δίπλωση (artefact sign-δίπλωση)→ ταύτιση 3 γωνιών κατά τις διπλώσεις αυτές (pivot sign-δίπλωση) → αιτιολόγηση με αξιοποίηση της έννοιας της συμμετρίας (mathematical sign) → αιτιολόγηση συμμετρίας μέσω των αποτελεσμάτων προηγούμενης συνεργικής σχέσης.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 2: Απόδειξη με αξιοποίηση υποθέσεων από το ίδιο το φύλλο χαρτί

Στο επεισόδιο αυτό από την τελική φάση της Δραστηριότητας 2 η Ομάδα Β επιχειρεί να αποδείξει ότι το προκύπτον τρίγωνο είναι ισοσκελές. Επηρεασμένοι από την προηγούμενη εργασία τους, κατά τη μεταφορά της κατασκευής στο GSP κατά την οποία ερμήνευσαν δύο τσακίσεις (artefact sign- δίπλωση) στο χαρτί ως διχοτόμους (mathematical sign), αποφασίζουν να αποδείξουν το ζητούμενο δείχνοντας πως οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες (γωνίες ΖΔΕ και ΔΖΕ στην Εικόνα 51).



Εικόνα 51

Η δυσκολία τους να αποδείξουν την ισότητα των δύο γωνιών βασιζόμενοι/-ες μόνο στην ύπαρξη των διχοτόμων οδηγεί την Μ3 και τον Μ4 στην αναζήτηση μιας ακόμα υπόθεσης που θα τους βοηθήσει μέσω λογικών συνδέσεων να φθάσουν στην απόδειξη του συμπεράσματος. Στο σημείο αυτό η Μ3 τονίζει ότι στο φύλλο Α4 και ακολούθως στην κατασκευή στο GSP οι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου είναι παράλληλες (pivot signs) και ανακαλεί το σχετικό θεώρημα περί ισότητας των εντός εναλλάξ γωνιών (mathematical sign). Έτσι, παρατηρούμε μια διαλογική γένεση στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού καθώς τα χαρακτηριστικά του Α4 (artefact sign -δίπλωση) και η μαθηματική απεικόνισή τους (mathematical sign) στο ψηφιακό περιβάλλον μέσω της συνέργειας που προηγήθηκε κατά τη μεταφορά της κατασκευής αποτέλεσαν το καθοριστικό στοιχείο και μια αναγκαία υπόθεση για την ομάδα Β. Ειδικότερα, από τη διαλογική αυτή γένεση που ενέπνευσε η συνέργεια οι Μ1, Μ2 αξιοποίησαν την ισότητα των γωνιών ΚΖΔ και ΖΔΕ (Εικόνα 51).

Μ3	Αυτές εδώ όμως είναι παράλληλες *[δείχνει στο χαρτί την πάνω και κάτω πλευρά του Α4]*, άρα από τον κανόνα της παραλληλίας…
Μ4	Ναι!
Μ3	Η Δ όλη η κίτρινη θα είναι ίση με αυτή εδώ *[δείχνει στο sketchpad την ΚΖΔ]*
Ε	Γιατί;

M3	Ως εντός εναλλάξ
M4	Συμφωνώ

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης οι M3, M4 ανακάλεσαν ρητά και κάποιες ιδιότητες που προέκυψαν στην προηγούμενη φάση από την συνέργεια των δύο μέσων. Συγκεκριμένα, έχοντας ερμηνεύσει την 2η τσάκιση (που αντιστοιχεί στο τμήμα ΔΖ της Εικόνα 51) ως άξονα συμμετρίας εργάζονται και πάλι στο διαλογικό επίπεδο των δύο πεδίων και ανακαλούν ιδιότητες των συμμετρικών αντικειμένων (mathematical sign). Με αυτόν τον τρόπο αιτιολογούν την ισότητα των γωνιών ΚΖΔ και ΔΖΕ και έπειτα αξιοποιώντας τον λογικό κανόνα «αν α=β και β=γ τότε και α=γ» καταλήγουν στην επιθυμητή ισότητα και τελικά στην απόδειξη της υποθετικής πρότασης.

Επομένως, και στο επεισόδιο αυτό παρατηρείται μια εξέλιξη προηγούμενης σημειωτικής αλυσίδας με την προσθήκη υποθέσεων που αντλήθηκαν από artefact και pivot signs του πεδίου της δίπλωσης: ερμηνεία τσακίσεων ως διχοτόμοι (pivot sign-δίπλωση) → αιτιολόγηση ισότητας με αξιοποίηση της έννοιας της συμμετρίας (mathematical sign) → παράλληλες οι απέναντι πλευρές του Α4 (pivot sign-δίπλωση) → εντός εναλλάξ γωνίες ίσες (mathematical sign).

Τα παραπάνω επεισόδια είναι αντιπροσωπευτικά του πρωταγωνιστικού ρόλου που διαδραμάτισε το πεδίο δίπλωσης χαρτιού στην ανακάλυψη νέων υποθέσεων που χρειάζονταν για την ολοκλήρωση της τυπικής απόδειξης. Οι υποθέσεις αυτές σχετίζονταν είτε με την ανακάλυψη νέων σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων που είχαν νοηματοδοτηθεί μαθηματικά σε προηγούμενες φάσεις της δραστηριότητας είτε με την αξιοποίηση αυτών καθ' εαυτών των χαρακτηριστικών του φύλλου Α4. Όπως τονίσθηκε και παραπάνω, η επιστροφή αυτή στο πεδίο της δίπλωσης είχε ως αποτέλεσμα την εξέλιξη προηγούμενων σημειωτικών αλυσίδων με την προσθήκη νέων υποθέσεων/ δεδομένων. Έτσι, αναδεικνύεται η δυνατότητα του πεδίου της δίπλωσης στην εστίαση στα κατάλληλα κάθε φορά σημεία και η φανέρωση – μέσα από τον πιο προσεκτικό πειραματισμό – νέων υποθέσεων της υποθετικής πρότασης.

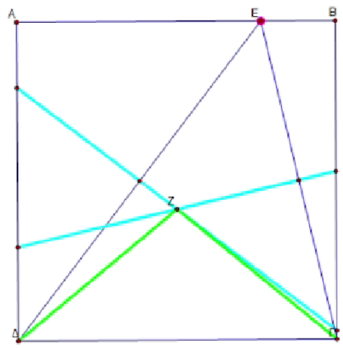
5.3.3 Απόδειξη με τον εντοπισμό βοηθητικής γραμμής

Στην Δραστηριότητα 3 οι δύο ομάδες κλήθηκαν να αποδείξουν την υποθετική πρόταση που είχαν διατυπώσει τόσο σε μια ειδική περίπτωση όσο και στη γενική. Η γενική απόδειξη ενείχε την δυσκολία της αφαίρεσης ορισμένων υποθέσεων που ίσχυαν στην ειδική και έτσι και οι δύο ομάδες αντιμετώπισαν κάποια δυσκολία κατά την αποδεικτική διαδικασία. Η Ομάδα Α κατέφυγε στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού και μέσα από την εργασία σε αυτό εντόπισε ένα κρίσιμο ευθύγραμμο τμήμα, μια βοηθητική γραμμή της οποίας οι ιδιότητες σε συνδυασμό με τις υποθέσεις που είχαν ανακαλύψει προηγουμένως οδήγησαν στην τελική απόδειξη. Οι ενέργειες των μαθητριών της ομάδας αυτής αναλύονται παρακάτω στο Επεισόδιο 1. Επιγραμματικά αναφέρεται ότι η Ομάδα Β εστίασε στο μαθηματικό χαρακτήρα των Χ-γραμμών και ανακαλώντας το θεώρημα σύμφωνα με το οποίο οι τρεις μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου συντρέχουν, απέδειξε πιο άμεσα -αλλά με πολλαπλές αποτυχημένες απόπειρες προηγουμένως- το ζητούμενο.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 1: Απόδειξη υποθετικής πρότασης στην γενική περίπτωση με την εμφάνιση βοηθητικής γραμμής και την αξιοποίηση υποθέσεων που αναδύθηκαν κατά τη συνέργεια

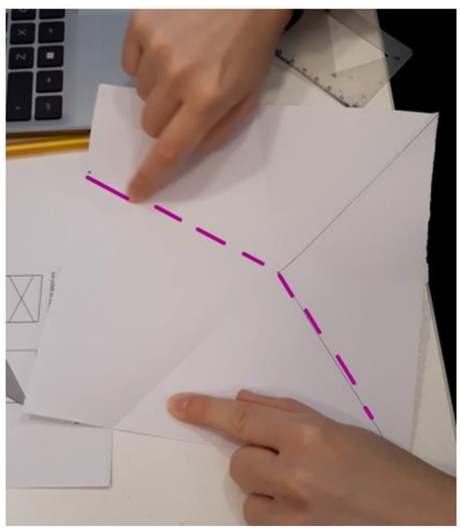
Σε αυτό το επεισόδιο οι μαθήτριες εργάζονται πάνω στην τελική τυπική απόδειξη του ισχυρισμού ότι το σημείο τομής κάθε ζεύγους Χ-γραμμών είναι σημείο της μεσοκαθέτου της πάνω και κάτω πλευράς του τετραγώνου. Καθ' όλη τη διερευνητική και αποδεικτική διαδικασία παρατηρείται μια αλληλεπίδραση των δύο πεδίων με το καθένα να συμβάλλει με το δικό του τρόπο στην απόδειξη και συνολικά να χτίζεται μια αλυσίδα νοημάτων μέσα από την συνέργειά τους. Στη συνέχεια περιγράφεται η εργασία των μαθητριών στο χειραπτικό και ψηφιακό μέσο, η οποία σε κάθε περίπτωση κατευθύνει τη διαδοχική εργασία στο άλλο πεδίο.

Η πρώτη ενέργεια των μαθητριών όταν τους ζητείται να αποδείξουν τον ισχυρισμό στη γενική περίπτωση είναι να σύρουν το τυχαίο σημείο Ε σε μια τυχαία θέση (pivot sign-GSP) και να τονίσουν ότι και πάλι πρέπει να αποδείξουν την ισότητα των αποστάσεων του σημείου τομής από τις κορυφές αλλά τώρα δεν είναι το ίδιο εύκολο *«Μ1:Γιατί πριν είχαμε μια ιδιότητα της διαγωνίου»* (mathematical sign). Με αυτόν τον τρόπο αναγνωρίζουν ότι στη γενική περίπτωση έχουμε λιγότερες υποθέσεις αλλά το ίδιο τελικό συμπέρασμα, γεγονός που συμβάλλει στην κατανόηση της διάκρισης ειδικού-γενικού και στην συνειδητοποίηση ότι μια γενικευμένη απόδειξη συνήθως ακολουθεί διαφορετική αποδεικτική διαδικασία από την ειδική. Επιπλέον, δυσκολευόμενες να εντοπίσουν κάποιο τρόπο απόδειξης του ζητούμενου, παρατηρούν ότι μπορούν ισοδύναμα να αποδείξουν την ισότητα ΖΔ=ΖΓ (αντί της ΖΑ=ΖΒ), και κατ' επέκταση ότι το ΖΔΓ είναι ισοσκελές (Εικόνα 52), κάτι που τους φαίνεται πιο οικείο. Επομένως, παρατηρείται αρχικά μια διαλογική γένεση του πεδίου GSP που συνεισφέρει στην κατανόηση της γενικής περίπτωσης και επιπλέον, σε συνδυασμό με την εργαλειακή διάσταση, στον εντοπισμό της μεθόδου απόδειξης.



Εικόνα 52

Οι μαθήτριες έπειτα από τον προσδιορισμό της προς απόδειξη ισότητας τμημάτων επιστρέφουν στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού. Επαναλαμβάνοντας τις διπλώσεις πάνω σε ένα συγκεκριμένο αλλά τυχαίο ζεύγος Χ-γραμμών διερευνούν γεωμετρικές σχέσεις που σχετίζονται με τα αντίστοιχα των τμημάτων ΖΔ, ΖΓ. Αρχικά, κάνοντας κατάλληλη δίπλωση παρατηρούν ότι πράγματι τα τμήματα αυτά ταυτίζονται, επικυρώνοντας έτσι τον ισχυρισμό της συγκεκριμένης ισότητας στο χειραπτικό μέσο (pivot sign-δίπλωση). Στη συνέχεια, και πάλι μέσα από τις διπλώσεις πάνω στις Χ-γραμμές, παρατηρούν ότι τα αντίστοιχα των ΖΔ, ΖΕ και ΖΓ, ΖΕ είναι ανά δύο ίσα (Εικόνα 53) (pivot sign-δίπλωση).



Εικόνα 53: Η Μ1 δείχνει τα αντίστοιχα των τμημάτων ΖΔ, ΖΕ που υποστηρίζει ότι είναι ίσα

Έτσι, σε διαλογικό επίπεδο, αξιοποιώντας την λογική πρόταση «αν α=β και β=γ τότε α=γ» οι μαθήτριες αποδεικνύουν εμπειρικά την ζητούμενη ισότητα τμημάτων (mathematical sign).

Ε	Και πώς μας βοήθησε αυτό το ΖΕ;
Μ2	Α να αποδείξουμε ότι αυτές οι δύο είναι ίσες *[δείχνει στο χαρτί τα αντίστοιχα των ΖΔ, ΖΓ]*
	Είδαμε αν ταυτίζονται
Ε	Αυτές οι δύο; *[δείχνω στο χαρτί τα αντίστοιχα των ΖΔ, ΖΓ]*
Μ2	Όχι, με αυτή *[δείχνει στο χαρτί την αντίστοιχη της ΖΕ]*

	Και η άλλη ταυτίζεται ξανά με την ΖΕ και αφού η ΖΕ είναι ίση με τη μια και ίση με την άλλη, θα είναι ίσες

Μέσα από την εργασία τους στο πεδίο της δίπλωσης εμφανίζεται επομένως μια βοηθητική γραμμή, το τμήμα που ενώνει το αρχικό τυχαίο σημείο με το σημείο τομής των Χ-γραμμών. Είναι, λοιπόν, εμφανής η συμβολή αυτής της σημειωτικής και εργαλειακής διάστασης του πεδίου της δίπλωσης στην εύρεση στοιχείων για τη γενική απόδειξη και στην απόδειξη αυτή καθ' εαυτή, αντίστοιχα.

Η μαθηματική αιτιολόγηση της ισότητας των δύο τμημάτων πηγάζει από την συνέργεια των δύο μέσων κατά τη μεταφορά των Χ-γραμμών από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο. Ειδικότερα, μέσω της συνέργειας αυτής είχαν νοηματοδοτηθεί οι Χ-γραμμές ως μεσοκάθετοι των τμημάτων με άκρα την μια κάτω κορυφή του τετραγώνου και το τυχαίο σημείο. Έτσι, ανακαλώντας αυτή την ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου και τονίζοντας την το ότι το Ζ αποτελεί κοινό σημείο δύο τέτοιων γεωμετρικών τόπων, οι μαθήτριες αποδεικνύουν τελικά το ζητούμενο.

Μ2	Ότι το ΖΕ είναι ίσο με το ΖΓ
Μ1	[σύρει το Ε]
Ε	Ωραία, αυτό γιατί ισχύει;
Μ2	Γιατί είναι σημείο στη μεσοκάθετο
Μ2	Α! και αυτό είναι ίσο με αυτό [δείχνει το ΖΕ και ΖΔ] γιατί είναι επίσης σημείο στην άλλη μεσοκάθετο, άρα αυτά είναι ίσα [δείχνει τα ΖΔ, ΖΓ]
	Το βρήκαμε!

Επομένως, η τυπική αυτή απόδειξη είναι αποτέλεσμα της σημειωτικής αλυσίδας που αναδύθηκε μέσα από προηγούμενη συνέργεια των δύο ΜΠΕ με προσθήκη νέων σημείων σχετικών με τη βοηθητική γραμμή: σύρσιμο σε τυχαίο σημείο (pivot sign-GSP) → διπλώσεις πάνω στις Χ-γραμμές τυχαίου σημείου (pivot sign-δίπλωση) → «αφαίρεση» μιας ιδιότητας με μη γενική ισχύ/αλλαγή αποδεικτικής διαδικασίας (mathematical sign) → ταύτιση τμημάτων μέσα από διπλώσεις/ ανάδυση βοηθητικής γραμμής (pivot sign-δίπλωση) → ανάκληση ιδιότητας μεσοκαθέτων και χρήση λογικού σχήματος «αν α=β και β=γ τότε α=γ» (mathematical sign).

Όπως φάνηκε επομένως, στο παραπάνω επεισόδιο, η συνέργεια των δύο ΜΠΕ που είχε προηγηθεί της αποδεικτικής διαδικασίας είχε θέσει τα θεμέλια για την κατασκευή από την ομάδα της τελικής απόδειξης. Ωστόσο, η ανάγκη εύρεσης νέων δεδομένων/υποθέσεων ώθησε τις μαθήτριες να εργαστούν ξανά στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού όπου και εντόπισαν μια βοηθητική γραμμή που έπαιξε πρωταγωνιστικό ρόλο στην τυπική απόδειξη. Η σημειωτική αλυσίδα αποτελεί μια εξέλιξη της προηγούμενη συνεργικής σχέσης με προσθήκη των νέων σημείων που αφορούν στη βοηθητική γραμμή.

5.3.4 Απόπειρα απόδειξη με την αξιοποίηση νέου πεδίου εργασίας

Ένα μη αναμενόμενο φαινόμενο αποτέλεσε η ανάγκη των μαθητριών της Ομάδας Α κατά τη Δραστηριότητα 1 να μεταφέρουν με ένα πρόχειρο σχήμα την κατασκευή τους από το GSP στο περιβάλλον χαρτί -μολύβι. Το συγκεκριμένο επεισόδιο – που αντίστοιχό του δεν παρατηρήθηκε στην εμπλοκή της ομάδας με τις υπόλοιπες δραστηριότητες, αλλά ούτε και στην Ομάδα Β – αναλύεται παρακάτω.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 1: Απόπειρα απόδειξης με μεταφορά της κατασκευής και των γεωμετρικών σχέσεων και ιδιοτήτων στο περιβάλλον χαρτί -μολύβι

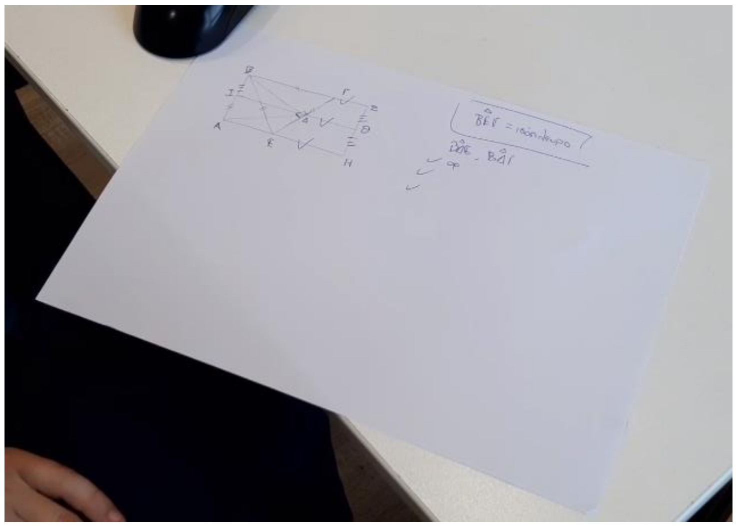
Έχοντας επικυρώσει τον ισχυρισμό τους τόσο στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού όσο και στο GSP, οι μαθήτριες συζητούν σχετικά με την αποδεικτική πορεία που θα ακολουθήσουν, εργαζόμενες μόνο στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού. Οι διάλογοί τους φανερώνουν πως βρίσκονται στο διαλογικό επίπεδο του πεδίο αυτού καθώς αντιμετωπίζουν τα διάφορα σημεία του χαρτιού (artefact signs) ως καθαρά μαθηματικά αντικείμενα με ιδιότητες (mathematical signs). Αφού αρχικά αναφέρουν δύο βασικούς τρόπους απόδειξης -είτε να αποδείξουν ότι οι 3 πλευρές είναι ίσες είτε ότι κάθε γωνία είναι 60 μοίρες- καταλήγουν επηρεασμένες από την προηγούμενη εμπλοκή τους με τη δίπλωση του χαρτιού, κατά την οποία ασχολούνταν μόνο με πλευρές, να ακολουθήσουν τον πρώτο τρόπο.

Μ1	Πώς; Ποια διαδικασία ακολουθήσαμε ακριβώς;
Μ2	Πού να θυμάμαι; Πήγαμε με σύγκριση, δηλαδή… βασικά με μέτρηση πήγαμε πριν και τις είπαμε ίσες… ή με το μάτι
Μ1	*[παίρνει το Α4 και κάνει τη 2η δίπλωση]*
	Όχι, κάναμε αυτό εδώ. Αυτό πώς θα το…
Μ2	Ναι, αυτό που διπλώναμε

Μέσω των διπλώσεων προσπαθούν να οργανώσουν σε θεωρητικό επίπεδο την οπτική ανατροφοδότηση που λαμβάνουν εστιάζοντας σε ισότητες τμημάτων που θα τις οδηγήσουν και στις ζητούμενες. Τέλος, η διαλογική διεργασία γίνεται φανερή καθώς οι μαθήτριες αναφέρονται σε θεωρητικές μεθόδους σύγκρισης και ισότητας τριγώνων. Φαίνεται πως απομακρύνονται από την εμπειρική διερεύνηση παρόλο που την αξιοποιούν ως οδηγό για τα βήματα της απόδειξης.

Έχοντας επιλέξει τον τρόπο που θα εργαστούν κατά την τυπική αποδεικτική διαδικασία παρατηρείται η ανάγκη των μαθητριών να εργαστούν σε ένα διαφορετικό πεδίο εργασίας από αυτό του GSP και του πεδίο της δίπλωσης. Σκέφτηκαν να αποδείξουν το ζητούμενο (ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο) χρησιμοποιώντας τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και προσπαθούσαν να βρουν κατάλληλα τρίγωνα, κάτι που φαίνεται ότι τις δυσκόλευε. Αποφασίζουν επομένως να μεταφέρουν την κατασκευή τους με ένα πρόχειρο σχήμα στο περιβάλλον χαρτί – μολύβι (artefact sign-χαρτί/μολύβι), αλλάζοντας στη ουσία *register* (Εικόνα 54).

M2	Να κάνουμε το σχήμα μας εδώ;
Ε	Τι; Τι;
M1	Αυτό ναι
M2	Να κάνουμε το σχήμα στο χαρτί
Ε	Θα βοηθήσει;
M2	Δεν ξέρω, θα δούμε
M1	Αυτό πήγα να κάνω
M2	Κάντο



Εικόνα 54

Το γεγονός αυτό της εμφάνισης ενός νέου ΜΠΕ προκειμένου να επιτευχθεί η απόδειξη, υποδηλώνει την περιορισμένη σημειωτική αλλά και εργαλειακή διάσταση του GSP όσον αφορά την παραγωγή μιας τυπικής απόδειξης. Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται ότι το πεδίο GSP δεν παρέχει τη δυνατότητα αυτών που ο Duval ονομάζει *treatment* και *conversion*, δηλαδή από τη μια να εργαστούν πάνω στην ίδια την κατασκευή -σημειώνοντας πιθανώς ισότητες κ.ά. – και από την άλλη από την κατασκευή που βλέπουν στην οθόνη τους να μεταφέρουν τη μαθηματική δραστηριότητα στο χαρτί-μολύβι για την καταγραφή της τυπικής απόδειξης. Για αυτό, οι μαθήτριες επιλέγουν να μεταβούν από το ψηφιακό περιβάλλον στο περιβάλλον χαρτί -μολύβι που είναι ένα register που επιτρέπει αυτές τις ενέργειες. Ωστόσο, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτή η μετάβαση απομακρύνει από τα σημεία που μεταφέρουν στο χαρτί τους την αυστηρή μαθηματική τους υπόσταση, καθώς δεν έχουν κατασκευαστεί με γεωμετρικά εργαλεία, αποτελώντας έτσι artefact sign αλλά με αυξημένη εργαλειακή δυνατότητα.

M1	Ωραία και πού θα μας βοηθήσει αυτό που κάναμε;
M2	**Να μπορούμε να γράφουμε πάνω στο σχήμα μας**

Αυτό που παρατηρήθηκε ωστόσο, είναι η επιστροφή στα δύο προηγούμενα ΜΠΕ, το χειραπτικό και ψηφιακό μέσο και η μεταξύ τους συνέργεια. Πράγματι, οι μαθήτριες ανακαλούσαν υποθέσεις και δεδομένα που είχαν ανακαλύψει κατά την μεταφορά της κατασκευής από το πεδίο της δίπλωσης στο ψηφιακό μέσο, επαναλαμβάνοντας κάποιες φορές ορισμένες διπλώσεις για να επιβεβαιωθούν. Επομένως, αναζητούν μέσα από την αλληλεπίδραση του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού και του πεδίου GSP γεωμετρικές σχέσεις ώστε να τις μεταφέρουν στην πρόχειρη κατασκευή τους στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και έπειτα να γράψουν την σύγκριση δύο τριγώνων που θεωρούσαν απαραίτητη για την τελική απόδειξη. Ο ρόλος συνεπώς του περιβάλλοντος χαρτί- μολύβι ήταν να αποτελέσει ένα μέσο για τη σαφή αποτύπωση των ευρημάτων των μαθητριών ώστε να τους είναι περισσότερο εύκολος ο χειρισμός τους και οι λογικές μεταξύ τους συνδέσεις. Στο επεισόδιο αυτό δεν αναφέρεται κάποια σημειωτική αλυσίδα, καθώς παρέμεινε η ίδια με αυτή που είχε αναδυθεί σε προηγούμενη φάση της δραστηριότητας και αρκούσε εντέλει για την απόδειξη της συγκεκριμένης υποθετικής πρότασης από την Ομάδα Α.

Σύνοψη 3ης κατηγορίας επεισοδίων

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της ενότητας 5.3, αρχικά είναι σημαντικό να τονισθεί ότι και οι δύο ομάδες κατάφεραν να αποδείξουν την υποθετική πρόταση και στις τρεις δραστηριότητες με ποικίλους βέβαια τρόπους τόσο ως προς την ομάδα όσο και ως προς τη φύση της εκάστοτε δραστηριότητας. Επιπλέον, όπως έχει τονισθεί και προηγουμένως, οι μαθητές/-ριες δεν είχαν διατυπωμένη μια υποθετική πρόταση της μορφής «αν… τότε» παρά μόνο το συμπέρασμα/ εικασία τους και ο υποθέσεις είχαν αναδυθεί αλλά όχι καταγραφεί σε στάδια προηγούμενα της απόδειξης. Παρατηρήθηκε, λοιπόν, σε όλα τα επεισόδια η καθοριστική συμβολή της συνέργειας των δύο ΜΠΕ στην ανακάλυψη ιδιοτήτων που χρησιμοποιήθηκαν τελικά στην αποδεικτική διαδικασία. Ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα είναι επίσης το γεγονός ότι σε περιπτώσεις δυσκολίας στην απόδειξη ή ανάγκης εντοπισμού νέων υποθέσεων οι ομάδες επέστρεφαν στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού και εργάζονταν κυρίως στο εργαλειακό του επίπεδο. Αυτό φάνηκε είτε με την αναζήτηση νέων δεδομένων για τα υπάρχοντα σημεία του πεδίου, είτε με την εμφάνιση βοηθητικής γραμμής είτε ακόμα και με την αξιοποίηση των χαρακτηριστικών αυτού καθ’ εαυτού του φύλλου Α4. Παράλληλα, στο τελευταίο αυτό στάδιο φαίνεται η «απενεργοποίηση» θα λέγαμε του ρόλου του GSP, μιας και σε αυτή τη διαδικασία δεν ήταν απαραίτητος ο δυναμικός χαρακτήρας του ψηφιακού πεδίου. Ωστόσο, για να είναι σαφές, κρίνεται πως θα ήταν αδύνατο να υπάρξει τυπική απόδειξη χωρίς τη συνέργεια του χειραπτικού με το ψηφιακό μέσο.

Κεφάλαιο 6 - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα έρευνα μελετήθηκε η συνέργεια δύο ΜΠΕ, του χειραπτικού πεδίου της δίπλωσης χαρτιού και του ΠΓΔ Geometer's Sketchpad κατά την εμπλοκή μαθητών/-ριών Α' Λυκείου με την παραγωγή και διερεύνηση υποθετικών προτάσεων «αν…τότε» και την απόδειξή τους. Στις τρεις δραστηριότητες της έρευνας οι μαθητές/-ριες πειραματίστηκαν αρχικά με συγκεκριμένες διπλώσεις στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού και διαμόρφωσαν εμπειρικά εικασίες σχετικά με το τελικό οπτικό αποτέλεσμα. Ακολούθως, κλήθηκαν να μεταφέρουν την κατασκευή τους από το χειραπτικό μέσο στο ψηφιακό και να εξετάσουν εκ νέου την ισχύ της εικασίας τους. Στο τελικό στάδιο των δραστηριοτήτων ζητήθηκε από τις δύο ομάδες που συμμετείχαν να προβούν σε μια τυπική παραγωγική απόδειξη της υποθετικής τους πρότασης. Η μελέτη της συνέργειας των δύο ΜΠΕ εστιάστηκε στο είδος των αλληλεπιδράσεων μεταξύ χειραπτικού και ψηφιακού μέσου μέσα από την ιχνηλάτηση της επικοινωνίας των τριών επιπέδων του κάθε ΜΠΕ (σημειωτικό, εργαλειακό, διαλογικό) και των διαπλεκόμενων νοημάτων όπως αυτά εκφράστηκαν και οργανώθηκαν με την αξιοποίηση των σημειωτικών αλυσίδων. Συνθέτοντας τα ευρήματα της ανάλυσης των δεδομένων εντοπίστηκαν 3 κατηγορίες συμβολής της συνέργειας, οι οποίες και αναλύονται ακολούθως.

6.1 Διπλή νοηματοδότηση των μαθηματικών αντικειμένων

Ένα από τα ευρήματα της ανάλυσης των αποτελεσμάτων είναι ο ρόλος που έπαιξε η διπλή νοηματοδότηση των μαθηματικών αντικειμένων στο διαλογικό επίπεδο του κάθε ΜΠΕ στο πώς οι μαθητές/-ριες συγκροτούν τις υποθετικές προτάσεις και δομούν την τυπική τους απόδειξη. Ειδικότερα, οι διπλές νοηματοδοτήσεις, όπως αυτές θα οριστούν ακολούθως, συνέβαλαν στην ανάδυση μιας ποικιλίας υποθέσεων – δεδομένων της υποθετικής πρότασης και, όπως φάνηκε έμπρακτα κατά την απόδειξη από τους/τις μαθητές/-ριες, η δυνατότητα αξιοποίησής τους οδήγησε στην ανάκληση ποικίλων θεωρημάτων και γεωμετρικών προτάσεων που δόμησαν τελικά την τυπική απόδειξη.

Η εργασία των ομάδων ξεκινούσε και στις τρεις δραστηριότητες με τον πειραματισμό και την πραγματοποίηση συγκεκριμένων διπλώσεων στο σημειωτικό και εργαλειακό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού. Η μεταφορά της κάθε δίπλωσης που δινόταν στο φύλλο οδηγιών απαιτούσε την οπτικοποίηση της εκάστοτε τσάκισης ώστε αυτή να μπορεί να υλοποιηθεί στο φύλλο χαρτί από τους/τις ίδιους/-ες μαθητές/-ριες. Μέσα από αυτή τη χειραπτική δραστηριότητα οι ομάδες απέδιδαν κάποιο μαθηματικό νόημα στα εμπλεκόμενα σημεία (τσακίσεις) του οποίου η αιτιολόγηση ήταν εμπειρικής φύσεως. Έτσι, αναδύθηκαν στο διαλογικό επίπεδο νέα αντικείμενα, τα σημεία επιφορτισμένα τώρα με κάποιο μαθηματικό νόημα. Αυτό που παρατηρήθηκε σε ορισμένα επεισόδια συνέργειας είναι ότι η ανάγκη αναπαράστασης των τσακίσεων στο ψηφιακό περιβάλλον φώτισε διαφορετικές πτυχές του ίδιου αντικειμένου, με αποτέλεσμα η ενσάρκωση της νέας νοηματοδότησης στο σημειωτικό επίπεδο του GSP να είναι ένα σημείο διαφορετικό από αυτό στο πεδίο της δίπλωσης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το Επεισόδιο 1 της ενότητας 6.1.1 όπου η ομάδα νοηματοδοτεί αρχικά στο πεδίο της δίπλωσης την συγκεκριμένη τσάκιση ως μεσοπαράλληλο δύο απέναντι πλευρών του φύλλου Α4 εστιάζοντας στην ιδιότητα της συμμετρίας, ενώ στη συνέχεια, προκειμένου να μεταφέρουν την τσάκιση στο GSP μεταχειρίζονται την ίδια ευθεία εστιάζοντας στην ιδιότητά της να είναι κάθετη και να διέρχεται από τα μέσα των δύο άλλων πλευρών του ορθογωνίου. Σημαντικό επεισόδιο στο οποίο εκφράστηκε επίσης ρητά η διπλή νοηματοδότηση μέσω της συνέργειας, αποτελεί η εμπλοκή με την έννοια του γεωμετρικού τόπου. Ειδικότερα, οι επιτρεπόμενες ενέργειες του κάθε ΜΠΕ και οι επιλογές δράσης των μαθητών/-ριων οδήγησαν στην τελευταία δραστηριότητα στη διπλή θεώρηση του γεωμετρικού τόπου: ως σύνολο άπειρων σημείων με κοινή ιδιότητα και ως μία ολότητα, ένα μαθηματικό αντικείμενο που συνολικά φέρει ιδιότητες.

Η διπλή νοηματοδότηση μαθηματικών αντικειμένων έγινε ορατή μέσα από το είδος και τη δομή των σημειωτικών αλυσίδων των επεισοδίων στα οποία εντοπίστηκε. Στις περιπτώσεις αυτές οι σημειωτικές αλυσίδες ήταν απλές με προσανατολισμό από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο και οδηγούσαν από ένα αρχικό προσωπικό νόημα συνδεδεμένο με το πεδίο της δίπλωσης σε ένα μαθηματικό νόημα και τελικά στην ανάδυση ιδιοτήτων αυτού που θα ήταν χρήσιμες για την κατασκευή του αντίστοιχου σημείου (sign) στο GSP. Επιπλέον, ο τρόπος σύνδεσης των νοημάτων στις σημειωτικές αλυσίδες ανέδειξε ότι οι εργαλειακές και διαλογικές συνιστώσες των δύο ΜΠΕ διαδραμάτισαν πρωταγωνιστικό ρόλο στην ενθάρρυνση των διπλών νοηματοδοτήσεων.

Υποστηρίζεται ότι οι διαφορετικές πτυχές του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου που φωτίστηκαν μέσα από την εμπλοκή με τα δύο διαφορετικά ΜΠΕ σχετίζονται στενά με τη φύση των τεχνουργημάτων και τις ενέργειες που επιτρέπει το καθένα. Ειδικότερα, στην συγκεκριμένη περίπτωση της νοηματοδότησης αντικειμένων, στην περίπτωση του πεδίου της δίπλωσης ήταν ήδη κατασκευασμένη η τσάκιση που αντιστοιχεί στο μαθηματικό αντικείμενο και η απόδοση νοήματος βασιζόταν κατά βάση στην παρατήρηση των ιδιοτήτων της συμμετρίας. Από την άλλη, στο ψηφιακό περιβάλλον χρειαζόταν οι ίδιοι/-ες οι μαθητές/-ριες να κατασκευάσουν το μαθηματικό αντικείμενο και επομένως ήταν αναγκαίο να εντοπίσουν εκείνες τις ιδιότητές του που θα μπορούσαν να αποτυπωθούν μέσα από κατάλληλες εντολές του GSP.

6.2 Διπλή επικύρωση εικασιών

Αναφορικά με το ερευνητικό ερώτημα, η διπλή επικύρωση εικασιών ανέδειξε το ρόλο της συνέργειας των δύο ΜΠΕ στην πολύπλευρη θεώρηση των μαθηματικών σχέσεων (ισότητα, κοινή ιδιότητα σημείων γεωμετρικού τόπου), κατά αντιστοιχία με την πολύπλευρη θεώρηση των εμπλεκόμενων μαθηματικών αντικειμένων, και κατ' επέκταση στην ισχυροποίηση των λογικών συνδέσεων των υποθέσεων με το συμπέρασμα της υποθετικής πρότασης. Επιπλέον, οι μέθοδοι επικύρωσης που επιλέχθηκαν και ιδιαίτερα στην περίπτωση που γεωμετρικού τόπου της Δραστηριότητας 3 ενέπνευσαν τον τρόπο εκκίνησης της απόδειξης και συνολικά την αποδεικτική διαδρομή που ακολούθησαν οι ομάδες.

Πιο συγκεκριμένα, μια δεύτερη πτυχή της συνέργειας των δύο ΜΠΕ αναδύθηκε μέσα από τη συμβολή της αλληλεπίδρασής τους κατά την διερεύνηση και επικύρωση της ισχύος των εικασιών που διαμόρφωσαν οι ομάδες στην εκάστοτε δραστηριότητα. Έπειτα από την ολοκλήρωση των ζητούμενων διπλώσεων οι μαθητές/-ριες κλήθηκαν να διαμορφώσουν μια εικασία σχετικά με το τελικό οπτικό αποτέλεσμα και εν συνεχεία να την επικυρώσουν ή να την απορρίψουν εργαζόμενοι/-ες αποκλειστικά στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού. Την ολοκλήρωση της μεταφοράς της κατασκευής με ανθεκτικό τρόπο στο ψηφιακό περιβάλλον επίσης ακολούθησε το αίτημα για έλεγχο της ίδιας εικασίας αξιοποιώντας όμως εργαλεία του GSP. Υποστηρίζεται ότι η διπλή αυτή επικύρωση μιας συγκεκριμένης εικασίας αναδεικνύει την αντιστοίχιση και την συμπληρωματικότητα των μεθόδων που χρησιμοποίησαν οι μαθητές/-ριες στο εργαλειακό επίπεδο των δύο ΜΠΕ, φωτίζοντας σε κάθε περίπτωση διαφορετικές νοηματοδοτήσεις μαθηματικών αντικειμένων και σχέσεων σε διαλογικό επίπεδο. Ο διάλογος αυτός μεταξύ των μεθόδων επικύρωσης γίνεται φανερός μέσα από δύο κεντρικά ζητήματα που αντιμετώπισαν οι ομάδες: τον έλεγχο της ισότητας τμημάτων και τον έλεγχο της κοινής ιδιότητας των σημείων ενός γεωμετρικού τόπου. Από τη μια, όσον αφορά τον έλεγχο της ισότητας, στο σημειωτικό και εργαλειακό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού αυτός έγινε με την αντιμετώπιση της ισότητας ως *ταύτιση* ενώ στα αντίστοιχα επίπεδα του GSP η ισότητα γινόταν αντιληπτή ως *ισότητα ίσων μηκών έπειτα από μέτρηση*. Από την άλλη, σχετικά με την επικύρωση της εικασίας στη Δραστηριότητα 3 ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος ενός τμήματος, στο πεδίο της δίπλωσης παρατηρήθηκαν δύο μέθοδοι ελέγχου. Πρώτον, στο εργαλειακό επίπεδο η κατασκευή ενός ακόμα ζεύγους Χ-γραμμών με στόχο την επιβεβαίωση ότι μια ακόμα περίπτωση οδηγεί σε οπτικά αποτελέσματα όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις που είχαν εξεταστεί και δεύτερον η πραγματοποίηση μιας κατάλληλης δίπλωσης ώστε να εμφανιστεί το αντικείμενο που αντιστοιχεί στον υπό εξέταση γεωμετρικό τόπο και η ταυτόχρονη παρατήρηση του κατά πόσο τα σημεία που έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα βρίσκονται πάνω στο αντικείμενο αυτό. Οι δύο αυτές μέθοδοι που αναδύθηκαν στο πεδίο της δίπλωσης βρίσκονται σε αντιστοιχία με τις μεθόδους που παρατηρήθηκαν στο πεδίο GSP. Η πρώτη μέθοδος αντιστοιχίζεται με την αξιοποίηση του εργαλείου του ίχνους στο εργαλειακό επίπεδο του GSP με το οποίο ουσιαστικά κατασκευάζεται στην οθόνη ο γεωμετρικός τόπος από τις επιμέρους μεμονωμένες περιπτώσεις- σημεία. Η δεύτερη μέθοδος βρίσκεται σε συμφωνία με τη δεύτερη μέθοδο επικύρωσης στο χαρτί, καθώς στο εργαλειακό επίπεδο του GSP κατασκεύασαν το αντικειμένου που θεωρούσαν οι μαθητές/-ριες ότι αποτελεί το γεωμετρικό τόπο και παρατήρησαν το κατά πόσο σημεία που έχουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα βρίσκονται πάνω σε αυτό κατά το σύρσιμο ενός κατάλληλου σημείου. Η συμπληρωματικότητα των διπλών επικυρώσεων θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε διαλογικό επίπεδο αποτελεί προέκταση της διπλής νοηματοδότησης μαθηματικών αντικειμένων που αναφέρθηκε παραπάνω.

Οι διπλές επικυρώσεις των εικασιών εκφράστηκαν μέσα από σημειωτικές αλυσίδες οι οποίες είχαν ως αφετηρία κάποιο αρχικό μαθηματικό νόημα που στηριζόταν στην αντιληπτική ικανότητα των συμμετεχόντων, ακολουθούσαν σημεία συνδεδεμένα με το χειραπτικό μέσο και τέλος σημεία συνδεδεμένα με το ψηφιακό μέσο. Η αναφορά σε ορισμούς και θεωρητικά στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και η αναζήτηση μεθόδων επικύρωσης οδήγησαν σε έναν κεντρικό ρόλο του εργαλειακού και διαλογικού επιπέδου των δύο ΜΠΕ. Είναι σημαντικό να τονισθεί ότι στην συγκεκριμένη έκφραση της συνέργειας που περιγράφεται σε αυτή την ενότητα τα δύο ΜΠΕ είχαν ισότιμο ρόλο και η εκκίνηση από το χειραπτικό μέσο δεν υπονοεί μεγαλύτερη συνεισφορά αυτού του μέσου.

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, έτσι και στην παρούσα, γίνεται εμφανής η διεύρυνση των επιλογών δράσης των μαθητών/-ριών μέσα από την ευχέρεια αξιοποίησης των διαφορετικών δυνατοτήτων που προσφέρουν τα δύο ΜΠΕ. Όπως φάνηκε ωστόσο, οι διαφορετικές επιτρεπόμενες ενέργειες του κάθε ΜΠΕ δεν λειτουργούν ανεξάρτητα αλλά αλληλοσυμπληρώνονται με οδηγό έναν κοινό στόχο -στην προκειμένη την επικύρωση εικασιών- εμπλουτίζοντας τα τελικά εργαλεία που έχουν στη διάθεσή τους οι μαθητές/-ριες.

6.3 Νοηματοδότηση των συνδέσεων ανάμεσα σε σημεία και ενέργειες στα δύο ΜΠΕ

Η σύνδεση σημείων και ενεργειών του ψηφιακού πεδίου με αντίστοιχα του χειραπτικού διαδραμάτισε καθοριστικό ρόλο στη συνειδητοποίηση της λογικής εξάρτησης των υποθέσεων και του συμπεράσματος μιας υποθετικής πρότασης. Οι μαθητές/-ριες κατάφεραν να φθάσουν οι ίδιες σε αυτή τη σημαντική μαθηματική αρχή ξεκινώντας από τον εμπειρικό πειραματισμό σε εργαλειακό κυρίως επίπεδο και βλέποντας στην πράξη τις συνέπειες τόσο στην χειραπτική όσο και στην ψηφιακή κατασκευή της αφαίρεσης ή προσθήκης ενός δεδομένου. Ακολουθεί η περιγραφή αυτής της κατηγορίας της συμβολής της συνέργειας όσον αφορά στη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ σημείων και μεταξύ ενεργειών στα δύο ΜΠΕ.

Η αναζήτηση σε ένα ΜΠΕ των σημείων που αντιστοιχούν σε σημεία του άλλου ΜΠΕ αποτέλεσε μια εργασία των ομάδων σε σημειωτικό επίπεδο η οποία εμφανίστηκε σε μεγάλο βαθμό ιδίως κατά την μεταφορά της κατασκευής από το χειραπτικό μέσο στο ψηφιακό. Η ανάγκη αντιστοίχισης σημείων φάνηκε ότι πυροδοτούνταν από την ανάγκη εντοπισμού κατασκευαστικών εξαρτήσεων μεταξύ διαφόρων αντικειμένων ώστε να μεταφερθεί με ανθεκτικό τρόπο η κατασκευή στο GSP. Η τριβή των ομάδων βέβαια με αυτές τις κατασκευαστικές συσχετίσεις δομούσε υπόρρητα στο διαλογικό επίπεδο των δύο ΜΠΕ λογικές εξαρτήσεις μεταξύ των υποθέσεων-δεδομένων της υποθετικής πρότασης.
Πέρα από την αντιστοίχιση σημείων, μια συμβολή της συνεργικής σχέσης των δύο ΜΠΕ ήταν η αντιστοίχιση ενεργειών που πραγματοποιούσαν οι μαθητές/-ριες στο εργαλειακό

επίπεδο καθενός από τα δύο ΜΠΕ. Το ερευνητικό αυτό εύρημα αναδύθηκε κατά την εμπλοκή με τη Δραστηριότητα 2 και συγκεκριμένα με την ανάγκη διερεύνησης και διαχείρισης από τις ομάδες των αντιφατικών αποτελεσμάτων που είχε σχεδιαστεί να εμφανιστούν στο διπλωμένο χαρτί και στην οθόνη. Χωρίζοντας τη συνολική ενασχόληση της ομάδας Α με την συγκρουσιακή αυτή κατάσταση σε τρεις φάσεις, (α) αντίληψη της αντίφασης, (β) εμπειρική διερεύνηση της αιτίας της αντίφασης και (γ) μαθηματική αιτιολόγηση της αιτίας της αντίφασης, παρατηρήθηκε ότι σε κάθε μια από αυτές η συνέργεια οδήγησε σε τρεις διαφορετικές αντιστοιχίσεις ενεργειών. Στην (α), ενθάρρυνε την αντιστοίχιση σε σημειωτικό και εργαλειακό επίπεδο της ταύτισης τμημάτων στο διπλωμένο χαρτί με την μέτρηση τμημάτων στο ψηφιακό μέσο, στην (β) τη σύνδεση σε εργαλειακό επίπεδο της διερεύνησης μέσω συρσίματος με την ανάγκη χρήσης των «χειραπτικών αντιπαραδειγμάτων» και στη (γ) τη συσχέτιση σε εργαλειακό και διαλογικό επίπεδο του συρσίματος με διατήρηση των αναλογιών των πλευρών με τη δίπλωση φύλλων χαρτιού όμοιων με το Α4, αναδύοντας την ομοιότητα ορθογωνίων ως τη μαθηματική ερμηνεία της αντίφασης. Η αξιοποίηση των «χειραπτικών αντιπαραδειγμάτων» αποτελεί μια από τις περιπτώσεις όπου το πεδίο της δίπλωσης έπαιξε πρωταγωνιστικό ρόλο στη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των δύο πεδίων, δημιουργώντας τις προϋποθέσεις για να πραγματοποιηθεί επεισόδιο συνέργειας. Ο κρίσιμος ρόλος της δίπλωσης στη δημιουργία συνέργειας έγινε φανερός και στα επεισόδια που οι ομάδες εμφάνιζαν μια βοηθητική τσάκιση στο χαρτί η οποία συνεισέφερε τόσο στην απόδοση νοήματος σε σημεία εξαρτώμενα από αυτή όσο και στην αποδεικτική διαδικασία. Υποστηρίζεται ότι ο κεντρικός αυτός ρόλος του χειραπτικού μέσου στις φάσεις που προαναφέρθηκαν σχετίζεται με τη δυνατότητα του πεδίου της δίπλωσης να επιτρέπει εύκολους και γρήγορους απτικούς χειρισμούς και άμεσο οπτικό αποτέλεσμα της κάθε παρέμβασης σε αυτό.

Η συνθετότητα αυτής της διαδικασίας σύνδεσης σημείων αλλά και ενεργειών μεταξύ των δύο ΜΠΕ αποκαλύπτεται και μέσα από τη δομή των σημειωτικών αλυσίδων που καταγράφηκαν στα συγκεκριμένα επεισόδια. Σε όλες τις σχετικές σημειωτικές αλυσίδες, αφετηρία αποτελούν σημεία συνδεδεμένα με το χειραπτικό τεχνούργημα, ωστόσο ακολουθεί μια εναλλαγή σημείων από το ένα και το άλλο μέσο. Στις εναλλαγές αυτές πρωτοστατούν pivot signs ενώ ακόμα δεν παρατηρείται σε όλες τις περιπτώσεις η ανάδυση κάποιες μαθηματικής έννοιας. Τέλος, όπως φανερώνει το είδος της αλυσιδωτής σχέσης των σημείων σε αυτά τα επεισόδια, εξίσου σημαντικό ρόλο είχαν και τα τρία επίπεδα, σημειωτικό, εργαλειακό και διαλογικό, των ΜΠΕ.

Ακολουθεί ένας συγκεντρωτικός πίνακας με τη περιγραφή της κάθε κατηγορίας σχετικά με το ρόλο της συνέργειας, με τη δομή των σημειωτικών αλυσίδων, τα εμπλεκόμενα κάθε φορά επίπεδα των ΜΠΕ και τη συνεισφορά στην νοηματοδότηση της υποθετικής πρότασης και της απόδειξής της.

	Διπλή νοηματοδότηση μαθηματικών αντικειμένων	Διπλή επικύρωση εικασιών	Νοηματοδότηση των συνδέσεων ανάμεσα σε σημεία και ενέργειες στα δύο ΜΠΕ
Περιγραφή	Το αντικείμενο ως ολότητα που φέρει ιδιότητες (χαρτί) – το αντικείμενο ως αποτέλεσμα γεωμετρικών σχέσεων (GSP)	Συμπληρωματικότητα μεθόδων στα δύο ΜΠΕ Προέκταση των διπλών νοηματοδοτήσεων Το νόημα της ισότητας και του γεωμετρικού τόπου	Αντιστοίχιση σημείων/κατασκευαστικές εξαρτήσεις Σύνδεση ενεργειών κατά τη διερεύνηση αντιφατικών αποτελεσμάτων «Χειραπτικά αντιπαραδείγματα»
Σημειωτικές αλυσίδες (σ.α.)/ επίπεδα ΜΠΕ	Απλές σ.α. από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο Εργαλειακό και διαλογικό επίπεδο	Απλές σ.α. από ένα μαθηματικό νόημα, σε σημεία χειραπτικού και έπειτα σε σημεία του ψηφιακού Εργαλειακό και διαλογικό επίπεδο	Σύνθετες σ.α., αφετηρία νοήματα του χειραπτικού και έπειτα συνεχείς εναλλαγές νοημάτων από τα δύο ΜΠΕ, κυριαρχία pivot signs Σημειωτικό, εργαλειακό και διαλογικό επίπεδο
Νοηματοδότηση υποθετικής πρότασης και απόδειξης	Ποικιλία δεδομένων/υποθέσεων Ποικιλία θεωρημάτων/γεωμετρικών προτάσεων κατά την απόδειξη	Πολύπλευρη θεώρηση μαθηματικών σχέσεων Ισχυροποίηση των λογικών συνδέσεων των υποθέσεων με το συμπέρασμα Υπόδειξη τρόπου εκκίνησης απόδειξης	Δόμηση λογικών εξαρτήσεων Απτή κατανόηση της εξάρτησης του συμπεράσματος από τις υποθέσεις

Συνεισφορά της έρευνας

Ορισμένα από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας υποστηρίζεται ότι επιβεβαιώνουν προηγούμενες μελέτες σχετικά με το ρόλο των ΠΔΓ, των χειραπτικών μέσων ή/ και της συνέργειάς τους σε διαδικασίες μαθηματικής νοηματοδότησης. Οι τρεις δε κατηγορίες που αναλύθηκαν παραπάνω, προτείνουν μια νέα προσέγγιση της μελέτης της συνέργειας ενός χειραπτικού και ψηφιακού μέσου, έχοντας έναν προσθετικό χαρακτήρα στην περιορισμένη βιβλιογραφία όσον αφορά στο ζήτημα της νοηματοδότησης υποθετικών προτάσεων και της απόδειξής τους μέσα από τη συνεργική σχέση της δίπλωσης χαρτιού και ενός ΠΔΓ.

Παρατηρώντας συνολικά το τρόπο εμπλοκής των ομάδων και τις ενέργειές τους στα δοθέντας έργα, είναι φανερό ότι ήταν παρούσες οι διάφορες λειτουργίες οι οποίες, σύμφωνα με τη Hanna (2000), δομούν την αποδεικτική διαδικασία. Στη συγκεκριμένη έρευνα οι λειτουργίες *ανακάλυψη, εξήγηση, διερεύνηση* και *επαλήθευση* αποτέλεσαν διαδικασίες οι οποίες έλαβαν χώρα και στα δύο πεδία εργασίας και μάλιστα σε πολλές περιπτώσεις ο πειραματισμός και η ερμηνεία φαινομένων στο ένα εξ αυτών τροφοδοτούσε αντίστοιχες διαδικασίες στο άλλο πεδίο.

Εστιάζοντας στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού και στην αποδεδειγμένη δυνατότητά του να συμβάλλει στις διαδικασίες που αναφέρθηκαν προηγουμένως, η έρευνα αυτή επαληθεύει τους ισχυρισμούς του Wiles (2013) και ειδικότερα το γεγονός ότι η δίπλωση χαρτιού μπορεί να υποστηρίξει τους/τις μαθητές/-ριες να διερευνήσουν γεωμετρικές ιδέες, να την ελέγξουν, να αποκαλύψουν «κρυμμένες» σχέσεις και να διαμορφώσουν εικασίες. Επιπρόσθετα, αναφορικά με το ζήτημα του χάσματος μεταξύ πραγματολογικών και θεωρητικών ενδείξεων, τα αποτελέσματα της έρευνας λειτουργούν συμπληρωματικά στη μελέτη των Arıcı και Aslan-Tutak (2015), οι οποίοι τονίζουν την δυνατότητα της δίπλωσης χαρτιού για μετάβαση από εμπειρικές παρατηρήσεις βασιζόμενες στη χωρική οπτικοποίηση σε τυπικές προτάσεις και αυστηρή επιχειρηματολογία. Έγινε ορατό ακόμα αυτό που ο Norman (1999) ορίζει *αντιληπτή δυνατότητα*, τονίζοντας πως οι δυνατότητες εμπλοκής με ένα αντικείμενο δεν ορίζονται μόνο από τις πραγματικές δυνατότητές του αλλά και από την οπτική αντίληψη του αντικειμένου από το άτομο με βάση τους στόχους και τις μαθημένες συμβάσεις σχετικά με τους λογικούς και πολιτισμικούς περιορισμού του αντικειμένου. Έτσι, κινητικές δυνατότητες του φύλλου χαρτιού, όπως η περιστροφή, η δίπλωση και η σχεδίαση και οι οπτικές ανατροφοδοτήσεις αυτών ενθαρρύνουν την νοητική αντίδραση των ατόμων και μια νοητική και μαθηματική διερεύνηση.

Στην παρούσα εργασία, ωστόσο, η χωρική οπτικοποίηση και ο συλλογισμός με βάση τη δίπλωση χαρτιού έλαβε περισσότερο αυστηρό μαθηματικό χαρακτήρα μέσα από τη συνέργεια του χειραπτικού μέσου με το ΠΔΓ, οδηγώντας μάλιστα σε αυτό που αναφέρεται στις δύο πρώτες κατηγορίες ως *Διπλή νοηματοδότηση μαθηματικών αντικειμένων* και ως *Διπλή επικύρωση εικασιών.* Όπως φάνηκε από την ανάλυση των δύο αυτών κατηγοριών, η συνέργεια που περιγράφουν έρχεται να συμπληρώσει τις έρευνες των Olivero και Robutti (2007) και Baccaglini και Mariotti (2010) σχετικά με τον εντοπισμό αναλλοίωτων ιδιοτήτων και λογικών εξαρτήσεων. Στην περίπτωση της συνέργειας του χειραπτικού και ψηφιακού μέσου η μετάφραση της κινητικής εξάρτησης αντικειμένων μέσω του εργαλείου του συρσίματος συμπληρώνεται, με πολλαπλά οφέλη στη νοηματοδότηση της υποθετικής πρότασης, από την οπτικό – απτική εμπειρία της δίπλωσης και της ανατροφοδότησης σχετικά με παρατηρούμενες γεωμετρικές σχέσεις και αναλλοίωτες ιδιότητες.

Κεφάλαιο 7 - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να αναδείξει το ρόλο της συνέργειας του χειραπτικού μέσου της δίπλωσης χαρτιού και του ψηφιακού μέσου GSP κατά την εμπλοκή μαθητών/-ριων με διαδικασίες διαμόρφωσης εικασιών και απόδειξής τους. Αξιοποιώντας στην ανάλυση της έρευνας το θεωρητικό πλαίσιο των ΜΠΕ (Kuzniak & Richard, 2014) σε συνδυασμό με τη Θεωρία Σημειωτικής Διαμεσολάβησης (Bussi & Mariotti, 2008) προτείνεται ένας νέος θεωρητικός φακός για τη μελέτη της συνέργειας ενός χειραπτικού και ενός ψηφιακού τεχνουργήματος. Θεωρώντας τα δύο αυτά τεχνουργήματα ως ΜΠΕ ήταν εφικτό να προσδιοριστούν τόσο οι διαδικασίες μετάβασης από το γνωστικό στο επιστημολογικό επίπεδο εντός του κάθε πεδίου όσο και συνδέσεις και μεταβάσεις από κάποια διάσταση του ενός ΜΠΕ σε διαστάσεις του άλλου. Για παράδειγμα, σε αρκετές περιπτώσεις η εργασία των ομάδων στο εργαλειακό επίπεδο του πεδίου GSP πυροδοτήθηκε από την εργασία στο σημειωτικό και εργαλειακό επίπεδο του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού. Η συνομιλία των διαστάσεων των ΜΠΕ κατά την οποία εμπλέκονταν ή από την οποία απέρρεαν μαθηματικά νοήματα, δομούσε επεισόδια συνέργειας μεταξύ των δύο τεχνουργημάτων. Προκειμένου, ωστόσο, να γίνουν ορατές αυτές οι αλληλεπιδράσεις ήταν αναγκαίο να οργανωθούν σε σημειωτικές αλυσίδες τα σημεία (signs) που μαρτυρούσαν μεταβάσεις από επίπεδα του ενός ΜΠΕ σε επίπεδα του άλλου. Επομένως, η Θεωρία Σημειωτικής Διαμεσολάβησης προσέφερε στο εργαλείο ανάλυσης της έρευνας το φακό εκείνο με τον οποίο μπόρεσαν να ιχνηλατηθούν οι αλληλεπιδράσεις των δύο ΜΠΕ, ώστε να χαρακτηρισθεί και να αποτιμηθεί ο ρόλος της συνέργειας στο εκάστοτε στάδιο από τη διαμόρφωση εικασίας μέχρι και την απόδειξή της.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί στα ευρήματα της έρευνας το γεγονός ότι σε ορισμένα επεισόδια κρίθηκε αναγκαίο από τις ομάδες να εργαστούν σε κάποιο πεδίο διαφορετικό από τη δίπλωση χαρτιού και το GSP. Υποστηρίζεται ότι η ανάγκη αυτή σε ορισμένες περιπτώσεις υποδηλώνει τη μετάβαση από τον εμπειρικό πειραματισμό σε ένα περισσότερο αυστηρό πλαίσιο, αλλά σε άλλες ενδεχόμενους περιορισμούς του πεδίου της δίπλωσης χαρτιού και του ψηφιακού περιβάλλοντος. Πιο συγκεκριμένα, στο Επεισόδιο 2 της υποενότητας 5.1.3, οι μαθήτριες ανακαλύπτουν ιδιότητες που σχετίζονται με τη συμμετρία πειραματιζόμενες στο χειραπτικό πεδίο. Ωστόσο, προβαίνουν στη χρήση θεωρητικών εργαλείων κατασκευάζοντας με κανόνα και μολύβι πάνω στο διπλωμένο χαρτί το συμμετρικό ενός σημείου της δίπλωσης. Η μαθηματική επιβεβαίωση της συμμετρίας – παρόλο που ήταν εμφανής η σχέση αυτή μέσα από τις διπλώσεις – υποδηλώνει μια μετακίνηση από το εμπειρικό επίπεδο σε ένα πιο αυστηρό πλαίσιο, προκειμένου να αποκτήσει μεγαλύτερο βαθμό βεβαιότητας ο ισχυρισμός τους. Από την άλλη, στο Επεισόδιο της υποενότητας 5.1.5 οι μαθήτριες προκειμένου να ελέγξουν τον ισχυρισμό τους περί καθετότητας δύο τμημάτων αξιοποιούν ως εργαλεία την ορθή γωνία ενός χάρακα και την ορθή γωνία ενός άλλου φύλλου χαρτιού, διαφορετικού από αυτό στο οποίο εργάζονταν. Το γεγονός αυτό δείχνει τον περιορισμό των διπλώσεων του χαρτιού να συνεισφέρουν στη νοηματοδότηση ορισμένων σχέσεων, όπως αυτή της καθετότητας. Τέλος, στο Επεισόδιο της υποενότητας 5.3.4 γίνεται ορατός ο περιορισμός τόσο κυρίως του GSP να παρέχει τη δυνατότητα αυτών που ο Duval ονομάζει *treatment* και *conversion*, δηλαδή από τη μια να εργαστούν πάνω στην ίδια την κατασκευή -σημειώνοντας πιθανώς ισότητες κ.ά. – και από την άλλη από την κατασκευή που βλέπουν στην οθόνη τους να μεταφέρουν τη μαθηματική δραστηριότητα στο χαρτί-μολύβι για την καταγραφή της τυπικής απόδειξης. Για αυτό, οι μαθήτριες επιλέγουν να μεταβούν από το ψηφιακό περιβάλλον στο περιβάλλον χαρτί -μολύβι που είναι ένα register που επιτρέπει αυτές τις ενέργειες. Παρά τους περιορισμούς αυτούς, όπως γίνεται σαφές και από τα ευρήματα της παρούσας έρευνας η συνεργική σχέση των δύο αυτών πεδίων εργασίας και η συνομιλία των δυνατοτήτων τους ήταν καθοριστικής σημασίας για τη νοηματοδότητση των στοιχείων της υποθετικής πρότασης και της αποδεικτικής διαδικασίας.

Η εμφάνιση επεισοδίων συνέργειας και η ανάδειξη της συνεισφοράς της κρίνεται ότι ενθαρρύνθηκαν σε μεγάλο βαθμό και από το είδος των έργων (tasks) που δόθηκαν στους/στις μαθητές/-ριες. Οι ομάδες στη πρώτη φάση της καθεμίας από τις τρεις δραστηριότητες πειραματίζονταν αποκλειστικά στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού. Οι ερμηνείες και οι αιτιολογήσεις στηρίζονταν σε φαινομενολογικές/αντιληπτικές ενδείξεις και το όποιο μαθηματικό νόημα είχε εμπειρική χροιά όντας συνδεδεμένο ακόμα με το τεχνούργημα. Η αλλαγή, έπειτα από αυτή τη φάση, του πεδίου εργασίας των ομάδων και συγκεκριμένα το αίτημα για μεταφορά της κατασκευής από το διπλωμένο χαρτί στο ψηφιακό περιβάλλον, οδήγησε στην ανάγκη μιας περισσότερο τυπικής μαθηματικής ερμηνείας των προηγούμενων παρατηρήσεων. Και σε αυτή τη φάση των δραστηριοτήτων αλλά και στις ακόλουθες, οι μαθητές/-ριες είχαν την ελευθερία επιλογής του μέσου στο οποίο έκριναν σημαντικό να εργαστούν. Η πρωτοβουλία που λάμβαναν οι ομάδες φάνηκε ότι οδήγησε σε σημαντικά επεισόδια συνέργειας.

Παρά το γεγονός ότι η έρευνα στηρίχθηκε στην ανάλυση δεδομένων που αντλήθηκαν από δύο μόνο ομάδες μαθητών/-ριών , έχουμε ενδείξεις σχετικά με τη συνεισφορά της συνέργειας ενός χειραπτικού και ενός ψηφιακού μέσου κατά τη διαδικασία παραγωγής εικασιών και απόδειξης υποθετικών προτάσεων και ειδικότερα όσον αφορά στην ένταξη αντίστοιχων διδακτικών προσεγγίσεων στην εκπαιδευτική πράξη. Λαμβάνοντας υπόψη τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/-ριες με την έννοια της υποθετικής πρότασης και την τυπική παραγωγική απόδειξή της, η παρούσα έρευνα υπογραμμίζει τη συμβολή της συνέργειας της δίπλωσης χαρτιού και ΠΔΓ στην αντιμετώπιση ορισμένων σημαντικών εμποδίων. Ειδικότερα, υποστηρίζεται ότι η ένταξη παρόμοιων δραστηριοτήτων στο σχολικό πλαίσιο θα δώσει την ευκαιρία στους/στις μαθητές/-ριες να αναλάβουν πρωτοβουλίες διερεύνησης *κατασκευάζοντας* μαθηματική γνώση μέσα από χειραπτικές και δυναμικές διαδικασίες. Επιπλέον, η συνέργεια χειραπτικών και ψηφιακών τεχνουργημάτων δύναται να οδηγήσει στην εις βάθος κατανόηση των δομικών στοιχείων μιας υποθετικής πρότασης, βοηθώντας στην νοηματοδότηση μαθηματικών αντικειμένων και των ιδιοτήτων τους, στην εύρεση μεθόδων επικύρωσης των συμπερασμάτων και ισχυροποίησης των λογικών συνδέσεων και τελικά στην ομαλή μετάβαση στην απόδειξη μέσα από την αξιοποίηση των παραπάνω. Είναι, ωστόσο σημαντικό να τονισθεί ο κρίσιμος ρόλος του/της εκπαιδευτικού καθ’ όλη την διαδικασία, καθώς επιφορτίζεται με την ευθύνη της υποστήριξης των μαθητών/-ριων στη μετάβαση από τα προσωπικά νοήματα συνδεδεμένα με τα τεχνουργήματα σε μαθηματικά και αποπλαισιωμένα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Arıcı, S., & Aslan-Tutak, F. (2015). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13(1)*, 179–200.
2. Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM, 34(3)*, 66–72.
3. Arzarello, F., Paola, D., & Sabena, C. (2009). Proving in early calculus (Vol. 1, pp. 35–40). Ausubel, D. P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning.* New York: Grune & Stratton.
4. Baccaglini-Frank, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. *ZDM*, *51*(5), 779-791.
5. Baccaglini Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating Conjectures through Dragging in a Dynamic Geometry Environment. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, *15*, 225-253.
6. Bussi, M. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, *746*.
7. Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Eds.). (2011). *The Sage handbook of qualitative research*. sage.
8. De Villiers, M. (2009). *Some adventures in Euclidean geometry*. Dynamic Mathematics Learning.
9. Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2,* 339-352.
10. Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères Irem, 17,* 121-138.
11. Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer Berlin Heidelberg.
12. Faggiano, E., Montone, A., & Mariotti, M. A. (2018). Synergy between manipulative and digital artefacts: a teaching experiment on axial symmetry at primary school. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(8), 1165-1180.

13. Frigerio, E. (2002). In praise of the papercup: Mathematics and origami at the university. In T. C. Hull (Ed.), *3rd international meeting of origami science, math, and education* (pp. 291–298). A K Peters.

14. Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1–2), 127–135

15. Golan, M., & Jackson, P. (2009). Origametria: A program to teach geometry and to develop learning skills using the art of origami. *Origami, 4,* 459-469.

16. Gürbüz, MÇ, Ağsu, M., & Güler, H. K. (2018). Investigating geometric habits of mind by using paper folding. *Acta Didactica Napocensia, 11(3–4)*, 157–174.

17. Haga, K., Fonacier, J.C., & Isoda, M. (2008). Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding.

18. Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*, 5-23.

19. Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour létude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational studies in Mathematics*, *40*(3), 283-312.

20. Hsieh, F. J., Horng, W. S., & Shy, H. Y. (2012). From exploration to proof production. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*, 279-303.

21. Hull, T. C. (2013). *Project origami: Activities for exploring mathematics.* A K Peters/CRC Press.

22. Hull, T. C. (2020). *Origametry: Mathematical methods in paper folding.* Cambridge University Press.

23. Huzita, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry. In *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, 1989* (pp. 143-158).

24. Komatsu, K., & Jones, K. (2020). Interplay between paper-and-pencil activity and dynamic-geometry-environment use during generalisation and proving. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *6*(2), 123-143.

25. Kuzniak, A. (2022). The theory of mathematical working spaces—Theoretical characteristics. In *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 3-31). Cham: Springer International Publishing.

26. Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4-I), 17-27.

27. Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational studies in Mathematics*, *44*, 151-161.

28. Lam, T. K., & Pope, S. (2016). *Learning mathematics with origami – a mathematics education resource.* Association of Teachers of Mathematics.

29. Lopez-Real, F., & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(6), 665-679.

30. Maffia, A., & Maracci, M. (2019). Multiple artifacts in the mathematics class: A tentative definition of semiotic interference. In *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 57-64). IGPME.

31. Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics. Special issue,44*,25–53.

32. Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Brill.

33. Mariotti, M. A., & Montone, A. (2020). The potential synergy of digital and manipulative artefacts. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *6*, 109-122.

34. Montone, A., Fiorentino, M. G., & Mariotti, M. A. (2019). Learning translation in geometric transformations through digital and manipulative artefacts in synergy. In *Learning and Collaboration Technologies. Designing Learning Experiences: 6th International Conference, LCT 2019, Held as Part of the 21st HCI International Conference, HCII 2019, Orlando, FL, USA, July 26–31, 2019, Proceedings, Part I 21* (pp. 191-205). Springer International Publishing.

35. Norman, D. A. (1999). Affordance, conventions, and design. *interactions*, *6*(3), 38-43.

36. Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *12*, 135-156.

37. Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, *39* (5–6), 419–430.

38. Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains* (p. 239). Armand colin.

39. Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*. Sage publications.

40. Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2005). Validation of solutions of construction problems in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*, 31-47.

41. Tall, D. (1995). Cognitive development, representations and proof. *Justifying and Proving in School Mathematics*, 27-38.

42. Valori, G., Giacomone, B., Albanese, V., & Adamuz-Povedano, N. (2022). Approaching Euclidean proofs through explorations with manipulative and digital artifacts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-32.

43. Vollstedt, M., & Rezat, S. (2019). An introduction to grounded theory with a special focus on axial coding and the coding paradigm. *Compendium for early career researchers in mathematics education*, *13*(1), 81-100.

44. Voltolini, A. (2018). Duo of digital and material artefacts dedicated to the learning of geometry at primary school. *Uses of technology in primary and secondary mathematics education: Tools, topics and trends*, 83-99.

45. Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 147–188). Armonk, NY: Sharpe.

46. Wares, A. (2011). Using origami boxes to explore concepts of geometry and calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(2), 264–272

47. Wiles, P. (2013). Folding corners of the habits of mind. *Mathematics Teaching in the middle school*, *19*(4), 208-213.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Εισαγωγικές δραστηριότητες που δόθηκαν στις δύο ομάδες για την εξοικείωση με το ψηφιακό περιβάλλον του Geometer's Sketchpad

1. Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τη μεσοκάθετό του. Κατασκευάστε ένα τυχαίο σημείο Γ πάνω στη μεσοκάθετο και έπειτα τα τμήματα ΑΓ και ΑΒ. Μετρήστε τα τμήματα ΑΓ, ΑΒ. Τι παρατηρείτε καθώς σύρετε το σημείο Γ;
2. Κατασκευάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Μετρήστε τις γωνίες του. Τι διατηρείται αναλλοίωτο/σταθερό και τι αλλάζει καθώς σύρετε τις κορυφές του τριγώνου;
3. Κατασκευάστε ένα παραλληλόγραμμο
4. Κατασκευάστε ένα τετράγωνο με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε.
5. Κατασκευάστε ένα τυχαίο τρίγωνο και έπειτα τις διχοτόμους των τριών γωνιών. Έπειτα, να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου τομής των διχοτόμων από της τρεις πλευρές του τριγώνου. Τι παρατηρείτε;
6. Κατασκευάστε μια ευθεία ε, ένα σημείο Α αυτής και ένα σημείο Β έξω από αυτήν.
   Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και βρείτε το μέσο του Γ. Σύρετε το σημείο Α πάνω στην ε. Τι παρατηρείτε σχετικά με το σημείο Γ.
   Ενεργοποιήστε το ίχνος του Γ και διερευνήστε τους προηγούμενους ισχυρισμούς σας.

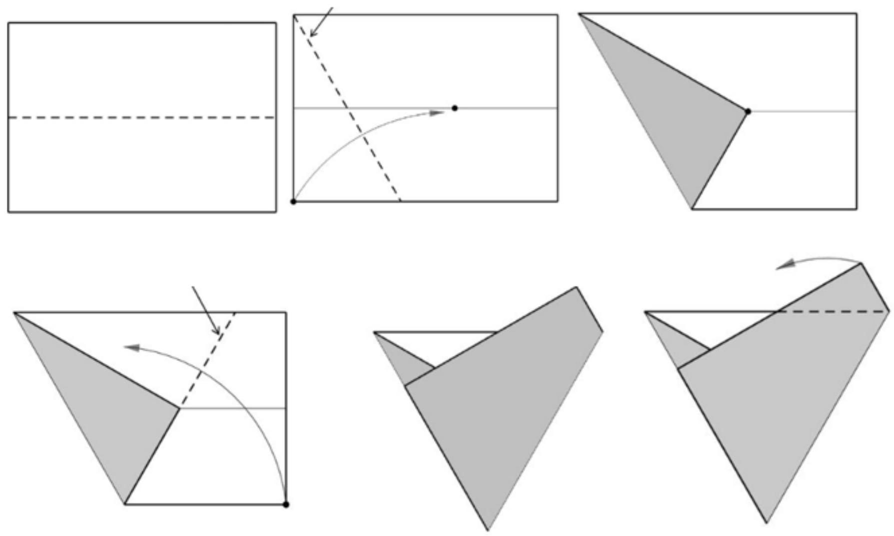
Δραστηριότητες για εξάσκηση στο σπίτι

1. Κατασκευάστε ένα ισοσκελές τρίγωνο με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε.
2. Κατασκευάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε.
3. Κατασκευάστε ένα κανονικό εξάγωνο με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε.

Δραστηριότητες της βασικής έρευνας

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Πάρτε ένα φύλλο χαρτί Α4 και πραγματοποιήστε τις διπλώσεις που φαίνονται στην παρακάτω εικόνα.



Ερώτηση 1:

i. Τι παρατηρείτε για το τελικό σχήμα που προκύπτει έπειτα από τις παραπάνω διπλώσεις; Διατυπώστε τους ισχυρισμούς σας.

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

ii. Μπορείτε να ελέγξετε την παραπάνω εικασία σας εργαζόμενοι/-ες μόνο με το διπλωμένο χαρτί; Περιγράψτε τις ενέργειες και τον τρόπο που σκεφτήκατε.

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

Ανοίξτε ένα κενό αρχείο Geometer's Sketchpad

Ερώτηση 2:

i. Μεταφέρετε στο ψηφιακό περιβάλλον την κατασκευή που πραγματοποιήσατε προηγουμένως με το φύλλο Α4. Καταγράψτε και αιτιολογήστε τα βήματα που ακολουθήσατε.

ii. Διερευνήστε την εικασία που διατυπώσατε στην Ερώτηση 1. Ποια εργαλεία αξιοποιήσατε;

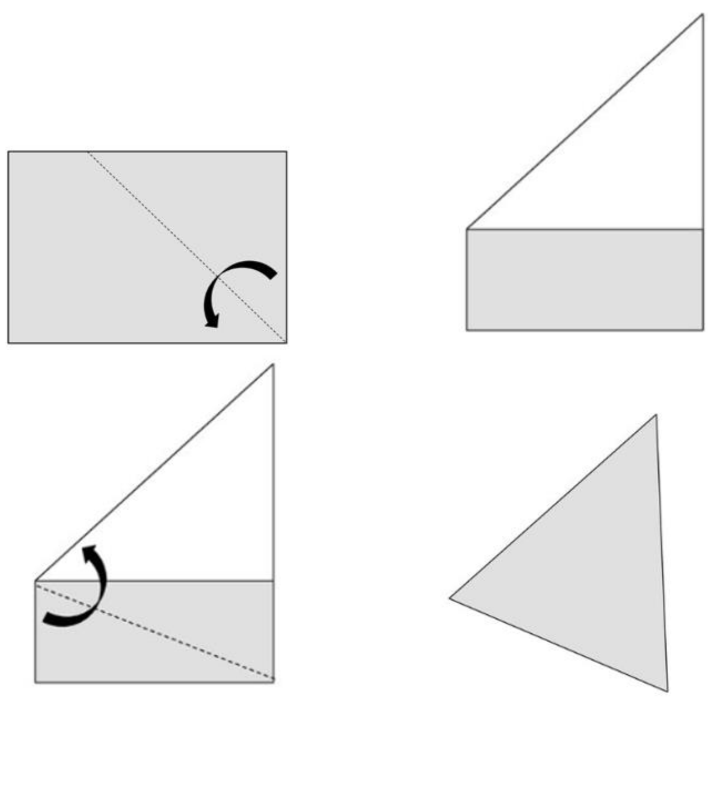
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Ερώτηση 3: Να αποδείξετε την εικασία σας.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Πάρτε ένα φύλλο χαρτί Α4 και πραγματοποιήστε τις διπλώσεις που φαίνονται στην παρακάτω εικόνα.



Ερώτηση 1:

i. Τι παρατηρείτε για το τελικό σχήμα που προκύπτει έπειτα από τις παραπάνω διπλώσεις; Διατυπώστε τους ισχυρισμούς σας.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

ii. Μπορείτε να ελέγξετε την παραπάνω εικασία σας εργαζόμενοι/-ες μόνο με το διπλωμένο χαρτί; Περιγράψτε τις ενέργειες και τον τρόπο που σκεφτήκατε.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Ανοίξτε ένα κενό αρχείο Geometer's Sketchpad

Ερώτηση 2:

i. Μεταφέρετε στο ψηφιακό περιβάλλον την κατασκευή που πραγματοποιήσατε προηγουμένως με το φύλλο Α4. Καταγράψτε και αιτιολογήστε τα βήματα που ακολουθήσατε.

ii. Διερευνήστε την εικασία που διατυπώσατε στην Ερώτηση 1. Ποια εργαλεία αξιοποιήσατε;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

iii. Παρατηρείτε κάποιο μη αναμενόμενο αποτέλεσμα; Αν ναι, συζητήστε σχετικά με το πού μπορεί να οφείλεται αυτό. Θα αλλάζατε κάτι στην προηγούμενη εικασία σας;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

iv. Ακολουθήστε τα ίδια βήματα δίπλωσης αλλά ξεκινώντας από τα καινούρια φύλλα χαρτιού που σας δίνονται. Τι παρατηρείτε;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

v. Συγκρίνετε τα τελικά αποτελέσματα της δίπλωσης των διαφορετικών φύλλων χαρτιού. Τι παρατηρείτε;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

vi. Διατυπώστε την τελική σας εικασία σχετικά με τις διπλώσεις και το αποτέλεσμα αυτών .

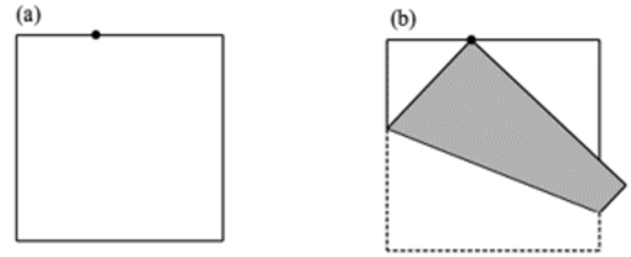
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

vii. Λαμβάνοντας υπόψιν τις παραπάνω παρατηρήσεις σας, να ξανά μεταφέρετε την κατασκευή στο GSP με τρόπο ώστε το τελικό σας αποτέλεσμα να «συμφωνεί» με αυτό από τη δίπλωση του φύλλου Α4. Καταγράψτε και αιτιολογήστε τα βήματα που ακολουθήσατε.
Προσοχή! Η κατασκευή σας θα πρέπει να είναι ανθεκτική στο σύρσιμο.

Ερώτηση 3: Να αποδείξετε την εικασία σας.
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

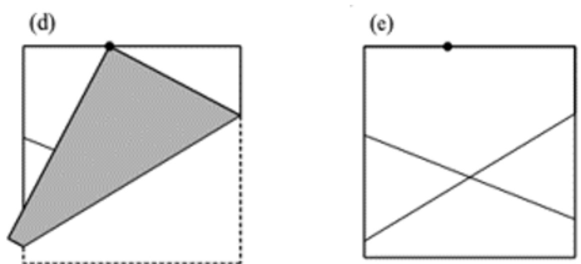
Πάρτε ένα τετράγωνο φύλλο χαρτί και πραγματοποιήστε τις διπλώσεις που φαίνονται στην παρακάτω εικόνα.



Πάρτε ένα τυχαίο σημείο στην πάνω πλευρά

Τοποθετήστε την κάτω αριστερή κορυφή πάνω στο τυχαίο σημείο

Ξεδιπλώστε το χαρτί



Τοποθετήστε την κάτω δεξιά κορυφή πάνω στο τυχαίο σημείο

Ξεδιπλώστε το χαρτί και σημειώστε το σημείο που συναντιούνται οι Χ-γραμμές

Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία αρκετές φορές ξεκινώντας κάθε φορά από διαφορετικό τυχαίο σημείο στην πάνω πλευρά.

Ερώτηση 1:

i. Παρατηρείτε να συμβαίνει κάτι έπειτα από αρκετές επαναλήψεις των παραπάνω διπλώσεων; Αν ναι, διατυπώστε τους ισχυρισμούς σας.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

ii. Μπορείτε να ελέγξετε την παραπάνω εικασία σας εργαζόμενοι/-ες μόνο με το διπλωμένο χαρτί; Περιγράψτε τις ενέργειες και τον τρόπο που σκεφτήκατε.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Ανοίξτε ένα κενό αρχείο Geometer's Sketchpad

Ερώτηση 2:

i. Μεταφέρετε στο ψηφιακό περιβάλλον την κατασκευή που πραγματοποιήσατε προηγουμένως με το φύλλο Α4. Καταγράψτε και αιτιολογήστε τα βήματα που ακολουθήσατε.

ii. Διερευνήστε την εικασία που διατυπώσατε στην Ερώτηση 1. Ποια εργαλεία χρησιμοποιήσατε και γιατί;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

ii'. Τι παρατηρείτε καθώς σύρετε το αρχικό σημείο πάνω στην πλευρά του τετραγώνου; Διατυπώστε τους ισχυρισμούς σας.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

iii. Ενεργοποιήστε το ίχνος του σημείου τομής των Χ-γραμμών. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του ίχνους και ποια η κοινή τους ιδιότητα;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Ερώτηση 3:

i. Σύρετε το σημείο Ε και τοποθετήστε το έτσι ώστε να ταυτίζεται με μία από τις δύο πάνω κορυφές του τετραγώνου ΑΒΓΔ, έστω την Β. Καταγράψτε και ερμηνεύστε τις παρατηρήσεις σας σχετικά με τις Χ-γραμμές.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

ii. Ποιες πιστεύετε ότι θα ήταν τώρα οι αντίστοιχες τσακίσεις στο τετράγωνο χαρτί και ποιες οι ιδιότητές τους; Ελέγξτε τον ισχυρισμό σας διπλώνοντας κατάλληλα ένα καινούριο τετράγωνο χαρτί.

iii. Αποδείξτε σε αυτήν την περίπτωση την εικασία που διατυπώσατε παραπάνω.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Ερώτηση 4:
Αποδείξτε την εικασία σας στη γενική περίπτωση.
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………